علوی

مرجع کامل

المپیاد ریاضی

مولفان:

جواد لوایی

(دارنده مدال نقره المپیاد جهانی ریاضی ۱۹۹۹)

حسین شفیع زاده

(مدرس و عضو باشگاه دانش پژوهان جوان)

مسعود شادنام

(دارنده مدال طلای المپیاد ریاضی کشوری ۱۳۷۷)

زیر نظر و با هماهنگی دکتر یحیی قابش (سرپرست کمیته ملی المپیاد ریاضی)

به پیشگاه والای ابوالحسن علیّ بن موسی الرضا علیه السلام تقدیم می‌شود

شصت و هفتمین مجلد

مرجع کامل المپیاد ریاضی

پدیدآورندگان:

جواد لوایی

حسین شادنام

حسین شفیع زاده

با نظارت و هماهنگی: دکتر یحیی تابش

MATH75.IR

المپیاد ریاضی و دانش‌آموزان

المپیاد ریاضی یک آوردگاه بین‌المللی در زمینه‌ی نابترین اندیشه‌های بشری است، آوردگاهی که همه ساله صدها نوجوان از ۸۰ الی ۹۰ کشور جهان به آن پای می‌گذارند تا به رویارویی قدرت خلاقیت و استعداد خود بپردازند.

خوشبختانه نوجوانان کشور ما با فتح قله‌های افتخار این چالش عظیم، بر سکوهای قهرمانی آن ایستاده‌اند. کسب ده‌ها مدال طلا، نقره و برنز و رتبه تیمی اول تا سوم و حضور در بین ۱۰ تیم برتر المپیادهای ریاضی جهانی طی سالیان اخیر دستاورد مهمی برای کشور تلقی می‌شود.

اهمیت المپیادهای ریاضی در فرایند آموزش در کشور ما از آنجا نشأت می‌گیرد که به‌عنوان یک فعالیت فوق برنامه در کنار آموزش‌های رسمی، دانش‌آموزان را به این چالش دعوت می‌کند.

شکی نیست برای توفیق در این گونه فعالیت‌ها، وجود منابع آموزشی معتبر و غنی از اهمیت زیادی برخوردار است اما کمبود منابع مناسب و کتاب‌هایی که به صورت تخصصی به المپیاد بپردازد همواره احساس شده است در همین راستا مطالعه کتاب مرجع کامل المپیاد ریاضی که به‌وسیله‌ی دو تن از برگزیدگان برتر این المپیادها تألیف شده است را به داوطلبان توصیه می‌کنیم. آقایان جواد لوایی و مسعود شادنام ضمن سال‌ها تدریس در باشگاه دانش‌پژوهان جوان، توانسته‌اند تجربیات غنی علمی خود را به بهترین صورت ممکن در این مجلد تجلی دهند.

اطمینان داریم این کتاب می‌تواند برای دانش‌پژوهان علاقه‌مند به شرکت در المپیادهای ریاضی مفید واقع گردد، ضمن آن که دانش‌آموزان و داوطلبان علاقه‌مند به درس ریاضی نیز می‌توانند از آن بهره‌ی فراوان برده و به ارتقای دانش خود بیفزایند.

دکتر یحیی تابش

MATH75.IR

فهرست

فصل ۱ نظریه اعداد

بخش‌پذیری ۱
قابلیت تقسیم ۱
خواص ابتدایی بخش‌پذیری ۲
نمایش اعداد صحیح ۵
بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک ۹
الگوریتم تقسیم ۱۰
بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک n عدد ۱۵
کوچکترین مضرب مشترک ۱۶
کوچکترین مضرب مشترک n عدد ۱۹
تمرین ۱۹
اعداد اول ۲۱
تمرین ۲۹
همنهشتی ۳۱
خواص ابتدایی همنهشتی‌ها ۳۱
دستگاه کامل مانده‌ها ۳۵
دستگاه مخفف مانده‌ها ۴۰
خواص تابع اویلر $\varphi(m)$ ۴۴
تمرین ۴۶
معادله‌ی سیاله ۴۸
معادلات خطی ۴۸
چند معادله سیاله کلاسیک ۵۰
تمرین ۵۶
مسائل نظریه اعداد ۵۷
حل مسائل نظریه اعداد ۶۱
مسائل تستی المپیادهای ریاضی کشوری ۷۸
مرحله اول سیزدهمین دوره آبان ۱۳۷۴ ..... ۷۸
مرحله اول چهاردهمین دوره ۱۳۷۷ ..... ۸۱
مرحله اول پانزدهمین دوره بهمن ۱۳۷۵ ..... ۸۴
مرحله اول شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور بهمن ۱۳۷۶ ..... ۸۸
مرحله اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور بهمن ۱۳۷۷ ..... ۹۲

MATH75.IR

مرحله اول هجدهمین المپیاد ریاضی کشور بهمن ۱۳۷۸ ..... ۱۰۰
مرحله اول نوزدهمین المپیاد ریاضی کشور بهمن ۱۳۷۹ ..... ۱۰۵
مسایل تشریحی المپیادهای ریاضی کشوری ۱۱۱
مرحله اول دومین دوره ۱۳۶۳ ..... ۱۱۱
مرحله دوم چهارمین دوره ۱۳۶۶ ..... ۱۱۲
مرحله اول پنجمین دوره ۱۳۶۶ ..... ۱۱۲
مرحله اول ششمین دوره ۱۳۶۷ ..... ۱۱۳
مرحله دوم ششمین دوره ۱۳۶۸ ..... ۱۱۴
مرحله اول هفتمین دوره ۱۳۶۸ ..... ۱۱۵
مرحله دوم هفتمین دوره ۱۳۶۸ ..... ۱۱۵
مرحله اول هشتمین دوره ۱۳۶۹ ..... ۱۱۶
مرحله دوم هشتمین دوره ۱۳۶۹ ..... ۱۱۷
مرحله اول نهمین دوره ۱۳۷۰ ..... ۱۱۷
مرحله دوم نهمین دوره ۱۳۷۰ ..... ۱۱۸
مرحله اول دهمین دوره ۱۳۷۱ ..... ۱۱۹
مرحله دوم دهمین دوره ۱۳۷۱ ..... ۱۲۰
مرحله سوم دهمین دوره ۱۳۷۲ ..... ۱۲۰
اولین المپیاد مقدماتی ۱۳۷۲ ..... ۱۲۱
مرحله اول یازدهمین دوره ۱۳۷۲ ..... ۱۲۱
مرحله دوم یازدهمین دوره ۱۳۷۲ ..... ۱۲۲
دومین المپیاد مقدماتی ۱۳۷۳ ..... ۱۲۲
مرحله دوم دوازدهمین دوره ۱۳۷۳ ..... ۱۲۳
مرحله دوم سیزدهمین دوره ۱۳۷۴ ..... ۱۲۴
مرحله اول چهاردهمین دوره ۱۳۷۵ ..... ۱۲۵
مرحله دوم پانزدهمین دوره ۱۳۷۶ ..... ۱۲۵
مرحله دوم شانزدهمین دوره ۱۳۷۷ ..... ۱۲۷
مرحله دوم هفدهمین دوره ۱۳۷۸ ..... ۱۲۷

فصل ۲ ترکیبیات

ترکیبیات ۱۳۰
استقرای ریاضی ۱۴۲
گراف ۱۴۸
چند اصل متفرقه ۱۵۶
مسائل ترکیبیات ۱۶۴

MATH75.IR

حل مسائل ترکیبیات ۱۷۰
مسائل تستی المپیادهای ریاضی ۱۹۸
پرسش‌های تشریحی ۲۱۹

فصل ۳ آنالیز

چندجمله‌ای‌ها ۲۵۲
چندجمله‌ای معکوس ۲۵۷
چندجمله‌ای همگن ۲۵۹
نامساوی‌ها ۲۶۴
اعداد مختلط ۲۸۴
معادلات تابعی ۲۹۴
معادله کوشی ۲۹۴
شمارش با استفاده از تابع مولد ۳۱۲
دنباله بازگشتی ۳۲۱
حل معادله بازگشتی از طریق معادله مشخصه ۳۲۱
حل معادله بازگشتی از طریق تابع مولد ۳۳۰
مسائل آنالیز ۳۳۶
مسائل تستی المپیادهای ریاضی ۳۸۶
پرسش‌های تشریحی ۴۰۴

MATH75.IR

فصل اول

نظریه اعداد

- بخش پذیری
- همنهشتی
- معادله‌ی سیاله
- مسائل نظریه اعداد
- مسائل تستی المپیادهای ریاضی کشوری
- مسائل تشریحی المپیادهای ریاضی

MATH75.IR

بخش‌پذیری

در این فصل به تعاریف و قضیه‌های مقدماتی در زمینه نظریه اعداد می‌پردازیم.

قابلیت تقسیم

قضیه ۱: (الگوریتم تقسیم)

برای هر دو عدد صحیح b, a که $b \neq 0$ یک و تنها یک زوج عدد صحیح q و r وجود دارند به گونه‌ای که $a = bq + r$ و $0 \leq r < |b|$. (q را خارج قسمت، r را باقیمانده،a را مقسوم و b را مقسوم علیه می‌نامند).

اثبات: مجموعه $S = \{a - bq | a - bq \geq 0, q \in \mathbf{Z}\}$ را در نظر می‌گیریم.

در حالت $a \geq 0$ با انتخاب $q = 0$ و در حالت $a < 0$ با انتخاب $q = ab$ عدد $a - bq$ عضو S می‌شود. پس S یک مجموعه ناتهی از اعداد طبیعی است. لذا کوچکترین عضو دارد. کوچکترین عضو این مجموعه راr می‌نامیم، در این‌صورت برای عدد صحیحی مانندq، $r = a - bq$ یعنی $a = bq + r$. حال باید ثابت کنیم $0 \leq r < |b|$، حالت $0 \leq r$ بدیهی است زیرا $r \in S$. فرض کنید $r \geq |b|$ در این‌صورت $r - |b| \geq 0$ و داریم:

$$r - |b| = a - bq - |b| = a - b(q \pm 1)$$

لذا $r - |b| \in S$ و این تناقض است زیرا r کوچکترین عضو S است.

پس $0 \leq r < |b|$. برای اثبات یکتا بودن q و r، فرض می‌کنیم چنین نباشد، یعنی:

$$a = bq_1 + r_1 \qquad 0 \leq r_1 < |b|$$

$$a = bq_2 + r_2 \qquad 0 \leq r_2 < |b|$$

اگر دو تساوی اخیر را از هم کم کنیم بدست می آوریم که:

$$0 = b(q_1 - q_2) + r_1 - r_2 \Longrightarrow r_2 - r_1 = b(q_1 - q_2)$$

$$\Longrightarrow |r_2 - r_1| = |b||q_1 - q_2|$$

MATH75.IR

اگر فرض کنیم $q_1 \neq q_2$ در نتیجه $|q_1 - q_2| \geq 1$ و لذا $|r_2 - r_1| \geq |b|$، این تناقض است زیرا $0 \leq r_1 < |b|$ و $0 \leq r_2 < |b|$، در نتیجه $|r_2 - r_1| < |b|$ پس $q_1 = q_2$ و از آنجا $r_1 = r_2$ اینجا پایان برهان قضیه است.

مثال ۱: برای $a = -۱۱۷$ و $b = -۱۵$ داریم:

$$-۱۱۷ = (-۱۵) \times ۸ + ۳$$

یعنی $q = ۸$ و $r = ۳$

تعریف: عدد صحیح a را بر عدد صحیح $b \neq 0$ بخش‌پذیر گوییم، هرگاه عدد صحیحی مانند q یافت شود به گونه‌ای که $a = bq$، در این‌صورت می‌نویسیم $b|a$ و چنین می‌خوانیم «a بر b تقسیم پذیر است یا a مضرب b است، یا b عدد a را عاد می‌کند (می‌شمارد) و یا b یک عامل (سازه یا شمارنده) a است».

هرگاه a بر b بخش‌پذیر نباشد می‌نویسیم $b \nmid a$.

با توجه به قضیهٔ تقسیم در حالتی که $a = bq$ باشد، $r = 0$ و q عددی یکتا می‌باشد.

به آسانی دیده می‌شود که:

الف) صفر بر هر عدد $b \neq 0$ بخش‌پذیر است.

ب) اعداد ۱ و -۱ هر عدد صحیحی را می‌شمارند.

ج) برای هر عدد صحیح a داریم $a = a \times ۱$، پس $a|a$ (توجه شود که تعریف بخش‌پذیری را برای $b = 0$ نیز می‌توان گسترش داد به شرطی که در این حالت $a = 0$ باشد).

د) اگر $a|b$ و $b|c$ آنگاه $a|c$، زیرا:

$$a|b \implies \exists p \in Z\ ,\ b = a.p$$
$$b|c \implies \exists q \in Z\ ,\ c = b.q$$

در نتیجه $c = apq$ یعنی $a|c$.

هـ) از رابطهٔ $a|b$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $b|a$، همچنین از دو رابطهٔ $a|b$ و $b|a$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $a = b$.

خواص ابتدایی بخش‌پذیری

قضیه ۲: فرض کنید a و b و c سه عدد صحیح باشند.

۱. اگر $a|b$ آنگاه $-a|b$ و $a|-b$ و $-a|-b$.

۲. اگر $a|b$ آنگاه برای هر $m \in \mathbf{Z}$، $a|mb$ و همچنین با فرض $b \neq 0$ داریم $|a| \leq |b|$.

۳. اگر $a|۱$ آنگاه $a = \pm ۱$.

MATH75.IR

۴. اگر $a|b$ و $b|a$ آنگاه $a = \pm b$.

۵. اگر $a|b$ و $a|c$ آنگاه برای هر $m, n \in \mathbf{Z}$ داریم $a|mb + nc$.

به‌عنوان نمونه، فقط حالت ۵ را که کار برد بسیاری دارد، اثبات می‌نماییم.

$$a|b \implies \exists p \in Z\ ,\ b = a.p$$
$$a|c \implies \exists q \in Z\ ,\ c = a.q$$

از دو رابطهٔ اخیر نتیجه می‌گیریم که:

$$mb + nc = map + naq = a(mp + nq) \implies a|mb + nc$$

مثال ۲: (المپیاد جهانی ریاضی ۱۹۵۹ رومانی) ثابت کنید کسر $\frac{۲۱n+۴}{۱۴n+۳}$ برای همهٔ مقدارهای طبیعی n ساده نشدنی است.

اثبات: فرض کنیم $\frac{۲۱n+۴}{۱۴n+۳}$ ساده شدنی باشد. در این‌صورت عدد صحیح $m > ۱$ وجود دارد به‌طوری که $m|۲۱n+۴$ و $m|۱۴n+۳$، بنابراین طبق خاصیت پنجم داریم:

$$m \mid ۳(۱۴n+۳) - ۲(۲۱n+۴)$$

یعنی $m|۱$ و از آنجا $m = ۱$ که خلاف فرض است. پس کسر داده شده، ساده نشدنی است.

تبصره ۱: با توجه به اتحادهای جبری، می‌توان خواص زیر را برای بخش‌پذیری مطرح کرد.

۱. برای هر دو عدد صحیح a , b و عدد طبیعی n داریم $a - b|a^n - b^n$ (تعریف بخش‌پذیری را برای حالت $۰|۰$ تعمیم داده بودیم.)

۲. برای هر دو عدد صحیح a , b و عدد طبیعی فرد n داریم: $a + b|a^n + b^n$

۳. برای هر دو عدد صحیح a , b و عدد طبیعی زوج n داریم: $a + b|a^n - b^n$

۴. اگر a , b اعداد صحیح و n عددی طبیعی باشد، در این‌صورت b^n بر a^n بخش‌پذیر است، اگر و فقط اگر b بر a بخش‌پذیر باشد.

مثال ۳: عدد $۲۷^{۹۰} - ۱$ بر ۲۶، عدد $۷^{۱۳} + ۲^{۱۳}$ بر ۱۴ و عدد $۲^{۱۳۷۶} - ۳۳^{۱۳۷۶}$ بر ۳۵ بخش‌پذیر است.

تبصره ۲: یکی از کاربردهای الگوریتم تقسیم در دسته‌بندی اعداد نسبت به تقسیم آنها بر یک عدد طبیعی ثابت b است.

به‌طور مثال باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد صحیح بر ۲، فقط ۰ یا ۱ می‌باشد.

MATH75.IR

بنابراین هر عدد صحیح متعلق به یک و فقط یکی از مجموعه‌های زیر است.

$$A_۱ = \{n \in Z | n = ۲q, q \in Z\}$$
$$A_۲ = \{n \in Z | n = ۲q + ۱, q \in Z\}$$

مجموعه نخست را مجموعه اعداد زوج و مجموعه دوم را مجموعه اعداد فرد می‌نامیم.

به همین ترتیب هر عدد صحیح فقط به یکی از صورت‌های زیر می‌باشد:

$$۴q, ۴q + ۱, ۴q + ۲, ۴q + ۳ \; ; \; q \in Z$$

به‌عبارت دیگر هر عدد صحیح فقط به یکی از شکل‌های $۳k, ۳k + ۱, ۳k + ۲$ می‌باشد $(k \in \mathbf{Z})$. با توجه به مطالب گفته شده، می‌توان نتایج زیر را بیان کرد.

۱. حاصل‌ضرب هر دو عدد متوالی عددی زوج است. به بیان دیگر برای هر عدد صحیح n داریم:

$$k \in Z \quad ; \quad n(n + ۱) = ۲k$$

۲. مربع هر عدد زوج به شکل $۴k$ و مربع هر عدد فرد به شکل $۸k + ۱$ می‌باشد $(k \in \mathbf{Z})$. بنابراین هر عدد صحیح به شکل $۸k + ۷$ و $۸k + ۵$ و $۸k + ۳$ و $۴k + ۳$ و $۴k + ۲$ نمی‌تواند مربع کامل باشد. و همچنین برای هر عدد فرد صحیح n داریم: $۸ | n^۲ - ۱$

۳. برای هر عدد صحیح n داریم $۶ | n^۳ - n$، یعنی حاصل‌ضرب هر سه عدد متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.

تعمیم این مطلب آن است که حاصل‌ضرب هر n عدد صحیح متوالی بر $n!$ بخش‌پذیر است زیرا با طبیعی فرض کردن این n عدد صحیح متوالی داریم:

$$(k + ۱)(k + ۲) \cdots (k + n) = \frac{(k + n)!}{k!} = p_{k+n}^{n}$$

با توجه به این که تبدیل n شی متمایز از $(k + n)$ شی متمایز عددی است طبیعی، حکم فوق اثبات شده است.

۴. مربع هر عدد صحیح مضرب سه به شکل $۹k$ می‌باشد. همچنین هر عدد صحیح که مضرب سه نباشد، مربع آن به شکل $۳k + ۱$ می‌باشد $(k \in \mathbf{Z})$.

بنابراین هر عدد صحیح به شکل $۹k + ۶, ۹k + ۳, ۳k + ۲$ نمی‌تواند مربع کامل باشد.

مثال ۴: ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، عدد $\frac{n^۴}{۲۴} + \frac{n^۳}{۴} + \frac{۱۱n^۲}{۲۴} + \frac{n}{۴}$ عددی طبیعی است.

اثبات: داریم:

$$S = \frac{n^۴}{۲۴} + \frac{n^۳}{۴} + \frac{۱۱n^۲}{۲۴} + \frac{n}{۴} = \frac{n(n + ۱)(n + ۲)(n + ۳)}{۲۴}$$

MATH75.IR

صورت کسر فوق حاصل‌ضرب ۴ عدد متوالی $n-۱, n, n+۱$ است لذا بر $۴!$ یعنی ۲۴ بخش‌پذیر است.

مثال ۵: برای هر عدد صحیح n ثابت کنید $۶ | n^۳ + ۱۱n$.

اثبات: حاصل‌ضرب هر سه عدد متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است پس $۶ | n^۳ - n$، از طرفی چون $۶ | ۱۲n$ بنابراین $۶ | n^۳ - n + ۱۲n$ یعنی $۶ | n^۳ + ۱۱n$.

مثال ۶: فرض کنید x و y دو عدد صحیح باشند. اگر $x^۲ + y^۲$ مضرب ۳ باشد نشان دهید هر دو عدد x و y مضرب ۳ می‌باشند.

اثبات: چون باقی‌مانده‌های تقسیم $x^۲$ و $y^۲$ بر سه برابر صفر یا یک می‌باشند. لذا وقتی $x^۲ + y^۲$ در تقسیم بر سه باقی‌ماندهٔ صفر دارد که هر دو عدد $x^۲, y^۲$ مضرب سه باشند از آنجا هر دو عدد x و y مضرب سه می‌باشند.

مثال ۷: فرض کنید $۷^{n+۱} - ۱$ بر ۱۹ قابل قسمت باشد. نشان دهید در این صورت n نمی‌تواند مربع کامل باشد. (فرض کنید $n \in \mathbf{N}$)

اثبات: فرض کنیم n مربع کامل باشد در این‌صورت $n = ۳k$ و یا $n = ۳k+۱$، که در آن $k \in \mathbf{N}$ و $n > ۱$. (حالت $n = ۱$ بدیهی است که جواب نمی‌باشد.)

(i) اگر $n = ۳k$ باشد داریم:

$$۷^{۳k+۱} - ۱ = (۷^۳)^k \times ۷ - ۷ + ۶ = ۷(۳۴۳^k - ۱) + ۶ = ۷ \times ۱۹q + ۶$$

پس $۷^{n+۱} - ۱$ مضرب ۱۹ نمی‌باشد.

(ii) اگر $n = ۳k+۱$ باشد داریم:

$$۷^{۳k+۲} - ۱ = (۷^۳)^k \times ۴۹ - ۴۹ + ۴۸ = ۴۹(۳۴۳^k - ۱) + ۴۸ = ۴۹ \times ۱۹q + ۴۸$$

پس $۷^{n+۱} - ۱$ در این حالت نیز مضرب ۱۹ نمی‌باشد.

این تناقض‌ها نشان می‌دهد که n مربع کامل نمی‌باشد.

نمایش اعداد صحیح

معمولاً اعداد طبیعی را به کمک رقم‌هایی به‌عنوان ضرایب توان‌های ۱۰ نمایش می‌دهند که به آن نمایش اعداد در دستگاه اعشاری (ده دهی) گویند. به‌طور مثال عدد ۵۳۷۸۲ را به‌صورت زیر:

$$۵ \times ۱۰^۴ + ۳ \times ۱۰^۳ + ۷ \times ۱۰^۲ + ۸ \times ۱۰^۱ + ۲ \times ۱۰^۰$$

MATH75.IR

نمایش می‌دهند. در کامپیوترها از نمایش اعداد در پایه ۲ معمولاً استفاده می‌شود. به‌طور کلی هر عدد طبیعی و بزرگتر از واحد می‌تواند مبنا و پایه باشد. در این مورد می‌توانیم قضیه زیر را مطرح نماییم.

قضیه ۳: اگر b عدد طبیعی و بزرگتر از واحد باشد، هر عدد طبیعی را می‌توان به گونه‌ای یکتا به‌صورت

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0 b^0$$

نمایش داد به‌طوری که k یک عدد حسابی است و برای هر $j = 0, 1, 2, \ldots$، عدد a_j یک عدد حسابی است که $0 \le a_j \le b - 1$ و $a_k \neq 0$. در این حالت n را به‌صورت

$$n = (a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0)_b$$

نمایش می‌دهند و به آن نمایش عددn در مبنای b گویند.

اثبات: اگر الگوریتم تقسیم را به‌طور متوالی اثر دهیم، قضیه اثبات می‌شود. ابتدا n را بر b تقسیم می‌کنیم.

$$n = bq_0 + a_0 \qquad 0 \le a_0 \le b - 1$$

سپس q_0 را بر b تقسیم می‌کنیم.

$$q_0 = bq_1 + a_1 \qquad 0 \le a_1 \le b - 1$$

حال این عمل را ادامه می‌دهیم.

$$q_1 = bq_2 + a_2 \qquad 0 \le a_2 \le b - 1$$
$$\vdots$$
$$q_j = bq_{j+1} + a_{j+1} \qquad 0 \le a_{j+1} \le b - 1$$

با کمی دقت در دنبالهٔ $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_j, q_{j+1}, \ldots$ و با توجه به این‌که $b > 1$ و $a_{j+1} \ge 0$ خواهیم داشت:

$$n > q_0 > q_1 > q_2 > \cdots \ge 0$$

یعنی کار تقسیمات متوالی حداکثر تا n مرحله می‌تواند ادامه پیدا کند. پس در قدمی باید $q_k = 0$ باشد، بنابراین

$$q_{k-1} = b \times 0 + a_k \qquad 0 \le a_k \le b - 1$$

اگر به ترتیب به جای $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{k-2}, q_{k-1}$ باقیمانده تقسیم متناظر با آن را بنویسیم، فرمول مورد نظر به‌دست می‌آید و بدیهی است که $a_k \neq 0$، چون اگر $a_k = 0$ آنگاه $q_{k-1} = 0$ می‌شود که در این صورت باید یک قدم قبل از آن توقف می‌کردیم.

MATH75.IR

اثبات: یکتایی این نمایش به روش برهان خلف صورت می‌گیرد. فرض کنیم یکتا نباشد داریم:

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_1 b + a_0$$
$$= c_k b^k + c_{k-1} b^{k-1} + \cdots + c_1 b + c_0$$

که در آنها برای هر $i = 1, \ldots, k$ داریم $0 \leq c_i < b$ و $0 \leq a_i < b$ (اگر تعداد a_i ها و c_i ها مساوی نبود به آن‌که کمتر دارد، ضرایب صفر اضافه می‌کنیم که هر دو یک تعداد رقم داشته باشند) پس:

$$(a_k - c_k)b^k + (a_{k-1} - c_{k-1})b^{k-1} + \cdots + (a_1 - c_1)b + (a_0 - c_0) = 0$$

اگر این دو نمایش یکی نباشند پس به ازای لااقل یک i داریم $a_i \neq c_i$. اندیس j را به‌این‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$j = \min\{i | 0 \leq i \leq k, \ \ a_i \neq c_i\}$$

در این‌صورت برای $i < j$ داریم $a_i = c_i$. بنابراین

$$b^j \left[(a_k - c_k)b^{k-j} + \cdots + (a_{j+1} - c_{j+1})b + (a_j - c_j)\right] = 0$$

در نتیجه:

$$a_j - c_j = b\left[(c_k - a_k)b^{k-j-1} + \cdots + (c_{j+1} - a_{j+1})\right]$$

یعنی $b | a_j - c_j$ پس $b \leq |a_j - c_j|$، اما قبلاً داشتیم:

$$0 \leq a_j < b \quad , \quad 0 \leq c_j < b$$

در نتیجه $-b < a_j - c_j < b$ و یا $|a_j - c_j| < b$ که این یک تناقض است از این رو برای هر i داریم $a_i = c_i$. بدین ترتیب حکم اثبات شد. هر یک از a_j ها را یک رقم عدد n در مبنای b می‌گویند و k تعداد ارقام آن عدد در مبنای b خواهد بود.

مثال ۸: با توجه به بسط اعداد در مبنای اعشاری، نشان دهید باقی‌ماندهٔ تقسیم یک عدد طبیعی بر ۹ (و یا بر ۳) برابر است با باقی‌ماندهٔ تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹ (و یا بر ۳).

اثبات: فرض کنید نمایش عدد طبیعی n در دستگاه اعشاری به‌صورت زیر باشد:

$$n = (a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_{10}$$

در نتیجه می‌توان n را به‌صورت زیر نوشت:

$$n = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0$$

MATH75.IR

و با توجه به این که $۹|۱۰^m - ۱$ برای هر $m = ۰, ۱, ۲, \ldots$ می‌توان نوشت:

$$n = a_n(۱۰^n - ۱) + a_{n-۱}(۱۰^{n-۱} - ۱) + \cdots + a_۱(۱۰ - ۱) + (a_n + a_{n-۱} + \cdots + a_۱ + a_۰)$$

در نتیجه

$$n = ۹(a_n q_n + a_{n-۱} q_{n-۱} + \cdots + a_۱ q_۱) + (a_n + a_{n-۱} + \cdots + a_۱ + a_۰)$$

بنابراین

$$n - (a_n + a_{n-۱} + \cdots + a_۱ + a_۰) = ۹k$$

چون اختلاف عدد n با مجموع ارقام خود، مضرب ۹ می‌باشد، لذا n و مجموع ارقام آن در تقسیم بر ۹ هم باقی‌مانده‌اند.

مثال ۹: فرض کنید $A = ۱۱۷۵^{۱۳۷۶}$. مجموع ارقام A را B، و مجموع ارقام B را C می‌نامیم. مطلوب است مجموع ارقام C.

حل: با توجه به این که $A < ۱۰^{۴ \times ۱۳۷۶}$، لذا تعداد ارقام A کمتر از $۵۵۰۴ = ۱۳۷۶ \times ۴$ می‌باشد بنابراین $B \leq ۴۹۵۳۶ = ۹ \times ۵۵۰۴$. در بین اعداد کوچکتر یامساوی ۴۹۵۳۶ عدد ۳۹۹۹۹ بیشترین مجموع ارقام را دارد پس داریم:

$$C \leq ۳ + ۹ + ۹ + ۹ + ۹ \quad \Longrightarrow \quad C \leq ۳۹$$

در بین اعداد کوچکتر یا مساوی ۳۹، عدد ۳۹ بیشترین مجموع ارقام را دارد پس مجموع ارقام C کوچکتر یا مساوی $۱۲ = ۹ + ۳$ می‌باشد. از طرف دیگر باقی‌ماندهٔ تقسیم A بر ۹ برابر است با باقی‌ماندهٔ تقسیم B بر ۹ و به همین ترتیب برابر است با باقی‌ماندهٔ تقسیم C بر ۹ و همچنین با باقی‌مانده تقسیم مجموع ارقام عدد C بر ۹، بنابراین مجموع ارقام C عددی کوچکتر یا مساوی ۱۲ است به‌طوری که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۹ با باقی‌ماندهٔ تقسیم A بر ۹ برابر است. پس کافی است که باقی‌ماندهٔ تقسیم A بر ۹ را بیابیم.

در بخش همنهشتی‌ها روشی ساده برای به‌دست آوردن این باقی‌مانده فرا می‌گیریم. ولی در این بخش به ناچار با استفاده از روشهای مقدماتی این باقی‌مانده را به‌دست می‌آوریم. اگر a, b اعداد صحیح بوده و n عددی طبیعی باشد از بسط خیام - نیوتن عبارت $(a+b)^n$ خواهیم داشت:

$$(a+b)^n = a.k + b^n \ , \ dk \in Z$$

MATH75.IR

پس داریم:

$$\begin{aligned} A &= (۹ \times ۱۵۳ - ۲)^{۱۳۷۶} = ۹k_۱ + ۲^{۱۳۷۶} \\ &= ۹k_۱ + ۲^{۶ \times ۲۲۹} \times ۲^۲ \\ &= ۹k_۱ + (۶۴^{۲۲۹} - ۱) \times ۴ + ۴ \\ &= ۹k_۱ + ۶۳k_۲ + ۴ \\ &= ۹k_۳ + ۴ \end{aligned}$$

در عبارت بالا $k_۳, k_۲, k_۱$ اعدادی صحیح می‌باشند. بنابراین مجموع ارقام C برابر است با ۲.

بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک

تعریف: فرض کنید b, a دو عدد صحیح باشند به‌طوری که هر دو با هم صفر نیستند. عدد طبیعی d را بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک (ب.م.م) b, a گوییم هرگاه:

الف) $d|a$ و $d|b$.

ب) اگر $c|a$ و $c|b$ آنگاه $c \leq d$.

در این‌صورت بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b را به‌صورت $d = (a, b)$ نشان می‌دهیم. در بعضی از کتاب‌ها از نماد $a \sqcap b = d$ نیز استفاده می‌کنند.

تعریف: هرگاه $(a, b) = ۱$ در این‌صورت دو عددa و b را نسبت به هم اول (متباین) می‌نامیم. به‌طور مثال $(۸, -۱۵) = ۱$. با توجه به تعریف ب.م.م واضح است که:

(۱) اگر $a|b$ آنگاه $(a, b) = |a|$.

(۲) اگر $b \neq ۰$ آنگاه $(۰, b) = |b|$.

(۳) $(a, b) = (-a, b) = (a, -b) = (-a, -b)$.

(۴) $(a, b) = (|a - b|, b) = (a, |a - b|)$.

(۵) اگر $n \in \mathbf{Z}$ آنگاه $(n, n + ۱) = ۱$ یعنی دو عدد متوالی همواره نسبت به هم اولند.

(۶) اگر n عددی صحیح و فرد باشد آنگاه $(n, n + ۲) = ۱$ یعنی هر دو عدد صحیح فرد متوالی نسبت به هم اولند.

(۷) اگر n عددی صحیح و زوج باشد آنگاه $(n, n + ۲) = ۲$.

MATH75.IR

به‌طور نمونه رابطهٔ شمارهٔ (۷) را اثبات می‌کنیم. فرض کنید $n = 2k$, $k \in \mathbf{Z}$ و همچنین فرض کنید $d = (2k, 2k+2)$، داریم:

$$d|2k \ , \ d|2k+2 \quad \Longrightarrow \quad d|2$$

تنها شمارنده‌های طبیعی عدد ۲ عبارتند از ۱ و ۲، ولی چون هر دو عدد n و $n+2$ زوجند لذا d نمی‌تواند ۱ باشد پس $d = 2$.

مثال ۱۰: نشان دهید بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $4m+2$ و $7m+3$ برابر است با ۱ یا ۲ $(m \in \mathbf{Z})$.

اثبات: فرض کنید $d = (4m+2, 7m+3)$ پس $d|4m+2$ و $d|7m+3$، در نتیجه $d|7(4m+2) - 4(7m+3)$ یعنی $d|2$ پس $d = 1$ و یا $d = 2$.

مثال ۱۱: نشان دهید به ازای جمیع مقادیر صحیح n داریم $(3n+1, 6n+5) = 1$.

اثبات: فرض کنید $d = (3n+1, 6n+5)$، داریم:

$$d|3n+1, d|6n+5 \quad \Longrightarrow \quad d|(2n+1)(3n+1) - n(6n+5)$$

در نتیجه $d|1$ پس $d = 1$.

الگوریتم تقسیم

طبق این الگوریتم به اثبات موجودیت ب.م.م دو عدد a و b می‌پردازیم. فرض می‌کنیم $a \neq 0$ و $b > 0$، با به‌کار بردن قضیهٔ تقسیم می‌توان نوشت:

$$a = b.q_0 + r_0 \qquad 0 \leq r_0 < b$$

اگر $r_0 = 0$ در این‌صورت $b|a$ پس $(a, b) = b$، حال فرض کنیم $r_0 \neq 0$ اگر مجدداً قضیه تقسیم را برای b و r_0 به کار ببریم، داریم:

$$b = r_0 q_1 + r_1 \qquad 0 \leq r_1 < r_0$$

با ادامه این روند خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&a = bq_0 + r_0 && 0 < r_0 < b \\
&b = r_0 q_1 + r_1 && 0 < r_1 < r_0 \\
&r_0 = r_1 q_2 + r_2 && 0 < r_2 < r_1 \\
&\vdots && \vdots \qquad (*) \\
&r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n && 0 < r_n < r_{n-1} \\
&r_{n-1} = r_n q_{n+1}
\end{aligned}$$

MATH75.IR

چون $r_0 > r_1 > r_2 > \cdots \geq 0$ لذا بایستی سرانجام به باقی‌ماندهٔ صفر برسیم. فرض کنیم r_n آخرین باقی‌ماندهٔ مخالف صفر باشد. ثابت می‌کنیم:

$$(a,b) = r_n$$

طبق آخرین رابطهٔ (*) داریم $r_n | r_{n-1}$ و با توجه به تساوی ماقبل آن داریم $r_n | r_{n-2}$. با ادامهٔ همین استدلال و برگشت به روابط بالاتر خواهیم داشت $r_n | a$ و $r_n | b$. بنابراین r_n اولین شرط ب.م.م بودن a, b را دارد. حال فرض کنیم $c | a, c | b$ و $c > 0$، باید ثابت کنیم $c \leq r_n$، برای این کار از اولین تساوی رابطه (*) شروع می‌کنیم چون $a = bq_0 + r$ پس $c | r$ و به دنبال آن با توجه به تساوی دوم داریم $c | r_1$ و به همین ترتیب سرانجام داریم $c | r_n$ پس $c \leq r_n$ و در نتیجه $(a,b) = r_n$. بدین ترتیب برهان تمام است.

حال به بیان و اثبات یک قضیه مهم و اساسی در مورد ب.م.م دو عدد صحیح می‌پردازیم.

قضیه ۴: (بزو) فرض کنید a, b دو عدد صحیح باشند که هر دو با هم صفر نیستند و $(a,b) = d$. در این صورت اعداد صحیح r, s موجودند به طوری که:

$$ra + sb = d$$

یعنی لااقل یک ترکیب خطی از دو عدد صحیح a, b وجود دارد که با بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک آن دو عدد برابر است.

به‌طور مثال اگر $a = 8$ و $b = -20$ در این صورت اعداد $r = -2$ و $s = -1$ موجودند به‌طوری که:

$$(-20, 8) = 4 = 8r + (-20)s$$

برهان: مجموعهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$S = \{t | t = ax + by \ , \ x, y \in Z \ , \ t > 0\}$$

چون لااقل یکی از اعداد a و b مخالف صفر است لذا $t = a^2 + b^2 > 0$ بنابراین $a^2 + b^2 = a \cdot a + b \cdot b \in S$ یعنی مجموعهٔ S مخالف تهی است و چون S زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی است لذا دارای کوچکترین عضو است. فرض کنید t_0 کوچکترین عضو S باشد بنابراین اعداد صحیحی چون r و s وجود دارند به‌قسمی که $t_0 = ar + bs$. ثابت می‌کنیم $t_0 = d$ یعنی t_0 همان ب.م.م دو عدد a و b می‌باشد. ابتدا ثابت می‌کنیم $t_0 | a$، فرض کنید چنین نباشد پس طبق قضیه تقسیم داریم:

$$a = t_0 q + r_0 \qquad 0 < r_0 < t_0$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$r_0 = a - t_0 q = a - (ar + bs)q = a(1 - r) + b(-sq) = ax + by$$

MATH75.IR

بنابراین $r_0 \in S$ و این تناقض است چون $r_0 < t_0$. بنابراین $t_0|a$ و به همین ترتیب $t_0|b$. حال کافی است ثابت کنیم برای هر $c > 0$ اگر $c|a$ و $c|b$ آنگاه $c \leq t_0$، برای این منظور داریم:

$$c|a\ ,\ c|b \implies c|ar+bs \implies c|t_0 \implies c \leq t_0$$

لذا t_0 تمام شرایط بزرگترین عامل مشترک بودن a و b را دارد پس t_0 همان d است و حکم اثبات شد. چند نتیجه مهم می‌توان از این قضیه به‌دست آورد:

نتیجه ۱: کوچکترین ترکیب خطی مثبت دو عدد a و b (که هر دو با هم صفر نیستند) همان بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b می‌باشد.

نتیجه ۲: دو عدد صحیح a و b که با هم صفر نیستند، نسبت به هم اولند اگر فقط اگر اعداد صحیح r و s موجود باشند به‌قسمی که:

$$ra+sb=1$$

برهان: اگر $(a,b)=1$ طبق قضیه بزو اعداد صحیح r و s موجودند به‌طوری که:

$$ra+sb=1$$

حال عکس قضیه را درنظر می‌گیریم فرض کنید اعداد r و s وجود دارند به‌طوری که $ra+sb=1$ و همچنین فرض کنید $(a,b)=d$، پس داریم:

$$d|a \quad d|b \implies d|ra+sb \implies d|1 \implies d=1$$

بدیهی است که طبق این اثبات از تساوی $ra+sb=1$ می‌توان نتیجه گرفت که:

$$(a,b)=(a,s)=(r,s)=(r,b)=1$$

مثال ۱۲: نشان دهید به ازای جمیع مقادیر صحیح n، دو عدد $3n+5$ و $8n+13$ نسبت به هم اولند.

اثبات: با توجه به این‌که $8(3n+5)-3(8n+13)=1$ داریم $(3n+5\ ,\ 8n+13)=1$.

نتیجه ۳: اگر $(a,b)=d$ و c یک مقسوم‌علیه مشترک a,b باشد آنگاه $c|d$.

برهان: اعداد صحیح r,s موجودند به‌قسمی که:

$$ar+bs=d$$

از طرفی چون $c|a$ و $c|b$، نتیجه می‌گیریم $c|ar+bs$ یعنی $c|d$ بنابراین هر مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a,b خود مقسوم‌علیه‌ای از بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a,b می‌باشد.

MATH75.IR

نتیجه ۴: هر ترکیب خطی دو عدد صحیح a, b که هر دو با هم صفر نیستند مضربی از بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a, b می‌باشد.

برهان: فرض کنیم $(a,b) = d$ و $t = ax + by$ که در آن x و y اعدادی صحیح‌اند. چون $d|a$ و $d|b$، پس $d|ax + by$ یعنی $d|t$. با توجه به این برهان می‌توان گفت دو مجموعهٔ زیر با هم برابرند.

$$A = \{ax + by \mid x, y \in Z\} \quad , \quad B = \{d \cdot q \mid q \in Z\}$$

نتیجه ۵: اگر a و b دو عدد صحیح مخالف صفر باشند و $(a,b) = d$ آنگاه $\left(\frac{a}{b}\ ,\ \frac{b}{d}\right) = ۱$.

برهان: فرض کنید $a = a_۱ \cdot d$ و $b = b_۱ \cdot d$ باید ثابت کنیم $(a_۱, b_۱) = ۱$. با توجه به قضیه بزو اعداد صحیح r و s یافت می‌شوند به‌طوری که $d = ar + bs$ پس داریم:

$$d = a_۱ \cdot d \cdot r + b_۱ \cdot d \cdot s$$
$$۱ = a_۱ \cdot r + b_۱ \cdot s$$

پس طبق نتیجه ۲، دو عدد $a_۱$ و $b_۱$ نسبت به هم اولند.

مثال ۱۳: اگر بزرگترین شمارندهٔ مشترک دو عدد طبیعی a و b برابر ۲۵ باشد و نیز $\frac{a}{b} = \frac{۱۴۳}{۲۲۰}$، در این صورت دو عدد a و b را بیابید.

حل: فرض کنید $(a,b) = ۲۵ = d$ و در این صورت $a = a_۱ d$, $b = b_۱ d$ که در آن $(a_۱, b_۱) = ۱$ و داریم:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_۱ d}{b_۱ d} \implies \frac{۱۴۳}{۲۲۰} = \frac{a_۱}{b_۱} \implies \frac{۱۳}{۲۰} = \frac{a_۱}{b_۱}$$

چون $(a_۱, b_۱) = (۱۳, ۲۰) = ۱$ و اعداد $a_۱$ و $b_۱$ طبیعی‌اند پس $a_۱ = ۱۳$ و $b_۱ = ۲۰$، و در نتیجه $a = ۱۳ \times ۲۵ = ۳۲۵$ و $b = ۲۰ \times ۲۵ = ۵۰۰$.

نتیجه ۶: اگر $k \in \mathbf{N}$ و $(a,b) = d$ در این صورت $(ka, kb) = kd$ و برعکس در حالت خاص اگر فرض کنیم $\frac{a}{d}$ و $\frac{b}{d}$ اعداد صحیحی باشند و $d \in \mathbf{N}$ و $\left(\frac{a}{d}\ ,\ \frac{b}{d}\right) = ۱$، در این صورت $(a,b) = d$.

برهان: فرض کنید $(a,b) = d$ پس اعداد صحیحی چون r و s یافت می‌شوند که $d = ra + sb$ پس داریم:

$$d|a\ ,\ d|b \quad \implies \quad (kd|ka\ ,\ kd|kb)$$

از طرفی اگر $c|ka$ و $c|kb$ آنگاه $c|kra + ksb$ یعنی $c|kd$ پس $c \le kd$، بنابراین kd بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ka و kb می‌باشد. عکس قضیه را نیز می‌توان به همین ترتیب اثبات نمود.

نتیجه ۷: (لم اقلیدس) اگر $a|bc$ و $(a,b) = ۱$ آنگاه $a|c$، به بیان دیگر اگر حاصل‌ضرب دو عدد b و c بر a بخش‌پذیر باشد و a با یکی از آنها متباین باشد آنگاه عدد دیگر بر a بخش‌پذیر است.

MATH75.IR

برهان: اعداد صحیح r و s موجودند به‌طوری که $ra+sb=1$ پس $rac+sbc=c$، اما چون $a|bc$ پس $bc=a\cdot q$ که در آن q عددی صحیح است. در نتیجه:

$$c=rac+saq=a(rc+sq)\ \Rightarrow\ a|c$$

نتیجه ۸: فرض کنید n,m,a اعداد صحیح غیرصفر باشند، در این صورت $(a,mn)=1$ است اگر و تنها اگر $(a,m)=1$ و $(a,n)=1$. به بیان دیگر عدد a نسبت به mn اول است اگر و فقط اگر نسبت به هر دو عدد m و n اول باشد.

برهان: فرض کنید $(a,mn)\neq 1$ پس اعداد صحیح r و s موجودند به‌طوری که $ar+mns=1$ پس طبق نتیجه ۲ داریم $(m,n)=(a,n)=1$. حال برای اثبات عکس قضیه فرض کنید $(a,m)=1$ و $(a,n)=1$، بنابراین اعداد صحیح r,s و t,u موجودند به طوری که $ar+ms=1$ و $ta+un=1$، پس داریم:

$$1=ar+ms=ar+ms(ta+un)=a(r+mst)+mn(su)$$

یعنی ترکیبی خطی از a و mn برابر ۱ شده پس $(a,mn)=1$، با توجه به این نتیجه می‌توان حکم زیر را نیز بیان کرد.

فرض کنید a,b اعداد صحیح غیر صفر و n,m اعدادی طبیعی باشند، آنگاه $(a^m,b^n)=1$ اگر و تنها اگر $(a,b)=1$، زیرا اگر $(a^m,b^n)=1$ آنگاه اعداد صحیح r و s موجودند به‌قسمی که $ra^m+sb^n=1$ و در نتیجه $a(ra^{m-1})+b(sb^{n-1})=1$ یعنی ترکیب خطی a و b نیز برابر یک شده پس $(a,b)=1$.

حال برای اثبات عکس مطلب فوق فرض می‌کنیم $(a,b)=1$ در این صورت اعداد صحیح r و s وجود دارند به طوری که $ar+bs=1$ پس $(ar+bs)^m=1$. با توجه به بسط خیام - نیوتن داریم:

$$a^mr^m+ma^{m-1}r^{m-1}bs+\cdots+marb^{m-1}s^{m-1}+b^ms^m=1$$

در نتیجه:

$$a^mr^m+b(ma^{m-1}r^{m-1}s+\cdots+b^{m-1}s^m)=1$$

یعنی ترکیبی خطی از a^m و b برابر ۱ شده پس $(a^m,b)=1$ به همین ترتیب $(a^m,b^n)=1$. با توجه به نتیجه ۶ می‌توان حکم کلی زیر را بیان کرد.

$$(a,b)=d\quad\Longleftrightarrow\quad(a^n,b^n)=d^n\ ,\ n\in N$$

نتیجه ۹: اگر $(a,b)=d$ و k عددی صحیح باشد آنگاه $(a,b+ak)=d$ به بیان دیگر اگر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد b,a برابر d باشد و مضربی از a را به b اضافه کنیم ب.م.م تغییری نمی‌کند.

MATH75.IR

اثبات: فرض کنید $(a,b+ak)=d_1$ پس $d_1|a$ و $d_1|b+ak$ در نتیجه $d_1|b+ak-ka$ یعنی $d_1|b$ و چون $d_1|a$ پس طبق نتیجه ۳ داریم $d|d_1$، از طرفی $d|a$ و $d|b$ پس $d|b+ak$ و مجدداً طبق نتیجه‌ی ۳ داریم $d|d_1$، بنابراین $d_1=d$.

با توجه به این حکم و با توجه به نتیجه‌ی ۸ می‌توان نتیجه‌ی زیر را بیان کرد:

نتیجه ۱۰: اگر اعداد صحیح و مخالف صفر a,b,c دوبه‌دو نسبت به هم اول باشند آنگاه $(ab,a+b)=1$ و همچنین $(ab+ac+bc,abc)=1$، بدیهی است که احکام مشابه زیر نیز صحیح می‌باشند:

$$(a^2b^2,a^2\pm b^2)=1\ ,\ (ab,a^2\pm b^2)=1\ ,\ (a^2b^2,a\pm b)=1$$

مثال ۱۴: فرض کنید دو عدد a,b طبیعی باشند به طوری که $(a,b)=6$. مطلوب است این دو عدد به شرطی که $42(a^2-b^2)=13ab$.

حل: فرض کنید $(a,b)=6=d$ ، $a=a_1d$ ، $b=b_1d$، در این صورت طبق نتیجه‌ی ۵ دو عدد a_1,b_1 نسبت به هم اولند پس داریم:

$$\begin{aligned}&42(a_1^2d^2-b_1^2d^2)=13a_1db_1d\\ \Longrightarrow\ &42(a_1^2-b_1^2)=13a_1b_1\\ \Longrightarrow\ &\frac{a_1^2-b_1^2}{a_1b_1}=\frac{13}{42}\end{aligned}$$

چون $(a_1,b_1)=1$ پس $(a_1^2-b_1^2,a_1b_1)=1$ و از طرفی چون $(13,42)=1$ پس $a_1b_1=42$ و $a_1^2-b_1^2=13$.

با توجه به اینکه $a_1b_1=42$ و $(a_1,b_1)=1$ و $a_1>b_1$ پس چند حالت بیشتر نداریم یا $b_1=1,a_1=42$ و یا $b_1=2,a_1=21$ و یا $b_1=3,a_1=14$ و یا $b_1=6,a_1=7$ که با توجه به اینکه $a_1^2-b_1^2=13$ در نتیجه فقط جواب $b_1=6,a_1=7$ قابل قبول است بنابراین $a=7\times6=42$ و $b=6\times6=36$.

بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک n عدد

تعریف: بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک n عدد صحیح $a_1,a_2,\dots,a_n$، که همگی آنها توأماً صفر نیستند عبارت است از بزرگترین عدد صحیح مثبت که تمامی این n عدد را بشمارد. این عدد را با $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ نمایش می‌دهند.

می‌توان ثابت کرد که:

$$(a_1,a_2,\dots,a_n)=(a_1,a_2,\dots,a_{n-2},(a_{n-1},a_n))=((a_1,\dots,a_{n-1}),a_n)$$

اثبات به عهده‌ی خوانندگان واگذار می‌شود. در اینجا به بیان یک مثال اکتفا می‌کنیم.

MATH75.IR

مثال ۱۵:

$$(۳۶, ۴۲, ۱۰۵) = (۳۶, (۴۲, ۱۰۵))$$
$$= (۳۶, ۲۱) = ۳$$

قضیه ۵: اگر $d = (a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$ آنگاه اعدادی صحیح مانند x_i $(i = ۱, ۲, \ldots, n)$ موجودند به طوری که

$$d = x_۱a_۱ + x_۲a_۲ + \cdots + x_na_n \quad , \quad n > ۲$$

برهان: قضیه را فقط برای سه عدد صحیح غیر صفر ثابت می‌کنیم. با توجه به قضیه بزو اعداد صحیح مانند s, r, y, x یافت می‌شوند به طوری که:

$$(a_۱, a_۲, a_۳) = ((a_۱, a_۲), a_۳)$$
$$= r(a_۱, a_۲) + sa_۳$$
$$= r(xa_۱ + ya_۲) + sa_۳$$
$$= (rx)a_۱ + (ry)a_۲ + sa_۳$$

تعریف: $n \geq ۲$ عدد صحیح $a_n, \ldots, a_۲, a_۱$ که همگی با هم صفر نیستند را نسبت به هم اول گویند اگر و فقط اگر $(a_۱, a_۲, \ldots, a_n) = ۱$، همچنین $n \geq ۲$ عدد صحیح $a_n, \ldots, a_۲, a_۱$ که همگی مخالف صفرند را دوبه‌دو نسبت به هم اول گویند اگر و فقط اگر برای هر $i, j = ۱, ۲, \ldots, n$ که در آن $i \neq j$ داشته باشیم $(a_i, a_j) = ۱$.

نتیجه ۱: $n \geq ۲$ عدد صحیح $a_n, \ldots, a_۲, a_۱$ که همگی با هم صفر نیستند، نسبت به هم اولند اگر و تنها اگر اعداد صحیح $x_n, \ldots, x_۲, x_۱$ موجود باشند به طوری که:

$$۱ = x_۱a_۱ + x_۲a_۲ + \cdots + x_na_n$$

نتیجه ۲: اگر $d = (a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$ و $a_i = b_i \cdot d$ $(i = ۱, ۲, \ldots, n)$ آنگاه $(b_۱, b_۲, \ldots, b_n) = ۱$.

کوچکترین مضرب مشترک

تعریف: فرض کنید a و b دو عدد صحیح مخالف صفر باشند. عدد طبیعی c را کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) a و b نامیم هرگاه

الف) $a|c$ و $b|c$.

ب) اگر $a|m$ و $b|m$ و $m > ۰$ آنگاه $c \leq m$.

در این صورت کوچکترین مضرب مشترک دو عدد a و b را به صورت $c = [a, b]$ و یا $c = a \sqcup b$ نشان می‌دهیم.

MATH75.IR

بدیهی است که دو عدد صحیح مثبت متمایز نمی‌توانند در دو شرط تعریف بالا، صدق کنند یعنی ک.م.م دو عدد منحصربه‌فرد است. برای اثبات موجودیت ک.م.م دو عدد مخالف صفر a, b مجموعه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \{m | m > ۰, m \in Z, a|m, b|m\}$$

چون $m = |ab|$ تمام شرایط مجموعه‌ی A را داراست لذا $A \neq \phi$ و چون A زیرمجموعه‌ی اعداد طبیعی است پس دارای کوچکترین عضو می‌باشد. این کوچکترین عضو تمام شرایط تعریف ک.م.م دو عدد را دارد پس موجودیت ک.م.م دو عدد اثبات شد.

با توجه به تعریف ک.م.م واضح است که:

۱) اگر $a|b$ و هر دو عدد a, b مخالف صفر باشند آنگاه $[a, b] = |b|$.

۲) اگر $b \neq ۰$ آنگاه $[۱, b] = |b|$.

۳) $[a, b] = [-a, b] = [a, -b] = [-a, -b]$.

حال به بیان چند قضیه می‌پردازیم.

قضیه ٦: فرض کنید $[a, b] = c$ ، $a|m$ ، $b|m$، در این صورت داریم $c|m$ یعنی هر مضرب مشترک دو عدد a, b خود یک مضربی از کوچکترین مضرب مشترک a, b می‌باشد (m عددی صحیح و اعداد a, b، صحیح و غیر صفر می‌باشند).

اثبات: با توجه به الگوریتم تقسیم داریم

$$m = cq + r \qquad ۰ \leq r < c$$

فرض کنید $r > ۰$ باشد چون $a|m$ و $a|c$، نتیجه می‌گیریم که $a|m - cq$ یعنی $a|r$ به همین ترتیب $b|r$، یعنی r یک مضرب مشترک مثبت a, b می‌باشد لذا طبق تعریف ک.م.م دو عدد می‌بایست $r \geq c$ باشد و این با فرض $r < c$ تناقض دارد پس فرض $r > ۰$ غلط است یعنی $r = ۰$ و در نتیجه $m = cq$ بنابراین $c|m$.

قضیه ۷: برای هر دو عدد صحیح غیر صفر a و b داریم:

$$[a, b] \cdot (a, b) = |ab|$$

اثبات: فرض کنید $[a, b] = c$ و $(a, b) = d$. بدون این‌که به کلیت مسأله لطمه‌ای وارد آید فرض می‌کنیم هر دو عدد a, b مثبت باشد. حال کافی است ثابت کنیم $\frac{ab}{d} = c$. فرض کنید $\frac{ab}{d} = m$ حال باید ثابت کنیم عدد m هر دو شرط تعریف کوچکترین مضرب مشترک دو عدد مثبت a, b را داراست.

ط اول: چون $\frac{a}{d}, \frac{b}{a}$ اعدادی صحیح‌اند پس از روابط $b \cdot \frac{a}{d} = m$ ، $a \cdot \frac{b}{d} = m$ نتیجه می‌گیریم که $a|m$ ، $b|m$.

MATH75.IR

شرط دوم: فرض کنید عدد صحیح و مثبت x یک مضرب مشترک a, b باشد یعنی $a|x, b|x$ بنابراین اعداد صحیح q_1, q_2 وجود دارند به طوری که $x = a \cdot q_1$ و $x = b \cdot q_2$. از طرفی طبق قضیه بزو اعداد صحیح r, s وجود دارند به طوری که $ar + bs = d$ پس داریم:

$$\begin{aligned} ar + bs = d \quad &\Longrightarrow \quad arx + bsx = d \cdot x \\ &\Longrightarrow \quad arbq_2 + bsaq_1 = d \cdot x \\ &\Longrightarrow \quad ab(rq_2 + sq_1) = d \cdot x \\ &\Longrightarrow \quad d \cdot m(rq_2 + sq_1) = d \cdot x \\ &\Longrightarrow \quad m(rq_2 + sq_1) = x \end{aligned}$$

یعنی $m|x$ و چون هر دو عدد x, m مثبت‌اند پس $m \leq x$.

بنابراین چون m هر دو شرط کوچکترین مضرب مشترک a, b را دارد و چون ک.م.م دو عدد منحصربه‌فرد است پس $m = c$.

نتیجه ۱: فرض کنید a, b اعداد طبیعی باشند و همچنین $(a, b) = d$ و $[a, b] = c$. اگر $\frac{a}{d}, \frac{b}{d}$ را به ترتیب با a_1, b_1 نشان دهیم، داریم:

$$ab = cd \quad \Longrightarrow \quad a_1 \cdot d \cdot b_1 \cdot d = cd \quad \Longrightarrow \quad a_1 \cdot b_1 \cdot d = c$$

تساوی $a_1 b_1 d = c$ از این نظر حائز اهمیت است که در آن a_1 و b_1 نسبت به هم اولند. **نتیجه ۲:** اگر $a|m$, $b|m$, $(a, b) = 1$ در این صورت $ab|m$.

برهان: اعداد a, b را مثبت فرض می‌کنیم. با توجه به قضیه‌ی اول، m بر کوچکترین مضرب مشترک a, b، که آن را c می‌نامیم، بخش‌پذیر است. از طرفی با توجه به قضیه‌ی دوم اگر $(a, b) = 1$، در این صورت $c = ab$. پس نتیجه می‌گیریم m بر ab بخش‌پذیر است.

نتیجه ۳: فرض کنید اعداد a, b صحیح و غیر صفر باشند و همچنین $n \in \mathbf{N}$. اگر $[a, b] = c$ در این صورت داریم:

(i) $[a^n, b^n] = c^n$.

(ii) $[ma, mb] = mc$, $m \in \mathbf{N}$.

و برعکس با فرض صحیح و غیرصفر بودن a, b از هر یک از روابط (i) و (ii) می‌توان نتیجه گرفت که $[a, b] = c$.

برهان: با توجه به قضیه‌ی ۲ بخش کوچکترین مضرب مشترک و با توجه به نتایج ۶ و ۸ بخش بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک اثبات واضح است.

مثال ۱۶: مطلوب است دو عدد طبیعی a, b به طوری که $(a, b) = d = ۲۵$ و $[a, b] = c = ۱۵۰$.

MATH75.IR

حل: فرض کنیم $a = a_1 \cdot d$ و $b = b_1 \cdot d$ بنابراین $(a_1, b_1) = 1$ و همچنین $a_1 b_1 d = c$ یعنی $a_1 b_1 \times 25 = 150$ و یا $a_1 b_1 = 6$.

با توجه به این‌که a_1, b_1 نسبت به یکدیگر متباین می‌باشند پس $a_1 = 1, b_1 = 6$ و یا $a_1 = 2, b_1 = 3$ (بنا به تقارن a_1 و b_1 می‌توانند جایشان را عوض کنند)، در نتیجه $a = 25, b = 150$ و یا $a = 50, b = 75$.

کوچکترین مضرب مشترک n عدد

تعریف: کوچکترین مضرب مشترک n عدد صحیح و غیر صفر $a_1, a_2, \ldots, a_n$ عبارت است از کوچکترین عدد صحیح مثبت که بر تمامی این n عدد بخش‌پذیر باشد. این عدد را با $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ نمایش می‌دهند. می‌توان ثابت کرد که:

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_1, a_2, \ldots, [a_{n-1}, a_n]] = [[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}], a_n]$$

با توجه به تعریف کوچکترین مضرب مشترک n عدد اثبات واضح است.

مثال ۱۷:

$$[4, 6, 15] = [4, [6, 15]] = [4, 30] = 60$$

قضیه ۸: اگر n عدد صحیح و غیر صفر $a_1, a_2, \ldots, a_n$ دوبه‌دو نسبت به هم اول باشند آنگاه:

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = |a_1 a_2 \cdots a_n|$$

تمرین:

۱. اعداد طبیعی a و b مفروض‌اند. اگر $(a^2 + ab + 1) | (b^2 + ab + 1)$، ثابت کنید $a = b$.

۲. دو عدد طبیعی m و n با شرط $|m - n| > 1$ مفروضند به‌گونه‌ای که $4mn + 1$ بر $m + n$ بخش‌پذیر است. ثابت کنید دو عدد $2n - 1$ و $2m + 1$ نسبت به هم اولند.

۳. عدد طبیعی n به‌گونه‌ای است که از ۶۰۰ برابر بزرگترین مقسوم‌علیه اول خود، کوچکتر نیست. ثابت کنید $n = 2^3 \times 3^5$ کوچکترین عدد با این خاصیت است.

۴. همهٔ عددهای صحیح p, n, m را به‌گونه‌ای بیابید که اولاً $2mn - p^2 = 100$ ثانیاً $m^2 + 2n^2 - 2np = 100$.

۵. دو عدد شش رقمی مثال بزنید که اگر اولی را بعد از دیگری بنویسیم، عدد ۱۲ رقمی حاصل بر حاصل‌ضرب دو عدد اصلی بخش‌پذیر باشد.

MATH75.IR

۶. عددهای صحیح d, c, b, a را به‌گونه‌ای بیابید که هر یک از اعداد $ab + cd$ و $ac + bd$ و $ad + bc$ برابر -1 گردد.

۷. ثابت کنید هرگاه عددهای طبیعی a و b و c و d همگی بر عدد طبیعی $ab - cd$ بخش‌پذیر باشند، آنگاه $ab - cd = 1$.

۸. ثابت کنید عدد ۱۹۸۴ کوچکترین عدد طبیعی است که آن‌را می‌توان به سه طریق به‌صورت $13x + 73y$ نوشت. (x و y عددهایی طبیعی‌اند).

۹. به ازای عدد طبیعی n، عدد $2^n + 1$ اول است. ثابت کنید n توانی از ۲ است. (اعداد اول به شکل $2^{2^n} + 1$ را اعداد اول فرما گویند.)

۱۰. چند جمله‌ای $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ را با ضرایب صحیح در نظر بگیرید. فرض کنید $a_n \neq 0$ و همچنین اعداد صحیح b, a نسبت به هم اولند. اگر $\frac{a}{b}$ ریشه معادله $f(x) = 0$ باشد ثابت کنید $a|a_0$ و $b|a_n$.

۱۱. فرض کنید b, a اعداد صحیح و p عددی اول باشد. نشان دهید اگر $p|a^p - b^p$ آنگاه $p^2|a^p - b^p$.

MATH75.IR

اعداد اول

بحث در مورد اعداد اول را با تعریف عدد اول شروع می‌کنیم.

تعریف: عدد طبیعی $p > ۱$ را عدد اول گویند هرگاه تنها مقسوم‌علیه‌های مثبت آن، ۱ , p باشند.

هر عدد طبیعی مخالف یک را مرکب (تجزیه‌پذیر) گویند هرگاه اول نباشد. با توجه به این تعاریف عدد ۱ نه اول است و نه مرکب. همچنین عدد طبیعی n مرکب است اگر و تنها اگر اعداد طبیعی q, p یافت شوند به طوری که $n = p \cdot q$, $۱ < p < n$, $۱ < q < n$.

به‌طور مثال اولین ده عدد اول عبارت است از:

$$۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ۲۹$$

با توجه به این‌که باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد صحیح بر عدد طبیعی $a > ۱$ فقط و فقط یکی از اعداد $a - ۱, \ldots, ۲, ۱, ۰$ خواهد بود، می‌توان نتایج مقدماتی زیر را با توجه به تعریف عدد اول مطرح نمود.

نتیجه ۱: هر عدد اول بزرگتر از ۳ در تقسیم بر ۶ فقط می‌تواند باقی‌مانده‌ای مساوی ۱ و یا ۵ داشته باشد. به بیان دیگر اگر p عددی اول و بزرگتر از ۳ باشد آنگاه $p = ۶k + ۱$ و یا $p = ۶k - ۱$ که در آن $k \in \mathbb{N}$. علت این مسأله واضح است زیرا هر یک از اعداد $۶k, ۶k + ۲, ۶k + ۳, ۶k + ۴$ با فرض عدد طبیعی و بزرگتر از ۳ بودن، لااقل بر دو عدد مخالف ۱ بخش‌پذیرند.

مثال ۱: دو عدد فرد متوالی p و $p + ۲$ را در صورت اول بودن، اعداد اول دوقلو می‌نامند. ثابت کنید اگر اعداد p و $p + ۲$ اعداد اول دوقلو باشند و $p > ۳$، در آن صورت $p + ۱$ مضرب ۶ می‌باشد.

اثبات: چون $P > ۳$ لذا $p = ۶k \pm ۱$ که در آن $k \in \mathbb{N}$ ولی چون $p + ۲$ نیز عددی اول است پس p نمی‌تواند به صورت $۶k + ۱$ باشد. لذا $p = ۶k - ۱$ و در نتیجه $p + ۱ = ۶k$.

مثال ۲: فرض کنید p عددی اول و بزرگتر از ۳ باشد نشان دهید:

$$۲۴ | p^۲ - ۱$$

MATH75.IR

اثبات: با توجه به این‌که $p = ۶k \pm ۱$، (k عددی طبیعی است)، پس داریم:

$$p^۲ - ۱ = ۳۶k^۲ \pm ۱۲k = ۱۲k(۳k \pm ۱)$$

و چون $k(۳k \pm ۱)$ عددی است زوج پس $۲۴|p^۲ - ۱$.

نتیجه ۲: هر عدد اول بزرگتر از ۲ به صورت $۴n + ۱$ یا $۴n + ۳$ می‌باشد. که در آن n عددی است طبیعی و یا صفر.

علت این مسأله نیز واضح است چون اعداد $۴n$ و $۴n + ۲$ با فرض طبیعی و بزرگتر از ۲ بودن، نمی‌توانند اول باشند. مناسب‌تر آن است که بگوییم هر عدد اول بزرگتر از ۲ به صورت $۴n \pm ۱$ می‌باشد که در آن $n \in \mathbf{N}$.

به همین ترتیب می‌توان اعداد اول را براساس باقی‌مانده‌های تقسیم بر هر عدد صحیح مثبت و ثابت دیگر نیز طبقه‌بندی کرد. به طور مثال هر عدد اول غیر از ۳ به صورت $۳n \pm ۱$ می‌باشد ($n \in \mathbf{N}$).

مثال ۳: آیا مثلثی قائم‌الزاویه وجود دارد که طول اضلاع آن همگی از ۳ بیشتر بوده و اعدادی اول باشند.

حل: خیر، زیرا اگر اعداد اول بزرگتر از ۳ مثل r, q, p یافت شوند که در رابطه‌ی $p^۲ + q^۲ = r^۲$ صدق کنند در این صورت به تناقض $(۳n \pm ۱)^۲ = (۳m \pm ۱)^۲ + (۳k \pm ۱)^۲$ و یا $۳t + ۱ = ۰$ خواهیم رسید. (t, n, m, k اعدادی طبیعی‌اند).

چون تنها مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد اول p عبارتند از $۱, p$، پس به ازای هر عدد صحیح a، تنها عامل‌های مشترک p, a عبارتند از $۱, p$، یعنی به ازای هر عدد صحیح a داریم $(a, p) = ۱$ یا $(a, p) = p$ به عبارت دیگر هر عدد صحیح a یا نسبت به عدد اول مفروض p اول است و یا بر p بخش‌پذیر است. معمولاً مناسب‌تر آن است که به جای $p \nmid a$ بنویسیم $(p, a) = ۱$.

حال به بیان و اثبات چند قضیه مهم در مورد اعداد اول می‌پردازیم سپس کاربردهای اعداد اول در حل مسایل را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱: اگر p عددی اول و b, a اعدادی صحیح باشند با این شرط که $p|ab$ آنگاه $p|a$ یا $p|b$.

برهان: اگر $p|a$ قضیه حل است. حال فرض کنیم $p \nmid a$ در این صورت $(p, a) = ۱$ و چون $p|ab$ پس طبق لم اقلیدس داریم $p|b$. این قضیه بیانگر این مطلب است که حاصل‌ضرب دو عدد اول بر p قابل‌قسمت است اگر و فقط اگر لااقل یکی از آن دو عدد بر p قابل‌قسمت باشد.

با توجه به این قضیه و به روش استقرا ریاضی می‌توان دو نتیجه‌ی زیر را اثبات نمود.

نتیجه ۱: فرض کنید p عددی اول و k عددی طبیعی باشد اگر $a_k, \ldots, a_۲, a_۱$ اعدادی صحیح باشند به طوری که

$$p \mid \prod_{i=۱}^{k} a_i$$

آنگاه لااقل به ازای یک i، $۱ \le i \le k$ داریم $p|a_i$. (نماد $\prod_{i=۱}^{k} a_i$ به معنی حاصل‌ضرب $a_۱ a_۲ \cdots a_k$ می‌باشد).

MATH75.IR

نتیجه ۲: اگر p عددی اول و n عددی طبیعی باشد به‌طوری که به ازای عدد صحیح a داشته باشیم $p|a^n$ در این صورت $p|a$.

قضیه ۲: هر عدد طبیعی $n > ۱$ دارای لااقل یک عامل اول است.

برهان: مجموعه‌ی S را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$S = \{t \mid t \mid n\ ,\ t > ۱\}$$

چون $n \in S$ پس مجموعه‌ی S مخالف تهی است و چون $S \subset \mathbf{N}$ لذا S دارای کوچکترین عضو (عضو ابتدا) می‌باشد. آن را p می‌نامیم. ثابت می‌کنیم p عدد اول است. فرض کنیم چنین نباشد. بنابراین عددی مثل q وجود دارد. به قسمی که $q|p$. چون $p \in S$ پس $p|n$ بنابراین $q|n$ یعنی $q \in S$ و این با کوچکترین عضو S بودن p تناقض دارد چون $q < p\ ,\ q \in S$، پس p نمی‌تواند غیر از ۱ و خودش عامل دیگری داشته باشد یعنی p عددی اول است.

در قضیه فوق علاوه بر وجود لااقل یک عامل اول برای عدد طبیعی $n > ۱$، در ضمن اثبات شد که کوچکترین عامل مخالف ۱ هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱، عددی اول است.

قضیه ۳: (قضیه بنیادی حساب) هر عدد طبیعی و غیر اول $n > ۱$ را می‌توان به صورت حاصل‌ضربی از اعداد اول نوشت که این حاصل‌ضرب بدون توجه به ترتیب عوامل منحصربه‌فرد است.

اثبات: ابتدا وجود چنین حاصل‌ضربی را اثبات می‌نمائیم و سپس یکتا بودن آن را نشان می‌دهیم. فرض کنید چنین نباشد یعنی اعداد طبیعی و غیر اول $n > ۱$ یافت شوند به طوری که به حاصل‌ضرب اعداد اول تجزیه نشوند. همچنین فرض کنید $n_۰$ کوچکترین عدد طبیعی با چنین خاصیتی باشد بنابراین تمام اعداد طبیعی غیر اول مخالف ۱ و کوچکتر از $n_۰$ را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب اعداد اول نوشت. با توجه به این‌که $n_۰ > ۱$، لذا طبق قضیه‌ی قبل، $n_۰$ دارای لااقل یک عامل اول است که آن را p می‌نامیم. پس می‌توان نوشت $n_۰ = p \cdot q$، که در آن q عددی طبیعی است و در ضمن $۱ < q < n_۰$. برای q دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول: q عددی اول است. در این صورت $n_۰$ به صورت $n_۰ = p \cdot q$ به حاصل‌ضرب اعداد اول تجزیه شده است. که این با تعریف $n_۰$ تناقض دارد.

حالت دوم: q عددی مرکب است. در این صورت چون $q < n_۰$ بنابراین می‌توان آن را به صورت حاصل‌ضرب اعداد اول نوشت. فرض کنید $q = p_۱ \cdot p_۲ \cdots p_m$ که در آن $p_m, \ldots, p_۲, p_۱$ اعدادی اولند. در نتیجه $n_۰ = p \cdot p_۱ \cdot p_۲ \cdots p_m$ یعنی $n_۰$ نیز به صورت حاصل‌ضرب اعداد اول نوشته می‌شود. در این حالت نیز به تناقض رسیدیم.

با توجه به این دو تناقض نتیجه می‌گیریم چنین $n_۰$ ای وجود ندارد. یعنی تمام اعداد طبیعی بزرگتر از ۱ و غیر اول قابل تجزیه به صورت حاصل‌ضرب اعداد اول می‌باشد.

MATH75.IR

حال ثابت می‌کنیم که نمایش هر عدد طبیعی غیر اول بزرگتر از ۱ به صورت حاصل‌ضربی از اعداد اول یکتاست. فرض کنیم بتوان عدد a را به دو طریق مختلف به صورت حاصل‌ضربی از اعداد اول نوشت، یعنی، $a = p_1 p_2 \cdots p_n$ و $a = q_1 q_2 \cdots q_m$ که p_i ها و q_i ها اولند و p_i ها دقیقاً همان q_i ها نیستند. پس داریم:

$$p_1 p_2 \cdots p_n = q_1 q_2 \cdots q_m$$

حال اگر از طرفین این تساوی تمامی اعداد اول مساوی را حذف کنیم، با اندیس گذاری مجدد خواهیم داشت:

$$l_1 l_2 \cdots l_s = k_1 k_2 \cdots k_t \qquad (*)$$

که در آن هیچ‌کدام از l_iها با هیچ‌کدام از k_iها برابر نیستند. از تساوی اخیر نتیجه می‌شود که $l_1 | k_1 k_2 \cdots k_t$ و با توجه به قضیه‌ی ۱ باید l_1 یکی از اعداد اول $k_t, \ldots, k_2, k_1$ را عاد کند. بنابراین l_1 باید با یکی از k_i ها برابر باشد که این خلاف حذف شدن اعداد اول مساوی از طرفین تساوی (*) می‌باشد.

بدین ترتیب فرض اینکه a را می‌توان به دو طریق مختلف به صورت حاصل‌ضربی از اعداد اول نوشت به تناقض رسید و در نتیجه اثبات قضیه کامل شد. اگر بپذیریم که با یک عامل هم حاصل‌ضرب داریم، می‌توانیم قضیه‌ی فوق را به صورت کلی زیر بیان کنیم:

- هر عدد طبیعی $n > 1$ را به طریق منحصربه‌فردی می‌توان به صورت حاصل‌ضربی از اعداد اول نوشت (بدون توجه به ترتیب عوامل) در نوشتن عدد صحیح $n > 1$ به صورت حاصل‌ضرب اعداد اول، معمولاً عوامل اول مساوی را به صورت یک عامل توان‌دار می‌نویسند یعنی سعی می‌شود به صورت حاصل‌ضرب عوامل اول متمایز توان‌دار نوشته شود.

قضیه فوق نشان می‌دهد که هر عدد طبیعی $n > 1$ را فقط به یک طریق می‌توان به صورت $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$. نوشت که در آن $p_m, \ldots, p_2, p_1$ عوامل اول متمایز n هستند و $k_i \geq 1$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. طرف راست تساوی فوق را اصطلاحاً تجزیه عدد n به عوامل اول متمایز گوییم.

به طور مثال تجزیه‌ی عدد ۳۶۰ به عوامل اول متمایز به صورت زیر است:

$$۳۶۰ = ۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵$$

قضیه‌ی فوق نتایج زیادی به دنبال خود دارد که ما به بیان چند نتیجه‌ی مهم آن اکتفا می‌کنیم.

نتیجه ۱: فرض کنید عدد طبیعی $n > 1$ به صورت زیر به عوامل اول متمایز تجزیه شده باشد

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$$

MATH75.IR

و فرض کنید $d \geq ۱$ یک مقسوم‌علیه n باشد یعنی $d|n$. اگر p عددی اول باشد به طوری که $p|d$، در این صورت $p|n$ یا به عبارت دیگر $p|p_۱^{k_۱}p_۲^{k_۲}\cdots p_m^{k_m}$ که با توجه به نتیجه ۱ و ۲ قضیه ۱ خواهیم داشت: $p = p_۱$ یا $p = p_۲$ یا $\cdots$ و یا $p = p_m$ به عبارت دیگر می‌توان گفت که مقسوم‌علیه‌های $n > ۱$ دقیقاً اعدادی مانند d به صورت زیر هستند.

$$d = p_۱^{t_۱}p_۲^{t_۲}\cdots p_m^{k_m}$$

که در آن $۰ \leq t_i \leq k_i$ و $i = ۱, ۲, \ldots, m$. با توجه به اینکه t_i ها می‌توانند صفر باشند پس تساوی فوق ممکن است تجزیه‌ی عدد d به عوامل اول متمایز نباشد.

مثلاً یکی از عوامل عدد $۵ \times ۳^۲ \times ۲^۴ = ۷۲۰$ عدد $۵ \times ۲^۳ = ۴۰$ می‌باشد.

نتیجه ۲: با توجه به مطالب قبلی برای هر t_i در عبارت $d = p_۱^{t_۱}p_۲^{t_۲}\cdots p_m^{t_m}$ $k_i + ۱$ حالت وجود دارد که عبارتند از $۰, ۱, ۲, \ldots, k_i$، بنابراین $(k_۱ + ۱)(k_۲ + ۱)\cdots(k_m + ۱)$ انتخاب برای $t_m, \ldots, t_۲, t_۱$ وجود دارد. به‌عبارت دیگر تعداد اعداد به شکل $d = p_۱^{t_۱}p_۲^{t_۲}\cdots p_m^{t_m}$ برابر است با $\prod_{i=۱}^{m}(k_i + ۱)$، یعنی تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد طبیعی $n > ۱$ برابر است با:

$$(k_۱ + ۱)(k_۲ + ۱)\cdots(k_m + ۱)$$

به‌طور مثال تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد $۵ \times ۳ \times ۲^۲ = ۶۰$ برابر است با $۳ \times ۲ \times ۲ = ۱۲$ که عبارتند از:

$$۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۱۰, ۱۲, ۱۵, ۲۰, ۳۰, ۶۰$$

نتیجه ۳: بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک دو عدد طبیعی $a > ۱$ و $b > ۱$ را با توجه به تجزیه به عوامل اول متمایز آن دو عدد می‌توان به‌دست آورد. فرض کنید تمام اعداد اول متمایزی که در تجزیه a و b ظاهر می‌شوند عبارت باشند از $p_t, \ldots, p_۲, p_۱$. بنابراین:

$$a = p_۱^{m_۱}p_۲^{m_۲}\cdots p_t^{m_t} \quad , \quad b = p_۱^{n_۱}p_۲^{n_۲}\cdots p_t^{n_t}$$

که در آنها n_i ها و m_i ها اعدادی صحیح و نامنفی‌اند. در این صورت داریم:

$$(a, b) = p_۱^{\alpha_۱}p_۲^{\alpha_۲}\cdots p_t^{\alpha_t} \quad , \quad [a, b] = p_۱^{\beta_۱}p_۲^{\beta_۲}\cdots p_t^{\beta_t}$$

که در آنها $\alpha_i = min\{m_i, n_i\}$ و $\beta_i = max\{m_i, n_i\}$. روشن است که در حالت $m_i = n_i$ داریم:

$$\alpha_i = \beta_i = m_i = n_i$$

به‌طور مثال اگر $a = ۲^۳ \times ۵^۲ \times ۷$ و $b = ۲ \times ۳^۵ \times ۵^۲ \times ۱۱$، در این صورت

$$(a, b) = ۲ \times ۵^۲ \quad , \quad [a, b] = ۲^۳ \times ۳^۵ \times ۵^۲ \times ۷ \times ۱۱$$

MATH75.IR

نتیجه ۴: مجموع مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد طبیعی $n > ۱$، که تجزیه‌ی به عوامل اول متمایز آن به صورت $n = p_۱^{k_۱} p_۲^{k_۲} \cdots p_m^{k_m}$ می‌باشد، برابر است با مجموع $\prod_{i=۱}^{m}(k_i + ۱)$ عدد طبیعی به شکل $d = p_۱^{t_۱} p_۲^{t_۲} \cdots p_m^{t_m}$ که در آن $۰ \le t_i \le k_i$. از طرفی مجموع چنین اعدادی برابر است با:

$$\left(۱ + p_۱ + p_۱^۲ + \cdots + p_۱^{k_۱}\right)\left(۱ + p_۲ + p_۲^۲ \cdots + p_۲^{k_۲}\right) \cdots \left(۱ + p_m + p_m^۲ + \cdots + p_m^{k_m}\right)$$

در واقع حاصل‌ضرب فوق برابر است با مجموع $\prod_{i=۱}^{m}(k_i + ۱)$ جمله که هر جمله فقط و فقط به یک صورت به شکل $p_۱^{t_۱} p_۲^{t_۲} \cdots p_m^{t_m}$ نوشته می‌شود. پس مجموع مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد طبیعی $n > ۱$ برابر است با:

$$\prod_{i=۱}^{m} \frac{p_i^{k_i+۱} - ۱}{p_i - ۱}$$

بدیهی است که مجموع توان t ام‌های مقسوم‌علیه‌های مثبت n برابر است با:

$$\prod_{i=۱}^{m} \frac{p_i^{t(k_i+۱)} - ۱}{p_i^t - ۱}$$

نتیجه ۵: فرض کنید تجزیه‌ی به عوامل اول متمایز عدد طبیعی $n > ۱$ به صورت زیر باشد:

$$n = p_۱^{k_۱} p_۲^{k_۲} \cdots p_m^{k_m}$$

در این صورت n مربع کامل است اگر و فقط اگر برای هر $(i = ۱, ۲, \ldots, m)$، k_i عددی زوج باشد.

به همین ترتیب می‌توان گفت که n مکعب کامل است اگر و فقط اگر برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, m$، k_i مضربی از ۳ باشد. به‌طور مثال عدد $n = ۳^۴ \times ۷^۲ \times ۱۹^۶$ مربع کامل $(\sqrt{n} = ۳^۲ \times ۷ \times ۱۹^۳)$ و عدد $m = ۲^۶ \times ۱۵^{۱۲} \times ۱۳^۳$ مکعب کامل $(\sqrt[۳]{m} = ۲^۲ \times ۵^۴ \times ۱۳)$ می‌باشد.

قضیه ۴: فرض کنید n یک عدد مرکب باشد. در این‌صورت عدد اولی مثل p وجود دارد که $p \le \sqrt{n}$ و $p|n$.

اثبات: چون n مرکب است، پس اعداد طبیعی a و b با شرط $۱ < a \le b < n$ وجود دارند به‌طوری که $n = a.b$. به موجب قضیه ۲ عدد اولی مثل p یافت می‌شود به‌طوری که $p|a$، بنابراین داریم:

$$p \le a \implies p^۲ \le a^۲ \le ab = n \implies p \le \sqrt{n}$$

از طرفی چون $p|a$ و $a|n$ پس $p|n$، بدین ترتیب قضیه اثبات شد. اساس کار غربال اراتستن براین قضیه استوار است. در روش غربال اراتستن به‌طور مثال برای به‌دست آوردن اعداد اول کوچکتر از ۵۰ تمام مضارب اعداد کوچکتر از $\sqrt{۴۹} = ۷$ را حذف می‌کنیم. جدول زیر نمونه‌ای از غربال اراتستن است.

۱	②	③	۴	⑤	۶	⑦	۸	۹	۱۰
⑪	۱۲	⑬	۱۴	۱۵	۱۶	⑰	۱۸	⑲	۲۰
۲۱	۲۲	㉓	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	㉙	۳۰
㉛	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	㊲	۳۸	۳۹	۴۰
㊶	۴۲	㊸	۴۴	۴۵	۴۶	㊼	۴۸	۴۹	۵۰

MATH75.IR

بنابراین تنها اعداد اول بین ۱ و ۴۹ عبارتند از:

$$۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ۲۹, ۳۱, ۳۷, ۴۱, ۴۳, ۴۷$$

تعریف: فرض کنید p عددی اول و ثابت باشد و $a > ۱$ را عددی طبیعی در نظر بگیرید. بزرگترین عدد صحیح t که $p^t | a$ را با $E_p(a)$ نشان می‌دهیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که:

$$E_p(n!) = \sum_{s=۱}^{\infty} \left[\frac{n}{p^s}\right]$$

که در آن $[x]$، بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از x می‌باشد که به آن جزء صحیح x گوییم. بدیهی است که تعداد جملات مخالف صفر در مجموع فوق متناهی است زیرا اگر $p^s > n$ آنگاه $\left[\frac{n}{p^s}\right] = ۰$.

اثبات: ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر a و b و c اعدادی طبیعی باشند آنگاه $\left[\frac{[\frac{a}{b}]}{c}\right] = [\frac{a}{bc}]$ زیرا فرض کنید:

$$\begin{aligned} a &= bq_۱ + r_۱ \qquad ۰ \le r_۱ < b \\ q_۱ &= cq_۲ + r_۲ \qquad ۰ \le r_۲ < c \end{aligned}$$

دراین صورت $\left[\frac{[\frac{a}{b}]}{c}\right] = [\frac{q_۱}{c}] = q_۲$، از طرفی $a = bcq_۲ + br_۲ + r_۱$ و $br_۲ + r_۱ \le b(c-۱) + (b-۱)$ یعنی $br_۲ + r_۱ \le bc - ۱$، بنابراین $br_۲ + r_۱ < bc$ و در نتیجه $q_۲ = [\frac{a}{bc}]$. از این رو حکم اثبات شد.

حال به اثبات رابطه داده شده می‌پردازیم. مضارب p که در حاصلضرب $n!$ ظاهر می‌شوند دقیقاً عبارتند از:

$$p, ۲p, ۳p, \ldots, \left[\frac{n}{p}\right] p$$

بنابراین $E_p(n!)$ عبارت است از تعداد دفعاتی که p به عنوان یک عامل در حاصلضرب این اعداد ظاهر می‌شود. پس داریم:

$$E_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + E_p\left(\left[\frac{n}{p}\right]!\right)$$

اگر در این رابطه $\left[\frac{n}{p}\right]$ را به جای n قرار دهیم و از رابطهٔ $\left[\frac{[\frac{a}{b}]}{c}\right] = [\frac{a}{bc}]$ استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$E_p\left(\left[\frac{n}{p}\right]!\right) = \left[\frac{n}{p^۲}\right] + E_p\left(\left[\frac{n}{p^۲}\right]!\right)$$

در نتیجه

$$E_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^۲}\right] + E_p\left(\left[\frac{n}{p^۲}\right]!\right)$$

با ادامه این روند و با توجه به این‌که اگر $p^s > n$ آنگاه $\left[\frac{n}{p}^s\right] = ۰$، خواهیم داشت:

$$E_p(n!) = \sum_{s=۱}^{\infty} \left[\frac{n}{p}^s\right]$$

MATH75.IR

مثال ۴: بزرگترین توان ۳ در !۲۵۰ را به‌دست آورید:

$$E_۳(۲۵۰!) = \left[\frac{۲۵۰}{۳}\right] + \left[\frac{۲۵۰}{۹}\right] + \left[\frac{۲۵۰}{۲۷}\right] + \left[\frac{۲۵۰}{۸۱}\right] + \left[\frac{۲۵۰}{۲۴۳}\right]$$
$$= ۸۳ + ۲۷ + ۹ + ۳ + ۱ = ۱۲۳$$

قضیه ۵: هرگاه $a, b, \cdots, z$ اعداد صحیح و مثبت باشند، آنگاه:

$$\frac{(a+b+\cdots+z)!}{a!b!\cdots z!}$$

یک عدد صحیح است.

اثبات: اگر x و y دو عدد صحیح باشند آنگاه $[x+y] \geq [x] + [y]$، در نتیجه با استقراء می‌توان گفت $[a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n] \geq [a_۱] + [a_۲] + \cdots + [a_n]$ بنابراین برای هر عدد اول p و هر عدد طبیعی s داریم:

$$\left[\frac{a+b+\cdots+c}{p^s}\right] \geq \left[\frac{a}{p^s}\right] + \left[\frac{b}{p^s}\right] + \cdots + \left[\frac{c}{p^s}\right]$$

و در نتیجه:

$$E_p((a+b+\cdots+c)!) \geq E_p(a!) + E_p(b!)\cdots + E_p(c!)$$

یعنی تعداد دفعاتی که p در صورت کسر $\frac{(a+b+\cdots+c)!}{a!b!\cdots c!}$ ظاهر می‌شود حداقل برابر است با تعداد دفعاتی که در مخرج همین کسر ظاهر می‌شود. چون این نتیجه در مورد هر عدد اول درست است پس مخرج کسر فوق مقسوم‌علیه‌ای از صورت آن است و قضیه اثبات شد. در حالت خاص با فرض طبیعی بودن n و r و با فرض $r < n$ می‌توان گفت $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ عددی طبیعی است. که این عدد همان ضریب $x^{n-p}y^p$ در بسط دو جمله‌ای $(x+y)^n$ می‌باشد.

قضیه ۶: به ازای هر عدد طبیعی r، حاصلضرب هر r عدد طبیعی متوالی بر $r!$ بخش‌پذیر است.

اثبات: با فرض این که عدد طبیعی n از r بزرگتر و یا مساوی با آن است داریم:

$$\frac{n(n-۱)\cdots(n-r+۱)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

لذا حاصلضرب هر r عدد طبیعی متوالی بر $r!$ بخش‌پذیر است.

قضیه ۷: اگر p عددی اول باشد آنگاه $C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}$ بر p بخش‌پذیر است. $(۱ < k < p)$

اثبات: فرض کنیم $\frac{p!}{k!(p-k)!} = m$ که در آن m عددی طبیعی است لذا $p! = mk!(p-k)!$ و در نتیجه $p|mk!(p-k)!$ از طرفی چون p عددی اول است لذا نسبت به تمام اعداد طبیعی کمتر از خود و در نتیجه نسبت به حاصلضرب آنها اول است یعنی $(p, k!(p-k)!) = ۱$ بنابراین $p|m$ و حکم اثبات شد. نتیجه‌ای که از این قضیه گرفته می شود آن است که اگر p عددی اول باشد تمام ضرایب بسط دو جمله‌ای $(x+y)^p$ بر p بخش‌پذیرند مگر ضرایب جملات x^p و y^p و از آنجا نتیجه می‌گیریم که $(x+y)^p - x^p - y^p$ بر p بخش‌پذیر است. (البته با فرض اول بودن p).

MATH75.IR

تمرین:

۱. ثابت کنید $۲^{۶۴}+۱$ بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است (در واقع عکس تمرین بالا صحیح نیست).

۲. چند جمله‌ای غیرثابت $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_۱x+a_۰$ را با ضرایب صحیح در نظر بگیرید. ثابت کنید بی‌شمار عدد صحیح چون m وجود دارد به قسمی که $f(m)$ عددی مرکب است.

۳. نشان دهید که به‌ازای $n\geq ۱$ عدد

$$۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}+\cdots+\frac{۱}{۲n+۱}$$

عدد صحیح نیست.

۴. مجموعه کلیه اعداد صحیح و مثبت به‌صورت $۴k+۱$ را با R نشان می‌دهیم، که در آن k عددی صحیح است. عضو m از R را عضو اول گوییم هرگاه تنها اعضای R که m را عاد می‌کنند، ۱ و m باشند. ثابت کنید هر عد صحیح از R می‌تواند به‌صورت حاصل‌ضربی از اعضای اول نوشته شود. آیا تجزیه به این شکل یکتاست؟

۵. فرض کنید p_n معرف n امین عدد اول باشد.

اولاً: نشان دهید به ازای $(n\geq ۴)$، $p_{n+۱}^{۲}<p_۱p_۲\cdots p_n$.

ثانیاً: برای هر $n\in\mathbf{N}$ ثابت کنید $p_n<۲^{۲^n}$.

۶. نشان دهید اگر نتوان n را به‌صورت مجموع اعداد صحیح مثبت متوالی نوشت آنگاه $n=۲^m$. $(n>۱$ طبیعی و m نیز عددی طبیعی است.)

۷. نشان دهید تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت n به شکل $۴k+۱$ از تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت n به شکل $۴k+۳$ کمتر نیست.

۸. ثابت کنید تعداد اعداد اول به شکل $۴n+۳$ نامتناهی است.

۹. فرض کنید $n=r_mp^m+r_{m-۱}p^{m-۱}+\cdots+r_۰$ نمایش عدد طبیعی n در مبنای عدد اول p است. نشان دهید:

$$E_p(n!)=\frac{n-(r_m+r_{m-۱}+\cdots+r_۰)}{p-۱}$$

۱۰. ثابت کنید اگر p_n، n امین عدد اول باشد، آنگاه $p_n\leq ۲^{۲^{n-۱}}$.

۱۱. فرض کنید a و m و n اعداد صحیح مثبت باشند اولاً ثابت کنید با شرط $n>m$، $a^{۲^n}-۱$ مضربی از $a^{۲^m}+۱$ است. ثانیاً با فرض $n\neq m$ ثابت کنید که ب.م.م دو عدد $a^{۲^n}+۱$ و $a^{۲^m}+۱$ برابر ۱ یا ۲ است. با استفاده از این مطلب وجود بی‌نهایت عدد اول را نتیجه بگیرید.

۱۲. مجموعه $S=\{۱,۲,۳,\ldots,n\}$ را درنظر بگیرید. نشان دهید که برای هر عدد طبیعی n، هر $n+۱$ عدد از مجموعه S شامل زوجی مثل a,b است. به‌طوری که $\frac{a}{b}$ توانی از ۲ است.

MATH75.IR

۱۳. عدد زوج n دارای این ویژگی است که اگر n بر عدد اول p بخش‌پذیر باشد آنگاه $n-1$ نیز بر $p-1$ بخش‌پذیر است. ثابت کنید n توانی از ۲ است.

۱۴. فرض کنید $a \geq 2$ و $n \geq 2$. نشان دهید که اگر a^n-1 اول باشد، آنگاه $a=2$ و n عددی اول است. (اعداد اول به شکل 2^n-1 را اعداد اول مرسن گویند).

۱۵. ثابت کنید $2^{223}-1 \mid 223$. (در واقع عکس تمرین بالا درست نیست.)

MATH75.IR

همنهشتی

خواص ابتدایی همنهشتی‌ها

تعریف: فرض کنیم m یک عدد طبیعی باشد، دو عدد صحیح a و b را، به پیمانهٔ m همنهشت گویند هرگاه $m|a-b$. همنهشت بودن دو عدد a و b به پیمانه m را به‌صورت‌های زیر نمایش می‌دهند:

$$a \equiv b \pmod{m} \quad \text{و یا} \quad a \equiv b \ (\text{پیمانه } m) \quad \text{و یا} \quad a \overset{m}{\equiv} b$$

و می‌خوانند a همنهشت با b است به پیمانه m. گاهی اوقات به جای کلمه پیمانه از کلمات سنج، هنگ و یا مدول استفاده می‌شود.

اگر $b = ۰$ در این‌صورت $a \equiv ۰ \pmod{m}$ بیان دیگری برای $m|a$ می‌باشد. چون عدد ۱ هر عددی را عاد می‌کند لذا همنهشتی به سنج ۱ کاربردی نخواهد داشت. از این‌رو m را در همنهشتی عددی بزرگتر از ۱ فرض می‌کنیم.

مثال ۱:

$$۱۲ \equiv -۳ \pmod{۵} \quad , \quad ۳۷ \equiv ۱۴ \pmod{۲۳}$$

با توجه به این که همنهشتی $a \equiv b \pmod{m}$ مفهوم دیگری برای $m|a-b$ می‌باشد و با توجه به خواص بخش‌پذیری، می‌توان خواص ابتدایی زیر را بلافاصله نتیجه‌گیری نمود.

الف) همنهشتی به سنج m در مجموعه اعداد صحیح یک رابطه هم‌ارزی است. یعنی اگر a, b و c اعدادی صحیح باشند داریم:

۱. $a \equiv a \pmod{m}$.

۲. اگر $a \equiv b \pmod{m}$ آنگاه $b \equiv a \pmod{m}$.

۳. اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و $b \equiv c \pmod{m}$ آنگاه $a \equiv c \pmod{m}$.

MATH75.IR

ب) اگر $a \equiv b \pmod m$ و c یک عدد صحیح باشد داریم:

۱. $a+c \equiv b+c \pmod m$ و برعکس اگر $a+c \equiv b+c \pmod m$ آنگاه $a \equiv b \pmod m$.

۲. $ac \equiv bc \pmod m$.

ج) اگر $a \equiv b \pmod m$ و $c \equiv d \pmod m$ آنگاه:

۱. $a+c \equiv b+d \pmod m$.

۲. $ac \equiv bd \pmod m$.

د) به روش استقراء روی عدد طبیعی n می‌توان گفت که هر گاه $a \equiv b \pmod m$ آنگاه $a^n \equiv b^n \pmod m$.

حال به بیان یک قضیه بنیادی در همنهشتی‌ها می‌پردازیم.

قضیه ۱: شرط لازم و کافی برای آنکه $a \equiv b \pmod m$ آن است که باقی‌مانده‌های تقسیم a, b بر m مساوی باشند.

برهان: فرض کنید $a \equiv b \pmod m$ و همچنین:

$$a = mq_1 + r_1 \qquad 0 \le r_1 < m \qquad (1)$$
$$b = mq_2 + r_2 \qquad 0 \le r_2 < m \qquad (2)$$

در این صورت داریم:

$$a - b = m(q_1 - q_2) + r_1 - r_2$$

چون $a \equiv b \pmod m$ پس $m \mid a-b$ و لذا از رابطهٔ فوق نتیجه می‌گیریم که $m \mid r_1 - r_2$، از طرفی طبق روابط (۱) و (۲) داریم $r_1 - r_2 < m$، بنابراین رابطهٔ $m \mid r_1 - r_2$ محقق نمی‌شود مگر آنکه $r_1 - r_2 = 0$ و در نتیجه $r_1 = r_2$. یعنی اگر $a \equiv b \pmod m$ آنگاه a و b در تقسیم بر m هم باقی‌مانده‌اند. حال برعکس، فرض کنیم که:

$$a = mq_1 + r \qquad 0 \le r < m$$
$$b = mq_2 + r \qquad 0 \le r < m$$

در این صورت داریم:

$$a - b = m(q_1 - q_2)$$

که این تساوی همان مفهوم $a \equiv b \pmod m$ می‌باشد. جهت روشن شدن مطلب فوق به بیان چند مثال می‌پردازیم:

مثال ۲: باقی‌ماندهٔ تقسیم $۲^{۳n+۱} + ۳^{۶n+۲}$ را بر ۷ بیابید.

حل:

$$۲^۳ \overset{۷}{\equiv} ۱ \implies ۲^{۳n} \overset{۷}{\equiv} ۱ \implies ۲^{۳n+۱} \overset{۷}{\equiv} ۲$$
$$۳^۳ \overset{۷}{\equiv} -۱ \implies ۳^{۶n} \overset{۷}{\equiv} ۱ \implies ۳^{۶n+۲} \overset{۷}{\equiv} ۹$$

MATH75.IR

بنابراین داریم:

$$۲^{۳n+۱} + ۳^{۶n+۲} \equiv ۲ + ۹ \equiv ۴ \qquad (mod\ ۷)$$

یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم $۲^{۳n+۱} + ۳^{۶n+۲}$ بر ۷ برابر ۴ است.

مثال ۳: ثابت کنید اگر $n \neq ۳k$ عددی طبیعی باشد آنگاه

$$a^{۲n} + a^n + ۱ \equiv ۰ \qquad (mod\ a^۲ + a + ۱))$$

که در آن a عددی صحیح و دلخواه است.

حل: فرض کنید $n = ۳k + ۱$ که در آن k عددی طبیعی است (در حالت $k = ۰$ اثبات مسأله واضح است). با توجه به اتحاد

$$a^۳ - ۱ = (a - ۱)(a^۲ + a + ۱)$$

خواهیم داشت:

$$a^۳ \equiv ۱ \qquad (mod\ a^۲ + a + ۱)$$

بنابراین داریم:

$$a^{۲n} = a^{۶k+۲} = (a^۳)^{۲k} \times a^۲ \equiv a^۲ \qquad (mod\ a^۲ + a + ۱)$$
$$a^n = a^{۳k+۱} = (a^۳)^k \times a \equiv a \qquad (mod\ a^۲ + a + ۱)$$

درنتیجه

$$a^{۲n} + a^n + ۱ \equiv a^۲ + a + ۱ \equiv ۰ \qquad (mod\ a^۲ + a + ۱)$$

حالت $n = ۳k + ۲$ نیز به طریق مشابه اثبات می‌شود.

به‌طور مثال عدد $۵^{۳n+۱} + ۵^{۶n+۲} + ۱$ بر ۳۱ بخش‌پذیر است.

مثال ۴: ثابت کنید $۲^n + ۱$ برای هیچ مقدار طبیعی n بر ۷ بخش‌پذیر نمی‌باشد.

حل: سه حالت برای n درنظر می‌گیریم.

حالت اول: $n = ۳k$ (k عددی طبیعی است). داریم:

$$۲^n + ۱ = ۲^{۳k} + ۱ = (۲^۳)^k + ۱ \equiv (۱)^k + ۱ \equiv ۲ \qquad (mod\ ۷)$$

حالت دوم: $n = ۳k + ۱$ (k عددی طبیعی است). داریم:

$$۲^n + ۱ = ۲^{۳k+۱} + ۱ = (۲^۳)^k \times ۲ + ۱ \equiv (۱)^k \times ۲ + ۱ \equiv ۳ \qquad (mod\ ۷)$$

حالت سوم: $n = ۳k + ۲$ (k عددی طبیعی است). داریم:

$$۲^n + ۱ = ۲^{۳k+۲} + ۱ = (۲^۳)^k \times ۲ + ۱ \equiv (۱)^k \times ۲^۲ + ۱ \equiv ۵ \qquad (mod\ ۷)$$

MATH75.IR

در هر سه حالت $۲^n + ۱$ به سنج ۷ با صفر همنهشت نیست یعنی بر ۷ بخش‌پذیر نیست. (حالت $n = ۱$ و $n = ۲$ مستقیماً اثبات می‌شود.)

مثال ۵: ثابت کنید $۵^{۹n+۱} - ۷ \times ۲^{۱۰n+۳} - ۱۱$ بر ۳۱ بخش‌پذیر است.

حل:

$$۵^{۹n+۱} = (۵^۳)^{۳n} \times ۵ \equiv ۵ \pmod{۳۱}$$
$$۲^{۱۰n+۳} = (۲۵)^{۲n} \times ۲^۳ \equiv ۲^۳ \pmod{۳۱}$$

بنابراین داریم:

$$۵^{۹n+۱} - ۷ \times ۲^{۱۰n+۳} - ۱۱ \equiv ۵ - ۷ \times ۸ - ۱۱ \equiv ۰ \pmod{۳۱}$$

مثال ۶: ثابت کنید $۲^{۵n+۳} + ۵^n \times ۳^{n+۲}$ بر ۱۷ بخش‌پذیر است.

حل:

$$۲^{۵n+۳} = (۲^۵)^n \times ۲^۳ \equiv (۱۵)^n \times ۸ \pmod{۱۷}$$
$$۵^n \times ۳^{n+۲} = (۱۵)^n \times ۳^۲ \equiv (۱۵)^n \times ۹ \pmod{۱۷}$$

بنابراین داریم:

$$۲^{۵n+۳} + ۵^n \times ۳^{n+۲} \equiv ۱۵^n \times ۸ + ۱۵^n \times ۹ = ۱۷ \times ۱۵^n \equiv ۰ \pmod{۱۷}$$

حال که با مشاهدهٔ این مثال‌ها کمی با همنهشتی آشنایی پیدا کردید، به بیان چند قضیهٔ مهم در همنهشتی‌ها می‌پردازیم.

قضیه ۲: اگر $ac \equiv bc \pmod{m}$ و $(m, c) = d$ آنگاه $a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$.

برهان: با توجه به فرض، عددی صحیح مثل k وجود دارد به طوری که

$$ac - bc = k \cdot m$$

و یا $(a-b) = k \cdot \frac{m}{d}$ که از آنجا نتیجه می‌گیریم $\frac{c}{d}(a-b)$ ولی چون $\left(\frac{m}{d}, \frac{c}{d}\right) = ۱$ در نتیجه طبق لم اقلیدس داریم $\frac{m}{d} \mid a-b$ و از آنجا داریم:

$$a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$$

نتیجه زیر بلافاصله از قضیه فوق به‌دست می‌آید:

نتیجه: اگر $ac \equiv bc \pmod{m}$ و $(m, c) = ۱$ آنگاه $a \equiv b \pmod{m}$.

قضیه ۳: اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و c یک عدد صحیح و مثبت باشد آنگاه $ac \equiv bc \pmod{mc}$.

MATH75.IR

برهان: با توجه به تعریف همنهشتی اثبات واضح است.

قضیه ۴: اگر m و n اعدادی طبیعی باشند به طوری که $a \equiv b \pmod{mn}$ آنگاه $a \equiv b \pmod{m}$ و $a \equiv b \pmod{n}$.

برهان: طبق فرض عدد صحیح k وجود دارد به طوری که $a - b = kmn$ لذا $m|a-b$ و $n|a-b$، درنتیجه حکم مورد نظر اثبات شد.

قضیه ۵: اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و $a \equiv b \pmod{n}$ و همچنین $c = [m,n]$، در این صورت داریم $a \equiv b \pmod{c}$.

برهان: طبق فرض $m|a-b$ و $n|a-b$ و طبق قضیه ٦ بخش کوچکترین مضرب مشترک داریم $c|a-b$ یعنی $a \equiv b \pmod{c}$.

در حالت خاص اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و $a \equiv b \pmod{n}$ و $(m,n) = ۱$ آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که $a \equiv b \pmod{mn}$.

قضیه ٦: فرض کنید a عددی صحیح و p, n, m اعدادی طبیعی باشند به طوری که $a^m \equiv ۱ \pmod{p}$ و $a^n \equiv ۱ \pmod{p}$، در این صورت داریم:

$$a^{(m,n)} \equiv ۱ \pmod{p}$$

برهان: طبق قضیهٔ بزو اعداد صحیح r و s وجود دارند به طوری که $(m,n) = rm + sn$. از طرفی طبق فرض داریم $a^{mr} \equiv ۱ \pmod{p}$ و $a^{sn} \equiv ۱ \pmod{p}$، در نتیجه $a^{mr} \cdot a^{sn} \equiv ۱ \times ۱ \pmod{p}$ یعنی $a^{mr+sn} \equiv ۱ \pmod{p}$. پس حکم اثبات شد.

دستگاه کامل مانده‌ها

فرض کنید m عددی طبیعی و بزرگتر از ۱ باشد. طبق قضیهٔ تقسیم اگر a عدد صحیح دلخواه باشد، آنگاه اعداد صحیح و منحصر به فرد q و r یافت می‌شوند به گونه‌ای که:

$$a = mq + r \qquad , \qquad ۰ \le r < m$$

که در این صورت r را باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر m می‌نامیم. که بنابر قضیهٔ تقسیم، r فقط و فقط یکی از اعداد $۰, ۱, ۲, \ldots, m-۱$ می‌تواند باشد.

با توجه به مطلب فوق دستهٔ همنهشتی را تعریف می‌کنیم.

MATH75.IR

تعریف: مجموعهٔ تمام اعداد صحیح x که به سنج m با a برابر می‌باشند را یک دستهٔ همنهشتی می‌نامند و آن را با R_a و یا $[a]$ نشان می‌دهند. بنابراین:

$$[a] = R_a = \{x | x \in Z \ , \ x \equiv a \pmod{m}\}$$

اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر m برابر r باشد در این صورت برای هر عدد صحیح x، اگر $x \equiv a \pmod{m}$ آنگاه $x \equiv r \pmod{m}$ و برعکس، بنابراین $R_a = R_r$. همچنین اگر $b \equiv a \pmod{m}$ در این صورت برای هر عدد صحیح x، اگر $x \equiv a \pmod{m}$ آنگاه $x \equiv b \pmod{m}$ و برعکس، بنابراین $R_a = R_b$. خلاصه مطلب این که کلیه اعداد متعلق به یک دستهٔ همنهشتی دارای دسته‌های همنهشتی مساوی می‌باشند و آن دسته همان دستهٔ همنهشتی باقی‌ماندهٔ تقسیم آنها بر m می‌باشد. یعنی اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر m برابر r باشد آنگاه:

$$b \in R_a \quad \Longleftrightarrow \quad R_b = R_a = R_r$$

از طرفی چون باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد صحیح بر m فقط یکی از اعداد $۰, ۱, ۲, \ldots, m-۱$ می‌تواند باشد لذا به سنج m فقط m دستهٔ همنهشتی متمایز وجود دارد که عبارتند از $R_۰, R_۱, R_۲, \ldots, R_{m-۱}$ و یا $[۰], [۱], [۲], \ldots, [m-۱]$. البته نماد R_a که برای دستهٔ همنهشتی a به سنج m به کار رفته است، عدد m را در خود نشان نمی‌دهد. لذا هر جا بیم اشتباه می‌رود، می‌بایست سنج m تصریح گردد.

مثال ۷: به سنج ۳ فقط سه دستهٔ همنهشتی وجود دارد که عبارتند از:

$$\cdots = [-۳] = [۰] = [۳] = [۶] = \cdots = \{x | x \equiv ۰ \pmod{۳} \ , \ x \in Z\}$$
$$\cdots = [-۲] = [۱] = [۴] = [۷] = \cdots = \{x | x \equiv ۱ \pmod{۳} \ , \ x \in Z\}$$
$$\cdots = [-۱] = [۲] = [۵] = [۸] = \cdots = \{x | x \equiv ۲ \pmod{۳} \ , \ x \in Z\}$$

دستهٔ اول یعنی $[۰]$ مجموعهٔ تمام اعداد صحیحی است که در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده‌ای مساوی صفر دارند.

دستهٔ دوم یعنی $[۱]$ مجموعهٔ تمام اعداد صحیحی است که در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده‌ای مساوی ۱ دارند.

دستهٔ سوم یعنی $[۲]$ مجموعهٔ تمام اعداد صحیحی است که در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده‌ای مساوی ۲ دارند.

مثال ۸: ثابت کنید در بین هر $n+۱$ عدد صحیح متمایز لااقل دو عدد یافت می‌شوند که تفاضل آنها بر n بخش‌پذیر باشد.

برهان: چون به سنج n فقط n دستهٔ همنهشتی متمایز وجود دارد لذا لااقل دو عدد از $n+۱$ عدد فوق در یک دستهٔ همنهشتی به سنج n قرار دارند لذا طبق تعریف دستهٔ همنهشتی، این دو عدد با هم همنهشتند. لذا تفاضلشان بر n بخش‌پذیر است.

قضیهٔ زیر یک خاصیت مهم را در مورد دسته‌های همنهشتی بیان می‌کند.

MATH75.IR

قضیه ۷: فرض کنید R_a دستهٔ همنهشتی a به سنج m باشد و p و q دو عضو دلخواه از R_a باشند در این صورت $(m,p)=(m,q)$.

برهان: با توجه به تعریف دستهٔ همنهشتی داریم:

$$p \equiv q \pmod{m}$$

بنابراین عدد صحیح k وجود دارد به طوری که $p-q=m\cdot k$ و یا $p=q+mk$ از طرفی طبق نتیجه ۹ بخش بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک داریم:

$$(m,q)=(m,km+q)$$

بنابراین $(m,q)=(m,p)$. بیان دیگر این قضیه آن است که کلیه اعضای یک دستهٔ همنهشتی به سنج m، با m دارای بزرگترین عامل مشترک یکسان می‌باشند. که اگر r، باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر m باشد داریم $(m,p)=(m,q)=(m,r)$.

مثال ۹: دستهٔ همنهشتی $R_6=\{\ldots,-9,6,21,36,\ldots\}$ به سنج ۱۵ را درنظر بگیرید. بزرگترین عامل مشترک هر عضو R_6 با ۱۵ برابر ۳ است.

تعریف: مجموعه‌ای از n عدد صحیح $r_n,\ldots,r_2,r_1$ را یک دستگاه کامل مانده‌ها به سنج n گویند هرگاه هر عدد صحیح دلخواه با یک و فقط یکی از اعداد r_n و $\cdots,r_2,r_1$ همنهشت باشد.

با توجه به تعریف فوق اگر مجموعهٔ $\{r_1,r_2,\ldots,r_n\}$ یک دستگاه کامل مانده‌ها به سنج n باشد آنگاه هیچ دو عضو آن متعلق به یک دستهٔ همنهشتی به سنج n نخواهند بود زیرا اگر به طور مثال r_i و r_j دو عضو متمایز از مجموعهٔ فوق در یک دستهٔ همنهشتی قرار داشته باشند می‌بایست $r_i \equiv r_j \pmod{n}$ که در این صورت اگر عدد صحیح x با r_i همنهشت باشد در این صورت با r_j نیز همنهشت است و این مخالف دستگاه کامل مانده‌ها بودن مجموعهٔ داده شده است زیرا هر عدد صحیح می‌بایست فقط و فقط با یکی از اعضای دستگاه کامل مانده‌ها همنهشت باشد. به‌طور خلاصه می‌توان گفت هر یک از $r_n,\ldots,r_2,r_1$ متعلق به یک و فقط یک دستهٔ همنهشتی به سنج n می‌باشد. از طرفی اگر $r_n,\ldots,r_2,r_1$ هر یک متعلق به یک و فقط یک دستهٔ همنهشتی به سنج n باشند در این صورت $\{r_1,r_2,\ldots,r_n\}$ یک دستگاه کامل مانده‌ها به سنج n خواهد بود. زیرا هر عدد صحیح متعلق به یک و فقط یک دستهٔ همنهشتی است. لذا هر عدد صحیح با یک و فقط یکی از اعداد $r_n,\ldots,r_2,r_1$ همنهشت خواهد بود و این همان تعریف دستگاه کامل مانده‌ها است. بنابراین می‌توان نتیجهٔ زیر را بیان کرد.

نتیجه: مجموعهٔ $\{r_1,r_2,\ldots,r_n\}$ یک دستگاه کامل مانده‌ها به سنج n است هرگاه هر یک از اعضای این مجموعه متعلق به یک و فقط یک دستهٔ همنهشتی به سنج n باشد.

مثال ۱۰: مجموعهٔ $\{-5,14,21,8\}$ یک دستگاه کامل مانده‌ها به سنج ۴ است زیرا اعداد $-5,14,21,8$ به ترتیب از دسته‌های همنهشتی R_3,R_2,R_1,R_0 به سنج ۴ انتخاب شده‌اند.

MATH75.IR

قضیه ۸: مجموعهٔ n عضوی C از اعداد صحیح یک دستگاه کامل مانده‌ها به سنج n است اگر و فقط اگر هیچ دو عضو C به سنج n با هم همنهشت نباشند. به عبارت دیگر مجموعهٔ n عضوی C یک دستگاه کامل مانده‌ها به سنج n است اگر و فقط اگر برای $a,b \in C$ هرگاه $a \equiv b \pmod{n}$ آنگاه $a = b$.

برهان: اگر C دستگاه کامل مانده‌ها باشد آنگاه هر عضو C متعلق به یک و فقط یک دستهٔ همنهشتی است. لذا هیچ دو عضو متمایز آن نمی‌توانند به سنج n با هم همنهشت باشند یعنی اگر دو عضو همنهشت شدند آنگاه آن دو عضو با هم برابرند. عکس قضیه کاربرد بیشتری دارد. فرض کنید مجموعهٔ n عضوی C دارای این خاصیت است که اگر $a,b \in C$ و $a \equiv b \pmod{n}$ آنگاه $a = b$ باشد. این خاصیت نشان می‌دهد هیچ دو عضو متمایزی از C با یکدیگر همنهشت نیستند و چون تعداد اعضای C، n تاست لذا هر عضو C از یک و فقط یک دستهٔ همنهشتی انتخاب شده است و این نشان می‌دهد C یک دستگاه کامل مانده‌ها به سنج n می‌باشد.

مثال ۱۱: نشان دهید هر n عدد صحیح متوالی تشکیل یک دستگاه کامل مانده‌ها به سنج n می‌دهند. $(n > ۱ \ , \ n \in \mathbf{Z})$

حل: مجموعهٔ $A = \{k+۱, k+۲, \ldots, k+n\}$ را با فرض صحیح بودن k در نظر بگیرید. فرض کنید A یک دستگاه کامل مانده‌ها نباشد یعنی دو عضو متمایز آن به سنج A با یکدیگر همنهشت باشند (یعنی متعلق به یک دستهٔ همنهشتی باشند). مثلاً دو عضو $k+i$ و $k+j$ با فرض $i \neq j$ و $۱ \leq i \leq n$ و $۱ \leq j \leq n$.

در این صورت داریم:

$$k+i \equiv k+j \pmod{n} \quad \Longrightarrow \quad i \equiv j \pmod{n}$$

لذا می‌بایست $n|i-j$ ولی چنین چیزی ممکن نیست زیرا با توجه به شرایط i,j داریم $|i-j| < n$، که این خلاف $n|i-j$ می‌باشد. در حالت خاص مجموعهٔ $C_n = \{۰, ۱, ۲, \ldots, n-۱\}$ یک دستگاه کامل مانده‌ها به سنج n است.

مثال ۱۲: برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید عددی یافت می‌شود که بر n بخش پذیر است و در ضمن فقط از ارقام صفر و یک تشکیل شده است.

برهان: $n+۱$ عدد زیر را درنظر بگیرید.

$$a_۱ = ۱ \ , \ a_۲ = ۱۱ \ , \ a_۳ = ۱۱۱, \ \ldots \ , \ a_{n+۱} = \underbrace{۱۱\ldots۱۱}_{n+۱ \text{ بار}}$$

هر یک از a_i ها فقط با یک عضو از مجموعهٔ $C_n = \{۰, ۱, ۲, \ldots, n-۱\}$ به سنج n همنهشت می‌باشد، لذا طبق لانه کبوتری، لااقل دو عدد متمایز i,j یافت می‌شوند به طوری که $۱ \leq i,j \leq n+۱$ و $a_i \overset{n}{\equiv} a_j$، بنابراین $a_i - a_j$ عددی است که مضرب n می‌باشد و در ضمن تنها از ارقام صفر و یک تشکیل یافته است.

قضیه ۹: فرض کنید C_m یک دستگاه کامل مانده‌ها به سنج m باشد و $(a,m) = ۱$. در این صورت برای هر

MATH75.IR

عدد صحیح b، مجموعهٔ

$$D_m = \{ax + b \mid x \in C_m\}$$

نیز یک دستگاه کامل مانده‌ها به سنج m است.

برهان: فرض کنیم چنین نباشد. پس دو عدد $x_1, x_2 \in C_m$ یافت می‌شوند به گونه‌ای که $ax_1 + b \equiv ax_2 + b \pmod{m}$ و لذا $ax_1 \equiv ax_2 \pmod{m}$. بنابراین بدست می‌آید $x_1 \equiv x_2$ و این با دستگاه کامل بودن C_m تناقض دارد. بدین ترتیب حکم اثبات شد.

مثال ۱۳: مجموعهٔ $\{7x + 3 \mid x \in \mathbf{Z}\ ,\ 0 \le x \le 8\}$ یک دستگاه کامل مانده‌ها به سنج ۹ می‌باشد.

قضیه ۱۰: (کوچک فرما) فرض کنید p یک عدد اول و a یک عدد صحیح باشد به طوری که $(a,p) = 1$، در این صورت:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

اثبات: مجموعهٔ $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ یک دستگاه کامل مانده‌ها به سنج p می‌باشد. بر طبق قضیهٔ بالا مجموعهٔ $\{0, a, 2a, \ldots, (p-1)a\}$ نیز یک دستگاه کامل مانده ها به سنج p را تشکیل می‌دهد. با توجه به تعریف دستگاه کامل مانده‌ها، هر عضو از مجموعهٔ اول با یک و فقط یک عضو از مجموعهٔ دوم به سنج p همنهشت است لذا حاصل‌ضرب اعضای مجموعهٔ اول با حاصل‌ضرب اعضای مجموعهٔ دوم به سنج p همنهشت می‌باشد (عنصر صفر را کنار می‌گذاریم). یعنی:

$$1 \times 2 \times \cdots \times (p-1) \overset{p}{\equiv} a \times 2a \times \cdots \times (p-1)a)$$

در نتیجه $(p-1)! \overset{p}{\equiv} (p-1)!a^{p-1}$ و با توجه به این که $(p, (p-1)!) = 1$ داریم:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

نتیجه‌ای که از این قضیه می‌توان گرفت این است که برای هر عدد صحیح a و عدد اول p داریم:

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

مثال ۱۴: باقی‌ماندهٔ تقسیم $1^7 + 2^7 + \cdots + 6^7$ بر ۷ برابر است با، باقی‌ماندهٔ تقسیم $1 + 2 + \cdots + 6$ بر ۷ یعنی صفر.

مثال ۱۵: اگر $(a, 13) = (b, 13) = 1$ آنگاه $13 | a^{24} - b^{24}$ زیرا:

$$a^{12} \equiv 1 \pmod{13}\ ,\ b^{12} \equiv 1 \pmod{13}$$

بنابراین داریم:

$$a^{24} \equiv 1 \pmod{13}\ ,\ b^{12} \equiv 1 \pmod{13}$$

MATH75.IR

و از آنجا داریم:

$$a^{۲۴} - b^{۲۴} \equiv ۰ \quad (mod\ ۱۳)$$

یعنی $a^{۲۴} - b^{۲۴}$ بر ۱۳ بخش پذیر است.

مثال ۱۶: فرض کنید p عددی اول و a, b اعدادی صحیح باشند. نشان دهید:

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \quad (mod\ p)$$

حل: طبق نتیجهٔ قضیهٔ کوچک فرما داریم:

$$(a+b)^p \equiv a+b \quad (mod\ p)$$
$$a^p \equiv a \quad (mod\ p)$$
$$b^p \equiv b \quad (mod\ p)$$

با توجه به سه رابطهٔ فوق اثبات مسأله مشخص می‌شود.

به طور مثال $۱۵^{۱۳} - ۸^{۱۳} - ۷^{۱۳}$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

دستگاه مخفف مانده‌ها

تعریف: برای هر عدد طبیعی m، تعداد اعداد طبیعی نابیشتر از m و متباین با m را با $\varphi(m)$ نشان می‌دهیم و به آن تابع اویلر می‌گوییم به‌طور مثال $\varphi(۸) = ۴$ زیرا اعداد طبیعی نابیشتر از ۸ و متباین با ۸ عبارتند از $۱, ۳, ۵, ۷$. بدیهی است که $\varphi(۱) = ۱$ و برای اعداد طبیعی $m > ۱$، $\varphi(m)$ عبارت است از تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از m که نسبت به m اولند. اگر p عددی اول باشد، چون تمام اعداد طبیعی کوچکتر از p نسبت به p اولند، لذا $\varphi(p) = p - ۱$.

با توجه به قضیه ۷، اگر a, b دو عضو از یک دستهٔ همنهشتی به سنج m باشند آنگاه $(a, m) = (b, m)$. به عبارت دیگر اگر برای عدد صحیح و دلخواه a داشته باشیم $(a, m) = d$ آنگاه برای هر عدد صحیح دلخواه b متعلق به دستهٔ همنهشتی a به سنج m (در واقع برای هر عدد صحیح b با شرط $b \equiv a \ (mod\ m)$) نیز داریم $(b, m) = d$. لذا می‌توان گفت که یا تمام اعضای یک دستهٔ همنهشتی به سنج m، نسبت به m اولند یا هیچ کدام از آنها نسبت به m اول نیستند. لذا قضیه زیر بلافاصله اثبات می‌شود.

قضیه ۱۱: به ازای هر عدد طبیعی m، دقیقاً $\varphi(m)$ دستهٔ مختلف همنهشتی به سنج m وجود دارد به طوری که اعضای آنها نسبت به m اول باشند.

با توجه به این قضیه هر دستگاه کامل مانده‌ها به سنج m، شامل $\varphi(m)$ عدد صحیح متباین با m است. و برعکس، هر عدد صحیح که نسبت به m اول باشد باید فقط با یکی از این اعداد به سنج m همنهشت باشد. با توجه به توضیحات فوق می‌توانیم تعریف زیر را داشته باشیم:

MATH75.IR

تعریف: مجموعهٔ $\{a_1, a_2, \ldots, a_{\varphi(m)}\}$ که اعضای آن با m متباین می‌باشند را یک دستگاه مخفف مانده‌ها به سنج m گوییم هرگاه هر عدد صحیح متباین با m، با یک و تنها یکی از اعضای آن به سنج m همنهشت باشد. به طور مثال مجموعهٔ $C_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ یک دستگاه کامل مانده‌ها به سنج ۱۰ و مجموعهٔ $R = \{1, 3, 7, 9\}$ یک دستگاه مخفف مانده‌ها به سنج ۱۰ می‌باشد. با توجه به مثال فوق دیده می‌شود که برای به‌دست آوردن یک دستگاه مخفف مانده‌ها به سنج m، تمام اعداد طبیعی کمتر از m که نسبت به m اول می‌باشند را درنظر بگیریم. قضیه زیر را که شبیه قضیه ۹ برای دستگاه کامل مانده‌هاست، شرایط کلی یک دستگاه مخفف مانده‌ها را بیان می‌کند.

قضیه ۱۲: مجموعهٔ $\varphi(m)$ عضوی R یک دستگاه مخفف مانده‌ها به سنج m است اگر و فقط اگر دو شرط زیر برقرار باشد:

(۱) برای هر $a \in R$ داشته باشیم $(a, m) = 1$.

(۲) برای هر $a, b \in R$ اگر $a \equiv b \pmod{m}$ آنگاه $a = b$.

برهان: با توجه به تعاریف و توضیحات داده شده، اثبات بدیهی است.

همچنین شبیه قضیه ۱۰ داریم:

قضیه ۱۳: اگر R یک دستگاه مخفف مانده‌ها به سنج m باشد و $(a, m) = 1$، آنگاه مجموعهٔ $Q = \{ax | x \in R\}$ نیز یک دستگاه مخفف مانده‌ها به سنج m است.

برهان: کافی است ثابت کنیم مجموعهٔ $\varphi(m)$ عضوی جدید Q دو شرط قضیهٔ ۱۲ را داراست.

اثبات شرط اول: چون $(a, m) = 1$ و برای هر $x \in R$، $(x, m) = 1$ پس $(ax, m) = 1$.

اثبات شرط دوم: فرض کنید $x_1, x_2 \in R$ و $ax_1 \equiv ax_2 \pmod{m}$ لذا چون $(a, m) = 1$ نتیجه می‌گیریم که $x_1 \equiv x_2 \pmod{m}$ که با توجه به شرط دوم قضیه ۱۲ می‌توان گفت $x_1 = x_2$ و لذا $ax_1 = ax_2$. حال به اینجا رسیدیم که قضیه بسیار معروف و کارآمد اویلر را اثبات نماییم:

قضیهٔ ۱۴: (اویلر) برای عدد طبیعی دلخواه n و عدد صحیح a با شرط $(a, n) = 1$ داریم:

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

برهان: فرض کنید $R = \{a_1, a_2, \ldots, a_{\varphi(n)}\}$ یک دستگاه مخفف مانده‌ها به سنج n باشد. با توجه به قضیهٔ قبل، مجموعهٔ

$$Q = \{aa_1, aa_2, \ldots, aa_{\varphi(n)}\}$$

نیز یک دستگاه مخفف مانده‌ها به سنج n می‌باشد. لذا هر یک از اعضای مجموعهٔ R با یک و فقط یک عضو از مجموعهٔ Q همنهشت می‌باشند. بنابراین:

$$(aa_1)(aa_2)\ldots(aa_{\varphi(n)}) \equiv a_1 a_2 \ldots a_{\varphi(n)} \pmod{n}$$

MATH75.IR

در نتیجه:

$$a^{\varphi(n)} \cdot (a_1 a_2 \dots a_{\varphi(n)}) \equiv a_1 a_2 \dots a_{\varphi(n)} \qquad (mod\ n)$$

و چون $(a_1 a_2 \dots a_{\varphi(n)}, n) = 1$ پس خواهیم داشت:

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \qquad (mod\ n)$$

به‌طور مثال چون $\varphi(14) = 6$ پس $25^6 - 1$ بر ۱۴ بخش پذیر است. همچنین چون $\varphi(26) = 12$ پس $49^{12} - 1$ بر ۲۶ بخش پذیر است. در حالت خاص اگر p عددی اول باشد و $(a,p) = 1$ آنگاه چون $\varphi(p) = p - 1$ لذا $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$، که این همان قضیه کوچک فرماست که قبلاً به نحوی دیگر اثبات کرده بودیم.

مثال ۱۷: اعداد طبیعی و بزرگتر از واحد a, n را با شرط $(a,n) = 1$ درنظر بگیرید. ثابت کنید $n | a^{n!} - 1$.

اثبات: با توجه به این که $\varphi(n) < n$ پس داریم:

$$n! = 1 \times 2 \times \dots \times \varphi(n) \times \dots \times n = \varphi(n) \cdot k \qquad (k \in N)$$

از طرفی طبق قضیهٔ اویلر داریم:

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \qquad (mod\ n)$$

و از آنجا داریم:

$$a^{\varphi(n) \cdot k} \equiv 1 \qquad (mod\ n)$$

و این نشان می‌دهد که $n | a^{n!} - 1$ با توجه به این که $\varphi(26) = 12$ لذا $5^{12} \overset{26}{\equiv} 1$ ولی از طرفی $5^4 \overset{26}{\equiv} 1$، این نشان می‌دهد که $\varphi(n)$ ممکن است کوچکترین عددی نباشد که برای عدد صحیح a با شرط $(a,n) = 1$ در همنهشتی $a^{\varphi(n)} \equiv 1$ صدق کند. در واقع اگر $(a,n) = 1$ در این صورت قضیه اویلر نشان می‌دهد که همواره عددی طبیعی مانند $\varphi(n)$ وجود دارد به طوری که $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. حال با تعریف زیر سعی می‌کنیم راهی جدید برای استفاده از قضیه اویلر برای خود بگشاییم.

تعریف: فرض کنید m عددی طبیعی و a عددی صحیح باشد به طوری که $(a,m) = 1$، در این صورت کوچکترین عدد طبیعی s که در رابطهٔ

$$a^s \equiv 1 \qquad (mod\ m)$$

صدق کند را مرتبهٔ a به سنج m گویند. و آن را با $ord_m a$ نشان می‌دهند. با توجه به قضیه اویلر بدیهی است که $s \leq \varphi(m)$.

قضیه ۱۵: فرض کنید $a \equiv b \pmod{m}$. نشان دهید مرتبهٔ a به سنج m برابر مرتبهٔ b به سنج m است.

MATH75.IR

برهان: فرض کنید مرتبهٔ a به سنج m برابر s و مرتبهٔ b به سنج m برابر t باشد. همچنین فرض کنید $s > t$. اگر s را بر t تقسیم کنیم داریم $s = t \cdot k + r \quad , \quad 0 \leq r < t$، در این صورت با توجه به این که $a^s \equiv 1$ و $b^t \equiv 1$ خواهیم داشت:

$$b^s = b^{tk+r} \equiv b^r \qquad (mod\ m)$$

و چون $b^s \equiv a^s \equiv 1$ لذا از دو رابطهٔ اخیر نتیجه می‌گیریم که:

$$b^r \equiv 1 \qquad (mod\ m)$$

ولی چون $r < t$ و t مرتبهٔ b به سنج m می‌باشد لذا به تناقض رسیدیم. به همین ترتیب t نمی‌تواند بزرگتر از s باشد، بنابراین $s = t$.

قضیهٔ فوق نشان می‌دهد که تمام اعداد صحیح متعلق به یک دستهٔ همنهشتی به سنج m دارای مرتبهٔ یکسان به سنج m می‌باشند. البته منظور، دسته‌های همنهشتی است که از اعداد صحیح متباین با m تشکیل شده‌اند.

قضیه ۱۶: فرض کنید $(a, m) = 1$ و مرتبهٔ a به سنج m برابر s باشد. همچنین فرض کنید k عددی طبیعی باشد. در این صورت $a^k \equiv 1 \ (mod\ m)$ اگر و فقط اگر $s|k$.

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم $s|k$. در این صورت $k = s \cdot q$ به طوری که $q \in \mathbf{N}$. با توجه به این که $a^s \equiv 1 \ (mod\ m)$ پس $a^{s \cdot q} \equiv 1 \ (mod\ m)$ یعنی $a^k \equiv 1 \ (mod\ m)$. حال فرض می‌کنیم که برای عدد طبیعی k داریم $a^k \equiv 1 \ (mod\ m)$. بنابر قضیه تقسیم، اگر k را بر s تقسیم کنیم باقی ماندهٔ منحصر به فرد r را خواهیم داشت به طوری که:

$$k = s \cdot q + r \qquad 0 \leq r < s \quad (*)$$

بنابراین $a^{sq+r} \equiv 1 \ (mod\ m)$ و از آنجا $(a^s)^q \cdot a^r \equiv 1 \ (mod\ m)$ و چون $a^s \equiv 1 \ (mod\ m)$ پس $a^r \equiv 1 \ (mod\ m)$ ولی چون s مرتبهٔ a به سنج m است لذا می‌بایست $s \leq r$ و این با رابطهٔ $(*)$ تناقض دارد مگر آنکه $r = 0$ و در نتیجه $k = s \cdot q$ یعنی $s|k$.

قضیه ۱۷: فرض کنید $(a, m) = 1$ و s را مرتبهٔ a به سنج m در نظر بگیرید. در این صورت $s|\varphi(m)$

برهان: با توجه به قضیهٔ اویلر $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \ (mod\ m)$ و لذا بنابر قضیه قبل حکم برقرار است.

قضیه ۱۸: فرض کنید $(a, m) = 1$, $s = ord_m a$ و فرض کنید k عددی طبیعی باشد به طوری که $t = ord_m(a^k)$. در این صورت رابطهٔ زیر برقرار است:

$$t = \frac{s}{(k, s)}$$

در حالت خاص اگر $(k, s) = 1$ در این صورت $ord_m a = ord_m(a^k)$

برهان: فرض کنید $(k, s) = m$, $k = mk_1$, $s = ms_1$ بدیهی است که $(s_1, k_1) = 1$ باید ثابت کنیم $t = s_1$.

MATH75.IR

اولاً چون $a^{kt} \equiv ۱ \pmod{m}$ لذا $s|kt$ و از آنجا $s_۱|k_۱t$ و چون $(s_۱, k_۱) = ۹$ پس $s_۱|t$.
ثانیاً داریم:

$$(a^k)^{s_۱} = a^{s_۱k} = a^{s_۱mk_۱} = a^{ks_۱} \equiv ۱ \pmod{m}$$

چون مرتبهٔ a^k به سنج m برابر t می‌باشند لذا $t|s_۱$. از دو نتیجهٔ قسمت بالا حکم مسأله یعنی $t = s_۱$ اثبات می‌شود.
این بخش را با ذکر چند خاصیت از $\varphi(m)$ به پایان می‌رسانیم.

خواص تابع اویلر $\varphi(m)$

قبل از هر مطلبی ذکر قضیه زیر لازم است.

قضیه ۱۹: اگر n, m دو عدد طبیعی باشند و $(m, n) = ۱$ آنگاه:

$$\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$$

برهان: اعداد طبیعی نابیشتر از mn را به صورت زیر در یک ماتریس $m \times n$ قرار می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & \dots & n \\ n+۱ & n+۲ & n+۳ & \dots & ۲n \\ ۲n+۱ & ۲n+۲ & ۲n+۳ & \dots & ۳n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (m-۱)n+۱ & (m-۱)n+۲ & (m-۱)n+۳ & \dots & mn \end{bmatrix}$$

این ماتریس دارای خواص زیر است:

(i) اعضای هر ستون تشکیل یک دستهٔ کامل مانده‌ها به سنج m را می‌دهند زیرا مجموعهٔ $\{۰, ۱, ۲, \dots, m-۱\}$ یک دستهٔ کامل مانده‌هاست و چون $(n, m) = ۱$ لذا مجموعهٔ $\{r, n+r, ۲n+r, \dots, (m-۱)n+r\}$ نیز یک دستهٔ کامل مانده‌ها به سنج m است. نتیجه‌ای که می‌توان گرفت این است که در هر ستون دقیقاً $\varphi(m)$ عدد وجود دارد که نسبت به m اول است.

(ii) هر سطر این ماتریس تشکیل یک دستهٔ کامل مانده‌ها به سنج n را می‌دهند زیرا مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \dots, n\}$ یک دستهٔ کامل مانده‌ها به سنج n است لذا مجموعهٔ $\{qn+۱, qn+۲, \dots, qn+n\}$ نیز یک دسته کامل مانده‌ها به سنج n است. نتیجه‌ای که می‌توان گرفت این است که در هر سطر این ماتریس دقیقاً $\varphi(n)$ عدد وجود دارد که نسبت به n اول است.

MATH75.IR

حال به اثبات قضیه می‌پردازیم. بدیهی است که اگر r_i از سطر اول نسبت به n اول باشد، تمام اعضای هم ستون با r_i نیز نسبت به n اولند و همچنین اگر r_i از سطر اول نسبت به n اول نباشد، تمام اعضای هم ستون با r_i نیز نسبت به n اول نمی‌باشند. بنابراین دقیقاً $\varphi(n)$ ستون داریم که اعضای تمام این ستون‌ها نسبت به n اولند. و در هر ستون طبق خاصیت (i) دقیقاً $\varphi(m)$ عدد وجود دارد که نسبت به m اولند. پس تعداد کل اعدادی که هم نسبت به n و هم نسبت به m و در نتیجه نسبت به mn اولند برابر است با $\varphi(n)\cdot\varphi(m)$ و این اثبات قضیه را کامل می‌کند. پس:

$$\varphi(mn)=\varphi(m)\cdot\varphi(n)$$

قضیه ۲۰: اگر تجزیهٔ عدد طبیعی $n>1$ به عوامل اول متمایز به صورت زیر باشد:

$$n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$$

در این صورت داریم:

$$\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$$

برهان: برای اثبات این قضیه، که روشی عملی برای به‌دست آوردن $\varphi(n)$ به ما ارایه می‌کند، ابتدا لم زیر را مطرح می‌کنیم:

لم: اگر p عددی اول و k عددی طبیعی باشد آنگاه

$$\varphi(p^k)=p^k\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

اثبات لم: اعداد طبیعی نابیشتر از p^k که نسبت به p^k اول نیستند عبارتند از:

$$p\ ,\ 2p\ ,\ 3p\ ,\ \ldots\ ,\ p^{k-1}\cdot p$$

که تعداد آنها p^{k-1} تاست پس:

$$\varphi(p^k)=p^k-p^{k-1}=p^k\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

حال به اثبات قضیه می‌پردازیم. ابتدا در نظر داریم که برای هر $1\le i\neq j\le r$، $(p_i,p_j)=1$ و بنابر قضیهٔ قبل داریم:

$$\begin{aligned}\varphi(n)&=\varphi\left(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}\right)\\&=\varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right)\varphi\left(p_2^{\alpha_2}\right)\cdots\varphi\left(p_r^{\alpha_r}\right)\\&=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}\left(1-\tfrac{1}{p_1}\right)\left(1-\tfrac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\tfrac{1}{p_r}\right)\\&=n\left(1-\tfrac{1}{p_1}\right)\left(1-\tfrac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\tfrac{1}{p_r}\right)\end{aligned}$$

MATH75.IR

اگر از نماد

$$\prod_{p|a}\left(۱-\frac{۱}{p}\right)$$

برای حاصل‌ضرب تمام عبارت‌هایی به صورت $\left(۱-\frac{۱}{p}\right)$، که در آن حوزهٔ تغییرات p تمام عوامل اول و متمایز a است استفاده نماییم قضیهٔ اخیر را می‌توانیم به صورت زیر نمایش دهیم:

به ازای هر عدد طبیعی $n>۱$،

$$\varphi\ (n)=n\prod_{p|a}\left(۱-\frac{۱}{p}\right)$$

مثال ۱۸: مطلوب است محاسبهٔ $\varphi(۳۶۰)$.

حل: چون $۳۶۰=۲^۳\times۳^۲\times۵^۱$ لذا داریم:

$$\varphi\ (۳۶۰)=۳۶۰\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)\left(۱-\frac{۱}{۳}\right)\left(۱-\frac{۱}{۵}\right)=۹۶$$

تمرین

۱. فرض کنید n,m، دو عدد طبیعی دلخواه باشند. آیا ممکن است عدد $m!+n!$ به عدد ۱۹۹۰ ختم شده باشد.

۲. نشان دهید تعداد کسرهای تحویل ناپذیر $\frac{a}{b}$ با شرط $۰<\frac{a}{b}\le۱$, $۱\le b\le n$ درست برابر است با:

$$\varphi(۱)+\varphi(۲)+\cdots+\varphi(n)$$

۳. فرض کنید مجموعهٔ $\{r_۱,r_۲,\ldots,r_s\}$ یک دستگاه مخفف مانده‌ها به سنج عدد فرد m باشد. ثابت کنید:

$$r_۱+r_۲+\cdots+r_s\equiv۰\qquad(mod\ m)$$

۴. فرض کنید x عددی صحیح و p عدد اول فردی باشد که $x^۲+۱$ را عاد کند، ثابت کنید:

$$p\equiv۱\qquad(mod\ ۴)$$

۵. نشان دهید معادلهٔ $y^۲=x^۳+۲۳$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی جواب ندارد.

۶. فرض کنید $a^{m-۱}\equiv۱\ \ (mod\ m)$ و به ازای هر $r|m-۱$, $r<m-۱$، $a^r\not\equiv۱\ \ (mod\ m)$. ثابت کنید با این شرایط m اول است.

۷. فرض کنید عدد صحیح m عامل اولی به شکل $۴k+۳$ ندارد. ثابت کنید معادلهٔ زیر به ازای عدد صحیح و دلخواه n جواب ندارد.

$$y^۲+۴m^۲=x^۳+(۴n-۱)^۳$$

MATH75.IR

۸. فرض کنید p عددی اول باشد به طوری که $n < p < ۲n$. در این صورت ثابت کنید $\binom{۲n}{n} \equiv ۰ \pmod{p}$ ولی $\binom{۲n}{n} \not\equiv ۰ \pmod{p^۲}$

۹. فرض کنید p عددی اول و بزرگتر از ۳ باشد. نشان دهید که صورت کسر

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{p-۱}$$

بر $p^۲$ بخش‌پذیر است. (این مسأله به قضیهٔ هوستن هولم معروف است).

قضیه ویلسون:

به‌ازای هر عدد اول p داریم $(p-۱)! \overset{p}{\equiv} -۱$.

اثبات: ابتدا ثابت می‌کنیم به‌ازای هر عدد صحیح a، با شرط $a < p$، عدد یکتای a' وجود دارد به‌طوری که $aa' \overset{p}{\equiv} ۱$. برای اثبات این مطلب دستهٔ اعداد زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\{a', ۲a', ۳a', \ldots, (p-۲)a', (p-۱)a'\}$$

واضح است که هیچ‌کدام از اعضای مجموعهٔ بالا بر p بخشپذیر نیستند و همچنین هیچ دو عضوی از آن به هنگ p همنهشت نیستند بنابراین مجموعهٔ $p-۱$ عضوی بالا باید به هنگ p، زیرمجموعهٔ $p-۱$ عضوی $\{۱, ۲, \ldots, p-۱\}$ باشد. بنابراین باید این دو مجموعه به هنگ p با هم برابر باشند. از این‌رو عدد ۱ در مجموعهٔ مفروض ظاهر شده است. اثبات یکتایی عدد a' به خودتان واگذار می‌شود. (به عدد a'، عکس حسابی عدد a گویند).

واضح است که عکس حسابی اعداد $۱, p-۱$ خودشان هستند، بنابراین مجموعهٔ $\{۲, ۳, \ldots, p-۲\}$ را می‌توان به دو مجموعهٔ $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_{\frac{p-۳}{۲}}\}$ را می‌توان $\{b_۱, b_۲, \ldots, b_{\frac{p-۳}{۲}}\}$ طوری تقسیم کرد که

$$a_i b_i \overset{p}{\equiv} ۱ \qquad\qquad i = ۱, ۲, \ldots, \frac{p-۳}{۲}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}(p-۱)! &= ۱ \times ۲ \times \ldots \times (p-۱) \\ &\overset{p}{\equiv} ۱ \times (p-۱) \times a_۱ b_۱ \times \ldots \times a_{\frac{p-۳}{۲}} b_{\frac{p-۳}{۲}} \\ &\overset{p}{\equiv} (p-۱) \overset{p}{\equiv} -۱\end{aligned}$$

MATH75.IR

معادلهٔ سیاله

معادلات خطی

با یک قضیه این بخش را آغاز می‌کنیم.

قضیه ۱: شرط لازم و کافی برای آنکه معادلهٔ خطی $ax + by = c$، با فرض صحیح بودن اعداد a, b, c در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب داشته باشد آن است که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a, b عدد c را بشمارد.

برهان: فرض کنید زوج (x_0, y_0) یک جواب این معادله باشد و $(a, b) = d$، در این صورت $d|a$ و $d|b$ درنتیجه $d|ax_0 + by_0$ یعنی $d|c$. برعکس فرض کنید $(a, b) = d$ و $d|c$ در این صورت طبق قضیهٔ بزو اعداد صحیح m و n موجودند به قسمی که $am + bn = d$. در این صورت از تساوی $c = dk$، که k عددی است صحیح، می‌توان نتیجه گرفت:

$$c = dk = a(mk) + b(nk)$$

تساوی اخیر نشان می‌دهد معادله دارای جواب $x_0 = mk, y_0 = nk$ می‌باشد.

قضیه ۲: اگر $(a, b) = d$ و x_0, y_0 جوابی برای معادلهٔ خطی $ax + by = c$ باشد، جواب کلی آن به صورت $x = x_0 + k\frac{b}{d}$, $y = y_0 - k\frac{a}{d}$ است.

برهان: بدیهی است که $x_0 + k\frac{b}{d}$, $y_0 - k\frac{a}{d}$ در معادله صدق می‌کنند.

فرض کنید x_1, y_1 جواب دیگری برای $ax + by = c$ باشد، داریم:

$$\begin{aligned}
& ax_1 + by_1 = ax_0 + by_0 \\
\Longrightarrow \quad & \frac{a}{d}(x_1 - x_0) = -\frac{b}{d}(y_1 - y_0) \\
\Longrightarrow \quad & \frac{b}{d} \mid \frac{a}{d}(x_1 - x_0) \\
\Longrightarrow \quad & \frac{b}{d} \mid x_1 - x_0 \\
\Longrightarrow \quad & x_1 = x_0 + k\frac{b}{d}
\end{aligned}$$

MATH75.IR

و همچنین $y = y_0 - k\frac{a}{d}$ که در آن $k \in \mathbf{Z}$.

نتیجه: اگر $(a,b) = 1$ در این صورت جواب معادلهٔ $ax + by = c$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$x = x_0 + kb \quad , \quad y = y_0 - ka$$

مثال ۱: معادلهٔ $14x + 10y = 20$ را حل کنید.

حل: (روش اول) ابتدا معادله را ساده می‌کنیم تا به $7x + 5y = 10$ برسیم.

یک جواب این معادله $x_0 = 0$ و $y_0 = 2$ می‌باشد. لذا جواب کلی این معادله به صورت $x = 5k$ و $y = 2 - 7k$ می‌باشد که در آن $k \in \mathbf{Z}$.

(روش دوم)

$$7x + 5y = 10 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{10 - 7x}{5} = 2 - x - \frac{2x}{5}$$

در تساوی اخیر می‌باید $\frac{x}{5} = k \in \mathbf{Z}$ باشد پس داریم:

$$x = 5k \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{10 - 7(5k)}{5} \quad \Longrightarrow \quad y = 2 - 7k$$

قضیه ۳: معادلهٔ همنهشتی $ax \equiv b (mod\ m)$ با شرط صحیح بودن اعداد a و b دارای جواب در $\mathbf{Z}$ است اگر و فقط اگر $(a,m)|b$.

برهان: با تبدیل معادلهٔ همنشتی داده شده به معادلهٔ $ax - km = b$ اثبات واضح است.

مثال ۲: معادلهٔ همنهشتی $14x \equiv 4 \pmod 8$ را حل کنید.

حل: غیر از دو روشی که در مثال قبل گفتیم، می‌توان به روش زیر نیز حل کرد:

$$7x \equiv 2 \pmod 4 \quad \Longrightarrow \quad 7x \equiv 14 \pmod 4 \quad \Longrightarrow \quad x \equiv 2 \pmod 4$$

مثال ۳: معادلهٔ همنهشتی $x^{38} - 3x^{36} - 8x^2 + 3x^7 - 2 \overset{7}{\equiv} 0$ را حل کنید.

حل: طبق قضیهٔ فرما داریم:

$$x^6 \equiv 1 \pmod 7$$

زیرا $x \equiv 0 \pmod 7$ در معادله مفروض صدق نمی‌کند. پس معادله به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} & x^2(x^6)^6 - 3(x^6)^6 - 8x^2 + 3x.x^6 - 2 \equiv 0 \pmod 7 \\ \Longrightarrow \quad & x^2 - 3 - 8x^2 + 3x - 2 \equiv 0 \pmod 7 \\ \Longrightarrow \quad & 3x \equiv 5 \equiv 12 \pmod 7 \\ \Longrightarrow \quad & x \equiv 4 \pmod 7 \end{aligned}$$

MATH75.IR

چند معادلهٔ سیالهٔ کلاسیک

در این بخش بدون بحث در مورد اثبات قضایا و نتایج، مطالبی را ارایه می‌کنیم. علاقمندان به اثبات می‌توانند به کتاب «آشنایی با نظریهٔ اعداد» نوشتهٔ «ویلیام و. آدامز» و «لری جوئل گولدشتین» مراجعه کنند.

معادلهٔ $x^2+y^2=z^2$

قضیه ۴: هر جواب معادلهٔ $x^2+y^2=z^2$ به‌صورت

$$x=\pm 2abd \quad , \quad y=\pm(a^2-b^2)d \quad , \quad z=\pm(a^2+b^2)d$$

یا به‌صورت مشابهی است که جای x و y با هم عوض شده‌اند.اعداد d,b,a هر عدد صحیحی می‌توانند باشند. حال قبل از ارایه نتیجهٔ این قضیه، ابتدا تعریف زیر را انجام می‌دهیم.

تعریف: فرض کنید(x,y,z) یک جواب $x^2+y^2=z^2$ باشد، به‌طوری که x,y,z هیچ عامل مشترکی بزرگتر از ۱ نداشته باشند. در این صورت (x,y,z) را یک جواب اولیه گویند.

نتیجه: فرض کنید(x,y,z) با این شرط که $x,y,z>0$ یک جواب اولیهٔ معادلهٔ فیثاغورسی باشد. در این صورت دو عدد صحیح مثبت b,a با شرایط $(a,b)=1$، یکی از آنها زوج و $a>b$ موجودند، به قسمی که یا

$$x=2ab \quad , \quad y=a^2-b^2 \quad , \quad z=a^2+b^2$$

یا همین دستورها، وقتی که جای x و y با هم عوض شده باشند.

از بحث فوق نتایج زیر حاصل می‌شود:

۱. تعداد جواب‌های $x^2+y^2=z^{2^n}$ با شرط $xyz\neq 0$ و $n\geq 1$، نامتناهی است.

۲. معادلهٔ $x^2+y^4=z^2$ با شرط $xyz\neq 0$ و $(x,y)=1$ به تعداد نامتناهی جواب دارد.

۳. برای هر $n\geq 3$، یک سه تایی فیثاغورسی (x,y,z) وجود دارد، به‌طوری که یکی از مقادیر z,y,x برابر با n باشد.

۴. با معلوم بودن m، معادلهٔ سیالهٔ $x^2-y^2=m^3$ نسبت به y,x حل‌پذیر است.

۵. برای هر مقدار مفروض m و $k\geq 3$ معادلهٔ سیالهٔ $x^2-y^2=m^k$ نسبت به x,y حل‌پذیر است.

MATH75.IR

معادله $x^۴ + y^۴ = Z^۲$

قضیه ۵: معادلهٔ سیالهٔ $x^۴ + y^۴ = z^۲$ برحسب اعداد صحیح x، y و z جواب ندارد مگر $x = ۰$ یا $y = ۰$.

نتایجی که می‌توان گرفت عبارتند از:

۱. معادلهٔ $\frac{۱}{x^۴} + \frac{۱}{y^۴} = \frac{۱}{z^۴}$ در اعداد صحیح جواب ندارد.

۲. مثلث قائم‌الزاویه‌ای وجود ندارد که طول اضلاع آن اعداد صحیح و هر دو ساق آن مربع کامل باشد.

۳. معادلات سیالهٔ زیر با شرط $xyz \neq ۰$ در اعداد صحیح جواب ندارند.

$$x^۴ - y^۴ = z^۲$$
$$x^۴ + ۲y^۴ = z^۲$$
$$x^۴ + ۶y^۴ = z^۲$$

معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = n$

در واقع سؤال این است که کدامیک از اعداد صحیح را می‌توان به‌صورت مجموع دو مربع کامل نوشت.

قضیه ۶: اگر m و n هر دو بتوانند به صورت مجموع دو مربع نوشته شوند، mn نیز می‌تواند چنین نوشته شود. با توجه به اتحاد

$$(a^۲ + b^۲)(c^۲ + d^۲) = (ac + db)^۲ + (ad - bc)^۲$$

اثبات بدیهی است. مثلاً از آنجا که $۳^۲ + ۲^۲ = ۱۳$ و $۵^۲ + ۲^۲ = ۲۹$ می‌دانیم که $۴^۲ + ۱۹^۲ = ۳۷۷ = ۲۹ \times ۱۳$.

قضیه ۷: فرض کنیم p عددی اول باشد هرگاه $p \equiv ۳ \pmod ۴$، آنگاه p نمی‌تواند به صورت مجموع دو مربع نوشته شود.

قضیه ۸: فرض کنید p عددی اول باشد. هرگاه $p = ۲$ یا $p \equiv ۱ \pmod ۴$، آنگاه p می‌تواند به‌صورت مجموع دو مربع نوشته شود. و بالاخره قضیهٔ اساسی و مهم زیر را داریم.

قضیه ۹: فرض کنید n عدد صحیح مثبتی باشد. می‌نویسیم. $n = s^۲ n_۰$، که در آن عامل‌های اول $n_۰$ دارای توان واحد هستند. در این صورت فقط و فقط وقتی n می‌تواند به‌صورت مجموع دو مربع کامل نوشته شود که عوامل اول $n_۰$ فقط ۲ , $p \equiv ۱ \pmod ۴$ باشند.

به‌طور مثال عدد ۸۸۸ را نمی‌توان به صورت مجموع دو مربع کامل نوشت، زیرا:

$$۸۸۸ = ۲^۲(۲ \times ۳ \times ۳۷)$$

MATH75.IR

و $۳ \equiv ۳ \pmod{۴}$ و یا به عنوان مثال دیگر عدد ۳۳۲۵۱۴ را می‌توان به صورت مجموع دو مربع کامل نوشت زیرا:

$$۳۳۲۵۱۴ = ۲ \times ۳^۲ \times ۷^۲ \times ۱۳ \times ۲۹ = (۳ \times ۷)^۲(۲ \times ۱۳ \times ۲۹)$$

و همچنین $۱ \equiv ۲۹ \equiv ۱۳ \pmod{۴}$. نوشتن عدد ۳۳۲۵۱۴ به‌صورت مجموع دو مربع کامل کار ساده‌ای است. ابتدا اتحاد زیر را درنظر می‌گیریم:

$$(a^۲ + b^۲)(c^۲ + d^۲) = (ac + bd)^۲ + (ad - bc)^۲$$

حال چون $۱۳ = ۲^۲ + ۳^۲$ و $۲۹ = ۲^۲ + ۵^۲$ بنابراین:

$$\begin{aligned} ۱۳ \times ۲۹ &= (۲^۲ + ۳^۲)(۲^۲ + ۵^۲) \\ &= (۲ \times ۲ + ۳ \times ۵)^۲ + (۲ \times ۵ - ۳ \times ۲)^۲ \\ &= ۱۹^۲ + ۴^۲ \end{aligned}$$

مجدداً با استفاده از اتحاد فوق داریم:

$$\begin{aligned} ۲ \times ۱۳ \times ۲۹ &= (۱^۲ + ۱^۲)(۱۹^۲ + ۴^۲) \\ &= (۱ \times ۱۹ + ۱ \times ۴)^۲ + (۱ \times ۴ - ۱ \times ۱۹)^۲ \\ &= ۲۳^۲ + ۱۵^۲ \end{aligned}$$

و لذا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} ۳۳۲۵۱۴ &= (۳ \times ۷)^۲(۲۳^۲ + ۱۵^۲) \\ &= (۳ \times ۷ \times ۲۳)^۲ + (۳ \times ۷ \times ۱۵)^۲ \\ &= ۴۸۳^۲ + ۳۱۵^۲ \end{aligned}$$

معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ + w^۲ = n$

در این قسمت نیز سؤال این است که کدامیک از اعداد صحیح مثبت را می‌توان به‌صورت مجموع چهار مربع کامل نوشت.

قضیه ۱۰: اگر m و n را بتوان به‌صورت مجموع چهار مربع کامل نوشت آنگاه mn را نیز می‌توان به‌صورت مجموع چهار مربع کامل نوشت. با استفاده از اتحاد زیر اثبات بدیهی است.

$$\begin{aligned} (a^۲ + b^۲ + c^۲ + d^۲)(e^۲ + f^۲ + g^۲ + h^۲) &= (ae + bf + cg + dh)^۲ + (af - eb + ch - dg)^۲ \\ &+ (ag - ec + bh - fd)^۲ + (ah - ed + bg - cf)^۲ \end{aligned}$$

ولی قضیه اساسی و مهم در این زمینه در زیر آمده است.

قضیه ۱۱: هر عدد صحیح و مثبت را می‌توان به‌صورت مجموع چهار مربع کامل نوشت.

