پایه‌های آنالیز ریاضی جدید

آ. دونِدو

ترجمهٔ باقر امامی

پایه‌های آنالیز ریاضی جدید

تألیف

آ. دوندو

ترجمهٔ باقر امامی

از انتشارات

وزارت علوم و آموزش عالی

۵

تهران، ۱۳۵۲

This is an authorized Persian translation of
LES BASES DE L'ANALYSE MATHÉMATIQUE MODERNE
by Alfred Doneddu.

Tehran, 1974

چاپ اول : ۱۳۵۲

توزیع کننده در سراسر کشور : شرکت سهامی کتابهای جیبی
خیابان وصال شیرازی، شمارهٔ ۲۸، تهران

با همکاری مؤسسهٔ انتشارات فرانکلین

این کتاب در دو هزار نسخه در شرکت افست (سهامی خاص)، چاپخانهٔ بیست و پنجم شهریور
چاپ وصحافی شده است.

شمارهٔ ثبت در دفتر کتابخانهٔ ملی: ۱۳۹۸ به‌تاریخ ۵۲/۹/۲۸

مقدمه

ریاضیات مدرن از این پس جای خود را در آموزش کشور ما بازیافته‌اند. آنها حتی در مطبوعات روزانهٔ ما نیز منعکس شده‌اند. ما دراین‌باره شاهد مباحثات قلمی بین نوآوران و پدران خانواده‌هایی هستیم که از نفهمیدن آنچه که تا حال به دانستن آن ایمان داشتند به طور رنج‌آوری متعجب گشته‌اند، چه اتفاق افتاده است؟

هیچ چیز. آموزش ریاضیات دبیرستانی ما در همه جای دنیا از قشرهای زمین‌شناسی متمایزی تشکیل می‌یافت که حقیقتاً هرگز درآتش عقل گداخته نشده بود. یک قشر وسیع هندسی که بوسیلهٔ یونانیها تازگی یافته بود، ولیکن به‌ندرت به دقت اقلیدس می‌رسید. یک قشر ضخیم جبر و یک جلای آنالیز ملهم از پداگوژی کلاسیک‌های قرون هفده و هجده بود. استعمال ابزار برداری مقدماتی که خیلی دیر از راه رسیده بود، و غالباً مانند یک فوق بنیان معرفی می‌شد می‌بایستی بدان افزوده گردد. این وضع است که در حال تغییر خشونت‌باری است.

ما می‌دانیم ریاضیات به اصطلاح «مدرن» هیچ چیز مدرن بخصوصی ندارد و ابزارهای اساسی آنها از یک قرن پیش فراهم آمده است ولی به یاری آنها است که ریاضیات کوشیده است وحدت خویش را بازیابد و دقت و درستی خود را مشخص سازد و به‌داشتن یک دید کلی از خودش توفیق یابد. اتفاق افتاده است که ریاضیات به طور بیش از بیش عمیقتری روی واقعیات اثر بگذارد و طرز تفکر با ارزشی برای همه: برای دانشمند فیزیک، برای مهندس، همچنین برای دانشمند اقتصاد و برای عالم علم‌الاجتماع گردیده است.

آموزش معاصر همان‌طور که گاهی تصور می‌شود در صدد آشنا کردن شاگردان به عجایب دانش این زمان نیست ــ توانایی این کار را هم ندارد ــ ولیکن در صدد است این دید کلی را که آنها نیز در آن ذیسهم هستند انتقال دهد، و بدون تجدید شرایط رنج‌آوری به آنها امکان دهد که به طور کامل در زمینه‌های مختلف زندگی عقل شرکت جویند و در ورای این

زمینه‌ها گذری نمایند.

مسلم است که بحث بر سر کارگاه عظیمی است که هنوز پایه‌های اولیهٔ آن گذاشته می‌شود. در طول قرنها عقول مآل‌اندیش در راه از بین بردن مشکلات پداگوژیک و تدوین هزارها مسئلهٔ متقن کار کرده‌اند که حل این مسائل بخودی خود هدف کار نیست، ولی به مفهوم کاملاً دقیق ورزشهایی برای فکر می‌باشند.

ما باید که ادامه این وظیفه را با دید کاملاً متفاوتی بر عهده بگیریم و برای اینکار کتابهایی برای ما لازم است که هم از دانش تئوریک و هم تجربهٔ پداگوژیک بهترین معلمین ما سرشار باشند.

آقای «دوندو» یک چنین کتابی را به‌ما عرضه می‌نماید؛ موضوع آن مفهوم عدد است که تمام ریاضیات ما بر روی آن پایه‌گذاری شده است. یکی از اشکالات اساسی پداگوژیک چنین کتابی عبارت از ساخت اعداد حقیقی است. مؤلف با اقتباس و ادامهٔ افکار «هنری له بسگ» یک روش ابتکاری و طبیعی را که به‌شمار منجر می‌شود، گسترش می‌دهد. مطلب دیگری که به‌ارزش کتاب می‌افزاید، عبارت از آزمایشی است که مؤلف با همهٔ مشکل بودنش برای ارائه کردن تئوری درست و انطباق‌پذیر زاویه‌ها به‌عمل آورده است. من اطمینان دارم که این کتاب به بسیاری از خوانندگان امکان خواهد داد که در روح دانش ما شرکت جویند، و باطن آنچه را که آقای «دوندو» کاملاً به حق «قاعدهٔ بازی» می‌نامد بفهمند، «این بازی شاهانی ریاضیات روزگار ما را».

آندره لیخنرو ویچ

از آکادمی علوم

پیشگفتار

نظریهٔ مجموعه‌ها دارای ریشه‌های بسیار کهنی است. اجداد باستانی ما مفهوم مجموعه‌را مالک بوده‌اند آنها کلکسیون‌های اشیایی از یک جنس را از قبیل مردان یک قبیله و درختان یک جنگل و غیره گرد می‌آوردند. آنها همچنین بعضی روابط مابین این اشیاء برقرار می‌نمودند، مثلاً مرد h شوهر زن f است یا درخت a بلندتر از درخت b است.

ریاضیات فعلی نیز در ابتدا با همین روش عمل می‌کند. منتها اشیایی که او بدانها می‌پردازد جنبه‌های مادی خویش را از دست داده و به موجودات مجرد و به سمبل‌ها تبدیل‌شده‌اند. مفاهیم مکاشفه‌ای و طبیعی در یک زبان روشنی تنظیم یافته‌اند و خواصی که این موجودات با آنها سازگارند مشخص گردیده‌اند. نظریه‌ای که در فلان مجموعه سمبل‌ها گسترش می‌پذیرد، می‌تواند در هر کلکسیون اشیایی که با همان خواص پایه سازگارند، بکار رود. برای نیل به تعمیم بیشتر، ریاضیات بیش از پیش انتزاعی می‌شوند و اشیاء را از هرگونه ضمایم غیر مفید پیراسته و آنها را به جوهر وجودی خالص تبدیل می‌نمایند.

به‌عنوان گزارشی از این تحول، بررسی اعداد، زمینهٔ ایده‌آلی است اولاً برای اینکه خواننده با مفهوم اعداد آشنا است، و در ثانی برای اینکه تمامی ریاضیات بر مبنای اعداد بنا شده‌اند، و برای داشتن پایه‌های استواری برای آنالیز ریاضی رکن اساسی است.

منطق فعلی ایجاب می‌نماید که ساخت انواع مختلف اعداد بدون مراجعه به مفاهیمی (ملهم از مکاشفه یا تجربه) انجام گیرد که دقیقاً از خواص موسوم به اصول که از ابتدا پذیرفته شده‌اند. نتیجه نشده باشند.

این اصول به‌نوعی یک قاعدهٔ بازی تشکیل می‌دهند که بر پایهٔ آنها تئوری بنا نهاده می‌شود با قید اینکه این اصول تخطئه نشود، و از خواصی که قبلاً پذیرفته نشده‌اند استفاده نشود.

معلوم است که پایهٔ تمامی تئوری با بررسی مجموعه N اعداد طبیعی تشکیل شده است.

اینها مانند سمبل‌های خالص از روی اصول «په‌آنو» معین شده‌اند. این سیستم مفهوم مجموعهٔ بینهایت را شامل است که از طبیعی‌ترین راه وارد و معمول گردیده است و خواص عملها بطور منطقی ازآن نتیجه شده‌اند و این اصول اولیه که شبیه بعضی موجودات فوق طبیعی به نظر می‌آیند بدین‌ترتیب از هرگونه استعاره‌ای پیراسته شده‌اند.

شمار در مبنای غیر مشخص طرحریزی شده است. دستگاه اعشاری یکی از خصوصیت‌های افراطی خودرا از دست داده است، خصوصیتی که در خیلی‌ها به وجود آورندهٔ این توهم است که عدد طبیعی عبارت از یک صورت بندی اعشاری است و آنها فراموش می‌کنند که قدیمی‌ها خواص زیادی از حساب را کشف می‌نمودند و این نمایش عددی را نمی‌دانستند. می‌دانیم که دستگاه مبنای ۲ را به علت تکنیکی مغزهای الکترونی بکار می‌برند. خود تئوری نیز از دستگاه به مبنای ۲ که بسیار مناسبتر است استفاده می‌نماید و ما این مطلب را در مورد اندازهٔ زوایا و در تئوری لگاریتمها خواهیم دید.

کسر یک سمبل جدید است که از یک زوج منتظم دو عدد طبیعی تشکیل شده است وعدد منطق مانند یک طبقه کسرهای هم ارز تعریف شده است و بنیانی که در N به وجود آمده است به مجموعهٔ Q^+ اعداد منطق مثبت به سهولت امتداد نمی‌یابد.

اعداد b-ئی عبارت از تعمیم اعداد اعشاری در یک مبنای غیر مشخص می‌باشند و مجموعهٔ Q_b^+ آنها دارای بنیان توپولژیک است که تعریف اعداد حقیقی را بدون یاری جستن از سایر اعداد منطق امکان پذیر می‌سازد.

روشهای گوناگونی برای ساخت اعداد حقیقی وجود دارد که از جمله از رشته‌های «کشی» و از مقطع‌های «ددکیند» می‌توان نام برد. آنها کلیت اعداد منطق را مورد استفاده قرار می‌دهند.

روش[۱] طرح شده در این کتاب در مرحلهٔ اول، اعداد منطق را برپایه Q_b^+ معین می‌کند. این تعریف جدید به مفهوم صورت‌بندی بی‌نهایت متناوب یک عدد منطق وابسته است. در مرحلهٔ دوم تعریف را به «سمبل‌های جدید» اعداد اصم امتداد داده‌ایم به طوریکه خلل موجود در Q_b^+ اکنون پر شده‌اند. حال به مفهوم کلی صورت‌بندی بی‌نهایت در مبنای b می‌رسیم و ترتیب در مجموعهٔ R^+ اعداد حقیقی مثبت را مانند ترتیب لغتی می‌توان تعیین نمود. بعلاوه

۱ــ روش ملهم از «له بسگ». کتاب : «دربارهٔ اندازهٔ کمیتها» (ناشر گوتیه ویلار)

اعمال معلوم در Q^+ به طور کاملاً طبیعی در R^+ امتداد می‌یابند.

و این دید امکان میدهد تا تئوری اندازهٔ کمیتها بدون اصرار روی کمیتهای «سنجش‌پذیر» و یا کمیتهای «سنجش‌ناپذیر» طرح‌ریزی شود. وقتیکه یک جمع در یک مجموعه تعریف می‌شود، مضربهای یک جزء را به راحتی می‌توان تعریف نمود، ولی بهمان نسبت هر جزء را نمیتوان بر عدد درستی تقسیم نمود.

در حقیقت وقتی عمل در یک مبنای b انجام می‌پذیرد، عدد منطق غیر متعلق به Q_b^+ در اندازهٔ کمیتها همان نقش را بازی می‌کند که عدد اصم. جز اینکه می‌خواستیم خارج قسمت دو مضرب از یک کمیت را تعریف کنیم، امتیازی وجود نداشت و این به عقیدهٔ ما مسئلهٔ اندازه را پیش نمی‌برد.

بررسی بعضی کمیتها به سبب آنکه جمع همواره معین نیست، بغرنج‌تر می‌شود و این مطلب در مورد زوایا پیش می‌آید. پس از اثبات معتبر بودن روح اصل ارشمیدس برای این کمیتها ما صورت آنرا تغییر داده‌ایم تا قابل به کار بردن در یک نیم گروه محدود باشد که در آنجا تعداد مضربهای یک جزء محدود است.

اصل نیمسازی همواره در مورد اندازه وارد گردیده است. وقتی با پایه‌های هندسه سروکار داریم مشاهده می‌شود که مفهوم وسط یک پاره خط و یا نیمساز یک زاویه اصولی را به‌طور کامل تشکیل می‌دهند که باید به‌صورتی فرموله بشوند و به طور طبیعی پای دستگاه به مبنای دو در تئوری به میان کشیده می‌شود.

مسئلهٔ قرینه پذیر کردن جمع در R^+ با همراه کردن سمبل جدید $\bar{a}$ به عدد حقیقی مثبت a و با امتداد دادن جمع به قسمی که $a + \bar{a} = 0$ باشد حل شده است. منظور امتداد دادن قانون یک نیم گروه جابجاپذیر کلاً مرتب و مجهز به یک گروه است. بنابراین به کاربردن روش عمومی بسیار بغرنج که مشتمل بر همراه کردن تمامی یک طبقه زوج های هم‌ارز به یک عدد، به منظور امکان تعیین (به همان طرز) یک طبقه از زوج‌های متقابل اولی‌ها مثمر ثمری نیست.

مفهوم ایده‌آل که در ابتدا ضمن کلیات معلوم شده است، امکان می‌دهد که آنرا در حلقهٔ Z عددهای صحیح نسبی به کار ببریم و تئوری مقسوم علیه های مشترک را با روشی عرضه کنیم که ادامه دادن آن در حلقه‌های دیگر (مثلاً حلقهٔ کثیرالجمله‌ها) امکان پذیر باشد.

تار و پودی که در بررسی عددهای طبیعی برای نمایی‌ها و لگاریتم‌ها فراهم گردیده است با روشی مشابه آنچه که در اندازهٔ کمیتها مورد استفاده قرار گرفت، در مجموعهٔ عددهای حقیقی امتداد داده شده است. برای امکان عمل در دستگاه پایهٔ دو کافی است مسجل کنیم که

هر عدد حقیقی مثبت دارای یک جذر است. بدین‌ترتیب تابع $x \to \alpha^x$ به ازای $x \in Q_2$ معین می‌گردد. عددهای منطق غیر دویی و عددهای اصم هردو یک نقش را ایفا می‌نمایند و تابع نمایی در هردو رسته به‌طور همزمان معین میشوند.

عددهای مختلط طبق یک روش ملهم از کشف تاریخی آنها وارد شده‌اند. برای اولین بار در قرن شانزدهم بود که ریاضیدانان از جذر یک عدد منفی بیمناک نشدند و با آن مانند یک عدد رفتار نمودند. پس امروز حقاً می‌توانیم خود را مصون از این ترس تصور نماییم.

پس از تعیین شرایط لازم ضرب وجمع، احساس می‌شود که مجموعهٔ C عددهای مختلط یک هیئت است و بررسی جبری را تا مدول یک عدد مختلط و تا زیر گروه U عددهای مختلط به مدول واحد امتداد می‌دهیم.

بررسی دقیق آوند یک عدد مختلط بغرنج است. این مفهوم را فقط با دخالت دادن اجزاء آنالیز می‌توان وارد نمود. این روشها از امتیاز یاری نجستن از هندسه برخوردارند و در نتیجه نیازی به اصل‌های تکمیلی وجود ندارد. ولی اگر بخواهیم تئوری را در یک زمینهٔ ابتدایی‌تری بنا کنیم که در نتیجه برای علاقه‌مندان سهل‌الوصول‌تر خواهد بود؛ در این صورت کمک گرفتن از شکل‌های هندسه ضروری است.

در این صورت لازم است قبلاً یک آکسیوماتیك از هندسهٔ مسطحه را وضع کنیم. بسط تئوری برپایهٔ یک دستگاه با حداقل اصل‌ها که از آنجا بتوان خاصیتهای فضای برداری نورمهٔ دو بعدیرا و زاویه‌های جهت‌دار را نتیجه گرفت به تنهائی مستلزم یک کتاب کامل است. ما در اینجا به وضع یک آکسیوماتیك از هندسهٔ یک بعدی و یک آکسیوماتیك از هندسهٔ زوایای جهت‌دار اکتفا نموده‌ایم. اندازهٔ زاویه‌های نقاله به دورانهای به مرکز تثبیت شده، امتداد یافته است و یك شکلی اساسی بین گروه جمعی طبقه های اعداد حقیقی مدولو 2π و زیر گروه ضربی U عددهای مختلط مدول واحد از آنجا است.

آقای پروفسور لیخنرویچ با ابراز لطف و علاقه به این کتاب، با مقدمه‌ای آنرا مزین فرموده‌اند؛ من در اینجا سپاس عمیق خویش را به حضورشان تقدیم می‌دارم.

و همچنین از مؤسسهٔ «دونو» به سبب دقتی که در چاپ این کتاب به عمل آمده است متشکرم.

آ. دوندو

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
منابع	هفده
علامتهای اصلی	نوزده
علامتهای مجموعه‌های اعداد	بیست و یک

قسمت یکم : کلیات

فصل اول : مجموعه‌ها و رابطه‌ها	**۳**
۱ــ مجموعه‌ها	۳
۲ــ رابطه‌ها	۳
۳ــ رابطهٔ گنجیدگی: بخشی از یک مجموعه	۴
۴ــ سمبلهای منطقی	۶
۵ــ خودپذیری، تقارن، سرایت‌پذیری	۷
۶ــ رابطهٔ هم‌ارزی	۹
۷ــ رابطهٔ ترتیب	۱۱
فصل دوم : قانون ترکیب	**۱۵**
۱ــ قانون ترکیب	۱۵
۲ــ فصل مشترک و اجتماع دو مجموعه	۱۶
۳ــ خواص قوانین ترکیب	۱۷
۴ــ بنیان گروه	۲۲
۵ــ توزیع پذیری	۲۴

۶ــ بنیان حلقه. بنیان هیئت ۲۷
۷ــ ایده‌آل یک حلقهٔ جابجاپذیر ۳۰
۸ــ قوانین ترکیب‌های برونی ۳۱
فصل سوم : تابعها **۳۴**
۱ــ تعریف ۳۴
۲ــ خواص عمومی ۳۵
۳ــ تناظر بین دو مجموعهٔ «اکیداً مرتب» ۳۷
۴ــ قانون ترکیب توابع ۳۸
۵ــ ترکیب دو تناظر دو سوئی ۴۰
۶ــ حالت $E=F$. مبادله. تعاکس ۴۰
۷ــ حالتی که E و F به قانونهای ترکیب درونی مجهز میباشند ۴۴

قسمت دوم : عددهای طبیعی

فصل اول : ساخت مجموعه عددهای طبیعی جمع، تفریق، نسبت ترتیب **۴۹**
۱ــ ساخت مجموعه عددهای طبیعی ۴۹
۲ــ جمع کردن اعداد طبیعی ۵۳
۳ــ تفریق، نسبت ترتیب ۵۶
۴ــ فاصله‌ها ۶۰
فصل دوم : شمارش **۶۲**
۱ــ روش شمارش ۶۲
۲ــ مجموعه‌های متناهی ۶۴
۳ــ مجموعه‌های نامتناهی ۶۸
۴ــ کوچکترین جزء . بزرگترین جزء ۶۹
۵ــ فرابند. فروبند ۷۱
فصل سوم : ضرب، مضربهای یك عدد، بخش پذیری، تقسیم اقلیدسی **۷۳**
۱ــ ضرب ۷۳
۲ــ مضربهای یک عدد. بخش پذیری ۷۹
۳ــ تقسیم اقلیدسی ۸۲

فصل چهارم: قوهٔ صحیح یك عدد طبیعی شمار ۸۴
۱ـ تعریف ۸۴
۲ـ خواص ۸۵
۳ـ شمار ۸۸
۴ـ رقم‌بندی یک عدد در مبنای b ۸۹
۵ـ نسبت ترتیب در صورت‌بندی ۹۵
فصل پنجم: مضربهای مشترك، مقسوم علیه‌های مشترك، اعداد اول ۹۸
۱ـ مضربهای مشترک ۹۸
۲ـ مضربهای مشترک چند عدد ۱۰۱
۳ـ مقسوم علیه‌های مشترك دو عدد ۱۰۳
۴ـ مقسوم علیه‌های مشترک چند عدد ۱۰۸
۵ـ اعداد اول. خواص ۱۱۰
۶ـ تجزیهٔ یک عدد به عوامل اول ۱۱۱
فصل ششم: هم‌نهشتی ۱۱۴
۱ـ تعریف و خواص ۱۱۴
۲ـ طبقات مانده‌ای مدولو n ۱۱۵
۳ـ عملیات روی هم‌نهشت‌ها ۱۱۶
۴ـ جبر طبقات مدولو n ۱۱۸

قسمت سوم: اعداد منطق مثبت

فصل اول: ساخت مجموعه اعداد منطق مثبت، نسبت ترتیب ۱۲۵
۱ـ ساخت مجموعه اعداد منطق مثبت ۱۲۵
۲ـ نسبت ترتیب در Q^+ ۱۳۰
فصل دوم: عملها در Q^+ ۱۳۶
۱ـ جمع ۱۳۶
۲ـ تفریق ۱۴۱
۳ـ ضرب ۱۴۲
۴ـ تقسیم ۱۴۷
۵ـ تراکم اعداد منطق ۱۴۹

۶ــ قسمت صحیح یک عدد منطق ۱۵۰
فصل سوم : اعداد bـئی **۱۵۲**
۱ــ اعداد bـئی ۱۵۲
۲ــ نمایش رقمی یک عدد bـئی ۱۵۶
۳ــ رابطهٔ ترتیب در صورت‌بندی bـئی ۱۵۹
۴ــ عملها در Q_b^+ ۱۶۱
فصل چهارم: تقریبات bـئی در اعداد منطق **۱۶۴**
۱ــ مقدار bـئی تقریبی در اعداد منطق ۱۶۴
۲ــ رشته مقادیر تقریبی ۱۶۷
۳ــ صورت بندی یک عدد منطق در مبنای b ۱۷۰
۴ــ بنیان توپولوژیک Q_b^+ ۱۷۶

قسمت چهارم : اعداد حقیقی مثبت

فصل اول : ساخت مجموعه اعداد حقیقی مثبت رابطه ترتیب **۱۸۱**
۱ــ جذر کامل یک عدد طبیعی ۱۸۱
۲ــ ادامهٔ تناظر $\sqrt{x} \rightleftarrows x$ ۱۸۳
۳ــ اعداد حقیقی مثبت ۱۸۶
۴ــ رابطهٔ ترتیب در R^+ ۱۹۱
فصل دوم : عملها در R^+ **۱۹۷**
۱ــ جمع ۱۹۷
۲ــ تفریق ۲۰۱
۳ــ ضرب ۲۰۲
۴ــ جذر یک عدد حقیقی ۲۰۸
۵ــ سوراخها وخلل ۲۱۰
فصل سوم : اندازهٔ کمیتها **۲۱۴**
۱ــ مثالهای کمیتها ۲۱۴
۲ــ اصول در نیم گروه مرتب E ۲۱۶
۳ــ مسئلهٔ اندازه و اصل ارشمیدس ۲۱۹
۴ــ حل مسئلهٔ اندازه در یک نیم گروه ارشمیدسی ۲۲۱

۵ــ اصل نیمسازی ($B_۴$) ۲۲۷
۶ــ اصل فقدان خلل ۲۲۹
۷ــ تغییر واحد ۲۳۱
فصل چهارم: حالتی که درآن، جمع همواره معین نیست، اندازهٔ زاویه‌ها ۲۳۵
۱ــ نیم گروه محدود ۲۳۵
۲ــ اصل ارشمیدس ۲۳۹
۳ــ زاویه‌ها ۲۴۰
۴ــ اصل نیمسازی و اندازهٔ اجزای A ۲۴۶

قسمت پنجم : اعداد نسبی

فصل اول : ساخت مجموعه اعداد نسبی عملها، رابطهٔ ترتیب ۲۵۷
۱ــ مسئلهٔ قرینه‌پذیر کردن جمع ۲۵۷
۲ــ جمع در R ۲۵۸
۳ــ ضرب در R ۲۶۴
۴ــ رابطهٔ ترتیب در R ۲۶۸
۵ــ تقسیم اقلیدسی در Z ۲۷۰
۶ــ ایده‌آلهای Z ۲۷۱
فصل دوم : نمائی‌ها و لگاریتمها ۲۷۴
۱ــ قوای صحیح یک عدد حقیقی ۲۷۴
۲ــ نمای صحیح نسبی یک عدد حقیقی ۲۷۶
۳ــ قوای دو-ئی یک عدد حقیقی مثبت ۲۸۰
۴ــ قوای حقیقی یک عدد حقیقی مثبت ۲۸۳
فصل سوم : کاربرد هندسی اعداد حقیقی ۲۸۹
۱ــ هندسهٔ یک بعدی ۲۸۹
۲ــ هندسهٔ زاویه‌های جهت‌دار ۲۹۴
فصل چهارم: هندسهٔ اقلیدسی مسطحه ۳۰۷
۱ــ فضای $\mathcal{E}$ بردارهای صفحه ۳۰۷
۲ــ حاصل ضرب عددی ۳۱۲
۳ــ مختصات کارتزین (دکارتی) ۳۱۶

۴ـ رادیان ۳۱۸
۵ـ توابع مثلثاتی ۳۲۰
۶ـ عبارت مثلثاتی حاصل‌ضرب عددی ۳۲۱
۷ـ دستورهای مثلثاتی جمع ۳۲۲

قسمت ششم: اعداد مختلط

فصل اول : ساخت مجموعه اعداد مختلط عملها ۳۲۷
۱ـ مقدمه ۳۲۷
۲ـ اعداد مختلط ۳۳۳
۳ـ خواص جمع ۳۳۴
۴ـ خواص ضرب ۳۳۵
۵ـ غوطه‌وری R در C ۳۳۸
۶ـ اعداد مختلط مزدوج ۳۴۰
۷ـ مدول یک عدد مختلط ۳۴۱
فصل دوم : کاربرد هندسی، آوند یك عدد مختلط ۳۴۵
۱ـ صفحهٔ مختلط ۳۴۵
۲ـ آوند یک عدد مختلط ۳۴۶
۳ـ صورت مثلثاتی یک عدد مختلط U ۳۴۷
۴ـ صورت مثلثاتی یک عدد مختلط غیر مشخص ۳۴۸
۵ـ تابع $y' = ay$ (a مختلط) ۳۵۰
۶ـ توان صحیح اعداد موهومی ۳۵۱
واژه‌نامه ۳۵۳
فهرست راهنما ۳۶۳

منابع

آنسیکلوپدی فرانسه[1] (۱۳، کوچهٔ فور، پاریس، ۱۹۳۷) جلد اول

عددها (از: شوالی)

مجموعه‌ها (از: پوسل)

توابع (از: دنجوی)

توابع ریاضی (از: ژ. هادامار)

بریزاک ربرت: طرح مقدماتی اصول هندسهٔ اقلیدسی[2] (گوتیه ویلار، پاریس، ۱۹۵۵)

بورباکی[3] (هرمان پاریس)

- کتاب I فصل ۱. توصیف ریاضیات صوری
- — فصل ۲. تئوری مجموعه‌ها
- — فصل ۳. مجموعه‌های مرتب. اصلی‌ها. عددهای صحیح
- کتاب II فصل ۱. بنیان‌های جبری
- کتاب III فصل ۴. عددهای حقیقی
- — فصل ۵. گروه‌های با یک پارامتر
- — فصل ۸. عددهای مختلط

پیزو، س. و زامانسکی، م. ریاضیات عمومی[4] (دونو، پاریس، چاپ جدید، ۱۹۶۳)

دوبرئیل، پ. و م. دروسی از جبر مدرن[5] (دونو، پاریس، ۱۹۶۱)

دوندو، آ. حساب عمومی[6] (دونو، پاریس، ۱۹۵۲)

1- *Encyclopédie française* 2- Brisac Robert, *Exposé élémentaire des principes de la géométrie euclidienne.* 3- Bourbaki
4- Pisot, C. et Zamansky, M., *Mathématiques générales.*
5- Dubreil, P. et M. *Leçons d'Algèbre moderne.* 6- Doneddu, A., *Arithmétique général.*

زامانسکی، م.، مقدمه‌ای بر جبر و آنالیز مدرن[1] (دونو، پاریس، چاپ دوم، ۱۹۶۳)
کارتان، ه.، تئوری مقدماتی توابع تحلیلی با یک یا چند متغیرمختلط[2] (هرمان، پاریس ۱۹۶۱)
کوگبتلیانتز، آ.، راه‌های طبیعی و پایه‌های ریاضیات[3] (گوتیه ویلار، پاریس، ۱۹۵۹)
لانتن و ریوو.، درسهائی از جبر مدرن[4] (ویبرت، پاریس، ۱۹۶۱)
له بسگ، ه.، دربارهٔ اندازهٔ کمیتها[5] (ویبرت، پاریس، ۱۹۶۱)

1- Zamansky, M., *Introduction à l'algèbre et à l'analyse moderne.*
2- Cartan, H., *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes.* 3- Kogbetlianz, E., *Voies naturelles et bases des Mathématiques.* 4- Lentin et Rivaud, *Leçons d'Algèbre moderne.* 5- Lebesgue, H., *Sur la mesure des grandeurs.*

علامتهای اصلی

$\in$ تعلق دارد به

$\notin$ تعلق ندارد به

$=$ مساوی

$\neq$ مخالف

$\subset$ گنجیده در

$\supset$ شامل

$\varnothing$ مجموعهٔ تهی

$\Rightarrow$ مستلزم است (علامت استلزام)

$\Leftrightarrow$ منطقاً هم ارز است با

$\cap$ فصل مشترک

$\cup$ اجتماع

EA یا $E-A$ متمم A نسبت به E

$\forall$ هرچه باشد

$\exists$ وجود دارد

$\rightarrow$ تناظر یکسوئی (تابع)

$\leftrightarrows$ تناظر دوسوئی (دوسو گستری)

$\leqslant$ حداکثر مساویست با

$\geqslant$ حداقل مساویست با

$<$ اکیداً کمتر است

$>$ اکیداً بیشتر است

$\prec$ یا $\succ$ علامت عمومی یک رابطه ترتیب

x^+ تالی $x \in N$

$\blacksquare$ واحد (در N)

$+$ جمع

$-$ تفریق

$\times$ ضرب

$|$ عاد میکند یا میشمارد

$*$ $\top$ علامتهای عمومی قانون‌های ترکیب

$\circ$ ترکیب توابع

$\equiv$ هم نهشت به

$\sim$ هم ارز (کسر)

C_m مجموعه طبقه‌های مانده‌ای مدولو n

$\min A$ کوچکترین جزء A

$\max A$ بزرگترین جزء A

a/b یا $\dfrac{a}{b}$ کسر

$\left[\dfrac{a}{b}\right]$ عدد منطق

$[a, b[$ فاصلهٔ باز از سمت راست

$|\alpha|$ مقدار مطلق $\alpha \in R$ یا مدول $\alpha \in C$

$\sqrt{\alpha}$ جذر $\alpha \in R^+$

ab پاره خط

$\mathbf{a\ b}$ یا $\overrightarrow{ab}$ پاره خط جهت دار

$\mathbf{x}$ یا $\vec{x}$ بردار

$(D_\circ, \Delta_\circ)$ زاویه

$\overset{\curvearrowleft}{(D_\circ, \Delta_\circ)}$ زاویهٔ جهت‌دار

$\overset{\curvearrowleft}{x}$ طبقات زاویه‌های جهت‌دار متساوی

$\sin a$ سینوس $a \in R$

$\cos a$ کسینوس $a \in R$

$\arg \alpha$ آوند $\alpha \in C^*$

علامتهای مجموعه‌های اعداد

N : طبیعی

N^* : طبیعی سوای صفر

Q^+ : منطق مثبت

Q : منطق (نسبی)

Q_b^+ : b-ئی مثبت

Q_b : b-ئی (نسبی)

R^+ : حقیقی مثبت

R : حقیقی (نسبی)

R^* : حقیقی سوای صفر

Z : صحیح (نسبی)

C : مختلط

C^* : مختلط سوای صفر

U : مختلط با مدول ۱

قسمت یکم

کلیات

مفاهیم کلی که در این کتاب مورد استفاده قرار خواهند گرفت در این قسمت طرح شده‌اند.

خواننده بدینترتیب خواهد توانست با نامگذاری‌های مدرن آشنا شود این نامگذاری در حال حاضر بیش از بیش در ریاضیات مدرن معمول میگردد و هر شخصیکه بدانش زمان خویش علاقمند باشد باید که اجزاء اصلی آنرا بداند.

خواننده با واژه‌های مخصوص تئوری مجموعه‌ها و سمبولیزم منطقی و سپس با تعریف‌های بنیانها که بعداً خواهد آمد و بالاخره با مفهوم اساسی ریاضیات یعنی مفهوم تابع در تماس خواهد بود.

طرح این کلیات همواره از مکاشفه یاری میجوید و مثالهای متعدد خواننده را در فهم این مفاهیم مجرد کمک خواهد نمود.

فصل اول

مجموعه‌ها و رابطه‌ها

۱ـ مجموعه‌ها :

اشیاء به‌گونه‌های مختلف در ریاضیات مورد بررسی قرار میگیرند. محض مثال میتوان از نقطه‌ها، عددها و بردارها نام برد. این اشیاء یا اجزاء بخاطر بعضی خاصیتها مجموعه‌ها را تشکیل میدهند.

تئوریهائی که ارائه میشوند هرکدام شامل بررسی یک مجموعه موسوم به (مجموعه پایه تئوری) میباشند.

محض مثال : در هندسه، جزء پایه عبارت از نقطه، و مجموعه پایه مجموعه جمیع نقطه‌ها است. در حساب، جزء پایه، عدد طبیعی و مجموعه پایه مجموعه اعداد طبیعی است که ما این مجموعه را در قسمت دوم تشکیل خواهیم داد.

یک جزء را معمولاً با حرف کوچک (جزء a) و یک مجموعه را با حرف بزرگ (مجموعه A) نمایش میدهند.

غالباً یک جزء یا یک مجموعه با دیگر علامت های نموداری (گرافیک) و یا ترکیبی از این علامتها نمایش داده میشود (مثلاً عدد طبیعی ۱۲۸ در نمایش ارقام دهدهی).

۲ـ رابطه‌ها :

اجزاء یک مجموعه ممکن است رابطه‌هائی بین خودشان و یا با اجزاء مجموعه‌های دیگر داشته باشند. به مثالهای زیر توجه شود :

رابطه تعلق

رابطه تعلق بدین ترتیب بیان میشود که :

«جزء a به مجموعه A تعلق دارد». و با $a \in A$ نمایش داده میشود. نفی این ارتباط خود یک رابطه‌ای دیگر است که با :

«جزء a به مجموعه A تعلق ندارد» بیان میشود و با $a \notin A$ نمایش داده میشود.

رابطه تساوی

اگر در جریان بررسی یک مجموعه A اتفاق بیفتد که یک جزء تحت دو نام a و b معرفی شود میگویند :

«a مساوی b است» و مینویسند $a = b$ و یا میگویند :

«a منطبق بر b است»

نفی این ارتباط عبارت از :

«a مخالف b است» یا «a متمایز از b است» و با $a \neq b$ نمایش داده میشود.

بطور کلی تعریف زیر را داریم :

تعریف ـ بامربوط کردن یک جزء (یا یک مجموعه) x به یک جزء (یا یک مجموعه) دیگر y بوسیله $\mathcal{R}$ یک رابطه تشکیل میشود. مینویسیم :

$$x \mathcal{R} y$$

رابطه را دوتائی مینامند زیرا دو جزء را بهم دیگر مربوط میسازد. رابطه‌ای ممکن است درمورد بعضی x و y صادق باشد و در مورد بعضی دیگر نباشد. محض مثال مجموعه A افراد بشر را در نظر میگیریم. رابطه :

«x و y در یک سال متولد شده‌اند»

برای بعضی زوجهای (x و y) افراد بشر درست و برای بعضی نادرست است.

۳ ـ رابطهٔ گنجیدگی : بخشی از یك مجموعه.

تعریف ـ مجموعه A را داخل در مجموعه B مینامند اگر هر جزء A به B تعلق داشته باشد.

مینویسند : $A \subset B$ و میخوانند : «A داخل در B است».

یا «A گنجیده در B است»

این رابطه بین دو مجموعه A و B مترادف با رابطه‌ای است که بصورت $B \supset A$ نوشته میشود و «B شامل A است» خوانده میشود.

مثال ـ صفحه P شامل خط D است.

$$P \supset D$$

تبصره ـ اگر تعریف قبل را منحصراً در مورد یک مجموعه بکار ببریم با توجه‌باینکه : «هر جزء A متعلق به A است» داریم :

$$A \subset A$$

تساوی دو مجموعه :

اگر داشته باشیم : $A \subset B$ و $B \subset A$ میگویند : «A مساوی B است» یا «A منطبق بر B است» و مینویسند :

$$A = B$$

این رابطه بدان معنی است که هر جزء A متعلق به B و هر جزء B متعلق به A . است نفی این رابطه بترتیب زیر بیان میشود :

«در یکی از این مجموعه‌ها جزئی وجود دارد که متعلق به دیگری نیست»

مینویسیم : $A \neq B$

میخوانیم : «A مخالف B است»

یا میخوانیم : «A متمایز از B است»

بخشی از یك مجموعه . مجموعه تهی .

مجموعه E را در نظر میگیریم. بخشی از E (یا زیر مجموعه E) عبارت ازمجموعه‌ای مانند A است که در $A \subset E$ صدق میکند.

خود مجموعه E بخشی از E است. بخشی از E که جزء یک جزء a را دارا نباشد با : $\{a\}$ نمایش داده میشود .

بخشی از E که شامل هیچ جزئی نباشد مجموعه تهی نامیده میشود و با $\varnothing$ نمایش داده میشود .

مثلاً ــ بخش P از مجموعه E را در نظر بگیریم که با خاصیت زیر تعریف میشود : «هر جزء a از P در $a \neq a$ صدق میکند».

چون هیچ جزء مخالف خودش وجود ندارد پس P یک بخش تهی از E است :

$$P = \varnothing$$

۴ـ سمبلهای منطقی:

استلزام

مثالی در نظر بگیریم:

تساوی یک رابطه سرایت‌پذیر است یعنی از $a = b$ و $b = c$ نتیجه میشود $a = c$ از فرض $a = b$ و $b = c$ با یک روش عقلی که استدلال منطقی نامیده میشود نتیجه $a = c$ بدست میآید. و این یک روش استنتاجی است و استلزام نامیده میشود. استلزام رابطهٔ اساسی استدلال منطقی است. اجزائی که بوسیلهٔ این رابطه با هم مربوطاند عبارت از گزاره‌ها میباشند.

فرض را با $\mathcal{A}$ و نتیجه را با $\mathcal{B}$ نمایش میدهند.

استلزام را با $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ نمایش میدهند و میخوانند: «$\mathcal{A}$ موجب میشود $\mathcal{B}$ را».

مثلاً در مثال قبل مینویسیم:

$$(a = b \quad \text{و} \quad b = c) \quad \Rightarrow \quad a = c$$

همانطور که قبلاً نیز گفته شد این استنتاج به معنی سرایت پذیری تساوی است. تساوی به توسط b از a به c منتقل میشود.

استلزام خودش نیز سرایت پذیر است. اگر داشته باشیم:

$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ و $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ نتیجه میشود:

$$\mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C}$$

سرایت پذیری استلزام موجب استحکام استنتاج است. و استدلال بطور سرایت پذیر با تسلسل استلزامها انجام میپذیرد.

$$\mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C} \quad \Rightarrow$$

چندی نماها:

مثال: $A \subset B$ را در نظر بگیریم. این مثال حاکی است که: «هر جزء A بـه B تعلق دارد» این خاصیت را بترتیب زیر مینویسیم:

$$(\forall a) \qquad a \in A \quad \Rightarrow \quad a \in B$$

علامت $\forall$ یک چندی نما است و خوانده میشود: «هرچه باشد»

مثال دیگر: میدانیم گزارهٔ:

«یک جزء a متعلق به A وجود دارد»

موجب میشود: «A مخالف مجموعه تهی است» خاصیت فوق را مینویسیم:

$$(\exists a;\ a \in A) \quad \Rightarrow \quad A \neq \varnothing$$

علامت $\exists$ نیز یک چندی نما است و خوانده میشود «وجود دارد».

۵ـ خودپذیری ـ تقارن ـ سرایت پذیری:

یک رابطه دوتائی $\mathcal{R}$ در مجموعه E را در نظر میگیریم، این رابطه ممکن است دارای اوصاف زیر باشد :

خود پذیری

تعریف ـ رابطه $\mathcal{R}$ را خودپذیر مینامند اگر: $(\forall x \in E$ داریم $x \mathcal{R} x)$ $\mathcal{R}$ خودپذیر است اگر هر جزء E با خودش مربوط باشد.

مثال ۱ـ تساوی خودپذیر است:

$$\forall a , a = a$$

مثال ۲ـ در مجموعه موجودات انسانی E رابطه :

«x در همان سال متولد شده که y»

خودپذیر است زیرا x در همان سال متولد شده که خودش.

مثال ۳ـ اگر E یک مجموعه غیر مشخصی باشد بخش‌های E مجموعه جدیدی را میسازند که با $P\,(E)$ نمایش میدهیم و «مجموعه بخشهای E» مینامیم.

هر جزء A از $P\,(E)$ جزئی از E است :

$$A \in P\,(E) \iff A \subset E$$

رابطه گنجیدگی. $A \subset B$ بین دو جزء $P\,(E)$ یک رابطه خودپذیر است زیرا داریم : $A \subset A$ (هرچه باشد جزء A از $P\,(E)$).

مثال ۴ـ در مجموعه خط های یک صفحه رابطه «خط D عمود بر خط D' است». که با $D \perp D'$ نمایش داده میشود خودپذیر نیست زیرا خطی بر خودش عمود نیست.

مثال ۵ـ استلزام خودپذیر است زیرا هرچه باشد گزاره $\mathcal{A}$ داریم :

$$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$$

تقارن

تقارن مرکزی در هندسه را در نظر میگیریم و نقطهٔ a' قرینه a را نسبت به مرکز o پیدا میکنیم .

مینویسیم : $a \,\mathcal{S}\, a'$ علامت تقارن $\mathcal{S}$ حاکی از این است که a' از a با تقارن مورد نظر

بدست می‌آید.

بدین‌ترتیب یک رابطه دوتائی در مجموعه جمیع نقاط بدست می‌آید. اگر همان تقارن $\mathcal{S}$ را در مورد نقطه a' بکار ببریم نقطه a را باز خواهیم یافت و داریم:

$$a' \mathcal{S} a$$

بطور خلاصه استلزام زیر را داریم:

$$a \mathcal{S} a' \Rightarrow a' \mathcal{S} a$$

با آنالوژی تعریف کلی زیر را در مورد یک رابطه دوتائی در مجموعه E بیان میکنیم.

تعریف - رابطه دوتائی $\mathcal{R}$ را متقارن مینامیم اگر:

$$x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$$

مثال ۱- تساوی یک رابطه متقارن است:

$$a = b \Rightarrow b = a$$

مثال ۲- رابطه «x در همان سال متولد شده است که y» متقارن است زیرا اگر این حادثه برای زوج (x و y) صادق باشد برای زوج (y و x) نیز صادق خواهد بود.

مثال ۳- رابطه $D \perp D'$ بین خطوط یک صفحه متقارن است زیرا:

$$D \perp D' \Rightarrow D' \perp D$$

مثال ۴- رابطه گنجیدگی متقارن نیست: $A \subset B$ بطور کلی موجب $B \subset A$ نیست. A و B را جز در حالت $A = B$ نمیتوان با یکدیگر تعویض کرد و میدانیم که:

$$(A \subset B \text{ و } B \subset A) \Longleftrightarrow A = B$$

سرایت‌پذیری

قبلاً (§ ۴) نمونه‌هائی از رابطه‌های سرایت‌پذیر را دیدیم. تساوی سرایت‌پذیر است. استلزام سرایت‌پذیر است. تعریف سرایت‌پذیری در مورد یک رابطه دوتائی $\mathcal{R}$ در مجموعه E بقرار زیر است:

تعریف - رابطه دوتائی $\mathcal{R}$ سرایت‌پذیر است اگر:

$$(x \mathcal{R} y \text{ و } y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$$

ارتباط $\mathcal{R}$ بتوسط y از x به z منتقل میگردد.

مثال ۱- رابطه گنجیدگی سرایت‌پذیر است:

$$(A \subset B \text{ و } B \subset C) \Rightarrow A \subset C$$

مثال ۲ـ رابطه «x در همان سال متولد شده است که y».
سرایت پذیر است زیرا اگر x و y در یک سال متولد شده‌اند و y و z نیز در یک سال‌متولد شده‌اند نتیجه میشود که x و z در یک سال متولد شده‌اند.

مثال ۳ـ رابطه $D \perp D'$ بین دوخط یک صفحه سرایت‌پذیر نیست زیرا از $D \perp D'$ و $D' \perp D''$ نتیجه $D \perp D''$ بدست نمیآید بلکه نتیجه $D \parallel D''$ است.

۶ـ رابطه هم‌ارزی :

در مجموعه E (ساکنین کره زمین) رابطه «x در همان سال متولد شده است که y» را در نظر بگیریم.

دیدیم که این رابطه در عین حال خودپذیر، متقارن و سرایت پذیر است. در این صورت میگویند که این یک رابطه هم‌ارزی در مجموعه E است. با استفاده از این رابطه موجودات انسانی را بطرز زیر میتوان طبقه‌بندی کرد.

a) دو انسان x و y که در یک سال متولد شده‌اند در یک طبقه قرار میگیرند.
b) دو انسان x و y که در یک سال متولد نشده‌اند در طبقه‌های جداگانه قرار میگیرند.

بدین ترتیب جمیع موجودات انسانی طبقه‌بندی شده‌اند. هر طبقه را یک «سن» مینامیم. هر موجود انسانی متعلق بیک طبقه، نماینده آن طبقه میتواند باشد.

تعریف ـ یک رابطه دوتائی در مجموعه E رابطه هم‌ارزی نامیده میشود اگر در عین حال خودپذیر، متقارن و سرایت پذیر باشد.

مثال دیگر :

در مجموعه E خطوط فضائی رابطه زیر را در نظر میگیریم :

«وقتی دو خط D و D' بدون نقطه مشترک هم صفحه هستند و یا وقتی برهم منطبق‌اند»

بنویسیم :

$D \parallel D'$ و بگوئیم : «D موازی D' است» .

این رابطه :

خودپذیر است : $D \parallel D$ هرچه باشد D

متقارن است : $D \parallel D' \Rightarrow D' \parallel D$

سرایت‌پذیر است : $(D \parallel D' \text{ و } D' \parallel D'') \Rightarrow D \parallel D''$

بنابراین رابطه توازی یک رابطه هم‌ارزی است.

مانند مثال قبل از روی این رابطه خطوط فضا را میتوان بطریق زیر طبقه‌بندی کرد :

a) دو خط D و D' که دارای ارتباط $D \,//\, D'$ هستند در یک طبقه قرار میگیرند.

b) دو خط D و D' که دارای ارتباط فوق نباشند در طبقه‌های جداگانه قرار میگیرند.

بدین ترتیب جمیع خطوط مجموعه E طبقه بندی شده‌اند. هر طبقه‌ای یک «امتداد» نامیده میشود.

هر خط یک طبقه نماینده آن امتداد میتواند باشد.

طبقه‌های هم‌ارزی

بطور کلی رابطه هم‌ارزی $\mathcal{R}$ در مجموعه E را در نظر میگیریم : این رابطه تقسیم بندی مجموعه E را به طبقه‌های هم‌ارز بترتیب زیر تعیین مینماید.

مجموعه اجزاء x هم‌ارز با a را با $C(a)$ نمایش داده و آنرا «طبقه a» میخوانیم :

$$x \in C(a) \iff x \,\mathcal{R}\, a$$

این مجموعه $C(a)$ بخشی از E است که «طبقه هم‌ارزی a» نامیده میشود.

۱ـ اگر b هم ارز a باشد هر x هم ارز a هم‌ارز b است.

$$(b \,\mathcal{R}\, a) : \qquad x \,\mathcal{R}\, a \iff x \,\mathcal{R}\, b$$

بطوریکه :

$$b \,\mathcal{R}\, a \Rightarrow C(a) = C(b)$$

۲ـ اگر b هم‌ارز a نباشد مجموعه‌های $C(a)$ و $C(b)$ هیچ جزء مشترکی ندارند: زیرا اگر جزء مشترکی مانند x داشتند نتیجه میشد :

$$(x \,\mathcal{R}\, a \text{ و } x \,\mathcal{R}\, b) \Rightarrow a \,\mathcal{R}\, b$$

که برخلاف فرض است.

در این صورت $C(a)$ و $C(b)$ را متغایر مینامند. جمیع اجزاء E بدین‌ترتیب طبقه‌بندی میشوند و مجموعه E به طبقه‌های متغایر تقسیم میشود.

میگویند رابطه هم‌ارزی $\mathcal{R}$ مجموعه E را به طبقه‌های هم‌ارز تفکیک کرده است.

هم‌ارزی منطقی

مثال ـ اگر a و b دو نقطه از یک صفحه و D عمود منصف $a\,b$ باشد دوگزاره زیر را بیان میکنیم :

گزاره A : «m به D تعلق دارد»

$$m \in D$$

گزاره B : «طول $m\,a$ = طول $m\,b$ است»

$$ma = mb$$

در عین حال داریم :

$$m \in D \Rightarrow ma = mb$$

$$ma = mb \Rightarrow m \in D$$

دو گزاره A و B را منطقاً هم‌ارز مینامیم و مینویسیم :

$$m \in D \iff ma = mb$$

بطور کلی دیدیم کــه استلزام $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ بین دو گــزاره $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ هم خودپذیر و هم سرایت‌ـ پذیر است:

$$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$$

$[(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ و $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})]$ موجب می‌شود $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})$

بطور کلی استلزام متقارن نیست. اگر داشته باشیم :

$$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \qquad (۱)$$

در حالت کلی $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ (۲) محقق نیست.

استلزام (۲) عکس استلزام (۱) نامیده میشود ـ . اگر در بعضی گزاره‌های $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ در عین حال (۱) و (۲) برقرار باشد می‌نویسند :

$$\mathcal{A} \iff \mathcal{B}$$

و میخوانند: «$\mathcal{A}$ منطقاً هم‌ارز $\mathcal{B}$ است» .

دو گزاره $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ منطقاًهم‌ارز یکدیگرند اگر استلزام مستقیم (۱) و معکوس (۲) برقرار شده باشد .

۷ـ رابطه ترتیب:

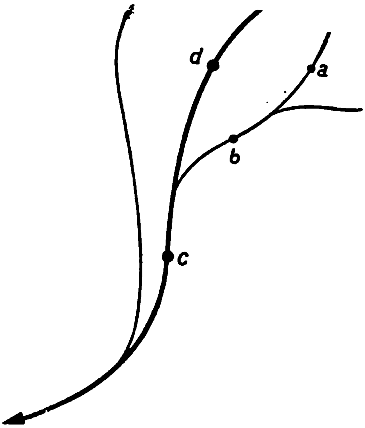
مجموعه E نقاط جغرافیائی را که با رودخانه F و یا شعب آن مشروب میشوند در نظر میگیریم. (شکل ۱)

رابطه دوتائی زیر را در مجموعه E بیان میکنیم :

«a بالاتر از b قراردارد» وقتیکه آب از a بطرف b جاری است رابطه سرایت پــذیر است زیرا از :

«a بالاتر از b قراردارد» و «b بالاتر از c قراردارد». نتیجه میشود که «a بالاتر از c قراردارد». قرارداد می‌کنیم‌که هر نقطه بالاتر از خودش قراردارد. دراین‌صورت خاصیت‌تکمیلی زیر را خواهیم داشت:

«a بالاتر از b قراردارد» و «b بالاتر از a قراردارد». نتیجه میشود $a = b$ و بعکس. رابطه مورد بحث به رابطه ترتیب در E موسوم است. بطورکلی تعریف زیر را بیان میکنیم.



شکل ۱

تعریف ــ هر رابطهٔ دوتائی $\mathcal{R}$ در E که دارای خواص زیر باشد رابطه ترتیب نامیده میشود.

$$(x \mathcal{R} y \quad \text{و} \quad y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z \tag{۱}$$

$$(x \mathcal{R} y \quad \text{و} \quad y \mathcal{R} x) \Rightarrow x = y \tag{۲}$$

رابطه اول بدان معنی است که $\mathcal{R}$ سرایت پذیر است.

رابطه دوم دو خاصیت را بیان میکند.

اولاً :

$$x = y \Rightarrow (x \mathcal{R} y \quad \text{و} \quad y \mathcal{R} x) \Rightarrow x \mathcal{R} x$$

یعنی رابطه خودپذیر است.

ثانیاً :

$$(x \mathcal{R} y \quad \text{و} \quad y \mathcal{R} x) \Rightarrow x = y$$

رابطه جز بازاء دو جزء متساوی متقارن نیست. میگویند که مجموعه E با رابطه $\mathcal{R}$ مرتب شده است.

مثال دیگر ذکر میکنیم :

رابطه گنجیدگی $A \subset B$ را در نظر میگیریم. داریم :

(۱) $(A \subset B$ و $B \subset C) \Rightarrow A \subset C$

(۲) $(A \subset B$ و $B \subset A) \Longleftrightarrow A = B$

بنابراین مجموعه $P(E)$ با رابطه گنجیدگی مرتب شده است.

ترتیب جزئی و ترتیب کلی

مثال ـ رودخانه و شعب آنرا در نظر میگیریم :

دو نقطه غیر مشخص E با هم در ارتباط نیستند (مانند نقاط b و d) زیرا آب نه از b بطرف d و نه از d بطرف b جاری است.

نقاط b و d با رابطه ترتیب در E قابل مقایسه نیستند. بدین جهت میگویند که ترتیب‌در E جزئی است.

بعکس اگر قسمت F از E را در نظر بگیریم (نقاطی که فقط با رودخانه اصلی‌مشروب میشوند) دو نقطه غیر مشخص c و d از F قابل مقایسه هستند. رابطه ترتیب در E رابطه ترتیب کلی در F خواهد بود.

تعریف ـ رابطه ترتیب $\mathcal{R}$ رابطه ترتیب کلی در E نامیده میشود اگر :

$$\forall x, y \in E$$

داشته باشیم :

$$x \mathcal{R} y \quad \text{یا} \quad y \mathcal{R} x$$

رابطه گنجیدگی در $P(E)$ رابطه ترتیب جزئی است زیرا دو جزء $P(E)$ الزاماً شامل یکدیگر نیستند. برای دو قسمت A و B از شکل ۲ درمجموعه E رابطه $A \subset B$ و نیز رابطه $B \subset A$ صادق نیست.

رابطه ترتیب اکید

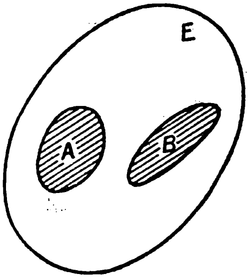
در رابطه رودخانه و شعب آن قرارداد زیر را بعمل آورده بودیم :

«هر نقطه a از E بالاتر از خودش قرار دارد» بیک زبان محدودتری، این قرارداد دارای ارزش نیست. از آن صرف نظر میکنیم. گزاره‌های :

«a بالاتر از b قرار دارد» و «b بالاتر از a قرار دارد».

دیگر بطور همزمان هرگز صادق نیستند.

رابطه جدید را رابطه ترتیب اکید درمجموعه E مینامیم.



شکل ۲

تعریف - رابطه $\mathcal{R}$ در مجموعه E یک رابطه ترتیب اکید است اگر :

(۱) سرایت‌پذیر باشد.

$$(x \mathcal{R} y \quad \text{و} \quad y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$$

$$x \mathcal{R} y \Rightarrow x \neq y \qquad (۲)$$

در این صورت مجموعه E را اکیداً مرتب شده بوسیله $\mathcal{R}$ مینامند. بر اساس این تعریف معلوم میشود که :

$x \mathcal{R} y$ و $y \mathcal{R} x$ هرگز بطور توأم صادق نیستند و اگر آنها را بطور توأم صادق کنیم به تناقض برخواهیم خورد زیرا : بنا به خاصیت سرایت‌پذیری (۱) داریم :

$$(x \mathcal{R} y \quad \text{و} \quad y \mathcal{R} x) \Rightarrow x \mathcal{R} y$$

و بنا به شرط (۲) داریم :

$$x \mathcal{R} x \Rightarrow x \neq x$$

و این تناقض است. پس $x \mathcal{R} y$ و $y \mathcal{R} x$ هرگز بطور توأم صادق نیستند. از شرط (۲) نتیجه میشود که رابطه $\mathcal{R}$ خودپذیر هم نیست.

اگر رابطهٔ $\mathcal{R}$ در شرط زیر نیز صدق کند :

$$x \mathcal{R} y \quad \text{یا} \quad y \mathcal{R} x \quad (\forall\, x,\, y \in E) \qquad (۳)$$

ترتیب اکید در این صورت کلی میگردد میگوئیم :

مجموعه E اکیداً و کلاً بوسیله $\mathcal{R}$ مرتب شده است.

فصل دوم

قانون ترکیب

۱ـ مجموعهٔ E را در نظر بگیریم. اگر بهر زوج اجزاء مرتب a و b از مجموعهٔ E یک‌جزء و فقط یکی از E را همراه کنیم بدین ترتیب در مجموعهٔ E یک قانون ترکیب درونی بوجود خواهد آمد.

تعریفـ هر روشی که در مجموعه E به دو جزء مرتب a و b یک جزء سوم c فقط از E را همراه کند قانون ترکیب درونی نامیده میشود. a را جزء اول و b را جزء دوم و c را ترکیب یا نتیجه a و b مینامند.

علامتها: بطور کلی مینویسیم:

$$a * b = c$$

میخوانیم: «a ستاره b مساوی c». یا مینویسیم: $aTb = c$

میخوانیم: «a تروک[1] b مساوی c»

در علامت جمع مینویسیم: $a + b = c$

میخوانیم: «a علاوه b مساوی c». در علامت ضرب مینویسیم:

$a \cdot b = c$ یا $a \times b = c$ (یا $ab = c$)

میخوانیم: «a ضربدر b مساوی c» یا «ab مساوی c».

مثال ۱ـ جمع کردن طولها.

اگر a و b دو طول مفروض باشند و طول a با پاره خط AB نمایش داده شود در این صورت طول b را با پاره خطی مانند BC که در امتداد AB و متصل بآن قرار گیرد نمایش میدهیم

---

۱) Truc منظور هر نوع وسیلهٔ ارتباط است.

بطوریکه «B بین A و C باشد» پاره خط AC طول c مجموع a و b را نمایش خواهد داد: مینویسیم:

$$a + b = c$$

بدین ترتیب درمجموعه طول‌ها یک‌قانون ترکیب درونی موسوم به:«جمع کردن طول‌ها» معین میگردد.

مثال ۲ــ اگر E مجموعه غیرمشخصی باشد بهر زوج اجزاء مرتب (a و b) از E جزء اول را همراه کنیم:

$$a * b = a$$

بدین‌ترتیب یک‌قانون ترکیب درونی در E معین‌میشود.

مثال ۳ــ در مجموعــه: $E = \{a, b, c, d\}$ از تنها اجــزای a و b و c و d قانون ترکیب درونی $\top$ را به کمک جدول زیر معین میکنیم:

ترکیب $x \top y$ در فصل مشترک سطر ردیف x با ستون ردیف y قرار دارد. بدین ترتیب:

$$c \top d = b \text{ و } b \top c = d$$

← جملهٔ دوم →

جملهٔ اول ↓	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

شکل ۱

۲ــ فصل مشترک و اجتماع دو مجموعه:

مجموعه غیر مشخص E را در نظر میگیریم. مجموعه بخشهای E را با $P(E)$ نمایش میدهیم در $P(E)$ دو قانون ترکیب درونی را معین میکنیم:

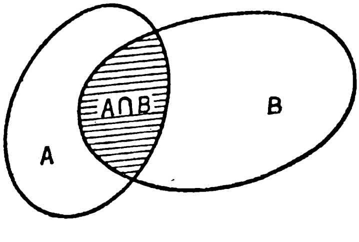
فصل مشترک. بهر زوج مرتب A و B از دو قسمت E یک قسمت از E را که مجموعه اجزاء مشترک A و B را معین میسازد همراه میکنیم. ایــن مجموعــه به (فصل مشترک A و B) موسوم است و با $A \cap B$ نمایش داده میشود. بنا به تعریف (شکل ۲):

$$(a \in A, a \in B) \iff a \in (A \cap B)$$

در حالتیکه A و B هیچ جزء مشترکی نداشته باشند فصل مشترک A و B یک مجموعــه تهی است:

$$A \cap B = \varnothing$$

در این حالت A و B را متغایر مینامند. بدین تــرتیب یک قــانون ترکیب درونی در $P(E)$ بوجود میآید که همه‌جــا معین است زیــرا هرچه بــاشد A و B ترکیب $A \cap B$ وجود دارد.

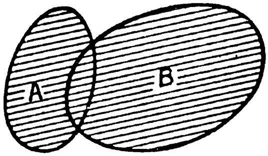


شکل ۲ فصل مشترک $A \cap B$

اجتماع- بهر زوج مرتب A و B از دو قسمت E قسمتی از E را همراه میکنیم که مجموعه همگی اجزاء متعلق به A و B را معین سازد. این مجموعه را با $A \cup B$ نمایش میدهیم و به «اجتماع A و B» موسوم است. بنا بتعریف (شکل ۳):

$$(a \in A \quad \text{یا} \quad a \in B) \iff a \in (A \cup B)$$

تبصره- اجتماع $A \cup B$ نمیتواند تهی باشد مگر اینکه A و B هردو تهی باشند. بدین ترتیب قانون ترکیب درونی دومی در $P(E)$ بوجود میآید که همه‌جا معین است.



شکل ۳ اجتماع $A \cup B$

متمم- فرض کنیم A یک مجموعه و B قسمتی از A باشد:

$$B \subset A$$

مجموعهٔ اجزاء A که به B تعلق نداشته باشند متمم B مربوط به A نامیده میشوند و آنرا با (شکل ۴): $A - B$ یا $\complement_A B$ نمایش میدهیم.

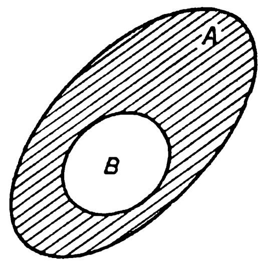
بنا به تعریف داریم:

$$(B \subset A; a \in A; a \notin B) \iff a \in \complement_A B$$

در اینصورت رابطه‌های بدیهی زیر را خواهیم داشت:

$$B \cup \complement_A B = A$$

$$B \cap \complement_A B = \varnothing$$



شکل ۴ متمم B، $\complement_A B$

۳- خواص قوانین ترکیب:

بطور مختصر به خواص اساسی که ممکن است در مورد یک قانون ترکیب درونی پیش آید اشاره میکنیم.

شرکت‌پذیری:

فرض کنیم قانون $*$ در مجموعه E باشد.

ابتدا: $\quad a * b = u$

و سپس $\quad u * c = d$

را انجام میدهیم. در این صورت مینویسیم:

$$(a * b) * c = d \qquad (1)$$

واسطه u در داخل پرانتز قرار گرفته است.

حال: $$b * c = v$$

و سپس: $$a * v = f$$

را انجام میدهیم. در اینصورت مینویسیم: $a * (b * c) = f$ (۲)

واسطه v باز هم در پرانتز قرارگرفته است.

اگر نتیجه‌های d و f برابر باشند (هرچه باشد a و b و c) میگویند.

قانون $*$ شرکت‌پذیر است.

تعریفـ یک قانون ترکیب در E (با علامت $*$) شرکت پذیر نامیده میشود اگر هرچه باشد اجزاء a و b و c از E داشته باشیم:

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

مثال ۱ــ عمل جمع کردن طول‌ها شرکت پذیر است.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

مثال ۲ــ قانون $a * b = a$ در مجموعهٔ E شرکت‌پذیر است.

زیرا: $$(a * b) * c = a * c = a$$

$$a * (b * c) = a * b = a$$

مثال ۳ــ قانون $\top$ که به کمک جدول شکل (۱) در مجموعه $E = \{a, b, c, d\}$ تعریف می‌شود شرکت پذیر است.

مثلاً: $$(b \top d) \top c = c \top c = a$$

$$b \top (d \top c) = b \top b = a$$

مثال ۴ــ فصل مشترک $P(E)$ شرکت‌پذیر است:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

زیرا هردو طرف رابطه با مجموعهٔ اجزاء مشترک سه مجموعه A و B و C منطبق است.

مثال ۵ــ اجتماع در $P(E)$ شرکت‌پذیر است.

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

زیرا هردو طرف رابطه با مجموعهٔ اجزاء متعلق به هرسه مجموعه A و B و C منطبق است.

بنیان نیم گروه

تعریفـ اگریک قانون ترکیب درونی در یک مجموعه E شرکت‌پذیر باشد میگوئیم این قانون

بنیان یک نیم‌گروه را در E معین میکند. هر مجموعه E که به چنین قانونی مجهز باشد نیم‌گروه نامیده میشود. در جمیع مثالهای §۳ قانون ترکیب مورد بحث یک بنیان نیم‌گروه را در مجموعه نظیرش معین میکند.

قانون جابجاپذیری

تعریف. یک قانون ترکیب در E (با علامت $*$) جابجاپذیر است. اگر هرچه باشد اجزاء a و b از E داشته باشیم:
$$a * b = b * a$$

مثال ۱ــ عمل جمع کردن طول‌ها جابجاپذیر است:
$$a + b = b + a$$
هرچه باشد a و b

مثال ۲ــ قانون $a * b = a$ جابجا پذیر نیست زیرا $b * a = b$ است

پس بطور کلی:
$$a * b \neq b * a$$

مثال ۳ــ قانون $\top$ که در $E = \{a, b, c, d\}$ معین کردیم جابجا پذیر است اگر بجدول شکل (۱) مراجعه کنیم تقارن نتایج حول قطری از جدول را که از گوشه بالائی سمت چپ تا گوشه پائینی سمت راست ممتد است مشاهده خواهیم کرد. (این قطر بقطر اصلی موسوم است).

این تقارن نشان میدهد اگر جمله‌های x و y را در ترکیب $x \top y$ را جابجا کنیم ترکیب تغییر نمیکند:
$$(\forall x, y \in E) \quad x \top y = y \top x$$

مثال ۴ــ در $P(E)$ هم فصل مشترک و هم اجتماع هردو جابجاپذیرند. داریم:
$$A \cap B = B \cap A; \qquad A \cup B = B \cup A$$

بنیان نیم‌گروه جابجاپذیر

تعریف. اگر یک قانون ترکیب در E هم شرکت‌پذیر و هم جابجاپذیر باشد میگویند این قانون یک بنیان نیم‌گروه جابجا پذیر را در E معین میکند.

در مثالهای قبل (جز مثال (۲)) مجموعه‌ها نیم‌گروه جابجاپذیر هستند.

اجزاءِ اختصارپذیر برای یك قانون

تعریف. اگر هرچه باشد b و c روابط:

$$(a * b = a * c) \Rightarrow b = c$$
$$(b * a = c * a) \Rightarrow b = c$$

برقرار باشند میگویند a جزء اختصارپذیر برای قانون $(*)$ است (a را جزء منتظم قانون $*$ نیز مینامند).

تبصره ــ برای یک قانون جابجاپذیر اگر یکی از دو خاصیت سازگار باشد دیگری نیز سازگار خواهد بود.

مثال ۱ــ در جمع کردن طولها یک طول a برای عمل جمع جزء اختصار پذیر است زیرا هرچه باشد b و c داریم:

$$a + b = a + c \Rightarrow b = c$$

مثال ۲ــ قانون $a * b = a$ دارای جزء منتظم نمیباشد زیرا هرچه باشد a و b و c داریم:

$$a * b = a * c$$

بطور دقیق میتوان گفت و هر جزء a واقع در سمت راست اختصارپذیر است زیرا بنا بتعریف قانون $*$ داریم:

$$b * a = c * a \Rightarrow b = c$$

مثال ۳ــ در $P(E)$ هیچ جزئی، سوای E اختصارپذیر برای فصل مشترک نیست.

اگر جزء غیرمشخص $A \neq E$ را انتخاب کنیم و دوقسمت B و C از E را بسازیم بطوریکه (شکل ۵):

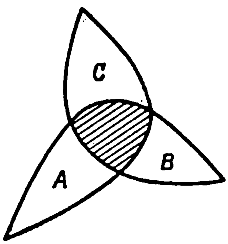
$$A \cap B = A \cap C$$

مشاهده میشود که از این رابطه نتیجه $B = C$ را نمیتوان بدست آورد (هرچه باشد B و C) در حالت مخصوص $A = E$ داریم:

$$E \cap B = B, \qquad E \cap C = C$$

(هرچه باشد B و C) و از آنجا:

$$E \cap B = E \cap C \Rightarrow B = C$$



A∩B = A∩C

شکل ۵

E برای فصل مشترک اختصارپذیر است.

مثال ۴ــ در $P(E)$ سوای $\varnothing$ هیچ جزئی منتظم برای اجتماع نیست. یک جزء غیر مشخص $A \neq \varnothing$ را اختیار کنیم، و دو جزء B و C را طوری بسازیم که:

$$A \cup B = A \cup C$$

باشد (شکل ۶) (کافی است که A شامل B و C باشد) در این صورت داریم:

$$A \cup B = A \qquad \text{و} \qquad A \cup C = A$$

ملاحظه میشود که: $A \cup B = A \cup C$ نتیجه $B = C$ را (هرچه باشد B و C) بدست

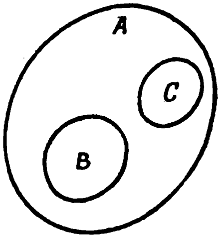
نخواهد داد. در حالت مخصوص $A = \varnothing$ داریم:

$$\varnothing \cup B = B \text{ و } \varnothing \cup C = C$$

(هرچه باشد B و C) از آنجا:

$$\varnothing \cup B = \varnothing \cup C \quad \Rightarrow \quad B = C$$

$\varnothing$ برای اجتماع اختصارپذیر است.



AUB = AUC = A

شکل ۶

جزء خنثی

تعریف- جزء e برای قانون $(*)$ خنثی نامیده میشود اگر هرچه باشد a داشته باشیم:

$$a * e = e * a = a$$

تبصره- برای یک قانون جابجاپذیر تساوی اولی همواره سازگار است.

یکتائی جزء خنثی:

قضیه ۱- اگر قانونی دارای جزء خنثی باشد این جزء یکتا است.

اگر فرض کنیم قانون $*$ دارای دو جزء خنثای e و e' باشد با فرض $a = e'$ داریم:

$$e' * e = e * e' = e'$$

و با فرض $a = e$ داریم:

$$e * e' = e' * e = e$$

از مقایسه این روابط نتیجه میشود: $e = e'$

پس جزء خنثی یکتا است.

مثال ۱- جمع کردن طولها دارای یک جزء خنثی است که عبارت از طول صفر با علامت o است:

$$a + o = o + a = a$$

(هرچه باشد a)

مثال ۲- قانون $a * b = a$ دارای جزء خنثائی نیست (بطور دقیق تر میتوان گفت که هرجزء واقع در سمت راست خنثی است و هیچ جزء واقع در سمت چپ خنثی نیست و قضیه یکتائی سازگار نیست).

مثال ۳- قانون $\top$ در $E = \{a, b, c, d\}$ یک جزء خنثی دارد (جزء a) روی جدول شکل (۱) جملههای سطر a جملههای تعیین کننده ستونها هستند. چون قانون جابجاپذیر

است پس درمورد ستون a نیز همان نظر سازگار است.

مثال ۴ــ اجتماع در $P(E)$ دارای یک جزء خنثای $(\varnothing)$ است زیرا هرچه باشد A داریم:

$$A \cup \varnothing = A$$

مثال ۵ــ در $P(E)$ فصل مشترک دارای یک جزء خنثای (E) است هرچه باشد A داریم:

$$A \cap E = A$$

اجزاءِ متقارن

تعریف. فرض میکنیم در مجموعه E قانون ترکیب $(*)$ دارای جزء خنثای e باشد میگویند که برای این قانون a' قرینه a است اگر داشته باشیم:

$$a * a' = a' * a = e$$

تبصره ۱ــ برای یک قانون جابجاپذیر تساوی اول همواره سازگار است.

تبصره ۲ــ اگر a' قرینهٔ a باشد a نیز قرینه a' است.

مثال ۱ــ برای جمع کردن طولها، یک طول $a \neq o$ دارای قرینهٔ a' نیست زیرا طولی مانند a' وجود ندارد بطوریکه: $a + a' = o$ باشد.

مثال ۲ــ در قانون $a * b = a$ که دارای جزء خنثی نمیباشد مسئله اجزاء متقارن مطرح نیست.

مثال ۳ــ در مجموعهٔ $E = \{a, b, c, d\}$ برای قانون $\top$ که با جدول شکل (۱) معین شده است هر جزء دارای یک قرینه است و این از آنجا معلوم است که جزء a (خنثی) در هر سطر و در هر ستون یک‌بار و فقط یک‌بار داخل شده است و بدین ترتیب داریم:

$$a \top a = b \top b = c \top c = d \top d = a$$

پس قرینهٔ هر جزء خود این جزء است.

مثال ۴ــ برای اجتماع یا فصل مشترک در $P(E)$ هیچ جزء سوای جزء خنثی دارای قرینه‌ای نیست. در اجتماع، اگر $A = \varnothing$ را در نظر بگیریم، جزئی مانند B وجود ندارد که $A \cup B = \varnothing$ باشد و برای فصل مشترک نیز با فرض $A \neq E$ جزئی مانند B وجود ندارد که $A \cap B = E$ باشد.

۴ــ بنیان گروه

تعریف. یک قانون ترکیب در مجموعهٔ E یک بنیان گروه را معین میکند اگر:

۱ــ شرکت‌پذیر باشد.

۲ـ دارای جزء خنثی باشد.

۳ـ هرجزء a دارای یک قرینه a' برای این قانون باشد.

هرمجموعه E که با چنین قانونی مجهز باشد گروه نامیده میشود.

مثال ـ از جمیع قانون‌های مورد بحث در مثالهای قبل (§۳) فقط یکی قانون گروه است: و این عبارت از قانون $\top$ در مجموعه:
$E = \{a, b, c, d\}$ است که جدول آن در شکل (۱) داده شده است. ما درستی جمیع خواص گروه را برای این قانون آزمایش کرده‌ایم. ما حتی یک خاصیت تکمیلی نیز پیدا نموده‌ایم: جابجاپذیری. بدین ترتیب میتوانیم بگوئیم که قانون $\top$ یک بنیان گروه جابجاپذیر را روی E معین مینماید و یا اینکه E یک گروه جابجاپذیر است.

قضیهٔ ۲ـ در یک گروه هرجزئی اختصارپذیر است.

فرض کنیم a و b و c سه جزء غیر مشخص از یک گروه G با قانون $\top$ باشد. خاصیت:

$$a \top b = a \top c \quad \Rightarrow \quad b = c \qquad (\mathcal{P})$$

را ثابت میکنیم.

از:

$$a \top b = a \top c \qquad (۱)$$

شروع میکنیم و سومین خاصیت گروه را بکار میبریم: جزء a دارای یک قرینه a' است.

$$a' \top a = e \qquad (۲)$$

طرفین رابطه (۱) را با a' از سمت چپ تروک Truc کنیم:

$$a' \top (a \top b) = a' \top (a \top c)$$

بنا به شرکت پذیری

$$(a' \top a) \top b = (a' \top a) \top c$$

و بنا به رابطه (۲):

$$e \top b = e \top c$$

و چون e یک جزء خنثی است:

$$b = c$$

خاصیت $(\mathcal{P})$ ثابت است. با همین روش میتوان اثبات کرد که:

$$b \top a = c \top a \quad \Rightarrow \quad b = c$$

پس قضیهٔ (۲) ثابت است.

قضیهٔ ۳ـ در هرگروه قرینهٔ a' جزء a فقط یکی است.

فرض کنیم یک جزء a دارای دو قرینه a' و a'' باشد:

$$a' \top a = e \text{ و } a'' \top a = e$$

از آنجا نتیجه میشود:

$$a' \top a = a'' \top a$$

چون هر جزء a منتظم است (قضیه ۲) بنابـراین با اختصار بر a: $a' = a''$ و قضیهٔ ۳ ثابت است.

زیرگروه

یک گروه E (با قانون T) و یک بخش G از E را در نظر بگیریم که با شرایط زیر سازگار باشد:

۱ــ ترکیب دو جزء a و b از G متعلق به G باشد:

$$\forall a, b \in G \quad \Rightarrow \quad (a \top b) \in G$$

۲ــ جزء خنثای e از قانون $\top$ـی مجموعه E متعلق به G باشد.

۳ــ قرینهٔ a' (برای قانون $\top$ـی مجموعه E) هر جزء a از G متعلق به G باشد.

$$(\forall a \in G \qquad \text{و} \qquad a \top a' = e) \quad \Rightarrow \quad a' \in G$$

در این صورت مجموعه G خود یک گروه برای قانون $\top$ـی مجموعهٔ E بشمار میرود. (در این صورت شرکت پذیری در G از شرکت پذیری در E و خاصیت اول نتیجه میشود). میگویند که G یک زیرگروه E است.

مثال ــ مجموعه $E = \{a, b, c, d\}$ را که از جدول شکل (۱) معین شده و مجهز به قانون $\top$ است در نظر میگیریم. فرض میکنیم G بخشی از E باشد که فقط با حرفهای a و b تشکیل شده است:

$$G = \{a, b\}$$

از جدول شکل (۱) قسمت مقابل را جدا میکنیم

	a	b
a	a	b
b	b	a

شکل ۷

این جدول نشان میدهد که G دارای خواص زیر است:

۱ــ ترکیب دو جزء G متعلق به G است.

۲ــ جزء خنثای a متعلق به G است.

۳ــ قرینهٔ جزء a که a است و قرینه جزء b که b است به G تعلق دارنـد پس G یک زیرگروه E است.

۵ــ توزیع‌پذیری:

مجموعهٔ E را که مجهز به قوانین $\top$ و $*$ باشد در نظر میگیریم.

تعریف- میگویند که قانون $*$ توزیع‌پذیر از طرف چپ نسبت به قانون $\top$ است اگر هرچه باشد a و b و c متعلق به E داشته باشیم:

$$a * (b \top c) = (a * b) \top (a * c)$$

و نیز قانون $*$ توزیع‌پذیر از طرف راست نسبت به قانون $\top$ است اگر هرچه باشد a و b و c متعلق به E داشته باشیم:

$$(b \top c) * a = (b * a) \top (c * a)$$

اگر توزیع پذیری از هردو طرف وجود داشته باشد میگویند که قانون $*$ توزیع پذیر نسبت به قانون $\top$ میباشد.

تبصره ـ اگر قانون $*$ جابجاپذیر باشد (بدون آنکه الزامی برای توزیع پذیری باشد) توزیع پذیری یک طرف موجب توزیع پذیری طرف دیگر میگردد.

مثال ۱ـ مجموعه $E = \{a, b, c, d\}$ را در نظر بگیریم که هم به قانون $\top$ که از روی جدول شکل (۱) معین میشود مجهز باشد و هم بیک قانون دیگر $*$ که از رابطه:

$x * y = x$ معین میگردد.

(هرچه باشد x و y متعلق به E)

میخواهیم اثبات کنیم که قانون $*$ نسبت به قانون $\top$ از طرف راست توزیع‌پذیر است ولی از طرف چپ نیست.

الف) هرچه باشد x و y و z متعلق به E بنا به تعریف قانون $*$ داریم:

$$(y \top z) * x = y \top z \qquad (۱)$$

$$y * x = y$$

$$z * x = z$$

دو رابطه آخری موجب:

$$(y * z) \top (z * x) = y \top z \qquad (۲)$$

میگردند و از مقایسه (۱) و (۲):

$$(y \top z) * x = (y * x) \top (z * x)$$

یعنی قانون $*$ نسبت به قانون $\top$ از سمت راست توزیع پذیر است.

ب) بعکس، توزیع پذیری در سمت چپ وجود ندارد. زیرا:

$$x * (y \top z) = x \qquad (۳)$$

$$x * y = x$$

$$x * z = x$$

از دو رابطه آخری نتیجه میشود:

$$(x * y) \mathbf{T} (x * z) = x \mathbf{T} x \qquad (۴)$$

از مقایسه (۳) و (۴) و بنا به جدول قانون $\mathbf{T}$ (شکل ۱) رابطه: $x \mathbf{T} x = x$ جز بازای جزء خنثای $a = x$ صحیح نیست و بنابراین در حالت کلی:

$$x * (y \mathbf{T} z) \neq (x * y) \mathbf{T} (x * z)$$

یعنی از سمت چپ توزیع پذیری وجود ندارد.

مثال ۲ــ مجموعهٔ $P(E)$ بخشهای E را در نظر میگیریم. ما، در این مجموعه دوقانون ترکیب درونی معین کرده‌ایم:

فصل مشترک $A \cap B$ و اجتماع $A \cup B$؛ هرکدام از قانون‌ها نسبت به دیگری توزیع پذیر است.

فصل مشترک نسبت به اجتماع توزیع پذیر است:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad (۵)$$

چون فصل مشترک جابجاپذیر است کافی است توزیع پذیری در یک طرف را اثبات کنیم:

اجتماع نسبت به فصل مشترک توزیع پذیر است:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad (۶)$$

(در نظر بگیریم که اجتماع نیز توزیع پذیر است).

برای اثبات (۵) جزء x متعلق به طرف اول را اختیار میکنیم و ثابت میکنیم که متعلق به طرف دوم نیز هست و بعکس.

هم‌ارزی‌های منطقی را که از تعریفها ناشی هستند بکار میبریم:

$$x \in (A \cap B) \iff (x \in A \text{ و } x \in B)$$

$$x \in (A \cup B) \iff (x \in A \text{ یا } x \in B)$$

در استدلال زیر گزاره‌ای که در یک سطر نوشته شده است هم‌ارز منطقی گزاره نوشته شده در سطر بعدی (یا قبلی) است:

$$x \in A \cap (B \cup C)$$

$$x \in A \qquad \text{و} \qquad x \in (B \cup C)$$

$$x \in A \qquad \text{و} \qquad (x \in B \qquad \text{یا} \qquad x \in C)$$

$$(x \in A \qquad \text{و} \qquad x \in B) \qquad \text{یا} \qquad (x \in A \qquad \text{و} \qquad x \in C)$$

$$x \in (A \cap B) \qquad \text{یا} \qquad x \in (A \cap C)$$

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

پس تساوی (۵) ثابت است.

تساوی (۶) با طرز مشابهی اثبات میگردد (اثبات کنید)

۶ـ بنیان حلقه. بنیان هیئت:

تعریف ـ دو قانون ترکیب در یک مجموعهٔ E یک بنیان حلقه را در این مجموعه معین میکنند اگر:

۱ـ قانون اول یک بنیان گروه جابجاپذیر در E معین کند.

۲ـ قانون دوم یک بنیان نیم گروه در E معین کند.

۳ـ قانون دوم نسبت به قانون اول توزیع‌پذیر باشد.

در این صورت میگویند که E یک حلقه است.

مثال ۱ـ یک گروه جابجاپذیر G غیر مشخص اختیار میکنیم. قانون آنرا با $\top$ و جز خنثای آنرا با e نمایش میدهیم: یک قانون دومی $*$ را در G تعیین می‌نمائیم:

$$(\forall\, a, b \in G) \qquad a * b = e$$

۱ـ واضح است که این قانون شرکت‌پذیر است:

$$(\forall\, a, b, c \in G) \qquad (a * b) * c = a * (b * c)$$

زیرا هر دو طرف برابر e میباشند (بنا به تعریف قانون $*$) پس G برای قانون $*$ یک نیم‌گروه است.

۲ـ این قانون نسبت به قانون $\top$ گروه توزیع‌پذیر است:

$$(\forall\, a, b, c \in G) \quad a * (b \top c) = (a * b) \top (a * c)$$

زیرا برای طرف اول: $a * (b \top c) = e$

برای طرف دوم داریم: $a * b = e$ و $a * c = e$

از آنجا: $(a * b) \top (a * c) = e \top e = e$

چونکه e جزء خنثای قانون $\top$ است.

چون قانون $*$ بطور وضوح جابجاپذیر است پس توزیع‌پذیری سمت راست نیز از آنجا نتیجه میگردد. پس گروه جابجاپذیر G مجهز بقانون دوم $*$ یک حلقه است و چون قانون دوم جابجاپذیر است میگویند که G یک حلقه جابجاپذیر است.

در این مثال قانون $*$ دارای جزء خنثی نمیباشد زیرا هیچ جزء $x \in G$ وجود ندارد بطوریکه $a * x = a$ (هرچه باشد a) چونکه: $a * x = e$ (هرچه باشد a و x).

حلقه با جزء واحد. هرگاه قانون دوم دارای یک جزء خنثی باشد این جزء را جزء واحد حلقه (برای تشخیص آن از جزء خنثای قانون $\top$ـی گروه) و در این صورت حلقه را حلقه با جزء واحد (حلقه یکه) نامند.

حوزهٔ تمامیت. یک حلقه جابجاپذیر را که هر جزء آن (سوای جزء خنثای قانون گروه) نسبت به قانون دیگر منتظم باشد حوزهٔ تمامیت نامند.

خواص یك حلقه:

فرض کنیم A حلقه‌ای باشد که در آنجا: $(-a)$ نمایش قرینهٔ a بازاء قانون $\top$ـی گروه جابجاپذیر و $*$ نمایش قانون دوم باشد.

$\boxed{P_1}$ اگر e جزء خنثای قانون $\top$ باشد.

$$(\forall a \in A) \qquad a * e = e * a = e$$

زیرا:

$$(\forall b \in A) \qquad b \top e = b$$

اگر از سمت چپ با a ستاره دار کنیم:

$$a * (b \top e) = a * b$$

و بنا به توزیع پذیری:

$$(a * b) \top (a * e) = a * b$$

اگر نسبت به قانون $\top$ـی گروه بر $a * b$ اختصار کنیم:

$$a * e = e$$

بهمین ترتیب ثابت می‌شود که:

$$e * a = e$$

$\boxed{P_2}$

$$(\forall a,b \in A) \quad a * (-b) = -(a * b)$$

از:

$$(-b) \top b = e$$

شروع و از سمت چپ با a ستاره‌دار میکنیم:

$$a * [(-b) \top b] = a * e$$

اگر در طرف اول توزیع‌پذیری و در طرف دوم خاصیت P_1 را بکار ببندیم:

$$[a * (-b)] \top (a * b) = e$$

از آنجا:

$$a * (-b) = -(a * b)$$

بنیان هیئت

تعریفـ هیئت عبارت از حلقه با جزء واحداست که در آنجا هر جزء (سوای جزء خنثای گروه جابجاپذیر) دارای یک قرینه بازاء قانون دوم باشد.

بنابر این دو قانون $\top$ و $*$ یک بنیان هیئت را در مجموعه E معین میسازند اگر:

۱ـ قانون $\top$ یک بنیان گروه جابجاپذیر را در E تعیین نماید.

(فرض میکنیم e جزء خنثای $\top$ است)

۲ـ قانون $*$ یک بنیان گروه را در E (سوای e) تعیین نماید.

۳ـ قانون $*$ نسبت به قانون $\top$ توزیع‌پذیر باشد.

مثالـ مجموعه $E = \{a, b, c\}$ را با دو قانون $\top$ و $*$ که از روی جدول های زیر معین میشوند در نظر میگیریم:

	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

قانون $*$

	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

قانون $\top$

شکل ۸

بسادگی معلوم میشود که:

۱ـ قانون $\top$ یک گروه جابجاپذیر را در E معین میکند (سوای جزء خنثای a؛ قرینه‌های a و b و c عبارتند از a و c و b).

۲ـ قانون $*$ یک گروه در $E - \{a\}$ معین میسازد (با حذف سطر و ستون a مشاهده می‌شود که گروه شکل ۷ بدست میآید).

۳ـ قانون $*$ نسبت به قانون $\top$ توزیع‌پذیر است.

مجموعهٔ E مجهز به قانونهای $\top$ و $*$ یک هیئت است.

هرگاه، همانطور که در این مثال است، قانون دوم نیز جابجاپذیر باشد میگویند که E یک هیئت جابجاپذیر است.

۷ـ ایده‌آل یک حلقه جابجاپذیر

فرض میکنیم A یک حلقه جابجاپذیر باشد.

تعریفـ ایده‌آل حلقهٔ A عبارت از بخش غیر تهی I از A است که دارای خواص زیر باشد:

(۱) $\quad (\forall a \in I$ و $\forall b \in I) \Rightarrow aT(-b) \in I$

(۲) $\quad (\forall a \in I$ و $\forall x \in A) \Rightarrow a * x \in I$

مثال ـ بخش $\{e\}$ که از یک جزء خنثای e قانون $\top$ـی گروه A تشکیل یافته است یک ایده‌آل A است.

$\boxed{P_3}$ هر ایده‌آل A یک زیر حلقهٔ A است.ـ ابتدا ثابت میکنیم که هر ایده‌آل از A یک زیر گروه A بازاء قانون $\top$ است:

$\alpha)\ e \in I$ (در تعریف (۱) $a = b$ قرار دهید)

$\beta)\ \forall b \in I \Rightarrow (-b) \in I$ (در تعریف (۱) $a = e$ قرار دهید)

$\gamma)\ (\forall a, c \in I) \Rightarrow A \top C \in I$ (در تعریف (۱) $b = -c$ قرار دهید).

پس ایده‌آل I یک زیر گروه A است.

بالاخره قانون $*$ یک قانون درونی در I است (تعریف ۲).

$$\forall a, b \in I \Rightarrow a * b \in I$$

بنابراین I یک زیر حلقه A است.

$\boxed{P_4}$ فصل مشترک دو ایده‌آل A یک ایده‌آل A است.

