مجموعه سؤال ها و جواب های

المپیاد ریاضی کانادا

۲۰۰۲-۱۹۹۴

Canadian Mathematical Society

گردآوری و ترجمه : سام نریمان

المپیاد ریاضی کانادا

(از ۱۹۹۴ تا ۲۰۰۲)

گردآوری و ترجمه
سام نریمان

نشر مهر
تهران، ۱۳۸۱

فهرست مطالب

بخش اول ـ مجموعه سؤال‌ها با پاسخ تشریحی ۱

مجموعه سؤال‌های المپیاد ریاضی کانادا سال ۱۹۹۴ با پاسخ تشریحی ۳

مجموعه سؤال‌های المپیاد ریاضی کانادا سال ۱۹۹۵ با پاسخ تشریحی ۱۵

مجموعه سؤال‌های المپیاد ریاضی کانادا سال ۱۹۹۶ با پاسخ تشریحی ۲۱

مجموعه سؤال‌های المپیاد ریاضی کانادا سال ۱۹۹۷ با پاسخ تشریحی ۲۹

مجموعه سؤال‌های المپیاد ریاضی کانادا سال ۱۹۹۸ با پاسخ تشریحی ۳۹

مجموعه سؤال‌های المپیاد ریاضی کانادا سال ۱۹۹۹ با پاسخ تشریحی ۴۹

مجموعه سؤال‌های المپیاد ریاضی کانادا سال ۲۰۰۰ با پاسخ تشریحی ۵۹

مجموعه سؤال‌های المپیاد ریاضی کانادا سال ۲۰۰۱ با پاسخ تشریحی ۶۷

مجموعه سؤال‌های المپیاد ریاضی کانادا سال ۲۰۰۲ با پاسخ تشریحی ۷۷

بخش دوم ـ سؤال‌های ویژه با پاسخ تشریحی ۸۷

بخش سوم ـ سؤال‌هایی برای تمرین ۹۹

مقدمه

توسعه‌ی ریاضیات نظری در کشور عزیزمان ایران، جایگاه ویژه‌ای را به خود اختصاص داده است مشعل فروزان آن از قرن‌ها پیش توسط نام‌آورانی همچون شیخ بهایی، ابوریحان بیرونی، شرف الدین طوسی، حکیم عمر خیام، ملاعلی قوشچی،... افروخته شده است.

کسب موفیت‌های روزافزون این عزیزان مرهون تلاش‌های بی‌حد و حصر این نام‌آوران تاریخ بشریت بوده است.

امّا ریاضیات

ریاضیات دانشِ بستگی‌های کمّیّتی و شکل‌های فضایی دنیای واقع است.

موضوع ریاضیات نظری، عبارت است از بررسی شکل‌های فضایی و بستگی‌های کمّیّتی دنیای واقع و بنابراین، موضوعی واقعی است.

این حقیقت که موضوع ریاضیات، به صورتی انتزاعی در می‌آید، در ظاهر با ساده‌نگری ممکن است این گمان را تقویت کند که تنها سرچشمه‌ی آن ذهن خلّاق آدمی است و سرچشمه‌ی اصلی آن، یعنی دنیای برون پنهان بماند و خود را نشان ندهد. در واقع، برای این که بتوان شکل‌ها و کمیّت‌ها را بررسی کرد، بناچار باید آن‌ها را از مضمون اصلی خود جدا کنیم و مضمون را به عنوان چیزی که در

بررسی ما دخالتی ندارد، کنار بگذاریم. با همه‌ی این‌ها، انتزاعی بودن ریاضیات، به معنای دور شدن از واقعیت‌های مادی نیست و در پیوند ناگسستنی اندوخته‌های ریاضی و دانش‌های طبیعی است که آموزش ریاضیات، پیاپی گسترش می‌یابد، به نحوی که تعریف کلّی ریاضیات (آن‌گونه در این جا آوردیم)، هر روز مضمونی غنی‌تر از روز پیش پیدا می‌کند.

با توجه به توسعه شبکه‌های اطلاع رسانی خصوصاً اینترنت دسترسی به اطلاعات بسیار آسان شده است. به این منظور این جانب مبادرت به ترجمه و گردآوری سؤالات المپیاد کانادا نمودم اهم مطالب این کتاب را می‌توانید در سایت اینترنتی www.camel.math.ca جستجو کنید.

المپیاد کانادا هر ساله توسط جامعه ریاضی کانادا برگزار می‌شود که کمیته ریاضی (CMO Committee) به مدیریت آن می‌پردازد. المپیاد کانادا از سال ۱۹۶۹ تاکنون به منظور ارتقاء سطح علمی دانش‌آموزانی که در استان‌های مختلف در سطح وسیعی مطالعه می‌کنند، پایه‌گذاری شده است.

تعداد سؤالها برای هر امتحان ۵ تا می‌باشد و وقت مجاز ۴/۵ ساعت می‌باشد (البته توصیه می‌شود در هنگام خواندن این کتاب قبل از خواندن جواب سؤالات حداقل ۴۵ دقیقه روی هر سؤال فکر کنید.)

در سال ۲۰۰۲ که ۳۴امین المپیاد کانادا برگزار شد تعداد شرکت‌کنندگان ۸ نفر از ۴۷ مدرسه از ۸ استان شرکت نموده که افراد برتر برای المپیاد جهانی تربیت شدند. شایان ذکر است که کانادا در المپیاد بین‌المللی در سال ۲۰۰۲ مقام دوازدهم را کسب کرد. (البته ایران یازدهم شد.) هر سؤال از این ۵ سؤال ۷ نمره دارد و طبق گزارشی که CMO داده است در سال ۲۰۰۲ افرادی که امتیازی بین ۲۸ تا ۳۵ آورده‌اند تنها ۱۰ نفر و افرادی که امتیاز بین ۲۰ تا ۲۸ آوردند تنها ۱۲ نفر بوده‌اند.

بخش دوم کتاب برگزیده‌ای از سؤال‌های امتحانات دانشجویی آمریکا است. که سؤالات دشواری هستند. (اگر چه این سؤال‌ها سخت هستند ولی حداقل چند دقیقه‌ای روی سؤالها فکر کنید و بعداً حل آنها را نگاه کنید.)

بخش سوم کتاب شامل ۵۱ سؤال از المپیادهای کشورهای روسیه، آمریکا و لهستان و.... است که این‌ها را نیز می‌توانید در سایت‌های اینترنتی بیابید. این سؤالها بدون حل هستند و توصیه می‌شود که به حل کردن آنها مبادرت کنید.

و امّا در پایان: از تمام عزیزان خصوصاً پدر و مادرم که اینجانب را در امر انتشار این کتاب کوچک یاری دادند صمیمانه سپاسگزارم.

و در انتها:

از تمام شما عزیزانی که در خواندن این گردآوری زحمت فرموده و حوصله به خرج دادید از شما هم صمیمانه تشکر و سپاسگزاری می‌نمایم و تقاضا دارم کلیّه غلط‌های چاپی، را به آدرس ناشر ارسال فرمایید تا در چاپ‌های بعدی مبادرت به اصلاح آن نمایم.

(اجرتان مقبول و سعی‌تان مشکور باد)

پاییز ۱۳۸۱ تهران

سام نریمان

بخش اول

مجموعه سؤال‌ها

با پاسخ تشریحی

۱

مجموعه سؤال‌های:

المپیاد ریاضی کانادا

۱۹۹۴

با پاسخ تشریحی

سؤال ۱: مقدار مقابل را محاسبه کنید:

$$\sum_{n=1}^{1994} (-1)^n \frac{n^2+n+1}{n!}$$

حل ۱: ابتدا مقدار این جمع را برابر s قرار می‌دهیم داریم:

$$S=\sum_{n=1}^{1994} (-1)^n \left(\frac{n}{(n-1)!}+\frac{n+1}{n!}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{1993} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n!}+\sum_{n=1}^{1994} (-1)^n \frac{n+1}{n!}$$

$$=-1+\frac{1995}{1994!}$$

حل ۲: برای عدد مثبت و صحیح k تعریف می‌کنیم

$$S(k)=\sum_{n=1}^{k} (-1)^n \frac{n^2+n+1}{n!}$$

اکنون، بوسیله استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم

$$(*)\ S(k)=-1+(-1)^k \frac{k+1}{k!}$$

مطلوب مسئله برای $k=1994$ است. برای $k=1$ بدست می‌آوریم

$S(1)=-3=-1-\frac{2}{1!}$ فرض حکم برای k درست باشد برای $k+1$ اثبات می‌کنیم.

$$S(k+1)=S(k)+(-1)^{k+1} \frac{(k+1)^2+k+1+1}{(k+1)!}$$

$$=-1+(-1)^k \frac{k+1}{k!}+(-1)^{k+1}\left(\frac{k+1}{k!}+\frac{k+2}{(k+1)!}\right)$$

$$=-1+(-1)^{k+1} \frac{k+2}{(k+1)!}$$

و حکم به استقرأ ثابت است.

سؤال ۲: نشان دهید در صورتی $\sqrt{2}-1$ به توان هر عدد صحیح مثبت برسد می‌توان آن را بصورت $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ نوشت بطوری‌که m عددی صحیح و مثبت است. بعنوان مثال $(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2} = \sqrt{9}-\sqrt{8}$

حل ۱: فرض کنید $a = (\sqrt{2}-1)^n$ و $b = (\sqrt{2}+1)^n$ به روشنی معلوم است $ab = 1$ قرار می‌دهیم $c = \frac{a+b}{2}$ و $d = \frac{b-a}{2}$. اگر n زوج باشد پس $n = 2k$ و طبق بسط باینری داریم

$$c = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\sqrt{2}^{\,n-i} + (-1)^i\sqrt{2}^{\,n-i}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{k}\binom{2k}{2j}\sqrt{2}^{\,2k-2j} = \sum_{j=0}^{k}\binom{2k}{2j}2^{k-j} \qquad (1)$$

و

$$\frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\sqrt{2}^{\,n-i} - (-1)^i\sqrt{2}^{\,n-i}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{2k}{2j+1}\sqrt{2}^{\,2k-2j-1} = \sum_{j=0}^{k-1}\binom{2k}{2j+1}2^{k-j}$$

نشان دادیم هر جفت $\frac{d}{\sqrt{2}}$ و c اعداد مثبت و صحیح هستند و به طور مشابه اگر n فرد باشد بدست می‌آوریم $\frac{c}{\sqrt{2}}$ و d نیز عددهای مثبت و صحیح هستند. از طرف دیگر c^2 و d^2 نیز عددهای صحیح هستند. پس بدست می‌آوریم:

$$c^2 - d^2 = \frac{1}{4}\left((a+b)^2 - (b-a)^2\right) = ab = 1$$

در نتیجه قرار دهیم $m = c^2$ پس $d^2 = m - 1 = c^2 - 1$ و همچنین

$$a = c - d = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}$$

حل ۲: فرض کنیم m و n اعداد مثبت و صحیح باشند. می‌بینیم:

$$(\sqrt{2}-1)^n(\sqrt{2}+1)^n=1=(\sqrt{m}-\sqrt{m-1})(\sqrt{m}+\sqrt{m+1})$$

بنابراین بدست می‌آوریم که $(\sqrt{2}+1)^n=\sqrt{m}+\sqrt{m+1}$ اگر تنها اگر

$$(*)\ (\sqrt{2}-1)^n=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}\Leftrightarrow$$

فرض کنیم m و n در برابری (*) صدق کند، جمع این دو برابری نتیجه می‌شود.

$$2\sqrt{m}=(\sqrt{2}-1)^n+(\sqrt{2}+1)^n$$

در نتیجه:

$$(**)\ m=\frac{1}{4}((\sqrt{2}-1)^{2n}+2+(\sqrt{2}-1)^{2n})$$

اکنون نشان می‌دهیم همه قدم‌های بالا برگشت‌پذیر است. و m را بصورت برابری (**) تعریف می‌کنیم. با توجه به برابری ** داریم:

$$\sqrt{m}=\frac{1}{2}\left[(\sqrt{2}-1)^n+(\sqrt{2}+1)^n\right]$$ و

$$\sqrt{m-1}=\frac{1}{2}\left[(\sqrt{2}+1)^n-(\sqrt{2}-1)^n\right]$$

بنابراین $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}=(\sqrt{2}-1)^n$ و این همان چیزی است که می‌خواستیم.

بالاخره با استفاده از بسط بانیری ثابت می‌کنیم $(\sqrt{2}-1)^{2n}+(\sqrt{2}+1)^{2n}$ عددی صحیح است.

$$(\sqrt{2}-1)^{2n}+(\sqrt{2}+1)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\left[(-1)^k\,2^{\frac{(2n-k)}{2}}+2^{\frac{2n-k}{2}}\right]$$

$$=\sum_{l=0}^{n}\binom{2n}{2l}2^{n-l+1}$$

در نتیجه $۲^{n-l+1} \overset{۴}{\equiv} ۰$ برای $l = ۱, ۲, \dots, n-۱$ پس
$(۱+\sqrt{۲})^{۲n} + ۲ + (۱-\sqrt{۲})^{۲n}$ مضربی از ۴ است و این همان چیزی است که باید ثابت می‌کردیم.

حل ۳: ما با استفاده از استقرای ریاضی نشان خواهیم داد:

$$(\sqrt{۲}-۱)^n = \begin{cases} a\sqrt{۲}-b\ , \quad ۲a^۲ = b^۲+۱ & n = ۲k+۱ \\ a-\sqrt{۲}\,b\ , \quad a^۲ = ۲b^۲+۱ & n = ۲k \end{cases} \qquad (*)$$

پس اگر n فرد باشد آنگاه $m = ۲a^۲$، اگر n زوج آنگاه $m = a^۲$ باشد و به این طریق مسئله حل می‌شود. حل را با استقرأ دنبال می‌کنیم:

$(\sqrt{۲}-۱)^۱ = ۱.\sqrt{۲}-۱\ ,\ ۲(۱^۲) = ۱^۲+۱\ ,\ (\sqrt{۲}-۱)^۲ = ۳-۲\sqrt{۲}\ ,$
$۳^۲ = ۲(۲^۲)+۱$

فرض کنید n فرد باشد و در شرط * صدق کند و چون n فرد است پس:

$۲a^۲ = b^۲+۱$

$$(\sqrt{۲}-۱)^{n+۱} = (a\sqrt{۲}-b)(\sqrt{۲}-۱) = (۲a+b)-(a+b)\sqrt{۲} =$$
$$= A-B\sqrt{۲}\quad ,\quad A = ۲a+b\quad ,\quad B = a+b$$

بنابراین:

$$A^۲ = ۲a^۲+۴ab+b^۲+۲a^۲ = ۲a^۲+۴ab+۲b^۲+۱ = ۲B^۲+۱$$

اکنون فرض کنید n زوج است و در شرط * صدق می‌کند پس $a^۲ = ۲b^۲+۱$

$$(\sqrt{۲}-۱)^{n+۱} = (a-b\sqrt{۲})(\sqrt{۲}-۱) = (a+b)\sqrt{۲}-(a+۲b) =$$
$$= A\sqrt{۲}-B\ ,\ A = a+b\ ,\ B = a+۲b$$

پس:

$$۲A^۲ = ۲a^۲ + ۴ab + ۲b^۲ = a^۲ + ۴ab + ۴b^۲ + a^۲ - ۲b^۲ = B^۲ + ۱$$

حل ۴: داریم: $(\sqrt{۲} - ۱)^۱ = \sqrt{۲} - ۱\ ,\ (\sqrt{۲} - ۱)^۲ = ۳ - ۲\sqrt{۲}\ ,$

$$(\sqrt{۲} - ۱)^۳ = ۵\sqrt{۲} - ۷\ ,\ (\sqrt{۲} - ۱)^۴ = ۱۷ - ۱۲\sqrt{۲}$$

ماحدس می‌زنیم $(\sqrt{۲} - ۱)^n = s_n\sqrt{۲} + t_n$ (*) بطوری‌که $t_۱ = ۱\ ,\ s_۱ = ۱$ و $s_{n+۱} = (-۱)^n\,(|s_n| + |t_n|)\ ,\ t_{n+۱} = (-۱)^{n+۱}\,(۲\,|s_n| + |t_n|)$ بدست می‌آوریم s_n مثبت (منفی) است اگر n فرد (زوج) باشد و t_n منفی (مثبت) است اگر n فرد (زوج) باشد. ما با استفاده از استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم، (*) را می‌توان بصورت $\sqrt{m} - \sqrt{m - ۱}$ به ازای بعضی از mها، به ازای $n = ۱$ و $n = ۲$، بررسی حکم بسیار ساده است.

فرض کنید حکم برای $n \geq ۲$ درست است.

$$(\sqrt{۲} - ۱)^{n+۱} = (s_n\sqrt{۲} + t_n)(\sqrt{۲} - ۱) = (t_n - s_n)\sqrt{۲} + (۲s_n + t_n)$$

اگر n فرد باشد داریم: $t_n - s_n = -(|t_n| + |s_n|) = s_{n+۱}$

$$۲s_n - t_n = ۲(|s_n| + |t_n|) = t_{n+۱}$$

اگر n زوج باشد داریم: $۲s_n - t_n = ۲(|s_n| + |t_n|) = t_{n+۱}$

$$t_n - s_n = |t_n| + |s_n| = s_{n+۱}$$

ما نشان داده‌ایم که * برای همه nها درست است. اکنون توجه کنید.

$$(s_{n+۱}\sqrt{۲})^۲ - t_{n+۱}{}^۲ = ۲(s_n{}^۲ - ۲s_n.t_n + t_n{}^۲) - (۴s_n{}^۲ - ۴s_n.t_n + t_n{}^۲)$$

$$= -۲s_n{}^۲ + t_n{}^۲ = -((s_n\sqrt{۲})^۲ - t_n{}^۲).$$

چون $1 = (s_1\sqrt{2})^2 - t_1^2$ و این نشان می‌دهد $(s_n\sqrt{2})^2 - t_n^2 = (-1)^{n+1}$

برای همه nها برقرار است.

برای کامل کردن برهان کافیست که قرار دهیم $m = (s_n\sqrt{2})^2$ و $m - 1 = t_n^2$

برای وقتی که n فرد است و قرار می‌دهیم $m = t_n^2$ و $m - 1 = (s_n\sqrt{2})^2$

وقتی n زوج است.

سؤال ۳: ۲۵ نفر دور نیم دایره‌ای نشسته‌اند. هر ساعت بین این افراد رأی‌گیری می‌شود و هر فردی جواب بله می‌دهد یا جواب خیر، هر فردی بصورت زیر رأی می‌دهد: در n امین رأی‌گیری اگر جواب این شخص مشابه جواب حداقل یکی از دو فردی که بین آنها نشسته است بود، آن وقت در (n + ۱) امین رأی‌گیری هم همان جوابی را که در n امین رأی‌گیری داده بود می‌دهد. اما اگر در رأی‌گیری nام جواب او با جواب هر دو نفری که بین آنها نشسته است متفاوت بود، در رأی‌گیری (n + ۱) ام جوابی را می‌دهد که با جوابی که در رأی‌گیری nام داده است متفاوت است. ثابت کنید هر چند همه افراد در دفعه اول رأی داده‌اند و در دفعه‌های بعد به روش بالا رأی می‌دهند زمانی وجود دارد که هیچ کس بعد از آن جوابش را تغییر نمی‌دهد.

جواب: در ابتدا توجه کنید اگر دو همسایه (دو نفری که کنار یکدیگر نشسته‌اند) جواب مشترکی در n امین رأی‌گیری داشته باشند در (n + ۱) امین رأی‌گیری نیز جواب مشترکی خواهند داشت در نتیجه هیچ کدام از آنها جواب خود را بعد از n امین رأی‌گیری عوض نمی‌کنند.

فرض کنیم A_n مجموعه‌ای از افراد باشند بطوری‌که با حداقل یکی از

همسایگانش در n امین رأی‌گیری موافق باشند. با توجه به پارگراف قبلی $A_n \subset A_{n+1}$ برای هر $n \geq 1$. اگر ما بتوانیم به ازای یکی از nها A_n همه ۲۵ نفر را شامل می‌شود مسئله حل شده است.

چون تعداد افراد فرد است. در رأی‌گیری اول دو نفر وجود دارند که با هم همسایه هستند و در رأی دادن با هم موافق هستند. پس A_1 حداقل شامل ۲ نفر است و چون $A_n \subset A_{n+1}$ برای هر n پس عددی مانند T وجود دارد که کوچکتر از ۲۵ است و $A_T = A_{T+1}$ فرض کنید که A_T همه ۲۵ نفر را شامل نشود. در نتیجه، انتظار داریم با استفاده از این به تناقض برسیم. چون A_T تهی نیست پس دو همسایه وجود دارند که ما آنها x و y می‌نامیم و $x \in A_T$ ولی $y \notin A_T$ چون x در مجموعه A_T است پس در رأی‌گیری $T, T+1$ جواب یکسانی داده است. اما $y \notin A_T$ جواب y در رأی‌گیری Tام با جواب x در این رأی‌گیری متفاوت است. در حقیقت ما می‌دانیم در رأی‌گیری Tام y با هر دو همسایش مخالف بوده و جواب‌های متفاوت نسبت به آن دو داده است پس او جوابش را در رأی‌گیری $(T+1)$ ام عوض می‌کند پس در $(T+1)$ امین رأی‌گیری y جواب یکسانی با x داده‌اند. و این نشان می‌دهد که $y \notin A_{T+1}$. اما می‌دانیم $y \notin A_T$ و این تناقض است چون $A_T = A_{T+1}$. پس A_T همه ۲۵ نفر را شامل می‌شود و حکم مسئله ثابت شده است.

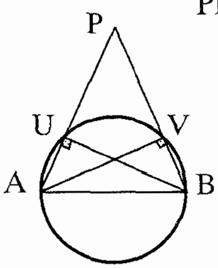
سؤال ۴: فرض کنید AB قطر دایره Ω باشد و P نقطه‌ای باشد که روی خط گذرنده از دو نقطه B و A قرار ندارد. همچنین فرض کنید خط گذرنده از P و A دایره‌ی Ω را در نقطه U قطع کند و نیز خط گذرنده از P و B دایره‌ی Ω را در نقطه V قطع کند. (ممکن است بعضی از نقطه‌ها بر هم منطبق شوند مثلاً اگر P روی محیط دایره باشد $P = U = V$). می‌دانیم $|PU| = s\,|PA|$ و $|PV| = t\,|PB|$

بـطوری‌که t و s اعـداد حـقیقی نامنفی هستند. کسـینوس زاویـه $\hat{APB}$ را بـر حسب s و t بدست آورید.

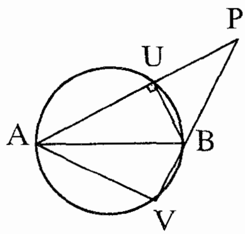
جواب: ۳ حالت را باید بررسی کرد.

حالت اول: اگر نقطه P خارج دایره Ω باشد (شکل I و II و III را ببینید) پس $\hat{AVB} = \hat{AUB} = \frac{\pi}{۲}$ و داریم:

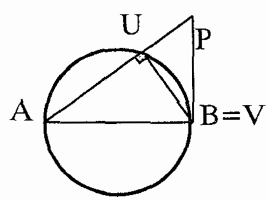
$$\mathrm{Cos}\,(APB) = \frac{PU}{PB} = \frac{PV}{PA} = \sqrt{\frac{PU}{PA} \cdot \frac{PV}{PB}} = \sqrt{st}$$



شکل I



شکل II

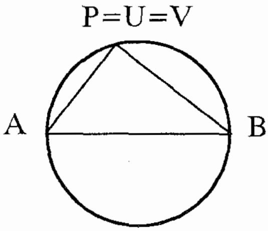


شکل III

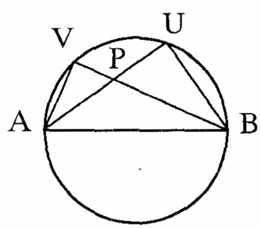
حالت دوم: اگر نقطه P روی دایره‌ی Ω باشد:

$$P = U = V \Rightarrow PU = PV = ۰ \Rightarrow s = t = ۰$$

چون $\hat{APB} = \frac{\pi}{۲}$ پس $\sqrt{st} = \mathrm{Cos}\,(APB) = ۰$



شکل IV



شکل V

حالت سوم: اگر P داخل دایره باشد. (شکل V) پس:

$$\mathrm{Cos}(\hat{APB}) = \mathrm{Cos}(\pi - \hat{APV}) = -\mathrm{Cos}(\hat{APV}) = -\frac{PV}{PA}$$

و

$$\mathrm{Cos}(\hat{APB}) = \mathrm{Cos}(\pi - \hat{BPU}) = -\mathrm{Cos}(\hat{BPU}) = -\frac{PU}{PB}$$

در نتیجه:

$$\mathrm{Cos}(\hat{APB}) = -\sqrt{\frac{PU}{PA} \cdot \frac{PV}{PB}} = -\sqrt{\frac{SPA}{PA} \cdot \frac{tPB}{PB}} = -\sqrt{s \cdot t}$$

سؤال ۵: فرض کنید $\overset{\triangle}{ABC}$ مثلث حاده الزاویه است. AD ارتفاع مثلث است که بر BC وارد می‌آید. H را نقطه‌ای داخل مثلث و روی AD قرار دهید و امتداد خط BH و CH و AC و AB را به ترتیب E و F قطع می‌کند.