MATH75.IR

برای به‌دست آوردن چهارمربع کاملی که مجموع آنها عدد طبیعی n را می‌سازد، کافی است n را به عوامل اول تجزیه کنیم، سپس از اتحاد مذکور در قضیهٔ قبل استفاده کنیم. البته اگر بتوانیم n را به حاصل‌ضرب اعدادی که به صورت مجموع چهار مربع کامل هستند تجزیه کنیم، کار ساده‌تر خواهد شد.

مثال ۱۲: عدد ۸۷۰ را به صورت مجموع چهار مربع کامل بنویسید.

حل: از اتحاد مذکور در قضیهٔ قبل استفاده می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned}۸۷۰ &= ۳۰ \times ۲۹ \\ &= (۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲)(۲^۲ + ۵^۲ + ۰^۲ + ۰^۲) \\ &= (۲ + ۱۰)^۲ + (۵ - ۴)^۲ + (-۶ + ۲۰)^۲ + (-۸ - ۱۵)^۲ \\ &= ۱۲^۲ + ۱^۲ + ۱۴^۲ + ۲۳^۲\end{aligned}$$

معادلهٔ پل $x^۲ - dy^۲ = ۱$

حالتی که در آن d مربع کامل است، ما را به‌راحتی به جواب $x = \pm ۱$ و $y = ۰$ رهنمون می‌سازد. پس معادلهٔ پل را فقط در حالتی که $d > ۰$ و مربع کامل نیست، بررسی می‌کنیم. بحث را ابتدا با یک مثال شروع می‌کنیم.

مثال ۴: معادلهٔ $x^۲ - ۲y^۲ = ۱$ را حل کنید.

بدیهی است که $x = \pm ۱$ و $y = ۰$ یک جواب است. فرض کنید $x_۰$ و $y_۰$ جواب دیگری برای معادلهٔ فوق باشد. به‌راحتی می‌توان ثابت کرد که $x = ۳x_۰ + ۴y_۰$ و $y = ۲x_۰ + ۳y_۰$ نیز یک جواب است. حال چون $x_۰ = ۳$ و $y_۰ = ۲$ یک جواب است، پس $x = ۱۷$ و $y = ۱۲$ نیز جواب است، به همین ترتیب $x = ۹۹$ و $y = ۷۰$ نیز جواب است. با ادامهٔ این روند تعداد نامتناهی جواب به‌دست می‌آید. (زیرا y سیر صعودی دارد). طبق معمول قسمت‌های قبل، ابتدا قضیهٔ ابتدایی زیر را مطرح می‌کنیم.

قضیه ۱۳: اگر $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$ هر دو جواب $x^۲ - dy^۲ = ۱$ باشند، آنگاه جواب دیگری مثل $(x_۳, y_۳)$ با فرض $x_۳ = x_۱x_۲ - dy_۱dy_۲$ و $y_۳ = x_۱y_۲ - y_۱x_۲$ برای معادلهٔ پل وجود دارد. با توجه به اتحاد

$$(x_۱^۲ - dy_۱^۲)(x_۲^۲ - dy_۲^۲) = (x_۱x_۲ - dy_۱y_۲)^۲ - d(x_۱y_۲ - x_۲y_۱)^۲$$

اثبات بدیهی است. حال قضیهٔ اساسی زیر را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۴: فرض کنیم $d > ۰$ مربع کامل نباشد. در این صورت معادلهٔ سیالهٔ

$$x^۲ - dy^۲ = ۱$$

برحسب اعداد صحیح x و y، تعدادی نامتناهی جواب دارد.

در اینجا سعی می‌کنیم کلیهٔ جواب‌های معادلهٔ پل را ارایه کنیم. ابتدا توجه داریم که اگر (x, y) یک جواب باشد، آنگاه برای هر حالت ممکن از علامت‌ها، $(\pm x, \pm y)$ نیز جواب است. پس کافی است حالت $x \geq ۰$ و $y \geq ۰$ را

MATH75.IR

بررسی کنیم. علاوه بر این، جواب $(\pm ۱, ۰)$ فقط به‌ازای $x = ۰$ یا $y = ۰$ به‌دست می‌آید. بنابراین کافی است که فقط جوابهای (x, y) با شرط $x > ۰$ و $y > ۰$ را به‌دست آوریم. چنین جواب‌هایی را جواب‌های مثبت می‌نامیم. برای تعیین این‌که یک جواب مثبت است یا خیر، می‌توانیم از قضیهٔ زیر استفاده کنیم.

قضیه ۱۵: فرض کنیم (x, y) یک جواب $x^۲ - dy^۲ = ۱$ باشد. در این‌صورت (x, y) جوابی مثبت است اگر، و فقط اگر:

$$x + \sqrt{d}\, y > ۱$$

حال با توجه به اینکه مجموعه‌های

$$A = \{x + \sqrt{d}\, y | x, y \in Z, d \in N, \ d \text{ مربع کامل نیست}\}$$

$$B = \{x - \sqrt{d}\, y | x, y \in Z, d \in N, \ d \text{ مربع کامل نیست}\}$$

نسبت به ضرب بسته‌اند، لذا اگر $x_۱$ و $y_۱$ اعداد صحیح باشند، آنگاه اعداد صحیح x_n و y_n موجودند، به قسمی که:

$$(x_۱ + \sqrt{d}\, y_۱)^n = x_n + \sqrt{d}\, y_n$$

$$(x_۱ - \sqrt{d}\, y_۱)^n = x_n - \sqrt{d}\, y_n$$

در واقع داریم:

$$\begin{aligned}(x_۱ + \sqrt{d}\, y_۱)^n &= (x_۱ + \sqrt{d}\, y_۱)(x_۱ + \sqrt{d}\, y_۱)^{n-۱} \\ &= (x_۱ + \sqrt{d}\, y_۱)(x_{n-۱} + \sqrt{d}\, y_{n-۱})\end{aligned}$$

که از آنجا خواهیم داشت:

$$x_n = x_۱ x_{n-۱} + d y_۱ y_{n-۱} \quad , \quad y_n = x_۱ y_{n-۱} + y_۱ x_{n-۱} \qquad (*)$$

x_n و y_n به‌دست آمده در روابط بالا در رابطهٔ

$$(x_۱ - \sqrt{d}\, y_۱)^n = x_n - \sqrt{d}\, y_n$$

نیز صدق می‌کنند. به‌راحتی می‌توان تحقیق کرد که (x_n, y_n) نیز یک جواب معادلهٔ $x^۲ - dy^۲ = ۱$ می‌باشد. در نتیجه قضیهٔ مهم زیر را داریم.

قضیه ۱۶: فرض کنید $(x_۱, y_۱)$ یک جواب مثبت معادلهٔ پل که به‌ازای آن $x_۱ + \sqrt{d}\, y_۱$ حداقل است، باشد. به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، x_n و y_n را توسط رابطهٔ

$$x_n + \sqrt{d}\, y_n = (x_۱ + \sqrt{d}\, y_۱)^n$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت کلیه جواب‌های معادلهٔ پل $x^۲ - dy^۲ = ۱$، عبارتند از:

$$(x, y) = (\pm ۱, ۰) \quad , \quad (x, y) = (\pm x_n, \pm y_n)$$

MATH75.IR

که در اینجا کلیهٔ انتخاب‌های ممکن برای علامت‌ها مجاز است. در ضمن کلیهٔ جواب‌ها متمایزند.

مثال ۱۷: معادلهٔ $x^۲ - ۲y^۲ = ۱$ را حل کنید.

مثال ۵: جواب بدیهی $(\pm ۱, ۰)$ را کنار می‌گذاریم. ملاحظه می‌کنیم که $x = ۳$ و $y = ۲$ یک جواب معادلهٔ فوق است. بنابراین کوچکترین جواب $(x_۱, y_۱)$ باید در نامساوی زیر صدق کند.

$$x_۱ + \sqrt{۲}y_۱ \leq ۳ + \sqrt{۲} \times ۲ < ۶$$

یعنی $x_۱ \leq ۵$ و $y_۱ \leq ۵$ به‌راحتی می‌توان تحقیق کرد که تنها زوج جواب x و y از $x^۲ - ۲y^۲ = ۱$ که در $۰ < x \leq ۵$ و $۰ < y \leq ۵$ صدق می‌کند، همان $x = ۳$ و $y = ۲$ می‌باشد. بنابراین:

$$x_۱ = ۳ \quad , \quad y_۱ = ۲$$

لذا کلیه جواب‌های $x^۲ - ۲y^۲ = ۱$ عبارتند از:

$$(x, y) = (\pm x_n, \pm y_n)$$

که در آن x_n و y_n طبق تساوی زیر به‌دست می‌آیند:

$$x_n + \sqrt{۲}\, y_n = (۳ + \sqrt{۲} \times ۲)^n$$

به‌طور مثال:

$$\begin{aligned}
x_۱ + \sqrt{۲}\, y_۱ &= ۳ + \sqrt{۲} \times ۲ && \Longrightarrow \quad (x_۱, y_۱) = (\pm ۳, \pm ۲) \\
x_۲ + \sqrt{۲}\, y_۲ &= (۳ + \sqrt{۲} \times ۲)^۲ = ۱۷ + \sqrt{۲} \times ۱۲ && \Longrightarrow \quad (x_۲, y_۲) = (\pm ۱۷, \pm ۱۲) \\
x_۳ + \sqrt{۲}\, y_۳ &= (۳ + \sqrt{۲} \times ۲)^۳ = ۹۹ + \sqrt{۲} \times ۷۰ && \Longrightarrow \quad (x_۳, y_۳) = (\pm ۹۹, \pm ۷۰) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

به همین ترتیب کلیه جواب‌ها قابل محاسبه‌اند. البته برای محاسبهٔ y_n, x_n از روابط بازگشتی (*) نیز می‌توان استفاده کرد یعنی:

$$x_n = ۳x_{n-۱} + ۴y_{n-۱}, \quad , \quad y_n = ۲x_{n-۱} + ۳y_{n-۱}$$

که در آن فرض اولیه $(x_۱, y_۱) = (۳, ۲)$ می‌باشد. در پایان بحث معادلهٔ کلی $x^۲ - dy^۲ = k$ را بررسی می‌کنیم. اگر $(x_۰, y_۰)$ جواب معادلهٔ $x^۲ - dy^۲ = k$ و $(x_۱, y_۱)$ جواب معادلهٔ $x^۲ - dy^۲ = ۱$ باشد، طبق اتحاد مذکور در قضیهٔ ۱۳ اعداد

$$x = x_۰x_۱ + dy_۰y_۱ \quad , \quad y = x_۰y_۱ + y_۰x_۱$$

نیز یک جواب معادلهٔ $x^۲ - dy^۲ = k$ می‌باشد. لذا قضیه زیر را داریم:

MATH75.IR

قضیه ۱۸: اگر $x^۲ - dy^۲ = k$ یک جواب داشته باشد، آنگاه تعداد نامتناهی جواب خواهد داشت.

مثال ٦: معادلهٔ $x^۲ - ۲y^۲ = ۷$ را حل کنید. (جواب $(\pm ۱, ۰)$ را کنار بگذارید.)

یک جواب این معادله $(۵, ۳)$ می‌باشد. x_n و y_n را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x_n + \sqrt{۲}y_n = (۳ + \sqrt{۲} \times ۲)^n (۵ + \sqrt{۲} \times ۳) \qquad (n \geq ۰)$$

در این صورت کلیهٔ زوج‌های $(\pm x_n, \pm y_n)$ در معادلهٔ $x^۲ - ۲y^۲ = ۷$ صدق می‌کنند. مثلاً:

$$x_۰ + \sqrt{۲}y_۰ = ۵ + \sqrt{۲} \times ۳ \quad \Longrightarrow \quad (x_۰, y_۰) = (\pm ۵, \pm ۳)$$

$$x_۱ + \sqrt{۲}y_۱ = (۳ + \sqrt{۲} \times ۲)(۵ + \sqrt{۲} \times ۳) \quad \Longrightarrow \quad (x_۱, y_۱) = (\pm ۲۷, \pm ۱۹)$$

در این بخش فقط چند معادلهٔ سیالهٔ کلاسیک مطرح شده است. برای آشنایی با مسایل متفرقهٔ معادلات سیاله می‌توانید به بخش مسایل حل شده مراجع نمایید.

تمرین:

۱. کلیه جواب‌های معادلات سیالهٔ زیر را بیابید:

(۱) $x^۲ + ۴y^۲ = z^۲$

(۲) $۵x^۲ + ۱۰xy + ۱۰y^۲ = z^۲ + ۲z + ۱$

(۳) $x^۲ + y^۲ = z^۴$

(۴) $x^۲ + ۵y^۲ = z^۲$

(۵) $x^۲ + py^۲ = z^۲$ (p اول است)

(٦) $(x^۴ + ۱)^۴ + y^{۱۲} = (z^۲ + ۱)^۴$

(۷) $(x^۲ + y^۲ - ۲)^۴ + ۱٦ = z^۲$

(۸) $۵x^۲ + ۱۴xy + ۱۰y^۲ = ۱۳$

(۹) $x^۲ - ۱۵y^۲ = ۱$

(۱۰) $x^۲ - ۷y^۲ = ۲$

۲. نشان دهید که تعدادی نامتناهی جواب (x, y) برای معادلهٔ پل موجود است به‌طوری که $y \equiv ۰ (mod\ m)$، که در آن m عدد طبیعی مفروضی است.

۳. فرض کنیم $d > ۰$ عدد صحیحی خالی از مربع باشد به‌طوری که $d \equiv ۱ (mod\ ۴)$ فرض کنیم

$$f(x, y) = x^۲ + xy + \left(\frac{۱ - d}{۴}\right) y^۲$$

نشان دهید که $f(x, y) = ۱$ تعدادی نامتناهی جواب دارد.

۴. قضیهٔ مشهور توئه به صورت زیر می‌باشد:

فقط تعداد متناهی عدد صحیح q و p موجودند به‌طوری که:

$$|q\sqrt[۳]{۲} - p| < \frac{۱}{q^{\frac{۳}{۲}}}$$

با استفاده از این قضیه نشان دهید که معادلهٔ سیالهٔ $x^۳ - ۲y^۳ = ۱$ فقط تعدادی متناهی جواب دارد.

MATH75.IR

مسایل نظریه اعداد

۱. همهٔ عددهای سه رقمی را پیدا کنید که هر کدام دقیقاً ۵ مقسوم علیه مثبت داشته باشد.

۲. عدد طبیعی $n \geq ۱۰$ را به گونه‌ای بیابید که عدد $۲^n + ۲^{۱۱} + ۲^۸$ مربع کامل گردد.

۳. فرض کنید n عددی طبیعی بزرگتر از واحد و فرد باشد. نشان دهید حداقل یکی از اعداد زیر بر n بخش پذیر است.

$$۲^۱ - ۱ \, , \, ۲^۲ - ۱ \, , \, ۲^۳ - ۱ \, , \, \ldots , ۲^{n-۱} - ۱$$

۴. مطلوب است عدد سه رقمی $\overline{abc}$ که در شرط زیر صدق کند.

$$\frac{۱}{a+b+c} = ۰/\overline{abc}$$

۵. معادلهٔ $x^y = y^x$ را در اعداد طبیعی حل کنید. (فرض کنید $x \neq y$)

۶. جواب‌های درست معادلهٔ $(x+y)^۲ + x + ۴y = ۰$ را بیابید.

۷. N عددی است طبیعی و بزرگتر از ۹، به نحوی که تمام ارقام آن، اعدادی فردند. نشان دهید N نمی‌تواند مربع کامل باشد.

۸. تمام اعداد صحیح غیر منفی n, m را چنان بیابید که در رابطهٔ زیر صدق کنند:

$$m(m+۳) = n(n+۴)$$

۹. b, a دو عدد طبیعی و p عددی اول است. اگر $n = p^a \cdot ۲^{p^b}$ و S_n مجموع مقسوم‌علیه‌های مثبت n باشد، نشان دهید $(S_n - ۳)$ بر p بخش‌پذیر است.

۱۰. نشان دهید معادلهٔ زیر در مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی جواب ندارد:

$$۵^n - ۷^m = ۱۳۷۴$$

۱۱. تمام مقادیر صحیح و مثبت n, m را چنان بیابید که در رابطهٔ زیر صدق کنند:

$$m^۲ + m = ۱۳۷۲^{n^۲+۲}$$

MATH75.IR

۱۲. فرض کنید q,p دو عدد اول بزرگتر از ۳ باشند. ثابت کنید اگر $\frac{۲p+۱}{q}$ عددی طبیعی باشد، آنگاه $\frac{q-۱}{۲p}$ نیز عددی طبیعی است.

۱۳. مطلوب است تمام سه تایی‌های (a,b,c) که از اعداد طبیعی متوالی تشکیل شده و هیچکدام از آنها دارای بیش از یک مقسوم‌علیه اول نباشند.

۱۴. عدد n را «اول گون» گوئیم هرگاه با تغییر یک و فقط یکی از ارقام آن به عددی اول تبدیل شود. در مورد دنبالهٔ زیر کدام گزینه صحیح است؟

$$a_k = ۲۳۱۰k - ۲۱۰$$

الف) تعداد نامتناهی از جمله‌های این دنباله اول‌گون هستند.

ب) هیچکدام از جمله‌های این دنباله اول‌گون نیستند.

ج) تعداد جمله‌های اول گون این دنباله کمتر از ۲۱۰ می‌باشد.

د) فقط یکی از جمله‌های این دنباله اول گون می‌باشد.

ه) شماره جمله‌های اول‌گون این دنباله دارای یک دوره تناوب بزرگتر از واحد می‌باشد.

۱۵. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $۱۳۷۶!$ و $۱۳۷۶^{۱۳۷۵}$ حدوداً چند رقمی است؟

الف) ۱۰۰ رقمی ب) ۲۰۰ رقمی ج) ۳۰۰ رقمی د) ۴۰۰ رقمی ه) ۵۰۰ رقمی

۱۶. برای هر سه عدد صحیح دلخواه c,b,a حداقل چند عدد طبیعی کوچکتر از ۱۳۷۶ مانند n وجود دارد که هیچ‌کدام از اعداد $n+a$, $n+b$, $n+c$ بر ۱۳۷۶ بخش‌پذیر نباشد؟

الف) ۱۳۷۱ ب) ۱۳۷۲ ج) ۱۳۷۳ د) ۱۳۷۵ ه) ۱۳۷۰

۱۷. معادلهٔ $\frac{y^۲+y}{۲} + x = ۲۱۱۹$ با فرض $x \le y$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی چند دسته جواب دارد؟

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۱۸. فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت باشد. زوج‌های مرتب (x,y) که $x,y > ۰$ و و در معادلهٔ $\frac{xy}{x+y} = n$ صدق می‌کنند را پیدا کنید.

۱۹. ثابت کنید اگر اعداد طبیعی c,b,a در شرط‌های زیر صدق کنند، آنگاه $a-b$ مربع کامل است.

$$\frac{ab}{a-b} = c \quad (i)$$

$$(a,b,c) = ۱ \quad (ii)$$

۲۰. اعداد طبیعی a و b به‌گونه‌ای هستند که مجموع دو کسر

$$\frac{a^۲-۱}{b+۱} + \frac{b^۲-۱}{a+۱}$$

عددی صحیح است. ثابت کنید هر یک از این دو کسر عددی صحیح است.

MATH75.IR

۲۱. فرض کنید عدد طبیعی n بر ۳ بخش‌پذیر نباشد. ثابت کنید عدد $۴n^۲ + ۱$ را می‌توان به‌صورت مجموع سه مربع کامل نوشت.

۲۲. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، عدد $(n+۱)^n - ۱$ بر $n^۲$ بخش‌پذیر است.

۲۳. فرض کنید $n = (p-۱)(kp+۱)$، که در آن p عددی اول و فرد و k عددی صحیح و نامنفی می‌باشد. ثابت کنید $n.۲^n + ۱$ بر p بخش‌پذیر است.

۲۴. ثابت کنید بینهایت عدد طبیعی n یافت می‌شود به‌طوری که هر عدد به فرم $n + m^۴$ عددی مرکب باشد. $(m \in \mathbf{N})$

۲۵. معادلهٔ $x! + y! + z! = u!$ را در مجموعهٔ اعداد طبیعی حل کنید.

۲۶. فرض کنید p عددی اول و بزرگتر از ۵ و x عددی طبیعی باشد. ثابت کنید معادلهٔ $p^x - ۱ = (p-۱)!$ جواب ندارد.

۲۷. ثابت کنید عدد طبیعی $n > ۱$ وجود ندارد، به طوری که عدد $۲^n - ۱$ بر n بخش پذیر باشد.

۲۸. ثابت کنید اگر n عدد طبیعی فرد و بزرگتر از واحد باشد آنگاه عدد $۱^n + ۲^n + \cdots + (n-۱)^n$ بر n بخش پذیر است.

۲۹. ثابت کنید اگر n عدد طبیعی و زوج باشد آنگاه عدد $۱^n + ۲^n + \cdots + (n-۱)^n$ بر n قابل قسمت نمی‌باشد.

۳۰. می‌دانیم ۲۷ کوچکترین عدد طبیعی n است به نحوی که $۳ - n^۲$ بر مجذور کاملی بزرگتر از واحد قابل قسمت باشد. ثابت کنید بی‌نهایت عدد طبیعی n با این خاصیت وجود دارد.

۳۱. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی s، عدد طبیعی n وجود دارد که مجموع ارقام آن مساوی s و بر خود n نیز s بخش پذیر باشد.

۳۲. ثابت کنید معادلهٔ $x^n + y^n = z^n$، در مجموعهٔ اعداد طبیعی و با شرطهای $n > ۱$, $x \le n$ و $y \le n$، جواب ندارد.

۳۳. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، اعداد $۲^{۲^n} + ۱$ و n نسبت به هم اولند.

۳۴. ثابت کنید که نمی‌توان چهار عدد طبیعی متوالی پیدا کرد، به نحوی که هر یک از آنها را بتوان به صورت توانی از یک عدد طبیعی با نمای طبیعی بزرگتر از واحد نوشت.

۳۵. ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی s، عدد طبیعی n وجود دارد، به نحوی که عدد $۲^n - ۱$ لااقل s مقسوم‌علیه اول مختلف داشته باشد.

۳۶. چند جمله‌ای مثال بزنید (با ضرایب صحیح) که به ازای m مقدار مختلف طبیعی x ، m عدد اول مختلف تولید کند.

۳۷. ثابت کنید که معادلهٔ $x^۲ - ۲y^۲ + ۸z = ۳$ در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب ندارد.

MATH75.IR

۳۸. ثابت کنید برای هر عدد اول p $(p > ۲)$، صورت m از کسر

$$\frac{m}{n} = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{p-۱} \qquad (m, n \in N)$$

بر p بخش پذیر است.

۳۹. ثابت کنید، برای هر عدد اول p، بی‌نهایت عدد به صورت $۲^n - n$ وجود دارد که بر p بخش پذیر است $(n \in \mathbf{N})$.

۴۰. به عددی طبیعی در هر ثانیه، ۵۴ یا ۷۷ واحد اضافه می‌شود. ثابت کنید، بعد از مدتی، به عددی می‌رسیم که دو رقم سمت راست آن با هم برابرند.

۴۱. عددهای صحیح e, d, c, b, a به گونه‌ای اند که هر دو عدد $a+b+c+d+e$ و $a^۲+b^۲+c^۲+d^۲+e^۲$ بر عدد فرد n بخش پذیرند. ثابت کنید عدد

$$a^۵ + b^۵ + c^۵ + d^۵ + e^۵ - ۵abcde$$

هم بر n بخش پذیر است.

۴۲. ثابت کنید بی‌نهایت عدد طبیعی وجود دارد که نمی‌توان آنها را به صورت مجموع یک مربع کامل و یک عدد اول نوشت.

۴۳. n عدد متوالی صحیح مفروضند. فرض کنید عدد طبیعی m کوچکتر از n، دلخواه باشد. ثابت کنید در بین این n عدد متوالی می‌توان دو عدد متمایز یافت که حاصل ضرب آنها بر mn بخش پذیر باشد.

۴۴. به ازای $n \in \mathbf{N}$ عدد $۴^n + ۲^n + ۱$ اول است. ثابت کنید $n = ۳^k$، که در آن k عددی صحیح و نامنفی است.

۴۵. اعداد طبیعی n, m و عدد اول p مفروضند. فرض کنید برای هر $k \in \mathbf{N}$،

$$(p \cdot k - ۱, m) = (p \cdot k - ۱, n)$$

ثابت کنید عددی صحیح چون t وجود دارد به قسمی که $n = p^t m$. ۴۶. عدد طبیعی $a > ۲$ مفروض است. ثابت کنید بی‌نهایت عدد $n \in \mathbf{N}$ وجود دارد به طوری که $a^n - ۱$ بر n بخش پذیر باشد.

۴۷. ثابت کنید معادلهٔ زیر در مجموعهٔ عددهای طبیعی جواب ندارد.

$$(۲x)^{۲x} - ۱ = y^{z+۱}$$

۴۸. فرض کنید p یک مقسوم‌علیه اول و فرد از $a^n + ۱$ باشد که در آن $n \leq ۱$. نشان دهید $p - ۱$ بر $۲^{n+۱}$ بخش پذیر است.

۴۹. اگر b, a اعداد صحیح و مثبت باشند، و $a = ۲^\alpha \times ۵^\beta \times m$ که در آن m نسبت به ۱۰ اول است، نشان دهید که نمایش اعشاری کسر $\frac{b}{a}$ دارای دورهٔ تناوبی است که تعداد ارقام آن عدد $\varphi(m)$ را عاد می‌کند. و از آنجا نشان دهید که اگر این کسر دارای دورهٔ تناوب کوتاهتر از $m - ۱$ رقم نباشد، آنگاه m یک عدد اول است.

MATH75.IR

حل مسایل نظریه اعداد

۱. اگر q, p دو عدد اول متمایز باشند، در این صورت pq دارای چهار مقسوم‌علیه مثبت و $p^۲q$ دارای شش مقسوم‌علیه مثبت است. بنابراین اعداد موردنظر فقط می‌توانند به صورت p^n باشند که در آن p عددی اول است. چون می‌خواهیم ۵ مقسوم‌علیه مثبت داشته باشیم لذا $n = ۴$ و تنها عدد سه رقمی که به صورت $p^۴$ می‌باشد عدد $۵^۴$ یعنی ۶۲۵ است.

۲.

$$N = ۲^۸ + ۲^{۱۱} + ۲^n = ۲^۸(۱ + ۲^۳ + ۲^{n-۸})$$

برای آنکه N مربع کامل گردد می‌بایست عدد داخل پرانتز مربع کامل باشد. داریم:

$$۱ + ۲^۳ + ۲^{n-۸} = (۲k+۱)^۲ \implies ۲^{n-۸} = ۴(k^۲ + k - ۲)$$
$$\implies ۲^{n-۱۰} = (k-۱)(k+۲)$$

چون از دو پرانتز $(k-۱), (k+۲)$ یکی زوج و دیگری فرد است، لذا تساوی فوق فقط وقتی اتفاق می‌افتد که $k - ۱ = ۱$ بنابراین $k = ۲$ و $n = ۱۲$.

۳. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عددهای $۲^{n-۱}, \ldots, ۲^۲, ۲, ۱$ بر n را، به ترتیب، $r_{n-۱}, \ldots, r_۲, r_۱, r_۰$ بنامیم، در این صورت این باقی‌مانده‌ها هر کدام برابر یکی از اعداد $n-۱, \ldots, ۲, ۱$ خواهند بود (چون $n > ۱$ فرد است باقی‌ماندهٔ صفر نخواهیم داشت). بنابراین طبق اصل لانهٔ کبوتر لااقل دو تا از این باقی‌مانده‌ها برابرند. یعنی اعداد j, i وجود دارند به طوری که $۰ \le i < j \le n-۱$ و $r_i = r_j$ بنابراین $۲^j - ۲^i$ بر n بخش پذیر است. داریم:

$$۲^j - ۲^i = ۲^i(۲^{j-i} - ۱)$$

بدیهی است که چون $(n, ۲^i) = ۱$ لذا عدد $۲^{j-i} - ۱$ بر n بخش‌پذیر است. روشن است که $۰ < j - i \le n - ۱$ یعنی $۲^{j-i} - ۱$ یکی از همان عددهای $۲^{n-۱} - ۱, \ldots, ۲^۲ - ۱, ۲^۱ - ۱$ می‌باشد.

۴. چون حداکثر ارقام c, b, a برابر ۹ می‌باشد لذا $(a+b+c) \le ۲۷$، از طرفی چون طبق فرض داریم $(a+b+c)\overline{abc} = ۱۰۰۰$ لذا $a+b+c$ مقسوم‌علیهی از ۱۰۰۰ می‌باشد یعنی یکی از اعداد ۲، ۴، ۵، ۸، ۱۰، ۲۰ و ۲۵، که با آزمایش معلوم می‌شود که فقط می‌تواند ۸ باشد یعنی $\frac{۱}{۱+۲+۵} = ۰/۱۲۵$.

MATH75.IR

۵. فرض کنید $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ که در آن $p_n, \cdots, p_2, p_1$ اعداد اول متمایز می‌باشند. در این صورت با توجه به برابری $x^y = y^x$ داریم $y = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_n^{\beta_n}$ و همچنین

$$p_1^{y\alpha_1} p_2^{y\alpha_2} \cdots p_n^{y\alpha_n} = p_1^{x\beta_1} p_2^{x\beta_2} \cdots p_n^{x\beta_n}$$
$$\Rightarrow \quad y\alpha_1 = x\beta_1 \ , \ y\alpha_2 = x\beta_2, \cdots, y\alpha_n = x\beta_n$$

حال اگر فرض کنیم $y > x$ باشد، آنگاه داریم:

$$\alpha_1 < \beta_1 \ , \ \alpha_2 < \beta_2, \cdots, \alpha_n < \beta_n$$

یعنی y بر x قابل‌قسمت است. به عبارت دیگر $y = kx$ که در آن k عددی طبیعی است. پس داریم:

$$x^{kx} = (kx)^x \implies x^k = kx \implies x^{k-1} = k$$

چون $y > x$ است پس $k > 1$ و از آنجا $x > 1$ نتیجه می‌شود. اگر $x = 2$ باشد در این صورت به جواب $x = 2$ و $y = 4$ خواهیم رسید. اگر فرض کنیم $k > 2$ در این صورت داریم:

$$x > 1 \implies x \geq 2 \implies x^{k-1} \geq 2^{k-1} > k \implies x^{k-1} \neq k$$

یعنی در حالت $k > 2$ جوابی نخواهیم داشت. بنابراین تنها جواب معادلهٔ $x^y = y^x$ همان $x = 2, y = 4$ و یا $x = 4, y = 2$ می‌باشد.

۶. معادلهٔ فوق را به صورت $(x+y)(x+y+1) = -3y$ تبدیل می‌کنیم. چون اعداد $x+y$, $x+y+1$ متوالی هستند لذا نسبت به هم اولند. بنابراین یکی از اعداد $x+y$ و $x+y+1$ می‌بایست مضرب ۳ باشد. دو حالت می‌گیریم:

الف. $x+y = 3k$ (k عددی صحیح است)، در این صورت داریم:

$$x = 3k^2 + 4k \quad , \quad y = -3k^2 - k$$

ب. $x+y+1 = 3k$ (k عددی صحیح است)، در این صورت داریم:

$$x = 3k^2 + 2k - 1 \quad , \quad y = -3k^2 + k$$

۷. فرض کنید $N = [10a+b]^2$ که در آن b برابر است با یکی از اعداد ۱، ۳، ۵، ۷ و یا ۹. بنابراین داریم:

$$N = 100a^2 + 20ab + b^2$$

دو رقم سمت راست N، از مجموع $20ab + b^2$ به‌دست می‌آید. بدیهی است دو رقم سمت راست $20ab$ به صورت $\overline{x0}$ می‌باشد که در آن x عددی زوج است و همچنین دو رقم سمت b^2 برابر است با

$$\overline{49}, \overline{25}, \overline{09}, \overline{01} \quad \text{و یا} \quad \overline{81}$$

MATH75.IR

یعنی از مجموع $b^۲, ۲۰ab$ به عددی می‌رسیم که دو رقم سمت راست آن به صورت $\overline{yz}$ می‌باشد که در آن z عددی فرد است و y عددی زوج است. یعنی اگر N مربع کامل باشد، نمی‌تواند تمام ارقام آن فرد باشد.

۸. با توجه به این که $m \geq n$ داریم:

$$m^۲ + ۳m - n^۲ - ۳n = n \implies (m-n)(m+n+۳) = n$$

چون $m+n+۳ > n$ لذا تساوی فوق ممکن نیست مگر این که $m = n = ۰$. بنابراین تنها جواب معادلهٔ داده شده $m = n = ۰$ می‌باشد.

۹. مجموع مقسوم‌علیه‌های مثبت n که دارای عامل اول p نیستند را با S'_n نشان می‌دهیم. کافی است باقی‌ماندهٔ S'_n به p را بیابیم.

$$S'_n = ۱ + ۲ + ۲^۲ + ۲^۳ + \cdots + ۲^{p^b} = ۲^{p^b+۱} - ۱$$

با توجه به نتیجهٔ قضیهٔ فرما داریم $۲^p \equiv ۲ \pmod p$. با استقراء روی m می‌توان ثابت کرد که:

$$۲^{p^m} \equiv ۲ \pmod p$$

پس داریم:

$$۲^{p^b} \equiv ۲ \pmod p \implies ۲^{p^b} + ۱ \equiv ۴ \pmod p$$
$$\implies S'_n = ۲^{p^b+۱} - ۱ \equiv ۳ \pmod p$$

بنابراین $S'_n - ۳$ و در نتیجه $S_n - ۳$ بر p بخش‌پذیر است.

۱۰. چون باقی‌ماندهٔ تقسیم ۵^n بر ۴ برابر ۱ و باقی‌ماندهٔ تقسیم ۱۳۷۴ بر ۴ برابر ۲ است، لذا ۷^m باید در تقسیم بر ۴ باقی‌مانده‌ای مساوی ۳ داشته باشد پس m عددی فرد است. فرض کنید $m = ۲x + ۱$. داریم:

$$۷^{۲k+۱} \equiv ۹^k \times ۷ \equiv (-۱)^k \times ۷ \pmod{۱۰}$$

پس رقم یکان ۷^m برابر است با ۳ و یا ۷ یعنی رقم یکان $۷^m - ۵^n$ برابر است با ۲ و یا ۸ و هرگز برابر ۴ نخواهد شد.

۱۱. باقی‌ماندهٔ تقسیم $n^۲$ بر ۴ برابر است با صفر یا یک، پس $n^۲ + ۲$ برابر است با $۴k + ۲$ و یا $۴k + ۳$ و لذا رقم یکان $۱۳۷۲^{n^۲+۲}$ برابر است با رقم یکان $۱۳۷۲^۲$ یا $۱۳۷۲^۳$، یعنی رقم یکان سمت راست تساوی فوق برابر است با ۴ یا ۸. در حالی که سمت چپ تساوی حاصل ضرب دو عدد متوالی m و $m+۱$ است و رقم یکان حاصل‌ضرب دو عدد متوالی هرگز ۴ یا ۸ نمی‌تواند باشد. بنابراین چنین n, m ای وجود ندارند.

۱۲. با توجه به این که $q | ۲^p + ۱$ نتیجه می‌گیریم $q | ۲^{۲p} - ۱$. فرض کنید r مرتبهٔ ۲ به هنگ q باشد یعنی کوچکترین عددی باشد که $۲^r \equiv ۱ \pmod q$، در این صورت برای هر m با شرط $۲^m \equiv ۱ \pmod q$ داریم $r | m$. لذا چون $۲^{۲p} \equiv ۱ \pmod q$ پس نتیجه می‌گیریم که $r | ۲p$ یعنی p یا $۲p$، $r = ۱, ۲$. با توجه به همنهشتی $۲^r \equiv ۱ \pmod q$ در حالت $r = ۱$ و $r = ۲$ به تناقض برمی‌خوریم. اگر $r = p$ باشد سپس $۲^p \equiv ۱ \pmod q$ و

MATH75.IR

چون طبق فرض $۲^p \equiv -۱ \pmod q$ پس نتیجه می‌گیریم که $۱ \equiv -۱ \pmod q$، که این عبارت نیز تناقض است.
اگر $r = ۲p$ آنگاه چون $۲^{q-۱} \equiv ۱ \pmod q$ (قضیهٔ فرما) و همچنین r مرتبهٔ ۲ به هنگ q می‌باشد لذا $r|q-۱$ یعنی $۲p|q-۱$. بنابراین $\frac{q-۱}{۲p}$ عددی است طبیعی.

۱۳. سه تایی $(۱,۲,۳)$ یک جواب مسئله است. حال فرض می‌کنیم $a > ۱$ برای a دو حالت در نظر می‌گیریم:

- فرض کنید a زوج است. بدیهی است که $a = ۲^t, c = ۲^t + ۲$ زیرا a نباید بیش از یک مقسوم‌علیه اول داشته باشند. حالی $c = ۲(۲^{t-۱} + ۱)$ بیش از یک عامل اول پیدا کرد مگر آنکه $t - ۱ = ۰$ یعنی $t = ۲$ و لذا تنها جواب در این حالت $(۲,۳,۴)$ می‌باشد.

- فرض کنید a فرد است. بنابراین b زوج است. یعنی عامل ۲ دارد پس نمی‌تواند مضرب ۳ باشد، لذا یا a مضرب ۳ است یا c.

- اگر a مضرب ۳ باشد آنگاه $a = ۳^s$، از طرفی $b = ۲^t$ و چون اعداد a و b متوالیند لذا داریم:

$$۳^s + ۱ = ۲^t \qquad t, s \geq ۱$$

سمت چپ به صورت $۳k + ۱$ است پس t زوج است. فرض کنید $t = ۲m$، بنابراین

$$۳^s = (۲^m - ۱)(۲^m + ۱)$$

$۲^m - ۱$ و $۲^m + ۱$ دو عدد فرد متوالی‌اند پس نسبت به هم اولند و چون سمت چپ فقط عامل ۳ دارد پس تنها حالت ممکن عبارت است از:

$$\begin{cases} ۲^m - ۱ = ۱ \\ ۲^m + ۱ = ۳^s \end{cases}$$

یعنی $m = ۱$ در نتیجه $t = ۲, s = ۱$ و به جواب $(۳,۴,۵)$ خواهیم رسید.

- اگر c مضرب ۳ باشد آنگاه $c = ۳^s$، از طرفی $b = ۲^t$ و چون اعداد b و c متوالی‌اند لذا داریم:

$$۳^s = ۲^t + ۱$$

در حالت $t = ۱$ به جواب $(۲,۳,۴)$ و در حالت $t = ۲$ به جواب $(۴,۵,۶)$ می‌رسیم. جواب اول قبلاً به‌دست آمده بود و جواب دوم غیر قابل قبول است زیرا ۶ دارای دو عامل اول است.

با فرض $t \geq ۳$ خواهیم داشت:

$$۲^t \overset{۴}{\equiv} ۰ \quad \Rightarrow \quad ۳^s \overset{۴}{\equiv} ۱ \quad \Rightarrow \quad (-۱)^s \overset{۴}{\equiv} ۱$$

MATH75.IR

بنابراین s می‌بایست زوج باشد. فرض کنید $s = 2k$ بنابراین $2^{t} = 3^{2k} - 1$ و از اینجا داریم:

$$(3^k - 1)(3^k + 1) = 2^t$$

دو پرانتز سمت چپ، دو عدد زوج متوالی‌اند و فقط در حالت 4×2 می‌توانند برابر با توانی از ۲ باشند. پس $k = 1$ یعنی $s = 2$ و به جواب $(a, b, c) = (7, 8, 9)$ خواهیم رسید.

بنابراین چهار دسته جواب داریم که عبارتند از:

$$(1, 2, 3) \ , \ (2, 3, 4) \ , \ (3, 4, 5) \ , \ (7, 8, 9)$$

۱۴. به ازای هر $k \in \mathbb{N}$، رقم یکان a_k صفر می‌باشد. لذا برای تبدیل a_k به عدد اول می‌بایست فقط رقم یکان آن‌را عوض کنیم. بدیهی است که رقم یکان باید به اعداد فرد ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ تبدیل شود. در واقع باید a_k با یکی از این اعداد جمع شود.

$$a_k + 1 = 2310k - 210 + 1 = 11q$$
$$a_k + 3 = 2310k - 210 + 3 = 3q$$
$$a_k + 5 = 2310k - 210 + 5 = 5q$$
$$a_k + 7 = 2310k - 210 + 7 = 7q$$
$$a_k + 9 = 2310k - 210 + 9 = 3q$$

بنابراین در این دنباله عددی «اول‌گون» یافت نمی‌شود.

۱۵. بزرگترین عدد طبیعی t که $2^t \mid 1376!$ عبارت است از:

$$t = \left[\frac{1376}{2}\right] + \left[\frac{1376}{4}\right] + \left[\frac{1376}{8}\right] + \left[\frac{1376}{16}\right] + \left[\frac{1376}{32}\right]$$
$$+ \left[\frac{1376}{64}\right] + \left[\frac{1376}{128}\right] + \left[\frac{1376}{256}\right] \left[\frac{1376}{512}\right] + \left[\frac{1376}{1024}\right]$$
$$= 688 + 344 + 172 + 172 + 86 + 43 + 21 + 10 + 5 + 2 = 1371$$

به همین ترتیب بزرگترین عدد طبیعی s که $43^s \mid 1376!$ برابر است با

$$\frac{1376}{43} = 32$$

بنابراین داریم:

$$(1376^{1375}, 1376!) = (43^{1375} \times 2^{6875}, 2^{1371} \times 43^{32} \times q)$$
$$= 43^{32} \times 2^{1371}$$

بنابراین می‌بایست تعداد ارقام $43^{32} \times 2^{1371}$ را بیابیم داریم:

$$43^{32} \times 2^{1371} \approx 40^{32} \times 2^{1371} = 10^{32} \times 2^{1435} \approx 10^{32} \times (2^{10})^{144}$$
$$\approx 10^{32} \times (10^3)^{144} = 10^{464}$$

MATH75.IR

یعنی عدد مورد نظر حدوداً ۵۰۰ رقمی است.

۱۶. مجموعهٔ

$$A = \{۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۳۷۵\}$$

یک دستهٔ کامل مانده‌ها به سنج ۱۳۷۶ می‌باشد. فرض کنید

$$\begin{aligned} a &\equiv -r_۱ \pmod{۱۳۷۶} \quad , \quad ۰ \le r_۱ < ۱۳۷۶ \\ b &\equiv -r_۲ \pmod{۱۳۷۶} \quad , \quad ۰ \le r_۲ < ۱۳۷۶ \\ c &\equiv -r_۳ \pmod{۱۳۷۶} \quad , \quad ۰ \le r_۳ < ۱۳۷۶ \end{aligned}$$

مجموعهٔ $B = A - \{r_۱, r_۲, r_۳\}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $n \in B$، روشن است که $n+c, n+b, n+a$ هیچکدام بر ۱۳۷۶ بخش‌پذیر نمی‌باشند زیرا اگر مثلاً $n+a$ بر ۱۳۷۶ بخش‌پذیر باشد آنگاه

$$n + a \equiv ۰ \pmod{۱۳۷۶} \quad \Longrightarrow \quad n \equiv r_۱ \pmod{۱۳۷۶}$$

و چون $۰ \le n, r_۱ < ۱۳۷۶$ لذا $n = r_۱$ در حالی که $r_۱ \notin B$. این تناقض نشان می‌دهد که تمامی اعضای B دارای خاصیت مورد نظر می‌باشند. وقتی B حداقل تعداد اعضا را دارد که $r_۳, r_۲, r_۱$ دو به دو متمایز باشند و اگر وجود احتمالی صفر را در مجموعهٔ B در نظر بگیریم لذا حداقل تعداد اعضای طبیعی B خواهد بود با

$$۱۳۷۶ - ۳ - ۱ = ۱۳۷۲$$

لذا گزینهٔ (ب) صحیح است.

۱۷. با توجه به این که $۱ + ۲ + ۳ + \cdots + y = \frac{y^۲ + y}{۲}$ خواهیم داشت:

$$۲۱۱۹ = (۱ + ۲ + ۳ + \cdots + y) + x$$

و از آنجا داریم:

$$(۱ + ۲ + ۳ + \cdots + ۶۴) + ۳۹ = (۱ + ۲ + ۳ + \cdots + y) + x$$

بنابراین یک جواب معادله $(x, y) = (۳۹, ۶۴)$ می‌باشد. بدیهی است جواب دیگری برای y وجود ندارد. زیرا در حالت $y < ۶۴$ و $y > ۶۴$ مقدار x یا منفی می‌شود و یا از y بزرگتر می‌گردد.

۱۸. فرض کنید $(x, y) = d$، $x = x'.d$ و $y = y'.d$. در این‌صورت $(x', y') = ۱$، از رابطهٔ $xy = n(x+y)$ نتیجه می‌گیریم که:

$$x'y'd = nx' + ny' \qquad (*)$$

MATH75.IR

بنابراین $x'|ny'$ و چون $(x',y')=۱$ پس $x'|n$ به همین ترتیب $y'|n$ بنابراین $x'y'|n$ لذا $n=k.x'.y'$. با جایگزینی این عبارت در تساوی (*) خواهیم داشت:

$$d=k(x'+y')$$

بنابراین کلیه جواب‌های این معادله به‌صورت زیر می‌باشد.

$$n=k.x'.y' \quad , \quad x=kx'(x'+y') \quad , \quad y=ky'(x'+y')$$

به‌طور مثال اگر $n=۶$ باشد می‌توان n را به‌صورت‌های زیر نوشت:

$$۱\times۱\times۶\ ,\ ۱\times۶\times۱\ ,\ ۶\times۱\times۱\ ,\ ۱\times۲\times۳\ ,\ ۱\times۳\times۲$$
$$۲\times۳\times۱\ ,\ ۲\times۱\times۳\ ,\ ۳\times۱\times۲\ ,\ ۳\times۲\times۱$$

بنابراین جواب‌های معادلهٔ $\frac{xy}{x+y}=۶$ عبارتند از:

$$(۷,۴۲),(۴۲,۷),(۱۲,۱۲),(۱۰,۱۵),(۱۵,۱۰)$$
$$,(۲۴,۸),(۸,۲۴),(۹,۱۸),(۱۸,۹)$$

۱۹. فرض کنید $a-b$ مربع کامل نباشد. پس عدد اولی مثل p وجود دارد به‌طوری که در تجزیهٔ $a-b$ به عوامل اول، با توان فرد $۲k-۱$ ظاهر می‌شود. یعنی:

$$a-b=p^{۲k-۱}\times q \qquad (p,q)=۱$$

چون ab بر $a-b$ بخش‌پذیر است، پس لااقل یکی از اعداد a و b باید بر p^k بخش‌پذیر باشد (زیرا اگر حداکثر توانی که عامل اول p در a و b می‌تواند داشته باشد، $k-۱$ باشد آنگاه حداکثر توان p در تجزیهٔ ab برابر $۲k-۲$ می‌شود که در نتیجه بر $a-b$ نمی‌تواند بخش‌پذیر باشد). فرض کنید a بر p^k بخش‌پذیر باشد. چون $a-b$ نیز بر p^k بخش‌پذیر است پس:

$$b=a-(a-b)$$

نیز بر p^k بخش‌پذیر است. بنابراین در تجزیهٔ ab به عوامل اول، p با توان $۲k$ ظاهر می‌شود. لذا در تقسیم ab بر $a-b$ لااقل یک عامل اول p باقی می‌ماند. یعنی c بر p بخش‌پذیر است. چون هر سه عدد c,b,a بر p بخش‌پذیر شدند، لذا شرط (ii) مسأله نقض شد. بنابراین $a-b$ مربع کامل است.

۲۰. فرض کنید

$$m=\frac{a^۲-۱}{b+۱} \quad , \quad n=\frac{b^۲-۱}{a+۱}$$

با توجه به اینکه $m+n$ و $m\cdot n$ اعدادی صحیح هستند لذا مبین معادلهٔ درجهٔ دوم

$$x^۲-(m+n)x+m.n=۰$$

MATH75.IR

عددی صحیح است. (زیرا ریشه‌های این معادله همان m و n هستند که اعدادی گویا می‌باشند.) فرض کنید $s = m + n$ و $p = m.n$، بنابراین

$$m, n = \frac{s \pm \sqrt{s^۲ - ۴p}}{۲}$$

چون s و $\sqrt{s^۲ - ۴p}$ از نظر زوج و فرد بودن کاملاً مشابهند. لذا m و n اعدادی صحیح‌اند.

۲۱. دو حالت برای n در نظر می‌گیریم:

حالت اول: اگر $n = ۳k + ۱$، آنگاه خواهیم داشت:

$$۴n^۲ + ۱ = ۴(۳k + ۱)^۲ + ۱ = (۴k + ۲)^۲ + (۴k + ۱)^۲ + (۲k)^۲$$

حالت دوم: اگر $n = ۳k + ۲$، آنگاه خواهیم داشت:

$$۴n^۲ + ۱ = ۴(۳k + ۲)^۲ + ۱ = (۴k + ۳)^۲ + (۴k + ۲)^۲ + (۲k + ۲)^۲$$

۲۲. با توجه به بسط نیوتن— خیام داریم:

$$\begin{aligned}(n + ۱)^n &= \binom{n}{۰}n^n + \binom{n}{۱}n^{n-۱} + \cdots + \binom{n}{n-۱}n + \binom{n}{n} \\ &= n^n + n^n + \frac{n(n-۱)}{۲}n^{n-۲} + \cdots + \frac{n(n-۱)}{۲}n^۲ + n.n + ۱\end{aligned}$$

طبق این بسط برای $n > ۱$ از جملهٔ سوم به بعد تمامی جملات عامل $n^۲$ خواهند داشت. خود جملهٔ دوم نیز $n^۲$ است. بنابراین $(n + ۱)^n - ۱$ بر $n^۲$ بخش‌پذیر است. (برای $n = ۱$ بخش‌پذیری بدیهی است).

۲۳. طبق قضیهٔ کوچک فرما $۲^{p-۱} \overset{P}{\equiv} ۱$ بنابراین $۲^n \overset{P}{\equiv} ۱$ و چون $n \overset{P}{\equiv} -۱$ بنابراین

$$n.۲^n \overset{P}{\equiv} -۱$$

تبصره: از این مسئله نتیجه می‌شود که بینهایت عدد مرکب به فرم $n.۲^n + ۱$ وجود دارد. اعداد به فرم $n.۲^n + ۱$ را اعداد کالن می‌نامند.

۲۴. اگر فرض کنیم $n = ۴k^۴$ $(k = ۲, ۳, \cdots)$، سپس به‌دست می‌آوریم که:

$$\begin{aligned}m^۴ + n &= m^۴ + ۴k^۴ \\ &= \left(m^۲ + ۲k^۲\right)^۲ - ۴m^۲k^۲ \\ &= \left(m^۲ + ۲k^۲ - ۲mk\right)\left(m^۲ + ۲k^۲ + ۲mk\right) \\ &= \left((m-k)^۲ + k^۲\right)\left((m+k)^۲ + k^۲\right) [۷pt]\end{aligned}$$

و چون $k > ۱$، بنابراین هر یک از این پرانتزها بزرگتر از واحد می‌شوند. یعنی عدد $m^۴ + n$ عددی مرکب است.

MATH75.IR

۲۵. فرض کنید $x \le y \le z$ بنابراین $x! + y! + z! \le ۳z!$ یعنی $u! \le ۳z!$ از طرفی داریم:

$$z < u \implies z \le u - ۱ \implies z! \le (u-۱)! \implies u.z! \le u!$$

بنابراین $uz! \le ۳z!$ پس $u \le ۳$.

اگر $u = ۳$ داریم $x! + y! + z! = ۳!$ که تنها جواب $x = y = z = ۲$ می‌باشد. برای $u = ۲$ و $u = ۱$ معادلهٔ فوق ریشه‌ای نخواهد داشت.

۲۶. به‌ازای $p \ge ۷$ داریم $p - ۲ \le \frac{p-۱}{۲} < ۲$ بنابراین $(p-۲)!$ بر $\frac{p-۱}{۲} \times ۲$، یعنی $(p-۱)$ بخش‌پذیر است. از طرفی داریم:

$$p^x - ۱ = (p-۱)! \implies p^{x-۱} + p^{x-۲} + \cdots + p + ۱ = (p-۲)!$$

بنابراین $p^{x-۱} + \cdots + p + ۱$ باید بر $(p-۱)$ بخش‌پذیر باشد و چون برای هر $i = ۰, ۱, ۲, ۳, \cdots, x-۱$ داریم $p^i \overset{p-۱}{\equiv} ۱$، پس باید داشته باشیم $x \overset{p-۱}{\equiv} ۱$ و این نشان دهندهٔ آن است که $x \ge p - ۱$ و این ممکن نیست زیرا:

$$p^{x-۱} < p^{x-۱} + p^{x-۲} + \cdots + p + ۱ = (p-۲)! < (p-۲)^{p-۲} < p^{p-۲}$$

یعنی $x < p - ۱$. این تناقض بیانگر آن است که برای $p \ge ۷$ معادلهٔ فوق جواب ندارد.

۲۷. فرض کنید $p \cdot n | ۲^n - ۱$ را کوچکترین مقسوم‌علیه n و α را نمای ۲ به سنج p فرض می‌کنیم. در این صورت $p | ۲^\alpha - ۱$. از طرفی اگر به ازای عدد طبیعی m، $p | ۲^m - ۱$ بر p بخش پذیر باشد در این صورت m بر α بخش پذیر است. بنابراین چون $p | ۲^{p-۱} - ۱$ و $p | ۲^n - ۱$ در نتیجه $p - ۱$ بر α قابل قسمت است پس $\alpha < p$ و همچنین n نیز بر α قابل قسمت است. این نشان دهندهٔ آن است که n بر عددی کوچکتر از p و بزرگتر از واحد یعنی α بخش پذیر است که متناقض با فرض کوچکترین مقسوم‌علیه اول n بودن p است.

۲۸. تعداد جملات به کار رفته در مجموع $۱^n + ۲^n + \cdots + (n-۱)^n$ برابر $(n-۱)$ است که عددی است زوج. بنابراین اگر هر جملهٔ k^n را با جملهٔ $(n-k)^n$ با هم جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$k^n + (n-k)^n = [k + (n-k)][k^{n-۱} + \cdots + (n-k)^{n-۱}] = n \cdot q \qquad \left(k = ۱, ۲, \cdots, \frac{n-۱}{۲}\right)$$

بنابراین مجموع کل جملات نیز بر n قابل قسمت است.

۲۹. فرض کنید $n = ۲^s \cdot t$ که در آن s عددی طبیعی و t عددی فرد است. واضح است که اگر k زوج باشد، k^n بر ۲^n و در نتیجه بر $۲^{۲s \cdot t}$ بخش پذیر است و چون $s < ۲^s$ بنابراین بر $۲^{s \cdot t}$ نیز بخش پذیر است و نیز چون $s \le s \cdot t$ پس k^n بر ۲^s بخش پذیر است.

از طرفی اگر k فرد باشد (تعداد جملات فرد در دنبالهٔ $۱, ۲, \ldots, n-۱$ مساوی $\frac{n}{۲}$ است) طبق قضیهٔ اولر (در مسألهٔ

MATH75.IR

۹ اثبات می‌شود) داریم:

$$k^{۲^s} \equiv ۱ \pmod{۲^{s+۲}} \implies k^{۲^s} \equiv ۱ \pmod{۲^s}$$
$$k^{۲^{s\cdot t}} \equiv ۱ \pmod{۲^s} \implies k^n \equiv ۱ \pmod{۲^s}$$

از آنجا داریم:

$$۱^n + ۳^n + \cdots + (n-۱)^n \equiv \frac{n}{۲} \pmod{۲^s}$$
$$\implies ۱^n + ۲^n + ۳^n + \cdots + (n-۱)^n \equiv \frac{n}{۲} \pmod{۲^s}$$

حال اگر فرض کنیم $۱^n + ۲^n + ۳^n + \cdots + (n-۱)^n$ بر n بخش پذیر است، چون n بر ۲^s قابل قسمت است پس $۱^n + ۲^n + \cdots + (n-۱)^n$ بر ۲^s نیز بخش پذیر است. یعنی (سنج ۲^s) $\frac{n}{۲} \equiv ۰$ ، به عبارت دیگر $\frac{n}{۲}$ بر ۲^s و در نتیجه n بر $۲^{s+۱}$ بخش پذیر است که با فرض $n = ۲^s \cdot t$ تناقض دارد.

۳۰ کافی است n را برابر $۱۲۱k + ۲۷$ بگیریم که در آن $k = ۰, ۱, ۲, \ldots$ زیرا:

$$\begin{aligned} n^۲ - ۳ &= (۱۲۱k + ۲۷)^۲ - ۳ \\ &= (۱۲۱k)^۲ + ۵۴(۱۲۱k) + ۲۷^۲ - ۳ \\ &= ۱۱^۲ k_۱ + ۱۱^۲ k_۲ + ۱۱^۲ \times ۶ \\ &= ۱۱^۲ k_۳ \end{aligned}$$

۳۱. فرض کنید $s = ۲^\alpha \cdot ۵^\beta \cdot t$ باشد (β, α عددهای صحیح نامنفی و t، عددی طبیعی غیرقابل قسمت بر ۲ و ۵ است). طبق قضیهٔ اویلر داریم:

$$۱۰^{\varphi(t)} \equiv ۱ \pmod{t}$$

بنابراین اگر فرض کنیم:

$$n = ۱۰^{\alpha+\beta}(۱۰^{\varphi(t)} + ۱۰^{۲\varphi(t)} + \cdots + ۱۰^{s\cdot\varphi(t)})$$

سپس داریم:

$$۱۰^{k\varphi(t)} \equiv ۱ \pmod{t} \qquad (k = ۱, ۲, \cdots, s)$$
$$\implies ۱۰^{\varphi(t)} + ۱۰^{۲\varphi(t)} + \cdots + ۱۰^{s\varphi(t)} \equiv s \equiv ۰ \pmod{t}$$

بنابراین n بر s بخش پذیر است، (با توجه به این که $۱۰^{\alpha+\beta}$ بر $۲^\alpha \cdot ۵^\beta$ قابل قسمت است). از طرفی واضح است که مجموع ارقام n برابر s است (زیرا عدد n در بسط دهدهی خود دارای تعداد رقم صفر و دقیقاً s تا رقم یک است).

۳۲. فرض کنید اعداد طبیعی z, y, x در معادله صدق کنند. بدون لطمه زدن به کلیت مسأله فرض کنید $x \le y$ در این صورت داریم:

$$(y+۱)^n = y^n + ny^{n-۱} + \cdots + ۱ > y^n + ny^{n-۱} > y^n + xy^{n-۱} \ge y^n + x^n = z^n > y^n$$

بنابراین $(y+۱)^n > z^n > y^n$ یعنی $y + ۱ > z > y$ و این تناقض است.

MATH75.IR

۳۳. با توجه به اثباتی که در قسمت مباحث تکمیلی آمده است، اگر $d > ۱$ و $d|۲^{۲^n} + ۱$ در این صورت $d = ۲^{n+۲}k + ۱$ (k عددی طبیعی است). از طرفی برای هر دو عدد طبیعی k, n داریم:

$$۲^{n+۲}k + ۱ \geq ۲^{n+۲} + ۱ > n$$

بنابراین هر مقسوم‌علیه بزرگتر از واحد $۲^{۲^n} + ۱$ از n بزرگتر است از این‌رو $(n, ۲^{۲^n} + ۱) = ۱$ می‌شود.

۳۴. در بین چهار عدد طبیعی متوالی حتماً عددی به فرم $۴k + ۲$ وجود دارد. بنابراین داریم:

$$۴k + ۲ = n^t = (۲m)^t = ۲^t \cdot m^t \qquad (t > ۱)$$

بنابراین به رابطهٔ $۲k + ۱ = ۲^{t-۱} \cdot m^t$ می‌رسیم که چون $t > ۱$ لذا سمت راست تساوی عددی زوج و سمت چپ عددی فرد می‌شود. که این یک تناقض است.

۳۵. اگر اعداد اول را به ترتیب $p_۱, p_۲, p_۳, \ldots$ بنامیم و اگر n را برابر با $(p_{s+۱} - ۱)\cdots(p_۳ - ۱)(p_۲ - ۱)$ فرض کنیم، طبق قضیهٔ فرما $۲^n - ۱$ بر تک تک اعداد $p_۲, p_۳, \ldots, p_{s+۱}$ بخش‌پذیر است. بنابراین $۲^n - ۱$ لااقل s مقسوم‌علیه اول مختلف دارد.

۳۶. چند جمله‌ای زیر دارای این خاصیت است.

$$f(n) = [(x - p_۱)(x - p_۲)\cdots(x - p_m) + ۱]x$$

که در آن p_k عبارت است از k امین عدد اول. بدیهی است که در این چند جمله‌ای برای $p_۱, p_۲, \ldots, p_m$ داریم $f(p_k) = p_k$.

۳۷. ابتدا توجه داریم که اگر x فرد باشد در این صورت $x^۲ = ۸k + ۱$ و اگر x زوج باشد $x^۲ = ۴k$ می‌باشد. بنابراین $x^۲ - ۲y^۲$ در تقسیم بر ۸ باقی مانده‌ای مساوی $۱, ۶, ۷$ و یا صفر خواهد داشت. در حالی که $x^۲ - ۲y^۲ = -۸z + ۳$، بنابراین معادلهٔ فوق در اعداد صحیح جواب ندارد.

۳۸. چون $p - ۱$ زوج است، لذا مجموع فوق را به دسته‌های دوتایی به صورت زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\frac{m}{n} &= \left(۱ + \frac{۱}{p-۱}\right) + \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{p-۲}\right) + \cdots + \left(\frac{۱}{\frac{p-۱}{۲}} + \frac{۱}{\frac{p+۱}{۲}}\right) \\
&= \frac{p}{p-۱} + \frac{p}{۲(p-۲)} + \cdots + \frac{p}{\frac{p-۱}{۲}\cdot\frac{p+۱}{۲}} \\
&= p\left[\frac{۱}{p-۱} + \frac{۱}{۲(p-۲)} + \cdots + \frac{۱}{\frac{p-۱}{۲}\cdot\frac{p+۱}{۲}}\right] \\
&= p \cdot \frac{q}{(p-۱)!}
\end{aligned}$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم:

$$m \cdot (p-۱)! = p \cdot q \cdot n$$

MATH75.IR

و از آنجا خواهیم داشت:

$$p|m\cdot(p-۱)!$$

ولی چون $(p,(p-۱)!)=۱$ پس به حکم مسأله یعنی $p|m$ خواهیم رسید.

۳۹. اگر p برابر ۲ باشد، به ازای هر عدد زوج دلخواه n عدد ۲^n-n بر $p=۲$ بخش پذیر است. حال فرض کنید $p>۲$، در این صورت برای هر عدد

$$n=(mp-۱)(p-۱)\qquad (m\in N)$$

عبارت ۲^n-n بر p بخش پذیر است زیرا طبق قضیهٔ فرما خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}۲^n-n&=۲^{(mp-۱)(p-۱)}-(mp-۱)(p-۱)\\&\overset{p}{\equiv}۱^{(mp-۱)}-(mp-۱)(p-۱)\\&\overset{p}{\equiv}۱-mp^۲+mp-p+۱\\&\overset{p}{\equiv}۰\end{aligned}$$

۴۰. چون مجموعهٔ $A=\{۰,۱,۲,\ldots,۹۹\}$ یک دستهٔ کامل مانده‌ها است، لذا مجموعهٔ

$$B=\{۰,۱\times ۷۷,۲\times ۷۷,\ldots,۹۹\times ۷۷\}$$

نیز یک دستهٔ کامل مانده‌ها است. اعداد مجموعهٔ B را به ترتیب روی محیط یک دایره قرار می‌دهیم. با توجه به این که

$$۲\times ۷۷\equiv ۵۴\pmod{۱۰۰}$$

لذا اضافه کردن ۷۷ یا ۵۴ به عدد، به این معناست که در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، به عدد مجاور و یا عدد بعدی آن برویم.

بدیهی است که در ضمن این حرکت یا به ۰ می‌رسیم یا ۷۷ (زیرا ۰ و ۷۷ دو عدد متوالی در این تقسیم بندی دایره هستند). در هر دو حالت (۰ و ۷۷) عددی که به‌دست می‌آید به پیمانهٔ ۱۰۰ دارای دو رقم سمت راست مساوی است.

۴۱. چند جمله‌ای زیر را در نظر بگیرید:

$$p(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)$$

و فرض کنید

$$p(x)=x^۵+px^۴+qx^۳+rx^۲+sx+t$$

MATH75.IR

با توجه به قضیهٔ ویت (رابطهٔ بین ضرایب و ریشه‌ها) داریم:

$$p = -(a+b+c+d+e)$$
$$q = ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de$$
$$= \frac{۱}{۲}\left[(a+b+c+d+e)^۲ - (a^۲+b^۲+c۲+d^۲+e^۲)\right]$$

بنابراین هر دو عدد p و q بر n بخش پذیرند. حال اگر برابری‌های

$$p(a) = ۰ \ , \ p(b) = ۰ \ , \ p(c) = ۰ \ , \ p(d) = ۰ \ , \ p(e) = ۰$$

را با هم جمع کنیم، داریم:

$$(a^۵+b^۵+c^۵+d^۵+e^۵) + p(a^۴+b^۴+c^۴+d^۴+e^۴)+$$
$$+q(a^۳+b^۳+c^۳+d^۳+e^۳) + r(a^۲+b^۲+c^۲+d^۲+e^۲)+$$
$$+s(a+b+c+d+e) + ۵t = ۰$$

از رابطهٔ فوق نتیجه می‌گیریم که:

$$a^۵+b^۵+c^۵+d^۵+e^۵+۵t$$

بر n بخش پذیر است. در ضمن توجه داریم که طبق قضیهٔ ویت

$$t = -abcde$$

۴۲. تمام اعداد طبیعی $(۳m+۲)^۲$ با شرط $m \geq ۱$ دارای این خاصیت می‌باشند. زیرا اگر برای عدد طبیعی n و عدد اول p داشته باشیم:

$$n^۲ + p = (۳k+۲)^۲$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$p = (۳k+۲-n)(۳k+۲+n)$$

چون p اول است بنابراین

$$\begin{cases} ۳k+۲-n = ۱ \\ ۳k+۲+n = p \end{cases}$$

و از آنجا خواهیم داشت:

$$p = ۶k+۳$$

که چون $k \geq ۱$ بنابراین p مضرب ۳ و بزرگتر از ۳ می‌شود و این با اول بودن p تناقض دارد.

۴۳. اعداد متوالی را به صورت زیر فرض می‌کنیم

$$a_۱ \ , \ a_۲ = a_۱ + ۱ \ , \ a_۳ = a_۲ + ۱, \cdots, a_n = a_{n-۱} + ۱$$

MATH75.IR

چون $m < n$، پس لااقل یکی از اعداد فوق بر m بخش پذیر است فرض می‌کنیم $a_j = m \cdot q_1$. بدیهی است که در بین n عدد متوالی حتماً یکی مضرب n می‌باشد. فرض می‌کنیم $a_j = n \cdot q_2$. اگر $i \neq j$ در آن صورت $a_i \cdot a_j = mnq_3$ و مسأله حل شده تلقی می‌شود. حال حالت $i = j$ را بررسی می‌کنیم. یعنی:

$$a_i = n \cdot q_2 = mq_1$$

فرض می‌کنیم $(m,n) = d$, $[m,n] = c$. یکی از دو عدد $a_i + d$ یا $a_i - d$ به مجموعهٔ $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ تعلق دارند زیرا در غیر این صورت داریم

$$i - d < 1 \, , \; i + d \geq n + 1$$

و لذا $n < 2d$ ولی چون $d|n$ لذا چاره‌ای نیست جز این که $n = d$ ولی چون $m < n = d$, $d|m$ بنابراین به تناقض رسیدیم. این تناقض نشان می‌دهد که یکی از اعداد $a_i + d$ یا $a_i - d$ متعلق به مجموعهٔ $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ است. حال چون a_i مضرب مشترک m و n است لذا طبق قضیه مضرب c نیز می‌باشد یعنی:

$$a_i = c \cdot q$$

و از آنجا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} a_i(a_i \pm d) &= cq(cq \pm d) \\ &= cq(mq_3 q \pm d) \\ &= cq(dq_4 q_3 q \pm d) \\ &= cqdq_5 \\ &= mnqq_5 \end{aligned}$$

بنابراین دو عددی که مجهول ما بودند a_i و $a_i + d$ (یا $a_i - d$) می‌باشند.

۴۴. اگر n توانی از ۳ نباشد آنگاه $n = 3^k \cdot r$ که در آن $(r, 3) = 1$. فرض کنید $m = 3^k$ و همچنین

$$p = 1 + 2^n + 4^n \; , \; q = 1 + 2^m + 4^m$$

حال دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

- $r = 3s + 1 (i)$ ، در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} p - q &= (2^n - 2^m) + (4^n - 4^m) \\ &= \left(2^{m \cdot r} - 2^m\right) + \left(4^{mr} - 4^m\right) \\ &= 2^m \left[2^{m(r-1)} - 1\right] + 4^m \left[4^{m(r-1)} - 1\right] \\ &= 2^m \left(2^{3sm} - 1\right) + 4^m \left(2^{6sm} - 1\right) \\ &= 2^m \left(2^{3m} - 1\right) t_1 + 4^m \left(2^{3m} - 1\right) t_2 \\ &= \left(2^{3m} - 1\right) t_3 = \left(2^m - 1\right) q \cdot t_3 \end{aligned}$$

MATH75.IR

بنابراین عدد $p-q$ بر q بخش پذیر و، از آنجا، p بر q بخش پذیر است. که این با اول بودن p تناقض دارد.

- (i) $r=3s+2$، در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} p-q &= (4^n-2^m)+(2^n-4^m) \\ &= 2^m\left[2^{3m(2s+1)}-1\right]+4^m\left[2^{3ms}-1\right] \\ &= 2^m\left[2^{3m}-1\right]t_1+4^m\left[2^{3m}-1\right]t_2 \end{aligned}$$

و از آنجا، مشابه حالت قبل، p بر q بخش پذیر است. و تناقض مورد نظر به‌دست می آید.

نتیجهٔ تناقض در این دو حالت این است که n فقط به صورت 3^k می‌باشد.

۴۵. فرض کنید $m=p^i\cdot r$ و $n=p^j\cdot s$ که در آن، j,i اعداد صحیح نامنفی‌اند و اعداد s,r اعدادی طبیعی و بخش ناپذیر بر p هستند. فرض کنید $s>r$. چون $(s,p)=1$ لذا طبق قضیهٔ معروف باقی‌ماندهٔ چینی، عدد $x>0$ وجود دارد به قسمی که:

$$x\equiv 0 \pmod{s} \quad , \quad x\equiv -1 \pmod{p}$$

از آنجا $x=p\cdot k-1$ و خواهیم داشت:

$$\begin{cases} (p\cdot k-1,n)=(x,p^j\cdot s)=s \\ (p\cdot k-1,m)=(x,p^i\cdot r)=(x,r)\le r<s \end{cases}$$

که با شرط $(p_k-1,n)=(p_k-1,m)$ تناقض دارد.

به همین ترتیب حالت $x<s$ نیز به تناقض می‌رسد. لذا تنها حالت ممکن $r=s$ می‌باشد و از آنجا $n=p^{j-i}\cdot m$.

تبصره: صورت قضیه‌ی باقی‌مانده‌ی چنین به شرح زیر می‌باشد:

برای عددهای صحیح مثبت $m_k,\ldots,m_2,m_1$ با شرط $(m_i,m_j)=1$ برای همه‌ی مقادیر ممکن i,j به طوری که $i\neq j$، دستگاه همنهشتی زیر

$$\begin{aligned} x &\overset{m_1}{\equiv} c_1 \\ x &\overset{m_2}{\equiv} c_2 \\ &\vdots \\ x &\overset{m_k}{\equiv} c_k \end{aligned}$$

دارای یک جواب یکتا به هنگ $m=m_1m_2\ldots m_k$ می‌باشد که در آن $c_k,\ldots,c_2,c_1$ عددهای طبیعی دلخواهی هستند.

۴۶. دنبالهٔ اکیداً صعودی زیر را در نظر بگیرید:

$$t_1=1 \ , \ t_{n+1}=a^{t_n}-1$$

MATH75.IR

ثابت می‌کنیم $a^{t_n}-1$ بر t_n بخش پذیر است (برای هر $n \in \mathbf{N}$)، که در آن صورت، چون دنبالهٔ اکیداً صعودی است لذا بی‌نهایت عدد طبیعی t_n یافتیم که $a^{t_n}-1$ بر t_n بخش پذیر است. اثبات به روش استقراء روی n انجام می‌پذیرد. برای $n=1$ بدیهی است که $a^{t_1}-1$ بر t_1 بخش پذیر است. فرض کنیم به‌ازای $n \in \mathbf{N}$، عدد $a^{t_n}-1$ بر t_n بخش پذیر باشد، یعنی:

$$a^{t_n}-1 = t_n \cdot q \ (q \in N)$$

در این صورت داریم:

$$a^{t_{n+1}-1} = a^{(a^{t_n}-1)} - 1 = a^{t_n \cdot q} - 1 = (a^{t_n}-1)\cdot k$$
$$= t_{n+1} \cdot k$$

یعنی حکم مسأله اثبات شد.

۴۷. فرض کنید $x=a$, $y=b$ و $z=c$ یک دسته جواب برای این معادله باشند خواهیم داشت:

$$[(2a)^a+1][(2a)^a-1] = b^{c+1}$$

چون دو پرانتز سمت چپ، دو عدد فرد متوالی‌اند، لذا نسبت به هم اولند و از آنجا نتیجه می‌گیریم:

$$(2a)^a+1 = s^{c+1} \ , \ (2a)^a-1 = r^{c+1} \qquad (s,r \in N)$$

و لذا داریم:

$$2 = s^{c+1} - r^{c+1} = (s-r)(s^c + \cdots + r^c)$$

ولی این تناقض است زیرا:

$$2 \le 2r < r+s \le r^c + s^c \le s^c + s^{c-1}r + \cdots + r^c \le 2$$

۴۸. فرض کنید $b = 2^n$, $s = a^{2^n}$. چون

$$s \equiv -1 \pmod{p}$$

لذا $s^2 \equiv 1 \pmod{p}$ یعنی مرتبهٔ s به سنج p برابر ۲ است. فرض کنید مرتبهٔ a به سنج p برابر k باشد. لذا طبق قضیه مرتبهٔ a^b به سنج p برابر $\frac{k}{(k,b)}$ می‌باشد. چون مرتبهٔ a^b برابر ۲ است پس

$$2 = \frac{k}{(k, 2^n)}$$

و از آنجا نتیجه می‌گیریم:

$$\left(2, \frac{2^{n+1}}{k}\right) = 1$$

MATH75.IR

و این ممکن نیست مگر آنکه $k = ۲^{n+۱}$. یعنی مرتبهٔ a به سنج p برابر $۲^{n+۱}$ است و چون طبق قضیهٔ فرما $a^{p-۱} \equiv ۱ \pmod{p}$ بنابراین

$$۲^{n+۱} | p - ۱$$

۴۹. مجموعهٔ $\{b, ۱۰b, ۱۰^۲b, \ldots, ۱۰^ab\}$ را که دارای $a+۱$ عضو است، در نظر بگیرید. لااقل دو عضو این مجموعه به پیمانهٔ a همنهشت هستند. فرض کنید $۰ \leq k < a$, $۰ < k+l \leq a$ کوچکترین اعدادی باشند که

$$۱۰^{k+l}b \equiv ۱۰^kb \pmod{a} \quad (*)$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که $\frac{b}{a}(۱۰^{k+l} - ۱۰^k)$ عددی صحیح است، و این ممکن نیست مگر این که قسمت‌های اعشاری $\frac{b}{a}$ متناوب با دورهٔ تناوب l و دورهٔ غیر تناوب k باشد. از طرفی چون $(a,b) = ۱$، لذا از رابطهٔ $(*)$ نتیجه می‌گیریم که

$$۱۰^{k+l} \equiv ۱۰^k \pmod{a}$$

یعنی $a | ۱۰^k(۱۰^l - ۱)$ و یا $۲^\alpha \times ۵^\beta \times m | ۱۰^k(۱۰^l - ۱)$ و چون $(m, ۱۰) = ۱$ بنابراین $m | ۱۰^l - ۱$ و یا به عبارت دیگر

$$۱۰^l \equiv ۱ \pmod{m}$$

بنابراین کوچکترین مقدار l که در رابطهٔ $(*)$ صدق می‌کند، همان مرتبهٔ ۱۰ به سنج m است. لذا $l | \varphi(m)$. بدیهی است که اگر $l = m - ۱$ آنگاه $(m-۱) | \varphi(m)$ یعنی $\varphi(m) = m - ۱$. بنابراین m اول است.

MATH75.IR

مسایل تستی المپیادهای ریاضی کشوری

مرحلهٔ اول سیزدهمین دوره (آبان ۱۳۷۴)

۱. باقی‌ماندهٔ تقسیم $۵^{۲۲}+۷$ بر ۸ برابر است با:

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

حل:

$$۵^{۲} \overset{۸}{\equiv} ۱ \Longrightarrow ۵^{۲۲} \overset{۸}{\equiv} ۱ \Longrightarrow ۵^{۲۲}+۷ \overset{۸}{\equiv} ۰$$

۲. در یک امتحان تستی با ۲۰ سؤال هر جواب صحیح ۷ نمرهٔ مثبت و هر جواب غلط ۲ نمرهٔ منفی دارد (به سؤال‌های بدون جواب هیچ نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد). اگر نمرهٔ دانش‌آموزی برابر ۸۷ باشد این دانش‌آموز به چند سؤال جواب نداده است؟

الف) ۲ ب) ۵ ج) ۷ د) ۹ ه) ۱۳

حل: اگر x تعداد جواب‌های درست و y تعداد جواب‌های غلط باشد، در این صورت داریم: $۷x-۲y=۸۷$ بنابراین $x>۱۲$ و در نتیجه $y<۸$ از طرفی داریم:

$$۸۷ \overset{۷}{\equiv} -۲y \Longrightarrow -۴ \overset{۷}{\equiv} -۲y \Longrightarrow y \overset{۷}{\equiv} ۲$$

و چون $y<۸$ بنابراین $y=۲$ و در نتیجه $x=۱۳$ بنابراین به ۵ سؤال جواب داده نشده است.

۳. کوچکترین عدد طبیعی را بیابید که بتوان آن را هم به صورت مجموع ۹ عدد طبیعی متوالی نوشت و هم به صورت مجموع ۱۰ عدد طبیعی متوالی (اعداد طبیعی از ۱ شروع می‌شوند).

الف) ۴۵ ب) ۵۵ ج) ۱۰۰ د) ۱۳۵ ه) ۴۹۵

حل: عدد موردنظر را m می‌نامیم بنابراین خواهیم داشت:

$$m=k+(k+۱)+\cdots+(k+۸)=n+(n+۱)+\cdots+(n+۹)$$

$$\Longrightarrow ۹k+۳۶=۱۰n+۴۵ \Longrightarrow ۹k=۱۰n+۹$$

MATH75.IR

بنابراین حداقل n برابر ۹ می‌باشد که در این صورت $k = ۱۱$ و همچنین $m = ۱۳۵$

۴. به ازای کدام مقدار n، معادلهٔ $n = x + y + xy$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی جواب ندارد؟

الف) $n = ۱۰۰$ ب) $n = ۱۰۵$ ج) $n = ۱۱۰$ د) $n = ۱۱۵$ ه) $n = ۱۲۰$

حل: چون $n + ۱ = (x + ۱)(y + ۱)$ بنابراین اگر $n + ۱$ عددی اول باشد، معادلهٔ فوق در مجموعهٔ اعداد طبیعی جواب نخواهد داشت. که در گزینه‌های داده شده $n = ۱۰۰$ دارای این خاصیت است.

۵. فرض کنید در مجموع زیر هر حرف انگلیسی نمایندهٔ عددی یک رقمی است.

$$\begin{array}{r} SUAVE \\ SAGE \\ +SAGE \\ \hline ۴۶۹۳۳ \end{array}$$

در این صورت U کدام یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

الف) ۱ ب) ۳ ج) ۵ د) ۷ ه) ۹

حل: ده بر یک حاصل از مجموع ارقام واقع در ردیف صدگان را n می‌نامیم. بدیهی است که $n \leq ۲$ از طرفی چون $S \leq ۴$ بنابراین چهار حالت داریم:

۱) اگر $S = ۴$ باشد، مجموع $U + ۴ + ۴ + n$ باید (بدون تولید ده بر یک) برابر ۶ شود که چنین چیزی غیرممکن است.

۲) اگر $S = ۱$ باشد، مجموع $U + ۱ + ۱ + n$ باید ده بر یک ۳ تولید کند که ممکن نیست.

۳) اگر $S = ۲$ باشد، مجموع $U + ۲ + ۲ + n$ باید ده بر یک ۲ تولید کند، که این نیز غیرممکن است چون $n \leq ۲$ و $u \leq ۹$

۴) اگر $S = ۳$ باشد، پس $A \neq ۳$ و لذا $n = ۱$ یا $n = ۲$. اگر $n = ۱$ بنابراین $U = ۸$ و $A = ۹$ و چون $E = ۱$ و چون $G + G + V$ باید ده بر یک ۲ تولید کند ولی چون هر دو رقم G و V مخالف ۹ می‌باشند بنابراین به تناقض برمی‌خوریم پس U فقط می‌تواند ۹ باشد.

۶. چند عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که مجموع $۱! + ۲! + \cdots + n!$ مربع کامل باشد؟

الف) تعداد نامتناهی n ب) فقط برای دو مقدار n

ج) فقط برای سه مقدار n د) فقط برای چهار مقدار n

ه) فقط برای پنج مقدار n

حل: چون $۱! + ۲! + ۳! + ۴! = ۳۳$ و برای هر $n \geq ۵$ داریم $n! \overset{۱۰}{\equiv} ۰$ بنابراین برای هر $n \geq ۵$ رقم یکان $۱! + ۲! + \cdots + n!$ برابر ۳ خواهد بود، در حالی که رقم یکان هیچ مربع کاملی ۳ نخواهد شد. لذا برای $n \geq ۵$ جوابی موجود نیست. از طرفی در بین اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ فقط $n = ۱$ و $n = ۳$ عبارت فوق را مربع کامل می‌سازد بنابراین گزینهٔ (ب) صحیح است.

MATH75.IR

۷. فرض کنید $A \subseteq \{۱, ۲, \cdots, ۱۶\}$ مجموعه‌ای دلخواه باشد. سه تایی $\{a, b, c\}$ را «اولیه» گوییم هرگاه هر دو عضوش نسبت به هم اول باشند. اگر A شامل هیچ سه تایی اولیه نباشد آنگاه ماکزیمم تعداد اعضای A برابر است با:

الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۱۱ د) ۱۲ ه) ۱۳

حل:

چون ۲ کوچکترین عدد اولی است که در بین اعضای این مجموعه می‌تواند عامل مشترک باشد، لذا برای این که ماکزیمم تعداد اعضای A را به‌دست آوریم می‌بایست مضارب ۲ را در A قرار دهیم. همچنین مضارب ۳ را نیز در A قرار می‌دهیم یعنی مجموعه A برابر است با:

$$A = \{۲, ۳, ۴, ۶, ۸, ۹, ۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۵, ۱۶\}$$

۸. اگر رابطهٔ

$$(\frac{b^۲ + c^۲ - a^۲}{۲bc})^n + (\frac{c^۲ + a^۲ - b^۲}{۲ac})^n + (\frac{a^۲ + b^۲ - c^۲}{۲ab})^n = ۱$$

برای $n = ۱$ صحیح باشد، آنگاه:

الف) برای تمام n های زوج صحیح است. ب) برای تمام n های فرد صحیح است.

ج) برای $n = ۳k$ صحیح است. د) برای $n = ۳k + ۱$ صحیح است.

ه) برای $n = ۳k + ۲$ صحیح است.

حل: چون برای $n = ۱$ رابطه صحیح است لذا:

$$\frac{b^۲ + c^۲ - a^۲}{۲bc} + \frac{c^۲ + a^۲ - b^۲}{۲ac} + \frac{a^۲ + b^۲ - c^۲}{۲ab} = ۱$$

$$\Longrightarrow ab^۲ + ac^۲ + bc^۲ + ba^۲ + ca^۲ + cb^۲ - a^۳ - b^۳ - c^۳ - ۲abc = ۰$$

$$\Longrightarrow (a + b - c)(a + c - b)(b + c - a) = ۰$$

بنابراین $a = b + c$ یا $b = a + c$ و یا $c = a + b$. بنا به تقارن فرض می‌کنیم $a = b + c$ پس داریم:

$$(\frac{b^۲ + c^۲ - (b + c)^۲}{۲bc})^n + (\frac{c^۲ + (b + c)^۲ - b^۲}{۲ac})^n + (\frac{(b + c)^۲ + b^۲ - c^۲}{۲ab})^n = ۱$$

$$\Longrightarrow (-۱)^n + (\frac{b + c}{a})^n + (\frac{b + c}{a})^n = ۱$$

$$\Longrightarrow (-۱)^n + (۱)^n + (۱)^n = ۱$$

$$\Longrightarrow (-۱)^n = -۱$$

این رابطه وقتی برقرار است که n فرد باشد. یعنی گزینهٔ (ب) صحیح است.

MATH75.IR

۹. می‌دانیم بین اعداد ۱۰۰ و ۱۰۰۰، چهار عدد طبیعی موجودند به طوری که هر یک با مجموع مکعبات رقم‌هایشان برابر می‌باشند و سه تا از آنها عبارتند از ۴۰۷، ۳۷۱ و ۱۵۳. عدد چهارم را دقیقاً به‌دست آورده و بگویید در کدام یک از فاصله‌های زیر قرار دارد.

الف) $[۳۰۰,۴۰۰]$ ب) $[۴۰۰,۵۰۰]$ ج) $[۵۰۰,۶۰۰]$

د) $[۶۰۰,۷۰۰]$ ه) $[۷۰۰,۸۰۰]$

حل:

$$۳۷۱ = ۳^۳ + ۷^۳ + ۱^۳ \implies ۳۷۰ = ۳^۳ + ۷^۳ + ۰^۳$$

یعنی عدد بعدی ۳۷۰ می‌باشد که در فاصلهٔ $[۳۰۰,۴۰۰]$ قرار دارد.

مرحلهٔ اول چهاردهمین دوره ۱۳۷۵

۱۰. رقم سمت راست عدد $۱۷^{۱۷} - ۲۳^{۲۳}$ برابر است با:

الف) ۰ ب) ۲ ج) ۴ د) ۶ ه) ۸

حل: با توجه به این که اگر $n = ۴k + r$ و $k \in Z$ و $۱ \le r \le ۴$ در این صورت داریم:

(هنگ ۱۰) $a^{۴k+r} \equiv a^r$ بنابراین خواهیم داشت:

$$۲۳^{۲۳} - ۱۷^{۱۷} \overset{۱۰}{\equiv} ۳^{۲۳} - ۷^{۱۷} \overset{۱۰}{\equiv} ۳^۳ - ۷^۱ \overset{۱۰}{\equiv} ۰$$

یعنی گزینهٔ (الف) درست می‌باشد.

۱۱. فرض کنید مجموع $۱ + ۲ + \cdots + n$ یک عدد سه رقمی باشد که رقم‌های آن مساوی‌اند. در این صورت n بر کدام یک از اعداد زیر بخش‌پذیر است.

الف) ۵ ب) ۶ ج) ۷ د) ۸ ه) ۱۱

حل: چون $۱ + ۲ + \cdots + n < ۱۰۰۰$ بنابراین $۱۰۰ \le$ داریم:

$$۱۰۰ \le \frac{n(n+۱)}{۲} < ۱۰۰۰ \implies ۲۰۰ \le n(n+۱) < ۲۰۰۰ \implies ۱۴ \le n < ۴۵$$

از طرفی داریم:

$$۱ + ۲ + \cdots + n = \overline{aaa} \implies \frac{n(n+۱)}{۲} = ۱۰۰a + ۱۰a + a \implies n(n+۱) = ۲۲۲a$$

$$\implies \quad n(n+۱) = ۳۷ \times ۶a$$

چون $(n, n+۱) = ۱$ بنابراین حتماً یکی از اعداد n یا $n+۱$ باید بر ۳۷ بخش‌پذیر باشد که با شرط $۱۴ \le n < ۴۵$ تنها عدد $n = ۳۶$ مورد قبول می‌باشد. بنابراین گزینهٔ ب قابل قبول است. (قابل ذکر است که $n = ۳۷$ در رابطهٔ $n(n+۱) = ۳۷ \times ۶a$ صدق نمی‌کند).

MATH75.IR

۱۲. فرض کنید هر حرف لاتین نمایندهٔ یک رقم باشد و اگر دو حرف لاتین متفاوت باشند حتماً رقم‌های آنها نیز متفاوت است. اگر داشته باشیم: $\frac{SIX}{NINE} = \frac{۲}{۳}$ در این صورت مقدار I برابر است با:

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵

حل: فرض کنیم $a = SIX$ و $b = NINE$ در این صورت داریم:

$$۱۰۰ \leq b \implies ۱۰۰۰ \leq \frac{۳}{۲}a \implies ۶۶۶ < a$$

همچنین داریم:

$$a \leq ۹۹۹ \implies \frac{۲}{۳}b \leq ۹۹۹ \implies b < ۱۵۰۰$$

یعنی $۶۶۶ < a \leq ۹۹۹$ و $۱۰۰۰ \leq b < ۱۵۰۰$ در هر حال N برابر ۱ می‌شود. چون رقم دهگان و هزارگان b یکسان است پس b در یکی از فواصل زیر قرار دارد:

الف) $[۱۰۱۰, ۱۰۱۹]$ ب) $[۱۱۱۰, ۱۱۱۹]$ ج) $[۱۲۱۰, ۱۲۱۹]$

د) $[۱۳۱۰, ۱۳۱۹]$ ه) $[۱۴۱۰, ۱۴۱۹]$

و همچنین a نیز در یکی از فواصل زیر خواهد بود:

الف) $[۶۷۳, ۶۷۹)$ ب) $[۷۴۰, ۷۴۶]$ ج) $[۸۰۶, ۸۱۲)$

د) $[۸۷۳, ۸۷۹]$ ه) $[۹۴۰, ۹۶۴]$

که فقط در حالت پنجم رقم دهگان a با رقم صدگان b مطابقت دارد. پس $I = ۴$ می‌باشد یعنی گزینهٔ (د) صحیح است. (اعداد مورد نظر $a = ۹۴۲$ و $b = ۱۴۱۳$ می‌باشند)

۱۳. فرض کنید b, a دو عدد طبیعی بوده به طوری که $\frac{a+۱}{b} + \frac{b+۱}{a}$ عددی طبیعی باشد. در این صورت بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک b, a از کدام یک از اعداد زیر بزرگتر نیست؟ (بهترین جواب ممکن موردنظر است).

الف) $\sqrt{a+b}$ ب) $\sqrt{\frac{۲(a^۲+b^۲)}{a+b}}$ ج) $\sqrt{\frac{۳(a^۲+b^۲)}{a+b}}$

د) $\frac{\sqrt{۲a}+\sqrt{۲b}}{۲}$ ه) $\sqrt{a+b}-۱$

حل: فرض کنید $(a,b) = d$ و $a = a_۱ \cdot d$ و $b = b_۱ \cdot d$ در این صورت داریم:

$$n = \frac{a+۱}{b} + \frac{b+۱}{a} = \frac{a_۱ \cdot d + ۱}{b_۱ \cdot d} + \frac{b_۱ \cdot d + ۱}{a_۱ \cdot d} = \frac{a_۱^۲ \cdot d + a_۱ + b_۱^۲ \cdot d + b_۱}{a_۱ \cdot b_۱ \cdot d}$$

چون طبق فرض n عددی است طبیعی بنابراین صورت کسر فوق باید بر مخرج و در نتیجه بر d قابل‌قسمت باشد و چون $a_۱^۲ \cdot d + b_۱^۲ \cdot d$ بر d بخش‌پذیر است لذا باید $a_۱ + b_۱$ نیز بر d بخش‌پذیر باشد پس داریم:

$$d|(a_۱ + b_۱) \implies d \leq a_۱ + b_۱ \implies d^۲ \leq a_۱ d + b_۱ d \implies d^۲ \leq a + b \implies d \leq \sqrt{a+b}$$

یعنی گزینهٔ الف درست است.

MATH75.IR

۱۴. معادلهٔ $۳^y = ۱ + ۲^x$ در اعداد طبیعی چند دسته جواب دارد؟

الف) ۱ جواب ب) ۲ جواب ج) ۳ جواب

د) ۴ جواب ه) نامتناهی جواب

حل: ابتدا درنظر داریم که $x = y = ۱$ یک دسته جواب است. حال فرض کنیم $x > ۲$، در این صورت ۲^x مضرب ۸ است لذا $۳^y - ۱$ نیز می‌بایست مضرب ۸ باشد لذا y عددی است زوج زیرا اگر $y = ۲k + ۱$ داریم:

$$۳^۲ \overset{۸}{\equiv} ۱ \implies ۳^{۲k+۱} \overset{۸}{\equiv} ۳ \implies ۳^y - ۱ \overset{۸}{\equiv} ۲$$

بنابراین معادله به صورت $۲^x = ۳^{۲k} - ۱$ می‌گردد که در آن $x > ۲$ و k عددی طبیعی است. اما $(۳^k + ۱)(۳^k - ۱) = ۳^{۲k} - ۱$ و چون $۳^k - ۱$ و $۳^k + ۱$ دو عدد زوج متوالی‌اند پس حداقل یکی از آنها عامل اولی غیر از ۲ خواهد داشت. بنابراین $۳^{۲k} - ۱$ نمی‌تواند برابر ۲^x باشد مگر آنکه $k = ۱$ در این صورت $y = ۲$ و $x = ۳$ نیز یک جواب معادله خواهد بود. بنابراین این معادله فقط دو دسته جواب دارد.

۱۵. عدد a را متعادل گوییم هرگاه بتوان رقم‌های آن را به دو دسته تقسیم کرد به طوری که مجموع رقم‌های دو دسته مساوی باشد. کوچکترین عدد a، به طوری که a و $a + ۱$ متعادل باشند در کدام یک از فاصله‌های زیر قرار می‌گیرد؟

الف) $[۱۰۰, ۲۰۰]$ ب) $[۲۰۰, ۳۰۰]$ ج) $[۳۰۰, ۴۰۰]$

د) $[۴۰۰, ۵۰۰]$ ه) $[۵۰۰, ۶۰۰]$

حل: بدیهی است که مجموع ارقام یک عدد متعادل باید زوج باشد. از طرفی اگر a به ۹ ختم نشود، در این صورت مجموع ارقام a و $a + ۱$ یک واحد با هم اختلاف خواهند داشت. لذا هر دو زوج نمی‌توانند باشند. بنابراین شرط لازم برای متعادل بودن هر دو عدد a و $a + ۱$ آن است که a به رقم ۹ ختم شود. a نمی‌تواند دو رقمی باشد زیرا تنها عدد دو رقمی متعادل که به ۹ ختم شود، ۹۹ می‌باشد که در این صورت $a + ۱$ متعادل نیست پس a به فرم $\overline{xy۹}$ می‌باشد که با توجه به متعادل بودن a و $x \leq ۹$ و $y \leq ۹$، مجموع دو عدد x و y برابر ۹ خواهد بود. بنابراین $a + ۱$ به فرم $\overline{nno}$ خواهد بود (چون $a + ۱$ نیز متعادل است). چون $x < ۹$ و $y < ۹$ و همچنین چون $a + ۱$ و a دو عدد متوالی‌اند لذا داریم:

$$۱ + x + y = n + n \implies ۱۰ = ۲n \implies n = ۵$$

یعنی دو عدد موردنظر ۵۵۰ و ۵۴۹ می‌باشند پس گزینهٔ (ه) صحیح می‌باشد.

۱۶. تعداد تمام اعداد بین ۱ تا ۱۰۰ را بیابید که مجموع اعدادی طبیعی باشند که در رقم‌های آنها هر یک از اعداد ۰ تا ۹ دقیقاً یک بار آمده باشد.

(مثال: $۹ + ۸ + ۷ + ۶ + ۴ + ۳ + ۵۲ + ۱ + ۰ = ۹۰$)

الف) ۷ ب) ۱۱ ج) ۱۵ د) ۱۹ ه) ۲۳

MATH75.IR

حل: حداقل عدد موردنظر ۴۵ می‌باشد زیرا:

$$۰ + ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ = ۴۵$$

برای ساختن اعداد دو رقمی بزرگتر از ۴۵ با خاصیت فوق کافی است از ده عدد فوق یکی را حذف کرده و آن را به عنوان رقم یکان یا دهگان در کنار یکی از ۹ عدد باقی‌مانده قرار دهیم. (به طور مثال: $۷۲ = ۹ + ۸ + ۷ + ۶ + ۵ + ۳۴ + ۲ + ۱ + ۰$). در این صورت عدد جدید به صورت

$$۴۵ - a + ۱۰a = ۴۵ + ۹a$$

خواهد بود. پس اعداد موردنظر عبارتند از:

$$۴۵, ۵۴, ۶۳, ۷۲, ۸۱, ۹۰, ۹۹$$

که تعداد آنها برابر با ۷ می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (الف) صحیح می‌باشد.

مرحلهٔ اول پانزدهمین دوره بهمن ۱۳۷۵

۱۷. اعداد زوج متوالی $۲, ۴, ۶, ۸, \cdots$ را آنقدر ضرب می‌کنیم تا حاصل بر ۱۳۷۵ بخش‌پذیر شود. بزرگترین عدد زوج به کار رفته در کدام یک از روابط زیر صدق می‌کند؟

الف) بین ۱ تا ۱۱ ب) بین ۱۱ تا ۲۱ ج) بین ۲۱ تا ۳۱

د) بین ۳۱ تا ۴۱ ه) چنین کاری امکان‌پذیر نیست.

حل: اگر ۱۳۷۵ به عوامل اول تجزیه شود به صورت ۱۱×۵^۳ خواهد بود و در مجموعهٔ اعداد زوج با شروع از ۲ وقتی به ۳۰ برسیم، سه عامل ۵ خواهیم داشت که چون در این صورت عدد ۲۲ نیز در مجموعهٔ اعداد زوج کمتر از ۳۰ قرار دارد بنابراین عدد موردنظر $۳۰ \times \cdots \times ۶ \times ۴ \times ۲$ می‌باشد یعنی گزینهٔ (ج) درست است.

۱۸. اگر $۹x + ۵y$ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد، برای این که لزوماً $۱۰x + ky$ نیز بر ۱۱ بخش‌پذیر شود، k را برابر کدام یک از مقادیر زیر انتخاب کنیم؟

الف) ۲ ب) ۴ ج) ۶ د) ۸ ه) ۱۰

حل:

$$۹x + ۵y \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \implies ۵y \overset{۱۱}{\equiv} -۹x \implies ۱۶y \overset{۱۱}{\equiv} ۲x \implies ۸y \overset{۱۱}{\equiv} x$$
$$\implies ۸y \overset{۱۱}{\equiv} -۱۰x \implies ۸y + ۱۰x \overset{۱۱}{\equiv} ۰$$

بنابراین کافی است $k = ۸$ درنظر گرفته شود.

MATH75.IR

۱۹. تعداد سه تایی‌های مرتب (x,y,z) از اعداد صحیح که در معادلات $x+y^۲-z=۱۲۴$ و $x^۲+y-z=۱۰۰$ صدق می‌کنند عبارت است از:

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

حل: از تفاضل دو رابطهٔ مفروض خواهیم داشت:

$$x-x^۲+y^۲-y=۲۴ \implies (y-x)(y+x-۱)=۲۴$$

چون $(y-x)$ و $(y+x-۱)$ از نظر زوج و فرد بودن متفاوت است، لذا فقط چهار امکان وجود دارد.

$$\begin{cases} y-x=۸ \\ y+x-۱=۳ \end{cases} \quad \begin{cases} y-x=۲۴ \\ y+x-۱=۱ \end{cases} \quad \begin{cases} y-x=۳ \\ y+x-۱=۸ \end{cases} \quad \begin{cases} y-x=۱ \\ y+x-۱=۲۴ \end{cases}$$

و در نتیجه چهار جواب زیر به‌دست می‌آید:

$$(-۱۱,۱۳,۳۴)\ ,\ (-۲,۶,-۹۰)\ ,\ (۳,۶,-۸۵)\ ,\ (۱۲,۱۳,۵۷)$$

یعنی گزینهٔ (ه) درست است.

۲۰. عدد طبیعی b را که از وارون کردن ارقام عدد طبیعی a به‌دست می‌آید مقلوب a می‌نامیم (مثلاً مقلوب ۱۳۷۵ عدد ۵۷۳۱ است). مطلوب است تعداد اعداد بین ۱ تا ۹۹۹۹ که مقلوبشان با خودشان برابر است.

الف) ۱۰۹۸ ب) ۱۲۲۰ ج) ۹۷۶ د) ۱۵۴۲ ه) ۱۰۰۸

حل: تعداد اعداد یک رقمی ۹، تعداد اعداد دو رقمی به فرم $\overline{aa}$، ۹، تعداد اعداد سه رقمی به فرم $\overline{aba}$، ۹۰ = ۱۰ × ۹، تعداد اعداد چهار رقمی به فرم $\overline{abba}$، ۹۰ = ۱۰ × ۹ و بالاخره تعداد اعداد پنج رقمی به فرم $\overline{abcba}$، ۹۰۰ = ۱۰ × ۱۰ × ۹ می‌باشد لذا در مجموع ۹۰۰ + ۹۰ + ۹۰ + ۹ + ۹ یعنی ۱۰۹۸ تعداد عدد به فرم خواسته شده خواهیم داشت.

۲۱. دنباله‌های $a_n=\sqrt{۱۲۳+n^۲}$ و $b_n=n+۳$ $(n=۱,۲,۳,\cdots)$ داده شده‌اند. فرض کنید که r کوچکترین عدد صحیحی باشد که $a_r<b_r$ و s بزرگترین عدد صحیحی باشد که $a_s>b_s+۱$. در این صورت $r+s$ برابر است با:

الف) ۳۰ ب) ۳۱ ج) ۳۲ د) ۳۳ ه) ۳۸

حل: اگر $a_r<b_r$ آنگاه $\sqrt{۱۲۳+r^۲}<r+۳$ بنابراین $۳r-۵۷>۰$. این معادله به ازای $r>۱۹$ مثبت است یعنی کوچکترین مقدار r در این حالت $r=۲۰$ می‌باشد.

اگر $a_s>\frac{b}{s}+۱$ آنگاه $\sqrt{۱۲۳+s^۲}>s+۴$ بنابراین $۸s-۱۰r<۰$ این معادله به‌ازای $s\le ۱۳$ منفی است یعنی بزرگترین عدد صحیح در این حالت $r=۱۳$ می‌باشد لذا $r+s$ برابر $۱۳+۲۰=۳۳$ است.

MATH75.IR

۲۲. فرض کنید b, a و c سه عدد صحیح و مثبت باشند به طوری که $a < ۲b$ و باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر b برابر $۲r$، باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر c برابر r، و باقی‌ماندهٔ تقسیم b بر c نیز برابر r است. در این صورت کوچکترین عدد از میان اعداد زیر که بر c بخش‌پذیر باشد کدام است؟

الف) $(a+b)$ ب) $\frac{(a+b)}{۲}$ ج) $\frac{(a+b)}{۳}$ د) $۲(a+b)$ ه) $۳(a+b)$

حل: اولاً با مثال $a = b = ۱۶$ و $c = ۸$، قسمت (ج) حذف می‌شود ثانیاً طبق فرضیات مسأله داریم:

$$\begin{cases} a = bq + ۲r & ۰ \le ۲r < b \quad (۱) \\ b = cq_۱ + r & ۰ \le r < c \quad (۲) \\ a = cq_۲ + r & ۰ \le r < c \quad (۳) \end{cases}$$

چون $a < ۲b$، لذا از رابطه‌ی (۱) نتیجه می‌گیریم $q = ۰$ یا $q = ۱$.

(I) اگر $q = ۰$ آنگاه $a = ۲r$ و از جمع روابط (۲) و (۳) داریم $a + b = cq_۱ + ۲r$ لذا $b = cq_۱$ یعنی b بر c بخش‌پذیر است پس $r = ۰$ و از آنجا $a = ۲r = ۰$ که تناقض است.

(II) اگر $q = ۱$ آنگاه $a = b + ۲r$ یعنی $a - b = ۲r$ از طرفی از روابط (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که $a - b = cq_۱$ بنابراین $۲r$ بر c بخش‌پذیر است ولی چون $r < c$ لذا $۲r = ۰$ یا $۲r = c$.

الف) $۲r = ۰$ پس $a = b$ و هر دو بر c بخش‌پذیرند پس $a = \frac{a+b}{۲}$ نیز بر c بخش‌پذیر است.

ب) $۲r = c$ پس $a + b = (b + ۲r) + b$ و از آنجا $\frac{a+b}{۲} = b + r$ یعنی $\frac{a+b}{۲} = cq_۱ + r + r$ یا $\frac{a+b}{۲} = cq_۱$ پس گزینه‌ی (ب) درست است.

۲۳. به‌ازای کدام مقدار n معادله‌ی $\frac{۱}{n} = \frac{۱}{y} - \frac{۱}{x}$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی دارای جواب منحصربه‌فردی است؟

الف) ۱۰۲۴ ب) ۲۱۱۹ ج) ۲۲۱۹ د) ۲۶۵۱ ه) هیچ‌کدام

حل: فرض کنیم $(x, y) = d$ در این صورت $x = x_۱ \cdot d$ و $y = y_۱ \cdot d$ و معادله‌ی داده شده به صورت $n(y - x) = xy$ و یا $n(y_۱ - x_۱) = dx_۱y_۱$ خواهد شد. از رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌شود که $x_۱ | ny_۱$ و چون $(x_۱, y_۱) = ۱$ لذا $x_۱ | n$ به همین ترتیب $y_۱ | n$ پس $x_۱y_۱ | n$ لذا اگر فرض کنیم $n = kx_۱y_۱$ آنگاه $d = k(y_۱ - x_۱)$.

در واقع اگر بتوان n را به صورت $n = kx_۱y_۱$ نشان داد به طوری که $y > x$ در این صورت $x = kx_۱(y_۱ - x_۱)$ و $y = ky_۱(y_۱ - x_۱)$ یک جواب معادله می‌باشد.

اگر n اول باشد فقط یک امکان دارد که n را بتوان به صورت $n = kx_۱y_۱$ نوشت و آن فقط به صورت $n = ۱ \times ۱ \times n$ می‌باشد (زیرا در حالات دیگر یعنی $۱ \times n \times ۱$ و $۱ \times ۱ \times n$، x و y اعداد طبیعی نخواهند بود). و جواب ها به‌صورت $x = ۱ \times ۱ \times (n-۱)$ و $y = ۱ \times n \times (n-۱)$ منحصر به فرد خواهند بود. چون $۲^{۱۰} = ۱۰۲۴$، $۱۳k = ۲۱۱۹$ $۷k = ۲۲۱۹$، $۱۱k = ۲۶۵۱$ لذا گزینه (ه) درست است.

۲۴. فرض کنید ۱۳۷۵ بزرگترین عدد صحیحی است که $۲^{۱۳۵۷}$، عدد طبیعی n را عاد می کند. در آن صورت بزرگترین مقدار k به طوری که ۲^k عدد $A = ۱ + ۹ + ۹^۲ + ... + ۹^{۴n-۱}$ را عاد می‌کند برابر است با:

MATH75.IR

الف) ۱۳۷۴ ب) ۱۳۷۵ ج) ۱۳۷۶ د) ۱۳۷۷ ه) ۱۳۷۸

حل: فرض کنید $n = ۲^{۱۳۷۵} \times t$ که در آن t عددی فرد است . پس داریم:

$$A = \frac{۹^{۴n} - ۱}{۹ - ۱} \Longrightarrow ۸A = ۹^{۴n} - ۱ = ۹^{۲^{۱۳۷۷} \times t} - ۱$$

اگر فرض کنید $m = ۲^{۱۳۷۷}$ دراین صورت داریم:

$$۸A = ۹^{mt} - ۱ = (۹^m - ۱)(۹^{m(t-۱)} + ۹^{m(t-۲)} + \ldots + ۹^m + ۱) = (۹^m - ۱).q$$

از طرفی داریم:

$$۹^m - ۱ = ۹^{۲^{۱۳۷۷}} - ۱ = (۹^{۲^{۱۳۷۶}} + ۱)(۹^{۲^{۱۳۷۵}} + ۱) \cdots (۹^{۲^۲} + ۱)(۹^{۲^۱} + ۱)(۹ + ۱)(۹ - ۱)$$

$$= ۲a_{۱۳۷۶} \times ۲a_{۱۳۷۵} \times \cdots \times ۲a_۲ \times ۲a_۱ \times ۲a_۰ \times ۸$$

تمام a_i ها فردند زیرا پرانتزهای فوق (به‌جز پرانتز آخر) در تقسیم بر ۴، باقی‌مانده‌ی ۲ دارند. بنابراین:

$$۸A = ۲^{۱۳۷۷} \times a_{۱۳۷۶} \cdots\cdots \times a_۰ \times ۸ \times q \Longrightarrow A = ۲^{۱۳۷۷} \cdot (۲k' + ۱)$$

یعنی گزینه‌ی (د) درست است.

۲۵. برای عدد طبیعی n، بسط n در مبنای ۲ را درنظر گرفته و $f(n)$ را برابر تعداد رقم‌های صفر در آن درنظر می‌گیریم (به عنوان مثال $f(۴) = ۲$ و $f(۶) = ۱$). اگر فرض کنیم که $s = ۲^{f(۱)} + ۲^{f(۲)} + \cdots + ۲^{f(۲۵۵)}$ آنگاه مقدار s برابر خواهد بود با:

الف) ۳۲۸۰ ب) ۱۰۹۰ ج) ۱۰۸۶ د) ۳۲۷۶ ه) ۶۵۶۰

حل: تعداد اعدادی که در بسط آنها ۷ صفر به‌کار رفته برابر است با ۱، ۶ صفر به کار رفته برابر است با $\frac{۷!}{۶!} + \frac{۶!}{۶!} = ۸$، ۵ صفر به‌کار رفته برابر است با $\frac{۷!}{۵! \times ۲!} + \frac{۶!}{۵!} + \frac{۵!}{۵!} = ۲۸$، ۴ صفر به‌کار رفته برابر است با $\frac{۷!}{۴! \times ۳!} + \frac{۶!}{۴! \times ۲!} + \frac{۵!}{۴!} + \frac{۴!}{۴!} = ۵۶$، ۳ صفر به‌کار رفته برابر است با $\frac{۷!}{۳! \times ۴!} + \frac{۶!}{۳! \times ۳!} + \frac{۵!}{۳! \times ۲!} + \frac{۴!}{۳!} + \frac{۳!}{۳!} = ۷۰$، ۲ صفر به‌کار رفته برابر است با $\frac{۷!}{۲! \times ۵!} + \frac{۶!}{۲! \times ۴!} + \frac{۵!}{۲! \times ۳!} + \frac{۴!}{۲! \times ۲!} + \frac{۳!}{۲!} + \frac{۲!}{۲!} = ۵۶$، ۱ صفر به‌کار رفته برابر است با $\frac{۷!}{۶!} + \frac{۶!}{۵!} + \frac{۵!}{۴!} + \frac{۴!}{۳!} + \frac{۳!}{۲!} + \frac{۲!}{۱!} + \frac{۱!}{۱!} = ۲۸$ و بالاخره تعداد اعدادی که در آنها صفر به‌کار نرفته برابر است با ۸ لذا خواهیم داشت:

$$s = ۲^۷ + ۸ \times ۲^۶ + ۲۸ \times ۲^۵ + ۵۶ \times ۲^۴ + ۷۰ \times ۲^۳ + ۵۶ \times ۲^۲ + ۲۸ \times ۲^۱ + ۸ \times ۲^۰$$
$$= ۳۲۸۰$$

پس گزینه‌ی (الف) صحیح است.

MATH75.IR

مرحله‌ی اول شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور بهمن ۱۳۷۶

۲۶. چند تا عدد اول کوچکتر از ۱۳۷۶ وجود دارد که مجموع ارقام آن برابر ۲ است؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ ه) بیش از ۵

حل: عدد یک رقمی با خاصیت مذکور فقط ۲ می‌باشد. عدد دو رقمی ۱۱، عدد سه‌رقمی ۱۰۱ می‌باشد. عدد چهار رقمی ۱۰۰۱ به صورت $۷ \times ۱۱ \times ۱۳$ تجزیه می‌شود. چون رقم یکان و آخرین رقم باید ۱ باشد لذا فقط همین ۳ عدد با خاصیت مسأله تطبیق می‌کنند. .

پس گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۲۷. معادله‌ی $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}=d$ که a، b، c و d اعداد طبیعی هستند و $a<b<c$ چند جواب دارد؟

الف) جواب ندارد ب) ۱ ج) ۳ د) ۶ ه) بی‌نهایت

حل: با توجه به این که $\frac{۱}{a}<\frac{۱}{b}<\frac{۱}{c}$ پس $\frac{۳}{a}<\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}<\frac{۳}{c}$ یعنی $\frac{۳}{a}<d<\frac{۳}{c}$ لذا $a<\frac{۳}{d}<c$. دو امکان وجود دارد.

(I) فرض کنید $d=۱$ بنابراین $a<۳<c$، a نمی‌توانند یک باشد چون $\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}+۱=۱$ در اعداد طبیعی جواب ندارد. بنابراین $a=۲$ پس $\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}=\frac{۱}{۲}$. از این جا نتیجه می‌گیریم $۲b+۲c=bc$ و لذا $c|۲b$. فرض کنیم $۲b=c\cdot t$ بنابراین $۲b=c\cdot t<۲c$ تنها امکان موجود آن است که $t=۱$ پس $۲b=c$ و لذا $\frac{۱}{b}+\frac{۱}{۲b}=\frac{۱}{۲}$ و از آنجا $b=۳$ و $c=۶$ یعنی یک دسته جواب در این حالت داریم:

$$(a,b,c,d)=(۲,۳,۶,۱)$$

(II) فرض $d=۲$ بنابراین $a<\frac{۳}{۲}<c$. پس $a=۱$ و لذا $\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}=۱$ و از آنجا نتیجه می‌گیریم $b+c=bc$. رابطه‌ی اخیر ما را به دو رابطه‌ی $b|c$ و $c|b$ رهنمون می‌سازد و لذا به تناقض $b=c$ می‌رسیم. بنابراین در اعداد طبیعی با شرط $a<b<c$ فقط یک جواب دارد. لذا گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۲۸. معادله‌ی $x^y+۱=(x+۱)^۲$ روی اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۵

حل: با توجه به این که $x^y=x^۲+۲x$ پس $x^{y-۱}=x+۲$. دو طرف رابطه‌ی اخیر نسبت به هم اولند مگر آنکه $x=۲$ بنابراین $y=۳$. یعنی معادله تنها یک جواب $(x,y)=(۲,۳)$ را دارد. لذا گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۲۹. معادله‌ی $n!+۳=۳^{n-۱}$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی دارای چند جواب است؟

الف) یک ب) دو ج) سه د) چهار ه) بی‌نهایت

حل: $n=۱,۲$ در معادله صدق نمی‌کنند پس $n\geq ۳$. از معادله‌ی مسأله خواهیم داشت:

$$n!=۳(۳^{n-۲}-۱)$$

MATH75.IR

چون سمت راست فقط یک عامل سه دارد، پس $n < ۶$. اگر حالات $n = ۳$ و $n = ۴$ و $n = ۵$ را امتحان کنیم، حالات $n = ۳$ و $n = ۴$ در معادله صدق می‌کنند. لذا گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۳۰. مجموعه‌ی A دارای این خاصیت است که مجموع هر سه عضو متمایز آن عددی اول است. حداکثر تعداد اعضای A چقدر است؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ ه) ۸

حل: دسته‌های همنهشتی به پیمانه‌ی ۳ را درنظر بگیرید. بدیهی است که از یک دسته‌ی همنهشتی نمی‌توان بیش از ۲ عضو انتخاب کرد. زیرا در غیر این صورت مجموع سه عضو از یک دسته‌ی همنهشتی به پیمانه‌ی ۳، مضرب ۳ خواهد بود و لذا اول نمی‌باشد.

فرض کنید از دسته‌ی همنهشتی [۰] به پیمانه‌ی ۳ دو عضو انتخاب گردد. (در مورد انتخاب از دسته‌های همنهشتی [۱] و [۲] به پیمانه‌ی ۳ بحث کاملاً مشابه است). مثلاً $۳k$ و $۳s$. بدیهی است نمی‌توان از [۱] و [۲] هر کدام یک عضو انتخاب کرد. حداکثر تعداد حالات وقتی است که یا از [۱]، دو عضو انتخاب کنیم یا از [۲]، دو عضو انتخاب کنیم. در واقع ماکزیمم تعداد اعضا در یکی از حالات زیر اتفاق می‌افتد:

$$\{۳k_۱, ۳k_۲, ۳k+۱, ۳k'+۱\}, \{۳k_۱, ۳k_۲, ۳k+۲, ۳k'+۲\}$$
$$\{۳k+۱, ۳k'+۱, ۳k_۱+۲, ۳k_۲+۲\}$$

مثلاً مجموعه‌ی $\{۳, ۹, ۷, ۳۱\}$ دارای شرایط مسأله می‌باشد.

۳۱. فرض کنید برای هر $n \in \mathbf{N}$،

$$A_n = \{x \in N | \text{ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک } n, x \text{ بزرگتر از یک است } \}$$

عدد طبیعی $n > ۱$ را «خوب» می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y \in A_n$، داشته باشیم $x + y \in A_n$. چند عدد خوب زوج داریم که کوچکتر یا مساوی ۱۳۷۶ هستند؟

الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۱۱ د) ۱۹ ه) ۲۳

حل: فرض کنیم $n = ۲^a \times b$ به‌طوری که b عدد فرد بزرگتر از واحد است. چون n زوج است بدیهی است که $a \geq ۱$. چون $(۲^a, b) = ۱$، لذا طبق نتیجه‌ی ۱۰ بخش بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک خواهیم داشت:

$$(۲^a \times b, ۲^a + b) = ۱$$

به عبارت دیگر

$$(n, ۲^a + b) = ۱ \quad (*)$$

واضح است که $(۲^a \times b, b) > ۱$ و $(۲^a \times b, ۲^a) > ۱$ بنابراین $b \in A_n$ و $۲^a \in A_n$ ولی طبق رابطه‌ی $(*)$ $۲^a + b \notin A_n$ بنابراین n عدد خوب نیست.

MATH75.IR

از بحث بالا نتیجه می‌گیریم که اگر n بخواهد خوب باشد باید به صورت ۲^a باشد. از طرفی بدیهی است که اگر $n = ۲^a$ آنگاه n عدد خوب است (زیرا A_n، مجموعه‌ی اعداد زوج طبیعی می‌شود). بنابراین تنها اعداد خوب عبارتند از $۲, ۲^۲, ۲^۳, \cdots, ۲^{۱۰}$ که تعداد آنها ۱۰ می‌باشد. لذا گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۳۲. معادله‌ی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{۱۳۷۶}$ با شرط $(x \le y)$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

الف) یک ب) دو ج) سه د) چهار ه) جواب ندارد

حل: از رابطه‌ی $\sqrt{x} = \sqrt{۱۳۷۶} - \sqrt{y}$ نتیجه می‌گیریم:

$$۱۳۷۶ - x + y = ۲\sqrt{۱۳۷۶y} = ۲\sqrt{۳۲ \times ۴۳y}$$

سمت چپ تساوی فوق عددی طبیعی است. لذا سمت راست نیز می‌بایست طبیعی باشد و این ممکن نیست مگر آنکه $۴۳y \times ۳۲$ مربع کامل باشد. لذا y باید مضرب ۴۳×۲ باشد. به همین ترتیب، x نیز می‌بایست مضرب ۴۳×۲ باشد.

فرض کنیم $x = ۲ \times ۴۳s$ و $y = ۲ \times ۴۳t$ خواهیم داشت:

$$\sqrt{۲ \times ۴۳s} + \sqrt{۲ \times ۴۳t} = \sqrt{۲ \times ۴۳ \times ۱۶}$$

که از آنجا نتیجه می‌گیریم

$$\sqrt{s} + \sqrt{t} = ۴$$

و با توجه به شرط $s \le t$ تنها جواب‌های ممکن عبارتند از:

$$(\sqrt{s}, \sqrt{t}) = (۲, ۲) \quad , \quad (\sqrt{s}, \sqrt{t}) = (۱, ۳)$$

بنابراین معادله‌ی داده شده تنها دو جواب دارد که عبارتند از:

$$(x, y) = (۳۴۴, ۳۴۴) \quad , \quad (x, y) = (۸۶, ۷۹۴)$$

لذا گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۳۳. چند عدد اول سه‌رقمی $\overline{abc}$ وجود دارد که در آن داشته باشیم

$$b^۲ - ۴ac = ۹$$

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

حل: بدیهی است که c عددی فرد است. همچنین از رابطه‌ی $b^۲ - ۴ac = ۹$ نتیجه می‌گیریم که b فرد و بزرگتر از ۳ است.

MATH75.IR

(I) فرض کنید $b = ۵$. در این صورت $ac = ۴$. لذا $c = ۱$ و $a = ۴$ یعنی $\overline{abc} = ۴۵۱$ ولی $۴۵۱ = ۱۱ \times ۴۱$ یعنی ۴۵۱ اول نیست.

(II) فرض کنید $b = ۷$. در این صورت $ac = ۱۰$. لذا $c = ۵$ و $a = ۲$ یعنی $\overline{abc} = ۲۷۵$ که مجدداً عدد اول به‌دست نیامد.

(III) فرض کنید $b = ۹$. در این صورت $ac = ۱۸$ دو حالت ممکن است. $(a,c) = (۶,۳)$ و $(a,c) = (۲,۹)$ یعنی $\overline{abc} = ۲۹۹$ و یا $\overline{abc} = ۶۹۳$ که هیچ کدام از این دو عدد اول نیستند ($۲۳ \times ۱۳ = ۲۹۹$ و $۲۳۱ \times ۳ = ۶۹۳$). لذا عددی اول با خاصیت داده شده وجود ندارد. لذا گزینه‌ی (الف) صحیح است.

۳۴. تعداد مقسوم‌علیه‌های هر عدد طبیعی n را با $d(n)$ نشان می‌دهیم. عدد n را جالب گوییم هرگاه $d(d(d(n))) = d(d(n))$. کدام‌یک از احکام زیر نادرست است؟

الف) بی‌نهایت عدد جالب مضرب ۳ وجود دارد.

ب) بی‌نهایت عدد جالب زوج وجود دارد.

ج) بی‌نهایت عدد جالب فرد وجود دارد.

د) اگر آن ۲ باشد عدد جالب است.

لذا هر عدد اول، جالب است. یعنی گزینه‌ی (ج) صحیح است. از طرفی اگر $d(n) = p$ و p اول باشد آنگاه

$$\begin{cases} d(d(d(n))) = d(d(p)) = d(۲) = ۲ \\ \\ d(d(n)) = d(p) = ۲ \end{cases}$$

یعنی هر عدد که تعداد مقسوم‌علیه‌های آن اول باشد نیز، جالب است به عبارت دیگر هر عدد به شکل $p^{q-۱}$ (که در آن p و q اولند) جالب است پس اعداد $۳^{q-۱}$ و $۲^{q-۱}$ (با فرض اول بودن q) جالب به حساب می‌آیند یعنی گزینه‌های (الف) و (ب) نیز صحیحند. گزینه‌ی (هـ)بدیهی است که درست می‌باشد چون

$$d(d(d(d(n)))) = d(d(d(n)))$$

لذا تنها گزینه‌ی نادرست، (د) می‌باشد.

البته از ابتدا با مثال نقض می‌توانستیم درستی گزینه‌ی (د) را رد نماییم زیرا $n = ۲$ جالب است ولی $n = ۸$، جالب نیست.

۳۵. برای هر عدد طبیعی n مجموع ارقام n در مبنای ۱۰ را با $f(n)$ نشان می‌دهیم (مثلاً $f(۱۳۷۶) = ۱۷$). اگر $n_۰ = (۱۳)^{۷۶}$، کدام‌یک از اعداد زیر در دنباله‌ی زیر وجود دارد؟

$$n_۰, f(n_۰), f(f(n_۰)), \cdots, f(f(\cdots(f(n_۰))\cdots)), \cdots$$

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ هـ) هیچ‌کدام

MATH75.IR

حل: چون مجموع ارقام یک عدد از خود آن عدد بزرگتر نیست، لذا دنباله‌ی فوق نزولی است به طور اکید، تا اینکه به عدد یک رقمی برسد در آن صورت دنباله ثابت است.

همچنین چون هر عدد با مجموع ارقام خود به پیمانه‌ی ۹ همنهشت است لذا خواهیم داشت:

$$n_0 \equiv f(n_0) \equiv f(f(n_0)) \equiv \cdots \pmod{۹}$$

از طرفی داریم:

$$۱۳^{۷۶} \equiv ۴^{۷۶} \equiv ۶۴^{۲۵} \times ۴ \equiv ۴ \pmod{۹}$$

بنابراین از یک جایی به بعد، دنباله ثابت زیر را خواهیم داشت:

$$۴, ۴, ۴, \cdots$$

لذا گزینه‌ی (د) صحیح است.

۳۶. در کدام یک از مجموعه‌های زیر عددی به صورت مربع کامل یک عدد طبیعی وجود دارد؟

الف) $\{۵^m + ۵^k | m, k \in \mathbf{N}\}$ ب) $\{۴^m + ۴^k | m, k \in \mathbf{N}\}$ ج) $\{۶^m + ۶^k | m, k \in \mathbf{N}\}$

د) $\{۷^m + ۷^k | m, k \in \mathbf{N}\}$ ه) هیچ‌کدام

حل: همنهشتی‌های زیر را درنظر بگیرید:

$$۵^m + ۵^k \equiv ۱^m + ۱^k \equiv ۲ \pmod{۴}$$
$$۴^m + ۴^k \equiv ۱^m + ۱^k \equiv ۲ \pmod{۳}$$
$$۶^m + ۶^k \equiv ۶ + ۶ \equiv ۲ \pmod{۱۰}$$
$$۷^m + ۷^k \equiv ۱ + ۱ \equiv ۲ \pmod{۳}$$

هیچ مربع کاملی به فرم $۴k + ۲$ و $۳k + ۲$ نداریم. همچنین رقم یکان هیچ مربع کاملی ۲ نمی‌باشد. پس هیچ‌کدام از مجموعه‌های داده شده دارای مربع کامل نمی‌باشند.

لذا گزینه‌ی (ه) درست است.

مرحله‌ی اول هفدهمین المپیاد ریاضی کشور بهمن ۱۳۷۷

۳۷. اگر $n \geq ۲$ عددی طبیعی و $۲^n + n^۲$ عددی اول باشد، باقی‌مانده‌ی n بر ۶ کدام‌یک از عددهای زیر می‌تواند باشد؟

الف) ۱ ب) ۳ ج) ۵ د) الف و ب ه) ب و ج

حل: بدیهی است که n عددی فرد است. بنابراین باقی‌مانده‌ی تقسیم n بر ۶ برابر ۱ یا ۳ یا ۵ است. از طرفی اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم n بر ۶ برابر ۱ یا ۵ باشد آنگاه $n \overset{۶}{\equiv} \pm ۱$ و یا $n \overset{۳}{\equiv} \pm ۱$ و از آنجا داریم:

$$۲^n + n^۲ \overset{۳}{\equiv} (-۱)^n + (\pm ۱)^۲ \overset{۳}{\equiv} -۱ + ۱ \overset{۳}{\equiv} ۰$$

MATH75.IR

یعنی $۲^n + n^۲$ مضرب ۳ است در حالی که طبق فرض مسأله، $۲^n + n^۲$ اول است. بنابراین باقی‌مانده‌ی تقسیم n بر ۶ فقط می‌تواند ۳ باشد. یعنی گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۳۸. x, y دو عدد صحیح متوالی هستند، کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد عبارت $x^۲ + y^۲ + (xy)^۲$ درست است؟

الف) مجموعه رقم‌های یکان آنها شامل مجموعه‌ی $\{۰, ۱, ۳, ۵, ۶, ۹\}$ است.

ب) همواره مربع کامل است.

ج) به ازای مقادیری از x, y، عددی اول است.

د) همواره عددی مرکب است.

ه) هیچ‌کدام

حل: فرض کنید $x = k$ و $y = k + ۱$ در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} x^۲ + y^۲ + (xy)^۲ &= k^۲ + (k+۱)^۲ + (k^۲ + k)^۲ \\ &= k^۴ + ۲k^۳ + ۳k^۲ + ۲k + ۱ = (k^۲ + k + ۱)^۲ \end{aligned}$$

پس گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۳۹. دنباله‌ی a_n به صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{cases} a_۰ = ۰ \\ a_{n+۱} = na_n + a_n + n \end{cases}$$

باقی‌مانده‌ی تقسیم $a_{۱۰۱}$ بر ۱۰۲ چند است؟

الف) صفر ب) ۱ ج) ۹۹ د) ۱۰۰ ه) ۱۰۱

حل: با توجه به فرض داریم:

$$۱ + a_{n+۱} = (n+۱)(a_n + ۱) \Longrightarrow \frac{۱ + a_{n+۱}}{۱ + a_n} = n + ۱$$

بنابراین:

$$\frac{۱ + a_n}{۱ + a_s} = \frac{۱ + a_۱}{۱ + a_۰} \cdot \frac{۱ + a_۲}{۱ + a_۱} \cdot \frac{۱ + a_۳}{۱ + a_۲} \cdots \frac{۱ + a_{n+۱}}{۱ + a_{n-۱}} = ۱ \times ۲ \times \cdots \times n = n!$$

و از آنجا

$$۱ + a_n = (۱ + a_۰)n! \Longrightarrow a_n = n! - ۱$$

حال با توجه به اینکه $۱۰۱!$ بر $۱۰۲ = ۲ \times ۵۱$ بخش‌پذیر است پس

$$a_{۱۰۱} = ۱۰۱! - ۱ = ۱۰۲k - ۱ = ۱۰۲k - ۱۰۲ + ۱۰۱ = ۱۰۲k' + ۱۰۱$$

پس گزینه‌ی (ه) صحیح است.

MATH75.IR

۴۰– بزرگترین توان ۲ که عدد $N = ۳^{۵۱۲} - ۱$ بر آن بخش‌پذیر باشد کدام است؟

الف) $۲^۸$ ب) $۲^۹$ ج) $۲^{۱۰}$ د) $۲^{۱۱}$ ه) $۲^{۱۲}$

حل: با استفاده از اتحاد مزدوج می‌نویسیم:

$$N = ۳^{۵۱۲} - ۱ = (۳^{۲۵۶} + ۱)(۳^{۲۵۶} - ۱)$$
$$= (۳^{۲۵۶} + ۱)(۳^{۱۲۸} + ۱)(۳^{۶۴} + ۱)\cdots(۳^۲ + ۱)(۳ + ۱)(۳ - ۱)$$

از طرفی بجز دو پرانتز سمت راست، مابقی پرانتزها به صورت $۴k + ۲$ می‌باشند (زیرا $۳ \overset{۴}{\equiv} ۱-$). یعنی این پرانتزها هر کدام فقط یک عامل ۲ دارند. بنابراین:

$$N = \underbrace{۲ \times ۲ \times \cdots \times ۲}_{\text{۸ بار}} \times (۳ + ۱)(۳ - ۱)k = ۲^{۱۱} \times k \quad (k \text{ فرد است})$$

پس گزینه‌ی (د) صحیح است.

۴۱. چند عدد در مجموعه‌ی اعداد طبیعی $\{۱۳۷۷, \cdots, ۱۹۹۹\}$ وجود دارد که برابر تفاضل دو مجذور کامل هستند؟

الف) ۳۱۱ ب) ۳۱۲ ج) ۴۶۶ د) ۴۶۷ ه) ۶۲۳

حل: فرض کنیم عدد طبیعی n را به صورت تفاضل دو مجذور کامل نوشته‌ایم در این صورت داریم:

$$x^۲ - y^۲ = (x - y)(x + y) = n$$

با توجه به اینکه دو عدد $x - y$ و $x + y$ از نظر زوج و فرد بودن کاملاً شبیه هم هستند لذا می‌بایست n را به صورت ضرب دو عددی بنویسیم که از نظر زوجیت شبیه هم باشند. اگر n فرد باشد آن را به صورت $n \times ۱$ می‌نویسیم.
اگر n زوج باشد آنگاه یکی از دو عدد $x - y$ و $x + y$ زوج است و لذا دیگری نیز زوج است و از آنجا نتیجه می‌گیریم n مضرب ۴ است. پس اگر $x^۲ - y^۲ = n$ آنگاه یا n فرد است و یا n مضرب ۴ است. برعکس اگر n فرد یا مضرب ۴ باشد حتماً می‌توانیم آن را به صورت $x^۲ - y^۲ = n$ بنویسیم. زیرا اگر n فرد باشد کافی است بنویسیم

$$(x - y)(x + y) = ۱ \times n$$

و از آنجا با حل دستگاه

$$\begin{cases} x - y = ۱ \\ x + y = n \end{cases}$$

به جواب $x = \frac{n+۱}{۲}$ و $y = \frac{n-۱}{۲}$ برسیم. و اگر n مضرب ۴ باشد کافی است بنویسیم $(x - y)(x + y) = ۲ \times ۲k$ و از آنجا با حل دستگاه

$$\begin{cases} x - y = ۲ \\ x + y = ۲k \end{cases}$$

MATH75.IR

به جواب $x = k + ۱$ و $y = k - ۱$ برسیم.

بنابراین کافی است که تعداد اعداد فرد و مضارب ۴ را در مجموعه $\{۱۳۷۷, \cdots, ۱۹۹۹\}$ پیدا کنیم

$$\text{تعداد اعداد فرد} = \frac{۱۹۹۹ - ۱۳۷۷}{۲} + ۱ = ۳۱۲$$

$$\text{تعداد مضارب ۴} = \frac{۱۹۹۶ - ۱۳۸۰}{۴} + ۱ = ۱۵۵$$

بنابراین $۱۵۵ + ۳۱۲ = ۴۶۷$ عدد از میان اعداد مجموعه فوق دارای خاصیت موردنظر می‌باشند.

پس گزینه‌ی (د) صحیح است.

۴۲. عددهای $۱۳۷۷, \cdots, ۲, ۱$ روی تخته سیاه نوشته شده‌اند. هر بار دو تا از اعداد روی تخته را به دلخواه پاک می‌کنیم و قدر مطلق تفاضلشان را روی تخته می‌نویسیم تا زمانی که یک عدد روی تخته باقی بماند. کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد عدد به دست آمده کامل‌تر است؟

الف) این عدد همواره مضربی از ۴ است.

ب) این عدد همواره فرد است.

ج) باقی‌مانده‌ی تقسیم این عدد بر ۴ مساوی یک است.

د) این عدد همواره زوج است.

ه) هیچ‌کدام

حل: ابتدا مجموع اعداد $۱۳۷۷, \cdots, ۲, ۱$ را می‌یابیم.

$$s = ۱ + ۲ + \cdots + ۱۳۷۷ = \frac{۱۳۷۷ \times ۱۳۷۸}{۲} = ۱۳۷۷ \times ۶۸۹$$

s عددی فرد است. فرض کنیم از بین اعداد

$$۱, ۲, \cdots, i, \cdots, j, \cdots, ۱۳۷۷$$

دو عدد j, i را حذف کرده و به جای آنها $j - i$ را نوشته‌ایم در این صورت مجموع اعداد باقی‌مانده برابر است با:

$$(۱ + ۲ + \cdots + i + \cdots + j + \cdots + ۱۳۷۷) - i - j + (j - i) = s - ۲i$$

نتیجه‌ای که می‌گیریم آن است که با حذف i و j و جایگزینی $j - i$ به جای آنها، در زوجیت مجموع اعداد تغییری حاصل نمی‌شود. یعنی چون s فرد است پس در هر مرحله مجموع اعداد باقی‌مانده نیز فرد است و اگر این روند ادامه یابد تا زمانی که فقط یک عدد روی تخته باقی بماند آنگاه این عدد نهایی فرد است.

پس یا گزینه‌ی (ب) صحیح است و یا گزینه‌ی (ج) صحیح است. نشان می‌دهیم، می‌توان به گونه‌ای عمل کرد که عدد فرد نهایی به صورت $۴k + ۳$ باشد. به صورت زیر عمل می‌کنیم:

MATH75.IR

گام اول: ابتدا اعداد ۱۳۷۷ و ۱۳۷۶ و سپس اعداد ۱۳۷۵ و ۱۳۷۴ را انتخاب می‌کنیم. با حذف این اعداد و جایگزینی تفاضل آنها اعداد زیر باقی می‌مانند:

$$۱, ۲, ۳, \cdots, ۱۳۷۳, ۱, ۱$$

حال با انتخاب دو عدد ۱ و ۱ و جایگزینی تفاضلشان، به اعداد زیر می‌رسیم:

$$۱, ۲, ۳, \cdots, ۱۳۷۳, ۰$$

در واقع در این گام، ما توانستیم چهار عدد انتهایی را حذف کنیم.
گام دوم: مشابه حالت قبل، مجدداً چهار عدد انتهایی را حذف می‌کنیم. اعداد زیر باقی می‌مانند:

$$۱, ۲, ۳, \cdots, ۱۳۶۹$$

اگر این عمل را تکرار کنیم نهایتاً اعداد زیر باقی می‌مانند:

$$۱, ۲, ۳, ۴, ۵$$

حال ابتدا ۱ و ۵ را انتخاب می‌کنیم اعداد ۴ و ۴ و ۳ و ۲ باقی می‌مانند و سپس اعداد ۲ و ۴ را انتخاب می‌کنیم، اعداد ۴ و ۳ و ۲ باقی می‌مانند و حالا اعداد ۲ و ۳ را انتخاب می‌کنیم، اعداد ۴ و ۱ باقی می‌مانند و در نهایت با انتخاب دو عدد ۱ و ۴، عدد ۳ باقی می‌ماند.
بنابراین توانستیم نشان دهیم که می‌توان به گونه‌ای عمل کرد که عدد نهایی $۴k + ۳$ باشد. یعنی گزینه‌ی (ج) غلط است. پس گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۴۳. از میان عددهای $۱, ۲, \cdots, ۲۰$ حداقل چند عدد را باید حذف کنیم به طوری که مجموع هیچ دو عدد باقی‌مانده، عددی اول نباشد؟

الف) ۷ ب) ۸ ج) ۹ د) ۱۰ ه) ۱۱

حل: بدیهی است که مجموع دو عدد زوج یک عدد مرکب است (اعداد طبیعی‌اند) پس برای اینکه حداقل تعداد اعداد حذف شود می‌توانیم اعداد زوج را به طور کامل حفظ کنیم. حال ببینیم که از بین اعداد فرد $۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ۱۳, ۱۵, ۱۷, ۱۹$ کدام‌یک را باید حذف کنیم. زوج‌های (۲ و ۱)، (۲۰ و ۳)، (۱۸ و ۵)، (۱۶ و ۷)، (۱۴ و ۹)، (۱۲ و ۱۱)، (۱۰ و ۱۳)، (۸ و ۱۵)، (۶ و ۱۷) و (۴ و ۱۹) را درنظر بگیرید. جمع هر دو مؤلفه از این زوج‌ها یک عدد اول است. پس می‌بایست از هر زوج حداقل یک عدد حذف شود و چون اعداد زوج را حذف نکرده‌ایم پس می‌بایست کلیه‌ی اعداد فرد را (که تعداد آنها ده است) حذف کنیم. پس باید حداقل ده عدد حذف شود.

MATH75.IR

البته باید توجه داشت که لزومی ندارد حتماً تمامی اعداد زوج را حفظ کرده و کلیه اعداد فرد را حذف کنیم. ولی در هر حال چیزی که مسلم است آن است که از هر زوج می‌بایست حداقل یک عدد حذف شود.

پس گزینه‌ی (د) صحیح است.

۴۴. فرض کنید $A = \overbrace{۹۹\cdots۹۹}^{۸۱}$ مجموع ارقام $A^۲$ در پایه‌ی ۱۰ چند است؟

الف) ۶۹۳ ب) ۷۲۹ ج) ۷۹۰ د) ۸۳۷ ه) ۹۳۶

حل: با توجه به اینکه $۱ - ۱۰ = ۹$، $۱ - ۱۰^۲ = ۹۹$، $۱ - ۱۰^۳ = ۹۹۹\cdots$ به راحتی می‌توانیم نتیجه بگیریم که

$$A = \overbrace{۹۹۹\cdots۹۹}^{۸۱} = ۱۰^{۸۱} - ۱$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که

$$A^۲ = ۱۰^{۱۶۲} - ۲ \times ۱۰^{۸۱} + ۱$$

حاصل $A^۲$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{array}{rr} ۱۰۰\cdots & ۰۰۰\cdots۰۰۱ \\ - & ۲۰\cdots۰۰۰ \\ \hline \underbrace{۹\cdots۹۹}_{۸۰} & \underbrace{۸۰\cdots۰۰۱}_{۸۰} \end{array}$$

بنابراین مجموع ارقام $A^۲$ برابر است با:

$$۸۰ \times ۹ + ۸ + ۱ = ۷۲۹$$

پس گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۴۵. $A \subseteq N$ را «خوب» می‌نامیم، هرگاه بتوان اعضای آن را به صورت دنباله‌ی $a_۱, a_۲, a_۳, \cdots$ نوشت به طوری که هر دو جمله‌ی متوالی مثل $a_i + ۱, a_i$ دارای مقسوم‌علیه مشترک بزرگتر از ۱ باشند. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر خوب نیستند؟

الف) اعداد طبیعی بزرگتر از ۱ ب) اعداد فرد بزرگتر از ۱

ج) اعداد طبیعی به صورت $۳k + ۲$ د) اعداد مربع کامل بزرگتر از ۱

ه) هرچهار مجموعه، خوب هستند.

حل: نشان می‌دهیم مجموعه‌ی همه‌ی اعداد طبیعی بزرگتر از ۱ خوب است. دنباله‌ی a_n را به‌طور استقرایی می‌سازیم. فرض کنید $a_۱ = ۲$ و اعداد $a_۱, a_۲, \cdots, a_n$ را ساخته‌ایم و m کوچکترین عدد طبیعی است که در این بین نیامده است. عدد طبیعی k را آنقدر بزرگ انتخاب کنید که عدد kma_n در این فهرست نیامده باشد. حال قرار دهید:

$$a_{n+۱} = kma_n \quad , \quad a_{n+۲} = m$$

MATH75.IR

واضح است که هر عدد طبیعی سرانجام در این دنباله خواهد آمد. همچنین توجه کنید که:

$$(a_n, a_{n+1}) = (a_n, kma_n) = a_n > 1$$
$$(a_{n+1}, a_{n+2}) = (kma_n, m) = m > 1$$

بنابراین مجموعه‌ی $N - \{1\}$ یک مجموعه‌ی خوب است. با استدلال مشابه می‌توان نشان داد بقیه مجموعه‌ها نیز خوب هستند.

پس گزینه‌ی (ه) صحیح است.

۴۶. فرض کنید $a_n = n^3 - 5n^2 + 6n$، $b_n = n^2 + 5$ و d_n برابر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a_n و b_n است. کدام گزینه درست است؟ (Max بزرگترین عضو یک مجموعه را نشان می‌دهد.)

الف) d_n متناوب است. ب) $Max\{d_n | n \in N\} = +\infty$ ج) $Max\{d_n | n \in N\} = 630$

د) d_n از جایی به بعد ثابت است ه) الف و ج

حل: فرض کنید a, b دو عدد صحیح دلخواه باشند به طوری که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک آن دو، برابر d می‌باشد. نشان می‌دهیم اگر مضربی از b را به a اضافه کنیم، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک تغییری نمی‌کند. در واقع نشان می‌دهیم

$$(a, b) = (a + kb, b) \qquad (1)$$

برای اثبات، فرض می‌کنیم $(a, b) = d$ و $(a + kb, b) = d_1$ در این صورت خواهیم داشت:

$$(a, b) = d \Longrightarrow d|a, d|b \Longrightarrow d|a + kb, d|b \Longrightarrow d \leq d_1$$
$$(a + kb, b) = d_1 \Longrightarrow d_1|a + kb, d_1|b \Longrightarrow d_1|a, d_1|b$$
$$\Longrightarrow d_1 \leq d$$

بنابراین $d = d_1$ و لذا رابطه‌ی (۱) اثبات شد.

حال به حل مسأله می‌پردازیم. با استفاده از رابطه‌ی (۱) به ترتیب می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} d_n &= (n^3 - 5n^2 + 6n\ ,\ n^2 + 5) \\ &= (n^3 - 5n^2 + 6n - n(n^2 + 5)\ ,\ n^2 + 5) \\ &= (-5n^2 + n\ ,\ n^2 + 5) \\ &= (-5n^2 + n + 5(n^2 + 5)\ ,\ n^2 + 5) \\ &= (n + 25\ ,\ n^2 + 5) \\ &= (n + 25\ ,\ n^2 + 5 - (n - 25)(n + 25)) \\ &= (n + 25\ ,\ 630) \qquad (1) \end{aligned}$$

بنابراین $d_n | 630$ پس $d_n \leq 630$ یعنی گزینه‌ی (ج) صحیح است. (اگر در رابطه (۱) به جای n عدد ۶۰۵ را جایگزین کنیم $d_n = 630$ به دست می‌آید).

MATH75.IR

حال از رابطه‌ی (۱) نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{aligned} d_n &= (n+۲۵\ ,\ ۶۳۰) \\ &= (n+۲۵+۶۳۰k\ ,\ ۶۳۰) \\ &= ((n+۶۳۰k)+۲۵\ ,\ ۶۳۰) \\ &= d_{(n+۶۳۰k)} \end{aligned}$$

تساوی اخیر از رابطه‌ی (۱) به دست آمده است. در واقع نشان داده‌ایم که d_n دارای دوره‌ی تناوب ۶۳۰ می‌باشد. یعنی گزینه‌ی الف نیز صحیح است.

پس گزینه‌ی (ه) صحیح است.

۴۷. چند عدد گویای t وجود دارد که $۰ \le t \le ۷۷$, $۳t^۳ + ۱۰t^۲ - ۳t$ عددی صحیح باشد؟

الف) ۷۸ ب) ۸۶ ج) ۱۰۰ د) ۱۰۴ ه)۲۳۲

حل: فرض کنیم $t = \frac{a}{b}$ که در آن $a, b \in \mathbf{N}$ و $(a,b) = ۱$ در این صورت داریم:

$$A = ۳t^۳ + ۱۰t^۲ - ۳t = \frac{۳a^۳}{b^۳} + \frac{۱۰a^۲}{b^۲} - \frac{۳a}{b} = \frac{۳a^۳ + ۱۰a^۲b - ۳ab^۲}{b^۳}$$

چون A یک عدد صحیح است لذا صورت کسر فوق می‌بایست بر $b^۳$ و در نتیجه بر b بخش‌پذیر باشد. اما روشن است که $۳a^۳ + ۱۰a^۲b - ۳ab^۲$ وقتی بر b بخش‌پذیر است که $۳a^۳$ بر b بخش‌پذیر باشد. از طرفی طبق فرض b, a نسبت به هم اولند. پس $۳a^۳$ وقتی بر b بخش‌پذیر است که ۳ بر b بخش‌پذیر باشد. بنابراین b فقط دو مقدار ۱ و ۳ را می‌پذیرد.

حالت اول: فرض کنیم $b = ۱$. در این صورت $۰ \le t = a \le ۷۷$ یعنی t تمام مقادیر صحیح بین صفر و ۷۷ و خود این اعداد را شامل می‌شود که تعداد آنها ۷۸ می‌باشد.

حالت دوم: فرض کنیم $b = ۳$. در این صورت $A = \frac{۳a^۳ + ۳۰a^۲ - ۲۷a}{۲۷}$ و از آنجا $\frac{a^۲(a+۱۰)}{۹}$ می‌بایست یک عدد صحیح باشد، با توجه به اینکه a و $b = ۳$ نسبت به هم اولند، پس این کسر وقتی صحیح است که $a + ۱۰$ بر ۹ بخش‌پذیر باشد. فرض کنیم $a = ۹k - ۱۰$ در این صورت داریم:

$$۰ \le t = \frac{۹k - ۱۰}{۳} \le ۷۷ \Longrightarrow \frac{۱۰}{۹} \le k \le \frac{۲۴۱}{۹} \Longrightarrow ۲ \le k \le ۲۶$$

یعنی k، ۲۵ مقدار صحیح را قبول می‌کند.

بنابراین مجموعاً t، $۱۰۳ = ۲۵ + ۷۸$ مقدار گویا را قبول می‌کند پس هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نمی‌باشد.

۴۸. چند دوتایی (x,y) از اعداد طبیعی در معادله‌ی زیر صدق می‌کنند؟

$$۲x^۲y^۲ + y^۲ = ۲۶x^۲ + ۱۲۰۱$$

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) این معادله جواب ندارد.

MATH75.IR

حل: ابتدا سعی می‌کنیم عبارت داده شده را تجزیه کنیم

$$y^۲(۲x^۲+۱)=۱۳(۲x^۲+۱)+۱۲۰۱-۱۳$$
$$\Longrightarrow (۲x^۲+۱)(y^۲-۱۳)=۱۱۸۸=۲^۲\times ۳^۳\times ۱۱$$

با توجه به اینکه $۲x^۲+۱$ یکی از مقسوم‌علیه‌های فرد و بزرگتر از واحد ۱۱۸۸ می‌باشد، لذا فقط هفت حالت زیر ممکن است رخ دهد:

۱) $\begin{cases} ۲x^۲+۱=۳ \\ y^۲-۱۳=۳۹۶ \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} ۲x^۲+۱=۹ \\ y^۲-۱۳=۱۳۲ \end{cases}$

۳) $\begin{cases} ۲x^۲+۱=۲۷ \\ y^۲-۱۳=۴۴ \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} ۲x^۲+۱=۱۱ \\ y^۲-۱۳=۱۰۸ \end{cases}$

۵) $\begin{cases} ۲x^۲+۱=۳\times ۱۱ \\ y^۲-۱۳=۳۶ \end{cases}$ ۶) $\begin{cases} ۲x^۲+۱=۹\times ۱۱ \\ y^۲-۱۳=۱۲ \end{cases}$

۷) $\begin{cases} ۲x^۲+۱=۲۷\times ۱۱ \\ y^۲-۱۳=۴ \end{cases}$

از بین این هفت حالت فقط دستگاههای ۵, ۶ دارای جواب طبیعی هستند که این جواب‌ها عبارتند از زوج (۴, ۷) و زوج (۷, ۵) . پس گزینهٔ ب صحیح است.

مرحلهٔ اول هجدهمین المپیاد ریاضی کشور بهمن ۱۳۷۸

۴۹. عددهای طبیعی $a_۱, a_۲, a_۳, \cdots$ به‌این صورت تعریف شده‌اند که

$$a_{n+۱}=۲a_n+۵, a_۱=۱$$

کدام یک از عددهای زیر می‌تواند در بین a_i ها ظاهر شود؟

الف) ۵۶۲۳۰۱ ب) ۷۸۶۴۲۷ ج) ۱۶۴۸۵ د) ۳۱۲۳ ه) ۵۱۵۱۹

حل:

ابتدا چند جملهٔ اول دنباله را به‌دست می‌آوریم.

$$a_۱=۱$$
$$a_۲=۲a_۱+۵=۲(۱)+۵=۷$$
$$a_۳=۲a_۲+۵=۲(۷)+۵=۱۹$$
$$a_۴=۲a_۳+۵=۲(۱۹)+۵=۴۳$$

MATH75.IR

با کمی دقت در جملات دنباله در می‌یابیم که باقی ماندهٔ تقسیم هر یک از جملات بر ۳ برابر ۱ است. این مطلب را می‌توان به کمک استقرا ثابت کرد.

$$\begin{aligned}
&a_1 \overset{3}{\equiv} 1 \quad : \text{پایه استقراء}\\
&a_k \overset{3}{\equiv} 1 \quad : \text{فرض استقراء}\\
&a_{k+1} \overset{3}{\equiv} 1 \quad : \text{حکم استقراء}\\
&\Longrightarrow a_{k+1} = 2a_k + 5 \overset{3}{\equiv} 2(1) + 5 \overset{3}{\equiv} 7 \overset{3}{\equiv} 1
\end{aligned}$$

در بین گزینه‌ها فقط عدد ۷۸۶۴۲۷ به‌صورت $3k+1$ می‌باشد. (کافی است مجموع ارقام هر یک از اعداد داده شده به‌صورت $3k+1$ باشد) بنابراین گزینهٔ (ب) صحیح است.

۵۰. چند عدد طبیعی وجود دارد که مقسوم علیه حداقل یکی از اعداد $۱۲^{۵۰}, ۴۵^{۲۰}, ۵۰^{۱۰۰}$ باشد؟

الف) ۱ ب) ۲۶۳۱۲ ج) ۲۶۳۱۳ د) ۲۶۱۵۱ ه) ۲۶۱۵۰

حل:

اگر تجزیهٔ استاندارد عدد طبیعی a به‌صورت زیر باشد.

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$$

در این صورت تعداد مقسوم علیه‌های مثبت a برابر است با:

$$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_n + 1)$$

فرض کنید A مجموعهٔ مقسوم علیه‌های مثبت $۱۲^{۵۰}$، B مجموعه مقسوم علیه‌های مثبت $۴۵^{۲۰}$، C مجموعهٔ مقسوم علیه‌های مثبت $۵۰^{۱۰۰}$ باشد. سوال از ما تعداد اعضای مجموعه $A \cup B \cup C$ را می‌خواهد.

$$\begin{aligned}
&۱۲^{۵۰} = ۲^{۱۰۰} \times ۳^{۵۰} \quad \Longrightarrow \quad n(A) = ۱۰۱ \times ۵۱ = ۵۱۵۱\\
&۴۵^{۲۰} = ۳^{۴۰} \times ۵^{۲۰} \quad \Longrightarrow \quad n(B) = ۴۱ \times ۲۱ = ۸۶۱\\
&۵۰^{۱۰۰} = ۲^{۱۰۰} \times ۵^{۲۰۰} \quad \Longrightarrow \quad n(C) = ۱۰۱ \times ۲۰۱ = ۲۰۳۰۱
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)\\
&= ۵۱۵۱ + ۸۶۱ + ۲۰۳۰۱ - ۴۱ - ۱۰۱ - ۲۱ + ۱ = ۲۶۱۵۱
\end{aligned}$$

پس گزینه (د) صحیح است.

۵۱. از روی عدد a می‌توانیم به b برسیم، اگر

$$\frac{\text{ک.م.م } [a,b]}{\text{ب.م.م } (a,b)}$$

عدد اول باشد و می‌نویسیم $a \to b$. کدام یک از گزینه‌های زیر غلط است؟

MATH75.IR

ب) با هر عدد $a \in N$ و اعداد $b_1, \ldots, b_m$ که داده شده‌اند، زنجیره‌ای با آغاز از a وجود دارد که همهٔ b_i ها در آن ظاهر شوند و هر کدام یکبار.

ج) با آغاز از هر عدد $a \in N$ ، زنجیره‌ای وجود دارد که تنها شامل مضارب a باشد و همهٔ مضارب a در آن ظاهر شوند. (زنجیره‌ای نامتناهی)

د) با آغاز از هر عدد $a \in N$، می‌توان زنجیره‌ای یافت که همهٔ اعداد مربع کامل در آن آمده باشند.(زنجیره‌ای نامتناهی)

ه) با آغاز از هر عدد $a \in N$ ، می‌توان زنجیره‌ای یافت که همهٔ اعداد آن کمتر از b باشند و همهٔ اعداد کمتر از b در آن آمده باشند، هر یک دقیقاً یک بار ($b > a$ عددی داده شده است)

حل:

با یک مثال نقض می‌توان نشان داد گزینهٔ (ه) نادرست است. فرض کنید: $a = ۱$ و $b = ۴$ در این صورت باید یا از طریق زنجیرهٔ $۴ \to ۳ \to ۲ \to ۱$ از ۱ به ۴ برسیم و یا از طریق زنجیرهٔ $۴ \to ۲ \to ۳ \to ۱$ می‌بایست از ۱ به ۴ رسید. در هر دو حالت زنجیره، شرایط مسأله را ندارد زیرا $\frac{[۲,۳]}{(۲,۳)} = \frac{۶}{۱} = ۶$ ، که ۶ یک عدد اول نیست. صحت هر یک از گزینه‌های دیگر را نیز می‌توان اثبات کرد. به‌طور مثال در گزینه (الف) می‌توان به‌ترتیب زیر از عدد $a = ۳^۴ \times ۵^۲$ به عدد $b = ۲^۳ \times ۳^۲$ رسید:

$$۳^۴ \times ۵^۲ \to ۳^۳ \times ۵^۲ \to ۳^۲ \times ۵^۲ \to ۳ \times ۵^۲ \to ۵^۲ \to ۵ \to ۱ \to ۲$$
$$\to ۲^۲ \to ۲^۳ \to ۲^۳ \times ۳ \to ۲^۳ \times ۳^۲$$

پس گزینهٔ (ه) جواب است.

۵۲. فرض کنید a_1 عددی طبیعی باشد و a_{n+1} را برابر بزرگترین عامل اول در $a_n + ۱$ تعریف کنیم a_1 را خوب می‌نامیم اگر دنبالهٔ a_n متناظر با آن، سرانجام متناوب باشد، کدام حکم درست است؟

الف) تعداد اعداد خوب، متناهی است. ب)تعداد اعداد غیر خوب، نامتناهی است.

ج)همهٔ اعداد خوب هستند د) همهٔ اعداد غیر خوب هستند

ه) اعداد غیر خوب وجود دارند و تعداد آنها متناهی است.

حل:

ابتدا حالت های اولیه را بررسی می‌کنیم:

$$a_1 = ۱, ۲, ۳, ۲, ۳, ۲, ۳, \ldots$$
$$a_1 = ۲, ۳, ۲, ۳, ۲, ۳, \ldots$$
$$a_1 = ۳, ۲, ۳, ۲, ۳, ۲, \ldots$$
$$a_1 = ۴, ۵, ۳, ۲, ۳, ۲ \ldots.$$

MATH75.IR

قوی استفاده کنیم. فرض کنید برای هر $n \le a_1 \le 5$، دنبالهٔ مورد نظر متناوب است. کافی است برای $a_1 = n+1$ نیز متناوب بودن دنباله را ثابت کنیم.