فرض کنیم I و J دو ایده‌آل A باشند. اولاًـ اگر a و b هم به I و هم به J تعلق داشته باشند در این صورت $a \top (-b)$ بنا به تعریف اول هم به I و هم به J تعلق خواهد داشت:

$$(a \in I \cap J \quad \text{و} \quad b \in I \cap J) \Leftarrow a \top (-b) \in I \cap J$$

ثانیاً اگر a در عین حال متعلق به I و J باشد در این صورت هرچه باشد x متعلق به A، $a * x$ در عین حال متعلق به I و J است:

$$(a \in I \cap J \quad \text{و} \quad \forall x \in A) \Leftarrow a * x \in I \cap J$$

ایده‌آل اصلی:

جزء ثابت a از حلقه A را برگزینیم و مجموعهٔ M_a از اجزاء:

$a * x$ (هرچه باشد $x \in A$)

را در نظر بگیریم

قانون $\top$ بخاطر توزیع‌پذیری قانون درونی در M_a است:

$$(\forall\, x,\, y \in A) \quad (a * x) \top (a * y) = a * (x \top y)$$

جزء خنثای e به M_a تعلق دارد چونکه:

$$a * e = e \qquad (\text{خاصیت } P_1)$$

قرینهٔ یک جزء M_a متعلق به M_a است چونکه:

$$-(a * x) = a * (-x) \qquad (\text{خاصیت } P_2)$$

پس M_a یک زیرگروه A است. از طرف دیگر بخاطر شرکت‌پذیری داریم:

$$(a * x) * y = a * (x * y)$$

در نتیجه M_a یک ایده‌آل A است. آنرا ایده‌آل اصلی مینامند.

تعریف- ایده‌آل اصلی حلقه A عبارت است از مجموعهٔ ترکیب‌های $a * x$ حاصل از یک جزء ثابت a و هر جزء x از A

تبصره- ایده‌آل اصلی بطور کلی شامل جزء a که بر مبنای آن ساخته شده است نیست بایستی که در A یک جزء x وجود داشته باشد بطوریکه:

$$a * x = a$$

این اتفاق مخصوصاً در حالت حلقه با جزء واحد u پیش میاید:

$$a * u = a$$

۸- قوانین ترکیب‌های برونی:

دو مجموعهٔ E و F را در نظر میگیریم. اجزاء مجموعهٔ E را با: $a \in E$ و اجزاء مجموعهٔ F را با: $\alpha \in F$ نمایش میدهیم.

تعریف اول- به هر زوج (α, a) یک جزء α از F و یک جزء a از E یک جزء c از E را همراه کنیم و بنویسیم:

$$c = \alpha\, a$$

یکی از جمله‌ها متعلق به E و دیگری به F و نتیجه متعلق به E است.

در این تعریف ردیف دو حرف α و a بدون تفاوت است زیرا آنها به مجموعه‌های جداگانه تعلق دارند بدین ترتیب یک قانون ترکیب برونی معین میگردد.

مثال- E مجموعه طولها و F مجموعه اعداد طبیعی است.

«حاصل ضرب یک طول a در یک عدد طبیعی α» را با پشت سرهم گذاشتن α قطعه مساوی که هرکدام با a نمایش داده میشوند معین میکنیم.

تعریف دوم- بهر زوج مرتب (a, b) دو جزء از E یک جزء α از F را همراه سازیم و بنویسیم:

$$a \cdot b = \alpha$$

هردوجمله به E ونتیجه به F تعلق دارد. در این تعریف اجزاء a و b با ترتیب داده شده‌اند زیرا که آنها بیک مجموعه تعلق دارند.

بدین ترتیب یک قانون ترکیب برونی نوع دومی معین میگردد.

مثال- اگر E مجموعهٔ بردارها و F مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد حاصل ضرب عددی (سکالر) دو بردار a و b یک عدد حقیقی α است.

در بخشهای بعدی این دو مثال را دقیقتر مورد بررسی قرار خواهیم داد.

بنیان فضای برداری روی یك هیئت K.

تعریف: یک مجموعهٔ E مجهز بیک بنیان گروه جابجاپذیر (که قانون آنرا با علامت جمع نمایش میدهیم: $+$) و یک هیئت K را (که قانون اول آن با $\top$ و قانون دوم آن با $*$ نمایش داده میشود) در نظر بگیریم.

E را با یک قانون برونی از نوع اول روی K تجهیز کنیم:

$$a \in E;\ \ \alpha \in K; \alpha\, a \in E$$

بعلاوه این قانون دارای خواص زیر باشد:

$$\alpha\,(a + b) = \alpha\, a + \alpha\, b$$

$$(\alpha \top \beta)\, a = \alpha\, a + \beta\, a$$

$$(\alpha * \beta)\, a = \alpha\, (\beta a)$$

$$\varepsilon\, a = a$$

که در آنجا ε علامت واحد قانون $*$ هیئت K است.

در این صورت میگویند قانون ترکیب برونی یک بنیان فضای برداری را روی هیئت K در گروه جابجاپذیر E معین میکند.

مثال- خود کلمهٔ فضای برداری از آنجا ناشی است که این بنیان در هندسه در مورد بردارها پیش میآید.

در این کتاب گروه جابجاپذیر $\mathcal{E}$ بردارهای خط و صفحه را مورد بررسی قرار خواهیم‌داد.

اگر R نمایش هیئت اعداد حقیقی باشد یک عمل برونی با: «ضرب یک بردار $a \in \mathcal{E}$ در یک عدد حقیقی $\alpha \in R$» معین خواهد شد.

این عمل دارای خواصی که قبلاً بیان شده میباشد بطوریکه $\mathcal{E}$ یک فضای برداری روی هیئت اعداد حقیقی است.

زیر فضای برداری

یک فضای برداری E و یک بخش E' از E را در نظر بگیریم:

$$E' \subset E$$

که با شرایط زیر سازگار باشد:

E' یک زیر گروه E است. (۱)

$(\forall a \in E'$ و $\forall \alpha \in k) \quad \Rightarrow \quad \alpha a \in E'$ (۲)

بسهولت معلوم میشود که بخش E' خود به تنهائی دارای شرایط فضای برداری روی هیئت k میباشد.

E' را زیر فضای برداری E مینامند.

فصل سوم

تابعها

۱ـ تعریفها:

فرض کنیم E و F دو مجموعه باشند.

اگر «بهر جزء x از E یک جزء و فقط یک جزء y از F را همراه کنیم» ما بین E و F یک تناظر یک سوئی (یا یک ارزشی) بوجود میاید که تابع یا نگاشت نامیده میشود.

علامت تابع:

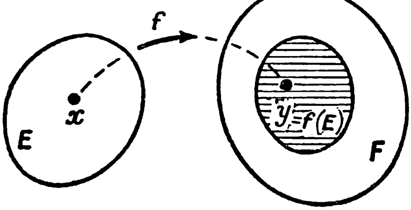
$x \to y$ یا $y = f(x)$ است.

میگویند که تابع در E معین است و مقادیرش را در F اختیار مینماید؛ x را متغیر و y را مقدار تابع یا تصویر x مینامند.

هر $x \in E$ دارای یک تصویر در F است؛ E میدان معین بودن تابع است. مجموعهٔ تصویرهای اجزاء E بخشی از F است که به «تصویر E» موسوم است و با $f(E)$ نمایش داده میشود. داریم $f(E) \subset F$

روی شکل (۱) تصویر $f(E)$ هاشور خورده است.

لازم به یادآوری است که هر جزء F الزاماً تصویر یک جزء E نیست. و همچنین خاطرنشان کنیم که دو جزء x و x' از E ممکن است دارای یک تصویر y باشند.



شکل ۱

مثال ـ نقطه فضائی o را در هندسه اختیار نمائیم.

مجموعه نقاط فضا سوای o را E بنامیم.

مجموعه خطوط فضا را F بنامیم. بهر نقطه $x \in E$ یک خط $y \in F$ که با o و x

معین میگردد همراه کنیم بدین ترتیب یک تـابع f معین در E را که مقدارهایش در F است خواهیم داشت.

میدان معین بـودن تـابع، مجموعه جمیع نقاط فضا سوای o است. مجموعـه $f(E)$ تصویرهای نقاط x از E بخشی از F است که با خطوط گذرنده بر o تشکیل شده است. لیکن هرخط F بطور الزامی یک تصویر از یک نقطه x متعلق به E نیست.

از طرف دیگر دو نقطه متمایز x و x' از E میتوانند دارای همان تصویر y باشند: کافی است که x و x' با o بر یک استقامت باشند.

۲ـ خواص عمومی

برون گستری

فرض کنیم تابع f معین در E بـا مقادیر در F طوری باشد که تصویر E عبارت از F باشد:

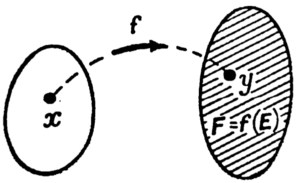
$$f(E) = F$$

در اینصورت میگویند کـه «f مجموعه E را در F مینگارد یا که f یک برون گستری E روی F است» (شکل ۲)

مثال ــ فرض کنیم E مجموعهٔ نقاط فضا و F مجموعهٔ نقاط یک صفحه بـاشد بهر نقطه x از E تصویر قائم آن y را روی F همراه کنیم بدین ترتیب تابع f در E بـا تصاویر در F معین میشود. در این‌جا خاصیت زیر را داریم:

«هر نقطهٔ y از صفحهٔ F تصویـر قائم یک نقطه x از فضای E است».

پس داریـم $f(E) = F$ و f یـک بـرون گستری E روی F است.



برون گستری f (شکل ۲)

درون گستری

فرض کنیم تابع f معین در E با مقادیر در F طوری باشد که: «دو جزء متمایز x و x' از E همواره دارای دو تصویر متمایز y و y' باشند».

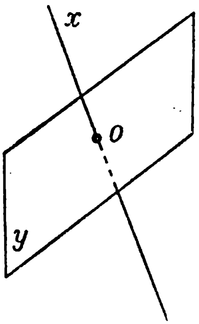
در اینصورت میگویند که f یک درون گستری E روی F است.

$$(\forall\, x, x' \in E) \qquad x \neq x' \;\Rightarrow\; f(x) \neq f(x')$$

مثال ۱ــ ابتدا دو مثال قبل را از نظر میگذرانیم.

برای اولی خاطرنشان کردیم که دو نقطهٔ متمایز x و x' دارای یک تصویر y هستند اگر این نقاط با o بر یک استقامت باشند: تابع مورد بررسی درون گستر نیست.

اگر $f(x)$ تصویرقائم یک نقطه $x \in E$ روی صفحه مفروض F باشد دو نقطهٔ متمایز x و x' دارای یک تصویر قائم هستند اگر خط عمود بر F را مشخص سازند. تصویر قائم E روی F نیز درون گستر نیست.



شکل ۳

مثال ــ فرض کنیم E مجموعه خطوط گذرنده بر o و F مجموعهٔ صفحات فضا باشد. بهر خط x از E یک صفحه y از F را همراه کنیم که در o به x عمود باشد (شکل ۳) بدین ترتیب یک تابع E در F معین میگردد. این یک درون‌گستری است زیرا دو خط متمایز x و x' از E همواره دارای دو تصویر متمایز y و y' میباشند.

تناظر دوسوئی یا دوسوگستری

فرض کنیم تابع f معین در E با مقادیر در F در عین حال یک برون‌گستری و یک درون گستری باشد:

$$a) \qquad f(E) = F$$

$$b) \qquad (\forall\, x, x' \in E) \qquad x \neq x' \;\Rightarrow\; f(x) \neq f(x')$$

خاصیت a بدان معنی است که: «هر y از F تصویر یک x از E است».

خاصیت b به آن معنی است که: «هر y از F تصویر یک x فقط از E است».

این خاصیت منطقاً هم‌ارز خاصیت زیر است:

$$f(x) = f(x') \;\Rightarrow\; x = x'$$

پس در نتیجه داریم:

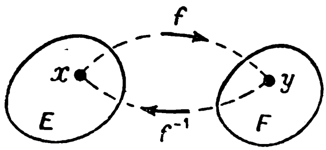
«هر y از F تصویر یک x و فقط یکی از E است». این خاصیت یک تابع جدید از متغیر y را با مقادیر نظیر x معین میسازد. میدان معین بودن این تابع F و تصویر F عبارت از E است. این تابع به «نگاشت معکوس f موسوم است و بصورت f^{-1} نمایش داده میشود.

$$\forall\, x \in E \text{ داریم } : y = f(x) \text{ با } y \in F$$

$$\forall\, y \in F \text{ داریم } : x = f^{-1}(y) \text{ با } x \in E$$

در این صورت میگویند که f یک دوسو گستری یا تناظر دوسوئی بین E و F است (شکل ۴)

مثال ــ فرض کنیم E مجموعهٔ خطوط گذرنده بر o و F مجموعهٔ صفحات گذرنده بر o باشد.



تناظر دوسوئی (شکل ۴)

بهر خط $x \in E$ یک صفحه $y \in F$ عمود بر x را همـراه کنیم (شکل ۳) در اینجا یک تابع E روی F را داریم که:

۱ــ برون گستر است: هرصفحه y گذرنده بر o عمود بر یک خط x گذرنده بر o است.

۲ــ درون گستر است: دو خط متمایز x و x' از دارای دو صفحه متمایز y و y' نظیر از F میباشند.

پس تناظر بین E و F دو سوئی است.

۳ــ تناظر بین دو مجموعه «اکیداً مرتب»

قبلاً (فصل ۱ ؛ ۷) تعریف رابطه اکید در یک مجموعه E را بیان کردیم .

رابطه دو تائی $a < b$ یک رابطه ترتیب اکید است اگر :

$$(a < b, b < c \quad \Rightarrow \quad a < c) \tag{1}$$

$$a < b \quad \Rightarrow \quad a \neq b \tag{2}$$

یک رابطه ترتیب اکید خودپذیر نیست .

تبصره ــ دو علامت $a < b$ و $b > a$ هم‌ارزند.

فرض کنیم دو مجموعهٔ E و F را داشته باشیم که هردو با روابط (با علامت $<$) اکیداً مرتب شده باشند.

تعریفات ــ یک نگاشت f از E روی F اکیداً صعودی نامیده میشود اگر :

$$(\forall\, x, x' \in E) \qquad x < x' \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(x')$$

و اکیداً نزولی است اگر :

$$(\forall\, x, x' \in E) \qquad x < x' \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(x')$$

یک تابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی را اکیداً یک نواخت مینامیم.

حال دو مجموعه E و F را در نظر میگیریم که دارای ترتیب کلی باشند. تــرتیب کلی بدان معنی است هرچه باشد a و b اجزاء E (یا F) $(a \neq b)$ داریم :

$$\text{یا} \quad a < b \quad \text{و یا} \quad b < a$$

در این صورت قضیه زیر را داریم :

قضیه ۱ - اگر E و F دو مجموعه اکیداً و کلاً مرتب باشند هر نگاشت اکیداً یک نواخت E در F یک درون گستری است .

فرض کنیم که f یک تابع اکیداً صعودی E در F باشد.

(در حالت نزولی بودن f نیز استدلال همان است).

میخواهیم اثبات کنیم :

$$(\forall\, x, x' \in E) \qquad x \neq x' \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq f(x')$$

چون E اکیداً و کلاً مرتب است $x \neq x'$ بدان معنی است که داریم : یا $x < x'$ و یا $x' < x$ (در هر دو حالت استدلال یکسان است).

حالت اول را اختیار مینمائیم. چون f اکیداً صعودی است داریم :

$$x < x' \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(x')$$

و چون F اکیداً مرتب است و رابطه ترتیب F خودپذیر نیست؛ و در نتیجه داریم :

$$f(x) < f(x') \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq f(x')$$

پس قضیه (۱) ثابت است.

از آنجا بلافاصله قضیه بعد نتیجه میگردد :

قضیه ۲ - اگر E و F دو مجموعه اکیداً و کلاً مرتب باشند هر نگاشت اکیداً یک نواخت E روی F (برون گستری یک نواخت) یک دوسو گستری است.

این قضیه برای بررسی توابع دوسو گستر بین دو مجموعه کلاً مرتب بسیار مهم است. مثالهای زیادی را در این کتاب خواهیم دید.

۴ـ قانون ترکیب توابع

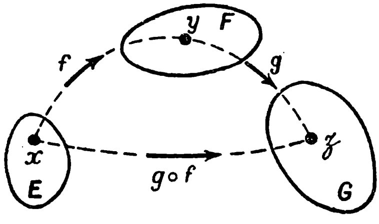
فرض کنیم مجموعه‌های E و F و G را داشته باشیم (شکل ۵) و فرض کنیم f یک نگاشت E در F و g یک نگاشت F در G باشد.

بهر x از E یک نظیر y و فقط یکی از F به وسیله f بوجود میآید:

$$y = f(x)$$

و به این y از F یک نظیر z و فقط یکی از G بوسیله g بوجود میآید :

$$z = g(y)$$



نتیجه ترکیب دو تابع

شکل ۵

در نتیجه بهر x از E بتوسط y یک نظیر z و فقط یکی از G وجود دارد. بدین‌ترتیب یک تابع جدید «حاصل ترکیب f و g» معین میگردد.

$$z = g[f(x)]$$

ترکیب f و g را با علامت:

$$g \circ f$$

نمایش میدهیم. جمله اول f در سمت راست قراردارد.

قانون ترکیب را با علامت $\circ$ نمایش میدهیم که منحصراً اختصاص به توابع دارد. ترتیب $g \circ f$ یک مسئله اساسی است، ترتیب عکس آن معمولاً دارای مفهومی نیست.

مثال ــ فرض کنیم E مجموعه نقاط فضا، سوای o

F مجموعه خطوط فضا گذرنده بر o

G مجموعه صفحات فضا گذرنده بر o باشند.

بهر نقطه x از E یک خط y از F را که از x میگذرد همراه کنیم و با این خط y از F یک صفحه z از G را که عمود بر y است همراه کنیم. عمل اول تابع $y = f(x)$ را در E با مقادیر در F معین میکند و عمل دوم تابع $z = g(y)$ را در F با مقادیر در G معین میکند. ترکیب $g \circ f$ بهر نقطه x از E صفحه z از G را که عمود بر ox است همراه مینماید.

شرکت پذیری ترکیب توابع

هرچه باشد f و g و h داریم:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

فرض کنیم چهارمجموعه E و F و G و H (شکل ۶) و سه تابع زیر را داشته باشیم:

$$\forall\, x \in E \quad y = f(x) \in F$$

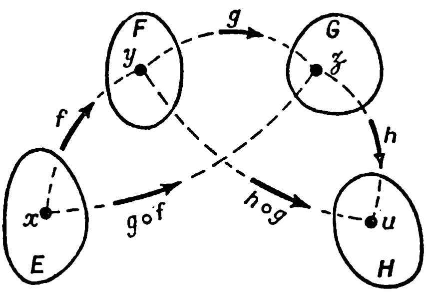
$$\forall\, y \in F \quad z = g(y) \in G$$

$$\forall\, z \in G \quad u = h(z) \in H$$

داریم: $z = (g \circ f)\,(x)$

بنابراین $(h \circ g) \circ f$ وسیله گذر از x به u (به توسط z) است. از طرف دیگر:

$$u = (h \circ g)\,(y)$$



شرکت پذیری ترکیب توابع
شکل ۶

و بنابراین $(h \circ g) \circ f$ باز هم وسیله گذر از x به u (به توسط y) است.

دو تابع $h \circ (g \circ f)$ و $(h \circ g) \circ f$ برابرند چونکه تصاویری که آنها از هر x از E میدهند همان u از H میباشند. بنابراین قانون ترکیب توابع شرکت پذیر است.

تبصره ـ مجموعه جمیع توابع: فضای تابعی نامیده میشود. پس میتوان گفت که فضای تابعی یک نیم گروه است.

۵ـ ترکیب دو تناظر دوسوئی.

هرگاه E و F و G مجموعه‌های غیر مشخص و f یک نگاشت E در F و g یک نگاشت F در G باشد دو خاصیت اثبات میکنیم: اولی در حالتی که f و g برون گسترهستند، دومی در حالتی که f و g درون گستر هستند.

$\boxed{P_1}$ ترکیب دو برون گستری یک برون گستری است زیرا اگر $f(E) = F$ و $g(F) = G$ باشد داریم:

$$g[f(E)] = G$$

ترکیب $g \circ f$ دو برون گستری f و g خودش نیز یک برون گستری E روی G است.

$\boxed{P_2}$ ترکیب دو درون گستری یک درون گستری است.

فرض کنیم که f درون گستر باشد:

$$x \neq x' \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq f(x')$$

و که g نیز درون گستر باشد:

$$y \neq y' \quad \Rightarrow \quad g(y) \neq g(y')$$

از آنجا بلافاصله نتیجه میشود:

$$x \neq x' \quad \Rightarrow \quad g[f(x)] \neq g[f(x')]$$

ترکیب $g \circ f$ دو درون‌گستری f و g خودش نیزیک درون گستری E روی G است.

نتیجه ـ اگر f و g هر دو با هم برون گستر یا درون گستر باشند.

ترکیب $g \circ f$ آنها نیز همان‌طور است و ازآنجا قضیه زیر نتیجه میشود:

قضیه ۳ - ترکیب دو تناظر دوسوئی یک تناظر دوسوئی است.

۶ـ حالت $E = F$. مبادله. تعاکس

اگر میدان معین بودن E یک تابع f با مجموعه F که در آنجا f مقادیر خودش را

اختیار میکند، منطبق باشد، در این صورت f یک نگاشت E روی خودش میباشد.

نگار E بوسیله f در این صورت بخشی از E است :

$$f(E) \subset E$$

بخصوص :

۱ــ اگر $f(E) = E$ باشد، f یک برون گستری E روی خودش میباشد.

۲ــ اگر :

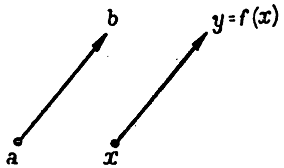
$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

f یک درون گستری E در خودش میباشد.

۳ــ اگر f در عین حال یک برون گستر و یک درون گستر باشد. در این صورت f یک دوسو گستری E روی خودش است و در این صورت آنرا جایگشت E مینامند.

تعریف ــ جایگشت E عبارت از یک دوسو گستری E روی خودش میباشد.

مثال ــ فرض کنیم E مجموعه جمیع نقاط هندسه اقلیدسی باشد. انتقال یک تابع E در E است که بطور عملی بترتیب زیر تعیین میشود. (شکل ۷)



شکل ۷

اگر یک پاره خط جهت دار ab داشته باشیم نظیر هر نقطه x از E نقطه y از E را قرار میدهیم بطوریکه پاره خط جهت دار xy همسنگ ab باشد بدین ترتیب تابع $y = f(x)$ از E در خود E بدست میآید که انتقال نامیده میشود.

بدیهی است که $b = f(a)$ است بقسمی که انتقال با معلوم بودن یک زوج مرتب (a, b) یک نقطه a و تصویر آن b معین است.

انتقال برونگستر است (هرنقطه y تصویر یک نقطه x است).

انتقال درونگستر است (دو نقطه متمایز دارای تصویرهای متمایزاند).

بنابراین انتقال دوسو گستر است و این یک جایگشت E است.

انتقال بعکس f^{-1} با زوج مرتب (b, a) معین میشود.

نگاشت همانی ــ این، عبارت از جایگشت e از E است که بهر x از E خود این همراه x را میکند :

$$(\forall x \in E) ; \qquad e(x) = x$$

آنرا انطباق نیز مینامند.

واین، عبارت از جزء خنثای قانون ترکیب نگاشت E در خود E است. در حقیقت هم هرچه باشد تابع f از E در خود E داریم:

$$f \circ e = e \circ f = f$$

ترکیب های $f \circ e$ و $e \circ f$ هردو دارای یک معنی میباشند که عبارت از f است.

گروه جایگشت‌های E

فرض کنیم $\mathcal{G}$ مجموعه جمیع جایگشت‌های E باشد.

اولاً ــ قانون ترکیب توابع در $\mathcal{G}$ درونی است.

زیرا بموجب قضیه ۳ــ ترکیب دو دوسو گستری از E یک دوسو گستری از E است.

پس:

$$(\forall\, f, g \in \mathcal{G}) \qquad g \circ f \in \mathcal{G}$$

ثانیاً ــ قانون ترکیب شرکت پذیر است.

ثالثاً ــ دارای یک جزء خنثی است:

$$e \in \mathcal{G}$$

رابعاً ــ هر جزء f از $\mathcal{G}$ دارای یک قرینه $f^{-1} \in \mathcal{G}$ برای قانون است:

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e$$

چونکه f یک دوسو گستری است.

مجموعه $\mathcal{G}$ جایگشت‌های E، یک گروه است.

تبصره ــ وقتی که f یک دوسو گستری E در F است (شکل ۴)، f^{-1} وجود دارد و دو ترکیب $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ دارای یک مفهوم هستند.

$f \circ f^{-1}$ یک همانی در F است؛

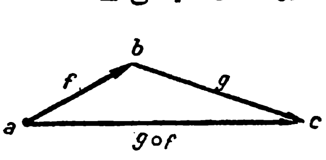
$f^{-1} \circ f$ یک همانی در E است؛

مثال ــ مجموعه انتقالها یک زیر گروه، گروه مبادله‌ها در فضای اقلیدسی E است.

هرگاه f انتقال (a, b) و g انتقال (b, c) باشد (شکل ۸) داریم:

$$b = f(a) \text{ و } c = g(b) \Rightarrow c = g[f(a)]$$

ترکیب $g \circ f$ عبارت از انتقال معین شده با زوج مرتب (a, c) است. قانون ترکیب، نسبت به مجموعه



ترکیب انتقال‌ها
شکل ۸

انتقالها درونی است.

جزء خنثی یک انتقال است: انتقال معین شده با زوج (a, a) (دو نقطه منطبق بهم).
به هر انتقال f معین شده با (a, b) یک قرینه f^{-1} معین شده با (b, a) نظیر است.

بنابراین انتقال‌ها یک زیر گروه گروه تبدیلهای فضای اقلیدسی E را تشکیل میدهند این زیر گروه جابجاپذیر است.

بسادگی محقق میشود که $f \circ g$ و $g \circ f$ هردو (وقتیکه f و g هر دو انتقال باشند) معین و متساوی هستند.

تعاکس ـ یک تبدیل f از E را که با عکس خود f^{-1} منطبق باشد تعاکس نامند.
(f یک جایگشت از E است بقسمی که $f = f^{-1}$) $\iff$ (f تعاکسی از F است)
یا:

$$(f \circ f = e) \iff (f \text{ تعاکسی از } E \text{ است})$$

مثال ـ تقارن f (مثلاً تقارن نسبت بیک نقطه o) در فضای اقلیدس E را در نظر بگیریم.

اگر b قرینه a باشد:

$$b = f(a)$$

میدانیم که a نیز قرینه b است:

$$a = f(b)$$

بعلاوه بدیهی است که تقارن f یک جایگشت E است. خاصیت قبلی معلوم میکند که f^{-1} با f منطبق است. واقعاً هم برای یک جایگشت غیر مشخص:

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

بعلاوه برای تقارن داریم:

$$y = f(x) \iff x = f(y)$$

پس:

$$(\forall\, y \in E) \qquad f(y) = f^{-1}(y)$$

از آنجا

$$f = f^{-1}$$

تقارن یک تعاکس E است.

۷ـ حالتی که E و F به قانونهای ترکیب درونی مجهز میباشند.

فرض میکنیم مجموعه E مجهز به قانون $\top$ و مجموعه F مجهز به قانون $*$ است.

همشکلی

تعریف ــ فرض‌کنیم f یک نگاشت E در F باشد که دارای خاصیت زیر است:

«تصویر ترکیب دو جزء E همواره ترکیب تصویرهای نظیر در F است:

یعنی:

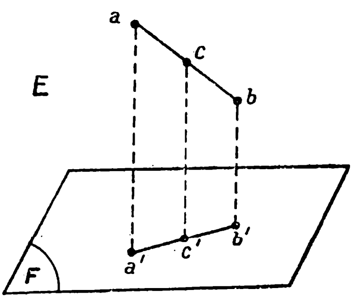
$$(\forall\, a, b \in E) \qquad f(a \top b) = f(a) * f(b)$$

دراین صورت میگویند که:

«f برای قانونهای $\top$ و $*$ یک همشکلی است»

مثال ــ فرض کنیم E مجموعه جمیع نقاط فضا مجهز به قانون $\top$ زیر باشد (شکل۹):

بهر زوج (a, b) دو نقطه a و b نقطه c وسط پاره خط $a\,b$ را همراه میکنیم.



شکل ۹

$$(c = a \top b) \iff (c \text{ وسط } a\,b \text{ است})$$

(ملاحظه میشود که قانون $\top$ جابجا پذیر است) فرض کنیم F مجموعه نقاط یک صفحه، مجهز به همان قانون $\top$ باشد.

تصویر قائم E را روی F با f معین میکنیم داریم:

$$f(a \top b) = f(a) \top f(b)$$

زیرا میدانیم که اگر c وسط $a\,b$ باشد و اگر a و b و c را روی F به a' و b' و c' تصویر کنیم در این صورت c' وسط $a'\,b'$ است. پس داریم:

$$f(a \top b) = f(c)$$

$$f(a) = a' \quad \text{و} \quad f(b) = b' \iff f(a) \top f(b) = a' \top b'$$

بنویسیم که $c' = a' \top b'$ تصویر نقطه c است:

$$f(a \top b) = f(a) \top f(b)$$

تصویر قائم E روی F یک همشکلی برای قانون $\top$ است.

یك شکلی

هرگاه f یک نگاشت دوسوئی E روی F باشد که در:

$$(\forall\, a, b \in E) \quad f(a \top b) = f(a) * f(b)$$

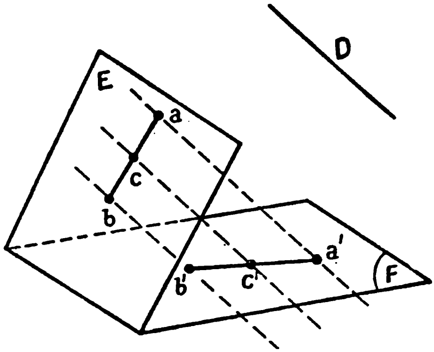
صدق کند.

در اینصورت میگویند که :

«f یک یک شکلی برای قوانین $\top$ و $*$ است»

تعریف ــ یک شکلی بین E و F عبارت از یک همشکلی دوسوگستر برای قانونهای E و F است.

مثال ــ فرض کنیم E و F دو صفحه و D خطی ثابت باشد که هردو صفحه E و F را قطع کند. (شکل ۱۰)



شکل ۱۰

تناظر f که بهر نقطه a از E نقطهٔ a' از F را بقسمی نظیر قرار میدهد که $a\,a'$ موازی D باشد، «تصویر E روی F بموازات D» نامیده میشود.

بفوریت محقق میشود که f یک دوسو گستری E روی F است. از طرف دیگر اگر c وسط $a\,b$ باشد میدانیم که c' وسط $a'b'$ است بطوریکه اگر E و F هر دو مجهز به‌قانون $\top$ مثال قبلی باشند داریم:

$$f(a \top b) = f(a) \top f(b)$$

تناظر دوسوئی f بین E و F یک یکشکلی برای قانون $\top$ است.

حالتی که E با F و $\top$ قانون با $*$ منطبق‌اند

هرگاه E مجموعه مجهز به قانون $\top$ و f یک نگاشت E در خود E باشد.

اگر f یک همشکلی برای قانون $\top$ باشد دراین صورت آنرا درون شکلی مینامند.

اگر f یک یک‌شکلی برای قانون $\top$ باشد در این صورت آنرا خود شکلی مینامند.

مثال ــ فرض‌کنیم فضای اقلیدسی E مجهز به قانون $\top$ دو مثال قبلی باشد :

$$(\forall\, a, b \in E) \qquad a\,T\,b = c \iff (c \text{ وسط } a\,b)$$

هر انتقال f از E در :

$$f(a \top b) = f(a) \top f(b)$$

صدق میکند .

«تبدیل شده وسط یک پاره خط با انتقال، وسط پاره خط تبدیل شده است» :

انتقال یک خود شکلی E برای قانون $\mathbf{T}$ است.

قسمت دوم

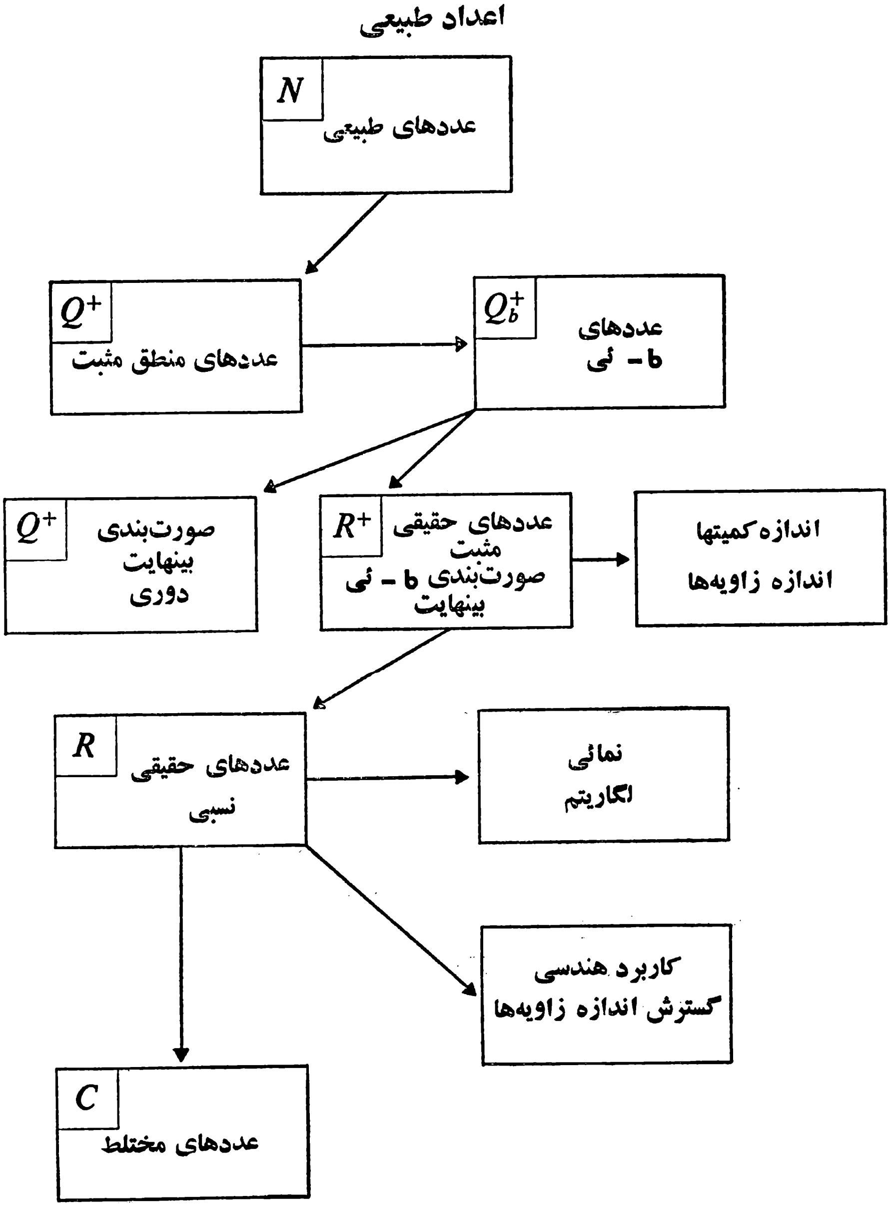
عددهای طبیعی

همه علمهای ریاضی با شروع از اعداد طبیعی که خـواص اساسی آنها را در اینجا مورد بررسی قرار میدهیم گسترش پیدا کرده‌اند.

مجموعه N اعـداد طبیعی بـر مبنای اصول مـوضوع په‌آنو Peano بنا شده‌اند. بر اساس این اصول بنیانهائی کـه تا حال آشنا شدیم (جمع، تفریق، رابطه‌هـای ترتیب، ضرب، تقسیم) در N تعریف شده‌اند.

تئوری شمار مستلزم شناخت بنیان‌های قبل است و بعد از آن رقم بندی یک عـدد طبیعی در یک مبنای غیر مشخص b انجام پذیـرفته است. نمایش اعشاری اعـداد طبیعی حالت مخصوصی از آن است. نمایشهای مناسبتر یـا در عمل (مـاشینهای الکترونیک) و یـا در تئوری (در این کتاب‌شمار در پایه دو غالباً مورد استفاده قـرار خواهد گرفت) پیش می‌آید.

و سپس قسمتهـای اساسی تئوریهـای مضربهـای مشترک، مقسوم‌علیه‌های مشترک و اعداد اول طرح ریزی شده است. بالاخـره به بررسی رابطه هم نهشتی در N میرسیم و این بررسی ساخت مجموعه‌های جدید (مجموعه کلاسهای مدول n) را بر مبنای N امکان‌پذیر می‌سازد که بنیانهای جبری غیر موجود در N در آنها تعریف شده‌اند.


اعداد طبیعی
N
عددهای طبیعی
Q^+
عددهای منطق مثبت
Q_b^+
عددهای
b - ئی
Q^+
صورت‌بندی
بینهایت
دوری
R^+
عددهای حقیقی
مثبت
صورت‌بندی b - ئی
بینهایت
اندازه کمیتها
اندازه زاویه‌ها
R
عددهای حقیقی
نسبی
نمائی
لگاریتم
کاربرد هندسی
گسترش اندازه زاویه‌ها
C
عددهای مختلط

فصل اول

ساخت مجموعه عددهای طبیعی
جمع ـ تفریق ـ نسبت ترتیب

۱ـ ساخت مجموعه عددهای طبیعی

عدد طبیعی یا عدد درست اولین درک ریاضی است که عقل بشری اختراع کرده است. در طبیعت اشیاء از یک گونه وجود دارد و اولین وظیفه ریاضی بشر، طبقه‌بندی و سپس (آدمهای قبیله، درختهای جنگل) شمردن آنها بوده است.

درک عددهای مجرد پس از آن بتدریج فراهم شده است (هنوز بروزگار ما بومیان‌ـ بدوی وجود دارند که در شمار انسان و درخت کلمه‌های جداگانه بکار میبرند و از عدد مجرد درکی ندارند).

عددهای معین شده برای شمار اشیای یک کلکسیون عبارت از سمبلها میباشند. این‌سمبلها را چگونه باید نمایش داد؟

روش طبیعی باید این باشد که هر شیئی از کلکسیون را قطع نظر از جنس آن با یک نقطه ■ نمایش بدهیم. بدینترتیب صورت بندی کلکسیون های مختلف بدست میآید:

■ , ■ ■ , ■ ■ ■ , ■ ■ ■ ■ , ...

این نوع نمایش در بازی دومینو و بازی ورق معمول است.

چون این نوع نمایش بسیار طولانی می‌گردد لزوم ایجاد یک نمایش اختصاری احساس میشود.

بررسی این نمایش جدید تئوری شمار را تشکیل میدهد. اصول این تئوری قبل ازبررسی مجموعه عددهای طبیعی و بررسی بنیانهائی که درآن تعریف میشوند نمیتوانند مطرح گردد بنابراین شمار، مورد یک بررسی بعدی خواهد شد.

یک عدد طبیعی را با یک نقطه ■ و یا با یک حرف کوچک $(a, b, x, \ldots)$ و مجموعه عددهای طبیعی را با N نمایش میدهیم.

مجموعه N را با یک روش منطقی بنا میکنیم: در ابتدا چند خاصیت را بعنوان اصول موضوع قبول میکنیم.

دستگاه اصول منتخب به مثابه نوعی قاعده بازی است که بر اساس آنها بقیه تئوری را میسازیم. این قاعده باید با مکاشفه‌ای که ما از عددهای طبیعی داریم متناسب بوده و نظیر آن باشد. مثلاً علامت صفر را که با ۰ نمایش داده میشود باید دخالت داد زیرا در شمار (بمنظور خالی کردن) اشیاء موجود در یک قوطی سربسته این احتمال نیز باید پیش‌بینی شود که هنگام باز کردن قوطی هیچ شیی‌ــی در داخل آن مشاهده نشود.

سیستم اصولی را که ما انتخاب میکنیم په‌آنو *Peano* (۱۹۳۲ – ۱۸۵۸) ریاضی‌دان ایتالیائی وضع کرده است.

اصلهای په‌آنو

$A_۱$: صفر یک عدد طبیعی است.

$A_۲$: بازاء هر عدد طبیعی x یک عدد منحصر بفرد دیگری نیز که به تالی آن موسوم است و با x^+ نمایش داده میشود وجود دارد.

$A_۳$: تالی یک عدد طبیعی هرگز صفر نیست.

$A_۴$: اعداد طبیعی متمایز تالیهای متمایز دارند.

$A_۵$: (اصل بازگشتی) : اگر A بخشی از اعداد طبیعی باشد بطوریکه A شامل صفر باشد و اگر A شامل x باشد او شامل x^+ نیز هست و در این صورت A با مجموعه N جمیع اعداد طبیعی منطبق میگردد.

توضیح :

اصل $A_۱$ بدان معنی است که مجموعه N مورد بحث تهی نیست. او شامل عدد صفر است که با ۰ نمایش داده میشود و با شروع از این عدد بقیه ساخته میشوند.

اصل $A_۲$ روش کلی ساخت را بدست میدهد و تناظری را برقرار مینماید:

$$x \to x^+$$

که از هر عدد x به تالی آن x^+ سوق میکند. بدین ترتیب:

«تالی صفر عبارت از یک است».

$$۰^+ = ■$$

اگر فقط به اصلهای $A_۱$ و $A_۲$ اکتفا شود این طور ممکن است تصور شود که تناظر

فوق منتج سلسله :

$$\circ \to \blacksquare \to \circ$$

می گردد .

دو اصل اولیه با مجموعه $\{\blacksquare, \circ\}$ دو عدد صفر و یک تطبیق مینمایند.

اصل A_3 راه برگشت به صفر را سد میکند و مجموعه $\{\circ, \blacksquare\}$ با اصل A_3 تطبیق نمی‌نماید. سلسله فوق باید گسترش یابد :

$$\circ \to \blacksquare \to \blacksquare\blacksquare \to \cdots$$

اکتفا به سه اصل اول این توهم را بوجود میآورد که تناظر فوق منتج رشته :

$$\circ \to \blacksquare \to \blacksquare\blacksquare \to \blacksquare$$

گردد و مجموعه $\{\blacksquare\blacksquare, \blacksquare, \circ\}$ با A_1 و A_2 و A_3 تطبیق میکند.

حال میتوان یک خاصیت تناظر $x^+ \to x$ را بیان نمود و اگر N^* مجموعه N بدون صفر باشد :

$$N^* = N - \{\circ\}$$

از سه اصل قبلی نتیجه زیر گرفته میشود :

تناظر $x^+ \to x$ یک بـرون گستری N روی N^* است (I؛ فصل ۳، ۲). اصل A_4 را در نظر میگیریم. این اصل را بطریق زیر نمایش میدهیم :

$$x \neq x' \quad \Rightarrow \quad x^+ \neq (x')^+$$

و این بدان معنی است که :

تناظر $x^+ \to x$ یک درون گستری N در N^* است.

از آنجا نتیجه میشود که تناظر $x^+ \to x$ دو سوئی است . و در تناظر $x \to x^+$ عدد x را سابق x^+ می‌نامند.

قضیه و تعریف - هر عدد طبیعی x سوای صفر تالی یک عدد طبیعی یکتائی است و سابق x نامیده شود.

سلسلهٔ :

$$\circ \to \blacksquare \to \blacksquare\blacksquare \to \blacksquare\blacksquare\blacksquare \to \cdots$$

دیگر نمیتواند به‌عددی که یک بار بدست آمده است برسد زیرا اگر مجدداً به عدد x برسد نتیجه خواهد شد که عدد x دارای دو سابق متمایز است و این خلاف قضیه قبلی است. اگر تناظر فوق را در مرحله بخصوصی از ساخت شمار برای آخرین عدد بکار ببریم عدد جدیدی

بدست می‌آید که از جمیع عددهای قبلی متمایز است. و اگر این عمل در مورد عدد جدید تکرار شود این آگاهی بدست خواهد آمد که سلسله پایان ناپذیر است. میگویند که N یک مجموعه نامتناهی است.

پس حالا N را در شکل مختوم آن چگونه میتوان تصور کرد ؟

اصل A_5 با طرح اصل بازگشتی باین سؤال جواب میدهد.

فرض میکنیم که دو گزاره زیر را داشته باشیم : اگر A بخشی از N باشد :

گزاره اول : صفر متعلق به A است.

گزاره دوم : هرچه باشد جزء x از A، تالی آن x^+ متعلق به A است.

اصل بازگشتی A و N را بهمدیگر منطبق میسازد.

اصل A_5 بترتیب زیر نمایش داده میشود :

$$\begin{pmatrix} & 0 \in A & \\ x \in A & \Rightarrow & x^+ \in A \end{pmatrix} \Rightarrow \quad A = N$$

گزاره :

$$x \in A$$

را فرض بازگشتی مینامند.

بطور خلاصه چهار اصل اولی ساخت N را معین میکنند و پنجمی یک ابزار استدلال در این مجموعه را بدست میدهد.

ابزاری که درآینده بطور فراوان مورد استفاده قرار خواهد گرفت. داریم :

$$N = \{0, ■, ■■, ■■■, \dots, x, \dots\}$$

تبصره ـ بنا به بررسی قبل سیستم اصول په‌آنو را بطرز بازهم فشرده‌تر میتوان بیان کرد:

اصل اول : N شامل حداقل یک جزء a است بطوریکه یک دوسو گستری f مجموعه N روی $N - \{a\}$ وجود دارد.

اصل دوم : (بازگشتی) فرض کنیم :

$$A \subset N$$

$$\begin{pmatrix} & a \in A & \\ x \in A & \Rightarrow & f(x) \in A \end{pmatrix} \Rightarrow \quad A = N$$

۲- جمع کردن اعداد طبیعی

جمع اولین قانون ترکیب درونی در N است که، با اصل بازگشتی معین میگردد.

تعریف - بهر زوج مرتب x و y از اعداد طبیعی یک عدد طبیعی موسوم به مجموع x و y را که با $x + y$ نمایش داده میشود نظیر قرار می‌دهیم که با بازگشتی زیر تعریف شده باشد :

(الف) $x + \circ = x$

(ب) با معلوم بودن $x + y$ عدد $x + y^+$ را با :

$$x + y^+ = (x + y)^+$$

تعیین میکنیم.

تبصره‌ها ــ در این تعریف x و y نقشهای عین هم بازی نمیکنند : x بطور غیر مشخص تثبیت شده است. مجموعه A از اعداد y را که بازاء آنها مجموع $x + y$ معین است پیدا میکنیم :

جمع بازاء $y = \circ$ معین است (الف) پس :

$$\circ \in A$$

اگر جمع بازاء y معین باشد یعنی $y \in A$ در این صورت (ب) جمع را بازاء y^+ معین میکند پس:

$$y \in A \quad \Rightarrow \quad y^+ \in A$$

بنابراین $A = N$ است (بنا به A_5) و جمع بازاء جمیع اعداد طبیعی معین است.

مثلاً اگر در (ب) بجای y مقدار $\circ$ قرار دهیم داریم :

$$x + \circ^+ = (x + \circ)^+$$

یعنی :

$$x + \blacksquare = x^+$$

پس $x + \blacksquare$ تالی x است.

شرکت پذیری

$\boxed{P_1}$ هرچه باشند اعداد طبیعی x و y و z داریم :

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

x و y را تثبیت میکنیم.

۱ــ خاصیت را بازاء $z = \circ$ اثبات میکنیم. داریم :

$$(x+y)+\circ = x+y$$
$$x+(y+\circ) = x+y$$

پس خاصیت بازاء $z = \circ$ سازگار است.

۲ـ فرض کنیم خاصیت بازاء z برقرار است و آنرا بازاء z^+ اثبات میکنیم:

(تعریف) $\quad (x+y)+z^+ = [(x+y)+z]^+$

(فرض بازگشتی) $\quad [(x+y)+z]^+ = [x+(y+z)]^+$

(تعریف) $\quad [x+(y+z)]^+ = x+(y+z)^+ = x+(y+z^+)$

بنا به A_5 خاصیت P_1 درست است (هرچه باشد z)

بنابراین هرچه باشد اعداد x, y, z خاصیت برقرار است پس میتوان گفت که N یک نیم گروه جمعی است (۳ از فصل ۲ , I).

جزء خنثی

بنا به تعریف صفر (در سمت راست) یک جزء خنثی است.

$$x+\circ = x$$

ثابت میکنیم که صفر (در سمت چپ) یک جزء خنثی است.

$$\circ + x = x \qquad (۱)$$

رابطه (۱) بازاء $x = \circ$ درست است زیرا $\circ$ درسمت راست یک جزء خنثی است.

رابطه (۱) را بازاء x صحیح فرض کرده و آنرا بازاء x^+ اثبات میکنیم، داریم:

(تعریف) $\quad \circ + x^+ = (\circ + x)^+$

(فرض بازگشتی) $\quad (\circ + x)^+ = x^+$

پس(۱)، هرچه میخواهد باشد x، درست است.

$\boxed{P_2}$ جزء خنثای جمع عددهای طبیعی، صفر است.

جابجا پذیری

$\boxed{P_3}$ هرچه باشند اعداد x و y داریم:

$$x+y = y+x$$

x را تثبیت کنیم.

a) خاصیت را بازاء $y = \circ$ اثبات میکنیم.

چون صفر جزء خنثی است داریم :

$$\circ + x = x + \circ$$

b) خاصیت را بازاء $y = \blacksquare$ اثبات میکنیم :

$$x + \blacksquare = \blacksquare + x \qquad (۲)$$

رابطه (۲) بازاء $x = \circ$ درست است چون $\circ$ جزء خنثی است.

رابطه (۲) را بازاء x اثبات شده فرض میکنیم و آنرا بازاء x^+ اثبات میکنیم.

$$x^+ + \blacksquare = (x + \blacksquare) + \blacksquare = (\blacksquare + x) + \blacksquare$$

(فرض بازگشتی)

$$(\blacksquare + x) + \blacksquare = \blacksquare + (x + \blacksquare) = \blacksquare + x^+$$

(شرکت پذیری)

پس رابطه (۲) (هرچه باشد x) درست است.

c) خاصیت $P_۳$ را بازاء y صحیح فرض‌کرده و آنرا بازاء y^+ اثبات میکنیم :

(شرکت پذیری) $x + y^+ = x + (y + \blacksquare) = (x + y) + \blacksquare$

(فرض بازگشتی) $(x + y) + \blacksquare = (y + x) + \blacksquare$

(شرکت پذیری) $(y + x) + \blacksquare = y + (x + \blacksquare)$

(رابطه ۲) $y + (x + \blacksquare) = y + (\blacksquare + x)$

(شرکت پذیری) $y + (\blacksquare + x) = (y + \blacksquare) + x = y^+ + x$

بنا به $A_۵$ جابجاپذیری هرچه باشند اعداد x و y ثابت است.

پس N یک نیم گروه جابجاپذیر نسبت به جمع است.

هیچ عدد طبیعی جز صفر دارای قرینه نیست

$\boxed{P_۴}$ $$(x + y = \circ) \Rightarrow (x = y = \circ)$$

ثابت میکنیم که فرض $x + y = \circ$ با $y \neq \circ$ به تناقض منجر میگردد.

اگر $y \neq \circ$ باشد عددی مانند y' (سابق y) وجود دارد بطوریکه :

$$y' + \blacksquare = y$$

در این صورت خواهیم داشت :

$$x + y = \circ \Rightarrow x + y' + \blacksquare = \circ$$

و این ناقض اصل $A_۳$ است (تالی $x + y'$ صفر است).

پس داریم $y = \circ$ و در نتیجه $x = \circ$

هر عددی برای جمع منتظم است

$\boxed{P_5}$ هرچه باشد عدد طبیعی x

$$(a + x = b + x) \Rightarrow (a = b)$$

خاصیت بازاء $x = 0$ آشکار است آنرا بازاء x صحیح فرض کرده و ثابت میکنیم:

$$(a + x^+ = b + x^+) \Rightarrow (a = b)$$

با شروع از $a + x^+ = b + x^+$ نتیجه میشود :

$$(a + x)^+ = (b + x)^+ \qquad \text{(تعریف عمل جمع)}$$

بنا به اصل A_4 نتیجه میگیریم:

$$a + x = b + x$$

و فرض بازگشتی مستلزم :

$$a = b$$

است .

پس P_5 هرچه میخواهد باشد x برقرار است.

۳ـ تفریق ـ نسبت ترتیب .

تعریف ـ اگر دو عدد طبیعی a و b داشته باشیم.

«یک عدد طبیعی x وجود دارد بطوریکه $a + x = b$»

در اینصورت میگویند :

«a حداکثر مساوی b است» و نمایش میدهند :

$$a \leqslant b$$

همچنین می‌گویند : «b حداقل مساوی a است» و می‌نویسند :

$$b \geqslant a$$

عدد x تفاضل اعداد b و a نامیده میشود و مینویسیم $x = b - a$

این تعریف یک نسبت دوتائی در N وارد میکند : از $a \leqslant b$ داریم :

$$(a \leqslant b) \Longleftrightarrow (\exists\, x\, ;\, a + x = b)$$

سؤال زیر یک معادله نامیده میشود :

«آیا عددی مانند x وجود دارد بطوریکه $a + x = b$ باشد؟ »

حل معادله عبارت از پیدا کردن همه جوابها است.

یکتائی جواب

ثابت میکنیم که اگر عدد x وجود داشته باشد فقط یکی است. اگر عدد دیگری مانند x' وجود داشته باشد بطوریکه :

$$a + x = a + x'$$

چون عدد a منتظم است، نتیجه میشود :

$$x = x'$$

چند مثال ــ در چند حالت مخصوص معادله را حل میکنیم :

۱) $a = b$ معادله عبارت است از :

$$a + x = a$$

که مینویسیم :

$$a + x = a + 0$$

از آنجا :

$$x = 0$$

بنابراین هرچه باشد $a \in N$ داریم :

$$a \leqslant a$$

نسبت دوتائی خودپذیر است.

۲) $a = 0$ معادله عبارت است از :

$$0 + x = b$$

از آنجا :

$$x = b$$

بنابراین هرچه باشد $b \in N$ داریم :

$$b \geqslant 0$$

۳) جواب همواره وجود ندارد و مثلاً برای معادلهٔ :

[redacted] $+ x = 0$

هیچ عدد x ــ ی وجود ندارد که در معادله صدق کند (اصل A_3).

حال خاصیتهائی را اثبات میکنیم که نشان بدهند $b \leqslant a$ یک نسبت ترتیب کلی در N است.

نسبت ترتیب

$\boxed{P_6}$ $a = b$ معادل است با $(a \leqslant b, b \leqslant a)$

میدانیم که نسبت $a \leqslant b$ خودپذیر است پس :

$$(a = b) \quad \Rightarrow \quad (a \leqslant b, b \leqslant a)$$

عکس آنرا اثبات میکنیم :

$$(a \leqslant b) \Rightarrow (\exists c \quad a + c = b)$$
$$(b \leqslant a) \Rightarrow (\exists d \quad b + d = a)$$

مقدار b را که از رابطه دوم بدست میآید در رابطه اول قرار دهیم :

$$a + c + d = a$$

از آنجا :
$$c + d = \circ$$

در نتیجه :
$$c = d = \circ$$

پس خاصیت ثابت است

$\boxed{P_7}$ $a \leqslant b$ و $b \leqslant c$ موجب میشود $a \leqslant c$

زیرا :

$$(a \leqslant b) \Rightarrow (\exists d \quad a + d = b)$$
$$(b \leqslant c) \Rightarrow (\exists e \quad b + e = c)$$

از آنجا :

$$a + d + e = c$$

یعنی $a \leqslant c$ بنابراین نسبت سرایت پذیر است.

خاصیت‌های P_6 و P_7 نشان میدهند که $a \leqslant b$ یک نسبت ترتیب در N است (I؛ فصل ۱، ۷)

نسبت ترتیب کلی

$\boxed{P_8}$ هرچه باشد عددهای طبیعی a و b داریم :

$$a \leqslant b \quad \text{یا} \quad b \leqslant a$$

b را تثبیت میکنیم مجموعه عددهای طبیعی a را که در :
$a \leqslant b$ یا $b \leqslant a$ صدق میکنند A مینامیم .

۱) ثابت میکنیم :

$$\circ \in A$$

میدانیم که هرچه باشد b، $\circ \leqslant b$ است.

۲) ثابت میکنیم:

$$a \in A \Rightarrow a^+ \in A$$

فرض بازگشتی $a \in A$ بدان معنی است که داریم :

یا $a \leqslant b$ و یا $b \leqslant a$

هرکدام از دو حالت احتمالی را جداگانه بررسی کنیم :

اگر $b \geqslant a$ باشد عدد c وجود دارد بطوریکه :

$$a = b + c$$

در نتیجه :

$$a + ■ = b + c + ■$$

از آنجا :

$$a + ■ \geqslant b \quad \text{و} \quad a^+ \in A$$

اگر $b \leqslant a$ باشد میتوانیم فرض کنیم $a \neq b$ چونکه حالت $a = b$ را آزمایش کردیم. عددی مانند $c \neq ۰$ وجود دارد بطوریکه :

$$a + c = b$$

ولی $c \neq ۰$ موجب میشود وجود سابق آن c' را :

$$c' + ■ = c$$

بنابراین :

$$a + c' + ■ = b$$

از آنجا :

$$a + ■ \leqslant b \quad \text{و} \quad a^+ \in A$$

خاصیت $P_{۸}$ بدین ترتیب از راه بازگشتی اثبات شده است

نسبت $b \leqslant a$ یک نسبت ترتیب کلی در N است.

پایداری بازاء عمل جمع

$\boxed{P_{۹}}$ هرچه باشد a و b و c

$$a \leqslant b \iff a + c \leqslant b + c$$

زیرا سلسله هم ارزی‌های منطقی زیر را داریم :

$$a \leqslant b \iff (\exists d \quad a + d = b)$$
$$\iff (\exists d \ \ a + d + c = b + c)$$
$$\iff (a + c \leqslant b + c)$$

پس خاصیت اثبات شده است.

نتیجه ــ نامساوی ها را میتوان عضو به عضو به یکدیگر افزود :

$$(a \leqslant b, c \leqslant d) \quad \Rightarrow \quad a + c \leqslant b + d$$

زیرا :

$$a \leqslant b \quad \Rightarrow \quad a + c \leqslant b + c$$
$$c \leqslant d \quad \Rightarrow \quad b + c \leqslant b + d$$

و بنا به سرایت پذیری :

$$a + c \leqslant b + d$$

نسبت ترتیب اکید :

تعریف ــ اگر عدد $x \neq 0$ وجود داشته باشد بطوریکه $a + x = b$ میگویند « a اکیداً کوچکتر از b است» و مینویسند : $a < b$ و یا «b اکیداً بزرگتر از a است» : و مینویسند :

$$b > a$$

دراین صورت تفاضل $b - a$ وجود دارد و برابر صفر نیست. بسادگی ثابت میشود که $a < b$ یک نسبت ترتیب اکید است :

۱) این نسبت سرایت‌پذیر است :

$$(a < b, b < c) \quad \Rightarrow \quad a < c$$

۲)
$$a < b \quad \Rightarrow \quad a \neq b$$

و نسبت ترتیب کلی است

۳) هرچه باشد a و b با $a \neq b$ داریم:

$a < b$ و یا $b < a$

و این نسبت بازاء جمع پایدار است.

$$a < b \quad \Rightarrow \quad a + c < b + c$$

۴ـ فاصله‌ها.

۱) هرگاه $a \leqslant b$ باشد قسمتی از N را که با اعداد طبیعی x طبق $a \leqslant x \leqslant b$ تشکیل میابد فاصله بسته به مبدأ a و به منتهای b مینامند.

این فاصله را با علامت $[a, b]$ نمایش میدهیم.

اگر $a = b$ باشد فاصله شامل جزء منحصر بفرد a است.

۲) هرگاه $a < b$ باشد مجموعه اعداد طبیعی x را که در شرایط $a \leqslant x < b$ صدق

میکنند فاصله نیمه‌باز از سمت راست مینامند و با علامت: $[a, b[$ نمایش میدهند. بهمین ترتیب فاصله نیمه‌باز از سمت چپ تعریف میشود که از مجموعه اعداد x بـا شرایط $a < x \leqslant b$ بدست می‌آید و با علامت $]a, b]$ نمایش داده میشود و بالاخره فاصله باز از مجموعه اعداد x تشکیل میشود که در شرایط $a < x < b$ صدق کنند و با: $]a, b[$ نمایش داده میشود.

اگر $b = a + ■$ باشد فاصله بازتهی است.

تناظر- $y = x + b$

فرض کنیم a عدد طبیعی ثابتی باشد. بر هرعدد طبیعی x یک عدد طبیعی y را نظیرقرار دهیم بطوریکه:

$$y = x + a$$

بدین‌ترتیب تابعی بدست میاید که N را روی مجموعه N_a از اعداد طبیعی y که حد اقل مساوی a هستند می‌نگارد:

$$y \geqslant a$$

هر عدد $y \in N_a$ تصویر فقط یک عدد $x \in N$ میباشد:

$$(y \geqslant a) \qquad x = y - a$$

پس، تناظر بطور دو سوئی N را روی N_a می‌نگارد.

بخصوص، تابع یک تناظر دو سوئی بین فاصله‌های بسته:

$$[b, c] \text{ و } [a + b, a + c]$$

است.

تبصره ــ قانون ترکیب موسوم به تفریق، به زوج مـرتب دو عـدد طبیعی a و b تفاضل $a - b$ را همراه نمیکند مگر در حالت $a \geqslant b$

و این یک مثال از قانون ترکیب در یک مجموعه است که در این مجموعــه در همه‌جا معین نیست.

فصل دوم

شمارش

۱ـ روش شمارش

شمردن اشیاء یک کلکسیون A، عبارت از مقابل‌هم قرار دادن اشیاء کلکسیون A با اعداد طبیعی یک فاصله $[■ , n]$ است.

یک شیٔ از کلکسیون A را مقابل ■ قرار داده و آنرا با $a_{■}$ نمایش میدهیم.

یک شیٔ دیگر از کلکسیون A را مقابل ■ ■ قرار داده وآنرا با $a_{■■}$ نمایش میدهیم.

و این عمل را تا آخرین شیٔ از کلکسیون A که آنرا مقابل n قرار داده و با a_n نمایش میدهیم ادامه میدهیم.

بدین ترتیب عدد n با تمام شدن اشیاء کلکسیون A معین میگردد.

بعکس در مقابل هر عدد طبیعی $i \in [■ , n]$ یک شیٔ کاملاً مشخص a_i از کلکسیون A قرار دارد.

یک تناظر دو سوئی بین A و $[■ , n]$ بدین ترتیب تحقق میپذیرد و این نسبت را با

$$A \rightleftarrows [■ , n]$$

یا:

$$[■ , n] \rightleftarrows A$$

نمایش میدهند.

چون تناظر فوق در یک جهت یا جهت دیگر روی میدهد: نسبت $\rightleftarrows$ متقارن است.

مسئله‌ای که مطرح است این است که بدانیم آیا عدد n که بدین ترتیب بدست میاید مستقل از ترتیب انتخاب اشیاء A برای شمارش است؟

فرض کنیم با ترتیب دیگری برای اشیاء A این شمارش را انجام بدهیم و عدد دیگر n' بدست آید فرض کنیم:

$$A \rightleftarrows [\blacksquare, n']$$

بنا بر این خواهیم داشت:

$$[\blacksquare, n] \rightleftarrows A \rightleftarrows [\blacksquare, n']$$

پس یک تناظر دوسوئی f وجود دارد که $[\blacksquare, n]$ را روی A می‌نگارد و یک تناظر دوسوئی g که نگارنده A روی $[\blacksquare, n']$ است. ترکیب $g \circ f$ با دوسوئی $[\blacksquare, n]$ را روی $[\blacksquare, n']$ می‌نگارد (I؛ فصل ۳ و ۵) پس داریم:

$$[\blacksquare, n] \rightleftarrows [\blacksquare, n']$$

و ملاحظه میشود که نسبت $\rightleftarrows$ سرایت‌پذیر است.

تناظر حاصل خیلی ساده است زیرا مابین دو بخش از یک مجموعه N روی میدهد که یکی از آنها گنجیده در دیگری است. این تناظر دوسوئی یک انطباق است. داریم:

$$[\blacksquare, n] = [\blacksquare, n']$$

از آنجا $n = n'$

بدین ترتیب اطمینان حاصل میشود که شمارش مستقل از ترتیب منتخب برای شمارش است.

هم توانی

در استدلال قبل، ما یک نسبت معین بین دو مجموعه را با تناظر دوسوئی بکار بردیم. این نسبت دوتائی به هم‌توانی موسوم است.

تعریفـ دو مجموعه را هم‌توان مینامند اگر آنها در تناظر دوسوئی باشند. مینویسیم:

$$A \rightleftarrows B$$

و میخوانیم: «A هم‌توان B است».

هم‌توانی یک نسبت هم‌ارزی است:

اولاً خودپذیر است:

$$A \rightleftarrows A$$

برای اثبات آن کافی است تبدیل دوسوئی بخصوص که انطباق است در نظر گرفته شود.

ثانیاًـ متقارن است:

$$(A \rightleftarrows B) \quad \Rightarrow \quad (B \rightleftarrows A)$$

تقارن بدیهی است.

ثالثاً ــ سرایت‌پذیر است:

$$(A \rightleftarrows B \text{ و } B \rightleftarrows C) \quad \Rightarrow \quad (A \rightleftarrows C)$$

زیرا ترکیب دو تناظر دوسوئی یک تناظر دوسوئی است.

۲ــ مجموعه‌های متناهی

تعریف: مجموعه A را متناهی نامند اگر با یک فاصله $[\blacksquare , n]$ از N هم‌توان باشد.

$$A \text{ متناهی} \iff A \rightleftarrows [\blacksquare , n]$$

عدد n اصلی مجموعه A نامیده میشود که عبارت از تعداد اجزاء A است.

در مثالی که در اول فصل اختیار کردیم A متناهی است زیرا بازاء یک عدد طبیعی n اشیاء A تمام میشوند.

تناظر قبل بهر جزء A یک عدد طبیعی i را وامیبندد بطوریکه هر جزء A را می‌توان نوشت:

$$a_i \qquad i \in [\blacksquare , n]$$

و همان حرف اندیس‌دار وقتیکه i فاصله $[\blacksquare , n]$ را میپیماید جمیع اجزاء A را نمایش میدهد:

$$A = \{a_{\blacksquare}, a_{\blacksquare\blacksquare}, \cdots, a_n\}$$

تبصره ــ عدد صفر مختص مجموعه تهی $\varnothing$ است.

ترتیب کلی N القاء شده در مجموعه متناهی A.

هر جزء a_i از A که بدین ترتیب با اندیس خودش i مقایسه شد و با ترتیب کلی N که در فصل قبلی مورد بررسی قرار گرفت، یک ترکیب کلی را بطرز زیر در A معین مینماید. میگوئیم «a_i قبل از a_j قرار دارد» «اگر $j > i$ باشد اندیس i بدین‌قرار، یک «ترتیبی» برای جزء نظیر a_i میباشد. میگوئیم.

$a_{\blacksquare}$ جزء یکم A است

$a_{\blacksquare\blacksquare}$ جزء دوم A است

....

a_n جزء nام است.

و A «یک رشته متناهی از اجزاء مرتب» است.

ترتیب A بدین قرار روی مجموعه A القاء شده است.

مجموعه‌های متناهی هم‌توان.

قضیهٔ ۱ـ برای اینکه دو مجموعه متناهی هم‌توان باشند لازم و کافی است که آنها دارای یک اصلی باشند.

a) هرگاه دو مجموعه متناهی هم‌توان داشته باشیم:

$$A \rightleftarrows B$$

و n اصلی A باشد

$$A \rightleftarrows [■, n]$$

تقارن و سرایت‌پذیری هم‌توانی امکان میدهد که نتیجه بگیریم:

$$B \rightleftarrows [■, n]$$

پس n اصلی B نیز هست.

b) فرض کنیم دو مجموعه متناهی دارای یک اصلی n باشند:

$$A \rightleftarrows [■, n] \quad \text{و} \quad B \rightleftarrows [■, n]$$

تقارن و سرایت‌پذیری هم‌توانی امکان میدهد که نتیجه بگیریم:

$$A \rightleftarrows B$$

و A و B هم‌توان میباشند. و قضیه ثابت است.

اصلی مشترک n مجموعه‌های A و B قوت مشترک آنها را برآورد مینماید.

اجتماع مجموعه‌های متناهی.

مسئله ــ با معلوم بودن دو مجموعه متناهی A و B با اصلی‌های a و b مطلوب است تعیین اصلی اجتماع $A \cup B$

مسئله بر حسب اینکه A و B دارای اجزاء مشترک باشند یا نه، یعنی بر حسب اینکه $A \cap B$ تهی باشد یا نه فرق میکند.

ابتدا حالتی را که $A \cap B$ تهی است طرح میکنیم.

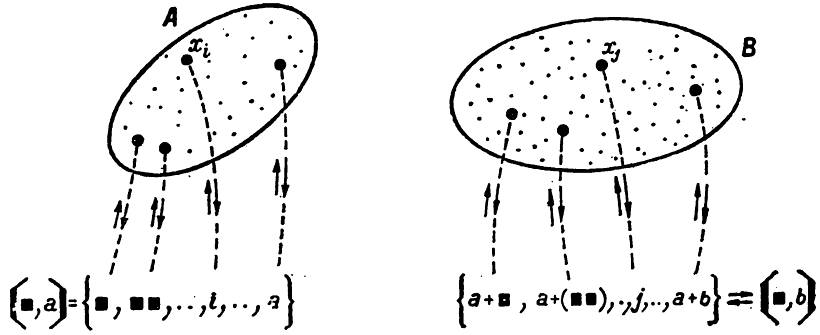
حالت اول: $A \cap B = \varnothing$

a اصلی A است:

$$A \rightleftarrows [■, a] \qquad (۱)$$

b اصلی B است:

$$B \rightleftarrows [■, b] \qquad (۲)$$



شکل ۱

تناظر $y = a + x$ با دوسوئی $[■ , b]$ را روی $[a + ■ , a + b]$ می‌نگارد (II، فصل ۱؛ ۴). پس داریم:

$$[■ , b] \rightleftarrows [a + ■ , a + b] \qquad (۳)$$

از (۲) و (۳) نتیجه میشود:

$$B \rightleftarrows [a + ■ , a + b] \qquad (۴)$$

حال یک جـزء غیر مشخص x از اجتماع $A \cup B$ (شکل ۱) را در نظر بگیریـم. دو حالت اتفاق میافتد:

α) $x \in A$ باشد در این صورت به x اندیس i را که طبق (۱) نظایر آن در $[■ , a]$ است همراه می‌کنیم و آنرا با x_i شماره‌گذاری می‌کنیم $i \in [■ , a]$

β) $x \in B$ در ایـن صورت بـه x انـدیس j را کـه طبق (۴) نظیر آن در $[a + ■ , a + b]$ است همراه میکنیم و آنرا با x_j شماره‌گذاری میکنیم :

با $j \in [a + ■ , a + b]$

هر اندیس i متمایز از اندیس j است زیرا آنها به مجموعه‌های جدا ازهم تعلق دارنـد. باستناد فرض اولیه $A \cap B = \varnothing$ میتوان مطمئن شد که $x_i \neq x_j$ است. زیرا اگر $x_i = x_j$ باشد جزء نظیر در عین حال بهردو مجموعه A و B تعلق خواهـد گرفت یعنی به $A \cap B$ ولی ایـن فصل مشترک بنا به فرض تهی است.

ملاحظه کنیم که:

$$[■ , a] \cup [a + ■ , a + b] = [■ , a + b]$$

ثـابت کردیم کـه بهر جـزء $x \in A \cup B$ یـک $k \in [■ , a + b]$ نظیر است و بعکس.

پس داریم:

$$A \cup B \rightleftarrows \{\blacksquare , a+b\}$$

قضیهٔ ۲ـ اصلی اجتماع دو مجموعه متناهی جدا ازهم برابر است با مجموع اصلی‌های این مجموعه‌ها.

نتایج.

$\boxed{C_1}$ هر بخش P از یک مجموعه متناهی A دارای یک اصلی حد اکثر برابر با اصلی A است. زیرا مجموعه A را میتوان مانند اجتماع P و متمم P' مجموعه P نسبت بـه A در نظر گرفت:

$$P' = \complement_A P$$

بدیهی است که:

$$A = P \cup P'$$

$$\varnothing = P \cap P'$$

پس قضیه قبل را در مورد P و P' میتوان مورد استفاده قرار داد.

اصلی aـی مجموعـه A برابر مجموع اصلیهای p و p' مجموعه‌هـای P و P' است.

پس داریم:

$$a = p + p' \quad \Rightarrow \quad a \geqslant p$$

$\boxed{C_2}$ هـر بخش P از یک مجموعـه متناهی A (متمایـز از A) دارای یک اصلی اکیداً کوچکتر از اصلی A است.

در استدلال قبلی فرض تکمیلی $P \neq A$ را اضافه میکنیم. پس داریم:

$$P' \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad (p' \neq \text{۰}) \quad \Rightarrow \quad a > p$$

حالت دوم: A و B دارای اجراء مشترک میباشند:

اصلی:
$$P = A \cap B$$

را p مینامیم $(p \neq \text{۰})$

اگر P_A متمم P نسبت به A (شکل ۲) باشد داریم:

$$A \cup B = P_A \cup B$$

و
$$P_A \cap B = \varnothing$$

پس میتوان قضیه (۲) را در مورد P_A و B بکار برد. ولی اصلی P_A برابر $(a - p)$ است (نتیجه C_1) پس اصلی $P_A \cup B$ عبارت از $b + (a - p)$ خواهد بود و این اصلی مطلوب $A \cup B$ است.

۳ـ مجموعه‌های نامتناهی

قبلاً دیدیم که N یک مجموعه نامتناهی است.

بطور کلی مجموعه نامتناهی عبارت از مجموعه‌ای است که متناهی نیست.

به اثبات اینکه: اگر یک مجموعه E دارای همان قوت باشد که یکی از بخشهای آن $A \neq E$، نامتناهی خواهد بود، اکتفا میکنیم.

فرض کنیم E متناهی باشد و ثابت میکنیم که استدلال به تناقض بر میخورد:

$$(A \rightleftarrows E) \quad \Rightarrow \quad (\text{اصلی } E = \text{اصلی } A) \ (\text{قضیه ۱})$$

$$(A \subset E \text{ و } A \neq E) \quad \Rightarrow \quad (\text{اصلی } A < \text{اصلی } E) \quad (C_2)$$

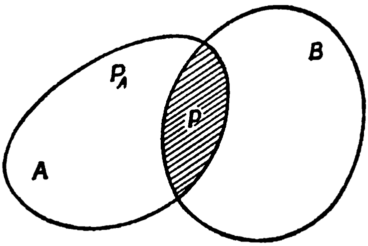
پس تناقض وجود دارد و E نمیتواند متناهی باشد.

مثال ۱ـ قبلاً دیدیم که یک تناظر دوسوئی بین N و $N^* = N - \{0\}$ وجود داشت پس در عین حال داریم:

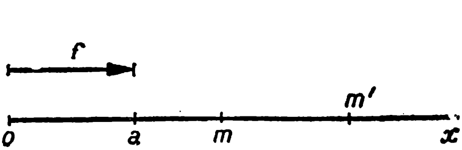
$$N \rightleftarrows N^* \qquad N^* \subset N \qquad N^* \neq N$$

مجموعه N نامتناهی است.

مثال ۲ـ مجموعه نقاط یک نیم خط نامتناهی است.



شکل ۲



شکل ۳

اگر a نقطه ثابتی از یک نیم خط (ox) به مبدأ o باشد (شکل ۳) زوج مرتب دو نقطه o و a یک انتقال f را معین میکنند که بهر نقطه m از (ox) یک نقطهٔ m' از نیم خط (ax) را همراه مینماید.

این تبدیل f با دوسوئی (ox) را روی (ax) می‌نگارد پس در عین حال داریم:

$$(ax) \rightleftarrows (ox) \qquad (ax) \subset (ox) \qquad (ax) \neq (ox)$$

نیم خـط (ox) هم‌توان یکی از بخشهای خـود، متمایز از (ox) میباشد. نیمخط (ox) یـک مجموعه نامتناهی از نقاط است.

مجموعه نامتناهی قابل شمارش (شمارا)

تعریف. میگویند که E یک مجموعه نامتناهی قابل شمارش است وقتیکه هم‌تـوان مجموعه N اعداد طبیعی است.

$$(E \rightleftarrows N) \iff (\text{نامتناهی قابل شمارش } E)$$

در این تناظر دوسوئی هر عدد طبیعی $n \in N$ نظیر یک جزء $a \in E$ که بـا a_n نمایش داده میشود میباشد. ترتیب کلی N بدین قـرار در E القاء میشود کـه یک «رشته نامتناهی قابل شمارش از اجزاء مرتب» میگردد.

$$E = \{a_o, a_{\scriptscriptstyle\blacksquare}, a_{\scriptscriptstyle\blacksquare\blacksquare}, \cdots, a_n, \cdots \rightarrow\}$$

۴ـ کوچکترین جزء. بزرگترین جزء.

در مجموعه N داریم:

$$\forall\, x \in N \qquad x \geqslant o$$

o موسوم به کوچکترین جزء N است.

حال بخش A از N را در نظر بگیریم.

تعریف. «اگر یک جزء $a \in A$ وجود داشته باشد بقسمی که:

$\forall\, x \in A$ داشته باشیم $a \leqslant x$».

a را کوچکترین جزء بخش A مینامیم.

اگر این جزء a وجود داشته باشد یکتا است زیرا کـه اگر جزء دیگری مـانند a' از A وجود داشته باشد که دارای این خاصیت باشد میبایست داشته باشیم:

چون a کوچکترین جزء بخش A است $a' \geqslant a$

چون a' کوچکترین جزء بخش A است $a \geqslant a'$

از آنجا:

$$a = a'$$

کوچکترین جزء A را با علامت:

$$\min A$$

(اختصار کلمه minimum) نمایش میدهند.

«اگر جزء $b \in A$ وجود داشته باشد بقسمی که:

$A \ni x \;\forall$ داشته باشیم $b \leqslant x$»

b را بزرگترین جزء بخش A مینامیم.

مانند قبلی ثابت میشود که اگر این جزء وجود داشته باشد یکتا است.

بزرگترین جزء بخش A را با علامت:

$$\max A$$

(اختصار کلمهmaximum) نمایش میدهند.

تبصره ــ N دارای کوچکترین جزء ۰ است. ولی N دارای بزرگترین جزء نیست زیرا هرچه باشد $a \in N$ جزء $x \in N$ وجود دارد که $x > a$ است مثلاً $x = a + ■$

قضیهٔ ۳ـ هر بخش متناهی A (غیر تهی) از N دارای یک بزرگترین جزء و یک کوچکترین جزء است.

اثبات ــ قضیه را در مورد بزرگترین جزء اثبات میکنیم و برای کوچکترین جزء کافی است کلمه «بزرگترین» را به «کوچکترین» تبدیل نمود.

با روش بازگشتی روی اعداد n اجزاء A (بازگشت متناهی) استدلال میکنیم.

بازاء $n = ■$ قضیه معمولی است.

بازاء $n = ■■$ مجموعه A دارای دو جزء a و b است و میتوان آنها را باهم مقایسه نمود و گفت که کدام یک بزرگتر است (ترتیب کلی در N)

حال فرض میکنیم خاصیت زیر اثبات شده است:

«هر بخش A با اصلی $(n - ■)$ دارای بزرگترین جزء است» و خاصیت زیر را اثبات میکنیم:

«هر بخش A با اصلی n دارای یک بزرگترین جزء است»

هر بخش A از n جزء را میتوان مانند اجتماع بخش A' با $(n - ■)$ جزء و یک مجموعه با یک جزء a در نظر گرفت:

$$A = A' \cup \{a\}$$

بنا بفرض بازگشتی میتوانیم بگوئیم که A' دارای یک بزرگترین جزء b است. مجموعه

$\{a, b\}$ دارای یک بزرگترین جزء است (خاصیت محقق بازاء ■ ■ = n) که مسلماً بزرگترین جزء A است پس قضیه اثبات شده است.

قضیهٔ عکس برای بزرگترین جزء فقط.

اگر یک بخش غیر تهی از N دارای یک بزرگترین جزء باشد متناهی است. هرگاه یک بخش غیر تهی از N دارای بزرگترین جزء a باشد:

$$(a \in A) \qquad x \in A \;\Rightarrow\; x \leqslant a$$

A گنجیده در فاصله $[0, a]$ است که مسلماً متناهی است و یک بخش A از یک مجموعه متناهی $[0, a]$ نیز متناهی است (C_1) پس میتوانیم بگوئیم:

قضیهٔ ۴ـ برای اینکه یک بخش غیر تهی از N دارای بزرگترین جزء باشد لازم و کافی است که متناهی باشد.

نتیجهـ هر بخش نامتناهی از N دارای بزرگترین جزء نیست.

قضیهٔ ۵ـ هر بخش نامتناهی P از N دارای یک کوچکترین جزء است.

یک جزء $a \in P$ را اختیار میکنیم، اگر در P اجزائی کوچکتر از a وجود داشته باشند آنها به فاصله $[0, a]$ تعلق دارند و مجموعه زیر را تشکیل میدهند.

$$J = P \cap [0, a]$$

J تهی نیست زیرا حد اقل شامل جزء a است.

J متناهی است زیرا گنجیده در $[0, a]$ است.

پس J دارای یک کوچکترین جزء است که کوچکترین جزء P است.

هـ فرابند. فروبند.

بخش A از N را در نظر میگیریم.

تعاریفـ «اگر عدد $a \in N$ وجود داشته باشد بقسمی که:

«$\forall x \in A$ داشته باشیم $x \leqslant a$»

میگویند که a فرابند A است یا a مجموعه A را فرا می‌بندد.

تفاوت این تعریف را با تعریف بزرگترین جزء خاطرنشان کنیم در این جا: $a \in N$ است نه اینکه $a \in A$. «اگر عدد $a \in N$ وجود داشته باشد بقسمیکه:

$$\forall\, x \in A \text{ داشته باشیم } a \geqslant x$$

میگویند که a یک فروبند A است یا a مجموعه A را فرو میبندد.

تبصره– اگر a فرابند A باشد هر عدد بیشتر از a نیز فرابند A است.

اگر a فروبند مجموعه A باشد هر عدد کمتر از a نیز فروبند A خواهد شد.

قضیه زیر را داریم:

قضیهٔ ۶ـ هر بخش فرابسته از N متناهی است. زیرا هر بخش A از N دارای فرابند a است و بنابراین گنجیده در $[0, a]$ است و در نتیجه متناهی است.

فصل سوم

ضرب ـ مضربهای یك عدد ـ بخش‌پذیری ـ تقسیم اقلیدسی

۱ـ ضرب

تعریف. بهر زوج مرتب x و y از اعداد طبیعی یک عدد طبیعی موسوم به «حاصل ضرب x و y» را همراه کنیم که بصورتهای xy یا $x \cdot y$ و یا $x \times y$ نمایش داده میشود و بطریقه زیر با روش بازگشتی معین میگردد:

(الف) $$x \cdot 0 = 0$$

(ب) اگر xy معین باشد، xy^+ با شرط زیر معین است:

$$xy^+ = xy + x$$

در این تعریف x و y یک نقش را ایفا نمیکنند. x بطرز غیر مشخصی تثبیت شده است.

مجموعه Aـی اعداد طبیعی y را پیدا کنیم که بازاء آنها عمل ضرب معین است:

(الف) حاصل ضرب را بازاء $y = 0$ معین میکند. داریم:

$$0 \in A$$

اگر عمل ضرب بازاء y معین است یعنی $y \in A$ در این صورت (ب) بازاء y^+ عمل جمع را معین مینماید، پس:

$$y \in A \quad \Rightarrow \quad y^+ \in A$$

در نتیجه بنا به اصل A_5، $A = N$ و عمل ضرب بازاء جمیع اعداد طبیعی معین است.

اگر در (ب)، y را با 0 جایگزین کنیم داریم:

$$x \cdot 0^+ = x \cdot 0 + x$$

یعنی:

$$x \cdot \blacksquare = x$$

y را در b با $\blacksquare$ جایگزین میکنیم:

$$x \cdot (\blacksquare)^{+} = x \cdot \blacksquare + x$$

یعنی:

$$x \cdot (\blacksquare\,\blacksquare) = x + x$$

بطور کلی بازاء $y > \blacksquare$ اگر فرض کنیم که:

$$x \cdot y = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{y \text{ جمله}}$$

از (ب) نتیجه خواهد شد:

$$x \cdot y^{+} = \underbrace{x + x + \cdots + x + x}_{y^{+} \text{ جمله}}$$

پس ضرب x در y عبارت از جمع مکرر (y تا) جمله مساوی x بازاء $y > \blacksquare$ است.

توزیع‌پذیری عمل ضرب نسبت به عمل جمع

ابتدا توزیع‌پذیری سمت چپ را اثبات کنیم.

$\boxed{P_1}$ هرچه باشد اعداد طبیعی x و y و z داریم:

$$x(y+z) = xy + xz \qquad (1)$$

x و y را تثبیت کنیم

الف) رابطه (۱) را بازاء $z = 0$ اثبات نمائیم. داریم:

$$x(y+0) = xy$$
$$xy + x0 = xy$$

پس رابطه (۱) بازاء $z = 0$ درست است.

ب) فرض‌کنیم (۱) برای z اثبات شده است آنرا بازاء z^{+} اثبات میکنیم بترتیب داریم:

$$x(y+z^{+}) = x(y+z)^{+} \qquad \text{(تعریف جمع)}$$
$$x(y+z)^{+} = x(y+z) + x \qquad \text{(تعریف ضرب)}$$
$$x(y+z) + x = xy + xz + x \qquad \text{(فرض بازگشتی)}$$
$$xy + (xz + x) = xy + xz^{+} \qquad \text{(تعریف ضرب)}$$

پس هرچه باشد x و y و z توزیع‌پذیری سمت چپ اثبات شده است. توزیع‌پذیری سمت راست از جابجاپذیری (P_3) نتیجه میشود.

نتیجه‌ـ توزیع‌پذیری عمل ضرب نسبت به عمل تفریق.

اگر $z \geqslant y$ باشد داریم:

$$x\,(y-z) = x\,y - xz$$

در حقیقت هم عدد d وجود دارد بقسمی که:

$$d = y - z \qquad \text{یا} \qquad y = z + d$$

از آنجا نتیجه میشود:

$$xy = x\,(z+d)$$

با بکار بستن (P_1):

$$xy = xz + xd$$

یعنی:

$$xd = xy - xz$$

یا:

$$x\,(y-z) = x\,y - xz$$

شرکت‌پذیری

$\boxed{P_2}$ هرچه باشد x و y و z داریم :

$$(xy)\,z = x\,(yz) \qquad (۲)$$

x و y را تثبیت کنیم:

الف) رابطه (۲) را بازاء $z = ۰$ اثبات میکنیم. داریم:

$$(xy)\;۰ = ۰$$

$$x\,(y \cdot ۰) = x \cdot ۰ = ۰$$

پس (۲) بازاء $z = ۰$ درست است.

ب) اگر (۲) بازاء z درست باشد درستی آنرا بازاء z^+ اثبات میکنیم.

(تعریف ضرب) $(xy)z^+ = (xy)\,z + (xy)$

(فرض بازگشتی) $(xy)z + xy = x\,(yz) + xy$

(توزیع‌پذیری) $x(yz) + xy = x\,(yz + y)$

(تعریف ضرب) $x(yz + y) = x\,(yz^+)$

هرچه باشد x و y و z شرکت‌پذیری ثابت است.

N یک نیم گروه ضربی است.

جابجاپذیری

ابتدا لم زیر را اثبات میکنیم:

لـــم. هرچه باشد اعداد طبیعی x و y داریم:

$$y^+ \cdot x = yx + x \qquad (۳)$$

y را تثبیت میکنیم.

الف) تساوی (۳) بازاء $x = 0$ درست است چونکه دو طرف برابر صفر میشوند.

ب) اگر (۳) بازاء x درست باشد درستی آنرا بازاء x^+ اثبات میکنیم:

$$y^+x^+ = y^+x + y^+ \qquad \text{(تعریف ضرب)}$$

$$y^+x + y^+ = (yx + x) + (y + \blacksquare) \qquad \text{(فرض بازگشتی)}$$

بنا به جابجاپذیری و شرکت‌پذیری عمل جمع مینویسیم:

$$(yx + x) + (y + \blacksquare) = (yx + y) + (x + \blacksquare)$$

بنا به تعریف ضرب:

$$(yx + y) + (x + \blacksquare) = yx^+ + x^+$$

پس رابطه (۳) هرچه باشد x و y درست است.

$\boxed{P_۳}$ هرچه باشد x و y داریم:

$$xy = yx \qquad (۴)$$

الف) رابطه (۴) را بازاء $y = 0$ اثبات میکنیم. یعنی:

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x$$

یا:

$$0 \cdot x = 0$$

بدیهی است که این رابطه بازاء $x = 0$ درست است، آنرا بازاء x درست فرض کرده و بازاء x^+ اثبات میکنیم:

$$0 \cdot x^+ = 0x + 0 \qquad \text{(تعریف ضرب)}$$

و چون بنا به فرض بازگشتی $0 \cdot x = 0$ است، نتیجه میشود:

$$0 \cdot x^+ = 0$$

بنابراین (هرچه باشد x) رابطه (۴) بازاء $y = 0$ درست است.

ب) (۴) را بازاء y درست فرض کرده و درستی آنرا بازاء y^+ اثبات میکنیم:

$$xy^+ = xy + x \qquad \text{(تعریف)}$$

(فرض بازگشتی) $xy + x = yx + x$

(لـم) $yx + x = y^{+}x$

هرچه باشد x و y جابجاپذیری اثبات شده است.

پس N نیم گروه جابجاپذیر برای عمل ضرب است.

جزء خنثی.

با بکار بستن تعریف ضرب تا حال دیدیم که:

$$x \cdot ■ = x$$

با جابجاپذیری خواهیم داشت:

$$■ \cdot x = x$$

$\boxed{P_4}$ جزء خنثای ضرب واحد است: ■

هر جزء سوای صفر برای ضرب منتظم است.

ابتدا خاصیت زیر را اثبات کنیم:

اگر حاصل ضرب دو عدد صفر باشد حداقل یکی از این اعداد برابر صفر است.

فرض کنیم $ab = ۰$ اگر در عین حال $a \neq ۰$ و $b \neq ۰$ بود a و b هرکدام دارای یک سابق a' و b' بترتیب بودند.

$$a = a' + ■ \qquad b = b' + ■$$

در نتیجه:

$$۰ = (a' + ■)(b' + ■) = a'b' + a' + b' + ■$$

و این مخالف اصل A_3 است. پس خاصیت ثابت است.

از این خاصیت، خاصیت بعدی نتیجه میشود:

$\boxed{P_5}$ هرچه باشد $x \neq ۰$:

$$ax = bx \quad \Rightarrow \quad a = b$$

زیرا:

$$ax = bx \quad \Rightarrow \quad ax - bx = ۰$$

بنا به توزیع‌پذیری برای تفریق:

$$(a - b)\, x = ۰$$

و چون $x \neq ۰$ پس بنا به خاصیت قبل:

$$a - b = ۰$$

یعنی
$$a = b$$

هیچ عددی جزء واحد دارای قرینه نیست.