ثابت کنید $\hat{FDH} = \hat{EDH}$.

حل ۱: از A خطی موازی با BC رسم می‌کنیم و آن را l می‌نامیم. فرض کنیم DF و DE آن را P و Q قطع کنند. با توجه به شکل I و مثلث‌های مشابه داریم:

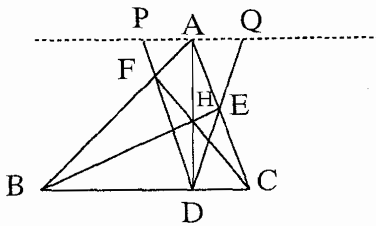
$$\frac{AP}{BD} = \frac{AF}{FB} \quad \text{و} \quad \frac{AQ}{CD} = \frac{AE}{EC} \quad (۱)$$

یا $AP = \frac{AF}{FB} . BD$, $AQ = \frac{AE}{EC} . CD$ اما با توجه قضیه سوا داریم:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = ۱ \Rightarrow \frac{AF}{FB} . BD = \frac{AE}{EC} . CD \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $AP = AQ$ پس $\triangle ADP \cong \triangle ADQ$ بنابراین

$$\hat{EDH} = \hat{FDH}$$



شکل I

حل ۲: مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را در صفحه مختصات رسم می‌کنیم بطوری‌که D مرکز باشد و بقیه نقاط مختصاتشان بصورت زیر باشد:

$$D=(0,0)\,,\ A=(0,a)\,,\ B=(-b,0)\,,\ C=(c,0)\,,\ H=(0,h)\,,$$

$$E=(u,v)\,,\ F=(-r,s)$$

که همه a و b و c و u و v و r و s اعداد مثبت هستند (شکل II را ببینید).

روشن است که اگر ثابت کنیم $\frac{s}{r}=\frac{v}{u}$ حکم برقرار است. چون شیب EC با AC برابر است. داریم $\frac{a}{-c}=\frac{v}{u-c}$ و بطور مشابه چون شیب EB و HB یکسان است پس $\frac{h}{b}=\frac{v}{u+b}$ بنابراین

$$\frac{v}{a}=\frac{u-c}{-c}=\frac{-u}{c}+1 \qquad (1)$$

و

$$\frac{v}{h}=\frac{u+b}{b}=\frac{u}{b}+1 \qquad (2)$$

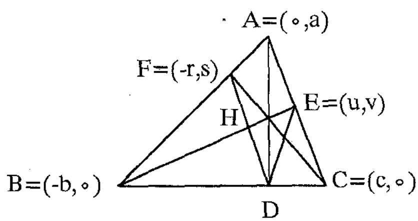
از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $u\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=v\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{a}\right)$ بنابراین:

$$\frac{v}{u}=\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{h}-\frac{1}{a}}=\frac{ah(b+c)}{bc(a-h)}$$

برای r- و s و c- و b- و با استفاده از روابط مشابه برای شیب‌ها بدست می‌آید:

$$\frac{s}{-r}=\frac{ah(-c-b)}{bc(a-h)} \quad \text{یا} \quad \frac{s}{r}=\frac{ah(b+c)}{bc(a-h)}$$

در نتیجه $\frac{v}{u}=\frac{s}{r}$.



۲

مجموعه سؤال‌های:

المپیاد ریاضی کانادا

۱۹۹۵

با پاسخ تشریحی

سؤال ۱: فرض کنید $g(x)=\frac{۹^x}{۹^x+۳}$ مقدار جمع زیر را بدست آورید.

$$g(\frac{۱}{۱۹۹۶})+g(\frac{۲}{۱۹۹۶})+g(\frac{۳}{۱۹۹۶})+\cdots\cdots+g(\frac{۱۹۹۵}{۱۹۹۶})$$

حل: با توجه به اینکه

$$g(۱-x)=\frac{۹^{۱-x}}{۹^{۱-x}+۳}=\frac{۹}{۹+۳\times ۹^x}=\frac{۳}{۹^x+۳}$$

بنابراین

$$g(x)+g(۱-x)=\frac{۹^x}{۹^x+۳}+\frac{۳}{۹^x+۳}=۱$$

پس

$$\sum_{k=۱}^{۱۹۹۵} g(\frac{k}{۱۹۹۶})=\sum_{k=۱}^{۹۹۷}\left[g(\frac{k}{۱۹۹۶})+g(\frac{۱۹۹۶-k}{۱۹۹۶})\right]+g(\frac{۹۹۸}{۱۹۹۶})$$

$$=\sum_{k=۱}^{۹۹۷}\left[g(\frac{k}{۱۹۹۶})+g(۱-\frac{k}{۱۹۹۶})\right]+g(\frac{۱}{۲})$$

$$=۹۹۷+\frac{۳}{۳+۳}=۹۹۷\frac{۱}{۲}$$

سؤال ۲: فرض کنید a و b و c اعداد حقیقی مثبت هستند ثابت کنید:

$$a^a.b^b.c^c\geq(a.b.c)^{\frac{a+b+c}{۳}}$$

جواب ۱: با نابرابری هم ارز نابرابری بالا را اثبات می‌کنیم

$a^{۳a}.b^{۳b}.c^{۳c}\geq(a.b.c)^{a+b+c}$. با توجه به متقارن بودن می‌توانیم فرض کنیم $c\leq b\leq a$. پس $\frac{a}{b}\geq ۱,\frac{b}{c}\geq ۱,\frac{a}{c}\geq ۱,a-b\geq ۰,b-c\geq ۰,a-c\geq ۰$

$$\frac{a^{۳a}.b^{۳b}.c^{۳c}}{(abc)^{a+b+c}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}.\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}.\left(\frac{a}{c}\right)^{a-c}\geq ۱$$

جواب ۲: هم چون a و b و c اعداد حقیقی مثبت هستند می‌توانیم بنویسیم

$$\sqrt[a+b+c]{a^a . b^b . c^c} \geq \frac{a+b+c}{\frac{a}{a}+\frac{b}{b}+\frac{c}{c}} = \frac{a+b+c}{۳} \geq \sqrt[۳]{abc}$$

پس داریم:

$$a^a . b^b . c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{۳}}$$

سؤال ۳: تعریف می‌کنیم که یک بوم‌رنگ یک چهارضلعی است که ضلع‌های مقابلش یکدیگر را قطع نمی‌کنند و یکی از زوایای داخلی آن بیشتر از ۱۸۰° است. فرض کنید c یک چند ضلعی محدب با s ضلع باشد فرض کنید ناحیه داخلی این چندضلعی c به q چهارضلعی تقسیم شده است که هیچ کدام از آنها را قطع نمی‌کنند. و فرض کنید b تا از چهارضلعی‌ها بوم‌رنگ است ثابت کنید.

$$q \geq b + \frac{s-۲}{۲}$$


بوم‌رنگ

جواب: برای راحتی فرض کنید آن زاویه داخلی بوم‌رنگ که بیشتر از ۱۸۰° است را «زاویه انعکاس» بنامیم.

در نتیجه b تا زاویه انعکاس وجود دارد. که هر کدام از آنها به یک بوم‌رنگ مشخص قرار دارد و همچنین هر کدام از این زاویه‌ها به رأس‌های مشخص تعلق دارند. (رأس‌های داخل چند ضلعی c) جمع زاویه‌های دور این رأس‌ها برابر $۲b\pi$. از طرف دیگر جمع زوایای داخلی چندضلعی c برابر $\pi(s-۲)$ و جمع

زوایای داخلی چهارضلعی‌ها برابر $2\pi q$ است بنابراین:

$$2\pi q \geq 2b\pi + (s-2)\pi$$

و در نتیجه

$$q \geq b + \frac{s-2}{2}$$

سؤال ۴: فرض کنید n عدد ثابت و طبیعی باشد. نشان دهید برای هر عدد k که نامنفی و صحیح است، معادله دیوفانتی زیر بی نهایت جواب مثبت و صحیح دارد.

$$x_1^3 + x_1^3 + \cdots\cdots + x_n^3 = y^{3k+2}$$

حل ۱: چون $1^3 + 2^3 + \cdots\cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. پس ما می‌بینیم برای $k=0$

مجموعه جواب $(x_1, \ldots, x_n, y) = \left(1, 2, \ldots, n, \frac{(n)(n+1)}{2}\right)$ وجود دارد.

پس ما می‌توانیم یک جواب کلی برای k بسازیم. فرض کنید $c = \frac{n(n+1)}{2}$ و توجه کنید که برای همه اعداد مثبت صحیح نظیر q داریم:

$$(c^k q^{3k+2})^3 + (2c^k q^{3k+2})^3 + \cdots + (nc^k q^{3k+2})^3$$

$$c^{3k} q^{3(3k+2)} (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) = c^{3k} q^{3(3k+2)} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$= c^{3k+2} q^{3(3k+2)} = (cq^3)^{3k+2}$$

پس $(c^k q^{3k+2}, 2c^k q^{3k+2}, \ldots, nc^k q^{3k+2}, cq^3)$ ، $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ برای این معادله دیوفانتی جواب عمومی است.

حل ۲: برای هر عدد مثبت صحیح q فرض کنید

پس $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = n^{3k+1} q^{3k+2} , y = n^2 q^3$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 3} = n . n^{6k+3} q^{9k+6} = (n^2 q^3)^{3k+2} = y^{3k+2}$$

حل ۳: برای $n = 1$ قرار دهید $x_1 = q^{3k+2}$ و $y = q^3$ که جوابی برای معادله دیوفانتی مسئله است ($n = 1$) برای $n > 1$ ، به دنبال جوابی به صورت

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = n^p , y = n^q$$

پس

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 3} = y^{3k+2} \Leftrightarrow n^{3p+1} = n^{(3k+2)q} \Leftrightarrow (3k+2)q = 3p+1 \Leftrightarrow$$

$$(3k+2)q - 3p = 1$$

برابری آخر برقرار است اگر قرار دهیم $q = 3t+2 , p = (3k+2)t + (2k+1)$ که t عددی نامنفی صحیح است.

بنابراین نامتناهی جواب صحیح و مثبت به صورت زیر پیدا می‌شود.

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = n^{(3k+2)t + (2k+1)} , y = n^{3t+2}$$

سؤال ۵: فرض کنید u پارامتری حقیقی است بطوری‌که $0 < u < 1$ تعریف می‌کنیم:

$$g(x) = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le u \\ 1 - (\sqrt{ux} + \sqrt{(1-u)(1-x)})^2 \Leftrightarrow u \le x \le 1 \end{cases}$$

دنباله بازگشتی $\{u_n\}$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$u_1 = g(1) , u_n = g(u_{n-1}) \rightarrow n > 1$ برای هر

نشان‌دهید عدد صحیح مثبت k وجود دارد بطوری‌که $u_k = 0$

حل: به سادگی بدست می‌آید که $u_1 = 1 - u$. چون برای هر x عضو بازه‌ی $[1$

$[u\,,$ و $u \le x$ و $1-x \le 1-u$ در نتیجه ما داریم:

$$1-\left(\sqrt{ux}+\sqrt{(1-u)(1-x)}\right)^2=$$

$$=1-ux-(1-u)(1-x)-2\sqrt{ux(1-u)(1-x)}$$

$$=x+x-2ux-2\sqrt{ux(1-u)(1-x)}\le x+x-2ux-2u(1-x)=x-u$$

پس $\quad (1)\quad g(x)=0$ اگر $0\le x\le u$

و $\quad (2)\quad g(x)\le x-u$ اگر $u\le x\le 1$

از (۲) نتیجه می‌شود که $u_2=g(u_1)\le u_1-u=1-2u$ اگر $u_1>u$

و در نتیجه با استقرأ بسادگی بدست می‌آید

$u_{n+1}=g(u_n)\le u_n-u\le 1-(n+1)u$ اگر $u_i\ge u$

در نتیجه برای kهای خیلی بزرگ، باید داشته باشیم $u_{k-1}<u$ در نتیجه با توجه به (۱) داریم $u_k=g(u_{k-1})=0$

۳

مجموعه سؤال‌های:

المپیاد ریاضی کانادا

۱۹۹۶

با پاسخ تشریحی

سؤال ۱: اگر δ, β, α ریشه‌های $x^۳ - x - ۱ = ۰$ باشند مقدار $\frac{۱+\alpha}{۱-\alpha} + \frac{۱+\beta}{۱-\beta} + \frac{۱+\delta}{۱-\delta}$ را محاسبه کنید.

جواب: اگر $x^۳ - x - ۱ = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\delta)$ که δ, β, α ریشه‌های حقیقی معادله هستند. طبق روابط بین ریشه‌ها در چند جمله‌ایها داریم:

$$\alpha + \beta + \delta = ۰ \ , \quad \alpha\beta + \alpha\delta + \beta\delta = -۱ \ , \quad \alpha\beta\delta = ۱$$

در نتیجه

$$S = \frac{۱+\alpha}{۱-\alpha} + \frac{۱+\beta}{۱-\beta} + \frac{۱+\delta}{۱-\delta} = \frac{N}{(۱-\alpha)(۱-\beta)(۱-\delta)}$$

پس بعد از ساده کردن بدست می‌آید

$$N = ۳ - (\alpha + \beta + \delta) - (\alpha\beta + \alpha\delta + \beta\delta) + ۳\alpha\beta\delta$$

$$= ۳ - ۰ - (-۱) + ۳(۱) = ۷$$

همچنین مخرج کسر S برابر $g(۱) = -۱$ است بنابراین: $S = -۷$

سؤال ۲: همه جواب‌های دستگاه معادلات زیر را بیابید.

$$\frac{۴x^۲}{۱ + ۴x^۲} = y \ , \quad \frac{۴y^۲}{۱ + ۴y^۲} = z \ , \quad \frac{۴z^۲}{۱ + ۴z^۲} = x$$

حل ۱: برای هر t داریم $۰ \le ۴t^۲ < ۴t^۲ + ۱$ بنابر این $۰ \le \frac{۴t^۲}{۱ + ۴t^۲} < ۱$ پس z, y, x عددهای نامنفی و کوچکتر از ۱ هستند. اگر یکی از z, y, x برابر صفر باشند در این صورت $x = y = z = ۰$ و اگر مقدار دو تا از این عددها برابر باشد بدست می‌آید:

$$\frac{۴x^۲}{۱ + ۴x^۲} = x$$

که یا $x = ۰$ و یا $x = \frac{۱}{۲}$ در نتیجه $x = y = z = ۰$ یا $x = y = z = \frac{۱}{۲}$.

بالاخره فرض کنید x, y, z عددهای منفی متفاوتی هستند. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم $1 > z > y > x > 0$ و یا $1 > y > z > x > 0$ که به خاطر تقارن مسئله این دو حالت شبیه هم هستند. اثبات می‌کنیم که $g(t) = \frac{4t^2}{1+4t^2}$ تابعی صعودی است در بازه‌ی (۱ و ۰). برای اثبات فرض کنیم $0 < s < t < 1$

$$g(t) - g(s) = \frac{4t^2}{1+4t^2} - \frac{4s^2}{1+4s^2} = \frac{4t^2 - 4s^2}{(1+4s^2)(1+4t^2)} > 0$$

بنابراین $0 < x < y < z < 1 \Rightarrow g(x) = y < g(y) = z < g(x) = x$

که این تناقض است. بنابراین جواب‌ها $x = y = z = 0$ و $x = y = z = \frac{1}{2}$

حل ۲: توجه کنید x, y, z اعداد نامنفی هستند. با جمع ۳ معادله بدست می‌آید.

$$x + y + z = \frac{4x^2}{1+4x^2} + \frac{4x^2}{1+4x^2} + \frac{4y^2}{1+4y^2}$$

که ما می‌توانیم برابر بالا را بصورت زیر مرتب کنیم.

$$\frac{x(2x-1)^2}{1+4x^2} + \frac{y(2y-1)^2}{1+4y^2} + \frac{z(2z-1)^2}{1+4z^2} = 0$$

چون جمع این ۳ عبارت برابر صفر است، و چون هر کدام از آنها نامنفی هستند پس باید هر عبارت برابر صفر باشد. همچنین با توجه به دستگاه معادلات اصلی بدست می‌آید. $x = y = z = 0$ و $x = y = z = \frac{1}{2}$ تنها دو جواب دستگاه است.

حل ۳: توجه کنید x, y, z اعداد نامنفی هستند نابرابری زیر را در $(2y-1)^2$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{y}{1+4y^2} \geq 0 \overset{(2y-1)^2}{\Rightarrow} y - \frac{4y^2}{1+4y^2} \geq 0$$

در نتیجه $y \geq z$ بطور مشابه $z \geq x$ و $x \geq y$ پس $x = y = z$ که با توجه به حل ۱ یا $x = y = z = 0$ و یا $x = y = z = \frac{1}{2}$.

حل ۴: با توجه به حل شماره ۱، $x = y = z = ۰$ جوابی برای معادله است و بقیه جواب‌ها مثبت هستند. بنابر نامساوی حسابی ـ هندسی نتیجه می‌شود $\frac{۱ + ۴x^۲}{۲} \geq \sqrt{۴x^۲} = ۲x$ بنابراین $y = \frac{۴x^۲}{۱ + ۴x^۲} \geq x$ و برابری فقط و فقط وقتی حاصل می‌شود که $۴x^۲ = ۱$ در نتیجه $x = \frac{۱}{۲}$. بطور مشابه $y \geq x$ و برابر فقط و فقط وقتی بدست می‌آید که $y = \frac{۱}{۲}$, $z \geq x$ و برابری وقتی بدست می‌آید که $x = \frac{۱}{۲}$. جمع کردن نابرابری‌های روبرو $x \geq y$ و $y \geq z$ و $z \geq x$ نتیجه می‌دهد.

$x + y + z \geq x + y + z$ I بنابراین برای هر نابرابری بالا باید برابری قرار گیرد تا عبارت I دچار تناقض نشود پس $x = y = x = \frac{۱}{۲}$

سؤال ۳: فرض کنید $g(n)$ تعداد جایگشت‌های $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ از عددهای طبیعی $۱, ۲, ۳, \ldots, n$ باشد که

(i) $a_۱ = ۱$

(ii) برای هر $۱ \leq i \leq n - ۱$, $|a_{i+۱} - a_i| \leq ۲$

آیا $g(۱۹۹۶)$ بر ۳ بخش‌پذیر است؟

حل: فرض کنید $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ جایگشتی از اعداد $۱, ۲, \ldots, n$ باشد بطوری که در شرط‌های (i) و (ii) صدق کند. با نظری قاطع می‌توان گفت که اگر a_k و $a_{k+۱}$ دو عدد طبیعی متوالی از جایگشت باشند $(a_{k+۱} = a_k \pm ۱)$ عدد سمت راست $a_{k+۱}$ (و عدد سمت چپ a_k) یا هر دو بزرگتر a_k و $a_{k+۱}$ هستند و یا هر دو کوچکتر هستند. چون $a_۱ = ۱$ پس $a_۲ = ۲$ یا ۳ پس دو حالت وجود دارد.

حالت ۱: فرض کنید $a_۲ = ۲$ بنابراین $a_۳, a_۴, \dots, a_n$ جایگشتی از اعداد $۳, ۴, \dots, n$. پس $a_۲, \dots, a_n$ جایگشتی از اعداد $۲, ۳, \dots, n$ است که در شرط (ii) صدق می‌کند و واضح است که در این حالت $g(n - ۱)$ جایگشت وجود دارد.

حالت (۲): فرض کنید $a_۲ = ۳$

(a) فرض کنید $a_۳ = ۲$ پس $a_۴, a_۵, \dots, a_n$ جایگشتی از اعداد $۴, ۵, \dots, n$ بطوری‌که $a_۴ = ۴$ وشرط (ii) نیز در این جایگشت صدق می‌کند پس $g(n - ۳)$ جایگشت در این حالت وجود دارد.

حالت ۲: فرض کنید $a_۳ \geq ۴$. اگر $a_{k+۱}$ اولین عدد زوج در جایگشت باشد با توجه به شرط (ii) $a_۱, a_۲, \dots, a_k$ باید $۱, ۳, ۵, \dots, ۲k - ۱$ باشد. $a_{k+۱}$ یا $۲k$ است یا $۲k - ۲$ بنابراین a_k و $a_{k+۱}$ اعداد متوالی هستند.

پس با توجه به آنچه در بالا گفته شد، اثباط کردیم که اعداد $a_{k+۲}, \dots, a_n$ همه یا بزرگتر a_k و $a_{k+۱}$ هستند و یا کوچکتر از آن دو. اما عدد ۲ سمت راست $a_{k+۱}$ قرار دارد بنابراین $a_{k+۱}, \dots, a_n$ اعداد زوج کوچکتر از $a_{k+۱}$ هستند و فقط یک حالت ممکن است که این شرط را داشته باشد.

$$۱, ۳, ۵, \dots, a_{k-۱}, a_k, \dots, ۶, ۴, ۲$$

با توجه به حالت ۱ و حالت ۲ نتیجه می‌شود:

$$g(n) = g(n - ۱) + g(n - ۳) + ۱ \qquad (*)$$

ما به راحتی می‌توانیم برای اعداد کوچک $g(n)$ را محاسبه کنیم:

$$g(۱) = ۱ \ , \ g(۲) = ۱ \ , \ g(۳) = ۲ \ , \ g(۴) = ۳ \ , \ g(۵) = ۶$$

با توجه به محاسبه کردن تعداد کمی از $g(n)$ها و استفاده از برابری $(*)$ باقیمانده

n(g)ها را به ۳ محاسبه می‌کنیم.

$$g(۱)\overset{۳}{\equiv}۱\ ,\ g(۲)\overset{۳}{\equiv}۱\ ,\ g(۳)\overset{۳}{\equiv}۲\ ,\ g(۴)\overset{۳}{\equiv}۱\ ,\ g(۵)\overset{۳}{\equiv}۰$$

$$g(۶)\overset{۳}{\equiv}۰\ ,\ g(۷)\overset{۳}{\equiv}۲\ ,\ g(۸)\overset{۳}{\equiv}۰\ ,\ g(۹)\overset{۳}{\equiv}۱\ ,\ g(۱۰)\overset{۳}{\equiv}۱$$

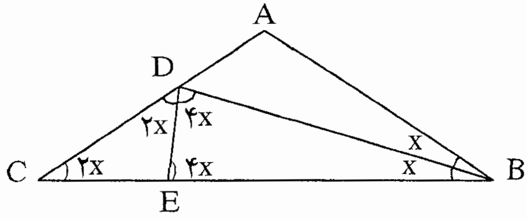
$$g(۱۱)\overset{۳}{\equiv}۲$$

چون $g(۹)\overset{۳}{\equiv}g(۱)\ ,\ g(۱۰)\overset{۳}{\equiv}g(۲)\ ,\ g(۱۱)\overset{۳}{\equiv}g(۳)$ در نتیجه برابر * نشان می‌دهد $g(a)\overset{۳}{\equiv}g(a \bmod ۸)\qquad a\geq ۱$

بنابراین $g(۱۹۹۶)\overset{۳}{\equiv}g(۴)\overset{۳}{\equiv}۱$ پس ۳ نمی‌تواند $g(۱۹۹۶)$ را بشمارد.

سؤال ۴: فرض کنید ABC مثلثی متساوی الساقین باشد که $AB = AC$. نیمساز زاویه B ضلع AC را در D قطع می‌کند و $BC = BD + AD$. زاویه A چند درجه است؟

حل ۱: نقطه E را طوری روی BC قرار دهید بطوری‌که $BE = BD$ بنابراین $AD = EC$.