با توجه به‌این که اگر x اول نباشد آنگاه بزرگترین عامل اول x کوچکتر یا مساوی $\frac{x}{2}$ است، خواهیم داشت:

$$n+2 \text{ اول است} \implies a_1 = n+1\ ,\ a_2 = n+2\ ,\ a_3 = x \le \frac{n+3}{2}$$
$$n+2 \text{ اول نیست} \implies a_1 = n+1\ ,\ a_2 = x \le \frac{n+2}{2}$$

چون $n \le \frac{n+3}{2}$ و $n \le \frac{n+2}{2}$ پس در هر دو حالت فوق $x \le n$ لذا طبق فرض استقراء دنبالهٔ با شروع از x متناوب است و از آنجا دنبالهٔ با شروع از $n+1$ نیز متناوب است و حکم استقراً اثبات شد. بنابراین گزینهٔ (ج) صحیح است.

۵۳. تعداد جواب‌های معادلهٔ $a^2 + b^2 = c^2 + 3$ در اعداد طبیعی چند تاست؟

الف) صفر ب) ۲ ج) ۴ د) ۸ ه) بی‌نهایت

حل: این معادله بی‌شمار جواب دارد زیرا:

$$a^2 + b^2 = c^2 + 3 \implies c^2 - a^2 = b^2 - 3 \implies (c-a)(c+a) = b^2 - 3$$
$$\implies \begin{cases} c-a = 1 \\ c+a = b^2 - 3 \end{cases} \implies \begin{cases} c = \frac{b^2 - 2}{2} \\ a = \frac{b^2 - 4}{2} \end{cases}$$

کافی است که b را عددی زوج و بزرگتر از ۲ در نظر بگیریم در این صورت معادله دارای بی‌شمار جواب به شکل زیر خواهد بود:

$$b = 2k\ ,\ c = 2k^2 - 1\ ,\ c = 2k^2 - 2 \quad (k > 1)$$

بنابراین گزینهٔ (ه) صحیح است.

۵۴. برای هر $f_m, m \in N$ را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$f_m = \underbrace{111\ldots1}_{m \text{ بار}}\ ,\ \text{مثلاً}\ f_1 = 1, f_2 = 11, f_3 = 11, \cdots$$

چند تا از f_m ها را می‌توان به صورت مجموع دو مربع کامل از اعداد طبیعی غیر صفر نوشت؟

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) بی‌نهایت

حل: اولاً: مربع هر عدد صحیح یا $4k$ است یا $4k+1$. زیرا:

$$a \overset{4}{\equiv} 0 \text{ یا } 1 \implies a^2 \overset{4}{\equiv} 0 \text{ یا } 1 \text{ یا } 4 \implies 0 \text{ یا } 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3 \text{ یا } 4 \text{ یا } 9$$

ثانیاً: باقی ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۴ برابر است با باقی ماندهٔ تقسیم دو رقم آخر آن عدد بر ۴. زیرا:

$$N = \overline{a_n \cdots a_2 a_1 a_0} = \overline{a_n \cdots a_2 00} + \overline{a_1 a_0} = 4k + \overline{a_1 a_0}$$

MATH75.IR

چون هر مربع کامل به فرم $4k$ یا $4k+1$ است پس مجموع دو مربع کامل به فرم $4k$ یا $4k+1$ یا $4k+2$ است. در حالی که دو رقم آخر تمام f_m ها (بجز f_1) را نمی‌توان به صورت مجموع دو مربع کامل نوشت. بدیهی است که f_1 را نیز نمی‌توان به صورت مجموع دو مربع کامل مخالف صفر نوشت. بنابراین گزینه (الف) صحیح است.

۵۵. اعداد $1,2,3,\cdots,61$ را طوری در یک ردیف نوشته‌ایم که هر عدد مجموع اعداد قبل از خود را می‌شمارد. اگر عدد اول در این ردیف ۶۱ و عدد دوم ۱ باشد، عدد سوم کدام یک از اعداد زیر است؟

الف) ۲ ب) ۴ ج) ۳۰ د) ۳۱ ه) نمی‌توان پیدا کرد

حل: فرض کنید اعداد مورد نظر را به صورت زیر مرتب کرده باشیم:

$$61, 1, a_3, \cdots, a_{61}$$

چون a_3، $1+61$ یعنی ۶۲ را می‌شمارد پس:

$$a_3 = 2 \quad \text{یا} \quad a_3 = 31$$

از طرفی a_{61} باید مجموع اعداد قبل از خود را بشمارد یعنی عدد

$$\begin{aligned} 61+1+a_3+\cdots+a_{60} &= (61+1+a_3+\cdots+a_{60}+a_{61})-a_{61} \\ &= (1+2+3+\cdots 61)-a_{61} \\ &= \frac{61\times 62}{2}-a_{61} = 61\times 31 - a_{61} \end{aligned}$$

را می‌شمارد پس a_{61} عدد 61×31 را نیز می‌شمارد. پس $a_{61}=31$ و لذا a_3 فقط می‌تواند ۲ باشد.

۵۶. فرض کنید شخصی یک عدد از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ را انتخاب کرده باشد. می‌توانیم هر بار به او یک عدد بدهیم و او بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک این عدد و عدد اولیه را به ما بگوید. با چند مرحله حتماً می‌توانیم عدد اول را بیابیم؟

الف) ۱۰۰ ب) $\binom{100}{2}$ ج) به تعداد اعداد اول کوچکتر از ۱۰۰

د) به تعداد اعداد مرکب کوچکتر از ۱۰۰ ه) هیچ کدام

حل: بزرگترین عدد توان داری که در بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ وجود دارد، عدد 2^6 است. پس اگر تمام اعداد اول کوچکتر از ۱۰۰ را با $p_1, p_2, \cdots p_k$ نشان دهیم آنگاه برای $n \geq 7$ بزرگترین عامل مشترک $p_1^n \cdot p_2^n \cdots p_k^n$ و هر عدد بین او ۱۰۰ برابر همان عدد است. در واقع اگر $1 \leq x \leq 100$ آنگاه

$$(x, p_1^n \cdot p_2^n \cdots p_k^n) = x$$

پس کافی است فقط یک عدد به او بدهیم. آن هم عدد $p_1^n \cdot p_2^n \cdots p_k^n$ با شرط $n \geq 7$. یعنی گزینهٔ (ه) صحیح است.

MATH75.IR

مرحلهٔ اول نوزدهمین المپیاد ریاضی کشور بهمن ۱۳۷۹

۵۷. پنج نقطه با مختصات صحیح در صفحه مفروض است. کدام یک از نتیجه گیری‌های زیر دربارهٔ مختصات وسط پاره‌خط‌های واصل بین این نقاط درست است؟

الف) مختصات کلیهٔ نقاط فوق الذکر نیز لزوماً صحیح است.

ب) مختصات هیچ کدام لزوماً صحیح نیست.

ج) حداقل مختصات یکی از نقاط صحیح است و نه لزوماً بیشتر

د) حداقل مختصات دو نقطه صحیح است و نه لزوماً بیشتر

ه) حداقل مختصات سه نقطه صحیح است و نه لزوماً بیشتر

حل: نقطه $A(a,b)$ را در نظر بگیرید. a یا زوج است و یا فرد. همچنین b یا زوج است و یا فرد. پس چهار نوع مختصات از نظر زوج و فرد بودن می‌توان برای A در نظر گرفت. حال اگر پنج نقطه داده شده باشند، حداقل دو نقطه از این نقاط، هر دو مؤلفهٔ x و y آنها از نظر زوجیت یکسان خواهند بود و لذا وسط این دو نقطه دارای مختصات صحیح خواهد بود. مثال زیر نشان می‌دهد که لزومی ندارد که دو نقطه با مختصات صحیح وجود داشته باشد:

$$A_۱(۱,۲) \quad A_۲(۱,۳) \quad A_۳(۲,۱) \quad A_۴(۲,۴) \quad A_۵(۱,۵)$$

پس گزینهٔ (ج) صحیح است.

۵۸. تعداد اعداد طبیعی $n \le ۱۳۷۹$ که به ازای آنها عدد $n^۳ + ۲n^۲$ مربع کامل باشد، چند تاست؟

الف) ۱۶ ب) ۶۴ ج) ۴۹ د) ۵۵ ه) ۳۶

حل: وقتی $n^۳ + ۲n^۲ = n^۲(n+۲)$ مربع کامل است که $n+۲$ مربع کامل باشد پس

$$۳ \le n+۲ = s^۲ \le ۱۳۸۱ \implies \sqrt{۳} \le s \le \sqrt{۱۳۸۱}$$
$$\implies s = ۲,۳,۴,\cdots,۳۷$$

تعداد این اعداد ۳۶ می‌باشد یعنی گزینهٔ (ه) صحیح است.

۵۹. تعداد x های صحیح که در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند چند تاست؟

$$\frac{x^۳ + x}{x+۳} = ۳۵$$

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) بی‌شمار

حل: از فرض مسأله نتیجه می‌گیریم که:

$$۳۵x + ۱۰۵ = x^۳ + x \implies x(x^۲ - ۳۴) = ۱۰۵$$

MATH75.IR

۳۴ – $x^۲$ باید یکی از مقسوم‌علیه‌های ۱۰۵ باشد. یعنی:

$$x^۲ - ۳۴ = \pm ۱ \text{ یا } \pm ۳ \text{ یا } \pm ۵ \text{ یا } \pm ۷ \text{ یا } \pm ۱۵ \text{ یا } \pm ۲۱ \text{ یا } \pm ۳۵ \text{ یا } \pm ۱۰۵$$

در بین این اعداد فقط $x = ۱۵$ در معادله صدق می‌کند. پس معادله یک جواب دارد. یعنی گزینهٔ ب صحیح است.

۶۰. اعداد طبیعی y, x و n در شرایط زیر صدق می‌کنند:

۱– بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک x و y برابر با ۱۳۷۹ است.

۲– کوچکترین مقسوم‌علیه مشترک x و y برابر با $n!$ است. $(n! = ۱ \times ۲ \times \cdots \times n)$ n با کدام یک از اعداد زیر می‌تواند برابر باشد؟

الف) ۲۷ ب) ۶۴ ج) ۱۲۵ د) ۲۱۶ ه) هیچ کدام

حل: این مسأله دارای اشکال است. اولاً کوچکترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد، یک عدد منفی است و نمی‌تواند برابر $n!$ باشد. ثانیاً اگر کوچکترین مقسوم‌علیه مشترک مثبت دو عدد مورد نظر باشد، که این عدد مسلماً یک است. یعنی $n! = ۱$ و در این صورت مسأله بسیار ساده و بدیهی می‌باشد. فرض کنید منظور مسأله به جای کوچکترین مقسوم‌علیه مشترک x و y، کوچکترین مضرب مشترک x و y باشد در این صورت چون ک. م. م دو عدد بر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک آن دو عدد بخش پذیر است پس باید $n!$ بر ۱۳۷۹ بخش پذیر باشد و چون $۱۳۷۹ = ۷ \times ۱۹۷$ بنابراین کافی است که $n \geq ۱۹۷$. یعنی در این حالت گزینه (د) صحیح است.

۶۱. آیا اعداد طبیعی $x_{n+۱}, x_n, \ldots x_۲, x_۱$ وجود دارند که:

$$x_۱^۲ + x_۲^۲ + \cdots + x_n^۲ = x_{n+۱}^۲$$

الف) برای هر n ای اعداد $x_{n+۱}, \ldots, x_۱$ وجود دارند.

ب) به جز $n = ۱, ۲$ چنین اعدادی وجود ندارند.

ج) فقط برای هر n مربع کامل و $n = ۱, ۲$ چنین اعدادی وجود دارند

د) فقط برای $n = ۱$ و اعداد اول n چنین اعدادی وجود دارد.

ه) هیچ کدام

حل: ابتدا دقت داشته باشید که برای هر عدد طبیعی فرد $k > ۱$، معادلهٔ $x^۲ + k = y^۲$ برای x و y جواب طبیعی دارد $(x = \frac{k+۱}{۲}\ ,\ y = \frac{k-۱}{۲})$ فرض کنید $n > ۲$ عددی زوج باشد در این صورت با فرض $x_۱ = x_۲ = \ldots = x_{n-۱} = ۱$ داریم:

$$x_۱^۲ + x_۲^۲ + \cdots + x_n^۲ - x_{n+۱}^۲ \implies x_n^۲ + (n-۱) = x_{n+۱}^۲$$

چون $n - ۱$ فرد است، پس این معادله جواب دارد. در حالت $n = ۲$ با فرض $x_۲ = ۳$ معادلهٔ $x_۱^۲ + ۹ = x_۳^۲$ همواره جواب دارد.

MATH75.IR

حال اگر $n > ۱$ فرد باشد، آنگاه با فرض

$$x_۱ = x_۲ = \cdots = x_{n-۲} = ۱ \ , \ x_{n-۱} = ۲$$

داریم:

$$x_۱^۲ + x_۲^۲ + \cdots + x_n^۲ = x_{n+۱}^۲ \implies x_n^۲ + (n+۲) = x_{n+۱}^۲$$

چون $n+۲$ فرد است، پس این معادله نیز جواب دارد. در حالت $n = ۱$ حالت بدیهی $x_۱^۲ = x_۲^۲$ به‌دست می‌آید که همواره جواب دارد. پس برای هر عدد طبیعی n، تساوی $x_۱^۲ + x_۲^۲ + \cdots + x_n^۲ = x_{n+۱}^۲$ جواب دارد.
یعنی گزینهٔ (الف) صحیح است.

۶۲. تمام پنج تایی‌های مرتب از اعداد طبیعی به صورت $(a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵)$ را در نظر بگیرید که:

$$\frac{۱}{a_۱} + \frac{۱}{a_۲} + \frac{۱}{a_۳} + \frac{۱}{a_۴} + \frac{۱}{a_۵} = ۱$$

در این صورت کدام یک از گزاره‌های زیر در مورد تعداد این پنج تایی‌های مرتب صحیح است؟

الف) تعداد آنها نامتناهی است.

ب) فقط یک پنج تایی مرتب با خاصیت فوق وجود دارد.

ج) تعداد این پنج تایی‌ها بر ۵ بخش پذیر است.

د) تعداد این پنج تایی‌ها به صورت $۵k + ۱$ است که $k \geq ۱$ است.

ه) هیچ کدام

حل: فرض کنید پنج تایی مرتب $(a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵)$ جواب باشد. فرض کنید a_i در این پنج تایی مرتب x_i بار تکرار شده باشد. پس به تعداد جایگشت‌های این ۵ عدد، جواب وجود دارد. یعنی با $a_۱, a_۲, a_۳, a_۴$ و $a_۵$ می‌توان $\frac{۵!}{x_۱!x_۲!x_۳!x_۴!x_۵!}$ جواب متمایز برای معادله نوشت. به طور مثال پنج تایی $(۲, ۴, ۸, ۱۶, ۱۶)$ یک جواب است. حال هر جایگشتی از اعداد $۲, ۴, ۸, ۱۶, ۱۶$ نیز یک جواب است که تعداد این جایگشت‌ها برابر است با $\frac{۵!}{۴!۱!۱!۱!۱!}$ و این عدد مضربی از ۵ است. پس تعداد جواب‌ها همواره مضرب ۵ است مگر آنکه مخرج کسر $\frac{۵!}{x_۱!x_۲!x_۳!x_۴!x_۵!}$ نیز مضرب ۵ باشد و این تنها برای حالت $a_۱ = a_۲ = a_۳ = a_۴ = a_۵ = ۱$ اتفاق می‌افتد. پس تعداد جواب‌ها همواره مضرب ۵ به علاوهٔ یک است.
یعنی گزینه (د) صحیح است.

۶۳. کدام یک از اعداد زیر به صورت $a \ , \ b \in \mathbf{Z}, \mathbf{a^۲ - b^۲}$، قابل بیان هستند؟

الف) $۲۰۰۱, ۱۳۷۹, ۱۶$ ب) $۹۸, ۲۰۰۱, ۱۶$

ج) $۲۰۰۱, ۱۳۷۹, ۱۴$ د) $۹۸, ۶۶, ۲۰۰۱$

ه) $۹۸, ۶۶, ۱۶$

MATH75.IR

حل: فرض کنید $a^۲ - b^۲ = t$ در این صورت $(a-b)(a+b) = t$. با توجه به این که $a+b$ ، $a-b$ یا هر دو فردند و یا هر دو زوج پس t یا فرد است و یا مضرب ۴. پس هیچ عدد $۴k+۲$ را نمی‌توان به صورت $a^۲ - b^۲$ نوشت. بنابراین ۹۸ و ۱۴ را نمی‌توان به صورت $a^۲ - b^۲$ بیان کرد. پس تنها گزینهٔ درست گزینهٔ (الف) است. البته می‌توان ثابت کرد هر عدد $t \neq ۴k+۲$ را می‌توان به صورت $a^۲ - b^۲$ نشان داد. اگر t فرد باشد کافی است بنویسیم: $a-b=۱$ ، $a+b=t$ و یا $a=\frac{t+۱}{۲}$ ، $b=\frac{t-۱}{۲}$ و اگر t به صورت $۴k$ باشد کافی است بنویسیم:

$$a-b=۲ \quad ,\quad a+b=۲k \quad \text{و یا} \quad a=k+۱ \ , \ b=k-۱$$

بنابراین گزینهٔ (الف) صحیح است.

۶۴. فرض کنید k یک عدد طبیعی باشد. تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $۲^k + b^۲ = c^۲$ چند تاست؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) k د) $(k-۱)^۲$ ه) $k-۱$

حل: جواب این تست در گزینه‌ها نمی‌باشد. از فرض مسأله نتیجه می‌گیریم که $۲^k = (c-b)(c+b)$ و چون $c+b$ ، $c-b$ از نظر زوجیت یکسانند پس $c+b=۲^s$ ، $c-b=۲^{k-s}$ و چون $c-b<c+b$ پس $۲^{k-s}<۲^s$ و از آنجا $s>\frac{k}{۲}$ و یا $k-s<\frac{k}{۲}$. بنابراین تعداد جواب‌ها برابر است با $[\frac{k-۱}{۲}]$ که این جواب در گزینه‌ها نمی‌باشد.

۶۵. تعداد جواب‌های معادلهٔ $۳xy - y - ۵x = ۱۳$ که $x, y \in \mathbf{N}$ برابر است با:

الف) ۰ ب) ۱ ج) د) ۳ ه) بی‌نهایت

حل: از فرض مسأله نتیجه می‌گیریم:

$$۳xy - y - ۵x = ۱۳ \Longrightarrow y(۳x-۱) = ۵x + ۱۳ \Longrightarrow y$$
$$= \frac{۵x+۱۳}{۳x-۱} \Longrightarrow y = ۲ + \frac{۱۵-x}{۳x-۱}$$

چون y صحیح است پس $\frac{۱۵-x}{۳x-۱}$ نیز صحیح است و از آنجا $\frac{۳(۱۵-x)}{۳x-۱}$ نیز صحیح است. از طرفی

$$\frac{۳(۱۵-x)}{۳x-۱} = -۱ + \frac{۴۴}{۳x-۱}$$

بنابراین ۴۴ بر $۳x-۱$ بخش پذیر است. بنابراین $۳x-۱$ باید یکی از اعداد $۱, ۲, ۴, ۱۱, ۲۲, ۴۴$ باشد. از آنجا x فقط یکی از اعداد $۱, ۴, ۱۵$ و y به ترتیب یکی از اعداد $۹, ۳, ۲$ می‌باشد. پس معادلهٔ مذکور سه جواب طبیعی دارد. یعنی گزینه (د) صحیح است.

حل: چون $d(۲) = ۲$ و $d(d(۲)) = d(۲)$ بنابراین هر عددی که تعداد مقسوم‌علیه‌های آن ۲ باشد عدد جالب است. لذا هر عدد اول، جالب است. یعنی گزینه‌ی (ج) صحیح است. از طرفی اگر $d(n) = p$ و p اول باشد آنگاه

$$\begin{cases} d(d(d(n))) = d(d(p)) = d(۲) = ۲ \\ d(d(n)) = d(p) = ۲ \end{cases}$$

MATH75.IR

یعنی هر عدد که تعداد مقسوم‌علیه‌های آن اول باشد نیز، جالب است یعنی هر عدد به شکل p^{q-1} (که در آن p و q اولند) نیز جالب است پس اعداد 3^{q-1} و 2^{q-1} (با فرض اول بودن q) جالب به حساب می‌آیند یعنی گزینه‌های (الف) و (ب) نیز صحیحند. گزینه‌ی (ه)بدیهی است که درست می‌باشد چون

$$d(d(d(d(n)))) = d(d(d(n)))$$

لذا تنها گزینه‌ی نادرست، (د) می‌باشد.

البته از ابتدا با مثال نقض می‌توانستیم درستی گزینه‌ی (د) را رد نماییم زیرا $n = 2$ جالب است ولی $n = 8$، جالب نیست.

۶۶. برای هر عدد طبیعی n مجموع ارقام n در مبنای ۱۰ را با $f(n)$ نشان می‌دهیم (مثلاً $f(1376) = 17$). اگر $n_0 = (13)^{76}$، کدام‌یک از اعداد زیر در دنباله‌ی

$$n_0, f(n_0), f(f(n_0)), \cdots, f(f(\cdots(f(n_0))\cdots)), \cdots$$

وجود دارد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) هیچ‌کدام

حل: چون مجموع ارقام یک عدد از خود آن عدد بزرگتر نیست، لذا دنباله‌ی فوق نزولی است به طور اکید، تا اینکه به عدد یک رقمی برسد در آن صورت دنباله ثابت است.

همچنین چون هر عدد با مجموع ارقام خود به پیمانه‌ی ۹ همنهشت است لذا خواهیم داشت:

$$n_0 \equiv f(n_0) \equiv f(f(n_0)) \equiv \cdots \pmod 9$$

از طرفی داریم:

$$13^{76} \equiv 4^{76} \equiv 64^{25} \times 4 \equiv 4 \pmod 9$$

بنابراین از یک جایی به بعد، دنباله ثابت زیر را خواهیم داشت:

$$4, 4, 4, \cdots$$

لذا گزینه‌ی (د) صحیح است.

۶۷. در کدام یک از مجموعه‌های زیر عددی به صورت مربع کامل یک عدد طبیعی وجود دارد؟

الف) $\{5^m + 5^k | m, k \in \mathbf{N}\}$ ب) $\{4^m + 4^k | m, k \in \mathbf{N}\}$ ج) $\{6^m + 6^k | m, k \in \mathbf{N}\}$

د) $\{7^m + 7^k | m, k \in \mathbf{N}\}$ ه) هیچ‌کدام

MATH75.IR

مسایل تشریحی المپیادهای ریاضی کشوری

مرحلهٔ اول دومین دوره ۱۳۶۳

۱. اگر $A = ax + by$ بر $x - y$ بخش‌پذیر باشد ثابت کنید که $B = (a + b)(x + y)$ نیز بر $x - y$ بخش‌پذیر است $(x > y\ ,\ a, b.x, y \in \mathbf{N})$.

حل: چون A بر $x - y$ بخش‌پذیر است لذا عبارت $۲A + (b - a)(x - y)$ نیز بر $x - y$ بخش‌پذیر است. اگر عبارت فوق را ساده کنیم داریم:

$$\begin{aligned} ۲A + (b - a)(x - y) &= ۲ax + ۲by + bx - by - ax + ay \\ &= (a + b)(x + y) \\ &= B \end{aligned}$$

بنابراین B نیز بر $x - y$ بخش‌پذیر است.

۲. رقم سمت راست عدد $۴^n + ۳^n + ۲^n + ۱^n$ را پیدا کنید.

حل: اگر $n = ۴k + r$ باشد (k عدد صحیح نامنفی و r برابر است با ۱، ۲، ۳، یا ۴) در این صورت رقم یکان عدد a^n با رقم یکان عدد a^r برابر است زیرا $a^۵ \overset{۵}{\equiv} a$, $a^۵ \overset{۲}{\equiv} a$، در نتیجه $a^۵ \overset{۱۰}{\equiv} a$ بنابراین رقم یکان عدد $۴^n + ۳^n + ۲^n + ۱^n$ برابر است با رقم یکان $۴^۱ + ۳^۱ + ۲^۱ + ۱^۱$، یا $۴^۲ + ۳^۲ + ۲^۲ + ۱^۲$، یا $۴^۳ + ۳^۳ + ۲^۳ + ۱^۳$ و یا $۴^۴ + ۳^۴ + ۲^۴ + ۱^۴$، یعنی رقم یکان مطلوب برابر است با صفر یا ۴.

۳. ثابت کنید:

$$۹^{۲n+۱} + ۸^{n+۲} \equiv ۰ \pmod{۷۳}$$

حل:

$$\begin{aligned} ۹^{۲n+۱} + ۸^{n+۲} &\equiv (۸۱)^n \times ۹ + ۸^n \times ۶۴ && \pmod{۷۳} \\ &\equiv ۸^n \times ۹ + ۸^n \times ۶۴ && \pmod{۷۳} \\ &\equiv ۸^n(۹ + ۶۴) && \pmod{۷۳} \\ &\equiv ۷۳ \times ۸^n \equiv ۰ && \pmod{۷۳} \end{aligned}$$

MATH75.IR

حل: همنهشتی‌های زیر را درنظر بگیرید:

$$۵^m + ۵^k \equiv ۱^m + ۱^k \equiv ۲ \pmod{۴}$$

$$۴^m + ۴^k \equiv ۱^m + ۱^k \equiv ۲ \pmod{۳}$$

$$۶^m + ۶^k \equiv ۶ + ۶ \equiv ۲ \pmod{۱۰}$$

$$۷^m + ۷^k \equiv ۱ + ۱ \equiv ۲ \pmod{۳}$$

هیچ مربع کاملی به فرم $۴k + ۲$ و $۳k + ۲$ نداریم. همچنین رقم یکان هیچ مربع کاملی ۲ نمی‌باشد. پس هیچ‌کدام از مجموعه‌های داده شده دارای مربع کامل نمی‌باشند.

لذا گزینه‌ی (ه) درست است.

MATH75.IR

مرحلهٔ دوم چهارمین دوره ۱۳۶۶

۴. کوچکترین عدد درست (صحیح) مثبتی را تعیین کنید که چون آخرین رقم سمت راست آن به سمت چپ برده شود عدد حاصل $\frac{۳}{۲}$ عدد قبلی باشد.

حل: عدد مورد نظر را $m = \overline{a_n a_{n-۱} \dots a_۱ a_۰}$ می‌گیریم. داریم:

$$\overline{a_۰ a_n a_{n-۱} \dots a_۱} = \frac{۳}{۲} \times \overline{a_n a_{n-۱} \dots a_۱ a_۰}$$

اگر فرض کنیم $p = \overline{a_n a_{n-۱} \dots a_۱}$، سپس داریم:

$$۱۰^n a_۰ + p = \frac{۳}{۲} \times (۱۰p + a_۰) \implies ۲۸p = (۲ \times ۱۰^n - ۳)a_۰$$
$$\implies ۲ \times ۱۰^۶ - ۳ \equiv ۰ \pmod{۷} \implies ۲ \times ۳^n \equiv ۳ \pmod{۷}$$
$$\implies ۲ \times ۳^{n-۱} \equiv ۱ \pmod{۷} \implies ۳^{n-۲} \equiv ۶ \pmod{۷}$$

کمترین مقدار n که در همنهشتی اخیر صدق کند برابر ۵ می‌باشد. بنابراین:

$$۲۸p = (۲ \times ۱۰^۵ - ۳) \times a_۰ \implies ۲۸p = ۱۹۹۹۹۷ \times a_۰ \implies ۴p = ۲۸۵۷۱ \times a_۰$$

کمترین مقدار $a_۰$ که در رابطهٔ فوق صدق کند برابر ۴ می‌باشد بنابراین $p = ۲۸۵۷۱$، یعنی عدد مورد نظر برابر است با $m = ۲۸۵۷۱۴$.

۵. تعیین کنید به ازای چه مقادیری از عدد طبیعی n عبارت زیر مجذور کامل است؟

$$۱! + ۲! + ۳! + \dots + n!$$

حل: رقم یکان عدد $n!$ به ازای $n \geq ۵$ برابر صفر است. همچنین رقم یکان مجموع $۴! + ۳! + ۲! + ۱!$ برابر ۳ می‌باشد. بنابراین به ازای اعداد طبیعی $n \geq ۴$، رقم یکان مجموع $n! + \dots + ۳! + ۲! + ۱!$ برابر ۳ می‌باشد و چون هیچ مربع کاملی به رقم ۳ ختم نمی‌شود پس برای $n \geq ۴$ هیچ‌گاه مجموع $n! + \dots + ۳! + ۲! + ۱!$ مجذور کامل نخواهد بود. برای $n < ۴$ با آزمایش مشخص می‌شود که فقط برای $n = ۱$ و $n = ۳$ عبارت فوق مربع کامل می‌باشد.

مرحلهٔ اول پنجمین دوره ۱۳۶۶

۶. ثابت کنید حاصل جمع هیچ k عدد صحیح متوالی و مثبت را نمی‌توان به صورت ۲^n نوشت. (n, k اعداد صحیح و مثبت و $k \neq ۱$ است)

MATH75.IR

حل: فرض کنید k عدد صحیح مثبت متوالی وجود دارند به طوری که حاصل جمع آنها برابر باشد با ۲^n. یعنی فرض کنید:

$$m + (m+۱) + \cdots + (m+k-۱) = ۲^n \qquad (k, n > ۱\ ,\ m \geq ۱)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$km + \frac{k(k-۱)}{۲} = ۲^n$$
$$\Longrightarrow\ ۲km + k(k-۱) = ۲^{n+۱}$$
$$\Longrightarrow\ k(۲m + k - ۱) = ۲^{n+۱}$$

هر دو عدد k و $(۲m + k - ۱)$ بزرگتر از واحد بوده و اختلاف آن دو برابر $۲m - ۱$ می‌باشد که عددی فرد است لذا یکی از دو عدد k و $۲m + k - ۱$ فرد می‌باشد و بزرگتر از واحد، و این تناقض است زیرا $۲^{n+۱}$ عامل فرد بزرگتر از واحد ندارد.

۷. اعداد صحیح و مثبت c, b, a را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\begin{cases} a^۳ - b^۳ - c^۳ = ۳abc \\ a^۲ = ۲(b+c) \end{cases}$$

حل: با توجه به معادلهٔ اول داریم:

$$a^۳ - b^۳ - c^۳ = ۳abc = ۰$$
$$\Longrightarrow\ (a-b-c)(a^۲ + b^۲ + c^۲ + ab + ac - bc) = ۰$$

ولی چون

$$۲(a^۲ + b^۲ + c^۲ + ab + ac - bc) = (a+b)^۲ + (a+c)^۲ + (b-c)^۲$$

لذا پرانتز دوم وقتی صفر است که $b = c, a = -c, a = -b$، ولی این غیر ممکن است چون اعداد c, b, a مثبتند. بنابراین عبارت فوق وقتی صفر است که پرانتز اول صفر باشد یعنی $a - b - c = ۰$. پس داریم:

$$\begin{cases} a = b + c \\ a^۲ = ۲(b+c) \end{cases}$$

لذا $a^۲ = ۲a$ یعنی $a = ۲$، پس $b + c = ۲$ از این‌رو $b = c = ۱$، یعنی تنها جواب این دستگاه عبارت است از $a = ۲$ و $b = c = ۱$.

مرحلهٔ اول ششمین دوره ۱۳۶۷

۸. معادلهٔ سیالهٔ زیر را حل کنید (q, p, n, m ارقام هستند):

$$(m-q)^۲ \times m! + (n-۸)^۲ \times n! + ۵۰ \times p! + ۴۹ \times q! = \sqrt{\overline{mnpq}}$$

MATH75.IR

حل: بدیهی است که $\sqrt{۹۹۹۹} \leq \sqrt{\overline{mnpq}}$ یعنی $۹۹ \leq \sqrt{\overline{mnpq}}$.

از طرفی چون حداقلِ $p!$ و $q!$، برابر ۱ است لذا کمترین مقدار $۵۰ \times p! + ۴۹ \times q!$ برابر ۹۹ است یعنی $۵۰ \times p! + ۴۹ \times q! \geq ۹۹$. بنابراین رابطهٔ فوق برقرار نیست مگر آن که:

$$\begin{cases} ۵۰ \times p! = ۴۹ \times q! = ۹۹ \\ (m-۹)^۲ \times m! = ۰ \\ (n-۸)^۲ \times n! = ۰ \end{cases}$$

پس $m = ۹, n = ۸, p! = ۱, q! = ۱$، یعنی p برابر است با صفر یا یک و q نیز یا برابر صفر است یا یک که تنها جواب $p = ۰$ و $q = ۱$ در معادلهٔ داده شده صدق می‌کند پس داریم: $\overline{mnpq} = ۹۸۰۱ = ۹۹^۲$

مرحلهٔ دوم ششمین دوره ۱۳۶۸

۹. تعداد ۱۳۶۹^n عدد گویای مثبت با این خاصیت مفروضند که با کنار گذاشتن هر یک از این اعداد بقیه را می‌توان به ۱۳۶۸ دستهٔ مساوی (از نظر تعداد) تقسیم کرد که حاصل ضرب تمام اعداد در هر دسته یکسان باشد. ثابت کنید تمام این اعداد مساویند.

حل: تمام اعداد را در کوچکترین مضرب مشترک مخرج‌ها ضرب می‌کنیم. به یک سری اعداد طبیعی می‌رسیم که اگر مسأله را برای این اعداد طبیعی اثبات کنیم بدیهی است که برای اعداد اصلی نیز مسأله اثبات شده است پس فرض می‌کنیم اعداد طبیعی‌اند.

تمام اعداد اولی که در تجزیه این $m = ۱۳۶۹^n$ عدد به کار رفته است را با $p_k, \ldots, p_۲, p_۱$ نشان می‌دهیم. اگر تمام m عدد را در عدد $p_۱p_۲ \ldots p_k$ ضرب کنیم، اعداد جدیدی به‌دست می‌آیند که در تجزیهٔ آنها، اعداد اول و یکسان $(p_k, \ldots, p_۲, p_۱)$ به کار رفته است. حال کافی است نشان دهیم که توان هر یک از این اعداد اول در هر یک از این اعداد جدید یکسان است. کافی است فقط برای $p_۱$ اثبات نماییم (زیرا به طریق مشابه می‌توان برای سایر p_i ها نیز اثبات نمود).

اگر توان عدد اول $p_۱$ را در این m عدد به ترتیب با $\alpha_m, \ldots, \alpha_۲, \alpha_۱$ نشان دهیم، باید ثابت کنیم $\alpha_۱ = \alpha_۲ = \ldots = \alpha_m$.

با توجه به فرض صورت مسأله آشکار است که هر یک از این m عدد را که برداریم، بقیه اعداد را می‌توان به دو دستهٔ مساوی تقسیم کرد به طوری که حاصل‌ضرب هر دو دسته یکسان گردد. بنابراین α_i ها دارای این خاصیت هستند که هر یک را کنار بگذاریم، بقیه را می‌توان به دو دستهٔ مساوی چنان تقسیم کرد که حاصل‌جمع اعداد هر دسته یکسان گردد. و همچنین اگر تمام α_i ها را به یک عدد تقسیم، یا در یک عدد ضرب و یا با یک عدد جمع کنیم، این خاصیت باقی می‌ماند. همچنین این خاصیت ایجاب می‌کند که اگر یکی را کنار گذاشتیم مجموع بقیه زوج گردد. بنابراین اگر فرض کنیم α_r زوج و α_s فرد است $(r \neq s)$ در این صورت تعداد α_i های فرد باقی‌مانده پس از کنار

MATH75.IR

گذاشتن α_r با تعداد α_i های فرد باقی‌مانده پس از کنار گذاشتن α_s برابر نخواهد بود و این تناقض است زیرا در هر حالت باید مجموع α_i های باقی‌مانده زوج گردد. بنابراین نتیجه می‌گیریم که همهٔ α_i ها با هم یا زوج هستند یا فرد.

حال فرض می‌کنیم که α_k کوچکترین این اعداد باشد پس اعداد $\alpha_n - \alpha_k, \ldots, \alpha_2 - \alpha_k, \alpha_1 - \alpha_k$ نیز دارای خاصیت α_i ها هستند.

حال فرض کنید که: (β_i ها فردند و $(i = 1, 2, \ldots, m$ $\alpha_i - \alpha_k = 2^{m_i}\beta_i$

و فرض کنید p کوچکترین m_i ها باشد، در این صورت در بین اعداد

$$\frac{\alpha_n - \alpha_k}{2^p}, \ldots, \frac{\alpha_2 - \alpha_k}{2^p}, \frac{\alpha_1 - \alpha_k}{2^p}$$

یک عدد فرد و یک عدد زوج (که همان صفر است) ظاهر می‌گردد و این غیرممکن است (زیرا باید تمام این اعداد یا همگی زوج باشند یا فرد) مگر این که به هر i داشته باشیم $\alpha_i = \alpha_k$.

مرحلهٔ اول هفتمین دوره ۱۳۶۸

۱۰. ثابت کنید معادلهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 2^t xyz$ که در آن t, z, y, x اعداد طبیعی هستند، جواب ندارد.

حل: چون سمت راست رابطهٔ بالا زوج است پس سمت چپ آن نیز زوج است و این ممکن نیست مگر این که هر سه عدد z, y, x زوج باشند و یا دو تای آنها فرد و یکی زوج باشد. حالت اخیر غیرممکن است زیرا در این صورت در سمت چپ دو عدد به صورت $4k + 1$ و یک عدد به صورت $4k$ خواهیم داشت یعنی سمت چپ بر ۴ بخش‌پذیر نیست در حالی که سمت راست مضرب ۴ می‌باشد (فرض کرده بودیم یکی از سه عدد z, y, x زوج است). بنابراین هر سه عدد z, y, x زوج می‌باشند. فرض کنید $\frac{x}{2} = x_1$ ، $\frac{y}{2} = y_1$ و $\frac{z}{2} = z_1$. پس z_1, y_1, x_1 اعدادی طبیعی‌اند و در ضمن $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 2^{t+1} x_1 y_1 z_1$. با همان استدلال بالا، z_1, y_1, x_1 نیز باید زوج باشند. اگر به همین ترتیب پیش برویم باید برای هر $k \in \mathbf{N}$، $\frac{z}{2^k}, \frac{y}{2^k}, \frac{x}{2^k}$ اعدادی صحیح باشند که این غیر ممکن است. پس این معادله جواب ندارد.

مرحلهٔ دوم هفتمین دوره ۱۳۶۸

۱۱. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی $n > 1$، معادلهٔ زیر دارای جواب صحیح نیست.

$$\frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \frac{x}{1} + 1 = 0$$

حل: اگر $k!$ بر عدد اول $p \geq 2$ بخش‌پذیر باشد در این صورت در تجزیهٔ $k!$ به عوامل اول، توان p از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$\text{توان } p \text{ در } k! = \left[\frac{k}{p}\right] + \left[\frac{k}{p^2}\right] + \left[\frac{k}{p^3}\right] + \cdots$$

MATH75.IR

حداکثر این مجموع، یعنی حداکثر توان p در $k!$، برابر $k-1$ است زیرا:

$$\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{k}{p^2}\right]+\left[\frac{k}{p^3}\right]+\cdots<\frac{k}{p}+\frac{k}{p^2}+\frac{k}{p^3}+\cdots=\frac{k}{p-1}\le k$$

پس توان p در $k!$ حداکثر $k-1$ است.. حال اگر معادله را به صورت زیر بنویسیم:

$$x^n+\frac{n!}{(n-1)!}x^{n-1}+\cdots+\frac{n!}{2!}x^2+\frac{n!}{1!}x!+n!=0$$

و x_0 یک جواب معادله باشد و $p|x_0$ (p عدد اول است)، آنگاه توان p در $\frac{n!}{i!}x^i$ از توان p در $n!$ حداقل یکی بیشتر است (زیرا حداکثر توان p در $i!$ برابر $i-1$ است در حالی که حداقل توان p در x^i برابر i است پس $\frac{x^i}{i!}$ حداقل یک عامل p دارد). پس در هر یک از

$$\frac{n!}{1!}x^1,\frac{n!}{2!}x^2,\ldots,\frac{n!}{(n-1)!}x^{n-1},x^n$$

حداقل توان p برابر است با توان p در $n!$ به اضافهٔ یک. بنابراین اگر t را بزرگترین عددی بگیریم که $p^t|n!$ در این‌صورت هر یک از جملات به‌جز $n!$، بر p^{t+1} بخش‌پذیرند پس مجموع آنها نیز بر p^{t+1} بخش پذیر است ولی n بر p^{t+1} بخش‌پذیر نیست. پس فرض داشتن جوابی مثل x_0 غلط است. یعنی این معادله جواب ندارد.

مرحلهٔ اول هشتمین دوره ۱۳۶۹

۱۲. نشان دهید که برای هر عدد طبیعی $n\ge 5$، $n!$ بر کلیهٔ اعداد $1,2,\ldots,k$ بخش‌پذیر است به شرط این که $k+1$ کوچکترین عدد اول بزرگتر از n باشد. (می‌دانیم که برای $n\ge 2$، بین n و $2n$ حداقل یک عدد اول وجود دارد.)

حل: بدیهی است که $n!$ بر کلیهٔ اعداد $1,2,\ldots,n$ بخش‌پذیر است. پس کافی است که بخش‌پذیری $n!$ بر اعداد $n<j<k+1$ را اثبات نماییم. چون $k+1$ کوچکترین عدد اول بزرگتر از n است لذا کلیهٔ اعداد $n<j<k+1$ مرکب می‌باشند. بنابراین برای هر j، اعداد طبیعی $a,b\ge 2$ یافت می‌شوند که $j=ab$. از طرفی چون بین n و $2n$ حداقل یک عدد اول وجود دارد لذا $k+1<2n$، پس $j<2n$ و چون $a,b\ge 2$ بنابراین $a,b\le n$.

حال دو حالت فرض می‌کنیم:

- $a\ne b$، در این صورت a و b دو عدد مختلف از اعداد $1,2,\ldots,n$ هستند، پس $j=ab|n!$.
- $a=b$، (یعنی فرض کنید هیچ دو عدد متفاوتی مثل a و b یافت نشوند که $j=ab$) در این صورت $j=p^2$ که p اول است. اگر $p\ge 4$ آنگاه $j=p^2\ge 4p$ یعنی $4p\le j<2n$. پس $2p<n$ پس هم p و هم $2p$ جزء

MATH75.IR

اعداد $n, \dots, ۲, ۱$ می‌باشند یعنی $j = p^۲ | n!$. اگر $p = ۳$ آنگاه $j = ۹$ و در نتیجه $k + ۱ = ۱۱$ و چون بین n و $k + ۱$ هیچ عدد اولی نیست پس $n = ۷$ یا $n = ۸$. که بدیهی است که $۹ | ۷!$ و $۹ | ۸!$. حالت $p = ۲$ وجود ندارد چون $n \geq ۵$ پس $j = p^۲ > ۵$. بنابراین برای هر j، $J | n!$. (حالت بدیهی $n = k$ نیاز به بررسی ندارد)

مرحلهٔ دوم هشتمین دوره ۱۳۶۹

۱۳. جواب‌های صحیح معادلهٔ سیالهٔ زیر را به‌دست آورید.

$$(x^۲ - x)(x^۲ - ۲x + ۲) = y^۲ - ۱$$

حل: بدون لطمه زدن به کلیت مسأله می‌توان فرض کرد $y \geq ۰$. با تغییر متغیر $t = x - ۱$ داریم:

$$\begin{aligned} & (t^۲ + t)(t^۲ + ۱) = y^۱ - ۱ \\ \Longrightarrow\ & (t^۲ + \frac{t}{۲} + \frac{t}{۲})(t^۲ + \frac{t}{۲} + ۱ - \frac{t}{۲}) = y^۲ - ۱ \\ \Longrightarrow\ & (t^۲ + \frac{t}{۲})^۲ = y^۲ - (\frac{۳}{۴}t^۲ + t + ۱) \end{aligned}$$

با توجه به این که $\frac{۳}{۴}t^۲ + t + ۱ > ۰$، پس $t^۲ + \frac{t}{۲} < y$ و در نتیجه $y \geq t^۲ + \frac{t}{۲} + \frac{۱}{۲} > ۰$ (چون y صحیح است و حداقل اختلاف y و $t^۲ + \frac{t}{۲}$ در حالت فرد بودن t است و آن برابر $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد). بنابراین:

$$y^۲ \geq t^۴ + \frac{t^۲}{۴} + \frac{۱}{۴} + t^۳ + t^۲ + \frac{t}{۲} = y^۲ + \frac{۱}{۴}\ (t^۲ - ۲t - ۳)$$

در نتیجه $t^۲ - ۲ - ۳ \leq ۰$ پس $-۱ \leq t \leq ۳$ یعنی $۰ \leq x \leq ۴$، که به روش آزمایش به دست می‌آید $x = ۰, ۱, ۴$ و $y = \pm ۱, \pm ۱, \pm ۱۱$.

مرحلهٔ اول نهمین دوره ۱۳۷۰

۱۴. همهٔ اعداد طبیعی c, b, a بزرگتر از یک را بیابید که حاصل‌ضرب هر دو عدد از آنها به علاوهٔ یک، مضرب سومی گردد.

حل: فرض کنید $a \leq b \leq c$ و همچنین:

$$\begin{cases} ab + ۱ = k_۱ c \\ ac + ۱ = k_۲ b \\ bc + ۱ = k_۳ a \end{cases} \qquad (*)$$

MATH75.IR

بنابراین داریم:

$$(ab+۱)(ac+۱)(bc+۱) = k_۱k_۲k_۳abc$$
$$\Longrightarrow \quad ab+ac+bc+۱ = nabc$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}+\frac{۱}{abc} = n \qquad (n \in N)$$

واضح است که $a \leq ۳$ زیرا در غیر این صورت $a,b,c > ۳$ و

$$n \leq \frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶۴} < ۱$$

پس $a = ۳$ یا $a = ۲$. دو حالت درنظر می‌گیریم:

- $a = ۲$، در این صورت $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}+\frac{۱}{۲bc} = n$. اگر $b > ۴$ در این صورت c نیز بزرگتر از ۴ بوده و داریم:

$$n \leq \frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۵} < ۱$$

بنابراین $b \leq ۴$ و چون طبق رابطه‌های (۱) اعداد a، b و c دو به دو نسبت به هم اولند پس $b = ۳$ و در نتیجه

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{c}+\frac{۶}{c} = n$$

یعنی $c(۶n-۵) = ۷$ بنابراین $c|۷$ از این‌رو $c = ۷$.

- $a = ۳$، به طریق مشابه استدلال قسمت (*) داریم $b \leq ۴$، پس $b = ۴$. بنابراین داریم:

$$\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{c}+\frac{۱}{۱۲c} = n \quad \Longrightarrow \quad \frac{۱۳+۷c}{۱۲c} = n$$

و چون $c \geq ۵$ بنابراین $n < ۱$ و این تناقض است.

مرحلهٔ دوم نهمین دوره ۱۳۷۰

۱۵. ثابت کنید معادلهٔ $x+x^۲ = y+y^۲+y^۳$ در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت جواب ندارد.

حل: فرض می‌کنیم $(y, x-y) = a$، بنابراین $y = ba$ و $x-y = ca$ که در آن $(b,c) = ۱$، در نتیجه

$$ab+ac+a^۲b^۲+a^۲c^۲+۲a^۲bc = ab+a^۲b^۲+a^۳b^۳$$

یعنی $c(۱+ac+۲ab) = a^۲b^۳$. پس $c|a^۲b^۳$ و چون $(b,c) = ۱$ پس $c|a^۲$ بنابراین $a^۲ = d\cdot c$ و $۱+ac+۲ab = db^۳$ در نتیجه $(d,a) = ۱$، ولی با توجه به این که $a^۲ = dc$ پس $d = ۱$ یعنی $b^۳ = ۱+a^۳+۲ab$ پس $b > a$. داریم:

$$b^۳-a^۳ = (b-a)[(b-a)^۲+۳ab] > ۳ab$$
$$\Longrightarrow \quad ۱+۲ab > ۳ab \quad \Longrightarrow \quad ۱ > ab$$

و این غیرممکن است.

MATH75.IR

مرحلهٔ اول دهمین دوره ۱۳۷۱

۱۶. همهٔ جواب‌های درست معادلهٔ

$$\frac{۱}{m}+\frac{۱}{n}-\frac{۱}{mn^۲}=\frac{۳}{۴}$$

را به‌دست آورید.

حل:

$$\frac{n^۲+mn-۱}{mn^۲}=\frac{۳}{۴} \implies ۴n^۲+۴mn-۴=۳mn^۲$$
$$\implies n(۲n-۳mn+۴m)=۴ \implies n\cdot k=۴$$

یعنی ۴ بر n بخش‌پذیر است. پس $n=\pm ۱$ یا $n=\pm ۲$ یا $n=\pm ۴$.

اگر هر یک از حالات فوق را در معادلات داده شده جایگزین کنیم، به سادگی به تناقض برمی‌خوریم. غیر از حالت $n=۲$ که داریم:

$$\frac{۱}{m}+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}m=\frac{۳}{۴} \implies m=۳$$

یعنی تنها جواب این معادله $m=۳, n=۲$ می‌باشد.

مرحلهٔ اول دهمین دوره ۱۳۷۱

۱۷. همهٔ اعداد اول فرد p را پیدا کنید به گونه‌ای که $\frac{۲^{p-۱}-۱}{p}$ مربع کامل گردد.

حل: فرض کنید $m=\frac{p-۱}{۲}$. بدیهی است که m عددی است طبیعی. داریم:

$$\frac{۲^{۲m}-۱}{p}=s^۲ \implies (۲^m-۱)(۲^m+۱)=ps^۲$$

چون $۲^m-۱$ و $۲^m+۱$ دو عدد فرد متوالی‌اند پس نسبت به هم اولند. بنابراین وقتی برابر $ps^۲$ می‌باشند که $۲^m+۱=py^۲, ۲^m-۱=x^۲$ و یا $۲^m+۱=x^۲, ۲^m-۱=py^۲$. ابتدا حالت اول را بررسی می‌کنیم. فرض کنید $۲^m-۱=x^۲$. چون x عددی فرد است پس $x^۲=۴k+۱$ بنابراین $۲^m=۲(۲k+۱)$ یعنی ۲^m دارای عامل فرد $۲k+۱$ می باشد و این ممکن نیست مگر آنکه $۲k+۱=۱$ پس $p=۳, m=۱, k=۰$. حال فرض کنید $۲^m+۱=x^۲$ که در آن $x=۲n+۱$، پس داریم:

$$۲^m+۱=(۲n+۱)^۲=۴n^۲+۴n+۱ \implies ۲^m=۴n(n+۱)$$

چون یکی از دو عدد n و $n+۱$ فرد است لذا ۲^m عامل فرد پیدا می‌کند و این ممکن نیست مگر آنکه $n=۱$ پس $p=۷, m=۳$. پس تنها جواب‌های مسأله عبارتند از ۳ و ۷.

MATH75.IR

مرحلهٔ دوم دهمین دوره ۱۳۷۱

۱۸. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی t، عدد $A = ۱^t + ۲^t + \cdots + ۹^t - ۳(۱ + ۶^t + ۸^t)$ بر ۱۸ بخش‌پذیر است.

حل: واضح است که A زوج است لذا بر ۲ بخش‌پذیر است. پس کافی است ثابت کنیم که A بر ۹ بخش‌پذیر است. دو حالت درنظر می‌گیریم.

- t فرد است. داریم:

$$A = \left(۱^t + ۸^t\right) + \left(۲^t + ۷^t\right) + \left(۳^t + ۶^t\right) + \left(۴^t + ۵^t\right) + ۹^t - ۳ \times ۶^t - ۳\left(۱ + ۸^t\right)$$

با توجه به این که $a^t + b^t$ به ازای عدد فرد t، بر $a + b$ بخش‌پذیر است، نتیجه می‌گیریم که A بر ۹ بخش‌پذیر است.

- t زوج است. اعداد ۳^t ، ۶^t ،۹^t و -۳×۶^t بر ۹ بخش‌پذیرند پس باید ثابت کنیم:

$$B = ۱^t + ۲^t + ۴^t + ۵^t + ۷^t + ۸^t - ۳ \times ۸^t - ۳$$

بر ۹ بخش‌پذیراست. داریم:

$$B = ۷\left(۷^{t-۱} + ۲^{t-۱}\right) + ۵\left(۵^{t-۱} + ۴^{t-۱}\right) - ۱۶\left(۸^{t-۱} + ۱^{t-۱}\right) - ۵ \times ۲^{t-۱} - ۴^{t-۱} + ۱۴$$

چون $t - ۱$ فرد است لذا سه پرانتز اول بر ۹ بخش‌پذیرند. پس باید ثابت کنیم $c = ۵ \times ۲^{t-۱} + ۴^{t-۱} - ۱۴$ بر ۹ بخش‌پذیر است. داریم:

$$c = (۲^{t-۱} + ۷)(۲^{t-۱} - ۲)$$

که چون $t - ۱$ فرد است. لذا تک تک پرانتزها مضرب ۳ می‌باشند پس c مضرب ۹ است. یعنی حکم اثبات شد.

مرحلهٔ سوم دهمین دوره ۱۳۷۲

۱۹. ثابت کنید بی‌نهایت عدد طبیعی وجود دارد که نمی‌توان آنها را به صورت مجموع مربعات کمتر از ده عدد طبیعی فرد نوشت.

حل: ثابت می‌کنیم اگر $n \overset{۷۲}{\equiv} ۶۶$ باشد، n را نمی‌توان به صورت مجموع کمتر از ده عدد مربع کامل فرد نوشت. فرض کنید که $n = x_۱^۲ + x_۲^۲ + \cdots + x_k^۲$. چون x_i عددی فرد است پس $x_i \overset{۸}{\equiv} ۱$ بنابراین $n \overset{۸}{\equiv} k$. از طرفی چون $n \overset{۸}{\equiv} ۶۶ \overset{۸}{\equiv} ۲$ و چون $k \leq ۹$ بنابراین باید داشته باشیم $k = ۲$، یعنی $n = x_۱^۲ + x_۲^۲$. از طرفی می‌دانیم که باقی‌ماندهٔ

MATH75.IR

تقسیم یک مربع کامل بر ۳، فقط می‌تواند صفر یا یک باشد و چون $n \overset{۳}{\equiv} ۶۶ \overset{۳}{\equiv} ۰$ پس $x_۱$ و $x_۲$ هر دو مضرب ۳ هستند و در نتیجه $n = x_۱^۲ + x_۲^۲$ مضرب ۹ می‌باشد در حالی که ما فرض کرده بودیم $n \overset{۹}{\equiv} ۶۶ \overset{۹}{\equiv} ۳$. این تناقض نشان دهندهٔ اثبات شدن حکم است.

اولین المپیاد مقدماتی ۱۳۷۲

۲۰. ثابت کنید معادلهٔ $x^۲ - ۲xy + ۲y^۲ = ۴y^۳$ در مجموعهٔ اعداد صحیح به جز $x = y = ۰$ جواب دیگری ندارد.

حل:

$$x^۲ - ۲xy + y^۲ = ۴y^۳ - y^۲$$
$$\Longrightarrow (x-y)^۲ = y^۲(۴y-۱) \qquad (*)$$

اگر $y = ۰$ در این صورت $x = ۰$ می‌باشد. اگر فرض کنیم $y \neq ۰$ بنابراین طبق رابطهٔ (*) می‌بایست $۴y - ۱$ مربع کامل باشد و چون $۴y - ۱$ فرد است پس داریم:

$$۴y - ۱ = (۲k+۱)^۲ = ۴k^۲ + ۴k + ۱$$
$$\Longrightarrow ۲y = ۲k^۲ + ۲k + ۱$$

و این تناقض است زیرا سمت چپ عددی زوج است در حالی که سمت راست عددی فرد است. پس تنها جواب، همان $x = y = ۰$ می‌باشد.

مرحلهٔ اول یازدهمین دوره ۱۳۷۲

۲۱.اگر تفاضل مکعبات دو عدد صحیح و متوالی، توان دوم یک عدد باشد، نشان دهید این عدد برابر حاصل‌جمع توان دوم دو عدد صحیح و متوالی است.

حل: فرض کنید $(n+۱)^۳ - n^۳ = k^۲$ که در آن k عددی است صحیح. چون n و $n+۱$ دو عدد متوالی‌اند لذا k عددی فرد است. فرض کنید $k = ۲m + ۱$. داریم:

$$۴k^۲ - ۱ = ۴\left[(n+۱)^۳ - n^۳\right] - ۱ = ۱۲n^۲ + ۱۲n + ۳ = ۳(۲n+۱)^۲$$
$$\Longrightarrow ۳(۲n+۱)^۲ = ۴(۲m+۱)^۲ - ۱ = (۴m+۱)(۴m+۳)$$

ولی چون $۴m + ۱$ و $۴m + ۳$ نسبت به هم اولند پس حتماً یکی از آنها مربع کامل و دیگری سه برابر مربع کامل می‌باشد و چون هیچ مربع کاملی به صورت $۴m + ۳$ نیست. پس $۴m + ۱$ باید مربع کامل باشد، از این‌رو داریم:

$$۴m + ۱ = (۲t+۱)^۲ \quad \Longrightarrow \quad k = ۲m + ۱ = t^۲ + (t+۱)^۲$$

MATH75.IR

مرحلهٔ دوم یازدهمین دوره ۱۳۷۲

۲۲. اگر p عددی اول و بزرگتر از ۳ باشد، آنگاه ثابت کنید عدد $A = ۷^p - ۶^p - ۱$ بر ۴۳ بخش پذیر است.

حل: چون p عددی اول و بزرگتر از ۳ است لذا $p = ۶k \pm ۱$ که در آن k عددی است طبیعی. در هر دو حالت اثبات می‌کنیم که $A \equiv ۰ (mod\ ۴۳)$.

۱) فرض کنید $p = ۶k + ۱$. داریم:

$$۶^۶ \equiv ۷^۶ \equiv ۱ \ (mod\ ۴۳) \implies ۶^{۶k} \equiv ۷^{۶k} \equiv ۱ \ (mod\ ۴۳)$$
$$\implies \quad ۷^{۶k+۱} - ۶^{۶k+۱} - ۱ \equiv ۷ - ۶ - ۱ \equiv ۰ \quad (mod\ ۴۳)$$

۲) فرض کنید $p = ۶k - ۱$. داریم:

$$۶^{۶k} \equiv ۷^{۶k} \equiv ۱ \equiv -۴۲ \ (mod\ ۴۳)$$
$$\implies ۶^{۶k-۱} \equiv -۷ \ (mod\ ۴۳), \ ۷^{۶k-۱} \equiv -۶ \quad (mod\ ۴۳)$$
$$\implies ۷^{۶k-۱} - ۶^{۶k-۱} - ۱ \equiv -۶ - (-۷) - ۱ \equiv ۰ \ (mod\ ۴۳)$$

دومین المپیاد مقدماتی ۱۳۷۳

۲۳. باقی‌ماندهٔ تقسیم $۵^{۱۳۷۴}$ را بر ۳۱ حساب کنید.

حل:

$$۵^۳ \overset{۳۱}{\equiv} ۱ \quad \implies \quad (۵^۳)^{۴۵۸} \overset{۳۱}{\equiv} ۱ \quad \implies \quad ۵^{۱۳۷۴} \overset{۳۱}{\equiv} ۱$$

یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم $۵^{۱۳۷۴}$ بر ۳۱ برابر است با ۱.

مرحلهٔ اول دوازدهمین دوره ۱۳۷۳

۲۴.اگر a و b اعداد طبیعی $(a > b)$، n یک عدد طبیعی باشد به طوری که $\frac{a+n}{b}$ و $\frac{b+n}{a}$ اعداد طبیعی باشند و $d = (a, b)$، ثابت کنید

$$۲d \le (n+۱)\sqrt{a-b}$$

حل: فرض کنید $\frac{a+n}{b} = m$ پس $n = mb - a$، از طرفی $d|a$ و $d|b$ در نتیجه $d|n$ و همچنین $d|a-b$، بالاخره نتیجه می‌گیریم که $d^۲|n(a-b)$ یعنی $d^۲ \le n(a-b)$ و یا $d \le \sqrt{n} \cdot \sqrt{a-b}$. اگر از نامساوی کوشی $\sqrt{n} \le \frac{n+۱}{۲}$ استفاده کنیم به‌دست می آوریم:

$$d \le \frac{n+۱}{۲}\sqrt{a-b} \quad \implies \quad ۲d \le (n+۱)\sqrt{a-b}$$

می‌توان توجه کرد که فرض طبیعی بودن $\frac{b+n}{a}$ اضافی است.

MATH75.IR

مرحلهٔ دوم دوازدهمین دوره ۱۳۷۳

اگر $\overline{a_1 \cdots a_n}$ یک عدد n رقمی باشد ثابت کنید تابعی یک به یک مانند $f : \{0, 1, \cdots, 9\} \to \{0, 1, \cdots, 9\}$ وجود دارد به طوری که $f(a_1) \neq 0$ و $\overline{f(a_1) \cdots f(a_n)}$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

حل: فرض کنید b_i تعداد تکرار رقم i ام باشد. اگر b_i, b_j موجود باشند که:

$$b_i \equiv b_j \not\equiv 0 \pmod 3$$

آنگاه تعریف می‌کنیم $f(j) = 8$ و $f(i) = 7$، این روند را روی بقیهٔ ارقام ادامه می‌دهیم و به جای $f(i)$ و $f(j)$ به ترتیب ۵, ۴، و ۱, ۲ را قرار می‌دهیم، بعد از اتمام این روند یا تعداد ارقام باقی‌ماندهٔ کوچکتر یا مساوی ۴ است یا فقط یک a_k و یک a_i موجودند که:

$$a_k \equiv 1 \ , \ a_i \equiv 2 \pmod 3$$

در حالت اول ارقام باقی‌مانده را با ۰، ۳، ۶ و ۹ جایگزین می‌کنیم و در حالت دوم k و l را با ۰ و ۳ جایگزین خواهیم کرد (در هر حالت رقم اول را با غیر صفر جایگزین می‌کنیم)، برقراری شرط‌های مسأله واضح است.

مرحلهٔ دوم دوازدهمین دوره ۱۳۷۳

۲۵. اگر $n > 3$ فرد باشد و داشته باشیم

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$$

(p_i ها اعداد اول هستند) و

$$m = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

نشان دهید عدد اولی مانند p وجود دارد به طوری که $p | 2^m - 1$ و $p \nmid n$.

حل: با توجه به این که $m = \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k}(p_1 - 1)\cdots(p_k - 1)$ بنابراین $2^k | m$ یعنی $m = 2^k \times x$ پس داریم:

$$2^m - 1 = 2^{2^k \times x} - 1 = (2^x)^{2^k} - 1 = t^{2^k} - 1 = (t-1)\prod_{i=0}^{k-1}(t^{2^i} + 1)$$

واضح است که $t > 3$ و زوج است. پس $2^m - 1$ دارای $k + 1$ عامل است که به شکل $t - 1$ و $t^{2^i} + 1$ هستند و همچنین دو به دو نسبت به هم اولند. از طرفی عدد n دارای k عامل اول است پس عدد اول دیگری مثل p وجود دارد به طوری که $p \nmid n$ و $p | 2^m - 1$.

MATH75.IR

مرحلهٔ دوم سیزدهمین دوره ۱۳۷۴

۲۶. نشان دهید برای هر عدد طبیعی $n \geq ۳$، دو مجموعهٔ $A = \{x_۱, x_۲, \cdots, x - n\}$ و $B = \{y_۱, y_۲, \cdots, y_n\}$ از اعداد صحیح وجود دارد به طوری که:

$$A \cap B = \phi \qquad (۱)$$

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n = y_۱ + y_۲ + \cdots + y_n \qquad (۲)$$

$$x_۱^۲ + x_۲^۲ + \cdots + x_n^۲ = y_۱^۲ + y_۲^۲ + \cdots + y_n^۲ \qquad (۳)$$

حل:

اگر مجموعه‌های A و B را به صورت زیر درنظر بگیریم، به راحتی اثبات می‌شود که این دو مجموعه تمام خواص موردنظر مسأله را دارا هستند. پس مسأله حل شده است. با توجه به دو مجموعهٔ زیر:

$$A = \left\{ ۱, ۲, ۳, \ldots, n - ۱, -\frac{n(n-۱)}{۲} \right\}$$
$$B = \left\{ -۱, -۲, -۳, \ldots, -(n-۱), \frac{n(n-۱)}{۲} \right\}$$

البته هر مجموعه به صورت زیر نیز دارای این خواص می‌باشد:

$$A = \left\{ m+۱, m+۲, \ldots, m+n-۱ \ , \ m - \frac{n(n-۱)}{۲} \right\}$$
$$B = \left\{ m-۱, m-۲, \ldots, m-(n-۱) \ , \ m + \frac{n(n-۱)}{۲} \right\}$$

مرحلهٔ دوم سیزدهمین دوره ۱۳۷۴

۲۷. $۱۲k$ نفر در یک مهمانی شرکت کرده‌اند. هر نفر دقیقاً با $۳k + ۶$ نفر دیگر از مهمانان دست می‌دهد. همچنین می‌دانیم تعداد افرادی که با هر دوی هر دو نفر دست می‌دهند، عددی ثابت است. تعداد افراد شرکت کننده در این مهمانی را تعیین کنید.

حل: فرض کنید تعداد افرادی که با هر دوی هر دو نفر دست می‌دهند، عدد ثابت n باشد و فرض کنید $B = \{b_۱, b_۲, \ldots, b_{۳k+۶}\}$ و $C = \{c_۱, c_۲, \ldots, c_{۹k-۷}\}$ که در آنها، b_i ها، افرادی هستند که با فرد خاص a دست داده‌اند و c_i ها، افرادی هستند که با همان شخص a دست نداده‌اند. افرادی که هم با a دست داده‌اند و هم با b_i در B هستند و تعداد آنها n نفر است. پس b_i با $۱ - n - ۶ + ۳k$ نفر در C دست داده است. بنابراین مجموع کل تعداد دست دادنهای بین B و C برابر است با $(۱ - n - ۶ + ۳k)(۶ + ۳k)$. از طرفی همهٔ افرادی که هم با a و هم با c_i

MATH75.IR

دست داده‌اند در B هستند پس c_i با n نفر در B دست داده‌است. پس:

$$(۳k+۶)(۳k+۶-n-۱)=(۹k-۷)n$$

$$\Longrightarrow ۹k^۲-۱۲kn+۳۳k+n+۳۰=۰ \Longrightarrow n=۳m$$

$$\Longrightarrow ۴m=k+۳+\frac{۹k+۴۳}{۱۲k-۱} \Longrightarrow ۱۲k-۱|۹k+۴۳$$

$$\Longrightarrow ۱۲k-۱|۳۶k+۱۷۲ \Longrightarrow ۱۲k-۱|۱۷۵$$

در نتیجه $k=۳$ یعنی ۳۶ نفر در مهمانی بوده‌اند.

مرحلهٔ اول چهاردهمین دوره ۱۳۷۵

۲۸. فرض کنید d,c,b,a اعدادی طبیعی باشند به طوری که $ab=cd$. آیا $S=a+b+c+d$ می‌تواند عددی اول باشد؟

حل: فرض کنید

$$\frac{a}{d}=\frac{c}{b}=\frac{m}{n}$$

که در آن m و n اعدادی طبیعی و نسبت به هم اول می‌باشند. پس داریم $a=x\cdot m$, $d=x\cdot n$, $c=y\cdot m, b=y\cdot n$ (x و y اعدادی طبیعی‌اند). حال خواهیم داشت:

$$S=x\cdot m+y\cdot n+y\cdot m+x\cdot n=(m+n)\cdot(x+y)$$

چون S به دو عدد بزرگتر از واحد تجزیه شده است، لذا هرگز نمی‌تواند اول باشد.

مرحلهٔ دوم پانزدهمین دوره ۱۳۷۶

۲۹. اگر x و y دو عدد طبیعی باشند به طوری که داشته باشیم: $۳x^۲+x=۴y^۲+y$، آنگاه ثابت کنید که $x-y$ یک مربع کامل است.

حل: فرض کنید $x-y=k$. واضح است که k عددی است طبیعی. حال داریم:

$$۳x^۲+x=۴y^۲+y \Longrightarrow ۳(y+k)^۲+(y+k)=۴y^۲+y$$
$$\Longrightarrow y^۲-۶ky-۳k^۲-k=۰$$

برای این که معادلهٔ درجه دوم فوق برای y جواب طبیعی داشته باشد می‌بایست مبین آن، مربع کامل باشد. پس داریم:

$$\Delta=۳۶k^۲+۱۲k^۲+۴k=۴k\,(۱۲k+۱)$$

MATH75.IR

برای آنکه Δ مربع کامل باشد می‌بایست $k(۱۲k+۱)$ نیز مربع کامل باشد. از طرفی k و $۱۲k+۱$ نسبت به هم اولند، لذا وقتی $k(۱۲k+۱)$ مربع کامل است که هم k مربع کامل باشد و هم $۱۲k+۱$. بنابراین $k=x-y$ مربع کامل است و حکم اثبات شد. (یک جواب این معادله به طور مثال $x=۳۰$ و $y=۲۶$ می‌باشد).

مرحلهٔ دوم پانزدهمین دوره ۱۳۷۶

۳۰. اگر a و b دو عدد طبیعی باشند و $p=\frac{b}{۴}\sqrt{\frac{۲a-b}{۲a+b}}$ یک عدد اول باشد، بزرگترین مقدار p را با ذکر دلیل پیدا کنید.

حل: بدیهی است که b عددی است زوج. فرض کنید $b=۲e$ (e عددی است طبیعی). پس داریم:

$$p=\frac{e}{۲}\sqrt{\frac{a-e}{a+e}}$$

فرض کنید $\frac{a-e}{a+e}=\frac{m^۲}{n^۲}$ که در آن m و n اعدادی طبیعی و نسبت به هم اول می‌باشند. بنابراین داریم:

$$a-e=x\cdot m^۲\ ,\ a+e=x\cdot n^۲$$

یعنی $۲e=x(n^۲-m^۲)$. از طرف دیگر داریم:

$$p=\frac{e}{۲}\cdot\frac{m}{n}\quad\Longrightarrow\quad\frac{۲p}{e}=\frac{m}{n}\quad\Longrightarrow\quad e=y\cdot n\ ,\ y=۱,۲,p,۲p$$

بنابراین $۲e=۲yn$ بر $n^۲-m^۲$ بخش پذیر است ولی چون $n^۲-m^۲$ و n نسبت به هم اولند (زیرا m و n نسبت به هم اولند)، پس $۲y$ بر $n^۲-m^۲$ بخش‌پذیر است. چهار حالت زیر را درنظر می‌گیریم.

- $y=۱$، یعنی $n^۲-m^۲|۲$. ولی چنین چیزی ممکن نیست.
- $y=۲$، یعنی $n^۲-m^۲|۴$. این فقط وقتی ممکن است که $n-m=n+m=۲$. که در این حالت نیز جوابی نداریم.
- $y=p$، یعنی $n^۲-m^۲|۲p$. با توجه به این که $n-m$ و $n+m$ از نظر زوج و فرد بودن شبیه یکدیگرند لذا حالات زیر را داریم:

  الف) $n-m=۱$ و $n+m=p$. در این حالت ($y=p$) داریم $m=۲$ بنابراین $n=۳$ و $p=۵$.

  ب) $n-m=۲$ و $n+m=p$. چون $m=۲$ بنابراین $n=۴$ و $p=۶$، و این تناقض است.
- $y=۲p$، بنابراین $m=۱$. اگر شبیه قسمت (۳) استدلال نماییم تنها جواب $p=۲$ و $p=۳$ به‌دست می آید.

بنابراین بزرگترین مقدار p برابر ۵ است.

MATH75.IR

مرحلهٔ دوم شانزدهمین دوره ۱۳۷۷

۳۱. فرض کنید که عدد طبیعی n حداقل چهار مقسوم‌علیه متمایز داشته باشد و $0 < d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ چهار کوچکترین مقسوم‌علیه آن باشند. کلیهٔ اعداد طبیعی n را پیدا کنید که $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$.

حل: اگر n فرد باشد آنگاه d_4, d_3, d_2, d_1 همگی فردند پس $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$ جواب ندارد. بنابراین n زوج است و از آنجا $d_1 = 1, d_2 = 2$ و به معادلهٔ

$$n = 5 + d_3^2 + d_4^2$$

می‌رسیم. اگر d_3 زوج باشد آنگاه $d_3 = 2m$ به‌طوری که $m > 1$. چون $d_3 | n$ پس $m | n$ یعنی m یکی از مقسوم‌علیه‌های n است و چون $1 < m < d_3$ پس m فقط می‌تواند برابر $d_2 = 2$ باشد. در این صورت $d_3 = 4$ و از آنجا $n = 21 + d_4^2$ و چون $d_4 | n$ پس $d_4 | 21$ یعنی $d_4 = 7$ یا $d_4 = 21$. در این دو حالت به جواب‌های $n = 70$ و $n = 442$ می‌رسیم که هر دو غیرقابل قبولند. حال d_3 را فرد فرض می‌کنیم. بدیهی است در این صورت d_3 اول است (d_3 اولین مقسوم‌علیه فرد بزرگتر از ۲ است). حال از این که d_3 فرد و n زوج است نتیجه می‌گیریم که d_4 نیز زوج است پس یا $d_4 = 2d_2 = 2$ و یا $d_4 = 2d_3$. اگر $d_4 = 4$ آنگاه $d_3 = 3$ پس $n = 30$، ولی این جواب قابل قبول نیست. پس $d_4 = 2d_3$ و از آنجا $n = 5 + d_3^2 + 4d_3^2$ و چون $d_3 | n$ پس $d_3 | 5$ بنابراین $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 5, d_4 = 10$ و از آنجا $n = 130$ که در فرض مسأله نیز صدق می‌کند.

مرحلهٔ دوم هفدهمین دوره ۱۳۷۸

۳۲. آیا عدد صحیح و مثبتی که توانی از۲ باشد وجود دارد که با جابه‌جایی ارقامش توان دیگری از ۲ حاصل شود؟ چرا؟

حل: جواب خیر است. فرض کنید $a = 2^n$ و $b = 2^m$ دارای رقم‌های یکسان باشند و فرض کنید $m < n$. چون تعداد ارقام a و b یکسان است پس $a < 10b$ و یا $2^n < 10 \times 2^m$ و از آنجا $2^{n-m} < 10$ بنابراین $n - m \leq 3$. از طرفی مجموع ارقام a با مجموع ارقام b برابر است. پس:

$$a \overset{9}{\equiv} b \quad \Longrightarrow \quad 2^n \overset{9}{\equiv} 2^m \quad \Longrightarrow \quad 2^{n-m} \overset{9}{\equiv} 1$$

هر کدام از اعداد $1, 2, 3$ اگر جای $n - m$ قرار گیرند، همنهشتی فوق را برقرار نمی‌کنند پس چنین اعدادی وجود ندارند. (در صورت مسأله می‌بایست ذکر شود که اعداد a و b فاقد رقم صفرند.)

MATH75.IR

فصل دوم

ترکیبیات

- ترکیبیات
- استقرای ریاضی
- گراف
- چند اصل متفرقه
- مسائل ترکیبیات
- مسائل تستی المپیادهای ریاضی
- مسائل تشریحی المپیادهای ریاضی

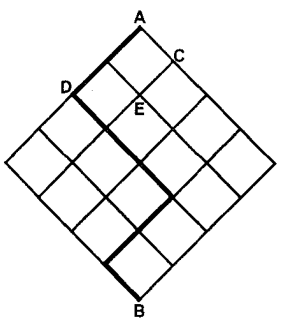
Farad

MATH75.IR

ترکیبات

ترکیبات یکی از زیباترین شاخه‌های ریاضیات حتی برای ریاضی کاران غیر حرفه‌ای محسوب می‌شود. گستردگی و تنوع، محسوس بودن و مباحث جدیدی که هر روز در آن ایجاد می‌شود، هر ریاضی دوستی را بخود جلب می‌کند، بگذارید تا شروع کنیم.

دنیای ریاضیات هم برای خودش موجواتی دارد که به بررسی این موجودات و روابط آنها با هم می‌پردازد. مثلاً عدد یکی از این موجودات است یا مثلاً مثلث یکی دیگر از این موجودات است که پیش ترها به بررسی آنها پرداخته‌اید. آنچه در این ابتدا آشنایی باآن ضروری به نظر می‌رسد موجودی است به نام مجموعه که حتماً آشنایی مختصری با آن داشته‌اید. تعریف دقیق ریاضی از مجموعه ارائه دادن کار آسانی نیست چون تقریباً همه چیزهای دیگر از روی مجموعه تعریف می‌شود. همین قدر می توانیم بگوییم که «تعدادی شئ که با هم در نظر گرفته شوند یک مجموعه نام دارد»، به اشیای دزون آن مجموعه نیز می‌گوییم «اعضای مجموعه» . حالا می توان به همه چیز به دید مجموعه نگریست، مجموعه آدمها، مجموعه روابط، . . . . تعریف زیر مجموعه و اجتماع و اشتراک روی مجموعه‌ها را قبلاً آموخته‌اید بنابراین می‌پردازیم به کاربردهای گوناگون آن.



مثال ۱: در شکل روبرو می خواهیم از نقطه A به B برویم به‌طوری که فقط رو به پایین حرکت کنیم، به عنوان نمونه یکی از مسیرهای ممکن در شکل نشان داده شده است.چند مسیر مختلف از A به B با این ویژگی وجود دارد؟

حل: در رویارویی با هر مسأله‌ای ابتدا بهتر است در حالتهای خاص و کوچک به بررسی آن بپردازیم . چون معمولاً ایده حل مسأله اصلی از بازی کردن با همین حالتهای خاص به دست می آید. درباره این مسأله بیایید ابتدا ببینیم چند مسیر از A به C وجود دارد (C نقطه پایین راست A است). چون در تمام مسیر باید از بالا به پایین برویم تنها یک مسیر ممکن وجود دارد که خود ضلع AC است، عین همین استدلال برای نقطه D هم درست است. برای

MATH75.IR

رسیدن به E باید یا از C به آن برویم و یا از D. یعنی :

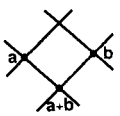
$$\{x| \text{ است } E \text{ به } A \text{ از مسیری } x\} = \{x+CE| \text{ است } C \text{ به } A \text{ از مسیری } x\} \cup \{x+DE| \text{ است } D \text{ به } A \text{ از مسیری } x\}$$

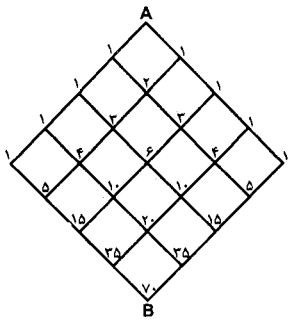
واضح است که این دو مجموعه هیچ گونه اشتراکی با هم ندارند.چون اعضای یکی شامل CE هستند و اعضای دیگری اصلاً CE را ندارند، درنتیجه :

$$\text{تعداد مسیرها از } A \text{ به } E = \text{تعداد مسیرها از } A \text{ به } C + \text{تعداد مسیرها از } A \text{ به } D$$

پس از A به E تنها ۲ مسیر وجود دارد.

حال کافی است کمی دقت کنیم تا دریابیم استدلالی که برای نقطه E انجام دادیم، برای هر نقطه دیگری از این شبکهٔ نقاط هم درست است. یعنی تعداد مسیرها از A تا هر نقطه برابر است با مجموع تعداد مسیرها از A تا هر یک از نقاط بالایی آن نقطه. برای نقاط روی اضلاع بالایی مستطیل هم عین استدلالی که برای C کردیم نتیجه می‌دهد که همیشه یک مسیر تا آن نقطه وجود دارد.





بنابراین اگر از بالا شروع کنیم و مطابق قوانین فوق تعداد مسیرها را برای تمام نقاط شبکه به دست آوریم سرانجام به میزان مطلوب ۷۰ برای جواب مسأله دست می‌یابیم. توجه به این نکته مهم است که در حل مثال بالا از این قانون استفاده کردیم:

- اگر A و B دو مجموعه متناهی باشند و $A \cap B = \emptyset$، در اینصورت داریم $|A \cup B| = |A| + |B|$.

این قانون خود حالت خاصی از قانون کلی‌تر زیر است:

- اگر A و B دو مجموعه متناهی باشند در اینصورت داریم $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$.

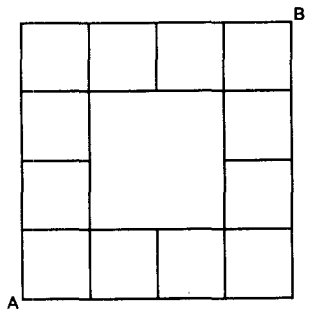
اثبات گزاره فوق به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود اگر چه ما بعدها به حالت تعمیم یافته آن به نام اصل شمول و طرد خواهیم پرداخت.

قضیه ۱: فرض کنید $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعه‌های متناهی باشند به طوری که هیچ دو مجموعه‌ای از آنها با هم اشتراک نداشته باشند، در اینصورت داریم :

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

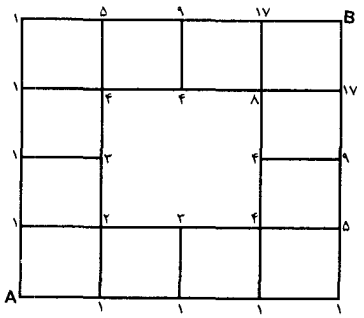
این سبک از شمارش در حالتهای پیچیده‌تر هم به کار می‌رود.

MATH75.IR



مثال ۲: در شکل مقابل به چند طریق می‌توانیم روی خطوط رسم شده از A به B برویم به طوری که کوتاهترین مسیر ممکن را پیموده باشیم؟[مرحله اول پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور]

حل: با همان شیوه مثال قبل یعنی با به دست آوردن نقطه به نقطه تعداد مسیرها می‌شود جواب را به دست آورد.در جلوتر خواهیم دید راه‌حلهای ساده‌تر دیگری می‌توان برای مثال ۱ به دست آورد ولی در این حالت مشکل نمی‌توانند به کار روند.خلاصه اینکه گاهی این شیوه کلنگی به دست آوردن نقطه به نقطه بهترین و مطمئن‌ترین روش است.



شرط مسأله مبنی بر پیمودن کوتاهترین مسیر تضمین می‌کند که تنها می‌توانیم به راست یا بالا برویم. درست مثل این است که شکل مثال ۱ را به مرکز A و در جهت مثلثاتی ۱۳۵° دوران بدهیم تا همه قدمهای مسیر راست یا بالا شوند. دقیقاً به همان روش به دست می‌آید که ۳۴ مسیر با ویژگی خواسته شده از A به B وجود دارد.

حاصلضرب دکارتی دو مجموعه A وB را بدین گونه تعریف می‌کنیم :

$$A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A \ , \ b \in B \}$$

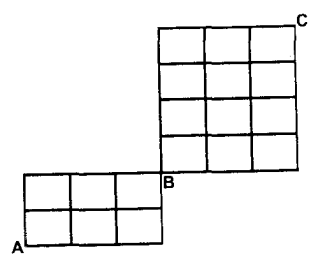
در واقع اعضای مجموعه $A \times B$ زوج مرتب هایی هستند که مؤلفه اولشان از مجموعهٔ A و مولفه دومشان از مجموعهٔ B است (زوج مرتب مثل یک جدول ۲ × ۱ است). برای نمونه اگر $A = \{۱, ۲\}, B = \{m, n, l\}$ خواهیم داشت :

$$A \times B = \{(۱, m), (۱, n), (۱, l), (۲, m), (۲, n), (۲, l)\}$$

در ضمن توجه به این نکته مهم است که ضرب دکارتی مانند ضرب عادی خاصیت تعویض پذیری ندارد به عبارت دیگر $A \times B \neq B \times A$.

واضح است که چون هر یک از اعضای A با تمام اعضای B می آید خواهیم داشت : $|A \times B| = |A|.|B|$

مثال ۳: در شکل مقابل چند مسیر از A به C وجود دارد که کوتاهترین مسیر ممکن هستند؟



حل: ابتدا به نظر می‌رسد که با همان شیوهٔ مثال ۱ و ۲ مسأله قابل حل است ولی شیوهٔ آسان‌تری هم می‌توان یافت. اینجا یک اطلاع اضافی هم از شکل به دست می‌آوریم و آن این است که هر مسیری از A به C قطعاً از نقطهٔ B هم می‌گذرد، پس داریم هر مسیر از A به C دو قطعه دارد:

MATH75.IR

(قسمت دوم مسیر از B به C ، قسمت اول مسیر از A به B) = مسیر از A به C

به عبارت دیگر اگر مجموعهٔ مسیرهای از A به B را X و مجموعهٔ مسیرهای از B به C را Y بنامیم، مجموعهٔ مسیرهای از A به C همان $X \times Y$ خواهد بود. تعداد مسیرهای از A به B برابر ۱۰ و تعداد مسیرهای از B به C برابر ۳۵ است که با روش مثال ۱ به راحتی به دست می‌آیند. بنابراین طبق آنچه گفتیم، تعداد مسیرها از A به C برابر خواهد بود با:

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y| = ۱۰ \times ۳۵ = ۳۵۰$$

آنچه در مثال فوق بیان شد را می‌توان به گونه‌ای دیگر نیز بیان کرد که اگر بخواهیم دو کار A و B را با هم انجام دهیم و بدانیم کار A را به a شیوه و کار B را به b شیوه می‌توان انجام داد آنگاه انجام هر دو کار به ab شیوه امکان‌پذیر است.

مثال ۴: تعداد عددهای دو رقمی فردی را بیابید که ارقام تکراری نداشته باشد.

حل: در اینجا می‌خواهیم دو کار را انجام دهیم. ابتدا به ۵ طریق می‌توانیم رقم یکان این عدد را انتخاب کنیم (چون باید فرد باشد) و سپس به ۸ طریق می‌توانیم رقم بعدی را انتخاب کنیم (چون نه باید مساوی رقم یکان باشد و نه می‌تواند برابر صفر باشد) در نتیجه در کل ۸×۵ طریق برای ساختن چنین عددی داریم. یعنی تعداد این اعداد دقیقاً مساوی ۴۰ می‌باشد.

اگر $A_۱, A_۲, \ldots, A_n$ مجموعه هایی متناهی باشند، تعریف می‌کنیم:

$$A_۱ \times A_۲ \times \cdots \times A_n = \{ (a_۱, a_۲, \ldots, a_n) \mid \forall\, ۱ \le i \le n \ : \ a_i \in A_i \}$$

حاصلضرب دکارتی مجموعه‌های $A_۱, A_۲, \ldots, A_n$ مجموعهٔ همهٔ n تایی‌های مرتبی است که مؤلفه i ام آنها در A_i است (برای هر $۱ \le i \le n$).(n تایی مرتب چیز خاصی نیست، مثل یک جدول $n \times ۱$ است.)

قضیه ۲: برای مجموعه‌های $A_۱, A_۲, \ldots, A_n$ داریم که

$$|A_۱ \times A_۲ \times \cdots \times A_n| = |A_۱| \cdot |A_۲| \cdot \cdots |A_n|$$

این قضیه به شکل کلاسیک‌تر زیر نیز بیان می‌شود:

اصل ضرب: اگر بخواهیم n کار $A_۱, A_۲, \ldots, A_n$ را انجام دهیم و بدانیم برای هر $۱ \le i \le n$ ، کار A_i به a_i روش قابل انجام است، آنگاه همهٔ n کار به $a_۱ a_۲ \cdots a_n$ روش مختلف امکان‌پذیر است.

این اصل پایهٔ بسیار مهمی برای همهٔ قسمتهای بعدی ترکیبات می‌باشد. اگرچه ظاهر بسیار پیش پا افتاده و آسانی دارد، توانایی بکار بستن آن در موقعیت‌های مختلف، هنر بسیار بزرگی است. باور کنید گاهی قدرت‌نمایی‌های اعجاب آوری می‌کند.

مثال ۵: به چند طریق می‌توان n شئ مختلف را در یک ردیف چید؟

MATH75.IR

حل: بهتر است این گونه به مسأله نگاه کنیم که در یک ردیف، مکانهای مختلفی وجود دارد. مکان اول، مکان دوم، ...، مکان n ام. ابتدا می‌خواهیم یکی از این n شئ را انتخاب کنیم و در مکان اول قرار دهیم. این کار به n طریق قابل انجام است. سپس می‌خواهیم یکی از $n-1$ شئ باقی‌مانده را در مکان دوم قرار دهیم. این کار به $n-1$ طریق قابل انجام است. اگر این روند را ادامه دهیم، سرانجام وقتی به مکان اول می‌رسیم، می‌بینیم تنها یک شی باقی‌مانده است یعنی به ۱ طریق می‌توانیم آن را در مکان اول قرار دهیم. طبق اصل ضرب تعداد روشهای مختلف برابر می‌شود با $n \times (n-1) \times \cdots \times ۲ \times ۱$. در ریاضیات به این حاصلضرب، n- فاکتوریل می‌گویند و با نماد $n!$ نمایش می‌دهند.

نوع دیگری از چیدن n شئ متمایز که کاربرد فراوانی دارد، از این قرار است:

مثال ٦: به چند طریق می‌توان n نفر مختلف را دور یک میز نشاند؟ (دو روش نشستن که با یک دوران به هم تبدیل شوند، یکسان هستند)

حل: ابتدا میز را ثابت فرض می‌کنیم. طبق آنچه در مثال قبل ثابت شد به $n!$ طریق می‌توان این n نفر را دور میز نشاند. حال توجه می‌کنیم که هر روش نشستن را می‌توانیم $n-1$ بار دوران بدهیم و روشهای دیگری به دست آوریم به بیان دیگر هر حالت از نشستن را n بار شمرده‌ایم. بنابراین جوابی که به دست آورده‌ایم را بر n تقسیم می‌کنیم تا تعداد طرق مورد نظر مسأله به دست آید. از اینرو تعداد روشهای مختلف برابر می‌شود با $(n-1)!$.

مثال ۷: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی چقدر است؟

حل: بدون اینکه به کلیت مسأله لطمه‌ای وارد شود می‌توان فرض کرد که این مجموعهٔ n عضوی، $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ است. حال به معنای زیرمجموعه می‌اندیشیم، یک زیرمجموعه از $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ یعنی یک تعدادی از اعضای آن، یعنی باید بعضی از اعداد را انتخاب کرد و بعضی را انتخاب نکرد. پس از عدد ۱ شروع می‌کنیم، عدد ۱ را می‌شود برداشت و همچنین می‌شود برنداشت، پس برای آن ۲ حالت داریم. عدد ۲ را هم می‌شود برداشت و می‌شود برنداشت پس برای آن هم ۲ حالت داریم. به همین ترتیب هر عدد i ای که در نظر بگیریم $(۱ \leq i \leq n)$ می‌شود انتخابش کرد و می‌شود انتخابش نکرد. پس ۲ حالت برای آن عدد امکان دارد. در نتیجه بنابراصل ضرب $۲^n = ۲ \times ۲ \times \cdots \times ۲ \times ۲$ حالت مختلف خواهیم داشت و این بدان معناست که ۲^n زیرمجموعه وجود دارد.

درست در این نقطه است که شما باید بتوانید حسابی سر خودتان را گرم کنید و انواع و اقسام حالتهای مختلف تقسیم‌بندی یا چیدن اشیاء کنار هم را بررسی کنید.

مثال ۸: پنج خودنویس، چهار مداد، دو دفترچه و سه خودکار را می‌خواهیم بین دو نفر طوری تقسیم کنیم که به هر یک حداقل یکی از نوشت‌افزارهای فوق تعلق گیرد. مطلوب است تعداد حالات ممکن این تقسیم. (اشیاء غیر متمایز هستند). [مرحلهٔ دوم چهارمین المپیاد ریاضی]

حل: می‌خواهیم این اشیاء را بین دو نفر تقسیم کنیم. معنای این کار این است که ابتدا یک مقداری از آنها را به

MATH75.IR

نفر اول بدهیم و بعد هرچه ماند به نفر دوم بدهیم. مثلاً دربارهٔ خودنویسها چهار حالت مختلف داریم و آن اینکه به نفر اول یکی، دوتا، سه‌تا یا چهاتا خودنویس بدهیم (چون به هر کسی باید حداقل یکی بدهیم). به همین ترتیب برای مدادها سه حالت، برای دفترچه‌ها یک حالت و برای خودکارها دو حالت خواهیم داشت. بنابر اصل ضرب $۴ \times ۳ \times ۱ \times ۲ = ۲۴$ حالت برای تقسیم این اشیاء خواهیم داشت.

مثال ۹: اگر X یک مجموعهٔ n عضوی باشد، آنگاه ثابت کنید تعداد زوج‌های (A, B) که A و B زیرمجموعه‌های X هستند و $A \nsubseteq B$، برابر است با $۳^n - ۲^n$. [مرحله اول دهمین المپیاد ریاضی]

حل: در اینجا اگر دقت کنیم می‌بینیم که همیشه X به سه بخش مجزا تقسیم می‌شود. یکی A، یکی اعضایی که در B هستند ولی در A نیستند $(B - A)$ و یکی اعضایی که در B نیستند $(X - B)$. به این ترتیب هر عضو از مجموعهٔ X باید در یکی از این سه بخش قرار گیرد. پس برای هر عضو X سه حالت داریم و کلاً ۳^n حالت مختلف از چنین زوج مرتبهایی داریم. اما فقط یک نکته باقی مانده و آن این که در این شمارشی که کردیم ممکن است بخش دوم تهی شود (یعنی $A = B$ که خلاف انتظار مسأله است)، پس باید این حالتها را از آن کنار بگذاریم. این حالتهای بد هم دقیقاً به تعداد انتخابهای ممکن برای A وجود دارند یعنی به تعداد زیرمجموعه‌های X که ۲^n تاست. بنابر آنچه گفتیم تعداد زوج مرتب های مورد نظر $۳^n - ۲^n$ می‌شود.

مثال ۱۰: می‌خواهیم ۵ شی سفید و ۱۰ شئ سیاه را طوری کنار هم بچینیم که سمت راست هر شئ سفید، یک شی سیاه باشد. چند راه برای انجام این کار وجود دارد؟ [مرحله اول ششمین المپیاد ریاضی ژاپن ۱۹۹۶]

حل: در اینجا اشیای سیاه یکسان فرض شده‌اند. بنابراین هر شی سفید را همراه مهرهٔ سیاهی که سمت راستش قرار گرفته، با هم در نظر می‌گیریم. حالا آنچه داریم ۵ شی سیاه و ۵ شی سیاه – سفید است که باید به دلخواه کنار هم چیده شوند. به $!۱۰$ طریق می‌شود این ۱۰ شی را کنار هم چید اما چون اشیای سیاه با هم فرقی ندارند این عدد باید بر $!۵$ تقسیم شود (به خاطر اینکه در شمارش $!۱۰$، هر حالت را $!۵$ بار – به خاطر جابجا کردن اشیاً سیاه با یکدیگر – شمرده‌ایم). دوباره چون اشیای سیاه – سفید هم با هم فرقی ندارند، یکبار دیگر هم باید بر$!۵$ تقسیم کنیم، یعنی در کل $\frac{!۱۰}{(!۵)^۲}$ راه برای چیدن اشیاً وجود دارد.

مثال ۱۱: n شئ مختلف داریم. می‌خواهیم r شی را از میان آنها انتخاب کنیم، این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

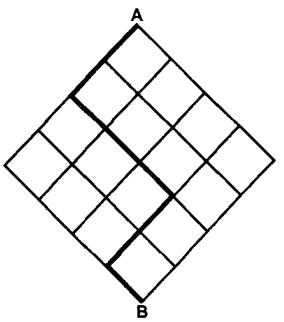
حل: برای انتخاب اولین شئ، n حالت مختلف داریم. برای انتخاب دومین شئ، $(n - ۱)$ حالت مختلف داریم و ...، تا برای انتخاب r امین شئ، $(n - r + ۱)$ حالت مختلف داریم. پس در کل $n(n - ۱) \cdots (n - r + ۱)$ حالت مختلف برای انتخاب r شئ داریم. اما این عدد زمانی درست است که بخواهیم آن r شئ‌مان به ترتیب انتخاب شوند. در حالی که در اینجا صرفاً خود آن مجموعهٔ r شئ‌ای برایمان مهم است. حال باید ببینیم که هر حالت را چند بار اضافی شمرده‌ایم. هر مجموعهٔ r تایی از اشیاً را می‌توان به $!r$ طریق مختلف چید، یعنی به $!r$ طریق مختلف

MATH75.IR

می‌شود مرتبش کرد و به ترتیب اعضایش را بیرون کشید. پس هر حالت را $r!$ بار شمرده‌ایم و باید عدد به دست آمده را بر $r!$ تقسیم کنیم. بنابراین تعداد روشهای انتخاب r شی از n شی برابر خواهد شد با $\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$. این عدد را به علت کاربرد بسیار زیاد آن در ترکیبات با علامت $\binom{n}{r}$ نشان می‌دهند.

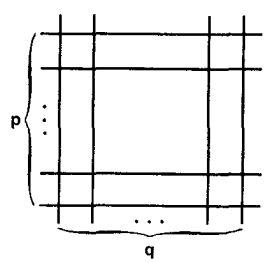
در اینجا توجه به دو نکته جالب است. اول اینکه این اثبات نشان می‌دهد که «حاصلضرب هر r عدد طبیعی متوالی بر $r!$ بخشپذیر است». چون اگر آن r عدد طبیعی متوالی $m+r-1,\ldots,m+1,m$ باشند، حاصلضرب آن اعداد تقسیم بر $r!$ برابر است با $\binom{m+r-1}{r} = \frac{m(m+1)\cdots(m+r-1)}{r!}$، که برابر است با تعداد راههایی که می‌توان r شی را از میان $m+r-1$ شی انتخاب کرد. تعداد این راهها هم که لزوماً عددی صحیح است. پس ادعا ثابت شد.

دومین نکته این است که می‌توان صورت و مخرج کسر به دست آمده در مثال ۱۱ را در $(n-r)!$ ضرب کرد تا عبارت متعارفتری به دست آید: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$



حال می‌توانیم دوباره به مثال ۱ برگردیم و راه حل بهتری برای حل آن ارائه دهیم. می‌خواهیم از نقطهٔ A به B برویم به طوری که هر قدممان «پایین چپ» یا «پایین راست» باشد. توجه کنید که هر مسیری از A به B با ویژگی مورد نظر باید شامل دقیقاً چهارقدم «پایین چپ» و چهار قدم «پایین راست» باشد. فرقی نمی‌کند که این چهارقدم «پایین چپ» را چه موقع برداریم، چهارتایش را همان اول برویم یا دو تایش را اول برویم، یکی را قدم پنجم و یکی را قدم آخر یا هرجور دیگری. هر یک از این حالتها یک مسیر برای ما معرفی می‌کند که فلان چهار قدم آن «پایین چپ» و بقیه قدمهایش «پایین راست» است.
بنابراین برای به دست آوردن تعداد مسیرها، کافی است تعداد انتخابهای چهارقدم «پایین چپ» از هشت قدمی که باید برداریم را بدانیم. یعنی تعداد مسیرها برابر است با $\binom{8}{4}$ و آن هم $\frac{8!}{(4!)^2} = \binom{8}{4} = 70$.

مثال ۱۲: p خط افقی و q خط عمودی کشیده‌ایم، چند مستطیل در شکل دیده می‌شود؟



حل: برای داشتن یک مستطیل دو خط افقی و دو خط عمودی لازم و کافی است. پس دو خط از خطوط افقی انتخاب می‌کنیم، این کار به $\binom{p}{2}$ روش امکان دارد، و همچنین دو خط از خطوط عمودی انتخاب می‌کنیم، این کار به $\binom{q}{2}$ روش امکان دارد. بنابراین در کل $\binom{p}{2}\binom{q}{2}$ مستطیل در شکل خواهیم داشت.

به هر شیوهٔ چیدن n شیء کنار هم، یک «جایگشت» از این n شیء گویند.

مثال ۱۳: فرض کنید n عدد صحیحی بزرگتر از ۱ باشد، تعداد جایگشت‌های $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ از اعداد $1,2,\ldots,n$ را بیابید به طوری که فقط یک اندیس i، $i\in\{1,2,\ldots,n-1\}$، وجود داشته باشد که $a_i > a_{i+1}$.
[المپیاد بلغارستان ۱۹۹۵]

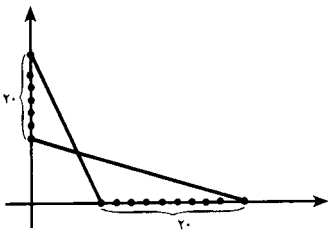
MATH75.IR

حل: جایگشت‌هایی که می‌خواهیم به این شکل است:

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_i > a_{i+1} < a_{i+2} < \cdots < a_n$$

یعنی اعداد $1, 2, \ldots, n$ به دو قسمت تقسیم شده‌اند: یکی $a_1, \ldots, a_i$ که به شکل صعودی مرتب می‌شوند و دیگری $a_{i+1}, \ldots, a_n$ که باز هم به شکل صعودی مرتب می‌شوند. یعنی کافی است تعدادی از اعداد را انتخاب کنیم و به شکل صعودی در بخش اول بچینیم، بقیه را هم در بخش دوم به شکل صعودی بچینیم. برای این کار (انتخاب تعدادی عدد برای بخش اول) 2^n شیوه مختلف داریم، چون می‌خواهیم زیرمجموعه‌ای از اعداد را انتخاب کنیم. اما این شمارش یک اشکال دارد و آن این که اگر مجموعهٔ انتخاب شده $\emptyset$ یا چیزی مثل $\{1, 2, \ldots, i\}$ باشد، آنگاه کل جایگشت از اول تا آخر صعودی خواهد شد که به درد ما نخواهد خورد. پس باید این حالتها را از کل تعدادی که شمارش کرده‌ایم کم کنیم. این حالتهای بد عبارتند از $\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \ldots, \{1, 2, \ldots, n\}$، که $n + 1$ حالت هستند. بنابراین تعداد کل حالات مطلوب برابر است با $2^n - n - 1$.

مثال ۱۴: فرض کنید ناحیه اول صفحهٔ مختصات، آن نقاطی از صفحه باشند که مختصات آنها مثبت‌اند. ۲۰ نقطه روی قسمت مثبت محور x ها در نظر گرفته و آنها را به ۲۰ نقطه روی قسمت مثبت محور y ها وصل می‌کنیم. از ۴۰۰ خط پدید آمده فرض کنید در ناحیهٔ اول هیچ سه‌تایی همرس نباشند. تعداد نقاط تقاطع این خطوط را در ناحیه اول بیابید [مرحلهٔ اول سیزدهمین المپیاد ریاضی]



حل: هر نقطهٔ تقاطع، محل برخورد دو خط است که هر کدامشان دو سر دارند یعنی هر نقطهٔ تقاطع معرفی کنندهٔ دو نقطه از محورx ها و دو نقطه از محور y هاست. از طرفی دیگر، هرگاه دو نقطه از محور x ها و دو نقطه از محور y ها را انتخاب کنیم، خطوط بین آنها، تنها یک نقطهٔ برخورد را به ما می‌دهند.

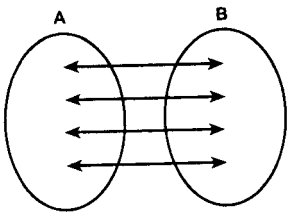
پس تعداد برخوردها برابر است با $\binom{20}{2}\binom{20}{2}$، که تعداد انتخابهای دو نقطه از محور x هاو دو نقطه از محور y ها است. در نتیجه جواب برابر است با:

$$\binom{20}{2}^2 = 36100$$

پیش از ادامهٔ بحث باید به یک تکنیک بسیار پراستفاده بپردازیم. تکنیکی که حتی در مثالهای گذشته هم ناخودآگاه از آن کمک گرفته‌ایم. در مسایلی که به نوعی با شمارش سر و کار دارند، چه اثبات حکمی دربارهٔ تعداد چیزی، چه اثبات برابری تعداد دو چیز و چه محاسبهٔ تعداد چیزهایی، می‌توانیم از «تناظر» استفاده کنیم. بدان معنا که اگر بین اعضای دومجموعه یک «تناظر یک به یک» وجود داشته باشد، آنگاه تعداد اعضای آن دو مجموعه برابر هستند.

زمانی می‌گوییم بین دو مجموعهٔ A, B تناظر یک به یک برقرار است

MATH75.IR



که بتوانیم «به هر عضو از مجموعهٔ A، یک عضو از مجموعه B را نسبت دهیم و هر عضو از مجموعهٔ B به یک عضو از مجموعهٔ A نسبت داده شده باشد.»

برای روشن شدن کاربردهای فراوان آن کافی است نگاهی به مثالهای پیشین بیندازیم:

در مثال ۳، بین مجموعهٔ مسیرهای از A به C و مجموعهٔ $X \times Y$ یک تناظر یک به یک پیدا کردیم.

در مثال ۹، بین مجموعهٔ (A,B) های مطلوب و مجموعهٔ (D,E,F) که $E \neq \emptyset$ تناظری یک به یک پیدا کردیم بدین ترتیب که:

$$A \subset\neq B \not\subseteq X \ , \ (A,B) \longrightarrow (A, B-A, X-B)$$

$$(D, D\cup E) \longleftarrow (D,E,F) \quad , \begin{cases} D\cap E = \emptyset \\ D\cap F = \emptyset \\ E\cap F = \emptyset \end{cases} , D\cup E\cup F = X, \quad E \neq \emptyset$$

در نتیجه تعداد (A,B) های مطلوب برابر شد با تعداد (D,E,F) ها با خاصیت ذکر شده و دیدیم که شمردن تعداد (D,E,F) ها بسیار آسان‌تر از شمردن مستقیم (A,B) ها بود.

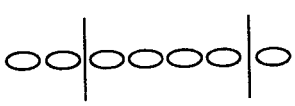
در راه حل دومی که برای مثال ۱ ارائه شد بین مجموعهٔ مسیرها از A به B و مجموعهٔ هشت‌تایی‌های مرتبی که از دقیقاً چهارتا «↙» و چهارتا «↘» تشکیل شده‌اند، تناظری ۱ـ۱ پیدا شد.

در مثال ۱۲ بین مجموعه مستطیل ها و مجموعه چهارتایی های $\{p_i, p_j, q_k, q_l\}$ تناظری ۱ـ۱ پیدا شد.(p_i , p_j دو خط افقی و q_k , q_l دو خط عمودی از خطوط مسأله هستند.)

در مثال ۱۴ خودتان بگویید چه تناظر یک به یکی را مورد استفاده قرار دادیم.

مثال ۱۵: تعداد جوابهای صحیح و مثبت معادلهٔ $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ را به دست آورید.

حل: برای این کارفرض می‌کنیم n شئ یکسان به ردیف چیده شده‌اند. برای این که آنها را به r دسته مختلف تقسیم کنیم، از $r-1$ خط جداکننده استفاده می کنیم. مثلاً در شکل زیر $n = 7, r = 3$ است.



این دو خط جداکننده نشان می‌دهند که $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 1$. در واقع در این مثال بین مجموعهٔ جوابهای طبیعی $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ و مجموعهٔ حالتهای قرار دادن $r-1$ علامت جداکننده در میان n شئ، تناظری ۱ـ۱ پیدا کردیم. پس کافی است تعداد اعضای مجموعهٔ دوم را بشماریم.

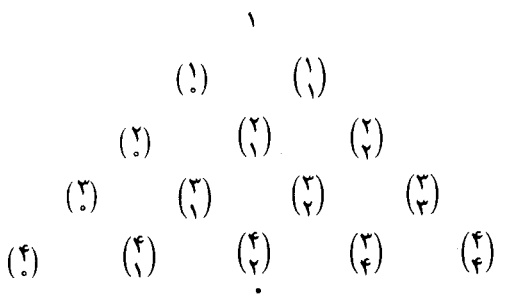
هر x_i حداقل برابر ۱ است، پس علامتهای جداکننده هرگز کنار هم قرار نمی‌گیرند و همچنین در ابتدا و انتهای n شئ هم قرار نمی‌گیرند. پس $n-1$ مکان در میان اشیأ برای این خطوط جداکننده وجود دارد که باید $(r-1)$ تایشان

MATH75.IR

را برگزید. تعداد حالتهای ممکن این انتخاب هم برابر است با $\binom{n-1}{r-1}$. بنابراین تعداد جوابهای مورد نظر برابر $\binom{n-1}{r-1}$ است.

حالا دوباره برمی‌گردیم به مثال ۱ و این‌بار به راه حل دومی که برای آن ارائه کردیم، نظر می‌اندازیم. برمبنای این راه حل تمام اعدادی که به عنوان تعداد مسیر، روی نقاط نوشته شده‌اند (در راه حل اول)، چیزی نیستند جز اعداد $\binom{n}{r}$.

اگر این شبکه را تا بی‌نهایت ادامه دهیم، به مثلثی دست می‌یابیم به نام مثلث «خیام - پاسکال» که ویژگی‌های جالبی دارد. اگر از نوک مثلث صرف نظر کنیم، در سطر n ام همهٔ اعداد $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$ به ترتیب ظاهر می‌شوند. ویژگی‌ای که در راه حل اول مثال ۱ از آن استفاده کردیم به شکل زیر ترجمه می‌شود:



هر عدد مجموع دو عدد بالایی خود است: $\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$ که به «قانون پاسکال» مشهور است. اثبات قانون پاسکال با استفاده از تعریف فاکتوریلی $\binom{n}{r}$ کار سختی نیست و به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ولی با ارائه یک اثبات «ترکیباتی» با استفاده از معنای $\binom{n}{r}$ می‌خواهیم کاربرد یک تکنیک دیگر را هم به نمایش بگذاریم:

مثال ۱۶: رابطهٔ پاسکال را ثابت کنید.

حل: برای این کار ابتدا به دو قسمت رابطه خوب دقت کنید. سمت چپ می‌گوید «می‌خواهیم r تا شئ از میان n شئ داده شده انتخاب کنیم». فرض کنید یکی از این n شئ، شئ A باشد. در هنگام انتخاب r شئ، دو حالت برای شئ A اتفاق می‌افتد:

i) اگر شئ A را انتخاب کنیم، آنوقت $n-1$ شئ باقی می‌ماند که باید $r-1$ شئ مورد نیاز را از بین آنها انتخاب کنیم. پس در این حالت $\binom{n-1}{r-1}$ روش خواهیم داشت.

ii) اگر شئ A را انتخاب نکنیم، آنوقت همهٔ r شئ مورد نیاز را باید از میان $n-1$ شئ دیگر انتخاب کنیم که برای این کار $\binom{n-1}{r}$ روش دارد.

بنابراین در کل $\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$ روش برای این کار وجود دارد در نتیجه به ناچار داریم:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

تکنیکی که در بالا از آن استفاده شد، این است که تعداد روشهای انجام یک کار را دوبار و از دو راه مختلف شمرده و از برابر قرار دادن دو جواب به دست آمده به نتیجهٔ مطلوب می‌رسیم. می‌توانیم اسم این تکنیک را بگذاریم «دوراهه

MATH75.IR

کردن».

مثال ۱۷: ثابت کنید که

$$\binom{m+n}{r}=\binom{m}{r}\binom{n}{0}+\binom{m}{r-1}\binom{n}{1}+\cdots+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\binom{m}{0}\binom{n}{r}$$

این رابطه به رابطهٔ «واندرموند» شهرت دارد.

حل: باز می‌خواهیم r شئ را از میان $m+n$ شئ انتخاب کنیم. فرض کنید m تای این اشیأ قرمز و n تای آنها آبی هستند. به شکل عادی که بخواهیم این انتخاب را انجام دهیم $\binom{m+n}{r}$ روش داریم که سمت چپ برابری را به ما می‌دهد. اما از راه حلی دیگر می‌توانیم چندین حالت زیر را تصور کنیم. اگر همهٔ r شئ را از میان اشیای قرمز برداریم و هیچ شئ از آبی‌ها انتخاب نکنیم $\binom{n}{0}\binom{m}{r}$ روش انتخاب داریم. اگر $r-1$ شئ قرمز و ۱ شئ آبی برداریم $\binom{n}{1}\binom{m}{r-1}$ روش انتخاب داریم. و به همین ترتیب اگر $r-i$ شئ قرمز و i شئ آبی برداریم سپس $\binom{n}{i}\binom{m}{r-i}$ روش انتخاب داریم. از جمع کردن همهٔ این حالتها، عبارت سمت راست رابطهٔ بالا به دست می‌آید، در نتیجه دو طرف رابطهٔ بالا با هم برابرند.

مثال ۱۸: تعداد سه تایی‌های مرتب (x,y,z) از مجموعهٔ $\{1,2,3,\ldots,n+1\}$ را بیابید به طوری که $z>\text{Max}\{x,y\}$. (x و y می‌توانند با هم برابر باشند.)

منظور از این مثال صرفاً به دست آوردن تعداد این سه‌تایی‌ها نیست. بلکه ما از دو راه این سه تایی‌ها را می‌شماریم و از برابر قرار دادن نتایج آنها به یک برابری مفید دست می‌یابیم.

راه حل اول: اگر $z=k+1$، در این صورت k روش برای انتخاب x و k روش برای انتخاب y خواهیم داشت. بنابراین k^2 روش برای انتخاب (x,y) داریم. از طرفی می‌دانیم k می‌تواند از ۱ تا n تغییر کند، در نتیجه تعداد مورد نظر مسأله برابر است با

$$1^2+2^2+\cdots+n^2$$

راه حل دوم: برای یک سه‌تایی مطلوب (x,y,z)، سه حالت زیر را داریم:

۱) $x=y<z$. در این حالت $\binom{n+1}{2}$ روش انتخاب داریم.

۲) $x<y<z$. در این حالت $\binom{n+1}{3}$ روش انتخاب داریم.

۳) $y<x<z$. در این حالت $\binom{n+1}{3}$ روش انتخاب داریم.

پس تعداد مورد نظر مسأله عبارتست از

$$\binom{n+1}{2}+2\binom{n+1}{3}$$

MATH75.IR

حال از برابر قرار دادن نتیجهٔ این دو روش به دست می‌آید که:

$$۱^۲ + ۲^۲ + \cdots + n^۲ = \binom{n+۱}{۲} + ۲\binom{n+۱}{۳}$$

MATH75.IR

استقرای ریاضی

یکی از کارآمدترین شیوه‌های اثبات در ترکیبات که گاهی در آخرین لحظات وفاداری‌اش را ثابت می‌کند، اصل «استقراء» است. فرض کنید می‌خواهیم ثابت کنیم گزارهٔ P دربارهٔ همهٔ اعداد طبیعی درست است. یعنی می‌خواهیم ثابت کنیم $P(n)$ همواره درست است. کاربرد استقراء به این صورت است که:

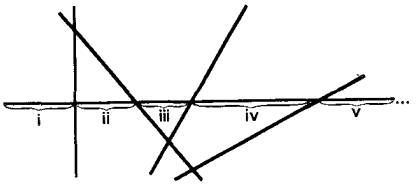
(i) ابتدا ثابت می‌کنیم $P(۱)$ درست است.

(ii) سپس ثابت می‌کنیم هرگاه $P(n)$ درست باشد، $P(n+۱)$ هم درست است.

اگر دو گام فوق به درستی برداشته شوند، واضح است که $P(n)$ همواره درست است. چون وقتی $P(۱)$ درست است (گام اول)، $P(۲)$ هم درست است (طبق گام دوم) و چون $P(۲)$ درست است، $P(۳)$ هم درست است (طبق گام دوم) و ....

مثال ۱: ثابت کنید اگر n خط راست در صفحه رسم کنیم، $\frac{n(n+۱)}{۲}+۱$ ناحیه به وجود می‌آید. (خطوط همرس یا موازی نیستند)

حل: می‌خواهیم این حکم را با استقراء ثابت کنیم. گام اول بروشنی برقرار است چون وقتی یک خط راست رسم شده باشد، صفحه به دو ناحیه تقسیم می‌شود. اما برای گام دوم فرض می‌کنیم هر n خط راستی که رسم کنیم، $\frac{n(n+۱)}{۲}+۱$ ناحیه به وجود می‌آید. حال می‌خواهیم ثابت کنیم وقتی $n+۱$ خط رسم شده باشد، $\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}+۱$ ناحیه وجود خواهد داشت. یکی از این $n+۱$ خط را در نظر بگیرید. این خط در n نقطه توسط خطوط دیگر قطع شده است یعنی $n+۱$ بازه روی آن ایجاد شده است. هریک از این بازه‌ها، مرزی است که یکی از ناحیه‌های مربوط به n خط دیگر را به دو ناحیه تقسیم کرده است. درنتیجه تعداد ناحیه‌های ایجاد شده توسط $n+۱$ خط برابر است با تعداد ناحیه‌های ایجاد شده توسط n خط دیگر به اضافهٔ $n+۱$، که برابر خواهد شد با:



$$\left(\frac{n(n+۱)}{۲}+۱\right)+(n+۱)=\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}+۱$$

MATH75.IR

و این دقیقاً همان چیزی است که گام دوم استقراء می‌خواست. بنابراین مسأله طبق استقراء حل شد.

مثال ۲: n دایره در صفحه رسم شده‌اند. این دوایر صفحه را به ناحیه‌هایی تقسیم کرده‌اند. ثابت کنید می‌توان این نواحی را با دو رنگ چنان رنگ‌آمیزی کرد که هر دو ناحیهٔ هم مرز، ناهمرنگ باشند.

حل: می‌خواهیم حکم را با استقراء بر روی تعداد دوایر ثابت کنیم. در گام اول اگر $n = ۱$، تنها یک دایره داریم که درون آن را سفید و بیرون آن را سیاه می‌کنیم. یعنی حکم مسئله در این حالت برقرار است. حال فرض می‌کنیم هرجور که n دایره در صفحه قرار گرفته باشند، می‌توان نواحی صفحه را با شرایط دلخواه مسأله رنگ کرد (این فرض را فرض استقراء می‌نامند).

می‌خواهیم ثابت کنیم هرجور که $n + ۱$ دایره در صفحه قرار بگیرند، می‌توان رنگ‌آمیزی مناسب را انجام داد (این را حکم استقراء می‌نامند). بنابراین فرض می‌کنیم $n + ۱$ دایره در صفحه رسم شده‌اند. یکی از آنها را در نظر می‌گیریم به نام C. نواحی ایجاد شده توسط n دایرهٔ دیگر را با دو رنگ با شرایط خواسته شده رنگ می‌کنیم، این کار بر طبق فرض استقراء امکان‌پذیر است. دایرهٔ C تعدادی از نواحی قبلی را قطع می‌کند. ادعا می‌کنیم اگر رنگ نواحی داخل دایرهٔ C را برعکس کنیم (سفیدها را سیاه و سیاه‌ها را سفید کنیم)، یک رنگ‌آمیزی مناسب برای کل $n + ۱$ دایره به دست می‌آید. اثبات ادعا به این صورت است که برای مرز دو ناحیهٔ مجاور، سه حالت وجود دارد:

(i) اگر مرز، بیرون C قرار گرفته باشد، قطعاً دو طرف آن رنگهای مختلف دارند. چون این مرز در حالت n دایره هم وجود داشت و رنگهای نواحی بیرون C هیچ تغییر نکرده است.

(ii) اگر مرز، درون C قرار گرفته باشد، قطعاً دو طرف آن رنگهای مختلف دارند. چون این مرز در حالت n دایره هم وجود داشت. رنگهای نواحی درون C هم تنها برعکس شده است، یعنی وقتی قبلاً مختلف بوده حالا هم مختلف است.

(iii) اگر مرز، کمانی از C باشد، قبلاً دو طرف آن یک ناحیه بوده‌اند و همرنگ. ولی حالا چون رنگ ناحیهٔ داخل C را تغییر داده‌ایم، رنگ دو طرف این مرز هم مختلف شده است.

بنابراین این رنگ‌آمیزی برای $n + ۱$ دایره، خواص خواسته شده را دارد. پس حکم استقراء هم ثابت شد.

مثال ۳: n اتومبیل در نقاط نامعلومی از یک پیست دایره‌ای شکل ایستاده‌اند که در مجموع به اندازه‌ای که یک اتومبیل بتواند یک دور پیست را طی کند، بنزین دارند. ثابت کنید یک اتومبیل هست که می‌تواند شروع به حرکت در جهت ساعتگرد کند و در راهش از بنزین سایر اتومبیل‌ها استفاده کند و یک دور کامل پیست را طی کند.

حل: مسأله بامزه‌ای است. نه؟ باز هم بیایید استقرایی فکر کنیم. اگر $n = ۱$ باشد که مسأله حل است چون خود آن یک اتومبیل بنزین کافی دارد. حال فرض کنید حکم برای n اتومبیل درست باشد. می‌خواهیم آن را برای $n + ۱$

MATH75.IR

اتومبیل ثابت کنیم.

پس فرض کنید $n+1$ اتومبیل در نقاط نامعلومی از پیست ایستاده‌اند. ابتدا ادعا می‌کنیم یکی از اتومبیل‌ها مثل (A) هست که می‌تواند به اتومبیل بعدی (B) برسد. چون اگر هیچ اتومبیلی با میزان بنزینی که در باک دارد نمی‌توانست به اتومبیل بعدی برسد، در مجموع بنزین کافی برای یک دور زدن پیست وجود نداشت. بنابراین چنین A و B ای وجود دارند. حال بنزین B را در باک اتومبیل A می‌ریزیم و اتومبیل B را حذف می‌کنیم. حالا n اتومبیل با همان شرایط مسأله داریم که طبق فرض استقراء حکم مسأله ۱برای آنها برقرار است، یعنی اتومبیلی هست که بتواند تمام پیست را طی کند. همان اتومبیل در حالت $n+1$ اتومبیل هم خواهد توانست کل پیست را طی کند. چون برای طی کردن فاصلهٔ A و B به اندازهٔ کافی بنزین خواهد داشت (از باک A) و برای طی کردن سایر قطعه‌ها، همان قدر بنزین که در حالت n اتومبیلی داشت، دارد.

گونهٔ دیگری از استقراء که موارد استفادهٔ کمتری دارد ولی بسیار قوی‌تر از استقرای معمولی است، به شرح زیر می‌باشد:

(i) ابتدا حکم را برای $n=1$ ثابت می‌کنیم.

(ii) سپس فرض می‌کنیم حکم برای $n, \ldots, 3, 2, 1$ درست باشد و از روی آن ثابت می‌کنیم حکم برای $n+1$ هم درست است.

این سبک از به کار بردن استقراء را «استقرای قوی» نام نهاده‌اند.

نکته: در مسائلی که از استقراء استفاده می‌کنیم لزومی ندارد که حتماً $p(1)$ درست باشد مثلاً ممکن است پایه استقراء $n=2$ باشد، یعنی $p(2)$ درست باشد و از روی آن برای $n \geq 2$ حکم را با استقراء ثابت کنیم.

مثال ۴: تمام n های طبیعی را بیابید به طوری که $2^n > n^2$.

حل: با استفاده از روش آزمون و خطا، سعی می‌کنیم چندین n طبیعی را با شروع از ۱ بیابیم که در شرط مسئله صدق کنند. واضح است که $n=1$ می‌تواند باشد. در مورد $n=2$ چطور؟ پرواضح است که $n=2$ نمی‌تواند باشد. به همین ترتیب، $n=3,4$ هم نمی‌توانند باشند ولی $n=5$ می‌تواند باشد. حال سعی می‌کنیم با استفاده از استقراء ریاضی حکم را برای هر $n \geq 5$ طبیعی ثابت کنیم. برای این کار ابتدا لم زیر را مطرح می‌کنیم:

لم: به ازای هر $n \geq 3$ طبیعی داریم که $2^n \geq 2n+1$.

اثبات: به ازای $n=3$، رابطهٔ $8 > 6+1$ حاصل می‌گردد که درست است. حال فرض می‌کنیم حکم به ازای n، $(n \geq 3)$ درست باشد و می‌خواهیم حکم را برای $n+1$ ثابت کنیم یعنی:

$$2^n > 2n+1 \stackrel{?}{\Longrightarrow} 2^{n+1} > 2(n+1)+1$$

MATH75.IR

از طرفی داریم که:

$$۲^{n+۱} = ۲ \times (۲^n) > ۲ \times (۲n + ۱) = ۴n + ۲ > ۲(n + ۱) + ۱$$

بدین ترتیب لم اثبات شد.

حال به اثبات مسئله بازمی‌گردیم:

به ازای $n = ۵$، رابطهٔ $۲^n > n^۲$ درست است (پایهٔ استقراء). حال فرض می‌کنیم حکم به ازای n $(n \geq ۵)$ درست باشد (فرض استقراء) و ثابت می‌کنیم که حکم برای $n + ۱$ نیز درست می‌باشد (حکم استقراء)، معادلاً:

$$۲^n > n^۲ \stackrel{?}{\Longrightarrow} ۲^{n+۱} > (n + ۱)^۲$$

از طرفی داریم که:

$$۲^{n+۱} = ۲^n + ۲^n \geq (n^۲) + (۲n + ۱) = (n + ۱)^۲$$

بدین ترتیب حکم مسأله ثابت شد.

حال به عنوان تمرین، با استفاده از یک استقراء و بدون استفاده از لم بالا، سعی کنید مثال قبل را ثابت کنید (راهنمایی: به ازای هر $n \geq ۳$ داریم که $n^۲ > ۲n + ۱$).

صورت استقراء را به روشهای بی‌شماری می‌توان تغییر داد. مثلاً برای اثبات یک مسأله، ابتدا $p(۱)$ و $p(۲)$ را ثابت کنیم و سپس فرض کنیم حکم مسئله برای n درست باشد و برای $n + ۲$ حکم مسئله را ثابت کنیم.

اما یک چیز دیگر که اشاره به آن بد نیست، بسط دوجمله‌ای می‌باشد:

مثال ۵: رابطهٔ زیر را به ازای هر $n \in \mathbf{N}$ و $a, b \in \mathbf{R}$ ثابت کنید.

$$(a + b)^n = \binom{n}{۰} a^n b^۰ + \binom{n}{۱} a^{n-۱} b^۱ + \cdots + \binom{n}{n-۱} a^۱ b^{n-۱} + \binom{n}{n} a^۰ b^n$$

حل: حکم را با استقراء بر روی n ثابت می‌کنیم. به ازای $n = ۱$ داریم:

$$(a + b)^۱ = a + b = \binom{۱}{۰} a^۱ b^۰ + \binom{۱}{۱} a^۰ b^۱$$

MATH75.IR

حال فرض کنید حکم برای $n-1$ درست باشد، می‌خواهیم برای n آن را ثابت کنیم. داریم:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= (a+b)\cdot(a+b)^{n-1}\\ &= (a+b)\times\\ &\quad\left[\binom{n-1}{0}a^{n-1}b^0+\binom{n-1}{1}a^{n-2}b^1+\binom{n-1}{2}a^{n-3}b^2+\cdots+\binom{n-1}{n-2}a^1b^{n-2}+\binom{n-1}{n-1}a^0b^{n-1}\right]\\ &= \left[\binom{n-1}{0}a^nb^0+\binom{n-1}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n-1}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n-1}{n-2}a^2b^{n-2}+\binom{n-1}{n-1}a^1b^{n-1}\right]\\ &+\left[\binom{n-1}{0}a^{n-1}b^1+\binom{n-1}{1}a^{n-2}b^2+\binom{n-1}{2}a^{n-3}b^3+\cdots+\binom{n-1}{n-2}a^1b^{n-1}+\binom{n-1}{n-1}a^0b^n\right]\\ &= \binom{n-1}{0}a^nb^0+\left[\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{0}\right]a^{n-1}b^1+\left[\binom{n-1}{2}+\binom{n-1}{1}\right]a^{n-2}b^2\\ &+\cdots+\left[\binom{n-1}{n-1}+\binom{n-1}{n-2}\right]a^1b^{n-1}+\binom{n-1}{n-1}a^0b^n\end{aligned}$$

حال در قسمتهای داخل کروشه از رابطهٔ پاسکال استفاده می‌کنیم. در ضمن توجه کنید که $\binom{n-1}{0}=\binom{n}{0}=\binom{n-1}{n-1}=\binom{n}{n}=1$، از این رو داریم:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\cdots+\binom{n}{n-1}a^1b^{n-1}+\binom{n}{n}a^0b^n$$

روابط زیر نتایجی از بسط دو جمله‌ای هستند:

$$\begin{aligned}a=b=1 \quad &\Longrightarrow \quad (1+1)^n=2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}\\ a=1,\ b=-1 \quad &\Longrightarrow \quad (1-1)^n=0=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}\\ b=1 \quad &\Longrightarrow \quad (a+1)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}+\binom{n}{2}a^{n-2}+\cdots+\binom{n}{n-1}a+\binom{n}{n}\end{aligned}$$

این روابط، بسیاری وقتها لابلای حل مسایل ظاهر می‌شوند. بنابراین تسلط در استفاده از آنها و همین طور بکارگیری مناسب خود بسط دوجمله‌ای بسیار مهم است.

در پایان بگذارید بار دیگر مسأله پیدا کردن تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_k=m$ را بررسی کنیم.

مثال ۶: تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_k=m$ به طوری که به ازای هر $1\le i\le k$ داشته باشیم $x_i>c_i$، عبارت است از:

$$\binom{m-c_1-c_2-\cdots-c_k-1}{k-1}$$

حل: ما این مسأله را زمانی که همهٔ c_i ها برابر صفر بودند، حل کرده بودیم. پس حالا می‌توانیم یک تغییر متغیر قشنگ بدهیم تا دوباره به همان مسأله برسیم. بنابراین تعریف می‌کنیم:

$$\forall 1\le i\le k: \qquad y_i=x_i-c_i$$

MATH75.IR

آنوقت خواهیم داشت:

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_k = m - c_1 - c_2 - \cdots - c_k \quad , \quad y_i \geq 0$$

قبلاً تعداد جوابهای این معادله را به دست آورده‌ایم و آن برابر است با $\binom{[m-c_1-c_2\cdots-c_k]-1}{k-1}$ درنتیجه:

$$\text{تعدادجوابها} = \binom{m - c_1 - c_2 \cdots - c_k - 1}{k-1}$$

یک حالت خاص مسألهٔ بالا به صورت زیر است:

تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادلهٔ $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = m$ برابر است با:

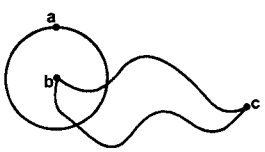
$$\binom{m+k-1}{k-1}$$

این نتیجه از برابر قرار دادن تمام c_i ها با ۱ – نتیجه می‌شود.

این گونه تغییر متغیرها باعث می‌شوند مسألهٔ ما به یکی از مسأله‌هایی که قبلاً می‌شناختیم، تبدیل شود. در حل مسائل، همیشه این روش را به یاد داشته باشید.

MATH75.IR

گراف



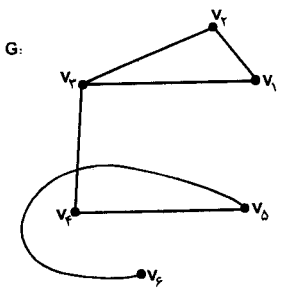
حال بپردازیم به یکی دیگر از موجودات ریاضی به اسم «گراف». معرفی آن خیلی سخت نیست، تعدادی نقطه (رأس) که بعضی‌شان با یک تعدادی خط (یال) به بعضی دیگر وصل‌اند. محل برخورد یالها، بجز در نقاط انتهایی اشان، رأس محسوب نمی‌شود.

جالبی این موجود در این است که خیلی انعطاف پذیر است. یعنی می‌توان مکان رأسها را عوض کرد، یالها را کشید و دراز و کوتاه کرد، و هر شیطنتی که نحوهٔ اتصال را به هم نزند می‌توان انجام داد. به همین خاطر به «نظریهٔ گرافها»، «هندسهٔ بی‌اندازه» هم می‌گویند. چون اندازه‌ها، زاویه‌ها و طولها اصلاً اهمیت ندارند.

تعریف: تعریف دقیق ریاضی از گراف G به‌این صورت است:

$G = (V, E)$ که $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ مجموعهٔ رئوس G است و E مجموعه‌ای است شامل تعدادی $\{v_i, v_j\}$ که معرف یال بین رئوس v_j, v_i است.

مثلاً:



$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_1, v_3\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\}\}$$

تعداد یالهای متصل به رأس v را با $deg(v)$ نشان می‌دهند و با «درجهٔ v» از آن یاد می‌کنند. تعداد یالهای یک گراف را هم با e نشان می‌دهند.

مثال ۱: ثابت کنید در هر گراف G داریم:

$$\sum_{v_i \in V} deg(v_i) = 2e$$

این حکم، قضیه بسیار مشهوری است به نام «قضیهٔ دست دادن». کافی است به معنای آن کمی بیندیشید. وقتی

MATH75.IR

درجهٔ همهٔ رئوس را باهم جمع می‌زنیم، به ازای هر یال، دو واحد می‌شماریم. چون هریال دو سر دارد و در درجهٔ دو رأس به حساب می‌آید. در نتیجه مجموع درجات همهٔ رأسها دوبرابر تعداد یالهاست.

مثال ۲: در هرگراف G، دو رأس با درجهٔ مساوی وجود دارند.

حل: فرض خلف می‌کنیم، اگر چنین نباشد، آن وقت همهٔ درجه‌ها با هم فرق دارند. اگر تعداد رئوس G را n بگیریم، درجهٔ هر رأس عددی است در مجموعهٔ $\{۰, ۱, ۲, \ldots, n-۱\}$. چون n درجهٔ مختلف داریم پس همهٔ درجه‌ها باید ظاهر شده باشند. اما این امکان ندارد چون رأسی که درجهٔ $n-۱$ دارد به همهٔ رئوس دیگر وصل است ولی رأسی که درجهٔ ۰ دارد به هیچ رأسی وصل نیست. یعنی این گراف نمی‌توانند دو رأس یکی با درجهٔ $n-۱$ و دیگری با درجهٔ ۰ داشته باشد، که تناقض است. پس حتماً دو رأس با درجهٔ برابر وجود دارد.

توجه کنید که گاهی صورت مسأله مستقیماً به گراف مربوط نمی‌شود. ولی کمی تسلط و دقت کافی است که بتوانید سریعاً گراف متناظر را بسازید و بکار برید.

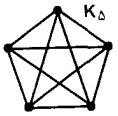
مثال ۳: ثابت کنید دو نفر در دنیا هستند که تعداد دوستهایشان با هم برابر هستند.

حل: با کمی هوشیاری می‌توانید نتیجه بگیرید که این مسأله، همان مثال قبل است. به جای هر فرد یک رأس می‌گذاریم و دو نفر که با هم دوست باشند، رأسهای متناظرشان را به هم وصل می‌کنیم. در نتیجه تعداد دوستهای هر کسی مساوی درجه رأس متناظرش می‌شود و مسأله به سرعت حل می‌شود.

گرافها انواع مختلفی دارند که آشنایی با آنها بد نیست:

(i) گراف کامل n رأسی (k_n)، گرافی است که n رأس دارد و همهٔ رأسهایش به هم وصل‌اند.

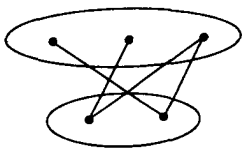
مثل $k_۵$:



شما خود می‌توانید ثابت کنید که $e(k_n) = \binom{n}{۲}$.

(ii) گراف دوبخشی، گرافی است که رأسهای آن را می‌توان به دو بخش تقسیم کرد به طوری که رئوس هر بخش به یکدیگر وصل نیستند.

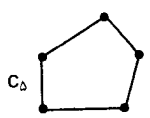
مثلاً گراف روبرو، یک گراف دو بخشی است.



اگر در یک گراف دوبخشی، همهٔ رأسهای هربخش به همهٔ رأسهای بخش دیگر وصل باشند، آن را گراف دو بخشی کامل می‌نامند و با $k_{m,n}$ نشان می‌دهند که در آن m و n به ترتیب تعداد رأسها در هر بخش است.

شما خودتان ثابت کنید که $e(k_{m,n}) = mn$.

(iii) دور n رأسی (C_n)، گرافی است به شکل حلقه.



پر واضح است که $e(C_n) = n$.

MATH75.IR

در گراف G دور C را در نظر بگیرید. اگر دور C، دارای تعداد زوج یال باشد به آن دور زوج و اگر دارای تعداد فرد یال باشد به آن دور فرد گوییم.

ن ۴: ثابت کنید شرط لازم و کافی برای اینکه گرافی دوبخشی باشد این است که دور فرد نداشته باشد.
رهمین‌جا این توضیح را دربارهٔ عبارت «شرط لازم و کافی» می گوییم:
«شرط لازم برای اینکه گراف G دوبخشی باشد، این است که دور فرد نداشته باشد» یعنی:

$$G \text{ دور فرد ندارد} \quad \Longrightarrow \quad G \text{ دو بخشی است}$$

«شرط کافی برای اینکه گراف G دوبخشی باشد. این است که دور فرد نداشته باشد» یعنی:

$$G \text{ دو بخشی است} \quad \Longrightarrow \quad G \text{ دور فرد ندارد} \quad]$$

اثبات: ابتدا لازم بودن شرط را ثابت می کنیم. اگر G گرافی دوبخشی با بخشهای X و Y باشد، همهٔ رأسهای بخش X را با رنگ آبی و همهٔ رئوس بخش Y را با رنگ قرمز، رنگ می‌کنیم. اگر G یک دور داشته باشد، رئوس آن یکی در میان آبی و قرمز می‌شوند (چون در رنگ‌آمیزی‌ای که کردیم، دو رأس متصل به هم رنگهای مختلف داشتند) و این تنها در حالتی امکان‌پذیر است که تعداد رئوس آبی و قرمز در آن دور مساوی باشد. یعنی آن دور باید دور زوج باشد.

برای اثبات کافی بودن شرط فرض می‌کنیم گراف G هیچ دور فردی ندارد، می‌خواهیم ثابت کنیم این گراف دوبخشی است. یکی از رئوس را به دلخواه انتخاب می‌کنیم (مثلاً x). رئوسی که به x وصل‌اند را دارای فاصلهٔ ۱ تا n (تعداد رئوس G) می‌نامیم. به طور کلی، اگر برای رسیدن از رأس y به رأس x، کوتاهترین مسیر ممکن شامل d یال باشد، گوییم فاصلهٔ y و x برابر d است. حال x و همهٔ رئوسی که فاصله‌شان تا x زوج است را در بخش X قرار می‌دهیم و بقیه رئوس، که فاصله‌شان تا x فرد است، را در بخش Y قرار می‌دهیم.

کافی است نشان دهیم هر دو رأسی که در یک بخش هستند به هم وصل نیستند. فرض خلف می‌کنیم. اگر u و v در بخش x به هم وصل باشند، در آن صورت از x به u مسیری زوج یالی وجود دارد که اگر آن را با مسیر زوج یالی از x به v و یال $\{u,v\}$ در نظر بگیریم، یک دور فرد به وجود خواهد آمد که خلاف فرض است. پس هیچ دو رأسی در x به هم وصل نیستند. عین همین استدلال برای هر دو رأس در Y هم درست است. در نتیجه G، گرافی دو بخشی است همانطور که مسئله می‌خواست.

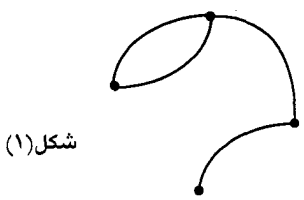
کمی دقت کنید! موضوع به همین سادگی‌ها هم نیست. مسیر از x به u و مسیر از x به v ممکن است همدیگر را قطع کرده باشند. در نتیجه آنچه به دست می‌آید ممکن یک دور نباشد بلکه حلقه‌ای باشد که شاید چندین‌بار خودش را قطع کرده باشد. پس شما می‌بایست قبلاً چنین لمی را ثابت کرده باشید:

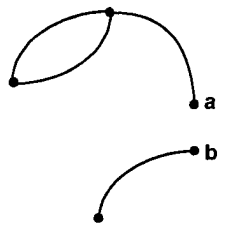
MATH75.IR

لم: هرگاه حلقه‌ای بسته (ممکن است حلقه، خودش را قطع بکند و ممکن است قطع نکند)، طول فرد داشته باشد، آن وقت شامل حداقل یک دور فرد می‌شود.

اثبات این لم کار سختی نیست. خودتان به آسانی از پس آن برمی‌آیید.

گراف G را همبند گویند اگر بین هر دو رأس آن، اقلاً یک مسیر موجود باشد. برای مثال گراف شکل (۱) همبند است ولی گراف شکل (۲) همبند نیست زیرا نمی‌توان از رأس a شروع کرد و روی یالها طوری حرکت کرد که در نهایت بتوان به رأس b رسید.


شکل(۱)



شکل(۲)

هر گراف همبند که دارای دور نباشد را یک درخت گویند.

قضیه ۱: در هر درخت، بین هر دو رأس آن یک مسیر یکتا وجود دارد.

اثبات: دو رأس دلخواه v,u از درخت G را در نظر بگیرید. بر طبق تعریف درخت، از آنجا که G یک گراف همبند است بین دو رأس u,v اقلاً یک مسیر وجود دارد. حال کافیست ثابت کنیم که این مسیر یکتاست. برای اثبات این مطلب فرض کنید دو مسیر مجزای $p_۱,p_۲$، یک مسیر بسته (که شامل v,u نیز می‌شود) به‌وجود می‌آورد که بر طبق آنچه که قبلاً گفته شده، هر مسیر بسته و در نتیجه مسیر بسته مورد نظر، شامل لااقل یک دور می‌شود که تناقض است.

قضیه ۲: هر درخت G با n رأس، دارای دقیقاً $n-۱$ یال است.

اثبات: درستی حکم مسأله را با استقرای قوی روی تعداد رئوس یعنی n ثابت می‌کنیم. برای $n=۱$ حکم واضح است. فرض کنید حکم مسأله برای تمامی درختهای با کمتر از n رأس درست باشد. درخت n رأسی G را در نظر بگیرید. از آنجا که G یک گراف همبند است شامل لااقل یک یال مثل uv می‌شود (v,u دو رأس انتهایی یال مفروض‌اند). حال اگر یال uv را از گراف G حذف کنیم دو گراف همبند $G_۲,G_۱$ به‌وجود می‌آیند (چون بین v,u در G، تنها یک مسیر یکتا وجود داشت با حذف یال uv دیگر بین v,u در G مسیری وجود ندارد).

گراف G بر طبق فرض دارای دور نیست در نتیجه $G_۲,G_۱$ هم دارای دور نیستند و از آنجا که همبند هم هستند نتیجه می‌شود که $G_۲,G_۱$ هر دو درختند. فرض کنید $G_۲,G_۱$ به‌ترتیب دارای $n_۲,n_۱$ رأس باشند. بنابراین بر طبق فرض استقراء، $G_۲,G_۱$ به‌ترتیب دارای $n_۱-۱$ و $n_۲-۱$ یال هستند.

تعداد یالهای گراف G برابر است با تعداد یالهای گراف $G_۱$ بعلاوه تعداد یالهای گراف $G_۲$ بعلاوهٔ ۱ (به علت یال uv)، یعنی

$$(n_۱-۱)+(n_۲-۱)+۱=(n_۱+n_۲)-۱=n-۱$$

MATH75.IR

بدین ترتیب حکم استقراء ثابت شد.

به عنوان یک نتیجه از قضیه بالا می‌توان قضیهٔ زیر را بیان کرد:

قضیه ۳: گراف همبند G با n رأس، یک درخت است اگر و فقط اگر دارای دقیقاً $n-1$ یال باشد.

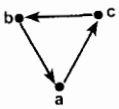
همچنین به راحتی خودتان می‌توانید قضیهٔ به‌ظاهر بدیهی و در عین حال کارای زیر را ثابت کنید.

قضیه ۴: اگر گراف G با n رأس، همبند باشد سپس باید شامل لااقل $n-1$ یال باشد.

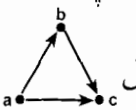
برای بیان مثال بعد، دو مفهوم جدید باید تعریف شوند. اولی موجودی است به نام «تورنمنت»، و دومی موجودی است به نام «پادشاه». شاید کلمهٔ تورنمنت را در مسابقات و لیگ‌ها شنیده باشید. بگذارید به زبان همانها بگوییم. فرض کنید n نفر با هم مسابقه می‌دهند به طوری که هر کس با همهٔ دیگران یکبار بازی می‌کند و نتیجهٔ هر بازی یا برد است و یا باخت. به این، یک تورنمنت گویند. به زبان ریاضی، یعنی یک گراف کامل n رأسی که روی هر یالی یک جهت گذاشته شده است. مثلاً $a \to b$ ، یعنی b از a برده است. به نفر x در یک تورنمنت، «پادشاه» گویند هرگاه هر کس دیگری مثل y را در نظر بگیریم، یا x از y برده باشد و یا نفر سومی مثل z وجود داشته باشد به طوری که x از z برده باشد و z از y.

مثال ۵: ثابت کنید هر تورنمنت، یک پادشاه دارد.

حل: همیشه برای این که مطمئن شوید صورت مسأله را فهمیده‌اید، ابتدا مسأله را در حالتهای کوچکتر بررسی کنید. اگر تورنمنت، دو رأسی باشد مثل $a \to b$، آنوقت قطعاً b پادشاه است. اگر سه رأسی باشد مثل



آنوقت هر سه رأس پادشاهند. اگر تورنمنت سه رأسی‌مان مثل



باشد آن وقت c پادشاه است و...

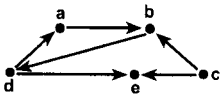
حال سعی می‌کنیم مسأله را ثابت کنیم. یک رأس دلخواه x را انتخاب می‌کنیم (در تورنمنت n رأسی داده شده). اگر x پادشاه بود که مسأله ثابت می‌شود. اگر x پادشاه نبود، یعنی رأسی مانند y هست که هم از x برده و هم از همهٔ کسانی که به x باخته‌اند. اما این یعنی اگر x از k نفر برده باشد، y هم از آنها برده و هم از x، بنابراین y از حداقل $k+1$ نفر برده است. حال y را در نظر می‌گیریم. اگر y پادشاه بود که شانس آورده‌ایم و گرنه ، باز رأسی مثل z هست که از حداقل $k+2$ نفر برده است. این روند می‌تواند به همین ترتیب ادامه یابد. از طرفی یک نفر از بیش‌تر از $n-1$ نفر نمی‌تواند ببرد پس به ناچار این رویه در جایی متوقف می‌شود و در همانجا، پادشاهمان مشخص می‌شود. این اثبات علاوه بر نشان دادن وجود یک پادشاه، الگوریتمی برای یافتن آن هم ارائه می‌دهد.

چند تعریف دیگر در نظریهٔ گرافها

یک مسیر بین رئوس u و v در گراف G، دنباله‌ای از رئوس است به شکل $u = x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k = v$ به طوری که هر x_i به x_{i+1} وصل است و همیشه برای $i \neq j$ داریم که $x_i \neq x_j$. در گرافهای جهت‌دار، یک مسیر از u به v باید

MATH75.IR

یک ویژگی دیگر هم داشته باشد آن اینکه جهت یال باید از x_i به سمت x_{i+1} باشد. طول مسیر مورد نظر را k می‌نامند.



یک مجموعهٔ مستقل از رئوس در گراف G، زیرمجموعه‌ای از رئوس است به طوری که هیچ دوتایی از آنها به هم وصل نیستند. مثلاً در گراف روبرو $\{c, d\}$ یک مجموعهٔ مستقل است.

حال بگذارید به یک مثال دیگر اشاره کنیم که تعمیمی از مثال قبل است. ولی پیش از آن مفهوم همین کلمهٔ «تعمیم» را توضیح می‌دهیم. زمانی می‌گوییم مسأله p تعمیم q است که با در نظر گرفتن حالت خاصی از p، همان حکم مسأله q به دست آید.

مثال ٦: ثابت کنید در هرگراف جهت‌دار G، مجموعه مستقل S از رئوس وجود دارد که با آغاز از هر رأس دلخواه G بشود با یک مسیر به طول کمتر یا مساوی دو به یکی از رئوس S رسید.

پیش از هر چیز توجه کنید که اگر G را یک گراف کامل بگیریم، این مسئله به مثال ۹ تبدیل می‌شود. چون یک مجموعه مستقل در گراف کامل، همیشه تک رأسی است.

حل: برای اثبات از استقرای قوی استفاده می‌کنیم. یعنی فرض می‌کنیم حکم مسأله برای گرافهای با کمتر از n رأس درست باشد و حالا می‌خواهیم ثابت کنیم حکم مسأله برای گراف G با n رأس نیز درست است. یک رأس دلخواه x را در نظر بگیرید. مجموعهٔ رئوسی که از آنها به x یالی جهت‌دار وجود دارد را N بنامید (یعنی اگر $y \in N$، سپس یال (y, x) وجود داشته باشد). حال x و مجموعهٔ N را از گراف حذف کنید تا گراف H به دست آید.

طبق فرض استقرای قوی، حکم برای H برقرار است، یعنی مجموعهٔ T با ویژگی خواسته شده در آن وجود دارد. حال دو وضعیت زیر ممکن است پیش آید:

وضعیت (i): اگر در G یالی از x به یکی از رئوس T وجود داشته باشد می‌گیریم $S = T$.

وضعیت (ii): اگر در G یالی از x به یکی از رئوس T وجود نداشته باشد می‌گیریم $S = T \cup \{x\}$.

ادعا می‌کنیم این S تعریف شده، در شرایط مسأله صدق می‌کند. هر رأسی مثل a که در G در نظر بگیریم، از ۳ حالت زیر خارج نیست:

۱) a همان x است. که در وضعیت اول مستقیماً به رئوس T وصل است و در وضعیت دوم خودش در S است.

۲) a یکی از رئوس N است. که در وضعیت اول ابتدا به x می‌رود و سپس به یکی از رئوس T (مسیر به طول ۲) و در وضعیت دوم مستقیماً به x که عضوی از S است می رود. (مسیر به طول ۱)

۳) a یکی از رئوس H است. که طبق فرض استقراء می‌شود از آن به یکی از رئوس T رفت.

بنابراین در هر صورت S تعریف شده ویژگی مورد نظر را دارد.

MATH75.IR

دقت شود که در بالا، پایهٔ استقراء را $n = ۱$ گرفته‌ایم که حکم برای آن بدیهی است.

در پایان بحث گراف به یک قضیه اشاره می‌کنیم که در یک دورهٔ المپیاد، در یکی از مسائل تستی از آن استفاده می‌شد.

حالت خاص قضیهٔ توران

گراف G با n رأس را در نظر بگیرید. اگر G دارای دور فرد نباشد سپس حداکثر $\lfloor \frac{n^۲}{۴} \rfloor$ یال دارد یعنی $e(G) \leq \lfloor \frac{n^۲}{۴} \rfloor$.

اثبات: گراف G دور فرد ندارد در نتیجه بر طبق مثال ۴، این گراف دو بخشی است. فرض کنید G دارای دو بخش X و Y با تعداد رئوس m و $n-m$ باشد. واضح است که ماکزیمم تعداد یالها را وقتی G دارد که هر رأسی از X به هر رأسی از Y وصل باشد یعنی $e(G) \leq m(n-m)$.

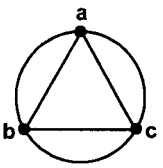
از طرفی با استفاده از نامساوی حسابی هندسی که بعداً گفته خواهد شد داریم که:

$$m(n-m) \leq \left\lfloor \frac{n^۲}{۴} \right\rfloor \qquad m = ۱, ۲, \ldots, n-۱$$

بدین ترتیب حکم ثابت می‌شود. $(۴(m)(n-m) \leq ((m)+(n-m))^۲ = n^۲)$

مثال ۷: ۲۱ نقطه روی محیط دایرهٔ واحد قرار گرفته‌اند. دو نقطه را به هم وصل می‌کنیم اگر کوچکترین کمان بین آن دو نقطه از ۱۲۰° بیشتر باشد، در این صورت حداکثر چند خط ما رسم می‌کنیم. (توضیح: دو نقطه که روی محیط یک دایره قرار دارند، دو کمان روی دایره ایجاد می‌نمایند. اگر کمان کوچکتر از ۱۲۰° بیشتر بود سپس آن دو نقطه را به هم وصل می‌کنیم.)

حل: به این مسأله از دید نظریهٔ گراف نگاه می‌کنیم. این ۲۱ نقطه را رئوس یک گراف و خطوط رسم شده را، یالهای آن گراف تعریف می‌کنیم. ادعا می‌کنیم که این گراف دور ندارد. فرض کنید این گراف یک دور ۳ یالی، با رئوس abc را دارا باشد.



بر طبق تعریف یالها، باید داشته باشیم که:

$$\overset{\frown}{ab} > ۱۲۰^\circ, \overset{\frown}{bc} > ۱۲۰^\circ, \overset{\frown}{ca} > ۱۲۰^\circ$$

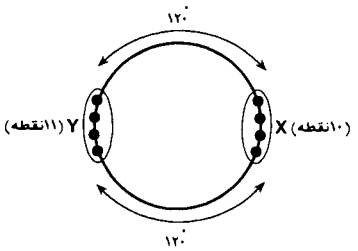
با جمع این ۳ نامساوی به تناقض می‌رسیم:

$$۳۶۰^\circ = \overset{\frown}{ab} + \overset{\frown}{bc} + \overset{\frown}{ca} > ۳۶۰^\circ$$

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که این گراف دوری با طول بیشتر از ۳ هم ندارد.

گراف مفروض دور ندارد، در نتیجه دور فرد هم ندارد (چرا که دور فرد هم خود یک دور است)، از این رو از قضیه توران نتیجه می‌گیریم که این گراف حداکثر $\lfloor \frac{۲۱^۲}{۴} \rfloor = ۱۱۰$ یال دارد.

MATH75.IR



گراف روبرو، گرافی است که دقیقاً ۱۱۰ یال دارد. چرا که هر رأسی از بخش x به هر رأسی از بخش y وصل است و $e(G) = ۱۰ \times ۱۱ = ۱۱۰$.

MATH75.IR

چند اصل متفرقه

ابتدا اصلی به نام «اصل لانه کبوتری» را بررسی می‌کنیم. این اصل در ساده‌ترین شکل خود چنین بیان می‌شود:

اصل لانه کبوتری: اگر $n+1$ کبوتر در n لانه قرار گرفته باشند، حداقل دو کبوتر در یک لانه هستند.

این اصل اینقدر واضح است که نیاز به هیچ اثباتی ندارد.

مثال ۱: فرض کنید $a_1, a_2, \ldots, a_n$ اعداد طبیعی و دلخواه باشند. ثابت کنید حتماً می‌توان تعدادی از آنها را انتخاب کرد به طوری که مجموعشان بر n بخشپذیر باشد.

این مثال یکی از معروفترین مثالها در کاربرد زیبای اصل لانهٔ کبوتری است. گرچه ایدهٔ آن راحت به ذهن نمی‌رسد، ولی به خوبی نشان می‌دهد که حوزهٔ کارکرد این اصل چقدر گسترده است. به این ایده توجه کافی داشته باشید. (این ایده در خیلی مسأله‌های ترکیباتی به کار می‌رود).

حل: تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ S_{n-1} &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \\ S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \end{aligned}$$

به این n عدد جدیدی که ساخته‌ایم توجه کنید. اگر یکی از آنها بر n بخشپذیر باشد که حکم مسأله ثابت شده است. بنابراین فرض می‌کنیم هیچ کدام از آنها بر n بخشپذیر نیستند. در نتیجه باقیماندهٔ تقسیم هر S_i بر n برابر است با یکی از اعداد $1, 2, \ldots, n-1$. اما چون تعداد S_i ها، n تاست طبق اصل لانهٔ کبوتری باقیمانده دو تا از آنها بر n برابر می‌شود (هر S_i یک کبوتر است و هر باقیماندهٔ تقسیم بر n یک لانه!) یعنی مثلاً $S_i \overset{n}{\equiv} S_j \ , \ i<j$ ، درنتیجه

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_i \overset{n}{\equiv} a_1 + a_2 + \cdots + a_j \quad \Longrightarrow \quad a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_j \overset{n}{\equiv} 0$$

که همان چیزی است که می‌خواستیم، چون جمع یک تعدادی a_i بر n بخشپذیر شد.

MATH75.IR

توجه کنید که با نظر به اثبات فوق حکم قویتری ثابت شد. اینکه با شرایط مسأله، می‌توان تعدادی از a_i های متوالی را انتخاب کرد که حاصل جمعشان بر n بخشپذیر باشد.

مثال ۲: تعداد سی و سه عدد طبیعی داده شده است که عوامل اول آنها فقط از اعداد ۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۱۱ تشکیل شده است. ثابت کنید حاصلضرب حداقل دوتای آنها مربع کامل است. [مرحله اول دوازدهمین المپیاد ریاضی کشور]

حل: می‌دانیم هنگامی عددی به شکل $۲^a \times ۳^b \times ۵^c \times ۷^d \times ۱۱^e$ مربع کامل است که همگی e, d, c, b, a زوج باشند. در نتیجه زمانی حاصلضرب $۲^{a_۱} \times ۳^{b_۱} \times ۵^{c_۱} \times ۷^{d_۱} \times ۱۱^{e_۱}$ و $۲^{a_۲} \times ۳^{b_۲} \times ۵^{c_۲} \times ۷^{d_۲} \times ۱۱^{e_۲}$ مربع کامل می‌شود که $a_۱$ و $a_۲$ یا هر دو زوج باشند یا هر دو فرد، $b_۱$ و $b_۲$ یا هر دو زوج باشند یا هر دو فرد و همین طور برای سایر توانها. یعنی باید توانهای متناظر به هنگ ۲، همنهشت باشند. هر عدد $۲^a \times ۳^b \times ۵^c \times ۷^d \times ۱۱^e$ را با پنج تایی مرتب (a, b, c, d, e) نمایش می‌دهیم. بنابراین باید ثابت کنیم در میان این سی و سه عدد، دو عدد هستند که پنج تایی‌هایشان زوجیت یکسان دارند. از نظر زوج و فردی، a دو حالت دارد، b هم دو حالت دارد و همینطور برای e, d, c. بنابر اصل ضرب، در کل $۳۲ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲$ حالت متمایز برای پنج‌تایی‌های مرتب وجود دارد. حال طبق اصل لانهٔ کبوتری از آنجا که تعداد عددها و یا معادلاً پنج‌تایی‌ها، یکی بیشتر از تعداد حالتها است، دو عدد هستند که توانهایشان در همهٔ عوامل، زوجیت یکسان دارند. حاصلضرب این دو عدد، مربع کامل می‌شود.

می‌توان صورتهای قویتری هم برای اصل لانه کبوتری طرح کرد. مثلاً:

(i) اگر $kn + ۱$ کبوتر در n لانه باشند، در یکی از لانه‌ها حداقل $k + ۱$ کبوتر قرار دارد.

(ii) n لانه به شماره‌های $۱, ۲, \ldots, n$ در نظر بگیرید. فرض کنید $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ اعداد طبیعی دلخواهی باشند. اگر $a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n + ۱$ کبوتر در این لانه‌ها قرار گرفته باشند، سپس i ای هست که در لانه i ام بیش از a_i کبوتر قرار گرفته باشد.

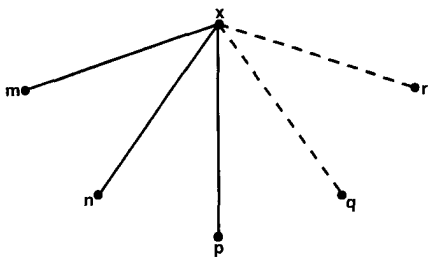
صورت (ii) تقریباً کلی‌ترین صورت است. مثلاً اگر $a_۱ = a_۲ = \cdots = a_n = k$، همان صورت (i) نتیجه می‌شود.

