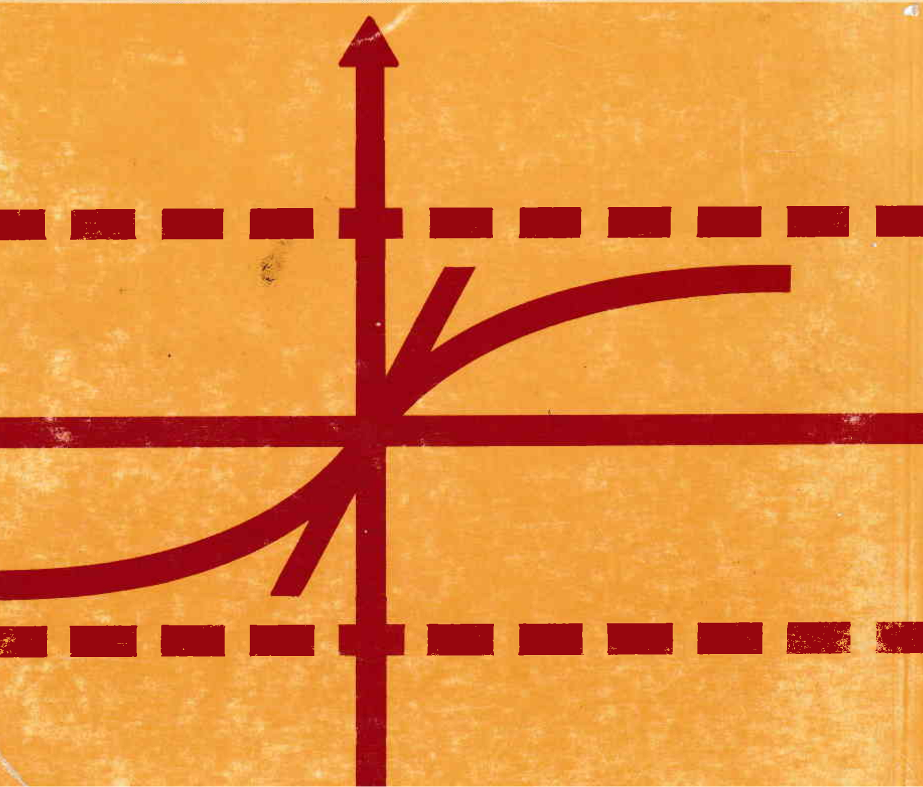
فرهنگ آموزشی و کتابخانه ها

۱۷

متمم جبر و آنالیز

برای دانش آموزان و دبیران دبیرستان

تألیف: محمد عابدی



بسم الله الرحمن الرحیم

متمم جبر و آنالیز

برای دانش آموزان و دبیران دبیرستان

تألیف : محمد عابدی

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش وبرنامه ریزی آموزشی
دفترامورکمک آموزشی وکتابخانه‌ها

متمم جبروآنالیز

چاپ اول: بهار۶۳/ چاپ دوم: بهار ۱۳۶۷
چاپ سوم: پائیز ۱۳۶۷ ۵۰۰۰ نسخه
چاپ چهارم: تابستان ۱۳۶۸ ۱۰۰۰۰ نسخه

تهران: خیابان ایرانشهرشمالی_ ساختمان شهیدموسوی
شمارهٔ ۴ وزارت آموزش و پرورش تلفن: ۸۳۱۴۸۱
چاپ از: سازمان چاپ وانتشارات وزارت فرهنگ وارشاداسلامی

فهرست مندرجات

مقدمه

متمم جبر و آنالیز کتابی است که قابل استفادهٔ دانش‌آموزان سال چهارم، رشتهٔ ریاضی فیزیک، و نیز دانش‌آموزان تیزهوش و داوطلبین شرکت در آزمون ورودی دانشگاهها می‌باشد.

قضایای این کتاب تقریباً همان قضایای جبر و آنالیز سالهای سوم و چهارم ریاضی است که همراه با اثبات بیان شده‌است، لذا می‌تواند مورد استفادهٔ همکاران و دبیران ارجمند نیز قرار گیرد و نیز این کتاب می‌تواند مورد استفادهٔ دانشجویان ترم اول علوم و مهندسی قرار گیرد.

بدین وسیله از زحمات همکاران محترم دفتر امور کمك آموزشی تشکر نموده و توفیق آنها را، در خدمت به فرهنگ جمهوری اسلامی ایران، از خداوند متعال خواهانم. همچنین از همکار ارجمندم جناب آقای دکتر رزاقی استاد محترم دانشگاه امیرکبیر (پلی‌تکنیك تهران) که کتاب Leithold را در اختیار اینجانب قرارداده و در تهیهٔ مطالب کتاب نقش مؤثری داشته‌است تشکر می‌نمایم.

در خاتمه از خوانندگان محترم تقاضا دارم اینجانب را از راهنمائیها و انتقادات خویش بهرمند سازند تا در چاپهای بعدی به‌یاری خداوند، اشتباهات مرتفع گردد. لازم به‌تذکر است که علاوه‌بر تجربیات شخصی، متنی بر ۳۱ سال اشتغال به‌علمی و تدریس ریاضیات، منابع زیر نیز در تألیف این کتاب مورد استفاده قرار گرفته است.

۱– Leithold

۲– Silverman

۳– ریاضیات عمومی و آنالیز ریاضی آقای دکتر وصال

۴– ریاضیات عمومی و هندسی تحلیلی آقای دکتر کامکار

۵– روشهای جبری آقای پرویز شهریاری

۶– هندسه تحلیلی آقای دکتر سادات عقیلی

۷– هندسه تحلیلی آقای دکتر وحدتی

۱

مسائل مربوط به تابع

مسألهٔ ۱: دامنه و برد هریك از توابع زیر را یافته و نمودار آنها را رسم کنید:

$$f_۱(x)=|x|\,|x-۱| \quad , \quad f_۲(x)=|x|+[x] \quad , \quad f_۳(x)=\frac{|x|}{[x]}$$

مسألهٔ ۲: اگر f و g دو تابع فرد باشند ثابت کنید $f+g$ و $f-g$ نیز توابع فرد هستند.

مسألهٔ ۳: اگر f و g دو تابع فرد باشند ثابت کنید $f\times g$ و $\frac{f}{g}$ توابع زوج هستند.

مسألهٔ ۴: نشان دهید تابع $\frac{۱}{۲}[f(x)+f(-x)]$ یك تابع زوج و تابع $\frac{۱}{۲}[f(x)-f(-x)]$ یك تابع فرد است و از آنجا نشان دهید هر تابع را می‌توان به صورت مجموع یك تابع زوج و یك تابع فرد نوشت، آنگاه تابع $f(x)=\frac{x-۱}{x+۱}$ را به‌صورت مجموع یك تابع زوج و یك تابع فرد بنویسید.

مسألهٔ ۵: تابعی بیابید که هم‌زوج و هم‌فرد باشد.

مسألهٔ ۶: در هریك از موارد زیر دربارهٔ فرد یا زوج بودن تابع مرکب $f\circ g$ بحث کنید:

الف: توابع f و g هردو زوج هستند. ب: توابع f و g هردو فرد هستند.

ج: تابع f زوج و تابع g فرد است. د: تابع f فرد و تابع g زوج است.

مسألهٔ ۷: تابع g به‌صورت $g(x)=x^۲$ تعریف شده‌است، تابع f را طوری تعریف کنید که $(f\circ g)(x)=x$ باشد، به شرطی که داشته باشیم:

الف) $x\geqslant ۰$ ب) $x<۰$

مسألهٔ ۸: تابع پله‌ای واحد به صورت $u(t)=\begin{cases}۰ ، & t<۰\\ ۱ ، & t\geqslant ۰\end{cases}$ و تابع علامت به

صورت $Sgnx=\begin{cases}-۱ ، & x<۰ \\ ۰ ، & x=۰ \\ ۱ ، & x>۰\end{cases}$ ، مطلوب است $f(x)=Sgnx^۲-Sgnx$ و $g(x)=(x+۱)\cup(x+۱)$ و $h(x)=Sgnx\cup(x+۱)$ ، دامنه و حوزهٔ هریک ازاین توابع را بیابید.

مسألهٔ ۹: اگر f و g به صورت زیرتعریف شده باشند : $(f\circ g)(x)$ و $(g\circ f)(x)$ را پیداکنید.

$$f(x)=\begin{cases}۰ & x<۰ \\ ۲x & ۰\leqslant x\leqslant ۱ \\ ۰ & x>۱\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}۱ & x<۰ \\ \frac{۱}{۲}x & ۰\leqslant x\leqslant ۱ \\ ۱ & x>۱\end{cases}$$

مسألهٔ ۱۰: برای توابع تعریف شده زیر ، $(f\circ g)(x)$ را پیداکنید.

$$f(x)=\begin{cases}۰ & x<۰ \\ x^۲ & ۰\leqslant x\leqslant ۱ \\ ۰ & x>۱\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}۱ & x<۰ \\ ۲x & ۰\leqslant x\leqslant ۱ \\ ۱ & x>۱\end{cases}$$

مسألهٔ ۱۱: اگر $f(x)=x^۲+۲x+۲$ باشد ، دوتابع برای g طوری بیابیدکه داشته باشیم ، $(f\circ g)(x)=x^۲-۴x+۵$.

مسألهٔ ۱۲: مطلوب است دامنه وبرد تابع $f(x)=۳\log_۲(۱-۲\cos x)$.

مسألهٔ ۱۳: اگر $f(x)=(ax^۳+b)^۵$ و $g(x)=\sqrt[۳]{\frac{\sqrt[۵]{x}-b}{a}}$ باشد، مطلوب است $f[g(x)]$.

مسألهٔ ۱۴: اگر $f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^۲+y^۲}}{x}$ و $x<۰$ باشد، مطلوب است $f(x)$.

مسألهٔ ۱۵: اگر $f[(x+y)$ و $(x-y)]=۴xy$ باشد، مطلوب است $f(x\ ,\ y)$.

مسألهٔ ۱۶: اگر $z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-۱)$ به ازای $y=۱$ برابر x باشد، مطلوب است $f(u)$.

مسألهٔ ۱۷: اگر $f\left[(x+y)\ \text{و}\ \frac{y}{x}\right]=x^۲-y^۲$ باشد ، مطلوب‌است $f(x\ ,\ y)$.

مسألهٔ ۱۸: اگر $f\left(x+\frac{۱}{x}\right)=x^۲+\frac{۱}{x^۲}$ باشد ، مطلوب است $f(x)$.

مسألهٔ ۱۹: $f(n)$ به ازای جمیع مقادیر $n \in N$ معین است و در شرایط

$$\begin{cases} f(۱)=۱ \\ f(n)=f(n-۱)+a^n \end{cases}$$

صدق می‌کند مطلوب است $f(n)$.

مسألهٔ ۲۰: $f(x)$ را چنان بیابید که $۲f(x^۳)+f(-x^۳)=x$

مسألهٔ ۲۱: $f(x)$ را ازدرجهٔ چهارم درنظر گرفته به‌طوری‌که $f(x+۲)$ بر $(x-۲)^۲$ و $f(x-۱)$ بر $(x+۳)^۲$ بخش پذیر بوده و $x+۴$ با $x-۴$ اول فرض شود و $f(۵)=۸۱$ باشد، مطلوب است $f(۳)$.

مسألهٔ ۲۲: اگر $f(ab)=[f(a)]^b$ باشد، مطلوب است $f(x)$.

مسألهٔ ۲۳: اگر $\sin x f(x)+\cos x f(-x)=x$ باشد، مطلوب است $f(x)$.

۲

مطالبی دربارهٔ حد و پیوستگی

و تمرینهای آن

قضیهٔ ۱: نشان دهید اگر تابعی در $x=a$ حد داشته باشد این حد منحصر به فرد است.

اثبات : فرض می‌کنیم $\underset{x\to a}{f(x)}=L_{۱}$ حد و $\underset{x\to a}{f(x)}=L_{۲}$ حد، ثابت می‌کنیم $L_{۱}=L_{۲}$

اگر $L_{۱}\neq L_{۲}$ باشد ، نشان خواهیم داد که به تناقض برخورد می‌نماییم طبق تعریف حد برای هر $\frac{\varepsilon}{۲}>۰$ وجود دارد $\delta_{۱}>۰$ و $\delta_{۲}>۰$ به طوری‌که :

$$۰<|x-a|<\delta_{۱}\Longrightarrow|f(x)-L_{۱}|<\frac{\varepsilon}{۲}$$

$$۰<|x-a|<\delta_{۲}\Longrightarrow|f(x)-L_{۲}|<\frac{\varepsilon}{۲}$$

ازطرفی $|L_{۱}-L_{۲}|=|L_{۱}-f(x)-L_{۲}+f(x)|=|(L_{۱}-f(x))+(f(x)-L_{۲})|=|L_{۱}-L_{۲}|$

$$\leqslant|L_{۱}-f(x)|+|f(x)-L_{۲}|<\frac{\varepsilon}{۲}+\frac{\varepsilon}{۲}=\varepsilon$$

اگر $\varepsilon=|L_{۱}-L_{۲}|$ انتخاب کنیم و $\delta=\min\{\delta_{۱},\delta_{۲}\}$ بگیریم:

$$۰<|x-a|<\delta\Longrightarrow|L_{۱}-L_{۲}|<|L_{۱}-L_{۲}|$$

چون $|L_{۱}-L_{۲}|<|L_{۱}-L_{۲}|$ یك تناقض‌است پس $L_{۱}\neq L_{۲}$ غلط است و حکم ثابت است.

قضیهٔ ۲: اگر $\underset{x\to a}{f(x)}=L_{۱}$ حد و $\underset{x\to a}{g(x)}=L_{۲}$ حد ، باشد ، نشان دهید:

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}\cdot[f(x)+g(x)]=L_{۱}+L_{۲}$$

اثبات : طبق تعریف حد داریم برای هر $\frac{\varepsilon}{۲}>۰$ وجود دارد $\delta_{۲}>۰$ و $\delta_{۱}$ به‌طوری که:

$$\begin{cases} ۰<|x-a|<\delta_{۱} \Longrightarrow |f(x)-L_{۱}|<\dfrac{\varepsilon}{۲} \\ ۰<|x-a|<\delta_{۲} \Longrightarrow |g(x)-L_{۲}|<\dfrac{\varepsilon}{۲} \end{cases}$$

$\delta = \min\{\delta_{۱},\delta_{۲}\}$ انتخاب می‌کنیم:

$$|f(x)+g(x)-(L_{۱}+L_{۲})| = |(f(x)-L_{۱})+(g(x)-L_{۲})| \leqslant$$

$$|f(x)-L_{۱}|+|g(x)-L_{۲}| < \frac{\varepsilon}{۲}+\frac{\varepsilon}{۲}=\varepsilon$$

نامساوی بالا وقتی برقرار است که $۰<|x-a|<\delta$ باشد ، یعنی:

$$۰<|x-a|<\delta \Longrightarrow |(f(x)+g(x))-(L_{۱}+L_{۲})|<\varepsilon$$

پس طبق تعریف حد داریم $\underset{x\to a}{\text{حد}}\,[f(x)+g(x)] = L_{۱}+L_{۲}$

قضیهٔ ۳: اگر $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(x) = L$ و K مقدار ثابت مخالف صفر باشد ، نشان دهید $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, Kf(x) = KL$.

اثبات : چون $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(x) = L$ ، می‌باشد برای هر $\dfrac{\varepsilon}{|K|}>۰$ وجود دارد $\delta>۰$ به طوری که:

$$۰<|x-a|<\delta \Longrightarrow |f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{|K|}$$

$$|f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{|K|} \Longrightarrow |Kf(x)-KL|<\varepsilon$$

$$\therefore\quad ۰<|x-a|<\delta \Longrightarrow |Kf(x)-KL|<\varepsilon$$

پس $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, Kf(x) = KL$.

تبصرهٔ ۱: اگر $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(x) = L_{۱}$ و $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, g(x) = L_{۲}$ باشد ، داریم:

$\underset{x\to a}{\text{حد}}\,[f(x)-g(x)] = L_{۱}-L_{۲}$ (اثبات به عهدهٔ خوانندگان).

تبصرهٔ ۲: بااستفاده ازاستقراء وقضیهٔ (۲) صفحه ۸ نشان‌دهید اگر:

$\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f_{۱}(x)=L_{۱}$ و $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f_{۲}(x)=L_{۲}$ و . . . و $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f_{n}(x)=L_{n}$

$$\Longrightarrow \underset{x\to a}{\text{حد}}\,[f_۱(x)+f_۲(x)+\cdots+f_n(x)]=L_۱+L_۲+\cdots+L_n$$

قضیهٔ ۴: اگر $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(x)=L$ باشد، نشان دهید $\underset{x\to a}{\text{حد}}\,(f(x)-L)=۰$.

اثبات: $\underset{x\to a}{\text{حد}}\,(f(x)-L)=\underset{a\to a}{\text{حد}}\, f(x)-\underset{x\to a}{\text{حد}}\, L=L-L=۰$

قضیهٔ ۵: اگر $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(x)=L$ و $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, g(x)=۰$ باشد، نشان دهید $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(x)g(x)=۰$.

اثبات: چون $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(x)=L$ می‌باشد، پس برای هر $\varepsilon>۰$ مثلاً (۱) وجود دارد $\delta_۱>۰$ به طوری که $۰<|x-a|<\delta_۱ \Longrightarrow |f(x)-L|<۱$ از طرفی می‌دانیم:

$$|f(x)|-|L|\leqslant|f(x)-L|<۱ \Longrightarrow |f(x)|-|L|<۱$$

$$\Longrightarrow |f(x)|<|L|+۱$$

ازطرفی چون $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, g(x)=۰$ پس:

$$۰<|\ x\ -a|<\delta_۲ \Longrightarrow |g(x)|<\frac{\varepsilon}{|L|+۱}$$

$$\left\{\begin{array}{l} |g(x)|<\dfrac{\varepsilon}{|L|+۱} \\ |f(x)|<|L|+۱ \end{array}\right. \Longrightarrow |f(x)g(x)|<\varepsilon$$

اگر $\min\{\delta_۱,\delta_۲\}=\delta$ باشد، داریم $۰<|x-a|<\delta \Longrightarrow |f(x)g(x)|<\varepsilon$

یعنی $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(x)g(x)=۰$

قضیهٔ ۶: اگر $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(x)=۰$ و $|g(x)|\leqslant M$ باشد، آنگاه $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(x)g(x)=۰$

اثبات: چون $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(x)=۰$ ، می‌باشد پس برای‌هر $\frac{\varepsilon}{M}>۰$ وجود دارد $\delta>۰$

به طوری که $۰<|x-a|<\delta \Longrightarrow |f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{M}$

$$\left\{\begin{array}{l} |f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{M} \\ |g(x)|\leqslant M \end{array}\right. \Longrightarrow |f(x)g(x)|<\varepsilon$$

$$0<|x-a|<\delta\Longrightarrow|f(x)g(x)|<\varepsilon$$

پس $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(x)g(x)=0$ مثلا $\underset{x\to 0}{\text{حد}}\, x\sin\frac{1}{x}=0$ می‌باشد چون

$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$ و $\underset{x\to 0}{\text{حد}}\, x=0$ است.

قضیهٔ ۷: اگر $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(x)=L$ و $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, g(x)=M$ باشد نشان‌دهید.

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(x)g(x)=L.M$$

اثبات: $$f(x)g(x)=\underbrace{[f(x)-L]g(x)}_{۱}+\underbrace{[g(x)-M]L}_{۲}+ML$$

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(x)g(x)=\underset{x\to a}{\text{حد}}\,[f(x)-L]g(x)+\underset{x\to a}{\text{حد}}\,[g(x)-M]L+\underset{x\to a}{\text{حد}}\, ML$$

طبق قضایای ۴ و ۵ صفحه ۱۰ حدهای عبارتهای ۱ و ۲ صفر است پس.

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(x)g(x)=L.M$$

تبصره: قضیهٔ ۷ را برای حاصل‌ضرب n تابع با استفاده از استقراء استدلال نمایید.

قضیهٔ ۸: اگر $x\neq 0$ باشد. نشان دهید $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, \frac{1}{x}=\frac{1}{a}$ می‌باشد.

اثبات: قضیه را برای وقتی که $0<a$ می‌باشد اثبات کرده اثبات برای $0>a$ را به‌عهده خوانندگان می‌گذاریم باید نشان دهیم برای هر $0<\varepsilon$ وجود دارد $\delta>0$ به‌طوری که:

$$0<|x-a|<\delta\Longrightarrow\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|=\frac{|a-x|}{|ax|}=\frac{|a-x|}{|a||x|}=|a-x|\times\frac{1}{a|x|}$$

حال یک کرانهٔ بالایی برای عامل $\frac{1}{a|x|}$ به‌دست می‌آوریم فرض می‌کنیم $|x-a|<\frac{a}{2}$ باشد، داریم.

و $$-\frac{a}{2}<x-a<\frac{a}{2}\Rightarrow\frac{a}{2}<x<\frac{3a}{2}\Rightarrow\frac{a}{2}<|x|<\frac{3a}{2}$$

$$\frac{۱}{a|x|} < \frac{۱}{a\times\frac{a}{۲}} = \frac{۲}{a^۲} \text{ و } |x-a|\times\frac{۱}{a|x|} < |x-a|\times\frac{۲}{a^۲} < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow |x-a| < \frac{\varepsilon a^۲}{۲} \text{ و } |x-a| < \frac{a}{۲} \text{ و } \delta=\min\left\{\frac{a}{۲} \text{ و } \frac{\varepsilon a^۲}{۲}\right\}$$

$$\therefore\ ۰ < |x-a| < \min\left(\frac{a}{۲} \text{ و } \frac{\varepsilon a^۲}{۲}\right) \Longrightarrow \left|\frac{۱}{x}-\frac{۱}{a}\right| < \varepsilon$$

قضیهٔ ۹: نشان دهید $\underset{x\to a}{\text{حد}}\ \sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$

اثبات: قضیه را برای $a>۰$ و n هرعدد صحیح مثبت بیان می‌کنیم باید نشان دهیم برای هر $\varepsilon>۰$ وجود دارد $\delta>۰$ به‌طوری‌که

$$۰<|x-a|<\delta \Longrightarrow |\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}|<\varepsilon$$

اگر فرض کنیم $|x-a|<a$ پس $۰<x<۲a$ و به‌جای x مخرج‌صفر قرار داده داریم:

$$|\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}| =$$

$$\left|\frac{x-a}{\sqrt[n]{x^{n-۱}}+\sqrt[n]{x^{n-۲}a}+\cdots+\sqrt[n]{a^{n-۱}}}\right|$$

$$< |x-a|\times\frac{۱}{\sqrt[n]{a^{n-۱}}} < \varepsilon \Longrightarrow |x-a| < \varepsilon a^{\frac{n-۱}{n}} \text{ و }$$

$$|x-a|<a \text{ و } \delta=\min\left\{a \text{ و } \varepsilon a^{\frac{n-۱}{n}}\right\}$$

$$\therefore\ ۰<|x-a|<\min\left\{a \text{ و } \varepsilon a^{\frac{n-۱}{n}}\right\} \Longrightarrow \left|\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}\right|<\varepsilon$$

اثبات حالتی را که $a \leqslant ۰$ و n هرعدد فرد مثبت باشد به عهدهٔ خوانندگان می‌گذاریم.

