راهنمایی‌های کلی: آزمون نظری (۳۰ نمره)

۱۴ جولای ۲۰۱۶

آزمون نظری ۵ ساعت طول می‌کشد و در مجموع ۳۰ نمره دارد.

قبل از آزمون

- قبل از شنیدن صداي زنگ شروع، حق ندارید پوشش سؤالات را باز کنید.
- شروع و پایان آزمون با صدای زنگ اعلام خواهد شد. هر یک ساعت، زمان سپری شده به شما اطلاع داده خواهد شد. همچنین پانزده دقیقه مانده به پایان آزمون، با صدای زنگ به شما اعلام خواهد شد (قبل از آخرین زنگ).

در حین آزمون

- پاسخنامه‌های مخصوصی برای نوشتن پاسخ شما در نظر گرفته شده است. جواب نهایی خود را در جعبه‌های مخصوص در پاسخنامه مربوطه (که با حرف A علامت‌گذاری شده) وارد کنید. برای نوشتن جزئیات جواب هر سؤال صفحات سفید دیگري (صفحات کار) در نظر گرفته شده که حرف W روی آن‌ها نوشته شده است. همیشه دقت کنید که از صفحات مربوط به همان سوال استفاده نمایید (شماره سؤال در بالای برگه را چک کنید). اگر مطالبی در صفحات نوشته‌اید و نمی‌خواهید تصحیح شود روی آنها ضربدر بکشید. فقط از روی هر برگه برای نوشتن استفاده کنید.
- در نوشتن پاسخ‌های خود تا جایی که امکان دارد مختصر بنویسید: برای رساندن منظور خود تا جایی که امکان دارد از روابط ریاضی، علائم منطقی و نمودارها استفاده نمایید. از نوشتن جملات طولانی خودداری کنید.
- اعداد را با تعداد مناسبی رقم معنی‌دار بنویسید.
- شما اغلب ممکن است قادر به حل بخش‌های بعدی سؤال باشید بدون این که بخش‌های قبلی سؤال را حل کرده باشید.
- لیستی از ثابت‌های فیزیکی در صفحه بعد داده شده است.
- شما بدون اجازه، مجاز به ترك محل کار خود نیستید. اگر نیاز به کمک دارید (مانند پر کردن بطری آب، خرابی ماشین حساب یا رفتن به دستشویی و غیره)، با قرار دادن یکی از سه پرچم در مکان تعبیه شده در کابین به مراقبین اطلاع دهید:

  برای پر کردن بطری آب:

"Refill my water bottle, please"

  برای رفتن به دستشویی:

"I need to go to the toilet please"

  برای بقیه موارد:

"I need help, please"

در پایان آزمون

- پس از پایان آزمون سریعاً از نوشتن خودداري کنید.
- برای هر سؤال برگه هاي خود را به ترتیب زیر مرتب کنید: صفحه پوششی(C)، صفحات سؤال(Q)، صفحات پاسخنامه(A) و صفحات کار(W).
- همه برگه‌های مربوط به یک سؤال را در یک پاکت قرار دهید. همچنین برگه‌های راهنمایی‌های کلی (G) را در پاکت جداگانه باقیمانده قرار دهید. از قابل مشاهده بودن کد دانش‌آموزی خود در پنجره مشاهده هر پاکت اطمینان حاصل نمایید. همچنین برگه‌های خالی را داخل پاکت بگذارید. شما مجاز به بردن هیچ برگه‌اي به بیرون از سالن امتحان نیستید.
- ماشین حساب آبی رنگ داده شده از طرف برگزار کنندگان را روی میز بگذارید.

- وسایل نوشتن خود (دو عدد خودکار، یک عدد روان نویس، یک عدد مداد، یک عدد قیچی، یک عدد خط کش، دو جفت صداگیر گوش) و ماشین حساب شخصی(قابل استفاده) را بردارید. همچنین بطری آب خود را بردارید.
- تا زمانی که پاکت شما تحویل گرفته نشده، سر میز خود بمانید. پس از آن که پاکت‌ها جمع آوري شد راهنما، شما را تا خارج از سالن امتحان همراهی خواهد کرد.

دادههای عمومی

سرعت نور در خلاء	c	=	$299\,792\,458\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$
تراوایی مغناطیسی خلاء	μ_0	=	$4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{kg\cdot m\cdot A^{-2}\cdot s^{-2}}$
گذردهی الکتریکی خلاء	ε_0	=	$8.854\,187\,817\times10^{-12}\ \mathrm{A^2\cdot s^4\cdot kg^{-1}\cdot m^{-3}}$
بار بنیادی	e	=	$1.602\,176\,620\,8(98)\times10^{-19}\ \mathrm{A\cdot s}$
جرم الکترون	m_e	=	$9.109\,383\,56(11)\times10^{-31}\ \mathrm{kg}$
		=	$0.510\,998\,946\,1(31)\ \frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c^2}}$
جرم پروتون	m_p	=	$1.672\,621\,898(21)\times10^{-27}\ \mathrm{kg}$
		=	$938.272\,081\,3(58)\ \frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c^2}}$
جرم نوترون	m_n	=	$1.674\,927\,471(21)\times10^{-27}\ \mathrm{kg}$
		=	$939.565\,413\,3(58)\ \frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c^2}}$
واحد جرم اتمی	u	=	$1.660\,539\,040(20)\times10^{-27}\ \mathrm{kg}$
ثابت ریدبرگ	R_∞	=	$10\,973\,731.568\,508(65)\ \mathrm{m^{-1}}$
ثابت جهانی گرانش	G	=	$6.674\,08(31)\times10^{-11}\ \mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}$
شتاب جاذبه (در زوریخ)	g	=	$9.81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$
ثابت پلانک	h	=	$6.626\,070\,040\ (81)\times10^{-34}\ \mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}$
عدد آووگادرو	N_A	=	$6.022\,140\,857\ (74)\times10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
ثابت جهانی گاز ها	R	=	$8.314\,4598(48)\ \mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-2}\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}$
ثابت جرم مولی	M_u	=	$1\times10^{-3}\ \mathrm{kg\cdot mol^{-1}}$
ثابت بولتزمن	k_B	=	$1.380\,648\,52(79)\times10^{-23}\ \mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-2}\cdot K^{-1}}$
ثابت استفان - بولتزمن	σ	=	$5.670\,367\ (13)\times10^{-8}\ \mathrm{kg\cdot s^{-3}\cdot K^{-4}}$

دو مسئله در مکانیک (۱۰ نمره)

قبل از پرداختن به این مسئله راهنمایی‌های کلی را، که در پاکت جداگانه‌ای قرار دارد، بخوانید.

بخش A. دیسک پنهان (۳/۵ نمره)

استوانه‌ای چوبی به شعاع r_1 و ضخامت (یا ارتفاع) h_1 در نظر بگیرید. در درون پیکره این استوانه چوبی یک دیسک فلزی به شعاع r_2 و ضخامت h_2 به نحوی جاسازی شده که محور آن، محور B، به موازات محور استوانه، محور S، است و فاصله آن از قاعده‌های بالایی و پایینی استوانه چوبی یکسان است. فاصله محورهای S و B را d می‌نامیم. چگالی چوب ρ_1 و چگالی فلز $\rho_2 > \rho_1$ است. جرم کل دستگاه، شامل استوانه چوبی و دیسک فلزی داخل آن را M بگیرید.

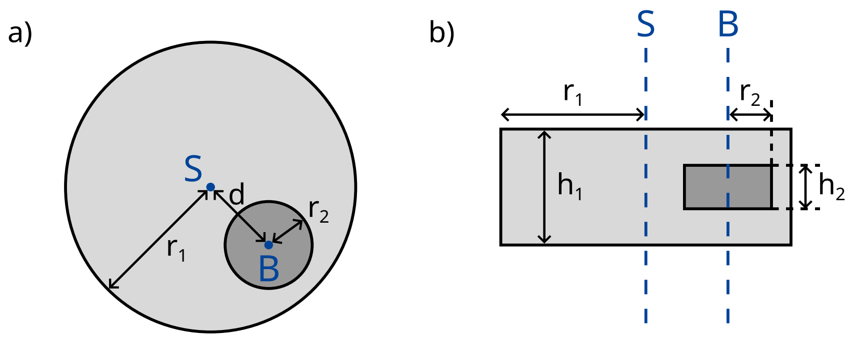
در این بخش از مسئله، استوانه چوبی را از یال روی زمین می‌گذاریم تا بتواند آزادانه به هر طرف بغلتد. شکل ۱ در سمت چپ، استوانه را در حالتی که روی زمین است و از قاعده به آن نگاه می کنیم نشان می‌دهد. در شکل سمت راست یک نمای دستگاه، وقتی از سطح جانبی به آن نگاه شود را می‌بینید.

هدف این بخش از مسئله تعیین اندازه و محل دیسک فلزی است.

در ادامه مسئله، هر جا خواسته می‌شود که جواب را بر حسب کمیت‌های معلوم بنویسید، علاوه بر کمیت‌های خاص ذکر شده در آن بخش، کمیت‌های زیر را نیز می‌توانید معلوم بگیرید.

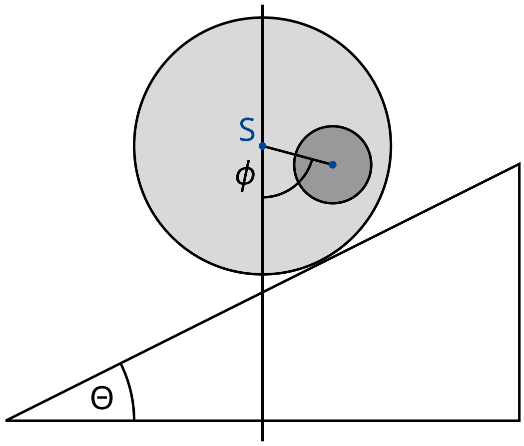
$$r_1,\ h_1,\ \rho_1,\ \rho_2, M\ . \tag{1}$$

حال می خواهیم h_2, r_2 و d را با سنجش غیر مستقیم به دست آوریم.



شکل ۱: a) نمای استوانه از سمت قاعده و b) از سمت جانبی

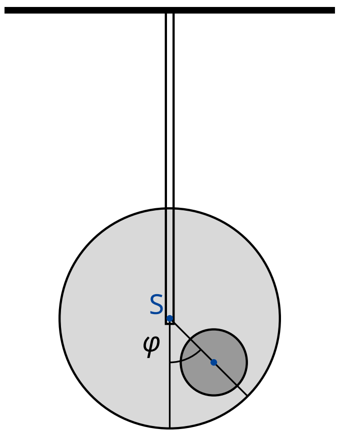
فرض کنید b فاصله مرکز جرم کل دستگاه C از محور تقارن استوانه، محور S، باشد. برای تعیین این فاصله آزمایش زیر را انجام می‌دهیم. استوانه را از یال روی یک سطح افقی قابل بلند کردن قرار می‌دهیم و صبر می‌کنیم تا در حالت تعادل پایدار قرار گیرد. حال به آرامی یک طرف سطح را بالا می‌آوریم تا زاویه شیب سطح، مطابق شکل ۲، Θ شود. فرض کنید اصطکاک ایستایی مانع لغزش استوانه می‌شود و استوانه پس از یک غلتش محدود و آرام به سمت پایین سطح شیبدار، در محل تعادل جدید قرار می‌گیرد. فرض کنید در طی این غلتش، استوانه به اندازه زاویه ϕ حول محور تقارن خود چرخیده است که آن را اندازه‌گیری کرده‌ایم.



شکل ۲: استوانه روی سطح شیبدار.

A.1	عبارتی برای b بر حسب کمیت های داده شده در عبارت (۱)، زاویه ϕ و زاویه شیب سطح، Θ، به دست آورید.	0.8pt

از این جا به بعد می‌توانید b را هم معلوم بگیرید.



شکل ۳: استوانه در حالت آویخته.

حال می‌خواهیم لختی دورانی استوانه، I_S نسبت به محور تقارن S را به دست آوریم. برای این کار استوانه را در حالتی که یال‌هایش افقی هستند، مطابق شکل ۳ از محور تقارن خود می‌آویزیم. سپس آن را به اندازه زاویه کوچک φ از حالت تعادل خارج می‌کنیم و آن را رها می‌سازیم. مشاهده می‌کنیم زاویه انحراف φ دارای حرکت تناوبی با دوره T است

A.2	معادله‌ی حرکت φ را بیابید. لختی دورانی استوانه حول محور تقارن S آن، I_S، را بر حسب T، b و کمیت‌های مذکور در عبارت (1) بیان کنید. فرض کنید در طی حرکت زاویه انحراف φ همواره کوچک باقی می‌ماند.	0.5pt

در اینجا می‌خواهیم با استفاده از نتیجه اندازه‌گیری‌های بخش‌های A.1 و A.2 مشخصات هندسی و جایگاه دیسک را در داخل استوانه تعیین کنیم.

A.3	عبارتی برای d بر حسب b و کمیتهای مذکور در عبارت (1) به دست آورید. عبارت شما ممکن است شامل کمیت های r_2 و h_2 که نهایتاً باید در قسمت A.5 تعیین شوند، نیز باشد.	0.4pt

A.4	عبارتی برای لختی دورانی I_S بر حسب b و کمیتهای مذکور در عبارت (1) به دست آورید. عبارت شما ممکن است شامل کمیت های r_2 و h_2 که نهایتاً باید در قسمت A.5 تعیین شوند، نیز باشد.	0.7pt

A.5	با استفاده از نتایج فوق، h_2 و r_2 را بر حسب b، T و کمیتهای مذکور در عبارت (1) به دست آورید. می توانید h_2 را بر حسب r_2 نیز بیان کنید.	1.1pt

بخش :B ایستگاه فضایی چرخان (۶/۵ نمره)

آلیس فضانوردی است که به اتفاق یار همیشگی‌اش باب، در یک ایستگاه فضایی زندگی می‌کند. این ایستگاه فضایی، چرخ غول‌پیکری به شعاع R است که حول محور تقارن خود می‌چرخد و با چرخش خود نوعی احساس گرانش ظاهری برای فضانوردان ایجاد می‌کند. فضانوردان روی لبه داخلی این چرخ عظیم زندگی می‌کنند. جرم ماده سازنده ایستگاه فضایی ناچیز است و از میدان گرانشی واقعی آن چشم می‌پوشیم.