با توجه به قضیه مربوط به نیمسازها $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{CB}$ بنابراین دو مثلث ΔCED و ΔCAB یک زاویه بیشتر است که و

$$\frac{CE}{CD}=\frac{AD}{CD}=\frac{AB}{CB}=\frac{CA}{CB}$$

پس $\triangle CAB \sim \triangle CED$ پس $\hat{CAE} = \hat{DCE} = \hat{ABC} = ۲x$ در نتیجه

$\hat{BDE} = \hat{BED} = ۴x$ بنابراین $۹x = ۱۸۰^\circ$ پس $x = ۲۰^\circ$ و

$\hat{A} = ۱۸۰^\circ - ۴x = ۱۰۰^\circ$

حل ۲: با استفاده از قانون سینوس‌ها در مثلث‌های $\hat{ABD}$ و $\hat{BDC}$ داریم:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{\sin x}{\sin ۴x},$$

$$۱ + \frac{AD}{BD} = \frac{BC}{BD} = \frac{\sin ۳x}{\sin ۲x}$$

بنابراین با توجه به برابر مسئله به یک معادله مثلثاتی خواهیم رسید:

$$\sin ۲x (\sin ۴x + \sin x) = \sin ۲x (\sin ۵x + \sin x)$$

چون $۰ < ۲x < ۹۰^\circ$ بدست می‌آید:

$$۵x - ۹۰ = ۹۰ - ۴x \rightarrow \hat{A} = ۱۰۰^\circ$$

سؤال ۵: فرض کنید $r_۱, r_۲, \ldots, r_m$ مجموعه عددهای گویای مثبت باشد که مجموعشان مساوی یک است. برای هر عدد طبیعی n تعریف می‌کنیم

$g(n) = n - \sum_{k=۱}^{m} \lfloor r_k n \rfloor$. حداقل و حداکثر مقدار $g(n)$ کدام است؟

حل: بدست می‌آوریم:

$$g(n) = n - \sum_{k=۱}^{m} \lfloor r_k n \rfloor$$

$$= n \sum_{k=۱}^{m} r_k - \sum_{k=۱}^{m} \lfloor r_k n \rfloor$$

$$= \sum_{k=۱}^{m} \{ r_k n - \lfloor r_k n \rfloor \}$$

اکنون می‌دانیم $1 > \lfloor x \rfloor - x \geq 0$ و در صورتی‌که c عددی صحیح باشد

$(c+x) - \lfloor c+x \rfloor = x - \lfloor x \rfloor$

چون $1 = m$ $0 \leq g(n) < \sum_{k=1}^{m}$ ($g(n)$ عددی صحیح است) در نتیجه
$0 \leq g(n) \leq m-1$

و ما نشان خواهیم داد این بازه را شامل می‌شود. (یعنی نشان خواهیم به ازای بعضی از nها $g(n) = m-1$ و به ازای بعضی از nها $g(n) = 0$) اگر ما فرض کنیم $r_k = \frac{a_k}{b_k}$ به‌طوری‌که a_k و b_k عددهای صحیح و $a_k < b_k$ است و قرار دهیم $n = b_1 \times b_2 \times \ldots \times b_m$ در نتیجه $m, \ldots, k=1$, $(r_k n) - \lfloor r_k n \rfloor = 0$ پس $g(n) = 0$ قرار می‌دهیم
پس $n = b_1 \times b_2 \times \ldots \times b_m - 1$

$$r_k \cdot n = r_k \cdot (b_1 \times b_2 \times \ldots \times b_m - 1)$$

$$= r_k \cdot \left\{ (b_1 \times \ldots \times b_m - b_k) + b_k - 1 \right\} = \text{عددصحیح} + r_k(b_k - 1)$$

بنابراین:

$$r_k \cdot n - \lfloor r_k \cdot n \rfloor = r_k \cdot (b_k - 1) - \left\lfloor r_k (b_k - 1) \right\rfloor =$$

$$= \frac{a_k}{b_k}(b_k - 1) - \left\lfloor \frac{a_k}{b_k}(b_k - 1) \right\rfloor = (a_k - \frac{a_k}{b_k}) - \left\lfloor a_k - \frac{a_k}{b_k} \right\rfloor =$$

$$= (a_k - \frac{a_k}{b_k}) - (a_k - 1) = 1 - \frac{a_k}{b_k} = 1 - r_k$$

بنابراین

$$g(n) = \sum_{k=1}^{m} (1 - r_k) = m - 1$$

۴

مجموعه سؤال‌های:

المپیاد ریاضی کانادا

۱۹۹۷

با پاسخ تشریحی

سؤال ۱: تعداد زوج‌های (x,y) از اعداد صحیح مثبت را که $x\leq y$، $(x,y)=۵!$ و $[x,y]=۵۰!$ را بیابید.

جواب: فرض کنید $p_۱, p_۲, \dots, p_{۱۲}$ تعداد اول رو به افزایش بین ۷ تا ۴۷ است پس

$$۵! = ۲^۳ . ۳^۱ . ۵^۱ . p_۱^{\circ} . p_۲^{\circ} . \dots p_{۱۲}^{\circ}$$

و

$$۵۰! = ۲^{a_۱} . ۳^{a_۲} . ۵^{a_۳} . p_۱^{b_۱} . p_۲^{b_۲} . \dots p_{۱۲}^{b_{۱۲}}$$

می‌دانیم $۲^۴, ۳^۲, ۵^۲, p_۱, \dots, p_{۱۲}$ همه $۵۰!$ را می‌شمارند و این ۱۵ مقسوم علیه یعنی این اعداد اول با توان‌هایشان با اعداد اول و توانهایشان در $۵!$ متفاوت است. در نتیجه چون $x,y \mid ۵۰!$ پس:

$$x = ۲^{n_۱} . ۳^{n_۲} . \dots . p_{۱۲}^{n_{۱۵}}$$

$$y = ۲^{m_۱} . ۳^{m_۲} . p_{۱۲}^{m_{۱۵}}$$

پس $\max(n_i, m_i)$ i امین توان عدد اول در $۵۰!$ است و $\min(n_i, m_i)$ i امین توان عدد اول در $۵!$ است. بنابراین با توجه به گفته‌های بالا توان اعداد اول $۲, ۳, \dots, p_{۱۲}$ در $۵۰!$ و $۵!$ متفاوت است. پس برای x، $۲^{۱۵}$ حالت وجود دارد که تنها نصف این حالت‌ها از y کمتر است در نتیجه $\frac{۲^{۱۵}}{۲} = ۲^{۱۴}$ جفت وجود دارد.

سؤال ۲: تعداد متناهی بازه بسته به طول ۱ در اختیار داریم که اجتماع آنها $[۰, ۵۰]$ می‌باشد. ثابت کنید زیر مجموعه‌ای از این بازه‌ها وجود دارد که هیچ دو تایی با هم اشتراک ندارند. اجتماع آنها حداقل ۲۵ باشد.

جواب ۱: به اولین نقطه ابتدایی هر بازه توجه کنید. این نقطه به طور یکتا بازه را که طولش واحد است مشخص می‌کند.

لم: در هر بازه $[x, x+1)$ حداقل یک نقطه ابتدایی هر بازه وجود دارد. $(0 \leq x \leq 49)$.

برهان: با برهان خلف پیش می‌رویم. فرض کنید آخرین نقطه ابتدایی قبل از x برابر $x - E$ که $E > 0$ با توجه به اینکه طول بازه برابر ۱ است پس نقطه انتهایی این بازه برابر است با $x - E + 1 < x + 1$. اما نقطه ابتدایی بازه‌ی بعدی نمی‌تواند قبل از $x + 1$ باشد. در نتیجه معلوم می‌شود که هیچ بازه‌ای $(x - E + 1, x + 1)$ را نمی‌پوشاند در نتیجه این تناقض است. پس باید یک نقطه ابتدایی در بازه $[x, x+1)$ باشد. از طرفی نقطه ابتدایی در بازه $[x, x+1)$ و بازه $[x + 2, x+3)$ متفاوت است. در نتیجه بازه‌های به طول یک، نقطه ابتدایشان در این بازه‌هاست از یک‌دیگر جدا هستند بنابراین بازه‌های به طول یک در $[x, x+2)$ و $[x + 2, x + 4)$ متمایز هستند. و ما می‌توانیم بازه‌هایی به طول یک انتخاب کنیم که نقطه‌های ابتدایشان در بازه‌های $[0, 1), [2, 3), \ldots\ldots, [2k, 2k + 1), \ldots\ldots, [48, 49)$ در نتیجه ما می‌توانیم ۲۵ بازه پیدا کنیم که هیچ کدام اشتراک ندارند.

جواب ۲: ما حکم کلی‌تری را اثبات می‌کنیم فرض کنید $|A_i| = 1$, $[0, 2n] = \bigcup_i A_i$ ، A_i بازه‌هایی هستند بطول یک و ما اثبات می‌کنیم اعداد $a_1, a_2, \ldots, a_n$ وجود دارد که $A_{a_i} \cap A_{a_j} = \phi$

فرض کنید $0 < E \leq \frac{2}{n-1}$ و همچنین فرض کنید $b_i = (i - 1)(2 + E)$ و

پس $i = ۱, ۲, \ldots, n$

$$\min\{b_i\} = ۰ \quad \max\{b_i\} = (n-۱)(۲+E) \le (n-۱)\left(۲+\frac{۲}{n-۱}\right) = ۲n$$

پس همه b_iها در $[۰, ۲n]$ قرار دارند. a_iها را طوری تعیین می‌کنیم که $b_i \in A_{a_i}$ باشد. چون $\cup A_i = [۰, ۲n]$ این کارشدنی است.

چون $b_i - b_j = (i-j)(۲+E) \ge ۲+E > ۲$

و A_iها بازه‌هایی بطول ۱ هستند پس $\min a_i - \max a_j > ۲-۱-۱ = ۰$

بنابراین $A_{a_i} \cap A_{a_j} = \phi$ پس اگر قرار دهیم $n = ۲۵$ مطلوب مسئله حاصل می‌آید.

سؤال ۳: ثابت کنید

$$\frac{۱}{۱۹۹۹} < \frac{۱}{۲}\cdot\frac{۳}{۴}\cdot\ldots\cdot\frac{۱۹۹۷}{۱۹۹۸} < \frac{۱}{۴۴}$$

جواب: فرض کنید $P = \frac{۱}{۲}\cdot\frac{۳}{۴}\cdot\ldots\cdot\frac{۱۹۹۷}{۱۹۹۸}$. چون

$\frac{۱}{۲} > \frac{۱}{۳}, \frac{۳}{۴} > \frac{۳}{۵}, \ldots, \frac{۱۹۹۷}{۱۹۹۸} > \frac{۱۹۹۷}{۱۹۹۹}$ بنابراین

$$P > \frac{۱}{۳}\cdot\frac{۳}{۵}\cdot\frac{۵}{۷}\cdot\ldots\cdot\frac{۱۹۹۷}{۱۹۹۹} = \frac{۱}{۱۹۹۹}$$

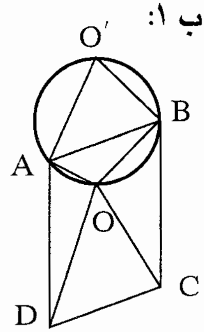
علاوه بر این $\frac{۱}{۲} < \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴} < \frac{۴}{۵}, \ldots, \frac{۱۹۹۷}{۱۹۹۸} < \frac{۱۹۹۸}{۱۹۹۹}$ پس

$$P < \frac{۲}{۳}\cdot\frac{۴}{۵}\cdot\ldots\cdot\frac{۱۹۹۸}{۱۹۹۹} = \underbrace{\left(\frac{۲}{۱}\cdot\frac{۴}{۳}\cdot\frac{۶}{۵}\cdot\ldots\cdot\frac{۱۹۹۸}{۱۹۹۷}\right)}_{\frac{۱}{P}}\cdot\frac{۱}{۱۹۹۹}$$

بنابراین $P^۲ < \frac{۱}{۱۹۹۹} < \frac{۱}{۱۹۳۶} = \frac{۱}{۴۴^۲}$ در نتیجه $P < \frac{۱}{۴۴}$ بنابراین حکم اثبات شد.

سؤال: فرض کنید O نقطه‌ای داخل متوازی الاضلاع باشد که $A\hat{O}B + C\hat{O}D = \pi$ ثابت کنید: $O\hat{N}C = O\hat{D}C$

جواب ۱:

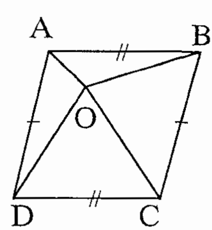


با توجه به انتقال D به A، $O \to O'$ (O به O' منتقل می‌شود) به‌طوری‌که $OO' = DA$ و نقطه C به نقطه B برده می‌شود. زیرا $CB = DA$. این تبدیل هندسی زوایا را ثابت نگه می‌دارد.

بنابراین $A\hat{O'}B = D\hat{O}C = \text{۱۸۰}^\circ - A\hat{O}B$

پس $AOBO'$ چهارضلعی محاطی است. و $O'\hat{O}B = O'\hat{A}B = O\hat{D}C$ اما OO' موازی با BC است. پس $O\hat{D}C = O\hat{B}C$, $O'\hat{O}B = O\hat{B}C$

جواب ۲:



فرض کنید $A\hat{O}B = \theta$, $B\hat{O}C = \alpha$. پس $C\hat{O}D = \text{۱۸۰}^\circ - \theta$ و $A\hat{O}D = \text{۱۸۰}^\circ - \alpha$ اما $AB = CD$ و $\sin\theta = \sin(\text{۱۸۰} - \theta)$ وطبق قانون سینوس‌ها در مثلث $\triangle OCD$ و $\triangle OAB$ داریم:

$$\frac{\sin CDO}{OC} = \frac{\sin(\text{۱۸۰} - \theta)}{CD} = \frac{\sin\theta}{AB} = \frac{\sin(ABO)}{OA}$$

پس I $\frac{OA}{OC} = \frac{\sin ABO}{\sin CDO}$ و بطور مشابه در مثلث‌های $\triangle OBC$ و $\triangle OAD$ داریم:

$$\frac{\sin C\hat{B}O}{OC} = \frac{\sin\alpha}{BC} = \frac{\sin(\text{۱۸۰} - \alpha)}{AD} = \frac{\sin A\hat{D}O}{OA}$$

پس

$$\frac{OA}{OC}=\frac{\operatorname{Sin}\hat{ADO}}{\operatorname{Sin}\hat{CBO}} \qquad \text{II}$$

با توجه به برابری I و II مشخص می‌شود که

$\operatorname{Sin}\hat{ABO}.\operatorname{Sin}\hat{CBO}=\operatorname{Sin}\hat{ADO}.\operatorname{Sin}\hat{CDO}$ بنابراین:

$$-\frac{۱}{۲}\left[\operatorname{Cos}(\hat{ABO}+\hat{CBO})-\operatorname{Cos}(\hat{ABO}-\hat{CBO})\right]=$$

$$=\frac{۱}{۲}\left[\operatorname{Cos}(\hat{ADO}+\hat{CDO})-\operatorname{Cos}(\hat{ADO}-\hat{CDO})\right]$$

وچون $\hat{ABO}+\hat{CBO}=\hat{ABC}\ ,\ \hat{ADO}+\hat{CDO}=\hat{ADC}\ ,\ \hat{ABC}=\hat{ADC}$

و این نشان می‌دهد $\operatorname{Cos}(\hat{ABO}-\hat{CBO})=\operatorname{Cos}(\hat{ADO}-\hat{CDO})$ پس دوحالت وجود دارد.

حالت (۱): $\hat{ABO}-\hat{CBO}=\hat{ADO}+\hat{CDO}-$ و چون

$\hat{ABO}+\hat{CBO}=\hat{ADO}+\hat{CDO}$ از کم کردن این دو نتیجه می‌شود که

$\hat{CBO}=\hat{CDO}$ بنابراین $۲\hat{CBO}=۲\hat{CDO}$

حالت (۲): $\hat{ABO}-\hat{CBO}=\hat{CDO}-\hat{ADO}$ اما ما می‌دانیم که:

$\hat{ABO}+\hat{CBO}=\hat{CDO}+\hat{ADO}$

و با جمع این برابری نتیجه می‌شود $۲\hat{ABO}=۲\hat{CDO}$ بنابراین $\hat{ABO}=\hat{CDO}$

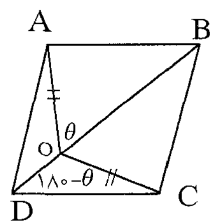
و $\hat{CBO}=\hat{ADO}$ با جایگذاری این رابطه در رابطه I نتیجه می‌شود $OA=$

از طرف دیگر $\hat{ABC} = \hat{ADO} + \hat{ABO} = \hat{CBO} + \hat{ABO}$ علاوه بر این OC

$\hat{BAD} - 180^\circ = \hat{ABC}$ چون ABCD متوازی‌الاضلاع است.

چون $\hat{BAD} + \hat{ADO} + \hat{ABO} = 180^\circ$ بنابراین $\hat{DOB} = 180^\circ$ و D و O و B روی یک خط قرار دارند.

پس $\hat{BOC} + \hat{COD} = 180^\circ$ بنابراین $\hat{BOC} = \theta = \hat{AOB}$. مثلث ΔAOB با مثلث ΔCOB همنهشت است، پس $\hat{ABO} = \hat{CBO}$. و چون $\hat{ABO} = \hat{CDO}$ بدست می‌آید $\hat{CBO} = \hat{CDO}$



سؤال ۵: فرض کنید عبارت زیر به صورت $\frac{p(n)}{q(n)}$ باشد که p و q چند جمله‌ای با ضرایب صحیح باشد.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k^3 + 9k^2 + 26k + 24} \binom{n}{k}$$

p و q را بیابید.

جواب: در ابتدا بدست می‌آوریم:

$$k^3 + 9k^2 + 26k + 24 = (k+2)(k+3)(k+4)$$

فرض کنید
$$S(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{k^3 + 9k^2 + 26k + 24}$$

پس:
$$S(n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\,n!}{k!\,(n-k)!\,(k+2)(k+3)(k+4)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-1)^k(n+4)!}{(k+4)!\,(n-k)!}\right)\times\frac{k+1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$$

فرض کنید

$$T(n)=(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\ S(n)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left[(-1)^k\binom{n+4}{k+4}(k+1)\right]$$

$n\geq 1$
$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}=0 \qquad (*)$$

چون
$$(1-1)^n=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}i=\sum(-1)^i\frac{i\,.\,n!}{i!\,(n-i)!}+(-1)^0\,.\,\frac{0!n!}{0!n!}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^i n\binom{n-1}{i-1}=$$

$$=n\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\binom{n-1}{i-1}=-n\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\binom{n-1}{i-1}$$

در رابطه * به جای $i-1$، j را قرار می‌دهیم

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}i=-n\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n-1}{j}=0 \qquad (**)$$

و چون

$$T(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n+t}{k+t}(k+1)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+t}\binom{n+4}{k+4}(k+1)=\sum_{k=-4}^{n}(-1)^{k+4}\binom{n+4}{k+4}(k+1)-\left(-3+2(n+4)-\binom{n+4}{2}\right)$$

در رابطه بالا به جای k + t، j قرار می‌دهیم:

$$\sum_{j=0}^{k+t}(-1)^{j}\binom{n+4}{j}(j-3)-\left(2n+8-3-\frac{(n+4)(n+3)}{2}\right)$$

$$=\sum_{j=0}^{n+4}(-1)^{j}\binom{n+4}{j}j-3\sum_{j=0}^{n+4}\binom{n+4}{j}-\frac{1}{2}(4n+10-n^{2}-7n-12)$$

دو عبارت نخست از برابری بالا صفر هستند بخاطر * و ** در نتیجه:

$$T(n)=\frac{n^{2}+3n+2}{2}$$

پس

$$S(n)=\frac{T(n)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}=\frac{n^{2}+3n+2}{2(n+1)(n+2)(n+3)(n+4}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}=\frac{1}{2(n+3)(n+4)}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}\binom{n}{k}}{k^{3}+9k^{2}+26k+24}=\frac{1}{2(n+3)(n+4)}$$

مجموعه سؤال‌های: ۵

المپیاد ریاضی کانادا

۱۹۹۸

با پاسخ تشریحی

سؤال ۱: مقدار جوابهای معادله زیر را در مجموعه اعداد حقیقی بیابید.

$$\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{5} \right\rfloor = a$$

جواب: فرض کنید $a = 30k + r$ به شرطی که عددی صحیح و r نیز عدد حقیقی که‌اعداد صفر تا ۲۹ را شامل شود. پس $\left\lfloor \frac{1}{2} a \right\rfloor = 15k + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor$ بطور مشابه

$\left\lfloor \frac{1}{3} a \right\rfloor = 10k + \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor \quad , \quad \left\lfloor \frac{1}{5} a \right\rfloor = 6k + \left\lfloor \frac{r}{5} \right\rfloor$ در نتیجه

$$\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{5} \right\rfloor = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15k + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 10k + \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor + 6k + \left\lfloor \frac{r}{5} \right\rfloor = 30k + r$$

بنابراین $k = r - \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{r}{5} \right\rfloor$

واضح است که، rباید عددی صحیح باشد زیرا در صورتی که عددی صحیح نباشد در آن صورت k صحیح نمی‌شود و این با فرض تناقض است. و چون به ازای هر r بین ۰ تا ۲۹ جوابی برای k بدست می‌آید و برای $0 \le r \le 29$ جوابی متفاوت برای a بدست می‌آید (چون به هنگ ۳۰ باقیمانده‌های متفاوت دارند)بنابراین چون برای r، ۳۰ حالت ممکن است برای a نیز ۳۰ حالت ممکن است.

سؤال ۲: تمام اعداد حقیقی xرا بیابید که

$$x = \left(x - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

حل:

چون $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \ge 0 \quad , \quad \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \ge 0$ پس $0 \le \left(x - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = x$

اما $x \neq 0$ چون $\frac{1}{x}$ بی‌معنی می‌شود بنابراین $x > 0$. دو طرف معادله را به توان ۲

می‌رسانیم.

$$x^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)+\left(1-\frac{1}{x}\right)+2\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

$$x^2=x+1-\frac{2}{x}+2\sqrt{x-1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

دو طرف معادله بالا را در x ضرب می‌کنیم و بعد بصورت زیر مرتب می‌کنیم.

$$x^3-x^2-x+2=2\sqrt{x^3-x^2-x+1}$$

$$\left(x^3-x^2-x+1\right)-2\sqrt{x^3-x^2-x+1}+1=0$$

$$\left(\sqrt{x^3-x^2-x+1}-1\right)^2=0 \Rightarrow \sqrt{x^3-x^2-x+1}=1$$

$$x^3-x^2-x+1=1 \Rightarrow x\left(x^2-x-1\right)\xlongequal{\text{چون } x\neq 0}0 \Rightarrow x^2-x-1=0$$

بنابراین $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ اما ما باید این دو مقدار را امتحان کنیم تا ببینیم که در معادله صدق می‌کنند یا خیر. قرار می‌دهیم $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ بدست می‌آوریم $\alpha+\beta=1$, $\alpha.\beta=-1$ پس $\beta<0<\alpha$ پس چون $\beta<0$ جواب نیست.