بیایید صورت (ii) را ثابت کنیم.برای اثبات فرض خلف می‌کنیم. اگر برای هر i، لانهٔ i ام کمتر یا مساوی a_i کبوتر داشته باشد، در مجموع کمتر یا مساوی $a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n$ کبوتر خواهیم داشت که خلاف فرض است.

مثال ۳: ثابت کنید در میان هر شش نفر، یا سه نفر هستند که دوبه‌دو یکدیگر را می‌شناسند، و یا سه نفر هستند که دوبه‌دو نا آشنا هستند. (پاتنام ۱۹۷۴)

حل: گراف مسأله را تشکیل می‌دهیم. به ازای هر نفر، یک رأس می‌گذاریم. هر وقت دو نفر همدیگر را می‌شناختند، رئوس متناظر آنها را با یال آبی به هم وصل می‌کنیم. هر وقت دو نفر همدیگر را نمی‌شناختند، رئوس متناظر آنها را با یال قرمز به هم وصل می‌کنیم. هدف مسأله این است که نشان دهیم در این گراف شش رأسی، حتماً یک مثلث تکرنگ وجود دارد.

MATH75.IR



یکی از رئوس مثل x را در نظر بگیرید. این رأس به پنج یال متصل است که هر یک آبی یا قرمز هستند. بنابر اصل لانهٔ کبوتری، حداقل سه تا از این یالها همرنگ هستند. مثلاً یالهای $\{x,p\},\{x,n\},\{x,m\}$ قرمز هستند. حال یال $\{m,n\}$ را در نظر بگیرید. اگر $\{m,n\}$ قرمز باشد، یک مثلث قرمز xmn تشکیل شده است و کار تمام است. بنابراین فرض می‌کنیم $\{m,n\}$ آبی باشد. عین همین حرف را می‌توان دربارهٔ یالهای $\{n,p\},\{m,p\}$ هم تکرار کرد و نتیجه گرفت که این دو هم باید آبی باشند. اما حال اگر به گراف بنگریم یک مثلث آبی mnp به وجود آمده است. بدین ترتیب حکم مسئله ثابت شد.

مثال ۴: ثابت کنید اگر یالهای $k_{۱۷}$ را با سه رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم، حتماً یک مثلث تکرنگ به وجود خواهد آمد.

حل: باز هم مانند مثال قبل، یک رأس مانند x را در نظر می‌گیریم. درجهٔ این رأس برابر ۱۶ است. طبق اصل لانهٔ کبوتری حداقل ۶ یال همرنگ به x متصل است. مثلاً فرض می کنیم x با شش یال آبی به رئوس f,e,d,c,b,a متصل باشد. واضح است که هیچ‌یک از یالهای بین دو رأس از $\{a,b,c,d,e,f\}$ آبی نیست. چون در غیر این صورت، آن دو رأس و x تشکیل یک مثلث آبی می‌دهند. بنابراین یالهای بین رئوس $\{a,b,c,d,e,f\}$ همگی به یکی از دو رنگ باقی مانده درآمده‌اند که طبق مثال قبل، نتیجه می‌شود که این $k_۶$ حتماً شامل یک مثلث تکرنگ می‌شود.

اگر یک دنباله از اعداد حقیقی مثل $a_۱,a_۲,\ldots,a_n$ داشته باشیم و نیز بدانیم $۱\le i_۱<i_۲<\cdots<i_k\le n$، آنگاه $a_{i_۱},a_{i_۲},\ldots,a_{i_k}$ را یک زیردنباله می‌نامیم. اگر $a_{i_۱}\le a_{i_۲}\le\cdots\le a_{i_k}$ باشد، آنگاه آن را یک زیردنبالهٔ صعودی می‌نامیم. و اگر $a_{i_۱}\ge a_{i_۲}\ge\cdots\ge a_{i_k}$، آن را یک زیردنبالهٔ نزولی می‌نامیم. طول یک زیردنباله هم به معنای تعداد جملات آن است.

مثال ۵: دنبالهٔ $a_۱,a_۲,\ldots,a_{mn+۱}$ از اعداد حقیقی متمایز داده شده است. ثابت کنید این دنباله، یا یک زیردنبالهٔ صعودی با طول $m+۱$ دارد و یا یک زیردنبالهٔ نزولی با طول $n+۱$. (قضیهٔ دیل ورث)

حل: این قضیهٔ بسیار مشهور، اثبات بسیار زیبایی با استفاده از تناظر و اصل لانهٔ کبوتری دارد. به این ترتیب که به هر عضو a_i، یک زوج مرتب (r_i,s_i) نسبت می‌دهیم. بدین معنا که r_i، طول بزرگترین زیردنبالهٔ صعودی با آغاز از a_i است و s_i، طول بزرگترین زیردنبالهٔ نزولی با آغاز از a_i است. ادعا می‌کنیم امکان ندارد زوج مرتب متناظر a_i، با زوج مرتب متناظر a_j یکسان باشد.

فرض کنید $i<j$، دو حالت داریم یا $a_i>a_j$ و یا $a_i<a_j$. اگر $a_i<a_j$، در این صورت $r_i\ge r_j+۱$، چرا که می‌توان a_i را به ابتدای بزرگترین زیردنبالهٔ صعودی با آغاز از a_j افزود تا یک زیردنبالهٔ صعودی با طول $r_j+۱$ با آغاز از a_i به دست آورد. بنابراین $r_i\ge r_j+۱$ و در نتیجه (r_i,s_i) و (r_j,s_j) یکسان نیستند. برعکس اگر $a_j<a_i$،

MATH75.IR

در این صورت $s_i > s_j + ۱$. و در نتیجه در این حالت هم (r_i, s_i) با (r_j, s_j) یکسان نیست.

حال فرض خلف می‌کنیم. اگر هر زیردنبالهٔ صعودی‌ای حداکثر طولش m باشد، سپس هر r_i می‌تواند مقادیر $m, \ldots, ۲, ۱$ را داشته باشد. اگر هر زیردنبالهٔ نزولی‌ای حداکثر طولش n باشد، سپس هر s_i می‌تواند مقادیر $n, \ldots, ۲, ۱$ را داشته باشد. بنابراین، طبق اصل ضرب، حداکثر mn زوج مرتب (r_i, s_i) به وجود می آید، در حالی که $mn + ۱$ جمله و متناظر با آنها $mn + ۱$ زوج مرتب (r_i, s_i) داریم. درنتیجه، بنابر اصل لانه کبوتری ، دو تا از این زوج مرتب‌ها با هم برابر می‌شوند که طبق آنچه که در ابتدا گفته شد، ممکن نیست.

اصل دیگری که گاهی در حل مسائل مفید واقع می‌شود، «اصل شمول – عدم شمول» و یا «اصل شمول – طرد» است. ابتدا چند تعریف انجام می‌دهیم:

$$\bigcup_{i=۱} A_i = A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_n$$

$$\sum_{۱ \le i \le n} a_i = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n$$

$|A| = A$ تعداد عناصر مجموعهٔ

اصل شمول – طرد:

$$|\cup_{i=۱}^{n} A_i| = \sum_{۱ \le i \le n} |A_i| - \sum_{۱ \le i_۱ < i_۲ \le n} |A_{i_۱} \cap A_{i_۲}| +$$
$$\sum_{۱ \le i_۱ < i_۲ < i_۳ \le n} |A_{i_۱} \cap A_{i_۲} \cap A_{i_۳}| - \cdots + (-۱)^{n-۱} |A_۱ \cap A_۲ \cap \cdots \cap A_n|$$

که در آن A_i ها، مجموعه‌های دلخواهی هستند.

برای اینکه بفهمیم این رابطه چه می‌گوید، حالات خاص $n = ۲, ۳$ را بررسی می‌کنیم:

$$n = ۲ : \quad |A_۱ \cup A_۲| = |A_۱| + |A_۲| - |A_۱ \cap A_۲|$$
$$n = ۳ : \quad |A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳| = |A_۱| + |A_۲| + |A_۳| - |A_۱ \cap A_۲| - |A_۱ \cap A_۳|$$
$$-|A_۲ \cap A_۳| + |A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳|$$

ببینید می‌توانید این دو رابطه را ثابت کنید. زیاد مشکل نیست. مثلاً برای $n = ۳$، x ای در نظر بگیرید که در $A_۱$ و $A_۲$ باشد ولی در $A_۳$ نباشد:

$$x \in A_۱, x \in A_۲, x \notin A_۳$$

x در سمت چپ رابطه یکبار شمرده می‌شود و در سمت راست رابطه، ابتدا دوبار شمرده می‌شود و سپس یکبار کم می‌شود. درنتیجه سمت چپ و راست به تعداد مساوی، x را می‌شمردند.

عین همین استدلال را می‌توان برای عناصر دیگر نیز به کار برد.

اثبات حالت کلی: اگر عنصر x ، در k تا از مجموعه‌های A_i آمده باشد، در سیگمای اول $\binom{k}{۱} = k$ بار شمرده می‌شود، در سیگمای دوم $\binom{k}{۲}$ بار کم می‌شود، در سیگمای سوم $\binom{k}{۳}$ بار اضافه می‌شود و ...، تا اینکه در سیگمای k ام،

MATH75.IR

$\binom{k}{k} = ۱$ بار – معلوم نیست اضافه یا کم – می‌شود. یعنی مجموعاً در سمت راست رابطه، به تعداد زیر شمرده می‌شود:

$$\binom{k}{۱} - \binom{k}{۲} + \binom{k}{۳} + \cdots + (-۱)^{k+۱}\binom{k}{k} = ۱ - \left[\binom{k}{۰} - \binom{k}{۱} + \binom{k}{۲} + \binom{k}{۳} - \cdots + (-۱)^k\binom{k}{k}\right] = ۱ - \left[(۱-۱)^k\right] = ۱$$

یعنی عضو x تنها یکبار در سمت راست رابطه شمرده می‌شود، همان قدر که در سمت چپ رابطه شمرده می‌شود.

مثال ٦: جایگشت $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ از اعداد $۱, ۲, \ldots, n$ یک پریش خوانده می‌شود هرگاه به ازای هر $۱ \le i \le n$ داشته باشیم $a_i \neq i$. تعداد پریش‌های اعداد $۱, ۲, \ldots, n$ چقدر است؟

حل: مجموعه‌های $A_۰, A_۱, A_۲, \ldots, A_n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

به ازای هر $۱ \le i \le n$، A_i را مجموعهٔ تمام جایگشتهایی می‌گیریم که در آنها $a_i = i$ باشد. $A_۰$ را هم مجموعه همهٔ جایگشتهایی می‌گیریم که در آنها، به ازای هر $۱ \le i \le n$ داشته باشیم $a_i \neq i$.

پرواضح است که $A_۰$، مجموعهٔ همهٔ پریشها است و هدف ما پیدا کردن $|A_۰|$ است.

بر طبق اصل شمول – عدم شمول داریم:

$$|A_۰ \cup A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_n| = |A_۰| + \cdots + |A_n| - |A_۰ \cap A_۱| \cdots - |A_{n-۱} \cap A_n| + |A_۰ \cap A_۱ \cap A_۲| + \cdots + |A_{n-۲} \cap A_{n-۱} \cap A_n| + \cdots \quad (*)$$

طرف چپ رابطهٔ (*)، برابر تعداد کل جایگشتها و یا معادلاً $n!$ است.

$|A_۱|, \ldots, |A_n|$، هر کدام برابر تعداد جایگشتها با یک عضو ثابت است:

$$|A_۱| = |A_۲| = \cdots = |A_n| = (n-۱)!$$

به ازای هر $۱ \le i \le n$ داریم که $|A_۰ \cap A_i| = ۰$، زیرا در تمام جایگشتهای عضو $A_۰$ داریم $a_i \neq i$ و در تمام جایگشتهای عضو A_i داریم $a_i = i$.

از طرفی داریم:

$$|A_i \cap A_j| = (n-۲)! \qquad ۱ \le i < j \le n$$

درنتیجه:

$$\sum_{۰ \le i \le j \le n} |A_i \cap A_j| = \sum_{۱ \le i \le j \le n} |A_i \cap A_j| = \binom{n}{۲}(n-۲)!$$

و همچنین:

$$\sum_{۰ \le i \le j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| = \sum_{۱ \le i \le j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{n}{۳}(n-۳)!$$

MATH75.IR

به همین ترتیب می‌توان بقیهٔ سیگماهای رابطهٔ (*) را محاسبه نمود.

این اعداد را در (*) جایگزین می‌کنیم:

$$n! = \left[\left(\text{تعداد پریشها}\right) + \binom{n}{1}n!\right] - \left[\binom{n}{2}(n-2)!\right] + \left[\binom{n}{3}(n-3)!\right] - \cdots$$

از این رو داریم:

$$\begin{aligned}\text{تعداد پریشها} = D_n &= n! - \binom{n}{1}n! + \binom{n}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}(n-n)! \\ &= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right)\end{aligned}$$

مثال ۷: تعداد جوابهای صحیح مثبت معادلهٔ $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = m$ را بیابید به طوری که همهٔ x_i های آن کوچکتر یا مساوی c باشند.

حل: مجموعه‌های $A_0, A_1, \ldots, A_k$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

به‌ازای هر $1 \le i \le k$، A_i را مجموعهٔ تمام جوابهایی می‌گیریم که در آنها $x_i > c$ باشد. A_0 را مجموعهٔ تمام جوابهایی می‌گیریم که در آنها به ازای هر $1 \le i \le k$ داشته باشیم $x_i \le c$. بر طبق اصل شمول - عدم شمول داریم:

$$\begin{aligned}|A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| &= |A_0| + |A_1| + \cdots + |A_k| - |A_0 \cap A_1| - \cdots - |A_{k-1} \cap A_k| \\ &\quad + |A_0 \cap A_1 \cap A_2| + \cdots + |A_{k-2} \cap A_{k-1} \cap A_k| + \cdots \quad (*)\end{aligned}$$

در اینجا هدف ما پیدا کردن $|A_0|$ است.

قبلاً در یک مثال به دست آورده‌ایم که تعداد جوابهایی از معادلهٔ مفروض که $x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_s} > c$، برابر است با $\binom{m-sc-1}{k-1}$.

طرف چپ (*) برابر تعداد جوابهای صحیح مثبت معادلهٔ مفروض و یا $\binom{m-1}{k-1}$ است.

به ازای هر $1 \le i \le k$، $|A_i|$ برابر است با تعداد جوابهایی که در آن $x_i > c$ است. بر طبق رابطهٔ بالا این تعداد برابر است با:

$$s = 1 \implies |A_1| = \cdots = |A_n| = \binom{m-c-1}{k-1}$$

به ازای هر $1 \le i \le k$ داریم که $|A_0 \cap A_i| = 0$، زیرا تمام جوابهای عضو A_0، در شرط $x_i \le c$ صدق می‌کنند. ولی تمام جوابهای عضو A_i، در شرط $x_i > c$ صدق می‌کنند.

از طرفی داریم که:

$$s = 2 \implies |A_i \cap A_j| = \binom{m-2c-1}{k-1} \quad , 1 \le i < j \le k$$

MATH75.IR

درنتیجه:

$$\sum_{0\le i<j\le k}|A_i\cap A_j|=\sum_{1\le i<j\le k}|A_i\cap A_j|=\binom{k}{2}\binom{m-2c-1}{k-1}$$

و همچنین:

$$\sum_{0\le i<j<p\le k}|A_i\cap A_j\cap A_p|=\sum_{1\le i<j<p\le k}|A_i\cap A_j\cap A_p|=\binom{k}{3}\binom{m-3c-1}{k-1}$$

به همین ترتیب می‌توان بقیهٔ سیگماهای رابطهٔ (*) را محاسبه نمود.

این اعداد را در (*) جایگزین می‌کنیم:

$$\binom{m-1}{k-1}=\left[(\text{ تعداد جوابهای مورد نظر })+\binom{k}{1}\binom{m-c-1}{k-1}\right]-\left[\binom{k}{2}\binom{m-2c-1}{k-1}\right]$$
$$+\left[\binom{k}{3}\binom{m-3c-1}{k-1}\right]-\cdots+\left[(-1)^k\binom{k}{k}\binom{m-kc-1}{k-1}\right]$$

در نتیجه به دست می‌آوریم که:

$$\text{تعداد جوابهای مورد نظر}=\binom{m-1}{k-1}-\binom{k}{1}\binom{m-c-1}{k-1}+\binom{k}{2}\binom{m-2c-1}{k-1}$$
$$-\cdots+(-1)^k\binom{k}{k}\binom{m-kc-1}{k-1}$$

در کنار این تکنیک‌های کلاسیک، یک تعدادی تکنیک‌های نوین و در عین حال زیبا هم وجود دارد که به شکل پراکنده در میان مسائل یافت می‌شوند. به عنوان مثال، تکنیک «یک چیز ثابت» را از این مثال سعی کنید بیاموزید.

مثال ۸: فرض کنید همهٔ اعداد a,b,c,d مساوی نباشند. با (a,b,c,d) آغاز می‌کنیم و متناوباً (a,b,c,d) را با $(a-b,b-c,c-d,d-a)$ جایگزین می‌کنیم. ثابت کنید حداقل یکی از مؤلفه‌های این چهارتایی به اندازهٔ دلخواه بزرگ می‌شود.

حل: فرض کنید بعد از n بار تکرار این عمل، چهارتایی‌مان به صورت $p_n=(a_n,b_n,c_n,d_n)$ درآمده باشد. واضح است که به ازای هر $n\ge 1$ طبیعی داریم که:

$$a_n+b_n+c_n+d_n=0$$

برای هر p_n، به مجموع $a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2$ توجه کنید:

$$a_{n+1}^2+b_{n+1}^2+c_{n+1}^2+d_{n+1}^2=(a_n-b_n)^2+(b_n-c_n)^2+(c_n-d_n)^2+(d_n-a_n)^2$$
$$=2(a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2)-2(a_nb_n+b_nc_n+c_nd_n+d_na_n)$$

حال از رابطهٔ $a_n+b_n+c_n+d_n=0$ استفاده می‌کنیم:

$$0=(a_n+b_n+c_n+d_n)^2=(a_n+c_n)^2+(b_n+b_n)^2+2(a_nb_n+b_nc_n+c_nd_n+d_na_n)$$

MATH75.IR

از دو رابطهٔ فوق به دست می آوریم که:

$$a_{a+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2 = 2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) + (a_n + c_n)^2 + (b_n + d_n)^2$$

در نتیجه:

$$a_{a+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2 \geq 2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2)$$

از رابطهٔ بالا به دست می آوریم که:

$$a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2 \geq 2^n(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

در نتیجه حکم مسأله ثابت شد.

اینکه در مسأله‌ای مثل مسألهٔ بالا به دنبال یک چیزی مثل $a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2$ بگردیم، همان تکنیک مورد نظر است.

مثال ۹: یک دایره به شش کمان تقسیم شدهٔ است. اعداد ۱، ۰، ۱، ۰، ۰، ۰ به ترتیب روی آنها نوشته شده است (مثلاً ساعتگرد). شما می‌توانید دو عدد کنار هم را انتخاب و به هر کدام یک واحد اضافه کنید. آیا می‌توانید با تعدادی انجام این عمل، کاری کنید که همهٔ این اعداد با هم برابر شوند؟

حل: اگر مقداری با این اعداد بازی کنید می‌توانید به طور شهودی نتیجه بگیرید که نمی‌توان به حالتی رسید که در آن تمام اعداد با هم برابر باشند. اثبات این ادعا به اندکی شمّ ریاضی نیاز دارد. با استفاده از تکنیک یک چیز ثابت، کافی است توجه خود را روی مجموع $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6$ معطوف کنید، که در آن a_i ها اعداد روی کمانها به ترتیب در جهت ساعتگرد هستند. اثبات بی‌تغییر بودن این کمیت در تمامی مراحل واضح است. در حالت اولیه مقدار این مجموع برابر ۲ است. در نتیجه در تمام مراحل هم، ۲ باقی می‌ماند و هیچگاه برابر ۰ نمی‌شود.

MATH75.IR

مسایل ترکیبیات

۱. $n+1$ عدد از مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید دو عدد بین اعداد انتخاب شده وجود دارد به طوری که یکی بر دیگری بخشپذیر است.

۲. n عدد طبیعی $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq 2n$ را در نظر بگیرید به طوری که مقسوم علیه مشترک هر دو عدد از این n عدد، بزرگتر از $2n$ است. ثابت کنید که $a_1 > [\frac{2n}{3}]$.

۳. عدد طبیعی a نسبت به ۲ و ۵ اول است. ثابت کنید به ازای هر n طبیعی، توانی a از وجود دارد که به $\underbrace{۰۰\ldots۰۰۱}_{n}$ ختم می‌شود.

۴. 5^{10} حشره درون مربعی به ضلع واحد قرار دارند. ثابت کنید در هر لحظه لااقل ۳ حشره وجود دارند که می‌توانند به وسیلهٔ دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{7}$ پوشانده شوند.

۵. عدد طبیعی n نسبت به اعداد ۲ و ۵ اول است. ثابت کنید یک عدد طبیعی وجود دارد به طوری که در بسط دهدهی‌اش فقط رقم ۱ ظاهر شده است و بر n نیز بخشپذیر است.

۶. $n+1$ عدد از مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ انتخاب کرده‌ایم، ثابت کنید دو عدد بین اعداد انتخاب شده وجود دارد به طوری که نسبت به هم اول هستند.

۷. فرض کنید $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 5)$ یک دنباله از اعداد طبیعی باشد. ثابت کنید می‌توان یک زیرمجموعهٔ $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ از دنبالهٔ بالا انتخاب کرد و این اعداد را طوری با هم جمع کرد و یا از هم کم کرد به طوری که عدد باقیمانده بر n^2 بخشپذیر شود.

۸. k عدد طبیعی $a_1 < a_2 < \ldots < a_k \leq n$ با شرط $k > [\frac{n+1}{2}]$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید سه عدد i_3, i_2, i_1 با شرط $1 \leq i_1, i_2, i_3 \leq k$ وجود دارند به طوری که $a_{i_1} + a_{i_2} = a_{i_3}$.

۹. ثابت کنید یکی از اعداد حقیقی مثبت $a, 2a, \ldots, (n-1)a$ دارای فاصلهٔ حداکثر $\frac{1}{n}$ با نزدیکترین عدد صحیح به آن عدد است.

۱۰. ۶۵۰ نقطه درون یک دایره به شعاع ۱۶ قرار گرفته‌اند. ثابت کنید یک حلقه به شعاع درونی ۲ و شعاع خارجی ۳ وجود دارد به طوری که لااقل ۱۰ نقطه از نقاط مفروض را بپوشاند.

MATH75.IR

۱۱. ثابت کنید میان هر هفت عدد حقیقی متمایز $y_1, y_2, \ldots, y_7$، دو عدد متمایز y_i, y_j وجود دارد به طوری که $0 < \frac{y_i - y_j}{1 + y_i y_j}$.

۱۲. ۳۳ رخ درون یک صفحهٔ شطرنج 8×8 قرار گرفته‌اند، ثابت کنید می‌توان ۵ تا از رخ‌ها را طوری انتخاب کرد به طوری که هیچ دوتایی یکدیگر را تهدید نکنند.

۱۳. در هر یک از خانه‌های یک جدول 8×8، یک عدد طبیعی نوشته شده است. در هر مرحله ما می‌توانیم یک زیرجدول 3×3 و یا 4×4 را انتخاب کنیم و به هر یک از عددهای درون آن یک واحد اضافه نماییم. آیا ما همواره با تکرار عمل فوق می‌توانیم به جدولی برسیم که هر یک از ۶۴ عدد موجود در آن بر ۱۰ بخشپذیر باشد.

۱۴. ثابت کنید سه عدد صحیح غیر صفر c, b, a با قدر مطلق کمتر از یک میلیون وجود دارند به طوری که:

$$\left|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}\right| < 10^{-11}$$

۱۵. نقاط محیط یک مثلث متساوی‌الاضلاع را با دو رنگ، رنگ‌آمیزی کرده‌ایم. ثابت کنید سه نقطهٔ همرنگ x, y, z متعلق به محیط مثلث مفروض وجود دارد به طوری که $x \overset{\triangle}{y} z$ تشکیل یک مثلث قائم‌الزاویه دهد.

۱۶. به ازای هر n طبیعی بزرگتر از ۱، نابرابری زیر را ثابت کنید:

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4 \ldots \sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}} < 3$$

۱۷. ثابت کنید یک نقشه را می‌توان با دو رنگ طوری رنگ‌آمیزی کرد که هیچ دو ناحیهٔ مجاوری همرنگ نباشند اگر و فقط اگر درجهٔ هر رأس در نقشه عدد زوجی باشد. (نقشه به صورت ریاضی، معادل یک گراف مسطح است. گراف G را یک گراف مسطح گویند اگر بتوان گراف G را طوری در صفحه رسم کرد که هر دویالی از گراف فقط در رئوس گراف متقاطع باشند.)

۱۸. n خط $(n > 1)$ در صفحه رسم شده است به طوری که هیچ دو خطی موازی و یا هیچ سه خطی همرس نیستند. ثابت کنید می‌توان نواحی‌ای که به وسیلهٔ این خطوط به وجود می‌آیند را با اعداد متعلق به مجموعهٔ $\{-n, -n+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n-1, n\}$ شماره‌گذاری کرد به طوری که مجموع اعدادی که در یک طرف هر کدام از این n خط قرار دارند برابر صفر باشد.

۱۹. دنبالهٔ $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$a_0 = 9 \quad , \quad a_{a+1} = 3a_n^4 + 4a_n^3 \quad n < 0$$

ثابت کنید عدد a_{10} در بسط دهدهی به بیش از ۱۰۰۰ رقم ۹ ختم می‌شود.

۲۰. عدد حقیقی α را در نظر بگیرید به طوری که $\alpha + \frac{1}{\alpha} \in \mathbf{Z}$. ثابت کنید به ازای هر طبیعی n داریم که $\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbf{Z}$.

MATH75.IR

۲۱. از صفحهٔ شطرنج $۲^n \times ۲^n$ یک مربع یک واحدی حذف شده است. ثابت کنید این صفحه را می‌توان با شکل‌های L مانند پوشاند. (یک شکل L مانند، به صورت یک مربع ۲×۲ است که یک مربع کوچک از آن حذف شده است)

۲۲. همهٔ زیرمجموعه‌های ممکن از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ را در نظر بگیرید به طوری که شامل هیچ دو عضو متوالی از این مجموعه نباشند. ثابت کنید مجموع مربعات حاصلضرب همهٔ عناصر این زیرمجموعه‌ها برابر است با $(n+۱)!$.

۲۳. ثابت کنید که از بین هر $۲^{k+۱} - ۱$ عدد صحیح می‌توان ۲^k عدد انتخاب کرد به طوری که مجموع این اعداد بر ۲^k بخشپذیر باشد.

۲۴. ثابت کنید هر عدد طبیعی n را می‌توان به صورت مجموع جملات متمایز و غیر متوالی دنبالهٔ فیبوناچی نوشت یعنی:

$$n = \sum_{j=۱}^{\cdots} F_{i_j} \quad , \quad |i_{j+۱} - i_j| \geq ۲ \quad j = ۱, ۲, \ldots, m-۱$$

(دنبالهٔ فیبوناچی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\ F_۱ = ۱\ ,\ F_۲ = ۲\ ,\ F_{n+۲} = F_n + F_{n+۱} \quad n \geq ۰$$

۲۵. n نقطه در صفحه مفروضند به طوری که همگی روی یک خط قرار ندارند. ثابت کنید که لااقل n خط متمایز وجود دارند به طوری که هر کدام از این n خط، از لااقل ۲ نقطه از n نقطهٔ مفروض می‌گذرند.

۲۶. عددهای طبیعی $x_۱, x_۲, \ldots, x_n, y_۱, y_۲, \ldots, y_m$ مفروضند. همچنین می‌دانیم که

$$x_۱ + x_۲, \ldots + x_n = y_۱ + y_۲ + \ldots + y_m < mn$$

ثابت کنید می‌توان یک تعدادی از x_i ها و همچنین یک تعدادی از y_i ها را از رابطهٔ بالا حذف کرد به طوری که دوباره باز هم به علامت تساوی برسیم.

۲۷. مجموع $S_n = \sum_{k=۱}^{n} \binom{n}{k} k^۳$ را با استفاده از شمارش بیابید.

۲۸. مجموعه‌ای متشکل از $۳n+۱$ شئ داریم به طوری که n تای آنها یکسان هستند و $۲n+۱$ تای بقیه، از هم متمایزند. به چند طریق می‌توان n شی از مجموعهٔ مفروض انتخاب کرد.

۲۹. فرض کنید $X = \{۱, ۲, \ldots, n\}$. نشان دهید تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از مجموعهٔ X به طوری که هیچ دو عضو متوالی از X را شامل نشوند برابر است با $\binom{n-r+۱}{r}$.

۳۰. چند تا از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $X = \{۱, ۲, \ldots, n\}$ شامل هیچ دو عضو متوالی از X نمی‌شوند؟

۳۱. آیا می‌توان یالهای یک مکعب را با اعداد $۱, ۲, \ldots, ۱۲$ شماره‌گذاری کرد به طوری که برای هر رأس مکعب، مجموع اعداد روی ۴ یال ختم شده به آن رأس، عددی ثابت باشد؟

MATH75.IR

۳۲. آیا می‌توان اعداد $۱, ۲, \ldots, ۹$ را روی یک دایره چید به طوری که مجموع هیچ دو عدد همسایه‌ای بر ۳، ۵ و یا ۷ بخشپذیر نباشد؟

۳۳. به چند طریق می‌توان دو زیرمجموعهٔ ناتهی و مجزا از یک مجموعهٔ n عضوی انتخاب کرد؟

۳۴. تعداد جایگشت‌های p از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ را بیابید به طوری که $pop = (۱, ۲, \ldots, n)$. (یعنی به ازای هر x متعلق به مجموعهٔ بالا داشته باشیم $pp(x) = x$).

۳۵. چند زیرمجموعهٔ ۶ عضوی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۴۹\}$ وجود دارد به طوری که شامل حداقل دو عضو متوالی از مجموعهٔ بالا باشد؟

۳۶. حداقل چند بازی لازم است انجام شود برای اینکه از بین n تنیس‌باز یک نفر را به عنوان برنده انتخاب کنیم (بازی‌ها مساوی ندارد)؟

۳۷. به ازای هر عدد طبیعی n، عدد $\phi(n)$ را برابر تعداد اعداد طبیعی کمتر از n و اول نسبت به n تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که

$$\phi(n) = n \prod_{i=۱}^{m} \left(۱ - \frac{۱}{p_i} \right)$$

که در آن، $P_m, \ldots, P_۲, P_۱$ تمامی مقسوم‌علیه‌های اول و متمایز n هستند.

۳۸. فرض کنید $B_m = \{۱, ۲, \ldots, m\}$ و $B_n = \{۱, ۲, \ldots, n\}$. تعداد توابع پوشا از B_m به B_n را $S(m,n)$ می‌نامیم. به ازای هر n, m طبیعی، $S(m,n)$ را بیابید.

۳۹. آیا می‌توان از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۳۰۰۰\}$ یک زیرمجموعهٔ A با ۲۰۰۰ عضو انتخاب کرد به طوری که هرگاه $x \in A$ سپس $۲x \in A$.

۴۰. ثابت کنید حداکثر $\frac{۲^n}{n+۱}$ کلمهٔ n حرفی از اعداد ۰, ۱ وجود دارد به طوری که هر دوتای آنها در لااقل ۳ مکان، با هم متفاوت باشند.

۴۱. n خط در صفحه داده شده است $(n \geq ۳)$ به طوری که هیچ دوتایی با هم موازی نیستند. می‌دانیم از محل تقاطع هر دو خط، لااقل یک خط دیگر عبور کرده است. ثابت کنید تمام این خطوط از یک نقطه می‌گذرند.

۴۲. مهره‌هایی در بعضی خانه‌های یک جدول $n \times n$ گذاشته شده است به طوری که اگر در خانهٔ (i,j) مهره‌ای نباشد سپس در سطر i ام و ستون j ام روی هم رفته لااقل n مهره وجود دارد. نشان دهید حداقل $\frac{n^۲}{۲}$ مهره در این جدول وجود دارد.

۴۳. ۲۰ کشور در یک سیاره وجود دارد. میان هر سه کشور، لااقل دو کشور رابطهٔ سیاسی با هم ندارند. ثابت کنید در این کشورها حداکثر ۲۰۰ سفارتخانه وجود دارد.

۴۴. ۲۰۰۰ بردار در صفحه رسم شده‌اند. دو بازیکن به طور متناوب این بردارها را به طور تک‌تک انتخاب می‌کنند تا زمانی که دیگر برداری باقی نماند. بازیکنی بازنده است که در نهایت، مجموع بردارهایش دارای طولی کمتر از

MATH75.IR

طول مجموع بردارهای بازیکن دیگر باشد. آیا نفر اول می‌تواند طوری بازی کند که هیچ‌وقت بازنده نشود؟

۴۵. $n \geq ۳$ نقطه در صفحه در نظر بگیرید به طوری که همگی روی یک خط قرار نداشته باشند. ثابت کنید یک دایره وجود دارد که لااقل از سه تا از این نقاط عبور کند و درون دایره هیچ نقطه‌ای از این n نقطه نباشد.

۴۶. ۷ دایره در نقطهٔ A مشترک هستند. ثابت کنید یکی از این دایره‌ها شامل مرکز دایرهٔ دیگری می‌شود.

۴۷. مجموعهٔ S از اشخاص این ویژگی را دارد که هر دو نفر با تعداد دوستهای یکسان در S، دوست مشترکی در S ندارند. ثابت کنید یک نفر در S، دقیقاً یک دوست در S دارد.

۴۸. m مهره در n رأس یک n ضلعی منتظم قرار دارد$(n < m)$. در هر مرحله می‌توانیم یک رأس شامل حداقل دو مهره انتخاب کرده و دو مهره از آن برداریم و به هر کدام از دو رأس مجاور یک مهره بدهیم. اگر بعد از چند مرحله دوباره به حالت اولیه برسیم، ثابت کنید تعداد مراحل مضربی از n است.

۴۹. ۳ مدرسه هر کدام با n دانش‌آموز را در نظر بگیرید. می‌دانیم که هر دانش‌آموز $n+۱$ دوست در مجموع دو مدرسهٔ دیگر دارد. ثابت ۳ دانش‌آموز متعلق به ۳ مدرسهٔ مختلف وجود دارند به طوری که دوبه‌دو با یکدیگر دوست هستند.

۵۰. آیا می‌توان درون یک جعبهٔ $۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰$ را با ۲۵۰ تا $۴ \times ۱ \times ۱$ آجر پر کرد؟

۵۱. هر نقطه از صفحه را با یکی از رنگهای $n, \ldots, ۲, ۱$ رنگ‌آمیزی می‌کنیم. ثابت کنید یک مستطیل در صفحه وجود دارد که رأسهایش دارای رنگ یکسانی هستند

۵۲. در هر کدام از خانه‌های یک جدول ۲۵×۲۵، یکی از عددهای $+۱$ یا -۱ قرار دارد. فرض کنید a_i حاصلضرب همهٔ اعداد موجود در سطر i ام و b_j حاصلضرب همهٔ اعداد موجود در ستون j ام باشد. ثابت کنید که:

$$a_۱ + b_۱ + a_۲ + b_۳ + \ldots + a_{۲۵} + b_{۲۵} \neq ۰$$

۵۳. یک مربع ۲۳×۲۳ با کاشیهای $۱ \times ۱, ۲ \times ۲, ۳ \times ۳$ پوشانده شده است. درون این مربع حداقل چند کاشی ۱×۱ قرار دارد؟

۵۴. در هر خانهٔ یک جدول ۸×۸ یک عدد صحیح نوشته شده است. در هر گام می‌توانیم یک مربع ۳×۳ و یا ۴×۴ انتخاب و به هر عدد داخل آن، یک واحد اضافه کنیم. آیا همواره بعد از چند گام می‌توانیم به جدولی برسیم که تمام عناصر آن بر ۳ بخشپذیر باشند؟

۵۵. دنبالهٔ نامتناهی $۱, ۱, ۰, ۱, ۰, ۱, ۰, ۳, \ldots$ را در نظر بگیرید به طوری که هر جملهٔ آن (از جملهٔ هفتم به بعد)، رقم یکان عدد مجموع ۶ جملهٔ قبلی دنباله است. ثابت کنید هیچ وقت زیردنبالهٔ $۰, ۱, ۰, ۱, ۰, ۱$ در دنبالهٔ بالا ظاهر نمی‌شود.

۵۶. عددهای صحیح $۲n, \ldots, ۲, ۱$ در ترتیبی دیگر در $۲n$ مکان $۲n, \ldots, ۲, ۱$ قرار گرفته‌اند. ما هر عدد را با شمارهٔ مکان آن عدد جمع می‌کنیم، ثابت کنید در بین این $۲n$ عدد به وجود آمده، دو عدد وجود دارند که دارای باقیماندهٔ

MATH75.IR

یکسانی بر $2n$ هستند.

۵۷. n عدد مثبت روی یک تخته سیاه نوشته شده است. در هر مرحله دو عدد a, b از بین اعداد نوشته شده روی تخته انتخاب می‌کنیم و به جای آنها عدد $\frac{a+b}{4}$ را می‌نویسیم. واضح است که بعد از n مرحله، تنها یک عدد روی تخته باقی می‌ماند. ثابت کنید اگر n عدد اولیه روی تخته سیاه همگی ۱ باشند، در نهایت عدد باقیمانده ناکمتراز $\frac{1}{n}$ است.

۵۸. دو عدد ۱۹ و ۱۸ روی تخته سیاه نوشته شده است. در هر مرحله می‌توان عددی برابر مجموع دو عدد نوشته شده روی تخته را روی تخته نوشت. آیا بعدً از چند مرحله می‌توان به عدد ۱۹۹۴ رسید؟

۵۹. چندین علامت + و − روی یک تخته نوشته شده است. در هر مرحله می‌توان دو علامت را انتخاب و به جای آن دو، علامت + را قرار دارد اگر دو علامت انتخاب شده یکسان باشند و در غیر این صورت به جای آن دو، علامت − را قرار داد. ثابت کنید علامت نهایی باقیمانده بر روی تخته ، به ترتیب انتخاب علامتها بستگی ندارد.

۶۰. آیا می‌توان عددهای $1998, 1998, \ldots, 2, 2, 1, 1$ را طوری در یک خط ردیف کرد به طوری که به ازای هر$1 \leq i \leq 1998$، بین هر دو عدد i، دقیقاً $i-1$ عدد باشد.

۶۱. یک جدول $m \times n$ از اعداد صحیح مفروض است. در هر گام می‌توان علامت همهٔ اعداد یک سطر و یا یک ستون را عوض کرد. نشان دهید همواره می‌توان بعد از چند گام به جدولی رسید که مجموع اعداد هر سطر و یا هر ستون آن، عددی غیر منفی است.

۶۲. ۷ رأس یک مکعب را با عدد ۰ و یک رأس آن را با عدد ۱ شماره‌گذاری کرده‌ایم. در هر مرحله می‌توان یک یال از مکعب را انتخاب و به هر کدام از دو عدد نوشته شده در دو سر آن، یک واحد اضافه کرد. آیا بعد از چند مرحله می‌توان a) به هشت عدد برابر b) به هشت عدد مضرب ۳ رسید؟

۶۳. کلمهٔ باینری $w = a_1 a_2 \ldots a_n$ را در نظر بگیرید. در هر مرحله می‌توان با اضافه کردن و یا گذاشتن واژهٔ XXX درون w و یا همچنین پاک کردن واژهٔ XXX از درون w (X یک کلمهٔ باینری است) یک کلمهٔ جدید به وجود آورد. آیا می‌توان بعد از چند مرحله از کلمهٔ ۱۰ به ۱۰ رسید؟

۶۴. به هر رأس یک پنج‌ضلعی، یک عدد صحیح $x_i (1 \leq i \leq 5)$ نسبت می‌دهیم به طوری که $S = \sum_{i=1}^{5} x_i > 0$. اگر x, y, z اعداد نوشته شده روی سه رأس متوالی پنج‌ضلعی باشد و اگر $y < 0$، آنگاه (x, y, z) را با $(x+y, -y, y+z)$ جایگزین می‌کنیم. این کار را تا زمانی که یک $y < 0$ وجود داشته باشد ادامه می‌دهیم. آیا این الگوریتم متوقف می‌شود؟

۶۵. از نقطهٔ (x, y) طبق الگوریتم زیر می‌توان در صفحهٔ مختصات حرکت کرد:

اگر $x > 0$ سپس اگر $x < y$، به نقطهٔ $(2x, y-x)$ و اگر $x \geq y$، به نقطهٔ $(x-y, 2y)$ می‌توان حرکت کرد.

تمامی a, b های حقیقی مثبت را بیابید به طوری که با شروع از نقطهٔ (a, b) الگوریتم فوق متوقف شود.

MATH75.IR

حل مسایل ترکیبیات

۱.اعداد انتخاب شده را به صورت $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ نشان می‌دهیم، اعداد $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a_i = 2^{k_i} b_i \ , \ (b_i, 2) = 1 \quad i = 1, 2, \ldots, n+1$$

می‌دانیم که اعداد $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ متعلق به مجموعهٔ $A = \{1, 3, \ldots, 2n-1\}$ هستند و همچنین مجموعهٔ A، n عضو دارد در نتیجه بر طبق اصل لانهٔ کبوتر لااقل دو تا از b_i ها با هم برابر هستند. فرض کنید که $b_i = b_j, i \neq j$، در این صورت اعداد k_j, k_i وجود دارند به طوری که $a_j = 2^{k_j} b_j, a_i = 2^{k_i} b_i$. حال اگر $a_j < a_i$ باشد سپس $a_j | a_i$ و اگر $a_j > a_i$ باشد سپس $a_i | a_j$.

۲. فرض کنید که $a_1 \leq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$ در نتیجه $2a_1 < 3a_1 \leq 2n$. مجموعهٔ $\{2a_1, 3a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ را در نظر بگیرید. تعداد اعضای این مجموعه برابر $n+1$ است و همچنین هر کدام از اعضای این مجموعه کمتر $2n+1$ از هستند، در نتیجه بر طبق مسأله بالا دو عضو α, β متعلق به مجموعهٔ مفروض وجود دارند به طوری که $\alpha | \beta$. واضح است که $(\alpha, \beta) = \alpha \leq 2n$. اگر α, β هر دو متعلق به اعداد $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ باشند سپس مقسوم‌علیه مشترک α, β از $2n+1$ کمتر می شود که بر طبق فرض مسأله ممکن نیست. همچنین اگر یکی از α و یا β، برابر با $2a_1$ یا $3a_1$ باشد سپس به جای آن، عدد a_1 را قرار می‌دهیم. در نتیجه باز هم مقسوم‌علیه مشترک a_1, α یا a_1, β از $2n$ بیشتر نمی‌شود. [دقت شود که α, β نمی‌توانند برابر $2a_1, 3a_1$ باشند زیرا $2 \mid 3$]. بدین ترتیب به تناقض رسیدیم، در نتیجه $a_1 > \lceil \frac{2n}{3} \rceil$.

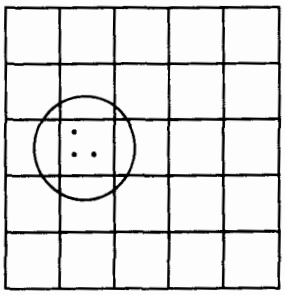
۳. مجموعهٔ $\{a^1, a^2, a^3, \ldots, a^{10^n}\}$ را در نظر بگیرید. باقیماندهٔ هر کدام از اعضای مجموعهٔ مفروض بر 10^n می‌تواند یکی از اعداد $1, 2, \ldots, 10^n - 1$ باشد (واضح است که باقیماندهٔ هیچ کدام از اعضای مجموعه بر 10^n نمی‌تواند برابر ۰ باشد زیرا بر طبق فرض داریم $(a, 10) = 1$). مجموعهٔ مفروض 10^n عضو دارد و هر کدام از اعضایش به هنگ 10^n می‌تواند $10^n - 1$ عدد مشخص را اختیار کند در نتیجه بر طبق اصل لانهٔ کبوتر لااقل دو عضو از مجموعهٔ مفروض به هنگ 10^n با هم همنهشت هستند. فرض کنید که $a^i \overset{10^n}{\equiv} a^j \ , \ i > j$. داریم که

$$a^i \overset{10^n}{\equiv} a^j \ , \ (a, 10) - 1 \Rightarrow a^{i-j} \overset{10^n}{\equiv} 1 \Rightarrow a^{i-j} = 10^n q + 1$$

MATH75.IR

واضح است که عدد a^{i-j} در بسط دهدهی به عدد $\underbrace{۰۰\cdots۰۰۱}_{n}$ ختم می‌شود.

۴. مربع مفروض را مانند شکل به ۲۵ تا مربع کوچکتر به ضلع $\frac{۱}{۵}$ تقسیم می‌کنیم. داریم که $۲ \times ۲۵ + ۱ = ۵۱$، در نتیجه بر طبق اصل لانهٔ کبوتر در درون یکی از این مربعهای کوچک لااقل ۳ حشره قرار دارد. حال اگر دایره‌ای به مرکز مربع کوچک و به شعاع $\frac{۱}{۷}$ رسم کنیم سپس کل مربع کوچک و در نتیجه ۳ حشرهٔ داخل آن مربع درون این دایره قرار می‌گیرند زیرا:



$$\frac{۱}{۲}\sqrt{۲(\frac{۱}{۵})^۲} < \frac{۱}{۷}$$

۵. $n+۱$ عدد زیر را در نظر بگیرید:

$$۱, ۱۱, ۱۱۱, \ldots, \underbrace{۱۱\cdots۱۱}_{n+۱}$$

بر طبق اصل لانهٔ کبوتر دو تا از اعداد بالا به هنگ n، با هم همنهشت هستند. فرض کنید که: $(i > j)$

$$\underbrace{۱۱\cdots۱۱}_{i} \overset{n}{\equiv} \underbrace{۱۱\cdots۱۱}_{j} \Rightarrow \underbrace{۱۱\cdots۱۱}_{i-j}\underbrace{۰۰\cdots۰}_{j} \overset{n}{\equiv} ۰$$

از طرفی داریم $(n, ۱۰) = ۱$، در نتیجه

$$\underbrace{۱۱\cdots۱۱}_{i-j} \overset{n}{\equiv} ۰$$

۶. n زوج مرتب زیر را در نظر بگیرید:

$$(۱,۲)(۳,۴), (۵,۶), \ldots, (۲n-۳, ۲n-۲), (۲n-۱, ۲n)$$

$n+۱$ عدد از میان n زوج مرتب بالا انتخاب شده است. در نتیجه بر طبق اصل لانهٔ کبوتر، دو تا از اعداد انتخاب شده متعلق به یک زوج مرتب (زوج مرتب k ام) هستند. زوج مرتب k ام شامل دو عضو $۲k-۱, ۲k$ است که نسبت به هم اول هستند.

۷. به‌ازای هر زیرمجموعهٔ ناتهی $\{a_{i_۱}, a_{i_۲}, \ldots, a_{i_k}\}$ از مجموعهٔ $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$ تعریف می‌کنیم که

$$S(i_۱, i_۲, \ldots, i_k) = a_{i_۱} + a_{i_۲} + \cdots + a_{i_k}$$

تعداد $S(i_۱, i_۲, \ldots, i_k)$ هایی که به دست می‌آید برابر است با $۲^n - ۱$. به ازای هر n طبیعی بزرگتر از ۴ داریم [$۲^n - ۱ > n^۲$ این مطلب را با استقراء بر روی n می‌توان ثابت نمود]. در نتیجه بر طبق اصل لانهٔ کبوتر دو عدد

MATH75.IR

$S(j_1, j_2, \ldots, j_q), S(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ وجود دارند به طوری که

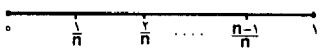
$$S(i_1, i_2, \ldots, i_p) \overset{n^2}{\equiv} S(j_1, j_2, \ldots, j_q) \quad \text{و یا} \quad a_{i_1} + ai_2 + \cdots + a_{i_p} \overset{n^2}{\equiv} a_{j_1} + a_{j_2} + \cdots + a_{j_p} \qquad (*)$$

حال اگر در رابطهٔ $(*)$، اعداد مشابه در طرفین همنهشتی را با هم ساده کنیم و بقیهٔ اعداد را به طرف چپ همنهشتی بیاوریم نتیجه می‌شود که $n^2 \mid \pm a_{s_1} \pm a_{s_2} \pm \cdots \pm a_{s_t}$ (s_m ها همان i_m ها و j_m ها هستند.)

۸. مجموعهٔ $\{a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_k - a_1, a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ با $2k - 1$ عضو را در نظر بگیرید. هر کدام از اعضای این مجموعه می‌تواند یکی از n عدد $1, 2, \ldots, n$ باشد. بر طبق فرض داریم $2k - 1 > n$، در نتیجه بر طبق اصل لانهٔ کبوتر دو عضو α, β متعلق به مجموعهٔ مفروض وجود دارند به طوری که $\alpha = \beta$. α, β نمی‌توانند هر دو متعلق به مجموعهٔ $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ و یا $B = \{a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_k - a_1\}$ باشند، در نتیجه یکی از α, β متعلق به A و دیگری متعلق به B است. فرض کنید که

$$\alpha = a_i \ , \ \beta = a_j - a_1 : \qquad \alpha = \beta \Rightarrow a_j = a_1 + a_i$$

۹. بازهٔ $[0, 1]$ روی محور اعداد حقیقی را به n بازهٔ برابر تقسیم می‌کنیم:



$$A_i = \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

به ازای هر عدد حقیقی α، عدد $\{\alpha\}$ را برابر قسمت اعشاری عدد α تعریف می‌کنیم در نتیجه $0 \leq \{\alpha\} < 1$. $n - 1$ عدد $\{a\}, \{2a\}, \ldots, \{(n-1)a\}$ را در نظر بگیرید. اگر یکی از این اعداد در بازهٔ A_0 و یا A_{n-1} قرار داشته باشد مسأله حل می‌شود. پس فرض می‌کنیم این $n - 1$ عدد در $n - 2$ بازهٔ $A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}$ قرار دارند. بر طبق اصل لانهٔ کبوتر، دو تا از این اعداد مثل $\{ja\}, \{ia\}$ در یک بازه قرار دارند. می‌دانیم طول هر بازه برابر $\frac{1}{n}$ است درنتیجه $|\{ia\} - \{ja\}| < \frac{1}{n}$. از طرفی می‌دانیم که $|\{ia\} - \{ja\}| = \{|i-j|a\}$. به این ترتیب اگر k را برابر $|i-j|$ بگیریم به دست می‌آید که

$$0 \leq \{ka\} < \frac{1}{n} \ , \ 1 \leq k < n - 1$$

ولی فرض کرده بودیم که هیچ کدام از این اعداد در بازهٔ $[0, \frac{1}{n}]$ قرار ندارند. بدین ترتیب به تناقض رسیدیم.

۱۰. دو نقطهٔ A, B در صفحه در نظر بگیرید. ادعا می‌کنیم که A به وسیلهٔ حلقه‌ای به مرکز B پوشانده می‌شود اگر و فقط اگر B به وسیلهٔ حلقه‌ای به مرکز A پوشانده شود، زیرا هر کدام از این دو عبارت وقتی تحقق می‌یابد که $|AB| \leq 2$. به مرکز هر کدام از این ۶۵۰ نقطه، یک حلقه رسم می‌کنیم. کافی است ثابت کنیم که لااقل ۱۰ تا از این حلقه‌ها در یک نقطه مشترک هستند. زیرا در این صورت اگر حلقه‌ای به مرکز این نقطهٔ مشترک رسم کنیم لااقل ۱۰ نقطه از نقاط مفروض را خواهد پوشاند. تمام این ۶۵۰ حلقه در دایره‌ای به شعاع $3 + 16 = 19$ قرار دارند. اگر هر کدام از نقاط این دایره به وسیلهٔ حداکثر ۹ حلقه پوشانده شوند سپس مجموع مساحت این ۶۵۰ حداکثر

MATH75.IR

برابر خواهد بود با $۹ \times ۱۹^۲\pi = ۳۲۴۹\pi$. از طرفی مجموع مساحت حلقه‌ها برابر است با $۶۵۰ \times ۵\pi = ۳۲۵۰\pi$، بنابراین باید داشته باشیم $۳۲۵۰\pi \geq ۳۲۴۹\pi$، که ممکن نیست. در نتیجه یکی از نقاط این دایره لااقل در ۱۰ حلقه وجود دارد.

۱۱. می‌دانیم که برای هر عدد حقیقی α، عدد حقیقی β وجود دارد به طوری که $tg\beta = \alpha, ۰ \leq \beta < \pi$ اعداد حقیقی $x_۱, x_۲, \ldots, x_۷$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$tgx_i = y_i \ , \ ۰ \leq x_i < \pi \quad i = ۱, ۲, \ldots, ۷$$

بازهٔ $(۰, \pi)$ را به ۶ بازهٔ $(۰, \frac{\pi}{۶}), (\frac{\pi}{۶}, \frac{۲\pi}{۶}), \ldots, (\frac{۵\pi}{۶}, \pi)$ تقسیم می‌کنیم. بر طبق اصل لانهٔ کبوتر، دو تا از ۷ عدد $x_۱, x_۲, \ldots, x_۱$ مثل x_j, x_i در یک بازه قرار دارند. فرض کنید که $x_i > x_j$، داریم:

$$۰ < x_i - x_j < \frac{\pi}{۶} \quad \Longrightarrow \quad ۰ = tg۰ < tg(x_i - x_j) < tg\frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \quad (۱)$$

از طرفی داریم که

$$tgx_j = y_j \ , \ tgx_i = y_i \ , \ tg(x_i - x_j) = \frac{tgx_i - tgx_j}{۱ + tgx_i tgx_j} \quad (۲)$$

از دو رابطهٔ (۱) و (۲) به دست می‌آوریم که

$$۰ < \frac{y_i - y_j}{۱ + y_i y_j} < \frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

۱۲. صفحهٔ شطرنج را با ۸ رنگ $۱, ۲, \ldots, ۸$ مانند شکل مقابل رنگ می‌کنیم. (هر خانه را به رنگ عددی که در درون آن خانه نوشته شده است درمی‌آوریم). پر واضح است دو رخ که در خانه‌های همرنگ قرار دارند نمی‌توانند یکدیگر را تهدید کنند. (زیرا هیچ دو خانهٔ همرنگی در یک سطر و یا یک ستون نیستند). داریم که $۱ + ۸ \times ۴ = ۳۳$ درنتیجه بر طبق اصل لانهٔ کبوتر، ۵ تا از رخ‌ها در خانه‌هایی با رنگ یکسان قرار دارند. در بالا ثابت کردیم که این ۵ تا رخ، دوبه‌دو یکدیگر را تهدید نمی‌کنند.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۸	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۷	۸	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۶	۷	۸	۱	۲	۳	۴	۵
۵	۶	۷	۸	۱	۲	۳	۴
۴	۵	۶	۷	۸	۱	۲	۳
۳	۴	۵	۶	۷	۸	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۱

۱۳. تعداد زیرجدولهای ۳×۳ و یا ۴×۴ جدول مفروض برابر است با

$$(۸ - ۳ + ۱)^۲ + (۸ - ۴ + ۱)^۲ = ۶۱$$

این زیرجدولها را با شماره‌های $۱, ۲, \ldots, ۶۱$ شماره‌گذاری می‌کنیم. حال تعداد جدولهای ۸×۸ ای را می‌شمریم که اعداد درون آنها متعلق به مجموعهٔ $\{۰, ۱, ۲, \ldots, ۹\}$ هستند و همچنین از هر کدام از آنها می‌توان بعد از چندبار

MATH75.IR

تکرار عمل بالا به جدولی رسید که تمام اعداد درون آن بر ۱۰ بخشپذیر است. فرض کنید برای رسیدن به یک جدول ۸ × ۸ با ۶۴ عدد مضرب ۱۰ درون آن (جدول k)، α_1 بار زیر جدول ۱، α_2 بار زیرجدول ۲، ... ، α_{61} بار زیر جدول ۶۱ انتخاب شده باشد [واضح است که ترتیب انتخاب زیرجدولها اهمیت ندارد یعنی وقتی ما می‌دانیم که مثلاً α_i بار زیرجدول i انتخاب شده است سپس هیچ فرقی در این که در چه ترتیبی زیرجدول i، α_i بار انتخاب شده است وجود ندارد چرا که در نهایت به هر عدد این زیرجدول، عدد α_i افزوده می‌شود.] ادعا می‌کنیم دقیقاً یک جدول ۸ × ۸ اولیه با اعداد متعلق به مجموعه $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ وجود دارد به طوری که بعد از α_i بار انتخاب زیرجدول iام به ازای $i = 1, 2, \ldots, 61$ بتوان به جدول k رسید. فرض کنید t یک عدد دلخواه در جدول ۸ × ۸ اولیه باشد به طوری که در محل برخورد سطر pام با ستون q ام قرار دارد. همچنین فرض کنید t در k زیرجدول $i_1, \ldots, i_k$ قرار دارد. واضح است که

$$t + \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \cdots + \alpha_{i_k} \overset{10}{\equiv} 0 \quad \text{و یا} \quad t \overset{10}{\equiv} -(\alpha_1 + \cdots + \alpha_{i_k})$$

بر طبق فرض t عددی بین ۰ و ۹ است در نتیجه بر طبق رابطهٔ بالا، t به طور یکتا بر حسب α_i ها تعیین می‌شود به عبارت دیگر هر عدد جدول را به طور یکتا می‌توان برحسب α_i ها تعیین نمود. بنابراین تعداد جدولهای ۸ × ۸ با عناصر متعلق به مجموعه $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ که بتوان با انجام مراحل ذکر شده در صورت مسأله، به جدولی با عناصر بخشپذیر بر ۱۰ رسید برابر است با تعداد دنباله‌های $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{61})$ که در آن α_i ها بین ۰ و ۹ هستند. (از آنجا که تمامی اعداد را به هنگ ۱۰ در نظر می‌گیریم می‌توان فرض کرد که $0 \le \alpha_i \le 9$، زیرا اگر یک زیرجدول را $t + 10$ بار انتخاب کنیم و یا اینکه t بار انتخاب کنیم در اعداد درون آن به هنگ ۱۰ تغییری ایجاد نمی‌شود). تعداد این دنباله‌ها برابر است با 10^{61}. تعداد جدولهای ۸ × ۸ که اعداد درون آن متعلق به مجموعهٔ $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ هستند برابر است با 10^{64}. می‌دانیم که $10^{64} > 10^{61}$، در نتیجه بر طبق اصل لانهٔ کبوتر لااقل یک جدول با عناصر متعلق به مجموعهٔ $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ وجود دارد که با انجام هر چندبار عمل ذکر شده بر روی آن، نمی‌توان به جدولی با عناصر بخشپذیر بر ۱۰ دست یافت.

۱۴. مجموعهٔ S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S = \{2 + s\sqrt{2} + t\sqrt{3} \mid 0 \le r, s, t \le 10^6 - 1\}$$

عدد d را برابر $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \times 10^6$ در نظر می‌گیریم. واضح است که هر عضو S بین ۰ و d قرار دارد. بازهٔ $[0, d]$ را به $10^{18} - 1$ بازهٔ زیر افراز می‌کنیم:

$$A_i = [ie, (i+1)e] \quad i = 0, 1, 2, \ldots, 10^{18} - 2$$

که در آن e برابر است با $\frac{d}{10^{18}-1}$. تعداد اعضای مجموعهٔ S برابر 10^{18} است و هر کدام از اعضای S در یکی از A_iها قرار دارد، در نتیجه بر طبق اصل لانهٔ کبوتر، لااقل دو عضو از S مثل $a_2 + b_2\sqrt{2} + c_2\sqrt{3}, a_1 + b_1\sqrt{2} + c_1\sqrt{3}$

MATH75.IR

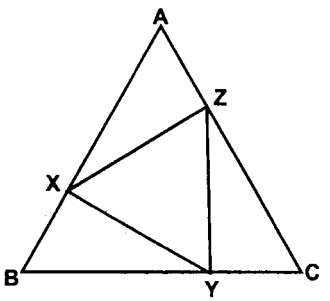
وجود دارند به طوری که متعلق به یک بازه هستند. از این رو داریم:

$$\left|\left(a_۱+b_۱\sqrt{۲}+c_۱\sqrt{۳}\right)-\left(a_۲+b_۲\sqrt{۲}+c_۲\sqrt{۳}\right)\right|\le e=\frac{۱۰^{۶}\times(۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳})}{۱۰^{۱۸}-۱}<۱۰^{-۱۱}$$

تعریف می‌کنیم $a=a_۱-a_۲, b=b_۱-b_۲, c=c_۱-c_۲$، در نتیجه $|a+b\sqrt{۲}+c\sqrt{۳}|<۱۰^{-۱۱}$.

۱۵. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را در نظر بگیرید. سه نقطهٔ X,Y,Z به ترتیب روی اضلاع AB,BC,CA از مثلث مفروض انتخاب می‌کنیم به طوری که

$$۲=\frac{AX}{XB}=\frac{BY}{YC}=\frac{CZ}{ZA}$$



بر طبق قضایای هندسی داریم:

$$ZX\perp AC, YZ\perp BC, XY\perp AB$$

فرض کنید نقاط روی محیط مثلث را با دو رنگ سیاه و سفید رنگ کرده‌ایم. بر طبق اصل لانهٔ کبوتر، دو تا از نقاط X,Y,Z همرنگ هستند. می‌توان فرض کرد که دو نقطه X,Y به رنگ سفید درآمده‌اند.

اگر یک نقطهٔ سفید به غیر از X بر روی پاره‌خط AB موجود باشد مسأله حل می‌شود (زیرا آن نقطه با دو نقطهٔ X,Y تشکیل یک مثلث قائم‌الزاویه می‌دهد). از این رو می‌توان فرض کرد که تمامی نقاط روی پاره‌خط AB به غیر از X، سیاه هستند. فرض کنید $Z_۱,C_۱$ به ترتیب پای عمودهای وارد از Z و C بر AB باشند. واضح است که X متمایز از $Z_۱,Z_۱$ است، در نتیجه $C_۱,Z_۱$ به رنگ سیاه هستند. اگر نقطهٔ Z سیاه باشند. سپس سه رأس مثلث قائم‌الزاویه $A\overset{\triangle}{Z}Z_۱$ همرنگ می‌شوند و همین‌طور، اگر نقطهٔ C سیاه باشد سپس سه رأس مثلث قائم‌الزاویه همرنگ $A\overset{\triangle}{C}C_۱$ می‌شوند. پس می‌توان فرض کرد که دو نقطهٔ Z,C به رنگ سفید هستند. حال مثلث قائم‌الزاویهٔ $C\overset{\triangle}{Y}Z$ را در نظر بگیرید. سه رأس این مثلث به رنگ سفید هستند.

۱۶. سعی می‌کنیم حکم کلی‌تر زیر را با استقراء ثابت کنیم:

$$\sqrt{m\sqrt{(m+۱)\sqrt{\cdots\sqrt{n}}}}<m+۱\quad,\quad ۱\le m\le n\quad(*)$$

یک n طبیعی دلخواه را در نظر بگیرید. به استقراء بر روی m ثابت می کنیم که رابطهٔ بالا به ازای هر m ، $۲\le m\le n$، برقرار است. به ازای $m=n$ به رابطهٔ $\sqrt{n}<n+۱$ می‌رسیم که رابطهٔ درستی است. فرض می‌کنیم رابطهٔ (*) به ازای $m=k+۱$ برقرار باشد و ثابت می‌کنیم به‌ازای $m=k$ نیز برقرار است یعنی:

$$\sqrt{(k+۱)\sqrt{(k+۲)\sqrt{\cdots\sqrt{n}}}}<k+۲\overset{?}{\Longrightarrow}\sqrt{k\sqrt{(k+۱)\sqrt{(k+۲)\sqrt{\cdots\sqrt{n}}}}}<k+۱$$

MATH75.IR

داریم که:

$$\sqrt{k\sqrt{(k+1)\sqrt{(k+2)\sqrt{\cdots\sqrt{n}}}}} < \sqrt{k(k+2)} < k+1$$

بدین ترتیب حکم استقراء ثابت می‌شود.

اگر در رابطهٔ (*)، m را برابر ۲ قرار دهیم به حکم مسأله می‌رسیم که در بالا ثابت شد.

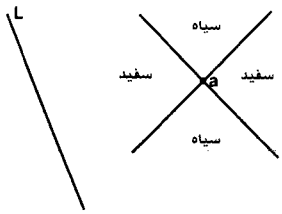
۱۷. فرض کنید درجهٔ یک رأس $2n+1$ باشد. این $2n+1$ یالی که از رأس مفروض خارج می‌شوند $2n+1$ ناحیه به وجود می‌آورند. این نواحی را به ترتیب از ۱ تا $2n+1$ شماره‌گذاری می‌کنیم. اگر ناحیه ۱ را با سفید رنگ کنیم باید ناحیه ۲ را با سیاه، ناحیه ۳ را با سفید، ناحیهٔ ۴ را با سیاه، ...، ناحیهٔ $2n$ را با سیاه و ناحیهٔ $2n+1$ را با سفید رنگ کنیم. ولی در این صورت دو ناحیهٔ مجاور ۱ و $2n+1$ همرنگ می‌شوند. در نتیجه اگر درجهٔ یک رأس گراف فرد باشد، سپس آن گراف را نمی‌توان به‌طور مناسبی رنگ‌آمیزی کرد. گراف مسطح G را در نظر بگیرید به طوری که درجهٔ هر رأس آن عددی زوج باشد. با استقراء بر روی تعداد یالهای G ثابت می‌کنیم که نواحی G را می‌توان به طور مناسبی با دو رنگ، رنگ‌آمیزی کرد. اگر گراف G دو یال داشته باشد که درستی حکم واضح است. فرض کنید حکم مسأله برای تمامی گراف‌های مسطحی که درجهٔ هر رأس آنها عددی زوج است و کمتر از n یال دارند درست باشد. ثابت می‌کنیم حکم برای گراف G با n یال نیز درست است. یک رأس از G مثل A را در نظر بگیرید. از A شروع کرده و به ترتیب روی یالها حرکت می‌کنیم و همچنین از روی هیچ یالی دوبار عبور نمی‌کنیم. این عمل را آنقدر ادامه می‌دهیم تا رأسی مثل B، دوبار در این مسیر ظاهر شود. (چنین رأسی وجود دارد زیرا تعداد یالها متناهی است ولی ما می‌توانیم تا بی‌نهایت (عدد خیلی بزرگ) بار این عمل را انجام دهیم).

در نتیجه در مسیر بالا دوری مثل c وجود دارد که رأس B نیز در آن قرار دارد. این دور لااقل دویال دارد. یالهای این دور را از G حذف می‌کنیم تا گراف G' به دست آید. پر واضح است که باز هم درجهٔ هر رأس در گراف G' عددی زوج است و همچنین تعداد یالهای G' از n کمتر است. در نتیجه ما می‌توانیم نواحی گراف G' را با دو رنگ سیاه و سفید به طور مناسبی رنگ‌آمیزی کنیم. حال دور c را به G' اضافه کنید تا G به دست آید، هر ناحیه‌ای که درون c دور قرار دارد رنگش را معکوس کنید یعنی از سیاه به سفید و از سفید به سیاه تبدیل کنید. ادعا می‌کنیم گراف جدید به طرز مناسبی رنگ‌آمیزی شده است. فرض کنید دو ناحیهٔ مجاور در G در یال a مشترک باشند. اگر a متعلق به c نباشد سپس بر طبق فرض استقراء این دو ناحیه همرنگ نیستند. اگر a متعلق به c باشد در این صورت یکی از این نواحی درون c و دیگری بیرون c است. در بالا وقتی که c را از G حذف کرده بودیم این دو ناحیه به یک ناحیه در G' تبدیل شده بودند یعنی این دو ناحیه همرنگ بودند ولی با اضافه کردن c به G'، رنگ ناحیه‌ای که درون c قرار دارد را معکوس کردیم در نتیجه این دو ناحیهٔ مجاور همرنگ نیستند.

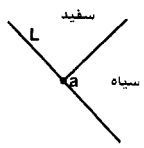
۱۸. به مسأله به دید گراف نگاه کنید یعنی هر نقطه‌ای که محل برخورد دو خط است را یک رأس گراف در نظر بگیرید و همچنین این n خط را یالهای گراف. درجهٔ هر رأس گراف عددی زوج و یا دقیق‌تر برابر ۴ است [محل

MATH75.IR

برخورد دو خط، ۴ نیم‌خط ایجاد می‌کند]. در نتیجه بر طبق مسأله قبل می‌توان نواحی این گراف را با دو رنگ سفید و سیاه طوری رنگ‌آمیزی کرد که هیچ دو ناحیهٔ مجاوری همرنگ نباشند. یک ناحیهٔ دلخواه از نواحی به وجود آمده توسط این n خط را در نظر بگیرید. فرض کنید تعداد رئوسی که روی مرز این ناحیه قرار دارند برابر a باشد. واضح است که $a \leq n$ ۳. اگر این ناحیه به رنگ سفید رنگ‌آمیزی شده بود به آن عدد $a+$ و اگر به رنگ سیاه رنگ‌آمیزی شده بود به آن عدد $a-$ را نسبت می‌دهیم. خط دلخواهی (مثل l) از این n خط را در نظر بگیرید. ثابت می‌کنیم مجموع اعدادی که در طرف راست این خط نوشته شده است برابر صفر است. (برای طرف چپ این خط نیز به همین ترتیب ثابت می‌شود).



رأس دلخواهی مثل a را در نظر بگیرید که در طرف راست خط مفروض قرار دارد. اگر a روی l نباشد سپس چهار ناحیه‌ای که a در آن مشترک است همگی در سمت راست l قرار دارند. از این ۴ ناحیه، ۲ ناحیهٔ آن سفید است که در هر کدام از این ۲ ناحیه ، a رأس یک بار شمرده شده است. و همچنین ۲ ناحیهٔ آن سیاه است که در هر کدام از این ۲ ناحیه، رأس a یکبار کم شده است. در نتیجه در این نواحی، رأس a به تعداد بار $۰ = ۱ - ۱ - ۱ + ۱$ بار شمرده شده است. اگر a روی l باشد. سپس دو ناحیه وجود دارند که در a مشترک هستند و همچنین در سمت راست l قرار دارند. از این دو ناحیه، یکی به رنگ سفید است که در آن رأس a یکبار شمرده شده است و دیگری به رنگ سیاه است که در آن رأس a یکبار کم شده است. در نتیجه در این دو ناحیه رأس a به تعداد $۰ = ۱ - ۱$ بار شمرده شده است. بدین ترتیب ثابت می‌شود که مجموع اعدادی که در سمت راست l نوشته شده‌اند برابر صفر است.



۱۹. دو جملهٔ اول دنباله عبارتند از $a_۰ = ۹, a_۱ = ۲۲۵۹۹$. محاسبهٔ $a_۲$ وقت‌گیر است ولی اگر سعی کنید این عمل را انجام دهید به این نتیجه می‌رسید که در پایان بسط دهدهی عدد $a_۲$ چندین رقم ۹ وجود دارد. شاید خودتان بتوانید با اندکی شمّ ریاضی حدس بزنید که به ازای هر n صحیح نامنفی، بسط دهدهی a_n لااقل به ۲^n تا رقم ۹ ختم می‌شود. این حدس را با استقراء بر روی n ثابت می‌کنیم. به ازای $n = ۰$ و یا $a_۰ = ۹$ درستی حکم واضح است. فرض کنید حکم به ازای $n = k$ درست باشد و ثابت می‌کنیم به ازای $n = k + ۱$ نیز درست است، عدد طبیعی α را در نظر بگیرید. فرض کنید که در پایان بسط دهدهی α، لااقل t تا رقم ۹ موجود باشد، در این صورت عدد طبیعی β موجود است به طوری که $\alpha = ۱۰^t\beta - ۱$ [زیرا $۱۰^t \nmid \alpha + ۱$]. در نتیجه عدد طبیعی a موجود است به طوری که $a_k = ۱۰^{۲^k}a - ۱$. از این رو داریم:

$$a_{k+۱} = ۳a_k^۴ + ۴a_k^۳ = ۳(۱۰^{۲^k}a - ۱)^۴ + ۴(۱۰^{۲^k}a - ۱)^۳ = ۳a^۴۱۰^{۴\times۲^k} - ۱۲a^۳۱۰^{۳\times۲^k} +$$

$$۱۸a^۲۱۰^{۲\times۲^k} - ۱۲a۱۰^{۲^k} + ۳ + ۴a^۳۱۰^{۳\times۲^k} - ۱۲a^۲۱۰^{۲\times۲^k} + ۱۲a۱۰^{۲^k} - ۴ = b\cdot۱۰^{۲^{k+۱}} - ۱$$

MATH75.IR

بدین ترتیب حکم استقراء ثابت می‌شود. از این رو عدد $a_{۱۰}$ به لااقل $۲^{۱۰}$ تا رقم ۹ ختم می‌شود و $۱۰۲۴ = ۲^{۱۰} > ۱۰۰۰$.

۲۰. داریم که

$$۲ = \alpha^{۰} + \frac{۱}{\alpha^{۰}} \in Z \quad , \quad \alpha^{۱} + \frac{۱}{\alpha^{۱}} \in Z$$

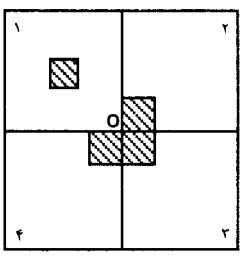
به استقراء بر روی n ثابت می‌کنیم که اگر حکم به ازای $n, n-۱$ برقرار باشد سپس به ازای $n+۱$ نیز برقرار است:

$$\alpha^{n+۱} + \frac{۱}{\alpha^{n+۱}} = \left(\alpha + \frac{۱}{\alpha}\right)\left(\alpha^{n} + \frac{۱}{\alpha^{n}}\right) - \left(\alpha^{n-۱} + \frac{۱}{\alpha^{n-۱}}\right)$$

از رابطهٔ بالا درستی حکم استقراء نتیجه می‌شود. در نتیجه:

$$\alpha^{n} + \frac{۱}{\alpha^{n}} \in Z \ , \ n \in N$$

۲۱. به استقراء بر روی n حکم مسأله را ثابت می‌کنیم. به‌ازای $n = ۱$ درستی حکم واضح است. فرض کنید به ازای n حکم مسأله برقرار باشد و برای $n+۱$ ثابت می‌کنیم. جدول $۲^{n+۱} \times ۲^{n+۱}$ را در نظر بگیرید به طوری که یک خانه از آن برداشته شده است.



این جدول را به ۴ مربع برابر $۲^{n} \times ۲^{n}$ تقسیم‌می‌کنیم. این مربعها را به ترتیب با اعداد $۱, ۲, ۳, ۴$، شماره‌گذاری می‌کنیم. با استفاده از تقارن می‌توان فرض کرد که خانهٔ حذف شده در مربع ۱ قرار دارد. فرض کنید o مرکز مربع باشد. در هر کدام از مربعهای $۲, ۳, ۴$، یک مربع کوچک قرار دارد که o رأسی از آن است، این سه مربع کوچک را حذف کنید تا مربعهای جدید $۴', ۳', ۲'$ به دست آیند. برطبق فرض استقراء هر کدام از مربعهای $۱, ۲', ۳', ۴'$ را می‌توان با شکلهای L مانند پوشاند [زیرا هر کدام از این مربعها به صورت $۲^{n} \times ۲^{n}$ هستند که یک خانه از آن حذف شده است]. حال ۳ مربعی که از مربعهای $۲, ۳, ۴$ حذف کردیم را با یک L می‌پوشانیم. بدین ترتیب کل شکل را توانستیم به طور مطلوبی بپوشانیم.

۲۲– حکم را با استقرای قوی بر روی n ثابت می‌کنیم. به ازای $n = ۱$ داریم $۱ - !(۱ + ۱) = ۱$. فرض کنید مجموع مورد نظر برای مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n-k\}$ برابر $(n-k+۱)! - ۱$ باشد $(۱ \leq k \leq n-۱)$، ثابت می‌کنیم این مجموع برای مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n-۱, n\}$ برابر $(n+۱)! - ۱$ است. تعریف می‌کنیم:

$$S_{n-k} = \sum_{۱ \leq \alpha_۱ < \alpha_۲ < \cdots < \alpha_i \leq n-k, |\alpha_{t+۱} - \alpha_t| \geq ۲} (\alpha_۱ \alpha_۲ \cdots \alpha_i)^{۲} = (n-k+۱)! - ۱ \quad ۱ \leq k \leq n-۱$$

و

$$S_n = \sum_{۱ \leq \alpha_۱ < \alpha_۲ < \cdots < \alpha_i \leq n, |\alpha_{t+۱} - \alpha_t| \geq ۲} (\alpha_۱ \alpha_۲ \cdots \alpha_i)^{۲}$$

MATH75.IR

داریم که

$$S_n = \sum_{1\le\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_i\le n, |>\alpha_{t+1}-\alpha_t|\ge 2} (\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_i)^2$$

$$= \sum_{1\le\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_i\le n-1, |\alpha_{t+1}-\alpha_t|\ge 2} (\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_i)^2 + \sum_{1\le\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_i\le n-2, |\alpha_{t+1}-\alpha_t|\ge 2} +(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_i n)^2$$

$$= S_{n-1} + \left[\sum_{1\le\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_i\le n-2, |\alpha_{t+1}-\alpha_t|\ge 2} (\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_i)^2\right] \times n^2 + n^2$$

در نتیجه:

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2} \times n^2 + n^2 = (n! - 1) + ((n-1)! - 1)n^2 + n^2 = (n+1)! - 1$$

۲۳. با استقراء بر روی k درستی حکم را ثابت می‌کنیم، به ازای $k = 0$ درستی حکم واضح است. فرض کنید حکم به ازای k درست باشد و به ازای $k+1$ درستی حکم را ثابت می‌کنیم. مجموعه‌ای با $2^{k+2} - 1 = 2 \times 2^{k+1} - 1$ صحیح در نظر بگیرید. بر طبق فرض استقراء می‌توان 2^k عدد از بین این اعداد انتخاب کرد به طوری که مجموع آنها بر 2^k بخشپذیر باشد. حال این 2^k عدد را از مجموعهٔ اولی حذف می‌کنیم، مجموعهٔ جدید $2^{k+2} - 2^k - 1$ عضو دارد. می‌دانیم که $2^{k+2} - 2^k - 1 > 2^{k+1} - 1$، در نتیجه از این مجموعه نیز می‌توان 2^k عضو انتخاب کرد به طوری که مجموع آنها بر 2^k بخشپذیر باشد. دوباره این 2^k عدد را از مجموعه‌ای که در بالا به دست آوردیم حذف می‌کنیم تا مجموعهٔ دیگری با $2^{k+2} - 2^k - 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$ به دست آید. بر طبق فرض استقراء باز هم می‌توان 2^k عضو از این مجموعه انتخاب کرد به طوری که مجموع آنها 2^k بر بخشپذیر باشد. از این رو سه گروه کاملاً متمایز 2^k عضوی به دست آوردیم به طوری که مجموع عناصر هر کدام به ترتیب برابر $2^k a, 2^k b, 2^k c$ است. بر طبق اصل لانهٔ کبوتر از بین سه عدد a, b, c دو عدد هستند که دارای مجموع زوج هستند. این دو عدد را a, b بگیرید ($2|a+b$). حال دو گروهی که دارای مجموع عناصر $2^k a, 2^k b$ هستند را در یک گروه جدید قرار دهید. این گروه $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ عضو دارد و همچنین مجموع عناصر این گروه برابر است با $2^k(a+b)$ که بر 2^{k+1} بخشپذیر است.

۲۴. با استقرای قوی بر روی n حکم مسأله را ثابت می‌کنیم. به ازای $n = 1, 2$ داریم $F_1 = 1, F_2 = 2$. فرض کنید حکم مسأله به ازای تمامی اعداد طبیعی کمتر از n درست باشد، ثابت می‌کنیم حکم مسأله به ازای n نیز درست است. دو حالت زیر را در نظر بگیرید:

۱) k ای وجود دارد به طوری که $n = F_k$. در این صورت n را به صورت F_k می‌نویسیم.

۲) k ای وجود دارد به طوری که $F_k < n < F_{k+1}$. عدد $n - F_k$ را در نظر بگیرید. داریم که:

$$n - F_k < F_{k+1} - F_k = F_{k-1} < F_k < n \quad \Longrightarrow \quad n - F_k < n$$

MATH75.IR

در نتیجه بر طبق فرض استقراء، عدد $n - F_k$ را می‌توان به صورت مجموع جملات غیر متوالی دنبالهٔ فیبوناچی نوشت:

$$n - F_k = \sum_{j=1}^{m} F_{ij} \quad |i_{j+1} - i_j| \geq 2 \; j = 1, 2, \ldots, m-1$$

هیچ کدام از F_{ij}ها با F_k در دنبالهٔ فیبوناچی متوالی نیست زیرا:

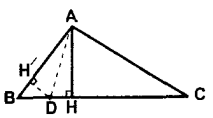
$$n < F_{k+1} = F_k + F_{k-1} \quad \Longrightarrow \quad F_{ij} \leq n - F_k < F_{k-1}$$

در نتیجه مجموع $n = \sum_{j=1}^{m} F_{ij} + F_k$ یک مجموع مطلوب است.

۲۵. ابتدا لم زیر را مطرح و ثابت می‌کنیم:

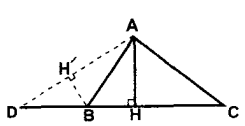
لم سیلوستر: n نقطه در صفحه مفروض است. اگر این n نقطه همگی روی یک خط راست نباشند سپس خطی وجود دارد که دقیقاً از دو تا از این نقاط بگذرد.

اثبات: تمامی مثلثهایی که از به هم وصل کردن هر سه نقطهٔ غیر همخط از این n نقطه به یکدیگر به دست می‌آید را در نظر بگیرید. می‌دانیم که هر مثلث دارای ۳ ارتفاع است. در نتیجه این مثلثها مجموعه‌ای از چندین ارتفاع را پدید می‌آورند. در بین این ارتفاعها، یکی از ارتفاعهایی که کمترین طول را دارد در نظر بگیرید. فرض کنید این ارتفاع برای مثلث ABC باشد که از رأس A بر ضلع BC عمود شده است. ادعا می‌کنیم بر روی خطی که نقطهٔ B را به C وصل می‌کند به غیر از C, B هیچ نقطهٔ دیگری از n نقطهٔ مفروض قرار ندارد. برای اثبات این ادعا فرض خلف می‌کنیم. فرض کنید نقطهٔ D (غیر از C, B) متعلق به n نقطهٔ مفروض باشد و همچنین روی خط BC قرار داشته باشد. برای مکان نقطهٔ D، ۴ حالت زیر را داریم:



۱) D بین H, B قرار دارد. مثلث ABD را در نظر بگیرید، ارتفاع DH' از این مثلث دارای طول کمتری نسبت به AH است که بر طبق فرض ممکن نیست.

۲) D بین H, C قرار دارد. در این صورت ارتفاع DH' از مثلث ACD کوچکتر از AH است که ممکن نیست.



۳) D طرف چپ B قرار دارد. در این صورت ارتفاع BH' از مثلث ABD دارای طول کمتری نسبت به AH است که ممکن نیست.

۴) D طرف راست C قرار دارد. در این صورت ارتفاع CH' از مثلث ACD کوچکتر از AHاست که ممکن نیست.

بدین ترتیب لم ثابت می‌شود. حال به اثبات مسأله بازمی‌گردیم.

مسأله را با استقراء بر روی n ثابت می‌کنیم. به ازای $n = 1$ درستی حکم واضح است. فرض کنید حکم به ازای $n - 1$ نقطه درست باشد. حال درستی حکم را به ازای n نقطه ثابت می‌کنیم. این n نقطه همگی روی یک خط قرار

MATH75.IR

ندارد در نتیجه بر طبق لم بالا، دو نقطه مثل a, b از این n نقطه وجود دارند به طوری که خطی که از a, b می‌گذرد، از هیچ نقطهٔ دیگری از این n نقطه عبور نمی‌کند. نقطهٔ a را از مجموعهٔ n نقطه مفروض حذف می‌کنیم. برای $n-1$ نقطهٔ باقیمانده دو حالت زیر به وجود می‌آید:

۱) همهٔ $n-1$ نقطهٔ باقیمانده روی یک خط قرار دارند. در نتیجه اگر از a به تمامی این $n-1$ نقطه وصل کنیم $n-1$ خط به وجود می‌آید که اگر با خطی که این $n-1$ نقطه روی آن قرار دارند در نظر گرفته شود، n خط متمایز به دست می‌آید.

۲) همهٔ $n-1$ نقطهٔ باقیمانده روی یک خط قرار ندارند. در نتیجه بر طبق فرض استقراء می‌توان لااقل $n-1$ خط متمایز رسم کرد به طوری که هر کدام از این خطوط لااقل از دو تا از این $n-1$ نقطه بگذرند. خطی که دو نقطهٔ a, b را به هم وصل می‌کند متمایز از این $n-1$ خط است، زیرا هر خطی از این $n-1$ خط، لااقل ۲ نقطه از $n-1$ نقطهٔ باقیمانده را دارد ولی خط ab فقط یک نقطهٔ b از $n-1$ نقطهٔ باقیمانده را دارد. بدین ترتیب خط ab با $n-1$ خط مفروض، n خط متمایز به وجود می‌آورند.

۲۶. ادعا می‌کنیم که m یا n هیچکدام نمی‌توانند برابر ۱ باشند. برای اثبات این ادعا فرض خلف می‌کنیم. فرض کنید m برابر ۱ باشد. در این صورت داریم

$$n = 1 + 1 + \cdots + 1 \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_n < nm = n$$

تناقض بالا درستی ادعا را نشان می‌دهد.

حکم مسأله را با استقراء بر روی $m+n$ ثابت می‌کنیم. پایهٔ استقراء را $m+n=4$ و یا $m=n=2$ می‌گیریم. درستی پایهٔ استقراء واضح است (زیرا $2 \leq x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \leq 3$ در نتیجه از بین x_1, x_2 و همچنین از بین y_1, y_2 لااقل یکی برابر ۱ است. به عنوان مثال اگر $x_1 = y_1 = 1$ باشد کافی است بنویسیم $x_2 = y_2$). فرض کنید حکم به ازای $m+n=k \ (4 \leq k)$ برقرار باشد، ثابت می‌کنیم برای $m+n=k+1$ نیز برقرار است. اعداد صحیح و مثبت $y_1, y_2, \ldots, t_m, x_1, x_2, \ldots, x_n$ را در نظر بگیرید به طوری که:

$$S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_m \ , \ S < mn \ , m+n = k+1$$

فرض کنید x_1 بزرگترین عدد در بین x_i هاو y_1 بزرگترین عدد در بین y_i ها باشد [برحسب تقارن می‌توان چنین فرضی را انجام داد]، اگر x_1 برابر y_1 باشد واضح است که مسأله حل می‌شود (زیرا اگر $x_1 = y_1$ سپس $S - x_1 = S - y_1$). بنابراین می‌توان فرض کرد که $x_1 > y_1$، داریم که:

$$S' = (x_1 - y_1) + x_2 + \cdots + x_n = y_2 + y_3 + \cdots + y_m \ , \ n + (m-1) = k$$

MATH75.IR

همچنین داریم $S' < (m-1)n$ زیرا:

$$y_1 \geq \frac{S}{m} \quad \Longrightarrow \quad S' = S - y_1 \leq S - \frac{S}{m} < mn - \frac{mn}{m} = n(m-1)$$

بنابراین بر طبق فرض استقراء می‌توان تعدادی از اعداد $y_2, y_3, \ldots, y_n$ و همچنین تعدادی از اعداد $(x_1 - y_1), x_2, \ldots, x_n$ را انتخاب کرد به طوری که مجموع برابر داشته باشند. فقط باید دقت شود که اگر یکی از این اعداد انتخاب شده، عدد $x_1 - y_1$ باشد سپس y_1 را به سمت دیگر تساوی یعنی جایی که y_i ها قرار دارند انتقال دهیم تا یک طرف تساوی برحسب x_i ها و طرف دیگر فقط برحسب y_i ها باشد.

۲۷. فرض کنید می‌خواهیم از بین نفر n، یک گروه متشکل ازیک انجمن، یک رئیس، یک معاون و یک منشی انتخاب کنیم البته لازم نیست افراد انتخاب شده در مقامهای مختلف، متمایز باشند. فرض کنید گروه انتخاب شده ما k عضو داشته باشد، در این صورت به $\binom{n}{k}$ طریق می‌توان این گروه را انتخاب کرد.از بین افراد این گروه می توان به k طریق یک رئیس، به k طریق یک معاون و به k طریق یک منشی انتخاب کرد. در نتیجه تعداد حالتهایی که می‌توان یک انجمن، یک رئیس، یک معاون و یک منشی انتخاب کرد برابر است با $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^3$.

حال به طریقی دیگر، دوباره تعداد حالتهای مورد نظر را می‌شمریم. اگر رئیس و معاون و منشی از هم متمایز باشند سپس به $n(n-1)(n-2)$ طریق می‌توان این سه نفر را انتخاب کرد و همچنین انجمن را به 2^{n-3} طریق می‌توان انتخاب کرد. اگر دو تا از سه شخص رئیس، معاون و منشی یکی باشند سپس به $3n(n-1)$ طریق می‌توان این افراد را انتخاب کرد و همچنین انجمن را به 2^{n-2} طریق می‌توان انتخاب کرد. اگر رئیس و معاون و منشی یکی باشد سپس این فرد را به n طریق و انجمن را به 2^{n-1} طریق می‌توان انتخاب کرد. در نتیجه:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^3 = n(n-1)(n-2)2^{n-3} + 3n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n^2(n+3)2^{n-3}$$

۲۸. فرض کنید از بین n شی انتخاب شده، α شی آن از بین $2n+1$ شی متمایز و $n-\alpha$ شی آن از بین N شی یکسان انتخاب شده باشد. α شی متمایز را به $\binom{2n+1}{\alpha}$ طریق می‌توان انتخاب کرد. واضح است که $n-\alpha$ شئ یکسان را از بین n شئ یکسان به یک طریق می‌توان انتخاب کرد. در نتیجه:

$$\text{تعداد حالات مورد نظر} = \sum_{\alpha=0}^{n} \binom{2n+1}{\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^{n} \left[\binom{2n+1}{\alpha} + \binom{2n+1}{2n+1-\alpha} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{\alpha} = \frac{1}{2} \times 2^{2n+1} = 2^{2n}$$

۲۹. ثابت می‌کنیم تناظر یک به یکی بین زیرمجموعه‌های r عضوی X که شامل هیچ دو عضو متوالی از X نمی‌شوند و زیرمجموعه‌های r عضوی مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, n-(r-1)\}$ وجود دارد. فرض کنید $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\}$ یک زیرمجموعهٔ r عضوی از X باشد که شامل هیچ دو عضو متوالی از X نشود. می‌توان فرض

MATH75.IR

کرد که $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_r$، در نتیجه

$$\alpha_1 < \alpha_2 - 1 < \alpha_3 - 2 < \cdots < \alpha_{r-1} - (r-2) < \alpha_r - (r-1) \leq n - (r-1)$$

بنابراین داریم: $\{\alpha_1, \alpha_2 - 1, \ldots, \alpha_r - (r-1)\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n-(r-1)\}$. همچنین فرض کنید $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r\}$ یک زیرمجموعهٔ r عضوی از مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, n-(r-1)\}$ باشد. می‌توان فرض کرد که $\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_r$ در نتیجه $\beta_1 < \beta_2 + 1 < \cdots < \beta_{r-1} + (r-2) < \beta_r + (r-1)$. واضح است که مجموعهٔ $\{\beta_1, \beta_2 + 1, \cdots, \beta_r + (r-1)\}$ یک زیرمجموعهٔ r عضوی از X است به طوری که شامل هیچ دو عضو متوالی از X نمی‌شود. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های مورد نظر برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, n-(r-1)\}$، که برابر است با $\binom{n-r+1}{r}$.

۳۰. به ازای هر زیرمجموعهٔ Y از X، یک دنبالهٔ n تایی از صفر و یک تشکیل می‌دهیم به طوری که برای هر i، $1 \leq i \leq n$، اگر عدد i متعلق به Y باشد سپس i امین عضو دنباله را برابر یک قرار داده و در غیر این صورت، برابر صفر قرار می‌دهیم. هدف ما در این مسأله پیدا کردن تعداد دنباله‌های n تایی از صفر و یک است به طوری که شامل هیچ دو ۱ متوالی نشود. این تعداد را برابر a_n بگیرید. برای هر دنبالهٔ n تایی از صفر و یک که در این شرط صدق کند دو حالت زیر به وجود می‌آید:

۱) اولین عضو دنباله برابر ۰ است. در نتیجه دومین عضو دنباله می‌تواند هر کدام از اعداد ۰ ,۱ باشد. از آنجا که $n-1$ عضو دیگر دنباله در شرط بالا صدق می‌کنند تعداد این دنباله‌ها برابر a_{n-1} است.

۲) اولین عضو دنباله برابر ۱ است. در نتیجه دومین عضو دنباله باید برابر ۰ باشد. سومین عضو دنباله می‌تواند هر کدام از اعداد ۰ و ۱ باشد. از آنجا که $n-2$ عضو دیگر دنباله در شرط بالا صدق می‌کنند تعداد این دنباله‌ها برابر a_{n-2} است.

از این رو داریم که:

$$a_1 = 2\ ,\ a_2 = 3\ ,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad n \geq 3$$

در نتیجه $a_n = f_{n+2}$ که در آن f_n جملهٔ n ام دنبالهٔ فیبوناچی است. بنابراین:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$$

نکته: بر طبق مسأله بالا می‌توان نتیجه گرفت که:

$$a_n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n-r+1}{r}$$

MATH75.IR

۳۱. فرض کنید مجموع اعداد روی هر ۴ یال مشترک در یک رأس برابر k باشد. اگر این اعداد را به ازای تمامی رأسهای مربع با هم جمع کنیم عدد $8k$ به دست می‌آید. از طرفی عدد روی هر یال مربع در این مجموع دوبار حساب شده است زیرا هر یال دو رأس انتهایی دارد. در نتیجه:

$$8k = 2(\text{مجموع اعداد روی یالها}) = 2(1+2+\cdots+12) = 132 \quad \Longrightarrow \quad 8 \mid 132$$

رابطهٔ بالا تناقض است زیرا $8 \nmid 132$. بنابراین یالهای مربع را به طور مطلوب نمی‌توان شماره‌گذاری کرد.

۳۲. یک گراف ۹ رأسی در نظر بگیرید به طوریکه هر رأس آن، متناظر با یکی از اعداد $1, 2, \ldots, 9$ باشد. دو رأس از این گراف را به هم وصل می‌کنیم اگر مجموع اعداد متناظر با آن دو رأس بر ۳، ۵ و ۷ بخشپذیر نباشد. در اینجا هدف ما پیدا کردن دور ساده‌ای است که هر ۹ رأس گراف را شامل شود. واضح است که رئوس متناظر با اعداد ۱ و ۲ و ۴ هر کدام دو یال دارند. بنابراین اگر چنین دوری موجود باشد باید یالهای ختم شده به رئوس متناظر با اعداد ۱ و ۲ و۴ در آن باشند. تعداد این یالها، ۶ تا است. به راحتی از روی شکل می‌توان ۳ یال دیگر را هم پیدا کرد به طوری که تشکیل یک دور ۹ یالی بدهند یعنی $4, 7, 1, 3, 8, 5, 6, 2, 9$

۳۳. می‌توان فرض کرد که مجموعهٔ n عضوی مسأله برابر $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ باشد. به ازای هردو زیرمجموعهٔ مجزای A, B از X، یک دنبالهٔ n تایی از اعداد ۰ و ۱ و ۲ می‌سازیم به طوری که به ازای هر i، $1 \leq i \leq n$، اگر i متعلق به A باشد، سپس i امین عضو دنباله را برابر ۰ می‌گذاریم. اگر i متعلق به B باشد، i امین عضو دنباله را برابر ۱ می‌گیریم و اگر به هیچکدام از A, B متعلق نباشد، i امین عضو دنباله را برابر ۲ می‌گیریم. واضح است که در این دنباله هر کدام از اعداد ۰ و ۱ باید لااقل یکبار آمده باشند زیرا A, B بر طبق فرض ناتهی هستند. هدف ما پیدا کردن تعداد دنباله‌های n عضوی از اعداد ۰ و ۱ و ۲ است به طوری که اعداد ۰ و ۱ در آن ظاهر شده باشند، این تعداد برابر است با 3^n (تعداد کل دنباله‌ها) منهای تعداد دنباله‌های n عضوی از اعداد ۰ و ۱ و ۲ به طوری که عدد ۰ یا ۱ در آن ظاهر نشده باشد. (این مقدار را برابر τ بگیرید.) به ازای $i = 0, 1$، A_i را مجموعهٔ دنباله‌های n عضوی از اعداد ۰ و ۱ و ۲ بگیرید به طوری که عدد i در آن ظاهر نشده باشد. داریم:

$$|A_0| = |A_1| = 2^n \ , \ |A_1 \cap A_2| = 1$$

(دقت شود که $A_1 \cap A_2$ شامل تمام دنباله‌های n عضوی‌ای است که فقط ۲ در آن ظاهر شده است.) بر طبق اصل شمول و عدم شمول داریم:

$$\tau = |A_0 \cup A_1| = |A_0| + |A_1| - |A_1 \cap A_2| = 2^{n+1} - 1$$

در نتیجه: $\text{تعداد دنباله‌های مطلوب} = 3^n - \tau = 3^n - 2^{n+1} + 1$

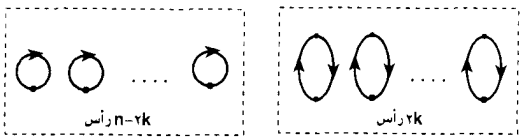
برای به دست آوردن تعداد زیرمجموعه‌های A, B مطلوب، باید عدد بالا را بر ۲ تقسیم کرد زیرا انتخاب دو زیرمجموعهٔ A, B با دو زیرمجموعهٔ A, B فرقی ندارد ولی دنباله‌های متناظر با آنها متفاوت هستند. در نتیجه تعداد

MATH75.IR

طرق مورد نظر برابر است با:

$$\frac{۳^n + ۱}{۲} - ۲^n$$

۳۴. گراف n رأسی G را در نظر بگیرید به طوری که هر رأس آن متناظر با یک عضو جایگشت p باشد. در این گراف رأس x را به طور جهتدار به y وصل می‌کنیم اگر $p(x) = y$. به راحتی می‌توان ثابت نمود که G مجموعه‌ای از چندین طوقه و چندین دور ۲ یالی مجزا از هم است. فرض کنید این گراف k تا دور ۲ یالی داشته باشد $(k \leq \lceil \frac{n}{۲} \rceil)$.



حال می‌خواهیم ببینیم به چند طریق می‌توان اعداد $۱, ۲, \ldots, n$ را به رئوس گراف مقابل نسبت داد. واضح است که برای هر جور نسبت دادن اعداد به رئوس G، دقیقاً یک جایگشت مطلوب p وجود دارد زیرا اگر عدد x را به رأس طوقه‌دار نسبت دهیم به دست می‌آید که $p(x) = x$ و یا $pp(x) = x$، و اگر اعداد x, y را به یک دور ۲ یالی نسبت دهیم به دست می‌آید که $y = p(x), x = p(y)$، در نتیجه $pp(y) = y, pp(x) = x$. $۲k$ عددی که رأسهای متناظرشان در دورهای ۲ یالی آمده‌اند را به $\binom{n}{۲k}$ طریق می‌توان انتخاب کرد. فرض کنید این اعداد، $\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_{۲k}$ باشند. عدد $\alpha_۱$، با یکی از اعداد $\alpha_۲, \ldots, \alpha_{۲k}$ در یک دور قرار دارد این عدد را به $۲k - ۱$ طریق می‌توان انتخاب کرد. فرض کنید این عدد برابر $\alpha_۲$ باشد. حال عدد $\alpha_۳$، با یکی از اعداد $\alpha_۴, \ldots, \alpha_{۲k}$ در یک دور قرار دارد این عدد را به $۲k - ۳$ طریق می‌توان انتخاب کرد. اگر به همین ترتیب این رویه را ادامه دهیم، به دست می‌آید تعداد حالاتی که می‌توان اعداد $\alpha_۱, \ldots, \alpha_{۲k}$ را در k تا دور ۲ یالی متشابه قرار داد برابر است با:

$$۱ \cdot ۳ \cdot ۵ \cdots, (۲k - ۳)(۲k - ۱) = \frac{۲k!}{۲^k k!}$$

از این رو به دست می‌آید:

$$\text{تعداد جایگشت‌های مورد نظر} = \sum_{k=۰}^{\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor} \binom{n}{۲k} \frac{۲k!}{۲^k k!}$$

۳۵. تعریف می‌کنیم $X = \{۱, ۲, \ldots, ۴۹\}$. تعداد زیرمجموعه‌های ۶ عضوی X که شامل لااقل دو عضو متوالی از X است برابر است با تعداد کل زیرمجموعه‌های ۶ عضوی X $(\binom{۴۹}{۶})$، منهای تعداد زیرمجموعه‌های ۶ عضوی X که شامل هیچ دو عضو متوالی از X نیستند (این تعداد بر طبق مسأله ۴ برابر است با $\binom{۱+۶-۴۹}{۶}$). در نتیجه تعداد زیرمجموعه‌های مورد نظر برابر است با $\binom{۴۴}{۶} - \binom{۴۱}{۶}$، که تقریباً برابر ۴۹/۵٪ کل زیرمجموعه‌های ۶ عضوی X است.

۳۶. گراف n رأسی G را در نظر بگیرید به طوری که هر رأس آن متناظر با یک تنیس باز باشد. رأس x را به‌طور جهتدار به رأس Y وصل می‌کنیم اگر Y, X با هم بازی کرده باشند و همچنین Y از X برده باشد. ادعا می‌کنیم که لااقل $n - ۱$ بازی برای تعیین برنده لازم است. زیرا در غیر این صورت گراف G دارای n رأس و کمتر از $n - ۱$ یال

MATH75.IR

خواهد بود، از این رو بر طبق قضیه این گراف همبند نخواهد بود. بنابراین رأسهای G را به دو گروه A و B می‌توان افراز کرد به طوری که بین گروه A و گروه B هیچ یالی نباشد و یا به عبارت دیگر هیچ بازی‌ای بین افراد گروه A و گروه B انجام نشده باشد. در این صورت نمی‌توان یک برندهٔ نهایی تعیین کرد زیرا اگر a برندهٔ گروه A و b برندهٔ گروه B باشد از آنجا که بین b, a بازی‌ای انجام نشده است نمی‌توان گفت که a برندهٔ نهایی است و یا b. بنابراین لااقل $n-۱$ بازی لازم است. رویهٔ زیر کافی بودن $n-۱$ بازی برای مشخص کردن یک برنده را نشان می‌دهد. اول نفر ۱ بانفر ۲ بازی می‌کند، بعد برندهٔ این دو نفر با نفر ۳ بازی می‌کند، بعد برندهٔ بازی قبلی با نفر ۴ بازی می‌کند و ... و در نهایت برندهٔ بازی $n-۲$ ام با نفر $n-۱$ ام بازی می‌کند. برندهٔ این بازی، برندهٔ نهایی خواهد بود.

۳۷. به ازای $i = ۱,۲,\ldots,m$ ،A_i را مجموعهٔ تمام اعداد متعلق به مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,n\}$ می‌گیریم که بر p_i بخشپذیرند. واضح است که $A_۱ \cup A_۲ \cdots \cup A_m$ مجموعه همهٔ اعداد طبیعی نابیشتر از n است به طوری که نسبت به n اول نیستند. از این رو هدف ما پیدا کردن $n - |A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_m|$ است. داریم که

$$|A_{i_۱} \cap A_{i_۲} \cap A_{i_۳} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = \frac{n}{p_{i_۱} p_{i_۲} \cdots p_{i_k}}$$

[رابطهٔ بالا از آنجا به دست می‌آید که طرف چپ آن، برابر تعداد اعداد طبیعی نابیشتر از n است که بر $p_{i_۱} p_{i_۲} \cdots p_{i_k}$ بخشپذیرند]. بر طبق اصل شمول- عدم شمول داریم:

$$|A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_m| = \sum_i \frac{n}{p_i} - \sum_{i<j} \frac{n}{p_i p_j} + \sum_{i<j<k} \frac{n}{p_i p_j p_k} - \cdots$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \phi(n) &= n - |A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_m| \\ &= n - \sum_i \frac{n}{p_i} + \sum_{i<j} \frac{n}{p_i p_j} - \sum_{i<j<k} \frac{n}{p_i p_j p_k} + \cdots \\ &= n\left(۱ - \frac{۱}{p_۱}\right)\left(۱ - \frac{۱}{p_۲}\right) \cdots \left(۱ - \frac{۱}{p_m}\right) \end{aligned}$$

۳۸. به ازای $i = ۱,۲,\ldots,n$ ،A_i را برابر مجموعهٔ همهٔ توابع B_m از $B_n - \{i\}$ به می‌گیریم. واضح است که $A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_n$ برابر مجموعهٔ همه توابع غیر پوشا از B_m به B_n است، در نتیجه تعداد توابع پوشا از B_m به B_n برابر است با تعداد کل توابع از B_m به B_n منهای $|A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_n|$. می‌دانیم تعداد کل توابع از B_m به B_n برابر n^m است (زیرا هر عضو B_m به n حالت می‌تواند به یک عضو از B_n وصل شود). داریم که $|A_{i_۱} \cap A_{i_۲} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = (n-k)^m$، زیرا $A_{i_۱} \cap A_{i_۲} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ مجموعهٔ همهٔ توابع از B_m به $B_n - \{i_۱, i_۲, \ldots, i_k\}$ است. از این رو بر طبق اصل شمول—عدم شمول داریم:

$$|A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_n| = \binom{n}{۱}(n-۱)^m - \binom{n}{۲}(n-۲)^m + \binom{n}{۳}(n-۳)^m \cdots$$

MATH75.IR

در نتیجه

$$\begin{aligned} S(m,n) &= n^m - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \\ &= n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m - \binom{n}{3}(n-3)^m + \cdots \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^m \end{aligned}$$

نکته: اگر $n > m$ باشد بر طبق اصل لانهٔ کبوتر هیچ تابع پوشایی از B_m به B_n وجود ندارد، در نتیجه:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^m = 0 \qquad n > m$$

۳۹. به طور کلی به ازای هر n طبیعی ثابت می‌کنیم که بزرگترین زیرمجموعهٔ A از مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, n\}$ که شامل هیچ دو عدد x و $2x$ نشود دارای تعداد اعضای زیر است:

$$|A| = n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + \cdots \qquad (*)$$

به ازای هر i طبیعی فرد، حداکثر یکی از دو عدد i و $2i$ می‌توانند در مجموعهٔ A قرار داشته باشند، در نتیجه از دو مجموعهٔ

$$\{1, 3, 5, \ldots\} \quad , \quad \{2, 6, 10, \ldots\}$$

حداکثر $n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ عدد می‌تواند در A باشد به همین ترتیب از دو مجموعهٔ مضارب ۴ و مضارب ۸ عددهای فرد یعنی

$$\{4, 12, 20, \ldots,\} \quad , \quad \{8, 24, 40, \ldots\}$$

حداکثر $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor$ عدد می‌تواند در A باشد. با ادامهٔ این استدلال، عبارت $(*)$ ثابت می‌شود. البته با استفاده از ایدهٔ بالا می‌توان رابطهٔ $(*)$ را با اصل شمول- عدم شمول ثابت نمود یعنی بیان نمود که تعداد عناصر A برابرn، منهای تعداد عددهای زوج نابیشتر از n، به‌علاوهٔ تعداد عددهای مضرب ۴ نابیشتر از n، $\cdots$ است. به ازای $n = 2000$، از رابطهٔ $(*)$ نتیجه می‌گیریم که $|A| \leq 1999$. در نتیجه چنین A ای وجود ندارد.

۴۰. فاصلهٔ دو کلمهٔ A, B را تعداد مکانهایی تعریف می‌کنیم که در آن مکانها، A, B با هم فرق دارند و با علامت $|A - B|$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید $w_1, w_2, \ldots, w_p$ کلمه‌های n تایی از صفر و یک باشند به طوری که $|w_i - w_j| \geq 3$, $i \neq j$. W را مجموعهٔ تمام کلمه‌های n تایی از صفر و یک تعریف می‌کنیم. p مجموعهٔ $A_1, A_2, \ldots, A_p$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$A_i = \{\, k \mid k \in W \ , \ |w_i - k| \leq 1 \,\}$$

MATH75.IR

واضح است که $|A| = |A_۲| = \cdots = |A_p| = n + ۱$. ادعا می‌کنیم که A_i ها از هم مجزا هستند. برای اثبات این ادعا فرض کنید کلمهٔ k در دو مجموعهٔ A_j, A_i باشد. در این صورت $|w_i - k| \leq ۱$ و $|k - w_j| \leq ۱$ در نتیجه

$$۳ \leq |w_i - w_j| \leq |w_i - k| + |k - w_j| \leq ۲$$

تناقض بالا درستی ادعا را نشان می‌دهد. بنابراین

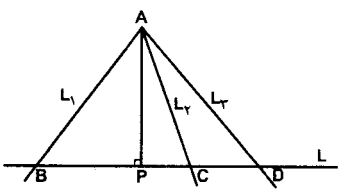
$$|A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_p| = |A_۱| + |A_۲| + \cdots + |A_p| = (n + ۱)P \quad (۱)$$

همچنین داریم $A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_p \subseteq W$، در نتیجه

$$|A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_p| \leq |W| = ۲^n \quad (۲)$$

از دو رابطهٔ (۱) و (۲) به دست می‌آوریم که $(n + ۱)p \leq ۲^n$ و یا $p \leq \frac{۲^n}{n+۱}$.

۴۱. از هر نقطهٔ تقاطع دو خط، بر هر کدام از این n خط، عمودی رسم می‌کنیم. در بین این پاره‌خط‌های عمود رسم شده، پاره‌خطی را در نظر بگیرید که دارای کمترین طول باشد. فرض کنید این پاره‌خط با طول مینیمم، Ap باشد که از نقطهٔ A بر خط L عمود رسم شده است. ادعا می‌کنیم که نقطهٔ A، سه خط $L_۱, L_۲, L_۳$ گذشته است. این سه خط، خط L را در سه نقطهٔ D, C, B قطع می‌کنند. بر طبق اصل لانهٔ کبوتر دو تا از این نقاط در یک طرف P قرار دارند. می‌توان فرض کرد که D, C در طرف راست P قرار دارند و همچنین $|PC| < |PD|$. در این صورت اگر از محل تقاطع دو خط $L, L_۲$، عمودی بر $L_۳$ رسم کنیم پاره‌خط CP به دست می‌آید که دارای طول کمتری نسبت به AP است. ولی برطبق فرض چنین چیزی ممکن نیست .



۴۲. در بین $۲n$ سطر و ستون جدول، آن سطر و یا ستونی را در نظر بگیرید که دارای کمترین تعداد مهره‌ها است. می‌توان فرض کرد که سطر i ام با k مهره دارای کمترین تعداد مهره‌نسبت به بقیهٔ سطرها و ستونها است. از آنجایی که جابجایی سطرها با یکدیگر و همچنین ستونها با یکدیگر هیچ تغییری در مسأله ایجاد نمی‌کند (مجموع مهره‌ها در هر سطر و ستون با این عمل تغییری نمی‌کند) می‌توان فرض کرد که مهره‌های سطر i ام در ستونهای $k, \ldots, ۲, ۱$ قرار دارند. در نتیجه هر کدام از این ستونها دارای لااقل k مهره و یا در کل این k ستون دارای لااقل $k^۲$ مهره است. هر کدام از ستونهای $n, \ldots, k + ۲, k + ۱$ دارای لااقل $n - k$ مهره هستند زیرا در محل برخورد هر کدام از این ستونها با سطر i ام مهره‌ای وجود ندارد و بر طبق فرض، مجموع مهره‌های هر کدام از این ستونها با سطر i ام باید لااقل n باشد. در نتیجه در این $n - k$ ستون لااقل $(n - k)^۲$ مهره وجود دارد. مجموع مهره‌های جدول برابر مجموع مهره‌های

MATH75.IR

تک‌تک ستونهای جدول است، در نتیجه در این جدول لااقل $k^۲ + (n-k)^۲$ مهره وجود دارد. از طرفی داریم:

$$k^۲ + (n-k)^۲ = \frac{n^۲}{۲} + \frac{(n-۲k)^۲}{۲} \geq \begin{cases} \frac{n^۲}{۲} & n = \text{زوج} \\ \frac{n^۲+۱}{۲} & n = \text{فرد} \end{cases}$$

نکته: اگر جدول $n \times n$ بالا را با دو رنگ سیاه و سفید طوری رنگ کنیم که رنگ خانه‌های گوشه‌ای جدول سفید باشد و همچنین هیچ دو خانهٔ مجاوری همرنگ نباشند سپس اگر در هر خانهٔ سفید یک مهره قرار دهیم جدولی با $\frac{n^۲}{۲}$ و یا $\frac{n^۲+۱}{۲}$ مهره به دست می‌آید که در شرایط مسأله صدق می‌کند.

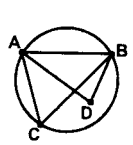
۴۳. گرافی با ۲۰ رأس رسم می‌کنیم به طوری که هر رأس آن معرف یک کشور باشد. دو رأس را به هم وصل می‌کنیم اگر کشورهای متناظر با آن دو رأس با هم رابطهٔ سیاسی داشته باشند. این گراف مثلث ندارد، زیرا بر طبق فرض بین هر سه کشور، لااقل دو کشور با هم رابطهٔ سیاسی ندارند. در نتیجه بر طبق قضیهٔ توران، این گراف حداکثر $\lfloor \frac{۲۰^۲}{۴} \rfloor = ۱۰۰$ یال دارد. واضح است که به ازای هر یال و یا معادلاً هر رابطهٔ سیاسی، دو سفارتخانه در دو کشور متناظر با دو رأس انتهایی یال وجود دارد. در نتیجه حداکثر $۲ \times ۱۰۰ = ۲۰۰$ سفارتخانه وجود دارد.

۴۴. فرض کنید بردار $\vec{a}$، مجموع ۲۰۰۰ بردار مفروض باشد. محورهای مختصات x, y را در صفحه طوری در نظر بگیرید که محور x در راستای $\vec{a}$ باشد. فرض کنید بازیکن اول در هر مرحله، از بین بردارهای انتخاب نشده، برداری را انتخاب کند که تصویرش روی محور x ماکزیمم باشد. فرض کنید در نهایت مجموع بردارهای نفر اول برابر $\vec{a_۱}$ با دو طول $x_۱, y_۱$ در راستاهای x, y و مجموع بردارهای نفر دوم برابر $\vec{a_۲}$ با دو طول $x_۲, y_۲$ در راستاهای x, y باشد. از طریقهٔ انتخاب بردارهای نفر اول نتیجه می‌گیریم که $x_۱ > x_۲$. از طرفی بردار $\vec{a}$ و یا معادلاً $\vec{a_۱} + \vec{a_۲}$ تصویری در راستای محور y ندارد زیرا $\vec{a}$ موازی با $\vec{x}$ است. در نتیجه $y_۱ = y_۲$. از این رو داریم:

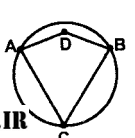
$$|\vec{a_۱}| = \sqrt{x_۱^۲ + y_۱^۲} > \sqrt{x_۲^۲ + y_۱^۲} = \sqrt{x_۲^۲ + y_۲^۲} = |\vec{a_۲}|$$

۴۵. این n نقطه را دوبه‌دو به هم وصل می‌کنیم. فرض کنید پاره‌خط AB دارای کمترین طول در بین این $\binom{n}{۲}$ پاره‌خط باشد. هر نقطهٔ دیگری مثل C از این نقاط را در نظر بگیریم باید داشته باشیم $\widehat{ACB} < ۹۰^\circ$، زیرا در غیر این صورت طول هر کدام از پاره‌خطهای AC, BC از AB کمتر می‌شود که ممکن نیست. به ازای هر کدام از $n-۲$ نقطهٔ دیگر مثل X، زاویهٔ $\widehat{AXB}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید به ازای نقطهٔ C، زاویهٔ $\widehat{ACB}$ ماکزیمم این زوایا باشد. حال دایرهٔ محیطی مثلث $\triangle ACB$ را رسم می‌کنیم. ثابت می‌کنیم که درون این دایره، نقطه‌ای از بین این n نقطه وجود ندارد. برای اثبات این مطلب فرض می‌کنیم نقطهٔ D درون این دایره باشد. دو حالت زیر را داریم:

۱) نقاط D, C در یک طرف AB قرار دارند. در نتیجه $\widehat{ADB} > \widehat{ACB}$ که بر طبق فرض ممکن نیست.



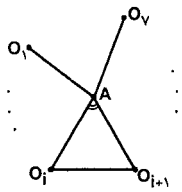
۲) نقاط D, C در طرفین AB قرار دارند. در بالا ثابت کردیم که $\widehat{ACB}, \widehat{ADB} < ۹۰^\circ$. در نتیجه باید داشته باشیم $\widehat{ACB} + \widehat{ADB} < ۱۸۰^\circ$ که ممکن نیست.



MATH75.IR

۴۶. مرکزهای این دوایر را به ترتیب دوری نسبت به A با $o_۷, \dots, o_۲, o_۱$ نمایش می‌دهیم. داریم که:

$$o_۱\widehat{Ao_۲} + o_۲\widehat{Ao_۳} + \cdots + o_۷\widehat{Ao_۱} = ۳۶۰^\circ$$



در نتیجه بر طبق اصل لانهٔ کبوتر یکی از این زوایا مثل $o_i\widehat{Ao_{i+۱}}$ کمتر از ۶۰° است. می‌دانیم در هر مثلث، ضلع مقابل به زاویهٔ کوچکتر از ۶۰°، از ماکزیمم دو ضلع دیگر کوچکتر است، زیرا این مثلث لااقل یک زاویهٔ بزرگتر از ۶۰° دارد.
در نتیجه

$$\overline{o_io_{i+۱}} < max(\overline{o_{i+۱}A}, \overline{o_iA})$$

می‌توان فرض کرد که $\overline{o_io_{i+۱}} < \overline{o_iA}$. در این صورت مرکز دایرهٔ $i+۱$ ام $(o_{i+۱})$ درون دایرهٔ i ام قرار دارد.

۴۷. یک نفر در S با تعداد ماکزیمم n دوست در S را در نظر بگیرید. فرض کنید این شخص، A باشد. هر دو دوست A دارای تعداد مختلفی دوست هستند زیرا هر دوی آنها در دوست A، مشترک هستند. بنابراین n دوست A دارای تعداد مختلفی دوست هستند و تعداد دوستهای هر کدام از این n نفر یکی از اعداد $۱, ۲, \dots, n$ می‌تواند باشد (زیرا بر طبق فرض، هیچ شخصی بیشتر از n دوست ندارد و هر کدام از این n نفر لااقل دوست A را دارند). بنابراین باید تمام اعداد $۱, ۲, \dots, n$ در بین تعداد دوستهای این n نفر ظاهر شود. در نتیجه یکی از دوستهای A مثل B، دقیقاً یک دوست دارد.

۴۸. فرض کنید در بین مراحلی که انجام داده‌ایم $a_۱$ بار رأس ۱، $a_۲$ بار رأس ۲، $\dots, a_n$ بار رأس n انتخاب شده است. رأس i ام را در نظر بگیرید. از این رأس، $۲a_i$ مهره کم شده است ولی $a_{i+۱} + a_{i-۱}$ مهره به آن اضافه شده است. بر طبق فرض در نهایت تعداد مهره‌های رأس i ام ثابت می‌ماند یعنی $۲a_i = a_{i+۱} + a_{i+۱}$. بنابراین داریم:

$$a_۱ = \frac{a_n + a_۲}{۲}, a_۲ = \frac{a_۱ + a_۳}{۲}, a_۳ = \frac{a_۲ + a_۴}{۲}, \dots, a_n = \frac{a_{n-۱} + a_۱}{۲}$$

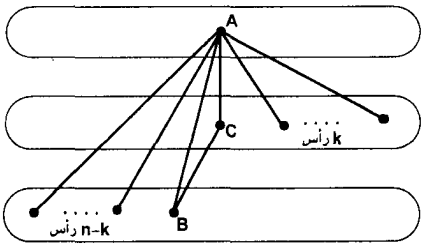
فرض کنید در بین a_i ها، $a_۱$ کمترین مقدار را داشته باشد یعنی $a_۱ \le a_۲, a_۱ \le a_n$ در نتیجه $a_۱ \le \frac{a_n+a_۲}{۲}$ ولی داریم که $a_۱ = \frac{a_n+a_۲}{۲}$. بنابراین باید دو نامساوی بالا به تساوی تبدیل شوند یعنی $a_n = a_۱ = a_۲$. حال از رابطهٔ $a_۲ = \frac{a_۱+a_۳}{۲}$ برابری $a_۱ = a_۳$ نتیجه می‌شود. به همین ترتیب به دست می آید که $a_۱ = a_۲ = \cdots = a_n$ در نتیجه:

$$\text{تعداد مراحل} = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n = na_۱$$

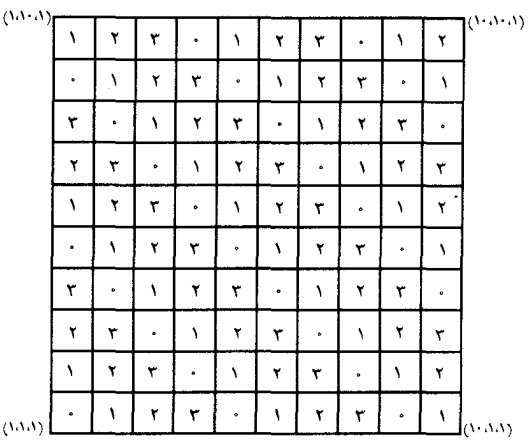
۴۹. به‌ازای هر دانش‌آموز، تعداد دوستان آن در مدرسهٔ دیگر را در نظر بگیرید. (یعنی به ازای هر دانش‌آموز، دو عدد را در نظر بگیرید) فرض کنید ماکزیمم این اعداد، k باشد. می‌توان فرض کرد که نفر A در مدرسهٔ ۱، k دوست در مدرسهٔ ۲ دارد. در نتیجه نفر A لااقل $n-k+۱$ دوست در مدرسهٔ ۳ دارد $(k \le n$ در نتیجه $n-k+۱ \ge ۱)$

MATH75.IR

یکی از این دوستها را B بگیرید. اگر B با یکی از دوستهای A در مدرسهٔ ۲ مثل C دوست باشد که مسأله حل است زیرا کافی است سه تایی A, B, C را در نظر بگیرید. در غیر این صورت B حداکثر $n-k$ دوست در مدرسهٔ دوم دارد. بنابراین باید لااقل $n+1-(n-k)=k+1$ دوست در مدرسهٔ ۱ داشته باشد. ولی بر طبق فرض هیچ شخصی بیشتر از k دوست در یک مدرسه ندارد. ولی B، $k+1$ دوست در مدرسهٔ ۱ دارد. تناقض به وجود آمده، درستی حکم را نشان می‌دهد.



۵۰. درون جعبه را به $۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ = ۱۰۰۰$ مکعب به ضلع ۱ افراز می‌کنیم. حال به این مکعبها، مختصاتهای (x, y, z) با شرط $۱ \le x, y, z \le ۱۰$ نسبت می‌دهیم. هر کدام از این مکعبها را با یکی از چهار رنگ $۰, ۱, ۲, ۳$ رنگ می‌کنیم بدین صورت که اگر مختصات مکعب واحدی، (x, y, z) باشد سپس این مکعب را به رنگ i درمی‌آوریم به طوری که $x+y+z \overset{۴}{\equiv} i$. هر آجری که درون جعبه قرار دهیم، ۴ مکعب واحد متوالی را می‌پوشاند. واضح است که این چهار مکعب، رنگهای مختلفی دارند به عبارت دیگر هر آجری که درون جعبه قرار داشته باشد هر کدام از رنگهای $۰, ۱, ۲, ۳$ را دارد. بنابراین اگر بتوان این جعبه را با آجرهای $۴ \times ۱ \times ۱$ پوشاند سپس باید به تعداد آجرها و یا ۲۵۰ تا مکعب به رنگ ۰ داشته باشیم. حال سعی می‌کنیم به روشی دیگر، تعداد مکعب‌های با رنگ ۰ را بشمریم. می‌دانیم که مکعب با مختصات (x, y, z) به رنگ ۰ است اگر $x+y+z \overset{۴}{\equiv} ۰$. در شکل روبه‌رو، لایهٔ اول جعبه $(z=۱)$ رسم شده است، البته در درون هر مکعب، شمارهٔ رنگ آن نوشته شده است. با شمارش عددهای یکسان جدول روبه‌رو به این نتیجه می‌رسیم که رنگهای $۰, ۱, ۲, ۳$ به ترتیب $۲۶, ۲۵, ۲۴, ۲۵$ بار در این لایه ظاهر شده‌اند. می‌دانیم تعداد مکعب‌هایی که در لایهٔ k ام به رنگ i ام هستند برابر تعداد (x, y, k) هایی است که $۱ \le x, y, k \le ۱۰$ و $x+y+z \overset{۴}{\equiv} i$. همچنین تعداد مکعب‌هایی که در لایهٔ $k-۱$ ام به رنگ $i-۱$ ام هستند برابر است با تعداد $(x, y, k-۱)$ هایی که $۱ \le x, y, k \le ۱۰$ و $x+y+(k-۱) \overset{۴}{\equiv} (i-۱)$ و یا $x+y+k \overset{۴}{\equiv} i$. از دو رابطهٔ بالا به دست می‌آوریم که تعداد مکعب‌های به رنگ i ام در لایهٔ k ام، برابر تعداد مکعب‌های به رنگ $i-۱$ ام در لایهٔ $k-۱$ ام است (البته رنگ‌ها را به صورت دوری در نظر می‌گیریم، یعنی مثلاً رنگ ۴ ام را همان رنگ ۰ ام



MATH75.IR

در نظر می‌گیریم.) از این رو رنگهای ۰, ۱, ۲, ۳ به ترتیب ۲۵, ۲۶, ۲۵, ۲۴ بار در لایه دوم، ۲۴, ۲۵, ۲۶, ۲۵ بار در لایهٔ سوم، ... ظاهر شده‌اند. بنابراین تعداد مکعبهای به رنگ ۰ ام در این جعبه برابر است با:

$$(۲۶ + ۲۵ + ۲۴ + ۲۵) \times ۲ + ۲۶ + ۲۵ = ۲۵۱$$

از آنجا که تعداد مکعب‌های به رنگ ۰ ام برابر ۲۵۰ نیست. بر طبق گفته‌های بالا، با این آجرها نمی‌توان جعبه را پر کرد.

۵۱. شبکهٔ نقاط با مختصات طبیعی (x, y) با شرط $۱ \le x \le n+۱, ۱ \le y \le n^{n+۱}+۱$ را در نظر بگیرید. هر سطر این شبکه را با $n^{n+۱}$ روش می‌توان با n رنگ، رنگ‌آمیزی کرد. تعداد سطرهای این شبکه برابر $n^{n+۱}+۱$ است در نتیجه بر طبق اصل لانهٔ کبوتر، دو تا از سطرهای شبکه مثل k, m دارای ترتیب رنگ‌آمیزی یکسانی هستند یعنی به ازای هر $۱ \le i \le n+۱$، رنگ نقاط $(i,k), (i,m)$ یکسان است. در سطر m ام $n+۱$ نقطه وجود دارد که با n رنگ $۱, ۲, \ldots, n$ رنگ‌آمیزی شده‌اند در نتیجه بر طبق اصل لانه‌کبوتر دو تا از نقاط این سطر مثل (a,m) و (b,m) دارای رنگ یکسانی هستند. از طرفی در بالا ثابت کردیم که نقاط $(a,k), (a,m)$ و همچنین نقاط $(b,k), (b,m)$ همرنگ هستند. در نتیجه مستطیل با رئوس $(a,k), (b,k), (b,m), (a,m)$ دارای ۴ رأس با رنگ یکسان است.

۵۲. فرض کنید α برابر حاصلضرب تمام اعداد موجود در جدول باشد در این صورت داریم:

$$\alpha = a_۱ a_۲ \cdots a_{۲۵} = b_۱ b_۲ \cdots b_{۲۵} \quad (*)$$

(واضح است که هر کدام از a_i ها و b_i ها می‌توانند یکی از دو عدد ۱+ یا ۱− باشند). برای اثبات درستی رابطهٔ مسأله،فرض خلف می‌کنیم یعنی فرض می‌کنیم رابطهٔ $a_۱ + b_۱ + \cdots + a_{۲۵} + b_{۲۵} = ۰$ درست باشد. همچنین $t_۱$ را برابر تعداد عددهای منفی میان a_i ها و $t_۲$ را برابر تعداد عددهای منفی میان b_i ها می‌گیریم. از این رو باید داشته باشیم:

$$۰ = \sum_{i=۱}^{۲۵} a_i + \sum_{i=۱}^{۲۵} b_i = (۲۵ - t_۱) + (-t_۱) + (۲۵ - t_۲) + (-t_۲) \Rightarrow t_۱ + t_۲ = ۲۵$$

از طرفی از رابطهٔ $(*)$ نتیجه می‌گیریم که $t_۲ \overset{۲}{\equiv} t_۱$، ولی در این صورت عبارت $t_۱ + t_۲$ عددی زوج و بنابراین مخالف ۲۵ می‌شود. تناقض بالا درستی حکم مسأله را نشان می‌دهد.

۵۳. ابتدا فرض کنید درون این مربع هیچ کاشی ۱×۱ ای به کار نرفته است. سطرهای این مربع را به ترتیب از بالا با دو رنگ سیاه و سفید به طور متناوب رنگ کنید. واضح است که در این مربع ۲۳×۲۳، تفاضل تعداد مربعهای واحد با رنگ سیاه و تعداد مربعهای واحد با رنگ سفید برابر ۲۳ است. در هر کاشی ۲×۲ ای که درون مربع قرار دارد ۲ خانهٔ سیاه و ۲ خانهٔ سفید وجود دارد. از این رو برای هر کاشی ۲×۲، تفاضل تعداد خانه‌های سیاه و سفید درون آن برابر صفر است (منظورمان از خانه همان مربعهای ۱×۱ است). در هر کاشی ۳×۳ ای که درون مربع قرار دارد یک رنگ، ۳ بار بیشتر از رنگ دیگر ظاهر شده است. بنابراین تفاضل تعداد خانه‌های سیاه و سفید در

MATH75.IR

هر کاشی ۳ × ۳ برابر ۳ است. در نتیجه تفاضل تعداد خانه‌های سیاه و سفید درون مربع ۲۳ × ۲۳ باید بر ۳ بخشپذیر باشد ولی ۲۳ ≠ ۳، بنابراین فرض اولیه ما نادرست بوده است. حال مثالی ارائه می‌دهیم که در آن دقیقاً یک کاشی ۱ × ۱ به کار رفته است. ابتدا مربع ۱ × ۱ مرکزی مربع ۲۳ × ۲۳ را با یک کاشی می‌پوشانیم. حال ۴ مستطیل ۱۱ × ۱۲ باقی می‌ماند. برای پوشاندن یک مستطیل ۱۱ × ۱۲ با کاشی‌های ۲ × ۲, ۳ × ۳ بدین ترتیب عمل می‌کنیم: ابتدا هر کدام از دو ستون (۱ و ۲) ، (۳ و ۴) ، (۵ و ۶) ، (۷ و ۸) را با قرار دادن ۶ عدد کاشی ۲ × ۲ کنار هم می‌پوشانیم. سپس سه ستون ۹ و ۱۰ و ۱۱ را با قرار دادن ۴ عدد کاشی ۳ × ۳ کنار هم پوشش می‌دهیم.

۵۴. فرض کنید S_i مجموع عددهای جدول i ام منهای مجموع عددهای سطر ۴ ام و سطر ۸ ام جدول i ام باشد (جدول i ام را جدولی می‌گیریم که بعد از i گام به دست آمده است). به راحتی می‌توان ثابت کرد که $S_i \overset{۳}{\equiv} S_{i+۱}$ درنتیجه $S_k \equiv S_{k-۱} \equiv \cdots \equiv S_۰ \pmod ۳$. بنابراین اگر جدول اولیه را طوری با اعداد صحیح پر کنیم که $S_۰$ بر ۳ بخشپذیر نباشد سپس هیچ وقت نمی‌توان به جدولی رسید که S_i آن جدول بر ۳ بخشپذیر باشد. از این رو همهٔ عناصر آن جدول نمی‌توانند بر ۳ بخشپذیر باشند.

۵۵. تابع $I(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: [x_i را i امین عضو دنبالهٔ مفروض در نظر بگیرید.]

$$I(x_i) = ۲x_i + ۴x_{i+۱} + ۶x_{i+۲} + ۸x_{i+۳} + ۱۰x_{i+۴} + ۱۲x_{i+۵} \quad i \geq ۱$$

از این رو داریم:

$$\begin{aligned} I(x_{i+۱}) - I(x_i) &= ۱۲x_{i+۶} - ۲(x_{i+۵} + \cdots + x_{i+۱} + x_i) \\ &= ۱۲x_{i+۶} - ۲x_{i+۶} = ۱۰x_{i+۶} \Rightarrow \quad I(x_i) \overset{۱۰}{\equiv} I(x_{i+۱}) \end{aligned}$$

در نتیجه $I(x_۱) \equiv I(x_۲) \equiv \cdots \equiv I(x_k) \equiv \cdots \pmod{۱۰}$. بنابراین اگر دنبالهٔ ۱, ۰, ۱, ۰, ۱, ۰، ۶ عضو متوالی $x_i, x_{i+۱}, \ldots, x_{i+۵}$ از دنبالهٔ مفروض باشد باید داشته باشیم $I(x_i) \overset{۱۰}{\equiv} I(x_۱)$، ولی داریم $I(x_۱) = ۱۸$ و $I(x_i) = ۲۴$ و همچنین $۲۴ \overset{۱۰}{\not\equiv} ۱۸$. از این رو این زیر دنبالهٔ ۶ عضوی در دنبالهٔ مفروض ظاهر نمی‌شود.

۵۶. فرض کنید عددهای $۲n, \ldots, ۲, ۱$ به ترتیب در مکانهای $p_{۲n}, \ldots, p_۲, p_۱$ قرار داشته باشند $((p_{۲n}, \ldots, p_۲, p_۱)$ جایگشتی از اعداد $۲n, \ldots, ۲, ۱$ است). اگر هیچ کدام از اعداد $p_{۲n} + ۲n, \ldots, p_۲ + ۲, p_۱ + ۱$ به هنگ $۲n$ همنهشت هم نباشند باید داشته باشیم:

$$(۱ + p_۱) + (۲ + p_۲) + \cdots + (۲n + p_{۲n}) \overset{۲n}{\equiv} ۰ + ۱ + \cdots + (۲n - ۱) = n(۲n - ۱) \overset{۲n}{\equiv} n$$

از طرفی داریم:

$$(۱ + p_۱) + (۲ + p_۲) + \cdots + (۲n + p_{۲n}) = ۲(۱ + ۲ + \cdots + ۲n) = ۲n(۲n - ۱) \overset{۲n}{\equiv} ۰$$

MATH75.IR

از دو رابطهٔ بالا، تناقض $n \overset{۲n}{\equiv} ۰$ حاصل می‌گردد. از این رو دو عدد $i \neq j$ وجود دارند که $i + p_i \overset{۲n}{\equiv} j + p_j$.

۵۷. فرض کنید عددهای مثبت $a_n, \ldots, a_۲, a_۱$ روی تخته نوشته شده‌اند. می‌دانیم که به ازای هر a و b حقیقی مثبت، $\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} \leq \frac{۴}{a+b}$ است. از این رو اگر در مرحلهٔ اول به جای دو عدد a_j, a_i عدد $x_۱$ را روی تخته بنویسید به دست می‌آید که $\frac{۱}{a_i} + \frac{۱}{a_j} \leq \frac{۱}{x_۱}$. در مرحله دوم یا $x_۲$ از ترکیب دو عدد a_m و a_k به دست می‌آید که در این صورت $\frac{۱}{a_k} + \frac{۱}{a_m} \leq \frac{۱}{x_۲}$ و یا از ترکیب دو عدد $x_۱$ و a_k به دست می‌آید که در این صورت $\frac{۱}{x_۲} \leq \frac{۱}{x_۱} + \frac{۱}{a_k} \leq \frac{۱}{a_i} + \frac{۱}{a_j} + \frac{۱}{a_k}$. اگر این رویه را $n-۱$ بار تکرار کنیم تا به عدد x برسیم به دست می‌آید که $\frac{۱}{x} \leq \frac{۱}{a_۱} + \frac{۱}{a_۲} + \cdots + \frac{۱}{a_n}$. بر طبق فرض مسأله داریم $a_n = \cdots = a_۲ = a_۱ = ۱$ در نتیجه $\frac{۱}{x} \leq n$ و یا $x \leq \frac{۱}{n}$.

۵۸. می‌دانیم که $۱۹۹۴ = ۱۸ + ۱۹ \times ۱۰۴$. بنابراین کافی است طبق رویه زیر عمل کنیم:

$$۱۸ + ۱۹ = ۳۷ \quad , \quad ۳۷ + ۱۹ = ۵۶ \quad , \cdots , \quad ۱۹۷۵ + ۱۹ = ۱۹۹۴$$

نکته: واضح است که عدد n بر روی این تخته ظاهر می‌شود اگر و فقط اگر به شکل زیر باشد:

$$n = \alpha \times ۱۹ + \beta \times ۱۸ \quad \alpha, \beta \geq ۰$$

برای حل این‌گونه مسایل قضیهٔ زیر مفید می‌باشد:

قضیه: دو عدد طبیعی m, n با شرط $(n, m) = ۱$ را در نظر بگیرید. به ازای هر k طبیعی با شرط $mn < k$، دو عدد طبیعی B, α وجود دارد به طوری که $k = \alpha n + Bm$.

سعی کنید قضیهٔ بالا را با استفاده از اصل لانهٔ کبوتری ثابت کنید.

۵۹. به جای هر علامت مثبت نوشته شده بر روی تخته، عدد $+۱$ و به جای هر علامت منفی نوشته شده بر روی تخته، عدد -۱ را قرار می‌دهیم. عمل ذکر شده در مسأله معادل با این است که به جای هر دو عدد نوشته شده بر روی تخته، می‌توانیم حاصلضرب آن دو عدد را قرار دهیم. از این رو عددی که در نهایت باقی می‌ماند حاصلضرب تمام اعدادی است که در ابتدا روی تخته نوشته شده بودند. واضح است که علامت این عدد به ترتیب انتخاب اعداد بستگی ندارد.

۶۰. فرض کنید بتوان چنین عملی را انجام داد. به ازای $i = ۱, ۲, \ldots, ۱۹۹۸$ ، p_i را مکان اولین i از چپ در نظر می‌گیریم. از این رو بر طبق فرض، مکان i دوم باید $p_i + i$ باشد. در کل ۱۹۹۸×۲ عدد وجود دارد در نتیجه تعداد مکانها برابر ۳۹۹۶ است. حال شماره‌های این ۳۹۹۶ مکان را با هم جمع می‌کنیم:

$$۱ + ۲ + \cdots + ۳۹۹۶ = p_۱ + (p_۱ + ۱) + p_۲ + (p_۲ + ۲) + \cdots + p_{۱۹۹۸} + (p_{۱۹۹۸} + ۱۹۹۸)$$

در نتیجه:

$$\sum_{i=۱}^{۱۹۹۸} p_i = \frac{\frac{۳۹۹۶ \times ۳۹۹۵}{۲} - \frac{۱۹۹۸ \times ۱۹۹۷}{۲}}{۲} = \frac{۱۹۹۸(۳ \times ۱۹۹۸ - ۱)}{۴}$$

MATH75.IR

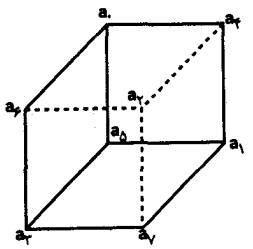
طرف چپ رابطهٔ بالا عددی طبیعی، ولی طرف راست آن عددی غیر طبیعی است. از این رو فرض اولیه ما اشتباه بوده است و یا به عبارت دیگر اعداد $۱۹۹۸, ۱۹۹۸, ۲, ۲, \ldots, ۱, ۱$ را نمی‌توان به طور مناسب در یک خط ردیف کرد.

۶۱. در هر مرحله یک سطر و یا یک ستون با مجموع منفی را انتخاب کرده و علامت همهٔ اعداد درون آن را عوض می‌کنیم. s_i را برابر مجموع اعداد این جدول قرار می‌دهیم (فرض کرده‌ایم که در مرحله i ام هستیم). از این رو یک دنبالهٔ $s_۰, s_۱, s_۲, \cdots$ به دست می‌آید. کافی ثابت کنیم که این دنباله متناهی عضو دارد یعنی بعد از چند مرحله، دیگر سطر یا ستونی با مجموع منفی وجود ندارد تا برای آن، یک عدد بسازیم و دنباله را افزایش دهیم. ادعا می‌کنیم که $i \in \mathbf{N} \quad s_i < s_{i+۱}$. برای اثبات این ادعا فرض می‌کنیم که جدول $i+۱$ ام از قرینه کردن اعداد موجود در سطر k ام جدول i ام به دست آمده باشد (جدول i ام، جدولی است که بعد از i مرحله به دست آمده است و دارای مجموع اعداد s_i است). فرض کنید α برابر مجموع اعداد سطر k ام جدول i ام باشد. واضح است که $\alpha < ۰$ (زیرا ما در هر مرحله سطر یا ستونی را انتخاب می‌کردیم که مجموع اعداد درون آن منفی باشد) داریم که:

$$s_{i+۱} = (s_i - \alpha) + (-\alpha) = s_i - ۲\alpha > s_i$$

از طرفی واضح است که هر s_i ای حداکثر برابر مجموع قدر مطلق‌های اعداد موجود در جدول اولیه (جدول ۰ ام) است. حال اگر هیچ وقت به جدولی نرسیم که مجموع اعداد هر سطر و هر ستون آن نامنفی باشد، یک دنبالهٔ صعودی و نامتناهی از اعداد صحیح و همچنین کراندار به دست می‌آید که ممکن نیست:

مجموع قدر مطلق‌های اعداد موجود در جدول اولیه $\leq \cdots < s_۲ < s_۱ < s_۰$



۶۲. فرض کنید اعداد $a_۷, \ldots, a_۱, a_۰$ روی رأسهای یک مکعب نوشته شده باشد. برای این مکعب عدد α را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha = |(a_۰ + a_۱ + a_۲ + a_۳) - (a_۴ + a_۵ + a_۶ + a_۷)|$$

واضح است که با انجام عمل تعریف شده در مسأله، عدد α تغییر نمی‌کند زیرا هر یالی از مکعب حتماً یک رأس آن متعلق به $\{۰, ۱, ۲, ۳\}$ و رأس دیگر آن متعلق به $\{۴, ۵, ۶, ۷\}$ است. α برای مکعب اولیه برابر $۱+$ است. از این رو اگر بخواهیم به مکعبی با ۸ عدد برابر برسیم باید α برابر ۰ باشد و اگر بخواهیم به مکعبی با ۸ عدد مضرب ۳ برسیم باید α مضرب ۳ باشد ولی داریم $\alpha = ۱$.

۶۳. به ازای هر کلمهٔ w، تابع $I(w)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$I(a_۱a_۲\cdots a_n) = a_۱ + ۲a_۲ + ۳a_۲ + \cdots + na_n$$

MATH75.IR

به راحتی می‌توان ثابت کرد که با انجام عمل تعریف شده در مسأله، باقیماندهٔ $I(w)$ بر ۳ تغییر نمی‌کند (زیرا $I(xxx) = ۶x \overset{۳}{\equiv} ۰$). بنابراین اگر بتوان از کلمهٔ ۰۱ به ۱۰ رسید باید داشته باشیم $I(۰۱) \overset{۳}{\equiv} I(۱۰)$، ولی داریم $I(۰۱) = ۲$ و $I(۱۰) = ۱$ و $۲ \overset{۳}{\not\equiv} ۱$. از این رو از کلمهٔ ۰۱ به کلمهٔ ۱۰ نمی‌توان رسید.

۶۴. به ازای ۵ عدد $\alpha_۵, \alpha_۴, \alpha_۳, \alpha_۲, \alpha_۱$ که بر روی رأسهای یک پنج‌ضلعی نوشته شده‌اند تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_۵) = \sum_{i=۱}^{۵} (\alpha_i - \alpha_{i+۲})^۲ \quad ، \alpha_۶ = \alpha_۱ \ , \ \alpha_۷ = \alpha_۲$$

فرض کنید $x_i > ۰$. حال با انجام دادن رویهٔ ذکر شده، ۵ عدد جدید $\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_۵$ به دست می‌آید. واضح است که $s = x_۱, x_۲, \ldots, x_۵ = \alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_۵$ [زیرا $(x+y) + (-y) + (y+z) = x + y + z$] از طرفی داریم:

$$\begin{aligned} f(\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_۵) - f(x_۱, x_۲, \ldots, x_۵) &= x_i^۲ + ۲x_i(x_{i-۱} - x_{i+۲}) + ۲x_i(x_{i+۱} - x_{i-۲}) \\ &\quad + ۴x_i x_{i+۲} + ۴x_i x_{i-۲} + x_i^۲ \\ &= ۲x_i(x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۵) \\ &= ۲x_i s > ۰ \end{aligned}$$

در نتیجه

$$f(\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_۵) < f(x_۱, x_۲, \ldots, x_۵)$$

(دقت شود که در به دست آوردن رابطهٔ بالا، x_i ها را به صورت دوری گرفته‌ایم). از این رو اگر الگوریتم فوق متوقف نشود یک دنبالهٔ نامتناهی $f_۰ > f_۱ > \cdots > f_k > \cdots$ از اعداد صحیح نامنفی به دست می‌آید که اکیداً نزولی است. ولی چنین دنباله‌ای وجود ندارد پس الگوریتم فوق متوقف می‌شود.

۶۵. اگر از یک نقطه به نقطهٔ دیگری بر طبق الگوریتم ذکر شده حرکت کنیم مجموع مؤلفه‌های نقطهٔ جدید تغییری نمی‌کند (زیرا $x + y = (x - y) + ۲y = (y - x) + ۲x$)، پس می‌توان فرض کرد که $a + b = n$. حال الگوریتم مسأله به صورت زیر درمی‌آید: اگر $۰ < x < \frac{n}{۲}$، سپس به نقطه‌ای با مؤلفه اول $۲x$ و مجموع دو مؤلفه n می‌رویم و اگر $x \geq \frac{n}{۲}$، سپس به نقطه‌ای با مؤلفه اول

$$x - y = x - (n - x) = ۲x - n \overset{n}{\equiv} ۲x$$

$۲x$ (به هنگ n) و مجموع دو مؤلفهٔ n می‌رویم. از الگوریتم بالا نتیجه می‌گیریم که از هر نقطه (x, y) باید به نقطه‌ای به مؤلفه اول $۲x$ به هنگ n و مجموع دو مؤلفه n رفت. بنابراین با شروع از نقطهٔ (a, b)، بر طبق الگوریتم، به نقاطی با مؤلفه اول

$$a \ , \ ۲a \ , \ ۲^۲a \ , \ ۲^۳a \ , \ \ldots \qquad (mod\ n)$$

MATH75.IR

می‌رویم. واضح است که وقتی الگوریتم پایان می‌یابد که مؤلفه اول نقطهٔ نهایی برابر ۰ یا n باشد و یا به عبارت دیگر مؤلفه اول نقطهٔ نهایی به هنگ n برابر ۰ باشد.

عدد $\frac{a}{n}$ را در مبنای ۲ در نظر بگیرید. سه حالت زیر را داریم:

a) این عدد پایان‌پذیر است. فرض کنید

$$\frac{a}{n} = ۰/d_۱d_۲\cdots d_k \qquad d_i \in \{۰, ۱\}$$

از این رو این الگوریتم دقیقاً بعد از k مرحله پایان می‌یابد زیرا

$$i \leq k : \frac{۲^i a}{n} = d_۱d_۲\cdots d_i/d_{it۱}\cdots d_k \notin N \quad , \quad \frac{۲^k a}{n} = d_۱d_۲\cdots d_k \in N$$

b) این عدد پایان‌ناپذیر و متناوب است. فرض کنید

$$\frac{a}{n} = ۰/a_۱a_۲\cdots a_p d_۱d_۲\cdots d_k d_۱d_۲\cdots d_k\cdots$$

این الگوریتم بعد از p مرحله، دوره تناوبی برابر k پیدا می‌کند. واضح است که الگوریتم پایان نمی‌یابد.

c) این عدد پایان‌ناپذیر و غیر متناوب است. فرض کنید

$$\frac{a}{n} = ۰/a_۱a_۲a_۳\cdots a_k\cdots$$

در این حالت الگوریتم متناوب نیست و همچنین پایان نیز نمی‌یابد.

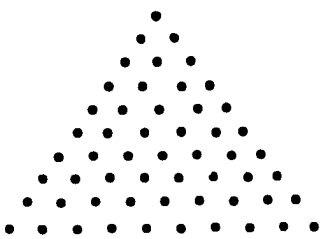
MATH75.IR

مسایل تستی المپیادهای ریاضی

آبان ۷۴

۱. در شکل، یک شبکه‌ی منظم مثلثی از نقاط شامل $\frac{۱۰ \times ۱۱}{۲}$ نقطه را مشاهده می‌کنید به طوری که هر ضلع آن شامل ۱۰ نقطه است. حداقل تعداد خطوطی را بیابید که از تمام این نقاط بگذرند.

الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۹ ه) ۱۰



حل: ثابت می‌کنیم که حداقل ۱۰ خط لازم است. سطرهای این مثلث را از بالا به پایین با شماره‌های ۱ تا ۱۰ شماره‌گذاری می‌کنیم (یعنی سطری که i نقطه دارد را سطر i ام می‌نامیم). سطر ۱۰ام را در نظر بگیرید. اگر هر کدام از نقاط این سطر در خط جداگانه‌ای باشند سپس حداقل ۱۰ خط لازم است. در غیر این صورت، حداقل دو تا از نقاط این سطر در یک خط قرار دارند. واضح است که خطی که از دو تا از نقاط این سطر بگذرد، از تمام نقاط این سطر خواهد گذشت یعنی تمام نقاط سطر ۱۰ام در یک خط قرار دارند. حال سطر ۹ام را در نظر بگیرید. اگر هر کدام از نقاط این سطر در خطوط جداگانه‌ای باشند سپس حداقل ۹ خط لازم است و با خطی که سطر ۱۰ام را پوشانده، ۱۰ خط می‌شود. در غیر این صورت، تمام نقاط سطر ۹ام هم باید در یک خط باشند. با ادامه‌ی این رویه تا سطر ۱ام، به این نتیجه می‌رسیم که حداقل ۱۰ خط برای پوشاندن این نقاط لازم است.

پرواضح است که با ۱۰ خط می‌توان این نقاط را پوشاند به عنوان نمونه، کافی است که خط i ام را خطی بگیریم که از سطر i ام می‌گذرد.

در نتیجه گزینه‌ی (ه) درست است.

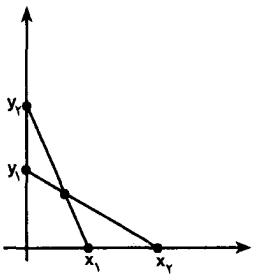
نکته: با استقراء می‌توان ثابت نمود که برای پوشاندن تمام نقاط شبکه‌ی مثلثی که هر ضلع آن دارای n نقطه است در کل لااقل n خط لازم است.

۲. فرض کنید «ناحیه‌ی اول» آن نقاطی از صفحه باشند که مختصات آنها مثبت‌اند. ۲۰ نقطه روی قسمت مثبت محور x ها در نظر می‌گیریم و آنها را به ۲۰ نقطه روی قسمت مثبت محور y ها وصل می‌کنیم. از ۴۰۰ خط پدید

MATH75.IR

آمده فرض کنید در ناحیه‌ی اول هیچ سه‌تایی از یک نقطه نگذرند. تعداد نقاط تقاطع این خطوط را در ناحیه‌ی اول بیابید.

الف) ۷۹۸۰۰ ب) ۴۰۰۰۰ ج) ۳۶۱۰۰ د) ۴۲۰۰۰ ه) ۳۸۰۰۰



حل: می‌دانیم اگر دو نقطه‌ی x_1, x_2 روی محور x ها و دو نقطه‌ی y_1, y_2 روی محور y ها انتخاب کنیم از برخورد اقطار چهارضلعی $x_1x_2y_1y_2$، یک نقطه‌ی تقاطع مطلوب به دست می‌آید. بالعکس، هر نقطه‌ی تقاطع مطلوب، محل برخورد اقطار چهارضلعی‌ای مثل $x_1x_2y_1y_2$ است.

بنابراین کافی است به جای شمردن نقاط تقاطع، تعداد چهارضلعی‌ها را بشمریم. برای به دست آوردن یک چهارضلعی به دو زوج $\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\}$ نیازمندیم. واضح است هر کدام از زوجهای $\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\}$ را به $\binom{20}{2}$ طریق می‌توان انتخاب کرد. در نتیجه بر طبق اصل ضرب، تعداد نقاط مطلوب برابر است با:

$$\binom{20}{2} \times \binom{20}{2} = 31600$$

از این رو گزینه‌ی (ج) درست است.

۳. فرض کنید $A \subseteq \{1, 2, \cdots, 16\}$ مجموعه‌ای دلخواه باشد. سه‌تایی (a, b, c) را «اولیه» گوییم هر گاه هر دو عضوش نسبت به هم اول باشند. اگر A شامل هیچ سه‌تایی اولیه نباشد آنگاه ماکزیمم تعداد اعضای A برابر است با:

الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۱۱ د) ۱۲ ه) ۱۳

حل: ادعا می‌کنیم مجموعه‌ی A حداکثر ۱۱ عضو دارد. مجموعه‌ی تمام اعداد اول کوچکتر از ۱۶، به انضمام عدد ۱، عبارت است از $\{1, 2, 3, 5, 7, 11\}$. فرض کنید A لااقل ۱۲ عضو دارد. بر طبق اصل لانه‌ی کبوتر، مجموعه‌ی A باید شامل لااقل ۳ عضو از مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, 5, 7, 11\}$ باشد (چرا که مجموعه‌ی اخیر ۷ عضو دارد و $12 > 2 + 7 - 16$). این ۳ عضو تشکیل یک «سه تایی اولیه» می‌دهند زیرا هر دو عضو مجموعه ۷ عضوی اخیر، نسبت به هم اولند. بر طبق فرض، A شامل هیچ «سه تایی اولیه» نیست، در نتیجه فرض $|A| \geq 12$ اشتباه بوده است.

مثالی برای مجموعه‌ی A با ۱۱ عضو عبارت است از:

$$A = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16\}$$

در نتیجه گزینه‌ی (ج) صحیح است.

MATH75.IR

اردیبهشت ۷۵

۴. حداقل چند عضو از مجموعه‌ی $\{۲,۳,\ldots,۱۳۷۵\}$ را حذف کنیم به طوری که مجموعه‌ی باقی مانده دارای این خاصیت باشد که حاصل‌ضرب هیچ‌یک از دو عضوش در خودش نباشد؟

الف) ۱۶ ب) ۳۶ ج) ۵۶ د) ۷۶ ه) ۹۶

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم که لااقل باید ۳۶ عضو را از مجموعه‌ی مفروض حذف کنیم تا مجموعه‌ی باقیمانده در شرط مسأله صدق کند. ۳۶ زوج $(۲,۲^۲),(۳,۳^۲),\ldots,(i,i^۲),\ldots,(۳۷,۳۷^۲)$ را در نظر بگیرید (می‌دانیم که $۳۷^۲ < ۱۳۷۵ < ۳۸^۲$). واضح است که هر مجموعه‌ی مطلوب، باید از هر زوج بالا، حداکثر ۱ مؤلفه را دارا باشد زیرا اگر هر دو عدد $i, i^۲$ را دارا باشد سپس $i \times i = i^۲$، که خلاف فرض است. در نتیجه هر مجموعه‌ی مطلوب، از هر زوج بالا، حداقل یک مؤلفه را ندارد. به عبارت دیگر، حداقل ۳۶ عضو از مجموعه‌ی $\{۲,۳,\ldots,۱۳۷۵\}$ را ندارد. از طرفی دیگر، اگر از مجموعه‌ی $\{۲,۳,\ldots,۱۳۷۵\}$ اعداد $\{۲,۳,\ldots,۳۷\}$ را حذف کنیم، یک مجموعه‌ی مطلوب به دست می‌آید. برای اثبات این ادعا، دو عدد a, b متعلق به مجموعه‌ی باقیمانده در نظر بگیرید:

$$۳۸ \le a \ , \ ۳۸ \le b \quad \Longrightarrow \quad ۱۳۷۵ < ۳۸^۲ \le ab$$

رابطه‌ی بالا معادل این است که عدد ab متعلق به مجموعه‌ی باقیمانده نیست.

بنابراین گزینه‌ی (ب) درست است.

۵. یک کره به وسیله‌ی ۹ صفحه که از مرکز آن می‌گذرند تقسیم شده است. اگر هیچ سه صفحه‌ای در یک قطر مشترک نباشند کره به چند قسمت تقسیم می‌شود؟

الف) ۲۸ ب) ۲۹ ج) ۷۶ د) ۸۱ ه) ۷۴

حل: به ازای هر n طبیعی، a_n را برابر تعداد ناحیه‌هایی تعریف می‌کنیم که توسط n صفحه که از مرکز کره می‌گذرند و هیچ سه‌تایی در یک قطر مشترک نیستند به وجود آمده‌اند. $n+۱$ صفحه با شرایط مسأله در نظر بگیرید. اگر یکی از این صفحات را در نظر نگیریم a_n ناحیه وجود دارد. این صفحه‌ای که در نظر نگرفته‌ایم، هر یک از n صفحه‌ی قبلی را در قطری قطع می‌کند، در نتیجه n قطر جدید به وجود می‌آید. واضح است که به ازای هر قطر جدید، دو ناحیه‌ی تازه به وجود می‌آید. از این رو داریم که $a_{n+۱} = a_n + ۲n$. حال این رابطه را به ازای $n-۱,\ldots,۲,۱$ می‌نویسیم و با هم جمع می‌کنیم (می‌دانیم که $a_۱ = ۲$):

$$\begin{aligned} a_n &= ۲(n-۱) + ۲(n-۲) + \cdots + ۲ \times ۲ + ۲ \times ۱ + a_۱ \\ &= ۲\left(\frac{(n-۱)n}{۲}\right) + ۲ = n^۲ - n + ۲ \end{aligned}$$

درنتیجه $a_۹ = ۹^۲ - ۹ + ۲ = ۷۴$

از این رو گزینه‌ی (ه) درست است.