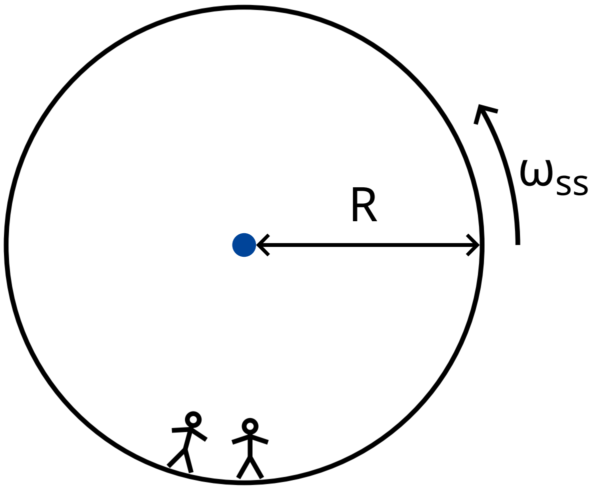
B.1	سرعت زاویه‌ای ایستگاه فضایی، ω_{ss} چقدر باشد تا فضانوردان همان شتاب گرانشی g_E در سطح زمین را حس کنند؟	0.5pt

آلیس و دوستش باب بر سر میدان گرانشی که حس می‌کنند با هم اختلاف نظر دارند. باب معتقد نیست که آنها در یک ایستگاه فضایی زندگی می‌کنند و فکر می‌کند که واقعا در سطح زمین هستند. اما آلیس تلاش دارد با انجام آزمایش‌های فیزیکی باب را متقاعد کند که آنها در یک ایستگاه فضایی چرخان زندگی می‌کنند. برای این کار آلیس جرم نقطه‌ای m را به فنری با ثابت k می‌بندد و دستگاه را به نوسان وا می‌دارد. جرم ذکر شده فقط در جهت عمودی نوسان می‌کند و امکان نوسان در جهات افقی را ندارد.

B.2	با فرض آن که شتاب گرانش زمین ثابت و مقدار آن g_E است، از دید کسی که مطابق فرض باب روی زمین است بسامد زاویه‌ای نوسان دستگاه، ω_E چیست؟	0.2pt

B.3	از دید آلیس که معتقد به فرض ایستگاه فضایی است، بسامد زاویه‌ای نوسان دستگاه، ω چیست؟	0.6pt

آلیس با آزمایش خود مطمئن شده است که در ایستگاه فضایی زندگی می‌کند. اما باب هنوز در پذیرفتن این نظر دچار تردید است. او می‌گوید چه بسا اگر اثر متغیر بودن شتاب گرانش با فاصله از زمین را به حساب آوریم بتوانیم نتیجه آلیس را از این روش نیز به دست آوریم. می‌خواهیم ببینیم چنین چیزی درست است یا نه؟



شکل ۴: ایستگاه فضایی

B.4	عبارتی برای شتاب گرانشی $g_E(h)$ برای ارتفاع کوچک h بالای سطح زمین به دست آورید و با توجه به آن بسامد زاویه‌ای جدید دستگاه $\tilde{\omega}_E$ را با فرض باب به دست آورید (تقریب خطی کفایت می‌کند). شعاع زمین R_E است. از دوران زمین چشم‌پوشی کنید.	0.8pt

از قضا شرایط مسئله طوری است که آلیس مشاهده می‌کند آونگ فنری درست با همان بسامدی که فرضیه باب پیش بینی می‌کند، نوسان می‌کند.

B.5	شعاع ایستگاه فضایی، R، در فرض آلیس چه باشد تا بسامد نوسان دستگاه، ω، با بسامد $\tilde{\omega}_E$ مبتنی بر فرض قرار داشتن در زمین یکی شود؟ پاسخ را بر حسب R_E بنویسید.	0.3pt

آلیس در حالی که از سماجت باب برآشفته است، با ایده استفاده از نیروی کوریولیس به میدان می‌آید. به این منظور او بر فراز برجی به ارتفاع H از کف ایستگاه فضایی می‌رود و جسمی را رها می‌کند.

در یک چارچوب مرجع چرخان، فضانوردان یک نیروی مجازی $\vec{F}_C$ موسوم به نیروی کوریولیس را احساس می‌کنند. نیروی $\vec{F}_C$ وارد بر جسمی به جرم m که با سرعت $\vec{v}$ در یک چارچوب چرخان که دارای بسامد زاویه ای $\vec{\omega}_{ss}$ است، حرکت می‌کند از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} \,. \tag{2}$$

که بر حسب مقدار کمیت‌ها چنین است:

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin\phi \,, \tag{3}$$

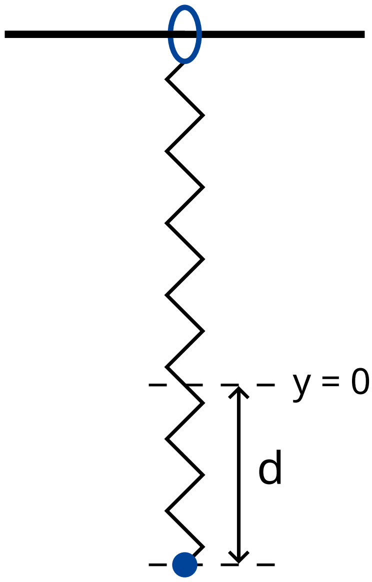
در این رابطه ϕ زاویه بین سرعت و محور دوران است. امتداد نیرو بر محور دوران و سرعت ذره، هر دو، عمود است و جهت آن از قاعده دست راست به دست می‌آید. در ادامه، شما در اختیار جهت آزادید.

B.6	با فرض آن که صفحه شکل ۴، صفحه‌ی xy عمود بر محور دوران است و جهت محور y به سمت مرکز دوران ایستگاه است، سرعت افقی v_x و جابجایی افقی d_x جرم نسبت به پای برج، و در راستای عمود بر برج را در لحظه‌ای که به کف ایستگاه برخورد می‌کند محاسبه کنید. فرض کنید ارتفاع H برج کوچک است، در نتیجه شتاب اندازه‌گیری شده توسط فضانوردان در حین سقوط جرم ثابت است. همچنین فرض کنید $H \gg d_x$.	1.1pt

آلیس برای آنکه حرف خود را به کرسی بنشاند و نتیجه چشمگیری مشاهده کند تصمیم می‌گیرد که ارتفاع برج را بسیار بزرگتر از فرض قبل بگیرد. اما در عین ناباوری او شرایط چنان رقم می‌خورد که جسم درست در پای برج به زمین می‌خورد، یعنی $d_x = 0$.

B.7	حد پایینی برای ارتفاع برج به دست آورید که برای آن $d_x = 0$ قابل وقوع باشد.	1.3pt

آلیس آخرین تیر ترکشش را برای قانع کردن باب به کار می‌گیرد. او سعی می‌کند با بررسی اثر نیروی کوریولیس بر نوسانگرش نشان دهد که آنها در یک دستگاه چرخان زندگی می کنند. به این منظور او چینش اولیه مسئله را تغییر می‌دهد و انتهای فنر را به جای یک نقطه ثابت، مطابق شکل (۵) به حلقه‌ای می‌بندد که آزادانه و بدون اصطکاک روی میله‌ای افقی در امتداد محور x حرکت می‌کند. نوسان فنر کماکان در راستای y است و امتداد میله، همان طور که گفته شد، موازی کف ایستگاه و عمود بر محور دوران آن است.



شکل ۵: چینش دستگاه

B.8	آلیس جرم بسته شده به فنر را به اندازه d پایین تر از نقطه تعادل $x = 0$ و $y = 0$ می‌کشد و سپس آن را رها می‌کند. (شکل ۵ را ببینید) • پاسخ جبری عبارتهای $x(t)$ و $y(t)$ را با فرض آن که کمیت $\omega_{ss} d$ کوچک است، به دست آورید. از نیروی کوریولیس برای حرکت در امتداد محور y صرفنظر کنید. • مسیر $(x(t), y(t))$ را رسم کنید و کلیه جنبه‌های کمی مهم آن، مثل دامنه را در شکل معلوم کنید.	1.7pt

آلیس و باب به بحث‌شان ادامه می‌دهند.

Problem 1 : Solution/marking scheme – Two Problems in Mechanics *(10 points)*

Part A. The Hidden Disk (3.5 points)

A1 (0.8 pt) Find an expression for b as a function of the quantities (1), the angle ϕ and the tilting angle Θ of the base.

Solution A1: **[0.8]**

Geometric solution: use that torque with respect to point of contact is 0 $\Rightarrow$ center of gravity has to be vertically above point of contact.

$$\sin\phi = \frac{D}{b}$$ **0.3**

$$\sin\Theta = \frac{D}{r_1}$$ **0.3**

Here D may be called another name. Solve this:

$$\sin\phi = \frac{r_1}{b}\sin\Theta \quad\Rightarrow\quad b = \frac{r_1\sin\Theta}{\sin\phi}$$ **0.2**

Alternative: Torque and forces with respect to another point: **[0.8]**
Correct equation for torque **0.3**
Correct equation for force **0.3**
Correct solution **0.2**

A2 (0.5 pt) Find the equation of motion for φ. Express the moment of inertia I_S of the cylinder around its symmetry axis S in terms of T, b and the known quantities (1). You may assume that we are only disturbing the equilibrium position by a small amount so that φ is always very small.

Solution A2: **[0.5]**

Write some equation of the form $\ddot{\varphi} = -\omega^2\varphi$ **0.1**

Writing an equation of the form $\varphi = A\cos\omega t$ is also correct.
Two solutions:

1. Kinetic energy: $\frac{1}{2}I_S\dot{\varphi}^2$ and potential energy: $-bMg\cos\varphi$. Total energy is conserved, and differentiation w.r.t. time gives the equation of motion.
2. Angular equation of motion from torque, $\tau = I_S\ddot{\varphi} = -Mgb\sin\varphi$.

Correct equation (either energy conservation or torque equation of motion) **0.3**
Final answer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_S}{Mgb}} \quad\Rightarrow\quad I_S = \frac{MgbT^2}{4\pi^2}$$ **0.1**

(Derivation:

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{bMg}{I_S}\sin\varphi \simeq -\frac{bgM}{I_S}\varphi$$

so that

$$\omega^2 = \frac{bgM}{I_S}$$

)

A3 (0.4 pt) Find an expression for the distance d as a function of b and the quantities (1). You may also include r_2 and h_2 as variables in your expression, as they will be calculated in subtask **A.5**.

Solution A3: **[0.4]**

Some version of the center of mass equation, e.g.

$$b = \frac{dM_2}{M_1 + M_2}$$ **0.2**

correct solution:

$$d = \frac{bM}{\pi h_2 r_2^2(\rho_2 - \rho_1)}$$ **0.2**

A4 (0.7 pt) Find an expression for the moment of inertia I_S in terms of b and the known quantities (1). You may also include r_2 and h_2 as variables in your expression, as they will be calculated in subtask **A.5**.

Solution A4: **[0.7]**

correct answer for moment of inertia of homogeneous disk

$$I_1 = \frac{1}{2}\pi h_1 \rho_1 r_1^4$$ **0.2**

Mass wrong **-0.1**
Factor 1/2 wrong in formula for moment of inertia of a disk **-0.1**
Correct answer for moment of inertia of 'excess' disk:

$$I_2 = \frac{1}{2}\pi h_2(\rho_2 - \rho_1) r_2^4$$ **0.2**

Using Steiner's theorem:

$$I_S = I_1 + I_2 + d^2 \pi r_2^2 h_2(\rho_2 - \rho_1)$$ **0.1**

correct solution:

$$I_S = \frac{1}{2}\pi h_1 \rho_1 r_1^4 + \frac{1}{2}\pi h_2(\rho_2 - \rho_1) r_2^4 + \frac{b^2 M^2}{\pi r_2^2 h_2(\rho_2 - \rho_1)}$$ **0.2**

In terms of d rather than b gives 0.1pts rather than 0.2pts for the final answer: 0.1

$$I_S = \frac{1}{2}\pi h_1 \rho_1 r_1^4 + \frac{1}{2}\pi h_2(\rho_2 - \rho_1) r_2^4 + d^2 \pi r_2^2 h_2(\rho_2 - \rho_1)$$

A5 (1.1 pt) Using all the above results, write down an expression for h_2 and r_2 in terms of b, T and the quantities (1). You may express h_2 as a function of r_2.

Solution A5: [1.1]

It is not clear how exactly students will attempt to solve this system of equations. It is likely that they will use the following equation:

$$M = \pi r_1^2 h_1 \rho_1 + \pi r_2^2 h_2 (\rho_2 - \rho_1) \ .$$ 0.3

solve I_S for r_2^2:

$$r_2^2 = \frac{2}{M - \pi r_1^2 h_1 \rho_1} \left(I_S - \frac{1}{2}\pi h_1 \rho_1 r_1^4 - b^2 \frac{M^2}{M - \pi r_1^2 h_1 \rho_1} \right)$$ 0.4

replace I_S by T:

$$I_S = \frac{MgbT^2}{4\pi^2}$$ 0.1

solve correctly for r_2:

$$r_2 = \sqrt{\frac{2}{M - \pi r_1^2 h_1 \rho_1} \left(M\frac{bgT^2}{4\pi^2} - \frac{1}{2}\pi h_1 \rho_1 r_1^4 - b^2 \frac{M^2}{M - \pi r_1^2 h_1 \rho_1} \right)}$$ 0.1

write down an equation for h_2 along the lines of $M = \pi r_1^2 \rho_1 h_1 + \pi r_2^2 (\rho_2 - \rho_1) h_2$ and solve it correctly:

$$h_2 = \frac{M - \pi r_1^2 \rho_1 h_1}{\pi r_2^2 (\rho_2 - \rho_1)}$$ 0.2

Part B. Rotating Space Station (6.5 points)

B1 (0.5 pt) At what angular frequency ω_{ss} does the space station rotate so that the astronauts experience the same gravity g_E as on the Earth's surface?

Solution B1: [0.5]

An equation for the centrifugal force along the lines of

$$F_{ce} = m\omega^2 r$$ 0.1

Balancing the forces, correct equation

$$g_E = \omega_{ss}^2 R$$ **0.2**

Correct solution

$$\omega_{ss} = \sqrt{g_E/R}$$ **0.2**

B2 (0.2 pt) Assuming that on Earth gravity is constant with acceleration g_E, what would be the angular oscillation frequency ω_E that a person on Earth would measure?

Solution B2: **[0.2]**

Realize that result is independent of g_E **0.1**

Correct result:

$$\omega_E = \sqrt{k/m}$$ **0.1**

B3 (0.6 pt) What angular oscillation frequency ω does Alice measure on the space station?