$\boxed{\mathrm{P}_{۶}}$
$$(ab = \blacksquare) \quad \Rightarrow \quad (a = b = \blacksquare)$$

اگر $ab = \blacksquare$ باشد هیچکدام از دو عدد a و b مساوی صفر نمیتواند باشد. مانند حالت قبل داریم:

$$a = a' + \blacksquare \qquad b = b' + \blacksquare$$

و

$$\blacksquare = a'b' + a' + b' + \blacksquare$$

از آنجا:

$$a'b' + a' + b' = ۰$$

و این رابطه موجب میشود (II، فصل ۱؛ $\mathrm{P}_{۴}$):

$$a' = b' = ۰$$

از آنجا
$$a = b = \blacksquare$$

تبصره ــ مجموعه N که حالا مجهز بدو قانون ترکیب جمع و ضرب است که در همه‌جا معین هستند؛ هرکدام از این قوانین به N بنیان نیم‌گروه جابجاپذیر با جزء خنثی میبخشد و بعلاوه ضرب توزیع‌پذیر نسبت به جمع است.

نباید نتیجه گیری کرد که N یک حلقه است (I، فصل ۲، ۶) زیرا عمل جمع به N یک بنیان گروه نمیبخشد (هر جزء N سوای صفر دارای قرینه بازاء جمع نیست)

بعضی اوقات میگویند که N یک نیم حلقه است.

پایداری بازاء نسبت ترتیب:

$\boxed{\mathrm{P}_{۷}}$
$$(\forall c) \qquad a \leqslant b \quad \Rightarrow \quad ac \leqslant bc$$
$$(\forall c \neq ۰) \qquad a < c \quad \Rightarrow \quad ac < bc$$

زیرا :

$$a \leqslant b \quad \Rightarrow \quad (\exists d; \qquad a + d = b)$$

در عدد غیر مشخص c ضرب میکنیم.

$$(a + d)c = bc \quad \Rightarrow \quad ac + dc = bc \quad \Rightarrow \quad ac \leqslant bc$$

(برای قسمت دوم $\mathrm{P}_{۷}$ همین استدلال را با $c \neq ۰$ و $d \neq ۰$ انجام میدهیم).

نتیجه ـ نامساویها را میتوان عضو به عضو درهم ضرب کرد.

$$(a < b \text{ و } c < d) \quad \Rightarrow \quad (ac < bd)$$

زیرا :

$$a < b \quad \Rightarrow \quad ac < bc$$
$$c < d \quad \Rightarrow \quad bc < bd \qquad (\mathrm{P}_{۷})$$

از آنجا بنابه سرایت پذیری :

$$ac < bd$$

۲ـ مضرب‌های یك عدد. بخش‌پذیری

تعریف ـ اگر عدد طبیعی a مفروض باشد، بهر عدد طبیعی x عدد طبیعی y را همراه کنیم بقسمی که داشته باشیم :

$$y = ax$$

y را «مضرب a» مینامند.

بدین ترتیب در مجموعه N اعداد طبیعی یک تابع معین میشود.

تصویر N بوسیله این تابع با $\mathcal{M}_a$ نمایش داده میشود :

$$x \in N \qquad y = ax \qquad y \in \mathcal{M}_a$$

$\mathcal{M}_a$ مجموعه مضربهای a است.

چند مثال :

۱) $a = ۰$ $\qquad \mathcal{M}_{۰} = \{۰\}$

۲) $a = \blacksquare$ $\qquad \mathcal{M}_{\blacksquare} = N$

۳) $a = \blacksquare\,\blacksquare$ $\qquad \mathcal{M}_{\blacksquare\blacksquare}$ مجموعه عددهای زوج

بطورکلی :

$$\mathcal{M}_a = \{۰, a, (\blacksquare\,\blacksquare)\, a, \cdots, xa, \cdots\}$$

قضیهٔ ۱ : بازاء $a \neq ۰$ تابع $y = ax$ یک تناظر دوسوئی بین N و $\mathcal{M}_a$ است. زیرا اگر $a \neq ۰$ باشد تابع اکیداً صعودی است چونکه :

$$(\forall x, x' \in N)\; x < x' \quad \Rightarrow \quad ax < ax' \qquad (\mathrm{P}_{۷})$$

پس این یک تناظر دوسوئی بین N و $\mathscr{M}_a$ است (I؛ فصل ۳، ۳).
تابع معکوس را با :

$$x = \frac{y}{a}$$

نمایش میدهیم.
این تابع در $\mathscr{M}_a$ $(a \neq 0)$ معین است و مقادیر خود را در N اختیار مینماید.
x را خارج قسمت تحقیقی (درست) y بر a مینامند و این خارج قسمت معین نیست مگر $y \in \mathscr{M}_a$ باشد.
وقتیکه $y \in \mathscr{M}_a$ باشد میگوئیم که «a میشمارد y را» یا «a یک مقسوم علیهی از y است» و یا «y بر a بخش‌پذیر است» مینویسیم :

$$y \in \mathscr{M}_a \iff a \mid y$$

بخوانیم : «a، y را میشمارد» یا بخوانیم «y مضرب a است». بطور خلاصه :

$$y \in \mathscr{M}_a \iff a \mid y \iff (\exists x; \quad y = ax)$$

نسبت بخش‌پذیری:

نسبت $a \mid b$ یک نسبت دوتائی در N است که مورد بررسی قرار میدهیم :

$\boxed{P_8}$ اگر a بشمارد b و c را میشمارد $b + c$ و $b - c$ و bc را.

$$a \mid b \iff (\exists q \in N; \quad b = aq)$$
$$a \mid c \iff (\exists q' \in N; \quad c = aq')$$

جمع :

$$b + c = a(q + q') \Rightarrow a \mid (b + c)$$

تفریق :

$$(b \geqslant c)\ b - c = a(q - q') \Rightarrow a \mid (b - c)$$

ضرب :

$$bc = aqaq' \Rightarrow a \mid bc$$

تبصره ــ اگر $a = 0$

$$0 \mid b \Rightarrow b = 0$$

زیرا عدد q در این صورت وجود دارد و بقسمی که $b = 0 \times q$ از آنجا $b = 0$، 0 جز خودش هیچ عدد دیگر را نمیشمارد.

$\boxed{P_9}$ $a \mid b$ و $b \mid c$ موجب میشود : $a \mid c$

زیرا :

$$a \mid b \;\Rightarrow\; (\exists q; \quad b = aq)$$
$$b \mid c \;\Rightarrow\; (\exists q'; \quad c = bq')$$

از آنجا :

$$c = (aq)q' = a(qq')$$

و در نتیجه :

$$a \mid c$$

نسبت بخش‌پذیری سرایت‌پذیر است.

$\boxed{P_{10}}$ $a \mid b$ و $b \mid a$ هم‌ارز است با $a = b$

ابتدا اگر $a = b$ باشد بدیهی است که $a \mid b$ و $b \mid a$

بعکس ،

$$a \mid b \;\Rightarrow\; (\exists q; \quad b = aq)$$
$$b \mid a \;\Rightarrow\; (\exists q'; \quad a = bq')$$

از آنجا :

$$a = a\,(qq')$$

فرض کنیم $a \neq 0$؛ چون a برای ضرب منتظم است، از آنجا نتیجه میشود :

$$qq' = \blacksquare$$

از آنجا :

$$q = q' = \blacksquare \qquad (P_6)$$

و در نتیجه :

$$a = b$$

اگر $a = 0$، میدانیم که :

$$0 \mid b \;\Rightarrow\; b = 0$$

و P_{10} باز هم درست است.

خواص P_9 و P_{10} موجب میشوند که $a \mid b$ یک نسبت ترتیب در N باشد. این یک نسبت ترتیب جزئی است زیرا هرچه باشد a و b نمیتوانیم داشته باشیم $a \mid b$ یا $b \mid a$.

تبصره ــ در N^*، نسبت بخش پذیری موجب نسبت ترتیب معمولی :

$$a \mid b \;\Rightarrow\; a \leqslant b$$

است .

زیرا، چون $a \notin N^*$:

$$a \mid b \quad \Rightarrow \quad (\exists q \neq \circ \text{ بقسمیکه } b = aq)$$

از آنجا :

$$b \geqslant a$$

۳ـ تقسیم اقلیدسی :

فرض کنیم دو عدد a و b را که دومی مخالف صفر است داشته باشیم و :

$$\mathcal{M}_b = \{\circ, b, (\blacksquare\ \blacksquare)\, b, \cdots, xb, \cdots\}$$

را در نظر بگیریم :

قسمتی از $\mathcal{M}_b$ را که بوسیله a فرابسته است P بنامیم:

$$P = \mathcal{M}_b \cap [\circ, a]$$

داریم :

$$x \in P \quad \Longleftrightarrow \quad (x \in \mathcal{M}_b \text{ و } x \leqslant a)$$

P مجموعه مضربهای b حداکثر برابر a است.

P تهی نیست زیرا حداقل شامل $\circ$ است.

P متناهی است زیرا a فرابند آن است.

P دارای بزرگترین مقدار است (II، فصل ۲، ۴).

چون $c \in \mathcal{M}_b$، عدد طبیعی q (منحصر بفرد چونکه $b \neq \circ$ قضیهٔ ۱) وجود دارد بقسمیکه :

$$c = bq$$

بدیهی است :

$$bq \leqslant a$$

همچنین داریم :

$$b(q + \blacksquare) > a$$

زیرا اگر میداشتیم :

$$b(q + \blacksquare) \leqslant a$$

لازم میآمد :

$$b(q + \blacksquare) \in P$$

بـا :

$$b(q + \blacksquare) > bq$$

و bq بزرگترین جزء P نمیشد. پس میتوانیم بگوئیم:

قضیهٔ ۲ ـ اگر دو عـدد طبیعی a و b را داشته بـاشیم $(b \neq 0)$ یک عـدد طبیعی q ـی تنها وجود دارد بقسمی که :

$$bq \leqslant a < b(q + \blacksquare)$$

تعریف ـ پیدا کردن این عدد q، عبارت است از انجام عمـل تقسیم اقلـیدسی a بـر b؛ a را مقسوم ، b را مقسوم علیه، و q را خارج قسمت اقلیدسی مینامند.

باقیمانده :

$$bq \leqslant a \quad \Rightarrow \quad (\exists r \qquad a = bq + r)$$

r باقیمانده تقسیم اقلیدسی نامیده میشود. داریم :

$$a < b(q + \blacksquare) \quad \Rightarrow \quad a < bq + b \quad \Rightarrow \quad r < b$$

پس خواهیم داشت :

$$\begin{cases} a = bq + r \\ r < b \end{cases}$$

بعکس، اگر یک زوج q و r وجود داشته باشند که در دستگاه قبلی صدق کنند q خارج قسمت اقلیدسی و r باقیمانده تقسیم اقلیدسی a بر b خواهد بود.

زیرا :

$$a = bq + r \quad \Rightarrow \quad a \geqslant bq$$

$$r < b \quad \Rightarrow \quad r + bq < b + bq \quad \Rightarrow \quad a < b(q + \blacksquare)$$

پس در نتیجه داریم :

$$bq \leqslant a < b(q + \blacksquare \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a = bq + r \\ r < b \end{cases}$$

فصل چهارم

قوه صحیح یک عدد طبیعی شمار

قوه صحیح یک عدد طبیعی

۱- تعریف ـ اگر عدد طبیعی ثابت $a \neq 0$ مفروض باشد. بهر عدد طبیعی x یک عدد طبیعی با علامت a^x همراه کنیم که بطریق زیر با روش بازگشتی معین میشود:

$$a^0 = ۱ \qquad (۱)$$

(۲) اگر a^x معین باشد $a^{x+■}$ با:

$$a^{x^+} = a^x \cdot a$$

معین میشود.

بدین ترتیب در N یک تابع $x \to a^x$ معین میشود. تصویر N بوسیله این تابع را با $\mathcal{P}_a$ نمایش میدهیم.

حالت $■ = a$ معمولی است زیرا بنا به تعریف داریم:

$$(■)^{x^+} = (■)^x$$

و جمیع اعداد x دارای یک تصویر ■ میباشند:

$$\mathcal{P}_■ = \{■\}$$

در حالت $a > ■$ بترتیب داریم:

$$a^■ = a^0 \cdot a = ■ \cdot a = a$$

$$a^{■■} = a^■ \cdot a = a \cdot a, \cdots$$

بطور کلی اگر فرض کنیم که بازاء $x > ■$، a^x عبارت از حاصل‌ضرب x عامل برابر a است:

$$a^x = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{\text{عامل } x} \qquad (۱)$$

تعریف موجب میشود :

$$a^{x^+} = \underbrace{a \cdot a \cdots a \cdot a}_{\text{عامل } x^+}$$

پس هرچه باشد $x > \blacksquare$ رابطه (۱) درست است.

بازاء $a > \blacksquare$ داریم :

$$\mathcal{P}_a = \{\blacksquare, a, a^{\blacksquare\blacksquare}, \cdots, a^x, \cdots\}$$

که تصاعد هندسی با قدر نسبت a و با جمله اول ■ نامیده میشود.

۲- خواص :

$\boxed{P_1}$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

۱) P_1 را بازاء $y = 0$ ثابت کنیم :

$$a^x \cdot a^{\circ} = a^x \cdot \blacksquare = a^x$$

$$a^{x+\circ} = a^x$$

پس P_1 بازاء $y = 0$ درست است.

۲) بفرض اینکه P_1 بازاء y درست است آنرا بازاء y^+ اثبات میکنیم :

با شروع از فرض بازگشتی :

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

طرفین را در a ضرب میکنیم :

$$a^x \cdot a^{y^+} = a^{x+y^+}$$

هرچه باشد x و y خاصیت P_1 درست است.

$\boxed{P_2}$

$$a^x b^x = (ab)^x$$

۱) بازاء $x = 0$ هردو طرف برابر ■ میشود.

۲) با فرض درستی P_2 بازاء x آنرا بازاء x^+ اثبات میکنیم :

(تعریف) $a^{x^+} b^{x^+} = (a^x \cdot a)(b^x \cdot b)$

(جابجاپذیری و شرکت‌پذیری) $(a^x \cdot a)(b^x \cdot b) = (a^x b^x)(ab)$

(فرض بازگشتی) $(a^x b^x)(ab) = (ab)^x (ab)$

(تعریف) $(ab)^x (ab) = (ab)^{x^+}$

پس هرچه باشد x خاصیت P_2 درست است.

$\boxed{P_۳}$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

x را تثبیت کنیم :

۱) بازاء $y = ۰$ داریم :

$$(a^x)^{۰} = ■ \qquad و \qquad a^{x۰} = a^{۰} = ■$$

پس $P_۳$ بازاء $y = ۰$ درست است.

۲) بفرض درستی $P_۳$ بازاء y آنرا بازاء y^+ اثبات میکنیم :

(تعریف) $\qquad (a^x)^{y^+} = (a^x)^y\, a^x$

(فرض بازگشتی) $\qquad (a^x)^y a^x = a^{xy} a^x$

(خاصیت $P_۱$) $\qquad a^{xy} a^x = a^{xy+x}$

(تعریف ضرب) $\qquad a^{xy+x} = a^{xy^+}$

پس هرچه باشد x و y خاصیت $P_۳$ ثابت است.

پایداری بازاءِ نسبت ترتیب

$\boxed{P_۴}$ هرچه باشد $x \neq ۰$:

$$a < b \iff a^x < b^x$$

ابتدا ثابت میکنیم :

$$a < b \Rightarrow a^x < b^x$$

خاصیت بازاء $x = ■$ آشکار است. آنرا بازاء x درست فرض کرده و بازاء x^+ اثبات میکنیم.

با فرض بازگشتی در عین حال داریم :

$$a^x < b^x$$
$$a < b$$

از ضرب عضو به عضو :

$$a^{x^+} < b^{x^+}$$

حال ثابت میکنیم :

$$a^x < b^x \Rightarrow a < b$$

اگر فرض کنیم $a = b$ نتیجه میشود $a^x = b^x$ و این خلاف فرض است. اگر فرض کنیم $a > b$ بنابر آنچه گذشت نتیجه میشود $a^x > b^x$ و اینهم خلاف فرض است پس :

$$a < b$$

پس هرچه باشد $x \neq ۰$ خاصیت $\mathrm{P}_۴$ درست است.

$x \to a^x$ بازاء ■ $> a$ صعودی است

$\boxed{\mathrm{P}_۵}$
$$(a > ■ \quad \text{و} \quad x > y) \Rightarrow a^x > a^y$$

زیرا :

$$x > y \Rightarrow (\exists d \neq ۰; \quad x = y + d)$$

$$(a > ■ \quad \text{و} \quad d \neq ۰) \Rightarrow a^d > ■ \qquad (\text{خاصیت } \mathrm{P}_۴)$$

از ضرب طرفین در a^y (که برابر صفر نیست) :

$$a^y \cdot a^d > a^y$$

یا :

$$a^{y+d} > a^y$$

یعنی :

$$a^x > a^y$$

پس تابع $a^x \leftarrow x$ بازاء ■ $> a$ صعودی است و از آنجا بنابه (I، فصل ۳، ۳) نتیجه میشود :

قضیهٔ ۱ - بازاء ■ $> a$ تابع $a^x \leftarrow x$ با دوسوئی N را روی $\mathcal{P}_a$ می‌نگارد.

تعریف - تابع معکوس، «لگاریتم در مبنای a» نامیده میشود وبصورت $y \to \log_a y$ نمایش داده میشود.

$$y = a^x \iff x = \log_a y$$

تابع $\log_a y$ در $\mathcal{P}_a$ معین بوده و مقادیر خود را در N اختیار میکند.

اینک نمودار این تناظر دو سوئی :

$$\begin{array}{l}
N \equiv \{۰, ■, ■■, \dots, x, \dots\} \\
\quad\ \ \downarrow\!\uparrow\ \ \downarrow\!\uparrow\ \ \ \downarrow\!\uparrow \qquad\quad \downarrow\!\uparrow \\
\mathcal{P}_a \equiv \{■, a, a^{■■}, \dots, a^x, \dots\}
\end{array}
\quad y = a^x \downarrow \quad \uparrow x = \log_a y$$

شکل ۱

خاصیت اساسی لگاریتم.

$\boxed{P_6}$ هرچه باشد y' و y'' از $\mathcal{P}_a$،

$$\log_a y' + \log_a y'' = \log_a y'y''$$

زیرا :

$$\log_a y' = x' \iff y' = a^{x'}$$
$$\log_a y'' = x'' \iff y'' = a^{x''}$$

P_1 را بکار میبندیم :

$$y'y'' = a^{x'+x''}$$

این رابطه هم ارز است با:

$$x' + x'' = \log_a y'y''$$

پس تابع $y \to \log_a y$ یک یک شکلی (I، فصل ۳، ۷) بنیان ضربی $\mathcal{P}_a$ روی بنیان جمعی N است. در بخش مربوط به عددهای حقیقی این یک شکلی را مجدداً مورد بررسی قرار خواهیم داد.

شمار

۳ـ تا حال، یک عدد طبیعی $a \neq ٠$ را با یک کلکسیون اجزاء که هرکدام با ■ نمایش داده میشدند نمایش دادیم که اصلی آن خود عدد a بود. (بجای اجزاء، واحدها، نیز میگویند). کندی حسهای ما ایجاب میکند که نمایشهای ساده‌تری را برای اعداد طبیعی مورد بررسی قرار دهیم. این نمایشهای اختصاری تئوری شمار را تشکیل میدهند.

مسئله اساسی شمار عبارت است از :

هرگاه یک مجموعه مرتب و متناهی b سمبل متمایز :

$$\{R_٠, R_■, R_{■■}, \cdots R_{b-■}\}$$

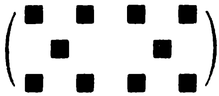
داده شود که بترتیب نماینده عددهای :

$$٠, ■, ■■, \ldots, b - ■$$

باشند جمیع عددهای طبیعی را به کمک این سمبلها نمایش میدهیم. تا حال این مسئله را حل کرده‌ایم : با سمبل ■ جمیع عددهای طبیعی را سوای صفر میتوان نمایش داد. ولی ما در جستجوی نمایش اختصاری هستیم: پس فرض بکنیم که اصلی b کلکسیون بزرگتر از ■ است :

$$b > ■$$

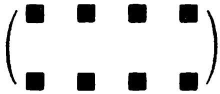
جزء R_i مجموعه را «رقم» یا «صورت» مینامیم.
اصلی b کلکسیون را پایه دستگاه شمار می‌نامند.
مثال ــ اولاً در دستگاه اعشاری پایه برابر است با :



و کلکسیون رقمها عبارتند از :

$$\{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$$

ثانیاً در دستگاه به پایه ۲ پایه برابر (■ ■) و کلکسیون رقمها میتوانند {۱ , ۰} یا {۰, /|} و یا {۱ , ۰} باشد.
ثالثاً ــ در دستگاه به پایه ۸، پایه برابر است با :



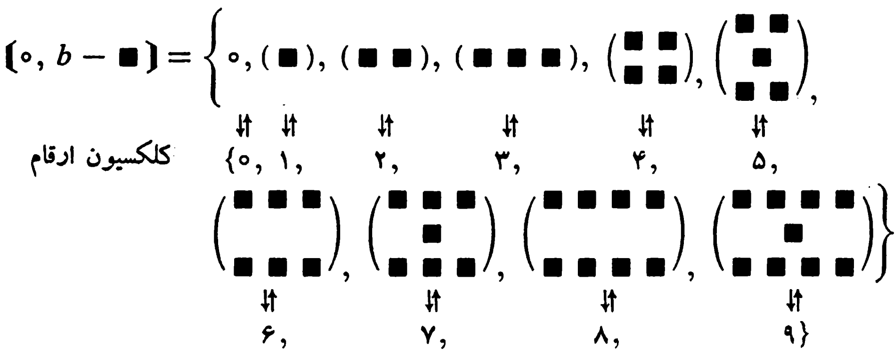
و کلکسیون رقمها میتواند :

$$\{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$$

باشد .

۴ـ رقم بندی یك عدد در مبنای b

کلکسیون ارقام $\{R_۰, R_\blacksquare, \ldots, R_{b-\blacksquare}\}$ و فاصله $[۰, b - \blacksquare]$ بـه تناظـر دوسوئی هستند. قبلاً هر عدد طبیعی $a < b$ را با رقم نظیر a نمایش داده‌ایم.
مثلاً در دستگاه به پایه ۱۰ تناظر زیر را داریم :



شکل ۲

برای سایر اعداد طبیعی، نمایش عدد مبتنی بر متناظر کردن هر عدد طبیعی با یک رشته رقمها است: این تناظر را رقم‌بندی عدد در مبنای b مینامند.

اگر $b \leqslant a$ باشد، کلکسیون اجزاء ■ را که برای نمایش a اختیار نموده‌ایم با $\mathcal{A}$ مشخص میکنیم.

از این کلکسیون $\mathcal{A}$، بسته‌هائی استخراج میکنیم که هرکدام شامل b جزء باشند. یک چنین بسته‌ای را «واحد مرتبه دوم» مینامیم، از $\mathcal{A}$ آنقدر واحد مرتبه دوم که امکان دارد استخراج میکنیم، بدین ترتیب در $\mathcal{A}$ فقط c_0 جزء که از b کمتر است میماند.

رقم‌بندی c_0 را میدانیم :

$$c_0 \rightarrow r_0$$

بسته‌های b تائی را که استخراج کردیم شمارش میکنیم :

اگر یک بسته b تائی وجود داشته باشد a را مینویسیم :

$$a \rightarrow \overline{1r_0}$$

اگر تعداد بسته‌های b تائی از b کمتر باشد رقم تعداد آنها را با r_1 نشان میدهیم و a نوشته میشود (شکل ۳) :

$$a \rightarrow \overline{r_1 r_0}$$

خطی که بالای عدد قرارداده میشود برای جلوگیری از اشتباه کردن عدد با حاصل‌ضرب دو عامل است.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} = \{ & (b \cdots b) & c_0\} \\ & \downarrow\uparrow & \downarrow\uparrow \\ & r_1 & r_0 \end{array} \qquad a \rightarrow \overline{r_1 r_0}$$

شکل ۳

اگر در کلکسیون $\mathcal{A}$ حداقل b بسته b تائی وجود داشته باشد در این صورت از این بسته‌های b تائی واحدهای مرتبه دوم بسته‌های جدید شامل $b \times b = b^2$ جزء ■ که «واحد-های مرتبه سوم» نامیده میشوند استخراج میکنیم. آنقدر بسته b^2 تائی که امکان داشته باشد در میآوریم. بدین ترتیب تعداد c_1 تا بسته b تائی که کمتر از b است باقی میماند $(c_1 < b)$ رقم-بندی c_1 را میدانیم :

$$c_1 \rightarrow r_1$$

بسته‌های b^2 تائی را شمارش میکنیم :

اگر تعداد بسته‌های $b^۲$ تائی از b کمتر باشد تعداد آنها را با $r_۲$ نمایش میدهیم و عدد a با سه رقم نمایش داده میشود (شکل ۴) :

$$a \to \overline{r_۲ r_۱ r_\circ}$$

$$\mathcal{A} = \{(b^۲ \cdots b^۲)\ (b \cdots b)\ c_\circ\}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow\uparrow & \downarrow\uparrow & \downarrow\uparrow \\ r_۲ & r_۱ & r_\circ \end{array} \qquad a \to \overline{r_۲ r_۱ r_\circ}$$

شکل ۴

اگر در کلکسیون $\mathcal{A}$ حداقل b بسته $b^۲$ تائی وجود داشته باشد در این صورت از این بسته‌های $b^۲$ تائی واحدهای مرتبه سوم بسته‌های جدید شامل $b \times b^۲ = b^۳$ جزء ■ موسوم به «واحدهای مرتبه چهارم» را استخراج میکنیم.

آنقدر که امکان دارد واحد مرتبه چهارم استخراج میکنیم. بدین ترتیب از واحدهای مرتبه سوم $c_۲$ تا که کمتر از b است باقی میماند.

$$c_۲ < b$$

رقم‌بندی $c_۲$ را میدانیم :

$$c_۲ \to r_۲$$

بسته‌های $b^۳$ تائی را شمارش کنیم :

اگر تعداد این بسته‌ها کمتر از b بود رقم آنها را $r_۳$ منامیم و a در این صورت باچهار رقم مرتب میگردد: (شکل ۵)

$$a \to \overline{r_۳ r_۲ r_۱ r_\circ}$$

$$\mathcal{A} = \{(b^۳ \cdots b^۳)\ (b^۲ \cdots b^۲)\ (b \cdots b)\ c_\circ\}$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow\uparrow & \downarrow\uparrow & \downarrow\uparrow & \downarrow\uparrow \\ r_۳ & r_۲ & r_۱ & r_\circ \end{array} \qquad a \to \overline{r_۳ r_۲ r_۱ r_\circ}$$

شکل ۵

اگر حداقل b بسته $b^۳$ تائی وجود داشت از این بسته‌ها بسته‌های جدید شامل $b \times b^۳ = b^۴$ جزء ■ استخراج میکنیم و همینطور تا آخر.

۱استدلال با روش بازگشتی ــ فرض کنیم که کلکسیون $\mathcal{A}$ به «واحد»های با مقدارهای

مرتب :

$$b^{n-1}, b^{n-2}, \cdots, b^{2}, b, c_{0}$$

بخش‌شده باشد و تعداد بسته‌های به ارزش $b^{n-2}, \ldots, b^{2}, b$ بترتیب با $r_{n-2}, \cdots, r_{2}, r_{1}$ معلوم شده باشد و c_0 مانند همیشه نمایش تعداد r_0 باشد.

اگر در کلکسیون $\mathcal{A}$ حداقل b بسته b^{n-1} تائی وجود داشته باشد یعنی:

$$a \geqslant b \times b^{n-1}$$

یـا :

$$a \geqslant b^{n}$$

در این‌صورت از این واحدهای b^{n-1} تائی بسته‌های جدید شامل :

$$b \times b^{n-1} = b^{n}$$

جزء ■ استخراج میکنیم. بقدر امکان از این واحدها در میآوریم، در این صورت تعداد c_{n-1} بسته b^{n-1} تائی میماند که :

$$c_{n-1} < b$$

رقم‌بندی c_{n-1} را میدانیم :

$$c_{n-1} \rightarrow r_{n-1}$$

بسته‌های b^{n} تائی را شمارش میکنیم. فرض کنیم تعداد آنها کمتر از b باشد یعنی :

$$a < b \times b^{n}$$

یـا :

$$a < b^{n+1}$$

تعداد این بسته‌ها را با r_n نمایش میدهیم و در نتیجه a با $n+1$ رقم مـرتب میشود: (شکل ۶)

$$a \rightarrow \overline{r_n\, r_{n-1} \cdots r_1\, r_0}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{A} = \{ & (b^{n} \cdots b^{n}) & (b^{n-1} \cdots b^{n-1}) & \cdots & (b \cdots b) & c_0 \} & \\ & \downarrow\uparrow & \downarrow\uparrow & & \downarrow\uparrow & \downarrow\uparrow & a \rightarrow \overline{r_n\, r_{n-1} \cdots r_1\, r_0} \\ & r_n & r_{n-1} & & r_1 & r_0 & \end{array}$$

شکل ۶

بطور خلاصه، بازاء هر عدد a بطوریکه :

$$b^{n} \leqslant a < b^{n+1} \qquad (n \neq 0)$$

باشد کلکسیون $\mathcal{A}$ را میتوان به بسته‌های با $n+1$ مقدار:

$$b^n, b^{n-1}, \cdots, b, c_0$$

بخش کرد تعداد بسته‌های b^i تائی را که کمتر b است با r_i نمایش داد $(1 \leqslant i < n)$ وبسته c_0 هم با r_0 نمایش داده میشود.

بسط مبنای b

بدین ترتیب برای $\mathcal{A}$ توزیع زیر را خواهیم داشت :

r_n بسته b^n تائی ، یا $r_n b^n$ جزء ■

r_{n-1} بسته b^{n-1} تائی ، یا $r_{n-1} b^{n-1}$ جزء ■

. . . .

. . . .

r_1 بسته b تائی ، یا $r_1 b$ جزء ■

یک بسته r_0 تائی، یا r_0 جزء ■

چون اصلی $\mathcal{A}$ عبارت از a است، نتیجه میشود :

$$a = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \cdots + r_1 b + r_0 \qquad (r_n \neq 0)$$

عبارت فوق به «بسط عدد a به مبنای b» موسوم است. این توزیع کلکسیون $\mathcal{A}$ وجود دارد:

اگر اصلی a ــ ی کلکسیون در :

$$b^n \leqslant a < b^{n+1}$$

صدق کند.

دو خاصیت را اثبات میکنیم:

۱) بازاء هر عدد طبیعی a یک چنین عدد صحیح n وجود دارد و یکتا است.

۲) بسط به مبنای b هر عدد a یکتا است.

قضیهٔ ۲ - بهر عدد طبیعی $a > 0$ یک عدد طبیعی n یکتا نظیر است بقسمیکه :

$$b^n \leqslant a < b^{n+1}$$

اگر $\mathcal{P}_b$ تصاعد هندسی زیر باشد:

$$\mathcal{P}_b = \{1, b, b^2, \cdots, b^n, \cdots\}$$

فرض کنیم Q قسمتی از $\mathcal{P}_b$ باشد که با a فرا بسته است.

$$Q = \mathcal{P}_b \cap [1, a]$$

$$x \in Q \iff (x \in \mathcal{P}_b \quad \text{و} \quad x \leqslant a)$$

Q تهی نیست زیرا حداقل شامل ۱ است.

Q متناهی است زیرا با a فرا بسته است.

Q دارای بزرگترین جزء q است (II، فصل ۲، ۴)

چون $q \in \mathcal{P}_b$ است پس یک عدد n یکتا وجود دارد (قضیهٔ ۱). بقسمیکه :

$$q = b^n$$

باشد. بدیهی است که :

$$b^n \leqslant a$$

و چون $q \in Q$ است همچنین داریم:

$$b^{n+1} > a$$

زیرا اگر $a \leqslant b^{n+1}$ بود نتیجه میشد .

$$b^{n+1} \in Q$$

با $b^{n+1} > b^n$ (چون $b > 1$) و b^n بزرگترین جزء Q نمیشد. قضیه ثابت است.

قضیهٔ ۳ ـ بسط به مبنای b یک عدد a یکتا است.

یکتائی بسط به مبنای b نتیجه مستقیم روشی است که برای رقم بندی a بکار رفته است روشی که متکی به تقسیمهای اقلیدسی متوالی با یک مقسوم علیه b است.

بنا به قضیهٔ قبل نظیر عدد a یک عدد n یکتا وجود دارد: تعداد $n + 1$ ارقام صورت‌بندی $\overline{r_n \ldots r_0}$ همراه a کاملاً مشخص است.

در استخراج بسته‌های با مقدارهای مرتب $r_0, b, b^2 \ldots b^n$ ما قبلاً تقسیم اقلیدسی a بر b را انجام داده‌ایم :

$$a = bq_1 + r_0 \qquad r_0 < b \tag{1}$$

بنابراین اولین رقم سمت راست صورت‌بندی یکتا است و این عبارت از باقیمانده r_0 است. خارج قسمت q_1 یکتا است : این عبارت از تعداد واحدهای مرتبه دوم است.

اگر $q_1 \geqslant b$ باشد ما q_1 را بر b تقسیم کرده‌ایم :

$$q_1 = bq_2 + r_1 \qquad r_1 < b \tag{2}$$

رقم دوم سمت راست صورت‌بندی یکتا است : این عبارت از باقیمانده r_1 است. خارج قسمت q_2 یکتا است: این عبارت از تعداد واحدهای مرتبه سوم است.

اگر $q_2 \geqslant b$ باشد q_2 را بر b تقسیم کرده‌ایم :

$$q_2 = bq_3 + r_2 \qquad r_2 < b \tag{3}$$

رقم سوم سمت راست صورت‌بندی یکتا است (باقیمانده r_3)، خارج قسمت q_3 یکتا است : این عبارت از تعداد و واحدهای مرتبه ۴ است. و اگر بهمین ترتیب ادامه دهیم به آخرین تقسیم میرسیم که ردیف آن بموجب قضیهٔ ۱ کاملاً مشخص شده است :

$$q_{n-1} = br_n + r_{n-1} \qquad r_{n-1} < b \qquad \text{و} \qquad r_n < b \tag{n}$$

که در آنجا باقیمانده r_{n-1} یکتا است و نماینده رقم ماقبل آخر از سمت چپ صورت‌بندی و r_n خارج قسمت یکتای کوچکتر از b و آخرین رقم سمت چپ صورت‌بندی است.

بسط رقمی یك صورت بندی ـ بسط رقمی یک صورت بندی مبنای b :

$$\overline{r_n \cdots r_1 r_0}$$

عبارت از متناظر قراردادن آن با عدد طبیعی a است :

$$a = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \cdots + r_1 b + r_0$$

ضرایب این بسط دقیقاً ارقام صورت‌بندی میباشند .

مثال ـ هرگاه در دستگاه به مبنای ۱۰ $(b = 10)$ صورت‌بندی ۷۴۰۵۲ را داشته باشیم بسط رقمی این صورت‌بندی عدد :

$$a = 7b^4 + 4b^3 + 0 \cdot b^2 + 5b + 2$$

را متناظر آن قرار خواهد داد .

بدین ترتیب نظیر هر صورت‌بندی در مبنای b یک عدد طبیعی یکتا وجود دارد که بتوسط بسط مبنای b با هم مربوط‌اند. اعداد طبیعی و صورت‌بندی مبنای b بدین ترتیب در تناظر دو سوئی قرار دارند.

عدد a و صورت‌بندی نظیر آن $\overline{r_n \ldots r_0}$ را همان (متحد) قرار میدهند و به عوض:

$$a \rightleftarrows \overline{r_n \cdots r_0}$$

مینویسند :

$$a = \overline{r_n \cdots r_0}$$

۵ ـ نسبت ترتیب در صورت‌بندی:

دو عدد صورت‌بندی شده در مبنای b را در نظر میگیریم :

$$a = \overline{r_n \cdots r_0} \qquad \text{و} \qquad a' = \overline{r'_m \cdots r'_0}$$

حالت اول : $m < n$. تعداد رقمهای a' کمتر از مال a است.

داریم :

$$m < n \Rightarrow b^m < b^n \Rightarrow b^{m+1} \leqslant b^n$$

از طرف دیگر چون $n + ۱$ تعداد رقمهای a است :

$$b^n \leqslant a < b^{n+1}$$

و بهمین ترتیب $m + ۱$ تعداد رقمهای a' است :

$$b^m \leqslant a' < b^{m+1}$$

در نتیجه داریم :

$$a' < b^{m+1} < b^n \leqslant a$$

از آنجا :

$$a' < a$$

و بطور خلاصه :

$$m < n \Rightarrow a' < a$$

مثال ــ $a = ۷۸۰۵$ و $a' = ۹۲۶$ (در دستگاه اعشاری) $n + ۱ = ۴$ و $m + ۱ = ۳$. پس :

$$۴ > ۳ \Rightarrow a > a'$$

حالت دوم : $n = m$ (a و a' دارای تعداد رقمهای متساویند).

$$a = \overline{r_n \cdots r_\circ} \qquad\qquad a' = \overline{r'_n \cdots r'_\circ}$$

α) فرض میکنیم $r_n > r'_n$

بدیهی است که :

$$a \geqslant r_n b^n \tag{۱}$$

(فقط جمله اول بسط a را نگاه داشتیم)

از طرف دیگر داریم :

$$a' = r'_n b^n + c'$$

با $c' < b^n$ چونکه c' حداکثر دارای n رقم است. پس :

$$a' < (r'_n + ۱)b^n \tag{۲}$$

پس داریم :

$$r_n > r'_n \Rightarrow r_n \geqslant r'_n + ۱ \Rightarrow r_n b^n \geqslant (r'_n + ۱)b^n$$

از مقایسه (۱) و (۲) داریم :

$$a \geqslant r_n b^n \geqslant (r'_n + ۱)\, b^n > a'$$

پس :

$$r_n > r'_n \quad \Rightarrow \quad a > a'$$

مثال : $a = ۸۷۰۲$ و $a' = ۵۹۷۸$

اصلی‌های ارقام a و a' برابر چهاراند. اولین رقم سمت چپ در یکی ۸ و در دیگری ۵ است .

$$۸ > ۵ \quad \Rightarrow \quad a > a'$$

β) فرض کنیم صورت‌بندی‌های a و a' با شروع از سمت چپ تا یک اندیس p دارای رقمهای هم مرتبه برابر باشند :

$$r_n = r'_n,\ r_{n-۱} = r'_{n-۱},\ \cdots,\ r_{p+۱} = r'_{p+۱},\ r_p > r'_p$$

فرض کنیم ،

$$d = r_n b^n + r_{n-۱} b^{n-۱} + \cdots + r_{p+۱} b^{p+۱}$$

در این صورت داریم :

$$a - d = \overline{r_p \cdots r_۰}$$

$$a' - d = \overline{r'_p \cdots r'_۰}$$

بنا به حالت قبل:

$$r_p > r'_p \quad \Rightarrow \quad a - d > a' - d \quad \Rightarrow \quad a > a'$$

مثال : $a = ۲۸۶۰۵$ و $a' = ۲۸۳۹۷$

a و a' دارای تعداد ارقام متساویند، رقمهای هم مرتبه سمت چپ را آزمایش میکنیم؛ این رقمها در دو مرتبه اول سمت چپ برابرند، در مرتبه سوم : $۳ < ۶$ پس : $a > a'$

قاعده ـ اولاً اگر دو صورت‌بندی دارای اصلی ارقام برابر نباشند در همان ترتیب اصلیها قرار دارند. ثانیاً اگر دو صورت‌بندی دارای اصلیهای ارقام متساوی باشند در ترتیبی قرار دارندکه اولین رقم‌های هم مرتبه متمایز آنها قرار دارد.

تبصره ۱ــ قاعده‌ای که برای دو صورت‌بندی دارای تعداد ارقام متساوی بیان کردیم «ترتیب لغتی» نامیده میشود.

زیرا در یک کتاب لغت دو کلمه طبق ترتیب «ثانیاً» مرتب شده‌اند، ارقام با حروف «کلکسیون مرتب» که «الفبا» نامیده میشود جایگزین شده‌اند.

فصل پنجم

مضربهای مشترك
مقسوم علیه های مشترك
اعداد اول

در تمام این فصل مجموعه N^* اعداد طبیعی سوای صفر را در نظر میگیریم.

مضربهای مشترك

۱ـ مجموعه مضربهای $a \in N^*$، یعنی حاصل ضربهای a در اعداد N^* را با :

$$\mathcal{M}(a) = \{a, ۲a, ۳a, \cdots, na, \cdots\}$$

نمایش میدهیم .

تعریف - اگر دو عدد طبیعی a و b را داشته باشیم، هر عدد x که در عین حال هم به $\mathcal{M}(a)$ و هم به $\mathcal{M}(b)$ تعلق داشته باشد «مضرب مشترک a و b» نامیده میشود.

$$(x \in \mathcal{M}(a) \quad \text{و} \quad x \in \mathcal{M}(b)) \iff x \in \mathcal{M}(a) \cap \mathcal{M}(b)$$

مجموعه مضربهای مشترک a و b را بصورت زیر مینویسیم :

$$\mathcal{M}(a, b) = \mathcal{M}(a) \cap \mathcal{M}(b)$$

مثال :

$$\mathcal{M}(۱۲) = \{۱۲, ۲۴, ۳۶, ۴۸, ۶۰, ۷۲, \cdots\}$$

$$\mathcal{M}(۱۸) = \{۱۸, ۳۶, ۵۴, ۷۲, ۹۰, ۱۰۸, \cdots\}$$

$$\mathcal{M}(۱۲, ۱۸) = \{۳۶, ۷۲, \cdots\}$$

تبصره ۱ــ فصل مشترك جا بجا پذیر است. پس:

$$\mathcal{M}(a, b) = \mathcal{M}(b, a)$$

تبصره ۲ــ بدیهی است هر مضرب حاصل‌ضرب ab مضرب a و b است. پس :

$$\mathcal{M}(ab) = \mathcal{M}(a, b)$$

در نتیجه $\mathcal{M}(a, b)$ مانند $\mathcal{M}(ab)$ نامتناهی است.

کوچکترین مضرب مشترك

$\mathcal{M}(a, b)$ یک بخش غیر تهی از N است و دارای یک کوچکترین جزء است. (II، فصل ۳، ۴) که «کوچکترین مضرب مشترک a و b» نامیده میشود و آنرا بصورت $\mu(a, b)$ مینویسیم.

تبصره ــ کوچکترین جزء هر بخش A از N بصورت $\min A$ نوشته میشود بدین ترتیب داریم :

$$\mu(a, b) = \min \mathcal{M}(a, b)$$

قانون تشکیل ك. م. م.

تعریف ــ بهر زوج مرتب a و b دو عدد از N^* عدد $\mu(a, b)$ از N^* را با :

$$\mu(a, b) = \min \mathcal{M}(a, b)$$

همراه میکنیم. بدین ترتیب یک قانون ترکیب در همه جای N^* معین میشود که قانون تشکیل «ک. م. م.» نامیده میشود.

جابجاپذیری

میدانیم :

$$\mathcal{M}(a, b) = \mathcal{M}(b, a)$$

از آنجا :

$$\mu(a, b) = \mu(b, a)$$

قانون جابجا پذیر است.

جزء خنثی

ملاحظه کنیم که $\mathcal{M}(۱) = N^*$ بنابراین هرچه باشد $a \in N^*$ داریم :

$$\mathcal{M}(۱, a) = N^* \cap \mathcal{M}(a) = \mathcal{M}(a)$$

تمامی مجموعه N^* جزء خنثای فصل مشترک است. پس :

$$\mu(۱, a) = \min \mathcal{M}(a) = a$$

جزء خنثی ۱ است. میدانیم که یکتا است (I، فصل ۲، ۳)

قضیهٔ اصلی :

هرگاه a و b دوعدد و μ ک. م. م. a و b باشد ثابت میکنیم :

$$\mathcal{M}(a, b) = \mathcal{M}(\mu)$$

۱) چون μ مضرب a و b است هر مضرب μ مضرب a و b نیز هست. پس:

$$\mathcal{M}(\mu) \subset \mathcal{M}(a, b) \qquad (۱)$$

۲) حال ثابت میکنیم که هر عدد x مضرب a و b مضرب μ است:

$$x \in \mathcal{M}(a, b) \quad \Rightarrow \quad x \in \mathcal{M}(\mu)$$

بدیهی است که $\mu \leqslant x$ زیرا :

$$\mu = \min \mathcal{M}(a, b)$$

تقسیم اقلیدسی x بر μ را انجام میدهیم، خارج قسمت اقلیدسی q مخالف صفر است:

$$x = \mu q + r \qquad r < \mu$$

کافی است ثابت کنیم که $r = ०$ است.

ثابت میکنیم که فرض $r \neq ०$ به تناقض بر میخورد. زیرا :

$$\mu \in \mathcal{M}(a, b) \quad \Rightarrow \quad \mu q \in \mathcal{M}(a, b)$$

($q \neq ०$) بنابراین :

$$(x \in \mathcal{M}(a, b) \quad \text{و} \quad \mu q \in \mathcal{M}(a, b)) \quad \Rightarrow \quad (x - \mu q) \in \mathcal{M}(a, b)$$

(فرض کردیم که $x - \mu q = r \neq ०$) پس :

$$r \in \mathcal{M}(a, b)$$

ولی $\mu > r$ پس در $\mathcal{M}(a, b)$ یک جزء r اکیداً کوچکتر از :

$$\mu = \min \mathcal{M}(a, b)$$

وجود دارد و این یک تناقض است.

پس داریم $r = ०$ و بنابراین $x \in \mathcal{M}(\mu)$ از آنجا :

$$\mathcal{M}(\mu) \supset \mathcal{M}(a, b) \qquad (۲)$$

با مقایسه (۱) و (۲) بالاخره نتیجه میشود :

$$\mathcal{M}(a, b) = \mathcal{M}(\mu)$$

قضیهٔ ۱ ـ مجموعه مضربهای مشترک دو عدد با مجموعه مضربهای ک. م. م. آنها منطبق‌است.

توزیع پذیری ضرب بازاء تشکیل ک. م. م.

مسئله زیر را حل کنیم :

با معلوم بودن ک. م. م. اعداد a و b،

$$\mu(a, b)$$

مطلوبست تعیین ک. م. م. اعداد ka و kb،

$$\mu(ka, kb)$$

k عدد معلومی در N^* است.

هرگاه داشته باشیم :

$$\mathcal{M}(a) = \{a, ۲a, ۳a, \cdots, na, \cdots\}$$

مجموعه حاصلضربهای اعداد $\mathcal{M}(a)$ را در k با $k\mathcal{M}(a)$ نمایش میدهیم :

$$k\mathcal{M}(a) = \{ka, ۲ka, ۳ka, \cdots, nka, \cdots\}$$

بدیهی است که :

$$k\mathcal{M}(a) = \mathcal{M}(ka)$$

بهمین ترتیب :

$$k\mathcal{M}(b) = \mathcal{M}(kb)$$

پس اگر جمیع اجزاء :

$$\mathcal{M}(a\} \cap \mathcal{M}(b)$$

را در k ضرب کنیم، اجزاء :

$$\mathcal{M}(ka) \cap \mathcal{M}(kb)$$

بدست میآید یعنی :

$$k\mathcal{M}(a, b) = \mathcal{M}(ka, kb)$$

بخصوص :

$$k \cdot \min \mathcal{M}(a, b) = \min \mathcal{M}(ka, kb)$$

از آنجا :

$$k\mu(a, b) = \mu(ka, kb)$$

$\boxed{P_۱}$ ضرب، بازاء تشکیل ک. م. م. توزیع پذیر است.

۲ـ مضربهای مشترک چند عدد

کافی است که به حالت سه عدد طبیعی a, b, c اکتفا کنیم.

حالت یک اصلی به تعداد بیشتر با استدلال بازگشتی روی این اصل نتیجه میشود.

تعریف- هرگاه سه عدد طبیعی a و b و c را داشته باشیم هر عدد x که در عین حال به $\mathcal{M}(a)$ و $\mathcal{M}(b)$ و $\mathcal{M}(c)$ تعلق داشته باشد «مضرب مشترک a و b و c» نامیده میشود.

$$(x \in \mathcal{M}(a) \quad \text{و} \quad x \in \mathcal{M}(b) \quad \text{و} \quad x \in \mathcal{M}(c))$$
$$\Longleftrightarrow x \in [\mathcal{M}(a) \cap \mathcal{M}(b) \cap \mathcal{M}(c)].$$

یادآور شویم که فصل مشترک در عین حال جابجا پذیر و شرکت پذیر است. پس، این فصل مشترک را با $\mathcal{M}(a, b, c)$ نمایش بدهیم که مستقل از ترتیب a, b, c است و این مجموعه مضربهای مشترک a, b, c است.

کوچکترین مضرب مشترک a, b, c

بدیهی است که $\mathcal{M}(a, b, c)$ شامل abc و جمیع مضربهای abc است. بنابراین نامتناهی است. چون این یک بخش غیر تهی از N^* است دارای یک کوچکترین جزء است که «کوچکترین مضرب مشترک a, b, c» نامیده میشود. مینویسیم :

$$\mu(a, b, c) = \min \mathcal{M}(a, b, c)$$

شرکت‌پذیری قانون تشکیل ک. م. م.

هرگاه a, b, c سه عدد غیر مشخص N^* باشند. مینویسیم :

$$\mu_1 = \mu(a, b) \quad \text{و} \quad \mu_2 = \mu(b, c)$$

ثابت میکنیم

$$\mu(\mu_1, c) = \mu(a, \mu_2)$$

بنا به قضیهٔ ۱ :

$$\mathcal{M}(a) \cap \mathcal{M}(b) = \mathcal{M}(\mu_1)$$

بنابراین :

$$\mathcal{M}(a, b, c) = \mathcal{M}(\mu_1, c)$$

باز هم بنا به قضیهٔ ۱ :

$$\mathcal{M}(b) \cap \mathcal{M}(c) = \mathcal{M}(\mu_2)$$

بنابراین :

$$\mathcal{M}(a, b, c) = \mathcal{M}(a, \mu_2)$$

پس داریم :

$$\mathcal{M}(a, b, c) = \mathcal{M}(\mu_1, c) = \mathcal{M}(a, \mu_2) \qquad (۳)$$

همانی این مجموعه‌ها تساوی کوچکترین جزء آنها را ایجاب میکند.

$$\mu(a, b, c) = \mu(\mu_1, c) = \mu(a, \mu_2) \qquad (۴)$$

$\boxed{P_2}$ تشکیل ک. م. م. شرکت پذیر است.

تبصره ۱ــ از (۳) و (۴) نتیجه میشود :

$$\mathcal{M}(a, b, c) = \mathcal{M}(\mu_1, c) = \mathcal{M}(\mu)$$

μ کوچکترین مضرب مشترک c, b, a است. پس :

$\boxed{P_3}$ مجموعه مضربهای‌مشترک چند عدد برمجموعه مضربهای ک. م. م.آنها منطبق است.

تبصره ۲ــ بنابه خاصیتهای قبل میتوان گفت :

قضیهٔ ۲ ـ قانون تشکیل ک. م. م. یک بنیان نیم گروه جابجا پذیری با جزء خنثای ۱ را در N^* معین میکند. هیچ عدد متمایز از ۱ در این قانون دارای قرینه نیست زیرا :

$$\mu(a, b) = 1 \quad \Rightarrow \quad a = b = 1$$

مقسوم علیه‌های مشترک

۳ـ مقسوم علیه‌های مشترک دو عدد.

هرگاه $a \in N^*$ باشد مجموعه مقسوم علیه‌های a را با $\mathcal{D}(a)$ نمایش میدهیم :

$$x \mid a \iff x \in \mathcal{D}(a)$$

میدانیم که در N^* :

$$x \mid a \Rightarrow x \leqslant a$$

پس، $\mathcal{D}(a)$ دارای بزرگترین جزء a است و بنابراین متناهی است.

تعریف ـ هرگاه a و b دو عدد طبیعی باشند هر عدد x که در عین حال به $\mathcal{D}(a)$ و $\mathcal{D}(b)$ تعلق داشته باشد «مقسوم علیه مشترک b, a» نامیده میشود.

$$(x \in \mathcal{D}(a) \quad \text{و} \quad x \in \mathcal{D}(b)) \iff x \in \mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b)$$

مجموعه مقسوم علیه‌های مشترک b, a نوشته میشود :

$$\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b)$$

چند مثال ــ

(۱)
$$\mathcal{D}(۱۲) = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۱۲\}$$
$$\mathcal{D}(۱۵) = \{۱, ۳, ۵, ۱۵\}$$

پس:

$$\mathcal{D}(۱۲, ۱۵) = \{۱, ۳\}$$

(۲)
$$\mathcal{D}(۲۰) = \{۱, ۲, ۴, ۵, ۱۰, ۲۰\}$$
$$\mathcal{D}(۳۳) = \{۱, ۳, ۱۱, ۳۳\}$$

پس

$$\mathcal{D}(۲۰, ۳۳) = \{۱\}$$

اعداد نسبت بهم اول

تعریفــ دو عدد a و b نسبت بهم اولند اگر:

$$\mathcal{D}(a, b) = \{۱\}$$

در مثال‌های قبل اعداد ۱۲ و ۱۵ نسبت بهم اول نیستند و اعداد ۲۰ و ۳۳ نسبت بهم اولند.

تبصره ۱ــ فصل مشترک جابجا پذیر است، داریم:

$$\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(b, a)$$

تبصره ۲ــ $\mathcal{D}(a)$, $\mathcal{D}(b)$ متناهی هستند و فصل مشترک آنها $\mathcal{D}(a, b)$ نیز متناهی است.

بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک

$\mathcal{D}(a, b)$ یک بخش متناهی از N^* است و تهی نیست زیرا حداقل شامل واحد است پس دارای یک بزرگترین جزء است (II، فصل ۲، ۴) که «بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک b, a» نامیده میشود و آنرا با:

$$\delta(a, b)$$

نمایش میدهیم.

تبصره ــ بزرگترین جزء هریک بخش A از N بصورت: $max\ A$ نوشته میشود و بدین

ترتیب داریم:

$$\delta(a, b) = \max \mathcal{D}(a, b)$$

قانون تشکیل ب. م. ع. م.

تعریفـ بهر زوج مرتب a, b دو عدد از N^* عدد $\delta(a, b)$ از N^* را با:

$$\delta(a, b) = \max \mathcal{D}(a, b)$$

همراه میکنیم.

بدین ترتیب یک قانون ترکیب در N^* معین میشود که قانون «تشکیل ب. م. ع. م» نامیده میشود.

جابجاپذیری

میدانیم که:

$$\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(b, a)$$

پس:

$$\delta(a, b) = \delta(b, a)$$

قانون جابجاپذیر است.

قانون تشکیل ب. م. ع. م. دارای جزء خنثی در N^* نیست.

ثابت کنیم که در N^* عددی مانند e وجود ندارد بقسمیکه:

$$\delta(a, e) = a$$

باشد (هرچه باشد $a \in N^*$)

در حقیقت هم هرچه باشد $a \in N^*$ میبایستی داشته باشیم:

$$\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(e) = \mathcal{D}(a)$$

ولی جزء خنثای فصل مشترک مجموعه $P(N^*)$ بخشهای N^* خود N^* است (I، فصل ۲، ۳) و عددی مانند $e \in N^*$ وجود ندارد بقسمیکه:

$$\mathcal{D}(e) = N^*$$

چونکه $\mathcal{D}(e)$ متناهی است.

تبصره ــ میدانیم که در N (با بودن صفر) هر عدد x صفر را میشمارد پس در N:

$$\mathscr{D}(\circ) = N$$

و $\mathscr{D}(\circ)$ یک جزء خنثی برای فصل مشترک در $P(N)$ است.

قضیهٔ اصلی

هرگاه a و b دو عدد و δ ب. م. ع. م. آنها باشد. ثابت میکنیم:

$$\mathscr{D}(a, b) = \mathscr{D}(\delta)$$

۱) بدیهی است که هر مقسوم‌علیه δ مقسوم‌علیه a و مقسوم‌علیه b است چونکه δ اعداد a و b را میشمارد. پس داریم:

$$\mathscr{D}(\delta) \in \mathscr{D}(a, b) \qquad (۵)$$

۲) اکنون ثابت میکنیم که هر مقسوم‌علیه مشترک x از a و b مقسوم‌علیه δ است. فرض کنیم $d_۱, d_۲, \ldots, d_n$ مقسوم‌علیه‌های مشترک a و b باشند:

$$\mathscr{D}(a, b) = \{d_۱, d_۲, \cdots d_n\}$$

کوچکترین مضرب مشترک n عدد $d_۱, d_۲, \ldots, d_n$ را در نظر میگیریم:

$$\mu = \mu(d_۱, d_۲, \cdots, d_n)$$

بدیهی است که اعداد a و b مضربهای مشترک این n عدد هستند چونکه‌آنها بر هریک از این n عدد بخش‌پذیرند پس a و b مضرب‌های ک. م. م. آنها μ میباشند $(P_۳)$.

$$a \in \mathscr{M}(\mu) \qquad \text{و} \qquad b \in \mathscr{M}(\mu)$$

و این بدان معنی است که:

$$\mu \in \mathscr{D}(a) \qquad \text{و} \qquad \mu \in \mathscr{D}(b)$$

بنابراین:

$$\mu \in \mathscr{D}(a, b)$$

کوچکترین مضرب مشترک μ مجموعه اعداد $\{d_۱, d_۲, \ldots, d_n\}$ به این مجموعه تعلق دارد و بنابراین بزرگترین آنها است:

$$\mu = \max \mathscr{D}(a, b)$$

یعنی:

$$\mu = \delta$$

چون:

$$d \in \mathscr{D}(a, b) \quad \Rightarrow \quad d \mid \mu$$

(چون μ مضرب جمیع dها است).

خواهیم داشت:

$$d \in \mathcal{D}(a, b) \quad \Rightarrow \quad d \mid \delta$$

یعنی:

$$\mathcal{D}(a, b) \subset \mathcal{D}(\delta) \tag{۶}$$

با مقایسه (۵) و (۶) نتیجه میشود:

$$\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(\delta)$$

قضیهٔ ۳ـ مجموعه مقسوم‌علیه‌های مشترک دو عدد با مجموعه مقسوم‌علیه‌های ب. م. ع. م آنها منطبق است.

توزیع‌پذیری ضرب نسبت قانون تشکیل ب. م. ع. م.

مسئله زیر را بررسی میکنیم:

با معلوم بودن ب. م. ع. م. اعداد a و b:

$$\delta(a, b)$$

مطلوب است پیدا کردن ب. م. ع. م. اعداد ka و kb:

$$\delta(ka, kb)$$

k عدد معلومی در N^* است.

فرض کنیم $\delta = \delta(a, b)$ و $\delta' = \delta(ka, kb)$ داریم:

$$\delta \mid a \quad \Rightarrow \quad k\delta \mid ka$$

$$\delta \mid b \quad \Rightarrow \quad k\delta \mid kb$$

پس $k\delta$ مقسوم‌علیه مشترک ka و kb است، بنا بـه قضیهٔ ۲، $k\delta$ مقسوم‌علیهی از ب. م. ع. م. اعداد ka و kb است:

$$k\delta \mid \delta'$$

پس یک عدد $q \in N^*$ وجود دارد بقسمیکه:

$$\delta' = k\delta q \tag{۷}$$

در این صورت داریم:

$$\delta' \mid ka \quad \Rightarrow \quad k\delta q \mid ka \quad \Rightarrow \quad \delta q \mid a$$

با جایگزین کردن a با b:

$$\delta q \mid b$$

پس δq یک مقسوم‌علیه مشترک a و b است. چون δ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و

b است پس الزاماً $q = ۱$ است و بنا به (۷):

$$\delta' = k\delta$$

و بنابراین

$$\delta(ka, kb) = k\delta(a, b)$$

$\boxed{P_۴}$ ضرب بازاء قانون تشکیل ب. م. ع. م. توزیع‌پذیر است.

۴. مقسوم‌علیه‌های مشترک چند عدد

در اینجا نیز به حالت سه عدد طبیعی a و b و c اکتفا میکنیم:

تعریف- هرگاه a و b و c سه عدد طبیعی باشند، هر عدد x که در عین حال به $\mathcal{D}(a)$ و $\mathcal{D}(b)$ و $\mathcal{D}(c)$ تعلق داشته باشد «مقسوم‌علیه مشترک a و b و c» نامیده میشود.

$$(x \in \mathcal{D}(a) \quad \text{و} \quad x \in \mathcal{D}(b) \quad \text{و} \quad x \in \mathcal{D}(c))$$
$$\Longleftrightarrow \quad x \in [\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}(c)]$$

چون فصل مشترک در عین حال جابجاپذیر و شرکت‌پذیر است، فصل مشترک قبلی را با $\mathcal{D}(a, b, c)$ نشان میدهیم که مستقل از ترتیب a و b و c است و این، مجموعه مقسوم‌علیه‌های مشترک a و b و c است.

بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b و c

$\mathcal{D}(a, b, c)$ فصل مشترک سه‌مجموعه $\mathcal{D}(a)$ و $\mathcal{D}(b)$ و $D(c)$ بوده و متناهی است و بعلاوه $\mathcal{D}(a, b, c)$ تهی نیست زیرا حداقل شامل واحد است بنابراین دارای یک بزرگترین جزء است که «بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b و c» نامیده میشود و مینویسیم:

$$\delta(a, b, c) = \max \mathcal{D}(a, b, c)$$

شرکت‌پذیری تشکیل ب. م. ع. م.

مینویسیم:

$$\delta_۱ = \delta(a, b) \quad \text{و} \quad \delta_۲ = \delta(b, c)$$

بنا به قضیهٔ ۳:

$$\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(\delta_۱)$$

در نتیجه:

$$\mathcal{D}(a, b, c) = \mathcal{D}(\delta_۱, c)$$

باز هم بنا به قضیهٔ ۳:

$$\mathcal{D}(b) \cap \mathcal{D}(c) = \mathcal{D}(\delta_۲)$$

از آنجا:

$$\mathcal{D}(a, b, c) = \mathcal{D}(a, \delta_۲)$$

پس داریم:

$$\mathcal{D}(a, b, c) = \mathcal{D}(\delta_۱, c) = \mathcal{D}(a, \delta_۲) \qquad (۸)$$

همانی این مجموعه‌ها تساوی بزرگترین جزء آنها را ایجاب می‌کند:

$$\delta(a, b, c) = \delta(\delta_۱, c) = \delta(a, \delta_۲) \qquad (۹)$$

$\boxed{P_۵}$ تشکیل ب. م. ع. م. شرکت‌پذیر است.

تبصره ۱ــ از روابط (۸) و (۹) نتیجه میشود:

$$\mathcal{D}(a, b, c) = \mathcal{D}(\delta_۱, c) = \mathcal{D}(\delta)$$

δ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b و c است.

$\boxed{P_۶}$ مجموعه بزرگترین مقسوم‌علیه‌های مشترک چند عدد بر مجموعه مقسوم‌علیه‌های ب. م. ع. م. آنها منطبق است.

تبصره ۲ــ بنا به خاصیت‌های قبلی میتوان گفت:

قضیهٔ ۴ــ قانون تشکیل ب. م. ع. م یک بنیان نیم گروه جابجا پذیر را در N^* معین مینماید.

این نیمگروه دارای جزء خنثی نیست.

و بالاخره قضیهٔ بخش پذیری را اثبات میکنیم.

قضیهٔ بخش‌پذیری

اگر عددی حاصل ضرب دوعامل را بشمارد و با یکی از آنها اول باشد دیگری را میشمارد.

اگر a و b دو عدد نسبت بهم اول باشند:

$$\delta(a, b) = ۱$$

با

$$a \mid bc$$

بنا به توزیع‌پذیری حاصل ضرب:

$$\delta(ca, cb) = c$$

ولی $a \mid ac$ (بدیهی است) و $a \mid bc$ (بنا به فرض) پس $a \in \mathcal{D}(ac, bc)$ و این

ایجاب میکند:

$$a \mid \delta\,(ac,\, bc) \qquad \text{(قضیهٔ ۳)}$$

و در نتیجه:

$$a \mid c$$

و قضیه ثابت است.

اعداد اول

۵ـ اعداد اول. خواص.

اعـدادی در N^* وجود دارند کـه جز خودشان و واحد دارای مقسوم‌علیه دیگری نیستند مانند: ... ,۴۷ ,۴۳ ,۴۱ ,۳۷ ,۳۱ ,۲۹ ,۲۳ ,۱۹ ,۱۷ ,۱۳ ,۱۱ ,۷ ,۵ ,۳ ,۲
یک عدد a ـ ی غیر مشخص از این لیست بقسمی است که:

$$\mathcal{D}\,(a) = \{۱,\, a\}$$

چون عدد یک جمیع عددها را میشمارد بدین جهت یک را از تئوری کنار می‌گذارند و مجموعه اعداد طبیعی سوای صفر و یک را با N' نمایش میدهند.

تعریفـ عدد اول عبارت از عدد طبیعی a در N' است بقسمی که:

$$\mathcal{D}\,(a) = \{a\}$$

$\boxed{P_۷}$ هر عدد غیر اول حد اقل دارای یک مقسوم‌علیه اول است.

هرگاه a عدد غیر اول باشد $\mathcal{D}\,(a)$ حد اقل شامل یک جزء متمایز از a است: فرض میکنیم:

$$d = \min \mathcal{D}\,(a)$$

میگوئیم که d اول است، زیرا اگر اول نبود حداقل یک عدد d' وجود میداشت بطوریکه:

$$d' \mid d$$

با $d' \neq d$ و میداشتیم:

$$d' \in \mathcal{D}\,(a)$$

با $d' < \min \mathcal{D}\,(a)$ و این یک تناقض است پس d اول است.

$\boxed{P_۸}$ اگر یک عدد اول حاصل ضرب دو عامل اول را بشمارد مساوی یکی از آنها است.

هرگاه سه عدد اول a و b و c طوری باشند که $a \mid bc$ فرض کنیم $b \neq a$ و ثابت کنیم $c = a$ در این صورت در N^* داریم:

$$\mathscr{D}(a) = \{۱, a\} \qquad \text{و} \qquad \mathscr{D}(b) = \{۱, b\}$$

از آنجا:

$$\mathscr{D}(a \text{ و } b) = \{۱\}$$

«دو عدد اول نسبت بهم اول‌اند»

از آنجا بنا به قضیهٔ بخش‌پذیری نتیجه میشود که:

$$a \mid c$$

و چون c اول است این رابطه جز بازاء $c = a$ صادق نیست.

خاصیت ثابت است.

$\boxed{\mathrm{P}_۹}$ مجموعه p اعداد اول نامتناهی است.

p را متناهی با اصلی n فرض میکنیم.

$$P = \{p_۱, p_۲, \cdots, p_n\}$$

عدد:

$$a = p_۱ p_۲ \cdots p_n + ۱$$

را در نظر میگیریم

بدیهی است که a بزرگتر از بزرگترین همهٔ pها است:

$$a > \max p$$

دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد:

(۱) اگر a اول است داریم $a \in p$ و $a > \max p$، تناقض

(۲) a غیر اول است، حداقل دارای یک مقسوم‌علیه اول d است.

در این صورت داریم $d \in p$ و در نتیجه d حاصل ضرب $p_۱ p_۲ \cdots p_n$ را میشمارد و چونکه مساوی یکی از این عوامل است.

$$(d \mid a \quad \text{و} \quad d \mid p_۱ p_۲ \cdots p_n) \Rightarrow d \mid ۱ \qquad \text{(تناقض)}$$

هرکدام از این دو حالت به تناقض منجر میگردد.

پس p نمیتواند متناهی باشد. خاصیت $\mathrm{P}_۹$ ثابت است.

۶ـ تجزیه یک عدد به عوامل اول.

میخواهیم استدلال کنیم که هر عدد غیر اول a میتواند بصورت یک حاصل ضرب از

عوامل اول درآید.

$$a = p_1 p_2 \cdots p_n$$

در این صورت میگویند که «a به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه شده است»

وجود تجزیه

عدد غیر اول a حد اقل دارای یک مقسوم‌علیه اول p_1 است.

$$a = p_1 a_1 \qquad p_1 \in p \qquad a_1 < a$$

اگر $a_1 \in p$ وجود تجزیه ثابت است.

اگر $a_1 \notin p$ حد اقل دارای یک مقسوم‌علیه اول p_2 است:

$$a_1 = p_2 a_2 \qquad p_2 \in p \qquad a_2 < a_1$$

یعنی:

$$a = p_1 p_2 a_2 \qquad p_1, p_2 \in P \qquad a_2 < a_1 < a$$

اگر $a_2 \in P$ وجود تجزیه ثابت است.

اگر $a_2 \notin P$ مانند قبل ادامه میدهیم.

در مرحله بردیف k میرسیم به:

$$a = p_1 p_2 \cdots p_k a_k \qquad p_1, p_2, \cdots, p_k \in P$$

با

$$a > a_1 > a_2 > \cdots > P_k \tag{10}$$

رشته (۱۰) اکیداً نزولی است. این بخشی از N است. و چون بتوسط a فرابسته است پس متناهی است.

عددی مانند $n \in N$ وجود دارد که اصلی رشته a_k را نمایش میدهد:

داریم:

$$a_n = p_n \in P$$

زیرا اگر $a_n \notin P$ کار ادامه مییافت و n اصلی a_k نمیشد و این خلاف فرض است بدینترتیب داریم:

$$a = p_1 p_2 \cdots p_n$$

با $p_i \in P$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ وجود تجزیه ثابت است.

یکتائی- فرض کنیم که برای یک عدد a دو تجزیه وجود داشته باشد:

در این صورت داریم:

$$p_{۱}p_{۲}\cdots p_n = p'_{۱}p'_{۲}\cdots p'_m \qquad (۱۱)$$

چون $p_{۱}$ طرف اول را میشمارد باید طرف دوم را بشمارد. بنا به خاصیت $(P_{۸})$ مساوی یکی از p'ها باید باشد.

فرض کنیم $p_{۱} = p'_{۱}$ (در صورت نیاز نمره‌گذاری طرف دوم را عوض میکنیم) طرفین (۱۱) را بر $p_{۱}$ تقسیم میکنیم:

$$p_{۲}\cdots p_n = p'_{۲}\cdots p'_m$$

همین استدلال را از سر میگیریم. بدین ترتیب به همان کردن n عامل اول طرف اول با n عامل اول طرف دوم میرسیم (با فرض $n \leqslant m$).

با شروع از طرف دوم (۱۱) و با از سر گرفتن تمامی استدلال به همان کردن m عامل اول طرف دوم با m عامل طرف اول میرسیم (با فرض $m \leqslant n$)

از آنجا نتیجه میشود $n = m$ و یکتائی تجزیه ثابت است.

قضیهٔ ۵- هرعدد غیر اول حاصل‌ضرب عوامل اول است و تجزیه با ترتیب تقریب یکتا است.

تبصره- با گروه‌بندی جمیع عاملهای مساوی p بصورت p^{α} (α تعداد این عاملها است) و تکرار این عمل با سایل عاملها بالاخره نتیجه:

$$a = p^{\alpha}q^{\beta}\cdots r^{\lambda}$$

حاصل میشود.

$\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ تعداد عاملهای $p, q \ldots r$ بترتیب میباشد.

فصل ششم

هم‌نهشتی

۱ـ تعریف و خواص

تعریفـ هرگاه n عدد طبیعی مفروض مخالف صفر باشد میگویند که «دو عـدد a و b هم‌نهشت در مدول n» هستند. اگر تقسیم اقلیدسی a بر n همان باقیمانده را بدهد که تقسیم اقلیدسی b بر n می‌دهد و مینویسند:

$$a \equiv b \pmod{n}$$

مثال: $n = ۵$

باقیمانده تقسیم ۱۲ بر ۵ برابر ۲ است

باقیمانده تقسیم ۲۷ بر ۵ برابر ۲ است

پس:

$$۱۲ \equiv ۲۷ \pmod{۵}$$

خواص:

$\boxed{P_1}$ نسبت هم‌نهشتی یک نسبت هم‌ارزی است.

زیرا بدیهی است که خودپذیر است:

$$a \equiv a \pmod{n}$$

و متقارن است:

$$(a \equiv b \pmod{n}) \Rightarrow (b \equiv a \pmod{n})$$

همچنین سرایت‌پذیر است: اگر a و b در تقسیم بر n باقیمانده r بدهند و اگـر b و c نیز در تقسیم بر n باقیمانده r' بدهند در این صورت $r = r'$ (بـاقیمانده تقسیم b بر n) و در

نتیجه:

$$(a \equiv b \quad \text{و} \quad b \equiv c) \Rightarrow a \equiv c \qquad (\text{mod } n)$$

$\boxed{P_2}$ برای اینکه دو عدد هم‌نهشت در مدول n باشند لازم و کافی است که تفاضل آنها مضربی از n باشد.

۱) اثبات کنیم:

$$(a \geqslant b) \qquad (a \equiv b \quad (\text{mod } n)) \Rightarrow a - b \in \mathcal{M}_n$$

a و b را بر n تقسیم کنیم:

$$\begin{matrix} a = nq + r \\ b = nq' + r \end{matrix} \quad . \; r < n$$

از آنجا اگر $a \geqslant b$ باشد:

$$a - b = n(q - q') \quad \text{و} \quad a - b \in \mathcal{M}_n$$

۲) بعکس اثبات کنیم:

$$(a - b) \in \mathcal{M}_n \Rightarrow (a \equiv b \quad (\text{mod } n))$$

زیرا:

$$(a - b) \in \mathcal{M}_n \Rightarrow (\exists k; \quad a - b = nk)$$

b را بر n تقسیم کنیم:

$$b = nq + r \quad \text{و} \quad r < n$$

از آنجا نتیجه میشود:

$$a = b + nk = n(k + q) + r \quad \text{و} \quad r < n$$

بنابراین باقیماندهٔ تقسیم a بر n نیز r است. پس:

$$a \equiv b \qquad (\text{mod } n)$$

۲ـ طبقات مانده‌ای مدولو n

نسبت هم نهشتی یک نسبت هم‌ارزی است و در N یک افراز به طبقات هم‌ارزی را انجام میدهد (I، فصل ۱، ۶)

مجموعه اعداد هم نهشت بیک عدد a یک طبقه هم‌ارزی به نمایندگی a تشکیل میدهند که با $\bar{a}$ نمایش میدهیم:

$$\bar{a} = \{r, r + n, r + 2n, \cdots, r + kn, \cdots\}$$

که r باقیمانده تقسیم اقلیدسی a بر n است.

ولی در تقسیم اقلیدسی یک عدد a بر n، n باقیمانده امکان وجود دارد. این باقیمانده‌ها مجموعه زیر را تشکیل میدهند.

$$[۰, n - ۱] = \{۰, ۱, ۲, ۳, \cdots, n - ۱\}$$

بدین ترتیب به تعداد متناهی n طبقه ماندهٔ مدولو n وجود دارد:

$$\bar{۰} = \{۰, n, ۲n, \cdots, kn, \cdots\}$$

$$\bar{۱} = \{۱, ۱ + n, ۱ + ۲n, \cdots, ۱ + kn, \cdots\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(\overline{n - ۱}\} = \{n - ۱, (n - ۱) + n, (n - ۱) + ۲n, \cdots, (n - ۱) + kn, \cdots\}$$

مثال ۱ـ طبقات مانده‌ای مدولو ۲

دو باقیمانده امکان دارد: ۰ و ۱. پس دوطبقه مدولو ۲ وجود دارد.

طبقه عددهای زوج $= \bar{۰} = \{۰, ۲, ۴, \cdots, ۲k, \cdots\}$

طبقه عددهای فرد $= \bar{۱} = \{۱, ۳, ۵, \cdots, ۲k + ۱, \cdots\}$

و:

$$N = \bar{۰} \cup \bar{۱}$$

مثال ۲ـ طبقات مانده‌ای مدولو ۵

۵ باقیمانده امکان دارد: {۰، ۱، ۲، ۳، ۴} پس ۵ طبقه مدولو ۵ وجود دارد:

$$\bar{۰} = \{۰, ۵, ۱۰, \cdots, ۵k, \cdots\}$$

$$\bar{۱} = \{۱, ۶, ۱۱, \cdots, ۵k + ۱, \cdots\}$$

$$\bar{۲} = \{۲, ۷, ۱۲, \cdots, ۵k + ۲, \cdots\}$$

$$\bar{۳} = \{۳, ۸, ۱۳, \cdots, ۵k + ۳, \cdots\}$$

$$\bar{۴} = \{۴, ۹, ۱۴, \cdots, ۵k + ۴, \cdots\}$$

و:

$$N = \bar{۰} \cup \bar{۱} \cup \bar{۲} \cup \bar{۳} \cup \bar{۴}$$

از اجتماع جمیع این طبقات مجموعه N اعداد طبیعی بدست میآید.

۳ـ عملیات روی هم‌نهشت‌ها

جمع

$$\left(\begin{matrix} a \equiv a' \\ b \equiv b' \end{matrix} \quad (\text{mod } n)\right) \Rightarrow \quad (a + b \equiv a' + b' \quad (\text{mod } n)) \quad \boxed{P_۱}$$

۱) ابتدا حالت $b = b'$ را طرح کنیم.

بنا به فرض داریم:

$$a - a' \in \mathcal{M}_n$$

از آنجا:

$$a - a' = (a+b) - (a'+b) \in \mathcal{M}_n$$

و:

$$a + b \equiv a' + b \pmod{n}$$

۲) نتیجه را دوبار مورد استفاده قرار دهیم:

$$(a \equiv a' \pmod{n}) \Rightarrow (a + b \equiv a' + b \pmod{n})$$

$$(b \equiv b' \pmod{n}) \Rightarrow (a' + b \equiv a' + b' \pmod{n})$$

بنا به سرایت‌پذیری نتیجه میشود:

$$a + b \equiv a' + b' \pmod{n}$$

ضرب

$$\boxed{P_۲} \quad \left(\begin{matrix} a \equiv a' \\ b \equiv b' \end{matrix} \pmod{n}\right) \Rightarrow (ab \equiv a'b' \pmod{n})$$

۱) ابتدا حالت $b \equiv b'$ را طرح کنیم

بنا بفرض داریم:

$$a - a' \in \mathcal{M}_n$$

از آنجا:

$$b(a - a') \in \mathcal{M}_n \quad \text{و} \quad (ba - ba') \in \mathcal{M}_n$$

در نتیجه:

$$ba \equiv ba' \pmod{n}$$

۲) نتیجه را دوبار بکار ببندیم:

$$(a \equiv a' \pmod{n}) \Rightarrow (ab \equiv a'b \pmod{n})$$

$$(b \equiv b' \pmod{n}) \Rightarrow (a'b \equiv a'b' \pmod{n})$$

از آنجا بنا به سرایت‌پذیری:

$$ab \equiv a'b' \pmod{n}$$

نمائی کردن

$\boxed{P_3}$ هرچه باشد $x \in N$

$$(a \equiv b \pmod n) \Rightarrow (a^x \equiv b^x \pmod n)$$

خاصیت بازاء $x = 0$ و $x = 1$ آشکار است. بفرض درست بودن آن بازاء x آنرا بازاء $x + 1$ اثبات میکنیم.

با فرض بازگشتی در عین حال داریم:

$$a \equiv b \pmod n \quad \text{و} \quad a^x \equiv b^x \pmod n$$

بنا به P_2:

$$a^{x+1} \equiv b^{x+1} \pmod n$$

پس خاصیت درست است (هرچه باشد x)

۴ـ جبر طبقات مدولو n

مجموعه طبقات مدولو n را C_n مینامیم. C_n یک مجموعه متناهی دارای n جزء است:

$$C_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \cdots, \overline{n-1}\}$$

میخواهیم در این مجموعه دو قانون ترکیب موسوم به جمع و ضرب معین نمائیم:

جمعـ بدو طبقه $\overline{a}$ و $\overline{b}$ از C_n طبقه‌ای از C_n را که به‌مجموع $\overline{a}$ و $\overline{b}$ موسوم است و با $\overline{a} + \overline{b}$ نمایش داده میشود با:

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b}$$

معین میگردد همراه میکنیم.

میخوانیم: «طبقه a + طبقه b مساوی طبقه $a + b$»

این تعریف مستقل از نماینده‌های منتخب برای طبقات a و b است. زیرا:

$$(\overline{a} = \overline{a'} \quad \text{و} \quad \overline{b} = \overline{b'}) \Rightarrow \left(\overline{a + b} = \overline{a' + b'}\right) \qquad (P_1)$$

خواصـ جمع، جابجاپذیر و شرکت‌پذیر و دارای جزء خنثای $\overline{0}$ است. ثابت میکنیم که هرطبقه C_n دارای یک قرینه بازای جمع است.

زیرا با معلوم بودن $\overline{a}$ معلوم کنیم آیا عددی مانند $\overline{x}$ وجود دارد بقسمیکه:

$$\overline{a} + \overline{x} = \overline{0}$$

فرض کنیم که a ساده‌ترین نمایندهٔ $\bar{a}$ یعنی $n > a$ باشد.
از طرف دیگر میدانیم که $\bar{n} = \bar{0}$ پس باید $\bar{x}$ را طوری معین کرد که:

$$\bar{a} + \bar{x} = \bar{n}$$

یا

$$\overline{a+x} = \bar{n}$$

چون $n > a$ است پس $x \in N$ وجود دارد بطوریکه $a + x = n$ یعنی:

$$x = n - a$$

در حقیقت هم:

$$\bar{a} + \overline{n-a} = \overline{a + (n-a)} = \bar{n} = \bar{0}$$

$\boxed{P_4}$ هرطبقه $\bar{a} \in C_n$ دارای یک قرینه بـازاء جمع است. C_n یک گروه جـابجاپذیری بازاء جمع است.

ضرب- بدو طبقه $\bar{a}$ و $\bar{b}$ از C_n طبقه‌ای از C_n موسوم بـه حاصل ضرب $\bar{a}$ و $\bar{b}$ را که با $\bar{a} \cdot \bar{b}$ نمایش داده میشود و با:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}$$

معین میگردد همراه کنیم.
میخوانیم: «طبقه a ضربدر طبقه b مساوی طبقه ab»
این تعریف مستقل از نماینده‌های منتخب برای طبقات است زیرا:

$$(\bar{a} = \bar{a'} \quad \text{و} \quad \bar{b} = \bar{b'}) \quad \Rightarrow \quad \overline{ab} = \overline{a'b'} \qquad (P_2)$$

خواص- ضرب جابجاپذیر و شرکت پذیر دارای جزء خنثای $\bar{1}$ است. بعلاوه نسبت بـه جمع طبقات توزیع‌پذیر است:

$$\bar{a}\,(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \overline{b+c} \qquad \text{(تعریف جمع)}$$

$$\bar{a} \cdot \overline{b+c} = \overline{a\,(b+c)} \qquad \text{(تعریف ضرب)}$$

$$\overline{a\,(b+c)} = \overline{ab+ac} = \overline{ab} + \overline{ac} \qquad (N \text{ توزیع‌پذیری در})$$

پس میتوانیم بگوئیم:

$\boxed{P_5}$ جمع و ضرب به C_n بنیان حلقه جابجاپذیر به جزء واحد را میبخشد.

جستجوی C_n دارای بنیان هیئت

برای اینکه یک C_n دارای بنیان هیئت باشد، لازم و کافی است که طبقه $\bar{a} \neq 0$ از C_n

دارای یک «معکوس» $\bar{x}$ باشد (قرینه نسبت به ضرب):

$$\bar{a} \cdot \bar{x} = \bar{۱}$$

۱) اگر n اول نباشد معکوس $\bar{x}$ برای هر طبقه $\bar{a} \neq ۰$ وجود ندارد

زیرا:

$$(\bar{a} \cdot \bar{x} = \bar{۱}) \iff (ax \equiv ۱ \pmod{n})$$

یا

$$ax = ۱ + nq$$

اگر n اول نباشد حداقل دارای یک مقسوم‌علیه متمایز از ۱ است. این مقسوم‌علیه را a مینامیم: $a \mid n$. خواهیم داشت:

$$(a \mid ax \quad \text{و} \quad a \mid nq) \Rightarrow a \mid ۱ \qquad \text{(تناقض)}$$

تساوی $\bar{a}\bar{x} = ۱$ محقق نمیتوانـد بشود و طبقه $\bar{a}$ (کـه در آنجا $a \mid n$) دارای قـرینه نیست. پس:

اگر n اول نباشد C_n یک هیئت نیست.

۲) اگر n اول باشد هر طبقه $\bar{a} \neq \bar{۰}$ دارای یک عکس است.

هر طبقه $\bar{a} \neq ۰$ از C_n طرح خواهد شد اگر $a \in [۱, n - ۱]$ اختیار شود. عدد a از ایـن فاصله را اختیار نمائیم و جمیع حاصلضربهای ax را کـه در آنجا x همـان فاصله را میپیماید در نظر بگیریم:

$$\{a, ۲a, ۳a, \cdots, xa, \cdots, (n - ۱)\, a\}$$

تقسیم اقلیدسی xa بر n را انجام دهیم:

ثابت کنیم که هیچ باقیمانده‌ای برابر صفر نیست زیرا اگر یک باقیمانده برابر صفر بود لازم میآمد:

$$xa \equiv ۰ \pmod{n}$$

و n در این صورت xa را میشمارد. چون n عـدد اول است و بـا هر a $(a < n)$ اول است بنا به قضیه بخش‌پذیری $x \mid n$ و این متناقض با:

$$x \in [۱, n - ۱]$$

حال ثابت میکنیم که جمیع باقیمانده‌هـا متمایزنـد. زیرا اگر ax و ax' باقیمانده‌هـای متساوی بدهند لازم میآید:

$$xa \equiv x'a \pmod{n}$$

از آنجا (اگر $x' > x$ باشد):

$$(x'-x)\,a \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ n)$$

و از اینجا بهمان تناقض بالائی میرسیم. پس داریم $x' = x$

پس $n-1$ باقیمانده تقسیم ax بر n اعداد فاصله $[\![1, n-1]\!]$ میباشند.

پس یک عدد x یکتا وجود دارد بطوریکه ax باقیمانده ۱ داشته باشد:

$$\forall\, \bar{a} \in C_n - \{\bar{0}\}; \qquad \exists\, x \in [\![1, n-1]\!]; \qquad ax \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod}\ n)$$

از آنجا:

$$\bar{a} \cdot \bar{x} = \bar{1}$$

$\boxed{P_5}$ برای اینکه C_n یک هیئت باشد لازم وکافی است که n اول باشد.

مثال ۱ـ $n = 5$ در شکل ۱ جدولهای جمع و ضرب طبقات مدولو ۵ نمایش داده شده است:

×	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

شکل ۱

معکوسهای

$\bar{4}$ و $\bar{3}$ و $\bar{2}$ و $\bar{1}$

بترتیب عبارتند از:

$\bar{4}$ و $\bar{2}$ و $\bar{3}$ و $\bar{1}$

پس C_5 یک هیئت است.

مثال ۲ـ $n = 6$ در شکل ۲ جدولهای جمع و ضرب طبقات مدولو ۶ نشان داده شده است. خاطرنشان شود که بعضی طبقات غیر صفر دارای یک حاصل ضرب صفر میباشند.

$\overline{3}\cdot\overline{4}=\overline{0}.$

	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

$\overline{2}\cdot\overline{3}=\overline{0}$

	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$

شکل ۲

C_6 یک حلقه جابجاپذیر با جزء واحد $\overline{1}$ و این یک حوزه تمامیت نیست. اجزاء $\overline{2}$ و $\overline{3}$ و $\overline{4}$ قابل اختصار نیستند.

مثلاً:

از $\overline{2}\cdot\overline{a}=\overline{2}\cdot\overline{b}$ نتیجه $\overline{a}=\overline{b}$ بدست نمیآید.

قسمت سوم

اعداد منطق مثبت

برای جمع، همانطور که برای ضرب، مجموعه N اعداد طبیعی یك نیم گروه جابجاپذیر با جزء خنثی است که در آنجا هرجزئی (سوای صفر برای ضرب) منتظم میباشد.

در این قسمت، مجموعه وسیع‌تر Q^+ ساخته می‌شود که شامل N است : مجموعه اعداد منطق مثبت. ضرب به Q^+ بنیان گروه میبخشد: هر عدد منطق (سوای صفر) دارای یك معکوس است.

بررسی مسئله نمایش رقمی اعداد در یك مبنای b به معین کردن یك گونه مخصوص از اعداد منطقی منجر می‌شود: اعداد $b-$ ای $(b-naire)$: نمایش یك عدد $b-$ ای در مبنای b یك صورت‌بندی منقسم بدو قسمت با یک ممیز است.

بررسی عملیات در مجموعه Q_b^+ اعداد $b-$ ای نشان میدهد که Q_b^+ یك گروه ضربی مثل Q^+ نیست.

ولی رابطه ترتیب کلی در Q^+ القاء شده روی Q_b^+، به این مجموعه آخری یک «بنیان توپولوژیک» میبخشد: اعداد $b-$ ای میتوانند، بقدر دلخواه به هر عدد منطق غیر متعلق به Q_b^+ نزدیک شوند. این تقریبات متوالی به تصور صورت‌بندی نامتناهی یک عدد منطق در مبنای b منجر می‌شود، بقسمیکه هر عدد منطق با شروع از Q_b^+ میتواند بطور توپولوژیک معین گردد: این روش ثمربخش است زیرا در قسمت بعدی، بدان وسیله، تعریف اعداد اصم مطرح خواهد شد.

فصل اول

ساخت مجموعه اعداد منطق مثبت نسبت ترتیب

۱ـ ساخت مجموعه اعداد منطق مثبت

شیئی را در نظر بگیریم که بتواند به b قسمت متساوی تقسیم شود. اگر این شیء را با عدد ۱ نشان بدهیم هرکدام از قسمتها با سمبل $\frac{1}{b}$ نمایش داده خواهد شد که «کسر» نامیده میشود.

اگر a تا از این قسمتها را با هم یکی کنیم یک شیء جدید تشکیل میشود که با سمبل:

$$\frac{a}{b}$$

نمایش داده میشود و آنرا نیز یک «کسر مینامند»

تعریف ـ زوج مرتب a و b دو عدد طبیعی را که دومی مخالف صفر است کسر مینامند.

عدد اول a را صورت مینامند

عدد دوم b را مخرج مینامند

کسر را با علامت :

$$\frac{a}{b}$$

نمایش میدهند.

دراین تعریف a میتواند صفر باشد و حداکثر برابر b است.

شیئی را که با ۱ نشان دادیم مجدداً اختیار کنیم. اگر آنرا به b قسمت مساوی تقسیم و از این قسمتها a تا را اختیار کنیم یک شیء نمایش داده شده با $\frac{a}{b}$ بدست میآید. ولی این شیء را بطرزدیگری میتوان بدست آورد. مثلاً شیء را به mb قسمت مساوی $(m \in N^*)$

تقسیم کنیم؛ هرکدام از قسمتهای قبلی را به m قسمت مساوی تقسیم کنیم و از قسمتهای جدید ma تا اختیار نمائیم بدین ترتیب یک شیئ جدید بدست میآید که با :

$$\frac{ma}{mb}$$

نمایش داده میشود. بدیهی است که این شیئ با آنکه بصورت $\frac{a}{b}$ است برابر میباشد.