MATH75.IR

بهمن ۷۵

۶. یک صفحه شطرنجی ۲۵ × ۲۵ را در نظر گرفته اعداد ۱ تا $۲۵^۲$ را به ترتیب زیر در خانه‌های آن قرار می‌دهیم. اعداد $۱, ۲, \ldots, ۲۵$ را از چپ به راست در سطر اول، $۲۶, ۲۷, \ldots, ۵۰$ را از چپ به راست در سطر دوم، و بقیه را به همین ترتیب در سطرهای بعدی مربع قرار می‌دهیم. حال اگر ۲۵ خانه را چنان انتخاب کنیم که هیچ دوتایی در یک سطر یا یک ستون نباشند در آن صورت مجموع اعداد این خانه‌ها چه مقدارهایی می‌تواند باشد؟

الف) فقط می‌تواند برابر $\binom{۲۵}{۲}$ باشد.

ب) هر مقدار بین $\binom{۲۵}{۲}$ و $\binom{۲۵}{۳}$ می‌تواند باشد.

ج) فقط می‌تواند $\frac{۱}{۲}(۲۵^۳ + ۲۵)$ باشد.

د) هر مقدار بین $\binom{۲۵}{۲}$ و $\frac{۱}{۲}(۲۵^۳ + ۲۵)$ می‌تواند باشد.

ه) هر مقدار بین $۲۵^۲$ و $\frac{۱}{۲}(۲۵^۳ + ۲۵)$ می‌تواند باشد.

حل: ستونهای این جدول را از چپ به راست به ترتیب با اعداد $۱, ۲, \ldots, ۲۵$ و همچنین سطرهای این جدول را از بالا به پایین به ترتیب با اعداد $۰, ۱, \ldots, ۲۴$ شماره‌گذاری می‌کنیم. پرواضح است عددی که در محل تقاطع سطر i ام با ستون j ام نوشته شده است برابر $۲۵i + j$ است. فرض کنید ۲۵ عدد $۲۵i_۱ + j_۱, ۲۵i_۲ + j_۲, \ldots, ۲۵i_{۲۵} + j_{۲۵}$ را از جدول انتخاب کرده‌ایم به طوری که هیچ دوتایی در یک سطر و یا یک ستون نیستند. بنابراین باید i_k ها و همچنین j_k هااعداد متمایزی باشند و همچنین:

$$\{i_۱, i_۲, \ldots, i_{۲۵}\} = \{۰, ۱, \ldots, ۲۴\}$$
$$\{j_۱, j_۲, \ldots, j_{۲۵}\} = \{۰, ۱, \ldots, ۲۴\}$$

از این رو داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{k=۱}^{۲۵}(۲۵i_k + j_k) &= ۲۵\sum_{k=۱}^{۲۵} i_k + \sum_{k=۱}^{۲۵} j_k \\ &= ۲۵\sum_{i=۰}^{۲۴} i + \sum_{j=۱}^{۲۵} j \\ &= ۲۵ \times \frac{۲۴(۲۴+۱)}{۲} + \frac{۲۵(۲۵+۱)}{۲} = \frac{۱}{۲}(۲۵^۳ + ۲۵)\end{aligned}$$

بنابراین گزینه‌ی (ج) صحیح است.

۷. فرض کنید که $P_{۱۰}, \ldots, p_۲, p_۱$ ده عدد طبیعی زوج و متمایز باشند. برای هر دنباله‌ی دلخواه $a_{۱۳۷۵}, \ldots, a_۲, a_۱$ که a_i ها از اعداد $p_۱$ تا $p_{۱۰}$ باشند کدام‌یک از احکام زیر درست است؟

الف) تعدادی متناهی از a_i های متوالی وجود دارند که حاصل‌ضرب آنها یک مربع کامل است.

ب) تعدادی متناهی از a_i های متوالی وجود دارند که حاصل‌ضرب آنها یک مکعب کامل است.

MATH75.IR

ج) تعدادی متناهی از a_i های متوالی وجود دارند که حاصل‌ضرب آنها دو برابر یک مربع کامل است.
د) تعدادی متناهی از a_i های متوالی وجود دارند که حاصل‌ضرب آنها دو برابر یک مربع کامل است.
ه) الف و ب هر دو درست است.

حل: تعریف می‌کنیم:

$$A_i = a_1 a_2 \cdots a_i \qquad i = 1, 2, \ldots, 1375$$

هر A_i حاصل‌ضرب چندین p_k است در نتیجه برای هر A_i، یک دنباله‌ی $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{10})$ وجود دارد به طوری که $A_i = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_{10}^{\alpha_{10}}$. دنباله‌ی $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{10})$ را در نظر بگیرید. هر α_i از نظر زوجیت، دو حالت زوج و یا فرد را دارد. در نتیجه بر طبق اصل ضرب، دنباله‌ی بالا می‌تواند $2^{10} = 2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 1024$ حالت از نظر زوجیت اجزایش داشته باشد. 1375 عدد $A_1, A_2, \ldots, A_{1375}$ و در نتیجه 1375 دنباله‌ی 10تایی وجود دارد و هر دنباله حداکثر 1024 حالت می‌تواند داشته باشد در نتیجه دو دنباله $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{10})$ و $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{10})$ مربوط به اعداد A_j, A_i وجود دارند که دارای یک حالت هستند:

$$\alpha_1 \overset{2}{\equiv} \beta_1 \ , \ \alpha_2 \overset{2}{\equiv} \beta_2 \ , \ \ldots \ , \ \alpha_{10} \overset{2}{\equiv} \beta_{10} \qquad (*)$$

(وجود دو دنباله‌ی β_i, α_i با استفاده از اصل لانه‌ی کبوتر واضح است.)

بدون اینکه به کلیت مسأله صدمه‌ای وارد شود می‌توان فرض کرد که $j > i$. از این رو داریم که $\beta_1 > \alpha_1, \beta_2 > \alpha_2, \ldots, \beta_{10} > \alpha_{10}$، زیرا $\beta_k - \alpha_k$ برابر توان p_k در عدد $a_{i+1} a_{i+2} \cdots a_j$ است. بر طبق رابطه‌ی (*)، اعداد $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{10}$ موجودند به طوری که:

$$\beta_1 - \alpha_1 = 2\gamma_1 \ , \ \beta_2 \alpha_2 = 2\gamma_2 \ , \ \ldots \ , \ \beta_{10} - \alpha_{10} = 2\gamma_{10}$$

از این‌رو داریم:

$$a_{i+1} a_{i+2} \cdots a_j = \left[p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdots p_{10}^{\gamma_{10}} \right]^2$$

بنابراین گزینه‌ی (الف) درست است.

نکته: برای کامل شدن اثبات این مسأله، باید نادرستی گزینه‌ی ب) ثابت شود. این قسمت راه حل به خودتان محول می‌گردد. بالاخره در هر مسأله‌ی تستی، جز یک گزینه‌ی درست، بقیه گزینه‌ها نادرست هستند که در برخی موارد مثل مسأله‌ی بالا، ثابت کردن نادرستی برخی گزینه‌ها هم لازم است.

۸. اگر $S = \{1, 2, 3, \ldots, 99\}$، آنگاه بزرگترین زیرمجموعه‌ی آن با این خاصیت که هیچ عضو آن دو برابر دیگری نباشد چند عضو دارد؟

الف) 55 ب) 62 ج) 66 د) 71 ه) 77

MATH75.IR

حل: می‌دانیم که به ازای هر j فرد کمتر از ۱۰۰، حداکثر یکی از دو عدد $j, 2j$ می‌توانند در مجموعه‌ی مورد نظر قرار داشته باشد. از این رو از دو زیرمجموعه‌ی

$$\{1,3,5,\ldots,99\} \ , \ \{2,6,10,\ldots,98\}$$

حداکثر $\left\lfloor \frac{99}{2} \right\rfloor = 99$ عدد می‌تواند در مجموعه‌ی مورد نظر باشد. به همین ترتیب از دو مجموعه‌ی مضارب ۴ و مضارب ۸ عددهای فرد، یعنی:

$$\{4,12,20,\ldots,92\} \ , \ \{8,24,40,\ldots,88\}$$

حداکثر $\left\lfloor \frac{99}{8} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{4} \right\rfloor$ عدد می‌تواند در مجموعه‌ی مورد نظر باشد. با ادامه‌ی این استدلال نتیجه می‌شود که حداکثر تعداد عضوهای مجموعه‌ی مورد نظر برابر است با:

$$99 - \left\lfloor \frac{99}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{99}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{99}{16} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{32} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{99}{64} \right\rfloor = 66$$

از این رو گزینه‌ی (ج) صحیح است.

نکته: واضح است که مجموعه‌ای با ۶۶ عضو وجود دارد که در شرط مسأله صدق کند. برای این منظور کافی است از هر دو زیرمجموعه‌ای که در هر مرحله انتخاب کردیم، زیرمجموعه‌ی اول را برداشته و تمام این زیرمجموعه‌ها را در یک مجموعه قرار دهیم:

$$\{1,3,5,\ldots,99\} \cup \{4,12,20,\ldots,92\} \cup \{16,48,80\} \cup \{64\}$$

۹. برای عدد طبیعی n، بسط n در مبنای ۲ را در نظر گرفته و $f(n)$ را برابر رقمهای صفر در آن در نظر می‌گیریم (به عنوان مثال $f(4) = 2, f(6) = 1$). اگر فرض کنیم که $S = 2^{f(1)} + 2^{f(2)} + \cdots + 2^{f(255)}$، آنگاه مقدار S برابر خواهد بود با:

الف) ۳۲۸۰ ب) ۱۰۹۰ ج) ۱۰۸۶ د) ۳۲۷۶ ه) ۶۵۶۰

حل: به ازای هر n, m صحیح نامنفی، تعداد اعدادی مثل k را می‌شمریم به طوری که $2^n \le k \le 2^{n+1} - 1$ و k در بسط مبنای ۲، دارای دقیقاً m رقم صفر باشد. واضح است چنین عددی مثل k، در بسط مبنای ۲، مثل یک دنباله‌ی $n+1$ تایی از ارقام ۰ و ۱ است. تعداد چنین اعدادی برابر $\binom{n}{m}$ است زیرا باید m تا از مکانهای $1, 2, 3, \cdots, n+1$ را [از چپ] انتخاب کنیم و جای آنها عدد صفر قرار دهیم و بقیه‌ی مکانها از جمله مکان اول را عدد ۱ بگذاریم.

عدد ۲۵۵ در مبنای ۲، به صورت هشت تا عدد ۱ است. از این رو داریم:

$$S = \sum_{n=1}^{8} \sum_{m=0}^{n-1} 2^m \binom{n-1}{m} = \sum_{n=1}^{8} (2+1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{8} 3^{n-1}$$
$$= \sum_{n=0}^{7} 3^n = \frac{3^8 - 1}{2} = 3280$$

MATH75.IR

از این رو گزینه‌ی (الف) درست است.

بهمن ۷۶

۱۰. مجموعه‌ی A دارای این خاصیت است که مجموع هر سه عضو متمایز آن عددی اول است. حداکثر تعداد اعضای A چقدر است؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ ه) ۸

حل: به ازای $i = ۱, ۲, ۳$ ، A_i را مجموعه‌ی تمام اعدادی می‌گیریم که در مجموعه‌ی A قرار دارند و باقیمانده‌ی هر کدام از آنها بر ۳ برابر i است. واضح است که اشتراک A_i ها، تهی و اجتماع آنها برابر A است.

ادعا می‌کنیم که $|A| = |A_۱| + |A_۲| + |A_۳| \leq ۴$. فرض کنید $A_۱$ لااقل ۳ عضو $\alpha_۳, \alpha_۲, \alpha_۱$ داشته باشد یعنی $\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳ \overset{۳}{\equiv} ۱$، از این رو داریم:

$$\alpha_۱ + \alpha_۲ + \alpha_۳ \geq ۱ + ۴ + ۷ = ۱۲ \ , \ \alpha_۱ + \alpha_۲ + \alpha_۳ \overset{۳}{\equiv} ۰$$

از دو رابطه‌ی بالا نتیجه می‌گیریم که $\alpha_۱ + \alpha_۲ + \alpha_۳$ عددی اول نیست. یعنی $A_۱$ نمی‌تواند ۳ عضو داشته باشد. مشابه‌ی این گفته در مورد $A_۳, A_۲$ نیز درست است:

$$|A_۱ \leq ۲ \ , \ |A_۲| \leq ۲ \ , \ |A_۳| \leq ۲ \qquad (*)$$

حال فرض کنید هر سه مجموعه‌ی $A_۳, A_۲, A_۱$ ناتهی باشند، یعنی سه عدد γ, β, α متعلق به $A_۳, A_۲, A_۱$ وجود داشته باشند که $\alpha \overset{۳}{\equiv} ۱, \beta \overset{۳}{\equiv} ۲, \gamma \overset{۳}{\equiv} ۰$.

بنابراین داریم:

$$\alpha + \beta + \gamma \geq ۱ + ۲ + ۳ = ۷ \ , \ \alpha + \beta + \gamma \overset{۳}{\equiv} ۰ + ۱ + ۲ \overset{۳}{\equiv} ۰$$

از دو رابطه‌ی بالا نتیجه می‌گیریم که $\alpha + \beta + \gamma$ عددی اول نیست. از این تناقض نتیجه می‌شود که یکی از مجموعه‌های $A_۳, A_۲, A_۱$ باید تهی باشد. فرض کنید A_i مجموعه‌ی تهی باشد. بر طبق رابطه‌ی (*) داریم:

$$|A| = |A_i| + |A_{i+۱}| + |A_{i+۲}| \leq ۰ + ۲ + ۲ = ۴$$

(در رابطه‌ی بالا فرض کرده‌ایم که $A_۵ = A_۲, A_۴ = A_۱$).

مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۴, ۵\}$ یک مجموعه‌ی مطلوب با ۴ عضو است.

بنابراین گزینه‌ی (الف) صحیح است.

۱۱. فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳, ۵\}$. چند تابع $f : A \to A$ وجود دارد که برای هر $x \in A$ داشته باشیم: $f(f(x)) = f(x)$ ؟

MATH75.IR

الف) ۱ ب) ۴ ج) ۷ د) ۱۰ ه) ۱۳

حل: مجموعه‌ی B را برابر برد تابع f تعریف می‌کنیم. عدد دلخواه α را متعلق به B در نظر بگیرید. α متعلق به برد f است در نتیجه x ای وجود دارد به طوری که $\alpha = f(x)$. از این رو داریم:

$$ff(x) = f(x) \implies f(\alpha) = \alpha \quad (*)$$

رابطه‌ی بالا می‌گوید که مقدار تابع برای هر عضو B، برابر خودش است.

واضح است که $۱ \leq |B| \leq ۳$. بنابراین ۳ حالت زیر را داریم:

۱) $|B| = ۱$. فرض کنید $B = \{\alpha\}$. بر طبق $(*)$ داریم که $f(\alpha) = \alpha$. همچنین از آنجا که $|B| = ۱$ داریم که $f(۱) = f(۲) = f(۳) = \alpha$. واضح است به ازای هر مقدار α، چنین f ای در شرایط مسأله صدق می‌کند. α می‌تواند سه مقدار ۱ و ۲ و ۳ را به خود بگیرد، در نتیجه تعداد این نوع f ها برابر ۳ است.

۲) $|B| = ۲$. فرض کنید $B = \{\alpha, \beta\}$. α و β متعلق به مجموعه‌ی $A = \{۱, ۲, ۳\}$ هستند. عضو سومی که در A وجود دارد ولی در B نیست را γ بگیرید. واضح است که $\alpha = f(\alpha)$ و $\beta = f(\beta)$. همچنین $f(\gamma)$ باید یکی از اعضای برد باشد یعنی : $f(\gamma) = \beta$ یا $f(\gamma) = \alpha$.
برای انتخاب β, α از مجموعه‌ی A، $\binom{۳}{۲} = ۳$ حالت داریم. برای انتخاب $f(\gamma)$ هم ۲ حالت داریم. در نتیجه تعداد این‌گونه توابع برابر است با $۳ \times ۲ = ۶$.

۳) $|B| = ۳$. فرض کنید $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. بر طبق رابطه‌ی $(*)$ داریم که:

$$f(\alpha) = \alpha_۱ \ , \ f(\beta) = \beta \ , \ f(\gamma) = \gamma$$

به بیان دیگر $f(x) = x$. از آنجا که فقط یک تابع همانی داریم، تعداد این گونه توابع برابر است با ۱.

از ۳ حالت بالا نتیجه می‌گیریم که

$$\text{تعداد توابع مطلوب} = ۳ + ۶ + ۱ = ۱۰$$

از این رو گزینه‌ی (د) صحیح است.

۱۲. ۵ مهره‌ی سفید و ۱۰ مهره‌ی سیاه داریم. به چند طریق این مهره‌ها را می‌توانیم در یک ردیف از چپ به راست کنار هم بچینیم، به طوری که بلافاصله بعد از هر مهره‌ی سفید حداقل یک مهره‌ی سیاه قرار داشته باشد؟

الف) ۱۲۶ ب) ۱۳۲ ج) ۲۱۸ د) ۲۵۲ ه) ۳۱۲

حل: کنار هر مهره‌ی سفید، یک مهره‌ی سیاه قرار می‌دهیم. در نتیجه ۵ مهره سیاه و ۵ مهره سفید– سیاه داریم که می‌خواهیم آنها را در یک ردیف بچینیم. از این رو تعداد روشهای چیدن برابر است با:

$$\frac{۱۰!}{۵!۵!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶}{۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = ۲۵۲$$

MATH75.IR

بنابراین گزینه‌ی (د) صحیح است.

نکته: اگر α_1 تا از شی m_1، α_2 تا از شی m_2، ...، α_k تا از شی m_k داشته باشیم، سپس تعداد راههای چیدن این $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$ شی در یک سطر برابر است با:

$$\frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k)!}{\alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_k!}$$

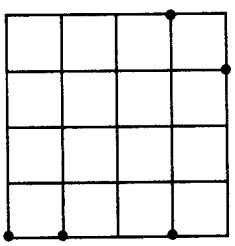
۱۳. در زیرمجموعه‌ی $\{(x,y) \mid 1 \le x,y \le 5 \; ; \; x,y \in \mathbf{Z}\}$ از نقاط صفحه حداکثر چند نقطه می‌توانیم انتخاب کنیم به طوری که فاصله‌ی دوبه‌دوی این نقاط متمایز باشد؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ ه) ۸

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم در این شکل حداکثر ۱۴ فاصله‌ی متمایز وجود دارد. دو نقطه‌ی دلخواه در این شبکه در نظر بگیرید. فاصله‌ی بین این دو نقطه به صورت $\sqrt{x^2 + y^2}$ است که در آن $0 \le x \le 4, 0 \le y \le 4$. بر طبق اصل ضرب $5 \times 5 = 25$ زوج (x,y) با شرط بالا وجود دارد. می‌دانیم که $x = y = 0$ نمی‌تواند باشد، در نتیجه ۲۴ زوج باقی می‌ماند. از بین این ۲۴ زوج به غیر از ۴ زوج (۱ و ۱) و (۲ و ۲) و (۳ و ۳) و (۴ و ۴)، بقیه به صورت (x,y) هایی هستند که $x \neq y$. از طرفی می‌دانیم برای دو زوج (x,y) و (y,x) مقدار $\sqrt{x^2 + y^2}$ یکی است در نتیجه این دو زوج، یک فاصله را به ما می‌دهند.

از این رو داریم:

$$\text{حداکثر تعداد فاصله‌های متمایز} = 4 + \frac{24 - 4}{2} = 14 \qquad (*)$$



حال ادعا می‌کنیم که در این شبکه ۶ نقطه با فاصله‌های دوبه‌دو متمایز وجود ندارد. زیرا ۶ نقطه $\binom{6}{2} = 15$ فاصله به ما می‌دهد و از طرفی بر طبق $(*)$ ما حداکثر ۱۴ فاصله‌ی متمایز داریم. در نتیجه‌ی بر طبق اصل لانه‌ی کبوتر، از بین این ۱۵ فاصله، حداقل ۲ فاصله با هم برابر هستند. در شکل مقابل، ۵ نقطه را طوری انتخاب کرده‌ایم که فاصله‌ی دوبه‌دوی آنها متمایز باشد.

بنابراین گزینه‌ی (ب) درست است.

۱۴. فرض کنید $A_n, \ldots, A_2, A_1$ زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌ی $\{1,2,3,4,5,6\}$ باشند به طوری که اشتراک هر دو زیرمجموعه‌ی A_i, A_j حداقل ۲ عضو دارد. در این صورت بیشترین مقدار n کدام‌یک از مقادیر زیر است؟

الف) ۲۱ ب) ۲۲ ج) ۲۳ د) ۲۴ ه) ۲۵

حل: تمام زیرمجموعه‌های ۴ و ۵ و ۶ عضوی مجموعه‌ی $\{1,2,3,4,5,6\}$ را در نظر بگیرید. تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر است با:

$$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 22$$

MATH75.IR

فرض کنید A و B دو مجموعه‌ی دلخواه از مجموعه‌های بالا باشند. در این صورت داریم:

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \geq ۴ + ۴ - ۶ = ۲$$

بر طبق رابطه‌ی بالا، اگر $A_1, A_2, \ldots, A_n$ را برابر زیرمجموعه‌های ۴، ۵، ۶ عضوی مجموعه‌ی مفروض قرار دهیم، این A_iها در شرایط مسأله صدق می‌کنند و همچنین داریم $n = ۲۲$.

حال ثابت می‌کنیم که اگر $A_1, A_2, \ldots, A_n$ در شرایط مسأله صدق کنند سپس $n \leq ۲۲$. پر واضح است که در بین A_i ها، مجموعه‌ی تهی و یا تک‌عضوی وجود ندارد به عبارت دیگر $|A_i| \geq ۲ \quad i = ۱, ۲, \ldots, n$.

فرض کنید یکی از A_i ها، مثل A_1، دوعضوی باشد، در نتیجه بقیه‌ی A_i ها باید این دو عضو را حتماً دارا باشند. از این رو n مجموعه‌ی $A_1 - A_1, A_2 - A_1, \ldots, A_n - A_1$، زیرمجموعه‌هایی از یک مجموعه‌ی ۴ عضوی می‌شوند:

$$n \leq ۲^۴ = ۱۶ < ۲۲$$

بنابراین کافی است فرض کنیم که تمامی A_i ها بیشتر از دو عضو دارند. اگر همه‌ی A_i ها بیشتر از ۳ عضو داشته باشند، سپس $n \leq ۲۲$ (این عدد در بالا به دست آمده است). در نتیجه یکی از A_i ها، مثل A_1، ۳ عضوی است. می‌توان فرض کرد که $A = \{۱, ۲, ۳\}$. واضح است که هر کدام از A_i ها باید یکی از ۴ مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳\}, \{۱, ۲\}, \{۲, ۳\}, \{۱, ۳\}$ را شامل شود تا اشتراک هر A_i با A_1، لااقل ۲ عضو داشته باشد.

مجموعه‌ی B_1 را مجموعه‌ی همه‌ی A_iهایی تعریف می‌کنیم که

$$|A_i| > ۳ \ , \ \{۱, ۲, ۳\} \subset A_i$$

مجموعه‌ی B_2 را مجموعه‌ی همه‌ی A_i هایی تعریف می‌کنیم که

$$|A_i| > ۳ \ , \ \{۱, ۲\} \subset A_i \ , \ \{۳\} \not\subset A_i$$

مجموعه‌ی B_3 را مجموعه‌ی همه‌ی A_i هایی تعریف می‌کنیم که

$$|A_i| > ۳ \ , \ \{۱, ۳\} \subset A_i \ , \ \{۲\} \not\subset A_i$$

مجموعه‌ی B_4 را مجموعه‌ی همه‌ی A_i هایی تعریف می‌کنیم که

$$|A_i| > ۳ \ , \ \{۲, ۳\} \subset A_i \ , \ \{۱\} \not\subset A_i$$

C را مجموعه‌ی همه A_i هایی تعریف می‌کنیم که دقیقاً ۳ عضو دارند.

از این رو داریم:

$$|A| = |B_1| + |B_2| + |B_3| + |B_4| + |C|$$

MATH75.IR

واضح است که:

$$|B_۱| \le ۲^۳ - ۱ \ , \ |B_۲| \le ۳ + ۱ \ , \ |B_۳| \le ۳ + ۱ \ , \ |B_۴| < ۳ + ۱$$

اگر $|C| \le ۳$ باشد مسأله حل است زیرا:

$$|A| \le ۲^۳ - ۱ + ۳ + ۱ + ۳ + ۱ + ۳ + ۱ + ۳ + ۱ + ۳ = ۲۲$$

از این رو می‌توان فرض کرد که $|C| \ge ۴$. فرض کنید سه تا از A_i های سه عضوی مثل $A_۱, A_۲, A_۳$، شامل مجموعه‌ی $\{۱, ۲\}$ باشند. می‌توان این سه زیرمجموعه را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$A_۱\{۱, ۲, ۳\} \quad , \quad A_۲ = \{۱, ۲, ۴\} \quad , \quad A_۳ = \{۱, ۲, ۵\}$$

هر عضوی از $B_۳$ مثل A_j باید دو عدد ۴, ۵ را داشته باشد زیرا:

$$۲ \le |A_j \cap \{۱, ۲, ۴\}| = |A_j \cap \{۱, ۴\}| \quad , \quad ۲ \le |A_j \cap \{۱, ۲, ۵\}| = |A_j \cap \{۱, ۵\}|$$

به همین ترتیب هر عضو از $B_۴$ مثل A_k باید دو عدد ۴ و ۵ را داشته باشد. از این رو داریم:

$$|B_۳| \le ۲ \quad , \quad |B_۴| \le ۲$$

در نتیجه:

$$|A| \le (۲^۳ - ۱) + (۳ + ۱) + ۲ + ۲ + ۴ = ۱۹$$

(دقت شود هر عضو دیگر C مثل A_m باید شامل $\{۱, ۲\}$ شود در نتیجه $|C| \le ۴$).

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که به ازای هر سه $A_۳, A_۲, A_۱$ سه عضوی که شامل مجموعه‌ی $\{۱, ۳\}$ و یا $\{۲, ۳\}$ شوند داریم $|A| \le ۲۲$. از این رو می‌توان فرض کرد مجموعه‌ی C شامل هیچ سه عضوی نمی‌شود که در $\{۱, ۲\}$ یا $\{۲, ۳\}$ یا $\{۱, ۳\}$ مشترک هستند. از طرفی فرض کرده بودیم $|C| \ge ۴$، در نتیجه دو عضو $A_۲, A_۱$ متعلق به C وجود دارند که اشتراک آنها یکی از سه مجموعه‌ی بالا نمی‌شود. به طور مثال می‌توان فرض کرد

$$\{۱, ۲\} \subset A_۱ \ , \ \{۱, ۳\} \subset A_۲ \ , \ ۳ \notin A_۱ \ , \ ۲ \notin A_۲$$

عضو دیگر $A_۱$، عددی مثل ۴ است. بنابراین باید $A_۲$ هم عدد ۴ را داشته باشد زیرا $|A_۱ \cap A_۲| \le ۲$. واضح است که هر A_j ای که در $B_۳$ یا $B_۴$ قرار دارد باید شامل عدد ۴ هم شود، در نتیجه $|B_۳|, |B_۴| \le ۳$. C شامل سه عضو $\{۱, ۲, ۳\}, \{۱, ۳, ۴\}, \{۱, ۲, ۴\}$ است، بنابراین هر عضو دیگر C فقط مجموعه‌ی $\{۲, ۳, ۴\}$ می‌تواند باشد در نتیجه $|C| \le ۴$.

$$|A| \le (۲^۳ - ۱) + (۳ + ۱) + ۳ + ۳ + ۴ = ۲۱$$

MATH75.IR

از این رو گزینه‌ی (ب) صحیح است.

۱۵. از جدول زیر ۵ عدد انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که هیچ دو عددی در یک سطر یا یک ستون قرار نگیرند. کوچکترین این اعداد را a می‌نامیم. a حداکثر چه مقداری می‌تواند داشته باشد؟

۳۱	۲۱	۲۹	۲۲	۲۰
۷	۲۰	۱۵	۱۲	۱۴
۲۳	۱۳	۷	۹	۳
۳۱	۱۷	۱۱	۱۴	۲۳
۲۸	۴۱	۲	۲۶	۲۱

الف) ۱۴ ب) ۱۵ ج) ۱۶ د) ۲۰ ه) ۲۱

حل: فرض کنید به ازای ۵ عدد a, b, c, d, e که هیچ دوتایی در یک سطر و یا یک ستون نیستند، a کوچکترین عدد است و همچنین a حداکثر مقدار ممکن را در بین تمام کوچکترین اعداد دارد. از این رو داریم $a \leq e$ ، $a \leq d$ ، $a \leq c$ ، $a \leq b$. فرض کنید b متعلق به سطر دوم جدول بالا باشد (از هر سطر دقیقاً یک عدد انتخاب شده است). در نتیجه b یکی از پنج مقدار $۷, ۲۰, ۱۵, ۱۲, ۱۴$ می‌تواند باشد. بنابراین داریم:

$$a \leq b \leq Max(۷, ۲۰, ۱۵, ۱۲, ۱۴) = ۲۰ \quad \Longrightarrow \quad a \leq ۲۰$$

به ازای $a = ۲۰$ مثال زیر را در نظر بگیرید:

از سطر اول عدد ۲۹ ، از سطر دوم عدد ۲۰، از سطر سوم عدد ۲۳، از سطر چهارم عدد ۲۳ و از سطر پنجم عدد ۲۶ را انتخاب کنید.

بنابراین گزینهٔ (د) صحیح است.

۱۶. از مجموعهٔ $A = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۰۰۱\}$ زیر مجموعه‌ای مانند $S \subset A$ انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که اگر $x, y \in S$ آنگاه $x + y \notin S$. حداکثر تعداد اعضای S چقدر است؟

الف) ۴۹۹ ب) ۵۰۰ ج) ۵۰۱ د) ۵۰۲ ه) ۵۰۳

حل: ادعا می‌کنیم که $S \leq ۵۰۱$. فرض کنید m بزرگترین عضو S باشد. مجموعه‌های زیر را در نظر بگیرید

(i) m فرد: $(۱, m-۱), (۲, m-۲), \ldots, (\frac{m}{۲}, \frac{m}{۲})$

(ii) m زوج: $(۱, m-۱), (۲, m-۲), \ldots, (\frac{m-۱}{۲}, \frac{m+۱}{۲})$

واضح است که در هر کدام از زوجهای بالا، هر دو مؤلفه آن نمی‌توانند در S باشند چرا که مجموع دو مولفه برابر m، که خود عضوی از S است می‌شود. دو حالت زیر را در نظر بگیرید:

MATH75.IR

۱. اگر m عددی زوج باشد، بر طبق گفته‌های بالا، حداکثر $\frac{m}{۲}$ عضو به غیر از m در S موجود است (چرا که در گروه (i)، $\frac{m}{۲}$ زوج مرتب وجود دارد). بنابراین داریم:

$$|S| \leq ۱ + \frac{m}{۲} = ۱ + \frac{۱۰۰۰}{۲} = ۵۰۱$$

۲. اگر m عددی فرد باشد، بر طبق گفته‌های بالا، حداکثر $\frac{m-۱}{۲}$ عضو به غیر از m در S موجود است (چرا که در گروه(ii)، $\frac{m-۱}{۲}$ زوج مرتب وجود دارد). بنابراین داریم:

$$|S| \leq ۱ + \frac{m-۱}{۲} = ۱ + \frac{۱۰۰۱-۱}{۲} = ۵۰۱$$

به عنوان مثال برای S با $|S| = ۵۰۱$ می‌توان مجموعه‌های زیر را در نظر گرفت:

$$S = \{۱, ۳, ۵, \ldots, ۹۹۹, ۱۰۰۱\} \quad \text{یا} \quad S = \{۵۰۱, ۵۰۲, \ldots, ۱۰۰۱\}$$

از این رو گزینهٔ (ج) درست است.

۱۷. اعداد حقیقی $a_n, \ldots, a_۲, a_۱$ روی تخته نوشته شده‌اند. در هر «گام» دو تا از آنها مثل y, x را به دلخواه انتخاب کرده و آنها را حذف می‌کنیم و به جای آنها عدد $x + y + xy$ را می‌نویسیم. پس از $n - ۱$ گام عدد A روی تخته باقی مانده است. کدامیک از نتیجه‌گیریهای زیر درست است؟

الف) می‌توان مقادیر اولیه $a_n, \ldots, a_۲, a_۱$ را چنان تعیین کرد که با روشهای مختلف $n!$ مقدار متمایز برای A حاصل شود.

ب) مقدار A به طور منحصر بفرد توسط $a_n, \ldots, a_۲, a_۱$ تعیین می‌شود.

ج) اگر $a_۱ - ۲$ ، در این صورت A حتماً عددی زوج است.

د) به تعداد متناهی مقادیر $a_n, \ldots, a_۲, a_۱$ وجود دارد که برای آنها A می‌تواند برابر ۱ شود.

ه) تمام گزینه‌های بالا نادرست است.

حل: فرض کنید به ترتیب اعداد $a_{i_n}, \ldots, a_{i_۲}, a_{i_۱}$ را از روی تخته انتخاب کرده‌ایم به‌طوری‌که در نهایت عدد A باقی مانده است. عمل $*$ را برای دو عدد x, y به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x * y = x + y + xy = (x + ۱)(y + ۱) - ۱$$

با استقراء ثابت می‌کنیم که

$$a_{i_۱} * a_{i_۲} * \cdots * a_{i_k} = (a_{i_۱} + ۱)(a_{i_۲} + ۱) \cdots (a_{i_k} + ۱) - ۱$$

MATH75.IR

به ازای $k = ۲$، حکم استقراء معادل تعریف عمل $*$ است. فرض کنید به ازای $k = m$، رابطه بالا درست باشد. به ازای $k = m + ۱$ داریم که:

$$a_{i_۱} * a_{i_۲} * \cdots * a_{i_m} * a_{i_{m+۱}} = (a_{i_۱} * a_{i_۲} * \cdots * a_{i_m}) * a_{i_{m-۱}}$$

$$= ([(a_{i_۱} + ۱)(a_{i_۲} + ۱)\cdots(a_{i_m} + ۱) - ۱] + ۱) \cdot (a_{i_{m+۱}} + ۱) - ۱$$

$$= (a_{i_۱} + ۱)(a_{i_۲} + ۱)\cdots(a_{i_{m+۱}} + ۱) - ۱$$

بدین ترتیب حکم استقراء ثابت می‌شود. بنابراین داریم:

$$A = a_{i_۱} * a_{i_۲} * \cdots * a_{i_n} = (۱ + a_{i_۱})(۱ + a_{i_۲})\cdots(۱ + a_{i_n}) - ۱$$

دنبالهٔ $a_{i_۱}, a_{i_۲}, \ldots, a_{i_n}$ یک جایگشت از اعداد $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ است. در نتیجه:

$$(۱ + a_{i_۱})(۱ + a_{i_۲})\cdots(۱ + a_{i_n}) = (۱ + a_۱)(۱ + a_۲)\cdots(۱ + a_n)$$

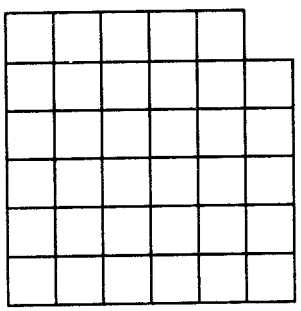
از این‌رو داریم:

$$A = (۱ + a_۱)(۱ + a_۲)\cdots(۱ + a_n) - ۱$$

یعنی A به ترتیب انتخاب اعداد $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ از روی تخته بستگی ندارد.
بنابراین گزینهٔ (ب) صحیح است.

بهمن ۷۷

۱۸. در شکل زیر چند مربع وجود دارد؟



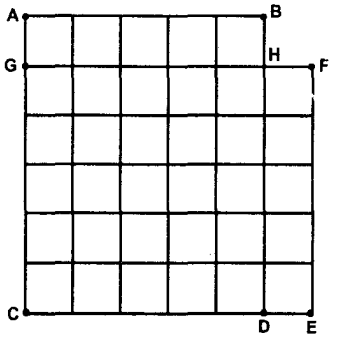
الف) ۳۵
ب) ۷۵
ج) ۸۵
د) ۱۰۵
ه) ۲۰۵

حل: ابتدا تعداد مربع‌هایی که در یک شبکهٔ مستطیلی $n \times m$ وجود دارد را می‌شمریم (فرض کنید که هر دو نقطهٔ متوالی در یک سطر و یا یک ستون این شبکه، دارای فاصله‌ای برابر ۱ هستند و همچنین $m \geq n$). هر مربع در این شبکه دارای طولی برابر α است که $۱ \leq \alpha \leq n$. به $n + ۱ - \alpha$ طریق می‌توان از بین $n + ۱$ نقطه، دو نقطه انتخاب کرد که بین آنها، دقیقاً $\alpha - ۱$ نقطه باشد. همچنین به $m + ۱ - \alpha$ طریق می‌توان از بین $m + ۱$ نقطه، دو نقطه

MATH75.IR

انتخاب کرد که بین آنها دقیقاً $\alpha - ۱$ باشد. از این‌رو بر طبق اصل ضرب، $(m + ۱ - \alpha)(n + ۱ - \alpha)$ مربع در شبکه وجود دارد که دارای طولی برابر α هستند. در نتیجه تعداد مربع‌ها در این شبکه برابر است با:

$$\sum_{\alpha=۱}^{n}(m + ۱ - \alpha)(n + ۱ - \alpha) = (n + ۱)(m + ۱)n - (n + m + ۲)\frac{n(n + ۱)}{۲} + \frac{n(n + ۱)(۲n + ۱)}{۶}$$



حال به حل مسأله بازمی‌گردیم: در شکل مقابل A را مجموعهٔ تمام مربع‌هایی در نظر بگیرید که در مستطیل $ABCD$ قرار دارد. همچنین B را مجموعهٔ تمام مربع‌هایی بگیرید که در مستطیل $CEFG$ قرار دارد. واضح است که $A \cap B$ مجموعهٔ تمام مربع‌هایی می‌شود که در مستطیل $CDHG$ قرار دارد.

$$|A| = |B| = \sum_{\alpha=۱}^{۵}(۶ - \alpha)(۷ - \alpha) = \sum_{\alpha=۱}^{۵}\alpha^۲ + \sum_{\alpha=۱}^{۵}\alpha = ۵۵ + ۱۵ = ۷۰$$
$$|A \cap B| = \sum_{\alpha=۱}^{۵}(۶ - \alpha)(۶ - \alpha) = \sum_{\alpha=۱}^{۵}\alpha^۲ = ۵۵$$

$A \cup B$ مجموعهٔ تمام مربع‌هایی است که در شبکه موجود است:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = ۷۰ + ۷۰ - ۵۵ = ۸۵$$

از این رو گزینهٔ (ج) صحیح است.

۱۹. عددهای $۱, ۲, \ldots, ۱۳۷۷$ روی تخته سیاه نوشته شده اند. هر بار دو تا از اعداد روی تخته را به دلخواه پاک می‌کنیم و قدر مطلق تفاضلشان را روی تخته می‌نویسیم، تا زمانی که یک عدد روی تخته باقی بماند. کدامیک از گزینه‌های زیر در مورد عدد بدست آمده کامل‌تر است؟

الف) این عدد همواره مضربی از ۴ است.

ب) این عدد همواره فرد است.

ج) باقیماندهٔ تقسیم این عدد بر ۴، مساوی یک است.

د) این عدد همواره زوج است.

ه) هیچ کدام.

حل: به‌ازای $i = ۱, ۲, \ldots, ۱۳۷۷$، S_i را مجموع اعداد روی تخته در مرحله i ام می‌گیریم. یعنی $S_۱ = ۱ + ۲ + \cdots + ۱۳۷۷$ و همچنین $S_{۱۳۷۷}$، تنها عدد باقی مانده روی تخته است. به‌ازای i ای دلخواه بین عدد ۱ و ۱۳۷۷ فرض کنید که در مرحلهٔ i ام اعداد x, y را انتخاب کرده‌ایم و به جای آنها عدد $|x - y|$ را

MATH75.IR

گذاشته‌ایم. از این رو داریم:

$$S_{i+1} = S_i - x - y + |x-y| \overset{2}{\equiv} S_i - x - y + x - y \overset{2}{\equiv} S_i - 2y \overset{2}{\equiv} S_i$$

بنابراین

$$S_{1377} \overset{2}{\equiv} S_{1376} \overset{2}{\equiv} S_{1375} \overset{2}{\equiv} \cdots \overset{2}{\equiv} S_2 \overset{2}{\equiv} S_1$$

در نتیجه

$$S_{1377} \overset{2}{\equiv} S_1 = 1 + 2 + \cdots + 1377 = \frac{1377 \times 1378}{2} \overset{2}{\equiv} 1$$

بنابراین S_{1377}، و یا عدد باقی مانده روی تخته، عددی فرد است.

در این مسئله لازم است که گزینهٔ (ج) را رد کنیم. برای این کار باید یک مثال نقض پیدا کنیم. اگر چهار عدد متوالی $i, i+1, i+2, i+3$ روی تخته باشد می‌توان بجای این چهار عدد، عدد صفر را گذاشت چرا که در مرحلهٔ اول به جای i و $i+1$، عدد یک را قرار می‌دهیم. در مرحلهٔ دوم به جای $i+2$ و $i+3$ هم عدد یک را قرار می‌دهیم، و در مرحلهٔ سوم بجای این دو عدد یک، عدد صفر را قرار می‌دهیم. حال ابتدا به جای چهار عدد ۱۳۷۷, ۱۳۷۶, ۱۳۷۵, ۱۳۷۴، عدد صفر را قرار می‌دهیم. سپس به جای چهار عدد ۱۳۷۳, ۱۳۷۲, ۳۷۱, ۱۳۷۰ هم عدد صفر را قرار می‌دهیم. این رویه را تا آنجا ادامه می‌دهیم که روی تخته اعداد ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ و همچنین تعدادی عدد ۰ باقی بماند. این صفرها را می‌توان نادیده گرفت زیرا به جای هر صفر و عدد ۱ ، می‌توان دوباره عدد ۱ را قرار داد. بنابراین اگر این صفرها را با عدد ۱ در نظر بگیریم، تمامی صفرها حذف می‌شوند و پنج عدد ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ باقی می‌ماند. حال به جای دو عدد ۱, ۲ و همچنین دو ۴, ۵، اعداد ۱, ۱ را قرار می‌دهیم یعنی سه عدد ۱, ۳, ۱ باقی می‌ماند. این بار به جای دو عدد ۱، عدد صفر را قرار می‌دهیم. همچنین به جای ۳, ۰، عدد نهایی ۳ را قرار می‌دهیم. واضح است که باقیماندهٔ ۳ بر عدد چهار برابر ۱ نیست.

بنابراین گزینهٔ (ب) درست است.

۲۰– از بین عددهای مجموعهٔ $\{1, 2, 3, \ldots, 53\}$ حداکثر چند عدد می‌توان انتخاب کرد که تفاضل هیچ دوتایی از آنها برابر با ۴ نباشد؟

الف) ۲۶ ب) ۲۷ ج) ۲۸ د) ۲۹ ه) ۳۰

حل: به ازای $i = 0, 1, 2, 3$، A_i را مجموعهٔ تمام اعداد طبیعی‌ای می‌گیریم که کمتر از ۵۴ هستند و همچنین باقیماندهٔ آن اعداد بر ۴ برابر i است. واضح است که:

$$|A_0| = |A_2| = |A_3| = 13 \ , \ |A_1| = 14$$

فرض کنید A مجموعه‌ای باشد که در شرایط مسئله صدق کند. داریم که:

$$|A \cap A_0| \leq 7 \ , \ |A \cap A_1| \leq 7 \ , \ |A \cap A_2| \leq 7 \ , \ |A \cap A_3| \leq 7$$

MATH75.IR

چرا که اگر اعضای A_i را به صورت صعودی مرتب کنیم و همچنین ۸ عضو از آن را انتخاب کنیم بر طبق اصل لانهٔ کبوتر، لااقل دو عضو از اعضای انتخاب شده متوالی هستند و یا بیان دیگر، قدر مطلق تفاضل این دو عدد برابر ۴ است. از این رو داریم:

$$|A| = |A \cap A_0| + |A \cap A_1| + |A \cap A_2| + |A \cap A_3| \leq 7 + 7 + 7 + 7 = 28$$

برای ساختن مجموعهٔ A با ۲۸ عضو، کافی است که از هرA_i، ۷ عضو را به طور یکی در میان انتخاب کنیم یعنی:

$$A = \{\, 8k+1, 8k+2, 8k+3, 8k+4 \mid 0 \leq k \leq 6 \,\}$$

بنابراین گزینهٔ (ج) درست است.

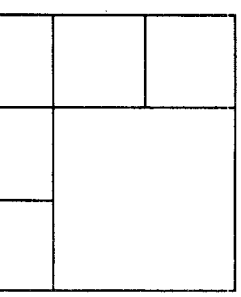
نکته: مجموعه‌های $A_1, A_2, \ldots, A_n$ را در نظر بگیرید. فرض کنید A مجموعه‌ای باشد که هر عضو آن در یکی از این n مجموعه ظاهر شده است. اگر اشتراک دو بدوی این مجموعه‌ها برابر مجموعهٔ تهی باشد سپس:

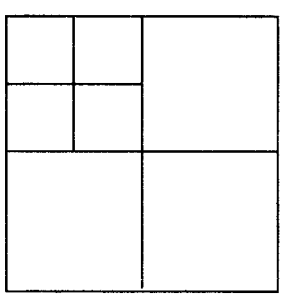
$$|A| = |A \cap A_1| + |A \cap A_2| + \cdots + |A \cap A_n|$$

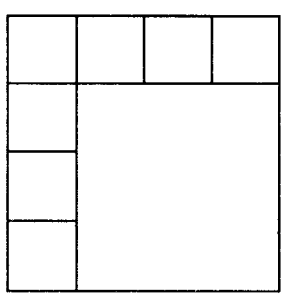
۲۱. یک تکه مقوای مربع شکل را با قیچی به n تا مربع کوچکتر (نه لزوماً مساوی) بریده‌ایم. n کدامیک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

الف) ۱۱۲ ب) ۱۷۲ ج) ۲۲۲ د) ۳۱۲ ه) همهٔ مقادیر الف، ب، ج، و د

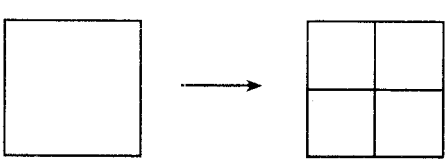
حل: با استقراء ثابت می‌کنیم که هر مربع را می‌توان به n ($n \geq 6$) مربع افراز کرد.







به ازای $n = 6, 7, 8$ داریم که فرض می‌کنیم حکم به ازای n درست باشد و برای $n+3$ ثابت می‌کنیم. یعنی فرض می‌کنیم این مربع را توانسته‌ایم به n مربع افراز یکی از n این مربع کنیم، را در نظر بگیرید. به جای این مربع، چهار مربع روبرو را قرار دهید: در نتیجه ۳ مربع جدید به شکل اضافه شده‌اند. یعنی مربع اولیه به $n+3$ مربع افراز شده است. بدین ترتیب حکم استقراء ثابت می‌شود. [به این طریقهٔ استفاده از استقراء دقت کنید یعنی پایهٔ استقراء را $P(k), P(k+1), P(k+2)$ برای k ی مشخص می‌گیریم و فرض می‌کنیم برای هر $n \geq k$ ، $P(n)$ درست باشد و درستی $P(n+3)$ را ثابت می‌کنیم.]



MATH75.IR

می‌توان ثابت کرد که به ازای $n = ۲, ۳, ۵$، یک مربع را نمی‌توان به n مربع افراز کرد. البته این حکمی که در بالا با استفاده از استقراء ثابت شد، قضیهٔ بسیار معروفی است.

بنابراین گزینهٔ (ه) صحیح است.

۲۲. از میان عددهای $۱, ۲, \ldots, ۲۰$ جداقل چند عدد را باید حذف کنیم بطوریکه مجموع هیچ دو عدد باقی مانده، عددی اول نباشد.

الف)۷ ب)۸ ج)۹ د)۱۰ ه)۱۱

حل: زوجهای مرتب زیر را در نظر بگیرید: (تعداد این زوجها ۱۰ تا است.)

$$(۱, ۲), (۳, ۲۰), (۴, ۱۹), (۵, ۱۸), \ldots, (۱۰, ۱۳), (۱۱, ۱۲)$$

مجموع دو مؤلفهٔ زوج اول برابر ۳ و مجموع دو مؤلفهٔ هر زوج دیگری برابر ۲۳ است. در نتیجه نمی‌توان از هر زوج مرتب هر دو مؤلفه را انتخاب کرد. بنابراین حداقل ۱۰ عدد را باید حذف کنیم (از هر زوج مرتب یک عدد را حذف کنیم)، تا در مجموعهٔ باقی مانده مجموع هیچ دو عددی، عدد اول نشود.

حال اگر ۱۰ عدد فرد $۱, ۳, ۵, ۷, \ldots, ۱۹$ را از مجموعه مفروض حذف کنیم، مجموعهٔ اعداد زوج از ۲ تا ۲۰ باقی می‌ماند که مجموع هر دو تا از آنها عددی غیر اول است.

بنابراین گزینهٔ (د) صحیح است.

نکته: ثابت می‌کنیم که از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۲k\}$ لااقل باید k عدد حذف شوند تا مجموع هر دو عدد باقی مانده، عددی غیر اول شود.[واضح است که اگر k عدد فرد را از مجموعهٔ بالا حذف کنیم، یک مجموعهٔ مطلوب بدست می‌آید.] این مطلب را با استقرای قوی ثابت می‌کنیم. درستی پایهٔ استقراء واضح است. فرض کنید این حکم به ازای اعداد $k = ۱, ۲, \ldots, n-۱$ درست باشد، حال باید درستی حکم را برای $k = n$ ثابت کنیم. بر طبق قضیهٔ چبیشف، به ازای هر m طبیعی، عدد اولی بین $m, ۲m$ وجود دارد. در نتیجه عدد اولی مثل p بین $۲n, ۴n$ وجود دارد، زوجهای مرتب زیر را در نظر بگیرید:

$$(\frac{p-۱}{۲}, \frac{p+۱}{۲}), (\frac{p-۱}{۲}-۱, \frac{p+۱}{۲}+۱), \ldots, (p-۲n+۱, ۲n-۱), (p-۲n, ۲n)$$

مجموع اعداد هر زوج مرتب برابر p است در نتیجه در مجموعهٔ مفروض، از هر زوج مرتب باید حداکثر یک مؤلفه انتخاب شود. به عبارت دیگر، از مجموعهٔ $\{p-۲n, p-۲n+۱, \ldots, ۲n\}$ باید حداکثر $۱ + ۲n - \frac{p+۱}{۲}$ عضو انتخاب شود. از طرف دیگر بر طبق فرض استقراء از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, p-۲n-۱\}$ نیز حداکثر $\frac{p-۲n-۱}{۲}$ عضو می‌تواند انتخاب شود. بنابراین حداکثر تعداد اعضای مجموعهٔ باقی مانده برابر است با:

$$۲n - \frac{p+۱}{۲} + ۱ + \frac{p-۱-۲n}{۲} = n$$

به بیان دیگر باید حداقل n عضو را از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۲n\}$ حذف کنیم.

MATH75.IR

بدین ترتیب حکم استقراء ثابت می‌شود.

۲۳. به ازای کدام دسته از مقادیر n، تابع $f : \{۱,\dots,۳۱\} \to \{۱,\dots,۳۱\}$ وجود دارد که در هر دو شرط زیر صدق کند: $(f^i = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{i})$

برای هر $x \in \{۱,\dots,۳۱\}$ داریم که $f^n(x) = x$. برای هر $۰ < i < n$ داریم $f^i(x) = x \iff x = ۱$.

الف) مجموعهٔ اعداد اول کمتر از ۳۱ ب) $\{۲,۸,۱۶\}$

ج) $\{۲,۳,۱۵\}$ د) $\{\, ۲k+۱ \mid k = ۱,۲,\dots,۱۴ \,\}$

ه) $\{۳,۷,۱۳\}$

حل: گراف مسأله را بدین صورت تشکیل می‌دهیم که ۳۱ نقطه در صفحه قرار می‌دهیم و آنها را با اعداد $۱,۲,\dots,۳۱$ شماره گذاری می‌کنیم. حال عدد x را به y به صورت جهت دار وصل می‌کنیم اگر $y = f(x)$. درجهٔ رأس شماره ۱ برابر ۱ است چرا که $f(۱) = ۱$، پس رأس ۱ به خودش وصل است. درجهٔ بقیهٔ رئوس برابر ۲ است چرا که برای هر رأس x، x به $f(x)$ وصل است و $f^{n-۱}(x)$ که خود عددی بین ۲ تا ۳۱ است نیز به x وصل است $(f(f^{n-۱}(x)) = x)$. در نتیجه این گراف به یک لوپ و یک تعدادی دورافراز می‌شود. یک دور دلخواه را با k راس $x_k,\dots,x_۲,x_۱$ در نظر بگیرید. داریم که:

$$x_۲ = f(x_۱)\ ,\ x_۳ = f(x_۲) = f^۲(x_۱)\ ,\ \dots\ ,\ x_k = f^{n-۱}(x_۱) \implies n = k$$

بنابراین هر دور در این گراف، دقیقاً n یال دارد. فرض کنید این گراف m تا دور n یالی دارد. در نتیجه:

$$۳۱ = ۱ + mn \quad \implies \quad n|۳۰$$

بنابراین گزینهٔ (ج) صحیح است.

نکته: به ازای هر n که $n|۳۰$، با استفاده از روش بالا می‌توان تعداد توابعی را شمرد که در شرایط مسئله صدق می‌کند. زیرا ما m تا دور n یالی داریم $(m = \frac{۳۰}{n})$ [در مجموع یک گراف با ۳۰ رأس داریم] و می‌خواهیم این رئوس را با اعداد $۱,۲,۳,\dots,۳۱$ به طور دلخواه بپوشانیم. البته باید دقت کنیم که دورها متشابه هم هستند و با هم فرقی ندارند.

۲۴. بزرگترین m ای که دنباله‌ای مثل $a_۱,a_۲,\dots,a_m$ با شرایط زیر وجود دارد، چند است؟

$a_i \in \{۱,۲,۳,\dots,۱۰\}$، اگر $a_i = a_j$ و $a_{i+۱} = a_{j+۱}$، آنگاه $i = j$.

الف) ۹۸ ب) ۹۹ ج) ۱۰۰ د) ۱۰۱ ه) ۱۰۲

حل: زوجهای مرتب زیر را در نظر بگیرید:

$$(a_۱,a_۲)\ ,\ (a_۲,a_۳)\ ,\ \dots\ ,\ (a_{m-۲},a_{m-۱})\ ,\ (a_{m-۱},a_m)$$

MATH75.IR

هر زوج مرتب (a_i, a_{i+1}) با شرط $1 \le a_i, a_{i+1} \le 10$، بر طبق اصل ضرب می‌تواند $10 \times 10 = 100$ حالت به خود بگیرد. تعداد زوج‌های مرتب بالا $m-1$ تا است. اگر $m \le 102$ باشد، سپس بر طبق اصل لانهٔ کبوتراز آنجا که $m-1 \le 101$ زوج مرتب داریم و تعداد زوج مرتب‌های مختلف برابر ۱۰۰ است دو زوج مرتب (a_i, a_{i+1}) و (a_j, a_{j+1}) وجود دارند که با هم برابر هستند. این تناقض است زیرا $a_i = a_j$ و $a_{i+1} = a_{j+1}$.

حال سعی می‌کنیم یک دنبالهٔ مطلوب با $m = 101$ عضو بسازیم. ادعا می‌کنیم که دنباله‌ای مثل $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ وجود دارد که $a_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$، و همچنین اگر $a_i = a_j$ و $a_{i+1} = a_{j+1}$ سپس $i = j$. این حکم را با استقراء بر روی n ثابت می‌کنیم. به ازای $n = 1$، دنبالهٔ $1, 1$ در شرایط مسئله صدق می‌کند. فرض کنید به ازای n، دنبالهٔ $a_1, a_2, \cdots, a_{n^2+1}$ وجود دارد که در شرایط مسئله صدق می‌کند. حال اعداد $1, n+1, n+1, \ldots, n-1, n+1, 2, n+1$ را به انتهای دنبالهٔ مفروض اضافه کنید. تعداد این اعداد برابر $2n+1$ است. در نتیجه تعداد عضوهای دنبالهٔ مفروض برابر است با:

$$(n^2+1) + (2n+1) = (n+1)^2 + 1$$

این دنبالهٔ جدید در شرایط مسئله صدق می‌کند. چرا که اگر $a_i = a_j$ و $a_{i+1} = a_{j+1}$ $(i < j)$، سپس حالات زیر را داریم:

۱) $i, j \le n^2 + 1$. در این صورت برطبق فرض استقراء چنین i, j ای وجود ندارند.

۲) $i, j > n^2 + 1$، واضح است که در بین این $2n+1$ عدد چنین a_i, a_j ای وجود ندارند.

۳) $i < n^2 + 1, j > n^2 + 1$. داریم که $a_{i+1} \in 1, 2, 2, \ldots, n$، در نتیجه $a_i, a_{i+1} \le n$. ولی از بین دو عدد متوالی a_j و a_{j+1} در دنباله حداقل یکی برابر $n+1$ است. بنابراین چنین i, j وجود ندارد.

۴) $i = n^2 + 1, j > n^2 + 1$. در نتیجه $a_{i+1} = a_{n^2+2} = 1$. تنها a_{j+1} ای که می‌تواند ۱ باشد جملهٔ آخر دنباله است. بنابراین داریم $a_j = a_{(n+1)^2} = n+1$ ولی $a_i \le n$، از اینرو داریم $a_i \ne a_j$.

در نتیجه دنبالهٔ جدیدی که ساختیم دارای $(n+1)^2 + 1$ عضو است و همچنین در شرایط مسئله نیز صدق می‌کند. بدین ترتیب حکم استقراء ثابت می‌شود.

این حکم به ازای $n = 10$ می‌گوید که دنباله‌ای با طول $10^2 + 1 = 101$ وجود دارد که در شرایط مسئله صدق می‌کند.

بنابراین گزینهٔ (د) صحیح است.

۲۵. $A \subseteq \mathbf{N}$ را «خوب» می‌نامیم، هرگاه بتوان اعضای آن به صورت دنبالهٔ $a_1, a_2, a_3, \cdots$ نوشت به طوری که هر دو جمله متوالی مثل a_i و a_{i+1} دارای مقسوم علیه مشترک بزرگتراز ۱ باشند. کدامیک از مجموعه‌های زیر خوب

MATH75.IR

نیستند؟

الف)اعداد طبیعی بزرگتر از ۱ ب)اعداد فرد بزرگتر از ۱

ج) اعداد طبیعی به صورت $۳k+۲$ د)اعداد مربع کامل بزرگتر از ۱

ه)هر چهارمجموعه، خوب هستند.

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم مجموعهٔ اعداد طبیعی بزرگتر از ۱، یک مجموعه خوب است. دنبالهٔ $a_۱, a_۲, a_۳, \ldots$ از اعداد طبیعی را به طور استقرایی می‌سازیم به طوری که در نهایت، هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱ دقیقاً یکبار ظاهر شده باشد و همچنین بزرگترین مقسوم علیه مشترک هر دو جملهٔ متوالی دنباله از یک بیشتر باشد. با دنبالهٔ $a_۱ = ۲$ شروع می‌کنیم و فرض می‌کنیم توانسته‌ایم این دنباله را آنقدر گسترش دهیم تا به دنبالهٔ $a_m, \ldots, a_۲, a_۱$ برسیم به طوری که هر کدام از اعداد $۱, ۲, \ldots, k$ دقیقاً یکبار در دنباله ظاهر شده باشد و همچنین بزرگترین مقسوم علیه مشترک هر دو جملهٔ متوالی این دنباله بزرگتر از یک باشد، در ضمن هیچ عددی دوبار در دنباله ظاهر نشده باشد. ثابت می‌کنیم می‌توان این دنباله را گسترش داد به طوری که هر کدام از اعداد $۱, ۲, \ldots, k, k+۱$ دقیقاً یک بار در این دنبالهٔ جدید ظاهر شده باشد و بزرگترین مقسوم علیه مشترک هر دو جمله متوالی این دنبالهٔ جدید بزرگتر از ۱ باشد و همچنین هیچ عددی دوبار در این دنباله ظاهر نشده باشد (به طرز بکار بردن استقراء در این مسئله خوب دقت نمایید). اگر $k+۱$ در دنبالهٔ $a_m, \ldots, a_۲, a_۱$ آمده باشد، سپس همین دنباله به ازای $k+۱$ نیز در حکم استقراء صدق می‌کند. اگر $k+۱$ در دنبالهٔ $a_m, \ldots, a_۲, a_۱$ ظاهر نشده باشد، تعریف می‌کنیم که

$$\alpha = Max(a_۱, a_۲, \ldots, a_m) \ , \ a_{m+۱} = \alpha(k+۱)a_m \ , \ a_{m+۲} = k+۱$$

در این صورت داریم:

$$(a_{m+۲}, a_{m+۱}) > ۱ \ , \ (a_{m+۱}, a_m) > ۱$$

همچنین $a_{m+۱}$ از تک تک $a_m, \ldots, a_۲, a_۱$ بزرگتراست در نتیجه $a_{m+۱}$ برابر هیچ کدام از a_i ها نیست. واضح است دنبالهٔ $a_{m+۲}, a_{m+۱}, a_m, \ldots, a_۲, a_۱$ به ازای $k+۱$ در حکم استقراء صدق می‌کند بنابراین حکم استقراء ثابت شد. حال اگر این روش استقراء را تا بی‌نهایت ادامه دهیم به دنبالهٔ مطلوب خواهیم رسید.

با همین روش می‌توان ثابت کرد که سه مجموعهٔ دیگری که در گزینه‌های مسئله آمده‌اند، مجموعه‌های خوب هستند. بنابراین گزینهٔ (ه) صحیح است.

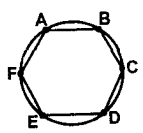
MATH75.IR

پرسش‌های تشریحی

آذر ۶۸

۱. n نقطه در صفحه مفروض است به طوری که فاصلهٔ بین هر دو نقطه از آنها بزرگتر یا مساوی ۱ است. ثابت کنید تعداد جفتهایی از این نقاط که فاصلهٔ آنها دقیقاً مساوی یک باشد از $3n$ تجاوز نمی‌کند.

حل: گراف مسأله را بدین صورت تشکیل می‌دهیم که این n نقطه را رئوس گراف G می‌گیریم. دو رأس را به هم وصل می‌کنیم اگر فاصلهٔ بین آنها مساوی یک باشد. درجهٔ رأسها را به ترتیب با اعداد $d_1, d_2, \cdots, d_n$ نامگذاری می‌کنیم. ادعا می‌کنیم درجهٔ هیچ رأسی از ۶ بیشتر نیست. فرض کنید نقطهٔ i ام به d_i رأس وصل باشد و $d_i \geq 7$.



دایره‌ای به مرکز نقطهٔ i ام و به شعاع ۱ می‌زنیم. روی این دایره، یک شش‌ضلعی منتظم در نظر می‌گیریم، واضح است که طول اضلاع این شش‌ضلعی برابر ۱ است. (شکل مقابل)

دایره به ۶ کمان FA, EF, DE, CD, BC, AB تقسیم شده است و $d_i \geq 7$ نقطه روی این دایره قرار دارند. بر طبق اصل لانهٔ کبوتر از آنجا که ما ۶ کمان داریم، دو نقطه وجود دارند که داخل یکی از این ۶ کمان هستند. فرض کنید نقاط x, y داخل کمان AB هستند: $|xy| < |AB| = 1$

تناقض بالا نشان می‌دهد که $d_i \leq 6$. از این رو داریم:

$$\text{تعداد فاصله‌های برابر یک} = \frac{(d_1 + d_2 + \cdots + d_n)}{2} \leq \frac{(6 + 6 + \cdots + 6)}{2} = \frac{6n}{2} = 3n$$

رابطهٔ بالا از آنجا نتیجه می‌شود که تعداد یالهای یک گراف، نصف مجموع درجات آن گراف است.

۲. روی محیط دایره‌ای به شعاع یک متر نقطهٔ دلخواه A_0 را انتخاب و در جهت مثبت دایرهٔ مثلثاتی نقاط $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ را طوری انتخاب می‌کنیم که متر $\overset{\frown}{A_0A_1} = 1$، متر $\overset{\frown}{A_1A_2} = 1/2$، ...، متر $\overset{\frown}{A_{n-1}A_n} = \frac{1}{n}$، ... (تعداد نقاط نامتناهی است.)

الف) نشان دهید هیچ دو نقطهٔ $A_i, A_j (i \neq j)$ بر هم منطبق نیستند.

ب) نشان دهید اقلاً یک کمان یک میلیمتری بر روی این دایره وجود دارد که تعداد نقاط A_i واقع بر آن بینهایت است.

MATH75.IR

حل: الف) فرض کنید دو نقطهٔ A_i و A_j بر هم منطبق باشند:

$$|A_i - A_۰| = ۱ + \frac{۱}{۲} + \cdots + \frac{۱}{i} \qquad , \qquad |A_j - A_۰| = ۱ + \frac{۱}{۲} + \cdots + \frac{۱}{j}$$

می‌توان فرض کرد که $j > i$. محیط این دایره برابر ۲π است و نقطهٔ A_j بر A_i منطبق است، در نتیجه k ای طبیعی وجود دارد به طوری که بعد از k دور چرخیدن دایره، با شروع از A_i، می‌توان به A_j رسید.

یعنی:

$$|A_j - A_۰| - |A_i - A_۰| = ۲k\pi$$

از این رو داریم:

$$\frac{۱}{i+۱} + \frac{۱}{i+۲} + \cdots + \frac{۱}{j} = ۲k\pi \qquad (*)$$

π عددی گنگ است، در نتیجه طرف راست رابطهٔ (*) عددی گنگ است ولی طرف چپ رابطهٔ (*) عددی گویا است. بنابراین رابطه‌ی (*) می‌گوید که عددی هم گنگ و هم گویا است که تناقض است.

ب) با شروع از نقطه‌ی $A_۰$، دایره را به یک تعدادی کمان ۱ میلی‌متری افراز می‌کنیم (البته یک کمان در نهایت باقی می‌ماند که کمتر از ۱ میلی‌متر است). تعداد این کمانها را m بگیرید $[m = ۱۰۰۰ \times ۲ \times \frac{۳}{۱۴۱} = ۶۲۸۲]$. بی‌نهایت نقطه‌ی A_i، در m کمان قرار گرفته‌اند در نتیجه بر طبق اصل لانه‌ی کبوتر، در یکی از این کمانها تعداد نقاط A_i واقع بر آن بی‌نهایت است.

نکته: اگر بی‌نهایت شی را در n مکان قرار دهیم، حتماً در مکانی بی‌نهایت شی وجود دارد. برای اثبات این ادعا، فرض خلف می‌کنیم. فرض کنید در مکان i ام، α_i شی باشد. در نتیجه در کل $\alpha_۱ + \alpha_۲ + \cdots + \alpha_n$ شی داریم که امکان ندارد زیرا بر طبق فرض بی‌نهایت شی داریم و نه $\alpha_۱ + \alpha_۲ + \cdots + \alpha_n$.

آذر ۶۹

۳. اگر $A_۱, A_۲, \ldots, A_n, \ldots$ مجموعه‌های دلخواه باشند، مجموعه‌های B_n را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$B_n = \begin{cases} A_۱ & \text{اگر } n = ۱ \\ A_n - \bigcup_{i=۱}^{n-۱} A_i & \text{اگر } n \geq ۲ \end{cases}$$

الف) ثابت کنید $B_n \cap B_m = \emptyset \quad (n \neq m)$.

ب) ثابت کنید $\bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=۱}^{\infty} B_n$.

MATH75.IR

حل: الف) واضح است که به‌ازای $i = ۱, ۲, \cdots$ و $B_i \subseteq A_i$. دو n, m طبیعی با شرط $m > n$ در نظر بگیرید. اگر B_n مجموعه‌ی تهی باشد که برابری $B_n \cap B_m = \emptyset$ واضح است. در غیر این صورت B_n دارای عضوی مثل α است:

$$B_n \subseteq A_n \Rightarrow \alpha \in A_n$$

B_m مجموعه‌ای است که شامل تمام عناصر A_m، منهای هر عنصر دیگری که در یکی از مجموعه‌های $A_۱, \ldots, A_n, \ldots, A_{m-۱}$ است می‌شود. یکی از این عناصر α است، در نتیجه B_m شامل α نیست. در بالا ثابت کردیم که هر عنصری که در B_n باشد در B_n وجود ندارد به عبارت دیگر:

$$B_n \cap B_m = \emptyset$$

ب) برای اثبات رابطه‌ی $\bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=۱}^{\infty} B_n$ و همچنین روابطی نظیر این رابطه در مجموعه‌ها، می‌آییم ثابت می‌کنیم که هر عنصری که در سمت چپ رابطه وجود دارد، در سمت راست نیز وجود دارد و بالعکس، هر عنصری که در سمت راست رابطه وجود دارد، در سمت چپ نیز وجود دارد. واضح است که اثبات این دو گزاره، معادل درستی رابطه‌ی مفروض است. فرض کنید $\alpha \in \cup_{n=۱}^{\infty} B_n$، بنابراین mای وجود دارد که $\alpha \in B_m$.از طرفی داریم $B_m \subseteq A_m$. در نتیجه:

$$\alpha \in A_m \Rightarrow \alpha \in \cup_{n=۱}^{\infty} A_n$$

حال فرض کنید که $\beta \in \cup_{n=۱}^{\infty} A_n$. کوچکترین m طبیعی را در نظر بگیرید که $\beta \in A_m$. یعنی:

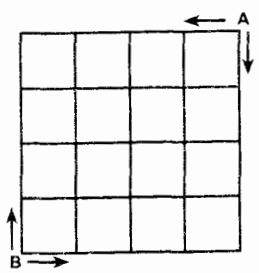
$$\beta \notin A - ۱ \ , \ \beta \notin A_۲, \cdots, \beta \notin A_{m-۱} \ , \ \beta \in A_m$$

پر واضح است که چنین mای وجود دارد. از روابط بالا نتیجه می‌گیریم که $\beta \notin A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_{m-۱}$ از این‌رو داریم:

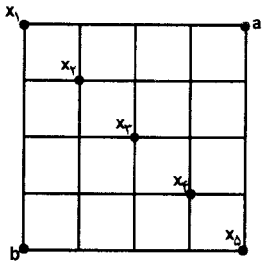
$$\beta \in [A_m - A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_{m-۱}] \quad \text{و یا} \quad \beta \in B_m$$

بدین ترتیب درستی رابطه، نتیجه می‌شود.

۴. در شبکه‌ی ۴ × ۴ شکل مقابل متحرکی از نقطه‌ی A به سمت B حرکت می‌کند به‌طوری که هر ثانیه یک ضلع مربع واحد را به سمت پایین یا به‌سمت چپ با احتمال برابر می‌پیماید. همچنین متحرک دیگری از نقطه‌ی B به سمت نقطه‌ی A در حرکت است به‌طوری که هر ثانیه یک ضلع مربع واحد را به سمت بالا یا به سمت راست با احتمال برابر می‌پیماید.



MATH75.IR



اگر هر دو متحرک با هم شروع به حرکت نماید، احتمال برخورد دو متحرک را محاسبه کنید.

حل: تعداد حالاتی که می‌توان از a یا b به $x_۱$ رفت برابر است با:

$$\binom{۴}{۰} = ۱$$

تعداد حالاتی که می‌توان از a یا b به $x_۲$ رفت برابر است با:

$$\binom{۴}{۱} = ۴$$

تعداد حالاتی که می‌توان از a یا b به $x_۳$ رفت برابر است با:

$$\binom{۴}{۲} = ۶$$

تعداد حالاتی که می‌توان از a یا b به $x_۴$ رفت برابر است با:

$$\binom{۴}{۱} = ۴$$

تعداد حالاتی که می‌توان از a یا b به $x_۵$ رفت برابر است با:

$$\binom{۴}{۰} = ۱$$

از این‌رو بر طبق اصل ضرب داریم:

تعداد حالاتی که در آن A و B در نقطه‌ی $x_۱$ یکدیگر را ملاقات می‌کنند برابر است با:

$$\binom{۴}{۰}\binom{۴}{۰} = ۱$$

تعداد حالاتی که در آن A و B در نقطه‌ی $x_۲$ یکدیگر را ملاقات می‌کنند برابر است با:

$$\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱} = ۱۶$$

تعداد حالاتی که در آن A و B در نقطه‌ی $x_۳$ یکدیگر را ملاقات می‌کنند برابر است با:

$$\binom{۴}{۲}\binom{۴}{۲} = ۳۶$$

تعداد حالاتی که در آن A و B در نقطه‌ی $x_۴$ یکدیگر را ملاقات می‌کنند برابر است با:

$$\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱} = ۱۶$$

MATH75.IR

تعداد حالاتی که در آن A و B در نقطه‌ی x_5 یکدیگر را ملاقات می‌کنند برابر است با:

$$\binom{۴}{۰}\binom{۴}{۰} = ۱$$

(در بالا A را متحرکی گرفته‌ایم که از a حرکت می‌کند و نیز B را متحرکی گرفته‌ایم که از b حرکت می‌کند).
واضح است که اگر A و B بخواهند یکدیگر را ملاقات کنند باید این ملاقات در یکی از نقاط $x_1, x_2, \ldots, x_5$ صورت گیرد چرا که هر دو متحرک باید چهار حرکت انجام داده باشند. بنابراین داریم:

تعداد حالاتی که در آن A, B یکدیگر را ملاقات می‌کنند. $= ۱ + ۱۶ + ۳۶ + ۱۶ + ۱ = ۷۰$

تعداد حالاتی که در آن A به نقطه X_i, B به‌نقطه‌ی x_j می‌رسد برابر است با:

$$\binom{۴}{i-۱}\binom{۴}{j-۱}$$

مثلاً تعداد حالاتی که در آن A به x_1 و B به x_2 می‌رسد برابر $\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۰}$ است. از این رو تعداد کل حالات و یا به بیان دیگر، تعداد حالاتی که در آن هر کدام از دو متحرک A و B، ۴ حرکت انجام می‌دهند برابر است با:

$$\text{تعداد کل حالات} = \sum_{i,j=۰}^{۴}\binom{۴}{i}\binom{۴}{j} = \sum_{i=۰}^{۴}\binom{۴}{i} \times \sum_{j=۰}^{۴}\binom{۴}{j} = ۲^۴ \times ۲^۴ = ۲۵۶$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P = \frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات}} = \frac{۷۰}{۲۵۶}$$

بهمن ۶۹

۵. الف) ثابت کنید به ازای هر $n \geq ۱$ داریم

$$۱ + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۳^۲} + \cdots + \frac{۱}{n^۲} < ۲$$

ب) برای مجموعه‌ی $X = \{۱, ۲, ۳, \cdots, n\}$ که در آن $n \geq ۱$، زیرمجموعه‌های ناتهی X را A_k، $(k = ۱, ۲, ۳, \cdots, m)$ می‌نامیم. (بدیهی است که $m = ۲^n - ۱$). اگر حاصلضرب تمام عضوهای مجموعه‌ی A_k را با a_k نشان دهیم، ثابت کنید که:

$$\sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{m}\frac{۱}{\alpha_i \times j^۲} < ۲n + ۱$$

MATH75.IR

حل: الف) به‌ازای هر $k \geq ۲$ داریم که $\frac{۱}{k^۲} < \frac{۱}{k(k-۱)} = \frac{۱}{k-۱} - \frac{۱}{k}$

رابطه‌ی بالا را به ازای $k = ۲, ۳, \cdots, n$ می‌نویسیم و سپس با هم جمع می کنیم. از این‌رو داریم:

$$۱ + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۳^۲} + \cdots + \frac{۱}{n^۲} < ۱ + \left(\frac{۱}{۱} - \frac{۱}{۲}\right) + \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳}\right) + \cdots + \left(\frac{۱}{n-۲} - \frac{۱}{n-۱}\right) + \left(\frac{۱}{n-۱} - \frac{۱}{n}\right) = ۲ - \frac{۱}{n} < ۲$$

ب) ابتدا لم زیر را ثابت می‌کنیم:

لم: مجموعه‌ی $Y = \{\alpha_۱, \alpha_۲, \cdots, \alpha_k\}$ را در نظر بگیرید، زیرمجموعه‌های ناتهی Y را با $B_۱, \cdots, B_{۲^n-۱}$ نمایش می‌دهیم. داریم که:

$$\sum_{i=۱}^{۲^n-۱} \frac{۱}{a_i} = \left(۱ + \frac{۱}{\alpha_۱}\right)\left(۱ + \frac{۱}{\alpha_۲}\right)\cdots\left(۱ + \frac{۱}{\alpha_n}\right) - ۱ \qquad (*)$$

که در آن a_i، حاصلضرب تمام عضوهای مجموعه‌ی B_i است.

اثبات: به‌ازای i ای دلخواه، عناصر B_i را برابر $\alpha_{i_۱}, \alpha_{i_۲}, \ldots, \alpha_{i_k}$ بگیرید. عبارت $\frac{۱}{\alpha_{i_۱}\alpha_{i_۲}\cdots\alpha_{i_k}}$ یکبار در سمت چپ رابطه‌ی $(*)$ ظاهر می‌شود. بسط عبارت سمت راست رابطه‌ی $(*)$ را در نظر بگیرید. عبارت $\frac{۱}{\alpha_{i_۱}\alpha_{i_۲}\cdots\alpha_{i_k}} = \frac{۱}{\alpha_{i_۱}}\frac{۱}{\alpha_{i_۲}}\cdots\frac{۱}{\alpha_{i_k}}$ دقیقاً یکبار در سمت راست $(*)$ نیز ظاهر می‌شود یعنی وقتی که $\frac{۱}{\alpha_{i_۱}}$ را از پرانتز $i_۱$ ام، $\frac{۱}{\alpha_{j_۲}}$ را از پرانتز $i_۲$ ام ، ... انتخاب کنیم. بالعکس، فرض کنید عدد $\frac{۱}{\alpha_{j_۱}\alpha_{j_۲}\cdots\alpha_{j_p}}$ در سمت راست $(*)$ ظاهر شده باشد. در این صورت i ای وجود دارد که B_i برابر مجموعه‌ی $\{\alpha_{j_۱}, \alpha_{j_۲}, \cdots, \alpha_{j_p}\}$ باشد. بنابراین عدد $\frac{۱}{\alpha_{j_۱}\alpha_{j_۲}\cdots\alpha_{j_p}}$ دقیقاً یکبار در سمت چپ رابطه‌ی $(*)$ نیز می‌آید. در سمت راست $(*)$، عدد ۱ را بدین دلیل کم کرده‌ایم که B_iها ناتهی هستند و نمی‌توان از همه‌ی n پرانتز، عدد ۱ را انتخاب کرد. بدین ترتیب لم ثابت می‌شود.

حال به مسأله باز می‌گردیم. بر طبق لم داریم:

$$\sum_{i=۱}^{m} \frac{۱}{a_i} = \left(۱ + \frac{۱}{۱}\right)\left(۱ + \frac{۱}{۲}\right)\left(۱ + \frac{۱}{۳}\right)\cdots\left(۱ + \frac{۱}{n-۱}\right)\left(۱ + \frac{۱}{n}\right) - ۱ = \left[\frac{۲}{۱} \times \frac{۳}{۲} \times \frac{۴}{۳} \times \cdots \times \frac{n}{n-۱} \times \frac{n+۱}{n}\right] - ۱ = (n+۱) - ۱ = n$$

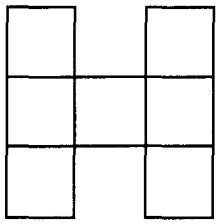
درنتیجه

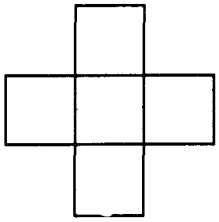
$$\sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{m} \frac{۱}{a_i \times j^۲} = \sum_{i=۱}^{m} \frac{۱}{a_i} \times \sum_{j=۱}^{m} \frac{۱}{j^۲} < n \times ۲ < ۲n + ۱$$

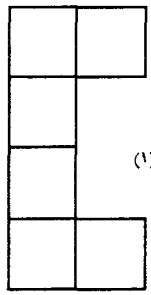
۶. می‌خواهیم زمین مستطیل‌شکل به ابعاد ۱۳۷ × ۵ را با موزاییکهایی با اشکال زیر فرش کنیم. نشان دهید این عمل امکان‌پذیر نیست.

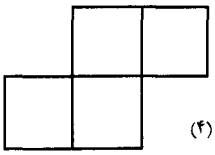
MATH75.IR

(در پنج شکل زیر هر یک از مربعها به ضلع واحد است)


شکل (۳)


شکل (۲)


شکل (۱)


شکل (۴)

شکل (۵)

حل: فرض کنید که بتوان چنین عملی را انجام داد. این زمین را مانند شطرنج رنگ‌آمیزی می‌کنیم یعنی صفحه را با دو رنگ سیاه و سفید رنگ می‌کنیم به‌طوری که هیچ دو مربع مجاوری دارای رنگ یکسانی نباشند (به این عمل، شطرنجی کردن صفحه گویند). هر دو ضلع این مستطیل دارای طول فردی هستند در نتیجه تفاضل تعداد مربعهای سفید با سیاه، برابر ۱ است.

شکل ۱ را هر جوری در این صفحه قرار دهیم، دارای ۳ خانه‌ی سیاه و ۳ خانه‌ی سفید می‌شود. این گفته در مورد شکلهای ۴ و ۵ نیز درست است. یعنی در این شکلها، تعداد خانه‌های سفید با سیاه برابر است. بنابراین تفاضل خانه‌های سیاه و سفیدی که درون دو شکل ۲ و ۳ قرار دارند برابر ۱ است. تعریف می‌کنیم:

تعداد شکلهای از نوع ۳ که در صفحه به‌کار رفته است و خانه‌ی وسطی‌اش سفید است. $= X_1$

تعداد شکلهای از نوع ۳ که در صفحه به‌کار رفته است و خانه‌ی وسطی‌اش سیاه است. $= X_2$

تعداد شکلهای از نوع ۲ که در صفحه به‌کار رفته است و خانه‌ی وسطی‌اش سفید است. $= Y_1$

تعداد شکلهای از نوع ۲ که در صفحه به‌کار رفته است و خانه‌ی وسطی‌اش سیاه است. $= Y_2$

تعداد خانه‌های سیاهی که در شکلهایی از نوع ۲ و ۳ هستند برابر است با $2X_1 + 5X_2 + 4Y_1 + Y_2$

تعداد خانه‌های سفیدی که در شکلهایی از نوع ۲ و ۳ هستند برابر است با $5X_1 + 2X_2 + Y_1 + 4Y_2$

از این‌رو داریم:

$$\text{تفاضل تعداد خانه‌های سیاه و سفید} = 1 = |(2X_1 + 5X_2 + 4Y_1 + Y_2) - (5X_1 + 2X_2 + Y_1 + 4Y_2)|$$

$$\Longrightarrow \quad 1 = 3|-X_1 + X_2 + Y_1 - Y_2|$$

رابطه‌ی بالا تناقض است چرا که طرف راست آن بر ۳ بخشپذیر است ولی طرف چپ آن بر ۳ بخشپذیر نیست در نتیجه این صفحه را نمی‌توان با ۵ شکل بالا فرش کرد.

MATH75.IR

آذر ۷۰

۷. ۵۵ عدد دلخواه از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۰۰\}$ انتخاب می‌کنیم. نشان دهید که همواره می‌توان دو عدد بین اعداد انتخاب شده یافت به‌طوری که تفاضل آنها ۱۰ باشد.

حل: به‌ازای $i = ۱, ۲, \cdots, ۱۰۰$، A_i را مجموعه‌ی همه‌ی اعداد طبیعی کمتر از ۱۰۱ می‌گیریم به‌طوری که باقیمانده‌ی هر کدام از آن اعداد بر ۱۰ برابر i باشد. واضح است که:

$$|A_۱| = |A_۲| = \cdots = |A_{۱۰}| = ۱۰$$

حال فرض کنید ۵۱ عدد از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۰۰\}$ انتخاب کرده‌ایم. بر طبق اصل لانه‌ی کبوتری یکی از A_i ها، مثل $A_۱$، شامل لااقل ۶ عدد از این اعداد انتخاب شده است. اعضای $A_۱$ را به ترتیب صعودی مرتب می کنیم، واضح است که اگر از مجموعهٔ $A_۱$ ، لااقل ۶ عضو انتخاب شود، بر طبق اصل لانه‌ی کبوتر دو عدد متوالی در بین اعداد انتخاب شده وجود دارد. تفاضل این دو عدد متوالی برابر ۱۰ است.

بهمن ۷۰

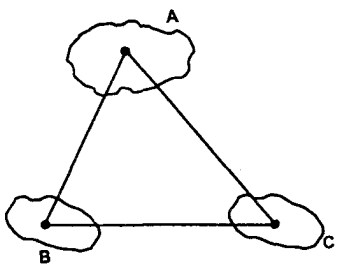
۸. سه گروه C, B, A از دانشمندان ریاضی از سه کشور مختلف در یک کنفرانس گرد آمده‌اند. می‌خواهیم جلسات سه نفری از این دانشمندان تشکیل دهیم به‌طوری که از هر گروه فقط یک نفر شرکت داشته باشد و هر دو نفر دقیقاً در یک جلسه با هم شرکت کرده باشند.

الف) اگر این عمل امکان‌پذیر باشد نشان دهید تعداد افراد هر سه گروه مساویند.

ب) در حالتی که تعداد افراد هر گروه سه باشد نشان دهید این عمل امکان‌پذیر است.

ج) ثابت کنید در حالت کلی تساوی تعداد اعضای سه گروه، این عمل امکان‌پذیر است.

حل: الف) گراف مسأله را بدین صورت تشکیل می‌دهیم که به ازای هر دانشمند، یک رأس در صفحه قرار می‌دهیم. دو رأس را به هم وصل می‌کنیم اگر دانشمندان متناظر با آن دو رأس، در یک جلسه با هم شرکت داشته باشند. گراف به وجود آمده یک گراف سه بخشی است یعنی هیچ دو رأسی در گروه A یا B یا C به هم وصل نیستند. واضح است که هر رأسی از یک گروه به هر رأس دیگری از گروه دیگر وصل است. فرض کنید گروه A دارای a دانشمند، گروه B دارای b دانشمند و گروه C دارای c دانشمند باشد و همچنین فرض کنید تعداد جلسات سه‌نفری تشکیل شده برابر k باشد واضح است که هر جلسه‌ی سه‌نفری معادل مثلثی است که یک رأس آن در A، یک رأس آن در B و رأس دیگر آن در C است. بر طبق فرض مسأله، به‌ازای هر یالی که بین B, A است یک مثلث وجود دارد از این‌رو



MATH75.IR

داریم $K = ab$. به همین ترتیب به‌دست می آید که $k = ab = bc = ca$ و یا $a = b = c$.

ب) فرض کنید $X_۱, X_۲, X_۳$ اعضای A، $Y_۱, Y_۲, Y_۳$ اعضای B و $Z_۱, Z_۲, Z_۳$ اعضای C باشند. جلسات را با استفاده از جدول زیر تشکیل می‌دهیم.

	$X_۱$	$X_۲$	$X_۳$
$Y_۱$	$Z_۱$	$Z_۲$	$Z_۳$
$Y_۲$	$Z_۲$	$Z_۳$	$Z_۱$
$Y_۳$	$Z_۳$	$Z_۱$	$Z_۲$

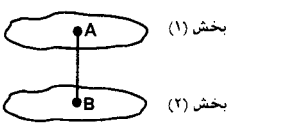
یعنی برای دو نفر دلخواه X_i و Y_j، کافی است نفر Z_k را از جدول پیدا کنیم (Z_k در محل برخورد ستون iام با سطر jام قرار دارد) و جلسه‌ی $X_iY_jZ_k$ را تشکیل دهیم.

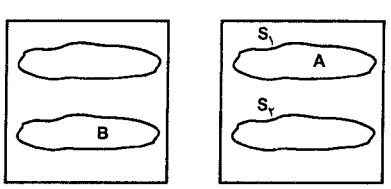
ج) فرض کنید $X_۱, X_۲, \cdots, X_n$ اعضای A، $Y_۱, Y_۲, \cdots, Y_n$ اعضای B، $Z_۱, Z_۲, \cdots, Z_n$ اعضای C باشند. جلسات را طبق جدول زیر تشکیل می‌دهیم:

	$X_۱$	$X_۲$	$X_۳$	$\cdots$	$X_{n-۱}$	X_n
$Y_۱$	$Z_۱$	$Z_۲$	$Z_۳$	$\cdots$	$Z_{n-۱}$	Z_n
$Y_۲$	$Z_۲$	$Z_۳$	$Z_۴$	$\cdots$	Z_n	$Z_۱$
$Y_۳$	$Z_۳$	$Z_۴$	$Z_۵$	$\cdots$	$Z_۱$	$Z_۲$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$Y_{n-۱}$	$Z_{n-۱}$	Z_n	$Z_۱$	$\cdots$	$Z_{n-۳}$	$Z_{n-۲}$
Y_n	Z_n	$Z_۱$	$Z_۲$	$\cdots$	$Z_{n-۲}$	$Z_{n-۱}$

بهمن ۷۱

۹. در طرفین رودخانه‌ای چند شهر وجود دارد. چند خط قایقرانی بین این شهرها دایر است. هر خط قایقراین دقیقاً بین یک شهر از یک سمت رودخانه به یک شهر در سمت دیگر دایر است. از هر شهر دقیقاً به k شهر در طرف دیگر خط قایقرانی دایر است. اگر بین هر دو شهر بتوان به‌وسیله‌ی این قایقها رفت‌وآمد کرد، آنگاه ثابت کنید که با حذف هر یک از این خطهای قایقرانی باز هم می‌توان بین هر دو شهر با استفاده از ان خطوط قایقرانی، رفت‌وآمد کرد ($k > ۱$).





حل: گراف مسأله را بدین صورت تشکیل می‌دهیم که به جای هر شهر، یک رأس قرار می‌دهیم. دو رأس را به هم وصل می‌کنیم اگر بین آنها یک خط قایقرانی باشد. در نتیجه یک گراف دوبخشی به‌دست می آید که بخش اول آن، نمایانگر شهرهای سمت چپ رودخانه و بخش دوم آن، نمایانگر شهرهای سمت راست رودخانه است و همچنین بر طبق فرض، هر رأسی از یک بخش، دقیقاً به k رأس در بخش دیگر وصل است.

MATH75.IR

حال می‌خواهیم ثابت کنیم در این گراف، اگر هر یالی را حذف کنیم باز هم بین دو سر آن یال، مسیری وجود دارد. یال AB را در نظر بگیرید (A در بخش اول و B در بخش دوم است). فرض کنید با حذف این یال دیگر مسیری بین رئوس B, A وجود نداشته باشد. در گراف جدید S_1 را مجموعه‌ی همه‌ی رئوسی بگیرید که در بخش اول قرار دارند و از A به تک‌تک آن رئوس، یک مسیر وجود دارد. همچنین S_2 را مجموعه‌ی همه‌ی رئوسی بگیرید که در بخش دوم قرار دارند و از A به تک‌تک آن رئوس، یک مسیر وجود دارد. هر رأس در S_2 به دقیقاً k رأس در S_1 وصل است (دقت شود که B در S_2 و یا S_1 قرار ندارد) درنتیجه تعداد یالهایی که بین S_2, S_1 است، برابر است با $k|S_2|$. هر رأس از S_1 به‌جز A، به دقیقاً k رأس از S_2 وصل است و همچنین A به $k-1$ رأس از S_2 وصل است در نتیجه تعداد یالهایی که بین S_2, S_1 است برابر است با $k(|S_1|-1)+(k-1)$. از این‌رو داریم:

$$K|S_2| = K(|S_1|-1)+(k-1) \quad \Longrightarrow \quad k(|S_1|-|S_2|) = 1$$

رابطه‌ی بالا تناقض است چرا که طرف چپ آن بر k بخشپذیر است ولی طرف راست آن بر k بخشپذیر نیست ($k \geq 2$). بنابراین هر یالی از گراف را حذف کنیم باز هم گراف همبند باقی می‌ماند.

اردیبهشت ۷۲

۱۰. ثابت کنید زیرمجموعه‌ی S از اعداد طبیعی وجود دارد به طوری که هر عدد طبیعی را بتوان فقط به یک طریق به‌صورت تفاضل دو عضو از S نوشت.

حل: سعی می‌کنیم به صورت استقرایی S را بسازیم. در مرحلهٔ اول S_1 را برابر مجموعهٔ $\{1,2\}$ می‌گیریم. واضح است که عدد ۱ فقط به یک طریق می‌توان به صورت تفاضل دو عضو از S_1 نوشت. فرض کنید بعد از n مرحله ($n \geq 1$)، مجموعه‌ی S_n را به‌دست آورده‌ایم به‌طوری که هر کدام از اعداد $1, 2, \cdots, n$ را به‌طور یکتا بتوان به صورت تفاضل دو عضو از S_n نوشت. حال می‌خواهیم ثابت کنیم که می‌توان S_n را گسترش داد و S_{n+1} را به‌دست آورد به‌طوری که هر عدد از ۱ تا $n+1$ را به طور یکتا بتوان به صورت تفاضل دو عضو از S_{n+1} نوشت. فرض کنید α بزرگترین عضو S_n باشد. تعریف می‌کنیم:

$$S_{n+1} = S_n \cup \{2\alpha+2, 2\alpha+2+(n+1)\}$$

عدد $n+1$ را می‌توان به‌صورت تفاضل دو عضو $2\alpha+n+3, 2\alpha+2$ از S_{n+1} نوشت. حال فرض کنید β یک عضور دلخواه از S_n باشد:

$$(2\alpha+2)-\beta \geq (2\alpha+2)-\alpha = \alpha+2 \qquad (1)$$

فرض کنید λ, γ دو عضو از S_n باشند به‌طوری که $\gamma-\lambda = n$. از این رو داریم:

$$\alpha \geq \gamma \quad \Longrightarrow \quad \alpha-1 \geq \gamma-\lambda = n \qquad (2)$$

MATH75.IR

از دو رابطه (۱) و (۲) به دست می‌آوریم که

$$(۲\alpha+۲)-\beta>n+۱\ ,\ (۲\alpha+n+۳)-\beta>n+۱ \qquad (۳)$$

با استفاده از فرض استقراء و آنچه در بالا گفته شد می‌توان نتیجه گرفت که هر کدام از اعداد $n+۱,n,\ldots,۲,۱$ را می‌توان به صورت تفاضل دو عضو از $S_{n+۱}$ نوشت. از طرفی از رابطه‌ی (۳) نتیجه می‌شود که هر کدام از اعداد $n+۱,\ldots,۲,۱$ را حداکثر به یک طریق می‌توان به صورت تفاضل دو عضو از $S_{n+۱}$ نوشت. بنابراین هر کدام از اعداد $n+۱,\ldots,۲,۱$ را به‌طور یکتا می‌توان به‌صورت تفاضل دو عضو از $S_{n+۱}$ نوشت. بنابراین مجموعه‌ی $S_{n+۱}$ در شرط مسأله صدق می‌کند. از این رو با استفاده از استقراء می‌توان مجموعه‌های $S_۱,S_۲,\ldots,S_n,\ldots$ را ساخت. کافی است تعریف کنیم $S=\lim_{n\to\infty}a_n$. واضح است که چنین S ای در شرط مسأله صدق می‌کند.

آذر ۷۲ (مقدماتی)

۱۱. فرض کنید خانواده‌ی $A=\{A_۱,A_۲,\ldots,A_n\}$ که از $n\le ۶$ مجموعه‌ی متمایز ناتهی تشکیل شده است دارای این خاصیت باشد که اجتماع هر دو عضو از A، دوباره عضوی از A باشد. ثابت کنید عضوی مانند x وجود دارد که لااقل در $\lceil\frac{n}{۲}\rceil$ تا از این مجموعه‌ها قرار دارد. ($\lceil a\rceil$ یعنی کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی a)

حل: ادعا می‌کنیم که اگر حکم مسأله برای $n=۲k+۱$ درست باشد سپس برای $n=۲k+۲$ نیز درست است. مجموعه‌ی $A=\{A_۱,A_۲,\ldots,A_{۲k+۲}\}$ را در نظر بگیرید می‌توان فرض کرد که:

$$|A_۱|\le|A_۲|\le\cdots\le|A_{۲k+۲}|$$

واضح است که مجموعه‌ی $B=\{A_۲,A_۳,\ldots,A_{۲k+۲}\}$ نیز شرایط مسأله را دارد (یعنی اجتماع هر دو عضو از B، دوباره عضوی از B می‌شود). این مطلب از آنجا نتیجه می‌شود که اجتماع هر دو عضو از A، خود نیز عضوی از A است و همچنین اجتماع دو عضو از B نمی‌تواند $A_۱$ شود چرا که $A_۱$ کمترین تعداد اعضا را در میان A_i ها دارد. بر طبق فرض، حکم مسأله برای مجموعه‌ی $۲k+۱$ عضوی B درست است یعنی عضوی مثل a وجود دارد که‌در لااقل $k+۱$ تا از اعضای B آمده است. این عضو a، در لااقل $\lceil\frac{۲k+۲}{۲}\rceil$ عضو از اعضای مجموعه‌ی A نیز آمده است چرا که $\lceil\frac{۲k+۲}{۲}\rceil=k+۱$.

بنابراین اگر مسأله را به ازای $n=۱,۳,۵$ ثابت کنیم، سپس بر طبق آنچه که در بالا گفته شد درستی حکم به ازای $n=۲,۴,۶$ نیز خودبه‌خود ثابت می‌شود.

به‌ازای $n=۱$ و یا $A=\{A_۱\}$، درستی حکم واضح است.

به‌ازای $n=۳$ و یا $A=\{A_۱,A_۲,A_۳\}$، فرض کنید که $|A_۱|\le|A_۲|\le|A_۳|$. $A_۱\cup A_۲$ یک عضو از A است. واضح است که $A_۱\neq A_۱\cup A_۲$. یک عضو $A_۱$ مثل α را در نظر بگیرید. این عضو α، در لااقل دو مجموعه‌ی

MATH75.IR

$A_1, A_1 \cup A_2$ آمده است و $\lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 2$.

به ازای $n = 5$ و یا $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$، فرض کنید که $|A_1| \le |A_2| \le |A_3| \le |A_4| \le |A_5|$. حال دو حالت زیر را در نظر بگیرید:

۱. دو مجموعه‌ی A_j, A_i وجود دارد که $A_i \cup A_j \neq A_5$. واضح است که از بین دو رابطه‌ی زیر لااقل یکی اتفاق می‌افتد:

$$A_i \subsetneq A_i \cup A_j \quad , \quad A_j \subsetneq A_i \cup A_j$$

فرض کنید رابطه‌ی اول اتفاق بیفتند. یک عضو از A_i مثل α را در نظر بگیرید، عضو α لااقل در سه مجموعه‌ی $A_5 \supsetneq A_i \cup A_j \supsetneq A_i$ آمده است و $\lfloor \frac{5}{2} \rfloor = 3$.

۲. به‌ازای هر دو مجموعه‌ی A_j, A_i داریم که $A_i \cup A_j = A_5$. از برابری $A_1 \cup A_3 = A_1 \cup A_2 = A_5$ نتیجه می‌شود که عضوی از A_1 مثل α وجود دارد که در A_2 یا A_3 نیز وجود دارد زیرا در غیر این صورت $A_2 = A_3$، که خلاف فرض است. فرض کنید α در A_2 هم باشد. بنابراین α در سه مجموعه‌ی $A_1, A_2, A_1 \cup A_2 = A_5$ وجود دارد.

آذر ۷۲

۱۲. فرض کنید خانواده‌ی $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ که از n مجموعه‌ی متمایز ناتهی تشکیل شده است دارای این خاصیت باشد که اجتماع هر دو عضو از A دوباره عضوی از A باشد. اگر

$$|A_1| \le |A_2| \le \cdots \le |A_n|$$

که $|A_i|$ تعداد اعضای مجموعه‌ی A_i است و $|A_1| \ge 2$، نشان دهید عضوی مانند x وجود دارد که عضو حداقل $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ تا از این مجموعه‌ها است. ($\lceil a \rceil$ یعنی کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی a)

حل: دو حالت زیر را در نظر بگیرید:

۱. $|A_1| = 1$ و یا $A_1 = \{a\}$. مجموعه‌ی A را به دو مجموعه‌ی $B = \{B_1, B_2, \ldots, E\}$ و $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$ افراز می‌کنیم به طوری که:

$$a \in B_i \quad i = 1, 2, \ldots, l \qquad , \qquad a \notin C_i \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

واضح است m مجموعه‌ی $C_1 \cup \{a\}, C_2 \cup \{a\}, \ldots, C_m \cup \{a\}$ دوبه‌دو متمایز هستند و همچنین هر مجموعه‌ی $C_i \cup \{a\}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ عضوی از B است. از این رو داریم:

$$n = m + l \le 2l \quad \Longrightarrow \quad \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \le$$

MATH75.IR

۲. $|A_1| = ۲$ و یا $A_1 = \{a,b\}$. مجموعه‌ی A را به چهار مجموعه‌ی $B = \{B_1, B_2, \ldots, B_l\}$, $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$, $D = \{D_1, D_2, \ldots, D_p\}$, $E = \{E_1, E_2, \ldots, E_q\}$ افراز می‌کنیم به طوری که:

$$a \notin B_i \ , \ b \notin B_i \quad i = ۱, ۲, \ldots, l \qquad , \qquad a \in C_i \ , \ b \notin C_i \quad i = ۱, ۲, \ldots, m$$
$$a \notin D_i \ , \ b \in D_i \quad i = ۱, ۲, \ldots, p \qquad , \qquad a \in E_i \ , \ b \in E_i \quad i = ۱, ۲, \ldots, q$$

واضح است l مجموعه‌ی $B_1 \cup \{a,b\}$, $B_2 \cup \{a,b\}$, ... , $B_l \cup \{a,b\}$ دوبه‌دو متمایز هستند و همچنین هر مجموعه‌ی $B_i \cup \{a,b\}$ $(i = ۱, ۲, \ldots, l)$ عضوی از E است، در نتیجه $|B| \leq |E|$.

فرض کنید $|C| \geq |D|$. عضو a در حداقل $\lceil \frac{n}{۴} \rceil$ تا از A_i ها آمده است به دلیل اینکه عضو a در $|E| + |C|$ از A_i ها آمده است و همچنین:

$$n = |B| + |C| + |D| + |E| \leq ۲(|E| + |C|) \quad \Longrightarrow \quad \left\lceil \frac{n}{۲} \right\rceil \leq |E| + |C|$$

به همین ترتیب اگر $|C| \leq |D|$، می‌توان ثابت کرد که عضو b در حداقل $\lceil \frac{n}{۴} \rceil$ تا از A_i ها آمده است.

بهمن ۷۲

۱۳. فرض می‌کنیم r, n دو عدد طبیعی باشند. کوچکترین عدد طبیعی m را پیدا کنید که دارای این ویژگی باشد که برای هر افراز مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \ldots, m\}$ به r زیرمجموعه‌ی $A_1, A_2, \ldots, A_r$، در یکی از A_i ها $(۱ \leq i \leq r)$ دو عدد a, b پیدا شوند به‌گونه‌ای که $۱ < \frac{a}{b} \leq ۱ + \frac{۱}{n}$ باشد.

حل: ثابت می‌کنیم $m = r(n+۱)$. اعداد زیر را در نظر بگیرید:

$$rn \ , \ rn+۱ \ , \ rn+۲ \ , \ \ldots \ , \ rn+r$$

تعداد این اعداد $r+۱$ تا است در نتیجه بر طبق اصل لانه‌ی کبوتر، دو تا از این اعداد در یکی از A_i ها قرار دارند. فرض کنید این دو عدد $rn+i$, $rn+j$ باشند و همچنین $j < i$. حال کافی است a را برابر $rn+i$ و b را برابر $rn+j$ بگیریم:

$$۱ < \frac{a}{b} = \frac{rn+i}{rn+j} \leq \frac{rn+r}{rn} = ۱ + \frac{۱}{n}$$

برای کامل شدن اثبات مسأله، کافی است برای $m = rn + r - ۱$ یک مثال نقض بیاوریم.

به ازای $i = ۱, ۲, \ldots, r$، A_i را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_i = \{\, k \mid ۱ \leq k \leq rn + r - ۱ \ , \ k \overset{r}{\equiv} i \,\}$$

حال دو عضو دلخواه a, b متعلق به A_i در نظر بگیرید. (فرض کنید که $a > b$). دو حالت زیر را در نظر بگیرید:

MATH75.IR

۱. اگر $i = r$ باشد، سپس دو عدد β, α موجودند که $\alpha > \beta$ ، $b = \beta r$ ، $a = \alpha r$. از این رو داریم:

$$\frac{a}{b} = \frac{\alpha r}{\beta r} = \frac{\alpha}{\beta} \geq \frac{\beta + ۱}{\beta} > ۱ + \frac{۱}{n}$$

(دقت شود که ماکزیمم عضو A_r برابر rn است در نتیجه $\beta r < a \leq rn$ و یا $\beta < n$).

۲. اگر $i < r$ باشد، سپس دو عدد β, α موجودند که $\alpha > \beta$ ، $b = \beta r + i$ ، $a = \alpha r + i$. از این‌رو داریم:

$$\frac{a}{b} = \frac{\alpha r + i}{\beta r + i} \geq \frac{(\beta + ۱)r + i}{\beta r + i} = ۱ + \frac{r}{\beta r + i} > ۱ + \frac{r}{\beta r} = ۱ + \frac{۱}{\beta} > ۱ + \frac{۱}{n}$$

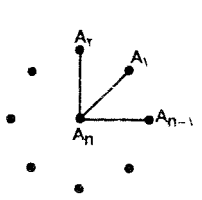
در نتیجه برای A_i ها تعریف شده، هیچ دو عضو b, a متعلق به یکی از این A_i ها وجود ندارد که در شرط مسأله صدق کند.

۱۴. تعداد $n \geq ۲$ نقطه $A_n, \ldots, A_۲, A_۱$ در صفحه داده شده‌اند به‌گونه‌ای که هیچ سه نقطه‌ای روی یک خط راست واقع نیستند و هر دو نقطه‌ی A_i و A_j یا با پاره‌خط A_iA_j به هم متصلند و یا نقطه‌ای مانند A_k وجود دارد که با پاره‌خطهای A_jA_k ، A_iA_k به این دو نقطه متصل است.

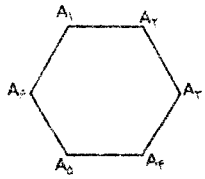
الف) حداقل تعداد پاره‌خطهای لازم را پیدا کنید.

ب) در حالتی که $n = ۶$ و $A_۱A_۲A_۳A_۴A_۵A_۶$ یک شش‌ضلعی محدب باشد، حداقل چند پاره‌خط لازم است افزوده شود تا شرایط بالا برقرار گردد.

حل: الف) اگر به شکل صفحهٔ بعد به دید گراف نگاه کنیم نتیجه می‌گیریم که این گراف، یک گراف همبند است (گراف همبند، گرافی است که بین هر دو رأس آن یک مسیر وجود دارد). بر طبق قضیه می‌دانیم که هر گراف همبند با n رأس، لااقل $n - ۱$ یال دارد. از طرفی اگر همه‌ی رأسهای $A_{n-۱}, \ldots, A_۲, A_۱$ را به A_n وصل کنیم یک گراف با $n - ۱$ یال به دست می‌آید که در شرایط مسأله صدق می‌کند. بنابراین حداقل تعداد پاره‌خط‌های لازم برابر $n - ۱$ است.



ب) برای اینکه برای دو نقطه‌ی $A_۴, A_۱$، شرط مسأله برقرار شود باید یکی از پاره‌خط‌های $A_۴A_۶, A_۴A_۲, A_۱A_۳, A_۱A_۵, A_۱A_۴$ رسم شود. پاره‌خطهای $A_۴A_۶, A_۲A_۴, A_۱A_۳, A_۱A_۵$ برحسب تقارن با هم فرقی ندارند. از این رو دو حالت زیر را داریم:

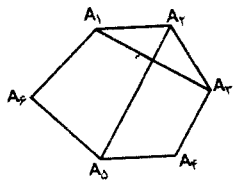


۱. فرض کنید پاره‌خط $A_۱A_۴$ را رسم کنیم. در گراف به‌دست آمده، دو نقطه‌ی $A_۶, A_۳$ در شرط مسأله صدق نمی‌کنند در نتیجه باید حداقل یک پاره‌خط دیگر مثل $A_۶A_۲$ را رسم کرد. واضح است که گراف جدید در شرایط مسأله صدق می‌کند.

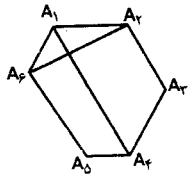
MATH75.IR

۲. فرض کنید پاره‌خط $A_۱A_۳$ را رسم کنیم. در گراف به‌دست آمده، دو نقطه‌ی $A_۵, A_۲$ در شرط مسأله صدق نمی‌کنند در نتیجه باید حداقل یک پاره‌خط دیگر مثل $A_۲A_۵$ را رسم کرد. واضح است که گراف جدید در شرایط مسأله صدق می‌کند.

از دو حالت بالا نتیجه می‌گیریم که حداقل باید دو پاره‌خط دیگر را رسم کنیم.



شکل مربوط به حالت (۱)



شکل مربوط به حالت (۲)

آبان ۷۳ (مقدماتی)

۱۵. ۱۳۷۳ شکل درون یک مربع به مساحت واحد قرار دارند طوری که مجموع مساحتهای آنها از ۱۳۷۲ بیشتر است. ثابت کنید این شکل حداقل در یک نقطه مشترک هستند.

حل: فرض کنید α_i برابر مساحت شکل i ام باشد ($i = ۱, ۲, \ldots, ۱۳۷۳$). داریم

$$\alpha_۱ + \alpha_۲ + \cdots + \alpha_{۱۳۷۳} > ۱۳۷۲$$

فرض کنید β_i برابر مساحت متمم شکل i ام باشد (البته منظورمان از متمم شکل i ام آن قسمتی از متمم شکل i ام است که درون مربع واحد قرار دارد.) بنابراین داریم: $\alpha_i + \beta_i = ۱$، در نتیجه:

$$\beta_۱ + \beta_۲ + \cdots + \beta_{۱۳۷۳} = ۱۳۷۳ - (\alpha_۱ + \alpha_۲ + \cdots + \alpha_{۱۳۷۳}) < ۱$$

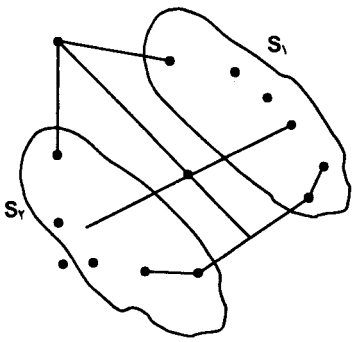
متمم هر یک از این ۱۳۷۳ شکل را در نظر بگیرید. رابطه‌ی بالا می‌گوید که ۱۳۷۳ شکل در درون یک مربع به ضلع ۱ قرار گرفته‌اند به طوری که مجموع مساحتهای آنها از ۱ و یا معادلاً از مساحت مربع واحد کمتر است. درنتیجه نقطه‌ای درون این مربع وجود دارد که درون هیچ‌کدام از این اشکال نیست. یعنی این نقطه درون متمم هیچ‌کدام از ۱۳۷۳ شکل اولیه نیست. بنابراین این نقطه بین تمامی اشکال اولیه مشترک است.

آبان ۷۳

۱۶. یک نقطه‌ی P درون یک $۲n$ ضلعی محدب قرار دارد. از هر رأس به نقطه‌ی P وصل کرده و ادامه می‌دهیم تا یکی از اضلاع را قطع کند. ثابت کنید یک ضلع وجود دارد که هیچ‌یک از این خطوط آن را قطع نمی‌کند. (قطع کردن امتداد اضلاع مورد نظر نیست.)

MATH75.IR

حل: یک رأس دلخواه از $۲n$ ضلعی محدب را به P وصل کرده تا یکی از اضلاع $۲n$ ضلعی محدب را قطع کند. $S_۱$ را مجموعه‌ی رأسهایی از $۲n$ ضلعی محدب بگیرید که در سمت راست این پاره‌خط قرار دارند. و همچنین $S_۲$ را مجموعه‌ی رأسهایی از $۲n$ ضلعی محدب بگیرید که در سمت چپ این پاره‌خط قرار دارند. واضح است که $|S_۱| + |S_۲| = ۲n - ۱$. و همچنین واضح است که در طرف راست این پاره‌خط، $|S_۱|$ ضلع و در طرف چپ این پاره‌خط، $|S_۲|$ ضلع از اضلاع $۲n$ ضلعی قرار دارد.

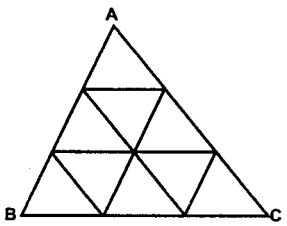


$|S_۱|$ نمی‌تواند برابر $|S_۲|$ باشد (چرا که مجموع این دو عدد فرد است.) بر طبق تقارن می‌توان فرض کرد که $|S_۱| > |S_۲|$. اگر هر رأس از رئوسی که در $S_۲$ قرار دارد را به P وصل کنیم این خط نهایتاً می‌تواند یک ضلع از اضلاع $۲n$ ضلعی را که در سمت چپ پاره‌خط اولیه قرار دارند (جایی که رئوس متعلق به $S_۱$ واقع‌اند) را قطع کند.

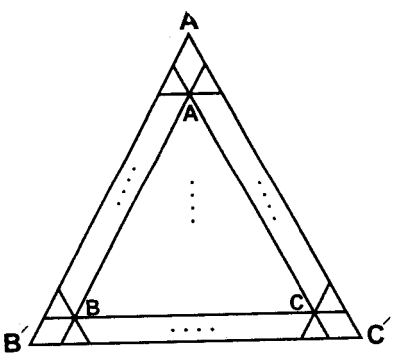
بنابراین حداکثر $|S_۲|$ ضلع در سمت چپ پاره‌خط اولیه وجود دارند که می‌توانند به وسیله‌ی این خطوط قطع شوند. ولی تعداد اضلاع در سمت چپ پاره‌خط اولیه برابر $|S_۱|$ است. در نتیجه حداقل $|S_۱| - |S_۲| \geq ۱$ ضلع از $۲n$ ضلعی وجود دارند که به وسیله‌ی هیچ خطی قطع نمی‌شوند.

بهمن ۷۳

۱۷. در مثلث دلخواه ABC هر ضلع را به n قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم ($n \geq ۲$). از هر نقطه تقسیم روی هر ضلع، خطوطی به موازات دو ضلع دیگر رسم می‌کنیم. مثلاً برای $n = ۳$ شکل مقابل حاصل می‌شود. برای هر $n \geq ۲$ تعداد متوازی‌الاضلاعهای به‌وجود آمده را مشخص کنید.

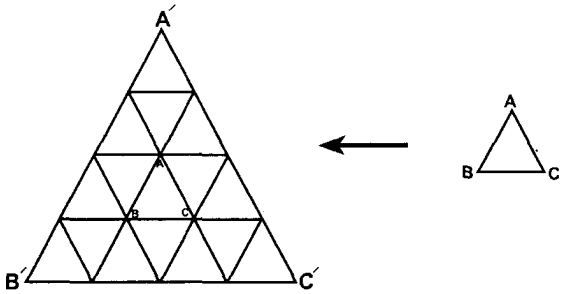


حل: مثلث ABC را گسترش می‌دهیم تا مثلث $A'B'C'$ به دست آید به طوری که مثلث $A'B'C'$ متشابه با مثلث ABC باشد ولی هر ضلع آن به $n + ۳$ قسمت مساوی تقسیم شده باشد.

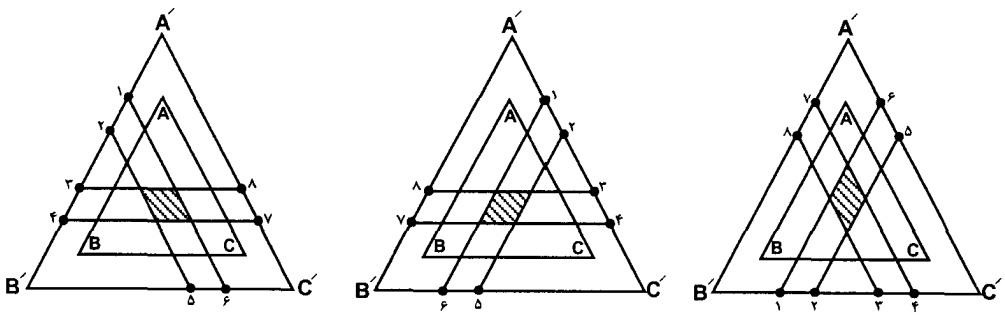


MATH75.IR

به عنوان مثال، به ازای $n = ۱$، اشکال ABC و $A'B'C'$ در زیر رسم شده است:



یک متوازی‌الاضلاع درون مثلث ABC در نظر بگیرید. اضلاع این متوازی‌الاضلاع را امتداد دهید تا ضلعهای مثلث $A'B'C'$ را در ۸ نقطه قطع کنند. واضح است که از بین این ۸ نقطه، ۴ تای آن روی یک ضلع، ۲ تای آن روی ضلع دیگر و ۲ تای آخری روی ضلع سوم مثلث $A'B'C'$ قرار دارد. (دقت شود این ۸ نقطه هیچ‌کدام نمی‌توانند A'، B' و یا C' باشند.)



از طرفی اگر چهار نقطه (به‌غیر از A'، B' و یا C') روی یک ضلع مثلث $A'B'C'$ انتخاب کنیم، سپس می‌توانیم با استفاده از این چهار نقطه یک متوازی‌الاضلاع درست کنیم. مثلاً فرض کنید چهار نقطه‌ی $۴, ۳, ۲, ۱$ به‌ترتیب از بالا روی ضلع $A'B'$ باشد. حال از نقاط $۲, ۱$، دو خط موازی با $A'C'$ و از نقاط $۴, ۳$ دو خط موازی با $B'C'$ رسم کنید. محل برخورد این ۴ خط یک متوازی‌الاضلاع درون مثلث ABC تشکیل می‌دهد.

از تناظر ۱ـ۱ بالا نتیجه می‌گیریم که برای انتخاب یک متوازی‌الاضلاع درون مثلث ABC، کافی است یک ضلع مثلث $A'B'C'$ را انتخاب کنیم (این عمل را به ۳ طریق می‌توان انجام داد) و همچنین ۴ نقطه (غیر از C', B', A') روی این ضلع انتخاب کنیم (درون هر ضلع مثلث $A'B'C'$، $n+۲$ نقطه قرار دارد در نتیجه این عمل را به $\binom{n+۲}{۴}$ طریق می‌توان انجام داد). بنابراین داریم:

$$\text{تعداد متوازی‌الاضلاع} = ۳ \times \binom{n+۲}{۴}$$

نکته: شاید برای کسانی این ابهام وجود داشته باشد که چرا ما مثلث $A'B'C'$ را ساختیم و از همان ابتدا، اضلاع یک متوازی‌الاضلاع را امتداد ندادیم تا ضلعهای مثلث ABC را قطع کنند. ولی دقت شود در حالتی که یک رأس متوازی‌الاضلاع روی یکی از اضلاع مثلث را در سه نقطه قطع خواهد کرد و نه چهارنقطه. (همان ضلعی که یکی از

MATH75.IR

رئوس متوازی‌الاضلاع روی آن قرار دارد).

آبان ۷۴

۱. فرض کنید X مجموعه‌ای دلخواه با حداقل ۱۲ عضو و $A_{۱۳۷۴}, \ldots, A_۲, A_۱$ زیرمجموعه‌هایی ۱۲ عضوی از آن باشند (A_iها لزوماً متمایز نیستند). ثابت کنید دو زیرمجموعهٔ $X_۲, X_۱$ وجود دارند به‌طوری که $X = X_۱ \cup X_۲$, $X_۱ \cap X_۲ = \emptyset$ و به ازای هر $۱ \le i \le ۱۳۷۴$, $A_i \not\subseteq X_۲$, $X_۱$.

حل: فرض کنید $X' = A_۱ \cup \ldots \cup A_{۱۳۷۴}$. حال اگر حکم مسأله برای X' ثابت شود معادل است با اینکه برای X ثابت شده است. چرا،که هر عضوی که در X است و در X' نیست را می‌توان هم در X' و هم در $X_۲$ قرار داد. بنابراین فرض می‌کنیم $X = A_۱ \cup \ldots \cup A_{۱۳۷۴}$ و یا به عبارت دیگر فرض می‌کنیم X مجموعه‌ای متناهی با n عضو است.

به‌ازای $i = ۱, ۲, \ldots, ۱۳۷۴$، تعریف می‌کنیم که:

$$B_i = \{Y | A_i \subseteq Y \subseteq X\}$$

به‌ازای هر i مشخص، هر مجموعه‌ای که در B_i قرار دارد، باید ۱۲ عضو مشخص A_i را داشته باشد و بقیهٔ اعضایش اختیاری است در نتیجه:

$$|B_i| = ۲^{n-۱۲}$$

از طرفی داریم:

$$\begin{aligned} |B_۱ \cup B_۲ \cup \cdots \cup B_{۱۳۷۴}| &\le |B_۱| + |B_۲| + \cdots + |B_{۱۳۷۴}| \\ &= ۱۳۷۴ \times ۲^{n-۱۲} < ۲^{۱۱} \times ۲^{n-۱۲} = ۲^{n-۱} \end{aligned}$$

$B = B_۱ \cup B_۲ \cup \cdots \cup B_{۱۳۷۴}$، مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های X با کمتر از $۲^{n-۱}$ عضو است در نتیجه زیرمجموعه‌ای از X مثل $X_۱$ وجود دارد که نه $X_۱$ در B آمده است و نه متمم $X_۱$ در B ,این مطلب در انتهای راه حل توضیح داده شده است). حال اگر $X_۲$ را برابر متمم $X_۱$ بگیریم، سپس $X_۲, X_۱$ در شرایط مسأله صدق می‌کند.برای اثبات این ادعا فرض کنید که $A_i \subseteq X_۱$. در اینصورت می‌بایستی $X_۱$ در مجموعه‌ی B_i و یا کلاً در مجموعه‌ی B ظاهر می‌شد، ولی بر طبق تعریف $X_۱$، $X_۱$ متعلق به B نیست. به همین ترتیب رابطه‌ی $A_i \subset X_۲$ هم نمی‌تواند درست باشد.

نکته: مجموعه‌ی n عضوی X را در نظر بگیرید. فرض کنید که $A_m, \ldots, A_۲, A_۱$ زیرمجموعه‌های متمایزی از X باشند. اگر $m < ۲^{n-۱}$، سپس زیرمجموعه‌ای از X مثل Y وجود دارد به طوری که Y و متمم Y در بین هیچ‌کدام از A_i ها ظاهر نشده‌اند.

MATH75.IR

اثبات: مجموعه‌ی X دارای 2^n زیرمجموعه است. واضح است که تمام زیرمجموعه‌های X را می‌توان به 2^{n-1} مجموعه افراز کرد:

$$\{X_1, X_1'\}\ ,\ \{X_2, X_2'\}\ ,\ \dots\ ,\ \{X_{2^{n-1}}, X_{2^{n-1}}'\}$$

m زیرمجموعه $A_1, A_2, \dots, A_m$ با شرط $m < 2^{n-1}$ هستند که در بین مجموعه‌های بالا قرار دارند. تعداد مجموعه‌های بالا برابر 2^{n-1} است در نتیجه بر طبق اصل لانه‌ی کبوتری یکی از مجموعه‌های بالا شامل هیچ A_iای نمی‌شود. فرض کنید این مجموعه $\{x_k, x_k'\}$ باشد. کافی است تعریف می‌کنیم $Y = X_k$ ، $Y' = X_k'$، از این رو Y, Y' در بین A_i ها ظاهر نشده‌اند.

آذر ۷۴

۱۹. نشان دهید برای هر عدد طبیعی $n \geq 3$، دو مجموعه‌ی $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ و $B = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ از اعداد صحیح وجود دارد به طوری که

$$A \cap B = \emptyset \quad (1)$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n \quad (2)$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 \quad (3)$$

حل: با استقراء بر روی n ثابت می‌کنیم که به ازای هر $n \geq 3$، دو مجموعه‌ی A, B ازاعداد طبیعی با n عضو وجود دارند به طوری که در سه شرط مسأله صدق کنند.

به ازای $n = 3$، A, B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A = \{1, 5, 6\} \quad , \quad B = \{2, 3, 7\}$$

فرض کنید حکم به ازای $n = k$ درست باشد یعنی دو مجموعه مثل $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ ، $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k\}$ موجود باشند که در شرایط مسأله صدق کنند. تعریف می‌کنیم:

$$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, t\alpha_k, \alpha_k + t\beta_k\}$$

$$B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k-1}, t\beta_k, \beta_k + t\alpha_k\}$$

که در آن t عددی طبیعی است و بعداً تعیین خواهد شد. واضح است که هر کدام از مجموعه‌های A, B، $k+1$ عضو دارند. حال ثابت می‌کنیم که این دو مجموعه در شرطهای (۲) و (۳) صدق می‌کنند:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_k \quad \Longrightarrow$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{k-1} + (\alpha_k + t\beta_k) + t\alpha_k = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{k-1} + (\beta_k + t\alpha_k) + t\beta_k$$

MATH75.IR

و همچنین:

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_k^2=\beta_1^2+\beta_2^2+\cdots+\beta_k^2 \quad \Longrightarrow$$

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_{k-1}^2+(\alpha_k+t\beta_k)^2+(t\alpha_k)^2=\beta_1^2+\beta_2^2+\cdots+\beta_{k-1}^2+(\beta_k+t\beta_k)^2+(t\beta_k)^2$$

حال فقط باید t را طوری تعیین کنیم که شرط (۱) ارضاً شود. بر طبق فرض استقراء داریم:

$$\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k\}\cap\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k\}=\emptyset$$

می‌توان فرض کرد که $\alpha_k>\beta_k$. تعریف می‌کنیم:

$$t=Max(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k)+1$$

از اینرو داریم:

$$Max(\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_{k-1},\beta_1,B_2,\ldots\beta_{k-1})<t\le t\beta_k<t\alpha_k<t\alpha_k+\beta_k$$

$$Max(\alpha_1,\alpha_2\ldots,\alpha_{k-1},\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{k-1})<t\le t\beta_k<t\beta_k+\alpha_k<t\alpha_k+\beta_k$$

همچنین برابری $t\beta_k+\alpha=t\alpha_k$ و یا $t(\alpha_k-\beta_k)=\alpha_k$ نمی‌تواند اتفاق بیفتد چرا که α_k عددی طبیعی کمتر از t است در نتیجه نمی‌تواند بر t بخشپذیر باشد. بنابراین حکم به‌ازای $n=k+1$ نیز ثابت شد.

۲۰. $12k$ نفر در یک مهمانی شرکت کرده‌اند. هر نفر دقیقاً با $3k+6$ نفر دیگر از مهمانان دست می‌دهد. همچنین می‌دانیم تعداد افرادی که با هر دو نفر دست می‌دهند عددی ثابت است . تعداد افراد شرکت کننده در این مهمانی را تعیین کنید.

حل: گراف مسئله را بدین صورت تشکیل می‌دهیم که بجای هر نفر، یک رأس در صفحه می‌گذاریم. دو رأس را با یک یال به هم وصل می‌کنیم اگر نفرات متناظر با آن دو راس، با هم دست داده باشند. درجه‌ی هر رأس گراف برابر $3k+6$ است در نتیجه تعداد یالهای گراف برابر است با:

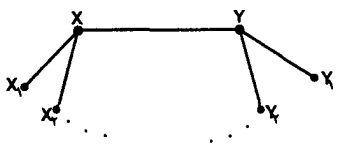
$$\frac{(12k)\times(3k+6)}{2} \qquad (1)$$

بر طبق فرض مسأله، تعداد افرادی که با هر دو نفر دست می‌دهند عددی ثابت است. فرض کنید این عدد t باشد. دو رأس دلخواه Y,X را در نظر بگیرید (این دو رأس را به $\binom{12k}{2}$ طریق می‌توان انتخاب کرد). بر طبق فرض، دقیقاً t رأس $Z_t,\ldots,Z_2,Z_1$ وجود دارند به طوری که به ازای $i=1,2,\ldots,t$ ،z_i به هر دوی Y,X وصل است (این t رأس به همراه Y,X، $2t$ یال به وجود می‌آورند). درنتیجه اگر به ازای هر Y,X دلخواه، این $2t$ یال را بشماریم $2t\times\binom{12k}{2}$ یال بوجود می‌آید. ادعا می‌کنیم که در این شمارش، هر یال از گراف را $2(3k+5)$ بار شمرده‌ایم. فرض کنید دو رأس Y,X از گراف به هم وصل باشند و همچنین X به رئوس $X_{3k+5},\ldots,X_2,X_1,Y$ و Y به

MATH75.IR

رئوس $X, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{3k+5}$ وصل باشد. به ازای هر دو رأس X ،Y_i $(i = 1, 2, \ldots, 3k+5)$، یال XY را یکبار شمرده‌ایم چرا که Y به X و Y_i وصل است. همچنین به ازای هر دو رأس Y ،X_i $(i = 1, 2, \ldots, 3k+5)$ یال XY را یکبار شمرده‌ایم چرا که X به Y, X_i وصل است. از این رو تعداد یالهای گراف برابر است با:

$$\frac{\binom{12k}{2} \times 2t}{2(3k+5)} = \frac{(12k)(12k-1) \times t}{2(3k+5)} \qquad (2)$$



[دقت شود که لزومی ندارد X_i ها از Y_i ها متمایز باشند مثلاً می‌تواند Y_1, X_1 یک رأس باشند.]

از دو رابطه‌ی (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{(12k)(3k+6)}{2} = \frac{(12k)(12k-1) \times t}{2(3k+5)}$$
$$\Longrightarrow \quad (3k+6)(3k+5) = (12k-1) \times t$$
$$\Longrightarrow \quad 12k-1 \mid (3k+5)(3k+6) \qquad (*)$$

از طرفی می‌دانیم $12k-1 \nmid 3$ و $3k+6 = 3(k+2)$، در نتیجه:

$$12k-1 \mid (3k+5)(k+2)$$

می‌دانیم که اگر a بر b بخشپذیر باشد سپس $4a$ نیز بر b بخشپذیر است یعنی $12k-1 \mid 4(3k+5)(k+2)$. همچنین داریم

$$4(3k+5)(k+2) = (12k+2)(k+2) = (12k-1+21)(k+2)$$
$$= (12k-1)(k+2) + 21(k+2)$$

درنتیجه باید داشته باشیم $12k-1 \mid 21k+42$.

اگر $k = 1$ باشد سپس رابطه‌ی $(*)$ نمی‌تواند درست باشد، بنابراین $k \geq 2$. $\frac{21k+42}{12k-1}$ عددی طبیعی است و همچنین $4 > \frac{21k+42}{12k-1} > 1$، از این رو دو حالت زیر را داریم:

۱. $\frac{21k+42}{12k-1} = 2$. در نتیجه $21k+42 = 24k-2$ و یا $k = \frac{44}{3}$. ولی k عددی طبیعی است، پس این حالت نمی‌تواند اتفاق بیفتد.

۲. $\frac{21k+42}{12k-1} = 3$. در نتیجه $21k+42 = 36k-3$ و یا $k = 3$.

از این رو تعداد مهمانها برابر $3 \times 12 = 36$ نفر است.

MATH75.IR

۲۱. فرض کنید $S = \{ ۲^m ۳^n \mid m,n \in \mathbf{N} \cup \{0\} \}$. ثابت کنید که هر عدد طبیعی را می‌توان برحسب حاصل جمع اعضای متمایز S نوشت که هیچ‌یک از عوامل جمع، مضربی از عامل دیگری نباشد. (مثلاً $۱۹ = ۹ + ۶ + ۴$).

حل: با استقرای قوی حکم مسأله را ثابت می‌کنیم. عدد طبیعی ۱ را می‌توان به صورت $۱ = ۲^۰ ۳^۰$ نوشت. فرض کنید اعداد $۱, ۲, \ldots, k$ را بتوان بر حسب حاصل جمع اعضای متمایز S نوشت به طوری که هیچ‌کدام از عوامل جمع، مضربی از عامل دیگری نباشد. ثابت می‌کنیم عدد $k+۱$ را هم بدین صورت می‌توان نوشت. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. $k+۱ = ۲t$. واضح است که $t \le k$. بر طبق فرض استقراء t را می‌توان به صورت $S_۱ + S_۲ + \cdots + S_p$ نوشت به طوری که

$$S_i \in S \quad i = ۱,۲,\ldots,p \qquad , \qquad S_i \nmid S_j \quad i \neq j$$

بنابراین داریم $k+۱ = (۲S_۱) + (۲S_۲) + \cdots + (۲S_p)$ و همچنین

$$۲S_i \in S \quad i = ۱,۲,\ldots p \qquad , \qquad (۲S_i) \nmid (۲S_j) \quad i \neq j$$

۲. $k+۱ = ۲t+۱$. عدد صحیح نامنفی α را طوری در نظر بگیرید که $۳^\alpha \le k+۱ < ۳^{\alpha+۱}$. اگر $k+۱$ برابر ۳^α باشد که مسأله حل است در غیر این صورت داریم $۳^\alpha < k+۱ < ۳^{\alpha+۱}$. $k+۱$ عددی فرد است در نتیجه $\frac{(k+۱)-۳^\alpha}{۲}$ عددی طبیعی است و همچنین $\frac{(k+۱)-۳^\alpha}{۲} \le k$. بنابراین بر طبق فرض استقراء، $\frac{(k+۱)-۳^\alpha}{۲}$ را می‌توان به صورت $S_۱ + S_۲ + \cdots + S_p$ نوشت به طوری که $S_i \in S \quad i = ۱,۲,\ldots,p$ و $S_i \nmid S_j \quad i \neq j$.

$$\frac{k+۱-۳^\alpha}{۲} = S_۱ + S_۲ + \cdots + S_p \quad \Longrightarrow \quad (k+۱) = ۳^\alpha + (۲S_۱) + (۲S_۲) + \cdots + (۲S_p)$$

واضح است که هر کدام از اعداد $۳^\alpha, ۲S_۱, ۲S_۲, \cdots, ۲S_p$ متعلق به S هستند و همچنین $(۲S_i) \nmid (۲S_j)$ اگر $i \neq j$. به ازای هر i بین ۱ تا P داریم $۳^\alpha \nmid ۲S_i$، زیرا ۳^α عددی فرد است. همچنین داریم $۲S_i \nmid ۳^\alpha$ زیرا $S_i \le \frac{k+۱-۳^\alpha}{۲} < \frac{۳^{\alpha+۱}-۳^\alpha}{۲} = ۳^\alpha$ ($۲S_i$ بر ۳^α بخشپذیر است اگر و فقط اگر S_i بر ۳^α بخشپذیر باشد ولی داریم $S_i < ۳^\alpha$).

با استفاده از دو حالت بالا، حکم استقراء ثابت می‌شود.

اردیبهشت ۷۶

۲۲. یک جدول $n \times n$ از اعداد $۰, ۱+, ۱-$ داریم به طوری که در هر سطر و ستون فقط یک عدد $۱+$ و یک عدد $۱-$ وجود دارد. ثابت کنید با تعدادی متناهی جابه‌جایی سطرها با یکدیگر و ستونها با یکدیگر می‌توان جای $۱+$ ها را

MATH75.IR

با ۱ – ها عوض کرد.

حل: ابتدا لم زیر را ثابت می‌کنیم:

لم: دنباله‌ی $\alpha_n,\ldots,\alpha_2,\alpha_1$ را در نظر بگیرید. فرض کنید دنباله‌ی $\alpha_{i_n},\ldots,\alpha_{i_2},\alpha_{i_1}$ یک جایگشت از دنباله‌ی $\alpha_n,\ldots,\alpha_2,\alpha_1$ باشد. عملی را انجام می‌دهیم به این صورت که در هر مرحله، دو عضو از دنباله‌ی $\alpha_{i_n},\ldots,\alpha_{i_1}$ را انتخاب کرده و جای آنها را با هم عوض می‌کنیم. ثابت کنید بعد از چند بار تکرار عمل بالا می‌توانیم به دنباله‌ی $\alpha_n,\ldots,\alpha_2,\alpha_1$ برسیم.

اثبات: این حکم را با استقراء بر روی n ثابت می‌کنیم. به ازای $n=1$ حکم واضح است. فرض کنید حکم به ازای $n-1$ درست باشد. دنباله‌ی $\alpha_{i_n},\ldots,\alpha_{i_2},\alpha_{i_1}$ را در نظر بگیرید. اگر $\alpha_{i_n}=\alpha_n$ باشد سپس بر طبق فرض استقراء از آنجا که $\alpha_{i_{n-1}},\ldots,\alpha_{i_1}$ جایگشتی از $\alpha_{n-1},\ldots,\alpha_1$ است این کار عملی است. اگر $\alpha_{i_n}\neq\alpha_n$ باشد سپس jای وجود دارد که $\alpha_n=\alpha_{i_j}, j\leq n-1$، حال جای دو عضو $\alpha_{i_j},\alpha_{i_n}$ را عوض می‌کنیم. بنابراین دنباله‌ی $\alpha_n,\alpha_{i_{n-1}},\ldots,\alpha_{i_2},\alpha_{i_1}$ به دست می‌آید. برای این دنباله نیز درستی حکم در بالا ثابت شد چرا که جمله‌ی آخر این دنباله α_n است. بنابراین حکم به ازای n نیز درست است.

برای فهم بیشتر لم بالا مثال زیر را ارائه می‌دهیم:

فرض کنید می‌خواهیم از دنباله‌ی ۱,۳,۴,۵ به دنباله‌ی ۴,۵,۱,۳ برسیم، در این صورت طبق الگوریتم زیر عمل می‌کنیم:

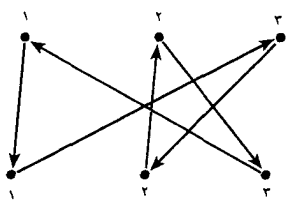
$$۱,۳,۴,۵ \xrightarrow{۳,۵} ۱,۵,۴,۳ \xrightarrow{۱,۴} ۴,۵,۱,۳$$

حال به اثبات مسأله باز می‌گردیم.

گراف دو بخشی مسأله را بدین صورت تشکیل می‌دهیم که به جای هر ستون، یک رأس در بخش اول گراف قرار می‌دهیم (این رأسها را به ترتیب با شماره‌های $1,2,\ldots,n$ نامگذاری می‌کنیم) و همچنین به جای هر سطر، یک رأس در بخش دوم گراف قرار می‌دهیم (این رأسها را هم به ترتیب با شماره‌های $1,2,\ldots,n$ نامگذاری می‌کنیم). رأس i از بخش اول را به طور جهتدار به رأس j در بخش دوم وصل می‌کنیم اگر در محل برخورد ستون i ام با سطر j ام، عدد ۱ نوشته شده باشد. رأس i از بخش دوم را به‌طور جهتدار به رأس j در بخش اول وصل می‌کنیم اگر در محل برخورد ستون j ام با سطر i ام، عدد ۱ – نوشته شده باشد.

برای روشن شدن این عمل، گراف جدول زیر را رسم می‌کنیم:

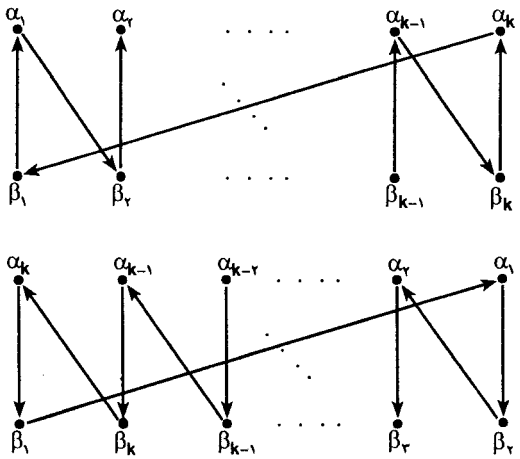
	۱	۲	۳
۱	۱		-۱
۲		-۱	۱
۳	-۱	۱	



در هر سطر و هر ستون جدول دقیقاً دو عدد ناصفر ۱+, ۱– قرار دارند. در نتیجه هر رأسی را که در گراف G در

MATH75.IR

نظر بگیریم یک یال به آن رأس وارد و یک یال از آن رأس خارج می‌شود. می‌دانیم که اگر یک گراف دارای n رأس باشد و همچنین درجه‌ی هر رأس از آن برابر ۲ باشد سپس این گراف، اجتماعی از چندین دور است (مثلاً گراف رسم شده در بالا یک دور ۱, ۳, ۲, ۲, ۳, ۱ است). بنابراین گراف دو بخشی مسأله اجتماعی از چندین دور است. حکم مسأله به شکل گراف، بدین صورت است که در گراف دو بخشی مفروض می‌توان با جابجایی چندین رأس با یکدیگر در بخش اول گراف و همچنین چندین رأس با یکدیگر در بخش دوم گراف، به گراف جدیدی رسید که متشابه با گراف اولیه باشد ولی جهت هر یال در گراف جدید، نسبت به جهت همان یال در گراف اولیه، عکس باشد. واضح است که اگر جای دو رأس در یک دور را با هم عوض کنیم در دورهای دیگر تغییری حاصل نمی‌شود چرا که دورها از هم مجزا هستند و با هم اشتراکی ندارند. در نتیجه کافی است حکم را برای هر دور گراف ثابت کنیم [زیرا گراف مفروض اجتماعی از چندین دور است و اگر حکم بالا برای هر دور گراف درست باشد، سپس با اعمال همه‌ی تغییرات روی همه‌ی دورها به طور زمان، می‌توانیم به گراف جدیدی برسیم که جهت هر یال در آن معکوس شده باشد]. بنابراین حکم را برای یک دور دلخواه $\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\cdots\alpha_k\beta_k$ از گراف ثابت می‌کنیم که در آن α_i ها متعلق به بخش اول گراف و β_i ها متعلق به بخش دوم گراف هستند.



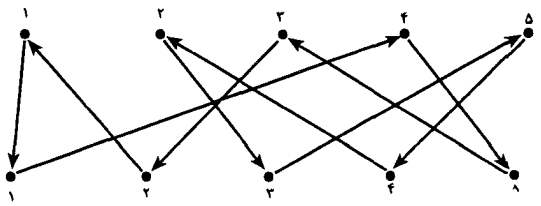
حال دنباله‌ٔ $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)$ را به دنباله‌ٔ $(\alpha_k,\alpha_{k-1},\ldots,\alpha_1)$ تبدیل می‌کنیم (بر طبق لم این عمل امکان‌پذیر است). همچنین دنباله‌ی $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{k-1},\beta_k)$ را هم به دنباله‌ی $(\beta_1,\beta_k,\ldots,\beta_3,\beta_2)$ تبدیل می‌کنیم (یعنی β_1 را ثابت نگه داشته و $k-1$ عدد دیگر را به طور معکوس از انتها می‌نویسیم). ازاین‌رو شکل روبه‌رو به‌دست می‌آید.

واضح است که شکل جدید متشابه با شکل اولیه است با این تفاوت که جهت هر یال در شکل جدید عکس شده است. بدین ترتیب حکم ثابت می‌شود. به عنوان یک مثال، جدول ۵ × ۵ زیر را در نظر بگیرید:

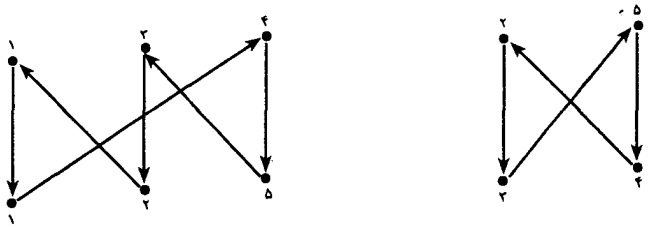
	۱	۲	۳	۴	۵
۱	۱			-۱	
۲	-۱		۱		
۳		۱			-۱
۴		-۱			۱
۵			-۱	۱	

MATH75.IR

گراف دوبخشی جدول صفحه قبل را تشکیل می‌دهیم:



واضح است که گراف بالا از دو دور زیر تشکیل شده است:



بنابراین باید دنباله‌ی $(۱,۳,۴)$ را به $(۴,۳,۱)$، دنباله‌ی $(۱,۲,۵)$ را به $(۱,۵,۲)$، دنباله‌ی $(۲,۵)$ را به $(۵,۲)$ و دنباله‌ی $(۳,۴)$ را به $(۳,۴)$ تبدیل کنیم:

$$(۱,۳,۴) \xrightarrow{۱,۴} (۴,۳,۱) \quad , \quad (۱,۲,۵) \xrightarrow{۲,۵} (۱,۵,۲) \quad , \quad (۲,۵) \xrightarrow{۲,۵} (۵,۲)$$

درنتیجه باید زوج ستونهای $\{۱,۴\}$ و $\{۲,۵\}$ و زوج سطر $\{۲,۵\}$ را با هم عوض کنیم. واضح است که در جدول به وجود آمده، علامت هر عدد معکوس شده است. (یعنی مثبت به منفی و منفی به مثبت تبدیل شده است)

اردیبهشت ۷۷

۲۳. فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد. n تایی $(a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$ از اعداد طبیعی را «خوب» می‌نامیم، اگر داشته باشیم $a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n = ۲n$ و نیز حاصل جمع هیچ تعدادی از a_i ها برابر n نشود. تمام n تایی های «خوب» را پیدا کنید.(به عنوان مثال ۳ تایی $(۱,۱,۴)$ «خوب» است ولی ۵ تایی $(۱,۲,۱,۲,۴)$ «خوب» نیست، زیرا حاصل جمع مؤلفه‌های اول ، دوم و چهارم برابر ۵ است.)

حل: n مجموع زیر را در نظر بگیرید:

$$a_۱ \ , \ a_۱ + a_۲ \ , \ a_۱ + a_۲ + a_۳ \ , \ \ldots \ , \ a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n \qquad (۱)$$

فرض کنید دو تا از این مجموع‌ها دارای باقیمانده‌ی یکسانی در تقسیم بر n باشند $(i > j)$:

$$a_۱ + a_۲ + \cdots + a_i \overset{n}{\equiv} a_۱ + a_۲ + \cdots + a_j \quad \Longrightarrow \quad n \mid a_{j+۱} + a_{j+۲} + \cdots + a_i$$

از طرفی داریم:

$$۰ < a_{j+۱} + a_{j+۲} + \cdots + a_i < ۲n \quad \Longrightarrow \quad a_{j+۱} + a_{j+۲} + \cdots + a_i = n$$

MATH75.IR

رابطه‌ی بالا خلاف فرض است.

باقیمانده‌ی هر عدد بر n، یکی از n عدد $۰, ۱, \ldots, n-۱$ می‌تواند باشد. n مجموع بالا دارای باقیمانده‌های متفاوتی در تقسیم بر n هستند، یعنی این n مجموع، n باقیمانده‌ی متفاوت به ما می‌دهند. از طرفی ما در کل n باقیمانده‌ی مختلف داریم در نتیجه n مجموع بالا، تمام n باقیمانده‌ی $۰, ۱, \ldots, n-۱$ را در تقسیم بر n می‌دهند.

این مطلب در مورد n مجموع زیر نیز درست است:

$$a_۲ \ , \ a_۱ + a_۲ \ , \ a_۱ + a_۲ + a_۳ \ , \ \ldots \ , \ a_۱ + a_۲ + a_۳ + \cdots + a_n \qquad (۲)$$

هر کدام از n مجموع (۱) و یا (۲)، تمام باقیمانده‌ها به هنگ n را می‌دهند و مهمتر اینکه تمام جملات متناظر این دو n مجموع به جز جمله‌ی اول آنها با هم برابر هستند. در نتیجه جملات اول آنها هم باید دارای یک باقیمانده به هنگ n باشند یعنی $a_۱ \overset{n}{\equiv} a_۲$. به همین ترتیب به دست می‌آید که:

$$a_۱ \equiv a_۲ \equiv \cdots \equiv a_n \equiv k \qquad (mod\ n)$$

که در آن k عددی بین ۰ و $n-۱$ است. از این رو داریم:

$$a_i \geq k \qquad i = ۱, ۲, \ldots, n$$

در نتیجه:

$$kn \leq a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n = ۲n \qquad (*)$$

بنابراین k می‌تواند یکی از سه عدد $۰, ۱, ۲$ باشد. k برابر صفر نیست زیرا بر طبق فرض مسأله، هیچ جمله‌ای از دنباله بر n بخشپذیر نیست. اگر k برابر ۲ باشد سپس باید تمامی a_i ها برابر ۲ باشند زیرا از جمع n نامساوی $a_i \geq ۲ \ [i = ۱, ۲, \ldots, n]$ به تساوی (*) رسیده‌ایم، بنابراین باید تمامی نامساوی‌ها به تساوی تبدیل شوند:

$$a_۱ = a_۲ = \cdots = a_n = ۲$$

اگر n عدد زوجی باشد مجموع $n = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_{\frac{n}{۲}}$ بر n بخشپذیر می‌شود. درنتیجه این دنباله به‌ازای nهای زوج جواب مسأله نیست. واضح است که به‌ازای n های فرد دنباله‌ی $(۲, ۲, \cdots, ۲)$ یک جواب است.

اگر $k = ۱$ باشد سپس باید یکی از a_i ها برابر $n+۱$ و بقیه برابر ۱ باشند (زیرا هر a_i ای می‌تواند فقط ۱ و یا $n+۱$ باشد. اگر همه‌ی a_i ها ، ۱ باشند سپس مجموع آنها $۲n$ نمی‌شود. اگر لااقل دو تا از a_i ها، $n+۱$ باشند سپس مجموع a_i ها از $۲n$ بیشتر می‌شود. در نتیجه دقیقاً یکی از a_i ها برابر $n+۱$ است.) واضح است که چنین دنباله‌ای

MATH75.IR

در شرایط مسأله صدق می‌کند. بنابراین برای هر n طبیعی، n جواب زیر به دست می‌آید:

$$(n+1,1,1,\ldots,1)$$
$$(1,n+1,1,\ldots,1)$$
$$\vdots$$
$$(1,1,1,\cdots,n+1)$$

۲۴. اگر $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ و $B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ دو n تایی از صفر و یک باشند، فاصله‌ی A,B را برابر تعداد i هایی می‌گیریم که $a_i \neq b_i$ $(1\leq i\leq n)$. (به عنوان مثال اگر $A=(0,1,1)$ و $B=(1,1,0)$، فاصله‌ی A و B برابر ۲ است.) حال فرض کنید که A,B,C سه n تایی از صفر و یک باشند، به طوری که فاصله‌ی دوبه‌دوی آنها d است.

الف) نشان دهید که d زوج است.

ب) ثابت کنید که یک n تایی از صفر و یک، مثل D، وجود دارد که فاصله‌اش با A,B,C برابر $\frac{d}{2}$ است.

حل: الف) اگر $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ و $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$، واضح است که فاصله‌ی X,Y برابر است با:

$$f(X,Y)=|y_1-x_1|+|y_2-x_2|+\cdots+|y_n-x_n|$$

فرض کنید که $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$، $B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ و $C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$.

داریم که:

$$d=f(A,B)=|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdots+|a_n-b_n|$$
$$d=f(B,C)=|b_1-c_1|+|b_2-c_2|+\cdots+|b_n-c_n|$$
$$d=f(C,A)=|c_1-a_1|+|c_2-a_2|+\cdots+|c_n-a_n|$$

می‌دانیم که $|a|\overset{2}{\equiv} a$. حال ۳ رابطه‌ی بالا را با هم جمع می‌کنیم و به هنگ ۲ در نظر می‌گیریم:

$$3d\overset{2}{\equiv}[a_1-b_1+b_1-c_1+c_1-a_1]+\cdots+[a_n-b_n+b_n-c_n+c_n-a_n]=0$$

بنابراین $d\overset{2}{\equiv}0$، در نتیجه d عددی زوج است.

MATH75.IR

ب) ۶ مجموعه‌ی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$A_1 = \{ (a_i, b_i, c_i) \mid a_i = 0, b_i = 0, c_i = 1 \ , \ 1 \le i \le n \}$$
$$A_2 = \{ (a_i, b_i, c_i) \mid a_i = 0, b_i = 1, c_i = 0 \ , \ 1 \le i \le n \}$$
$$A_3 = \{ (a_i, b_i, c_i) \mid a_i = 1, b_i = 0, c_i = 0 \ , \ 1 \le i \le n \}$$
$$A_4 = \{ (a_i, b_i, c_i) \mid a_i = 0, b_i = 1, c_i = 1 \ , \ 1 \le i \le n \}$$
$$A_5 = \{ (a_i, b_i, c_i) \mid a_i = 1, b_i = 0, c_i = 1 \ , \ 1 \le i \le n \}$$
$$A_6 = \{ (a_i, b_i, c_i) \mid a_i = 1, b_i = 1, c_i = 0 \ , \ 1 \le i \le n \}$$

واضح است که:

$$d = f(A,B) = |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5|$$
$$d = f(B,C) = |A_1| + |A_2| + |A_5| + |A_6|$$
$$d = f(C,A) = |A_1| + |A_3| + |A_4| + |A_6|$$

از سه رابطه‌ی بالا به دست می‌آید که:

$$|A_1| + |A_6| = |A_3| + |A_4| = |A_2| + |A_5| = \frac{d}{2} \qquad (*)$$

[از رابطه‌ی بالا نتیجه می‌شود که d عددی زوج است زیرا تعداد اعضای هر مجموعه‌ی A_i، عددی صحیح و نامنفی است بنابراین $\frac{d}{2}$ هم باید عددی صحیح و نامنفی باشد.]

حال $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

به ازای $i = 1, 2, \ldots, n$، اگر (a_i, b_i, c_i) متعلق به یکی از مجموعه‌های A_1, A_2, A_3 باشد سپس d_i را برابر صفر می‌گیریم. اگر (a_i, b_i, c_i) متعلق به یکی از مجموعه‌های A_4, A_5, A_6 باشد سپس d_i را برابر یک می‌گیریم. اگر (a_i, b_i, c_i) متعلق به هیچ‌کدام از مجموعه‌های A_1 تا A_6 نباشد (یعنی $a_i = b_i = c_i$) سپس d_i را برابر $a_i = b_i = c_i$ می‌گیریم. بنابراین داریم:

$$f(D,A) = |A_2| + |A_4| = \frac{d}{2} \ , \ f(D,B) = |A_2| + |A_5| = \frac{d}{2} \ , \ f(D,C) = |A_1| + |A_6| = \frac{d}{2}$$

در نتیجه D تعریف شده در شرط مسأله صدق می‌کند.

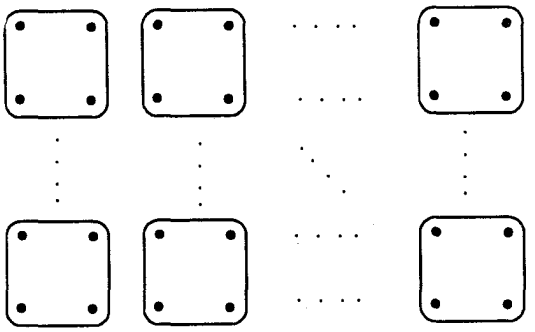
اردیبهشت ۷۸

۲۵. یک زمین مربع شکل به شبکه‌ای ۱۰۰ × ۱۰۰ از نقاط متساوی‌الفاصله تقسیم شده و تعداد ۱۰۰۰۰ عدد درخت هر کدام در یکی از نقاط این شبکه کاشته شده است. ماکزیمم تعداد درختهایی که می‌توانیم قطع کنیم را پیدا

MATH75.IR

کنید که اگر در محل هر درخت بریده شده‌ای قرار گیریم هیچ درخت بریده‌شده‌ی دیگری را نبینیم. (یعنی روی پاره‌خط واصل بین هر دو درخت بریده شده، درخت بریده‌نشده‌ای واقع باشد.)

حل: این شبکه را به ۲۵۰۰ مجموعه‌ی ۴ نقطه‌ای به صورت روبه‌رو افراز می‌کنیم:



فرض کنید این ۱۰۰۰۰ درخت، در صفحه‌ی مختصات، در نقاط (i,j) که $0 \le i,j \le 99$ قرار گرفته باشند. در این صورت مجموعه‌های ۴تایی بالا، به زبان ریاضی به صورت زیرهستند:

$$\forall\ 0 \le i,j \le 49 \quad : \quad \{(2i,2j),(2i,2j+1),(2i+1,2j),(2i+1,2j+1)\}$$

واضح هستند که هر دو درخت بریده‌شده‌ای که در یک مجموعه قرار گرفته باشند یکدیگر را می‌بینند. در نتیجه اگر بخواهیم هیچ دو درخت بریده‌شده‌ای همدیگر را نبینند، باید از هر مجموعه، حداکثر یک درخت را قطع کنیم. بنابراین حداکثر ۲۵۰۰ درخت را می‌توانیم قطع کنیم.

برای کامل شدن اثبات، باید مثالی ارائه دهیم که در آن ۲۵۰۰ درخت قطع شده‌اند و همچنین این درختها ویژگی موردِ نظر را داشته باشند. تمام درختهایی که مختصات آنها به صورت $(2i,2j)$ که $0 \le i,j \le 49$ است را قطع می‌کنیم. دو درخت بریده شده دلخواه با مختصات $(2i_1,2j_1)$ و $(2i_2,2j_2)$ را در نظر بگیرید. ثابت می‌کنیم این دو درخت یکدیگر را نمی‌بینند. تعریف می‌کنیم:

$$i_1 - i_2 = 2^{\alpha_1}\beta_1 \ , \ j_1 - j_2 = 2^{\alpha_2}\beta_2 \ , \ (2,\beta_1) = (2,\beta_2) = 1$$

برحسب تقارن می‌توان فرض کرد که $\alpha_1 \le \alpha_2$. نقطه‌ی $(2i_2+\beta_1, 2j_2+2^{\alpha_2-\alpha_1}\beta_2)$ را در نظر بگیرید. واضح است که این نقطه روی پاره‌خط واصل بین نقاط $(2i_1,2j_1),(2i_2,2j_2)$ قرار دارد و همچنین مؤلفه اول آن عددی فرد است. در نتیجه این درخت بریده نشده است.

۲۶. همه‌ی عددهای طبیعی m به صورت زیر:

$$m = \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \cdots + \frac{1378}{a_{1378}}$$

را پیدا کنید که در آن $a_{1378},\ldots,a_2,a_1$ اعدادی صحیح و مثبت باشند.