Solution B3: **[0.6]**

some version of the correct equation for force

$$F = -kx \pm m\omega_{ss}^2 x$$ **0.2**

getting the sign right

$$F = -kx + m\omega_{ss}^2 x$$ **0.2**

Find correct differential equation

$$m\ddot{x} + (k - m\omega_{ss}^2)x = 0$$ **0.1**

Derive correct result

$$\omega = \sqrt{k/m - \omega_{ss}^2}$$ **0.1**

Using g_E/R instead of ω_{ss}^2 is also correct.

B4 (0.8 pt) Derive an expression of the gravity $g_E(h)$ for small heights h above the surface of the Earth and compute the oscillation frequency $\tilde{\omega}_E$ (linear approximation is enough). The radius of the Earth is given by R_E.

Solution B4: **[0.8]**

$$g_E(h) = -GM/(R_E + h)^2$$ **0.1**

linear approximation of gravity:

$$g_E(h) = -\frac{GM}{R_E^2} + 2h\frac{GM}{R_E^3} + \dots$$ **0.2**

Realize that $g_E = GM/R_E^2$:

$$g_E(h) = -g_E + 2hg_E/R_E + \dots$$ **0.1**

Opposite sign is also correct, as long as it is opposite in both terms.
Realize what this means for force, i.e. that the constant term can be eliminated by shifting the equilibrium point:

$$F = -kx + 2xmg_E/R_E$$ **0.2**

Find correct differential equation

$$m\ddot{x} + (k - 2mg_E/R_E)x = 0$$ **0.1**

correct result

$$\tilde{\omega}_E = \sqrt{k/m - 2g_E/R_E}$$ **0.1**

No points are deducted if student answers with $\tilde{\omega}_E/(2\pi)$ because "oscillation frequency" might also be interpreted as inverse period.

B5 (0.3 pt) For what radius R of the space station does the oscillation frequency ω match the oscillation frequency $\tilde{\omega}_E$ on the surface of the Earth? Express your answer in terms of R_E.

Solution B5: **[0.3]**

Write down equation

$$\omega_{ss}^2 = 2g_E/R_E$$ **0.1**

Solve

$$R = R_E/2$$ **0.2**

If GM/R_E^2 rather than g_E is used, give only *0.1pt*.

B6 (1.1 pt) Calculate the horizontal velocity v_x and the horizontal displacement d_x (relative to the base of the tower, in the direction perpendicular to the tower) of the mass at the moment it hits the floor. You may assume that the height H of the tower is small, so that the acceleration as measured by the astronauts is constant during the fall. Also, you may assume that $d_x \ll H$.

Solution B6: **[1.1]**

There are several possible solutions.

Solution one – Using Coriolis force

- Velocity v_x

  Equation for Coriolis force with correct velocity:

  $$F_C(t) = 2m\omega_{ss}^2 Rt\omega_{ss} = 2m\omega_{ss}^3 Rt$$ **0.1**

  Integrate this, or realize that it is like uniform acceleration for the velocity:

  $$v_x(t) = \omega_{ss}^3 Rt^2$$ **0.2**

  plug in correct value for

  $$t = \sqrt{2H/\omega_{ss}^2 R}$$ **0.2**

  overall correct result

  $$v_x = 2H\omega_{ss}$$ **0.1**

- The displacement d_x:

  Integrate $v_x(t)$:

  $$d_x = \frac{1}{3}R\omega_{ss}^3 t^3$$ **0.3**

  Instead of integrating, students may simply 'average' by taking $\frac{1}{2}$ of the final velocity. This gives a factor of $\frac{1}{2}$ instead of $\frac{1}{3}$. *Deduct a total of 0.1 pts for this.* **-0.1**

  Plug in value for t

  $$d_x = \frac{1}{3}R\omega_{ss}^3(2H/\omega_{ss}^2 R)^{3/2} = \frac{1}{3}2^{3/2}H^{3/2}R^{-1/2} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8H^3}{R}}$$ **0.2**

Solution two – Using inertial frame This solution is similar to the way to solve B7, but needs more complicated approximations than Solution one.

- v_x

  Here ϕ denotes the angle swept by the mass and α the angle the astronauts (and tower) has rotated when the mass lands on the floor, see

  Initially the velocity of the mass in an inertial frame is $v_x = \omega_{ss}(R - H)$. **0.1**

  When the mass lands, the x-direction has been rotated by ϕ so the new horizontal velocity component is then

  $$\omega_{ss}(R - H)\cos\phi$$ **0.1**

  (Student may also write $\cos\alpha$ instead of $\cos\phi$, since $d_x \ll H$.)

  $$\cos\phi = \frac{R - H}{R} = 1 - \frac{H}{R}$$ **0.1**

  Transforming to the rotating reference frame, one needs to subtract $\omega_{ss}R$. **0.1**

  Finally in the reference frame of the astronauts

  $$v_x = \omega_{ss}R\left(1 - \frac{H}{R}\right)^2 - \omega_{ss}R \approx \omega_{ss}R\left(1 - 2\frac{H}{R}\right) - \omega_{ss}R = -2\omega_{ss}H$$ **0.2**

  The sign of the velocity depend on the choice of reference direction, so a positive sign is also correct.

- d_x

  With the notation from the calculation of v_x

$$d_x = (\alpha - \phi)R \quad \mathbf{0.1}$$

$$\phi = \arccos\left(1 - \frac{H}{R}\right)$$

$$\alpha = \omega_{ss} t$$

where t is the fall time of the mass, which is given by

$$t = \frac{\sqrt{R^2 - (R-H)^2}}{\omega_{ss}(R-H)} \quad \mathbf{0.1}$$

(see solution to B7)

Writing $\xi \equiv H/R$ this means

$$d_x = \left[\frac{\sqrt{1-(1-\xi)^2}}{1-\xi} - \arccos(1-\xi)\right] R \quad \mathbf{0.3}$$

which is a valid end answer to the problem. It is possible, but not necessary, to approximate this for small ξ:

$$\arccos(1-\xi) \approx \sqrt{2\xi}\left(1 + \frac{\xi}{12}\right)$$

which after insertion into the equation for d_x and approximation of small ξ yields the same result as in Solution one:

$$d_x = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2H^3}{R}}$$

If this end answer misses the factor 2/3, deduct 0.1 points. **-0.1**

Solution three – Inertial frame with geometry trick

This is an alternative solution to obtain d_x

The mass travels the distance l, and during the fall the space station rotates by ϕ, see Figure 2. According to the intersecting chord theorem,

$$l^2 = H(2R - H) \quad \mathbf{0.1}$$

The rotated angle is $\phi = \omega_{ss} t$ where

$$t = \frac{l}{R-H} \quad \mathbf{0.1}$$

is the fall time. Thus

$$\phi = \frac{\sqrt{H(2R-H)}}{R-H} \quad \mathbf{0.1}$$

$$\frac{d}{R} = \phi - \arcsin\frac{l}{R} = \frac{\sqrt{H(2R-H)}}{R-H} - \arcsin\sqrt{x(2-x)} \quad \mathbf{0.1}$$

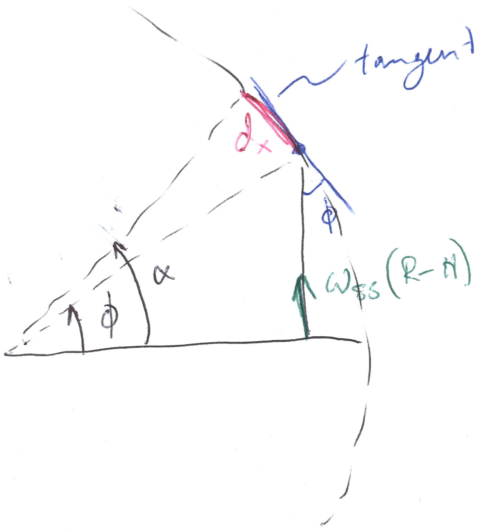


Figure 1: Notation for solution two

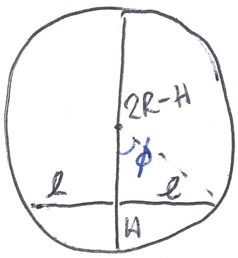


Figure 2: Notation for solution three.

Denote $x \equiv H/R$ and $y \equiv \sqrt{x(2-x)}$. Since

$$\arcsin y \approx y + \frac{y^3}{6}$$

one gets

$$\frac{d}{R} \approx y(1+x) - y - y^3/6 = y(x - y^2/6) \approx 2xy/3 \approx 2x\sqrt{2x}/3 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2H^3}{R}}$$

Final answer **0.1**

B7 (1.3 pt) Find a lower bound for the height of the tower for which it can happen that $d_x = 0$.

Solution B7: **[1.3]**

The key is to use a non-rotating frame of reference. If the mass is released close enough

to the center, its linear velocity will be small enough for the space station to rotate more than 2π before it hits the ground.
The velocity is given by

$$v = \omega_{ss}(R - H)$$ **0.1**

distance d that the mass flies before hitting the space station

$$d^2 = R^2 - (R - H)^2$$ **0.1**

use non-rotating frame of reference to obtain time t until impact

$$t = d/v = \frac{\sqrt{R^2 - (R - H)^2}}{\omega_{ss}(R - H)}$$ **0.1**

Now there are several possible ways to relate H and the rotated angle ϕ of the space station:

Solution one

$$t = \frac{R \sin\phi}{\omega_{ss} R \cos\phi}$$ **0.2**

This time must match $t = \phi/\omega_{ss}$. Obtain the equation

$$\phi = \tan\phi$$ **0.2**

Realizing that there is an infinite number of solutions. **0.2**
This equation has one trivial solution $\phi = 0$, next solution is slightly less than $3\pi/2$ which corresponds to the case $H > R$ (and is thus not correct). The one that gives a lower bound for H is the third solution

$$\phi \approx 5\pi/2$$

The equation $\phi = \tan\phi$ can be solved graphically or numerically to obtain a close value ($\phi = 7.725$ rad) which means

$$H/R = (1 - \cos\phi) \approx 0.871$$

Give points if the method is correct, depending on the value of H/R found, according to these intervals: **0.4**
$0.85 \leq H/R \leq 0.88$: *0.4 pts*
$0.5 \leq H/R < 0.85$: *0.3 pts*
$0 < H/R < 0.5$ or $H > 0.88$: *0.2 pts*
$H = 0$ or method is incorrect: *0 pts*

Solution two
relation between H and rotated angle ϕ

$$\frac{R - H}{R} = \cos\phi$$ **0.2**

obtain equation of the form

$$\frac{H}{R} = 1 - \cos\left(\frac{\sqrt{1 - (1 - H/R)^2}}{1 - H/R}\right)$$ **0.2**

Figure 3 gives a plot of $f(x) = 1 - \cos\left(\frac{\sqrt{1-(1-x)^2}}{1-x}\right)$. The goal is to find an approximate solution for the second intersection. The first intersection is discarded – it is introduced because of $\cos\phi = \cos(-\phi)$ and corresponds to a situation with $H > R$.
Realizing that there is an infinite number of solutions. **0.2**

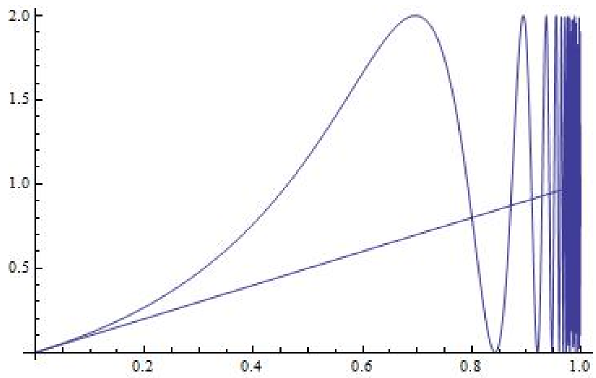


Figure 3: Plot of $f(H/R)$ and H/R

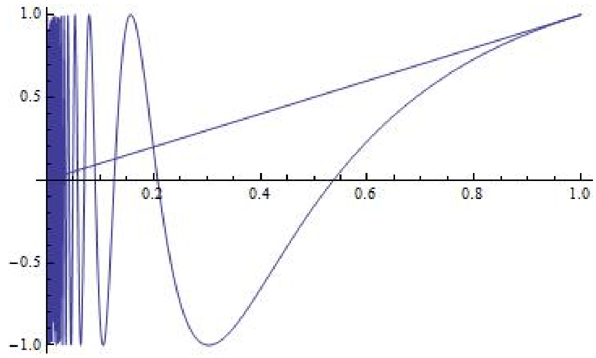


Figure 4: Plot of $g(x)$ and x

- introduce new variable $x := 1 - H/R$, so that the equation becomes

$$x = \cos(\sqrt{1-x^2}/x) =: g(x)$$

- $g(x)$ is then smaller than x up to the first solution. In particular it is negative in some region (see figure 4). Finding the third zero thus gives a lower bound for the solution:

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = 5\pi/2$$

- give lower bound

$$x = 1/\sqrt{25\pi^2/4+1} \Rightarrow H = R(1 - 1/\sqrt{25\pi^2/4+1}) \approx 0.874$$

Note: the actual result is $H/R = 0.871\ldots$.

Use the same points for the numerical answer as was mentioned in solution one. **0.4**

If the student plots f rather than g, find solution to $f = 1$: is equivalent to the solution above. *Give same number of points.*

It is also possible to use $\cos\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = \sin(1/x)$.

B8 (1.7 pt) Alice pulls the mass a distance d downwards from the equilibrium point $x = 0$, $y = 0$, and then lets it go (see figure 4).

- Give an algebraic expression of $x(t)$ and $y(t)$. You may assume that $\omega_{ss}d$ is small.
- Sketch the trajectory $(x(t), y(t))$, marking all important features such as amplitude.