اکنون فرض کنید $x=\alpha$ در نتیجه

$$\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}=(\alpha+\beta)^{\frac{1}{2}}+(1+\beta)^{\frac{1}{2}}=1^{\frac{1}{2}}+\left(\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}=1-\beta=\alpha$$

پس $x=\alpha$ جواب معادله است. (برابری‌های بالا از این جا ناشی شده‌اند که $\alpha+\beta=1$ و $\beta^2=\beta+1$)

سؤال ۳: فرض کنید n عددی طبیعی باشد نشان دهید $(n\geq 2)$

$$\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)>\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

حل ۱:

$$1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1} \qquad (1)$$

چون $\frac{1}{3}>\frac{1}{4},\frac{1}{5}>\frac{1}{6},\cdots,\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}$

از (۱) نتیجه می‌شود:

$$(2)\quad 1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

چون $\frac{1}{2}>\frac{1}{4},\frac{1}{2}>\frac{1}{6},\frac{1}{2}>\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2}>\frac{1}{2n}$

$$\frac{n}{2}=\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{n},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

بنابراین $\frac{1}{2}>\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right) \qquad (3)$

پس از (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌شود.

$$1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

بنابراین $\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)>\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

حل ۲: چون $n\geq 2$ ، $n(n+1)\geq 0$ پس نامساوی بصورت زیر در می‌آید.

$$n\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)\geq(n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

برای اثبات از استقرأ استفاده می‌کنیم. برای $n=2$ واضح است.

$$\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{9}>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{8}$$

فرض کنید نابرابری برای $n=k$ درست باشد.

$$(1)\qquad k\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}\right)>(k+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)$$

اکنون برای $n=k+1$ اثبات می‌کنیم. می‌دانیم:

$$\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)$$

$$=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{5\times 6}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k)}$$

چون:

$$1\times 2<3\times 4<5\times 6<\cdots<(2k-1)(2k)<(2k+1)(2k+2)$$

پس:

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k)}>\frac{k}{(2k+1)(2k+2)}$$

بنابراین:

$$1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{k}{(2k+1)(2k)}\qquad(2)$$

علاوه بر این:

$$\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)-\frac{k+2}{2k+2}=-\frac{k}{(2k+1)(2k+2)}\Rightarrow\frac{k+1}{2k+1}=\frac{k+2}{2k+2}\ \frac{k}{(2k+1)(2k+2)}(3)$$

با جمع‌کردن (۱) و (۲) و (۳)

$$k(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1})+(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1})+\frac{k+1}{2k+1}>$$

$$(k+1)(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k})+(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k})+\frac{k}{(2k+1)(2k+2)}+$$

$$+\frac{k+2}{2k+2}-\frac{k}{(2k+1)(2k+2)}$$

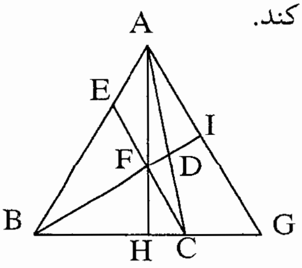
که با مرتب کردن دو طرف نتیجه می‌شود.

$$(k+1)(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k+1})>(k+2)(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2k+2})$$

پس استقرا کامل می‌شود.

سؤال ۴: فرض کنید ABC مثلثی باشد که $B\hat{A}C=30^\circ$ و $A\hat{B}C=60^\circ$ و D و E را بترتیب نقاطی روی AC و AB بگیرید. بطوری‌که $C\hat{B}D=40^\circ$ و $B\hat{C}E=70^\circ$، F را محل تقاطع BD و CE در نظر بگیرید. نشان دهید AF عمود بر BC است.

حل ۱: فرض کنید H پای عمود وارد از A بر BC باشد. مثلث متساوی‌الاضلاع ABG بطوری‌که C روی BG باشد را رسم می‌کنیم. ما ثابت می‌کنیم اگر F محل برخورد AH با BD باشد $F\hat{C}B=70^\circ$. (زیرا این نشان می‌دهد AH و BD و CE در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند و این همان چیزی است که باید اثبات کنیم.) فرض کنید امتداد BD و AG را در I قطع کند.



می‌دانیم

$$F\hat{B}G=F\hat{B}G\ ,\ BF=GF$$

بنابراین $I\hat{G}F=20^\circ$ علاوه‌بر این

$F\hat{I}G = ۱۸۰^\circ - I\hat{F}G - I\hat{G}F = ۸۰^\circ$ بنابراین $۸۰^\circ = I\hat{F}G = F\hat{B}G + F\hat{G}B$

پس مثلث $\triangle GIF$ مثلث متساوی‌الساقین است. بنابراین

$GI = GF = BF$ (۱) اما $B\hat{G}I$ و $A\hat{B}C$ همنهشت هستند زیرا $BG = AB$

و $G\hat{B}I = B\hat{A}C$ و $B\hat{G}I = A\hat{B}C$ پس $GI = BC$ (۲) از (۱) و (۲) نتیجه

می‌شود $BF = BC$ بنابراین در مثلث $\triangle BCF$ داریم:

$$B\hat{C}F = \frac{۱۸۰^\circ - F\hat{B}C}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ - ۴۰^\circ}{۲} = ۷۰^\circ$$

ما اثبات کردیم $F\hat{C}B = ۷۰^\circ$ پس ارتفاع وارد از BD CE همرسند و این خواسته مسئله را اثبات می‌کند.

حل ۲: ابتدا به قضیه سوا سینوسی اشاره می‌کنیم ولی اثبات آن به عهده خواننده است.

در مثلث $\triangle ABC$ ۳ خط BD و CE و AH همرسند اگر و تنها اگر

$$\frac{\sin D\hat{B}C}{\sin D\hat{B}A} \cdot \frac{\sin B\hat{A}H}{\sin H\hat{A}C} \cdot \frac{\sin A\hat{C}E}{\sin E\hat{C}B} = ۱$$

با استفاده از این قضیه حکم را اثبات می‌کنیم:

می‌دانیم $B\hat{A}C = ۴۰^\circ$ و $A\hat{B}C = ۶۰^\circ$ با توجه به این $A\hat{C}B = ۸۰^\circ$ و در نتیجه با توجه به فرض مسئله که $C\hat{B}D = ۴۰^\circ$ و $A\hat{B}D = ۳۰^\circ$ و به‌طور مشابه $E\hat{C}A = ۱۰$.

ما نشان می‌دهیم $F\hat{A}D = ۱۰^\circ$. پس فرض می‌کنیم F' و F در یک طرف AC باشند و $DAF' = ۱۰$ پس $BAF' = ۳۰^\circ$ بنابراین:

$$\frac{\sin \hat{ABD}}{\sin \hat{DBC}} \cdot \frac{\sin \hat{BCE}}{\sin \hat{ECA}} \cdot \frac{\sin \hat{CAF'}}{\sin \hat{F'AB}} = \frac{\sin ۲۰}{\sin ۴۰} \cdot \frac{\sin ۷۰}{\sin ۱۰} \cdot \frac{\sin ۱۰}{\sin ۳۰} =$$

$$= \frac{\sin ۲۰}{۲\sin ۲۰ \ \cos ۲۰} \cdot \frac{\cos ۲۰}{\sin ۳۰} = \frac{۱}{۲\sin ۳۰} = ۱$$

و با توجه به قضیه ذکر شده AF' از محل برخورد $CE \cap BD$ یعنی F می‌گذرد.

پس $AF' = AF$ و $\hat{FAD} = ۱۰$ فرض کنیم $AF \cap BC = K$. چون $\hat{KCA} = ۸۰^\circ$ و $\hat{KAC} = ۱۰^\circ$ پس $\hat{AKC} = ۹۰^\circ$ پس $AF \perp BC$ است.

سوال ۵: فرض کنید m عددی صحیح و مثبت باشد. دنباله $\{a_n\}_{n\geq ۰}$ را اینطور تعریف می‌کنیم که $a_۰ = ۰$ و $a_۱ = m$ و $n \geq ۱, a_{n+۱} = m^۲a_n - a_{n-۱}$ ثابت کنید که زوج (a,b) در تساوی $\frac{a^۲+b^۲}{۱+ab} = m^۲$ صدق می‌کند اگر و تنها اگر

$n \geq ۰ \quad (a,b) = (a_{n+۱}, a_n)$

حل: ابتدا به کمک استقرأ اثبات می‌کنیم $\frac{{a_n}^۲ + {a_{n+۱}}^۲}{a_n . a_{n+۱} + ۱} = m^۲$ برای همه $n \geq ۰$.

برهان: برای $n = ۰$ داریم $\frac{{a_۰}^۲ + {a_۱}^۲}{a_۰ . a_۱ + ۱} = \frac{۰ + m^۲}{۰ + ۱} = m^۲$ اکنون فرض حکم برای $n = k$ درست باشد. پس $\frac{{a_k}^۲ + {a_{k+۱}}^۲}{a_k . a_{k+۱} + ۱} = m^۲$

$${a_k}^۲ + {a_{k+۱}}^۲ = m^۲ . a_k . a_{k+۱} + m^۲ \rightarrow$$

$${a_{k+۱}}^۲ + m^۴{a_{k+۱}}^۲ - ۲m^۲ . a_k . a_{k+۱} + {a_k}^۲ = m^۲ + m^۴{a_{k+۱}}^۲ - m^۲ . a_k . a_{k+۱}$$

$${a_{k+۱}}^۲ + (m^۲ a_{k+۱} - a_k)^۲ = m^۲ + m^۲ a_{k+۱}(m^۲ a_{k+۱} - a_k)$$

$${a_{k+۱}}^۲ + {a_{k+۲}}^۲ = m^۲ + m^۲ . a_{k+۱} . a_{k+۲}$$

بنابراین $\dfrac{{a_{k+1}}^2+{a_{k+2}}^2}{a_{k+1}.a_{k+2}+1}=m^2$

پس استقرأ کامل است. و برای هر $n\geq 0$ (a_n,a_{n+1}) جوابی برای $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}=m^2$ است.

اکنون معادله $\dfrac{a^2+b^2}{a.b+1}=m^2$ را بررسی می‌کنیم. فرض کنید $(a,b)=(x,y)$ جوابی برای معادله باشد. $0\leq x\leq y$

پس $\dfrac{x^2+y^2}{x.y+1}=m^2$ اگر $x=0$ براحتی می‌توان دید که $y=m$ پس $(x,y)=(a_0,a_1)$ پس چون $x\geq 0$ می‌توان فرض کرد $x>0$ است. اکنون اثبات می‌کنیم $y\leq mx^2$. برهان را با استفاده از فرض خلف پیش می‌بریم:

فرض کنید $y>m^2x$ پس $y=m^2x+k$ بطوری‌که $k\geq 1$ در نتیجه باجایگذاری بدست می‌آید:

$$\frac{x^2+(m^2x+k)^2}{(x)(m^2x+k)+1}=m^2\rightarrow x^2+m^4x^2+2m^2x.k+k^2=$$
$$=m^4.x^2+m^2kx+m^2\rightarrow (x^2+k^2)+m^2(kx-1)=0$$

می‌دانیم $m^2(kx-1)\geq 0$ زیرا $kx\geq 1$ و $x^2+k^2\geq x^2+1\geq 1$ بنابراین: $x^2+k^2+m^2(kx-1)\neq 0$ که این تناقض است پس $y\leq m^2x$ اگر $x>0$.

اکنون به جای y قرار می‌دهیم mx^2-x_1 بطوری‌که $0\leq x_1<m^2x$ بدست می‌آید:

$$\frac{x^2+(m^2x-x_1)^2}{x(m^2x-x_1)+1}=m^2\Rightarrow x^2+m^4x^2-2m^2x.x_1+{x_1}^2=$$

$= m^4x^2 - m^2x.x_1 + m^2 \Rightarrow x^2 + x_1^2 = m^2(x.x_1 + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x^2 + x_1^2}{x.x_1 + 1} = m^2 \quad (1)$

اگر $x_1 = 0$ باشد در این صورت $x^2 = m^2$ پس $(a_0, a_1) = (x_1, x) = (0, m)$. اما $y = m^2x - x_1 = a_2$ پس $(x, y) = (a_2, a_1)$ بنابراین فرض می‌کنیم $x_1 > 0$ اکنون نشان می‌دهیم $x_1 < x$ باز هم با استفاده از برهان خلف: فرض کنید $x_1 \geq x$ پس $m^2x - y \geq x$ چون $y = m^2x - x_1$ و $x - y \geq x$ $(\frac{x^2 + y^2}{x.y + 1})$ زیرا x, y جوابی از برابری $\frac{a^2 + b^2}{a.b + 1} = m^2$ است. بنابراین $x^3 + xy^2 \geq x^2y + x.y^2 + x + y$ و در نتیجه $x^3 \geq x^2y + x + y$ اما این با $y \geq x > 0$ تناقض دارد و بوسیله برهانی مشابه برهان $y \leq m^2x$ داریم $x \leq m^2x_1$. پس با جایگذاری $x = m^2x_1 - x^2$ بطوری‌که $x_2 \geq 0$ در برابری (۱) بدست می‌آید: $\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1.x_2 + 1} = m^2$. اگر $x_2 \neq 0$ آنگاه ما ادامه می‌دهیم با جایگذاری $x_i = m^2.x_{i+1} - x_{i+2}$ (*) بدست می‌آید.

$\frac{x_j^2 + x_{j+1}^2}{x_j.x_{j+1} + 1} = m^2$ و $x_{j+1} = 0$ (زیرا دنباله نزولی و نامنفی است) بنابراین اگر $x_{j+1} = 0$ باشد بدست می‌آید $x_j^2 = m^2$ بنابراین $(x_{j+1}, x_j) = (0, m) = (a_0, a_1)$, در نتیجه $(x_j, x_{j-1}) = (a_1, a_2)$ چون $x_{j-1} = m^2x_j - x_{j+1}$. و با ادامه دادن همین روند داریم $(x_1, x) = (a_{n-1}, a_n)$ و پس $(x, y) = (a_n, a_{n+2})$ بنابراین $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = m^2$ جوابی بصورت زوج مرتب (a, b) دارد اگر و تنها اگر $(a, b) = (a_n, a_{n+1})$.

۶

مجموعه سؤال‌های:

المپیاد ریاضی کانادا

۱۹۹۹

با پاسخ تشریحی

سؤال ۱: همه جواب‌های حقیقی معادله $۴x^۲ - ۴۰\lfloor x \rfloor + ۵۱ = ۰$ را بیابید که $\lfloor x \rfloor$ بزرگترین عدد صحیح کمتر یا مساوی x است.

حل: با توجه به معادله $۴x^۲+۵۱=۴۰\lfloor x \rfloor$ این را می‌دانیم که $x-۱ < \lfloor x \rfloor \le x$ بنابراین:

$$۴x^۲ + ۵۱ = ۴۰\lfloor x \rfloor > ۴۰(x-۱) \rightarrow ۴x^۲ - ۴۰x + ۹۱ > ۰ \rightarrow$$

$$\rightarrow (۲x-۱۳)(۲x-۷) > ۰$$

بنابراین $\frac{۱۳}{۲} < x$ یا $x < \frac{۷}{۲}$ علاوه بر این $۴x^۲ + ۵۱ = ۴۰\lfloor x \rfloor \le ۴۰x$

$$۴x^۲ - ۴۰x + ۵۱ \le ۰$$

$$(۲x-۱۷)(۲x-۳) \le ۰$$

بنابراین $\frac{۳}{۲} \le x \le \frac{۱۷}{۲}$ که با در نظر گرفتن نامساوی بالا $\frac{۳}{۲} \le x < \frac{۷}{۲}$ یا $\frac{۱۳}{۲} < x \le \frac{۱۷}{۲}$

حالت اول: $\frac{۳}{۲} \le x < \frac{۷}{۲}$

در این بازه $\lfloor x \rfloor$ یا ۱ است یا ۲ و یا ۳ در نتیجه

اگر $\lfloor x \rfloor = ۱ \rightarrow ۴x^۲ + ۵۱ = ۴۰ \rightarrow ۴x^۲ = -۱۱$ غیرقابل قبول

اگر $\lfloor x \rfloor = ۲ \rightarrow ۴x^۲ + ۵۱ = ۸۰ \rightarrow ۴x^۲ = ۲۹ \;,\; x = \frac{\sqrt{۲۹}}{۲}$

توجه کنید که $\frac{\sqrt{۳۶}}{۲} > \frac{\sqrt{۲۹}}{۲} > \frac{\sqrt{۱۶}}{۲}$ یعنی $۳ > x > ۲$ و $\lfloor x \rfloor = ۲$

اگر $\lfloor x \rfloor = ۳ \quad ۴x^۲ + ۵۱ = ۱۲۰ \;,\; x = \frac{\sqrt{۶۹}}{۲}$

اما توجه کنید که $۴ = \frac{\sqrt{۶۴}}{۴} < \frac{\sqrt{۶۹}}{۲}$ در نتیجه این حالت غیر قابل قبول است.

حالت دوم: $\frac{۱۳}{۲} < x \le \frac{۱۷}{۲}$

برای این حالت $\lfloor x \rfloor$ برابر ۶ یا ۷ و یا ۸ است.

اگر $\lfloor x \rfloor = ۶ \rightarrow ۴x^۲ + ۵۱ = ۴۰ \times ۶ \rightarrow x = \frac{\sqrt{۱۸۹}}{۲}$

توجه کنید که $۶ < x < ۷$, $\lfloor x \rfloor = ۶$

اگر $\lfloor x \rfloor = ۷ \rightarrow ۴x^۲ + ۵۱ = ۴۰ \times ۷ \rightarrow x = \frac{\sqrt{۲۲۹}}{۲}$

توجه کنید که $۷ < x < ۸$, $\lfloor x \rfloor = ۷$

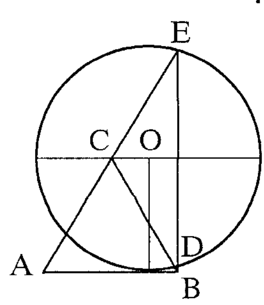
اگر $\lfloor x \rfloor = ۸ \rightarrow ۴x^۲ + ۵۱ = ۴۰ \times ۸ \rightarrow x = \frac{\sqrt{۲۶۹}}{۲}$

توجه کنید که $۸ < x < ۹$, $\lfloor x \rfloor = ۸$

پس $x = \frac{\sqrt{۲۹}}{۲}, \frac{\sqrt{۱۸۹}}{۲}, \frac{\sqrt{۲۲۹}}{۲}, \frac{\sqrt{۲۶۹}}{۲}$

سؤال ۲: فرض کنید مثلث ABC متساوی الاضلاع با ارتفاع به طول ۱ است. دایره‌ای به شعاع ۱ که مرکز آن طرفی از AB قرار دارد که C قرار دارد را در نظر بگیرید. نشان دهید اگر این دایره بر AB به طور مماس حرکت کند. طول کمانی که از دایره که داخل مثلث قرار دارد ثابت است.

جواب ۱:

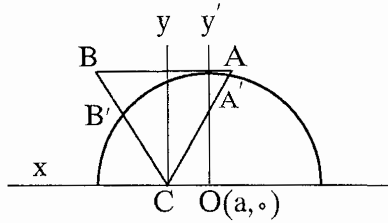


فرض کنید D و E محل برخورد BC و امتداد AC با دایره باشد. چون $CO \parallel AB$ و چون ارتفاع و شعاع دایره هر دو برابر ۱ است، در نتیجه

$\hat{BCO} = ۶۰^\circ$ و $\hat{ECO} = ۱۸۰^\circ - \hat{ACB} - \hat{BCO} = ۶۰^\circ$ چون دایره متقارن است نسبت به قطرهایش در نتیجه CE تصویر CB است نسبت به CO در نتیجه $CE = CD$ پس:

$\hat{CED}$ متساوی الساقین است. پس $\hat{CED} = \hat{CDE}$ و $\hat{CED} + \hat{CDE} = \hat{ABC} = ۶۰^\circ$ و $\hat{CED} = ۳۰^\circ$ چون این زاویه به موقعیت مرکز دایره بستگی ندارد و چون این زاویه روبروی کمان داخل مثلث است پس این کمان هم مقدار ثابتی است.

جواب ۲:



فرض کنید C مرکز مختصات باشد، نقطه A مختصاتش برابر $(\frac{۱}{\sqrt{۳}}, ۱)$ و نقطه B مختصاتش $(-\frac{۱}{\sqrt{۳}}, ۱)$ است. $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی الاضلاع است و ارتفاعش برابر ۱ است. فرض کنید O مرکز دایره باشد.

شعاع دایره برابر ۱ است پس مکان هندسی O خطی است که از C می‌گذرد و موازی AB است یعنی روی محور xها قرار دارد.

فرض کنید مختصات O برابر $(a, ۰)$ باشد. پس $-\frac{۱}{\sqrt{۳}} \le a \le \frac{۱}{\sqrt{۳}}$ یعنی دایره محدود بین این بازه است زیرا بر AB مماس است. فرض کنید A' و B'

محل برخورد دایره با CA و BC است. معادله CA برابر $y=\sqrt{3}x$ که $\frac{1}{\sqrt{3}}\le x\le 0$ و معادله CB برابر $y=-\sqrt{3}x$ که $0\le x\le -\frac{1}{\sqrt{3}}$ و معادله دایره برابر $(x-a)^2+y^2=1$ است. مختصات A' را از طریق قرار دادن $y=\sqrt{3}x$ در $(x-a)^2+y^2=1$ بدست می‌آوریم که $x=\frac{a\pm\sqrt{4-3a^2}}{4}$ و چون این محل برخورد AC با دایره است نه امتداد AC با دایره پس مقدار مثبت قابل قبول است.

$$x=\frac{a+\sqrt{4-3a^2}}{4} \qquad y=\sqrt{3}\left(\frac{a+\sqrt{4-3a^2}}{4}\right)$$

و بطور مشابه B' بدست می‌آید

$$x=\frac{a-\sqrt{4-3a^2}}{4} \qquad y=-\sqrt{3}\left(\frac{a+\sqrt{4-3a^2}}{4}\right)$$

پس اندازه $A'B'$ برابر است با

$$|A'B'|^2=\left(\frac{a+\sqrt{4-3a^2}}{4}-\frac{a-\sqrt{4-3a^2}}{4}\right)+$$

$$+\left(\sqrt{3}.\frac{a+\sqrt{4+3a^2}}{4}-(-\sqrt{3}\frac{a-\sqrt{4-3a^2}}{4})\right)^2$$

$$=\frac{4-3a^2}{4}+3\frac{a^2}{4}=1$$

که این نشان می‌دهد که اندازه $A'B'$ به a بستگی ندارد. و چون $OA'B'$ متساوی الاضلاع است. پس کمان $\widehat{A'B'}$ برابر 60° است.

سؤال ۳: همه مقدارهای صحیح و مثبت n را پیدا کنید به‌طوری‌که $n = d(n)^{۲}$ ($d(n)$ تعداد مقسوم علیه‌های n است).

جواب: واضح است که برای n = ۱ یک جواب حاصل می‌شود. فرض n > ۱ بطوری که $n = P_{۱}^{\alpha_{۱}} P_{۲}^{\alpha_{۲}} P_{۳}^{\alpha_{۳}} \ldots P_{m}^{\alpha_{m}}$ که برای $۱ \le i \le m$ عددهای اول متفاوت هستند و $\alpha_i > ۰$. چون n > ۱ عددی صحیح است پس n مربع کامل، است بنابراین $a_i = ۲\beta_i$. طبق فرمول $d(n)$ برابر است با $d(n) = (۲\beta_{۱}+۱)(۲\beta_{۲}+۱) \cdots (۲\beta_m+۱)$ پس $d(n)$ عددی فرد است. چون $d(n)$ فرد است پس $d(n)^{۲}$ نیز فرد است. در نتیجه n نیز فرد است.

بنابراین $P_i \ge ۳$, $۱ \le i \le m$ ما داریم

$P_{۱}^{\alpha_{۱}} . P_{۲}^{\alpha_{۲}} . P_{۳}^{\alpha_{۳}} . \ldots . P_m^{\alpha_m} = \left[(\alpha_{۱}+۱) \cdots (\alpha_m+۱)\right]^{۲}$ و

یا $P_{۱}^{\beta_{۱}} . P_{۲}^{\beta_{۲}} . \ldots . P_m^{\beta_m} = \left[(۲\beta_{۱}+۱) \cdots (۲\beta_m+۱)\right]$ و اکنون به اثبات لم زیر می‌پردازیم.

لم: $p^t \ge ۲t+۱$ برای عدد صحیح t و $P \ge ۳$ و برابری فقط به ازای $P = ۳$ و $t = ۱$ صورت می‌گیرد.

برهان: ما با استفاده از استقرأ روی t اثبات می‌کنیم. برای t = ۱ حکم واضح است. فرض کنیم حکم برای همه اعداد کوچکتر از k + ۱ درست باشد در نتیجه

$$P^{k+۱} = P^k . P \ge P^k(۱+۲) > P^k + ۲ \ge (۲k+۱)+۲ = ۲(k+۱)+۱$$

بنابراین $P^t \ge ۲t+۱$ و برابری موقعی بدست می‌آید که p = ۳ و t = ۱

فرض کنید n عاملی اول بزرگتر ۳ داشته باشد.

با توجه به لم $P_{۱}^{\beta_{۱}} . P_{۲}^{\beta_{۲}} \ldots P_m^{\beta_m} > (۲\beta_{۱}+۱) \ldots (۲\beta_m+۱)$ که این

تناقض است. بنابراین تنها عامل اول n، $p = ۳$ است و ما داریم $۳^{\alpha} = ۲\alpha + ۱$ و با توجه به لم ۱ $\alpha = ۱$ در نتیجه n یا برابر ۱ است یا برابر ۹.