میگویند که کسرهای :

$$\frac{a}{b} \quad و \quad \frac{ma}{mb}$$

«هم‌ارز»اند.

ملاحظه شود که حاصل ضربهای $(ma)b$ و $a(mb)$ (صورت هرکدام در مخرج دیگری) برابرنـد.

تعـریف - دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ هم ارزاند اگر :

$$ad = bc$$

مینویسیم :

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$$

اگر مجموعه جمیع کسرها را F بنامیم، بدین ترتیب در F یک نسبت دوتائی معین میشود ثابت میکنیم که این، یک نسبت هم ارزی است زیرا این نسبت :

۱) خود پذیر است:

$$\frac{a}{b} \sim \frac{a}{b} \qquad \text{داریم :} \qquad \forall \frac{a}{b} \in F$$

چونکه $ab = ab$

۲) متقارن است :

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{b} \;\Rightarrow\; \frac{c}{d} \sim \frac{a}{b}$$

چونکه :

$$ad = bc \;\Rightarrow\; cb = ad$$

۳) سرایت‌پذیر است :

$$\left(\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \quad \text{و} \quad \frac{c}{d} \sim \frac{e}{f}\right) \Rightarrow \frac{a}{b} \sim \frac{e}{f}$$

زیرا بنا به فرض:

$$ad = bc \qquad (۱)$$

$$cf = de \qquad (۲)$$

از ضرب طرفین رابطه (۱) در f و طرفین رابطه (۲) در b :

$$adf = bcf$$

$$bcf = bde$$

از آنجا :

$$adf = bde$$

و چون $d \neq ۰$:

$$af = be$$

یعنی :

$$\frac{a}{b} \sim \frac{e}{f}$$

نسبت بررسی شده یک نسبت هم‌ارزی است، و اینهم صفت هم ارز را که به دو کسر موجود در رابطه داده شده است توجیه میکند.

این نسبت یک افراز به طبقات هم ارز (I ، فصل ۱، ۶) را در F تحقق میبخشد. طبقه $\frac{a}{b}$ عبارت از مجموعه جمیع کسرهای هم ارز $\frac{a}{b}$ است. و دو کسر نا هم‌ارز به دو طبقه متمایز تعلق دارند.

ساخت طبقه هم‌ارزی یك کسر مفروض $\frac{a}{b}$.

هرگاه $\frac{x}{y}$ کسر هم‌ارز $\frac{a}{b}$ باشد:

$$\frac{x}{y} \sim \frac{a}{b} \Rightarrow bx = ay$$

حالت اول ـ $a = ۰$ در این صورت داریم $bx = ۰$ با $b \neq ۰$، ازآنجا $x = ۰$

هرچه باشد y. طبقه هم ارزی $\frac{a}{b}$ عبارت است از:

$$\left\{\frac{۰}{۱}, \frac{۰}{۲}, \frac{۰}{۳}, \ldots, \frac{۰}{b}, \ldots,\right\}$$

حالت دوم ـ $a \neq ۰$ اگر δ بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b باشد فرض کنیم:

$$a = \delta a' \qquad \text{و} \qquad b = \delta b'$$

a' و b' نسبت بهم اولند. داریم:

$$bx = ay \iff b'x = a'y \qquad (۳)$$

چون a'، $a'y$ را میشمارد پس $b'x$ را نیز میشمارد و چون با b' اول است پس بنـا به قضیه بخش‌پذیری x را میشمارد.

پس:

$$\exists k \in N^* \qquad \text{بطوریکه} \qquad x = ka'$$

با قراردادن این مقدار در (۳):

$$y = kb'$$

x و y «هم مضربهای a' و b'» میباشند به فوریت قابل تحقیق است که:

$$\frac{a'}{b'} \sim \frac{ka'}{kb'} \sim \frac{a}{b} \qquad (\text{با فرض } k = \delta)$$

پس جمیع کسرهای هم‌ارز بصورت:

$$\frac{ka'}{kb'} \quad \text{با} \quad k \in N^*$$

میباشند.

طبقه هم‌ارزی $\frac{a}{b}$ که با $\left[\frac{a}{b}\right]$ نمایش داده میشود عبارت است از:

$$\left[\frac{a}{b}\right] = \left\{\frac{a'}{b'}, \frac{۲a'}{۲b'}, \frac{۳a'}{۳b'}, \ldots, \frac{ka'}{kb'}, \ldots\right\}$$

کسر مفروض $\frac{a}{b}$ مرتبه $k = \delta$ (ب. م. ع. م. a و b) را اشغال میکند.

ساده کردن یک کسر $\frac{a}{b}$ عبارت از پیدا کردن کسر هم‌ارز آنست که جمله‌های آن‌بترتیب کوچکترین باشند.

یک کسر را با تقسیم دو جمله آن بر یک مقسوم علیه مشترک ساده میکنند و اگر بزرگترین مقسوم علیه مشترک δ را اختیار کنیم دو جمله a' و b' حاصل نسبت بهم اولند و کسر $\frac{a'}{b'}$ حاصل دیگر سادگی پذیر نیست. بدین سبب است که میگویند:

$\frac{a'}{b'}$ ساده‌ترین نماینده طبقه $\frac{a}{b}$ و یا نماینده تحویل‌ناپذیر طبقه است.

تحویل دو کسر بیك مخرج

هرگاه دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ مفروض باشند. میخواهیم دو کسر پیدا کنیم که بترتیب هم‌ارز آنها بوده و دارای یک مخرج باشند.

برای بدست آوردن تمام جوابهای این مسئله، کسرهای مفروض را بترتیب با کسرهای تحویل‌ناپذیر هم‌ارز جایگزین میکنیم:

$$\frac{a}{b} \sim \frac{a'}{b'} \qquad \text{و} \qquad \frac{c}{d} \sim \frac{c'}{d'}$$

$$\delta(a', b') = ۱ \qquad \delta(c', d') = ۱$$

اگر دو کسر $\frac{x}{z}$ و $\frac{y}{z}$ وجود داشته باشد که بترتیب هم‌ارز $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ باشند داریم:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{x}{z} \sim \frac{a'}{b'} & \Rightarrow & z \in \mathcal{M}(b') \\ \frac{y}{z} \sim \frac{c'}{d'} & \Rightarrow & z \in \mathcal{M}(d') \end{array}\right\} \Rightarrow \quad z \in \mathcal{M}(b', d')$$

اگر μ کوچکترین مضرب مشترک b' و d' باشد نتیجه میگیریم که:

$z \in \mathcal{M}(\mu)$ و بنابراین هر مخرج مشترک بصورت $z = k\mu$ با $k \in N^*$ میباشد.

ساده‌ترین مخرج مشترک خود μ است. داریم:

$$\mu = b'p = a'q$$

با $p, q \in N^*$

چون:

$$\frac{a'}{b'} \sim \frac{pa'}{pb'} \qquad \text{و} \qquad \frac{c'}{d'} \sim \frac{qc'}{qd'}$$

داریم:

$$\frac{a}{b} \sim \frac{pa'}{\mu} \quad \text{و} \quad \frac{c}{d} \sim \frac{qc'}{\mu}$$

و جمیع جوابهای مسئله با $k \in N^*$ عبارتند از :

$$\frac{pa'k}{\mu k} \quad \text{و} \quad \frac{qc'k}{\mu k}$$

تبصره ــ حل این مسئله‌را بفوریت برای تحویل چند کسر بیک مخرج گسترش میدهیم.

اعداد منطق مثبت

تعریف ـ طبقه کسرهـای هم‌ارز $\frac{a}{b}$ به «اعداد منطق‌مثبت» موسوم است.

کسر $\frac{a}{b}$ یک نماینده عدد منطق مثبت است.

ما قبلاً عدد منطق مثبت را با $\left[\frac{a}{b}\right]$ نمایش دادیم.

مجموعه اعداد منطق مثبت را با Q^+ نمایش میدهیم (علامت $+$ عـلامت صفت «مثبت» است که بطور کامل در قسمت پنجم معین خواهد شد و عجالتاً میتوان از اعداد منطق بدون تکیه به صفت «مثبت» صحبت کرد بدون اینکه هراسی از ابهامی داشته باشیم).

اعداد منطق را با یک حرف یونانی نیز میتوان نشان داد :

$$\alpha = \left[\frac{a}{b}\right] \qquad \alpha \in Q^+$$

۲ـ نسبت ترتیب در Q^+

مجدداً شیٔ نمایش داده شده با ۱ را در نظر میگیریم: اگر آنــرا به b قسمت متساوی تقسیم کنیم و a تا از این قسمتها را جمع‌آوری کنیم شیٔ $\frac{a}{b}$ حاصل میشود و اگر a' تا ازاین شیٔها را جمع‌آوری کنیم شیٔ $\frac{a'}{b}$ بدست میآید. اگرفرض کنیم $a < a'$ شیٔ اول کوچکتر از دومی خواهد شد و مینویسیم :

$$\frac{a}{b} < \frac{a'}{b}$$

ولی شیء $\frac{a}{b}$ را با $\frac{ma}{mb}$ و شیء $\frac{a'}{b}$ را با $\frac{ka'}{kb}$ میتوان نمایش داد . بدیهی است که میتوان نوشت :

$$\frac{ma}{mb} < \frac{ka'}{kb}$$

ملاحظه کنیم که در N^* :

$$a < a' \iff (mkb)a < (mkb)a'$$
$$\iff (ma)(kb) < (mb)\,(ka')$$

که در آنجا حاصلضربهای صورت هرکدام از کسرها در مخرج دیگری بارز شده است. بدین‌ترتیب تعریف زیر بدست میآید :

تعـریف ـ هرگاه دو عدد منطق $\left[\frac{a}{b}\right]$ و $\left[\frac{c}{d}\right]$ مفروض باشند میگویند :

« $\left[\frac{a}{b}\right]$ حداکثر برابر $\left[\frac{c}{d}\right]$ است »

و مینویسند :

$$\left[\frac{a}{b}\right] \leqslant \left[\frac{c}{d}\right]$$

اگر:

$$ad \leqslant bc$$

باشد.

این تعریف مستقل از نماینده‌های منتخب اعداد منطق است. زیرا ثابت میکنیم:

$$\left(\frac{a}{b} \sim \frac{a'}{b'} \quad \text{و} \quad \frac{c}{d} \sim \frac{c'}{d'} \quad \text{و} \quad ad \leqslant bc\right) \Rightarrow a'd' \leqslant b'c'$$

حالت اول ــ $c = 0$ فرض $ad \leqslant bc$ موجب $a = 0$ است.

دو عدد منطق:

$$\left[\frac{0}{b}\right] \quad \text{و} \quad \left[\frac{0}{d}\right]$$

برابرند.

حالت دوم– $c \neq 0$ داریم:

$$\frac{a}{b} \sim \frac{a'}{b'} \quad \Rightarrow \quad ab' = ba'$$

$$\frac{c}{d} \sim \frac{c'}{d'} \quad \Rightarrow \quad dc' = cd'$$

(تعویض ترتیب دو طرف)

با ضرب این رابطه‌ها:

$$adb'c' = bca'd'$$

وانگهی:

$$ad \leqslant bc \quad \Rightarrow \quad adb'c' \leqslant bcb'c'$$

از آنجا:

$$bca'd' \leqslant bcb'c'$$

با تقسیم بر $bc \neq 0$

$$a'd' \leqslant b'c'$$

پس تعریف مستقل از نماینده‌های منتخب است.

ساده کردن تعریف

بخصوص میتوان نماینده‌ها را با یک مخرج انتخاب کرد. اگر در تعریف $b = d = m$ قرار دهیم در این صورت:

$$ad \leqslant bc \quad \Leftrightarrow \quad am \leqslant cm \quad \Leftrightarrow \quad a \leqslant c$$

و داریم:

$$\left[\frac{a}{m}\right] \leqslant \left[\frac{c}{m}\right] \quad \Leftrightarrow \quad a \leqslant c$$

نسبت ترتیب کلی در Q^+

ثابت میکنیم که نسبتی که معین کردیم یک نسبت ترتیب کلی در Q^+ است.

هرچه باشد α و β و γ در Q^+

۱) $(\alpha \leqslant \beta$ و $\beta \leqslant \alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta$

۲) $(\alpha \leqslant \beta$ و $\beta \leqslant \gamma) \quad \Rightarrow \quad \alpha \leqslant \gamma$

۳) هرچه باشد α و β در Q^+ داریم $\beta \leqslant \alpha$ یا $\alpha \leqslant \beta$

اثبات.

۱) برای α و β نمایندههای هم مخرج انتخاب میکنیم:

$$\alpha = \left[\frac{a}{m}\right] \quad \text{و} \quad \beta = \left[\frac{b}{m}\right]$$

داریم:

$$\alpha \leqslant \beta \iff a \leqslant b$$
$$\beta \leqslant \alpha \iff b \leqslant a$$

ولی، در N:

$$(a \leqslant b \quad \text{و} \quad b \leqslant a) \iff a = b$$

پس در Q^+:

$$(\alpha \leqslant \beta \quad \text{و} \quad \beta \leqslant \alpha) \iff \alpha = \beta$$

۲) برای α و β و γ، نمایندههای با مخرج m انتخاب میکنیم:

$$\alpha = \left[\frac{a}{m}\right] \qquad \beta = \left[\frac{b}{m}\right] \qquad \gamma = \left[\frac{c}{m}\right]$$

داریم:

$$\alpha \leqslant \beta \iff a \leqslant b$$
$$\beta \leqslant \gamma \iff b \leqslant c$$

ولی، در N:

$$(a \leqslant b \quad \text{و} \quad b \leqslant c) \Rightarrow a \leqslant c$$

پس، در Q^+:

$$(\alpha \leqslant \beta \quad \text{و} \quad \beta \leqslant \gamma) \Rightarrow \alpha \leqslant \gamma$$

۳) برای α و β نمایندههای هم مخرج انتخاب میکنیم:

$$\alpha = \left[\frac{a}{m}\right] \qquad \beta = \left[\frac{b}{m}\right]$$

ترتیب در N، کلی است. یعنی داریم:

$$a \leqslant b \quad \text{یا} \quad b \leqslant a$$

از آنجا نتیجه میشود که در Q^+ نیز ترتیب کلی است:

$$\alpha \leqslant \beta \quad \text{یا} \quad \beta \leqslant \alpha$$

تبصره ــ در Q^+ نیز مانند N یک نسبت ترتیب اکید و فاصله‌های «بسته، نیم باز، باز» معین میشود.

غوطه‌وری N در Q^+

هرگاه عدد منطق $\left[\frac{a}{b}\right]$ مفروض باشد. اگر b، a را بشمارد یک عدد طبیعی مانند n وجود دارد بقسمیکه $a = nb$. در این صورت ساده‌ترین نماینده $\left[\frac{a}{b}\right]$ عبارت از $\frac{n}{۱}$ است.

$$a = bn \iff \left[\frac{a}{b}\right] = \left\{\frac{n}{۱}, \frac{۲n}{۲}, \frac{۳n}{۳}, \ldots, \frac{kn}{k}, \ldots\right\}$$

اگر $\mathscr{N}$ مجموعه اعداد منطق $\left[\frac{a}{b}\right]$ با $a \mid b$ باشد داریم:

$$\mathscr{N} \subset Q^+$$

نظیر هرعدد طبیعی $n \in N$ یک عدد منطق $\left[\frac{n}{۱}\right] \in \mathscr{N}$ وجود دارد و بعکس. مجموعه‌های N و $\mathscr{N}$ در تناظر دو سوئی هستند:

$$N \leftrightarrows \mathscr{N}$$

این تناظر یک یک شکلی برای نسبت ترتیب است: زیرا با فرض:

$$n, n' \in N \qquad و \qquad \left[\frac{n}{۱}\right], \left[\frac{n'}{۱}\right] \in \mathscr{N}$$

بطوریکه:

$$n \leftrightarrows \left[\frac{n}{۱}\right] \qquad و \qquad n' \leftrightarrows \left[\frac{n'}{۱}\right]$$

بنا به تعریف ترتیب در Q^+ داریم:

$$n \leqslant n' \iff \left[\frac{n}{۱}\right] \leqslant \left[\frac{n'}{۱}\right]$$

پس تناظر یک‌یک شکلی برای نسبت ترتیب است.

و سپس این یک شکلی را با یک همانی منطبق میکنیم. به عوض:

$$n \leftrightarrows \left[\frac{n}{۱}\right]$$

مینویسیم:

$$n = \left[\frac{n}{1}\right]$$

با همان کردن N و $\mathscr{N}$ میگویند که N در Q^+ «غوطه خورده» است:

$$N \subset Q^+$$

این غوطه‌وری برای اعمالی که در Q^+ معین خواهند شد باید توجیه شود.

فصل دوم

عملها در Q^+

۱- جمع

شیء ۱ را که به b قسمت متساوی تقسیم شده بود در نظر میگیریم: اگـر یک بار a و بار دیگر a' تا از این قسمت‌ها را جمع آوری کنیم اشیائی را خواهیم داشت که بـا $\frac{a}{b}$ و $\frac{a'}{b}$ نمایش داده میشوند و اجتماع این دو شیء یک شیء دیگر است که طبیعتاً با:

$$\frac{a}{b}+\frac{a'}{b}$$

نمایش داده میشود.

باین ترتیب «مجموع کسرها» تعریف میشود که با علامت $+$ نشان داده میشود ولی شیءآخری مستقیماً از یک بدین تـرتیب نیز بدست میآید کـه $a+a'$ قسمت $\frac{1}{b}$ را بـا هم جمع آوری کنیم پس داریم:

$$\frac{a}{b}+\frac{a'}{b}\sim\frac{a+a'}{b}$$

ولی بجای $\frac{a'}{b}$ کسر دیگری مانند $\frac{c}{d}$ از همان طبقه میتوان اختیار کرد:

$$\frac{a'}{b}\sim\frac{c}{d}\quad\Longleftrightarrow\quad a'd=bc$$

پس داریم:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\sim\frac{a+a'}{b}\sim\frac{ad+a'd}{bd}\sim\frac{ad+bc}{bd}$$

کسر ماقبل‌آخر از ضرب کردن جمله‌های کسر قبلی‌آن در d و کسر آخری از قراردادن bc بجای $a'd$ در کسر قبلی‌اش بدست آمده‌اند و از آنجا تعریف زیر را داریم:

تعریف جمع در Q^+

بهر زوج مرتب $\left[\frac{a}{b}\right]$ و $\left[\frac{c}{d}\right]$ دو عدد منطق یک عدد منطق را همراه کنیم که مجموع $\left[\frac{a}{b}\right]$ و $\left[\frac{c}{d}\right]$ نامیده میشود و بصورت:

$$\left[\frac{a}{b}\right]+\left[\frac{c}{d}\right]$$

نمایش داده میشود و با رابطه زیر معین میگردد:

$$\left[\frac{a}{b}\right]+\left[\frac{c}{d}\right]=\left[\frac{ad+bc}{bd}\right]$$

این تعریف مستقل از نماینده‌های منتخب برای اعداد منطق است زیرا، ثابت میکنیم که:

$$\left(\frac{a}{b}\sim\frac{a'}{b'} \quad \text{و} \quad \frac{c}{d}\sim\frac{c'}{d'}\right) \Rightarrow \frac{ad+bc}{bd}\sim\frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$$

داریم:

$$\frac{a}{b}\sim\frac{a'}{b'} \Rightarrow ab'=ba' \tag{۱}$$

$$\frac{c}{d}\sim\frac{c'}{d'} \Rightarrow cd'=dc' \tag{۲}$$

طرفین (۱) را در dd' و طرفین (۲) را در bb' ضرب میکنیم. داریم:

$$adb'd'=bda'd'$$
$$bcb'd'=bdb'c'$$

عضو به عضو جمع میکنیم:

$$(ad+bc)\,b'd'=bd\,(a'd'+b'c') \Rightarrow \frac{ad+bc}{bd}\sim\frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$$

تعریف مستقل از نماینده‌های منتخب است.

ساده کردن تعریف.

چون جمع دو عدد منطق مستقل از نماینده‌های آنها است بنابراین دو نماینده با

مخرجهای m انتخاب میکنیم.

در تعریف $b = d = m$ قرار میدهیم. داریم:

$$\frac{ad+bc}{bd} \sim \frac{am+cm}{m \cdot m} \sim \frac{m\,(a+c)}{m \cdot m} \sim \frac{a+c}{m}$$

از آنجا:

$$\left[\frac{a}{m}\right] + \left[\frac{b}{m}\right] = \left[\frac{a+b}{m}\right]$$

جابجاپذیری:

$\boxed{P_1}$ هرچه باشد اعداد α و β داریم:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

برای α و β دو نماینده با مخرج m انتخاب میکنیم:

$$\alpha + \beta = \left[\frac{a}{m}\right] + \left[\frac{b}{m}\right] = \left[\frac{a+b}{m}\right]$$

$$\beta + \alpha = \left[\frac{b}{m}\right] + \left[\frac{a}{m}\right] = \left[\frac{b+a}{m}\right]$$

چون جمع در N جابجاپذیر است:

$$a + b = b + a$$

پس در Q^+ داریم:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

شرکت‌پذیری

$\boxed{P_2}$ هرچه باشد اعداد منطق α و β و γ داریم:

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

برای α و β و γ نماینده‌های هم‌مخرج زیر را انتخاب میکنیم:

$$\frac{a}{m}, \frac{b}{m}, \frac{c}{m}$$

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \left[\frac{a+b}{m}\right] + \left[\frac{c}{m}\right] = \left[\frac{(a+b)+c}{m}\right]$$

$$\alpha + (\beta + \gamma) = \left[\frac{a}{m}\right] + \left[\frac{b+c}{m}\right] = \left[\frac{a+(b+c)}{m}\right]$$

چون جمع در N شرکت‌پذیر است:

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

پس در Q^+ داریم:

$$(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$$

از آنجا نتیجه میشود که: جمع به Q^+ یک بنیان نیم گروه جابجاپذیری را میبخشد.

یک شکلی N و $\mathcal{N}$ بازاءِ جمع.

هرگاه n و n' دو عدد از N و :

$$\left[\frac{n}{1}\right] \text{ و } \left[\frac{n'}{1}\right]$$

نظیرهای آنها در $\mathcal{N}$ با دوسو گستری

$$N \leftrightarrows \mathcal{N}$$

باشند بنا به تعریف جمع در Q^+ داریم:

$$\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n'}{1}\right] = \left[\frac{n+n'}{1}\right]$$

پس، تناظر بازاء جمع یک شکل است بدین ترتیب غوطه‌وری N در Q^+ بازاء جمع تأیید میشود. همانطور که تا حال برای نسبت ترتیب شده بود.

جزءِ خنثی.

هرچه باشد $\alpha \in Q^+$ داریم:

$$\alpha + \circ = \alpha$$

زیرا میدانیم که:

$$\circ = \left[\frac{\circ}{b}\right]$$

هرچه باشد $b \in N^*$

و اگر:

$$\alpha = \left[\frac{a}{b}\right]$$

باشد با تعریف جمع در Q^+:

$$\alpha + \circ = \left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{\circ}{b}\right] = \left[\frac{a+\circ}{b}\right] = \left[\frac{a}{b}\right] = \alpha$$

$\boxed{P_۳}$ جزء خنثای جمع در Q^+ عبارت از $\circ$ است.

هیچ عدد Q^+ سوای صفر دارای قرینه نیست

$\boxed{P_۴}$ هرچه باشد $\alpha ، \beta \in Q^+$

$\alpha + \beta = \circ$ موجب میشود $\alpha = \circ$ و $\beta = \circ$. برای α و β نماینده‌های هم‌مخرج $\frac{a}{m}$ و $\frac{b}{m}$ را انتخاب میکنیم:

$$\alpha + \beta = \circ \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{a+b}{m}\right] = \circ \quad \Rightarrow \quad a + b = \circ$$

ولی در N:

$$a + b = \circ \quad \Rightarrow \quad a = b = \circ$$

از آنجا در Q^+:

$$\alpha + \beta = \circ \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = \circ$$

برای جمع در Q^+ هرعددی منتظم است

$\boxed{P_۵}$ هرچه باشد $\gamma \in Q^+$:

$\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ موجب میشود $\alpha = \beta$

زیرا، اگر برای α و β و γ نماینده‌های هم مخرج انتخاب کنیم:

$$\left[\frac{a}{m}\right] + \left[\frac{c}{m}\right] = \left[\frac{b}{m}\right] + \left[\frac{c}{m}\right] \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{a+c}{m}\right] = \left[\frac{b+c}{m}\right]$$
$$\Rightarrow \quad a + c = b + c$$

ولی در N:

$$a + c = b + c \quad \Rightarrow \quad a = b$$

از آنجا:

$$\left[\frac{a}{m}\right] = \left[\frac{b}{m}\right]$$

۲ـ تفریق

با معلوم بودن دو عدد منطق α و β آیا عدد منطق χ وجود دارد بقسمی که :
$\beta = \chi + \alpha$ باشد؟ مسئله مستقل از انتخاب نمایندههای α و β است و بدین‌جهت برای آنها نمایندههای هم مخرج $\frac{a}{m}$ و $\frac{b}{m}$ را انتخاب میکنیم :

اگر $\frac{x}{y}$ نماینده χ باشد داریم:

$$\alpha + \chi = \beta \iff \left[\frac{a}{m}\right] + \left[\frac{x}{y}\right] = \left[\frac{b}{m}\right]$$

یا :

$$\frac{ay + mx}{my} \sim \frac{b}{m} \iff m(ay + mx) = bmy$$

و چون $m \neq 0$:

$$ay + mx = by$$

این تساوی در N مستلزم $ay \leqslant by$ یعنی : $a \leqslant b$ است. پس در Q^+ باید داشته باشیم :

$$\alpha \leqslant \beta$$

فرض کنیم این شرط برآورده شود، در اینصورت :

$$mx = (b - a)y$$

یا :

$$\frac{x}{y} \sim \frac{b-a}{m}$$

تحقیق کنیم :

$$\alpha + \left[\frac{b-a}{m}\right] = \left[\frac{a}{m}\right] + \left[\frac{b-a}{m}\right] = \left[\frac{b}{m}\right] = \beta$$

پس مسئله دارای جواب است اگر $\alpha \leqslant \beta$ باشد. و این جواب یکتا است چونکه هر عدد منطق α سادگی‌پذیر است.

$$\alpha + \chi = \alpha + \chi' \Rightarrow \chi = \chi'$$

خلاصه ـ اگر $\alpha \leqslant \beta$ باشد یک عدد منطق χ یکتا وجود دارد بقسمیکه :

$$\alpha + \chi = \beta$$

این عدد «تفاضل β و α» نامیده میشود و با $\beta - \alpha$ نشان داده میشود.

۳ـ ضرب

شیء ۱ را به b قسمت متساوی تقسیم می‌کنیم و a تا از آنها را جمع میآوریم و بعد هرکدام از این قسمتها را به d قسمت متساوی تقسیم و c تا از آنها را جمع میآوریم. شیء سومی بدین ترتیب بدست میآید که با :

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$$

نمایش داده میشود.

و بدین ترتیب «ضرب کسرها» تعریف میشود.

شیء واسطه :

$$\frac{a}{b} \sim \frac{ad}{bd}$$

را میتوان مجموع d شیء :

$$\frac{a}{bd}$$

در نظر گرفت، چونکه بنا به تعریف جمع:

$$\underbrace{\frac{a}{bd} + \frac{a}{bd} + \cdots + \frac{a}{bd}}_{d \text{ شیء}} \sim \frac{a + a + \cdots + a}{bd} \sim \frac{ad}{bd}$$

از آنجا نتیجه میشود که اگر شیء $\frac{a}{b}$ را به d قسمت تقسیم کنیم هرکدام از این‌قسمتها با:

$$\frac{a}{bd}$$

نموده میشوند.

از جمع‌آوری c تا از این اشیاء شیء آخری بدست میآید:

$$\underbrace{\frac{a}{bd} + \frac{a}{bd} + \cdots + \frac{a}{bd}}_{c \text{ قسمت}} \sim \frac{a + a + \cdots + a}{bd} \sim \frac{ac}{bd}$$

پس داریم :

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\sim\frac{ac}{bd}$$

تعریف ضرب در Q^+

بهر زوج مرتب $\left[\frac{a}{b}\right]$ و $\left[\frac{c}{d}\right]$ دو عدد منطق یک عدد منطق موسوم به حاصل ضرب $\left[\frac{a}{b}\right]$ و $\left[\frac{c}{d}\right]$ را همراه میکنیم که با یکی از علامتهای :

$$\left[\frac{a}{b}\right]\times\left[\frac{c}{d}\right] \quad \text{یا} \quad \left[\frac{a}{b}\right]\cdot\left[\frac{c}{d}\right] \quad \text{یا} \quad \left[\frac{a}{b}\right]\left[\frac{c}{d}\right]$$

نموده میشود.

و آنرا با :

$$\left[\frac{a}{b}\right]\left[\frac{c}{d}\right]=\left[\frac{ac}{bd}\right]$$

تعریف میکنیم.

ثابت میکنیم که این تعریف مستقل از نمایندههای منتخب اعداد منطق است:

$$\left(\frac{a}{b}\sim\frac{a'}{b'} \text{ و } \frac{c}{d}\sim\frac{c'}{d'}\right) \Rightarrow \frac{ac}{bd}\sim\frac{a'c'}{b'd'}$$

بنا به فرض داریم :

$$ab'=ba'$$
$$cd'=dc'$$

از ضرب عضو به عضو :

$$acb'd'=bda'c' \Rightarrow \frac{ac}{bd}\sim\frac{a'c'}{b'd'}$$

پس تعریف مستقل از نمایندههای منتخب است.

جابجاپذیری

$\boxed{P_6}$ هرچه باشد α ،$\beta\in Q^+$ داریم :

$$\alpha\beta=\beta\alpha$$

زیرا اگر $\left[\frac{a}{b}\right]$ و $\left[\frac{c}{d}\right]$ نمایندههای α و β باشند:

$$\alpha\beta = \left[\frac{ac}{bd}\right] \qquad \text{و} \qquad \beta\alpha = \left[\frac{ca}{db}\right]$$

ولی ضرب در N جابجاپذیر است :

$$ac = ca \qquad \text{و} \qquad bd = db$$

پس در Q^+ داریم :

$$\alpha\beta = \beta\alpha$$

شرکت‌پذیری

$\boxed{P_7}$ هرچه باشد $\alpha, \beta, \gamma \in Q^+$ داریم:

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$$

با علامت‌های قبلی و اگر $\left[\frac{e}{f}\right]$ نماینده γ باشد :

$$(\alpha\beta)\gamma = \left[\frac{ac}{bd}\right]\left[\frac{e}{f}\right] = \left[\frac{(ac)e}{(bd)f}\right]$$

$$\alpha(\beta\gamma) = \left[\frac{a}{b}\right]\left[\frac{ce}{df}\right] = \left[\frac{a(ce)}{b(df)}\right]$$

چون ضرب در N شرکت‌پذیر است :

$$(ac)e = a(ce) \qquad \text{و} \qquad (bd)f = b(df)$$

پس در Q^+ نیز :

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$$

توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع

$\boxed{P_8}$ هرچه باشد α ،β ،$\gamma \in Q^+$ داریم :

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

برای β و γ نماینده‌های هم مخرج $\left[\frac{b}{m}\right]$ و $\left[\frac{c}{m}\right]$ و برای α نماینده $\left[\frac{a}{d}\right]$ را انتخاب میکنیم :

$$\alpha(\beta + \gamma) = \left[\frac{a}{d}\right]\left[\frac{b+c}{m}\right] = \left[\frac{a(b+c)}{dm}\right]$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma = \left[\frac{ab}{dm}\right] + \left[\frac{ac}{dm}\right] = \left[\frac{ab + ac}{dm}\right]$$

بنا به توزیع‌پذیری در N:

$$a\,(b + c) = ab + ac$$

پس در Q^+:

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

مانند N، در Q^+ نیز توزیع پذیری ضرب را نسبت به تفریق نتیجه میگیریم.

یك شکلی N و $\mathcal{N}$ بازاءِ ضرب

اگر $\left[\frac{n}{۱}\right]$ و $\left[\frac{n'}{۱}\right]$ از $\mathcal{N}$ نظیرهای n و n' از N باشند داریم:

$$\left[\frac{n}{۱}\right]\left[\frac{n'}{۱}\right] = \left[\frac{nn'}{۱}\right]$$

تناظر $\mathcal{N} \leftrightarrows N$ یک یک شکلی بازاء ضرب است.
و غوطه‌وری N در Q^+ برای عمل ضرب نیز تأئید میگردد.

جزءِ خنثی

هرچه باشد $\alpha \in Q^+$ داریم:

$$\alpha \cdot ۱ = \alpha$$

زیرا:

$$۱ = \left[\frac{۱}{۱}\right]$$

و اگر:

$$\alpha = \left[\frac{a}{n}\right]$$

باشد. داریم:

$$\alpha \cdot ۱ = \left[\frac{a}{b}\right]\left[\frac{۱}{۱}\right] = \left[\frac{a}{b}\right] = \alpha$$

$\boxed{P_{۹}}$ جزء خنثای ضرب عبارت از ۱ است.

معکوسیت

$\boxed{P_{۱۰}}$ بهرعدد منطق $\alpha \neq ۰$ یک عدد منطق نظیر β وجود دارد بقسمیکه:

$$\alpha\beta = ۱$$

β را «معکوس α» مینامند و با:

$$\frac{۱}{\alpha}$$

نمایش میدهند.

اثبات:

هرگاه:

$$\alpha = \left[\frac{a}{b}\right]$$

با $\alpha \neq ۰$ باشد بدیهی است که $b \neq ۰$

عدد:

$$\beta = \left[\frac{x}{y}\right]$$

را طوری پیدا میکنیم که $\alpha\beta = ۱$ باشد.

باید داشته باشیم:

$$\left[\frac{ax}{by}\right] = ۱ \quad \Longleftrightarrow \quad ax = by$$

از آنجا:

$$\frac{x}{y} \sim \frac{b}{a}$$

امتحان:

$$\alpha\beta = \left[\frac{a}{b}\right]\left[\frac{b}{a}\right] = \left[\frac{ab}{ab}\right] = ۱$$

هر عدد $\alpha \neq ۰$ دارای یک معکوس β است.

تبصره ـ اگر $\alpha = ۰$، هرچه باشد β:

$$\alpha\beta = ۰$$

زیرا:

$$\left[\frac{\circ}{b}\right]\left[\frac{x}{y}\right]=\left[\frac{\circ\times x}{by}\right]=\left[\frac{\circ}{by}\right]=\circ$$

عدد منطق $\alpha=\circ$ دارای معکوس نیست.

بنابراین، ضرب، یک بنیان گروه جابجاپذیری را به Q^+ میبخشد- میدانیم که در گروه هر جزئی منتظم است. (I. فصل ۲، ۴)

۴- تقسیم:

مسئله- هرگاه α و β دو عدد منطق مفروض باشند مطلوب است تعیین عدد منطق χ بقسمیکه:

$$\beta\chi=\alpha$$

حالت اول: $\beta\neq\circ$

معکوس β را β' مینامیم. داریم:

$$\beta\chi=\alpha\quad\Rightarrow\quad\beta'(\beta\chi)=\alpha\beta'$$

از آنجا:

$$(\beta\beta')\,\chi=\alpha\beta'$$

و

$$\chi=\alpha\beta'$$

چونکه $\beta\beta'=1$ است.

امتحان:

$$(\alpha\beta')\,\beta=\alpha\,(\beta\beta')=\alpha\cdot 1=\alpha$$

اگر:

$$\beta=\left[\frac{a}{b}\right]$$

در اینصورت:

$$\beta'=\left[\frac{b}{a}\right]$$

و:

$$\chi=\alpha\cdot\left[\frac{b}{a}\right]$$

مسئله جواب دارد و یکتا است. زیرا اگر عدد دیگر χ' وجود داشت لازم میآمد:

$$\beta\chi=\beta\chi'\quad\Rightarrow\quad\chi=\chi'$$

چونکه هرجزء $\beta\neq\circ$ سادگیپذیر است.

حالت دوم: $\beta=\circ$

معادله عبارت است از:

$$\circ\chi = \alpha$$

اگر $\alpha \neq \circ$ باشد عدد X جواب مسئله وجود ندارد.

اگر $\alpha = \circ$ جمیع اعداد منطق جواب مسئله‌اند.

تعریف- حل معادله $\beta\chi = \alpha$ عبارت از تقسیم α بر β $(\beta \neq \circ)$ است.
جواب $\alpha\beta'$ را خارج قسمت α بر β مینامند و این خارج قسمت با:

$$\frac{\alpha}{\beta}$$

نموده میشود.

خارج قسمت $\frac{\alpha}{\beta}$ مساوی حاصل ضرب $\alpha\beta'$ عدد α در معکوس β است.

ما N را در Q^+ غوطه دادیم:

نظیر هر عدد طبیعی $b \in N^*$ یک معکوس β وجود دارد:

$$\beta b = ۱$$

مینویسیم:

$$\beta = \frac{۱}{b}$$

حال اگر a و b دو عدد طبیعی باشند $a \in N$ و $b \in N^*$ معادله $a = \chi$ دارای یک جواب فقط در Q^+ است:

$$\chi = \frac{a}{b}$$

بعکس هرگاه $\frac{a}{b}$ یک نماینده از یک عدد منطق غیر مشخص α باشد داریم:

$$\alpha = \left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{a}{۱}\right]\left[\frac{۱}{b}\right] = a \cdot \frac{۱}{b}$$

غوطه‌وری N در Q^+ نشان میدهد که α خارج قسمت a به b است.

قضیهٔ ۱- هرعدد منطق خارج قسمت دو عدد طبیعی است.

غوطه‌وری N در Q^+ بدین ترتیب علامت جاری یک عدد منطق:

$$\alpha = \frac{a}{b}$$

بجای

$$\alpha = \left[\frac{a}{b}\right]$$

را تأیید می‌نماید.

بدین جهت است که ما تا حال علامت $\frac{a}{b}$ را در N (II، فصل ۲ و ۳) برای تعیین چنین خارج قسمتی وقتیکه b، a را میشمارد بکار برده‌ایم.

پایداری رابطه ترتیب نسبت جمع و ضرب.

جمع:

$\boxed{P_{11}}$ هرچه باشد $\alpha, \beta, \gamma \in Q^+$:

$$\alpha \leqslant \beta \iff \alpha + \gamma \leqslant \beta + \gamma$$

کافی است برای α, β, γ نماینده‌های هم مخرج انتخاب کرده و از خاصیت نظیر در N استفاده کنیم.

ضرب:

$\boxed{P_{12}}$ هرچه باشد $\alpha, \beta, \gamma \in Q^+$:

$$\alpha \leqslant \beta \Rightarrow \alpha\gamma \leqslant \beta\gamma$$

$$(\gamma \neq 0 \quad \text{و} \quad \alpha < \beta) \iff \alpha\gamma < \beta\gamma$$

استدلال مانند قبلی است.

۵- تراکم اعداد منطق.

قضیهٔ ۲- هر فاصله باز Q^+ تهی نیست.

هرگاه $\alpha < \beta$ باشد فاصله باز $]\beta$ و $\alpha[$ شامل عدد منطق $\frac{\alpha + \beta}{2}$ است.

زیرا:

$$\alpha < \beta \;\Rightarrow\; \alpha + \alpha < \beta + \alpha \;\Rightarrow\; ۲\alpha < \alpha + \beta \;\Rightarrow\; \alpha < \frac{\alpha+\beta}{۲}$$

بهمین ترتیب:

$$\alpha < \beta \;\Rightarrow\; \alpha + \beta < \beta + \beta \;\Rightarrow\; \alpha + \beta < ۲\beta \;\Rightarrow\; \frac{\alpha+\beta}{۲} < \beta$$

پس فاصله $]\alpha, \beta[$ شامل:

$$\frac{\alpha+\beta}{۲}$$

میباشد.

ملاحظه شود که این قضیه در N درست نیست زیرا فاصله باز $]a+۱$ و $a[$ در N تهی است.

قضیهٔ ۲ بترتیب زیر قابل بیان است.

Q^+ همه‌جا متراکم است.

نتیجه- هر فاصله باز Q^+ نه دارای کوچکترین جزء و نه دارای بزرگترین جزء است. هرگاه $]\alpha, \beta[$ فاصله بازی از Q^+ باشد ثابت کنیم که در این فاصله عدد γ که کوچکتر از همه سایرین باشد وجود ندارد. زیرا اگر چنین عددی وجود میداشت لازم میآمد:

$$\gamma = \min \,]\alpha, \beta[$$

فاصله باز $]\alpha, \gamma[$ حد اقل یک جزء γ' (بنا به قضیه ۳) میشد و داشتیم:

$$\gamma' < \gamma$$

با:

$$\gamma' \in \,]\alpha, \beta[$$

و در این صورت γ کوچکترین جزء نمیشد. بنابراین کوچکترین جزء وجود ندارد بهمین ترتیب ثابت میشود که $]\alpha, \beta[$ دارای بزرگترین جزء نیست.

۶- قسمت صحیح یك عدد منطق.

هرگاه b, a دو عدد طبیعی باشند $(b \neq ۰)$ تقسیم اقلیدسی a را بر b انجام دهیم:

$$a = bq + r \qquad r < b$$

حال در Q^+ عمل کنیم: طرفین رابطه را در $\frac{۱}{b}$ ضرب کنیم:

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b} \qquad \frac{r}{b} < 1$$

اگر در Q^+:

$$\alpha = \frac{a}{b}$$

فرض کنیم خاصیت زیر نتیجه میشود:

۱) نظیر هرعدد $\alpha \in Q^+$ یک عدد $q \in N$-ی یکتا وجود دارد. تابعی از Q^+ در N بدست میآید که با $\alpha \to e(\alpha)$ نموده میشود و آنرا «قسمت صحیح α» مینامیم.

$$q = e(\alpha)$$

۲) نظیرهرعدد $\alpha \in Q^+$ یک عدد منطق $\frac{r}{b}$ یکتا از فاصله نیم‌باز $[0, 1[$ وجود دارد.

این تابع که Q^+ را روی $[0, 1[$ می‌نگارد اسم بخصوصی ندارد.

تبصره- در N همچنین داریم:

$$bq \leqslant a(q+1)$$

از آنجا در Q^+:

$$q \leqslant \frac{a}{b} < q + 1$$

بنابراین هرچه باشد $\alpha \in Q^+$:

$$e(\alpha) \leqslant \alpha < e(\alpha) + 1$$

فصل سوم

اعداد b-ئی

۱. هدف این فصل عبارت از بررسی اعداد منطقی است که برای آنها در مبنای اختیاری b میتوان نمایشی شبیه صورت بندی رقمی یک عدد طبیعی پیدا کرد.

این اعداد منطق α دارای خواص زیر هستند:

«یک نماینده α وجود دارد که مخرج آن یک توان صحیح b^p از مبنای b است».

این گونه اعداد منطق: «اعداد b-ئی» نامیده خواهند شد.

وقتیکه b برابر ده است این اعداد را «اعداد اعشاری» مینامند.

وقتیکه b برابر دو است این اعداد را: «اعداد دوئی» مینامند.

تعریف- عدد b-ئی بنا به تعریف عدد منطقی است که دارای یک نماینده است و مخرج این نماینده توان صحیح مبنای b دستگاه انتخابی است.

$$(\text{است } b\text{-ئی}, \alpha) \iff \left(\exists p \in N \qquad \alpha = \left[\frac{n}{b^p}\right]\right)$$

تبصره- هرچه باشد مبنای b داریم:

$$b^{\circ} = ۱$$

بنابراین هر عدد طبیعی $n \in N$ یک عدد b-ئی است هرچه باشد مبنای b چونکه:

$$n \in N \iff \left(n = \left[\frac{n}{۱}\right] = \left[\frac{n}{b^{\circ}}\right]\right)$$

مسئله‌ای که طرح آن فوریت دارد عبارت است از شناختن اعداد b-ئی در Q^+. قبل از حل این مسئله، مسئلهٔ مقدماتی زیر را در مجموعه N اعداد طبیعی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مسئلهٔ مقدماتی :

هرگاه دوعدد طبیعی a و $b > ۱$ بصورت تجزیه شده به‌حاصل ضرب عوامل اول‌مفروض باشند تحقیق کنید آیا یک عدد طبیعی مانند p وجود دارد که b^p مضرب a باشد:

$$b^p \in \mathcal{M}\,(a)$$

شرایط لازم– فرض کنیم چنین عدد p وجود دارد، در این صورت:

$$b^p \in \mathcal{M}\,(a) \iff (\exists q \in N^* \text{ بطوریکه } b^p = qa)$$

تجزیهٔ b^p شامل جمیع عوامل اول a با نمای حد اقل مساوی است.

ولی مجموعه مقسوم‌علیه‌های اول b^p با مجموعه مقسوم‌علیه‌های اول b منطبق است (بدیهی است که هر مقسوم علیه b، b^p را میشمارد و بعکس) بنابراین تجزیـه b شامل مقسوم‌علیه‌های اول a است. بدین ترتیب، برای اینکه p وجود داشته باشد بقسمیکه :

$$b^p \in \mathcal{M}\,(a)$$

لازمست که هر مقسوم‌علیه a مقسوم‌علیهی از b باشد.

شرایط کافی– فرض کنیم که هر مقسوم‌علیه اول a مقسوم‌علیهی از b باشد و ثـابت کنیم که یک عدد طبیعی p وجود دارد بطوریکه $b^p \in \mathcal{M}\,(a)$ برای تمرکز فکر فرض کنیم کـه a دارای سه عامل اول است:

$$a = c^\alpha \cdot d^\beta \cdot e^\gamma$$

γ, β, α اعداد طبیعی غیر صفر میباشند.

بنا به فرض تجزیه عـوامل اول b شامل عوامل e, d, c است. البته ممکن است شامل عوامل دیگر هم باشد. در تجزیه b عوامل c و d و e را مشخص کرده و سایر عوامل را رویهم با یک عامل q نمایش میدهیم:

$$b = c^{\alpha'} \cdot d^{\beta'} \cdot e^{\gamma'} \cdot q$$

γ', β', α' اعداد طبیعی غیر صفر میباشند.

p را طوری انتخاب کنیم که در عین حال داشته باشیم:

$$p\alpha' \geqslant \alpha; \qquad p\beta' \geqslant \beta; \qquad p\gamma' \geqslant \gamma$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$b^p = c^{p\alpha'} \cdot d^{p\beta'} \cdot e^{p\gamma'} \cdot q^p$$

بنابراین:

$$b^p \in \mathcal{M}\,(a)$$

پس میتوانیم بگوئیم:

لم مقدماتی: هرگاه a و b دو عدد طبیعی اکیداً بزرگتر از ۱ باشند، برای اینکه عدد طبیعی p وجود داشته باشد بطوریکه b^p مضرب a باشد لازم و کافی است هر مقسوم‌علیه اول a مقسوم‌علیهی از b باشد.

تبصرهٔ ۱ــ فرض کنیم p وجود داشته باشد بطوریکه:

$$b^p \in \mathcal{M}(a)$$

در این صورت هر عدد طبیعی q در:

$$b^{p+q} \in \mathcal{M}(a)$$

صدق میکند:

زیرا:

$$b^{p+q} = b^p \cdot b^q \in \mathcal{M}(b^p) \subset \mathcal{M}(a)$$

از آنجا نتیجه میشود که مجموعه اعداد p بطوریکه:

$$b^p \in \mathcal{M}(a)$$

باشد یک مجموعه نامتناهی و یا یک مجموعه تهی برحسب زوج (a و b) است. این مجموعه تهی است اگر یک مقسوم علیه اول a عدد b را نشمارد و این مجموعه نامتناهی است اگر یک مقسوم‌علیه اول a عدد b را بشمارد.

تبصره ۲ــ اگر حالت‌دوم بر قرار باشد در این صورت اعداد p بقسمیکه $b^p \in \mathcal{M}(a)$ یک مجموعه نامتناهی تشکیل میدهند. این مجموعه دارای یک کوچکترین جزء p_o است. پس کوچکترین عدد صحیح p_o وجود دارد بقسمیکه:

$$b^{p_o} \in \mathcal{M}(a)$$

شناختن یك عدد منطق bـئی.

میدانیم‌که یک عدد منطق صحیح bـئی است. پس مسئله برای‌یک عدد منطق غیرصحیح α مطرح است.

اگر $\frac{n}{d}$ نماینده تحویل ناپذیر α باشد: n و d نسبت بهم اولند و $d > ۱$ است. چونکه α صحیح نیست.

چون $\frac{n}{d}$ تحویل ناپذیر است، داریم:

$$\frac{n}{d} \sim \frac{n'}{d'} \iff (\exists q \in N^* \qquad n' = nq \qquad \text{و} \qquad d' = dq)$$

ملاحظه میشود که مخرج d' هر نماینده α در: $d' \in \mathcal{M}(d)$ صدق میکند و بعکس هر عدد d' که در:

$$d' \in \mathcal{M}(d)$$

صدق کند مخرج یک نماینده α است.

بنا بتعریف:

$$\left(\frac{n}{d} \text{ است } b\text{-ئی}\right) \iff \left(\exists p \in N \quad \frac{n}{d} \sim \frac{n'}{b^p}\right)$$

از آنچه گذشت نتیجه میشود: برای اینکه $\frac{n}{d}$، b-ئی باشد لازم و کافی است که:

$$b^p \in \mathcal{M}(d)$$

در این صورت با استفاده از لم مقدماتی میتوانیم بگوئیم:

قضیه- برای اینکه یک عدد منطق غیر صحیح b-ئی باشد لازم و کافی است که نماینده تحویل‌ناپذیر آن دارای مخرجی باشد که جمیع مقسوم‌علیه‌های اول این مخرج مقسوم‌علیه‌های b باشند.

اعداد اعشاری: اگر $b = ۱۰$ باشد داریم: $b = ۲ \times ۵$ و بنابراین:

برای اینکه یک عدد منطق غیر صحیح اعشاری باشد لازم و کافی است که نماینده تحویل‌ناپذیر آن دارای مخرجی باشد که مقسوم علیه‌های اول به مجموعه $\{۲, ۵\}$ متعلق باشند.

مثال ۱- $\alpha = \frac{۵۵}{۸۸}$

نماینده تحویل‌ناپذیر α، $\frac{۵}{۸}$ است.

داریم: $۲^۳ = ۸$ پس α اعشاری است.

کوچکترین مقدار را برای:

$$b^p \in \mathcal{M}(۸)$$

تعیین نمائیم. یعنی:

$$۲^۳ \text{ مضرب } ۲^p \times ۵^p$$

ملاحظه میشود که $p = ۳$ و:

$$\alpha = \frac{۵۵}{۸۸} = \frac{۵}{۸} = \frac{۵ \times ۵^{۳}}{۲^{۳} \times ۵^{۳}} = \frac{۶۲۵}{۱۰^{۳}}$$

مثال ۲ـ

$$\alpha = \frac{۳۱}{۱۴۰}$$

۳۱ اول است و ۱۴۰ را نمیشمارد و کسر مفروض نماینده تحویل ناپذیر α است. داریم:

$$۱۴۰ = ۲^{۲} \times ۵ \times ۷$$

مخرج دارای مقسوم‌علیه ۷ است که ۱۰ را نمیشمارد بنابراین α اعشاری نیست.

نمایش رقمی یك عدد b-ئی

اگر α یک عدد b-ئی غیر صحیح و اگر $\frac{n}{d}$ نماینده تحویل‌ناپذیر آن باشد مجموعه نامتناهی اعداد طبیعی p وجود دارد بقسمیکه:

$$b^{p} \in \mathcal{M}(d)$$

کوچکترین جزء p این مجموعه یکتا است. پس در طبقه α یک کسر یکتا وجود دارد:

$$\frac{a}{b^{p}}$$

که نظیر کوچکترین عدد p است.

این کسر را ساده‌ترین نماینده b-ئی عدد b-ئی α مینامند و آنرا نباید با ساده‌ترین نماینده یا نماینده تحویل ناپذیر α اشتباه کرد.

در مثال قبل:

$$\alpha = \frac{۵۵}{۸۸}$$

نماینده تحویل ناپذیر $\frac{۵}{۸}$ است.

ساده‌ترین نماینده:

$$\frac{۶۲۵}{۱۰^{۳}}$$

است.

ساده‌ترین نماینده b-ئی طبقه α:

$$\frac{a}{b^p}$$

را از آنجا میتوان شناخت که b عدد a را نمیشمارد. زیرا اگر عدد b عدد a را بشمارد داریم:

$$a = ba'$$

و:

$$\frac{a}{b^p} \sim \frac{ba'}{b^p} \sim \frac{a'}{b^{p-1}}$$

و بنابراین:

$$\frac{a}{b^p}$$

ساده‌ترین نماینده b-ئی نمیتواند باشد.

اگر b عدد a را نشمارد. خواهیم داشت:

$$\frac{a}{b^p} \sim \frac{a'}{bq}$$

با $p > q$. در غیر این صورت داریم:

$$ab^q = a'b^p \quad \Rightarrow \quad a = a'b^{p-q}$$

و b عدد a را میشمارد و این خلاف فرض است.

از این به بعد، عدد b-ئی غیر صحیح α را با ساده‌ترین نماینده b-ئی آن که یکتا است نمایش میدهیم:

$$\alpha = \frac{a}{b^p}$$

هرگاه نمایش رقمی عدد a در مبنای b بصورت :

$$a = \overline{r_n \ldots r_0}$$

باشد. برای اینکه b عدد a را بشمارد لازم و کافی است که $r_0 \neq 0$. پس داریم:

$$\alpha = \frac{\overline{r_n \cdots r_0}}{b^p}$$

با $r_n \neq 0$ و $r_0 \neq 0$ و این نماینده α یکتا است.

دو حالت در نظر بگیریم:

حالت اول: $n \geqslant p$ در این صورت در بسط به مبنای b عدد α جمله ردیف p وجود دارد:

$$a = r_n b^n + \cdots + r_p b^p + r_{p-1} b^{p-1} + \cdots + r_0$$

از آنجا:

$$\alpha = \frac{a}{b^p} = r_n b^{n-p} + \cdots + r_p + r_{p-1}\frac{1}{b} + \cdots + r_0 \frac{1}{b^p}$$

بدین ترتیب گسترش تعمیم داده شده به مبنای b عدد b-ئی α بدست میآید و آنرا بدین جهت «تعمیم داده شده» مینامیم که در آن قوای $\frac{1}{b}$ معکوس مبنا وارد شده‌اند:

$$\frac{1}{b}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{b^3}, \ldots$$

و آنها را «واحدهای b-ئی» مرتبه اول؛ مرتبه دوم، مرتبه سوم ... مینامند.

این گسترش بدو قسمت تجزیه میشود.

قسمت صحیح

$$r_n b^{n-p} + \cdots + r_p \qquad \text{با} \qquad r_n \neq 0$$

و قسمت b-ئی:

$$r_{p-1}\frac{1}{b} + \cdots + r_0 \frac{1}{b^p} \qquad \text{با} \qquad r_0 \neq 0$$

برای تمییز این دوقسمت از یکدیگر آنها را با یک ممیز ازهم جدا میکنند و مینویسند:

$$\alpha = \overline{r_n \ldots r_p} \qquad \text{و} \qquad \overline{r_{p-1} \ldots r_0}$$

قسمت b-ئی یک صورت بندی p رقمی است و رقم سمت راست آن $r_0 \neq 0$ است.

حالت دوم: $p > n$

در این صورت در بسط a جمله ردیف p وجود ندارد:

$$a = r_n b^n + \cdots + r_0$$

در این صورت مقدار مینیمم $p - n$ جمله صفر اضافه میکنیم تا جمله ردیف p را نیز داشته باشیم:

$$a = 0 \cdot b^p + 0 \cdot b^{p-1} + \cdots + 0 b^{n+1} + r_n b^n + \cdots + r_0$$

و بنابراین:

$$\alpha = \frac{a}{b^p} = 0 + 0 \cdot \frac{1}{b} + \cdots + 0 \cdot \frac{1}{b^{p-(n+1)}} + r_n \frac{1}{b^{p-n}} + \cdots + r_0 \frac{1}{b^p}$$

و α را با جدا کردن قسمت صحیح 0 آن با یک ممیز از قسمت b-ئی که عبارت از $\overline{0 \ldots 0 r_n \ldots r_0}$ است مینویسند:

$$\alpha = \circ, \overline{\circ \cdots \circ r_n \cdots r_\circ} \qquad r_n \neq \circ \text{ و } r_\circ \neq \circ$$

قسمت b-ئی باز هم یک صورت بندی p رقمی است و رقم آخر سمت راست آن مخالف صفر است.

در هردو حالت عدد b-ئی غیرصحیح α با یک طرزفقط درمبنای b نمایش داده میشود.

مثال در دستگاه پایه ۱۰:

$$\alpha = \frac{۸۹۳۴۵}{۱۰۰۰} = ۸۹/۳۴۵$$

$$\beta = \frac{۱۳}{۱۰۰۰} = ۰/۰۱۳$$

۳ـ رابطهٔ ترتیب در صورت بندی b-ئی

مجموعه اعداد b-ئی در مبنای b را با Q_b^+ نمایش میدهیم:

این یک قسمت از Q^+ است و Q_b^+ شامل N است:

$$N \subset Q_b^+ \subset Q^+$$

رابطهٔ ردیف کلی Q^+ یک رابطه ردیف کلی در Q_b^+ است.

مسئله‌ای که طرح میشود عبارت است از:

دو عدد b-ئی α و β با صورت بندی، رقمی‌شان در مبنای b داده شده‌اند.

مطلوبست مرتب کردن این عددها.

قسمتهای صحیح α و β را بترتیب با $e(\alpha)$ و $e(\beta)$ نمایش میدهیم، داریم:

$$e(\alpha) \leqslant \alpha < e(\alpha) + ۱$$

$$e(\beta) \leqslant \beta < e(\beta) + ۱$$

حالت اول:

$$e(\alpha) < e(\beta)$$

در این صورت داریم:

$$e(\alpha) + ۱ \leqslant e(\beta)$$

با توجه به نامساویهای قبلی:

$$\alpha < e(\alpha) + ۱ \leqslant e(\beta) < \beta$$

پس:

$$e(\alpha) < e(\beta) \quad \Rightarrow \quad \alpha < \beta$$

اگر قسمتهای صحیح α و β متفاوت باشند اعداد α ی β در همان ترتیب قرار دارنــد که قسمتهای صحیح آنها قرار دارند و ما طرز مرتب کردن اعداد صحیح را قبلاً دیده‌ایم.

حالت دوم: $e(\alpha) = e(\beta) = n$

داریم:

$$\alpha = n,\overline{r_1 \cdots r_p}$$
$$\beta = n,\overline{u_1 \cdots u_q}$$

قسمت b-ئی عدد α دارای p رقم و مال β دارای q رقم است: انــدیسهای ارقــام نظیر مرتبه‌های «واحدهای b-ئی» است.

در این صورت داریم:

$$\alpha = n + \frac{\overline{r_1 \cdots r_n}}{b^p} \qquad \text{و} \qquad \beta = n + \frac{\overline{u_1 \cdots u_q}}{b^q}$$

از آنجا:

$$\alpha - n = \frac{\overline{r_1 \cdots r_n}}{b^p} \qquad \text{و} \qquad \beta - n = \frac{\overline{u_1 \cdots u_q}}{b^q}$$

دو قسمت b-ئی را بیک مخرج تحویل نمائیم. فرض میکنیم $p \leqslant q$:

$$\alpha - n = \frac{\overline{r_1 \cdots r_p 0 \cdots 0}}{b^q}$$

(با اضافه کردن $q - p$ صفر به صورت)

$$\beta - n = \frac{\overline{u_1 \cdots u_q}}{b^q}$$

α و β درهمان ترتیب قرار دارند که $\alpha - n$ و $\beta - n$، و چون این دو عدد دارای مخرجهای مساوی هستند در ترتیب صورتهایشان قرار دارند و چون صورت‌ها دارای تعداد ارقام متســاوی هستند قانون ترتیب اعداد صحیح طبیعی را بکار میبریم. اگر بفرض $k - 1$ رقم اولیـه سمت چپ در هر دو برابر باشند و $r_K \neq u_K$ باشد در این صورت:

$$r_k < u_k \;\Rightarrow\; \alpha - n < \beta - n \;\Rightarrow\; \alpha < \beta$$

و این عبارت از یک ترتیب لغتی برای قسمتهای b-ئی است:

$$\overline{r_1 \cdots r_p}$$

و:

$$\overline{u_1 \cdots u_q}$$

وقتیکه کلمه‌ای را در کتاب لغت جستجو میکنند کاری به تعداد حروف این کلمه نیست بلکه طبیعت حروف و ترتیب آنها مطرح است.

قاعده ـ اولاً ـ دوصورت بندی bـئی که دارای قسمتهای صحیح متفاوت میباشند در همان ترتیب قسمتهای صحیح خود قرار دارند.

ثانیاً ـ در صورت بندی bـئی که دارای قسمتهای صحیح متساوی میباشند در ترتیب دو رقم اولیه متمایز هم مرتبه bـئی قرار دارند.

مثال ۱ـ

$$\alpha = ۲/۷۵ \qquad \text{و} \qquad \beta = ۱/۹۴۱۸$$

داریم:

$$e(\alpha) = ۲ \qquad \text{و} \qquad e(\beta) = ۱$$

$$e(\alpha) > e(\beta) \quad \Rightarrow \quad \alpha > \beta$$

مثال ۲ـ

$$\alpha = ۰/۸۷۶ \qquad \text{و} \qquad \beta = ۰/۸۷۵۹$$

قسمتهای صحیح برابرند. رقمهای هم مرتبه قسمتهای دهدهی را مقایسه میکنیم. در مرتبه سوم داریم $۵ < ۶$ درنتیجه:

$$\alpha > \beta$$

۴ـ عملها در Q_b^+

جمع.

هرگاه α و β دو عدد bـئی باشند:

$$\alpha = \frac{a}{b^p} \qquad \beta = \frac{a'}{b^q}$$

اگر $p \geqslant q$ باشد داریم:

$$\alpha + \beta = \frac{a + a'b^{p-q}}{b^p}$$

نتیجه یک عدد bـئی است.

جمع، در Q_b^+ درونی است.

$$\alpha, \beta \in Q_b^+ \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta \in Q_b^+$$

Q_b^+ یک نیم‌گروه جابجاپذیر بازاء جمع است.

جزء خنثای ٥ متعلق باو است و هر جزء منتظم است.

تفریق.

هرگاه:

$$\alpha, \beta \in Q_b^+ \qquad \text{و} \qquad \alpha > \beta$$

باشند:

$$\alpha = \frac{a}{b^p} \qquad \text{و} \qquad \beta = \frac{a'}{b^q}$$

اگر $q \leqslant p$ باشد b^p را مخرج مشترک اختیار میکنیم.

$$\alpha - \beta = \frac{a - a'b^{p-q}}{b^p}$$

پس داریم:

$$\alpha, \beta \in Q_b^+ \quad \Rightarrow \quad \alpha - \beta \in Q_b^+$$

تفریق در Q_b^+ درونی است. یادآور میشویم که تفریق در همه جا معین نیست و لازم است که $\alpha \geqslant \beta$ باشد.

ضرب.

هرگاه دو عدد b-ئی مفروض باشند:

$$\alpha = \frac{a}{b^p} \qquad \text{و} \qquad \beta = \frac{a'}{b^q}$$

داریم:

$$\alpha\beta = \frac{aa'}{b^{p+q}}$$

پس:

$$\alpha, \beta \in Q_b^+ \quad \Rightarrow \quad \alpha\beta \in Q_b^+$$

ضرب در Q_b^+ درونی است:

جابجا پذیری و شرکت پذیری و توزیع پذیری نسبت به جمع از آن نتیجه میشود. جزء

خنثای ۱ متعلق به Q_b^+ است.

ولی معکوس $\frac{1}{\alpha}$ یک عدد $\alpha \in Q_b^+$ همواره به Q_b^+ متعلق نیست.

هرگاه:

$$\alpha = \frac{a}{b^p}$$

باشد داریم:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{b^p}{a}$$

در حالت کلی یک عدد b-ئی بدست نمیآید (لازم است که مقسوم علیه‌های اول a مقسوم علیه‌هائی از b باشند). از آنجا نتیجه میشود که Q_b^+ یک گروه ضربی نیست.

ضرب به Q_b^+ یک بنیان نیم گروه جابجاپذیری با جزء خنثی میبخشد.

همانطور که در N بود بعضی وقتها میگویند که Q_b^+ یک نیم حلقه است.

فصل چهارم

تقریبات b-ئی در اعداد منطق

۱ـ مقدار b-ئی تقریبی در اعداد منطق

هرگاه مبنای شمار b انتخاب شود و یک عدد منطــق α و یک عدد طبیعی n مفــروض باشند:

$$\alpha \in Q^{+} \qquad n \in N$$

منظور پیدا کردن یک عدد q است بقسمی که:

$$\frac{q}{b^n} \leqslant \alpha < \frac{q+۱}{b^n}$$

نمایـنـده α را $\frac{a}{d}$ اختیار کنیم، پس داریم:

$$\frac{q}{b^n} \leqslant \frac{a}{d} < \frac{q+۱}{b^n} \iff dq \leqslant ab^n < d\,(q+۱)$$

شرایط دوم از شرایط اول با ضرب در db^n بدست میآیند.

عدد مطلوب q عبارت از خارج قسمت اقلیدسی ab^n بر d و یکتا است. از آنجا نتیجه میشود که بازاء α و n مفروض عـدد $\frac{q}{b^n}$ یکتا است.

تعریف ـ $\frac{q}{b^n}$ را مقـدار b-ئی تقـریبی α با $\frac{۱}{b^n}$ تقریب نقصانی و $\frac{q+۱}{b^n}$ را مــقــدار b-ئی تقریبی α با $\frac{۱}{b^n}$ تقریب اضافی مینامند.

حالت مخصوص ـ $n = ۰$ در این صورت داریم:

$$q \leqslant \alpha < q + 1$$

عدد q قسمت صحیح (α) e-ی عدد α است: q مقدار تقریبی α با یک واحد تقریب نقصانی است.

مثال ـ در دستگاه به پایه ۱۰٪ فرض کنیم: $\alpha = 132/211$ و $n = 3$ میخواهیم مقادیر تقریبی α را تا $\frac{1}{10^3}$ تقریب بدست بیاوریم.

$$\frac{q}{10^3} \leqslant \frac{132}{211} < \frac{q+1}{10^3} \iff 211q \leqslant 132000 < 211\,(q+1)$$

خارج قسمت اقلیدسی ۱۳۲۰۰۰ را بر ۲۱۱ حساب میکنیم. داریم:

$$q = 625$$

مقدار اعشاری تقریبی α بـا $\frac{1}{10^3}$ تقریب نقصانی عبارت است از:

$$\frac{q}{10^3} = 0/625$$

داریم:

$$0/625 < \frac{132}{211} < 0/626$$

مقایسه مقادیر تقریبی یک عدد منطق.

مسئله‌ای که اکنون مطرح است عبارت‌است از:

مقایسه مقادیر تقریبی α تا $\frac{1}{b^n}$ و $\frac{1}{b^{n+1}}$ تقریب نقصانی از یک طرف و اضافی از طرف دیگر. فرض کنیم: $\alpha = \frac{a}{d}$ داریم:

$$\frac{q}{b^n} \leqslant \frac{a}{d} < \frac{q+1}{b^n} \iff dq \leqslant ab^n < d\,(q+1) \tag{1}$$

$$\frac{q'}{b^{n+1}} \leqslant \frac{a}{d} < \frac{q'+1}{b^{n+1}} \iff dq' \leqslant ab^{n+1} < d\,(q'+1) \tag{2}$$

طرفین (۱) را در b ضرب میکنیم:

$$dqb \leqslant ab^{n+1} < d\,(q+1)\,b \tag{3}$$

(۲) و (۳) را مقایسه میکنیم؛ خارج قسمت اقلیدسی q' عدد $ab^{n+۱}$ بر d بزرگترین عدد طبیعی است بقسمیکه:

$$dq' \leqslant ab^{n+۱}$$

پس داریم:

$$qb \leqslant q'$$

از آنجا:

$$\frac{q}{b^n} \leqslant \frac{q'}{b^{n+۱}} \qquad (۴)$$

بهمین ترتیب q' خارج قسمت اقلیدسی $ab^{n+۱}$ بر d کوچکترین عدد طبیعی است بقسمیکه:

$$ab^{n+۱} < d\,(q' + ۱)$$

پس داریم:

$$q' + ۱ \leqslant (q + ۱)\, b$$

از آنجا:

$$\frac{q' + ۱}{b^{n+۱}} \leqslant \frac{q + ۱}{b^n} \qquad (۵)$$

از (۴) و (۵) نتیجه میشود:

$$\frac{q}{b^n} \leqslant \frac{q'}{b^{n+۱}} \leqslant \alpha < \frac{q' + ۱}{b^n} \leqslant \frac{q + ۱}{b^n}$$

مثال ــ مقادیر تقریبی دهدهی $\alpha = ۶۵۸۱/۲۷۲$ تا $\frac{۱}{۱۰^n}$ تقریب بازاء

$$n = ۰, ۱, ۲, ۳$$

تقسیم اقلیدسی ۶۵۸۱ بر ۲۱۲ را انجام میدهیم:

۶۵۸۱	۲۱۲
۲۲۱	۳۱/۰۴۲
۹۰۰	
۵۲۰	
۹۶	

به محض اینکه $e(\alpha) = ۳۱$ بدست آمد ممیز میزنیم و تقسیم را تا اینکه سه رقم

اعشاری در خارج قسمت بدست آید ادامه میدهیم:

مقادیر تقریبی α:

	نقصانی	اضافی
با ۱ تقریب	۳۱	۳۲
با $\frac{۱}{۱۰}$ تقریب	۳۱/۰	۳۱/۱
با $\frac{۱}{۱۰^۲}$ تقریب	۳۱/۰۴	۳۱/۰۵
با $\frac{۱}{۱۰^۳}$ تقریب	۳۱/۰۴۲	۳۱/۰۴۳

مقادیر تقریبی نقصانی افزایش میابند و یا تغییر نمیکنند.
مقادیر تقریبی اضافی کاهش میپذیرند یا تغییر نمیکنند.

۲ـ رشته مقادیر تقریبی

هرگاه بجای n بترتیب اعداد N را قرار دهیم:

$$n \in \{۰, ۱, ۲, \cdots, n, \cdots\}$$

یک رشته مقادیر تقریبی نقصانی بدست میآید:

$$(S_۱) \qquad q_۰ \leqslant \frac{q_۱}{b} \leqslant \frac{q_۲}{b^۲} \leqslant \cdots \leqslant \frac{q_n}{b_n} \leqslant \cdots$$

این رشته صعودی است (بهمفهوم وسیع کلمه: دوجمله متوالی ممکن است برابر باشند). جمله اول $q_۰$ قسمت صحیح α است. رشته $(S_۱)$ بوسیله α فرا بسته است. یک رشته مقادیر تقریبی اضافی بدست میآید:

$$(S_۲) \quad q_۰ + ۱ \geqslant \frac{q_۱ + ۱}{b} \geqslant \frac{q_۲ + ۱}{b^۲} \geqslant \cdots \geqslant \frac{q_n + ۱}{b_n} \geqslant \cdots$$

این رشته نزولی است (بمفهوم وسیع کلمه) و بتوسط α فرو بسته است.
هردو رشته $(S_۱)$ و $(S_۲)$ نامتناهی هستند.

فاصله‌های فراگیر.

هرچه باشد $n \in N$ میدانیم که:

$$\frac{q_n}{b^n} \leqslant \alpha < \frac{q_n + ۱}{b^n}$$

عدد α تعلق به فاصله نیم‌باز از راست دارد:

$$\alpha \in \left[\frac{q_n}{b^n} \quad \text{و} \quad \frac{q_n+۱}{b^n}\right[$$

بدین ترتیب یک رشته نامتناهی فواصل بدست می‌آید که انتهاهای پائین آنها رشتهٔ $(S_۱)$ و انتهاهای بالائی آنها رشتهٔ $(S_۲)$ را تشکیل میدهند.

پس داریم:

$$(S_۳) \qquad \left[q_۰, q_۰+۱\right[\supset \left[\frac{q_۱}{b}, \frac{q_۱+۱}{b}\right[\supset \cdots \supset \left[\frac{q_n}{b^n}, \frac{q_n+۱}{b^n}\right[\supset \cdots$$

$(S_۳)$ یک رشته نامتناهی فواصل فراگیر است یعنی هر فاصله‌ای همه فاصله‌های بعدی را فرا میگیرد.

درازای یك فاصله:

تفاضل بین دو انتهای یک فاصله را درازای آن مینامند.

درازای فاصله ردیف n از $(S_۳)$ برابر است با:

$$l_n = \frac{q_n+۱}{b^n} - \frac{q_n}{b^n} = \frac{۱}{b^n}$$

درازاهای $l_۰$ و $l_۱$ و $l_۲$ و $\ldots, l_n, \ldots$ یک رشته نامتناهی اعداد b-ئی را تشکیل میدهند.

ملاحظه کنیم که عبارت «عدد آنقدر کوچک که بخواهیم» در Q^+ دارای مفهوم است چونکه هرچه باشد $\alpha \in Q^+$ فاصله باز $\left]۰, \alpha\right[$ تهی نیست. قضیه زیر را اثبات کنیم:

قضیهٔ ۱- هرچه باشد عدد منطق ε، آنقدر کوچك که بخواهیم، یک عدد طبیعی p وجود دارد بقسمیکه:

$$n > p \;\Rightarrow\; \frac{۱}{b^n} < \varepsilon$$

اثبات:

عدد منطق غیر مشخص $\varepsilon \neq ۰$ را اختیار میکنیم. قسمت صحیح $\frac{۱}{\varepsilon}$ را:

$$e\left(\frac{۱}{\varepsilon}\right)$$

مینامیم

$$e\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} < e\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$$

اگر تعداد رقمهای عدد طبیعی:

$$e\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$$

در مبنای b برابر p باشد (II، فصل ۴، قضیهٔ ۲)

این عدد p باید در:

$$b^{p-1} \leqslant e\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1 < b^{p}$$

صدق نماید:

پس داریم:

$$\frac{1}{\varepsilon} < e\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1 < b^{p}$$

از آنجا:

$$\frac{1}{b^{p}} < \varepsilon$$

چون تابع $x \to b^{x}$ در N صعودی است (چونکه $b > 1$)، داریم:

$$n > p \quad \Rightarrow \quad b^{n} > b^{p} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{b^{n}} < \frac{1}{b^{p}} < \epsilon$$

پس قضیه ثابت است.

تعریف ـ برای بیان اینکه بهر عدد ε میتوان یک ردیف p را همراه کرد بقسمیکه:

$$n > p \quad \Rightarrow \quad l_{n} < \varepsilon$$

میگویند: «رشته l_n بسمت صفر میل میکند».

علامت: «$\frac{1}{b^{n}}$ بسمت صفر میل میکند» را بطریق زیر نمایش میدهند:

$$(\forall\varepsilon \in Q^{+}; \quad (\varepsilon \neq 0) \quad \exists p \in N) \quad (n > p) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{b^{n}} < \varepsilon\right)$$

نتیجه ـ رشته بینهایت (S_3) را: «رشته نامتناهی فاصله‌های فراگیر که در ازای آن بسمت صفر میل میکند» مینامند.

همانطور که میدانیم عدد α به جمیع این فواصل تعلق دارد.

و این تنها عددی است که دارای این خاصیت است. زیرا اگر عدد دیگر β وجود میداشت که به همه فواصل $(S۳)$ متعلق بود (با فرض $\alpha < \beta$) با بکار بستن قضیه ۱ برای $\alpha - \beta = \varepsilon$ تناقض زیر بوجود میامد: از ردیف p به آن طرف فاصله‌ای که شامل α و β است از $\alpha - \beta$ کوچکتر است.

پس عدد α-ی متعلق به جمیع فواصل $(S_۳)$ یکتا است.

۳- صورت‌بندی یك عدد منطق در مبنای b

هرگاه $\alpha \in Q^+$ باشد رشته $(S_۱)$ مقادیر b-ئی تقریبی نقصانی α را در نظر میگیریم:

$$(S_۱) \qquad q_۰ = e\,(\alpha), \frac{q_۱}{b}, \frac{q_۲}{b^۲}, \cdots, \frac{q^n}{b^n}, \cdots$$

نماینده α را $\frac{a}{d}$ مینامیم.

برای بدست آوردن جمله‌های متوالی $(S_۱)$ در مبنای b تقسیم اقلیدسی a را بر d انجام میدهیم. ابتدا نتیجه میشود:

$$q_۰ = e\,(\alpha)$$

در خارج قسمت در سمت راست این قسمت صحیح ممیز قرار میدهیم و تقسیم را ادامه میدهیم: از قسمت b-ئی خارج قسمت اولین رقم $r_۱$ را حساب میکنیم:

$$\frac{q_۱}{b} = q_۰, r_۱$$

بعد رقم دوم را

$$\frac{q_۲}{b^۲} = q_۰,\overline{r_۱ r_۲}$$

و همین طور تا ردیف n، داریم:

$$\frac{q_n}{b^n} = q_۰, \overline{r_۱ r_۲ \ldots r_n}$$

میتوان همینطور ادامه داد: یک قسمت b-ئی نامتناهی بدست میآید:

$$q_۰, \overrightarrow{r_۱ r_۲ \cdots r_n \cdots}$$

خط افقی پیکان دار راست و نشان میدهد که صورت‌بندی تا بینهایت از سمت راست ادامه میابد

اگر $\alpha \in Q_b^+$ باشد در این صورت تقسیم «منتج» میشود:

هرگاه $\frac{a}{b^n}$ ساده‌ترین نماینده b-ئی α باشد جمیع رقمهای r_i از $i = n + ۱$ به‌آنطرف برابر صفر میگردند.

اگر $\alpha \notin Q_b^+$ باشد ثابت میکنیم که قسمت b-ئی ازیک ردیف معین به آنطرف متناوب میشود.

ابتدا مثالهائی در دستگاه اعشاری اختیار میکنیم.

مثال ۱- $\alpha = \frac{۲۶}{۱۱}$

تقسیم اقلیدسی ۲۶ بر ۱۱ را انجام میدهیم.

۲۶	۱۱
۴۰ ←	۲/۳۶۳۶....
۷۰	
۴۰ ←	

ملاحظه میشود که باقیمانده جزء ۴ پس از دو ردیف تکرار میشود، نتیجه میشود که در خارج قسمت طبقه ۳۶ تا بینهایت تکرار میگردد، میگویند که صورت‌بندی دارای دورهٔ تناوب ۳۶ است.

$$\frac{۲۶}{۱۱} = \overrightarrow{۲/۳۶۳۶...}$$

زیر دوره تناوب خط کشیده‌ایم.

مثال ۲- $\alpha = \frac{۵۶۱}{۱۸۵}$

۵۶۱	۱۸۵
۶۰۰ ←	۳/۰۳۲۴۳ ...
۴۵۰	
۸۰۰	
۶۰ ←	

باقیمانده ۶۰۰ اولین مرتبه اعشاری، سه ردیف بعد تکرار میگردد. در خارج قسمت

طبقه ۳۲۴ بطور تناوب تکرار خواهد شد داریم:

$$\frac{۵۶۱}{۱۸۵} = ۳/۰\overrightarrow{\underline{۳۲۴}۳۲۴۰ \cdots ۰}$$

دوره تناوب ۳۲۴ است ولی در این‌جا بلافاصله بعد از ممیز شروع نمیشود یک قسمت غیر متناوب که از رقم صفر تشکیل شده است وجود دارد.

حالت کلی– $\alpha = \frac{a}{d}$ فرض میکنیم.

رشته مقادیر b-ئی تقریبی نقصانی از تقسیمهای اقلیدسی متوالی مقسوم‌علیه‌های متعلق به

$$\{a, ab, ab^۲, \cdots, ab^n, \cdots\}$$

بر مقسوم‌علیه d بدست میآیند.

یک تعداد بینهایت تقسیم‌های اقلیدسی وجود دارد ولی چون مقسوم‌علیه همه این تقسیمها d است باقیمانده‌های ممکن r تعداد محدودی دارند.

$$r < d$$

اصلی این باقیمانده‌ها حد اکثر برابر d است. بنابراین یک عدد طبیعی n وجود دارد بقسمیکه ab^n باقیمانده‌ای بدست خواهد داد که قبلاً نیز بدست آمده است.

کوچکترین عددی را که دارای این خاصیت است n مینامیم:

n اولین مرتبه‌ای است که ab^n باقیمانده تکراری تولید میکند و اگر k مرتبه ab^k باشد که این باقیمانده را داده است $(k < n)$ داریم:

$$ab^n \equiv ab^k \qquad (\mathrm{mod}\ d)$$

با ضرب متوالی در b، همواره با مدولو d داریم:

$$ab^{n+۱} \equiv ab^{k+۱}$$

یعنی باقیمانده‌های مرتبه‌های $n + ۱$ و $k + ۱$ متساویند.

$$ab^{n+۲} = ab^{k+۲}$$

یعنی باقیمانده‌های مرتبه‌های $n + ۲$ و $k + ۲$ نیز برابرند و همین طور تا آخر تا به $k + i = n$ برسیم (بازای $i = n - k$)

صورت‌بندی α در مبنای b از مرتبه k به بعد یک دوره تناوب $n - k$ رقمی را ارائه خواهد کرد. این طبقه را با حرف p نمایش میدهیم:

$$p = \overline{r_k \cdots r_{n-۱}}$$

قسمت b-ئی α یک قسمت غیر منتظم $k - ۱$ رقمی خواهد داشت و اگر $k = ۱$ باشد

این قسمت وجود ندارد.

اگر $k > ۱$ باشد این قسمت را با q نمایش میدهیم:

$$q = \overline{r_۱ \cdots r_{k-۱}}$$

بدین ترتیب عدد منطق α یک صورت‌بندی نامتناهی متناوب بـا دوره تناوب p دارد و اگر e قسمت صحیح α باشد:

$$\alpha = e, \overrightarrow{qppp \cdots}$$

بعکس ثابت میکنیم که یک صورت‌بندی متناوب نامتناهی یک عدد منطق را ارائه میدهد. مثالی از دستگاه اعشاری اختیار میکنیم:

مثال ــ صورت‌بندی:

$$x = \overrightarrow{۲/۳۵۴۵۴ \cdots}$$

را اختیار میکنیم که قسمت غیر متناوب آن ۳ و دوره تناوب آن ۵۴ است. برای این صورت‌بندی x قواعد معلوم در دستگاه پایه ۱۰ را بکار میبندیم. داریم:

$$۱۰ x = \overrightarrow{۲۳/۵۴۵۴۵۴ \cdots}$$

$$۱۰ x - ۲۳ = \overrightarrow{۰/۵۴۵۴ \cdots}$$

اگر صورت‌بندی:

$$y = \overrightarrow{۰/۵۴۵۴ \cdots}$$

نمایش یک عدد منطق باشد x نیز یک عدد منطق را نمایش خواهد داد چونکه:

$$۱۰ x - ۲۳ = y$$

ایجاب میکند:

$$x = \frac{۲۳ + y}{۱۰}$$

ثابت میکنیم، y که دارای قسمت صحیح صفر است و قسمت غیر متناوب نـدارد یک عدد منطق را نمایش میدهد. داریم:

$$۱۰^۲ y = \overrightarrow{۵۴/۵۴۵۴ \cdots}$$

یا:

$$۱۰^۲ y - ۵۴ = \overrightarrow{۰/۵۴۵۴ \cdots}$$

مقدار طرف راست برابر y است:

$$۱۰^۲ y - ۵۴ = y$$

بنابراین:

$$۹۹ y = ۵۴$$

از آنجا:

$$y = \frac{۵۴}{۹۹} = \frac{۶}{۱۱}$$

در نتیجه:

$$x = \frac{۲۳ \times ۱۱ + ۶}{۱۱} = \frac{۲۵۹}{۱۱۰}$$

حالت کلی ــ هر صورت‌بندی نامتناهی متناوب یک عدد منطق را نمایش میدهد.

هر گاه در مبنای b صورت بندی نامتناهی متناوب:

$$x = e, \overrightarrow{qppp\cdots}$$

باشد که در آنجا قسمت غیر متناوب q یک طبقه $k - ۱$ رقمی و دوره تناوب p یک طبقه n رقمی است.

با استفاده از قواعد محاسبه مبنای b:

$$b^k x = \overline{eq}, \overrightarrow{ppp\cdots}$$

$$b^k x - \overline{eq} = ۰/\overrightarrow{ppp\cdots}$$

اگر صورت‌بندی:

$$y = ۰, \overrightarrow{ppp\ldots}$$

نمایش یک عدد منطق باشد n نیز نمایش یک عدد منطق خواهد بود:

$$x = \frac{y + \overline{eq}}{b^K}$$

پس صورت بندی y را با قسمت صحیح صفر و دوره تناوب p و بدون قسمت غیر متناوب در نظر میگیریم. اگر تعداد ارقام طبقه p باشد $b^n y$ را تشکیل میدهیم:

$$b^n y = p, \overrightarrow{ppp\ldots}$$

یا:

$$b^n y = p + \circ,\overrightarrow{ppp\ldots}$$

عدد سمت راست طرف دوم y است:

$$b^n y = p + y$$

از آنجا:

$$(b^n - ۱)\, y = p$$

و:

$$y = \frac{p}{b^n - ۱}$$

بنابراین y یک عدد منطق نمایش میدهد و در نتیجه x نیز یک عدد منطق نمایش خواهد داد.

تبصره: اگر $n = ۱$ باشد دوره تناوب p دارای یک رقم است و:

$$y = \frac{p}{b - ۱}$$

با $p < b$.

و اگر $p = b - ۱$ باشد در این صورت $y = ۱$ و عدد

$$x = \frac{۱ + \overline{eq}}{b^k}$$

یک عدد b-ئی است.

ولی یک عدد b-ئی دارای یک صورت‌بندی نامتناهی با دوره تناوب ۰ است.

بنابراین برای یک عدد دو نمایش نامتناهی متناوب وجود دارد:

دوره تناوب با رقم ۰ فقط و دوره تناوب با رقم $b - ۱$ فقط.

مثلاً در دستگاه دهدهی:

$$x = ۲/۳۸\overrightarrow{۰۰\ldots}$$

با دوره تناوب صفر و:

$$x = ۲/۳۷\overrightarrow{۹۹\ldots}$$

با دوره تناوب ۹ که هر دو عدد b-ئی:

$$\frac{۲۳۸}{۱۰^۲}$$

را نمایش میدهند. نمایش دوم را ناجور مینامند.

تعریف ـ صورت بندی نامتناهی متناوب تشکیل شده از رقم $b - 1$ فقط را در مبنای b صورت بندی ناجور مینامند.

بعد از این، صورت بندی ناجور را کنار خواهیم گذاشت.

بدین ترتیب میتوانیم بگوئیم:

قضیهٔ ۲: هر عدد منطق دارای یک صورت بندی نامتناهی متناوب یکتا و هر صورت بندی نامتناهی متناوب نمایش یک عدد منطق یکتا است.

بعبارت دیگر، بین Q^+ و مجموعه صورت بندیهای نامتناهی متناوب دوسوگستری وجود دارد.

۴ـ بنیان توپولوژیک Q_b^+

مجموعه Q_b^+ اعداد b-ئی دارای خواص زیر است:

۱ـ کلاً مرتب است.

۲ـ مفهوم: «عدد b-ئی آنقدر کوچک که بخواهیم» دارای یک معنای دقیق است، چونکه هرچه باشد:

$$\varepsilon \in Q_b^+ \qquad (\varepsilon \neq 0)$$

فاصله باز $]0, \varepsilon[$ تهی نیست. این فاصله شامل: $\frac{\varepsilon}{b}$ است.

۳ـ اگر $\alpha < \beta$ باشد یک مفهوم دقیق از «فاصله بین α و β» در دست است و این تفاضل $\beta - \alpha$ است.

بدین ترتیب امکان تعریف مجاورت یک عدد b-ئی وجود دارد: یک مجاورت α عبارت از قسمتی از Q_b^+ است که شامل α و همه b-ئی «بقدر کفایت نزدیک α باشد»: اگر یک عدد b-ئی بقدرکفایت کوچک ε را اختیارکنیم، جمیع فواصل Q_b^+ شامل α وبدازای ε مجاورت α حساب میشوند. دراینصورت میگویندکه Q_b^+ دارای‌یک بنیان‌توپولوژیک است. توپولوژی قسمتی از ریاضیات است که مفاهیم مجاورت و حد را مورد بررسی قرار میدهد.

تعریف عددهای منطق با شروع از Q_b^+

یک عدد منطق α غیر متعلق به Q_b^+ را در نظر میگیریم که دارای صورت بندی نامتناهی

متناوب زیر در مبنای b باشد:

$$\alpha = q_0, \overrightarrow{r_1 r_2 \cdots r_n \cdots}$$

این صورت بندی علامت متراکم یک رشته فاصله‌های فراگیر Q_b^+ است که درازای آنها بسمت صفر میل میکند.

$$(S_3) \quad \left[q_0, q_0 + 1 \right[\supset \left[\frac{q_1}{b}, \frac{q_1 + 1}{b} \right[\supset \cdots \supset \left[\frac{q_n}{b^n}, \frac{q_n + 1}{b^n} \right[\supset \cdots$$

هر فاصله‌ای از (S_3) یک مجاورت α است، این مجاورتها بتدریج «فشرده‌تر» میشوند.

عدد α تنها عدد متعلق به این فاصله‌ها است:

بنابراین عدد α با رشته (S_3) تعریف میشود.

این طرز تعریف در قسمت بعدی بیک «امتداد» مجموعه اعداد منطق Q^+ که یک مجموعه وسیع‌تری است منجر می‌شود و این مجموعه R^+ اعداد حقیقی مثبت است.

قسمت چهارم

اعداد حقیقی مثبت

قبلاً دیدیم که در مبنای b هر صورت‌بندی نامتناهی متناوب، یک عدد منطق را نمایش میدهد و بعکس ـ حال طبعاً این سؤال پیش میآید که صورت بندی نامتناهی غیر متناوب چه عددی را نمایش میدهد.

ابتدا نشان میدهیم که این نوع صورت‌بندی در تعیین جذر b-ئی تقریبی اعداد طبیعی غیر مجذور کامل بدست میآید. این چنین صورت بندی نامتناهی نمایش اختصاری یک رشته نامتناهی فاصله‌های فراگیر Q_b^+ است که درازای آنها بسمت صفر میل میکند. از آنجا تعریف عدد حقیقی روی بنیان توپولوژیک Q_b^+ پایه گذاری میشود و بدین ترتیب Q_b^+ به مجموعه R اعداد حقیقی ادامه مییابد.