Solution B8: **[1.7]**

Note: we did not specify the overall sign of the Coriolis force. Give same amount of points if using opposite convention, but it has to be consistent! Otherwise: subtract *0.1pt* for each instance of inconsistency. **-0.1**

Students are allowed to express everything in terms of ω, they don't need to write $\sqrt{k/m - \omega_{ss}^2}$ explicitly. Deduct *0.1pt* however if they use k/m instead of ω.. **-0.1**

Realize that $y(t)$ is standard harmonic oscillation:

$$y(t) = A\cos\omega t + B$$ **0.1**

Give correct constants from initial conditions

$$y(t) = -d\cos\omega t$$ **0.2**

Correct expression for $v_y(t)$:

$$v_y(t) = -d\omega\sin\omega t$$ **0.1**

Coriolis force in x-direction

$$F_x(t) = 2m\omega_{ss}v_y(t) = -2m\omega_{ss}d\omega\sin\omega t$$ **0.2**

Realize that this implies that $x(t)$ is also a harmonic oscillation… **0.1**

…but with a constant movement term superimposed: vt **0.1**

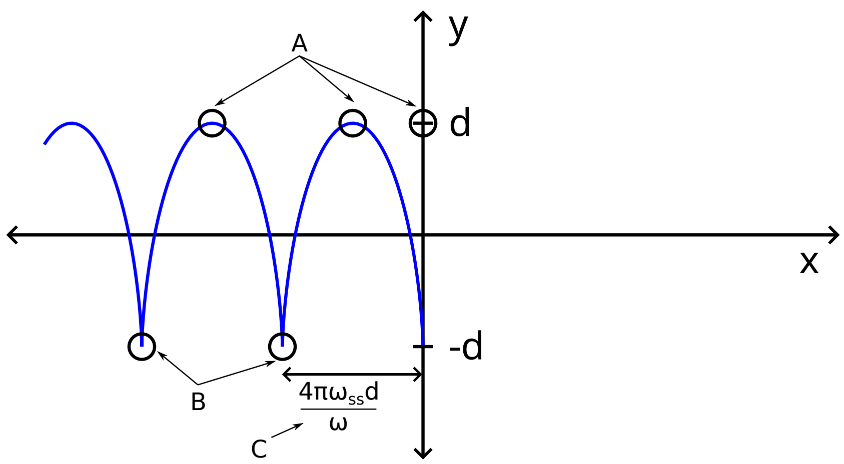
getting the correct amplitude:

$$A = \frac{2\omega_{ss}d}{\omega}$$ **0.1**

Correct answer with correct initial conditions:

$$x(t) = \frac{2\omega_{ss}d}{\omega}\sin\omega t - 2\omega_{ss}dt$$ **0.2**

Sketch:



Correct qualitative sketch:	
periodic motion	**0.1**
overall constant movement	**0.1**
B): cusps	**0.1**
And additionally correct quantitative sketch:	
A)+B): peaks and cusps are at $y = \pm d$	**0.1**
C): cusps are at distance $\Delta x = \dfrac{4\pi\omega_{ss}d}{\omega}$ from each other	**0.2**

دینامیک غیرخطی در مدارهای الکتریکی (۱۰ نمره)

قبل از شروع این مسئله راهنمایی های کلی را که در پاکت جداگانه به شما داده شده بخوانید.

مقدمه

قطعات نیمرسانای غیرخطی با دو حالت پایا (مثل تریستورها) که در این مسئله به آنها **دوپایا bistable** می‌گوییم، به طور گسترده ای در الکترونیک به عنوان سویچ و مولد نوسان های الکترومغناطیسی مورد استفاده قرار می گیرند. زمینه اولیه کاربرد تریستورها در کنترل جریان های متناوب در الکترونیک قدرتی، مثلا برای یکسو سازی جریان AC به DC در مقیاس مگاوات است.

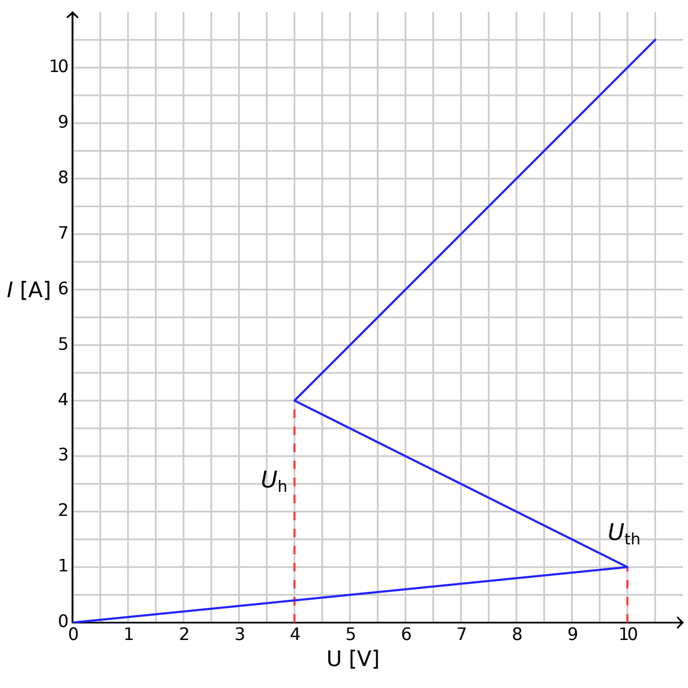
دوپایاها همچنین ممکن است برای مدل کردن پدیده های خودسامان (self-organization) در فیزیک (این موضوع در بخش B مسئله آمده است)، بیولوژی (بخش C) و در دیگر زمینه های علوم غیرخطی نوین مورد استفاده قرار گیرند.

اهداف

مطالعه ناپایداری ها و رفتار دینامیکی غیر بدیهی مدارهایی که شامل عناصری با مشخصه $I-V$ غیرخطی هستند. همچنین، کشف کاربردهای ممکن چنین مدارهایی در مهندسی و مدل کردن سیستم های بیولوژیکی.

بخش A: حالت های پایا و ناپایداری ها (۳ نمره)

شکل (1) نمودار مشخصه $I-V$ را برای یک قطعه غیر خطی X نشان می دهد, که اصطلاحا مشخصه S - شکل نامیده می شود. برای ولتاژهای بین $U_\mathrm{h} = 4.00\ \mathrm{V}$ (ولتاژ نگهدارنده) و $U_\mathrm{th} = 10.0\ \mathrm{V}$ (ولتاژ آستانه)، این نمودار مشخصه $I-V$ چند مقداری است. برای سادگی نمودار شکل (1) بصورت تکه ای-خطی در نظر گرفته شده است که در آن هر شاخه قسمتی از یک خط راست است. به طور خاص خط مربوط به شاخه بالایی اگر ادامه می یافت از مبدا عبور می کرد. این تقریب توصیف خوبی از یک تریستور واقعی می دهد.



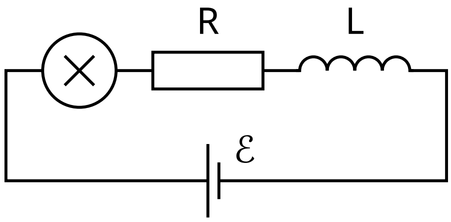
شکل (۱): نمودار مشخصه $I-V$ یک قطعه غیر خطی X

A.1 با استفاده از نمودار، مقاومت R_{on} قطعه X در شاخه بالایی نمودار مشخصه $I-V$ و همچنین R_{off} در شاخه پایینی را تعیین کنید. 0.4pt
شاخه میانی با معادله زیر توصیف می شود:

$$I = I_0 - \frac{U}{R_{\text{int}}}. \qquad (1)$$

مقادیر پارامترهای I_0 و R_{int} را بدست آورید.

قطعه X را با مقاومت R، القاگر L و منبع ولتاژ آرمانی $\mathcal{E}$ سری می کنیم (شکل۲). هر گاه جریان در زمان ثابت باشد $I(t) = \text{const}$ گوییم مدار در حالت پایا است.



شکل ۲: مدار شامل عنصر X، مقاومت R، القاگر L و منبع ولتاژ $\mathcal{E}$.

A.2 برای مقدار معین $\mathcal{E}$ و به ازای $R = 3.00\ \Omega$، چند حالت پایا در مدار شکل (۲) ممکن است وجود داشته باشد؟ به ازای $R = 1.00\ \Omega$ جواب چگونه تغییر می کند؟ 1pt

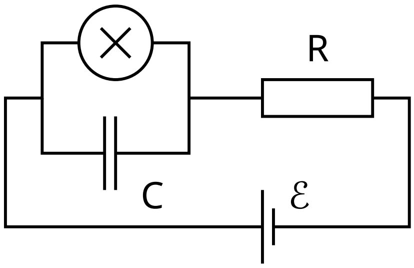
A.3 در مدار شکل (۲) فرض کنید $L = 1.00\ \mu\text{H}$, $R = 3.00\ \Omega$ و $\mathcal{E} = 15.0\ \text{V}$. مقادیر جریان $I_{\text{stationary}}$ و ولتاژ $V_{\text{stationary}}$ عنصر X در حالت پایا را محاسبه کنید. 0.6pt

فرض کنید مدار شکل(۲) در حالت تعادل قرار دارد و $I(t) = I_{\text{stationary}}$. این حالت پایا پایدار است اگر با افزودن یا کاستن جریان به مقدار بسیار کوچک، جریان دوباره به سمت مقدار تعادلی خود برگردد. بر عکس اگر تغییرات سیستم طوری باشد که از موضع تعادل دور شود به آن تعادل ناپایدار می گوییم.

A.4 از مقادیر عددی بخش A.3 استفاده کرده و پایداری حالت تعادل به ازای $I(t) = I_{\text{stationary}}$ را مطالعه کنید. تعادل پایدار است یا ناپایدار؟ 1pt

بخش B: عناصر غیر خطی دوپایا در فیزیک: فرستنده رادیویی (۵ نمره)

حال یک پیکربندی دیگر الکتریکی به صورت مدار شکل (۳) را بررسی می کنیم. این بار قطعه غیر خطی X با یک خازن به ظرفیت $C = 1.00\ \mu\text{F}$ موازی شده است. سپس این مجموعه با مقاومت $R = 3.00\ \Omega$ و منبع ولتاژ ثابت $\mathcal{E} = 15.0\ \text{V}$ سری شده است. مشاهده خواهیم کرد که این مدار دستخوش نوسان هایی می شود که در آن قطعه X در هر دوره نوسان از یک شاخه نمودار مشخصه $I-V$ به یک شاخه دیگر می پرد.



شکل ۳: مدار شامل قطعه X، مقاومت R، خازن C و منبع ولتاژ $\mathcal{E}$.

B.1	یک سیکل نوسان را در نمودار $I-V$ رسم کنید که در آن جهت (ساعتگرد یا پاد ساعتگرد) نیز مشخص باشد. جواب خود را (حتی الامکان با استفاده از معادلات و نمودارها) توجیه کنید.	1.8pt

B.2	برای هر دوره نوسان عبارت هایی برای بازه های زمانی t_1 و t_2 که سیستم در هر شاخه از نمودار مشخصه $I-V$ سپری می کند پیدا کنید و مقدار عددی آنها را به دست آورید. با فرض اینکه مدت زمان لازم برای جهش بین شاخه ها در نمودار $I-V$ قابل صرفنظر کردن باشد مقدار عددی زمان تناوب نوسان را پیدا کنید.	1.9pt

B.3	متوسط توان تلف شده P بوسیله قطعه غیرخطی را در دوره یک نوسان تخمین بزنید. فقط تعیین مرتبه بزرگی کافیست.	0.7pt

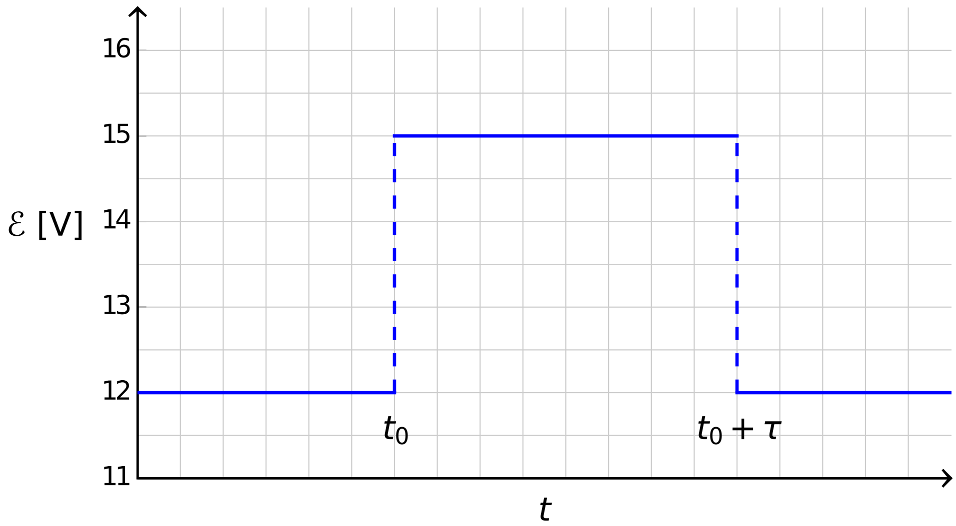
مدار شکل (۳) برای ساختن یک فرستنده رادیویی استفاده شده است. برای این منظور قطعه X به یک سر یک آنتن خطی، که یک سیم دراز و صاف به طول s است، وصل شده است. سر دیگر سیم آزاد است.در آنتن امواج ایستاده الکترومغناطیسی تشکیل می شود. سرعت انتشار امواج در طول آنتن همانند خلا است. فرستنده در هماهنگ اصلی دستگاه کار می کند که دارای دوره تناوب T مشابه سوال بخش B.2 است.

B.4	مقدار بهینه طول s چقدر است؟ فرض کنید طول آن نمی تواند بیشتر از $1\ \mathrm{km}$ باشد.	0.6pt

بخش عناصر:C غیر خطی دوپایا در بیولوژی: نوریستور (۲ نمره)

در این بخش از مسئله یکی از کاربردهای عناصر غیر خطی دوپایا برای مدل کردن فرایندهای بیولوژیکی را بررسی می کنیم. یک نورون در مغز انسان دارای این ویژگی است که وقتی بوسیله یک سیگنال خارجی تحریک می شود یک تک نوسان انجام داده و سپس به حالت اولیه خود برمی گردد. این ویژگی تحریک پذیری نامیده می شود. به دلیل این ویژگی پالس ها می توانند در شبکه ای از نورون های جفت شده که سیستم عصبی را تشکیل می دهند منتشر شوند. یک تراشه نیمه رسانا که برای شبیه سازی تحریک پذیری و نحوه انتشار پالس طراحی شده است را نوریستور می نامند (ترکیبی از کلمات نورون و ترانزیستور).

حال تلاش می کنیم با استفاده از مداری شامل قطعه X که آن را مطالعه کردیم یک نوریستور ساده طراحی کنیم. برای این منظور ولتاژ $\mathcal{E}$ در مدار شکل (۳) را به مقدار $\mathcal{E}' = 12.0\ \mathrm{V}$ کاهش می دهیم. نوسانات متوقف می شوند و سیستم به حالت تعادل می رسد. سپس سریعا ولتاژ را افزایش داده و به مقدار $\mathcal{E} = 15.0\ \mathrm{V}$ می رسانیم و بعد از مدت زمان τ (که $\tau < T$) دوباره آن را به مقدار $\mathcal{E}'$ می رسانیم (شکل ۴ را ببینید). مشاهده می کنیم که یک مقدار مشخص بحرانی $\tau_{\mathrm{crit.}}$ وجود دارد که سیستم بطور کیفی رفتارهای متفاوت برای $\tau < \tau_{\mathrm{crit}}$ و $\tau > \tau_{\mathrm{crit}}$ نشان می دهد.