سؤال ۴: فرض کنید $a_۱, a_۲, \dots, a_۸$ و ۸ عدد صحیح مختلف باشد از مجموعه $S = \{۱, ۲, \dots, ۱۷\}$ است. نشان دهید عدد صحیح k وجود دارد بطوری که معادله $a_i - a_j = k$ حداقل ۳ جواب داشته باشد همچنین مجموعه ۷ عضوی $\{b_۱, b_۲, \dots, b_۷\}$ از S را طوری تعیین کنید که معادله $b_i - b_j = k$ به ازای هر $k > ۰$ صحیح، ۳ جواب متمایز داشته باشد.

جواب ۱: بدون از دست رفتن کلیت مسئله فرض کنیم $a_۱ < a_۲ < \cdots < a_۸$ فرض کنیم هیچ عدد صحیح k وجود ندارد. با توجه به تفاضل $d_i = a_{i+۱} - a_i$ در می‌یابیم که بین d_iها حداکثر ۲ تا یک و ۲ تا دو و ۲ تا سه وجود دارد که جمع آنها ۱۲ است. اما $d_۱ + d_۲ + \cdots + d_۷ = a_۸ - a_۱ \le ۱۷ - ۱ = ۱۶$ در نتیجه ۷ تفاضل باید ۴ و ۳ و ۳ و ۲ و ۲ و ۱ و ۱ باشد. اما کمی درباره‌ی ترتیب تفاضل‌ها بحث کنیم. ما نمی‌توانیم ۲ تا یک را کنار یکدیگر قرار دهیم چون در آن صورت ۳ تفاضل بوجود می‌آید که حاصلشان دو می‌شود (زیرا فرض کنید $a_۲ - a_۱ = ۱$ و $a_۳ - a_۲ = ۱$ در نتیجه $a_۳ - a_۱ = ۲$ و با توجه به اینکه دو تفاضل دیگر نیز دو بودند که با این تفاضل فرق می‌کردند.)

همچنین ۱ نمی‌تواند کنار ۲ قرار بگیرد زیرا آنوقت ۳ تفاضل داریم که حاصلشان ۳ است. همچنین این دو عدد (۱ و ۲) نمی‌توانند جفتشان کنار ۳ قرار بگیرد زیرا آن وقت ۳ تا تفاضل ۴ بدست می‌آید. در نتیجه ترتیب آنها باید بصورت روبرو باشد ۱ و ۳ و ــ و ــ و ــ و ۴ و ۱ و یا ــ و ــ و ــ و ۳ و ۱ و ۴ و ۱ (یا بر عکس این حالت‌ها) در حالتی که یک جفت ۱ و ۳ آمده است تفاضل ۴ را حاصل می‌کند. در

نتیجه ما نمی‌توانیم ۲ تا دو را پشت سر هم به کار ببریم علاوه بر این نمی‌توانیم قرار دهیم ۲, ۳, ۲ زیرا جفت ۴ و ۱ کنار هم هستند و ۳ تفاضل با حاصل ۵ بوجود می‌آید. و در واقع در هر حالتی به تناقض می‌رسیم. پس ۳ تفاضل وجود دارد که با هم برابرند. همچنین برای مجموعه‌ای که در شرط مسئله صدق کند می‌توان $\{1, 2, 4, 7, 11, 16, 17\}$ را مثال زد اگرچه مثال‌های دیگر نیز وجود دارد.

حل ۲: تفاضل‌های d_i با تعریف حل ۱ را در نظر بگیرید همچنین فرض کنید $b_i = a_{i+2} - a_i$ $\quad 1 \le i \le 6$ مجموع این ۱۳ تفاضل برابر است با

$$2 \times (a_8 - a_1) + (a_7 - a_2) \le 2(17 - 1) + 16 + 2 = 46$$

اما هیچ تفاضلی بیش از دو بار ظاهر نشده است در نتیجه کوچکترین جمع ممکن برای این ۱۳ تفاضل برابر است با $\quad 2 \times (1 + 2 + 3 + \cdots + 6) + 7 = 49$

که این تناقض است.

سؤال ۵: فرض کنید x و y و z اعداد حقیقی نامنفی باشند به‌طوری‌که $x + y + z = 1$ ثابت کنید

$$x^2y + y^2z + z^2x \le \frac{4}{27}$$

حالت تساوی چه موقع اتفاق می‌افتد!

حل ۱: فرض کنید $g(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2x$. امیدواریم بتوانیم بیشترین مقدار g را بدست آوریم.

چون g متقارن است، بدون از دست رفتن کلیت مسئله می‌توانیم فرض کنیم $x \ge y, z$ چون

$$g(x, y, z) - g(x, z, y) = x^2y + y^2x - x^2y - z^2y - y^2x$$
$$= (y - z)(x - y)(x - z)$$

علاوه بر این فرض کنید $y \geq z$. پس:

$$g(x+z, y, \circ) - g(x, y, z) = (x+y)^{۲} y - x^{۲}y - y^{۲}z - z^{۲}x$$

$$= z^{۲}y + yz(x-y) + xz(y-z) \geq \circ$$

اما اکنون ما می‌توانیم فرض کنیم $z = \circ$. با توجه به روابط بالا و نابرابر حسابی - هندسی داریم:

$$g(x, y, \circ) = \frac{۲x^{۲}y}{۲} \leq \frac{۱}{۲} \left(\frac{x + x + ۲y}{۳}\right)^{۳} = \frac{۴}{۲۷}$$

برابری موقعی روی می‌دهد که $x = ۲y$ باشد یعنی موقعی‌که:

$$(x, y, z) = \left(\frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۳}, \circ\right)$$

۷

مجموعه سؤال‌های:

المپیاد ریاضی کانادا

۲۰۰۰

با پاسخ تشریحی

سؤال ۱: ساعت ۱۲ ظهر کارن و سام و جورج دور دایره‌ای روی خط شروع به دویدن می‌کنند که محیط این دایره ۳۰۰ متر است. همه آنها از نقطه‌ی مشابه شروع به حرکت می‌کنند. هر دونده سرعت ثابتی دارد. ممکن است در دو جهت مختلف حرکت کنند (یعنی وقتی از یک نقطه شروع می‌کنند مثلاً ممکن است یکی به سمت بالا و دیگری مخالف او حرکت کند). این دوندگان برای زمان نامتناهی می‌دوند نشان دهید اگر سام سرعت مختلفی نسبت به دیگر دوندگان داشته باشد زمانی وجود دارد که کارن و جورج حداقل با او ۱۰۰ متر فاصله دارند. (منظور از فاصله در اینجا کوتاهترین کمان بین دو دونده است).

جواب ۱: شایان ذکر است که این سؤال بسیار مشکل ارزیابی شده و میانگین این سؤال ۱/۴۳ از ۷ بوده است.

چون سرعت هر۳ نفر ثابت است و دور دایره می‌چرخند می‌توانیم فرض کنیم سرعت سام را برابر صفر است و کارن سرعتش کمتر از سرعت جورج نیست. و می‌توانیم فرض کنیم سرعت جورج مثبت است. اگر سرعت کارن بیشتر از دو برابر سرعت جورج نباشد آن وقت هرکدام از آنها از سام حداقل ۱۰۰ متر فاصله خواهند داشت وقتیکه جورج ۱۰۰ متر را دویده باشد. اگر سرعت کارن بیشتر از دو برابر سرعت جورج باشد، در نتیجه کارن در امتداد بیشتر از ۲۰۰ متر دویده است در حالی‌که در همین زمان جورج بین ۱۰۰ متر تا ۲۰۰ متر دویده است و واضح است قسمتی‌ازاین‌امتدادوجود دارد که کارن و جورج با سام بیشتر از ۱۰۰ متر فاصله دارند.

جواب ۲: به مانند حلّ قبلی می‌توانیم که فرض کنیم سرعت سام برابر صفر است و سرعت کارن کمتر از سرعت جورج نیست. فرض کنید که کارن t ثانیه طول

می‌کشد تا ۲۰۰ متر بدود در نتیجه در تمام زمان‌های نامحدود مجموعه $T = \{t, ۲t, ۴t, ۸t, ..\}$ کارن با سام دقیقاً ۱۰۰ متر فاصله دارد. در زمان t جورج دقیقاً d متر دویده است که $۰ < d \leq ۲۰۰$ است. قرار دهید k کوچکترین عدد صحیح است بطوری که $۲^k d \geq ۱۰۰$ پس $k \geq ۰$ و $۱۰۰ \leq ۲^k d \leq ۲۰۰$ در نتیجه در زمان $۲^k t \in T$ هر جفت کارن و جورج حداقل ۱۰۰ متر با سام فاصله دارند.

سؤال ۲: یک جایگشت از اعداد طبیعی ۱۹۰۱ و .... ۲۰۰۰ یک دنباله $a_۱, a_۲, \dots, a_{۱۰۰}$ است بطوری که هر عدد دقیقاً یک‌بار در دنباله آمده است. جایگشت داده شده را، بصورت دنباله‌ای از جمع ها در می آوریم:

$s_۱ = a_۱ \quad s_۲ = a_۱ + a_۲ \quad s_۳ = a_۱ + a_۲ + a_۳ \,, \dots, s_{۱۰۰} = a_۱ + a_۲ + \dots + a_{۱۰۰}$

چند تا از این جایگشت‌ها وجود دارد بطوری که هیچ‌کدام از $s_۱, s_۲, \dots, s_{۱۰۰}$ بر ۳ بخش‌پذیر نباشد.

شرح: این سؤال نسبتاً سؤال آسانی ارزیابی شده است و معدل این سؤال ۳/۰۷ از ۷ بوده است.

حل: مجموعه A را بصورت روبرو قرار می‌دهیم $A = \{۱۹۰۱, \dots, ۲۰۰۰\} = R_۰ \cup R_۱ \cup R_۲$ بطوری که هرکدام از اعداد طبیعی در مجموعه R_i با i به هنگ ۳ همنهشت باشد. در این صورت داریم $|R_۲| = ۳۴ \,, \quad |R_۰| = |R_۱| = ۳۳$ هر جایگشت $S = (a_۱, a_۲, \dots, a_{۱۰۰})$ می‌تواند بصورت یکتایی توسط دنباله $S'(a'_۱, \dots, a'_{۱۰۰})$ که از باقیمانده به هنگ ۳ تشکیل شده است، تعریف شود و یا بصورت جایگشتی از، باقیمانده‌های به هنگ ۳ تشکیل شده است، تعریف شود.

شرط مسئله تنها به دنباله‌ای از باقیمانده‌های S'بستگی دارد. برای اینکه بتوانیم از تقسیم دنباله بصورت مذکور بسازیم که بر ۳ بخش‌پذیر نباشد. باید دنباله از ۶۷ «۱و۲» در S' تشکیل شود که فقط بصورت روبرو ممکن است ... ,۲ ,۱ ,۲ ,۱ ,۱ یا ... ,۱ ,۲ ,۱ ,۲ ,۲که چون $|R_1| + 1 = |R_2|$ فقط حالت دوم ممکن است. و ۳۳ صفر می‌تواند هرجا بین ۱ و ۲ها قرار بگیرد تا تقسیم‌بندی S و جمع مذکور بر ۳ بخش‌پذیر نباشد. در نتیجه تعداد جایگشت‌ها که در شرط مسئله صدق می‌کند برابر است با:

$$\binom{۹۹}{۳۳} \,.\, ۳۳! \,.\, ۳۳! \,.\, ۳۴! = \frac{۹۹!\ ۳۳!\ ۳۴!}{۶۶!}$$

سؤال ۳: قرار دهید $A = (a_1, a_2, \dots, a_{2000})$ دنباله‌ای از اعداد صحیح است که هر کدام در بازه‌ی $[-1000, 1000]$ قرار دارند. فرض کنید مجموع اعداد دنباله برابر ۱ است. نشان دهید زیر دنباله‌ای غیرتهی وجود دارد اعضای آن برابر صفر است؟

شرح: دانش‌آموزان این سؤال را بسیار سخت یافتند و میانگین این سؤال برابر ۰/۵۱ بوده و از بین ۱۰۰ برگه تنها یک حل درست یافت شده است.

حل: ما می‌توانیم فرض کنیم هیچ لیستی از A برابر صفر نیست. ما دنباله‌ی A را بصورت دنباله‌ی B لیست خواهیم کرد. بطوری که $b_1 > 0$, $b_2 < 0$ و برای هر $i = 2, 3, \dots, 2000$ علامت b_iمخالف، مجموع زیر باشد.

$s_{i-1} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{i-1}$

(فرض کنید که هیچ $s_{i-1} \neq 0$ است) در هر قدم مطمئن هستیم که چنین b_i وجود دارد چون $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2000} = 1$ این نشان می‌دهد که مجموع لیستی از A

برابر صفر است یا علامتی مخالف علامت s_{i-1} دارد. در نتیجه هرکدام از $s_1, s_2, \cdots, s_{2000}$ یکی از ۱۹۹۹ عدد صحیح غیر صفر است (در بازه [۱۰۰۰ و ۹۹۹-]) در نتیجه طبق اصل لانه کبوتری i و j وجود دارد که $s_i = s_j$ که $1 \leq j \leq i \leq 2000$ بنابراین $b_{j+1} + b_{j+2} + \cdots + b_i = 0$ و این همان چیز است که می‌خواستیم.

سؤال ۴: ABCD چهارضلعی محدب با شرایط زیر است:

$$\hat{CBD} = 2\hat{ADB}\ ,\ \hat{ABD} = 2\hat{CDB}\ ,\ AB = CB$$

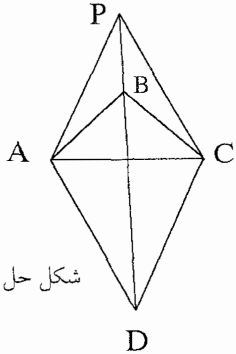
ثابت کنید $AD = CD$

حل ۱: DB را تا P امتداد می‌دهیم که در واقع P محل برخورد دو دایره به مرکز B و شعاع BC و BA است که DB را در P قطع می‌کنند. در نتیجه $\hat{APD} = \frac{1}{2}\hat{ABD} = \hat{CDB}$ و $\hat{CPD} = \frac{1}{2}\hat{CBD} = \hat{ADB}$ در نتیجه APCD متوازی‌الاضلاع است. اما PD، AC را نصف می‌کنند در نتیجه BD نیمساز است در مثلث متساوی الساقین ABC. ما داریم: $\hat{ADB} = \frac{1}{2}\hat{CBD} = \frac{1}{2}\hat{ABD} = \hat{CDB}$ در نتیجه DB نیمساز زاویه $\hat{ADC}$ است. چون DB مثلث ADB را نصف می‌کند در نتیجه این مثلث متساوی الاضلاع است و $AD = CD$

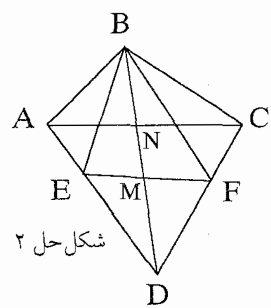
حل ۲: قرار دهید نیمساز زاویه $\hat{ABD}$، AD را در E را در قطع کند. و همچنین قرار دهید نیمساز زاویه $\hat{DBC}$ و CD را در F قطع کند. بنابراین $\hat{BDE} = \hat{FBD}$ که این نشان می‌دهد $ED \parallel BF, BE \parallel FD$ و بنابراین BEDF متوازی‌الاضلاع است. (در نتیجه BD و EF را در نقطه میانی آن یعنی M قطع می‌کند). از طرف دیگر BE نیمساز است. پس ما داریم $\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{ED}$ و بطور مشابه داریم

$\frac{CF}{FD}=\frac{CB}{BD}$ و چون طبق فرض $AB = BC$ در نتیجه $\frac{CF}{FD}=\frac{AE}{ED}$ که این نشان می‌دهد $AC \parallel CF$ بنابراین مثلث $\overset{\triangle}{DEF}$ و $\overset{\triangle}{DAC}$ با هم متشابه هستند.

BD، AC را در نقطه میانیش یعنی در N می‌کند. چون $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی الساقین است در نتیجه $BD \perp AC$ بنابراین $\overset{\triangle}{NAD}$ و $\overset{\triangle}{NCD}$ مثلث قائم‌الزاویه هستندبا ضلعهای مجاور زاویه قائم برابر. در نتیجه همنهشت هستند. و $AD = CD$.



شکل حل ۱



شکل حل ۲

سؤال ۵: فرض کنید که اعداد حقیقی $a_1, \dots, a_{100}$ در رابطه زیر صدق می‌کنند.

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{100} \geq 0$$

$$a_1 + a_2 \leq 100 \quad , \quad a_3 + a_4 + \dots + a_{100} \leq 100$$

ماکسیمم $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{100}^2$ را بدست آورید و همه $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ را بدست آورید که چنین ماکسیممی را می‌سازند.

حل: ما داریم $a_1 + a_2 + \dots + a_{100} \leq 200$ بنابراین:

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{100}^2 \leq (100 - a_2)^2 + a_2^2 + \dots + a_{100}^2$$

$$= 100^2 - 200a_2 + 2a_2^2 + \dots + a_{100}^2$$

$$\leq 100^2 - (a_1 + a_2 + \dots + a_{100})\, a_2 + 2a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{100}^2$$

$$=100^2+(a_2^2-a_1a_2)+(a_3^2-a_3a_2)+(a_4^2-a_4a_2)+\cdots+(a_{100}^2-a_{100}a_2)$$

$$=100^2+(a_2-a_1)a_2+(a_3-a_2)a_3+\cdots+(a_{100}-a_2)a_{100}$$

چون $a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_{100}\ge 0$ هیچ‌کدام از $(a_i-a_j)a_i$ مثبت نیستند. در نتیجه $a_1^2+a_2^2+a_{100}^2\le 10000$ و نابرابری موقعی برابر می‌شود که $a_1=100-a_2$ و $a_1+a_2+\cdots+a_{100}=200$ و هرکدام از عددهای زیر برابر صفر باشد.

$$(a_2-a_1)a_2\,,\ (a_3-a_2)a_3\ ,\ \ldots,\ (a_{100}-a_2)a_{100}$$

و چون $a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_{100}\ge 0$ که آخرین شرط نشان می‌دهد که فقط و فقط برای بعضی از $i\ge 1$، داریم $a_1=a_2=\ldots=a_i$ و $a_{i+1}=a_{i+2}=\ldots=a_{100}=0$ اگر $i=1$، به عددهای $100,0,0,\ldots,0$ می‌رسیم و اگر $i\ge 2$ سپس از $a_1+a_2=100$ به این نتیجه می‌رسیم که $i=4$ در نتیجه حالت دوم برابر است با

$$50,50,50,50,0,\ldots,0$$

۸

مجموعه سؤال‌های:

المپیاد ریاضی کانادا

۲۰۰۱

با پاسخ تشریحی

سؤال ۱: علی: سلام محمد، این معادله‌ی درجه دو که تو نوشتی خیلی جالب است ریشه‌های آن معادله چیست؟

محمد: ریشه‌های این معادله دو عدد صحیح مثبت است. یکی از ریشه‌ها سن خودم است و ریشه‌ی دیگری سن برادر کوچکترم امیر است.

علی: خیلی جالب است! بگذار نگاه کنم شاید بتوانم بگویم تو و امیر چند سال دارید. نباید خیلی سخت باشد. چون تمام ضرایب اعداد صحیح هستند و از طرف دیگر جمع ضرایب عددی اول است.

محمد: خیلی خوب است!؟ حالاً بگو من چند سال دارم. علی به جای آن من سن تو را حدس می‌زنم و آنرا در معادله به جای x قرار می‌دهم اما به من ۵۵- داد نه ۰

(a) ثابت کنید امیر ۲ سال دارد. (b) محمد چند سال دارد.

حل: (دنیل بروکس): قرار دهید R سن محمد و J سن امیر. معادله درجه دوم بصورت زیر است.

$$a(x-R)(x-J)=ax^{2}-a(R+J)x+aRJ$$

و a عدد صحیح است. مجموع عدد و ضرایب برابر است با:

$$a+aRJ-a(R+J)=a(R-1)(J-1)$$

در نتیجه اگر بخواهد عددی اول باشد باید دو تا از اعداد a و $R-1$ و $J-1$ برابر ۱ باشند. می‌دانیم $R>J>0$ در نتیجه باید داشته باشیم $a=1$ و $J=2$ و $R-1$ عدد اول باشد. و معادله درجه دوم بشکل زیر در می‌آید $(x-R)(x-2)$ به ما گفتهٔ شده است که به ازای یک عدد صحیح حاصل این معادله برابر $11\times -5=-55$ شده است. برای اعداد صحیح مثبت x چون $R>2$ در نتیجه $x-R$ یکی از

عوامل منفی ۵۵- است پس، چهار حالت داریم $x - R = -55$ و یا $x - R = -11$ و $x - R = -5$ و $x - R = -1$ که چون $R - 1$ اول است، در صورتی این ۴ حالت را امتحان کنیم می‌بینیم فقط حالت دوم صدق می‌کنند. و $R = 18$

سؤال ۲: تخته‌ای وجود دارد که از ۱۰- تا ۱۰ پر شده است. هر مربعی یا به رنگ قرمز است یا به رنگ سفید. و جمع اعداد مربع‌های قرمز برابر n است. مریم با مهره‌ای که در اختیار دارد از خانه‌ی شماره‌ی صفر آغاز می‌کند. او سکه‌ی سالمی را ۱۰ بار می‌اندازد. هر دفعه که شیر آمد او یک خانه به سمت راست می‌رود و هر دفعه که خط آمد او یک خانه به سمت چپ می‌رود. بعد از ده بار شیر و خط آمدن احتمال اینکه مهره‌ی مریم روی خانه‌ای به رنگ قرمز باشد برابر عددی کسری به صورت $\frac{a}{b}$ است که با $a + b = 2001$ بزرگترین مقدار ممکن برای n را بدست آورید.

-۱۰	-۹	-۸	-۷	-۶	-۵	-۴	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰

جواب: بعد از تمام‌شدن شیر و خط‌ها مهره‌ی مریم روی خانه‌ای قرار می‌گیرد که شماره آن $10 - 2k$ است k تعداد شیرهایی است که ظاهر شده. در نتیجه $1024 = 2^{10}$ حالت برای شیر و خط‌ها وجود دارد و همچنین تنها $\binom{10}{k}$ حالت برای شیرآمدن وجود دارد. بنابراین احتمال آنکه بعد از تمام‌شدن شیر و خط مهره روی خانه $10 - 2k$ قرار بگیرد برابر $\binom{10}{k} / 1024$ است. از طرفی احتمال آنکه مهره روی خانه قرمز بگیرد برابر $C / 1024$ بصورتی که C مجموع تعدادی از عددهای روبرو است.

$$\binom{10}{0},\ \binom{10}{1},\ \dots,\ \binom{10}{10} =$$

(I) $\quad$ ۱ , ۱۰ , ۴۵ , ۱۲۰ , ۲۱۰ , ۲۵۲ , ۲۱۰ , ۱۲۰ , ۴۵ , ۱۰ , ۱ =

ما می‌دانیم که اعداد a و b در برابری $a + b =$ ۲۰۰۱ صدق می‌کند در نتیجه $\frac{a}{b} = \frac{c}{۱۰۲۴}$. فرض کنیم b و a نسبت به هم اول باشند پس حل را اینگونه دنبال می‌کنیم که $۰ \le \frac{a}{b} \le ۱$ و $a + b =$ ۲۰۰۱ در نتیجه [illegible] $\le b \le$ ۲۰۰۱ و همچنین b می‌تواند ۱۰۲۴ را بشمارد در نتیجه $b=$۱۰۲۴ بنابراین $a = c =$ ۲۰۰۱ - ۱۰۲۴ و چون C جمعی از مجموعه I است در نتیجه ۹۷۷ باید جمعی از اعداد I باشد ولی فقط یک راه برای نوشتن ۹۷۷ بصورت مجموعی از اعداد I داریم.

(II) $\quad$ ۹۷۷ = ۱۰ + ۱۰ + ۴۵ + ۱۲۰ + ۱۲۰ + ۲۱۰ + ۲۱۰ + ۲۵۲

و این را می‌توانید خیلی راحت چک کنید (چون جمع اعداد باقیمانده از I برابر ۹۷۷ - ۱۰۲۴ = ۴۷ و ۴۷ = ۱ + ۱ + ۴۵ است که تنها راه ممکن برای نشان دادن ۴۷ است).