قضیهٔ ۱۰: نشان دهید شرط لازم و کافی برای آنکه تابع $f(x)$ در $x=a$ حد داشته باشد آن است که حد راست تابع در a برابر باحد چپ تابع در a باشد.

اثبات: ابتدا فرض می‌کنیم $\underset{x\to a^+}{\text{حد}}\ f(x)=L$ و $\underset{x\to a^-}{\text{حد}}\ f(x)=L$، پس برای هر $\varepsilon>۰$ وجود دارد $\delta_۱$ و $\delta_۲>۰$ به‌طوری‌که:

$$0 < x-a < \delta_1 \Longrightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$
$$0 < a-x < \delta_2 \Longrightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

مینیمم δ_1 و δ_2 را δ فرض کرده در این صورت

$$0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow \begin{cases} 0 < x-a < \delta_1 \\ 0 < a-x < \delta_2 \end{cases}$$

پس $0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$ یعنی حد $\underset{x\to a}{f(x)}=L$

حال اگر حد $\underset{x\to a}{f(x)}=L$ باشد، ثابت می‌کنیم حد راست و حد چپ تابع برابر L است، طبق تعریف حد داریم برای هر $\varepsilon > 0$ وجود دارد $\delta > 0$ به‌طوری که $0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$ این تعریف را به‌صورتهای زیر می‌نویسیم. (برای $x > a$) $0 < x-a < \delta \Longrightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$ این تعریف حد راست تابع در a می‌باشد و نیز (برای $x < a$)،

$$0 < a-x < \delta \Longrightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

این تعریف حد چپ تابع در a می‌باشد.

قضیهٔ ۱۱: اگر حد $\underset{x\to a}{f(x)}=L$ باشد، نشان دهید حد $\underset{x\to a}{|f(x)|}=|L|$ می‌باشد.

اثبات: چون حد $\underset{x\to a}{f(x)}=L$ می‌باشد، پس برای هر $\varepsilon > 0$ وجود دارد $\delta > 0$ به‌طوری که

$$0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

ازطرفی می‌دانیم $\Big||f(x)|-|L|\Big| \leqslant |f(x)-L| < \varepsilon$ بنابراین:

$$0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow \Big||f(x)|-|L|\Big| < \varepsilon$$

پس حد $\underset{x\to a}{|f(x)|}=|L|$

قضیهٔ ۱۲: اگر تابع $f(x) \geqslant 0$ باشد و حد $\underset{x\to a}{f(x)}=c$ باشد در این صورت C نمی‌تواند منفی باشد.

اثبات: چون حد $\underset{x\to a}{f(x)}=c$ می‌باشد، پس برای $\varepsilon=|c|$ وجود دارد $\delta > 0$ به‌طوری که $0<|x-a|<\delta \Longrightarrow |f(x)-c|<|c| \Longleftrightarrow -|c|<f(x)-c<|c|$

اگر $c < ۰$ باشد چون $f(x) \geqslant ۰$

پس $f(x)-c > |c|$ که به‌تناقض رسیدیم بنابراین باید $c < ۰$ نباشد.

قضیهٔ ۱۳: اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ در a حدداشته باشند و $f(x) \leqslant g(x)$ باشد، در این‌صورت $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(x) \leqslant \underset{x\to a}{\text{حد}}\, g(x)$

اثبات: $$f(x)\leqslant g(x) \Longrightarrow g(x)-f(x) \geqslant ۰$$

طبق قضیهٔ ۱۲ صفحه ۱۳ داریم: $\underset{x\to a}{\text{حد}}\big(g(x)-f(x)\big)\geqslant ۰$ یا $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, g(x) - \underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(x) \geqslant ۰$

ویا داریم $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, g(x) \geqslant \underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(x)$

قضیهٔ ۱۴: اگر $f_{۱}(x) \leqslant f(x) \leqslant f_{۲}(x)$ و $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f_{۱}(x) = \underset{x\to a}{\text{حد}}\, f_{۲}(x)=c$ ، باشد

آنگاه $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(x)=c$ ، خواهد بود.

اثبات: چون $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f_{۱}(x)=c$ و $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f_{۲}(x)=c$ ، پس برای هر $\varepsilon > ۰$ وجود دارد $\delta_{۱}$ و $\delta_{۲} > ۰$ به‌طوری‌که

$$۰ < |x-a| < \delta_{۱} \Longrightarrow |f_{۱}(x)-c| < \varepsilon$$
$$۰ < |x-a| < \delta_{۲} \Longrightarrow |f_{۲}(x)-c| < \varepsilon$$

ازطرفی می‌دانیم:

$$f_{۱}(x) \leqslant f(x) \leqslant f_{۲}(x) \Longrightarrow f_{۱}(x)-c \leqslant f(x)-c \leqslant f_{۲}(x)-c \qquad (۱)$$

$$|f_{۲}(x)-c| < \varepsilon \Longrightarrow -\varepsilon < f_{۲}(x)-c < \varepsilon$$
$$|f_{۱}(x)-c| < \varepsilon \Longrightarrow -\varepsilon < f_{۱}(x)-c < \varepsilon$$

بنابراین با توجه به‌نامساویهای (۱) ونامساویهای اخیر داریم :

$$-\varepsilon < f_{۱}(x)-c \leqslant f(x)-c \leqslant f_{۲}(x)-c < \varepsilon \Longrightarrow$$
$$-\varepsilon < f(x)-c < \varepsilon \Longrightarrow |f(x)-c| < \varepsilon$$

اگر $\delta = \min\{\delta_{۱} \text{ و } \delta_{۲}\}$ بگیریم داریم:

$$۰ < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)-c| < \varepsilon$$

یعنی $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(x)=c$

مثال: نشان دهید $\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\, \sqrt[n]{۱+x} = ۱$ ، به‌شرط‌اینکه $n \in N$ و $|x| < ۱$ باشد

حل: می‌دانیم

$۱-|x|\leqslant\sqrt[n]{۱+x}\leqslant ۱+|x|$ از طرفی $۱=\underset{x\to ۰}{\text{حد}}(۱+|x|)=\underset{x\to ۰}{\text{حد}}(۱-|x|)$،

پس طبق قضیهٔ ۱۴ (صفحهٔ ۱۴) $\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\sqrt[n]{۱+x}=۱$

قضیهٔ ۱۵: اگر r یک عدد صحیح مثبت باشد، نشان دهید $\underset{x\to ۰^+}{\text{حد}}\frac{۱}{x^r}=+\infty$ و

$$\underset{x\to ۰^-}{\text{حد}}\frac{۱}{x^r}=\begin{cases}-\infty & \text{،}\ r\ \text{فرد}\\ +\infty & \text{،}\ r\ \text{زوج}\end{cases}$$

اثبات: باید نشان دهیم برای هر $M>۰$ وجود دارد $\delta>۰$ به‌طوری‌که

$$(x\to ۰^+\ \text{برای})\ ۰<x<\delta\Longrightarrow\frac{۱}{x^r}>M$$

$$\frac{۱}{x^r}>M\Longrightarrow x^r<\frac{۱}{M}\Longrightarrow x<\frac{۱}{\sqrt[r]{M}}$$

پس کافی است $\delta\leqslant\frac{۱}{\sqrt[r]{M}}$ انتخاب نماییم (اثبات بقیه به‌عهدهٔ خوانندگان)

قضیهٔ ۱۶: اگر $\underset{x\to a}{\text{حد}}f(x)=۰$ و $\underset{x\to a}{\text{حد}}g(x)=c$، و $c\neq ۰$ و عددی ثابت باشد. آنگاه اگر $c>۰$ و برای مقادیر مثبت $f(x)$ داشته باشیم $\underset{x\to a}{\text{حد}}f(x)=۰$، ثابت کنید

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}\frac{g(x)}{f(x)}=+\infty$$

اثبات: چون $\underset{x\to a}{\text{حد}}g(x)=c$، پس برای $\varepsilon=\frac{c}{۲}$ وجود دارد $\delta_۱>۰$ به‌طوری‌که

و $$۰<|x-a|<\delta_۱\Longrightarrow|g(x)-c|<\frac{c}{۲}$$

$$|g(x)-c|<\frac{c}{۲}\Longrightarrow\frac{c}{۲}<g(x)<\frac{۳c}{۲}$$

وچون $\underset{x\to a}{\text{حد}}f(x)=۰$، پس برای هر $\varepsilon>۰$ وجود دارد $\delta_۲>۰$ به‌طوری‌که

$$۰<|x-a|<\delta_۲ \Longrightarrow |f(x)|<\varepsilon$$

$$\begin{cases} |f(x)|=f(x)<\varepsilon \Longrightarrow \dfrac{۱}{f(x)}>\dfrac{۱}{\varepsilon} \\ g(x)>\dfrac{c}{۲}>۰ \qquad\qquad \Longrightarrow \dfrac{g(x)}{f(x)}>\dfrac{c}{۲\varepsilon}=M \end{cases}$$

و $\varepsilon=\dfrac{c}{۲M}$ اگر $\min\{\delta_۱ \text{ و } \delta_۲\}=\delta$ باشد،

(چون ε هرعدد مثبت است پس M هرعدد مثبت می‌باشد) داریم.

$$۰<|x-a|<\delta \Longrightarrow \frac{g(x)}{f(x)}>\frac{\frac{c}{۲}}{\frac{c}{۲M}}=M$$

که این تعریف $\underset{x\to a}{\text{حد}}\dfrac{g(x)}{f(x)}=+\infty$ می‌باشد، درحالتی که

$$\begin{cases} f(x)<۰ \\ c>۰ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} f(x)>۰ \\ c<۰ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} f(x)<۰ \\ c<۰ \end{cases}$$

قضیهٔ بالا را بیان واستدلال نمایید.

قضیهٔ ۱۷: اگر $\underset{x\to a}{\text{حد}} f(x)=+\infty$ و $\underset{x\to a}{\text{حد}} g(x)=c$ و $c\neq ۰$ وثابت باشد، آنگاه داریم

$$(۱)\begin{cases} \underset{x\to a}{\text{حد}} f(x)g(x)=+\infty \\ c>۰ \end{cases} \quad \text{و} \quad (۲)\begin{cases} \underset{x\to a}{\text{حد}} f(x)g(x)=-\infty \\ c<۰ \end{cases}$$

اثبات: ابتدا(۱) را اثبات می‌نماییم، باید نشان دهیم بـرای هر $M>۰$ وجود دارد $\delta>۰$ به‌طوری‌که

$$۰<|x-a|<\delta \Longrightarrow f(x)g(x)>M$$

چون $\underset{x\to a}{\text{حد}} g(x)=c$ می‌باشد $\varepsilon>۰$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $\varepsilon<c$ باشد دراین‌صورت وجود دارد $\delta_۱>۰$ به‌طوری‌که

$$۰ < |x-a| < \delta_۱ \Rightarrow |g(x)-c| < \varepsilon$$
$$|g(x)-c| < \varepsilon \Rightarrow g(x)-c > -\varepsilon \Rightarrow g(x) > c-\varepsilon > ۰$$

وچون $\underset{x\to a}{f(x)=+\infty}$ حد، می‌باشد برای $\frac{M}{c-\varepsilon} > ۰$ وجوددارد $۰ < \delta_۲$ به‌طوری که

$$۰ < |x-a| < \delta_۲ \Rightarrow f(x) > \frac{M}{c-\varepsilon} > ۰$$

$$\begin{cases} f(x) > \dfrac{M}{c-\varepsilon} > ۰ \\ g(x) > c-\varepsilon > ۰ \end{cases} \Rightarrow f(x)g(x) > \frac{M}{c-\varepsilon}(c-\varepsilon) = M$$

اگر مینیمم $\delta_۱$ و $\delta_۲$ را δ بگیریم، داریم:

$$۰ < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x)g(x) > M$$

که این تعریف $\underset{x\to a}{f(x)\,g(x)=+\infty}$ حد، می‌باشد.

حال (۲) را اثبات می‌نماییم باید نشان دهیم برای هر $N < ۰$ وجود دارد $\delta > ۰$ به طوری که:

$$۰ < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x)g(x) < N$$

چون $\underset{x\to a}{g(x)=c}$ حد، می‌باشد $\varepsilon > ۰$ راطوری انتخاب می‌کنیم که $\varepsilon < -c$ باشد، پس $\varepsilon + c < ۰$ و وجود دارد $\delta_۱ > ۰$ به طوری که:

$$۰ < |x-a| < \delta_۱ \Rightarrow |g(x)-c| < \varepsilon$$
$$|g(x)-c| < \varepsilon \Rightarrow g(x)-c < \varepsilon \Rightarrow g(x) < \varepsilon + c < ۰$$

وچون $\underset{x\to a}{f(x)=+\infty}$ حد، پس برای $\frac{N}{c+\varepsilon} > ۰$ وجود دارد $\delta_۲ > ۰$ به طوری که

$$۰ < |x-a| < \delta_۲ \Rightarrow f(x) > \frac{N}{c+\varepsilon} > ۰$$

$$\begin{cases} f(x) > \dfrac{N}{c+\varepsilon} > ۰ \\ g(x) < c+\varepsilon < ۰ \end{cases} \Rightarrow f(x)g(x) < \frac{N}{c+\varepsilon} \times (c+\varepsilon) = N$$

اگر مینیمم $\delta_۱$ و $\delta_۲$ را δ بگیریم، داریم:

$$۰ < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x)g(x) < N$$

که این تعریف $\underset{x\to a}{f(x)g(x)=-\infty}$ حد، می‌باشد.

قضیهٔ ۱۸: اگر $\underset{x\to a}{f(x)=\infty}$ حد و $\underset{x\to a}{g(x)=c}$ حد باشد نشان دهید:

$\underset{x\to a}{\dfrac{g(x)}{f(x)}}=۰$ حد.

اثبات : باید نشان دهیم برای هرعدد مثبت ε وجود دارد $۰<\delta$ به طوری که

$$۰<|x-a|<\delta \Longrightarrow \left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|<\varepsilon$$

چون $\underset{x\to a}{g(x)=c}$ حد ، می‌باشد پس برای $\varepsilon=۱$ وجود دارد $۰<\delta_۱$ به‌طوری که:

$$۰<|x-a|<\delta_۱ \Longrightarrow |g(x)|-|c|\leqslant|g(x)-c|<۱ \Longrightarrow$$

$$|g(x)|-|c|<۱ \Longrightarrow |g(x)|<|c|+۱$$

وچون $\underset{x\to a}{f(x)=\infty}$ حد ، می‌باشد پس برای $\dfrac{|c|+۱}{\varepsilon}$ (ε هرعدد مثبت) وجود دارد $۰<\delta_۲$ به طوری که:

$$۰<|x-a|<\delta_۲ \Longrightarrow |f(x)|>\frac{|c|+۱}{\varepsilon} \Longrightarrow \left|\frac{۱}{f(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{|c|+۱}$$

$$\begin{cases} |g(x)|<|c|+۱ \\ \left|\dfrac{۱}{f(x)}\right|<\dfrac{\varepsilon}{|c|+۱} \end{cases} \Longrightarrow \left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|<(|c|+۱)\times\frac{\varepsilon}{|c|+۱}=\varepsilon$$

اگر $\delta=\min\{\delta_۱,\delta_۲\}$ باشد، داریم:

$$۰<|x-a|<\delta \Longrightarrow \left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|<\varepsilon$$

یعنی $\underset{x\to a}{\dfrac{g(x)}{f(x)}}=۰$ حد ، خواهد بود.

قضیهٔ ۱۹: اگر $\underset{x\to a}{f(x)=+\infty}$ حد و $\underset{x\to a}{g(x)=c}$ حد ، که c یك عدد ثابت اختیاری است ، نشان دهید $\underset{x\to a}{[f(x)+g(x)]=+\infty}$ حد

اثبات : $$f(x)+g(x)=f(x)\left[۱+\frac{g(x)}{f(x)}\right]$$

طبق قضایای ۲و۱۸ (صفحه‌های ۸ و ۱۸) داریم $\underset{x\to a}{\text{حد}}\left(۱+\frac{g(x)}{f(x)}\right)=۱+۰=$ ، و

طبق قضیهٔ ۱۷ (صفحهٔ ۱۶) چون:

$$\left\{\begin{array}{l}\underset{x\to a}{\text{حد}}\left(۱+\frac{g(x)}{f(x)}\right)=۱\\[2ex]\underset{x\to a}{\text{حد}}\ f(x)=+\infty\end{array}\right.\Longrightarrow \underset{x\to a}{\text{حد}}\ f(x)\left[۱+\frac{g(x)}{f(x)}\right]=+\infty$$

یعنی $\underset{x\to a}{\text{حد}}\,[f(x)+g(x)]=+\infty$ می‌باشد.

تبصره: اگر $\underset{x\to a}{\text{حد}}\ f(x)=-\infty$ ، باشد ثابت کنید $\underset{x\to a}{\text{حد}}\,[f(x)+g(x)]=-\infty$.

قضیهٔ ۲۰: شرط لازم و کافی برای آنکه $\underset{x\to a}{\text{حد}}\ \frac{۱}{f(x)}=۰$ ، باشد آن است که $\underset{x\to a}{\text{حد}}\ f(x)=\infty$ ، باشد.

اثبات: اگر فرض کنیم $\underset{x\to a}{\text{حد}}\ \frac{۱}{f(x)}=۰$ ، باشد برای $\frac{۱}{N}>۰$ (N هرعدد مثبت) وجود دارد $\delta>۰$ به طوری که:

$$۰<|x-a|<\delta\Longrightarrow\left|\frac{۱}{f(x)}\right|<\frac{۱}{N}\Longrightarrow|f(x)|>N$$

یعنی $\underset{x\to a}{\text{حد}}\ f(x)=\infty$ ، و اگر فرض نماییم $\underset{x\to a}{\text{حد}}\ f(x)=\infty$ ، برای $\frac{۱}{\varepsilon}>۰$ (ε هرعدد مثبت اختیاری) وجود دارد $\delta>۰$ به طوری که:

$$۰<|x-a|<\delta\Longrightarrow|f(x)|>\frac{۱}{\varepsilon}\Longrightarrow\left|\frac{۱}{f(x)}\right|<\varepsilon$$

یعنی $\underset{x\to a}{\text{حد}}\ \frac{۱}{f(x)}=۰$ ، می‌باشد.

قضیهٔ ۲۱: اگر توابع f و g در a پیوسته باشند، نشان دهید $f\pm g$ و $f\times g$ در a پیوسته است.

اثبات: قضیه را برای حالت $f+g$ اثبات می‌کنیم، اثبات برای حالات دیگر شبیه آن می‌باشد چون توابع f و g در a پیوسته‌اند، پس داریم:

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(x)=f(a) \quad \text{و} \quad \underset{x\to a}{\text{حد}}\, g(x)=g(a)$$

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}\,[f(x)+g(x)]=\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(x)+\underset{x\to a}{\text{حد}}\, g(x)=f(a)+g(a)=(f+g)(a)$$

یا

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}\,(f+g)(x)=(f+g)(a)$$

پس $f+g$ در a پیوسته می‌باشد.

قضیهٔ ۲۲: اگر داشته باشیم $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, g(x)=b$ ، و اگر تابع f در b پیوسته باشد.

نشان دهید $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(g(x))=f(\underset{x\to a}{\text{حد}}\, g(x))$ یا $\underset{x\to a}{\text{حد}}\,(f\circ g)(x)=f(b)$

اثبات: چون تابع f در b پیوسته است ، پس $\underset{y\to b}{\text{حد}}\, f(y)=f(b)$ ، یعنی برای‌هر $\varepsilon>0$ وجود دارد $\delta_1>0$ به طوری‌که $|y-b|<\delta_1 \Longrightarrow |f(y)-f(b)|<\varepsilon$

وچون $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, g(x)=b$ ، پس برای $\delta_1>0$ وجود دارد $\delta_2>0$ به طوری که:

$$0<|x-a|<\delta_2 \Longrightarrow |g(x)-b|<\delta_1$$

اگر به جای y ، $g(x)$ قراردهیم داریم:

$$0<|x-a|<\delta_2 \Longrightarrow |y-b|<\delta_1 \Longrightarrow |f(g(x))-f(b)|<\varepsilon$$

$$\therefore\ 0<|x-a|<\delta_2 \Longrightarrow |f(g(x))-f(b)|<\varepsilon$$

یعنی $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(g(x))=f(b)$.

قضیهٔ ۲۳: اگر $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(x)=L$ و $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, g(x)=M$ و $M\neq 0$ باشد آنگاه داریم

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}\,\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M}.$$

اثبات: تابع $h(x)=\frac{1}{x}$ را درنظر گرفته این تابع طبق قضیهٔ ۸ (صفحهٔ ۱۱) در تمام نقاط به‌جز $x=0$ پیوسته است ، (زیرا $\underset{x\to a}{\text{حد}}\,\frac{1}{x}=\frac{1}{a}$) حال تابع مرکب:

$$(h\circ g)(x)=h[g(x)]=\frac{1}{g(x)}$$

را درنظر گرفته طبق قضیهٔ ۲۲ (همین صفحه) چون h در M پیوسته است، بنابراین:

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}\, h[g(x)] = h[\underset{x\to a}{\text{حد}}\, g(x)] = h(M) = \frac{۱}{M} \quad \text{یا} \quad \underset{x\to a}{\text{حد}}\, \frac{۱}{g(x)} = \frac{۱}{M}$$

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}\, \frac{f(x)}{g(x)} = \underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(x) \times \underset{x\to a}{\text{حد}}\, \frac{۱}{g(x)} = L \times \frac{۱}{M} = \frac{L}{M}$$

قضیهٔ ۲۴: اگر $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(x) = L$ ، باشد آنگاه $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ ، که در آن $L > ۰$ و $\forall_n \in N$ و اگر $L < ۰$ باشد باید n هرعدد فرد مثبت باشد.

اثبات: تابع $h(x)=\sqrt[n]{x}$ را درنظر گرفته، این تابع طبق قضیهٔ ۹ (صفحهٔ ۱۲) درنقاط داده شده پیوسته است ($\underset{x\to a}{\text{حد}}\, \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$) وتابع مرکب $(h\circ f)(x) = h[f(x)] = \sqrt[n]{f(x)}$ راتشکیل داده برای این تابع طبق قضیهٔ ۲۲ (صفحهٔ ۲۰) چون h در L پیوسته‌است، داریم:

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}\, h[f(x)] = h[\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(x)] = h(L) = \sqrt[n]{L}$$

قضیهٔ ۲۵: اگر تابع g در a پیوسته بوده وتابع f در g(a) پیوسته باشد آنگاه تابع مرکب $f \circ g$ در a پیوسته است.