شکل ۴: ولتاژ منبع ولتاژ بر حسب زمان.

C.1	برای دو حالت متفاوت $\tau < \tau_{\text{crit}}$ و $\tau > \tau_{\text{crit}}$ نمودار جریان $I_X(t)$ قطعه X را بر حسب زمان رسم کنید.	1.2pt
C.2	عبارتی برای زمان بحرانی τ_{crit} که به ازای آن نحوه رفتار دستگاه تغییر می کندبه دست آورید و مقدار عددی آن را تعیین کنید.	0.6pt
C.3	آیا مداری با $\tau = 1.00 \times 10^{-6}$ s یک نوریستور است؟	0.2pt

Problem 2 : Solution/marking scheme – Nonlinear Dynamics in Electric Circuits *(10 points)*

Part A. Stationary states and instabilities (3 points)

Solution A1: **[0.4]**

By looking at the $I-V$ graph, we obtain

$$R_{\text{off}} = 10.0\,\Omega,$$ **0.1**

$$R_{\text{on}} = 1.00\,\Omega,$$ **0.1**

$$R_{\text{int}} = 2.00\,\Omega,$$ **0.1**

$$I_0 = 6.00\,A.$$ **0.1**

Note: No penalty for the number of digits in this question

Solution A2: **[1]**

Kirchoff law for the circuit (U is the voltage of the bistable element):

$$\mathcal{E} = IR + U$$ **0.1**

This yields

$$I = \frac{\mathcal{E} - U}{R}$$ **0.1**

Hence, stationary states of the circuit are intersections of the line defined by this equation and the $I-V$ graph of X. **0.2**

For $R = 3.00\,\Omega$, one always gets exactly one intersection. **0.2**
For $R = 1.00\,\Omega$, one gets 1, 2 or 3 intersections depending on the value of $\mathcal{E}$. **0.4**
The following table summarizes the number of points granted for possible answers to the last subquestion with $R = 1.00\,\Omega$:

Possible answer	1	2	3	1,3	1,2	2,3	1,2,3
Points	0	0	0.2	0.3	0	0.2	0.4

Solution A3: **[0.6]**

The stationary state is on the intermediate branch, one can thus use the corresponding equation: **0.2**

$$I_{\text{stationary}} = \frac{\mathcal{E} - R_{\text{int}} I_0}{R - R_{\text{int}}} \qquad \mathbf{0.1}$$

$$= 3.00\,A \qquad \mathbf{0.1}$$

$$U_{\text{stationary}} = R_{\text{int}}(I_0 - I) \qquad \mathbf{0.1}$$

$$= 6.00\,V \qquad \mathbf{0.1}$$

Extra (non-physical) stationary states on the switched on and/or switched off branches lead to a penalty of 0.2 point.

Solution A4: **[1]**

Any correct modeling such as the following: **0.5**
The Kirchoff law for the circuit reads

$$\mathcal{E} = IR + U_X + L\frac{dI}{dt} = IR + (I_0 - I)R_{\text{int}} + L\frac{dI}{dt}$$

This implies

$$L\frac{dI}{dt} = \mathcal{E} - I_0 R_{\text{int}} - (R - R_{\text{int}})I$$

The separation between two cases is of importance, especially because of the relative sign of dI/dt:
If $I > I_{\text{stationary}}$, we have $dI/dt < 0$ and I decreases. **0.2**
If $I < I_{\text{stationary}}$, we have $dI/dt > 0$ and I increases. **0.2**
Note: Formulas with time derivatives are not essential, any other correct justification is accepted.
We conclude that the stationary state is stable. **0.1**

Note: The checkbox gives 0.1 points if "stable" is checked, regardless of the previous reasoning (also if there is nothing). A wrong reasoning leading to check the "unstable" option doesn't however give any point for the checkbox.

Part B. Bistable non-linear elements in physics and engineering: radio transmitter (5 points)

Solution B1: **[1.8]**

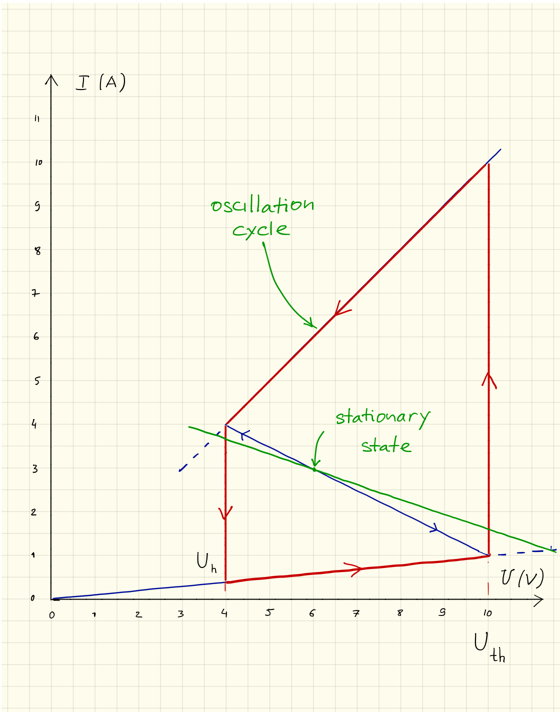
A correctly drawn cycle gives 1.2 points, distributed as follows:

- Switched on branch is part of the cycle **0.2**
- Switched off branch is part of the cycle **0.2**
- Jumps are vertical (constant U) **0.2**
- Jumps are positioned at U_h and U_{th} **0.2**
- The system moves to the left on the switched on branch **0.2**

- The system moves to the right on the switched off branch **0.2**

Each of the following observations individually gives up to 0.2 points, but their total cannot exceed 0.6:

- U constant during jumps because the charge on the capacitor cannot change instantaneously **0.2**
- The intermediate branch cannot be part of the cycle because there is a stationary state on it **0.2**
- Jumps occur at corners of the IV graph because at those points the system has nowhere else to go **0.2**
- The system moves moves to the left on the switched on branch because it approaches the stable stationary state (which is located outside the IV graph), or argument with the Kirchoff law **0.2**
- The system moves moves to the right on the switched off branch because it approaches the stable stationary state (which is located outside the IV graph), or argument with the Kirchoff law **0.2**



Solution B2: **[1.9]**

Since the non-linear element is oscillating between the switched on and switched off branches we can put $U_X = R_{\text{on/off}} I_X$. On either of the branches, the circuit behaves as a standard RC-circuit with conductance C and resistance $R_{\text{on/off}} R/(R_{\text{on/off}} + R)$ (the resistor and the element X being connected in parallel). Another way to express it is to **0.5** write the Kirchhoff law for the switched on and switched off branches

$$R_{\text{on/off}}RC\,\frac{dI_X}{dt} = \mathcal{E} - (R_{\text{on/off}} + R)I_X$$

The time constant of the circuit is

$$\frac{R_{\text{on/off}}R}{R_{\text{on/off}} + R}C.$$

If the branch in question (switched on or switched off) extended indefinitely, after a long time the system would have landed in a stationary state with the voltage

$$U_{\text{on/off}} = \frac{R_{\text{on/off}}}{R_{\text{on/off}} + R}\mathcal{E}.$$

Then, the time dependence of the voltage drop on the non-linear element is a sum of the constant term $U_{\text{on/off}}$ and of the exponentially decaying term:

$$U_X(t) = \frac{R_{\text{on/off}}}{R_{\text{on/off}} + R}\mathcal{E} + \left(U_{\text{on/off}} - \frac{R_{\text{on/off}}}{R_{\text{on/off}} + R}\mathcal{E}\right) e^{-\frac{R_{\text{on/off}}+R}{R_{\text{on/off}}RC}t}$$

There are 0.5 points distributed as follow for $U_X(t)$:

- Correct exponential **0.2**
- Correct constant term $(t \to \infty)$ **0.1**
- Correct coefficient in front of the exponential **0.1**
- Correct equation for $U_X(t)$ **0.1**

Time spent by the system on the switched on branch during one cycle:

$$t_{\text{on}} = \frac{R_{\text{on}}R}{R_{\text{on}} + R}C\,\log\left(\frac{U_{\text{th}} - U_{\text{on}}}{U_{\text{h}} - U_{\text{on}}}\right) = 2.41 \cdot 10^{-6}\,s,$$ **0.4**

Time spent by the system on the switched off branch during one cycle:

$$t_{\text{off}} = \frac{R_{\text{off}}R}{R_{\text{off}} + R}C\,\log\left(\frac{U_{\text{off}} - U_{\text{h}}}{U_{\text{off}} - U_{\text{th}}}\right) = 3.71 \cdot 10^{-6}\,s.$$ **0.4**

The total period of oscillations:

$$T = t_{\text{on}} + t_{\text{off}} = 6.12 \cdot 10^{-6}\,s$$ **0.1**

Note: Correct final answers give full points. One may earn points for intermediate steps (see above) for partial answers.

Solution B3: **[0.7]**

Neglect the energy consumed on the switched off branch. The energy consumed on the switched on branch during the cycle is estimated by

$$E = \frac{1}{R_{\text{on}}} \left(\frac{U_h + U_{th}}{2} \right)^2 t_{\text{on}} = 1.18 \cdot 10^{-4}\,\text{J}.$$ **0.4**

For the power, this gives an estimate of

$$P \sim \frac{E}{T} = 19.3\,\text{W}.$$ **0.3**

Note:

- *Formula + answer inside* $5\,\text{W} \leq P \leq 50\,\text{W}$ *give full points*
- *Formula + answer outside the range above but inside* $1\,\text{W} \leq P \leq 100\,\text{W}$ *give 0.5 points*
- *answer outside range but good formula gives 0.4 points*

Also, the proposed formula is only an example, any other reasonable approximation of the integral of the upper branch should be accepted.

Solution B4: **[0.6]**

The wave length of the radio signal is given by $\lambda = cT = 1.82 \cdot 10^3\,\text{m}$. **0.2**
The optimal length of the antenna is $\lambda/4$ (or $3\lambda/4, 5\lambda/4$ *etc.*) **0.3**
The only choice which is below $1\,\text{km}$ is $s = \lambda/4 = 459\,\text{m}$. **0.1**
Note: The correct answer $s = \lambda/4 = 459\,\text{m}$ *gives full points, and the mistake* $s = \lambda/2 = 918\,\text{m}$ *only 0.4 pts.*

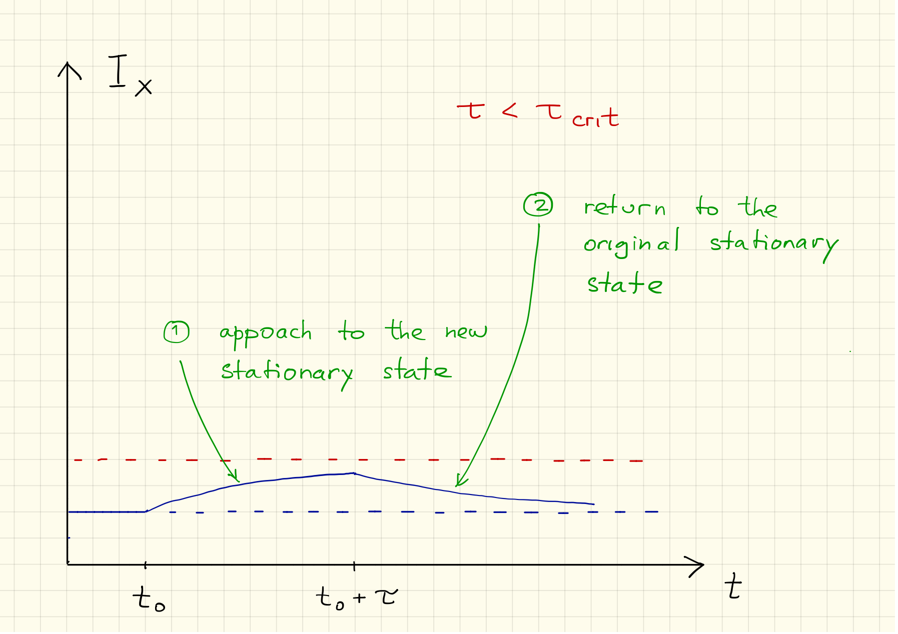
Part C. Bistable non-linear elements in biology: neuristor (2 points)

Solution C1: **[1.2]**

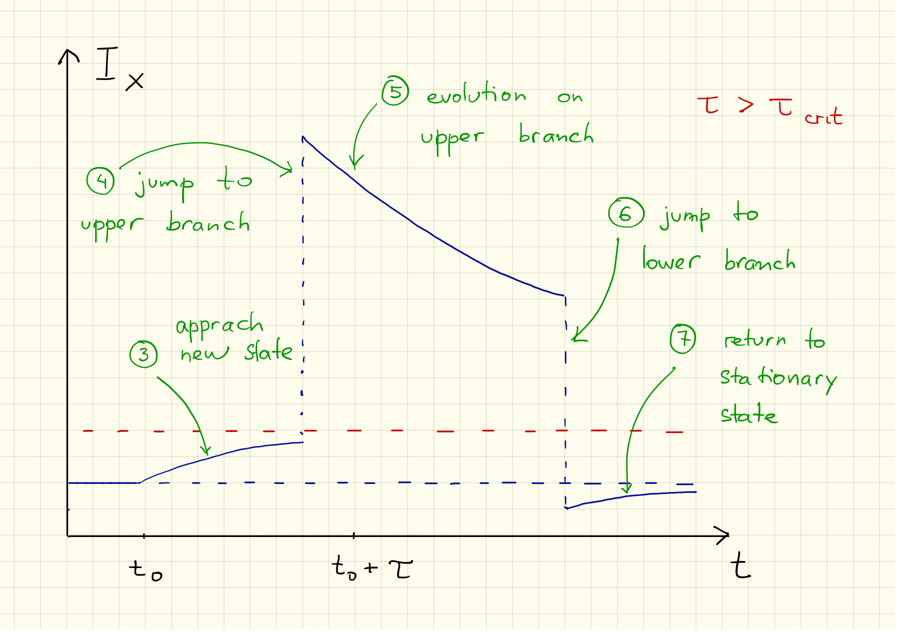
For $\tilde{\mathcal{E}} = 12.0\,\text{V}$, the steady state of the system is located on the switched off branch:

$$\tilde{U} = \frac{R_{\text{off}}}{R + R_{\text{off}}} \tilde{\mathcal{E}} = 9.23\,\text{V}.$$

When the voltage is increased to $\mathcal{E} = 15.0\,\text{V}$, the system starts moving to the right along the switched off branch (in the same way it did in task **B**).
If the voltage drops again before the system reaches the threshold voltage, it will simply return to the stationary state.
If system reaches the threshold voltage, it will jump to the switched on branch, and it will make one oscillations (since $\tau < T$) before the voltage drops again and it returns to the stationary state.



