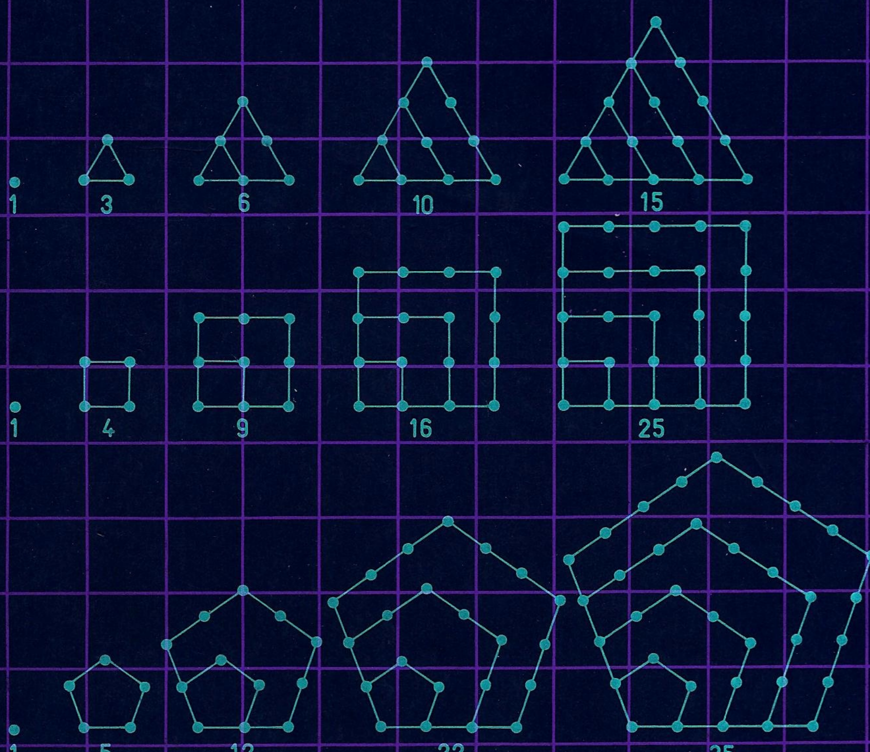
نظریهٔ تحلیلی اعداد (۲)

نوشتهٔ

تام م. اپوستل

ترجمهٔ

علی اکبر عالم زاده، علی اکبر رحیم زاده



$$\omega(n) = \sum_{k=0}^{n-1} (3k+1) = \frac{3n(n-1)}{2} + n = \frac{3n^2 - n}{2}$$

نظریهٔ تحلیلی اعداد

جلد دوم

توابع هنگی و سریهای دیریکله

نوشتهٔ

تام م. اپوستل

ترجمهٔ

علی اکبر عالم زاده   علی اکبر رحیم زاده

پیشگفتار مؤلف

این کتاب جلد دوم یک کتاب درسی دو جلدی است[1] که از درسی (ریاضیات ۱۶۰)که۲۵ سال است در موسسهٔ فنی کالیفرنیا ارائه می‌شود ناشی شده است .

در جلد دوم زمینه‌ای در نظریهٔ اعداد درحدود جلد اول‌همراه با معرفتی از مفاهیم اساسی آنالیز مختلط دانسته گرفته شده است .

بخش اعظم این جلد به توابع بیضوی و توابع هنگی و چند کاربرد آنها در نظریهٔ اعداد اختصاص دارد . از جمله مباحث مطرح شده می‌توان سری همگرای رادماخر برای‌تابع افراز ، همنهشتیهای لنربرای ضرایب فوریهٔ تابع هنگی $j(\tau)$ ، و نظریهٔ فرمهای‌تمام‌هکه با ضرایب ضربی فوریه را نام برد . در فصل آخر نظریهٔ هم‌ارزی سریهای دیریکلهٔ کلی بوهر مطرح خواهد شد .

در هر دو جلد بر جنبه‌های‌کلاسیک‌موضوع‌که اخیرا" به میزان زیادی گسترش یافته‌اند تأکید شده است . امید است این کتاب دوجلدی غیرمتخصص را با بخش مهم و جذابی از ریاضیات آشنا ساخته و ، در عین حال ، زمینه‌ای برای متخصص فراهم سازد .

این جلد همانند جلد اول به شاگردانی که این درس را گرفته و سپس تحقیقات‌مهمی در نظریهٔ اعداد و سایر بخشهای ریاضی کرده‌اند تقدیم می‌شود .

تام م . اپوستل

ژانویه ۱۹۷۶

---

۱ . عنوان جلد اول این کتاب عبارت است از

Introduction to Analytic Number Theory

که قبلا" به فارسی ترجمه و به چاپ رسیده است .

فهرست مطالب

پیشگفتار مترجمان

نظریهٔ اعداد جالب‌ترین شاخهٔ ریاضیات است. این مبحث که زمانی پراکنده و منزوی بود، اینک به علمی منسجم، فعال، با اصولی پیچیده بدل شده است. توان اعجاب‌آورش را ناشی از روشهای تحلیلی آن می‌دانند. از اینروست که بخش تحلیلی این نظریه زیباترین تجلیات فکری ریاضی بشر محسوب می‌شود.

چون در نظریهٔ تحلیلی اعداد کتابی به فارسی وجود نداشت، چندی پیش جلد اول کتاب بی‌نظیر اپوستل ترجمه و تقدیم شیفتگان این علم شد. اینک ترجمهٔ جلد دوم این اثر را به یادگار می‌گذاریم. باشد که این خدمت مقبول ریاضی‌دوستان فارسی‌زبان قرار گیرد.

علی‌اکبر عالم‌زاده   علی‌اکبر رحیم‌زاده
گروه آموزشی ریاضی
دانشگاه تربیت معلم

۱
توابع بیضوی

۱۰۱ مقدمه

نظریهٔ جمعی اعداد به‌بیان عدد صحیح n به صورت مجموعی از اعداد صحیح درمجموعهٔ S می‌پردازد. مثلا"، S ممکن است از اعداد اول، مجذورها، مکعبها، یا سایر اعداد خاص متشکل باشد. سوءال این است که آیا یک عدد را می‌توان به صورت مجموعی‌ازعناصر S بیان کرد یا خیر و، در صورت امکان، این امر به چند طریق میسر است.

فرض کنیم $f(n)$ تعداد طرقی باشد که n را می‌توان به صورت مجموعی از عناصر S نوشت. ما خواص مختلف $f(n)$، از جمله رفتار مجانبی آن به ازای n بزرگ، را جستجو می‌کنیم. در یکی از فصلهای آتی مقدار مجانبی تابع افراز $p(n)$ که تعداد طرق نوشتن n به صورت مجموعی از اعداد صحیح مثبت نابیشتر از n است را تعیین می‌کنیم.

تابع افراز $p(n)$ و توابع دیگر نظریهٔ جمعی اعداد رابطهٔ بسیار نزدیکی با رده‌ای از توابع در آنالیز مختلط دارند که **توابع هنگی بیضوی** نامیده می‌شوند. نقش این توابع در نظریهٔ جمعی اعداد شبیه نقش سری دیریکله[1] در نظریهٔ ضربی اعداد است. سه فصل اول کتاب مقدمه‌ای است بر نظریهٔ توابع هنگی بیضوی. کاربردهای آن در تابع افراز در فصل ۵ داده شده‌اند.

بحث را با بررسی توابع دو تناوبه آغاز می‌کنیم.

۲۰۱ توابع دو تناوبه

تابع f از یک متغیر مختلط‌را **متناوب** با دورهٔ تناوب ω نامیم اگر هر وقت z و $z + \omega$ در

---

1. Dirichlet

قلمرو f باشند،

$$f(z+\omega)=f(z) .$$

اگر ω یک‌دورهٔ تناوب باشد، به‌ازای هر عدد صحیح n، $n\omega$ نیز چنین است. اگر ω_1 و ω_2 دورهٔ تناوب باشند، به ازای هر دو عدد صحیح m و n، $m\omega_1+n\omega_2$ نیز چنین است.

تعریف. تابع f را **دوتناوبه** نامیم اگر دارای دو دورهٔ تناوب مانند ω_1 و ω_2 باشد که نسبت آنها ω_2/ω_1 حقیقی نباشد.

شرط غیرحقیقی بودن برای پرهیز از حالات تباه شده است. مثلا"، اگر ω_1 و ω_2 دوره‌های تناوبی باشند که نسبت آنها حقیقی و گویاست، به آسانی می‌توان نشان داد که هر یک از ω_1 و ω_2 مضرب‌صحیحی‌از یک‌دوره تناوب‌هستند. در واقع، هرگاه $\omega_2/\omega_1=a/b$ که در آن اعداد صحیح a و b نسبت به‌هم اولند، آنگاه اعداد صحیحی مانند m و n وجود دارند به طوری که $mb+na=1$. فرض کنیم $\omega=m\omega_1+n\omega_2$. در این صورت، ω یک دورهٔ تناوب است و داریم

$$\omega=\omega_1\left(m+n\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)=\omega_1\left(m+n\frac{a}{b}\right)=\frac{\omega_1}{b}(mb+na)=\frac{\omega_1}{b},$$

درنتیجه، $\omega_1=b\omega$ و $\omega_2=a\omega$. لذا، هر دوی ω_1 و ω_2 مضارب صحیحی از ω هستند.

اگر نسبت ω_2/ω_1 حقیقی و گنگ باشد، می‌توان نشان داد که f دوره‌های تناوب به دلخواه کوچک دارد (ر.ک. قضیهٔ ۱۲۰۷). یک تابع با دوره‌های تناوب به دلخواه‌کوچک بر هر مجموعهٔ همبند بازی که روی آن تحلیلی باشد ثابت است. در واقع، در هر نقطهٔ تحلیلی f داریم

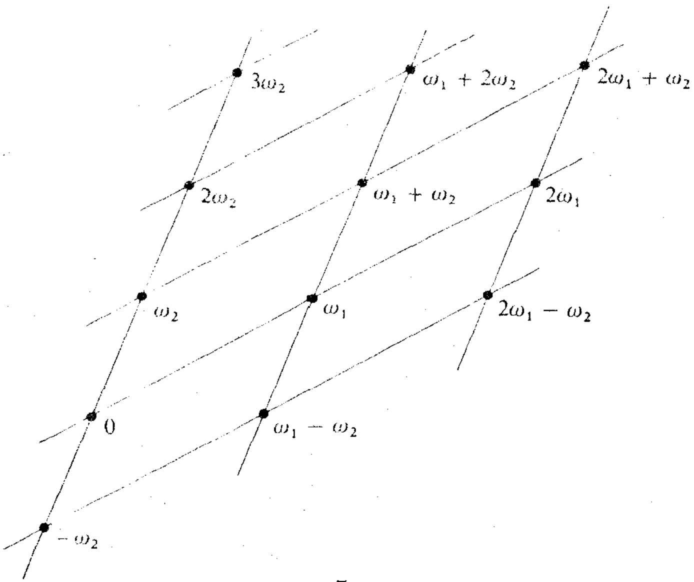
$$f'(z)=\lim_{z_n\to 0}\frac{f(z+z_n)-f(z)}{z_n},$$

که در آن $\{z_n\}$ دنباله‌ای‌از اعداد مختلط ناصفر با حد 0 است. اگر f دارای‌دوره‌های تناوب به دلخواه کوچک باشد، می‌توان $\{z_n\}$ را دنباله‌ای از دوره‌های تناوب با حد 0 اختیارکرد. در این صورت، $f(z+z_n)=f(z)$؛ و درنتیجه، $f'(z)=0$. به عبارت دیگر، درهر نقطهٔ تحلیلی f، $f'(z)=0$؛ لذا، f باید بر هر مجموعهٔ همبند باز که در آن f تحلیلی است ثابت باشد.

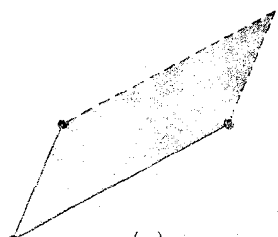
۱.۳ زوجهای اساسی از دوره‌های تناوب

تعریف . فرض کنیم f دارای دوره‌های تناوب ω_1 ، ω_2 باشد که نسبت آنها ω_2/ω_1 حقیقی نیست . زوج (ω_1, ω_2) را یک زوج ***اساسی*** گوییم اگر هر دوره‌ٔ تناوب f به شکل $m\omega_1 + n\omega_2$ باشد ، که در آن m و n اعدادی صحیح‌اند .

هر زوج اساسی از دوره‌های‌تناوب ω_1, ω_2 شبکه‌ای‌از متوازی‌الاضلاعها را معین‌می‌کند که صفحه را فرش می‌کنند . اینها ***متوازی‌الاضلاعهای تناوبی*** نام دارند . مثالی از آن در شکل ۱.۱ . آ آمده است . رئوس عبارتنداز دوره‌های تناوب $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$. معمولاً دو ضلع متقاطع و نقطهٔ تقاطع آنها را تنها نقاط مرزی متعلق به متوازی‌الاضلاع تناوبی می‌گیرند ، مانند شکل ۱.۱ ب .



(آ)



(ب)

شکل ۱.۱

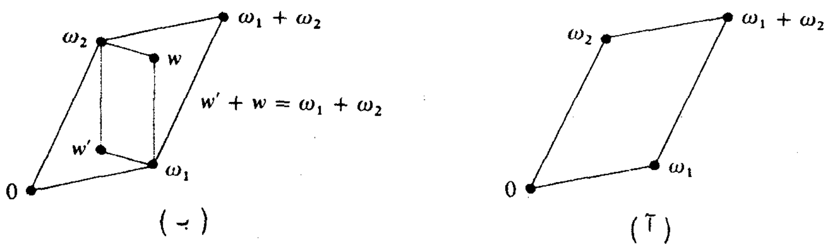
نمادگذاری . اگر ω_1 و ω_2 دو عدد مختلط باشند که نسبت آنها حقیقی نباشد ، مجموعهٔ تمام ترکیبات خطی $m\omega_1 + n\omega_2$ که در آن m و n اعداد صحیح دلخواهی هستند را با $\Omega(\omega_1, \omega_2)$ یا فقط با Ω ، نشان می‌دهیم . این مجموعه را شبکهٔ تولید شده به وسیلهٔ ω_1 و ω_2 می‌نامیم .

قضیهٔ ۱ . ۱ . *هرگاه (ω_1, ω_2) یک زوج اساسی از دوره‌های تناوب باشد ، آنگاه مثلث به رئوس $0, \omega_1, \omega_2$ شامل دورهٔ تناوبی در درون و روی مرز خود نیست . به عکس ، هر زوج دورهٔ تناوب با این خاصیت اساسی می‌باشد .*

برهان . متوازی‌الاضلاع به رئوس 0 ، ω_1 ، $\omega_1 + \omega_2$ ، و ω_2 نموده شده در شکل ۱ ۲۰ آ را درنظر می‌گیریم . نقاط داخل یا روی مرز این متوازی‌الاضلاع به شکل زیرند :

$$z = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2,$$

که در آن $0 \leq \alpha \leq 1$ و $0 \leq \beta \leq 1$. در بین این نقاط تنها 0 ، ω_1 ، ω_2 و $\omega_1 + \omega_2$ دورهٔ تناوب‌اند ؛ درنتیجه ، مثلث به رئوس $0, \omega_1, \omega_2$ شامل دورهٔ تناوبی غیر از رئوس نمی‌باشد .



شکل ۲۰۱

به عکس ، فرض کنیم مثلث $0, \omega_1, \omega_2$ شامل دورهٔ تناوبی غیر از رئوس نبوده ، و ω دورهٔ تناوب دلخواهی باشد . نشان می‌دهیم که به ازای اعداد صحیحی چون m و n ، $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$. چون ω_2/ω_1 غیرحقیقی است ، اعداد ω_1 و ω_2 روی اعداد حقیقی مستقل خطی‌اند ؛ درنتیجه ،

$$\omega = t_1\omega_1 + t_2\omega_2$$

که در آن t_1 و t_2 حقیقی می‌باشند . حال فرض کنیم $[t]$ بزرگترین عدد صحیح نا بیشتر از t باشد و می‌نویسیم :

$t_1 = [t_1] + r_1, t_2 = [t_2] + r_2$ ، که در آن $0 \leq r_1 < 1$ و $0 \leq r_2 < 1$. دراین‌صورت ،

$$\omega - [t_1]\omega_1 - [t_2]\omega_2 = r_1\omega_1 + r_2\omega_2 .$$

هرگاه یکی از r_1 یا r_2 ناصفر باشد، آنگاه $r_1\omega_1 + r_2\omega_2$ دورهٔ تناوبی است که داخل متوازی‌الاضلاع به رئوس $0, \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2$ قرار دارد. اما، هرگاه دورهٔ تناوب w داخل این متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه w یا $\omega_1 + \omega_2 - w$ داخل مثلث $0, \omega_1, \omega_2$ یا روی قطر واصل بین ω_1 و ω_2 است، که با فرض متناقض می‌باشد. (ر.ک. شکل ۱.۲ب.) بنابراین، $r_1 = r_2 = 0$ و برهان تمام است.

تعریف. دو زوج عدد مختلط (ω_1, ω_2) و (ω_1', ω_2')، هر یک با نسبت غیرحقیقی، ***هم‌ارز*** خوانده می‌شوند اگر شبکهٔ یکسانی از دوره‌های تناوب تولید کنند؛ یعنی، اگر

$$\Omega(\omega_1, \omega_2) = \Omega(\omega_1', \omega_2') .$$

قضیهٔ زیر، که اثباتش به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود، رابطه‌ای اساسی بین زوجهای هم‌ارز از دوره‌های تناوب را توصیف می‌کند.

قضیهٔ ۲.۱. *دو زوج (ω_1, ω_2) و (ω_1', ω_2') هم‌ارزند اگر وفقط اگر یک ماتریس 2×2 مانند $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ با درایه‌های صحیح و دترمینان $ad - bc = \pm 1$ وجود داشته باشد به طوری که*

$$\begin{pmatrix} \omega_2' \\ \omega_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix},$$

یا، به عبارت دیگر،

$$\begin{aligned} \omega_2' &= a\omega_2 + b\omega_1, \\ \omega_1' &= c\omega_2 + d\omega_1. \end{aligned}$$

۴.۱ توابع بیضوی

تعریف. تابع f را **بیضوی** نامیم اگر از دو خاصیت زیر برخوردار باشد:

(آ) f دو تناوبه باشد؛

(ب) f خوشریخت باشد (تنها انفرادهایش در صفحهٔ متناهی قطبها باشند).

توابع ثابت مثالهایی بدیهی از توابع بیضوی هستند. بعدها چند نمونه از توابع بیضوی غیرثابت ذکر خواهیم کرد. ابتدا چند خاصیت مشترک توابع بیضوی را به دست

می‌آوریم .

قضیهٔ ۱.۳. هر تابع بیضوی غیرثابت یک زوج دورهٔ تناوب اساسی دارد .

برهان . اگر f بیضوی باشد ، مجموعهٔ نقاط تحلیلی f یک مجموعهٔ همبند باز است. همچنین ، f دارای دودورهٔ تناوب با نسبت غیرحقیقی است .در بین تمام دوره‌های تناوب غیرصفر f دست کم یکی هست که فاصله‌اش تا مبداء مینیمم است (در غیر این صورت ، f دوره‌های تناوب ناصفر به دلخواه کوچک دارد ؛ و درنتیجه ، ثابت می‌باشد) . فرض‌کنیم ω یکی از دوره‌های تناوب ناصفر نزدیکتر از همه به مبداء باشد . در بین تمام دوره‌های تناوب با هنگ $|\omega|$ آن را اختیار می‌کنیم که دارای کوچکترین شناسهٔ نامنفی است و آن را ω_1 می‌نامیم . (مجدداً ، این دورهٔ تناوب باید وجود داشته باشد ، چه در غیر این صورت دوره‌های تناوب ناصفر به دلخواه کوچک وجود خواهد داشت .) اگر علاوه‌بر ω_1 و $-\omega_1$ دوره‌های تناوب دیگری با هنگ $|\omega_1|$ وجود داشته‌باشند ،آن را که کوچکترین شناسهٔ بزرگتر از ω_1 دارد اختیار کرده و ω_2 می‌نامیم . در غیر این صورت ، دایرهٔ بزرگتر بعدی شامل دوره‌های تناوب مخالف $n\omega_1$ را یافته و دورهٔ تناوبی با کوچکترین شناسهٔ نامنفی‌رااختیار می‌کنیم . یک چنین دورهٔ تناوب وجود دارد ، زیرا f دارای دو دورهٔ تناوب غیر همخط است .این دورهٔ‌تناوب‌را ω_2 می‌نامیم .طبق‌ساخت ، هیچ دورهٔ‌تناوبی درمثلث $0, \omega_1, \omega_2$ غیر از رئوس وجود ندارد ؛ درنتیجه ، زوج (ω_1, ω_2) اساسی می‌باشد .

هرگاه f و g توابعی بیضوی با دوره‌های تناوب ω_1 و ω_2 باشند ، آنگاه‌مجموع ، تفاضل حاصل‌ضرب ، و خارج‌قسمت‌آنها نیز بیضوی‌بوده و دوره‌های تناوب یکسان‌دارند .درنتیجه ، f' نیز چنین می‌باشد .

به خاطر تناوب ، کافی است رفتار تابع بیضوی را در یک متوازی‌الاضلاع‌تناوبی‌مطالعه کنیم .

قضیهٔ ۱.۴. هرگاه تابع بیضوی f در یک متوازی‌الاضلاع تناوبی قطب نداشته باشد ،آنگاه f ثابت می‌باشد .

برهان . هرگاه f در یک متوازی‌الاضلاع تناوبی قطب نداشته باشد ، آنگاه f بر بست این متوازی‌الاضلاع پیوسته و در نتیجه کراندار ، است . بنابر تناوب ، f در تمام صفحه‌کراندار

می‌باشد . از اینرو، طبق قضیهٔ لیوویل[1] ، f ثابت می‌باشد .

قضیهٔ ۱ . ۵. *هرگاه تابع بیضوی f در یک متوازی‌الاضلاع تناوبی دارای صفر نباشد ، آنگاه f ثابت می‌باشد .*

برهان . قضیهٔ ۱ . ۴ را در مورد متقابل $1/f$ به کار برید .

تذکر . گاهی شایسته است روی مرز یک متوازی‌الاضلاع تناوبی صفر یا قطب داشته باشیم . چون یک تابع‌خوشریخت در قسمت‌محدودی‌از صفحه فقط تعدادی متناهی صفر یا قطب‌دارد، همواره یک متوازی‌الاضلاع تناوبی را می‌توان به یک متوازی‌الاضلاع همنهشت که‌صفر یاقطبی روی مرز ندارد انتقال داد . هر چنین متوازی‌الاضلاع انتقال یافته ، بدون صفر یا قطب بر مرزش، یک *سلول* نام دارد . رئوس‌آن الزاماً " دورهٔ تناوب نیستند .

قضیهٔ ۱ . ۶. *انتگرال کنتوری یک تابع بیضوی در امتداد مرز هر سلول صفر است .*

برهان . به خاطر تناوب ، انتگرالها در امتداد اضلاع موازی یکدیگر حذف می‌شوند .

قضیهٔ ۱ . ۷. *مجموع مانده‌های یک تابع بیضوی در قطبهایش در هر متوازی‌الاضلاع تناوبی صفر است .*

برهان . قضیهٔ ماندهٔ کشی[2] را بر یک سلول اعمال کرده و از قضیهٔ ۱ . ۶ استفاده نمایید .

تذکر . قضیهٔ ۱ . ۷ نشان می‌دهد که یک تابع بیضوی که ثابت نباشد در هر متوازی‌الاضلاع تناوبی دست‌کم دو قطب ساده یا دست‌کم یک قطب مضاعف دارد .

قضیهٔ ۱ . ۸. *تعداد صفرهای هر تابع بیضوی در یک متوازی‌الاضلاع تناوبی مساوی تعداد قطبهاست ، که هر یک با بستایی به حساب می‌آید .*

---

1. Liouville

2. Cauchy

برهان. انتگرال

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz,$$

در امتداد مرز C یک سلول، تفاضل بین تعداد صفرها و تعداد قطبهای داخل سلول است. اما f'/f بیضوی با همان دورهٔ تناوب f است، و قضیهٔ ۶.۱ به ما می‌گوید که این انتگرال مساوی صفر است.

تذکر. تعداد صفرها (یا قطبها)ی هر تابع بیضوی در یک متوازی‌الاضلاع تناوبی مرتبهٔ تابع نام دارد. هر تابع بیضوی غیرثابت دارای مرتبه‌ای ناکمتر از دو است.

۵.۱ ساختن توابع بیضوی

حال به مسئلهٔ ساختن یک تابع بیضوی غیرثابت می‌پردازیم. دوره‌های تناوبی‌را مقررداشته و سعی می‌کنیم ساده‌ترین تابع بیضویی بیابیم‌که این دوره‌های‌تناوب را داشته باشد. چون مرتبهٔ یک چنین تابع دست‌کم 2 است، در هر متوازی‌الاضلاع تناوبی به یک قطب مرتبهٔ دوم یا دو قطب ساده نیاز خواهیم داشت. این دو امکان به دو نظریه از توابع بیضوی منجر می‌شود که یکی‌توسط وایراشتراس[1] و دیگری به‌وسیلهٔ ژاکوبی[2] ارائه شده‌است. ما روش وایراشتراس را تعقیب می‌کنیم، که نقطهٔ شروعش ساختن یک تابع بیضوی است که قطبی‌از مرتبهٔ 2 در $z = 0$، و درنتیجه در هر دورهٔ تناوب، دارد. قسمت اصلی بسط لوران[3] در مجاورت هر دورهٔ تناوب ω به شکل زیر است:

$$\frac{A}{(z-\omega)^2}+\frac{B}{z-\omega}.$$

به خاطر سادگی، $A = 1, B = 0$ را اختیار می‌کنیم. چون این‌گونه بسطها را در مجاورت هر دورهٔ تناوب ω می‌خواهیم، طبیعی است مجموعی از جملات از این نوع را درنظربگیریم:

$$\sum_{\omega}\frac{1}{(z-\omega)^2}$$

که جمعبندی روی تمام دوره‌های تناوب $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$ گرفته می‌شود. به ازای $z \neq \omega$ ثابت، این سری مضاعف روی m و n جمعبندی می‌شود. دو لم بعدی به خواص همگرایی

---

1. Weierstrass
2. Jacobi
3. Laurent

سریهای مضاعف از این نوع می‌پردازد. در این لمها، مجموعهٔ تمام ترکیبات خطی $m\omega_1 + n\omega_2$ ، که m و n اعداد صحیح دلخواهی هستند، را با Ω نشان می‌دهیم.

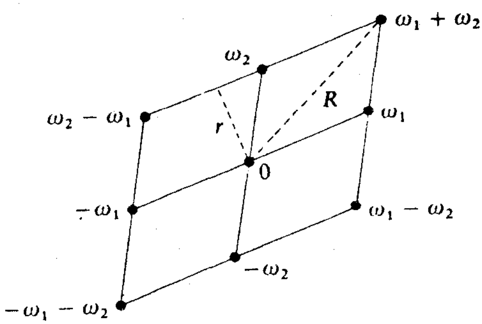
لم ۱. هرگاه α حقیقی باشد، سری نامتناهی

$$\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \omega \neq 0}} \frac{1}{\omega^\alpha}$$

به‌طور مطلق همگراست اگر و فقط اگر $\alpha > 2$.

برهان. در رابطه با شکل ۳.۱، فرض کنیم r و R به ترتیب مینیمم و ماکزیمم فاصلهٔ 0 تا متوازی‌الاضلاع نموده شده باشد. اگر ω یکی از 8 دورهٔ تناوب ناصفر در این نمودارباشد، داریم

$$r \leq |\omega| \leq R \quad (\text{به ازای 8 دورهٔ تناوب } \omega) .$$



شکل ۳.۱

در لایهٔ متحدالمرکز بعدی‌از دوره‌های تناوب حول‌این 8 تا $2 \cdot 8 = 16$ دورهٔ‌تناوب داریم که در نامساویهای زیر صدق می‌کنند:

$$2r \leq |\omega| \leq 2R \quad (\text{به ازای 16 دورهٔ تناوب جدید } \omega)$$

در لایهٔ بعدی، $24 = 3 \cdot 8$ دورهٔ تناوب جدید داریم که در نامساویهای زیرصدق‌می‌کنند:

$$3r \leq |\omega| \leq 3R \quad (\text{به ازای 24 دورهٔ تناوب جدید } \omega)$$

و همین‌طور تا آخر. بنابراین، نامساویهای زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{1}{R^\alpha} \leq \frac{1}{|\omega|^\alpha} \leq \frac{1}{r^\alpha} \quad \text{، به ازای 8 دورهٔ تناوب اول } \omega$$

$$\frac{1}{(2R)^\alpha} \le \frac{1}{|\omega|^\alpha} \le \frac{1}{(2r)^\alpha}$$ به ازای 16 دورهٔ تناوب بعدی ω ،

و همین‌طور تا آخر. لذا، مجموع $S(n) = \sum |\omega|^{-\alpha}$، که روی‌نزدیکترین $8(1 + 2 + \cdots + n)$ دورهٔ تناوب ناصفر گرفته شده، در نامساویهای زیر صدق می‌کند:

$$\frac{8}{R^\alpha} + \frac{2 \cdot 8}{(2R)^\alpha} + \cdots + \frac{n \cdot 8}{(nR)^\alpha} \le S(n) \le \frac{8}{r^\alpha} + \frac{2 \cdot 8}{(2r)^\alpha} + \cdots + \frac{n \cdot 8}{(nr)^\alpha},$$

یا

$$\frac{8}{R^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha-1}} \le S(n) \le \frac{8}{r^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha-1}}.$$

این نشان می‌دهد که اگر $\alpha > 2$ ، مجموعهای جزئی $S(n)$ از بالا به $8\zeta(\alpha - 1)/r^\alpha$ کراندار است. اما هر مجموع جزئی بین دو مجموع جزئی از این نوع قرار دارند؛ درنتیجه، تمام مجموعهای جزئی سری $\sum |\omega|^{-\alpha}$ از بالا کراندارند؛ و لذا، اگر $\alpha > 2$ ، سری همگرا می‌باشد. کران پایین $S(n)$ نیز نشان می‌دهد که اگر $\alpha \le 2$ ، سری واگرا می‌باشد.

لم ۲. *اگر $\alpha > 2$ و $R > 0$ ، سری*

$$\sum_{|\omega| > R} \frac{1}{(z - \omega)^\alpha}$$

در قرص $|z| \le R$ به‌طور مطلق و به‌طور یکنواخت همگرا است.

برهان. نشان می‌دهیم که ثابتی چون M (وابسته به R و α) وجود دارد به طوری که اگر $\alpha \ge 1$ ، به ازای هر ω که $|\omega| > R$ و هر z که $|z| \le R$ ،

$$\frac{1}{|z - \omega|^\alpha} \le \frac{M}{|\omega|^\alpha} \qquad (۱)$$

حال لم ۲ را به کمک لم ۱ ثابت می‌کنیم. نامساوی (۱) هم‌ارز است با

$$\left|\frac{z - \omega}{\omega}\right|^\alpha \ge \frac{1}{M}. \qquad (۲)$$

برای مشخص کردن M ، همهٔ ω هایی در Ω را درنظر می‌گیریم که $|\omega| > R$. یکی‌که هنگش مینیمال است، مثلاً" $|\omega| = R + d$ که $d > 0$ ، را اختیار می‌نماییم. دراین‌صورت، اگر $|z| \le R$ و $|\omega| \ge R + d$ ، داریم

$$\left|\frac{z - \omega}{\omega}\right| = \left|1 - \frac{z}{\omega}\right| \ge 1 - \left|\frac{z}{\omega}\right| \ge 1 - \frac{R}{R + d},$$

و درنتیجه ،

$$\left|\frac{z-\omega}{\omega}\right|^{\alpha} \geq \left(1-\frac{R}{R+d}\right)^{\alpha} = \frac{1}{M},$$

که در آن

$$M = \left(1-\frac{R}{R+d}\right)^{-\alpha}.$$

این (۲) و نیز لم را ثابت خواهد کرد .

همانطور که قبلا" گفتیم ، می‌توانستیم با استفاده از سریی به شکل

$$\sum_{\omega\in\Omega} \frac{1}{(z-\omega)^2}$$

ساده‌ترین تابع بیضوی را بسازیم . این در مجاورت هر دورهٔ تناوب دارای قسمت اصلی مناسبی است . با اینحال ، سری به‌طور مطلق همگرا نیست؛ لذا ، به جای این سری‌یک‌سری با نمای 3 به عوض 2 به کار می‌بریم . با این کار یک تابع بیضوی از مرتبهٔ 3 به دست می‌آوریم .

قضیهٔ ۱ . ۹ . فرض کنیم f با سری

$$f(z) = \sum_{\omega\in\Omega} \frac{1}{(z-\omega)^3}$$

تعریف شده باشد . f یک تابع بیضوی با دوره‌های تناوب ω_1, ω_2 و قطبی از مرتبهٔ 3 در هر دورهٔ تناوب ω در Ω می‌باشد .

برهان . بنابر لم ۲ ، سری حاصل از جمعبندی روی $R < |\omega|$ در قرص $|z| \leq R$ به طور یکنواخت همگراست . لذا ،سری در این قرص نمایش یک تابع تحلیلی است . بقیهٔ جملات ، که تعدادی متناهی‌اند ، در این قرص جز به ازای یک قطب مرتبهٔ سوم در هر دورهٔ تناوب ω در این قرص تحلیلی می‌باشند . این ثابت می‌کند که f خوشریخت بوده و در هر ω در Ω قطبی از مرتبهٔ 3 دارد .

حال نشان می‌دهیم f دارای دوره‌های‌تناوب ω_1 و ω_2 است . برای این کار از همگرایی مطلق سری استفاده می‌کنیم . داریم

$$f(z+\omega_1) = \sum_{\omega\in\Omega} \frac{1}{(z+\omega_1-\omega)^3}.$$

اما $\omega - \omega_1$ مانند ω تمام دوره‌های تناوب در Ω را می‌گیرد؛ درنتیجه، سری مربوط به $f(z + \omega_1)$ صرفا " یک تجدید آرایش سری مربوط به $f(z)$ می‌باشد. بنابر همگرایی مطلق، داریم $f(z + \omega_1) = f(z)$. بـه همیـن نحو، $f(z + \omega_2) = f(z)$ ؛ درنتیجه، f دو تناوبه است. این برهان را تمام خواهد کرد.

۶.۱ تابع $\wp$ وایراشتراس

حال، با استفاده از تابع قضیهٔ ۹.۱، یک تابع بیضوی از مرتبهٔ 2 می‌سازیم. کافی است از سری مربوط به $f(z)$ جمله‌به‌جمله انتگرال بگیریم. با این کار قسمت‌اصلی $-(z-\omega)^{-2}/2$ را در مجاورت هر دورهٔ تناوب خواهیم داشت؛ درنتیجه، با ضرب در -2، قسمت اصلی $(z - \omega)^{-2}$ به‌دست‌می‌آید. همچنین، یک ثابت انتگرالگیری وجود دارد که‌باید به‌حساب آید. شایسته است از مبداء انتگرالگیری کنیم؛ لذا، جملهٔ z^{-3} نظیر به $\omega = 0$ را حذف کرده، سپس انتگرال گرفته، و جملهٔ z^{-2} را اضافه می‌کنیم. این کار ما را به تابع

$$\frac{1}{z^2} + \int_0^z \sum_{\omega \neq 0} \frac{-2}{(t - \omega)^3}\, dt$$

می‌رساند. اگر جمله به جمله انتگرال بگیریم، به تابع زیر می‌رسیم که *تابع $\wp$ ویراشتراس* نام دارد.

تعریف. *تابع $\wp$ وایراشتراس* با سری زیر تعریف می‌شود:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left\{\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right\}.$$

قضیهٔ ۱۰.۱. *تابع $\wp$ تعریف شده به این صورت دارای دوره‌های تناوب ω_1 و ω_2 است. این تابع جز به ازای یک قطب مضاعف در هر دورهٔ تناوب ω در Ω تحلیلی‌است. به‌علاوه، $\wp(z)$ تابعی زوج از z می‌باشد.*

برهان. هر جملهٔ سری دارای هنگ

$$\left|\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right| = \left|\frac{\omega^2 - (z - \omega)^2}{\omega^2 (z - \omega)^2}\right| = \left|\frac{z(2\omega - z)}{\omega^2 (z - \omega)^2}\right|$$

است. حال قرص فشردهٔ $|z| \le R$ را درنظر می‌گیریم. در این قرص فقط تعدادی متناهی دورهٔ تناوب ω وجود دارند. اگر جملات سری شامل این دوره‌های تناوب را مستثنی‌کنیم،

بنابر نامساوی (۱) به دست آمده در برهان لم ۲ داریم

$$\left|\frac{1}{(z-\omega)^2}\right| \leq \frac{M}{|\omega|^2},$$

که در آن M ثابتی است که فقط به R وابسته است. از این تخمین

$$\left|\frac{z(2\omega - z)}{\omega^2(z-\omega)^2}\right| \leq \frac{MR(2|\omega| + R)}{|\omega|^4} \leq \frac{MR(2 + R/|\omega|)}{|\omega|^3} \leq \frac{3MR}{|\omega|^3}$$

به دست می‌آید، زیرا به ازای ω ی خارج قرص $|z| \leq R$ داریم $R < |\omega|$. این نشان می‌دهد که سری بریده شده درقرص $|z| \leq R$ به‌طور مطلق و به‌طور یکنواخت همگراست؛ و درنتیجه، در این قرص تحلیلی می‌باشد. بقیهٔ جملات در هر ω ی داخل این قرص قطب مرتبهٔ دومی به دست‌می‌دهند. بنابراین، $\wp(z)$ خوشریخت‌بوده و درهر دورهٔ تناوب قطبی از مرتبهٔ 2 خواهد داشت.

حال ثابت می‌کنیم $\wp$ یک تابع زوج است. توجه می‌کنیم که

$$(-z-\omega)^2 = (z+\omega)^2 = (z-(-\omega))^2.$$

چون $-\omega$ مانند ω تمام دوره‌های تناوب ناصفر را می‌گیرد، این نشان می‌دهد که $\wp(-z) = \wp(z)$؛ درنتیجه، $\wp$ زوج می‌باشد.

بالاخره، تناوب را ثابت می‌کنیم. مشتق $\wp$ عبارت است از

$$\wp'(z) = -2\sum_{\omega\in\Omega}\frac{1}{(z-\omega)^3}.$$

قبلا" نشان دادیم که این تابع دارای دوره‌های تناوب ω_1 و ω_2 است. لذا، به ازای هر دورهٔ تناوب ω، $\wp'(z+\omega) = \wp'(z)$. بنابراین، تابع $\wp(z+\omega) - \wp(z)$ ثابت است. اما وقتی $z = -\omega/2$، این ثابت مساوی است با $\wp(\omega/2) - \wp(-\omega/2) = 0$ زیرا $\wp$ زوج است. از اینرو، به ازای هر ω، $\wp(z+\omega) = \wp(z)$؛ درنتیجه، $\wp$ دوره‌های تناوب مطلوب را دارد.

۱ . ۷ بسط لوران $\wp$ در مجاورت مبداء

قضیهٔ ۱ . ۱۱ . فرض کنیم $r = \min\{|\omega| : \omega \neq 0\}$. **در این صورت، به ازای** $0 < |z| < r$ **داریم**

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)G_{2n+2}\,z^{2n}, \qquad (۳)$$

که در آن

$$G_n = \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{\omega^n} \quad ، \quad n \geq 3 \quad \text{به ازای} \tag{۴}$$

برهان. هرگاه $0 < |z| < r$ ، آنگاه $|z/\omega| < 1$ و داریم

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} = \frac{1}{\omega^2\left(1 - \dfrac{z}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{\omega^2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\left(\frac{z}{\omega}\right)^n\right).$$

از اینرو،

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\omega^{n+2}} z^n.$$

با جمعبندی روی تمام ω ها معلوم می‌شود (از همگرایی مطلق) که

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\sum_{\omega \neq 0}\frac{1}{\omega^{n+2}} z^n = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)G_{n+2} z^n,$$

که در آن G_n به‌وسیلهٔ (۴) داده‌شده است. چون $\wp(z)$ تابع زوجی است، ضرایب G_{2n+1} باید صفر شوند و رابطهٔ (۳) را خواهیم داشت.

۱.۸ معادلهٔ دیفرانسیل برقرار به‌وسیلهٔ $\wp$

قضیهٔ ۱.۱۲. تابع $\wp$ صادق در معادلهٔ دیفرانسیل غیرخطی زیر است:

$$[\wp'(z)]^2 = 4\wp^3(z) - 60G_4\wp(z) - 140G_6.$$

برهان. این رابطه را با تشکیل ترکیبی خطی از توانهای $\wp$ و $\wp'$ که قطب در $z = 0$ را حذف می‌کند به دست می‌آوریم. با این کار تابعی بیضوی به دست می‌آوریم که قطب نداشته و لذا باید ثابت باشد. در مجاورت $z = 0$ داریم

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6G_4 z + 20G_6 z^3 + \cdots,$$

که یک تابع بیضوی از مرتبهٔ 3 است. مربعش از مرتبهٔ 6 می‌باشد، زیرا

$$[\wp'(z)]^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{24G_4}{z^2} - 80G_6 + \cdots,$$

که در آن ... + مبین یک سری توانی از z است که در $z = 0$ صفر می‌شود. اما

$$4\wp^3(z) = \frac{4}{z^6} + \frac{36G_4}{z^2} + 60G_6 + \cdots$$

لذا،

$$[\wp'(z)]^2 - 4\wp^3(z) = -\frac{60G_4}{z^2} - 140G_6 + \cdots$$

درنتیجه،

$$[\wp'(z)]^2 - 4\wp^3(z) + 60G_4\wp(z) = -140G_6 + \cdots.$$

چون طرف چپ قطبی در $z = 0$ ندارد، در یک متوازی‌الاضلاع تناوبی قطب ندارد؛ پس ثابت است. بنابراین، این ثابت باید $-140G_6$ باشد و این قضیه را ثابت خواهد کرد.

۹.۱ سری آیزن اشتاین[1] و پایاهای g_2 و g_3

تعریف. اگر $n \geq 3$، سری

$$G_n = \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{\omega^n}$$

سری آیزن اشتاین از مرتبهٔ n نام دارد. پایاهای g_2 و g_3 اعدادی هستند که با روابط

$$g_2 = 60G_4, \qquad g_3 = 140G_6$$

تعریف می‌شوند.

حال معادلهٔ دیفرانسیل نسبت به $\wp$ شکل زیر را به خود می‌گیرد:

$$[\wp'(z)]^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3.$$

چون فقط g_2 و g_3 در معادلهٔ دیفرانسیل داخل می‌شود، باید $\wp$ را کاملا" معین کند. این عملا" صورت می‌گیرد، زیرا تمام ضرایب $(2n+1)G_{2n+2}$ در بسط لوران $\wp(z)$ را می توان برحسب g_2 و g_3 بیان کرد.

قضیهٔ ۱۳.۱. *هر سری آیزن اشتاین G_n به صورت یک چندجمله‌ای از g_2 و g_3 با ضرایب گویای مثبت قابل بیان است. در واقع، اگر $b(n) = (2n+1)G_{2n+2}$، روابط بازگشتی زیر را خواهیم داشت:*

$$b(1) = g_2/20, \qquad b(2) = g_3/28,$$

---

1. *Eisenstein*

و

$$(2n+3)(n-2)b(n) = 3\sum_{k=1}^{n-2} b(k)b(n-1-k)$$ ، $n \geq 3$ به ازای

یا ، معادلا " ، به ازای $m \geq 4$ ،

$$(2m+1)(m-3)(2m-1)G_{2m} = 3\sum_{r=2}^{m-2}(2r-1)(2m-2r-1)G_{2r}G_{2m-2r}\,.$$

برهان . مشتقگیری از معادلهٔ دیفرانسیل نسبت به $\wp$ معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم دیگری

$$\wp''(z) = 6\wp^2(z) - \tfrac{1}{2}g_2 \qquad (۵)$$

را به ما می‌دهد که $\wp$ در آن صدق می‌کند . حال می‌نویسیم $\wp(z) = z^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty} b(n)z^{2n}$ و توانهای مشابه z در (۵) را متحد قرار داده روابط بازگشتی مطلوب را به‌دست‌می‌آوریم .

۱۰.۱ اعداد e_1, e_2, e_3

تعریف . مقادیر $\wp$ در نصف دوره‌های تناوب را با e_1, e_2, e_3 نشان می‌دهیم :

$$e_1 = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad e_2 = \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right), \quad e_3 = \wp\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right).$$

قضیهٔ زیر نشان‌می‌دهد که این‌اعداد ریشه‌های‌چندجمله‌ای‌مکعبی $4\wp^3 - g_2\wp - g_3$ می‌باشند .

قضیهٔ ۱۴.۱ . داریم

$$4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3 = 4(\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_3).$$

به‌علاوه ، ریشه‌های e_1, e_2, e_3 متمایزند ؛ درنتیجه ، $g_2{}^3 - 27g_3{}^2 \neq 0$.

برهان . چون $\wp$ زوج است ، $\wp'$ فرد می‌باشد . اما به آسانی معلوم می‌شود که نصف دوره‌های تناوب یک تابع بیضوی فرد یا صفرها هستند یا قطبها . در واقع ، بنابر تناوب داریم $\wp'(-\frac{1}{2}\omega) = \wp'(\omega - \frac{1}{2}\omega) = \wp'(\frac{1}{2}\omega)$ ،وچون $\wp'$ فرداست ،نیزداریم $\wp'(-\frac{1}{2}\omega) = -\wp'(\frac{1}{2}\omega)$ از اینرو ، اگر $\wp'(\frac{1}{2}\omega)$ متناهی باشد ، $\wp'(\frac{1}{2}\omega) = 0$. چون $\wp'(z)$ در $\frac{1}{2}\omega_1, \frac{1}{2}\omega_2, \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$ قطب ندارد ، این نقاط باید صفرهای $\wp'$ باشند . اما $\wp'$ از مرتبهٔ 3 است ؛ در نتیجه ، اینها باید صفرهای سادهٔ $\wp'$ باشند . لذا ، $\wp'$ می‌تواند صفر دیگری درمتوازی‌الاضلاع تناوبی به رأسهای $0, \omega_1, \omega_2, \omega_1+\omega_2$ نداشته باشد . معادلهٔ دیفرانسیل نشان می‌دهد که هر یک

از این نقاط یک صفر معادلهٔ مکعبی نیز هست؛ درنتیجه، تجزیهٔ ذکرشده را خواهیم داشت.

حال نشان می‌دهیم اعداد e_1, e_2, e_3 متمایزند. تابع بیضوی $\wp(z) - e_1$ در $z = \frac{1}{2}\omega_1$ صفر می‌شود. این یک صفر مضاعف است، زیرا $\wp'(\frac{1}{2}\omega_1) = 0$. به همین نحو، $\wp(z) - e_2$ یک صفر مضاعف در $\frac{1}{2}\omega_2$ دارد. اگر e_1 مساوی e_2 می‌بود، تابع بیضوی $\wp(z) - e_1$ دارای یک صفر مضاعف در $\frac{1}{2}\omega_1$ و نیز یک صفر مضاعف در $\frac{1}{2}\omega_2$ می‌شد؛ درنتیجه، مرتبه‌اش از 4 ناکمتر بود. اما مرتبه‌اش 2 است؛ درنتیجه $e_1 \neq$ ، به همین نحو، $e_1 \neq e_3$ و $e_2 \neq e_3$.

اگر یک چندجمله‌ای ریشه‌های متمایز داشته باشد، مبین آن صفر نیست. (ر. ک. تمرین ۱۰۷۰) مبین چندجمله‌ای مکعبی

$$4x^3 - g_2x - g_3$$

مساوی $g_2{}^3 - 27g_3{}^2$ است. وقتی $x = \wp(z)$، ریشه‌های این چندجمله‌ای متمایزند؛ درنتیجه، $g_2{}^3 - 27g_3{}^2 \neq 0$. این برهان را تمام خواهد کرد.

۱۱۰۱ مبین Δ

عدد $\Delta = g_2{}^3 - 27g_3{}^2$ **مبین** نامیده می‌شود. ما پایاهای g_2 و g_3 و مبین Δ را توابعی از دوره‌های ω_1 و ω_2 گرفته و می‌نویسیم

$$g_2 = g_2(\omega_1, \omega_2), \qquad g_3 = g_3(\omega_1, \omega_2), \qquad \Delta = \Delta(\omega_1, \omega_2).$$

سری آیزن اشتاین نشان می‌دهد که g_2 و g_3 به ترتیب توابع همگنی از درجات -4 و -6 می‌باشند. یعنی، به ازای هر $\lambda \neq 0$ داریم

$$g_2(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \lambda^{-4}g_2(\omega_1, \omega_2) \quad \text{و} \quad g_3(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \lambda^{-6}g_3(\omega_1, \omega_2)$$

از اینرو، Δ همگن از درجهٔ $12-$ است،

$$\Delta(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \lambda^{-12}\Delta(\omega_1, \omega_2).$$

با اختیار $\lambda = 1/\omega_1$ و نوشتن $\tau = \omega_2/\omega_1$، به دست می‌آوریم

$$g_2(1, \tau) = \omega_1{}^4 g_2(\omega_1, \omega_2), \qquad g_3(1, \tau) = \omega_1{}^6 g_3(\omega_1, \omega_2),$$
$$\Delta(1, \tau) = \omega_1{}^{12}\Delta(\omega_1, \omega_2).$$

بنابراین، تغییر مقیاس g_2، g_3، و Δ را به توابعی از متغیر مختلط τ بدل می‌کند. ما ω_1 و ω_2 را طوری نامگذاری می‌کنیم که نسبت $\tau = \omega_2/\omega_1$ قسمت موهومی مثبت داشته باشد و این توابع را در نیمصفحهٔ بالایی $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ مورد مطالعه قرار می‌دهیم. نیمصفحهٔ بالایی $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ را با H نشان می‌دهیم.

اگر $\tau \in H$، به جای $g_2(1, \tau)$، $g_3(1, \tau)$، و $\Delta(1, \tau)$ به ترتیب می‌نویسیم $g_2(\tau)$،

$g_3(\tau)$ ، و $\Delta(\tau)$. لذا ، داریم

$$g_2(\tau) = 60 \sum_{\substack{m,n=-\infty \\ (m,n)\neq(0,0)}}^{+\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^4},$$

$$g_3(\tau) = 140 \sum_{\substack{m,n=-\infty \\ (m,n)\neq(0,0)}}^{+\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^6}$$

و

$$\Delta(\tau) = g_2{}^3(\tau) - 27g_3{}^2(\tau).$$

قضیهٔ ۱۴.۱ نشان می‌دهد که به ازای هر τ در H ، $\Delta(\tau) \neq 0$.

۱۲.۱ تابع هنگی کلاین[1] $J(\tau)$

تابع کلاین ترکیبی است از g_2 و g_3 و طوری تعریف شده است که، به عنوان تابعی از دوره‌های تناوب ω_1 و ω_2 ، همگن از درجه صفر است .

تعریف . اگر ω_2/ω_1 حقیقی نباشد ، تعریف می‌کنیم

$$J(\omega_1, \omega_2) = \frac{g_2{}^3(\omega_1, \omega_2)}{\Delta(\omega_1, \omega_2)}.$$

چون $g_2{}^3$ و Δ همگن از درجهٔ یکسان هستند ، داریم $J(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = J(\omega_1, \omega_2)$. بخصوص، اگر $\tau \in H$ داریم

$$J(1, \tau) = J(\omega_1, \omega_2).$$

لذا $J(\omega_1, \omega_2)$ فقط تابعی از نسبت τ است . ما به جای $J(1, \tau)$ می‌نویسیم $J(\tau)$.

قضیهٔ ۱۵.۱ . توابع $g_2(\tau)$ ، $g_3(\tau)$ ، $\Delta(\tau)$ ، و $J(\tau)$ در H تحلیلی‌اند .

برهان . چون در H ، $\Delta(\tau) \neq 0$ کافیست تحلیلی بودن g_2 و g_3 را در H ثابت کنیم . g_2 و g_3 با سریی مضاعف به شکل

$$\sum_{\substack{m,n=-\infty \\ (m,n)\neq(0,0)}}^{+\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^\alpha}$$

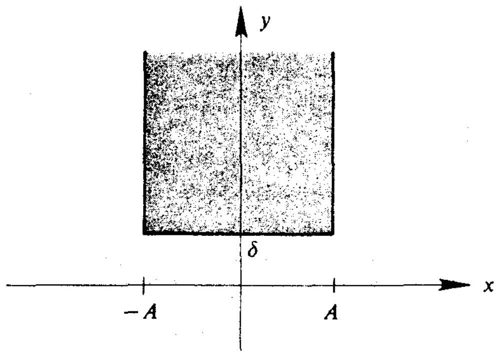
---

1. Klein

داده شده‌اند که در آن $\alpha > 2$. فرض کنیم $\tau = x + iy$ ، که در آن $y > 0$. ثابت می‌کنیم اگر $\alpha > 2$ ، این سری به ازای هر τ ی ثابت در H به‌طور مطلق و در هر نوار S به شکل

$$S = \{x + iy : |x| \leq A, y \geq \delta > 0\}$$

به طوریکنواخت همگراست .(ر.ک. شکل ۴۰۱) برای این کار ثابت می‌کنیم که ثابتی چون



شکل ۴۰۱

$M > 0$ ، فقط تابع A و δ ، وجود دارد به طوری که به ازای هر τ در S وهر $(m, n) \neq (0,0)$

$$\frac{1}{|m + n\tau|^{\alpha}} \leq \frac{M}{|m + ni|^{\alpha}} . \tag{۶}$$

سپس، از لم ۱ استمداد می‌جوییم .

برای اثبات (۶) کافی است ثابت کنیم به ازای $K > 0$ ای که فقط تابع A و δ است،

$$|m + n\tau|^2 > K|m + ni|^2$$

یا

$$(m + nx)^2 + (ny)^2 > K(m^2 + n^2). \tag{۷}$$

اگر $n = 0$ ، این نامساوی به ازای هر K ای که $0 < K < 1$ برقرار است . اگر $n \neq 0$ ، قرار می‌دهیم $q = m/n$. اثبات (۷) هم‌ارز آن است که نشان دهیم به ازای $K > 0$ ای،

$$\frac{(q + x)^2 + y^2}{1 + q^2} > K . \tag{۸}$$

ثابت می‌کنیم (۸) به ازای هر q و نیز $|x| \leq A$ و $y \geq \delta$ و

$$K = \frac{\delta^2}{1 + (A + \delta)^2}$$

برقرار است. (این برهان توسط کریستوفر هنلی[1] پیشنهاد شده است.)

اگر $|q| \leq A + \delta$، نامساوی (۸) بالبداهه برقرار است، زیرا $(q + x)^2 \geq 0$ و $y^2 \geq \delta^2$. هرگاه $|q| > A + \delta$، آنگاه $|x/q| < |x|/(A + \delta) \leq A/(A + \delta) < 1$؛ درنتیجه،

$$\left|1 + \frac{x}{q}\right| \geq 1 - \left|\frac{x}{q}\right| > 1 - \frac{A}{A + \delta} = \frac{\delta}{A + \delta}.$$

لذا،

$$|q + x| \geq \frac{q\delta}{A + \delta}$$

و

$$\frac{(q + x)^2 + y^2}{1 + q^2} > \frac{\delta^2}{(A + \delta)^2}\frac{q^2}{1 + q^2}. \qquad (۹)$$

اما $q^2/(1 + q^2)$ تابعی صعودی از q^2 است؛ درنتیجه، وقتی $q^2 > (A + \delta)^2$،

$$\frac{q^2}{1 + q^2} \geq \frac{(A + \delta)^2}{1 + (A + \delta)^2}.$$

با استفاده از این در (۹)، (۸) با K ی مشخص شده به دست می‌آید.

۱.۱۳ پایایی J تحت تبدیلات غیرهنگی

اگر ω_1, ω_2 دوره‌های تناوبی با نسبت غیرحقیقی باشند، دوره‌های تناوب جدید ω_1', ω_2' را با روابط

$$\omega_2' = a\omega_2 + b\omega_1, \qquad \omega_1' = c\omega_2 + d\omega_1$$

تعریف می‌کنیم، که در آنها a, b, c, d اعدادی صحیح‌اند و $ad - bc = 1$. دراین‌صورت، زوج (ω_1', ω_2') با (ω_1, ω_2) هم‌ارز است؛ یعنی، همان مجموعه از دوره‌های تناوب Ω را تولید می‌کند. بنابراین، $g_2(\omega_1', \omega_2') = g_2(\omega_1, \omega_2)$ و $g_3(\omega_1', \omega_2') = g_3(\omega_1, \omega_2)$، زیرا g_2 و g_3 فقط به مجموعهٔ Ω از دوره‌های تناوب بستگی دارد. درنتیجه $\Delta(\omega_1', \omega_2') = \Delta(\omega_1, \omega_2)$ و $J(\omega_1', \omega_2') = J(\omega_1, \omega_2)$.

نسبت دوره‌های تناوب جدید مساوی است با

$$\tau' = \frac{\omega_2'}{\omega_1'} = \frac{a\omega_2 + b\omega_1}{c\omega_2 + d\omega_1} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d},$$

1. Christopher Henley

که در آن $\tau = \omega_2/\omega_1$. محاسبه‌ای آسان نشان می‌دهد که

$$\mathrm{Im}(\tau') = \mathrm{Im}\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \frac{ad - bc}{|c\tau + d|^2}\,\mathrm{Im}(\tau) = \frac{\mathrm{Im}(\tau)}{|c\tau + d|^2}.$$

لذا، $\tau' \in H$ اگر و فقط اگر $\tau \in H$. معادلهٔ

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

را یک **تبدیل غیرهنگی** می‌نامیم اگر a, b, c, d اعدادی صحیح بوده و $ad - bc = 1$. مجموعهٔ تمام تبدیلات غیرهنگی (تحت ترکیب) یک گروه به نام **گروه هنگی** تشکیل می‌دهد . در فصل بعد ، این گروه بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرد . نکات فوق نشان می‌دهد که تابع $J(\tau)$ تحت تبدیلات گروه هنگی پایاست . یعنی ، داریم :

قضیهٔ ۱۶.۱ . *هرگاه $\tau \in H$ و a, b, c, d اعدادی صحیح با خاصیت $ad - bc = 1$ باشند ، آنگاه $(a\tau + b)/(c\tau + d) \in H$ و*

$$J\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = J(\tau). \qquad (۱۰)$$

تذکر . یک تبدیل غیرهنگی خاص عبارت است از $\tau' = \tau + 1$ ؛ لذا ، (۱۰) نشان می‌دهد که $J(\tau + 1) = J(\tau)$. به عبارت دیگر ، $J(\tau)$ یک تابع متناوب از τ با دورهٔ تناوب 1 است. قضیهٔ بعد نشان می‌دهد که $J(\tau)$ بسط فوریه[1] دارد .

قضیهٔ ۱۷.۱ . *اگر $\tau \in H$ ، $J(\tau)$ را می‌توان با یک سری فوریهٔ به‌طور مطلق همگرا مانند*

$$J(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n) e^{2\pi i n\tau} \qquad (۱۱)$$

نمایش داد .

برهان . تغییر متغیر

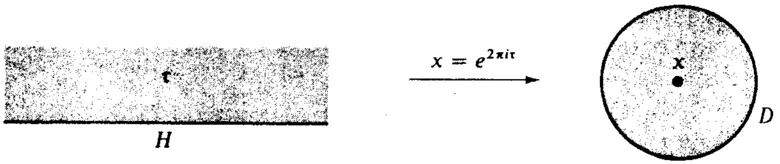
$$x = e^{2\pi i\tau}$$

1. Fourier

می‌دهیم . در این صورت ، نیمصفحهٔ بالایی H به قرص یکهٔ سوراخ شدهٔ

$$D = \{x : 0 < |x| < 1\}$$

نگاشته می‌شود . (ر.ک. شکل ۱ .۵) هر τ در H به نقطهٔ منحصر به فرد x در D نگاشته می‌شود ، ولی هر x در D نقش بی‌نهایت نقطه در H است . هرگاه τ و τ' به x نگاشته شوند ، آنگاه $e^{2\pi i\tau} = e^{2\pi i\tau'}$ ؛ درنتیجه ، τ و τ' به اندازهٔ عددی صحیح با هم فرق دارند .



شکل ۱ .۵

اگر $x \in D$ ، قرار می‌دهیم

$$f(x) = J(\tau)$$

که در آن τ یکی از نقاط H است که به x نگاشته می‌شود . چون J متناوب با دورهٔ تناوب 1 است ، J در تمام این نقاط مقدار یکسان دارد ؛ درنتیجه ، $f(x)$ تعریف شده است . اما f در D تحلیلی است ، زیرا

$$f'(x) = \frac{d}{dx}J(\tau) = \frac{d}{d\tau}J(\tau)\frac{d\tau}{dx} = J'(\tau)\Big/\frac{dx}{d\tau} = \frac{J'(\tau)}{2\pi i e^{2\pi i\tau}},$$

درنتیجه ، $f'(x)$ در هر نقطهٔ D وجود دارد . چون f در D تحلیلی است ، حول 0 بسط لوران دارد :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n)x^n,$$

که به ازای هر x در D به‌طور مطلق همگراست . از تعویض x با $e^{2\pi i\tau}$ می‌بینیم که $J(\tau)$ بسط فوریهٔ به‌طور مطلق همگرا در (۱۱) دارد .

بعدها نشان می‌دهیم که به ازای $n \geq 2$ ، $a_{-n} = 0$ و $a_{-1} = 12^{-3}$ ، و بسط فوریهٔ $12^3J(\tau)$ ضرایب صحیح دارد . برای این کار ، ابتدا بسطهای فوریهٔ $g_2(\tau)$ ، $g_3(\tau)$ ، و $\Delta(\tau)$ را تعیین می‌کنیم .

۱۴۰۱ بسطهای فوریهٔ $g_2(\tau)$ و $g_3(\tau)$

هر سری آیزن اشتاین $\sum_{(m,n)\neq(0,0)}(m+n\tau)^{-k}$ تابع متناوبی از τ با دورهٔ تناوب 1 است. بخصوص، $g_2(\tau)$ و $g_3(\tau)$ متناوب با دورهٔ تناوب 1 است. در این بخش ضرایب فوریهٔ آنها را صریحاً تعیین می‌کنیم.

به یاد می‌آوریم که

$$g_2(\tau) = 60 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m+n\tau)^4}, \qquad g_3(\tau) = 140 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m+n\tau)^6}.$$

اینها سریهای مضاعفی نسبت به m و n اند. ابتدا بسطهای فوریهٔ سریهای ساده‌تر

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^6} \quad \text{و} \quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^4}$$

را به دست می‌آوریم.

لم ۳. *اگر $\tau \in H$ و $n > 0$، بسطهای فوریهٔ*

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^4} = \frac{8\pi^4}{3} \sum_{r=1}^{\infty} r^3 e^{2\pi i r n\tau}$$

و

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^6} = -\frac{8\pi^6}{15} \sum_{r=1}^{\infty} r^5 e^{2\pi i r n\tau}.$$

را داریم.

برهان. با تجزیه به کسرهای جزئی کتانژانت شروع می‌کنیم:

$$\pi \cot \pi\tau = \frac{1}{\tau} + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{+\infty} \left(\frac{1}{\tau+m} - \frac{1}{m}\right).$$

فرض کنیم $x = e^{2\pi i\tau}$. هرگاه $\tau \in H$، آنگاه $|x| < 1$ و خواهیم داشت

$$\pi \cot \pi\tau = \pi \frac{\cos \pi\tau}{\sin \pi\tau} = \pi i \frac{e^{2\pi i\tau}+1}{e^{2\pi i\tau}-1} = \pi i \frac{x+1}{x-1} = -\pi i\left(\frac{x}{1-x} + \frac{1}{1-x}\right)$$

$$= -\pi i\left(\sum_{r=1}^{\infty} x^r + \sum_{r=0}^{\infty} x^r\right) = -\pi i\left(1 + 2\sum_{r=1}^{\infty} x^r\right).$$

به عبارت دیگر، اگر $\tau \in H$ داریم

$$\frac{1}{\tau} + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{+\infty} \left(\frac{1}{\tau+m} - \frac{1}{m}\right) = -\pi i\left(1 + 2\sum_{r=1}^{\infty} e^{2\pi i r\tau}\right).$$

با تکرار مشتقگیری معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\tau^2} - \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(\tau+m)^2} &= -(2\pi i)^2 \sum_{r=1}^{\infty} r e^{2\pi i r\tau} \\ -3!\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\tau+m)^4} &= -(2\pi i)^4 \sum_{r=1}^{\infty} r^3 e^{2\pi i r\tau} \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

و

$$-5!\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\tau+m)^6} = -(2\pi i)^6 \sum_{r=1}^{\infty} r^5 e^{2\pi i r\tau}.$$

از تعویض τ با $n\tau$ لم ۳ به دست می‌آید.

قضیهٔ ۱۸.۱. *اگر* $\tau \in H$، *بسطهای فوریهٔ*

$$g_2(\tau) = \frac{4\pi^4}{3}\left\{1 + 240\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_3(k) e^{2\pi i k\tau}\right\}$$

و

$$g_3(\tau) = \frac{8\pi^6}{27}\left\{1 - 504\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_5(k) e^{2\pi i k\tau}\right\}$$

را داریم، که در آنها $\sigma_\alpha(k) = \sum_{d|k} d^\alpha$.

برهان. می‌نویسیم

$$\begin{aligned} g_2(\tau) &= 60 \sum_{\substack{m,n=-\infty \\ (m,n)\neq(0,0)}}^{+\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^4} \\ &= 60\left\{\sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0 (n=0)}}^{+\infty} \frac{1}{m^4} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{(m+n\tau)^4} + \frac{1}{(m-n\tau)^4}\right)\right\} \\ &= 60\left\{2\zeta(4) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^4}\right\} \\ &= 60\left\{\frac{2\pi^4}{90} + \frac{16\pi^4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} r^3 x^{nr}\right\} \end{aligned}$$

که در آن $x = e^{2\pi i\tau}$. در مجموع مضاعف آخر آن جملاتی باهم دسته‌بندی می‌شوند که در آنها nr ثابت است و بسط مربوط به $g_2(\tau)$ به دست می‌آید . فرمول مربوط به $g_3(\tau)$ به‌همین نحو ثابت می‌شود .

۱۵.۱ بسطهای فوریهٔ $\Delta(\tau)$ و $J(\tau)$

قضیهٔ ۱۹.۱ . *اگر* $\tau \in H$ ، *بسط فوریهٔ*

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{2\pi i n\tau}$$

را داریم ، که در آن ضرایب $\tau(n)$ *اعدادی صحیح‌اند و* $\tau(1) = 1$ و $\tau(2) = -24$.

تذکر . تابع حسابی $\tau(n)$ *تابع تو رامانوجان*[1] نام دارد . بعضی از خواص حسابی آن در فصل ۴ توصیف شده‌اند .

برهان . فرض کنیم

$$x = e^{2\pi i\tau}, \qquad A = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)x^n, \qquad B = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n)x^n.$$

در این صورت ،

$$\Delta(\tau) = g_2{}^3(\tau) - 27g_3{}^2(\tau) = \frac{64\pi^{12}}{27}\{(1 + 240A)^3 - (1 - 504B)^2\}.$$

A و B ضرایب صحیح دارند ، و

$$\begin{aligned}(1 + 240A)^3 - (1 - 504B)^2 &= 1 + 720A + 3(240)^2A^2 + (240)^3A^3 - 1 \\ &\quad + 1008B - (504)^2B^2 \\ &= 12^2(5A + 7B) \\ &\quad + 12^3(100A^2 - 147B^2 + 8000A^3).\end{aligned}$$

اما

$$5A + 7B = \sum_{n=1}^{\infty} \{5\sigma_3(n) + 7\sigma_5(n)\}x^n$$

1. *Ramanujan*

و

$$5d^3 + 7d^5 = d^3(5 + 7d^2) \equiv \begin{cases} d^3(d^2 - 1) \equiv 0 \pmod 3 \\ d^3(1 - d^2) \equiv 0 \pmod 4 \end{cases}$$

درنتیجه ،

$$5d^3 + 7d^5 \equiv 0 \pmod{12}.$$

از اینرو ، 12^3 عاملی از هر ضریب دربسط به‌صورت سری توانی $(1 + 240A)^3 - (1 - 504B)^2$ است؛ درنتیجه ،

$$\Delta(\tau) = \frac{64\pi^{12}}{27}\left\{12^3 \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)e^{2\pi in\tau}\right\} = (2\pi)^{12} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)e^{2\pi in\tau}$$

که در آن $\tau(n)$ ها صحیح‌اند . ضریب x مساوی $12^2(5 + 7)$ است؛ درنتیجه ، $\tau(1) = 1$. به همین نحو ، معلوم می‌شود که $\tau(2) = -24$.

قضیهٔ ۱.۲۰ . اگر $\tau \in H$ ، بسط فوریهٔ زیر را داریم

$$12^3 J(\tau) = e^{-2\pi i\tau} + 744 + \sum_{n=1}^{\infty} c(n)e^{2\pi in\tau},$$

که در آن $c(n)$ ها صحیح می‌باشند .

برهان . طبق قرار ، هر سری توانی از x با ضرایب صحیح را با I نشان می‌دهیم . در این صورت ، اگر $x = e^{2\pi i\tau}$ ، داریم

$$g_2{}^3(\tau) = \tfrac{64}{27}\pi^{12}(1 + 240x + I)^3 = \tfrac{64}{27}\pi^{12}(1 + 720x + I),$$
$$\Delta(\tau) = \tfrac{64}{27}\pi^{12}\{12^3 x(1 - 24x + I)\}$$

و درنتیجه ،

$$J(\tau) = \frac{g_2{}^3(\tau)}{\Delta(\tau)} = \frac{1 + 720x + I}{12^3 x(1 - 24x + I)} = \frac{1}{12^3 x}(1 + 720x + I)(1 + 24x + I).$$

لذا ،

$$12^3 J(\tau) = \frac{1}{x} + 744 + \sum_{n=1}^{\infty} c(n)x^n,$$

که در آن $c(n)$ ها صحیح می‌باشند .

تذکر. ضرایب $c(n)$ به ازای $n \le 100$ محاسبه شده‌اند. برویک[1] ۷ تای اول را در ۱۹۱۶، سوکرمن[2] ۲۴ تای اول را در ۱۹۳۹، و وان وینگاردن[3] ۱۰۰ تای اول را در ۱۹۵۳ محاسبه کرد. چندتای اول را در اینجا تکرار می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
c(0) &= 744\\
c(1) &= 196,884\\
c(2) &= 21,493,760\\
c(3) &= 864,299,970\\
c(4) &= 20,245,856,256\\
c(5) &= 333,202,640,600\\
c(6) &= 4,252,023,300,096\\
c(7) &= 44,656,994,071,935\\
c(8) &= 401,490,886,656,000
\end{aligned}
$$

اعداد صحیح $c(n)$ چند خاصیت حسابی جالب دارند. در سال ۱۹۴۲، دی. اچ. لمر[4] [۱۹] ثابت کرد که

به ازای هر $n \ge 1$، $(n+1)c(n) \equiv 0 \pmod{24}$.

در سال ۱۹۴۹، ژوزف‌لنر[5] [۲۲] خواص بخشپذیری از نوع مختلف را کشف کرد. مثلاً، ثابت کرد که

$$
\begin{aligned}
c(5n) &\equiv 0 \pmod{25},\\
c(7n) &\equiv 0 \pmod{7},\\
c(11n) &\equiv 0 \pmod{11}.
\end{aligned}
$$

وی همچنین همنهشتیهایی برای توانهای بالاتر 5, 7, 11 را کشف نمود، بعداً در مقاله‌ای [۲۳] نتایج مشابه برای اعداد 2 و 3 را پیدا کرد. در فصل ۴ طرز به دست آمدن چند همنهشتی لنر را توصیف خواهیم کرد.

فرمول مجانبی $c(n)$ در ۱۹۳۲ توسط پترسون[6] [۳۰] کشف شد. این فرمول می‌گوید که

وقتی $n \to \infty$، $c(n) \sim \dfrac{e^{4\pi\sqrt{n}}}{\sqrt{2}\, n^{3/4}}$.

---

1. Berwick
2. Zuckerman
3. Van Wijngaarden
4. D. H. Lehmer
5. Joseph Lehner
6. Petersson

این فرمول مستقلا" توسط رادماخر[1] [۳۵] در ۱۹۳۸ مجددا" کشف گردید.

ضرایب $\tau(n)$ در بسطهای فوریهٔ $\Delta(\tau)$ توسط دی. اچ. لمــر [۱۸] و دیگران به طور وسیعی به جدول درآمده‌اند. ده درایهٔ اول در جدول لمــر را در اینجا تکرار می‌کنیم :

$$\begin{array}{ll} \tau(1) = 1 & \tau(6) = -6048 \\ \tau(2) = -24 & \tau(7) = -16744 \\ \tau(3) = 252 & \tau(8) = 84480 \\ \tau(4) = -1472 & \tau(9) = -113643 \\ \tau(5) = 4830 & \tau(10) = -115920. \end{array}$$

لمــر حدس زد که به ازای هر n ، $\tau(n) \neq 0$ ، و به ازای هر $n < 214928639999$ با بررسی همنهشتیهای مختلف صادق به وسیلهٔ $\tau(n)$ تحقیق شده است. برای دیدن مقالات مربوط به $\tau(n)$ ، ر.ک. بخش F35 مرجع [۲۶] .

تمرینات برای فصل ۱

۱. دو زوج از اعداد مختلط (ω_1, ω_2) و (ω_1', ω_2') با نسبتهای غیر حقیقــی ω_2/ω_1 و ω_2'/ω_1' داده شـــده‌اند. ثابت کنید اینها مجموعهٔ یکسانی از دوره‌های تناوب تولید می‌کنند اگر و فقط اگر ماتریس 2×2ای مانند $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ با درایه‌های صحیح و دترمینان ± 1 وجود داشته باشد که

$$\begin{pmatrix} \omega_2' \\ \omega_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix}.$$

۲. فرض کنید $S(0)$ مجموع صفرهای تابع بیضوی f در یک متوازی‌الاضلاع تناوبی بوده ، و $S(\infty)$ مجموع قطبها در همان متوازی‌الاضلاع باشد. ثابت کنید $S(0) - S(\infty)$ دورهٔ تناوبی از f است. [**راهنمایی.** از $zf'(z)/f(z)$ انتگرال بگیرید.]