رابطه ترتیب در R^+ ترتیب لغتی در صورت‌بندیهای نامتناهی است. عملهای معلوم در Q_b^+ در R^+ نیز که دارای همان بنیان جبری Q^+ است ادامه مییابند. ولی R^+ دارای یک خاصیت جدید است که Q^+ دارا نبود: او دارای خلل نیست: او کامل است.

تئوری اندازه بر پایه یک نیم گروه جابجاپذیر کلاً مرتب E طرح شده است. از اصل ارشمیدس، اندازه‌های b-ئی تقریبی هر عدد $x \in E$ نتیجه گیری میشود. اندازه حقیقی x بازهم بر پایه Q_b^+ تعریف میشود. تابعی که به x اندازه حقیقی‌اش را همراه میکند یک همشکلی E در R^+ بازاء جمع است.

برای اینکه اویک شکل باشد دو اصل مکمل را میافزائیم:

اصل نیمسازی و اصل فقدان خلل

سپس حالت مجموعه A-ی کلاً مرتب که در آنجا جمع همواره معین نیست طرح میشود: این، حالت زاویه‌ها است.

چون تعداد مضربهای یک جزء $x \in A$ محدود است، صورت اصل ارشمیدس را تغییر میدهیم تا قابل بکار بستن در A باشد. بوسیله اصل نیمسازی اندازه‌های حقیقی یک جزء از A را بر پایه Q_2^+ تعریف میکنیم.

فصل یکم

ساخت مجموعه اعداد حقیقی مثبت
رابطه ترتیب

۱ـ جذر کامل یک عدد طبیعی

ابتدا در مجموعهٔ N اعداد طبیعی، تناظر $x^۲ \leftarrow x$ یک عدد طبیعی با مجذور خود را بررسی کنیم. نگار C از N با این تابع عبارت از مجموعه مجذورهای کامل است.

$\boxed{P_۱}$ تابع $x^۲ \leftarrow x$ اکیداً صعودی است.

زیرا از:

$$x < x'$$

شروع کنیم و دوباره بنویسیم:

$$x < x'$$

عضو به عضو ضرب کنیم:

$$x^۲ < x'^۲$$

پس:

$$x < x' \quad \Rightarrow \quad x^۲ < x'^۲$$

خاصیت ثابت است. از آنجا نتیجه میشود (I، فصل ۳، ۳).

$\boxed{P_۲}$ تابع $x^۲ \leftarrow x$ با دوسوئی N را روی C می‌نگارد.

تعریف ـ تابع عکس در C معین است و مقادیر خود را در N اختیار میکند: آنرا «جذر کامل» مینامند و مینویسند:

$$(x \in N) \quad y = x^۲ \quad \rightleftarrows \quad x = \sqrt{y} \quad (y \in C)$$

اینک نمودار این تناظر دوسوئی (شکل ۱):

$$\begin{array}{l} N = \{0,1,2,3,\dots,x,\dots\} \\ \quad\;\; \updownarrow \;\; \updownarrow \;\; \updownarrow \;\; \updownarrow \qquad\quad \updownarrow \\ C = \{0,1,4,9,\dots,x^{2},\dots\} \end{array} \left|\; \Big\downarrow\; y = x^{2} \;\right| \;\Big\uparrow\; x = \sqrt{y}$$

شکل ۱

حال اگر عدد a به C تعلق نداشته باشد:

$$a \in N \qquad \text{و} \qquad a \notin C$$

a به «غیر مجذور کامل» موسوم است.

با این وصف میتوان برای a یک «جذر کامل» تقریبی تعریف کرد.

بخش P از C را که با a فرابسته شده است در نظر میگیریم:

$$P = C \cap [0, a]$$

P مجموعه مجذورات کامل حد اکثر برابر a است.

P تهی نیست چونکه حداقل شامل جزء ۰ است.

P متناهی است زیرا با a فرابسته است.

P دارای یک بزرگترین جزء است:

$$y = \max P$$

چون $y \in C$ بنا به خاصیت P_2 یک عدد طبیعی r یکتا وجود دارد بقسمیکه:

$$r^{2} = y$$

بدیهی است که $r^{2} < a$ چونکه a، P را فرابسته است. همچنین داریم:

$$(r+1)^{2} > a$$

زیرا، اگر میداشتیم:

$$(r+1)^{2} \leqslant a$$

لازم میآمد:

$$(r+1)^{2} \in P$$

در این صورت r^{2} بزرگترین جزء P نمیشد. پس میتوانیم بگوئیم:

قضیهٔ ۱- نظیر هر عدد طبیعی a یک عدد طبیعی r یکتا وجود دارد بقسمیکه:

$$r^{2} \leqslant a < (r+1)^{2}$$

تعریف- r را جذر کامل a یا جذر تقریبی a با یک واحد تقریب مینامند.

۲ـ ادامهٔ تناظر $x \rightleftarrows \sqrt{x}$

اکنون مسئلهٔ زیر را مطرح میکنیم:

آیا میتوان تناظر $y = \sqrt{x}$ را به اعداد طبیعی x که متعلق بـه C نیستند با تعـریض مجموعه N نگارها ادامه داد؟ و این سؤال که: آیا میتوان در صورت امکان این مسئله را بـا اختیار نگارها در مجموعه Q^+ اعداد منطق حل کرد؟

ما با اثبات اینکه مسئله فوق را نمیتوان بدان طرز حل کرد شروع میکنیم: هیچ عدد منطق وجود ندارد بقسمیکه مجذور آن یک عدد طبیعی غیر مجذور کامل باشد.

ابتدا لم مقدماتی زیررا اثبات میکنیم:

لم L ــ برای اینکه یک عدد طبیعی، (سوای ۰ و ۱) مجذور کامل بـاشد لازم و کافیست کـه تجزیه آن به حاصل ضرب عوامل اول فقط شامل نماهای زوج باشد.

زیرا اگر عدد طبیعی a مجذور کامل باشد داریم:

$$a = r^2 \qquad (r \in N)$$

و تجزیه a به عوامل اول از تجزیه r با دو برابر کردن نماها بدست میآید بعکس، اگر تجزیه a فقط شامل نماهای زوج باشد (فرض کنیم که دارای سه عامل است)

$$a = m^{2\alpha} \cdot n^{2\beta} \cdot r^{2\gamma}$$

(α و β و γ اعداد طبیعی هستند) داریم:

$$a = (m^{\alpha} \cdot n^{\beta} \cdot p^{\gamma})^2$$

و a مجذور کامل است.

از آنجا قضیه زیر نتیجه می‌شود:

قضیهٔ ۲ـ هیچ عدد منطق وجود ندارد که مجذورش بـرابر یک عدد طبیعی غیر مجـذور کامل باشد.

اثبات:

هرگاه a عدد طبیعی غیر مجذور کامل باشد، بنا به (L) تجزیه a به عوامل اول حداقل دارای یک نمای فرد است.

فرض کنیم یک عدد منطق:

$$\frac{u}{v} \qquad (u \in N;\, v \in N^*)$$

وجود داشته باشد بقسمیکه:

$$\left(\frac{u}{v}\right)^۲ = a$$

ثابت میکنیم که این فرض به تناقض برمیخورد.

زیرا داریم:

$$\left(\frac{u}{v}\right)^۲ = a \iff u^۲ = av^۲$$

u و v را نیز به عوامل اول تجزیه کنیم. بنا به (L) تجزیه $u^۲$ و $v^۲$ فقط شامل نماهای زوج‌اند در صورتیکه تجزیهٔ a حداقل دارای یک نمای فرد است واین نما بعداز ضرب در $v^۲$ در $av^۲$ نیز فرد میماند پس تناقض وجود دارد و رابطه $u^۲ = av^۲$ نمیتواند در N واقع باشد مگر اینکه a مجذور کامل باشد.

از این قضیه نتیجه میشود که اگر بخواهیم تناظر $x \to \sqrt{x}$ را به اعداد x غیر مجذور کامل ادامه دهیم باید اعداد جدیدی را روی کار آورد.

ما بر پایه اعداد b-ئی مبنای b شمار این اعداد را تعریف میکنیم.

جذر b-ئی تقریبی یک عدد طبیعی

دو عدد طبیعی a و n داده شده است: مطلوبست تعیین یک عدد طبیعی q بقسمیکه:

$$\left(\frac{q}{b^n}\right)^۲ \leqslant a < \left(\frac{q+۱}{b^n}\right)^۲$$

شرایط این مسئله منطقاً هم‌ارزند با:

$$q^۲ \leqslant ab^{۲n} < (q+۱)^۲$$

بنا بر این q جذر کامل $ab^{۲n}$ است. عدد q یکتا است.

تعریف - $\frac{q}{b^n}$ را جذر b-ئی تقریبی a با $\frac{۱}{b^n}$ تقریب نقصانی و $\frac{q_n+۱}{b^n}$ را جذر b-ئی تقریبی a با $\frac{۱}{b^n}$ تقریب اضافی مینامند.

مقایسهٔ جذرهای تقریبی

جذرهای تقریبی با $\frac{۱}{b^n}$ تقریب بترتیب زیر معین شده‌اند:

$$(۱) \qquad \left(\frac{q}{b^n}\right)^۲ \leqslant a < \left(\frac{q+۱}{b^n}\right)^۲ \iff q^۲ \leqslant ab^{۲n} < (q+۱)^۲$$

جذرهای تقریبی با $\frac{۱}{b^{n+۱}}$ تقریب بترتیب زیر معین شده‌اند:

$$(۲) \qquad \left(\frac{q'}{b^{n+۱}}\right)^۲ \leqslant a < \left(\frac{q'+۱}{b^{n+۱}}\right)^۲ \iff q'^۲ \leqslant ab^{۲n+۲} < (q'+۱)^۲$$

طرفین (۱) را در $b^۲$ ضرب میکنیم:

$$(۳) \qquad (qb)^۲ \leqslant ab^{۲n+۲} < [(q+۱)\,b]^۲$$

(۲) و (۳) را مقایسه میکنیم: میدانیم q' بزرگترین عدد طبیعی است بقسمیکه:

$$q'^۲ \leqslant ab^{۲n+۲}$$

پس داریم:

$$qb \leqslant q'$$

از آنجا:

$$\frac{q}{b^n} \leqslant \frac{q'}{b^{n+۱}}$$

بهمین ترتیب $q'+۱$ کوچکترین عدد طبیعی است بقسمیکه:

$$(q'+۱)^۲ > ab^{۲n+۲}$$

پس:

$$q'+۱ \leqslant (q+۱)\,b$$

از آنجا:

$$\frac{q'+۱}{b^{n+۱}} \leqslant \frac{q+۱}{b^n}$$

بالاخره:

$$\frac{q}{b^n} \leqslant \frac{q'}{b^{n+۱}}$$

و:

$$\frac{q'+۱}{b^{n+۱}} \leqslant \frac{q+۱}{b^n}$$

رشته نامتناهی جذرهای تقریبی

به n مقادیر متوالی مجموعه زیر را میدهیم:

$$N = \{۰, ۱, ۲, ۳, \cdots, n, \cdots\}$$

جذرهای تقریبی نقصانی a یک رشته نامتناهی اعداد b-ئی را تشکیل میدهند:

$$q_۰ \leqslant \frac{q_۱}{b} \leqslant \frac{q_۲}{b^۲} \leqslant \cdots \leqslant \frac{q_n}{b^n} \leqslant \cdots \qquad (S_۱)$$

(رشته صعودی در مفهوم وسیع است)

جذرهای تقریبی اضافی a یک رشته نامتناهی اعداد b-ئی را تشکیل میدهند:

$$q_۰ + ۱ \geqslant \frac{q_۱ + ۱}{b} \geqslant \frac{q_۲ + ۱}{b^۲} \geqslant \cdots \geqslant \frac{q_n + ۱}{b^n} \geqslant \cdots \qquad (S_۲)$$

(رشته نزولی در مفهوم وسیع است)

این دو رشته یک رشته فاصله‌های فراگیر را تشکیل میدهند:

$$\left[q_۰, q_۰ + ۱ \right[\supset \left[\frac{q_۱}{b}, \frac{q_۱ + ۱}{b} \right[\supset \cdots \supset \left[\frac{q_n}{b^n}, \frac{q_n + ۱}{b^n} \right[\supset \cdots \qquad (S_۳)$$

که در ازای $\frac{۱}{b^n}$ آنها بسمت صفر میل میکند.

میدانیم بنا به قضیهٔ ۲ (اگر a مجذور کامل نباشد) هیچ عدد منطق وجود ندارد که متعلق به جمیع فواصل رشته $(S_۳)$ باشد.

در این صورت یک عدد یکتا متعلق به جمیع این فواصل را روی کار می‌آوریم. این عدد جدید را جذر a مینامیم و با $\sqrt{a}$ نشان میدهیم:

این عدد به عدد اصم موسوم است.

ما مجموعه Q^+ اعداد منطق را با وارد کردن اعداد اصم $\sqrt{a}$ امتداد داده‌ایم. مجموعه جمیع این اعداد را با $\mathcal{S}$ نمایش میدهیم. ما بدین ترتیب مسئلهٔ امتداد دادن تناظر $x \rightleftarrows \sqrt{x}$ برای هر عدد طبیعی x را حل کرده‌ایم:

اینک نمودار این تناظر (شکل ۲):

$$\begin{array}{l} N = \{۰, ۱, ۲, ۳, \ldots, x, \ldots\} \\ \quad\;\; \upharpoonleft\!\downharpoonright \; \upharpoonleft\!\downharpoonright \; \upharpoonleft\!\downharpoonright \; \upharpoonleft\!\downharpoonright \qquad \upharpoonleft\!\downharpoonright \\ \mathcal{S} = \{۰, ۱, \sqrt{۲}, \sqrt{۳}, \ldots, \sqrt{x}, \ldots\} \end{array}$$

شکل ۲

۳ـ اعداد حقیقی مثبت

هر عدد b-ئی رشته $(S_۱)$ دارای یک صورت بندی در مبنای b است:

$$\frac{q_n}{b^n} = e,\ \overline{r_1 r_2 \cdots r_n}$$

ثابت میکنیم که نمایش عدد بعدی:

$$\frac{q_{n+1}}{b^{n+1}}$$

(S_1) از قبلی با اضافه کردن رقم جدید r_{n+1} بدست میآید.

زیرا بنا به (S_3):

$$\frac{q_{n+1}}{b^{n+1}} \in \left[\frac{q_n}{b^n}, \frac{q_n + 1}{b^n} \right[$$

از آنجا نتیجه میشود که تفاضل:

$$\frac{q_{n+1}}{b^{n+1}} - \frac{q_n}{b^n}$$

اکیداً کمتر از درازای $\frac{1}{b^n}$ این فاصله است. پس بصورت:

$$\frac{r_{n+1}}{b^{n+1}}$$

با $r_{n+1} < b$ است.

رشته (S_1) بنابراین در مبنای b با یک علامت فشردهٔ یک صورت بندی نامتناهی:

$$\overrightarrow{e,\ r_1 r_2 \cdots r_n \cdots}$$

نمایش داده شده است.

این صورت بندی $\sqrt{a}$ را در مبنای b نمایش میدهد. اگر a مجذور کامل نباشد این صورت بندی نمیتواند متناوب باشد والا یک عدد منطق را نمایش خواهد داد و این مخالف قضیهٔ (۲) است.

بطور کلی‌تر، هر صورت بندی نامتناهی در مبنای b نمایش یک عدد موسوم به عدد حقیقی مثبت (عدد طبیعی، عدد منطق، عدد اصم) است.

کلمه «مثبت» را در قسمت بعد توضیح خواهیم داد. عجالتاً بدون هراس از هر نوع اشتباهی آنرا کنار میگذاریم.

یک صورت بندی نامتناهی غیر مشخص را در نظر میگیریم:

$$\overrightarrow{e,\ r_1 r_2 \cdots r_n \cdots}$$

که این، علامت فشرده یک رشته مانند (S۱) است. میتوان از آن رشته (S۲) و رشته (S۳) فاصله‌های فراگیررا که در ازای $\frac{1}{b^n}$ آنها بسمت صفر میل میکند بدست آورد:

$$(S_3) \qquad [q_0, q_0+1[\supset \left[\frac{q_1}{b}, \frac{q_1+1}{b}\right[\supset \cdots \supset \left[\frac{q_n}{b^n}, \frac{q_n+1}{b^n}\right[\supset \cdots$$

حال یک عدد یکتا را روی کار می‌آوریم که متعلق به همه فواصل است و در مبنای b با صورت بندی که از آن شروع کرده‌ایم نمایش داده میشود.

و اگر چنین عددی را با α نمایش دهیم:

$$(\forall n \in N) \qquad \alpha \in \left[\frac{q_n}{b^n}, \frac{q_n+1}{b}\right[$$

باید ملاحظه کرد که در Q_b^+ رشته‌های کلی‌تر در خور تعیین همین عدد α وجود دارد. رشته فواصل $[x_n, y_n[$ را که در شرایط زیر صدق میکنند در نظر بگیریم:

۱) $\qquad [x_n, y_n[\subset Q_b^+$

۲) $\qquad [x_n, y_n[\; [x_{n+1}, y_{n+1}[$

۳) $\qquad y_n - x_n$ بسمت صفر میل کند

میگوئیم که چنین رشته دارای خاصیت $\mathcal{P}$ است.

فرق این رشته با (S۳) این است که درازای $x_n - y_n$ دقیقاً برابر $\frac{1}{b^n}$ نیست.

همانطور که در فصل بعد خواهیم دید اگر بخواهیم عملهای روی این رشته‌ها را معین کنیم این دقت باید رها گردد.

فرض کنیم که داشته باشیم:

$$(\forall n \in N) \qquad \left[\frac{q_n}{b^n} \frac{q_n+1}{b^n}\right[\supset [x_n, y_n[$$

عدد α که با رشته (S۳) معین میشود به جمیع فواصل رشته دوم که دارای خاصیت $\mathcal{P}$ است تعلق دارد بقسمیکه α میتواند با رشته دوم معین گردد.

بعکس اگر عدد α با رشته دارای خاصیت $\mathcal{P}$ معین شود میتوان با این رشته یک رشته (S۳) را که همین عدد α را تعیین مینماید همراه کرد.

چونکه شرط: ($x_n - y_n$ بسمت صفر میل میکند) بدین ترتیب بیان میشود:

$$\forall p \in N \qquad \exists r \in N$$

بقسمیکه:

$$n > r \quad \Rightarrow \quad y_n - x_n < \frac{1}{b^p}$$

حال مقادیر b-ئی تقریبی x_n, y_n با $\frac{1}{b^p}$ تقریب را امتحان کنیم:

$$\frac{q_p}{b^p} \leqslant x_n < \frac{q_p + 1}{b^p}$$

$$\frac{q'_p}{b^p} \leqslant y_n < \frac{q'_p + 1}{b^p}$$

بدیهی است که داریم:

$$x_n < y_n \quad \Rightarrow \quad b^p x_n < b^p y_n \quad \Rightarrow \quad q_p \leqslant q'_p$$

پس:

یا: $q_p = q'_p$ و یا $q_p < q'_p$

خود را در حالت دوم قرار میدهیم. یعنی:

$$q_p + 1 \leqslant q'_p \tag{۴}$$

با فروبستن y_n و فرابستن x_n تفاضل $y_n - x_n$ فروبسته میشود:

$$y_n - x_n > \frac{q'_p}{b^p} - \frac{q_p + 1}{b^p}$$

از آنجا با قوی دلیل:

$$\frac{1}{b^p} > \frac{q'_p}{b^p} - \frac{q_p + 1}{b^p}$$

و بنابراین:

$$q'_p < q_p + 2$$

و چون (۴) را نیز داریم. از آنجا نتیجه میشود:

$$q'_p = q_p + 1$$

بطور خلاصه داریم:

یا:

$$q_p = q'_p$$

از آنجا.

$$\frac{q_p}{b^p} \leqslant x_n < y_n < \frac{q_n + 1}{b^p}$$

یا:

$$q_p + ۱ = q'_p$$

از آنجا:

$$\frac{q_p}{b^p} \leqslant x_n < \frac{q_p + ۱}{b^p} \leqslant y_n < \frac{q_p + ۲}{b^p}$$

در هر دو حالت داریم:

$$[x_n, y_n[\subset \left[\frac{q_p}{b^p}, \frac{q_p + ۲}{b^p}\right[$$

بازاء هر عدد طبیعی p یک مرتبه r وجود دارد که با شروع از آن جمیع فواصل معین کننده عدد α در فاصله دوم گنجیده شده‌اند، پس داریم:

$$(\forall p \in N) \qquad \alpha \in \left[\frac{q_p}{b^p}, \frac{q_p + ۲}{b^p}\right[$$

وقتیکه p مجموعهٔ N را می‌پیماید، یک رشته فواصل فراگیر دومی از اعداد Q_b^+ بدست میآوریم که درازای $\frac{۲}{b^p}$ آن بسمت صفر میل میکند. چون:

$$(\forall p \in N) \qquad \left[\frac{q_p}{b^p}, \frac{q_p + ۱}{b^p}\right[\subset \left[\frac{q_p}{b^p}, \frac{q_p + ۲}{b^p}\right[$$

پس عدد معین شده با رشته $(S_۳)$ سمت چپ با عدد α معین شده با رشتــه سمت راست دارای خاصیت $\mathcal{P}$ منطبق است. تعریف زیر را میتوان بیان کرد:

تعریف - سمبل متعلق بیک رشته نامتناهی فاصله‌های فراگیر اعـداد Q_b^+ را کـه در ازای آنهـا بسمت صفر میل میکند عدد حقیقی مینامند.

یک عدد حقیقی را با یک حرف یونانـی و اعـداد طبیعی را با حـروف لاتیـن نشان میدهیم.

مجموعه اعداد حقیقی را با R^+ نشان میدهیم:

$$\alpha \in R^+$$

این مجموعه شامل N و Q_b^+ و Q^+ است:

$$N \subset Q_b^+ \subset Q^+ \subset R^+$$

اعداد حقیقی روی بنیان توپولوژیک Q_b^+ معین شده‌اند همانطوریکه اعداد منطق درفصل قبل معین شده بودند. مجموعه Q^+ بدین ترتیب تا R^+ ادامه یافته است.

۴ـ رابطهٔ ترتیب در R^+

وقتیکه دو عدد منطق با صورت‌بندی خود در مبنای b داده شده‌اند ترتیب کلی در Q^+ روی صورت‌بندی‌ها ترتیب لغتی را القا مینماید که کاری به تناوب صورت‌بندیهای نامتناهی ندارد. ما ترتیب لغتی را مانند تعریف ترتیب در R^+ اختیار میکنیم، چونکه بنا به بررسی قبلی ما میدانیم که بهر عدد حقیقی یک صورت‌بندی نامتناهی در مبنای b وابسته است.

(صورت‌بندی‌های ناجور کنار گذاشته شده‌اند)

تعریفـ هرگاه دو عدد α و β که در مبنای b با:

$$\alpha = e, \overrightarrow{r_1 r_2 \cdots r_n \cdots}$$

$$\beta = e', \overrightarrow{u_1 u_2 \cdots u_n \cdots}$$

نمایش داده شده‌اند مفروض باشند.

۱) $$e > e' \quad \Rightarrow \quad \alpha > \beta$$

۲) اگر $e = e'$ و اگر p اولین مرتبه باشد بقسمیکه $u_p \neq r_p$:

$$r_p > u_p \quad \Rightarrow \quad \alpha > \beta$$

۳) اگر $e = e'$ و اگر هرچه باشد $n \in N$ داشته باشیم $u_n = r_n$ داریم:

$$\alpha = \beta$$

بعبارت دیگر اگر قسمتهای صحیح متمایز باشند دو عدد در ترتیب اکید این قسمتها قرار دارند.

اگر قسمتهای صحیح متساوی باشند، دو عدد در ترتیب دوتا اولین رقم متمایز هم‌مرتبه bـئی می‌باشند.

اگرقسمتهای صحیح متساوی باشند وهرچه‌باشد مرتبه bـئی، ارقام هم‌مرتبه bـئی متساوی باشند دو عدد متساویند.

اگر حالت تساوی را کنار بگذاریم ثابت میکنیم که یک رابطه ترتیب اکید کلی را داریم:

۱) $$\alpha > \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha \neq \beta$$

این، بلافاصله از تعریف نتیجه میشود.

۲) $$(\alpha > \beta \quad \text{و} \quad \beta > \gamma) \quad \Rightarrow \quad \alpha > \gamma$$

اگر سه قسمت صحیح متفاوت باشند و یا دوتا از بین آنها برابر باشند و اگر $e\ (\alpha)$

قسمت صحیح α را نشان دهد، در N داریم:

$$(e(\alpha) \geqslant e(\beta) \quad و \quad e(\beta) > e(\gamma)) \Rightarrow e(\alpha) > e(\gamma)$$

بنابراین در R^+ داریم:

$$(\alpha > \beta \quad و \quad \beta > \gamma) \Rightarrow \alpha > \gamma$$

اگر سه قسمت صحیح برابر باشند:

$$e(\alpha) = e(\beta) = e(\gamma) = e$$

اولین مرتبه b-ئی را که ارقام نظیر در α و β متفاوتند p و اولین مرتبه b-ئی را که ارقام نظیر در β و γ متفاوتند q بنامیم:

$$\alpha = e, \overrightarrow{r_۱ \cdots r_{p-۱} r_p \cdots}$$

$$\beta = e, \overrightarrow{r_۱ \cdots r_{p-۱} u_p \cdots}$$

$$\gamma = e, \overrightarrow{v_۱ \cdots v_n \cdots}$$

a) اگر $p = q$ در این صورت:

$\alpha > \beta$ با $r_p > u_p$ بیان میشود.

$\beta > \gamma$ با $u_p > v_p$ بیان میشود.

بخاطر سرایت‌پذیری در N نتیجه میشود $r_p > v_p$ یا $\alpha > \gamma$

b) $p > q$: در این صورت برای β و γ داریم:

$$\beta = e, \overrightarrow{r_۱ \cdots r_q \cdots u_p \cdots}$$

$$\gamma = e, \overrightarrow{r_۱ \cdots v_q \cdots}$$

ارقام مرتبه q در α و β برابرند، پس اولین دو رقم متفاوت در α و γ عبارتند از: r_q و v_k

چون $\beta < \gamma$ است در نتیجه $r_q > v_q$ و بنابراین $\alpha > \gamma$

c) $p < q$ در این صورت برای β و γ داریم:

$$\beta = e, \overrightarrow{r_۱ \cdots u_p \cdots u_q \cdots}$$

$$\gamma = e, \overrightarrow{r_۱ \cdots u_p \cdots v_q \cdots}$$

و ارقام مرتبه p در β و γ برابرند: پس اولین دو رقم متفاوت در α و γ عبارتند از:

r_q و u_q

چون $\alpha > \beta$ است نتیجه میشود $r_p > u_p$ بنابراین $\alpha > \gamma$.

سرایت‌پذیری در جمیع حالتها اثبات شده است.

۳) هرچه باشد اعداد حقیقی α و β داریم:

$$\alpha > \beta \qquad \text{یا} \qquad \beta > \alpha$$

چون ترتیب در N برای قسمتهای صحیح α و β کلی است، اگــر این قسمتها متفاوت باشند داریم:

$$e(\alpha) > e(\beta) \qquad \text{یا} \qquad e(\beta) > e(\alpha)$$

اگر این قسمتها برابر و اولین رقم‌های متفاوت زوج r_p و u_p باشند:

$$r_p > u_p \qquad \text{یا} \qquad u_p > r_p$$

پس ترتیب در R^+ نیز کلی است.

تبصره ــ همانطور که قبلاً گفتیم، صورت‌بندیهای ناجور که از یک مرتبه معینی بـه بعد دارای دوره تناوب تشکیل شده از تنها رقم $b - ۱$ هستند کنار گذاشته شده‌اند.

از آنجا نتیجه میشود کــه رشته مــقادیــر b-ئی تقریبی اضافی یک عــدد حقیقی α را نمیتوان با اعدادی تشکیل داد که از مرتبه p به بعد هم باهم مساوی باشند.

فرض کنیم هرچه باشد $\qquad n \geqslant p$

$$\frac{q_n + ۱}{b^n} = \frac{q_p + ۱}{b^q}$$

ثابت میکنیم که این فرض به تناقض بر میخورد.

در Q_b^+ عمل کنیم. از رابطه قبل نتیجه میشود:

$$\frac{q^n}{b^p} = \frac{q_p}{b^p} + \frac{b^{n-p} - ۱}{b^p} = \frac{q_p}{b^p} + (b - ۱)\left(\frac{۱}{b^{p+۱}} + \cdots + \frac{۱}{b^n}\right)$$

از مرتبه $p + ۱$ به بعد عدد:

$$\frac{q_n}{b^n}$$

یک صورت‌بندی تشکیل شده منحصراً از رقم $b - ۱$ را نمایش خواهد داد و عدد α-ی متعلق به جمیع فواصل فراگیر:

$$\left[\frac{q_n}{b^n}, \frac{q_n + ۱}{b^n}\right[$$

یک صورت‌بندی ناجور خواهد داشت که کنار گذاشته‌ایم: پس هرچه باشد $n \in N$ داریم:

$$\alpha < \frac{q_n + ۱}{b^n}$$

حال دو خاصیت را اثبات کنیم:

$\boxed{P_۳}$ هرگاه دو عدد α و β مفروض باشند بقسمیکه $\beta > \alpha$ مرتبه‌ای وجود دارد که از آن مرتبه به‌بعد فاصله‌های فراگیر معین کننده α با فاصله‌های فراگیر معین‌کننده β متغایرند

فرض کنیم:

$$\alpha = e, \overrightarrow{r_۱ r_۲ \cdots r_n \cdots}$$

$$\beta = e', \overrightarrow{r'_۱ r'_۲ \cdots r'_n \cdots}$$

حالت اول: $e < e'$ داریم:

$$e + ۱ \leqslant e'$$

از آنجا:

$$\alpha < e + ۱ \leqslant e' \leqslant \beta$$

از مرتبه ۰ بــه بعد فواصل فــراگیری که α را تعیین میکنند ($]e, e + ۱[$ شامل همه آنها است) با فواصل فراگیر معین کننده β ($]e', e' + ۱[$ شامل همه آنها است) متغایراند.

حالت دوم: $e = e'$ فرض کنیم p اولین مرتبه‌ای باشد کــه $r_p \neq r'_p$ چون $\alpha < \beta$ داریم:

$$r_p < r'_p$$

یعنی:

$$r_p + ۱ \leqslant r'_p$$

فواصل:

$$\left[\frac{q_n}{b^n}, \frac{q_{n+۱}}{b^n}\right[$$

تعیین کننده α با فواصل تعیین کننده β منطبق‌اند (مادامیکه $n < p$ است).

بازاء $n = p$ داریم:

$$q_p = \overrightarrow{e r_۱ \cdots r_{p-۱} r_p}$$

$$q'_p = \overline{e r_۱ \cdots r_{p-۱} r'_p}$$

پس، در N:

$$q'_p - q_p = r'_p - r_p$$

چون $r'_p - r_p \geqslant ۱$ است بنابراین $q'_p - q_p \geqslant ۱$ و در Q_b^+:

$$\frac{q'_p}{b^p} \geqslant \frac{q_p + ۱}{b^p}$$

در نتیجه:

$$\left[\frac{q_p}{b^p}, \frac{q_p + ۱}{b^p}\right[$$

با:

$$\left[\frac{q'_p}{b^p} \frac{b'_p + ۱}{b^p}\right[$$

متغایر است و خاصیت $P_۳$ ثابت است.

نتیجهـ رابطه احتمالی:

$$\frac{q'_n}{b^n} = \frac{q_n + ۱}{b^n}$$

نمیتواند بر قرار باشد (هرچه باشد $n \in N$).

زیرا:

$$\frac{q_n + ۱}{b^n}$$

جمله عمومی رشته $(S_۲)$ نزولی به معنای وسیع است و

$$\frac{q'_n}{b^n}$$

جمله عمومی یک رشته از قبیل $(S_۱)$ صعودی به معنای وسیع است.

اگر یک چنین رابطه‌ای بر قرار بود (هرچه باشد $n \in N$) عدد:

$$\frac{q_n + ۱}{b^n} \left(\text{یا} \quad \frac{q'_n}{b^n} \right)$$

مقدار ثابتی میشد.

ولی بنا به تبصره قبلی:

$$\frac{q_n + ۱}{b^n}$$

نمیتواند مقدار ثابتی باشد (صورت‌بندی‌های ناجور کنار گذاشته شده‌اند) از آنجا نتیجه میشود که یک مرتبه‌ای وجود دارد که از آن به بعد نامساوی اکید زیر را داریم:

$$\frac{q_n + ۱}{b^n} < \frac{q'_n}{b^n}$$

و در نتیجه:

$$\alpha < \frac{q_n + ۱}{b^n} < \frac{q'_n}{b^n} \leqslant \beta$$

و این بدان معنی است که فاصله باز $]\alpha, \beta[\subset R^+$ شامل عدد b-ئی

$$\frac{q_n + ۱}{b^n}$$

است. از آنجا:

قضیهٔ ۳- هر فاصله باز R^+ شامل یک عدد Q_b^+ است.

تبصره- در فصل بعد وجود یک مرتبه را که از آن به بعد:

$$\frac{q_n + ۱}{b^n} < \frac{q'_n}{b^n}$$

بصورت:

$$\frac{q_n + ۲}{b^n} \leqslant \frac{q'_n}{b^n}$$

باشد مورد استفاده قرار خواهیم داد.

فصل دوم

عملها در R^+

۱ـ جمع:

جمع در R^+ را با امتداد دادن جمع در Q^+ تعریف میکنیم. ابتدا اگر α و β دو عدد منطق باشند که بترتیب با رشته‌های فراگیر به جمله‌های عمومی زیر معین شده باشند:

$$\alpha \in \left[\frac{q_n}{b^n}, \frac{q_n+۱}{b^n}\right[$$

و:

$$\beta \in \left[\frac{q'_n}{b^n}, \frac{q'_n+۱}{b^n}\right[$$

داریم:

$$\frac{q_n}{b^n} \leqslant \alpha < \frac{q_n+۱}{b^n}$$

$$\frac{q'_n}{b^n} \leqslant \beta < \frac{q'_n+۱}{b^n}$$

اگر عضو به عضو در Q^+ جمع کنیم:

$$\frac{q_n+q'_n}{b^n} \leqslant \alpha+\beta < \frac{q_n+q'_n+۲}{b^n}$$

تفاضل:

$$\frac{۲}{b^n}$$

بین دو انتهای ایـــن فاصله بسمت صفر میل میکند: کافی است قضیه ۲ از (III؛ فصل ۴، ۲) را بکار ببریم کـه در آنجا بجای ε مقدار $\frac{\varepsilon}{۲}$ قرار دهیم. بدین ترتیب یک رشته فاصله‌های فراگیر

بدست میآوریم کـه در ازای آنها بسمت صفر میل میکند ومجموع $\beta + \alpha$ را در Q^+ معین میکند.

وقتیکه α و β اعداد حقیقی‌مثبت‌اند مجموع $\beta + \alpha$ بهمان طرز معین میگردد.

تعریف جمع در R^+

به‌هرزوج مرتب اعداد حقیقی α و β یک عدد حقیقی همراه میکنیم که به مجموع α و β موسوم است و با $\beta + \alpha$ نمایش داده میشود و بترتیب زیر تعریف میشود:

هرگاه :

$$\left[\frac{q_n}{b^n}, \frac{q_n + ۱}{b^n}\right[\qquad و \qquad \left[\frac{q'_n}{b^n}, \frac{q'_n + ۱}{b^n}\right[$$

جمله‌های عمومی رشته فواصل فراگیر باشد که بترتیب α و β را معین میکنند مجموع $\beta + \alpha$؛ متعلق به جمیع فواصل فراگیر رشته بینهایت به جمله عمومی:

$$\left[\frac{q_n + q'_n}{b^n}, \frac{q_n + ۱ + q'_n + ۱}{b^n}\right[$$

است که درازای آن بسمت صفر میل میکند.

جابجاپذیری:

$\boxed{P_۱}$ هرچه باشند اعداد حقیقی α و β داریم:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

بنا به تعریف داریم:

$$(\alpha + \beta) \in \left[\frac{q_n + q'_n}{b^n}, \frac{(q_n + ۱) + (q'_n + ۱)}{b^n}\right[$$

و :

$$(\beta + \alpha) \in \left[\frac{q'_n + q_n}{b^n}, \frac{(q'_n + ۱) + (q_n + ۱)}{b^n}\right[$$

دو رشته بخاطر جابجاپذیری جمع در Q_b^+ همان (متحد) هستند. پس داریم:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

شرکت‌پذیری

$\boxed{P_۲}$ هرچه باشند اعداد حقیقی α و β و γ داریم:

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$$

هرگاه:

$$\left[\frac{q''_n}{b^n} \quad و \quad \frac{q''_n+۱}{b^n}\right[$$

جمله عمومی رشته‌ای باشد که γ را معین میکند.

بنا به تعریف:

$$((\alpha+\beta)+\gamma)\in\left[\frac{(q_n+q'_n)+q''_n}{b^n},\frac{(q_n+۱+q'_n+۱)+q''_n+۱}{b^n}\right[$$

و:

$$(\alpha+(\beta+\gamma))\in\left[\frac{q_n+(q'_n+q''_n)}{b^n},\frac{q_n+۱+(q'_n+۱+q''_n+۱)}{b^n}\right[$$

بخاطر شرکت‌پذیری در Q_b^+ دو رشته همان هستند و داریم:

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$$

جزء خنثی - هرچه باشد عدد حقیقی α داریم:

$\boxed{P_۳}$

$$\alpha+۰=\alpha$$

α را با:

$$\left[\frac{q_n}{b^n},\frac{q_n+۱}{b^n}\right[$$

و ۰ را با:

$$\left[۰,\frac{۱}{b^n}\right[$$

معین میکنیم. بنا به تعریف داریم:

$$(\alpha+۰)\in\left[\frac{q_n}{b^n},\frac{q_n+۲}{b^n}\right[$$

ولی:

$$\left[\frac{q_n}{b^n},\frac{q_n+۱}{b^n}\right[\subset\left[\frac{q_n}{b^n},\frac{q_n+۲}{b^n}\right[$$

چون α به فاصله اول تعلق دارد به فاصله دوم نیز متعلق خواهد بود (هرچه باشد n)

پس داریم:

$$\alpha + \circ = \alpha$$

جزء خنثای جمع $\circ$ است و یکتا است.

پایداری رابطه ترتیب بازاء جمع

$\boxed{P_۴}$ هرچه باشند اعداد حقیقی α و β و γ:

$$\alpha < \beta \quad \text{موجب میشود} \quad \alpha + \gamma < \beta + \gamma$$

بنا به تبصره آخر فصل قبل اگر داشته باشیم:

$$(\forall n \in N), \qquad \alpha \in \left[\frac{q_n}{b^n}, \frac{q_n + ۱}{b^n}\right[$$

و :

$$\beta \in \left[\frac{q'_n}{b^n}, \frac{q'_n + ۱}{b^n}\right[$$

$\alpha < \beta$ موجب وجود یک مرتبه p میشود که از آن ببعد:

$$\frac{q_n + ۲}{b^n} \leqslant \frac{q'_n}{b^n}$$

حال اگر:

$$\left[\frac{q''_n}{b^n}, \frac{q''_n + ۱}{b^n}\right[$$

رشته تعیین کننده γ باشد.

نامساوی قبلی ایجاب میکند در Q^+:

$$\frac{q_n + ۲}{b^n} + \frac{q''_n}{b^n} \leqslant \frac{q'_n}{b^n} + \frac{q''_n}{b^n}$$

ولی:

$$\alpha + \gamma < \frac{q_n + ۱}{b^n} + \frac{q''_n + ۱}{b^n}$$

و :

$$\frac{q'_n}{b^n} + \frac{q''_n}{b^n} \leqslant \beta + \gamma$$

با سرایت‌پذیری از آنجا نتیجه میشود:

$$\alpha + \gamma < \beta + \gamma$$

اختصار:

$\boxed{P_5}$ هر عدد حقیقی برای جمع منتظم است.

$$\beta = \gamma \text{ موجب میشود } \alpha + \beta = \alpha + \gamma$$

زیرا اگر $\alpha < \beta$ فرض کنیم بموجب P_4 :

$$\alpha + \beta > \alpha + \gamma$$

که مخالف فرض است. بهمین ترتیب $\beta < \gamma$ موجب میشود:

$$\alpha + \beta < \alpha + \gamma$$

که مخالف فرض است. پس داریم:

$$\beta = \gamma$$

بنابراین، جمع به R^+ بنیان نیم گروه جابجاپذیر با جزء خنثی میبخشد؛ هرجزء منتظم و رابطه ترتیب بازاء جمع پایدار است.

۲ـ تفریق

مسئله ـ هرگاه دو عدد حقیقی α و β مفروض باشند آیا یک عدد حقیقی γ وجود دارد بقسمیکه:

$$\alpha + \gamma = \beta$$

باشد؟

شرط $\alpha \leqslant \beta$ برای وجود یک جواب لازم است.

زیرا اگر میداشتیم:

$$\alpha > \beta$$

هرچه باشد γ نتیجه میشد:

$$\alpha + \gamma > \beta + \gamma \geqslant \beta$$

و رابطه $\alpha + \gamma = \beta$ تحقق نمییافت.

پس فرض میکنیم $\alpha \leqslant \beta$ و:

$$\alpha \in \left[\frac{q_n}{b^n}, \frac{q_n + 1}{b^n}\right[; \qquad \beta \in \left[\frac{q'_n}{b^n}, \frac{q'_n + 1}{b^n}\right[$$

۱) جواب وجود دارد:

هرچه باشد $n \in N$ بنا به فرض داریم:

$$\frac{q_n}{b^n} \leqslant \frac{q'_n}{b^n}$$

پس تفاضل:

$$\frac{q'_n - q_n}{b^n}$$

وجود دارد. یک عدد γ را با رشته نامتناهی فواصل فراگیر با جمله عمومی زیر معین میکنیم:

$$\gamma \in \left[\frac{q'_n - q_n}{b^n}, \frac{q'_n - q_n + ۱}{b^n} \right[$$

بنا به تعریف جمع:

$$(\gamma + \alpha) \in \left[\frac{q'_n}{b^n}, \frac{q'_n + ۲}{b^n} \right[\supset \left[\frac{q'_n}{b^n}, \frac{q'_n + ۱}{b^n} \right[$$

چون β متعلق به فاصله دوم است، هرچه باشد n پس به فاصله اول نیز تعلق دارد. از آنجا:

$$\gamma + \alpha = \beta$$

پس عدد γ که بدین ترتیب معین گردید جواب مسئله است.

۲) جواب یکتا است.

زیرا اگر یک عدد دیگر γ' وجود داشت بقسمیکه:

$$\gamma' + \alpha = \beta$$

لازم میآمد:

$$\gamma + \alpha = \gamma' + \alpha$$

از آنجا:

$$\gamma = \gamma' \qquad \text{(خاصیت } P_5\text{)}$$

قضیهٔ ۱- هرگاه دو عدد حقیقی α و β مفروض باشند بقسمیکه $\alpha < \beta$ یک عدد حقیقی γ و فقط یکی وجود دارد بطوریکه:

$$\alpha + \gamma = \beta$$

تعریف و علامت - γ تفاضل β و α نامیده میشود و با $\beta - \alpha$ نمایش داده میشود.

۳- ضرب

با امتداد دادن ضرب معلوم در Q^+ ضرب در R^+ را تعریف میکنیم.

ابتدا دو عدد منطق α و β را در نظر میگیریم که بترتیب با فواصل فراگیر با جمله‌های عمومی زیر معین شده باشند.

$$\alpha \in \left[\frac{q_n}{b^n}, \frac{q_n+1}{b^n}\right[, \qquad \beta \in \left[\frac{q'_n}{b^n}, \frac{q'_n+1}{b^n}\right[$$

داریم:

$$\frac{q_n}{b^n} \leqslant \alpha < \frac{q_n+1}{b^n}$$

$$\frac{q'_n}{b^n} \leqslant \beta < \frac{q'_n+1}{b^n}$$

از ضرب عضو به عضو در Q^+:

$$\frac{q_n q'_n}{b^{2n}} \leqslant \alpha\beta < \frac{(q_n+1)(q'_n+1)}{b^{2n}}$$

اثبات کنیم که در ازای l_n فاصله حاصل بسمت صفر میل میکند:

$$l_n = \frac{q_n+q'_n+1}{b^{2n}} = \frac{1}{b^n}\left(\frac{q_n}{b^n} + \frac{q'_n+1}{b^n}\right)$$

هرچه باشد $n \in N$ داریم:

$$\frac{q_n}{b^n} < e+1$$

e قسمت صحیح α است.

$$\frac{q'_n+1}{b^n} < e'+1$$

e' قسمت صحیح β است. پس داریم:

$$l_n < \frac{1}{b^n}(e+e'+2)$$

برای سازگاری $l_n < \varepsilon$ کافی است:

$$\frac{1}{b^n} < \frac{\varepsilon}{e+e'+2}$$

بر آورده شود.

با استفاده از قضیه ۱ (III، فصل ۴، ۲) بدین ترتیب یک رشته فواصل فراگیر بدست میآید که درازای آنها بسمت صفر میل میکند و حاصل ضرب $\alpha\beta$ را در Q^+ معین مینماید. وقتیکه α و β اعداد حقیقی غیر مشخص هستند حاصل ضرب $\alpha\beta$ بهمین طرز معین میگردد.

تعریف ضرب درR^+

به هر زوج مرتب اعداد حقیقی α و β یک عدد حقیقی همراه میکنیم که به حاصل ضرب α در β موسوم است و با $\alpha\beta$ نمایش داده میشود و بترتیب زیر معین میگردد.
هرگاه:

$$\left[\frac{q_n}{b^n}, \frac{q_n+1}{b^n}\right[\quad \text{و} \quad \left[\frac{q'_n}{b^n}, \frac{q'_n+1}{b^n}\right[$$

به ترتیب جمله‌های عمومی رشته‌های فواصل فراگیر میباشند که α و β را معین میکنند.
حاصل ضرب $\alpha\beta$ متعلق به جمیع فواصل فراگیر رشته نامتناهی به جمله عمومی

$$\left[\frac{q_n q'_n}{b^{2n}}, \frac{(q_n+1)\,(q'_n+1)}{b^{2n}}\right[$$

است که درازای آن بسمت صفر میل میکند.

جابجاپذیری

$\boxed{P_6}$ هرچه باشند اعداد حقیقی α و β داریم:

$$\beta\alpha = \alpha\beta$$

بنا به تعریف:

$$\alpha\beta \in \left[\frac{q_n q'_n}{b^{2n}}, \frac{(q_n+1)\,(q'_n+1)}{b^{2n}}\right[$$

$$\beta\alpha \in \left[\frac{q'_n q_n}{b^{2n}}, \frac{(q'_n+1)\,(q_n+1)}{b^{2n}}\right[$$

بخاطرجابجاپذیری در Q_b^+ دو رشته همسان هستند. پس‌داریم:

$$\alpha\beta = \beta\alpha$$

شرکت پذیری

$\boxed{P_7}$ هرچه باشند اعداد حقیقی α و β و γ داریم:

$$(\alpha\beta)\,\gamma = \alpha\,(\beta\gamma)$$

اگر جمله عمومی رشته معین کننده γ :

$$\left[\frac{q''_n}{b^n}, \frac{q''_n+1}{b^n}\right[$$

باشد:

$$(\alpha\beta)\,\gamma \in \left[\frac{q_nq'_n}{b^{2n}}\cdot\frac{q''_n}{b^n},\ \frac{(q_n+1)(q'_n+1)}{b^{2n}}\cdot\frac{(q''_n+1)}{b^n}\right[\ ;$$

$$(\alpha\beta)\,\gamma \in \left[\frac{q_n}{b^n}\cdot\frac{q'_nq''_n}{b^{2n}},\ \frac{q_n+1}{b^n}\cdot\frac{(q'_n+1)(q''_n+1)}{b^{2n}}\right[$$

بخاطر شرکت‌پذیری ضرب در Q_b^+ دو رشته همسان هستند:

$$(\alpha\,\beta)\gamma = \alpha\,(\beta\gamma)$$

توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع:

| P_8 | هرچه باشد اعداد حقیقی α و β و γ داریم:

$$\alpha\,(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

با حفظ علامتهای قبلی:

$$\alpha\,(\beta+\gamma) \in \left[\frac{q_n}{b^n}\cdot\frac{q'_n+q''_n}{b^n},\ \frac{q_n+1}{b^n}\cdot\frac{q'_n+1+q''_n+1}{b^n}\right[\ ;$$

و:

$$(\alpha\beta+\alpha\gamma) \in \left[\frac{q_nq'_n}{b^{2n}}+\frac{q_nq''_n}{b^{2n}},\ \frac{(q_n+1)(q'_n+1)}{b^{2n}}+\frac{(q_n+1)(q''_n+1)}{b^{2n}}\right[$$

بخاطر توزیع‌پذیری ضرب نسبت بجمع در Q_b^+ دو رشته همسان هستند: و داریم:

$$\alpha\,(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

توزیع‌پذیری نسبت بتفریق.

اگر $\gamma < \beta$ باشد داریم:

$$\alpha\,(\beta-\gamma) = \alpha\beta - \alpha\gamma$$

اثبات همانطور است که در N بود.

جزء خنثی:

| P_9 | هرچه باشد عدد حقیقی α داریم:

$$1\cdot\alpha = \alpha$$

α را با رشته به جمله عمومی:

$$\left[\frac{q_n}{b^n},\ \frac{q_n+1}{b^n}\right[$$

و ۱ را با رشته به جملهٔ عمومی:

$$\left[۱, ۱ + \frac{۱}{b^n} \right[$$

معین میکنیم:

بنا به تعریف ضرب داریم:

$$(۱ \cdot \alpha) \in \left[\frac{q_n}{b^n}, \frac{q_n + ۱}{b^n}\left(۱ + \frac{۱}{b^n}\right) \right[\supset \left[\frac{q_n}{b^n}, \frac{q_n + ۱}{b^n} \right[$$

چون α متعلق به فاصلهٔ دوم است پس به اولی نیز تعلق دارد پس:

$$۱ \cdot \alpha = \alpha$$

جزء خنثای ضرب در R^+ عبارت از ۱ است و یکتا است.

پایداری رابطهٔ ترتیب بازاء ضرب

$\boxed{P_{۱۰}}$

$$(\alpha \neq ۰ \quad \text{و} \quad \beta < \gamma) \quad \Rightarrow \quad \alpha\beta < \alpha\gamma$$

زیرا:

$$\beta < \gamma \quad \Rightarrow \quad (\exists \delta \in R^+ \text{ بطوریکه } \beta + \delta = \gamma)$$

در α ضرب میکنیم نتیجه میشود:

$$\alpha(\beta + \delta) = \alpha\gamma$$

از آنجا:

$$\alpha\beta + \alpha\delta = \alpha\gamma$$

و بنابراین:

$$\alpha\beta < \alpha\gamma$$

معکوسیت.

مسئلهـ هرگاه عدد حقیقی α مفروض باشد آیا عدد حقیقی β وجود دارد بقسمیکه:

$$\alpha\beta = ۱?$$

بدیهی است که شرط $\alpha \neq ۰$ برای وجود یک جواب لازم است چونکه هرچه باشد β داریم:

$$۰ \cdot \beta = ۰$$

پس فرض کنیم $\alpha \neq ۰$ و جملهٔ عمومی رشته تعیین کنندهٔ عدد α:

$$\left[\frac{q_n}{b^n}, \frac{q_n+1}{b^n}\right[$$

باشد.

شرط $\alpha \neq 0$ حد اقل از یک مرتبه معینی به بعد با:

$$\frac{q_n}{b^n} \neq 0$$

بیان میشود.

۱) جواب وجود دارد.

منظور پیدا کردن رشته:

$$\left[\frac{p_n}{b^n}, \frac{p_n+1}{b^n}\right[$$

در Q_b^+ است که عدد β را معین نماید بقسمیکه $\alpha\beta = 1$ باشد یعنی بقسمیکه:

$$\frac{p_n q_n}{b^{2n}} \leqslant 1 < \frac{(p_n+1)(q_n+1)}{b^{2n}}$$

یعنی در N:

$$p_n q_n \leqslant b^{2n} < (p_n+1)(q_n+1)$$

چون $q_n \neq 0$ است.

$$p_n = e\left(\frac{b^{2n}}{q^n}\right)$$

(قسمت صحیح عدد منطق) اختیار میکنیم. داریم:

$$p_n \leqslant \frac{b^{2n}}{q_n} < p_n + 1$$

(بنا به تعریف قسمت صحیح). از آنجا:

$$p_n q_n \leqslant b^{2n} < q_n\,(p_n+1)$$

و باقوی دلیل:

$$p_n q_n \leqslant b^{2n} < (p_n+1)(q_n+1)$$

از آنجا نتیجه میشود:

$$\frac{p_n q_n}{b^{2n}} \leqslant 1 < \frac{(p_n+1)(q_n+1)}{b^{2n}}$$

پس یک جواب وجود دارد که از اختیار:

$$p_n = e\left(\frac{b^{۲n}}{q_n}\right)$$

بدست می‌آید.

در این صورت داریم:

$$\beta \in \left[\frac{p_n}{b^n}, \frac{p_n + ۱}{b^n} \right[\qquad \text{و} \qquad \alpha\beta = ۱$$

۲) جواب یکتا است.

اگر یک عدد حقیقی دیگر β' وجود میداشت بقسمیکه $\alpha\beta' = ۱$ از ضرب طـرفین در β نتیجه میشد:

$$\beta\,(\alpha\beta') = \beta$$

بنا به شرکت‌پذیری:

$$(\beta\alpha)\,\beta' = \beta$$

و چون: $\alpha\beta = \beta\alpha = ۱$ است نتیجه میشد:

$$\beta = \beta'$$

قضیهٔ ۲- نظیر هر عدد حقیقی غیر صفر α یک عدد حقیقی وجود دارد بقسمیکه:

$$\alpha\beta = ۱$$

تعریف- β را معکوس عدد α مینامند و با:

$$\frac{۱}{\alpha}$$

نمایش میدهند.

از خواص مدلل شده نتیجه میشود کـه ضرب $\{۰\} - R^+$ یک بنیان گروه جابجاپذیر میبخشد.

بنابراین هرعدد حقیقی غیر صفر برای ضرب اختصارپذیر است.

(I، فصل ۲، ۴)

$$\boxed{P_{۱۱}} \qquad \beta = \gamma \quad \Rightarrow \quad (\alpha\beta = \alpha\gamma \qquad \text{و} \qquad \alpha \neq ۰$$

۴- جذر یك عدد حقیقی

جذر تقریبی تا یک واحد تقریب یک عدد حقیقی را با اثبات لم زیر تعریف میکنیم.

لم (L)ـ هرگاه α یک عدد حقیقی غیر مشخص و $e\,(\alpha)$ قسمت صحیح آن باشد نامساویهای:

$$r^{۲} \leqslant e\,(\alpha) < (r + ۱)^{۲}$$

منطقاً هم‌ارزند با:

$$r^{۲} \leqslant \alpha < (r + ۱)^{۲}$$

بنا به تعریف $e\,(\alpha)$ داریم:

$$e\,(\alpha) \leqslant \alpha \leqslant e\,(\alpha) + ۱$$

اگر r جذر کامل عدد طبیعی $e\,(\alpha)$ باشد:

$$r^{۲} \leqslant e\,(\alpha) < (r + ۱)^{۲}$$

داریم:

$$r^{۲} \leqslant e\,(\alpha) \leqslant \alpha \quad \Rightarrow \quad r^{۲} < \alpha$$

و:

$$e\,(\alpha) < (r + ۱)^{۲} \quad \Rightarrow \quad e\,(\alpha) + ۱ \leqslant (r + ۱)^{۲}$$

و چون $\alpha < e\,(\alpha + ۱)$ پس:

$$\alpha < (r + ۱)^{۲}$$

بدین ترتیب ثابت میشود که:

$$(r^{۲} \leqslant e\,(\alpha) < (r + ۱)^{۲}) \quad \Rightarrow \quad (r^{۲} \leqslant \alpha < (r + ۱)^{۲})$$

بعکس:

$$(r^{۲} \leqslant \alpha \quad \text{و} \quad \alpha < e\,(\alpha) + ۱) \quad \Rightarrow \quad r^{۲} < e\,(\alpha) + ۱$$
$$\Rightarrow \quad r^{۲} \leqslant e\,(\alpha)$$
$$(e\,(\alpha) \leqslant \alpha \quad \text{و} \quad \alpha < (r + ۱)^{۲}) \quad \Rightarrow \quad e\,(\alpha) < (r + ۱)^{۲}$$

عکس آن مدلل و لم (L) ثابت است.

حال تعریف زیر را بیان میکنیم:

تعریفـ جذر تقریبی یک عدد حقیقی تا یک واحد تقریب عبارت از جذر قسمت صحیح آن $e\,(\alpha)$ است.

جذرهای bـئی تقریبی یك عدد حقیقی α

بهر عدد طبیعی n و عدد حقیقی $b^{۲n}\alpha$ را همراه میکنیم، اگر q_n جذر تا یک واحد تقریب این عدد $b^{۲n}\alpha$ باشد:

$$q_n^{۲} \leqslant b^{۲n}\,\alpha < (q_n + ۱)^{۲}$$

از آنجا نتیجه میشود:

$$\left(\frac{q_n}{b^n}\right)^۲ \leqslant \alpha < \left(\frac{q_n+۱}{b^n}\right)^۲$$

و $\frac{q_n}{b^n}$ را «جذر تقریبی α تا $\frac{۱}{b^n}$ تقریب نقصانی» و $\frac{q_n+۱}{b^n}$ را جذر تقریبی α تا $\frac{۱}{b^n}$ تقریب اضافی مینامند. مانند (III، فصل ۴) بسادگی ثابت میشود که:

$$q_{n+۱}+۱ \geqslant q_n+۱ \qquad \text{و} \qquad q_n \leqslant q_{n+۱}$$

بنابراین رشته نامتناهی بجمله عمومی:

$$\left[\frac{q_n}{b^n}, \frac{q_n+۱}{b^n}\right]$$

از فواصل فراگیری تشکیل شده است که طول $\frac{۱}{b^n}$ آنها بسمت صفر میل میکند.

جذر α — عدد حقیقی متعلق به همه این فواصل به «جذر عدد α» موسوم است و با:

$$\sqrt{\alpha}$$

نمایش داده میشود.

بلافاصله محقق میشود که:

$$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\alpha}=\alpha$$

این جذر یکتا است، زیرا اگر دو عدد حقیقی β و β' وجود داشت بقسمیکه:

$$\beta > \beta' \qquad \text{با} \qquad \beta'^۲=\alpha \qquad \text{و} \qquad \beta^۲=\alpha$$

(مثلاً) از ضرب عضو به عضو دو نامساوی:

$$\beta > \beta' \qquad \text{و} \qquad \beta > \beta'$$

در R^+ نتیجه میشد.

$$\beta^۲ > \beta'^۲$$

که مخالف فرض است پس:

$$\beta^۲=\beta'^۲=\alpha$$

قضیه ۳- هر عدد متعلق به R^+ دارای یک جذر یکتا در R^+ است.

تبصره- این قضیه در تئوری لگاریتم‌ها مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

۵- سوراخها و خلل

در مجموعه N اعداد طبیعی فاصله‌های باز تهی وجود دارد، هر فاصله بەدوانتهای متوالی:

$$]a, a+1[\subset N$$

تهی است.

میگویند که این فاصله یک سوراخ در N است.

تعریفـ در یک مجموعه مرتب، فاصله باز تهی را سوراخ مینامند. در مجموعه Q_b^+ سوراخ وجود ندارد، زیرا اگر α و β اعداد bـئی باشند بقسمیکه $\beta > \alpha$ دراین صورت عدد

$$\gamma = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{b}$$

خودش نیز bـئی است و:

$$\gamma \in]\alpha, \beta[$$

(چون $b > 1$). پس هرفاصله باز از Q_b^+ تهی نیست: در Q_b^+ نیز سوراخ وجود ندارد. بطور اولی در Q^+ و R^+ نیز وجود ندارد.

خلل در Q_b^+ـ

مثالی اختیار کنیم، در دستگاه به مبنای ۲ $(b = 2)$ رشته فواصل فراگیر را که عدد منطق $\frac{1}{3}$ را معین میکنند بنویسیم:

(یادآور شویم که تنها رقمهای این دستگاه ۰ و ۱ میباشند)

$$[0, 1[\supset [\frac{0}{b}, \frac{1}{b}[\supset [\frac{1}{b^2}, \frac{10}{b^2}[$$
$$\supset [\frac{10}{b^3}, \frac{11}{b^3}[\supset [\frac{101}{b^4}, \frac{110}{b^4}[\supset [\frac{1010}{b^5}, \frac{1011}{b^5}[\supset \dots$$

جمیع این فواصل گنجیده در Q_2^+ هستند ولی عدد منطق $\frac{1}{3}$ که به همه این فواصل (که طول آن بسمت صفر میل میکند) تعلق دارد عدد مبنای ۲ نیست.

$$\frac{1}{3} \notin Q_2^+$$

میگویند که رشته بینهایت این فواصل در Q_2^+ یک خلل ایجاد میکنند.

تعریفـ یک رشته نامتناهی فواصل گنجیده در Q_b^+ که طول آن بسمت صفر میل میکند یک

خلل در Q_b^+ ایجاد میکند، اگر هیچ عدد Q_b^+ متعلق به این فواصل وجود نداشته باشد در Q^+ نیز خلل وجـود دارند. کافی است رشته فواصل فراگیر Q_b^+ تعیین کننده $\sqrt{2}$ را در نظر بگیریم (بدیهی است که این فواصل گنجیده در Q^+ هستند) تنها عـدد متعلق به همه این رشته فواصل نامتناهی اصم است، این عدد متعلق به Q^+ نیست.

فقدان خلل در R^+

قضیه ۴- هر رشته نامتناهی فواصل فراگیر گنجیده در R^+ کـه طول آن بسمت صفر میل میکند هرگز خلل معین نمیکند.

هرگاه:

$$[\alpha_0, \alpha'_0] \supset [\alpha_1, \alpha'_1] \supset \cdots \supset [\alpha_n, \alpha'_n] \supset \cdots \qquad \text{(S)}$$

یک رشته نامتناهی فواصل فراگیر اعداد R^+ بـاشد کـه درازای $\alpha'_n - \alpha_n$ آن بسمت صفر میل می‌کند، اگر از مرتبه معینی به بعد همه α_nها برابر باشند، یعنی:

$$n \geqslant p \quad \Rightarrow \quad \alpha_n = \alpha$$

در این صورت قضیه بدیهی است: α متعلق به همه فواصل (S) است. بهمـین تـرتیب اگر از مرتبه معینی به بعد جمیع α'_nها برابر باشند باز هم قضیه بدیهی است.

فرض کنیم که α_nها از یک طرف و α'_nها از طرف دیگر از مرتبه معینی بـه بعد برابر نباشند. در این صورت میتوان فرض کرد که جمیع α_nها متمایز و جمیع α'_n هـا نیـز متمایز باشند و فواصلی از (S) را که جوابده این خواستها نیستنـد کنار میگذاریم. (با ایـن وجود یک رشته نامتناهی فواصل فراگیر که درازای آنها بسمت صفر میل میکند باقی میماند).

چون $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ است یک عدد b-ئی $x_n \in Q_b^+$ وجود دارد بقسمیکه:

$$\alpha_n < x_n < \alpha_{n+1} \qquad \text{(فصل ۱، قضیه ۳)}$$

چون $\alpha'_{n+1} < \alpha'_n$ یک عدد b-ئی $x'_n \in Q_b^+$ وجود دارد بقسمیکه:

$$\alpha'_{n+1} < x'_n < \alpha'_n$$

پس داریم:

$$[\alpha_n, \alpha'_n] \supset [x_n, x'_n] \supset [\alpha_{n+1}, \alpha'_{n+1}]$$

پس میتوان بین هـر زوج فواصل متوالی (S) یک فاصلـه از Q_b^+ را قـرار داد. بدین ترتیب یک رشته فواصل فراگیر گنجیده در Q_b^+ بدست میآید.

$$[x_0, x'_0] \supset [x_1, x'_1] \supset \cdots \supset [x_n, x'_n] \supset \cdots \qquad \text{(S')}$$

ولی $x'_n - x_n$ بسمت صفر میل میکند، زیرا:

(بسمت صفر میل میکند $\alpha'_n - \alpha_n$ و $([\alpha_n, \alpha_n] \supset [x_n, x'_n]$

$\Rightarrow$ (بسمت صفر میل میکند $x'_n - x_n$)

پس رشته (S') یک عدد حقیقی α یکتا را معین میکند.

چون:

$$([\alpha_n, \alpha'_n] \supset [x_n, x'_n] \quad \text{و} \quad \alpha \in [x_n, x'_n]) \Rightarrow (\alpha \in [\alpha_n, \alpha'_n])$$

عدد α متعلق به همه فواصل رشته مفروض (S) است. قضیه ثابت است و آنرا بدین صورت بیان میکنیم:

«مجموعه R^+ اعداد حقیقی کامل است»

تعبیر دیگر استدلال

فرض کنیم رشته (S) منحصراً از فواصل اعداد متعلق به $Q^+_{b'}$ تشکیل شده باشد، b' مبنای متمایز از b است.

با شروع از این مجموعه $Q^+_{b'}$ میتوان سمبلهائی را معین کرد، همانطور که در فصل قبل با شروع از Q^+_b کردیم.

حال اگر خود را فقط در مجموعه اعداد منطق قرار دهیم، استدلال قبلی نافذ است و باز هم سلسله گنجیدگی‌های زیر را میتوان نوشت:

$$\cdots \subset [\alpha_n, \alpha'_n] \subset [x_n, x'_n] \subset [\alpha_{n+1}, \alpha'_{n+1}] \subset [x_{n+1}, x'_{n+1}] \subset \cdots$$

بطوریکه سمبل معین شده با شروع از رشته (S') فواصل گنجیده در Q^+_b با سمبل معین شده بهمین طرز از رشته (S) فواصل گنجیده در Q^+_b منطبق باشد پس میتوانیم بگوئیم:

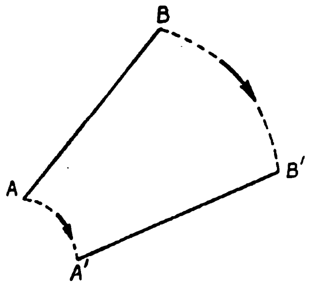
قضیه ۵ - هرچه باشد مبنای b و b' با پرکردن خلل Q^+_b یا $Q^+_{b'}$ همان مجموعه R^+ بدست میآید.

فصل سوم

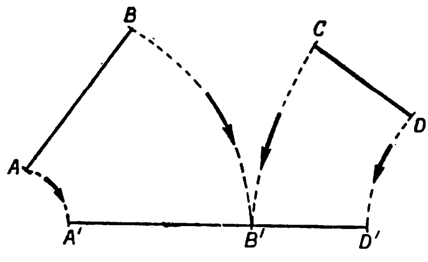
اندازه کمیتها

۱ــ مثالهای کمیتها:

۱) در هندسه پاره خط را مانند زوج AB دو نقطه تعریف میکنند. میگویند که دوپاره خط AB و $A'B'$ برابرند درصورتیکه بتوان با یک تغییر مکان (جابجا کردن) یکی را بر دیگری منطبق کرد (شکل ۱) تغییر مکان‌ها مبناهای هندسه فرض میشوند[۱].



شکل ۱



شکل ۲

بدین ترتیب در مجموعه پاره خطها یک رابطه هم‌ارزی معین میشود که با $AB = A'B'$ نمایش میدهند و «تساوی پاره خطها» مینامند که در مجموعه، طبقه پاره خطهای مساوی را ایجاد میکند. هر طبقه‌ای یک درازا یا طول نامیده میشود نماینده هر درازا پاره خطی از طبقه است.

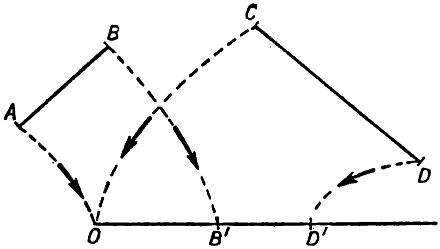
در مجموعه طولها یک عمل موسوم به جمع معین میشود که بهر زوج طولها یک طول را بترتیب زیر نظر قرار میدهد که مجموع دو طول اولی نامیده میشود (شکل ۲)

۱ــ R. Brisac طرح مقدماتی اصول هندسه اقلیدسی

هرگاه AB و CD بترتیب نمایندههای دو طول h و l باشند این پاره خطها را روی دو پاره خط دیگر که وصل بهم ودر امتداد یک خط قرار دارند و باز هم نماینده h و l هستند نقل میکنیم. AB را روی $A'B'$ و CD را روی $B'D'$ میبریم بطوریکه B' بین A' و D' قرار گیرد. پاره خط $A'D'$ طول مجموع دو طول اول را نمایش میدهد و با $h + l$ نشان داده میشود. این جمع طولها شرکت‌پذیر جابجاپذیر و دارای یک جزء خنثی، طول صفر، است (که با زوج نقاط منطبق بهم نمایش داده میشود).

بعلاوه، مجموعه طولها بوسیله رابطهای که بصورت: «طول l کوچکتر از طول h است» بیان میشود کلاً مرتب است. هر گاه AB و CD بترتیب پاره خطهای نماینده طولهای l و h باشند (شکل۳).

AB و CD را بترتیب روی پاره خطهای OB' و OD' متعلق بیک نیم خط بمبداء O نقل میکنیم داریم:



شکل ۳

«B' واقع بین O و D'» موجب میشود $h > l$ پس مجموعه طولها یک نیم گروه جابجاپذیر با جزء خنثی و کلاً مرتب است.

۲) در فیزیک اشیاء مادی در نظر گرفته میشود. در مجموعه اشیاء به کمک ترازو یک رابطه هم‌ارزی معین میشود. دو شیئ هم‌ارز نامیده میشوند اگر هم‌تراز باشند. این رابطه در مجموعه اشیاء طبقه هم‌ارزی ایجاد میکند و این طبقه جرم نامیده میشود.

در مجموعه جرمها، یک عمل موسوم به جمع معین میشود، بهر زوج از جرمها یک جرم نظیر قرار میگیرد که مجموع دو جرم اول نامیده میشود. اگر دو جسم دارای جرمهای p و q باشند اجتماع این دو جسم جرم $p + q$ را نمایش میدهد. این جمع شرکت‌پذیر جابجاپذیر و دارای یک جزء خنثی است: جرم صفر.

بعلاوه مجموعه جرمها بوسیله رابطهای که بصورت:

«جرم p کوچکتر از جرم q است» بیان میشود کلاً مرتب است. جسم نماینده جرم p را در یک کفه ترازو و جسم نماینده q را در کفه دیگر ترازو قرار میدهند اگر شاهین ترازو به طرف جسم q تمایلی پیدا کند مینویسند:

$$p < q$$

پس مجموعه جرمها یک نیم گروه جابجاپذیر با جزء خنثی و کلاً مرتب است.

۲ـ اصول در نیم گروه مرتب E

از مجموعه E که اجزاء آن طبقات کمیتهای هم ارز هستند شروع میکنیم:

اجزاء آن را با حروف آخر الفبا نشان میدهیم:

$$u, v, x, y, z \in E$$

سایر حروف این الفبا را برای اعداد طبیعی نگاه میداریم:

$$a, b, n, p, q \in N$$

اعداد حقیقی را با حروف یونانی نشان میدهیم:

$$\mu \in R^+$$

اجزاء E با دو دستگاه اصول زیر سازگارند:

اصل B_1

در E قانون ترکیب موسوم به جمع وجود دارد که همه جا معین است و با $x + y$ نشان داده میشود و دارای خواص زیر است:

۱ـ شرکت‌پذیر است:

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

۲ـ جابجاپذیر است:

$$x + y = y + x$$

۳ـ دارای یک جزء خنثی است:

$$x + 0 = x$$

(هرچه باشد $x \in E$)

بعبارت دیگر، E یک نیم گروه جابجاپذیر با جزء خنثی است.

اصل B_2

در E یک رابطه ترتیب کل، $x \leqslant y$ وجود دارد که خاصیت زیر را دارا است:

$$x \leqslant y \iff (\exists z \in E;\ \text{یکتا است}\ z,\ x + z = y)$$

بعبارت دیگر برای یک زوج x و y دو جزء که بطور شایسته‌ای مرتب شده باشند همانطور که در N بود تفریق امکان‌پذیر است مینویسیم:

$$z = y - x$$

اگر $z \neq 0$ باشد:

$$x < y$$

و یک رابطه ترتیب اکید بدست میآید.

نتیجه‌ها.

۱) 0 کوچکترین جزء E است.

زیرا هرچه باشد $x \in E$ داریم:

$$0 + x = x$$

از آنجا:

$$0 \leqslant x$$

۲) رابطه ترتیب بازاء جمع پایدار است، زیرا:

$$x \leqslant y \Rightarrow (\exists z \in E\ \text{بطوریکه}\ x + z = y)$$

از آنجا:

(شرکت‌پذیری و جابجاپذیری) $\qquad x + u + z = y + u \qquad (\forall u \in E)$

بنابراین:

$$x + u \leqslant y + u \qquad (B_2)$$

۳) از خاصیت قبل (همانطور که در N بود) بلافاصله نتیجه میشود:

$$(x \leqslant y \quad \text{و} \quad z \leqslant u \Rightarrow x + z \leqslant y + u)$$

نامساویها را در E میتوان عضو به عضو جمع کرد.

۴) مانند N در E نیز فاصله‌های بسته، نیم باز، باز را میتوان تعریف کرد.

۵) هر قسمت متناهی غیر تهی E دارای یک بزرگترین جزء است. این خاصیت را مانند N با روش بازگشتی روی اصلی قسمت غیر تهی اثبات میکنند: استدلال عیناً همان است چونکه در E نیز ترتیب کلی است.

مضربهای یک جزء

تعریف - بهر جزء x از E و هر عدد طبیعی n یک جزء E را موسوم به مضرب x همراه

کنیم که بصورت nx نوشته میشود و با روش بازگشتی زیر معین میگردد:

۱ـ $0 \times x = 0$

۲ـ با معین بودن nx با رابطه زیر، $(n+1)x$ را معین کنیم:

$$(n+1)x = nx + x$$

بدین ترتیب یک قانون ترکیب برونـــی روی هر زوج (n, x) بـــا $n \in N$ و $x \in E$ معین میشود.

داریم: $1 \times x = x$ و بازاء $n > 1$:

$$nx = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ جمله}}$$

با روش بازگشتی (همانطور که در مورد N غالباً عمل شده است) و با یاری گرفتن از شرکت‌پذیری توزیع‌پذیری و جابجاپذیری خواص زیر ثابت میشود:

$\boxed{P_1}$ هرچه باشد اعداد طبیعی n, p واجزاء x و y از E:

$$(n+p)x = nx + px$$

$$n(x+y) = nx + ny$$

$$n(px) = (np)x$$

$$(n \neq 0) \qquad x < y \iff nx < xy$$

خاصیت آخری با روش بازگشتی و با اضـافـه کردن $x < y$ بـه $nx < ny$ اثبات میشود. عکس قضیه با نفی $x < y$ و ایجاد تناقض با فرض $nx < ny$ از روی قضیه مستقیم نتیجه میشود.

خاصیت زیر را اثبات میکنیم:

$\boxed{P_2}$ هرچه باشد اعداد طبیعی n و p و جزء u از E:

$$n < p \Rightarrow nu < pu$$

زیرا:

$$n < p \Rightarrow (\exists q \in N^* \quad \text{بطوریکه} \quad n + q = p)$$

پس داریم:

$$(n+q)u = pu \qquad (\text{هرچه باشد } u \in E)$$

از آنجا:

$$nu + qu = pu \qquad (P_1)$$

و بنابراین اگر $u \neq 0$:

$$nu < pu$$

نتیجه میشود که:

تابع $n \to nu$ مجموعه N در E اکیداً صعـودی است. اگـر نگار N یعنـی مجموعه مضرب‌های u را با $\mathcal{M}_u$ نشان بدهیم قضیه زیر را داریم:

قضیهٔ ۱- تابع $n \to nu$ با دوسوئی N را روی نگار خـودش $\mathcal{M}_u$ $(u \neq 0)$ مـی‌نگارد اینک نمودار این تناظر (شکل ۴)

$$\left.\begin{array}{l} N = \{0,\ 1,\ 2,\ 3, \dots,\ n, \dots\} \\ \qquad\ \ \updownarrows\ \updownarrows\ \updownarrows\ \updownarrows \qquad\quad \updownarrows \\ \mathcal{M}_u = \{0,\ u,\ 2u,\ 3u, \dots,\ nu, \dots\} \end{array}\right| \uparrow \mu(nu) = n$$

شکل ۴

این تناظر یک یک شکلی بازاء رابطه ترتیب (چونکه صعودی است) نسبت به جمع (چونکه $nu + pu = (n + p)\,u$) است.

۳- مسئلهٔ اندازه و اصل ارشمیدس

تعریف- اندازه‌گیری اجزاء E عبارت از نظیر قرار دادن یک عدد حقیقی مثبت یکتا به هرجزء $x \in E$ است که «اندازه x» نامیده میشود و با $\mu\,(x)$ نشان داده میشود. بطوریکه نظیر هر جزء غیر صفر $u \in E$ (منتخب یک‌بار برای همیشه) کـه «واحد انـدازه» نامیده میشود عدد ۱ است و نیز نظیر مجموع دوجزء از E مجموع اندازه‌های آنها است.

۱- $$\mu\,(u) = 1$$

۲- $$\mu\,(x + y) = \mu\,(x) + \mu\,(y)$$

بعبارت دیگر تابع $x \to \mu\,(x)$ به‌نگار واقع در R^+ و معین در E پایه یک همشکلی نسبت به جمع باشد. (I، فصل ۳ و ۷)

مسئلهٔ اندازه مشتمل بر ساخت ایـن تابع است $x \to \mu\,(x)$. این مسئله بـرای جمیع اجزاء $\mathcal{M}_u$، مجموعه مضربهای واحد u بسادگی حل شده است.

در تناظر دوسوئی بین N و $\mathcal{M}_u$ (قضیه ۱):

$$\mu\,(nu) = n$$

اختیار میکنیم بقسمیکه $x \to \mu\,(x)$ تابع معکوس تابع $n \to nu$ باشد. میدانیم که این تابع

بهتر از یک همشکلی بـازاء جمع است، و این یک شکلی است کـه $\mathcal{M}_u$ را روی N می‌نگارد. پس مسئله بازاء قسمت $\mathcal{M}_u$ از E حل شده است:

$$\mu\left(\mathcal{M}_u\right) = N$$

باید مسئله را بازاء بخشی از E که به $\mathcal{M}_u$ تعلق ندارد حل کنیم. بجا است کـه بدانیم آیا هر جزء $x \in E$ با $x \notin \mathcal{M}_u$ بین دو جزء متوالی مقیاس $\mathcal{M}_u$ که با N مـدرج شده است قرار میگیرد؟ (شکل ۴) اصل ارشمیدس پاسخگوی این خواست است.

اصل ارشمیدس $(B_۳)$

هرچه بـاشد اجـزاء غیر صفر x و y از E یک عدد طبیعی n وجـود دارد بقسمیکه: $nx > y$ اگر این اصل در E محقق بـاشد میگویند کـه اجزاء آن طبقات کمیتهای ارشمیدسی میباشند و هر مجموعه‌ای که اصلهای $B_۱$ و $B_۲$ و $B_۳$ درآن محقق باشند: «نیم‌گروه ارشمیدسی» نامیده میشود. اصل ارشمیدسی این معنی را میدهد که: مجموعه $\mathcal{M}_x$ مضربهای هـر جزء x غیر صفر E فرابسته نیست.

هرگاه $\mathcal{P}$ بخشی از $\mathcal{M}_x$ باشد که با y فرابسته شده است:

$$\mathcal{P} = \mathcal{M}_x \cap [\circ,\ y]$$

$\mathcal{P}$ مجموعه مضربهای x است که حد اکثر برابر yاند.

$\mathcal{P}$ تهی نیست زیرا حد اقل شامل جزء صفر است.

بنا بـه اصل ارشمیدس یک عـدد طبیعی n وجود دارد بقسمیکه $nx > y$ و بنابراین اجزاء $px \in \mathcal{P}$ که با $px \leqslant y$ سازگارند با $px < nx$ نیز سازگارنـد و در نتیجه: $p < n$ پس میتوان گفت که $\mathcal{P}$ متناهی است.

هرگاه $\mathcal{P}$ بخش متناهی و غیر تهی E باشد دارای یک بزرگترین جزء z است:

$$z = \max \mathcal{P}$$

چون $z \in \mathcal{M}_x$ است یک عدد طبیعی q-ی یکتا وجود دارد بقسمیکه:

$$qx = z$$

(q اندازه z است وقتیکه x برای واحد انتخاب شود).

بدیهی است که داریم:

$$qx \leqslant y$$

چون $z \in \mathcal{P}$ است همچنین داریم:

$$(q + ۱)\, x > y$$

زیرا اگر میداشتیم:

$$(q+۱)\,x \leqslant y$$

در عین حال میداشتیم:

$$(q+۱)\,x > qx \qquad \text{و} \qquad (q+۱)\,x \in \mathcal{P}$$

و $z = qx$ بزرگترین جزء $\mathcal{P}$ نمیشد.

بنا بر این قضیهٔ زیر را داریم:

قضیهٔ ۲- در یک نیم‌گروه ارشمیدسی نظیر هر زوج اجزاء x و y $(x \neq ۰)$ یک عدد طبیعی q-ی یکتا وجود دارد بقسمیکه:

$$qx \leqslant y < (q+۱)\,x$$

تعریفات- q را «خارج قسمت اقلیدسی» y بر x مینامند. پیدا کردن این عدد عبارت از انجام تقسیم اقلیدسی y بر x است.

باقیمانده.

$$qx \leqslant y \iff (\exists v \in E \qquad qx + v = y)$$

$$y < (q+۱)\,x \iff qx + v < qx + x \iff v < x$$

پس داریم:

$$qx \leqslant y < (q+۱)\,x \iff (y = qx + v \qquad \text{و} \qquad v < x)$$

v را باقیمانده تقسیم مینامند.

۴- حل مسئله اندازه در یك نیم‌گروه ارشمیدسی.

هرگاه u واحد اندازه منتخب در E باشد $(u \neq ۰)$ بهر جزء $x \in E$ میتوان یک عدد طبیعی q را نظیر قرار داد که خارج قسمت اقلیدسی x بر u باشد:

$$qu \leqslant x < (q+۱)\,u$$

بدین ترتیب x «در مقیاس» $\mathcal{M}_u$ جا گرفته است.

«اندازه تقریبی x با یک واحد تقریب» را «مدرج کردن» q مینامند.

میتوان مقادیر تقریبی x را با هر تقریب دلخواهی معین کرد.

اگر b مبنای دستگاه شمار باشد:

یک عدد طبیعی n اختیار میکنیم و جزء $b^n x$ از E را در نظر میگیریم. تقسیم اقلیدسی $b^n x$ را بر u انجام میدهیم. خارج قسمت اقلیدسی حاصل را q_n مینامیم:

$$q_n u \leqslant b^n x < (q_n + ۱)u \qquad (۱)$$

$\frac{q_n}{b^n}$ را «اندازه b-ئی تقریبی x با $\frac{۱}{b^n}$ تقریب نقصانی» مینامند.

$\frac{q_n + ۱}{b^n}$ را «اندازه b-ئی تقریبی x با $\frac{۱}{b^n}$ تقریب اضافی» مینامند.

میتوان اندازه‌های تقریبی $\frac{۱}{b^n}$ و $\frac{۱}{b^{n+۱}}$ تقریب را باهم مقایسه نمود.

هرگاه:

$$q_{n+۱} u \leqslant b^{n+۱} x < (q_{n+۱} + ۱)\, u$$

نامساویهای تعیین کننده اندازه‌های تقریبی با $\frac{۱}{b^{n+۱}}$ تقریب باشند طرفین نامساویهای (۱) را در b ضرب میکنیم:

$$b q_n u \leqslant b^{n+۱} x < b\,(q_n + ۱)\, u$$

و چون $q_{n+۱}$ بزرگترین عدد صحیح است بقسمیکه:

$$q_{n+۱} u \leqslant b^{n+۱} x$$

داریم:

$$b q_n \leqslant q_{n+۱}$$

و چون $q_{n+۱} + ۱$ کوچکترین عدد صحیح است بقسمیکه:

$$(q_{n+۱} + ۱)\, u > b^{n+۱} x$$

داریم:

$$q_{n+۱} + ۱ \leqslant b\,(q_n + ۱)$$

از بخش دو نامساوی حاصل بر $b^{n+۱}$ نتیجه میشود:

$$\frac{q_n}{b^n} \leqslant \frac{q_{n+۱}}{b^{n+۱}}\,; \qquad \frac{q_{n+۱} + ۱}{b^{n+۱}} \leqslant \frac{q_n + ۱}{b^n}$$

وقتیکه n بترتیب مقادیر ۰, ۱, ۲, ..., n, ... را اختیار میکند یک رشته اندازه‌های b-ئی تقریبی نقصانی بدست میآید.

$$q_۰ \leqslant \frac{q_۱}{b} \leqslant \frac{q_۲}{b^۲} \leqslant \cdots \leqslant \frac{q_n}{b^n} \leqslant \cdots \qquad (S)$$

(رشته صعودی به معنای وسیع است) و یک رشته اندازه‌های b-ئی تقریبی با تقریب اضافی.

$$q_{\circ} + ۱ \geqslant \frac{q_۱ + ۱}{b} \geqslant \frac{b_۲ + ۱}{b^۲} \geqslant \dots \geqslant \frac{q_n + ۱}{b^n} \geqslant \dots \qquad (S')$$

(رشته نزولی به معنای وسیع است)

اندازهٔ حقیقی x.

اگر ارزیابی شود که اجزاء $b^n x$ از مرتبه معینی به بعد برای عرضه کردن زیادی بزرگ هستند میتوان برای بدست آوردن ارقام قسمت b-ئی $\frac{q_n}{b^n}$ در مبنای b روشی بکار برد که با روشی که تا حال طرح کردیم منطقاً هم‌ارز باشند.

x را بر u تقسیم میکنیم. فرض کنیم $q_{\circ} = e$ خارج قسمت اقلیدسی و $x_۱$ باقیمانده باشد:

$$x = eu + x_۱ \qquad x_۱ < u \qquad (۱)$$

$bx_۱$ را بر u تقسیم کنیم و در نظر بگیریم که:

$$x_۱ < u \quad \Rightarrow \quad bx_۱ < bu$$

خارج قسمت اقلیدسی $r_۱$ تقسیم $bx_۱$ بر u اکیداً از b کمتر است:

$$bx_۱ = r_۱ u + x_۲ \qquad x_۲ < u \quad و \quad r_۱ < b \qquad (۲)$$

$bx_۲$ را بر u تقسیم میکنیم و همینطور تا آخر.

اگر در مرتبه n فرض کنیم که:

$$bx_{n-۱} = r_{n-۱} u + x_n \qquad (n)$$

با $\quad x_n < u \quad$ و $\quad r_{n-۱} < b$

در این صورت bx_n را بر u تقسیم میکنیم. چون:

$$x_n < u \quad \Rightarrow \quad bx_n < bu$$

خارج قسمت اقلیدسی r_n تقسیم bx_n بر u اکیداً از b کمتر است:

$$bx_n = r_n u + x_{n+۱} \qquad (n + ۱)$$

با $\quad x_{n+۱} < u \quad$ و $\quad r_n < b$

و بنابراین با روش بازگشتی تا بینهایت قابل ادامه است. ثابت میکنیم که بدین ترتیب بازاء هر مرتبه n ارقام صورت بندی در مبنای b-ئی عدد b-ئی $\frac{q_n}{b^n}$ بدست میآید.

اجزاء (۱) را در b^n ضرب میکنیم:

$$b^n x = b^n eu + b^n x_۱$$

اجزاء (۲) را در $b^{n-۱}$ ضرب میکنیم:

$$b^n x_۱ = b^{n-۱} r_۱ u + b^{n-۱} x_۲$$

. . . .

اجزاء n را در b ضرب میکنیم:

$$b^۲ x_{n-۱} = b r_{n-۱} u + b x_n$$

اجزاء $(n + ۱)$ را در b° ضرب می‌کنیم:

$$b x_n = r_n u + x_{n+۱}$$

$(n + ۱)$ تساوی حاصل را عضو به عضو باهم جمع میکنیم:

$$b^n x = (b^n e + b^{n-۱} r_۱ + \cdots + b r_{n-۱} + r_n)\, u + x_{n+۱}$$

با $\qquad x_{n+۱} < u$

پس، خارج قسمت اقلیدسی q_n تقسیم $b^n u$ بر u عبارتست از:

$$q_n = b^n e + b^{n-۱} r_۱ + \cdots + b r_{n-۱} + r_n$$

از آنجا:

$$\frac{q_n}{b^n} = e + \frac{r_۱}{b} + \cdots + \frac{r_{n-۱}}{b^{n-۱}} + \frac{r_n}{b^n} = e, \overline{r_۱ r_۲ \cdots r_{n-۱} r_n}$$

مشاهده میشود که ارقام نمایش در مبنای b عدد b-ئی اندازه تقریبی x با $\frac{۱}{b^n}$ تقریب نقصانی بدست می‌آید.

این روش را میتوان تا بینهایت ادامه داد. بدین ترتیب به هر $x \in E$ یک صورت‌بندی نامتناهی در مبنای b همراه میکنیم که «اندازه حقیقی x» نامیده میشود:

$$\mu(x) = e, \overrightarrow{r_۱ r_۲ \cdots r_n \cdots}$$

بدیهی است که این عدد حقیقی $\mu(x)$ به تمام فواصل رشته زیر تعلق دارد:

$$\left[q_\circ, q_\circ + ۱ \right[\supset \left[\frac{q_۱}{b}, \frac{q_۱ + ۱}{b} \right[\supset \cdots \supset \left[\frac{q_n}{b^n}, \frac{q_n + ۱}{b^n} \right[\supset \cdots$$

رشته‌ای که بر پایه (S) و (S′) ساخته شده است.

ممکن است که از مرتبه معینی به بعد ارقام r_n برابر صفر باشند. در این صورت اندازه $\mu(x)$ عدد x یک عدد b-ئی است.

مثال ــ طول نموده شده با AB را با واحد u که با CD نموده شده است اندازه بگیریم (شکل ۵) در دستگاه به مبنای ۲ عمل میکنیم ($b = ۲$).