1. Approach to the new stationary state **0.2**
2. Return to the old stationary state **0.2**



3. Approach to the new stationary state **0.1**
4. Jump to the upper branche before $t_0 + \tau$ **0.2**
5. Evolution on the upper branch **0.2**
6. Jump to the lower branche below the old stationary state **0.1**
7. Return to the old stationary state (from below) **0.2**

Solution C2: **[0.6]**

The time needed to reach the threshold voltage is given by

$$\tau_{\text{crit}} = \frac{R_{\text{off}} R}{R_{\text{off}} + R} C \log\left(\frac{U_{\text{off}} - \tilde{U}}{U_{\text{off}} - U_{\text{th}}}\right) = 9.36 \cdot 10^{-7}\, s.$$

Note: This is the same formula as for t_{off} in task **B2**, with U_h replaced by $\tilde{U}$.

- Correct time constant **0.2**
- Correct choice of voltages **0.2**
- Correct final formula **0.1**
- Correct numerical value **0.1**

Note: Correct final answers give full points. One may earn points for intermediate steps (see above) for partial answers.

Solution C3: **[0.2]**

Since $\tau > \tau_{\text{crit}}$, the system will make one oscillation. We conclude that the system is a neuristor. **0.2**

Note: 0.2 are given only if "Yes" is checked, regardless of the development of the other tasks.

برخورد دهنده بزرگ هادرونی (۱۰ نمره)

لطفاً قبل از شروع، راهنمایی‌های کلی موجود در پاکت جداگانه را بخوانید.

هدف این مسئله، توضیح فیزیک شتاب‌دهنده ذرات LHC در سرن (CERN) است. سرن بزرگترین آزمایشگاه فیزیک ذرات است که هدف آن به دست آوردن توصیفی از قوانین بنیادی طبیعت است. دو باریکه از ذرات تا انرژی‌های بسیار زیاد شتاب داده می‌شوند، به وسیله‌ی یک میدان مغناطیسی قوی درون حلقه‌ی شتاب‌دهنده هدایت می‌شوند و سرانجام به یکدیگر برخورد داده می‌شوند. پروتون ها به طور یکنواخت در محیط شتاب دهنده توزیع نشده اند، بلکه در قالب دسته های مجزا (bunches) خوشه بندی شده اند. ذرات پدید آمده در برخورد توسط آشکارسازهای بزرگ مشاهده می‌شوند. برخی از مشخصه‌های LHC در جدول ۱ آمده است.

حلقه‌ی LHC	
محیط حلقه	$26659\ \mathrm{m}$
تعداد دسته ها در یک باریکه‌ی پروتون	2808
تعداد پروتون‌ها در هر دسته	1.15×10^{11}
باریکه پروتون	
انرژی اسمی پروتون‌ها	$7.00\ \mathrm{TeV}$
انرژی ذرات برخورد کننده در چارچوب مرکز جرم	$14.0\ \mathrm{TeV}$

جدول ۱: مقادیر عددی نوعی پارامترهای مهم LHC

واحدهای رایج میان فیزیک‌دانان ذرات برای کمیت‌های انرژی، تکانه و جرم به کار می‌برند با واحدهای معمول تفاوت دارد. واحد انرژی eV است. بنا به تعریف $1\ \mathrm{eV}$ مقدار انرژی است که ذره‌ای با بار بنیادی e هنگامی که در اختلاف پتانسیل یک ولت شتاب می‌گیرد به دست می‌آورد: $1\ \mathrm{eV} = 1.602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{kg\,m^2/s^2}$.

واحد تکانه eV/c و واحد جرم eV/c^2 است که c سرعت نور در خلاء است. از آنجا که $1\ \mathrm{eV}$ مقدار انرژی بسیار کوچکی است، فیزیکدانان ذرات اغلب از $1\ \mathrm{MeV} = 10^6\ \mathrm{eV}$، $1\ \mathrm{GeV} = 10^9\ \mathrm{eV}$ یا $1\ \mathrm{TeV} = 10^{12}\ \mathrm{eV}$ استفاده می‌کنند.

بخش A در باره شتاب دادن پروتون ها یا الکترون ها است. بخش B به شناسایی ذراتی که در برخوردهای سرن خلق می شوند، می پردازد.

قسمت A. شتاب دهنده‌ی LHC (۶ نمره)

شتاب دادن :

فرض کنید پروتون‌ها توسط ولتاژ V شتاب داده شده اند به طوری که سرعت آن‌ها به سرعت نور خیلی نزدیک است. از اتلاف انرژی پروتون‌ها در اثر تابش و برخورد با ذرات دیگر سر راه صرفنظر کنید.

A.1	عبارتی برای سرعت نهایی پروتون ها، v، به عنوان تابعی از ولتاژ V، که باعث شتاب دادن آن ها می‌شود و ثابت‌های فیزیکی به دست آورید.	0.7pt

در سرن طرحی برای آزمایش های آینده در نظر است که در آنها پروتون‌های شتاب داده شده در LHC با الکترون‌هایی با انرژی $60.0\ \mathrm{GeV}$ برخورد داده شوند.

A.2	برای ذرات پر انرژی و دارای جرم سکون کم، انحراف نسبی سرعت نهایی v از سرعت نور، $\Delta = (c - v)/c$، بسیار کوچک است. تقریب مناسبی برای Δ به کار ببرید و Δ را با استفاده از مقدار ولتاژ و ثابت های فیزیکی برای الکترون‌هایی با انرژی $60.0\ \mathrm{GeV}$ حساب کنید.	0.8pt

اکنون به پروتون‌ها در LHC برگردیم. فرض کنید لوله‌ای که باریکه‌ی پروتونی داخل آن حرکت می‌کند دایره‌ای شکل است.

A.3	عبارتی برای میدان مغناطیسی یکنواخت B که لازم است تا باریکه‌ی پروتونی را در یک مسیر دایره‌ای نگه دارد بر حسب انرژی پروتون E، محیط دایره L و اعداد و ثابت‌های بنیادی به دست آورید. می‌توانید تقریب‌های مناسبی به کار برید به شرطی که اثرشان کوچکتر از اثر خطای موجود در عددی که دارای کمترین تعداد ارقام معنی‌دار است، باشد. مقدار عددی میدان مغناطیسی B را برای پروتونی با انرژی $E = 7.00\ \mathrm{TeV}$ به دست آورید. از برهم کنش میان پروتون ها چشم بپوشید.	1.0pt

توان تابش شده:

یک ذره‌ی باردار شتابدار، با گسیل امواج الکترومغناطیسی انرژی تابش می‌کند. توان تابش شده P_{rad} ذره‌ی بارداری که با سرعت زاویه‌ای ثابت بر یک مسیر دایره‌ای می‌چرخد فقط بستگی به شتاب ذره a، بار ذره q، سرعت نور c و ضریب گذردهی خلاء ε_0 دارد.

A.4	با استفاده از تحلیل ابعادی عبارتی برای توان تابش شده، P_{rad}، به دست آورید.	1.0pt

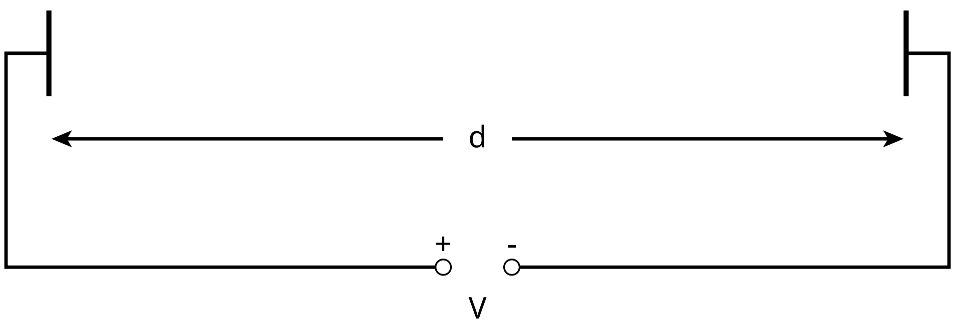
فرمول دقیق توان تابش شده شامل ضریب $1/(6\pi)$ است. همچنین با تحلیل کاملا نسبیتی مسئله یک ضریب γ^4 نیز ظاهر می‌شود که $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$.

A.5	با استفاده از داده های جدول ۱ و تقریب های مناسب، توان تابشی کل P_{tot} را برای LHC در شرایطی که در آن پروتون ها انرژی $E = 7.00\ \mathrm{TeV}$ دارند، حساب کنید.	1.0pt

شتاب دهنده خطی

در سرن، در ابتدا پروتون‌های ساکن در یک شتابدهنده‌ی خطی به طول $d = 30.0\ \mathrm{m}$ با اختلاف پتانسیل $V = 500\ \mathrm{MV}$ شتاب داده می شوند. فرض کنید میدان الکتریکی همگن است و یک شتاب دهنده خطی اساسا از دو صفحه موازی مطابق شکل ۱ ساخته شده است.

A.6	مدت زمان T که پروتون‌ها از ناحیه‌ی شامل میدان الکتریکی عبور می‌کنند، چقدر است؟	1.5pt



شکل ۱: طرحواره‌ای از یک دستگاه شتابدهنده خطی

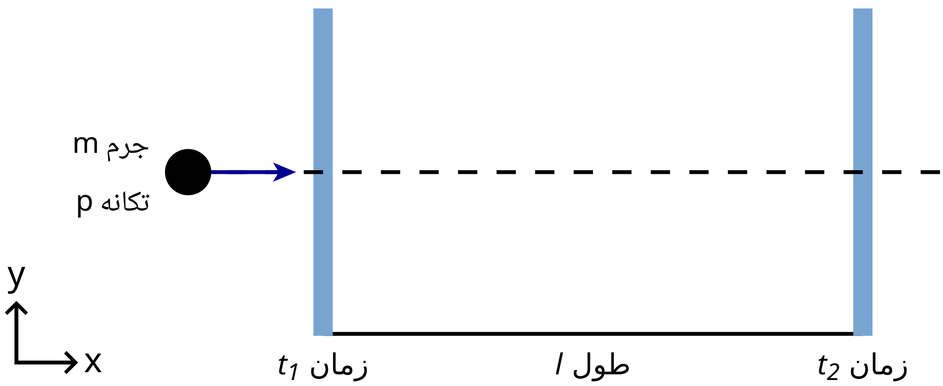
قسمت B . شناسایی ذرات تولید شده (۴ نمره)

زمان پرواز:

برای تعبیر بر همکنش ها، شناسایی ذرات پر انرژی تولید شده در برخوردها اهمیت دارد. یک روش ساده، اندازه‌گیری زمان t است که ذره‌ای با تکانه‌ی معلوم فاصله‌ی l را در یک آشکارساز زمان پرواز (ToF)، طی می‌کند. برخی از ذراتی که در آشکارساز شناسایی می‌شوند به همراه جرمشان در جدول ۲ فهرست شده‌اند.

ذره	جرم $[\mathrm{MeV}/c^2]$
دوترون	1876
پروتون	938
کائون باردار	498
پیون باردار	140
الکترون	0.511

جدول ۲ - چند ذره مهم و جرم‌هایشان

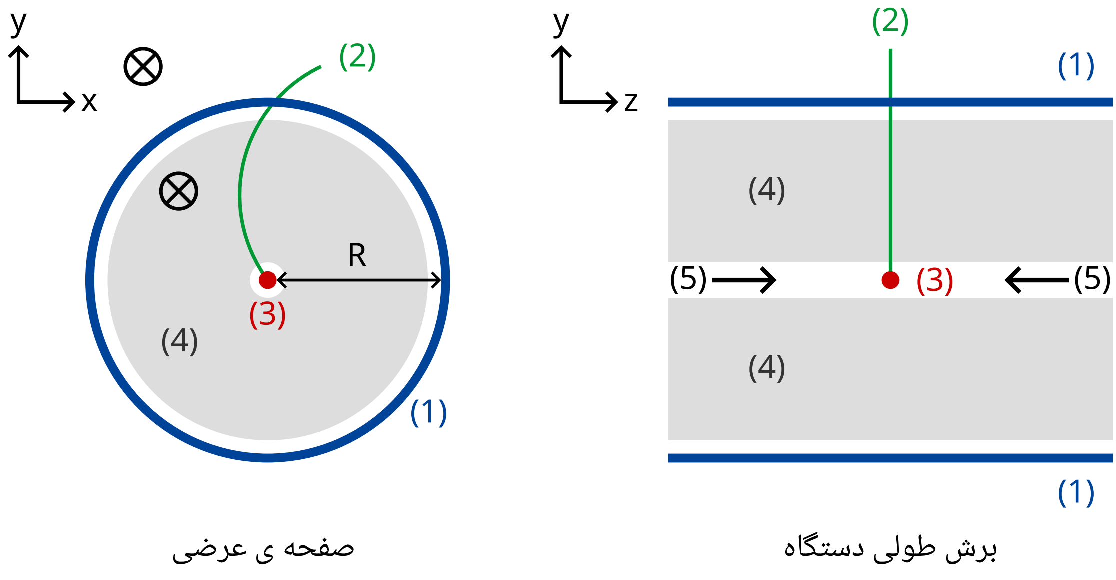


شکل ۲: طرحواره‌ای از یک آشکارساز زمان پرواز

B.1	جرم ذره، m را بر حسب تکانه‌ی p، طول پرواز l و زمان پرواز t بیان کنید. فرض کنید ذرات بار بنیادی e دارند و با سرعت نزدیک نور بر روی یک مسیر مستقیم در آشکار ساز ToF حرکت می‌کنند به طوری که مسیر آنها بر دو صفحه‌ی آشکارسازی عمود است (شکل ۲ را ببینید).	0.8pt

B.2	کمینه طول l در یک آشکار ساز ToF را طوری به دست آورید که یک کائون و یک پیون با تکانه‌ی یکسان $1.00\ \mathrm{GeV/c}$ از یکدیگر قابل تمیز باشند. برای یک تمیز خوب لازم است اختلاف زمان پرواز آن دو، بیش از سه برابر زمان قابل تفکیک دستگاه (زمان رزولوشن آشکارساز) باشد. زمان قابل تفکیک نوعی در یک آشکارساز ToF $150\ \mathrm{ps}\ (1\ \mathrm{ps} = 10^{-12}\ \mathrm{s})$ است.	0.7pt

در ادامه، ذرات تولید شده در یک آشکارساز نوعی LHC در یک فرایند دو مرحله‌ای مرکب از یک ردیاب مسیر و یک آشکارساز ToF شناسایی می‌شوند. شکل ۳ نماهای طولی و عرضی که به ترتیب در صفحه‌ی شامل مسیر پروتون‌ها و در صفحه‌ی عمود بر مسیر حرکت پروتون‌ها است را نشان می‌دهد. هر دو آشکارساز شامل محفظه هایی استوانه ای هستند که ناحیه‌ی برهم‌کنش را احاطه کرده اند. محفظه ردیاب، مسیر یک ذره‌ی باردار تولید شده را ردیابی می کند. میدان مغناطیسی در محفظه ردیاب موازی امتداد باریکه‌ی پروتونی طراحی شده است. با استفاده از شعاع مسیر، r تکانه‌ی عرضی p_T ذره قابل تعیین است. چون زمان برخورد معلوم است، آشکارساز ToF فقط به یک محفظه بیرونی برای سنجش زمان پرواز نیاز دارد. این محفظه ToF درست بعد از اتاقک ردیاب مسیر قرار دارد. برای سهولت در این قسمت از مسئله فرض کنید همه‌ی ذرات خلق شده در برخورد، عمود بر امتداد حرکت باریکه‌ی پروتون حرکت می‌کنند، به عبارت دیگر همه ذرات تولید شده تکانه‌ی طولی در امتداد مسیر باریکه پروتونی ندارند.