اثبات : چون تابع g در a پیوسته است پس $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, g(x) = g(a)$ ، وچون f در g(a) پیوسته می‌باشد طبق قضیهٔ ۲۲ (صفحهٔ ۲۰) داریم:

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}\, (f\circ g)(x) = \underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(g(x)) = f[\underset{x\to a}{\text{حد}}\, g(x)] = f[g(a)] = (f\circ g)(a)$$

$$\therefore \quad \underset{x\to a}{\text{حد}}\, (f\circ g)(x) = (f\circ g)(a)$$

مثال: تابع $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ مفروض است با استفاده ازقضیهٔ ۲۵ (همین‌صفحه) مقادیری از x را بیابید که تابع مزبور برای آنها پیوسته باشد.

حل: تابع $h(x)=\sqrt{x}$ به‌ازای مقادیر $x>۰$ طبق قضیهٔ ۹ (صفحهٔ ۱۲) پیوسته است و تابع $g(x)=۱-x^۲$ که کثیرالجمله است به‌ازای تمام مقادیرحقیقی x پیوسته است، پس طبق قضیهٔ (۲۵) تابع $(h\circ g)(x)=h[g(x)]=h(۱-x^۲)=\sqrt{۱-x^۲}$ به‌ازای مقادیر $g(x)>۰$ یا $۱-x^۲>۰$ یا $-۱<x<۱$ پیوسته است اما به آسانی معلوم می‌شود که $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ در (-۱) پیوستگی راست ودر (۱) پیوستگی چپ دارد ، پس تابع f درفاصله $[-۱ \text{ و } ۱]$ پیوسته است.

تمرین

مسألهٔ ۲۴: با استفاده از تعریف حد ، نشان دهید

$$\underset{x\to ۴}{\text{حد}}\frac{\sqrt{x}-۲}{x-۴}=\frac{۱}{۴} \quad \text{و} \quad \underset{x\to a}{\text{حد}}\sqrt[۳]{x}=\sqrt[۳]{a} .$$

مسألهٔ ۲۵: با استفاده از تعریف حد ، اگر $x\in\left[۰ \text{ و } \frac{\pi}{۲}\right]$ باشد ، نشان دهید:

$$\underset{x\to ۰^{+}}{\text{حد}}\frac{\sin x}{x}=۱ .$$

مسألهٔ ۲۶: با استفاده ازتعریف حد ، نشان دهید $\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\, x\left[\frac{۱}{x}\right]=۱$.

مسألهٔ ۲۷: با استفاده ازتعریف حد ، نشان دهید $\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\sin\frac{۱}{x}$ ، وجود ندارد.

مسألهٔ ۲۸: ثابت کنید اگر برای هر x به جز $x=a$ داشته باشیم $f(x)=g(x)$ آنگاه داریم $\underset{x\to a}{\text{حد}} f(x)=\underset{x\to a}{\text{حد}} g(x)$ ، به شرطی که این دوحد وجود داشته باشند.

مسألهٔ ۲۹: ثابت کنیدکه اگربرای هر x به‌جز $x=a$ داشته باشیم ، $f(x)=g(x)$ و $\underset{x\to a}{\text{حد}} g(x)$ ، وجود نداشته باشد ، آنگاه $\underset{x\to a}{\text{حد}} f(x)$ ، نیزوجود نخواهد داشت.

مسألهٔ ۳۰: با استفاده ازتعریف‌حد ، ثابت کنید اگر $\underset{x\to a}{\text{حد}} f(x)=L$ و $\underset{x\to a}{\text{حد}} g(x)=M$ ، باشد ، آنگاه داریم

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}[f(x)-g(x)]=L-M .$$

مسألهٔ ۳۱: فرض کنید $f(x)=\begin{cases}-۱ \text{ ، } x<۰\\ ۱ \text{ ، } x>۰\end{cases}$ نشان دهید $\underset{x\to ۰}{\text{حد}} f(x)$ ، وجود ندارد درحالی که $\underset{x\to ۰}{\text{حد}}|f(x)|$ ، وجود دارد.

مسألهٔ ۳۲: اگرتابع f در t پیوسته باشد ، ثابت کنید $\underset{h\to ۰}{\text{حد}} f(t-h)=f(t)$.

مسألهٔ ۳۳: ثابت کنید اگرتابع f در a پیوسته و تابع g در a ناپیوسته باشد ، آنگاه تابع $f+g$ در a ناپیوسته است.

مسألهٔ ۳۴: توابع f و g به صورتهای :

$$f(x)=\begin{cases} -x \text{ ، } x<0 \\ 1 \text{ ، } x\geqslant 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=\begin{cases} 1 \text{ ، } x<0 \\ x \text{ ، } x\geqslant 0 \end{cases}$$

تعریف‌شده‌اند ثابت کنید f و g هردودر نقطه‌صفر ناپیوسته‌هستند درحالی که تابع حاصل‌ضرب یعنی $f\times g$ درصفر پیوسته است.

مسألهٔ ۳۵: دوتابع مثال بزنیدکه هردودرنقطه‌ای مانند a ناپیوسته ولی مجموع آنها در a پیوسته باشد.

مسألهٔ ۳۶: به وسیلهٔ مثال نشان دهیدکه حاصل ضرب دو تابع f و g ممکن است در نقطه‌ای مانند a پیوسته باشد ، درحالی‌که f در a پیوسته ولی g در a ناپیوسته‌است.

مسألهٔ ۳۷: اگر تابع g در a پیوسته ولی تابع f در a ناپیوسته باشد آیا امکان دارد خارج قسمت‌آنها یعنی $\frac{f}{g}$ در a پیوسته باشد؟ جواب خود را ثابت‌کنید.

مسألهٔ ۳۸: اولا ثابت‌کنید اگر $\underset{h\to 0}{\text{حد}}\, f(x+h)=f(x)$ ، باشدآنگاه داریم :
$\underset{h\to 0}{\text{حد}}\, f(x+h)=\underset{h\to 0}{\text{حد}}\, f(x-h)$ ، ثانیاً نشان دهیدکه عکس قسمت اولا درست نیست ، یعنی مثالی از یك تابع f بزنیدکه داشته باشیم $\underset{h\to 0}{\text{حد}}\, f(x+h)=\underset{h\to 0}{\text{حد}}\, f(x-h)$ ، درحالیکه $\underset{h\to 0}{\text{حد}}\, f(x+h)\neq f(x)$ ، است.

مسألهٔ ۳۹: فرض‌کنید دامنهٔ تابع f مجموعهٔ‌تمام اعداد حقیقی بوده و f درصفرپیوسته است اگربرای تمام مقادیر a و b داشته باشیم $f(a+b)=f(a)\times f(b)$ ثابت‌کنید که f درتمام نقاط پیوسته است.

مسألهٔ ۴۰: فرض‌کنید دامنهٔ تابع f مجموعه تمام اعداد حقیقی بوده و f درصفرپیوسته است اگربرای تمام مقادیر a و b داشته باشیم $f(a+b)=f(a)+f(b)$ ثابت‌کنید که f درتمام نقاط پیوسته است.

مسألهٔ ۴۱: نشان دهید اگر تابع f در a حد داشته باشد ، آنگاه محدود است یعنی $|f(x)|\leqslant M$ می‌باشد.

۳

مطالبی دربارهٔ بینهایت کوچکها و بینهایت بزرگها و تمرینهای آن

قبل از بحث دربارهٔ مطالب عنوان شده به قضیهٔ زیر توجه نمایید.

قضیهٔ ۲۶: تابع $f(x)$ را درنظر گرفته شرط لازم و کافی برای آنکه $\underset{x\to x_0}{f(x)=c}$ حد ، باشد آن است که در تابع $f(x)=c+\alpha(x)$ داشته باشیم $\underset{x\to x_0}{\alpha(x)=0}$ حد.

اثبات : فرض می‌کنیم $\underset{x\to x_0}{f(x)=c}$ حد ، باشد پس برای هر $0<\varepsilon$ وجود دارد $0<\delta$ به طوری که:

$$0<|x-x_0|<\delta \Longrightarrow |f(x)-c|<\varepsilon \Longrightarrow |\alpha(x)|<\varepsilon$$
$$\Longrightarrow |\alpha(x)-0|<\varepsilon$$

یعنی $\underset{x\to x_0}{\alpha(x)=0}$ حد ، می‌باشد.

حال فرض می‌کنیم $\underset{x\to x_0}{\alpha(x)=0}$ حد ، پس برای هر $0<\varepsilon$ وجود دارد $0<\delta$ به طوری که:

$$0<|x-x_0|<\delta \Longrightarrow |\alpha(x)-0|<\varepsilon \Longrightarrow |f(x)-c|<\varepsilon$$

یعنی $\underset{x\to x_0}{f(x)=c}$ حد ، می‌باشد و حکم ثابت است.

تعریف بینهایت کوچک :

می‌گوییم تابع $f(x)$ در a بینهایت کوچک است هرگاه $\underset{x\to a}{f(x)=0}$ حد ، باشد x می‌تواند به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند.

تبصره : اگر در a توابع $f(x)$ و $g(x)$ بینهایت کوچک باشند قضایای حدود نشان می‌دهد که توابع $f(x)+g(x)$ و $f(x)-g(x)$ و $f(x)g(x)$ در a بینهایت کوچک می‌باشند. همچنین مجموع n بینهایت کوچک وحاصل‌ضرب n بینهایت کوچک ، بینهایت کوچک می‌باشند.

مقایسهٔ بینهایت کوچکها:

اگر $\underset{x\to a}{g(x)}=0$ حد و $\underset{x\to a}{f(x)}=0$ حد، باشد وداشته باشیم

$d=\underset{x\to a}{\frac{f(x)}{[g(x)]^n}}$ حد ، ($d\neq 0$ و ∞ و $n>0$ باشد) در این‌صورت گوییم مرتبهٔ بینهایت کوچکی f نسبت به g برابر n است و اگر فرض کنیم

(۱) $\frac{f(x)}{[g(x)]^n}=d+\varepsilon(x)$ باشد طبق قضیهٔ ۲۶ (صفحهٔ ۲۴) می‌دانیم شرط لازم و کافی برای آنکه $\underset{x\to a}{\frac{f(x)}{[g(x)]^n}}=d$ حد، باشد آن است که $\underset{x\to a}{\varepsilon(x)}=0$ حد، باشد طرفین رابطهٔ (۱) را در $[g(x)]^n$ ضرب کرده داریم $f(x)=d[g(x)]^n+\varepsilon(x)[g(x)]^n$ بینهایت کوچک $f(x)$ از دو جزء بینهایت کوچک $d[g(x)]^n$ و $\varepsilon(x)[g(x)]^n$ تشکیل شده است جزء $d[g(x)]^n$ را قسمت اصلی بینهایت کوچک $f(x)$ نامند.

اگر $\underset{x\to a}{\frac{f(x)}{g(x)}}=0$ حد ، باشد گوییم مرتبهٔ بینهایت کوچکی $f(x)$ از $g(x)$ بیشتر است و اگر $\underset{a\to x}{\frac{f(x)}{g(x)}}=\infty$ حد ، باشد گوییم مرتبه بینهایت کوچکی $f(x)$ از $g(x)$ کمتر است واگر $\underset{x\to a}{\frac{f(x)}{g(x)}}$ حد، مخالف صفر و ∞ باشد، گوییم بینهایت کوچک $f(x)$ با بینهایت کوچک $g(x)$ هم‌مرتبه است و اگر $\underset{x\to a}{\frac{f(x)}{g(x)}}=1$ حد باشد گوییم بینهایت کوچک $f(x)$ با بینهایت کوچک $g(x)$ هم‌ارز است وچنین نمایش می‌دهیم

$$\underset{x\to a}{f(x)}\sim\underset{x\to a}{g(x)}$$

تبصره: اگر x را بینهایت کوچک اصلی انتخاب نماییم (یعنی بینهایت کوچکهای دیگر با آن مقایسه گردند) و $\underset{x\to 0}{f(x)}=0$ حد، باشد و داشته باشیم $d=\underset{x\to 0}{\frac{f(x)}{x^n}}$ حد ، ($d\neq 0$ و ∞ و $n>0$ باشد) در این‌صورت طبق تعاریف بالا مرتبه بینهایت کوچکی

$f(x)$ برابر n بوده و $f(x)=dx^n+\varepsilon(x)x^n$ که dx^n قسمت اصلی بینهایت کوچک $f(x)$ می باشد.

مثال: اگر x بینهایت کوچک اصلی باشد مرتبه وقسمت اصلی بینهایت کوچک $f(x)=۱-\sqrt{۱+x^۲}$ را بیابید.

حل:

$$f(x)=۱-\sqrt{۱+x^۲}=\frac{-x^۲}{۱+\sqrt{۱+x^۲}} \quad \text{و} \quad \frac{f(x)}{x^۲}=\frac{-۱}{۱+\sqrt{۱+x^۲}}$$

$$\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\frac{f(x)}{x^۲}=-\frac{۱}{۲} \quad \text{و} \quad f(x)=-\frac{۱}{۲}x^۲+\varepsilon(x)x^۲$$

قسمت اصلی بینهایت کوچک $f(x)$ برابر $-\frac{۱}{۲}x^۲$ و مرتبهٔ آن مساوی (۲) می باشد.

قضیهٔ ۲۷: اگروقتی که $x\to a$ توابع $f(x)$ و $g(x)$ و $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ بینهایت کوچک باشند به‌طوری که $f(x)\underset{x\to a}{\sim}\alpha(x)$ و $g(x)\underset{x\to a}{\sim}\beta(x)$ باشد داریم:

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}\frac{f(x)}{g(x)}=\underset{x\to a}{\text{حد}}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

اثبات:

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\underset{x\to a}{\text{حد}}\frac{f(x)\times\frac{\alpha(x)}{f(x)}}{g(x)\times\frac{\beta(x)}{g(x)}}=\underset{x\to a}{\text{حد}}\frac{f(x)}{g(x)}\times$$

$$\frac{\underset{x\to a}{\text{حد}}\frac{\alpha(x)}{f(x)}}{\underset{x\to a}{\text{حد}}\frac{\beta(x)}{g(x)}}=\underset{x\to a}{\text{حد}}\frac{f(x)}{g(x)}\times\frac{۱}{۱}\Longrightarrow\underset{x\to a}{\text{حد}}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=$$

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}\frac{f(x)}{g(x)}$$

قضیهٔ ۲۸: هر بینهایت‌کوچك با قسمت اصلی خود هم‌ارز می‌باشد.

اثبات: اگر $\underset{x\to a}{\text{حد}}f(x)=۰$ و $\underset{x\to a}{\text{حد}}g(x)=۰$ باشد و $\underset{x\to a}{\text{حد}}\frac{f(x)}{[g(x)]^n}=d$ ($d\neq ۰$ و ∞ و $n>۰$ باشد) در این صورت داریم

$$f(x)=d[g(x)]^n+\varepsilon(x)[g(x)]^n \qquad (۱)$$

که قسمت اصلی بینهایت‌کوچك $f(x)$ برابر $d[g(x)]^n$ می‌باشد طبق قضیهٔ ۲۶ (صفحهٔ ۲۴) می‌دانیم $\underset{x\to a}{\text{حد}}\varepsilon(x)=۰$ است طرفین رابطهٔ (۱) را بر $d[g(x)]^n$ بخش کرده سپس از طرفین حد می‌گیریم داریم:

$$\frac{f(x)}{d[g(x)]^n}=۱+\frac{۱}{d}\varepsilon(x) \text{ و } \underset{x\leftarrow a}{\text{حد}}\frac{f(x)}{d[g(x)]^n}=\underset{x\to a}{\text{حد}}۱+\frac{۱}{d}\underset{x\to a}{\text{حد}}\varepsilon(x)$$

$$=۱+۰=۱$$

یعنی $\underset{x\to a}{f(x)}\sim\underset{x\to a}{d[g(x)]^n}$ می‌باشد.

مثال: مطلوب است $\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\frac{\left|۱-\sqrt{۱+x}\right|}{\sqrt{\frac{۱-\cos ۲x}{۱+۲\cos x}}}$

حل: طبق قضیهٔ ۲۸ (همین صفحه) داریم:

$$\underset{x\to ۰}{\left|۱-\sqrt{۱+x}\right|}\sim\underset{x\to ۰}{\left|-\frac{۱}{۲}x\right|} \text{ و } \underset{x\to ۰}{\sqrt{\frac{۱-\cos ۲x}{۱+۲\cos x}}}\sim\underset{x\to ۰}{\sqrt{\frac{۲}{۳}}\left|x\right|}$$

و طبق قضیهٔ ۲۷ (صفحهٔ ۲۶) داریم:

$$\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\frac{\left|۱-\sqrt{۱+x}\right|}{\sqrt{\frac{۱-\cos ۲x}{۱+۲\cos x}}}=\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\frac{\left|-\frac{x}{۲}\right|}{\sqrt{\frac{۲}{۳}}\left|x\right|}=\sqrt{\frac{۳}{۸}}$$

قضیهٔ ۲۹: شرط لازم و کافی برای اینکه دو بینهایت‌کوچك $f(x)$ و $g(x)$ در a هم‌ارز باشند آن است که مرتبهٔ بینهایت‌کوچکی $f(x)-g(x)$ بیشتر از مرتبه بینهایت‌کوچکی $f(x)$ و $g(x)$ باشد.

اثبات: ابتدا فرض می کنیم f و g هم‌ارزند در این‌صورت داریم:

$$\frac{f(x)-g(x)}{f(x)} = ۱ - \frac{g(x)}{f(x)} \quad \text{یا} \quad \underset{x\to a}{\text{حد}} \frac{f(x)-g(x)}{f(x)} =$$

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}\, ۱ - \underset{x\to a}{\text{حد}} \frac{g(x)}{f(x)} = ۱ - ۱ = ۰$$

$$\frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} - ۱ \quad \text{یا} \quad \underset{x\to a}{\text{حد}} \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} =$$

$$\underset{x\to a}{\text{حد}} \frac{f(x)}{g(x)} - \underset{x\to a}{\text{حد}}\, ۱ = ۱ - ۱ = ۰$$

روابط بالا نشان‌می‌دهند که مرتبهٔ بینهایت کوچکی $f(x)-g(x)$ ازمرتبهٔ بینهایت کوچکی $f(x)$ و $g(x)$ بیشتر است. حال فرض می کنیم مرتبه بینهایت کوچکی $f(x)-g(x)$ ازمرتبه بینهایت‌کوچکی $f(x)$ و $g(x)$ بیشتر باشد دراین‌صورت داریم:

$$\underset{x\to a}{\text{حد}} \left[\frac{f(x)}{g(x)} - ۱\right] = \underset{x\to a}{\text{حد}} \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = ۰ \Longrightarrow$$

$$\underset{x\to a}{\text{حد}} \frac{f(x)}{g(x)} = ۱ \Longrightarrow \underset{x\to a}{f(x)} \sim \underset{x\to a}{g(x)}$$

$$\underset{x\to a}{\text{حد}} \left[۱ - \frac{g(x)}{f(x)}\right] = \underset{x\to a}{\text{حد}} \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = ۰ \Longrightarrow$$

$$\underset{x\to a}{\text{حد}} \frac{g(x)}{f(x)} = ۱ \Longrightarrow \underset{x\to a}{g(x)} \sim \underset{x\to a}{f(x)}$$

قضیهٔ ۳۰: فرض‌می‌کنیم $f(x)$ و $g(x)$ در a دو بینهایت کوچک قابل مقایسه باشند یعنی حداقل یکی ازحدهای، $\underset{x\to a}{\text{حد}} \frac{f(x)}{g(x)}$ ، یا $\underset{x\to a}{\text{حد}} \frac{g(x)}{f(x)}$ ، وجود داشته باشد و فرض می‌نماییم که $\underset{x\to a}{\text{حد}} \frac{f(x)}{g(x)} \neq ۱$ باشد اگر $\underset{x\to a}{f(x)} \sim \underset{x\to a}{\alpha(x)}$ و $\underset{x\to a}{g(x)} \sim \underset{x\to a}{\beta(x)}$

باشد ، آنگاه $\underset{x\to a}{f(x)+g(x)} \sim \underset{x\to a}{a(x)+\beta(x)}$ خواهد بود.