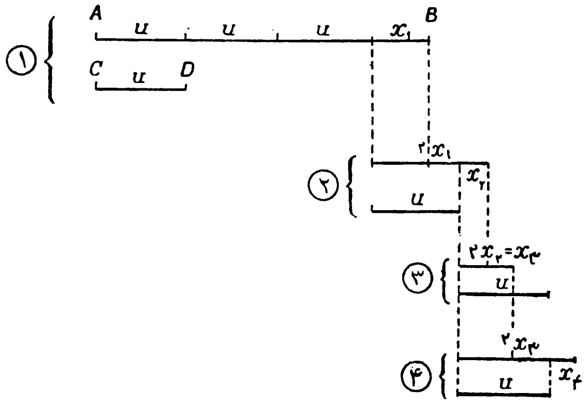
تقسیمات اقلیدسی متوالی زیر بدست میآید:

$$x = ۳u + x_۱ \qquad x_۱ < u \tag{۱}$$

$$۲x_۱ = ۱\cdot u + x_۲ \qquad x_۲ < u \tag{۲}$$

$$۲x_۲ = ۰\cdot u + x_۳ \qquad x_۳ < u \tag{۳}$$

$$۲x_۳ = ۱\cdot u + x_۴ \qquad x_۴ < u \cdots \tag{۴}$$



شکل ۵

قسمت صحیح ۳ در دستگاه به مبنای ۲ بصورت ۱۱ نوشته میشود. داریم:

$$\mu(x) = ۱۱,\overrightarrow{۱۰۱\cdots}$$

بررسی عمومی را از سر بگیریم و اکنون ثابت کنیم که شرایط اندازه بر آورده شده‌اند.

اول از همه بدیهی است که نظیر هر جزء $u = x$ یک عدد ۱ قرار دارد:

$$\mu(u) = ۱$$

حال قضیه زیر را اثبات میکنیم:

قضیهٔ ۳ــ تابع $x \rightarrow \mu(x)$ که معین کردیم بازاء جمع یک همشکلی است:

$$\mu(x + y) = \mu(x) + \mu(y)$$

هرگاه x و y دو جزء غیر مشخص از E و:

$$\mu(x) = e, \overrightarrow{r_۱ r_۲ \cdots r_n \cdots}$$
$$\mu(y) = e', \overrightarrow{r'_۱ r'_۲ \cdots r'_n \cdots}$$

بترتیب اندازه‌های آنها باشند:

بازاء هر مرتبه n داریم:

$$q_n u \leqslant b^n x < (q_n + ۱) u$$
$$q'_n u \leqslant b^n y < (q'_n + ۱) u$$

از جمع عضو به عضو در E :

$$(q_n + q'_n) u \leqslant b^n (x + y) < (q_n + q'_n + ۲) u$$

این نامساویها بیان میکنند که خارج قسمت اقلیدسی q''_n تقسیم $b^n (x + y)$ بـر u با نامساوی‌های زیر سازگار است؛

$$q_n + q'_n \leqslant q''_n < (q_n + q'_n + ۲)$$

از آنجا :

$$\frac{q''_n}{b^n} \in \left[\frac{q_n + q'_n}{b^n}, \frac{q_n + q'_n + ۲}{b^n} \right[$$

(هرچه باشد n).

بنابراین $\mu(x + y)$ به همه این فاصله‌های گنجیده در Q_b^+ تعلق دارد که دقیقاً مجموع $\mu(x) + \mu(y)$ را معین مینمایند. (تعریف جمع در R^+)

پس داریم:

$$\mu(x + y) = \mu(x) + \mu(y)$$

تبصره ــ تابع $x \to \mu(x)$ صعودی است :

$$x < y \quad \Rightarrow \quad \mu(x) < \mu(y)$$

زیرا:

$$x < y \quad \Rightarrow \quad (\exists z \neq ۰, \ z \in E, \ x + z = y)$$

در نتیجه:

$$\mu(x + z) = \mu(y)$$

از آنجا:

$$\mu(x) + \mu(z) = \mu(y) \qquad \text{(قضیه ۳)}$$

و در R^+:

$$\mu(x) < \mu(y)$$

زیرا چون $z \neq 0$ پس $\mu(z) \neq 0$ است.

تابع $x \rightarrow \mu(x)$، E در R^+ اکیداً صعودی است. از آنجا نتیجه میشود (I، فصل ۳: ۳قضیه ۱):

تابع $x \rightarrow \mu(x)$ یک درونگستری E در R^+ است. ولی معلوم نیست آیا هر عدد حقیقی، اندازه یک جزء E است یعنی آیا $x \rightarrow \mu(x)$ یک برونگستری E در R^+ نیز هست؟

برقراری تساوی:

$$\mu(E) = R^+$$

مستلزم وارد کردن اصلهای تکمیلی است. بخصوص ما نمیدانیم که آیا عدد حقیقی بسیار ساده $\frac{1}{2}$ اندازه یک جزء E هست. بدین جهت است که وجود یک جزء $x \in E$ را بقسمیکه $\mu(x) = \frac{1}{2}$ باشد مانند یک اصل اختیار میکنیم آنرا «اصل نیمسازی» مینامیم. بوسیله یک اصلی مکمل، E و R^+ را در یک تناظر دوسوئی قرار خواهیم داد.

هـ اصل نیمسازی (B_4)

هرچه باشد جزء u از E یک جزء x از E وجود دارد بقسمیکه:

$$2x = u$$

این جزء یکتا است: اگر جزء دیگر x' وجود داشت لازم میآمد:

$$2x = 2x'$$

از آنجا:

$$x = x'$$

B_4 را به خود این جزء x بکار میبریم:

$$\exists x_2 \in E \qquad 2x_2 = x$$

از آنجا:

$$2^2 x_2 = u$$

با بازگشتی، اگر x_{n-1} وجود داشته باشد بقسمیکه:

$$2^{n-1} x_{n-1} = u$$

باشد با بکار بردن B_4 به x_{n-1} وجود یک x_n یکتا نتیجه میشود بقسمیکه:

$$2x_n = x_{n-1}$$

از آنجا:

$$2^n x_n = u$$

هرچه باشد $u \in E$ و $n \in N$ یک جزء x_n یکتا وجود دارد بقسمیکه:

$$2^n x_n = u$$

مینویسیم:

$$x_n = \frac{1}{2^n} \cdot u$$

طرفین را در عدد طبیعی q ضرب میکنیم:

$$q x_n = q\left(\frac{1}{2^n} \cdot u\right) \tag{1}$$

از ضرب تساوی $2^n x_n = u$ در q نتیجه میشود:

$$qu = q\,(2^n x_n) = (q \cdot 2^n)\, x_n = 2^n\,(q x_n)$$

از آنجا:

$$q x_n = \frac{1}{2^n}\,(qu)$$

با مقایسه با (۱) نتیجه میشود:

$$q\left(\frac{1}{2^n}\, u\right) = \frac{1}{2^n}\,(qu)$$

مینویسیم:

$$q x_n = \frac{q}{2^n}\, u$$

همچنین خاصیت زیر را داریم:

هر فاصله باز E تهی نیست.

زیرا اگر $x < y$ دو جزء از E باشند داریم:

$$\frac{1}{2}\,(x + y) \in]\, x, y\, [$$

اصل نیمسازی امکان میدهد که سوراخهای موجود در E را مسدود کنیم:

اکنون ثابت کنیم (با انتخاب واحد غیر مشخص u) هر عدد $\frac{q}{2^n}$ مبنای ۲، اندازه یک

جزء E است.

زیرا به $\frac{q}{۲^n}$ یک جزء $y \in E$ یکتا نظیر است بقسمیکه:

$$y = \frac{q}{۲^n} u$$

این جزء y را اندازه بگیریم. ملاحظه کنیم که:

$$y = \frac{q}{۲^n} u \iff ۲^n y = qu$$

اگر روش ساخت $\mu(y)$ در دستگاه بمبنای ۲ را به این y بکار ببریم و در مرتبه n توقف کنیم:

$$qu \leqslant ۲^n y < (q + ۱) u$$

باتساوی:

$$qu = ۲^n y$$

بنابراین عدد حقیقی که با y همراه کرده‌ایم عبارتست از:

$$\mu(y) = \frac{q}{۲^n}$$

با اصل نیمسازی میتوان تأیید کرد که:

$$Q_۲^+ \subset \mu(E) \subset R^+$$

میماند، پر کردن خللی که احتمالاً در E وجود دارند.

۶ـ اصل فقدان خلل

ابتدا نظیر آنچه در اعداد بود چند تعریف در E بیان کنیم:

در ازای یک فاصله به دو انتهای x و y $(x < y)$ عبارت است از تفاضل:

$$y - x \qquad (B_۲)$$

رشته نامتناهی فواصل فراگیر $[x_n, y_n]$ مجموعه E عبارت است از یک رشته تشکیل شده از فواصل در E بطوریکه هر کدام از آنها با سرایت‌پذیری همهٔ بعدی‌ها را فرا-بگیرند:

$$(\mathcal{S}) \qquad [x_۰, y_۰] \supset [x_۱, y_۱] \supset [x_۲, y_۲] \supset \cdots \supset [x_n, y_n] \supset \cdots$$

بعلاوه یادداشت کنیم که: در E اجزای، آنقدر کوچک که بخواهیم، وجود دارند زیرا هر فاصله باز $]۰, x[$ از E تهی نیست.

نیم‌گروه ارشمیدس E مجهز به اصل نیمسازی دارای یک بنیان توپولوژیک در مفهوم معین شده در (III، فصل ۴،۴) است. میگوئیم:

«درازای فاصله $\rbrack x_n, y_n \lbrack$ بسمت صفر میل میکند»

اگر، بهر جزء ν از E هر قدر کوچک که باشد، بتوان یک عدد طبیعی p همراه کرد بقسمیکه:

$$n > p \quad \Rightarrow \quad y_n - x_n < \nu$$

یک رشته $(\mathcal{S})$ فاصله‌های فراگیر که درازای آن بسمت صفر میل میکند در E یک خلل ایجاد مینمایند اگر هیچ جزء E متعلق به این فواصل وجود نداشته باشد.

اصلی را که فقدان خلل را تأیید مینماید به عنوان آخرین اصل اختیار میکنیم.

اصل B_5 ــ هر رشته نامتناهی فواصل فراگیر گنجیده در E که درازای آن بسمت صفر میل میکند، هرگز یک خلل را معین نمینماید.

بعبارت دیگر بازاء یک رشته مانند $(\mathcal{S})$ (با $y_n - x_n$ بسمت صفر میل میکند) همواره یک جزء x از E وجود دارد که به جمیع این فواصل تعلق دارد.

اکنون ثابت میکنیم که بهر عدد حقیقی $\alpha \in R^+$ یک جزء $x \in E$ بااندازه α نظیر است:

$$\mu\,(x) = \alpha$$

صورت بندی نامتناهی α را در دستگاه به مبنای ۲ در نظر میگیریم:

$$\alpha = e, \overrightarrow{r_1 r_2 \cdots r_n \cdots}$$

این صورت بندی تحریر فشرده یک رشته نامتناهی فواصل فراگیر Q_2^+ است:

$$\alpha \in \left\rbrack \frac{q_n}{2^n}, \frac{q_n + 1}{2^n} \right\lbrack$$

(هر چه باشد $n \in N$)

به هرعدد $\frac{q_n}{2^n}$ از Q_2^+ میتوانیم یک جزء از E:

$$\frac{q_n}{2^n}\, u$$

و یک فاصله از E:

$$\left\rbrack \frac{q_n}{2^n}\, u, \frac{q_n + 1}{2^n}\, u \right\lbrack$$

را همراه کنیم. (هرچه باشد $n \in N$)

میدانیم که ترتیب حفظ میشود، این فواصل فراگیرند:

$$\left[eu, (e+۱)\,u \right[\supset \left[\frac{q_۱}{۲} u, \frac{q_۱+۱}{۲} u \right[\supset \cdots \supset \left[\frac{q_n}{۲^n} u, \frac{q_n+۱}{۲^n} u \right[\supset \cdots$$

درازای: $\frac{۱}{۲^n} u$ بسمت صفر میل میکند.

زیرا اگر عدد $v \in E$ وجود داشت بقسمیکه:

$$(\forall n \in N) \qquad \frac{۱}{۲^n} u > v$$

لازم میآمد:

$$u > ۲^n v$$

رشته مضربهای v با u فرابسته میشدند و اصل ارشمیدس نقض میگردید.

بنا به اصل $B_۵$ یک جزء x متعلق به همه این فواصل رشته قبلی وجود دارد و هرچه باشد n داریم:

$$x \in \left[\frac{q_n}{۲^n} u, \frac{q_n+۱}{۲^n} u \right[\quad \Rightarrow \quad \mu(x) \in \left[\frac{q_n}{۲^n}, \frac{q_n+۱}{۲^n} \right[$$

و بنابراین:

$$\mu(x) = \alpha$$

یک مجموعه E را که اصلهای: $B_۱$ و $B_۲$ و $B_۳$ و $B_۴$ و $B_۵$ در آن صدق کنند یک «نیم گروه ارشمیدسی کامل» مینامند.

پس میتوانیم بگوئیم:

قضیه ۴ـ هر نیم گروه ارشمیدسی کامل با نیم گروه جمعی کلاً مرتب R^+ یک‌شکل است.

۷ـ تغییر واحد.

ابتدا یک نیم گروه ارشمیدسی را در نظر بگیریم. اندازه x را وقتیکه u را واحد اختیار میکنیم با $\mu_u(x)$ نمایش میدهیم. هرگاه v یک جزء غیر صفر از E باشد. رابطه‌ای راکه بین $\mu_u(x)$ و $\mu_v(x)$ وجود دارد پیدا کنیم.

تابع:

$$f(x) = \frac{\mu_u(x)}{\mu_u(x)}$$

از E در R^+ را در نظر میگیریم.

هرگاه در R^+ عمل کنیم داریم:

$$f(v) = \frac{\mu_u(v)}{\mu_u(v)} = ۱ \qquad (۱$$

$$f(x+y) = \frac{\mu_u(x+y)}{\mu_u(v)} = \frac{\mu_u(x)}{\mu_u(v)} + \frac{\mu_u(y)}{\mu_u(v)} = f(x) + f(y) \qquad (۲$$

پس $f(x)$ عبارت از اندازه x است وقتیکه v واحد اختیار میشود:

$$f(x) = \mu_v(x)$$

یعنی:

$$\mu_v(x) = \frac{\mu_u(x)}{\mu_u(v)}$$

بنابراین، خاصیت زیر را داریم:

$\boxed{P_۳}$ هر چه باشند اجزای غیر صفر u و v از یک نیم‌گروه اشمیدسی:

$$\mu_u(x) = \mu_u(v)\,\mu_v(x)$$

حال نیم‌گروه ارشمیدسی‌کامل E را در نظر میگیریم. یک قانون ترکیب خارجی موسوم به حاصل‌ضرب یک عدد حقیقی در یک جزء از E را معین میکنیم.

تعریف - به‌هر زوج α و x یک عدد $\alpha \in R^+$ و یک جزء:

$$x \in E \qquad (x \neq ۰)$$

یک جزء از E را همراه میکنیم که حاصل ضرب α در x نامیده میشود و مانند یک جزء E دارای اندازه α (وقتی که x واحد اختیار شود) معین میگردد.

اگر $x = ۰$ باشد $\alpha ۰ = ۰$ اختیار میکنیم (هر چه باشد $\alpha \in R^+$)

این تعریف دارای یک معنی است زیرا، چون E کامل است بهر عدد حقیقی α یک جزء از y از E نظیر است که وقتی x واحد اختیار شود دارای اندازه α است:

$$(x \neq 0) \qquad y = \alpha x \iff \mu_x(y) = \alpha$$

$\boxed{P_۴}$ هرچه باشد اعداد α و β و جزء x از E:

$$(\alpha + \beta)\,x = \alpha x + \beta x$$

اگر $x = ۰$ باشد خاصیت بدیهی است. فرض کنیم $x \neq ۰$ و x را واحد انتخاب کنیم.

$$y = \alpha x \quad \Rightarrow \quad \alpha = \mu(y)$$
$$z = \beta x \quad \Rightarrow \quad \beta = \mu(z)$$

از آنجا:

$$\alpha + \beta = \mu(y) + \mu(z) = \mu(y + z)$$

و این حاکی است که:

$$y + z = (\alpha + \beta)\, x$$

و خاصیت ثابت است.

$\boxed{P_5}$ هرچه باشند اعداد α و β و جزء x از E:

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)\, x$$

اگر $x = 0$ باشد خاصیت واضح است و همچنین اگـر $\beta = 0$ باشد فـرض میکنیم $x \neq 0$ و $\beta \neq 0$ داریم:

$$y = \beta x \neq 0$$

x یا y را میتوان واحد اختیار کرد. بنا به P_3:

$$\mu_x(z) = \mu_x(y)\, \mu_y(z) = \beta \mu_y(z) \qquad (۱)$$

بافرض $z = \alpha y$ داریم:

$$\mu_x(z) = \alpha\beta$$

از آنجا:

$$z = (\alpha\beta)\, x$$

ولی:

$$z = \alpha y = \alpha(\beta x)$$

خاصیت اثبات شده است.

تبصره- رابطه (۱) را وقتیکه $z = \alpha y$ اختیار میشود (با y غیرمشخص) میتوان نوشت:

$$\mu_x(\alpha y) = \alpha \mu_x(y)$$

$\boxed{P_6}$ هرچه باشد $\alpha \in R^+$ و $x, y \in E$ داریم:

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

یک واحد غیر مشخص u اختیار میکنیم که مانند اندیس نمینویسیم. بنا به تبصره قبل:

$$\mu[\alpha(x + y)] = \alpha\mu(x + y)$$
$$= \alpha[\mu(x) + \mu(y)] \qquad \text{(قضیه ۲)}$$

$$= \alpha\mu(x) + \alpha\mu(y)$$ (توزیع‌پذیری در R^+)

$$= \mu(\alpha x) + \mu(\alpha y)$$ (تبصره قبل)

$$= \mu(\alpha x + \alpha y)$$ (قضیه ۳)

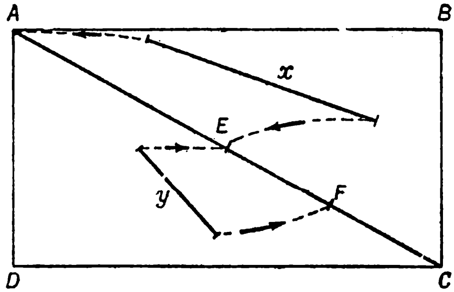
پس دو جـزء $\alpha(x + y)$ و $\alpha x + \alpha y$ دارای یک انـدازه میباشند: بنابراین آنها برابرند.

فصل چهارم

حالتی که در آن، جمع هم‌واره معین نیست اندازه زاویه‌ها

۱ـ نیم‌گروه محدود

در فصل قبل ما فرض کردیم که کمیتها بقدر دلخواه بزرگ‌اند. واقعاً هم در نظر گرفتن اجزاء زیاد بزرگ ناجور است. ما موجودات محدود هستیم و تصور اشیاء به کمیت خارج از اندازه برای ما مشکل است.



(شکل ۱)

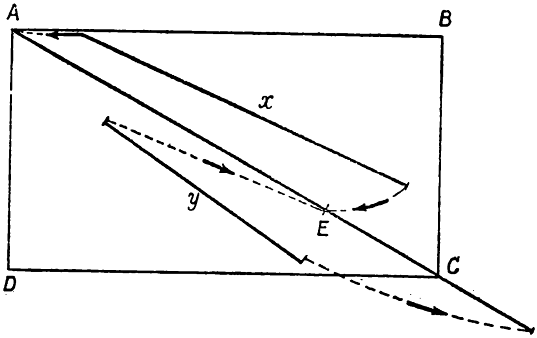
برای تعیین چنین وضعی یک برگ رسم مستطیلی شکل $ABCD$ را در نظر میگیریم (شکل ۱) و مسئله زیر را طرح میکنیم:

بدون خارج شدن از حدود کاغذ چگونه میتوان فاصله دو نقطه از برگ را اندازه گرفت. برای خوب فهمیدن مطلب، موجود متفکری را تصور کنیم که در داخل مستطیل نشو و نما میکند و برای او دنیا محدود به مستطیل است.

برای او مجموع $x + y$ دو طول x و y وقتی وجود دارد که اگر نماینده‌های x و y را متصل بهم به AE و EF روی قطر AC قرار دهیم نقطه F به این قطر تعلق داشته باشد

(شکل ۱) بعکس اگر نقطه F به قطر AC تعلق نداشته باشد این مجموع برای او وجود ندارد (شکل ۲).

اصل‌های B_1 و B_2 فصل قبل را برای اینکه به‌چنین مجموعه A از کمیتها قابل‌بکار بردن باشند تغییر میدهیم.



(شکل ۲)

اصل B'_1– در A یک جمع، معین برای بعضی زوجهای (x و y) وجود دارد که $x + y$ نوشته میشود و دارای خاصیت‌های زیر است:

۱) شرکت‌پذیر است.

۲) جابجاپذیر است.

۳) دارای یک جزء خنثی ० است.

اصل B'_2 — در A یک رابطه ترتیب کلی که با $\leqslant$ نشان داده میشود وجود دارد که دارای خاصیتهای زیر است:

۱) $x \leqslant y \iff (\exists z \in A$ بقسمیکه $x + z = y)$

رابطه $x \leqslant y$ منطقاً هم‌ارز است با:

«یک جزء z یکتا از A وجود دارد بقسمیکه $x + z$ وجود دارد و برابر y است.

مینویسیم:

$$z = y - x$$

اگر $z \neq 0$ باشد مینویسیم:

$$x < y$$

۲) A دارای یک بزرگترین جزء است که با g نمایش داده میشود.

A را نیم‌گروه محدود مینامند.

نتیجه‌ها:

۱) $\circ$ کوچکترین جزء A است.

۲) رابطه ترتیب بازاء جمع پایدار است:

$(x \leqslant y$ ، $y + z$ وجود دارد$) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ($z + x$ وجود دارد و $x + z \leqslant y + z$)

زیرا:

$x \leqslant y \Rightarrow$ ($\exists u \in A$ است y وجود دارد و برابر $x + u$)

ولی $z + y$ وجود دارد پس $z + (x + u)$ وجود دارد و برابر است با:

$$(x + z) + u \qquad (B'_1 ،۱)$$

داریم:

$$y + z = (x + z) + u$$

از آنجا:

$$x + z \leqslant y + z \qquad (B'_2 ،۱)$$

۳) فرض کنیم $y \leqslant x$ و $u \leqslant z$ با ($y + u$ وجود دارد) در این صورت میتوان آنها را عضو به عضو جمع کرد:

$$x + z \leqslant y + u$$

زیرا:

$(x \leqslant y$ وجود دارد $y + u) \Rightarrow x + u \leqslant y + u$

$(z \leqslant u$ وجود دارد $x + u) \Rightarrow x + z \leqslant x + u$

بنابه سرایت‌پذیری:

$$x + z \leqslant y + u$$

۴) فواصل را در A مانند N معین میکنند. مثلاً هر $x \in A$ در:

$$\circ \leqslant x \leqslant g$$

صدق میکند.

پس داریم:

$$A = [\circ, g]$$

۵) هر بخش متناهی و غیر تهی A دارای یک بزرگترین جزء است چونکه ترتیب در A کلی است.

دو خاصیت اثبات میکنیم:

$\boxed{P_1}$ $$x \leqslant g - y \iff (x + y \text{ وجود دارد})$$

اگر $x + y$ وجود دارد، داریم:

$$x + y \leqslant g$$

چونکه:

$$g = \max A$$

از آنجا نتیجه میشود:

$$x \leqslant g - y$$

(چونکه هرچه باشد $A \ni y$، $g - y$ وجود دارد) بعکس ملاحظه میگردد که $(g - y) + y$ وجود دارد و برابر g است. پس:

$$x \leqslant g - y \Rightarrow (x + y \text{ وجود دارد})$$

از آنجا نتیجه میشود:

$\boxed{P_2}$ $$(\text{وجود دارد } (g - x) + (g - y)) \iff (x + y \text{ وجود ندارد})$$ زیرا

بنا به P_1:

$$x > g - y \iff (x + y \text{ وجود ندارد})$$

ولی هرچه باشد $x \in A$ داریم:

$$g - (g - x) = x$$

در نتیجه:

$$g - (g - x) > g - y \iff (x + y \text{ وجود ندارد})$$

با بکار بردن P_1 خاصیت P_2 اثبات شده است.

مضرب‌های یك جزء A.

تعریف- بهر جزء x از A و به بعضی اعداد n یک جزء nx از A را همراه کنیم بقسمیکه:

۱) $$0 \cdot x = 0$$

۲) فرض کنیم که nx معین باشد و $nx + x$ وجود داشته باشد در این صورت فرض میکنیم:

$$nx + x = (n + 1)\,x$$

تبصره– هرچه باشد A $x \in$، nx بازاء $n = 0$ و $n = 1$ وجود دارد:

$$0 \cdot x = 0 \qquad 1 \cdot x = x$$

اگر $x + x$ وجود داشته باشد بصورت $2x$ نوشته میشود.

اگر $2x + x$ وجود داشته باشد بصورت $3x$ نوشته میشود و الی آخر. از آنجا خواص زیر نتیجه میشوند بشرطیکه مضربهای y وجود داشته باشند:

$$(n + p)\,x = nx + px$$

$$n\,(x + y) = nx + ny \qquad (n,\, p \in N)$$

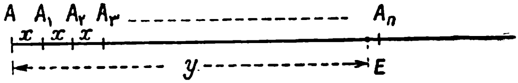
$$n\,(px) = (np)\,x \qquad (x,\, y \in A)$$

$$x < y \iff nx < ny$$

$$n < p \iff nx < px$$

۲- اصل ارشمیدس

نیم خط AC به مبدأ A را درنظر میگیریم که شامل قطر شکل ۱ باشد. اصل ارشمیدس روی این نیم خط:



شکل ۳

چنین معنی میدهد:

اگر AE باره خط نماینده y باشد و اگر پاره خطهای AA_1, A_1A_{1}, A_1A_2, ... را که نماینده‌های x هستند انتها به انتها روی آن نقل کنیم نقطه‌ای مانند A_n وجود دارد که از E تجاوز نماید (شکل ۳).

خود را به مجموعه A-ی طولهای نموده شده با پاره‌خط داخل مستطیل محدود کنیم.

اگر A_n روی قطر AC مستطیل قرار گیرد در این صورت nx وجود دارد و $nx > y$ است.

صورت اصل ارشمیدس بازاء این زوج $(x,\, y)$ سازگار است. اگر اولین نقطه A_n که از E تجاوز میکند در خارج از قطر قرار گیرد، nx در نیم گروه محدود A وجود ندارد و اصل ارشمیدس را نمیتوان بکار برد.

با این وجود میتوان تأیید کرد که یک نقطه A_q قبل از نقطه E در هر حال وجود دارد: و آن بدین جهت است که اصل ارشمیدس «وجود یک تقسیم اقلیدسی y بر x و خارج قسمت اقلیدسی q را که بزرگترین عدد صحیح است بطوریکه $qx \leqslant y$ را موجب شده است. بدین سبب است که ما صورت اصل ارشمیدس را با حفظ روح این اصل تغییر میدهیم و اصل زیر را بیان میکنیم.

اصل B'_3 — هرچه باشند اجزاء غیر صفر x و y از نیم گروه محدود A یک بزرگترین عدد صحیح q وجود دارد بقسمیکه:

$$qx \leqslant y$$

تبصره ــ اگر این اصل را درباره بزرگترین جزء g از A بکار ببریم در این صورت بزرگترین عدد صحیح q (بقسمیکه $qx \leqslant g$) همان تعداد مضربهای غیر از صفر x استکه در A وجود دارد.

تبصره ۲ــ هرمجموعه‌ای که با اصول B'_1, B'_2, B'_3 سازگار باشد: «نیم‌گروه محدود شبه ارشمیدسی» نامیده میشود.

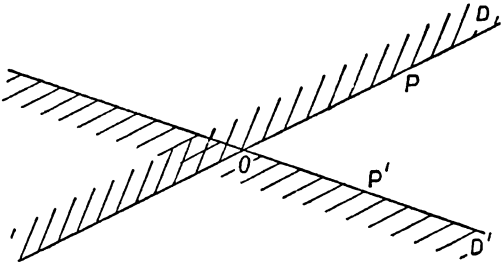
۳ــ زاویه‌ها:

حال در هندسه مسطحه دو نیم صفحه P و P' را که کناره‌های D و D' آنها دارای یک نقطه مشترک O میباشند در نظر میگیریم (شکل ۴) فصل مشترک $P \cap P'$ یک زاویه نامیده میشود.

تعریفــ یک زاویه عبارت از فصل مشترک «دو نیم صفحه‌ای است که کناره‌های آنها حد اقل دارای یک نقطه مشترک O باشند در حالت کلی این کناره‌ها دارای یک نقطه مشترک O میباشند که رأس زاویه نامیده میشود. زاویه محدود به دو نیم خط $D_\circ$ و $D'_\circ$ به مبدأ O است که به اضلاع زاویه موسوم‌اند، زاویه: ($D_\circ$ و $D'_\circ$) مینویسیم. هر دوضلع یک نقش بازی میکنند. در حالت مخصوص که کناره‌های D و D' بهم منطبق‌اند:

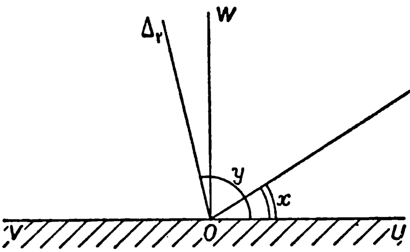
۱) یک زاویه نیم صفحه نتیجه میشود اگر P و P' منطبق بهم باشند: هرنقطه O ازکناره مشترک نقش رأس را و دو نیم خط متقابل بر مبدأ O نقش اضلاع را میتواند داشته باشد.

۲) یک زاویه صفر نتیجه میشود اگر $P \cap P' = \varnothing$ (رأس مانند حالت قبل و اضلاع: دو نیم خط منطبق بهم‌اند).

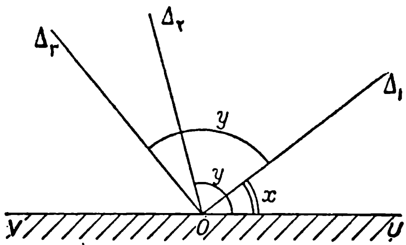


شکل ۴

دو زاویه (D'_0 و D_0) و (Δ'_0 و Δ_0) متساوی هستند. اگـر بتوان بـا یک تغییر مکان یکی را بر دیگری منطبق نمود، بدین ترتیب در مجموعه زاویه‌هـا یک رابطه هم‌ارزی موسوم به «تساوی زاویه‌ها» معین میشود که در مجموعه، طبقه زاویه‌های متساوی را ایجاد مینماید.



شکل ۵



شکل ۶

شکل ۵ را درنظر میگیریم، دو نیم خط U_0 و V_0 متقابل‌اند وکناره یکی از نیم صفحه‌ها بر خط حامل U_0 منطبق است. این نیم صفحه را P مینامیم. هرکدام ازطبقات قبلی دارای یـک نماینده و فقط یکی به ضلع U_0 در نیم صفحه P میباشد. ضلع دوم بـا معلوم بودن طبقه کاملاً معین است و بعکس بهر نیم خط Δ_0 از P یک طبقه یکتای زاویه‌ها نظیر است که نماینده آن (U_0 و Δ_0) است. مجموعه طبقات درتناظر دوسوئی با مجموعه نیم خطهای P به مبدأ O قرار دارد. مجموعه این نیم خطها یک نقاله نامیده میشود.

در مجموعه Aــ ی طبقات یک رابطه ترتیب کلی معین است: اگر x و y دو جـزء A باشند که نظیرهای آنها روی نقاله بترتیب Δ_0 و Δ'_0 است (شکل ۵) رابطه ترتیب کلی که با $x \leqslant y$ نشان داده میشود بدین ترتیب معین است:

$$(U_0, \Delta_0) \subset (U_0, \Delta'_0) \quad \Rightarrow \quad x \leqslant y$$

هرگاه x و y دو جزء از A باشد، نماینده‌های آنها را مجاور مینامند اگر دارای یک ضلع مشترک باشند و فصل مشترک آنها تهی باشد.

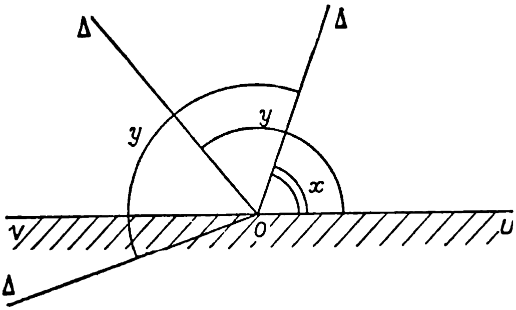
در A یک جمع بترتیب زیر معین میشود:

هرگاه Δ_1 و Δ_2 نیم خطهای نظیر x و y روی نقاله P باشند، y را با یک زاویه (Δ_2 و Δ_1) مجاور (Δ_1 و U) نمایش میدهند.

۱) اگر نیم‌خط Δ_3 متعلق به نیم صفحه P باشد، مجموع $y + x$ با (Δ_3 و U) نمایش داده میشود (شکل ۶).

۲) اگر نیم خط Δ_3 به نیم صفحه P تعلق نداشته باشد مجموع $y + x$ وجود ندارد (شکل ۷).

وقتیکه جمع معین باشد، شرکت‌پذیر و جابجاپذیر و دارای یک جزء خنثا است که زاویه صفر است.



$x + y$ وجود ندارد

شکل ۷

مجموعه A ــ ی طبقات زاویه‌ها یک نیم گروه محدود است و با اصل‌های B'_1 و B'_2 سازگار است. بزرگترین جزء g آن زاویه نیم صفحه است.

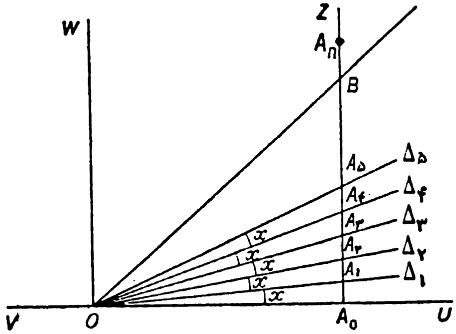
اصل ارشمیدس را در مورد زاویه‌ها بررسی کنیم: هرگاه دو جزء غیر صفر x و y از A مفروض باشند آیا یک عدد صحیح n وجود دارد بقسمیکه nx وجود داشته و $y < nx$ باشد؟ جواب مثبت است اگر $x < y$ باشد: کافی است $n = ۱$ اختیار شود.

این مسئله را بازاء $۰ < x < y$ مورد بررسی قرار دهیم. طبقه زاویه قائمه را با d نشان بدهیم. میدانیم $g = ۲d$ است.

$$۰ < x < y < d \qquad (۱$$

اثبات‌کنیم که در این حالت اصل ارشمیدس برای زاویه‌ها یک نتیجه از اصل ارشمیدس

برای خطوط است. عمود $A_{\circ}Z$ را از نقطه $A_{\circ}$ بر OU اخراج میکنیم (شکل ۸).



شکل ۸

بیک زاویه کمتر از d یک نیم خط از نقاله نظیر است که Z را قطع میکند. بیک زاویه حد اقل برابر d یک نیم خط از نقاله نظیر است که Z را قطع نمیکند. هرگاه B نقطه‌ای باشدکه درآنجا نیم‌خط نظیر y خط Z را قطع‌میکند، چون $d > x$ است نیم‌خط $O\Delta_۱$ نظیر x خط Z را در $A_۱$ قطع میکند. چون $۲d$ وجود دارد پس $۲x$ نیز وجود دارد.

اگر $d \leqslant ۲x$ باشد داریم $y < d \leqslant ۲x$ و اصل ارشمیدس سازگار است.

اگر $d > ۲x$ بـاشد ضلع $O\Delta_۲$ نظیر $۲x$ خط Z را در $A_۲$ قطع میکند. بنا به قضیه نیمساز در مثلث $OA_{\circ}A_۲$ داریم:

$$\frac{A_{\circ}A_۱}{A_۱A_۲} = \frac{OA_{\circ}}{OA_۲}$$

چون $OA_{\circ} < OA_۲$ است (مایل و عمود اخراج شده از O روی Z) نتیجه میشود:

$$A_۱A_۲ > A_{\circ}A_۱$$

از آنجا:

$$A_{\circ}A_۲ > ۲A_{\circ}A_۱$$

چون $d > ۲x$ و $d > x$ است نتیجه میشود که $۳x$ وجود دارد.

اگر $d \leqslant ۳x$ باشد داریم:

$$۳x \geqslant d > y$$

اصل ارشمیدس سازگار است.

اگر $d > 3x$ باشد ضلع $O\Delta_3$ نظیر $3x$ خط Z را در A_3 قطع میکند بنا به‌قضیه نیمساز در OA_1A_3 ثابت میشود که:

$$A_2A_3 > A_2A_1$$

از آنجا:

$$A_0A_3 > 3A_0A_1$$

با روش بازگشتی: اگر فرض کنیم $d > x(1-p)$ و:

$$A_pA_{p-1} > (p-1)A_0A_1$$

در این صورت $x + x(1-p)$ وجود دارد چونکه $d > x(1-p)$ و $d > x$.

اگر $d \geqslant px$ باشد اصل ارشمیدس سازگار است.

اگر $d > px$ باشد ضلع $O\Delta_p$ نظیر px خط Z را در A_p قطع میکند و مانند قبل اثبات میشود:

$$A_0A_p > pA_0A_1$$

چون پاره خطها روی نیم خط Z، کمیتهای ارشمیدسی هستند پس یک عدد صحیح n وجود دارد بقسمیکه:

$$nA_0A_1 > A_0B$$

اگر بازاء این عدد صحیح n باز هم داشته باشیم $d > nx$ باین زاویه nx یک نقطه نظیر A_n روی Z وجود دارد بقسمیکه:

$$A_0A_n > nA_0A_1$$

از آنجا بنا به سرایت‌پذیری:

$$A_0A_n > A_0B$$

یعنی:

$$nx > y$$

اصل ارشمیدسی بازهم سازگار است.

پس میتوان گفت: «بازاء $d > y > x > 0$ یک عدد صحیح n وجود دارد بقسمیکه nx وجود دارد و $y < nx$ است هرچه باشد $x \in A$ $(x \neq 0)$».

از آنجا قضیه تقسیم اقلیدسی نتیجه میگردد:

هرچه باشد $x \in A$ $(x \neq 0)$ و بازاء $d > y > 0$ یک عدد طبیعی یکتا مانند q وجود دارد بطوریکه:

$$qx \leqslant y < q(+1)x$$

۲) اکنون ثابت میکنیم که اصل ارشمیدس بازاء $y = d$ سازگار است.
اگر $x \geqslant d$ باشد مطلب واضح است. اگر $\circ < x < d$ باشد در این صورت $d - x$ وجود دارد:

$$d - x < d$$

صورت قضیه قبل را در تقسیم اقلیدسی $d - x$ بر x بکار میبریم:

$$qx \leqslant d - x < (q + ۱)\,x$$

ولی:

$$qx \leqslant d - x \quad \Rightarrow \quad (q + ۱)\,x \leqslant d$$

چون $x < d$ و $d + d$ وجود دارد پس نتیجه میشود که $x + x\,(۱ + q)$ وجود دارد و چون $x\,(۲ + q)$ وجود دارد پس داریم:

$$d - x < (q + ۱)\,x \quad \Rightarrow \quad d < (q + ۲)\,x$$

پس بنابراین یک عدد صحیح $q + ۲$ وجود دارد بطوریکه مضرب x نظیر از d تجاوز مینماید. پس قضیه تقسیم اقلیدسی در حالت $y = d$ نیز دارای ارزش است.

۳) در حالتیکه $y > d$ باشد در A همواره جزء nx که از y تجاوز نماید وجود ندارد ولی در A همواره یک بزرگترین مضرب x وجود دارد که حد اکثر برابر y است. یعنی یک بزرگترین عدد صحیح q بقسمی که $qx \leqslant y$ باشد. زیرا:

$$d < y \leqslant ۲d \quad \Rightarrow \quad \circ < y - d \leqslant d$$

اگر p خارج قسمت اقلیدسی $y - d$ بر x باشد:

$$px \leqslant y - d < (p + ۱)\,x$$

و اگر p' خارج قسمت اقلیدسی d بر x باشد:

$$p'x \leqslant d < (p' + ۱)\,x$$

اگر:

$$(p + ۱)\,x + (p' + ۱)\,x$$

وجود داشته باشد.

از:

$$(y - d) + d = y$$

تجاوز میکند.

اصل ارشمیدس در این صورت سازگار است و وجود q حتمی است.

اگر:

$$(p + ۱)\, x + (p' + ۱)\, x$$

وجود نداشته باشد:

میتوان با این وصف نامساویهای سمت چپ را عضو به عضو جمع کرد:

$$(p + p')\, x \leqslant y$$

پس باز هم یک بزرگترین عدد صحیح q وجود دارد بقسمیکه $qx \leqslant y$ زیرا:

$q = p + p'$ اگر $x\ (p + p' + ۱)$ وجود نداشته باشد و یا وجود داشته باشد از y تجاوز نماید.

$q = p + p' + ۱$ اگر $x\ (p + p' + ۱)$ وجود داشته باشد و حد اکثر برابر y باشد.

در نتیجه این بررسی مشاهده میشود که اصل $B'_۳$ در مجموعه A طبقات زاویه‌ها قابل بکار بردن است پس:

A یک نیم‌گروه محدود شبه اقلیدسی است.

۴ـ اصل نیمسازی و اندازه اجزای A

یک نیم‌گروه محدود در نظر میگیریم که با اصلهای $B'_۱$ و $B'_۲$ و $B'_۳$ سازگار باشد یک بار برای همیشه یک واحد اندازه $u \in A$ $(u \neq ۰)$ انتخاب میکنیم. روش اندازه فصل قبل را نمی‌توانیم بکار ببریم زیرا برای بعضی اجزاء x (اگر b مبنای دستگاه شمار باشد) مضربهای bx همواره وجود ندارد (حتی بازاء $h = ۲$).

برای حل مسئله اندازه در A ما اصل نیمسازی را نیز دخالت میدهیم (این اصل برای زاویه‌ها سازگار است: نظیر خاصیت مقدماتی داشتن نیمساز هر زاویه است).

اصل $B_۴$ ـ هرچه باشد جزء $u \in A$ در A یک جزء x وجود دارد بقسمیکه:

$$۲x = u$$

مانند فصل قبل نتیجه میگیریم:

هرچه باشد $u \in A$ و $n \in N$ یک جزء x_n یکتا از A وجود دارد بقسمیکه:

$$۲^n x_n = u$$

مینویسیم:

$$x_n = \frac{۱}{۲^n} u$$

اگر جزء $y = qx_n$ که در آنجا q یک عدد طبیعی است وجود داشته باشد مینویسیم:

$$y = \frac{q}{۲^n} u$$

ملاحظه کنیم اگر:

$\bar{q}\left(\frac{۱}{۲^n} u\right)$ وجود داشته باشد

ممکن است که qu وجود نداشته باشد پس همواره نمیتوان نوشت:

$$q\left(\frac{۱}{۲^n} u\right) = \frac{۱}{۲^n} (qu)$$

اصل نیمسازی سوراخها را در A مسدود میکند:

هر فاصله باز در A تهی نیست. بخصوص فاصله $]\,۰, x\,[$ هرچه باشد x حد اقل شامل یک جزء $\frac{x}{۲}$ است.

نیم‌گروه محدود شبه ارشمیدس A مجهز به اصل $B_۴$ دارای یک بنیان توپولوژیک در مفهوم داده شده را (III، فصل ۴، ۴) میباشد.

خاصیت زیر را اثبات میکنیم:

$\boxed{P_۳}$ رشته:

$$x_n = \frac{۱}{۲^n} u$$

بسمت صفر میل میکند.

زیرا فرض کنیم یک جزء $v \neq ۰$ از A وجود دارد بقسمیکه:

$$x_n > v \qquad \text{هرچه باشد } n \in N$$

ثابت میکنیم که به تناقض منجر میشود

x_n با:

$$۲^n x_n = u$$

معین شده است. چون $۲^n x_n$ وجود دارد، $x_n > v$ موجب میشود که $۲^n v$ وجود داشته باشد و:

$$۲^n x_n > ۲^n v$$

یعنی:

$$u > ۲^n v$$

(هرچه باشد $n \in N$)

بدین ترتیب بزرگترین عدد صحیح q وجود نخواهد داشت بقسمیکه $qv \leqslant u$ باشد و اصل $B'_{۳}$ نقض میشود.

اندازه اجزای A

تقسیم اقلیدسی x را مرتباً به:

$$u, \frac{u}{۲}, \ldots, \frac{u}{۲^n} \ldots$$

انجام دهیم خارج قسمتهای اقلیدسی $q_۰$، $q_۱$، $q_۲$، ...، q_n، ... بدست میآیند.

$$q_۰ u \leqslant x$$

$$\frac{q_۱}{۲} u \leqslant x$$

$$\vdots$$

$$\frac{q_n}{۲^n} u \leqslant x$$

$\frac{q_n}{۲^n}$ را اندازه دوئی تقریبی x با $\frac{۱}{۲^n}$ تقریب نقصانی مینامند. چون بازاء هر مرتبه n، q_n بزرگترین عدد صحیح است بقسمیکه:

$$q_n \left(\frac{u}{۲^n}\right) \leqslant x$$

از آنجا نتیجه میشود:

$$\frac{q_{n+۱}}{۲^{n+۱}} \geqslant \frac{q_n}{۲^n} \qquad (۱)$$

و رشته مقادیر تقریبی نقصانی صعودی است:

$$q_۰ \leqslant \frac{q_۱}{۲} \leqslant \frac{q_۲}{۲^۲} \leqslant \cdots \leqslant \frac{q_n}{۲^n} \leqslant \cdots \qquad (S)$$

$$\frac{q_{n+۱}}{۲^{n+۱}} u \in \left[\frac{q_n}{۲^n} u, x\right] \qquad (۲)$$

چون طول این فاصله A اکیداً کمتر از $\frac{u}{۲^n}$ است نتیجه میشود:

$$\frac{q_{n+۱}}{۲^{n+۱}} u - \frac{q_n}{۲^n} u < \frac{u}{۲^n}$$

از آنجا:

$$\frac{q_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{q_n}{2^n} < \frac{1}{2^n}$$

از آنجا نتیجه میشود که نمایش دوئی:

$$\frac{q_{n+1}}{2^{n+1}}$$

از نمایش:

$$\frac{q_n}{2^n} = q_0, \overline{r_1 r_2 \cdots r_n}$$

با اضافه کــردن رقم دو-ئی r_{n+1} بسمت راست آن نتیجه میگردد. رشته نامتناهی (S) در این صورت در دستگاه به مبنای دو با یک صورت بندی نامتناهی نمایش داده میشود، با این روش اندازه حقیقی x بدست میآید:

$$\mu(x) = q_0, \overrightarrow{r_1 r_2 \cdots r_n \cdots}$$

اکنون ثابت میکنیم که برای هر جزء $x \neq g$ از مرتبه معینی بــه بعـد میتوان مقــادیر تقریبی اضافی نیز معین کرد.

اگر $x \neq g$ باشد جزء $g - x$ صفر نیست بنا به P_3:

$$(\exists p \in N) \qquad n \geqslant p \;\Rightarrow\; \frac{u}{2^n} < g - x$$

چون:

$$\frac{q_n}{2^n} u \leqslant x$$

پس:

$\frac{q_n}{2^n} u + \frac{u}{2^n}$ وجود دارد.

بنابراین از مرتبه p به بعد داریم:

$$\frac{q_n}{2^n} u \leqslant x < \frac{q_{n+1}}{2^n} u$$

$\frac{q_n + 1}{2^n} u$ اندازه دو-ئی تقریبی x با $\frac{1}{2}$ تقریب اضافی است. تنهـا جزء A کــه ایـن روش را نمیتوان برای او بکار برد $g = \max A$ است.

حال ثابت بکنیم تابع $x \to \mu(x)$ که در A معین گردید با شرایط اندازه سازگار است.

$$(x+y \text{ وجود دارد}) \Rightarrow \mu(x+y) = \mu(x) + \mu(y)$$

فرض کنیم:

$$\mu(x) = q_0, \overrightarrow{r_1 r_2 \cdots r_n \cdots}$$

$$\mu(y) = q'_0, \overrightarrow{r'_1 r'_2 \cdots r'_n \cdots}$$

بترتیب اندازه‌های x و y باشند.

دو حالت در نظر میگیریم:

حالت اول $x + y \neq g$

بنا به P_2 یک مرتبه p وجود دارد بقسمیکه:

$$n \geqslant p \Rightarrow \frac{u}{2^n} < g - (x+y) \tag{1}$$

از ردیف p به بعد میتوان اندازه‌های تقریبی برای $x + y$ معین کرد. ولی داریم:

$$g - (x+y) < g - x$$

پس بطور اولی داریم:

$$n \geqslant p \Rightarrow \frac{u}{2^n} < g - x$$

از همین مرتبه p به بعد میتوان مقادیر تقریبی اضافی برای x (همچنین برای y) معین نمود. $n \geqslant p$ اختیار میکنیم. داریم:

$$\frac{q_n}{2^n} u \leqslant x < \frac{q_n + 1}{2^n} u \tag{2}$$

$$\frac{q'_n}{2^n} u \leqslant y < \frac{q'_n + 1}{2^n} u \tag{3}$$

مجموع ومقدار تقریبی اضافی را بررسی کنیم:

$$\frac{q_n + q'_n + 2}{2^n} u = \frac{q_n + q'_n}{2^n} u + \frac{u}{2^{n-1}}$$

بجای n در (۱) $n - 1$ قرار میدهیم:

$$n \geqslant p + 1 \Rightarrow \frac{u}{2^{n-1}} < g - (x+y)$$

نتیجه میشود که (P_1):

$$x + y + \frac{u}{2^{n-1}}$$

از مرتبه $p_1 + 1$ به بعد وجود دارد پس از مرتبه $p + 1$ به بعد میتوان ۲ و ۳ را عضو به عضو جمع کرد:

$$\frac{q_n + q'_n}{2^n} u \leqslant x + y < \frac{q_n + q'_n + 2}{2^n} u$$

حال اگر:

$$\frac{q''_n}{2^n}$$

جمله عمومی رشته‌ای باشد که $\mu\,(x + y)$ را معین میکند چون q''_n بزرگترین عدد صحیح است بطوریکه:

$$q''_n \frac{u}{2^n} \leqslant x$$

بازاء $n \geqslant p + 1$ داریم:

$$\frac{q''_n}{2^n} \in \left[\frac{q_n + q'_n}{2^n}, \frac{q_n + q'_n + 2}{2^n} \right[$$

ولی این فواصل فراگیر که درازای $\frac{1}{2^n}$ آنها بسمت صفر میل میکنند دقیقاً یک عدد حقیقی $\mu\,(x) + \mu\,(y)$ را معین میکنند و بنابراین داریم:

$$\mu\,(x + y) = \mu\,(x) + \mu\,(y)$$

حالت دوم: $x + y = g$

اگر $x = g$ پس $y = 0$ و تساوی :

$$\mu\,(g + 0) = \mu\,(g) + \mu\,(0)$$

واضح است.

فرض کنیم $x \neq g$ و $y \neq g$ میتوان برای x از مرتبه m به بعد و برای y از مرتبه m' ببعد مقادیر تقریبی اضافی معین نمود. هرگاه

$$p = \max\{m, m'\}$$

باشد از این مرتبه p به بعد باز هم نامساویهای (۲) و (۳) را میتوانیم بنویسیم:

چون $x + y = g$ است نامساویهای سمت راست را نمیتوان عضو به عضو با هم جمع کرد. ولی نامساویهای سمت چپ را جمع میکنیم و داریم:

$$\frac{q_n + q'_n}{۲^n} u \leqslant g$$

هرگاه:

$$\frac{q''_n}{۲^n}$$

جمله عمومی رشته‌ای باشد که $\mu(g)$ را معین میکند.

q''_n تعداد مضربهای:

$$\frac{u}{۲^n}$$

سوای صفر است که در A وجود دارد. ولی:

$$(q_n + q'_n)\frac{u}{۲^n} \text{ وجود دارد}$$

و :

$$(q_n + q'_n + ۲)\frac{u}{۲^n} \text{ وجود ندارد.}$$

بنابراین در N داریم:

$$q''_n \in [q_n + q'_n, q_n + q'_n + ۲[$$

از آنجا در $Q_۲^+$:

$$\frac{q''_n}{۲^n} \in \left[\frac{q_n + q'_n}{۲^n}, \frac{q_n + q'_n + ۲}{۲^n}\right[$$

و در نتیجه:

$$\mu(g) = \mu(x) + \mu(y)$$

از خاصیتی که ثابت شد:

$$(x + y \text{ وجود دارد}) \Rightarrow \mu(x + y) = \mu(x) + \mu(y).$$

مانند فصل قبل نتیجه میشود:

$$x < y \Rightarrow \mu(x) < \mu(y)$$

اگر a عدد حقیقی اندازه g باشد: $\mu(g) = a$ خاصیت زیر را داریم:

تابع $x \to \mu(x)$ یک درون گستری A در فاصلـه $[0, a] \subset R^+$ است هـر عدد

دو-ئی در این فاصله اندازه یک جزء از A است.

اصل فقدان خلل - A را با سازگار کردن آن با اصل B_5 فصل قبل تکمیل میکنیم که بهمان ترتیب فصل قبل در A بیان می‌شود و مانند فصل قبل خاصیت زیر را اثبات می‌کنیم:

هر عدد حقیقی فاصله $]0, a[$ اندازه یک جزء از A است و یا اینکه $x \to \mu(x)$ یک برون‌گستری A روی $]0, a[$ نیز هست.

یک مجموعه A راکه با اصلهای B'_1، B'_2، B'_3، B_4 و B_5 سازگار باشد نیم گروه محدود کامل مینامیم. در این صورت قضیه زیر را داریم:

قضیه - هر نیم گروه محدود با یک فاصله $]0, a[\subset R^+$ بازاء رابطه ترتیب و بازاء محدودیت جمع در R^+ در این فاصله یک شکل است.

قسمت پنجم

اعداد نسبی

عمل جمع، خواه در N خواه در Q^+ و یا خواه در R^+ یک بنیان نیم گروه جابجاپذیر با جزء خنثای ۰ را معین میکند.

مسئله‌ای که دراین قسمت باید حل‌شود عبارت از مسئله امتداد نیم گروه جمعی R^+ به یک گروه است: بهر عدد a از R^+ یک عدد جدید با سمبل $\bar{a}$ را همراه میکنیم که عدد منفی نامیده میشود و جمع معلوم در R^+ را امتداد میدهیم بطوریکه $a + \bar{a} = 0$ باشد بدین ترتیب «قرینه‌پذیر-کردن جمع» بدست میآید: مجموعه جدید R یک گروه جمعی است. ضرب نیز ادامه مییابد بطوریکه R یک هیئت جابجاپذیر است.

روشهای بکار برده شده در تئوری اندازه در بررسی نمائیها و لگاریتمها مورد استفاده قرار میگیرد: تابع $x \to a^x$ $(a \in R^+)$ ابتدا برای $x \in N$ و بعد برای $x \in Z$ تعریف شده است.

وجود یک جذر برای هر عدد R^+ امکان میدهد که در دستگاه دو-ئی عمل نمائیم:

a^x بازاء $x \in Q_2$ معین است و بالاخره فقدان خلل در R امکان معین کردن a^x را بازاء $x \in R$ میدهد. در کاربردهای هندسی اعداد حقیقی اصلهائی را بیان میکنیم که از آنها خواص مقدماتی خط و بردار و فضای یک بعدی نتیجه میشود.

برای صفحه جهت دار چون جمع دو زاویه همواره معین نیست برای جمع دو زاویه جهت دار نیز وضع بهمین ترتیب است و این کار بیک گروه محدود منجر میگردد.

برای رفع این محدودیت میتوان تعریف جمع را بهر زوج زاویه‌ای جهت دار بدون تغییر دادن مفهوم زاویه‌هائی (بهیچوجه) که روی آنها عمل میکنیم، ادامه داد. زاویه‌های مجهز با این بنیان جدید یک گروه یک شکل با گروه دوران‌های با مرکز معلوم را تشکیل میدهند.

برای اندازه‌گیری این دورانها ادامه دادن علامت اندازه‌ها بطوریکه با همشکلی جمع سازگار باشد کافی خواهد بود و این امر ما را به در نظر گرفتن یک طبقه اعداد حقیقی مدولو $2a$ بمنزله اندازه زاویه‌های جهت‌دار سوق خواهد کرد.

و در آخرین فصل، اجزاء اساسی هندسه اقلیدسی مسطحه را مورد بررسی قرار داده‌ایم که در موارد استعمال اعداد مختلط مفید فایده خواهند بود.

فصل اول

ساخت مجموعه اعداد نسبی
عملها ـ رابطهٔ ترتیب

۱ـ مسئله قرینه پذیر کردن جمع

جمع در R^+ شرکت پذیر و جابجاپذیر و دارای یک جزء خنثای ۰ است. ولی جمع بنیان گروه به R^+ نمی‌بخشد: او دارای خاصیت زیر نیست:

«هر عدد دارای یک قرینه بازاء جمع است»

این است مسئله‌ای که طرح میشود:

آیا میتوان ترکیب باز رسم موسوم به جمع را معین کرد که شرکت پذیر و جابجا پذیر و هم دارای جزء خنثای ۰ باشد بطوریکه ترکیب دو عدد R^+ برابر مجموع معلوم این دو جزء بوده و هر جزء R بازاء این قانون دارای یک قرینه باشد؟

ما مسئله فوق را بترتیب زیر حل میکنیم:

بهر عدد a از R^+ یک سمبل جدید $\bar{a}$ را همراه میکنیم که عدد منفی نامیده میشود و مجموعه آنرا با R^- نمایش میدهیم و در اجتماع $R^- \cup R^+$ جمع را طوری معین میکنیم که:

$$a + \bar{a} = 0$$

باشد.

تعریف اعداد نسبی

هر عدد R^+ سوای ۰ یک «عدد مثبت» نامیده میشود. بیک عدد مثبت a یک سمبل جدید همراه میشود که $\bar{a}$ نوشته میشود و موسوم به «عدد منفی» است. نظیر صفر خود صفر است. یک عدد مثبت یا منفی و یا صفر را «عدد نسبی» مینامیم.

علامتها ــ حروف لاتین a و b و c ... اعداد مثبت را و حروف لاتین که بالای آنها خط کشیده شده است $\bar{a}$، $\bar{b}$، $\bar{c}$، ... اعداد منفی را معین میکنند.

مجموعه اعداد منفی و صفر با R^- نشان داده میشود. مجموعه اعداد نسبی با R نمایش داده میشود:

$$R = R^+ \cup R^-$$

هر وقت لازم باشد که از یک عدد نسبی بدون تکیه بر مثبت یا منفی بودن آن صحبت کنیم آنرا با یک حرف یونانی نمایش میدهیم:

$$\alpha \in R$$

۲- جمع در R

اعداد منفی را برای تعیین یک قانون ترکیب در R موسوم به «جمع» وارد کردیم و آنرا با علامت $+$ نمایش میدهیم بطوریکه:

$$a + \overline{a} = \circ$$

باشد. (هرچه باشد $a \in R^+$)

میخواهیم که این جمع شرکت پذیر و جابجا پذیر باشد و با جمع در R^+ وقتی که دو عدد از R^+ را جمع میکنیم منطبق باشد.

شرایط لازم تعیین یک چنین قانون ترکیب را پیدا کنیم:

از:

$$a + \overline{a} = \circ$$
$$b + \overline{b} = \circ$$

شروع میکنیم.

عضو به عضو جمع میکنیم باید داشته باشیم:

$$(a + \overline{a}) + (b + \overline{b}) = \circ$$

اگر قانون شرکت پذیر جابجا پذیر باشد نتیجه میشود:

$$(a + b) + (\overline{a} + \overline{b}) = \circ$$

ولی برای مراعات قانون گروه باید همچنین داشته باشیم:

$$(a + b) + (\overline{a + b}) = \circ$$

پس باید:

$$\boxed{\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b}}$$

اختیار نمائیم.

پس لازم است مجموع دو عدد منفی را بترتیب فوق تعریف کنیم.
به طرفین:

$$\bar{a} + \bar{a} = 0$$

b اضافه میکنیم:

$$(a + \bar{a}) + b = b$$

بنا به شرکت پذیری:

$$a + (\bar{a} + b) = b$$

حال دو حالت در نظر میگیریم:
حالت اول: $b \geqslant a$ تفاضل $b - a$ وجود دارد در نتیجه:

$$\boxed{\bar{a} + b = b - a}$$

حالت دوم: $b \leqslant a$ تفاضل $a - b$ وجود دارد. در نتیجه:

$$(a - b) + (\bar{a} + b) = 0$$

ولی برای مراعات قانون گروه باید همچنین داشته باشیم:

$$(a - b) + (\overline{a - b}) = 0$$

پس باید:

$$\boxed{\bar{a} + b = \overline{a - b}}$$

اختیار نمائیم.

ملاحظه کنیم که اگر $a = b$ باشد این دو حالت بر یکدیگر منطبق میشود و $\bar{a} + a = 0$ را موجب میگردند چونکه:

$$0 = 0$$

پس بیان تعریف زیر لازم است:

تعریف - بهر زوج دو عدد نسبی α و β یک عدد نسبی همراه میکنیم که به مجموع دو عدد α و β موسوم است و با $\alpha + \beta$ نمایش داده میشود و بترتیب زیر معین میگردد:

۱) α و β مثبت: مجموع $\alpha + \beta$ مجموع شناخته شده در R^+ است.

۲) α و β منفی:

$$\overline{a}+\overline{b}=\overline{a+b}$$

۳) α منفی و β مثبت:

$$a \leqslant b \quad \text{اگر} \quad \overline{a}+b=b+\overline{a}=b-a$$

$$a \geqslant b \quad \text{اگر} \quad \overline{a}+\overline{b=b}+\overline{a}=a-b$$

جابجا پذیری.

هرچه باشند اعداد نسبی α و β:

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha$$

جابجا پذیری بلافاصله از تعریف نتیجه میشود.

جزء خنثی

هرچه باشد $\alpha \in R$ داریم:

$$\alpha+\circ=\alpha$$

اگر $\alpha \in R^+$ باشد، قبلاً معلوم کرده‌ایم. اگر $\alpha \in R^-$ کافی است تعریف (۲) را در نظر بگیریم:

$$\overline{a}+\overline{\circ}=\overline{a+\circ} \quad \Rightarrow \quad \overline{a}+\circ=\overline{a}$$

اجزاء متقارن.

نظیر هر عدد نسبی α یک عدد نسبی α' وجود دارد بقسمیکه:

$$\alpha+\alpha'=\circ$$

کافی است در تعریف (۳) $b=a$ اختیار کنیم. نتیجه میشود:

$$\overline{a}+a=\circ$$

اگر $\alpha=a$ پس $\alpha'=\overline{a}$ و اگر $\alpha=\overline{a}$ پس $\alpha'=a$،

a و $\overline{a}$ را «متقابل» یا «متقارن» مینامند.

قبل از اثبات شرکت پذیری یک تعریف و یک خاصیت بیان میکنیم:

تعریف - تغییر علامت α عبارت از اختیار قرینه آن α' است. خاصیت زیر را اثبات میکنیم:

$\boxed{P_1}$ اگر علامتهای α و β را تغییر دهیم مجموع آنها $\alpha+\beta$ نیز تغییر علامت میدهد.

اگر α و β همعلامت باشند خاصیت از تعریف (۲) نتیجه میشود.

اگر α و β مختلف‌العلامه باشند خاصیت از تعریف (۳) نتیجه میشود.

$$\bar{a}+b=b-a \iff a+\bar{b}=\overline{b-a} \qquad (a \leqslant b)$$

شرکت پذیری

هرچه باشند اعداد نسبی α و β و γ داریم:

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$$

میدانیم اگر α و β و γ در R^+ باشند خاصیت محقق است.

اگر α و β و γ هر سه منفی باشند کافی است از P_1 استفاده کنیم.

اگر شرکت پذیری را وقتی اثبات کنیم که فقط یکی از آنها منفی باشد با استفاده از P_1 میتوان شرکت پذیری را وقتی که دو تا از آنها منفی باشند نیز اثبات نمود.

پس باید شرکت پذیری را وقتی که یکی از آنها منفی است اثبات کنیم.

فرض کنیم شرکت‌پذیری در حالتیکه جزء منفی اولین جزء باشد اثبات شده است: $\alpha \in R^-$ در این صورت بنا به جابجا پذیری داریم:

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\gamma+(\alpha+\beta)=\gamma+(\beta+\alpha)$$

و:

$$\alpha+(\beta+\gamma)=(\beta+\gamma)+\alpha=(\gamma+\beta)+\alpha$$

از آنجا شرکت پذیری در حالتیکه جزء منفی آخرین جا را اشغال کند نتیجه میگردد.

ثابت کنیم که شرکت پذیری در حالتیکه جزء منفی جای دوم را اشغال کند نیز نتیجه می‌گردد.

(جابجا پذیری)

$$(\beta+\alpha)+\gamma=(\alpha+\beta)+\gamma \qquad (\alpha \in R^-)$$

(شرکت پذیری برای α در جای اول)

$$=\alpha+(\beta+\gamma)$$

(جابجا پذیری)

$$=(\beta+\gamma)+\alpha$$

(شرکت پذیری برای α در جای سوم)

$$=\beta+(\gamma+\alpha)$$

(جابجا پذیری)

$$= \beta + (\alpha + \gamma)$$

و از آنجا شرکت پذیری برای α در جای دوم نتیجه میشود.

بالاخره برای اثبات شرکت پذیری جمع در R باید ثابت کنیم:

$$(\bar{a} + b) + c = \bar{a} + (b + c)$$

سه حالت در نظر میگیریم:

حالت اول: $a \geqslant b + c$ بنا به تعریف جمع در R:

$$\bar{a} + (b + c) = \overline{a - (b + c)}$$

$$(\bar{a} + b) + c = (\overline{a - b}) + c = \overline{(a - b) - c}$$

ولی در R^+:

$$a \geqslant b + c \quad \Rightarrow \quad (a - b) - c = a - (b + c)$$

پس تساوی ثابت است.

حالت دوم: $b < a < b + c$. داریم:

$$\bar{a} + (b + c) = (b + c) - a$$

$$(\bar{a} + b) + c = \overline{a - b} + c = c - (a - b)$$

ولی در R^+:

$$b < a < b + c \quad \Rightarrow \quad c - (a - b) = (b + c) - a$$

پس تساوی ثابت است.

حالت سوم: $a \leqslant b$. داریم:

$$\bar{a} + (b + c) = (b + c) - a$$

$$(\bar{a} + b) + c = (b - a) + c$$

ولی در R^+:

$$a \leqslant b \quad \Rightarrow \quad (b + c) - a = (b - a) + c$$

بنابراین هرچه باشند α و β و γ شرکت پذیری ثابت است.

نتیجه: جمع در R یک بنیان گروه جابجاپذیر معین میکند.

تفریق در R.

هرگاه دو عدد نسبی α و β مفروض باشند آیا یک عدد نسبی γ وجود دارد بطوریکه:

$$\alpha + \gamma = \beta ?$$

فرض کنیم α' قرینه α باشد:

$$\alpha + \alpha' = 0$$

اگر γ جوابی از مسئله باشد داریم:

$$\alpha' + (\alpha + \gamma) = \beta + \alpha'$$

بنا به شرکت پذیری:

$$(\alpha + \alpha') + \gamma = \beta + \alpha'$$

از آنجا:

$$\gamma = \beta + \alpha'$$

امتحان کنیم:

$$\alpha + \gamma = \alpha + (\alpha' + \beta) = (\alpha + \alpha') + \beta = \beta$$

جواب وجود دارد و یکتا است. مینویسیم: $\gamma = \beta - \alpha$ و مینامیم:

«تفاضل α از β»

تفاضل دو عدد نسبی α و β همواره وجود دارد و یکتا است و آنرا با اضافه کردن قرینه α' عدد دوم به عدد اول β بدست میآوریم:

$$\beta - \alpha = \beta + \alpha'$$

بخصوص اگر $\beta = 0$ باشد داریم:

$$0 - \alpha = 0 + \alpha' = \alpha'$$

بدین جهت است که قرینه α را با $(-\alpha)$ نشان میدهند. داریم:

$$\beta - \alpha = \beta + (-\alpha)$$

یک رشته جمع و تفریق مانند:

$$\alpha - \beta + \gamma + \delta - \varphi - \theta$$

همواره در R دارای مفهوم است و این حاکی از:

$$\alpha + (-\beta) + \gamma + \delta + (-\varphi) + (-\theta)$$

میباشد.

مقدار مطلق.

تعریف - بهر عدد نسبی α یک عدد مثبت همراه میکنیم که با $|\alpha|$ نشان میدهیم و بترتیب زیر معین میکنیم:

$$\alpha \in R^+ \quad \Rightarrow \quad |\alpha| = \alpha$$
$$\alpha \in R^- \quad \Rightarrow \quad |\alpha| = -\alpha$$

بدین ترتیب یک تابع $|\alpha| \to \alpha$ از R در R^+ بدست میآید. بدیهی است که:

$$|\alpha| = 0 \iff \alpha = 0$$

خاصیت زیر را اثبات کنیم:

$\boxed{P_2}$ هر چه باشند اعداد نسبی α و β

$$|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$$

حالت اول: α و β هم‌علامت.

$$\alpha = a \quad و \quad \beta = b \quad یا \quad \alpha = \bar{a} \quad و \quad \beta = \bar{b} \qquad (a, b \in R^+)$$

داریم:

$$|\alpha| = a \qquad و \qquad |\beta| = b$$

بنا بتعریف جمع (۱ یا ۲)

$$|\alpha + \beta| = a + b$$

پس داریم:

$$|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$$

حالت دوم: α و β مختلف‌العلامت $\beta = \bar{b}, \alpha = a$

باز هم داریم:

$$|\alpha| = a \qquad و \qquad |\beta| = b$$

بنا به تعریف (۳):

$$|\alpha + \beta| = a - b \quad \text{اگر} \quad \alpha \geqslant b$$
$$|\alpha + \beta| = b - a \quad \text{اگر} \quad \alpha \leqslant b$$

چون در R^+ تفاضل دوعدد اکیداً کمتر از مجموع آنها است پس داریم:

$$|\alpha + \beta| < |\alpha| + |\beta|$$

۳ـ ضرب در R

آیا میتوان ضرب R^+ را با جمیع خواص آن در R ادامه داد؟

باز هم شرایط لازم را که یک قانون ترکیب در R باید با آنها سازگار باشد تا اینکه ترکیب دو جزء R با حاصل ضرب معلوم در R^+ منطبق باشد پیدا کنیم. این قانون را بطور

ضرب بنویسیم و بخواهیم که نسبت به جمع در R توزیع‌پذیر باشد.

از:

$$a+\bar{a}=0$$

شروع و طرفین آنرا در b ضرب کنیم.

$$(a+\bar{a})\,b=0$$

بنابه توزیع‌پذیری:

$$ab+\bar{a}b=0$$

ولی برای رعایت قانون گروه:

$$ab+\overline{ab}=0$$

پس باید:

$$\boxed{\bar{a}b=\overline{ab}}$$

اختیار کنیم.

تعریف حاصل ضرب دو عدد مختلف‌العلامه به طرز فوق لازم است. ملاحظه میشود که اگر $b=0$ باشد باید $\bar{a}\cdot 0=0$ اختیار گردد.

بازهم با شروع از:

$$a+\bar{a}=0$$

با ضرب طرفین آن در $\bar{b}$ (میدانیم که $\bar{b}\cdot 0=0$) داریم:

$$(a+\bar{a})\,\bar{b}=0$$

بنا به توزیع‌پذیری:

$$ab+\bar{a}\cdot\bar{b}=0$$

میدانیم که باید:

$$a\bar{b}=\overline{ab}$$

اختیار شود. پس باید داشته باشیم:

$$\overline{ab}+\overline{ab}=0$$

و برای رعایت قانون گروه همچنین باید داشته باشیم:

$$\overline{ab}+ab=0$$

پس باید:

$$\boxed{\bar{a}\cdot\bar{b}=ab}$$

اختیار کنیم.

بنابراین تعریف حاصل ضرب دو عدد منفی بطرز فوق لازم است.

تعریف- به هر زوج α و β دو عدد نسبی یک عدد نسبی موسوم به حاصل‌ضرب α در β همراه میکنیم که بصورت $\alpha\beta$ نوشته و بترتیب زیر معین میشود:

۱) α و β مثبت: $\alpha\beta$ حاصل ضرب معلوم در R^+ است.

۲) α منفی و β مثبت:

$$\bar{a}b = b\bar{x} = \overline{ab}$$

۳) α و β منفی:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = ab$$

به عبارت دیگر:

حاصل ضرب دو عدد هم‌علامت مثبت است.

حاصل ضرب دو عدد مختلف‌العلامت منفی است.

مقدار مطلق حاصل ضرب برابر حاصل ضرب مقادیر مطلق است:

$$|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$$

تابع $|\alpha| \longrightarrow \alpha$ یک، یک شکلی بازاء ضرب است.

جابجاپذیری:

هرچه باشند اعداد نسبی α، β:

$$\alpha\beta = \beta\alpha$$

جابجاپذیری از روی تعریف آشکار است.

جزء خنثی

هرچه باشد $\alpha \in R$:

$$۱ \cdot \alpha = \alpha$$

اگر $\alpha \in R^+$ مسئله روشن است اگر $\alpha \in R^-$ از تعریف (۲) با فرض $b = ۱$ استفاده میکنیم.

جزء خنثای ضرب ۱ است.

اعداد معکوس.

نظیر هر عدد نسبی $\alpha \neq ۰$ یک عدد نسبی β است بقسمیکه:

$$\alpha\beta = ۱$$

اگر $\alpha \in R^+$ مطلب قبلاً معلوم است. اگر $\alpha \in R^-$ فرض میکنیم $\alpha = \bar{a}$ عدد β الزاماً منفی است:

$$\beta = \bar{b}$$

باید داشته باشیم:

$$\overline{ab} = ۱$$

تعریف (۳) را بکار میبریم: $ab = ۱$، داریم:

$$b = \frac{۱}{a} \qquad \text{و} \qquad \bar{b} = \left(\overline{\frac{۱}{a}}\right)$$

مینویسیم:

$$\beta = \frac{۱}{\alpha}$$

داریم:

$$\frac{۱}{(-\alpha)} = -\left(\frac{۱}{\alpha}\right)$$

شرکت پذیری:

هرچه باشند α و β و γ داریم:

$$(\alpha\beta)\,\gamma = \alpha\,(\beta\gamma)$$

تساوی برای مقادیر مطلق سازگار است، این شرکت‌پذیری در R^+ است. تساوی بازاء علامت‌ها نیز سازگار است زیرا اگر دو عدد منفی باشد حاصل ضرب آنها در هردو طرف مثبت است و اگر یک یا سه عدد منفی باشد حاصل ضربها در هردو طرف منفی هستند.

مجموعه اعداد حقیقی سوای صفر را با R^* نشان میدهیم:

$$R^* = R - \{۰\}$$

نتیجه: ضرب یک بنیان گروه جابجاپذیر را در R^* معین میکند.

توزیع پذیری:

هرچه باشند $\alpha, \beta, \gamma \in R$:

$$\alpha\,(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$$

حالت اول: β و γ هم‌علامت‌اند:

در این حالت سه عدد $\alpha\beta$ و $\alpha\gamma$ و $\alpha\,(\beta+\gamma)$ هم‌علامت‌اند پس تساوی از لحاظ علامت درست است و از لحاظ مقدار مطلق داریم:

$$|\,\alpha\,(\beta+\gamma)\,|=|\,\alpha\,|\,|\,\beta+\gamma\,|=|\,\alpha\,|\,(|\,\beta\,|+|\,\gamma\,|)$$

چونکه β و γ دارای یک علامت‌اند (P_2) از طرف دیگر:

$$|\,\alpha\beta+\alpha\gamma\,|=|\,\alpha\beta\,|+|\,\alpha\gamma\,|$$

چونکه $\alpha\beta$ و $\alpha\gamma$ هم‌علامت‌اند.

پس کافی است برای اثبات تساوی بین مقادیر مطلق از توزیع‌پذیری در R^+ استفاده کنیم.

حالت دوم: β و α مختلف‌العلامه‌اند.

در این صورت $\beta+\gamma$ دارای علامت یکی از آنها است. فرض کنیم دارای علامت β باشد مینویسیم:

$$\beta=(\beta+\gamma)+(-\gamma)$$

سه عدد β و $\beta+\gamma$ و $(-\gamma)$ هم علامت‌اند پس بنا به تعریف (۱) داریم:

$$\alpha\beta=\alpha\,(\beta+\gamma)+\alpha\,(-\gamma)$$

از آنجا رابطه‌ای که بایستی اثبات شود:

$$\alpha\,(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$$

نتیجه: جمع و ضرب یک بنیان گروه به R میبخشند (I فصل ۲، ۶)

۴ـ رابطه ترتیب در R.

برای ادامه رابطه ترتیب R^+ در R کافی است که خود تعریف جمع در R را در نظر بگیریم. میدانیم که اگر a و $b\in R^+$

$$a>b \;\Rightarrow\; a-b \text{ مثبت}$$
$$a<b \;\Rightarrow\; a-b \text{ منفی}$$

تعریف رابطه ترتیب اکید:

هرگاه دو عدد نسبی α و β مفروض باشند اگر $\alpha-\beta$ مثبت باشد میگویند «α اکیداً

بزرگتر از β» است و مینویسند $\alpha > \beta$ یا «β اکیداً کوچکتر از α» است و مینویسند $\beta < \alpha$

حالت‌های مخصوص ۱) $\beta = 0$ اگر $\alpha - 0 = \alpha$ مثبت باشد مینویسند $\alpha > 0$

$$\alpha > 0 \iff \text{مثبت } \alpha$$

۲) $\alpha = 0$ اگر $-\beta = 0 - \beta$ مثبت باشد مینویسند $0 > \beta$

ولی اگر $-\beta$ مثبت باشد β منفی است پس:

$$\beta < 0 \iff \text{منفی } \beta$$

ثابت کنیم رابطه دوتائی که بدین ترتیب معین شد یک رابطه ترتیب اکید و کلی در R است. زیرا:

۱) $$\alpha > \beta \Rightarrow \alpha \neq \beta$$

چونکه: $\alpha - \beta$ مثبت است و برابر صفر نیست.

۲) $$(\alpha > \beta \quad \text{و} \quad \beta > \gamma) \Rightarrow \alpha > \gamma$$

چونکه: $\alpha - \beta$ و $\beta - \gamma$ مثبت‌اند و بعلاوه:

$$\alpha - \gamma = (\alpha - \beta) + (\beta - \gamma)$$

و $\alpha - \gamma$ که مجموع دو عدد مثبت است خودش نیز مثبت میباشد.

۳) هرچه باشد α و β، $\alpha \neq \beta$ داریم.

$$\alpha > \beta \quad \text{یا} \quad \beta > \alpha$$

زیرا اگر α و β متمایز باشند یکی از تفاضلهای $\alpha - \beta$ و $\beta - \alpha$ مثبت است (دیگری منفی است).

رابطه ترتیب وسیع:

اگر داشته باشیم:

$$\alpha < \beta \quad \text{یا} \quad \alpha = \beta$$

مینویسیم:

$$\alpha \leqslant \beta$$

پایداری بازاء جمع

هرچه باشد α, β, γ:

$$\alpha > \beta \iff \alpha + \gamma > \beta + \gamma$$

چونکه میتوان نوشت:

$$\alpha - \beta = (\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma)$$

اگر یکی از دو طرف مثبت باشد طرف دیگر نیز مثبت است.

نتیجهـ در R میتوان نامساوی را عضو به عضو جمع کرد:

$$(\alpha > \beta \quad \text{و} \quad \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$$

ضرب و رابطه ترتیب.

$$(\gamma > ۰ \quad \text{و} \quad \alpha > \beta) \Rightarrow (\alpha\gamma > \beta\gamma)$$
$$(\gamma < ۰ \quad \text{و} \quad \alpha > \beta) \Rightarrow (\alpha\gamma < \beta\gamma)$$

زیرا $\alpha - \beta$ بنا به فرض مثبت است.

اگر $\gamma > ۰$ در این صورت:

$$\alpha\gamma - \beta\gamma > ۰ \quad \text{و} \quad (\alpha - \beta)\,\gamma > ۰$$

اگر $\gamma < ۰$ در این صورت:

$$\alpha\gamma - \beta\gamma < ۰ \quad \text{و} \quad (\alpha - \beta)\,\gamma < ۰$$

تبصرهٔ ۱ـ عدد منطق عدد نسبی است که مقدار مطلق آن از Q^+ باشد:

$$|\alpha| \in Q^+ \iff (\alpha \text{ منطق})$$

مجموعه اعداد منطق با Q نشان داده میشود. جمع و ضرب یک بنیان هیئت روی Q معین مینمایند. میگویند که: Q یک زیر هیئت R است.

تبصرهٔ ۲ـ عدد صحیح نسبی یک عدد نسبی است که مقدار مطلق آن در N باشد:

$$|\alpha| \in N \iff (\alpha \text{ صحیح نسبی})$$

مجموعه اعداد صحیح نسبی با Z نشان داده میشود. جمع در R یک گروه در Z معین میکند، ضرب در R یک گروه در Z معین نمیکند زیرا عکس یک عدد صحیح یک عدد صحیح نیست. Z یک حلقه جابجاپذیر به جزء واحد است (I، فصل ۲، ۶)

۵ـ تقسیم اقلیدسی در Z.

میدانیم که، در N، اگر a یک عدد صحیح مثبت یا صفر و b یک عدد مثبت باشد یک عدد مثبت یکتای q وجود دارد بطوریکه:

$$bq \leqslant a < b\,(q + ۱) \qquad (۱)$$

میخواهیم در حالتیکه a منفی و b مثبت است نتیجه مشابهی بدست آوریم.
علامتها را در (۱) تغییر میدهیم. داریم:

$$b(-q-۱) < (-a) \leqslant b(-q) \qquad (۲)$$

دو حالت در نظر میگیریم:

حالت اول: $-a = b(-q)$

در این صورت میگویند که b، $(-a)$ را میشمارد و مینویسند: $b \mid (-a)$.

$(-q)$ را خارج قسمت تحقیقی $(-a)$ بر b مینامند.

حالت دوم: $b(-q-۱) < -a < b(-q)$

$(-q-۱)$ را خارج قسمت اقلیدسی $(-a)$ بر b مینامند که یکتا است. بنا بتعریف باقیمانده تقسیم عبارت است از:

$$r = (-a) - b(-q-۱) = -a + b(q+۱)$$

داریم:

$$b(-q-۱) < (-a) \iff r > ۰$$
$$-a < b(-q) \iff r < b$$

از آنجا قضیه تقسیم اقلیدسی در Z:

قضیهٔ ۱ـ

$$\forall a \in Z \quad \text{و} \quad \forall b \in N^*, \quad \exists q \in z \quad \text{و} \quad \exists r \in N$$

$$bq \leqslant a < b(q+۱) \iff \begin{cases} a = bq + r \\ ۰ \leqslant r < b \end{cases}$$

۶ـ ایده‌آلهای Z

در (I، فصل ۲، ۷) تعریف ایده‌آل یک حلقه جابجاپذیر A و همچنین مفهوم ایده‌آل اساسی را دیده‌ایم. در اینجا حلقه Z اعداد صحیح نسبی را در نظر میگیریم. قضیه زیر را داریم:

قضیهٔ ۲ـ هر ایده‌آل Z اساسی است.

اثبات ـ حالتی را که ایده‌آل به $\{۰\}$ تبدیل میشود کنار بگذاریم.

اگر $I \neq \{0\}$ یک ایده‌آل Z باشد مجموعه اجزاء مثبت ایده‌آل Z را با I^+ نشان میدهیم:

$$0 \notin I^+ \quad و \quad I^+ \in N^*$$

چون I^+ یک قسمت غیر تهی N^* است پس دارای یک کوچکترین جزء δ است.

$$\delta = \min I^+$$

هرگاه α یک عدد غیر مشخص I باشد تقسیم اقلیدسی a بر δ را انجام میدهیم: (قضیه ۱):

$$(1) \qquad a \in I \qquad a = \delta q + r \qquad 0 \leqslant r < \delta$$

چون I یک ایده‌آل است. داریم:

$$\delta \in I \quad \Rightarrow \quad \delta q \in I$$

$$(a \in I \quad و \quad \delta q \in I) \quad \Rightarrow \quad a - \delta q = r \in I$$

با فرض $r \neq 0$ امر بیک تناقض منجر میشود.

زیرا:

$$0 < r < \delta \quad \Rightarrow \quad (r \in I^+ \quad و \quad r < \min I^+)$$

این یک تناقض است پس $r = 0$ و از (۱) نتیجه میشود:

$$a = \delta q$$

هر جزء a ایده‌آل I مضربی از δ است پس ایده‌آل I اساسی است.

مقسوم علیه مشترک دو عدد Z.

دو عدد $a, b \in Z$ اختیار میکنیم و مجموعه I اعداد زیر را در نظر میگیریم:

$$ax + by \qquad (\forall x, y \in Z)$$

ابتدا ثابت کنیم که I یک زیر گروه جمعی Z است.

۱) جمع در I درونی است زیرا:

$$(ax + by) + (ax' + by') = a(x + x') + b(y + y')$$

۲) $0 \in I$ ($x = y = 0$ اختیار شود)

۳) متقابل یک جزء $ax + by$ از I عبارت از $a(-x) + b(-y)$ است که یک جزء I است.

بالاخره I یک ایده‌آل Z است زیرا حاصل ضرب یک جزء $ax + by$ از I در یک جزء $z \in Z$ عبارت است از:

$a(xz) + b(yz)$ که یک جزء از I است.

بنا به قضیه (۲)، این ایده‌آل I اساسی است، اگر:

$$\delta = \min I^{+}$$

باشد هر جزء I یک مضرب δ است.

ولی: $a \in I$ ($x = ۱$ و $y = ۰$ اختیار شود)

و $b \in I$ ($x = ۰$ و $y = ۱$ اختیار شود)

پس δ یک مقسوم علیه مشترک a و b است.

از طرف دیگر:

$$\delta \in I \Rightarrow (\exists x_{\circ}, y_{\circ} \in Z; \quad ax_{\circ} + by_{\circ} = \delta)$$

از آنجا نتیجه میشود که هر مقسوم علیه مشترک d اعداد a و b مقسوم علیهی از δ است زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} d \mid a \Rightarrow d \mid ax_{\circ} \\ d \mid b \Rightarrow d \mid by_{\circ} \end{array}\right\} \Rightarrow d \mid ax_{\circ} + by_{\circ} = \delta$$

بالاخره مینویسیم که:

$$d \mid \delta \Rightarrow |d| \leqslant \delta$$

δ بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b است.

پس میتوان صورت قضیه اساسی زیر را بیان کرد:

قضیه ۳ـ مجموعه مقسوم علیه‌های مشترک a و b با مجموعه مقسوم علیه‌های بزرگترین مقسوم علیه مشترک آنها منطبق است.

تبصره ـ اگر a و b نسبت بهم اول باشند داریم: $\delta = ۱$

بررسی قبل امکان میدهد که قضیه زیر را بیان کنیم:

قضیه ۴ـ اگر a و b نسبت بهم اول باشند یک زوج اعداد $x_{\circ}$ و $y_{\circ}$ وجود دارد بقسمیکه:

$$ax_{\circ} + by_{\circ} = ۱$$

فصل دوم

نمائی‌ها و لگاریتمها

۱ـ قوای صحیح یک عدد حقیقی

هر گاه α یک عدد حقیقی مخالف صفر باشد: $\alpha \in R^*$

تعریف ـ بهر عدد طبیعی n یک عدد حقیقی α^n را همراه کنیم که از راه بازگشتی بطریق زیر معین میگردد:

۱) $\alpha^0 = ۱$

۲) با فرض معین بودن α^n، $\alpha^{n+۱}$ را با:

$$\alpha^{n+۱} = \alpha^n \cdot \alpha$$

معین میکنیم.

تابع $n \to \alpha^n$ که باین ترتیب معین میشود N را در R^* می‌نگارد بازاء $n \geqslant ۲$ داریم:

$$\alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{\longleftarrow\ n\ \text{عامل}\ \longrightarrow}$$

حالت‌های مخصوص ۱) $\alpha = ۱$. ـ داریم $۱^n = ۱$، هرچه باشد $n \in N$. نگار N با $n \to \alpha^n$ عبارت است از $\{۱\}$.

۲) $\alpha = -۱$. ـ داریم:

اگر n زوج باشد $\quad (-۱)^n = ۱$

اگر n فرد باشد $\quad (-۱)^n = -۱$

نگار N عبارت است از: $\{۱, -۱\}$.

بطور کلی:

$$\alpha > \circ \Rightarrow \alpha^n > \circ \qquad (\forall n \in N)$$
$$\alpha < \circ \Rightarrow (\alpha^{\text{۲}n} > \circ \quad \text{و} \quad \alpha^{\text{۲}n+\text{۱}} < \circ) \qquad (\forall n \in N)$$

$\boxed{P_{\text{۱}}}$ هرچه باشند $\alpha \in R^*$ و $n, p \in N$:

$$\alpha^n \cdot \alpha^p = \alpha^{n+p}$$
$$(\alpha^n)^p = \alpha^{np}$$
$$\alpha^n\beta^n = (\alpha\beta)^n$$

اثبات عیناً همان است که در N بود (II، فصل ۴، ۱)

$\boxed{P_{\text{۲}}}$ هرچه باشد اعداد مثبت $\alpha, \beta \in R^+$ و $n \in N^*$:

$$\alpha < \beta \iff \alpha^n < \beta^n$$

چون منظور اعداد مثبت است پس اثبات همان است که در N بود (II، فصل ۴، ۱)

$\boxed{P_{\text{۳}}}$ اگر $\alpha \in R^+$ و $n, p \in N$:

$$(\alpha > \text{۱} \quad \text{و} \quad n > p) \quad \text{موجب میشود} \quad \alpha^n > \alpha^p$$

زیرا:

$$n > p \Rightarrow (\exists d \in N^* \quad \text{بطوریکه} \quad n = p + d)$$
$$(\alpha > \text{۱} \quad \text{و} \quad d \in N^*) \Rightarrow \alpha^d > \text{۱} \quad (\text{خاصیت } P_{\text{۲}})$$

با ضرب دو طرف نامساوی در عدد مثبت α^p :

$$\alpha^{d+p} > \alpha^p$$

یا:

$$\alpha^n > \alpha^p$$

بنابراین میتوان گفت:

تابع $n \to \alpha^n$ بازاء $\alpha > \text{۱}$ اکیداً صعودی است.

$\boxed{P_{\text{۳}} \text{ مکرر}}$ اگر $\alpha \in R^+$ و $n, p \in N$:

$$(\circ < \alpha < \text{۱} \quad \text{و} \quad n > p) \quad \text{موجب میشود} \quad \alpha^n < \alpha^p.$$

اثبات مشابه قبلی است.

ولی در اینجا بنا به $P_{\text{۲}}$ داریم:

$$(\circ < \alpha < \text{۱} \quad \text{و} \quad d \in N^*) \Rightarrow \alpha^d < \text{۱}$$

و از آنجا نتیجه میشود:

$$\alpha^n < \alpha^p$$

پس میتوان گفت:

تابع $n \to \alpha^n$ بازاء $1 > \alpha > 0$ اکیداً نزولی است.