(۱) - محفظه ی ToF
(۲) - مسیر ذرات خلق شده
(۳) - نقطه‌ی برخورد
(۴) محفظه ردیابی
شکل ۳: طرحواره‌ای از آزمایش شناسایی ذرات، شامل اتاقک ردیابی و یک آشکارساز ToF که هر دو محفظه استوانه ای شکل‌اند و نقطه‌ی برخورد را که درست در وسط آن‌ها واقع است، احاطه کرده اند. چپ: نمای عرضی عمود بر امتداد باریکه، راست: نمای طولی موازی امتداد باریکه. ذره‌ی حاصل از برخورد عمود بر امتداد باریکه حرکت می‌کند.

B.3	جرم ذره را به عنوان تابعی از اندازه میدان مغناطیسی، B، شعاع محفظه ی ToF ، R، ثابت‌های بنیادی و کمیت‌های اندازه‌گیری شده شعاع r مسیر و زمان پرواز t بیان کنید.	1.7pt

ما چهار ذره‌ی مختلف را آشکار کرده‌ایم و می‌خواهیم آن‌ها را شناسایی کنیم. میدان مغناطیسی در آشکارساز مسیر را برابر $B = 0.500\ \mathrm{T}$ و

شعاع R آشکارساز ToF را برابر $3.70\ \mathrm{m}$ بگیرید. نتایج در جدول زیر ثبت شده است ($1\ \mathrm{ns} = 10^{-9}\ \mathrm{s}$).

ذره	شعاع مسیر r [m]	زمان پرواز t [ns]
A	5.10	20
B	2.91	14
C	6.06	18
D	2.32	25

B.4	با محاسبه‌ی جرم هر یک ذرات آن‌ها را شناسایی کنید.	0.8pt

Problem 3 : Solution/marking scheme – Large Hadron Collider *(10 points)*

Part A. LHC Accelerator (6 points)

A1 (0.7 pt) Find the exact expression for the final velocity v of the protons as a function of the accelerating voltage V, and fundamental constants.

Solution A1: **[0.7]**

Conservation of energy:

$$m_p \cdot c^2 + V \cdot e = m_p \cdot c^2 \cdot \gamma = \frac{m_p \cdot c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$ **0.5**

Penalties

No or incorrect total energy **-0.3**

Missing rest mass **-0.2**

Solve for velocity:

$$v = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{m_p \cdot c^2}{m_p \cdot c^2 + V \cdot e}\right)^2}$$ **0.2**

---

without proton rest mass: **[0.5]**

$$V \cdot e \simeq m_p \cdot c^2 \cdot \gamma = \frac{m_p \cdot c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$ **0.3**

Solve for velocity:

$$v = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{m_p \cdot c^2}{V \cdot e}\right)^2}$$ **0.2**

Classical solution: **[0.2]**

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot V}{m_p}}$$ **0.2**

A2 (0.8 pt) For particles with high energy and low rest mass the relative deviation $\Delta = (c - v)/c$ of the final velocity v from the speed of light is very small. Find a suitable approximation for Δ and calculate Δ for electrons with an energy of 60.0 GeV.

Solution A2: **[0.8]**

velocity (from previous question):

$$v = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{m_e \cdot c^2}{m_e \cdot c^2 + V \cdot e}\right)^2} \quad \text{or} \quad c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{m_e \cdot c^2}{V \cdot e}\right)^2}$$ **0.1**

relative difference:

$$\Delta = \frac{c - v}{c} = 1 - \frac{v}{c}$$ **0.1**

$$\rightarrow \Delta \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{m_e \cdot c^2}{m_e \cdot c^2 + V \cdot e}\right)^2 \quad \text{or} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{m_e \cdot c^2}{V \cdot e}\right)^2$$ **0.4**

relative difference

$$\Delta = 3.63 \cdot 10^{-11}$$ **0.2**

---

classical solution gives no points **0.0**

A3 (1.0 pt) Derive an expression for the uniform magnetic flux density B necessary to keep the proton beam on a circular track. The expression should only contain the energy of the protons E, the circumference L, fundamental constants and numbers. You may use suitable approximations if their effect is smaller than the precision given by the least number of significant digits. Calculate the magnetic flux density B for a proton energy of $E = 7.00$ TeV.

Solution A3: **[1.0]**

Balance of forces:

$$\frac{\gamma \cdot m_p \cdot v^2}{r} = \frac{m_p \cdot v^2}{r \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = e \cdot v \cdot B \qquad \textbf{0.3}$$

In case of a mistake, partial points can be given for intermediate steps (up to max 0.2). Examples:

Example: Lorentz force **0.1**

Example: $\frac{\gamma \cdot m_p \cdot v^2}{r}$ **0.1**

Energy:

$$E = (\gamma - 1) \cdot m_p \cdot c^2 \simeq \gamma \cdot m_p \cdot c^2 \to \gamma = \frac{E}{m_p c^2}$$

Therefore:

$$\frac{E \cdot v}{c^2 \cdot r} = e \cdot B \qquad \textbf{0.3}$$

With

$$v \simeq c \quad \text{and} \quad r = \frac{L}{2\pi}$$

follows:

$$\to B = \frac{2\pi \cdot E}{e \cdot c \cdot L} \qquad \textbf{0.2}$$

Solution:

$$B = 5.50\mathrm{T} \qquad \textbf{0.2}$$

Penalty for < 2 or > 4 significant digits **-0.1**

Calculation without approximations is also correct but does not give more points

$$B = \frac{2\pi \cdot m_p \cdot c}{e \cdot L} \cdot \sqrt{\left(\frac{E}{m_p \cdot c^2}\right)^2 - \left(1 + \frac{m \cdot c^2}{E}\right)^2} \qquad \textbf{0.5}$$

Penalty for each algebraic mistake **-0.1**

Classical calulation gives completely wrong result and maximum 0.3 pt **[0.3]**

$$\frac{m_p \cdot v^2}{r} = e \cdot v \cdot B \qquad \textbf{0.1}$$

$$B = \frac{2\pi}{L \cdot e}\sqrt{2 \cdot m_p \cdot E} \qquad \textbf{0.1}$$

$$B = 0.0901\mathrm{T}$$	**0.1**
Penalty for < 2 or > 4 significant digits	**-0.1**

A4 (1.0 pt) An accelerated charged particle radiates energy in the form of electromagnetic waves. The radiated power P_{rad} of a charged particle that circulates with a constant angular velocity depends only on its acceleration a, its charge q, the speed of light c and the permittivity of free space ϵ_0. Use a dimensional analysis to find an expression for the radiated power P_{rad}.

Solution A4: **[1.0]**

Ansatz:

$$P_{rad} = a^\alpha \cdot q^\beta \cdot c^\gamma \cdot \epsilon_0^\delta \qquad \textbf{0.2}$$

Dimensions: [a]=ms^{-2}, [q]=C=As, [c]=ms^{-1},[ϵ_0]=As(Vm)$^{-1}$=A^{2}s^2(Nm^2)$^{-1}$=A^{2}s^4(kgm^3)$^{-1}$

All dimensions correct **0.3**

Three dimensions correct **0.2**

Two dimensions correct **0.1**

---

if dimensions: N and Coulomb [ϵ_0]= C^2(Nm^2)$^{-1}$

$$\frac{\mathrm{m}^\alpha}{\mathrm{s}^{2\alpha}} \cdot \mathrm{C}^\beta \cdot \frac{\mathrm{m}^\gamma}{\mathrm{s}^\gamma} \cdot \frac{\mathrm{C}^{2\delta}}{\mathrm{N}^\delta \cdot \mathrm{m}^{2\delta}} = \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \textbf{0.1}$$

From this follows:

$$\mathrm{N} :\to \delta = -1, \quad \mathrm{C} :\to \beta + 2 \cdot \delta = 0, \quad \mathrm{m} :\to \alpha + \gamma - 2\delta = 1, \quad \mathrm{s} :\to 2 \cdot \alpha + \gamma = 1 \qquad \textbf{0.2}$$

Two equations correct **0.1**

And therefore:

$$\to \alpha = 2, \beta = 2, \gamma = -3, \delta = -1 \qquad \textbf{0.1}$$

---

if dimensions: N and As [ϵ_0]=A^{2}s^2(Nm^2)$^{-1}$

$$\frac{\mathrm{m}^\alpha}{\mathrm{s}^{2\alpha}} \cdot \mathrm{A}^\beta \cdot \mathrm{s}^\beta \cdot \frac{\mathrm{m}^\gamma}{\mathrm{s}^\gamma} \cdot \frac{\mathrm{A}^{2\delta} \cdot \mathrm{s}^{2\delta}}{\mathrm{N}^\delta \cdot \mathrm{m}^{2\delta}} = \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \textbf{0.1}$$

From this follows:

$$N :\to \delta = -1, \quad \mathrm{A} :\to \beta + 2 \cdot \delta = 0, \quad \mathrm{m} :\to \alpha + \gamma - 2\delta = 1, \quad \mathrm{s} :\to -2 \cdot \alpha + \beta - \gamma + 2\delta = -1 \qquad \textbf{0.2}$$

Two equations correct **0.1**

And therefore:

$$\to \alpha = 2, \beta = 2, \gamma = -3, \delta = -1 \qquad \textbf{0.1}$$

---

if dimensions: kg and As [ϵ_0]=A^{2}s^4(kg$\cdot$ m^3)$^{-1}$

$$\frac{\mathrm{m}^\alpha}{\mathrm{s}^{2\alpha}} \cdot \mathrm{A}^\beta \cdot \mathrm{s}^\beta \cdot \frac{\mathrm{m}^\gamma}{\mathrm{s}^\gamma} \cdot \frac{\mathrm{A}^{2\delta} \cdot \mathrm{s}^{4\delta}}{\mathrm{kg}^\delta \cdot \mathrm{m}^{3\delta}} = \frac{\mathrm{kg} \cdot m^2}{s^3} \qquad \textbf{0.1}$$

From this follows:

$$\text{kg} :\rightarrow \delta = -1, \quad \text{A} :\rightarrow \beta + 2 \cdot \delta = 0, \quad \text{m} :\rightarrow \alpha + \gamma - 3\delta = 2, \quad \text{s} :\rightarrow -2 \cdot \alpha + \beta - \gamma + 4\delta = -3$$ **0.2**

Two equations correct **0.1**

And therefore:

$$\rightarrow \alpha = 2, \beta = 2, \gamma = -3, \delta = -1$$ **0.1**

Radiated Power:

$$P_{rad} \propto \frac{a^2 \cdot q^2}{c^3 \cdot \epsilon_0}$$ **0.1**

Other solutions with other units are possible and are accepted
No solution but realise that unit of charge must vanish $\beta = 2\delta$ **0.2**

A5 (1.0 pt) Calculate the total radiated power P_{tot} of the LHC for a proton energy of $E = 7.00$ TeV (Note table 1). You may use appropriate approximations.

Solution A5: **[1.0]**

Radiated Power:

$$P_{rad} = \frac{\gamma^4 \cdot a^2 \cdot e^2}{6\pi \cdot c^3 \cdot \epsilon_0}$$ **0.1**

Energy:

$$E = (\gamma - 1)m_p \cdot c^2 \quad \text{or equally valid} \quad E \simeq \gamma \cdot m_p \cdot c^2$$ **0.2**

Acceleration:

$$a \simeq \frac{c^2}{r} \quad \text{with} \quad r = \frac{L}{2\pi}$$ **0.2**

Therefore:

$$P_{rad} = (\frac{E}{m_p c^2} + 1)^4 \cdot \frac{e^2 \cdot c}{6\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \quad \text{or} \quad (\frac{E}{m_p c^2})^4 \cdot \frac{e^2 \cdot c}{6\pi\epsilon_0 \cdot r^2}$$ **0.3**

$$(\text{not required } P_{rad} = 7.94 \cdot 10^{-12}\text{W})$$

Total radiated power:

$$P_{tot} = 2 \cdot 2808 \cdot 1.15 \cdot 10^{11} \cdot P_{rad} = 5.13\text{kW}$$ **0.2**

penalty for missing factor 2 (for the two beams): **-0.1** **-0.1**
penalty for wrong numbers 2808 and/or $1.15 \cdot 10^{11}$ (numbers come from table 1): **-0.1** **-0.1**

A6 (1.5 pt) Determine the time T that the protons need to pass through this field.