اثبات : طبق قضیهٔ قبل شرط لازم وکافی برای آنکه $\underset{x\to a}{f(x)} \sim \underset{x\to a}{\alpha(x)}$ باشد ، آن است که $\frac{\alpha(x)-f(x)}{f(x)}=\varepsilon_1(x)$ و نیز شرط لازم وکافی برای آنکه $\underset{x\to a}{g(x)} \sim \underset{x\to a}{\beta(x)}$ باشد آن است که $\frac{\beta(x)-g(x)}{g(x)}=\varepsilon_2(x)$ باشد ($\varepsilon_1(x)$ و $\varepsilon_2(x)$ دو بینهایت کوچک می‌باشند) و داریم :

$$\begin{cases}\alpha(x)=\varepsilon_1(x)f(x)+f(x)\\ \beta(x)=\varepsilon_2(x)g(x)+g(x)\end{cases} \quad ❶$$

حال در کسر $\frac{\alpha(x)+\beta(x)}{f(x)+g(x)}$ روابط ❶ را جایگزین می‌نماییم داریم:

$$\frac{\alpha(x)+\beta(x)}{f(x)+g(x)}=\frac{f(x)+g(x)+\varepsilon_1(x)f(x)+\varepsilon_2(x)g(x)}{f(x)+g(x)}$$

$$=1+\frac{f(x)}{f(x)+g(x)}\,\varepsilon_1(x)+\frac{g(x)}{f(x)+g(x)}\,\varepsilon_2(x)$$

اگر $\underset{x\to a}{\text{حد}}\frac{f(x)}{g(x)}$ ، وجود داشته باشد طبق فرض باید مخالف -1 باشد آن را m فرض می‌کنیم وداریم:

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}\frac{\alpha(x)+\beta(x)}{f(x)+g(x)}=1+\underset{x\to a}{\text{حد}}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}}{\frac{f(x)}{g(x)}+1}\times\underset{x\to a}{\text{حد}}\,\varepsilon_1(x)+\underset{x\to a}{\text{حد}}\frac{1}{\frac{f(x)}{g(x)}+1}$$

$$\times\underset{x\to a}{\text{حد}}\,\varepsilon_2(x)=1+\frac{m}{m+1}\times 0+\frac{1}{m+1}\times 0=1 \Longrightarrow$$

$$\underset{x\to a}{f(x)+g(x)} \sim \underset{x\to a}{\alpha(x)+\beta(x)}$$

اگر $\underset{x\to a}{\text{حد}}\frac{f(x)}{g(x)}$ ، وجود نداشته (منظور ∞ باشد) در این صورت مرتبه بینهایت کوچکی $g(x)$ ازمرتبه بینهایت کوچکی $f(x)$ بیشتر بوده بنا براین $\underset{x\to a}{\text{حد}}\frac{g(x)}{f(x)}=0$ ، وداریم:

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}\ \frac{\alpha(x)+\beta(x)}{f(x)+g(x)}=۱+\underset{x\to a}{\text{حد}}\ \frac{۱}{۱+\frac{g(x)}{f(x)}}\times\underset{x\to a}{\text{حد}}\ \varepsilon_{۱}(x)+\underset{x\to a}{\text{حد}}\frac{\frac{g(x)}{f(x)}}{۱+\frac{g(x)}{f(x)}}$$

$$\times\underset{x\to a}{\text{حد}}\varepsilon_{۲}(x)=۱+\frac{۱}{۱+۰}\times۰+\frac{۰}{۱+۰}\times۰=۱\ \Longrightarrow$$

$$\underset{x\to a}{\alpha(x)+\beta(x)}\sim\underset{x\to a}{f(x)+g(x)}$$

تبصرهٔ ۱: اگر $\underset{x\to a}{f(x)}\sim\underset{x\to a}{\alpha(x)}$ و $\underset{x\to a}{g(x)}\sim\underset{x\to a}{\beta(x)}$ باشد می‌توان ثابت کرد

$$\underset{x\to a}{f(x)g(x)}\sim\underset{x\to a}{\alpha(x)\beta(x)}$$

تبصرهٔ ۲: اگر $\alpha(x)$ در a بینهایت‌کوچك باشد داریم:

۱) $\underset{x\to a}{\sin\alpha(x)}\sim\underset{x\to a}{\alpha(x)}$

۲) $\underset{x\to a}{\text{Arcsin}\,\alpha(x)}\sim\underset{x\to a}{\alpha(x)}$

۳) $\underset{x\to a}{tg\,\alpha(x)}\sim\underset{x\to a}{\alpha(x)}$

۴) $\underset{x\to a}{\text{Arctg}\,\alpha(x)}\sim\underset{x\to a}{\alpha(x)}$

۵) $\underset{x\to a}{۱-\cos\alpha(x)}\sim\frac{۱}{۲}\underset{x\to a}{[\alpha(x)]^{۲}}$

۶) $\underset{x\to ۰}{a_n x^n+a_{n+۱}x^{n+۱}+\cdots+a_m x^m}\sim\underset{x\to ۰}{a_n x^n}$ ،

$(n\ ,\ m\in N\ ,\ a_n\ ,\ a_m\neq ۰\ ,\ n<m\ ,\ x\to ۰)$

به عنوان نمونه به اثبات هم‌ارزی (۵) می‌پردازیم:

$$۱-\cos\alpha(x)=۲\sin^{۲}\frac{\alpha(x)}{۲}$$ و

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}\ \frac{۲\sin^{۲}\frac{\alpha(x)}{۲}}{\frac{۱}{۲}(\alpha(x))^{۲}}=\underset{x\to a}{\text{حد}}\ \frac{\sin^{۲}\frac{\alpha(x)}{۲}}{\left(\frac{\alpha(x)}{۲}\right)^{۲}}=\underset{x\to a}{\text{حد}}\ \frac{\sin\frac{\alpha(x)}{۲}}{\frac{\alpha(x)}{۲}}\times$$

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}\ \frac{\sin\frac{\alpha(x)}{۲}}{\frac{\alpha(x)}{۲}}=۱\times۱=۱\ \Longrightarrow\ \underset{x\to a}{۱-\cos\alpha(x)}\sim\frac{۱}{۲}\underset{x\to a}{(\alpha(x))^{۲}}$$

مثال : مطلوب است $\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\frac{tg x-\sin x}{۱-\sqrt{x^۲+۱}}$

حل : اگر $f(x)=tg x$ و $g(x)=-\sin x$ فرض نماییم چون :

۱ — $\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\frac{x}{-x}=\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\frac{tg x}{-\sin x}$ می باشد پس طبق قضیهٔ ۳۰ (صفحهٔ ۲۸) حق نداریم به جای $tg x$ هم ارزش x و به جای $-\sin x$ هم ارزش $-x$ را قراردهیم، مسأله را به طریق زیرحل می کنیم:

$$tg x-\sin x=tg x-tg x\cos x=tg x(۱-\cos x)=tg x\left(۲\sin^۲\frac{x}{۲}\right)$$

می‌دانیم $\underset{x\to ۰}{f(x)g(x)}\sim\underset{x\to ۰}{\alpha(x)\beta(x)}$ بنابراین: $\underset{x\to ۰}{tg x\left(۲\sin^۲\frac{x}{۲}\right)}\sim\underset{x\to ۰}{x\times ۲\times\frac{x^۲}{۴}}$

ازطرفی:

$$۱-\sqrt{x^۲+۱}=\underset{x\to ۰}{\frac{-x^۲}{۱+\sqrt{x^۲+۱}}}\sim\underset{x\to ۰}{\frac{-x^۲}{۲}}$$

بنابراین :

$$\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\frac{tg x-\sin x}{۱-\sqrt{x^۲+۱}}=\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\frac{x\times ۲\times\frac{x^۲}{۴}}{-\frac{x^۲}{۲}}=\underset{x\to ۰}{\text{حد}}(-x)=۰$$

قضیهٔ ۳۱: اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو بینهایت کوچك هم‌ارز در صفر باشند ثابت کنید قسمت اصلی بینهایت کوچکهای $f(x)$ و $g(x)$ برابرمی باشند.

اثبات : x را بینهایت کوچك اصلی انتخاب نموده و فرض می کنیم λx^{α} و $\lambda' x^{\beta}$ به ترتیب قسمتهای اصلی بینهایت کوچکهای $f(x)$ و $g(x)$ باشند $(\alpha,\beta>۰,\lambda,\lambda'\neq ۰,\infty)$ دراین‌صورت‌داریم $\underset{x\to ۰}{f(x)}\sim\underset{x\to ۰}{\lambda x^{\alpha}}$ و $\underset{x\to ۰}{g(x)}\sim\underset{x\to ۰}{\lambda' x^{\beta}}$ (به‌قضیهٔ ۲۸ (صفحهٔ ۲۷) مراجعه شود)

ازطرفی داریم $\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lambda}{\lambda'}\times\underset{x\to ۰}{\text{حد}}x^{\alpha-\beta}$، اگر $\alpha>\beta$ باشد، $\underset{x\to ۰}{\text{حد}}x^{\alpha-\beta}=۰$،

بنا براین حد، $\underset{x\to 0}{\frac{f(x)}{g(x)}}=\frac{\lambda}{\lambda'}\times 0=0$

بوده که این خلاف فرض است و اگر $\alpha<\beta$ باشد، $x^{\alpha-\beta}=\frac{1}{x^{\beta-\alpha}}$ و طبق قضیهٔ (۱۶) صفحه ۱۵ باید حد، $\underset{x\to 0}{\frac{1}{x^{\beta-\alpha}}}=\infty$ باشد.

درنتیجه طبق قضیهٔ (۱۷) باید حد، $\underset{x\to 0}{\frac{f(x)}{g(x)}}=\infty$ باشد و این هم خلاف فرض است پس به ناچار $\alpha=\beta$ خواهد بود و $x^{\alpha-\beta}=x^{0}$ طبق تعریف (۱) می‌باشد. پس حد، $\underset{x\to 0}{\frac{f(x)}{g(x)}}=\frac{\lambda}{\lambda'}=1$ یعنی $\lambda=\lambda'$ بنا براین $\lambda x^{\alpha}=\lambda' x^{\beta}$ وحکم ثابت‌است.

تعریف بینهایت بزرگ: می‌گوییم تابع $f(x)$ در a بینهایت بزرگ است اگر حد $\underset{x\to a}{|f(x)|}=+\infty$ باشد (x می‌تواند به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند) مثلاتابع $\frac{1}{x-2}$ در (۲) بینهایت بزرگ است.

مقایسه بینهایت بزرگها:

اگرتوابع $f(x)$ و $g(x)$ در a دوبینهایت بزرگ باشند و حد، $\underset{x\to a}{\frac{f(x)}{g(x)}}=l$ باشد دراین صورت حالات زیررا تعریف می‌نماییم.

۱: اگر $l\neq 0$ و ∞ باشدمی‌گوییم بینهایت بزرگهای $f(x)$ و $g(x)$ هم‌مرتبه‌اند واگربه خصوص $l=1$ باشد می‌گوییم $\underset{x\to a}{f(x)}\sim\underset{x\to a}{g(x)}$ است.

۲: اگر $l=0$ باشد می‌گوییم مرتبه بینهایت بزرگی $f(x)$ از مرتبه بینهایت بزرگی $g(x)$ کمتراست.

۳: اگر حد، $\underset{x\to a}{\frac{f(x)}{g(x)}}=\infty$ باشد می‌گوییم مرتبه بینهایت بزرگی $f(x)$ از مرتبه بینهایت بزرگی $g(x)$ بیشتراست.

۴ : اگر $\underset{x\to a}{\text{حد}}\ \frac{f(x)}{[g(x)]^{\gamma}}=l\neq ۰$ و ∞ ، $(\gamma>۰)$ می گوییم مرتبه بینهایت بزرگی $f(x)$ نسبت به $g(x)$ برابر γ است.

تبصره : تقریباً اکثر قضایای بینهایت بزرگها مشابه قضایای بینهایت کوچکها می باشند که ما از بیان و اثبات آنها خودداری می‌نماییم فقط به عنوان نمونه یادآور می‌شویم که حد نسبت دو بینهایت بزرگ، برابر با حد نسبت بینهایت بزرگهای هم‌ارز آنها می باشد.

مثال۱: اگر x به سمت (۲) میل نماید نشان دهید بینهایت بزرگهای $\frac{۱}{x-۲}$ و $\frac{۱}{(x-۲)(x-۱)}$ هم‌ارز می باشند.

حل :

$$\underset{x\to ۲}{\text{حد}}\ \frac{\frac{۱}{(x-۲)(x-۱)}}{\frac{۱}{x-۲}}=\underset{x\to ۲}{\text{حد}}\ \frac{۱}{x-۱}=\frac{۱}{۲-۱}=۱$$

بنابراین وقتی $x\to ۲$ دو بینهایت بزرگ $\frac{۱}{x-۲}$ و $\frac{۱}{(x-۲)(x-۱)}$ هم‌ارز می باشند.

مثال ۲: مطلوب است $\underset{x\to +\infty}{\text{حد}}\ \frac{\sqrt[۳]{x^۳+x+۱}}{\sqrt{۴x^۲-x+۲}}$

حل : اگر $\alpha=\frac{۱}{x}$ فرض کنیم طبق قضیهٔ ۲ صفحه ۱۹ شرط لازم و کافی برای آنکه حد تابع $\frac{۱}{x}$ صفر باشد آن است که x به سمت ∞ که در اینجا $+\infty$ است میل نماید پس داریم:

$$\underset{x\to +\infty}{\text{حد}}\ \frac{\sqrt[۳]{x^۳+x+۱}}{x}=\underset{x\to +\infty}{\text{حد}}\ \sqrt[۳]{\frac{x^۳+x+۱}{x^۳}}=\underset{x\to +\infty}{\text{حد}}\ \sqrt[۳]{۱+\frac{۱}{x^۲}+\frac{۱}{x^۳}}=$$

$$\underset{\alpha\to ۰}{\text{حد}}\ \sqrt[۳]{۱+\alpha^۲+\alpha^۳}=\sqrt[۳]{\underset{\alpha\to ۰}{\text{حد}}(۱+\alpha^۲+\alpha^۳)}=\sqrt[۳]{۱+۰+۰}=۱$$

بنابراین وقتی $x\to +\infty$ دو بینهایت بزرگ x و $\sqrt[۳]{x^۳+x+۱}$ هم‌ارزند و به همین دلیل وقتی $x\to +\infty$ دو بینهایت بزرگ $۲x$ و $\sqrt{۴x^۲-x+۲}$ هم‌ارز می باشند حال به جای حد نسبت دو بینهایت بزرگ حد نسبتهای هم‌ارز آنها را قرار می‌دهیم داریم:

$$\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\frac{\sqrt[۳]{x^{۳}+x+۱}}{\sqrt{۴x^{۲}-x+۲}}=\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\frac{x}{۲x}=۲$$

تذکر: علت آنکه $\alpha=\frac{۱}{x}$ انتخاب گردید آن است که در اثبات قضایای حدود x به سمت عدد معین a میل می‌نمود.

مثال۳ : مطلوب است

$$\underset{x\to-\infty}{\text{حد}}\frac{x+\sqrt{x^{۲}+x+۲}}{۲x+\sqrt{۴x^{۲}-x+۱}}$$

حل :

$$\underset{x\to-\infty}{\text{حد}}\frac{x+\sqrt{x^{۲}+x+۲}}{۲x+\sqrt{۴x^{۲}-x+۱}}=$$

$$\underset{x\to-\infty}{\text{حد}}\frac{(x+\sqrt{x^{۲}+x+۲})(x-\sqrt{x^{۲}+x+۲})(۲x-\sqrt{۴x^{۲}-x+۱})}{(۲x+\sqrt{۴x^{۲}-x+۱})(۲x-\sqrt{۴x^{۲}-x+۱})(x-\sqrt{x^{۲}+x+۲})}=$$

$$\underset{x\to-\infty}{\text{حد}}\frac{(-x-۲)(۲x-\sqrt{۴x^{۲}-x+۱})}{(x-۱)(x-\sqrt{x^{۲}+x+۲})}=\underset{x\to-\infty}{\text{حد}}\frac{(-x)(۲x+۲x)}{(x)(x+x)}=$$

$$\underset{x\to-\infty}{\text{حد}}\frac{-۴x^{۲}}{۲x^{۲}}=-۲$$

در حل این مثال از این موضوع که اگر $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ هرچند جمله‌ای از x هم‌ارز آن جمله‌ای از چندجمله‌ای است که دارای بزرگترین توان است استفاده کردیم ضمناً چون:

$$\underset{x\to-\infty}{\text{حد}}\frac{\sqrt{۴x^{۲}-x+۱}}{۲x}=\underset{x\to-\infty}{\text{حد}}-\sqrt{\frac{۴x^{۲}-x+۱}{۴x^{۲}}}=-۱$$

و

$$\underset{x\to-\infty}{\text{حد}}\frac{\sqrt{x^{۲}+x+۲}}{x}=\underset{x\to-\infty}{\text{حد}}-\sqrt{\frac{x^{۲}+x+۲}{x^{۲}}}=-۱$$

پس مشابه به آنچه در قضیهٔ ۳۰ (صفحهٔ ۲۸) گفتیم به علت آنکه حد نسبتهای دو بینهایت بزرگ $f(x)$ و

$g(x)$ وقتی $x\to-\infty$ ، برابر $(۱-)$ می‌باشد نمی‌توان گفت وقتی $x\to-\infty$ ، داریم :

$$\underset{x\to-\infty}{(۲x+\sqrt{۴x^۲-x+۱})}\sim\underset{x\to-\infty}{(۲x-۲x)} \quad \text{و} \quad \underset{x\to-\infty}{(x+\sqrt{x^۲+x+۲})}\sim\underset{x\to-\infty}{(x-x)}$$

برای رفع این اشکال صورت ومخرج کسررا در مزدوج صورت و مزدوج مخرج ضرب کرده وازقضایای $\underset{x\to-\infty}{f(x)+g(x)}\sim\underset{x\to-\infty}{\alpha(x)+\beta(x)}$ و $\underset{x\to-\infty}{f(x)g(x)}\sim\underset{x\to-\infty}{\alpha(x)\beta(x)}$ ونیزحد نسبت دوبینهایت بزرگ برابرحد نسبت بینهایت بزرگهای هم‌ارزآنهاست‌استفاده کرده وحد مزبوررا به دست‌آوریم.

تمرین

مسألهٔ ۴۲: به‌کمک مفاهیم بینهایت‌کوچکها ، حدهای زیررا بیابید:

۱) $\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\ \dfrac{۱-\cos x}{۱-\cos\dfrac{x}{۲}}$

۲) $\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\ \dfrac{\sqrt{۱+x+x۲}-۱}{\sin ۴x}$

۳) $\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\ \dfrac{\mathrm{Arctg}\,۳x}{\mathrm{Arcsin}\,۲x}$

۴) $\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\ \dfrac{۳\sin x-x^۲+x^۳}{\mathrm{tg}\,x+۲\sin^۲x+۵x^۴}$

۵) $\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\ \dfrac{\sqrt{۱+x^۲}-۱}{۱-\cos x}$

مسألهٔ ۴۳: مرتبه وقسمت اصلی بینهایت‌کوچکهای زیررا (وقتی $x\to ۰$) نسبت به‌تابع x بیابید:

۱) $\sqrt{\sin^۲x+x^۴}$ ۲) $\dfrac{x^۲+x^۳}{۱+\sqrt[۳]{x}}$ ۳) $\sqrt[۳]{۱+x}-۱$

مسألهٔ ۴۴: اگر x بینهایت‌کوچک باشد نشان دهید:

$$(n\in N)\ \underset{x\to ۰}{\sqrt[n]{۱+x}-۱}\sim\underset{x\to ۰}{\frac{۱}{n}x}$$

مسألهٔ ۴۵: اگر $x\to+\infty$ ، نشان دهید

$$\underset{x\to+\infty}{\sqrt{x^۲+x+۴}+\sqrt[۳]{x^۳+x+۱}+\sqrt[۴]{۱۶x^۴+x^۲+۱}}\sim\underset{x\to+\infty}{۴x}$$

مسألهٔ ۴۶: مطلوب است:

$$\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\left(\sqrt{x^{۲}+۳x-۱}-\sqrt[۳]{x^{۳}+x^{۲}-۱}\right)$$

مسألهٔ ۴۷: مطلوب است:

$$\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\frac{\sqrt{x^{۴}+x^{۳}-۱}-\sqrt[۳]{x^{۶}+x^{۲}+۱}}{x^{۲}+۲x+۱}$$

مسألهٔ ۴۸: حدهای توابع زیررا بدون استفاده ازدستور هوپیتال بیابید:

۱) $\therefore \underset{x\to ۰}{\text{حد}}\dfrac{tg x\; tg ۲x\; tg ۳x\cdots\cdot tg nx}{x^{n}}$

۲) $\therefore \underset{x\to ۱}{\text{حد}}\dfrac{\mathrm{Arc}\,tg ۲x+\mathrm{Arc}\,tg ۳x-\frac{۳\pi}{۴}}{x^{۲}-۱}$

۳) $\therefore \underset{x\to ۱}{\text{حد}}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[۴]{x}}{\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۵]{x}}$

۴) $\therefore \underset{x\to ۱}{\text{حد}}\dfrac{\sqrt{x+۱}+\sqrt{x^{۲}-۱}-\sqrt{x^{۳}+۱}}{\sqrt{x-۱}+\sqrt{x^{۲}+۱}-\sqrt{x^{۴}+۱}}$

۵) $\therefore \underset{n\to+\infty}{\text{حد}}\dfrac{(n+۲)!+(n+۱)!}{(n+۳)!}$

۶) $\therefore \underset{x\to ۰}{\text{حد}}\dfrac{\mathrm{Arc}\,sin\, mx}{\mathrm{Arc}\,tg\, nx}$

۷) $\therefore \underset{n\to+\infty}{\text{حد}}\dfrac{۱}{۲^{n}}\,cotg\,\dfrac{a}{۲^{n}}$

۸) $\therefore \underset{x\to ۱}{\text{حد}}\dfrac{(x-۱)^{n-۱}}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt[۳]{x}-۱)\cdots\cdots(\sqrt[n]{x}-۱)}$

۹) $\therefore \underset{x\text{ و }y\to ۰}{\text{حد}}\dfrac{۱-\sqrt{۱-xy}}{xy}$

۱۰) ∴ $\underset{n\to+\infty}{\text{حد}}\ \dfrac{۲^{n+۱}+۳^{n+۲}}{۲^{n}+۳^{n-۱}}$

۱۱) ∴ $\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\ \left(\sqrt{x^{۲}+x+۱}+\sqrt{۴x^{۲}+x+۱}+\sqrt{۹x^{۲}+x+۱}-۶x\right)$

۱۲) ∴ $\underset{x\to-\infty}{\text{حد}}\ \left(\sqrt[۵]{x^{۵}+x-۱}-x\right)$

۱۳) ∴ $\underset{x\to\frac{\pi}{۲}^{+}}{\text{حد}}\ \dfrac{\sqrt{۱+\cos ۲x}}{\sqrt{\pi}-\sqrt{۲x}}$

۱۴) ∴ $\underset{x\to ۰^{+}}{\text{حد}}\ \dfrac{۲^{\frac{۱}{x}}-۱}{۲^{\frac{۱}{x}}+۱}$

۱۵) ∴ $\underset{x\to ۰^{-}}{\text{حد}}\ \dfrac{۲^{\frac{۱}{x}}-۱}{۲^{\frac{۱}{x}}+۱}$

۱۶) ∴ $\underset{x\to\frac{\pi}{۲}^{+}}{\text{حد}}\ \dfrac{۱}{۲+۲^{tg\,x}}$

۱۷) ∴ $\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\ \dfrac{(۱+mx)^{n}-(۱+nx)^{m}}{x^{۲}}$ و $m\,,\,n\in N$

۱۸) ∴ $\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\ x\,cotg\,۳x$

۱۹) ∴ $\underset{x\to ۱}{\text{حد}}\ \dfrac{x^{n+۱}-(n+۱)x+n}{(x-۱)^{۲}}$ و $n\in N$

۲۰) ∴ $\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\ \dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[۳]{\cos x}}{\sin^{۲}x}$

۲۱) ∴

$$\underset{x\to\frac{\pi}{۳}}{\text{حد}}\ \frac{tg^{۳}x-۳tg\,x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{۶}\right)}$$

۲۲) ∴

$$\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\ \frac{tg\,x-\sin x}{\sin^{۳}x}$$

۲۳) ∴

$$\underset{x\to\frac{\pi}{۳}}{\text{حد}}\ \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{۳}\right)}{۱-۲\cos x}$$

۲۴) ∴

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}\ \frac{x^{n}-a^{n}-na^{n-۱}(x-a)}{(x-a)^{۲}}\quad \text{و}\ n\in N$$

۲۵) ∴

$$\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\left(\frac{۱}{\sin x}-\frac{۱}{x}\right)$$

۴

مطالبی درباره مشتق و ماکزیمم و مینیمم نسبی و مطلق و تمرینهای آن

قضیهٔ ۳۲: اگر تابع $f(x)$ در $x_{\circ}$ مشتق‌پذیر باشد نشان دهید تابع $f(x)$ در $x_{\circ}$ پیوسته است.