۳. (آ) ثابت کنید $\wp(u) = \wp(v)$ اگر و فقط اگر $u - v$ یا $u + v$ دورهٔ تناوبی از $\wp$ باشد.

(ب) فرض کنید $a_1, \ldots, a_n$ و $b_1, \ldots, b_m$ اعداد مختلطی باشند به طوری که هیچیک از اعداد $\wp(a_i) - \wp(b_j)$ صفر نیست. فرض کنید

$$f(z) = \prod_{k=1}^{n} [\wp(z) - \wp(a_k)] \Big/ \prod_{r=1}^{m} [\wp(z) - \wp(b_r)].$$

ثابت کنید f یک تابع بیضوی با صفرهای در $a_1, \ldots, a_n$ و قطبهای در $b_1, \ldots, b_m$ است.

۴. ثابت کنید هر تابع بیضوی زوج f تابع گویایی از $\wp$ است ، که دوره‌های تناوب $\wp$ زیر

---

1. Rademacher

مجموعه‌ای از دوره‌های تناوب f می‌باشد .

۵ . ثابت کنید هر تابع بیضوی f را می‌توان به شکل زیر بیان کرد :

$$f(z) = R_1[\wp(z)] + \wp'(z)R_2[\wp(z)]$$

که در آن R_1 و R_2 توابعی گویا بوده و $\wp$ همان مجموعه از دوره‌های تناوب f را دارد .

۶ . فرض کنید f و g دو تابع بیضوی با مجموعهٔ دوره‌های تناوب یکسان باشند . ثابت کنید یک چندجمله‌ای مانند $P(x, y)$ وجود دارد ، که متحد صفر نیست ، به طوری که

$$P[f(z), g(z)] = C$$

که در آن C یک ثابت (وابسته به f و g ولی نه به z) است .

۷ . مبین چند جمله‌ای $f(x) = 4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ حاصل ضرب $16\{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)\}^2$ است . ثابت کنید مبین $f(x) = 4x^3 - ax - b$ مساوی است با $a^3 - 27b^2$.

۸ . معادلهٔ دیفرانسیل مربوط به $\wp$ نشان می‌دهد که اگر z مساوی $\omega_1/2$ ، $\omega_2/2$ ، یا $(\omega_1 + \omega_2)/2$ باشد ، $\wp'(z) = 0$. نشان دهید که

$$\wp''\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = 2(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)$$

و فرمولهای نظیر برای $\wp''(\omega_2/2)$ و $\wp''((\omega_1 + \omega_2)/2)$ را به دست آورید .

۹ . بنابر تمرین ۴ ، تابع $\wp(2z)$ تابع گویایی از $\wp(z)$ است . در واقع ، ثابت کنید

$$\wp(2z) = \frac{\{\wp^2(z) + \frac{1}{4}g_2\}^2 + 2g_3\wp(z)}{4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3}.$$

۱۰ . فرض کنید ω_1 و ω_2 اعداد مختلطی با نسبت غیرحقیقی باشد . همچنین ، $f(z)$ یک تابع تمام بوده و ثابتهایی مانند a و b موجود باشند به‌طوری که به ازای هر z ،

$$f(z + \omega_1) = af(z), \qquad f(z + \omega_2) = bf(z).$$

ثابت کنید $f(z) = Ae^{Bz}$ ، که در آن A و B ثابت می‌باشند .

۱۱ . اگر $k \geq 2$ و $\tau \in H$ ، ثابت کنید سری آیزن اشتاین

$$G_{2k}(\tau) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} (m + n\tau)^{-2k}$$

دارای بسط فوریهٔ زیر است :

$$G_{2k}(\tau) = 2\zeta(2k) + \frac{2(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(n)e^{2\pi i n\tau}.$$

۱۲ . به تمرین ۱۱ باز می‌گردیم . اگر $\tau \in H$ ، ثابت کنید

$$G_{2k}(-1/\tau) = \tau^{2k}G_{2k}(\tau)$$

و نتیجه بگیرید که

$$G_{2k}(i/2) = (-4)^k G_{2k}(2i) \quad \text{،} \quad k \geq 2 \text{ به ازای هر }$$

$$G_{2k}(i) = 0 \quad \text{،}\ k \text{ اگر } \text{ فرد باشد}$$

$$\cdot\ G_{2k}(e^{2\pi i/3}) = 0 \quad \text{،}\ k \not\equiv 0 \pmod 3 \text{ اگر }$$

۱۳. تابع تو رامانوجان $\tau(n)$ با بسط فوریهٔ

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{2\pi i n \tau},$$

تعریف شده است، که در قضیهٔ ۱۹۰۱ به دست آمد. ثابت کنید

$$\tau(n) = 8000\{(\sigma_3 \circ \sigma_3) \circ \sigma_3\}(n) - 147(\sigma_5 \circ \sigma_5)(n),$$

که در آن $f \circ g$ حاصل ضرب کشی دو دنباله است،

$$(f \circ g)(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k) g(n-k),$$

و $\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha$ به ازای $n \geq 1$، که در آن $\sigma_3(0) = \frac{1}{240}, \sigma_5(0) = -\frac{1}{504}$.

[**راهنمایی.** قضیهٔ ۱۸۰۱.]

۱۴. هر سری به شکل $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)x^n/(1-x^n)$ یک سری *لامبرت*[1] نام دارد. با فرض همگرایی مطلق، ثابت کنید

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} F(n) x^n,$$

که در آن

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

با اعمال این نتیجه، فرمولهای زیر را که به ازای $|x| < 1$ معتبرند به دست آورید.

(آ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)x^n}{1-x^n} = x$

(ب) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)x^n}{1-x^n} = \frac{x}{(1-x)^2}$

(پ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_\alpha(n) x^n$

(ت) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}$

(ث) با استفاده از (پ)، $g_2(\tau)$ و $g_3(\tau)$ را برحسب سری لامبرت از $x = e^{2\pi i \tau}$ بیان دارید.

---

1. Lambert

تذکر. در (آ) $\mu(n)$ تابع موبیوس[1] است؛ در (ب) $\varphi(n)$ کامل اویلر[2] است؛ و در (ت) $\lambda(n)$ تابع لیوویل می‌باشد.

۱۵. فرض کنید

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 x^n}{1 - x^n},$$

و قرار می‌دهیم

$$F(x) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n \text{ فرد})}}^{\infty} \frac{n^5 x^n}{1 + x^n}.$$

(آ) ثابت کنید $F(x) = G(x) - 34G(x^2) + 64G(x^4)$.

(ب) ثابت کنید

$$\sum_{\substack{n=1 \\ (n \text{ فرد})}}^{\infty} \frac{n^5}{1 + e^{n\pi}} = \frac{31}{504}.$$

---

1. Möbius
2. Euler

۲
گروه هنگی و توابع هنگی

۱.۲ تبدیلات موبیوس

در فصل پیش به تبدیلات غیرهنگی

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

برخوردیم ، که در آنها a, b, c, d صحیح بوده و $ad - bc = 1$. در این فصل این گونه تبدیلات با شرح بیشتر مطالعه شده و نیز توابعی که مانند $J(\tau)$ تحت تبدیلات غیر هنگی پایا هستند بررسی می‌شوند . مطلب را با چند نکته در باب تبدیلات کلیتر

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{۱}$$

آغاز می‌کنیم ، که در آنها a, b, c, d اعداد مختلط دلخواهی می‌باشند .

معادلهٔ (۱) $f(z)$ را به‌ازای‌هر z در دستگاه‌وسعت‌یافتهٔ‌اعداد‌مختلط $C^* = C \cup \{\infty\}$ جز $z = -d/c$ و $z = \infty$ تعریف می‌کند . با فرض

$$f(\infty) = \frac{a}{c} \qquad \text{و} \qquad f\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty$$

و این قرارداد معمول که اگر $z \neq 0$ ، $z/0 = \infty$ ، تعریف f را به سراسر C^* می‌کشانیم .

ابتدا توجه می‌کنیم

$$f(w) - f(z) = \frac{(ad - bc)(w - z)}{(cw + d)(cz + d)}, \tag{۲}$$

که نشان می‌دهد f در صورت $ad - bc = 0$ ثابت است . برای پرهیز از این حالت‌تباه‌شده فرض می‌کنیم $ad - bc \neq 0$. تابع گویای حاصل یک **تبدیل موبیوس** نام دارد . این تابع همه‌جا بر C^* جز به ازای قطب ساده‌ای در $z = -d/c$ تحلیلی است .

معادلهٔ (۲) نشان می‌دهد که هر تبدیل موبیوس بر C^* یک به یک است . باحل (۱)

نسبت به z و برحسب $f(z)$ ، معلوم می‌شود که

$$z = \frac{df(z) - b}{-cf(z) + a},$$

درنتیجه ، f ، C^* را به روی C^* می‌نگارد . این همچنین نشان می‌دهد که تابع معکوس f^{-1} یک تبدیل موبیوس می‌باشد .

اگر (۲) را بر $z - w$ تقسیم کرده و بگذاریم $w \to z$ ، خواهیم داشت

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2},$$

لذا ، در هر نقطهٔ تحلیلی ، $f'(z) \neq 0$. بنابراین ، f همه جا جز احتمالا" در قطب $z = -d/c$ همدیس است .

تبدیلات موبیوس دوایر را به روی دوایر می‌نگارند (خطوط مستقیم حالات خاصی‌از دوایر گرفته می‌شوند) . برای اثبات این امر ، معادلهٔ

$$Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0 \qquad (۳)$$

را درنظر می‌گیریم که در آن A و C حقیقی‌اند . نقاط‌واقع بر هر دایره در چنین معادله‌با $A \neq 0$ صدق می‌کنند ، و نقاط‌واقع بر هر خط در چنین معادله با $A = 0$ صدق‌خواهندکرد. از تعویض z در (۳) با $(aw + b)/(cw + d)$ معلوم می‌شود که w در معادله‌ای از این نوع صدق می‌کند :

$$A'w\bar{w} + B'w + \bar{B}'\bar{w} + C' = 0$$

که در آن A' و C' نیز حقیقی می‌باشند . لذا ، هر تبدیل موبیوس یک دایره یاخط مستقیم را به روی یک دایره یا خط مستقیم می‌نگارد .

تبدیل موبیوس با ضرب تمام ضرایب a, b, c, d در یک ثابت ناصفر تغییر نمی‌کند. لذا ، فرض $ad - bc = 1$ خللی به کلیت وارد نخواهد کرد .

به هر تبدیل موبیوس (۱) با $ad - bc = 1$ ماتریس 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

را مربوط می‌کنیم . در این صورت $\det A = ad - bc = 1$. هرگاه A و B به‌ترتیب ماتریسهای مربوط به تبدیلات موبیوس f و g باشند ، آنگاه به آسانی تحقیق می‌شود که ماتریس حاصل ضرب AB به‌ترکیب $f \circ g$ مربوط است ،که $(f \circ g)(z) = f(g(z))$. ماتریس‌همانی $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ به تبدیل همانی

$$f(z) = z = \frac{1z + 0}{0z + 1},$$

و ماتریس معکوس

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

به معکوس f

$$f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

مربوط است. لذا، می‌بینیم که مجموعهٔ تمام تبدیلات موبیوس با خاصیت $ad - bc = 1$ یک گروه تحت ترکیب تشکیل می‌دهد. در این فصل به زیر گروه مهمی توجه داریم که‌درآن ضرایب a, b, c, d صحیح می‌باشند.

۲.۲ گروه هنگی Γ

مجموعهٔ تمام تبدیلات موبیوس به شکل

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d},$$

که در آن a, b, c, d صحیح‌بوده‌و $ad - bc = 1$، **گروه هنگی** نام دارد و با Γ نموده‌می‌شود. این گروه را می‌توان با ماتریسهای صحیح 2×2

$$\det A = 1 \quad \text{که} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

نمایش داد مشروط بر اینکه هر ماتریسرا باقرینه‌اش یکی کنیم، زیرا A و $A-$ نمایش یک تبدیل می‌باشند. ما معمولاً "تمایزی بین ماتریس و تبدیل قایل نمی‌شویم. اگر $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$، می‌نویسیم

$$A\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

اولین قضیه نشان می‌دهد که Γ به وسیلهٔ دو تبدیل

$$S\tau = -\frac{1}{\tau} \qquad \text{و} \qquad T\tau = \tau + 1$$

تولید می‌شود.

قضیهٔ ۱.۲. گروه هنگی Γ به وسیلهٔ دو ماتریس

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{و} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

تولید می‌شود . یعنی ، هر A در Γ را می‌توان به شکل

$$A = T^{n_1}ST^{n_2}S\cdots ST^{n_k}$$

بیان کرد ، که در آن n_i ها صحیح می‌باشند . این نمایش منحصر به فرد نمی‌باشد .

برهان . ابتدا مثال خاصی در نظر می‌گیریم ؛ مثلاً ،

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}.$$

A را به صورت حاصل‌ضربی از توانهای S و T بیان می‌کنیم . چون $S^2 = I$ فقط توان اول S را خواهیم داشت .

حاصل ضرب ماتریسی

$$AT^n = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4n+9 \\ 11 & 11n+25 \end{pmatrix}$$

را درنظر می‌گیریم . توجه کنید که ستون اول تغییر نکرده است . با انتخاب مناسبی از n می‌توان داشت $|11n + 25| < 11$. مثلاً ، بافرض $n = -2$ ، معلوم می‌شودکه $11n + 25 = 3$ و

$$AT^{-2} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}.$$

لذا ، با ضرب A درتوان‌مناسبی‌از T ، ماتریس $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ به‌دست‌می‌آیدکه در آن $|d| < |c|$.

حال ، با ضرب S از راست ،

$$AT^{-2}S = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -11 \end{pmatrix}.$$

این ضرب دو ستون را باهم عوض کرده و علامت ستون دوم را تغییر می‌دهد . مجدداً ، ضرب در توان مناسبی از T ماتریسی به ما می‌دهد که در آن $|d| < |c|$. در این حالت می‌توان از T^4 یا T^3 استفاده کرد . با اختیار T^4 معلوم می‌شود که

$$AT^{-2}ST^4 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

ضرب در S نتیجه می‌دهد که

$$AT^{-2}ST^4S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

حال با ضرب در T^3 به دست می‌آوریم

$$AT^{-2}ST^4ST^3 = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = S.$$

و با حل نسبت به A خواهیم داشت

$$A = ST^{-3}ST^{-4}ST^2.$$

ممکن است در هر مرحله بیش از یک توان T نامساوی $|d| < |c|$ را به دست دهد؛ لذا، فرایند منحصر به فرد نخواهد بود.

برای اثبات قضیه در حالت کلی، کافی است آن ماتریسهای $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ در Γ را در نظر بگیریم که در آنها $c \geq 0$. ما از استقرا روی c استفاده می‌کنیم.

هرگاه $c = 0$، آنگاه $ad = 1$؛ درنتیجه، $a = d = \pm 1$ و

$$A = \begin{pmatrix}\pm 1 & b\\ 0 & \pm 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \pm b\\ 0 & 1\end{pmatrix} = T^{\pm b}.$$

لذا، A توانی از T است.

هرگاه $c = 1$، آنگاه $ad - b = 1$؛ درنتیجه، $b = ad - 1$ و

$$A = \begin{pmatrix}a & ad-1\\ 1 & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & d\\ 0 & 1\end{pmatrix} = T^aST^d.$$

حال فرض کنیم قضیه به ازای جمیع ماتریسهای A که عنصر چپ پایینی آنها از $c \geq 1$ ای کوچکتر است ثابت‌شده باشد. چون $ad - bc = 1$، داریم $(c, d) = 1$. از تقسیم d بر c به دست می‌آوریم

$d = cq + r$، که در آن $0 < r < c$.

در این صورت،

$$AT^{-q} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -q\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & -aq+b\\ c & r\end{pmatrix}$$

و

$$AT^{-q}S = \begin{pmatrix}a & -aq+b\\ c & r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-aq+b & -a\\ r & -c\end{pmatrix}.$$

بنا به فرض استقرا، آخرین ماتریس حاصل‌ضربی از توانهای S و T است؛ لذا، A نیز چنین می‌باشد. با این برهان تمام می‌شود.

۳.۲ نواحی اساسی

فرض کنیم G زیرگروهی از گروه هنگی Γ باشد. دو نقطهٔ τ و τ' در نیمصفحهٔ بالایی H را

تحت G **هم‌ارز** گوییم اگر به ازای A ای در G ، $\tau' = A\tau$. این یک رابطهٔ هم‌ارزی است ، زیرا G یک گروه است .

این رابطهٔ هم‌ارزی نیمصفحهٔ بالایی H را به گردایهٔ از هم جدایی از رده‌های هم‌ارزی به نام **مدار** تجزیه می‌کند . مدار $G\tau$ مجموعهٔ تمام اعداد مختلط به شکل $A\tau$ است که $A \in G$.

از هر مدار یک نقطه اختیار می‌کنیم ؛ اجتماع تمام این نقاط یک **مجموعهٔ *اساسی*** G نام دارد . برای پرداختن به مجموعه‌هایی که خواص توپولوژیک زیبایی دارند ، مفهوم را اندکی تعدیل کرده و یک **ناحیهٔ *اساسی*** G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم .

تعریف . فرض کنیم G زیرگروهی از گروه هنگی Γ باشد . زیرمجموعهٔ باز R_G از H یک **ناحیهٔ *اساسی*** G نام دارد اگر از دو خاصیت زیر برخوردار باشد :

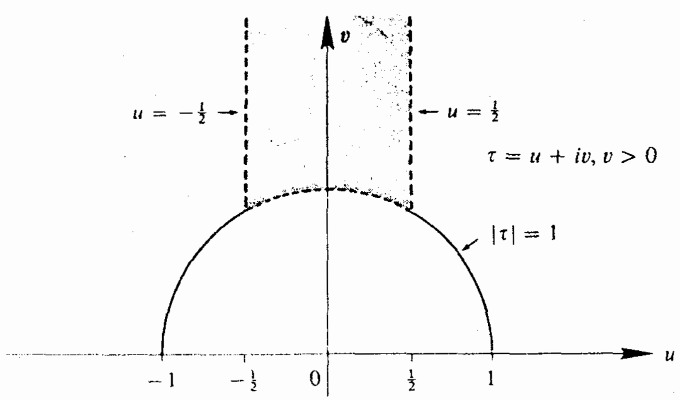
(آ) هیچ دو نقطهٔ متمایز R_G تحت G هم‌ارز نباشند ؛

(ب) اگر $\tau \in H$ ، نقطه‌ای مانند τ' دربست R_G باشد به طوری که τ' تحت G با τ هم‌ارز باشد .

مثلاً ، قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که ناحیهٔ اساسی R_Γ گروه هنگی کامل Γ از تمام τ هایی در H تشکیل شده است که در نامساویهای

$$|\tau| > 1, \qquad |\tau + \bar{\tau}| < 1$$

صدق می‌کنند . این ناحیه قسمت سایه دار شکل ۱.۲ می‌باشد .



شکل ۱.۲ ناحیهٔ اساسی گروه هنگی

در اثبات از لم زیر در باب زوجهای اساسی تناوب استفاده می‌شود .

لم ۱. به فرض آنکه در ω_1', ω_2' نسبت ω_2'/ω_1' حقیقی نباشد، قرار می‌دهیم

$$\Omega = \{m\omega_1' + n\omega_2' : \text{صحیح‌اند } m, n\}.$$

در این صورت، یک زوج اساسی مانند (ω_1, ω_2) هم‌ارز با (ω_1', ω_2') وجود دارد به طوری که

$$\begin{pmatrix}\omega_2\\ \omega_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_2'\\ \omega_1'\end{pmatrix} \text{ با } ad - bc = 1 \text{ ،}$$

و نیز

$$|\omega_2| \geq |\omega_1|, \qquad |\omega_1 + \omega_2| \geq |\omega_2|, \qquad |\omega_1 - \omega_2| \geq |\omega_2|.$$

برهان. عناصر Ω را برحسب فاصلهٔ صعودی تا مبداء به صورت دنباله مرتب می‌کنیم؛ مثلاً،

$$\Omega = \{0, w_1, w_2, \ldots\}$$

که در آن

$$0 < |w_1| \leq |w_2| \leq \cdots \text{ و } \arg w_n < \arg w_{n+1} \text{ اگر } |w_n| = |w_{n+1}| \text{ .}$$

فرض کنیم $\omega_1 = w_1$ و ω_2 اولین عضو این دنباله باشد که مضربی از ω_1 نیست. در این صورت، مثلث به‌رئوس $0, \omega_1, \omega_2$ شامل عنصری از Ω جز رئوس نیست؛ درنتیجه، (ω_1, ω_2) یک زوج اساسی است که مجموعهٔ Ω را تولید می‌کند. لذا، اعداد صحیحی چون a, b, c, d با خاصیت $ad - bc = \pm 1$ وجود دارند به طوری که

$$\begin{pmatrix}\omega_2\\ \omega_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_2'\\ \omega_1'\end{pmatrix}.$$

اگر $ad - bc = -1$، می‌توان c را با $-c$، d را با $-d$، و ω_1 را با $-\omega_1$ عوض کرد و همان معادله برقرار است جز آنکه دراینجا $ad - bc = 1$. به خاطر نحوهٔ انتخاب ω_1, ω_2، داریم

$$|\omega_2| \geq |\omega_1| \qquad \text{و} \qquad |\omega_1 \pm \omega_2| \geq |\omega_2|$$

زیرا $\omega_1 \pm \omega_2$ دوره‌های تناوبی در Ω اند که بعداز ω_2 در دنباله می‌آیند.

قضیهٔ ۲.۲. اگر $\tau' \in H$، عدد مختلطی مانند τ در H وجود دارد که تحت Γ با τ' هم‌ارز بوده و

$$|\tau| \geq 1 \text{ ،} \quad |\tau + 1| \geq |\tau| \text{ ،} \quad \text{و} \quad |\tau - 1| \geq |\tau| \text{ .}$$

برهان. فرض کنیم $\omega_1' = 1$، $\omega_2' = \tau'$، و لم ۱ را بر مجموعهٔ دوره‌های تناوب

$\Omega = \{m + n\tau' :$ صحیح $m, n\}$ اعمال می‌کنیم . در این صورت ، یک زوج اساسی مانند ω_1, ω_2 وجوددارد که $|\omega_2| \geq |\omega_1|, |\omega_1 \pm \omega_2| \geq |\omega_2|$. فرض‌کنیم $\tau = \omega_2/\omega_1$. دراین صورت ، $\tau = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\tau'$ که در آن $ad - bc = 1$ و

$$|\tau| \geq 1, \qquad |\tau \pm 1| \geq |\tau|.$$

تذکر. τ های‌موجود در H و صادق‌در $|\tau \pm 1| \geq |\tau|$ همانهایی‌هستند که در $|\tau + \bar{\tau}| \leq 1$ صدق می‌کنند .

قضیهٔ ۲ . ۳ . *مجموعهٔ باز*

$$R_\Gamma = \{\tau \in H : |\tau| > 1, |\tau + \bar{\tau}| < 1\}$$

یک ناحیهٔ اساسی برای Γ است . به‌علاوه ، هرگاه $A \in \Gamma$ و به ازای τ ای در R_Γ ، $A\tau = \tau$ ، آنگاه $A = I$. به عبارت دیگر ، تنها عنصر همانی است که در R_Γ نقاط ثابت دارد .

برهان . قضیهٔ ۲ . ۲ نشان می‌دهد که اگر $\tau' \in H$ ، نقطه‌ای مانند τ دربست R_Γ وجوددارد که تحت Γ با τ' هم‌ارز است . برای اثبات اینکه هیچ دو نقطهٔ متمایز R_Γ تحت Γ هم‌ارز نیستند ، فرض‌می‌کنیم $\tau' = A\tau$ که‌درآن $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. ابتدا نشان‌می‌دهیم که‌اگر $\tau \in R_\Gamma$ و $c \neq 0$ ، $\operatorname{Im}(\tau') < \operatorname{Im}(\tau)$. داریم

$$\operatorname{Im}(\tau') = \frac{\operatorname{Im}(\tau)}{|c\tau + d|^2}.$$

اگر $\tau \in R_\Gamma$ و $c \neq 0$ ، داریم

$$|c\tau + d|^2 = (c\tau + d)(c\bar{\tau} + d) = c^2\tau\bar{\tau} + cd(\tau + \bar{\tau}) + d^2 > c^2 - |cd| + d^2.$$

اگر $d = 0$ ، معلوم می‌شود که $|c\tau + d|^2 > c^2 \geq 1$. اگر $d \neq 0$ ، داریم

$$c^2 - |cd| + d^2 = (|c| - |d|)^2 + |cd| \geq |cd| \geq 1$$

لــذا ، مجــددا " $|c\tau + d|^2 > 1$. بنابراین ، $c \neq 0$ ایجاب می‌کندکه $|c\tau + d|^2 > 1$ و درنتیجه ، $\operatorname{Im}(\tau') < \operatorname{Im}(\tau)$. به عبارت دیگر ، هر عنصر A از Γ با $c \neq 0$ عرض‌هر نقطهٔ τ در R_Γ را کاهش می‌دهد .

حال فرض‌کنیم هر دوی τ و τ' نقاط درونی هم‌ارزی از R_Γ باشند . در این صورت ،

$$\tau = \frac{d\tau' - b}{-c\tau' + a} \qquad \text{و} \qquad \tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

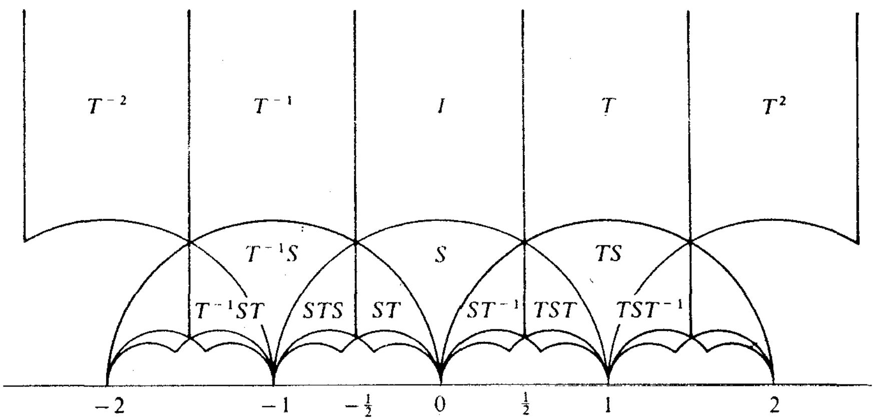
اگر $c \neq 0$ ، داریم $\operatorname{Im}(\tau') < \operatorname{Im}(\tau)$ و $\operatorname{Im}(\tau) < \operatorname{Im}(\tau')$. بنابراین ، $c = 0$ ؛ درنتیجه ، $ad = 1$ ، $a = d = \pm 1$ ، و

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} = T^{\pm b}.$$

اما در این صورت $b = 0$ ، زیرا هر دوی τ و τ' در R_Γ اند؛ درنتیجه، $\tau = \tau'$. این امر ثابت می‌کند که تحت Γ هیچ دو نقطهٔ متمایز R_Γ هم‌ارز نیستند.

بالاخره، اگر به ازای τ ای در R_Γ ، $A\tau = \tau$ ، همان استدلال نشان می‌دهد که $a = d = \pm 1$ ، $c = 0$ ؛ درنتیجه ، $A = I$. این ثابت می‌کند که فقط عنصر همانی نقاط ثابت در R_Γ دارد.

شکل ۲.۲ ناحیهٔ اساسی R_Γ و چند نقش آن تحت تبدیلات گروه هنگی را نشان می‌دهد. هر عنصر Γ دوایر را به دوایر می‌نگارد (که، طبق معمول، خطوط مستقیم را حالات خاصی‌از دوایر می‌گیریم) .چون منحنیهای‌مرزی R_Γ دوایری‌متعامد برمحورحقیقی‌اند همین امر برای هر نقش $f(R_\Gamma)$ تحت عناصر f از Γ درست است. مجموعهٔ تمام نقشهای $f(R_\Gamma)$ ، که $f \in \Gamma$ ، گردایه‌ای است از نواحی باز جدا از هم ، همراه با نقاط مرزی خود ، که تمام H را می‌پوشاند.



شکل ۲.۲ نقشهای ناحیهٔ اساسی R_Γ تحت عناصر Γ

۴.۲ توابع هنگی

تعریف. تابع f را هنگی گوییم اگر در سه شرط زیر صدق کند:

(آ) f در نیمصفحهٔ بالایی H خوش‌ساخت باشد؛

(ب) به ازای هر A در گروه هنگی Γ ، $f(A\tau) = f(\tau)$ ؛
(پ) بسط فوریهٔ f به شکل زیر باشد :

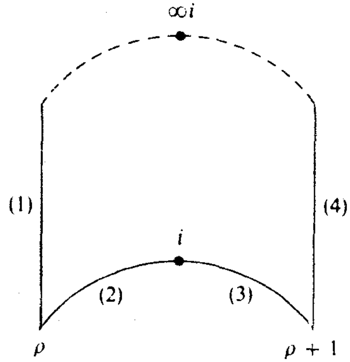
$$f(\tau) = \sum_{n=-m}^{\infty} a(n)e^{2\pi in\tau}.$$

خاصیت (آ) می‌گوید که f در H احتمالا" جز در قطبها تحلیلی است . خاصیت (ب) می‌گوید که f تحت تمام تبدیلات Γ پایاست . خاصیت (پ) شرطی است بر رفتار f در نقطهٔ $\tau = i\infty$. اگر $x = e^{2\pi i\tau}$ ، سری فوریه در (پ) یک بسط لوران برحسب توانهای x است . رفتار f در $i\infty$ با ماهیت این بسط لوران در مجاورت 0 توصیف می‌شود . اگر $m > 0$ و $a(-m) \neq 0$ ، گوییم f در $i\infty$ قطبی از مرتبهٔ m دارد . اگر $m \leq 0$ ، گوییم f در $i\infty$ تحلیلی است . شرط (پ) می‌گوید f در بدترین وضع قطبی از مرتبهٔ m در $i\infty$ دارد .

تابع J یک تابع هنگی است . این تابع در H تحلیلی بوده و قطبی از مرتبهٔ اول در $i\infty$ دارد . بعدها نشان می‌دهیم که هر تابع هنگی را می‌توان به صورت یک تابع گویا از J بیان کرد . برهان این امر به خاصیت زیر از توابع هنگی بستگی دارد .

قضیهٔ ۲.۴ . *هرگاه f هنگی بوده و متحد صفر نباشد ، آنگاه تعداد صفرهای f دربست ناحیهٔ اساسی R_Γ مساوی تعداد قطبهاست .*

تذکر . این قضیه فقط با قراردادهای مناسبی در نقاط مرزی R_Γ معتبر است . پیش از همه ، مرز R_Γ را اجتماعی از چهارضلع می‌گیریم که در چهار رأس ρ ، i ، $\rho + 1$ ، و $i\infty$ متقاطع‌اند ، که $\rho = e^{2\pi i/3}$ (ر.ک. شکل ۲.۳) . اضلاع در زوجهای هم‌ارز (4) و (1) و (3) و (2) قرار دارند .

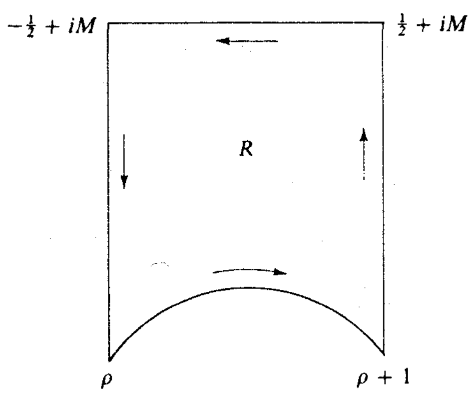


شکل ۲.۳

هرگاه f در نقطه‌ای از یک ضلع دارای صفر یا قطب باشد، آنگاه در نقطهٔ هم‌ارزش بر ضلع هم‌ارز نیز صفر یا قطب دارد. فقط نقطهٔ واقع بر انتهای چپ ضلع (۱) یا (۲) است که باید متعلق به بست R_Γ محسوب شود.

مرتبهٔ صفر یا قطب در رأس ρ باید بر 3 تقسیم شود؛ مرتبه در i باید بر 2 تقسیم شود؛ مرتبه در $i\infty$ مرتبهٔ صفر یا قطب در $x = 0$ است که در متغیر $x = e^{2\pi i\tau}$ سنجیده می‌شود.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم f بر قسمت متناهی مرز R_Γ صفر یا قطب ندارد. R_Γ را با خطی افقی قطع می‌کنیم، $\mathrm{Im}(\tau) = M$، که در آن $M > 0$ آنقدر بزرگ گرفته می‌شود که تمام صفرها یا قطبهای f داخل ناحیهٔ بی‌سر که آن را R می‌نامیم قرار گیرند. [اگر f بی‌نهایت قطب در R_Γ داشته باشد، نقطهٔ انباشتگی در $i\infty$ خواهند داشت که با شرط (پ) در تضاد است. به همین نحو، چون f متحد صفر نیست، f نمی‌تواند بی‌نهایت صفر در R_Γ داشته باشد.] فرض کنیم ∂R مرز ناحیهٔ بی‌سر R باشد. (ر.ک. شکل ۴.۲).

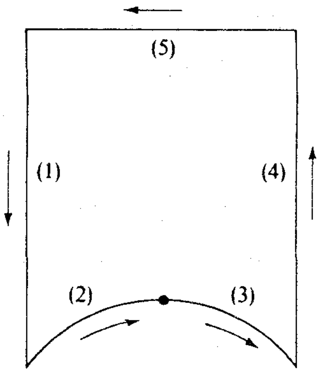


شکل ۴.۲

فرض کنیم N و P تعداد صفرها و قطبهای f در R باشند. در این صورت،

$$N - P = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}\,d\tau = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{(1)} + \int_{(2)} + \int_{(3)} + \int_{(4)} + \int_{(5)}\right\}$$

که در آن مسیر به پنج قسمت مطابق شکل ۵.۲ تجزیه شده است. انتگرالها روی (۱) و (۴) به خاطر تناوب حذف می‌شوند. همچنین، در امتداد (۲) و (۳) نیز حذف می‌شوند، زیرا (۲) تحت نگاشت $u = S(\tau) = -1/\tau$ یا $\tau = S^{-1}u = S(u)$ در جهت عکس روی (۳) نگاشته



شکل ۵.۲

می‌شود. انتگرال‌ده تغییر نمی‌کند، زیرا $f[S(u)] = f(u)$ ایجاب می‌کند که $f'[S(u)]S'(u) = f'(u)$
درنتیجه،

$$\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}\,d\tau = \frac{f'[S(u)]}{f[S(u)]}\,S'(u)\,du = \frac{f'(u)}{f(u)}\,du.$$

لذا، آنچه می‌ماند عبارت است از

$$N - P = \frac{1}{2\pi i}\int_{(5)} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}\,d\tau.$$

این انتگرال را به صفحهٔ x تبدیل می‌کنیم، $x = e^{2\pi i\tau}$. وقتی τ پاره‌خط افقی $\tau = u + iM$ ، $-\frac{1}{2} \le u \le \frac{1}{2}$ را طی کند، داریم

$$x = e^{2\pi i(u+iM)} = e^{-2\pi M}e^{2\pi i u}$$

درنتیجه، x یکبار دایرهٔ K به شعاع $e^{-2\pi M}$ به مرکز $x = 0$ را در جهت منفی طی می‌کند. نقاط بالای این پاره‌خط داخل K نگاشته شده‌اند؛ درنتیجه، f داخل K احتمالاً" جز در $x = 0$ صفر یا قطب ندارد. بسط فوریه نتیجه می‌دهد که

$$f(\tau) = \frac{a_{-m}}{x^m} + \cdots = F(x),$$

که در آن

$$f'(\tau) = F'(x)\,\frac{dx}{d\tau}, \qquad \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}\,d\tau = \frac{F'(x)}{F(x)}\,dx.$$

لذا،

$$N - P = \frac{1}{2\pi i}\int_{(5)} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}\,d\tau = -\frac{1}{2\pi i}\oint_K \frac{F'(x)}{F(x)}\,dx = -(N_F - P_F) = P_F - N_F,$$

که در آن N_F و P_F تعداد صفرها و قطبهای F داخل K می‌باشند.

هرگاه قطبی از مرتبهٔ m در $x = 0$ موجود باشد، آنگاه $m > 0,\ N_F = 0,\ P_F = m$ درنتیجه، $P_F - N_F = m$ ، و

$$N = P + m.$$

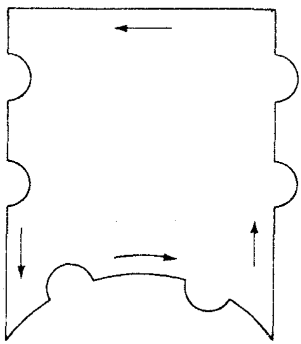
لذا، f مقدار 0 در R_Γ را به همان تعداد می‌گیرد که مقدار ∞ را اختیار می‌کند.

هرگاه یک صفر مرتبهٔ n در $x = 0$ داشته باشد، آنگاه $m = -n$ ؛ درنتیجه، $P_F = 0,\ N_F = n$ ؛ لذا،

$$N + n = P.$$

مجدداً، f مقدار 0 در R_Γ را به همان تعداد می‌گیرد که مقدار ∞ را اختیار می‌کند. این قضیه را درصورتی ثابت می‌کند که f بر قسمت متناهی مرز R_Γ صفر یا قطب نداشته باشد.

اگر f بر یک ضلع ولی نه در یک رأس صفر یا قطب داشته باشد، مسیر انتگرالگیری را مثل شکل ۶.۲ طوری انحراف می‌دهیم که شامل صفر یا قطب واقع در درون R بشود.

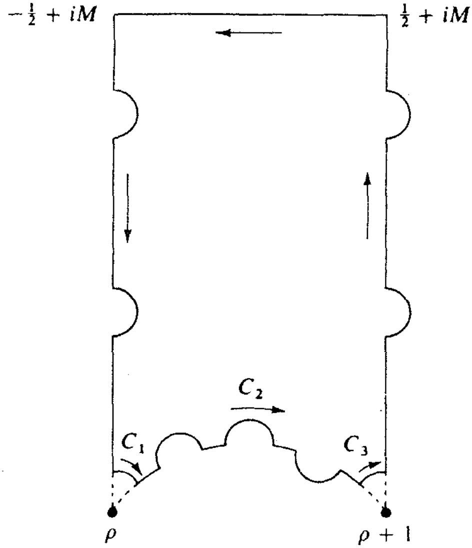


شکل ۶.۲

انتگرالها در امتداد اضلاع هم‌ارز مثل قبل حذف می‌شوند. از هر جفت صفر یا قطب‌جدید فقط یک عضو در داخل ناحیهٔ جدید قرار دارد و برهان مثل قبل پیش می‌رود، زیرا طبق قرارداد فقط یکی از نقاط هم‌ارز (صفر یا قطب) متعلق به بست R_Γ در نظرگرفته‌می‌شود.

اگر f در رأس ρ یا i صفر یا قطب‌داشته‌باشد، مسیر انتگرالگیری را با انحرافات جدید مثل شکل ۷.۲ بیشتر تعدیل می‌کنیم. با استدلال فوق معلوم می‌شود که

$$N - P = \frac{1}{2\pi i}\left\{\left(\int_{C_1} + \int_{C_3}\right) + \int_{C_2} + \int_{1/2+iM}^{-1/2+iM}\right\}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}\,d\tau$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\left\{\left(\int_{C_1} + \int_{C_3}\right) + \int_{C_2}\right\}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}\,d\tau + m.$$



شکل ۷۰۲

که در آن x^{-m} کوچکترین‌توان x دربسط لوران درمجاورت $x=0$ ، $x=e^{2\pi i\tau}$ ، می‌باشد.

در مجاورت رأس ρ می‌نویسیم

$f(\tau)=(\tau-\rho)^k g(\tau)$ ، که در آن $g(\rho)\neq 0$.

نمای k مثبت است‌اگر f در ρ صفر داشته‌باشد ،و منفی است اگر f در ρ قطب داشته‌باشد.

بر مسیر C_1 می‌نویسیم $\tau-\rho=re^{i\theta}$ ، که در آن r ثابت بوده و $\alpha\leq\theta\leq\pi/2$ که در آن α تابع r می‌باشد. در این صورت ،

$$\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}=\frac{k}{\tau-\rho}+\frac{g'(\tau)}{g(\tau)}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}\,d\tau&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\pi/2}^{\alpha}\left(\frac{k}{re^{i\theta}}+\frac{g'(\rho+re^{i\theta})}{g(\rho+re^{i\theta})}\right)re^{i\theta}i\,d\theta\\&=\frac{-k\alpha'}{2\pi}+\frac{r}{2\pi}\int_{\pi/2}^{\alpha}\frac{g'(\rho+re^{i\theta})}{g(\rho+re^{i\theta})}\,d\theta,\end{aligned}$$

که درآن $\alpha'=\frac{\pi}{2}-\alpha$. وقتی $r\to 0$ ، جملهٔ آخر به 0 میل‌می‌کند ، زیرا انتگرالده‌کراندار است . همچنین ، وقتی $r\to 0$ ، $\alpha'\to\pi/3$ ؛ درنتیجه ،

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau=-\frac{k}{6}.$$

به همین نحو ،

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_3}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}\,d\tau=-\frac{k}{6}$$

درنتیجه ،

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{C_1}+\int_{C_3}\right)\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}\,d\tau=-\frac{k}{3}.$$

به همین نحو ، در مجاورت رأس i می‌نویسیم

$f(\tau)=(\tau-i)^l h(\tau)$ ، که در آن $h(i)\neq 0$

و به همین ترتیب به دست می‌آوریم

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}\,d\tau=-\frac{l}{2}.$$

لذا ، فرمول زیر را خواهیم داشت :

$$N-P=m-\frac{k}{3}-\frac{l}{2}.$$

هرگاه f در $x=0$ قطب و در ρ و i صفر داشته باشد ، آنگاه m ، k ، و l مثبت بوده و خواهیم داشت

$$N+\frac{k}{3}+\frac{l}{2}=P+m.$$

طرف چپ تعداد صفرهای f دربست R_Γ را (با قراردادهایی که در رئوس پذیرفته‌ایم) می‌شمارد و طرف راست تعداد قطبها را خواهد شمرد . هرگاه f در $x=0$ صفر مرتبهٔ n داشته باشد ، آنگاه $m=-n$ و معادله به صورت زیر درمی‌آید :

$$N+n+\frac{k}{3}+\frac{l}{2}=P.$$

به همین نحو ، اگر f در ρ یا i قطب داشته باشد ، جملهٔ نظیر $k/3$ یا $l/2$ منفی است و همراه با P شمرده می‌شود . این برهان را کامل خواهد کرد .

قضیهٔ ۲.۵ . هرگاه f هنگی بوده و ثابت نباشد ، آنگاه به ازای هر عدد مختلط c ، تعداد صفرهای تابع $f-c$ دربست R_Γ با تعداد قطبهایش در این بست یکی است . به عبارت دیگر ، f هر مقدار دربست R_Γ را به یک تعداد می‌گیرد .

برهان . قضیهٔ قبلی را بر $c - f$ اعمال کنید .

قضیهٔ ۲ . ۶ . هرگاه f در H هنگی و کراندار باشد ، آنگاه f ثابت می‌باشد .

برهان . چون f کراندار است ، یک مقدار را حذف می‌کند؛ درنتیجه ، f ثابت است .

۲ . ۵ مقادیر خاص J

قضیه ۲ . ۷ . تابع J هر مقدار دربست R_Γ را درست یکبار می‌گیرد . بخصوص ، در رئوس داریم

$$J(\rho) = 0, \qquad J(i) = 1, \qquad J(i\infty) = \infty.$$

یک قطب مرتبهٔ اول در $i\infty$ و یک صفر سه‌گانه در ρ وجود دارند ، و $J(\tau) - 1$ یک صفر مضاعف در $\tau = i$ دارد .

برهان . ابتدا تحقیق می‌کنیم که $g_2(\rho) = 0$ و $g_3(i) = 0$. چون $\rho^3 = 1$ و $\rho^2 + \rho + 1 = 0$ داریم .

$$\begin{aligned}\frac{1}{60} g_2(\rho) &= \sum_{m,n} \frac{1}{(m + n\rho)^4} = \sum_{m,n} \frac{1}{(m\rho^3 + n\rho)^4} = \frac{1}{\rho^4} \sum_{m,n} \frac{1}{(m\rho^2 + n)^4} \\ &= \frac{1}{\rho} \sum_{m,n} \frac{1}{(n - m - m\rho)^4} = \frac{1}{\rho} \sum_{M,N} \frac{1}{(N + M\rho)^4} = \frac{1}{60\rho} g_2(\rho),\end{aligned}$$

درنتیجه ، $g_2(\rho) = 0$. استدلال مشابه نشان می‌دهد که $g_3(i) = 0$. بنابراین ،

$$J(\rho) = \frac{g_2{}^3(\rho)}{\Delta(\rho)} = 0 \quad \text{و} \quad J(i) = \frac{g_2{}^3(i)}{g_2{}^3(i)} = 1 \cdot$$

بستاییها از قضیهٔ ۲ . ۴ نتیجه می‌شوند .

۲ . ۶ توابع هنگی به صورت توابع گویا از J

قضیهٔ ۲ . ۸ . هر تابع گویا از J یک تابع هنگی است . به عکس ، هر تابع هنگی را می‌توان به صورت یک تابع گویا از J بیان کرد .

برهان . قسمت اول واضح است . برای اثبات قسمت دوم ، فرض کنیم f در $z_1, \ldots, z_n$ صفر و در $p_1, \ldots, p_n$ قطب داشته و تحت قراردادهای معمول در باب بستاییها باشند . فرض

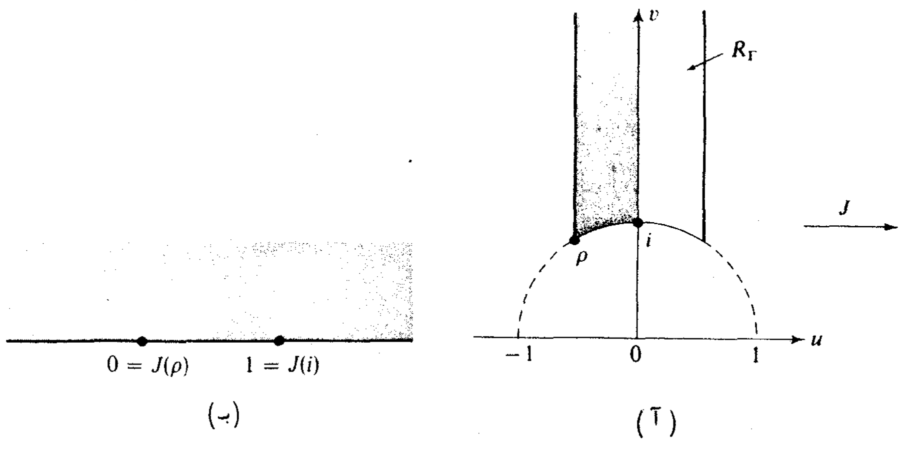
کنیم

$$g(\tau) = \prod_{k=1}^{n} \frac{J(\tau) - J(z_k)}{J(\tau) - J(p_k)}$$

که در آن هر وقت z_k یا p_k مساوی∞ باشد، عامل 1 درج می‌شود. در این صورت، g همان صفرها و قطبهای f دربست R_Γ، با بستایی مناسب، را خواهد داشت، بنابراین، f/g صفر یا قطب ندارد و باید ثابت باشد؛ درنتیجه، f یک تابع گویا از J می‌باشد.

۷.۲ خواص نگاشتی J

قضیهٔ ۷.۲ نشان می‌دهد که J هر مقدار در ناحیهٔ اساسی R_Γ را درست یکبار می‌گیرد. شکل ۸.۲ طرز نگاشت R_Γ به وسیلهٔ J روی صفحهٔ مختلط را نشان می‌دهد.



شکل ۸.۲

نیمهٔ چپ R_Γ (که در شکل ۸.۲آ سایه‌دار است) به نیمصفحهٔ بالایی (که درشکل ۸.۲ب سایه‌دار است) همراه با قسمت قائم مرز روی بازهٔ حقیقی$(-\infty, 0]$ نگاشته‌می‌شود. قسمت مستدیر مرز روی بازهٔ$[0, 1]$ نگاشته شده، و قسمت محور موهومی$u = 0, v > 1$ روی بازهٔ$(1, +\infty)$ نگاشته می‌شود. نقاط‌واقع در R_Γ که نسبت به محور موهومی متقارن است روی نقاط مزدوج در$J(R_\Gamma)$ نگاشته می‌شود. نگاشت همدیس است جز در رئوس $\tau = i$ و $\tau = \rho$ که زوایا به ترتیب دو برابر و سه‌برابر می‌شوند.

این خواص نگاشتی را می‌توان به صورت زیر توضیح داد. بر محور موهومی در R_Γ داریم $\tau = iv$؛ لذا، $x = e^{2\pi i\tau} = e^{-2\pi v} > 0$؛ درنتیجه، سری فوریهٔ

$$12^3 J(\tau) = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} c(n) x^n \quad (x = e^{2\pi i\tau})$$

نشان می‌دهد که $J(iv)$ حقیقی است . چون $J(i) = 1$ و وقتی $v \to +\infty$ ، $J(iv) \to +\infty$ ، بخش محور موهومی $1 \le v < +\infty$ روی محور حقیقی $1 \le J(\tau) < +\infty$ نگاشته می‌شود .

روی‌مرزچپ R_Γ داریم $\tau = -\frac{1}{2} + iv$ ؛ درنتیجه، $x = e^{2\pi i\tau} = e^{-2\pi v} e^{-\pi i} = -e^{-2\pi v} < 0$ به ازای v ی بزرگ (x کوچک) داریم $J(-\frac{1}{2} + iv) < 0$ ؛ درنتیجه ، J خط $u = -\frac{1}{2}$ را روی محور حقیقی منفی می‌نگارد . چون $J(\rho) = 0$ و $J(\infty) = \infty$ ، مرز چپ R_Γ روی خط $-\infty < J(\tau) \le 0$ نگاشته می‌شود . وقتی مرز R_Γ خلاف جهت عقربه‌های ساعت پیموده شود ، نقاط داخل R_Γ سمت چپ قرار می‌گیرند ؛ لذا ، نقاط نقش بالای محور حقیقی در صفحهٔ نقش واقع می‌شوند .

بالاخره ، نشان می‌دهیم که J در نقاط متقارن نسبت به محور موهومی مقادیر مزدوج را می‌گیرد ؛ یعنی ،

$$J(\tau) = \overline{J(-\bar{\tau})}\,.$$

برای مشاهدهٔ این امر ، می‌نویسیم $\tau = u + iv$. در این صورت ،

$$x = e^{2\pi i\tau} = e^{2\pi i(u+iv)} = e^{-2\pi v} e^{2\pi i u}$$

و

$$\bar{x} = e^{-2\pi v} e^{-2\pi i u} = e^{2\pi i(-u+iv)} = e^{-2\pi i\bar{\tau}}\,.$$

لذا ، τ و $\bar{\tau}-$ نظیر نقاط مردوج x و $\bar{x}$ اند ، ولی سری فوریهٔ مربوط به J ضرایب حقیقی دارد ؛ درنتیجه ، $J(\tau)$ و $J(-\bar{\tau})$ مزدوجهای مختلط می‌باشند . بخصوص ، بر قوس مستدیر $\tau\bar{\tau} = 1$ داریم $-1/\tau = -\bar{\tau}$ ؛ لذا ، $J(-\bar{\tau}) = J(-1/\tau) = J(\tau)$ ؛ درنتیجه ، J بر این قوس حقیقی می‌باشد .

۸ . ۲ کاربرد در مسئلهٔ انعکاس برای سری آیزن‌اشتاین

در نظریهٔ توابع بیضوی وایراشتراس ، دوره‌های تناوب ω_1, ω_2 پایاهای g_2 و g_3 را طبق معادلات زیر تعیین می‌کنند :

$$g_2 = g_2(\omega_1, \omega_2) = 60 \sum \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^4} \qquad (۴)$$

$$g_3 = g_3(\omega_1, \omega_2) = 140 \sum \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^6}$$

مسئلهٔ اساسی این است که آیا پایاهای g_2 و g_3 می‌توانند فقط تحت شرط لازم $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$

مقادیر مقرر دلخواهی را بگیرند. این را مسئلهٔ *انعکاس* برای سری آیزناشتاین می‌نامند، زیرا به حل معادلات (۴) نسبت به ω_1 و ω_2 و برحسب g_2 و g_3 منجر می‌شود. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که مسئله دارای جواب است.

قضیهٔ ۹.۲. *دو عدد مختلط دلخواه a_2 و a_3 داده‌شده‌اند به‌طوری‌که $a_2{}^3 - 27a_3{}^2 \neq 0$ در این صورت، اعداد مختلطی چون ω_1 و ω_2 وجود دارند که نسبت آنها حقیقی نبوده و $g_2(\omega_1, \omega_2) = a_2$ و $g_3(\omega_1, \omega_2) = a_3$.*

برهان. سه حالت درنظر می‌گیریم: (۱) $a_2 = 0$؛ (۲) $a_3 = 0$؛ (۳) $a_2 a_3 \neq 0$.

حالت ۱. هرگاه $a_2 = 0$، آنگاه $a_3 \neq 0$، زیرا $a_2{}^3 - 27a_3{}^2 \neq 0$. فرض کنیم ω_1 عدد مختلطی باشد به طوری که

$$\omega_1{}^6 = \frac{g_3(1, \rho)}{a_3}$$

و قرار می‌دهیم $\omega_2 = \rho\omega_1$، که در آن $\rho = e^{2\pi i/3}$. می‌دانیم که $g_3(1, \rho) \neq 0$، زیرا $g_2(1, \rho) = 0$ و $\Delta(1, \rho) = g_2{}^3 - 27g_3{}^2 \neq 0$. در این صورت،

$$g_2(\omega_1, \omega_2) = g_2(\omega_1, \omega_1\rho) = \frac{1}{\omega_1{}^4} g_2(1, \rho) = 0 = a_2$$

و

$$g_3(\omega_1, \omega_2) = g_3(\omega_1, \omega_1\rho) = \frac{1}{\omega_1{}^6} g_3(1, \rho) = a_3 .$$

حالت ۲. هرگاه $a_3 = 0$، آنگاه $a_2 \neq 0$ و ω_1 را طوری می‌گیریم که در

$$\omega_1{}^4 = \frac{g_2(1, i)}{a_2}$$

صدق کند، و قرار می‌دهیم $\omega_2 = i\omega_1$. در این صورت،

$$g_2(\omega_1, \omega_2) = g_2(\omega_1, i\omega_1) = \frac{1}{\omega_1{}^4} g_2(1, i) = a_2$$

و

$$g_3(\omega_1, \omega_2) = g_3(\omega_1, i\omega_1) = \frac{1}{\omega_1{}^6} g_3(1, i) = 0 = a_3 .$$

حالت ۳. فرض کنیم $a_2 \neq 0$ و $a_3 \neq 0$. τ مختلط با $\operatorname{Im} \tau > 0$ را طوری اختیار می‌کنیم

که

$$J(\tau) = \frac{a_2{}^3}{a_2{}^3 - 27a_3{}^2}\,.$$

توجه کنید که $J(\tau) \neq 0$ ، زیرا $a_2 \neq 0$ و

$$\frac{J(\tau)-1}{J(\tau)} = \frac{27a_3{}^2}{a_2{}^3}\,. \qquad (۵)$$

به ازای این τ ، ω_1 را طوری می‌گیریم که در

$$\omega_1{}^2 = \frac{a_2}{a_3}\cdot\frac{g_3(1,\tau)}{g_2(1,\tau)}$$

صدق کند ، و قرار می‌دهیم $\omega_2 = \tau\omega_1$. در این صورت ،

$$\frac{g_2(\omega_1,\omega_2)}{g_3(\omega_1,\omega_2)} = \frac{\omega_1{}^{-4}g_2(1,\tau)}{\omega_1{}^{-6}g_3(1,\tau)} = \omega_1{}^2\,\frac{g_2(1,\tau)}{g_3(1,\tau)} = \frac{a_2}{a_3}$$

درنتیجه ،

$$g_3(\omega_1,\omega_2) = \frac{a_3}{a_2}\,g_2(\omega_1,\omega_2)\,. \qquad (۶)$$

اما نیز داریم

$$\frac{J(\tau)-1}{J(\tau)} = \frac{27g_3{}^2(\omega_1,\omega_2)}{g_2{}^3(\omega_1,\omega_2)} = \frac{27(a_3/a_2)^2g_2{}^2(\omega_1,\omega_2)}{g_2{}^3(\omega_1,\omega_2)} = \frac{27a_3{}^2}{a_2{}^2g_2(\omega_1,\omega_2)}.$$

از مقایسهٔ این با (۵) معلوم می‌شود که $g_2(\omega_1,\omega_2) = a_2$ ؛ و درنتیجه ، بنابر (۶) ، نیز داریم $g_3(\omega_1,\omega_2) = a_3$. این برهان را تمام خواهد کرد .

۹.۲ کاربرد در قضیهٔ پیکارد[1]

با استفاده از تابع هنگی J می‌توان برهان کوتاهی از قضیهٔ مشهور پیکارد در آنالیز مختلط به دست آورد .

قضیهٔ ۱۰.۲ . *هر تابع تمام غیرثابت هر مقدار مختلط را با حداکثر یک استثنا خواهد گرفت .*

---

1. Picard

تذکر. یک مثال تابع نمایی $f(z) = e^z$ است که فقط مقدار 0 را حذف می‌کند.

برهان. فرض کنیم f یک تابع تمام باشد که دو مقدار، مثلاً a و b که $a \neq b$، را حذف می‌کند، و نشان می‌دهیم که f ثابت است. فرض کنیم

$$g(z) = \frac{f(z) - a}{b - a}.$$

در این صورت، g تمام است و مقادیر 0 و 1 را حذف می‌کند.

نیمصفحهٔ بالایی H به‌وسیلهٔ نقشهای‌بست ناحیهٔ‌اساسی R_Γ تحت تبدیل پوشیده می‌شود. چون J بست R_Γ را روی صفحهٔ مختلط می‌نگارد، J نیمصفحهٔ H را روی‌یک سطح ریمان[1] بی‌نهایت پارچه می‌نگارد که نقاط شاخه‌ای آن روی نقاط 0، 1، و ∞ (به‌ترتیب، نقشهای رئوس ρ، i، و ∞) می‌باشند. تابع معکوس J^{-1} سطح ریمان را روی‌بست‌ناحیهٔ اساسی R_Γ برمی‌گرداند. چون $J'(\tau) \neq 0$ اگر $\tau \neq \rho$ یا $\tau \neq i$ و چون $J'(\rho) = J'(i) = 0$، هر شاخهٔ‌یک‌مقداری J^{-1} همه‌جا جز در $J(\rho) = 0$، $J(i) = 1$، و $J(\infty) = \infty$ به‌طور موضعی تحلیلی است. به‌ازای هر شاخهٔ یک مقداری J^{-1}، تابع مرکب

$$h(z) = J^{-1}[g(z)]$$

یک عنصر تابع یک‌مقداری است که در هر z متناهی به‌طور موضعی تحلیلی است، زیرا $g(z)$ هرگز 0 یا 1 نمی‌باشد. لذا، h در تمام صفحهٔ z متناهی به‌طور دلخواه قابل ادامه است. بنابر قضیهٔ تک میدانی، ادامهٔ h به صورت یک تابع یک مقداری تحلیلی در تمام صفحهٔ z متناهی وجود دارد. لذا، h یک تابع تمام بوده؛ و درنتیجه،

$$\varphi(z) = e^{ih(z)}$$

نیز چنین می‌باشد. اما $\operatorname{Im} h(z) > 0$ زیرا $h(z) \in H$؛ درنتیجه،

$$|\varphi(z)| = e^{-\operatorname{Im} h(z)} < 1.$$

لذا، φ یک تابع تمام کراندار است که، بنابر قضیهٔ لیوویل، باید ثابت باشد. اما این ایجاب می‌کند که h ثابت باشد؛ و درنتیجه، g ثابت است، زیرا $g(z) = J[h(z)]$. بنابر این، f ثابت است زیرا

$$f(z) = a + (b - a)g(z).$$

تمرینات برای فصل ۲

دراین تمرینات، Γ گروه هنگی‌است، S و T مولدهای‌آنند، $S(\tau) = -1/\tau,\ T(\tau) = \tau + 1$

1. Riemann

و I عنصر همانی می‌باشد.

۱. تمام عناصر A از Γ را بیابید که (آ) با S تعویض شوند؛ (ب) با ST تعویض‌گردند.

۲. کوچکترین عدد صحیح $n > 0$ را بیابید که $(ST)^n = I$.

۳. نقطهٔ τ در ناحیهٔ اساسی R_Γ را طوری تعیین کنید که با
(آ) $(8 + 6i)/(3 + 2i)$ ؛ (ب) $(10i + 11)/(6i + 12)$
هم‌ارز باشد.

۴. تمام عناصر A از Γ را تعیین کنید که i را ثابت بگذارند.

۵. تمام عناصر A از Γ را تعیین کنید که $\rho = e^{2\pi i/3}$ را ثابت بگذارند.

فرمهای مربعی و گروه هنگی

تمرینهای زیر فرمهای مربعی و گروه هنگی Γ را به هم ربط می‌دهند. فرمهای مربعی $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ از x و y و با ضرایب حقیقی a, b, c را در نظر می‌گیریم. عدد $d = 4ac - b^2$ **مبین** $Q(x, y)$ نام دارد.

۶. اگر x و y تحت یک تبدیل غیرهنگی، مثلاً "

$$x = \alpha x' + \beta y', \qquad y = \gamma x' + \delta y' \quad \text{که،} \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma \qquad (1)$$

قرار گیرد، ثابت کنید $Q(x, y)$ به فرم مربعی $Q_1(x', y')$ با همان مبین تبدیل می‌شود. دو فرم $Q(x, y)$ و $Q_1(x', y')$ که به این صورت به هم مربوطند را **هم‌ارز** می‌نامند. این رابطهٔ هم‌ارزی تمام فرمها را به رده‌های هم‌ارزی تجزیه می‌کند. فرمهای یک رده مبین یکسان داشته، و اعداد صحیح یکسانی را نمایش می‌دهند. یعنی، هرگاه به‌ازای زوجی از اعداد صحیح x و y، $Q(x, y) = n$، آنگاه به ازای زوج x', y' از اعداد صحیح که از (۱) به دست می‌آیند، $Q_1(x', y') = n$.

در تمرینهای ۷ تا ۱۰، فرمهای $ax^2 + bxy + cy^2$ با $d > 0$، $a > 0$، و $c > 0$ در نظر گرفته می‌شود. چندجمله‌ای درجهٔ دوم مربوطهٔ

$$f(z) = az^2 + bz + c$$

دارای دو ریشهٔ مختلط است. ریشهٔ τ با قسمت موهومی مثبت **نمایندهٔ** فرم مربعی $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ نامیده می‌شود.

۷. (آ). اگر d ثابت باشد، ثابت کنید تناظر یک به یکی بین مجموعهٔ فرمها با مبین d و مجموعهٔ اعداد مختلط τ با $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ وجود دارد.

(ب) ثابت کنید دو فرم مربعی با مبین d هم‌ارزند اگر و فقط اگر نماینده‌های آنها

تحت Γ هم‌ارز باشند .

تذکر . فرم تحویل یافته فرمی است که نماینده‌اش $\tau \in R_\Gamma$. لذا ، دو فرم تحویل یافته هم‌ارزنداگر و فقط‌اگر یکی باشند . همچنین ، هر رده از فرمهای هم‌ارز دقیقاً " شامل یک فرم تحویل یافته است .

۸ . ثابت کنید فرم $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ تحویل یافته است اگر و فقط اگر $-a < b \le a < c$ یا $0 \le b \le a = c$.

۹ . حال فرض کنید فرم $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ دارای ضرایب صحیح a, b, c باشد . ثابت کنید به ازای d داده شده فقط تعدادی متناهی ردهٔ هم‌ارزی با مبین d وجود دارد . این عدد را **عدد رده‌ای** نامیده و با $h(d)$ نشان می‌دهند .

راهنمایی . نشان دهید که به ازای هر فرم تحویل یافته ، $0 < a \le \sqrt{d/3}$.

۱۰ . تمام فرمهای تحویل یافته با ضرایب صحیح a, b, c و عدد رده‌ای $h(d)$ را به ازای هر d در بازهٔ $1 \le d \le 20$ تعیین نمایید .

زیر گروههای همنهشت

گروه هنگی Γ زیرگروههای جالب بسیاری در نظریهٔ اعداد دارد . تمرینهای زیر راجع به رده‌ای از زیرگروهها به نام زیرگروههای **همنهشت** است . فرض کنیم

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

دو ماتریس غیرهنگی باشند . (در این بحث ، یک ماتریس را با قرینه‌اش یکی نمی‌کنیم .)
هرگاه n عدد صحیح مثبتی باشد ، می‌نویسیم $A \equiv B \pmod n$ اگر $a \equiv \alpha$ ، $b \equiv \beta$ ، $c \equiv \gamma$ ، و $d \equiv \delta \pmod n$. این استعمال یک رابطهٔ هم‌ارزی است با این خاصیت که

$$B_1 \equiv B_2 \pmod n \quad \text{و} \quad A_1 \equiv A_2 \pmod n$$

ایجاب می‌کنند که

$$A_1B_1 \equiv A_2B_2 \pmod n \quad \text{و} \quad A_1^{-1} \equiv A_2^{-1} \pmod n \ .$$

بنابراین ،

$$A \equiv B \pmod n \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad AB^{-1} \equiv I \pmod n$$

که در آن I ماتریس همانی است . مجموعهٔ تمام ماتریسها در Γ را که همنهشت همانی به هنگ n اند با $\Gamma^{(n)}$ نشان می‌دهیم . این مجموعه **زیرگروه همنهشتی** از سطح n نامیده‌می‌شود.

احکام زیر را ثابت کنید:

۱۱. $\Gamma^{(n)}$ زیرگروهی از Γ است. به‌علاوه، هرگاه $B \in \Gamma^{(n)}$، آنگاه به ازای هر A در Γ، $A^{-1}BA \in \Gamma^{(n)}$. یعنی، $\Gamma^{(n)}$ زیرگروه نرمالی از Γ است.

۱۲. گروه خارج‌قسمتی $\Gamma/\Gamma^{(n)}$ متناهی است. یعنی، تعدادی متناهی عنصر از Γ، مثلاً $A_1, \ldots, A_k$، وجود دارند به طوری که هر B در Γ قابل نمایش به شکل $B = A_i B^{(n)}$ است، که در آن $1 \leq i \leq k$ و $B^{(n)} \in \Gamma^{(n)}$.
کوچکترین k با این خاصیت اندیس $\Gamma^{(n)}$ در Γ نام دارد.

۱۳. اندیس $\Gamma^{(n)}$ تعداد رده‌های هم‌ارزی ماتریسهای به هنگ n است.

تمرینهای زیر فرمول صریحی برای اندیس به ما می‌دهند.

۱۴. به ازای اعداد صحیح a, b, c, d با خاصیت $ad - bc \equiv 1 \pmod n$، اعداد صحیحی مانند $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ وجود دارند به طوری که $\alpha \equiv a, \beta \equiv b, \gamma = c, \delta \equiv d \pmod n$ و در آن $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

۱۵. اگر $(m, n) = 1$ و $A \in \Gamma$، $\bar{A}$ ای در Γ هست به طوری که
$\bar{A} \equiv A \pmod n$ و $\bar{A} \equiv I \pmod m$.

۱۶. فرض کنید $f(n)$ تعداد رده‌های هم‌ارزی ماتریسها به هنگ n باشد. در این صورت، f یک تابع ضربی است.

۱۷. اگر a, b, n اعداد صحیحی با خاصیت $n \geq 1$ بوده و $(a, b, n) = 1$، همنهشتی

$$ax - by \equiv 1 \pmod n$$

درست n جواب متمایز به‌هنگ n دارد. (هر جواب زوج مرتبی مانند (x, y) ازاعداد صحیح است.)

۱۸. به ازای هر عدد اول p، تعداد جوابهای متمایز به هنگ p^r تمام همنهشتیها به شکل

$ax - by \equiv 1 \pmod{p^r}$، که در آن $(a, b, p) = 1$،

مساوی است با $f(p^r)$.

۱۹. اگر p اول باشد، تعداد زوجهای (a, b) از اعداد صحیح غیرهمنهشت به هنگ p^r که در شرط $(a, b, p) = 1$ صدق می‌کنند مساوی است با $p^{2r-2}(p^2 - 1)$.

۲۰. $f(n) = n^3 \sum_{d|n} \mu(d)/d^2$، که در آن μ تابع موبیوس است.

۳
تابع اتای ددکیند

۱.۳ مقدمه
تابع اتا در بسیاری‌از کاربردهای توابع هنگی بیضوی درنظریهٔ اعداد نقشی اساسی‌دارد. ددکیند[1] این تابع را در ۱۸۷۷ معرفی کرد و در نیمصفحهٔ $H = \{\tau : \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ با معادلهٔ

$$\eta(\tau) = e^{\pi i\tau/12}\prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{2\pi i n\tau}) \tag{۱}$$

تعریف می‌شود. حاصل‌ضرب نامتناهی به شکل $\prod(1 - x^n)$ است، که در آن $x = e^{2\pi i\tau}$. هرگاه $\tau \in H$، آنگاه $|x| < 1$؛ درنتیجه، حاصل‌ضرب به‌طور مطلق همگرا و ناصفر است. به‌علاوه،چون‌همگرایی‌برزیرمجموعه‌های‌فشردهٔ H یکنواخت‌است، $\eta(\tau)$ بر H تحلیلی می‌باشد.

تابع اتا با مبین $\Delta(\tau)$ که در فصل ۱ معرفی شد ارتباطی نزدیک دارد. بعدها در این فصل نشان می‌دهیم که

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12}\eta^{24}(\tau)$$

این نتیجه و خواص دیگر $\eta(\tau)$ از فرمولهای تبدیلی به دست می‌آیند که رفتار $\eta(\tau)$ تحت عناصر گروه هنگی Γ را توصیف می‌کنند. به ازای مولد $T\tau = \tau + 1$ داریم

$$\eta(\tau + 1) = e^{\pi i(\tau+1)/12}\prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{2\pi i n(\tau+1)}) = e^{\pi i/12}\eta(\tau) \tag{۲}$$

درنتیجه، به ازای هر عدد صحیح b خواهیم داشت

$$\eta(\tau + b) = e^{\pi i b/12}\eta(\tau). \tag{۳}$$

معادلهٔ (۲) همچنین نشان می‌دهد که $\eta^{24}(\tau)$ متناوب با دورهٔ تناوب 1 است.

---

1. Dedekind

به ازای مولد دیگر $S\tau = -1/\tau$ ، قضیهٔ زیر را خواهیم داشت .

قضیهٔ ۳ . ۱ . *اگر* $\tau \in H$ ، *داریم*

$$\eta\left(\frac{-1}{\tau}\right) = (-i\tau)^{1/2}\eta(\tau)\,. \tag{۴}$$

تذکر . آن شاخه از تابع ریشهٔ دوم $z^{1/2}$ را اختیار می‌کنیم که وقتی $z > 0$ مثبت است .

در این فصل دو برهان مختلف از (۴) عرضه می‌شوند . اولی برهان کوتاهی است از سی . ال . سیگل[1] [۴۲] مبتنی بر حساب مانده‌ها ، و دومی از (۴) به‌عنوان حالت خاصی از معادلهٔ تابعی کلیتری به دست می‌آید که

$$\eta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)$$

را وقتی

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \quad \text{و} \quad c > 0$$

به $\eta(\tau)$ مربوط می‌سازد . (ر.گ . قضیهٔ ۳ . ۴ .) برهان سوم ، که بر تعویض جمعبندی‌دریک سری مکرر به‌طور مشروط همگرا استوار است ، در تمرینات به اجمال ذکر خواهد شد .

۳ . ۲ برهان سیگل از قضیهٔ ۳ . ۱

ابتدا رابطهٔ (۴) را به ازای $\tau = iy$ که $y > 0$ ثابت کرده و سپس نتیجه را با ادامهٔ تحلیلی به تمام τ ها در H تعمیم می‌دهیم . اگر $\tau = iy$ ، فرمول تبدیل به‌صورت $\eta(i/y) = y^{1/2}\eta(iy)$ درمی‌آید ، و این معادل است با

$$\log \eta(i/y) - \log \eta(iy) = \tfrac{1}{2} \log y\,.$$

اما

$$\begin{aligned}
\log \eta(iy) &= -\frac{\pi y}{12} + \log \prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{-2\pi n y}) \\
&= -\frac{\pi y}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - e^{-2\pi n y}) = -\frac{\pi y}{12} - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi m n y}}{m} \\
&= -\frac{\pi y}{12} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\frac{e^{-2\pi m y}}{1 - e^{-2\pi m y}} = -\frac{\pi y}{12} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\frac{1}{1 - e^{2\pi m y}}.
\end{aligned}$$

1. C. L. Siegel

لذا ، باید ثابت کنیم که

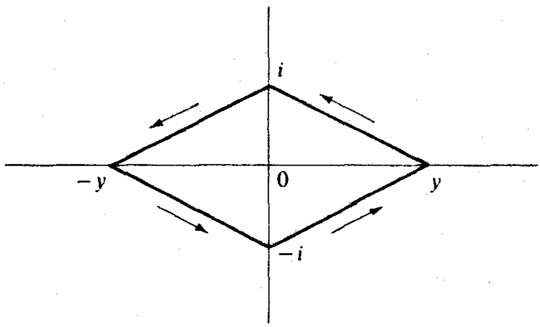
$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\frac{1}{1-e^{2\pi my}}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\frac{1}{1-e^{2\pi m/y}}-\frac{\pi}{12}\left(y-\frac{1}{y}\right)=-\frac{1}{2}\log y. \tag{۵}$$

این را به کمک حساب مانده‌ها ثابت می‌کنیم .