برای آنکه به بیشترین مقدار n برسیم خانه‌ها را بصورت زیر رنگ می‌کنیم: اعداد فرد را قرمز می‌کنیم اگر مثبت باشند و اگر منفی بودند آنها را سفید می‌کنیم. چون $\binom{۱۰}{۵} =$ ۲۵۲ در جمع (II) حضور دارد خانه‌ی شماره ۰ = ۱۰ - ۲۰۵ قرمز است. برای ۴و۳و۲و۱و۰ = k اگر $\binom{۱۰}{k}$ دوبار در جمع II ظاهر شده بود هر دو خانه‌ی ۱۰ - ۲k و ۲k- ۱۰ را قرمز می‌کنیم. اگر در جمع II ظاهر نشده بودند هر دو خانه ۱۰ - ۲k و ۲k - ۱۰ را سفید می‌کنیم و اگر $\binom{۱۰}{k}$ یک‌بار در جمع II ظاهر شده بود خانه‌ی ۱۰ - ۲k را قرمز و ۱۰ - ۲k را سفید می‌کنیم. در نتیجه n ماکسیمم است وقتی که خانه‌های قرمز آن عددها باشند. در نتیجه اینها قرمزند

{۶و۰و۲و۲- و ۴ و ۴- و ۸ و ۸- و ۹ و ۷ و ۵ و ۳ و ۱} در نتیجه n = ۳۱

اکنون فرض کنیم b و a نسبت به هم اول نباشند. فرض کنیم $\gcd(a,b)$ بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه b و a است در نتیجه می‌تواند $a+b=۲۰۰۱$ را بشمارد پس می‌تواند ۲۹ × ۲۳ × ۳ و ۲۹ × ۳ و ۲۳ × ۳ و ۲۹ و ۲۳ و ۱ و چون $\frac{a}{b}=\frac{c}{۱۰۲۴}$ در نتیجه b بر توانی از ۲ نیز بخش‌پذیر است. در نتیجه مقسوم علیه‌های b بصورت زیر هستند

۲۰۰۱ , ۶۶۷×۲^k , ۸۷×۲^k , ۶۹×۲^k , ۲۹×۲^k , ۲۳×۲^k , ۳×۲^k , ۲^k و در نتیجه $۱۰۰۱\leq b\leq ۲۰۰۱$ در نتیجه b می‌تواند یکی از اعداد ذیل باشد:

$۲۳\times ۶۴=۱۴۷۲,\ ۲۶\times ۶۴=۱۸۵۶,\ ۶۹\times ۱۶=۱۱۰۴,\ ۸۷\times ۱۶=$
$=۱۳۹۲,\ ۶۶۷\times ۲,\ ۲۰۰۱,\ ۱۰۲۴,\ ۳\times ۵۱۲=۱۵۳۶$

پس $\frac{a}{b}=\frac{۲۰۰۱-b}{b}$ یک از کسرهای روبرو است،

$\frac{۰}{۲۰۰۱},\frac{۶۶۷}{۱۳۳۴},\frac{۶۰۹}{۱۳۹۲},\frac{۸۹۷}{۱۱۰۴},\frac{۱۴۵}{۱۸۵۶},\frac{۵۲۹}{۱۴۷۲},\frac{۴۶۵}{۱۵۳۶},\frac{۹۷۷}{۲۰۰۱}$ در نتیجه $۱۰۲۴.\frac{a}{b}=c$ یکی از اعداد زیر است.

$۹۷۷,\ ۳۱۰,\ ۳۶۸,\ ۸۰,\ ۸۳۲,\ ۴۴۸,\ ۵۱۲,\ ۰$

بعد از این محاسبه‌های خسته‌کننده بوسیله یک محاسبه خسته‌کننده دیگر دریافتیم که از اعداد بالا فقط اعداد زیر را می‌توان بصورت جمع از مجموعه I نوشت.

$۹۷۷=۱۰+۱۰+۴۵+۱۲۰+۱۲۰+۲۱۰+۲۱۰+۲۵۲$

$۳۱۰=۱۰+۴۵+۴۵+۲۱۰$

$۵۱۲=۱۰+۱۰+۱۲۰+۱۲۰+۲۵۲$

$۵۱۲=۱+۱+۴۵+۴۵+۲۱۰+۲۱۰$

$۰=۰$

دوباره آن اعدادی که فقط یک‌بار در جمع ظاهر شده‌اند می‌توانند بیشترین مقدار n را بسازند پس بدین وسیله جدول زیر را می‌نویسیم.

شماره‌ی خانه‌های قرمز	اعدادی که یک بار ظاهر شده‌اند	C
{۶, ۰}	{۴۵, ۲۵۲}	۹۷۷
{۸, ۲}	{۱۰, ۲۱۰}	۳۱۰
{۰}	{۲۵۲}	۵۱۲
ϕ	ϕ	۵۱۲
ϕ	ϕ	۰

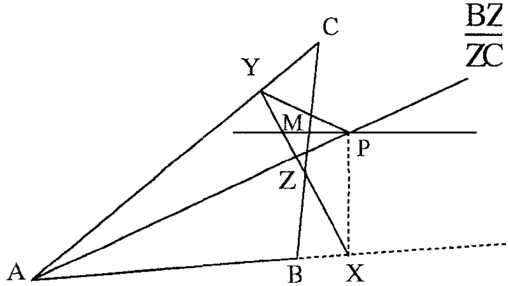
با توجه به دلایل بالا بیشترین مقدار n وقتی است که

$$C = ۳۱۰ = \binom{۱۰}{۲} + \binom{۱۰}{۶} + \binom{۱۰}{۸} + \binom{۱۰}{۹}$$

و خانه‌های قرمز {۸, ۲, ۶, -۶, ۹, ۷, ۵, ۳, ۱} و احتمال قرارگرفتن روی خانه‌ی قرمز برابر $\frac{۱۵۵}{۵۱۲} = \frac{۳۱۰}{۱۰۲۴} = \frac{۴۵۶}{۱۵۳۶} = \frac{a}{b}$ و $n = ۳۵$

سؤال ۳: قرار دهید ABC مثلثی است که $AC > AB$ قرار دهید P محل برخورد عمودمنصف BC و نیمساز داخلی زاویه $\hat{A}$ است.

نقاط x, y را به ترتیب روی AB (امتدادش) و روی AC بطوری قرار دهید که PX عمود بر AB و PY عمود بر AC باشد. Z محل برخورد YX با BC است نسبت مقابل را محاسبه کنید $\frac{BZ}{ZC}$



حل ۱: قرار دهید O مرکز دایره محیطی مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ فرض کنید نیمساز زاویه $\hat{A}$ دایره را در R قطع کند. داریم: $B\hat{O}R = ۲B\hat{A}R = ۲C\hat{A}R = C\hat{O}R$
بنابراین $BR = CR$ و R روی عمود منصف BCقرار دارد. در نتیجه $R = P$ و ABCP چهارضلعی محاطی است.

نقاط X , Y , M نقاطی هستند که از P (نقطه روی دایره محیطی) بر ۳ ضلع مثلث عمود وارد شده است و این نقاط را ساخته است پس طبق خط سیمسون این ۳ نقطه روی یک خط هستند. بنابراین داریم. $\frac{BZ}{ZC} = \frac{BM}{MC} = ۱ \quad , M = Z$

حل ۲: چون $P\hat{A}Y = P\hat{A}X$ و $P\hat{Y}A = P\hat{X}A = ۹۰^\circ$ مثلث $\overset{\triangle}{PAX}$ و $\overset{\triangle}{PAY}$ همنهشت‌هستندبنابراین $AX = AY$, $PX = PY$وچونPروی‌عمود منصفBCقرار دارد داریم $PB = PC$ بنابراین $P\hat{Y}C$, $\overset{\triangle}{PXB}$ مثلث‌های قائم‌الزاویه همنهشت هستند. بنابراین $BX = CY$ چون Z,Y,Xهم‌خط هستند طبق قضیه منلائوس
$$\frac{AY}{YC} \times \frac{CZ}{ZB} \times \frac{BX}{XA} = ۱$$
در نتیجه $\frac{BZ}{ZC} = ۱$

سؤال ۴: فرض کنید n عددی صحیح و مثبت باشد. به مریم یک جدول مستطیل داده شده که اعدادی داخل آن صحیح هستند. او اجازه دارد هرگام از یکی حرکات زیر را انجام دهد.

(۱) یک سطر را انتخاب کند و همه اعداد آن را در ۲ ضرب کند. (۲) می‌تواند یک ستون را انتخاب کند و از همه اعداد آن n تا کم کند. همه nهای ممکن را برای شرط زیر پیدا کنید:

برای هر جدول داده شده مریم بتواند با استفاده از دنباله‌ای محدود از حرکات

بالا جدولی سازد و فقط از صفر تشکیل شده باشد.

حل: ثابت می‌کنیم فقط $n = ۲$ جواب است. در ابتدا نشان می‌دهیم اگر $n \neq ۲$ جدول $\begin{bmatrix} ۱ \\ n-۱ \end{bmatrix} = T_۰$ هرگز به ۲ تا صفر تبدیل نمی‌شود. برای $n = ۱$ که واضح است. فرض کنید $n \geq ۳$ باشد برای هر جدول $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = T$ فرض کنید $d(T)$ باقیمانده $a - b$ بر $n-۱$ باشد. نشان می‌دهیم که هیچ‌کدام از حرکت‌ها این مقدار را تغییر نمی‌دهد. اگر، n از هر دو عضو T کم کنیم. آن وقت $a - b$ تغییر نمی‌کند. و اگر یک ردیف را در n ضرب کنیم مثلاً a به na تبدیل می‌شود که $a - b \overset{n-۱}{\equiv} na - b$ به همین ترتیب اگر هر دو در n ضرب شوند. در نتیجه $d(T)$ ثابت است و چون در ابتدا برابر

$$d(T_۰) \overset{n-۱}{\equiv} ۱$$

پس اگر جدول به جدول تماماً صفر تبدیل شود باقیمانده آن به $n - ۱$ برابر صفر است و این غیرممکن است. برای $n = ۲$ الگوریتمی ارائه می‌دهیم تا همیشه به جدول فقط شامل صفر برسیم ما شروع می‌کنیم از ستون اول و بعد هر ستون را به ترتیب صفر خواهیم کرد. در ابتدا مکرراً از ستون اول عدد ۲ را کم می‌کنیم تا حداقل یکی از اعداد آن برابر ۱ یا ۲ شود بعد اعمال زیر را انجام می‌دهیم.

۱: همه ردیف‌هایی که اولشان شامل ۱ است را در ۲ ضرب می‌کنیم.

۲: همه ردیف‌هایی که ابتدایشان ۲ وجود دارد را در ۲ ضرب می‌کنیم.

۳: از همه اعداد ستون اول ۲ تا کم می‌کنیم. این اعمال باعث می‌شود که مجموع ستون اول کاهش پیدا کند و بعد به ستونی می‌رسیم که شامل ۱ و ۲ است که اگر حرکات ۱ و ۳ را انجام دهیم ستون به صفر تبدیل می‌شود. و بعد این عمل را برای هر ستونی انجام می‌دهیم تا کل جدول به صفر تبدیل شود.

سؤال ۵: فرض کنید $P_۰, P_۱, P_۲$، ۳ نقطه روی محیط دایره‌ای به شعاع ۱ باشند $P_۱P_۲ = t < ۲$ و برای هر $i ≥ ۳$ تعریف می‌کنیم P_i مرکز دایره محیطی مثلث $\triangle P_{i-۱} P_{i-۲} P_{i-۳}$ است.

۱ـ ثابت کنید $P_۱, P_۵, P_۹, P_{۱۳}, \ldots$ روی یک خط قرار دارند.

۲ـ قرار دهید x فاصله $P_۱, P_{۱۰۰۱}$ است و y فاصله بین $P_{۱۰۰۱}$ تا $P_{۲۰۰۱}$ همه tهایی را بدست آورید که $\sqrt[۵۰۰]{\frac{x}{y}}$ عددی صحیح باشد.

حل (دنیل بروکس): قرار دهید $P_۱\hat{P}_۳P_۲ = ۲\alpha$ چون مثلث $P_۱\overset{\triangle}{P}_۲P_۳$ متساوی‌الساقین است. داریم $t = P_۱P_۲ = ۲\operatorname{Sin}\alpha$ و همچنین خط $P_۳P_۴$ عمود منصف $P_۱P_۲$ است چون $\triangle P_۲P_۳P_۴$ متساوی‌الساقین است ما می‌توانیم $P_۳P_۴$ را حساب کنیم.

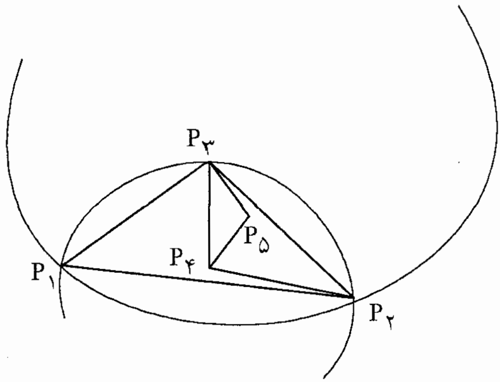
$$P_۳P_۴ = \frac{P_۲P_۳/۲}{\operatorname{Cos}\alpha} = \frac{۱}{۲\operatorname{Cos}\alpha}$$

چون $P_۵$ مرکز دایره محیطی مثلث $P_۴\overset{\triangle}{P}_۳P_۲$ است داریم:

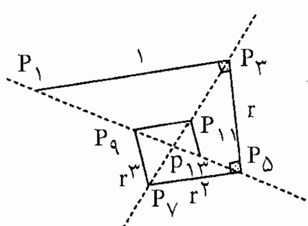
$$P_۳\hat{P}_۵P_۴ = ۲P_۳\hat{P}_۲P_۴ = ۲P_۲\hat{P}_۳P_۴ = ۲\alpha$$

و مثلث متساوی‌الساقین $P_۳\overset{\triangle}{P}_۴P_۵$ با مثلث متساوی‌الساقین $P_۱\overset{\triangle}{P}_۲P_۳$ متشابه‌اند و چون $P_۳P_۴ \perp P_۱P_۲$ پس ما داریم $P_۱\hat{P}_۳P_۵ = ۹۰$ و نسبت $\frac{P_۳P_۵}{P_۱P_۳}$ برابر r است

$$r = \frac{P_۳P_۴}{P_۱P_۲} = \frac{۱}{۲(\operatorname{Sin}\alpha)(۲\operatorname{Cos}\alpha)} = \frac{۱}{۲\operatorname{Sin}(۲\alpha)}$$



با توجه به بحث بالا مثلث $\triangle P_i P_{i+۲} P_{i+۴}$ مثلث قائم‌الزاویه است و $\frac{P_{i+۲}P_{i+۴}}{P_iP_{i+۲}}$ برابر r است بنابراین $P_۱, P_۳, P_۵, \dots$ روی مارپیچ لگاریتمی قرار دارد که نسبت آن r است و در واقع دورهٔ آن ۴ است که نشان می‌دهد $P_۱, P_۵, P_۹, \dots$ روی یک خط قرار دارند.



برای حل قسمت دو طبق گفته‌های بالا $P_۱P_{۱۰۰۱} = r^{۵۰۰} P_{۱۰۰۱}P_{۲۰۰۱}$ در نتیجه $\sqrt[۵۰۰]{\frac{x}{y}} = \frac{۱}{r} = ۲\,\text{Sin}\,(۲\alpha)$ و این عدد صحیح است به شرطی که $\text{Sin}\,(۲\alpha) \in \left\{ ۰, \pm\frac{۱}{۲}, \pm ۱ \right\}$ و چون $۰ < \alpha < ۹۰$ فقط ممکن است که $\alpha \in \{۱۵, ۴۵, ۷۵\}$ بنابراین $\sqrt[۵۰۰]{\frac{x}{y}}$ صحیح است دقیقاً اگر t به مجموعه‌ی زیر تعلق داشته باشد. $\{ ۲\,\text{Sin}\,۱۵, ۲\,\text{Sin}\,۴۵, ۲\,\text{Sin}\,۷۵\}$

مجموعه سؤال‌های: ۹

المپیاد ریاضی کانادا

۲۰۰۲

با پاسخ تشریحی

سؤال ۱: مجموعه‌ی زیر مجموعه‌ی {۹ , ... , ۲ , ۱} است بطوری که جمع هر دو عضو از S اعداد متفاوتی را بوجود می آورد بطور مثال {۵ , ۳ , ۲ , ۱} در شرط S صدق می‌کند ولی {۵ , ۴ , ۳ , ۲ , ۱} نه زیرا {۴ , ۱} و {۳ , ۲} هر دو ۵ را حاصل می‌کنند بیشترین تعداد اعضای S چقدر است؟

حل ۱: می‌توانید ببینید که مجموعه {۸ , ۵ , ۳ , ۲ , ۱} = S با شرط مسئله صدق می‌کند. فرض خلف در نظر می‌گیریم که S دارای ۶ عضو از S باشد بطوری‌که همه جمع‌های دوتایی آن متفاوت باشند. در این صورت کوچکترین جمع ممکن برای ۲ عدد برابر ۳ = ۲ + ۱ است و بیشترین مقدار ممکن برابر ۱۷ = ۹ + ۸ است ۱۵ جمع ممکن است (۱۷ , ... , ۳) علاوه بر این مجموعه S هم $\binom{6}{2}$ جفت دارد یعنی ۱۵ جفت دارد بنابراین هر کدام از ۳ , ... , ۱۷ جمع فقط یک جفت از S است. جفتی که جمعش {۳} است فقط جفت {۲ , ۱} و همینطور برای ۱۷ فقط جفت {۹ , ۸} است یعنی ۹ , ۸ , ۲ , ۱ در S است ولی ۹ + ۱ = ۸ + ۲ و این تناقض است.

حل ۲: براحتی می‌توان بررسی کرد که جمع هر جفت از اعداد در مجموعه {۸ , ۵ , ۳ , ۲ , ۱} متفاوت است.

حل را با برهان خلف پیش می‌گیریم. فرض کنید مجموعه S زیر مجموعه‌ای از اعداد {۹ , ... , ۲ , ۱} باشد بطوری‌که ۶ عضو دارد و مجموع هر جفت آن متفاوت است و $a_1 < a_2 < \cdots < a_6$ اعضای مجموعه‌ی S است.

چون $a_1+a_6 \neq a_2+a_5$ در نتیجه $a_6-a_5 \neq a_2-a_1$ و بطور مشابه $a_6-a_5 \neq a_4-a_3$ و $a_4-a_3 \neq a_2-a_1$ پس این تناقض اعداد مثبت و صحیح و متفاوتی هستند بنابراین:

$(a_6 - a_5) + (a_4 - a_3) + (a_2 - a_1) \geq 1 + 2 + 3 = 6$

بطور مشابه $a_3 - a_2 \neq a_5 - a_4$ بنابراین $(a_3 - a_2) + (a_5 - a_4) \geq 1 + 2 = 3$

با جمع دو نابرابری بدست می‌آید:

$a_6 - a_5 + a_5 - a_4 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_3 - a_2 \geq 6 + 3 = 9$

پس $a_6 - a_1 \geq 9$ و این تناقض است.

سؤال ۲: عدد n را کاربردی می‌گوییم اگر هر عدد کوچکتر از n (طبیعی) را بتوان بصورت مجموع مقسوم علیه‌های متفاوت n نوشت. برای مثال مقسوم علیه‌های ۶، $1, 2, 3, 6$ هستند و $6 = 6$، $3 + 2 = 5$ و $1 + 3 = 4$ و $3 = 3$ و $2 = 2$ و $1 = 1$ مـی‌بینیم ۶ کـاربردی است. ثـابت کـنید اگـر دو عـدد کـاربردی بـاشد ضرب آن دو نیز کاربردی است.

حل: فرض کـنید p و q اعـداد کـاربردی بـاشند. بـرای k بـطوری‌که $k \leq pq$ مـا می‌توانیم بنویسیم:

$k = aq + b$ که $0 \leq a \leq p$, $0 \leq b \leq q$

چون p و q کاربردی هستند و ما می‌توانیم بنویسیم

$a = c_1 + c_2 + \cdots + c_m \qquad b = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$

بطوری‌که c_iها مختلف و همه مقسوم علیه‌هایی از p هستند و d_jها مـختلف و همه مقسوم علیه‌هایی از q هستند. در نتیجه

$k = (c_1 + c_2 + \cdots + c_m)q + (d_1 + d_2 + \cdots + d_n) =$

$= c_1 q + c_2 q + \cdots + c_m q + d_1 + \cdots + d_n$

هر کدام از $c_i q$ و d_jها مقسوم علیه‌هایی از pq هستند و چون $d_j < q \leq c_i q$ پس برای هر i, j $c_i q$, d_jها همه از هم متفاوتند. نتیجه اینکه pq کاربردی است.

سؤال ۳: ثابت کنید برای همه اعداد حقیقی مثبت c, b, a

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ac}+\frac{c^3}{ab}\geq a+b+c$$

و معین کنید که چه موقع برابری اتفاق می‌افتد؟!

حل ۱: چون نابرابری متقارن است و پس اگر به جای c, b, a قرار دهیم kc, kb, ka که $k>0$ به نابرابری اصلی می‌رسیم. بنابراین فرض کنیم که $abc=1$ بدون اینکه به کلیت مسئله لطمه وارد شود می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ac}+\frac{c^3}{ab}=abc\left(\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ac}+\frac{c^3}{ab}\right)=a^4+b^4+c^4$$

پس کافی است ثابت کنیم $a^4+b^4+c^4\geq a+b+c$

می‌دانیم برای اعداد مثبت نابرابری روبرو برقرار است

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{3}\geq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4$$

بنابراین $a^4+b^4+c^4\geq(a+b+c)\,\frac{(a+b+c)^3}{27}$ اما با توجه به نامساوی حسابی ـ هندسی $\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}=1$ بنابراین $a+b+c\geq 3$ در نتیجه

$$a^4+b^4+c^4\geq(a+b+c)\,\frac{(a+b+c)^3}{27}\geq(a+b+c)\,.\,\frac{3^3}{27}$$

$$a^4+b^4+c^4\geq a+b+c$$

حل ۲: می‌دانیم $a^4+b^4+c^4=\frac{(a^4+b^4)}{2}+\frac{(b^4+c^4)}{2}+\frac{(a^4+c^4)}{2}$ برای هر کدام از قسمت‌های نابرابری حسابی ـ هندسی را می‌نویسیم بدست می‌آید که $a^4+b^4+c^4$ بزرگتر یا مساوی $b^2a^2+b^2c^2+a^2c^2$ است. همچنین می‌توان این عبارت را بصورت $\frac{c^2(a^2+b^2)}{2}+\frac{b^2(c^2+a^2)}{2}+\frac{a^2(b^2+c^2)}{2}$ نوشت که

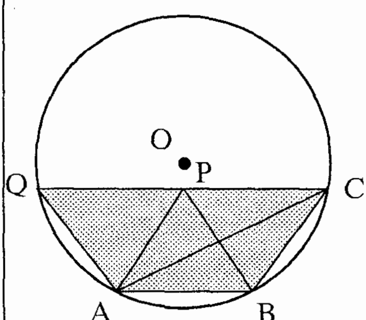
دوباره با استفاده از نابرابری حسابی ـ هندسی بدست می‌آید

$$a^۴ + b^۴ + c^۴ \geq a^۲bc + b^۲ca + c^۲ab$$

که با تقسیم دو طرف بر abc نابرابری مورد نظر بدست می‌آید.