اثبات:

$$f(x)-f(x_{\circ})=(x-x_{\circ})\,\frac{f(x)-f(x_{\circ})}{x-x_{\circ}}$$

$$\underset{x\to x^{\circ}}{\text{حد}}\,(f(x)-f(x_{\circ}))=\underset{x\to x_{\circ}}{\text{حد}}\,(x-x_{\circ})\times\underset{x\to x_{\circ}}{\text{حد}}\,\frac{f(x)-f(x_{\circ})}{x-x_{\circ}}$$

طبق قضیهٔ (۵) صفحه ۱۰ چون $\underset{x\to x_{\circ}}{\text{حد}}\,(x-x_{\circ})=\circ$ و $\underset{x\to x_{\circ}}{\text{حد}}\,\frac{f(x)-f(x_{\circ})}{x-x_{\circ}}=f'(x_{\circ})$

پس حد طرف راست برابر صفر است یعنی:

$$\underset{x\to x_{\circ}}{\text{حد}}\,(f(x)-f(x_{\circ}))=\circ\Longrightarrow\underset{x\to x_{\circ}}{\text{حد}}\,f(x)-\underset{x\to x_{\circ}}{\text{حد}}\,f(x_{\circ})=\circ$$

$$\Longrightarrow\underset{x\to x_{\circ}}{\text{حد}}\,f(x)=f(x_{\circ})$$

یعنی تابع $f(x)$ در $x_{\circ}$ پیوسته می‌باشد.

تبصرهٔ مهم: با یک مثال نشان دهید عکس قضیهٔ بالا درست نمی‌باشد.

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}۲x-۱\ ,& x\leqslant ۱\\ x\ ,& x>۱\end{cases}$ در (۱) پیوسته است ولی در (۱) مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

$$\underset{x\to ۱^{+}}{\text{حد}}\,f(x)=۱ \text{ و } \underset{x\to ۱^{-}}{\text{حد}}\,f(x)=۲-۱=۱ \text{ و } f(۱)=۲-۱=۱$$

تابع f در (۱) پیوسته است $\therefore$ $\underset{x\to ۱}{\text{حد}}\,f(x)=f(۱)$ $\therefore$

$$f'_{+}(۱)=\underset{x\to ۱^{+}}{\text{حد}}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\underset{x\to ۱^{+}}{\text{حد}}\frac{x-۱}{x-۱}=۱ \quad \text{مشتق راست}$$

$$f'_{-}(۱)=\underset{x\to ۱^{-}}{\text{حد}}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\underset{x\to ۱^{-}}{\text{حد}}\frac{۲x-۱-۱}{x-۱}=$$

$$\underset{x\to ۱^{-}}{\text{حد}}\frac{۲(x-۱)}{x-۱}=۲ \quad \text{مشتق چپ}$$

چون مشتق راست با مشتق چپ در $x=۱$ برابر نیست پس تابع در $x=۱$ مشتق ندارد.

این مثال نشان می‌دهد اگر تابعی در $x_{\circ}$ پیوسته باشد ممکن است در $x_{\circ}$ مشتق نداشته باشد ولی طبق قضیهٔ ۳۲ اگر تابع در $x_{\circ}$ مشتق داشته باشد حتماً در $x_{\circ}$ پیوسته است.

مسألهٔ ۴۹: تابع $f(x)=x^{\frac{۲}{۳}}$ مفروض است با استفاده از تعریف مشتق ، مشتق تابع را بیابید و نشان دهید در صفر مشتق‌پذیر نیست ولی در صفر پیوسته می‌باشد.

قضیهٔ ۳۳: اگرتابع $f(x)$ برای هر x در فاصلهٔ باز (a , b) وجود داشته باشد و $a<c<b$ باشد ، اگرتابع f در c دارای یك ماکزیمم ویا مینیمم نسبی باشد و $f'(c)$ وجود داشته باشد دراین صورت $f'(c)=\circ$ است.

اثبات : قضیه را برای ماکزیمم نسبی اثبات می‌نماییم ابتدا به عنوان یادآوری ماکزیمم نسبی را تعریف می‌نماییم تابع f در c دارای یك ماکزیمم نسبی است اگر یك فاصله بازشامل c وجود داشته باشد به طوری که f روی آن تعریف شده و برای هر x واقع درآن فاصله داشته باشیم $f(x)\leqslant f(c)$ یعنی برای $f(c)$ وجود داشته باشد $\delta>\circ$ به طوری که:

$$\circ<|x-c|<\delta \Longrightarrow f(x)-f(c)\leqslant \circ,$$

اگر $x>c$ بگیریم:

$$\circ<x-c<\delta \Longrightarrow \frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leqslant \circ \qquad ①$$

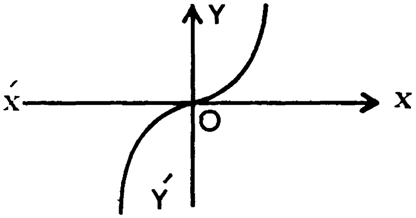
واگر $x<c$ بگیریم داریم:

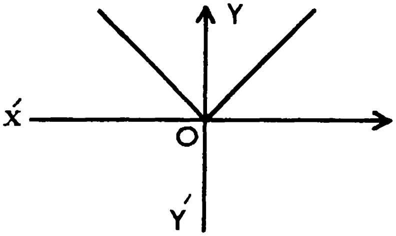
$$\circ<c-x<\delta \Longrightarrow \frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geqslant \circ \qquad ②$$

طبق قضیهٔ (۱۳) وتعریفهای حد راست وحد چپ ، برای نامساویهای ① و ② داریم:

$$\underset{x\to c^-}{\text{حد}}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geqslant ۰ \quad \text{و} \quad \underset{x\to c^+}{\text{حد}}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leqslant ۰$$

وطبق تعریف مشتق چون f در c مشتق پذیر است باید مشتق راست و چپ برابر باشد و چون $f'_-(c)\geqslant ۰$ و $f'_+(c)\leqslant ۰$ است پس به‌ناچار $f'(c)=۰$ و حکم ثابت است ملاحظه می‌کنیم اگر تابع f در c دارای ماکزیمم و یا مینیمم نسبی و مشتق پذیر باشد ، آنگاه $f'(c)=۰$ است اما عکس این مطلب درست نیست زیرا ممکن است تابع در c دارای ماکزیمم یا مینیمم نسبی باشد ولی $f'(c)$ صفرنباشد ، مثلاً تابع $f(x)=|x|$ در صفر دارای مینیمم نسبی است ولی درصفرمشتق ندارد. زیرا:





$$f'_+(۰)=\underset{x\to ۰^+}{\text{حد}}\frac{x-۰}{x-۰}=۱ \quad \text{و} \quad f'_-(۰)=\underset{x\to ۰^-}{\text{حد}}\frac{-x-۰}{x-۰}=-۱$$

ملاحظه می‌شود مشتق راست بامشتق چپ برابر نیست. ضمناً باید توجه داشته باشیم ممکن است مشتق تابع در c صفرباشد ، اما تابع در c دارای ماکزیمم یامینیمم نسبی نباشد، مثلا درتابع $f(x)=x^۳$ داریم $f'(x)=۳x^۲$ که $f'(۰)=۰$ بوده اما با توجه به نمودارتابع ، تابع درصفردارای ماکزیمم یامینیمم نسبی نمی‌باشد ، به طورکلی ازبحثهای بالا نتیجه می‌شود یك شرط لازم برای‌این‌که تابع f در c ماکزیمم یا مینیمم نسبی باشد آن است‌که $f'(c)=۰$ یا $f'(c)$ وجود نداشته باشد ، البته این شرط با توجه به بحثهای بالاکافی نمی‌باشد.

تعریف نقطهٔ بحرانی: اگر c دردامنهٔ تابع f باشد می‌گوییم c یك‌نقطهٔ بحرانی‌تابع f است ، هرگاه $f'(c)=۰$ یا $f'(c)$ وجود نداشته باشد ، با توجه به بحثهای بالا فقط درنقاط بحرانی ممکن است یك تابع دارای ماکزیمم یا مینیمم نسبی باشد.

مثال: نقاط بحرانی تابع $f(x)=x^{\frac{۴}{۳}}+۴x^{\frac{۱}{۳}}$ را بیابید.

حل: $x\in R$ و $f'(x)=\frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}}+\frac{۴}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}$

$$f'(x)=\frac{۴}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}(x+۱)=\frac{۴(x+۱)}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}$$

چون $f'(-۱)=۰$ و $f'(۰)$ وجود ندارد پس $x=۰$ و $x=-۱$ که متعلق به دامنهٔ تابع می‌باشد ، نقاط بحرانی تابع هستند.

تعریف ماکزیمم مطلق تابع:

تابع f روی فاصله‌ای دارای ماکزیمم مطلق است هرگاه عددی مانند c در آن فاصله طوری پیدا شود که برای هر x درآن فاصله داشته باشیم $f(x) \leqslant f(c)$ دراین صورت مقدار f(c) را ماکزیمم مطلق تابع f روی‌آن فاصله نامند.

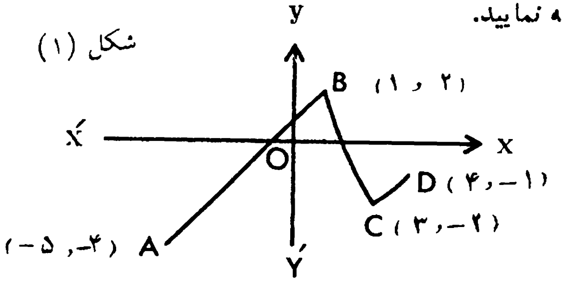
تعریف مینیمم مطلق تابع:

تابع f روی فاصله‌ای دارای مینیمم مطلق است هرگاه عددی مانند c درآن فاصله طوری پیدا شود که برای هر x درآن فاصله‌داشته باشیم $f(x) \geqslant f(c)$ دراین صورت مقدار f(c) را مینیمم مطلق تابع روی‌آن فاصله نامند.

تبصره: تابع f روی فاصله داده شده ممکن‌است دارای ماکزیمم ومینیمم مطلق ویا دارای مینیمم مطلق ویا دارای ماکزیمم مطلق ویا نه ماکزیمم مطلق ونه مینیمم مطلق باشد.

مثال ۱: تابع $f(x)=\begin{cases} x+۱ ، -۵\leqslant x<۱ \\ x^{۲}-۶x+۷ ، ۱\leqslant x\leqslant ۴ \end{cases}$ روی فاصلهٔ [−۵و۴] دارای ماکزیمم و مینیمم مطلق می‌باشد.

حل: $f'(۱)$ وجود ندارد و $f'(۳)=۰$ می‌باشد پس $x=۱$ و $x=۳$ نقاط بحرانی تابع می‌باشند ، توجه نمایید تابع مزبور در (۱) دارای ماکزیمم نسبی و در (۳) دارای مینیمم نسبی است و در (۱) دارای ماکزیمم مطلق و در(−۵) دارای مینیمم مطلق می‌باشد به شکل (۱) توجه نمایید.



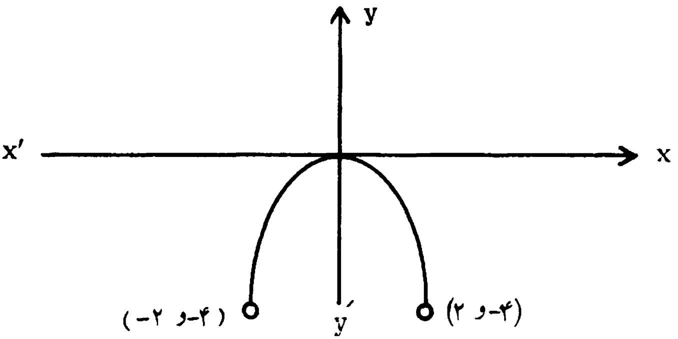
شکل (۱)

مثال ۲: تابع $f(x)=۳x$ روی فاصله]۲ و ۱] دارای مینیمم مطلق بوده و ماکزیمم مطلق ندارد.

حل: تابع در (۱) دارای مینیمم مطلقی برابر (۳) بوده و در (۲) دارای ماکزیمم مطلق نیست چون (۲) متعلق به فاصلهٔ داده شده نمی‌باشد (شکل را رسم نمایید مطلب روشن خواهد شد).

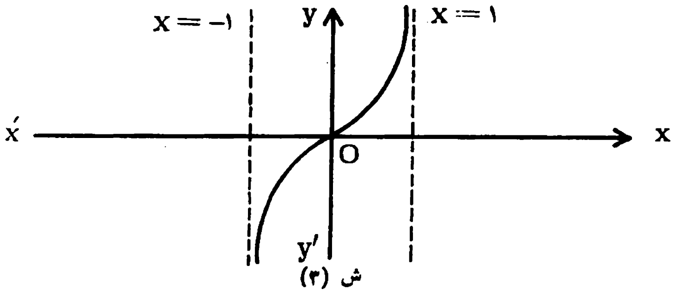
مثال ۳: تابع $f(x)=-x^۲$ روی فاصله]۲ و ۲ −[دارای ماکزیمم مطلق بوده و مینیمم مطلق ندارد.

حل: تابع مطابق شکل (۲) درصفر دارای ماکزیمم مطلق است و در (۲ −) و (۲) مینیمم مطلق ندارد چون این اعداد متعلق به فاصله داده شده نمی‌باشند.



ش (۲)

مثال ۴: شکل تابع $f(x)=\frac{x}{۱-x^۲}$ روی فاصله (۱ و ۱ −) نشان می‌دهد که تابع روی این فاصله، نه دارای ماکزیمم مطلق و نه دارای مینیمم مطلق است به شکل (۳) توجه نمایید.



ش (۳)

قضیه ۳۴: قضیه مقادیر نهایی: اگر تابع f روی فاصلهٔ بستهٔ [a , b] پیوسته باشد آنگاه f روی این فاصله دارای ماکزیمم و مینیمم مطلق می‌باشد و برای به دست آوردن ماکزیمم و مینیمم مطلق، مقادیر تابع را به ازای نقاط بحرانی به‌دست آورده و نیز f(a) و f(b) را

به‌دست می‌آوریم بزرگترین مقدار بین آنها ماکزیمم مطلق و کوچکترین مقدار بین آنها مینیمم مطلق می‌باشد.

اثبات این قضیه درسطح متوسطه نیست از آن صرفنظر می‌نماییم.

مثال ۱: ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=\sqrt[۳]{(x-۲)^{۲}}$ را روی فاصلهٔ [۱و۱۰] بیابید.

حل: چون تابع در فاصلهٔ [۱و۱۰] پیوسته می‌باشد پس طبق قضیهٔ ۳۴ (صفحه ۴۳) دارای ماکزیمم و مینیمم مطلق می‌باشد.

$$f(x)=(x-۲)^{\frac{۲}{۳}} \quad و \quad f'(x)=\frac{۲}{۳}(x-۲)^{-\frac{۱}{۳}}=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x-۲}}$$

چون $f'(۲)$ وجود ندارد پس تابع در (۲) نقطهٔ بحرانی داشته و $f(۲)=۰$ می‌باشد $f(۱)=۱$ و $f(۱۰)=۴$ بوده بنابراین ماکزیمم مطلق ۴ و مینیمم مطلق صفر می‌باشد.

مثال ۲: درطرح ساختمان یك ساندویچ فروشی تخمین زده می‌شود اگر ۴۰ تا ۸۰ جا برای اشخاص باشد سود هفتگی برای هرجا ۸ تومان خواهد بود ولی اگرظرفیت بالای ۸۰ جا باشد سود هفتگی برای هرجا به نسبت ۰/۰۴ تومان ضربدر تعداد جاهای بیشتر از ۸۰ ، نقصان می‌یابد ظرفیت چقدرباید باشد تا بیشترین سود هفتگی عاید شود؟

حل: ظرفیت را برابر x نفرفرض می‌نماییم وسود هفتگی را که تابعی از x است $P(x)$ انتخاب می‌کنیم دراین صورت اگر $۸۰ \leqslant x \leqslant ۴۰$ باشد سود هفتگی $P(x)=۸x$ و اگر $x>۸۰$ باشد سود هفتگی برای هر نفر برابر است با $۸-۰/۰۴(x-۸۰)$ درنتیجه:

$$P(x)=x[۸-۰/۰۴(x-۸۰)]=۱۱/۲x-۰/۰۴x^{۲} \geqslant ۰ \Longrightarrow$$
$$۰ \leqslant x \leqslant ۲۸۰$$

که چون باید $x>۸۰$ باشد پس دراین حالت $۸۰<x\leqslant ۲۸۰$ خواهد بود.

بنابراین :

$$P(x)=\begin{cases} ۸x & ، \quad ۴۰ \leqslant x \leqslant ۸۰ \\ ۱۱/۲x-۰/۰۴x^{۲} & ، \quad ۸۰<x\leqslant ۲۸۰ \end{cases}$$

باوجودی که تعدادنفرات باید اعدادصحیح باشند اما چون می‌خواهیم از قضیهٔ ۳۴ (صفحهٔ ۴۳) استفاده کنیم x را تمام اعداد حقیقی درفاصلهٔ بسته [۴۰و۲۸۰] گرفته و به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که تابع $P(x)$ دراین فاصله پیوسته است وشرایط قضیهٔ ۳۴ برقرار است.

$$P'(x)=\begin{cases} ۸ & ، \quad ۴۰ \leqslant x < ۸۰ \\ ۱۱/۲-۰/۰۸x & ، \quad ۸۰ < x \leqslant ۲۸۰ \end{cases}$$

چون $P'_-(۸۰)=۸$ و $P'_+(۸۰)=۴/۸$ پس $P'(۸۰)$ وجود ندارد و نیز:

$$P'(x)=۰ \Longrightarrow ۱۱/۲-۰/۰۸x=۰$$
$$\Longrightarrow x=۱۴۰\in[۸۰ \text{و} ۲۸۰]$$

بنابراین $x=۱۴۰$ و $x=۸۰$ نقاط بحرانی بوده مقادیر تابع را به ازای آنها و همچنین $P(۴۰)$ و $P(۲۸۰)$ را به دست می‌آوریم داریم:

$P(۲۸۰)=۰$ و $P(۴۰)=۳۲۰$ و $P(۱۴۰)=۷۸۴$ و $P(۸۰)=۶۴۰$

پس ماکزیمم سود هفتگی ۷۸۴ تومان می‌باشد که در این صورت گنجایش محل ۱۴۰ نفر است.

تمرین

مسألهٔ ۵۰: اگر f در a مشتق پذیر باشد ثابت کنید:

$$f'(a)=\underset{\Delta x\to ۰}{\text{حد}}\ \frac{f(a+\Delta x)-f(a-\Delta x)}{۲\Delta x}$$

مسألهٔ ۵۱: اگر f به صورت زیر تعریف شده باشد مقادیر a و b را طوری بیابید که $f'(۱)$ وجود داشته باشد:

$$f(x)=\begin{cases} x^۲ \text{ ،} & x<۱ \\ ax+b \text{ ،} & x\geqslant ۱\end{cases}$$

مسألهٔ ۵۲: با فرض آنکه $f(x)=[x]$ باشد. $f'(x_۱)$ را برای هرعدد غیر صحیح $x_۱$ حساب کنید. همچنین اگر $x_۱$ یك عدد صحیح باشد نشان دهید $f'(x_۱)$ وجود ندارد.

مسألهٔ ۵۳: اگر $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$ باشد اولا ثابت کنید:

$$f'_-(۰)=+\infty \text{ و } f'_+(۰)=+\infty$$

ثانیاً ثابت کنید:

$$\underset{x\to ۰+}{\text{حد}}\ f'(x)=۰ \quad \text{و} \quad \underset{x\to ۰^-}{\text{حد}}\ f'(x)=۰$$

مسألهٔ ۵۴: اگر $f(x)=\begin{cases} \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} \text{ ،} & x\neq a \\ g'(a) \text{ ،} & x=a\end{cases}$ ثابت کنید اگر $g'(a)$ وجود داشته باشد آنگاه f در a پیوسته است.

مسألهٔ ۵۵: ثابت کنید مشتق یك تابع زوج به فرض وجود داشتن تابعی فرد است و مشتق یك تابع فرد به فرض وجود داشتن تابعی زوج است.

مسألهٔ ۵۶: با استفاده ازمسألهٔ ۵۵ ثابت کنید اگر g یك تابع زوج باشد و $h(x)=f\circ g(x)$ آنگاه $h'(0)=0$ است بشرطی که $f'(x)$ و $g'(x)$ وجود داشته باشند.

مسألهٔ ۵۷: فرض کنید f و g دو تابع هستند به طوری که $f\circ g(x)=x$ و $f'(x)=\frac{1}{x}$ اگر $g'(x)$ وجود داشته باشد ثابت کنید $g'(x)=g(x)$.

مسألهٔ ۵۸: فرض کنید $h(x)=f\circ g(x)$ و $g(x)=\sqrt{9-x^2}$ که درآن f در ۳ مشتق پذیراست ثابت کنید $h'(0)=0$.

مسألهٔ ۵۹: یك نردبان به طول ۲۵ فوت به دیواری قائم تکیه داده شده است اگر پایهٔ نردبان را با سرعت ۳ فوت درثانیه ازدیواردور کنیم با چه سرعتی انتهای نردبان به‌طرف پایین دیوارمی‌لغزد درصورتی که پایه‌آن ۱۵ فوت ازدیواردورباشد؟

مسألهٔ ۶۰: یك مخزن آب به شکل یك مخروط وارونه دارای ارتفاع ۱۶ فوت و شعاع قاعده ۴ فوت می‌باشد ، آب با سرعت ۲ فوت مکعب در دقیقه به داخل مخزن وارد می‌شود وقتی عمق‌آب ۵ فوت است با چه سرعتی سطح‌آب بالا می‌آید؟

مسألهٔ ۶۱: دو اتومبیل یکی با سرعت ۳۷/۵ مایل درساعت به طرف شرق و دیگری با سرعت ۳۰ مایل در ساعت به طرف جنوب به محل تقاطع دو جاده نزدیك می‌شوند. در لحظه‌ای که فاصلهٔ یك اتومبیل تا محل تقاطع برابر ۴۰۰ فوت وفاصلهٔ اتومبیل دومی ۳۰۰ فوت است با چه سرعتی دواتومبیل به یکدیگرنزدیك می‌شوند؟

مسألهٔ ۶۲: فرض کنید شن با سرعت ۱۰ فوت مکعب دردقیقه روی توده مخروطی شکلی ریخته می‌شود اگرارتفاع توده شن همواره دوبرابرشعاع قاعده‌آن باشد وقتی ارتفاع‌توده به ۸ فوت می‌رسد با چه سرعتی ارتفاع درحال افزایش خواهد بود؟

مسألهٔ ۶۳: مردی با ۶ فوت قد با سرعت ۵ فوت درثانیه به طرف ساختمانی قدم می‌زند اگر ۵۰ فوت دور از ساختمان چراغی روی زمین گذاشته شده باشد وقتی فاصله مرد از ساختمان ۳۰فوت باشد ، باچه سرعتی سایهٔ مرد روی ساختمان درحال کوتاه شدن است؟

مسألهٔ ۶۴: مردی ازروی اسکله ، قایقی را به وسیلهٔ طنابی که درسطح‌آب به‌آن بسته‌شده است با سرعت ۵۰ فوت‌دردقیقه به طرف خود می کشد ، اگردستهای مرد ۱۶ فوت‌بالاتر از سطح آب باشد وقتی طول طناب به (۲۰) فوت می‌رسد باچه سرعتی قایق به اسکله نزدیك می‌شود؟

مسألهٔ ۶۵: تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۵}{|x|} ، & x\neq ۰\\ ۰ ، & x=۰\end{cases}$ مفروض است $f'(x)$ و $f''(x)$ و دامنه‌های f' و f'' را بیابید.