به ازای $y>0$ و $n=1,2,\ldots$ ، فرض می‌کنیم

$$F_n(z)=-\frac{1}{8z}\cot \pi iNz\cot\frac{\pi Nz}{y},$$

که در آن $N=n+\frac{1}{2}$. فرض کنیم C متوازی‌الاضلاعی باشد که رئوس $y, i, -y, -i$ را با همین ترتیب به هم وصل می‌کند . (ر.ک. شکل ۱.۳) F_n در داخل C دارای قطبهای



شکل ۱.۳

سادهٔ $z=ik/N$ و $z=ky/N$ به ازای $k=\pm1, \pm2, \ldots, \pm n$ است . همچنین ، یک قطب سه‌گانه در $z=0$ با ماندهٔ $i(y-y^{-1})/24$ وجود دارد . مانده در $z=ik/N$ مساوی است با

$$\frac{1}{8\pi k}\cot\frac{\pi ik}{y}.$$

چون این یک تابع زوج از k است ، داریم

$$\sum_{\substack{k=-n\\k\neq0}}^{n}\operatorname*{Res}_{z=ik/N}F_n(z)=2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{8\pi k}\cot\frac{\pi ik}{y}.$$

اما

$$\cot i\theta=\frac{\cos i\theta}{\sin i\theta}=i\frac{e^{-\theta}+e^{\theta}}{e^{-\theta}-e^{\theta}}=-i\frac{e^{2\theta}+1}{e^{2\theta}-1}=\frac{1}{i}\left(1-\frac{2}{1-e^{2\theta}}\right).$$

با استفاده از این به ازای $\theta = \pi k/y$ ، خواهیم داشت

$$\sum_{\substack{k=-n\\k\neq 0}}^{n} \operatorname*{Res}_{z=ik/N} F_n(z) = \frac{1}{4\pi i}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\frac{1}{1-e^{2\pi k/y}}.$$

به همین‌نحو ،

$$\sum_{\substack{k=-n\\k\neq 0}}^{n} \operatorname*{Res}_{z=ky/N} F_n(z) = \frac{i}{4\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{i}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\frac{1}{1-e^{2\pi ky}}.$$

لذا ، $2\pi i$ برابر مجموع تمام مانده‌های $F_n(z)$ داخل C عبارتی‌است‌که حدش وقتی $n \to \infty$ مساوی طرف چپ (۵) می‌باشد . پس ، برای اتمام برهان کافی است نشان دهیم که

$$\lim_{n\to\infty}\int_C F_n(z)\,dz = -\tfrac{1}{2}\log y.$$

روی اضلاع C (جز در رئوس) ، تابع $zF_n(z)$ وقتی $n \to \infty$ دارای حد $\frac{1}{8}$ روی اضلاع واصل بین y, i و $-y, -i$ ، و حد $-\frac{1}{8}$ روی دو ضلع دیگر است . به‌علاوه ، $F_n(z)$ به‌ازای هر n بر C به‌طور یکنواخت کراندار است(زیرا $N = n + \frac{1}{2}$ و $y > 0$) . لذا ، طبق قضیهٔ همگرایی کراندار آرزلا[1] (قضیهٔ ۱۲.۹ در [۳]) ، داریم

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_C F_n(z)\,dz &= \int_C \lim_{n\to\infty} zF_n(z)\,\frac{dz}{z}\\
&= \frac{1}{8}\left\{-\int_{-i}^{y} + \int_{y}^{i} - \int_{i}^{-y} + \int_{-y}^{-i}\right\}\frac{dz}{z}\\
&= \frac{1}{4}\left\{-\int_{-i}^{y} + \int_{y}^{i}\right\}\frac{dz}{z}\\
&= \frac{1}{4}\left\{-\left(\log y + \frac{\pi i}{2}\right) + \left(\frac{\pi i}{2} - \log y\right)\right\} = -\frac{1}{2}\log y.
\end{aligned}$$

این برهان را تمام می‌کند .

۳.۲ نمایش حاصل‌ضرب نامتناهی برای $\Delta(\tau)$

در این بخش مبین $\Delta(\tau)$ را برحسب $\eta(\tau)$ بیان کرده و بدین وسیله نمایش حاصل‌ضربی $\Delta(\tau)$ به دست می‌آید . در این کار از خاصیت زیر در باب $\Delta(\tau)$ استفاده می‌شود .

1. Arzelà

قضیهٔ ۲.۳. هرگاه $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ ، آنگاه

$$\Delta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^{12}\Delta(\tau).$$

بخصوص

$$\Delta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^{12}\Delta(\tau) \quad \text{و} \quad \Delta(\tau + 1) = \Delta(\tau)$$

برهان. چون $\Delta(\omega_1, \omega_2)$ همگن از درجهٔ $12-$ است، داریم

$$\Delta(\omega_1, \omega_2) = \omega_1^{-12}\Delta(1, \tau) = \omega_1^{-12}\Delta(\tau),$$

که در آن $\tau = \omega_2/\omega_1$. همچنین، اگر (ω_1, ω_2) و (ω_1', ω_2') زوجهای تناوب هم‌ارز باشند،

$$\Delta(\omega_1, \omega_2) = \Delta(\omega_1', \omega_2')\cdot$$

با فرض $\omega_1 = 1, \omega_2 = \tau, \omega_1' = c\tau + d, \omega_2' = a\tau + b$، معلوم می‌شود که

$$\Delta(\tau) = \Delta(\omega_1, \omega_2) = \Delta(c\tau + d, a\tau + b) = (c\tau + d)^{-12}\Delta\left(1, \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right).$$

قضیهٔ ۳.۳. *اگر* $\tau \in H$ و $x = e^{2\pi i\tau}$ ، *داریم*

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12}\eta^{24}(\tau) = (2\pi)^{12}x\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)^{24}. \tag{۶}$$

درنتیجه،

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)x^n = x\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)^{24} \quad \text{،} \quad |x| < 1 \quad \text{هروقت} \tag{۷}$$

که در آن $\tau(n)$ تابع تو رامانوجان است.

برهان. فرض کنیم $f(\tau) = \Delta(\tau)/\eta^{24}(\tau)$. در این صورت، $f(\tau + 1) = f(\tau)$ و $f(-1/\tau) = f(\tau)$ ؛ درنتیجه، f تحت هر تبدیل در Γ پایاست. همچنین، f در H تحلیلی و ناصفر است، زیرا Δ تحلیلی و ناصفر بوده و η هرگز در H صفر نمی‌شود.

حال رفتار f در $i\infty$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. داریم

$$\eta^{24}(\tau) = e^{2\pi i\tau}\prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{2\pi in\tau})^{24} = x\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)^{24} = x(1 + I(x)),$$

که در آن $I(x)$ یک سری توانی از x با ضرایب صحیح است. لذا، $\eta^{24}(\tau)$ صفر مرتبهٔ اول در $x = 0$ دارد. بنابر قضیهٔ ۱۹.۱، بسط فوریهٔ زیر را نیز داریم:

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)x^n = (2\pi)^{12}x(1 + I(x)). \tag{۸}$$

لذا، تابع f در مجاورت $i\infty$ دارای بسط فوریهٔ

$$f(\tau) = \frac{\Delta(\tau)}{\eta^{24}(\tau)} = \frac{(2\pi)^{12}x(1 + I(x))}{x(1 + I(x))} = (2\pi)^{12}(1 + I(x)) \tag{۹}$$

است؛ درنتیجه، f در $i\infty$ تحلیلی و ناصفر می‌باشد. بنابراین، f یک تابع هنگی است‌که هرگز مقدار 0 را نمی‌گیرد؛ درنتیجه، f باید ثابت باشد. به‌علاوه، (۹) نشان می‌دهدکه این ثابت $(2\pi)^{12}$ است؛ درنتیجه، $\Delta(\tau) = (2\pi)^{12}\eta^{24}(\tau)$. با این (۶) ثابت می‌شود، و رابطهٔ (۷) از رابطهٔ (۸) نتیجه خواهد شد.

۴.۳ معادلهٔ تابعی کلی برای $\eta(\tau)$

اگر از رابطهٔ

$$\Delta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^{12}\Delta(\tau)$$

ریشهٔ 24 م گرفته و از (۶) استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$\eta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \varepsilon(c\tau + d)^{1/2}\eta(\tau),$$

که در آن $\varepsilon^{24} = 1$. در بسیاری از کاربردهای $\eta(\tau)$ به اطلاعات صریحتری از ε نیازداریم. قضیهٔ زیر این اطلاعات را به ما می‌دهد.

قضیهٔ ۴.۳ (معادلهٔ تابعی دد کنید). *اگر* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ و $c > 0$، داریم

$$\eta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \varepsilon(a, b, c, d)\{-i(c\tau + d)\}^{1/2}\eta(\tau) \tag{۱۰}$$

که در آن

$$\varepsilon(a, b, c, d) = \exp\left\{\pi i\left(\frac{a + d}{12c} + s(-d, c)\right)\right\}$$

و

$$s(h, k) = \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{k}\left(\frac{hr}{k} - \left[\frac{hr}{k}\right] - \frac{1}{2}\right). \tag{۱۱}$$

تذکر. مجموع $s(h,k)$ در (۱۱) را **مجموع ددکیند** می‌نامند. بعضی از خواص آن بعداً" در این فصل مطرح خواهد شد.

قضیهٔ ۳.۴ را طی یک‌رشته لم ثابت می‌کنیم. ابتدا توجه می‌کنیم که فرمول ددکیند نتیجه‌ای از معادلهٔ زیر است که با لگاریتم‌گیری از طرفین (۱۰) به دست می‌آید:

$$\log\eta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=\log\eta(\tau)+\pi i\left(\frac{a+d}{12c}+s(-d,c)\right)+\tfrac{1}{2}\log\{-i(c\tau+d)\}. \tag{۱۲}$$

از تعریف $\eta(\tau)$ به صورت حاصل‌ضرب داریم

$$\log\eta(\tau)=\frac{\pi i\tau}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\log(1-e^{2\pi in\tau})=\frac{\pi i\tau}{12}-\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(-in\tau), \tag{۱۳}$$

که در آن $\lambda(x)$ به ازای $\mathrm{Re}(x)>0$ با معادلهٔ

$$\lambda(x)=-\log(1-e^{-2\pi x})=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-2\pi mx}}{m} \tag{۱۴}$$

تعریف می‌شود. معادلات (۱۲) و (۱۳) لم زیر را به دست می‌دهد.

لم ۱. معادلهٔ *(۱۲)* با رابطهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(-in\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda\left(-in\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)+\frac{\pi i}{12}\left(\tau-\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)+\pi i\left(\frac{a+d}{12c}+s(-d,c)\right)+\tfrac{1}{2}\log\{-i(c\tau+d)\} \tag{۱۵}$$

هم‌ارز است.

ثابت می‌کنیم رابطهٔ (۱۵) نتیجه‌ای از یک فرمول تبدیل کلیتری است که در سال ۱۹۵۷ توسط شوایسکی[1] [۱۷] به دست آمد. بدین منظور شایسته است (۱۵) را به شکل معادلی بیان کنیم که فقط در چند مورد نیازمند تغییر نماد می‌باشد.

لم ۲. ***فرض کنیم z عدد مختلطی با $\mathrm{Re}(z)>0$ بوده، و h، k، و H اعداد صحیحی صادق در $(h,k)=1, k>0, hH\equiv -1 \pmod{k}$ باشند. در این صورت، معادلهٔ (۱۵) با***

1. Shô Iseki

فرمول

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda\left\{\frac{n}{k}(z-ih)\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda\left\{\frac{n}{k}\left(\frac{1}{z}-iH\right)\right\} \tag{۱۶}$$
$$+\tfrac{1}{2}\log z-\frac{\pi}{12k}\left(z-\frac{1}{z}\right)+\pi i s(h,k).$$

هم‌ارز است.

برهان. به ازای $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ در Γ که $c>0$ و به ازای τ ای که $\mathrm{Im}(\tau)>0$، z، h، k، و H را به صورت زیر اختیار می‌کنیم:

$$k=c,\qquad h=-d,\qquad H=a,\qquad z=-i(c\tau+d).$$

در این صورت $\mathrm{Re}(z)>0$، و شرط $ad-bc=1$ ایجاب می‌کند که $-hH-bk=1$؛ درنتیجه، $(h,k)=1$ و $hH\equiv -1 \pmod k$. اما $b=-(hH+1)/k$ و $iz=c\tau+d$ درنتیجه،

$$\tau=\frac{iz-d}{c}=\frac{iz+h}{k}.$$

لذا،

$$a\tau+b=H\frac{iz+h}{k}-\frac{hH+1}{k}=\frac{iz}{k}\left(H+\frac{i}{z}\right).$$

بنابراین، چون $c\tau+d=iz$، داریم

$$\frac{a\tau+b}{c\tau+d}=\frac{1}{k}\left(H+\frac{i}{z}\right).$$

درنتیجه

$$\tau-\frac{a\tau+b}{c\tau+d}=\frac{1}{k}(h-H)+\frac{i}{k}\left(z-\frac{1}{z}\right)=-\frac{a+d}{c}+\frac{i}{k}\left(z-\frac{1}{z}\right).$$

لذا،

$$\frac{\pi i}{12}\left(\tau-\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=-\pi i\left(\frac{a+d}{12c}\right)-\frac{\pi}{12k}\left(z-\frac{1}{z}\right).$$

با گذاردن این عبارات در (۱۵)، رابطهٔ (۱۶) به دست می‌آید. به همین نحو، معلوم می‌شود که (۱۶) رابطهٔ (۱۵) را ایجاب خواهد کرد.

۵.۳ فرمول تبدیل ایسکی

قضیهٔ ۵.۳ (فرمول ایسکی) . اگر $\mathrm{Re}(z) > 0$ و $0 \le \alpha \le 1, 0 \le \beta \le 1$ ، قرارمی‌دهیم

$$\Lambda(\alpha, \beta, z) = \sum_{r=0}^{\infty} \{\lambda((r+\alpha)z - i\beta) + \lambda((r+1-\alpha)z + i\beta)\}. \tag{۱۷}$$

در این صورت ، اگر $0 \le \alpha \le 1$ و $0 < \beta < 1$ ، یا $0 < \alpha < 1$ و $0 \le \beta \le 1$ ، داریم

$$\Lambda(\alpha, \beta, z) = \Lambda(1-\beta, \alpha, z^{-1}) - \pi z \sum_{n=0}^{2} \binom{2}{n} (iz)^{-n} B_{2-n}(\alpha) B_n(\beta). \tag{۱۸}$$

تذکر . مجموع طرف راست (۱۸) ، که شامل چند جمله‌ایهای برنولی[1] $B_n(x)$ است ، مساوی است با

$$-\pi z\left(\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{6}\right) + \frac{\pi}{z}\left(\beta^2 - \beta + \frac{1}{6}\right) + 2\pi i\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\left(\beta - \frac{1}{2}\right).$$

برهان . ابتدا فرض کنیم $0 < \alpha < 1$ و $0 < \beta < 1$. با مجموع اول آمده در (۱۷) شروع کرده و با استفاده از (۱۴) می‌نویسیم

$$\sum_{r=0}^{\infty} \lambda((r+\alpha)z - i\beta) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i m\beta}}{m} e^{-2\pi m(r+\alpha)z}. \tag{۱۹}$$

حال از انتگرال ملین[2] برای e^{-x} استفاده می‌کنیم که می‌گوید

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \Gamma(s) x^{-s}\, ds, \tag{۲۰}$$

که در آن $c > 0$ و $\mathrm{Re}(x) > 0$. این حالت خاصی است از فرمول انعکاس ملین که می‌گوید تحت شرایط انتظام خاصی داریم

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} \psi(x)\, dx \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad \psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \varphi(s) x^{-s}\, ds .$$

در این حالت $\varphi(s)$ را انتگرال تابع گاما می‌گیریم :

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dx$$

و از تبدیل این (۲۰) را به دست می‌آوریم (فرمول انعکاس ملین را می‌توان از قضیهٔ

---

1. Bernoulli 2. Mellin

انتگرال فوریه به دست آورد که برهانی از آن در[۳]داده‌شده است. همچنین، ر. ک. [۴۳]، ص ۰۷) با اعمال (۲۰) به ازای $x = 2\pi m(r+\alpha)z$ و $c = 3/2$ بــــر آخرین نمایی در (۱۹) و نوشتن $\int_{(c)}$ به جای $\int_{c-\infty i}^{c+\infty i}$، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{\infty} \lambda((r+\alpha)z - i\beta) &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i m\beta}}{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{(3/2)} \Gamma(s)\{2\pi m(r+\alpha)z\}^{-s}\, ds\\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(3/2)} \frac{\Gamma(s)}{(2\pi z)^s} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(r+\alpha)^s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i m\beta}}{m^{1+s}}\, ds\\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(3/2)} \frac{\Gamma(s)}{(2\pi z)^s} \zeta(s,\alpha) F(\beta, 1+s)\, ds.\end{aligned}$$

در اینجا$\zeta(s,\alpha)$ تابع زتای هرویتس[1] و $F(x,s)$ تابع زتای متناوب است که با سریهای زیر تعریف می‌شوند:

$$F(x,s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i m x}}{m^s} \quad \text{و} \quad \zeta(s,\alpha) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(r+\alpha)^s},$$

که درآنها $\mathrm{Re}(s) > 1$، $0 < \alpha \le 1$، و x حقیقی است. به همین نحو، خواهیم داشت

$$\sum_{r=0}^{\infty} \lambda((r+1-\alpha)z + i\beta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(3/2)} \frac{\Gamma(s)}{(2\pi z)^s} \zeta(s, 1-\alpha) F(1-\beta, 1+s)\, ds,$$

درنتیجه، (۱۷) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\Lambda(\alpha,\beta,z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(3/2)} z^{-s} \Phi(\alpha,\beta,s)\, ds, \tag{۲۱}$$

که در آن

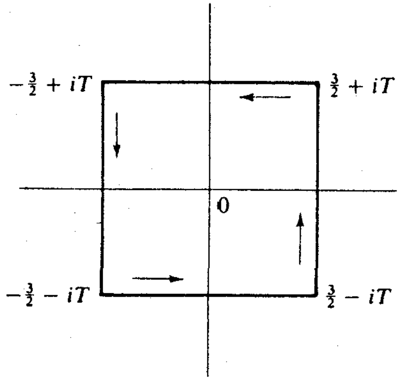
$$\Phi(\alpha,\beta,s) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \{\zeta(s,\alpha)F(\beta,1+s) + \zeta(s,1-\alpha)F(1-\beta,1+s)\}. \tag{۲۲}$$

حال خط انتگرالگیری را از $c = \frac{3}{2}$ تا$c = -\frac{3}{2}$ انتقال می‌دهیم. در واقع، قضیهٔ کشی را بر کنتور مستطیلی شکل ۲.۳ اعمال کرده، و سپس فرض می‌کنیم $T \to \infty$. در تمرین ۸ نشان می‌دهیم که انتگرالها در امتداد پاره‌خطهای افقی با $T \to \infty$ به 0 میل می‌کنند؛ درنتیجه، خواهیم داشت

$$\int_{(3/2)} = \int_{(-3/2)} + R$$

---

1. Hurwitz



شکل ۲۰۳

که در آن R مجموع مانده‌ها در قطبهای انتگرالده که داخل مستطیل‌اند می‌باشد. از این فرمول

$$\Lambda(\alpha, \beta, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(-3/2)} z^{-s}\Phi(\alpha, \beta, s)\, ds + R.$$

را خواهیم داشت. در این انتگرال از تغییر متغیر $u = -s$ استفاده کرده آن را به شکل انتگرال در امتداد خط $\frac{3}{2}$ برمی‌گردانیم. از این نتیجه می‌شود که

$$\Lambda(\alpha, \beta, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(3/2)} z^{u}\Phi(\alpha, \beta, -u)\, du + R. \qquad (۲۳)$$

اما تابع Φ در معادلهٔ تابعی

$$\Phi(\alpha, \beta, -s) = \Phi(1-\beta, \alpha, s). \qquad (۲۴)$$

صدق می‌کند. این نتیجه‌ای است از فرمول هرویتس برای $\zeta(s,\alpha)$ و برهان آن در تمرین ۷ به اختصار آمده است. با استفاده از (۲۴) در (۲۳)، معلوم می‌شود که

$$\Lambda(\alpha, \beta, z) = \Lambda(1-\beta, \alpha, z^{-1}) + R. \qquad (۲۵)$$

برای اتمام برهان فرمول ایسکی، کافی است مجموع مانده‌ای R را حساب کنیم.

معادلهٔ (۲۲) نشان می‌دهد که $\Phi(\alpha, \beta, s)$ قطب مرتبهٔ اول درهرنقطهٔ $s = 1, 0, -1$ دارد. مانده‌های نظیر را با $R(1)$ ، $R(0)$ ، و $R(-1)$ نشان می‌دهیم، خواهیم داشت

$$R(1) = \frac{\Gamma(1)}{2\pi z}\{F(\beta, 2) + F(1-\beta, 2)\} = \frac{1}{2\pi z}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{2\pi i n\beta}}{n^2} + \frac{e^{-2\pi i n\beta}}{n^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi z}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{e^{2\pi i n\beta}}{n^2} = \frac{1}{2\pi z}\frac{-(2\pi i)^2}{2!}B_2(\beta) = \frac{\pi}{z}B_2(\beta),$$

که در آن ، با استفاده از قضیهٔ ۱۹.۱۲ در [۴] ، سری فوریه به صورت یک چند جمله‌ای برنولی بیان شده است .

برای‌محاسبهٔ $R(0)$ یادآورمی‌شویم‌که $\zeta(0,\alpha) = \frac{1}{2} - \alpha$.لذا، $\zeta(0, 1-\alpha) = \alpha - \frac{1}{2}$ درنتیجه ،

$$R(0) = \zeta(0,\alpha)F(\beta,1) + \zeta(0,1-\alpha)F(1-\beta,1) = (\tfrac{1}{2}-\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi i n\beta} - e^{-2\pi i n\beta}}{n}$$

$$= (\tfrac{1}{2}-\alpha)\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{e^{2\pi i n\beta}}{n} = -B_1(\alpha)\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{e^{2\pi i n\beta}}{n} = 2\pi i B_1(\alpha)B_1(\beta),$$

که در آن مجدداً از قضیهٔ ۱۹.۱۲ در [۴] استفاده کرده‌ایم . برای محاسبهٔ $R(-1)$ می‌نویسیم

$$R(-1) = \operatorname*{Res}_{s=-1} z^{-s}\Phi(\alpha,\beta,s) = \lim_{s\to -1}(s+1)z^{-s}\Phi(\alpha,\beta,s)$$

$$= \lim_{s\to 1}(-s+1)z^{s}\Phi(\alpha,\beta,-s).$$

با استفاده از معادلهٔ تابعی (۲۴) ، داریم

$$R(-1) = \lim_{s\to 1}(1-s)z^{s}\Phi(1-\beta,\alpha,s) = -\operatorname*{Res}_{s=1} z^{s}\Phi(1-\beta,\alpha,s).$$

توجه کنید که این همان $R(1) = \mathrm{Res}_{s=1}\, z^{-s}\Phi(\alpha,\beta,s)$ است جزآنکه z با $-z^{-1}$ ، α با $1-\beta$ ، و β با α عوض شده است . لذا ، داریم

$$R(-1) = -\pi z B_2(\alpha).$$

بنابراین ،

$$R = R(-1) + R(0) + R(1) = -\pi z \sum_{n=0}^{2}\binom{2}{n}(iz)^{-n}B_{2-n}(\alpha)B_n(\beta)$$

این فرمول ایسکی را تحت قید $0 < \alpha < 1$ و $0 < \beta < 1$ ثابت می‌کند .

بالاخره، با استدلالی حدی نشان می‌دهیم که این فرمول به ازای $0 \le \alpha \le 1$ و $0 < \beta < 1$ ، یا $0 \le \beta \le 1$ و $0 < \alpha < 1$ معتبر است . مثلاً ، سری

$$\sum_{r=0}^{\infty}\lambda((r+\alpha)z - i\beta) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi i m\beta}}{m}e^{-2\pi m(r+\alpha)z}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi i m\beta}}{m}e^{-2\pi m\alpha z}\sum_{r=0}^{\infty}e^{-2\pi m r z}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi i m\beta}}{m}\frac{e^{-2\pi m\alpha z}}{1-e^{-2\pi m z}} = \sum_{m=1}^{\infty}e^{2\pi i m\beta}f_\alpha(m),$$

را درنظر می‌گیریم که در آن، مثلاً،

$$f_\alpha(m) = \frac{1}{m}\frac{e^{-2\pi m\alpha z}}{1 - e^{-2\pi mz}}.$$

وقتی $m \to \infty$، اگر $0 \le \alpha \le 1$، $f_\alpha(m) \to 0$ **به‌طوریکنواخت** نسبت به α. لذا، اگر $0 \le \alpha \le 1$ سری

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{2\pi im\beta} f_\alpha(m)$$

به‌طوریکنواخت همگراست مشروط براینکه $0 < \beta < 1$؛ درنتیجه، می‌توان جمله به جمله به‌حد $\alpha \to 0+$ رفت. از این نتیجه می‌شود که

$$\lim_{\alpha \to 0+} \sum_{r=0}^{\infty} \lambda((r+\alpha)z - i\beta) = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda(rz - i\beta).$$

بنابراین، اگر $0 < \beta < 1$، می‌توان در معادلهٔ تابعی فرض کرد $\alpha \to 0+$. حالات حدی دیگر از پایایی فرمول تحت تعویضات زیر نتیجه می‌شوند:

$$\alpha \to 1 - \alpha, \qquad \beta \to 1 - \beta$$

$$\alpha \to \beta, \qquad \beta \to 1 - \alpha, \qquad z \to \frac{1}{z}$$

$$\alpha \to 1 - \beta, \qquad \beta \to \alpha, \qquad z \to \frac{1}{z}.$$

۶.۳ استنتاج معادلهٔ تابعی ددکیند از فرمول ایسکی

حال از فرمول ایسکی برای اثبات معادلهٔ (۱۶) در لم ۲ استفاده می‌کنیم. این به نوبهٔ خود معادلهٔ تابعی ددکیند برای $\eta(\tau)$ را ثابت می‌کند.

معادلهٔ (۱۶) شامل h و k با $k > 0$ است. ابتدا حالت $k = 1$ را بررسی می‌کنیم که در آن معادلهٔ (۱۶) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda\{n(z - ih)\} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\left\{n\left(\frac{1}{z} - iH\right)\right\} + \frac{1}{2}\log z - \frac{\pi}{12}\left(z - \frac{1}{z}\right). \tag{۲۶}$$

چون $\lambda(x)$ متناوب با دورهٔ تناوب i است، این را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(nz) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\left(\frac{n}{z}\right) + \frac{1}{2}\log z - \frac{\pi}{12}\left(z - \frac{1}{z}\right). \tag{۲۷}$$

این را از فرمول ایسکی با اختیار $\beta = 0$ و فرض $\alpha \to 0+$ نتیجه می‌گیریم. پیش از آنکه $\alpha \to 0+$، جملهٔ $r = 0$ در اولین جملهٔ سری سمت چپ (۱۸) و در دومین جملهٔ سری سمت راست

(۱۸) را جدا می‌کنیم . تفاضل این دو جمله عبارت است از $\lambda(i\alpha) - \lambda(\alpha z)$. هر یک از این جملات با $\alpha \to 0+$ به ∞ میل می‌کند ، ولی تفاضلشان به حدی متناهی میل‌خواهدکرد . این حد را به صورت زیر حساب می‌کنیم :

$$\lambda(\alpha z) - \lambda(i\alpha) = \log(1 - e^{-2\pi i\alpha}) - \log(1 - e^{-2\pi\alpha z}) = \log \frac{1 - e^{-2\pi i\alpha}}{1 - e^{-2\pi\alpha z}}.$$

بنابر قاعدهٔ هوپیتال[1] ،

$$\lim_{\alpha \to 0+} \frac{1 - e^{-2\pi i\alpha}}{1 - e^{-2\pi\alpha z}} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{2\pi i}{2\pi z} = \frac{i}{z} \cdot$$

درنتیجه ،

$$\lim_{\alpha \to 0+} (\lambda(\alpha z) - \lambda(i\alpha)) = \log \frac{i}{z} = \frac{\pi i}{2} - \log z.$$

اما وقتی $\alpha \to 0+$ ، جملات باقیمانده در هر سری (۱۸) دوبرابر شده ، و در حد به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\pi i}{2} - \log z + 2\sum_{r=1}^{\infty} \lambda(rz) = 2\sum_{r=1}^{\infty} \lambda\left(\frac{r}{z}\right) - \frac{\pi z}{6} + \frac{\pi}{6z} + \frac{\pi i}{2}. \qquad (۲۸)$$

این به رابطهٔ (۲۷) تحویل شده و (۱۶) را در حالت $k = 1$ ثابت می‌کند .

اکنون به حالت $k > 1$ می‌پردازیم . برای α و β فرمول ایسکی (۱۸) مقادیر گویا به صورت زیر اختیار می‌کنیم . فرض کنیم

$$\alpha = \frac{\mu}{k} \text{ ، که در آن } 1 \le \mu \le k - 1$$

و می‌نویسیم

$$h\mu = qk + \nu \text{ ، که در آن } 1 \le \nu \le k - 1 \cdot$$

حال قرار می‌دهیم

$$\beta = \frac{\nu}{k}.$$

توجه کنید که $\nu \equiv h\mu \pmod k$ ؛ درنتیجـــه ، $-H\nu \equiv -Hh\mu \equiv \mu \pmod k$ ؛ و لذا ، $-H\nu/k \equiv \mu/k \pmod 1$. ازاینرو، $\alpha = \mu/k \equiv -H\nu/k \pmod 1$ و $\beta = \nu/k \equiv h\mu/k \pmod 1$ با گذاردن اینها در فرمول (۱۸) و تقسیم بر 2 ، به دست می‌آوریم

---

1. Hôpital

$$\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\lambda\left(\left(r+\frac{\mu}{k}\right)z-i\frac{h\mu}{k}\right)+\lambda\left(\left(r+1-\frac{\mu}{k}\right)z+i\frac{h\mu}{k}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\lambda\left(\left(r+\frac{\nu}{k}\right)\frac{1}{z}-i\frac{H\nu}{k}\right)+\lambda\left(\left(r+1-\frac{\nu}{k}\right)\frac{1}{z}+i\frac{H\nu}{k}\right)\right\}$$
$$-\frac{\pi z}{2}\left(\left(\frac{\mu}{k}\right)^2-\frac{\mu}{k}+\frac{1}{6}\right)+\frac{\pi}{2z}\left(\left(\frac{\nu}{k}\right)^2-\frac{\nu}{k}+\frac{1}{6}\right)$$
$$+\pi i\left(\frac{\mu}{k}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\nu}{k}-\frac{1}{2}\right).$$

این را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\lambda\left(\frac{(rk+\mu)(z-ih)}{k}\right)+\lambda\left(\frac{(rk+k-\mu)(z-ih)}{k}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\lambda\left(\frac{(rk+\nu)\left(\frac{1}{z}-iH\right)}{k}\right)+\lambda\left(\frac{(rk+k-\nu)\left(\frac{1}{z}-iH\right)}{k}\right)\right\}$$
$$-\frac{\pi z}{2}\left(\frac{\mu^2}{k^2}-\frac{\mu}{k}+\frac{1}{6}\right)+\frac{\pi}{2z}\left(\frac{\nu^2}{k^2}-\frac{\nu}{k}+\frac{1}{6}\right)+\pi i\left(\frac{\mu}{k}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\nu}{k}-\frac{1}{2}\right).$$

حال طرفین را روی $\mu=1,2,\ldots,k-1$ جمعبندی کرده و توجه می‌کنیم که

$$\{rk+\mu : r=0,1,2,\ldots;\quad \mu=1,2,\ldots,k-1\}=\{n : n\not\equiv 0 \pmod{k}\}$$

و به همین ترتیب، در مورد مجموعهٔ تمام اعداد $rk+k-\mu$. همچنین، از آنجا که $\nu\equiv h\mu \pmod{k}$، وقتی μ تمام اعداد $1,2,\ldots,k-1$ را بگیرد، ν در همین مجموعه از مقادیر به ترتیبی دیگر تغییر خواهد کرد. لذا، به دست می‌آوریم

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\not\equiv 0 \pmod{k}}}^{\infty}\lambda\left(\frac{n}{k}(z-ih)\right)=\sum_{\substack{n=1\\ n\not\equiv 0 \pmod{k}}}^{\infty}\lambda\left(\frac{n}{k}\left(\frac{1}{z}-iH\right)\right)+\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{z}-z\right)\sum_{\mu=1}^{k-1}\frac{\mu^2}{k^2}$$
$$-\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{z}-z\right)\sum_{\mu=1}^{k-1}\frac{\mu}{k}+\frac{\pi}{12}\left(\frac{1}{z}-z\right)(k-1)$$
$$+\pi i\sum_{\mu=1}^{k-1}\frac{\mu}{k}\left(\frac{\nu}{k}-\frac{1}{2}\right)-\frac{\pi i}{2}\sum_{\mu=1}^{k-1}\frac{\nu}{k}+\frac{\pi i}{4}(k-1)$$
$$=\sum_{\substack{n=1\\ n\not\equiv 0 \pmod{k}}}^{\infty}\lambda\left(\frac{n}{k}\left(\frac{1}{z}-iH\right)\right)+\frac{\pi}{12}\left(\frac{1}{z}-z\right)$$

$$\times\left(\frac{(k-1)(2k-1)}{k}-3(k-1)+(k-1)\right)+\pi i\sum_{\mu=1}^{k-1}\frac{\mu}{k}\left(\frac{\nu}{k}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\sum_{\substack{n=1\\ n\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ k)}}^{\infty}\lambda\left(\frac{n}{k}\left(\frac{1}{z}-iH\right)\right)+\frac{\pi}{12}\left(z-\frac{1}{z}\right)\left(1-\frac{1}{k}\right)+\pi i\sum_{\mu=1}^{k-1}\frac{\mu}{k}\left(\frac{\nu}{k}-\frac{1}{2}\right).$$

اما ν با معادلهٔ $h\mu = qk + \nu$ تعریف شده بود؛ درنتیجه، خواهیم داشت

$$\frac{h\mu}{k}=q+\frac{\nu}{k},\qquad q=\left[\frac{h\mu}{k}\right],\qquad \frac{\nu}{k}=\frac{h\mu}{k}-\left[\frac{h\mu}{k}\right].$$

بنابراین،

$$\sum_{\mu=1}^{k-1}\frac{\mu}{k}\left(\frac{\nu}{k}-\frac{1}{2}\right)=\sum_{\mu=1}^{h-1}\frac{\mu}{k}\left(\frac{h\mu}{k}-\left[\frac{h\mu}{k}\right]-\frac{1}{2}\right)=s(h,k).$$

لذا، ثابت کرده‌ایم

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ k)}}^{\infty}\lambda\left(\frac{n}{k}(z-ih)\right)=\sum_{\substack{n=1\\ n\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ k)}}^{\infty}\lambda\left(\frac{n}{k}\left(\frac{1}{z}-iH\right)\right)+\frac{\pi}{12}\left(z-\frac{1}{z}\right)\left(1-\frac{1}{k}\right)+\pi i s(h,k). \tag{۲۹}$$

این را به معادلهٔ (۲۷) که نظیر حالت $k = 1$ است می‌افزاییم:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\lambda(mz)=\sum_{m=1}^{\infty}\lambda\left(\frac{m}{z}\right)-\frac{\pi}{12}\left(z-\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{2}\log z.$$

با نوشتن $n = mk$، جملات مفقود (۲۹) با $n \equiv 0 \pmod k$ به حساب می‌آیند. اگر (۲۷) را با (۲۹) تلفیق کنیم، به دست می‌آوریم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda\left(\frac{n}{k}(z-ih)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda\left(\frac{n}{k}\left(\frac{1}{z}-iH\right)\right)-\frac{\pi}{12k}\left(z-\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{2}\log z+\pi i s(h,k).$$

این رابطهٔ (۱۶) را ثابت می‌کند که، به نوبهٔ خود، برهان معادلهٔ تابعی ددکیند برای $\eta(\tau)$ را تمام خواهد کرد.

۳.۷ خواص مجموعهای ددکیند

مجموعهای ددکیند $s(h,k)$ که در معادلهٔ تابعی مربوط به $\eta(\tau)$ ظاهر می‌شوند کاربردهای

بسیار در بخشهای زیادی از ریاضیات دارند. بعضی از اینها توسط رادماخر و گروسوالـد[1] [۳۸] در یک مونوگراف عالی در باب مجموعهای ددکیند توصیف شده‌اند. این فصل را با چند خاصیت حسابی از مجموعهای $s(h, k)$ که بعدا" در کتاب لازم می‌شوند به پایان می‌بریم. بخصوص، قضیهٔ ۳.۱۱ نقشی‌اساسی در بررسی‌پایایی توابع هنگی تحت تبدیلات زیرگروههای خاصی از Γ دارد، و این مبحثی است که در فصل بعد مطرح خواهد شد.

تذکر. سراسر این بخش فرض می‌کنیم k عدد صحیح مثبتی بوده و $(h, k) = 1$. مجموعهای ددکیند با معادلهٔ زیر تعریف می‌شوند:

$$s(h, k) = \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{k}\left(\frac{hr}{k} - \left[\frac{hr}{k}\right] - \frac{1}{2}\right). \tag{۳۰}$$

ابتدا این مجموعها را برحسب تابع $((x))$ تعریف شده به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$((x)) = \begin{cases} x - [x] - \frac{1}{2} & \text{اگر } x \text{ عددی صحیح نباشد،} \\ 0 & \text{اگر } x \text{ عددی صحیح باشد،} \end{cases}$$

این یک تابع متناوب از x با دورهٔ تناوب 1 است، و $((-x)) = -((x))$. در واقع، $((x))$ همان تابع متناوب‌برنولی $\bar{B}_1(x)$ است‌که در [۴]، فصل ۱۲، مطرح شده است. چون $((x))$ متناوب و فرد است، معلوم می‌شود که

$$\sum_{r \bmod k} \left(\left(\frac{r}{k}\right)\right) = 0$$

و، به‌طورکلی،

$$\text{به ازای } (h, k) = 1 \text{، } \sum_{r \bmod k} \left(\left(\frac{hr}{k}\right)\right) = 0 .$$

چون

$$\sum_{r \bmod k} \left(\left(\frac{r}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{hr}{k}\right)\right) = \sum_{r=1}^{k} \left(\frac{r}{k} - \frac{1}{2}\right)\left(\left(\frac{hr}{k}\right)\right) = \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{k}\left(\left(\frac{hr}{k}\right)\right)$$

مجموعهای ددکیند را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$s(h, k) = \sum_{r \bmod k} \left(\left(\frac{r}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{hr}{k}\right)\right). \tag{۳۱}$$

---

1. Grosswald

این‌نمایش‌اغلب‌از (۳۰) مناسبتر است ، زیرامی‌توان‌ازخاصیت‌تناوبی $((x))$ بهره برداری‌کرد .

قضیهٔ ۶.۳

(آ) هرگاه $h' \equiv \pm h \pmod{k}$ ، آنگاه $s(h', k) = \pm s(h, k)$ **با همان‌علامت همنهشتی .**
به همین نحو ، داریم

(ب) هرگاه $h\bar{h} \equiv \pm 1 \pmod{k}$ ، آنگاه $s(\bar{h}, k) = \pm s(h, k)$

(پ) هرگاه $h^2 + 1 \equiv 0 \pmod{k}$ ، آنگاه $s(h, k) = 0$.

برهان . قسمتهای (آ) و (ب) فوراً از (۳۱) نتیجه می‌شود . برای اثبات (پ) می‌بینیم که $h^2 + 1 \equiv 0 \pmod{k}$ رابطهٔ $h \equiv -\bar{h} \pmod{k}$ را ایجاب می‌کند ، که در آن $\bar{h}$ متقابل h به هنگ k است ؛ درنتیجه ، از (آ) و (ب) خواهیم داشت $s(h, k) = -s(h, k) = 0$.

مجموع $s(h, k)$ را می‌توان به ازای مقادیر کوچک h از تعریف حساب کرد . مثلاً ، وقتی $h = 1$ ، داریم

$$s(1, k) = \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{k}\left(\frac{r}{k} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{k^2}\sum_{r=1}^{k-1} r^2 - \frac{1}{2k}\sum_{r=1}^{k-1} r$$

$$= \frac{(k-1)(2k-1)}{6k} - \frac{k-1}{4} = \frac{(k-1)(k-2)}{12k}$$

به همین نحو ، خواننده می‌تواند تحقیق کند که

اگر k فرد باشد ، $s(2, k) = \dfrac{(k-1)(k-5)}{24k}$.

به‌طورکلی ، برای محاسبهٔ $s(h, k)$ فرمول ساده‌ای به شکل بسته وجود ندارد . با اینحال ، مجموعها در قانون تقابل جالب‌توجهی صدق‌می‌کنند که می‌توان ازآن در محاسبهٔ $s(h, k)$ یاری گرفت .

۸.۳ قانون تقابل برای مجموعهای ددکیند

قضیهٔ ۷.۳ (قانون تقابل برای‌مجموعهای‌ددکیند) . *اگر* $h > 0$ ، $k > 0$ ، و $(h, k) = 1$ **داریم**

$$12hks(h, k) + 12khs(k, h) = h^2 + k^2 - 3hk + 1.$$

برهان . ددکیند ابتدا قانون تقابل را ازمعادلهٔ تابعی مربوط به $\log \eta(\tau)$ نتیجه گرفت . ما یک برهان حسابی از رادماخر و وایتمن[1] [۳۹] می‌آوریم ، که در آن مجموع $\sum_{r=1}^{k} ((hr/k))^2$ به دو راه حساب شده است . ابتدا داریم

$$\sum_{r=1}^{k}\left(\left(\frac{kr}{k}\right)\right)^2 = \sum_{r \bmod k}\left(\left(\frac{hr}{k}\right)\right)^2 = \sum_{r \bmod k}\left(\left(\frac{r}{k}\right)\right)^2 = \sum_{r=1}^{k-1}\left(\frac{r}{k}-\frac{1}{2}\right)^2. \qquad (۳۲)$$

همچنین ، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{k}\left(\left(\frac{hr}{k}\right)\right)^2 &= \sum_{r=1}^{k-1}\left(\frac{hr}{k}-\left[\frac{hr}{k}\right]-\frac{1}{2}\right)^2\\ &= \sum_{r=1}^{k-1}\left(\frac{h^2r^2}{k^2}+\left[\frac{hr}{k}\right]^2+\frac{1}{4}-\frac{hr}{k}+\left[\frac{hr}{k}\right]-\frac{2hr}{k}\left[\frac{hr}{k}\right]\right)\\ &= 2h\sum_{r=1}^{k-1}\frac{r}{k}\left(\frac{hr}{k}-\left[\frac{hr}{k}\right]-\frac{1}{2}\right)\\ &\quad + \sum_{r=1}^{k-1}\left[\frac{hr}{k}\right]\left(\left[\frac{hr}{k}\right]+1\right)-\frac{h^2}{k^2}\sum_{r=1}^{k-1}r^2+\frac{1}{4}\sum_{r=1}^{k-1}1.\end{aligned}$$

از مقایسهٔ این با (۳۲) و با استفاده از (۳۰) به دست می‌آوریم

$$2hs(h,k)+\sum_{r=1}^{k-1}\left[\frac{hr}{k}\right]\left(\left[\frac{hr}{k}\right]+1\right) = \frac{h^2+1}{k^2}\sum_{r=1}^{k-1}r^2-\frac{1}{k}\sum_{r=1}^{k-1}r. \qquad (۳۳)$$

در مجموع طرف چپ جملاتی را دسته‌بندی می‌کنیم که در آنها $[hr/k]$ مقدار ثابتی دارد . چون $0 < r < k$ ، داریم $0 < hr/k < h$ و می‌توان نوشت

$$\left[\frac{hr}{k}\right] = v-1 \text{ ، که در آن } \quad v = 1, 2, \ldots, h \,. \qquad (۳۴)$$

به ازای v داده‌شده ،فرض‌کنیم $N(v)$ تعداد مقادیری‌از r باشد که‌به‌ازای‌آن $[hr/k] = v-1$. معادلهٔ (۳۴) برقرار است اگر و فقط اگر

$$v-1 < \frac{hr}{k} < v \quad \text{یا} \quad \frac{k(v-1)}{h} < r < \frac{kv}{h} \,.$$

تساوی مستثنی‌شده‌است‌زیرا $(h,\ k) = 1$ و $0 < r < k$. لذا ،اگر $1 \le v \le h-1$ ، معادلهٔ (۳۴) وقتی r از $[k(v-1)/h] + 1$ تا $[kv/h]$ تغییر کند برقرار است ؛ و درنتیجه ،

---

1. Whiteman

اگر $1 \le v \le h-1$ ، $N(v) = \left[\frac{kv}{h}\right] - \left[\frac{k(v-1)}{h}\right]$.

اما وقتی $v = h$ ، داریم $kv/h = k$ ، و چون $r = k$ مستثنی شده است ، خواهیم داشت

$$N(h) = k - 1 - \left[\frac{k(h-1)}{h}\right].$$

لذا ،

$$\sum_{r=1}^{k-1}\left[\frac{hr}{k}\right]\left(\left[\frac{hr}{k}\right]+1\right) = \sum_{v=1}^{h}(v-1)vN(v) \tag{۳۵}$$

$$= \sum_{v=1}^{h}(v-1)v\left(\left[\frac{kv}{h}\right] - \left[\frac{k(v-1)}{h}\right]\right) - h(h-1)$$

$$= \sum_{v=1}^{h-1}\left[\frac{kv}{h}\right]\{(v-1)v - v(v+1)\}$$

$$+ kh(h-1) - h(h-1)$$

$$= -2\sum_{v=1}^{h-1}v\left[\frac{kv}{h}\right] + h(h-1)(k-1).$$

اما نیز داریم

$$2hs(k,h) = 2\sum_{v=1}^{h-1}v\left(\frac{kv}{h} - \left[\frac{kv}{h}\right] - \frac{1}{2}\right) = -2\sum_{v=1}^{h-1}v\left[\frac{kv}{h}\right] + \frac{2k}{h}\sum_{v=1}^{h-1}v^2 - \sum_{v=1}^{h-1}v\,.$$

درنتیجه ، (۳۵) به صورت زیر درمی‌آید :

$$\sum_{r=1}^{k-1}\left[\frac{hr}{k}\right]\left(\left[\frac{hr}{k}\right]+1\right) = 2hs(k,h) - \frac{2k}{h}\sum_{v=1}^{h-1}v^2 + \sum_{v=1}^{h-1}v + h(h-1)(k-1).$$

با استفاده از این در (۳۳) و ضرب در $6k$ ، قانون تقابل به دست می‌آید .

۹.۳ خواص همنهشتی مجموعهای ددکیند

قضیهٔ ۸.۳ . عدد $6ks(h,k)$ عددی صحیح است . به‌علاوه ، اگر $(3,k) = \theta$ ، داریم

(آ) $12hks(k,h) \equiv 0 \pmod{\theta k}$

و

(ب) $12hks(h,k) \equiv h^2 + 1 \pmod{\theta k}$.

برهان. از رابطهٔ (۳۰) معلوم می‌شود که

$$6ks(h,k) = \frac{6h}{k}\sum_{r=1}^{k-1} r^2 - 6\sum_{r=1}^{k-1} r\left[\frac{hr}{k}\right] - 3\sum_{r=1}^{k-1} r. \tag{۳۶}$$

چون $6\sum_{r=1}^{k-1} r^2 = k(k-1)(2k-1)$، هر جملهٔ طرف راست (۳۶) عددی صحیح است. به‌علاوه، (۳۶) نشان می‌دهد که

$$6ks(h,k) \equiv h(k-1)(2k-1) \pmod 3.$$

درنتیجه، داریم

$$12ks(h,k) \equiv 2h(k-1)(2k-1) \equiv h(k-1)(k+1) \pmod 3. \tag{۳۷}$$

هرگاه $3|k$، آنگاه $3\nmid h$ و (۳۷) ایجاب می‌کند که

$$12ks(h,k) \equiv -h \not\equiv 0 \pmod 3.$$

هرگاه $3\nmid k$، آنگاه $3|(k-1)(k+1)$ و (۳۷) ایجاب می‌کند که

$$12ks(h,k) \equiv 0 \pmod 3. \tag{۳۸}$$

به عبارت دیگر، $12ks(h,k) \equiv 0 \pmod 3$ اگر و فقط اگر $3\nmid k$. لذا، پس از تعویض h و k داریم

$12hs(k,h) \equiv 0 \pmod 3$ اگر و فقط اگر $3\nmid h$.

اگر $3 = \theta$، این (آ) را ایجاب می‌کند زیرا $(h,k) = 1$. اگر $1 = \theta$، (آ) بداهتاً "برقرار است. قسمت (آ)، همراه با قانون تقابل، (ب) را می‌دهد زیرا $k^2 - 3hk \equiv 0 \pmod{\theta k}$.

تذکر. قضایای ۸.۳(ب) و ۶.۳(پ) نشان می‌دهند که

$s(h,k) = 0$ اگر و فقط اگر $h^2 + 1 \equiv 0 \pmod k$.

قضیهٔ ۹.۳. *مجموعه‌های ددکیند در همنهشتی زیر صدق می‌کنند:*

$$12ks(h,k) \equiv (k-1)(k+2) - 4h(k-1) + 4\sum_{r<k/2}\left[\frac{2hr}{k}\right] \pmod 8. \tag{۳۹}$$

اگر k فرد باشد، این رابطه به صورت زیر درمی‌آید:

$$12ks(h,k) \equiv k - 1 + 4\sum_{r<k/2}\left[\frac{2hr}{k}\right] \pmod 8. \tag{۴۰}$$

برهان. از رابطهٔ (۳۶) داریم

$$12ks(h,k) = 2h(k-1)(2k-1) - 12\sum_{r=1}^{k-1} r\left[\frac{hr}{k}\right] - 3k(k-1)$$

$$= -2h(k-1) + 4hk(k-1) - 12\sum_{r=1}^{k-1} r\left[\frac{hr}{k}\right]$$

$$+ k(k-1) - 4k(k-1).$$

حال طرف راست را به هنگ 8 تحویل می‌کنیم . چون $4k(k-1) \equiv 0 \pmod 8$ ، از این نتیجه می‌شود که

$$12ks(h,k) \equiv -2h(k-1) - 4\sum_{r=1}^{k-1} r\left[\frac{hr}{k}\right] + k(k-1) \pmod 8$$

$$\equiv (k-1)(k-2h) - 4\sum_{\substack{r=1\\ r\ \mathrm{odd}}}^{k-1} \left[\frac{hr}{k}\right] \pmod 8$$

$$\equiv (k-1)(k-2h) - 4\sum_{r=1}^{k-1} \left[\frac{hr}{k}\right] + 4\sum_{r<k/2} \left[\frac{2hr}{k}\right] \pmod 8.$$

جملهٔ ماقبل آخر مساوی است با

$$-4\sum_{r=1}^{k-1}\left[\frac{hr}{k}\right] = 4\sum_{r=1}^{k-1}\left(\left(\frac{hr}{k}\right)\right) - 4\sum_{r=1}^{k-1}\frac{hr}{k} + 2\sum_{r=1}^{k-1} 1$$

$$= 0 - 2h(k-1) + 2(k-1) = (k-1)(2-2h).$$

چون

$$(k-1)(k-2h) + (k-1)(2-2h) = (k-1)(k+2) - 4h(k-1)$$

این رابطهٔ (۳۹) را ثابت خواهد کرد .

وقتی k فرد باشد ، داریم $4h(k-1) \equiv 0 \pmod 8$ و

$$(k-1)(k+2) = k^2 + k - 2 \equiv k - 1 \pmod 8$$

زیرا $k^2 \equiv 1 \pmod 8$. لذا ، (۳۹) رابطهٔ (۴۰) را ایجاب خواهد کرد .

قضیهٔ ۳ . ۱۰ . هرگاه $k = 2^\lambda k_1$ که در آن $0 < \lambda$ و k_1 فرد است ، آنگاه به ازای $h \geq 1$ فرد داریم

$$12hks(h,k) \equiv h^2 + k^2 + 1 + 5k - 4k\sum_{v<h/2}\left[\frac{2kv}{h}\right] \pmod{2^{\lambda+3}}. \tag{۴۱}$$

برهان. چون h فرد است، می‌توان با اعمال (۴۰)، پس از ضرب در k، به‌دست آورد

$$12hks(k,h) \equiv k(h-1) + 4k\sum_{v<h/2}\left[\frac{2kv}{h}\right] \pmod{2^{\lambda+3}}.$$

بنابر قانون تقابل، داریم

$$\begin{aligned}12hks(h,k) &= h^2+k^2-3hk+1-12hks(k,h)\\ &\equiv h^2+k^2-3hk+1-k(h-1)-4k\sum_{v<h/2}\left[\frac{2kv}{h}\right] \pmod{2^{\lambda+3}}\\ &\equiv h^2+k^2+1+k-4hk-4k\sum_{v<h/2}\left[\frac{2kv}{h}\right] \pmod{2^{\lambda+3}}.\end{aligned}$$

چون h فرد است، داریم $4k(h+1) \equiv 0 \pmod{2^{\lambda+3}}$؛ لذا، $k-4hk \equiv 5k \pmod{2^{\lambda+3}}$ و رابطهٔ (۴۱) را خواهیم داشت.

بالاخره، خاصیتی از مجموعهای ددکیند به دست می‌آوریم که در مطالعهٔ پایایی توابع هنگی تحت تبدیلات بعضی از زیرگروههای گروه هنگی نقشی اساسی دارد. این امر در فصل ۴ لازم خواهد بود.

قضیهٔ ۱۱.۳. فرض کنیم $q = 3, 5, 7, 13$ و $r = 24/(q-1)$. به‌ازای اعداد صحیح a, b, c, d که $ad-bc=1$ و $c = c_1q$ که در آن $c_1 > 0$، قرار می‌دهیم

$$\delta = \left\{s(a,c) - \frac{a+d}{12c}\right\} - \left\{s(a,c_1) - \frac{a+d}{12c_1}\right\}.$$

در این صورت، $r\delta$ عدد صحیح زوجی می‌باشد.

برهان. با فرض $k = c$ در قضیهٔ ۸.۳(ب) معلوم می‌شود که

$$12ac\left\{s(a,c) - \frac{a+d}{12c}\right\} \equiv a^2+1-a(a+d) \equiv -bc \pmod{\theta c}$$

که در آن $\theta = (3, c)$. همین قضیه به ازای $k = c_1 = c/q$، پس از ضرب در q، نتیجه می‌دهد که

$$12ac\left\{s(a,c_1) - \frac{a+d}{12c_1}\right\} \equiv qa^2+q-qa(a+d) \equiv -qbc \pmod{\theta_1 c}$$

که در آن $\theta_1 = (3, c_1)$. توجه کنید که $\theta_1|\theta$؛ درنتیجه، هر دو همنهشتی به هنگ $\theta_1 c$

برقرارند . با تفریق همنهشتیها از هم و ضرب در r ، معلوم می‌شود که

$$12acr\delta \equiv r(q-1)bc \pmod{\theta_1 c}.$$

اما $r(q-1)bc = 24bc \equiv 0 \pmod{\theta_1 c}$ ؛ درنتیجه ، داریم

$$12acr\delta \equiv 0 \pmod{\theta_1 c}.$$

اما $(a, c) = 1$ ، زیرا $ad - bc = 1$. همچنین ، $12c\delta$ عددی صحیح است ؛ درنتیجه ، با حذف a در همنهشتی اخیر به دست می‌آید

(۴۲) $$12cr\delta \equiv 0 \pmod{\theta_1 c}.$$

حال نشان می‌دهیم که نیز داریم

(۴۳) $$12cr\delta \equiv 0 \pmod{3c}.$$

ابتدا فرض کنیم $q > 3$. در این حالت $\theta_1 = (3, c_1) = (3, qc_1) = \theta$ ؛ درنتیجه ، (۴۲) به صورت زیر درمی‌آید :

$$12cr\delta \equiv 0 \pmod{\theta c}.$$

اگر $\theta = 3$ ، این رابطهٔ (۴۳) را به ما می‌دهد . ولی هرگاه $\theta = 1$ ، آنگاه $3 \nmid c$ ؛ درنتیجه، $3 \nmid c_1$ و (۳۸) ایجاب می‌کند که $12cs(a, c) \equiv 0 \pmod 3$ و $12cs(a, c_1) \equiv 0 \pmod 3$. لذا ،

$$12cr\delta \equiv r(q-1)(a+d) = 24(a+d) \equiv 0 \pmod 3,$$

که همراه با (۴۲) رابطهٔ (۴۳) را ایجاب می‌نماید .

حال فرض کنیم $q = 3$ ؛ درنتیجه ، $r = 12$. در این صورت ، $\theta = 3$ و θ_1 مساوی 1 یا 3 است . اگر $\theta_1 = 3$ ، با همان استدلال به کار رفته در فوق رابطهٔ (۴۳) به دست می‌آید ؛ لذا ، فقط حالت $\theta_1 = 1$ باقی می‌ماند . در این حالت $3 \nmid c_1$ ؛ درنتیجه ، (۳۸) ایجاب می‌کند که $12c_1 s(a, c_1) \equiv 0 \pmod 3$ ؛ لذا ،

$$12cs(a, c_1) \equiv 0 \pmod 9.$$

همچنین ،

$$\begin{aligned} 12c\delta &= 12cs(a, c) - (a+d) - 12cs(a, c_1) + 3(a+d) \\ &\equiv 12cs(a, c) + 2(a+d) \pmod 9, \end{aligned}$$

درنتیجه ،

(۴۴) $$12rac\delta = 12racs(a, c) + 2r(a^2 + ad) \pmod 9.$$

اما قضیهٔ ۸.۳(ب) نتیجه می‌دهد که $12acs(a, c) \equiv a^2 + 1 \pmod 9$ ، زیرا $3 | c$. بنابر این ، (۴۴) به صورت زیر درمی‌آید :

$$\begin{aligned} 12rac\delta &\equiv r(a^2 + 1) + 2ra^2 + 2rad \pmod 9 \\ &\equiv 3ra^2 + r + 2r(1 + bc) \equiv 3r + 2rbc \equiv 0 \pmod 9 \end{aligned}$$

زیرا $r = 12$ و $9|12c$. این نشان می‌دهد که

$$12rac\delta \equiv 0 \pmod 9.$$

اما $3\nmid a$ ،زیرا $(a, c) = 1$ ؛ درنتیجه ، می‌توان باحذف a به‌دست‌آورد $12rc\delta \equiv 0 \pmod 9$ که ، همراه با (۴۲) ، رابطهٔ (۴۳) را ایجاب خواهد کرد .

هدف بعدی ما نشان دادن این است که

$$12cr\delta \equiv 0 \pmod{24c} \tag{۴۵}$$

زیرا این زوج بودن $r\delta$ را ایجاب می‌کند و قضیه ثابت خواهد شد . برای اثبات (۴۵) ، حالات فرد بودن و زوج بودن c را جدا از هم بررسی می‌کنیم .

حالت ۱ . c **فرد .** با اعمال (۴۰) به ازای $k = c$ داریم

$$12c\left\{s(a, c) - \frac{a + d}{12c}\right\} \equiv c - 1 + 4T(a, c) - (a + d) \pmod 8$$

که در آن نوشته‌ایم

$$T(a, c) = \sum_{v < c/2} \left[\frac{2av}{c}\right].$$

فقط لازم است $T(a, c)$ عددی صحیح باشد . بااعمال مجدد (۴۰) به ازای $k = c_1 = c/q$ و ضرب در q ، داریم

$$12c\left\{s(a, c_1) - \frac{a + d}{12c_1}\right\} \equiv c - q + 4qT(a, c_1) - q(a + d) \pmod 8.$$

اگر دو همنهشتی اخیر را از هم کم کرده و در r ضرب کنیم ، خواهیم داشت

$$12cr\delta \equiv r(q - 1) + r(q - 1)(a + d) \equiv 0 \pmod 8$$

زیرا $r(q - 1) = 24$ و $4r \equiv 0 \pmod 8$. از تلفیق این با (۴۳) رابطهٔ (۴۵) به‌دست آمده و قضیه برای c های فرد ثابت می‌شود .

حالت ۲ . c **زوج .** می‌نویسیم $c = 2^\lambda\gamma$ که‌درآن γ فرد است . a فرد استزیرا $(a, c) = 1$ ؛ درنتیجه ، اگر $a \geq 1$ ، می‌توان قضیهٔ ۳.۱۰ را به ازای $k = c$ و $h = a$ بـه کـار برده و به دست آورد

$$12ac\left\{s(a, c) - \frac{a + d}{12c}\right\} \equiv a^2 + c^2 + 1$$

$$+ 5c - 4cT(c, a) - a(a + d) \pmod{2^{\lambda + 3}}$$

$$\equiv c^2 + 5c - bc - 4cT(c, a) \pmod{2^{\lambda + 3}}$$

زیرا $ad - bc = 1$. به همین نحو ،

$$12ac\left\{s(a, c_1) - \frac{a+d}{12c_1}\right\} = cc_1 + 5c - qbc - 4cT(c_1, a) \pmod{2^{\lambda+3}}.$$

با تفریق ، ضرب در r ، و استفاده از همنهشتی $4cr \equiv 0 \pmod{2^{\lambda+3}}$ ، به‌دست‌می‌آوریم

$$12car\delta \equiv rcc_1(q-1) + r(q-1)bc \equiv 0 \pmod{2^{\lambda+3}}.$$

چون a فرد است ، می‌توان a را حذف کرده به دست آورد

$$12cr\delta \equiv 0 \pmod{2^{\lambda+3}}. \tag{۴۶}$$

اما (۴۳) می‌گوید $12cr\delta \equiv 0 \pmod{3 \cdot 2^{\lambda}\gamma}$ که ، همراه با (۴۶) ، رابطهٔ (۴۵) راایجاب کرده و قضیه را به ازای $a \geq 1$ ثابت خواهد کرد .

برای اثبات آن به ازای $a < 0$ ، می‌نویسیم $\delta = \delta(a)$ تا بستگی به a را نشان داده باشیم . اگر $a' = a + tc$ که در آن t صحیح است ، به آسانی معلوم می‌شود که $\delta(a') - \delta(a) = t(q-1)/12$ ، زیرا $s(a, c) = s(a', c)$ و $s(a', c_1) = s(a, c_1)$.بنابراین $r\delta(a') - r\delta(a) = 2t$ که عدد صحیح زوجی است . با اختیار t به نحوی که $a' \geq 1$ ، از استدلال فوق معلوم می‌شود که $r\delta(a')$ زوج است ؛ درنتیجه ، $r\delta(a)$ نیز زوج می‌باشد . این برهان را کامل خواهد کرد .

۱۰.۳ سری آیزن‌اشتاین $G_2(\tau)$

اگر k عددی صحیح بوده ، $k \geq 2$ ، و $\tau \in H$ ، سری آیزن‌اشتاین به‌طور مطلق همگرا بوده‌و

$$G_{2k}(\tau) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(m+n\tau)^{2k}} \tag{۴۷}$$

دارای بسط فوریهٔ

$$G_{2k}(\tau) = 2\zeta(2k) + \frac{2(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) e^{2\pi i n\tau} \tag{۴۸}$$

است که در آن ، طبق معمول ، $\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha$. حالات $k = 2$ و $k = 3$ در فصل ۱ به تفصیل ثابت شدند ، و همان استدلال (۴۸) را به ازای هر $k \geq 2$ ثابت خواهد کرد . اگر $k = 1$ ، سری (۴۷) دیگر به‌طور مطلق همگرا نیست . اما سری (۴۸) به‌طور مطلق همگرا است و از آن می‌توان برای تعریف تابع $G_2(\tau)$ استفاده نمود .

تعریف . اگر $\tau \in H$ ، تعریف می‌کنیم

$$G_2(\tau) = 2\zeta(2) + 2(2\pi i)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) e^{2\pi i n\tau} \tag{۴۹}$$

اگر $x = e^{2\pi i\tau}$ ، سری سمت راست (۴۹) یک سری توانی است که به‌ازای $|x| < 1$ به‌طور مطلق همگراست؛ درنتیجه، $G_2(\tau)$ در H تحلیلی می‌باشد. این تعریف همچنین نشان می‌دهد که $G_2(\tau + 1) = G_2(\tau)$.

تمرینهای ۱ تا ۵ رفتار G_2 را تحت مولدهای دیگر گروه هنگی توصیف می‌کنند. این تمرینها نشان می‌دهند که

$$G_2\left(\frac{-1}{\tau}\right) = \tau^2 G_2(\tau) - 2\pi i\tau \tag{۵۰}$$

رابطه‌ای که به برهان دیگری از معادلهٔ تابعی $\eta(-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2}\eta(\tau)$ منجر خواهد شد.

تمرینات برای فصل ۳

۱. اگر $\tau \in H$ ، ثابت کنید که

$$G_2(\tau) = 2\zeta(2) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m + n\tau)^2} \tag{۵۱}$$

راهنمایی. با معادلهٔ (۱۲) فصل ۱ شروع کرده، τ را با $n\tau$ که $n > 0$ عوض نموده، و روی تمام $n \geq 1$ های جمعبندی نمایید.

۲. با استفاده از سری (۵۱)، نشان دهید که

$$\tau^{-2}G_2\left(\frac{-1}{\tau}\right) = 2\zeta(2) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(m + n\tau)^2}, \tag{۵۲}$$

سری مکرر (۵۲) همان سری (۵۱) است جز آنکه ترتیب جمعبندی آن عکس شده است. بنابراین، اثبات (۵۰) معادل آن است که نشان دهیم

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(m + n\tau)^2} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m + n\tau)^2} - \frac{2\pi i}{\tau}. \tag{۵۳}$$

۳. (آ) در انتگرال تابع گامای $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt$ تغییر متغیر $t = \alpha u$ ، که $\alpha > 0$ ، داده فرمول

$$\alpha^{-z}\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-\alpha u}u^{z-1}\,du \tag{۵۴}$$

را به دست آورده و آن را با ادامهٔ تحلیلی به α های مختلف با $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ تعمیم دهید.

(ب) با فرض $z = 2$ و $\alpha = -2\pi i(m + n\tau)$ در (۵۴) و جمعبندی روی تمام $n \geq 1$ ها ، رابطهٔ زیر را به دست آورید :

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(n\tau + m)^2} = -8\pi^2 \int_0^{\infty} \cos(2\pi mu) g_\tau(u)\, du,$$

که در آن

$$g_\tau(u) = u \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi i n\tau u} \quad \text{،} \quad u > 0 \quad \text{اگر}$$

و

$$g_\tau(0) = \lim_{u\to 0+} g_\tau(u) = \frac{-1}{2\pi i\tau}.$$

۴ . (آ) با استفاده از تمرین ۳ نتیجه بگیرید که

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(n\tau + m)^2} = -8\pi^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(t) \cos(2\pi mt)\, dt, \tag{۵۵}$$

که در آن

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_\tau(t + k).$$

(ب) سری سمت راست (۵۵) یک سری فوریه است که به مقدار $\frac{1}{2}\{f(0+) + f(1-)\}$ همگرا می‌باشد . نشان دهید که

$$f(0+) = \frac{-1}{2\pi i\tau} + \sum_{k=1}^{\infty} g_\tau(k)$$

و

$$f(1-) = \sum_{k=1}^{\infty} g_\tau(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) e^{2\pi i n\tau},$$

و سپس با استفاده از (۵۵) رابطهٔ (۵۰) را به دست آورید .

۵ . (آ) با استفاده از حاصل‌ضرب معرف $\eta(\tau)$ نشان دهید که

$$-4\pi i \frac{d}{d\tau} \log \eta(\tau) = G_2(\tau).$$

(ب) نشان دهید که (۵۰) ایجاب می‌کند که

$$\frac{d}{d\tau} \log \eta\left(\frac{-1}{\tau}\right) = \frac{d}{d\tau} \log \eta(\tau) + \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \log(-i\tau).$$

انتگرالگیری‌ازاین‌معادله‌نتیجه‌می دهدکه‌به‌ازای‌ثابتی‌چون C ، $\eta(-1/\tau) = C(-i\tau)^{1/2}\eta(\tau)$
با اختیار $\tau = i$ خواهیم داشت $C = 1$.

۶ . قانون تقابل برای مجموعهای ددکیند $s(h, k)$ را از فرمول تبدیل مربوط به $\log \eta(\tau)$ داده شده در معادلهٔ (۱۲) به دست آورید .

تمرینهای ۷ و ۸ خواص تابع

$$\Phi(\alpha, \beta, s) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \{\zeta(s, \alpha)F(\beta, 1 + s) + \zeta(s, 1 - \alpha)F(1 - \beta, 1 + s)\}$$

را که در برهان فرمول ایسکی (قضیهٔ ۵.۳)آمده‌اند توصیف می‌کنند . این خواص از فرمول هرویتس (قضیهٔ ۱۲.۶ از [۴]) نتیجه می‌شوند که می‌گوید

$$\zeta(1 - s, a) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \{e^{-\pi is/2}F(a, s) + e^{\pi is/2}F(-a, s)\}.$$

۷ . (آ) اگر $0 < a < 1$ و $\mathrm{Re}\,(s) > 1$ ، ثابت کنید فرمول هرویتس ایجاب می‌کند که

$$F(a, s) = \frac{\Gamma(1 - s)}{(2\pi)^{1-s}} \{e^{\pi i(1-s)/2}\zeta(1 - s, a) + e^{\pi i(s-1)/2}\zeta(1 - s, 1 - a)\}.$$

(ب) با استفاده از (آ) نشان دهید که $\Phi(\alpha, \beta, s)$ را می‌توان با فرمول

$$\begin{aligned}\frac{\Phi(\alpha, \beta, s)}{\Gamma(s)\Gamma(-s)} &= e^{\pi is/2}\{\zeta(s, \alpha)\zeta(-s, 1 - \beta) + \zeta(s, 1 - \alpha)\zeta(-s, \beta)\}\\ &\quad + e^{-\pi is/2}\{\zeta(-s, 1 - \beta)\zeta(s, 1 - \alpha) + \zeta(-s, \beta)\zeta(s, \alpha)\}\end{aligned}$$

برحسب توابع زتای هرویتس بیان کرده‌ونتیجه‌گرفت‌که $\Phi(\alpha, \beta, s) = \Phi(1 - \beta, \alpha, -s)$.

۸ . در این تمرین برای قدرمطلق تابع $z^{-s}\Phi(\alpha, \beta, s)$ که در نمایش انتگرالی $\Lambda(\alpha, \beta, s)$ در برهان فرمول ایسکی ظاهر می‌شود (قضیهٔ ۵.۳) تخمینی به دست می‌آید .
(آ) نشان دهید که فرمول تمرین ۷ (ب) ایجاب می‌کند که

$$\begin{aligned}z^{-s}\Phi(\alpha, \beta, s) &= \frac{-\pi z^{-s}}{s \sin \pi s} \{e^{-\pi is/2}[\zeta(s, \alpha)\zeta(-s, \beta) + \zeta(s, 1 - \alpha)\zeta(-s, 1 - \beta)]\\ &\quad + e^{\pi is/2}[\zeta(s, \alpha)\zeta(-s, 1 - \beta) + \zeta(s, 1 - \alpha)\zeta(-s, \beta)]\}.\end{aligned}$$

(ب) به‌ازای z ثابت‌که $|\arg z| < \pi/2$ ، $\delta > 0$ راطوری‌اختیارکنیدکه $|\arg z| \le \pi/2 - \delta$ و نشان دهید که اگر $s = \sigma + it$ که در آن $\sigma \ge -\frac{3}{2}$ ، داریم

$$|z^{-s}| = O(e^{|t|(\pi/2 - \delta)})$$

که در آن ثابت ناشی از علامت O به z بستگی دارد .

(پ) اگر $s = \sigma + it$ که در آن $-\frac{3}{2} \geq \sigma$ و $1 \geq |t|$ ، نشان دهید که

$$\frac{1}{|s \sin \pi s|} = O\left(\frac{e^{-\pi|t|}}{|t|}\right)$$

و

$$|e^{\pi i s/2}| = O(e^{\pi|t|/2}), \qquad |e^{-\pi i s/2}| = O(e^{\pi|t|/2}).$$

(ت) اگر $-\frac{3}{2} \geq \sigma$ و $1 \geq |t|$ ، تخمین $|\zeta(s, a)| = O(|t|^c)$ را به ازای $c > 0$ ای به‌دست آورده (ر.ک. [۴] ، قضیهٔ ۲۳.۱۲) و با استفاده از (ب) نتیجه بگیرید که

$$|z^{-s}\Phi(\alpha, \beta, s)| = O(|t|^{2c-1}e^{-|t|\delta}).$$

این نشان می‌دهد که انتگرال $z^{-s}\Phi(\alpha, \beta, s)$ در امتداد پاره‌خطهای‌افقی مستطیل شکل ۲.۳ با $T \to \infty$ به 0 میل می‌کند.

خواص مجموعه‌های ددکیند

۹ . اگر $k \geq 1$ ، معادلهٔ

$$s(h, k) = \sum_{r \bmod k} \left(\left(\frac{r}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{hr}{k}\right)\right)$$

حتی اگر h نسبت‌به k اول نباشد ،با معنی است و گاهی به عنوان تعریف مجموعه‌های ددکیند گرفته می‌شود . با استفاده از این به عنوان تعریف $s(h, k)$ ، ثابت کنیدکه‌اگر $q > 0$ ، $s(qh, qk) = s(h, k)$.

۱۰ . اگر p اول باشد ، ثابت کنید

$$(p + 1)s(h, k) = s(ph, k) + \sum_{m=0}^{p-1} s(h + mk, pk).$$

۱۱ . به ازای اعداد صحیح r, h, k که $k \geq 1$ ، ثابت کنید بسط فوریهٔ متناهی زیر را داریم

$$\left(\left(\frac{hr}{k}\right)\right) = -\frac{1}{2k}\sum_{v=1}^{k-1} \sin\frac{2\pi hrv}{k} \cot\frac{\pi v}{k}$$

و بسط زیر برای مجموعه‌های ددکیند را به دست آورید :

$$s(h, k) = \frac{1}{4k}\sum_{r=1}^{k-1} \cot\frac{\pi hr}{k} \cot\frac{\pi r}{k}.$$

۱۲ . این تمرین‌مجموعه‌های‌ددکیند را بادنبالهٔ $\{u(n)\}$ اعداد فیبوناچی[1] ... $1, 1, 2, 3, 5, 8,$

1. Fibonacci

که در آن $u(1) = u(2) = 1$ و $u(n+1) = u(n) + u(n-1)$ به هم ربط می‌دهد .