سؤال ۴: Γ را دایره‌ای با شعاع r قرار دهید. فرض کنید A و B دو نقطه متفاوت روی دایره Γ باشد بطوری‌که $AB < \sqrt{۳}\, r$. فرض کنید دایره‌ای به مرکز B و شعاع AB دایره‌ی Γ را دوباره در C قطع کند. P را نقطه قرار دهید داخل دایره‌ی Γ بطوری‌که مثلث ABP متساوی الاضلاع باشد. و بالاخره فرض کنید CP دایره Γ را دوباره در Q قطع می‌کند. ثابت کنید $PQ = r$

حل ۱: مرکز دایره Γ را O قرار دهید و شعاع آن را r. چون $BP = BC$ قرار دهید $\theta = B\hat{P}C = B\hat{C}P$ و چهارضلعی QABC محاطی است در نتیجه $B\hat{A}Q = ۱۸۰ - \theta$ و در نتیجه $P\hat{A}Q = ۱۲۰ - \theta$ علاوه بر این



$$A\hat{P}Q = ۱۸۰^\circ - A\hat{P}B - B\hat{P}C = ۱۲۰ - \theta$$

بنابراین $PQ = AQ$ و $A\hat{Q}P = ۲\theta - ۶۰^\circ$ و چون QABC محاطی است $A\hat{B}C = ۱۸۰^\circ - A\hat{Q}C = ۲۴۰ - ۲\theta$. مثلث‌های OAB و OCB نیز همنهشت هستند. چون $OA = OB = OC = r$ و پس $AB = BC$ زاویه‌های روبرو برابرند $A\hat{B}O = C\hat{B}O = \frac{۱}{۲} A\hat{B}C = ۱۲۰ - \theta$

نشان می‌دهیم مثلث‌های $\overset{\triangle}{AQP}$ و $\overset{\triangle}{AOB}$ همنهشت هستند.

$$P\hat{A}Q = B\hat{A}O = A\hat{P}Q = A\hat{B}O\ ,\ AP = AB \rightarrow \triangle APQ \cong \triangle AOB$$

$\rightarrow QP = OB' = r$

حل ۲: فرض مرکز دایره O, Γ باشد و شعاعش r. چون C, P, A روی دایره‌ای به مرکز B قرار دارد در نتیجه

$$A\hat{B}P = ۶۰^\circ = ۲A\hat{C}P \Rightarrow A\hat{C}P = A\hat{C}Q = ۳۰$$

چون C, A, Q روی دایره‌ی Γ قرار دارند پس $Q\hat{O}A = ۲Q\hat{C}A = ۶۰^\circ$. پس:
$QA = r$ زیرا اگر وتر دایره‌ای روبروی کمان ۶۰° باشد آن وتر برابر شعاع دایره است. امـا از طـرفی $BP = BC$ پس $B\hat{P}C = B\hat{C}P = A\hat{C}B + ۳۰$ و $A\hat{P}Q = ۱۸۰ - A\hat{P}B - B\hat{P}C = ۹۰ - A\hat{C}B$. چون C, B, A, Q روی دایره Γ قرار دارد پس

$$AB = BC,\ A\hat{Q}P = A\hat{Q}C = A\hat{Q}B + B\hat{Q}C = ۲A\hat{C}B$$

و بالاخره

$$Q\hat{A}P = ۱۸۰ - A\hat{Q}P - A\hat{P}Q = ۹۰^\circ - A\hat{C}B$$

بنابراین $P\hat{A}Q = A\hat{P}Q$ در نتیجه $PQ = AQ = r$

سؤال ۵: فرض کـنید $N = \{۰, ۱, ۲, ...\}$ همه تـابع‌های $g: N \rightarrow N$ را بیابید بطوری‌که

$$x\, g(y) + y\, g(x) = (x + y)\, g(x^۲ + y^۲)$$

که y, x عضوی از n هستند.

حل ۱: ادعا می‌کنیم که g تابعی ثابت است. بر اساس برهان خلف اثبات می‌کنیم. y, x وجود دارد بطوری‌که $g(x) < g(y)$، x, y را انتخاب می‌کنیم بطوری‌که و $g(y) - g(x) > ۰$ بین x, yهای ممکن کوچکترین باشند (یعنی اگر $x_۱, y_۱$ نیز در این رابطه صدق کردند $x < x_۱, y < y_۱$). پس:

$$\mathrm{I}\; g(x) = \frac{x\,g(x)+y\,g(x)}{x+y} < \frac{x\,g(y)+y\,g(x)}{x+y} < \frac{x\,g(y)+y\,g(y)}{x+y}$$

بنابراین طبق رابطه

$$\mathrm{I}\quad g(x) < g(x^۲+y^۲) < g(y)\;,\; ۰ < g(x^۲+y^۲) - g(x) < g(y) - g(x)$$

و این با انتخاب y, x متناقض است. پس g تابعی ثابت است. چون $g(۰)$ باید در N باشد پس مقدار ثابت تابع نیز باید در N باشد.

حل ۲: ادعا می‌کنیم f تابعی ثابت است. تعریف می‌کنیم $g(x) = f(x) - g(۰)$ و $g(۰) = ۰$ و $g(x) \geq -f(۰)$ و روشن است $x\,g(y) + y\,g(x) = (x+y)\,g(x^۲+y^۲)$ برای هر x, y عضو N قرار می‌دهیم $y = ۰$ بدست می‌آید $g(x^۲) = ۰$ (بطور مثال $g(۱) = g(۴) = ۰$) اگر قرار دهید $x = y = ۱$ بدست می‌آید $g(۲) = ۰$ و اگر x, y, z عضو N در رابطه $x^۲+y^۲ = z^۲$ صدق می‌کند بدست می‌آید

$$(*)\; g(y) = -\frac{y}{x}\,g(x)$$

مثلاً اگر در رابطه * قرار دهید $x = ۴$ و $y = ۳$ داریم $g(۳) = ۰$. برای هر عدد زوج $x = ۲n > ۴$ قرار می‌دهیم $y = n^۲ - ۱$ پس $y > x$ و $x^۲+y^۲ = (n^۲+۱)^۲$ و برای هر عدد فرد $x = ۲n+۱ > ۳$ قرار می‌دهیم $y = ۲(n+۱)n$ پس $y > x$ و $x^۲+y^۲ = ((n+۱)^۲+n^۲)^۲$.

پس برای هر $x > ۴$، y وجود دارد که $y > x$ و در رابطه $(*)$ صدق کنند. فرض کنیم x وجود داشته باشد که $x > ۴, g(x) > ۰$. ما می‌توانیم دنباله $x = x_۰ < x_۱ < x_۲ < \cdots$ بصورتی بسازیم که $g(x_{i+۱}) = -\frac{x_{i+۱}}{x_i}\,g(x_i)$. پس $|g(x_{i+۱})| > |g(x_i)|$ و علامت $g(x_i)$ یک در میان عوض می‌شود و چون $g(x)$ عددی صحیح است بنابراین $|g(x_{i+۱})| \geq |g(x_i)| + ۱$ پس

برای i با مقدار زیاد داریم $g(x_i) < f(\circ)$ و این تناقض است.

پس در نتیجه $f(x) = C$ که $C \in N$.

حل۳: فرض کنید W مجموعه از اعداد صحیح نا منفی باشد و $g: W \to W$ بطوری‌که $x\,g(y) + y\,g(x) = (x+y)\,g(x^2+y^2)$ (*) ما ثابت می‌کنیم g تابعی ثابت است. فرض کنید $g(\circ) = k$ ، $S = \{x \mid g(x) = k\}$. قرار دهید $y = \circ$ در رابطه (*) بدست می‌آید $g(x^2) = k$ پس

(۱) $\forall x > \circ \to x^2 \in S$ به عنوان مثال $1 \in S$. فرض کنید $x^2 + y^2 = z^2$ پس $y\,g(x) + x\,g(y) = (x+y).k$ پس $x \in S$ وقتی $x^2 + y^2$ مربع کامل باشد. کار را با برهان خلف ادامه می‌دهیم. فرض کنید n کوچکترین عدد صحیح نامنفی باشد بطوری‌که $g(2^n) \neq k$. با توجه به (۱) n باید فرد باشد، بنابراین $\frac{n-1}{2}$ عدد صحیح است و $\frac{n-1}{2} < n$ در نتیجه $g(2^{\frac{n-1}{2}}) = k$ قرار دهید $x = y = 2^{\frac{n-1}{2}}$ بدست می‌آید $g(2^n) = k$ و این تناقض است. پس همه‌توان‌های ۲ عضوی از مجموعه S است. برای هر n که عدد صحیح است $p(n)$ بزرگترین عدد اول تعریف می‌کنیم که: $P(n) \mid n$

ثابت می‌کنیم برای هر $n > 1$ که عدد صحیح است و بصورت توانی از ۲ نیست دنباله‌ای از اعداد صحیح وجود دارد بصورت $x_1, x_2, \ldots, x_r$ که در شرط‌های زیر صدق می‌کند:

۱) $x_1 = n$ ۲) $x_i^2 + x_{i+1}^2$ برای هر $i = 1, 2, \ldots, r-1$ مربع کامل است.

۳) $P(x_1) \geq P(x_2) \geq \cdots \geq P(x_r) = 2$

برهان: چون n بصورت توانی از ۲ نیست پس $P(n) = P(x_1)$ فرض کنید $P(x_1) = 2m + 1$ پس $n = x_1 = b(2m+1)^a$ و $P_{(b)} < 2m + 1$.

حالت ۱: $a = 1$. چون $(2m+1, 2m^2+2m, 2m^2+2m+1)$ ۳ تایی فیثاغورسی است. اگر $x_2 = b(2m^2 + 2m)$ در آن صورت $x_1{}^2 + x_2{}^2 = b^2(2m^2 + 2m + 1)^2$ مربع کامل است. از این گذشته $x_2 = 2bm(m+1)$ و $P(X_2) < 2m + 1 = P(x_1)$

حالت ۲: $a > 1$ $n = x_1 = (2m+1)^a . b$ فرض کنید

$$x_3 = (2m+1)^{a-2} . b(2m^2+2m)^2 , x_2 = (2m+1)^{a-1} . b(2m^2+2m)$$

$$b . 2^a . m^a . (m+1)^{a-1} = x_{a+1} = (2m^2+1) . b(2m^2+2m)^a , \dots ,$$

پس برای $1 \le i \le a$ $x_i{}^2 + x_{i+1}{}^2$ مربع کامل است و همچنین

$P(x_{a+1}) < 2m + 1 = P(x_1)$

اگر x_{a+1} بصورت توانی از ۲ نباشد ما با استفاده از دستورالعمل بالا دنباله را توسعه می دهیم. تا بدست می آوریم $P(x_r) = 2$ همچنین با توجه به توضیحات بالا $x_i \in S$ است اگر و تنها و اگر $x_{i+1} \in S$ باشد. $(i = 1, 2, \dots, r-1)$ پس $n = x_1 \in S$ است اگر و تنها اگر $x_r \in S$ باشد اما x_r بصورت توانی از ۲ است زیرا $P(x_r) = 2$ و ما ثابت کردیم عددی که بصورت توانی از ۲ عضو مجموعه S است. پس n نیز عضوی از مجموعه S است.

در نتیجه ما ثابت کردیم همه $n \ge 1$ عضوی از مجموعه S هستند و همچنین اثبات کردیم $g(n) = k = g(0)$ پس g تابعی ثابت است.

بخش دوم

سؤال‌های ویژه

با پاسخ تشریحی

توصیه‌ی ما به شما:

به صورت مطلق بیندیشید

آنگاه

پاسخ‌های زیبا را در خواهید یافت

سوال ۱: فرض کنید A , B , C مجزا و با مختصات صحیح در $IR^۲$ باشند ثابت کنید اگر $(|AB|+|BC|)^۲ < ۸.[ABC]+۱$
در آن صورت A , B ,C رأس از مربع هستند که $|XY|$ فاصله بین دو نقطه X , Y است.
و [ABC] مساحت مثلث ΔABC است. (پاتنام ۱۹۹۸)

حل: می‌دانیم $|AB|^۲+|BC|^۲ \geq ۲|AB||BC|$ و از طرفی می‌دانیم $|AB||BC| \geq ۲[ABC]$ (با استفاده از قوانین سینوس‌ها)
همچنین اگر رأس‌ها مثلث (۰ و ۰) و (p و q) و (r و s) باشند مساحت مثلث برابر است با $\frac{|ps-qr|}{۲}$ همچنین اگر A , B نیز نقاط صحیح در صفحه باشند $|AB|^۲$ صحیح است.

در نتیجه: $۸[ABC] \leq |AB|^۲+|BC|^۲+۴[ABC]$

$\leq |AB|^۲+|BC|^۲+۲|AB||BC|$

$< ۸[ABC]+۱$

از طرفی دو طرف نابرابری عدد صحیح هستند پس

$۸[ABC] = |AB|^۲+|BC|^۲+۴[ABC]$

و همچنین $|AB|^۲+|BC|^۲ = ۲|AB||BC| = ۴[ABC]$

و این می‌رساند که B زاویه قائمه است و AB = BC که همان چیزی است که می‌خواهیم.

سوال ۲: فرض کنید N عدد مثبت صحیح که ۱۹۹۸ رقم دارد و همه آن‌ها برابر ۱ است. N =۱۱۱۱۰۰۰۱. هزار رقم بعد از اعشار $\sqrt{N}$ را بیابید.

حل: چون $\sqrt{N}=\frac{10^{999}}{3}\sqrt{1-10^{-1998}}=\frac{10^{999}}{3}(1-\frac{1}{2}10^{-1998}+r)$

پس $N=\frac{(10^{1998}-1)}{9}$ که در اینجا $r<10^{-2000}$. اما رقم اعشاری بعد از ممیز در $\frac{10^{999}}{3}$ برابر با ۰/۰۰۰ ...۱۶۶۶۰۰۰ . و از این‌جا نتیجه می‌شود که ۱۰۰۰ رقم اول اعشار در $\sqrt{N}$ برابر است با ۰/۳۳۳۰۰۰۳۱

سوال ۳: مجموع زیر را بیابید:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^2n}{3^m(n3^m+m3^n)}$$

حل: فرض کنید $a_n=\frac{3^n}{n}$ در نتیجه

$$S=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_m(a_m+a_n)}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n(a_m+a_n)}$$

که در اینجا دومین برابری با جابجایی m , n بدست آمده است. پس:

$$2S=\sum_m\sum_n\left(\frac{1}{a_m(a_n+a_m)}+\frac{1}{a_n(a_m+a_n)}\right)$$

$$\sum_m\sum_n\frac{1}{a_m.a_n}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}\right)^2$$

اما $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}=\frac{3}{4}$ زیرا جمع این سری برابر است $f'(1)$ در حالیکه

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}=\frac{3}{3-x}$ در نتیجه بدست می‌آید $S=\frac{9}{32}$

سوال ۴: ABC مثلث قائم‌الزاویه است که $\hat{C}=90^\circ$ و فرض کنید $B\hat{A}C=\theta$

نقطه D روی AB چنان قرار دارد که $AC = AD = ۱$ همچنین E را روی BC طوری انتخاب می‌کنیم که $C\hat{D}E = \theta$. از E بر BC عمود می‌کنیم تا AB را در F قطع کند. محاسبه کنید $\lim\limits_{\theta \to ۰} |EF|$ (پاتنام ۱۹۹۹)

حل: حد حاصل برابر $\frac{۱}{۳}$ است. زیرا فرض کنید G نقطه‌ای باشد که از قرینه کردن C نسبت به AB بدست آمده است. چون $A\hat{D}C = \frac{\pi - \theta}{۲}$ نتیجه می‌گیریم

$$B\hat{D}E = \pi - \theta - A\hat{D}C = \frac{\pi - \theta}{۲} = A\hat{D}C = \pi - B\hat{D}C = \pi - B\hat{D}G$$ پس

G , D , E روی یک خط قرار دارند. پس:

$$EF = \frac{BE}{BC} = \frac{BE}{BG} = \frac{\sin(\frac{\theta}{۲})}{\sin(\frac{۳\theta}{۲})}$$

ما در این جا از قانون سینوس‌ها، در مثلث ΔBDG استفاده کردیم اما با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال بدست می‌آید:

$$\lim_{\theta \to ۰} \frac{\sin(\frac{\theta}{۲})}{\sin(\frac{۳\theta}{۲})} = \lim_{\theta \to ۰} \frac{\cos(\frac{\theta}{۲})}{۳\cos(\frac{۳\theta}{۲})} = \frac{۱}{۳}$$

سوال ۵: سری توانی زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{۱}{۱ - ۲x - x^۲} = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$$

ثابت کنید برای هر عدد صحیح $n \geq ۰$ عدد صحیح m وجود دارد بطوریکه (پاتنام ۱۹۹۹)

$$a_n^۲ + a_{n+۱}^۲ = a_m$$

حل ۱: بدست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{۱ - ۲x - x^۲} = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} \left(\frac{\sqrt{۲} + ۱}{۱ - (۱ - \sqrt{۲})x} + \frac{\sqrt{۲} - ۱}{۱ - (۱ - \sqrt{۲})x} \right)$$

و همچنین می‌دانیم:

$$\frac{1}{1+(1\pm\sqrt{2})x} = \sum_{n=0}^{\infty} (1\pm\sqrt{2})^n x^n$$

پس:

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((\sqrt{2}+1)^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}\right)$$

با محاسبه ساده‌ای که با گفتن در اینجا خودداری می‌کنیم بدست می‌آید

$$a_n^2 + a_{n+1}^2 = a_{2n+2}$$

حل ۲: قرار می‌دهیم A برابر ماتریس $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ باشد. با استقرا به سادگی اثبات می‌شود.

$$A^{n+2} = \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} \end{pmatrix}$$

و چیزی که مقصود ماست با استفاده از برابری $A^{n+2}.A^{n+2} = A^{2n+4}$ حاصل خواهد شد.

سوال ۶: فرض کنید S مجموعه‌ی متناهی از اعداد صحیح باشد بطوری که همه عضوهای آن از ۱ بیشتر است فرض کنید برای هر عدد طبیعی n تعدادی s وجود دارد که $s \in S$ و $\gcd(s,n) = 1$ یا $\gcd(s, n) = s$ نشان دهید $s,t \in S$ وجود دارد بطوری که $\gcd(s,t)$ عددی اول است.

حل: فرض کنید n کوچکترین عدد صحیح باشد بطوریکه $\gcd(n, s) > 1$ برای هر s در مجموعه‌ی S به روشنی معلوم است که n مقسوم علیه اول تکراری در عامل‌هایش ندارد. با توجه به شرط مجموعه‌ی S، $s \in S$ وجود دارد بطوریکه s می‌تواند n را عاد کند. از طرف دیگر، اگر p عدد اولی باشد که s را می‌شمارد، با توجه به انتخاب n، $\frac{n}{p}$ نسبت به بعضی از tها که عضو s هستند اول است. چون n نمی‌تواند نسبت به t اول باشد، نتیجه می‌شود t بر p بخش‌پذیر است. امّا بر هیچ

مقسوم‌علیه اول دیگری از n بخش‌پذیر نیست.

پس $\gcd(s,t) = p$ و این همان چیزی است که می‌خواستیم.

سوال ۷: فرض کنید $\binom{n}{m}\ \ A=\frac{\gcd(m,n)}{n}$. ثابت کنید برای هر جفت طبیعی m , n، A عددی طبیعی است. (پاتنام ۲۰۰۰)

حل: چون $\gcd(m\ ,\ n)$ یک ترکیب خطی از m و n است، پس $\binom{n}{m}\ \frac{\gcd(m,n)}{n}$ نیز یک ترکیب خطی از

$$\frac{m}{n}\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m-1}\ ,\ \frac{n}{n}\binom{n}{m}=\binom{n}{m}$$

است پس نتیجه می‌شود که خود A نیز عددی طبیعی است.

سوال ۸: ۳ نقطه با مختصات صحیح در صفحه روی دایره‌ای به شعاع r قرار دارند. نشان دهید فاصله‌ی بین دو تا از این نقطه‌ها حداقل $\sqrt[3]{r}$ است. (پاتنام ۲۰۰۰).

حل: فرض کنید a , b , c فاصله بین این ۳ نقطه باشد. مساحت مثلثی که رأس‌هایش این ۳ نقطه است برابر است با $\frac{abc}{4r}$. از طرف دیگر مساحت مثلثی که رأس‌هایش نقطه‌هایی با مختصات صحیح است، حداقل برابر $\frac{1}{2}$ است (طبق قضیه‌ی پیک) پس $\frac{abc}{4r} \geq \frac{1}{2}$ بنابراین:

$$\max(a,b,c)\geq\sqrt[3]{abc}\geq\sqrt[3]{(2r)}>\sqrt[3]{r}$$

سوال ۹: فرض کنید a_j , b_j , c_j اعداد طبیعی هستند برای هر $1 \leq j \leq N$. فرض کنید برای هر j حداقل یکی از a_j , b_j , c_jها فرد باشند نشان دهید که r , s , t وجود دارند بطوریکه برای حداقل $\frac{4N}{7}$ jها که $1 \leq j \leq N$، $ra_j + sb_j + tc_j$ فرد است.

حل: ۳تایی (a,b,c) را در نظر بگیرید بطوریکه $a,b,c \in \{۰ \text{ و } ۱\}$ باشند و همه آنها صفر نباشند.

فرض کنید r_j , s_j , t_j اعدادی هستند که همه آنها زوج نیستند، پس ۴ تا از $ar_j + bs_j + ct_j$ زوج هستند و ۴ تا نیز فرد هستند. (می‌دانیم $a,b,c \in \{۰ \text{ و } ۱\}$). البته وقتی $a = ۰$ و $b = ۰$ و $c = ۰$ حاصل آنها زوج می‌شود. پس حداقل ۴ تا از ۷ تا ۳تایی بالا فرد است. بنابراین حداقل $۴N$ از چهارتایی (a,b,c,j) جمع فرد می‌دهند پس طبق اصل لانه کبوتری ۳تایی (a,b,c) وجود دارد که حداقل $\frac{۴N}{۷}$ جمع فرد می‌سازد.

سوال ۱۰: ثابت کنید بینهایت عدد صحیح n وجود دارد که هر کدام از اعداد n و $n+۱$ و $n + ۲$ را می‌توان بصورت جمع مربع کامل دو عدد صحیح نوشت.

حل ۱: این را می‌دانیم که $x^۲ - ۲g^۲ = ۱$ در مجموعه اعداد صحیح نامتناهی جواب دارد. (معادله پل نام دارد) پس قرار می‌دهیم $n = ۲g^۲$ بدست می‌آید $n=g^۲+g^۲$ و $n + ۱ = x^۲ + ۰^۲$ و $n + ۲ = x^۲ + ۱^۲$ پس نامتناهی n وجود دارد که در شرط مسئله صدق می‌کند.

حل ۲: فرض کنید a عددی زوج باشد بطوریکه $a^۲ + ۱$ عددی اول نباشد. (مثلاً می‌توانید انتخاب کنید $a \overset{۵}{\equiv} ۲$ در نتیجه $a^۲ + ۱$ بر ۵ بخش‌پذیر است.)

پس ما می‌توانیم $a^۲ + ۱$ را بصورت تفاضل دو مربع کامل بنویسیم، مثلاً $x^۲ - b^۲$ بطوریکه اگر $a^۲ + ۱ = r.s$ قرار دهیم $x = \frac{r + s}{۲}$ و $b = \frac{|r - s|}{۲}$. بالاخره قرار می‌دهیم $n = x^۲ - ۱$ پس $n = a^۲ + b^۲$ و $n + ۱ = x^۲$ و $n + ۲ = x^۲ + ۱$

سوال ۱۱: فرض کنید B مجموعه‌ای با بیش $\frac{۲^{n + ۱}}{n}$ نقطه در یک فضای n بعدی است. $n \geq ۳$، بطوریکه مختصات نقاط بصورت $(\pm ۱, \ldots, \pm ۱, \pm ۱, \pm ۱)$ است.

ثابت کنید ۳ نقطه در مجموعه‌ی B وجود دارد که رأس‌های مثلث متساوی الاضلاع هستند.

حل: برای هر نقطه P عضو B، فرض کنید S_P مجموعه‌ای از نقاط B می‌باشند که مولفه‌های آنها ۱± است و فقط در یک مؤلفه با P اختلاف داشته باشند. چون مجموعه B بیشتر از $\frac{2^{n+1}}{n}$ عضو دارد و همچنین S_P دارای n عضو است، پس تعداد مجموعه‌های عضوهای S_P بیشتر از 2^{n+1} است. یعنی تعداد این مجموعه‌ها از دو برابر تعداد عضوهای مجموعه‌ی B بیشتر است پس طبق اصل لانه کبوتری یک نقطه وجود دارد که به عنوان مثال در ۳ مجموعه‌ی S_R ، S_Q ، S_P آمده است. اما هر دوتایی از P , Q , R تنها در ۲ مؤلفه اختلاف دارند پس PQR مثلث متساوی الاضلاع است.