حل: برای حل این مسأله، ادعای کلی‌تر زیر را ثابت می‌کنیم:

برای هر عدد طبیعی n، همه‌ی اعداد طبیعی‌ای که قابل نمایش به شکل

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \cdots + \frac{n}{a_n} \qquad (a_i \in N \ \ 1 \le i \le n) \qquad (*)$$

MATH75.IR

هستند عبارتند از $۱, ۲, ۳, \ldots, \frac{n(n+۱)}{۲}$. ۱ فرض کنید m را بتوان به شکل (*) نمایش داد:

$$m = \frac{۱}{a_۱} + \frac{۲}{a_۲} + \cdots + \frac{n}{a_n} \leq \frac{۱}{۱} + \frac{۲}{۱} + \cdots + \frac{n}{۱} = \frac{n(n+۱)}{۲} \quad \Longrightarrow \quad m \leq \frac{n(n+۱)}{۲}$$

حال با استقراء بر روی n ثابت می‌کنیم که هر عددی بین ۱ و $\frac{n(n+۱)}{۲}$ را می‌توان به شکل (*) نمایش داد.
به ازای $n = ۱$ درستی حکم واضح است. فرض کنید حکم به ازای n درست باشد، ثابت می‌کنیم به ازای $n+۱$ نیز درست است.
عدد طبیعی m را با شرط $۱ \leq m \leq \frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}$ در نظر بگیرید. دو حالت زیر را داریم:

۱. $n+۱ < m \leq \frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}$. عدد $m-(n+۱)$ را در نظر بگیرید:

$$۰ < m-(n+۱) \leq \frac{n(n+۱)}{۲}$$

بر طبق فرض استقراء، عدد $m-(n+۱)$ را می‌توان به شکل (*) نمایش داد:

$$m-(n+۱) = \frac{۱}{a_۱} + \frac{۲}{a_۲} + \cdots + \frac{۱}{a_n}$$

درنتیجه

$$m = \frac{۱}{a_۱} + \frac{۲}{a_۲} + \cdots + \frac{۱}{a_n} + \frac{n+۱}{۱}$$

۲. $۰ < m \leq n+۱$. اگر $m = ۱$ باشد سپس m را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$m = \frac{۱}{n+۱} + \frac{۲}{۲(n+۱)} + \frac{۳}{۳(n+۱)} + \cdots + \frac{(n+۱)}{(n+۱)(n+۱)}$$

اگر $m \geq ۲$ باشد سپس m را به صورت $\frac{۱}{a_۱} + \frac{۲}{a_۲} + \cdots + \frac{n+۱}{a_{n+۱}}$ می‌نویسیم که در آن a_i ها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$a_۱ = a_۲ = \cdots = a_{m-۱} = ۱ \quad , \quad a_i = (n-m+۲)i \quad i \geq m$$

از این رو داریم:

$$\frac{۱}{a_۱} + \frac{۱}{a_۲} + \cdots + \frac{n+۱}{a_{n+۱}} = (m-۱) + \sum_{i=m}^{n+۱} \frac{i}{(n-m+۲)i} = (m-۱) + \frac{(n+۱)-m+۱}{n-m+۲} = m$$

MATH75.IR

بدین ترتیب حکم استقراء ثابت می‌شود. از این رو تمام عددهای طبیعی‌ای که قابل نمایش به صورت $\frac{۱}{a_۱}+\frac{۲}{a_۲}+\cdots+\frac{۱۳۷۸}{a_{۱۳۷۸}}$ هستند عبارتند از $۱, ۲, ۳, \ldots, \frac{۱۳۷۸\times ۱۳۷۹}{۲}$.

۲۷. فرض کنید $A_۱, A_۲, \ldots, A_n$، n نقطه‌ی متمایز در صفحه باشند $(n \geq ۲)$. همه‌ی پاره‌خط‌هایی که از اتصال دوبه‌دوی این نقاط به دست می‌آیند را در نظر می‌گیریم و وسط هر یک از این پاره‌خط‌ها را به رنگ قرمز، رنگ می‌کنیم. حداقل تعداد نقاط قرمز به دست آمده چندتاست؟

حل: ادعا می‌کنیم که حداقل تعداد نقاط به دست آمده برابر $۲n-۳$ است. برای اثبات این ادعا دو حالت زیر را در نظر بگیرید:

۱. فرض کنید نقاط $A_۱, A_۲, \ldots, A_n$ روی یک خط باشند. روی این خط نقطه‌ای دلخواه مثل o در یک طرف این n نقطه انتخاب کرده و آن را مبدأ مختصات قرار دهید. تعریف می‌کنیم:

$$a_i = |oA_i| \quad i = ۱, ۲, \ldots, n$$

با استفاده از تقارن می‌توان فرض کرد که $a_۱ < a_۲ < \cdots < a_n$. (نقاط $A_۱, A_۲, \ldots, A_n$ متمایزند بنابراین داریم $a_i \neq a_j$ برای $i \neq j$). واضح است که فاصله‌ی وسط پاره‌خط A_iA_j از مبدأ مختصات برابر $\frac{a_i+a_j}{۲}$ است. نامساوی‌های زیر را داریم:

$$\frac{a_۱+a_۲}{۲} < \frac{a_۱+a_۳}{۲} < \cdots < \frac{a_۱+a_n}{۲} < \frac{a_۲+a_n}{۲} < \frac{a_۳+a_n}{۲} < \cdots < \frac{a_{n-۱}+a_n}{۲}$$

از این رو نقاط وسط پاره‌خط‌های $A_۱A_۲, A_۱A_۳, \ldots, A_۱A_n, A_۲A_n, A_۳A_n, \ldots, A_{n-۱}A_n$، $۲n-۳$ نقطه‌ی متمایزند.

---

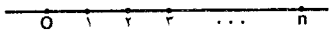
۲. فرض کنید همه‌ی نقاط $A_۱, A_۲, \ldots, A_n$ روی یک خط نباشند. ادعا می‌کنیم خطی مانند L در صفحه وجود دارد به طوری که تصویر هر دو نقطه‌ی $A_i, A_j (i \neq j)$ روی این خط متمایز باشند. برای اثبات این ادعا، نقطه‌ای مانند o که متمایز از A_iها باشد روی صفحه در نظر می‌گیریم. از این نقطه‌ی o بر تمام خطوطی که از هر دو نقطه‌ی A_i, A_j با شرط $۱ \leq i, j \leq n, i \neq j$ می‌گذرند خطوط عمودی رسم می‌کنیم. تعداد این خطوط حداکثر $\binom{n}{۲}$ است که همگی از نقطه‌ی o می‌گذرند. پر واضح است که از نقطه‌ی o، بی‌نهایت خط در صفحه می‌توان رسم کرد، در نتیجه خط دیگری متمایز از این $\binom{n}{۲}$ خط، می‌توان از نقطه‌ی o رسم کرد. این خط را L بنامید. بنابراین L بر هیچ‌یک از خطوط A_jA_i عمود نیست. در نتیجه اگر به ازای هر $۱ \leq i \leq n$، B_i را تصویر A_i روی L بنامیم، B_iها نقاط متمایزی می‌شوند.

n نقطه‌ی $B_۱, B_۲, \ldots, B_n$ روی خط L موجود هستند در نتیجه بر طبق حالت ۱، این n نقطه‌ی دست کم $۲n-۳$ نقطه‌ی متمایز به ما می‌دهند که هر کدام وسط پاره‌خطی مثل B_iB_j هستند. در نتیجه وسط‌های

MATH75.IR

پاره‌خط‌های A_iA_j، دست کم $2n-3$ نقطه متمایز به ما می‌دهند.

همچنین اگر $A_n,\dots,A_2,A_1$ را متناظر با اعداد $n,\dots,2,1$ روی یک خط راست بگیریم، هر نقطه‌ی قرمزی به صورت $\frac{a}{2}$ خواهد بود که در آن a عددی طبیعی است و همچنین $2+1\le a\le n+(n-1)$ و یا $3\le a\le 2n-1$. پس $2n-3$ نقطه‌ی قرمز وجود دارد.



MATH75.IR

فصل سوم

آنالیز

- چند جمله‌ای‌ها
- نامساوی‌ها
- اعداد مختلط
- معادلات تابعی
- شمارش با استفاده از تابع مولد
- دنباله‌ی بازگشتی
- مسائل آنالیز
- مسائل تستی المپیادهای ریاضی
- مسائل تشریحی المپیادهای ریاضی

MATH75.IR

چندجمله‌ایها

به تابع $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x^1 + a_0$، $a_n \neq 0$ یک چندجمله‌ای از درجه n ام گویند که در آن a_i ها برحسب تعریف می‌توانند متعلق به $\mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}, \mathbf{Z}, \mathbf{Z_p}, \ldots$ باشند. نماد deg را برای نشان دادن درجهٔ یک چندجمله‌ای به کار می‌بریم و می‌نویسیم $deg(f(x)) = n$.

قضیه ۱: فرض کنید $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند. در این صورت داریم:

$$deg(P(x) \pm Q(x)) = Max\{deg(P(x)), deg(Q(x))\} \quad \text{(i)}$$

$$deg(P(x) \cdot Q(x)) = deg(P(x)) + deg(Q(x)) \quad \text{(ii)}$$

برای اثبات این قضیه کافی است که ریف یک چندجمله‌ای را بنویسید.

قضیه ۲: فرض کنید $p(x)$ و $q(x)$ دو چندجمله‌ای غیر صفر باشند و $deg(q(x)) \leq deg(p(x))$. در این صورت چندجمله‌ای $k(x)$ موجود است به طوری که $p(x) = q(x)k(x)$ و یا $deg(p(x) - q(x)k(x)) < deg(p(x))$.

اثبات: $p(x)$ و $q(x)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$p(x) = a_m x^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i \quad , \quad q(x) = b_n x^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$$

از این رو $m \geq n$. حال $k(x)$ را برابر $\frac{a_m}{b_n} x^{m-n}$ تعریف می‌کنیم:

$$q(x)k(x) = a_m x^m + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_m}{b_n} \cdot b_i x^{m-n+i}$$

به راحتی می‌توان بازبینی نمود که $k(x)$ تعریف شده در شرایط مسأله صدق می‌کند.

قضیه ۳: اگر $p(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند و $deg(q(x)) \neq 0$، آنگاه دو چندجمله‌ای یکتای $r(x)$ و $s(x)$ موجودند که در دو شرط زیر صدق کنند:

$$p(x) = r(x)q(x) + s(x) \quad \text{(i)}$$

MATH75.IR

(ii) $s(x) \equiv 0$ یا $deg(s(x)) < deg(q(x))$

اثبات: اگر $p(x) \equiv 0$ یا $deg(p(x)) < deg(q(x))$، سپس $r(x) \equiv 0$, $s(x) = p(x)$ یک جواب است. حال فرض کنید $p(x) \neq 0$ و $deg(p(x)) \geq deg(q(x))$. در این صورت بر طبق قضیهٔ بالا، چندجمله‌ای $r_1(x)$ موجود است که $p(x) = q(x)r_1(x)$ و یا $deg(p(x) - q(x)r_1(x)) < deg(p(x))$. اگر $p(x) - q(x)r_1(x) \neq 0$ و $deg(q(x)) \leq deg(p(x) - q(x)r_1(x))$ ، دوباره چندجمله‌ای r_2 را می‌یابیم به طوری که $(p(x) - q(x)r_1(x) = q(x)r_2(x)$ و یا

$$deg(p(x) - q(x)(r_1(x) + r_2(x))) < deg(p(x) - q(x)r_1(x))$$

با ادامهٔ این رویه تا حد لازم، $r(x)$ و $s(x)$ مطلوب به دست می‌آید. ادعا می‌کنیم که این $r(x)$ و $s(x)$ یکتا هستند. برای اثبات این ادعا، فرض خلف می‌کنیم یعنی فرض می‌کنیم دو دستهٔ متفاوت $s_1(x), r_1(x)$ و $s_2(x), r_2(x)$ در شرایط مسأله صدق کند. در نتیجه:

$$(r_1(x) - r_2(x)) \times q(x) = (s_2(x) - s_1(x))$$

از اینرو با استفاده از قضیه بالا بدست می آوریم که $(deg([r_2(x) - r_1(x)]q(x)) = deg(s_2(x) - s_1(x)))$:

$$Max\{deg(r_1), deg(r_2)\} + deg(q) = Max\{deg(s_1), deg(s_2)\}$$

رابطهٔ بالا تناقض است چرا که بر طبق فرض مسأله داریم:

$$deg(q(x)) > deg(s_1(x)) \ , \ deg(q(x)) > deg(s_2(x))$$

به $s(x)$ باقیمانده تقسیم $p(x)$ بر $q(x)$ گویند، توجه داشته باشید که در بالا ثابت شد که $s(x)$ یکتا است. اگر $s(x) \equiv 0$، می‌گوییم که $p(x)$ بر $q(x)$ بخشپذیر است.

قضیه بزو ۴: چندجمله‌ای دلخواه $p(x)$ را در نظر بگیرید. به ازای هر عدد دلخواه x_0، باقیمانده تقسیم $p(x)$ بر $x - x_0$ برابر $p(x_0)$ است.

اثبات: بنابر قضیه قبل $r(x)$ ای موجود است به طوری که $p(x) = r(x)(x - x_0) + s(x)$, $deg(s(x)) < deg(x - x_0)$. از آنجا که درجه $x - x_0$ برابر ۱ است $s(x)$ باید چندجمله‌ای درجه صفر و یا معادلاً ثابت باشد یعنی $p(x) = (x - x_0)r(x) + s$. حال در اینَ عبارت به جای x عدد x_0 را قرار می‌دهیم : $p(x_0) = (x - x_0)r(x_0) + s$ در نتیجه $s = p(x_0)$.

به عدد α ریشهٔ چند جمله‌ای $p(x)$ گوییم اگر داشته باشیم $p(\alpha) = 0$.

قضیه ۵: چندجمله‌ای $p(x)$ وقتی و تنها وقتی بر $x - x_0$ بخشپذیر است که x_0 یکی از ریشه‌های آن باشد.

این قضیه حالت خاص $s = 0$ قضیهٔ بالا است.

MATH75.IR

قضیه اساسی جبر ٦: هر چندجمله‌ای از درجه $n \geq ۱$، درست n ریشه مختلط دارد.

به دلیل دشواریهایی که در اثبات این قضیه وجود دارد، اثبات آن در اینجا ذکر نمی‌شود ولی از آن در قضایای بعدی استفاده می‌شود.

یک نتیجه بدیهی و در عین حال مهم این قضیه به این صورت است که هر چندجمله‌ای از درجه n حداکثر n ریشه حقیقی دارد.

نتیجه دیگر و مهم قضیه اساسی جبر این است که اگر یک چندجمله‌ای از درجه n، بیش از n ریشه داشته باشد سپس آن چندجمله‌ای برابر صفر است.

قضیه ۷: اگر دو چندجمله‌ای $p(x), q(x)$ که درجه هیچ کدام از آنها از n تجاوز نمی‌کند در $n+۱$ نقطه مختلف با هم برابر باشند سپس همواره با هم برابرند.

اثبات: $f(x)$ را برابر $p(x)-q(x)$ تعریف می‌کنیم، از فرضیات مسأله نتیجه می‌شود که $f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر n است و لااقل $n+۱$ ریشه مختلف دارد، در نتیجه بر طبق قضیه اساسی جبر $f(x)$ برابر صفر است و یا معادلاً $p(x)=q(x)$.

قضیه ۸: هر چندجمله‌ای $p(x)$ با درجه $n \geq ۰$ را به طور منحصر به فردی می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$p(x) = a_n(x-x_۱)(x-x_۲)\cdots(x-x_n)$$

که در آن a_n ضریب بزرگترین درجه و $x_n, \ldots, x_۲, x_۱$ ریشه‌های چندجمله‌ای مفروض هستند. (x_iها اعداد مختلط اند)

اثبات: بر طبق قضیه اساسی جبر $p(x)$ دقیقاً n ریشه $x_n, \ldots, x_۲, x_۱$ دارد. از طرفی قضیه بزو نتیجه می‌دهد که به ازای هر $i = ۱, ۲, \ldots, n$، $p(x)$ بر $x-x_i$ بخشپذیر است یعنی:

$$p(x) = (x-x_۱)p_۱(x) = (x-x_۱)(x-x_۲)p_۲(x)$$
$$= \cdots = (x-x_۱)(x-x_۲)\cdots(x-x_n)p_n(x)$$

$p_n(x)$ باید یک چندجمله‌ای ثابت باشد تا $p(x)$ بیشتر از n ریشه نداشته باشد. حال با مساوی قرار دادن ضریب x^n در طرفین عبارت، برابری $a_n = p_n(x)$ نتیجه می‌شود.

قضیه ۹: اگر $p(x)$ چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد و $z \in \mathbf{C}$ ریشه‌ای از آن باشد، سپس $\overline{z}$ نیز یک ریشه آن خواهد بود.

این قضیه در قسمت مربوط به اعداد مختلط ثابت شده است.

قضیه ۱۰: هر چند جمله‌ای $p(x)$ با ضرایب حقیقی و از درجه n را تنها به یک صورت می‌توان به چندجمله‌ای‌های تحویل‌ناپذیر زیر تجزیه نمود:

$$p(x) = a_n(x-x_۱)\cdots(x-x_m)\left(x^۲+۲b_۱x+c_۱\right)\cdots\left(x^۲+۲b_tx+c_t\right)$$

MATH75.IR

که در آن $m+2t=n$، x_i, c_i, b_i اعداد حقیقی‌اند و همچنین $b_i^2 < c_i$ (به ازای $i=1,2,\cdots,t$).

اثبات: فرض کنید $p(x)$ دارای ریشه‌های $x_1, x_2, \ldots, x_n$ باشد که که در آن $x_1, \ldots, x_m$ اعداد حقیقی و $x_{m+1}, \ldots, x_n$ اعداد مختلط و غیرحقیقی اند.

$$p(x) = a_n(x-x_1)\cdots(x-x_m)(x-x_{m+1})\cdots(x-x_n) \qquad (1)$$

از طرفی بر طبق قضیه بالا مجموعه $\{x_{m+1}, \ldots, x_n\}$ را می‌توان به دو مجموعه $\{y_1, \ldots, y_{\frac{n-m}{2}}\}$ و $\{\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_{\frac{n-m}{2}}\}$ تجزیه نمود. در نتیجه داریم که:

$$(x-x_{m+1})(x-x_{m+2})\cdots(x-x_n) = (x-y_1)(x-\overline{y}_1)\times(x-y_2)(x-\overline{y}_2)\times\cdots$$
$$= \left(x^2 - 2Re(y_1) + |y_1|^2\right)\left(x^2 - 2Re(y_2) + |y_2|^2\right)\cdots \qquad (2)$$

با جایگذاری (۲) در (۱) به دست می‌آوریم که

$$p(x) = a_n(x-x_1)\cdots(x-x_m)\left(x^2 - 2Re(y_1) + |y_1|^2\right)\cdots\left(x^2 - 2Re(y_{\frac{n-m}{2}}) + |y_{\frac{n-m}{2}}|^2\right)$$

از طرفی داریم که $|y_i|^2 = Re(y_i)^2 + Im(y_i)^2 \geq Re(y_i)^2$ و یا معادلاً به ازای هر i، $c_i > b_i^2$.

قضیه ۱۱: برای هر چندجمله‌ای $p(x)$ با ضرایب حقیقی تعداد ریشه‌های مختلط و غیر حقیقی چندجمله‌ای $p(x)$ عددی زوج است.

این قضیه به طور مستقیم از قضیه ۹ نتیجه می‌شود و یا همچنین از قضیه ۱۰ می‌توان نتیجه گرفت که تعداد این‌گونه ریشه‌ها برابر $2t$ است که عددی زوج است.

قضیه ۱۲: فرض کنید $p,q \in \mathbb{N}$ و $(p,q)=1$. اگر عدد گویای $\frac{p}{q}$ ریشه‌ای از چندجمله‌ای با ضرایب صحیح $p(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$ باشد آن وقت a_0 بر p و a_n بر q بخشپذیر است.

اثبات: بر طبق فرض داریم:

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

طرفین تساوی بالا را در q^n ضرب می‌کنیم:

$$a_np^n + \cdots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0$$

عبارت بالا را یکبار به هنگ p و بار دیگر به هنگ q در نظر می‌گیریم:

$$a_0q^n \overset{p}{\equiv} 0 \quad , (p,q)=1 \implies p|a_0$$
$$a_np^n \overset{q}{\equiv} 0 \quad , (p,q)=1 \implies q|a_n$$

اگر در قضیه بالا به جای a_n عدد ۱ قرار دهیم نتیجه زیر حاصل می‌شود:

MATH75.IR

نتیجه: هر ریشهٔ حقیقی چندجمله‌ای با ضرایب صحیح $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ عددی صحیح و یا عددی گنگ است.

اگر قضیه را برای چندجمله‌ای $x^n - a$ که $a \in \mathbf{N}$ است به کار بریم به دست می‌آید که برای هر $a, n \in \mathbf{N}$، $\sqrt[n]{a}$ عددی صحیح و یا گنگ است.

قضیه ویت ۱۳: چندجمله‌ای $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ را در نظر بگیرید و فرض کنید که $x_1, \ldots, x_n$ ریشه‌های $p(x)$ باشند، در این صورت روابط زیر برقرارند:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = \sum_{1 \le i < j \le n} x_ix_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = \sum_{1 \le i < j < k \le n} x_ix_jx_k = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$x_1x_2 \cdots x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

اثبات: از آنجا که x_i ها ریشه‌های $p(x)$ هستند، می‌توان نوشت:

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \qquad (*)$$

حال عبارت سمت راست رابطهٔ $(*)$ را بسط می‌دهیم:

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = x^n - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)x^{n-1} + (x_1x_2 + x_2x_3$$

$$+ \cdots + x_{n-1}x_n)x^{n-2} - (x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + \cdots$$

$$+ x_{n-2}x_{n-1}x_n)x^{n-3} + \cdots + (-1)^n x_1x_2 \cdots x_n \qquad (**)$$

از طرفی می‌دانیم که اگر دو چندجمله‌ای همواره با هم برابر باشند سپس ضرایب متناظر در دو چندجمله‌ای با هم برابر هستند. حال از این نکته در مورد دو عبارت $(*)$, $(**)$ استفاده می‌کنیم:

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n [x^n - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)x^{n-1}$$

$$+ (x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n)x^{n-2}$$

$$- \cdots + (-1)^n x_1x_2 \cdots x_n]$$

MATH75.IR

به ازای هر i ضرایب x^i در دو طرف رابطه بالا با هم برابرند. با برابر قرار دادن این ضرایب حکم مسأله نتیجه می‌شود، یعنی به ازای هر $k = ۱, ۲, \ldots, n$ داریم که:

$$\sum_{۱ \le i_۱ < i_۲ < \cdots < i_k \le n} x_{i_۱} x_{i_۲} \cdots x_{i_k} = (-۱)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

دستور درونیابی لاگرانژ: عددهای مختلف دلخواه و مختلط $b_۰, b_۱, \ldots, b_n$ و عددهای دلخواه و مختلط $c_۰, \ldots, c_n$ را در نظر بگیرید. یک چندجمله‌ای منحصر به فرد $p(x)$ با درجه‌ای که از n تجاوز نمی‌کند وجود دارد که در برابری‌های زیر صدق می‌کند:

$$p(b_۰) = c_۰ \ , \ p(b_۱) = c_۱ \ , \ \ldots \ , \ p(b_n) = c_n$$

این چندجمله‌ای به صورت زیر است:

$$p(x) = \sum_{i=۰}^{n} c_i \prod_{\substack{۰ \le j \le n \\ j \ne i}} \frac{x - b_j}{b_i - b_j}$$

اثبات: اولاً بدیهی است که این چندجمله‌ای در صورت وجود یکتا است زیرا اگر دو چندجمله‌ای متمایز با این خاصیت موجود باشد از آنجا که این دو چندجمله‌ای از درجه حداکثر n هستند و در $n + ۱$ مقدار متمایز برابرند، بر طبق قضیه باید این دو چندجمله‌ای با هم برابر باشند، ثانیاً $p(x)$ معرفی شده در بالا خاصیت مزبور را دارا است:

$$p(b_k) = \sum_{i=۰}^{n} c_i \prod_{\substack{۰ \le j \le n \\ j \ne i}} \frac{b_k - b_j}{b_i - b_j} = c_k \prod_{\substack{۰ \le j \le n \\ j \ne k}} \frac{b_k - b_j}{b_k - b_j} = c_k \qquad k = ۰, \ldots, n$$

چندجمله‌ای معکوس

به چندجمله‌ای $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_۱ x + a_۰$ با شرط $a_n \ne ۰$ چندجمله‌ای معکوس گویند اگر داشته باشیم که:

$$a_i = a_{n-i} \qquad i = ۰, ۱, \ldots, n$$

به عنوان مثال $x^n + ۱$, $x^۵ + ۳x^۳ + ۳x^۲ + ۱$, $۵x^۸ - ۲x^۶ + ۴x^۵ + ۴x^۳ - ۲x^۲ + ۵$ سه چندجمله‌ای معکوس هستند.

قضیه ۱۴: هر چندجمله‌ای $f(x)$ از درجه n و $a_۰ \ne ۰$، چندجمله‌ای معکوس است اگر $x^n f\left(\frac{۱}{x}\right) = f(x)$.

اثبات: فرض کنید که

$$f(x) = a_۰ x^n + a_۱ x^{n-۱} + \cdots + a_۱ x + a_۰ \qquad (۱)$$

MATH75.IR

در نتیجه

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=a_0\left(\frac{1}{x}\right)^n+a_1\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}+\cdots+a_1\left(\frac{1}{x}\right)+a_0$$

و یا معادلاً

$$x^n f\left(\frac{1}{x}\right)=a_0+a_1x+\cdots+a_1x^{n-1}+a_0x^n \qquad (2)$$

از دو رابطهٔ (۱) و (۲) حکم قضیه نتیجه می‌شود.

قضیه ۱۵: هر چندجمله‌ای معکوس $f(x)$ و از درجه فرد $2n+1$ بر $x+1$ بخشپذیر است.

اثبات: فرض کنید که $f(x)=a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_1x+a_0$. برای اینکه $f(x)$ بر $x+1$ بخشپذیر باشد بر طبق قضیه کافی است که -1 ریشه‌ای از $f(x)$ باشد. از طرفی داریم که:

$$f(-1)=a_0(-1)^{2n+1}+a_1(-1)^{2n}+\cdots+a_{n-1}(-1)^{n+2}+a_n(-1)^{n+1}$$
$$+a_n(-1)^n+a_{n-1}(-1)^{n-1}+\cdots+a_1(-1)+a_0=0$$

قضیه ۱۶: اگر a یک ریشه چندجمله‌ای معکوس $f(x)$ و $a_0\neq 0$ باشد، سپس $\frac{1}{a}$ نیز ریشه‌ای از $f(x)$ است.

اثبات: بر طبق قضیه ۱۴ می‌دانیم که $x^nf\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$. باجایگذاری a به جای x در این رابطه به دست می‌آوریم که

$$a^nf\left(\frac{1}{a}\right)=f(a)$$

از آنجا که $f(a)$ برابر صفر است باید $f\left(\frac{1}{a}\right)$ هم برابر صفر باشد زیرا در غیر این صورت a باید برابر صفر باشد که این معادل است با اینکه a_0 نیز باید برابر صفر باشد و این خلاف فرض است.

قضیه ۱۷: هر چندجمله‌ای معکوس $f(x)$ و از درجه $2n$ می‌تواند به صورت $f(x)=x^ng(z)$ نوشته شود که در آن $z=x+\frac{1}{x}$ و $g(z)$ یک چندجمله‌ای بر حسب z و از درجه n است.

اثبات: فرض کنید که: $f(x)=a_0x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

از این‌رو داریم که:

$$f(x)=x^n\left(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}\right)$$
$$=x^n\times\left[a_0\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)+a_1\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)+\cdots+a_n\right] \qquad (*)$$

MATH75.IR

حال عبارت‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$x + \frac{1}{x} = z$$
$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = z^2 - 2$$
$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = z^3 - 3z$$
$$x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 6 = z^4 - 4z^2 + 2$$
$$x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^5 - 5\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 10\left(x + \frac{1}{x}\right) = z^5 - 5z^3 + 5z$$

به طور کلی با استقرا می‌توان ثابت کرد که به ازای هر k طبیعی، $x^k + \frac{1}{x^k}$ بر حسب یک چندجمله‌ای از متغیر z و درجه k قابل بیان است چرا که اگر $\alpha_i = x^i + \frac{1}{x^i}$ را به ازای هر $i \in \mathbf{N}$ تعریف کنیم، بدست می آوریم که:

$$x^i + \frac{1}{x^i} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^{i-1} + \frac{1}{x^{i-1}}\right) + \left(x^{i-2} + \frac{1}{x^{i-2}}\right) \quad \Longrightarrow \quad \alpha_i = z\alpha_{i-1} + \alpha_{i-2}$$

از آنجا که α_{i-2} و α_{i-1} بر طبق فرض استقراً بر حسب z قابل بیان هستند در نتیجه α_i نیز بر حسب z قابل بیان خواهد بود.

در عبارت (*) به جای هر $x^i + \frac{1}{x^i}$، یک چندجمله‌ای بر حسب z و از درجه i قرار می‌دهیم. از آنجا که $x^n + \frac{1}{x^n}$ به صورت یک چندجمله‌ای بر حسب z و از درجه n است، عبارت داخل کروشه یک چندجمله‌ای بر حسب z و از درجه n می‌شود و در نتیجه $f(x)$ به فرم $x^n g(z)$ در می آید.

چندجمله‌ای همگن

یک چندجمله‌ای دو متغیره $f(x,y)$ همگن نام دارد اگر به ازای هر x, y داشته باشیم $f(x,y) = f(y,x)$. به عنوان نمونه می‌توان چندجمله‌ای همگن $x^2y + y^2x$ را بیان نمود.

چندجمله‌ای های دومتغیره همگن مقدماتی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sigma_1 = x + y \quad , \quad \sigma_2 = x \times y$$

قضیه ۱۸: به ازای هر n صحیح نامنفی، چندجمله‌ای دو متغیره $x^n + y^n$ بر حسب σ_1, σ_2 قابل نوشتن است.

اثبات: به ازای $n = 1, 2$ داریم که:

$$x^1 + y^1 = \sigma_1 \quad , \quad x^2 + y^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

MATH75.IR

حال حکم قضیه را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم حکم برای $n = ۱, ۲, \ldots, k$ درست باشد و درستی حکم را برای $n = k + ۱$ ثابت می‌کنیم.

فرض می‌کنیم که $S_i = x^i + y^i \quad i = ۱, ۲, \ldots$، درنتیجه

$$S_n = x^n + y^n = (x + y)(x^{n-۱} + y^{n-۱}) - xy(x^{n-۲} + y^{n-۲}) = \sigma_۱ S_{n-۱} + \sigma_۲ S_{n-۲} \qquad (*)$$

بر طبق فرض استقراً $S_{n-۱}, S_{n-۲}$ را می‌توان بر حسب $\sigma_۱, \sigma_۲$ نوشت، با این جایگذاری در رابطه (*) نتیجه می شود که S_n را هم می توان بر حسب $\sigma_۱, \sigma_۲$ نوشت.

نتیجه: هر چندجمله‌ای دو متغیره همگن برحسب $\sigma_۱, \sigma_۲$ قابل نوشتن است.

اثبات: چندجمله‌ای همگن $f(x, y)$ را درنظر بگیرید. جمله‌هایی از $f(x, y)$ که به صورت $ax^k y^k$ هستند را به فرم $a\sigma_۲^k$ می‌نویسیم. اگر $f(x, y)$ شامل جمله‌ای به صورت $bx^i y^k$ باشد باید شامل $bx^k y^i$ نیز باشد، از این رو داریم:

$$bx^i y^k + bx^k y^i = bx^i y^i (x^{k-i} + y^{k-i}) = b\sigma_۲^i S_{k-i} \qquad (*)$$

بر طبق قضیه بالا S_{k-i} برحسب $\sigma_۱, \sigma_۲$ قابل نوشتن است، از این رو عبارت (*) نیز برحسب $\sigma_۱, \sigma_۲$ قابل نوشتن است. بدین ترتیب حکم ثابت شد.

نکته: فرض کنید $\sigma_۲ = xy$، $\sigma_۱ = x + y$، حال با داشتن $\sigma_۲, \sigma_۱$ به طور یکتا می‌توان زوج (x, y) را تعیین کرد چرا که x و y جواب‌های معادله زیر هستند:

$$Z^۲ - \sigma_۱ Z + \sigma_۲ = ۰$$

این معادله دارای دقیقاً دو جواب x و y است.

مثال ۱: دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x + y = ۳ \\ x^۵ + y^۵ = ۳۳ \end{cases}$$

حل: یک روش حل این دستگاه بدین صورت است که در معادله دوم به جای y عدد $x - ۳$ را قرار دهیم اما معادله درجه چهارمی به دست می‌آید که حل آن مشکل است. در اینجا از $\sigma_۱, \sigma_۲$ استفاده می‌کنیم.

داریم که $\sigma_۱ = ۳$ و

$$x^۵ + y^۵ = \sigma_۱^۵ - ۵\sigma_۳\sigma_۲ + ۵\sigma_۱\sigma_۲^۲ = ۳۳ \quad \Longrightarrow \quad \sigma_۲^۲ - ۹\sigma_۲ + ۱۴ = ۰$$

MATH75.IR

از این رو $\sigma_۲$ می‌تواند برابر ۲ یا ۷ باشد. حال باید دو دستگاه زیر را حل کنیم:

$$(i): \begin{cases} x+y=۳ \\ xy=۲ \end{cases} \qquad (ii): \begin{cases} x+y=۳ \\ xy=۷ \end{cases}$$

بر طبق نکته‌ای که در بالا گفته شد چهار جواب زیر به دست می‌آید:

$$(۱,۲),(۲,۱),\left(\frac{۳}{۲}+\frac{\sqrt{۱۹}}{۲}i\,,\frac{۳}{۲}-\frac{\sqrt{۱۹}}{۲}i\right),\left(\frac{۳}{۲}-\frac{\sqrt{۱۹}}{۲}i\,,\frac{۳}{۲}+\frac{\sqrt{۱۹}}{۲}i\right)$$

مثال ۲: چه رابطه‌ای بین a و b و c وجود دارد اگر دستگاه زیر لااقل یک جواب داشته باشد؟

$$\begin{cases} x+y=a \\ x^۲+y^۲=b \\ x^۳+y^۳=c \end{cases}$$

حل: فرض کنید x,y یک جواب دستگاه بالا باشد و همچنین $\sigma_۱=x+y, \sigma_۲=xy$، در نتیجه سه معادله بالا به صورت زیر تغییر می‌کنند:

$$\begin{cases} a=\sigma_۱ \\ \sigma_۱^۲-۲\sigma_۲=b \\ \sigma_۱^۳-۳\sigma_۱\sigma_۲=c \end{cases}$$

در نتیجه $a^۳-۳ab+۲c=۰$.

چندجمله‌ای‌های سه متغیره همگن مقدماتی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sigma_۱=x+y+z \quad , \quad \sigma_۲=xy+yz+zx \quad , \quad \sigma_۳=xyz$$

s_i ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$s_i=x^i+y^i+z^i \qquad i=۰,۱,۲,\ldots$$

MATH75.IR

می‌توان نشان داد که روابط زیر برقرارند:

$$s_1 = x + y + z = \sigma_1$$

$$s_2 = x^2 + y^2 + z^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

$$s_3 = x^3 + y^3 + z^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma - 3$$

$$s_4 = x^4 + y^4 + z^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3$$

$$x^2y + xy^2 + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$$

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3$$

بر طبق قضیه ویت x, y, z ریشه‌های معادله $x^3 - \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x - \sigma_3$ هستند.

مثال ۳: برای دو عدد مفروض a, b با شرط $b \geq a$، دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3 \end{cases}$$

حل: فرض کنید که

$$x + y + z = \sigma_1 \quad , \quad xy + yz + zx = \sigma_2 \quad , \quad xyz = \sigma_3$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \sigma_1 = a \\ \sigma_2 = \frac{1}{2}(a^2 - b^2) \\ \sigma_3 = \frac{1}{2}a(a^2 - b^2) \end{cases}$$

از طرفی x, y, z ریشه‌های معادله $u^3 - \sigma_1 u^2 + \sigma_2 u - \sigma_3 = 0$ هستند یا معادلاً:

$$u^3 - au^2 + \left[\frac{1}{2}(a^2 - b^2)\right]u - \left[\frac{1}{2}a(a^2 - b^2)\right] = 0$$

بنابراین:

$$(u - a)\left[u^2 - \left[\frac{1}{2}(b^2 - a^2)\right]\right] = 0$$

MATH75.IR

در نتیجه سه جواب زیر به‌دست می‌آید:

$$u_1 = a, u_2 = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}, u_3 = -\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}$$

از این رو دستگاه معادلات، شش جواب (u_1, u_2, u_3) و جایگشت های آنها را دارد.

مثال ۴: همهٔ جواب‌های حقیقی دستگاه زیر را بیابید.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 + xyz = x^4 + y^4 + z^4 = 1 \end{cases}$$

حل: فرض کنید که

$$x + y + z = \sigma_1 \quad , \quad xy + yz + zx = \sigma_2 \quad , \quad xyz = \sigma_3$$

قبلاً s_4, s_3 را به دست آورده‌ایم:

$$s_3 = x^3 + y^3 + z^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$$

$$s_4 = x^4 + y^4 + z^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_2$$

از طرفی بر طبق فرض مسأله $\sigma_1 = 1$ است. با این جایگذاری در روابط بالا و با استفاده از فرضیات مسأله به دست می‌آوریم که $2\sigma_2^2 - \sigma_2 + 1 = 0$. دلتای این معادله درجه دوم منفی است، در نتیجه معادله جواب حقیقی ندارد.

چندجمله‌ای n متغیره $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ را همگن گوییم اگر برای هر جایگشت $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$ از مجموعه $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ داشته باشیم: $f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$.

قضیه نیوتن ۱۹: چندجمله‌ای n متغیره همگن $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ بر حسب $\sigma_n, \ldots, \sigma_2, \sigma_1$ قابل نوشتن است که در آن σ_i ها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sigma_j = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_j \le n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_j} \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

MATH75.IR

نامساوی‌ها

می‌دانیم برای هر عدد حقیقی x، عدد x^2 بزرگتر و یا مساوی با صفر است. حال دو عدد حقیقی را a, b در نظر بگیرید، در این صورت اگر x را برابر $a-b$ تعریف کنیم عدد $(a-b)^2$ هم خاصیت x^2 را پیدا می‌کند یعنی $(a-b)^2 \geq 0$ یا معادلاً $a^2+b^2 \geq 2ab$.

$$\forall a, b \in R: \quad a^2+b^2 \geq 2ab \qquad (*)$$

فرض کنید که a, b دو عدد حقیقی نامنفی باشند به عبارت دیگر a به صورت $\sqrt{x}$ و b به صورت $\sqrt{y}$ باشد. با جایگذاری این دو عدد در رابطهٔ $(*)$ به دست می‌آوریم که:

$$\forall x, y \in R^+: \quad x+y \geq 2\sqrt{xy} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

مثال ۱: فرض کنید a, b, c اعداد حقیقی باشند، ثابت کنید که:

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

حل: بر طبق رابطهٔ $(*)$ برای دو عدد a, b داریم که:

$$a^2+b^2 \geq 2ab$$

به همین ترتیب به دست می‌آید که:

$$b^2+c^2 \geq 2bc \quad , \quad c^2+a^2 \geq 2ac$$

با جمع این سه رابطه می‌توان به نامساوی $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$ دست یافت.

در حل مسائل نامساوی همواره مسأله به طور مستقیم از یک قضیه و یا یک رابطه به دست نمی‌آید و برای حل عده‌ای از آنها لازم است که تغییر متغیری داده شود. یک نمونه از چنین مسأله‌هایی مثال زیر است.

مثال ۲: فرض کنید a, b, c طول اضلاع یک مثلث باشند، ثابت کنید که:

$$abc \geq (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$$

MATH75.IR

حل: برای حل این مسأله کافی است که ۳ متغیر جدید z, y, x به صورت زیر تعریف شوند:

$$x = a + b - c \quad , \quad y = c + a - b \quad , \quad z = b + c - a$$

از روی این سه متغیر جدید، c, b, a به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$a = \frac{x+y}{۲} \quad , \quad b = \frac{x+z}{۲} \quad , \quad c = \frac{y+z}{۲}$$

c, b, a طول اضلاع یک مثلث هستند در نتیجه از اصل حمار می‌توان نتیجه گرفت که z, y, x سه عدد حقیقی مثبت هستند. حال مسأله بدین صورت تغییرمی‌یابد که z, y, x سه عدد حقیقی مثبت‌اند و باید ثابت کنیم که:

$$(x+y)(y+z)(z+x) \overset{?}{\geq} ۸xyz$$

در بالا به دست آوردیم که اگر α و β در عدد حقیقی مثبت باشند داریم که $\alpha + \beta \geq ۲\sqrt{\alpha\beta}$، بنابراین:

$$x + y \geq ۲\sqrt{xy} \quad , \quad y + z \geq ۲\sqrt{yz} \quad , \quad z + x \geq ۲\sqrt{zx}$$

با ضرب این سه رابطه در یکدیگر و با توجه به اینکه $\sqrt{xy} \times \sqrt{yz} \times \sqrt{zx} = xyz$، نامساوی $(x+y)(y+z)(z+x) \geq ۸xyz$ حاصل می‌شود.

مثال ۳: اگر $a_i > ۰$ به ازای $i = ۱, ۲, \ldots, n$ و $a_۱ a_۲ \ldots a_n = ۱$، ثابت کنید که:

$$(۱ + a_۱)(۱ + a_۲) \ldots (۱ + a_n) \geq ۲^n$$

اثبات: با تقسیم کردن طرفین رابطهٔ بالا بر ۲^n به دست می‌آید که:

$$\frac{۱ + a_۱}{۲} \times \frac{۱ + a_۲}{۲} \times \cdots \frac{۱ + a_n}{۲} \geq \sqrt{۱ \times a_۱} \times \sqrt{۱ \times a_۲} \times \ldots \sqrt{۱ \times a_n} = ۱$$

رابطهٔ (*) را می‌توان تعمیم داد ولی قبل از آن لازم است پیش‌قضیه‌ای ذکر شود.

لم: اگر حاصلضرب n عدد حقیقی مثبت $x_n, \ldots, x_۲, x_۱$ برابر ۱ گردد آنگاه حاصل جمع این اعداد از n نمی‌تواند کمتر باشد یعنی:

$$x_۱ x_۲ \ldots x_n = ۱ \quad \Longrightarrow \quad x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n \geq n \qquad (*)$$

برای اثبات روش استقرای ریاضی را پیش می‌گیریم یعنی ابتدا برای حالت $n = ۲$ مسأله را ثابت می‌کنیم و بعد فرض می‌کنیم حکم برای k متغیر $x_۱, x_۲, \ldots, x_k$ درست باشد و برای $k + ۱$ متغیر نیز حکم را ثابت می‌کنیم.

حالت $n = ۲$ بدین صورت است که $x_۱ x_۲ = ۱$ و حکم می‌گوید که $x_۱ + x_۲ \geq ۲$. برای اثبات این رابطه کافی است توجه کنید که $x_۱ + x_۲ \geq ۲\sqrt{x_۱ x_۲}$. حال با اعمال رابطهٔ $x_۱ x_۲ = ۱$ حکم نتیجه می‌شود.

MATH75.IR

با استفاده از روش استقراء فرض می‌کنیم که حکم برای $n = k$ متغیر درست باشد و ثابت می‌کنیم که برای $n = k + ۱$ متغیر نیز درست است، یعنی با فرض $x_۱x_۲ \dots x_{k+۱} = ۱$، عبارت $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_{k+۱} \geq k + ۱$ را ثابت می‌کنیم.

می‌دانیم که اگر حاصلضرب چند عدد برابر ۱ باشد حتماً برخی از آنها از ۱ بزرگتر و برخی نیز از ۱ کوچکترند مگر اینکه همگی برابر واحد باشند.

برای نمونه می‌توان فرض کرد $x_{k+۱} \geq ۱, x_۱ \leq ۱$. با در نظر گرفتن $y_۱ = x_۱x_{k+۱}$ به دست می‌آوریم که:

$$y_۱x_۲x_۳ \dots x_k = ۱$$

از آنجا که مجموع k عدد برابر واحد شده است و این k عدد همگی مثبت هستند بر طبق فرض استقراء مجموع آنها از k کمتر نیست:

$$y_۱ + x_۱ + x_۲ + x_۳ + \cdots + x_k \geq k$$

و یا معادلاً

$$x_۱ + \cdots + x_k + x_{k+۱} \geq k + x_۱ + x_{k+۱} - y_۱$$

یا

$$x_۱ + \cdots + x_k + x_{k+۱} \geq k + x_۱ + x_{k+۱} - x_۱x_{k+۱}$$

بنابراین

$$x_۱ + \cdots + x_k + x_{k+۱} \geq k + ۱ + (۱ - x_۱)(x_{k+۱} - ۱)$$

از طرفی داریم $x_{k+۱} \geq ۱, x_۱ \leq ۱$، در نتیجه $(۱ - x_۱)(x_{k+۱} - ۱) \leq ۰$. از این‌رو به‌دست می‌آید که

$$x_۱ + \cdots + x_k + x_{k+۱} \geq k + ۱ + (x_{k+۱} - ۱)(۱ - x_۱) \geq k + ۱$$

بدین ترتیب حکم ثابت می‌شود.

به راحتی می‌توان ثابت نمود که تساوی رابطهٔ (*) در لم بالا وقتی حاصل می‌گردد که:

$$x_۱ = x_۲ = \cdots = x_n = ۱$$

مثال ۴: اگر $a_۱, a_۲, \dots, a_n$ اعداد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید که:

$$\frac{a_۱}{a_۲} + \frac{a_۲}{a_۳} + \cdots + \frac{a_{n-۱}}{a_n} + \frac{a_n}{a_۱} \geq n$$

حل: متغیرهای $y_۱, y_۲, \dots, y_n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$y_۱ = \frac{a_۱}{a_۲}\ ,\ y_۲ = \frac{a_۲}{a_۳}\ ,\ \dots\ ,\ y_{n-۱} = \frac{a_{n-۱}}{a_n}\ ,\ y_n = \frac{a_n}{a_۱}$$

MATH75.IR

در نتیجه

$$y_1 y_2 \cdots y_n = \frac{a_1}{a_2} \times \frac{a_2}{a_3} \times \ldots \times \frac{a_{n-1}}{a_n} \times \frac{a_n}{a_1} = 1$$

حال لم بالا را برای اعداد $y_1, y_2, \ldots, y_n$ به کار می‌بریم.

از آنجا که حاصلضرب y_i ها برابر ۱ است مجموع آنها ناکمتر از n می‌شود یعنی:

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n \geq n \quad \Longrightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1} \geq n$$

حالت خاص لم بالا بدین صورت است که برای هر x مثبت، رابطهٔ $x + \frac{1}{x} \geq 2$ برقرار است. این رابطهٔ به ظاهر ساده نامساوی مهمی است مثلاً اگر x را برابر $\sqrt{a^2+1}$ اختیار کنیم به دست می آید که:

$$\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{a^2+1} + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2$$

یک نتیجه مهم دیگر که از لم بالا به دست می‌آید به صورت زیر است:

$$\forall x, y \in R^+ : \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

مثال ۵: اگر $a, b, c > 0$، ثابت کنید که:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

این نامساوی را نامساوی نسبیت گویند.(انگلستان ۱۹۰۳)

حل: x و y و z را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x = a+b \quad , \quad y = b+c \quad , \quad z = c+a$$

در این صورت داریم که:

$$a = \frac{x+z-y}{2} \quad , \quad b = \frac{x+y-z}{2} \quad , \quad c = \frac{y+z-x}{2}$$

حال کافی است ثابت کنیم که:

$$\frac{x+z-y}{y} + \frac{x+y-z}{z} + \frac{y+z-x}{x} \overset{?}{\geq} 3 \qquad (1)$$

با استفاده از فرض $x, y, z > 0$ و همچنین نکتهٔ بالا به دست می آوریم:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \quad , \quad \frac{z}{y} + \frac{y}{z} \geq 2 \quad , \quad \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2$$

MATH75.IR

در نتیجه

$$\frac{x}{y}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}\geq ۶ \qquad (۲)$$

از طرفی داریم که:

$$\frac{x+z-y}{y}+\frac{x+y-z}{z}+\frac{y+z-x}{x}=\frac{x}{y}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}-۳ \qquad (۳)$$

با استفاده از روابط (۳) و (۲)، رابطهٔ (۱) ثابت می‌شود.

قضیه ۱: اگر $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ اعداد حقیقی مثبت باشند آنگاه

$$\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_n}{n}\geq \sqrt[n]{x_۱x_۲\ldots x_n}$$

حالت تساوی وقتی رخ می‌دهد که $x_۱=x_۲=\cdots=x_n$.

این نامساوی به نامساوی واسطهٔ حسابی – هندسی معروف است.

اثبات: برای اثبات به این طریق عمل می‌کنیم که n عدد حقیقی مثبت $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ را در نظر می‌گیریم و برای آن n عدد نامساوی را ثابت می‌کنیم.

متغیر y را بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$y=\sqrt[n]{x_۱x_۲\ldots x_n}$$

در نتیجه:

$$\frac{x_۱}{y}\cdot\frac{x_۲}{y}\cdot\ldots\cdot\frac{x_n}{y}=۱$$

با استفاده از لم بالا به دست می‌آوریم که:

$$\frac{x_۱}{y}+\frac{x_۲}{y}+\cdots+\frac{x_n}{y}\geq n$$

و یا

$$\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_n}{n}\geq y$$

و یا معادلاً

$$\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_n}{n}\geq \sqrt[n]{x_۱x_۲\ldots x_n}$$

حالت تساوی در این نامساوی هم‌ارز حالت تساوی در لم بالا است یعنی:

$$x_۱=x_۲=\cdots=x_n \quad \text{و یا} \quad \frac{x_۱}{y}=\frac{x_۲}{y}=\cdots=\frac{x_n}{y}$$

MATH75.IR

مثال ٦: به ازای هر n طبیعی نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$n! \leq \left(\frac{n+۱}{۲}\right)^n$$

حل: نامساوی واسطهٔ حسابی – هندسی را به صورت زیر به کار می‌بریم:

$$\sqrt[n]{۱ \times ۲ \times \ldots \times n} \leq \frac{۱ + ۲ + \cdots + n}{n} = \frac{n(n+۱)}{۲n} = \frac{n+۱}{۲}$$

در نتیجه به دست می‌آوریم که

$$\sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+۱}{۲}$$

و یا

$$n! \leq \left(\frac{n+۱}{۲}\right)^n$$

از روش حل بالا می‌توان نتیجه گرفت که اگر $n \leq ۲$ باشد سپس علامت تساوی رخ نمی‌دهد.

مثال ۷: برای سه عدد حقیقی نامنفی a, b, c ثابت کنید که:

$$a^۳ + b^۳ + c^۳ \geq ۳abc$$

حل: نامساوی واسطهٔ حسابی – هندسی را برای سه عدد $a^۳, b^۳, c^۳$ به کار می‌بریم:

$$a^۳ + b^۳ + c^۳ \geq ۳\sqrt[۳]{a^۳b^۳c^۳} = ۳abc$$

روش دیگر اثبات نامساوی مفروض، استفاده از اتحاد زیر است:

$$a^۳ + b^۳ + c^۳ - ۳abc = (a+b+c)(a^۲ + b^۲ + c^۲ - ab - bc - ca)$$

از طرفی در بالا ثابت کردیم که

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ \geq ab + bc + ca$$

و همچنین بر طبق فرضیات مسأله داریم که:

$$a + b + c \geq ۰$$

با در نظر گرفتن این دو رابطه به دست می‌آوریم که:

$$a^۳ + b^۳ + c^۳ \geq ۳abc \quad \text{و یا} \quad a^۳ + b^۳ + c^۳ - ۳abc \geq ۰$$

MATH75.IR

مثال ۸: اگر $a,b,c \geq 0$، نشان دهید که:

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc$$

حل: نامساوی حسابی – هندسی را یکبار برای اعداد a,b,c و بار دیگر برای اعداد ab,bc,ca به کار می‌بریم:

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

$$ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{(ab)(bc)(ca)}$$

ضرب طرفین این دو نامساوی در یکدیگر، نامساوی زیر را نتیجه می‌دهد:

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9\sqrt[3]{a^3b^3c^3} = 9abc$$

در نامساوی حسابی – هندسی اگر اعداد $\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\ldots,\frac{1}{a_n}$ را جایگزین کنیم به دست می آید که:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} \geq n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdots\frac{1}{a_n}}$$

و یا

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

در نامساوی حسابی – هندسی اگر اعداد $a_1^\alpha, a_2^\alpha, \ldots, a_n^\alpha$ با شرط $\alpha < 0$ را جایگزین کنیم به دست می آید که:

$$\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots+a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \qquad (1)$$

در نامساوی حسابی – هندسی اگر اعداد $a_1^\beta, a_2^\beta, \ldots, a_n^\beta$ با شرط $\beta > 0$ را جایگزین کنیم به دست می آید که:

$$\left(\frac{a_1^\beta+a_2^\beta+\cdots+a_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \qquad (2)$$

از دو رابطهٔ (۱) و (۲) حکم زیر نتیجه می‌شود:

قضیه ۲: اگر $\alpha<0, \beta>0$ و به ازای $i=1,2,\ldots,n$، $a_i \geq 0$ باشد، سپس:

$$\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots+a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \leq \left(\frac{a_1^\beta+a_2^\beta+\cdots+a_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

یک حالت خاص این رابطه، $\alpha=-1, \beta=1$ است که کاربرد بسزایی در حل مسائل دارد:

$$\left(\frac{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}{n}\right)^{-1} \leq \frac{a_1+a_2+a\ldots+a_n}{n}$$

MATH75.IR

و یا

$$n^۲ \leq \left(a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n\right)\left(\frac{۱}{a_۱} + \frac{۱}{a_۲} + \cdots + \frac{۱}{a_n}\right) \qquad (۳)$$

حالت خاص دیگر با قرار دادن $\beta = n$ در رابطهٔ (۲) به دست می‌آید:

$$a_۱^n + a_۲^n + \cdots + a_n^n \geq n a_۱ a_۲ a_۳ \ldots a_n$$

مثال ۹: با فرض $a, b, c > ۰$ ثابت کنید که:

$$\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} \geq \frac{۹}{a+b+c}$$

حل: برای اثبات کافی است که از رابطهٔ (۳) استفاده کنیم:

$$\left(\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c}\right)\left(a+b+c\right) \geq ۳^۲$$

مثال ۱۰: برای سه عدد حقیقی a, b, c ثابت کنید که:

$$a^۲b^۲ + b^۲c^۲ + c^۲a^۲ \geq abc(a+b+c)$$

حل: در بالا ثابت شد که همواره داریم:

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ \geq xy + yz + zx$$

حال x, y, z را به ترتیب برابر ca, bc, ab بگیرید:

$$\begin{aligned}(ab)^۲ + (bc)^۲ + (ca)^۲ &\geq (ab)(bc) + (bc)(ca) + (ca)(ab)\\ &= a^۲bc + ab^۲c + abc^۲\end{aligned}$$

در نتیجه

$$a^۲b^۳ + b^۲c^۲ + c^۲a^۲ \geq abc(a+b+c)$$

مثال ۱۱: همهٔ جوابهای مثبت دستگاه زیر را بیابید.

$$x_۱ + \frac{۱}{x_۲} = ۴, x_۲ + \frac{۱}{x_۳} = ۱, \ldots, x_{۹۹} + \frac{۱}{x_{۱۰۰}} = ۴, x_{۱۰۰} + \frac{۱}{x_۱} = ۱$$

حل:

$$\begin{aligned}۴۵۰ &= \left(x_۱ + \frac{۱}{x_۲}\right)\left(x_۲ + \frac{۱}{x_۳}\right)\ldots\left(x_{۹۹} + \frac{۱}{x_{۱۰۰}}\right)\left(x_{۱۰۰} + \frac{۱}{x_۱}\right)\\ &\geq ۲\sqrt{\frac{x_۱}{x_۲}} \cdot ۲\sqrt{\frac{x_۲}{x_۳}} \cdot \ldots \cdot ۲\sqrt{\frac{x_{۹۹}}{x_{۱۰۰}}} \cdot ۲\sqrt{\frac{x_{۱۰۰}}{x_۱}} = ۴۵۰\end{aligned}$$

MATH75.IR

با توجه به تساوی بالا باید تمامی نامساوی‌ها به تساوی تبدیل شود و از آنجا که تساوی نامساوی حسابی – هندسی وقتی رخ می‌دهد که تمامی اعداد با هم برابر باشند باید داشته باشیم

$$x_1 = \frac{1}{x_2}, x_2 = \frac{1}{x_3}, \ldots, x_{99} = \frac{1}{x_{100}}, x_{100} = \frac{1}{x_1}$$

از این‌رو x_i ها به طور یکتا به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$x_2 = x_4 = x_6 = \cdots = \frac{1}{2}\ ,\ x_1 = x_3 = x_5 = \cdots = 2$$

چندجمله‌ای $p(x) = ax^2 + bx + c$ که در آن اعداد a, b, c اعداد حقیقی هستند در اعداد مختلط دارای دو ریشهٔ $x_{1,2} = -\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ است.

$$a\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = ax^2 + bx + c$$

برای اینکه $p(x)$ دارای ریشه حقیقی باشد لزوماً باید $\sqrt{b^2 - 4ac}$ وجود داشته باشد و یا $b^2 - 4ac \geq 0$. اگر $b^2 - 4ac \geq 0$ باشد، دو ریشهٔ $p(x)$ حقیقی می‌شود و اگر $b^2 - 4ac < 0$، سپس $p(x)$ هیچ ریشهٔ حقیقی ندارد. دقت شود که اگر $p(x)$ دارای ریشهٔ حقیقی نباشد باید همواره مثبت و یا همواره منفی باشد.

اگر $b^2 - 4ac$ منفی باشد سپس دو حالت زیر به وجود می‌آید:

(i) اگر $a < 0$، سپس به ازای هر $x \in \mathbf{R}$، $p(x)$ کمتر از صفر می‌شود.

(ii) اگر $a > 0$، سپس به ازای هر $x \in \mathbf{R}$، $p(x)$ بزرگتر از صفر می‌شود.

برای مثال می‌توان چندجمله‌ای $x^2 + x + 1$ را نام برد. دلتای این چندجمله‌ای ($\Delta = b^2 - 4ac$) برابر $1^2 - 4 = -3$ است که عددی منفی است. از آنجا که ضریب x^2 مثبت است می‌توان نتیجه گرفت که به ازای هر x حقیقی، $x^2 + x + 1$ بزرگتر از صفر است. با این مقدمات نامساوی زیر را بیان و ثابت می‌کنیم:

قضیه ۳: برای اعداد حقیقی $a_1, a_2, \ldots, a_n$ و $b_1, b_2, \ldots, b_n$ رابطهٔ زیر برقرار است:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right)$$

تساوی وقتی رخ می‌دهد که

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$$

این نامساوی به نامساوی کوشی – شوارتز معروف است.

MATH75.IR

اثبات: $2n$ عدد $a_1, a_2, \ldots, a_n$ و $b_1, b_2, \ldots, b_n$ را به صورت دلخواه در نظر گرفته و حکم را برای این $2n$ عدد ثابت می‌کنیم. می‌دانیم مجموع چندین عدد که به صورت مربع کامل هستند عددی نامنفی است. حال چندجمله‌ای $p(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2 \geq 0$$

بنابراین

$$p(x) = x^2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) + x \left(2 \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right) \geq 0$$

در مورد $p(x)$ دو حالت زیر پیش می آید:

(i) x ای حقیقی وجود ندارد به طوری که $p(x) = 0$. در این حالت با توجه به اینکه $p(x)$ همواره ناکمتر از صفر است باید به ازای هر x حقیقی $p(x)$ مثبت باشد و این لزوماً معادل این است که دلتای چندجمله‌ای باید منفی باشد:

$$\Delta = 4 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right) < 0$$

در نتیجه $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 < \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right)$

(ii) x_i ای حقیقی وجود دارد به طوری که $p(x_i) = 0$. از طرفی می‌دانیم $p(x_i)$ مجموع چندین مربع کامل است، پس باید تک تک مربعات برابر صفر باشند:

$$p(x_i) = (a_1 x_i + b_1)^2 + (a_2 x_i + b_2)^2 + \cdots + (a_x x_i + b_n)^2 = 0$$

در نتیجه

$$a_k x_i + b_k = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

و یا

$$x_i = -\frac{b_1}{a_1} = -\frac{b_2}{a_2} = \cdots = -\frac{b_n}{a_n}$$

در این حالت بدست می آید که $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$. همچنین رابطهٔ زیر حاصل می‌گردد:

$$(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2 = \left(a_1^2 + \cdots + a_n^2 \right) \left(b_1^2 + \cdots + b_n^2 \right)$$

با در نظر گرفتن دو حالت بالا حکم ثابت می‌شود.

معمولاً راحت‌تر است که نامساوی کوشی را به صورت زیر به کار بریم:

MATH75.IR

اگر $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n > 0$ سپس

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) \geq (\sqrt{x_1 y_1} + \sqrt{x_2 y_2} + \cdots + \sqrt{x_n y_n})^2$$

و تساوی وقتی برقرار است که: $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_n}{y_n}$

دستهٔ زیادی از مسائل که با نامساوی حسابی– هندسی حل می‌شوند با نامساوی کوشی ساده‌تر ثابت می‌شوند. بدین منظور دو مثال را که قبلاً حل شده‌اند را دوباره و با استفاده از نامساوی کوشی حل می‌کنیم:

(i) اگر $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$، سپس $\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$.

حل : از صورت اخیر نامساوی کوشی استفاده می‌کنیم:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq \left(\sqrt{a_1 \cdot \frac{1}{a_1}} + \sqrt{a_2 \cdot \frac{1}{a_2}} + \cdots + \sqrt{a_n \cdot \frac{1}{a_n}}\right)^2$$

$$= \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)^2}_{n \text{ مرتبه}} = n^2$$

(ii) اگر $a, b, c > 0$، سپس $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

حل: می‌دانیم که

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

و یا

$$(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) \qquad (1)$$

از طرفی داریم که

$$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{b+a}\right)\Big(a(b+c) + b(c+a) + c(b+a)\Big)$$
$$\geq \left(\sqrt{\frac{a}{b+c} \cdot a(b+c)} + \sqrt{\frac{b}{c+a} \cdot b(c+a)} + \sqrt{\frac{c}{a+b} \cdot c(a+b)}\right)^2$$

و یا معادلاً

$$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right)\Big(2(ab + bc + ca)\Big) \geq (a + b + c)^2 \qquad (2)$$

با ضرب طرفین دو نامساوی (۱) و (۲) در یکدیگر حکم مسأله نتیجه می‌شود.

یک حالت خاص نامساوی کوشی بدین شرح است:

$$(1 \cdot a_1 + \cdots + 1 \cdot a_n)^2 \leq (1^2 + \cdots + 1^2)(a_1^2 + \cdots + a_n^2)$$

MATH75.IR

و یا $$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \le n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \qquad (*)$$

مثال ۱۲: برای $x, y, z > 0$ نشان دهید که:

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \ge \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$$

حل: حالت خاص رابطهٔ (*) به صورت زیر می‌باشد:

$$3\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2}\right) \ge \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)^2 \qquad (1)$$

همچنین از آنجا که $\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y}{z}\right)\left(\frac{z}{x}\right) = 1$ به دست می آید که:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \ge 3 \qquad (2)$$

با ضرب طرفین عبارات (۱) و (۲) در یکدیگر حکم مسأله نتیجه می‌شود.

مثال ۱۳: اگر $x, y, z \in \mathbf{R}^+$، ثابت کنید که:

$$\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} \ge \frac{1}{2}(x+y+z)$$

حل: از صورت دوم نامساوی کوشی استفاده می‌کنیم:

$$\left(\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x}\right)\Big((x+y) + (y+z) + (z+x)\Big) \ge$$

$$\left(\sqrt{\frac{x^2}{x+y}\cdot(x+y)} + \sqrt{\frac{y^2}{y+z}\cdot(y+z)} + \sqrt{\frac{z^2}{z+x}\cdot(z+x)}\right)^2 = (x+y+z)^2$$

و یا $$\left(\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x}\right)\Big(2(x+y+z)\Big) \ge (x+y+z)^2$$

با تقسیم طرفین رابطه بالا بر $(x+y+z)$ حکم مسأله نتیجه می‌شود.

مثال ۱۴: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ و $b_1, b_2, \ldots, b_n$ اعداد حقیقی مثبت هستند و نیز می‌دانیم $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i = 1$.

ثابت کنید که $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} \ge 1$.

حل:

$$\left(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n}\right)\Big(b_1 + b_2 + \cdots + b_n\Big) \ge \left(\sqrt{\frac{a_1^2}{b_1}\cdot b_1} + \sqrt{\frac{a_2^2}{b_2}\cdot b_2} + \ldots + \sqrt{\frac{a_n^2}{b_n}\cdot b_n}\right)^2$$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2$$

حال دو رابطهٔ $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ و $\sum_{i=1}^{n} b_i = 1$ را در رابطهٔ بالا جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \ge 1$$

MATH75.IR

مثال ۱۵: اگر $x,y,z > 0$ و $xyz = 1$، نشان دهید که:

$$\frac{xy}{x+1} + \frac{yz}{y+1} + \frac{zx}{z+1} \geq \frac{3}{2}$$

حل: برای اثبات این رابطه ابتدا لمی را مطرح می‌کنیم:

لم: اگر $xyz = 1$، سپس

$$\frac{x+1}{xy+x+1} + \frac{y+1}{yz+y+1} + \frac{z+1}{zx+z+1} = 2 \qquad (*)$$

اثبات لم:

$$\frac{y+1}{yz+y+1} = \frac{x(y+1)}{x(yz+y+1)} = \frac{xy+x}{1+xy+x}$$

$$\frac{z+1}{zx+z+1} = \frac{xy(z+1)}{xy(zx+z+1)} = \frac{1+xy}{1+xy+x}$$

در نتیجه

$$\frac{x+1}{xy+x+1} + \frac{y+1}{yz+y+1} + \frac{z+1}{zx+z+1} = \frac{x+1}{1+x+xy} + \frac{x+xy}{1+x+xy} + \frac{1+xy}{1+x+xy} = 2$$

حال به اثبات نامساوی برمی‌گردیم:

$$\left(\frac{xy+x+1}{x+1} + \frac{yz+y+1}{y+1} + \frac{zx+z+1}{z+1}\right)\left(\frac{x+1}{xy+x+1} + \frac{y+1}{yz+y+1} + \frac{z+1}{zx+z+1}\right) \geq 3^2$$

با جایگزینی رابطهٔ $(*)$ در رابطهٔ بالا به دست می‌آوریم که

$$\frac{xy+x+1}{x+1} + \frac{yz+y+1}{y+1} + \frac{zx+z+1}{z+1} \geq \frac{9}{2}$$

و یا

$$\frac{xy}{x+1} + \frac{yz}{y+1} + \frac{zx}{z+1} + \frac{x+1}{x+1} + \frac{y+1}{y+1} + \frac{z+1}{z+1} \geq \frac{9}{2}$$

در نتیجه

$$\frac{xy}{x+1} + \frac{yz}{y+1} + \frac{zx}{z+1} \geq \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$

مثال ۱۶: فرض کنید $x_i > 0$ به‌ازای $i = 1,2,\ldots,n$ و $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. نشان دهید که:

$$\frac{S}{S-x_1} + \frac{S}{S-x_2} + \cdots + \frac{S}{S-x_n} \geq \frac{n^2}{n-1}$$

حل:

$$\left(\frac{S}{S-x_1} + \frac{S}{S-x_2} + \cdots + \frac{S}{S-x_n}\right)\Big(S(S-x_1) + S(x-x_2) + \cdots + S(x-x_n)\Big)$$
$$\geq \left(\sqrt{\frac{S}{S-x_1}\cdot S(S-x_1)} + \sqrt{\frac{S}{S-x_2}\cdot S(S-x_2)} + \cdots \sqrt{\frac{S}{S-x_n}\cdot S(S-x_n)}\right)^2$$
$$= (S+S+\cdots+S)^2 = n^2S^2 \qquad (1)$$

MATH75.IR

از طرفی داریم که

$$S(S-x_1)+S(S-x_2)+\cdots+S(S-x_n)=nS^2-S(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$
$$=nS^2-S\times S=(n-1)S^2 \qquad (2)$$

با جایگذاری رابطهٔ (۲) در (۱) به دست می‌آید که:

$$\left(\frac{S}{S-x_1}+\frac{S}{S-x_2}+\cdots+\frac{S}{S-x_n}\right)\times(n-1)S^2\geq n^2S^2$$

که معادل حکم مسأله است.

مثال ۱۷: فرض کنید دنبالهٔ $\{a_n\}_{k=1}^n$ یک جایگشت از $(1,2,\ldots,n)$ باشد. نشان دهید که:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \qquad (IMO\ \ 1978)$$

حل:

$$\left(\frac{a_1}{1^2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}\right)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geq$$
$$\left(\sqrt{\frac{a_1}{1^2}\cdot\frac{1}{a_1}}+\sqrt{\frac{a_2}{2^2}\cdot\frac{1}{a_2}}+\cdots+\sqrt{\frac{a_n}{n^2}\cdot\frac{1}{a_n}}\right)^2=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^2 \qquad (1)$$

از آنجا که $a_1,a_2,\ldots,a_n$ یک ترتیب از $1,2,\ldots,n$ هستند داریم که:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \qquad (2)$$

از دو رابطهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که:

$$\frac{a_1}{1^2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}\geq\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

قضیه ۴: دو دنبالهٔ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ و $b_1,b_2,\ldots,b_n$ مفروض‌اند. مجموعهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$M=\{a_1b_{i_1}+a_2b_{i_2}+\cdots+a_nb_{i_n}|(i_1,i_2,\ldots,i_n)=\{1,2,\ldots,n\}\text{ یک جایگشت از }\}$$

مجموع $S=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$ ماکزیمم عضو مجموعهٔ M است اگر دو دنباله $\{a_i\}_{i=1}^n,\{b_i\}_{i=1}^n$ به یک طریق مرتب شده باشند (هر دو صعودی یا هر دو نزولی باشند). همچنین S مینیمم عضو مجموعهٔ M است اگر یکی از دنباله‌ها صعودی و دیگری نزولی باشد.

اثبات: به ازای دو r,s دلخواه فرض کنید که $a_r>a_s$. دنبالهٔ دلخواه $c_1,c_2,\ldots,c_n$ را در نظر بگیرید. تعریف می‌کنیم:

$$S_1=a_1c_1+\cdots+a_rc_r+\cdots+a_sc_s+\cdots+a_nc_n$$
$$S_2=a_1c_1+\cdots+a_rc_s+\cdots+a_sc_r+\cdots+a_nc_n$$

MATH75.IR

دقت شود که $S_۲$ از تعویض جاهای c_s, c_r با یکدیگر در $S_۱$ به دست آمده است.

داریم که:

$$S_۲ - S_۱ = a_r c_s + a_s c_r - a_r c_r - a_s c_s = (a_r - a_s)(c_s - c_r)$$

از رابطهٔ بالا دو رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود:

(i) اگر $c_r < c_s$، سپس $S_۲ > S_۱$.

(ii) اگر $c_r > c_s$، سپس $S_۲ < S_۱$.

حال فرض کنید دو دنبالهٔ $\{a_i\}_{i=۱}^{n}, \{b_i\}_{i=۱}^{n}$ به یک طریق مرتب شده‌اند. می‌خواهیم ثابت کنیم که S ماکزیمم عضو مجموعهٔ M است.فرض کنید $S' = a_۱ b_{i_۱} + a_۲ b_{i_۲} + \cdots + a_n b_{i_n}$، ماکزیمم عضو M باشد. با شروع از عدد ۱، اولین jای را در نظر بگیرید که $i_j \neq j$ یعنی :

$$s' = a_۱ b_۱ + \cdots + a_{j-۱} b_{j-۱} + a_j b_{i_j} + \cdots + a_k b_{i_k} + \cdots + a_n b_{i_n}$$

عددی مثل k را درنظر بگیرید بطوریکه $i_k = j$. حال اگر در S' جای b_{i_j}, b_j را عوض کنیم، مجموع جدیدی به دست می‌آید که بر طبق گفته‌های بالا از S' بزرگتر است. یعنی S' نمی‌تواند ماکزیمم باشد که تناقض است. درنتیجه j ای وجود ندارد که $i_j \neq j$، یعنی:

$$S' = a_۱ b_۱ + a_۲ b_۲ + \cdots + a_n b_n$$

واضح است که $S' = S$. اثبات مینیمم بودن S نیز به همین ترتیب است.

صورت معادل این قضیه، نامساوی زیر است:

قضیه ۵: فرض کنید $a_۱ \geq a_۲ \geq \ldots \geq a_n$, $b_۱ \geq b_۲ \geq \ldots \geq b_n$ و π جایگشتی از مجموعه $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشد، سپس:

$$\sum_{i=۱}^{n} a_i b_{n-i+۱} \leq \sum_{i=۱}^{n} a_i b_{\pi(i)} \leq \sum_{i=۱}^{n} a_i b_i$$

این نامساوی به نامساوی هاردی– پولیا– لتیلوود معروف است.

مثال ۱۸: اگر $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ ، نشان دهید که: $a^۳ + b^۳ + c^۳ \geq a^۲ b + b^۲ c + c^۲ a$

حل: می‌دانیم اگر x, y دو عدد حقیقی مثبت باشند، در آن صورت $x \leq y$ اگر و فقط اگر $x^۲ \leq y^۲$، درنتیجه ترتیب صعودی بودن دو مجموعهٔ $\{a, b, c\}, \{a^۲, b^۲, c^۲\}$ یکی است (مثلاً اگر $b \leq a \leq c$ سپس $b^۲ \leq a^۲ \leq c^۲$). بنابراین با استفاده از قضیه بالا داریم که:

$$a^۲ \cdot a + b^۲ \cdot b + c^۲ \cdot c \geq a^۲ \cdot b + b^۲ \cdot c + c^۲ \cdot a \implies a^۳ + b^۳ + c^۳ \geq a^۲ b + b^۲ c + c^۲ a$$

MATH75.IR

یا مشابهاً ثابت می‌شود که اگر $m,n \in \mathbf{R}^+$، سپس برای هر سه تایی $a,b,c \in \mathbf{R}^+$ داریم:

$$a^{m+n} + b^{m+n} + c^{m+n} \geq a^m b^n + b^m c^n + c^m a^n$$

در اینجا کافی است که دو مجموعهٔ $\{a^m, b^m, c^m\}$ و $\{a^n, b^n, c^n\}$ را در نظر بگیرید.

نامساوی هاردی را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد:

فرض کنید $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$، $b_1 \geq b_2 \ldots \geq b_n$، ... و $z_1 \geq z_2 \geq \ldots \geq z_n$، سپس

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ldots z_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_{\pi_1(i)} b_{\pi_2(i)} \ldots z_{\pi_z(i)}$$

که در آن π_iها جایگشت های دلخواهی از مجموعه $\{1,2,\ldots,n\}$ هستند.

دو دنبالهٔ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ و $b_1, b_2, \ldots, b_n$ را در نظر بگیرید. نماد زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

قضیهٔ ۵ می‌گوید که $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix}$ ماکزیمم مقدار را بین تمامی مقادیر ممکن $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_{i_1} & b_{i_2} & \ldots & b_{i_n} \end{bmatrix}$ دارد اگر ترتیب a_i ها و b_i ها از نظر یکنوا بودن یکی باشد، یعنی هنگامی که $a_j < a_i$ سپس $b_j < b_i$.

مثلاً $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$، زیرا در طرف راست رابطه ترتیب رعایت شده است. (چرا که

$$(7 < 8 \Leftarrow 1 < 2 \quad , \quad 9 > 8 \Leftarrow 3 > 2 \quad , \quad 7 < 9 \Leftarrow 1 < 3)$$

مثال ۱۹: برای هر سه عدد مثبت a,b,c، دو دنبالهٔ (a,b,c) و $\left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}\right)$ دارای ترتیب یکنوایی یکسانند. از این‌رو داریم:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{b+c} & \frac{1}{c+a} & \frac{1}{a+b} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{c+a} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{b+c} \end{bmatrix}$$

و

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{b+c} & \frac{1}{c+a} & \frac{1}{a+b} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{a+b} & \frac{1}{b+c} & \frac{1}{c+a} \end{bmatrix}$$

حال دو نامساوی بالا را با هم جمع می‌کنیم، در نتیجه:

$$2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} = 3$$

MATH75.IR

و یا

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{۳}{۲}$$

مثال ۲۰: فرض کنید $a_i>۰$ $(i=۱,۲,۳,\ldots,n)$ $S=a_۱+a_۲+\cdots+a_n$. مشاهده می‌شود که ترتیب دو دنباله $(a_۱,a_۲,\ldots,a_n)$ و $\left(\frac{۱}{S-a_۱},\frac{۱}{S-a_۲},\ldots,\frac{۱}{S-a_n}\right)$ یکی است $(\frac{۱}{S-a_i}>\frac{۱}{S-a_j}\iff a_i>a_j)$، در نتیجه:

$$\begin{bmatrix} a_۱ & a_۲ & \cdots & a_n \\ \frac{۱}{S-a_۱} & \frac{۱}{S-a_۲} & \cdots & \frac{۱}{S-a_n} \end{bmatrix}\geq\begin{bmatrix} a_۱ & a_۲ & \cdots & a_n \\ \frac{۱}{S-a_k} & \frac{۱}{S-a_{k+۱}} & \cdots & \frac{۱}{S-a_{k-۱}} \end{bmatrix}\quad,\quad k=۲,۳,\ldots,n$$

رابطهٔ بالا را به ازای $k=۲,۳,\ldots,n$ عدد $n-۱$ نوشته و با هم جمع می‌کنیم. از این رو رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\frac{a_۱}{S-a_۱}+\frac{a_۲}{S-a_۲}\cdots+\frac{a_n}{S-a_n}\geq\frac{n}{n-۱}$$

مثال ۲۱: مینیمم عبارت زیر را بیابید:

$$\frac{\sin^۳x}{\cos x}+\frac{\cos^۳x}{\sin x}\qquad ۰<x<\frac{\pi}{۲}$$

حل: دو دنبالهٔ $(\sin^۳x,\cos^۳x)$ و $\left(\frac{۱}{\sin x},\frac{۱}{\cos x}\right)$ از لحاظ ترتیب یکنوایی مخالف یکدیگرند، از این رو داریم:

$$\begin{bmatrix} \sin^۳x & \cos^۳x \\ \frac{۱}{\cos x} & \frac{۱}{\sin x} \end{bmatrix}\geq\begin{bmatrix} \sin^۳x & \cos^۳x \\ \frac{۱}{\sin x} & \frac{۱}{\cos x} \end{bmatrix}=\sin^۲x+\cos^۲x$$

در نتیجه $\frac{\sin^۳x}{\cos x}+\frac{\cos^۳x}{\sin x}\geq ۱$.

به عنوان تمرین رابطهٔ $a^۲+b^۲+c^۲\geq ab+bc+ca$ را با استفاده از نامساوی هاردی ثابت کنید.

به طور مشابه نماد زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱m} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}=a_{۱۱}a_{۲۱}\ldots a_{n۱}+a_{۱۲}a_{۲۲}\ldots a_{n۲}+\cdots+a_{۱m}a_{۲m}\ldots a_{nm}$$

(دقت شود که نماد بالا با ماتریس اشتباه نشود.)

تعمیم نامساوی هاردی- پولیا می‌گوید که $\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱m} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$ ماکزیمم مقدار را بین تمامی مقادیر

دارد اگر n دنبالهٔ $\{a_{۱i}\}_{i=۱}^m,\{a_{۲i}\}_{i=۱}^m,\ldots,\{a_{ni}\}_{i=۱}^m$ به یک ترتیب مرتب $\begin{bmatrix} a_{۱\pi_۱(۱)} & a_{۱\pi_۱(۲)} & \cdots & a_{۱\pi_۱(m)} \\ a_{۲\pi_۲(۱)} & a_{۲\pi_۲(۲)} & \cdots & a_{۲\pi_۲(m)} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n\pi_n(۱)} & a_{n\pi_n(۲)} & \cdots & a_{n\pi_n(m)} \end{bmatrix}$

MATH75.IR

شده باشند. (یعنی اگر $a_{1j} > a_{1i}$، سپس $a_{2j} > a_{2i}, \ldots, a_{nj} > a_{ni}$)

مثال ۲۲: ثابت کنید که: $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab$

حل: می‌دانیم دنباله‌های $(a^2, b^2, c^2), (a, b, c), (a, b, c)$ دارای یک ترتیب یکنوایی هستند، در نتیجه:

$$\begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}.$$

$$\Longrightarrow a^2 \cdot a \cdot a + b^2 \cdot b \cdot b + c^2 \cdot c \cdot c \geq a^2 \cdot b \cdot c + b^2 \cdot c \cdot a + c^2 \cdot a \cdot b$$

بدین ترتیب حکم ثابت می‌شود.

مثال ۲۳: فرض کنید $x_1, x_2, \ldots, x_n$ اعداد حقیقی مثبت باشند، نشان دهید که:

$$x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + \cdots + x_n^{n+1} \geq x_1 x_2 \ldots x_n (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

حل: نامساوی بالا مستقیماً از رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_2 & x_3 & \ldots & x_1 \\ x_3 & x_4 & \ldots & x_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_n & x_1 & \ldots & x_{n-1} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}$$

(دقت شود که عبارت سمت چپ دارای دو سطر اول برابر است. همچنین هر دو رابطه $n+1$ سطر دارند.)

قضیه ٦: دو دنبالهٔ $b_1, b_2, \ldots, b_n, a_1, a_2, \ldots, a_n$ را در نظر بگیرید به‌طوری که هر دو صعودی یا دو نزولی هستند. داریم که:

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} \geq \frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n}$$

این نامساوی به نامساوی چبیشف معروف است.

اثبات: دو دنبالهٔ $\{a_i\}_{i=1}^n$ و $\{b_i\}_{i=1}^n$ دارای یک ترتیب هستند. بنابراین نامساوی هاردی را n بار به کار می‌بریم:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_nb_1$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq a_1b_3 + a_2b_4 + \cdots + a_nb_2$$

$$\vdots$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq a_1b_n + a_2b_1 + \cdots + a_nb_{n-1}$$

MATH75.IR

با جمع کردن نامساویهای بالا به دست می‌آوریم که:

$$n(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n) \geq (a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n)$$

برای اثبات طرف دیگر نامساوی چیپیشف، قسمت دوم نامساوی هاردی را n بار می‌نویسیم $(a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + \cdots + a_nb_{i_n} \geq a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1)$. دوباره به همان روش بالا این رابطه نیز ثابت می‌شود.

نکته: به راحتی می‌توان ثابت نمود که تساوی نامساوی چیپیشف وقتی رخ می‌دهد که

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n \quad \text{یا} \quad b_1 = b_2 = \cdots = b_n$$

(کافی است یکی از دو حالت بالا اتفاق بیفتد.)

در نامساوی چیپیشف اگر دو دنباله $\{a_i\}_{i=1}^n, \{b_i\}_{i=1}^n$ را برابر قرار دهیم، نامساوی

$$n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2$$

به دست می‌آید که قبلاً ثابت شد. و یا اگر دو دنباله $\{a_i\}_{i=1}^n$ و $\{\frac{1}{a_i}\}_{i=1}^n$ را قرار دهیم، نامساوی زیر به دست می‌آید.

$$\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

برای $x, y > 0$ و n طبیعی، دو دنبالهٔ (x, y) و (x^{n-1}, y^{n-1}) دارای یک ترتیب هستند. در نتیجه یک حالت خاص نامساوی چیپیشف به صورت زیر است:

$$\frac{x+y}{2} \cdot \frac{x^{n-1} + y^{n-1}}{2} \leq \frac{x^n + y^n}{2} \implies 2(x^n + y^n) \geq (x+y)(x^{n-1} + y^{n-1})$$

و یا

$$x^n + y^n \geq xy^{n-1} + yx^{n-1} \qquad (*)$$

یک حالت خاص رابطهٔ $(*)$، به ازای $n = 3$ است که کاربرد فراوانی در حل مسائل دارد:

$$4(a^3 + b^3) \geq (a+b)^3 \qquad \text{و یا} \qquad a^3 + b^3 \geq a^2b + b^2a$$

مثال ۲۴: برای سه عدد مثبت a, b, c ثابت کنید که:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}$$

حل: بر طبق حالت خاص رابطهٔ $(*)$ داریم که $a^2b + b^2a \leq a^3 + b^3$. در نتیجه:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} \leq \frac{1}{a^2b + b^2a + abc} = \frac{1}{ab(a+b+c)}$$

MATH75.IR

از این رو داریم:

$$\frac{۱}{a^۳+b^۳+abc}+\frac{۱}{b^۳+c^۳+abc}+\frac{۱}{c^۳+a^۳+abc}\leq$$
$$\frac{۱}{ab(a+b+c)}+\frac{۱}{bc(a+b+c)}+\frac{۱}{ca(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{abc(a+b+c)}=\frac{۱}{abc}$$

تعمیم نامساوی چیپیشف: فرض کنید که

$$x_۱\geq x_۲\geq\cdots\geq x_n>۰$$
$$y_۱\geq y_۲\geq\cdots\geq y_n>۰$$
$$\vdots$$
$$z_۱\geq z_۲\geq\cdots\geq z_n>۰$$

سپس داریم:

$$\frac{\sum_{i=۱}^{n}x_iy_i\cdots z_i}{n}\geq\frac{\sum_{i=۱}^{n}x_i}{n}\times\frac{\sum_{i=۱}^{n}y_i}{n}\times\cdots\times\frac{\sum_{i=۱}^{n}z_i}{n}$$

MATH75.IR

اعداد مختلط

معادلهٔ $x^2 = -1$ را در نظر بگیرید. از آنجا که عدد حقیقی‌ای وجود ندارد که مربع آن عددی منفی شود می‌توان نتیجه گرفت که این معادله در اعداد حقیقی جواب ندارد. حال عددی فرضی مانند i را در نظر بگیرید که در معادله مفروض صدق کند به عبارت دیگر $i^2 = -1$ ، پر واضح است که i عددی حقیقی نیست.

عدد $a + bi$ را عدد مختلط گویند اگر a, b متعلق به اعداد حقیقی باشند، مثلاً عدد $1 + i$ را یک عدد مختلط گویند. مجموعه تمام اعداد مختلط را با C نمایش می‌دهند، به عبارت دیگر:

$$C = \{a + bi \mid a\ ,\ b \in R\}$$

پر واضح است که اعداد حقیقی زیرمجموعهٔ اعداد مختلط است چرا که هر عدد حقیقی یک عدد مختلط با ضریب i صفر است.

عدد مختلط $Z = a + bi$ را در نظر بگیرید. به a قسمت حقیقی عدد مختلط Z و به b قسمت موهومی عدد Z گویند و با این دو نماد نمایش داده می‌شوند :

$$Re(Z) = a \quad , \quad Im(Z) = b$$

همچنین مزدوج عدد مختلط Z به صورت $\bar{Z} = a - bi$ تعریف می‌شود. بنابراین:

$$Re(\bar{Z}) = Re(Z) \quad , \quad Im(Z) = -Im(\bar{Z})$$

۴ عمل اصلی حساب برای اعداد مختلط همانند اعداد حقیقی تعریف و انجام می‌شود فقط باید دقت شود که هر جا به عدد i^2 می‌رسیم به جای آن عدد -1 را قرار دهیم. این اصول در چند مثال زیر توضیح داده می‌شود.

مثال ۱: دو عدد مختلط $X = 2 + i$ و $Y = 3 - 2i$ را در نظر بگیرید. برای این دو عدد مختلط $X + Y\ ,\ X - Y$ را محاسبه نمایید.

حل:

$$X + Y = (2 + i) + (3 - 2i) = (2 + 3) + (1 - 2)i = 5 - i$$

$$X - Y = (2 + i) - (3 - 2i) = (2 - 3) + (1 + 2)i = -1 + 3i$$

MATH75.IR

مثال ۲: عبارت $(۱+i)(۱+۲i)$ را محاسبه نمایید.

حل: ابتدا این عبارت را به مجموع چند حاصلضرب بسط می‌دهیم، سپس به جای $i^۲$، عدد -۱ را جایگزین می‌کنیم:

$$\begin{aligned}(۱+i)(۱+۲i) &= (۱+i)\times ۱ + (۱+i)\times ۲i \\ &= ۱+i+۲i+۲i^۲ \\ &= ۱+i+۲i+۲(-۱)\end{aligned}$$

در نتیجه:

$$(۱+i)(۱+۲i) = -۱+۳i$$

عدد مختلط $Z=a+bi$ را در نظر بگیرید. نرم این عدد مختلط را به صورت $|Z| = \sqrt{a^۲+b^۲}$ تعریف می‌کنیم. حال عبارت حاصلضرب $Z\times \bar{Z}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$Z\bar{Z} = (a+bi)(a-bi) = a^۲ + abi - abi - b^۲i^۲ = a^۲ + b^۲$$

در نتیجه $Z\bar{Z} = |Z|^۲$. توجه شود که نرم یک عدد مختلط، عددی حقیقی و نامنفی است.

دو عدد مختلط X, Y را در نظر بگیرید. برای به دست آوردن $\frac{X}{Y}$ از روش زیر استفاده می‌کنیم:

صورت و مخرج کسر مفروض را در مزدوج عددی که در مخرج قرار دارد یعنی $\bar{Y}$ ضرب می‌کنیم در این صورت کسر $\frac{X\bar{Y}}{|Y|^۲}$ حاصل می‌شود. این کسر به راحتی قابل محاسبه است زیرا مخرج آن عددی حقیقی و صورت آن حاصلضرب دو عدد مختلط است.

مثال ۳: عبارت $\frac{۱+۲i}{۱-i}$ را محاسبه نمایید.

حل:

$$\frac{(۱+۲i)}{(۱-i)} = \frac{(۱+۲i)(۱+i)}{(۱-i)(۱+i)} = \frac{-۱+۳i}{۱+۱} = -\frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۲}i$$

قضیه ۱: دو عدد مختلط X, Y را در نظر بگیرید. در این صورت دو حکم زیر برقرارند:

$$\overline{X}+\overline{Y} = \overline{X+Y} \quad , \quad \overline{X\times Y} = \overline{X}\times\overline{Y}$$

این قضیه با استفاده از تعریف اعداد مختلط به راحتی ثابت می‌شود.

قضیه ۲: به ازای هر n طبیعی و هر عدد مختلط Z داریم که

$$\overline{Z^n} = \overline{Z}^n$$

با استفاده از استقراء می‌توان این حکم را ثابت کرد.

MATH75.IR

نامساوی مثلث: به ازای هر دو عدد مختلط Y, X داریم که

$$|X+Y| \leq |X| + |Y|$$

همچنین علامت تساوی وقتی رخ می‌دهد که نسبت $\frac{X}{Y}$ عددی حقیقی و مثبت باشد.

قضیه ۳: چندجمله‌ای درجه n ام $p(z)$ با ضرایب مختلط را در نظر بگیرید. $p(z)$ دارای دقیقاً n ریشه مختلط با احتساب تعداد تکرار ریشه‌ها می‌باشد.

قضیه ۴: چندجمله‌ای $p(z)$ با ضرایب حقیقی را در نظر بگیرید. فرض کنید z_0 یک ریشهٔ دلخواه $p(z)$ باشد در این صورت $\bar{z}_0$ نیز یک ریشه چندجمله‌ای $p(z)$ است.

اثبات: فرض کنید که

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 \quad , \quad a_i \in R \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

از $p(z_0) = 0$ نتیجه می‌گیریم که.

$$a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \qquad (*)$$

حال از طرفین عبارت (*) مزدوج می‌گیریم و همچنین از قضیه ۱ استفاده می‌کنیم:

$$a_n \overline{z_0^n} + a_{n-1} \overline{z_0^{n-1}} + \cdots + a_0 = 0$$

با استفاده از قضیه ۲ به دست می‌آوریم که:

$$a_n \bar{z}_0^n + a_{n-1} \bar{z}_0^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

و یا معادلاً $p(\bar{z}_0) = 0$، یعنی $\bar{z}_0$ یک ریشهٔ $p(z)$ است.

قضیه ۵: تعداد ریشه‌های مختلط و غیر حقیقی چندجمله‌ای $p(x)$ با ضرایب حقیقی زوج است.

این قضیه نتیجهٔ مستقیمی از قضیهٔ بالا است.

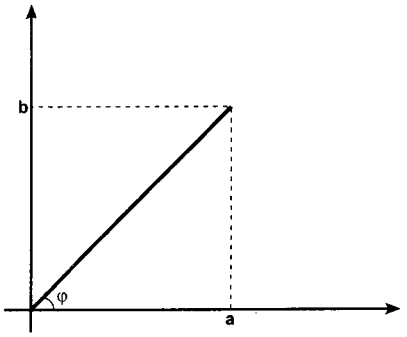
عدد مختلط $Z = a + bi$ را در نظر بگیرید. پر واضح است Z را می‌توان به صورت $Z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ نوشت که در آن:

$$r = |Z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad , \quad \phi = \tan^{-1}\frac{b}{a} \quad 0 \leq \phi < 2\pi$$

به r نرم عدد مختلط Z گویند که قبلاً تعریف شده است و به ϕ آرگومان عدد مختلط Z گویند و به صورت روبرو نمایش داده می‌شود: $\phi = Arg(Z)$

واضح است که Z عددی حقیقی است اگر و فقط اگر $Arg(Z) = 0$ یا π.

MATH75.IR



صفحه‌ای متشکل از دو محور عمود بر هم در نظر بگیرید به طوری که محور افقی، محور اعداد حقیقی و محور عمودی، محور اعداد موهومی باشد. به این صفحه، صفحه قطبی گویند. عدد مختلط $Z = a + bi$ را به صورت یک بردار در صفحه قطبی نمایش می‌دهیم، به طوری که زاویه‌ای که این بردار با قسمت مثبت محور افقی می‌سازد برابر آرگومان Z باشد و همچنین طول بردار نیز برابر r باشد. به راحتی می‌توان ثابت کرد تصویر این بردار روی محور افقی طولی برابر a و روی محور عمودی طولی برابر b دارد.

قضیه ٦: برای دو عدد مختلط و دلخواه Y, X داریم که:

$$Arg(XY) = Arg(X) + Arg(Y)$$

اثبات: اعداد X, Y را به صورت قطبی می‌نویسیم. به عبارت دیگر فرض می‌کنیم که:

$$X = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1) \ , \ Y = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$$

در این صورت :

$$\begin{aligned} XY &= r_1 r_2(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) \\ &= r_1 r_2((\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2) + (\cos\phi_1\sin\phi_2 + \cos\phi_2\sin\phi_1)i) \\ &= r_1 r_2(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2)) \end{aligned}$$

در نتیجه $Arg(XY) = \phi_1 + \phi_2$. از طرفی داریم که $Arg(X) = \phi_1$, $Arg(Y) = \phi_2$. از ۳ رابطه اخیر حکم قضیه نتیجه می‌شود.

قضیه ۷: برای عدد دلخواه و مختلط Z داریم که:

$$Arg(Z^n) = nArg(Z) \quad , \quad n \in N$$

برای اثبات قضیه می‌توان از قضیه قبل کمک جست و یا به‌طور مستقیم حکم را با استقراء ثابت کرد.

قضیه ۸: برای دو عدد مختلط و دلخواه Y, X روابط زیر برقرارند:

$$|XY| = |X||Y| \ , \ |X^n| = |X|^n \ , \ |Y^n| = |Y|^n$$

اثبات این قضیه به دلیل واضح بودن آن بیان نمی‌شود.

قضیه موآور: برای هر زاویه دلخواه ϕ داریم که:

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi \quad , \quad n \in N$$

MATH75.IR

اثبات: فرض کنید که $Z = \cos\phi + i\sin\phi$، داریم که

$$|Z| = \sqrt{\cos^۲\phi + \sin^۲\phi} = ۱$$

از قضیه ۸ نتیجه می‌شود که:

$$|Z^n| = |Z|^n = ۱$$

همچنین با استفاده از قضیه ۷ داریم که:

$$Arg(Z)^n = nArg(Z) = n\phi$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} Z^n &= |Z^n|(\cos Arg(Z^n) + i\sin Arg(Z^n)) \\ &= ۱ \times (\cos n\phi + i\sin n\phi) \end{aligned}$$

یا معادلاً

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi$$

یکی از کاربردهای فرمول موآور در جذر اعداد است یعنی کافی است که یک عدد را به‌صورت قطبی نوشته و سپس از نرم آن جذر گرفته شود و همچنین آرگومان آن بر ۲ تقسیم گردد تا جذر آن عدد به‌دست آید.

چندجمله‌ای $p(z) = z^n - ۱$ را در نظر بگیرید، با استفاده از قضیه ۳ و همچنین توجه به این نکته که درجه چندجمله‌ای $p(z)$ برابر n است می‌توان نتیجه گرفت که $p(z)$ دارای دقیقاً n ریشه مختلط است. پر واضح است که یکی از این ریشه‌ها برابر ۱ است.

فرض کنید $z_۰$ یک ریشه $p(z)$ باشد. $z_۰$ را به صورت قطبی $z_۰ = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ می‌نویسیم. از $p(z_۰) = ۰$ نتیجه می‌شود که

$$r^n(\cos\phi + i\sin\phi)^n = ۱ \quad (۱)$$

حال از طرفین عبارت (۱) نرم می‌گیریم و همچنین از قضیه (۸) نیز استفاده می‌کنیم:

$$|r^n(\cos\phi + i\sin\phi)^n| = ۱ \implies |r^n||\cos\phi + i\sin\phi|^n = ۱$$

در نتیجه

$$r^n \times \sqrt{(\cos^۲\phi + \sin^۲\phi)^n} = ۱ \quad (۲)$$

از رابطهٔ (۲) نتیجه می‌شود که $r^n = ۱$. از طرفی r عددی مثبت است چرا که برابر طول بردار $\vec{z}$ است درنتیجه باید داشته باشیم $r = ۱$.

MATH75.IR

با استفاده از رابطهٔ (۱) و قضیه موآور به دست می آوریم که:

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = ۱ \implies \cos n\phi + i\sin n\phi = ۱ + ۰i$$

در نتیجه

$$\cos n\phi = ۱ \quad , \quad \sin n\phi = ۰$$

می‌دانیم که اگر $\cos\theta = ۱$, $\sin\theta = ۰$ باشد سپس k ای صحیح وجود دارد به طوری که $\theta = ۲k\pi$.

بنابراین از رابطهٔ بالا نتیجه می‌گیریم که k ای صحیح وجود دارد به طوری که $n\phi = ۲k\pi$ و یا $\phi = \frac{۲k\pi}{n}$. از طرفی داشتیم که $۰ \le \phi < ۲\pi$، در نتیجه باید داشته باشیم $۰ \le k < n$. می‌توان به راحتی بازبینی نمود که ϕ به دست آمده، در رابطه بالا صدق می‌کند.

روابط به دست آمده در بالا را می‌توان در قضیه زیر خلاصه نمود:

قضیه ۹: معادله $z^n = ۱$ دارای n ریشه $\omega_۱, \omega_۲, \ldots, \omega_n$ است به طوری که ω_i ها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\omega_i = \cos\frac{۲\pi i}{n} + i\sin\frac{۲\pi i}{n}$$

قضیه ۱۰: معادله $z^n = ۱$ را در نظر بگیرید و فرض کنید که $\omega = \cos\frac{۲\pi}{n} + i\sin\frac{۲\pi}{n}$. در این صورت ریشه‌های معادله مفروض عبارتند از:

$$۱, \omega, \omega^۲, \ldots, \omega^{n-۱}$$

اثبات این قضیه با استفاده از قضیه ۹ و قضیه موآور واضح است زیرا

$$\omega_i = \omega_۱^i \quad i = ۱, ۲, \ldots, n$$

می‌دانیم که برای هر $a, b \in R$, $n \in N$ اتحاد زیر برقرار است:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-۱}b^۰ + a^{n-۲}b + \cdots + ab^{n-۲} + a^۰b^{n-۱})$$

در اتحاد بالا به جای a عدد ω و به جای b عدد ۱ را قرار می‌دهیم:

$$۰ = \omega^n - ۱ = (\omega - ۱)(\omega^{n-۱} + \omega^{n-۲} + \cdots + \omega + ۱)$$

از آنجایی که $\omega \neq ۱$ به دست می آوریم که:

$$۱ + \omega + \omega^۲ + \cdots + \omega^{n-۱} = ۰$$

حال چندین کاربرد اعداد مختلط را بیان می‌کنیم:

MATH75.IR

مثال ۴: تمام n های طبیعی را بیابید به طوری که به ازای هر $x \in R$ داشته باشیم:

$$1 + x + x^2 \mid 1 + x^n + x^{2n} \qquad (*)$$

حل: از قضایای مربوط به چندجمله‌ای می‌دانیم که $p(x)|q(x)$ اگر و فقط اگر هر ریشه $p(x)$ با شمارش تعداد تکرارها، ریشه‌ای از $q(x)$ نیز باشد، در نتیجه اگر بخواهد رابطه $(*)$ برقرار باشد باید هر ریشه $1 + x + x^2$، ریشه‌ای از $1 + x^n + x^{2n}$ نیز باشد. حال سعی می‌کنیم ریشه‌های $1 + x + x^2$ را به دست آوریم:

$$1 + x + x^2 = 0 \implies (x - 1)(1 + x + x^2) = 0 \implies x^3 - 1 = 0$$

از قضیه ۱۰ نتیجه می‌گیریم که ریشه‌های غیر از یک معادله $x^3 - 1 = 0$ برابرند با

$$\omega_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \quad , \quad \omega_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$$

واضح است که ω_1, ω_2 ریشه‌های معادله $1 + x + x^2 = 0$ هستند و همچنین داریم $\omega_1^3 = \omega_2^3 = 1$.

برای اینکه رابطه $(*)$ برقرار باشد باید داشته باشیم:

$$1 + \omega_1^n + \omega_1^{2n} = 0 \quad , \quad 1 + \omega_2^n + \omega_2^{2n} = 0$$

حال ۳ حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱) $n \overset{3}{\equiv} 2$. در نتیجه k ای حسابی موجود است به طوری که $n = 3k + 2$، بنابراین

$$1 + \omega_1^n + \omega_1^{2n} = 0 \iff 1 + \omega_1^{3k+2} + \omega_1^{6k+4} = 0$$

از طرفی در بالا به دست آوردیم که $\omega_1^3 = 1$، در نتیجه:

$$1 + \omega_1^{3k+2} + \omega_1^{6k+4} = 1 + (\omega_1^3)^k \times \omega_1^2 + (w_1^3)^{2k+1} \times \omega_1$$
$$= 1 + \omega_1 + \omega_1^2 = 0$$

به ازای ω_2 نیز به همین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که

$$1 + \omega_2^n + \omega_2^{2n} = 0$$

۲) $n \overset{3}{\equiv} 1$. در نتیجه k ای حسابی موجود است به طوری که $n = 3k + 1$. بنابراین

$$1 + \omega_1^n + \omega_1^{2n} = 0 \iff 1 + \omega_1^{3k+1} + \omega_1^{6k+2} = 0$$
$$1 + \omega_1^{3k+1} + \omega_1^{6k+2} = 1 + (\omega_1^3)^k \times \omega_1 + (w_1^3)^{2k} \times \omega_1^2$$
$$= 1 + \omega_1 + \omega_1^2 = 0$$

به ازای w_2 نیز به همین ترتیب به دست می‌آید که:

$$1 + w_2^n + w_2^{2n} = 0$$

MATH75.IR

۳) $n \overset{۳}{\equiv} ۰$. در نتیجه k ای طبیعی موجود است به طوری که $n = ۳k$، بنابراین

$$۱ + \omega_۱^n + \omega_۱^{۲n} = ۰ \iff ۱ + \omega_۱^{۳k} + \omega_۱^{۶k} = ۰$$

$$۱ + \omega_۱^{۳k} + \omega_۱^{۶k} = ۱ + (\omega_۱^۳)^k + (\omega_۱^۳)^{۲k} = ۱ + ۱ + ۱ = ۳ \neq ۰$$

از ۳ حالت بالا به دست می‌آوریم که n باید به صورت $۳k + ۱$ یا $۳k + ۲$ باشد و یا معادلاً باقیمانده n بر ۳ باید برابر ۱ و یا ۲ باشد.

مثال ۵: تمام x, y های حقیقی را بیابید به طوری که دستگاه زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} \sqrt{۳}x\left(۱ + \dfrac{۱}{x^۲ + y^۲}\right) = ۲ \\ \sqrt{۷}y\left(۱ - \dfrac{۱}{x^۲ + y^۲}\right) = ۴\sqrt{۲} \end{cases} \qquad (۱)$$

حل: متغیر مختلط z را به صورت $z = x + iy$ تعریف می‌کنیم. حال معادلات (۱) را به فرم متعارف‌تر زیر می‌نویسیم:

$$۱: \quad x + \frac{x}{x^۲ + y^۲} = \frac{۲}{\sqrt{۳}} \quad , \quad ۲: \quad y - \frac{y}{x^۲ + y^۲} = ۴\sqrt{\frac{۲}{۷}}$$

معادله (۲) را در عدد i ضرب کرده و با معادله (۱) جمع می‌کنیم:

$$\left(x + \frac{x}{x^۲ + y^۲}\right) + i\left(y - \frac{y}{x^۲ + y^۲}\right) = \frac{۲}{\sqrt{۳}} + ۴\sqrt{\frac{۲}{۷}}i$$

و یا معادلاً

$$(x + iy) + \left(\frac{x - iy}{x^۲ + y^۲}\right) = \frac{۲}{\sqrt{۲}} + ۴\sqrt{\frac{۲}{۷}}i$$

و یا

$$z + \frac{\bar{z}}{|z|^۲} = \frac{۲}{\sqrt{۳}} + ۴\sqrt{\frac{۲}{۷}}i \qquad (۲)$$

از طرفی می‌دانیم که $z\bar{z} = |z|^۲$ در نتیجه

$$\frac{\bar{z}}{|z|^۲} = \frac{۱}{z}$$

بنابراین از (۲) نتیجه می‌شود که

$$z + \frac{۱}{z} = \frac{۲}{\sqrt{۳}} + ۴\sqrt{\frac{۲}{۷}}i$$

و یا

$$z + \frac{۱}{z} = ۲\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}} + \sqrt{\frac{۳}{۷}}i\right)$$

MATH75.IR

عبارت داخل پرانتز را برابر t تعریف می‌کنیم بنابراین

$$z+\frac{۱}{z}=۲t \quad \Longrightarrow \quad z^۲-۲tz+۱=۰$$

در نتیجه

$$z=t\pm\sqrt{t^۲-۱}=\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}}+۲\sqrt{\frac{۲}{۷}}i\right)\pm\left(\frac{۲}{\sqrt{۲۱}}+\sqrt{۲}i\right)$$

بنابراین

$$z=x+iy=\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}}\pm\frac{۲}{\sqrt{۲۱}}\right)+i\left(۲\sqrt{\frac{۲}{۷}}\pm\sqrt{۲}\right)$$

از این رو دو دسته جواب زیر به دست می‌آید:

$$۱:\ \begin{cases} x=\dfrac{۱}{\sqrt{۳}}+\dfrac{۲}{\sqrt{۲۱}} \\ y=۲\sqrt{\dfrac{۲}{۷}}+\sqrt{۲} \end{cases} \qquad ۲:\ \begin{cases} x=\dfrac{۱}{\sqrt{۳}}-\dfrac{۲}{\sqrt{۲۱}} \\ y=۲\sqrt{\dfrac{۲}{۷}}-\sqrt{۲} \end{cases}$$

مثال ٦: دستگاه معادلات زیر را حل کنید: (Vietnam 1996)

$$\begin{cases} \sqrt{۳x}\left(۱+\dfrac{۱}{x+y}\right)=۲ \\ \sqrt{۷y}\left(۱-\dfrac{۱}{x+y}\right)=۴\sqrt{۲} \end{cases}$$

راهنمایی: واضح است که x,y باید اعداد مثبت باشند. با تغییر متغیر $x=u^۲, y=v^۲$، این مثال به مثال قبلی تغییر پیدا می‌کند.

مثال ۷: اگر $S(x),R(x),Q(x),P(x)$ چندجمله‌ایهایی باشند که:

$$P\left(x^۵\right)+xQ\left(x^۵\right)+x^۲R\left(x^۵\right)=\left(x^۴+x^۳+x^۲+x+۱\right)\ S(x) \qquad (*)$$

نشان دهید که $x-۱$ عاملی از $p(x)$ است. (USA 1976)

حل: تعریف می‌کنیم

$$\omega=\cos\frac{۲\pi}{۵}+i\sin\frac{۲\pi}{۵}$$

از این رو پنج ریشهٔ معادلهٔ $x^۵=۱$ عبارتند از

$$۱,\omega,\omega^۲,\omega^۳,\omega^۴$$

بر طبق تعریف ω داریم که $\omega^۵=۱$ و همچنین

$$۱+\omega+\omega^۲+\omega^۳+\omega^۴=۰$$

MATH75.IR

$\omega, \omega^۲, \omega^۳, \omega^۴$ را به ترتیب در رابطهٔ $(*)$ قرار می‌دهیم:

$$P(۱) + \omega Q(۱) + \omega^۲ R(۱) = ۰$$
$$P(۱) + \omega^۲ Q(۱) + \omega^۴ R(۱) = ۰$$
$$P(۱) + \omega^۳ Q(۱) + \omega R(۱) = ۰$$
$$P(۱) + \omega^۴ Q(۱) + \omega^۳ R(۱) = ۰$$

چهار رابطهٔ بالا را به ترتیب در $-\omega, -\omega^۲, -\omega^۳, -\omega^۴$ ضرب می‌کنیم:

$$-\omega P(۱) - \omega^۲ Q(۱) - \omega^۳ R(۱) = ۰$$
$$-\omega^۲ P(۱) - \omega^۴ Q(۱) - \omega R(۱) = ۰$$
$$-\omega^۳ P(۱) - \omega Q(۱) - \omega^۴ R(۱) = ۰$$
$$-\omega^۴ P(۱) - \omega^۳ Q(۱) - \omega^۲ R(۱) = ۰$$

از جمع هشت رابطهٔ بالا عبارت $۵P(۱) = ۰$ و یا $P(۱) = ۰$ حاصل می‌گردد. بر طبق قضایای مربوط به چندجمله‌ایها این رابطه معادل است با اینکه $x - ۱ | P(x)$.

MATH75.IR

معادلات تابعی

معادله کوشی

به معادله زیر معادلهٔ کوشی گویند:

$$f : R \to R \quad , \quad \forall x, y \in R : \ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

به توابعی که در معادله کوشی صدق می‌کنند توابع جمعی گویند.

تعداد توابع جمعی بسیار زیاد است ولی فقط یک گروه از آنها پیوسته هستند.

فرض کنید $f(x)$ تابعی جمعی باشد از این رو $f(۰) = f(۰ + ۰) = f(۰) + f(۰)$، در نتیجه برای تمامی توابع جمعی $f(۰)$ برابر صفر است. همچنین داریم:

$$f(۰) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) = ۰ \quad \Longrightarrow \quad f(-x) = -f(x)$$

لم ۱: فرض کنید $f(x)$ یک تابع جمعی باشد، سپس برای هر n طبیعی و $x_n, \ldots, x_۱$ حقیقی دلخواه داریم که:

$$f(x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n) = f(x_۱) + f(x_۲) + \cdots + f(x_n)$$

اثبات: حکم را با استقرأ بر روی n ثابت می‌کنیم. برای $n = ۱$ حکم بدیهی است. برای $n = ۲$ حکم همان شرط تابع جمعی است. فرض کنید حکم به ازای $n = k$ متغیر درست باشد و برای متغیر $n = k + ۱$ حکم را ثابت می‌کنیم:

$k + ۱$ عدد دلخواه $x_۱, x_۲, \ldots, x_k, x_{k+۱}$ را در نظر بگیرید. بر طبق تعریف تابع جمعی داریم که

$$f(x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k + x_{k+۱}) = f(x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k) + f(x_{k+۱})$$

حال فرض استقرأ برای k متغیر را به کار می‌بریم

$$f(x_۱ + \cdots + x_k) = f(x_۱) + \cdots + f(x_k)$$

MATH75.IR

از ترکیب دو رابطه بالا به دست می آید که

$$f(x_1 + \cdots + x_k + x_{k+1}) = f(x_1) + \cdots + f(x_k) + f(x_{k+1})$$

بدین ترتیب حکم ثابت می‌شود.

اگر در لم بالا به جای تمامی x_i ها عدد مفروض x را قرار دهیم به دست می آید که به ازای هر $x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$ داریم که $f(nx) = nf(x)$.

لم ۲: اگر $f(x)$ یک تابع جمعی باشد، سپس برای هر عدد حقیقی x و هر عدد گویای a داریم که $f(ax) = af(x)$.

اثبات: برای اثبات سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱) a عددی مثبت است. فرض کنید که a به صورت $\frac{m}{n}$ باشد، در بالا ثابت کردیم که برای هر x حقیقی و n طبیعی داریم $f(nx) = nf(x)$. حال در اینجا به جای x، عدد $\frac{x}{n}$ را قرار می‌دهیم:

$$f\left(n \times \left(\frac{x}{n}\right)\right) = nf\left(\frac{x}{n}\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(x)}{n} = f\left(\frac{x}{n}\right)$$

در نتیجه :

$$f(ax) = f\left(\frac{m}{n}\, x\right) = f\left(m \times \left(\frac{x}{n}\right)\right) = mf\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{m}{n} f(x) = af(x)$$

۲) a عدد صفر است.

$$f(ax) = f(0 \times x) = 0 = 0 \times f(x) = af(x)$$

۳) a عددی منفی است. فرض کنید a به صورت $-b$ باشد که در آن b عدد گویای مثبتی است، بر طبق حالت ۱ داریم که: $f(bx) = bf(x)$.

از طرفی قبلاً ثابت شد که $f(-x) = -f(x)$، بنابراین:

$$f(ax) = f(-bx) = -f(bx) = -bf(x) = af(x)$$

قضیه ۱: تمامی توابع پیوسته $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ که در معادله کوشی صدق می‌کنند به صورت $f(x) = kx$ هستند که در آن k عدد ثابتی است.

اثبات: ثابت می‌کنیم که اگر $f(x)$ یک تابع پیوسته و جمعی باشد سپس به صورت $f(x) = xf(1)$ است. عدد گویای a را در نظر بگیرید. در لم بالا به جای x عدد ۱ را قرار می‌دهیم: $f(a) = f(a \times 1) = af(1)$. حال کافی

MATH75.IR

است که حکم را برای اعداد گنگ ثابت کنیم. عدد گنگ و دلخواه b را در نظر بگیرید. با دنباله‌ای از اعداد گویا به b میل می‌کنیم:

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots < b \quad , \quad \lim_{n\to\infty} a_n = b \qquad (1)$$

تابع $f(x)$ در نقطه b پیوسته است لذا

$$f(b) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(1)a_n \qquad (2)$$

از دو رابطه (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که

$$f(b) = f(1) \times \lim_{n\to\infty} a_n = f(1)b$$

در نتیجه به‌ازای هر x، چه گنگ و چه گویا، رابطه $f(x) = xf(1)$ برقرار است.

قضیه ۲: تابع جمعی $f(x)$ مفروض است. اگر $f(x)$ در یک نقطه دلخواه x_0 پیوسته باشد، سپس k ای وجود دارد به طوری که به ازای هر x داشته باشیم: $f(x) = kx$

اثبات: نقطهٔ دلخواه x را در نظر بگیرید، ثابت می‌کنیم که $f(x)$ در x پیوسته است. فرض کنید دنباله $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ به x میل کند، دنباله $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$b_i = a_i - x + x_0 \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

از آنجا که دنباله $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ به x میل می‌کند، باید دنباله $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ به x_0 میل کند و بر طبق فرض، تابع $f(x)$ در نقطه x_0 پیوسته است یعنی دنباله $\{f(b_i)\}_{i=1}^{\infty}$ نیز به $f(x_0)$ میل می‌کند:

$$f(b_i) \to f(x_0) \quad , \quad f(b_i) = f(a_i) + f(-x) + f(x_0) = f(a_0) - f(x) + f(x_0)$$

یا $$\lim_{n\to\infty} f(b_i) = f(x_0) \implies \lim_{n\to\infty} (f(a_i) - f(x) + f(x_0)) = f(x_0)$$

از آنجا که عملگر حد خاصیت پخشی دارد می‌توان نتیجه گرفت که $\lim_{i\to\infty} f(a_i) = f(x)$، یا دنباله $\{f(a_i)\}_{i=1}^{\infty}$ به $f(x)$ میل می‌کند.

در اینجا ما یک دنباله دلخواه $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ در نظر گرفتیم که به x میل کند و ثابت کردیم که دنباله $\{f(a_i)\}_{i=1}^{\infty}$ نیز به $f(x)$ میل می‌کند، این معادل پیوسته بودن $f(x)$ در نقطه x است.

در بالا برای یک نقطه دلخواه پیوستگی $f(x)$ در آن نقطه را ثابت کردیم یعنی $f(x)$ در تمامی نقاط پیوسته است، در نتیجه بر طبق قضیه ۱، $f(x)$ به صورت $f(x) = f(1)x$ است.

قضیه ۳: تابع جمعی $f(x)$ مفروض است. اگر $f(x)$ یک تابع صعودی باشد، سپس k ای وجود دارد به طوری که به ازای هر x داشته باشیم: $f(kx) = kf(x)$

MATH75.IR

اثبات: بر طبق لم ۲ برای هر عدد گویای a داریم که $f(a) = af(1)$. عدد گنگ و دلخواه x را در نظر بگیرید. بدیهی است که دو دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ از اعداد گویا وجود دارد به طوری که هر دو دنباله به x میل کند و $a_n < x < b_n$ یعنی:

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots < x < \cdots < b_n < \cdots < b_2 < b_1$$

بر طبق فرض صعودی بودن $f(x)$ داریم که:

$$f(a_1) \leq \cdots \leq f(a_n) \leq \cdots \leq f(x) \leq \cdots \leq f(b_n) \leq \cdots \leq f(b_1)$$

و یا $f(a_n) \leq f(x) \leq f(b_n)$، بنابراین

$$f(1)a_n \leq f(x) \leq f(1)b_n \qquad (*)$$

از آنجا که $a_n, b_n \to x$، با حد گرفتن از طرفین رابطه $(*)$ به دست می‌آید که $f(x) = f(1)x$.

تبصره : به جای شرط صعودی بودن $f(x)$ می‌توان شرط نزولی بودن $f(x)$ را قرارداد چرا که کافی است تابع $g(x) = -f(x)$ را تعریف کنیم و قضیه ۳ را برای تابع $g(x)$ به کار بریم. در کل می‌توان در قضیه ۳ شرط یکنوا بودن $f(x)$ را گذاشت.

قضیه ۴: تابع جمعی $f(x)$ مفروض است. اگر به ازای هر $x > 0$ داشته باشیم $f(x) \geq 0$، سپس k ای وجود دارد به طوری که به ازای هر x داشته باشیم: $f(x) = kx$

اثبات: دو عدد دلخواه x, y را با شرط $x > y$ در نظر بگیرید:

$$x > y \quad \Longrightarrow \quad x - y > 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x - y) \geq 0$$

از طرفی داریم که $f(x - y) = f(x) + f(-y) = f(x) - f(y)$

در نتیجه $f(x) \geq f(y)$، این رابطه معادل صعودی بودن $f(x)$ است. یعنی ثابت کردیم که $f(x)$ علاوه بر جمعی بودن، یک تابع صعودی نیز است در نتیجه بر طبق قضیه ۳، $f(x) = f(1)x$ است و $k = f(1)$.

تبصره: با استفاده از لم‌های ۱ و ۲ می‌توان نتیجه گرفت که برای هر $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Q}$ و $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ داریم:

$$f(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) = a_1f(x_1) + a_2f(x_2) + \cdots + a_nf(x_n) \qquad (*)$$

از رابطه $(*)$ می‌توان نتیجه گرفت که بی‌نهایت تابع جمعی و غیر پیوسته وجود دارد. مثلاً برای هر پایه از فضای برداری $\mathbf{R}$ روی میدان $\mathbf{Q}$، بی‌نهایت تابع جمعی و غیر پیوسته $f(x)$ وجود دارد. ولی به دلیل پیچیدگی این توابع، در مورد توابع غیر پیوسته بحثی نمی‌کنیم.

MATH75.IR

مثال ۱: تمام توابع پیوسته $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ را بیابید به طوری که برای هر x, y متعلق به $\mathbf{R}$ داشته باشیم:

$$m + f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (۱)$$

که در آن m عددحقیقی ثابتی است.

حل: تابع پیوسته $g(x)$ را روی $\mathbf{R}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g : R \to R \quad , \quad g(x) = f(x) - m \qquad (۲)$$

با جایگزینی عبارت (۲) در (۱) به دست می‌آوریم که برای هر x, y متعلق به $\mathbf{R}$ داریم که $g(x+y) = g(x)+g(y)$ از آنجا که $g(x)$ تابعی پیوسته است با استفاده از قضیه ۱ به دست می‌آوریم که $g(x) = kx$ و $k \in \mathbf{R}$. در نتیجه:

$$f(x) = kx + m \quad , \quad k \in R$$

مثال ۲: تمام توابع پیوسته $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ را بیابید به طوری که برای هر x, y متعلق به $\mathbf{R}$ داشته باشیم:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + ۲xy$$

حل: تابع $g(x)$ را به صورت روبرو تعریف می‌کنیم: $g(x) = f(x) - x^۲$

در این صورت بر طبق فرضیات مسأله داریم که:

$$g : R \to R \quad , \quad \forall x, y \in R \ : \ g(x+y) = g(x) + g(y) \qquad (*)$$

از آنجا که جمع دو تابع پیوسته خود نیز تابعی پیوسته است و توابع $x^۲$ و $f(x)$ هر دو پیوسته‌اند می‌توان نتیجه گرفت که $g(x)$ نیز تابعی پیوسته است و همچنین از عبارت $(*)$، جمعی بودن $g(x)$ نتیجه می‌شود. در نتیجه بر طبق قضیه ۱ به دست می‌آید که $g(x) = kx \ , \ k \in \mathbf{R}$. بنابراین $f(x) = kx + x^۲ \ , \ k \in \mathbf{R}$.

معادله تابعی دلخواهی را در نظر بگیرید. اگر ما بتوانیم یک جواب دلخواه معادله را بیابیم به این جواب معادله، جواب خصوصی معادله مفروض گوییم. پر واضح است که جواب خصوصی یک معادله تابعی یکتا نیست.

شاید برای بعضی افراد این ابهام وجود داشته باشد که چرا در دو مثال بالا $g(x)$ را برابر $f(x) - m$ و یا $f(x) - x^۲$ تعریف کردیم، دقت شود که m و یا $x^۲$ جوابهای خصوصی معادلات مربوط به خود هستند و با این روش می‌توان جملات زاید را حذف کرد.

مثال ۳: تمام توابع پیوسته $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ را بیابید به طوری که به ازای هر x, y متعلق $\mathbf{R}$ به داشته باشیم:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y) \qquad (۱)$$

MATH75.IR

حل: ابتدا برای حذف جمله زاید $xy(x+y)$ باید یک جواب خصوصی معادله بالا را بیابیم، با کمی دقت در صورت معادله می‌توان جواب $f(x)=\frac{x^۳}{۳}$ را یافت.

تابع پیوسته $g(x)$ را به صورت روبرو تعریف می‌کنیم: $$g(x)=f(x)-\frac{x^۳}{۳} \qquad (۲)$$

با جایگزینی عبارت (۲) در (۱) به دست می‌آوریم که برای هر y,x دلخواه متعلق به $\mathbf{R}$ داریم که $g(x+y)=g(x)+g(y)$. از آنجا که $g(x)$ تابعی پیوسته است و در معادله کوشی نیز صدق می‌کند، با استفاده از قضیه ۱ به دست آید که $g(x)$ باید به صورت $g(x)=kx, k\in\mathbf{R}$ باشد.

در نتیجه

$$f(x)=kx+\frac{x^۳}{۳} \quad , \quad k\in R$$

مثال ۴: تمام توابع پیوسته $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$ را بیابید به طوری که به ازای هر $x,y\in\mathbf{R}$ داشته باشیم

$$f(x+y)=f(x)f(y) \qquad (*)$$

حل: در معادلهٔ بالا عبارت ضرب دو تابع وجود دارد، اولین کاری که باید انجام دهیم این است که عبارت ضرب را به جمع تبدیل کنیم. تابعی که عبارت ضرب را به جمع تبدیل می‌کند تابع log است، بنابراین تابع پیوسته $g(x)$ را به صورت $g(x)=\ln[f(x)]$ تعریف می‌کنیم. از معادله $(*)$ نتیجه می‌گیریم که:

$$g(x+y)=g(x)+g(y)$$

با استفاده از قضیه ۱، $g(x)=kx$, $k\in\mathbf{R}$ به دست می آید در نتیجه:

$$f(x)=e^{kx} \quad , \quad k\in R \qquad \text{و یا} \qquad f(x)=e^{g(x)}$$

مثال ۵: همهٔ توابع $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ را بیابید به طوری که به ازای هر y,x متعلق به $\mathbf{R}$ داشته باشیم که

$$f(x+m)=f(x)+f(m) \quad , \quad f(xy)=f(x)f(y)$$

که در آن m عدد حقیقی غیر صفر و ثابت است.

حل: دو عدد x,y دلخواه متعلق به$\mathbf{R}$ با شرط $y\neq ۰$ در نظر بگیرید:

$$f(x+y)=f\left(\frac{x}{y}m\frac{y}{m}+m\frac{y}{m}\right)=f\left(\left(m+\frac{x}{y}m\right)\frac{y}{m}\right)$$

$$=f\left(m+\frac{x}{y}m\right)f\left(\frac{y}{m}\right)=\left[f(m)+f\left(\frac{x}{y}m\right)\right]f\left(\frac{y}{m}\right)$$

$$=f(m)f\left(\frac{y}{m}\right)+f\left(\frac{x}{y}m\right)f\left(\frac{y}{m}\right)$$

$$=f\left(m\frac{y}{m}\right)+f\left(\frac{x}{y}m\frac{y}{m}\right)=f(x)+f(y)$$

MATH75.IR

در نتیجه برای هر $y \neq ۰, x, y \in \mathbf{R}$ داریم که:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (۱)$$

حال دو عدد x, y با شرط $x, y \in \mathbf{R}$ و $y = ۰$ در نظر بگیرید:

$$f(x+y) = f(x+۰) = f(x) + f(y) - f(۰) \qquad (۲)$$

از طرفی داریم که $f(۰ + m) = f(۰) + f(m)$، در نتیجه $f(۰) = ۰$. با جایگذاری $f(۰) = ۰$ در رابطه بالا به دست می‌آوریم که $f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (۳)$

از دو رابطهٔ (۱) و (۳) نتیجه می‌گیریم که $f(x)$ در معادله کوشی صدق می‌کند.

همچنین داریم که:

$$f(x^۲) = f(x \times x) = f(x) \times f(x) = f(x)^۲$$

حال x ای بزرگتر از صفر در نظر بگیرید:

$$f(x) = f\left((\sqrt{x})^۲\right) = f(\sqrt{x})^۲ \geq ۰$$

از رابطهٔ بالا نتیجه می‌گیریم که به ازای هر $x \in \mathbf{R}^+$، $f(x) \geq ۰$ است.

حال از قضیه ۴ استفاده می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم که اگر $f(x)$ در مفروضات مسأله صدق کند سپس k ای وجود دارد به طوری که:

$$\forall x \in R : \quad f(x) = kx$$

حال این شرط را در مسأله جایگزین می‌کنیم:

$$f(xy) = f(x)f(y) \implies kxy = kx \times ky \qquad (*)$$

در عبارت (*)، $x = y = ۱$ را قرار می‌دهیم و نتیجه می‌گیریم $k = ۰, ۱$، بنابراین $f(x)$ باید به یکی از دو صورت $f(x) = ۰, x$ باشد. به راحتی می‌توان این دو تابع را در مسأله جایگزین نمود و نتیجه گرفت که این دو تابع در مفروضات مسأله صدق می‌کنند.

قضیه ۵: تمام توابع ضربی و پیوسته $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ عبارتند از $f(x) \equiv ۰$ ، $f(x) = x^k$، که در آن $k \in \mathbf{R}$ عددی ثابت است.

اثبات: داریم که $f(۱) = f(۱ \times ۱) = f(۱)f(۱)$، در نتیجه $f(۱) = ۰$ و یا $f(۱) = ۱$.

فرض کنید که $f(۱) = ۰$. x دلخواهی در نظر بگیرید. بر طبق فرض قضیه داریم که $f(x \times ۱) = f(x)f(۱) = ۰$، در نتیجه به دست می‌آید که $f(x) \equiv ۰$.

MATH75.IR

حال فرض کنید که $f(۱) = ۱$. x دلخواهی متعلق به $\mathbf{R}^+$ در نظر بگیرید. به ازای هر n طبیعی داریم که

$$f(x)^n = f(x^n) \qquad (۱)$$

چرا که $f(x^۲) = f(x)f(x) = f(x)^۲$ و $f(x^n) = f(x^{n-۱})f(x)$. در نتیجه به راحتی می‌توان رابطهٔ (۱) را با استقرا ثابت نمود.

حال در رابطهٔ (۱) به جای x، عدد $x^{\frac{۱}{n}}$ را قرارمی دهیم

$$f\left(x^{\frac{۱}{n}}\right) = f(x)^{\frac{۱}{n}} \qquad (۲)$$

عدد گویا a را در نظر بگیرید. سه حالت زیر پیش می آید:

۱) $a > ۰$. فرض کنید که $n, m \in \mathbf{N}$ و $a = \frac{n}{m}$، درنتیجه

$$f(x^a) = f\left(x^{\frac{n}{m}}\right) = f\left(\left(x^{\frac{۱}{m}}\right)^n\right) = f\left(x^{\frac{۱}{m}}\right)^n = \left[f(x)^{\frac{۱}{m}}\right]^n = f(x)^a \qquad (۳)$$

دقت شود که در به دست آوردن رابطهٔ (۳) از دو رابطهٔ (۱) و (۲) استفاده شده است.

۲) $a = ۰$. در نتیجه

$$f(x^a) = f(۱) = ۱ = f(x)^۰ = f(x)^a$$

۳) $a < ۰$. فرض کنید که $a = -b, b > ۰$، درنتیجه

$$f(x^a) = \frac{۱}{f(x^b)} \qquad \text{و یا} \qquad f(x^a)f(x^{-a}) = f(۱) = ۱$$

b عددی گویا و مثبت است بنابراین از حالت (۱) به دست می آید که $f(x^b) = f(x)^b$، از این رو داریم:

$$f(x^a) = \frac{۱}{f(x^b)} = \frac{۱}{f(x)^b} = f(x)^{-b} = f(x)^a$$

از سه حالت بالا نتیجه می‌گیریم که به ازای هر x حقیقی مثبت و گویا $f(x^a) = f(x)^a$ است. از آنجا که $f(x)$ تابعی پیوسته است می‌توان نتیجه گرفت که این رابطه به ازای a های گنگ هم برقرار است، بنابراین:

$$\forall \alpha \in R\ ,\ x \in R^+ \ :\ f(x^\alpha) = f(x)^\alpha$$

از قضایای مربوط به لگاریتم می‌دانیم که $x \in \mathbf{R}^+$, $x = e^{\ln x}$.

بنابراین داریم که:

$$f(x) = f(e^{\ln x}) = f(e)^{\ln x} \qquad (*)$$

MATH75.IR

$f(e)$ عددی نامنفی است زیرا $f(e) = f(\sqrt{e})^{۲} \geq ۰$، در نتیجه $f(e) = ۰$ و یا k ای حقیقی موجود است که $f(e) = e^k$. از این رو دو حالت زیر پیش می‌آید:

۱ — $f(e) = ۰$. از رابطهٔ $(*)$ نتیجه می‌گیریم که $f(x) \equiv ۰$

۲ — $f(e) = e^k$. از رابطهٔ $(*)$ نتیجه می‌گیریم که $f(x) = (e^k)^{\ln x} = (e^{\ln x})^k = x^k$

بدین ترتیب حکم ثابت می‌شود.

قضیه ٦: تمامی توابع ضربی و پیوسته $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ عبارتند از:

$$f(x) = |x|^k \ , \ k \in R \quad , \quad f(x) = x^k \ , \ k \in R^+ \quad , \quad f(x) \equiv ۰$$

مثال ٦: همه‌ی توابع $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ را بیابید به‌طوری که به‌ازای هر x, y مختلف متعلق به $\mathbf{R}$ داشته باشیم که

$$(*) \qquad f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \left(\frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)}\right)$$

حل: زوج مرتب $(x, ۰)$ را به‌جای زوج (x, y) در معادله مفروض جایگزین می‌کنیم:

$$f\left(\frac{x+۰}{x-۰}\right) = \left(\frac{f(x)+f(۰)}{f(x)-f(۰)}\right)$$

بنابراین

$$f(x)\,(f(۱) - ۱) = f(۰)\,(۱ + f(۱))$$

از آنجا که این رابطه به‌ازای هر $x \neq ۰$ درست است و همچنین تابع $f(x)$ نمی‌تواند همواره متحد با صفر باشد باید داشته باشیم $f(۰) = ۰$, $f(۱) = ۱$.

حال در معادله $(*)$ به جای زوج (x, y)، زوج مرتب (x, xy) را قرار می‌دهیم:

$$f\left(\frac{x+xy}{x-xy}\right) = \frac{f(x)+f(xy)}{f(x)-f(xy)} \quad \Longrightarrow \quad f\left(\frac{۱+y}{۱-y}\right) = \frac{f(x)+f(xy)}{f(x)-f(xy)} \qquad (۱)$$

این‌بار در معادله $(*)$ زوج مرتب $(۱, y)$ را قرار می‌دهیم:

$$f\left(\frac{۱+y}{۱-y}\right) = \frac{f(۱)+f(y)}{f(۱)-f(y)} \quad \Longrightarrow \quad f\left(\frac{۱+y}{۱-y}\right) = \frac{۱+f(y)}{۱-f(y)} \qquad (۲)$$

از دو رابطهٔ (۱) و (۲) به دست می‌آوریم که: $\dfrac{f(x)+f(xy)}{f(x)-f(xy)} = \dfrac{۱+f(y)}{۱-f(y)}$

و یا

$$(۱ - f(y))(f(x) + f(xy)) = (۱ + f(y))(f(x) - f(xy)) \qquad (۳)$$

با ساده کردن عبارت (۳) به دست می‌آوریم که $f(xy) = f(x)f(y)$

MATH75.IR

از آنجا که $f(x)$ تابعی پیوسته است و همچنین در معادله $f(xy) = f(x)f(y)$ صدق می‌کند می‌توان نتیجه گرفت که a ای وجود دارد به طوری که همواره داریم:

$$f(x) = x^a \ , \ x \geq ۰ \qquad (۴)$$

(البته این موضوع به‌صورت قضیه‌ای بعداً گفته خواهد شد).

در معادله (*) زوج مرتب $(۱, ۲)$ را قرار می‌دهیم:

$$f\left(\frac{۲+۱}{۲\cdot ۱}\right) = \frac{f(۲)+f(۱)}{f(۲)-f(۱)} \qquad (۵)$$

با جایگزین عبارت (۴) در عبارت (۵) به دست می‌آوریم که

$$۶^a = ۲^a + ۳^a + ۱ \quad \Longrightarrow \quad (۲^a - ۱)(۳^a - ۱) = ۲ \qquad (۶)$$

حال چهار حالت زیر را در نظر بگیرید:

۱) $a \leq ۰$. در نتیجه:

$$|۳^a - ۱| < ۱ \ , \ |۲^a - ۱| < ۱ \quad \Longrightarrow \quad |(۲^a - ۱)(۳^a - ۱)| < ۱$$

که این تناقض است.

۲) $۰ < a < ۱$. در نتیجه:

$$۰ < ۲^a - ۱ < ۱ \ , \ ۰ < ۳^a - ۱ < ۲ \quad \Longrightarrow \quad ۲ < (۲^a - ۱)(۳^a - ۱) < ۲$$

این رابطه نیز تناقض است.

۳) $a > ۱$. در نتیجه:

$$۲^a - ۱ > ۱ \ , \ ۳^a - ۱ > ۲ \quad \Longrightarrow \quad ۲ < (۲^a - ۱)(۳^a - ۱)$$

این رابطه نیز تناقض است.

۴) $a = ۱$. در این صورت رابطهٔ (۶) درست است.

در نتیجه a فقط می‌تواند برابر ۱ باشد که در این صورت جواب $f(x) = x$ حاصل می‌گردد. به راحتی می‌توان بازبینی نمود که این جواب در شرایط مسأله صدق می‌کند.

MATH75.IR

تابع $f(x)$ را تابع ضربی گویند اگر به ازای هر x, y متعلق به دامنهٔ $f(x)$ داشته باشیم $f(xy) = f(x)f(y)$.

قضیه ۷: اگر تابع $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ جمعی و ضربی باشد سپس همواره داریم $f(x) \equiv ۰$ و یا $f(x) \equiv x$.

اثبات: x مثبت دلخواهی در نظر بگیرید. با استفاده از ضربی بودن $f(x)$ به دست می‌آوریم که $f(x) = f(\sqrt{x})^۲ \geq ۰$. بنابراین از قضیه ۴ نتیجه می‌شود که k ای وجود دارد به طوری که $f(x) = kx$. همچنین از ضربی بودن نتیجه می‌شود که:

$$kx \times ky = kxy \qquad \text{و یا} \qquad f(x)f(y) = f(xy)$$

اگر در رابطهٔ بالا زوج $(x, y) = (۱, ۱)$ را قرار دهیم به دست می‌آید که $k = ۰, ۱$، یعنی $f(x)$ باید به‌صورت $f(x) = ۰$ و یا $f(x) = x$ باشد. واضح است این دو تابع در شرایط قضیه نیز صدق می‌کنند.

تابع $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید که به ازای هر x حقیقی داشته باشیم:

$$f(g_۱(x)) + f(g_۲(x)) + \cdots + f(g_k(x)) = g_{k+۱}(x) \qquad (*)$$

که در آن $g_i(x)$ ها توابع معلومی از x هستند و هدف ما پیدا کردن تمام توابع $f(x)$ است به طوری که در رابطهٔ بالا صدق کنند. در حل اینگونه معادلات، روشی به نام جایگزینی وجود دارد که اکثر معادلات خوش تعریف توسط آن حل می‌شوند. در اینجا ما باید k عدد $x_۱, x_۲, \ldots, x_k$ را طوری بیابیم که وقتی x_i ها را در معادله $(*)$ جایگزین می‌کنیم یک دستگاه k معادله و k مجهول به دست آید تا بتوان تک تک $f(g_i(x))$ ها را بر حسب $g_{k+۱}(x)$ محاسبه نمود. این روش را در مثالهای زیر تشریح می‌کنیم:

مثال ۷: تمام توابع $f : \mathbf{R} - \{۰\} \to \mathbf{R}$ را بیابید به طوری که به ازای هر x حقیقی و غیر صفر داشته باشیم:

$$f(x) = ۲f\left(\frac{۳}{x}\right) \qquad (*)$$

حل: $x = \alpha$ را در رابطه $(*)$ قرار می دهیم:

$$f(\alpha) + ۲f\left(\frac{۳}{\alpha}\right) = \alpha \qquad (۱)$$

فرض کنید که $\frac{۳}{x} = \alpha$ و یا $x = \frac{۳}{\alpha}$. واضح است که α تمامی اعداد حقیقی و غیر صفر را می‌دهد. با جایگزینی این x در رابطهٔ $(*)$ به دست می آوریم که:

$$f\left(\frac{۳}{\alpha}\right) + ۲f(\alpha) = \frac{۳}{\alpha} \qquad (۲)$$

از حل دو معادله (۱) و (۲) به طور همزمان، به دست می آوریم که $f(\alpha) = \frac{\frac{۶}{\alpha} - \alpha}{۳}$, $\alpha \in \mathbf{R} - \{۰\}$ و یا معادلاً

$f(x) = \frac{\frac{۶}{x} - x}{۳}$, $x \in \mathbf{R} - \{۰\}$.

MATH75.IR

مثال ۸: تمام توابع $f : \mathbf{R} - \{-۱, ۰, ۱\} \to \mathbf{R}$ را بیابید به طوری که به ازای هر x متعلق به دامنهٔ $f(x)$ داشته باشیم:

$$f\left(\frac{x-۱}{x+۱}\right) + f\left(-\frac{۱}{x}\right) + f\left(\frac{۱+x}{۱-x}\right) = x \qquad (*)$$

حل: فرض کنید که $\alpha = \frac{x-۱}{x+۱}$، در نتیجه به دست می‌آوریم که $x = \frac{۱+\alpha}{۱-\alpha}$. حال این x را در رابطهٔ $(*)$ جایگزین می کنیم:

$$f(\alpha) + f\left(\frac{-۱+\alpha}{۱+\alpha}\right) + f\left(\frac{-۱}{\alpha}\right) = \frac{۱+\alpha}{۱-\alpha} \qquad (۱)$$

حال فرض کنید $\alpha = -\frac{۱}{x}$ و یا $x = -\frac{۱}{\alpha}$. دوباره این x را در رابطهٔ $(*)$ جایگزین می‌کنیم:

$$f\left(\frac{\alpha-۱}{\alpha+۱}\right) + f(\alpha) + f\left(\frac{۱+\alpha}{۱-\alpha}\right) = -\frac{۱}{\alpha} \qquad (۲)$$

دوباره تعریف می‌کنیم که $\alpha = \frac{۱+x}{۱-x}$ و یا معادلاً $x = \frac{\alpha-۱}{\alpha+۱}$. حال x را در رابطهٔ $(*)$ قرار می‌دهیم:

$$f\left(\frac{-۱}{\alpha}\right) + f\left(\frac{۱+\alpha}{۱-\alpha}\right) + f(\alpha) = \frac{\alpha-۱}{\alpha+۱} \qquad (۳)$$

یک بار هم $x = \alpha$ را در رابطهٔ $(*)$ قرار می‌دهیم:

$$f\left(\frac{\alpha-۱}{\alpha+۱}\right) + f\left(-\frac{۱}{\alpha}\right) + f\left(\frac{۱+\alpha}{۱-\alpha}\right) = \alpha \qquad (۴)$$

از حل دستگاه ۴ معادله و ۴ مجهول بالا می‌توان $f(\alpha)$ را پیدا کرد. برای مثال می‌توان دو برابر رابطه (۴) را از مجموع روابط (۱)، (۲) و (۳) کم کرد تا $f(\alpha)$ به دست آید:

$$(۱) + (۲) + (۳) - ۲ \times (۴) \quad \Longrightarrow \quad f(\alpha) = \frac{۲\alpha^۴ + ۳\alpha^۲ - ۱}{۳\alpha(۱-\alpha^۲)}$$

و یا معادلاً $\qquad f(x) = \frac{۲x^۴ + ۳x^۲ - ۱}{۳x(۱-x^۲)}$

با همین روش می‌توان معادلات تابعی با دسته اعداد زیر را نیز حل کرد:

$$\{x, a-x\}\ ,\ \left\{x\ ,\ \frac{a}{x}\right\}\ ,\ \left\{x\ ,\ \frac{۲x-۷}{x+۱}\ ,\ \frac{۷+x}{۲-x}\right\}\ ,\ \left\{x, \frac{x+۳}{x+۱}, \frac{۳+x}{۱-x}\right\}$$

$$\left\{x\ ,\ \frac{۱+x}{۲-x}\ ,\ \frac{۱}{۱-x}\ ,\ \frac{x-۲}{۲x-۱}\ ,\ \frac{x-۱}{x}\ ,\ \frac{۲x-۱}{x+۱}\right\}$$

دقت شود که در ۲ مثال بالا، دسته اعداد به فرم $\left\{x, \frac{۳}{x}\right\}$ و $\left\{\frac{x-۱}{x+۱}, -\frac{۱}{x}, \frac{۱+x}{۱-x}\right\}$ بودند.

MATH75.IR

مثال ۹: همهٔ توابع حقیقی $f(x)$ روی اعداد حقیقی غیر صفر را بیابید به طوری که داشته باشیم

$$\frac{۱}{x}f(-x)+f\left(\frac{۱}{x}\right)=x\ ,\ x\neq ۰ \qquad (*)$$

حل: ابتدا فرض کنید که $x=-\alpha$ و یا $-x=\alpha$. حال این x را در رابطهٔ $(*)$ جایگزین می کنیم:

$$-\frac{۱}{\alpha}f(\alpha)+f\left(\frac{-۱}{\alpha}\right)=-\alpha \qquad (۱)$$

این بار فرض کنید $x=\frac{۱}{\alpha}$ و یا $\alpha=\frac{۱}{x}$. با جایگزینی این x در رابطهٔ $(*)$ به دست می‌آوریم که:

$$\alpha f\left(\frac{-۱}{\alpha}\right)+f(\alpha)=\frac{۱}{\alpha} \qquad (۲)$$

از حل دستگاه (۱) و (۲) به دست می‌آوریم

$$f(\alpha)=\frac{\alpha^{۲}+\frac{۱}{\alpha}}{۲}$$

یا

$$f(x)=\frac{x^{۲}+\frac{۱}{x}}{۲}\ ,\ x\neq ۰$$

تابع $f(x)$ را صعودی گویند اگر برای هر x,y متعلق به دامنه f داشته باشیم که:

$$x\leq y \quad\Longleftrightarrow\quad f(x)\leq f(y)$$

به همین ترتیب تابع $f(x)$ را نزولی گویند اگر برای هر x,y متعلق به دامنهٔ f داشته باشیم که:

$$x\leq y \quad\Longleftrightarrow\quad f(x)\geq f(y)$$

تابع $f(x)$ را یکنوا گویند اگر به یکی از دو فرم تابع صعودی و یا نزولی باشد.

در هر کدام از روابط بالا اگر شرط تساوی را برداریم توابع اکید به دست می‌آید یعنی اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی و همچنین اکیداً یکنوا.

تابع $f(x)$ را یک به یک گویند اگر برای هر x,y متمایز متعلق به دامنه f داشته باشیم $f(x)\neq f(y)$ و یا به عبارتی دیگر به‌ازای هر x,y متعلق به دامنه f داشته باشیم:

$$x=y \quad\Longleftrightarrow\quad f(x)=f(y)$$

قضیه ۸: تابع پیوسته $f(x)$ مفروض است. اگر $f(x)$ یک به یک باشد سپس اکیداً یکنوا نیز خواهد بود.

این قضیه با استفاده از تعریف پیوستگی و یک به یک بودن تابع ثابت می‌شود.

MATH75.IR

مثال ۱۰: تمام توابع پیوسته $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ را بیابید به طوری که به ازای هر x متعلق به $\mathbf{R}$ داشته باشیم $fff(x) = x$.

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم که $f(x)$ تابعی یک به یک است و برای این کار دو x, y متعلق به $\mathbf{R}$ را در نظر می‌گیریم که $f(x) = f(y)$، در نتیجه $ff(x) = ff(y)$ و $fff(x) = fff(y)$، بنابراین $x = y$. این عبارت تساوی نشان می‌دهد که $f(x)$ تابعی یک به یک است.

با استفاده از قضیه بالا از آنجا که $f(x)$ تابعی پیوسته و یک به یک است باید تابعی اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی نیز باشد. فرض کنید $f(x)$ تابعی اکیداً صعودی باشد.

حال x دلخواهی متعلق به $\mathbf{R}$ در نظر بگیرید. سه حالت ممکن زیر پیش می‌آید:

۱) $f(x) < x$، در نتیجه $ff(x) < f(x)$ و به همین ترتیب $fff(x) < ff(x)$. از ترکیب این سه نامساوی تناقض زیر به دست می‌آید:

$$x = fff(x) < ff(x) < f(x) < x$$

۲) $f(x) > x$، در نتیجه $ff(x) > f(x)$ و به همین ترتیب $fff(x) > ff(x)$. از ترکیب این سه نامساوی تناقض زیر حاصل می‌گردد:

$$x = fff(x) > ff(x) > f(x) > x$$

۳) $f(x) = x$، در نتیجه $fff(x) = x$.

از سه حالت بالا حالات اول و دوم نمی‌تواند اتفاق بیفتد پس به ناچار حالت سوم اتفاق می‌افتد یعنی به ازای هر x متعلق به $\mathbf{R}$، $f(x) = x$ می‌شود به عبارت دیگر $f(x)$ باید تابع همانی باشد. به همین ترتیب اگر فرض کنیم که $f(x)$ تابع اکیداً نزولی باشد به این نتیجه می‌رسیم که چنین تابعی موجود نیست. در نتیجه تنها جواب مسأله تابع همانی است.

کلید حل دسته زیادی از معادلات تابعی اثبات یک به یک بودن تابع مفروض است. این مطلب چه در مورد توابع با دامنه $\mathbf{R}$ و چه با دامنه $\mathbf{Z}$ و یا همچنین $\mathbf{N}$ درست است.

مثال ۱۱: تمام توابع $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ را بیابید به طوری که به ازای هر n, m متعلق به $\mathbf{Z}$ داشته باشیم

$$f(m + f(n)) = f(m) + n \qquad (*) \qquad (South\ Africa\ \text{۱۹۹۷})$$

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم که $f(n)$ یک تابع یک به یک است. برای این کار دو عدد صحیح i, j را در نظر می‌گیریم به طوری که $f(i) = f(j)$، حال در رابطهٔ $(*)$ به جای زوج (m, n)، یک بار $(\circ, i)$ و بار دیگر $(\circ, j)$ را جایگزین می‌کنیم:

$$f(\circ + f(i)) = f(\circ) + i \qquad (۱) \quad , \quad f(\circ + f(j)) = f(\circ) + j \qquad (۲)$$

MATH75.IR

طرفین چپ روابط (۱) و (۲) با هم برابرند در نتیجه طرفین راست آنها نیز باید با هم برابر باشند یعنی $i = j$. این معادل یک به یک بودن تابع $f(n)$ است.

در معادلهٔ $(*)$ زوج مرتب $(۰, ۰)$ را جایگزین می‌کنیم در نتیجه $ff(۰) = f(۰)$. از آنجا که $f(n)$ تابعی یک به یک است به دست می‌آید که $f(۰) = ۰$.

در معادلهٔ $(*)$ زوج $(۰, n)$ را جایگزین می‌کنیم:

$$ff(n) = f(۰) + n = n \qquad (۳)$$

در معادلهٔ $(*)$ زوج $(m, f(n))$ را به جای (m, n) جایگزین می‌کنیم:

$$f(m + ff(n)) = f(m) + f(n) \quad \Longrightarrow \quad f(m + n) = f(m) + f(n)$$

رابطهٔ بالا می‌گوید که $f(n)$ یک تابع جمعی است. از قضایای مربوط به تابع جمعی بیاد دارید که

$$f(n) = nf(۱) \ , \ n \in N \qquad (۴)$$

از دو رابطهٔ (۳) و (۴) به دست می‌آوریم که:

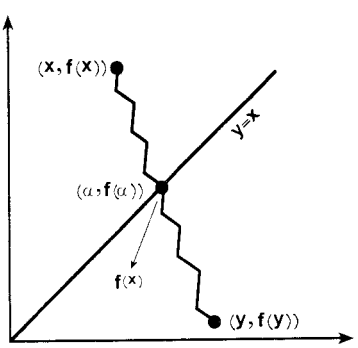
$$n = ff(n) = f(n)f(۱) = nf(۱)^۲$$

و یا $f^۲(۱) = ۱$، در نتیجه $f(n) \equiv n$ و یا $f(n) \equiv -n$. به راحتی می‌توان بازبینی نمود که دو تابع به دست آمده، در رابطهٔ $(*)$ صدق می‌کنند.

قضیه ۹: تابع پیوسته $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ مفروض است. می‌دانیم $x_۰$ ای حقیقی وجود ندارد به طوری که $f(x_۰) = x_۰$ و یا به عبارت دیگر $f(x)$ نقطهٔ ثابت ندارد. در این صورت یک و تنها یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد:

۱) به ازای هر x حقیقی داریم که $f(x) > x$.

۲) به ازای هر x حقیقی داریم که $f(x) < x$.



اثبات: فرض کنید که هیچ کدام از دو حالت بالا اتفاق نیفتد یعنی x, y حقیقی موجود باشند که $f(x) > x$, $f(y) < y$. با استفاده از خاصیت تقارن می‌توان فرض کرد که $x > y$. خط $y = x$ را در صفحهٔ مختصات دو بعدی در نظر بگیرید. پر واضح است که نقطهٔ $(x, f(x))$، بالای این خط و نقطهٔ $(y, f(y))$ پایین این خط قرار دارد. از آنجا که $f(x)$ تابعی پیوسته است، $f(x)$ در بازهٔ (x, y) یک مسیر پیوسته به وجود می‌آورد که یک سر آن پایین این خط و سر دیگر آن بالای این خط قرار دارد، در نتیجه این مسیر پیوسته و این خط در لااقل یک نقطه

MATH75.IR

باید یکدیگر را قطع کنند (بر طبق خاصیت انعکاسی). فرض کنید یکی از این نقاط انقطاع $(\alpha, f(\alpha))$ باشد. از آنجا که این نقطه روی خط $y = x$ قرار دارد باید داشته باشیم $\alpha = f(\alpha)$، ولی بر طبق فرض اولیه، $f(x)$ نقطهٔ ثابت ندارد که معادل این است که فرض ابتدایی ما اشتباه بوده است و یا معادلاً باید یکی از دو حالت (۱) و یا (۲) اتفاق بیفتد. بدین ترتیب حکم ثابت می‌شود.

مثال ۱۲: تابع پیوسته $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ مفروض است. می‌دانیم که به ازای هر عدد حقیقی x، عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $\underbrace{ff\cdots f}_{n}(x) = ۱$. ثابت کنید $f(۱) = ۱$.

حل: در مورد تابع $f(x)$ دو حالت زیر پیش می آید:

۱) $x_۰$ ای وجود دارد به طوری که $f(x_۰) = x_۰$. بر طبق فرض مسأله برای این $x_۰$، m طبیعی وجود دارد که $\underbrace{ff\cdots f}_{m}(x) = ۱$. از طرفی داریم $\underbrace{ff\cdots f}_{m}(x_۰) = \cdots = f(x_۰) = x_۰$، در نتیجه به دست می‌آوریم که $x_۰ = ۱$ و یا معادلاً $f(۱) = ۱$.

۲) $x_۰$ ای وجود ندارد به طوری که $f(x_۰) = x_۰$ و یا معادلاً $f(x)$ نقطه ثابت ندارد. در نتیجه بر طبق قضیه بالا باید یکی از دو حالت زیر را داشته باشیم:

(i) به ازای هر x حقیقی داریم که $f(x) > x$. بر طبق فرض مسأله برای $x = ۱$، m ای طبیعی وجود دارد به طوری که $\underbrace{ff\cdots f}_{m}(۱) = ۱$. از طرفی داریم $\underbrace{ff\cdots f}_{m}(۱) > \cdots > f(۱) > ۱$، اما این رابطه تناقض است.

(ii) به ازای هر x حقیقی داریم که $f(x) < x$. مانند قسمت (i) باز هم به تناقض می‌رسیم.

در نتیجه هیچ کدام از حالات $(i), (ii)$ نمی‌تواند اتفاق بیفتد و باید به ناچار حالت (۱) اتفاق بیفتد که برای آن هم برابری $f(۱) = ۱$ ثابت شد.

دسته‌ای از معادلات تابعی وجود دارند که با استفاده از قضایای مربوط به حد حل می‌شوند. این امر در چند مثال زیر روشن می‌شود.

مثال ۱۳: همه توابع پیوسته $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ را بیابید به طوری که به ازای هر $x \in \mathbf{R}^+$ داشته باشیم: $f(x^۲) = \frac{f(x)}{x}$.

حل: با اندکی دقت می‌توان پی برد که تابع $\frac{۱}{x}$ یک جواب خصوصی معادله است در نتیجه تابع پیوسته $g(x)$ را به صورت $xf(x)$ تعریف می‌کنیم و یا معادلاً $f(x) = g(x) \times \frac{۱}{x}$. بنابراین به ازای هر $x \in \mathbf{R}^+$ خواهیم داشت

MATH75.IR

$g(x) = g(x^۲)$. حال x دلخواهی با شرط $x > ۰$ در نظر بگیرید. می‌دانیم که:

$$g(x) = g(\sqrt{x}) = g\left(x^{\frac{۱}{۴}}\right) = \cdots = g\left(x^{\frac{۱}{۲^n}}\right) = \cdots$$

و یا معادلاً به ازای هر n طبیعی داریم که: $g(x) = g\left(x^{\frac{۱}{۲^n}}\right)$. حال از طرفین تساوی حد می‌گیریم : $\lim_{n\to\infty} g(x) = \lim_{n\to\infty} g\left(x^{\frac{۱}{۲^n}}\right)$. از آنجا که $g(x)$ تابعی پیوسته است داریم که $\lim_{n\to\infty} g\left(x^{\frac{۱}{۲^n}}\right) = g\left(\lim_{n\to\infty} x^{\frac{۱}{۲^n}}\right)$ ، در نتیجه: $\lim_{n\to\infty} g(x) = g\left(\lim_{n\to\infty} x^{\frac{۱}{۲^n}}\right)$

می‌دانیم که $g(x)$ به n بستگی ندارد بنابراین $\lim_{n\to\infty} g(x) = g(x)$. همچنین از آنجا که $x > ۰$ است به دست می‌آید که $\lim_{n\to\infty} x^{\frac{۱}{۲^n}} = ۱$. از دو رابطه اخیر نتیجه می‌شود که $g(x) = g(۱)\ ,\ x > ۰$.

در نتیجه $f(x) = \frac{g(۱)}{x}$ و یا معادلاً $f(x) = \frac{k}{x}\ ,\ k \in \mathbf{R}$.

مثال ۱۴: همه توابع پیوسته $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ را بیابید به طوری که به ازای هر $x \in \mathbf{R}$ داشته باشیم:

$$f(x) = f\left(x^۲ + \frac{۱}{۴}\right) \qquad (۱) \qquad (Bulgaria\ ۱۹۹۷)$$

حل: در معادله (۱) به جای عدد x، عدد $-x$ را جایگزین می‌کنیم:

$$f(-x) = f\left(x^۲ + \frac{۱}{۴}\right)$$

در نتیجه $f(x) = f(-x)$، یعنی کافی است $f(x)$ را برای مقادیر مثبت بیابیم.