(آ) اگر $h = u(2n)$ و $k = u(2n+1)$ ، ثابت کنید که $s(h, k) = 0$.

(ب) اگر $h = u(2n-1)$ و $k = u(2n)$ ، ثابت کنید که $12hks(h, k) = h^2 + k^2 - 3hk + 1$.

فرمولهایی برای محاسبهٔ مجموعهای ددکیند

در تمرینهای زیر چند فرمول برای محاسبهٔ مجموعه‌های ددکیند به شکل بسته و در حالات خاص ذکر می‌شوند . فرض کنید در این تمرینات $(h, k) = 1, k \geq 1, h \geq 1$.

۱۳ . اگر $k \equiv r \pmod h$ ، ثابت کنید قانون تقابل ایجاب می‌کند که

$$12hks(h, k) = k^2 - \{12s(r, h) + 3\}hk + h^2 + 1.$$

فرمولهای زیر را با استفاده از تمرین ۱۳ نتیجه بگیرید .

۱۴ . هرگاه $k \equiv 1 \pmod h$ ، آنگاه $12hks(h, k) = (k-1)(k-h^2-1)$.

۱۵ . هرگاه $k \equiv 2 \pmod h$ ، آنگاه $12hks(h, k) = (k-2)(k-\frac{1}{2}(h^2+1))$.

۱۶ . هرگاه $k \equiv -1 \pmod h$ ، آنگاه $12hks(h, k) = k^2 + (h^2 - 6h + 2)k + h^2 + 1$.

۱۷ . هرگاه $k \equiv r \pmod h$ ، و $h \equiv t \pmod r$ که در آنها $r \geq 1$ و $t = \pm 1$ ، آنگاه

$$12hks(h, k) = k^2 - \frac{h^2 - t(r-1)(r-2)h + r^2 + 1}{r}k + h^2 + 1.$$

این فرمول فرمولهای تمرینات ۱۴ و ۱۵ را به عنوان حالاتی خاص دربردارد .

۱۸ . نشان دهید که وقتی $r = 3$ و وقتی $r = 4$ ، فرمول تمرین ۱۷ $s(h, k)$ را کاملا" معین می‌سازد .

۱۹ . هرگاه $k \equiv 5 \pmod h$ و $h \equiv t \pmod 5$ که در آن $t = \pm 1$ یا ± 2 ، آنگاه

$$12hks(h, k) = k^2 - \frac{h^2 + 4t(t-2)(t+2)h + 26}{5}k + h^2 + 1.$$

۲۰ . فرض کنید $0 < h < k$ و $r_0, r_1, \ldots, r_{n+1}$ دنبالهٔ باقیمانده‌ها در الگوریتم اقلیدسی محاسبهٔ $\gcd(h, k)$ باشد ؛ درنتیجه ،

$$r_0 = k, \quad r_1 = h, \quad r_{j+1} \equiv r_{j-1} \pmod{r_j}, \quad 1 \leq r_{j+1} < r_j, \quad r_{n+1} = 1.$$

ثابت کنید که

$$s(h, k) = \frac{1}{12}\sum_{j=1}^{n+1}\left\{(-1)^{j+1}\frac{r_j^2 + r_{j-1}^2 + 1}{r_j r_{j-1}}\right\} - \frac{(-1)^n + 1}{8}.$$

این نیز $s(h, k)$ را به صورت مجموعی متناهی بیان می‌کند ، ولی جملاتش از مجموع آمده در تعریف اصلی کمتر است .

۴
همنهشتیهایی برای ضرایب تابع هنگی j

۱.۴ مقدمه

تابع $j(\tau) = 12^3 J(\tau)$ دارای بسط فوریهٔ زیر است:

$$j(\tau) = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} c(n)x^n, \quad (x = e^{2\pi i\tau})$$

که در آن ضرایب $c(n)$ اعدادی صحیح‌اند. در آخر فصل ۱ چند همنهشتی شامل این‌اعداد صحیح را ذکر کردیم. در این فصل طرز به دست آمدن این همنهشتیها را نشان می‌دهیم. به‌طور مشخص، ثابت می‌کنیم که

$$\begin{aligned} c(2n) &\equiv 0 \pmod{2^{11}}, \\ c(3n) &\equiv 0 \pmod{3^5}, \\ c(5n) &\equiv 0 \pmod{5^2}, \\ c(7n) &\equiv 0 \pmod{7}. \end{aligned}$$

روش به‌کار رفته برای رسیدن به‌این همنهشتیها را می‌توان برای‌هنگ 5^2 توضیح داد. تابع

$$f_5(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c(5n)x^n$$

حاصل از اختیار هر ضریب پنجم در بسط فوریهٔ j را درنظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم که اتحادی به شکل زیر وجود دارد:

$$f_5(\tau) = 25\{a_1\Phi(\tau) + a_2\Phi^2(\tau) + \cdots + a_k\Phi^k(\tau)\}, \tag{۱}$$

که در آن a_i ها صحیح بوده و $\Phi(\tau)$ دارای بسط سری توانی برحسب $x = e^{2\pi i\tau}$ با ضرایب صحیح است. با متحد گرفتن ضرایب (۱) می‌بینیم که هر ضریب $f_5(\tau)$ بر 25 بخشپذیر است.

موفقیت این روش به وجود این اتحادها بسته است. این اتحادها چطور به دست

می‌آیند ؟

قضیهٔ ۸.۲ به ما می‌گوید که هر تابع هنگی f تابع گویایی از j است . گاهی‌این تابع گویا یک چندجمله‌ای برحسب j با ضرایب صحیح است و اتحادی به شکل زیر به‌ما می‌دهد:

$$f(\tau) = a_1 j(\tau) + a_2 j^2(\tau) + \cdots + a_k j^k(\tau).$$

اما تابع $f_5(\tau)$ تحت تمام تبدیلات گروه هنگی Γ پایا نیست و نمی‌توان آن را برحسب $j(\tau)$ به این صورت بیان کرد . اما خواهیم دید که $f_5(\tau)$ تحت تبدیلات زیرگروه مشخصی از Γ پایاست ، و نظریهٔ عمومی به ما توان بیان $f_5(\tau)$ به صورت یک چندجمله‌ای برحسب تابع اساسی $\Phi(\tau)$ می‌دهد که همان نقش $j(\tau)$ نسبت به این زیرگروه را دارد . این نمایش به یک اتحاد مانند (۱) ، و درنتیجه به خاصیت همنهشتی مطلوب ، منجر خواهد شد .

زیرگروه‌موردبحث‌مجموعهٔ‌تمام ماتریسهای‌غیرهنگی $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ با خاصیت $c \equiv 0 \pmod 5$ است . به‌طورکلی ، ماتریسهایی در Γ با خاصیت $c \equiv 0 \pmod q$ را درنظر می‌گیریم ، که درآن q اول یا توانی از یک عدد اول می‌باشد .

۲.۴ زیرگروه $\Gamma_0(q)$

تعریف . اگر q عدد صحیح مثبتی باشد ، $\Gamma_0(q)$ را مجموعهٔ تمام ماتریسهای $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ در Γ با خاصیت $c \equiv 0 \pmod q$ تعریف می‌کنیم .

به‌آسانی معلوم می‌شود که $\Gamma_0(q)$ زیرگروهی از Γ است . قضیهٔ زیر نمایش هر عنصر Γ برحسب عناصر $\Gamma_0(p)$ را وقتی p اول است به ما می‌دهد . به زبان نظریهٔ گروهها ، این قضیه نشان می‌دهد که $\Gamma_0(p)$ در Γ با اندیس متناهی است .

قضیهٔ ۱.۴ . *فرض کنیم $T\tau = \tau + 1$ و $S\tau = -1/\tau$ مولدهای گروه هنگی کامل Γ بوده ،و p عددی اول باشد . در این صورت ، به ازای هر V در Γ که $V \notin \Gamma_0(p)$ ، عنصری مانند P در $\Gamma_0(p)$ و عدد صحیحی مانند k که $0 \leq k < p$ وجود دارد به طوری که*

$$V = PST^k .$$

برهان . فرض کنیم $V = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ که درآن $C \not\equiv 0 \pmod p$. می‌خواهیم

$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ با خاصیت $c \equiv 0 \pmod p$.

و عدد صحیح k که $0 \le k < p$ را چنان بیابیم که

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ST^k = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix}.$$

در اینجا تمام ماتریسها نامنفردند؛ درنتیجه، می‌توان معادله را نسبت به $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ حل کرده به دست آورد:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kA - B & A \\ kC - D & C \end{pmatrix}.$$

k را جواب همنهشتی

$$kC \equiv D \pmod p \quad \text{با خاصیت} \quad 0 \le k < p$$

می‌گیریم. این امر ممکن است زیرا $C \not\equiv 0 \pmod p$. حال فرض کنیم

$$c = kC - D, \qquad a = kA - B, \qquad b = A, \qquad d = C.$$

در این صورت، $c \equiv 0 \pmod p$؛ درنتیجه، $P \in \Gamma_0(p)$. این برهان را تمام خواهد کرد.

۳.۴ ناحیهٔ اساسی $\Gamma_0(p)$

طبق معمول می‌نویسیم $S\tau = -1/\tau$ و $T\tau = \tau + 1$، و فرض کنیم R_Γ ناحیهٔ اساسی باشد.

قضیهٔ ۲.۴. *به ازای هر عدد اول p، مجموعهٔ*

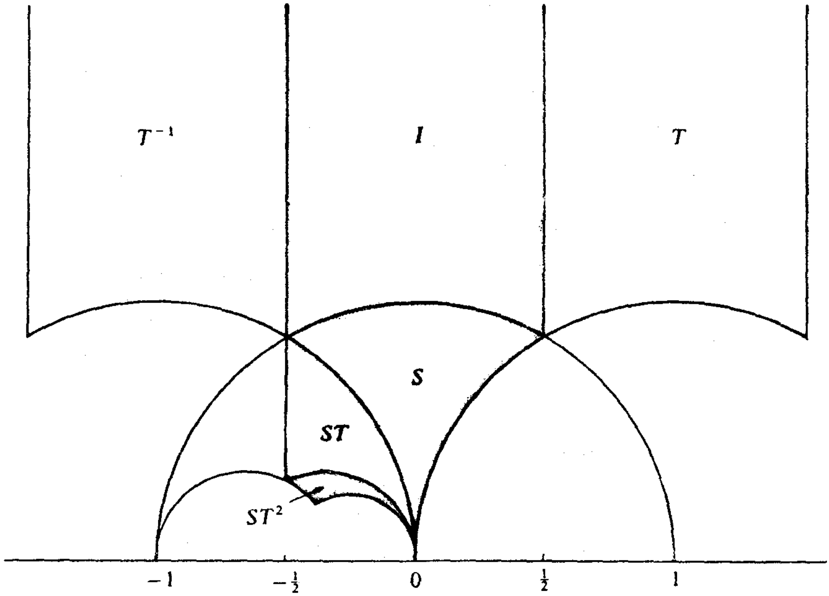
$$R_\Gamma \cup \bigcup_{k=0}^{p-1} ST^k(R_\Gamma)$$

یک ناحیهٔ اساسی زیرگروه $\Gamma_0(p)$ است.

در شکل ۱.۴، این قضیه برای $p = 3$ توضیح داده شده است.

برهان. فرض کنیم R مجموعهٔ زیر باشد:

$$R = R_\Gamma \cup \bigcup_{k=0}^{p-1} ST^k(R_\Gamma).$$



شکل ۱.۴ ناحیهٔ اساسی برای $\Gamma_0(3)$

ثابت می‌کنیم

(یک) اگر $\tau \in H$ ، V ای در $\Gamma_0(p)$ هست به طوری که $V\tau$ متعلق به بست R است ، و

(دو) هیچ دو نقطهٔ متمایز R تحت $\Gamma_0(p)$ هم‌ارز نیستند .

برای اثبات (یک) ، τ را در H ، τ_1 را در بست R_Γ ، و A را در Γ طوری اختیار می‌کنیم که $A\tau = \tau_1$. در این صورت ، طبق قضیهٔ ۱.۴ ، می‌توان نوشت

$$A^{-1} = PW$$

کــه در آن $P \in \Gamma_0(p)$ و $W = I$ یا به ازای k ای که $0 \le k \le p - 1$ ، $W = ST^k$. پس $P = A^{-1}W^{-1}$ و $P^{-1} = WA$. فرض کنیم $V = P^{-1}$. در این صورت ، $V \in \Gamma_0(p)$ و

$$V\tau = WA\tau = W\tau_1 .$$

چون $W = I$ یا $W = ST^k$ ، این قسمت (یک) را ثابت خواهد کرد .

حال به اثبات (دو) می‌پردازیم . فرض کنیم $\tau_1 \in R, \tau_2 \in R$ و به ازای V ای در $\Gamma_0(p)$ ، $V\tau_1 = \tau_2$. ثابت می‌کنیم $\tau_1 = \tau_2$. سه حالت درنظر می‌گیریم .

(آ) $\tau_1 \in R_\Gamma, \tau_2 \in R_\Gamma$. در این حالت $\tau_1 = \tau_2$ زیرا $V \in \Gamma$.

(ب) $\tau_1 \in R_\Gamma, \tau_2 \in ST^k(R_\Gamma)$.

(پ) $\tau_1 \in ST^{k_1}(R_\Gamma), \tau_2 \in ST^{k_2}(R_\Gamma)$.

در حالت (ب) ، $\tau_2 = ST^k\tau_3$ که در آن $\tau_3 \in R_\Gamma$. معادلهٔ

$V\tau_1 = \tau_2$ ایجاب می‌کند که $V\tau_1 = ST^k\tau_3, \tau_1 = V^{-1}ST^k\tau_3$.

اما $\tau_1 \in R_\Gamma$ و $\tau_3 \in R_\Gamma$ ؛ درنتیجه، $V^{-1}ST^k = I$ ،

$$V = ST^k = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix}.$$

این رابطهٔ $V \in \Gamma_0(p)$ را نقض می‌کند .

بالاخره، حالت (پ) را درنظر می‌گیریم . در این حالت

$$\tau_2 = ST^{k_2}\tau_2' \quad \text{و} \quad \tau_1 = ST^{k_1}\tau_1'$$

که درآنها τ_1' و τ_2' در R_Γ هستند . چون $V\tau_1 = \tau_2$ ، داریم $VST^{k_1}\tau_1' = ST^{k_2}\tau_2'$. در نتیجه، $VST^{k_1} = ST^{k_2}$ ،

$$V = ST^{k_2-k_1}S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ k_2 - k_1 & -1 \end{pmatrix}.$$

چون $V \in \Gamma_0(p)$ ، این ایجاب می‌کند که $k_2 \equiv k_1 \pmod p$ اما هر دوی k_1, k_2 در بازهٔ $[0, p-1]$ اند؛ درنتیجه، $k_2 = k_1$. بنابراین،

$$V = ST^0S = S^2 = I$$

و $\tau_1 = \tau_2$. این برهان را تمام خواهد کرد .

قضیهٔ زیر از رادماخر [۳۳] را که در مورد مولدهای $\Gamma_0(p)$ است (بدون برهان) ذکر می‌کنیم . (این قضیه در کارهای بعدی لازم نخواهد شد .)

قضیهٔ ۴.۳ . به‌ازای هر عدد اول $p > 3$ ، زیرگروه $\Gamma_0(p)$ دارای $2[p/12] + 3$ مولد است و آنها را می‌توان از عناصر زیر اختیار کرد :

$$T, V_1, V_2, \ldots, V_{p-1},$$

که در آن $T\tau = \tau + 1$ ، $S\tau = -1/\tau$ ، و

$$V_k = ST^kST^{-k'}S = \begin{pmatrix} k' & 1 \\ -(kk'+1) & -k \end{pmatrix},$$

که در آن $kk' \equiv -1 \pmod p$. زیرگروه $\Gamma_0(2)$ دارای مولدهای T و V_1 است ؛ زیرگروه $\Gamma_0(3)$ دارای مولدهای T و V_2 می‌باشد .

ذیلاً جدول کوتاهی از مولدها آمده است:

p	2	3	5	7	11	13	17	19
مولدها	T	T	T	T	T	T	T	T
	V_1	V_2	V_2	V_3	V_4	V_4	V_4	V_5
			V_3	V_5	V_6	V_5	V_7	V_8
						V_8	V_9	V_{12}
						V_{10}	V_{13}	V_{13}

۴.۴ توابع خودریخت تحت زیرگروه $\Gamma_0(p)$

به یاد می‌آوریم که تابع هنگی f تابعی است که از سه خاصیت زیر برخوردار باشد:

(آ) f در نیمصفحهٔ بالایی H خوشریخت باشد؛

(ب) به ازای هر تبدیل A در گروه هنگی Γ، $f(A\tau) = f(\tau)$؛

(پ) بسط فوریهٔ f به شکل زیر باشد:

$$f(\tau) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \tau}.$$

هرگاه خاصیت (ب) را با خاصیت زیر عوض کنیم:

(ب) به ازای هر تبدیل V در $\Gamma_0(p)$، $f(V\tau) = f(\tau)$،

آنگاه گوییم f تحت زیر گروه $\Gamma_0(p)$ **خودریخت** است. همچنین، گوییم f متعلق به $\Gamma_0(p)$ می‌باشد.

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که تنها توابع کراندار متعلق به $\Gamma_0(p)$ ثابتها می‌باشند.

قضیهٔ ۴.۴. هرگاه f تحت $\Gamma_0(p)$ خودریخت بوده و در H کراندار باشد، آنگاه f ثابت می‌باشد.

برهان. بنابر قضیهٔ ۱.۴، به ازای هر V در Γ عنصری مانند P در $\Gamma_0(p)$ و عدد صحیحی چون k که $0 \le k \le p$ وجود دارند به طوری که

$$V = PA_k,$$

که در آن اگر $k < p$، $A_k = ST^k$ و $A_p = I$. به ازای هر $k = 0, 1, \ldots, p$، قرار می‌دهیم

$$\Gamma_k = \{PA_k : P \in \Gamma_0(p)\}.$$

هر مجموعهٔ Γ_k یک هم‌مجموعهٔ *راست* $\Gamma_0(p)$ نام دارد. عنصر V_k از هم‌مجموعهٔ Γ_k را اختیار کرده و تابع f_k بر H را با معادلهٔ

$$f_k(\tau) = f(V_k\tau)$$

تعریف می‌کنیم. توجه کنید که $f(\tau) = f(P\tau) = f_p(\tau)$، زیرا $P \in \Gamma_0(p)$ و f تحت $\Gamma_0(p)$ خودریخت است. مقدار تابع $f_k(\tau)$ به انتخاب عنصر V_k از هم‌مجموعهٔ Γ_k بستگی ندارد، زیرا

$$f_k(\tau) = f(V_k\tau) = f(PA_k\tau) = f(A_k\tau)$$

و عنصر A_k برای تمام اعضای هم‌مجموعهٔ Γ_k یکسان است.

رفتار f_k تحت تبدیلات گروه هنگی کامل چیست؟ هرگاه $V \in \Gamma$، آنگاه

$$f_k(V\tau) = f(V_kV\tau).$$

اما $V_kV \in \Gamma$؛ درنتیجه، عنصری‌مانند Q در $\Gamma_0(p)$ و عددصحیحی مانند m که $0 \le m \le p$ وجود دارند به طوری که

$$V_kV = QA_m.$$

بنابراین، داریم

$$f_k(V\tau) = f(V_kV\tau) = f(QA_m\tau) = f(A_m\tau) = f_m(\tau).$$

به‌علاوه، وقتی k اعداد صحیح $0, 1, 2, \ldots, p$ را بگیرد، m نیز چنین خواهد کرد. به عبارت دیگر، جایگشتی چون σ از $\{0, 1, 2, \ldots, p\}$ وجود دارد به طوری که

به ازای هر $k = 0, 1, \ldots, p$، $f_k(V\tau) = f_{\sigma(k)}(\tau)$.

حال w را در H ثابت گرفته و فرض می‌کنیم

$$\varphi(\tau) = \prod_{k=0}^{p} \{f_k(\tau) - f(w)\}.$$

در این صورت، اگر $V \in \Gamma$ داریم

$$\varphi(V\tau) = \prod_{k=0}^{p} \{f_k(V\tau) - f(w)\} = \prod_{k=0}^{p} \{f_{\sigma(k)}(\tau) - f(w)\} = \varphi(\tau),$$

درنتیجه، φ تحت گروه کامل Γ خودریخت است. اما φ در H کراندار است (زیرا هر f_k چنین است). بنابراین، φ چند مقدار را حذف می‌کند؛ درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۲.۵، φ ثابت است؛ لذا، به ازای هر τ، $\varphi(\tau) = \varphi(w)$. اما $\varphi(w) = 0$، زیرا

$$\varphi(w) = \prod_{k=0}^{p} \{f_k(w) - f(w)\}$$

و عامل با $k = p$ صفر می‌شود، زیرا $f_p = f$. بنابراین، به ازای هر τ، $\varphi(\tau) = 0$. حال

$i = \tau$ را اختیار می‌کنیم . در این صورت ،

$$0 = \prod_{k=0}^{p} \{f_k(i) - f(w)\}.$$

درنتیجه ، بعضی از عوامل 0 اند . به عبارت دیگر ، به ازای k ای ، $f(w) = f_k(i)$. اما w دلخواه بود ؛ درنتیجه ، f فقط می‌تواند مقادیر $f_0(i), \ldots, f_p(i)$ را بگیرد . این ایجاب می‌کند که f ثابت باشد .

۵.۴ ساختن توابع متعلق به $\Gamma_0(p)$

در این بخش طرز ساختن توابع خودریخت تحت زیرگروه $\Gamma_0(p)$ از توابع خودریخت معلومی تحت Γ را نشان می‌دهیم .

قضیهٔ ۵.۴ . *اگر f تحت Γ خودریخت بوده و p اول باشد ، قرار می‌دهیم*

$$f_p(\tau) = \frac{1}{p}\sum_{\lambda=0}^{p-1} f\left(\frac{\tau+\lambda}{p}\right).$$

در این صورت ، f_p تحت $\Gamma_0(p)$ خودریخت است . به‌علاوه ، هرگاه f دارای بسط فوریهٔ

$$f(\tau) = \sum_{n=-m}^{\infty} a(n)e^{2\pi i n\tau}$$

باشد ، آنگاه f_p دارای بسط فوریهٔ

$$f_p(\tau) = \sum_{n=-[m/p]}^{\infty} a(np)e^{2\pi i n\tau}$$

می‌باشد .

برهان . ابتدا حکم مربوط به بسطهای فوریه را ثابت می‌کنیم . داریم

$$f_p(\tau) = \frac{1}{p}\sum_{\lambda=0}^{p-1}\sum_{n=-m}^{\infty} a(n)e^{2\pi i n(\tau+\lambda)/p}$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{n=-m}^{\infty} a(n)e^{2\pi i n\tau/p}\sum_{\lambda=0}^{p-1} e^{2\pi i n\lambda/p}.$$

اما

$$\sum_{\lambda=0}^{p-1} e^{2\pi i n\lambda/p} = \begin{cases} 0 \quad \text{،} \quad p\nmid n \quad \text{اگر} \\ p \quad \text{،} \quad p\mid n \quad \text{اگر} \end{cases}$$

درنتیجه،

$$f_p(\tau) = \sum_{\substack{n=-m \\ p|n}}^{\infty} a(n)e^{2\pi i n\tau/p} = \sum_{n=-[m/p]}^{\infty} a(np)e^{2\pi i n\tau}.$$

این نشان می‌دهد که f_p رفتار شایسته‌ای در نقطهٔ $\tau = i\infty$ دارد. همچنین، f_p بوضوح در H خوشریخت است، زیرا ترکیبی خطی از توابع خوشریخت در H می‌باشد.

حال باید نشان دهیم که

هر وقت $V \in \Gamma_0(p)$، $f_p(V\tau) = f_p(\tau)$.

برای این کار از لم زیر استفاده می‌کنیم.

لم ۱. اگر $V \in \Gamma_0(p)$ **و** $0 \le \lambda \le p-1$، **قرار می‌دهیم** $T_\lambda \tau = (\tau + \lambda)/p$. **دراین‌صورت، عدد صحیحی مانند** μ **که** $0 \le \mu \le p-1$ **و تبدیلی چون** W_μ **در** $\Gamma_0(p^2)$ **وجود دارند به طوری که**

$$T_\lambda V = W_\mu T_\mu.$$

به‌علاوه، وقتی λ **در یک دستگاه مانده‌ای تام به هنگ** p **تغییر کند،** μ **نیز چنین خواهد کرد.**

ابتدا با استفاده از این لم برهان قضیهٔ ۵.۴ را کامل کرده، سپس به برهان لم باز می‌گردیم.

اگر $V \in \Gamma_0(p)$، داریم

$$f_p(V\tau) = \frac{1}{p}\sum_{\lambda=0}^{p-1} f\left(\frac{V\tau + \lambda}{p}\right) = \frac{1}{p}\sum_{\lambda=0}^{p-1} f(T_\lambda V\tau).$$

مجموع اخیر را با استفاده از لم به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{1}{p}\sum_{\mu=0}^{p-1} f(W_\mu T_\mu \tau) = \frac{1}{p}\sum_{\mu=0}^{p-1} f(T_\mu \tau) = f_p(\tau).$$

این ثابت می‌کند که f_p تحت تمام تبدیلات در $\Gamma_0(p)$ پایاست؛ درنتیجه، f_p تحت $\Gamma_0(p)$ خودریخت است.

برهان لم ۱. فرض کنیم $V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ که در آن $c \equiv 0 \pmod p$، و λ چنان باشد که $0 \le \lambda \le p-1$. باید عددصحیح μ باخاصیت $0 \le \mu \le p-1$ وتبدیل $W_\mu = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

را چنان بیابیم که $W_\mu \in \Gamma_0(p^2)$ و

$$T_\lambda V = W_\mu T_\mu .$$

چون $T_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & p \end{pmatrix}$ ، باید معادلهٔ ماتریسی

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & p \end{pmatrix}$$

یا

$$\begin{pmatrix} a+\lambda c & b+\lambda d \\ pc & pd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A\mu + Bp \\ C & C\mu + Dp \end{pmatrix}$$

با $C \equiv 0 \pmod{p^2}$ برقرار باشد. از متحد قراردادن درایه‌ها روابط زیر به‌دست‌می‌آیند:

$$\begin{cases} A = a + \lambda c \\ C = pc \end{cases} \qquad (۲)$$

$$\begin{cases} A\mu + Bp = b + \lambda d \\ C\mu + Dp = pd \end{cases} \qquad (۳)$$

که در آن

$$AD - BC = 1 \quad \text{و} \quad C \equiv 0 \pmod{p^2} .$$

اما (۲) A و C را معین می‌کند. چون $p|c$ ، داریم $C \equiv 0 \pmod{p^2}$ با گذاردن این مقادیر در (۳) باید داشته باشیم

$$\begin{cases} (a+\lambda c)\mu + Bp = b + \lambda d \\ \qquad cp\mu + Dp = pd. \end{cases} \qquad (۴)$$

μ را جواب همنهشتی

$$\mu a \equiv b + \lambda d \pmod{p}$$

می‌گیریم که در بازهٔ $0 \le \mu \le p-1$ قرار داشته‌باشد. این ممکن است زیرا $ad - bc = 1$ و $p|c$ ایجاب می‌کند که $p \nmid a$. توجه کنید که مقادیر متمایز λ به هنگ p مقادیر متمایزی‌را از μ به هنگ p به ما می‌دهند. در این صورت، چون $p|c$ ، داریم

$$\mu a + \mu\lambda c \equiv b + \lambda d \pmod{p}$$

یا

$$(a+\lambda c)\mu \equiv b + \lambda d \pmod{p}.$$

بنابراین، عدد صحیحی مانند B هست به طوری که

$$(a+\lambda c)\mu + Bp = b + \lambda d.$$

بنابراین ، اولین رابطه در (۴) برقرار است . در رابطهٔ دوم لازم است $D = d - c\mu$ لذا ، اعداد صحیح μ, A, B, C, D را طوری می‌یابیم که

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & p \end{pmatrix}.$$

واضح است که $AD - BC = 1$ ، زیرا در این معادله تمام ماتریسها دارای دترمینان 1 یا p می‌باشند . این برهان لم را کامل خواهد کرد .

۶.۴ رفتار f_p تحت مولدهای Γ

فرض کنیم $T\tau = \tau + 1$ و $S\tau = -1/\tau$ مولدهای Γ باشند . چون $T \in \Gamma_0(p)$ ، داریم $f_p(T\tau) = f_p(\tau)$. قضیهٔ زیر نتیجهٔ همتایی برای $f_p(S\tau)$ می‌باشد .

قضیهٔ ۴ . ۶ هرگاه f تحت Γ خودریخت بوده و p اول باشد ، آنگاه

$$f_p\left(-\frac{1}{\tau}\right) = f_p(\tau) + \frac{1}{p} f(p\tau) - \frac{1}{p} f\left(\frac{\tau}{p}\right).$$

برای اثبات این قضیه به لم دیگری نیاز داریم .

لم ۲ . فرض کنیم $T_\lambda \tau = (\tau + \lambda)/p$. در این صورت به ازای هر λ در بازهٔ $1 \le \lambda \le p - 1$ عدد صحیحی مانند μ در همین بازه و تبدیل V در $\Gamma_0(p)$ وجود دارند به طوری که

$$T_\lambda S = V T_\mu .$$

به‌علاوه ، وقتی λ اعداد $1, 2, \ldots, p-1$ را می‌گیرد ، μ نیز چنین خواهد کرد .

برهان لم ۲ . می‌خواهیم $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ در $\Gamma_0(p)$ را چنان بیابیم که

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & p \end{pmatrix}$$

یا

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ p & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a\mu + bp \\ c & c\mu + dp \end{pmatrix}.$$

فرض کنیم $a = \lambda, c = p$ و μ را جواب همنهشتی

$$\lambda\mu \equiv -1 \pmod p$$

در بازهٔ $1 \le \mu \le p-1$ می‌گیریم. این جواب منحصر به‌فرد است و μ در دستگاه‌مانده‌ای تحویل یافته‌به‌هنگ p با λ تغییر می‌کند. b را آن‌عددصحیحی می‌گیریم که $a\mu + bp = -1$ و فرض می‌کنیم $d = -\mu$. در این صورت، $c\mu + dp = 0$ و برهان تمام خواهد بود.

برهان قضیهٔ ۶.۴. داریم

$$pf_p\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sum_{\lambda=0}^{p-1} f\left(\frac{S\tau+\lambda}{p}\right) = f\left(\frac{S\tau}{p}\right) + \sum_{\lambda=1}^{p-1} f(T_\lambda S\tau)$$
$$= f\left(-\frac{1}{\tau p}\right) + \sum_{\mu=1}^{p-1} f(VT_\mu\tau) = f(\tau p) + \sum_{\mu=0}^{p-1} f(T_\mu\tau) - f\left(\frac{\tau}{p}\right)$$
$$= f(\tau p) + pf_p(\tau) - f\left(\frac{\tau}{p}\right).$$

۷.۴ تابع $\varphi(\tau) = \Delta(q\tau)/\Delta(\tau)$

تعداد قطبهای یک تابع خود ریخت در بست‌ناحیهٔ اساسی‌اش **ظرفیت** آن نام دارد. یک تابع را بر زیر گروه G **تک‌ظرفیتی**، نامند اگر تحت G خودریخت بوده و دارای ظرفیت 1 باشد. یک چنین تابع همان نقشی در G را دارد که J در گروه کامل Γ ایفا می‌کند.

می‌توان (با استفاده از سطوح ریمان) نشان داد که توابع تک ظرفیتی بر G وجود دارند اگر و فقط اگر جنس ناحیهٔ اساسی R_G صفر باشد. [این جنس توپولوژیک سطحی است که از یکی کردن لبه‌های همنهشت R_G به دست می‌آید. مثلاً"، جنس R_Γ صفر است، زیرا R_Γ با یک کره هم‌ارز توپولوژیک است وقتی لبه‌های همنهشت آن یکی شده باشند.]

هدف بعدی ما ساختن یک تابع تک ظرفیتی بر زیرگروه $\Gamma_0(p)$ است در حالتی که جنس $\Gamma_0(p)$ صفر باشد. این به کمک مبین $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ انجام می‌شود.

به یاد می‌آوریم که $\Delta(\tau)$ متناوب با دورهٔ تناوب 1 است و دارای بسط فوریهٔ (قضیهٔ ۱۹.۱)

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{2\pi i n\tau}$$

است، که در آن $\tau(n)$ اعداد صحیحی هستند که $\tau(1) = 1$ و $\tau(2) = -24$. اما $\Delta(\tau)$ تحت

تمام تبدیلات Γ پایا نیست . در واقع ،

اگر $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ ، داریم $\Delta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^{12}\Delta(\tau)$.

بخصوص ،

$$\Delta(\tau + 1) = \Delta(\tau) \quad \text{و} \quad \Delta\left(\frac{-1}{\tau}\right) = \tau^{12}\Delta(\tau) .$$

با آنکه $\Delta(\tau)$ تحت Γ پایا نیست ، Γ را می‌توان در ساختن توابع خودریخت تحت زیر گروه $\Gamma_0(q)$ به ازای هر عدد صحیح q به کار برد .

قضیهٔ ۴ . ۷ . *به ازای عدد صحیح ثابت q*

اگر $\tau \in H$ ، قرار می‌دهیم $\varphi(\tau) = \dfrac{\Delta(q\tau)}{\Delta(\tau)}$.

در این صورت ، φ تحت $\Gamma_0(q)$ خودریخت است . به‌علاوه ، بسط فوریهٔ φ بـه شـکل زیـر می‌باشد :

$$\varphi(\tau) = x^{q-1}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n\right)$$

که درآن b_n ها اعدادی صحیح بوده و $x = e^{2\pi i\tau}$.

برهان . ابتدا بسط فوریه را به دست می‌آوریم . داریم

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12}\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)x^n = (2\pi)^{12}x\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n+1)x^n\right\}$$

که در آن $x = e^{2\pi i\tau}$. از اینرو ،

$$\Delta(q\tau) = (2\pi)^{12}x^q\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n+1)x^{nq}\right\}.$$

درنتیجه ،

$$\varphi(\tau) = \frac{\Delta(q\tau)}{\Delta(\tau)} = x^{q-1}\,\frac{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n+1)x^{nq}}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n+1)x^n} = x^{q-1}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n\right)$$

که در آن b_n ها اعدادی صحیح می‌باشند .

اما φ بوضوح در H خوشریخت است ،و حال ثابت می‌کنیم φ تحت $\Gamma_0(q)$ پایا می‌باشد .

هرگاه $V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(q)$ ، آنگاه به ازای عدد صحیحی چون c_1 ، $c = c_1 q$. از اینرو ،

$$\Delta(V\tau) = (c\tau + d)^{12}\Delta(\tau) = (c_1 q\tau + d)^{12}\Delta(\tau).$$

از آن‌سو ،

$$qV\tau = q\,\frac{a\tau + b}{c\tau + d} = \frac{a(q\tau) + bq}{c_1(q\tau) + d} = W(q\tau),$$

که در آن

$$W = \begin{pmatrix} a & bq \\ c_1 & d \end{pmatrix}.$$

اما $W \in \Gamma$ زیرا $\det W = ad - bc_1 q = ad - bc = 1$. لذا ،

$$\Delta(qV\tau) = \Delta(W(q\tau)) = (c_1(q\tau) + d)^{12}\Delta(q\tau),$$

درنتیجه ،

$$\varphi(V\tau) = \frac{\Delta(qV\tau)}{\Delta(V\tau)} = \frac{(c_1 q\tau + d)^{12}\Delta(q\tau)}{(c_1 q\tau + d)^{12}\Delta(\tau)} = \varphi(\tau).$$

این برهان را تمام خواهد کرد .

اما φ در ∞ صفر از مرتبهٔ $q - 1$ داشته‌و صفر دیگری در H ندارد . حال‌نشان می‌دهیم φ در راس $\tau = 0$ ناحیهٔ اساسی $\Gamma_0(q)$ صفر نمی‌شود . در واقع ، نشان می‌دهیم که وقتی $\tau \to 0$ ، $\varphi(\tau) \to \infty$.

قضیهٔ ۴.۸. *اگر* $\tau \in H$ ، داریم

$$\varphi\left(\frac{-1}{q\tau}\right) = \frac{1}{q^{12}\varphi(\tau)}.$$

لذا ، وقتی $\tau \to 0$ ، $\varphi(\tau) \to \infty$.

برهان . چون $\Delta(-1/\tau) = \tau^{12}\Delta(\tau)$ ، داریم

$$\Delta\left(-\frac{1}{q\tau}\right) = (q\tau)^{12}\Delta(q\tau)$$

درنتیجه،

$$\varphi\left(\frac{-1}{q\tau}\right)=\frac{\Delta\left(q\,\frac{-1}{q\tau}\right)}{\Delta\left(\frac{-1}{q\tau}\right)}=\frac{\Delta\left(-\frac{1}{\tau}\right)}{\Delta\left(-\frac{1}{q\tau}\right)}=\frac{\tau^{12}\Delta(\tau)}{(q\tau)^{12}\Delta(q\tau)}=q^{-12}\frac{1}{\varphi(\tau)}.$$

چون φ در ∞ دارای صفر است، وقتی $\tau\to 0$ ، $\varphi(-1/(q\tau))\to 0$؛ درنتیجه، $\varphi(\tau)\to\infty$.

۸.۴ تابع تک‌ظرفیتی $\Phi(\tau)$

تابع φ در ∞ دارای صفر از مرتبهٔ $q-1$ بوده و صفر دیگری ندارد؛ درنتیجه، ظرفیت آن $q-1$ است. یک تابع تک‌ظرفیتی خودریخت تحت $\Gamma_0(q)$ جستجو می‌کنیم و این پیشنهاد می‌کند φ^α را درنظر بگیریم که در آن $\alpha=1/(q-1)$. بسط فوریهٔ φ^α لازم نیست ضرایب صحیح داشته باشد، زیرا

$$\varphi^\alpha(\tau)=x\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n\right)^\alpha.$$

از آن سو، نمایش حاصل‌ضربی زیر را داریم:

$$\Delta(\tau)=(2\pi)^{12}x\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{24}.$$

درنتیجه،

$$\varphi(\tau)=\frac{\Delta(q\tau)}{\Delta(\tau)}=x^{q-1}\frac{\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{qn})^{24}}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{24}}$$
$$=x^{q-1}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}d_q(n)x^n\right)^{24}$$

که در آن ضرایب $d_q(n)$ اعدادی صحیح‌اند. بنابراین، اگر $\alpha=1/(q-1)$ ، داریم

$$\varphi^\alpha(\tau)=x\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}d_q(n)x^n\right)^{24\alpha} \qquad (۵)$$

و اگر 24α عددی صحیح باشد، یعنی $q-1$ عدد 24 را عاد کند، سری فوریهٔ $\varphi^\alpha(\tau)$ ضرایب صحیح خواهد داشت. وقتی $q=2,3,4,5,7,9,13,25$ این اتفاق می‌افتد.

تعریف. اگر $q-1$ عدد 24 را عاد کند، قرار می‌دهیم $\alpha=1/(q-1)$ و $r=24\alpha$. تابع

Φ را با روابط زیر تعریف می‌کنیم :

$$\Phi(\tau) = \varphi^a(\tau) = \left(\frac{\Delta(q\tau)}{\Delta(\tau)}\right)^a = \left(\frac{\eta(q\tau)}{\eta(\tau)}\right)^r.$$

تابع Φ که به این ترتیب تعریف شده است در H تحلیلی و ناصفر است . سری‌فوریهٔ مربوط به Φ در (۵) نشان می‌دهد که Φ در ∞ صفر مرتبهٔ اول دارد و

$$\frac{1}{\Phi(\tau)} = \frac{1}{x} + I(x),$$

که در آن $I(x)$ یک سری توانی نسبت به x با ضرایب صحیح است .

چون φ تحت $\Gamma_0(q)$ خودریخت‌است ،به‌ازای‌هرعنصر V از $\Gamma_0(q)$ داریم $\varphi(V\tau) = \varphi(\tau)$. لذا ، با گرفتن ریشهٔ مرتبهٔ $q - 1$ خواهیم داشت

$$\Phi(V\tau) = \varepsilon\Phi(\tau)$$

که در آن $\varepsilon^{q-1} = 1$. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که ، در واقع ، هر وقت $24/(q-1)$ عدد صحیح زوج و q اول باشد ، $\varepsilon = 1$. این وقتی رخ می‌دهد که $q = 2, 3, 5, 7, 13$. تابع Φ به ازای این مقادیر از q تحت $\Gamma_0(q)$ خودریخت می‌باشد .

۹.۴ پایایی $\Phi(\tau)$ تحت تبدیلات $\Gamma_0(q)$

خواص مجموعهای ددکیند ثابت شده در فصل پیش ما را به برهان ساده‌ای از پایایی تابع تک‌ظرفیتی $\Phi(\tau)$ می‌رساند .

قضیهٔ ۹.۴ . فرض کنیم $q=2, 3, 5, 7, 13$ و $r = 24/(q-1)$. در این صورت ، تابع

$$\Phi(\tau) = \left(\frac{\eta(q\tau)}{\eta(\tau)}\right)^r \qquad (۶)$$

تحت زیرگروه $\Gamma_0(q)$ خودریخت می‌باشد .

برهان . اگر $q = 2$ ، داریم $r = 24$ و $\Phi(\tau) = \Delta(q\tau)/\Delta(\tau)$. در این حالت قضیه قبلاً" در قضیهٔ ۷.۴ ثابت شده است . لذا ، فرض می‌کنیم $q \geq 3$.

فرض کنیم $V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ عنصری‌از $\Gamma_0(q)$ باشد . پس $ad - bc = 1$ و $c \equiv 0 \pmod q$ می‌توان فرض کرد $c \geq 0$. هرگاه $c = 0$ ، آنگاه V توانی از انتقال $T\tau = \tau + 1$ است ،و

چون $\eta(\tau+1) = e^{\pi i/12}\eta(\tau)$ ، معلوم می‌شود که

$$\Phi(\tau+1) = \left(\frac{\eta(q\tau+q)}{\eta(\tau+1)}\right)^r = e^{\pi ir(q-1)/12}\Phi(\tau) = \Phi(\tau).$$

بنابراین ، می‌توان فرض کرد $c > 0$ و $c = c_1 q$ ، که در آن $c_1 > 0$. معادلهٔ تابعی ددکیند برای $\eta(\tau)$ نتیجه می‌دهد که

$$\eta(V\tau) = \varepsilon(V)\{-i(c\tau+d)\}^{1/2}\eta(\tau) \tag{۷}$$

که در آن

$$\varepsilon(V) = \exp\left\{\pi i\left(\frac{a+d}{12c} + s(-d,c)\right)\right\}. \tag{۸}$$

همچنین ، داریم

$$\eta(qV\tau) = \eta\left(\frac{a(q\tau)+bq}{c_1(q\tau)+d}\right) = \eta(V_1 q\tau)$$

که در آن

$$V_1 = \begin{pmatrix} a & bq \\ c_1 & d \end{pmatrix}.$$

چون $V_1 \in \Gamma$ ، خواهیم داشت

$$\eta(qV\tau) = \varepsilon(V_1)\{-i(c_1 q\tau + d)\}^{1/2}\eta(q\tau)$$

که ، همراه با (۷) ، نتیجه می‌دهد

$$\Phi(V\tau) = \left(\frac{\varepsilon(V_1)}{\varepsilon(V)}\right)^r \Phi(\tau).$$

اما رابطهٔ (۸) نشان می‌دهد که $(\varepsilon(V_1)/\varepsilon(V))^r = e^{-\pi ir\delta}$ ، که در آن

$$\delta = \left\{\frac{a+d}{12c} + s(-d,c)\right\} - \left\{\frac{a+d}{12c_1} + s(-d,c_1)\right\}.$$

چون $ad - bc = 1$ ، داریم $ad \equiv 1 \pmod{c}$ و $ad \equiv 1 \pmod{c_1}$ ؛ در نتیجه ، $s(-d,c) = -s(a,c)$ و $s(-d,c_1) = -s(a,c_1)$ ، و قضیهٔ ۳.۱۱ نشان می‌دهد که $r\delta$ یک عدد صحیح زوج است . بنابراین $e^{-\pi ir\delta} = 1$ و $\Phi(V\tau) = \Phi(\tau)$.

۴.۱۰ تابع j_p بیان شده به صورت چندجمله‌ای از Φ

اگر p اول بوده و f تحت Γ خودریخت باشد ، نشان داده‌ایم که تابع

$$f_p(\tau) = \frac{1}{p}\sum_{\lambda=0}^{p-1} f\left(\frac{\tau+\lambda}{p}\right)$$

تحت $\Gamma_0(p)$ خودریخت است ،و ضرایب فوریه از هر ضریب p ام f تشکیل شده‌است. برای به دست آوردن خواص بخشپذیری ضرایب $j_p(\tau)$ ، j_p را به صورت یک چندجمله‌ای از تابع Φ بیان می‌کنیم .

برای به دست آوردن معادلهٔ دیفرانسیل تابع $\wp$ وایراشتراس، ترکیبی خطی‌از $\wp$ ، $\wp^2$ ، و $\wp^3$ را تشکیل می‌دهیم که قسمت اصلی آن در مجاورت $z = 0$ مساوی قسمت اصلی $[\wp'(z)]^2$ باشد. روند کار در اینجا مشابه است. هر دوتابع j_p و Φ در رأس $\tau = 0$ ناحیهٔ اساسی $\Gamma_0(p)$ دارای قطب‌اند . یک ترکیب خطی از توانهای Φ طوری تشکیل می‌دهیم که قسمت اصلی آن مساوی قسمت اصلی j_p باشد .

برای به دست آوردن مرتبهٔ قطب $j_p(\tau)$ در $\tau = 0$ ، از قضیهٔ ۶.۴ استفاده می‌کنیم که به ما رابطهٔ

$$j_p\left(-\frac{1}{\tau}\right) = j_p(\tau) + \frac{1}{p} j(p\tau) - \frac{1}{p} j\left(\frac{\tau}{p}\right)$$

را می‌دهد که به ازای p ی اول معتبر است . از تعویض τ با $p\tau$ در این فرمول خواهیم داشت:

قضیهٔ ۱۰.۴ . هرگاه p *اول بوده و* $\tau \in H$ ، *آنگاه*

$$j_p\left(-\frac{1}{p\tau}\right) = j_p(p\tau) + \frac{1}{p} j(p^2\tau) - \frac{1}{p} j(\tau).$$

لذا ، اگر $x = e^{2\pi i\tau}$ ، بسط فوریهٔ زیر را خواهیم داشت

$$pj_p\left(-\frac{1}{p\tau}\right) = x^{-p^2} - x^{-1} + I(x),$$

که در آن $I(x)$ یک سری توانی از x با ضرایب صحیح می‌باشد .

برهان . داریم

$$\begin{aligned} j(\tau) &= x^{-1} + c(0) + c(1)x + c(2)x^2 + \cdots, \\ j_p(\tau) &= c(0) + c(p)x + c(2p)x^2 + \cdots, \\ pj_p(p\tau) &= pc(0) + pc(p)x^p + pc(2p)x^{2p} + \cdots, \end{aligned}$$

و

$$j(p^2\tau) = x^{-p^2} + c(0) + c(1)x^{p^2} + c(2)x^{2p^2} + \cdots,$$

درنتیجه،

$$pj_p\left(-\frac{1}{p\tau}\right) = pj_p(p\tau) + j(p^2\tau) - j(\tau)$$
$$= x^{-p^2} - x^{-1} + I(x).$$

حال می‌توان j_p را به صورت چندجمله‌ای نسبت به Φ بیان کرد.

قضیهٔ ۱۱.۴. فرض کنیم $p = 2, 3, 5, 7, 13$، و قرار می‌دهیم
$\Phi(\tau) = \left(\frac{\eta(p\tau)}{\eta(\tau)}\right)^r$، که در آن $r = \frac{24}{p-1}$.
در این صورت، اعداد صحیحی چون $a_1, \ldots, a_{p^2}$ وجود دارند به طوری که

$$j_p(\tau) = p^{r/2-1}\{a_1\Phi(\tau) + a_2\Phi^2(\tau) + \cdots + a_{p^2}\Phi^{p^2}(\tau)\} + c(0). \tag{۹}$$

برهان. بنابر قضیهٔ ۱۰.۴، داریم

$$pj_p\left(-\frac{1}{p\tau}\right) = x^{-p^2} - x^{-1} + I(x),$$

و، چون $12\alpha = r/2$، قضیهٔ ۸.۴ نتیجه می‌دهد که

$$p^{r/2}\Phi\left(-\frac{1}{p\tau}\right) = \frac{1}{\Phi(\tau)} = x^{-1} + I(x).$$

فرض کنیم $\psi(\tau) = p^{r/2}\Phi(-1/(p\tau))$. در این صورت، تفاضل

$$pj_p\left(-\frac{1}{p\tau}\right) - \{\psi(\tau)\}^{p^2}$$

دارای قطبی از مرتبهٔ نابیشتر از $p^2 - 1$ در $x = 0$ است، و بسط لوران در مجاورت $x = 0$ دارای ضرایب صحیح می‌باشد. لذا، عدد صحیحی مانند b_1 وجود دارد به طوری که

$$pj_p\left(-\frac{1}{p\tau}\right) - \{\psi(\tau)\}^{p^2} - b_1\{\psi(\tau)\}^{p^2-1}$$

دارای قطبی از مرتبهٔ نابیشتر از $p^2 - 2$ در $x = 0$ است، و بسط لوران در مجاورت $x = 0$ دارای ضرایب صحیح می‌باشد. در p^2 مرحله به تابع زیر خواهیم رسید:

$$f\left(-\frac{1}{p\tau}\right) = pj_p\left(-\frac{1}{p\tau}\right) - \{\psi(\tau)\}^{p^2} - b_1\{\psi(\tau)\}^{p^2-1} - \cdots - b_{p^2-1}\psi(\tau)$$

که در $x = 0$ تحلیلی بوده و دارای بسط به صورت سری توانی با ضرایب صحیح می‌باشد. به‌علاوه، تمام اعداد $b_1, \ldots, b_{p^2-1}$ صحیح می‌باشند. از تعویض τ با $-1/(p\tau)$ خواهیم داشت

$$f(\tau) = pj_p(\tau) - \{p^{r/2}\Phi(\tau)\}^{p^2} - b_1\{p^{r/2}\Phi(\tau)\}^{p^2-1} - \cdots - b_{p^2-1}\{p^{r/2}\Phi(\tau)\}.$$

اما $f(\tau)$ تحت $\Gamma_0(p)$ خودریخت بوده و در هر نقطهٔ τ از H تحلیلی است. تابع f در رأس $\tau = 0$ نیز (طبق ساخت) تحلیلی است. لذا، f در H کراندار است؛ درنتیجه، f ثابت می‌باشد. اما این ثابت مساوی $pc(0)$ است، زیرا $\Phi(\tau)$ در ∞ صفر می‌شود. لـــذا، داریم

$$pj_p(\tau) = \{p^{r/2}\Phi(\tau)\}^{p^2} + b_1\{p^{r/2}\Phi(\tau)\}^{p^2-1} + \cdots + b_{p^2-1}\{p^{r/2}\Phi(\tau)\} + pc(0).$$

درنتیجه، $j_p(\tau)$ به صورت (۹) قابل بیان می‌باشد.

قضیهٔ ۱۲.۴. *ضرایب بسط فوریهٔ $j(\tau)$ در همنهشتیهای زیر صدق می‌کنند.*

$$\begin{aligned} c(2n) &\equiv 0 \pmod{2^{11}} \\ c(3n) &\equiv 0 \pmod{3^5} \\ c(5n) &\equiv 0 \pmod{5^2} \\ c(7n) &\equiv 0 \pmod{7}. \end{aligned}$$

برهان. قضیهٔ پیش نشان می‌دهد که به ازای $p = 2, 3, 5, 7, 13$ داریم

$$c(pn) \equiv 0 \pmod{p^{(r/2)-1}},$$

که در آن $r = 24/(p-1)$. لذا، فقط با محاسبهٔ $(r/2) - 1$ همنهشتیهای بیان شده به‌دست می‌آید. توجه کنید که وقتی $p = 13$، $(r/2) - 1 = 0$؛ درنتیجه، در این حالت همنهشتی بدیهی به دست می‌آید.

تذکر. لنـــر [۲۳]، با چند بار استفاده از ایده‌های سابق‌الذکر، همنهشتیهای کلیترزیر را، که به ازای $\alpha \geq 1$ برقرارند، به دست آورد:

$$\begin{aligned} c(2^\alpha n) &\equiv 0 \pmod{2^{3\alpha+8}} \\ c(3^\alpha n) &\equiv 0 \pmod{3^{2\alpha+3}} \\ c(5^\alpha n) &\equiv 0 \pmod{5^{\alpha+1}} \\ c(7^\alpha n) &\equiv 0 \pmod{7^\alpha}. \end{aligned}$$

چون می‌دانیم که $c(13)$ بر 13 بخشپذیر نیست، همنهشتیهای از نوع فوق نمی‌توانند

برای 13 وجود داشته باشند. در سال ۱۹۵۸، موریس نیومن[1] [۲۹]، همنهشتیهایی از نوع متفاوت برای 13 به دست آورد. وی نشان داد که

$$c(13np) + c(13n)c(13p) + p^{-1}c\left(\frac{13n}{p}\right) \equiv 0 \pmod{13},$$

که در آن $p^{-1}p \equiv 1 \pmod{13}$ و، اگر x عددی صحیح نباشد، $c(x) = 0$. همنهشتیهای لنــر و نیومن در ۱۹۶۷ توسط اتکین[2] و اوبراین[3] [۵] تعمیم داده شدند.

تمرینات برای فصل ۴

۱. این تمرین تابع ددکیند $\eta(\tau)$ را به تابع تتای ژاکوبی $\vartheta(\tau)$، که بر H با معادلهٔ

$$\vartheta(\tau) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau}$$

تعریف می‌شود، ربط می‌دهد. این تعریف نشان‌می‌دهد که ϑ در H تحلیلی و متناوب با دورهٔ تناوب 2 می‌باشد.

اتحاد حاصل‌ضرب سه‌گانهٔ ژاکوبی (قضیهٔ ۱۴.۶ در [۴]) می‌گویدکه‌اگر $z \neq 0$ و $|x| < 1$،

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^{2n})(1 + x^{2n-1}z^2)(1 + x^{2n-1}z^{-2}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^{m^2}z^{2m}$$

(آ) نشان دهید که x و z را می‌توان طوری اختیار کرد که نمایش حاصل‌ضربی

$$\vartheta(\tau) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{2\pi i n\tau})(1 + e^{(2n-1)\pi i\tau})^2$$

به دست آید. این ایجاب می‌کند که $\vartheta(\tau)$ هرگز در H صفر نباشد.

(ب) اگر $\tau \in H$، ثابت کنید

$$\vartheta(\tau) = \frac{\eta^2\left(\frac{\tau+1}{2}\right)}{\eta(\tau+1)}.$$

(پ) ثابت کنید که $\vartheta(-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2}\vartheta(\tau)$.

---

1. Morris Newman
2. Atkin
3. O'Brien

راهنمایی. اگر $S\tau = -1/\tau$، عناصر A و B از Γ را طوری بیابید که

$$\frac{S\tau + 1}{2} = A\left(\frac{\tau + 1}{2}\right) \quad \text{و} \quad S\tau + 1 = B(\tau + 1) \cdot$$

۲. فرض کنید G زیرگروهی از Γ باشد که به‌وسیلهٔ تبدیلات S و T^2 تولید می‌شود، که $S\tau = -1/\tau$ و $T\tau = \tau + 1$.

(آ) اگر $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$، ثابت کنید $a \equiv d \pmod 2$ و $b \equiv c \pmod 2$.

(ب) اگر $V \in G$، ثابت کنید عناصری چون A و B از Γ وجود دارند به طوری که

$$\frac{V\tau + 1}{2} = A\left(\frac{\tau + 1}{2}\right) \quad \text{و} \quad V\tau + 1 = B(\tau + 1) \cdot$$

(پ) اگر $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ و $c > 0$، ثابت کنید

$$\vartheta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \varepsilon(a, b, c, d)\{-i(c\tau + d)\}^{1/2}\vartheta(\tau),$$

که در آن $|\varepsilon(a, b, c, d)| = 1$. $\varepsilon(a, b, c, d)$ را برحسب مجموعهای ددکیند بیان نمایید.

تمرینهای ۳ تا ۸ برهان کوتاهی (منسوب به موردل[1] [۲۷]) از ضربی بودن تابع رامانوجان $\tau(n)$ را به دست می‌دهند. به یاد می‌آوریم که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)e^{2\pi i n\tau} = (2\pi)^{-12}\Delta(\tau) = e^{2\pi i\tau}\prod_{m=1}^{\infty}(1 - e^{2\pi i m\tau})^{24}.$$

۳. فرض کنید p اول بوده و k صحیح باشد، که $1 \le k \le p - 1$. نشان دهید عدد صحیحی چون h وجود دارد به طوری که

$$\tau^{12}\Delta\left(\frac{\tau + h}{p}\right) = \Delta\left(\frac{k\tau - 1}{p\tau}\right)$$

و h در یک دستگاه مانده‌ای تحویل یافته به هنگ p با k تغییر می‌کند.

۴. اگر p اول باشد، تعریف کنید

$$F_p(\tau) = p^{11}\Delta(p\tau) + \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\Delta\left(\frac{\tau + k}{p}\right).$$

---

1. Mordell

ثابت کنید که

(آ) $F_p(\tau+1)=F_p(\tau)$ ؛ (ب) $F_p\left(\frac{-1}{\tau}\right)=\tau^{12}F_p(\tau)$.

تذکر. تمرین ۳ برای قسمت (ب) مفید است.

۵. ثابت کنید $F_p(\tau)=\tau(p)\Delta(\tau)$ ، که در آن $\tau(p)$ تابع رامانوجان است.

۶. فرمولهای زیر را با استفاده از تمرینهای ۴ و ۵ نتیجه بگیرید:

(آ) به ازای $n\geq 1$ ، $\tau(p^{n+1})=\tau(p)\tau(p^n)-p^{11}\tau(p^{n-1})$ ؛

(ب) به ازای $\alpha\geq 2$ و $(n,p)=1$ ، $\tau(p^\alpha n)=\tau(p)\tau(p^{\alpha-1}n)-p^{11}\tau(p^{\alpha-2}n)$.

۷. اگر α عددی صحیح بوده ، $\alpha\geq 0$ ، و $(n,p)=1$ ، قرار دهید

$$g(\alpha)=\tau(p^\alpha n)-\tau(p^\alpha)\tau(n).$$

نشان دهید که به ازای $\alpha\geq 2$ ، $g(\alpha+1)$ ترکیبی خطی از $g(\alpha)$ و $g(\alpha-1)$ است ، و نتیجه بگیرید که به ازای هر α ، $g(\alpha)=0$.

۸. ثابت کنید که

$$\tau(m)\tau(n)=\sum_{d\mid(m,n)}d^{11}\tau\left(\frac{mn}{d^2}\right).$$

بخصوص، وقتی $(m,n)=1$ ، این ایجاب خواهد کرد که $\tau(m)\tau(n)=\tau(mn)$.

۹. اگر $\tau\in H$ و $x=e^{2\pi i\tau}$ ، ثابت کنید

$$\left\{504\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_5(n)x^n\right\}^2=\{j(\tau)-12^3\}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)x^n,$$

که در آن $\sigma_5(0)=-1/504$. با متحد گرفتن ضرایب x^n ، اتحاد زیر را به‌دست‌آورید:

$$(504)^2\sum_{k=0}^{n}\sigma_5(k)\sigma_5(n-k)=\tau(n+1)-984\tau(n)+\sum_{k=1}^{n-1}c(k)\tau(n-k).$$

۱۰. با استفاده از تمرین ۹ همراه با تمرین ۱۰ از فصل ۶، ثابت کنید

$$\frac{65520}{691}\{\sigma_{11}(n)-\tau(n)\}=\tau(n+1)+24\tau(n)+\sum_{k=1}^{n-1}c(k)\tau(n-k).$$

از این فرمول، که منسوب به لمر [۱۹] است، می‌توان برای تعیین ضرایب $c(n)$ برحسب $\tau(n)$ به‌طور بازگشتی استفاده کرد. چون طرف راست عددی صحیح است، فرمول همنهشتی جالب رامانوجان

$$\tau(n)\equiv\sigma_{11}(n)\pmod{691}$$

را نیز ایجاب خواهد کرد.

۵
سری رادماخر برای تابع افراز

۱.۵ مقدمه

تابع افراز نامقید $p(n)$ تعداد طرقی را می‌شمارد که یک عدد صحیح مثبت n را می‌توان به صورت مجموعی از اعداد صحیح مثبت نابیشتر از n بیان کرد. تعداد جمعوندها نامقید بوده، تکرار مجاز است، و ترتیب جمعوندها به حساب نمی‌آید.

تابع افراز به‌وسیلهٔ حاصل‌ضرب نامتناهی اویلر[۱]

$$F(x) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^m} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n \tag{۱}$$

تولید می‌شود، که در آن $p(0) = 1$. حاصل‌ضرب و سری در قرص یکهٔ $|x| < 1$ به‌طور مطلق همگرا بوده و تابع تحلیلی F را نمایش می‌دهند. برهان (۱) و سایر خواص مقدماتی $p(n)$ را می‌توان در فصل ۱۴ از [۴] یافت. این فصل در رابطه با رفتار $p(n)$ به ازای n های بزرگ می‌باشد.

تابع افراز $p(n)$ در رابطهٔ مجانبی

$$p(n) \sim \frac{e^{K\sqrt{n}}}{4n\sqrt{3}} \quad \text{،} \ n \to \infty \ \text{وقتی}$$

صدق می‌کند، که‌در آن $K = \pi(2/3)^{1/2}$. این رابطه ابتدا توسط هاردی[۲] و رامانوجان [۱۳] در ۱۹۱۸ و، مستقلاً"، توسط ج.وی. اوسپنسکی[۳] [۴۶] در ۱۹۲۰، کشف شد. هاردی و رامانوجان چیز بیشتری را ثابت کردند. این دو تن فرمول مجانبی جالب زیر را به دست آوردند:

$$p(n) = \sum_{k < \alpha\sqrt{n}} P_k(n) + O(n^{-1/4}), \tag{۲}$$

که در آن α ثابت بوده و $P_1(n)$ جملهٔ غالب است که با $e^{K\sqrt{n}}/(4n\sqrt{3})$ مجانبی می‌باشد.

---

1. Euler 2. Hardy 3. J. V. Uspensky

جملات $P_2(n), P_3(n), \ldots$ از نوع مشابه‌اند ولی با ثابتهای کوچکتری به جای K درنمایی. چون $p(n)$ عددی صحیح است، وقتی n آنقدر بزرگ باشد که کوچکتر از $1/2$ بودن جملهٔ خطا را تضمین کند، مجموع متناهی سمت راست (۲) دقیقاً $p(n)$ را می‌دهد. این نمونهٔ نادری است از یک فرمول که هم مجانبی و هم کامل می‌باشد. در اغلب فرمولهای مجانبی از این نوع، مجموع نامتناهی

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k(n) \qquad (۳)$$

به ازای هر n واگراست. در سال ۱۹۳۷، واگرایی (۳) توسط دی. اچ. لمر [۲۰] نشان داده شد.

هانس رادماخر، وقتی در ۱۹۳۷ یادداشتهای خود را در مورد کارهای هاردی و رامانوجان آماده می‌کرد، تغییر مختصری در تحلیل داد که به جملات کمی متفاوت $R_k(n)$ به جای $P_k(n)$ در (۲) منجر شد. این امر اثری عمیق بر نتیجهٔ نهایی گذارد، زیرا رادماخر به جای (۲) سری همگرای

$$p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(n) \qquad (۴)$$

را به دست آورد. شکل دقیق جملات رادماخر $R_k(n)$ ذیلاً در قضیهٔ ۵.۱۰ توصیف شده‌اند. رادماخر [۳۴] نیز نشان داد که باقیمانده پس از N جمله، وقتی N از مرتبهٔ $\sqrt{n}$ باشد، $O(n^{-1/4})$ است، و این با (۲) سازگار می‌باشد.

این فصل به برهانی از فرمول دقیق رادماخر برای $p(n)$ اختصاص دارد. به این برهان توجهی خاصی می‌شود، زیرا نمایش یکی از کارهای بزرگ هاردی، رامانوجان، لیتلوود[1] "به نام روش دایره‌ای" است که در بسیاری از مسائل نظریهٔ جمعی اعداد بی‌نهایت موفقیت‌آمیز بوده است. این برهان همچنین کاربرد جالبی از تابع هنگی ددکیند $\eta(\tau)$ را نشان خواهد داد.

۵.۲ طرح برهان

در این بخش طرح نادقیقی از برهان داده می‌شود. نقطهٔ شروع فرمول اویلر (۱) است که ایجاب می‌کند که به ازای هر $n \geq 0$،

$$\frac{F(x)}{x^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p(k)x^k}{x^{n+1}} \quad ، \quad 0 < |x| < 1 \text{ اگر}$$

سری اخیر بسط لوران $F(x)/x^{n+1}$ در قرص سفتهٔ

1. Littlewood

$1 > |x| > 0$ است . این تابع در $x = 0$ قطبی با ماندهٔ $p(n)$ دارد؛ درنتیجه، بنابرقضیهٔ ماندهٔ کشی ، داریم

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(x)}{x^{n+1}} dx,$$

که در آن C یک‌کنتور بستهٔ ساده با جهت مثبت است که در دایرهٔ یکه قرار داشته و مبداء را دربرمی‌گیرد . ایدهٔ اصلی روش دایره‌ای انتخاب‌کنتور C است که در مجاورت انفرادهای تابع $F(x)$ قرار داشته باشد .

عوامل‌موجوددرحاصل‌ضرب‌معرف $F(x)$ هروقت... $x = 1, x^2 = 1, x^3 = \bar{1}$ صفرمی‌شوند درنتیجه ، هر ریشهٔ واحد یک انفراد $F(x)$ است . در روش دایره‌ای یک کنتور مستدیر مانند C به شعاع تقریبا" 1 اختیارشده‌و C به قوسهای $C_{h,k}$ که نزدیک ریشه‌های‌واحد $e^{2\pi ih/k}$ قرار دارند تقسیم می‌شود ، که $0 \le h < k$ ، $(h, k) = 1$ ، و $k = 1, 2, \ldots, N$. انتگرال در امتداد C را می‌توان به صورت مجموعی متناهی از انتگرالها در امتداد این قوسها نوشت :

$$\int_C = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{h=0 \\ (h,k)=1}}^{k-1} \int_{C_{h,k}}$$

بر هر قوس $C_{h,k}$ ، تابع $F(x)$ در انتگرالده با یک‌تابع مقدماتی مانند $\psi_{h,k}(x)$ تعویض‌می‌شود که اساسا" همان رفتار F را در مجاورت انفراد $e^{2\pi ih/k}$ دارد . این تابع مقدماتی $\psi_{h,k}$ از معادلهٔ تابعی صادق به وسیلهٔ تابع اتای ددکیند $\eta(\tau)$ به طور طبیعی ناشی می‌شود . توابع F و η با معادلهٔ

$$F(e^{2\pi i\tau}) = e^{\pi i\tau/12}/\eta(\tau)$$

به هم مربوط شده‌اند ، و معادلهٔ تابعی نسبت به η فرمولی به دست می‌دهد که رفتار F را در مجاورت هر انفراد $e^{2\pi ih/k}$ توصیف‌خواهدکرد . تعویض F با $\psi_{h,k}$ خطایی به‌بار می‌آورد که باید تخمین زده شود . سپس انتگرالهای $\psi_{h,k}$ در امتداد C حساب شده ، و مجموع آنها روی h جملهٔ $R_k(n)$ در سری رادماخر را تولید خواهد کرد .

در سال ۱۹۴۳ ، رادماخر [۳۶] روش دایره‌ای را به وسیلهٔ تعویض کنتور مستدیر با کنتور دیگری در صفحهٔ τ که در آن $x = e^{2\pi i\tau}$ تعدیل نمود . این مسیر انتگرالگیری جدید تخمینهای لازم را ساده‌کرده و نحوهٔ سهیم‌بودن انفرادها در فرمول نهایی را روشن‌نمود .

در بخش بعد معادلهٔ تابعی ددکیند برحسب F بیان می‌شود . در بخشهای ۵.۵ و ۶.۵ مسیر انتگرالگیری که رادماخر به کار برده است توصیف می‌شود ، و در بخش ۷.۵

برنامه‌ای که فوقا" به اختصار بیان شده به انجام خواهد رسید .

۳.۵ معادلهٔ تابعی ددکیند بیان شده برحسب F

قضیهٔ ۱.۵ . فرض کنیم $F(t) = 1/\prod_{m=1}^{\infty} (1 - t^m)$ و

$$x = \exp\left(\frac{2\pi ih}{k} - \frac{2\pi z}{k^2}\right), \qquad x' = \exp\left(\frac{2\pi iH}{k} - \frac{2\pi}{z}\right), \tag{۵}$$

که در آن $\mathrm{Re}(z) > 0$ ، $k > 0$ ، $(h, k) = 1$ و $hH \equiv -1 \pmod k$. در این صورت ،

$$F(x) = e^{\pi is(h,k)}\left(\frac{z}{k}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{\pi}{12z} - \frac{\pi z}{12k^2}\right)F(x'). \tag{۶}$$

تذکر . اگر $|z|$ کوچک باشد ،نقطهٔ x در (۵) نزدیک ریشهٔ واحد $e^{2\pi ih/k}$ قرار دارد،حال آنکه x' نزدیک مبداء واقع است .لذا ، $F(x')$ تقریبا" مساوی $F(0) = 1$ است ، ومعادلهٔ (۶) رفتار F را در مجاورت انفراد $e^{2\pi ih/k}$ به ما می‌دهد . صرف‌نظر از یک عامل ثابت ، به ازای $|z|$ کوچک ، F مانند

$$z^{1/2}\exp\left(\frac{\pi}{12z}\right)$$

رفتار می‌کند .

برهان . اگر $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ و $c > 0$ ، معادلهٔ تابعی مربوط به $\eta(\tau)$ ایجاب می‌کند که

$$\frac{1}{\eta(\tau)} = \frac{1}{\eta(\tau')}\{-i(c\tau + d)\}^{1/2}\exp\left\{\pi i\left(\frac{a + d}{12c} + s(-d, c)\right)\right\}, \tag{۷}$$

که در آن $\tau' = (a\tau + b)/(c\tau + d)$. چون $F(e^{2\pi i\tau}) = e^{\pi i\tau/12}/\eta(\tau)$ ، رابطهٔ (۷) ایجاب می‌کند که

$$F(e^{2\pi i\tau}) = F(e^{2\pi i\tau'})\exp\left(\frac{\pi i(\tau - \tau')}{12}\right)\{-i(c\tau + d)\}^{1/2} \tag{۸}$$

$$\times\exp\left\{\pi i\left(\frac{a + d}{12c} + s(-d, c)\right)\right\}$$

حال مقادیر

$$a = H \text{ ، } c = k \text{ ، } d = -h \text{ ، } b = -\frac{hH + 1}{k} \text{ ، و } \tau = \frac{iz + h}{k}$$

را اختیار می‌کنیم . در این صورت ،

$$\tau' = \frac{iz^{-1} + H}{k}$$

و رابطهٔ (۸) به صورت زیر درمی‌آید :

$$F\left(\exp\left(\frac{2\pi ih}{k} - \frac{2\pi z}{k}\right)\right) = F\left(\exp\left(\frac{2\pi iH}{k} - \frac{2\pi}{kz}\right)\right)z^{1/2}$$

$$\times \exp\left\{\frac{\pi}{12kz} - \frac{\pi z}{12k} + \pi is(h, k)\right\}.$$

از این به‌وسیلهٔ تعویض z با z/k رابطهٔ (۶) به دست می‌آید .

۴ . ۵ کسرهای فاری[1]

کار بعدی ما توصیف مسیر انتگرالگیری است که رادماخر به کار برده است . این مسیر با مجموعه‌ای از کسرهای تحویل یافته در بازهٔ یکه ارتباط دارد که به **کسرهای فاری** معروفند . در این بخش این کسرها و بعضی از خواص آنها توصیف خواهد شد .

تعریف . مجموعهٔ کسرهای فاری از مرتبهٔ n ، که با F_n نموده می‌شود ، مجموعهٔ کسرهای تحویل یافته در بازهٔ بستهٔ $[0, 1]$ با مخرجهای نابیشتر از n است که به ترتیب صعودی اندازه لیست شده باشند .

چند مثال .

F_1: $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}$

F_2: $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$

F_3: $\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$

F_4: $\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}$

F_5: $\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}$

F_6: $\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}$

F_7: $\frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}$

این مثالها چند خاصیت‌کلی کسرهای فاری را توضیح‌می‌دهند . مثلاً" ، $F_n \subset F_{n+1}$ درنتیجه ، با درج کسرهای جدیدی در F_n ، F_{n+1} به دست می‌آید . هرگاه $(a/b) < (c/d)$ در F_n متوالی بوده و در F_{n+1} جدا از هم باشند ، آنگاه کسر $(a + c)/(b + d)$ جدایی را

---

1. Farey

انجام می‌دهد، و چیز جدیدی بین a/b و c/d درج نمی‌شود. این کسر جدید **میانهٔ** a/b و c/d نام دارد.

قضیهٔ ۲.۵. *اگر* $(a/b) < (c/d)$، *میانهٔ آنها* $(a+c)/(b+d)$ *بین آنها قرار دارد.*

برهان.

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} > 0 \quad \text{و} \quad \frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{bc-ad}{d(b+d)} > 0 \ .$$

مثالهای فوق نشان می‌دهندکه $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{5}$ کسرهایی متوالی در F_n، به‌ازای $n = 5, 6, 7$، هستند. این امر خاصیت کلی زیر را توضیح می‌دهد.