مسألهٔ ۶۶: اگر f' و g' و f'' و g'' وجود داشته باشند و نیز $h=f\circ g$ باشد $h''(x)$ را برحسب مشتقات f و g حساب کنید.

مسألهٔ ۶۷: $f'(x)$ را برای تابع $f(x)=(|x+۱|-|x|)^۲$ بیابید.

مسألهٔ ۶۸: تابع $f(x)=\begin{cases}x^۳ ، & x<۱\\ ax^۲+bx+c ، & x\geqslant ۱\end{cases}$ مفروض است a و b و c را چنان بیابید که $f''(۱)$ وجود داشته باشد.

مسألهٔ ۶۹: اگر توابع f و g در $x_۱$ مشتق پذیر باشند آیا تابع مرکب $f\circ g$ الزاماً در $x_۱$ مشتق پذیر است؟ اگر جوابتان مثبت است آن را ثابت کنید و اگر جوابتان منفی است مثالی برای نشان دادن عدم صحت ادعای فوق بیاورید.

مسألهٔ ۷۰: فرض کنید توابع f و g به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$f(x)=۳x+|x| \quad و \quad g(x)=\frac{۳}{۴}x-\frac{۱}{۴}|x|$$

ثابت کنید $f'(۰)$ و $g'(۰)$ هیچ کدام وجود ندارند درحالی که $(f\circ g)'(۰)$ وجود دارد.

مسألهٔ ۷۱: توابع f و g را طوری مثال بزنید که f در صفر مشتق پذیر بوده ولی g درصفر مشتق پذیر نباشد درحالی که $f\circ g$ درصفر مشتق پذیر است.

مسألهٔ ۷۲: توابع f و g را طوری مثال بزنید که f در $g(۰)$ مشتق پذیر نبوده ولی g و $f\circ g$ درصفر مشتق پذیر باشند.

مسألهٔ ۷۳: اگر $f'(x_۱)$ وجود داشته باشد ثابت کنید:

$$\underset{x\to x_۱}{\text{حد}}\ \frac{xf(x_۱)-x_۱f(x)}{x-x_۱}=f(x_۱)-x_۱f'(x_۱)$$

مسألهٔ ۷۴: f و g دو تابع روی اعداد حقیقی می‌باشند و می‌دانیم $g(x)=xf(x)+۱$ و برای هر a و b داریم $g(a+b)=g(a)g(b)$ و $\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\ f(x)=۱$ ، ثابت کنید $g'(x)=g(x)$.

مسألهٔ ۷۵: اگر $f'(x)=\frac{۱}{x}$ باشد مطلوب است مشتق $Z=f(x^{۲})$

مسألهٔ ۷۶: نشان دهید:

$$۱)\ \therefore\ y=a\cos ۲x+b\sin ۲x \Longrightarrow y''+۴y=۰$$

$$۲)\ \therefore\ y=\sin^{۴}x \Longrightarrow y''+۱۶y=۱۲\sin^{۲}x$$

$$۳)\ \therefore\ y=\sqrt{\frac{۱}{\cos ۲x}} \Longrightarrow y+y''=۳y^{۵}$$

$$۴)\ \therefore\ y^{۲}+۲y=a\cos ۳x+b\sin ۳x \Longrightarrow$$
$$۲(۱+y)y''+۲y'^{۲}+۹y^{۲}+۱۸y=۰$$

$$۵)\ \therefore\ y=f(x)[f'(x)]^{-\frac{۱}{۲}} \text{ و } z=[f'(x)]^{-\frac{۱}{۲}} \Longrightarrow \frac{z''}{z}=\frac{y''}{y}$$

مسألهٔ ۷۷: مشتق n ام توابع زیررا بیابید:

$$y_{۱}=\sin^{۲}x \quad \text{و} \quad y_{۲}=\sin^{۳}x$$
$$y_{۴}=\sin^{۲}x\cos ۴x \quad \text{و} \quad y_{۳}=\sin^{۴}x+\cos^{۴}x \quad \text{و}$$
$$y_{۵}=\frac{x^{۲}+۱}{x^{۲}-۳x+۲}$$

مسألهٔ ۷۸: نقاط بحرانی توابع $y_{۱}$ و $y_{۲}$ و $y_{۳}$ را درصورت‌وجودبیابید و نیزماکزیمم یا مینیمم مطلق‌بقیه توابع زیررا به دست‌آورید:

$$y_{۱}=x^{\frac{۶}{۵}}-۱۲x^{\frac{۳}{۲}} \quad \text{و} \quad y_{۲}=(x^{۲}-۴)^{\frac{۲}{۳}}$$

$$y_{۳}=\frac{x}{x^{۲}-۹} \quad \text{و} \quad y_{۴}=۴-۳x ،\ x\in]-۱ \text{ و } ۲]$$

$$y_{۵}=\frac{۱}{x} ،\ x\in[۲\ ,\ ۳] \quad \text{و} \quad y_{۶}=\sqrt{۳+x} ،\ x\in[-۳ ، +\infty[$$

$$y_{۷}=|x-۴|+۱ ،\ x\in]۰\ ,\ ۶[$$

$$y_{۸}=\begin{cases}\frac{۲}{x-۵} ، & x\neq ۵\\ ۲ ، & x=۵\end{cases} ،\ x\in[۳\ ,\ ۵]$$

مسألهٔ ۷۹: ماکزیمم ومینیمم مطلق توابع زیررا بیابید:

$$y_۱=x^۳+۵x-۴ \quad ، \quad x\in[-۳ , -۱]$$

$$y_۲=x^۴-۸x^۲+۱۶ \quad ، \quad x\in[-۴ , ۰]$$

$$y_۳=\begin{cases} ۳x-۴ \quad ، & -۳\leqslant x<۱ \\ x^۲-۲ \quad ، & ۱\leqslant x\leqslant ۳ \end{cases}$$

مسألهٔ ۸۰: مطلوب است محاسبه ابعاد یك استوانه‌که چون درکره به شعاع (۶) دسی‌متر محاط شود مساحت جانبی‌آن ماکزیمم گردد.

مسألهٔ ۸۱: دایره به معادله $x^۲+y^۲=۹$ مفروض است مطلوب است اولاً کوتاهترین فاصله نقطه $A(۴ , ۵)$ ازنقاط دایره. ثانیاً طولانی‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(۴ , ۵)$ از نقاط دایره را بیابید (منظورحل مسأله به طریقهٔ جبری می‌باشد).

مسألهٔ ۸۲: دوشهر A و B ذخیرهٔ آب خود را از یك پمپ مشترك واقع در ساحل یك رودخانه مستقیم به فاصلهٔ ۱۵ مایل از شهر A و۱۰۵ مایل ازشهر B تهیه می‌کنند اگر نزدیکترین فاصله ازشهرهای A و B درساحل رودخانه به فاصله ۲۰ مایل از یکدیگر قرارداشته باشند پمپ را درچه نقطه‌ای نصب کنندکه کمترین مقدار برای لوله‌کشی‌مصرف شود؟ (منظورحل مسأله به طریقهٔ جبری میباشد.)

مسألهٔ ۸۳: یك سازنده سودی برابر ۲۰ تومان روی هرقلم جنس عایدش می‌شود به شرطی‌که بیشتراز ۸۰۰ قلم درهفته تولید نکند. بالاترازتولید ۸۰۰ سود هرقلم جنس به نسبت ۰/۰۲ تومان ضربدر تعداد اقلام بیشتراز ۸۰۰ کاهش می‌یابد چند قلم جنس در هفته تولیدکند تا بیشترین سود را برده باشد؟

۵

ماکزیمم یك حاصل‌ضرب و مینیمم یك حاصل‌جمع در صورتی که متغیرها مثبت باشند و تمرینهای آن

قضیهٔ ۳۵: هرگاه حاصل‌جمع چند عامل متغیر مثبت ثابت باشد حاصل‌ضرب آنها وقتی ماکزیمم است که تمام عوامل مثبت برابر باشند.

اثبات: این قضیه را برای دو عامل، ثابت نموده، اثبات برای n عامل را به عهدهٔ خوانندگان می‌گذاریم چون $(x+y)^۲-(x-y)^۲=۴xy$ و $x+y=K$ پس:

$$xy=\frac{K^۲}{۴}-\frac{۱}{۴}(x-y)^۲$$

چون K مقداری ثابت است، پس حاصل‌ضرب xy وقتی ماکزیمم است که $x-y$ برابر صفر باشد یعنی $x=y$.

مثال: محیط مثلثی ثابت می‌باشد، مساحت آن چه وقت ماکزیمم است:

حل: $S^۲=P(P-a)(P-b)(P-c)$ و $(P-a)+(P-b)+(P-C)$

$=۳P-(a+b+c)=۳P-۲P=P=$ ثابت

برای آنکه حاصل‌ضرب عوامل مثبت $P-a$ و $P-b$ و $P-c$ که حاصل‌جمع آنها ثابت است ماکزیمم باشد باید $P-a=P-b=P-c$ یا $a=b=c$ یعنی مثلث متساوی‌الاضلاع است.

قضیهٔ ۳۶: اگر حاصل‌ضرب چند عامل متغیر مثبت ثابت باشد حاصل‌جمع آنها وقتی مینیمم است که این عوامل مساوی باشند.

اثبات: n عامل مثبت x و y و z و ... و t را درنظر گرفته به طوری که: $xyz\cdots t=K$ باشد، مقدار متوسط هریك از این عوامل $\sqrt[n]{K}=a$ می‌باشد تمام این عوامل نمی‌توانند بزرگتر از a باشند زیرا دراین صورت داریم:

$t>a$ و ... و $y>a$ و $x>a$ پس حاصل‌ضرب آنها یعنی:

$xyz\cdots t>a^n=K$ یك تناقض است و نیز تمام این عوامل نمی‌توانند کمتر از a باشند، زیرا در این صورت داریم $xyz\cdots t<a^n=K$ این هم یك تناقض می‌باشد، پس بعضی ازعوامل بیشتر از a وبعضی از آنها کمتر از a می‌باشند اگر مثلا

$x > a$ باشد در این صورت $x=a+h$ که $h > ۰$ و فرض می‌کنیم $y < a$ باشد داریم $(a+h)yz\cdots t=K$ وفرض می‌کنیم $(a+h)+y+z+\cdots+t=S$ باشد ، $(a+h)$ را به a تبدیل کرده $y < a$ را طوری تغییرمی‌دهیم که حاصل‌ضرب بالا K باشد یعنی $ay'z\cdots t=K$ پس:

$$(a+h)yz\cdots t=ay'z\cdots t$$

$$\Longrightarrow (a+h)y=ay' \Longrightarrow y'=\frac{(a+h)y}{a}$$

پس مجموع اخیر به صورت :

$$a+\frac{(a+h)y}{a}+z+\cdots+t=S'$$

می‌باشد ثابت می‌کنیم $S' < S$ کافی است ثابت نماییم:

$$\frac{a+h}{a}y < h+y$$

یا :

$$ay+hy < ah+ay \Longrightarrow hy < ha \Longrightarrow y < a$$

و چون فرض کردیم $y < a$ می‌باشد پس $S' < S$ خواهد بود حال اگر در S' عامل دیگررا به a تبدیل نماییم ومجموع را S'' بگیریم مسلماً $S'' < S'$ بوده‌اگر این عمل را ادامه داده تا تمام عوامل به a تبدیل گردندآن وقت مجموع آخری که‌تمام عوامل‌آن a می‌باشد مینیمم بوده وحکم ثابت است.

تبصره: قضیهٔ بالا به سادگی برای دو عامل ثابت می‌شود اگر $xy=K$ باشد می‌دانیم $(x+y)^۲=(x-y)^۲+۴xy$ یا $(x+y)^۲=(x-y)^۲+۴K$ اگر $x-y=۰$ یا $x=y$ باشد مجموع $(x+y)$ مینیمم می‌گردد.

مثال: اگر $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ باشد می‌نیمم تابع $y=۳tgx+cotgx$ را بیابید.

حل: $(۳tgx)cotgx=۳$ حاصل‌ضرب‌عوامل‌مثبت $۳tgx$ و $cotgx$ ثابت‌است‌حاصل‌جمع آنها وقتی مینیمم است که:

$$۳tgx=cotgx \Longrightarrow tg^۲x=\frac{۱}{۳} \Longrightarrow tgx=\frac{\sqrt{۳}}{۳} \Longrightarrow cotgx=\sqrt{۳}$$

$$y_{Min}=\sqrt{۳}+\sqrt{۳}=۲\sqrt{۳}$$

قضیهٔ ۳۷: اگرحاصل‌جمع‌عوامل متغیرمثبت x و y و $\cdots$ و t ثابت باشد، حاصل‌ضرب $P=x^py^q\cdots t^s$ که درآن p و q و $\cdots$ و s اعدادگویای مثبتند وقتی ماکزیمم می‌باشد که $\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\cdots=\frac{t}{s}$ باشد.

اثبات: مسأله را برای وقتی $s\in N$ و ... و q و p می‌باشد اثبات می‌کنیم:

$$P=x^py^q\cdots t^s \Longrightarrow \frac{P}{p^pq^q\cdots s^s}=\frac{x^p}{p^p}\times\frac{y^q}{q^q}\times\cdots\times\frac{t^s}{s^s}$$

$$=\underbrace{\left(\frac{x}{p}\cdot\frac{x}{p}\cdots\frac{x}{p}\right)}_{\text{مرتبه } p}\underbrace{\left(\frac{y}{q}\cdot\frac{y}{q}\cdots\frac{y}{q}\right)}_{\text{مرتبه } q}\cdots\underbrace{\left(\frac{t}{s}\cdot\frac{t}{s}\cdots\frac{t}{s}\right)}_{\text{مرتبه } s}$$

مجموع عوامل نوشته شده را تشکیل می‌دهیم داریم:

$$\left(\frac{x}{p}+\frac{x}{p}+\cdots+\frac{x}{p}\right)+\left(\frac{y}{q}+\frac{y}{q}+\cdots+\frac{y}{q}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{t}{s}+\frac{t}{s}+\cdots+\frac{t}{s}\right)$$

$$=p\times\frac{x}{p}+q\times\frac{y}{q}+\cdots+s\times\frac{t}{s}$$

$$=x+y+\cdots+t=K=\text{ثابت}$$

پس حاصل‌ضرب بالا یعنی P وقتی ماکزیمم است (چون مخرج کسر $p^p\cdot q^q\cdots s^s$ ثابت است پس P ماکزیمم می‌گردد) که داشته باشیم:

$$\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\cdots=\frac{t}{s}$$

درحالتی که مثلا $p=\frac{m}{s}$ و $q=\frac{n}{r}$ باشد $P=x^{\frac{m}{s}}\ y^{\frac{n}{r}}$ طرفین را بتوان rs رسانیده، داریم:

$$P^{rs}=x^{mr}y^{ns}$$

شرط ماکزیمم P آن است که $\frac{x}{mr}=\frac{y}{ns}$ اگر طرفین را در rs ضرب کنیم داریم:

$$\frac{x}{\frac{m}{s}}=\frac{y}{\frac{n}{r}}$$

مثال: ماکزیمم تابع $y=\sin^{۲}x\cos^{۴}x$ را بیابید.

حل:

$$y=(\sin^{۲}x)^{۱}(\cos^{۲}x)^{۲} \quad \text{و} \quad \sin^{۲}x+\cos^{۲}x=۱=\text{ثابت}$$

طبق قضیهٔ (۳۷) حاصل‌ضرب بالا وقتی ماکزیمم است که:

$$\frac{\sin^{۲}x}{۱}=\frac{\cos^{۲}x}{۲}\Longrightarrow \cos^{۲}x=۲\sin^{۲}x \quad \text{و}$$

$$sin^{۲}x+۲\,sin^{۲}x=۱ \implies ۳sin^{۲}x=۱ \implies sin^{۲}x=\frac{۱}{۳}$$ و

$$cos^{۲}x=\frac{۲}{۳}$$

$$y_{Max}=\frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۹}=\frac{۴}{۲۷}$$

قضیهٔ ۳۸: اگر x و y و ... و t مثبت و حاصل‌ضرب $P=x^{p}y^{q}\ \cdots\ t^{s}$ مقداری ثابت باشد و p و q و ... و s اعداد گویای مثبت باشند، حاصل‌جمع x و y و ... و t وقتی مینیمم است که داشته باشیم:

$$\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\ \cdots\ =\frac{t}{s}$$

اثبات این قضیه، مانند قضیهٔ ۳۷ می‌باشد.

مثال: مطلوب است مینیمم تابع $y=tg^{۲}x+cotg^{۴}x$

حل:

$$P=tg^{۴}x\,cotg^{۴}x=(tg^{۲}x)^{۲}(cotg^{۴}x)=۱=\text{ثابت}$$

چون حاصل‌ضرب بالا ثابت است حاصل‌جمع $tg^{۲}x$ و $cotg^{۴}x$ وقتی مینیمم است که داشته باشیم:

$$\frac{tg^{۲}x}{۲}=\frac{cotg^{۴}x}{۱} \implies tg^{۲}x=۲\,cotg^{۴}x$$ و

$$۲\,cotg^{۶}x=۱ \implies cotg^{۶}x=\frac{۱}{۲} \implies cotg^{۴}x=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴}}$$ و

$$tg^{۲}x=\frac{۲}{\sqrt[۳]{۴}}$$ و

$$y_{Min}=\frac{۲}{\sqrt[۳]{۴}}+\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴}}=\frac{۳}{\sqrt[۳]{۴}}$$

تمرین

مسألهٔ ۸۴: ماکزیمم تابع $y=x\sqrt{x}\sqrt{۱-x^{۲}}$ را بیابید.

مسألهٔ ۸۵: اگر a و b و x مقادیری مثبت باشند مینیمم تابع $y=\frac{a^{۸}+b^{۲}x^{۶}}{x^{۲}}$ را بیابید.

مسألهٔ ۸۶: اگر a و b مقادیری مثبت و $۰<x<۱$ باشد حداقل تابع $y=\frac{a^{۲}}{x}+\frac{b^{۲}}{۱-x}$ را بیابید.

مسألهٔ ۸۷: طول ضلع لوزی را چنان بیابید‌که چون بردایره به شعاع R محیط گردد محیطش مینیمم گردد.

مسألهٔ ۸۸: قاب عکسی روی دیوار به‌طور قائم قرار گرفته است درچه فاصله‌ای ازدیوار قراربگیریم تا قاب را با زاویه ماکزیمم ببینیم؟

مسألهٔ ۸۹: مینیمم مساحت ذوزنقه متساوی‌الساقین را که محیط بردایره به شعاع R باشد بیابید.

مسألهٔ ۹۰: باشرط مثبت بودن مقادیر a و b و c ماکزیمم تابع $y=\frac{۳x^{۲}}{ax^{۴}+bx^{۲}+c}$ را بیابید.

مسألهٔ ۹۱: می‌خواهیم ورقهٔ فلزی مستطیل شکلی را به شکل ناودانی درآوریم که مقطع آن ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین باشد عرض باریکه‌های دوطرف‌را چقدرانتخاب کنیم وآنهارا تحت چه زاویه‌ای خم نماییم تا مقطع ناودان حداکثرمساحت را داشته باشد.

مسألهٔ ۹۲: مستطیلی با سطح ماکزیمم دریك بیضی مفروض محاط کنید مطلوب است‌سطح این مستطیل.

مسألهٔ ۹۳: ماکزیمم ومینیمم توابع زیررا بیابید:

$$y_{۱}=\sin^{۶}x+\cos^{۶}x \quad و \quad y_{۲}=\sin^{۲}x-۳\cos^{۲}x+۲$$

$$y_{۳}=a\sin x+b\cos x+c \quad و \quad y_{۴}=(\sin^{۲}x-۲)(\cos x^{۲}-۲)$$

مسألهٔ ۹۴: ماکزیمم توابع زیررا بیابید:

$$y_{۱}=\frac{(\sin^{۳}x+\sin ۳x)(\cos^{۳}x-\cos ۳x)}{\sin ۲x} \ ، \ \sin ۲x\neq ۰ \quad و$$

$$y_{۲}=\sin^{۳}x\cos^{۲}x \ ، \ ۰<x<\frac{\pi}{۲}$$

$$y_۳=\cos^۲\frac{x}{۲}\left(۳tg^۲\frac{x}{۲}+۱۰tg\frac{x}{۲}+۳\right) ، x\neq(۲K+۱)\pi$$

$$y_۴=\frac{tg۳x-tg^۳x}{tgx} ، tgx\neq ۰$$

$$y_۵=\sin^۲x\cos\left(\frac{\pi}{۳}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{۳}+x\right) ، |x|<\frac{\pi}{۶}$$

$$y_۶=a^۲\cos^۲x+b^۲\sin^۲x ، a>b>۰$$

مسأله ۹۵: مینیمم توابع زیررا بیابید:

$$y_۱=tga\,tgx+cotga\,cotgx ، ۰<a \text{ و } x<\frac{\pi}{۲}$$

$$y_۲=tg^۴x+cotg^۶x$$

$$y_۳=\sin^۴x+\cos^۴x+\sec^۴x+cosec^۴x ، ۰<x<\frac{\pi}{۲}$$

مسأله ۹۶: اگر A و B و C زوایای یك مثلث باشند ، ماکزیمم $\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}$ را بیابید.

۶

قضایای رل ـ لاگرانژ ـ کوشی و تمرینهای آن

قضیهٔ ۳۹ (قضیهٔ رل): اگر تابع $f(x)$ در فاصلهٔ بسته $[a\ ,\ b]$ متصل و در فاصلهٔ باز $(a\ ,\ b)$ مشتق پذیرو $f(a)=f(b)=0$ باشد آنگاه عددی مانند c واقع در فاصلهٔ $(a\ ,\ b)$ وجود دارد به طوری‌که $f'(c)=0$:

اثبات: اگر برای تمام مقادیر x در فاصلهٔ $[a\ ,\ b]$ داشته باشیم $f(x)\equiv 0$ آنگاه $f'(x)=0$ برای‌هر x متعلق به فاصلهٔ $(a\ ,\ b)$ برقرارمی‌باشد ، اما اگر $f(x)\not\equiv 0$ باشد ، چون f درفاصلهٔ $[a\ ,\ b]$ پیوسته‌است و $f(a)=f(b)=0$ می‌باشد ، طبق قضیه (۳۴)صفحه ۴۳ یا دارای‌یك ماکزیمم‌مطلق مثبت درنقطه‌ای مانند c_1 متعلق به فاصلهٔ (a, b) و یا دارای یك مینیمم مطلق منفی در نقطه‌ای مانند c_2 متعلق به فاصلهٔ $(a\ ,\ b)$ و یا هردوخواهد بود ، اگردرنقطهٔ c_1 به طول c متعلق به فاصلهٔ $(a\ ,\ b)$ تابع f مثلا دارای ماکزیمم مطلق باشد ، طبق تعریف ماکزیمم مطلق داریم:

$$x < c \ \text{یا}\ x-c < 0 \Longrightarrow f(x) \leqslant f(c)$$

$$\Longrightarrow f(x)-f(c) \leqslant 0 \Longrightarrow \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqslant 0$$

$$\Longrightarrow \underset{x\to c^-}{\text{حد}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'_-(c) \geqslant 0 \qquad (۱)$$

$$x > c \ \text{یا}\ x-c > 0 \Longrightarrow f(x) \leqslant f(c) \Longrightarrow f(x)-f(c) \leqslant 0$$

$$\Longrightarrow \underset{x\to c^+}{\text{حد}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqslant 0 \Longrightarrow f'_+(c) \leqslant 0 \qquad (۲)$$

چون $f'(c)$ وجود دارد پس باید مشتق راست وچپ‌در c برابرباشد وطبق‌نامساویهای (۱) و (۲) این امکان نخواهد داشت مگر $f'(c)=0$ باشد وحکم ثابت است.