برای $x > ۰$ دلخواهی عبارت $x^۲ + \frac{۱}{۴} = \alpha$ را تعریف می‌کنیم، بنابراین $x = \sqrt{\alpha - \frac{۱}{۴}}$. حال در معادله (۱) مقدار متناظر x را جایگزین می‌کنیم:

$$f(\alpha) = f\left(\sqrt{\alpha - \frac{۱}{۴}}\right) \qquad (۲) \qquad , \qquad \alpha > \frac{۱}{۴}$$

x دلخواهی با شرط $x > \frac{۱}{۲}$ در نظر بگیرید. برای این مقدار x، دنباله $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x_۱ = x \qquad , \qquad x_{n+۱} = \sqrt{x_n - \frac{۱}{۴}} \qquad n \geq ۱$$

به راحتی می‌توان ثابت کرد که تمامی جملات این دنباله وجود دارند. همچنین می‌توان نتیجه گرفت که این دنباله اکیداً نزولی است چرا که می‌دانیم همواره به‌ازای هر α دلخواهی داریم $\alpha \leq \alpha^۲ + \frac{۱}{۴}$ ، و علامت تساوی وقتی رخ

MATH75.IR

می‌دهد که $\alpha = \frac{۱}{۲}$. همچنین می‌دانیم که در دنباله بالا هیچ وقت جمله‌ای برابر $\frac{۱}{۲}$ نمی‌شود، این گفته از آنجا نتیجه می‌شود که اگر $x_n = \frac{۱}{۲}$ سپس $x_{n-۱} = \frac{۱}{۲}$ و به همین ترتیب $x = x_۱ = \frac{۱}{۲}$ ، ولی بر طبق فرض $x > \frac{۱}{۲}$ است.

دنباله $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای اکیداً نزولی است و تمامی جملات آن اعداد مثبتی هستند در نتیجه از قضایای مربوط به حد می‌توان نتیجه گرفت که جملات این دنباله به سمت عدد مشخصی میل می‌کنند به عبارت دیگر عددی مانند l وجود دارد که $\lim_{n\to\infty} x_n = l$. از آنجا که دنباله همگرا است می‌توان نتیجه گرفت $x_n = x_{n+۱} = l$ $(n \to \infty)$، همچنین داریم $x_{n+۱} = \sqrt{x_n - \frac{۱}{۴}}$، در نتیجه $l = \sqrt{l - \frac{۱}{۴}}$، بنابراین $l = \frac{۱}{۲}$ به دست می‌آید.

از طرفی از رابطهٔ (۲) به دست می‌آید که $f(x_n) = f(x_{n+۱})$، در نتیجه داریم:

$$f(x) = f(x_۱) = f(x_۲) = \cdots = f(x_n) = \cdots$$

بنابراین $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. $f(x)$ تابعی پیوسته است، در نتیجه: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$. همچنین داریم $\lim_{n\to\infty} x_n = l = \frac{۱}{۲}$. از سه رابطه اخیر به دست می‌آید که به ازای هر $x \geq \frac{۱}{۲}$ داریم که $f(x) = f\left(\frac{۱}{۲}\right)$. به همین ترتیب برای $۰ \leq x \leq \frac{۱}{۲}$، دنبالهٔ زیر را تعریف می‌کنیم:

$$x_۱ = x \quad , \quad x_{n+۱} = x_n^۲ + \frac{۱}{۴} \qquad n \geq ۱$$

همانند قسمت قبل و با همان روش می‌توان ثابت کرد که وقتی n به سمت بی نهایت میل کند x_n نیز به سمت $\frac{۱}{۲}$ میل خواهد کرد. در نتیجه به دست می‌آوریم که $f(x) = f\left(\frac{۱}{۲}\right)$.

در کل ما به دست آوردیم که به ازای هر x باید داشته باشیم $f(x) = f(\frac{۱}{۲})$. یعنی $f(x)$ باید تابع ثابت باشد.

مثال ۱۵: همه توابع پیوسته $f : \mathbf{R} - \{۱\} \to \mathbf{R}$ را بیابید به طوری که به‌ازای هر $x \in \mathbf{R} - \{۱\}$ داشته باشیم: $f(x) = f\left(\frac{x}{۱-x}\right)$.

این مثال نیز عیناً مثل دو مثال قبلی قابل حل است. مثلاً برای x های بزرگتر از ۱ دنبالهٔ زیر را تعریف می‌کنیم:

$$x_۱ = x \quad , \quad x_{n+۱} = \frac{x_n}{۱ - x_n} \qquad n \geq ۱$$

از آنجایی که این مثال نکتهٔ اضافی دیگری ندارد، بقیهٔ راه حل را به عنوان تمرین به خودتان واگذار می‌کنیم.

MATH75.IR

شمارش با استفاده از تابع مولد

فرض کنید x عددی حقیقی و $|x| < ۱$ باشد. داریم که

$$\frac{۱}{۱-x} = (۱-x)^{-۱} = ۱ + x + x^{۲} + \cdots + x^{n} + \cdots \qquad (*)$$

با استفاده از دو نکته زیر می‌توان رابطهٔ بالا را ثابت کرد:

i) $x^{k} - ۱ = (x-۱)(۱ + x + x^{۲} + \cdots + x^{k-۱})$ به ازای هر $k \in \mathbf{N}$.

ii) اگر x عددی حقیقی و $|x| < ۱$ باشد سپس $\lim_{n\to\infty} x^{n} = ۰$.

همچنین می‌توان رابطهٔ مهم زیر را نیز ثابت کرد:

$$\frac{۱}{(۱-x)^{۲}} = (۱-x)^{-۲} = ۱ + ۲x + ۳x^{۲} + \cdots + (n+۱)x^{n} + \cdots \qquad |x| < ۱$$

قضیه ۱: برای تمامی x های حقیقی با شرط $|x| < ۱$ و n های طبیعی داریم که:

$$\frac{۱}{(۱-x)^{n}} = (۱-x)^{-n} = ۱ + \binom{۱+n-۱}{۱}x + \binom{۲+n-۱}{۲}x^{۲} + \cdots$$

$$+ \binom{r+n-۱}{r}x^{r} + \cdots = \sum_{k=۰}^{\infty} \binom{k+n-۱}{k}x^{k}$$

این قضیه را می‌توان با استفاده از استقراء ثابت نمود البته به کمک رابطهٔ زیر:

$$\binom{r}{۰} + \binom{r+۱}{۱} + \cdots + \binom{r+k}{k} = \binom{r+k+۱}{k} \quad , \quad k, r \in N$$

روش دیگر اثبات قضیه بالا استفاده از مشتق است. می‌دانیم که مشتق تابع x^{k} برابر $kx^{k-۱}$ و همچنین مشتق تابع $\frac{۱}{x^{k}}$ برابر $\frac{-k}{x^{k+۱}}$ است. حال اگر از رابطهٔ $(*)$، $n-۱$ بار مشتق بگیریم قضیه ثابت می‌شود. به‌عنوان نمونه برای $n = ۲$ قضیه را ثابت می‌کنیم:

از رابطهٔ $(*)$ مشتق می‌گیریم

$$\left(\frac{۱}{۱-x}\right)' = (۱ + x + x^{۲} + \cdots)'$$

MATH75.IR

همچنین میدانیم که

$$\left(\frac{۱}{۱-x}\right)' = -\frac{-۱}{(۱-x)^۲} = \frac{۱}{(۱-x)^۲}$$

و

$$(۱ + x + x^۲ + \cdots)' = ۱ + ۲x + ۳x^۲ + \cdots + (n+۱)x^n + \cdots$$

از این رو به دست می‌آوریم که:

$$\frac{۱}{(۱-x)^۲} = ۱ + ۲x + ۳x^۲ + \cdots + (n+۱)x^n + \cdots$$

قضیه ۲: فرض کنید a_r برابر باشد با تعداد راههای انتخاب r عضو از مجموعهٔ زیر:

$$M = \{n_۱ \times b_۱, n_۲ \times b_۲, \ldots, n_k \times b_k\}$$

در این صورت a_r برابر است با ضریب x^r در چند جمله‌ای زیر:

$$\left(۱ + x + x^۲ + \cdots + x^{n_۱}\right)\left(۱ + x + x^۲ + \cdots + x^{n_۲}\right) \cdots \left(۱ + x + x^۲ + \cdots + x^{n_k}\right)$$

(نمادی که برای مجموعهٔ M به کار رفته است حاکی از این است که مجموعهٔ M شامل $n_۱$ تا عضو $b_۱$، $n_۲$ تا عضو $b_۲$، ... ، n_k تا عضو b_k است.)

اثبات: فرض کنید r عضو از مجموعهٔ M برداشته‌ایم که در این میان $\alpha_۱$ عضو آن از $b_۱$، $\alpha_۲$ عضو آن از $b_۲$، ... است از این رو داریم که: $\alpha_۲ + \alpha_۲ + \cdots + \alpha_k = r$

از طرفی اگر چندجمله‌ای بالا را بسط دهیم جملهٔ $x^{\alpha_۱}x^{\alpha_۲}\cdots x^{\alpha_k}$ که در آن $x^{\alpha_۱}$ از پرانتز اول، $x^{\alpha_۲}$ از پرانتز دوم، ... ، x^{α_k} از پرانتز kام است، دقیقاً یکبار در بسط چندجمله‌ای ظاهر می‌شود.

همچنین فرض کنید که در بسط چندجمله‌ای مفروض، جمله $x^{\beta_۱}x^{\beta_۲}\cdots x^{\beta_k}$ که در آن x^{β_i} متعلق به پرانتز i ام است و $r = \beta_۱ + \beta_۲ + \cdots + \beta_k$، ظاهر شده باشد. در این صورت اگر از مجموعهٔ M، $\beta_۱$ عضو از $b_۱$، $\beta_۲$ عضو از $b_۲$، ... ، β_k تا عضو از b_k برداریم این انتخاب یک انتخاب مطلوب از مجموعهٔ M با r عضو خواهد بود.

در بالا یک تناظر یک به یک بین انتخابهای r تایی از مجموعهٔ M و جمله‌های با توان r در بسط چندجمله‌ای بالا برقرار کردیم، در نتیجه تعداد اعضای این دو متناظر با هم برابرند.

مثال ۱: فرض کنید a_r برابر باشد با تعداد راههای انتخاب r عضو از مجموعهٔ $M = \{\infty, b_۱, \infty, b_۲, \ldots, \infty, b_k\}$. a_r را برای r های طبیعی به دست آورید.

حل: از قضیه بالا استفاده کرده و به جای $n_۱$ تا n_k عدد ∞ را قرار می‌دهیم. حال کافی است که ضریب x^r را به

MATH75.IR

دست آوریم (بر طبق قضایای مربوط به چندجمله‌ای می‌توان فرض کرد که $|x| < ۱$) :

$$\left(۱+x+x^۲+\cdots\right)\left(۱+x+x^۲+\cdots\right)\cdots\left(۱+x+x^۲+\cdots\right)=$$

$$=\left(\frac{۱}{۱-k}\right)^k=\sum_{r=۰}^{\infty}\binom{r+k-۱}{r}x^r$$

(در عبارت بالا k پرانتز وجود دارد.)

در نتیجه $a_r=\binom{r+k-۱}{r}$.

مثال ۲: فرض کنید a_r برابر باشد با تعداد راههای قرار دادن r چیز یکسان در n جعبه مختلف. a_r را بیابید.

حل: a_r برابر است با ضریب x^r در چندجمله‌ای زیر:

$$\left(۱+x+k^۲+\cdots\right)\left(۱+x+x^۲+\cdots\right)\cdots\left(۱+x+x^۲+\cdots\right)$$

که در آن تعداد پرانتزها برابر n است. این مطلب از آنجا نتیجه می‌شود که اگر $\alpha_۱$ عضو در جعبه اول , $\alpha_۲$ عضو در جعبه دوم , ... , α_n عضو در جعبه n ام قرار دهیم سپس $x^{\alpha}x^{\alpha_۲}\cdots x^{\alpha_n}$ که در آن x^{α_i} متعلق به پرانتز i ام است دقیقاً یکبار در بسط چندجمله‌ای می‌آید. (مانند اثبات قضیه ۲)

بر طبق مثال ۱، ضریب x^r در این چندجمله‌ای برابر $\binom{r+n-۱}{r}$ است.

نکته: در مثال بالا هر یک از پرانتزها باید به صورت $۱+x+\cdots+x^r$ باشد ولی از آنجا که اگر به این پرانتزها جملات x^{r+i} $(i\geq ۱)$ را اضافه کنیم در ضریب x^r تأثیری حاصل نمی‌شود می‌توان به جای آن، عبارت $۱+x+\cdots+x^r+\cdots$ را به کار برد.

مثال ۳: فرض کنید a_r برابر باشد با تعداد راههای قرار دادن r چیز یکسان در n جعبه مختلف به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد. a_r را به ازای r های طبیعی به دست آورید.

حل: a_r برابر است با ضریب x^r در چندجمله‌ای زیر:

$$\left(x+x^۲+x^۳+\cdots\right)\left(x+x^۲+x^۳+\cdots\right)\cdots\left(x+x^۲+x^۳+\cdots\right)$$

این مطلب با استدلالی مشابه استدلال قبل به دست می‌آید و یا می‌توان گفت که این همان مثال قبل است ولی از آنجا که از هر پرانتزی باید یک جملهٔ غیر ثابت انتخاب شود تا جعبه‌ای تهی نباشد، باید هر پرانتزی از $x^۱$ شروع شود و $x^۰$ را نداشته باشد:

$$\left(x+x^۲+x^۳+\cdots\right)\left(x+x^۲+x^۳+\cdots\right)\cdots\left(x+x^۲+x^۳+\cdots\right)=\left(x+x^۲+x^۳\cdots\right)^n=$$

$$x^n\times\left(۱+x+x^۲+\cdots\right)^n=x^n\times\frac{۱}{(۱-x)^n}=x^n\times\sum_{i=۰}^{\infty}\binom{i+n-۱}{i}x^i=\sum_{i=n}^{\infty}\binom{r-۱}{n-۱}x^r$$

MATH75.IR

در نتیجه برای r های کمتر از n، a_n صفر است و برای r های ناکمتر از n داریم $a_n = \binom{r-1}{n-1}$.

مثال ۴: پیدا کنید تعداد راههایی که می‌توان ۴۰ شئ یکسان را در ۷ جعبه مختلف قرار داد به طوری که جعبه اول لااقل ۳ شئ و حداکثر ۱۰ شئ داشته باشد.

حل: فرض کنید a_r برابر باشد با تعداد راههایی که می‌توان r شئ یکسان را در ۷ جعبه مختلف با شرایط مسأله قرار داد. در اینجا هدف ما پیدا کردن $a_{۴۰}$ می‌باشد.

$a_{۴۰}$ برابر است با ضریب $x^{۴۰}$ در چندجمله‌ای زیر (از آنجا که جعبه اول باید لااقل ۳ شئ داشته باشد باید پرانتز اول جملات $x^۲, x^۱, x^۰$ را دارا نباشد و همچنین به $x^{۱۰}$ نیز ختم شود زیرا در غیر این صورت بیشتر از ۱۰ شئ در جعبه اول قرار می‌گیرد):

$$\left(x^۳ + x^۴ + \cdots + x^{۱۰}\right)\left(۱ + x + x^۲ + \cdots\right) \cdots \left(۱ + x + x^۲ + \cdots\right) =$$

$$\left(x^۳ + x^۴ + \cdots + x^{۱۰}\right)\left(۱ + x + x^۲ + \cdots\right)^۶ = x^۳ \times \left(۱ + x + \cdots + x^۷\right) \times$$

$$\frac{۱}{(۱-x)^۶} = x^۳(۱-x^۸)\frac{۱}{(۱-x)^۷} = (x^۳ - x^{۱۱}) \times \sum_{r=۰}^{\infty} \binom{r+۶}{r} x^r$$

در نتیجه:

$$a_{۴۰} = \binom{۳۷+۶}{۶} - \binom{۲۹+۶}{۶} = \binom{۴۳}{۶} - \binom{۳۵}{۶}$$

مثال ۵: پیدا کنید تعداد راههایی که می‌توان $۲n$ توپ از مجموعه‌ای که دارای n توپ آبی یکسان، n توپ قرمز یکسان و n توپ سفید یکسان است، انتخاب کرد.

حل: فرض کنید a_r برابر باشد با تعداد راههایی که می‌توان r توپ از مجموعهٔ بالا انتخاب کرد. در این صورت هدف ما پیدا کردن $a_{۲n}$ می‌باشد. $a_{۲n}$ برابر است با ضریب $x^{۲n}$ در عبارت زیر:

$$\left(۱ + x + x^۲ + \cdots + x^n\right)\left(۱ + x + x^۲ + \cdots + x^n\right)\left(۱ + x + x^۲ + \cdots + x^n\right) =$$

$$\left(۱ + x + x^۲ + \cdots + x^n\right)^۳ = \frac{(۱-x^{n+۱})^۳}{(۱-x)^۳} = \left(۱ - ۳x^{n+۱} + ۳x^{۲n+۲} - x^{۳x+۳}\right) \times \sum_{r=۰}^{\infty} \binom{r+۲}{۲} x^r$$

در نتیجه:

$$a_{۲n} = \binom{۲n+۲}{۲} - ۳\binom{n-۱+۲}{۲} = \binom{۲n+۲}{۲} - ۳\binom{n+۱}{۲}$$

نکته: در مثال بالا باید توجه کرد که هر پرانتز چندجمله‌ای، باید در نهایت به x^n ختم شود و به صورت $۱ + x + x^۲ + \cdots$ نامحدود نباشد چرا که اگر مثلاً $x^{n+۱}$ به $۱ + x + \cdots + x^n$ اضافه شود در ضریب $x^{۲n}$ تأثیر می‌گذارد.

MATH75.IR

مثال ٦: فرض کنید a_r برابر باشد با تعداد راههایی که می‌توان r شئ یکسان را در داخل ۵ جعبه مختلف قرار داد به طوری که جعبه‌های ۱ و ۳ و ۵ خالی نباشند. a_r را بیابید.

حل: a_r برابر است با ضریب x^r در چندجمله‌ای زیر:

$$\left(x+x^{۲}+x^{۳}+\cdots\right)^{۳}\left(۱+x+x^{۲}+\cdots\right)^{۲}=x^{۳}\times\frac{۱}{(۱-x)^{۵}}=x^{۳}\times\sum_{r=۰}^{\infty}\binom{r+۴}{r}x^{r}$$

در نتیجه:

$$a_r=\binom{r-۳+۴}{۴}=\binom{r+۱}{۴}$$

مثال ۷: تعداد زیرمجموعه‌های $۴n$ عضوی مجموعه زیر را بیابید.

$$M=\{(۳n)\times x\ ,\ (۳n)\times y\ ,\ (۳n)\times z\}$$

حل: a_r را همانند مثالهای قبل تعریف می‌کنیم. در اینجا هدف ما پیدا کردن $a_{۴n}$ و یا همان ضریب $x^{۴n}$ در عبارت زیر است.

$$\left(۱+x+x^{۲}+\cdots+x^{۳n}\right)^{۳}=\left(\frac{x^{۳n+۱}-۱}{x-۱}\right)^{۳}=\left(۱-x^{۳n+۱}\right)^{۳}\times\left(\frac{۱}{۱-x}\right)^{۳}$$

$$=\left(۱-۳x^{۳n+۱}+۳x^{۶n+۲}-x^{۹n+۳}\right)\times\left[\sum_{r=۰}^{\infty}\binom{r+۲}{۲}x^{۲}\right]$$

از این رو داریم:

$$a_{۴n}=\binom{۴n+۲}{۲}-۳\binom{n-۱+۲}{۲}=\binom{۴n+۲}{۲}-۳\binom{n+۱}{۲}$$

مثال ۸: تعداد زیرمجموعه‌های $۳n$ عضوی مجموعهٔ زیر را بیابید:

$$M=\{n\times z_{۱},n\times z_{۲},\ldots,n\times z_{m}\}\qquad n,m\geq ۳$$

حل: a_r را همانند قبل تعریف می‌کنیم. از این رو $a_{۳n}$ برابر است با ضریب $x^{۳n}$ در عبارت زیر.

$$\left(۱+x+x^{۲}+\cdots+x^{n}\right)^{m}=\left(۱-x^{n+۱}\right)^{m}\times\left(\frac{۱}{۱-x}\right)^{m}$$

$$=\left(۱-mx^{n+۱}+\binom{m}{۲}x^{۲n+۲}-\binom{m}{۳}x^{۳n+۳}+\binom{m}{۴}x^{۴n+۴}+\cdots\right)\times\left[\sum_{r=۰}^{\infty}\binom{r+m-۱}{r}x^{۲}\right]$$

در نتیجه $a_{۳n}$ برابر است با:

$$a_{۳n}=\binom{۳n+m-۱}{m-۱}-m\binom{۲n+m-۲}{m-۱}+\binom{m}{۲}\binom{n+m-۳}{m-۱}$$

MATH75.IR

قضیه ۳: فرض کنید a_r برابر باشد با تعداد تبدیلهای r تایی از مجموعهٔ $M = \{n_1 \times b_1, n_2 \times b_2, \ldots, n_k \times b_k\}$. در این صورت a_r برابر است با ضریب $\frac{x^r}{r!}$ در چندجمله‌ای زیر:

$$\left(1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n_1}}{n_1!}\right)\left(1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} \cdots + \frac{x^{n_2}}{n_2!}\right) \cdots \left(1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n_k}}{n_k!}\right)$$

اثبات: فرض کنید r عضو از مجموعهٔ M برداشته‌ایم که در این میان α_1 عضو آن از b_1، α_2 عضو آن از b_2، ... ، α_k عضو آن از b_k است. از این رو داریم

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = r$$

حال به هر ترتیبی که این r عضو را در یک خط بچینیم یک تبدیل r تایی مطلوب به دست می‌آید. این r عضو را به $\frac{r!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_k!}$ طریق می‌توان در یک خط ردیف کرد.

ضریب $x^{\alpha_1}x^{\alpha_2}\cdots x^{\alpha_k}$ که در آن x^{α_1} از پرانتز اول، x^{α_2} از پرانتز دوم، ... ، x^{α_k} از پرانتز k ام انتخاب شده است برابر $\frac{1}{\alpha_k} \times \cdots \times \frac{1}{\alpha_2!} \times \frac{1}{\alpha_1!}$ یا $\frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_k!}$ است. بنابراین ضریب $\frac{x^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k}}{r!} = \frac{x^{\alpha_1}x^{\alpha_2}\cdots x^{\alpha_k}}{r!}$ برابر است با $\frac{r!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_k!}$.

با استفاده از تناظر بالا حکم ثابت می‌شود.

مثال ۹: به چند طریق می‌توان ۴ حرف از کلمهٔ $PAPAYA$ را در یک سطر چید؟

حل: مسأله معادل است با تعداد تبدیلهای ۴ تایی از مجموعهٔ $\{3 \times A, 2 \times P, 1 \times y\}$، که بر طبق قضیه ۳ برابر است با ضریب $\frac{x^4}{4!}$ در چندجمله‌ای زیر:

$$\left(1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)\left(1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!}\right)\left(1 + \frac{x^1}{1!}\right)$$

در چندجمله‌ای بالا مجموع جملات شامل x^4 برابر است با:

$$x \cdot \frac{x^2}{2!} \cdot x + \frac{x^2}{2!} \cdot x \cdot x + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{x^2}{2!} \cdot 1 + \frac{x^3}{3!} \cdot x \cdot + \frac{x^3}{3!} \cdot x \cdot 1 = a_4 \cdot \frac{x^4}{4!}$$

در نتیجه:

$$a_4 = \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{3!}$$

e را برابر عدد نپر (۲/۷۱۸) در نظر بگیرید. در ریاضیات پیشرفته ثابت می‌شود که:

$$e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} \qquad (1)$$

اگر در عبارت (۱) به جای x، عدد $-x$ را جایگزین کنیم به دست می‌آید که:

$$e^{-x} = 1 - \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^r\frac{x^r}{r!} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{x^r}{r!} \qquad (2)$$

MATH75.IR

از جمع و تفریق دو عبارت (۱), (۲) به دست می آید که:

$$۱ + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} + \cdots + \frac{x^{۲r}}{۲r!} + \cdots = \frac{e^x + e^{-x}}{۲}$$

$$x + \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} + \cdots + \frac{x^{۲r+۱}}{(۲r+۱)!} + \cdots = \frac{e^x - e^{-x}}{۲}$$

همچنین ضرب دو عبارت (۱), (۲) برابر ۱ است چرا که $e^x e^{-x} = e^۰$.

kی دلخواهی در نظر بگیرید. به جای x در عبارت (۱)، عدد kx را قرار می‌دهیم:

$$۱ + \frac{kx}{۱!} + \frac{(kx)^۲}{۲!} + \cdots + \frac{(kx)^r}{r!} + \cdots = \sum_{r=۰}^{\infty} k^r \cdot \frac{x^r}{r!} = e^{kx}$$

مثال ۱۰: فرض کنید a_r برابر باشد با تعداد تبدیلهای r تایی از مجموعهٔ $M = \{\infty \cdot b_۱, \infty \cdot b_۲, \ldots, \infty \cdot b_k\}$. a_r را بیابید.

حل: a_r برابر است با ضریب $\frac{x^r}{r!}$ در عبارت زیر:

$$\left(۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \cdots\right)\left(۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \cdots\right) \cdots \left(۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \cdots\right) =$$

$$\left(۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \cdots\right)^k = (e^x)^k = e^{kx} = \sum_{r=۰}^{\infty} k^r \cdot \frac{x^r}{r!}$$

در نتیجه $a_r = k^r$.

نکته‌ای قبلاً در مورد قضیه ۲ گفته شد که در مورد قضیه ۳ نیز صادق است. و آن به این صورت است که در چندجمله‌ای مورد نظر می‌توان به جای $۱ + x + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots$، عبارت نامحدود $۱ + \frac{x^۱}{۱!} + \frac{x^۲}{۲!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots$ را به کار برد یعنی پرانتز را به صورت جمع نامتناهی جمله نوشت البته با همان شرایط ذکر شده. (توجه کنید همواره چنین کاری ممکن نیست.)

مثال ۱۱: برای هر $r \in N$ تعداد راههایی را بیابید که می‌توان r شئ مختلف را در ۴ جعبه مختلف قرار داد به طوری که در جعبه‌های ۱ و ۲ تعداد زوجی شئ و در جعبه ۳ تعداد فردی شئ باشد.

حل: فرض کنید a_r برابر باشد با تعداد راههایی که می‌توان r شئ مختلف را در ۴ جعبه مختلف با شرایط مسأله

MATH75.IR

قرار داد. در این صورت a_r برابر است با ضریب $\frac{x^r}{r!}$ در چندجمله‌ای زیر:

$$\left(۱+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۴}{۴!}+\cdots\right)\left(۱+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۴}{۴!}+\cdots\right)\left(x+\frac{x^۳}{۳!}+\frac{x^۵}{۵!}+\cdots\right)\left(۱+\frac{x^۱}{۱!}+\frac{x^۲}{۲!}+\cdots\right)$$

$$=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{۲}\right)^۲\left(\frac{e^x-e^{-x}}{۲}\right)e^x=\frac{۱}{۸}\left(e^{۲x}-e^{-۲x}\right)\left(e^{۲x}+۱\right)$$

$$=\frac{۱}{۸}\left(e^{۴x}-۱+e^{۲x}-e^{-۲x}\right)$$

$$=\frac{۱}{۸}\left[-۱+\sum_{r=۰}^{\infty}(۴^r+۲^r-(-۲)^r)\frac{x^r}{r!}\right]$$

از این رو داریم که:

$$a_r=\frac{۱}{۸}\left(۴^r+۲^r-(-۲)^r\right)\qquad r=۱,۲,\ldots$$

توجه کنید در مثال بالا از آنجا که باید جعبه اول تعداد زوجی شئ داشته باشد، باید فقط توانهای زوج در پرانتز اول باشد و همچنین پرانتز سوم فقط توانهای فرد را دارا باشد تا شامل تعداد زوجی شئ نشود.

مثال ۱۲: برای هر $r\in N$ تعداد راههایی را پیدا کنید که می‌توان r شی مختلف را در داخل ۵ جعبه مختلف قرار داد به طوری که در جعبه‌های ۱ و ۳ و ۵ تعداد فردی شئ و در جعبه‌های ۲ و ۴ تعداد زوجی شئ باشد.

حل: a_r را همانند مثال قبل تعریف می‌کنیم. در این صورت a_r برابر است با ضریب $\frac{x^r}{r!}$ در چندجمله‌ای زیر:

$$\left(\frac{e^x-e^{-x}}{۲}\right)^۳\times\left(\frac{e^x+e^{-x}}{۲}\right)^۲=\frac{۱}{۲۵}\left(e^{۲x}-e^{-۲x}\right)^۲\left(e^x-e^{-x}\right)$$

$$=\frac{۱}{۳۲}\left(e^{۴x}+e^{-۴x}-۲\right)\left(e^x-e^{-x}\right)$$

$$=\frac{۱}{۳۲}\left(e^{۵x}-e^{-۳x}-۲e^x-e^{۳x}-e^{-۵x}+۲e^{-x}\right)$$

$$=\sum_{r=۰}^{\infty}\frac{۱}{۳۲}\left(۵^r+(-۳)^r-۲-۳^r-(-۵)^r+۲(-۱)^r\right)\frac{x^r}{r!}$$

در نتیجه:

$$a_r=\frac{۱}{۳۲}\left[۵^r-(-۵)^r-۳^r+(-۳)^r-۲+۲(-۱)^r\right]$$

توجه کنید که اگر r عددی زوج باشد، سپس a_r برابر صفر می‌شود.

نکته: باید دقت کنید که اگر در مسأله‌ای اشیا مختلف بودند از قضیه ۳ استفاده کنید و اگر اشیاً یکسان بودند از قضیه ۲ استفاده کنید. لازم به ذکر است که اگر در انتخاب قضیه ۲ و ۳ اشتباه کنید جواب کاملاً متفاوتی به دست

MATH75.IR

می‌آورید که معمولاً در مسایل تستی هر دو جواب داده می‌شود. مثلاً اگر در مثال بالا r شئ یکسان را در ۵ جعبه مختلف با شرایط ذکر شده قرار می‌دادیم جواب خیلی ساده‌تر می‌شد چرا که کافی بود ضریب x^r را در چندجمله‌ای زیر به دست آوریم:

$$\left(۱+x^۲+x^۴+\cdots\right)^۲ \times \left(x+x^۳+x^۵+\cdots\right)^۳$$

مثال ۱۳: فرض کنید a_r برابر باشد با تعداد دنباله‌های r عضوی که عضوهایش اعداد ۰, ۱, ۲, ۳ هستند و اعداد ۲, ۳ حداقل یکبار در آن ظاهر شده‌اند. a_n را به ازای n های طبیعی بیابید.

حل: a_n برابر است با ضریب $\frac{x^n}{n!}$ در چندجمله‌ای زیر:

$$\left(۱+x+\frac{x^۲}{۲۱}+\cdots\right)\left(۱+x+\frac{x^۲}{۲!}+\cdots\right)\left(x+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}+\cdots\right)\left(x+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}+\cdots\right)=$$
$$\left(۱+x+\frac{x^۲}{۲!}+\cdots\right)^۲\left(x+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}+\cdots\right)^۲=(e^x)^۲\,(e^x-۱)^۲=e^{۲x}\left(e^{۲x}-۲e^x+۱\right)=$$
$$e^{۴x}-۲e^{۳x}+e^{۲x}=\sum_{r=۰}^{\infty}\left(۴^r-۲\cdot ۳^r+۲^r\right)\frac{x^r}{r!}$$

در نتیجه a_n برابر است با

$$a_n=۴^n-۲\cdot ۳^n+۲^n \qquad n=۱,۲,\ldots$$

مثال ۱۴: به ازای هر $r\in N$ تعداد راههایی را بیابید که می‌توان r شئ مختلف را در n جعبه مختلف قرار داد به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد.

حل: فرض کنید a_r برابر تعداد راههای مفروض باشد. در این صورت a_r برابر است با ضریب $\frac{x^r}{r!}$ در عبارت زیر:

$$\left(x+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}+\cdots\right)^n=(e^x-۱)^n=\sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i}(e^x)^{n-i}(-۱)^i$$
$$=\sum_{i=۰}^{n}(-۱)^i\binom{n}{i}\left[\sum_{r=۰}^{\infty}(n-i)^r\frac{x^r}{x!}\right]$$
$$=\sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i}e^{x(n-i)}(-۱)^i$$
$$=\sum_{r=۰}^{\infty}\left[\sum_{i=۰}^{n}(-۱)^i\binom{n}{i}(n-i)^r\right]\frac{x^r}{r!}$$

در نتیجه

$$a_r=\sum_{i=۰}^{n}(-۱)^i\binom{n}{i}(n-i)^r$$

راه حل دیگر برای این مثال استفاده از اصل شمول – عدم شمول می‌باشد

MATH75.IR

دنباله بازگشتی

دنباله $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید این دنباله برای هر $n \geq r$ در رابطهٔ زیر صدق کند:

$$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + \cdots + c_r a_{n-r} = 0 \quad , \quad c_0, c_r \neq 0$$

که در آن c_i, r ها اعداد مفروض و ثابتی هستند. به این دنباله یک دنباله بازگشتی خطی و همگن گویند.

به عنوان مثال می‌توان دنباله فیبوناچی را نام برد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = 1 \quad , \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad n \geq 2$$

چند جملهٔ اول این دنباله عبارتند از $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

در اینجا هدف ما این است که در اینگونه دنباله‌ها a_n را بر حسب فقط n بیابیم به طوری که a_n دیگر به جملات قبلی خود وابسته نباشد. بدین منظور دو روش زیر ارائه می‌گردد:

۱ – حل معادله بازگشتی از طریق معادله مشخصه

فرض کنید دنباله $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ در رابطه روبرو صدق کند $c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + \cdots + c_r a_{n-r} = 0$

معادله مشخصه دنباله $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$c_0 x^r + c_1 x^{r-1} + \cdots + c_r = 0 \quad (1) \qquad \text{و یا} \qquad c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_r x^{n-r} = 0$$

چندجمله‌ای (۱)، یک چندجمله‌ای از درجه r است در نتیجه دارای دقیقاً r ریشه است و از طرفی از آنجا که c_r صفر نیست، هیچ کدام ازاین r ریشه صفر نیستند.

فرض کنید معادله مشخصه دارای r ریشهٔ مختلف $\alpha_r, \ldots, \alpha_2, \alpha_1$ باشد. با استفاده از قضایایی در جبر خطی می‌توان ثابت کرد که به ازای هر $n \in \mathbf{N}$، a_n برابر است با:

$$a_n = A_1 \alpha_1^n + A_1 \alpha_2^n + \cdots + A_r \alpha_r^n \qquad n \geq 0$$

MATH75.IR

که در آن A_i ها اعدادی ثابت هستند و از روی r جمله اول دنباله قابل محاسبه‌اند.

مثال ۱: دنباله $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید که

$$a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = 1 \quad , \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad n \geq 2$$

به ازای هر n طبیعی، a_n را فقط بر حسب n بیابید.

حل: رابطه بازگشتی دنباله مفروض عبارت است از:

$$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$$

در نتیجه معادله مشخصه دنباله مفروض برابر است با:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

ریشه‌های معادله مشخصه برابرند با:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

در نتیجه B, A ای موجودند به طوری که به ازای هر n طبیعی داشته باشیم:

$$a_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad (*)$$

به ازای $n = 0, 1$، رابطه $(*)$ به دستگاه زیر تغییر می‌یابد:

$$\begin{cases} A + B = 1 & n = 0 \\ A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 & n = 1 \end{cases}$$

از حل دستگاه دو معادله و دو مجهول بالا به دست می آید که

$$A = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \quad , \quad B = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

در نتیجه:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] \quad , \quad n \in N$$

حال فرض کنید که معادله مشخصه (۱) دارای k ریشه مختلف $\alpha_k, \cdots, \alpha_2, \alpha_1$ $(1 \leq k \leq r)$ باشد و از هر ریشهٔ α_i، m_i تا مضاعف داشته باشد یعنی مثلاً معادله (۱) دارای m_1 تا ریشه α_1 باشد. از آنجا که معادله (۱) دارای دقیقاً r ریشه است باید داشته باشیم: $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = r$

MATH75.IR

می‌توان ثابت کرد که به ازای هر $n \in \mathbf{N}$، a_n برابر است با:

$$\begin{aligned} a_n = & \left(A_{11} + A_{12} \times n + \cdots + A_{1m_1} n^{m_1-1}\right)(\alpha_1)^n \\ & + \left(A_{21} + A_{22} \times n + \cdots + A_{2m_2} n^{m_2-1}\right)(\alpha_2)^n \\ & \vdots \\ & + \left(A_{k1} + A_{k2} \times n + \cdots + A_{km_k} n^{m_k-1}\right)(\alpha_k)^n \end{aligned}$$

که در آن A_{ij} ها اعداد ثابتی‌اند و از روی r جمله اول دنباله به دست می‌آیند.

مثال ۲: برای دنباله $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ داریم که:

$$a_0 = 1 \ , \ a_1 = 2 \ , \ a_2 = 3 \quad , \quad a_n = 7a_{n-1} - 15a_{n-2} + 9a_{n-3} \quad n \geq 3$$

به‌ازای هر n طبیعی، a_n را فقط برحسب n بیابید.

حل: معادله مشخصه رابطه بازگشتی بالا عبارت است از:

$$x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = 0$$

و یا معادلاً $(x-3)^2(x-1) = 0$. در نتیجه معادله مشخصه مفروض دارای دو ریشه متمایز $x_1 = 3, x_2 = 1$ است. بنابراین اعداد A, B, C موجود هستند به طوری که به ازای هر n طبیعی داشته باشیم:

$$a_n = (A + Bn)3^n + C(1)^n \quad (*)$$

با جایگزینی $n = 0, 1, 2$ در رابطهٔ $(*)$ دستگاه زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{cases} A + 0 + C = 1 & n = 0 \\ 3A + 3B + C = 2 & n = 1 \\ 9A + 18B + C = 3 & n = 2 \end{cases}$$

از حل دستگاه سه معادله و سه مجهول بالا به دست می‌آید که:

$$A = 1 \ , \ B = -\frac{1}{3} \ , \ C = 0$$

در نتیجه:

$$a_n = \left(1 - \frac{n}{3}\right)3^n = (3-n)3^{n-1} \quad , \quad n \in N$$

مثال ۳: دنباله $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ مفروض است. می دانیم که:

$$a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = 0 \quad , \quad a_n = 2(a_{n-1} - a_{n-2}) \quad n \geq 2$$

MATH75.IR

به ازای هر n طبیعی، a_n را فقط بر حسب n بیابید.

حل: معادله مشخصهٔ رابطه بازگشتی بالا برابر است با:

$$x^۲ - ۲x + ۲ = ۰$$

این معادله مشخصه دارای دو ریشه $x_۱ = ۱ + i \ , \ x_۲ = \bar{x}_۱ = ۱ - i$ است.

برای راحتی کار $x_۱, x_۲$ را به صورت قطبی می‌نویسیم:

$$x_۱ = \sqrt{۲}\left(\cos\frac{\pi}{۴} + i\sin\frac{\pi}{۴}\right)$$

$$x_۲ = \sqrt{۲}\left(\cos\frac{\pi}{۴} - i\sin\frac{\pi}{۴}\right)$$

در نتیجه دو عدد A, B موجود هستند به طوری که به ازای هر n طبیعی داشته باشیم:

$$a_n = Ax_۱^n + Bx_۲^n$$

$$= \left(\sqrt{۲}\right)^n \left[A\left(\cos\frac{n\pi}{۴} + i\sin\frac{n\pi}{۴}\right) + B\left(\cos\frac{n\pi}{۴} - i\sin\frac{n\pi}{۴}\right)\right]$$

$$= \left(\sqrt{۲}\right)^n \left(C\cos\frac{n\pi}{۴} + D\sin\frac{n\pi}{۴}\right)$$

که در آن $D = i(A - B) \ , \ C = A + B$.

حال رابطهٔ بالا را به ازای $n = ۰, ۱$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} C = ۱ & n = ۰ \\ \sqrt{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}C + \frac{\sqrt{۲}}{۲}D\right) = ۰ & n = ۱ \end{cases}$$

در نتیجه $C = ۱ \ , \ D = -۱$. بنابراین

$$a_n = \left(\sqrt{۲}\right)^n \left(\cos\frac{n\pi}{۴} - \sin\frac{n\pi}{۴}\right) \quad , \quad n \in N$$

دنباله $\{a_n\}_{n=۰}^{\infty}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید این دنباله برای هر $n \geq r$ در رابطه زیر صدق کند:

$$c_۰a_n + c_۱a_{n-۱} + \cdots + c_ra_{n-r} = f(n) \quad (*)$$

که در آن c_i, r ها اعداد مفروضی هستند و $f(n)$ یک تابع برحسب n است. برای به دست آوردن a_n برحسب n، ابتدا یک جواب $\left\{a_n^{(p)}\right\}_{n=۰}^{\infty}$ پیدا می‌کنیم که در رابطه بالا صدق کند. به این جواب، جواب خصوصی معادله $(*)$

MATH75.IR

گویند. سپس فرض می‌کنیم که $f(n)$ برابر صفر باشد بعد از طریق روشی که قبلاً گفته شد یعنی به دست آوردن ریشه‌های معادله همگن، جواب عمومی $\left\{a_n^{(h)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ را به دست می‌آوریم.حال a_n را برابر $a_n^{(p)} + a_n^{(h)}$ قرار می‌دهیم. واضح است که دنبالهٔ $\left\{a_n^{(h)} + a_n^{(p)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ یک جواب معادله $(*)$ است. درنهایت با کمک r جمله اول دنباله، ضرایبی که در $a_n^{(h)}$ وجود دارد را به دست می‌آوریم. این امر در مثال زیر توضیح داده می‌شود:

مثال ۴: دنباله $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ را بیابید به طوری که:

$$a_0 = 3 \quad , \quad a_n - 3a_{n-1} = 2 - 2n^2 \quad n \geq 1$$

حل: برای به دست جواب عمومی ابتدا معادله $a_n - 3a_{n-1} = 0$ را حل می‌کنیم. معادلهٔ مشخصه این معادله برابر است با $x - 3 = 0$ که دارای ریشه $x_1 = 3$ است در نتیجه داریم که: $a_n^{(h)} = A \cdot 3^n$

برای به دست آوردن جواب خصوصی از آنجا که $f(n) = 2 - 2n^2$ یک چندجمله‌ای است فرض می‌کنیم که $a_n^{(p)} = Bn^2 + Cn + D$. البته دلیل این امر بعداً گفته می‌شود:

$$a_n^{(p)} - 3a_n^{(p)} = 2 - 2n^2$$

در نتیجه:

$$Bn^2 + Cn + D - 3\left(B(n-1)^2 + C(n-1) + D\right) = 2 - 2n^2$$

$$(D - 3B + 3C - 3D) + (C + 6B - 3C)n + (B - 3B)n^2 = 2 - 2n^2$$

از آنجا که رابطه بالا به ازای هر n طبیعی و یا به بیان دیگر به ازای بی‌نهایت n صادق است باید ضرایب متناظر با هم برابر باشند یعنی:

$$\begin{cases} B - 3B = -2 \\ C + 6B - 3C = 0 \\ D - 3B + 3C - 3D = 2 \end{cases}$$

از حل دستگاه بالا به دست می‌آوریم که

$$B = 1 \ , \ C = 3 \ , \ D = 2$$

در نتیجه $a_n^{(p)} = n^2 + 3n + 2$، بنابراین

$$a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = n^2 + 3n + 2 + A \cdot 3^n$$

حال در رابطه بالا n را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$n = 0 \implies 3 = A + 2 \implies A = 1$$

MATH75.IR

در نتیجه: $a_n = ۳^n + n^۲ + ۳n + ۲ \quad , \quad n \geq ۰$

در حل اینگونه معادلات بازگشتی خطی ناهمگن تنها مشکلی که وجود دارد این است که حدس جواب خصوصی در اکثر مواقع مشکل است، ولی قاعده‌هایی برای به دست آوردن جواب خصوصی می‌توان به دست آورد مثلاً اینکه وقتی $f(n)$ یک چندجمله‌ای باشد سپس یک جواب خصوصی به صورت چندجمله‌ای وجود دارد. در جدول زیر برای فرم‌های متداول $f(n)$، جوابهای خصوصی‌ای ارائه شده است:

$a_n^{(p)}$	$f(n)$
$B \cdot k^n$	k ریشه‌ای از معادله مشخصه نباشد ۱) $A \times k^n$
$B \cdot n^m \cdot k^n$	k ریشه‌ای از معادله مشخصه باشد که m بار تکرار شده است. ۲) $A \times k^n$
$\sum_{i=۰}^{t} q_i n^i$	۱ ریشه‌ای از معادله مشخصه نباشد ۳) $\sum_{i=۰}^{t} p_i n^i$
$n^m \sum_{i=۰}^{t} q_i n^i$	۱ ریشه‌ای از معادله مشخصه باشد که m بار تکرار شده است. ۴) $\sum_{i=۰}^{t} p_i n^i$
$\left(\sum_{i=۰}^{t} q_i n^i\right) k^n$	k ریشه‌ای از معادله مشخصه نباشد ۵) $A \cdot n^t \cdot k^n$
$\left(\sum_{i=۰}^{t} q_i n^i\right) k^n n^m$	k ریشه‌ای از معادله مشخصه باشد که m بار تکرار شده است. ۶) $A \cdot n^t \cdot k^n$

در مثال بالا برای به دست آوردن جواب خصوصی از حالت ۳ این جدول استفاده شده است.

مثال ۵: دنباله $\{a_n\}_{n=۰}^{\infty}$ را بیابید به طوری که:

$$a_۰ = ۳ \quad , \quad a_۱ = ۸ \quad , \quad a_n - ۳a_{n-۱} + ۲a_{n-۲} = ۲^n \quad n \geq ۰$$

حل: معادله مشخصه رابطه بالا برابر است با $x^۲ - ۳x - ۲ = ۰$.

این معادله دارای دو ریشهٔ ۲ $x_۱ = ۱, x_۲$ است. در نتیجه: $a_n^{(h)} = A(۱)^n + B \cdot ۲^n$

از طرفی داریم که $f(n) = ۲^n$، بنابراین بر طبق حالت ۲ جدول بالا از آنجا که ۲ ریشهٔ معادله مشخصه است و یک بار تکرار شده است $(m = ۱)$ باید داشته باشیم: $a_n^{(p)} = C \times n \times ۲^n$

از طرفی داریم که

$$a_n^{(p)} - ۳a_{n-۱}^{(p)} + ۲a_{n-۲}^{(p)} = ۲^n$$

و یا معادلاً

$$۲^n = C \times n \times ۲^n - ۳C(n-۱)۲^{n-۱} + ۲c(n-۲)۲^{n-۲}$$

$$= n \times ۲^{n-۱}(۲C - ۳C + C) + ۲^{n-۱}(۳C - ۲C)$$

MATH75.IR

در نتیجه $3C - 2C = 2$ و یا $C = 2$. بنابراین داریم $a_n^{(p)} = n \times 2^{n+1}$

از این رو

$$a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = A + B \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1}$$

حال رابطهٔ بالا را به ازای $n = 0, 1$ محاسبه می‌کنیم

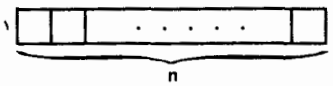
$$\begin{cases} A + B = 3 & n = 0 \\ A + 2B + 4 = 8 & n = 1 \end{cases}$$

از حل دستگاه بالا به دست می‌آوریم که $A = 2$, $B = 1$.

در نتیجه

$$a_n = 2 + 2^n + n \times 2^{n+1} \quad , \quad n \geq 0$$

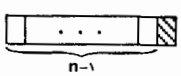
مثال ٦: مستطیل $n \times 1$ روبرو را در نظر بگیرید. می‌خواهیم این مستطیل را با یک سری مربعهای 1×1 و مستطیلهای 2×1 پر کنیم به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟



حل: با کمی دقت در مسأله متوجه می‌شویم که جواب مسأله آنقدر محسوس نیست که بتوان آن را حدس زد. برای حل این مسأله از دنباله‌های بازگشتی استفاده می‌کنیم. دنبالهٔ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ را در نظر بگیرید به طوری که جملهٔ nام این دنباله یعنی a_n برابر است با تعداد حالاتی که می‌توان یک مستطیل $n \times 1$ را با مستطیلهای 1×1 و 2×1 پوشاند.

به راحتی می‌توان به دست آورد که $a_1 = 1, a_2 = 2$. حال n ای طبیعی با شرط $n \geq 2$ در نظر بگیرید. فرض کنید می‌خواهیم مستطیل $n \times 1$ ای را با این مستطیلها بپوشانیم. دو خانهٔ آخر این مستطیل $n \times 1$ را در نظر بگیرید. برای پوشاندن خانهٔ آخر این مستطیل دو حالت وجود دارد:

(i) خانهٔ آخر توسط یک مربع 1×1 پوشانده شود که در این صورت یک مستطیل $(n-1) \times 1$ باقی می‌ماند که به a_{n-1} طریق می‌توان آن را پوشاند.



(ii) خانهٔ آخر توسط یک مستطیل 2×1 پوشانده شود در این صورت مستطیل $(n-2) \times 1$ باقی مانده را به a_{n-2} طریق می‌توان پوشاند.

واضح است که حالات $(i), (ii)$ اشتراکی با هم ندارند چرا که در حالت i) خانهٔ آخر توسط مربع 1×1 و در حالت ii) خانهٔ آخر توسط مستطیل 2×1 پوشانده شده است، در نتیجه داریم $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. حال مسأله به حل

MATH75.IR

معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$a_۱ = ۱ \ , \ a_۲ = ۲ \ , \ a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲} \qquad n \geq ۲$$

این معادله در مثال ۱ در بالا حل شده است و جواب آن برابر است با

$$a_n = \frac{۱}{\sqrt{۵}} \left[\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} \right)^{n+۱} - \left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲} \right)^{n+۱} \right] \quad , \quad n \in N$$

در نتیجه برای n داده شده در مسأله تعداد حالات مورد نظر برابر است با

$$\frac{۱}{\sqrt{۵}} \left[\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} \right)^{n+۱} - \left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲} \right)^{n+۱} \right]$$

نکتهٔ جالبی در رابطه بالا وجود دارد و آن اینکه رابطه بالا دارای اعداد گنگ است ولی از آنجا که تعداد حالات مورد نظر همواره عددی طبیعی است در نتیجه عدد بالا که در ظاهر به صورت اعداد گنگ است بعد از انجام عملیات ریاضی به صورت اعداد طبیعی تحویل می‌یابد.

مثال ۷: سه میله مفروض است. در داخل یکی از این میله‌ها، n دیسک با سایزهای مختلف موجود است که به ترتیب از بزرگ به کوچک روی هم قرار گرفته‌اند. می‌خواهیم تمام این n دیسک را به میلهٔ دیگری انتقال دهیم به طوری که باز هم به همین ترتیب روی هم قرار گرفته باشند، برای این کار دنباله‌ای از حرکتها به صورت زیر باید انجام شود:

(i) در هر حرکت باید فقط یک دیسک انتقال یابد.

(ii) هیچ دیسکی نباید روی دیسک کوچکتر از خود قرار گیرد.

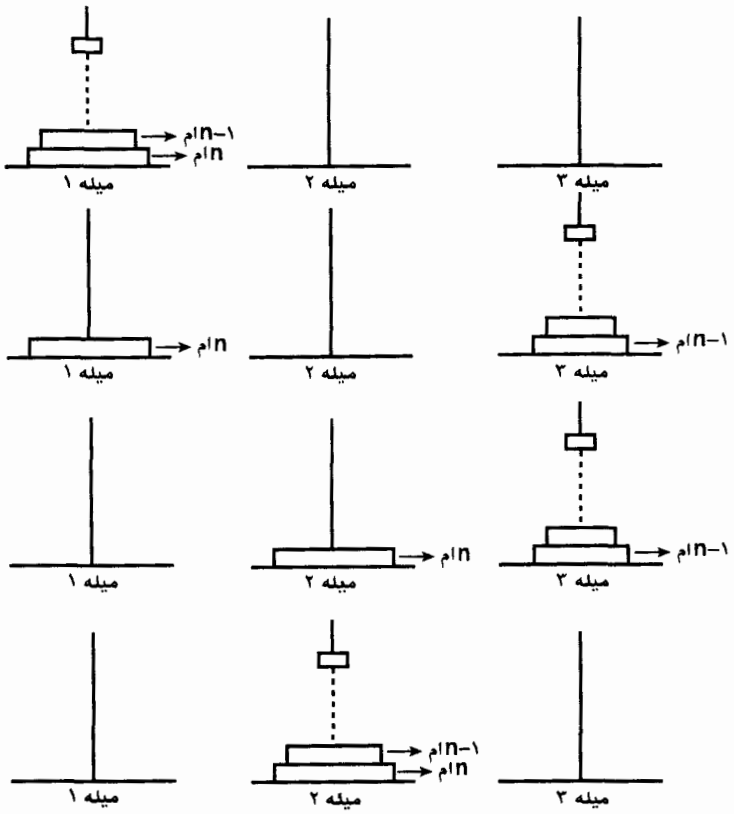
فرض کنید a_n مشخص‌کننده تعداد حالاتی باشد که با کمترین تعداد حرکات می‌توان چنین کاری را انجام داد. a_n را به ازای هر n طبیعی بیابید. (این مسأله به برج هانوی شهرت دارد.)

حل: دنبالهٔ $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ را در نظر بگیرید که a_n در آن، در بالا تعریف شده است. دیسکها را به ترتیب از بالا به پایین با اعداد $۱, ۲, \ldots, n$ شماره‌گذاری می‌کنیم. واضح است که دیسک n ام چون بزرگترین دیسک است روی هیچ دیسکی نمی‌تواند قرار گیرد و باید به یک میله خالی انتقال یابد. برای انتقال دیسک nام به میله خالی مثل میله ۲ باید $n-۱$ دیسک روی آن به میله ۳ انتقال یابند. برای انتقال $n-۱$ دیسک $۱, ۲, \ldots, n-۱$ به میله ۳ از آنجا که هر دیسکی می‌تواند روی دیسک n قرار گیرد بر طبق تعریف بالا $a_{n-۱}$ حالت با کمترین تعداد حرکات وجود دارد. بعد با یک حرکت دیسک n را به میله ۲ منتقل می‌کنیم و درنهایت $n-۱$ دیسک موجود در میله ۳ را با $a_{n-۱}$ حرکت به میله ۲ و روی دیسک n ام منتقل می‌کنیم.

MATH75.IR

درنتیجه به دست می‌آوریم که:

$$a_n = ۲a_{n-۱} + ۱$$



به راحتی می‌توان به دست آورد که $a_n^{(p)} = -۱$. همچنین معادله مشخصه دنباله مفروض برابر است با $x - ۲ = ۰$ و یا $x_۱ = ۲$، در نتیجه $a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = A \cdot ۲^n - ۱$. حال از آنجا که $a_۱ = ۱$ است به دست می‌آید که $A \cdot ۲^۱ - ۱ = ۱$ و یا $A = ۱$، بنابراین $a_n = ۲^n - ۱$.

مثال ۸: دایره‌ای را به $n \geq ۳$ قطاع مساوی تقسیم کرده‌ایم. می‌خواهیم این قسمتها را با k رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم به طوری که هیچ دو قسمت مجاوری دارای رنگ یکسان نباشند. اگر a_n برابر تعداد راههایی باشد که بتوان این کار را انجام داد، a_n را به ازای هر $n \geq ۳$ بیابید.

حل: دنبالهٔ $\{a_n\}_{n=۰}^{\infty}$ را در نظر بگیرید که در آن a_n ها در بالا تعریف شده‌اند. تعداد راههایی که می‌توان این n قطاع را با k رنگ مفروض رنگ‌آمیزی کرد به طوری که قطاع‌های ۱ با ۲ , ۲ با ۳ , $\cdots$, $n-۱$ با n دارای رنگ یکسان نباشند برابر است با:

$$k(k-۱)(k-۱)\dots(k-۱) = k(k-۱)^{n-۱}$$

زیرا قطاع اول را می‌توان با هر کدام از k رنگ، رنگ‌آمیزی کرد ولی قطاع دوم را فقط با $k-۱$ رنگ می‌توان رنگ‌آمیزی کرد زیرا نباید قطاع دوم را با رنگی که قطاع اول را رنگ کرده‌ایم، رنگ کرد و همچنین قطاع سوم را هم

MATH75.IR

با $k-1$ رنگ، چرا که با همه k رنگ به جز با رنگی که قطاع دوم را رنگ کرده‌ایم می‌توان رنگ کرد و به همین ترتیب بقیه قطاع‌ها را هم فقط با $k-1$ رنگ می‌توان رنگ کرد. بر طبق اصل ضرب تعداد حالات مفروض برابر حاصلضرب این اعداد است.

این نوع رنگ‌آمیزی را به دو قسمت افراز می‌کنیم:

(i) رنگ‌آمیزی که در آن رنگ قطاع n ام با رنگ قطاع ۱ام یکی نیست. در این صورت در این دایره رنگ هیچ دو قطاع مجاوری یکسان نیست، بنابراین تعداد این حالات برابر a_n است.

(ii) رنگ‌آمیزی که در آن رنگ قطاع n ام با رنگ قطاع ۱ام یکی است. در این صورت اگر دو قطاع $1, n$ را یکی در نظر بگیریم دایره‌ای با $n-1$ قطاع به وجود می‌آید به طوری که هیچ دو قطاع مجاوری در آن همرنگ نیستند. تعداد این حالات برابر a_{n-1} است.

با استفاده از دو حالت $(i), (ii)$ معادلهٔ بازگشتی زیر را به دست می‌آوریم:

$$a_n + a_{n-1} = k(k-1)^{n-1} \quad , \quad n \geq 1$$

معادله مشخصهٔ رابطهٔ بالا برابر است با $x+1=0$، که دارای ریشه $x_1=-1$ می‌باشد. در نتیجه به دست می‌آوریم که $a_n^{(h)} = A(-1)^n$.

از طرفی داریم که $f(n) = k(k-1)^{n-1}$. واضح است که $k-1$ ریشه‌ای از معادله مشخصه نیست زیرا $k \geq 3$ است در نتیجه بر طبق حالت ۱ جدول به دست می‌آوریم که $a_n^{(p)} = B(k-1)^{n-1}$.

در نتیجه

$$a_n^{(p)} + a_{n-1}^{(p)} = k(k-1)^{n-1} \implies B(k-1)^{n-1} + B(k-1)^{n-2} = k(k-1)^{n-1}$$

بنابراین $B(k-1) + B = k(k-1)$ و یا $B = k-1$، از این رو داریم:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = A(-1)^n + (k-1)^{n-1}$$

به راحتی می‌توان محاسبه نمود که $a_3 = k(k-1)(k-2)$. با جایگزینی $n=3$ در رابطه بالا، $A = k-1$ به دست می‌آید. در نتیجه: $a_n = (-1)^n(k-1) + (k-1)^n$

۲– حل معادله بازگشتی از طریق تابع مولد:

فرض کنید دنبالهٔ $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ در رابطه روبرو صدق کند $c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + \cdots + c_r a_{n-r} = f(n)$

MATH75.IR

تابع $g(x)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \cdots$$

دقت شود که $g(x)$ مجموع بی‌نهایت جمله است.

حال عبارت $g(x)(c_0 + c_1 + \cdots + c_r x^r)$ را بسط می‌دهیم:

$$\begin{aligned} g(x)(c_0 + c_1 x + \cdots + c_r x^r) &= (a_0 + a_1 x + \cdots + a_0 x^k + \cdots)c_0 \\ &+ (a_0 x + a_1 x^2 + \cdots + a_k x^{k+1} + \cdots)c_1 \\ &\vdots \\ &+ (a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + \cdots + a_k x^{k+r} + \cdots)c_r \\ &= a_0 c_0 \\ &+ (a_1 c_0 + a_0 c_1)x \\ &+ (a_2 c_0 + a_1 c_1 + a_0 c_2)x^2 \\ &\vdots \\ &+ (a_k c_0 + a_{k-1} c_1 + \cdots + a_0 c_k)x^k \\ &\vdots \end{aligned}$$

در نتیجه به دست می‌آوریم که:

$$g(x) = \frac{\left(\sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{i} a_j c_{i-j} x^i\right) + \left(\sum_{i=r}^{\infty} f(r) x^i\right)}{c_0 + c_1 + \cdots + c_r x^r} \qquad (*)$$

حال اگر بتوانیم طرف راست عبارت $(*)$ را به صورت $\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ بنویسیم در این صورت واضح است که به ازای هر n باید $a_n = b_n$ باشد چرا که این رابطه به ازای بی‌نهایت x (یک بازه پیوسته x) برقرار است بنابراین باید ضرایب متناظر با هم برابر باشند. این عمل در چند مثال زیر روشن‌تر می‌شود.

مثال ۹: فرض کنید دنباله $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ در رابطه زیر صدق کند:

$$a_0 = 1 \quad , \quad a_n - 2a_{n-1} = 2^n \quad n \geq 1$$

به ازای هر n طبیعی، a_n را برحسب n بیابید.

حل: $f(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \cdots$$

حال عبارت $f(x)(1 - 2x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)(1 - 2x) = a_0 + (a_1 - 2a_0)x + (a_2 - 2a_1)x^2 + \cdots + (a_n - 2a_{n-1})x^n + \cdots$$

MATH75.IR

در نتیجه

$$f(x)(۱-۲x)=a_۰+۲^۱x+۲^۲x^۲+\cdots+۲^nx^n+\cdots$$

بنابراین

$$f(x)=\frac{۱+۲x+۲^۲x^۲+\cdots+۲^nx^n+\cdots}{۱-۲x} \quad (*)$$

از طرفی می‌دانیم که به ازای هر x با شرط $|x|<۱$ داریم که

$$\frac{۱}{۱-x}=۱+x+x^۲+\cdots+x^n$$

حال در رابطه بالا به جای x، $۲x$ را قرار می‌دهیم

$$\frac{۱}{۱-۲x}=۱+۲x+۴x^۲+\cdots+۲^nx^n$$

از رابطه $(*)$ نتیجه می‌گیریم که: $f(x)=\frac{۱}{۱-۲x}\times\frac{۱}{۱-۲x}=\frac{۱}{(۱-۲x)^۲}$، البته این رابطه به ازای $|x|<\frac{۱}{۲}$ درست است. حال با استفاده از فرمول بسط $\frac{۱}{(۱-x)^n}$، $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{۱}{(۱-x)^۲}=\sum_{r=۰}^{\infty}(r+۱)x^r \quad , \quad |x|<۱$$

$$f(x)=\frac{۱}{(۱-۲x)^۲}=\sum_{r=۰}^{\infty}(r+۱)(۲x)^r \quad , \quad |x|<\frac{۱}{۲}$$

در نتیجه:

$$\sum_{r=۰}^{\infty}(r+۱)۲^rx^r=\sum_{r=۰}^{\infty}a_rx^r \quad , \quad |x|<\frac{۱}{۲}$$

از آنجا که رابطه بالا به‌ازای بازهٔ پیوسته $\left(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right)$ از x درست است باید ضرایب متناظر با هم برابر باشند یعنی $a_n=(n+۱)۲^n \ , \ n\geq ۰$.

مثال ۱۰: دنباله $\{a_n\}_{n=۰}^{\infty}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید که

$$a_۰=۰ \ , \ a_۱=۱ \quad , \quad a_n-۵a_{n-۱}+۶a_{n-۲}=۵^n \quad n\geq ۲$$

به ازای هر n طبیعی، a_n را برحسب n بیابید.

حل: فرض کنید تابع $A(x)$ برابر باشد با:

$$A(x)=a_۰+a_۱x+a_۲x^۲+a_۳x^۳+\cdots+a_kx^k+\cdots$$

MATH75.IR

حال عبارت $A(x)(۱ - ۵x + ۶x^۲)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A(x)\left(۱ - ۵x + ۶x^۲\right) = a_۰ + (a_۱ - ۵a_۰)x + \sum_{i=۲}^{\infty}\left(a_i - ۵a_{i-۱} + ۶a_{i-۲}\right)x^i$$

$$= x + \sum_{i=۲}^{\infty} ۵^i x^i = x + \left[\sum_{i=۰}^{\infty}(۵x)^i\right](۵x)^۲$$

به ازای هر x با شرط $|x| < \frac{۱}{۵}$ داریم که $\frac{۱}{۱ - ۵x} = \sum_{i=۰}^{\infty}(۵x)^i$

در نتیجه

$$A(x)\left(۱ - ۵x + ۶x^۲\right) = x + \frac{۵x^۲}{۱ - ۵x} \quad , \quad |x| < \frac{۱}{۵}$$

و یا معادلاً

$$A(x) = \frac{۲۰x^۲ + x}{(۱ - ۲x)(۱ - ۳x)(۱ - ۵x)}$$

می‌توان محاسبه نمود که:

$$A(x) = \frac{\frac{۲۵}{۶}}{۱ - ۵x} + \frac{\frac{۲۲}{۳}}{۱ - ۲x} + \frac{-\frac{۲۳}{۲}}{۱ - ۳x}$$

البته چگونگی به دست آوردن این اعداد در قضیه بعد تشریح می‌گردد.

بنابراین

$$A(x) = \frac{۲۵}{۶}\sum_{i=۰}^{\infty}(۵x)^i + \frac{۲۲}{۳}\sum_{i=۰}^{\infty}(۲x)^i - \frac{۲۳}{۲}\sum_{i=۰}^{\infty}(۳x)^i \quad , \quad |x| < \frac{۱}{۵}$$

و یا معادلاً

$$A(x) = \sum_{i=۰}^{\infty}\left[\frac{۲۵}{۶}۵^i + \frac{۲۲}{۳}۲^i - \frac{۲۳}{۲}۳^i\right]x^i \quad , \quad |x| < \frac{۱}{۵}$$

در نتیجه به دست می‌آید که:

$$a_n = \frac{۲۵}{۶}۵^n + \frac{۲۲}{۳}۲^n - \frac{۲۳}{۲}۳^n \quad , \quad n \geq ۰$$

قضیه ۱: دو چندجمله‌ای $R(x), Q(x)$ را با شرط $deg(R(x)) < deg(Q(x))$ در نظر بگیرید و فرض کنید که

MATH75.IR

$Q(x)=(x-p_1)^{n_1}(x-p_2)^{n_2}\cdots(x-p_r)^{n_r}$. در این صورت داریم:

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\left[\frac{k_{11}}{x-p_1}+\frac{k_{12}}{(x-p_1)}+\cdots+\frac{k_{1n_1}}{(x-p_1)^{n_1}}\right]$$

$$+\left[\frac{k_{21}}{x-p_2}+\frac{k_{22}}{(k-p_2)^2}+\cdots+\frac{k_{2n_2}}{(x-p_2)^{n_2}}\right]$$

$$\vdots$$

$$+\left[\frac{k_{r1}}{x-p_r}+\frac{k_{r2}}{(x-p_r)^2}+\cdots+\frac{k_{rn_r}}{(x-p_r)^{n_r}}\right]$$

که در آن k_{ij} ها به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$K_{i(n_i-t)}=\frac{1}{t!}\frac{d^t}{dx^t}\left[(x-p_i)^{n_i}\frac{R(x)}{Q(x)}\right]\Big|_{x=p_i}\quad,\quad 0\le t\le n_i-1$$

یعنی برای مثال:

$$K_{1,n_1}=(x-p_1)^{n_1}\left.\frac{R(x)}{Q(x)}\right|_{x=p_1}$$

$$k_{1,n_1-1}=\frac{d}{dx}\left[(x-p_1)^{n_1}\frac{R(x)}{Q(x)}\right]\Big|_{x=p_1}$$

$$k_{1,n_1-2}=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dx^2}\left[(x-p_1)^{n_1}\frac{R(x)}{Q(x)}\right]\Big|_{x=p_1}$$

در مثال بالا می‌خواستیم عبارت $\frac{20x^2+x}{(1-2x)(1-3x)(1-5x)}$ را به صورت $\frac{A}{1-5x}+\frac{B}{1-2x}+\frac{C}{1-3x}$ بنویسیم، برای این کار می‌توان این دو عبارت را به ازای تمام x ها برابر هم قرار داد و از برابری ضرایب متناظر و حل دستگاه ۳ معادله و ۳ مجهول، A,B,C را یافت ولی روش سرراست‌تر استفاده از قضیه بالا است:

$$A=\left[\frac{20\cdot x^2+x}{(1-2x)(1-3x)(1-5x)}\times(1-5x)\right]\Big|_{x=\frac{1}{5}}$$

$$=\left.\frac{20\cdot x^2+x}{(1-2x)(1-3x)}\right|_{x=\frac{1}{5}}=\frac{25}{6}\quad,\quad B=\left.\frac{20\cdot x^2+x}{(1-3x)(1-5x)}\right|_{x=\frac{1}{2}}=\frac{23}{3}$$

و به همین ترتیب به‌دست می‌آید که $C=-\frac{23}{2}$.

مثال ۱۱: برای دو دنباله $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ، $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ داریم که:

$$a_0=1\quad,\quad b_0=0\quad,\quad n\ge 1:\quad\begin{cases}a_n+2a_{n-1}+4b_{n-1}=0\\ b_n-4a_{n-1}-6b_{n-1}=0\end{cases}$$

MATH75.IR

به ازای تمامی n های طبیعی b_n, a_n را برحسب n بیابید.

حل: تعریف می‌کنیم که

$$A(x) = a_۰ + a_۱x + a_۲x^۲ + a_۳x^۳ + \cdots + a_kx^k + \cdots$$

$$B(x) = b_۰ + b_۱x + b_۲x^۲ + b_۳x^۳ + \cdots + b_kx^k + \cdots$$

حال عبارات $A(x) + ۲xA(x) + ۴xB(x)$, $B(x) - ۴xA(x) - ۶xB(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A(x) + ۲xA(x) + ۴xB(x) = ۱ + (a_۱ + ۲)x + (a_۲ + ۲a_۱ + ۴b_۱)x^۲$$

$$+ (a_۳ + ۲a_۲ + ۴b_۲)x^۳ + \cdots = ۱$$

و همچنین

$$B(x) - ۶xB(x) - ۴A(x) = (b_۱ - ۴)x + (b_۲ - ۴a_۱ - ۶b_۱)x^۲$$

$$+ (b_c - ۴a_۲ - ۶b_۲)x^۳ + \cdots = ۰$$

از دو رابطه بالا دستگاه زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} (۱ + ۲x)A(x) + ۴xB(x) = ۱ \\ -۴A(x) + (۱ - ۶x)B(x) = ۰ \end{cases}$$

با حل دستگاه بالا به دست می‌آوریم که:

$$A(x) = \frac{۱ - ۶x}{(۱ - ۲x)^۲} \quad , \quad B(x) = \frac{۴x}{(۱ - ۲x)^۲}$$

در نتیجه:

$$A(x) = (۱ - ۶x)\sum_{r=۰}^{\infty}(r + ۱)(۲x)^r \quad , \quad |x| < \frac{۱}{۲}$$

$$B(x) = ۴x\sum_{r=۰}^{\infty}(r + ۱)(۲x)^r \quad , \quad |x| < \frac{۱}{۲}$$

بنابراین به دست می‌آوریم که:

$$a_n = (n + ۱)۲^n - ۶n \cdot ۲^{n-۱} = ۲^n(۱ - ۲n)$$

$$b_n = ۴n \cdot ۲^{n-۱} = n \cdot ۲^{n+۱}$$

MATH75.IR

مسایل آنالیز

۱. اگر x_1, x_2 ریشه های چند جمله‌ای $x^2 - 6x + 1$ باشند، ثابت کنید برای هر n طبیعی، عدد $x_1^n + x_2^n$ عددی صحیح و غیرقابل تقسیم بر ۵ است.

۲. چندجمله‌ای $f(x)$ با ضرایب صحیح و از درجه n را در نظر بگیرید به طوری که ضریب x^n در آن برابر یک باشد. فرض کنید k , p اعداد طبیعی باشند. ثابت کنید اگر هیچ کدام از اعداد $f(k), f(k+1), ..., f(k+p)$ بر $p+1$ بخشپذیر نباشند سپس $f(x)$ ریشهٔ گویا ندارد.

۳. برای سه عدد حقیقی a, b, c روابط زیر را داریم:

$$a+b+c>0 \quad , \quad ab+bc+ca>0 \quad , \quad abc>0$$

ثابت کنید که $a, b, c > 0$.

۴. ثابت کنید چند جمله‌ای $x^{2n} - 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} - \cdots - 2nx + (2n+1)$ ریشهٔ حقیقی ندارد.

۵. فرض کنید $f(x) = (1 - x + x^2 - \cdots + x^{100})(1 + x + x^2 + \cdots + x^{100})$. ثابت کنید بعد از بسط دادن $f(x)$ و ساده کردن جملات متشابه، فقط توانهای زوج x باقی می ماند.

۶. فرض کنید $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. باقیماندهٔ تقسیم $f(x^5)$ بر $f(x)$ را بیابید.

۷. فرض کنید

$$f(x) = \left(x^{1958} + x^{1957} + 2\right)^{1959} = a + a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n$$

مقدار عبارت زیر را بیابید.

$$a_0 - \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2} + a_3 - \frac{a_4}{2} - \frac{a_5}{2} + a_6 - \cdots$$

۸. باقیمانده تقسیم $x^{1959} - 1$ بر $(x^2+1)(x^2+x+1)$ را بیابید.

۹. آیا چند جمله‌ای غیر صفر $f(x)$ وجود دارد به طوریکه $xf(x-1) = (x+1)f(x)$.

۱۰. ثابت کنید اگر a_n , ... , a_2, a_1 اعداد صحیح متمایزی باشند سپس چند جمله‌ای $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n) - 1$ روی $\mathbf{Z}$ تحویل‌ناپذیر است.(چند جمله‌ای $f(x)$ با ضرایب در A، A می‌تواند

MATH75.IR

برابر $R, Q, Z, N, Z_p, \ldots$ باشد]، را تحویل‌ناپذیر روی A گوییم اگر دو چند جمله‌ای $p(x), q(x)$ با ضرایب در A و از درجهٔ بزرگتر از صفر موجود نباشند به طوریکه $f(x) = p(x)q(x)$.)

۱۱. چند جمله‌ای $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + 1$ با ضرایب نامنفی دارای n ریشه حقیقی است. ثابت کنید $p(2) \geq 3^n$.

۱۲. آیا چند جمله‌ای $x^{105} - 9$ روی $\mathbf{Z}$ تحویل پذیر است؟

۱۳. برای هر دو عدد حقیقی a, b ثابت کنید که $a^2 + ab + b^2 \geq 3(a + b - 1)$.

۱۴. همه چند جمله‌ای های $f(x)$ با ضرایب حقیقی را بیابید که $f(x + 2x^3) = f(x)f(2x^2)$.

۱۵. مقدار مینیم $a^2 + b^2$ را بیابید اگر معادلهٔ $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ ریشه حقیقی داشته باشد.

۱۶. همه زوج‌های طبیعی (m, n) رابیابید به طوری‌که

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^m \Big| 1 + x^n + x^{2n} + \cdots + x^{mn}$$

۱۷. برای چند جمله‌ای درجه n ام $p(x)$ داریم که

$$p(i) = \frac{i}{i+1} \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

$p(n+1)$ را بیابید.

۱۸. برای چند جمله‌ای درجه n ام $p(x)$ داریم که

$$p(i) = \frac{1}{\binom{n+1}{i}} \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

$p(n+1)$ را بیابید.

۱۹. فرض کنید چند جمله‌ای $ax^n - ax^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x^2 - n^2 bx + b$ دارای n ریشه حقیقی و مثبت باشد. ثابت کنید همه این ریشه‌ها با هم برابرند.

۲۰. همه جوابهای مختلط دستگاه زیر را بیابید:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3 \end{cases}$$

۲۱. فرض کنید $p(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد به طوری که

$$p(i) = 2^i \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n+1$$

$P(n+2)$ را تعیین کنید.

MATH75.IR

۲۲. $2n$ عدد متمایز $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ مفروض هستند. یک جدول $n \times n$ را در نظر بگیرید به طوریکه به ازای هر $1 \leq i, j \leq n$، در محل برخورد سطر i ام با ستون j ام آن عدد $a_i + b_j$ نوشته شده است. ثابت کنید اگر حاصلضرب عناصر هر کدام از ستونها عدد ثابتی باشد، سپس حاصلضرب عناصر هر کدام از سطرها نیز عدد ثابتی است.

۲۳. برای $a, b, c, d > 0$ ثابت کنید:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}} \geq \sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}}$$

۲۴. فرض کنید $a, b, c, d > 0$. تمام مقادیر ممکن مجموع زیر را بیابید:

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}$$

۲۵. نامساوی زیر را ثابت کنید: (به این نامساوی، نامساوی مثلث گویند)

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2} \geq \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + \cdots + (a_n + b_n)^2}$$

۲۶. اگر $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R^+$ و $\sum_{i=1}^{n} x_i = 2$ باشد، ثابت کنید که:

$$\frac{x_1^2}{1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n} + \frac{x_2^2}{1 + x_1 + x_3 + \cdots + x_n} + \cdots + \frac{x_1^2}{1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}} \geq \frac{4}{3n - 2}$$

۲۷. $2n$ عدد حقیقی $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ و $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $z_1, z_2, \ldots, z_n$ یک جایگشت از اعداد $y_1, y_2, \ldots, y_n$ باشد. ثابت کنید که

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2$$

۲۸. فرض کنید a_i جملهٔ i ام دنبالهٔ فیبوناچی باشد ($a_1 = a_2 = 1$, $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$ $k \geq 3$)، ثابت کنید که به ازای هر n طبیعی داریم:

$$\frac{a_1}{2^1} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} < 2$$

۲۹. برای هر سه عدد حقیقی x, y, z ثابت کنید که:

$$|x| + |y| + |z| \leq |x + y - z| + |x - y + z| + |-x + y + z|$$

۳۰. برای n عدد $a_1, a_2, \ldots, a_n$ با شرط $a_i \geq 1$ $i = 1, 2, \ldots, n$ ثابت کنید که:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq \frac{2^n}{n + 1}(1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

MATH75.IR

۳۱. همه جوابهای مثبت دستگاه زیر را بیابید:

$$\begin{cases} x+y+z=۱ \\ x^۳+y^۳+z^۳+xyz=x^۴+y^۴+z^۴+۱ \end{cases}$$

۳۲. برای n عدد مثبت $a_۱,a_۲,...,a_n$ ثابت کنید که ($a_{n+۱}=a_۱$):

$$۲\sum_{i=۱}^{n}\frac{a_i^۲}{a_i+a_{i+۱}}\geq\sum_{i=۱}^{n}a_i$$

۳۳. به ازای هر سه عدد حقیقی $a,b,c>۰$ و هر عدد طبیعی n ثابت کنید که:

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geq\frac{a^{n-۱}+b^{n-۱}+c^{n-۱}}{۲}$$

۳۴. برای n عدد مثبت $x_۱,x_۲,...,x_n$ ثابت کنید که:

$$x_۱^{x_۱}x_۲^{x_۲}\cdots x_n^{x_n}\geq(x_۱x_۲\cdots x_n)^{\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_n}{n}}$$

۳۵. برای $n+۱$ عدد حقیقی $۰=a_۰<a_۱<\cdots<a_n$ باشرط $a_{i+۱}-a_i\leq۱\quad i=۰,۱,...,n-۱$ ثابت کنید که:

$$\left(\sum_{i=۰}^{n}a_i\right)^۲\geq\sum_{i=۰}^{n}a_i^۳$$

۳۶. برای ۳ عدد مثبت a,b,c باشرط $abc=۱$ ثابت کنید که:

$$\frac{۱}{a^۳(b+c)}+\frac{۱}{b^۳(a+c)}+\frac{۱}{c^۳(a+b)}\geq\frac{۳}{۲}$$

۳۷. به ازای هر عدد طبیعی $n\geq۲$ کمترین مقدار عبارت

$$\frac{x_۱^۵}{x_۲+x_۳+\cdots+x_n}+\frac{x_۲^۵}{x_۳+x_۴+\cdots+x_n+x_۱}+\cdots+\frac{x_n^۵}{x_۱+x_۲+\cdots+x_{n-۱}}$$

را بیابید به شرطی که $x_i\geq۰\quad i=۱,۲,...,n\ ,\ x_۱^۲+x_۲^۲+\cdots+x_n^۲=۱$.

۳۸. ثابت کنید برای عددهای $a_۱,a_۲,...,a_n$ ($n\geq۲$) از بازهٔ $[۰,۲]$ نابرابری زیر برقرار است:

$$\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}|a_i-a_j|\leq n^۲$$

۳۹. ثابت کنید دنبالهٔ $\left\{\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n\right\}_{n=۱}^{\infty}$ اکیداً صعودی است.

۴۰. فرض کنید $x_۱,x_۲,...,x_n$، n عدد حقیقی مثبت با مجموع ۱ باشد. ثابت کنید که:

$$\frac{x_۱}{\sqrt{۱-x_۱}}+\frac{x_۲}{\sqrt{۱-x_۲}}+\cdots+\frac{x_n}{\sqrt{۱-x_n}}\geq\sqrt{\frac{n}{n-۱}}$$

MATH75.IR

۴۱. برای اعداد مثبت $a_۱, a_۲, ..., a_n$ با شرط $\sum_{i=۱}^{n} a_i = ۱$ ثابت کنید که:

$$\sum_{۱\le i<j\le n} \frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \le \frac{n-۱}{۴}$$

۴۲. تمام اعداد حقیقی x را بیابید به طوریکه

$$[x] + [۲x] + [۴x] + \cdots + [۳۲x] = ۱۲۳۴۵$$

۴۳. تمام توابع پیوسته $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ را بیابید بطوری که

$$\forall x, y \in R \ : \ f\left(\frac{x+y}{۲}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{۲}$$

۴۴. تمام توابع $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ را بیابید بطوری که همواره داشته باشیم $f(x) = f\left(\frac{x}{۲}\right)$.

۴۵. تمام توابع $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ را بیابید بطوری که

$$\forall x, y \in R \ : \ f(x+y) + f(x-y) = ۲f(x)\cos y$$

۴۶. همهٔ چند جمله‌ایهای $p(x)$ را بیابید بطوری که $p(x+۱) = p(x) + ۲x + ۱$.

۴۷. همهٔ توابع f روی $\mathbf{R}$ را بیابید بطوری که

$$\forall x, y \in R \ : \ xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y)$$

۴۸. همهٔ توابع پیوسته $f : \mathbf{R} - \{۰\} \to \mathbf{R}$ را بیابید بطوری که

$$\forall x, y \in R - \{۰\} \ , \ x + y \neq ۰ \ : \ f(x+y) = \frac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$$

۴۹. همهٔ توابع پیوسته $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ را بیابید بطوری که f به ازای هر سه عدد که تشکیل تصاعد حسابی بدهند، سه مقدار که تشکیل یک تصاعد هندسی بدهند را باز گرداند.

۵۰. همهٔ توابع پیوسته $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ را بیابید بطوری که

$$\forall x, y \in R \ : \ f(x+y) + f(x-y) = ۲(f(x)+f(y))$$

۵۱. یک تابع $f : Q^+ \to Q^+$ پیدا کنید بطوری که به ازای هر $x, y \in Q^+$ داشته باشیم $f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}$.

۵۲. تابع $f(n)$ روی مجموعه اعداد صحیح مثبت تعریف شده است و مقادیر طبیعی را می‌گیرد. ثابت کنید اگر به ازای هر n طبیعی داشته باشیم $f(n+۱) > ff(n)$، سپس باید همواره داشته باشیم $f(n) \equiv n$.

MATH75.IR

۵۳. تمام توابع پیوسته $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ را بیابید بطوری که

$$\forall x, y \in R \quad : \quad f(x+y)f(x-y) = [f(x)f(y)]^{۲}$$

۵۴. همهٔ توابع $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ را بیابید بطوری که به ازای هر n طبیعی داشته باشیم:

$$fff(n) + ff(n) + f(n) = ۳n$$

۵۵. همهٔ توابع $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ را بیابید بطوری که

$$\forall x, y \in R \quad : \quad f(x^{۲} + f(y)) = y + f(x)^{۲}$$

۵۶. همهٔ توابع پیوسته $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ را بیابید بطوری که

$$\forall x, y \in R \quad : \quad f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y)$$

۵۷. همهٔ توابع اکیداً صعودی $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ رابیابید بطوری که

$$\forall n, m \in N \quad : \quad f(mf(n)) = n^{۲} f(mn)$$

۵۸. همهٔ توابع $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ را بیابید که در دو شرط زیر صدق کنند:

الف) $\forall n, m \in \mathbf{N} \quad : \quad f(n+m) = f(n) + f(m) + ۲nm$

ب) به ازای هر n طبیعی، عدد $f(n)$ مربع کامل است.

۵۹. همهٔ توابع $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ را بیابید که

$$\forall n, m \in N \quad : \quad f(m+n) = f(m) + f(n) + f(mn)$$

۶۰. همهٔ توابع $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ را بیابید بطوری که

$$\forall n, m \in Z \quad : \quad f(m + f(n)) = f(m) + n$$

۶۱. دنبالهٔ $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ را در نظر بگیرید بطوریکه

$$a_۱ = a_۲ = ۱ \quad , \quad a_n = \frac{a_{n-۱}^{۲} + ۲}{a_{n-۲}} \quad n \geq ۳$$

ثابت کنید تمام جملات این دنباله صحیح هستند.

MATH75.IR

۶۲. دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ با شرایط $x_{k+1} = x_k^2 + x_k$ و $x_1 = \frac{1}{2}$ مفروض است. قسمت صحیح مجموع زیر را بیابید:

$$S = \frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} + \cdots + \frac{1}{x_{100} + 1}$$

۶۳. عدد طبیعی k مفروض است. ثابت کنید عدد گنگ r وجود دارد بطوریکه به ازای هر n طبیعی داشته باشیم: $k \mid \lfloor r^n \rfloor$.

۶۴. دنبالهٔ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ مفروض است بطوریکه

$$a_1 = 0 \quad , \quad |a_{k+1}| = |a_k + 1| \quad k \geq 1$$

به ازای هر n طبیعی ثابت کنید که:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq -\frac{1}{2}$$

۶۵. با دو عدد صحیح مثبت x_1, x_2 (کمتر از ۱۰۰) که روی تخته نوشته شده‌اند شروع می‌کنیم. در هر مرحله کوچکترین عدد از بین قدر مطلق‌های تفاضل دو بدوی اعداد نوشته شده روی تخته را روی تخته می‌نویسیم. ثابت کنید عددی که در ۱۹امین مرحله روی تخته می‌نویسیم برابر ۰ است.

۶۶. دنبالهٔ $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ با شرایط زیر مفروض است.

$$a_0 = 0 \quad , \quad a_1 = 1 \quad , \quad a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} \quad n \geq 2$$

ثابت کنید که $2^k \mid n$ اگر و فقط اگر $2^k \mid a_n$.

۶۷. دنبالهٔ $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ با شرایط زیر مفروض است.

$$a_0 = 5 \quad , \quad a_k = \frac{3a_{k-1} + 1}{a_{k-1} + 3}$$

a_n را بر حسب تابعی از n بیابید.

۶۸. آیا مجموعهٔ نامتناهی A از اعداد طبیعی وجود دارد بطوریکه برای هر عدد طبیعی به اندازهٔ کافی بزرگ، تعداد راههای نمایش آن بصورت جمع دو عضو A عددی ثابت باشد

۶۹. فرض کنید $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ و $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ دو مجموعهٔ متمایز از اعداد صحیح مثبت باشند بطوریکه تعداد راههای نمایش هر عدد طبیعی بصورت $a_i + a_j$ با تعداد راههای نمایش آن عدد بصورت $b_i + b_j$ برابر است. ثابت کنید n توانی از ۲ است.

۷۰. ثابت کنید تنها یک دنباله صعودی $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ از اعداد صحیح نامنفی وجود دارد بطوریکه هر عدد صحیح را بتوان بطور یکتا بصورت $a_i + 2a_j + 4a_k$ نوشت.

MATH75.IR

۷۱. در خانه‌های یک جدول نامتناهی $(\infty \times \infty)$ اعداد طبیعی نوشته شده است با این شرط که $a_{ij} \leq ij$، که در آن a_{ij} عدد نوشته شده در محل برخورد سطر i ام با ستون j ام است. ثابت کنید به ازای هر k طبیعی، عددی طبیعی‌ای وجود دارد که لااقل k مرتبه در جدول آمده است.

۷۲. مجموعهٔ اعداد طبیعی را به تعداد متناهی (حداقل دو تا) تصاعد حسابی افراز کرده‌ایم. ثابت کنید حداقل دو تا از این تصاعدها، قدر نسبت مساوی دارند.

۷۳. اعداد $۱ , ۲ , \ldots , ۲n$ را به دو گروه n تایی A, B تقسیم کرده‌ایم. دو مجموعهٔ X, Y را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X = \{ \alpha + \beta \mid \alpha, \beta \in A \} \quad , \quad Y = \{ \alpha + \beta \mid \alpha, \beta \in B \}$$

ثابت کنید دو مجموعهٔ X, Y با در نظر گرفتن تعداد تکرارهای هر عضو، در Z_m با هم برابر هستند (منظور از Z_k مجموعهٔ $\{۰, ۱, ۲, \ldots, k-۱\}$ است و هر عدد طبیعی در Z_k برابر باقیماندهٔ آن عدد بر k است). برای فهم بیشتر صورت مسئله، مثال زیر را ارائه می‌دهیم:

مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ را به دو مجموعهٔ $A = \{۱, ۲, ۵\}$ ، $B = \{۳, ۴, ۶\}$ افراز می‌کنیم. داریم که:

$$X = \{۱+۱ , ۲+۲ , ۵+۵ , ۱+۲ , ۱+۵ , ۲+۱ , ۲+۵ , ۵+۱ , ۵+۲\}$$

درنتیجه

$$X = \{۲, ۴, ۱۰, ۳, ۶, ۳, ۷, ۶, ۷\} \overset{۶}{\equiv} \{۲, ۴, ۴, ۳, ۰, ۳, ۱, ۰, ۱\}$$

و

$$Y = \{۳+۳ , ۴+۴ , ۶+۶ , ۳+۴ , ۳+۶ , ۴+۳ , ۴+۶ , ۶+۳ , ۶+۴\}$$

درنتیجه

$$Y = \{۶, ۸, ۱۲, ۷, ۹, ۷, ۱۰, ۹, ۱۰\} \overset{۶}{\equiv} \{۰, ۲, ۰, ۱, ۳, ۱, ۴, ۳, ۴\}$$

از این رو واضح است که

$$X \overset{۶}{\equiv} Y$$

MATH75.IR

حل مسایل آنالیز

۱. دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=۰}^{\infty}$ را در نظر بگیرید بطوری که:

$$s_n = x_۱^n + x_۲^n \quad n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

تعریف می کنیم

$$\sigma_۱ = x_۱ + x_۲ \ , \ \sigma_۲ = xy \quad \Longrightarrow \quad \sigma_۱ = ٦ \ , \ \sigma_۲ = ۱$$

قبلاً به دست آورده‌ایم که

$$s_n = \sigma_۱ s_{n-۱} - \sigma_۲ s_{n-۲} = ٦ s_{n-۱} - s_{n-۲}$$

و یا

$$s_۰ = ۲ \ , \ s_۱ = ٦ \ , \ s_n = ٦ s_{n-۱} - s_{n-۲} \quad n = ۲, ۳, ۴, \ldots$$

در دنبالهٔ بازگشتی خطی بالا دو جملهٔ اول دنباله اعداد صحیح هستند در نتیجه تمامی جملات دنباله اعداد صحیح می شوند. حال چندین جملهٔ اول دنباله را به هنگ ۵ می نویسیم:

$$s_۰ \equiv ۲ \ , \ s_۱ \equiv ۱ \ , \ s_۲ \equiv ۴ \ , \ s_۳ \equiv ۳ \ , \ s_۴ \equiv ۴ \ , \ s_۵ \equiv ۱ \ , \ s_٦ \equiv ۲ \ , \ s_۷ \equiv ۱ \quad (mod\ ۵)$$

با کمی دقت در اعداد بالا می توان استنتاج کرد که

$$s_n \overset{۵}{\equiv} s_{n+٦} \quad n = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

(این مطلب را به سادگی با استقراء می توان ثابت کرد). یعنی دنباله به هنگ ۵ دارای دورهٔ تناوب ٦ است. از این رو باقیماندهٔ هر عدد در دنباله بر ۵ برابر یکی از اعداد $s_۵, s_۴, s_۳, s_۲, s_۱, s_۰$ است. از طرفی باقیماندهٔ هیچ کدام از این شش عدد بر ۵ برابر صفر نیست در نتیجه هیچ عضو دنباله بر ۵ قابل تقسیم نیست.

نکته: دنبالهٔ $\{a_n\}_{n=۰}^{\infty}$ را در نظر بگیرید به طوری که در رابطهٔ بازگشتی زیر صدق کند:

$$a_n = c_۱ a_{n-۱} + c_۲ a_{n-۲} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

MATH75.IR

می گوییم دنباله به هنگ m دارای تناوب T است اگر به ازای هر n صحیح نامنفی داشته باشیم

$$a_n \overset{m}{\equiv} a_{n+T}$$

(دقت شود تناوب برای دنباله‌ها وقتی معنا می دهد که m و k جملهٔ اول دنباله و همچنین c_i ها همگی اعداد صحیح باشند.) در مورد تناوب دنباله‌ها قضیه‌ای به صورت زیر وجود دارد:

به ازای هر m طبیعی، اگر $(m, c_k) = ۱$ باشد سپس دنبالهٔ بالا به هنگ m متناوب است. همچنین اگر $(m, c_k) \neq ۱$، سپس می توان چند جملهٔ اول دنباله را حذف کرد بطوری که دنبالهٔ باقیمانده به هنگ m متناوب شود.

اثبات این قضیه کار سختی نیست چرا که اگر دو دستهٔ $(a_p, a_{p+۱}, \ldots, a_{p+k-۱})$ و $(a_q, a_{q+۱}, \ldots, a_{q+k-۱})$ موجود باشند به طوری که

$$a_p \overset{m}{\equiv} a_q \ , \ a_{p+۱} \overset{m}{\equiv} a_{q+۱} \ , \ \cdots \ , \ a_{p+k-۱} \overset{m}{\equiv} a_{q+k-۱}$$

سپس

$$\begin{aligned} a_{q+k} &= c_۱ a_{q+k-۱} + \cdots + c_{k-۱} a_{q+۱} + c_k a_q \\ &\overset{m}{\equiv} c_۱ a_{p+k-۱} + \cdots + c_{k-۱} a_{p+۱} + c_k a_p = a_{p+k} \end{aligned}$$

به همین ترتیب

$$a_{p+\alpha} \overset{m}{\equiv} a_{q+\alpha} \qquad \alpha = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

همچنین

$$\begin{aligned} c_k a_{q-۱} &= -[c_{k-۱} a_q + c_{k-۲} a_{q+۱} + \cdots + c_۱ a_{q+k-۲}] + a_{q+k-۱} \\ &\overset{m}{\equiv} -[c_{k-۱} a_p + c_{k-۲} a_{p+۱} + \cdots + c_۱ a_{p+k-۲}] + a_{p+k-۱} = c_k a_{p-۱} \end{aligned}$$

در نتیجه اگر $(m, c_k) = ۱$ سپس $a_{p-۱} \overset{m}{\equiv} a_{q-۱}$ و به همین ترتیب $a_{p-\alpha} \overset{m}{\equiv} a_{q-\alpha}$ به ازای $\alpha = ۱, ۲, \ldots, \min(p, q)$. بنابراین دنبالهٔ بالا با دورهٔ تناوب $|p - q|$ متناوب می شود.

همچنین اگر $(m, c_k) \neq ۱$، سپس دنبالهٔ $a_p \ , a_{p+۱}, \ldots, a_n, \ldots$ با دورهٔ تناوب $|p - q|$ متناوب می شود (دنبالهٔ جدید بدین صورت بدست آمده است که از دنبالهٔ اولیه، اعداد $a_۱, a_۲, \ldots, a_{p-۱}$ را حذف کرده‌ایم).

حال کافی است ثابت کنیم که دو دستهٔ $(a_p, a_{p+۱}, \ldots, a_{p+k-۱})$ و $(a_q, a_{q+۱}, \ldots, a_{q+k-۱})$ وجود دارند که اعضای متناظر در هر دو دسته دارای باقیماندهٔ یکسان بر m هستند. می دانیم دستهٔ $(a_p, a_{p+۱}, \ldots, a_{p+k-۱})$ دارای m^k حالت است زیرا باقیمانده هر کدام از a_i ها بر m می تواند یکی از m عدد $۰, ۱, \ldots, m - ۱$ باشد. از طرفی دسته‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$(a_۰, a_۱, \ldots, a_{k-۱}) \ , \ (a_k, a_{k+۱}, \ldots, a_{۲k-۱}) \ , \ \cdots \ , \ (a_{k \times m^k}, a_{k \times m^k + ۱}, \ldots, a_{k \times m^k + k - ۱})$$

تعداد این دسته‌ها برابر $m^k + ۱$ است در نتیجه بر طبق اصل لانهٔ کبوتر لااقل دو تا از دسته‌های بالا دارای یک حالت هستند.

MATH75.IR

۲. بر طبق قضیه می دانیم که اگر $f(x)$ دارای ریشهٔ گویا باشد، باید این ریشهٔ گویا عددی صحیح باشد (زیرا ضرایب $f(x)$ اعداد صحیح هستند و همچنین ضریب بزرگترین توان در $f(x)$ برابر یک است). حال کافی است ثابت کنیم که $f(x)$ ریشهٔ صحیح ندارد. برای اثبات این مطلب فرض می کنیم که α ریشهٔ صحیحی از $f(x)$ باشد، بر طبق اصل لانهٔ کبوتر از بین $p+1$ عدد متوالی $k, k+1, \ldots, k+p$ یک عدد مثل $k+\beta$ $(0 \le \beta \le p)$ وجود دارد که باقیمانده‌اش بر $p+1$ برابر α است. بنابراین داریم:

$$p+1 \mid (k+\beta)-\alpha \quad \Longrightarrow \quad f(k+\beta) \overset{p+1}{\equiv} f(\alpha) = 0$$

رابطهٔ بالا تناقض است چرا که بر طبق فرض مسئله باقیماندهٔ $f(k+\beta)$ بر $p+1$ برابر 0 نیست.

نکته: برای هر چند جمله‌ای $f(x)$ داریم که:

$$\forall x, y \in R \ : \ x-y \mid f(x)-f(y) \quad \text{یا} \quad \forall \alpha, x \in R \ : \ \alpha \mid f(x+\alpha)-f(x)$$

سعی کنید رابطهٔ بالا را خودتان ثابت کنید.

۳. تعریف می کنیم

$$p = a+b+c \ , \ q = ab+bc+ca \ , \ r = abc$$

از این‌رو داریم $p, q, r > 0$. چند جمله‌ای $p(x) = x^3 - px^2 + qx - r$ را در نظر بگیرید. بر طبق قضیهٔ ویت c, b, a ریشه‌های $p(x)$ هستند. یک x دلخواه و منفی در نظر بگیرید:

$$x^3 < 0 \ , \ -px^2 < 0 \ , \ qx < 0 \ , \ -r < 0 \quad \Longrightarrow \quad p(x) < 0$$

بنابراین به ازای هر x منفی، $p(x)$ عدد منفی است در نتیجه $p(x)$ ریشهٔ منفی ندارد. همچنین ریشه‌ای برابر 0 نیز ندارد $(p(0) = -r < 0)$. بنابراین هر سه ریشهٔ $p(x)$ یعنی c, b, a باید مثبت باشند.

۴. تعریف می کنیم:

$$p(x) = x^{2n} - 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} - \cdots - 2nx + (2n+1)$$

واضح است که $p(x)$ به ازای x های منفی، عددی مثبت است زیرا هر جمله از $p(x)$ عددی مثبت می شود. یعنی:

$$x < 0 \quad \Longrightarrow \quad p(x) > 0 \qquad (1)$$

داریم

$$xp(x) = x^{2n+1} - 2x^{2n} + 3x^{2n-1} - 4x^{2n-2} + \cdots + (2n+1)x$$

MATH75.IR

در نتیجه

$$(۱+x)p(x) = x^{۲n+۱} - x^{۲n} + x^{۲n-۱} - x^{۲n-۲} + \cdots + x + (۲n+۱)$$
$$= x\frac{۱+x^{۲n+۱}}{۱+x} + (۲n+۱)$$

از رابطهٔ بالا نتیجه می گیریم که

$$x > ۰ \quad \Longrightarrow \quad p(x) > ۰ \qquad (۲)$$

همچنین

$$x = ۰ \quad \Longrightarrow \quad p(x) = ۲n+۱ \qquad (۳)$$

از سه رابطهٔ (۳),(۲),(۱) حکم مسئله ثابت می شود.

۵. به‌ازای هر x حقیقی داریم که $f(x) = f(-x)$، در نتیجه $f(x)$ تابعی زوج است. واضح است که هر چندجمله‌ای که تابعی زوج باشد توانهای فرد از x را ندارد. برای اثبات این ادعا فرض می کنیم که:

$$f(x) = a_۰ + a_۱x + a_۲x^۲ + \cdots + a_nx^n$$

عدد فرد $۲k+۱$ را در نظر بگیرید به‌طوری که $۲k+۱ \leq n$. می دانیم که اگر دو چند جمله‌ای به ازای بینهایت x با هم برابر باشند باید ضرایب متناظر آنها نیز با هم برابر باشند. از این رو ضرایب متناظر $f(x)$ و $f(-x)$ با هم برابر هستند. ضریب $x^{۲k+۱}$ در $f(x)$ برابر $a_{۲k+۱}$ و در $f(-x)$ برابر $-a_{۲k+۱}$ است. درنتیجه

$$a_{۲k+۱} = -a_{۲k+۱} \quad \Longrightarrow \quad a_{۲k+۱} = ۰$$

به همین ترتیب می توان ثابت کرد که اگر چند جمله‌ای $f(x)$ تابع فردی باشد [$-f(x) = f(-x)$]، سپس $f(x)$ توانهای زوج از x را ندارد.

۶. داریم که $f(x^۵) = x^{۲۰} + x^{۱۵} + x^{۱۰} + x^۵ + ۱$. بر طبق قضیهٔ باقیماندهٔ تقسیم، چندجمله‌ای‌های $q(x), r(x)$ موجودند به‌طوری که

$$x^{۲۰} + x^{۱۵} + x^{۱۰} + x^۵ + ۱ = (x^۴ + x^۳ + x^۲ + x + ۱)q(x) + r(x) \qquad (*)$$

و همچنین

$$deg(r(x)) \leq ۳$$

فرض کنید $۱, \omega, \omega^۲, \omega^۳, \omega^۴$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۵ = ۱$ باشند ($\omega^۵ = ۱$)، بنابراین $\omega, \omega^۲, \omega^۳, \omega^۴$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۴ + x^۳ + x^۲ + x + ۱ = ۰$ نیز هستند. اگر در رابطهٔ (*) اعداد $x = \omega, \omega^۲, \omega^۳, \omega^۴$ را جایگزین کنیم به‌دست آوریم که

$$r(\omega^۴) = r(\omega^۳) = r(\omega^۲) = r(\omega) = ۵$$

MATH75.IR

دو چند جمله‌ای $r(x)$ و ۵ را در نظر بگیرید. این دو چند جمله‌ای از درجهٔ حداکثر ۳ هستند ولی در ۴ مقدار متمایز با هم برابرند در نتیجه بر طبق قضیه باید همواره با هم برابر باشند یعنی $r(x) = r = ۵$، بنابراین باقیماندهٔ تقسیم $f(x^۵)$ بر $f(x)$ برابر ۵ است .

۷. فرض کنید $۱, \omega, \omega^۲$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۳ = ۱$ باشند در نتیجه $۱ + \omega + \omega^۲ = ۰$ و یا $\omega + \omega^۲ = -۱$.
حال $f(\omega)$ و $f(\omega^۲)$ را محاسبه و سپس با هم جمع می کنیم:

$$۱ = f(\omega) = a_۰ + a_۱\omega + a_۲\omega^۲ + a_۳ + a_۴\omega + a_۵\omega^۲ + a_۶ + \cdots$$
$$۱ = f(\omega^۲) = a_۰ + a_۱\omega^۲ + a_۲\omega + a_۳ + a_۴\omega^۲ + a_۵\omega + a_۶ + \cdots$$

در نتیجه

$$۱ = a_۰ - \frac{a_۱}{۲} - \frac{a_۲}{۲} + a_۳ - \frac{a_۴}{۲} - \frac{a_۵}{۲} + a_۶ - \cdots$$

۸. بر طبق قضیهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای های $q(x)$ و $r(x)$ باضرایب حقیقی موجودند بطوریکه:

$$x^{۱۹۵۹} - ۱ = (x^۲ + x + ۱)(x^۲ + ۱)q(x) + r(x) \ , \ deg(r(x)) \leq ۳ \qquad (*)$$

فرض کنید $۱, \omega, \omega^۲$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۳ = ۱$ باشند. اگر در رابطهٔ $(*)$ به جای عدد x، عدد ω یا عدد $\omega^۲$ را بگذاریم بدست می آید که

$$r(\omega) = r(\omega^۲) = ۰ \quad \Longrightarrow \quad x^۲ + x + ۱ = (x - \omega)(x - \omega^۲) \mid r(x)$$

از این رو چند جمله‌ای $p(x)$ با درجهٔ حداکثر برابر ۱ موجود است که $r(x) = (x^۲ + x + ۱)p(x)$.
اگر در رابطهٔ $(*)$، $x = i \ , x = -i$ را قرار دهیم بدست می‌آید که $r(-i) = i - ۱ \ , r(+i) = -i - ۱$ و یا $p(-i) = -i - ۱ \ , p(i) = i - ۱$. واضح است که $p(x)$ چند جمله‌ای ثابت نمی‌تواند باشد در نتیجه $p(x)$ از درجهٔ اول است . فرض کنید که $p(x) = \alpha(x - \beta)$. بااستفاده از $p(i) \ , p(-i)$ به راحتی می توان محاسبه نمود که $p(x) = x - ۱$ و یا

$$r(x) = (x^۲ + x + ۱)(x - ۱) = x^۳ - ۱$$

۹. معادلهٔ روبرو را در نظر بگیرید: $\qquad xf(x - ۱) = (x + ۱)f(x) \qquad (*)$
اگر در رابطهٔ بالا $x = ۰$ را جایگزین کنیم بدست می آید که $f(۰) = ۰$. حال بااستقراء بر روی n ثابت می‌کنیم که به ازای هر n صحیح نامنفی، $f(n)$ برابر صفر است. به ازای $n = ۰$ در بالا ثابت شد. فرض کنید به ازای $n = k$ داشته باشیم $f(n) = ۰$. حال می خواهیم ثابت کنیم که به ازای $n = k + ۱$ نیز $f(n)$ صفر است. اگر در رابطهٔ $(*)$، $x = k + ۱$ را جایگزین کنیم بدست می‌آید که $f(k + ۱) = ۰$. بدین ترتیب حکم استقراء ثابت می شود. از این‌رو چندجمله‌ای $f(x)$ دارای بی‌نهایت ریشهٔ متمایز است بنابراین باید همواره صفر باشد و یا $f(x) \equiv ۰$.

MATH75.IR

۱۰. فرض کنید دو چند جمله‌ای غیر ثابت $p(x)$ و $q(x)$ با ضرایب صحیح موجود باشند بطوریکه

$$(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)-1=p(x)q(x) \qquad (*)$$

اگر در رابطهٔ $(*)$، عدد $x=a_i$ را جایگزین کنیم بدست می‌آید که $p(a_i)q(a_i)=-1$. از طرفی $p(a_i)$ و $q(a_i)$ اعداد صحیحی هستند، به عبارت دیگر حاصلضرب دو عدد صحیح برابر -1 شده است در نتیجه یکی از آنها برابر $+1$ و دیگری برابر -1 است و یا معادلاً مجموع این دو عدد برابر صفر است:

$$p(a_i)+q(a_i)=0 \qquad i=1,2,\dots,n$$

تعریف می کنیم $k(x)=p(x)+q(x)$. از این رو درجهٔ چند جمله‌ای $k(x)$ حداکثر $n-1$ است ولی دارای n ریشهٔ $a_n,\dots,a_2,a_1$ است بنابراین باید $k(x)$ همواره صفر باشد یعنی $q(x)=-p(x)$. بنابراین داریم:

$$(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)-1=-p(x)^2$$

رابطهٔ بالا نمی تواند اتفاق بیفتد زیرا ضریب بزرگترین توان (x^n) در سمت چپ رابطهٔ بالا برابر یک است ولی ضریب بزرگترین توان در سمت راست رابطهٔ بالا برابر یک عدد منفی است. بنابراین چنین $p(x)$ و $q(x)$ ای وجود ندارند.

۱۱. اگر x عددی نامنفی باشد سپس $p(x)$ عددی مثبت می شود زیرا همهٔ ضرایب $p(x)$ نامنفی هستند. بنابراین هر ریشهٔ $p(x)$ باید عددی منفی باشد. فرض کنید $-y_1,-y_2,\dots,-y_n$ ریشه‌های $p(x)$ باشند و $y_i>0 \quad i=1,2,\dots,n$. از اینرو داریم:

$$p(x)=(x+y_1)(x+y_2)\dots(x+y_n)$$

به ازای هر i از ۱ تا n داریم که

$$2+y_i=1+1+y_i\geq 3\sqrt[3]{1\cdot 1\cdot y_i}=3\sqrt[3]{y_i}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}p(2)&=(2+y_1)(2+y_2)\dots(2+y_n)\\&\geq 3\sqrt[3]{y_1}\times 3\sqrt[3]{y_2}\times\dots\times 3\sqrt[3]{y_n}\\&=3^n\sqrt[3]{y_1y_2\dots y_n}\\&=3^n\end{aligned}$$

[بر طبق قضیه ویت داریم $y_1y_2\dots y_n=1 \implies (-y_1)(-y_2)\dots(-y_n)=(-1)^n\times 1$

MATH75.IR

۱۲. فرض کنید دو چند جمله‌ای $p(x)$ و $q(x)$ با ضرایب صحیح و درجهٔ بزرگتر از صفر موجود باشند بطوری که

$$x^{۱۰۵} - ۹ = p(x)q(x) \qquad (*)$$

تعریف می کنیم $p(x) = a_k x^k + \cdots + a_۱ x^۱ + a_۰$. واضح است که $۱ \le k \le ۱۰۴$. فرض کنید $\alpha_k, \ldots, \alpha_۲, \alpha_۱$ ریشه‌های $p(x)$ باشند. از رابطهٔ $(*)$ نتیجه می گیریم که هر ریشه از $p(x)$، یک ریشه از $x^{۱۰۵} - ۹$ نیز هست:

$$\alpha_i^{۱۰۵} - ۹ = ۰ \quad \text{یا} \quad \alpha_i^{۱۰۵} = ۹ \qquad i = ۱, ۲, \ldots, k$$

از رابطهٔ بالا بدست می‌آوریم که $|\alpha_i|^{۱۰۵} = |۹|$ و یا $|\alpha_i| = \sqrt[۱۰۵]{۹}$. از اینرو داریم:

$$|\alpha_۱ \alpha_۲ \ldots \alpha_k| = |\alpha_۱||\alpha_۲| \ldots |\alpha_k| = \sqrt[۱۰۵]{۹} \times \sqrt[۱۰۵]{۹} \times \cdots \times \sqrt[۱۰۵]{۹} = \left(\sqrt[۱۰۵]{۹}\right)^k \qquad (۱)$$

از طرفی از قضیه ویت داریم که

$$\alpha_۱ \alpha_۲ \ldots \alpha_k = (-۱)^k \frac{a_۰}{a_k} \quad \Longrightarrow \quad |\alpha_۱ \alpha_۲ \ldots \alpha_k| = \left|\frac{a_۰}{a_k}\right| \qquad (۲)$$

ادعا می کنیم $a_k = \pm ۱$، زیرا ضریب بزرگترین توان در $q(x)$ ضربدر a_k برابر یک (ضریب $x^{۱۰۵}$) می‌شود به عبارت دیگر a_k یک عدد صحیح است که عدد $۱+$ را عاد می کند. بنابراین از رابطهٔ (۲) نتیجه می‌گیریم که $|\alpha_۱ \alpha_۲ \ldots \alpha_k|$ عددی صحیح می شود. در نتیجه از رابطهٔ (۱) بدست می‌آوریم که

$$\left(\sqrt[۱۰۵]{۹}\right)^k \in Z \qquad ۱ \le k \le ۱۰۴$$

همچنین داریم

$$\left(\sqrt[۱۰۵]{۹}\right)^k = ۳^{\frac{۲k}{۱۰۵}}$$

از این‌رو بدست می آوریم $۱۰۵ | ۲k$، در نتیجه $۱۰۵ | k$ و یا $k \le ۱۰۵$.
از تناقض بالا نتیجه می گیریم که $x^{۱۰۵} - ۹$ روی $\mathbf{Z}$ تحویل‌ناپذیر است .

۱۳. داریم که

$$a^۲ + ab + b^۲ \ge ۳(a + b - ۱) \quad \Longleftrightarrow \quad a^۲ + (b - ۳)a + (b^۲ - ۳b + ۳) \ge ۰$$

تعریف می کنیم

$$p(x) = x^۲ + (b - ۳)x + (b^۲ - ۳b + ۳)$$

دلتای چند جمله‌ای $p(x)$ بصورت زیر است:

$$\Delta = (b - ۳)^۲ - ۴(b^۲ - ۳b + ۳) = -۳(b - ۱)^۲ \le ۰$$

MATH75.IR

دلتای چندجمله‌ای درجهٔ دوم $p(x)$ عددی منفی است و همچنین ضریب $x^۲$ عددی مثبت است، در نتیجه چندجمله‌ای $p(x)$ همواره عددی نامنفی است:

$$x = a \quad \Longrightarrow \quad p(a) \geq ۰ \quad \text{و یا} \quad a^۲ + (b-۳)a + (b^۲ - ۳b + ۳) \geq ۰$$

۱۴. واضح است که $f(x) \equiv ۰$ یک جواب مسئله است. از این‌رو فرض می کنیم که $f(x)$ متحد با صفر نباشد. در معادلهٔ مسئله $x = ۰$ را جایگزین می کنیم: $f(۰) = f(۰) \times f(۰)$. از اینرو دو حالت زیر را داریم:

۱) $f(۰) = ۰$. فرض کنید $f(x)$ دارای n تا ریشهٔ صفر باشد $(n > ۰)$. بنابراین چند جمله‌ای $q(x)$ موجود است بطوری که $f(x) = x^n(xq(x) + a_۰)$، که در آن $a_۰$ عددی غیر صفر است. اگر این $f(x)$ را در معادلهٔ مسئله جایگزین کنیم بدست می آید که:

$$\left(x + ۲x^۳\right)^n \left[\left(x + ۲x^۳\right) q\left(x + ۲x^۳\right) + a_۰\right] = x^n(xq(x) + a_۰)\left(۲x^۲\right)^n \left[\left(۲x^۲\right) q\left(۲x^۲\right) + a_۰\right]$$

و یا

$$\left(۱ + ۲x^۲\right)^n \left[x\left(۱ + ۲x^۲\right) q\left(x + ۲x^۳\right) + a_۰\right] = (xq(x) + a_۰)\left(۲x^۲\right)^n \left[\left(۲x^۲\right) q\left(۲x^۲\right) + a_۰\right]$$

طرف راست معادلهٔ بالا بر x بخشپذیر است زیرا $۲n \geq ۱$، در نتیجه باید طرف چپ آن نیز بر x بخشپذیر باشد. واضح است که $(۱ + ۲x^۲)^n$ بر x بخشپذیر نیست. در نتیجه:

$$x \,\Big|\, x\left(۱ + ۲x^۲\right) q\left(x + ۲x^۳\right) + a_۰ \quad \Longrightarrow \quad x | a_۰$$

تناقض بالا نشان می دهد که چنین f ای وجود ندارند.

۲) $f(۰) = ۱$. فرض کنید f دارای ریشه‌های مختلط $\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_n$ باشد. بر طبق قضیهٔ ویت داریم:

$$\alpha_۱\alpha_۲ \ldots \alpha_n = (-۱)^n f(۰) = (-۱)^n \quad \Longrightarrow \quad |\alpha_۱||\alpha_۲| \ldots |\alpha_n| = ۱$$

(فرض کنید a_n ضریب x^n در $f(x)$ باشد. اگر ضریب $x^{۳n}$ را در دو طرف رابطهٔ $f(x+۲x^۳) = f(x)f(۲x^۳)$ باهم برابر قرار دهیم بدست می آید $۲^n a_n = a_n \times (۲^n a_n)$ در نتیجه $a_n = ۱$). اگر حاصلضرب چند عدد مثبت برابر ۱ باشد دو حالت بوجود می آید: یا یکی از آنها بزرگتر از یک است و یا همگی برابر واحد هستند. بنابراین دو حالت زیر را در نظر می گیریم:

(i) k ای وجود دارد بطوریکه $|\alpha_k| > ۱$. دنبالهٔ $\{a_i\}_{i=۱}^n$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$a_۱ = \alpha_k \quad , \quad a_n + ۱ = a_n + ۲a_n^۳ \quad n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

MATH75.IR

براحتی با استفاده از استقراء می توان ثابت نمود که $f(a_n) = ۰ \quad n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، زیرا

$$f(a_{n+۱}) = f(a_n + ۲a_n^۳) = f(a_n) f(۲a_n^۲)$$

عدد مختلط α با شرط $|\alpha| > ۱$ را در نظر بگیرید:

$$|\alpha + ۲\alpha^۳| \geq |۲\alpha^۳| - |\alpha| = ۲|\alpha|^۳ - |\alpha| > ۲|\alpha| - |\alpha| = |\alpha|$$

بنابراین داریم $|a_۱| < |a_۲| < \ldots < |a_p| < \ldots$. این رابطه می گوید که f دارای بینهایت ریشهٔ متمایز a_i است که ممکن نیست.

(ii) $|\alpha_۱| = |\alpha_۲| = \ldots = |\alpha_n| = ۱$. تعریف می کنیم $\alpha = \alpha_۱$. واضح است که $\alpha + ۲\alpha^۳$ نیز یک ریشه از f است در نتیجه $|\alpha + ۲\alpha^۳| = ۱$. از طرفی داریم:

$$۱ = |\alpha + ۲\alpha^۳| = |\alpha||۱ + ۲\alpha^۲| = |۱ + ۲\alpha^۲| \geq |۲\alpha^۲| - |-۱| = ۲ - ۱ = ۱$$

مشاهده می شود که نامساوی بالا به تساوی تبدیل شده است در نتیجه عدد طبیعی k موجود است بطوریکه $(۱ + ۲\alpha^۲) = k(-۱)$ و یا $\alpha^۲ = \frac{-k-۱}{۲}$. از طرفی بر طبق فرض داریم $|\alpha| = ۱$ در نتیجه $|\alpha^۲| = ۱$. بنابراین باید داشته باشیم:

$$\left|-\left(\frac{k+۱}{۲}\right)\right| = ۱ \implies \frac{k+۱}{۲} = ۱ \implies k = ۱$$

از این‌رو بدست می آوریم که $\alpha = \pm i$. فرض کنید f دارای $m_۱$ تا ریشهٔ $+i$ و $m_۲$ تا ریشهٔ $-i$ باشد. می دانیم که اگر z ریشه‌ای از f باشد باید $\overline{z}$ نیز ریشه‌ای از f باشد و همچنین داریم $\overline{+i} = -i$، از این‌رو باید $m_۱ = m_۲ = m$ باشد. در نتیجه:

$$f(x) = (x-i)^m (x+i)^m = \left(x^۲ + ۱\right)^m$$

واضح است که f بدست آمده در بالا در شرایط مسئله صدق می کند زیرا:

$$\left(x^۲ + ۱\right)\left(۴x^۴ + ۱\right) = \left(۴x^۶ + ۴x^۴ + x^۲ + ۱\right) = \left(\left(x + ۲x^۳\right)^۲ + ۱\right)$$

۱۵. فرض کنید α یک ریشهٔ حقیقی معادلهٔ مفروض باشد:

$$\alpha^۴ + a\alpha^۳ + b\alpha^۲ + a\alpha + ۱ = ۰$$

تعریف می کنیم

$$\beta = \alpha + \frac{۱}{\alpha}$$

MATH75.IR

چندجمله‌ای مفروض یک چند جمله‌ای معکوس است در نتیجه برحسب β قابل نوشتن است:

$$\alpha^۲ + a\alpha + b + \frac{a}{\alpha} + \frac{۱}{\alpha} = ۰ \quad \Longrightarrow \quad \beta^۲ - ۲ + a\beta + b = ۰$$

بر طبق نامساوی کوشی داریم:

$$(۲ - \beta^۲)^۲ = (a.\beta + b.۱)^۲ \leq (a^۲ + b^۲)(\beta^۲ + ۱)$$

در نتیجه

$$a^۲ + b^۲ \geq \frac{(۲ - \beta^۲)^۲}{۱ + \beta^۲}$$

تابع $f(x)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{(۲ - x)^۲}{۱ + x}$$

با استفاده از روش تعیین علامت که در دبیرستان آموخته‌اید می توانید بدست آورید که $f(x)$ به ازای x های بزرگتر و یا مساوی با ۲ اکیداً صعودی است. همچنین واضح است که $\beta \geq ۲\sqrt[۲]{\alpha \cdot \frac{۱}{\alpha}} = ۲$ در نتیجه

$$a^۲ + b^۲ \geq \frac{(۲ - \beta^۲)^۲}{۱ + \beta^۲} = f(\beta^۲) \geq f(۲^۲) = f(۴) = \frac{(۲ - ۴)^۲}{۱ + ۴} = \frac{۴}{۵}$$

علامت تساوی وقتی رخ می دهد که $\frac{a}{\beta} = \frac{b}{۱}$. به عنوان یک مثال برای حالت تساوی می‌توان اعداد زیر را در نظر گرفت:

$$a = -\frac{۴}{۵} \ , \ b = -\frac{۲}{۵} \quad \Longrightarrow \quad \beta = ۲ \ , \ \alpha = ۱$$

از این‌رو $x = ۱$ یک ریشهٔ حقیقی چند جمله‌ای مفروض می‌شود.

۱۶. داریم که:

$$۱ + x^n + x^{۲n} + \cdots + x^{mn} = ۱ + (x^n)^۱ + \cdots + (x^n)^m = \frac{(x^n)^{m+۱} - ۱}{x^n - ۱}$$

$$۱ + x + x^۲ + \cdots + x^m = \frac{x^{m+۱} - ۱}{x - ۱}$$

در نتیجه

$$۱ + x + \cdots + x^m \mid ۱ + x^n + \cdots + x^{mn} \iff \left(x^{m+۱} - ۱\right)(x^n - ۱) \Big| \left(x^{n(m+۱)} - ۱\right)(x - ۱) \qquad (*)$$

ریشه‌های چند جمله‌ای $x^n - ۱$ عبارتند از

$$\alpha_k = \cos\frac{۲k\pi}{n} + i\sin\frac{۲k\pi}{n} \qquad k = ۰, ۱, \ldots, n - ۱$$

MATH75.IR

همچنین ریشه‌های چند جمله‌ای $x^{m+1}-1$ عبارتند از

$$\beta_k=\cos\frac{2k\pi}{m+1}+i\sin\frac{2k\pi}{m+1}\qquad k=0,1,\ldots,m$$

ادعا می‌کنیم که هر کدام از α_i ها و یا β_i ها ریشه‌ای از چند جمله‌ای $x^{(m+1)n}-1$ است زیرا:

$$\alpha_i^n=1\implies \alpha_i^{n(m+1)}=1 \text{ و یا } \alpha_i^{n(m+1)}-1=0\qquad i=0,1,\ldots,n-1$$

$$\beta_i^{m+1}=1\implies \beta_i^{n(m+1)}=1 \text{ و یا } \beta_i^{n(m+1)}-1=0\qquad i=0,1,\ldots,m$$

فرض کنید $(n,m+1)=d$. دو حالت زیر را داریم:

۱) $d>1$. واضح است که

$$\alpha_{\frac{n}{d}}=\beta_{\frac{m+1}{d}}=\cos\frac{2\pi}{d}+i\sin\frac{2\pi}{d}$$

می‌دانیم که $p(x)|q(x)$ اگر و فقط اگر هر ریشه از $p(x)$ با شمارش تعداد تکرارها، ریشه‌ای از $q(x)$ نیز باشد. در نتیجه اگر رابطهٔ (*) برقرار باشد باید چند جمله‌ای $(x-1)(x^{n(m+1)}-1)$ هر دو ریشهٔ $\alpha_{\frac{n}{d}}$ و $\beta_{\frac{m+1}{d}}$ را داشته باشد به عبارت دیگر این چندجمله‌ای باید دو بار ریشهٔ $\cos\frac{2\pi}{d}+i\sin\frac{2\pi}{d}$ را داشته باشد. از طرفی می‌دانیم که چندجمله‌ای $x-1$ فقط ریشهٔ ۱ را دارد و $1\neq\cos\frac{2\pi}{d}+i\sin\frac{2\pi}{d}$ $(d\neq 1)$، در نتیجه چندجمله‌ای $x^{n(m+1)}-1$ باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد. ولی واضح است که همهٔ ریشه‌های چندجمله‌ای x^k-1 متمایز هستند. بدین ترتیب به تناقض رسیدیم.

۲) $d=1$. ادعا می کنیم که هیچ کدام از اعداد $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1}$ باهیچ کدام از اعداد $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m$ برابر نیستند. برای اثبات این ادعا فرض کنید که $\alpha_{t_1}=\beta_{t_2}$, $1\leq t_1\leq n-1$, $1\leq t_2\leq m$. درنتیجه:

$$\cos\frac{2\pi t_1}{n}+i\sin\frac{2\pi t_1}{n}=\cos\frac{2\pi t_2}{m+1}+i\sin\frac{2\pi t_2}{m+1}\implies \frac{t_1}{n}-\frac{t_2}{m+1}\in Z$$

از طرفی داریم $0<\frac{t_1}{n}<1$, $0<\frac{t_2}{m+1}<1$، در نتیجه $\left|\frac{t_1}{n}-\frac{t_2}{m+1}\right|<1$. بنابراین باید داشته باشیم $\frac{t_1}{n}-\frac{t_2}{m+1}=0$. بر طبق فرض $m+1,n$ نسبت به هم اول هستند در نتیجه باید t_1 مضربی از t_2,n مضربی از $m+1$ باشد، از این‌رو

$$(m)+(n-1)\geq (t_2)+(t_1)\geq (m+1)+(n)=(m)+(n-1)+2$$

تناقض بالا درستی ادعا را نشان می دهد. یک ریشه از چند جمله‌ای $(x-1)(x^{m+1}-1)$ را در نظر بگیرید اگر این ریشه برابر۱ باشد سپس دقیقاً دو بار در این چند جمله‌ای تکرار شده است و همچنین یک بار در $x-1$ و یک بار در $x^{(m+1)n}-1$ ظاهر شده است. اگر این ریشه برابر ۱ نباشد بر طبق گفته‌های بالا دقیقاً یکبار

MATH75.IR

در این چند جمله‌ای ظاهر شده است. در ابتدای اثبات نشان دادیم که این ریشه، ریشه‌ای از چند جمله‌ای $x^{(m+1)n}-1$ نیز است. بنابراین بر طبق قضیه داریم:

$$\left(x^{m+1}-1\right)\left(x^{n}-1\right) \Big| \left(x^{(m+1)n}-1\right)(x-1)$$

از دو حالت بالا نتیجه می گیریم که

$$1+x+\cdots+x^{m} \mid 1+x^{n}+\cdots+x^{mn} \quad \Longleftrightarrow \quad (m+1,n)=1$$

۱۷. تعریف می‌کنیم $A(x)=(x+1)p(x)-x$. چند جمله‌ای $A(x)$ از درجهٔ $n+1$ است و همچنین $n+1$ ریشهٔ $0,1,2,\ldots,n$ را نیز دارد. از اینرو عددی مثل α وجود دارد بطوری که:

$$A(x)=\alpha x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$$

برای به دست آوردن مقدار α، $A(-1)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$1=A(-1)=\alpha(-1)(-2)(-3)\ldots(-n-1)=\alpha(-1)^{n+1}(n+1)! \quad \Longrightarrow \quad \alpha=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

بنابراین

$$p(x)=\frac{1}{x+1}\left[x+\frac{(-1)^{n+1}x(x-1)\ldots(x-n)}{(n+1)!}\right]$$

در نتیجه

$$p(n+1)=\frac{1}{n+2}\left[(n+1)+(-1)^{n+1}\right]$$

۱۸. سعی می‌کنیم $p(x)$ را با استفاده از فرمول درونیابی لاگرانژ بدست آوریم:

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{\binom{n+1}{i}}\prod_{j\neq i}\frac{x-j}{i-j}=\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{1}{\binom{n+1}{i}}\prod_{j\neq i}(x-j)\times\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\right]$$

در نتیجه

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\frac{n-i+1}{(n+1)!}\prod_{j\neq i}(x-j)$$

بنابراین داریم

$$p(n+1)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\frac{n-i+1}{(n+1)!}\prod_{j\neq i}(n+1-j)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}=\frac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)}$$

MATH75.IR

۱۹. فرض کنید $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ریشه‌های چند جمله‌ای مفروض باشند. بر طبق فرض داریم $x_i > 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n$. روابط ویت را برای این چند جمله‌ای می‌نویسیم:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \qquad (1)$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_1 x_2 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n = (-1)^n \frac{b}{a} n^2 \qquad (2)$$

$$x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^n \frac{b}{a} \qquad (3)$$

از تقسیم رابطهٔ (۲) بر (۳) بدست می‌آوریم که:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = n^2 \qquad (4)$$

حال روابط (۱) و (۴) را در هم ضرب کرده و همچنین از نامساوی کوشی نیز استفاده می‌کنیم:

$$n^2 = (1 + 1 + \cdots + 1)^2 \leq (x_1 + x_2 + \cdots x_n)(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}) = n^2$$

در رابطهٔ بالا علامت نامساوی به تساوی تبدیل شده است. می‌دانیم حالت تساوی کوشی در این حالت وقتی رخ می‌دهد که همهٔ x_i ها با هم برابر باشند:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{1}{n}$$

۲۰. داریم که

$$xy + yz + zx = \frac{1}{2}\left[(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)\right] = 3$$

حال اتحاد زیر را درنظر بگیرید:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

از رابطهٔ بالا نتیجه می‌گیریم که $xyz = 1$. واضح است که x, y, z ریشه‌های چند جمله‌ای $p(\lambda)$ هستند:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - (x + y + z)\lambda^2 + (xy + yz + zx)\lambda - xyz$$

در نتیجه

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3$$

چندجمله‌ای $p(\lambda)$ دارای سه ریشهٔ ۱ است، بنابراین $x = y = z = 1$.

۲۱. می‌دانیم که

$$2\left[\binom{i-1}{1} + \binom{i-1}{2} + \cdots + \binom{i-1}{n}\right] = 2^i \qquad i = 1, 2, \ldots, n+1$$

MATH75.IR

بر طبق قضیهٔ لاگرانژ می‌دانیم که چند جمله‌ای $p(x)$ یکتا است. از اینرو $p(x)$ باید بصورت زیر باشد:

$$p(x) = ۲\left[\binom{x-۱}{۱} + \binom{x-۱}{۲} + \cdots + \binom{x-۱}{n}\right]$$

که در آن

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-۱)\dots(x-k+۱)}{k!}$$

(به وضوح چند جمله‌ای تعریف شده در بالا از درجهٔ n است). در نتیجه:

$$p(n+۲) = ۲\left[\binom{n+۱}{۰} + \binom{n+۱}{۰} + \cdots + \binom{n+۱}{n}\right] = ۲(۲^{n+۱} - ۱) = ۲^{n+۲} - ۲$$

۲۲. فرض کنید حاصلضرب عناصر هر کدام از ستونها برابر c باشد. چند جمله‌ای $f(x)$ با درجهٔ کمتر از n را بصورت زیر در نظر بگیرید:

$$f(x) = \prod_{i=۱}^{n}(x+a_i) - \prod_{j=۱}^{n}(x-b_j)$$

داریم که

$$f(b_j) = \prod_{i=۱}^{n}(b_j+a_i) = c \qquad j = ۱, ۲, \dots, n$$

از این رو چند جمله‌ای $f(x) - c$ با درجهٔ کمتر از n دارای n ریشهٔ متمایز است. در نتیجه باید همواره داشته باشیم $f(x) - c = ۰$، بنابراین

$$c = f(-a_i) = -\prod_{j=۱}^{n}(-a_i - b_j) = (-۱)^{n+۱}\prod_{j=۱}^{n}(a_i + b_j)$$

در نتیجه حاصلضرب عناصر هر کدام از سطرها برابر $(-۱)^{n+۱}c$ است.

۲۳. به ازای هر دو عدد مثبت x, y داریم که

$$xy \le \left(\frac{x+y}{۲}\right)^{۲}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
\frac{abc+abd+acd+bcd}{۴} &= \frac{۱}{۲}\left[ab\left(\frac{c+d}{۲}\right) + cd\left(\frac{a+b}{۲}\right)\right] \\
&\le \frac{۱}{۲}\left[\left(\frac{a+b}{۲}\right)^{۲}\left(\frac{c+d}{۲}\right) + \left(\frac{c+d}{۲}\right)^{۲}\left(\frac{a+b}{۲}\right)\right] \\
&= \left(\frac{a+b}{۲}\right)\left(\frac{c+d}{۲}\right)\left(\frac{a+b+c+d}{۲}\right) \\
&\le \left(\frac{\frac{a+b}{۲} + \frac{c+d}{۲}}{۲}\right)^{۲}\left(\frac{a+b+c+d}{۲}\right) \\
&= \left(\frac{a+b+c+d}{۴}\right)^{۳}
\end{aligned}$$

MATH75.IR

از طرفی بر طبق نامساوی توانی داریم:

$$\frac{a+b+c+d}{۴} \le \sqrt{\frac{a^۲+b^۲+c^۲+d^۲}{۴}}$$

در نتیجه

$$\sqrt[۳]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{۴}} \le \frac{a+b+c+d}{۴} \le \sqrt{\frac{a^۲+b^۲+c^۲+d^۲}{۴}}$$

۲۴. داریم

$$S > \frac{a}{a+b+c+d}+\frac{b}{a+b+c+d}+\frac{c}{a+b+c+d}+\frac{d}{a+b+c+d} = ۱$$

و همچنین

$$S < \frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+b}+\frac{d}{a+b} = ۲$$

واضح است که S تابعی پیوسته از ۴ متغیر a,b,c,d است. بنابراین اگر ثابت کنیم که S به طور دلخواه می‌تواند به ۱ و همچنین ۲ نزدیک شود معادل است با اینکه S هر مقداری دربازهٔ $(۱,۲)$ را می‌گیرد (می‌دانیم که اگر تابع پیوسته f دو مقدار α , β را بگیرد، باید تمامی مقادیر بین α , β را نیز بگیرد.) برای اثبات مطلب بالا، دو عدد a , b را برابر متغیر x و دو عدد c , d را برابر متغیر y می‌گیریم:

$$a=b=x \ , \ c=d=y \quad \Longrightarrow \quad S=\frac{۲x}{۲x+y}+\frac{۲y}{x+۲y} \quad , \quad \lim_{\substack{x\to ۱\\ y\to ۰}} S = ۱$$

حال دو عدد a , c را برابر متغیر x و دو عدد b , d را برابر متغیر y می‌گیریم:

$$a=c=x \ , \ b=d=y \quad \Longrightarrow \quad S=\frac{۲x}{x+۲y}+\frac{۲y}{۲x+y} \quad , \quad \lim_{\substack{x\to ۱\\ y\to ۰}} S = ۲$$

۲۵. برای اثبات نامساوی مثلث، طرفین رابطهٔ مذکور را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sum_{i=۱}^{n} a_i^۲ + \sum_{i=۱}^{n} b_i^۲ + ۲\sqrt{\left(\sum_{i=۱}^{n} a_i^۲\right)\left(\sum_{i=۱}^{n} b_i^۲\right)} \overset{?}{\ge} \sum_{i=۱}^{n}(a_i+b_i)^۲ \qquad (*)$$

داریم که:

$$\sum_{i=۱}^{n}(a_i+b_i)^۲ = \sum_{i=۱}^{n} a_i^۲ + \sum_{i=۱}^{n} b_i^۲ + ۲\sum_{i=۱}^{n} a_i b_i \qquad (۱)$$

همچنین بر طبق نامساوی کوشی – شوارتز داریم:

$$\left(\sum_{i=۱}^{n} a_i b_i\right)^۲ \le \left(\sum_{i=۱}^{n} a_i^۲\right)\left(\sum_{i=۱}^{n} b_i^۲\right) \quad \text{و یا} \quad \sum_{i=۱}^{n} a_i b_i \le \sqrt{\left(\sum_{i=۱}^{n} a_i^۲\right)\left(\sum_{i=۱}^{n} b_i^۲\right)} \qquad (۲)$$

MATH75.IR

با استفاده از دو رابطهٔ (۱) و (۲)، رابطهٔ (*) ثابت می شود.

۲۶. بر طبق نامساوی کوشی – شوارتز داریم:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{1 + x_1 + \cdots + x_{i-1} + x_{i+1} + \cdots + x_n}\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n}(1 + x_1 + \cdots + x_{i-1} + x_{i+1} + \cdots + x_n)\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

همچنین

$$\sum_{i=1}^{n}(1 + x_1 + \cdots + x_{i-1} + x_{i+1} + \cdots + x_n) = n + (n-1)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = 3n - 2$$

با استفاده از دو رابطهٔ بالا حکم مسئله ثابت می‌شود.

۲۷. داریم که

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} z_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \qquad (1)$$

از آنجا که $\{z_i\}_{i=1}^{n}$ جایگشتی از $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ است نتیجه می‌شود که

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \qquad (2)$$

همچنین بر طبق نامساوی هاردی – پولیا داریم

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \geq \sum_{i=1}^{n} x_i z_i \qquad (3)$$

با استفاده از روابط (۱), (۲), (۳) بدست می آید که

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \geq 0$$

MATH75.IR

۲۸. اگر S_n را برابر مجموع موردنظر تعریف کنیم بدست می آید که:

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{a_1}{2^1} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} \\
&= \frac{a_1}{2^1} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_1 + a_2}{2^3} + \frac{a_2 + a_3}{2^4} + \cdots + \frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2^n} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \left(\frac{a_1}{2^3} + \frac{a_2}{2^4} + \cdots + \frac{a_{n-2}}{2^n}\right) + \left(\frac{a_2}{2^3} + \frac{a_3}{2^4} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2^n}\right) \\
&= \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}S_n - \frac{a_{n-1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^{n+2}}\right) + \left(\frac{1}{2}S_n - \frac{a_1}{4} - \frac{a_n}{2^{n+1}}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}S_n - \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^{n+2}}
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$S_n = 2 - \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^{n+2}} < 2$$

۲۹. برای n عدد حقیقی $\alpha_n, \ldots, \alpha_2, \alpha_1$ می‌دانیم که

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n| \geq |\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n|$$

(این رابطه را به آسانی می‌توان با استقراء ثابت نمود.) حالت $n = 2$ رابطهٔ بالا در این مسئله کاربرد دارد:

$$|x + y - z| + |x - y + z| \geq |(x + y - z) + (x - y + z)| = 2|x|$$

به همین ترتیب بدست می آید:

$$|x - y + z| + |-x + y + z| \geq 2|z| \quad , \quad |x + y - z| + |-x + y + z| \geq 2|y|$$

با جمع طرفین سه رابطهٔ اخیر با یکدیگر، به نامساوی زیر می‌رسیم.

$$|x| + |y| + |z| \leq |x + y - z| + |x + -y + z| + |-x + y + z|$$

۳۰. به ازای n عدد نامنفی $\alpha_n, \ldots, \alpha_2, \alpha_1$ می‌دانیم که

$$(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)\ldots(1 + \alpha_n) \geq 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$

MATH75.IR

(برای اثبات درستی رابطهٔ بالا کافی است طرف چپ آن را بسط دهیم.) از این رو داریم:

$$\begin{aligned}(۱+a_۱)(۱+a_۲)\dots(۱+a_n) &= ۲^n \prod_{i=۱}^{n}\left(\frac{۱}{۲}+\frac{a_i}{۲}\right)\\ &= ۲^n \prod_{i=۱}^{n}\left(۱+\frac{a_i-۱}{۲}\right)\\ &\geq ۲^n\left(۱+\frac{a_i-۱}{۲}+\frac{a_۲-۱}{۲}+\dots+\frac{a_n-۱}{۲}\right)\\ &\geq ۲^n\left(۱+\frac{a_۱-۱}{n+۱}+\frac{a_۲-۱}{n+۱}+\dots+\frac{a_n-۱}{n+۱}\right)\\ &= \frac{۲^n}{n+۱}(n+۱+(a_۱-۱)+(a_۲-۱)+\dots+(a_n-۱))\\ &= \frac{۲^n}{n+۱}(۱+a_۱+a_۲+\dots+a_n)\end{aligned}$$

۳۱. داریم که $۱=x+y+z\geq ۳\sqrt[۳]{xyz}$، در نتیجه $xyz\leq \frac{۱}{۲۷}$. بنابراین بدست می‌آوریم

$$x^۳(۱-x)+y^۳(۱-y)+z^۳(۱-z)=۱-xyz\geq\frac{۲۶}{۲۷} \qquad (۱)$$

عدد حقیقی t با شرط $۰\leq t\leq ۱$ را در نظر بگیرید. بر طبق نامساوی حسابی– هندسی داریم

$$t^۳(۱-t)=\frac{۱}{۳}\left(۳t^۳(۱-t)\right)=\frac{۱}{۳}\left[\,t\,.\,t\,.\,t\,.\,(۳-۳t)\,\right]\leq\frac{۱}{۳}\left(\frac{t+t+t+(۳-۳t)}{۴}\right)^۴=\frac{۱}{۳}\times\frac{۸۱}{۲۵۶}$$

از این‌رو داریم

$$x^۳(۱-x)+y^۳(۱-y)+z^۳(۱-z)\leq\frac{۱}{۳}\times\frac{۸۱}{۲۵۶}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۸۱}{۲۵۶}+\frac{۱}{۳}\times ۸۱۲۵۶=\frac{۸۱}{۲۵۶} \qquad (۲)$$

با استفاده از دو رابطهٔ (۱) و (۲) به تناقض $\frac{۸۱}{۲۵۶}\leq\frac{۲۶}{۲۷}$ می‌رسیم، بنابراین دستگاه مذکور جواب مثبت ندارد.

۳۲. با استفاده از نامساوی کوشی– شوارتز بدست می‌آوریم که

$$\left(\sum_{i=۱}^{n}\frac{a_i^۲}{a_i+a_{i+۱}}\right)\left(\sum_{i=۱}^{n}(a_i+a_{i+۱})\right)\geq\left(\sum_{i=۱}^{n}a_i\right)^۲ \qquad (۱)$$

همچنین داریم

$$\sum_{i=۱}^{n}(a_i+a_{i+۱})=۲\sum_{i=۱}^{n}a_i \qquad (۲)$$

از ضرب طرفین دو رابطهٔ (۱) و (۲) در یکدیگر، نامساوی مورد نظر ثابت می‌شود.

۳۳. بر حسب تقارن می‌توان فرض کرد $a\geq b\geq c$، درنتیجه:

$$a^n\geq b^n\geq c^n \quad , \quad \frac{۱}{b+c}>\frac{۱}{c+a}>\frac{۱}{a+b}$$

MATH75.IR

از این رو داریم:

$$\begin{bmatrix} a^n & b^n & c^n \\ \frac{1}{b+c} & \frac{1}{c+a} & \frac{1}{a+b} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a^n & b^n & c^n \\ \frac{1}{a+b} & \frac{1}{b+c} & \frac{1}{c+a} \end{bmatrix} \qquad (۱)$$

و همچنین

$$\begin{bmatrix} a^n & b^n & c^n \\ \frac{1}{b+c} & \frac{1}{c+a} & \frac{1}{a+b} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a^n & b^n & c^n \\ \frac{1}{c+a} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{b+c} \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

از جمع دو رابطهٔ (۱) و (۲) با یکدیگر بدست می آوریم که:

$$۲\left(\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\right) \geq \frac{a^n+b^n}{a+b}+\frac{b^n+c^n}{b+c}+\frac{c^n+a^n}{c+a} \qquad (۳)$$

یک حالت خاص نامساوی چبیشف برای دو عدد مثبت y, x بصورت زیر است:

$$\frac{x^n+y^n}{۲} \geq \frac{x+y}{۲} \times \frac{x^{n-۱}+y^{n-۱}}{۲}$$

در نتیجه

$$\frac{a^n+b^n}{a+b}+\frac{b^n+c^n}{b+c}+\frac{c^n+a^n}{c+a} \geq \frac{a^{n-۱}+b^{n-۱}}{۲}+\frac{b^{n-۱}+c^{n-۱}}{۲}+\frac{c^{n-۱}+a^{n-۱}}{۲} \qquad (۴)$$

با جمع دو رابطه (۳) و (۴) با یکدیگر، نامساوی مذکور ثابت می‌شود.

۳۴. برای اثبات درستی رابطهٔ مذکور از طرفین آن log می‌گیریم:

$$x_۱\log x_۱ + x_۲\log x_۲ + \cdots + x_n \log x_n \overset{?}{\geq} \frac{۱}{n}(x_۱+x_۲+\cdots+x_n)(\log x_۱ + \log x_۲ + \cdots + \log x_n)$$

می‌توان فرض کرد که $x_۱ \geq x_۲ \geq \ldots \geq x_n$، در نتیجه $\log x_۱ \geq \log x_۲ \geq \ldots \geq \log x_n$. از این‌رو درستی رابطهٔ بالا واضح است زیرا کافی است که نامساوی چبیشف را برای دو دسته اعداد $(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$ و $(\log x_۱, \log x_۲, \ldots, \log x_n)$ بکار برید.

۳۵. درستی حکم مسئله با استفاده از اتحاد زیر واضح است:

$$\left(\sum_{i=۰}^{n} a_i\right)^۲ - \left(\sum_{i=۰}^{n} a_i^۲\right) = ۲\sum_{i=۰}^{n}\sum_{j=۰}^{i} a_i \frac{a_j + a_{j-۱}}{۲}\left(۱-(a_j - a_{j-۱})\right)$$

سعی کنید رابطهٔ بالا را خودتان ثابت کنید.

نکته: حالت تساوی نامساوی بالا، تساوی معروف زیر رامی‌دهد:

$$\left(\sum_{i=۰}^{n} i\right)^۲ = \sum_{i=۰}^{n} i^۳$$

MATH75.IR

۳۶. سه عدد مثبت x, y, z را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x = \frac{۱}{a} \ , \ y = \frac{۱}{b} \ , \ z = \frac{۱}{c}$$

واضح است که $xyz = ۱$. از این رو نامساوی ذکر شده در صورت مسئله بصورت زیر تغییر می‌یابد:

$$\frac{x^۲}{y+z} + \frac{y^۲}{z+x} + \frac{z^۲}{x+y} \overset{?}{\geq} \frac{۳}{۲}$$

بر طبق نامساوی کوشی داریم:

$$\left(\frac{x^۲}{y+z} + \frac{y^۲}{z+x} + \frac{z^۲}{x+y} \right) \Big((y+z) + (z+x) + (x+y) \Big) \geq (x+y+z)^۲$$

در نتیجه

$$\frac{x^۲}{y+z} + \frac{y^۲}{z+x} + \frac{z^۲}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{۲} \geq \frac{۳}{۲} \sqrt[۳]{xyz} = \frac{۳}{۲}$$

۳۷. تعریف می کنیم $S = x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n$، از این رو مجموع مورد نظر بصورت $\sum_{i=۱}^{n} \frac{x_i^۵}{S - x_i}$ در می آید. بر طبق تقارن می‌توان فرض کرد که $x_۱ \geq x_۲ \geq \ldots \geq x_n$، در نتیجه $\frac{۱}{S - x_۱} \geq \frac{۱}{S - x_۲} \geq \ldots \geq \frac{۱}{S - x_n}$. بنابراین بااستفاده از نامساوی چبیشف بدست می آید که

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{x_i^۵}{S - x_i} \ \geq \ \frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} x_i^۵ \ \times \ \sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{S - x_i} \qquad (۱)$$

بر طبق نامساوی توانی می‌دانیم که $(\alpha \geq ۱)$

$$\frac{y_۱^\alpha + y_۲^\alpha + \cdots + y_n^\alpha}{n} \geq \left(\frac{y_۱ + y_۲ + \cdots + y_n}{n} \right)^\alpha$$

حال با جایگزینی $\alpha = \frac{۵}{۲}$ و $y_i = x_i^۲ \quad i = ۱, ۲, \ldots, n$ در این نامساوی بدست می آوریم که:

$$\sum_{i=۱}^{n} x_i^۵ \geq n \left(\frac{\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲}{n} \right)^{\frac{۵}{۲}} = \left(\frac{۱}{n} \right)^{\frac{۳}{۲}} \qquad (۲)$$

همچنین با استفاده از نامساوی کوشی داریم:

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{S - x_i} \times \sum_{i=۱}^{n} (S - x_i) \geq n^۲ \qquad (۳)$$

از طرفی داریم $\sum_{i=۱}^{n} (S - x_i) = (n-۱)S$. همچنین بر طبق نامساوی توانی می دانیم

$$\frac{۱}{n} = \frac{x_۱^۲ + x_۲^۲ + \cdots + x_n^۲}{n} \geq \left(\frac{x_۱ + \cdots + x_n}{n} \right)^۲$$

MATH75.IR

درنتیجه $$(n-۱)\sqrt{n} \geq \sum_{i=۱}^{n}(S-x_i) \qquad (۴)$$

با ضرب روابط (۱), (۲), (۳), (۴) در یکدیگر بدست می آید که:

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{x_i^۵}{S-x_i} \geq \frac{۱}{n(n-۱)}$$

واضح است که تساوی رابطهٔ بالا به ازای $x_۱ = x_۲ = \ldots = x_n$ رخ می‌دهد.

۳۸. به ازای هر $۱ \leq i,j \leq n$، عدد $|a_i - a_j|$ در طرف چپ رابطهٔ مفروض دقیقاً دو بار ظاهر شده است (البته به ازای $i=j$، عدد $a_i - a_i$ یکبار ظاهر شده است ولی ۰ در مجموع تأثیری ندارد)، از این‌رو می‌توان فرض کرد که $a_۱ \geq a_۲ \geq \cdots \geq a_n$. در نتیجه

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}|a_i - a_j| \\
&= ۲\sum_{۱\leq i<j\leq n}|a_i - a_j| \\
&= ۲\left[(a_۱-a_۲)+(a_۱-a_۳)+\cdots+(a_۱-a_n)+(a_۲-a_۳)+\cdots\right. \\
&\quad \left.+(a_۲-a_n)+\cdots+(a_{n-۲}-a_{n-۱})+(a_{n-۲}-a_n)+(a_{n-۱}-a_n)\right] \\
&= ۲\left[(n-۱)a_۱+(n-۲)a_۲+\cdots+a_{n-۱}-a_۲-۲a_۳-\cdots-(n-۱)a_n\right] \\
&= ۲\left[(n-۱)a_۱+(n-۳)a_۲+(n-۵)a_۳+\cdots+(۳-n)a_{n-۱}+(۱-n)a_n\right]
\end{aligned}$$

بوضوح S زمانی ماکزیمم می‌شود که a_i های با ضرایب منفی برابر ۰ و a_i های با ضرایب مثبت برابر ۲ باشند. درنتیجه:

$$n=۲k+۱ \;:\; \max(S) = ۴((۲k)+(۲k-۲)+\cdots+(۲)) = ۴k(k+۱) < (۲k+۱)^۲$$

$$n=۲k \;:\; \max(S) = ۴((۲k-۱)+(۲k-۳)+\cdots+(۱)) = ۴k^۲ = (۲k)^۲$$

۳۹. به‌ازای هر n طبیعی باید ثابت کنیم که:

$$\sqrt[n+۱]{\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n} \overset{?}{<} \frac{n+۲}{n+۱} \qquad \text{و یا} \qquad \left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n \overset{?}{<} \left(۱+\frac{۱}{n+۱}\right)^{n+۱}$$

بر طبق نامساوی واسطهٔ حسابی – هندسی داریم:

$$\sqrt[n+۱]{\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n} = \sqrt[n+۱]{۱\times\left(۱+\frac{۱}{n}\right)\times\left(۱+\frac{۱}{n}\right)\times\ldots\times\left(۱+\frac{۱}{n}\right)} < \frac{۱+n\left(۱+\frac{۱}{n}\right)}{n+۱} = \frac{n+۲}{n+۱}$$

(در رابطهٔ بالا از آنجا که $۱+\frac{۱}{n} \neq ۱$، تساوی رخ نمی‌دهد و نامساوی بصورت اکید در می آید.)

MATH75.IR

۴۰. بر طبق تقارن می‌توان فرض کرد $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$، در نتیجه

$$\frac{1}{\sqrt{1-x_1}} \geq \frac{1}{\sqrt{1-x_2}} \geq \cdots \geq \frac{1}{\sqrt{1-x_n}}$$

از این‌رو با استفاده از نامساوی چبیشف بدست می‌آوریم

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \times \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-x_i}} \qquad (1)$$

با استفاده از نامساوی کوشی داریم

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-x_i}} \times \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1-x_i} \geq n^2 \qquad (2)$$

همچنین با استفاده از نامساوی توانی بدست می‌آوریم که

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)}{n} \geq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1-x_i}}{n} \right)^2$$

و یا

$$n\sqrt{\frac{n-1}{n}} \geq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1-x_i} \qquad (3)$$

با ضرب روابط (۱), (۲), (۳) در یکدیگر، نامساوی مورد نظر ثابت می‌شود.

۴۱. تعریف می‌کنیم $x_i = \frac{1}{a_i} \quad i = 1, 2, \ldots, n$. از این رو نامساوی مفروض بصورت زیر در می‌آید:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{x_i + x_j} \overset{?}{\leq} \frac{n-1}{4}$$

به‌ازای دو عدد مثبت x, y می‌دانیم که $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$. در نتیجه:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{x_i + x_j} \leq \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_j} \right) = \frac{n-1}{4} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = \frac{n-1}{4} \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n-1}{4}$$

۴۲. مسلماً از معلومات دبیرستانی به یاد دارید که به ازای هر x حقیقی و هر k طبیعی رابطهٔ زیر برقرار است:

$$k[x] \leq [kx] \leq k[x] + k - 1 \qquad (*)$$

اگر رابطهٔ (*) را به ازای $k = 1, 2, 4, \ldots, 32$ بنویسیم و سپس با هم جمع می‌کنیم بدست می‌آید که:

$$(1+2+4+\cdots+32)[x] + 1 + 3 + 7 + 15 + 31 \leq 12345 \leq (1+2+4+\cdots+32)[x] \quad (1+2+4+\cdots+32)$$

MATH75.IR

و یا $۶۳m + ۵۷ \leq ۱۲۳۴۵ \leq ۶۳m$ که در آن $m = [x]$. ولی این رابطه هیچ‌وقت برقرار نمی‌شود زیرا باقیماندهٔ تقسیم ۱۲۳۴۵ بر ۶۳ برابر ۶۰ است و نمی‌تواند در بازهٔ $[۱, ۵۷]$ قرار داشته باشد. در نتیجه x ای وجود ندارد که در رابطهٔ مفروض صدق کند.

۴۳. تعریف می‌کنیم $f(۰) = a$، در نتیجه $f\left(\frac{x}{۲}\right) = f\left(\frac{x+۰}{۲}\right) = \frac{f(x)+a}{۲}$. از این رو داریم:

$$\frac{f(x)+f(y)}{۲} = f\left(\frac{x+y}{۲}\right) = \frac{f(x+y)+a}{۲} \quad \Longrightarrow \quad f(x+y) = f(x)+f(y)+a \qquad (*)$$

یک جواب خصوصی رابطهٔ $(*)$ برابر a است بنابراین اگر تعریف کنیم $g(x) = f(x) - a$، بدست می‌آید که تابع پیوسته $g(x)$ در معادله‌ٔکوشی صدق می‌کند یعنی $g(x+y) = g(x)+g(y)$. از این رو ثابت c وجود دارد به طوری که $g(x) = cx$، در نتیجه

$$f(x) = cx + a \quad a, c \in \mathbf{R}$$

۴۴. فرض کنید تابع f در شرایط مسئله صدق کند. به راحتی می‌توان ثابت نمود که به‌ازای هر عدد حقیقی x و هر عدد صحیح n باید داشته باشیم:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{۲^n}\right) \qquad (*)$$

عدد مثبت α را در نظر بگیرید. واضح است که عدد صحیح k وجود دارد به طوری که $۲^k \leq \alpha < ۲^{k+۱}$ و یا $۱ \leq \frac{\alpha}{۲^k} < ۲$. از این‌رو مقدار f در α با مقدار f در $\frac{\alpha}{۲^k}$ که متعلق به بازهٔ $(۱, ۲]$ است برابر می‌باشد. به‌همین ترتیب مقدار f در هر عدد منفی β برابر با مقدار f در نقطه‌ای مثل $\frac{\beta}{۲^k}$ که متعلق به بازهٔ $[-۲, -۱)$ است می‌باشد. همچنین مقدارهای f در هیچ دو عددی که متعلق به بازهٔ $(۱, ۲]$ و یا $[-۲, -۱)$ است با هم رابطه ندارند زیرا اگر $\alpha \in (۱, ۲]$، سپس $\frac{\alpha}{۲} \notin (۱, ۲]$ و اگر $\beta \in [-۲, -۱)$، سپس $\frac{\beta}{۲} \notin [-۲, -۱)$، و همچنین دو عدد x ، $\frac{x}{۲}$ همواره با هم، هم‌علامتند. بنابراین برای بدست آوردن چنین f هایی، باید مقدار f را در نقطهٔ ۰ و دو بازهٔ $(۱, ۲]$ ، $[-۲, -۱)$ بطور دلخواه مشخص کرد و سپس با استفاده از رابطهٔ $(*)$، مقدار f در هر نقطهٔ دیگر را بطور یکتا بدست آورد. یک نمونه از چنین f هایی مثال زیر است:

$$f(۰) = ۲ \quad , \quad f(x) = \frac{|x|}{x} \quad x \neq ۰$$

نکته: تنها تابع پیوسته‌ای که در شرط مسئله صدق می کند تابع همانی است. زیرا:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{۲^n}\right) \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{۲^n}\right) = f\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{۲^n}\right) = f(۰)$$

۴۵. در رابطهٔ $f(x+y) + f(x-y) = ۲f(x)\cos y$ به جای زوج مرتب (x, y)، زوج مرتب $(۰, t)$ را جایگزین می‌کنیم: $(a = f(۰))$

$$f(t) + f(-t) = ۲a\cos t \qquad (۱)$$

MATH75.IR

حال زوج مرتب $(\frac{\pi}{۲}+t\ ,\frac{\pi}{۲})$ را بجای (x,y) در رابطهٔ مفروض جایگزین می‌کنیم:

$$f(\pi+t)+f(t)=۰ \qquad (۲)$$

این بار زوج مرتب $(\frac{\pi}{۲}+t\ ,\frac{\pi}{۲})$ را به جای (x,y) در رابطهٔ مفروض جایگزین می‌کنیم: $(b=f(\frac{\pi}{۲}))$

$$f(\pi+t)+f(-t)=-۲b\sin t \qquad (۳)$$

از حل سه معادلهٔ (۱),(۲),(۳) نسبت به سه متغیر $f(\pi+t), f(-t), f(t)$ مقدار $f(t)$ بدست می‌آید. برای حل دستگاه می‌توان دو رابطهٔ (۱) و (۲) را با هم جمع و سپس رابطهٔ (۳) را از مجموع اخیر کم کرد تا $f(t)$ بدست آید:

$$f(t)=a\cos t+b\sin t \quad a,b\in R$$

۴۶. یک جواب خصوصی معادلهٔ تابعی مفروض $p(x)=x^۲$ است. بنابراین چند جمله‌ای $q(x)$ را برابر $p(x)-x^۲$ تعریف کرده و در معادلهٔ تابعی مفروض جایگزین می‌کنیم تا بدست آید $q(x)=q(x+۱)$. تنها چند جمله‌ای که در این رابطه صدق می کند چند جمله‌ای ثابت است زیرا اگر $q(x)$ یک ریشهٔ α را داشته باشد باید بینهایت ریشهٔ $\alpha+۱,\alpha+۲,\ldots$ را هم داشته باشد که ممکن نیست.