قضیهٔ ۳.۵. *فرض کنیم* $0 \le a/b < c/d \le 1$. *هرگاه* $bc - ad = 1$، *آنگاه، به ازای مقادیر زیر از* n،

$$\max(b, d) \le n \le b + d - 1.$$

a/b *و* c/d *جملاتی متوالی در* F_n *می‌باشند.*

برهان. شرط $bc - ad = 1$ ایجاب می‌کندکه a/b و c/d تحویل‌ناپذیرند. هرگاه $\max(b, d) \le n$ آنگاه $b \le n$ و $d \le n$؛ درنتیجه، a/b و c/d مسلماً در F_n هستند. حال ثابت می‌کنیم درصورتی متوالی‌اند که $n \le b + d - 1$. اگر متوالی نباشند، کسر دیگری مانند h/k بین آنها وجود دارد، $a/b < h/k < c/d$. اما می‌توان نشان داد که $k \ge b + d$، زیرا اتحاد زیر در دست است:

$$k = (bc - ad)k = b(ck - dh) + d(bh - ak). \qquad (۹)$$

اما نامساویهای $a/b < h/k < c/d$ نشان می‌دهند که $ck - dh \ge 1$ و $bh - ak \ge 1$؛ درنتیجه، $k \ge b + d$. لذا، هر کسر h/k که بین a/b و c/d واقع باشد دارای مخرج $k \ge b + d$ است. پس، هرگاه $n \le b + d - 1$، آنگاه a/b و c/d باید در F_n متوالی باشند. این برهان را تمام خواهد کرد.

معادلهٔ (۹) قضیهٔ زیر را نیز به دست می‌دهد.

قضیهٔ ۴.۵. به فرض آنکه $0 \le a/b < c/d \le 1$ که $bc - ad = 1$، h/k را میانهٔ a/b

و c/d می‌گیریم . در این صورت ، $a/b < h/k < c/d$ ، و این کسرها در روابط تک‌هنگی زیر صدق می‌کنند:

$$bh - ak = 1, \qquad ck - dh = 1.$$

برهان . چون h/k بین a/b و c/d واقع است ، داریم $bh - ak \geq 1$ و $ck - dh \geq 1$. معادلهٔ (۹) نشان می‌دهد که $k = b + d$ اگر و فقط اگر $bh - ak = ck - dh = 1$.

قضایای فوق به ما طرز ساختن F_{n+1} از F_n را بازگو می‌کنند .

قضیهٔ ۵.۵ . *مجموعهٔ F_{n+1} شامل F_n است . هر کسر در F_{n+1} که در F_n نباشد میانهٔ یک جفت از کسرهای متوالی در F_n است . به‌علاوه ، هرگاه $a/b < c/d$ در یک F_n متوالی باشند آنگاه در رابطهٔ تک هنگی $bc - ad = 1$ صدق خواهند کرد .*

برهان . از استقرا روی n استفاده می‌کنیم . وقتی $n = 1$ ، کسرهای $0/1$ و $1/1$ متوالی بوده و در رابطهٔ تک هنگی صدق می‌کنند . از F_1 با درج میانهٔ $1/2$ به F_2 می‌رویم . فرض کنیم a/b و c/d در F_n متوالی بوده و در رابطهٔ تک هنگی $bc - ad = 1$ صدق کنند . بنابر قضیهٔ ۳.۵ ، به ازای هر m صادق در

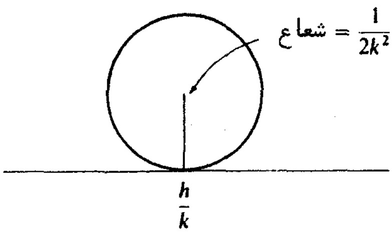
$$\max(b, d) \leq m \leq b + d - 1$$

در F_m متوالی می‌باشند . میانهٔ h/k آنها را تشکیل می‌دهیم ، که در آنها $h = a + c, k = b + d$ بنابر قضیهٔ ۴.۵ داریم $bh - ak = 1$ و $ck - dh = 1$ ؛ درنتیجه ، h و k نسبت به هم اول می‌باشند . کسرهای a/b و c/d به ازای هر m صادق در $\max(b, d) \leq m \leq b + d - 1$ در F_m متوالی‌اند ، ولی در F_k متوالی نیستند زیرا $k = b + d$ و h/k در F_k بین a/b و c/d قراردارد . اما دوجفت $a/b < h/k$ و $h/k < c/d$ جدید در F_k متوالی‌اند، زیرا $k = \max(b, k)$ و $k = \max(d, k)$. جفتهای متوالی جدیدهنوز در روابط تک‌هنگی $bh - ak = 1$ و $ck - dh = 1$ صدق می‌کنند . این نشان می‌دهد که ، برای رفتن از F_n به F_{n+1} ، هر کسر جدید درج‌شده میانهٔ دو زوج متوالی از F_n بوده‌و در روابط تک‌هنگی صدق می‌کند . لذا ، F_{n+1} این خواص را درصورتی دارد که F_n نیز از آنها برخوردار باشد .

۵.۵ دوایر فورد

تعریف . عدد گویای h/k با خاصیـــت $(h, k) = 1$ داده شده است . ***دایرهٔ فورد*** متعلق‌به

این کسر با $C(h, k)$ نموده شده و دایره‌ای است در صفحهٔ مختلط به شعاع $1/(2k^2)$ و مرکز نقطهٔ $(h/k) + i/(2k^2)$ (ر.ک. شکل ۱.۵) .



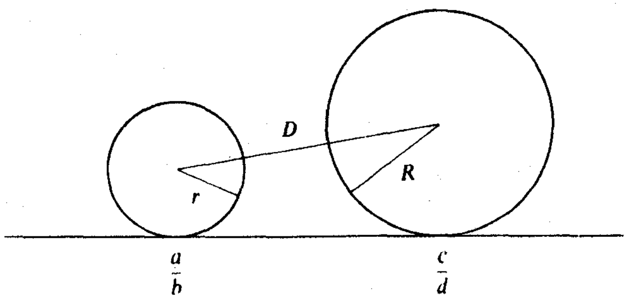
شکل ۱.۵ دایرهٔ فورد $C(h, k)$

دوایر فورد به افتخار ال. آر. فورد[1] [۹] ، که اول بار خواص آنها را در ۱۹۳۸ بررسی کرد ، نامگذاری شده‌اند .

قضیهٔ ۶.۵. دو دایرهٔ فورد $C(a, b)$ و $C(c, d)$ یا برهم مماسند یا نقطهٔ مشترک ندارند. برهم مماسند اگر و فقط اگر $bc - ad = \pm 1$. بخصوص ، دوایر فورد کسرهای فاری متوالی برهم مماس می‌باشند .

برهان . مجذور فاصلهٔ D بین مراکز مساوی است با (ر.ک. شکل ۲.۵)

$$D^2 = \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right)^2 + \left(\frac{1}{2b^2} - \frac{1}{2d^2}\right)^2,$$



شکل ۲.۵

1. L. R. Ford

حال آنکه مجذور مجموع شعاعهای آنها برابر است با

$$(r+R)^2 = \left(\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2d^2}\right).$$

تفاضل $D^2 - (r+R)^2$ مساوی است با

$$D^2 - (r+R)^2 = \left(\frac{ad-bc}{bd}\right)^2 + \left(\frac{1}{2b^2} - \frac{1}{2d^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2d^2}\right)^2$$
$$= \frac{(ad-bc)^2 - 1}{b^2d^2} \geq 0.$$

به‌علاوه، تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $(ad-bc)^2 = 1$.

قضیهٔ ۵.۷. فرض کنید $h_1/k_1 < h/k < h_2/k_2$ سه کسر فاری متوالی باشند. نقاط تماس $C(h, k)$ با $C(h_1, k_1)$ و $C(h_2, k_2)$ عبارتند از

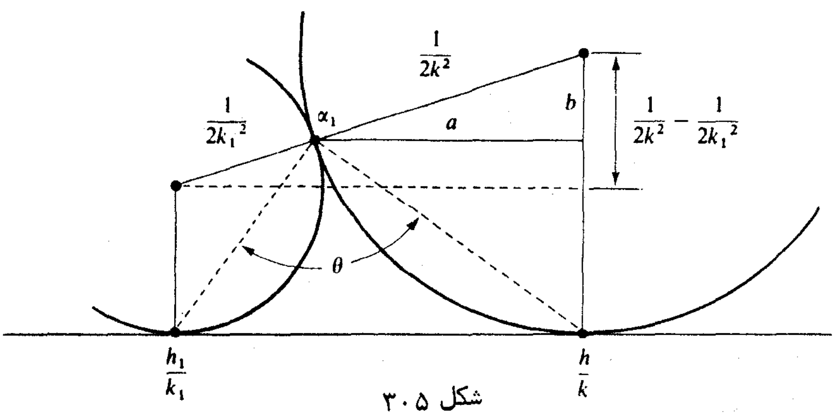
$$\alpha_1(h, k) = \frac{h}{k} - \frac{k_1}{k(k^2 + k_1{}^2)} + \frac{i}{k^2 + k_1{}^2}$$

و

$$\alpha_2(h, k) = \frac{h}{k} + \frac{k_2}{k(k^2 + k_2{}^2)} + \frac{i}{k^2 + k_2{}^2}.$$

به‌علاوه، نقطهٔ تماس $\alpha_1(h, k)$ بر نیمدایره‌ای قرار دارد که قطرش بازهٔ $[h_1/k_1, h/k]$ می‌باشد.

برهان. به شکل ۳.۵ رجوع می‌کنیم. به جای $\alpha_1(h, k)$ می‌نویسیم α_1 . این شکل نشان



شکل ۳.۵

می‌دهد که

$$\alpha_1 = \left(\frac{h}{k} - a\right) + i\left(\frac{1}{2k^2} - b\right).$$

برای تعیین a و b به مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متشابه متوسل شده و به دست می‌آوریم

$$\frac{a}{\dfrac{h}{k} - \dfrac{h_1}{k_1}} = \frac{\dfrac{1}{2k^2}}{\dfrac{1}{2k^2} + \dfrac{1}{2k_1^2}} = \frac{k_1^2}{k^2 + k_1^2} \quad \text{؛ درنتیجه،} \quad a = \frac{k_1}{k(k^2 + k_1^2)}.$$

به همین نحو، داریم

$$\frac{b}{\dfrac{1}{2k^2}} = \frac{\dfrac{1}{2k^2} - \dfrac{1}{2k_1^2}}{\dfrac{1}{2k^2} + \dfrac{1}{2k_1^2}} = \frac{k_1^2 - k^2}{k_1^2 + k^2} \quad \text{؛ درنتیجه،} \quad b = \frac{1}{2k^2}\frac{k_1^2 - k^2}{k^2 + k_1^2}.$$

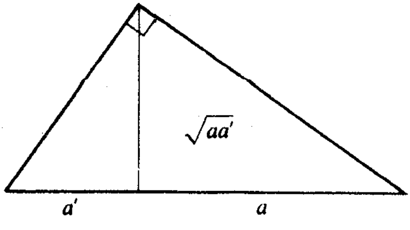
اینها فرمول مطلوب برای α_1 را می‌دهند، و به تشابه می‌توان فرمول نظیر برای α_2 را به دست آورد.

برای اثبات آخرین حکم، کافی است نشان دهیم زاویهٔ θ در شکل ۳.۵ مساوی $\pi/2$ است. برای این کار کافی است ثابت کنیم قسمت موهومی $\alpha_1(h, k)$ میانگین هندسی a و a' است که

$$a' = \frac{h}{k} - \frac{h_1}{k_1} - a = \frac{1}{kk_1} - a \quad \text{و} \quad a = \frac{k_1}{k(k^2 + k_1^2)}$$

(ر.ک. شکل ۴.۵). داریم

$$\begin{aligned} aa' &= \frac{k_1}{k(k^2 + k_1^2)}\left(\frac{1}{kk_1} - \frac{k_1}{k(k^2 + k_1^2)}\right) \\ &= \frac{k_1}{k^2(k^2 + k_1^2)}\left(\frac{k^2}{k_1(k^2 + k_1^2)}\right) = \frac{1}{(k^2 + k_1^2)^2}, \end{aligned}$$



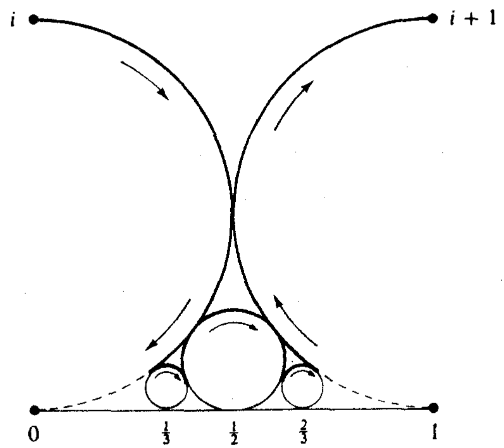
شکل ۴.۵

و با این برهان کامل خواهد شد .

۶.۵ مسیر انتگرالگیری رادماخر

به ازای هر عدد صحیح N ، مسیر $P(N)$ واصل بین نقاط i و $i + 1$ را به صورت زیر می‌سازیم . دوایر فورد سری فاری F_N را درنظر می‌گیریم . اگر $h_1/k_1 < h/k < h_2/k_2$ در F_N متوالی باشند ، نقاط تماس $C(h_1, k_1)$ ، $C(h, k)$ ، و $C(h_2, k_2)$ ، $C(h, k)$ را به دو قوس، قوس بالایی و قوس پایینی ، تقسیم می‌کند . $P(N)$ اجتماع قوسهای بالایی به دست آمده است . برای کسرهای $0/1$ و $1/1$ فقط بخشی از قوسهای بالایی را به کار می‌بریم که بالای بازهٔ $[0, 1]$ قرار دارند .

مثال . شکل ۵.۵ مسیر $P(3)$ را نشان می‌دهد .



شکل ۵.۵ مسیر رادماخر $P(3)$

به‌خاطر قضیهٔ ۷.۵ ، مسیر $P(N)$ همواره روی نیمدایره‌هایی واقع است که‌کسرهای‌فاری مجاور در F_N را به هم ربط می‌دهند .

مسیر $P(N)$ کنتوری است که رادماخر به عنوان مسیر انتگرالگیری به کار برده‌است .در اینجا شایسته است اثر تغییر متغیر بر هر دایرهٔ $C(h, k)$ را مورد بحث قرار دهیم .

قضیهٔ ۸.۵ . تبدیل

$$z = -ik^2\left(\tau - \frac{h}{k}\right)$$

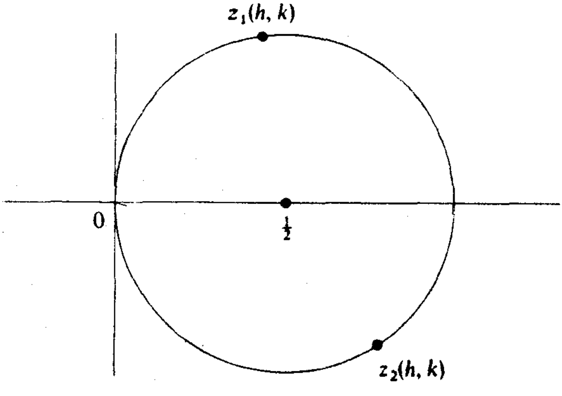
دایرهٔ فورد $C(h, k)$ در صفحهٔ τ را روی دایرهٔ K در صفحهٔ z به شعاع $\frac{1}{2}$ حول نقطهٔ $z = \frac{1}{2}$ به عنوان مرکز می‌نگارد (ر.ک. شکل ۶.۵). نقاط تماس $\alpha_1(h, k)$ و $\alpha_2(h, k)$ قضیهٔ ۷.۵ به نقاط

$$z_1(h, k) = \frac{k^2}{k^2 + k_1{}^2} + i\frac{kk_1}{k^2 + k_1{}^2}$$

و

$$z_2(h, k) = \frac{k^2}{k^2 + k_2{}^2} - \frac{ikk_2}{k^2 + k_2{}^2}.$$

نگاشته می‌شوند. قوس بالایی واصل بین $\alpha_1(h, k)$ و $\alpha_2(h, k)$ روی قوس K که با محور z موهومی تماس ندارد نگاشته می‌شود.



صفحهٔ z

شکل ۶.۵

برهان. انتقال $\tau - (h/k)$، $C(h, k)$ را به اندازهٔ h/k به چپ برده، و بدین ترتیب مرکزش را در $i/(2k^2)$ قرار می‌دهد. ضرب در $-ik^2$ شعاع را به $1/2$ توسیع داده و دایره‌را در جهت منفی به اندازهٔ $\pi/2$ رادیان می‌چرخاند. عبارات مربوط به $z_1(h, k)$ و $z_2(h, k)$ فوراً" به دست می‌آیند.

حال برای هنگهای z_1 و z_2 تخمینهایی به دست می‌آوریم.

قضیهٔ ۹.۵ . *به ازای نقاط z_1 و z_2 قضیهٔ ۸.۵ ، داریم*

$$|z_1(h,k)| = \frac{k}{\sqrt{k^2 + {k_1}^2}}, \quad |z_2(h,k)| = \frac{k}{\sqrt{k^2 + {k_2}^2}}. \tag{۱۰}$$

به‌علاوه ، اگر z بر وتر بین z_1 و z_2 بوده ، و $h_1/k_1 < h/k < h_2/k_2$ در F_N متوالی باشند ، خواهیم داشت

$$|z| < \frac{\sqrt{2}k}{N}. \tag{۱۱}$$

طول این وتر از $2\sqrt{2}k/N$ تجاوز نخواهد کرد .

برهان . برای $|z_1|^2$ داریم

$$|z_1|^2 = \frac{k^4 + k^2{k_1}^2}{(k^2 + {k_1}^2)^2} = \frac{k^2}{k^2 + {k_1}^2}.$$

فرمول مشابهی برای $|z_2|^2$ وجود دارد. این رابطهٔ (۱۰) را ثابت می‌کند . برای اثبات (۱۱) توجه می‌کنیم که اگر z بر وتر واقع باشد ، $|z| \le \max(|z_1|, |z_2|)$ ؛ لذا ، کافی است ثابت کنیم

$$|z_1| < \frac{\sqrt{2}k}{N} \text{ و } |z_2| < \frac{\sqrt{2}k}{N} \text{ .} \tag{۱۲}$$

بدین منظور ، از نامساوی استفاده می‌کنیم که میانگین حسابی را به ریشهٔ میانگین مربعی ربط می‌دهد :

$$\frac{k + k_1}{2} \le \left(\frac{k^2 + {k_1}^2}{2}\right)^{1/2}$$

از این نتیجه می‌شود که

$$(k^2 + {k_1}^2)^{1/2} \ge \frac{k + k_1}{\sqrt{2}} \ge \frac{N + 1}{\sqrt{2}} > \frac{N}{\sqrt{2}},$$

درنتیجه ، (۱۰) و (۱۲) رابطهٔ (۱۱) را ایجاب می‌کنند . طول وتر از $|z_1| + |z_2|$ نابیشتر می‌باشد .

۷.۵ سری همگرای رادماخر برای $p(n)$

قضیهٔ ۱۰.۵ . *اگر $n \ge 1$ ، تابع افراز $p(n)$ با سری همگرای زیر نموده می‌شود :*

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k}\, \frac{d}{dn} \left(\frac{\sinh\left\{\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(n - \frac{1}{24}\right)}\right\}}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \right)$$

که در آن

$$A_k(n) = \sum_{\substack{0 \le h < k \\ (h,k)=1}} e^{\pi i s(h,k) - 2\pi i n h/k}.$$

برهان. داریم

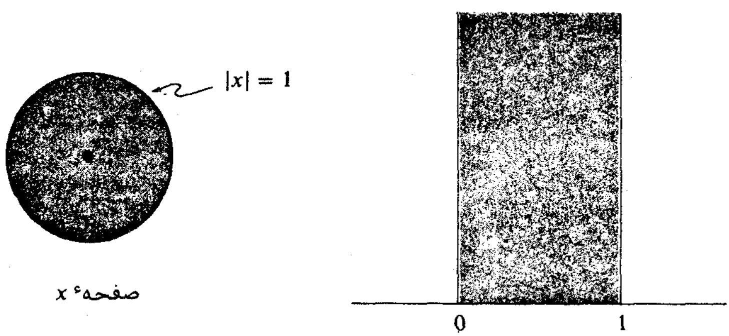
$$p(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(x)}{x^{n+1}}\, dx \quad \text{که در آن} \quad F(x) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^m)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n \, , \qquad (۱۳)$$

C یک منحنی بسته با جهت‌مثبت حول $x = 0$ است که داخل دایرهٔ یکه قرار دارد. تغییر متغیر

$$x = e^{2\pi i \tau}$$

قرص یکهٔ $|x| \le 1$ را روی یک نوار قائم نامتناهی به عرض 1 در صفحهٔ τ، مطابق شکل ۷.۵، می‌نگارد. وقتی x دایره به‌شعاع $e^{-2\pi}$ و مرکز $x = 0$ را خلاف‌جهت عقربه‌های‌ساعت بپیماید، نقطهٔ τ در امتداد پاره‌خطی افقی از i تا $i + 1$ تغییر خواهد کرد. این پاره‌خط را با مسیر رادماخر $P(N)$ مرکب از قوسهای بالایی دوایر فورد تشکیل شده برای سری فاری F_N تعویض می‌کنیم. در این صورت، (۱۳) خواهد شد

$$p(n) = \int_i^{i+1} F(e^{2\pi i \tau}) e^{-2\pi i n \tau}\, d\tau = \int_{P(N)} F(e^{2\pi i \tau}) e^{-2\pi i n \tau}\, d\tau.$$



صفحهٔ x

صفحهٔ τ

شکل ۷.۵

در این بحث عدد صحیح n ثابت‌بوده و عددصحیح N بعدا" به بی‌نهایت نزدیک‌می‌شود . همچنین ، می‌توان نوشت :

$$\int_{P(N)} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{0 \le h < k \\ (h,k)=1}} \int_{\gamma(h,k)} = \sum_{h,k} \int_{\gamma(h,k)}$$

که در آن $\gamma(h, k)$ قوس بالایی دایره‌ٔ $C(h, k)$ بوده ، و $\sum_{h,k}$ اختصاری برای مجموع مضاعف روی h و k می‌باشد .

حال تغییر متغیر

$$z = -ik^2\left(\tau - \frac{h}{k}\right)$$

را می‌دهیم ؛ درنتیجه ،

$$\tau = \frac{h}{k} + \frac{iz}{k^2}.$$

قضیهٔ ۸.۵ نشان‌می‌دهد که‌این $C(h, k)$ را روی‌دایرهٔ K به شعاع $\frac{1}{2}$ و مرکز $z = \frac{1}{2}$ می‌نگارد. قوس $\gamma(h, k)$ روی‌قوس بین‌نقاط $z_1(h, k)$ و $z_2(h, k)$ در شکل ۶.۵ نگاشته می‌شود .حال‌داریم

$$p(n) = \sum_{h,k} \int_{z_1(h,k)}^{z_2(h,k)} F\left(\exp\left(\frac{2\pi ih}{k} - \frac{2\pi z}{k^2}\right)\right) \frac{i}{k^2} e^{-2\pi inh/k} e^{2n\pi z/k^2}\, dz$$

$$= \sum_{h,k} ik^{-2} e^{-2\pi inh/k} \int_{z_1(h,k)}^{z_2(h,k)} e^{2n\pi z/k^2} F\left(\exp\left(\frac{2\pi ih}{k} - \frac{2\pi z}{k^2}\right)\right) dz.$$

حال از فرمول تبدیل F (قضیهٔ ۱.۵) استفاده می‌کنیم که می‌گوید

$$F(x) = \omega(h, k)\left(\frac{z}{k}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{\pi}{12z} - \frac{\pi z}{12k^2}\right) F(x'),$$

که در آن

$$x = \exp\left(\frac{2\pi ih}{k} - \frac{2\pi z}{k^2}\right), \qquad x' = \exp\left(\frac{2\pi iH}{k} - \frac{2\pi}{z}\right),$$

و

$$\omega(h, k) = e^{\pi is(h,k)}, \qquad hH \equiv -1 \pmod k, \qquad (h, k) = 1.$$

عامل مقدماتی $z^{1/2} \exp[\pi/12z) - \pi z/(12k^2)]$ را با $\Psi_k(z)$ نشان داده و انتگرال را به دو قسمت تجزیه می‌کنیم :

$$F(x') = 1 + \{F(x') - 1\}.$$

در این صورت ، خواهیم داشت

$$p(n) = \sum_{h,k} ik^{-5/2}\omega(h,k)e^{-2\pi inh/k}(I_1(h,k) + I_2(h,k))$$

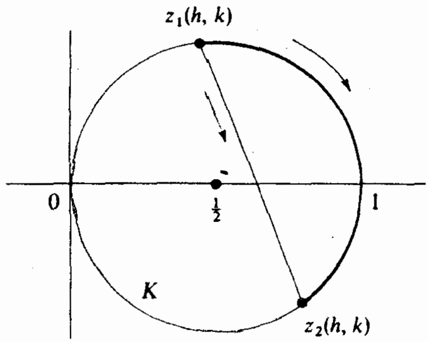
که در آن

$$I_1(h,k) = \int_{z_1(h,k)}^{z_2(h,k)} \Psi_k(z)e^{2n\pi z/k^2}\,dz$$

و

$$I_2(h,k) = \int_{z_1(h,k)}^{z_2(h,k)} \Psi_k(z)\left\{F\left(\exp\left(\frac{2\pi iH}{k} - \frac{2\pi}{z}\right)\right) - 1\right\}e^{2n\pi z/k^2}\,dz.$$

حال نشان می‌دهیم که I_2 به ازای N بزرگ کوچک است . مسیر انتگرالگیری درصفحهٔ z را می‌توان طوری حرکت داد که بتوان در امتداد وتر واصل بین $z_1(h,k)$ و $z_2(h,k)$ انتگرال گرفت . (ر.ک. شکل ۵.۸) ما قبلاً طول این وتر را تخمین زده‌ایم :



شکل ۸.۵

این طول از $2\sqrt{2}k/N$ تجاوز نمی‌کند . روی خود وتر داریم $|z| \le \max\{|z_1|, |z_2|\} < \sqrt{2}k/N$

همچنین ، توجه کنید که نگاشت $w = 1/z$ قرص محدود به K را روی نیمصفحهٔ $\mathrm{Re}(w) \ge 1$ می‌نگارد . داخل و روی دایرهٔ K داریم $0 < \mathrm{Re}(z) \le 1$ و $\mathrm{Re}(1/z) \ge 1$ ، حال آنکه روی خود K خواهیم داشت $\mathrm{Re}(1/z) = 1$.

حال انتگرالده روی وتر را تخمین می‌زنیم . داریم

$$\left|\Psi_k(z)\left\{F\left(\exp\left(\frac{2\pi iH}{k} - \frac{2\pi}{z}\right)\right) - 1\right\}e^{2n\pi z/k^2}\right|$$

$$= |z|^{1/2} \exp\left\{\frac{\pi}{12}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{\pi}{12k^2}\mathrm{Re}(z)\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&\times e^{2n\pi \mathrm{Re}(z)/k^2}\left|\sum_{m=1}^{\infty} p(m)e^{2\pi i H m/k}e^{-2\pi m/z}\right| \\
&\le |z|^{1/2}\exp\left\{\frac{\pi}{12}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)\right\}e^{2n\pi/k^2}\sum_{m=1}^{\infty} p(m)e^{-2\pi m \mathrm{Re}(1/z)} \\
&< |z|^{1/2}e^{2n\pi}\sum_{m=1}^{\infty} p(m)e^{-2\pi(m-(1/24))\mathrm{Re}(1/z)} \\
&\le |z|^{1/2}e^{2n\pi}\sum_{m=1}^{\infty} p(m)e^{-2\pi(m-(1/24))} \\
&= |z|^{1/2}e^{2n\pi}\sum_{m=1}^{\infty} p(m)e^{-2\pi(24m-1)/24} \\
&< |z|^{1/2}e^{2n\pi}\sum_{m=1}^{\infty} p(24m-1)e^{-2\pi(24m-1)/24} \\
&= |z|^{1/2}e^{2n\pi}\sum_{m=1}^{\infty} p(24m-1)y^{24m-1} \quad (\text{where } y = e^{-2\pi/24}) \\
&= c|z|^{1/2},
\end{aligned}
$$

که در آن

$$c = e^{2n\pi}\sum_{m=1}^{\infty} p(24m-1)y^{24m-1}.$$

عدد c نه تابع z است نه N . (این عدد به n وابسته است ، ولی n در این بحث ثابت می‌باشد .) چون z روی وتر است ، داریم $|z| < \sqrt{2}k/N$ ؛ درنتیجه ، انتگرالده به $c2^{1/4}(k/N)^{1/2}$ کراندار می‌باشد . طول مسیر از $2\sqrt{2}k/N$ کمتر است ؛ لذا ، رویهم به ازای ثابتی چون C داریم

$$|I_2(h,k)| < Ck^{3/2}N^{-3/2}$$

و لذا ،

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{h,k} ik^{-5/2}\omega(h,k)e^{-2\pi i nh/k}I_2(h,k)\right| &< \sum_{k=1}^{N}\sum_{\substack{0\le h<k\\(h,k)=1}} Ck^{-1}N^{-3/2} \\
&\le CN^{-3/2}\sum_{k=1}^{N}1 = CN^{-1/2}.
\end{aligned}
$$

این یعنی می‌توان نوشت

$$p(n) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{\substack{0\le h<k\\(h,k)=1}} ik^{-5/2}\omega(h,k)e^{-2\pi i nh/k}I_1(h,k) + O(N^{-1/2}). \qquad (۱۴)$$

حال به $I_1(h,k)$ می‌پردازیم . این انتگرالی است از $z_1(h,k)$ تا $z_2(h,k)$ در امتداد قوسی از دایرهٔ K در شکل ۸.۵ .تمام دایرهٔ K را مسیر انتگرالگیری‌گرفته و نشان می‌دهیم که خطای حاصله نیز $O(N^{-1/2})$ است . داریم

$$I_1(h,k) = \int_{K(-)} - \int_0^{z_1(h,k)} - \int_{z_2(h,k)}^0 = \int_{K(-)} - J_1 - J_2,$$

که در آن $K(-)$ یعنی انتگرالگیری درامتداد K و در جهت منفی است . برای تخمین $|J_1|$ توجه می‌کنیم که طول قوس بین 0 و $z_1(h,k)$ از

$$\pi|z_1(h,k)| < \pi\sqrt{2}\,\frac{k}{N}$$

کمتر است . چون بر K ، $\mathrm{Re}(1/z) = 1$ و $0 < \mathrm{Re}(z) \le 1$ ، قدرمطلق انتگرالده خواهد بود

$$|\Psi_k(z)e^{2n\pi z/k^2}| = e^{2n\pi \mathrm{Re}(z)/k^2}|z|^{1/2}\exp\left\{\frac{\pi}{12}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{\pi}{12k^2}\mathrm{Re}(z)\right\}$$
$$\le \frac{e^{2n\pi}2^{1/4}k^{1/2}e^{\pi/12}}{N^{1/2}},$$

درنتیجه ،

$$|J_1| < C_1 k^{3/2} N^{-3/2}$$

که در آن C_1 ثابت می‌باشد . تخمین مشابهی برای $|J_2|$ وجود دارد و ، مثل قبل ، این در فرمول مربوط به $p(n)$ به جملهٔ خطای $O(N^{-1/2})$ منجر می‌شود . لذا ، رابطهٔ (۱۴) به شکل زیر درمی‌آید :

$$p(n) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{0\le h<k \\ (h,k)=1}} ik^{-5/2}\omega(h,k)e^{-2\pi inh/k}\int_{K(-)} \Psi_k(z)e^{2n\pi z/k^2}\,dz + O(N^{-1/2}).$$

حال با فرض $N \to \infty$ به دست می‌آوریم

$$p(n) = i\sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)k^{-5/2}\int_{K(-)} z^{1/2}\exp\left\{\frac{\pi}{12z} + \frac{2\pi z}{k^2}\left(n - \frac{1}{24}\right)\right\}dz,$$

که در آن

$$A_k(n) = \sum_{\substack{0\le h<k \\ (h,k)=1}} e^{\pi i s(h,k) - 2\pi inh/k}.$$

انتگرالده را می‌توان برحسب توابع بسل[1] حساب کرد . تغییر متغیر

$$w = \frac{1}{z}, \qquad dz = -\frac{1}{w^2}\,dw$$

1. Bessel

نتیجه می‌دهد که

$$p(n) = \frac{1}{i}\sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)k^{-5/2}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} w^{-5/2}\exp\left\{\frac{\pi w}{12} + \frac{2\pi}{k^2}\left(n-\frac{1}{24}\right)\frac{1}{w}\right\}dw.$$

حال قرار می‌دهیم $t = \pi w/12$ و فرمول به صورت زیر درمی‌آید:

$$p(n) = 2\pi\left(\frac{\pi}{12}\right)^{3/2}\sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)k^{-5/2}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} t^{-5/2}\exp\left\{t + \frac{\pi^2}{6k^2}\left(n-\frac{1}{24}\right)\frac{1}{t}\right\}dt$$

که درآن $c = \pi/12$. ولی در صفحهٔ ۱۸۱ مقالهٔ واتسون[1] راجع به توابع بسل [۴۷] فرمول زیر را می‌یابیم:

$$I_\nu(z) = \frac{(\frac{1}{2}z)^\nu}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} t^{-\nu-1}e^{t+(z^2/4t)}\,dt \quad (\text{اگر } c>0 \text{ ، } \mathrm{Re}(\nu)>0)$$

که درآن $I_\nu(z) = i^{-\nu}J_\nu(iz)$. با اختیار

$$\frac{z}{2} = \left\{\frac{\pi^2}{6k^2}\left(n-\frac{1}{24}\right)\right\}^{1/2}$$

و $\nu = 3/2$ به دست می‌آوریم

$$p(n) = (2\pi)\left(\frac{\pi}{12}\right)^{3/2}\sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)k^{-5/2}\frac{\pi^{-3/2}\left(n-\frac{1}{24}\right)^{-3/4}}{6^{-3/4}k^{-3/2}} I_{3/2}\left(\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}\right)$$

$$= \frac{(2\pi)\left(n-\frac{1}{24}\right)^{-3/4}}{(24)^{3/4}}\sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)k^{-1}I_{3/2}\left(\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}\right).$$

ولی توابع بسل از مرتبهٔ نیمه فرد را می‌توان به توابع مقدماتی تحویل کرد . دراین حالت داریم

$$I_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}}\,\frac{d}{dz}\left(\frac{\sinh z}{z}\right).$$

با بردن این در فرمول قبل مآلا" فرمول رادماخر به دست می‌آید:

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)k^{1/2}\frac{d}{dn}\left(\frac{\sinh\left\{\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}\right\}}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}}\right).$$

---

1. Watson

تمرینات برای فصل ۵

۱. دو کسر تحویل یافتهٔ a/b و c/d را **به‌طور متشابه مرتب** گویند اگر $(c-a)(d-b) \geq 0$.
فرض کنید… $a_1/b_1 < a_2/b_2 <$ کسرهای فاری در F_n باشند.
(آ) ثابت کنید هر دو همسایهٔ a_i/b_i و a_{i+1}/b_{i+1} به‌طور متشابه مرتب‌اند.
(ب) همچنین، ثابت کنید هر دو همسایهٔ دوم a_i/b_i و a_{i+2}/b_{i+2} به طور متشابه مرتب‌اند.

تذکر. اردوش[1] [۸] نشان داد که ثابت مطلقی چون $c > 0$ وجود دارد به طوری‌که اگر $n > ck$، همسایه‌های k ام a_i/b_i و a_{i+k}/b_{i+k} در F_n به‌طور متشابه مرتب‌اند.

۲. اگر a, b, c, d اعداد صحیح مثبتی باشند به طوری که $a/b < c/d$ و λ و μ اعداد صحیح مثبتی باشند، ثابت کنید کسر

$$\theta = \frac{\lambda a + \mu c}{\lambda b + \mu d}$$

بین a/b و c/d قرار داشته، و $(c - d\theta)/(\theta b - a) = \lambda/\mu$. وقتی $\lambda = \mu$، θ میانهٔ a/b و c/d می‌باشد.

۳. اگر $bc - ad = 1$ و $n > \max(b, d)$، ثابت کنید جملات دنبالهٔ فاری F_n بین a/b و c/d کسرهایی به شکل $(\lambda a + \mu c)/(\lambda b + \mu d)$ اند که در آن λ و μ اعداد صحیح مثبت نسبت به هم اولی بوده و $\lambda b + \mu d \leq n$. از نظر هندسی، هر جفت (λ, μ) یک نقطهٔ شبکه (با مختصات نسبت به هم اول) در مثلثی است که با محورهای مختصات و خط $bx + dy = n$ مشخص می‌شود. نویل[2] [۲۸] نشان داد که تعداد این نقاط شبکه مساوی است با

$$\frac{3}{\pi^2}\frac{n^2}{bd} + O(n \log n).$$

این نشان می‌دهد که به‌ازای n داده شده، تعداد کسرهای فاری بین a/b و c/d به‌طور مجانبی با $1/(bd)$، یعنی طول بازهٔ $[a/b, c/d]$، متناسب است.

در تمرینهای ۴ تا ۸، کسرهای فاری به نقاط شبکهٔ در صفحه مربوط می‌شوند. در این تمرینات، $n \geq 1$ و T_n مجموعهٔ نقاط شبکهٔ (x, y) در ناحیهٔ مثلثی شکل تعریف شده با نامساویهای زیر است:

$$1 \leq x \leq n, \qquad 1 \leq y \leq n, \qquad n + 1 \leq x + y \leq 2n.$$

---

1. Erdös 2. Neville

همچنین، T_n' مجموعهٔ نقاط شبکهٔ (x, y) در T_n با مختصات نسبت به هم اول می‌باشد.

۴. ثابت کنید a/b و c/d کسرهای متوالی در دنبالهٔ فاری F_n اند اگر و فقط اگر نقطهٔ شبکهٔ $(b, d) \in T_n'$.

۵. ثابت کنید $\sum_{(b,d) \in T_n'} 1/(bd) = 1$. **راهنمایی.** قضیهٔ ۵.۵.

۶. به هر نقطهٔ شبکهٔ (x, y) وزن $f(x, y)$ را نسبت داده، و فرض کنید S_n مجموع تمام وزنها در T_n باشد:

$$S_n = \sum_{(x, y) \in T_n} f(x, y).$$

(آ) با مقایسهٔ نواحی T_r و T_{r-1} به ازای $r \geq 2$، نشان دهید که

$$S_r - S_{r-1} = f(r, r) + \sum_{k=1}^{r-1} \{f(k, r) + f(r, k)\} - \sum_{k=1}^{r} f(k, r-k),$$

و نتیجه بگیرید که

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} f(r, r) + \sum_{r=2}^{n} \sum_{k=1}^{r-1} \{f(k, r) + f(r, k)\} - \sum_{r=2}^{n} \sum_{k=1}^{r} f(k, r-k).$$

تذکر. اگر وقتی $(x, y) > 1$، $f(x, y) = 0$، این به فرمولی از ج. لنـــر و ام. نیومن [۲۴] تحویل می‌شود:

$$\sum_{(x, y) \in T_n'} f(x, y) = f(1, 1) + \sum_{r=2}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ (k, r)=1}}^{r-1} \{f(k, r) + f(r, k) - f(k, r-k)\}. \tag{۱۵}$$

این فرمول مجموع شامل کسرهای فاری را به مجموعی غیرشامل آنها ربط می‌دهد.

۷. فرض کنید

$$S_n = \sum_{(b, d) \in T_n'} \frac{1}{bd(b+d)}.$$

(آ) با استفاده از تمرین ۵، نشان دهید که $1/(2n-1) \leq S_n \leq 1/(n+1)$.

(ب) در (۱۵) اختیار کنید $f(x, y) = 1/(xy(x+y))$ و نشان دهید که

$$S_n = \frac{3}{2} - 2 \sum_{r=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ (k, r)=1}}^{r} \frac{1}{r^2(r+k)}$$

وقتی $n \to \infty$، این فرمول گوپتا[1] [۱۲] را به ما می‌دهد:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\substack{k=1 \\ (k, r)=1}}^{r} \frac{1}{r^2(r+k)} = \frac{3}{4}.$$

---

1. Gupta

۸. تمرین ۷(آ) نشان می‌دهد وقتی $n \to \infty$ ، $S_n \to 0$. در این تمرین برهان فرمول مجانبی

$$S_n = \frac{12 \log 2}{\pi^2 n} + O\left(\frac{\log n}{n^2}\right) \qquad (۱۶)$$

که توسط لنــر و نیومن در [۲۴] به دست آمده به اختصار عرضه می‌شود . فرض‌کنید

$$A_r = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,r)=1}}^{r} \frac{1}{r^2(r+k)} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{d \mid (r,k)} \frac{\mu(d)}{r^2(r+k)},$$

درنتیجه ،

$$S_n = 2 \sum_{r>n} A_r.$$

(آ) نشان دهید که

$$A_r = \sum_{d \mid r} \sum_{h=1}^{d} \frac{d\mu(r/d)}{r^3(h+d)}$$

و نتیجه بگیرید که

$$A_r = \log 2 \frac{\varphi(r)}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3} \sum_{d \mid r} |\mu(d)|\right).$$

(ب) نشان دهید که $\sum_{r=1}^{n} \sum_{d \mid r} |\mu(d)| = O(n \log n)$ و نتیجه بگیرید که

$$\sum_{r>n} \frac{1}{r^3} \sum_{d \mid r} |\mu(d)| = O\left(\frac{\log n}{n^2}\right).$$

(پ) با استفاده از فرمول $\sum_{r \le n} \varphi(r) = 3n^2/\pi^2 + O(n \log n)$ (ثابت‌شده در [۴] ، قضیهٔ ۷.۳) نتیجه بگیرید که

$$\sum_{r>n} \frac{\varphi(r)}{r^3} = \frac{6}{n\pi^2} + O\left(\frac{\log n}{n^2}\right).$$

(ت) فرمول (۱۶) را با استفاده از قسمتهای (آ) ، (ب) ، و (پ) به دست آورید .

۶
شکلهای هنگی با ضرایب ضربی

۱.۶ مقدمه

مطالب این فصل از خواص مشترک مبین $\Delta(\tau)$ و سری آیزن اشتاین

$$G_{2k}(\tau) = \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m+n\tau)^{2k}},$$

که در آن k صحیح بوده و $k \geq 2$ ، ناشی شده‌اند. تمام این توابع در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^r f(\tau), \qquad (۱)$$

که در آن r عددی صحیح بوده و $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ عنصری از گروه هنگی Γ می‌باشد. تابع Δ در(۱) به ازای $r = 12$ ، و G_{2k} در (۱) به ازای $r = 2k$ صدق می‌کند. توابع صادق در (۱) همراه با چند شرط اضافی مربوط به تحلیلی بودن **شکلهای هنگی** نامیده می‌شوند. (تعریف دقیق در بخش بعد داده‌شده است.)

شکلهای هنگی متناوب با دورهٔ تناوب 1 بوده و دارای بسطهای فوریه می‌باشند. مثلاً ، بسط فوریهٔ زیر را داریم:

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{2\pi i n\tau},$$

که در آن $\tau(n)$ تابع رامانوجان است ، و

$$G_{2k}(\tau) = 2\zeta(2k) + \frac{2(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) e^{2\pi i n\tau},$$

که در آن $\sigma_\alpha(n)$ مجموع توانهای α ام مقسوم‌علیه‌های n می‌باشد.

هر دوی $\tau(n)$ و $\sigma_\alpha(n)$ توابع حسابی ضربی‌اند؛ یعنی ، وقتی $(m,n) = 1$ ، داریم

$$\sigma_\alpha(m)\sigma_\alpha(n) = \sigma_\alpha(mn) \quad \text{و} \quad \tau(m)\tau(n) = \tau(mn)\,. \tag{۲}$$

این توابع در روابط ضربی کلیتر زیر نیز صدق می‌کنند: به ازای هر دو عدد صحیح مثبت m و n

$$\tau(m)\tau(n) = \sum_{d|(m,n)} d^{11}\tau\left(\frac{mn}{d^2}\right) \tag{۳}$$

و

$$\sigma_\alpha(m)\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|(m,n)} d^{\alpha}\sigma_\alpha\left(\frac{mn}{d^2}\right)\,. \tag{۴}$$

وقتی $(m, n) = 1$ ، این روابط به (۲) تحویل می‌شوند.

شباهت بسیار بین (۳) و (۴) مسئلهٔ تعیین تمام شکلهای هنگی را مطرح می‌کند که ضرایب فوریه‌شان در خاصیت ضربی شامل (۳) و (۴) صدق کنند. مسئله در سال ۱۹۳۷ توسط هکه[1] [۱۶] حل شد و حل وی در این فصل مطرح خواهد شد.

۲.۶ شکلهای هنگی به وزن k

در این بحث k عددی صحیح (مثبت، منفی، یا صفر)، H نیمصفحهٔ بالایی، $H = \{\tau : \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ ، و Γ گروه هنگی است.

تعریف. گوییم تابع f یک **شکل هنگی تمام** به وزن k است اگر در شرایط زیر صدق کند:

(آ) f در نیمصفحهٔ بالایی H تحلیلی باشد؛

(ب) هرگاه $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ ، $f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau)$ ؛

(پ) بسط فوریهٔ f به شکل زیر باشد:

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n)e^{2\pi i n\tau}.$$

تذکر. بسط فوریهٔ یک تابع با دورهٔ تناوب 1 بسط لوران آن در مجاورت مبداء $x = 0$ است که $x = e^{2\pi i\tau}$. شرط (پ) می‌گوید که بسط لوران یک شکل هنگی تمام توانهای منفی x ی را در برندارد. به عبارت دیگر، یک شکل هنگی تمام همه‌جا در H و در $i\infty$ تحلیلی

---

1. Hecke

است .

جملهٔ ثابت $c(0)$ مقدار f در $i\infty$ نام دارد و با $f(i\infty)$ نموده‌می‌شود .اگر $c(0) = 0$ تابع f یک **شکل بازگشتی** نامیده می‌شود ، و کوچکترین r ی که $c(r) \neq 0$ مرتبهٔ صفر f در $i\infty$ نام دارد . باید متذکرشویم‌که مبین Δ یک شکل بازگشتی به وزن 12 با صفر مرتبهٔ‌اول در $i\infty$ می‌باشد . همچنین ، هیچ سری آیزن‌اشتاین G_{2k} در $i\infty$ صفر نخواهد شد .

تذکار. بعضی مولفان وزن k را " بعد $-k$ " یا " درجهٔ $-k$ " می‌نامند . دیگران آنچه را که ما k نوشته‌ایم $2k$ می‌نویسند .

در بحثهای کلیتر یک شکل هنگی مجاز است در H یا در $i\infty$ قطب داشته باشد . به این دلیل ، شکلهای صادق در شرایط ما را شکلهای **تمام** می‌نامند . تابع هنگی J نمونه‌ای است از یک شکل هنگی ناتمام به وزن 0 ، زیرا دارای قطب در $i\infty$ می‌باشد . همچنین ، برای فراگیری تابع اتای ددکیند ، بسطهایی از نظریه وجود دارند که در آن k به مقادیر صحیح محدود نشده بلکه هر عدد حقیقی می‌تواندباشد ، و عامل $\varepsilon(a, b, c, d)$ به‌قدرمطلق 1 در معادلهٔ تابعی (ب) مجاز است .دراین فصل فقط شکلهای تمام به وزن صحیح یا ضریب $\varepsilon = 1$ مطرح خواهند شد .

تابع صفر یک شکل هنگی به وزن k به ازای هر k است . یک تابع ثابت ناصفریک‌شکل هنگی به وزن k است فقط اگر $k = 0$. هر شکل هنگی تمام به وزن 0 یک **تابع** هنگی (به صورت تعریف شده در فصل ۲) بوده ، و چون همه‌جا در H به انضمام نقطهٔ $i\infty$ تحلیلی است ، باید ثابت باشد .

اولین هدف ما اثبات این امر است که شکلهای هنگی تمام غیرثابت فقط‌وقتی وجود دارند که k زوج و ناکمتر از 4 باشد . به‌علاوه ، همه را می‌توان برحسب‌سری آیزن‌اشتاین G_4 و G_6 بیان کرد . اثبات مبتنی بر فرمولی است که وزن k را به تعداد صفرهای f در بست ناحیهٔ اساسی گروه هنگی ربط می‌دهد .

۶.۳ فرمول وزن برای صفرهای یک شکل هنگی تمام

یادآوری می‌کنیم که ناحیهٔ اساسی R_Γ دارای رئوس ρ ، i ، $\rho + 1$ ، و $i\infty$ می‌باشند .اگر f در نقطهٔ p صفری از مرتبهٔ r داشته باشد ، می‌نویسیم $r = N(p)$.

قضیهٔ ۶.۱ . *فرض کنیم f یک شکل هنگی تمام به وزن k باشد که متحد صفر نبوده ، و f*

در بست ناحیهٔ اساسی R_Γ بدون رئوس دارای N صفر باشد. در این صورت، فرمول زیر را خواهیم داشت:

$$k = 12N + 6N(i) + 4N(\rho) + 12N(i\infty). \qquad (۵)$$

برهان. روش برهان شبیه برهان قضیهٔ ۴.۲ است، که در آن ثابت کردیم که هر تابع هنگی در بسط R_Γ به تعداد قطبها صفر دارد. چون f دارای قطب نیست، می‌توان نوشت

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}\,d\tau.$$

انتگرال در امتداد مرز ناحیهٔ R متشکل از قطع ناحیهٔ اساسی به‌وسیلهٔ خط افقی $y = M$ با M به قدر کافی بزرگ گرفته می‌شود. مسیر ∂R در امتداد اضلاع R با انحرافهای مستدیر حول رئوس i، ρ، و $\rho + 1$ و سایر صفرهایی که روی اضلاعند می‌باشد. با محاسبهٔ مقدار حدی انتگرال وقتی $M \to \infty$ و انقباض انحرافهای مستدیر به مراکز آنها، مثل برهان قضیه ۴.۲، معلوم می‌شود که

$$N = \frac{k}{12} - \frac{1}{2}N(i) - \frac{1}{3}N(\rho) - N(i\infty). \qquad (۶)$$

تنها اختلاف اساسی بین این نتیجه و فرمول نظیر به دست آمده در برهان قضیهٔ ۴.۲ وجود جملهٔ $k/12$ است. این جمله از عامل وزن $(c\tau + d)^k$ در معادلهٔ تابعی زیر ناشی می‌شود:

$$f(A(\tau)) = (c\tau + d)^k f(\tau),$$

که در آن $A(\tau) = (a\tau + b)/(c\tau + d)$. با مشتقگیری از این معادله داریم

$$f'(A(\tau))A'(\tau) = (c\tau + d)^k f'(\tau) + kc(c\tau + d)^{k-1} f(\tau)$$

که از آن خواهیم داشت

$$\frac{f'(A(\tau))A'(\tau)}{f(A(\tau))} = \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} + \frac{kc}{c\tau + d}.$$

درنتیجه، به ازای هر مسیر γ که از صفر نگذرد، خواهیم داشت

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{A(\gamma)}\frac{f'(u)}{f(u)}\,du = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}\,d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{kc}{c\tau + d}\,d\tau.$$

لذا، انتگرالها در امتداد قوسهای (۲) و (۳) شکل ۵.۲ مثل برهان قضیهٔ ۴.۲ حذف نمی‌شوند مگر آنکه $k = 0$. در عوض، مشارکتی دارند که مقدار حدی‌اش مساوی است با

$$\frac{-k}{2\pi i}\int_\rho^i \frac{d\tau}{\tau} = \frac{-k}{2\pi i}(\log i - \log \rho) = \frac{-k}{2\pi i}\left(\frac{\pi i}{2} - \frac{2\pi i}{3}\right) = \frac{k}{12}.$$

بقیهٔ برهان شبیه برهان قضیهٔ ۴.۲ است و (۶) به دست می‌آید که رابطهٔ (۵) راایجاب خواهد کرد.

از فرمول وزن (۵) قضیهٔ زیر به دست خواهد آمد.

قضیهٔ ۲.۶

(آ) *تنها شکلهای هنگی تمام به وزن $k = 0$ توابع ثابت می‌باشند.*

(ب) *اگر k فرد باشد یا $k < 0$ یا $k = 2$ ، تنها شکل هنگی به وزن k تابع صفر است.*

(پ) *هر شکل هنگی تمام غیرثابت به وزن $k \geq 4$ است که در آن k زوج می‌باشد.*

(ت) *تنها شکل بازگشتی تمام به وزن $k < 12$ تابع صفر است.*

برهان. قسمت (آ) قبلاً ثابت شده است. برای اثبات (ب)، (پ)، (ت) کافی است به فرمول وزن (۵) رجوع کنیم. چون هر یک از اعداد صحیح N ، $N(i)$ ، $N(\rho)$ ، و $N(i\infty)$ نامنفی است، k باید نامنفی و زوج، با $k \geq 4$ اگر $k \neq 0$ ، باشد. همچنین، اگر $k < 12$ داریم $N(i\infty) = 0$ ؛ درنتیجه، f یک شکل بازگشتی نیست مگر آنکه $f = 0$.

۴.۶ نمایش شکلهای تمام برحسب G_4 و G_6

در فصل ۱ نشان دادیم که هر سری‌آیزن اشتاین G_k با $k > 2$ یک چندجمله‌ای از G_4 و G_6 است. در این بخش نشان می‌دهیم این امر برای هر شکل هنگی تمام درست است. چون مبین Δ یک چندجمله‌ای در G_4 و G_6 است،

$$\Delta = g_2{}^3 - 27g_3{}^2 = (60G_4)^3 - 27(140G_6)^2,$$

کافی است نشان دهیم همهٔ شکلهای تمام به وزن k را می‌توان برحسب سری‌آیزن‌اشتاین‌و توانهای Δ بیان کرد. در اثبات کرارا" از این استفاده می‌شود که حاصل‌ضرب fg دو شکل تمام f و g به ترتیب به وزنهای w_1 و w_2 شکل تمام دیگری به وزن $w_1 + w_2$ است، و خارج‌قسمت f/g درصورتی یک شکل تمام به وزن $w_1 - w_2$ است که g در H یا در $i\infty$ صفر نداشته باشد.

نمادگذاری. مجموعهٔ همهٔ شکلهای هنگی تمام به وزن k را با M_k نشان می‌دهیم.

قضیهٔ ۳.۶. *فرض کنیم f یک شکل هنگی تمام به وزن زوج $k \geq 0$ بوده و به ازای هر* τ

تعریف می‌کنیم $G_0(\tau) = 1$. در این صورت ، f را می‌توان به یک و فقط یک طریق به شکل مجموعی چون

$$f = \sum_{\substack{r=0 \\ k-12r \neq 2}}^{[k/12]} a_r G_{k-12r} \Delta^r$$

بیان کرد ، که در آن a_r ها اعدادی مختلط می‌باشند . شکلهای بازگشتی به وزن k ی زوج با $a_0 = 0$ جمعبندی می‌شوند .

برهان . اگر $k < 12$ ، حداکثر یک جمله در مجموع وجود دارد و قضیه را می‌توان مستقیماً تحقیق کرد . اگر f به‌وزن $k < 12$ باشد ، فرمول وزن (۵) ایجاب می‌کند که $N = N(i\infty) = 0$ درنتیجه ، تنها صفرهای ممکن f رئوس ρ و i می‌باشند . مثلاً ، اگر $k = 4$ ، داریم $N(\rho) = 1$ و $N(i) = 0$. چون G_4 دارای این خاصیت است ، f/G_4 یک شکل هنگی‌تمام به وزن 0 بوده ؛ لذا ، ثابت‌است ؛ درنتیجه ، $f = a_0 G_4$. به همین نحو ، اگر $k = 6, 8\ ,\ 10$ $f = a_0 G_k$. قضیه به ازای $k = 0$ (چون f ثابت است) و به ازای $k = 2$ (چون مجموع تهی است) نیز بداهتاً "برقرار است . لذا ، فقط کافی است $k \geq 12$ های زوج را درنظر بگیریم .

روی k استقرا کرده و به این امر ساده توجه می‌کنیم که هر شکل بازگشتی در M_k را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب Δh نوشت که در آن $h \in M_{k-12}$.

فرض کنیم قضیه به ازای جمیع شکلهای تمام به وزن زوج کمتر از k ثابت شده باشد . شکل G_k به وزن k بوده و در $i\infty$ صفر نمی‌شود . لذا ، اگر $c = f(i\infty)/G_k(i\infty)$ ، شکل تمام $f - cG_k$ یک‌شکل‌بازگشتی‌در M_k است ؛ درنتیجه ، $f - cG_k = \Delta h$ که‌درآن $h \in M_{k-12}$ با اعمال فرض استقرا بر h خواهیم داشت

$$h = \sum_{\substack{r=0 \\ k-12-12r \neq 2}}^{[(k-12)/12]} b_r G_{k-12-12r} \Delta^r = \sum_{\substack{r=1 \\ k-12r \neq 2}}^{[k/12]} b_{r-1} G_{k-12r} \Delta^{r-1}.$$

لذا ، $f = cG_k + \Delta h$ مجموعی از نوع (۷) است . پس به استقرا ثابت می‌شود که هر شکل تمام به وزن k ی زوج دست‌کم یک نمایش از نوع (۷) دارد . برای اثبات اینکه‌حداکثر یک چنین نمایش وجود دارد کافی است تحقیق کنیم که حاصل‌ضربهای $G_{k-12r}\Delta^r$ ها مستقل خطی‌اند . این به‌آسانی از این امر که $\Delta(i\infty) = 0$ ولی $G_{2r}(i\infty) \neq 0$ نتیجه می‌شود . شرح جزئیات را به عنوان تمرین به خواننده محول می‌کنیم .

چون هر دوی Δ و G_{2r} را می‌توان به صورت چندجمله‌ایهایی از G_4 و G_6 بیان‌کرد ،

قضیهٔ ۳.۶ نیز نشان می‌دهد که f یک چندجمله‌ای از G_4 و G_6 است. در قضیهٔ زیر شکل دقیق این چندجمله‌ای توصیف خواهد شد.

قضیهٔ ۴.۶. *هر شکل هنگی تمام f به وزن k یک چندجمله‌ای از G_4 و G_6 از نوع زیر است:*

$$f = \sum_{a,b} c_{a,b} G_4{}^a G_6{}^b \tag{۸}$$

که در آن $c_{a,b}$ اعدادی مختلط بوده و مجموع روی تمام اعداد صحیح $a \geq 0, b \geq 0$ گرفته شده است که $4a + 6b = k$.

برهان. اگر k فرد باشد، $k < 0$، یا $k = 2$، مجموع تهی بوده و f مساوی 0 است. اگر $k = 0$، f ثابت بوده و مجموع فقط از یک‌جمله، یعنی $c_{0,0}$، تشکیل شده است. هرگاه $k = 4, 6, 8\ ,\ 10$، آنگاه هر یک از خارج‌قسمتهای f/G_4، f/G_6، $f/G_4{}^2$، و $f/(G_4 G_6)$ یک شکل تمام به وزن 0 بوده؛ و لذا، ثابت می‌باشد. این (۸) را به ازای $k < 12$ یا k ی فرد ثابت می‌کند. برای اثبات نتیجه به ازای $k \geq 12$ ی زوج، بر k استقرا می‌کنیم.

فرض کنیم قضیه به‌ازای جمیع شکلهای تمام به‌وزن کمتر از k ثابت شده باشد. چون k زوج است، به‌ازای عدد صحیحی چون $m \geq 3$، $k = 4m$ یا $k = 4m + 2 = 4(m-1) + 6$ در هر حالت، اعداد صحیح نامنفی مانند r و s وجود دارند به طوری‌که $k = 4r + 6s$ شکل $g = G_4{}^r G_6{}^s$ به وزن k بوده و در $i\infty$ صفر نمی‌شود. لذا، اگر $c = f(i\infty)/g(i\infty)$، شکل تمام $f - cg$ یک شکل بازگشتی در M_k است؛ درنتیجه، $f - cg = \Delta h$ که در آن $h \in M_{k-12}$. بنابر فرض استقرا، h را می‌توان برحسب مجموعی مانند (۸) بیان کرد که روی تمام $a \geq 0, b \geq 0$ هایی گرفته‌شده‌است که $4a + 6b = k - 12$. ضرب در Δ مجموعی از همین نوع می‌دهد که در آن $4a + 6b = k$. لذا، $f = cg + \Delta h$ نیز مجموعی از نوع مطلوب است و این قضیه را به ثبوت می‌رساند.

۵.۶ فضای خطی M_k و زیرفضای $M_{k,0}$

نتایج بخش پیش را می‌توان به طریقی دیگر توصیف کرد. فرض کنیم M_k مجموعهٔ تمام شکلهای تمام به وزن k باشد. در این صورت، M_k فضایی خطی روی میدان مختلط است (زیرا M_k تحت جمع و ضرب در اسکالرهای مختلط بسته است). قضیهٔ ۳.۶ نشان می‌دهد که M_k با بعد متناهی و پایه‌ای متناهی است که با مجموعهٔ حاصل‌ضربهای $G_{k-12r}\Delta^r$ آمده در مجموع (۷) داده می‌شود. اگر $k \not\equiv 2 \pmod{12}$، $[k/12] + 1$ جمله در این مجموع

وجود دارد، و اگر $k \equiv 2 \pmod{12}$ ، یک جمله کمتر موجود است. لذا، بعد فضای M_k از فرمولهای زیر به دست می‌آید:

$$\dim M_k = \begin{cases} \left[\dfrac{k}{12}\right] & \text{اگر } k \equiv 2 \pmod{12} \text{،} \\ \left[\dfrac{k}{12}\right] + 1 & \text{اگر } k \not\equiv 2 \pmod{12} \text{؛} \end{cases} \tag{۹}$$

پایه‌ای دیگر برای M_k مجموعهٔ حاصل‌ضربهای $G_4{}^a G_6{}^b$ است که در آنها $a \geq 0$ ، $b \geq 0$ ، و $4a + 6b = k$ (ر.ک. تمرین ۶.۱۲).

مجموعهٔ تمام شکلهای بازگشتی در M_k زیرفضایی خطی از M_k است که با $M_{k,0}$ نموده می‌شود. نمایش در قضیهٔ ۶.۳ نشان می‌دهد که

$$\dim M_{k,0} = \dim M_k - 1 \tag{۱۰}$$

زیرا شکلهای بازگشتی مجموعهایی در (۷) هستند که در آنها $a_0 = 0$.

همچنین، توجه می‌کنیم هرگاه $k \geq 12$ ، $f \in M_{k,0}$ اگر و فقط اگر $f = \Delta h$ ، که در آن $h \in M_{k-12}$. لذا، تبدیل خطی $T : M_{k-12} \to M_{k,0}$ تعریف شده با

$$T(h) = \Delta h$$

یک یکریختی بین $M_{k,0}$ و M_{k-12} برقرار می‌کند. درنتیجه، اگر $k \geq 12$ ، خواهیم داشت

$$\dim M_{k,0} = \dim M_{k-12}. \tag{۱۱}$$

دو فرمول (۱۱) و (۱۰) ایجاب می‌کنند که اگر $k \geq 12$ ،

$$\dim M_k = 1 + \dim M_{k-12}.$$

این معادله، همراه با این امر که وقتی $k = 0, 2, 4, 6, 8, 10$ ، $M_k = 1, 0, 1, 1, 1, 1$ ، برهان دیگری از (۹) را به ما می‌دهد.

چند مثال. فرمول (۹) نشان می‌دهد که

اگر $k = 4, 6, 8, 10, 14$ ، $\dim M_k = 1$.

عناصر پایه‌ای نظیر عبارتند از G_4 ، G_6 ، $G_4{}^2$ ، $G_4 G_6$ ، و $G_4{}^2 G_6$.

فرمولهای (۱۱) و (۹) باهم نشان می‌دهند که

اگر $k = 12, 16, 18, 20, 22, 26$ ، $\dim M_{k,0} = 1$

و عناصر پایه‌ای نظیر Δ ، ΔG_4 ، ΔG_6 ، $\Delta G_4{}^2$ ، $\Delta G_4 G_6$ ، و $\Delta G_4{}^2 G_6$ خواهند بود.

۶.۶ رده‌بندی شکلهای تمام برحسب صفرهایشان

قضیهٔ زیر راه دیگری برای بیان جمیع شکلهای تمام برحسب G_4 ، G_6 ، Δ ، و پایای‌هنگی

کلاین J نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۶.۵. فرض کنیم f یک شکل تمام به وزن k بوده و $z_1, \dots, z_N$ ، N صفر f در بست R_Γ (که در آن رأسها حذف شده‌اند) باشند و صفرها از مرتبهٔ $N(\rho)$ ، $N(i)$ ، و $N(i\infty)$ در رئوس باشند. در این صورت، ثابتی چون c وجود دارد به طوری که

$$f(\tau) = cG_4(\tau)^{N(\rho)}G_6(\tau)^{N(i)}\Delta(\tau)^{N(i\infty)}\Delta(\tau)^N \prod_{k=1}^{N} \{J(\tau) - J(z_k)\}. \qquad (۱۲)$$

برهان. حاصلضرب

$$g(\tau) = \prod_{k=1}^{N} \{J(\tau) - J(z_k)\}$$

یک تابع هنگی است که تنها صفرهایش در بست R_Γ ، $z_1, \dots, z_N$ بوده و دارای قطب از مرتبهٔ N در $i\infty$ می‌باشد. چون Δ در $i\infty$ صفر مرتبهٔ اول دارد، حاصلضرب $\Delta^N g$ یک‌شکل هنگی تمام به وزن $12N$ است که، در بست R_Γ ، فقط در $z_1, \dots, z_N$ صفر می‌شود. لذا، حاصلضرب

$$h = G_4{}^{N(\rho)}G_6{}^{N(i)}\Delta^{N(i\infty)}\Delta^N g$$

در بست R_Γ دقیقا" همان صفرهای f را داراست. همچنین، h یک شکل هنگی تمام با همان وزن f است، چرا که

$$k = 4N(\rho) + 6N(i) + 12N(i\infty) + 12N.$$

لذا، f/h یک شکل تمام به وزن 0 است؛ درنتیجه، f/h ثابت می‌باشد. این امر رابطهٔ (۱۲) را ثابت خواهد کرد.

۶.۷ عملگرهای هکهٔ T_n

هکه با معرفی دنباله‌ای از عملگرهای خطی T_n ، $n = 1, 2, \dots$ ، که فضای M_k را به روی خودش می‌نگارند، همهٔ شکلهای تمام با ضرایب ضربی را مشخص کرد. عملگرهای هکه به صورت زیر تعریف می‌شوند.

تعریف. به ازای عدد صحیح ثابت k و $n = 1, 2, \dots$ ، عملگر T_n بر M_k با معادلهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$(T_n f)(\tau) = n^{k-1} \sum_{d|n} d^{-k} \sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{n\tau + bd}{d^2}\right). \qquad (۱۳)$$

در حالت خاص وقتی n اول است ، مثلا" $n = p$ ، مجموع روی d شامل فقط دو جمله بوده و تعریف به فرمول زیر تحویل می‌شود :

$$(T_p f)(\tau) = p^{k-1} f(p\tau) + \frac{1}{p}\sum_{b=0}^{p-1} f\left(\frac{\tau + b}{p}\right). \tag{۱۴}$$

مجموع روی b عملگری است‌که در فصل ۴ با آن مواجه شدیم . این عملگر توابع خودریخت تحت Γ را روی توابع خودریخت تحت زیر گروه همنهشت $\Gamma_0(p)$ می‌نگارد .

نشان خواهیم داد که T_n هر f در M_k را به روی تابع دیگری در M_k می‌نگارد . ابتدا عمل T_n بر بسط فوریهٔ f را توصیف می‌کنیم .

قضیهٔ ۶.۶ . هرگاه $f \in M_k$ و دارای بسط فوریهٔ زیر باشد :

$$f(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} c(m) e^{2\pi i m\tau},$$

آنگاه $T_n f$ دارای بسط فوریهٔ زیر است :

$$(T_n f)(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_n(m) e^{2\pi i m\tau}, \tag{۱۵}$$

که در آن

$$\gamma_n(m) = \sum_{d|(n,m)} d^{k-1} c\left(\frac{mn}{d^2}\right). \tag{۱۶}$$

برهان . از تعریف (۱۳) معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned}(T_n f)(\tau) &= n^{k-1} \sum_{d|n} d^{-k} \sum_{b=0}^{d-1} \sum_{m=0}^{\infty} c(m) e^{2\pi i m(n\tau + bd)/d^2} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{d|n} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} c(m) e^{2\pi i m n\tau/d^2} \frac{1}{d} \sum_{b=0}^{d-1} e^{2\pi i m b/d}.\end{aligned}$$

مجموع روی b یک‌مجموع هندسی است‌که اگر $d|m$ مساوی d بوده و در غیر این صورت برابر 0 است . لذا ،

$$(T_n f)(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{d|n,\, d|m} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} c(m) e^{2\pi i m n\tau/d^2}.$$

با نوشتن $m = qd$ داریم

$$(T_n f)(\tau) = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{d|n} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} c(qd) e^{2\pi i q n\tau/d}.$$

در مجموع روی d می‌توان d را با n/d عوض کرده به دست آورد

$$(T_n f)(\tau) = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{d|n} d^{k-1} c\left(\frac{qn}{d}\right) e^{2\pi i q d \tau}.$$

اگر $x = e^{2\pi i \tau}$، مجموع اخیر شامل توانهایی به‌شکل x^{qd} می‌باشد. جملاتی‌راجمع‌آوری می‌کنیم که در آنها qd ثابت، مثلاً $qd = m$، است. در این صورت، $q = m/d$ و $d|m$؛ درنتیجه،

$$(T_n f)(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{d|n,\, d|m} d^{k-1} c\left(\frac{mn}{d^2}\right) x^m,$$

که رابطهٔ (۱۶) را ایجاب می‌کند.

کار بعدی ما اثبات‌آن‌است‌که T_n، M_k را به توی خودش می‌نگارد. بدین‌منظور، توجه می‌کنیم که تعریف $T_n f$ را می‌توان به شکلی کمی متفاوت نوشت. می‌نویسیم $n = ad$ و قرار می‌دهیم

$$A\tau = \frac{a\tau + b}{d}.$$

در این صورت، (۱۳) به شکل زیر درمی‌آید:

$$(T_n f)(\tau) = n^{k-1} \sum_{\substack{a \geq 1,\, ad = n \\ 0 \leq b < d}} d^{-k} f(A\tau) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{a \geq 1,\, ad = n \\ 0 \leq b < d}} a^k f(A\tau). \tag{۱۷}$$

ماتریس $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ که A را نمایش می‌دهد دارای دترمینان $ad = n$ است. برای تعیین رفتار $T_n f$ تحت تبدیلات گروه‌هنگی Γ، به‌خواصی از تبدیلات با دترمینان n نیاز داریم. این خواص در بخش بعد توصیف خواهند شد.

۸.۶ تبدیلات از مرتبهٔ n

فرض کنیم n عدد صحیح مثبت ثابتی باشد. هر تبدیل به شکل

$$A\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d},$$

که در آن a, b, c, d صحیح بوده و $ad - bc = n$، یک **تبدیل از مرتبهٔ** n نام دارد. این تبدیل را می‌توان با ماتریس 2×2 زیر نمایش داد:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

که در آن، طبق معمول، هر ماتریس را با قرینه‌اش یکی می‌کنیم.

مجموعهٔ تمام تبدیلات از مرتبهٔ n را با $\Gamma(n)$ نشان می‌دهیم. گروه هنگی Γ عبارت است از $\Gamma(1)$.

دو تبدیل A_1 و A_2 در $\Gamma(n)$ را *هم‌ارز* گوییم، و می‌نویسیم $A_1 \sim A_2$، اگر تبدیلی مانند V در Γ موجود باشد به طوری که

$$A_1 = VA_2.$$

واضح است که رابطهٔ $\sim$ منعکس، متقارن، ومتعدی است؛ و لذا، یک‌رابطهٔ هم‌ارزی می‌باشد. در نتیجه، مجموعهٔ $\Gamma(n)$ را می‌توان به رده‌های هم‌ارزی چنان تجزیه کرد که دو عنصر $\Gamma(n)$ در یک رده باشند اگر و فقط اگر هم‌ارز باشند. قضیهٔ زیر مجموعه‌ای از نماینده‌ها را توصیف خواهد کرد.

قضیهٔ ۷.۶. *در هر ردهٔ هم‌ارزی از $\Gamma(n)$ نماینده‌ای به شکل مثلثی*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\text{، که در آن } d > 0\text{،}$$

وجود دارد.

برهان. فرض کنیم $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ عنصر دلخواهی از $\Gamma(n)$ باشد. اگر $c = 0$، چیزی برای اثبات وجود ندارد. اگر $c \neq 0$، کسر $-a/c$ را به صورت تحویل‌ناپذیر درمی‌آوریم. یعنی، اعداد صحیح r و s را طوری می‌گیریم که $s/r = -a/c$ و $(r, s) = 1$. حال دو عدد صحیح p و q را طوری می‌گیریم که $ps - qr = 1$ و قرار می‌دهیم

$$V = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}.$$

در این صورت، $V \in \Gamma$ و

$$VA = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa + qc & pb + qd \\ ra + sc & rb + sd \end{pmatrix}.$$

چون $ra + sc = 0$ و $\det(VA) = \det V \det A = n$، معلوم می‌شود که $VA \in \Gamma(n)$؛ در نتیجه، $VA \sim A$. لذا، VA یا قرینه‌اش نمایندهٔ مطلوب می‌باشد.

قضیهٔ ۸.۶. *یک‌دستگاه تام از عناصر غیرهم‌ارز در $\Gamma(n)$ عبارت‌است از مجموعهٔ تبدیلات*

به شکل مثلثی

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \qquad (۱۸)$$

که در آن d مقسوم‌علیه‌های مثبت n را گرفته و، به ازای هر d ثابت، $a = n/d$، و b در یک دستگاه مانده‌ای تام به هنگ d تغییر می‌کند.