۲ـ نمای صحیح نسبی یک عدد حقیقی

تعریف ـ هرگاه $\alpha \in R^*$ باشد بازاء $n \in N$ عدد α^{-n} را بطریق زیر معین میکنیم:

$$\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}$$

تابع $\alpha \to \alpha^n$ بازاء $x \in Z$ معین است و Z را در R می‌نگارد.

خاصیتها:

$\boxed{P_4}$ هرچه باشند $x, y \in Z$ و $\alpha \in R^*$ داریم:

$$\alpha^x \cdot \alpha^y = \alpha^{x+y}$$

بازاء x و y صحیح مثبت یا صفر مطلب معلوم است. خاصیت را در سایر حالتها اثبات کنیم:

حالت اول: x و y منفی.

$$x = -n \qquad \text{و} \qquad y = -p \qquad (n, p \in N)$$

داریم:

$$\alpha^x\alpha^y = \frac{1}{\alpha^n} \cdot \frac{1}{\alpha^p} = \frac{1}{\alpha^{n+p}} = \alpha^{-(n+p)} = \alpha^{x+y}$$

حالت دوم: x و y مختلف‌العلامه:

$$x = n \qquad y = -p \qquad (n, p \in N)$$

داریم:

$$\alpha^x\alpha^y = \alpha^n \frac{1}{\alpha^p} = \frac{\alpha^n}{\alpha^p}$$

اگر $n \geqslant p$ باشد بر α^p اختصار میکنیم:

$$\alpha^x \cdot \alpha^y = \alpha^{n-p} = \alpha^{x+y}$$

زیرا:

$$n \geqslant p \quad \Rightarrow \quad x + y = n - p$$

اگر $n < p$ بر α^n اختصار میکنیم:

$$\alpha^x\alpha^y = \frac{1}{\alpha^{p-n}} = \alpha^{-(p-n)} = \alpha^{x+y}$$

زیرا:

$$n < p \quad \Rightarrow \quad x + y = -(p-n)$$

پس رابطه ثابت است.

$\boxed{P_5}$ هرچه باشد $x \in Z$ و $\alpha, \beta \in R^*$ داریم:

$$\alpha^x\beta^x = (\alpha\beta)^x$$

بازاء x صحیح مثبت یا صفر مطلب معلوم است. بازاء x منفی اثبات میکنیم.

$$(n \in N) \quad x = -n$$

$$\alpha^x\beta^x = \frac{1}{\alpha^n}\cdot\frac{1}{\beta^n} = \frac{1}{\alpha^n\beta^n} = \frac{1}{(\alpha\beta)^n} = (\alpha\beta)^{-n} = (\alpha\beta)^x$$

پس رابطه بازاء $x \in Z$ صادق است.

$\boxed{P_6}$ هرچه باشند $x, y \in Z$ و $\alpha \in R^*$ داریم:

$$(\alpha^x)^y = \alpha^{xy}$$

بازاء x و y مثبت یا صفر مطلب معلوم است و آنرا در سایر حالتها اثبات میکنیم.

حالت اول: $x < 0$ و $y < 0$:

$$x = -n \quad \text{و} \quad y = -p \qquad (n, p \in N)$$

$$\alpha^x = \alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}$$

موجب میشود:

$$(\alpha^x)^y = \left(\frac{1}{\alpha^n}\right)^{-p} = (\alpha^n)^p = \alpha^{np} = \alpha^{xy}$$

حالت دوم: $x < 0$ و $y > 0$:

$$x = -n \qquad y = p \qquad (n, p \in N)$$

$$\alpha^x = \frac{1}{\alpha^n}$$

موجب میشود:

$$(\alpha^x)^y = \left(\frac{1}{\alpha^n}\right)^p = \frac{1}{\alpha^{np}} = \alpha^{-np} = \alpha^{xy}$$

حالت سوم: $x > 0$ و $y < 0$:

$$x = n, \qquad y = -p \qquad (n,\ p \in N)$$
$$\alpha^x = \alpha^n$$

موجب میشود:

$$(\alpha^x)^y = (\alpha^n)^{-p} = \left(\frac{1}{\alpha^n}\right)^p = \frac{1}{\alpha^{np}} = \alpha^{-np} = \alpha^{xy}$$

پس خاصیت بازاء هر مقدار $x, y \in Z$ ثابت است.

زیرگروه ضربی R^*.

نگار Z با $x \to \alpha^x$ را G_α مینامیم $(G_\alpha \subset R^*)$:

$$x \in Z \quad \Rightarrow \quad \alpha^x \in G_\alpha$$

موجب میشود:

$$\alpha^x \cdot \alpha^y = \alpha^{x+y} \in G_\alpha$$

بعلاوه دارای خاصیتهای زیر است:

۱) شرکت‌پذیر است.

۲) دارای یک جزء خنثی است:

$$1 = \alpha^0 \in G_\alpha$$

۳) هرجزء α^x از G_α دارای یک معکوس است:

$$\alpha^{-x} \in G_\alpha$$

بنابراین G_α یک زیرگروه ضربی R^* است.

میگویند که G_α یک زیرگروه «تکزاد» است زیرا با یکتا جزء α تولید شده است. چون ضرب جابجاپذیر است پس این زیرگروه جابجاپذیر است.

رابطه:

$$\alpha^x \cdot \alpha^y = \alpha^{x+y}$$

نشان میدهد که تابع $x \to \alpha^x$ یک یک شکلی گروه جمعی Z روی گروه ضربی G_α است.

از این به بعد جزء پایه α مثبت فرض میشود.

$$\alpha \in R^+ - \{0\}$$

$\boxed{P_7}$ هرچه باشند $x, y \in Z$

$\alpha > 1$ و $x > y$) موجب میشود $\alpha^x > \alpha^y$

خاصیت بازاء x و y مثبت تا حال ثابت شده است. آنرا در سایر حالتها ثابت میکنیم.

حالت اول: $y < 0 < x$:

$$x = n \qquad y = -p \qquad (n, p \in N)$$

$$\alpha^x = \alpha^n$$

بنا به (P_2)

$$\alpha > 1 \Rightarrow \alpha^n > 1$$

از طرف دیگر:

$$\alpha^y = \frac{1}{\alpha^p}$$

بنا به (P_2):

$$\alpha > 1 \Rightarrow \alpha^p > 1 \Rightarrow 1 > \frac{1}{\alpha^p}$$

رابطه آخری از تقسیم بر $0 < \alpha^p$ بدست آمده است.

پس داریم: $\alpha^x > 1 > \alpha^y$. خاصیت ثابت است.

حالت دوم- $y < x < 0$:

$$x = -n, \qquad y = -p \qquad (n, p \in N)$$

داریم:

$$y < x \Rightarrow n < p$$

$$(n < p \quad \text{و} \quad \alpha > 1) \Rightarrow \alpha^n < \alpha^p \qquad (P_3)$$

از تقسیم بر $\alpha^p \cdot \alpha^n$ مثبت:

$$\alpha^n < \alpha^p \Rightarrow \frac{1}{\alpha^p} < \frac{1}{\alpha^n}$$

یا:

$$\alpha^y < \alpha^x$$

پس خاصیت ثابت است و با این عبارت بیان میشود:

تابع $x \to \alpha^x$ بازاء $\alpha > 1$ اکیداً صعودی است.

P_7 مکرر هرچه باشند $x, y \in Z$:

$0 < \alpha < 1$ و $x > y$) موجب میشود $\alpha^x < \alpha^y$

اثبات شبیه قبلی است و میتوانیم بگوئیم:

تابع $x \to \alpha^x$ بازاء $1 > \alpha > 0$ اکیداً نزولی است.

از آنجا نتیجه میشود که این تابع یک تناظر دوسوئی بین Z و نگار آن G_α است:

قضیه ۱- تابع $x \to \alpha^x$ با دوسوئی Z را روی G_α بازاء $\alpha > 0$ و $\alpha \neq 1$ مینگارد. و این یک، یک شکلی گروه جمعی Z روی گروه ضربی G_α است.

تعریف- تابع عکس $y = \alpha^x$ لگاریتم پایه α نامیده میشود. مینویسیم:

$$x = \log_\alpha y$$

$$(x \in Z \quad \text{و} \quad y = \alpha^x) \iff (y \in G_\alpha \quad \text{و} \quad x = \log_\alpha y)$$

نمودار این تناظر در شکل (۱) نشان داده شده است:

$$\begin{array}{l}
Z = \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\} \\
\qquad\quad \upharpoonleft\!\downharpoonright \qquad\quad \upharpoonleft\!\downharpoonright \quad \upharpoonleft\!\downharpoonright \; \upharpoonleft\!\downharpoonright \, \upharpoonleft\!\downharpoonright \, \upharpoonleft\!\downharpoonright \qquad \upharpoonleft\!\downharpoonright \\
G_\alpha = \{\ldots, \alpha^{-n}, \ldots, \alpha^{-2}, \alpha^{-1}, 1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n, \ldots\}
\end{array}
\quad \begin{array}{c} y = \alpha^x \\ \downarrow \end{array}
\quad \begin{array}{c} \uparrow \\ x = \log_\alpha y \end{array}$$

شکل ۱

بدین ترتیب تعریف لگاریتم را که برای اعداد طبیعی معلوم کرده بودیم (II، فصل ۴) به اعداد جدیدی ادامه دادیم: اعداد صحیح نسبی از یک طرف و اعداد حقیقی از طرف دیگر.

خاصیت:

$$\log_\alpha y' + \log_\alpha y'' = \log_\alpha (y'y'')$$

بیان دیگری از یک شکلی گروه جمع Z روی گروه ضربی G_α است.

۳- قوای دو-ئی یك عدد حقیقی مثبت.

میخواهیم تناظر $x \to \alpha^x$ را به اعداد x غیر متعلق به Z ادامه دهیم. برای اینکار مشابه آنچه در فصل اندازه کمیتها عمل کردیم عمل خواهیم نمود. تابع $y \to \log_\alpha y$ را مانند اندازه $y \in G_\alpha$ به‌کمک یک عدد $x \in Z$ تعبیر میکنیم (واحد اندازه α است). «جمع کمیتها» با ضرب اجزاء G_α جایگزین شده است.

Z دارای سوراخها است: هر فاصله باز $]k, k+1[$ تهی است. در تئوری اندازه، اصل نیمسازی به مسدود کردن سوراخهای نیم‌گروه ارشمیدسی و به معمول کردن اعداد دو-ئی Q_2^+ امکان داده است.

در G_α چون قانون ترکیب ضرب است[۱] اصل نیمسازی با این عبارت قابل بیان است:
«نظیر هر جزء β یک γ است. بطوریکه $\beta = \gamma \cdot \gamma$»
γ جذر عدد حقیقی مثبت β است. میدانیم که γ وجود دارد و یکتا است (IV، فصل ۲، قضیه ۳). بنابراین مینویسیم:

$$\gamma^{2} = \beta \iff \gamma = \beta^{\frac{1}{2}}$$

هرگاه:

α_1 جذر α باشد:	(1)	$\alpha_1^2 = \alpha$
α_2 جذر α_1 باشد:	(2)	$\alpha_2^2 = \alpha_1$
α_3 جذر α_2 باشد:	(3)	$\alpha_3^2 = \alpha_2$
. . .	. . .	. . .
α_n جذر α_{n-1} باشد:	(n)	$\alpha_n^2 = \alpha_{n-1}$

دو عدد (۲) را بتوان ۲ و (۳) را بتوان 2^2 . . . و دوعدد (n) را بتوان 2^{n-1} برسانیم بنا به سرایت‌پذیری داریم:

$$\alpha_n^{(2^n)} = \alpha_{n-1}^{(2^{n-1})} = \ldots = \alpha_3^{(2^3)} = \alpha_2^{(2^2)} = \alpha_1^2 = \alpha$$

α_n را جذر مرتبه n عدد α و یا «ریشه مرتبه 2^n عدد α» مینامند.
مینویسیم:

$$\alpha_n = \alpha^{\frac{1}{2^n}} \iff \alpha_n^{(2^n)} = \alpha$$

هرچه باشد $q \in Z$ داریم:

$$\alpha_n^q = \left(\alpha^{\frac{1}{2^n}}\right)^q \qquad \text{و} \qquad \left(\alpha_n^{2^n}\right)^q = \alpha^q$$

ولی بنابه P_6 تساوی دوم را میتوان نوشت:

$$(\alpha_n^q)_{2^n} = \alpha^q$$

از آنجا نتیجه میشود:

۱ــ G_α یک گروه ارشمیدسی است. درحالت $\alpha > 1$ مثلاً، هرچه باشد اجزاء x و y بزرگتر از ۱ در G_α یک عدد طبیعی n وجود دارد بقسمیکه:

$$x^n > y$$

$$\alpha_n^q = (\alpha^q)^{\frac{1}{2^n}}$$

پس داریم:

$$(\alpha^q)^{\frac{1}{2^n}} = \left(\alpha^{\frac{1}{2^n}}\right)^q$$

که مینویسیم:

$$\alpha^{\frac{q}{2^n}}$$

تعریف. بازاء هر عدد دو-ئی:

$$x = \frac{q}{2^n}$$

با $q \in Z$ و $n \in N$ عدد α^x را مانند ریشه مرتبه 2^n عدد α^q معین میکنیم.
بنا بر آنچه گذشت، α^x همچنین توان به نمای q-ی ریشه مرتبه 2^n عدد α است.
بدین ترتیب تعریف $x \to \alpha^x$ به $x \in Q_2$ (مجموعه اعداد دو-ئی مثبت، منفی یا صفر) ادامه داده شده است. نگار Q_2 با این تابع را با H_α نشان میدهیم:

$\boxed{P_8}$ هرچه باشند $x, y \in Q_2$:

$$\alpha^x \cdot \alpha^y = \alpha^{x+y}$$

برای x و y دو نماینده با مخرج 2^n انتخاب کنیم:

$$x = \frac{q}{2^n} \qquad y = \frac{q}{2^n} \qquad (p, q \in Z)$$

داریم:

$$\alpha^x = \left(\alpha^{\frac{1}{2^n}}\right)^p \qquad \text{و} \qquad \alpha^y = \left(\alpha^{\frac{1}{2^n}}\right)^q$$

از آنجا:

$$\alpha^x \cdot \alpha^y = \left(\alpha^{\frac{1}{2^n}}\right)^{p+q} \qquad (\text{خاصیت } P_4)$$

و:

$$\alpha^x \cdot \alpha^y = \alpha^{\frac{p+q}{2^n}} = \alpha^{x+y}$$

از آنجا نتیجه میشود که H_α یک نیم‌گروه ضربی R^* است.

$\boxed{P_{۹}}$ هرچه باشند $x, y \in Q_{۲}$:

$$(\alpha > ۱ \quad \text{و} \quad x > y) \quad \text{موجب میشوند} \quad \alpha^x > \alpha^y$$

ابتدا ملاحظه کنیم که:

$$\alpha > ۱ \Rightarrow \alpha^{\frac{۱}{۲^n}} > ۱$$

زیرا اگر میداشتیم:

$$\alpha^{\frac{۱}{۲^n}} \leqslant ۱$$

هرگاه بتوان ۲^n برسانیم نتیجه میشود: $\alpha \leqslant ۱$ که خلاف فرض است.

حال‌کافی است که همان علامت‌های $P_{۸}$ را اختیار کنیم:

$$x > y \Rightarrow p > q \Rightarrow \left(\alpha^{\frac{۱}{۲^n}}\right)^p > \left(\alpha^{\frac{۱}{۲^n}}\right)^q \quad (P_{۷} \text{ خاصیت})$$

بنابراین تابع $x \rightarrow \alpha^x$ بازاء $\alpha > ۱$ اکیداً صعودی است. و بهمین ترتیب اثبات میشود که بازاء $۰ < \alpha < ۱$ اکیداً نزولی است. از آنجا نتیجه میشود که:

قضیهٔ ۲- تابع $x \rightarrow \alpha^x$ با دوسوئی $Q_{۲}$ را روی H_α بازاء $\alpha > ۰$ و $\alpha \neq ۱$ می‌نگارد.

این یک یک شکلی گروه جمعی $Q_{۲}$ روی گروه ضربی H_α است.

نمودار تناظر دوسوئی در شکل ۲ داده شده است. در شکل ۲ فقط فاصله $Z \supset [۰, ۱]$ را نمایش داده‌ایم که با اعداد $Q_{۲}^{+}$ مسدود شده است.

بدیهی است که نتوانسته‌ایم جزیک اصلی کوچک از این اعداد دو-ئی را نمایش بدهیم:

$$\begin{array}{rcccccccccc} Q_2 = \{ \dots & 0, & \frac{1}{2^3}, & \frac{1}{2^2}, & \frac{3}{2^3}, & \frac{1}{2}, & \frac{5}{2^3}, & \frac{3}{2^2}, & \frac{7}{2^3}, & 1, \dots \} \\ & \updownarrows & \updownarrows & \updownarrows & \updownarrows & \updownarrows & \updownarrows & \updownarrows & \updownarrows & \updownarrows \\ H_\alpha = \{ \dots & 1, & \alpha^{\frac{1}{2^3}}, & \alpha^{\frac{1}{2^2}}, & \alpha^{\frac{3}{2^3}}, & \alpha^{\frac{1}{2}}, & \alpha^{\frac{5}{2^3}}, & \alpha^{\frac{3}{2^2}}, & \alpha^{\frac{7}{2^3}}, & \alpha \dots \} \end{array} \quad y = \alpha^x \downarrow \quad \uparrow x = \log_\alpha y$$

شکل ۲

۴ـ قوای حقیقی یك عدد حقیقی مثبت.

بالاخره تناظر $x \rightarrow \alpha^x$ را به اعداد حقیقی x ادامه میدهیم.

فرض میکنیم $1 < \alpha$ (در حالت $0 < \alpha < 1$ نیز استدلال همان است) یک عدد حقیقی x را که با صورت‌بندی نامتناهی‌اش در مبنای ۲ داده شده است (برای تثبیت تصور فعلا آنرا مثبت فرض میکنیم)

در نظر میگیریم:

$$x = \overrightarrow{e, r_1 r_2 \cdots r_n \cdots}$$

ارقام پایه ۲ عبارتند از ۰ و ۱

عدد x با رشته فواصل فراگیر Q_2^+ معین شده است که از این صورت‌بندی نتیجه میشود:

$$x \in \left[\frac{q_n}{2^n}, \frac{q_n + 1}{2^n}\right[\qquad (\forall n \in N)$$

بازاء هریک از این فواصل یک فاصله H_α نظیر وجود دارد

$$\left[\alpha^{\frac{q_n}{2^n}}, \alpha^{\frac{q_n+1}{2^n}}\right[\qquad \text{(S)}$$

و وقتیکه n تغییر میکند، یک رشته (S) فواصل فراگیر H_α بدست میآید (خاصیت P_2) ثابت کنیم که در ازای این فاصله بسمت صفر میل میکند:

$$l_n = \alpha^{\frac{q_n+1}{2^n}} - \alpha^{\frac{q_n}{2^n}} = \alpha^{\frac{q_n}{2^n}}\left(\alpha^{\frac{1}{2^n}} - 1\right)$$

اگر e قسمت صحیح x باشد که قسمت صحیح:

$$\frac{q_n}{2^n}$$

نیز هست. پس:

$$e \leqslant \frac{q_n}{2^n} < e + 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha^{\frac{q_n}{2^n}} < \alpha^{e+1}$$

بنابراین:

$$l_n < \alpha^{e+1}\left(\alpha^{\frac{1}{2^n}} - 1\right)$$

حال ثابت میکنیم که:

$\alpha^{\frac{1}{2^n}} - 1$ بسمت صفر میل میکند.

یعنی:

$$\forall \varepsilon \in R^+, \qquad \varepsilon \neq 0 \qquad \exists p \in N$$

بقسمیکه:

$$n > p \quad \Rightarrow \quad \alpha^{\frac{۱}{۲^n}} - ۱ < \varepsilon$$

میخواهیم که شرط زیر برآورده شود:

$$\alpha^{\frac{۱}{۲^n}} < ۱ + \varepsilon$$

یعنی:

$$\alpha < (۱ + \varepsilon)^{۲^n} \qquad (۱)$$

ولی هرچه باشد عدد طبیعی $m > ۱$ داریم:

$$(۱ + \varepsilon)^m > ۱ + m\varepsilon \qquad (۲)$$

زیرا، (۲) بازاء $m = ۲$ درست است. چونکه:

$$۱ + ۲\varepsilon + \varepsilon^۲ > ۱ + ۲\varepsilon$$

بفرض درستی (۲) بازاء m درستی آنرا بازاء $m + ۱$ اثبات میکنیم. از ضرب هر دو جمله در $۱ + \varepsilon$ نتیجه میشود.

$$(۱ + \varepsilon)^{m+۱} > (۱ + m\varepsilon)(۱ + \varepsilon) > ۱ + m\varepsilon + \varepsilon$$

بنا براین، درست است (هرچه باشد $m > ۱$)

برای (۱) کافی است بنا به (۲) داشته باشیم:

$$۱ + ۲^n\varepsilon > \alpha$$

یعنی:

$$\frac{۱}{۲^n} < \frac{\varepsilon}{\alpha - ۱}$$

از قضیه ۱ (III، فصل ۴، ۲) استفاده میکنیم.

فواصل رشته (S) که درازای آنها بسمت صفر میل میکند یک عدد حقیقی معین میکنند (IV، فصل ۲، ۵، قضیه ۴) این عدد حقیقی را با α^x نشان میدهند:

$$\alpha^x \in \left[\alpha^{\frac{q_n}{۲^n}}, \alpha^{\frac{q_n + ۱}{۲^n}} \right[\qquad (\forall n \in N)$$

تعریف - هرگاه x یک عدد حقیقی باشد که با یک رشته فواصل فراگیر اعداد $Q_۲$ (که درازای آنها بسمت صفر میل میکند) معین میگردد؛ α^x عدد حقیقی است که با رشته نظیر فواصل فراگیر H_α (که درازای آنها بسمت صفر میل میکند) معین میشود.

تابع $x \to \alpha^x$ بدین ترتیب به مجموعه اعداد حقیقی امتداد یافته است. این تابع R را روی $R^+ - \{0\}$ می‌نگارد.

$\boxed{P_{10}}$ هرچه باشد اعداد حقیقی x و y:

$$\alpha^x \cdot \alpha^y = \alpha^{x+y}$$

هرگاه:

$$\frac{q_n}{2^n}, \frac{q'_n}{2^n}$$

رشته‌های اعداد Q_2 باشند که بترتیب x و y را معین مینمایند:

$$x \in \left[\frac{q_n}{2^n}, \frac{q_n+1}{2^n}\right[\qquad \text{و} \qquad y \in \left[\frac{q'_n}{2^n}, \frac{q'_n+1}{2^n}\right[$$

در اینصورت داریم:

$$\alpha^x \in \left[\alpha^{\frac{q_n}{2^n}}, \alpha^{\frac{q_n+1}{2^n}}\right[\qquad \text{و} \qquad \alpha^y \in \left[\alpha^{\frac{q'_n}{2^n}}, \alpha^{\frac{q'_n+1}{2^n}}\right[$$

با ضرب عضو به عضو نامساویهای در R^+:

$$\alpha^x \cdot \alpha^y \in \left[\alpha^{\frac{q_n+q'_n}{2^n}}, \alpha^{\frac{q_n+q'_n+2}{2^n}}\right[$$

ولی بنا به تعریف تابع $x \to \alpha^x$ این رشته فواصل فراگیر عدد:

$$\alpha^{x+y}$$

را معین می‌کنند. پس داریم:

$$\alpha^x \cdot \alpha^y = \alpha^{x+y}$$

$\boxed{P_{11}}$ هرچه باشد اعداد حقیقی x و y:

$$(x > y \quad \text{و} \quad \alpha > 1) \quad \text{موجب میشود} \quad \alpha^x > \alpha^y$$

ملاحظه کنیم که اگر z یک عدد حقیقی مثبت باشد بنا به ساخت تابع $z \to \alpha^z$:

$$\alpha > 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha^z > 1$$

حال اگر دو عدد حقیقی x و y داشته باشیم بقسمیکه $x > y$ تفاضل $x - y = z$ یک عدد مثبتی است:

$$\alpha^x = \alpha^{y+z} = \alpha^y \cdot \alpha^z$$

چون $\alpha^z > 1$ است. از آنجا در R^+ نتیجه میشود:

$$\alpha^x > \alpha^y$$

تابع $x \to \alpha^x$ بازاء $\alpha > ۱$ اکیداً صعودی است (بهمین ترتیب ثابت میشود که بازاء $۰ < \alpha < ۱$ اکیداً نزولی است).

قضیه ۳- تابع $x \to \alpha^x$ بازاء $\alpha > ۰$ و $\alpha \neq ۱$ با دو سوئی R را روی $R^+ - \{۰\}$ می‌نگارد. این یک، یکشکلی گروه جمعی R روی گروه ضربی R^+ است. تابع معکوس آن را لگاریتم پایه α می‌نامند:

$$(x \in R) \qquad y = \alpha^x \iff x = \log_\alpha y \qquad (y \in R^+)$$

از خاصیت $(P_{۱۰})$ بلافاصله دستور اساسی زیر نتیجه میشود:

$$\log_\alpha yy' = \log_\alpha y + \log_\alpha y'$$

نمای مطلق.

α^x را، هرچه باشد x حقیقی، معین کردیم. بخصوص حالتی را که x منطق است بررسی کنیم، ابتدا فرض کنیم $x = \frac{۱}{n}$ و:

$$\beta = \alpha^{\frac{۱}{n}} \qquad (n \in N^*)$$

و ثابت کنیم که:

$$\beta^n = \alpha$$

لگاریتم های زیر در پایه α گرفته شده‌اند. اندیسهای آنها را حذف کرده‌ایم:

$$\log \beta = \log \alpha^{\frac{۱}{n}} = \frac{۱}{n} \qquad (\text{تعریف تابع } y \to \log_\alpha y)$$

چون $\log \alpha = ۱$ است میتوانیم بنویسیم:

$$\log \beta = \frac{۱}{n} \log \alpha$$

از آنجا:

$$\log \alpha = n \log \beta \tag{۳}$$

ولی اگر دستور اساسی را بیک حاصل‌ضرب β^n و n عامل مساوی تکرار کنیم نتیجه میشود:

$$\log (\underbrace{\beta \cdots \beta}_{n\text{عامل}}) = \underbrace{\log \beta + \cdots + \log \beta}_{n \text{ جمله}}$$

از آنجا:

$$\log \beta^n = n \log \beta$$

در این صورت دستور (۳) نوشته میشود:

$$\log \alpha = \log \beta^n$$

از آنجا:

$$\alpha = \beta^n$$

و بدین جهت است که:

$$\alpha^{\frac{1}{n}}$$

را «ریشه مرتبه n-ام α» مینامند و غالباً بصورت: $\sqrt[n]{\alpha}$ نوشته میشـود. در حالتی که $x = \dfrac{p}{n}$ با $p \in Z$ و $n \in N^*$ است، با استفاده از دستورات لگاریتمی بسادگی اثبات میشود که:

$$\left(\alpha^{\frac{1}{n}}\right)^p = \left(\alpha^p\right)^{\frac{1}{n}}$$

فصل سوم

کاربرد هندسی اعداد حقیقی

در این فصل، میخواهیم نظری اجمالی ازیک آکسیوماتیک بدهیم که بر پایه آن خواص مقدماتی خط جهت دار و صفحه جهت دار نتیجه گیری می‌شود[1] یک گسترش دقیق از کادر محدود این کتاب خارج است. با این وجود، امیدواریم نشان دهیم که چگونه میتوان یک طبقه منطقی از خواص هندسی از قبیل تساوی دو پاره خط و دو زاویه را معلوم کرد.

۱ـ هندسه یک بعدی

مجموعه پایه D هندسه یک بعدی خط نامیده میشود. هر جزء D را نقطه مینامند. این جزءها را با حروف کوچک لاتین a، b، c نمایش میدهیم.

اصل بخش

اصل C_1 ــ بازاء هر نقطه a از D یک تقسیم بدو بخش غیر تهی در D وجود دارد که به نیم خطهای به کناره a موسوم‌اند. این بخشها را نیم خطهای به مبدأ a نیز مینامند.

آنها را با D_a و D'_a نشان داده و نیم خطهای متقابل مینامیم. میتوان قرار گذاشت که a بهیچ کدام از آنها تعلق نداشته باشد. از آنجا:

$$D_a \cup D'_a = D - \{a\}$$
$$D_a \cap D'_a = \varnothing$$

تعریف ـ اگر b و c بترتیب به نیم خطهای به مبدأ a تعلق‌داشته باشند میگویند: «a بین b و c

---

[1] ــ کتاب (اصول هندسه اقلیدسی *Principes de la Géométrie Euclidienne*) تألیف ربرت بریزاک Robert Brisac (ناشر گوتیه ویلار Gauthier Villars) مراجعه شود.

واقع است».

گروه جابجاپذیر انتقالها روی D.

هر تابع (یا هر تبدیل *transformation* نقطه‌ای) کـه D را روی D بنگارد «مبادله D *permutation* نامیده میشود. مجموعه مبادله‌های D، در مقابل قانون ترکیب تـوابـع: (I، فصل ۳، ۶) یک گروه تشکیل میدهد. در اینجا آن نوع مبادله‌های D را در نظر خواهیم گرفت که «انتقالات» نامیده میشوند و با دستگاه اصلهای زیر معین هستند:

C_2: انتقالات یک زیر گروه جابجاپذیر از گروه مبادله D را تشکیل میدهند.

C_3: بازاء هر زوج (a, b) دو نقطه، یک انتقال وجود دارد که a را به b تبدیل میکند.

C_4: رابطه «a بین b و c واقع است» نسبت بانتقال تغییرناپذیر است.

C_4 بدان معنی استکه اگر a بین b و c قرار دارد هر انتقالی این سه نقطه را به سه نقطه a' و b' و c' تبدیل میکند بقسمیکه a' بین b' و c' قرار دارد.

از آنجا نتیجه میشود که تبدیل شده هر نیم خط یک نیم خط است و تبدیل شده دو نیم خط متقابل دو نیم خط متقابل است.

پاره خطها. پاره خطهای جهت دار

تعریفات ـ یک زوج نامرتب دو نقطه a و b را یک پاره خط مینامند.

پاره خط را با ab یا ba نمایش میدهند.

یک زوج مرتب دو نقطه a و b را پاره خط جهت دار مینامند. پاره خط جهت دار را با $\overrightarrow{ab}$ یا ab نمایش میدهند.

a مبدأ و b منتها نامیده میشود.

پاره خط جهت دار $\overrightarrow{ab}$ با پاره خط جهت دار $\overrightarrow{ba}$ متقابل است.

همبستگی. بردارها.

تعریف ـ دو پاره خط جهت دار $\overrightarrow{ab}$ و $\overrightarrow{cd}$ همسنگ نامیده میشوند اگر انتقالی که a را روی b می‌نگارد c را نیز روی d بنگارد. مینویسیم:

$$\overrightarrow{ab} \equiv \overrightarrow{cd}$$

میخوانیم: «$\overrightarrow{ab}$ همسنگ $\overrightarrow{cd}$ است».

رابطه: $\overrightarrow{ab} \equiv \overrightarrow{cd}$ در مجموعه پاره خطهای جهت دار یک رابطه هم ارزی است این رابطه در مجموعه یک تقسیم بندی به طبقات هم ارز بوجود میاورد. هر طبقه‌ای یک بردار نامیده میشود.

تعریف ـ یک طبقه هم ارزی پاره‌خطهای جهت‌دار را «بردار» مینامند.

یک بردار را با $\overrightarrow{x}$ یا x نمایش میدهند.

مجموعه بردارها با: E نشان داده خواهد شد.

به‌هر بردار $\overrightarrow{x}$ طبقه $\overrightarrow{ab}$ یک طبقه پاره خطهای غیر جهت دار ab نظیر است که به‌طول بردار $\overrightarrow{x}$ موسوم است و با x (بدون پیکان) نمایش داده میشود.

بنا به اصل C_3، مجموعه E بردارها با مجموعه انتقالها در تناظر دو سوئی است. از یک بردار مفروض یک نماینده یکتا با مبدأ o وجود دارد. از آنجا نتیجه میشود که اگر یک بار برای همیشه یک نقطه مبدأ o بر روی D انتخاب شود، به‌هر بردار $\overrightarrow{x}$ یک نماینده $\overrightarrow{om}$ یکتا بـه مبـدأ o نظیر است و بعکس بهر نقطه m یک بردار $\overrightarrow{x}$ نظیر است که با $\overrightarrow{om}$ نمایش داده میشود. بدین ترتیب مجموعه E بردارها با نقاط واقع بر D به تناظر دو سوئی گـذاشته میشود. بر پایه اصل بخش C_1 تعریفهای زیر را میتوان بیان نمود:

تعریف ـ دو بردار مجموعه E «هم جهت» نامیده میشوند اگر نماینده‌های بـه مبدأ oـی آنـها هر دو بیک نیم خط به‌مبدأ o تعلق داشته باشند.

دو بردار مختلف‌الجهت هستند اگر این نماینده‌ها به دو نیم خط متقابل به مبدأ o متعلـق باشند.

به سبب C_4، این تعریف مستقل از انتخاب o است.

رابطهٔ «هم جهت بودن» یک رابطه هم‌ارزی در E است که E را به دو طبقه هـم ارزی تقسیم میکند.

تعریف ـ D را جهت دار مینامیم اگر به‌هر کدام از این دو طبقه یک علامت ممیـزه نسبت داده شود.

مثلاً اگر آنها را با: E^+ و E^- نمایش دهیم. داریم:

$$E = E^+ \cup E^-$$

هر کدام از این طبقات در تناظر دو سوئی با مجموعه طولها است.

جمع بردارها:

تعریف ـ به‌هر زوج مرتب $\vec{x}$ و $\vec{y}$ دو بردار، یک بردار موسوم به مجموع $\vec{x}$ و $\vec{y}$ همراه میکنیم که با $\vec{x}+\vec{y}$ نمایش داده میشود و بترتیب زیر معین است:
هرگاه $\overrightarrow{ab}$ نماینده $\vec{x}$ باشد برای نماینده $\vec{y}$ پاره خط جهت دار $\overrightarrow{bc}$ را که مبدأ آن نقطه b انتهای اولی است اختیار میکنیم، مجموع $\vec{x}+\vec{y}$ با پاره خط جهت دار $\overrightarrow{ac}$ نمایش داده خواهد شد. این جمع نظیر قانون ترکیب انتقالها است.
تناظر دوسوئی بین مجموع انتقالها و E یک یک شکلی برای قوانین ترکیب بترتیب است. پس E یک گروه جابجاپذیر است و بدین جهت است که میگویند: بردار $\vec{x}$ یا انتقال $\vec{x}$. انتقال $\vec{x}-$ عکس انتقال $\vec{x}$ است.

اصل ترتیب C_5ـ مجموع دو بردار هم‌جهت برداری درهمان جهت است. ازآنجانتیجه میشود که با پذیرفتن تعریف ترتیب معلوم درمجموعه اعداد نسبی، در E نیز یک ترتیب کلی معین خواهد شد.

تعریفـ هرگاه $\vec{x}$ و $\vec{y}$ دو بردار E باشند، اگر:

$$\vec{x}-\vec{y} \in E^+$$

در این صورت میگویند که:
«$\vec{x}$ حد اقل برابر $\vec{y}$ است» و مینویسند: $\vec{x} \geqslant \vec{y}$
یا «$\vec{y}$ حد اکثر برابر $\vec{x}$ است» و مینویسند: $\vec{y} \leqslant \vec{x}$
برای اینکه گروه E باگروه جمع اعداد حقیقی یک شکل باشد سه اصل زیر را اضافه میکنیم:

اصل ارشمیدس

C_6ـ هرگاه $\vec{x}$ و $\vec{y}$ دو بردار غیر صفر از E^+ باشند یک عدد طبیعی n وجود دارد بقسمیکه:

$$n\vec{x} > \vec{y}$$

اصل نیمسازی:

C_7ـ به‌هر بردار $\vec{x}$ از E^+ یک بردار $\vec{y}$ و فقط یکی از E^+ نظیر است بقسمیکه:

$$2\vec{y} = \vec{x}$$

این اصل وجود «وسط» را برای هر پاره خط D تأمین مینماید.

اصل فقدان خلل.

C_8ـ هر رشته نامتناهی فراگیر بردارهای E که «طول آن بسمت صفر میل میکند هرگز یک خلل معین نمینماید.

اصلهای C_6، C_7، C_8 امکان میدهند که با E مانند یک گروه ارشمیدسی کامل رفتار شود و قضیه اندازه در مورد آن بکار برده شود.

اندازهٔ بردارهای E.

تعریفـ برداری واحدی D عبارت از یک بردار غیر صفر $\vec{u}$ است که یک بار برای همیشه انتخاب میشود و طول آن واحد طول را و جهت آن جهت $+$ روی D معین مینماید.

میدانیم که (IV، فصل ۳) هرگاه واحد طول u انتخاب شده باشد، مجموعه طولها با مجموعه R^+ اعداد حقیقی مثبت یا صفر در تناظر دو سوئی است.

مجموعه E^+ بردارهای D هم‌جهت با $\vec{u}$ با مجموعه طولها و در نتیجه با R^+ در تناظر دو سوئی است.

مجموعه E^- بردارهای D در جهت مخالف نیز با مجموعه طولها در تناظر دو سوئی است آنرا با R^- در تناظر دو سوئی قرار میدهیم.

بدین ترتیب مجموعه $E = E^+ \cup E^-$ با مجموعه R اعداد حقیقی (مثبت، منفی، یا صفر) در تناظر دوسوئی قرار میگیرد.

بدین ترتیب عدد حقیقی همراه هربردار $\vec{x}$ که با $\mu\ (\vec{x})$ نمایش داده میشود به «اندازه جبری $\vec{x}$» موسوم است.

این تناظر یک، یک شکلی بازاء جمع ورابطه ترتیب است:

$$\mu(\vec{x}+\vec{y})=\mu(\vec{x})+\mu(\vec{y})$$
$$\vec{x}<\vec{y} \Rightarrow \mu(\vec{x})<\mu(\vec{y})$$

بدین ترتیب مجموعه نقاط یک خط که با $\vec{u}$ جهت‌دار شده است و روی آن یک نقطه o نظیر عدد صفر (نقطه‌ای که روی خط جهت‌دار مبدأ نامیده میشود) انتخاب شده است با مجموعه R در تناظر قرار داده میشود.

خواص P_4، P_5، P_6، (IV، فصل ۳) را بلافاصله به اندازه‌های نسبی گسترش میدهیم.

هرچه باشند اعداد حقیقی α و β و بردارهای $\vec{x}$ و $\vec{y}$ داریم:

$$(\alpha+\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{x}$$
$$\alpha(\beta\vec{x})=(\alpha\beta)\vec{x}$$
$$\alpha(\vec{x}+\vec{y})=\alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}$$

این خاصیتها را که به خاصیت‌های بنیان گروه جابجاپذیر E الحاق کنیم، روی E یک بنیان فضای برداری روی هیئت R معین میکنند (I، فصل ۲، ۸).

۲ـ هندسه زاویه‌های جهت‌دار

در هندسه مسطحه، مجموعه پایه تئوری، صفحه است. صفحه یک مجموعه غیر تهی نقاطی است که با اصلهای زیر سازگار است:

اصل تعلق.

D_1ـ دو نقطه متمایز یک خط یکتا را معین میکنند.

نقاط صفحه بیک خط تعلق ندارند.

خطوطی که در اینجا مورد بحث است بخشهای غیر تهی از P هستند که با اصل C_1 فصل قبل سازگارند.

رابطه: «a بین b و c واقع است» در P بترتیب زیرمعین است:

۱ـ a و b و c بیک استقامت (یعنی متعلق بیک خط) باشند.

۲ـ b و c به نیم خطهای متقابل به‌کناره a متعلق باشند.

اصل بخش.

D_2ـ بازاء هرخط D از P یک تقسیم بدو بخش غیر تهی در P وجود دارد که به‌نیم‌صفحه‌های

متقابل به کناره D موسوم‌اند بقسمیکه: اگر دو نقطه a و b بیک نیم‌صفحه متعلق باشند هیچ نقطه‌ای از D بین a و b وجود ندارد.

اگر دو نقطه a و b به نیم صفحه‌های متقابل تعلق داشته باشند یک نقطه از D بین a و b وجود دارد.

کناره D-ی دونیم صفحه متقابل بهیچ کدام از آنها تعلق ندارد. اگر این دونیم صفحه را با P_D و P'_D نمایش دهیم. داریم:

$$P_D \cup P'_D = P - \{D\} \qquad \text{و} \qquad P_D \cap P'_D = \varnothing$$

از آنجا نتیجه میشود که اگر دو خط D و Δ در o یکدیگر را قطع کنند نیمخطهای متقابل D_o و D'_o در نیم صفحه‌های متقابل به کناره Δ قرار دارند.

زاویه‌هاـ تعریف قبلی (IV، فصل ۴، ۳) را یادآوری کنیم: یک زاویه عبارت از فصل مشترک دو نیم صفحه‌ای است که کناره‌های آنها حد اقل دارای یک نقطه مشترک باشند.

در حالتی که در کناره D و Δ متمایزاند، این فصل مشترک با دونیم خط به مبدأ o-ی D_o و Δ_o که اضلاع زاویه نامیده میشوند محصور است. نقطه o رأس زاویه است مینویسیم: زاویه (D_o, Δ_o) هردو ضلع یک نقش بازی میکنند.

گروه جابجاپذیر دوران‌های به مرکز o.

بهر نقطه o از صفحه P یک مجموعه $\mathcal{R}_o$ تبدیل‌های P را همراه میکنیم که «دورانهای به مرکز o» نامیده میشوند و با دستگاه اصلهای زیر سازگارند:

D_3ــ دورانهای بمرکز o یک زیر گروه جابجاپذیر از گروه مبادله‌های صفحه را تشکیل میدهند.

D_4ــ بازاء هر زوج D_o و D'_o دو خط به مبدأ o، یک دوران $\mathcal{R}_o$ یکتا وجود دارد که D_o را به D'_o تبدیل میکند.

D_5ــ رابطه «a بین b و c واقع است» در دوران تغییرناپذیر است.

از D_5 نتیجه میشود که دوران، یک خط را بیک خط و دو نیم‌خط متقابل را بدو نیم‌خط متقابل تبدیل مینماید.

یک دوران، همچنین، یک نیم صفحه را بیک نیم صفحه و دو نیم صفحه متقابل را بدو نیم صفحه متقابل تبدیل مینماید.

و نیز از آن نتیجه میشود که دوران یک زاویه را بیک زاویه تبدیل میکند: در واقع چون دوران یک تناظر دوسوئی است (اصل D_3)، فصل مشترک دو بخش P به فصل مشترک

تبدیل شده‌های این دو بخش تبدیل میگردد.[1]

ازاین به‌بعد، درصفحه P، یک بار برای همیشه یک نقطه o انتخاب میکنیم. نیم‌خط‌هائی که در نظر میگیریم بـه مبدأ o خواهند بـود و بدین جهت در نمایش این نیم خطها از اندیس صرفه‌جوئی میکنیم.

برمبنای اصلهائی که بیان کردیم میتوان تساوی دوزاویه برأس o را تعریف کرد ومجموعه Aـی این زاویه‌ها را به طبقات هم‌ارزی تقسیم نمود.

مجدداً به بحثی بر گشته‌ایم که قبلاً انجام‌یافته است (IV، فصل۴). A یک گروه محدود است اکنون اصلهای B'_2 و B'_3 و اصل نیمسازی B_4 و اصل فقدان خلل B_5 را اضافه میکنیم تا یک نیم‌گروه محدود کامل A بدست آید. میدانیم که در این صورت A با یک فاصله $[o, a[$ گنجیده در R^+ (برای محدودیت جمع اعداد حقیقی در این فاصله) یک شکل است.

زاویه‌های جهت‌دار:

تعریف- زاویه جهت‌دار زاویـه‌ای است که دو ضلع آن یک زوج مرتب دو نیم خطهم مبدأ را تشکیل میدهند.

اگر D_o ضلع اول (یا ضلع مبدأ) و D'_o ضلع دوم (یا ضلع منتها) باشد مینویسیم: زاویه جهت‌دار: $(\widehat{D_o, D'_o})$.

همانطور که قبلاً اشاره شد اندیس o را حذف میکنیم.

دو زاویه جهت‌دار $(\widehat{D, D'})$ و $(\widehat{\Delta, \Delta'})$ متساویند اگر دورانی‌که D را روی D' می‌نگارد Δ را روی Δ' به‌نگارد. در این صورت مینویسیم:

$$(\widehat{D, D'}) = (\widehat{\Delta, \Delta'})$$

یک رابطه هم‌ارزی در مجموعه زاویه‌های جهت دار بدست میاید کـه بیک تقسیم‌بندی مجموعه به طبقه‌های هم‌ارز تحقق میبخشد.

مجموعه این طبقه‌ها را با $\mathcal{A}$ و هرطبقه را با یک حرفی که بالای آن یک پیکان منحنی قرار دارد نمایش میدهیم:

$$\overset{\frown}{x} \in \mathcal{A}$$

به‌طبقه $\overset{\frown}{x}$ که با $(\widehat{D, D'})$ نمایش داده شده است یک طبقه زاویه غیر جهت‌دار (D, D')

۱- بطور کلی اگر A و B دو مجموعه و f یك تابع باشد داریم:

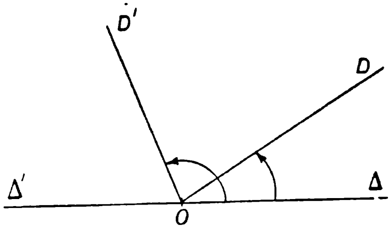
$$f(A \cap B) \subset [f(A) \cap f(B)]$$

اگر f دو سوئی باشد در اینصورت:

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

نظیر است که با x (بدون پیکان) نمایش میدهیم و «مقدار مطلق $\widehat{x}$» مینامیم از هر طبقه $\widehat{x}$ یک نماینده یکتا وجود دارد کـه دارای یک ضلع مبدأ Δ است و یک بـار بـرای همیشه انتخاب میشود.

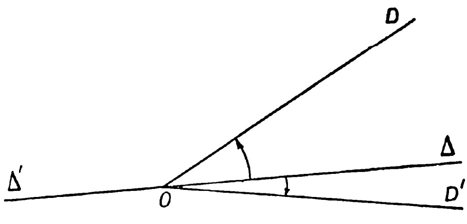
بعکس، بهر نیم خط D یک طبقه $\widehat{x}$ یکتا از $\mathcal{A}$ نظیر است که با $(\Delta,\widehat{}D)$ نمایش داده میشود (باستثنای آنچه به نیم خط Δ' متقابل Δ مربوط است که در ایـن صورت ابهام وجـود دارد).



$(\Delta,\widehat{}D)$ و $(\Delta,\widehat{}D')$ همجهت‌اند

شکل ۱

نیم صفحه‌های متقابل P_1 و P_2 را که کناره مشترک آنها حامل Δ است دخالت بـدهیم و تعریف‌های زیر را بیان کنیم (شکلهای ۱ و۲).



$(\Delta,\widehat{}D)$ و $(\Delta,\ D')$ مختلف‌الجهت‌اند

شکل ۲

دو جزء $\widehat{x}$ و $\widehat{y}$ از $\mathcal{A}$ «هم جهت»اند اگر نماینده آنها به ضلع اول Δ هـردو بیک نیم صفحه P_1 یا P_2 تعلق داشته باشد. آنها «مختلف‌الجهت» هستند. اگر این نماینده‌ها بترتیب به P_1 و P_2 متعلق باشند.

ازآنجا نتیجه میشود که دوطبقه متمایز زاویه‌های نیم‌صفحه وجود دارد: یکی با نیم‌صفحه P_1 نمایش داده میشود، مینویسیم:

$$(\widehat{\Delta, \Delta'})_{P_1}$$

دیگری با نیم صفحه P_2 نمایش داده میشود، مینویسیم:

$$(\widehat{\Delta, \Delta'})_{P_2}$$

در این شرایط به‌هر نیم خط متمایز از Δ' یک جزء $\hat{x}$ یکتا از $\mathcal{A}$ نظیر است ولی به D' دو جزء متمایز از $\mathcal{A}$ نظیر است.

تناظر دوسوئی بین $\mathcal{A}$ و مجموعه نیم خطهای P به مبدأ o وجود ندارد.

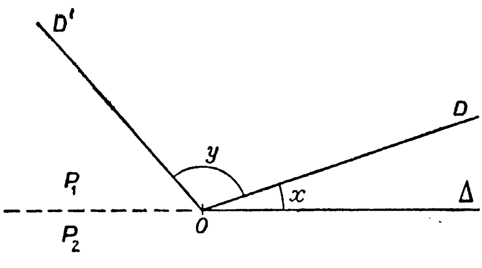
رابطه «هم‌جهت بودن» یک رابطه هم‌ارزی در $\mathcal{A}$ است و این مجموعه را بدو طبقه تقسیم مینماید.

تعریف- یک صفحه را جهت‌دار مینامند اگر بهر یک از طبقات آن یک علامت ممیزه نسبت داده شود آنها را با $\mathcal{A}^+$ و $\mathcal{A}^-$ نمایش میدهند.

هرکدام از این طبقات در تناظر دوسوئی با مجموعه $\mathcal{A}$ طبقه‌های زاویه‌های غیر جهت‌دار قرار دارد.

جمع طبقه‌های زوایای جهت‌دار

۱) ابتدا دو طبقه زوایای غیر جهت‌دار x و y را در نظر میگیریم که مجموع $x + y$ آنها وجود دارد اگر x و y (شکل ۳) با دو زاویه مجاور (Δ, D) و (D, D') نمایش داده



شکل ۳

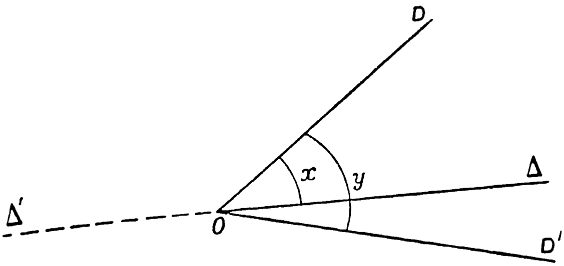
شوند میدانیم که این مجموع با زاویه (Δ, D') نمایش داده میشود، D و D' بیک نیم صفحه به کناره Δ تعلق دارند.

پس، زاویه‌های جهت‌دار $(\widehat{\Delta, D})$ و $(\widehat{D, D'})$ و $(\widehat{\Delta, D'})$ هم‌جهت هستند و فرض

میکنیم بنا به تعریف:

$$(\widehat{\Delta, D}) + (\widehat{D, D'}) = (\widehat{\Delta, D'})$$

۲) حال دو طبقه زاویه‌های غیر جهت‌دار x و y غیر مشخص را در نظر میگیریم (شکل ۴) آنها را با زاویه‌های (Δ, D) و (D, D') نمایش میدهیم که دارای یک ضلع مشترک بوده و مجاور نیستند (زاویه بزرگتر زاویه کوچکتر را میپوشاند) تفاضل آنها همواره وجود دارد و با زاویه (Δ, D') نمایش داده میشود.



شکل ۴

در این حالت، زاویه‌های جهت‌دار $(\widehat{\Delta, D'})$ و $(\widehat{D, D'})$ مختلف‌الجهت هستند و زاویه $(\widehat{\Delta, D'})$ جهت زاویه‌ای را دارد که از لحاظ قدر مطلق بزرگتر است. بنا به تعریف فرض میکنیم:

$$(\widehat{\Delta, D}) + (\widehat{D, D'}) = (\widehat{\Delta, D'})$$

تعریف جمع در $\mathcal{A}$.

هرگاه $\widehat{x}$ با زاویه جهت‌دار $(\widehat{\Delta, D})$ نمایش داده شود برای نمایش $\widehat{y}$ زاویه جهت‌داری از این طبقه اختیار کنیم که ضلع اول آن D باشد. فرض‌کنیم $(\widehat{D, D'})$؛ مجموع $\widehat{x} + \widehat{y}$ جز در یک حالت با زاویه $(\widehat{\Delta, D'})$ نمایش داده میشود، آنهم حالتی است که $\widehat{x}$ و $\widehat{y}$ هم‌جهت باشند و $x + y$ وجود نداشته باشد.

اگر هردو شرط حالت استثنائی باهم تحقق یابند مجموع $\widehat{x} + \widehat{y}$ وجود ندارد. مجموعه $\mathcal{A}$ مجهز باین قانون، یک گروه محدود کامل است (این گروه شبه ارشمیدسی است و محدود است به سبب اینکه جمع همواره در آن معین نیست).

لازم بیادآوری است که زاویه‌های نیم‌صفحه مثبت و منفی $\widehat{g}$ و $\widehat{g}$ — مانند دوجزء متمایز

در نظر گرفته میشوند. اینها بترتیب بزرگترین جزء و کوچکترین جزء $\mathscr{A}$ میباشند.

اندازه زاویه‌های جهت‌دار.

تعریف- یک زاویه جهت‌دار واحدی عبارت از یک جزء غیر صفر $\widehat{u}$ از $\mathscr{A}$ است که مقدار مطلق u-ی آن واحد زاویه را و جهت آن جهت $+$ در صفحه را معین میکند.

میدانیم (IV، فصل ۴) که هرگاه واحد زاویه انتخاب شده باشد مجموعه طبقه‌های زاویه‌های غیر جهت‌دار با فاصله $]o, a] \subset R^+$ در تناظر دوسوئی است، a اندازه زاویه مستوی است.

مجموعه $\mathscr{A}^+$ طبقه‌های زوایای جهت‌دار هم‌جهت با $\widehat{u}$ با $]o, a]$ در تناظر دوسوئی است.

مجموعه $\mathscr{A}^-$ طبقه‌های زوایای جهت‌دار در جهت مخالف نیز همانطور است و آنهم با فاصله $]-a, o] \subset R^-$ در تناظر دوسوئی قرار داده میشود.

مجموعه:

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}^+ \cup \mathscr{A}^-$$

بدین ترتیب در تناظر دو سوئی با فاصله $]-a, a] \subset R$ قرار دارد.

عدد حقیقی که بدین ترتیب همراه هر جزء $\widehat{x}$ از $\mathscr{A}$ میشود «اندازه $\widehat{x}$» نامیده میشود و آنرا با $\mu(\widehat{x})$ نمایش میدهیم.

به سبب تعریف جمع دو جزء $\widehat{x}$ و $\widehat{y}$ از $\mathscr{A}$ و با توجه به خاصیت اساسی اندازه زاویه‌های غیر جهت‌دار تابع $\widehat{x} \to \mu(\widehat{x})$ یک یک شکلی بازاء محدودیت جمع اعداد حقیقی در فاصله $]-a, a]$ است.

$$(x + y \text{ وجود دارد}) \Rightarrow \mu(\widehat{x} + \widehat{y}) = \mu(\widehat{x}) + \mu(\widehat{y})$$

گسترش جمع در $\mathscr{A}$.

جمعی که ما برای اجزاء $\mathscr{A}$ تعریف کردیم دارای یک نقص بزرگ است: این جمع بازاء بعضی زوجهای $\widehat{x}$ و $\widehat{y}$ معین نیست.

آیا ممکن است به هر زوج $\widehat{x}$ و $\widehat{y}$ از $\mathscr{A}$ یک جزء از $\mathscr{A}$ را که با $\widehat{x} + \widehat{y}$ نشان داده میشود همراه کرد که با جزئی که قبلاً معین کردیم منطبق باشد (وقتی که $\widehat{x} + \widehat{y}$ وجود دارد)؟.

جواب این سؤال بلافاصله با تعریفی که تا حال بعمل آوردیم القا میشود: کافی است

محدودیتی را که در آن وجود دارد رفع کنیم:

$(\Delta, \widehat{D})$، $\widehat{x}$ را و $(D, \widehat{D'})$، $\widehat{y}$ را نمایش میدهد. $\widehat{x} + \widehat{y}$ را مانند جزء نموده شده با $(D, \widehat{D'})$ معین میکنیم (هرچه باشد $\widehat{x}$ و $\widehat{y}$).

بطور جبری، این عبارت از گسترش تعریف جمع گروه محدود $\mathcal{A}$ بطریق زیــر است: اگر $x + y$ وجود نداشته باشد، در این صورت $(g - x) + (g - y)$ وجود دارد (IV، فصل ۴، P_2)

در این حالت فرض میکنیم:

$$\widehat{x} + \widehat{y} = -[(\widehat{g} - \widehat{x}) + (\widehat{g} - \widehat{y})]$$

اگر $\widehat{x}$ و $\widehat{y}$ مثبت باشند

$$\widehat{x} + \widehat{y} = (\widehat{g} - \widehat{x}) + (\widehat{g} - \widehat{y})$$

اگر $\widehat{x}$ و $\widehat{y}$ منفی باشند.

در این حالت مجموع دو جزء همعلامت یک جزء با علامت مخالف است.

حال که جمع (هرچه باشد $\widehat{x}$ و $\widehat{y}$) معین شده است، بررسی کنیم آیا این عمل باتناقض برخورد نمیکند؟

$\widehat{x}$ و $\widehat{y}$ را مثبت فرض میکنیم بنابه تعریف داریم:

$$\widehat{x} + \widehat{y} = -[(\widehat{g} - \widehat{x}) + (\widehat{g} - \widehat{y})]$$

بنابه شرکت‌پذیری و جابجاپذیری نتیجه میشود:

$$\widehat{x} + \widehat{y} = -(\widehat{g} + \widehat{g}) + (\widehat{x} + \widehat{y})$$

از آنجا:

$$\widehat{g} + \widehat{g} = \widehat{0}$$

یعنی:

$$\widehat{g} = -\widehat{g}$$

پس لازم است که اجزاء $\widehat{g}$ و $\widehat{g}-$ همان بشوند تا عمل جدید دارای معنی باشد (اگر $\widehat{x}$ و $\widehat{y}$ هردو را منفی فرض میکردیم بازهم بهمین نتیجه میرسیدیم) پس این دو جزء را همان میکنیم، مجموعه $\mathcal{A}$ کاملاً عین آن مجموعه نخواهد بود.

مجموعه $\mathcal{A}$ را که درآنجا اجزاء $\widehat{g}$ و $\widehat{g}-$ همان هستند $\mathcal{A}'$ مینامیم. ابهامی که درمورد زوایای نیم‌صفحه جهت‌دار با آن مواجه شدیم دیگر در $\mathcal{A}'$ وجود نـدارد. جزء $\widehat{g}$ (یا $\widehat{g}$ —) از $\mathcal{A}$ با $(\Delta, \widehat{\Delta'})$ نمایش داده میشود Δ و Δ' دو نیم خط متقابل میباشند.

مجموعه $\mathcal{A}'$ با مجموعه نیم خطهای به مبدأ O و در نتیجه با مجموعه $\mathcal{R}_0$ دوران‌های بـه

مرکز o در تناظر دوسوئی است.

تعریف جمع در $\mathcal{A}'$.

به هر زوج $\widehat{x}$ و $\widehat{y}$ دو جزء $\mathcal{A}'$ یک جزء از $\mathcal{A}'$ را همراه کنیم که بـه مجموع $\widehat{x}$ و $\widehat{y}$ موسوم است و با $\widehat{x} + \widehat{y}$ نموده میشود و بترتیب زیر معین است:
هرگاه $(\Delta, \widehat{D})$ یک نماینده $\widehat{x}$ باشد $\widehat{y}$ را با یک زاویه جهت‌دار نمایش دهیم که ضلع اول آن D است، فـرض کنیم ایـن زاویـه $(D, \widehat{D'})$ است مجموع $\widehat{x} + \widehat{y}$ در این صورت با $(\Delta, \widehat{D'})$ نمایش داده میشود.
این جمع نظیر قانون ترکیب دوران‌ها در $\mathcal{R}_o$ است و در $\mathcal{A}'$ یک بنیان گروه جابجاپذیری معین میکند.

تبصره- بنیان‌های $\mathcal{A}$ و $\mathcal{A}'$ کلاً متفاوت‌اند:
۱) رابطه ترتیب کلی که در $\mathcal{A}$ وجود دارد در $\mathcal{A}'$ دیگر وجـود نـدارد زیرا بزرگترین جزء $\widehat{g}$ وکوچکترین جزء $\widehat{g}-$ از $\mathcal{A}$ در $\mathcal{A}'$ همان گردیده‌اند. بنیان ترتیب در $\mathcal{A}'$ دیگروجود ندارد.
۲) بنیان‌هــای جمعی $\mathcal{A}$ و $\mathcal{A}'$ نیز باهم فرق دارنـد چونکه جمع در $\mathcal{A}$ همواره معین نیست در صورتیکه در $\mathcal{A}'$ همواره معین است.
$\mathcal{A}'$ یک گروه محدود است در صورتیکه $\mathcal{A}$ یک گروه یک شکل به‌گروه $\mathcal{R}_o$ دورانهای به مرکز o است.
مضربهای $n\widehat{x}$ جزء $\widehat{x}$ (هرچه باشد $n \in N$) در $\mathcal{A}'$ وجود دارند، چونکه جمع درهمه‌جا معین است.

گسترش مفهوم اندازه

اجزاء $\mathcal{A}$ بوسیله اعداد فاصله $[-a, a] \subset R$ اندازه‌گیری میشوند چون اجزاء $\mathcal{A}'$ به استثنای $\widehat{g}$ و $\widehat{g}-$ که در $\mathcal{A}'$ همان گردیده‌اند، همان اجزای $\mathcal{A}$ هستند. تابع $\widehat{x} \to \mu(\widehat{x})$ با دوسوئی $\mathcal{A}'$ را روی فاصله نیم‌باز $]-a, +a]$ می‌نگارد.
در $\mathcal{A}'$ بازهم داریم:

$$\mu(\widehat{u}) = ۱$$

ولی آیا بازاء جمع در $\mathcal{A}'$ بازهم خاصیت:

$$\mu(\widehat{x}+\widehat{y})=\mu(\widehat{x})+\mu(\widehat{y}) \tag{1}$$

را داریم؟

جواب منفی است، کافی است مثال زیر را اختیار کنیم:

$$\widehat{x}=\widehat{y}=\widehat{g}$$

تا ثابت شود که این تساوی همواره ممکن‌الوقوع نیست.

زیرا داریم:

$$\widehat{g}+\widehat{g}=\circ \qquad (\text{تعریف جمع در } \mathscr{A})$$

پس داریم:

$$\mu(g+g)=\circ$$

از طرف دیگر:

$$\mu(\widehat{g})+\mu(\widehat{g})=a+a=۲a$$

پس تساوی (۱) ممکن‌الوقوع نیست چونکه $\circ \neq ۲a$

مسئله‌ای که از حالا طرح میشود این است:

آیا ممکن است، مفهوم جمع را به بنیان جمعی $\mathscr{A}'$ بقسمی گسترش داد که خاصیت (۱) همواره صادق باشد؟

ابتدا شرایط لازم را که چنین اندازه‌ای باید باآنها سازگار باشد پیدا کنیم بازهم اعدادی را که به $\widehat{x}$ همراه میکنیم با $\mu(\widehat{x})$ نمایش میدهیم.

بنا بر آنچه گذشت قبلاً لازم است که $\circ$ و $۲a$ هردو مانند اندازه‌های یک جزء $\widehat{\circ}$ در نظر گرفته شوند.

میتوان جلوتر رفت و اعداد دیگری پیدا کرد که باید مانند اندازه‌های $\widehat{\circ}$ در نظر گرفته شود.

از تساوی (۱) شروع میکنیم ــ هرچه باشد $\widehat{x}\in\mathscr{A}'$ باید داشته باشیم:

$$\mu(\widehat{x}+\widehat{x})=\mu(\widehat{x})+\mu(\widehat{x})$$

یعنی:

$$\mu(۲\widehat{x})=۲\mu(\widehat{x})$$

و با روش بازگشتی هرچه باشد $n\in N$:

$$\mu(n\widehat{x})=n\mu(\widehat{x})$$

از طرف دیگر بنا به تعریف خود اندازه‌های نسبی، داریم:

$$\mu(-\widehat{x})=-\mu(\widehat{x})$$

بنابراین اگر مضرب $(-\widehat{x})$ n را بصورت $(-n)\widehat{x}$ بنویسیم، باید همچنین داشته باشیم:

$$\mu(-n\widehat{x}) = -n\mu(\widehat{x})$$

بطور خلاصه (هرچه باشد $k \in Z$) باید داشته باشیم:

$$\mu(k\widehat{x}) = k\mu(\widehat{x})$$

بعد از این چون ۰ و $۲a$ باید هردو مانند اندازه‌های $\widehat{\circ}$ در نظر گرفته شوند تساوی قبلی که در $\widehat{\circ} = \widehat{x}$ مورد استفاده قرار گیرد نشان میدهد که هرچه باشد $k \in Z$ هر عدد $۲ka$ باید مانند اندازه $\widehat{\circ}$ در نظر گرفته شود. پس جمیع اعداد مجموعه:

$$\{\cdots, -۲na, \cdots, -۴a, -۲a, ۰, ۲a, ۴a, \cdots, na, \cdots\} \qquad (n \in N)$$

را مانند اندازه $\widehat{\circ}$ باید در نظر گرفت.

و بالاخره چون هرچه باشد $\widehat{x} \in \mathscr{A}'$:

$$\widehat{x} = \widehat{x} + \widehat{\circ}$$

است باید داشته باشیم:

$$\mu(\widehat{x}) = \mu(\widehat{x}) + \mu(\widehat{\circ})$$

بنابراین اگر b عددی از فاصله $]-a, a]$ باشد که میتوانیم نظیر $\widehat{x}$ قرار دهیم لازمست که یکی از اعداد غیر مشخص مجموعه:

$$b + ۲ka \qquad (k \in Z)$$

مانند اندازه $\widehat{x}$ در نظر گرفته شود.

پس با همراه کردن یک مجموعه اعداد حقیقی (بقسمیکه اختلاف ما بین دوتا غیرمشخص از آنها مضرب نسبی $۲a$ است) به هر جزء $\widehat{x}$ از $\mathscr{A}'$ به‌گسترش مفهوم اندازه میرسیم. بدین جهت که اکنون طبقات اعداد حقیقی مدولو (modulo) $۲a$ را مورد بررسی قرار میدهیم.

اعداد حقیقی هم‌نهشت مدولو $۲a$.

تعریف- هرگاه a یک عدد حقیقی مفروض غیر صفر باشد، میگویند که دو عدد حقیقی b و c هم‌نهشت مدولو $۲a$ هستند اگر تفاضل آنها مضرب نسبی از $۲a$ باشد مینویسند:

$$b \equiv c \qquad (\text{mod } ۲a)$$

مجموعه اعداد تحقیقی $۲ka$ با $k \in Z$ را $۲aZ$ مینامیم. بنا به تعریف داریم:

$$(b \equiv c \qquad (\text{mod } ۲a)) \iff (b-c) \in ۲aZ$$

این رابطه در R مانند رابطه هم‌نهشتی که در (II فصل ۶) بررسی نمودیم معین است

این یک رابطه هم ارزی است، در R یک تقسیم بندی به طبقات هم ارزی انجام میدهد که به «طبقات هم نهشتی مدولو $۲a$» موسوم‌اند.

مجموعه این طبقات را بصورت $E_{۲a}$ مینویسیم. هر طبقه در فاصله $]-a, a]$ یک نماینده و فقط یکی دارد و $E_{۲a}$ با این فاصله در تناظر دوسوئی است.

طبقه عدد b را با $\mathcal{C}(b)$ نمایش میدهیم. بدین ترتیب داریم:

$$\mathcal{C}(b) = \{\cdots, b - ۲na, \cdots, b - ۲a, b, b + ۲a, \cdots, b + ۲na, \cdots\}$$

با $n \in N$

همانطور که در N بود در $E_{۲a}$ یک جمع را با:

$$\mathcal{C}(b) + \mathcal{C}(c) = \mathcal{C}(b + c)$$

معین میکنند. این تعریف به $E_{۲a}$ یک بنیان گروه جابجا پذیری میبخشد.

تعریف یک اندازه جدید اجزای $\mathcal{A}$.

از این پس علامت $\mu(\widehat{x})$ را برای تابعی که تا حال میشناسیم حفظ میکنیم که با دو سوئی $\mathcal{A}'$ را روی $]-a, a]$ می‌نگارد پس $\mu(\widehat{x})$ یک عدد یکتا از این فاصله را نمایش میدهد.

میدانیم که این تابع بازاء جمع یک هم شکلی نیست. بررسی که بعمل آوردیم به تعیین یک تابع‌جدید در $\mathcal{A}'$ منجرمیشود که مقادیرش رانه در R بلکه در $E_{۲a}$ اختیار مینماید و بطوریکه خواهیم دید در (۱) صادق است.

تعریف - به هرجزء $\widehat{x}$ از $\mathcal{A}'$ طبقه $\mathcal{C}(b)$ عدد b را که با $\mu(\widehat{x}) = b$ معین است همراه کنیم.

بدین ترتیب یک تابع جدید در $\mathcal{A}'$ به نگارهای واقع در $E_{۲a}$ معین میشود این تابع را با:

$$\widehat{x} \rightarrow \overline{\mu}(\widehat{x})$$

نمایش میدهیم:

بالای حرف μ یک خط میکشیم:

$$\overline{\mu}(\widehat{x}) = \mathcal{C}(b)$$

میخوانیم: «اندازهٔ $\widehat{x}$ مساوی طبقه b»

بنا به تعریف این تابع داریم:

$$\overline{\mu}(\widehat{u}) = \mathcal{C}(۱)$$

حال خاصیت اصلی زیر را اثبات کنیم:

$\boxed{P_1}$
$$\bar{\mu}(\widehat{x}+\widehat{y})=\bar{\mu}(\widehat{x})+\bar{\mu}(\widehat{y})$$

اثبات:

۱) این رابطه وقتیکه $\widehat{y}+\widehat{x}$ در $\mathcal{A}$ وجود دارد بدیهی است زیرا در این حالت دیدیم که:

$$(\mu(\widehat{x})+\mu(\widehat{y})=\mu(\widehat{x}+\widehat{y})) \Leftarrow (\text{در } \mathcal{A} \text{ وجود دارد } \widehat{x}+\widehat{y})$$

خاصیت P_1 در این صورت درست است چونکه بازاء نماینده‌های طبقاتی که مورد نظر میباشند درست است.

۲) اگر $\widehat{y}+\widehat{x}$ در $\mathcal{A}$ وجود نداشته باشد در $\mathcal{A}'$ داریم:

$$\widehat{x}+\widehat{y}=-[(\widehat{g}-\widehat{x})+(\widehat{g}-\widehat{y})]$$

اگر $\widehat{x}$ و $\widehat{y}$ مثبت باشند و:

$$\widehat{x}+\widehat{y}=(\widehat{g}-\widehat{x})+(\widehat{g}-\widehat{y})$$

اگر $\widehat{x}$ و $\widehat{y}$ منفی باشند.

حالت اول را در نظر میگیریم: $\widehat{x}$ و $\widehat{y}$ مثبت (استدلال مشابه برای حالت دوم) برای تابع $\widehat{x}\to\mu(\widehat{x})$ و $\mathcal{A}$ روی $]-a,a[$ داریم:

$$\mu(\widehat{x}+\widehat{y})=-\mu(\widehat{g}-\widehat{x})-\mu(\widehat{g}-\widehat{y})$$

در R عمل میکنیم:

$$\begin{aligned}\mu(\widehat{x}+\widehat{y})&=-\mu(\widehat{g})+\mu(\widehat{x})-\mu(\widehat{g})+\mu(\widehat{y})\\&=\mu(\widehat{x})+\mu(\widehat{y})-2a\end{aligned}$$

چون $\widehat{x}$ و $\widehat{y}$ مثبت‌اند:

$$\mu(\widehat{x}+\widehat{y})=\mu(\widehat{x})+\mu(\widehat{y})-2a$$

بنا بر تعریف اندازه جدید از آنجا نتیجه میشود:

$$\bar{\mu}(\widehat{x}+\widehat{y})=\bar{\mu}(\widehat{x})+\bar{\mu}(\widehat{y})$$

پس خاصیت P_2 ثابت است و از آنجا قضیه زیر نتیجه میشود:

قضیه ـ گروه دورانهای بمرکز o با گروه جمعی طبقات اعداد حقیقی مدولو $2a$ یک شکل است.

فصل چهارم

هندسهٔ اقلیدسی مسطحه

در این فصل اکسیوماتیک صفحه را که در کادر این کتاب نمیتوانند وارد شود کنار میگذاریم.

خاطر نشان کنیم که صفحه یک زیر گروه از گروه مبادله‌های P مجهز است که «گروه تغییر مکان‌ها روی P» نامیده میشود.

این تغییر مکانها دو نوع‌اند.

دورانها - بهر نقطه o از P گروه دورانهای $\mathcal{R}_o$ همراه است که درفصل قبل مورد بررسی قرار گرفت.

انتقالها - که مجموعه آنها یک زیر گروه جابجا پذیر از گروه تغییر مکانهای صفحه است.

بخاطر اصل اقلیدس مخصوصاً (از یک نقطه فقط یک خط موازی خط مفروض رسم میشود) اگر یک خط D و دو نقطه a و b از خط D را در نظر بگیریم، انتقال $\mathcal{T}$ که a را روی b می‌نگارد با انتقال روی D که در فصل قبل در هندسه یک بعدی بررسی کردیم منطبق است.

همین انتقال $\mathcal{T}$ هر خط D' موازی D را تغییرناپذیر میگذارد و محدودیت $\mathcal{T}$ نسبت به D' باز هم با انتقال روی D' بررسی شده در فصل قبل منطبق است.

۱- فضای $\mathcal{E}$ بردارهای صفحه.

پاره خط جهت دار $\overrightarrow{ab}$ و همچنین هم سنگی:

$$\overrightarrow{ab} \equiv \overrightarrow{cd}$$

را مانند فصل قبل معین میکنیم.

یک رابطه هم‌ارزی بدست می‌آید که در مجموعه پاره خطهای جهت دار P بیک تقسیم‌بندی طبقات هم‌ارز تحقق میبخشد. هر طبقه یک بردار نامیده میشود که با $\vec{x}$ نمایش میدهیم مجموعه این بردارها را $\mathcal{E}$ مینامیم.

هر بردار $\vec{x}$ همان انتقالی است که ابتدای a را روی انتهای b یک نماینده‌ی $\overrightarrow{ab}$ $\vec{x}$ می‌نگارد.

زیرفضای $\mathcal{E}_D$ بردارهای $\mathcal{E}$ موازی D.

میگویند که بردار $\vec{x}$ از $\mathcal{E}$ موازی D است اگر نماینده‌ی $\overrightarrow{ab}$ $\vec{x}$ یک خط ab موازی D را معین کند.

مجموعه $\mathcal{E}_D$ بردارهای $\mathcal{E}$ موازی D یک زیر گروه $\mathcal{E}$ است که با فضای برداری بررسی شده در هندسه یک بعدی روی D یک شکل است.

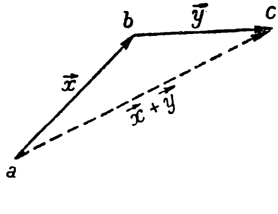
بیک بردار $\vec{x}$ از $\mathcal{E}$ یک زیر فضای $\mathcal{E}_D$ یکتا نظیر است بقسمیکه: $\vec{x} \in \mathcal{E}_D$.

تعریف جمع در $\mathcal{E}$.

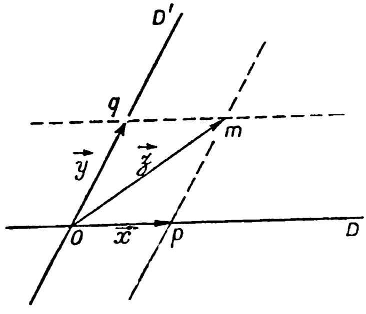
قانون تألیف انتقال‌ها که بزبان برداری بیان شود، قانون جمع بردارها را معین میکند.

به‌هر زوج مرتب بردارهای $\vec{x}$ و $\vec{y}$ از $\mathcal{E}$ یک بردار موسوم به مجموع $\vec{x}$ و $\vec{y}$ را همراه میکنیم که بصورت $\vec{x} + \vec{y}$ نوشته میشود و بترتیب زیر معین میگردد:

هرگاه $\overrightarrow{ab}$ نمایش $\vec{x}$ باشد $\vec{y}$ را با بردار $\overrightarrow{bc}$ به مبدأ b نمایش دهیم.



شکل ۱



شکل ۲

مجموع $\vec{x} + \vec{y}$ با $\overrightarrow{ac}$ نمایش داده میشود (شکل ۱)

این تعریف در $\mathcal{E}$ یک بنیان گروه جابجا پذیر (گروه انتقالها جابجا پذیر است) معین میکند.

قضیهٔ ۱- هرگاه دو خط متقاطع D و D' و بردار $\vec{z}$ مفروض باشند یک زوج یکتای بردارهای $\vec{x}$ و $\vec{y}$ وجود دارد بطوریکه:

$$\vec{x} \in \mathcal{E}_D, \qquad \vec{y} \in \mathcal{E}_{D'} \qquad \vec{x} + \vec{y} = \vec{z}$$

این، قضیه تجزیه هر بردار $\vec{z}$ صفحه به دو بردار $\vec{x}$ و $\vec{y}$ است که بترتیب موازی D و D' میباشند.

هرگاه o فصل مشترک D و D' باشد (شکل ۲) یک نماینده $\overrightarrow{om}$ بردار $\vec{z}$ و فقط یکی به مبدأ o وجود دارد. موازی هائی که از m به D و D' رسم میشوند فقط یکی هستند و D و D' را بترتیب در p و q قطع مینمایند. $\vec{x}$ با $\overrightarrow{op}$ و $\vec{y}$ با $\overrightarrow{oq}$ نمایش داده میشود.

تعریف - $\vec{x}$ را تصویر $\vec{z}$ روی D بموازات D' مینامند. تصویر روی D یک نگاشت $\mathcal{E}$ روی $\mathcal{E}_D$ است.

آنرا بصورت $\vec{x} \longrightarrow \vec{z}$ خواهیم نوشت.

حال دو بردار $\vec{z}$ و $\vec{z'}$ از $\mathcal{E}$ را در نظر میگیریم.

بنا به قضیه ۱ داریم:

$$\vec{z} = \vec{x} + \vec{y} \qquad \text{و} \qquad \vec{z'} = \vec{x'} + \vec{y'}$$

با:

$$\vec{x}, \vec{x'} \in \mathcal{E}_D \qquad \text{و} \qquad \vec{y}, \vec{y'} \in \mathcal{E}_{D'}$$

حال در گروه جابجا پذیر $\mathcal{E}$ عمل کنیم:

$$\vec{z} + \vec{z'} = (\vec{x} + \vec{y}) + (\vec{x'} + \vec{y'})$$

بنا به جابجا پذیری و شرکت پذیری:

$$\vec{z} + \vec{z'} = (\vec{x} + \vec{x'}) + (\vec{y} + \vec{y'})$$

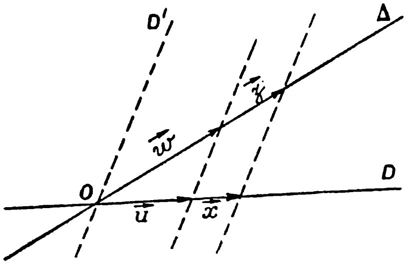
ولی:

$$\vec{x} + \vec{x'} \in \mathcal{E}_D \qquad \text{و} \qquad \vec{y} + \vec{y'} \in \mathcal{E}_{D'}$$

چونکه $\mathcal{E}_D$ و $\mathcal{E}_{D'}$ زیر فضاهای برداری میباشند. پس داریم:

قضیهٔ ۲- اگر $\vec{x}$ و $\vec{x}'$ تصاویر $\vec{z}$ و $\vec{z}'$ روی D باشند در این صورت $\vec{x} + \vec{x}'$ تصویر $\vec{z} + \vec{z}'$ روی D است. این، قضیه تصاویر است: تصویر یک درون شکلی $\mathcal{E}$ روی $\mathcal{E}_D$ بازاء جمع است (I، فصل ۳، ۷)

نتیجه - به بردارهای $\vec{z}$ موازی یک خط غیر مشخص Δ یعنی به زیر فضای برداری $\mathcal{E}_\Delta$ اکتفا کنیم (شکل ۳)



شکل ۳

هرگاه $z \in \mathcal{E}_\Delta$ باشد تصویر $\vec{z} \to \vec{x}$ بموازات D' عبارت ازنگاشت دوسوئی $\mathcal{E}_\Delta$ روی $\mathcal{E}_D$ است. بنا به قضیه ۲ این تابع یک یک شکلی بازاء جمع است.

حال روی Δ یک بردار واحدی $\vec{w}$ و روی D یک بردار واحدی $\vec{u}$ که تصویر $\vec{w}$ روی D انتخاب میکنیم،

میدانیم که مشخصات اندازه روی $\mathcal{E}_D$ و $\mathcal{E}_\Delta$ عبارتند از:

$$\mu_u(\vec{x} + \vec{x}') = \mu_u(\vec{x}) + \mu_u(\vec{x}') \quad \text{و} \quad \mu_u(\vec{u}) = ۱$$

$$\mu_w(\vec{z} + \vec{z}') = \mu_w(\vec{z}) + \mu_w(\vec{z}') \quad \text{و} \quad \mu_w(\vec{w}) = ۱$$

نگاشت دو سوئی $\vec{x} \rightleftarrows \vec{z}$ بردارهای واحدی را تعویض مینماید و یک یک شکلی بازاء جمع است. پس در R داریم:

$$\mu_w(\vec{z}) = \mu_u(\vec{x})$$

میدانیم که:

$$\mu_w(\vec{z}) = \alpha \iff \vec{z} = \alpha\vec{w}$$

پس میتوانیم بگوئیم:

قضیه۳ـ هرگاه $\vec{z}$ و $\vec{w}$ متعلق به $\mathcal{E}_\Delta$ و a' و $\vec{x}$ و $\vec{u}$ تصاویر $\mathcal{E}_D$ باشند:

$$\vec{z} = \alpha\vec{w} \quad \text{موجب میشود} \quad \vec{x} = \alpha\vec{u}$$

این **قضیه تالس است.**

از این قضیه نتیجه میشود که $\mathcal{E}$ یک فضای برداری روی هیئت اعداد حقیقی است.

میدانیم که $\mathcal{E}$ یک گروه جابجا پذیر است. و از طرف دیگر میدانیم که بهر بردار $\vec{z}$ از $\mathcal{E}$ یک زیر فضای $\mathcal{E}_\Delta$ نظیر است که در آن عمل برونی $\alpha\vec{z}$ (هرچه باشد $\alpha \in R$) معین است.

بدین ترتیب هرچه باشند $\alpha \in R$ و $\vec{z} \in \mathcal{E}$ عمل برونی $\alpha\vec{z}$ معین میشود.

چون $\mathcal{E}_\Delta$ گروه ارشمیدس کامل است داریم:

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\vec{z} &= \alpha\vec{z} + \beta\vec{z} \\ \alpha(\beta\vec{z}) &= (\alpha\beta)\vec{z}\end{aligned} \qquad \alpha, \beta \in R \text{ و } \vec{z} \in \mathcal{E}_\Delta$$

میماند اثبات اینکه، هرچه باشند $\vec{z}$ و $\vec{z'}$ از $\mathcal{E}$ و $\alpha \in R$ داریم:

$$\alpha(\vec{z} + \vec{z'}) = \alpha\vec{z} + \alpha\vec{z'} \qquad (۱)$$

بنا به قضیه ۱ برای اثبات تساوی طرفین (۱) کافی است تساوی تصاویر آنها را روی D و تساوی تصاویر آنها را روی D' اثبات کنیم.

مثلاً تساوی تصاویر روی D را اثبات میکنیم. هرگاه $\vec{x}$ و $\vec{x'}$ تصاویر $\vec{z}$ و $\vec{z'}$ به ترتیب باشد قضیه ۲ را بکار میبریم:

$$(\vec{z} + \vec{z'}) \to (\vec{x} + \vec{x'})$$

بنا به قضیه ۳ داریم:

$$\alpha\vec{z} \to \alpha\vec{x}; \qquad \alpha\vec{z'} \to \alpha\vec{x'}; \qquad \alpha(\vec{z} + \vec{z'}) \to \alpha(\vec{x} + \vec{x'})$$

باز بنا به قضیه ۲:

$$(\alpha\vec{z} + \alpha\vec{z'}) \to (\alpha\vec{x} + \alpha\vec{x'})$$

ولی در زیر فضای برداری $\mathcal{E}_D$ داریم:

$$\alpha(\vec{x}+\vec{x}') = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{x}'$$

تصاویر طرفین (۱) روی D برابرند و تصاویر طرفین (۱) روی یک خط دیگر D' نیز بهمین ترتیب‌اند پس تساوی (۱) ثابت است.

بدین ترتیب محقق میشود که $\mathcal{E}$ یک فضای برداری روی هیئت R است.

قضیه ۱، در این صورت حاکی است که فضای برداری $\mathcal{E}$ دو بعدی است.

۲ـ حاصل ضرب عددی.

ابتدا تعریف زیر را بیان میکنیم:

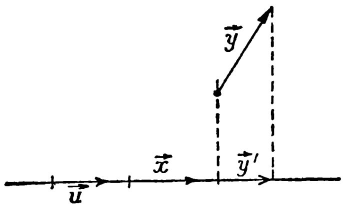
وقتی که D' عمود بر D است تصویر $\vec{x}$ بردار $\vec{z}$ روی D بموازات D' تصویر قائم $\vec{z}$ روی D نامیده میشود.

تعریف حاصل ضرب عددی (شکل ۴)

به‌هرزوج مرتب بردارهای $\vec{x}$ و $\vec{y}$ از $\mathcal{E}$ یک عدد حقیقی همراه میکنیم که به حاصل‌ضرب $\vec{x}$ در $\vec{y}$ موسوم است و بصورت $\vec{x}\vec{y}$ نوشته میشود و بترتیب زیر معین است: هرگاه D خط موازی $\vec{x} \neq \vec{o}$ و $\vec{u}$ بردار واحدی $\mathcal{E}_D$ و $\vec{y}'$ تصویر قائم $\vec{y}$ روی D باشد فرض میکنیم:

$$\vec{x}\,\vec{y} = \mu_u(\vec{x})\,\mu_u(\vec{y}')$$

اگر $\vec{x} = \vec{o}$ باشد در این صورت فرض میکنیم: $\vec{o}\,\vec{y} = \vec{o}$



شکل ۴

بلافاصله مشاهده میشود که حاصل ضرب عددی فقط در دو حالت برابر صفر است:

a) یکی از بردارهای $\vec{x}$ یا $\vec{y}$ برابر صفر باشد.

b) $\vec{x}$ و $\vec{y}$ متعامد باشند.

خواص

$\boxed{P_1}$ هرچه باشد $\alpha \in R$ و $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$ داریم:

$$(\alpha\vec{x})\,\vec{y} = \vec{x}\,(\alpha\vec{y}) = \alpha\,(\vec{x}\,\vec{y})$$

میدانیم که:

$$\mu\,(\alpha\vec{x}) = \alpha\mu\,(\vec{x})$$

پس بنا به تعریف حاصلضرب عددی داریم:

$$(\alpha\vec{x})\,\vec{y} = \alpha\,(\vec{x}\,\vec{y})$$

اگر $\vec{y}$ را با $\alpha\vec{y}$ جایگزین کنیم بنا به قضیه ۳، $\vec{y}'$ با $\alpha\vec{y}'$ و $\mu\,(\vec{y}')$ بـا $\alpha\mu\,(\vec{y}')$ جایـگزین خواهد شد.

پس داریم:

$$\vec{x}\,(\alpha\vec{y}) = \alpha\,(\vec{x}\,\vec{y})$$

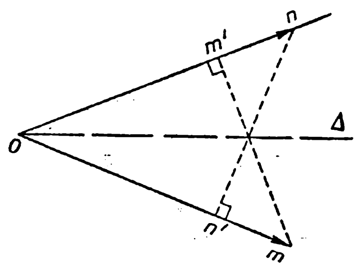
خاصیت ثابت است.

جابجاپذیری

$\boxed{P_2}$ هرچه بـاشد $\vec{x}$ و $\vec{y}$ داریم:

$$\vec{x}\,\vec{y} = \vec{y}\,\vec{x}$$

هرگاه D و D' بترتیب دو خط مـوازی $\vec{x}$ و $\vec{y}$ باشند (شکل۵) و هرگاه $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بترتیب



شکل ۵

دو بردار واحدی هم‌طول در $\mathcal{E}_D$ و $\mathcal{E}_{D'}$ باشند. (نماینده‌های $\overrightarrow{om}$ و $\overrightarrow{on}$ بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بترتیب در (شکل ۵) دو پاره خط متساوی‌اند). در این صورت داریم:

$$\vec{x} = \alpha\vec{u} \qquad \text{و} \qquad \vec{y} = \beta\vec{v} \qquad (\alpha, \beta \in R)$$

بنا به P_1:

$$\vec{x}\,\vec{y} = (\alpha\beta)\,\vec{u}\,\vec{v}$$
$$\vec{y}\,\vec{x} = (\alpha\beta)\,\vec{v}\,\vec{u}$$

پس کافی است ثابت کنیم:

$$\vec{u}\,\vec{v} = \vec{v}\,\vec{u}$$

ولی om و on نسبت به Δ نیمساز ($\overrightarrow{om}$ و $\overrightarrow{on}$) متقارن‌اند. تصاویر قائم $\overrightarrow{om'}$ و $\overrightarrow{on'}$ نیز متقارن‌اند. چون تقارن یک یک شکلی بین گروه‌های $\mathcal{E}_D$ و $\mathcal{E}_{D'}$ است، داریم:

$$\mu_u(\overrightarrow{on'}) = \mu_v(\overrightarrow{om'})$$

ولی بنا به تعریف، طرف اول برابر $\vec{u}\,\vec{v}$ و طرف دوم برابر $\vec{v}\,\vec{u}$ است. پس جابجا‌پذیری ثابت است.

توزیع‌پذیری نسبت به‌جمع.

$\boxed{P_3}$ هرچه باشند $\vec{x}$ و $\vec{y}$ و $\vec{z}$ داریم:

$$\vec{x}\,(\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x}\,\vec{y} + \vec{x}\,\vec{z}$$

هرگاه خط D موازی $\vec{x}$ باشد تصاویر قائم $\vec{y}$ و $\vec{z}$ را روی D بترتیب $\vec{y'}$ و $\vec{z'}$ می‌نامیم. جمیع اندازه‌ها که بکار میبریم در $\mathcal{E}_D$اند ($\vec{u}$ در $\mathcal{E}_D$ انتخاب شده و اندیس‌های مربوط را حذف میکنیم).