در نتیجه

$$p(x)=x^۲+q \quad q\in R$$

۴۷. عدد غیر صفر α را در نظر بگیرید. اگر در رابطهٔ مفروض زوج (α,α) را جایگزین کنیم بدست می‌آید که:

$$۲\alpha f(\alpha)^۲=۲\alpha f(\alpha) \quad\Longrightarrow\quad f(\alpha)^۲=f(\alpha) \quad\Longrightarrow\quad f(\alpha)=۰ \text{ یا } ۱$$

از این‌رو $f(\alpha)$ می‌تواند تنها یکی از دو مقدار ۰ , ۱ باشد. فرض کنید دو عدد غیر صفر β,α موجود باشند به طوری که $f(\alpha)=۰, f(\beta)=۱$، بنابراین باید داشته باشیم:

$$\alpha f(\beta)+\beta f(\alpha)=(\alpha+\beta)f(\alpha)f(\beta) \quad\Longrightarrow\quad \alpha f(\beta)=۰ \quad\Longrightarrow\quad \alpha=۰$$

تناقض بالا حاکی از این است که چنین دو عددی وجود ندارند. از این رو دو حالت زیر را داریم:

۱) به ازای هر $x\neq ۰$ داریم که $f(x)=۰$. زوج مرتب $(۰,۱)$ را در رابطهٔ مفروض جایگزین می‌کنیم:

$$۰\times f(۱)+۱\times f(۰)=f(۰)f(۱)\ ,\ f(۱)=۰ \quad\Longrightarrow\quad f(۰)=۰$$

MATH75.IR

۲) به ازای هر $x \neq ۰$ داریم که $f(x) = ۱$. زوج مرتب $(۰, y)$ را در رابطهٔ مفروض جایگزین می‌کنیم:

$$۰ \times f(y) + y \times f(۰) = yf(۰)f(y) = yf(۰)$$

رابطهٔ بالا نشان می‌دهد که $f(۰)$ هر مقداری را می‌تواند اختیار کند.

۴۸. رابطهٔ نوشته شده در صورت مسئله را بصورت زیر تغییر می‌دهیم:

$$f(x+y) = \frac{۱}{\frac{۱}{f(x)} + \frac{۱}{f(y)}}$$

بنابراین اگر تابع پیوسته $g(x)$ را برابر $\frac{۱}{f(x)}$ تعریف کنیم بدست می‌آید که $g(x+y) = g(x) + g(y)$. از آنجا که تابع $g(x)$ پیوسته است می‌توان $g(۰)$ را برابر ۰ تعریف کرد (زیرا باید داشته باشیم $g(۰) = g(۰) + g(۰)$). بنابراین تابع پیوسته $g(x)$ در معادلهٔ کوشی صدق می‌کند، در نتیجه عدد ثابت c وجود دارد به‌طوری که $g(x) = cx$ و یا $f(x) = \frac{۱}{cx}$.

۴۹. صورت مسئله معادل معادلهٔ تابعی زیر است:

$$\forall x, y \in R \quad : \quad f^۲(x) = f(x+y) \cdot f(x-y) \qquad (*)$$

یک جواب معادله بالا $f(x) \equiv ۰$ است. فرض کنید $f(x)$ در رابطهٔ $(*)$ صدق کند و $f(x) \not\equiv ۰$. ادعا می‌کنیم که $f(x)$ به ازای هیچ مقدار α ای برابر ۰ نمی‌شود زیرا در غیر اینصورت به ازای هر عدد حقیقی x باید داشته باشیم:

$$f^۲(x) = f(\alpha)f(۲x - \alpha) = ۰ \quad \Longrightarrow \quad f(x) = ۰$$

که خلاف فرض است. همچنین دو عدد حقیقی β, α وجود ندارند به‌طوری که $f(\alpha) > ۰$ و $f(\beta) < ۰$، زیرا اگر به جای (x, y) زوج مرتب $\left(\frac{\alpha-\beta}{۲}, \frac{\alpha+\beta}{۲}\right)$ را در رابطهٔ $(*)$ جایگزین کنیم بدست می‌آیدکه:

$$۰ < f^۲\left(\frac{\alpha+\beta}{۲}\right) = f(\alpha)f(\beta) \quad \Longrightarrow \quad ۰ < f(\alpha)f(\beta)$$

رابطهٔ بالا حاکی از این است که $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ هم علامتند.
بنابراین دو حالت زیر را داریم:

۱) به ازای هر x حقیقی داریم $f(x) > ۰$. تابع پیوسته $g(x)$ را بصورت $g(x) = \log f(x)$ تعریف می‌کنیم. از این رو رابطهٔ $(*)$ به‌صورت زیر تغییر می‌یابد:

$$۲g(x) = g(x+y) + g(x-y) \qquad (۱)$$

MATH75.IR

اگر در رابطهٔ (۱) زوج (x,x) را جایگزین کنیم بدست می آید که

$$۲g(x) = g(۲x) + g(۰) \qquad (۲)$$

یک جواب خصوصی معادلهٔ (۲) برابر $g(۰)$ است، از این رو تابع پیوسته $k(x)$ را برابر $g(x) - g(۰)$ تعریف می‌کنیم در نتیجه $۲k(x) = k(۲x)$. با استفاده از رابطهٔ اخیر و رابطهٔ (۱) نتیجه می‌گیریم که $k(۲x) = k(x+y) + k(x-y)$. اگر در این رابطه بجای زوج (x,y)، زوج $\left(\frac{\alpha+\beta}{۲}, \frac{\alpha-\beta}{۲}\right)$ را قرار دهیم بدست می آید که $k(\alpha+\beta) = k(\alpha) + k(\beta)$. به عبارت دیگر تابع پیوسته $k(x)$ در معادلهٔ کوشی صدق می‌کند، از این رو ثابت a وجود دارد به‌طوری که $k(x) = ax$، در نتیجه $g(x) = ax + b$ (b را همان مقدار $g(۰)$ گرفته‌ایم). بنابراین $f(x) = e^{g(x)} = e^{ax+b}$

۲) به ازای هر x حقیقی داریم $f(x) < ۰$. تابع پیوسته $p(x)$ را برابر $-f(x)$ تعریف می‌کنیم، از این رو داریم:

$$\forall x \in R \ : \ p(x) > ۰ \quad , \quad \forall x,y \in R \ : \ p^۲(x) = p(x+y)p(x-y)$$

بر طبق حالت اول، دو عدد b, a وجود دارند به‌طوری که $p(x) = e^{ax+b}$ در نتیجه $f(x) = -e^{ax+b}$.

از گفته‌های بالا بدست می آوریم که: $f(x) = rs^x \quad r \in \mathbf{R} \ , \ s \in \mathbf{R}^+$

۵۰. در رابطهٔ $f(x+y) + f(x-y) = ۲(f(x) + f(y))$ زوج مرتب $(۰,۰)$ را قرار می‌دهیم:

$$f(۰) + f(۰) = ۲(f(۰) + f(۰)) \quad \Longrightarrow \quad f(۰) = ۰$$

اگر زوج مرتب (x,x) را در رابطهٔ بالا قرار دهیم بدست می آید که $f(۲x) = ۴f(x)$. به‌راحتی با استقرای قوی می‌توان ثابت نمود که به‌ازای هر n طبیعی، رابطهٔ $f(nx) = n^۲ f(x)$ برقرار است زیرا:

$$f((n+۱)x) = ۲f(nx) + ۲f(x) - f((n-۱)x)$$

دو عدد طبیعی q, p را در نظر بگیرید. داریم که

$$f\left(q \times \frac{p}{q}\right) = f(p) = p^۲ f(۱)$$

و همچنین

$$f\left(q \times (\frac{p}{q})\right) = q^۲ f\left(\frac{p}{q}\right)$$

در نتیجه

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)^۲ f(۱)$$

MATH75.IR

از این‌رو برای هر عدد گویای مثبت a داریم $f(a) = a^۲ f(۱)$. حال در رابطهٔ ذکر شده در صورت مسئله، زوج $(x, -x)$ را قرار می‌دهیم:

$$f(۰) + f(۲x) = ۲(f(x) + f(-x)) \quad \Longrightarrow \quad f(-x) = f(x)$$

عدد گویای منفی a را در نظر بگیرید. داریم $f(a) = f(-a) = (-a)^۲ f(۱) = a^۲ f(۱)$، از این رو به ازای هر عدد گویای a داریم که $f(a) = a^۲ f(۱)$. از آنجا که f تابعی پیوسته است می‌توان نتیجه گرفت که این رابطه به ازای a های گنگ نیز درست است در نتیجه به ازای هر α حقیقی داریم $f(\alpha) = \alpha^۲ f(۱)$. با تعریف $f(۱) = c$ به‌دست می آید که

$$f(x) = cx^۲ \qquad c \in R$$

۵۱. دو عدد $y_۱, y_۲$ را در نظر بگیرید به‌طوری که $f(y_۱) = f(y_۲)$. در رابطهٔ مفروض یک بار زوج $(۱, y_۱)$ و بار دیگر زوج $(۱, y_۲)$ را قرار می‌دهیم:

$$f(۱ \times f(y_۱)) = \frac{f(۱)}{y_۱} \quad , \quad f(۱ \times f(y_۲)) = \frac{f(۱)}{y_۲}$$

در نتیجه $y_۱ = y_۲$. بدین ترتیب ثابت شد که $f(x)$ تابعی یک به یک است. اگر در رابطهٔ مفروض زوج مرتب $(۱, ۱)$ قرار دهیم بدست می آید که $f(f(۱)) = f(۱)$ و از آنجا که f تابعی یک‌به‌یک است نتیجه می‌شود که $f(۱) = ۱$.

بنابراین اگر زوج $(۱, y)$ را در رابطهٔ مفروض قرار دهیم بدست می آید که: $\qquad (*) \qquad ff(y) = \frac{۱}{y}$

از رابطهٔ $(*)$ نتیجه می‌گیریم که

$$f\left(\frac{۱}{y}\right) = fff(y) = \frac{۱}{f(y)} \quad \Longrightarrow \quad f\left(\frac{۱}{y}\right) = \frac{۱}{f(y)}$$

در رابطهٔ مفروض زوج مرتب $\left(x, f\left(\frac{۱}{y}\right)\right)$ را قرار می‌دهیم:

$$f(xy) = f\left(x \times ff\left(\frac{۱}{y}\right)\right) = \frac{f(x)}{f\left(\frac{۱}{y}\right)} = f(x)f(y) \quad \Longrightarrow \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

از رابطهٔ بالا نتیجه می‌گیریم که f تابعی ضربی است. واضح است که هر تابع ضربی که در شرط $ff(x) = \frac{۱}{x}$ صدق کند جواب مسئله است. می‌دانیم تابعی مانند f ضربی است اگر و فقط اگر

$$f\left(\frac{p_۱^{\alpha_۱} p_۲^{\alpha_۲} \dots p_k^{\alpha_k}}{q_۱^{\beta_۱} q_۲^{\beta_۲} \dots q_r^{\beta_r}}\right) = \frac{f(p_۱^{\alpha_۱} p_۲^{\alpha_۲} \dots p_k^{\alpha_k})}{f(q_۱^{\beta_۱} q_۲^{\beta_۲} \dots q_r^{\beta_r})} = \frac{f(p_۱)^{\alpha_۱} f(p_۲)^{\alpha_۲} \dots f(p_k)^{\alpha_k}}{f(q_۱)^{\beta_۱} f(q_۲)^{\beta_۲} \dots f(q_r)^{\beta_r}} \qquad (**)$$

فرض کنید دنبالهٔ $p_۱, p_۲, \dots, p_n, \dots$، دنبالهٔ تمام اعداد اول باشد.از رابطهٔ بالا نتیجه می‌گیریم که با دانستن $f(p_i)$ ها می‌توان مقدار تابع f در هر نقطهٔ گویا را تعیین کرد (بین $f(p_i)$ ها هیچ ارتباطی وجود ندارد یعنی اگر به $f(p_i)$ ها

MATH75.IR

اعداد دلخواه نسبت دهیم و بعد مقدار تابع در هر نقطهٔ گویای دیگر را از رابطهٔ (**) بدست آوریم آنوقت تابع بدست آمده ضربی خواهد بود). براحتی می‌توان ثابت کرد که تابع f در شرط $ff(x)=\frac{۱}{x}$ صدق می‌کند اگر و فقط اگر به ازای هر i طبیعی داشته باشیم $ff(p_i)=\frac{۱}{p_i}$ [این حکم از خاصیت ضربی بودن f نتیجه می‌شود]. یکی از توابعی که در این شرط صدق می‌کند تابع زیر است:

$$f(p_i)=\begin{cases} p_{i+۱} & i=\text{فرد} \\ \frac{۱}{p_{i-۱}} & i=\text{زوج} \end{cases}$$

۵۲. واضح است که دنبالهٔ $\{f(i)\}_{i=۱}^{\infty}$ دارای مینیمم است. فرض کنید به ازای k ای مشخص، $f(k)$ مینیمم عضو این دنباله باشد. ادعا می‌کنیم که $k=۱$، زیرا در غیر اینصورت اگر تعریف کنیم $t=f(k-۱)$ سپس $f(t)$ عضوی از دنبالهٔ مفروض می‌شود (زیرا $k-۱\geq ۱$ در نتیجه $f(k-۱)\geq ۱$). همچنین داریم $f(t)=ff(k-۱)<f(k)$ که خلاف فرض است بنابراین $f(۱)$ مینیمم عضو دنبالهٔ بالا است. حال دنبالهٔ $\{f(i)\}_{i=۲}^{\infty}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $f(k)$ مینیمم عضو این دنباله باشد. ادعا می‌کنیم که $k=۲$، زیرا در غیر اینصورت اگر تعریف کنیم $t=f(k-۱)$ سپس $f(t)$ عضوی از دنبالهٔ بالا می‌شود. برای اثبات این مطلب کافی است ثابت کنیم که $t\geq ۲$. می‌دانیم که $f(k-۱)$ نمی‌تواند برابر یک باشد زیرا در اینصورت باید مینیمم عضو دنبالهٔ $\{f(i)\}_{i=۱}^{\infty}$ باشد، از اینرو بر طبق گفته‌های بالا باید داشته باشیم $k-۱=۱$ و یا $k=۲$ که خلاف فرض است در نتیجه $t=f(k-۱)\geq ۲$. همچنین می‌دانیم که $f(t)=ff(k-۱)<f(k)$ که خلاف فرض بالا است. بنابراین $f(۲)$ مینیمم عضو این دنباله است. با ادامهٔ این رویه بدست می‌آوریم که

$$f(۱)<f(۲)<f(۳)<\dots$$

یعنی دنبالهٔ $f(n)$ اکیداً صعودی است. می‌دانیم برای دنبالهٔ اکیداً صعودی از اعداد طبیعی داریم

$$\forall k\in N \quad : \quad f(k)\geq k$$

(برای اثبات این مطلب فرض می‌کنیم که به ازای k ای طبیعی داشته باشیم $f(k)<k$. هر کدام از k عدد $f(۱),f(۲),\dots,f(k)$ یکی از $k-۱$ اعداد $۱,۲,\dots,k-۱$ را می‌توانند اختیار کنند در نتیجه بر طبق اصل لانهٔ کبوتر، دو عدد طبیعی i , j وجود دارند که $i\neq j$ و $f(i)=f(j)$. این رابطه خلاف اکیداً صعودی بودن تابع f است.) می دانیم برای تابع اکیداً صعودی f اگر داشته باشیم $f(\alpha)<f(\beta)$ سپس $\alpha<\beta$. بنابراین داریم:

$$f(k)<k+۱ \quad \text{و یا معادلاً} \quad f(k-۱)<k \quad \Longrightarrow \quad f(f(k-۱))<f(k)$$

در نتیجه $k\leq f(k)<k+۱$. از این رو باید داشته باشیم $f(k)=k$.

MATH75.IR

۵۳. دو عدد حقیقی α, β وجود ندارند به طوریکه $f(\alpha) > ۰$ و $f(\beta) < ۰$، زیرا

$$۰ \leq \left[f\left(\frac{\alpha+\beta}{۲}\right) f\left(\frac{\alpha-\beta}{۲}\right) \right]^{۲} = f(\alpha)f(\beta) \quad \Longrightarrow \quad ۰ \leq f(\alpha)f(\beta)$$

بنابراین همواره باید داشته باشیم $f(x) \geq ۰$ و یا $f(x) \leq ۰$. تابع پیوسته $g(x)$ را برابر $\log|f(x)|$ تعریف می کنیم. از معادله تابعی مفروض به دست می آوریم که

$$g(x+y) + g(x-y) = ۲(g(x) + g(y))$$

این معادله تابعی در مسئله ۸ حل شده است و دارای جواب $g(x) = ax^{۲}$ می باشد. از طرفی داریم $|f(x)| = e^{g(x)}$، بنابراین دو جواب $f(x) = e^{ax^{۲}}$ و $f(x) = -e^{ax^{۲}}$ به دست می آید.

۵۴. f تابعی یک به یک است زیرا اگر داشته باشیم $f(n_۱) = f(n_۲)$ سپس:

$$۳n_۱ = f(n_۱) + ff(n_۱) + fff(n_۱) = f(n_۲) + ff(n_۲) + fff(n_۲) = ۳n_۲ \quad \Longrightarrow \quad n_۱ = n_۲$$

حال با استقرای قوی بر روی n ثابت می کنیم که $f(n) = n$. به ازای $n = ۱$ داریم:

$$fff(۱) + ff(۱) + f(۱) = ۳$$

رابطه بالا می گوید که مجموع سه عدد طبیعی برابر ۳ شده است در نتیجه باید تک تک آنها برابر ۱ باشند یعنی $f(۱) = ۱$. بدین ترتیب پایهٔ استقراء ثابت شد. حال فرض می‌کنیم که به‌ازای هر عدد طبیعی p کمتر از k داشته باشیم $f(p) = p$، می خواهیم ثابت کنیم که $f(k) = k$. برای اثبات این حکم، فرض خلف می کنیم یعنی فرض می‌کنیم که $f(k) \neq k$. دو حالت زیر داریم:

۱) $t = f(k) < k$. بر طبق فرض استقراء داریم که $f(t) = t$، در نتیجه باید داشته باشیم $f(k) = f(t)$ که بر خلاف یک به یک بودن تابع f است.

۲) $t = f(k) > k$. ادعا می‌کنیم که $ff(k) \geq k$. زیرا در غیر این صورت $f(t) < k$، بنابرابن بر طبق فرض استقراء باید داشته باشیم $f(t) = ff(t)$ و در نتیجه $f(t) = t$، همچنین بر طبق تعریف داریم $f(k) = t$، از این‌رو باید داشته باشیم $f(k) = f(t)$، که خلاف یک به یک بودن تابع f است. به همین ترتیب بدست می آید که $fff(k) \geq k$. در نتیجه:

$$۳k = f(k) + ff(k) + fff(k) > k + k + k = ۳k$$

پر واضح است که رابطهٔ بالا تناقض است.

MATH75.IR

بدین ترتیب حکم استقراء ثابت شد.

۵۵. اگر در رابطهٔ $f(x^۲+f(y))=y+f(x)^۲$ زوج مرتب $(۰,۰)$ را جایگزین کنیم بدست می آید که $ff(۰)=f(۰)^۲$. همچنین با جایگذاری دو زوج مرتب $(۰,y)$ و $(x,۰)$ در رابطهٔ مفروض، دو رابطهٔ زیر به دست می آید:

$$ff(y)=y+f(۰)^۲ \quad , \quad f\left(x^۲+f(۰)\right)=f(x)^۲ \qquad (*)$$

از این‌رو داریم:

$$f\left(f(۰)^۲+f(x)^۲\right)=f\left(f(x)^۲+ff(۰)\right)=f(۰)+ff(x)^۲=f(۰)+\left(x+f(۰)^۲\right)^۲$$

همچنین

$$f\left(f(۰)^۲+f(x)^۲\right)=f\left(f(۰)^۲+f\left(x^۲+f(۰)\right)\right)=ff(۰)^۲+\left(x^۲+f(۰)\right)=f(۰)^۴+\left(x^۲+f(۰)\right)$$

از دو رابطهٔ بالا نتیجه می گیریم که

$$f(۰)+\left(x+f(۰)^۲\right)^۲=f(۰)^۴+\left(x^۲+f(۰)\right)$$

بعد از ساده کردن این رابطه، نتیجهٔ $۲xf(۰)^۲=۰$ حاصل می شود. حال کافی است x را عددی غیر صفر (مثل ۱) قرار دهیم تا بدست آید $f(۰)=۰$. از این‌رو روابط $(*)$ به صورت زیر تغییر می یابند:

$$ff(y)=y \quad , \quad f(x^۲)=f(x)^۲$$

اگر در رابطه مفروض زوج مرتب $(x,f(y))$ را قرار دهیم بدست می آید که

$$f(x^۲+y)=f(y)+f(x^۲) \qquad (**)$$

فرض کنید برای عدد حقیقی α داشته باشیم $f(\alpha)=۰$ در نتیجه:

$$۰=f(\alpha)^۲=f(\alpha^۲+f(\alpha))=\alpha+f(\alpha)^۲=\alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha=۰$$

بنابراین به ازای هر عدد حقیقی غیر صفر x داریم $f(x)\neq ۰$. عدد مثبت α را در نظر بگیرید، داریم:

$$f(\alpha)=f\left(\sqrt{\alpha^۲}\right)>۰ \quad \Longrightarrow \quad \forall x>۰ \ : \ f(x)>۰$$

دو عدد حقیقی α,β با شرط $\alpha>\beta$ را در نظر بگیرید. در رابطهٔ $(**)$ زوج مرتب $(\sqrt{\alpha-\beta}\,,\beta)$ را قرارمی دهیم:

$$f(\alpha)=f\left(\left(\sqrt{\alpha-\beta}\right)^۲+\beta\right)=f(\beta)+f(\alpha-\beta)>f(\beta)+۰ \quad \Longrightarrow \quad f(\alpha)>f(\beta)$$

بنابراین $f(x)$ تابع اکیداً صعودی است. x دلخواهی را در نظر بگیرید. ادعا می کنیم که $f(x)=x$، زیرا در غیر این صورت باید یکی از دو حالت زیر را داشته باشیم:

MATH75.IR

۱) $f(x) > x$. از صعودی بودن f نتیجه می شود که $x = ff(x) > f(x) > x$، که ممکن نیست.

۲) $f(x) < x$. از صعودی بودن f نتیجه می شود که $x = ff(x) < f(x) < x$، که امکان ندارد.

۵۶. معادلهٔ تابعی مفروض را به شکل زیر بازنویسی می کنیم:

$$f(x+y)+1=(f(x)+1)(f(y)+1)$$

حال اگر تابع پیوسته $g(x)$ را به صورت $g(x)=f(x)+1$ تعریف کنیم به معادلهٔ تابعی $g(x+y)=g(x)g(y)$ می‌رسیم. این معادله قبلاً حل شده است و دارای جواب $g(x)=|a|^x$ می‌باشد. در نتیجه

$$f(x)=|a|^x-1 \qquad a\in R$$

۵۷. با جایگذاری زوج (n,n) در رابطهٔ $f(mf(n))=n^2f(mn)$ بدست می آوریم که $ff(n)=n^2f(n)$. از این‌رو داریم:

$$f(f(m)f(n))=n^2f(f(m)n)=n^2m^2f(mn)=(nm)^2f(nm)=ff(nm)$$

درنتیجه $f(f(m)f(n))=ff(nm)$. از طرفی می‌دانیم که اگر تابعی اکیداً صعودی باشد یک به یک نیز است درنتیجه $f(m)f(n)=f(nm)$. حالت خاص این رابطه به صورت $f(n)^2=f(n^2)$ است. n طبیعی دلخواهی را در نظر بگیرید. ادعا می‌کنیم که $f(n)=n^2$، زیرا در غیر این صورت دو حالت زیر پیش می آید:

۱) $f(n)<n^2$. درنتیجه $ff(n)<f(n^2)$. از طرفی می‌دانیم $f(n)^2=f(n^2)$ و $ff(n)=n^2f(n)$، بنابراین باید داشته باشیم $n^2f(n)<f(n)^2$ و یا $f(n)<n^2$. بدین ترتیب به تناقض رسیدیم.

۲) $f(n)>n^2$. درنتیجه $ff(n)>f(n^2)$. از طرفی می‌دانیم $f(n)^2=f(n^2)$ و $ff(n)=n^2f(n)$، بنابراین باید داشته باشیم $n^2f(n)>f(n)^2$ و یا $f(n)>n^2$. بدین ترتیب به تناقض رسیدیم.

۵۸. قبلاً با تعریف $g(n)=f(n)-n^2$، تابع $f(n)$ را به صورت $f(n)=n^2+an$ $(a\in\mathbf{Z})$ بدست آوردیم. اگر $a\neq 0$ سپس عدد اول p وجود دارد به طوری‌که

$$p\nmid a$$

از این‌رو داریم:

$$f(p)=p(p+a) \quad\Longrightarrow\quad p\mid f(p)\ ,\ p^2\nmid f(p)$$

بنابراین $f(p)$ نمی تواند مربع کامل باشد، در نتیجه $a=0$ و یا $f(n)=n^2$.

MATH75.IR

۵۹. با جایگذاری زوج $(۲,۲)$ در رابطهٔ مفروض به دست می آوریم که

$$f(۴) = f(۲) + f(۲) + f(۴)$$

در نتیجه

$$f(۲) = ۰$$

حال زوج $(۱,۱)$ را در رابطه مفروض جایگزین می کنیم

$$۰ = f(۲) = f(۱) + f(۱) + f(۱)$$

در نتیجه

$$f(۱) = ۰$$

با استقراء بر روی n ثابت می کنیم که $f(n) = ۰$. به ازای $n = ۱$ درستی حکم در بالا ثابت شد . حال فرض می‌کنیم حکم به‌ازای $n - ۱$ برقرار باشد و ثابت می‌کنیم که به‌ازای n نیز برقرار است. زوج $(۱, n - ۱)$ را در رابطهٔ مفروض جایگزین می کنیم:

$$f(n) = f(n - ۱) + f(۱) + f(n - ۱) = ۰$$

بدین ترتیب حکم استقراء ثابت می شود.

۶۰. ابتدا ثابت می کنیم که f تابعی پوشا است (بدین منظور باید ثابت کنیم که به‌ازای هر n صحیح، عدد صحیح k وجود دارد به طوریکه $f(k) = n$). عدد صحیح n را در نظر بگیرید. تعریف می‌کنیم $n_۰ = n - f(۱)$. زوج $(۱, n_۰)$ را در رابطهٔ مفروض جایگزین می‌کنیم:

$$f(۱ + f(n_۰)) = f(۱) + n_۰ = n$$

بدین ترتیب ثابت شد که f تابعی پوشا است. از این رو عدد صحیح $n_۰$ وجود دارد به طوریکه $f(n_۰) = ۰$. داریم که

$$f(m + f(n)) = f(m) + n \quad \Longrightarrow \quad ff(m + f(n)) = f(f(m) + n) = m + f(n)$$

اگر در رابطهٔ بالا زوج $(m, n_۰)$ را قرار دهیم بدست می آید که $ff(m) = m$. از این رو داریم:

$$f(m + n) = f(ff(m) + ff(n)) = fff(m) + f(n) = f(m) + f(n)$$

در نتیجه $f(m + n) = f(m) + f(n)$، یعنی f در معادلهٔ کوشی صدق می کند. بنابراین داریم $f(n) = nf(۱)$. با جایگذاری این تابع در رابطهٔ $ff(m) = m$ به دست می آید که $f^۲(۱) = f(۱)$. از این رو دو جواب $f(n) = ۰$ و

MATH75.IR

$f(n)=n$ به دست می آید ولی واضح است که تابع صفر در رابطهٔ $f(m+f(n))=f(m)+n$ صدق نمی کند درنتیجه جواب یکتای $f(n)=n$ به‌دست می آید.

۶۱. رابطهٔ بازگشتی مسئله را به ازای $n-۱$, n بصورت متعارف‌تر زیر می‌نویسیم:

$$a_n a_{n-۲}=a_{n-۱}^۲+۲ \qquad (۱) \qquad , \qquad a_{n-۱}a_{n-۲}=a_{n-۲}^۲+۲ \qquad (۲)$$

با کم کردن رابطهٔ (۲) از (۱) به دست می آید که:

$$a_{n-۲}(a_n+a_{n-۲})=a_{n-۱}(a_{n-۱}+a_{n-۳}) \implies \frac{a_n+a_{n-۲}}{a_{n-۱}}=\frac{a_{n-۱}+a_{n-۳}}{a_{n-۲}} \qquad (*)$$

اگر رابطهٔ $(*)$ را به‌ازای $۱,۲,\dots,n-۱,n$ بنویسیم نتیجه می‌شود که

$$\frac{a_n+a_{n-۲}}{a_{n-۱}}=\frac{a_۳+a_۱}{a_۲} \implies a_n=۳a_{n-۱}-a_{n-۲} \qquad (**)$$

از آنجا که در رابطهٔ خطی $(**)$ دو جملهٔ اول اعداد صحیح هستند [و همچنین ضرایب نیز صحیح هستند] باید تمامی جملات این دنباله صحیح باشند.

۶۲. داریم که

$$x_{k+۱}=x_k^۲+x_k=x_k(x_k+۱) \implies \frac{۱}{x_k+۱}=\frac{۱}{x_k}-\frac{۱}{x_{k+۱}} \quad k\geq ۱ \qquad (*)$$

حال اگر رابطهٔ $(*)$ را به ازای $k=۱,۲,۳,\dots,۱۰۰$ بنویسیم و سپس با هم جمع کنیم بدست می آید که

$$\begin{aligned} S&=\frac{۱}{x_۱+۱}+\frac{۱}{x_۲+۱}+\cdots+\frac{۱}{x_{۱۰۰}+۱}\\ &=\left(\frac{۱}{x_۱}-\frac{۱}{x_۲}\right)+\left(\frac{۱}{x_۲}-\frac{۱}{x_۳}\right)+\cdots+\left(\frac{۱}{x_{۹۹}}-\frac{۱}{x_{۱۰۰}}\right)+\left(\frac{۱}{x_{۱۰۰}}-\frac{۱}{x_{۱۰۱}}\right)\\ &=\frac{۱}{x_۱}-\frac{۱}{x_{۱۰۱}}\end{aligned}$$

از طرفی داریم $x_۲=\frac{۳}{۴}$, $x_۳=\frac{۲۱}{۱۶}$. از آنجا که دنباله صعودی است $(x_{k+۱}=x_k^۲+x_k\geq x_k)$ نتیجه می‌شود که $x_{۱۰۱}\geq x_۳>۱$، در نتیجه

$$S=\frac{۱}{x_۱+}-\frac{۱}{x_{۱۰۱}}=۲-\frac{۱}{x_{۱۰۱}}>۱$$

و همچنین $S<۲$، بنابراین $[S]=۱$.

۶۳. دنبالهٔ $\{u_n\}_{n=۰}^{\infty}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u_۰=۲ \quad , \quad u_۱=۲k+۱ \quad , \quad u_{n+۲}=(۲k+۱)u_{n+۱}-ku_n \quad n\geq ۰$$

MATH75.IR

واضح است که u_n را می‌توان بصورت $c_1x_1^n + c_2x_2^n$ نوشت که در آن x_1, x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2 - (2k+1)x + k = 0$ هستند یعنی:

$$x_1, x_2 = \frac{(2k+1) \pm \sqrt{4k^2+1}}{2}$$

مسلماً عدد $4k^2 + 1$ نمی‌تواند مربع یک عدد صحیح باشد، بنابراین x_1, x_2 اعداد گنگی هستند. با جایگذاری $n = 0, 1$ در رابطهٔ $u_n = c_1x_1^n + c_2x_2^n$ به دست می‌آید که $c_1 = c_2 = 1$، در نتیجه

$$u_n = \left(\frac{(2k+1) + \sqrt{4k^2+1}}{2}\right)^n + \left(\frac{(2k+1) - \sqrt{4k^2+1}}{2}\right)^n$$

واضح است که

$$0 < \frac{(2k+1) - \sqrt{4k^2+1}}{2} < 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 < \left(\frac{(2k+1) - \sqrt{4k^2+1}}{2}\right)^n < 1$$

از این رو داریم $u_n = \lfloor u_n \rfloor = \lfloor r^n \rfloor + 1$ (زیرا u_n عدد گنگ است) که در آن $r = \frac{(2k+1) + \sqrt{4k^2+1}}{2}$.
ادعا می‌کنیم که به ازای هر n طبیعی، $\lfloor r^n \rfloor$ بر k بخشپذیر است. از رابطه $u_{n+2} = (2k+1)u_{n+1} - ku_n$ نتیجه می‌گیریم که $u_{n+2} \overset{k}{\equiv} u_{n+1}$. از این رو $u_1 \overset{k}{\equiv} u_{n+1} \overset{k}{\equiv} u_n \dots \overset{k}{\equiv} u_{n+2}$ در نتیجه $u_n \overset{k}{\equiv} 1$. بنابراین داریم $k | u_n - 1$ و یا $k | \lfloor r^n \rfloor$.

۶۴. طرفین رابطهٔ $|a_{k+1}| = |a_k + 1|$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$a_{k+1}^2 = a_k^2 + 2a_k + 1 \qquad (*)$$

رابطهٔ $(*)$ را به ازای $k = 0, 1, 2, \dots, n$ نوشته و سپس با هم جمع می‌کنیم:

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n+1}^2\right) = \left(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2\right) + 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + n$$

درنتیجه:

$$2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + n = a_{n+1}^2 \geq 0 \quad \text{و یا} \quad \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq -\frac{1}{2}$$

۶۵. به‌ازای هر i طبیعی، x_i را برابر عددی تعریف می‌کنیم که در هر مرحلهٔ i ام روی تخته نوشته می‌شود (البته فرض می‌کنیم در ابتدا هیچ عددی روی تخته وجود نداشته و در مرحلهٔ اول عدد x_1 و در مرحلهٔ دوم عدد x_2 را روی تخته نوشته‌ایم). هدف ما این است که ثابت کنیم $x_{21} = 0$. بر طبق تقارن می‌توان فرض کرد که $x_1 \geq x_2$، از این رو به‌دست می‌آید:

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{21} \geq \dots$$

MATH75.IR

(زیرا $a \geq |a-b|\ ,\ b$ برای هر a,b حقیقی مثبت). ادعا می‌کنیم که

$$x_k \geq x_{k+1} + x_{k+2} \qquad k \in N$$

زیرا در غیر این صورت $x_{k+2} > x_k - x_{k+1} = |x_k - x_{k+1}|$، ولی بر طبق فرض x_{k+2} نمی‌تواند از قدر مطلق تفاضل دو عددی که تا مرحلهٔ $k+1$ ام روی تخته نوشته شده است بیشتر باشد. تناقض حاصل درستی ادعا را نشان می‌دهد.

حال برای اثبات درستی حکم مسأله فرض خلف می‌کنیم یعنی $x_{21} \geq 1$، در نتیجه

$$x_{19} \geq x_{20} + x_{21} \geq 2$$

(زیرا $x_{20} \geq x_{21}$) ، $x_{18} \geq x_{19} + x_{20} \geq 3$ ، $x_{17} \geq x_{18} + x_{19} \geq 5$ ، ... ، $x_1 \geq 4181 + 6765$ ، ولی از طرفی داریم $x_1 \geq 10000$ که ممکن نیست. بنابراین از آنجا که x_{21} برابر قدر مطلق عدد خاصی است و به عبارت دیگر نامنفی است و همچنین $x_{21} < 1$ باید داشته باشیم $x_{21} = 0$.

۶۶. عدد طبیعی m را در نظر بگیرید. می‌دانیم اعداد α, β موجود هستند به طوریکه به ازای هر n صحیح نامنفی داشته باشیم:

$$a_{n+m} = \alpha a_n + \beta a_{n+1} \qquad (1)$$

[برای توضیح بیشتر به انتهای مسأله رجوع شود]. برای پیدا کردن α, β در رابطهٔ (۱) یکبار n را برابر صفر و بار دیگر برابر یک قرار می‌دهیم:

$$a_m = \alpha a_0 + \beta a_1 \quad , \quad a_{m+1} = \alpha a_1 + \beta a_2$$

از حل دستگاه دو معادله و دو مجهول بالا بدست می‌آید که $\alpha = a_{m-1}\ ,\ \beta = a_m$. از این رو به ازای هر n و m طبیعی داریم که:

$$a_{n+m} = a_{m-1} a_n + a_m a_{n+1} \qquad (2)$$

(البته رابطهٔ (۲) را با استقراء بر روی $n+m$ نیز می‌توان ثابت کرد.) اگر در رابطهٔ (۲) به جای (n,m) زوج (n,n) را جایگزین کنیم بدست می‌آید که :

$$a_{2n} = a_n(a_{n-1} + a_{n+1}) = a_n((a_{n+1} - 2a_n) + (a_{n+1})) = 2a_n(a_{n+1} - a_n) \qquad (3)$$

از رابطهٔ $a_k = 2a_{k-1} - a_{k-2}$ نتیجه می‌شود که $a_k \overset{2}{\equiv} a_{k-2}$. از این رو به راحتی می‌توان به دست آورد که به ازای هر k طبیعی، عدد a_{2k} زوج و عدد a_{2k-1} فرد است. بنابراین همواره عدد $a_{n+1} - a_n$ فرد است. از این رو اگر $a_{2[k]}$ را

MATH75.IR

برابر بزرگترین توان ۲ در عدد طبیعی k تعریف کنیم، از رابطهٔ (۲) به دست می‌آید که $[a_{۲n}]_۲ = ۲[a_n]_۲$. عدد طبیعی n را در نظر بگیرید. فرض کنید که $n = ۲^k l$ ، $(l, ۲) = ۱$، بنابراین داریم:

$$[a_n]_۲ = [a_{۲^k l}]_۲ = ۲[a_{۲^{k-۱} l}]_۲ = ۲^۲[a_{۲^{k-۱} l}]_۲ = \ldots = ۲^k[a_l]_۲$$

از آنجا که l عددی فرد است باید داشته باشیم $a_l \overset{۲}{\equiv} ۱$ و یا $[a_l]_۲ = ۱$، در نتیجه $[a_n]_۲ = ۲^k$. بدین ترتیب حکم ثابت شد.

نکته: دنبالهٔ $\{a_i\}_{i=۰}^{\infty}$ با شرایط

$$a_۰ = \alpha_۱ \ , \ a_۱ = \alpha_۲ \ , \ \cdots \ , \ a_{k-۱} = \alpha_k \quad , \quad a_n = c_۱ a_{n-۱} + c_۲ a_{n-۲} + \cdots + c_k a_{n-k} \quad n \geq k$$

را در نظر بگیرید (c_i ها و α_i ها اعداد ثابتی هستند). اگر تمام دنباله‌های $\{x_n\}_{n=۰}^{\infty}$ با شرایط اولیه دلخواه که در رابطهٔ $n \geq k$ $x_n = c_۱ x_{n-۱} + c_۲ x_{n-۲} + \cdots + c_k x_{n-k}$ صدق می‌کنند را در نظر بگیریم، این دنباله‌ها تشکیل یک فضای برداری با بعد k می‌دهند. از این رو اگر k دنباله مستقل از این فضای برداری را در نظر بگیریم، سپس هر دنباله از فضای برداری مفروض را می‌توان بر حسب این k دنباله نوشت. حال عدد m را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم که

$$\{b_{۱i}\}_{i=۰}^{\infty} = \{a_i\}_{i=۰}^{\infty} \ , \ \{b_{۲i}\}_{i=۰}^{\infty} = \{a_i\}_{i=۱}^{\infty} \ , \ \cdots \ , \ \{b_{(k-۱)i}\}_{i=۰}^{\infty} = \{a_i\}_{i=k-۲}^{\infty} \ , \ \{b_{ki}\}_{i=۰}^{\infty} = \{a_i\}_{i=k-۱}^{\infty}$$

واضح است که دنباله‌های تعریف شده در بالا در فضای برداری مفروض قرار دارند. از آنجا که جملات اول این k دنباله یعنی $\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_k$ از هم مستقل هستند (زیرا بطور دلخواه انتخاب شده‌اند)، باید این k دنباله نیز از هم مستقل باشند یعنی این k دنباله تشکیل یک پایه برای فضای برداری مفروض می‌دهند.

بنابراین برای دنبالهٔ $\{a_i\}_{i=m}^{\infty} = \{c_i\}_{i=۰}^{\infty}$ ضرایب ثابت $\beta_۱, \beta_۲, \ldots, \beta_k$ وجود دارند به‌طوری که

$$\{c_i\}_{i=۰}^{\infty} = \beta_۱\{b_{۱i}\}_{i=۰}^{\infty} + \beta_۲\{b_{۲i}\}_{i=۰}^{\infty} + \cdots + \beta_k\{b_{ki}\}_{i=۰}^{\infty}$$

و یا

$$\{a_i\}_{i=m}^{\infty} = \beta_۱\{a_i\}_{i=۰}^{\infty} + \beta_۲\{a_i\}_{i=۱}^{\infty} + \cdots + \beta_k\{a_i\}_{i=k-۱}^{\infty}$$

با برابر قرار دادن جملات n ام دو دنباله در طرفین رابطهٔ بالا بدست می‌آید که:

$$a_{m+n} = \beta_۱ a_n + \beta_۲ a_{n+۱} + \cdots + \beta_k a_{n+k-۱} \qquad n \geq ۰ \qquad (*)$$

پر واضح است که β_i ها بر حسب جملات دنبالهٔ $\{a_i\}_{i=m}^{\infty}$ و از مرتبهٔ a_m هستند. از این رو با قرار دادن $n = ۰, ۱, \ldots, k-۱$ در رابطه $(*)$، k معادله و k مجهول بدست می‌آید که با حل این دستگاه β_i ها محاسبه

MATH75.IR

می‌شوند. برای فهم بیشتر این مطلب مثال زیر را حل می‌کنیم:

$$a_۰ = a_۱ = ۰ \ , \ a_۲ = ۱ \quad , \quad a_n = a_{n-۱} + ۲a_{n-۳} \quad n \geq ۳$$

بر طبق گفته‌های بالا به ازای هر n, m طبیعی داریم که

$$a_{n+m} = \alpha a_n + \beta a_{n+۱} + \gamma a_{n+۲} \qquad (*)$$

که در آن α, β, γ جملاتی از مرتبهٔ a_m هستند. حال در رابطهٔ $(*)$ اعداد $n = ۰, ۱, ۲$ را جایگزین می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_m = \alpha a_۰ + \beta a_۱ + \gamma a_۲ \\ a_{m+۱} = \alpha a_۱ + \beta a_۲ + \gamma a_۳ \\ a_{m+۲} = \alpha a_۲ + \beta a_۳ + \gamma a_۴ \end{cases}$$

همچنین داریم $a_۰ = a_۱ = ۰$, $a_۲ = a_۳ = a_۴ = ۱$. با حل دستگاه بالا به دست می‌آید که

$$\alpha = a_{m+۲} - a_{m+۱} \ , \ \beta = a_{m+۱} - a_m \ , \ \gamma = a_m$$

بنابراین

$$a_{n+m} = (a_{m+۲} - a_{m+۱})a_n + (a_{m+۱} - a_m)a_{n+۱} + a_m a_{n+۲} \qquad n, m \geq ۰$$

البته در گفته‌های بالا از جبر خطی استفاده شده است که مبحثی دانشگاهی است. اما می‌توان با استفاده از روش بالا یک چنین رابطه‌ای را بدست آورد و سپس با استقراء بر روی $n + m$ آن را ثابت کرد.

۶۷. داریم که

$$a_k + ۳ = ۳ + \frac{۳a_{k-۱} + ۹ - ۸}{a_{k-۱} + ۳} = ۶ - \frac{۸}{a_{k-۱} + ۳}$$

بنابراین اگر دنبالهٔ $\{b_i\}_{i=۰}^{\infty}$ را به صورت $a_k + ۳ = \frac{b_{k+۱}}{b_k} \quad k \geq ۰$ در نظر بگیریم به دست می‌آید که

$$\frac{b_{k+۱}}{b_k} = ۶ - ۸\frac{b_{k-۱}}{b_k} \quad \Longrightarrow \quad b_{k+۱} = ۶b_k - ۸b_{k-۱} \quad k \geq ۱ \qquad (*)$$

معادله مشخصه رابطهٔ بازگشتی $(*)$ دارای دو ریشهٔ $۲, ۴$ است از این رو ضرایب α و β وجود دارند به طوری که به ازای هر n صحیح نامنفی داشته باشیم $b_n = \alpha ۴^n + \beta ۲^n$، در نتیجه

$$a_n = \frac{b_{n+۱}}{b_n} - ۳ = \frac{\alpha ۴^{n+۱} + \beta ۲^{n+۱}}{\alpha ۴^n + \beta ۲^n} - ۳ = \frac{\alpha ۲^n - \beta}{\alpha ۲^n + \beta}$$

از طرفی داریم $a_۰ = ۵$، در نتیجه

$$\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = ۵ \quad \Longrightarrow \quad \beta = -\frac{۲}{۳}\alpha$$

MATH75.IR

بنابراین

$$a_n = \frac{\alpha ۲^n + \frac{۲}{۳}\alpha}{\alpha ۲^n - \frac{۲}{۳}\alpha} = \frac{۳ \times ۲^{n-۱} + ۱}{۳ \times ۲^{n-۱} - ۱} \qquad n \geq ۰$$

نکته: برای حل رابطهٔ بازگشتی $a_n = \frac{pa_{n-۱} + q}{ra_{n-۱} + s}$ (r, s, p, q اعداد ثابت بوده و $r \neq ۰$) کافی است تعریف کنیم $ra_n + s = \frac{b_{n+۱}}{b_n}$، زیرا

$$ra_n + s = r\left(\frac{pa_{n-۱} + q}{ra_{n-۱} + s}\right) + s = (p + s) + \frac{qr - ps}{ra_{n-۱} + s}$$

و یا

$$\frac{b_{n+۱}}{b_n} = (p + s) + (qr - ps)\frac{b_{n-۱}}{b_n} \quad \Longrightarrow \quad b_{n+۱} = (p + s)b_n + (qr - ps)b_{n-۱}$$

حال با حل رابطهٔ بازگشتی خطی بالا، ابتدا b_n و سپس a_n به دست می آید.

۶۸. ادعا می‌کنیم چنین مجموعه‌ای وجود ندارد. برای اثبات این ادعا فرض می‌کنیم مجموعهٔ $A = \{a_۱, a_۲, \ldots\}$ در شرایط مسئله صدق کند. تابع $f(x)$ را به صورت $f(x) = x^{a_۱} + x^{a_۲} + \cdots + x^{a_n} + \cdots$ تعریف می‌کنیم. داریم که

$$\begin{aligned} f(x)^۲ &= \left(x^{۲a_۱} + x^{۲a_۲} + \cdots\right) + ۲\left(x^{a_۱+a_۲} + x^{a_۱+a_۳} + \cdots + x^{a_۲+a_۳} + \cdots\right) \\ &= \sum_{i=۱}^{\infty}\left(x^{۲}\right)^{a_i} + ۲\sum_{i<j} x^{a_i+a_j} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\sum_{i \leq j} x^{a_i+a_j} = \sum_{i<j} x^{a_i+a_j} + \sum_{i=۱}^{\infty} x^{۲a_i} = \frac{۱}{۲}\left(f(x)^۲ + f(x^۲)\right) \qquad (*)$$

از آنجا که هر عدد طبیعی بزرگتر از N را دقیقاً به k طریق می‌توان به صورت $a_i + a_j$ با شرط $i \leq j$ نوشت نتیجه می‌شود که طرف چپ رابطهٔ $(*)$ به صورت جمع یک چند جمله‌ای از درجه N و تابع $\sum_{i=N+۱}^{\infty} x^i$ k است یعنی

$$\frac{۱}{۲}\left(f(x)^۲ + f(x^۲)\right) = p(x) + \frac{kx^{N+۱}}{۱ - x} \qquad |x| < ۱ \qquad (**)$$

رابطهٔ بالا از آنجا نتیجه می شود که $\sum_{i=N+۱}^{\infty} x^i = \frac{kx^{N+۱}}{۱ - x}$ k.

حال اگر x از طرف راست به -۱ میل کند (یعنی $x \to -۱$, $x > -۱$)، طرف راست رابطهٔ $(**)$ عددی متناهی می‌شود ولی طرف چپ آن بیکران می‌شود (زیرا $f(x^۲) \geq ۰$, $f((-۱)^۲) = f(۱) = +\infty$)، که ممکن نیست. بنابراین فرض اولیه ما اشتباه بوده است.

۶۹. تعریف می‌کنیم

$$f(x) = x^{a_۱} + x^{a_۲} + \cdots + x^{a_n} \quad , \quad g(x) = x^{b_۱} + x^{b_۲} + \cdots + x^{b_n}$$

MATH75.IR

بنابراین باید داشته باشیم

$$f(x)^۲ - f(x^۲) = ۲\sum_{i<j} x^{a_i+a_j} = ۲\sum_{i<j} x^{b_i+b_j} = g(x)^۲ - g(x^۲)$$

در نتیجه

$$f(x^۲) - g(x^۲) = f(x)^۲ - g(x)^۲ \qquad (*)$$

از طرفی داریم $f(۱) = g(۱) = n$، بنابراین $f(۱) - g(۱) = ۰$، از این رو $x - ۱ | f(x) - g(x)$. فرض کنید $(x-۱)^k$ بزرگترین نما از $(x-۱)$ باشد که $f(x) - g(x)$ را عاد می‌کند، بنابراین داریم

$$f(x) - g(x) = (x-۱)^k h(x) \quad , \quad h(۱) \neq ۰$$

از این رو از رابطهٔ $(*)$ نتیجه می‌گیریم که:

$$(x^۲ - ۱)^k h(x^۲) = (x-۱)^k h(x) \cdot (f(x) + g(x))$$

و یا $(x+۱)^k h(x^۲) = h(x) \cdot (f(x) + g(x))$. با قرار دادن $x = ۱$ در رابطهٔ اخیر به دست می‌آید که $۲^k h(۱) = h(۱) \times ۲n$. از آنجا که $h(۱) \neq ۰$ نتیجه می‌شود که $n = ۲^{k-۱}$.

۷۰. فرض کنید دنبالهٔ $\{a_i\}_{i=۰}^{\infty}$ در شرایط مسئله صدق کند. تعریف می‌کنیم $f(x) = x^{a_۱} + x^{a_۲} + \cdots$ در نتیجه

$$f(x^۲) = x^{۲a_۱} + x^{۲a_۲} + \cdots \quad , \quad f(x^۴) = x^{۴a_۱} + x^{۴a_۲} + \cdots$$

بنابراین

$$\begin{aligned} f(x)f(x^۲)f(x^۴) &= \left(x^{a_۱} + x^{a_۲} + \cdots\right)\left(x^{۲a_۱} + x^{۲a_۲} + \cdots\right)\left(x^{۴a_۱} + x^{۴a_۲} + \cdots\right) \\ &= \sum_{i,j,k=۱}^{\infty} x^{a_i+۲a_j+۴a_k} = x^۰ + x^۱ + x^۲ + \cdots = \frac{۱}{۱-x} \qquad |x| < ۱ \end{aligned}$$

[رابطهٔ اخیر از آنجا نتیجه می‌شود که هر عدد صحیح نامنفی را به طور یکتا می‌توان به صورت $a_i + ۲a_j + ۴a_k$ نوشت] همچنین داریم (به انتهای راه حل رجوع شود):

$$\frac{۱}{۱-x} = (۱+x)(۱+x^۲)(۱+x^۴)\ldots(۱+x^{۲^k})\ldots \qquad |x| < ۱$$

درنتیجه

$$f(x)f(x^۲)f(x^۴) = (۱+x)(۱+x^۲)(۱+x^۴)\ldots(۱+x^{۲^k})\ldots \qquad (۱)$$

ادعا می‌کنیم که $۱ + x | f(x)$، زیرا در غیر اینصورت اگر $۱ + x | f(x^۲)$ سپس $f((-۱)^۲) = ۰$، در نتیجه $f(۱) = ۰$ یا معادلاً $x - ۱ | f(x^۲)$، ولی عبارت $x - ۱$ در سمت راست رابطه $(*)$ وجود ندارد. به همین ترتیب $۱ + x \not| f(x^۴)$.

MATH75.IR

از این رو باید داشته باشیم $f(x)|x+1$، در نتیجه $f(x^2)|x^2+1$ و $f(x^4)|x^4+1$. حال اگر تعریف کنیم $f(x)=(x+1)g(x)$، از رابطه (۱) به دست می‌آید که:

$$g(x)g(x^2)g(x^4)=(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})\dots \qquad (2)$$

ادعا می‌کنیم که $g(x)|x^8+1$، زیرا در غیر این صورت اگر $g(x^2)|x^8+1$ سپس با تغییر متغیر $y=x^2$ به دست می‌آید که $g(y)|y^4+1$ و یا $g(x)|x^4+1$ (البته به ازای $x\geq 0$)، ولی در طرف راست رابطهٔ (۲) عبارت x^4+1 وجود ندارد. به همین ترتیب $g(x^4)|x^8+1$. از این رو باید داشته باشیم $g(x)|x^8+1$ در نتیجه $g(x^2)|x^{16}+1$ و $g(x^4)|x^{32}+1$. با ادامه این رویه بدست می‌آید که:

$$f(x)=(1+x)(1+x^8)(1+x^{8^2})\dots \qquad (3)$$

حال اگر عبارت سمت راست رابطهٔ (۳) را بسط دهیم، نمای x در هر جمله به صورت $8^{\alpha_1}+8^{\alpha_2}+\dots+8^{\alpha_k}\ (\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_k)$ می‌شود. از این رو a_i ها به‌طور یکتا به دست می‌آیند به عبارت دیگر a_i ها دقیقاً همان اعدادی هستند که بسط مبنای ۸ آنها فقط از ارقام صفر و یک تشکیل شده است.

نکته: داریم که

$$\frac{1}{1-x}=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots \qquad |x|<1 \qquad (*)$$

برای اثبات رابطهٔ بالا کافی است طرف راست آن را بسط دهیم، زیرا در این صورت جملاتی به شکل $x^{2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}+\dots+2^{\alpha_k}}\ (\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_k)$ در آن ظاهر می‌شود. از آنجا که هر عدد طبیعی را به طور یکتا می‌توان در مبنای دو و یا معادلاً به شکل $2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}+\dots+2^{\alpha_k}$ با شرط $\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_k$ نوشت نتیجه می‌گیریم که:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

از آنجا که طرف راست رابطهٔ بالا به ازای $|x|<1$ برابر $\frac{1}{1-x}$ است رابطهٔ (*) ثابت می‌شود.

۷۱. تعریف می‌کنیم $0<x<1$ $f(x)=\sum_{i,j=1}^{\infty}x^{a_{ij}}$. از آنجا که $a_{ij}\leq ij$, $0<x<1$ به دست می‌آید

$$x^{ij}\leq x^{a_{ij}}$$

در نتیجه

$$f(x)=\sum_{i,j=1}^{\infty}x^{a_{ij}}\geq\sum_{i,j=1}^{\infty}x^{ij}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x^{ij}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^i}{1-x^i} \qquad |x|<1 \qquad (1)$$

از طرف دیگر اگر هر عدد طبیعی، کمتر از k بار در جدول مفروض آمده باشد، باید ضریب x^n در $f(x)$ کمتر از k باشد یعنی:

$$f(x)<k+kx+kx^2+\cdots=\frac{k}{1-x} \qquad |x|<1 \qquad (2)$$

MATH75.IR

از دو رابطهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که باید داشته باشیم:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{1-x^i} < \frac{k}{1-x} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{1+x+x^2+\cdots+x^{i-1}} < k \qquad |x|<1 \qquad (۳)$$

حال اگر x از سمت چپ به ۱ نزدیک شود ($x<1$, $x \to 1$) رابطهٔ (۳) به صورت زیر در می‌آید:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1+1+\cdots+1} < k \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} < k \qquad (۴)$$

از معلومات دبیرستانی می‌دانید که سری $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ واگراست ($\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$) از این رو رابطهٔ (۴) نمی‌تواند درست باشد. تناقض حاصل درستی حکم را نشان می‌دهد.

۷۲. فرض کنید توانسته‌ایم اعداد طبیعی را به n تصاعد حسابی $A_1, A_2, \ldots, A_n$ با قدر نسبت های مختلف افراز کنیم که در آن

$$A_i = \{\, a_i + kd_i \mid k = 0, 1, 2, \ldots \}$$

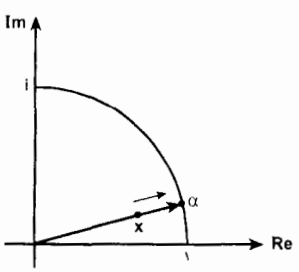
از این رو داریم

$$\sum_{i=1}^{n} \left(x^{a_i} + x^{a_i+d_i} + x^{a_i+2d_i} + \cdots \right) = x + x^2 + x^3 + \cdots$$

و یا

$$\frac{x^{a_1}}{1-x^{d_1}} + \frac{x^{a_2}}{1-x^{d_2}} + \cdots + \frac{x^{a_n}}{1-x^{d_n}} = \frac{x}{1-x} \qquad |x|<1 \qquad (*)$$

بر طبق تقارن می‌توان فرض کرد که $d_1 < d_2 < \ldots < d_n$. تعریف می‌کنیم $\alpha = \cos\frac{2\pi}{d_n} + i\sin\frac{2\pi}{d_n}$. واضح است که α ریشه‌ای از معادلهٔ $1 - x^{d_n} = 0$ می‌باشد ولی ریشهٔ هیچ یک از معادلات $x^k - 1 = 0 \quad 0 < k < d_n$ نیست. حال اگر x از طرف مبدأ به α نزدیک شود (می‌دانیم که $|\alpha| = 1$) طرف راست رابطهٔ $(*)$ عددی متناهی می‌شود در حالیکه طرف چپ آن بیکران می شود. بدین ترتیب به تناقض رسیدیم.



نکته: می‌دانیم برای اینکه رابطهٔ $(*)$ برقرار باشد باید اندازهٔ x کمتر از یک باشد (اندازه در اعداد حقیقی به قدر مطلق تبدیل می‌شود). در اینجا α عددی مختلط با اندازه یا نرم ۱ است. حال کافی است مبدأ مختصات صفحهٔ قطبی را به α وصل کنیم و x را از روی این خط به α نزدیک کنیم در این صورت $x \to \alpha$, $|x|<1$، که همان خواستهٔ مطلوب است.

۷۳. فرض می‌کنیم $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ و $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. تعریف می‌کنیم

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{a_i} \quad , \quad q(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x^{b_i}$$

MATH75.IR

در نتیجه

$$p(x)^{۲} = \sum_{i,j=۱}^{n} x^{a_i+a_j} = \sum_{k\in X} x^k$$

به همین ترتیب

$$q(x)^{۲} = \sum_{i,j=۱}^{n} x^{b_i+b_j} = \sum_{k\in Y} x^k$$

تعریف می‌کنیم

$$\alpha(x) \overset{\gamma(x)}{\equiv} \beta(x) \quad \text{اگر} \quad \gamma(x)|\alpha(x)-\beta(x)$$

از این رو می‌دانیم که به ازای سه عدد γ,β,α، $\alpha \overset{\gamma}{\equiv} \beta$ اگر و فقط اگر $x^{\alpha} \overset{x^{\gamma}-۱}{\equiv} x^{\beta}$. (زیرا به‌ازای هر a,b طبیعی، $x^a-۱|x^b-۱$ اگر و فقط اگر $a|b$، درنتیجه

$$\alpha \overset{\gamma}{\equiv} \beta \iff |\alpha-\beta| = \gamma r \iff x^{\gamma}-۱|x^{|\alpha-\beta|}-۱ \iff x^{\alpha} \overset{x^{\gamma}-۱}{\equiv} x^{\beta} \quad)$$

از این رو حکم مسئله معادل رابطهٔ زیر است:

$$p(x)^{۲} \overset{?}{\equiv} q(x)^{۲} \pmod{x^{۲n}-۱} \qquad (*)$$

از طرفی داریم $p(۱) = q(۱) = n$، در نتیجه $x-۱|p(x)-q(x)$.

همچنین داریم

$$p(x)+q(x) = x^{a_۱}+x^{a_۲}+\cdots+x^{a_n}+x^{b_۱}+x^{b_۲}+\cdots+x^{b_n} = x^{۱}+x^{۲}+\cdots+x^{۲n} = x\left(۱+x+\cdots+x^{۲n-۱}\right)$$

از دو رابطهٔ بالا نتیجه می‌گیریم که

$$x^{۲n}-۱ = (x-۱)(۱+x+\cdots+x^{۲n-۱}) \Big| [p(x)-q(x)][p(x)+q(x)] = p(x)^{۲}-q(x)^{۲}$$

بدین ترتیب رابطهٔ $(*)$ ثابت می‌شود.

MATH75.IR

مسایل تستی المپیادهای ریاضی

آبان ۷۴

۱. اگر $r^۲ - r - ۱۰ = ۰$، آنگاه در مورد $(r+۱)(r+۲)(r-۴)$ کدامیک از جملات زیر درست است؟

الف) عددی صحیح است　　ب) مثبت و گنگ است

ج) منفی و گنگ است　　د) گویا اما غیر صحیح است

ه) غیر حقیقی است.

حل: این مسئله نکته خاصی ندارد فقط باید عبارت مفروض را بسط داده و به جای تمامی $r^۲$ ها عدد $r+۱۰$ را قرار دهید:

$$\begin{aligned}(r+۱)(r+۲)(r-۴) &= (r^۲+۳r+۲)(r-۴)\\ &= (r+۱۰+۳r+۲)(r-۴)\\ &= ۴(r^۲-r-۱۲)\\ &= ۴(r+۱۰-r-۱۲)\\ &= -۸\end{aligned}$$

در نتیجه گزینهٔ (الف) درست است.

۲. فرض کنید $F(x)$ و $G(x)$ دو چند جمله‌ای با ضرایب صحیح بوده و $\frac{F(k)}{G(k)}$ به ازای $k = ۱,۲,۳,\ldots$ عددی صحیح باشد. در این‌صورت کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) $\frac{F(\frac{۱}{n})}{G(\frac{۱}{n})}$ به ازای هر عدد طبیعی n، عددی صحیح است.

ب) F بر G بخشپذیر است.

ج) $\frac{F'(k)}{G'(k)}$ به ازای هر عدد صحیح k، صحیح است.

د) $\lim_{k\to\infty} \frac{F(k)}{G(k)} = \infty$

ه) درجه $G(x)$ صفر یا یک است.

حل: بر طبق قضیهٔ باقیماندهٔ تقسیم، دو جمله‌ای $R(x)$ و $S(x)$ موجودند به‌طوری که

$$f(x) = R(x)G(x) + S(x) \quad , \quad deg(S(x)) < deg(G(x))$$

MATH75.IR

از این رو داریم که $\frac{F(x)}{G(x)} = R(x) + \frac{S(x)}{G(x)}$. به ازای هر k طبیعی، $\frac{F(k)}{G(k)}$ عددی طبیعی است، در نتیجه $\frac{S(k)}{G(k)}$ هم باید عددی طبیعی باشد. از طرفی داریم که

$$deg(S(x)) < deg(G(x)) \implies \lim_{k\to\infty} \frac{S(k)}{G(k)} = ۰ \implies k \to \infty : \left|\frac{S(k)}{G(k)}\right| < ۱$$

از آنجا که $\frac{S(k)}{G(k)}$ عددی صحیح باقدر مطلق کمتر از ۱ است باید داشته باشیم $\frac{S(k)}{G(k)} = ۰$ و یا معادلاً $S(k) = ۰$. درنتیجه F بر G بخشپذیر می‌شود ($S(k)$ به‌ازای نامتناهی k ی خیلی بزرگ برابر صفر است، از طرفی یک چندجمله‌ای متناهی ریشه دارد، درنتیجه همواره باید $S(x)$ برابر صفر باشد).

درنتیجه گزینهٔ (ب) درست است.

۳. اگر چند جمله‌ای $ax^۳ + bx + c$ بر $x^۲ + tx + ۱$ بخشپذیر باشد، آنگاه کدامیک از موارد زیر صحیح است:

الف) $a^۲ - ۲c \geq b$ ب) $a + c > ۳$ ج) $a^۲ - c \geq ab$

د) $a^۲ + c^۲ = ab$ ه) $a^۲ - c^۲ = ab$

حل: قبلاً گفته شد که چند جمله‌ای $F(x)$ بر $G(x)$ بخشپذیر است اگر و فقط اگر هر ریشهٔ $G(x)$ ریشه‌ای از $F(x)$ هم باشد. فرض کنید α, β ریشه‌های چندجمله‌ای $x^۲ + tx + ۱$ باشند، در نتیجه ریشه‌های چند جمله‌ای $ax^۳ + bx + c$ به‌صورت γ, β, α هستند. بر طبق قضیهٔ ویت داریم که

$$۱)\alpha + \beta = -t \qquad ۲)\alpha\beta = ۱ \qquad ۳)\alpha + \beta + \gamma = ۰$$

$$۴)\alpha\beta\gamma = \frac{-c}{a} \qquad ۵)\gamma(\alpha + \beta) + \alpha\beta = \frac{b}{a}$$

بنابراین بدست می‌آوریم که

$$۱), ۳) \implies \gamma = t \quad , \quad ۴) \implies t = \frac{-c}{a}$$

$$۵) \implies \frac{-c}{a} \times \frac{c}{a} + ۱ = \frac{b}{a} \quad \text{یا} \quad -c^۲ + a^۲ = ab$$

در نتیجه گزینهٔ (ه) درست است.

نکته: در این مسئله می‌توان به‌طور مستقیم چند جمله‌ای $ax^۳ + bx + c$ را بر $x^۲ + tx + ۱$ تقسیم کرده و از برابر قرار دادن باقیماندهٔ این تقسیم با صفر به جواب مطلوب رسید ولی برای چند جمله‌ای‌های با درجهٔ زیاد این عمل طاقت‌فرسا می‌باشد. از آنجا که هر چند جمله‌ای به‌طور یکتا برحسب ضریب بزرگترین توان آن و همچنین ریشه‌هایش مشخص می‌شود، بهترین راه حل استفاده از ریشه‌ها است.

اردیبهشت ۷۵

۴. اگر x, y دو عدد حقیقی باشد به‌طوری که

$$\left(x + \sqrt{x^۲ + ۱}\right)\left(y + \sqrt{y^۲ + ۱}\right) = ۱$$

MATH75.IR

در این‌صورت دقیق‌ترین نتیجه‌ای که می‌توان گرفت چیست؟

الف) $x = y = ۰$ ب) $x + y = ۰$ ج) $x + y \geq ۰$

د) $x + y \leq ۰$ ه) x و y هم علامت‌اند.

حل: می‌دانیم تابع $f(x)$ اکیداً یکنوا است اگر و فقط اگر $f'(x) > ۰$ (در مرحلهٔ اول المپیاد ریاضی فقط تعریف مشتق و توانایی مشتق گرفتن از چند تابع کلاسیک در کل مبحث مشتق کافی است. اگر آن را نمی‌دانید سعی کنید با چند ساعت تمرین کردن آن را بیاموزید). تعریف می‌کنیم $f(\alpha) = \alpha + \sqrt{\alpha^۲ + ۱}$. از این رو داریم

$$f'(\alpha) = ۱ + \frac{۱}{۲} \times ۲\alpha \times \frac{۱}{\sqrt{\alpha^۲ + ۱}} = ۱ + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^۲ + ۱}}$$

واضح است که همواره داریم $f'(\alpha) > ۰$ [چرا که در غیر این‌صورت باید داشته باشیم $\alpha^۲ + ۱ = (-\alpha)^۲$، ولی این رابطه تناقض است]. در نتیجه $f(\alpha)$ اکیداً یکنوا است.

طرفین رابطهٔ اصلی مسئله را در عبارت $y - \sqrt{y^۲ + ۱}$ ضرب می‌کنیم:

$$x + \sqrt{x^۲ + ۱} = -y + \sqrt{y^۲ + ۱} \quad \Longrightarrow \quad f(x) = f(-y)$$

از آنجا که $f(\alpha)$ اکیداً یکنوا است، باید داشته باشیم $x = -y$ و یا $x + y = ۰$.

در نتیجه گزینهٔ (ب) صحیح است.

۵. فرض کنید α و β دو عدد باشد به‌طوری که $\alpha^۳ - ۶\alpha^۲ + ۱۳\alpha = ۱$ و $\beta^۳ - ۶\beta^۲ + ۱۳\beta = ۱۹$. در این‌صورت $\alpha + \beta$ برابر کدامیک از مقادیر زیر است؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ ه) ۷

حل: در این مسئله تنها نکته‌ای که وجود دارد، توجه به رابطهٔ زیر است:

$$\alpha^۳ - ۶\alpha^۲ = (\alpha - ۲)^۳ - ۱۲\alpha + ۸$$

در نتیجه

$$\alpha^۳ - ۶\alpha^۲ + ۱۳\alpha = (\alpha - ۲)^۳ + (\alpha - ۲) + ۱۰$$

حال برای راحتی کار تعریف می‌کنیم $x = \alpha - ۲$ و $y = \beta - ۲$. در نتیجه از دو رابطهٔ ذکر شده در صورت مسئله به‌دست می‌آوریم که:

$$x^۳ + x = -۹ \ , \ y^۳ + y = ۹$$

حال دو رابطهٔ بالا را با هم جمع می‌کنیم:

$$(x + y)(x^۲ + y^۲ - xy + ۱) = ۰ \qquad (*)$$

MATH75.IR

از مبحث نامساوی‌ها می‌دانیم که به ازای هر x و y حقیقی داریم $x^۲ + y^۲ - xy \geq ۰$، در نتیجه $۰ < ۱ \leq x^۲ + y^۲ - xy + ۱$، از این‌رو از رابطهٔ (*) نتیجه می‌گیریم که $x + y = ۰$.

بنابراین گزینهٔ (ب) صحیح است.

۶. فرض کنید $f(x) = ax^۲ + bx + c$ و به‌ازای $۰ \leq x \leq ۱$ داشته باشیم $|f(x)| \leq ۱$، در این‌صورت ماکزیمم مقدار $۲a + b$ چه می‌تواند باشد؟

الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۹ ه) ۱۰

حل: در اینجا باید $۲a + b$ را برحسب تنها معلوم مسئله یعنی f بدست آوریم. برای این کار $f(۰)$ و $f\left(\frac{۱}{۲}\right)$ و $f(۱)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(۰) = c \ , \ f\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{a}{۴} + \frac{b}{۲} + c \ , \ f(۱) = a + b + c$$

دستگاه سه معادله و سه مجهول بالا را برحسب c, b, a در نظر بگیرید. می‌توان a و b را از دستگاه بالا به‌دست آورد و در $۲a + b$ جایگزین نمود.

$$۲a + b = f(۰) - ۴f\left(\frac{۱}{۲}\right) + ۳f(۱)$$

حال از نامساوی مثلث استفاده می‌کنیم. برای یادآوری صورت این نامساوی را دوباره ذکر می‌کنیم:

$$|x_۱| + |x_۲| + \cdots + |x_n| \geq |x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n| \quad , \quad x_i \in R \quad i = ۱, ۲, \ldots, n$$

از این رو داریم:

$$۲a + b \leq |f(۰)| + ۴|f\left(\frac{۱}{۲}\right)| + ۳|f(۱)| = ۱ + ۴ + ۳ = ۸$$

در نتیجه ماکزیمم $۲a + b$ برابر ۸ است و این مقدار اکسترمم زمانی رخ می‌دهد که

$$f(۰) = ۱ \ , \ f(\frac{۱}{۲}) = -۱ \ , \ f(۱) = ۱ \qquad (*)$$

یعنی $f(x) = ۸x^۲ - ۸x + ۱$.

بنابراین گزینهٔ (ج) درست است.

نکته: در حل مسئله وقتی به روابط (*) رسیدید دیگر لازم نیست که بازبینی کنید که آیا چنین $f(x)$ ای وجود دارد یا نه، چرا که $f(x)$ یک سهمی است و هر سهمی با داشتن مقدار سه نقطهٔ متمایزش به‌طور یکتا مشخص می‌شود (اگر این سه نقطهٔ متمایز روی یک خط باشند ضریب $x^۲$ برابر صفر شده و سهمی به خط تقلیل می‌یابد).

۷. مجموع تمام اعداد مثبت x را بیابید به‌طوری که عبارت $\sqrt[۳]{۲ - x} + \sqrt[۳]{۲ + x}$ به ازای آنها عددی صحیح شود.

الف) $\sqrt{۲}$ ب) $\sqrt[۳]{۴}$ ج) $\sqrt{۵}$ د) $\sqrt{۵}\left(۱ + \frac{۲\sqrt{۵}}{۳\sqrt{۳}}\right)$

ه) $\frac{\sqrt{۵}(\sqrt{۳} + \sqrt{۲} + ۱)}{\sqrt{۳}}$

MATH75.IR

حل: به ازای هر y, x حقیقی و n طبیعی داریم که

$$x^{n-1}y + xy^{n-1} \le x^n + y^n$$

به ازای $n = 3$، رابطهٔ بالا به‌صورت زیر تحویل می‌یابد:

$$(x+y)^3 \le 4\left(x^3 + y^3\right) \quad \text{و یا} \quad x^2y + xy^2 \le x^3 + y^3$$

از این رو داریم:

$$\left(\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{2-x}\right)^3 \le 4(2 + x + 2 - x) = 16 \qquad (1)$$

x عددی مثبت است در نتیجه

$$\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{2-x} > 0 \qquad (2)$$

از دو رابطهٔ (۱) و (۲) به‌دست می‌آوریم که

$$0 < S = \sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{2-x} \le 2\sqrt[3]{2} < 3$$

S عددی صحیح بین ۰ و ۳ است در نتیجه S می‌تواند برابر ۱ یا ۲ باشد:

i) $S = 1$. بنابراین داریم $\sqrt[3]{2+x} = 1 - \sqrt[3]{2-x}$

تعریف می‌کنیم $t = \sqrt[3]{2-x}$. حال طرفین رابطهٔ بالا را به توان سه می‌رسانیم:

$$t^2 - t - 1 = 0$$

معادله بالا دارای دو ریشهٔ $t_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $t_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است. به ازای t_2، x منفی به‌دست می‌آید بنابراین به ازای $S - 1$، فقط t_1 در شرایط مسئله صدق می‌کند:

$$t_1^2 - t_1 - 1 = 0 \implies t_1^3 = t_1^2 + t_1 = (t_1 + 1) + t_1 = 2t_1 + 1 = 2 - \sqrt{5}$$

بنابراین

$$\sqrt[3]{2 - x_1} = t_1 \implies 2 - x_1 = t_1^3 = 2 - \sqrt{5} \implies x_1 = \sqrt{5}$$

ii) $S = 2$. بنابراین داریم:

$$\sqrt[3]{2+x} = 2 - \sqrt[3]{2-x}$$

تعریف می‌کنیم $t = \sqrt[3]{2-x}$. حال طرفین رابطهٔ بالا را به توان سه می‌رسانیم:

$$t^2 - 2t - \frac{2}{3} = 0$$

MATH75.IR

معادله بالا دارای دو ریشهٔ t_2, t_3 است به‌طوری که

$$t_2 + t_3 = 2 \ , \ t_2 t_3 = \frac{2}{3}$$

از طرفی داریم

$$\sqrt[3]{2 - x_2} = t_2 \ , \ \sqrt[3]{2 - x_3} = t_3$$

بنابراین

$$x_2 + x_3 = 4 - t_2^3 - t_3^3 = 4 - (t_3 + t_2)^3 + 3t_2 t_3 (t_2 + t_3) = 0$$

در نتیجه

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 + \sqrt{5} = \sqrt{5}$$

از این رو گزینهٔ (ج) درست است.

۸. فرض کنید $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$، در این‌صورت مقدار عبارت زیر را به‌دست آورید:

$$S = f\left(\frac{1}{14}\right) + f\left(\frac{2}{14}\right) + \cdots + f\left(\frac{13}{14}\right)$$

الف) ۷ ب) ۸/۵ ج) ۶/۵ د) ۴/۵ ه) ۵/۵

حل:

$$f(1 - x) = \frac{4^{1-x}}{4^{1-x} + 2} = \frac{4}{4 + 2 \times 4^x} = \frac{2}{2 + 4^x}$$

در نتیجه

$$f(x) + f(1 - x) = \frac{4^x}{2 + 4^x} + \frac{2}{2 + 4^x} = 1$$

بنابراین

$$S = \left[f\left(\frac{1}{14}\right) + f\left(\frac{13}{14}\right)\right] + \left[f\left(\frac{2}{14}\right) + f\left(\frac{12}{14}\right)\right] + \cdots$$

$$+ \left[f\left(\frac{6}{14}\right) + f\left(\frac{8}{14}\right)\right] + f\left(\frac{7}{14}\right) = 6 + \frac{4^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}} + 2} = 6/5$$

در نتیجه گزینهٔ (ج) صحیح است.

بهمن ۷۵

۹. فرض کنید a و b و c سه عدد حقیقی باشند که $a \neq 0$. اگر a و $2c + 3b + 4a$ دارای یک علامت باشند، کدامیک از نتیجه‌گیری‌های زیر برای معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$ درست است؟

MATH75.IR

الف) هر دو ریشه در صورت وجود نمی‌توانند در بازهٔ $(۱,۴)$ قرار گیرند.

ب) هر دو ریشه در صورت وجود نمی‌توانند در بازهٔ $(۱,۲)$ قرار گیرند.

ج) معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی است.

د) دو ریشهٔ معادله در صورت وجود دارای علامت‌های متفاوتی هستند.

ه) هر دو ریشهٔ معادله در صورت وجود دارای علامت‌های یکسانی هستند.

حل: فرض کنید $x_۱$ و $x_۲$ دو ریشهٔ معادله مفروض باشد:

$$x_۱ + x_۲ = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_۱ x_۲ = \frac{c}{a}$$

از طرفی برطبق فرض مسئله داریم که:

$$۴ - ۳(x_۱ + x_۲) + ۲x_۱x_۲ \geq ۰ \quad \text{و یا} \quad ۴ + ۳\frac{b}{a} + ۲\frac{c}{a} \geq ۰ \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{۴a + ۳b + ۲c}{a} \geq ۰$$

همچنین

$$\left(x_۱ - \frac{۳}{۲}\right)\left(x_۲ - \frac{۳}{۲}\right) \geq \frac{۱}{۴} \quad \Longleftrightarrow \quad ۲ - \frac{۳}{۲}(x_۱ + x_۲) + x_۱x_۲ \geq ۰ \qquad (*)$$

واضح است که اگر $x_۱$ و $x_۲$ در بازهٔ $(۱,۲)$ قرار گیرند، سپس رابطهٔ $(*)$ نقض می‌شود.

در نتیجه گزینهٔ (ب) صحیح است.

نکته: شاید برای کسانی این ابهام وجود داشته باشد که چرا گزینهٔ الف) صحیح نیست، زیرا گزینهٔ الف) گزینهٔ ب) را نیز شامل می‌شود. ولی دقت شود که به ازای هر $x_۱$ و $x_۲$ ای که در رابطهٔ $(*)$ صدق می‌کند، می‌توان دقیقاً یک c, b, a با شرایط مسئله یافت. به عنوان نمونه برای نقض گزینهٔ الف)، $x_۱$ را برابر ۲ و $x_۲$ را برابر ۳ در نظر بگیرید:

$$\frac{-b}{a} = ۵ \quad , \quad \frac{c}{a} = ۶$$

می‌توان a را هم یک درنظر گرفت. بنابراین داریم $c = ۶$, $b = -۵$.

$$۴a + ۳b + ۲c = ۴ - ۱۵ + ۱۲ = ۱ > ۰ \quad , \quad a = ۱ > ۰$$

چند جمله‌ای مورد نظر برابر است با $x^۲ - ۵x + ۶$.

۱۰. دنباله‌های $a_n = \sqrt{۱۲۳ + n^۲}$ و $b_n = n + ۳$ $(n = ۱, ۲, ۳, \ldots)$ داده شده‌اند. فرض کنید که r کوچکترین عدد صحیحی باشد که $a_r < b_r$ و s نیز بزرگترین عدد صحیحی باشد که $a_s > b_s + ۱$. در این‌صورت $r + s$ برابر است با:

الف) ۳۰ ب) ۳۱ ج) ۳۲ د) ۳۳ ه) ۳۴

MATH75.IR

حل: از رابطهٔ $a_r < b_r$ به دست می‌آوریم که:

$$(r+۳)^۲ > ۱۲۳ + r^۲ \implies r > ۱۹$$

در نتیجه $r = ۲۰$. همچنین رابطهٔ $a_s > b_s + ۱$ معادل است با $۱۲۳ + s^۲ > (s+۳+۱)^۲$، در نتیجه $s = ۱۳$.
بنابراین به‌دست می‌آوریم $r + s = ۳۳$.
از این رو گزینهٔ (ج) صحیح است.

۱۱. اگر $S = \frac{(۲^۳-۱)(۳^۳-۱)(۴^۳-۱)\cdots(۱۰۰^۳-۱)}{(۲^۳+۱)(۳^۳+۱)(۴^۳+۱)\cdots(۱۰۰^۳+۱)}$ کدامیک از مقادیر زیر به S نزدیکتر است؟

الف) ۰/۶ ب) ۰/۶۷ ج) ۰/۶۶۶۷ د) ۰/۶۶۶۷ ه) ۰/۶۶۶۷

حل: ابتدا با استفاده از دو رابطهٔ زیر S را بسط می‌دهیم:

$$x^۳ + y^۳ = (x+y)(x^۲ - xy + y^۲) \quad , \quad x^۳ - y^۳ = (x-y)(x^۲ + xy + y^۲)$$

$$S = \frac{(۲-۱)(۲^۲+۲+۱)(۳-۱)(۳^۳+۳+۱)\cdots(۱۰۰-۱)(۱۰۰^۲+۱۰۰+۱)}{(۲+۱)(۲^۲\quad ۲+۱)(۳+۱)(۳^۲-۳+۱)\cdots(۱۰۰+۱)(۱۰۰^۲-۱۰۰+۱)}$$

حال با استفاده از دو رابطهٔ زیر S را ساده‌تر می‌کنیم:

$$۱)\ (n+۱)-۱ = n \quad , \quad ۲)\ (n+۱)^۲ - (n+۱) + ۱ = n^۲ + n + ۱$$

$$S = \frac{(۲-۱)(۳-۱)(۱۰۰^۲+۱۰۰+۱)}{(۲^۲-۲+۱)(۹۹+۱)(۱۰۰+۱)} = \frac{۱۰۱۰۱}{۱۵۱۵۰} = ۰/۶۶۶۷۳$$

در نتیجه گزینهٔ (د) صحیح است.

۱۲. چندجمله‌ای $P(x) = x^n + a_{n-۱}x^{n-۱} + \cdots + a_۰$ که a_i ها اعداد صحیح هستند، مفروض است. اگر داشته باشیم $P(۱) = P(۲) = ۰$، در آن‌صورت دقیق‌ترین حکمی که در مورد ضرایب $P(x)$ می‌توان بیان کرد کدام است؟

الف) ضریب جملهٔ ثابت (یعنی $a_۰$) کوچکترین یا مساوی ۲ است.

ب) اختلاف بین تعداد ضرایب مثبت و ضرایب منفی حداکثر ۱ است.

ج) مجموع ضرایب توان‌ها فرد قرینهٔ مجموع ضرایب توان‌های زوج است.

د) حداقل یک ضریب کوچکتر یا مساوی ۲− وجود دارد.

ه) هیچ کدام از حکم‌های بالا در مورد تمامی $P(x)$ ها صدق نمی‌کند.

حل: ۲ ریشه‌ای از $P(x)$ است، از این رو برطبق قضیهٔ بزو داریم $P(x) = (x-۲)Q(x)$، که در آن $Q(x)$ عبارت است از:

$$Q(x) = b_{n-۱}x^{n-۱} + b_{n-۲}x^{n-۲} + \cdots + b_۱x^۱ + b_۰$$

از این‌رو داریم:

$$P(x) = (b_{n-۱})x^n + (b_{n-۲} - ۲b_{n-۱})x^{n-۱} + (b_{n-۳} - ۲b_{n-۲})x^{n-۲} + \cdots$$
$$+(b_۱ - ۲b_۲)x^۲ + (b_۰ - ۲b_۱)x^۱ + (-۲b_۰)$$

MATH75.IR

$P(x)$ یک چندجمله‌ای است ولی به دو شکل متفاوت نوشته شده است، درنتیجه ضرایب متناظر باید با هم برابر باشند یعنی:

$$b_{n-1} = a_n \quad , \quad b_i - 2b_{i+1} = a_{i+1} \quad i = 0, 1, \ldots, n-2 \quad , \quad -2b_0 = a_0$$

a_n عددی صحیح است در نتیجه b_{n-1} نیز عددی صحیح است. a_{n-1} و b_{n-1} اعداد صحیحی هستند در نتیجه b_{n-2} نیز عددی صحیح است $(b_{n-2} - 2b_{n-1} = a_{n-1})$. به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که تمامی b_i ها اعداد صحیحی هستند، از طرفی بر طبق مسئله داریم $Q(1) = 0$ یا $b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1} = 0$. واضح است که همهٔ b_i ها نمی‌توانند هم علامت باشند در نتیجه لااقل یکی از آنها مثبت و یا معادلاً بزرگتر از و یا مساوی با ۱ است. اگر $b_0 \geq 1$ سپس $a_0 \leq -2$، و اگر $b_0 < 1$ سپس کوچکترین i طبیعی را در نظر بگیرید که:

$$b_j \leq 0 \quad j = 1, 2, \ldots, i-1 \quad , \quad b_i \geq 1$$

در این‌صورت داریم:

$$a_i = b_{i-1} - 2b_i \quad \leq -2$$

در نتیجه لااقل یکی از ضرایب $P(x)$ کوچکتر و یا مساوی با ۲- است.

از این رو گزینهٔ (د) صحیح است.

۱۳. فرض کنید f و g دو چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی و با درجهٔ بزرگتر یا مساوی ۲ باشد. اگر داشته باشیم:

$$f(x^2) = f\left(x - \frac{1}{2}\right) g\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

در این‌صورت از بین نتیجه‌گیریهای زیر کدامیک دقیق‌تر است؟

الف) به ازای هر $n \geq 2$ چنین چند جمله‌ای‌هایی وجود دارند به‌طوری که f از درجه n است.

ب) چنین چند جمله‌ای‌هایی وجود ندارد. ج) $f(x)$ ریشه‌ای در $(0, \frac{1}{2})$ دارد.

د) $g(x)$ ریشه‌ای در $(0, \frac{1}{2})$ دارد. ه) $g(x)$ برای هر x بزرگتر از صفر است.

حل: فرض کنید α یک ریشهٔ حقیقی f باشد. دنبالهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \quad : \quad x_0 = \alpha \ , \ x_n = \left(x_{n-1} + \frac{1}{2}\right)^2 \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

واضح است که این دنباله اکیداً صعودی است چرا که $(x \in \mathbf{R})$ $x^2 > x - \frac{1}{2}$. از طرفی به راحتی با استقرا می‌توان ثابت کرد که $f(x_n) = 0$ ، زیرا اگر $f(x_{n-1}) = 0$ باشد سپس

$$f(x_n) = f\left(\left(x_{n-1} + \frac{1}{2}\right)^2\right) = f(x_{n-1}) g(x_{n-1} + 1) = 0$$

MATH75.IR

$f(x)$ یک چند جمله‌ای از درجهٔ متناهی است ولی دارای بینهایت ریشهٔ x_n است در نتیجه یا باید متحد با صفر باشد که بر طبق فرض مسئله از آنجا که درجهٔ f از ۱ بیشتر است امکان ندارد و یا فرض اولیه ما اشتباه بوده است. از این دو حالت، حالت اول را رد کردیم بنابراین فقط حالت دوم باقی می‌ماند یعنی f ریشهٔ حقیقی ندارد و همواره مثبت یا همواره منفی است. بنابراین g نیز باید همواره مثبت باشد.

در نتیجه گزینهٔ (ه) صحیح است.

۱۴. در مورد تعداد دنباله‌های $n_۱, n_۲, n_۳, \ldots$ از اعداد طبیعی با این خاصیت که برای هر k داشته باشیم $n_{k+۱} > n_{n_k}$ چه می‌توان گفت؟

الف) بینهایت دنباله با این خاصیت وجود دارد.
ب) تعداد زوجی از این دنباله‌ها وجود دارد.
ج) دقیقاً ۵ دنباله با این خاصیت وجود دارد.
د) دقیقاً ۳ دنباله با این خاصیت وجود دارد.
ه) دقیقاً ۱ دنباله با این خاصیت وجود دارد.

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم که دنبالهٔ مفروض اکیداً صعودی است. فرض کنید $\alpha = n_k$ مینیمم عضو دنبالهٔ $\{n_k\}_{k=۱}^{\infty}$ باشد. ادعا می‌کنیم که $k = ۱$ و یا $\alpha = n_۱$. چرا که با فرض $k \geq ۲$ به‌دست می‌آوریم $n_{n_{k-۱}} < \alpha = n_k$. این رابطه تناقض است به دلیل اینکه n_k مینیمم عضو دنباله است ولی $n_{n_{k-۱}}$ از n_k کمتر شده است، در نتیجه n_k نمی‌تواند مینیمم باشد، بنابراین باید $n_۱$ مینیمم عضو دنباله باشد. حال $n_۱$ را از دنبالهٔ مفروض حذف می‌کنیم. دنبالهٔ به‌دست آمده $(\ldots, n_۴, n_۳, n_۲)$ باز هم در شرایط مسئله صدق می‌کند پس دوباره بدست می‌آوریم که $n_۲$ مینیمم عضو دنبالهٔ جدید است. اگر این رویه را ادامه دهیم بدست می‌آوریم که دنباله $\{n_k\}_{k=۱}^{\infty}$ اکیداً صعودی است. می‌دانیم برای دنبالهٔ اکیداً صعودی اگر $n_\alpha > n_\beta$ باشد سپس باید رابطهٔ $\alpha > \beta$ نیز برقرار باشد. از این رو داریم:

$$n_{k+۱} > n_{n_k} \implies k + ۱ > n_k \qquad (۱)$$

از طرفی برای دنبالهٔ اکیداً صعودی از اعداد طبیعی داریم که $n_k \geq k$ (۲)

از روابط (۱) و (۲) به‌دست می‌آید $n_k = k$ یا $\{n_k\}_{k=۱}^{\infty} = \{k\}_{k=۱}^{\infty}$.

در نتیجه گزینهٔ (ه) صحیح است.

۱۵. در حاصلضرب $\prod_{۱\leq i<j\leq ۹} (x_i - x_j)$ ضریب جملهٔ $x_۱^۴ x_۲^۴ \cdots x_۹^۴$ برابر است با:

الف) صفر
ب) $\binom{۹}{۴}$
ج) $-\binom{۹}{۴}$
د) $\binom{۹}{۳} \times \binom{۹}{۴}$
ه) $-۹ \times \binom{۹}{۳} \times \binom{۹}{۲}$

حل: فرض کنید ضریب جملهٔ مفروض برابر A باشد:

$$\prod_{۱\leq i<j\leq ۹} (x_i - x_j) = A x_۱^۴ x_۲^۴ \cdots x_۹^۴ + \cdots \qquad (۱)$$

در رابطهٔ بالا به جای زوج مرتب $(x_۱, x_۲, x_۳, \cdots, x_۹)$، زوج مرتب $(x_۲, x_۱, x_۳, \cdots, x_۹)$ را قرار می‌دهیم یعنی جای $x_۱$ و $x_۲$ را عوض می‌کنیم. در این‌صورت طرف چپ رابطهٔ (۱) قرینه می‌شود. پر واضح است که با تغییر جای

MATH75.IR

$x_۱$ و $x_۲$، $x_۱^۴x_۲^۴\cdots x_۹^۴$ تغییر نمی‌کند:

$$-\prod_{۱\times\le i<j\le\times۹}(x_i-x_j)=Ax_۱^۴x_۲^۴\cdots x_۹^۴+\cdots \qquad (۲)$$

$$(۱)\ ,\ (۲) \quad\Longrightarrow\quad Ax_۱^۴x_۲^۴\cdots x_۹^۴+\cdots=(-A)x_۱^۴x_۲^۴\cdots x_۹^۴+\cdots$$

رابطهٔ بالا می‌گوید که دو جمله‌ای ۹ متغیره همواره با هم برابر هستند، در نتیجه باید ضرایب متناظر آنها نیز با هم برابر باشند، بنابراین $A=-A$ و یا $A=۰$.

بنابراین گزینهٔ (الف) درست است.

نکته: روش حل بالا نتیجه می‌دهد که ضریب هر جمله از حاصلضرب بالا که دارای دو توان برابر باشد برابر صفر است.

بهمن ۷۶

۱۶. فرض کنید که معادلهٔ $x^۲+ax+b=۰$ دو جواب صحیح داشته باشد. عبارتهای زیر را در نظر بگیرید:

الف) اگر هر دو جواب فرد باشد آنگاه a وb فرد است.

ب) اگر هر دو جواب فرد باشد آنگاه a زوج و b فرد است.

ج) اگر هر دو جواب فرد باشد آنگاه a فرد و b زوج است.

د) اگر یک جواب زوج و دیگری فرد باشد آنگاه a فرد و b زوج است.

ه) اگر یک جواب زوج و دیگری فرد باشد آنگاه a زوج و b فرد است.

و) اگر یک جواب زوج و دیگری فرد باشد آنگاه a و b فرد است.

کدامیک از عبارتهای فوق درست است؟

الف) ۱و۴ ب) ۲و۴ ج) ۱و۵ د) ۳و۵ ه) ۲و۶

حل: فرض کنید $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ بالا باشند. از این‌رو داریم:

$$x_۱+x_۲=-a \quad , \quad x_۱x_۲=b$$

حال اگر $x_۱$ و $x_۲$ هر دو فرد باشند، جمع آنها باید زوج و ضرب آنها باید فرد باشد یعنی بایدa زوج و b فرد باشد. اگر $x_۱$ فرد و $x_۲$ زوج باشد به همین ترتیب به‌دست می‌آید که بایدa فرد و b زوج باشد.

در نتیجه گزینهٔ (ب) صحیح است.

۱۷. چند تابع $f:\mathbf{N}\cup\{۰\}\to\mathbf{N}\cup\{۰\}$ وجود دارد که برای هر $n\in\mathbf{N}\cup\{۰\}$ داشته باشیم: $f(n)+f(n)=۲n+۳$ ؟

MATH75.IR

الف) صفر ب) یک ج) دو د) سه ه) بینهایت

حل: فرض کنید دو m, n متعلق به دامنهٔ f موجود باشند به‌طوری که $f(n) = f(m)$، در نتیجه

$$۲n + ۳ = ff(n) + f(n) = ff(m) + f(m) = ۲m + ۳$$

از رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود که $n = m$، یعنی f تابعی یک به یک است.

$$ff(۰) + f(۰) = ۲ \times ۰ + ۳ = ۳ \qquad (*)$$

از رابطهٔ $(*)$ نتیجه می‌شود که $f(۰)$ باید یکی از اعداد ۰، ۱، ۲، ۳ باشد.

۱. $f(۰) = ۰$. در نتیجه به‌دست می‌آوریم که $۳ = ff(۰) + f(۰) = f(۰) + ۰ = ۰$، که تناقض است.

۲. $f(۰) = ۲$.

$$۳ = ff(۰) + f(۰) = f(۲) + ۲ \quad \Longrightarrow \quad f(۲) = ۱$$
$$۷ = ۲ \times ۲ + ۳ = ff(۲) + f(۲) = f(۱) + ۱ \quad \Longrightarrow \quad f(۱) = ۶$$
$$۵ = ۲ \times ۱ + ۳ = ff(۱) + f(۱) = f(۶) + ۶ \geq ۶$$

این رابطه نیز تناقض است.

۳. $f(۰) = ۳$

$$۳ = ff(۰) + f(۰) = f(۳) + ۳ \quad \Longrightarrow \quad f(۳) = ۰$$
$$۹ = ۲ \times ۳ + ۳ = ff(۳) + f(۳) = f(۰) + ۰ = ۳$$

که تناقض است.

از این رو باید داشته باشیم $f(۰) = ۱$. حال با استقراء ثابت می‌کنیم که $f(n) = n + ۱$. فرض کنید این رابطه به ازای n درست باشد، برای $n + ۱$ داریم که:

$$۲n + ۳ = ff(n) + f(n) = f(n + ۱) + n + ۱ \quad \Longrightarrow \quad f(n + ۱) = n + ۲$$

در نتیجه گزینهٔ (ب) صحیح است.

۱۸. تابع $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) به ازای هر $x, y \in \mathbf{N}$ داریم: $f(xy) = f(x) + f(y) - ۱$

۲) فقط به ازای تعداد متناهی x داریم: $f(x) = ۱$

۳) $f(۳۰) = ۴$

MATH75.IR

مقدار $f(۲)$ چقدر است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵

حل: n ای بزرگتر از ۱ را در نظر بگیرید. ادعا می‌کنیم که $f(n) > ۱$. برای اثبات این ادعا فرض خلف می‌کنیم، یعنی فرض می‌کنیم $f(n) = ۱$.

$$f(n^۲) = f(n) + f(n) - ۱ = ۱$$

به همین ترتیب به‌دست می‌آید که به ازای $\ldots, n^۸, n^۴, n^۲$ مقدار f برابر ۱ می‌شود یعنی f نامتناهی بار مقدار ۱ را می‌گیرد که خلاف فرض مسئله است در نتیجه $f(n) \geq ۲$.

از طرفی داریم:

$$۴ = f(۳۰) = f(۲) + f(۱۵) - ۱ = f(۲) + f(۳) + f(۵) - ۲$$

و یا $f(۲) + f(۳) + f(۵) = ۶$. همچنین در بالا ثابت کردیم که $f(۲), (۳), f(۵) \geq ۲$، در نتیجه $f(۲) = ۲$.

از این رو گزینهٔ (ب) صحیح است.

نکته: به راحتی می‌توان ثابت کرد تمامی f هایی که در مسئله بالا صدق می‌کنند عبارتند از:

$$f(p_۱^{\alpha_۱} p_۲^{\alpha_۲} \cdots p_k^{\alpha_k}) = \alpha_۱ f(p_۱) + \alpha_۲ f(p_۲) + \cdots + \alpha_k f(p_k) - (\alpha_۱ \cdots + \alpha_k) + ۱$$

[p_i ها اعداد اول هستند.] که در آن $f(۲) = f(۳) = f(۵) = ۲$ و همچنین مقدار f برای هر عدد اول دیگر، هر مقدار دلخواه بزرگتر از یک می‌تواند باشد.

۱۹. معادلهٔ $\frac{\overbrace{۱ + ۱ \cdots + ۱}^{۱۳۷۶}}{a_۱ + a_۲ + \cdots + a_{۱۳۷۶}} = \frac{۱}{a_۱} + \frac{۱}{a_۲} + \cdots + \frac{۱}{a_{۱۳۷۶}}$ که در آن

$$۱ = a_۱ \leq a_۲ \leq \cdots \leq a_{۱۳۷۶}$$

روی اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) 1376! د) بینهایت ه) $۲ \times (۱۳۷۶)!$

حل: فرض کنید معادلهٔ بالا دارای یک جواب $a_۱, a_۲ \cdots, a_{۱۳۷۶}$ باشد. بر طبق نامساوی کوشی داریم:

$$۱۳۷۶ = (a_۱ + a_۲ + \cdots + a_{۱۳۷۶}) \left(\frac{۱}{a_۱} + \frac{۱}{a_۲} + \cdots + \frac{۱}{a_{۱۳۷۶}} \right) \geq ۱۳۷۶^۲$$

$$\Longrightarrow \quad ۱۳۷۶ \geq ۱۳۷۶^۲$$

رابطهٔ بالا تناقض است. در نتیجه معادلهٔ بالا جواب ندارد.

بنابراین گزینهٔ (الف) صحیح است.

نکته: برای $a, b, c, d > ۰$ داریم:

$$\min \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \right) \leq \frac{a+c}{b+d} \leq \max \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \right)$$

MATH75.IR

در نتیجه به راحتی می‌توان ثابت کرد که

$$\min\left(\frac{۱}{a_۱},\frac{۱}{a_۲},\cdots,\frac{۱}{a_{۱۳۷۶}}\right)\le\frac{۱+۱+\cdots+۱}{a_۱+a_۲+\cdots+a_{۱۳۷۶}}\le\max\left(\frac{۱}{a_۱},\frac{۱}{a_۲},\cdots,\frac{۱}{a_{۱۳۷۶}}\right)$$

بهمن ۷۷

۲۰. دنبالهٔ a_n به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{cases} a_۰=۰ \\ a_{n+۱}=na_n+a_n+n \end{cases}$$

باقیماندهٔ تقسیم $a_{۱۰۱}$ بر ۱۰۲ چند است؟

الف) صفر ب) ۱ ج) ۹۹ د) ۱۰۰ ه) ۱۰۱

حل: واضح است که عدد ۱− یک جواب خصوصی معادلهٔ بازگشتی بالا است (زیرا $n+۱-n=-(-۱)$)، بنابراین دنبالهٔ $\{b_n\}_{n=۰}^{\infty}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$b_i=a_i+۱ \qquad i=۱,۲,\ldots$$

از این رو از معادلهٔ بازگشتی بالا به‌دست می‌آوریم که $b_{n+۱}=(n+۱)b_n$. اگر این رابطه را به ازای $n-۱,\ldots,۲,۱,۰$ بنویسیم و سپس در یکدیگر ضرب کنیم، به‌دست می‌آوریم که $b_n=n\times(n-۱)\times\cdots\times۲\times۱\times b_۰$ و یا $b_n=n!$. در نتیجه $a_n=n!-۱$، بنابراین $a_{۱۰۱}=۱۰۱!-۱$.

$$۱۰۱\overset{۱۰۲}{\equiv}-۱\quad\Longrightarrow\quad a_{۱۰۱}\overset{۱۰۲}{\equiv}۱۰۱!\overset{۱۰۲}{\equiv}۰$$

بنابراین گزینهٔ (ه) صحیح است.

۲۱. اگر a,b,c,d,e یک ترتیب دلخواه از اعداد $۱,۲,۳,۴,۵$ باشد، در این‌صورت حداکثر مقدار عبارت $S=ab+bc+cd+de+ea$ به ازای ترتیب‌های مختلف چقدر است؟

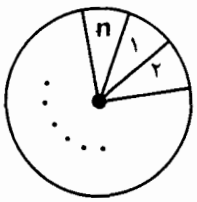
الف) ۴۲ ب) ۴۳ ج) ۴۵ د) ۴۸ ه) ۵۰

حل: برای راحتی کار به جای اعداد e,d,c,b,a به ترتیب اعداد $x_۵,x_۴,x_۳,x_۲,x_۱$ را می‌نویسیم. فرض کنید $S=x_۱x_۲+x_۲x_۳+x_۳x_۴+x_۴x_۵+x_۵x_۱$ حداکثر مقدار ممکن به ازای ترتیب‌های مختلف باشد. در این‌صورت اگر در S جای x_i و $x_{i+۱}$ عوض کنیم (تعریف می‌کنیم $x_۶=x_۱$) عبارتی به‌دست می‌آید که از S بیشتر نمی‌تواند باشد. این مجموع را S' بگیرید.

$$۰\le S-S'=x_ix_{i-۱}+x_{i+۱}x_{i+۲}-x_{i+۱}x_{i-۱}-x_ix_{i+۲}=(x_{i+۱}-x_i)(x_{i+۲}-x_{i-۱}) \qquad (*)$$

MATH75.IR

در نتیجه اگر x_i بزرگتر از x_{i+1} باشد، باید x_{i-1} نیز بزرگتر از x_{i+2} باشد و بالعکس. برای راحتی کار اعداد $x_1, x_2, \ldots, x_5$ را به ترتیب روی یک دایره می‌چینیم. در این‌صورت S برابر مجموع حاصلضربهای هر دو عدد متوالی بر روی دایره است.



بنابراین برای هر ۴ عدد متوالی $x_{i+2}, x_{i+1}, x_i, x_{i-1}$ روی دایره رابطهٔ (*) برقرار است. یکی از x_k ها برابر یک است. از آنجا که x_i ها به‌صورت دوری تعریف شده‌اند (یعنی $x_6 = x_1, x_7 = x_2, \ldots$) می‌توان فرض کرد که $x_1 = 1$. اگر در رابطهٔ (*)، i را برابر ۲ قرار دهیم به‌دست می آید که $x_2 < x_3$ (چرا که $x_4 \neq x_1 = 1$) بنابراین داریم $x_1 < x_2 < x_3$.

اگر چهار عدد متوالی x_2, x_1, x_5, x_4 را روی دایره در نظر بگیریم به‌دست می آوریم که:

$$x_1 < x_5 \quad \Longrightarrow \quad x_2 < x_4$$

بنابراین دو حالت زیر را داریم:

۱. $x_1 < x_2 < x_4 < x_3$. همچنین از رابطهٔ (*) نتیجه می‌گیریم که

$$x_3 > x_4 \quad \Longrightarrow \quad x_2 > x_5$$

بنابراین داریم $x_1 < x_5 < x_2 < x_4 < x_3$ و همچنین می‌دانیم $1 < 2 < 3 < 4 < 5$، در نتیجه

$$x_1 = 1\ ,\ x_5 = 2\ ,\ x_2 = 3\ ,\ x_4 = 4\ ,\ x_3 = 5 \quad \Longrightarrow \quad S = 48$$

۲. $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. همچنین از رابطهٔ (*) نتیجه می‌گیریم که

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad x_5 < x_3 \quad , \quad x_3 < x_4 \quad \Longrightarrow \quad x_2 < x_5$$

بنابراین داریم $x_1 < x_2 < x_5 < x_3 < x_4$، در نتیجه

$$x_1 = 1\ ,\ x_2 = 2\ ,\ x_5 = 3\ ,\ x_3 = 4\ ,\ x_4 = 5 \quad \Longrightarrow \quad S = 48$$

از این رو گزینهٔ (د) صحیح است.

۲۲. $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ تابعی است یک به یک و پوشا و به علاوه می‌دانیم که m بر n بخشپذیر است اگر و فقط اگر $f(m)$ بر $f(n)$ بخشپذیر باشد. کدام گزینه در مورد هر تابع به این شکل درست است؟

MATH75.IR

الف) $f(n)$ بر n بخشپذیر است. ب) اگر p عددی اول باشد آنگاه $f(p) = p$.

ج) برای هر a و b داریم: $f(ab) = f(a)f(b)$ د) $f(n) \leq n^۲$

ه) $f(f(n)) = n$.

حل: f تابعی پوشا است در نتیجه m ای وجود دارد که $f(m) = ۱$. فرض کنید $m \geq ۲$ باشد. عددی اول مثل p با شرط $p > m$ را درنظر بگیرید داریم:

$$۱ = f(m) \mid f(p) \implies m|p$$

ولی p عددی اول است و مقسوم علیهی کوچکتر از خودش مثل m ندارد در نتیجه $m = ۱$ و یا

$$f(۱) = ۱ \quad , \quad \forall m \geq ۲ \ : \ f(m) > ۱ \qquad (۱)$$

عدد اول p را در نظر بگیرید. بر طبق فرض m ای وجود دارد که $f(m) = p$. ادعا می‌کنیم که m عددی اول است زیرا در غیر این‌صورت عددی مثل n وجود دارد که $n|m$ و $۱ < n < m$، از این رو باید داشته باشیم $f(n) \mid f(m) = p$ و یا $f(n)|p$. بر طبق رابطهٔ (۱)، $f(n)$ عددی بزرگتر از یک است بنابراین $f(n)$ نمی‌تواند مقسوم‌علیهی از p باشد مگر اینکه $f(n) = p$. برطبق فرض مسئله f تابعی یک به یک است بنابراین امکان ندارد که $p = f(n) = f(m)$. در نتیجه

$$\forall p \in K \quad : \quad \exists q \in K \quad f(q) = p \qquad (۲)$$

(در بالا $\mathbf{K}$ را مجموعهٔ تمامی اعداد اول گرفته‌ایم.) حال فرض کنید به ازای یک p اول دلخواه $f(p) = m$ باشد ثابت می‌کنیم که m عددی اول است. اگر m عددی اول نباشد، سپس عددی مثل n وجود دارد که $n|m$ و $۱ < n < m$. f تابعی پوشا است در نتیجه l ای وجود دارد که $f(l) = n$. بنابراین داریم:

$$n|m \quad \implies \quad f(l) \mid f(p) \quad \implies \quad l|p$$

بر طبق (۱)، l عددی بزرگتر از یک است و همچنین رابطهٔ بالا می‌گوید که l مقسوم‌علیهی از یک عدد اول است در نتیجه باید داشته باشیم $l = p$. ولی در این‌صورت $n = f(l) = f(p) = m$، که تناقض است. در نتیجه:

$$\forall p \in K \quad : \quad \exists q \in K \quad f(p) = q \qquad (۳)$$

m دلخواهی را در نظر بگیرید. فرض کنید که $m = p_۱^{\alpha_۱} p_۲^{\alpha_۲} \cdots p_k^{\alpha_k}$ و $f(m) = q_۱^{\beta_۱} q_۲^{\beta_۲} \cdots q_{k'}^{\beta k'}$، که در آن p_i ها و همچنین q_i ها اعداد اول متمایزی هستند. از رابطهٔ (۲) نتیجه می‌گیریم که اعداد اول $l_۱, l_۲, \ldots, l_{k'}$ موجودند به‌طوری که $f(l_i) = q_i \quad i = ۱, ۲, \ldots, k'$. بنابراین داریم $f(m) = f(l_۱)^{\beta_۱} f(l_۲)^{\beta_۲} \cdots f(l'_k)^{\beta k'}$.

هر یک از l_i ها مقسوم‌علیهی از m هستند چرا که

$$f(l_i) \mid f(m) \implies l_i|m$$

MATH75.IR

و برعکس هر مقسوم‌علیه از m مثل p_i برابر یکی از l_j ها است زیرا

$$p_i|m \implies f(p_i) \mid f(m)$$

از طرفی بر طبق رابطهٔ (۳) داریم که $f(l_i)$ ها اعداد اولی هستند زیرا l_i ها اعداد اولی هستند. بنابراین j ای وجود دارد که $f(p_i) = f(l_j)$ و یا $p_i = l_j$ [زیرا f تابعی یک به یک است].

از گفته‌های بالا نتیجه می‌گیریم که $l_1, l_2, \ldots, l_{k'}$ جایگشتی از اعداد $p_1, p_2, \ldots, p_k$ است در نتیجه

$$f(m) = f(p_1)^{\lambda_1} f(P_2)^{\lambda_2} \cdots f(p_k)^{\lambda_k} \quad , \quad m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \qquad (۴)$$

که در آن $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ جایگشتی از $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ است.

p اول دلخواهی را در نظر بگیرید. در رابطهٔ (۴)، $m = p^t$ را جایگزین کنید: $f(p^t) = f(p)^{\alpha_t}$

بنابراین اعداد $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ موجودند به طوری که

$$f\left(p^i\right) = f(p)^{\alpha_i} = q^{\alpha_i} \qquad i = 1, 2, \ldots$$

(در رابطهٔ بالا $f(p)$ را برابر عدد اول q در نظر گرفته‌ایم.) از طرفی داریم $p^1 \mid p^2 \mid p^3 \mid \cdots$، در نتیجه:

$$f\left(p^1\right) \mid f\left(p^2\right) \mid f\left(p^3\right) \mid \cdots \implies \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots < \alpha_n < \cdots$$

f تابعی پوشا است بنابراین $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ باید تمامی اعداد طبیعی $1, 2, 3, \ldots$ را بدهند (زیرا f باید تمام اعداد $q^1, q^2, q^3, \ldots$ را در بردش داشته باشد). از طرفی می‌دانیم $\cdots < 3 < 2 < 1$، در نتیجه باید داشته باشیم:

$$\alpha_1 = 1 \ , \ \alpha_2 = 2 \ , \ \alpha_3 = 3 \ , \ \ldots \ , \ \alpha_n = n \ , \ \ldots$$

(رابطهٔ بالا از آنجا نتیجه می‌شود که یک دنباله مثل اعداد طبیعی را نمی‌توان به دو شکل متفاوت به‌صورت صعودی مرتب کرد.) بنابراین به‌دست می‌آوریم که

$$f(p^k) = f(p)^k \qquad k = 1, 2, \ldots$$

از رابطهٔ (۴) نتیجه می‌گیریم که:

$$f(m) = f\left(p_1^{\lambda_1}\right) f\left(p_2^{\lambda_2}\right) \cdots f\left(p_k^{\lambda_k}\right)$$

می‌دانیم که $p_i^{\alpha_i} | m$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ در نتیجه $f(p_i^{\alpha_i}) \mid f(m)$ و یا $f(p_i)^{\alpha_i} \mid f(p_i)^{\lambda_i}$ (زیرا $f(p_i)$ ها اعداد اولی هستند)، از این رو داریم $\alpha_i \leq \lambda_i$. از طرفی می‌دانیم $f(p_i^{\lambda_i}) \mid f(m)$ در نتیجه $p_i^{\lambda_i} | m$ و یا $p_i^{\lambda_i} | p_i^{\alpha_i}$، بنابراین باید

MATH75.IR

داشته باشیم $\lambda_i \leq \alpha_i$. در بالا عکس این نامساوی را به‌دست آوردیم در نتیجه باید هر دو نامساوی به تساوی تبدیل شوند و یا معادلاً $\alpha_i = \lambda_i$. بنابراین

$$f\left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}\right) = f(P_1)^{\alpha_1} f(p_2)^{\alpha_2} \cdots f(p_k)^{\alpha_k} \qquad (۵)$$

پر واضح است که شرط (۵) معادل ضربی بودن تابع f است.

از این رو گزینهٔ ج) صحیح است.

نکته: فرض کنید تمامی اعداد اول را به شکل $p_1 < p_2 < \cdots < p_n < \ldots$ مرتب کرده‌ایم و همچنین $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ یک جایگشت از اعداد اول $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ است. تعریف می‌کنیم

$$f(p_i) = q_i \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

حال f تمامی اعداد طبیعی را بااستفاده از $f(p_i)$ ها و رابطهٔ (۵) به‌دست می‌آوریم . پرواضح است که این f در شرایط مسئله صدق می‌کند و بالعکس هر f ای که در شرایط مسئله صدق کند حتماً به‌صورت بالا است.

در نتیجه از این طریق می‌توان گزینه‌های دیگر مسئله را رد کرد.

۲۳. می‌خواهیم ۱۰ عدد سکه را طوری در یک ردیف قرار دهیم که هیچ دو سکه مجاوری به رو نباشد. به چند طریق این کار امکان پذیر است؟

الف) ۱۰۰ ب) ۱۲۱ ج) ۱۴۴ د) ۲۴۳ ه) ۲۵۶

حل: دنبالهٔ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ را در نظر بگیرید که در آن a_n برابر است با تعداد راههایی که می‌توان n سکه را در یک ردیف قرار داد به‌طوری که هیچ دو سکهٔ مجاوری به رو نباشد. فرض کنید می‌خواهیم $n+1$ سکه را در یک ردیف قرار دهیم به طوری که هیچ دو سکهٔ مجاوری به رو نباشد. اگر سکهٔ $n+1$ ام را به پشت قرار دهیم سپس سکهٔ n ام هم پشت و هم رو می‌تواند باشد، در نتیجه باید n سکه باقیماندهٔ $1, 2, \ldots, n$ را طوری در یک ردیف قرار دهیم که هیچ دو سکه مجاوری به رو نباشند. این کار را به a_n طریق می‌توان انجام داد. اگر سکهٔ $n+1$ ام به رو باشد، سپس سکهٔ n ام باید به پشت باشد و برای سکهٔ $n-1$ هم فرقی ندارد که به رو و یا به پشت باشد، در نتیجه باید $n-1$ سکه باقیماندهٔ $1, 2, \ldots, n-1$ را طوری در یک ردیف قرار دهیم که هیچ دو سکه مجاوری به رو نباشند. این کار را به a_{n-1} طریق می‌توان انجام داد. از این رو داریم:

$$a_1 = 2 \quad , \quad a_2 = 3 \quad , \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad n \geq 2$$

با استفاده از رابطهٔ بازگشتی بالا مقدار a_{10} برابر ۱۴۴ به‌دست می‌آید.

از این رو گزینهٔ (ج) صحیح است.

MATH75.IR

پرسش‌های تشریحی

بهمن ٦٦

۱. همهٔ چندجمله‌ایهای $P(x)$ را طوری تعیین کنید که اتحاد زیر برقرار باشد:

$$xP(x-۱) = (x-۱۲)P(x) \qquad (*)$$

حل: دررابطهٔ $(*)$، $x = ۰$ را جایگزین می‌کنیم: $۰ \times P(-۱) = (-۱۲) \times P(۰)$

در نتیجه باید داشته باشیم $P(۰) = ۰$.

حال در رابطهٔ $(*)$، $x = ۱$ را جایگزین می‌کنیم:

$$۱ \times P(۰) = (-۱۱) \times P(۱)$$

در نتیجه باید داشته باشیم $P(۱) = ۰$.

به همین ترتیب اگر به جای x اعداد $۲, ۳, \ldots, ۱۰, ۱۱$ را جایگزین کنیم به‌دست می‌آید که

$$P(۲) = P(۳) = \cdots = P(۱۰) = P(۱۱) = ۰$$

(دقت شود که اگر $x = ۱۲$ را در رابطهٔ $(*)$ جایگزین کنیم هیچ نتیجهٔ اضافی‌ای حاصل نمی‌شود.)

$۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۱$ ریشه‌هایی از $P(x)$ هستند، در نتیجه بر طبق قضیه چندجمله‌ای $Q(x)$ موجود است به‌طوری که:

$$P(x) = x(x-۱)(x-۲)\cdots(x-۱۱)Q(x)$$

حال اگر این $P(x)$ را در رابطهٔ $(*)$ جایگزین کنیم به دست می‌آید که

$$Q(x) = Q(x-۱) \qquad (**)$$

ادعا می‌کنیم که $Q(x)$ عددی ثابت است چرا که در غیر این صورت دارای لااقل یک ریشهٔ مختلط α است. اگر α را در رابطهٔ $(**)$ جایگزین می‌کنیم به‌دست می‌آید که $\alpha - ۱$ هم ریشه‌ای از $Q(x)$ است. حال اگر $\alpha - ۱$ را در رابطهٔ

MATH75.IR

(**) جایگزین کنیم به‌دست می‌آید که $\alpha - ۲$ هم ریشه‌ای از $a(x)$ است. به همین ترتیب به‌دست می‌آید که $Q(x)$ دارای نامتناهی ریشهٔ $\alpha, \alpha - ۱, \alpha - ۲, \ldots$ است که تناقض است. فرض کنید $Q(x) = c$، در نتیجه:

$$P(x) = c\, x(x-۱)(x-۲)\cdots(x-۱۰)(x-۱۱)$$

۲. اعداد صحیح و مثبت $a_n, \ldots, a_۲, a_۱, n$ را طوری تعیین کنید که

$$a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n = ۱۳۶۶$$

و حاصلضرب $a_۱ a_۲ \cdots a_n$ ماکزیمم باشد.

حل: فرض کنید $a_n, \ldots a_۲, a_۱$ اعدادی با مجموع ۱۳۶۶ و حاصلضرب ماکزیمم باشد. فرض کنید a یکی از این n عدد باشد. ادعا می‌کنیم a نمی‌تواند بزرگتر از ۴ باشد. زیرا در این‌صورت داریم $a < ۲(a-۲)$ ، حال کافی است a را از n عدد بالا حذف کنیم و به جای آن دو عدد ۲ و $a-۲$ را قرار دهیم. مجموع این $n+۱$ عدد باز هم ۱۳۶۶ است ولی حاصلضرب این اعداد از مقدار ماکزیمم بیشتر است که تناقض است. بنابراین هر a_i کوچکتر ویا مساوی ۴ است. اگر a_i ای برابر ۴ بود آنرا حذف کرده و به جای آن دو عدد ۲,۲ را قرار می‌دهیم. واضح است که این عمل در حاصلضرب و حاصلجمع اعداد تغییری حاصل نمی‌کند. هیچ a_i ای برابر ۱ نیست زیرا در غیر این صورت، اگر $a_i = ۱$ باشد می‌توان a_i را حذف کرد و به جای $a_{i+۱}$ عدد $a_{i+۱} + ۱$ قرار داد. در این‌صورت حاصلضرب این $n-۱$ عدد جدید از ماکزیمم بیشتر می‌شود که خلاف فرض است.

در نتیجه هر a_i فقط می‌تواند ۲ یا ۳ باشد. فرض کنید در بین این n عدد، لااقل سه تا عدد ۲ باشد. حال اگر این سه عدد را حذف کنیم و به جای آن، دو تا عدد ۳ را قرار دهیم به حاصلضرب بیشتر از مقدار ماکزیمم می‌رسیم که ممکن نیست چرا که

$$۲+۲+۲ = ۳+۳ \ , \ ۳\times۳ > ۲\times۲\times۲$$

از این‌رو در بین a_i ها حداکثر دو تا عدد ۲ موجود است و بقیه برابر عدد ۳ هستند. اگر همه a_i ها برابر ۳ باشند، مجموع آنها برابر ۱۳۶۶ نمی‌شود. اگر همهٔ a_i ها به جز یکی برابر ۳ باشند و دیگری برابر ۲ باشد باز هم مجموع آنها برابر ۱۳۶۶ نمی‌شود (زیرا باقیمانده ۱۳۶۶ بر ۳ برابر یک است). در نتیجه از بین a_i ها، باید دو تا برابر ۲ و بقیه برابر ۳ باشند.

$$۳+۳+\cdots+۳+۲+۲ = ۱۳۶۶ \ , \ ۳\times۳\times\cdots\times۳\times۳\times۲\times۲ = ۳^{۴۵۴}\times۴$$

اردیبهشت ۶۷

۳. تابع پیوسته $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ را چنان تعیین کنید که به ازای هر $x, y \in \mathbf{R}$ داشته باشیم:

$$f(x^۲ - y^۲) = f(x)^۲ - f(y)^۲ \qquad (*)$$

MATH75.IR

حل: در رابطهٔ $(*)$ به جای (x,y)، زوج $(۰,۰)$ را قرار می‌دهیم:

$$f(۰)=f(۰)-f(۰) \quad \Longrightarrow \quad f(۰)=۰$$

حال زوج $(x,۰)$ را قرار می‌دهیم:

$$f(x^۲)=f(x^۲-۰)=f(x)^۲-f(۰)^۲=f(x)^۲$$

از این‌رو داریم:

$$f(x^۲-y^۲)=f(x)^۲-f(y)^۲=f(x^۲)-f(y^۲)$$

زوج $(۰,y)$ را در $(*)$ جایگزین می‌کنیم:

$$f(-y^۲)=f(۰-y^۲)=f(۰)-f(y^۲)=-f(y^۲)$$

دو عدد دلخواه α,β را در نظر بگیرید. ادعا می‌کنیم که

$$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta) \qquad (**)$$

برای α,β حالات زیر می‌تواند اتفاق بیفتد:

۱. یکی منفی و دیگری مثبت باشد. با استفاده از تقارن می‌توان فرض کرد که $\alpha\geq ۰$ و $\beta\leq ۰$. در نتیجه اعداد x و y وجود دارند به‌طوری که: $\alpha=x^۲$ و $\beta=-y^۲$.

$$f(\alpha+\beta)=f(x^۲-y^۲)=f(x^۲)-f(y^۲)=f(x^۲)+f(-y^۲)=f(\alpha)+f(\beta)$$

۲. هر دو مثبت باشند. در نتیجه داریم $\alpha+\beta\geq ۰$. بنابراین اعداد x و y وجود دارند به‌طوری که $\alpha+\beta=x^۲$ و $\beta=y^۲$.

$$f(\alpha)=f(x^۲-y^۲)=f(x^۲)-f(y^۲)=f(\alpha+\beta)-f(\beta)$$

$$\Longrightarrow \quad f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$$

۳. هر دو منفی باشند. در نتیجه x و y وجود دارد به‌طوری که $\alpha=-x^۲, \beta=-y^۲$.

$$f(\alpha)+f(\beta)=f(-x^۲)+f(-y^۲)=-f(x^۲)-f(y^۲)$$

MATH75.IR

در حالت دوم ثابت کردیم که $f(x^۲+y^۲)=f(x^۲)+f(y^۲)$.

از دو رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود که:

$$f(\alpha)+f(\beta)=-f(x^۲+y^۲)=f(-(x^۲+y^۲))=f(\alpha+\beta)$$

با استفاده از ۳ حالت بالا رابطهٔ $(*)$ ثابت می‌شود، یعنی $f(x)$ در معادلهٔ کوشی صدق می‌کند. بر طبق قضیه از آنجا که $f(x)$ تابعی پیوسته است و در معادله کوشی هم صدق می‌کند باید به‌صورت $f(x)=ax$ باشد:

$$f(x^۲)=f(x^۲) \implies a^۲=a \implies a=۰,۱$$

براحتی می‌توان بازبینی نمود که این دو تابع یعنی $f(x)=۰$ و $f(x)=x$ در شرایط مسئله صدق می‌کند.

فروردین ۶۸

۴. ثابت کنید که تابع همانی، تنها پوشا مانند f از $\mathbf{N}$ (مجموعه اعداد طبیعی) به $\mathbf{N}$ است که در شرط $f\left(f(n)+f(m)\right)=n+m \quad (n,m\in\mathbf{N})$ صدق می‌کنند.

حل: f تابعی پوشا است، در نتیجه n ای وجود دارد به‌طوری که $f(n)=۱$. ادعا می‌کنیم $n=۱$. برای اثبات این ادعا، فرض خلف می‌کنیم یعنی $n\geq ۲$. از آنجا که f پوشا است عدد m ای وجود دارد به‌طوری که $f(m)=n-۱$:

$$۱=f(n)=f((n-۱)+۱)=f\left(f(m)+f(n)\right)=m+n\geq ۲$$

رابطهٔ بالا تناقض است. در نتیجه داریم $f(۱)=۱$.

حال با استقراء ثابت می‌کنیم که به ازای هر n، $f(n)=n$ است.

به ازای $n=۱$، حکم در بالا ثابت شد. فرض کنید حکم مسئله به ازای n درست باشد، حال می‌خواهیم به ازای $n+۱$ نیز ثابت کنیم:

$$f(f(n)+f(۱))=n+۱ \ , \ f(n)=n \ , \ f(۱)=۱ \quad \implies \quad f(n+۱)=n+۱$$

بدین ترتیب حکم ثابت می‌شود.

۵. دنباله $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ چنین تعریف شده است:

$$a_n=\begin{cases}\frac{۱}{۲} & \text{اگر } n=۱\\ (\frac{۲n-۳}{۲n})a_{n-۱} & \text{اگر } n>۲\end{cases}$$

MATH75.IR

ثابت کنید به ازای هر $n \geq ۱$ داریم $\sum_{k=۱}^{n} a_k < ۱$.

حل: به ازای هر $n \geq ۲$، فرض مسئله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$a_{n-۱} = (۲n-۲)a_{n-۱} - ۲na_n \qquad (*)$$

حال رابطهٔ $(*)$ را به ازای $n+۱, n, \ldots, ۳, ۲$ نوشته و سپس با هم جمع می‌کنیم:

$$a_۱ = ۲a_۱ - ۴a_۲$$

$$a_۲ = ۴a_۲ - ۶a_۳$$

$$a_۳ = ۶a_۳ - ۸a_۴$$

$$\vdots$$

$$a_{n-۱} = (۲n-۲)a_{n-۱} - ۲na_n$$

$$a_n = (۲n)a_n - (۲n+۲)a_{n+۱}$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=۱}^{n} a_n = ۲a_۱ - (۲n+۲)a_{n+۱} \qquad (۱)$$

از طرفی اگر رابطهٔ $a_n = (\frac{۲n-۳}{۲n})a_{n-۱}$ را برای $n, \ldots, ۳, ۲$ بنویسیم و در یکدیگر ضرب کنیم بدست می‌آید که:

$$a_n = \left[\prod_{k=۲}^{n} \frac{(۲k-۳)}{۲k}\right] \times a_۱ > ۰ \qquad (۲)$$

از دو رابطهٔ (۱) و (۲) بدست می‌آید که:

$$\sum_{k=۱}^{n} a_n = ۲a_۱ - (۲n+۲)a_{n+۱} < ۲a_۱ = ۱$$

آذر ۶۸

۶. نشان دهید اگر a و b و c طول اضلاع یک مثلث باشند، داریم:

$$۳(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^۲ < ۴(ab+bc+ca)$$

حل: طرف چپ رابطهٔ بالا به ازای هر سه عدد حقیقی a, b, c درست است:

$$ab+bc+ca \leq a^۲+b^۲+c^۲ \quad \Longrightarrow \quad ۳(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^۲$$

MATH75.IR

در اثبات طرف راست رابطهٔ بالا، نکتهٔ زیبای زیر وجود دارد:

$$۴(ab+bc+ca)-(a+b+c)^۲ = a(b+c-a)+b(c+a-b)+c(a+b-c) > ۰ \quad (*)$$

بزرگتر از صفر بودن طرف راست رابطهٔ بالا از آن جا نتیجه می‌شود که a و b و c اضلاع یک مثلث هستند:

$$b+c>a \ , \ c+a>b \ , \ a+b>c$$

توجه: شاید برای کسانی بدست آوردن رابطهٔ $(*)$ در سر جلسهٔ امتحان بعید به‌نظر برسد. اصولاً راه حلی که در اینگونه مسائل، شرکت کنندگان در امتحان ارایه می‌دهند بدین صورت است که $ab+bc+ca \ , \ a+b+c$ را بر حسب R, r, S, P و دیگر اجزای مثلثی با اضلاع c, b, a به‌دست می‌آورند و سپس از نامساویهای مثلث استفاده می‌کنند. یکی از این نامساویها به شرح زیر می‌باشد:

$$R \geq ۲r$$

به‌عنوان تمرین، خودتان این مسأله را با استفاده از نکات بالا حل کنید.

بهمن ۶۹

۷. اگر α ریشهٔ معادله $x^۳ - ۵x + ۳ = ۰$ و $f(x)$ یک چند جمله‌ای با ضرایب گویا باشد. نشان دهید که هرگاه $f(\alpha)$ ریشهٔ معادله بالا باشد آنگاه $ff(\alpha)$ نیز ریشه معادله خواهد بود.

حل: عدد مختلط γ را در نظر بگیرید. چند جمله‌ای $P(x)$ با ضرایب گویا و با مینیمم درجه ممکن که γ ریشهٔ آن باشد را چند جمله‌ای مییمنال برای γ گویند. در مورد چند جمله‌ای مینیمال، قضیه‌ای به شرح زیر وجود دارد:

قضیه: عدد مختلط γ را در نظر بگیرید. فرض کنید γ ریشه‌ای از چند جمله‌ای $Q(x)$ با ضرایب گویا باشد. همچنین فرض کنید $P(x)$ چند جمله‌ای مینیمال برای γ باشد. در این‌صورت داریم $P(x) \mid Q(x)$.

یک حالت خاص این قضیه وقتی است که γ عددی حقیقی باشد. در این‌صورت داریم $p(x) = x - \gamma$. از این قضیه نتیجه می‌شود که اگر $Q(\gamma) = ۰$ سپس $x - \gamma \mid Q(\gamma)$.

به‌عنوان مثالی دیگر، چند جمله‌ای $x^۲ + ۱$ را در نظر بگیرید. پرواضح است که این چند جمله‌ای، چند جمله‌ای مینیمال برای عدد i است. در نتیجه برای هر چند جمله‌ای $Q(x)$ با ضرایب حقیقی که i ریشه‌ای از آن باشد داریم $x^۲ + ۱ \mid Q(x)$.

حال به حل مسئله باز می‌گردیم. معادلهٔ $x^۳ - ۵x + ۳ = ۰$ ریشهٔ گویا ندارد زیرا بر طبق قضیه‌ای از آنجا که ضریب بزرگترین توان برابر یک است و تمامی ضرایب صحیح هستند، باید هر ریشهٔ حقیقی معادله، گنگ یا صحیح باشد یعنی معادله ریشهٔ گویای غیر صحیح ندارد. به راحتی می‌توان بازبینی نمود که معادله ریشهٔ صحیح نیز ندارد. درنتیجه معادله ریشهٔ گویا ندارد و از آنجا که از درجه ۳ است، چند جمله‌ای غیر قابل تجزیه است.

MATH75.IR

از گفته‌های بالا می‌توان نتیجه گرفت که چند جمله‌ای مینیمال α برابر $x^۳ - ۵x + ۳$ است (به‌عنوان تمرین ثابت کنید که $P(x)$ چند جمله‌ای مینیمال برای γ است اگر و فقط اگر $P(\gamma) = ۰$ و همچنین $P(x)$ غیرقابل تجزیه باشد).

تعریف می‌کنیم: $$Q(x) = f(x)^۳ - ۵f(x) + ۳$$

واضح است که $Q(x)$ یک چند جمله‌ای با ضرایب گویا است. بر طبق فرض داریم $Q(\alpha) = ۰$، در نتیجه $Q(x)$ باید بر چند جمله‌ای مینیمال α بخشپذیر باشد:

$$x^۳ - ۵x + ۳ \mid f(x)^۳ - ۵f(x) + ۳ \qquad (*)$$

می‌دانیم اگر دو چندجمله‌ای $A(x)$ و $B(x)$ داشته باشیم و $A(x) \mid B(x)$، سپس هر ریشهٔ $A(x)$ یک ریشه از $B(x)$ نیز است. حال در رابطهٔ $(*)$، $f(\alpha)$ یک ریشه از $x^۳ - ۵x + ۳$ است در نتیجه باید ریشه‌ای از $f(x)^۳ - ۵f(x) + ۳$ نیز باشد یعنی:

$$ff(\alpha)^۳ - ۵ff(\alpha) + ۳ = ۰$$

رابطهٔ بالا معادل حکم مسئله است.

آذر ۷۰

۸. اگر برای تابع حقیقی غیر ثابت f داشته باشیم

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - ۲f(xy) \qquad (*)$$

آنگاه $f(۱۳۷۰)$ را به‌دست آورید.

حل: در رابطهٔ $(*)$ به‌جای (x, y)، زوج $(n, ۱)$ را قرار می‌دهیم:

$$f(n+۱) = f(n) + f(۱) - ۲f(n) \quad \Longrightarrow \quad f(n+۱) = -f(n) + f(۱) \qquad (**)$$

اگر در $(**)$، $n = ۱$ را قرار دهیم به‌دست می‌آید که $f(۲) = ۰$. اگر $n = ۲$ را قرار دهیم به‌دست می‌آید که $f(۳) = f(۱)$. به همین ترتیب به راحتی با استقراء می‌توان ثابت نمود که

$$n \in N \ : \ f(۲n) = ۰ \ , \ f(۲n-۱) = f(۱) \quad \Longrightarrow \quad f(۱۳۷۰) = ۰$$

۹. اگر $x \geq y \geq z > ۰$ $(x, y, z \in \mathbf{R})$ ثابت کنید که:

$$\frac{x^۲y}{z} + \frac{y^۲z}{x} + \frac{z^۲x}{y} \geq x^۲ + y^۲ + z^۲ \qquad (*)$$

MATH75.IR

حل: این مسئله یکی از اندک کسانی است که با ایدهٔ خاص خود قابل حل است. بنابراین اگر با خواندن راه‌حل زیر می‌بینید که این راه حل ساده، دور از ذهن است زیاد ناامید نشوید!

رابطهٔ (*) را به‌صورت متقارن‌تر زیر می‌نویسیم:

$$x^۲(\frac{y}{z}-۱)+y^۲(\frac{z}{x}-۱)+z^۲(\frac{x}{y}-۱)\overset{?}{\geq}۰$$

تعریف می‌کنیم:

$$a=\frac{y}{z}-۱\ ,\ b=\frac{z}{x}-۱\ ,\ c=\frac{x}{y}-۱$$

از این رو به‌دست می‌آوریم: $ax^۲+by^۲+cz^۲\overset{?}{\geq}۰$

قبلاً ثابت کرده‌ایم که $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geq ۳$ و یا $a+b+c\geq ۰$. بنابراین داریم:

$$ax^۲+by^۲+cz^۲\geq ax^۲+by^۲+(-a-b)z^۲=a\left(x^۲-z^۲\right)+b\left(y^۲-z^۲\right)$$

حال در رابطهٔ بالا مقادیر a و b را جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned}ax^۲+by^۲+cz^۲&\geq\left(\frac{y-z}{z}\right)\left(x^۲-z^۲\right)+\left(\frac{z-x}{x}\right)\left(y^۲-z^۲\right)\\&=(x-z)(y-z)\left[(x+z)x-(y+z)z\right]\times\frac{۱}{xz}\qquad(**)\end{aligned}$$

بر طبق فرضیات مسئله داریم:

$$x^۲\geq yz\ ,\ xz\geq yz\quad\Longrightarrow\quad(x+z)x-(y+z)z\geq ۰\ ,\ x-z\geq ۰\ ,\ y-z\geq ۰$$

با استفاده از سه رابطهٔ بالا و رابطهٔ (**) به‌دست می‌آوریم که:

$$.ax^۲+by^۲+cz^۲\geq ۰$$

بهمن ۷۰

۱۰. فرض می‌کنیم $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ تعریف شده است و $f(۱)=۱$

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\qquad(x,y\in R)$$

و برای $x\in\mathbf{R}-\{۰\}$ داریم $f\left(\frac{۱}{x}\right)=\frac{۱}{f(x)}$، همهٔ توابع $f(x)$ را به‌دست آورید.

حل: x دلخواهی با شرط $x\neq ۱$ در نظر بگیرید. f در معادله کوشی صدق می‌کند در نتیجه داریم $f(۰)=۰$ و $f(x)=f(-x)$ (این روابط را قبلاً به‌دست آوردیم).

$$f\left(\frac{۱}{x-۱}\right)-f\left(\frac{۱}{x}\right)=f\left(\frac{۱}{x-۱}\right)+f\left(\frac{-۱}{x}\right)=f\left(\frac{۱}{x-۱}-\frac{۱}{x}\right)=f\left(\frac{۱}{(x-۱)x}\right)=\frac{۱}{f(x(x-۱))}$$

MATH75.IR

از این رو داریم:

$$f\left(\frac{۱}{x-۱}\right)-f\left(\frac{۱}{x}\right)=\frac{۱}{f(x(x-۱))} \qquad (۱)$$

$$f\left(\frac{۱}{x-۱}\right)-f\left(\frac{۱}{x}\right)=\frac{۱}{f(x-۱)}-\frac{۱}{f(x)}=\frac{f(x)-f(x-۱)}{f(x)f(x-۱)}=\frac{f(x-x+۱)}{f(x)f(x)-f(۱))}$$

در نتیجه:

$$f\left(\frac{۱}{x-۱}\right)-f\left(\frac{۱}{x}\right)=\frac{۱}{f(x)^{۲}\quad f(x)} \qquad (۲)$$

از طرفی داریم:

$$\frac{۱}{f(x(x-۱))}=\frac{۱}{f(x^{۲}-x)}=\frac{۱}{f(x^{۲})-f(x)} \qquad (۳)$$

از روابط (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم که $f(x^{۲})=f(x^{۲})$.

حال عددی مثل α و بزرگتر از صفر را در نظر بگیرید:

$$f(\alpha)=f\left((\sqrt{\alpha})^{۲}\right)=f(\sqrt{\alpha})^{۲}\geq ۰$$

f در معادله کوشی صدق می‌کند و به ازای هر عدد مثبت α، عددی نامنفی می‌شود در نتیجه بر طبق قضیه $f(x)=ax$ است:

$$f(x^{۲})=f(x)^{۲} \implies ax^{۲}=a^{۲}x^{۲} \implies a=۰,۱$$

در این‌صورت تنها یک تابع $f(x)=x$ به‌دست می‌آید (به ازای $a=۰$ تابعی وجود ندارد چرا که باید داشته باشیم $f(۱)=۱$).

آذر ۷۱

۱۱. در معادلهٔ درجه سوم $ax^{۳}+bx+c=۰$ ضرایب همگی گویا هستند و می‌دانیم که یکی از ریشه‌های آن با حاصلضرب دو ریشهٔ دیگر برابر است. ثابت کنید همین ریشه عددی گویا است.

حل: فرض کنید معادلهٔ بالا دارای سه ریشهٔ α و β و γ باشد و داشته باشیم $\gamma=\alpha\beta$.

حال روابط قضیهٔ ویت را می‌نویسیم:

$$\alpha\beta\gamma=-\frac{c}{a} \implies \gamma^{۲}=-\frac{c}{a}$$

$$\alpha+\beta+\gamma=۰ \implies \alpha+\beta=-\gamma$$

$$\gamma(\alpha+\beta)+\alpha\beta=\frac{b}{a} \implies -\gamma^{۲}+\gamma=\frac{b}{a} \quad \text{یا} \quad \frac{c}{a}+\gamma=\frac{b}{a}$$

از این رو داریم که $\gamma=\frac{b}{a}-\frac{c}{a}$. در نتیجه واضح است که γ عددی گویا است.

MATH75.IR

آذر ۷۲

۱۲. اگر $A = x + \frac{۱}{x}$، مقدار عبارت $x^۷ + \frac{۱}{x^۷}$ را برحسب A محاسبه کنید.

حل: دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=۰}^{\infty}$ را به‌صورت روبرو تعریف می‌کنیم: $x_n = x^n + \frac{۱}{x^n}$

قبلاً به‌دست آوردیم که:

$$x_۰ = ۲ \ , \ x_۱ = A \ , \ x_n = Ax_{n-۱} - x_{n-۲}$$

هدف ما پیدا کردن $x_۷$ است که با استفاده از رابطهٔ بازگشتی و جملهٔ اول و دوم دنباله قابل محاسبه است. مثلاً

$$x_۲ = Ax_۱ - x_۰ = A^۲ - ۲$$
$$x_۳ = Ax_۲ - x_۱ = A^۳ - ۳A$$

با ادامه همین رویه به‌دست می‌آید که:

$$x_۷ = A^۷ - ۷A^۵ + ۱۴A^۳ - ۷A$$

آبان ۷۳

۱۳. فرض می‌کنیم a و b و c اعداد حقیقی باشند که

$$۹a + ۱۱b + ۲۹c = ۰$$

ثابت کنید $ax^۳ + bx + c = ۰$ در $[۰, ۲]$ لااقل یک ریشه دارد.

حل: تعریف می‌کنیم $P(x) = ax^۳ + bx + c$. داریم که

$$P(۰) = c \ , \ P(۲) = ۸a + ۲b + c$$

برای حل مسئله کافی است دقت کنید که

$$۹a + ۱۱b + ۲۹c - P(۰) - P(۲) = a + ۹b + ۲۷c = ۲۷P\left(\frac{۱}{۳}\right)$$

درنتیجه

$$P(۰) + P(۲) + ۲۷P\left(\frac{۱}{۳}\right) = ۰$$

اگر یکی از مقادیر $P(۰)$ و $P(\frac{۱}{۳})$ و $P(۲)$ صفر باشد که مسأله حل است در غیر این‌صورت دو تا از این اعداد مختلف‌العلامه هستند در نتیجه $P(x)$ در بین آن دو عدد با علامت مختلف، لااقل یکبار صفر شده است. به عبارت دیگر $P(x)$ لااقل یک ریشه در یکی از بازه‌های $[\frac{۱}{۳}, ۲]$ و $[۰, ۲]$ و $[۰, \frac{۱}{۳}]$ دارد.

MATH75.IR

بهمن ۷۳

۱۴. $\mathbf{Z}$ مجموعهٔ اعداد صحیح و $\mathbf{Q}$ مجموعهٔ اعداد گویاست. تمام توابع $f : \mathbf{Z} - \{۰\} \to \mathbf{Q}$ را طوری پیدا کنید که در معادله تابعی زیر صدق کنند.

$$f\left(\frac{x+y}{۳}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{۲} \qquad (*)$$

حل: در رابطهٔ $(*)$ به جای (x,y)، زوج مرتب $(۱,۱)$ را قرار می‌دهیم:

$$f(۱) = f\left(\frac{۱+۲}{۳}\right) = \frac{f(۱)+f(۲)}{۲} \quad \Longrightarrow \quad f(۲) = f(۱)$$

همچنین

$$f(۲) = f\left(\frac{۳+۳}{۳}\right) = \frac{f(۳)+f(۳)}{۲} \quad \Longrightarrow \quad f(۳) = f(۲)$$

سعی می‌کنیم با استقراء ثابت کنیم که به ازای هر n طبیعی $f(n) = f(۱)$ است.

فرض کنید $f(۱) = f(۲) = \cdots = f(۳k)$، حال می‌خواهیم ثابت کنیم که (پایه استقراء: $f(۱) = f(۲) = f(۳)$)

$$f(۱) = f(۲) = \cdots = f(۳k+۱) = f(۳k+۲) = f(۳k+۳)$$

داریم که:

$$\frac{f(۳k+۱)+f(۲)}{۲} = f\left(\frac{۳k+۱+۲}{۳}\right) = f(k+۱) = f(۲) \implies f(۳k+۱) = f(۲)$$

$$\frac{f(۳k+۲)+f(۱)}{۲} = f\left(\frac{۳k+۲+۱}{۳}\right) = f(k+۱) = f(۱) \implies f(۳k+۲) = f(۱)$$

$$\frac{f(۳k+۳)+f(۳)}{۳} = f\left(\frac{۳k+۳+۳}{۳}\right) = f(k+۲) = f(۳) \implies f(۳k+۳) = f(۳)$$

بدین ترتیب حکم استقراء ثابت می‌شود. حال n ای صحیح با شرط $n < ۰$ در نظر بگیرید.

$$f(۱) = f\left(\frac{n+(-n+۳)}{۳}\right) = \frac{f(n)+f(-n+۳)}{۲}$$

n عددی منفی است در نتیجه $-n+۳$ عددی مثبت است. بنابراین داریم

$$f(-n+۳) = f(۱) \implies f(۱) = \frac{f(n)+f(۱)}{۲} \implies f(n) = f(۱)$$

بدین ترتیب به‌دست آوردیم که $f(x)$ همواره ثابت و برابر $f(۱)$ است.

MATH75.IR

آبان ۷۴ (مقدماتی)

۱۵. فرض کنید x و y دو عدد حقیقی باشند که $x > y > 0$. ثابت کنید:

$$\frac{x^4 - y^4}{4y^3} > x - y > \frac{x^4 - y^4}{4x^3}$$

حل: نامساوی سمت چپ را در نظر بگیرید:

$$\frac{x^4 - y^4}{4y^3} \overset{?}{>} x - y$$

بر طبق فرض مسئله داریم که $x^2y > y^3$, $xy^2 > y^3$، از این رو به‌دست می‌آوریم که

$$(x-y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) > (x-y)4y^3 \quad \text{و یا} \quad x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 > 4y^3$$

درنتیجه

$$x^4 - y^4 > (x-y) \cdot 4y^3$$

نامساوی سمت راست هم بدین صورت ثابت می‌شود.

آبان ۷۴

۱۶. اگر a و b و c سه عدد حقیقی مثبت باشند، مقدار مینیمم عبارت زیر را پیدا کنید:

$$S = \left(\frac{a+b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a+c}{b}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{a}\right)^2$$

حل: S را به‌صورت مجموع ۱۲ جمله بسط می‌دهیم و سپس از نامساوی حسابی – هندسی استفاده می‌کنیم:

$$S = \frac{a^2}{c^2} + \frac{ab}{c^2} + \frac{ab}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} + \cdots + \frac{bc}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}$$
$$\geq 12 \sqrt[12]{\frac{a^2}{C^2} \cdot \frac{ab}{c^2} \cdot \frac{ab}{c^2} \cdot \cdots \cdot \frac{c^2}{a^2}} = 12 \times 1 = 12$$

در بالا به‌دست آوردیم که $S \geq 12$. حالت تساوی وقتی رخ می‌دهد که $a = b = c$.

توجه: سعی کنید نامساوی بالا را با استفاده از دو نامساوی زیر ثابت کنید:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3} \quad , \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3 \qquad (x, y, z \in R^+)$$

MATH75.IR

اردیبهشت ۷۵

۱۷. فرض کنید a, b, c سه عدد حقیقی مثبت باشند که در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$(a^۲ + b^۲ + c^۲)^۲ > ۲(a^۴ + b^۴ + c^۴)$$

ثابت کنید a و b و c می‌توانند اضلاع یک مثلث باشند.

حل: حل این مسئله با استفاده از اتحادی به‌صورت زیر است:

$$(a^۲ + b^۲ + c^۲)^۲ - ۲(a^۴ + b^۴ + c^۴) = (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a) \qquad (*)$$

سعی کنید خودتان رابطهٔ $(*)$ را ثابت کنید.

رابطهٔ $(*)$ یک رابطهٔ متقارن است، در نتیجه با استفاده از تقارن می‌توان فرض کرد که $a \geq b \geq c$.

از طرفی بر طبق فرض مسأله داریم:

$$(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a) > ۰$$

جملات $a+b+c$, $a+b-c$, $c+a-b$ مثبت هستند، پس بناچار جملهٔ $b+c-a$ هم باید مثبت باشد. دو رابطهٔ $a \geq b \geq c$ و $b+c > a$ معادل است با اینکه a, b, c اضلاع یک مثلث هستند.

۱۸. روی یک خط راست n نقطهٔ آبی و n نقطه‌ی قرمز، نه لزوماً متمایز به‌طور دلخواه قرار گرفته‌اند. ثابت کنید مجموع فواصل دو به دو نقاط با رنگهای متفاوت از مجموع فواصل دو به دو نقاط با رنگهای یکسان کمتر نیست.

حل: فرض کنید نقاط $A_۱, A_۰, \ldots, A_n$ به رنگ آبی و نقاط $B_۱, B_۲, \ldots, B_n$ به رنگ قرمز رنگ آمیزی شده باشند. نقطهٔ دلخواه o را روی این خط انتخاب کرده و آن را مبدأ مختصات قرار می‌دهیم:

$$x_i = |oA_i| \quad , \quad Y_i = |oB_i| \qquad ۱ \leq i \leq n$$

می‌توان فرض کرد که $X_۱ \leq X_۲ \leq \cdots \leq X_n$ و $Y_۱ \leq Y_۲ \leq \ldots \leq Y_n$.

از این رو مجموع فواصل دوبه‌دو نقاط با رنگهای متفاوت برابر $\sum_{۱ \leq i,j \leq n} |X_i - Y_j|$ و همچنین مجموع فواصل دوبه‌دو

MATH75.IR

نقاط با رنگهای یکسان برابر $\sum_{1\le i<j\le n}|X_i-X_j|+\sum_{1\le i<j\le n}|Y_i-Y_j|$ است. از طرفی داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j\le n}|X_i-X_j|+\sum_{1\le i<j\le n}|y_i-Y_j| &= \sum_{1\le i<j\le n}(X_j-X_i)+\sum_{1\le i<j\le n}(Y_j-Y_i)\\ &= \sum_{1\le i<j\le n}(X_j-Y_i)+\sum_{1\le i<j\le n}(Y_j-X_i)\\ &\le \sum_{1\le i<j\le n}|X_j-Y_i|+\sum_{1\le i<j\le n}|Y_j-X_i|\\ &\le \sum_{1\le i,j\le n}|X_i-Y_j|\end{aligned}$$

رابطهٔ بالا معادل حکم مسئله است.

اردیبهشت ۷۶

۱۹. فرض کنید x_1,x_2,x_3,x_4، چهار عدد حقیقی مثبت باشند که $x_1x_2x_3x_4=1$. ثابت کنید:

$$\sum_{i=1}^{4}x_i^2\ge\max\left\{\sum_{i=1}^{4}x_i,\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{x_i}\right\}$$

($\max\{a,b\}$ یعنی بزرگترین عضو مجموعهٔ $\{a,b\}$).

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم که

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\overset{?}{\ge}\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}\qquad(1)$$

می‌دانیم که

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2\ge 3x_1x_2x_3\ ,\ x_1^2+x_2^2+x_4^2\ge 3x_1x_2x_4$$
$$x_1^2+x_3^2+x_4^2\ge 3x_1x_3x_4\ ,\ x_2^2+x_3^2+x_4^2\ge 3x_2x_3x_4$$

از جمع چهار نامساوی بالا به‌دست می‌آوریم که:

$$x_1^3x_2^3x_3^3x_4^3\ge x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=\frac{1}{x_4}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}$$

حال ثابت می‌کنیم که

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\overset{?}{\ge}x_1+x_2+x_3+x_4\qquad(2)$$

می‌دانیم برای عددهای $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ داریم:

$$\frac{\alpha_1^k+\alpha_2^k+\cdots+\alpha_n^k}{n}\ge\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}\right)^k$$

MATH75.IR

بنابراین

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 \geq \frac{1}{16}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^4$$

از طرفی داریم

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^4 \geq [4\sqrt{x_1x_2x_3x_4}]^4 = 16$$

از ضرب دو رابطهٔ بالا در یکدیگر رابطهٔ (۲) نتیجه می‌شود.
با استفاده از دو رابطهٔ (۱) و (۲) حکم مسئله به‌دست می‌آید.

اردیبهشت ۷۷

۲۰. اگر $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$، n تا عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:

$$a_1a_2^4 + a_2a_3^4 + \cdots + a_{n-1}a_n^4 + a_na_1^4 \geq a_2a_1^4 + a_3a_2^4 + \cdots + a_na_{n-1}^4 + a_1a_n^4 \qquad (*)$$

حل: به ازای $n = 1, 2$ درستی رابطهٔ (*) واضح است. حال رابطهٔ بالا را به‌ازای سه عدد حقیقی a, b, c با شرط $a < b < c$ ثابت می‌کنیم:

$$ab^4 + bc^4 + ca^4 \overset{?}{\geq} ba^4 + cb^4 + ac^4 \quad \text{و یا} \quad c^4(b-a) + c\left(a^4 - b^4\right) + \left(ab^4 - ba^4\right) \overset{?}{\geq} 0$$

چند جمله‌ای $P(x)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P(x) = x^4(b-a) + x\left(a^4 - b^4\right) + \left(ab^4 - ba^4\right)$$

می‌دانیم که تابع پیوسته $f(x)$ در بازهٔ (a, b) اکیداً یکنوا است اگر و فقط اگر

$$\forall x \in (a, b) \quad : \quad f'(x) \neq 0$$

ادعا می‌کنیم $P(x)$ در بازهٔ (b, ∞) اکیداً صعودی است. زیرا

$$P(+\infty) = +\infty \times (b-a) \quad \text{و یا} \quad P(+\infty) = +\infty$$

همچنین

$$P'(x) = 4x^3(b-a) + \left(a^4 - b^4\right) = (b-a)\left(4x^3 - a^3 - a^2b - b^2a - b^3\right)$$

از طرفی داریم

$$x \geq b$$

MATH75.IR

در نتیجه

$$x^۳ > a^۳ \ , \ x^۳ > a^۲b \ , \ x^۳ > b^۲a \ , \ x^۳ > b^۳$$

بنابراین به‌دست می‌آوریم:

$$\forall x \in (b, \infty) \ : \ P'(x) > ۰$$

در نتیجه $P(x)$ در بازهٔ (b, ∞) اکیداً صعودی است. از این رو داریم

$$c > b \implies P(c) > P(b)$$

و یا

$$c^۴(b-a) + c\left(a^۴ - b^۴\right) + \left(ab^۴ - ba^۴\right) = b^۴(b-a) + b\left(a^۴ - b^۴\right) + \left(ab^۴ - ba^۴\right) = ۰$$

بنابراین رابطهٔ (*) به ازای $n = ۳$ ثابت شد.

حال به استقراء بر روی n ثابت می‌کنیم که رابطهٔ (*) به ازای هر $n \geq ۳$ درست است. به ازای $n = ۳$ درستی رابطهٔ (*) ثابت شد. فرض کنید رابطهٔ (*) به ازای n درست باشد. $n+۱$ عدد حقیقی $a_{n+۱}, a_n, \ldots, a_۲, a_۱$ را با شرط $a_۱ < a_۲ < \ldots < a_n < a_{n+۱}$ در نظر بگیرید. بر طبق فرض استقراء، رابطهٔ (*) برای n عدد $a_۱ < a_۲ < \ldots < a_n$ درست است:

$$a_۱a_۲^۴ + a_۲a_۳^۴ + \cdots + a_{n-۱}a_n^۴ \geq a_۲a_۱^۴ + a_۳a_۲^۴ + \cdots + a_na_{n-۱}{}^۴ + a_۱a_n{}^۴ \qquad (۱)$$

از طرفی داریم $a_۱ < a_n < a_{n+۱}$، در نتیجه می‌توان رابطهٔ (*) را برای ۳ عدد $a_{n+۱}, a_n, a_۱$ نوشت:

$$a_۱a_n{}^۴ + a_na_{n+۱}{}^۴ + a_{n+۱}a_۱^۴ \geq a_na_۱^۴ + a_{n+۱}a_n^۴ + a_۱a_{n+۱}{}^۴ \qquad (۲)$$

از جمع کردن طرفین دو رابطهٔ (۱) و (۲) با یکدیگر بدست می‌آوریم که:

$$a_۱a_۲^۴ + a_۲a_۳^۴ + \cdots + a_na_{n+۱}^۴ + a_{n+۱}a_۱^۴ \geq a_۲a_۱^۴ + a_۳a_۲^۴ + \cdots + a_{n+۱}a_n^۴ + a_۱a_{n+۱}^۴$$

بدین ترتیب درستی حکم به ازای $n+۱$ نیز ثابت شد.

MATH75.IR