برهان. قضیهٔ ۷.۶ نشان می‌دهد که هر عنصر در $\Gamma(n)$ با یکی از تبدیلات (۱۸) هم‌ارز است. لذا، کافی است نشان دهیم دو تبدیل از این نوع، مثلاً

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}$$

هم‌ارزاند اگر و فقط اگر

$$d_1 = d_2, a_1 = a_2 \quad \text{و} \quad b_1 \equiv b_2 \pmod{d_1} \cdot \qquad (۱۹)$$

هرگاه (۱۹) برقرار باشد، آنگاه به‌ازای عدد صحیحی چون q ، $b_2 = b_1 + qd_1$ ، می‌توان

$$V = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

را اختیار کرد. در این صورت، $VA_1 = A_2$ ؛ درنتیجه، $A_1 \sim A_2$.

به عکس، اگر $A_1 \sim A_2$ ، عنصری مانند

$$V = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

در Γ وجود دارد به طوری که $A_2 = VA_1$. لذا،

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa_1 & pb_1 + qd_1 \\ ra_1 & rb_1 + sd_1 \end{pmatrix}. \qquad (۲۰)$$

با متحد گرفتن درایه‌ها داریم $ra_1 = 0$ ؛ درنتیجه، $r = 0$ زیرا به خاطر $a_1d_1 = n \geq 1$ داریم $a_1 \neq 0$. اما $ps - qr = 1$ ؛ درنتیجه، $ps = 1$ ؛ لذا، هر دوی s و p مساوی 1 یا هر دو برابر 1− می‌باشند. می‌توان فرض کرد $p = s = 1$ (در غیر این صورت، V را با $-V$ عوض می‌کنیم). با متحد گرفتن سایر درایه‌ها در (۲۰) خواهیم داشت $a_2 = a_1, d_2 = d_1, b_2 = b_1 + qd_1$ ؛ درنتیجه، $b_2 \equiv b_1 \pmod{d_1}$. این برهان‌را تمام خواهد کرد.

تذکر. مجموع (۱۷) معرف $T_n f$ را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$(T_n f)(\tau) = \frac{1}{n}\sum_{A} a^k f(A\tau) \tag{۲۱}$$

که در آن A در مجموعهٔ تامی از عناصر غیرهم‌ارز در $\Gamma(n)$ به شکل توصیف شده در قضیهٔ ۸.۶ تغییر می‌کند. ضریب a^k توان k ام درایه در سطر اول و ستون اول A می‌باشد.

قضیهٔ ۹.۶. هرگاه $A_1 \in \Gamma(n)$ و $V_1 \in \Gamma$، آنگاه ماتریسهایی چون A_2 در $\Gamma(n)$ و V_2 در Γ وجود دارند به طوری که

$$A_1 V_1 = V_2 A_2 . \tag{۲۲}$$

به‌علاوه، هرگاه به ازای $i = 1, 2$،

$$V_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ 0 & d_i \end{pmatrix} ،$$

آنگاه خواهیم داشت

$$a_1(\gamma_2 A_2 \tau + \delta_2) = a_2(\gamma_1 \tau + \delta_1). \tag{۲۳}$$

برهان. چون $\det(A_1 V_1) = \det A_1 \det V_1 = n$، ماتریس $A_1 V_1$ در $\Gamma(n)$ است؛ درنتیجه، طبق قضیهٔ ۷.۶، A_2 ای در $\Gamma(n)$ و V_2 ای در Γ وجود دارند به طوری که (۲۲) برقرار است. برای اثبات (۲۳) ابتدا توجه می‌کنیم که $A_1 V_1$ به شکل زیر است:

$$A_1 V_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ d_1\gamma_1 & d_1\delta_1 \end{pmatrix}$$

و

$$A_2^{-1} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} d_2 & -b_2 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}.$$

لذا، (۲۲) ایجاب می‌کند که

$$V_2 = A_1 V_1 A_2^{-1} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} * & * \\ d_1\gamma_1 & d_1\delta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_2 & -b_2 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{n}\begin{pmatrix} * & * \\ d_1 d_2 \gamma_1 & -d_1\gamma_1 b_2 + d_1\delta_1 a_2 \end{pmatrix}.$$

با متحد گرفتن درایه‌های سطر دوم، به دست می‌آوریم

$$\gamma_2 = \frac{d_1 d_2 \gamma_1}{n} = \frac{d_2}{a_1}\gamma_1$$

و

$$\delta_2 = \frac{-d_1\gamma_1 b_2 + d_1\delta_1 a_2}{n} = -\frac{b_2}{a_1}\gamma_1 + \frac{a_2}{a_1}\delta_1$$

زیرا $a_1 d_1 = n$. لذا،

$$a_1\delta_2 = -b_2\gamma_1 + a_2\delta_1 \quad \text{و} \quad a_1\gamma_2 = d_2\gamma_1$$

و خواهیم داشت

$$\begin{aligned} a_1(\gamma_2 A_2\tau + \delta_2) &= a_1\gamma_2 A_2\tau + a_1\delta_2 \\ &= d_2\gamma_1\frac{a_2\tau + b_2}{d_2} - b_2\gamma_1 + a_2\delta_1 = a_2(\gamma_1\tau + \delta_1), \end{aligned}$$

که (۲۳) را ثابت خواهد کرد

۹.۶ رفتار $T_n f$ تحت گروه هنگی

قضیهٔ ۱۰.۶ . هرگاه $f \in M_k$ و $V = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma$ ، آنگاه

$$(T_n f)(V\tau) = (\gamma\tau + \delta)^k (T_n f)(\tau). \tag{۲۴}$$

برهان . با استفاده از نمایش (۲۱) می‌نویسیم

$$(T_n f)(\tau) = \frac{1}{n}\sum_{A_1} a_1{}^k f(A_1\tau)$$

که در آن $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}$ و A_1 در مجموعهٔ تامی از عناصر غیرهم‌ارز در $\Gamma(n)$ تغییر می‌کند . از تعویض τ با $V\tau$ به دست می‌آوریم

$$(T_n f)(V\tau) = \frac{1}{n}\sum_{A1} a_1{}^k f(A_1 V\tau). \tag{۲۵}$$

بنابر قضیهٔ ۷.۶ و ۹.۶ ، ماتریسهای

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \text{ در } \Gamma(n) \quad \text{و} \quad V_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} \text{ در } \Gamma$$

وجود دارند به طوری که

$$A_1 V = V_2 A_2 \quad \text{و} \quad a_1(\gamma_2 A_2\tau + \delta_2) = a_2(\gamma\tau + \delta)$$

لذا، چون $f \in M_k$ ،

$$a_1^k f(A_1 V\tau) = a_1^k f(V_2 A_2 \tau) = a_1^k(\gamma_2 A_2 \tau + \delta_2)^k f(A_2 \tau)$$
$$= a_2^k(\gamma\tau + \delta)^k f(A_2 \tau) \cdot$$

اما وقتی A_1 در یک مجموعهٔ تام از عناصر غیرهم‌ارز از $\Gamma(n)$ تغییر کند، A_2 نیز چنین می‌کند. لذا، (۲۵) به صورت زیر درمی‌آید:

$$(T_n f)(V\tau) = \frac{1}{n}(\gamma\tau + \delta)^k \sum_{A_2} a_2^k f(A_2 \tau) = (\gamma\tau + \delta)^k (T_n f)(\tau).$$

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که هر عملگر هکهٔ T_n ، M_k را به توی M_k و نیز $M_{k,0}$ را به توی $M_{k,0}$ می‌نگارد.

قضیهٔ ۱۱.۶. هرگاه $f \in M_k$، آنگاه $T_n f \in M_k$. به‌علاوه، هرگاه f به شکل بازگشتی باشد، آنگاه $T_n f$ نیز به شکل بازگشتی خواهد بود.

برهان. اگر $f \in M_k$ ، تعریف T_n نشان می‌دهد که $T_n f$ همه جا در H تحلیلی است. قضیهٔ ۶.۶ نشان می‌دهد که $T_n f$ دارای بسط فوریه به شکل مطلوب بوده و $T_n f$ در $i\infty$ تحلیلی می‌باشد. و قضیهٔ ۱۰.۶ نشان می‌دهد که $T_n f$ تحت تبدیلات Γ رفتار مناسبی دارد. بالاخره، اگر f به شکل بازگشتی باشد، بسط فوریه در قضیهٔ ۶.۶ نشان می‌دهد که $T_n f$ نیز به شکل بازگشتی می‌باشد.

۱۰.۶ خاصیت ضربی عملگرهای هکه

در این بخش نشان می‌دهیم هر دو عملگر هکهٔ T_n و T_m تعریف شده بر M_k باهم تعویض می‌شوند. این امر از خاصیت ضربی ترکیب $T_m T_n$ نتیجه می‌شود. ابتدا حالتی را مطرح می‌کنیم که در آن m و n نسبت به هم اولند.

قضیهٔ ۱۲.۶. اگر $(m, n) = 1$، خاصیت ترکیب

$$T_m T_n = T_{mn} \tag{۲۶}$$

را خواهیم داشت.

برهان. اگر $f \in M_k$ ، داریم

$$(T_n f)(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{a \geq 1,\, ad = n \\ 0 \leq b < d}} a^k f(A\tau),$$

که در آن $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$. با اعمال T_m بر هر طرف خواهیم داشت

$$\{T_m(T_n(f))\}(\tau) = \frac{1}{m} \sum_{\substack{\alpha \geq 1,\, \alpha\delta = m \\ 0 \leq \beta < \delta}} \alpha^k \frac{1}{n} \sum_{\substack{a \geq 1,\, ad = n \\ 0 \leq b < d}} a^k f(BA\tau),$$

که در آن $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$. این را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\{(T_m T_n)(f)\}(\tau) = \frac{1}{mn} \sum_{\substack{\alpha \geq 1,\, \alpha\delta = m \\ 0 \leq \beta < \delta}} \sum_{\substack{a \geq 1,\, ad = n \\ 0 \leq b < d}} (\alpha a)^k f(C\tau), \tag{۲۷}$$

که در آن

$$C = BA = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b + \beta d \\ 0 & d\delta \end{pmatrix}.$$

وقتی d و δ به‌ترتیب مقسوم علیه‌های مثبت n و m را بگیرند، چون $(m, n) = 1$ ، حاصل‌ضرب $d\delta$ مقسوم علیه‌های مثبت mn را خواهد گرفت. وقتی b و β به ترتیب در دستگاههای مانده‌ای تام به هنگ d و δ تغییر کنند، ترکیب خطی $\alpha b + \beta d$ در یک دستگاه مانده‌ای تام به هنگ $d\delta$ تغییر خواهد کرد. لذا، ماتریس C در یک مجموعهٔ تام از عناصر غیر هم ارز از $\Gamma(mn)$ تغییر می‌کند؛ و لذا، (۲۷) رابطهٔ (۲۶) را ایجاب خواهد کرد.

در قضیهٔ زیر خاصیت ترکیب (۲۶) به m و n دلخواه تعمیم می‌یابد. برای راحتی در نمادگذاری، $T(n)$ را به جای T_n می‌نویسیم.

قضیهٔ ۶.۱۳. هر دو عملگر هکهٔ $T(n)$ و $T(m)$ تعریف شده بر M_k باهم تعویض می‌شوند. به‌علاوه، فرمول ترکیب زیر را خواهیم داشت:

$$T(m)T(n) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} T(mn/d^2). \tag{۲۸}$$

برهان. تعویض‌پذیری از (۲۸) نتیجه می‌شود، زیرا طرف راست نسبت به m و n متقارن است. اگر $(m, n) = 1$ ، فرمول (۲۸) به (۲۶) تحویل می‌شود. لذا، برای اثبات (۲۸) کافی است به حالتی بپردازیم که m و n توانهایی از عدد اول p اند. ابتدا حالت $m = p$

و $n = p^r$ را، که در آن $r \geq 1$، درنظر می‌گیریم . در این حالت باید ثابت کنیم

$$T(p)T(p^r) = T(p^{r+1}) + p^{k-1}T(p^{r-1}). \tag{۲۹}$$

از نمایش (۱۷) استفاده کرده و توجه می‌کنیم که مقسوم‌علیه‌های p^r به شکل p^t اندکه در آن $0 \leq t \leq r$. لذا، خواهیم داشت

$$\{T(p^r)f\}(\tau) = p^{-r} \sum_{\substack{0 \leq t \leq r \\ 0 \leq b_t < p^t}} p^{(r-t)k} f\left(\frac{p^{r-t}\tau + b_t}{p^t}\right). \tag{۳۰}$$

بنابر (۱۴) داریم

$$\{T(p)g\}(\tau) = p^{k-1}g(p\tau) + p^{-1}\sum_{b=0}^{p-1} g\left(\frac{\tau + b}{p}\right),$$

درنتیجه، وقتی $T(p)$ را بر هر طرف (۳۰) اعمال کنیم، خواهیم داشت

$$\{T(p)T(p^r)f\}(\tau) = p^{k-1-r} \sum_{\substack{0 \leq t \leq r \\ 0 \leq b_t < p^t}} p^{(r-t)k} f\left(\frac{p^{r+1-t}\tau + pb_t}{p^t}\right)$$

$$+ p^{-1-r} \sum_{\substack{0 \leq t \leq r \\ 0 \leq b_t < p^t}} p^{(r-t)k} \sum_{b=0}^{p-1} f\left(\frac{p^{r-t}\tau + b_t + bp^t}{p^{t+1}}\right).$$

در مجموع دوم ترکیب‌خطی $b_t + bp^t$ در یک‌دستگاه مانده‌ای تام به هنگ p^{t+1} تغییرمی‌کند. چون $r - t = (r + 1) - (t + 1)$ ، مجموع دوم ، همراه با جملهٔ $t = 0$ از مجموع اول ، مساوی $\{T(p^{r+1})f\}(\tau)$ می‌باشد . در جملات باقیمانده عامل p در شناسهٔ f را حذف‌کرده، سپس عامل p^k را به هر جمعوند انتقال می‌دهیم :

$$\{T(p)T(p^r)f\}(\tau) = \{T(p^{r+1})f\}(\tau) + p^{-1-r} \sum_{\substack{1 \leq t \leq r \\ 0 \leq b_t < p^t}} p^{(r+1-t)k} f\left(\frac{p^{r-t}\tau + b_t}{p^{t-1}}\right).$$

از تقسیم هر b_t بر p^{t-1} می‌توان نوشت :

$$b_t = q_t p^{t-1} + r_t,$$

که در آن $0 \leq r_t < p^{t-1}$ و q_t در یک دستگاه مانده‌ای تام به هنگ p تغییر می‌کند. چون f متناوب با دورهٔ تناوب 1 است، داریم

$$f\left(\frac{p^{r-t}\tau + b_t}{p^{t-1}}\right) = f\left(\frac{p^{r-t}\tau + r_t}{p^{t-1}}\right),$$

درنتیجه، وقتی q_t در یک دستگاه مانده‌ای تام به هنگ p تغییر کند، هر جمله p بار تکرار می‌شود. از تعویض اندیس t با $t - 1$ معلوم می‌شود که مجموع اخیر p^{k-1} برابر مجموع معرف

$\{T(p^{r-1})f\}(\tau)$ می‌باشد. این رابطهٔ (۲۹) را ثابت خواهد کرد.

حال توانهای دلخواه یک عدد اول، مثلاً" $m = p^s$ و $n = p^r$ ، را درنظر می‌گیریم. بدون لطمه زدن به کلیت می‌توان فرض کرد $s \le r$. به استقرا روی r ثابت می‌کنیم به‌ازای هر r و هر $s \ge r$ ،

$$T(p^r)T(p^s) = \sum_{t=0}^{r} p^{t(k-1)}T(p^{r+s-2t}) = \sum_{d|(p^r,\, p^s)} d^{k-1}T\left(\frac{p^{r+s}}{d^2}\right) \qquad (۳۱)$$

وقتی $r = 1$ ، رابطهٔ (۳۱) به ازای هر $s \ge 1$ از (۲۹)نتیجه‌می‌شود. لذا، فرض می‌کنیم (۳۱) به ازای r و هر توان کوچکتر و هر $s \ge r$ برقرار باشد، و ثابت می‌کنیم به ازای $r + 1$ و هر $s \ge r + 1$ نیز برقرار خواهد بود.

بنابر (۲۹) داریم

$$T(p)T(p^r)T(p^s) = T(p^{r+1})T(p^s) + p^{k-1}T(p^{r-1})T(p^s),$$

و، بنابر فرض استقرا، داریم

$$T(p)T(p^r)T(p^s) = \sum_{t=0}^{r} p^{t(k-1)}T(p)T(p^{r+s-2t}).$$

با متحد گرفتن دو عبارت، حل نسبت به $T(p^{r+1})T(p^s)$ ، و استفاده از (۲۹) در مجموع روی t ، به دست می‌آوریم

$$T(p^{r+1})T(p^s) = \sum_{t=0}^{r} p^{t(k-1)}T(p^{r+s+1-2t}) + \sum_{t=0}^{r} p^{(t+1)(k-1)}T(p^{r+s-1-2t})$$
$$- p^{k-1}T(p^{r-1})T(p^s).$$

طبق فرض استقرا، جملهٔ اخیر مجموع دوم روی t جز جمله به ازای $t = r$ را حذف می‌کند. بنابراین،

$$T(p^{r+1})T(p^s) = \sum_{t=0}^{r} p^{t(k-1)}T(p^{r+s+1-2t}) + p^{(r+1)(k-1)}T(p^{s-1-r})$$
$$= \sum_{t=0}^{r+1} p^{t(k-1)}T(p^{r+1+s-2t}).$$

این (۳۱) را به استقرا به ازای هر r و هر $s \ge r$ ثابت کرده، و نیز برهان (۲۸) را تمام خواهد کرد.

۱۱.۶ توابع ویژهٔ عملگرهای هکه

در قضیهٔ ۶.۶ ثابت کردیم هرگاه $f \in M_k$ و دارای بسط فوریهٔ زیر باشد:

$$f(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} c(m)x^m, \qquad (۳۲)$$

که در آن $x = e^{2\pi i\tau}$ ، آنگاه $T_n f$ دارای بسط فوریهٔ زیر است :

$$(T_n f)(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_n(m) x^m, \tag{۳۳}$$

که در آن

$$\gamma_n(m) = \sum_{d|(n,m)} d^{k-1} c\left(\frac{mn}{d^2}\right). \tag{۳۴}$$

وقتی $m = 0$ ، داریم $(n, 0) = n$: درنتیجه ، جملات ثابت f و $T_n f$ با معادلهٔ

$$\gamma_n(0) = \sum_{d|n} d^{k-1} c(0) = \sigma_{k-1}(n) c(0) \tag{۳۵}$$

به ازای هر $n \geq 1$ به‌هم مربوطند . به‌همین‌نحو ، وقتی $m = 1$ ، به ازای هر $n \geq 1$ خواهیم داشت

$$\gamma_n(1) = c(n) \tag{۳۶}$$

مجموع سمت راست (۳۴) شبیه مجموعی است که در خاصیت ضربی تابع رامانوجان $\tau(n)$ و توابع مقسوم علیهی $\sigma_\alpha(n)$ آمده است . این مثالها ما را به جستجوی شکلهایی از f وا می‌دارد که به ازای آنها تابع مبدل $T_n f$ دارای ضرایب فوریهٔ زیر باشد :

$$\gamma_n(m) = c(n) c(m) \tag{۳۷}$$

زیرا این خاصیت ضربی

$$c(n)c(m) = \sum_{d|(n,m)} d^{k-1} c\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

را ایجاب خواهد کرد . رابطهٔ (۳۷) معادل اتحاد

$$T_n f = c(n) f$$

به ازای هر $n \geq 1$ است . تابع ناصفر f صادق در رابطه‌ای به شکل

$$T_n f = \lambda(n) f \tag{۳۸}$$

به ازای اسکالر مختلطی چون $\lambda(n)$ یک **تابع ویژه** (یا **شکل ویژهٔ**) عملگر T_n نام دارد ، و اسکالر $\lambda(n)$ یک **مقدار ویژهٔ** T_n نامیده می‌شود . اگر f یک شکل ویژه باشد ، cf به ازای هر $c \neq 0$ نیز چنین می‌باشد .

چند مثال .هرگاه عملگر خطی T یک فضای تابعی یک بعدی V را به توی خودش بنگارد ، آنگاه هر تابع ناصفر در V یک تابع ویژه از T می‌باشد . فرمول (۹) نشان می‌دهد که اگر $k = 4, 6, 8, 10$ ، 14 ، $\dim M_k = 1$.

لذا ، هر عملگر هکهٔ T_n دارای مقدار ویژه بهازای این مقادیر k است . برای مثال، سریهای متوالی آیزن اشتاین $G_4, G_6, G_8, G_{10}, G_{14}$ شکل ویژه برای هر T_n میباشند .

به طریق مشابه ، فرمول (۱۱) نتیجه میدهد

$$\text{اگر } k = 12, 16, 18, 20, 22, 26 \text{ ، } \dim M_{k,0} = 1 \text{ .}$$

لذا ، هر عملگر هکهٔ T_n دارای شکلهای ویژه در $M_{k,0}$ بهازای هر یک از این مقادیر k میباشد. مثلاً ، به ازای هر T_n ، شکلهای بازگشتی Δ ، ΔG_4 ، ΔG_6 ، ΔG_8 ، ΔG_{10} ، و ΔG_{14} مربوطه شکلهای ویژه خواهند بود .

هرگاه به ازای هر عملگر هکهٔ T_n ، $n \geq 1$ ، f یک شکل ویژه باشد ، آنگاه f یک **شکل ویژهٔ همزمان** نامیده میشود . تمام مثالهای ذکر شده در فوق شکلهای ویژهٔ همزمان میباشند .

۱۲.۶ خواص شکلهای ویژهٔ همزمان

قضیهٔ ۱۴.۶ . *فرض کنیم k زوج بوده و $k \geq 4$. هرگاه فضای M_k شامل شکل ویژهٔ همزمان f با بسط فوریهٔ (۳۲) باشد ، آنگاه $c(1) \neq 0$.*

برهان . ضریب x در بسط فوریهٔ $T_n f$ عبارت است از $\gamma_n(1) = c(n)$. چون f یک شکل ویژهٔ همزمان است ، این ضریب مساوی $\lambda(n)c(1)$ نیز میباشد ؛ لذا ، به ازای هر $n \geq 1$ ،

$$c(n) = \lambda(n)c(1) .$$

هرگاه $c(1) = 0$ ، آنگاه به ازای هر $n \geq 1$ ، $c(n) = 0$ و $f(\tau) = c(0)$. اما در این صورت $c(0) = 0$ زیرا $k \geq 4$ ؛ پس $f = 0$ که با تعریف شکلویژه در تضاد است . اینثابت میکند که $c(1) \neq 0$.

گوییم یک شکل ویژه باخاصیت $c(1) = 1$ *نرمالی شده است* . هرگاه M_k شامل یکشکل ویژهٔ همزمان باشد ،آنگاه شامل یکشکلویژهٔ نرمالیشده نیز هست چرا که همواره میتوان با ضرب f در ثابت ناصفر مناسبی به دست آورد $c(1) = 1$.

بهآسانی میتوان تمام شکلهای بازگشتی را که شکلهای ویژهٔ همزمانند مشخص کرد . چون تابع صفر تنها شکل بازگشتی به وزن کمتر 12 است ، کافی است $k \geq 12$ را در نظر بگیریم .

قضیهٔ ۱۵.۶ . فرض کنیم $f \in M_{k,0}$ که در آن k زوج بوده و $k \geq 12$. در این صورت ، f یک شکل ویژهٔ نرمالی‌شدهٔ همزمان‌است‌اگر و فقط‌اگر ضرایب‌بسط‌فوریهٔ (۳۲) در خاصیت ضربی

$$c(m)c(n) = \sum_{d|(n,m)} d^{k-1} c\left(\frac{mn}{d^2}\right) \tag{۳۹}$$

به ازای هر $m \geq 1, n \geq 1$ صدق کند ، که در این صورت ضریب $c(n)$ یک مقدار ویژهٔ T_n می‌باشد .

برهان . معادلهٔ $T_n f = \lambda(n) f$ هم‌ارز رابطهٔ

$$\gamma_n(m) = \lambda(n)c(m) \tag{۴۰}$$

است که از متحدگرفتن ضرایب x^m در بسطهای فوریهٔ نظیر به دست می‌آید . چون f یک شکل بازگشتی‌است ، $T_n f$ نیز چنین است ؛ لذا ، (۴۰) به‌ازای هر $1 \leq m$ و $1 \leq n$ برقرار می‌باشد . اما $\gamma_n(1) = c(n)$ ؛ درنتیجه ، (۴۰) ایجاب می‌کند که اگر $c(1) = 1$ ، $\lambda(n) = c(n)$ ؛ لذا ، $\gamma_n(m) = c(n)c(m)$. از آن سو ، معادلهٔ (۳۴) نشان می‌دهد که اگر $c(1) = 1$ ، رابطهٔ (۴۰) با رابطهٔ (۳۹) هم‌ارز است . لذا ، f یک شکل ویژهٔ همزمان نرمالی شده است اگر و فقط اگر (۳۹) به ازای هر $m \geq 1, n \geq 1$ برقرار باشد .

۱۳.۶ چند مثال از شکلهای ویژهٔ همزمان نرمالی شده

مبین Δ یک شکل بازگشتی با بسط فوریهٔ زیر است :

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) x^m$$

که در آن $\tau(1) = 1$. لذا ، $(2\pi)^{-12}\Delta(\tau)$ یک شکل ویژهٔ نرمالی شده برای هر T_n با مقدار ویژهٔ نظیر $\tau(n)$ می‌باشد . این همچنین ثابت می‌کند که تابع رامانوجان $\tau(n)$ در خاصیت ضربی (۳) صدق می‌کند .

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که تنها شکلهای ویژهٔ همزمان در M_{2k} که شکلهای بازگشتی نیستند مضارب ثابت سری آیزن اشتاین G_{2k} می‌باشند .

قضیهٔ ۱۶.۶ . فرض کنیم $f \in M_{2k}$ ، که در آن $k \geq 2$ ، و f یک شکل بازگشتی نباشد . در این صورت ، f یک شکل ویژهٔ همزمان نرمالی شده است اگر و فقط اگر

$$f(\tau) = \frac{(2k-1)!}{2(2\pi i)^{2k}} G_{2k}(\tau). \tag{۴۱}$$

برهان. در بسط فوریهٔ (۳۲) داریم $c(0) \neq 0$، زیرا f یک شکل بازگشتی نیست. رابطهٔ

$$T_n f = \lambda(n) f \tag{۴۲}$$

با رابطهٔ زیر هم‌ارز است:

$$\gamma_n(m) = \lambda(n) c(m) \tag{۴۳}$$

که با متحد گرفتن ضرایب x^m در بسطهای فوریهٔ نظیر به دست می‌آید. وقتی $m = 0$، این رابطه به صورت زیر درمی‌آید:

$$\gamma_n(0) = \lambda(n) c(0).$$

از آن‌سو، رابطهٔ (۳۵) ایجاب می‌کند که $\gamma_n(0) = \sigma_{2k-1}(n)c(0)$ زیرا $f \in M_{2k}$. ولی $c(0) \neq 0$؛ درنتیجه، معادلهٔ (۴۲) برقرار است اگر و فقط اگر

$$\lambda(n) = \sigma_{2k-1}(n).$$

با استفاده از این در (۴۳) معلوم می‌شود که

$$\gamma_n(m) = \sigma_{2k-1}(n) c(m).$$

وقتی $m = 1$، این رابطه همراه با (۳۶) نتیجه می‌دهد که

$$c(n) = \sigma_{2k-1}(n) c(1).$$

لذا، f یک شکل ویژهٔ همزمان نرمالی شده در M_{2k} است اگر و فقط اگر به ازای هر $n \geq 1$.

$$c(n) = \sigma_{2k-1}(n) \ .$$

چون سری آیزن اشتاین G_{2k} دارای بسط فوریهٔ زیر است:

$$G_{2k}(\tau) = 2\zeta(2k) + \frac{2(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(m) x^m,$$

تابع مذکور در (۴۱) نرمالی شده است و بسط فوریه‌اش مساوی است با

$$f(\tau) = \frac{(2k-1)!}{(2\pi i)^{2k}} \zeta(2k) + \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(m) x^m. \tag{۴۴}$$

تذکر. چون

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k}$$

که در آن B_k عدد برنولی kام تعریف شده با

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k$$

است، جملهٔ ثابت در (۴۴) مساوی $-B_{2k}/(4k)$ می‌باشد. (ر.ک. [۴]، قضیهٔ ۱۲.۱۷.)

همچنین ، می‌توان نوشت

$$G_{2k}(\tau) = 2\zeta(2k)\left\{1 - \frac{4k}{B_{2k}}\sum_{m=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(m)x^m\right\}.$$

چون مقدار ویژهٔ $\lambda(n)$ در (۴۲) مساوی $\sigma_{2k-1}(n)$ است ، قضیهٔ ۱۶.۶ نشان می دهد که توابع مقسوم‌علیهی $\sigma_\alpha(n)$ در خاصیت ضربی در معادلهٔ (۴) به ازای $\alpha = 2k - 1$ صدق می‌کنند . در واقع ، این توابع به ازای هر α ی حقیقی یا مختلط در (۴) صدق می‌کنند ، ولی $\sigma_\alpha(n)$ فقط وقتی ضریب n م یک شکل تمام است که α عدد صحیح فردی ناکمتر از 3 باشد .

چند مثال . مسئلهٔ تعیین جمیع شکلهای غیربازگشتی تمام که ضرایبشان در خاصیت ضربی (۳۹) صدق کنند کاملاً بوسیلهٔ قضیهٔ ۱۶.۶ سامان می‌یابد . در مورد شکلهای بازگشتی قضیهٔ ۱۵.۶ مسئله را به تعیین شکلهای ویژه به وزن زوج $2k \geq 12$ تحویل می‌کند . ماقبلاً گفتیم که تابع $(2\pi)^{-12}\Delta(\tau)$ تنها شکل ویژهٔ نرمالی شدهٔ همزمان به وزن $2k = 12$ است. همچنین ، به ازای هر وزن

$$2k = 16, 18, 20, 22, 26$$

دقیقاً " یک شکل ویژهٔ نرمالی شدهٔ همزمان وجود دارد ، زیرا به ازای این وزنها ، $\dim M_{2k,0} = 1$. شکلهای ویژهٔ نرمالی شدهٔ نظیر عبارتنداز

$$(2\pi)^{-12}\Delta(\tau)\cdot\frac{G_{2k-12}(\tau)}{2\zeta(2k-12)} = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)x^n\left\{1 - \frac{2(2k-12)}{B_{2k-12}}\sum_{m=1}^{\infty}\sigma_{2k-13}(m)x^m\right\}.$$

تعریف می‌کنیم $\tau(0) = 0$ و $\sigma_{2k-1}(0) = -B_{2k}/(4k)$. در این صورت ، ضرایب $c(n)$ این شکلهای ویژه از حاصل‌ضرب کشی زیر به دست می‌آیند :

$$c(n) = -\frac{4k-24}{B_{2k-12}}\sum_{m=0}^{n}\tau(m)\sigma_{2k-13}(n-m).$$

این ضرایب در خاصیت ضربی زیر صدق می‌کنند : به ازای هر $m \geq 1, n \geq 1$

$$c(m)c(n) = \sum_{d|(m,n)} d^{2k-1}c\left(\frac{mn}{d^2}\right).$$

۱۴.۶ چند تبصره راجع به وجود شکلهای ویژهٔ همزمان در $M_{2k,0}$

فرض کنیم $\kappa = \dim M_{2k,0}$ که در آن $2k \geq 12$. در این صورت ، داریم

$$\kappa = \begin{cases} \left[\dfrac{2k}{12}\right] - 1 & \text{اگر } 2k \equiv 2 \pmod{12} \text{ ،} \\ \left[\dfrac{2k}{12}\right] & \text{اگر } 2k \not\equiv 2 \pmod{12} \text{ ،} \end{cases}$$

فرض کنیم $e(k)$ تعداد شکلهای ویژهٔ همزمان مستقل خطی در $M_{2k,0}$ باشد. واضح است که $e(k) \le \kappa$. پس نشان‌داده‌ایم‌که وقتی $\kappa = 1$ ، $e(k) = 1$ ،هکه نشان داد که وقتی $\kappa = 2$ ، $e(k) = 2$ ، و بعدها پترسون [۳۱] نشان داد که در همه حال $e(k) = \kappa$. وی این کار را با معرفی ضرب‌داخلی (f, g) در $M_{2k,0}$ انجام‌داد که باانتگرال مضاعف زیر تعریف‌می‌شود:

$$(f, g) = \iint_{R_\Gamma} f(\tau)\bar{g}(\tau)v^{2k-2}\,du\,dv$$

که روی ناحیهٔ اساسی R_Γ در صفحهٔ $\tau = u + iv$ گرفته شده است. عملگرهای هکه نسبت به ضرب داخلی پترسون هرمیتی‌اند؛ یعنی، به ازای هر دو شکل بازگشتی در $M_{2k,0}$ در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$(T_n f, g) = (f, T_n g) \cdot$$

لذا، طبق قضیهٔ معروفی در جبر خطی (ر.ک. [۲]، قضیهٔ ۴.۵)، به ازای هر T_n ، κ شکل ویژه وجود دارند که یک پایهٔ متعامد یکه برای $M_{2k,0}$ تشکیل می‌دهند. لازم نیست اینها شکلهای ویژهٔ همزمان برای تمام T_n ها باشند. لیکن، چون T_n ها باهم تعویض می‌شوند، قضیهٔ دیگری از جبر خطی (ر.ک. [۱۰]، فصل نه، بخش ۱۵) نشان می‌دهد که $M_{2k,0}$ پایهٔ متعامد یکه‌ای مرکب از κ شکل ویژهٔ همزمان دارد. می‌توان با ضرب اینها در یک عامل ثابت به یک پایهٔ جدید از شکلهای ویژهٔ نرمالی شدهٔ همزمان دست یافت. (پایهٔ جدید متعامد است‌ولی الزاما" متعامد یکه نیست.) چون T_n ها هرمیتی‌اند ،مقادیر ویژهٔ نظیر حقیقی می‌باشند. برهان این احکام را می‌توان در مراجع [۳۱] ، [۲۵]،یا [۱۱] یافت.

۱۵.۶ تخمینهایی برای ضرایب فوریهٔ شکلهای تمام

فرض کنیم f یک شکل تمام با بسط فوریهٔ زیر باشد:

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n)x^n, \tag{۴۵}$$

که در آن $x = e^{2\pi i\tau}$. می‌نویسیم $\tau = u + iv$ ؛ درنتیجه، $x = e^{-2\pi v}e^{2\pi iu}$. به ازای $v > 0$ ی ثابت، وقتی u از 0 تا 1 تغییر کند، نقطهٔ x دایرهٔ $C(v)$ به شعاع $e^{-2\pi v}$ و مرکز

$x = 0$ را می‌پیماید . بنابر قضیهٔ ماندهٔ کشی ، داریم

$$c(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(v)} \frac{f(\tau)}{x^{n+1}}\,dx = \int_0^1 f(u+iv)x^{-n}\,du. \tag{۴۶}$$

با استفاده از این نمایش انتگرالی ، مرتبهٔ اندازهٔ $|c(n)|$ را تخمین می‌زنیم . ابتدا شکلهای بازگشتی به وزن $2k$ را درنظر می‌گیریم .

قضیهٔ ۱۷.۶ . *اگر* $f \in M_{2k,0}$ ، *داریم*

$$c(n) = O(n^k).$$

برهان . سری (۴۵) به‌ازای $|x| < 1$ به‌طور مطلق همگراست . چون $c(0) = 0$ ، می‌توان عامل x را حذف کرد و نوشت

$$|f(\tau)| = |x|\left|\sum_{n=1}^{\infty} c(n)x^{n-1}\right| \le |x|\sum_{n=1}^{\infty}|c(n)||x|^{n-1}.$$

اگر τ در ناحیهٔ اساسی R_Γ باشد ، داریم $\tau = u + iv$ که در آن $v \ge \sqrt{3}/2 > 1/2$؛ لذا ، $|x| = e^{-2\pi v} < e^{-\pi}$. بنابراین ،

$$|f(\tau)| \le A|x| = Ae^{-2\pi v}$$

که در آن

$$A = \sum_{n=1}^{\infty}|c(n)|e^{-(n-1)\pi}.$$

این ایجاب می‌کند که

$$|f(\tau)|v^k \le Av^k e^{-2\pi v}. \tag{۴۷}$$

حال تعریف می‌کنیم : اگر $\tau \in H$ ،

$$g(\tau) = \tfrac{1}{2}|\tau - \bar{\tau}| = v\,.$$

در این صورت ، اگر $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ ،

$$g(A\tau) = |c\tau + d|^{-2}g(\tau)\,.$$

درنتیجه ، $g^k(A\tau) = |c\tau + d|^{-2k}g^k(\tau)$. لذا ، حاصلضرب

$$\varphi(\tau) = |f(\tau)|g^k(\tau) = |f(\tau)|v^k$$

تحت تبدیلات Γ پایاست . به‌علاوه ، φ در R_Γ پیوسته‌بوده ، و (۴۷) نشان می‌دهدکه‌وقتی $v \to +\infty$ ، $\varphi(\tau) \to 0$. لذا ، φ در R_Γ کراندار است و ، چون φ تحت Γ پایاست ، φ نیز

در H کراندار می‌باشد؛ مثلاً ، به ازای هر τ در H ،

$$|\varphi(\tau)| \le M .$$

لذا ، به ازای هر τ در H ،

$$|f(\tau)| \le Mv^{-k} .$$

با استفاده از این در (۴۶) معلوم می‌شود که

$$|c(n)| \le \int_0^1 |f(u+iv)x^{-n}|\,du \le Mv^{-k}|x|^{-n} = Mv^{-k}e^{-2\pi nv}.$$

این رابطه به ازای هر $v > 0$ برقرار است . وقتی $v = 1/n$ ، از این خواهیم داشت

$$|c(n)| \le Mn^k e^{-2\pi} = O(n^k).$$

قضیهٔ ۱۸.۶ . هرگاه $f \in M_{2k}$ و f یک شکل بازگشتی نباشد ، آنگاه

$$c(n) = O(n^{2k-1}). \qquad (۴۸)$$

برهان . اگر $f = G_{2k}$ ، هر ضریب $c(n)$ به شکل $\alpha\sigma_{2k-1}(n)$ است که در آن α مستقل از n می‌باشد . لذا ،

$$|c(n)| \le |\alpha|\sigma_{2k-1}(n).$$

اما

$$\sigma_{2k-1}(n) = \sum_{d|n}\left(\frac{n}{d}\right)^{2k-1} = n^{2k-1}\sum_{d|n}\frac{1}{d^{2k-1}} \le n^{2k-1}\sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{d^{2k-1}} = O(n^{2k-1}),$$

درنتیجه ، اگر $f = G_{2k}$ ، رابطهٔ (۴۸) برقرار می‌باشد .

به ازای یک‌شکل غیربازگشتی دلخواه در M_{2k} ،قرار می‌دهیم $\lambda = f(i\infty)/G_{2k}(i\infty)$ در این صورت ، $f - \lambda G_{2k}$ یک شکل بازگشتی است؛ درنتیجه ،

$$f = \lambda G_{2k} + g$$

که در آن $g \in M_{2k,0}$. ضرایب فوریهٔ f مجموع ضرایب λG_{2k} و g اند؛ لذا ، مرتبهٔ اندازهٔ آنها خواهد بود

$$O(n^{2k-1}) + O(n^k) = O(n^{2k-1}).$$

تذکر . برای شکلهای بازگشتی ، تخمینهای بهتر برای مرتبهٔ اندازهٔ $c(n)$ توسط کلوسترمان[1]

1. Kloosterman

سالیه[1]، داون پورت[2]، رانکین[3]، و سلبرگ[4] به دست آمده‌اند (ر.ک. [۴۰]). ثابت شده است که به ازای هر $\varepsilon > 0$،

$$c(n) = O(n^{k-(1/4)+\varepsilon})$$

و حدس زده‌شده‌است‌که نما را می‌توان‌به $k - \frac{1}{2} + \varepsilon$ تعدیل‌کرد. برای مبین Δ، رامانوجان تخمین دقیقتر

$$|\tau(p)| \leq 2p^{11/2}$$

را به ازای p های اول حدس زد. این حدس اخیرا "توسط پی. دلاین[5] [۷] به‌اثبات رسیده است.

۶.۱۶ شکلهای هنگی و سریهای دیریکله

هکه به رابطهٔ قابل توجهی بین هر شکل هنگی با سری فوریهٔ

$$f(\tau) = c(0) + \sum_{n=1}^{\infty} c(n)e^{2\pi in\tau} \tag{۴۹}$$

و سری دیریکلهٔ

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^s} \tag{۵۰}$$

متشکل با همان ضرایب (جز در مورد $c(0)$) پی برد. هرگاه $f \in M_{2k}$، آنگاه چنانچه f یک‌شکل‌بازگشتی‌باشد، $c(n) = O(n^k)$ وچنانچه f یک‌شکل‌بازگشتی‌نباشد $c(n) = O(n^{2k-1})$ بنابراین، سری دیریکله در (۵۰) به ازای $\sigma = \text{Re}(s) > k + 1$ اگر f یک شکل بازگشتی باشد، و به ازای $\sigma > 2k$ اگر f یک شکل بازگشتی نباشد به‌طور مطلق همگرا است.

قضیهٔ ۶.۱۹. *اگر ضرایب $c(n)$ در خاصیت ضربی*

$$c(m)c(n) = \sum_{d|(m,n)} d^{2k-1}c\left(\frac{mn}{d^2}\right) \tag{۵۱}$$

صدق کنند، سری دیریکله نمایش حاصل‌ضربی اویلری به شکل زیر دارد:

$$\varphi(s) = \prod_p \frac{1}{1 - c(p)p^{-s} + p^{2k-1}p^{-2s}}, \tag{۵۲}$$

---

1. Salié
2. Davenport
3. Rankin
4. Selberg
5. P. Deligne

که با سری دیریکله به‌طور مطلق همگراست .

برهان . چون ضرایب ضربی‌اند ، هروقت سری دیریکله به‌طور مطلق همگرا باشد ، داریم (ر.ک . [۴] ، قضیهٔ ۷۰۱۱)

$$\varphi(s) = \prod_p \left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} c(p^n)p^{-ns}\right\} . \tag{۵۳}$$

اما (۵۱) ایجاب می‌کند که به ازای هر p ی اول ،

$$c(p)c(p^n) = c(p^{n+1}) + p^{2k-1}c(p^{n-1}) .$$

با استفاده از این ، به آسانی می‌توان اتحاد سری توانی

$$(1 - c(p)x + p^{2k-1}x^2)\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c(p^n)x^n\right) = 1$$

را به ازای هر $|x| < 1$ ثابت‌کرد . با فرض $x = p^{-s}$ معلوم می‌شود که (۵۳) به (۵۲) تحویل خواهد شد .

مثال . برای تابع رامانوجان نمایش حاصل‌ضربی اویلر

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \tau(p)p^{-s} + p^{11-2s}}$$

را به ازای $\sigma > 7$ داریم ، زیرا $\tau(n) = O(n^6)$.

هکه خواص تحلیلی زیر از $\varphi(s)$ را نیز به دست آورد .

قضیهٔ ۶ . ۲۰ . فرض کنیم تابع $\varphi(s)$ به ازای $\sigma > k$ با سری دیریکلهٔ (۵۰) مربوط به شکل هنگی $f(\tau)$ در M_k که دارای سری فوریهٔ (۴۹) است تعریف شده باشد ، که در آن k یک عدد صحیح زوج ناکمتر از 4 است . در این صورت ، $\varphi(s)$ را می‌توان ورای خط $\sigma = k$ و با خواص زیر ادامهٔ تحلیلی داد :

(آ) اگر $c(0) = 0$ ، $\varphi(s)$ یک تابع تمام از s باشد ؛

(ب) اگر $c(0) \neq 0$ ، $\varphi(s)$ به ازای هر s جز قطب ساده‌ای در $s = k$ با ماندهٔ

$$\frac{(-1)^{k/2}c(0)(2\pi)^k}{\Gamma(k)}$$

تحلیلی باشد؛

(پ) تابع φ در معادلهٔ تابعی زیر صدق نماید:

$$(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\varphi(s) = (-1)^{k/2}(2\pi)^{s-k}\Gamma(k-s)\varphi(k-s).$$

برهان. از نمایش انتگرالی $\Gamma(s)$ به ازای $\sigma > 0$ داریم

$$\Gamma(s)(2n\pi)^{-s} = \int_0^\infty e^{-2\pi n y} y^{s-1}\, dy$$

لذا، اگر $\sigma > k$، می‌توان طرفین را در $c(n)$ ضرب و روی n جمعبندی کرده به‌دست‌آورد

$$(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\varphi(s) = \int_0^\infty \{f(iy) - c(0)\} y^{s-1}\, dy.$$

چون f یک شکل هنگی در M_k است، داریم $f(i/y) = (iy)^k f(iy)$؛ درنتیجه،

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\varphi(s) &= \int_1^\infty \{f(iy) - c(0)\} y^{s-1}\, dy + \int_0^1 \left\{(iy)^{-k} f\left(\frac{i}{y}\right) - c(0)\right\} y^{s-1}\, dy \\
&= \int_1^\infty \{f(iy) - c(0)\} y^{s-1}\, dy + i^{-k} \int_1^\infty f(iw) w^{k-s-1}\, dw - \frac{c(0)}{s} \\
&= \int_1^\infty \{f(iy) - c(0)\} y^{s-1}\, dy \\
&\quad + (-1)^{k/2} \int_1^\infty \{f(iw) - c(0)\} w^{k-s-1}\, dw \\
&\quad + (-1)^{k/2} c(0) \int_1^\infty w^{k-s-1}\, dw - \frac{c(0)}{s} \\
&= \int_1^\infty \{f(iy) - c(0)\} \left(y^s + (-1)^{k/2} y^{k-s}\right) \frac{dy}{y} \\
&\quad - c(0)\left(\frac{1}{s} + \frac{(-1)^{k/2}}{k-s}\right).
\end{aligned}$$

با آنکه آخرین رابطه با فرض $\sigma > k$ ثابت شد، طرف راست به ازای جمیع s های مختلط با معنی است. این ادامهٔ تحلیلی $\varphi(s)$ را ورای $\sigma = k$ به ما داده و نیز (آ) و (ب) را ثابت می‌کند. به‌علاوه، تعویض s با $k - s$ طرف چپ را جز به ازای عامل $(-1)^{k/2}$ بلاتغییر می‌گذارد؛ لذا، (پ) نیز به دست خواهد آمد.

هکه همچنین عکس قضیهٔ ۶.۲۰ را ثابت کرد به این ترتیب که هر سری دیریکلهٔ φ

صادق در یک معادلهٔ تابعی از نوع (پ) همراه با شرایط تحلیلی و توسیعی لزوما" از یک شکل هنگی در M_k ناشی می‌شود. برای جزئیات امر، ر.ک.[۱۵] .

تمرینات برای فصل ۶

در تمرینهای ۱ تا ۶ به توابع حسابی f صادق در رابطه‌ای به شکل

$$f(m)f(n) = \sum_{d|(m,n)} \alpha(d) f\left(\frac{mn}{d^2}\right) \tag{۵۴}$$

به ازای هر دو عدد صحیح مثبت m و n می‌پردازیم، که در آن α یک تابع کاملا" ضربی است (یعنی $\alpha(1) = 1$، و به ازای هر m و n، $\alpha(mn) = \alpha(m)\alpha(n)$) . هر تابع حسابی صادق در (۵۴) α–ضربی نام دارد. اگر به ازای هر n، $f(n) = 0$، می‌نویسیم $f = 0$

۱. فرض کنید f، α–ضربی بوده و $f \neq 0$. ثابت کنید $f(1) = 1$. همچنین، ثابت‌کنید cf، α- ضربی است اگر و فقط اگر $c = 0$ یا $c = 1$.

۲. اگر f و g، α–ضربی‌باشند، ثابت‌کنید $f + g$ نیز α- ضربی است‌اگر و فقط اگر $f = 0$ یا $g = 0$.

۳. فرض کنید $f_1, \ldots, f_k$، k تابع α–ضربی ناصفر متمایز باشند. اگر ترکیب خطی

$$f = \sum_{i=1}^{k} c_i f_i$$

نیز α–ضربی باشد، ثابت کنید

(آ) توابع $f_1, \ldots, f_k$ مستقل خطی‌اند؛

(ب) تمام c_i ها 0 اند یا دقیقا" یکی از c_i ها 1 و بقیه 0 می‌باشند. لذا، $f = 0$ یا به ازای i ی، $f = f_i$. به‌عبارت‌دیگر، ترکیبات خطی توابع α–ضربی جز در حالات بدیهی α–ضربی نیستند.

۴. اگر f، α–ضربی باشد، ثابت کنید

$$\alpha(n)f(m) = \sum_{d|n} \mu(d) f(mnd) f\left(\frac{n}{d}\right).$$

۵. اگر f ضربی باشد، ثابت‌کنید f، α–ضربی است اگر و فقط اگر به ازای جمیع p های اول و تمام اعداد صحیح $k \geq 1$،

$$f(p^{k+1}) = f(p)f(p^k) - \alpha(p)f(p^{k-1}). \tag{۵۵}$$

۶. رابطهٔ بازگشتی (۵۵) نشان می‌دهد که $f(p^n)$ یک چندجمله‌ای از $f(p)$ است؛ مثلا"،

$$f(p^n) = Q_n(f(p)).$$

دنبالهٔ $\{Q_n(x)\}$ با روابط زیر معین می‌شود:
به ازای $r \geq 2$ ، $Q_1(x) = x, Q_2(x) = x^2 - \alpha(p), Q_{r+1}(x) = xQ_r(x) - \alpha(p)Q_{r-1}(x)$.
نشان دهید

$$Q_n(2\alpha(p)^{1/2}x) = \alpha(p)^{n/2}U_n(x),$$

که در آن $U_n(x)$ چندجمله‌ای چبیشف[1] نوع دوم است که با روابط زیر تعریف می‌شوند:
$U_1(x) = 2x$ ، $U_2(x) = 4x^2 - 1$ ، به ازای $r \geq 1$ ، $U_{r+1}(x) = 2xU_r(x) - U_{r-1}(x)$.

۷. فرض کنید $E_{2k}(\tau) = \frac{1}{2}G_{2k}(\tau)/\zeta(2k)$. اگر $x = e^{2\pi i\tau}$ ، تحقیق کنید که بسط فوریهٔ $E_{2k}(\tau)$ به ازای $k = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ به شکل زیر می‌باشد.

$$E_4(\tau) = 1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)x^n,$$

$$E_6(\tau) = 1 - 504\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_5(n)x^n,$$

$$E_8(\tau) = 1 + 480\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_7(n)x^n,$$

$$E_{10}(\tau) = 1 - 264\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_9(n)x^n,$$

$$E_{12}(\tau) = 1 + \frac{65520}{691}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{11}(n)x^n,$$

$$E_{14}(\tau) = 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{13}(n)x^n.$$

اتحادهای تمرینات ۸، ۹، و ۱۰ را با متحد گرفتن ضرایب اتحادهای مناسبی در رابطه با شکلهای هنگی به دست آورید.

۸. $\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120\sum_{m=1}^{n-1}\sigma_3(m)\sigma_3(n-m)$

۹. $11\sigma_9(n) = 21\sigma_5(n) - 10\sigma_3(n) + 5040\sum_{m=1}^{n-1}\sigma_3(m)\sigma_5(n-m)$

۱۰. $\tau(n) = \frac{65}{756}\sigma_{11}(n) + \frac{691}{756}\sigma_5(n) - \frac{691}{3}\sum_{m=1}^{n-1}\sigma_5(m)\sigma_5(n-m)$

نشان دهید این اتحاد همنهشتی رامانوجان

$$\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691}$$

---

1. Chebyshev

را ایجاب می‌کند.

۱۱. ثابت کنید حاصل‌ضربهای $G_{k-12r}\Delta^r$ آمده در قضیهٔ ۳.۶ مستقل خطی‌اند.

۱۲. ثابت کنید حاصل‌ضربهای $G_4^a G_6^b$، که درآنها a و b اعداد صحیح نامنفیی باخاصیت $4a + 6b = k$ اند، مستقل خطی می‌باشند.

۱۳. نشان دهید که سری دیریکلهٔ مربوط به شکل هنگی نرمالی شدهٔ

$$f(\tau) = \frac{(2k-1)!}{(2\pi i)^{2k}}\zeta(2k) + \sum_{m=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(m)e^{2\pi i m\tau}$$

عبارت است از $\varphi(s) = \zeta(s)\zeta(s+1-2k)$.

۱۴. چندجمله‌ای درجهٔ دوم $1 - Ax + Bx^2$ با ضرایب حقیقی A و B را می‌توان به‌صورت زیر تجزیه کرد:

$$1 - Ax + Bx^2 = (1 - r_1 x)(1 - r_2 x)$$

ثابت‌کنید $r_1 = \alpha + i\beta$ و $r_2 = \gamma - i\beta$، که درآنها α, β, γ حقیقی بوده‌و $\beta(\gamma - \alpha) = 0$ لذا، اگر $\beta \neq 0$، اعداد r_1 و r_2 مزدوجهای مختلط می‌باشند.

تذکر. برای چندجمله‌ای درجهٔ دوم آمده در برهان قضیهٔ ۱۹.۶ داریم

$$1 - c(p)x + p^{2k-1}x^2 = (1 - r_1 x)(1 - r_2 x),$$

که درآن

$$r_1 + r_2 = c(p) \quad \text{و} \quad r_1 r_2 = p^{2k-1}.$$

پترسون حدس زد که r_1 و r_2 همواره مزدوجهای مختلط‌اند. این ایجاب می‌کند که

$$|r_1| = |r_2| = p^{k-1/2} \quad \text{و} \quad |c(p)| \leq 2p^{k-1/2}.$$

وقتی $c(n) = \tau(n)$، این حدس رامانوجان را ایجاب می‌کند. حدس پترسون اخیراً توسط دلاین [۷] به اثبات رسیده است.

۱۵. در این تمرین، استنتاج معادلهٔ تابعی

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{(s-1)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) \tag{۵۶}$$

از معادلهٔ تابعی (ر.ک. تمرین ۱۰.۴)

$$\vartheta\left(\frac{-1}{\tau}\right) = (-i\tau)^{1/2}\vartheta(\tau) \tag{۵۷}$$

که درآن تابع تتای ژاکوبی

$$\vartheta(\tau) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau}$$

صدق می‌کند ، به روش ریمان به اختصار ذکر شده است .

(آ) اگر $\sigma > 1$ ، ثابت کنید

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)n^{-s} = \int_0^\infty e^{-\pi n^2 x} x^{s/2-1}\, dx$$

و ، با استفاده از این ، نمایش زیر را به دست آورید :

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \int_0^\infty \psi(x) x^{s/2-1}\, dx,$$

که در آن $2\psi(x) = \vartheta(x) - 1$.

(ب) با استفاده از (آ) و رابطهٔ (۵۷) ، نمایش

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty (x^{s/2-1} + x^{(1-s)/2-1})\psi(x)\, dx$$

را به ازای $\sigma > 1$ به دست آورید .

(پ) نشان دهید که معادلهٔ (ب) ادامهٔ تحلیلی $\zeta(s)$ را ورای خط $\sigma = 1$ به ما داده و نیز معادلهٔ تابعی (۵۶) را ایجاب می‌کند .

۷

قضیهٔ کرونکر با کاربردها

۱.۷ تقریب اعداد حقیقی به‌وسیلهٔ اعداد گویا

هر عدد گنگ θ را می‌توان به‌وسیلهٔ اعداد گویا با هر دقت مطلوب تقریب کرد. درواقع، اگر بسط اعشاری θ را پس از n رقم اعشار قطع کنیم، عدد گویایی به دست می‌آوریم که تفاضلش با θ از 10^{-n} کمتر است. لیکن، اعشاریهای بریده شده ممکن است مخرجهای بسیار بزرگی داشته باشند. مثلاً، اگر

$$\theta = \pi - 3 = 0.141592653\ldots$$

پنج تقریب اعشاری اول عبارتنداز $0.1, 0.14, 0.141, 0.1415, 0.14159$. این تقریبات اعشاری را به‌شکل a/b می‌نویسیم، که درآن اعداد صحیح a و b نسبت به هم اول باشند:

$$\frac{1}{10}, \quad \frac{7}{50}, \quad \frac{141}{1000}, \quad \frac{283}{2000}, \quad \frac{14159}{100,000}.$$

ازآن سو، تفاضل کسر $1/7 = 0.142857$ با θ از $2/1000$ کمتر بوده و تقریباً به خوبی $141/1000$ برای تقریب کردن θ است، ضمن اینکه مخرجش 7 در مقایسه با 1000 خیلی کوچک است.

این مثال سؤال زیر را مطرح می‌سازد: به ازای عدد حقیقی θ، آیا عدد گویایی چون h/k وجود دارد که تقریب مناسبی به θ بوده ولی مخرجش k خیلی بزرگ نباشد؟

این سؤال البته مبهم است، زیرا عبارات "تقریب مناسب" و "خیلی بزرگ" روشن نیستند. پیش از دقیقتر ساختن سؤال، آن را به‌صورتی کمی متفاوت تنظیم می‌کنیم. هرگاه $\theta - h/k$ کوچک باشد، آنگاه $(k\theta - h)/k$ نیز کوچک است. برای کوچک بودن این بدون بزرگ بودن k، باید صورت $k\theta - h$ کوچک باشد. لذا، می‌توان سؤال زیر را مطرح‌کرد:

به ازای عدد حقیقی θ و $0 < \varepsilon$ داده شده، آیا اعداد صحیحی چون h و k وجود دارند که $|k\theta - h| < \varepsilon$ ؟

قضیهٔ زیر از دیریکله جواب این سؤال را به طرز مثبتی می‌دهد.

۲.۷ قضیهٔ تقریب دیریکله

قضیهٔ ۱.۷ . *به ازای عدد حقیقی θ و عدد صحیح مثبت N ، اعداد صحیحی چون h و k با خاصیت $0 < k \leq N$ وجود دارند به طوری که*

$$|k\theta - h| < \frac{1}{N}. \tag{۱}$$

برهان . فرض کنیم $\{x\} = x - [x]$ قسمت کسری x باشد . $N + 1$ عدد حقیقی

$$0, \{\theta\}, \{2\theta\}, \ldots, \{N\theta\}$$

را درنظر می‌گیریم .همهٔ این اعداد در بازهٔ یکهٔ نیمباز $0 \leq \{m\theta\} < 1$ قراردارند . حال بازهٔ یکه را به N زیر بازهٔ نیمباز مساوی به طول $1/N$ تقسیم می‌کنیم . در این صورت ، زیر بازه‌ای باید شامل دست کم دو تا از این قسمتهای کسری ، مثلاً $\{a\theta\}$ و $\{b\theta\}$ ، که $0 \leq a < b \leq N$ ، باشد . لذا ، می‌توان نوشت :

$$|\{b\theta\} - \{a\theta\}| < \frac{1}{N}. \tag{۲}$$

اما

$$\{b\theta\} - \{a\theta\} = b\theta - [b\theta] - a\theta + [a\theta] = (b - a)\theta - ([b\theta] - [a\theta]).$$

لذا ، اگر قرار دهیم

$k = b - a$ و $h = [b\theta] - [a\theta]$ ،

نامساوی (۲) به صورت زیر درمی‌آید :

$|k\theta - h| < \frac{1}{N}$ که در آن $0 < k \leq N$.

این قضیه را به اثبات می‌رساند .

تذکر . به ازای $\varepsilon > 0$ می‌توان $N > 1/\varepsilon$ را اختیار کرد و (۱) نامساوی $|k\theta - h| < \varepsilon$ را ایجاب خواهد کرد .

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که می‌توان h و k را طوری اختیار کرد که نسبت به هم اول باشند .

قضیهٔ ۲.۷ . *به ازای هر θ ی حقیقی و هر عدد صحیح مثبت N ، اعداد صحیح نسبت به*

هم اولی چون h و k با خاصیت $0 < k \le N$ وجود دارند به طوری که

$$|k\theta - h| < \frac{1}{N}.$$

برهان. بنابر قضیهٔ ۱.۷، جفتی مانند k' و h' با خاصیت $0 < k' \le N$ وجود دارند که در نامساوی

$$\left|\theta - \frac{h'}{k'}\right| < \frac{1}{Nk'} \qquad (۳)$$

صدق می‌کنند. فرض کنیم $d = (h', k')$. اگر $d = 1$، چیزی برای اثبات وجود ندارد. اگر $d > 1$، می‌نویسیم $h' = hd, k' = kd$، که در آن $(h, k) = 1$ و $k < k' \le N$. در این صورت، $1/k' < 1/k$ و نامساوی (۳) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\left|\theta - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{Nk'} < \frac{1}{Nk},$$

که از آن خواهیم داشت $|k\theta - h| < 1/N$.

حال نتیجه را کمی ضعیفتر بیان می‌کنیم که مستلزم عدد صحیح N نباشد.

قضیهٔ ۳.۷. *به ازای هر θ ی حقیقی، اعداد صحیحی چون h و k با خاصیت $k > 0$ و $(h, k) = 1$ وجود دارند به طوری که*

$$\left|\theta - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{k^2}.$$

برهان. در قضیهٔ ۲.۷ به خاطر $k \le N$ داریم $1/(Nk) \le 1/k^2$.

قضیهٔ ۴.۷. *اگر θ حقیقی باشد، $S(\theta)$ را مجموعهٔ تمام زوجهای مرتبی از اعداد صحیح (h, k) با خاصیت $k > 0$ و $(h, k) = 1$ می‌گیریم که*

$$\left|\theta - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{k^2}.$$

در این صورت، $S(\theta)$ از خواص زیر برخوردار است:

(آ) $S(\theta)$ نامتناهی است؛

(ب) اگر θ گنگ باشد ، $S(\theta)$ مجموعه‌ای نامتناهی است ؛
(پ) وقتی $S(\theta)$ نامتناهی باشد ، شامل زوجی چون (h, k) است که در آن k بدلخواه بزرگ است ؛
(ت) اگر θ گویا باشد ، $S(\theta)$ مجموعه‌ای متناهی است .

برهان . قسمت (آ) صرفاً بیان مجددی از قضیهٔ ۳.۷ است . برای اثبات (ب) ، فرض کنیم θ گویا و $S(\theta)$ متناهی باشد . تناقض به دست می‌آوریم . فرض کنیم

$$\alpha = \min_{(h,k)\in S(\theta)} \left|\theta - \frac{h}{k}\right|.$$

چون θ گنگ‌است ، α مثبت‌می‌باشد . عددصحیحی‌مانند $N > 1/\alpha$ ، مثلاً $N = 1 + [1/\alpha]$ را اختیار می‌کنیم . در این صورت ، $1/N < \alpha$. با اعمال قضیهٔ ۲.۷ با این N ، زوجی از اعداد صحیح مانند h و k با خواص $(h, k) = 1$ و $0 < k \leq N$ به دست می‌آیند که

$$\left|\theta - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{kN}.$$

اما $1/(kN) \leq 1/k^2$ ؛ درنتیجه ، $(h, k) \in S(\theta)$. اما نیز داریم

$$\frac{1}{kN} \leq \frac{1}{N} < \alpha \quad \text{؛ درنتیجه،} \quad \left|\theta - \frac{h}{k}\right| < \alpha$$

که با تعریف α تعارض دارد . این نشان‌می‌دهد که اگر θ گنگ باشد ، $S(\theta)$ نمی‌تواند متناهی باشد .

برای اثبات (پ) فرض کنیم در تمام زوجهای (h, k) در $S(\theta)$ به ازای M ی $k \leq M$. با اثبات کراندار بودن تعداد انتخابهای h ، نشان می‌دهیم فرض فوق به تناقض می‌انجامد . اگر $(h, k) \in S(\theta)$ ، داریم

$$|k\theta - h| < \frac{1}{k} \leq 1,$$

درنتیجه ،

$$|h| = |h - k\theta + k\theta| \leq |h - k\theta| + |k\theta| < 1 + |k\theta| \leq 1 + M|\theta|.$$

لذا ، تعداد انتخابهای h کراندار است ، که با نامتناهی بودن $S(\theta)$ تعارض دارد .

برای اثبات (ت) ، فرض کنیم θ گویا باشد ، مثلاً $\theta = a/b$ ، که در آن $(a, b) = 1$ و $b > 0$. در این صورت ، زوج $(a, b) \in S(\theta)$ ، زیرا $\theta - a/b = 0$. حال فرض‌کنیم $S(\theta)$ مجموعه‌ای نامتناهی‌باشد وتناقض به‌دست می‌آوریم . هرگاه $S(\theta)$ نامتناهی باشد ، آنگاه

بنابر قسمت (پ) ، زوجی مانند (h, k) در $S(\theta)$ با خاصیت $k > b$ وجود دارد . برای این زوج داریم

$$0 < \left|\frac{a}{b} - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{k^2},$$

که از آن خواهیم داشت $0 < |ak - bh| < b/k < 1$. این یک تناقض است زیرا $ak - bh$ عددی صحیح می‌باشد .

قضیهٔ ۴.۷ نشان می‌دهد که عدد حقیقی θ گنگ است اگر و فقط اگر بی‌نهایت عدد گویا مانند h/k با خواص $(h, k) = 1$ و $k > 0$ وجود داشته باشند که

$$\left|\theta - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{k^2}.$$

این نامساوی را می‌توان بهتر کرد . به آسانی ثابت می‌شود که صورت 1 را می‌توان با $\frac{1}{2}$ عوض کرد (ر.ک. تمرین ۴.۷) . هرویتس $\frac{1}{2}$ را با ثابت کوچکتری عوض کرد . وی ثابت نمود θ گنگ است اگر و فقط اگر بی‌نهایت عدد گویا مانند h/k با خواص $(h, k) = 1$ و $k > 0$ وجود داشته باشند که

$$\left|\theta - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}k^2}.$$

به‌علاوه ، نتیجه در صورت تعویض $1/\sqrt{5}$ با ثابت کوچکتر نادرست است . (ر.ک. تمرین ۵.۷) ما قضیهٔ هرویتس را ثابت نمی‌کنیم . در عوض ، قضیهٔ لیوویل را ثابت می‌کنیم که نشان می‌دهد مخرج k^2 را نمی‌توان با k^3 یا توان بالاتری تعویض کرد .

۳.۷ قضیهٔ تقریب لیوویل

قضیهٔ ۵.۷. *فرض کنیم θ یک عدد جبری حقیقی از درجهٔ $n \geq 2$ باشد . در این صورت ثابت مثبتی چون $C(\theta)$ ، فقط تابع θ ، وجود دارد به طوری که به ازای جمیع اعداد صحیح h و k با خاصیت $k > 0$ داریم*

$$\left|\theta - \frac{h}{k}\right| > \frac{C(\theta)}{k^n}. \qquad (۴)$$

برهان . چون θ جبری از درجهٔ n است ، θ صفر یک چندجمله‌ای مانند $f(x)$ از درجهٔ n

با ضرایب صحیح است:

$$f(x) = \sum_{r=0}^{n} a_r x^r,$$

که در آن $f(x)$ روی میدان گویا تحویل‌ناپذیر می‌باشد. چون $f(x)$ تحویل ناپذیر است، ریشهٔ گویا ندارد؛ درنتیجه، به ازای هر h/k گویا، $f(h/k) \neq 0$.

حال، با استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین حساب دیفرانسیل، می‌نویسیم

$$f\left(\frac{h}{k}\right) = f\left(\frac{h}{k}\right) - f(\theta) = f'(\xi)\left(\frac{h}{k} - \theta\right), \tag{۵}$$

که در آن ξ بین θ و h/k قرار دارد. رابطهٔ (۴) را با به دست آوردن کران بالایی برای $|f'(\xi)|$ و کران پایینی برای $|f(h/k)|$ از رابطهٔ (۵) نتیجه می‌گیریم. خواهیم داشت

$$f\left(\frac{h}{k}\right) = \sum_{r=0}^{n} a_r \left(\frac{h}{k}\right)^r = \frac{N}{k^n}$$

که در آن N عدد صحیح ناصفری است. بنابراین،

$$\left|f\left(\frac{h}{k}\right)\right| \geq \frac{1}{k^n}, \tag{۶}$$

که کران پایینی مطلوب می‌باشد. برای به دست آوردن کران بالایی برای $|f'(\xi)|$، قرار می‌دهیم

$$d = \left|\theta - \frac{h}{k}\right|.$$

هرگاه $d > 1$، آنگاه (۴) به ازای $C(\theta) = 1$ برقرار است؛ لذا، می‌توان فرض کرد $d < 1$ (چون θ گنگ است، نمی‌توانیم داشته باشیم $d = 1$). چون ξ بین θ و h/k بوده و $d < 1$، داریم $|\xi - \theta| < 1$؛ درنتیجه،

$$|\xi| = |\theta + \xi - \theta| \leq |\theta| + |\xi - \theta| < |\theta| + 1.$$

لذا،

$$|f'(\xi)| \leq A(\theta) < 1 + A(\theta),$$

که در آن $A(\theta)$ ماکزیمم $|f'(x)|$ در بازهٔ $|x| \leq |\theta| + 1$ می‌باشد. با استفاده از این کران بالایی برای $|f'(\xi)|$ در (۵) همراه با کران پایینی در (۶)، رابطهٔ (۴) به ازای $C(\theta) = 1/(1 + A(\theta))$ به دست می‌آید.

یک‌عدد حقیقی که جبری نباشد **متعالی** نام دارد. با استدلال شمارشی ساده‌می‌توان

نشان داد که اعداد متعالی وجود دارند. در واقع، مجموعهٔ تمام اعداد جبری حقیقی شمارشپذیر می‌باشد، اما مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی شمارش ناپذیر است؛ لذا، اعداد متعالی نه‌تنها وجود دارند بلکه مجموعه‌ای شمارش‌ناپذیر تشکیل می‌دهند.

اثبات متعالی بودن عددی مانند e یا π معمولاً" مشکل است. از قضیهٔ لیوویل می‌توان برای اثبات این امر استفاده کرد که اعداد گنگی که به قدر کافی با اعداد گویا تقریب می‌شوند لزوماً" متعالی‌اند. این‌گونه اعداد اعداد لیوویل نام داشته و به صورت زیر تعریف می‌شوند.

تعریف. عدد حقیقی θ را یک عدد *لیوویل* نامیم‌اگر به‌ازای‌هرعدد صحیح $r \geq 1$، اعداد صحیحی چون h_r و k_r با خاصیت $k_r > 0$ موجود باشند به طوری که

$$0 < \left|\theta - \frac{h_r}{k_r}\right| < \frac{1}{k_r^{\,r}}. \tag{۷}$$

قضیهٔ ۷.۶. *هر عدد لیوویل متعالی است.*

برهان. اگر عدد لیوویل θ جبری‌از درجهٔ n می‌بود، در هر دو نامساوی (۷) صدق می‌کرد و به ازای هر $r \geq 1$،

$$\left|\theta - \frac{h_r}{k_r}\right| > \frac{C(\theta)}{k_r^{\,n}}$$

که در آن $C(\theta)$ ثابت قضیهٔ ۷.۵ است. لذا،

$$0 < \frac{C(\theta)}{k_r^{\,n}} < \frac{1}{k_r^{\,r}} \quad \text{یا} \quad 0 < C(\theta) < \frac{1}{k_r^{\,r-n}}\cdot$$

اگر r به قدر کافی بزرگ باشد، نامساوی اخیر تناقضی به دست خواهد داد.

مثال. عدد

$$\theta = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{10^{m!}}$$

یک‌عدد لیوویل بوده ؛و لذا، متعالی‌است. درواقع، به ازای هر $r \geq 1$ می‌توان $k_r = 10^{r!}$ را اختیار کرد و

$$h_r = k_r \sum_{m=1}^{r} \frac{1}{10^{m!}}.$$

در این صورت، داریم

$$0 < \theta - \frac{h_r}{k_r} = \sum_{m=r+1}^{\infty} \frac{1}{10^{m!}} \le \frac{1}{10^{(r+1)!}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{10^m}$$
$$= \frac{10/9}{10^{(r+1)!}} = \frac{1}{k_r^r} \frac{10/9}{10^{r!}} < \frac{1}{k_r^r} .$$

درنتیجه، رابطهٔ (۷) برقرار می‌باشد.

تذکر. همین استدلال نشان می‌دهد که اگر به ازای بی‌نهایت m، $a_m = 0$ و $a_m = 1$، $\sum_{m=1}^{\infty} a_m 10^{-m!}$ متعالی می‌باشد.

حال به تعمیم قضیهٔ دیریکله می‌پردازیم که به همت کرونکر[1] صورت گرفته است.

۴.۷ قضیهٔ تقریب کرونکر: حالت یک‌بعدی

قضیهٔ دیریکله به ما می‌گوید که به ازای هر θ ی حقیقی و هر $0 < \varepsilon$، اعداد صحیحی مانند x و y، که هر دو 0 نیستند، وجود دارند به طوری که

$$|\theta x + y| < \varepsilon.$$

به عبارت دیگر، شکل خطی $\theta x + y$ را می‌توان با انتخاب مناسبی از x و y به‌طور دلخواه به 0 نزدیک‌کرد. اگر θ گویا باشد، این امر بدیهی است چرا که می‌توان داشت $\theta x + y = 0$. لذا، نتیجه فقط وقتی اهمیت دارد که θ گنگ باشد. کرونکر نتیجهٔ بسیار قویتری را ثابت کرد. وی نشان داد که اگر θ گنگ باشد، شکل خطی $\theta x + y$ را می‌توان به هر عدد حقیقی مقرر بدلخواه نزدیک کرد. این نتیجه را ابتدا برای α در بازهٔ یکه ثابت می‌کنیم. مثل برهان قضیهٔ دیریکله، از قسمتهای کسری $\{n\theta\} = n\theta - [n\theta]$ استفاده می‌کنیم.

قضیهٔ ۷.۷. *اگر θ عدد گنگ معلومی باشد، دنبالهٔ اعداد $\{n\theta\}$ در بازهٔ یکه چگال است. یعنی، به ازای هر α که $0 \le \alpha \le 1$ و هر $0 < \varepsilon$، عدد صحیح مثبتی چون k وجود دارد به طوری که*

$$|\{k\theta\} - \alpha| < \varepsilon.$$

لذا، اگر $h = [k\theta]$، *خواهیم داشت* $|k\theta - h - \alpha| < \varepsilon$.

---

1. Kronecker

تذکر. این نشان می‌دهد که شکل خطی $\theta x + y$ را می‌توان با انتخاب مناسبی از اعداد صحیح x و y بدلخواه به α نزدیک کرد.