قضیهٔ ۴۰ (قضیهٔ لاگرانژ یا قضیه نموّات محدود): اگر تابع f در فاصلهٔ بستهٔ $[a , b]$ پیوسته و درفاصلهٔ باز (a , b) مشتق پذیر باشد ، آنگاه عددی مانند c متعلق به فاصلهٔ باز (a , b) وجود دارد به طوری‌که:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

اثبات: فرض می‌کنیم:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=K$$

داریم:

$$f(b)-f(a)-(b-a)K=0$$

دررابطهٔ اخیر a را به x تبدیل کرده تابع $\varphi(x)$ را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$\varphi(x)=f(b)-f(x)-K(b-x)$$

$\varphi(x)$ در فاصله $[a , b]$ متصل و در فاصله (a , b) مشتق پذیر و $\varphi(b)=0$ و $\varphi(a)=0$ پس طبق قضیهٔ ۳۹ (صفحه ۵۶) (قضیهٔ رل) عددی مانند c متعلق به فاصلهٔ (a , b) وجود دارد به طوری‌که $\varphi'(c)=0$ بنابراین داریم:

$$\varphi'(x)=-f'(x)+K$$

و

$$\varphi'(c)=-f'(c)+K=0 \implies K=f'(c)$$

تبصرهٔ ۱: اگرنقاط $A(a , f(a))$ و $B(b , f(b))$ را بهم‌وصل نماییم‌ضریب زاویهٔ خط AB برابراست با $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ که چون مساوی $f'(c)$ می‌باشد پس‌نقطه‌ای روی منحنی درفاصلهٔ (a , b) وجود داردبه‌طوری‌که مماس برمنحنی‌درآن نقطه موازی وتر AB منحنی است.

تبصرهٔ ۲: رابطهٔ لاگرانژرا می‌توان به صورت:

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta x f'(x+\theta\Delta x)$$

نوشت‌که در آن $0<\theta<1$ می‌باشد این رابطه به نام نموات محدود معروف می‌باشد.

مثال: نشان دهید مشتق تابع $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ دارای سه ریشه است حدود ریشه‌هارا بیابید.

حل: چون تابع در فاصلهٔ بسته $[1 , 2]$ متصل و در فاصلهٔ باز $(1 , 2)$ مشتق پذیر و $f(1)=0$ و $f(2)=0$ است پس طبق قضیهٔ ۳۹ (صفحهٔ ۵۶)(قضیه رل) عددی مانند $c\in(1,2)$

وجود دارد ، به طوری‌که $f'(c)=۰$ است به همین دلیل اعداد $c'\in(۲\,,\,۳)$ و $c''\in(۳\,,\,۴)$ وجود دارند ، به طوری‌که $f'(c')=۰$ و $f'(c'')=۰$ می‌باشند.

مثال ۲: نشان دهید $\frac{۵}{۲۶} < \mathit{Arc\ tg}\ ۰/۲ < \frac{۱}{۵}$

حل:

$$f(x)=\mathit{Arc\ tg}\,x \quad \text{و} \quad f'(x)=\frac{۱}{۱+x^{۲}}$$

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c) \quad \text{و} \quad a<c<b$$

$$\mathit{Arc\ tg}\ ۰/۲-\mathit{Arc\ tg}\,۰=۰/۲\times\frac{۱}{۱+c^{۲}} \Longrightarrow$$

$$\mathit{Arc\ tg}\ ۰/۲=\frac{۰/۲}{۱+c^{۲}}$$

$$۰<c<۰/۲ \Longrightarrow ۱<۱+c^{۲}<۱/۰۴ \Longrightarrow$$

$$۰/۲>\frac{۰/۲}{۱+c^{۲}}>\frac{۰/۲}{۱/۰۴} \Longrightarrow$$

$$\frac{۱}{۵}>\frac{۰/۲}{۱+c^{۲}}>\frac{۵}{۲۶} \Longrightarrow \frac{۵}{۲۶}<\mathit{Arc\ tg}\ ۰/۲<\frac{۱}{۵}$$

قضیهٔ ۴۱ (قضیهٔ کوشی): اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ در فاصلهٔ $[a\,,\,b]$ پیوسته و در فاصلهٔ $(a\,,\,b)$ مشتق پذیر باشند ، عددی مانند $C\in(a\,,\,b)$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

اثبات : فرض می‌کنیم $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=K$ داریم:

$$f(b)-f(a)-K[g(b)-g(a)]=۰$$

دررابطهٔ اخیر b را به x تبدیل کرده، تابع $\varphi(x)$ را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-K[g(x)-g(a)]$$

تابع $\varphi(x)$ درفاصلهٔ $[a\,,\,b]$ پیوسته ودرفاصلهٔ $(a\,,\,b)$ مشتق پذیرو $\varphi(a)=۰$ و $\varphi(b)=۰$ پس طبق قضیهٔ ۳۹ (صفحه ۵۶) (قضیهٔ رل) عددی مانند $c\in(a,b)$ وجود دارد به طوری‌که $\varphi'(c)=۰$. بنابراین داریم:

$$\varphi'(x)=f'(x)-Kg'(x)$$

و:

$$\varphi'(c)=f'(c)-Kg'(c)=۰ \Longrightarrow K=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

مثال: قضیهٔ کوشی را برای توابع $g(x)=x^{۲}$ و $f(x)=x^{۴}$ روی فاصلهٔ [۴ و ۲] بررسی نموده سپس مقدار مناسبی برای c بیابید.

حل: شرایط قضیهٔ کوشی برای توابع f و g روی فاصلهٔ [۴ و ۲] برقرار می‌باشد پس داریم:

$$\frac{f(۴)-f(۲)}{g(۴)-g(۲)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ و } c\in[۲ \text{ و } ۴]$$

$$f'(x)=۴x^{۳} \Longrightarrow f'(c)=۴c^{۳} \text{ و } g'(x)=۲x \Longrightarrow g'(c)=۲c$$

$$f(۴)=۲۵۶ \text{ و } f(۲)=۱۶ \text{ و } g(۴)=۱۶ \text{ و } g(۲)=۴$$

$$\frac{۲۵۶-۱۶}{۱۶-۴}=\frac{۴c^{۳}}{۲c} \Longrightarrow ۲۰=۲c^{۲} \Longrightarrow c=\pm\sqrt{۱۰}$$

جواب $c=\sqrt{۱۰}$ که متعلق به فاصلهٔ [۴ و ۲] می‌باشد قابل قبول است.

تمرین

مسألهٔ ۹۷: قضیهٔ رل را در مورد توابع زیر بررسی نموده سپس مقدار مناسبی برای c بیابید که نتیجهٔ قضیهٔ رل برای آن صادق باشد.

۱) $f(x)=x^{۳}-۲x^{۲}-x+۲$ و $x\in[-۱\ ,\ ۲]$

۲) $f(x)=x^{۳}-۱۶x$ و $x\in[-۴\ ,\ ۰]$

مسألهٔ ۹۸: قضیهٔ لاگرانژ را درمورد تابعهای زیر بررسی نموده سپس مقدار مناسبی برای c بیابید که نتیجهٔ قضیهٔ لاگرانژ برای آن صادق باشد.

۱) $f(x)=x^{\frac{۲}{۳}}$ و $x\in[۰\ ,\ ۱]$

۲) $f(x)=x-۱+\dfrac{۱}{x-۱}$ و $x\in\left[\dfrac{۳}{۲}\ ,\ ۳\right]$

مسألهٔ ۹۹: فرض کنید $f(x)=x^{۴}-۲x^{۳}+۲x^{۲}-x$ باشد با استفاده از قضیهٔ رل ثابت کنید معادلهٔ $f'(x)=۰$ دارای حداقل یك جواب حقیقی در فاصلهٔ باز (۱ و ۰) می‌باشد.

مسألهٔ ۱۰۰: فرض کنید که تابع f روی فاصله $[a\,,\,b]$ پیوسته و برای هر x در فاصلهٔ $(a\,,\,b)$ داشته باشیم $f'(x)=۱$ ثابت کنید برای هر x در فاصله $[a\,,\,b]$ داریم:

$$f(x)=x-a+f(a)$$

مسألهٔ ۱۰۱: از قضیهٔ رل استفاده کرده و ثابت کنید اگر هرچند جمله‌ای از درجهٔ چهارم حداکثر دارای چهار ریشهٔ حقیقی باشد، آنگاه هرچند جمله‌ای از درجه پنجم دارای حداکثر پنج ریشه حقیقی خواهد بود.

مسألهٔ ۱۰۲: فرض کنید f یك تابع چند جمله‌ای است که برای آن داریم:

$$f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=۰$$

ثابت کنید که معادلهٔ $f''(x)=۰$ دارای حداقل دو ریشهٔ حقیقی در فاصلهٔ $(a\,,\,b)$ می‌باشد.

مسألهٔ ۱۰۳: قضیهٔ کوشی را برای توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ روی فاصلهٔ $[a\,,\,b]$ به‌کاربرده، مقدارمناسبی برای c بیابید.

۷

توابع صعودی و نزولی و طریقهٔ تشخیص طولهای ماکزیمم و مینیمم نسبی توابع و تعیین طولها و عرضهای ماکزیمم و مینیمم بعضی از توابع بدون استفاده از مشتق و تمرینهای آن

الف: توابع صعودی و نزولی و طریقهٔ تشخیص طولهای ماکزیمم و مینیمم نسبی توابع.

قبل از بحث دربارهٔ مطلب عنوان شده به قضیهٔ زیر که مورد استفاده قرار می گیرد می پردازیم.

قضیهٔ ۴۲: اگر حد $\underset{x\to a}{f(x)}=L>۰$ ، باشد آنگاه یك فاصلهٔ بازشامل a وجود دارد که برای هر $x\neq a$ واقع در آن فاصله داریم $f(x)>۰$ و اگر حد $\underset{x\to a}{f(x)}=L<۰$ ، باشد آنگاه یك فاصلهٔ بازشامل a وجود دارد که برای هر $x\neq a$ واقع در آن فاصله داریم $f(x)<۰$.

اثبات: به اثبات قسمت اول می‌پردازیم چون حد $\underset{x\to a}{f(x)}=L>۰$ ، پس برای $\varepsilon=\frac{L}{۲}$ وجود دارد $\delta>۰$ به‌طوری‌که داریم:

$$۰<|x-a|<\delta \Longrightarrow |f(x)-L|<\frac{L}{۲} \Longrightarrow$$

$$\frac{-L}{۲}<f(x)-L<\frac{L}{۲} \Longrightarrow \frac{L}{۲}<f(x)<\frac{۳L}{۲}$$

از طرفی می‌دانیم نامساوی $۰<|x-a|<\delta$ معادل نامساوی $x\neq a$ و $a-\delta<x<a+\delta$ پس داریم:

$$a-\delta<x<a+\delta \text{ و } x\neq a \Longrightarrow \frac{L}{۲}<f(x)<\frac{۳L}{۲}$$

رابطهٔ بالا نشان می‌دهد که یك فاصلهٔ بازشامل a وجود دارد که برای هر $x\neq a$ در آن

فاصله ، $f(x)$ مثبت است اثبات قسمت بعد مشابه اثبات قسمت اول می‌باشد.

تعریف: اگر تابع f روی فاصلهٔ I تعریف شده باشد می‌گوییم تابع f روی این فاصله اکیداً صعودی است ، هرگاه برای هر x_1 و x_2 متعلق به فاصلهٔ I داشته باشیم:

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

و می‌گوییم تابع f روی فاصلهٔ I اکیداً نزولی است ، هرگاه برای هر x_1 و x_2 متعلق به فاصلهٔ I داشته باشیم:

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

قضیهٔ ۴۳ : فرض کنید تابع f روی فاصلهٔ $[a , b]$ متصل و روی فاصلهٔ (a , b) مشتق پذیرباشد ، اگربرای هر x درفاصلهٔ (a,b) داشته باشیم $f'(x) > 0$ آنگاه تابع f روی فاصلهٔ $[a , b]$ اکیداً صعودی است و اگر $f'(x) < 0$ باشد ، آنگاه تابع f روی فاصلهٔ $[a , b]$ اکیداً نزولی است.

اثبات: به اثبات قسمت اول می‌پردازیم مطابق تعریف باید ثابت کنیم:

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

چون طبق فرض تابع f روی فاصلهٔ $[a , b]$ پیوسته وروی فاصلهٔ (a , b) مشتق‌پذیر است ، پس اگر x_1 و x_2 متعلق به فاصلهٔ $[a , b]$ باشند ، تابع f روی فاصلهٔ $[x_1 , x_2]$ پیوسته‌وروی‌فاصلهٔ (x_1 , x_2) مشتق پذیر بوده،طبق قضیهٔ لاگرانژ قضیهٔ ۴(صفحهٔ ۵۷) عددی مانند $c \in (x_1 , x_2)$ وجود دارد ، به طوری‌که $f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ، چون $x_2 - x_1 > 0$ و $f'(c) > 0$ می‌باشد ، پس‌طبق رابطهٔ اخیر $f(x_2) - f(x_1) > 0$ یا $f(x_2) > f(x_1)$ وحکم ثابت‌است. اثبات‌قسمت بعد مشابه اثبات‌قسمت اول می‌باشد.

نتیجه: اگر تابع f روی فاصلهٔ (a , b) پیوسته و f' روی این فاصله به جز احتمالا درنقطهٔ c متعلق به فاصلهٔ (a , b) وجود داشته باشد. و در حول نقطهٔ c فاصله‌ای مانند $c \in [l , m] \subseteq (a , b)$ یافت شود به طوری‌که برای هر $x_1 \neq c$ ، $x_1 \in (l , c)$ ، $f'(x_1) > 0$ باشد ، طبق قضیهٔ بالا تابع f روی فاصلهٔ $[l , c]$ اکیداً صعودی بوده داریم $f(c) > f(x_1)$ واگر برای هر $x_2 \neq c$ ، $x_2 \in (c , m)$ ، $f'(x_2) < 0$ باشد ،طبق قضیهٔ بالا تابع f روی فاصلهٔ $[c , m]$ اکیداً نزولی‌است وداریم $f(c) > f(x_2)$ پس‌برای تابع f روی فاصلهٔ $[l , m]$ هموارهٔ $f(c) \geqslant f(x)$ یعنی c طبق تعریف ، طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی است ، پس اگرتابع f در (c) پیوسته و f' حول نقطهٔ c ازمثبت به منفی تغییرعلامت‌دهد c طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی‌است. نظیردلایل بالا اگر f' حول نقطهٔ c ازمنفی به مثبت تغییرعلامت دهد (c) طول نقطهٔ

مینیمم نسبی است ، یعنی $f(c) \leqslant f(x)$.

مثال ۱: طولهای نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+۱ ، x<۱ \\ ۳-x ، x \geqslant ۱ \end{cases}$ را بیابید و تعیین کنید کدام طول مربوط به ماکزیمم و کدام طول مربوط به مینیمم می باشد.

حل: نقاط بحرانی تابع ، یعنی نقاطی که درآن مشتق صفر ویا وجود نداشته باشد به‌دست می‌آوریم ، به آسانی می‌توان بررسی کرد که تابع در (۱) پیوسته است اما در(۱) مشتق ندارد، زیرا ، $f'_-(۱)=۲$ و $f'_+(۱)=-۱$ پس $x=۱$ نقطه بحرانی تابع است، از طرفی به ازای $x<۱$ داریم: $f'(x)=۲x$ که $f'(۰)=۰$ پس $x=۰$ نقطه بحرانی است ، جدول علامت مشتق را تشکیل می‌دهیم.

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
f'(x)		−	۰	+	|	−	
			Min		Max		

با توجه به جدول بالا چون در (۱) مشتق از + به − تغییر علامت می‌دهد پس (۱) طول ماکزیمم نسبی وچون درصفرمشتق از − به + تغییر علامت می‌دهد پس صفر طول مینیمم نسبی است.

مثال ۲: طول ماکزیمم یامینیمم نسبی تابع $f(x)=x^{\frac{۴}{۳}}+۴x^{\frac{۱}{۳}}$ را بیابید و تحقیق کنیدآیا جواب به دست‌آمده مربوط به طول ماکزیمم یا طول مینیمم نسبی است؟

حل: نقاط بحرانی تابع را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{۴(x+۱)}{۳\sqrt[۳]{x^۲}} \quad و \quad f'(-۱)=۰ \quad و \quad f'(۰) \longrightarrow +\infty$$

پس (۱ −) وصفر نقاط بحرانی می‌باشند ، اما f' حول صفر به علت وجود $\sqrt[۳]{x^۲}$ تغییر علامت نمی‌دهد پس طول ماکزیمم یا مینیمم نسبی نمی‌باشد، ولی f' حول (۱ −) از منفی به مثبت تغییرعلامت داده، پس (۱ −) طول نقطهٔ مینیمم نسبی است.

مثال ۳: آیا تابع $f(x)=x^{\frac{۲}{۳}}$ درصفرداری مینیمم نسبی می باشد؟

حل:

$$f'(x)=\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

چون $f'(۰)$ وجود ندارد ، پس صفر نقطهٔ بحرانی تابع بوده وچون مشتق در صفر ازمنفی بدمثبت تغییرعلامت می‌دهد ، پس $x=۰$ طول مینیمم نسبی است.

قضیهٔ ۴۴: اگر c یك نقطهٔ بحرانی تابع f باشد ، به طوری که $f'(c)=۰$ ، وبرای هر x دریك فاصله بازحول c ، $f'(x)$ وجود داشته باشد ، اگر $f''(c)<۰$ باشد، آنگاه تابع f در c دارای‌یك ماکزیمم نسبی‌است‌واگر $f''(c)>۰$ باشدآنگاه تابع f در c دارای یك مینیمم نسبی است.

اثبات: به اثبات قسمت اول می‌پردازیم. چون $f''(c)$ وجود داشته ومنفی است، پس داریم: $f''(c)=\underset{x\to c}{\text{حد}}\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c}<۰$ ، طبق قضیهٔ ۴۲ (صفحه ۶۱) یك فاصله باز I شامل c وجود دارد به طوری که برای هر x واقع دراین فاصله داریم:

$$\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c}<۰ \quad \text{و} \quad x\neq c \qquad (۱)$$

چون c متعلق به فاصلهٔ باز I می‌باشد ، پس می‌توان در نامساوی (۱) ، $x>c$ و $x<c$ را انتخاب کرد وداریم:

$$x>c \Rightarrow x-c>۰ \Rightarrow f'(x)-f'(c)<۰ \Rightarrow f'(x)<f'(c)=۰$$

$$x<c \Rightarrow x-c<۰ \Rightarrow f'(x)-f'(c)>۰ \Rightarrow f'(x)>f'(c)=۰$$

ملاحظه می‌شود برای $x<c$ داریم $f'(x)>۰$ و برای $x>c$ داریم $f'(x)<۰$ یعنی درحول c مشتق تابع ازمثبت به منفی تغییرعلامت می‌دهد ، طبق نتیجهٔ قضیهٔ ۴۳ (صفحه ۶۲) تابع f در c دارای یك‌ماکزیمم نسبی می‌باشد وحکم ثابت است، اثبات قسمت بعد مانند اثبات قسمت اول است.

مثال ۱: طولهای نقاط ماکزیمم ومینیمم نسبی تابع $f(x)=x^۳-۳x+۱$ را به‌دست آورده، تحقیق کنید کدام طول مربوط به ماکزیمم و کدام طول مربوط به مینیمم می‌باشد.

حل: $f'(x)=۳x^۲-۳=۰ \Rightarrow x=\pm ۱$

و $f''(x)=۶x$ و $f''(۱)=۶>۰ \Rightarrow x_{Min}=۱$

$f''(-۱)=-۶<۰ \Rightarrow x_{max}=-۱$

ب: طرز به دست آوردن طولها وعرضهای ماکزیمم و مینیمم نسبی منحنی بعضی از توابع بدون استفاده از مشتق.

مثال ۱: طولها و عرضهای ماکزیمم و مینیمم نسبی منحنی تابع $y=x^۲-۲x+۵$ را

بدون استفاده از y' ، به دست آورید.

حل : شرط آنکه معادلهٔ $x^۲-۲x+۵-y=۰$ ، دارای ریشه حقیقی باشد آن است که $\Delta'=y-۴\geqslant ۰$ باشد پس $y\geqslant ۴$ یعنی $y_{min}=۴$ ، چون به ازای $y=۴$ ، $\Delta'=۰$ می‌باشد ، پس معادلهٔ درجهٔ دوم ریشهٔ مضاعف داشته و $x=\frac{-b}{۲a}=۱$ بنابراین $\min(۱ , ۴)$.

مثال ۲: طولها و عرضهای ماکزیمم و مینیمم نسبی منحنی تابع $y=\frac{x^۲+۱}{x}$ را بدون استفاده از y' ، بیابید.

حل:

$$y=\frac{x^۲+۱}{x}\Longrightarrow x^۲-yx+۱=۰ \text{ و } \Delta=y^۲-۴\geqslant ۰\Longrightarrow$$

$$y\in[۲ \text{ و } +\infty[\text{ یا } y\in]-\infty \text{ و } -۲]$$

اگر $y\geqslant ۲$ باشد داریم:

$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{y}{۲}=۱ \quad \text{و} \quad y_{min}=۲$$

اگر $y\leqslant -۲$ باشد داریم:

$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{y}{۲}=-۱ \quad \text{و} \quad y_{max}=-۲$$

مخرج تابع فوق دارای ریشه صفر است ، پس y می‌تواند به سمت $+\infty$ و $-\infty$ میل کند ، یعنی y بین دو عدد معین a و b نیست $(a<b)$ زیرا اگر y بین a و b باشد ، در این صورت نمی‌تواند به سمت ∞ میل نماید ، پس y خارج a و b می‌باشد ، یعنی $y\geqslant b$ یا $y\leqslant a$ این نامساویها نشان می‌دهد $y_{max}=a$ و $y_{min}=b$ یعنی y بیشترمینیمم و y کمترماکزیمم است.