بنا به تعریف حاصل ضرب عددی داریم:

$$\vec{x}\,\vec{y} = \mu(\vec{x})\,\mu(\vec{y'})$$
$$\vec{x}\,\vec{z} = \mu(\vec{x})\,\mu(\vec{z'})$$

عضو به عضو جمع میکنیم و بنا به توزیع‌پذیری در R:

$$\vec{x}\,\vec{y} + \vec{x}\,\vec{z} = \mu(\vec{x})\,[\mu(\vec{y'}) + \mu(\vec{z'})]$$

از آنجا:

$$\vec{x}\vec{y} + \vec{x}\vec{z} = \mu(\vec{x})\,\mu(\vec{y}' + \vec{z}')$$

ولی بنا به قضیه ۲، $(\vec{y}' + \vec{z}')$ تصویر $\vec{y} + \vec{z}$ روی D است.

پس بنا به تعریف حاصل ضرب عددی:

$$\vec{x}(\vec{y} + \vec{z}) = \mu(\vec{x})\,\mu(\vec{y}' + \vec{z}')$$

از مقایسه دو تساوی آخری، توزیع‌پذیری اثبات میگردد.

مجذور عددی یك بردار.

تعریف- حاصل ضرب عددی $\vec{x}\,.\,\vec{x}$ را مجذور عددی $\vec{x}$ مینامند، مجذور عددی را بصورت $\vec{x}^2$ مینویسیم.

اگر $\vec{x} \in \mathcal{E}_D$ و اگر $\vec{u}$ واحد برداری $\mathcal{E}_D$ باشد داریم:

$$\vec{x}^2 = \mu_u^2(\vec{x})$$

$\vec{x}^2$ برابر مجذور عدد حقیقی است که اندازه x در $\mathcal{E}_D$ است و بنابراین مجذور اندازه طول $\vec{x}$ است (اگر u واحد طول انتخاب شود).

قضیه فیثاغورث.

دو بردار غیر مشخص $\vec{x}$ و $\vec{y}$ را در نظرمیگیریم که با $\vec{oa}$ و $\vec{ob}$ نمایش داده شده‌اند.از:

$$\vec{ob} \equiv \vec{oa} + \vec{ab}$$

نتیجه میشود:

$$\vec{ab} \equiv \vec{ob} - \vec{oa}$$

پس $\vec{ab}$ نمایش $\vec{y} - \vec{x}$ است.

با استفاده از خواص P_1 و P_2 و P_3؛ $(\vec{y} - \vec{x})^2$ را حساب کنیم:

$$(\vec{y} - \vec{x})^2 = (\vec{y} - \vec{x})(\vec{y} - \vec{x}) = \vec{y}^2 + \vec{x}^2 - 2\vec{x}\vec{y} \qquad (1)$$

اگر $\vec{y}$ و $\vec{x}$ متعامد باشند $\vec{x}\vec{y} = o$ است. (شکل ۶)

در این صورت:

$$(\vec{y} - \vec{x})^2 = \vec{y}^2 + \vec{x}^2 \qquad (2)$$

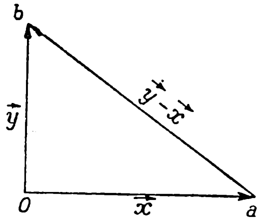
و بعکس اگر از (۲) شروع کنیم چون (۱) همواره سازگار است نتیجه میشود که:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = ۰$$

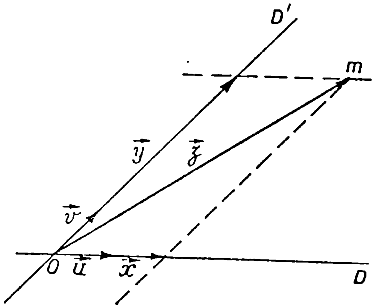
یعنی اگر بردارهای $\vec{x}$ و $\vec{y}$ برابر صفر نباشند متعامدند.

این، قضیه فیثاغورث است. برای اینکه دو بردار غیر صفر $\vec{x}$ و $\vec{y}$ متعامد باشند لازم و کافی است که:

$$(\vec{y} - \vec{x})^۲ = \vec{y}^۲ + \vec{x}^۲$$



شکل ۶



شکل ۷

۳ـ مختصات کارتزین (دکارتی).

a) مختصات یك بردار از فضای برداری $\mathcal{E}$.

در صفحه P دو خط متقاطع D و D' را اختیار میکنیم. اگر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بترتیب بردارهای واحدی $\mathcal{E}_D$ و $\mathcal{E}_{D'}$ باشد ($\vec{u}$ و $\vec{v}$ را همطول فرض میکنیم) شکل ۷.

در این صورت مجموعه مرتب $\{\vec{u}$ و $\vec{v}\}$ در $\mathcal{E}$ یک دستگاه مقایسه نورمه normé تشکیل میدهد.

بنا به قضیه ۱ به هر بردار $z \in \mathcal{E}$ یک زوج یکتای بردارهای $\vec{x}$ و $\vec{y}$ نظیراند به قسمیکه:

$$\vec{x} \in \mathcal{E}_D, \quad \vec{y} \in \mathcal{E}_{D'}; \quad \vec{x} + \vec{y} = \vec{z}$$

اندازه $\vec{x}$ را در $\mathcal{E}_D$ با a و اندازه y را در $\mathcal{E}_{D'}$ با b معین می‌کنیم:

$$\vec{x} = a\vec{u}; \quad \vec{y} = b\vec{v} \qquad (a, b \in R)$$

بنابراین داریم:

$$\boxed{\vec{z} = a\vec{u} + b\vec{v}}$$

دو عدد حقیقی a و b، در این ترتیب را:

«مختصات $\vec{z}$ در دستگاه مقایسه $\{\vec{u}, \vec{v}\}$»

مینامند.

a را «طول $\vec{z}$» و b را «عرض $\vec{z}$» مینامیم.

بعکس بهر زوج مرتب (a, b) یک‌بردار یکتای $\vec{z}$ با رابطه قبل نظیر است. بنابراین $\mathcal{E}$ با مجموعه زوج‌های (a, b) دو عدد متعلق به R در تناظر دوسوئی است.

b) مختصات یك نقطه از فضای نقطه‌ای P

برای فضای نقطه‌ای P نقطه مشترک O خطوط D، D' نقش اساسی بازی میکند (در فضای برداری $\mathcal{E}$ چون فقط امتداد خطوط D و D' مورد استفاده قرار میگرفت نقطه O هیچ نقشی نداشت) مجموعه نقطه O و بردارهای همطول $\vec{u}$ و $\vec{v}$: $\{o, \vec{u}, \vec{v}\}$ دستگاه مقایسه نورمه در P نامیده میشود.

بهر نقطه m ازصفحه یک بردار یکتای $z \in \mathcal{E}$ نظیر است که با $\overrightarrow{om}$ نمایش داده میشود وبعکس بهر بردار z یک نمایش $\overrightarrow{om}$ یکتا به مبدأ O و در نتیجه یک نقطه m یکتا نظیر است.

فضای برداری $\mathcal{E}$ بدین ترتیب با فضای نقطه‌ای P در تناظر دوسوئی گذاشته میشود و بنابراین فضای نقطه‌ای p با مجموعه زوج‌های (a, b) دو عدد متعلق به R با رابطه:

$$\overrightarrow{om} \equiv a \cdot \overrightarrow{ou} + b \cdot \overrightarrow{ov}$$

در تناظر دوسوئی است. $\overrightarrow{ou}$ و $\overrightarrow{ov}$ بترتیب نماینده‌های $\vec{u}$ و $\vec{v}$ به مبدأ O میباشند.

دو عدد زوج مرتب (a, b) به «مختصات m در دستگاه مقایسه $\{o, \vec{u}, \vec{v}\}$» موسوم‌اند، a طول و b عرض نقطه m است.

دستگاه مقایسه ارتونورمه orthonormé– اگر بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامد باشند دستگاه مقایسه $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ دستگاه ارتونورمه نامیده میشود.

در این شرایط داریم:

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \\ \vec{u}^2 = \vec{v}^2 = 1 \end{cases} \qquad (۳)$$

حال اگر دو بردار از $\mathcal{E}$ را اختیار نمائیم:

$$\vec{z} = a\vec{u} + b\vec{v} \quad \text{و} \quad \vec{z'} = a'\vec{u} + b'\vec{v}$$

حاصل ضرب عددی $\vec{z}\ \vec{z'}$ را با استفاده از $P_۱$ و $P_۲$ و $P_۳$ حساب میکنیم:

$$\vec{z}\ \vec{z'} = (a\vec{u} + b\vec{v})\ (a'\vec{u} + b'\vec{v}) = aa'\vec{u}^۲ + bb'\vec{v}^۲ + (ab' + ba')\ \vec{u}\ \vec{v}$$

با توجه به رابطه (۳) نتیجه میشود:

$$\boxed{\vec{z}\vec{z'} = aa' + bb'}$$

بخصوص اگر $\vec{z} = \vec{z'}$ باشد داریم:

$$z^۲ = a^۲ + b^۲$$

که مربع طول z را بـر حسب مختصات $\vec{z}$ بدست میدهد.

اجزاء مثلثات

۴ـ رادیان.

برای تعیین و اندازه‌گیری طول دایره، در دایره یک چند برمنتظم n ضلعی محاط میکنیم که طول محیط آنرا با عدد حقیقی p_n اندازه میگیریم و یک چند بـر منتظم n ضلعی بـردایره محیط میکنیم که طول محیط آنرا با عدد حقیقی p'_n اندازه میگیریم. بدین ترتیب فواصل فراگیر گنجیده در R که طول آن بسمت صفر میل میکند معین میگردد:

$$\{p_n,\ p'_n\}$$

عدد حقیقی l که متعلق به همه این فواصل است بنا به تعریف انـدازه طول دایره است.

اگر d اندازه قطر دایره باشد عدد حقیقی $\frac{l}{d}$ را با π نشان میدهیم:

$$\pi = \frac{l}{d}$$

این عدد π اصم و برای جمیع دوایر یکی است. در دستگاه اعشاری مقدار تقریبی آن تا $۱/۱۰^۵$ تقریب نقصان عبارت است از:

$$\pi = \overrightarrow{۳,۱۴۱۵۹۰۰\cdot}$$

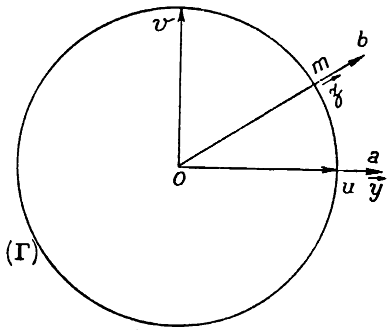
تعریف رادیان- رادیان واحد اندازه‌گیری زاویه است بقسمی که اندازه زاویه نیم صفحه برابر π باشد.

از این پس همه زاویه‌ها را با واحد رادیان اندازه‌گیری میکنیم.

دایره مثلثاتی.

تعریف- مجموعه Γ نقاط صفحه جهت دار P که بفاصله ۱ از نقطه O قرار دارند دایره مثلثاتی به مرکز o نامیده میشود.

دایره Γ با مجموعه نیم‌خطهای P به مبدأ o در تناظر دو سوئی است چونکه بهر نقطه m از Γ یک نیم خط یکتای om به مبدأ o نظیر است و بهر نیم خط $o\Delta$ یک نقطه m یکتا روی $o\Delta$ بفاصله ۱ از o نظیر است (شکل ۸).



شکل ۸

از آنجا نتیجه میشود که دایره Γ با مجموعه $E_{2\pi}$ طبقه‌های اعداد حقیقی مدولو 2π در تناظر دو سوئی است.

لازم به یادآوری است که بیک عدد حقیقی x یک طبقه یکتای:

$$\mathcal{C}(x) \in E_{2\pi}$$

و بنابراین یک نقطه یکتای $m \in \Gamma$ نظیر است. ولی بیک نقطه $m \in \Gamma$ یک عدد یکتای $x \in R$ نظیر نیست ولی یک طبقه یکتای $\mathcal{C}(x) \in E_{2\alpha}$ نظیر است.

اگر u و v بترتیب نقاطی از Γ نظیر o و $\frac{\pi}{2}$ باشند مختصات m که از این پس مورد بحث قرار خواهد گرفت در دستگاه مقایسه ارتونورمه $\{\overrightarrow{ou}, \overrightarrow{ov}\}$ اختیار میشوند.

۵ـ توابع مثلثاتی

تعریفـ به هر عدد طبیعی x طبقه یکتای $\mathscr{C}(x)$ مدولو ۲π را و سپس نقطه یکتای m از Γ نظیر این طبقه را و بالاخره زوج یکتای (a, b) مختصات m را همراه کنیم.

$$x \in R \rightarrow \mathscr{C}(x) \in E_{۲\pi} \rightarrow m \in \Gamma \rightarrow (a, b) \qquad (a, b \in R)$$

بدین ترتیب دو تابع R بطور توأم در R معین میشود.

اولی که به x، a را نظیر میکند نوشته میشود:

$$a = \cos x$$

میخوانیم: «a مساوی کسینوس x»

دومی که به x، b را نظیر میکند نوشته میشود:

$$b = \sin x$$

میخوانیم: «b مساوی سینوس x»

خواص.

۱) اگر بجای x یک عدد حقیقی دیگری از طبقه $\mathscr{C}(x)$ قرار دهیم نقطه m تغییر نمی‌کند و بنابراین $\sin x$ و $\cos x$ تغییر نمیکنند این خاصیت بدین ترتیب بیان میشود که «توابع $\sin x$ و $\cos x$ متناوب‌اند و دوره تناوب ۲π است».

۲) چون فاصله جمیع نقاط m دایره Γ از o برابر ۱ است، داریم:

$$a^۲ + b^۲ = ۱$$

از آنجا، هرچه باشد $x \in R$ خاصیت زیر نتیجه می‌شود:

$$\cos^۲ x + \sin^۲ x = ۱$$

۳) توابع $\cos x$ و $\sin x$ هردو R را روی فاصله بسته $[-۱, ۱]$ می‌نگارند.

۴) به اعداد حقیقی متقابل x و $-x$ دو نقطه از Γ متقارن نسبت به ou نظیراند. این دو نقطه دارای یک طول و عرضهای متقابل‌اند پس:

$$\boxed{\sin(-x) = \sin x} \qquad \boxed{\cos(-x) = \cos x}$$

به اعداد x و $\pi - x$ دو نقطه از Γ متقارن نسبت به ov نظیراند: این دو نقطه دارای طولهای متقابل و عرضهای متساویند، پس:

$$\boxed{\sin (\pi - x) = \sin x} \qquad \boxed{\cos (\pi - x) = -\cos x}$$

بـه اعداد x و $x+\pi$ دو نقطه از Γ متقارن نسبت به o نظیرانـد ایـن دو نقطه دارای طول‌های متقابل و عرضهای متقابل هستند، پس:

$$\boxed{\sin (\pi + x) = \sin x} \qquad \boxed{\cos (\pi + x) = -\cos x}$$

به اعداد x و $\frac{\pi}{۲} - x$ دو نقطه از Γ متقارن نسبت به نیمساز زاویه (ou, ov) نظیرانـد این تقارن بردارهای واحدی $\vec{u}$ و $\vec{v}$ دستگاه مقایسه را تعویض میکند و طول یکی از این نقاط را به عرض دیگری تبدیل مینماید پس:

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{۲} - x\right) = \cos x} \qquad \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{۲} - x\right) = \sin x}$$

۶ـ عبارت مثلثاتی حاصل ضرب عددی.

هـرگاه $\vec{y}$ و $\vec{z}$ دو بردار از $\mathcal{E}$ و $\overrightarrow{oa}$ و $\overrightarrow{ob}$ بترتیب نماینده‌های به‌مبدأ o آنها باشد (شکل ۸)، $\overrightarrow{oa}$ را برای نیم خط مبدأ P انتخاب کنیم و نقاط نظیر به‌نیم خطهای oa و ob روی دایره مثلثاتی Γ به مرکز o را u و m بنامیم: هـرگاه $\vec{u}$ و $\vec{m}$ بردارهای واحدی نمایش داده شده بـا $\overrightarrow{ou}$ و $\overrightarrow{om}$ و اعداد y و z از R^+ اندازه طول‌هـای $\vec{y}$ و $\vec{z}$ باشند داریم:

$$\vec{y} = y\vec{u} \quad \text{و} \quad \vec{z} = z \cdot \vec{m}$$

و برای حاصل ضرب عددی:

$$\vec{y}\,\vec{z} = yz\,\vec{u}\,\vec{m}$$

بنا به تعریف، حاصلضرب عددی $\vec{u}\,\vec{m}$ دو بردار واحدی، برابر با اندازه تصویر قائم $\vec{m}$ روی $\vec{u}$ است. این هم طول نقطه m در دستگاه مقایسه ارتونورمه $\{\overrightarrow{ou}, \overrightarrow{ov}\}$ است.

حال اگر $\mathcal{C}(x)$ طبقه مدولو ۲π نظیر نقطه m از Γ باشد طول m بنا به تعریف $\cos x$ است.

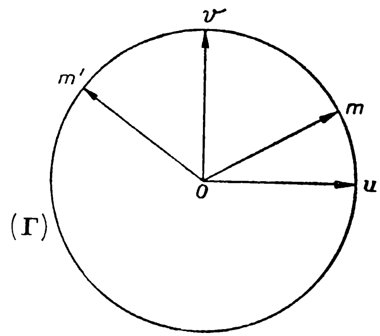
پس داریم:

$$\vec{u} \cdot \vec{m} = \cos x$$

و بنابراین:

$$\boxed{\vec{y}\,\vec{z} = yz\cos x}$$

حاصل ضرب دو بردار مساوی حاصل ضرب اندازه طول‌هـای آنها در کسینوس یک عدد از طبقه‌ای است که زاویه آنها را اندازه میگیرد.



شکل ۹

۷ـ دستورهای مثلثاتی جمع.

هـرگاه $\mathcal{C}(x)$ و $\mathcal{C}(x')$ دو طبقه از $E_{2\pi}$ و m و m' نقاط نظیر آنهـا روی Γ بـاشند (شکل ۹) بنا به تعریف جمع زاویه‌های جهت‌دار در $\mathcal{A}'$ (فصل ۳) داریم:

$$(\widehat{ou, om}) + (\widehat{om, om'}) = (\widehat{ou, om'})$$

بنا به خاصیت P_1 فصل قبل، طبقه مدولو 2π که:

$$(\widehat{om, om'})$$

را اندازه میگیرد برابر است با $\mathcal{C}(x') - \mathcal{C}(x)$ یعنی:

$$\mathcal{C}(x' - x)$$

اگر $\vec{m}$ و $\vec{m'}$ بردارهای $\mathcal{E}$ نمایش داده شده با $\vec{om}$ و $\vec{om'}$ بـاشند با استفاده از عبارت مثلثاتی حاصل ضرب عددی داریم:

$$\vec{m}\,\vec{m'} = \cos(x' - x)$$

ولی در دستگاه مقایسه $\{\vec{u}, \vec{v}\}$:

مختصات m عبارتند از $\cos x$ و $\sin x$

مختصات m' عبارتند از $\cos x'$ و $\sin x'$

بنا به خاصیت §۳ نتیجه میشود:

$$\vec{m}\,\vec{m'} = \cos x' \cos x + \sin x' \sin x$$

پس داریم:

$$\boxed{\cos (x' - x) = \cos x' \cos x + \sin x' \sin x}$$

اگر بجای x، $-x$ قرار دهیم:

$$\boxed{\cos (x' + x) = \cos x' \cos x - \sin x' \sin x}$$

اگر بجای x'، $\frac{\pi}{۲} - x$ در دستور اول قرار دهیم:

$$\boxed{\sin (x' + x) = \sin x' \cos x + \sin x \cos x'}$$

اگر در این دستور اخیر بجای x، $-x$ قرار دهیم:

$$\boxed{\sin (x' - x) = \sin x' \cos x - \sin x \cos x'}$$

این چهار رابطه را «دستورهای مثلثاتی جمع» مینامیم.

قسمت ششم

اعداد مختلط

در قرن XVI دانشمندان علم جبر کــه به حــل معادلــه درجه سوم پرداختند با این مسئله مواجه شدند که اعداد حقیقی با عبارتهائی نموده میشد کــه درآنها سمبل خالی از معنای $\sqrt{-1}$ وجــود داشت. بومبلی Bombelli ریاضیدان ایتالیائی اولین کسی بود که جذر عددهای منفی را مانند یك عدد در نظر گرفت.

با وارد کردن سمبلهای جدید $\sqrt{-x}$ با $x \in R^+$ باین اعــداد جدیــد ضرب و بعد جمع در R را وسعت میبخشیم. شرایط لازم حاصل، تعریف عدد مختلط و بنیان عملی operatoire را کــه باید در مجموعه C اعداد مختلط معین نمود روشن مینمایند.

بدین ترتیب هیئتی بدست میآید که هیئت R اعداد حقیقی درآن غوطه‌ور است.

تصور مــدول یک عدد موهومی بطرز ساده‌ای و بدون توسل بــه هندسه حاصل میشود.

لیکن در مورد تصور آرگومان (آوند) یک عــدد موهومی مطلب بدینقرار نیست. اگر بخواهیم آوند یک عدد موهومی را بطرز مقدمــاتی[1] معین کنیم باید از نمایش هندسی اعداد موهومی کمک بگیریم:

زیر گروه ضربی U اعداد مختلط به مدول واحد با گروه دورانی به

۱ــ در آنالیز، بررسی توابع با متغیرهای مختلط امکان تعیین‌آرگومان یك عدد موهومی را بدون یاری جستن از هندسه بدست میدهد.

مرکز o یک شکل است. دوران که با طبقه‌های اعداد حقیقی بـا مدول ۲π اندازه‌گیری میشود، آوند یک عدد موهومی، یک عدد حقیقی ازیک چنین طبقه‌ای خواهد بود.

فصل اول

ساخت مجموعه اعداد مختلط
عملها

۱ـ مقدمه.

عدم امکان پیدا کردن عددی (در Q^+) که مجذور آن برابر یک عدد طبیعی غیر مجذور کامل باشد ما را به روی‌کار آوردن اعداد جدیدی: «اعداد حقیقی» هدایت کرد.

میدانیم که هر عدد حقیقی مثبت دارای جذری است. لیکن میتوان تأیید کرد که هر عدد حقیقی منفی دارای جذری در R نیست زیرا اگر فرض کنیم $\sqrt{-x}$ در R با $x > 0$ وجود داشته باشد بنا به تعریف جذر باید داشته باشیم:

$$\sqrt{-x}\,\sqrt{-x} = -x$$

ولی بنا به تعریف ضرب در R، مجذور یک عدد حقیقی غیر مشخص غیر صفر مثبت است. پس مجذور $\sqrt{-x}$ نمیتواند برابر عدد منفی $-x$ باشد و تناقض وجود دارد و $\sqrt{-x}$ در R وقتیکه $x > 0$ است وجود ندارد.

وقتیکه جبریون قرن XVI به حل معادله درجه سوم پرداختند مسئله‌ای که مزاحم بود عبارت بود از اینکه اعداد حقیقی با عبارتهائی نموده میشدند که جذر اعداد منفی در آنها وجود داشت. بومبلی ریاضی‌دان ایتالیائی (که کتاب جبر او بسال ۱۵۷۲ در بولونی منتشر شد) اولین کسی بود که از سمبل $\sqrt{-x}$ واهمه نکرد و آنرا مانند عددی در نظر گرفت.

او با این سمبلهای جدید اعمال شناخته شده در R را با خواص آنها بکار بست.

او با فرض، بنا به تعریف:

$$\sqrt{-1}\,\sqrt{-1} = -1$$

و چون:

$$-x = (-1)\,x$$

نوشت:

$$\sqrt{-x} = \sqrt{-1}\,\sqrt{x}$$

خاصیت معلوم اعداد نمائـی را ادامه داد[1]. در یک مرحله اولیه مـا بدین تـرتیب عمل میکنیم سمبل $\sqrt{-x}$ با $x > 0$ را با $\sqrt{\dot{x}}$ (جذر نقطه دار x) نمایش میدهیم.

بطور کلی بهر عدد حقیقی a یک سمبل جدید $\dot{a}$ (aـی نقطه دار) را نظیر قرار میدهیم و آنرا «عدد موهومی خالص» مینامیم.

که مجموعه آن با $\dot{R}$ نمایش داده خواهد شد.

یـک عمل ضرب در $R \cup \dot{R}$ معین میکنیم بقسمیکه بـا عمل ضرب R وقتیکـه روی دو عدد R عمل میکنیم مطابق باشد و دارای همان خواص ضرب در R باشد و داشته باشیم:

$$\dot{1} \cdot \dot{1} = -1 \qquad (1)$$

$$\dot{1}\, a = \dot{a} \quad (\text{هرچه باشد } a \in R) \qquad (2)$$

فرض کنیم $0 = \dot{0}$ یعنی R و $\dot{R}$ فقط دارای یک جزء مشترک (جزء صفر) باشند.

اگر طرفین (۲) را در $b \in R$ ضرب کنیم باید داشته باشیم:

$$(\dot{1}a)\, b = \dot{a}b$$

اگر بخواهیم که این عمل شرکت پذیر باشد باید فرض کنیم:

$$\dot{1}\,(ab) = \dot{a}b$$

بنا به (۲) باید داشته باشیم:

$$\dot{1}(ab) = (\dot{ab})$$

پس باید:

$$\boxed{(\dot{ab}) = \dot{a}b}$$

اختیار نمائیم.

لازم است که حاصل ضرب $\dot{a}b$ یک عدد موهومی خالص در یک عدد حقیقی را مـانند

۱ــ در اواخر قرن XVII لایب‌نیتز (۱۷۱۶ــ۱۶۴۶) با ارائه نتیجه:

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6}$$

هویگنس Huygens (۱۶۹۵ــ۱۶۲۹) را سخت مبهوت ساخت.

موهومی خالص نظیر حاصل ضرب ab معین نمائیم.

از طرف دیگر طرفین (۲) را در $\dot{۱}$ ضرب میکنیم:

$$\dot{۱}\,(\dot{۱}a) = \dot{۱}\dot{a}$$

بنا به شرکت‌پذیری:

$$(\dot{۱}\dot{۱})\,a = \dot{۱}\dot{a}$$

یعنی:

$$(-۱)\,a = \dot{۱}\dot{a}$$

در $b \in R$ ضرب میکنیم و نتیجه میشود:

$$-ab = (\dot{۱}\dot{a})\,b$$

اگر بخواهیم که عمل جابجاپذیر نیز باشد باید داشته باشیم:

$$-ab = (\dot{۱}b)\,\dot{a}$$

و:

$$\boxed{\dot{b}\dot{a} = -ab}$$

پس لازم است که حاصل ضرب دوعدد موهومی خالص را بطریق فوق معین نمائیم.

اگر حاصل ضرب ab دو عدد R همانطور باشد که میدانیم، باید بنابراین یک عمل ضرب در $R \cup \dot{R}$ بطرز زیر تعیین نمائیم:

$$\dot{a}b = b\dot{a} = (\dot{ab}) \qquad (۳)$$

$$\dot{a}\dot{b} = \dot{b}\dot{a} = -ab \qquad (۴)$$

بنا به‌تعریف این عمل ضرب جابجاپذیر است. بسادگی معلوم میشود که این عمل دارای یک جزء خنثای ۱ است و شرکت پذیر است و هر جزء سوای صفر دارای یک معکوس میباشد.

عمل ضرب در $R \cup \dot{R}$ یک بنیان گروه جابجاپذیر را معین مینماید (این نتیجه قبلاً مدلل شده است: ۵§).

در این گروه، استخراج جذر یک عدد حقیقی همواره امکان‌پذیر است. معادله:

$$x^{۲} = a \qquad (a \in R)$$

دارای دو ریشه $\pm\sqrt{a}$ است اگر $a > ۰$ و دارای دو ریشه $\pm\sqrt{-\dot{a}}$ است اگـر $a < ۰$ باشد.

ولی جذر یک عدد موهومی خالص در این گروه وجود نـدارد و نمیتوان یـک حاصل ضرب موهومی خالص بدست آورد مگر در حالتی که دو عامل ضرب بترتیب به R و $\dot{R}$ تعلق داشته باشند.

اگر مسئله استخراج جذر یک عدد منفی در گروه $R \cup \dot{R}$ حل شده است بـرای هرجزء گروه بدان قرار حل نشده است.

ولی نقص اصلی گروه مورد نظر فقط در آنجا نیست، ما خواهیم دید که ادامه عمل جمع R با خواصش در آنجا مقدور نیست. مسئله زیر را مورد بررسی قرار دهیم:

آیا امکان پذیر است که عمل جمعی را در مجموعه $R \cup \dot{R}$ با عمل جمع معلوم در R معین کنیم با جمعی که بین دو عدد R عمل میشود منطبق باشد و دارای همان خواص بـاشد؟ از مجموع $a + b$ دو عدد R شروع میکنیم.

بنا به (۲) داریم:

$$\dot{۱}\,(a + b) = (a \dot{+} b)$$

اگر بخواهیم که عمل ضرب نسبت به جمع توزیع پذیر باشد باید داشته باشیم:

$$\dot{۱}\,(a + b) = \dot{۱}a + \dot{۱}b = \dot{a} + \dot{b}$$

پس باید:

$$\dot{a} + \dot{b} = (a \dot{+} b) \qquad (۵)$$

باشد.

اکنون حالت مجموع یک عدد حقیقی و یک عدد موهومی خالص را آزمایش میکنیم:

$$a + \dot{b}$$

و ثابت کنیم که اگر این عمل جمع دارای خواص عمل جمع R باشد نمیتوان این مجموع را بیک عدد R و یا بیک عدد $\dot{R}$ تبدیل کرد.

۱) فرض کنیم:

$$a + \dot{b} = x$$

با $x \in R$ به طرفین $(-a)$ اضافه میکنیم:

$$(-a) + (a + \dot{b}) = -a + x$$

اگر بخواهیم که جمع شرکت پذیر باشد باید داشته باشیم:

$$(-a + a) + \dot{b} = -a + x$$

یا:

$$\dot{b} = -a + x$$

ولی تنها جزء مشترک R و $\dot{R}$ عبارت از صفر است و چنین رابطه‌ای جز بازاء $b = ۰$ صادق نیست (در این صورت $x = ۰$ خواهد شد) پس اگر $b \neq ۰$ باشد:

$$(a + \dot{b}) \in R$$

ممکن نیست

۲) فرض کنیم:

$$a + \dot{b} = \dot{x}$$

با روش مشابهی نتیجه میشود:

$$a = \dot{x} + (-\dot{b})$$

یعنی بنا به (۵):

$$a = (x \dot{-} b)$$

و چنین رابطه‌ای جز بازاء $a = ۰$ (که در این صورت $x = b$) ممکن نیست پس اگر $a \neq ۰$ باشد:

$$(a + \dot{b}) \in \dot{R}$$

امکان ندارد.

از این بررسی نتیجه میشود که اگر بخواهیم عمل جمع R را با خواص آن ادامه دهیم، مجموعه $R \cup \dot{R}$ کافی نیست: باید اعداد دیگری را آفرید.

این عددهای جدید و عملهای مطلوب را چگونه باید معین کرد؟

فرض کنیم $a + \dot{b}$ معین شده باشد؛ دو عدد از این نوع را باهم جمع کنیم:

$$(a + \dot{b}) + (c + \dot{d})$$

بازاء جابجاپذیری و شرکت پذیری نتیجه میشود:

$$(a+c)+(\dot{b}+\dot{d})$$

و از (۵) نتیجه می‌شود:

$$a+c+(b\dot{+}d)$$

خوشبختانه مشاهده میشود که با جمع دو عدد از این گونه عددی از همان گونه بدست میآید پس باید:

$$\boxed{(a+\dot{b})+(c+\dot{d})=(a+c)+(b\dot{+}d)}$$

حال ببینیم حاصل ضرب دو تا از این اعداد به چه کیفیت است؟

از:

$$(a+\dot{b})(c+\dot{d})$$

شروع میکنیم:

بنا به توزیع پذیری نتیجه میشود:

$$ac+\dot{b}c+a\dot{d}+\dot{b}\dot{d}$$

بنا به روابط (۳) و (۴) داریم:

$$ac+(\dot{bc})+(\dot{ad})-bd$$

و بنا به جابجا پذیری و شرکت پذیری:

$$(ac-bd)+(\dot{bc})+(\dot{ad})$$

و بالاخره بنا به (۵):

$$ac-bd+(bc\dot{+}ad)$$

پس حاصلضرب دو عدد از این گونه نیز عددی از همین گونه است و باید:

$$\boxed{(a+\dot{b})(c+\dot{d})=ac-bd+(bc\dot{+}ad)}$$

اختیار کرد.

در نتیجه این مجموع $a+\dot{b}$ را نمیتوان بیک عدد R و یا بیک عدد $\dot{R}$ بدل نمود و اگر بخواهیم چنین مجموعی را معین کنیم باید مجموعه‌ای وسیع‌تر از $R\cup\dot{R}$ را در نظر بگیریم.

در هر جزء از این مجموعه دو عدد حقیقی باهم وارد میشوند که دارای نقشهای یکسانی نیستند.

در صفحات بعد زوج مرتب (a, b) دو عدد حقیقی را معمول میکنیم و قوانین ترکیب اعداد مختلط را با اتکاء به شرایط لازم که بدست آوردیم معین میسازیم.

۲ـ اعداد مختلط.

تعاریفـ یک زوج مرتب (a, b) دو عدد حقیقی b, a را عدد مختلط مینامیم.

عدد اول، a، «قسمت حقیقی (a, b)» نامیده میشود.

عدد دوم b، «قسمت موهومی (a, b)» نامیده میشود.

تساویـ دو عدد مختلط برابرند اگر قسمتهای حقیقی آنها یکی و قسمتهای موهومی آنها هم یکی باشد.

$$(a, b) = (a', b') \iff (a = a' \quad \text{و} \quad b = b')$$

مجموعه اعداد مختلط را C مینامیم.

عدد موهومی را با یک حرف یونانی نیز نمایش میدهیم:

$$\alpha = (a, b)$$

برای تجهیز C با یک بنیان جمعی و با یک بنیان ضربی با تعاریف زیر از فصل قبل الهام میگیریم:

تعریف جمع در C.

به دو عدد مختلط (a, b) و (c, d) یک عدد مختلط که به مجموع دو عدد اولی موسوم است و با $(a, b) + (c, d)$ نمایش داده میشود و با:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c ، b + d)$$

معین میگردد همراه میکنیم.

تعریف ضرب در C.

به دو عدد مختلط (a, b) و (c, d) یک عدد مختلط که حاصل ضرب دوعدد اولی نامیده میشود و با $(a, b)\,(c, d)$ نمایش داده میشود و با:

$$(a, b)\,(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

معین میگردد همراه میکنیم.

۳ـ خواص جمع.

جابجاپذیری.

هرچه باشد اعداد مختلط α و β داریم:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

زیرا، فرض میکنیم $\alpha = (a, b)$ و $\beta = (c, d)$ داریم:

$$\alpha + \beta = (a + c, b + d)$$

$$\beta + \alpha = (c + a, d + b)$$

بخاطر جابجاپذیری جمع در R دو عدد حاصل برابرند.

شرکت‌پذیری.

هرچه باشد اعداد مختلط α و β و γ داریم:

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

با فرضهای قبلی و با فرض $\gamma = (e, f)$ داریم:

$$(\alpha + \beta) + \gamma = (a + c, b + d) + (e, f) = ((a + c) + e, (b + d) + f)$$

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (a, b) + (c + e, d + f) = (a + (c + e), b + (d + f))$$

بخاطر شرکت پذیری در R دو عدد حاصل برابرند.

جزء خنثی.

هرچه باشد $\alpha \in C$ یک جزء ω در C وجود دارد بقسمیکه:

$$\alpha + \omega = \alpha$$

میدانیم که اگر ω وجود داشته باشد یکتا است.

$(\circ, \circ) = \omega$ میگیریم. هرچه باشد $\alpha = (a, b)$ داریم:

$$\alpha + \omega = (a + \circ, b + \circ) = (a, b) = \alpha$$

پس جزء خنثای جمع $(\circ, \circ)$ است.

اعداد مختلط متقابل.

هرچه باشد $\alpha \in C$ عدد $\beta \in C$ وجود دارد بقسمیکه:

$$\alpha + \beta = \omega$$

فرض کنیم $\alpha = (a, b)$ و عدد $\beta = (x, y)$ را بقسمی پیدا میکنیم که:

$$(a, b) + (x, y) = (\circ, \circ)$$

$$(a + x, b + y) = (\circ, \circ)$$

با مساوی قرار دادن قسمتهای حقیقی با هم و قسمتهای موهومی با هم:

$$a + x = \circ \quad \text{و} \quad b + y = \circ$$

از آنجا:

$$x = - a \quad \text{و} \quad y = - b$$

آزمایش فوری است. پس هر عدد (a, b) دارای یک عدد متقابل $(- a, - b)$ بازاء جمع میباشد. متقابل α با $\alpha -$ نمایش داده میشود.

از چهار خاصیتی که مدلل شد چنین برمیآید که C یک گروه جمعی جابجاپذیر است.

۴ـ خواص ضرب.

جابجاپذیری.

هرچه باشد اعداد مختلط α و β داریم:

$$\alpha\beta = \beta\alpha$$

با قرارهای قبلی و قراردادن $\gamma = (e, f)$ داریم:

$$\alpha\beta = (ac - bd, ad + bc)$$

$$\beta\alpha = (ca - db, da + cb)$$

بخاطر جابجاپذیری در R دو عدد حاصل برابرند.

شرکت‌پذیری.

هرچه باشد اعداد مختلط α و β و γ داریم:

$$(\alpha\beta)\,\gamma = \alpha\,(\beta\gamma)$$

باز هم با قرارهای قبلی و قرار دادن $\gamma = (e, f)$ داریم:

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)\,\gamma &= (ac - bd, ad + bc)\,(e, f)\\ &= ((ac - bd)\,e - (ad + bc)\,f, (ac - bd)\,f + (ad + bc)\,e)\end{aligned}$$

$$\alpha(\beta\gamma) = (a, b)(ce - df, cf + de)$$
$$= (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df))$$

بخاطر شرکت پذیری و جابجاپذیری و توزیع‌پذیری (جمع و ضرب) در R دو عدد حاصل برابرند.

جزء خنثای ضرب.

هرچه باشد $\alpha \in C$ عدد ε در C وجود دارد بقسمیکه:

$$\alpha\varepsilon = \alpha$$

میدانیم که اگر ε وجود داشته باشد یکتا است. $\varepsilon = (۱, ۰)$ اختیار میکنیم.

هرچه باشد $\alpha = (a, b)$ داریم:

$$\alpha\varepsilon = (a, b)(۱, ۰) = (a \times ۱ - b \times ۰, a \times ۰ + b \times ۱)$$
$$= (a, b) = \alpha$$

پس جزء خنثای ضرب $(۱, ۰)$ است.

عکس یک عدد مختلط.

هرچه باشد $\alpha \in C$، $(\alpha \neq \omega)$ عدد $\beta \in C$ وجود دارد بقسمیکه:

$$\alpha\beta = \varepsilon$$

با فرض $\alpha = (a, b)$، عدد $\beta = (x, y)$ را بقسمی پیدا میکنیم:

$$(a, b)(x, y) = (۱, ۰) \qquad (۱)$$

ابتدا یادآور شویم که اگر $(a, b) = (۰, ۰)$ باشد هرچه باشد (x, y) داریم:

$$(۰, ۰)(x, y) = (۰, ۰)$$

پس عدد مختلط $\omega = (۰, ۰)$ دارای معکوس نیست.

فرض میکنیم $\alpha \neq (۰, ۰)$ باشد شرط (۱) معادل است با:

$$(ax - by, ay + bx) = (۱, ۰)$$

از آنجا:

$$ax - by = ۱ \qquad (۲)$$
$$bx + ay = ۰ \qquad (۳)$$

طرفین (۲) را در a و طرفین (۳) را در b ضرب کرده و جمع میکنیم:

$$(a^۲ + b^۲)x = a \qquad (۴)$$

طرفین (۲) را در $(-b)$ و طرفین (۳) را در a ضرب کرده و جمع میکنیم:

$$(b^2 + a^2)\, y = -b \tag{5}$$

چون $a^2 + b^2 \neq 0$ (a و b بطور همزمان برابر صفر نیستند) از (۴) و (۵) نتیجه میشود:

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2} \qquad \text{و} \qquad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

امتحان میکنیم:

$$(a, b) \qquad \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) = \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab + ab}{a^2 + b^2}\right) = (1, 0)$$

از آنجا نتیجه میشود که هر عدد مختلط:

$$\alpha = (a, b) \neq (0, 0)$$

دارای یک معکوس است:

$$\beta = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$$

این معکوس با $\frac{1}{\alpha}$ نمایش داده میشود.

مجموعه اعداد مختلط سوای ω را با C^* نمایش میدهند:

$$C^* = C - \{\omega\}$$

از چهار خاصیت ضرب نتیجه میشود که C^* یک گروه ضربی جابجاپذیر است.

توزیع پذیری ضرب بازاء جمع.

هرچه باشد اعداد مختلط α و β و γ داریم:

$$\alpha\, (\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

با قرارهای قبلی مینویسیم:

$$\begin{aligned}\alpha\, (\beta + \gamma) &= (a, b)\, (c + e, d + f) \\ &= (a\, (c + e) - b\, (d + f),\; a\, (d + f) + b\, (c + e))\end{aligned}$$

از طرف دیگر:

$$\alpha\beta = (ac - bd,\; ad + bc)$$
$$\alpha\gamma = (ae - bf,\; af + be)$$

از آنجا:

$$\alpha\beta + \alpha\gamma = (ac - bd + ae - bf,\ ad + bc + af + be)$$

بخاطر خواص جمع و ضرب در R داریم:

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

هیئت اعداد مختلط.

جمع و ضرب هر دو روی C بنیان یک گروه جابجاپذیر را معین میسازند و چون ضرب توزیع‌پذیر نسبت به جمع است پس C یک هیئت جابجاپذیر است (I، فصل ۲ : ۶).

ه‍ـ غوطه‌وری R در C.

اگر $\mathcal{R}$ نمایش مجموعه اعداد مختلط بصورت $(a, \circ)$ باشد نظیر هر عدد $a \in R$ یک عدد یکتای مختلط $(a, \circ) \in \mathcal{R}$ وجود دارد و بعکس. مجموعه‌های R و $\mathcal{R}$ بدین ترتیب در تناظر دو سوئی قرار دارند:

$$R \rightleftarrows \mathcal{R}$$

برای جمع دو عدد $\mathcal{R}$ داریم:

$$(a, \circ) + (b, \circ) = (a + b, \circ)$$

پس این تناظر بازاء جمع یک شکل است.

برای ضرب دو عدد $\mathcal{R}$ داریم:

$$(a, \circ)(b, \circ) = (ab - \circ, a \times \circ + b \times \circ) = (ab, \circ)$$

تناظر بازاء ضرب یک شکل است.

با همانی قرار دادن R و $\mathcal{R}$ مجموعه R را در C غوطه‌ور میسازند و قرار میگذارند.

$$(a, \circ) = a$$

(هرچه باشد $a \in R$) بخصوص داریم:

جزء خنثای جمع در C:

$$\omega = (\circ, \circ) = \circ$$

و جزء خنثای ضرب در C:

$$\varepsilon = (۱,\circ) = ۱$$

پس از این غوطه‌وری میگویند که C یک فوق هیئت R است:

$$R \subset C$$

مجموعه $\dot{R}$ اعداد مختلط $(\circ, a)$.

فرض میکنیم:

$$(\circ, ۱) = i$$

داریم:

$$(\circ, ۱)(\circ, ۱) = (\circ - ۱, \circ + \circ) = (-۱, \circ)$$

که نوشته میشود:

$$i^{۲} = -۱$$

چون:

$$(-۱, \circ) = -۱$$

هرچه باشد $a \in R$ داریم:

$$(\circ, ۱)(a, \circ) = (\circ - \circ, \circ + a) = (\circ, a)$$

یعنی (چون $a = (a, \circ)$ است):

$$ia = (\circ, a)$$

دوتساوی $i^{۲} = -۱$ و $(\circ, a) = ia$ نشان میدهندکه مجموعه $\dot{R}$ اعداد مختلط $(\circ, a)$ همان (متحد) مجموعه‌ای است که ما در مقدمه (§ ۱) ملاحظه کردیم. یک جزء $\dot{R}$ بجای $(\circ, a)$ با $\dot{a}$ نمایش داده شده بود و عدد i را با $\dot{۱}$ نمایش داده بودیم. هر عدد بصورت ia به عدد موهومی خالص موسوم است.

میتوان تحقیق کرد که ضرب در $R \cup \dot{R}$ که در فصل ۱ معین نمودیم با ضرب اعداد مختلط تطبیق میکند، تساوی‌های (۳) و (۴) فصل ۱ با علامت‌های جدید نوشته میشوند:

$$(ia)\, b = i\,(ab)$$

$$(ia)(ib) = -ab$$

رابطه اول بخاطر شرکت‌پذیری و رابطه دوم بخاطر جابجاپذیری و یک شرکت‌پذیری ثابت است. ضرب اعداد مختلط درونی در $R \cup \dot{R}$ است. بعلاوه عکس ia $(a \neq \circ)$ عبارت است از:

$$-\frac{i}{a} \in (R \cup \dot{R})$$

بدین ترتیب معلوم میشود که $R \cup \dot{R}$ یک زیرگروه ضربی C است.

جمع یک عدد $\dot{R}$ با یک عدد R نتیجه میدهد:

$$a + ib = (a, \circ) + (\circ, b) = (a, b)$$

پس هر عدد مختلط مجموع یک عدد حقیقی و یک عدد موهومی خالص است.

چون هر عدد مختلط α را میتوانیم بنویسیم،

$$\alpha = a + ib$$

که a قسمت حقیقی و b قسمت موهومی است. پس در هرمحاسبه مربوط به اعداد مختلط میتوان هر کدام از آنها را با مجموعی از این گونه جایگزین کرد و بجای $i^۲$ مقدار ۱ — را قرار داد.

۶ـ اعداد مختلط مزدوج.

تعریف - «مزدوج عدد مختلط $a + ib$» بنا به تعریف عدد مختلط $a - ib$ است. مزدوج α را با $\overline{\alpha}$ نشان میدهیم:

$$\alpha = a + ib \quad \Rightarrow \quad \overline{\alpha} = a - ib$$

نظیر هر عدد $\alpha \in C$ یک عدد یکتای $\overline{\alpha} \in C$ وجود دارد. بدین ترتیب در C تابعی معین میشود.

$$\alpha \to \overline{\alpha}$$

که مقادیرش را در C اختیار مینماید.

بعضی از خواص این تابع را اثبات میکنیم.

$\boxed{P_۱}$ تابع $\alpha \to \overline{\alpha}$ یک تعاکس C است.

اولاً هر عدد مختلط مزدوج یک عدد دیگر است:

در حقیقت بنا بتعریف، عدد مختلط $\alpha = a + ib$ مزدوج عدد $\overline{\alpha} = a - ib$ است.

پس داریم:

$$\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$$

ثانیاً اگر α و β دارای یک مزدوج باشند برابرند:

$$\overline{\alpha} = \overline{\beta} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta$$

زیرا اگر $\alpha = a + ib$ و $\beta = c + id$ تساوی $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$، عبارت است از:

$$a - ib = c - id$$

و این ایجاب میکند $a = c$ و $b = d$ یعنی $\alpha = \beta$

تابع $\alpha \to \overline{\alpha}$ با دو سوئی c را روی خودش می‌نگارد بعلاوه $\overline{\alpha} \to \alpha$ نشان میدهد که

این تابع یک تعاکس است (با تابـع عکس منطبق است).

$\boxed{P_۲}$ تعاکس $\alpha \to \overline{\alpha}$ یک خود شکلی بازاء جمع است:

$$\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$$

فـرض میـکـنیـم $\alpha = a + ib$ و $\beta = c + id$ از آنـجـا $\overline{\alpha} = a - ib$ و $\overline{\beta} = c - id$ و

$$\overline{\alpha} + \overline{\beta} = (a + c) - i\,(b + d) \qquad (۶)$$

از طرف دیگر:

$$\alpha + \beta = (a + c) + i\,(b + d)$$

از آنجا:

$$\overline{\alpha + \beta} = (a + c) - i(b + d) \qquad (۷)$$

از مقایسه (۶) و (۷) نتیجه میشود:

$$\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$$

$\boxed{P_۳}$ تعاکس $\alpha \to \overline{\alpha}$ یک خود شکلی بازاء ضرب است:

$$\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$$

با علامت‌های قبلی داریم:

از یک طرف:

$$\overline{\alpha}\,\overline{\beta} = (a - ib)\,(c - id) = (ac - bd) - i(bc + ad) \qquad (۸)$$

از طرف دیگر:

$$\alpha\beta = (a + ib)\,(c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

از آنجا:

$$\overline{\alpha\beta} = (ac - bd) - i\,(bc + ad) \qquad (۹)$$

از (۸) و (۹) نتیجه میشود:

$$\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$$

از این خواص نتیجه میشود که در هر محاسبه روی اعداد مختلط اگر بجای این اعـداد مزدوج‌های آنها را قرار دهیم بجای نتیجه نیز مزدوج آن بدست خواهد آمد.

۷ـ مدول یك عدد مختلط.

اگر $\alpha = a + ib$ و مزدوج آن $\overline{\alpha} = a - ib$ بـاشد حاصل‌ضـرب آنها را حساب

میکنیم:

$$\alpha\bar{\alpha} = (a+ib)(a-ib) = a^۲ + b^۲$$

پس حاصل ضرب یک عدد مختلط در مزدوج خودش یک عـدد حقیقی مثبت یـا صفر است. بنابراین حاصل ضرب $\alpha\bar{\alpha}$ دارای یک جذر حقیقی مثبت یا صفر است. تعریف زیـر را بیان میکنیم:

تعریف- مدول یک عدد مختلط α عدد حقیقی مثبت یا صفر $\sqrt{\alpha\bar{\alpha}}$ است.

مدول $\alpha = a + ib$ عبارت است از:

$$\sqrt{a^۲ + b^۲}$$

آنرا با $|\alpha|$ نشان داده و «مدول α» میخوانیم.

پس تابع $|\alpha| \to \alpha$ مجموعه C را روی R^+ می‌نگارد.

$\boxed{P_۴}$ مدول α صفر نیست مگر اینکه α صفر باشد.

هم ارزی‌های منطقی زیر را در R داریم:

$$(\sqrt{a^۲ + b^۲} = ۰) \iff (a^۲ + b^۲ = ۰) \iff (a = ۰ \text{ و } b = ۰)$$

پس داریم

$$|\alpha| = ۰ \iff \alpha = ۰$$

خاصیت ثابت است.

$\boxed{P_۵}$ تابع $|\alpha| \to \alpha$ یک هم‌شکلی گروه جابجاپذیر C روی گروه ضربی R^+ است.

$$|\alpha\beta| = |\alpha|\,|\beta|$$

بنا به تعریف داریم:

$$|\alpha|^۲ = \alpha\bar{\alpha}, \quad |\beta|^۲ = \beta\bar{\beta}, \quad |\alpha\beta|^۲ = \alpha\beta\,\overline{\alpha\beta}$$

بنا به خاصیت $P_۳$:

$$|\alpha\beta|^۲ = \alpha\beta\,\bar{\alpha}\,\bar{\beta}$$

بنا به جابجا پذیری و شرکت‌پذیری:

$$|\alpha\beta|^۲ = (\alpha\bar{\alpha})(\beta\bar{\beta}) = |\alpha|^۲|\beta|^۲ = (|\alpha|\,|\beta|)^۲$$

این دوعدد حقیقی مثبت که دارای مجذورات متساوی هستند خودشان برابرند. وخاصیت ثابت است.

نتیجه- اگر $\beta = \frac{۱}{\alpha}$ باشد از خاصیت قبلی نتیجه میشود:

$$۱ = |\alpha| \cdot \left|\frac{۱}{\alpha}\right|$$

از آنجا:

$$\left|\frac{۱}{\alpha}\right| = \frac{۱}{|\alpha|}$$

مدول معکوس عدد برابر معکوس مدول آن است.

$\boxed{P_۶}$ مدول مجموع دو عدد مختلط حد اکثر برابر مجموع مدولهای آنها است.

$$|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$$

ابتدا لم زیر را اثبات میکنیم:

لم- هرچه باشد عدد مختلط γ داریم

$$\gamma + \bar{\gamma} \leqslant ۲|\gamma|$$

باید توجه کرد که نامساوی مورد استدلال در R مطرح است: باید از نوشتن نامساویها در C احتراز کرد زیرا هیچ بنیان ترتیب در C معین نمیشود.

فرض کنیم $\gamma = a + ib$ از آنجا:

$$\bar{\gamma} = a - ib$$

داریم: $\gamma + \bar{\gamma} = ۲a$ (عدد حقیقی)

و $|\gamma| = \sqrt{a^۲ + b^۲}$ (عدد حقیقی مثبت یا صفر)

ولی در R داریم:

$$۲a \leqslant ۲\sqrt{a^۲ + b^۲}$$

زیرا اگر a منفی باشد نامساوی واضح است و اگر a مثبت باشد کافی است مجذورات دوطرف را مقایسه و مشاهده کنیم که:

$$a^۲ \leqslant a^۲ + b^۲$$

اثبات $P_۶$.

بنا به تعریف داریم:

$$|\alpha + \beta|^۲ = (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta})$$

بنا به $P_۲$:

$$|\alpha + \beta|^۲ = (\alpha + \beta)(\bar{\alpha} + \bar{\beta})$$

حاصل ضرب را در هیئت C گسترش بدهیم:

$$|\alpha+\beta|^{۲}=\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}+\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\alpha}=|\alpha|^{۲}+|\beta|^{۲}+\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\alpha} \qquad (۱۰)$$

حال فرض میکنیم: $\gamma=\alpha\bar{\beta}$، نتیجه میشود:

$$\bar{\gamma}=\bar{\alpha}\beta \qquad (P_{۳})$$

$$|\gamma|=|\alpha||\beta| \qquad (P_{۵})$$

از لم قبل در مورد γ استفاده میکنیم:

$$\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\alpha}\leqslant ۲|\alpha||\beta| \qquad (۱۱)$$

(۱۰) و (۱۱) موجب میشوند:

$$|\alpha+\beta|^{۲}\leqslant|\alpha|^{۲}+|\beta|^{۲}+۲|\alpha||\beta|$$

از آنجا:

$$|\alpha+\beta|^{۲}\leqslant(|\alpha|+|\beta|)^{۲}$$

دوعدد حقیقی مثبت در همان ترتیب مجذوراتشان قرار دارند. خاصیت $P_{۶}$ ثابت است.

زیر گروه ضرب U اعداد مختلط به مدول واحد.

مجموع اعداد مختلط با مدول واحد را U بنامیم:

$$\alpha\in U \iff (|\alpha|=۱ \quad \text{و} \quad \alpha\in C)$$

۱) ضرب در U درونی است:

زیرا:

$$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta| \qquad (P_{۵})$$

بنابراین:

$$|\alpha\beta|=۱ \Rightarrow (|\beta|=۱ \quad \text{و} \quad |\alpha|=۱)$$

۲) جزء خنثای ۱ ضرب به U تعلق دارد.

۳) هر جزء $\alpha\in U$ دارای معکوسی است که به U تعلق دارد زیرا:

$$\left|\frac{۱}{\alpha}\right|=۱ \Rightarrow \left(|\alpha|=۱ \text{ و } \left|\frac{۱}{\alpha}\right|=\frac{۱}{|\alpha|}\right)$$

پس U یک زیر گروه ضربی C^* است.

فصل دوم

کاربرد هندسی آوند یك عدد مختلط

۱ـ صفحه مختلط.

یک دستگاه مقایسه اورتونورمه $\{o, u, v\}$ در صفحه P را در نظر بگیریم.

نظیر هر نقطه m از صفحه زوج (a, b) دو عدد حقیقی وجود دارد که مختصات نقطه m در دستگاه مقایسه میباشند:

$$om \equiv aou + bou$$

نظیر این نقطه m عدد مختلط یکتای $\alpha = a + ib$ وجود دارد بعکس نظیر هر عدد مختلط مفروض $\alpha = a + ib$ یک نقطه یکتای m از P قرار دارد که مختصات آن b, a است.

مجموعه P نقاط صفحه بدین ترتیب در تناظر دوسوئی با مجموعه C اعداد مختلط است.

و بدین جهت مجموعه C اعداد مختلط، صفحه مختلط نامیده میشود حال مجموعه $\mathcal{E}$ بردارهای صفحه را در نظر بگیریم.

اگر (a, b) زوج مختصات $x \in \mathcal{E}$ در $\{u, v\}$ باشد رابطه:

$$x = au + bv$$

$\mathcal{E}$ را در تناظر دو سوئی با مجموعه زوجهای (a, b) یعنی مجموعه C اعداد مختلط قرار میدهد.

$$\alpha = a + ib \rightleftarrows x = au + bv$$

هرگاه x و x' دو بردار از $\mathcal{E}$ باشند:

$$x = au + bv$$
$$x' = a'u + b'v$$

در گروه جمعی $\mathcal{E}$ عمل کنیم، نتیجه میشود:

$$x + x' = (a + a')\,u + (b + b')\,v$$

حال اگر α و α' اعداد مختلط x و x' باشند:

$$\alpha = a + ib$$
$$\alpha' = a' + ib'$$

در گروه جمعی C عمل کنیم، نتیجه میشود:

$$\alpha + \alpha' = (a + a') + i\,(b + b')$$

بدین ترتیب تناظر $\mathscr{E} \rightleftarrows \mathbf{C}$ یک یک شکلی بازاء جمع است. از آنجا:

$\boxed{P_1}$ گروه جمعی C یک شکل گروه جمعی $\mathscr{E}$ یعنی گروه انتقالهای مستوی است.

تابع* $\zeta' = \alpha + \zeta$

اگر عدد مختلط α مفروض باشد. بهر عدد مختلط ζ یک عـدد مختلط ζ' را همراه کنیم بطوریکه:

$$\zeta' = \alpha + \zeta$$

بدین ترتیب تابعی بدست میآید کـه با دو سوئی C را روی C مـی‌نگارد. اگـر a و m و m' بترتیب نگارهای α و ζ و ζ' در صفحه P باشند داریم:

$$om' \equiv oa + om \qquad \text{یا} \qquad mm' \equiv oa$$

پس نقطه m' تبدیل شده m در انتقال معین شده با بردار α است. در یـک شکلی قبل، هر انتقال x از صفحه P با تابع $\zeta' = \alpha + \zeta$ بیان میشود که α عدد مختلط همراه x است.

۲ـ آوند یك عدد مختلط.

هرگاه m نگار $\alpha = a + ib$ در صفحه مختلط باشد.

اندازه طول om را با r نشان میدهیم: $r \in R^+$

ثابت میکنیم که r مدول α است. زیرا داریم:

$$|\alpha|^2 = a^2 + b^2 \qquad \text{(فصل ۱ : ۷)}$$

ولی قبلاً دیدیم که (۴ فصل، V) اگر a و b مختصات m باشند:

$$r^2 = a^2 + b^2$$

پس داریم:

$$r^2 = |\alpha|^2$$

از آنجا:

$$r = |\alpha|$$

بدین ترتیب یک نمایش هندسی مدول α بدست میآید.

مدول یک عدد مختلط عبارت از یک عدد حقیقی است که اندازه فاصله نگار آن تا مرکز o دستگاه مقایسه است.

حال فرض میکنیم $\alpha \neq o$ نگار m آن بر o منطبق نیست.

نظیر هر عدد $\alpha \neq o$ یک نیم خط om و در نتیجه یک طبقه $\mathcal{C}\,(a)$ اعداد حقیقی مودولو ۲π قرار دارد (V و فصل ۳).

تعریف- «آوند یک عدد مختلط» عبارت از یکی غیر مشخص از اعداد حقیقی طبقه:

$$\mathcal{C}\,(a) \in E_{۲\pi}$$

است که بدین ترتیب همراه a است.

مینویسیم:

$$\arg \alpha \equiv a \qquad (\mathrm{mod}\ ۲\pi)$$

۳- صورت مثلثاتی یك عدد مختلط U.

ابتدا یک عدد مختلط α به مدول واحد را در نظر میگیریم:

$$|\alpha| = ۱$$

α به زیر گروه ضربی U از $\mathbf{C}^*$ تعلق دارد (فصل ۱، ۷) نگار آن متعلق به دایره مثلثاتی Γ به مرکز o است.

مجموعه U اعداد مختلط به مدول واحد در تناظر دو سوئی با مجموعه نقاط دایره Γ بنابراین با مجموعه $E_{۲\pi}$ طبقات مودولو ۲π قرار دارد (V، فصل ۴):

$$\arg \alpha \equiv a \qquad (\mathrm{mod}\ ۲\pi)$$

مختصات m عبارتند از $\cos a$ و $\sin a$ و عدد موهومی α نوشته میشود:

$$\alpha = \cos a + i \sin a$$

و این صورت مثلثاتی عدد مختلط $\alpha \in U$ است:

$$\boxed{(|\alpha| = ۱ \text{ و } \arg \alpha \equiv a \qquad (\mathrm{mod}\ ۲\pi) \iff (\alpha = \cos a + i \sin a}$$

اکنون میخواهیم ثابت کنیم کــه زیر گروه ضربی U به گــروه جمعی $E_{۲\pi}$ یک شکل است.

هرگاه α و α' دو عدد موهومی از U باشند:

$$\arg \alpha \equiv a \quad (\text{mod } ۲\pi) \iff \alpha = \cos a + i \sin a$$
$$\arg \alpha' = a' \quad (\text{mod } ۲\alpha) \iff \alpha' = \cos a' + i \sin a'$$

در گروه ضربی U عمل میکنیم:

$$\alpha\alpha' = (\cos a + i \sin a)(\cos a' + i \sin a')$$
$$= (\cos a \cos a' - \sin a \sin a') + i(\sin a \cos a' + \sin a' \cos a)$$

با استفاده از فرمولهای جمع مثلثات:

$$\alpha\alpha' = \cos(a + a') + i \sin(a + a')$$

از آنجا نتیجه میشود:

$$\boxed{\arg(\alpha\alpha') \equiv \arg \alpha + \arg \alpha' \qquad (\text{mod } ۲\pi)}$$

میتوانیم بیان کنیم:

$\boxed{P_۲}$ زیر گروه ضربی U یک شکل گـروه جمعی $E_{۲\pi}$ طبقات اعـداد حقیقی مدولو ۲π یعنی گروه دورانهای مستوی به مرکز o میباشند.

۴ـ صورت مثلثاتی یك عدد مختلط غیر مشخص.

هرگاه r عدد حقیقی مثبت غیر صفر باشد:

$$r \in R^+ \qquad (r \neq ۰)$$

بهر عدد مختلط $\zeta \in C$ عدد مختلط ζ' را با:

$$\zeta' = r\zeta$$

همراه میکنیم.

بدین ترتیب تابعی معین میشود که با دو سوئی C را روی C می‌نگارد.

اگر z برداری از $\mathscr{E}$ همراه ζ باشد:

$$\zeta = a + ib \quad \rightleftarrows \quad z = au + bv$$

در C عمل میکنیم، داریم:

$$r\zeta = r(a + ib) = ra + irb$$

بردار z' همراه $r\zeta$ عبارت میشود از:

$$z' = rau + rbv$$

در فضای برداری $\mathscr{E}$ عمل میکنیم، نتیجه میشود:

$$z' = r\,(au + bv) = rz$$

نتیجه را بترتیب زیر بیان میکنیم:

اگر z بردار همراه عدد مختلط ζ باشد بردار همراه عدد مختلط $r\zeta$ عبارت از rz است $(r \in R^+)$ حال اگر m و m' نگارهای ζ و ζ' باشند این دو نقطه متعلق بیک نیم خط به مبدأ o هستند چونکه z و rz بیک زیر فضای برداری تعلق دارند $(r > \text{o})$. از آنجا نتیجه میشود که ζ و $r\zeta$ دارای آوندهای متساوی هستند:

$$\boxed{r \in R^+; \quad \zeta \in \mathbf{C}^*; \quad \arg(r\zeta) \equiv \arg\zeta \qquad (\mathrm{mod}\ ۲\pi)}$$

حال اگر $\alpha \in \mathbf{C}^*$ یک عدد مختلط باشد، فرض کنیم:

$$|\alpha| = r \qquad \text{و} \qquad \arg\alpha \equiv a \quad (\mathrm{mod}\ ۲\pi)$$

عدد مختلط α/r دارای مدول واحد است پس:

$$\frac{\alpha}{r} \in U$$

بنا بر آنچه گذشت داریم:

$$\arg\frac{\alpha}{r} \equiv a \qquad (\mathrm{mod}\ ۲\pi)$$

با استفاده از صورت مثلثاتی معلوم $\frac{\alpha}{r} \in U$:

$$\frac{\alpha}{r} = \cos a + i \sin a$$

$$\alpha = r\,(\cos a + i \sin a)$$

و این، صورت مثلثاتی یک عدد مختلط غیر مشخص α از $\mathbf{C}^*$ است:

$$\boxed{(|\alpha| = r \quad \text{و} \quad \arg\alpha \equiv a \quad (\mathrm{mod}\ ۲\pi) \iff (\alpha = r\,(\cos a + i \sin a))}$$

و بالاخره خاصیت زیر را داریم:

$\boxed{P_۳}$ هرچه باشد اعداد مختلط غیر صفر α و α' داریم:

$$\arg(\alpha\alpha') \equiv \arg\alpha + \arg\alpha' \qquad (\mathrm{mod}\ ۲\pi)$$

فرض کنیم $r = |\alpha|$ و $r' = |\alpha'|$ باشد در این صورت:

$$\frac{\alpha}{r} \in U \qquad \text{و} \qquad \frac{\alpha'}{r'} \in U$$

میدانیم که در U:

$$\arg\left(\frac{\alpha}{r}\,\frac{\alpha'}{r'}\right) \equiv \arg\frac{\alpha}{r} + \arg\frac{\alpha'}{r'} \pmod{2\pi}$$

و قبلاً دیدیم که چون r و r' و rr' مثبت هستند:

$$\arg\frac{\alpha\alpha'}{rr'} \equiv \arg\alpha\alpha'; \qquad \arg\frac{\alpha}{r} \equiv \arg\alpha, \qquad \arg\frac{\alpha'}{r'} \equiv \arg\alpha'$$

پس خاصیت ثابت است.

۵ـ تابع $\zeta' = \alpha\zeta$ (α مختلط).

هرگاه عدد مختلط $\alpha \neq 0$ مفروض باشد، بهر عدد مختلط ζ عدد مختلط $\zeta' = \alpha\zeta$ را همراه کنیم. بدین ترتیب تابعی معین میشود که با دو سوئی $\mathbf{C}$ را روی $\mathbf{C}$ می‌نگارد.

۱) ابتدا بحالت $\alpha \in U$ بپردازیم. در این صورت داریم:

$$|\zeta'| = |\zeta|$$

چونکه $|\alpha| = 1$ است و بعلاوه:

$$\arg\zeta' \equiv \arg\alpha + \arg\zeta \pmod{2\pi}$$

نقطه ζ' از نقطه ζ با یک دوران حول o بزاویه باندازه α بدست میآید.

در گروه ضربی $\mathbf{C}^*$ تابع $\zeta' = \alpha\zeta$ را وقتیکه α متعلق به U است «دوران α» مینامند.

۲) اکنون میپردازیم به حالت $\alpha \in R^+$.

میدانیم که اگر $\alpha = r \in R^+$ باشد نقاط ζ و ζ' روی یک نیم خط گذرنده بر o قرار دارند و از نقطه ζ به نقطه ζ' با یک تجانس به مرکز o و نسبت r میتوان رسید.

تابع $\zeta' = r\zeta$ را وقتیکه $r \in R^+$ است «تجانس r» مینامند.

۳) حالت کلی $\alpha \in \mathbf{C}^*$

فرض میکنیم:

$$|\alpha| = r \qquad \text{و} \qquad \arg\alpha \equiv a \pmod{2\pi}$$

داریم:

$$\zeta' = \alpha\zeta \iff \zeta' = r\left(\frac{\alpha}{r}\,\zeta\right)$$

از ζ به $\frac{\alpha}{r}\zeta$ با یک دوران $\frac{\alpha}{r} \in U$ و از $\frac{\alpha}{r}\zeta$ به ζ' بـا یک تجانس $r \in R^+$ میتوان رسید.

بنابراین از ζ به ζ' با ترکیب دو تبدیل میتوان رسید.
این ترکیب جابجا پذیر است. چونکه:

$$r\left(\frac{\alpha}{r}\zeta\right) = \frac{\alpha}{r}(r\zeta)$$

و آنرا «همانندی α» مینامیم
خاصیت زیر را داریم:

$\boxed{P_۴}$ گروه ضربی $\mathbf{C}^*$ یک شکل گروه همانندی‌های مستوی به مرکز o است.

۶ـ توان صحیح اعداد موهومی.

تعریفـ هرگاه عدد مختلط $\alpha \neq ۰$ مفروض باشد بهر عدد طبیعی n عدد مختلط α^n را با روش بازگشتی زیر همراه کنیم:

۱) $\alpha^o = ۱$

۲) با فرض معین بودن α^n و $\alpha^{n+۱}$ را با:

$$\alpha^{n+۱} = \alpha^n \cdot \alpha$$

معین کنیم.

توان منفی α را که با α^{-n} $(n \in N)$ نمایش داده میشود با:

$$\alpha^{-n} = \frac{۱}{\alpha^n}$$

معین نمائیم.

تابع $x \to \alpha^x$ بدین ترتیب معین میشود هرچه باشد $x \in Z$ چون خواص گروه ضربی $\mathbf{C}^*$ با خواص گروه ضربی R^* یکی هستند مـانند آنچه در R^* بـود خـواص زیـر را اثبات مینمایند:

هرچه باشد $\alpha, \beta \in \mathbf{C}^*$ و $n, p \in Z$ داریم:

$$\alpha^n\alpha^p = \alpha^{n+p}$$

$$(\alpha^n)^p = \alpha^{np}$$

$$(\alpha\beta)^n = \alpha^n\beta^n$$

فرض کنیم G_α نگار Z با تابع $x \to \alpha^x$ باشد رابطه:

$$\alpha^x \alpha^{x'} = \alpha^{x+x'}$$

نشان میدهد که تابع $x \to \alpha^x$ یک هم شکلی گروه جمعی Z روی زیر گروه ضربی G_α از C^* است.

در بقیه فصل ما مدول و آوند α^n را با $n \in Z$ مورد بررسی قرار میدهیم.

مدول و آوند a^n $(\alpha \in C^*; n \in Z)$.

هرگاه عدد مختلط $\alpha \neq ۰$ و عدد صحیح نسبی n مفروض باشند. خاصیت زیر را داریم:

$\boxed{P_۵}$

$$(\alpha \in C^* \quad و \quad n \in Z) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |\alpha^n| = |\alpha|^n \\ \arg \alpha^n = n \arg \alpha \qquad (\bmod\ ۲\pi) \end{cases}$$

۱) ابتدا خاصیت مدولها را اثبات نمائیم.

$$|\alpha^n| = |\alpha|^n \qquad (۱)$$

این رابطه بازاء $n = ۰$ ثابت است با فرض درستی آن بازاء $n > ۰$ درستی آنرا بازاء $n + ۱$ اثبات میکنیم، بنا به خاصیت $P_۳$ از فصل قبل:

$$a^{n+۱} = \alpha^n \cdot \alpha \quad \Rightarrow \quad |\alpha^{n+۱}| = |\alpha^n|\,|\alpha|$$

بنا به فرض بازگشتی از آن نتیجه میشود:

$$|\alpha^{n+۱}| = |\alpha|^n\,|\alpha| = |\alpha|^{n+۱}$$

پس رابطه (۱) (هرچه باشد $n \in N$) ثابت است.

بازاء $n = -p$ $(p \in N)$ داریم:

$$\alpha^{-p} = \frac{۱}{\alpha^p}$$

از آنجا:

$$|\alpha^{-p}| = \frac{۱}{|\alpha^p|} = \frac{۱}{|\alpha|^p} = |\alpha|^{-p}$$

پس رابطه (۱) (هرچه باشد $n \in Z$) ثابت است.

۲) حال خاصیت آوندها را اثبات کنیم.

$$\arg \alpha^n = n \arg \alpha \qquad (\bmod\ ۲\pi) \qquad (۲)$$

این رابطه بازاء $n = ۰$ واضح است.

با فرض درستی آن بازاء n درستی آنرا بازاء $n + ۱$ اثبات میکنیم:
بنا به خاصیت $P_۳$ از این فصل:

$$\alpha^{n+۱} = \alpha^n \cdot \alpha$$

که موجب میشود:

$$\arg \alpha^{n+۱} \equiv \arg \alpha^n + \arg \alpha \qquad (\text{mod } ۲\pi)$$

بموجب فرض بازگشتی:

$$\arg \alpha^{n+۱} \equiv n \arg \alpha + \arg \alpha \equiv (n + ۱) \arg \alpha$$

بازاء $n = -p\ (p \in N)$ داریم:

$$\alpha^p \cdot \alpha^{-p} = ۱$$

از آنجا:

$$\arg \alpha^p + \arg \alpha^{-p} \equiv ۰ \qquad (\text{mod } ۲\pi)$$

یعنی:

$$\arg \alpha^{-p} \equiv -\arg \alpha^p \qquad (\text{mod } 2\pi)$$

و چون رابطه (۲) هرچه باشد $n \in N$ درست است:

$$\arg \alpha^{-p} \equiv -p \arg \alpha \qquad (\text{mod } ۲\pi)$$

پس خاصیت (۲) (هرچه باشد $n \in Z$) ثابت است.

دستور مواور.

هرگاه عدد مختلط غیر صفر α و عدد نسبی صحیح n مفروض باشند، با استفاده از صورت مثلثاتی عدد مختلط α:

$$\alpha = r(\cos a + i \cos a)$$

با:

$$|\alpha| = r \qquad \text{و} \qquad \arg \alpha \equiv a \qquad (\text{mod } ۲\pi)$$

بنا به خاصیت $P_۵$ داریم:

$$|\alpha^n| = r^n \qquad \text{و} \qquad \arg \alpha^n \equiv n\alpha \qquad (\text{mod } ۲\pi)$$

بدین ترتیب صورت مثلثاتی α^n بدست میآید:

$$\alpha^n = r^n(\cos na + i \sin a)$$

و این **دستور مواور** است:

هرچه باشد $n \in Z$ و $r \in R^+$ و $a \in R$ داریم:

$$[r(\cos a + i\sin a)]^n = r^n(\cos na + i\sin na)$$

۷ـ حل معادلات دوجمله‌ای.

مسئله ـ با معلوم بودن عدد مختلط $\alpha \neq 0$ و یک عدد طبیعی $n \neq 0$ آیا یک عدد موهومی وجود دارد بقسمیکه:

$$\zeta^n = \alpha$$

باشد؟

$\zeta^n - \alpha = 0$ به «معادله دو جمله‌ای» موسوم است.

هم‌ارزی منطقی زیر را داریم:

$$\zeta^n = \alpha \iff \begin{cases} |\zeta|^n = |\alpha| \\ \arg\zeta^n \equiv \arg\alpha \qquad (\bmod 2\pi) \end{cases}$$

۱) معادله $|\zeta|^n = \alpha$ در R^+ یک ریشه یکتا دارد که می‌نویسیم:

$$|\zeta| = |\alpha|^{\frac{1}{n}}$$

۲) معادله:

$$\arg\zeta^n \equiv \arg\alpha \qquad (\bmod 2\pi)$$

هم ارز است با:

$$n\arg\zeta \equiv \arg\alpha \qquad (\bmod 2\pi)$$

فرض کنیم:

$$\arg\alpha \equiv a \qquad (\bmod 2\pi)$$

باید داشته باشیم:

$$n\arg\zeta \equiv a \qquad (\bmod 2\pi)$$

یعنی:

$$n\arg\zeta = a + 2k\pi \qquad (k \in Z)$$

یا:

$$\arg\zeta = \frac{a}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

بعکس نظیر هر عدد $k \in Z$ یک عدد حقیقی:

$$\frac{a}{n} + \frac{k}{n}2\pi$$

جوابده مقتضی $\arg \zeta$ وجود دارد.

تعداد جوابها را یعنی تعداد طبقات متمایز

$$\mathcal{C}\left(\frac{a}{n}+\frac{k}{n}\,۲\pi\right)$$

را در $E_{۲\pi}$ وقتیکه k مجموعه Z را میپیماید تعیین نمائیم.

برای اینکه یک طبقه، نظیر دو عدد صحیح نسبی k و k' باشد لازم و کافی است که:

$$\frac{a}{n}+\frac{k}{n}\,۲\pi \equiv \frac{a}{n}+\frac{k'}{n}\,۲\pi \qquad (\mathrm{mod}\ ۲\pi)$$

یا:

$$\frac{k-k'}{n}\,۲\pi = ۰ \qquad (\mathrm{mod}\ ۲\pi)$$

پس لازم و کافی است که:

$$\frac{k-k'}{n} \in Z$$

این شرط در Z منطقاً هم ارز است با:

$$n \mid (k-k')$$

یعنی:

$$k \equiv k' \qquad (\mathrm{mod}\ n)$$

میدانیم که در Z، n طبقه مدولو n وجود دارد که نمایندههای آنها عبارتند از:

$$۰,\ ۱,\ ۲,\ \cdots,\ n-۱$$

پس در $E_{۲\pi}$، n طبقه متمایز وجود دارد:

$$\arg \xi \equiv \frac{a}{n}+\frac{k}{n}\,۲\pi$$

با:

$$k \in [۰, n[\subset Z$$

بطور خلاصه، معادله $\xi^n = \alpha$ دارای n جواب در C است:

$$\zeta_{k+۱} = |\alpha|^{\frac{۱}{n}}\left[\cos\left(\frac{a}{n}+\frac{k}{n}\,۲\pi\right)+i\sin\left(\frac{a}{n}+\frac{k}{n}\,۲\pi\right)\right]$$

با:

$$k \in \{۰, ۱, ۲, \cdots, n-۱\}$$

حالت مخصوص:

$$n = ۲$$

معادله $\alpha = \zeta^۲$ دارای دو جواب در C است:

$$\zeta_۱ = |\alpha|^{\frac{۱}{۲}}\left(\cos\frac{a}{۲} + i\ \sin\frac{a}{۲}\right)$$

$$\zeta_۲ = |\alpha|^{\frac{۱}{۲}}\left[\cos\left(\frac{a}{۲}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{a}{۲}+\pi\right)\right] = -|\alpha|^{\frac{۱}{۲}}\left(\cos\frac{a}{۲} + i\ \sin\frac{a}{۲}\right)$$

$$= -\zeta_۱$$

هر عدد مختلط غیر صفر α دارای دو جذر متقابل است.

واژه نامه

A

abstraction	تجرید
abstrait	مجرد
additif	جمعی
adjacent	مجاور
adjoint	معاون
analogie	مشابهت
anneau	حلقه
apériodique	غیر متناوب
appartenance	تعلق
application	کاربرد، نگاشت
appliquer	به کاربردن، نگاشتن
argument	آوند
associatif	شرکت‌پذیر
associativité	شرکت‌پذیری
associer	همراه کردن
automorphe	خودشکل
automorphie	خودشکلی
axiome	اصل موضوعه
axiomatique	اکسیوماتیک

B

Bijection	دوسوگستری
Bijective	دوگستر
Binaire	دوتایی (رابطه)
Binaire	پایه دو (دستگاه)
binaire	دویی (مانند عدداعشاری)
b-naire	b ـ یی (مانند عدد اعشاری)
bissection	نیمسازی

C

Cardinal	اصلی
champ	میدان
chiffrage	رقم‌بندی
classe	طبقه
classe résiduelle	طبقه مانده‌ای
coincidence	انطباق
collection	کلکسیون
commutatif	جابجاپذیر
commutativité	جابجاپذیری
complémentaire	متمم
composant	مؤلفه
composé	ترکیب
composition	ترکیب
congru	هم‌نهشت
congruence	هم‌نهشتی
corps	هیئت
correspondance	تناظر
correspondant	نظیر

construction	ساخت

D

déchiffrage	بسط رقمی
déduction	استنتاج
demi-groupe	نیم گروه
dénombrement	شمارش
dense	متراکم
densité	تراکم
déplacement	تغییر مکان
disjoint	متغایر
distributif	توزیع‌پذیر
distributivité	توزیع‌پذیری
domaine	حوزه، ناحیه
domaine d'intégrité	حوزهٔ تماسیت

E

écart	دوری لغزش
élément	جزء
emboîté	فراگیر (فاصله)
endomorphe	درون شکل
endomorphie	درون شکلی
ensemble	مجموعه
équilibre	هم‌تراز
équimultiple	هم‌مضرب
exponentiation	نمایی کردن
exponentiel	نمایی
équipotence	هم‌توانی
équipotentiel	هم‌توان
équivalence	هم‌ارزی
équivalence - logique	هم‌ارزی منطقی
équivalent	هم‌ارز
extention	گسترش
externe	برونی

F

figuration	صورت‌بندی
figure	صورت
fini	متناهی

G

général	عمومی، کلی
graduer	مدرج کردن

I

idéal	ایده‌آل
idéal principal	ایده‌آل اصلی
image	نگار
immergé	غوطه‌ور
immersion	غوطه‌وری
implication	استلزام
impliquer	مستلزم بودن
impropre	ناجور
inclus	گنجیده
inclusion	گنجیدگی
indentique	همان
identité	همانی
induction	استقراء
induit	القا شده
infini	نامتناهی، بی‌نهایت
injection	درون گستری
injectif	درون گستر
interne	درونی
intersection	فصل مشترك
intuition	مکاشفه، شهود
intuitive	شهودی

inversion	معکوسیت، انعکاس
involution	تعاکس

L

lacunes	خلل
lemme	لم
lexicographique	لغتی
logiqument equivalent	منطقاً هم‌ارز

M

magorant	فرابند
magorer	فرابستن
masse	جرم
minorant	فروبند
minorer	فروبستن
module	قدر مطلق، مدول
modulo	مدولو
monogène	تکزاد
monotone	یك‌نواخت
multiplicatif	ضربی

N

neutre	خنثی
notation	علامت
notion	مفهوم
numération	شمار

O

opération	عمل
opératoire	اوپراتور
ordinal	ترتیبی
ordonné	مرتب
ordre	ترتیب
orthonormé	ترتیب

P

partage	بخش (اصل)
partiel	جزیی
périodique	متناوب
permutation	مبادله
prolongement	امتداد
proposition	گزاره

Q

quantificateur	چندی‌نما

R

rapporteur	نقاله
récurrence	بازگشتی
réflexive	خودپذیر
réflexivité	خودپذیری
régulier	منتظم
relatif	نسبی
relation	رابطه
restreint	محدود
réunion	اجتماع

S

sous-anneau	زیرحلقه
sous-groupe	زیرگروه
sens-ensemble	زیرمجموعه
sous-espace	زیرفضا
strict	اکید
strictement	اکیداً
supplémentaire	مکمل
sur-corps	فوق‌هیئت

surjection	برون‌گستری
surjectif	برون‌گستر
symbole	سمبل، اسمنما
symétrie	تقارن
symétrisation	قرینه‌پذیر کردن

T

théorie	تئوری
topologie	توپولژی
total	کلی
transitif	سرایت‌پذیر
transitivité	سرایت‌پذیری
trou	سوراخ

U

unicité	یکتایی
unique	یکتا
unité	واحد، یکه
univoque	یکسو، یک‌ارزشی

V

vérifié	سازگار
vérifier	صدق کردن، سازگارشدن
vide	تهی
voisinage	مجاورت

فهرست راهنما

اجتماع: **۱۷**
اجزاء متقارن: **۴۲**، ۶۹، ۲۶۰
اجزاء مثلثات: **۳۱۸**
اصل ارشمیدس: **۳۱۹**، ۲۲۰، ۲۳۹، ۲۹۲
اصل نیمسازی: **۲۴۷**، ۲۴۶، ۲۹۳
اصلهای په آنو: **۵۰**، ۵۱، ۵۲
اعداد اول: **۱۱۰**
اعداد b-ئی: **۱۵۳**
اعداد حقیقی مثبت: **۱۷۹**، ۱۸۱، ۱۸۶
اعداد طبیعی: **۴۷**، ۴۹
اعداد مختلط: **۳۲۵**، ۳۲۷، ۳۳۳، ۳۳۵، ۳۳۸، ۳۴۰، ۳۴۶
اعداد منطق: **۱۲۳**، ۱۲۴، ۱۴۹، ۱۵۴، ۱۶۴، ۱۷۰، ۱۷۶
اعداد معکوس: **۲۶۷**
اعداد نسبی: **۲۵۵**، ۲۵۷
اعدادی که نسبت بهم اولند: **۱۰۴**
ایده‌آل‌ها: **۳۰**

بخش: **۷۹**، ۸۰، ۱۰۹، ۲۸۹، ۲۹۴
بردارها: **۲۹۰**، ۲۹۳، ۳۱۵، ۳۱۶، ۳۱۷
بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك: **۱۰۴**، ۱۰۵، ۱۰۹
بسط رقمی یك صورت‌بندی: **۹۵**
بسط مبنای b: **۹۳**
بنیان توپولوژیك Q_b^+: **۱۷۶**
بنیان فضای برداری روی یك هیئت K: **۳۲**
بنیان گروه: **۲۲**
بنیان نیم گروه: **۱۹**
پاره‌خطها: **۲۹۰**
پایداری بازاء عمل جمع: **۵۹**، ۲۰۰، ۲۶۹
پایداری بازاء نسبت ترتیب: **۸۶**
پایداری رابطه ترتیب بازاء ضرب: **۲۰۶**
پایداری رابطه ترتیب نسبت جمع و ضرب: **۱۴۹**

تابع: **۳۴**، ۳۵
تابع مثلثاتی: **۳۲۰**، ۳۲۲
تجزیه: **۱۱۱**، ۱۱۲
تحویل دو کسر بیك مخرج: **۱۲۹**
ترتیب: **۱۱**، ۱۳، ۹۵، ۱۹۱، ۲۶۸، ۲۶۹
ترکیب: **۱۵**، ۱۷، ۳۱، ۳۲، ۳۸، ۴۰، ۵۶، ۵۷، ۵۸
تعاکس: **۴۳**
تعلق: **۲۹۴**
تغییر واحد: **۲۳۱**
تفریق: **۵۶**، ۱۴۲، ۱۹۸، ۲۰۱، ۲۶۲
تقارن: **۷**، ۱۳۰ ۱۳۱
تقسیم: **۸۲**، ۸۳، ۱۴۷، ۲۷۰
تناظر: **۶۱**، ۱۸۳

توان: **۳۵۱**
توزیع‌پذیری: **۲۴**، ۷۴، ۱۰۱، ۱۰۷، ۱۴۴، ۲۰۵، ۲۶۷، ۳۱۴، ۳۳۷

جابجاپذیری: **۱۹**، ۳۰، ۵۴، ۷۶، ۹۹، ۱۰۵، ۱۳۷، ۱۴۳، ۱۹۸، ۲۰۴، ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۶۶، ۳۱۳، ۳۳۴، ۳۳۵
جبر طبقات مدولو: **۱۱۸**، ۱۱۹
جذر: **۱۸۱**، ۱۸۴، ۲۰۸، ۲۰۹، ۲۱۰
جزء خنثی: **۲۱**، ۵۴، ۷۷، ۹۰، ۱۳۹، ۱۴۵، ۱۹۹، ۲۰۴، ۲۶۰، ۲۶۶، ۲۹۰، ۳۳۴، ۳۳۰
جمع: **۵۳**، ۱۳۷، ۱۶۱، ۱۹۷، ۲۹۲، ۲۹۸، ۳۰۲، ۳۱۴، ۳۳۳

حلقه: **۲۸**
حفره تمامیت: **۲۸**

خودپذیری: **۷**

دایره مثلثاتی: **۳۱۹**
درازی یك فاصله: **۱۶۸**
دستگاه مقایسه ارتونورمه: **۳۱۷**
دستور موار: **۳۵۳**
دورانها-انتقالها: **۳۰۷**

رادیان: **۳۱۸**
رشته: **۱۶۷**، ۱۸۵
رقم‌بندی: **۸۹**
روش شمارش: **۶۳**

زاویه‌ها: **۲۴۰**، ۲۹۴، ۲۹۵، ۲۹۶، ۳۰۰
زیر فضا: **۳۳**، ۳۰۸
زیر گروه: **۲۴**، ۲۷۸، ۳۴۴

سرایت‌پذیری: **۸**
سمبلهای منطقی: **۶**
سوراخها و خلل: **۲۱۵**، ۲۱۱

شرکت‌پـذیـری: **۳۹**، ۵۳، ۷۵، ۱۰۶، ۱۳۸، ۱۴۴، ۱۹۸، ۲۰۴، ۲۶۱، ۲۶۷، ۳۳۴، ۳۳۵

صفحه مختلط: **۳۴۵**
صورت مثلثاتی یك عدد: **۳۴۷**، ۳۴۸

ضرب: **۷۳**، ۱۴۱، ۱۶۲، ۲۰۲، ۲۶۴، ۲۷۰، ۳۲۱، ۳۳۳

غوطه‌وری: **۱۳۴**، ۲۳۸

فاصله‌ها: **۶۰**، ۱۶۷
فرابند-فروبند: **۷۱**
فصل مشترك: **۱۶**
فضای $\mathscr{E}$ بردارهای صفحه: **۳۰۸**

قضیهٔ فیثاغورث: **۳۱۵**
قوه صحیح یك عدد: **۸۴**، ۸۵، ۲۷۴، ۲۷۶، ۲۸۰، ۲۸۳

کاربرد هندسی: **۲۸۹**، ۳۴۵
کارتزین (دکارتی): **۳۱۶**
کمیتها: **۳۱۴**
کوچکترین مضرب مشترك: **۹۹**، ۱۰۶

گسترش مفهوم اندازه: **۳۰۲**

گنجیدگی: **۴**

لگاریتم: **۸۸**، ۲۷۴

مانده: **۱۱۵**
مجموعه‌ها: **۳**، ۳۷، ۶۳، ۶۵، ۶۸، ۶۹
مدول: **۳۴۱**
مسئله ارشمیدس: **۲۲۱**
مضربها: **۹۸**، ۱۰۱، ۲۱۷، ۲۳۸
معادلات: **۳۵۴**
معکوسیت: **۱۴۶**، ۲۰۶
مقدار مطلق: **۲۶۳**
مقسوم‌علیه‌های مشترک: **۱۰۳**، ۲۷۲

نگاشت همانی: **۴۱**
نمائی کردن: **۲۸۷**
نمای مطلق: **۱۱۸**

هم‌ارزی: **۹**، ۱۰، ۱۲۷
همشکلی: **۴۴**
هم‌نهشتی: **۱۱۴**، ۱۱۶، ۳۰۴، ۳۰۶
هندسه یک‌بعدی: **۲۸۹**
هیئت: **۲۷**، ۲۹

یکتائی: **۲۱**، ۱۱۲
یک‌شکلی: **۱۳۹**، ۱۴۵