سوال ۱۲: فرض کنید n عددی زوج و مثبت طبیعی باشد اعداد ۱ تا n^2 را در شبکه‌ی $n\times n$ می‌نویسیم بطوری اعداد kامین ردیف بصورت زیر باشد: (از چپ به راست)

$(k-1)n+1 \quad (k-1)n+2$ و ... و $(k-1)n+n$

مربع‌های شبکه‌ی $n \times n$ طوری رنگ می‌کنیم که نصف مربع‌های واقع در هر ردیف و هر ستون قرمز باشد و نصف بقیه سیاه باشد. (حداقل یک طریق برای این نوع رنگ کردن وجود دارد.) ثابت کنید برای هر رنگ کردن که شرط مسئله صدق کند جمع اعداد خانه‌های قرمز با جمع اعداد در خانه‌های سیاه برابر است.

حل: فرض کنید R مجموعه‌ی خانه‌های قرمز و B مجموعه‌ی خانه‌های سیاه باشد اگر $s\in R\cup B$ فرض عددی روی خانه‌ی s برابر $f(s)\,n + g(s) + 1$ بطوری که $f(s) \geq 0$ و $g(s) \leq n-1$. پس این روشن است که f(s) فقط به ردیف

خانه s بستگی دارد و همچنین $g(s)$ فقط به ستون خانه s بستگی دارد. چون در هر ردیف نصف خانه‌ها به مجموعه R تعلق دارند و نصف خانه‌ها به مجموعه B پس:

$$\sum_{s\in R} f(s)=\sum_{s\in B} f(s)$$

و به‌طور مشابه برای هر ستون نیز نصف خانه‌ها متعلق به مجموعه‌ی R و نصف خانه‌ها متعلق به مجموعه B هستند پس

$$\sum_{s\in R} g(s)=\sum_{s\in B} g(s)$$

در نتیجه

$$\sum_{s\in R} (f(s)n+g(s)+۱=\sum_{s\in B} (f(s)+g(s)+۱)$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم.

سوال ۱۳: سکه‌های $c_۱$, $c_۲$, ... c_n موجود هستند. برای هر k، سکه c_k عادلانه است. و احتمال اینکه سکه c_k را وقتی بالا می‌اندازیم شیر بیاید برابر $\frac{۱}{۲k+۱}$. اگر n سکه را بیاندازیم احتمال اینکه تعداد شیرها فرد باشد چقدر است؟ (احتمال کسری بر حسب n باشد.)

حل: فرض کنید P_n احتمال خواسته شده باشد. پس $P_۱=\frac{۱}{۳}$ و برای هر $n>۱$ داریم

$$P_n=\left(\frac{۲n}{۲n+۱}\right)P_{n-۱}+\left(\frac{۱}{۲n+۱}\right)(۱-P_{n-۱})$$

$$=\left(\frac{۲n-۱}{۲n+۱}\right)P_{n-۱}+\frac{۱}{۲n+۱}$$

با استفاده از این تابع بازگشتی بدست می‌آید $P_2=\frac{2}{5}$ و $P_3=\frac{3}{7}$ و با استفاده از استقراری ساده اثبات می‌شود. $P_n=\frac{n}{2n+1}$

سوال ۱۴: ثابت کنید معادله $a^{n+1}-(a+1)^n=2001$ فقط به ازای یک a و n جواب دارد. (پاتنام ۲۰۰۱)

حل: فرض کنید $a^{n+1}-(a+1)^n=2001$. می‌دانیم $a^{n+1}-[(a+1)^n-1]$ بر a بخش‌پذیر است پس $2002=2\times7\times11\times13$ نیز بر a بخش‌پذیر است. چون ۲۰۰۱ بر ۳ بخش‌پذیر است. ما باید داشته باشیم $a\equiv1 \pmod 3$ در غیر این صورت یکی از a^{n+1} یا $(a+1)^n$ بر ۳ بخش‌پذیر می‌شود ولی دیگری بر ۳ بخش‌پذیر نمی‌شود در این تفاضل این دو بر ۳ بخش‌پذیر نمی‌شود. پس $a^{n+1}\equiv1 \pmod 3$ در نتیجه، باید داشته باشیم $a^n\equiv1 \pmod 3$ در نتیجه حداقل ۲). اگر a زوج باشد نتیجه می‌گیریم:

$a^{n+1}-(a+1)^n\equiv-(a+1)^n \pmod 4$ چون n زوج است پس

$-(a+1)^n\equiv1 \pmod 4$. چون $2001\equiv1 \pmod 4$ پس این تناقض است.

در نتیجه a فرد است و پس باید $7\times11\times13=1001$ را بشمارد. علاوه بر این $a^{n+1}-(a+1)^n\equiv a \pmod 4$ پس $a\equiv1 \pmod 4$. از مقسوم علیه‌های $7\times11\times13$ آنهایی با ۱ به هنگ ۳ همنهشت هستند که بر ۱۱ بخش‌پذیر نیستند. پس a می‌تواند 7×13 را بشمارد از طرف دیگر $a\equiv1 \pmod 4$ و این فقط موقعی امکان‌پذیر است که a بتواند ۱۳ را بشمارد. ما نمی‌توانیم داشته باشیم $a=1$ چون $2001\neq2^n-1$ پس تنها جواب ممکن $a=13$ است. براحتی می‌توان فهمید که $a=13$ و $n=2$ جوابی برای مسئله است. تنها چیزی که باقی می‌ماند

این است که ثابت کنیم n دیگری در معادله صدق نمی‌کند در حقیقت اگر $n > ۲$ ، $۱۳^{n+۱} \equiv ۲۰۰۱ \equiv ۱ (\mathrm{mod}\ ۸)$ اما هنگامی که n زوج است. $۱۳^{n+۱} \equiv ۱۳ (\mathrm{mod}\ ۸)$ و این تناقض است پس فقط $n = ۲$ و $a = ۱۳$ جواب مسئله است.

بخش سوم

سؤال‌هایی برای تمرین

توصیه‌ی ما به شما:

با تلاش فکری خود مصّرانه به مبارزه با

این سؤالات بروید.

سوال ۱: نقطه k داخل متوازی‌الاضلاع ABCD طوری قرار دارد که در شروط زیر صدق می‌کند:

نقطه میانی AD از K , C به یک فاصله است. همچنین نقطه میانی CD از K , A به یک فاصله است.

N را نقطه میانی BK قرار دهید. ثابت کنید زاویه $N\hat{A}K$ با زاویه $N\hat{C}K$ برابر است. (روسیه ۲۰۰۱)

سوال ۲: فرض کنید a , b , c اعداد حقیقی نامنفی باشند بطوری که:

$a^۲ + b^۲ + c^۲ + abc = ۴$

ثابت کنید $۰ \le ab + bc + ca - abc \le ۲$

سوال ۳: در داخل هر ۸ جعبه ۶ توپ وجود دارد. هر توپ بوسیله یکی از n رنگ موجود رنگ شده است. بطوریکه دو توپی با رنگ مشابه در داخل یک جعبه نیستند و هیچ دو رنگی با هم در بیش از یک جعبه نیامده‌اند.

کوچکترین مقدار n را بدست آورید. (آمریکا ۲۰۰۱)

سوال ۴: در یک ۲۰۰۰ ضلعی محدب هیچ ۳ قطری هم رأس نیستند. هر یک از قطرها را با ۹۹ رنگ موجود رنگ کرده‌ایم. (محیط رنگ شده است) ثابت کنید مثلثی وجود دارد که رأس‌هایش، رأس‌های چند ضلعی یا محل برخورد قطرها است و هر ۳ ضلع آن از یک رنگ است.

سوال ۵: فرض کنید S مجموعه‌ای از اعداد صحیح باشد بطوریکه:

(a) $a , b \in S$ جود ندارد بطوری که $\gcd(a,b) = \gcd(a - ۲ , b - ۲) = ۱$

(b) اگر x , g عضوی از S باشند در آن صورت $x^۲ - y$ نیز به S تعلق دارد.

ثابت کنید S برابر مجموعه‌ی اعداد صحیح است.

سوال ۶: یورا ۲۰۰۱ سکه را روی یک ردیف قرار داده است که ارزش هر کدام از آنها ۱ یا ۲ یا ۳ سنت است. او فهمید که بین هر ۲ تا یک سنتی حداقل یک سکه وجود دارد و بین هر ۱ تا ۲ سنتی حداقل ۲ سکه وجود دارد و بین هر ۲ تا ۳ سنتی حداقل ۳ سکه وجود دارد. چند تا سکه‌ی ۳ سنتی می‌تواند در این ردیف باشد؟

سوال ۷: در یک مهمانی $2n + 1$ نفر وجود دارند. می‌دانیم برای هر n نفر از آن‌ها یک نفر وجود دارد که جز این n نفر نیست ولی همهٔ این n نفر را می‌شناسد. ثابت کنید یک نفر وجود دارد که همه افراد را می‌شناسد. (روسیه ۲۰۰۱)

سوال ۸: همه اعداد صحیح مثبت n را پیدا کنید که برای هر دو مقسوم‌علیه اول n مثل a , b، $a+b-1$ هم مقسوم علیه n باشد.

سوال ۹: دو دایره در نقطه N مماس داخلی هستند. از نقطه K که روی محیط دایرهٔ داخلی است مماسی بر همین دایره رسم می‌کنیم تا دایرهٔ بیرونی A , B قطع کند. فرض کنید M نقطه میانی کمان $\overset{\frown}{AB}$ باشد که شامل N نیست. ثابت کنید اندازه شعاع دایره محیطی مثلث ΔBMK به انتخاب نقطه K بستگی ندارد.

سوال ۱۰: نقطه N روی بزرگترین ضلع مثلث ΔABC یعنی AC انتخاب شده است. عمودمنصف AN و NC به‌ترتیب AB , BC را در K و M قطع می‌کند. ثابت کنید مرکز دایره محیطی مثلث ΔABC روی دایره محیطی مثلث ΔKBM قرار دارد.

سوال ۱۱: فرض کنید مجموعه‌ای از مثلث‌های ΔABC باشد که شرط زیر در آن‌ها صدق می‌کند:

$$5\left(\frac{1}{AP}+\frac{1}{BQ}+\frac{1}{CR}\right)-\frac{3}{\min\{AP, BQ, CR\}}=\frac{6}{r}$$

که r شعاع دایره محیطی است و دایره محاطی بر اضلاع AB , BC , CA بترتیب در P , Q , R مماس شده است. ثابت کنید همه مثلث‌های مجموعه S متساوی الاضلاع و با هم متشابه‌اند. (آمریکا ۲۰۰۰)

سوال ۱۲: فرض کنید $P(x) = x^۳ + ax^۲ + bx + c$ دارای ۳ ریشه‌ی حقیقی متفاوت است. همچنین فرض کنید $Q(x) = x^۲ + x + ۲۰۰۱$. می‌دانیم $P(Q(x))$ هیچ ریشه حقیقی ندارد. ثابت کنید $P(۲۰۰۱) > \frac{۱}{۶۴}$.

سوال ۱۴: در یک جدول خانه را بوسیله یک فلش به هم وصل می‌کنیم که جهت فلش از خانه‌ی با عدد کوچکتر به خانه‌ی با عدد بزرگتر باشد ثابت کنید برآیند همهٔ این بردارها برابر صفر است.

شرح: جدول عجیب جدولی است که جمع اعداد هر سطر با جمع اعداد هر ستون برابر باشد مثل جدول زیر:

۱	۹	۵
۸	۴	۳
۶	۲	۷

سوال ۱۴: نقطه‌های $A_۱$, $B_۱$, $C_۱$ روی ارتفاع‌های AA' , BB' , CC' از مثلث حاده‌الزاویهٔ ABC قرار دارند. (این نقاط دقیقاً روی ارتفاع قرار دارند نه روی امتدادشان). نقطه $A_۱$, $B_۱$, $C_۱$ بر H مرکز ارتفاعی مثلث منطبق نیستند و می‌دانیم:

$$S(ABC_۱) + S(BCA_۱) + S(CAB_۱) = S(ABC)$$

ثابت کنید $A_۱$, $B_۱$, $C_۱$ و H روی یک دایره قرار دارند.

سوال ۱۵: فرض کنید a , b دو عدد صحیح مثبت و متفاوت باشند بطوری که $ab(a+b)$ مضربی از $a^2 + ab + b^2$ باشد ثابت کنید $|a-b| > \sqrt[3]{ab}$

سوال ۱۶: کوچکترین مقدار n را که یک عدد صحیح مثبت را بدست آورید که اگر به هر صورتی n خانه از یک جدول 1000×1000 رنگ کنیم ۳ خانه رنگ شده وجود دارد که مرکز آنها مثلث قائم‌الزاویه تشکیل دهند که ضلع‌های مجاور قائمه با اضلاع جدول موازی باشند.

سوال ۱۷: فرض کنید a_1 , b_1 , a_2 , b_2 , ... , a_n , b_n اعداد حقیقی نامتعی باشند.

ثابت کنید:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \min\{a_i.a_j , b_i.b_j\} \leq \sum_{i,j=1}^{n} \min\{a_i.b_j , a_j.b_i\}$$

سوال ۱۸: در یک کشور ۲۰۰۱ شهر وجود دارد برای هر شهر، جاده‌ای وجود دارد که از آن خارج می‌شود و همچنین شهری وجود ندارد که مستقیماً به همه شهرها وصل شده باشد. مجموعه D از شهرها را مجموعه‌ی «مالک» می‌نامیم اگر از شهرهایی که داخل مجموعه D نیستند حداقل به یکی از شهرهای D بطور مستقیم وصل باشد. این را می‌دانیم که هر مجموعه مالک حداقل K عضو دارد ثابت کنید می‌توانیم این کشور را به $2001 - K$ جمهوری تقسیم کنیم بطوری که هر دو شهری که به یک جمهوری تعلق دارند مستقیماً بین جاده‌ای وجود نداشته باشد.

سوال ۱۹: هرم $SABC$ داده شده است. مرکز کره‌ای که روی صفحه ABC است و از نقاط A , B , C می‌گذرد بالاهای SA , SB , SC را بترتیب در A_1 , $_1$,

B ، C_1 قطع می‌کند که این نقاط متفاوت با A , B , C هستند. صفحه‌های مماس بر این کره در نقطه‌های A_1 , B_1 , C_1 در نقطه O به‌هم می‌رسند. ثابت کنید نقطه O مرکز محیطی هرم $SA_1B_1C_1$ است.

سوال ۲۰: در مثلث ΔABC می‌دانیم $A\hat{C}B = ۲A\hat{B}C$. نقطه D روی ضلع BC طوری قرار داردکه: $۲B\hat{A}D = A\hat{B}C$

آنگاه ثابت کنید $\frac{۱}{AB} + \frac{۱}{AC} = \frac{۱}{BD}$

سوال ۲۱: a . b , c اعدادی مثبت هستند که جمع آن‌ها برابر ۱ است. ثابت کنید.

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۲\sqrt{۳abc} \leq ۱$$

سوال ۲۲: عددهای m , n صحیح و مثبت هستند می‌دانیم $mn \mid m^۲ + n^۲ + m$ ثابت کنید m مربع یک عدد صحیح است.

سوال ۲۳: همه زوج (a,b) را پیدا کنید که a , b اعداد صحیح و مثبت هستند بطوریکه $a^۳ + ۶ab + ۱$ و $b^۳ + ۶ab + ۱$ مکعب‌های صحیحی باشند.

سوال ۲۴: در مثلث حاده‌الزاویه ΔABC نقاط D , E , F به‌ترتیب روی BC , CA , AB قرار دارند. دایره‌های محیطی مثلث‌های ΔAEF و ΔBED, ΔCDE از نقطه‌ی P می‌گذرند.

ثابت کنید اگر: $\frac{PF}{PD} = \frac{AF}{CD}$, $\frac{PE}{PF} = \frac{CE}{BF}$, $\frac{PD}{PE} = \frac{BD}{AE}$ در آن صورت BE , AD , CF ارتفاع‌های مثلث ABC هستند.

سوال ۲۵: در یک گروه n نفر از افراد که $n \geq ۳$ هر نفر زوج نفر دیگر را می‌شناسد (ممکن است صفر باشد) ثابت کنید بین این n نفر، ۳ نفر پیدا می‌شوند

که تعداد آشناهایشان با هم برابر است. (می‌دانیم دوستی رابطه دو طرفه است.)

سوال ۲۶: $S(n)$ جمع رقم‌های عدد n است. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، عدد $S(۲n^۲ + ۳)$ مربع کامل نیست.

سوال ۲۷: ثابت کنید نامتناهی عدد طبیعی n وجود دارد که $(۵۰n + ۱)^{۵۰} + ۵۰^{n}$ عددی مرکب باشد.

سوال ۲۸: مثلث ABC مثلثی متساوی‌الساقین است و زاویه BAC قائمه است و نقطه D روی ضلع BC چنان قرار دارد که $BD = ۲CD$. نقطه E پایه عمود وارد از B بر خط AD است.

زاویه $\widehat{CED}$ را بیابید.

سوال ۲۹: همه x , gهای طبیعی را بیابید که $g^x = x^{۵۰}$

سوال ۳۰: در داخل یک کوزه دو توپ وجود دارد، یکی سفید و دیگری سیاه. علاوه بر این، ۵۰ توپ سیاه و ۵۰ توپ سفید در خارج کوزه داریم. ما الگوریتم زیر را ۵۰ بار تکرار می‌کنیم:

ابتدا یک توپ از کوزه تصادفی بیرون می‌آوریم، بعد آن را دوباره به همراه توپ دیگری به رنگ خوش که از خارج کوزه انتخاب کرده‌ایم، داخل کوزه قرار می‌دهیم. بالاخره ۵۲ توپ داخل کوزه قرار می‌گیرد بیشترین مقدار ممکن برای توپ‌های سفید داخل کوزه چیست؟

سوال ۳۱: همه xهای صحیح را پیدا کنید که:

$$x^{۲۰۰۰} + ۲۰۰۰^{۱۹۹۹} = x^{۱۹۹۹} + ۲۰۰۰^{۲۰۰۰}$$

سوال ۳۲: اثبات یا رد کنید:

آیا می‌توان داخل یک مکعب به ضلع ۴، ۶۵ توپ به قطر ۱ جا دهیم.

سوال ۳۳: ثابت کنید برای همه nها طبیعی که $n \geq 2$ و برای همه اعداد اول P، عدد $n^{p^p}+p^p$ مرکب است.

سوال ۳۴: $\overset{\triangle}{ABC}$ مثلثی متساوی‌الساقین است. که $\hat{A}=90^\circ$ نقاط D , E روی ضلع BC طوری قرار دارند که $D\hat{A}E=45^\circ$. دایره محیطی ADE ، AC ,AB را به ترتیب در نقاط P , Q قطع می‌کند. ثابت کنید.$BP+CQ=PQ$

سوال ۳۵: ثابت کنید هر مثلث ABC شامل نقطه‌ای مانند P است (در داخل مثلث) که هر خطی که از P عبور می‌کند محیط و مساحت مثلث ABC را به یک نسبت تقسیم می‌کند.

سوال ۳۶: در داخل مربع‌های یک جدول $n\times n$ ، n^2 عدد مختلف نوشته شده است. (اعداد صحیح و مثبت هستند). در هر ستون از جدول بزرگترین عدد را به رنگ قرمز درمی‌آوریم. مجموعه‌ی S را «پذیرفتن» نامیم در صورتی که شامل n خانه از خانه‌های جدول باشد و هیچ کدام از این خانه‌ها در یک سطر و یک ستون نباشند. ثابت کنید مجموعه‌ی پذیرفتن S که مجموع اعداد نوشته شده روی خانه‌های آن بیشترین مقدار است. حداقل شامل یک خانه قرمز است.

سوال ۳۷: فرض کنید W چند جمله از درجه ۲ باشد که همهٔ ضرایب آن صحیح هستند. فرض کنید برای هر x که عددی صحیح است مقدار $W(x)$ مربع یک عدد صحیح باشند. ثابت کنید W مربع یک چند جمله‌ای است.

سوال ۳۸: عدد طبیعی n داده شده است. در یک جمع که n نفر کار می‌کنند، ۶ کمیته وجود دارد. هر کمیته حداقل شامل $\frac{n}{4}$ نفر است. ثابت کنید ۲ کمیته وجود دارد که حداقل $\frac{n}{30}$ عضوهای آنها مشترک است.

سوال ۳۹: همه اعداد اول را پیدا کنید که $p \le q \le r$ بطوریکه همه اعداد

$pq + r\ ,\ pq + r^{2}\ ,\ qr + p\ ,\ qr + p^{2}\ ,\ rp + p\ ,\ rp + p^{2}$

نیز اول باشند.

سوال ۴۰: مثلث ΔABC که $B\hat{A}C = 90^\circ$ قاعده هرم $ABCD$ است. علاوه بر این می‌دانیم $AD = BD \quad , AB = CD$

ثابت کنید $ACD \ge 30^\circ$

سوال ۴۱: همه زوج $(x\ ,\ g)$ را بیابید که اعداد صحیح مثبت هستند و

$x^{x+g} = g^{g-x}$

سوال ۴۲: g خطی از صفحه است و نقاط $R\ ,\ Q\ ,\ P$ در یک طرف خط g قرار دارند. نقاط $N\ ,\ M$ روی خط g طوری قرار گرفته‌اند که $PM \perp g$ و $QN \perp g$.
نقطه S بین دو خط $QN\ ,\ PM$ قرار دارد چنان‌که $PS = PM$ و $QN = QS$.
عمودمنصف
SM و SN یکدیگر را در R قطع می‌کنند. و خط RS دایره محیطی PQR را در T (متفاوت با R) قطع می‌کند. ثابت کنید S نقطه میانی RT است.

سوال ۴۳: در یک امتحان ۸ سوالی هر دانش‌آموز به ۳ سوال پاسخ می‌دهد. هیچ دو دانش‌آموزی به بیش از یک سوال مشترک جواب نمی‌دهند. بیشترین تعداد دانش‌آموزان چقدر می‌تواند باشد؟

سوال ۴۴: لوزی $ABCD$ داده شده است مکان هندسی نقاط P که در داخل لوزی باشند را بیابید بطوری که در شرط $A\hat{P}D + B\hat{P}C = 180^\circ$ صدق کند.

سوال ۴۵: در مثلث $A\hat{B}C$، نیمساز زاویه $B\hat{A}C$ ضلع BC را در نقطه D قطع می‌کند می‌دانیم $|AD|^{2} = |BD| \cdot |CD|\quad , A\hat{D}B = 45^\circ$.

زاویه‌های مثلث ABC را بدست آورید.

سوال ۴۶: فرض کنید $P(x)$ چند جمله‌ای باشد که درجه آن فرد است و داریم:

$$P(x^۲ - ۱) = (P(x))^۲ - ۱$$

برای هر x . ثابت کنید $P(x) = x$

سوال ۴۷: در مثلث ΔABC می‌دانیم $AC = AB$. نقطه P داخل مثلث طوری قرار دارد که $P\hat{A}B = P\hat{B}C$. M نقطه میانی ضلع AB است. ثابت کنید

$$A\hat{P}M + B\hat{P}C = ۱۸۰^\circ$$

سوال ۴۸: همه اعداد طبیعی c,b,a را طوری پیدا کنید $a^۲ + ۱$, $b^۲ + ۱$ اعداد اول باشند و در برابری زیر صدق کنند:

$$(a^۲ + ۱)(b^۲ + ۱) = c^۲ + ۱$$

سوال ۴۹: چند وجهی محدب داده شده است که همه‌ی وجهای آن مثلث است. ما رأس‌های آن را با ۳ رنگ، رنگ می‌کنیم. ثابت کنید تعداد وجههایی که رأس‌های آن دارای هر ۳ رنگ هستند زوج است.

سوال ۵۰: مرکز دایره‌ی K که در ذوزنقه غیر متساوی‌الساقین ABCD محاط است را O می‌نامیم. قاعده بلند ذوزنقه AB و نقطه میانی آن M است. قاعده کوچک CD در نقطه E بر K مماس شده است.

خط OM قاعده CD را در F قطع می‌کند. ثابت کنید $DE = FC$ اگر و تنها اگر $AB = ۲CD$

سوال ۵۱: مجموعه S شامل ۲۰۰۲ عضو است. فرض کنید N عددی طبیعی

$$۱ \leq N \leq ۲^{۲۰۰۲}$$

ثابت کنید می‌توان زیر مجموعه‌های S را با دو رنگ سفید و سیاه به صورت زیر

رنگ کرد.

(a) اشتراک هر دو زیر مجموعه سفید، نیز سفید باشد.

(b) اشتراک هر دو زیر مجموعه سیاه، نیز سیاه باشد.

(c) تعداد زیر مجموعه سفید برابر N باشد.