برهان. ابتدا توجه می‌کنیم که چون θ گنگ است، اگر $m \neq n$، $\{m\theta\} \neq \{n\theta\}$. همچنین، فرض $0 < \theta < 1$ خللی به‌کلیت‌واردنمی‌سازد، زیرا $n\theta = n[\theta] + n\{\theta\}$ و $\{n\theta\} = \{n\{\theta\}\}$.

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد و α را طوری اختیار می‌کنیم که $0 \leq \alpha \leq 1$. بنابر قضیهٔ تقریب دیریکله، اعداد صحیحی‌چون h و k وجود دارند به‌طوری‌که $|k\theta - h| < \varepsilon$. حال $k\theta > h$ یا $k\theta < h$. فرض کنیم $k\theta > h$؛ لذا، $0 < \{k\theta\} < \varepsilon$. (اگر $k\theta < h$، استدلال به همین ترتیب است.) حال زیر دنبالهٔ زیر از دنبالهٔ $\{n\theta\}$ را درنظرمی‌گیریم:

$$\{k\theta\}, \{2k\theta\}, \{3k\theta\}, \ldots .$$

نشان می‌دهیم جملات اولیهٔ این دنباله صعودی‌اند. داریم

$k\theta = [k\theta] + \{k\theta\}$؛ درنتیجه، $mk\theta = m[k\theta] + m\{k\theta\}$.

لذا،

$$\{mk\theta\} = m\{k\theta\} \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad \{k\theta\} < \frac{1}{m}.$$

حال بزرگترین عدد صحیح N صادق در $\{k\theta\} < 1/N$ را اختیار می‌کنیم. در این صورت، داریم

$$\frac{1}{N+1} < \{k\theta\} < \frac{1}{N}.$$

لذا، به ازای $m = 1, 2, \ldots, N$، $\{mk\theta\} = m\{k\theta\}$؛ درنتیجه، N عدد

$$\{k\theta\}, \{2k\theta\}, \ldots, \{Nk\theta\}$$

یک زنجیر متساوی‌الفاصلهٔ صعودی از چپ به راست در بازهٔ $(0, 1)$ را تشکیل می‌دهند. آخرین عضو این زنجیر (طبق تعریف N) در نامساوی

$$\frac{N}{N+1} < \{Nk\theta\} < 1$$

یا

$$1 - \frac{1}{N+1} < \{Nk\theta\} < 1$$

صدق می‌کند. لذا، تفاضل $\{Nk\theta\}$ با 1 از $\varepsilon > \{k\theta\} > 1/(N+1)$ کمتر می‌باشد. لذا N، عضو اول زیر دنبالهٔ $\{nk\theta\}$ بازهٔ یکه را به زیر بازه‌هایی به طول کوچکتر از ε تقسیم

می‌کنند. چون α در یکی از این زیربازه‌ها قرار دارد، قضیه به اثبات می‌رسد.

قضیهٔ زیر قید $0 \le \alpha \le 1$ را از میان برمی‌دارد.

قضیهٔ ۸.۷. *به ازای هر α ی حقیقی، هر θ ی گنگ، و هر $\varepsilon > 0$، اعداد صحیحی مانند h و k با خاصیت $k > 0$ وجود دارند به طوری که*

$$|k\theta - h - \alpha| < \varepsilon.$$

برهان. می‌نویسیم $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$. بنابر قضیهٔ ۷.۷، $k > 0$ ای وجود دارد به طوری که $|\{k\theta\} - \{\alpha\}| < \varepsilon$. لذا،

$$|k\theta - [k\theta] - (\alpha - [\alpha])| < \varepsilon$$

یا

$$|k\theta - ([k\theta] - [\alpha]) - \alpha| < \varepsilon.$$

با فرض $h = [k\theta] - [\alpha]$ برهان تمام خواهد شد.

۵.۷ تعمیم قضیهٔ کرونکر به تقریب همزمان

حال به مسئلهٔ تقریب همزمان می‌پردازیم. فرض کنیم n عدد گنگ $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ و n عدد حقیقی $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ و $\varepsilon > 0$ داده شده باشند. اعداد صحیح $h_1, h_2, \ldots, h_n$ و k را جستجو می‌کنیم به طوری که

$$\text{به ازای } i = 1, 2, \ldots, n \text{ ،} \quad |k\theta_i - h_i - \alpha_i| < \varepsilon.$$

خواهیم دید این مسئله به صورت بیان شده همیشه قابل حل نیست. مثلاً، فرض کنید با دو عدد گنگ، مثلاً θ_1 و $2\theta_1$، و دو عدد حقیقی α_1 و α_2 شروع کرده باشیم، و اعداد صحیح h_1، h_2، و k ای وجود داشته باشند به طوری که

$$|k\theta_1 - h_1 - \alpha_1| < \varepsilon$$

و

$$|2k\theta_1 - h_2 - \alpha_2| < \varepsilon.$$

از ضرب نامساوی اول در 2 و تفریق از نامساوی دوم، خواهیم داشت

$$|2h_1 - h_2 + 2\alpha_1 - \alpha_2| < 3\varepsilon.$$

چون ε، α_1، و α_2 دلخواه و h_2 و h_1 صحیح‌اند، این نامساوی در حالت کلی نمی‌تواند برقرار باشد. مشکل این مثال این است که θ_1 و $2\theta_1$ وابستهٔ خطی‌اند و می‌توان θ_1 را از

دو نامساوی حذف کرد. کرونکر نشان داد که اگر $\theta_1, \ldots, \theta_n$ روی اعداد صحیح مستقل خطی باشند، یعنی اگر

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \theta_i = 0$$

با مضارب صحیح $c_1, \ldots, c_n$ ایجاب کنـــد که $c_1 = \cdots = c_n = 0$، مسئلهٔ تقریب همزمان همیشه قابل حل خواهد بود. تاوان این امر برداشتن قید گنگ بودن θ_i است. ابتدا قضیه‌ای را ثابت می‌کنیم که نتیجه‌ای به ظاهر کمتر کلی است.

قضیهٔ ۹.۷ (اولین شکل قضیهٔ کرونکر). *هرگاه $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ اعداد حقیقی دلخواهی بوده، $\theta_1, \ldots, \theta_n$ اعداد حقیقی مستقل خطی باشند، و $\varepsilon > 0$ دلخواه باشد، آنگاه عددی حقیقی چون t و اعداد صحیحی مانند $h_1, \ldots, h_n$ وجود دارند به طوری که به ازای $i = 1, 2, \ldots, n$، $|t\theta_i - h_i - \alpha_i| < \varepsilon$.*

تذکر. قضیه عدد حقیقی t را می‌دهد، حال آنکه ما عدد صحیحی چون k را می‌خواهیم. بعداً نشان می‌دهیم که می‌توان t را با عدد صحیح k عوض کرد، ولی در اغلب کاربردهای قضیه، حقیقی بودن t کافی است.

در برهان قضیهٔ ۹.۷ از سه لم استفاده می‌شود.

لم ۱. *فرض کنیم $\{\lambda_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی متمایز باشد. به ازای هر t ی حقیقی و اعداد مختلط دلخواه $c_0, \ldots, c_N$، تعریف می‌کنیم*

$$f(t) = \sum_{r=0}^{N} c_r e^{it\lambda_r}.$$

در این صورت، به ازای هر k داریم

$$c_k = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-it\lambda_k}\, dt.$$

برهان. از تعریف $f(t)$ داریم

$$f(t) e^{-it\lambda_k} = \sum_{r=0}^{N} c_r e^{i(\lambda_r - \lambda_k)t}.$$

لذا،

$$\int_0^T f(t)e^{-it\lambda_k}\,dt = \sum_{\substack{r=0\\ r\neq k}}^{N} c_r \int_0^T e^{i(\lambda_r-\lambda_k)t}\,dt + c_k T,$$

که از آن خواهیم داشت

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-it\lambda_k}\,dt = c_k + \sum_{\substack{r=0\\ r\neq k}}^{N} c_r \frac{e^{i(\lambda_r-\lambda_k)T}-1}{i(\lambda_r-\lambda_k)T}.$$

حال با فرض $T \to \infty$ لم به دست خواهد آمد.

لم ۲. *اگر t حقیقی باشد، قرار می‌دهیم*

$$F(t) = 1 + \sum_{r=1}^{n} e^{2\pi i(t\theta_r-\alpha_r)}, \tag{۸}$$

که در آن $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ و $\theta_1,\ldots,\theta_n$ اعداد حقیقی دلخواهی‌اند. فرض کنیم

$$L = \sup_{-\infty<t<+\infty} |F(t)|.$$

در این صورت، احکام زیر باهم هم‌ارز می‌باشند:

(آ) به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی حقیقی مانند t و اعداد صحیحی چون $h_1,\ldots,h_n$ وجود دارند به طوری که

به ازای $r = 1, 2, \ldots, n$ ، $|t\theta_r - \alpha_r - h_r| < \varepsilon$.

(ب) $L = n + 1$.

برهان. ایدهٔ برهان نسبتاً" ساده است. هر جمله از مجموع (۸) دارای قدر مطلق 1 است؛ درنتیجه، $|F(t)| \le n + 1$. هرگاه (آ) برقرار باشد، آنگاه هر عدد $t\theta_r - \alpha_r$ تقریباً" عددی صحیح است؛ لذا، هر نما در (۸) تقریباً" 1 بوده؛ و درنتیجه، $|F(t)|$ تقریباً" $n + 1$ می‌باشد. به‌عکس، هرگاه (ب) برقرار باشد، آنگاه $|F(t)|$ به ازای t ای تقریباً" $n + 1$ است؛ لذا، هر جمله در (۸) باید تقریباً" 1 باشد، زیرا قدرمطلق هیچ جمله‌ای از 1 بزرگتر نیست. بنابراین، هر عدد $t\theta_r - \alpha_r$ تقریباً" عددی صحیح است؛ درنتیجه، (آ) برقرار می‌باشد. حال این ایده را به برهانی دقیق تبدیل می‌کنیم.

ابتدا نشان می‌دهیم (آ) حکم (ب) را ایجاب می‌کند. اگر (آ) برقرار باشد، $\varepsilon = 1/(2\pi k)$ را اختیار می‌کنیم که در آن $k \ge 1$ ، و فرض کنیم t_k مقدار نظیر t باشد که با (آ) داده

شده است . در این صورت ، تفاضل $2\pi(t_k\theta_r - \alpha_r)$ با مضرب صحیحی از 2π از $1/k$ کمتر است؛ درنتیجه ،

$$\cos 2\pi(t_k\theta_r - \alpha_r) \geq \cos\frac{1}{k}.$$

لذا ،

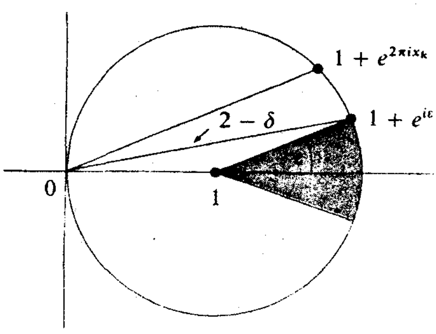
$$|F(t_k)| \geq 1 + \sum_{r=1}^{n} \cos 2\pi(t_k\theta_r - \alpha_r) \geq 1 + n\cos\frac{1}{k} \cdot$$

درنتیجه ، $L \geq |F(t_k)| \geq 1 + n\cos(1/k)$. با فرض $k \to \infty$ معلوم می‌شود که $L \geq n + 1$. چون $L \leq n + 1$ ، این حکم (ب) را ثابت خواهد کرد .

حال فرض کنیم (آ) درست‌نباشد ،و نشان می‌دهیم (ب) نیز درست نیست . اگر (آ) درست نباشد ، $\varepsilon > 0$ ی وجود دارد به‌طوری که به ازای جمیع اعداد صحیح و تمام t های حقیقی ، k ای که $1 \leq k \leq n$ وجود دارد به قسمی که

$$|t\theta_k - \alpha_k - h_k| \geq \frac{\varepsilon}{2\pi}. \tag{۹}$$

(همچنین ، می‌توان فرض کرد $\varepsilon \leq \pi/4$ ، زیرا اگر (آ) به ازای ε نادرست باشد ، به ازای هر ε کوچکتر نیز نادرست‌است .)فرض کنیم $x_r = t\theta_r - \alpha_r - h_r$. پس (۹)ایجاب می‌کند که $|2\pi x_k| \geq \varepsilon$ ؛ لذا ،نقطهٔ $1 + e^{2\pi i x_k}$ بردایره به‌شعاع 1 حول 1 ولی‌خارج قطاع‌سایه‌دار شکل ۱۰۷ قرار دارد .



شکل ۱۰۷

اما $2 \geq |1 + e^{i\varepsilon}|$ ، درنتیجه ، به ازای $\delta > 0$ ای ، $|1 + e^{i\varepsilon}| = 2 - \delta$. لذا ،

$$|1 + e^{2\pi i x_k}| \leq |1 + e^{i\varepsilon}| = 2 - \delta.$$

بنابراین،

$$|F(t)| = \left|1 + \sum_{r=1}^{n} e^{2\pi i x_r}\right| \le |1 + e^{2\pi i x_k}| + \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq k}}^{n} |e^{2\pi i x_r}|$$
$$\le (2 - \delta) + (n - 1) = n + 1 - \delta.$$

چون این به ازای هر t درست است، باید داشته باشیم $L \le n + 1 - \delta < n + 1$، که با (ب) متناقض است.

لم ۳. فرض کنیم $g = g(x_1, \ldots, x_n)$ چندجمله‌ای n متغیرهٔ

$$g = 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

بوده و می‌نویسیم

$$g^p = 1 + \sum a_{r_1,\ldots,r_n} x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}, \qquad (۱۰)$$

که در آن p عدد صحیح مثبتی است. در این صورت، ضرایب $a_{r_1,\ldots,r_n}$ اعداد صحیح مثبتی هستند به طوری که

$$1 + \sum a_{r_1,\ldots,r_n} = (1 + n)^p, \qquad (۱۱)$$

و تعداد جملات در (۱۰) حداکثر $(p + 1)^n$ می‌باشد.

برهان. چون $1 + \sum a_{r_1,\ldots,r_n} = g^p(1, 1, \ldots, 1) = (1 + n)^p$، این (۱۱) را ثابت می‌کند. فرض کنیم $N + 1$ تعداد جملات در (۱۰) باشد. به استقرا روی n ثابت می‌کنیم

$$1 + N \le (p + 1)^n. \qquad (۱۲)$$

به ازای $n = 1$ داریم

$$(1 + x_1)^p = 1 + \binom{p}{1}x_1 + \binom{p}{2}x_1^2 + \cdots + x_1^p$$

و مجموع سمت راست درست $p + 1$ جمله دارد. لذا، (۱۲) به ازای $n = 1$ برقرار است. اگر $n > 1$، داریم

$$g_p = \{(1 + x_1 + \cdots + x_{n-1}) + x_n\}^p$$
$$= (1 + x_1 + \cdots + x_{n-1})^p + \binom{p}{1}(1 + \cdots + x_{n-1})^{p-1}x_n + \cdots + x_n^p,$$

درنتیجه، اگر در هر گروه سمت راست حداکثر $(p + 1)^{n-1}$ جمله موجود باشد، رویهم $(p + 1)^n$ جمله خواهیم داشت. این نامساوی (۱۲) را به استقرا ثابت خواهد کرد.

برهان قضیهٔ کرونکر. اگر $F(t)$ را مثل لم ۲ اختیار کنیم، داریم

$$F(t) = 1 + \sum_{r=1}^{n} e^{2\pi i(t\theta_r - \alpha_r)}.$$

طبق لم ۲، برای اثبات قضیهٔ کرونکر کافی است ثابت کنیم

$$L = \sup_{-\infty < t < +\infty} |F(t)| = n + 1.$$

توان p ام $F(t)$ مجموعی است از نوع مجموع لم ۱:

$$f(t) = F^p(t) = 1 + \sum_{r=1}^{N} c_r e^{it\lambda_r}, \qquad (۱۳)$$

که در آن $\lambda_0 = 1$ واگر $r \geq 1$، λ_r با $2\pi(r_1\theta_1 + \cdots + r_n\theta_n)$ عوض‌شده‌است. λ_r ها متمایزند، زیرا θ_i ها روی اعداد صحیح مستقل خطی می‌باشند. ضرایب c_r در (۱۳) اعداد صحیح $a_{r_1,\ldots,r_n}$ لم ۳ می‌باشند که در عاملی با قدر مطلق 1 ضرب شده‌اند. لذا، (۱۱) ایجاب می‌کند که

$$1 + \sum_{r=1}^{N} |c_r| = 1 + \sum a_{r_1,\ldots,r_n} = (1 + n)^p. \qquad (۱۴)$$

بنابر لم ۱، داریم

$$c_r = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F^p(t) e^{-it\lambda_r}\, dt. \qquad (۱۵)$$

اما $|F(t)| \leq L$؛ درنتیجه، به ازای هر t، $|F^p(t)| \leq L^p$؛ لذا،

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T F^p(t) e^{-it\lambda_r}\, dt \right| \leq \frac{1}{T} \int_0^T L^p\, dt = L^p.$$

بنابراین، (۱۵) ایجاب می‌کند که به ازای هر r، $|c_r| \leq L^p$، و، بنابر لم ۳، از (۱۴) نتیجه می‌شود که

$$(1 + n)^p \leq (N + 1)L^p \leq (p + 1)^n L^p .$$

لذا،

$$\frac{n + 1}{L} \leq (p + 1)^{n/p}$$

که از آن داریم

$$\log\left(\frac{n + 1}{L}\right) \leq \frac{n}{p} \log(p + 1).$$

حال فرض کنیم $p \to \infty$. نامساوی اخیر به صورت $0 \le \log[(n+1)/L]$ درمی‌آید؛ لذا ، $L \ge n+1$. ولی $L \le n+1$؛ درنتیجه ، $L = n+1$ ، و این قضیهٔ کرونکر را ثابت خواهد کرد .

در روایت زیر از قضیهٔ کرونکر عدد حقیقی t با عدد صحیح k عوض می‌شود .

قضیهٔ ۱۰.۷ (دومین شکل قضیهٔ کرونکر) *هرگاه $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ اعداد حقیقی دلخواهی بوده ، $\theta_1, \ldots, \theta_n$ اعداد حقیقی مستقل خطی باشند ، و $\varepsilon > 0$ داده شده باشد ، آنگاه عدد صحیحی چون k و اعداد صحیح $m_1, \ldots, m_n$ وجود دارند به طوری که*

به ازای $i = 1, 2, \ldots, n$ ، $|k\theta_i - m_i - \alpha_i| < \varepsilon$.

برهان . اولین شکل قضیهٔ کرونکر را بر دستگاه $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0$ و $\{\theta_1\}, \{\theta_2\}, \ldots, \{\theta_n\}, 1$ ، با $\varepsilon/2$ به جای ε که $\varepsilon < 1$ ، اعمال می‌کنیم . در این صورت ، t ای حقیقی و اعداد صحیح $h_1, \ldots, h_{n+1}$ وجود دارند به طوری که

به ازای $i = 1, 2, \ldots, n$ ، $|t\{\theta_i\} - h_i - \alpha_i| < \frac{\varepsilon}{2}$

و

$$|t - h_{n+1}| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (۱۶)$$

نامساوی اخیر نشان می‌دهد که t تقریباً" مساوی عدد صحیح h_{n+1} است . $k = h_{n+1}$ را اختیار می‌کنیم . در این صورت ، (۱۶) ایجاب می‌کند که

$$\begin{aligned}|k\{\theta_i\} - h_i - \alpha_i| &= |t\{\theta_i\} - h_i - \alpha_i + (k-t)\{\theta_i\}| \\ &\le |t\{\theta_i\} - h_i - \alpha_i| + |k - t| < \varepsilon.\end{aligned}$$

لذا ، با نوشتن $\{\theta_i\} = \theta_i - [\theta_i]$ ، به دست می‌آوریم

$$|k(\theta_i - [\theta_i]) - h_i - \alpha_i| < \varepsilon$$

یا ، به عبارت معادل ،

$$|k\theta_i - (h_i + k[\theta_i]) - \alpha_i| < \varepsilon.$$

با فرض $m_i = h_i + k[\theta_i]$ قضیه به دست خواهد آمد .

۶.۷ کاربرد در تابع زتای ریمان

به کمک قضیهٔ کرونکر می‌توان کوچکترین کران بالایی و بزرگترین کران پایینی $|\zeta(\sigma + it)|$

را بر خط ثابت$=\sigma$، $\sigma > 1$ ، تعیین کرد .

تعریف . به ازای σ ی ثابت تعریف می‌کنیم

$$m(\sigma) = \inf_t |\zeta(\sigma + it)| \quad \text{و} \quad M(\sigma) = \sup_t |\zeta(\sigma + it)|$$

که در آنها اینفیمم و سوپرمم روی تمام t های حقیقی گرفته شده است .

قضیهٔ ۱۱.۷ . *به ازای هر $\sigma > 1$ ی ثابت داریم*

$$m(\sigma) = \frac{\zeta(2\sigma)}{\zeta(\sigma)} \quad \text{و} \quad M(\sigma) = \zeta(\sigma) \cdot$$

برهان . به ازای $\sigma > 1$ داریم $|\zeta(\sigma + it)| \leq \zeta(\sigma)$ ؛ درنتیجه ، $M(\sigma) = \zeta(\sigma)$ ، سوپرمم روی محور حقیقی به دست می‌آید . برای به دست آوردن نتیجه جهت $m(\sigma)$ ، متقابل $|1/\zeta(s)|$ را تخمین می‌زنیم . به ازای $\sigma > 1$ داریم

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| = \prod_p |1 - p^{-s}| \leq \prod_p (1 + p^{-\sigma}) = \frac{\zeta(\sigma)}{\zeta(2\sigma)}. \qquad (۱۷)$$

لذا ، $|\zeta(s)| \geq \zeta(2\sigma)/\zeta(\sigma)$ ؛ درنتیجه ، $m(\sigma) \geq \zeta(2\sigma)/\zeta(\sigma)$.

حال می‌خواهیم نامساوی عکس $m(\sigma) \leq \zeta(2\sigma)/\zeta(\sigma)$ را ثابت کنیم . باید نشان دهیم که نامساوی

$$|1 - p^{-s}| \leq 1 + p^{-\sigma}$$

به کار رفته در (۱۷) به ازای بعضی مقادیر t خیلی نزدیک به تساوی است . اما

$$1 - p^{-s} = 1 - p^{-\sigma - it} = 1 - p^{-\sigma}e^{-it\log p} = 1 + p^{-\sigma}e^{i(-t\log p - \pi)}$$

لذا ، کافی است نشان دهیم $-t\log p - \pi$ به ازای بعضی مقادیر t تقریبا "مضرب زوجی از 2π است . برای این کار از قضیهٔ کرونکر استمداد می‌طلبیم . البته ، در حاصل‌ضرب اویلر برای $1/\zeta(s)$ بی‌نهایت جمله وجود دارند و نمی‌توان انتظار داشت که $-t\log p - \pi$ به ازای جمیع p های اول تقریبا " مضرب زوجی از 2π باشد . اما برای به دست آوردن نامساوی مطلوب می‌توان این کار را برای تعدادی کافی عدد اول انجام داد .

ε دلخواه که $0 < \varepsilon < \pi/2$ و عدد صحیح $n \geq 1$ را اختیار می‌کنیم . قضیهٔ کرونکر را بر اعداد زیر اعمال می‌کنیم :

$$\theta_k = \frac{-1}{2\pi}\log p_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

که در آن $p_1, \ldots, p_n$ اولین n عدد اول‌اند. θ_i ها مستقل خطی‌اند، زیرا

$\sum_{i=1}^{n} a_i \log p_i = 0$ ایجاب می‌کند که $\log(p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n}) = 0$.

درنتیجه، $p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n} = 1$؛ لذا، هر $a_i = 0$. همچنین، $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \frac{1}{2}$ را اختیار می‌کنیم. پس، طبق قضیهٔ ۹.۷، t ای حقیقی و اعداد صحیحی چون $h_1, \ldots, h_n$ وجود دارند به طوری که $|t\theta_k - \alpha_k - h_k| < \varepsilon/(2\pi)$، بدین معنی که

$$|-t \log p_k - \pi - 2\pi h_k| < \varepsilon. \tag{۱۸}$$

به ازای این t داریم

$$\begin{aligned} 1 - p_k^{-s} &= 1 - p_k^{-\sigma} e^{-it\log p_k} = 1 + p_k^{-\sigma} e^{i(-t\log p_k - \pi)} \\ &= 1 + p_k^{-\sigma} \cos(-t \log p_k - \pi) + i p_k^{-\sigma} \sin(-t \log p_k - \pi), \end{aligned}$$

درنتیجه،

$$|1 - p_k^{-s}| \geq 1 + p_k^{-\sigma} \cos(-t \log p_k - \pi).$$

ولی (۱۸) ایجاب می‌کند که

$$\cos|-t \log p_k - \pi| = \cos|-t \log p_k - \pi - 2\pi h_k| > \cos \varepsilon,$$

زیرا تابع کسینوس در بازهٔ $[0, \pi/2]$ نزولی است. لذا،

$$|1 - p_k^{-s}| > 1 + p_k^{-\sigma} \cos \varepsilon.$$

حال یک حاصل‌ضرب جزئی از حاصل‌ضرب اویلر برای $1/\zeta(s)$ را درنظر می‌گیریم. به ازای ε و n داده شده، t ای حقیقی (تابع ε و n) وجود دارد به طوری که

$$\left|\prod_{k=1}^{n} (1 - p_k^{-s})\right| = \prod_{k=1}^{n} |1 - p_k^{-s}| > \prod_{k=1}^{n} (1 + p_k^{-\sigma} \cos \varepsilon). \tag{۱۹}$$

اما

$$\frac{1}{|\zeta(s)|} = \prod_{k=1}^{\infty} |1 - p_k^{-s}|$$

و درنتیجه، طبق شرط کشی برای حاصل‌ضربهای همگرا، n_0 ی هست به طوری که $n \geq n_0$ ایجاب می‌کند که

$$\left|\prod_{k=n+1}^{\infty} |1 - p_k^{-s}| - 1\right| < \varepsilon$$

یا

$$1 - \varepsilon < \prod_{k=n+1}^{\infty} |1 - p_k^{-s}| < 1 + \varepsilon.$$

با استفاده از (۱۹) به ازای $n \geq n_0$ ، داریم

$$\frac{1}{|\zeta(s)|} = \prod_{k=1}^{n} |1 - p_k{}^{-s}| \prod_{k=n+1}^{\infty} |1 - p_k{}^{-s}| > (1 - \varepsilon) \prod_{k=1}^{n} (1 + p_k{}^{-\sigma} \cos \varepsilon).$$

این نامساوی به ازای $n \geq n_0$ و t ای تابع n و ε برقرار است. لذا،

$$\frac{1}{m(\sigma)} = \frac{1}{\inf_t |\zeta(\sigma + it)|} = \sup_t \frac{1}{|\zeta(\sigma + it)|} \geq (1 - \varepsilon) \prod_{k=1}^{n} (1 + p_k{}^{-\sigma} \cos \varepsilon).$$

با فرض $n \to \infty$ خواهیم داشت

$$\frac{1}{m(\sigma)} \geq (1 - \varepsilon) \prod_{k=1}^{\infty} (1 + p_k{}^{-\sigma} \cos \varepsilon).$$

لحظه‌ای بعد نشان می‌دهیم که حاصل‌ضرب اخیر به ازای $0 \leq \varepsilon \leq \pi/2$ به طور یکنواخت همگراست. لذا، می‌توان فرض کرد $\varepsilon \to 0$ و با جمله به جمله حد گرفتن به دست آورد

$$\frac{1}{m(\sigma)} \geq \prod_{k=1}^{\infty} (1 + p_k{}^{-\sigma}) = \frac{\zeta(\sigma)}{\zeta(2\sigma)}.$$

این نامساوی مطلوب $m(\sigma) \leq \zeta(2\sigma)/\zeta(\sigma)$ را به ما می‌دهد.

برای اثبات همگرایی یکنواخت حاصل‌ضرب، از این استفاده می‌کنیم که حاصل ضرب $\prod (1 + f_n(z))$ بر یک‌مجموعه به‌طور یکنواخت همگراست‌اگر و فقط‌اگر سری $\sum f_n(z)$ براین مجموعه به‌طور یکنواخت همگرا باشد. لذا، سری $\sum p_k{}^{-\sigma} \cos \varepsilon$ را درنظر می‌گیریم. ولی این‌سری‌تحت‌تسلط $\sum p_k{}^{-\sigma} \leq \sum n^{-\sigma} = \zeta(\sigma)$ است. لذا، همگرایی‌دربازهٔ $10 \leq \varepsilon \leq \pi/2$ یکنواخت بوده، و برهان تمام می‌باشد.

۷.۷ کاربرد در توابع متناوب

گوییم n عدد مختلط $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ روی اعداد صحیح مستقل خطی‌اند اگر هیچ ترکیبی خطی مانند

$$a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \cdots + a_n\omega_n$$

با ضرایب صحیح مساوی 0 نباشد مگرآنکه $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. در غیر این صورت، اعداد $\omega_1, \ldots, \omega_n$ روی اعداد صحیح را وابستهٔ خطی می‌نامند.

توابع بیضوی توابعی‌خوشریخت‌با دو دورهٔ تناوب مستقل خطی‌اند. در این‌بخش با استفاده از قضیهٔ کرونکر نشان می‌دهیم توابع‌خوشریخت‌با سه دورهٔ تناوب مستقل خطی جز توابع ثابت وجود ندارند.

قضیهٔ ۱۲.۷ . فرض کنیم ω_1 و ω_2 دوره‌های تناوب f باشند به طوری که نسبت ω_2/ω_1 حقیقی و گنگ باشد. در این صورت، f دارای دوره‌های تناوب ناصفر بدلخواه کوچک می‌باشد. یعنی، به‌ازای $0 < \varepsilon$، دورهٔ تناوبی چون ω وجود دارد به‌طوری‌که $\varepsilon > |\omega| > 0$.

برهان. قضیهٔ تقریب دیریکله را به کار می‌بریم. فرض کنیم $\theta = \omega_2/\omega_1$. چون θ گنگ است، به ازای $0 < \varepsilon$ داده‌شده اعداد صحیحی چون h و k با خاصیت $0 < k$ وجود دارند به طوری که

$$|k\theta - h| < \frac{\varepsilon}{|\omega_1|}.$$

با ضرب در $|\omega_1|$ خواهیم داشت

$$|k\omega_2 - h\omega_1| < \varepsilon$$

ولی $\omega = k\omega_2 - h\omega_1$ یک دورهٔ تناوب f با خاصیت $\varepsilon > |\omega|$ است. همچنین، $\omega \neq 0$ زیرا ω_2/ω_1 گنگ می‌باشد.

قضیهٔ ۱۳.۷ . هرگاه f دارای سه دورهٔ تناوب $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ باشد که روی اعداد صحیح مستقل خطی‌اند، آنگاه f دارای دوره‌های تناوب ناصفر کوچک می‌باشد.

برهان. ابتدا ω_2/ω_1 را حقیقی می‌گیریم. هرگاه ω_2/ω_1 گویا باشد، آنگاه ω_1 و ω_2 روی اعداد صحیح وابستهٔ خطی‌اند؛ لذا، $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ نیز وابسته‌اند، که با فرض متناقض می‌باشد. هرگاه ω_2/ω_1 گنگ باشد، آنگاه f، طبق قضیهٔ ۱۲.۷، دوره‌های تناوب ناصفر بدلخواه کوچک دارد.

حال فرض کنیم ω_2/ω_1 حقیقی نباشد. این، به‌طور هندسی، یعنی ω_1 و ω_2 با مبداء همخط نیستند. لذا، ω_3 را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از ω_1 و ω_2 با ضرایب حقیقی بیان کرد؛ مثلاً،

$$\omega_3 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2$$ ، که در آن α و β حقیقی‌اند.

اینک سه حالت درنظر می‌گیریم:

(آ) α و β هر دو گویایند؛

(ب) یکی از α و β گویا و دیگری گنگ است؛

(پ) α و β هر دو گنگ‌اند.

حالت (آ) ایجاب می‌کند که $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ روی اعداد صحیح وابسته باشند، که با

فرض متناقض است .

برای حالت (ب) فرض‌می‌کنیم α گویا بوده ، مثلا" $\alpha = a/b$ ، و β گنگ باشد . دراین صورت ، داریم

$$\omega_3 = \frac{a}{b}\omega_1 + \beta\omega_2 \text{ ؛ درنتیجه ، } b\omega_3 - a\omega_1 = \beta(b\omega_2) \cdot$$

این دو دورهٔ تناوب $b\omega_3 - a\omega_1$ و $b\omega_2$ با نسبت گنگ را به ما می‌دهد ؛ لذا ، f دارای دوره‌های تناوب بدلخواه کوچک‌می‌باشد . البته ، اگر β گویا و α گنگ باشد ، همین استدلال قابل بیان است .

اکنون حالت (پ) ، یعنی گنگ بودن α و β ، را درنظر می‌گیریم . این حالت را به دو حالت جزء تقسیم می‌کنیم .

(پ ۱) فرض کنیم α و β روی اعداد صحیح وابستهٔ خطی باشند . دراین صورت ، اعداد صحیحی چون a و b که هر دو صفرنیستند وجود دارند به‌طوری که $a\alpha + b\beta = 0$. به‌خاطر تقارن می‌توان فرض کرد $b \neq 0$. در این صورت ، $\beta = -a\alpha/b$ و

$$\omega_3 = \alpha\omega_1 - \frac{a}{b}\alpha\omega_2 \text{ ؛ درنتیجه ، } b\omega_3 = \alpha(b\omega_1 - a\omega_2) \cdot$$

مجددا" ، دودورهٔ تناوب $b\omega_3$ و $b\omega_1 - a\omega_2$ با نسبت‌گنگ‌داریم ؛ لذا ، f دارای دوره‌های تناوب ناصفر بدلخواه کوچک می‌باشد .

(پ ۲) فرض کنیم α و β روی اعداد صحیح مستقل خطی باشند . بنابر قضیهٔ کرونکر ، به ازای $\varepsilon > 0$ اعداد صحیحی چون h_1 ، h_2 ، و k وجود دارند به طوری که

$$|k\alpha - h_1| < \frac{\varepsilon}{1 + |\omega_1| + |\omega_2|}, \qquad |k\beta - h_2| < \frac{\varepsilon}{1 + |\omega_1| + |\omega_2|}.$$

با ضرب این نامساویها در $|\omega_1|$ و $|\omega_2|$ ، به دست می‌آوریم

$$|k\alpha\omega_1 - h_1\omega_1| < \frac{\varepsilon|\omega_1|}{1 + |\omega_1| + |\omega_2|}, \qquad |k\beta\omega_2 - h_2\omega_2| < \frac{\varepsilon|\omega_2|}{1 + |\omega_1| + |\omega_2|}.$$

چون $k\omega_3 = k\alpha\omega_1 + k\beta\omega_2$ ، بنابر نامساوی مثلثی داریم

$$|k\omega_3 - h_1\omega_1 - h_2\omega_2| < \frac{\varepsilon(|\omega_1| + |\omega_2|)}{1 + |\omega_1| + |\omega_2|} < \varepsilon.$$

لذا ، $k\omega_3 - h_1\omega_1 - h_2\omega_2$ یک دورهٔ تناوب ناصفر به هنگ کمتر از ε می‌باشد .

تذکر. در فصل ۱ نشان دادیم هر تابع با دوره‌های تناوب ناصفر بدلخواه کوچک بر هر

زیرمجموعهٔ همبند باز که در آن تحلیلی باشد ثابت است. لذا، طبق قضیهٔ ۱۳۰۷، تنها توابع خوشریخت با سه دورهٔ تناوب مستقل توابعی ثابت می‌باشند.

در فصل بعد کاربردهای دیگری از قضیهٔ کرونکر خواهند آمد.

تمرینات برای فصل ۷

۱. تعمیم زیر از قضیهٔ تقریب دیریکله را ثابت‌کنید. به‌ازای n عدد حقیقی $\theta_1, \ldots, \theta_n$ و عدد صحیح $N \geq 1$، اعداد صحیحی چون $h_1, \ldots, h_n$ و k، که $1 \leq k \leq N^n$، وجود دارند به طوری که

$$\text{به ازای } i = 1, 2, \ldots, n \text{ ، } |k\theta_i - h_i| < \frac{1}{N} \text{ .}$$

۲. (آ) ثابت کنید به ازای n عدد حقیقی $\theta_1, \ldots, \theta_n$، اعداد صحیحی چون $h_1, \ldots, h_n$ و $k > 0$ وجود دارند به طوری که

$$\text{به ازای } i = 1, 2, \ldots, n \text{ ، } \left|\theta_i - \frac{h_i}{k}\right| < \frac{1}{k^{1+1/n}} \text{ .}$$

(ب) اگر دست‌کم یکی از θ_i ها گنگ باشد، ثابت‌کنید مجموعه‌ای نامتناهی از n تاییها مانند $(h_1/k, \ldots, h_n/k)$ وجود دارد که در نامساویهای (آ) صدق می‌کنند.

۳. در این تمرین تعمیم دیگری از قضیهٔ تقریب دیریکله را عرضه می‌کنیم. m فرم خطی

$$L_i = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n - y_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

نسبت به $n + m$ متغیر $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ داده شده‌اند. ثابت کنید به‌ازای هرعدد صحیح $N > 1$، اعداد صحیحی چون $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ وجود دارند به‌طوری که

$$\text{به ازای } i = 1, 2, \ldots, m \text{ ، } |L_i| < \frac{1}{N}$$

و $0 < \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \leq N^{m/n}$. **راهنمایی.** فرض کنید $M_j = a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n$ و نقاط $(\{M_1\}, \ldots, \{M_m\})$ در مکعب یکه در فضای m بعدی را، که $\{M_j\} = M_j - [M_j]$، بررسی نمایید.

۴. فرض کنید θ گنگ بوده و $0 < \theta < 1$. در این صورت، θ بین دو کسر فاری متوالی است؛ مثلاً،

$$\frac{a}{b} < \theta < \frac{c}{d}.$$

(آ) ثابت کنید $\theta - a/b < 1/(2b^2)$ یا $c/d - \theta < 1/(2d^2)$.

(ب) نتیجه بگیرید که بی‌نهایت کسر h/k با خاصیت $(h, k) = 1$ و $k > 0$ وجود دارندبه طوری که

$$\left|\theta - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{2k^2}.$$

۵ . فرض کنید $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$. این تمرین نشان می‌دهد که‌اگر $0 < c < 1/\sqrt{5}$ نامعادلهٔ

$$\left|\alpha - \frac{h}{k}\right| < \frac{c}{k^2} \tag{۲۰}$$

فقط تعدادی متناهی جواب صحیح h و k با خاصیت $k > 0$ دارد .

(آ) فرض‌کنید $\beta = \alpha - \sqrt{5}$. لذا ، α و β ریشه‌های‌معادلهٔ $x^2 - x - 1 = 0$ می‌باشند . نشان دهید به ازای هر دو عدد صحیح h و k با خاصیت $k > 0$ ، داریم

$$\frac{1}{k^2} \le \left|\alpha - \frac{h}{k}\right|\left|\beta - \frac{h}{k}\right|$$

و نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{1}{k^2} \le \left|\alpha - \frac{h}{k}\right|\left(\left|\alpha - \frac{h}{k}\right| + \sqrt{5}\right).$$

(ب) اگر نامعادلهٔ (۲۰) بی‌نهایت‌جواب h/k باخاصیت $k > 0$ ، مثلا " $h_1/k_1, h_2/k_2, \ldots$ داشته باشد ، نشان‌دهید وقتی $n \to \infty$ ، $k_n \to \infty$ ، و با استفاده از قسمت (آ) ثابت کنید $c \ge 1/\sqrt{5}$.

۶ . در لم ۲

به جای $L = \sup\limits_{-\infty < t < \infty} |F(t)|$ تعریف کنید $L = \limsup\limits_{t \to +\infty} |F(t)|$.

ثابت کنید معادلهٔ $L = n + 1$ هم‌ارز حکم زیر است :

به ازای هر $\varepsilon > 0$ و هر $T > 0$ ، $t > T$ ای حقیقی و اعداد صحیحی چــون $h_1, \ldots, h_n$ وجود دارند به طوری که به ازای هر $i = 1, 2, \ldots, n$ ، $|t\theta_i - h_i - \alpha_i| < \varepsilon$.

۷ . ثابت کنید مضرب t در اولین شکل قضیهٔ کرونکر را می‌توان مثبت و بدلخواه بزرگ گرفت . یعنی ، با مفروضات قضیهٔ ۷ . ۹ ، اگر $T > 0$ داده شده باشد ، $t > T$ یِ‌حقیقی وجود دارد که در n نامساوی $|t\theta_i - h_i - \alpha_i| < \varepsilon$ صدق می‌کند . همچنین ، نشان‌دهید که مضرب صحیح k در دومین شکل قضیهٔ کرونکر را می‌توان مثبت و بدلخواه بزرگ اختیار کرد .

۸
سری دیریکلهٔ کلی و قضیهٔ هم ارزی بوهر[1]

۱.۸ مقدمه

در این فصل، رده‌ای از سریها، به نام سریهای دیریکلهٔ کلی، مطرح می‌شود که شامل هم‌سریهای توانی و هم‌سریهای دیریکلهٔ معمولی به عنوان حالاتی خاص است. بخش اعظم فصل به روشی اختصاص دارد که توسط هارالد بوهر [۶] در ۱۹۱۹ برای مطالعهٔ مجموعهٔ مقادیری به کار رفت که سریهای دیریکله در یک نیمصفحه می‌گیرند. بوهر یک رابطهٔ هم‌ارزی بین سریهای دیریکله معرفی‌کرده و نشان‌داد که سریهای دیریکلهٔ هم‌ارز در بعضی نیمصفحه‌ها مجموعه مقادیر یکسانی خواهند گرفت. در این نظریه از قضیهٔ تقریب کرونکر مطرح شده در فصل قبل استفاده می‌شود. در آخر فصل کاربردهایی در تابع زتای ریمان و L-توابع دیریکله داده خواهند شد.

۲.۸ نیمصفحهٔ همگرایی سریهای دیریکلهٔ کلی

تعریف. فرض کنیم $\{\lambda(n)\}$ یک دنبالهٔ اکیدا" صعودی از اعداد حقیقی باشد به طوری که وقتی $n \to \infty$ ، $\lambda(n) \to +\infty$. هر سری به شکل

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n) e^{-s\lambda(n)}$$

یک **سری دیریکلهٔ کلی** نام دارد. اعداد $\lambda(n)$ *نماهای* سری، و اعداد $a(n)$ *ضرایب* نامیده می‌شوند.

طبق معمول، می‌نویسیم $s = \sigma + it$ که در آن σ و t حقیقی می‌باشند.

---

1. Bohr

تذکر. وقتی $\lambda(n) = \log n$ ، داریم $e^{-s\lambda(n)} = n^{-s}$ و سری دیریکلهٔ معمـــولی $\sum a(n)n^{-s}$ به دست می‌آید. وقتی $\lambda(n) = n$ ، سری یک‌سری توانی‌از x می‌شود ، که در آن $x = e^{-s}$.

یک سری دیریکلهٔ کلی شبیه تبدیل لاپلاس یک تابع ، یعنی $\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$ است. در واقع ، سریهای دیریکله و تبدیلات لاپلاس حالات خاصی از **تبدیل لاپلاس[1] ــ اشتیل‌یس[2]** ، یعنی $\int_0^\infty e^{-st}\,d\alpha(t)$ ، می‌باشند. وقتی $\alpha(t)$ مشتق پیوستهٔ $\alpha'(t) = f(t)$ داشته‌باشد ، تبدیل لاپلاس f را خواهیم داشت. وقتی α یک تابع پله‌ای با جهش $a(n)$ در نقطهٔ $\lambda(n)$ باشد ، انتگرال به سری دیریکلهٔ کلی $\sum a(n)e^{-s\lambda(n)}$ تبدیل می‌شود. بخش اعظم آنچه را کـه در اینجا ارائه می‌شود می‌توان به تبدیلات لاپلاس ــ اشتیل‌یس تعمیم داد ، ولی مـا به این تعمیمها نخواهیم پرداخت.

مثل سریهای دیریکلهٔ معمولی ، به هر سری دیریکلهٔ کلی طول همگرایی σ_c و طول همگرایی‌مطلق σ_a مربوط می‌شود. می‌توان مثل فصل ۱۱ مرجع [۴] استدلال نموده و وجود σ_c و σ_a را ثابت کرد. به جای این کار روش اثبات دیگری به کار می‌بریم که σ_c و σ_a را برحسب نماهای $\lambda(n)$ و ضرایب $a(n)$ نیز بیان می‌کند.

قضیهٔ ۸.۱. فرض کنیم سری $\sum a(n)e^{-s\lambda(n)}$ به ازای s ی با قسمت حقیقی مثبت ، مثلاً ، $s = s_0$ با $\sigma_0 > 0$ ، همگرا باشد. قرار می‌دهیم

$$L = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log\left|\sum_{k=1}^{n} a(k)\right|}{\lambda(n)}.$$

در این صـــورت ، $L \le \sigma_0$. بـــه علاوه ، سری در نیمصفحهٔ $\sigma > L$ همگراست ، و همگرایی بر هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ نیمصفحهٔ $\sigma > L$ یکنواخت می‌باشد.

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم $L \le \sigma_0$. فرض کنیم $A(n)$ مجموعهای جزئی ضرایب باشد :

$$A(n) = \sum_{k=1}^{n} a(k).$$

توجه کنید که به ازای هر n به قدر کافی بزرگ ، $\lambda(n) > 0$. اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ و هر n به قدر کافی بزرگ ثابت کنیم

$$\log|A(n)| < (\sigma_0 + \varepsilon)\lambda(n) \qquad (1)$$

---

1. Laplace   2. Stieltjes

به ازای این n ها خواهیم داشت

$$\frac{\log|A(n)|}{\lambda(n)} < \sigma_0 + \varepsilon \cdot$$

درنتیجه $L \leq \sigma_0 + \varepsilon$ ، لذا $L \leq \sigma_0$. اما رابطهٔ (۱) با نامساوی

$$|A(n)| < e^{(\sigma_0 + \varepsilon)\lambda(n)} \qquad (۲)$$

هم‌ارز است . برای اثبات (۲) مجموعهای جزئی

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} a(k) e^{-s_0 \lambda(k)}$$

را معرفی می‌کنیم . $S(n)$ ها کراندارند ، زیرا سری $\sum_{k=1}^{\infty} a(k)e^{-s_0\lambda(k)}$ همگرا می‌باشد . فرض کنیم به ازای هر n ، $|S(n)| < M$. برای بیان $A(n)$ برحسب $S(n)$ ، از جمعبندی جزئی استفاده می‌کنیم :

$$\begin{aligned} A(n) = \sum_{k=1}^{n} a(k) &= \sum_{k=1}^{n} a(k) e^{-s_0\lambda(k)} e^{s_0\lambda(k)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \{S(k) - S(k-1)\} e^{s_0\lambda(k)}, \end{aligned}$$

مشروط براینکه $S(0) = 0$. لذا ،

$$\begin{aligned} A(n) &= \sum_{k=1}^{n} S(k) e^{s_0\lambda(k)} - \sum_{k=1}^{n-1} S(k) e^{s_0\lambda(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} S(k)\{e^{s_0\lambda(k)} - e^{s_0\lambda(k+1)}\} + S(n) e^{s_0\lambda(n)}. \end{aligned}$$

بنابراین ،

$$|A(n)| < M \sum_{k=1}^{n-1} |e^{s_0\lambda(k)} - e^{s_0\lambda(k+1)}| + M e^{\sigma_0\lambda(n)}.$$

ولی

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} |e^{s_0\lambda(k)} - e^{s_0\lambda(k+1)}| &= \sum_{k=1}^{n-1} \left| s_0 \int_{\lambda(k)}^{\lambda(k+1)} e^{s_0 u}\, du \right| \leq |s_0| \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\lambda(k)}^{\lambda(k+1)} e^{\sigma_0 u}\, du \\ &= |s_0| \int_{\lambda(1)}^{\lambda(n)} e^{\sigma_0 u}\, du = \frac{|s_0|}{\sigma_0} (e^{\sigma_0\lambda(n)} - e^{\sigma_0\lambda(1)}) < \frac{|s_0|}{\sigma_0} e^{\sigma_0\lambda(n)}. \end{aligned}$$

لذا ،

$$|A(n)| < M\left(1 + \frac{|s_0|}{\sigma_0}\right) e^{\sigma_0\lambda(n)}.$$

اما وقتی $n \to \infty$ ، $\lambda(n) \to \infty$ ؛ درنتیجه ، اگر n به‌قدر کافی بزرگ باشد ،

$$e^{\varepsilon\lambda(n)} > M\left(1 + \frac{|s_0|}{\sigma_0}\right).$$

لذا ، به ازای این n ها داریم $|A(n)| < e^{(\sigma_0+\varepsilon)\lambda(n)}$ ، که (۲) و درنتیجه (۱) را ثابت‌خواهد کرد . پس $L \leq \sigma_0$ ثابت خواهد شد .

حال ثابت‌می‌کنیم سری به‌ازای‌هر s که $\sigma > L$ همگراست . بخشی‌ازسری $\sum a(n)e^{-s\lambda(n)}$ مثلا" $\sum_{n=a}^{b}$ ، را درنظر می‌گیریم . با استفاده از محک همگرایی کشی ، نشان می‌دهیم این بخش را می‌توان با اختیار a و b به قدر کافی بزرگ کوچک کرد . اندازهٔ این بخش را با استفاده از جمعبندی جزئی در مقایسه با مجموعهای جزئی $A(n) = \sum_{k=1}^{n} a(k)$ تخمین می‌زنیم . خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{b} a(n)e^{-s\lambda(n)} &= \sum_{n=a}^{b} \{A(n) - A(n-1)\}e^{-s\lambda(n)} \\ &= \sum_{n=a}^{b} A(n)\{e^{-s\lambda(n)} - e^{-s\lambda(n+1)}\} + A(b)e^{-s\lambda(b+1)} \\ &\quad - A(a-1)e^{-s\lambda(a)}.\end{aligned}$$

این رابطه به‌ازای‌هر s ، a ، و b برقرار است . حال فرض‌کنیم s عددی مختلط با $\sigma > L$ باشد . قرار می‌دهیم $\varepsilon = \frac{1}{2}(\sigma - L)$. پس $\varepsilon > 0$ و $\sigma = L + 2\varepsilon$. طبق تعریف L ، به‌ازای ε عدد صحیح $N(\varepsilon)$ هست به طوری که به ازای هر $n \geq N(\varepsilon)$ داریم

$$\frac{\log|A(n)|}{\lambda(n)} < L + \varepsilon.$$

همچنین ، می‌توان فرض کرد به ازای $n \geq N(\varepsilon)$ ، $\lambda(n) > 0$. لذا ،

به ازای هر $n \geq N(\varepsilon)$ ، $|A(n)| < e^{(L+\varepsilon)\lambda(n)}$.

اگر $b \geq a > N(\varepsilon)$ را اختیار کنیم ، تخمین زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=a}^{b} a(n)e^{-s\lambda(n)}\right| &\leq \sum_{n=a}^{b} e^{(L+\varepsilon)\lambda(n)}|e^{-s\lambda(n)} - e^{-s\lambda(n+1)}| \\ &\quad + e^{(L+\varepsilon)\lambda(b+1)}e^{-\sigma\lambda(b+1)} + e^{(L+\varepsilon)\lambda(a)}e^{-\sigma\lambda(a)}.\end{aligned}$$

دو جملهٔ آخر عبارتنداز $e^{-\varepsilon\lambda(b+1)} + e^{-\varepsilon\lambda(a)}$ ، زیرا $L + \varepsilon - \sigma = -\varepsilon$. حال مجموع را تخمین می‌زنیم :

$$|e^{-s\lambda(n)} - e^{-s\lambda(n+1)}| = \left|-s\int_{\lambda(n)}^{\lambda(n+1)} e^{-su}\,du\right| \leq |s| \int_{\lambda(n)}^{\lambda(n+1)} e^{-\sigma u}\,du$$

درنتیجه،

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{b} e^{(L+\varepsilon)\lambda(n)}|e^{-s\lambda(n)} - e^{-s\lambda(n+1)}| &\le |s|\sum_{n=a}^{b} e^{(L+\varepsilon)\lambda(n)}\int_{\lambda(n)}^{\lambda(n+1)} e^{-\sigma u}\, du \\ &\le |s|\sum_{n=a}^{b}\int_{\lambda(n)}^{\lambda(n+1)} e^{-\sigma u}e^{(L+\varepsilon)u}\, du = |s|\sum_{n=a}^{b}\int_{\lambda(n)}^{\lambda(n+1)} e^{-\varepsilon u}\, du \\ &= |s|\int_{\lambda(a)}^{\lambda(b+1)} e^{-\varepsilon u}\, du = \frac{|s|}{\varepsilon}(e^{-\varepsilon\lambda(a)} - e^{-\varepsilon\lambda(b+1)}).\end{aligned}$$

لذا، داریم

$$\left|\sum_{n=a}^{b} a(n)e^{-s\lambda(n)}\right| \le \frac{|s|}{\varepsilon}(e^{-\varepsilon\lambda(a)} - e^{-\varepsilon\lambda(b+1)}) + e^{-\varepsilon\lambda(b+1)} + e^{-\varepsilon\lambda(a)}.$$

وقتی $a \to \infty$ ، هر جملهٔ سمت راست به 0 میل می‌کند؛ لذا، محک کشی نشان می‌دهد که سری به ازای هر s با $L < \sigma$ همگرا می‌باشد. این برهان را تمام خواهد کرد. همچنین، توجه کنید که این همگرایی **یکنواخت** را بر هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ نیمصفحهٔ $L < \sigma$ ثابت خواهد کرد.

قضیهٔ ۲.۸. *فرض کنیم سری* $\sum a(n)e^{-s\lambda(n)}$ *به ازای* s *ی که* $0 < \sigma$ *همگرا بوده ولی به‌ازای هر* s *که* $0 > \sigma$ *واگرا باشد. در این صورت، عدد*

$$L = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log|\sum_{k=1}^{n} a(k)|}{\lambda(n)}$$

طول همگرایی سری است. به‌عبارت دیگر، سری به ازای هر s *با* $L < \sigma$ *همگرا و به ازای هر* s *با* $L > \sigma$ *واگرا می‌باشد.*

برهان. از قضیهٔ ۱.۸ می‌دانیم سری به ازای هر s با $L < \sigma$ همگرا بوده و L نمی‌تواند منفی باشد. فرض کنیم S مجموعهٔ تمام $0 < \sigma$ هایی باشد که سری به ازای s ی با قسمت حقیقی σ همگراست. مجموعهٔ S ناتهی و از پایین کراندار است. فرض کنیم، σ_c بزرگترین کران پایینی S باشد. در این صورت، $0 < \sigma_c$. هر σ در S در $L \le \sigma$ صدق می‌کند؛ لذا، $L \le \sigma_c$. اگر $L < \sigma_c$ را می‌داشتیم، یک σ در بازهٔ $L < \sigma < \sigma_c$ وجود می‌داشت. بدارای این σ نیز همگرایی برای هر s با قسمت حقیقی σ می‌داشتیم (قضیهٔ ۱.۸) که بسا تعریف σ_c متناقض بود. لذا، $\sigma_c = L$. ولی تعریف σ_c نشان می‌دهد که سری به‌ازای هر s با $L > \sigma \ge 0$ واگراست. طبق فرض، سری به ازای هر s با $0 > \sigma$ نیز واگراست. لذا، به ازای هر s با

$L > \sigma$ واگرا می‌باشد . این برهان را تمام خواهد کرد .

به عنوان نتیجه ، داریم :

قضیهٔ ۳.۸ . *فرض کنیم سری $\sum a(n)e^{-s\lambda(n)}$ به ازای s ی با $0 < \sigma$ به طور مطلق همگرا بوده ولی به ازای هر s با $0 > \sigma$ واگرا باشد . در این صورت ، عدد*

$$\sigma_a = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log \sum_{k=1}^{n} |a(k)|}{\lambda(n)}$$

طول همگرایی مطلق سری می‌باشد .

برهان . فرض کنیم A طول همگرایی سری $\sum |a(n)|e^{-s\lambda(n)}$ باشد . طبق قضیهٔ ۲.۸ ،

$$A = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log \sum_{k=1}^{n} |a(k)|}{\lambda(n)}.$$

می‌خواهیم ثابت کنیم $\sum |a(n)|e^{-\sigma\lambda(n)}$ به ازای $A < \sigma$ همگرا و به ازای $A > \sigma$ واگراست . واضح است که اگر $A < \sigma$ ، نقطهٔ $s = \sigma$ در نیمصفحهٔ همگرایی $\sum |a(n)|e^{-s\lambda(n)}$ است ؛ لذا ، $\sum |a(n)|e^{-\sigma\lambda(n)}$ همگرا می‌باشد .

حال فرض کنیم $\sum |a(n)|e^{-\sigma\lambda(n)}$ به‌ازای $A > \sigma$ ای همگرا باشد . دراین صورت ، سری $\sum |a(n)|e^{-s\lambda(n)}$ به ازای هر s با قسمت حقیقی σ به‌طور مطلق همگراست ؛ لذا ، بخصوص ، به ازای هر یک از این s ها همگراست ، که با طول همگرایی $\sum |a(n)|e^{-s\lambda(n)}$ بودن A درتضاد می‌باشد .

۳.۸ پایه برای دنبالهٔ نماهای یک سری دیریکله

تا پایان این فصل به‌بررسی مشروط نظریهٔ هارالد بوهر با کاربردهایش درتابع زتای ریمان و L - سری دیریکله اختصاص دارد . اولین مفهوم مورد نیاز مفهوم **پایه** برای‌دنبالهٔ نماهای یک سری دیریکله است .

تعریف . فرض کنیم $\Lambda = \{\lambda(n)\}$ دنباله‌ای نامتناهی از اعداد حقیقی متمایز باشد . منظور از پایهٔ مجموعهٔ Λ یعنی دنباله‌ای متناهی یا شمارپذیر مانند $B = \{\beta(n)\}$ ازاعداد حقیقی که در سه شرط زیر صدق کند :

(آ) دنبالهٔ B روی اعداد گویا مستقل خطی باشد . یعنی ، به ازای هر $m \geq 1$ ، اگر

$$\sum_{k=1}^{m} r_k \beta(k) = 0$$

با ضرایب گویای r_k باشد، آنگاه هر $r_k = 0$؛

(ب) هر $\lambda(n)$ قابل بیان به صورت ترکیبی خطی متناهی از جملات B باشد، مثلاً"،

$$\lambda(n) = \sum_{k=1}^{q(n)} r_{n,k} \beta(k)$$

که در آن $r_{n,k}$ گویا بوده و تعداد جمعوندهای $q(n)$ تابع n باشد؛ (بنابر شرط (آ)، اگر $\lambda(n) \neq 0$، این نمایش منحصر به فرد است.)

(پ) هر $\beta(n)$ قابل بیان به صورت یک ترکیب خطی متناهی از جملات Λ باشد؛ مثلاً"،

$$\beta(n) = \sum_{k=1}^{m(n)} t_{n,k} \lambda(k)$$

که در آن $t_{n,k}$ ها گویا بوده و $m(n)$ تابع n می‌باشد.

مثال ۱. فرض کنیم Λ مجموعهٔ تمام اعداد گویا باشد. در این صورت، $B = \{1\}$ یک پایه است.

مثال ۲. فرض کنیم $\Lambda = \{\log n\}$. پس $B = \{\log p_n\}$ یک پایه است، که در آن p_n عدد اول n م می‌باشد. به آسانی می‌توان خواص (آ)، (ب)، و (پ) را تحقیق کرد. برای استقلال توجه می‌کنیم که

$$\sum_{k=1}^{q} r_k \log p_k = 0 \text{ ایجاب می‌کند که } p_1^{r_1} \cdots p_q^{r_q} = 1 \text{؛ درنتیجه، } r_1 = \cdots = r_q = 0$$

برای بیان هر $\lambda(n)$ برحسب عناصر پایه‌ای، n را تجزیه کرده و $\log n$ را به صورت ترکیبی خطی از لگاریتمهای عوامل اول آن حساب می‌کنیم. خاصیت (پ) بداهتاً" برقرار است، زیرا B زیر دنباله‌ای از Λ می‌باشد.

قضیهٔ ۴.۸. *هر دنبالهٔ Λ زیردنباله‌ای دارد که پایه‌ای برای Λ می‌باشد.*

برهان. یک پایه به صورت زیر تشکیل می‌دهیم.

برای اولین عنصر پایه‌ای، $\lambda(n_1)$ یعنی اولین λ ی ناصفر ($\lambda(1)$ یا $\lambda(2)$) رااختیار و آن را $\beta(1)$ می‌نامیم. حال عناصر باقیماندهٔ Λ را که مضارب گویایی از $\beta(1)$ اند حذف می‌کنیم. اگر

با این کار همهٔ Λ تمام شد، $B = \{\beta(1)\}$ را اختیار می‌کنیم. اگر نشد، فرض می‌کنیم $\lambda(n_2)$ اولین λ ی باقیمانده باشد، $\beta(2) = \lambda(n_2)$ را اختیار کرده، و عناصر باقیمانده از Λ که ترکیبات خطی گویای $\beta(1)$ و $\beta(2)$ اند را حذف می‌کنیم. با ادامهٔ این کار دنبالهٔ $B = (\beta(1), \beta(2), \ldots) = (\lambda(n_1), \lambda(n_2), \ldots)$ به دست می‌آید. به آسانی تحقیق می‌شود که β یک پایه برای Λ است. خاصیت (آ) با ساختن برقرار است، زیرا هر β مستقل از عناصر قبلی اختیار شده بود. برای تحقیق (ب) ملاحظه می‌کنیم که هر λ یا عنصری از B است یا ترکیب خطی گویایی از تعدادی متناهی از عناصر B. بالاخره چون B زیردنباله‌ای از Λ است، (پ) بداهتاً " برقرار می‌باشد.

تذکر. هر دنبالهٔ Λ بی‌نهایت پایه دارد.

۴.۸ ماتریسهای بوهر

شایسته است این مفاهیم با نماد ماتریس بیان شوند. دنباله‌های Λ و B را با ماتریسهای ستونی بیان می‌کنیم؛ برای Λ یک ماتریس ستونی نامتناهی و، بسته به اینکه B یک دنبالهٔ متناهی یا نامتناهی باشد، برای B یک ماتریس ستونی متناهی یا نامتناهی به کار می‌بریم.

همچنین، ماتریسهای مربعی متناهی یا نامتناهی $R = (r_{ij})$ با درایه‌های گویا درنظر می‌گیریم. اگر R نامتناهی باشد، شرط می‌کنیم همه جز تعدادی متناهی درایه در هر سطر صفر باشند. این ماتریسهای مربعی گویا را **ماتریسهای بوهر** می‌نامند.

جمع ماتریسی و ضرب دو ماتریس بوهر نامتناهی را مثل ماتریسهای متناهی تعریف می‌کنیم. توجه کنید که مجموع یا حاصلضرب دو ماتریس بوهر ماتریس بوهر دیگر است. همچنین، حاصلضرب RB ماتریس بوهر R در ماتریس ستونی نامتناهی B ماتریس ستونی نامتناهی دیگر Γ می‌باشد. به‌علاوه، خاصیت شرکتپذیری $(R_1R_2)B = R_1(R_2B)$ را داریم که در آن R_1 و R_2 ماتریسهای بوهر و B یک ماتریس ستونی نامتناهی می‌باشد.

تعریف پایه با نماد ماتریس به شکل زیر می‌باشد. B را یک پایه برای Λ می‌نامیم اگر در سه شرط زیر صدق نماید:

(آ) هرگاه به ازای ماتریس بوهر R، $RB = 0$ آنگاه $R = 0$؛

(ب) یک ماتریس بوهر مانند R وجود دارد به طوری که $\Lambda = RB$؛

(پ) یک ماتریس بوهر مانند T وجود دارد به طوری که $B = T\Lambda$.

رابطهٔ بین دو پایهٔ B و Γ از دنبالهٔ Λ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

قضیهٔ ۸ . ۵. هرگاه Λ دارای دو پایهٔ B و Γ باشد، آنگاه یک ماتریس بوهر مانند A وجود دارد به طوری که $\Gamma = AB$.

برهان. ماتریسهای بوهر R و T وجود دارند به طوری که $\Gamma = T\Lambda$ و $\Lambda = RB$. لـذا، $\Gamma = T(RB) = (TR)B = AB$ که در آن $A = TR$.

قضیهٔ ۸ . ۶. فرض کنیم B و Γ دو پایه برای Λ باشند، و می‌نویسیم

$$\Gamma = AB, \Lambda = R_B B, \Lambda = R_\Gamma \Gamma,$$

که در آن A, R_B, R_Γ ماتریسهای بوهر می‌باشند. در این صورت، $R_B = R_\Gamma A$.

تذکر. اگر به‌جای R_B ، Λ/B ، به‌جای R_Γ ، Λ/Γ ، و به جای A ، Γ/B بنویسیم، معادلهٔ اخیر می‌گوید که

$$\frac{\Lambda}{B} = \frac{\Lambda}{\Gamma} \cdot \frac{\Gamma}{B}.$$

برهان. داریم $\Lambda = R_B B$ و $\Lambda = R_\Gamma \Gamma = R_\Gamma AB$. لذا، $R_B B = R_\Gamma AB$ ؛ در نتیجه، $(R_B - R_\Gamma A)B = 0$. چون $R_B - R_\Gamma A$ یک ماتریس بوهر بوده و B یک پایه است، باید داشته باشیم $R_B - R_\Gamma A = 0$.

۸ . ۵ تابع بوهر مربوط به سری دیریکله

به هر سری دیریکلهٔ $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)e^{-s\lambda(n)}$ تابعی مـانـنـد $F(z_1, z_2, \ldots)$ از تعدادی شمارشپذیر متغیر مختلط $z_1, z_2, \ldots$ به صورت زیر مربوط می‌کنیم. فرض کنیم Z ماتریس ستونی با درایه‌های $z_1, z_2, \ldots$ باشد. همچنین، $B = \{\beta(n)\}$ پایه‌ای برای دنبالهٔ $\Lambda = \{\lambda(n)\}$ از نماها باشد، و می‌نویسیم $\Lambda = RB$ که در آن R یک ماتریس بوهر است.

تعریف. تابع بوهر $F(Z) = F(z_1, z_2, \ldots)$ مربوط به $f(s)$، نسبت به پایهٔ B، سری زیر است:

$$F(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)e^{-(RZ)_n},$$

که در آن $(RZ)_n$ درایهٔ n ام ماتریس ستونی RZ می‌باشد. به عبارت دیگر، هرگاه

$$\lambda(n) = \sum_{k=1}^{q(n)} r_{n,k}\beta(k)$$

آنگاه

$$F(z_1, z_2, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) e^{-(r_{n,1} z_1 + \cdots + r_{n,q(n)} z_{q(n)})}.$$

توجه‌کنیدکه جانشانی‌صوری $z_m = s\beta_m$ نتیجه‌می‌دهد که $Z = sB,\ RZ = sRB = s\Lambda$؛ درنتیجه، $(RZ)_n = s\lambda(n)$ ؛ و لذا،

$$F(sB) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) e^{-s\lambda(n)} = f(s).$$

به عبارت دیگر، سری دیریکلهٔ $f(s)$ از $F(Z)$ با انتخاب مناسب متغیرهای $z_1, z_2, \ldots$ به دست می‌آید. لذا، اگر سری دیریکلهٔ $f(s)$ به ازای $s = \sigma + it$ همگرا باشد، سری بوهر مربوطهٔ $F(Z)$ نیز به ازای $Z = sB$ همگراست. به‌علاوه، اگر سری دیریکلهٔ $f(s)$ به‌ازای $s = \sigma + it$ به طور مطلق همگرا باشد، سری بوهر $F(Z)$ به ازای هر انتخاب $z_1, z_2, \ldots$ با $\operatorname{Re} z_n = \sigma\beta(n)$ به ازای هر n به‌طور مطلق همگرا می‌باشد. برای مشاهدهٔ این امر توجه می‌کنیم که اگر $\operatorname{Re} z_n = \sigma\beta(n)$، داریم $\operatorname{Re} Z = \sigma B$؛ درنتیجه،

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a(n) e^{-(RZ)_n}| = \sum_{n=1}^{\infty} |a(n)| e^{-\sigma(RB)_n} = \sum_{n=1}^{\infty} |a(n)| e^{-\sigma\lambda(n)}.$$

برای تأکید بر بستگی تابع بوهر به پایهٔ B، گاهی می‌نویسیم $\Lambda = R_B B$ و

$$F_B(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) e^{-(R_B Z)_n}.$$

قضیهٔ زیر توابع بوهر F_B و F_Γ نظیر به پایه‌های مختلف را به هم ربط می‌دهد.

قضیهٔ ۸.۷. فرض کنیم B و Γ دو پایه برای Λ بوده و به ازای ماتریس بوهر A می‌نویسیم $\Gamma = AB$. در این صورت،

$$F_B(Z) = F_\Gamma(AZ).$$

برهان. بنابر قضیهٔ ۸.۶، داریم

$\Lambda = R_B B = R_\Gamma \Gamma$، که در آن $R_B = R_\Gamma A$.

لذا،

$$F_B(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) e^{-(R_B Z)_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \exp\{-(R_\Gamma AZ)_n\} = F_\Gamma(AZ).$$

تعریف. فرض کنیم سری دیریکلهٔ $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) e^{-s\lambda(n)}$ به ازای $s = \sigma + it$ ی به‌طور

مطلق همگرا باشد. $U_f(\sigma; B)$ را مجموعهٔ مقادیری تعریف می‌کنیم که تابع بوهر مربوطه، نسبت به پایهٔ B، وقتی $\operatorname{Re} Z = \sigma B$، می‌گیرد. لذا،

$$U_f(\sigma; B) = \{F(Z) : \operatorname{Re} Z = \sigma B\}.$$

قضیهٔ زیر استقلال این مجموعه از پایهٔ B را نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۸.۸. هرگاه B و Γ دو پایه برای Λ باشند، آنگاه $U_f(\sigma; B) = U_f(\sigma; \Gamma)$.

برهان. مقدار $F_B(Z)$ را در $U_f(\sigma; B)$ اختیار کنیم؛ درنتیجه، $\operatorname{Re} Z = \sigma B$ بنابر قضیهٔ ۷.۸، داریم $F_B(Z) = F_\Gamma(AZ)$ که در آن $\Gamma = AB$ ولی

$$\operatorname{Re} AZ = A \operatorname{Re} Z = A\sigma B = \sigma AB = \sigma\Gamma .$$

درنتیجه، $F_B(Z) \in U_f(\sigma; \Gamma)$. این ثابت می‌کند که $U_f(\sigma; B) \subseteq U_f(\sigma; \Gamma)$، و با استدلالی مشابه داریم $U_f(\sigma; \Gamma) \subseteq U_f(\sigma; B)$.

تذکر. چون $U_f(\sigma; B)$ از پایهٔ B مستقل است، مجموعهٔ $U_f(\sigma; B)$ را فقط با $U_f(\sigma)$ نشان می‌دهیم.

۶.۸ مجموعهٔ مقادیری که سری دیریکلهٔ $f(s)$ بر خط $\sigma = \sigma_0$ می‌گیرد

در این بخش مجموعهٔ $U_f(\sigma_0)$ با مجموعهٔ مقادیری که سری دیریکلهٔ $f(s)$ بر خط $\sigma = \sigma_0$ می‌گیرد مرتبط می‌شود.

تعریف. اگر سری دیریکلهٔ $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)e^{-s\lambda(n)}$ به ازای $\sigma = \sigma_0$ به طور مطلق همگرا باشد، قرار می‌دهیم

$$V_f(\sigma_0) = \{f(\sigma_0 + it) : -\infty < t < +\infty\}$$

که مجموعهٔ مقادیری است که $f(s)$ بر خط $\sigma = \sigma_0$ می‌گیرد.

چون $f(s)$ را می‌توان از تابع بوهر $F(Z)$ با فرض $Z = \sigma B$ به دست آورد، نتیجه می‌شود که $V_f(\sigma_0) \subseteq U_f(\sigma_0)$. حال رابطهٔ شمول را در جهت دیگر ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۹.۸. فرض کنیم $\sigma_0 > \sigma_a$، که در آن σ_a طول همگرایی مطلق سری دیریکلهٔ $f(s)$

است . در این صورت ، بست $V_f(\sigma_0)$ شامل $U_f(\sigma_0)$ می‌باشد . یعنی ، داریم

$V_f(\sigma_0) \subseteq U_f(\sigma_0) \subseteq \overline{V_f(\sigma_0)}$ ؛ و درنتیجه ، $\overline{U_f(\sigma_0)} = \overline{V_f(\sigma_0)}$.