Solution A6: **[1.5]**

2nd Newton's law

$$F = \frac{dp}{dt} \quad \text{leads to} \qquad \mathbf{0.2}$$

$$\frac{V \cdot e}{d} = \frac{p_f - p_i}{T} \text{ with } p_i = 0 \qquad \mathbf{0.3}$$

Conservation of energy:

$$E_{tot} = m \cdot c^2 + e \cdot V \qquad \mathbf{0.2}$$

Since

$$E_{tot}^2 = (m \cdot c^2)^2 + (p_f \cdot c)^2 \qquad \mathbf{0.2}$$

$$\rightarrow p_f = \frac{1}{c} \cdot \sqrt{(m \cdot c^2 + e \cdot V)^2 - (m \cdot c^2)^2} = \sqrt{2e \cdot m \cdot V + \left(\frac{e \cdot V}{c}\right)^2} \qquad \mathbf{0.2}$$

$$\rightarrow T = \frac{d \cdot p_f}{V \cdot e} = \frac{d}{V \cdot e}\sqrt{2e \cdot m_p \cdot V + \left(\frac{e \cdot V}{c}\right)^2} \qquad \mathbf{0.3}$$

$$T = 218\text{ns} \qquad \mathbf{0.1}$$

Alternative solution **[1.5]**

2nd Newton's law

$$F = \frac{dp}{dt} \quad \text{leads to} \qquad \mathbf{0.2}$$

$$\frac{V \cdot e}{d} = \frac{p_f - p_i}{T} \text{ with } p_i = 0 \qquad \mathbf{0.3}$$

velocity from A1 or from conservation of energy

$$v = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{m_p \cdot c^2}{m_p \cdot c^2 + V \cdot e}\right)^2} \qquad \mathbf{0.2}$$

and hence for γ

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1 + \frac{e \cdot V}{m_p \cdot c^2} \qquad \mathbf{0.2}$$

$$\rightarrow p_f = \gamma \cdot m_p \cdot v = \left(1 + \frac{e \cdot V}{m_p \cdot c^2}\right) \cdot m_p \cdot c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{m_p \cdot c^2}{m_p \cdot c^2 + V \cdot e}\right)^2} \qquad \mathbf{0.2}$$

$$\rightarrow T = \frac{d \cdot p_f}{V \cdot e} = \frac{d \cdot m_p \cdot c}{V \cdot e} \cdot \sqrt{\left(\frac{m_p \cdot c^2 + e \cdot V}{m_p \cdot c^2}\right)^2 - 1} = \frac{d}{V \cdot e}\sqrt{2e \cdot m_p \cdot V + \left(\frac{e \cdot V}{c}\right)^2} \qquad \mathbf{0.3}$$

$$T = 218\text{ns} \qquad \mathbf{0.1}$$

Alternative solution: integrate time **[1.5]**

Energy increases linearly with distance x

$$E(x) = \frac{e \cdot V \cdot x}{d}$$ **0.2**

$$t = \int dt = \int_0^d \frac{dx}{v(x)}$$ **0.2**

$$v(x) = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{m_p \cdot c^2}{m_p \cdot c^2 + \frac{e \cdot V \cdot x}{d}}\right)^2} = c \cdot \frac{\sqrt{\left(m_p \cdot c^2 + \frac{e \cdot V \cdot x}{d}\right)^2 - (m_p \cdot c^2)^2}}{m_p \cdot c^2 + \frac{e \cdot V \cdot x}{d}}$$

$$= c \cdot \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{e \cdot V \cdot x}{d \cdot m_p \cdot c^2}\right)^2 - 1}}{1 + \frac{e \cdot V \cdot x}{d \cdot m_p \cdot c^2}}$$ **0.2**

$$\text{Substitution} : \xi = \frac{e \cdot V \cdot x}{d \cdot m_p \cdot c^2} \qquad \frac{d\xi}{dx} = \frac{e \cdot V}{d \cdot m_p \cdot c^2}$$ **0.2**

$$\to t = \frac{1}{c} \int_0^b \frac{1 + \xi}{\sqrt{(1 + \xi)^2 - 1}} \frac{d \cdot m_p \cdot c^2}{e \cdot V} d\xi \qquad b = \frac{e \cdot V}{m_p \cdot c^2}$$ **0.2**

$$1 + \xi := \cosh(s) \qquad \frac{d\xi}{ds} = \sinh(s)$$ **0.1**

$$t = \frac{m_p \cdot c \cdot d}{e \cdot V} \int \frac{\cosh(s) \cdot \sinh(s) ds}{\sqrt{\cosh^2(s) - 1}} = \frac{m_p \cdot c \cdot d}{e \cdot V} [\sinh(s)]_{b_1}^{b_2}$$ **0.2**

$$\text{with} \quad b_1 = \cosh^{-1}(1), \quad b_2 = \cosh^{-1}\left(1 + \frac{e \cdot V}{m_p \cdot c^2}\right)$$ **0.1**

$$T = 218\text{ns}$$ **0.1**

Alternative: differential equation **[1.5]**

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$$ **0.2**

$$\to \frac{V \cdot e}{d} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{m \cdot a\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + m \cdot a\frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \gamma^3 \cdot m \cdot a$$ **0.4**

$$a = \ddot{s} = \frac{V \cdot e}{d \cdot m}\left(1 - \frac{\dot{s}^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$ **0.3**

$$\text{Ansatz}: \ s(t) = \sqrt{i^2 \cdot t^2 + k} - l \ \text{ with boundary conditions } s(0) = 0, v(0) = 0$$ **0.1**

$$\to s(t) = \frac{c}{V \cdot e}\left(\sqrt{e^2 \cdot V^2 \cdot t^2 + c^2 \cdot m^2 \cdot d^2} - c \cdot m \cdot d\right)$$ **0.2**

$$s = d \to T = \frac{d}{V \cdot e}\sqrt{\left(\frac{V \cdot e}{c}\right)^2 + 2V \cdot e \cdot m}$$ **0.2**

$$T = 218\text{ns}$$ **0.1**

classical solution: **[0.4]**

$$F = \frac{V \cdot e}{d} \rightarrow \text{acceleration } a = \frac{F}{m_p} = \frac{V \cdot e}{m_p \cdot d}$$ **0.1**

$$d = \frac{1}{2} \cdot a \cdot T^2 \rightarrow T = \sqrt{\frac{2d}{a}}$$ **0.1**

And hence for the time

$$T = d \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot m_p}{V \cdot e}}$$ **0.1**

$$T = 194\text{ns}$$ **0.1**

Part B. Particle identification (4 points)

B1 (0.8 pt) Express the particle rest mass m in terms of the momentum p, the flight length l and the flight time t assuming that the particles with elementary charge e travel with velocity close to c on straight tracks in the ToF detector and that it travels perpendicular to the two detection planes (see Figure 2).

Solution B1: **[0.8]**

with velocity

$$v = \frac{l}{t}$$ **0.1**

relativistic momentum

$$p = \frac{m \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$ **0.2**

gets

$$p = \frac{m \cdot l}{t \cdot \sqrt{1 - \frac{l^2}{t^2 \cdot c^2}}}$$ **0.2**

$\rightarrow$ mass

$$m = \frac{p \cdot t}{l} \cdot \sqrt{1 - \frac{l^2}{t^2 \cdot c^2}} = \frac{p}{l \cdot c} \cdot \sqrt{t^2 \cdot c^2 - l^2}$$ **0.3**

Alternative **[0.8]**

with flight distance: l, flight time t gets:

$$t = \frac{l}{(c \cdot \beta)}$$ **0.1**

relativistic momentum

$$p = \frac{m \cdot \beta \cdot c}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

therefore the velocity:

$$\beta = \frac{p}{\sqrt{m^2 \cdot c^2 + p^2}}$$ **0.2**

insert into the expression for t:

$$t = l\frac{\sqrt{m^2 \cdot c^2 + p^2}}{c \cdot p}$$ **0.2**

$\rightarrow$ mass:

$$m = \sqrt{\left(\frac{p \cdot t}{l}\right)^2 - \left(\frac{p}{c}\right)^2} = \frac{p}{l \cdot c}\sqrt{(t \cdot c)^2 - (l)^2}$$ **0.3**

---

non-relativistic solution: **[0.0]**
flight time: $t = l/v$ velocity:

$$v = \frac{p}{m} \rightarrow t = \frac{l \cdot m}{p} \quad \text{and} \quad m = \frac{p \cdot t}{l}$$

this solution gives no points **0.0**

B2 (0.7 pt) Calculate the minimal length of a ToF detector that allows to safely distinguish a charged kaon from a charged pion given both their momenta are measured to be 1.00 GeV/c. For a good separation it is required that the difference in the time-of-flight is larger than three times the time resolution of the detector. The typical resolution of a ToF detector is 150 ps (1 ps $= 10^{-12}$ s).

Solution B2: **[0.7]**

Flight time difference between kaon and pion

$$\Delta t = 450\text{ps} = 450 \cdot 10^{-12}\text{s}$$ **0.1**

Flight time difference between kaon and pion

$$\Delta t = \frac{l}{cp}(\sqrt{m_\pi^2 \cdot c^2 + p^2} - \sqrt{m_K^2 \cdot c^2 + p^2}) = 450\text{ps} = 450 \cdot 10^{-12}\text{s}$$ **0.2**

$$\rightarrow l = \frac{\Delta t \cdot p}{\sqrt{m_K^2 + p^2/c^2} - \sqrt{m_\pi^2 + p^2/c^2}}$$ **0.2**

$$\sqrt{m_K^2 + p^2/c^2} = 1.115 \text{ GeV}/c^2 \text{and} \sqrt{m_\pi^2 + p^2/c^2} = 1.010 \text{ GeV}/c^2$$

$$l = 450 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{1}{1.115 - 1.010}\text{s GeV}c^2/(\text{GeV}c)$$ **0.1**

$$l = 4285.7 10^{-12}\text{s} \cdot c = 4285.7 \cdot 10^{-12} \cdot 2.998 \cdot 10^8\text{m} = 1.28\text{m}$$ **0.1**

Penalty for < 2 or > 4 significant digits **-0.1**

Non-relativistic solution: **[0.3]**

Flight time difference between kaon and pion

$$\Delta t = \frac{l}{p}(m_K - m_\pi) = 450ps = 450 \cdot 10^{-12}\text{s}$$ **0.1**

length:

$$l = \frac{\Delta tp}{m_K - m_\Pi} = \frac{450 \cdot 10^{-12}\text{s} \cdot 1\text{GeV}/c}{(0.498 - 0.135)\text{GeV}/c^2}$$ **0.1**

$$l = 450 \cdot 10^{-12}/0.363 \cdot cs = 450 \cdot 10^{-12}/0.363 \cdot 2.998 \cdot 10^8\text{m}$$

$$l = 3716 \cdot 10^{-4}\text{m} = 0.372\text{m}$$ **0.1**

Penalty for < 2 or > 4 significant digits **-0.1**

B3 (1.7 pt) Express the particle mass as a function of the magnetic flux density B, the radius R of the ToF tube, fundamental constants and the measured quantities: radius r of the track and time-of-flight t.

Solution B3: **[1.7]**

Particle is travelling perpendicular to the beam line hence the track length is given by the length of the arc
Lorentz force → transverse momentum, since there is no longitudinal momentum, the momentum is the same as the transverse momentum
Use formula from B1 to calculate the mass
track length: length of arc

$$l = 2 \cdot r \cdot \text{asin}\frac{R}{2 \cdot r}$$ **0.5**

penalty for just taking a straight track ($l = R$) **-0.4**

partial points for intermediate steps, maximum 0.4
Lorentz force

$$\frac{\gamma \cdot m \cdot v_t^2}{r} = e \cdot v_t \cdot B \to p_T = r \cdot e \cdot B$$ **0.4**

partial points for intermediate steps, maximum 0.3
longitudinal momentum=0 $\to p = p_T$ **0.1**

momentum

$$p = e \cdot r \cdot B$$ **0.1**

$$m = \sqrt{\left(\frac{p \cdot t}{l}\right)^2 - \left(\frac{p}{c}\right)^2} = e \cdot r \cdot B \cdot \sqrt{\left(\frac{t}{2r \cdot \text{asin}\frac{R}{2r})}\right)^2 - \left(\frac{1}{c}\right)^2}$$ **0.6**

partial points for intermediate steps, maximum 0.5

Non-relativistic: track length: length of arc **[0.9]**

$$l = 2 \cdot r \cdot \text{asin}\frac{R}{2 \cdot r}$$ **0.5**

penalty for just taking a straight track ($l = R$) **-0.4**

partial points for intermediate steps, maximum 0.4

$$m = \frac{p \cdot t}{l} = \frac{e \cdot r \cdot B \cdot t}{2r \cdot \text{asin}\frac{R}{2r}} = \frac{e \cdot B \cdot t}{2 \cdot \text{asin}\frac{R}{2r}}$$ **0.4**

partial points for intermediate steps, maximum 0.3

B4 (0.8 pt) Identify the four particles by calculating their mass.

Particle	Radius r [m]	Time of flight [ns]
A	5.10	20
B	2.94	14
C	6.06	18
D	2.32	25

Solution B4: **[0.8]**

Particle	arc [m]	p $[\frac{MeV}{c}]$	p $[\frac{mkg}{s}]$ 10^{-19}	pt/l $[\frac{MeVs}{cm}]$ 10^{-6}	pt/l $[\frac{MeV}{c^2}]$	pt/l [kg] 10^{-27}	Mass $[\frac{MeV}{c^2}]$	Mass [kg] 10^{-27}
A	3.786	764.47	4.0855	4.038	1210.6	2.158	938.65	1.673
B	4.002	440.69	2.3552	1.542	462.2	0.824	139.32	0.248
C	3.760	908.37	4.8546	4.349	1303.7	2.324	935.10	1.667
D	4.283	347.76	1.8585	2.030	608.6	1.085	499.44	0.890

Particles A and C are protons, B is a Pion and D a Kaon

correct mass and identification: per particle **0.2**

penalty for correct mass but no or wrong identification **for 1 or 2 particles** **-0.1**

penalty for correct mass but no or wrong identification **for 3 or 4 particles** **-0.2**

wrong mass, correct momentum:**per particle** **0.1**

wrong momentum, correct arc **for 3 or 4 particles** **0.2**

wrong momentum, correct arc **for 1 or 2 particles** **0.1**

---

non relativistic solution $m = pt/l$ **Particle identification is not possible** **[0.4]**

Particle	arc [m]	p $[\frac{MeV}{c}]$	p $[\frac{mkg}{s}]$ 10^{-19}	$m = p \cdot t/l$ $[\frac{MeVs}{cm}]$ 10^{-6}	$m = p \cdot t/l$ $[\frac{MeV}{c^2}]$	$m = p \cdot t/l$ [kg] 10^{-27}
A	3.786	764.47	4.0855	4.038	1210.6	2.158
B	4.010	440.69	2.3552	1.542	462.2	0.824
C	3.760	908.37	4.8546	4.349	1303.7	2.324
D	4.283	347.76	1.8585	2.030	608.6	1.085

correct mass or correct momentum: **per particle** **0.1**

wrong momentum, correct arc **for 3 or 4 particles** **0.2**

wrong momentum, correct arc **for 1 or 2 particles** **0.1**