برهان . بست $\overline{V_f(\sigma_0)}$ مجموعهٔ نقاط چسبیدهٔ $V_f(\sigma_0)$ است . باید ثابت کنیم هر نقطهٔ u در $U_f(\sigma_0)$ یک نقطهٔ چسبیدهٔ $V_f(\sigma_0)$ است . به عبارت دیگر ، به ازای u در $U_f(\sigma_0)$ و $\varepsilon > 0$ ، ثابت می‌کنیم v ای در $V_f(\sigma_0)$ وجود دارد به طوری که $|u - v| < \varepsilon$. چون به ازای t ای ، $v = f(\sigma_0 + it)$ ، باید ثابت کنیم t ای حقیقی وجود دارد به طوری که

$$|f(\sigma_0 + it) - u| < \varepsilon.$$

چون $u \in U_f(\sigma_0)$ ، داریم $u = F(z_1, z_2, \dots)$ که درآن $z_n = \sigma_0 \beta(n) + iy_n$. لذا ،

$$Z = \sigma_0 B + iY, \qquad RZ = \sigma_0 RB + iRY = \sigma_0 \Lambda + iRY .$$

درنتیجه ، مثلاً ،

$$(RZ)_n = \sigma_0 \lambda(n) + i(RY)_n = \sigma_0 \lambda(n) + i\mu_n .$$

بنابراین ،

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) e^{-\sigma_0 \lambda(n)} e^{-i\mu_n}.$$

ازآن سو ، داریم

$$f(\sigma_0 + it) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) e^{-\sigma_0 \lambda(n)} e^{-it\lambda(n)},$$

لذا ،

$$f(\sigma_0 + it) - u = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) e^{-\sigma_0 \lambda(n)} (e^{-it\lambda(n)} - e^{-i\mu_n}).$$

ایدهٔ برهان از اینجا به بعد به‌قرار زیر است . ابتدا مجموع را به دو قسمت تجزیه می‌کنیم : $\sum_{n=1}^{N} + \sum_{n=N+1}^{\infty}$. N را طوری می‌گیریم که قسمت دوم $\sum_{n=N+1}^{\infty}$ کوچک باشد ، مثلاً قدر مطلقش از $\frac{1}{2}\varepsilon$ کمتر باشد . این کار به‌خاطر همگرایی مطلق میسر است . سپس نشان می‌دهیم که قسمت اول را می‌توان با انتخاب مناسب t کوچک کرد . ایده انتخاب t به نحوی است که هر نمایی $e^{-it\lambda(n)}$ همزمان به ازای هر $n = 1, 2, \dots, N$ خیلی نزدیک به $e^{-i\mu_n}$ باشد . در این صورت ، هر عامل $e^{-it\lambda(n)} - e^{-i\mu_n}$ کوچک بوده ، و چون فقط N جمله وجود دارد ، تمام مجموع کوچک خواهد بود .

حال به شرح مطلب می‌پردازیم . به ازای ε داده شده ، N را طوری می‌گیریم که

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a(n)e^{-\sigma_0\lambda(n)}(e^{-it\lambda(n)} - e^{-i\mu_n})\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

در این صورت ، داریم

$$|f(\sigma_0 + it) - u| < \left|\sum_{n=1}^{N} a(n)e^{-\sigma_0\lambda(n)}(e^{-it\lambda(n)} - e^{-i\mu_n})\right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

این به ازای هر t برقرار است . می‌خواهیم t را طوری بگیریم که مجموع اول از $\frac{1}{2}\varepsilon$ کوچکتر شود . چون $|e^{it\lambda(n)}| = 1$ ، می‌توان مجموع مورد بحث را به صورت زیر نوشت :

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a(n)e^{-\sigma_0\lambda(n)}(e^{-it\lambda(n)} - e^{-i\mu_n})\right| = \left|\sum_{n=1}^{N} e^{-it\lambda(n)}a(n)e^{-\sigma_0\lambda(n)}(1 - e^{i(t\lambda(n) - \mu_n)})\right|$$
$$\leq \sum_{n=1}^{N} |a(n)|e^{-\sigma_0\lambda(n)}|e^{i(t\lambda(n) - \mu_n)} - 1|.$$

فرض کنیم $M = 1 + \sum_{n=1}^{N} |a(n)|e^{-\sigma_0\lambda(n)}$. به ازای ε داده شده ، $\delta > 0$ ای هست به طوری که

اگر $|x| < \delta$ ، $|e^{ix} - 1| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$. (۳)

فرض کنید بتوان t ی حقیقی و اعداد صحیح $k_1, \ldots, k_N$ را طوری گرفت که

$$t\lambda(n) - \mu_n = 2\pi k_n + x_n \qquad (۴)$$

که در آن به ازای $n = 1, 2, \ldots, N$ ، $|x_n| < \delta$. پس به ازای این t خواهیم داشت

$$e^{i(t\lambda(n) - \mu_n)} = e^{2\pi i k_n + i x_n} = e^{i x_n}.$$

بنابر (۳) ، از این نتیجه می‌شود که

$$|e^{i(t\lambda(n) - \mu_n)} - 1| < \frac{\varepsilon}{2M},$$

و درنتیجه ،

$$\sum_{n=1}^{N} |a(n)|e^{-\sigma_0\lambda(n)}|e^{i(t\lambda(n) - \mu_n)} - 1| < \frac{\varepsilon}{2M}\sum_{n=1}^{N}|a(n)|e^{-\sigma_0\lambda(n)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

لذا ، برهان درصورتی تمام است که بتوان t و اعداد صحیح $k_1, \ldots, k_N$ را طوری یافت که در (۴) صدق کنند . اگر $\lambda(n)$ ها روی اعداد صحیح مستقل خطی باشند ، می‌توان قضیهٔ کرونکر را بر $\lambda(1), \ldots \lambda(N)$ اعمال کرد و (۴) را به دست آورد . ولی $\lambda(n)$ ها لزوماً

مستقل خطی نیستند؛ لذا، در عوض، قضیهٔ کرونکر را بر دستگاه زیر اعمال می‌کنیم:

$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_Q, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_Q,$$

که در آن

$$\theta_n = \frac{\beta(n)}{2\pi D}, \qquad \alpha_n = \frac{y_n}{2\pi D}.$$

$\beta(n)$ ها عناصر پایهٔ B اند که درتعریف $F(Z)$ به‌کار رفت، و y_n ها قسمتهای موهومی اعداد z_n می‌باشند که u را معین می‌کنند. اعداد صحیح Q و D به صورت زیر تعیین می‌شوند. λ را برحسب B بیان می‌کنیم:

$$\lambda(n) = r_{n,1}\beta(1) + \cdots + r_{n,q(n)}\beta(q(n)).$$

پس Q ماکزیمم اعداد صحیح $q(1), \ldots, q(N)$ بوده، و D کوچکترین مضرب مشترک مخرجهای اعداد گویای $r_{i,j}$ است که از $\lambda(n)$ های آمده درمجموع ناشی می‌شوند. حداکثر $q(1)+\cdots+q(N)$ از اعداد $r_{i,j}$ وجود دارند. چون B پایه است، اعداد θ_n روی اعداد صحیح مستقل خطی می‌باشند.

بنابر قضیهٔ کرونکر، t ای حقیقی و اعداد صحیحی چون $h_1, \ldots, h_Q$ وجود دارند به طوری که

$$|t\theta_k - \alpha_k - h_k| < \frac{\delta}{2\pi DA},$$

که در آن

$$A = \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{q(n)} |r_{n,j}|.$$

به ازای این t داریم $|2\pi Dt\theta_k - 2\pi D\alpha_k - 2\pi Dh_k| < \delta/A$، یا

$$|t\beta(k) - y_k - 2\pi Dh_k| < \frac{\delta}{A}.$$

لذا، $t\beta(k) - y_k = 2\pi Dh_k + \delta_k$، که در آن $|\delta_k| < \delta/A$. حال می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} t\lambda(n) - \mu_n &= t\sum_{j=1}^{q(n)} r_{n,j}\beta(j) - \sum_{j=1}^{q(n)} r_{n,j}y_j \\ &= \sum_{j=1}^{q(n)} r_{n,j}(t\beta(j) - y_j) = \sum_{j=1}^{q(n)} r_{n,j}(2\pi Dh_j + \delta_j) \\ &= 2\pi\sum_{j=1}^{q(n)} h_j Dr_{n,j} + \sum_{j=1}^{q(n)} \delta_j r_{n,j} \\ &= 2\pi k_n + x_n \end{aligned}$$

که در آن k_n عددی صحیح بوده و $\delta > |x_n| < (\delta/A) \sum_{j=1}^{q(n)} |r_{n,j}|$، ولی این بدان معنی است که t ای حقیقی و اعداد صحیحی چون $k_1, \ldots, k_N$ یافته‌ایم که در (۴) صدق می‌کنند؛ پس برهان تمام می‌باشد.

۷.۸ هم‌ارزی سریهای دیریکلهٔ کلی

دو سری دیریکلهٔ کلی با دنبالهٔ نماهای مشترک Λ را در نظر می‌گیریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)e^{-s\lambda(n)} \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b(n)e^{-s\lambda(n)} \, .$$

فرض کنیم $B = \{\beta(n)\}$ پایه‌ای برای Λ باشد، و می‌نویسیم $\Lambda = RB$ که در آن R یک ماتریس بوهر است.

تعریف. گوییم دوسری نسبت به پایهٔ B هم‌ارزاند، و می‌نویسیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)e^{-s\lambda(n)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} b(n)e^{-s\lambda(n)}$$

اگر دنباله‌ای متناهی یا نامتناهی از اعداد حقیقی مانند $Y = \{y_n\}$ موجود باشد به‌طوری که

$$b(n) = a(n)e^{ix_n}$$

که در آن $X = \{x_n\} = RY$. به عبارت دیگر، اگر بنویسیم

$$\lambda(n) = \sum_{k=1}^{q(n)} r_{n,k}\beta(k),$$

هم‌ارزی یعنی به ازای دنباله‌ای چون $\{y_n\}$ داریم

$$b(n) = a(n) \exp\left(i \sum_{k=1}^{q(n)} r_{n,k} y_k\right).$$

قضیهٔ ۱۰.۸. *دو سری دیریکلهٔ هم‌ارز دارای طول همگرایی مطلق واحدی می‌باشند. به علاوه، رابطهٔ $\sim$ که هم‌اکنون تعریف شده از پایهٔ B مستقل می‌باشد.*

برهان. هم‌ارزی ایجاب می‌کند که $|b(n)| = |a(n)|$؛ درنتیجه، سریها از یک طول همگرایی مطلق برخوردارند.

حال فرض‌کنیم B و Γ دو پایه برای Λ باشند، و دو سری‌را نسبت‌به B هم‌ارز می‌گیریم.

نشان می‌دهیم سریها نسبت به Γ نیز هم‌ارزاند.

می‌نویسیم $\Lambda = R_B B$. پس دنباله‌ای مانند $Y = \{y_n\}$ وجود دارد به طوری که $b(n) = a(n)e^{ix_n}$، که در آن $X = \{x_n\} = R_B Y$. حال می‌نویسیم $\Lambda = R_\Gamma \Gamma$. هرگاه نشان دهیم که به ازای دنباله‌ای چون $V = \{v_n\}$ داریم $X = R_\Gamma V$ ، آنگاه دو سری نسبت به Γ هم‌ارز می‌باشند. دنبالهٔ

$$V = AY$$

دارای این خاصیت است، که در آن A یک ماتریس بوهر است که $\Gamma = AB$. در واقع، داریم $R_\Gamma V = R_\Gamma AY = R_B Y = X$ ، زیرا $R_\Gamma A = R_B$. این برهان را تمام‌خواهدکرد.

قضیهٔ ۱۱.۸ . *رابطهٔ $\sim$ تعریف شده در تعریف قبل یک رابطهٔ هم‌ارزی است. یعنی، منعکس، متقارن، و متعدی می‌باشد.*

برهان. هر سری با خودش هم‌ارز است، زیرا می‌توان هر $y_n = 0$ را اختیار کرد. در این صورت، x_n نظیر صفر خواهد شد.

هرگاه $b(n) = a(n)e^{ix_n}$ ، آنگاه $a(n) = b(n)e^{-ix_n}$. چون $X = R_B Y$ ، داریم $-X = R_B(-Y)$ ؛ درنتیجه، رابطه متقارن می‌باشد.

برای اثبات تعدی، می‌توان از پایهٔ واحدی استفاده و فرض کرد $b(n) = a(n)e^{ix_n}$ ، که در آن به‌ازای Y ی $X = R_B Y$ ، و $a(n) = c(n)e^{iu_n}$ ، که در آن به‌ازای V ، $U = R_B V$. در این صورت، $b(n) = c(n)e^{i(x_n+u_n)}$ که در آن

$$X + U = R_B Y + R_B V = R_B(Y + V).$$

این برهان را تمام خواهد کرد.

۸.۸ هم‌ارزی سریهای دیریکلهٔ معمولی

قضیهٔ ۱۲.۸ . دو سری دیریکلهٔ معمولی

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^s}$$

هم‌ارزند اگر و فقط اگر یک تابع کاملاً ضربی مانند f موجود باشد به طوری که

(آ) *به ازای هر $n \geq 1$ ، $b(n) = a(n)f(n)$ ، و*

(ب) *هرگاه $a(n) \neq 0$ و p یک مقسوم‌علیه اول n باشد، $|f(p)| = 1$.*

برهان . برای سری دیریکلهٔ معمولی ، دنبالهٔ نماهای $\{\lambda(n)\} = \Lambda$ مساوی $\{\log n\}$ بوده و از دنبالهٔ $B = \{\log p_n\}$ می‌توان به عنوان پایه استفاده کرد ، که در آن p_n عدد اول n م می‌باشد . در واقع ، اگر از تجزیه به توانهای اول

$$n = \prod_{k=1}^{\infty} p_k{}^{a_{n,k}} \tag{۵}$$

استفاده کنیم که در آن هر نمای $a_{n,k} \geq 0$ ، خواهیم داشت

$$\log n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} \log p_k.$$

لذا ، از توانهای صحیح می‌توان به‌عنوان درایه‌های ماتریس‌بوهر R_B که $\Lambda = R_B B$ استفاده نمود . در مجموع و حاصل‌ضرب فقط تعدادی متناهی $a_{n,k}$ ناصفرند .

توجه می‌کنیم که ، به خاطر قضیهٔ اساسی حساب ، اعداد $a_{n,k}$ تعریف شده با (۵) دارای خاصیت زیرند :

$$a_{mn,k} = a_{m,k} + a_{n,k}. \tag{۶}$$

حال فرض کنیم $A(s) = \sum a(n)n^{-s},\ B(s) = \sum b(n)n^{-s}$. همچنین ، $A(s) \sim B(s)$. در این صورت ، دنباله‌ای حقیقی مانند $\{y_k\}$ وجود دارد به طوری که

$$b(n) = a(n) \exp\left\{i \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} y_k\right\} \tag{۷}$$

که در آن اعداد صحیح $a_{n,k}$ به وسیلهٔ معادلهٔ (۵) تعیین می‌شوند . تابع f را با معادلهٔ زیر تعریف می‌کنیم :

$$f(n) = \exp\left\{i \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} y_k\right\}.$$

خاصیت (۶) ایجاب می‌کند که به ازای هر m و n ، $f(mn) = f(m)f(n)$ ؛ لذا ، f کاملاً ضربی می‌باشد . معادلهٔ (۷) می‌گوید که $b(n) = a(n)f(n)$ ، و تعریف f نشان می‌دهد که به ازای هر n ، $|f(n)| = 1$ ؛ لذا ، تعاریف (آ) و (ب) قضیه برقرار می‌باشند .

حال عکس مطلب را ثابت می‌کنیم . فرض کنیم تابع کاملاً ضربی f در شرایط (آ) و (ب) صدق نماید . باید نشان دهیم که دنباله‌ای حقیقی مانند $\{y_k\}$ وجود دارد که به ازای هر n در (۷) صدق می‌کند . ابتدا n هایی را درنظر می‌گیریم که $a(n) = 0$. خاصیت (آ) ایجاب می‌کند که $b(n) = 0$ ؛ لذا ، معادلهٔ (۷) به ازای چنین n هایی برقرار است ، زیرا طرفین آن ، بی‌توجه به انتخاب اعداد حقیقی y_k ، صفر می‌باشند . حال دنبالهٔ $\{y_k\}$ را طوری می‌سازیم که معادلهٔ (۷) به ازای n هایی که $a(n) \neq 0$ نیز برقرار باشد .

پس فرض کنیم n چنان باشد که $a(n) \neq 0$. با استفاده از تجزیه به توانهای اول (۵) و خاصیت کاملاً" ضربی f ، می‌نویسیم

$$f(n) = \prod_{k=1}^{\infty} g(n,k), \tag{۸}$$

که در آن

$$g(n,k) = \begin{cases} f(p_k)^{a_{n,k}} & \text{اگر } p_k \mid n \text{ ،} \\ 1 & \text{در غیر این صورت ،} \end{cases}$$

شرط (ب) ایجاب می‌کند که به ازای هر مقسوم‌علیه اول p_k از n ، $|f(p_k)| = 1$. لذا ، به ازای این اعداد اول می‌توان نوشت

$$f(p_k) = \exp(iy_k),$$

که در آن $y_k = \arg f(p_k)$. اعداد حقیقی y_k به ازای k هایی تعریف شده‌اند که عدد اول p_k ، n ی که $a(n) \neq 0$ را عاد می‌کند. برای k های باقیمانده (در صورت وجود) تعریف می‌کنیم $y_k = 0$. لذا ، y_k به ازای هر عدد صحیح $k \geq 1$ تعریف شده است و به ازای هر $k \geq 1$ خواهیم داشت

$$g(n,k) = \exp(ia_{n,k}y_k) \cdot$$

حال معادلهٔ (۸) به صورت زیر درمی‌آید :

$$f(n) = \exp\left\{ i\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}y_k \right\}.$$

این ، همراه با خاصیت (آ) ،نشان می‌دهد که (۷) به‌ازای n هایی برقرار است که $a(n) \neq 0$ لذا ، (۷) به ازای هر n برقرار است؛ درنتیجه ، $A(s) \sim B(s)$. این برهان قضیه را به پایان خواهد برد .

۹.۸ تساوی مجموعه‌های $U_f(\sigma_0)$ و $U_g(\sigma_0)$ به ازای سریهای دیریکلهٔ هم‌ارز

قضیهٔ ۱۳.۸ . *فرض‌کنیم $f(s)$ و $g(s)$ سریهای دیریکلهٔ کلی هم‌ارزی باشند که به‌ازای $\sigma = \sigma_0$ به‌طور مطلق همگرایند . در این صورت ،*

$$U_f(\sigma_0) = U_g(\sigma_0)$$

برهان . فرض‌کنیم $B = \{\beta(n)\}$ پایه‌ای‌برای‌دنبالهٔ λ ازنماها باشد . هرگاه $f(s) = \sum a(n)e^{-s\lambda(n)}$ و $g(s) = \sum b(n)e^{-s\lambda(n)}$ ، آنگاه دنباله‌ای حقیقی مانند $\{y_k\}$ وجود دارد به طوری که

$$b(n) = a(n)\exp\left\{-i\sum_{k=1}^{q(n)} r_{n,k} y_k\right\}.$$

سریهای بوهر f و g عبارتنداز

$$F(z_1, z_2, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\exp\left\{-\sum_{k=1}^{q(n)} r_{n,k} z_k\right\}$$

و

$$G(z_1, z_2, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)\exp\left\{-\sum_{k=1}^{q(n)} r_{n,k} z_k\right\}.$$

$b(n)$ را برحسب $a(n)$ بیان می‌کنیم:

$$G(z_1, z_2, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\exp\left\{-\sum_{k=1}^{q(n)} r_{n,k}(z_k + iy_k)\right\} = F(z_1 + iy_1, z_2 + iy_2, \ldots).$$

چون قسمت حقیقی $z_n + iy_n$ قسمت حقیقی z_n است، هر دو سری بر خطوط $x_n = \sigma_0\beta(n)$ مقادیر یکسانی می‌گیرند. لذا، همانطور که حکم شده، $U_f(\sigma_0) = U_g(\sigma_0)$.

۸.۱۰ مجموعه مقادیری که یک سری دیریکله در همسایگی خط $\sigma = \sigma_0$ می‌گیرد

تعریف. فرض کنیم $f(s)$ یک سری دیریکلهٔ کلی باشد که به ازای $\sigma > \sigma_a$ به طور مطلق همگراست. به ازای $0 < \delta$ و σ_0 ی که $\sigma_0 - \delta > \sigma_a$، مجموعهٔ $W_f(\sigma_0; \delta)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$W_f(\sigma_0; \delta) = \{f(s) : \sigma_0 - \delta < \sigma < \sigma_0 + \delta, -\infty < t < +\infty\}.$$

یعنی، $W_f(\sigma_0; \delta)$ مجموعهٔ مقادیری است که $f(s)$ در نوار

$$\sigma_0 - \delta < \sigma < \sigma_0 + \delta.$$

می‌گیرد. همچنین، اگر $\sigma_0 > \sigma_a$، تعریف می‌کنیم

$$W_f(\sigma_0) = \bigcap_{0 < \delta < \sigma_0 - \sigma_a} W_f(\sigma_0; \delta).$$

لذا، $W_f(\sigma_0)$ اشتراک مجموعه مقادیری است که $f(s)$ در تمام این نوارها می‌گیرد.

واضح است که $V_f(\sigma_0) \subseteq W_f(\sigma_0)$، زیرا هر مقدار که توسط $f(s)$ بر خط $\sigma = \sigma_0$ گرفته شود در هر نوار شامل این خط نیز گرفته می‌شود. البته، ممکن‌است $V_f(\sigma_0) = W_f(\sigma_0)$ یا $V_f(\sigma_0) \neq W_f(\sigma_0)$.

به‌طورکلی، داریم

قضیهٔ ۱۴.۸. $V_f(\sigma_0) \subseteq W_f(\sigma_0) \subseteq \overline{V_f(\sigma_0)}$؛ لذا، $\overline{V_f(\sigma_0)} = \overline{W_f(\sigma_0)}$.

برهان. این برهان کلا" درنظریهٔ توابع است و ارتباطی با مفهوم پایه ندارد.

باید ثابت کنیم هر نقطه در $W_f(\sigma_0)$ در بست $V_f(\sigma_0)$ است. نشان می‌دهیم هرگاه $w \in W_f(\sigma_0)$، آنگاه w یک نقطهٔ چسبیدهٔ $V_f(\sigma_0)$ است. در واقع، ثابت می‌کنیم به ازای دنباله‌ای حقیقی مانند $\{t_n\}$،

$$w = \lim_{n \to \infty} f(\sigma_0 + it_n) .$$

چون $w \in W_f(\sigma_0)$، این بدان معنی است که به ازای هر $\delta > 0$ کـه $\delta < \sigma_0 - \sigma_a$، $w \in W_f(\sigma_0; \delta)$. بخصوص، به ازای n_0 ی و هر $n \geq n_0$، $w \in W_f(\sigma_0; 1/n)$. این یعنی به‌ازای $n \geq n_0$ داریم $w = f(s_n)$ که‌درآن $s_n = \sigma_n + it_n$ و $\sigma_0 - (1/n) < \sigma_n < \sigma_0 + (1/n)$. با استفاده از اعداد t_n که به این ترتیب معین شده است، تفاضل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$w - f(\sigma_0 + it_n) = f(\sigma_n + it_n) - f(\sigma_0 + it_n)$$

که در آن $n \geq n_0$. این تفاضل را برحسب $f'(s)$ بیان می‌کنیم. حال، مثل حالت سری دیریکلهٔ معمولی، تابع $f(s)$ تعریف شده با

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) e^{-s\lambda(n)}$$

در نیمصفحهٔ همگرایی مطلق تحلیلی است. در واقع، در برهان قضیهٔ ۱.۸ نشان دادیم که‌سری بر هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ نیمصفحهٔ $\sigma > \sigma_c$ به‌طور یکنواخت همگراست. بنابراین، مجموع در نیمصفحهٔ $\sigma > \sigma_c$ تحلیلی می‌باشد. به‌علاوه، $f'(s)$ را می‌توان با مشتقگیری جزء به جزء حساب کرد؛ درنتیجه،

$$f'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\lambda(n) e^{-s\lambda(n)} .$$

لذا، اگر $\sigma \geq \sigma_0$، s در نیمصفحهٔ همگرایی مطلق قرار داشته و خواهیم داشت

$$|f'(s)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a(n)||\lambda(n)| e^{-\sigma\lambda(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} |a(n)| e^{-\sigma_0'\lambda(n)} |\lambda(n)| e^{-(\sigma - \sigma_0')\lambda(n)}$$

که در آن $\sigma_a < \sigma_0' < \sigma_0$. اما وقتی $n \to \infty$، $|\lambda(n)| e^{-(\sigma - \sigma_0')\lambda(n)} \to 0$؛ درنتیجه، بخصوص، این عامل به ازای n به قدر کافی بزرگ از 1 کمتر است. لذا، به ازای K ای

$$|f'(s)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a(n)| e^{-\sigma_0'\lambda(n)} \cdot K$$

که نشان می‌دهد که $|f'(s)|$ در ناحیهٔ $\sigma \geq \sigma_0'$ به‌طور یکنواخت کراندار است. فرض کنیم

$\sigma_0' = \sigma_0 - 1/n_0$ و M را یک کران بالایی برای $|f'(s)|$ در ناحیهٔ $\sigma \geq \sigma_0'$ می‌گیریم. در این صورت، اگر $n \geq n_0$،

$$|w - f(\sigma_0 + it_n)| = |f(\sigma_n + it_n) - f(\sigma_0 + it_n)| = \left| \int_{\sigma_0}^{\sigma_n} f'(\sigma + it_n)\, d\sigma \right|$$
$$\leq M|\sigma_n - \sigma_0| \leq \frac{M}{n}\,.$$

لذا، $\lim_{n\to\infty} f(\sigma_0 + it_n) = w$؛ درنتیجه، w یک نقطهٔ چسبیدهٔ $V_f(\sigma_0)$ می‌باشد. این برهان را تمام خواهد کرد.

۱۱.۸ قضیهٔ هم‌ارزی بوهر

هم‌اکنون نشان دادیم که $W_f(\sigma_0) \subseteq \overline{V_f(\sigma_0)}$. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که این شمول درواقع تساوی می‌باشد.

قضیهٔ ۱۵.۸. داریم

$$W_f(\sigma_0) = \overline{V_f(\sigma_0)}.$$

برهان قضیهٔ ۱۵.۸ طولانی بوده و در بخش ۱۲.۸ می‌آید. در این بخش طرز رسیدن قضیهٔ ۱۵.۸ به قضیهٔ هم‌ارزی بوهر را نشان خواهیم داد.

قضیهٔ ۱۶.۸ (قضیهٔ هم‌ارزی بوهر). فرض کنیم f و g سریهای دیریکلهٔ هم‌ارزی با طول همگرایی مطلق σ_a باشند. در این صورت، در هر نیمصفحهٔ باز $\sigma > \sigma_1 \geq \sigma_a$، توابع $f(s)$ و $g(s)$ مجموعه مقادیر یکسانی به خود می‌گیرند.

برهان. فرض‌کنیم $S_f(\sigma_1)$ مجموعهٔ مقادیری باشد که توسط $f(s)$ در نیمصفحهٔ $\sigma > \sigma_1$ گرفته می‌شود. در این صورت،

$$S_f(\sigma_1) = \bigcup_{\sigma_0 > \sigma_1} V_f(\sigma_0).$$

حال ثابت می‌کنیم

$$S_f(\sigma_1) = \bigcup_{\sigma_0 > \sigma_1} W_f(\sigma_0).$$

پیش از همه، داریم $S_f(\sigma_1) \subseteq \bigcup_{\sigma_0 > \sigma_1} W_f(\sigma_0)$، زیرا $V_f(\sigma_0) \subseteq W_f(\sigma_0)$. برای به دست آوردن

شمول در جهت دیگر ، فرض کنیم $w \in \bigcup_{\sigma_0>\sigma_1} W_f(\sigma_0)$. دراین صورت ،به‌ازای $\sigma_0 > \sigma_1$ ، $w \in W_f(\sigma_0;\ \delta)$. لذا ، به ازای هر δ ی صادق در $0 < \delta < \sigma_0 - \sigma_a$ ، $w \in W_f(\sigma_0)$. به عبارت‌دیگر ،اگر $0 < \delta < \sigma_0 - \sigma_a$ ، $f(s)$ مقدار w را درهرنوار $\sigma_0 - \delta < \sigma < \sigma_0 + \delta$ می‌گیرد . بخصوص ، وقتی $\delta = \sigma_0 - \sigma_1$ ، داریم $\sigma_0 - \delta = \sigma_1$ ؛ درنتیجه ، به ازای s ی با $\sigma > \sigma_1$ ، $f(s) = w$.لذا ، $w \in S_f(\sigma_1)$. این ثابت‌می‌کند که $\bigcup_{\sigma_0>\sigma_1} W_f(\sigma_0) \subseteq S_f(\sigma_1)$ ؛ درنتیجه ، دو مجموعه مساوی می‌باشند . لذا ، نیز خواهیم داشت

$$S_g(\sigma_1) = \bigcup_{\sigma_0>\sigma_1} W_g(\sigma_0).$$

برای اثبات قضیهٔ بوهر کافی است نشان دهیم هروقت f و g هم‌ارز باشند ،

$$W_f(\sigma_0) = W_g(\sigma_0)\ .$$

ولی $g \sim f$ ایجاب می‌کند که

$$U_f(\sigma_0) = U_g(\sigma_0).$$

لذا ، $\overline{U_f(\sigma_0)} = \overline{U_g(\sigma_0)}$. ولی ، این به خاطر قضیهٔ ۹.۸ ، بدان معنی است که

$$\overline{V_f(\sigma_0)} = \overline{V_g(\sigma_0)}.$$

اما قضیهٔ ۱۵.۸ می‌گوید که $\overline{V_f(\sigma_0)} = W_f(\sigma_0)$ و $\overline{V_g(\sigma_0)} = W_g(\sigma_0)$ ؛ لذا ، قضیهٔ هم ارزی بوهر نتیجه‌ای از قضیهٔ ۱۵.۸ می‌باشد .

۱۲.۸ برهان قضیهٔ ۱۵.۸

برای اتمام برهان قضیهٔ هم‌ارزی بوهر باید قضیهٔ ۱۵.۸ را ثابت کنیم ، بدین معنی که باید رابطهٔ شمول را ثابت نماییم :

$$\overline{V_f(\sigma_0)} \subseteq W_f(\sigma_0). \qquad (۹)$$

در اثبات (۹) از دو قضیهٔ مهم آنالیز استفاده می‌شود که آنها را به صورت لم بیان می‌کنیم .

لم ۱ (**اصل انتخاب هلی**[1]) . فرض کنیم $\{\theta_{m,n}\}$ *دنبالهٔ مضاعف کرانداری از اعداد حقیقی باشد؛ مثلاً "،*

به ازای هر m, n ، $|\theta_{m,n}| < A$.

در این صورت ،زیردنباله‌ای از اعداد صحیح‌مانند $n_1 < n_2 < \dots$ *هست که‌وقتی* $r \to \infty$

1. Helly

$n_r \to \infty$ ، و دنباله‌ء $\{\theta_n\}$ از اعداد حقیقی وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر $m = 1, 2, \ldots$ خواهیم داشت

$$\lim_{r\to\infty} \theta_{m,n_r} = \theta_m.$$

تذکر. نکته‌ء مهم این است که **یک** زیردنباله‌ء $\{n_k\}$ **برای هر** m کار می‌کند. برای نشان‌دادن اهمیت واقعی لم ، ببینیم بداهتا" چه‌نتیجه‌ای می‌شود گرفت . دنباله‌ء مضاعف را به صورت یک ماتریس نامتناهی نمایش می‌دهیم . سطر اول را درنظر می‌گیریم : $\{\theta_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$. این یک دنباله‌ء نامتناهی کراندار است ؛ لذا ، نقطه‌ء انباشتگی ، مثلا" θ_1 ، دارد . پس زیردنباله‌ای مانند $\{n_r\}$ وجود دارد به طوری که $\lim_{r\to\infty} \theta_{1,n_r} = \theta_1$. به همین نحو ، به ازای سطر دوم یک‌نقطه‌ء‌انباشتگی‌مانند θ_2 و زیردنباله‌ای‌چون n_r' وجود دارد به‌طوری‌که $\lim_{n\to\infty} \theta_{2,n_r'} = \theta_2$ و غیره . زیردنباله‌ء $\{n_r'\}$ لازم برای θ_2 را می‌توان با زیردنباله‌ء مربوط به θ_1 کاملا" متفاوت گرفت . اصل هلی می‌گوید که یک زیردنباله **برای** تمام سطرها همزمان بـــه کـار خـواهـد رفت .

برهان لم ۱ . فرض‌کنیم θ_1 یک نقطه‌ء انباشتگی سطر اول بوده ، و زیر دنباله‌ء $\{n_r^{(1)}\}$ دارای این خاصیت باشد که

$$\lim_{r\to\infty} \theta_{1,n_r^{(1)}} = \theta_1.$$

در سطر دوم فقط درایه‌های $\theta_{2,n_r^{(1)}}$ را درنظر می‌گیریم . این یک دنباله‌ء کراندار است که زیردنباله‌ء همگرایی با حد مثلا" θ_2 دارد . لذا ،

$$\lim_{r\to\infty} \theta_{2,n_r^{(2)}} = \theta_2$$

که درآن $\{n_r^{(2)}\}$ زیردنباله‌ای‌از $\{n_r^{(1)}\}$ می‌باشد . این فرایند را به‌طور نامحدود تکرار می‌کنیم . در مرحله‌ء m م زیردنباله‌ء $\{n_r^{(m)}\}$ را داریم که زیردنباله‌ای از تمام زیردنباله‌های قبلی است و عدد θ_m را داریم که

$$\lim_{r\to\infty} \theta_{m,n_r^{(m)}} = \theta_m.$$

حال دنباله‌ء $\{n_r\}$ را با فرایند قطری تعریف می‌کنیم :

$$n_r = n_r^{(r)}.$$

یعنی ، n_1 اولین عدد صحیح به کار رفته در سطر اول ، n_2 دومین عدد صحیح به کار رفته در سطر دوم ، و غیره است . به سطر m م نگاه کرده و دنباله‌ء $\{\theta_{m,n_r}\}$ را در نظر می‌گیریم .

حکم می‌کنیم که

$$\lim_{r\to\infty} \theta_{m,n_r} = \theta_m.$$

چون $n_r = n_r^{(r)}$ ، پس از جملهٔ mم این سطر داریم $r > m$ ؛ لذا، هر عدد صحیح $n_r^{(r)}$ در زیر دنبالهٔ $n_r^{(m)}$ می‌آید؛ پس از اینجا به بعد $\{n_r\}$ زیردنباله‌ای از $\{n_r^{(m)}\}$ است؛ ولذا، همانطور که حکم شده، $\theta_{m,n_r} \to \theta_m$.

لم ۲ (قضیهٔ روشه [1]). دو تابع $f(z)$ و $g(z)$ داخل و روی کنتور مستدیربستهٔ C تحلیلی‌اند. فرض کنیم

$$\text{بر } C ،\quad |g(z)| < |f(z)| .$$

در این صورت، $f(z)$ و $f(z) + g(z)$ داخل C از یک تعداد صفر برخوردارند.

برهان لم ۲. فرض کنیم $m = \inf\{|f(z)| - |g(z)| : z \in C\}$. پس $m > 0$ ، زیرا C فشرده است و تفاضل $|f(z)| - |g(z)|$ تابع پیوسته‌ای بر C می‌باشد. لذا، به ازای هر t حقیقی در بازهٔ $0 \le t \le 1$ داریم

$$|f(z) + tg(z)| \ge |f(z)| - |tg(z)| \ge |f(z)| - |g(z)| \ge m > 0.$$

اگر $0 \le t \le 1$ ، عدد $\varphi(t)$ را با معادلهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z) + tg'(z)}{f(z) + tg(z)}\,dz.$$

$\varphi(t)$ یک عدد صحیح است، و آن تعداد صفرها منهای تعداد قطبهای تابع $f(z) + tg(z)$ داخل C می‌باشد. ولی قطبی وجود ندارد؛ پس $\varphi(t)$ تعداد صفرهای $f(z) + tg(z)$ داخل C خواهد بود. ولی $\varphi(t)$ تابع پیوسته‌ای از t بر $[0, 1]$ است. چون یک عدد صحیح است، باید ثابت باشد: $\varphi(0) = \varphi(1)$. اما $\varphi(0)$ تعداد صفرهای $f(z)$ ، و $\varphi(1)$ تعداد صفرهای $f(z) + g(z)$ می‌باشد. این قضیهٔ روشه را ثابت خواهد کرد.

برهان رابطهٔ (۹). $\overline{V_f(\sigma_0)} \subseteq W_f(\sigma_0)$. فرض کنیم $v \in \overline{V_f(\sigma_0)}$. در این صورت، $v \in V_f(\sigma_0)$ یا v یک نقطهٔ انباشتگی $V_f(\sigma_0)$ است. هرگاه $v \in V_f(\sigma_0)$ ، آنگاه $v \in W_f(\sigma_0)$ زیرا $V_f(\sigma_0) \subseteq W_f(\sigma_0)$. لذا، می‌توان فرض کرد v یک نقطهٔ انباشتگی $V_f(\sigma_0)$ بوده، و $v \notin V_f(\sigma_0)$. این یعنی دنباله‌ای از اعداد حقیقی مانند $\{t_n\}$ وجود دارد به طوری که

$$v = \lim_{n\to\infty} f(\sigma_0 + it_n).$$

---

1. Rouché

می‌خواهیم ثابت کنیم $v \in W_f(\sigma_0)$. این یعنی باید نشان دهیم که به ازای هر δ ی صادق در $0 < \delta < \sigma_0 - \sigma_a$ ، $v \in W_f(\sigma_0; \delta)$. به عبارت دیگر، اگر $0 < \delta < \sigma_0 - \sigma_a$ ، باید یک $s = \sigma + it$ در نوار

$$\sigma_0 - \delta < \sigma < \sigma_0 + \delta$$

بیابیم که $f(s) = v$. لذا، باید s ی در این نوار نشان دهیم که

$$f(s) = \lim_{n\to\infty} f(\sigma_0 + it_n).$$

حال اعداد $f(\sigma_0 + it_m)$ را به ازای دنبالهٔ $\{t_n\}$ امتحان می‌کنیم. داریم

$$f(\sigma_0 + it_m) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)e^{-\sigma_0\lambda(n)} \cdot e^{-it_m\lambda(n)}.$$

حاصل‌ضربهای $t_m\lambda(n)$ یک دنبالهٔ مضاعف تشکیل می‌دهند. یک دنبالهٔ مضاعف از اعداد حقیقی مانند $\theta_{n,m}$ وجود دارد به طوری که

$$0 \le \theta_{n,m} < 2\pi \quad \text{و} \quad \theta_{n,m} = t_m\lambda(n) + 2\pi k_{m,n}$$

که در آن $k_{m,n}$ عددی صحیح است. اگر در سری $t_m\lambda(n)$ را با عوض کنیم، جملات تغییر نمی‌کنند؛ لذا،

$$f(\sigma_0 + it_m) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)e^{-\sigma_0\lambda(n)}e^{-i\theta_{n,m}}.$$

بنابر لم ۱، یک زیردنباله از اعداد صحیح مانند $\{n_r\}$ و یک دنباله از اعداد حقیقی‌چون $\{\theta_m\}$ وجود دارند به طوری که

$$\lim_{r\to\infty} \theta_{m,n_r} = \theta_m. \qquad (۱۰)$$

با استفاده از دنبالهٔ $\{\theta_m\}$ ، سری دیریکلهٔ جدید

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)e^{-s\lambda(n)}$$

را تشکیل می‌دهیم، که در آن

$$b(n) = a(n)e^{-i\theta_n}.$$

این سری همان طول‌همگرایی‌مطلق $f(s)$ را دارد. حال دنبالهٔ توابع زیر را درنظر می‌گیریم:

$$f_r(s) = f(s + it_{n_r})$$

که در آن $\{n_r\}$ زیردنباله‌ای است که رابطهٔ (۱۰) برایش برقرار است. حکم می‌کنیم که

(آ) $f_r(s) \to g(s)$ به طور یکنواخت در نوار $\sigma_0 - \delta < \sigma < \sigma_0 + \delta$ ، بخصوص، در قرص مستدیر $|s - \sigma_0| < \delta$ ؛

(ب) $g(\sigma_0) = v$ ؛

(پ) d ای که $0 < d < \delta$ و R ی وجود دارند به طوری که $f_R(s) - v$ و $g(s) - v$ در قرص باز $|s - \sigma_0| < d$ یک تعداد صفر دارند.

هرگاه (ب) و (پ) را ثابت کنیم، آنگاه $f_R(s) - v$ دست‌کم یک صفر در قرص دارد، زیرا $g(\sigma_0) = v$. ولی $f_R(s) = f(s + it_{n_R})$ و اگر s در قرص باشد، $s + it_{n_R}$ در نوار است؛ بدین ترتیب، قضیه به‌ثبوت می‌رسد. حال قسمتهای (آ)، (ب)، و (پ) را ثابت می‌کنیم.

برهان (آ). داریم

$$|f_r(s) - g(s)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a(n)e^{-s\lambda(n)}(e^{-i\theta_{n,n_r}} - e^{-i\theta_n})\right|$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a(n)|e^{-\sigma\lambda(n)}|e^{-i\theta_{n,n_r}} - e^{-i\theta_n}|$$
$$\leq \sum_{n=1}^{N} |a(n)|e^{-(\sigma_0-\delta)\lambda(n)}|e^{-i\theta_{n,n_r}} - e^{-i\theta_n}|$$
$$+ 2\sum_{n=N+1}^{\infty} |a(n)|e^{-(\sigma_0-\delta)\lambda(n)}$$

حال اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، عددی مانند $N = N(\varepsilon)$ وجود دارد به طوری که

$$2\sum_{n=N+1}^{\infty} |a(n)|e^{-(\sigma_0-\delta)\lambda(n)} < \frac{\varepsilon}{2},$$

زیرا سری $\sum_{n=1}^{\infty} |a(n)|e^{-(\sigma_0-\delta)\lambda(n)}$ همگرا می‌باشد. در مجموع متناهی $\sum_{n=1}^{N}$ از نامساوی

$$|e^{-ib} - e^{-ia}| = \left|\frac{1}{i}\int_a^b e^{-it}\,dt\right| \leq |b - a|$$

استفاده کرده، می‌نویسیم

$$|e^{-i\theta_{n,n_r}} - e^{-i\theta_n}| \leq |\theta_{n,n_r} - \theta_n|.$$

اما اگر $M(\delta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} |a(n)|e^{-(\sigma_0-\delta)\lambda(n)}$ ، عدد صحیحی چون $r_0 = r_0(\varepsilon)$ هست به طوری که به ازای هر $n = 1, 2, \ldots, N$ داریم

اگر $r \geq r_0$ ، $|\theta_{n,n_r} - \theta_n| < \dfrac{\varepsilon}{2M(\delta)}$.

بنابراین، اگر $r \geq r_0$ ، خواهیم داشت

$$|f_r(s) - g(s)| \leq \frac{\varepsilon}{2M(\delta)}\sum_{n=1}^{N} |a(n)|e^{-(\sigma_0-\delta)\lambda(n)} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

چون r_0 فقط تابع ε و δ است ، این نشان می‌دهد که $f_r(s) \to g(s)$ به طور یکنواخت در نوار $\sigma_0 - \delta < \sigma < \sigma_0 + \delta$ ، وقتی $r \to \infty$. این (آ) را ثابت می‌کند .

برهان (ب) . با استفاده از (آ) می‌نویسیم

$$g(\sigma_0) = \lim_{r\to\infty} f_r(\sigma_0) = \lim_{r\to\infty} f(\sigma_0 + it_{n_r}) = v.$$

برهان (پ) . ابتدا فرض کنیم g ثابت نباشد . چون $g(\sigma_0) = v$ ، $d < \delta$ ی مثبتی وجود دارد به طوری که بر دایرهٔ

$$C = \{s : |s - \sigma_0| = d\}.$$

$g(s) \neq v$. فرض کنیم M مینیمم $|g(s) - v|$ بر C باشد . در این صورت ، $M > 0$. حال R را آنقدر بزرگ می‌گیریم که بر C ، $|f_R(s) - g(s)| < M$. این کار به‌خاطر همگرایی یکنواخت دنبالهٔ $\{f_R(s)\}$ میسر است ، زیرا دایرهٔ C داخل نوار $|\sigma - \sigma_0| < \delta$ قرار دارد . در این صورت ، بر C داریم

$$|f_R(s) - g(s)| < M \le |g(s) - v|.$$

اگر $G(s) = f_R(s) - g(s)$ و $F(s) = g(s) - v$ ، بر C داریم $|G(s)| < |F(s)|$ و $F(s)$ و $G(s)$ داخل C تحلیلی‌اند . لذا ، طبق قضیهٔ روشه ، توابع $F(s) + G(s)$ و $F(s)$ یک تعداد صفر در داخل C دارند . ولی $F(s) + G(s) = f_R(s) - v$ ؛ لذا ، $f_R(s) - v$ همان تعداد صفرهای $g(s) - v$ را در داخل C دارد . اما $g(\sigma_0) = v$ ؛ درنتیجه ، $g(s) - v$ دست کم یک صفر داخل C دارد . لذا ، $f_R(s) - v$ دست‌کم یک صفر داخل C خواهد داشت . همانطور که قبلاً گفتیم ، این درصورتی برهان را تمام می‌کند که g ثابت نباشد .

برای اتمام برهان باید حالتی را درنظر بگیریم که $g(s)$ در نیمصفحهٔ همگرایی مطلق ثابت است . در این صورت ، به ازای هر s در این نیمصفحه ، $g'(s) = 0$ ، که بدان معنی است که

$$g'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n)b(n)e^{-s\lambda(n)} = 0.$$

ولی مثل حالت سریهای دیریکلهٔ معمولی ، اگر یک سری دیریکلهٔ کلی به ازای دنباله‌ای از مقادیر s که قسمتهای حقیقی‌شان به $+\infty$ میل می‌کنند دارای مقدار 0 باشد ، همهٔ ضرایب باید صفر باشند . (ر.ک. [۴] ، قضیهٔ ۱۱.۳.) لذا ، به‌ازای هر $n \ge 1$ ، $\lambda(n)b(n) = 0$. بنابراین ، $b(n) = 0$ با حداکثر یک استثنا ، مثلاً $b(n_1)$ ، که در این حالت $\lambda(n_1) = 0$. لذا ، چون $a(n) = b(n)e^{i\theta_n}$ ، باید داشته باشیم $a(n) = 0$ با حداکثر یک استثنا ، مثلاً $a(n_1)$ ، و در این صورت $\lambda(n_1) = 0$. پس سری مربوط به $f(s)$ فقط از یک جمله ، یعنی

$f(s) = a(n_1)e^{-s\lambda(n_1)} = a(n_1)$ ، تشکیل شده است؛ لذا ، $f(s)$ خود ثابت می‌باشد . ولی در این حالت قضیه بداهتا" برقرار است .

۱۳.۸ چند مثال از سریهای دیریکلهٔ هم‌ارز . کاربردهای قضیهٔ بوهر در L ـ سریها

قضیهٔ ۱۷.۸ . فرض کنیم $k \geq 1$ عددی صحیح بوده ، و χ یک مشخص دیریکله به هنگ k باشد . همچنین ، $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$ یک سری دیریکله باشد که ضرایبش از خاصیت زیر برخوردار است :

$a(n) \neq 0$ ایجاب کند که $(n, k) = 1$.

در این صورت ،

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)\chi(n)}{n^s}.$$

برهان . چون اینها سریهای دیریکلهٔ معمولی‌اند ، می‌توان از قضیهٔ ۱۲.۸ برای اثبات هم‌ارزی استفاده کرد . در این حالت اختیار می‌کنیم $f(n) = \chi(n)$. پس f کاملا" ضربی بوده و شرط (آ) برقرار است . حال نشان می‌دهیم شرط (ب) نیز برقرار است . باید نشان دهیم اگر $a(n) \neq 0$ ، $|f(p)| = 1$ و $p|n$. ولی $a(n) \neq 0$ ایجاب می‌کند که $(n, k) = 1$. چون $p|n$ ، باید داشته باشیم $(p, k) = 1$؛ لذا ، $|f(p)| = |\chi(p)| = 1$ ، زیرا χ یک مشخص می‌باشد . بنابراین ، دو سری هم‌ارز می‌باشند .

قضیهٔ ۱۸.۸ . فرض کنیم $\chi_1, \ldots, \chi_{\varphi(k)}$ مشخصهای دیریکله به هنگ k باشند . در این صورت ، در هر نیمصفحه به شکل $\sigma > \sigma_1 \geq 1$ ، مجموعهٔ مقادیری که L - سری دیریکلهٔ $L(s, \chi_i)$ می‌گیرد از i مستقل است .

برهان . با اعمال قضیهٔ قبل با $a(n) = \chi_1(n)$ ، به ازای هر مشخص χ به هنگ k داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_1(n)}{n^s} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_1(n)\chi(n)}{n^s} .$$

در اینجا از این استفاده می‌کنیم که $\chi_1(n) \neq 0$ تساوی $(n, k) = 1$ را ایجاب می‌کند . لذا ، هر L ـ سری $L(s, \chi)$ با L - سری خاص $L(s, \chi_1)$ هم‌ارز است . پس ، طبق قضیهٔ بوهر ، $L(s, \chi)$ در هر نیمصفحهٔ باز داخل نیمصفحهٔ همگرایی مطلق همان مقادیر $L(s, \chi_1)$ را خواهد گرفت .

۱۴.۸ کاربردهای قضیهٔ بوهر در تابع زتای ریمان

کاربردهای ما در تابع زتای ریمان نیاز به اتحاد زیر راجع به تابع لیوویل $\lambda(n)$ دارد که با روابط زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda(1) = 1,\ \lambda(p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}) = (-1)^{a_1 + \cdots + a_r}.$$

تابع $\lambda(n)$ کاملاً" ضربی است و داریم (ر.ک. [۴]، ص ۲۳۱)

اگر $\sigma > 1$، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}$.

قضیهٔ ۱۹.۸. *فرض کنیم $\lambda(n)$ تابع لیوویل بوده و*

$$C(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\lambda(n)}{n}.$$

اگر $\sigma > 1$، داریم

$$\frac{\zeta(2s)}{(s-1)\zeta(s)} = \int_1^{\infty} \frac{C(x)}{x^s}\, dx.$$

برهان. بنابر اتحاد آبل[1] (قضیهٔ ۲.۴ در [۴])، داریم

$$\sum_{n \leq x} \frac{\lambda(n)}{n} \frac{1}{n^s} = \frac{C(x)}{x^s} + s \int_1^{x} \frac{C(t)}{t^{s+1}}\, dt.$$

$\sigma > 0$ را نگهداشته و فرض می‌کنیم $x \to \infty$. در این صورت،

وقتی $x \to \infty$، $\frac{C(x)}{x^s} = O\left(\frac{1}{x^{\sigma}} \sum_{n \leq x} \frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{\log x}{x^{\sigma}}\right) = o(1)$.

لذا، خواهیم داشت

به ازای $\sigma > 0$، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^{s+1}} = s \int_1^{\infty} \frac{C(t)}{t^{s+1}}\, dt$.

از تعویض s با $s - 1$ به دست می‌آوریم

به ازای $\sigma > 1$، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = (s-1) \int_1^{\infty} \frac{C(t)}{t^s}\, dt$.

چون سری سمت چپ دارای مجموع $\zeta(2s)/\zeta(s)$ است، برهان تمام خواهد بود.

---

1. Abel

حال قضیهٔ جالبی را ثابت‌می‌کنیم که توسط پی . توران[1] [۴۴] در ۱۹۴۸ کشف شد و در آن رابطهٔ عجیبی بین فرض ریمان و مجموعهای جزئی تابع زتای ریمان در نیمصفحهٔ $\sigma > 1$ مطرح می‌شود .

قضیهٔ ۸ . ۲۰ . فرض کنیم

$$\zeta_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}.$$

هرگاه n_0 ی موجود باشد به طوری که به ازای هر $n \geq n_0$ و هر $\sigma > 1$ ، $\zeta_n(s) \neq 0$ ، آنگاه به ازای $\sigma > \frac{1}{2}$ ، $\zeta(s) \neq 0$.

برهان . ابتدا توجه می‌کنیم که دو سری دیریکلهٔ $\sum_{k=1}^{n} k^{-s}$ و $\sum_{k=1}^{n} \lambda(k)k^{-s}$ هم ارزند ، زیرا λ کاملاً ضربی‌بوده و دارای قدرمطلق 1 می‌باشد .لذا ، طبق قضیهٔ بوهر ، $\zeta_n(s) \neq 0$ به ازای $\sigma > 1$ ایجاب می‌کند که $\sum_{k=1}^{n} \lambda(k)k^{-s} \neq 0$ به ازای $\sigma > 1$. اما به ازای s حقیقی داریم

$$\lim_{s \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda(k)}{k^s} = \lambda(1) = 1.$$

لذا ، به ازای هر $s > 1$ حقیقی ، باید داشته باشیم $\sum_{k=1}^{n} \lambda(k)k^{-s} > 0$. بافرض $s \to 1+$ معلوم می‌شود که

$$\text{اگر } n \geq n_0 \text{ ،} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda(k)}{k} \geq 0 \,.$$

به عبارت دیگر ، تابع

$$C(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\lambda(n)}{n} \tag{11}$$

به ازای $x \geq n_0$ نامنفی است . حال از اتحاد قضیهٔ ۸ . ۱۹ استفاده می‌کنیم :

$$\frac{\zeta(2s)}{(s-1)\zeta(s)} = \int_1^\infty \frac{C(x)}{x^s}\,dx,$$

که به ازای $\sigma > 1$ معتبر است . توجه کنید که مخرج $(s-1)\zeta(s)$ بر محور حقیقی $s > \frac{1}{2}$ ناصفر بوده ، و $\zeta(2s)$ به ازای $s > \frac{1}{2}$ حقیقی متناهی می‌باشد . لذا ، طبق مشابه انتگرالی

---

1. P. Turán

قضیه‌ٔ لاندو[1] (ر.ک. قضیه‌ٔ ۱۳.۱۱ در [۴])، تابع سمت چپ همه جا درنیم‌صفحه‌ٔ $\sigma > \frac{1}{2}$ تحلیلی است. این ایجاب می‌کند که به ازای $\sigma > \frac{1}{2}$، $\zeta(s) \neq 0$، و برهان تمام خواهد شد.

در قضیه‌ٔ توران فرض است که مجموع $C(x)$ در (۱۱) به ازای هر $x \geq n_0$ نامنفی است. در سال ۱۹۵۸، هیزل گرو[2] [۱۴]، با یک محاسبه‌ٔ ماشینی ماهرانه ثابت کرد که $C(x)$ به ازای بی‌نهایت x منفی است. لذا، قضیه‌ٔ ۲۰.۸ را نمی‌توان برای اثبات فرض ریمان به‌کار برد. درنتیجه، توران [۴۵] قضیه‌اش را به وسیله‌ٔ تعویض فرض $C(x) \geq 0$ با نامساوی ضعیفتری که نمی‌توان آن را با محاسبه‌ٔ ماشینی رد کرد قویتر ساخت.

قضیه‌ٔ ۲۱.۸ (توران). فرض کنیم $C(x) = \sum_{n \leq x} \lambda(n)/n$. **هرگاه ثابتهایی چون** $\alpha > 0$، $c > 0$، و n_0 **موجود باشند به طوری که به ازای هر** $x \geq n_0$،

$$C(x) > -c\frac{\log^\alpha x}{\sqrt{x}} \qquad (۱۲)$$

آنگاه فرض ریمان درست خواهد بود.

برهان. اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، $n_1 \geq n_0$ی موجود است به طوری که به‌ازای‌هر $x \geq n_1$، $c\log^\alpha x \leq x^\varepsilon$؛ لذا، (۱۲) ایجاب می‌کند که

$$C(x) > -x^{\varepsilon - 1/2}$$

فرض کنیم $A(x) = C(x) + x^{\varepsilon - 1/2}$، که درآن ε ثابت بوده و $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. پس به ازای‌هر $x \geq n_1$، $A(x) > 0$. همچنین، به ازای $\sigma > 1$ داریم

$$\int_1^\infty \frac{A(x)}{x^s}\,dx = \int_1^\infty \frac{C(x)}{x^s}\,dx + \int_1^\infty x^{\varepsilon - s - 1/2}\,dx$$

$$= \frac{\zeta(2s)}{(s-1)\zeta(s)} + \frac{1}{s - \frac{1}{2} - \varepsilon} = f(s).$$

اگر مثل برهان قضیه‌ٔ ۲۰.۸ استدلال کنیم، معلوم می‌شود که تابع $f(s)$ بر خط حقیقی $s > \frac{1}{2} + \varepsilon$ تحلیلی است. بنابر قضیه‌ٔ لاندو، $f(s)$ در نیم‌صفحه‌ٔ $\sigma > \frac{1}{2} + \varepsilon$ تحلیلی است. این ایجاب می‌کند که به ازای $\sigma > \frac{1}{2} + \varepsilon$، $\zeta(s) \neq 0$؛ لذا، به ازای $\sigma > \frac{1}{2}$، $\zeta(s) \neq 0$، زیرا ε می‌تواند بدلخواه کوچک باشد.

---

1. Landau 2. Haselgrove

تذکر. چون هر تابع $\zeta_n(s)$ یک سری دیریکله است که متحد صفر نیست، نیمصفحه‌ای مانند $\sigma > 1 + \sigma_n$ وجوددارد که در آن $\zeta_n(s)$ هرگز صفر نمی‌شود (ر.ک. [۴]، قضیهٔ ۱۱.۴.۰). مقدار دقیق σ_n هنوز معلوم نیست. توران در ۱۹۴۸ در مقاله‌اش [۴۴] ثابت کرد که به ازای هر n به قدر کافی بزرگ، در نیمصفحهٔ $\sigma > 1 + 2(\log\log n)/\log n$، $\zeta_n(s) \neq 0$؛ لذا، به ازای n بزرگ، $\sigma_n \leq 2(\log\log n)/\log n$. اچ.ال. مونت گومری[1]، درجهت دیگر، نشان داد ثابتی چون $c > 0$ وجوددارد به‌طوری‌که به‌ازای هر n به‌قدر کافی‌بزرگ، $\zeta_n(s)$ صفری در صفحهٔ $\sigma > 1 + c(\log\log n)/\log n$ دارد؛ لذا، به ازای n بزرگ، $\sigma_n \geq c(\log\log n)/\log n$.

عدد $1 + \sigma_n$ مساوی طول همگرایی سری دیریکله برای متقابل $1/\zeta_n(s)$ است. اگر $\sigma > 1 + \sigma_n$، می‌توان نوشت

$$\frac{1}{\zeta_n(s)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_n(k)}{k^s},$$

که در آن $\mu_n(k)$ معکوس دیریکلهٔ تابع $u_n(k)$ است که به صورت زیر داده می‌شود:

$$u_n(k) = \begin{cases} 1 \text{ ، } k \leq n & \text{اگر} \\ 0 \text{ ، } k > n & \text{اگر} \end{cases}$$

تابع موبیوس معمولی $\mu(k)$ حالت حدی $\mu_n(k)$ است وقتی $n \to \infty$.

تمرینات برای فصل ۸

۱. اگر $\sum a(n)e^{-s\lambda(n)}$ دارای طول همگرایی $\sigma_c < 0$ باشد، ثابت کنید

$$\sigma_c = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log|\sum_{k=n}^{\infty} a(k)|}{\lambda(n)}.$$

۲. فرض کنید σ_c و σ_a طول همگرایی و همگرایی مطلق سری دیریکله باشند. ثابت کنید

$$0 \leq \sigma_a - \sigma_c \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\log n}{\lambda(n)}.$$

از این برای سریهای دیریکلهٔ معمولی داریم $0 \leq \sigma_a - \sigma_c \leq 1$.

۳. اگر وقتی $n \to \infty$، $\log n/\lambda(n) \to 0$، ثابت کنید

$$\sigma_a = \sigma_c = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log|a(n)|}{\lambda(n)}.$$

---

1. H. L. Montgomery

از این چه چیز راجع به شعاع همگرایی یک سری توانی نتیجه می‌شود؟

۴. فرض کنید $\{\lambda(n)\}$ دنباله‌ای از اعداد **مختلط** باشد. همچنین، A مجموعهٔ تمام نقاطی چون $s = \sigma + it$ باشد که به ازای آنها سری $\sum a(n)e^{-s\lambda(n)}$ به طور مطلق همگراست. ثابت کنید A محدب می‌باشد.

تمرینهای ۵، ۶، و ۷ راجع به سری $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)e^{-s\lambda(n)}$ اند که نماها و ضرایبش به صورت زیر می‌باشند.

n	1	2	3	4	5
$\lambda(n)$	$-1-\log 2$	-1	$-\log 2$	$-1+\log 2$	0
$a(n)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

n	6	7	8	9	10
$\lambda(n)$	$1-\log 2$	$\log 2$	1	$\log 3$	$1+\log 2$
$a(n)$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{8}$

همچنین، به ازای $n \geq 1$، $a(n+10) = -\frac{3}{4}\, 2^{-n}$ و $\lambda(n+10) = (n+1)\log 3$.

۵. ثابت کنید $\sigma_a = -(\log 2)/\log 3$.

۶. نشان دهید که اگر $x_3 > -\log 2$ و z_1 و z_2 دلخواه باشند، تابع بوهر نظیر به پایهٔ $B = (1, \log 2, \log 3)$ عبارت است از

$$F(z_1, z_2, z_3) = \cos(iz_1) - \tfrac{1}{2}i\sin(iz_2)(1 + \cos(iz_1)) + \frac{1 - 2e^{-z_3}}{2 - e^{-z_3}},$$

۷. مجموعهٔ $U_f(0)$ را تعیین کنید. **راهنمایی.** نقاط $-1, 1+i, 1-i$ مهم‌اند.

۸. فرض کنید سری دیریکلهٔ $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)e^{-s\lambda(n)}$ به ازای $\sigma > \sigma_a$ به طور مطلق همگرا باشد. اگر $\sigma > \sigma_a$، ثابت کنید

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{\lambda(\sigma+it)} f(\sigma+it)\,dt = \begin{cases} a(n) & \text{اگر } \lambda = \lambda(n)\text{،} \\ 0 & \text{اگر } \lambda \neq \lambda(1), \lambda(2), \dots\text{،} \end{cases}$$

۹. فرض کنید سری $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)e^{-s\lambda(n)}$ به ازای $\sigma > \sigma_a > 0$ به طور مطلق همگرا باشد. همچنین، $v(n) = e^{\lambda(n)}$.

(آ) ثابت کنید اگر $\sigma > 0$، سری $g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)e^{-sv(n)}$ به‌طور مطلق همگراست.

(ب) اگر $\sigma > \sigma_a$، ثابت کنید

$$\Gamma(s)f(s) = \int_0^{\infty} g(t)t^{s-1}\, dt.$$

این تعمیم فرمول کلاسیک تابع زتای ریمان

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\, dt$$

می‌باشد. **راهنمایی.** ابتدا نشان دهید که $\Gamma(s)e^{-s\lambda(n)} = \int_0^{\infty} e^{-t\nu(n)}t^{s-1}\, dt$.

کتابنامه

1. Apostol, Tom M. Sets of values taken by Dirichlet's *L*-series. *Proc. Sympos. Pure Math.*, Vol. VIII, 133–137. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1965. MR 31 #1229.
2. Apostol, Tom M. *Calculus*, Vol. II, 2nd Edition. John Wiley and Sons, Inc. New York, 1969.
3. Apostol, Tom M. *Mathematical Analysis*, 2nd Edition. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1974.
4. Apostol, Tom M. *Introduction to Analytic Number Theory*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1976.
5. Atkin, A. O. L. and O'Brien, J. N. Some properties of $p(n)$ and $c(n)$ modulo powers of 13. *Trans. Amer. Math. Soc. 126* (1967), 442–459. MR 35 #5390.
6. Bohr, Harald. Zur Theorie der allgemeinen Dirichletschen Reihen. *Math. Ann. 79* (1919), 136–156.
7. Deligne, P. La conjecture de Weil. I. *Inst. haut. Étud sci., Publ. math.* 43 (1973), 273–307 (1974). Z. 287, 14001.
8. Erdös, P. A note on Farey series. *Quart. J. Math.*, Oxford Ser. 14 (1943), 82–85. MR 5, 236b.
9. Ford, Lester R. Fractions. *Amer. Math. Monthly 45* (1938), 586–601.
10. Gantmacher, F. R. *The Theory of Matrices*, Vol. 1. Chelsea Publ. Co., New York, 1959.
11. Gunning, R. C. *Lectures on Modular Forms*. Annals of Mathematics Studies, No. 48. Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1962. MR 24 #A2664.
12. Gupta, Hansraj. An identity. *Res. Bull. Panjab Univ. (N.S.) 15* (1964), 347–349 (1965). MR 32 #4070.
13. Hardy, G. H. and Ramanujan, S. Asymptotic formulae in combinatory analysis. *Proc. London Math. Soc. (2) 17* (1918), 75–115.
14. Haselgrove, C. B. A disproof of a conjecture of Pólya. *Mathematika 5* (1958), 141–145. MR 21 #3391.
15. Hecke, E. Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung. *Math. Ann. 112* (1936), 664–699.
16. Hecke, E. Über Modulfunktionen und die Dirichlet Reihen mit Eulerscher Produkt-

entwicklung. I. *Math. Ann. 114* (1937), 1–28; II. 316–351.

17. Iseki, Shô. The transformation formula for the Dedekind modular function and related functional equations. *Duke Math. J. 24* (1957), 653–662. MR 19, 943a.
18. Lehmer, D. H. Ramanujan's function $\tau(n)$. *Duke Math. J. 10* (1943), 483–492. MR 5, 35b.
19. Lehmer, D. H. Properties of the coefficients of the modular invariant $J(\tau)$. *Amer. J. Math. 64* (1942), 488–502. MR 3, 272c.
20. Lehmer, D. H. On the Hardy–Ramanujan series for the partition function. *J. London Math. Soc. 12* (1937), 171–176.
21. Lehmer, D. H. On the remainders and convergence of the series for the partition function. *Trans. Amer. Math. Soc. 46* (1939), 362–373. MR 1, 69c.
22. Lehner, Joseph. Divisibility properties of the Fourier coefficients of the modular invariant $j(\tau)$. *Amer. J. Math. 71* (1949), 136–148. MR 10, 357a.
23. Lehner, Joseph. Further congruence properties of the Fourier coefficients of the modular invariant $j(\tau)$. *Amer. J. Math. 71* (1949), 373–386. MR 10, 357b.
24. Lehner, Joseph, and Newman, Morris. Sums involving Farey fractions. *Acta Arith. 15* (1968/69), 181–187. MR 39 #134.
25. Lehner, Joseph. *Lectures on Modular Forms*. National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series, 61, Superintendent of Documents, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1969. MR 41 #8666.
26. LeVeque, William Judson. *Reviews in Number Theory*, 6 volumes. American Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1974.
27. Mordell, Louis J. On Mr. Ramanujan's empirical expansions of modular functions. *Proc. Cambridge Phil. Soc. 19* (1917), 117–124.
28. Neville, Eric H. The structure of Farey series. *Proc. London Math. Soc. 51* (1949), 132–144. MR 10, 681f.
29. Newman, Morris. Congruences for the coefficients of modular forms and for the coefficients of $j(\tau)$. *Proc. Amer. Math. Soc. 9* (1958), 609–612. MR 20 #5184.
30. Petersson, Hans. Über die Entwicklungskoeffizienten der automorphen formen. *Acta Math. 58* (1932), 169–215.
31. Petersson, Hans. Über eine Metrisierung der ganzen Modulformen. *Jber. Deutsche Math. 49* (1939), 49–75.
32. Petersson, H. Konstruktion der sämtlichen Lösungen einer Riemannscher Funktionalgleichung durch Dirichletreihen mit Eulersche Produktenwicklung. I. *Math. Ann. 116* (1939), 401–412. Z. 21, p. 22; II. *117* (1939), 39–64. Z. 22, 129.
33. Rademacher, Hans. Über die Erzeugenden von Kongruenzuntergruppen der Modulgruppe. *Abh. Math. Seminar Hamburg, 7* (1929), 134–148.
34. Rademacher, Hans. On the partition function $p(n)$. *Proc. London Math. Soc.* (2) *43* (1937), 241–254.
35. Rademacher, Hans. The Fourier coefficients of the modular invariant $j(\tau)$. *Amer. J. Math. 60* (1938), 501–512.
36. Rademacher, Hans. On the expansion of the partition function in a series. *Ann. of Math.* (2) *44* (1943), 416–422. MR 5, 35a.
37. Rademacher, Hans. *Topics in Analytic Number Theory*. Die Grundlehre der mathematischen Wissenschaften, Bd. 169, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1973. Z. 253.10002.

38. Rademacher, Hans and Grosswald, E. *Dedekind Sums*. Carus Mathematical Monograph, 16. Mathematical Association of America, 1972. Z. 251. 10020.

39. Rademacher, Hans and Whiteman, Albert Leon. Theorems on Dedekind sums. *Amer. J. Math. 63* (1941), 377–407. MR 2, 249f.

40. Selberg, Atle. On the estimation of coefficients of modular forms. *Proc. Sympos. Pure Math.*, Vol. VIII, pp. 1–15. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1965. MR 32 #93.

41. Serre, Jean-Pierre. *A Course in Arithmetic*. Graduate Texts in Mathematics, 7. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1973.

42. Siegel, Carl Ludwig. A simple proof of $\eta(-1/\tau) = \eta(\tau)\sqrt{\tau/i}$. *Mathematika 1* (1954), 4. MR 16, 16b.

43. Titchmarsh, E. C. *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*. Oxford, Clarendon Press, 1937.

44. Turán, Paul. On some approximative Dirichlet polynomials in the theory of the zeta-function of Riemann. *Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd. 24* (1948), no. 17, 36 pp. MR 10, 286b.

45. Turán, Paul. Nachtrag zu meiner Abhandlung "On some approximative Dirichlet polynomials in the theory of the zeta-function of Riemann." *Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 10* (1959), 277–298. MR 22 #6774.

46. Uspensky, J. V. Asymptotic formulae for numerical functions which occur in the theory of partitions [Russian]. *Bull. Acad. Sci. URSS (6) 14* (1920), 199–218.

47. Watson, G. N. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd Edition. Cambridge University Press, Cambridge, 1962.

فهرست علایم خاص

واژه‌نامه
فارسی به انگلیسی

identity	اتحاد
triple product	حاصل‌ضرب سه‌گانه
principle	اصل
selection	انتخاب
L - function	L- تابع
invariant	پایا
modular	هنگی
basis	پایه
function	تابع
partition	افراز
Elliptic	بیضوی
theta	تتا
univalent	تک ظرفیتی
tau	تو
automorphic	خودریخت
doubly periodic	دوتناوبه
zeta	زتا
divisor	مقسوم علیهی
modular	هنگی
transformation	تبدیل
estimate	تخمین
polynomial	چندجمله‌ای

product	حاصل‌ضرب
inner	داخلی
conjecture	حدس
property	خاصیت
multiplicative	ضربی
mapping	نگاشتی
congruence	همنهشتی
circle	دایره
ford	فورد
period	دورهٔ تناوب
vertex	رأس
method	روش
circle	دایره‌ای
pair(s)	زوج (ها)
fundamental	اساسی
subspace	زیرفضا
linear	خطی
subgroup	زیرگروه
congruence	همنهشتی
series	سری
form	شکل
cusp	بازگشتی
modular	هنگی
entire	تمام

eigenform	شکل ویژه
normalized	نرمالی شده
simultaneous	همزمان
zero	صفر
coefficient	ضریب
abscissa	طول
of convergence	همگرایی
valence	ظرفیت
of modular function	تابع هنگی
number	عدد
class	رده‌ای
operator	عملگر
form	فرم
quadratic	مربعی
formula	فرمول
transformation	تبدیل
asymptotic	مجانبی
inversion	معکوس
weight	وزن
space	فضا
linear	خطی
law	قانون
reciprocity	تقابل

theorem	قضیه
approximation	تقریب
fraction	کسر
group	گروه
modular	هنگی
discriminant	مبین
parallelogram	متوازی‌الاضلاع
periodic	تناوبی
sum	مجموع
order	مرتبه
of elliptic function	تابع بیضوی
problem	مسئله
inversion	انعکاس
path	مسیر
of integration	انتگرالگیری
equation	معادله
functional	تابعی
differential	دیفرانسیل
value	مقدار
eigenvalue	مقدار ویژه
generator	مولد
of modular group	گروه هنگی
mediant	میانه
region	ناحیه
fundamental	اساسی
theory	نظریهٔ

جمعی اعداد	additive number
نما (یی)	exponent
نمایش	representation
حاصل‌ضربی	product
نماینده	representative
فرم مربعی	of quadratic form
نیمصفحه	half - plane
همگرایی	of convergence
وزن	weight
شکل هنگی	of modular form
هم‌ارزی	equivalence
زوجهای تناوبی	of pairs of periods
فرمهای مربعی	of quadratic forms

واژه‌نامه
انگلیسی به فارسی

abscissa	طول
of convergence	همگرایی
additive	جمعی
number theory	نظریهٔ . . . اعداد
approximation	تقریب
theorem	قضیهٔ
asymptotic	مجانبی
formula	فرمول
automorphic	خودریخت
function	تابع
basis	پایه
circle	دایره (ای)
method	روش
class	رده (ای)
number	عدد
congruence	همنهشتی
subgroup	زیرگروه
cusp form	شکل بازگشتی
differential	دیفرانسیل
equation	معادلهٔ
discriminant	مبین
divisor	مقسوم علیه (ی)

function	تابع
doubly periodic	دوتناوبه
function	تابع
eigenvalue	مقدار ویژه
elliptic	بیضوی
function	تابع
entire	تمام
modular form	شکل هنگی
equivalence	هم‌ارزی
estimate	تخمین
exponent	نما (یی)
functional	تابعی
equation	معادلهٔ
fundamental	اساسی
pairs	زوجهای
region	ناحیهٔ
generator	مولد
half-plane	نیمصفحه
of convergence	همگرایی
invariant	پایا
inversion	انعکاس
problem	مسئلهٔ
linear	خطی
space	فضای

subspace	زیرفضای
mediant	میانه
modular	هنگی
form	شکل
function	تابع
group	گروه
multiplicative	ضربی
property	خاصیت
normalized	نرمالی شده
eigenform	شکل ویژهٔ
order	مرتبه
of elliptic function	تابع بیضوی
partition	افراز
function	تابع
period	دورهٔ تناوب (تناوبی)
parallelogram	متوازی‌الاضلاع
product	حاصل‌ضرب (ی)
representation	نمایش
quadratic	مربعی
form	فرم
reciprocity	تقابل
law	قانون
representative	نماینده
of quadratic form	فرم مربعی

simultaneous	همزمان
eigenforms	شکلهای ویژهٔ
subgroup	زیرگروه
transcendental	متعالی
number	عدد
transformation	تبدیل
formula	فرمول
univalent	تک ظرفیتی
modular function	تابع هنگی
valence	ظرفیت
of modular function	تابع هنگی
value	مقدار
vertex	رأس
of fundamental region	ناحیهٔ اساسی
weight	وزن
formula	فرمول
of a modular form	شکل هنگی
zero	صفر
of elliptic function	تابع بیضوی
zeta	زتا
function	تابع

فهرست راهنما