مثال ۳: طولها وعرضهای ماکزیمم ومینیمم نسبی منحنی تابع $y=\frac{x+۱}{x^۲+x+۲}$ راهم بدون استفاده از y' وهم با استفاده از y' بیابید.

حل:

$$y=\frac{x+۱}{x^۲+x+۲}\Longrightarrow yx^۲+yx+۲y-x-۱=۰$$

و
$$\Longrightarrow yx^{۲}+(y-۱)x+۲y-۱=۰$$

$$\Delta=(y-۱)^{۲}-۴y(۲y-۱)\geqslant ۰ \Longrightarrow ۷y^{۲}-۲y-۱\leqslant ۰$$

و
$$\Longrightarrow \frac{۱-۲\sqrt{۲}}{۷}\leqslant y\leqslant \frac{۱+۲\sqrt{۲}}{۷} \Longrightarrow y_{max}=\frac{۱+۲\sqrt{۲}}{۷}$$

$$x=-\frac{b}{۲a}=\frac{۱-y}{۲y}=\frac{۱}{۲y}-\frac{۱}{۲}=\frac{۷}{۴\sqrt{۲}+۲}-\frac{۱}{۲}$$

و
$$=\frac{۷(۴\sqrt{۲}-۲)}{۲۸}-\frac{۱}{۲}=\sqrt{۲}-۱$$

$$y_{min}=\frac{۱-۲\sqrt{۲}}{۷} \Longrightarrow x=-\frac{b}{۲a}=\frac{۱-y}{۲y}=-\sqrt{۲}-۱$$

مخرج تابع فوق ریشهٔ حقیقی ندارد ، پس مخرج به ازای جمع مقادیر x ، مخالف صفر بوده یعنی y نمی‌تواند به سمت ∞ میل کند . بنابراین y مجبور است بین دومقدار b و $a(a<b)$ باشد ، چه اگر خارج این دومقدار باشد آن وقت می‌تواند به سمت ∞ میل کند پس $a\leqslant y\leqslant b$ یعنی $y_{max}=b$ و $y_{min}=a$ به عبارت دیگر y بیشتر ماکزیمم و y کمتر مینیمم است حال مسأله را با استفاده از مشتق حل می‌کنیم.

$$y=\frac{x+۱}{x^{۲}+x+۲} \Longrightarrow y'=\frac{-x^{۲}-۲x+۱}{(x^{۲}+x+۲)^{۲}}=۰$$

و
$$\Longrightarrow x^{۲}+۲x-۱=۰ \Longrightarrow x=-۱\pm\sqrt{۲}$$

x	$-\infty$		$-۱-\sqrt{۲}$		$-۱+\sqrt{۲}$		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
			مینیمم		ماکزیمم		

مطابق قضیه‌ای که در کتاب درسی چهارم می‌باشد برای به‌دست آوردن عرضهای ماکزیمم ومینیمم نسبی اگر ریشه‌های مشتق ، مخرج تابع یعنی $x^{۲}+x+۲$ و مشتق مخرج تابع یعنی $۲x+۱$ را صفر نکنند (که در این مسأله این شرایط برقرار است) می‌توان این ریشه‌ها را درمشتق صورت تقسیم برمشتق مخرج قرارداد تا عرضهای ماکزیمم ومینیمم نسبی به دست آیند.

و
$$y=\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{۱}{۲x+۱}$$

$$x=\sqrt{۲}-۱ \Longrightarrow y_{max}=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}-۱}=\frac{۲\sqrt{۲}+۱}{۷}$$

اگر بخواهیم به‌جای x ، $-\sqrt{۲}-۱$ قرار دهیم با مقایسه با x قبلی چون (-۱) تغییر نکرده است و $\sqrt{۲}$ به $-\sqrt{۲}$ تبدیل شده است، کافی است در مقدار y ، (۱) را تغییر ندهیم و $۲\sqrt{۲}$ را به $-۲\sqrt{۲}$ تبدیل کنیم پس: $y_{\min}=\frac{۱-۲\sqrt{۲}}{۷}$

دستور: برای به دست آوردن عرضهای ماکزیمم و مینیمم منحنی توابع کسری $y=\frac{ax^۲+bx+c}{a'x^۲+b'x+c'}$ بدون استفاده از مشتق تابع را طرفین وسطین نموده آن را نسبت به x از درجهٔ دوم مرتب کرده Δ را صفر قرار می‌دهیم از این معادله عرضهای ماکزیمم و مینیمم نسبی منحنی تابع به دست می‌آیند، اگر مخرج تابع ریشه داشته باشد، عرض بیشتر مینیمم و عرض کمتر ماکزیمم و اگر مخرج تابع ریشهٔ حقیقی نداشته باشد عرض بیشتر ماکزیمم و عرض کمتر مینیمم خواهد بود و طولهای ماکزیمم و مینیمم نسبی منحنی تابع از $x=\frac{-b}{۲a}$ ، معادله $\Delta=۰$ به دست می‌آیند.

تمرین

مسألهٔ ۱۰۴: درجهت تغییرات توابع زیر بحث نمایید و مختصات نقاط ماکزیمم یا مینیمم نسبی آنها را بیابید:

۱)
$$f(x)=\begin{cases}۲x+۱ & ، x\leqslant ۴\\ ۱۳-x & ، x>۴\end{cases}$$

۲)
$$f(x)=\begin{cases}۴-(x+۵)^۲ & ، x<-۴\\ ۱۲-(x+۱)^۲ & ، x\geqslant -۴\end{cases}$$

۳)
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{۲۵-(x+۷)^۲} & ، -۱۲\leqslant x\leqslant -۳\\ ۱۲-x^۲ & ، x>-۳\end{cases}$$

۴)
$$f(x)=\begin{cases}۱۲-(x+۵)^۲ & ، x\leqslant -۳\\ ۵-x & ، -۳<x\leqslant -۱\\ \sqrt{۱۰۰-(x-۷)^۲} & ، -۱<x\leqslant ۱۷\end{cases}$$

مسألهٔ ۱۰۵: فرض کنید تابع f روی فاصلهٔ [a , b] و تابع g روی فاصلهٔ [f(a) و f(b)]

صعودی بوده و تابع $g\circ f$ روی فاصله $[a , b]$ تعریف شده باشد ثابت‌کنید تابع $g\circ f$ روی فاصله $[a , b]$ صعودی است.

مسألهٔ ۱۰۶: فرض‌کنید تابع f روی فاصلهٔ I صعودی است. اولا ثابت کنید اگر $g(x)=-f(x)$ باشد، آنگاه g روی فاصلهٔ I نزولی است. ثانیاً اگر $h(x)=\frac{۱}{f(x)}$ و f روی فاصلهٔ I مثبت باشد، آنگاه h روی فاصلهٔ I نزولی است.

مسألهٔ ۱۰۷: طولها وعرضهای نقاط ماکزیمم ومینیمم نسبی توابع زیر را به دست آورده وبا استفاده از y'' تعیین کنید کدام طول مربوط به‌طول نقطهٔ ماکزیمم وکدام طول مربوط به‌طول نقطهٔ مینیمم می‌باشد.

$$y=\frac{۴x+۴}{(x-۱)^{۲}} \quad \text{و} \quad y=\frac{x^{۲}-۲x+۱}{x+۳} \quad \text{و} \quad y=\frac{x-۱}{x^{۲}+۱}$$

مسألهٔ ۱۰۸: در تابع $y=\frac{x+۲m}{x^{۲}-mx-۲}$ ، m را چنان بیابید که مینیمم تابع، ۹ برابر ماکزیمم آن باشد.

مسألهٔ ۱۰۹: معادلهٔ منحنی به صورت:

$$y^{۲}-۲y(x+۲)-(a-۱)x^{۲}+۴x=۰$$

می‌باشد. a را چنان بیابید که عرض ماکزیمم $۲\sqrt{۲}+۲$ باشد.

مسألهٔ ۱۱۰: معادلهٔ منحنی به‌صورت $ax^{۲}+by^{۲}-۲xy-۴y=۰$ می‌باشد a و b را چنان بیابید که $M(۴ , ۴)$ نقطهٔ ماکزیمم منحنی باشد.

مسألهٔ ۱۱۱: یک رابطهٔ مستقل از m بین عرضهای ماکزیمم و مینیمم تابع $y=\frac{x^{۲}-mx+m}{x^{۲}-x+۱}$ موجود است، مطلوب است این رابطه.

مسألهٔ ۱۱۲: با ساده‌ترین روش معادلهٔ خطی را که نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع $y=\frac{x^{۲}-۲x+۱}{x+۳}$ را به‌هم وصل می‌کند بنویسید ونیزاگرخط $y=m$ منحنی تابع را درنقاط A و B قطع کند معادله مکان هندسی وسط AB را وقتی m تغییرمی‌نماید بیابید.

مسألهٔ ۱۱۳: تابع $y=\frac{ax^{۲}+a^{۲}x}{ax-۱}$ که در آن $a\neq ۰$ می‌باشدمفروض است. ثابت کنید به ازای جمیع مقادیر a خطوط مرسوم برنقاط ماکزیمم و مینیمم منحنی تابع دارای امتداد ثابتی می‌باشند:

مسألهٔ ۱۱۴: در تابع $y=\frac{۱}{۳}mx^۳-x^۲-x$ ، حدود m را چنان بیابید که تابع همواره نزولی باشد.

مسألهٔ ۱۱۵: ظرف مکعب مستطیلی با حجم ثابت v چنان می‌سازیم که نسبت طول به عرض قاعدهٔ آن (۲) باشد و قیمت مصالحی که برای ساختن هرواحد مربع قاعده به‌کارمی‌رود ثلث قیمتی باشد که برای هرواحد مربع از بقیه ظرف مصرف می‌شود ، نسبت ارتفاع به عرض قاعده را چنان بیابید که قیمت ساختن ظرف مینیمم باشد.

مسألهٔ ۱۱۶: دوخط راه آهن یکدیگر را به زاویهٔ قائمه قطع می کنند. دو قطار روی این‌دوخط و به‌طرف محل تلاقی حرکت می کنند یکی‌ازایستگاهی که در ۴۰ کیلومتری محل تلاقی است ودیگری ازایستگاهی که در ۵۰ کیلومتری آنجا می‌باشد ، اولی دقیقه‌ای ۸۰۰ مترودومی دقیقه‌ای ۶۰۰ مترسرعت دارد ، پس‌ازچه مدتی ازلحظهٔ شروع حرکت فاصلهٔ بین دوقطارحداقل خواهد بود.

مسألهٔ ۱۱۷: ماکزیمم ومینیمم تابع $y=\sqrt{\frac{(x-۲)^۲+۴}{x^۲+۴}}$ را بیابید.

مسألهٔ ۱۱۸: شعاع قاعده و ارتفاع مخروطی را چنان بیابید که چون برکره‌ای به شعاع R محیط گردد حجمش مینیمم شود.

مسألهٔ ۱۱۹: از نقطهٔ P(a , b) در ناحیه اول خطی چنان رسم می‌کنیم تا محور ox را در A و محور Oy را در B قطع کند و فرض می کنیم $\widehat{BAO}=\theta$ باشد θ را درهریك ازحالات زیر بیابید.

۱: طول AB مینیمم باشد.

۲: $OA+OB$ مینیمم باشد.

۳: OA^n+OB^n مینیمم باشد.

مسألهٔ ۱۲۰: بیضی به معادلهٔ $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ مفروض است. براین بیضی مماسی چنان رسم کنید که طول قسمتی ازمماس واقع بین دومحور مختصات مینیمم شود ، مطلوب است طول این مماس.

مسألهٔ ۱۲۱: روی محور x'x ، n نقطهٔ A و B و C و . . . و L را به فواصل متوالی a ازیکدیگرجدامی‌کنیم نقطه‌ای مانند M را روی محور x'x چنان بیابید که حاصل‌جمع زیرمینیمم باشد:

$$y=\overline{MA}^۲+۲\overline{MB}^۲+۳\overline{MC}^۲+\cdots+n\overline{ML}^۲$$

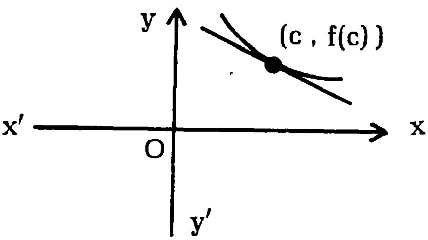
۸

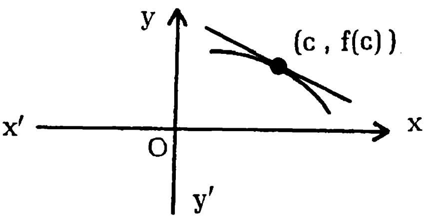
تعیین تقعر و تحدب و نقاط عطف یك منحنی و طریقهٔ به دست آوردن طولهای نقاط عطف بعضی از منحنیهای توابع بدون استفاده از مشتق دوم و تمرینهای آن

الف : تعیین تقعر و تحدب و نقاط عطف یك منحنی

تعریف تقعر و تحدب منحنی تابع f در نقطهٔ c :

می‌گوییم تقعر منحنی تابع f در نقطهٔ $(c , f(c))$ به‌سوی y های مثبت و یا تحدب آن به سوی y های منفی است، اگر $f'(c)$ وجود داشته و فاصلهٔ بازی مانند I که شامل c است طوری یافت شود که برای هر $x \neq c$ در آن فاصله نقطهٔ $(x , f(x))$ واقع برمنحنی تابع f بالای خط مماس برمنحنی در نقطهٔ به طول c باشد و اگر نقطهٔ $(x , f(x))$ واقع برمنحنی تابع f پایین خط مماس برمنحنی در نقطهٔ به‌طول c باشد





می‌گوییم تقعر منحنی در نقطهٔ $(c , f(c))$ به سوی y های منفی و یا تحدب آن به سوی y های مثبت است.

قضیهٔ ۴۵: اگر تابع f روی یك فاصله باز شامل c مشتق پذیر و $f''(c) > 0$ باشد، آنگاه تقعر منحنی تابع f به سوی yهای مثبت است و اگر $f''(c) < 0$ باشد آنگاه تقعر منحنی تابع f به سوی y های منفی است.

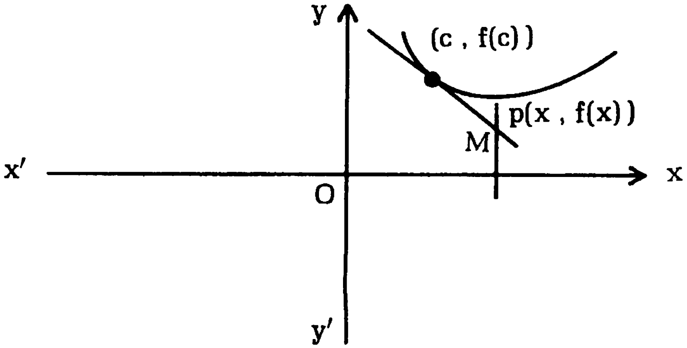
اثبات : به اثبات قسمت اول می‌پردازیم ، مطابق تعریف مشتق دوم تابع f در c ، چون $f'(x)$ مطابق فرض وجود دارد داریم:

$$f''(c) = \underset{x \to c}{\text{حد}} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0$$

وطبق قضیهٔ (۴۲) صفحه ۶۱ یك فاصلهٔ باز I شامل (c) وجود دارد به طوری که برای هر x واقع در این فاصله داریم:

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0 \quad \text{و} \quad x \neq c \qquad (۱)$$

نقطهٔ p به طول x وعرض $f(x)$ را برمنحنی چنان انتخاب می‌کنیم که x متعلق به فاصلهٔ باز I باشد از p خطی موازی محور yها رسم می‌نماییم تاخط مماس برمنحنی درنقطهٔ به طول c را در M قطع نماید، برای اینکه ثابت کنیم تقعر منحنی در نقطهٔ به طول c به سوی yهای مثبت است ، باید طبق تعریف ثابت نماییم ، نقطهٔ p بالای مماس در نقطهٔ به طول c می باشد ، یعنی باید ثابت نماییم $\overline{MP} > 0$ است ، چون $\overline{MP} = y_P - y_M$ می‌باشد. برای به دست آوردن عرض نقطهٔ M باید معادلهٔ مماس برمنحنی را در نقطهٔ به طول c بنویسیم می‌دانیم ضریب زاویهٔ مماس دراین نقطه برابر $f'(c)$ ، پس معادلهٔ مماس به‌صورت $y = f(c) + f'(c)(x - c)$ بوده و y_M درنقطهٔ به‌طول x این‌مماس برابر $f(c) + f'(c)(x - c)$ می‌باشد و داریم:



$$\overline{MP}=y_P-y_M=f(x)-[f(c)+f'(c)(x-c)]$$

$$=[f(x)-f(c)]-f'(c)(x-c) \qquad (۲)$$

چون تابع f روی فاصلهٔ باز I که شامل (c) است مشتق‌پذیر بوده ، پس طبق قضیهٔ (۳۲) صفحه ۳۹ روی این فاصله پیوسته است، یعنی تابع f روی فاصلهٔ بسته $[c\ ,\ x]$ یا $[x\ ,\ c]$ که زیر فاصلهٔ I می‌باشند پیوسته و روی فاصلهٔ باز $(c\ ,\ x)$ یا (x,c) دارای مشتق است ، پس طبق قضیهٔ لاگرانژ (قضیهٔ ۴۰) صفحه ۵۷ عددی مانند K بین x و c وجود دارد، به طوری که:

$$f'(K)=\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \Longrightarrow f(x)-f(c)=(x-c)f'(k)$$

اگر به جای $f(x)-f(c)$ دررابطه ❷ ، $(x-c)f'(K)$ را قراردهیم داریم:

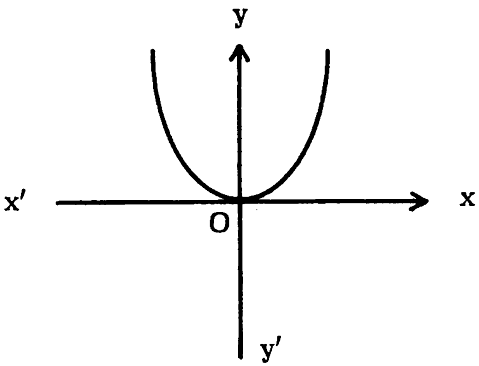
$$\overline{MP}=(x-c)f'(K)-(x-c)f'(c)=(x-c)[f'(k)-f'(c)] \qquad (۳)$$

برای اینکه ثابت کنیم $\overline{MP}$ مثبت است ، باید ثابت نماییم هردو عامل طرف راست رابطهٔ (۳) متحدالعلامه می‌باشند حال درنامساوی ❶ به جای x ، K قرارداده داریم:

$$\frac{f'(K)-f'(c)}{K-c}>۰ \qquad (۴)$$

اگر $x-c>۰$ یا $x>c$ باشد، چون K بین x و c است، پس $K-c>۰$ یا $K>c$ و طبق نامساوی ❹ $f'(K)-f'(c)>۰$ می‌باشد ، یعنی اگر $x-c>۰$ باشد $f'(K)-f'c>۰$ و اگر $x-c<۰$ یا $x<c$ چون K بین x و c است پس $K<c$ یا $K-c<۰$ و طبق نامساوی ❹ $f'(K)-f'(c)<۰$ می‌باشد ، یعنی اگر $x-c<۰$ باشد $f'(K)-f'(c)<۰$ خواهد بود و حکم ثابت است . اثبات در حالتی که $f''(c)<۰$ می‌باشد ، مشابه حالت $f''(c)>۰$ است.

تبصره : عکس قضیهٔ بالا درست نیست زیرا مثلا در تابع $f(x)=x^۴$ ، $f''(۰)$ بزرگتر یا کوچکتر از صفر نیست بلکه $f''(۰)=۰$ بوده و با رسم شکل معلوم می‌شود که تقعر منحنی درمبدأ مختصات به سوی yهای مثبت است.



بنابراین برای مقعر بودن منحنی درنقطهٔ به طول c ، $f''(c) > ۰$ یا $f''(c) < ۰$ یك شرط لازم نیست، بلکه یك شرط کافی برای آنکه نمودار تابع f درنقطهٔ $(c , f(c))$ تقعرش به سوی yهای مثبت باشد، آن است که $f''(c)>۰$ ویك شرط کافی برای آنکه نمودار تابع f در نقطهٔ $(c , f(c))$ تقعرش به سوی yهـای منفی باشد آن است کـه $f''(c)<۰$ باشد.

تعریف نقطهٔ عطف منحنی:

نقطهٔ $(c , f(c))$ را نقطهٔ عطف منحنی تابع f نامند. هرگاه مماس در نقطهٔ c وجود داشته و فاصلهٔ بازی مانند I شامل (c) بتوان یافت به‌طوری‌که $f''(x)$ حول نقطهٔ به طول c روی فاصلهٔ I تغییر علامت دهد، یعنی اگر $x > c$ باشد $f''(x) > ۰$ و اگر $x < c$ باشد $f''(x) < ۰$ و یا اگـر $x > c$ باشد $f''(x) < ۰$ و اگر $x < c$ باشد $f''(x) > ۰$ باشد.

قضیهٔ ۴۶: اگر برای تابع f روی یك فاصلهٔ باز شامل عدد (c) ، f' و f'' وجود داشته باشند و $(c , f(x))$ یك نقطهٔ عطف منحنی تابع f باشد ، آنگاه $f''(c)=۰$ است.

اثبات: چون $f'(x)$ روی فاصلهٔ باز داده شده وجود دارد پس می‌توان فرض کـرد $h(x)=f'(x)$ ، با توجه به اینکه $f''(x)$ وجود دارد پس $h'(x)=f''(x)$ وچون c طول نقطهٔ عطف منحنی تابع f می‌باشد طبق تعریف نقطهٔ عطف $f''(x)$ درحول (c) تغییر علامت می‌دهد ، بنابراین $h'(x)$ در حول (c) تغییر علامت خواهد داد با توجه به نتیجهٔ قضیهٔ ۴۳ صفحه ۶۲ تابع h در (c) دارای ماکزیمم یا مینیمم نسبی می‌باشد ، از طرفی چون $h'(c)$ وجود دارد ، پس طبق قضیهٔ ۳۳ (صفحهٔ ۴۰) داریم $h'(c)=۰$ بنابراین:

$$h'(c)=f''(c)=۰$$

وحکم ثابت است.

تبصرهٔ ۱: عکس قضیهٔ فوق درست نیست ، یعنی اگـر $f''(c)=۰$ باشد ، ممکن است تابع f در c نقطهٔ عطف نداشته باشد، مثلا در تابع $f(x)=x^۴$ ، $f'(x)=۴x^۳$ و $f''(x)=۱۲x^۲$ و $f''(۰)=۰$ مشتق دوم تابع درصفر برابر صفراست ، ولی با توجه به نمودارتابع مبدأ مختصات نقطهٔ عطف منحنی نمی‌باشد بلکه نقطهٔ مینیمم نسبی است زیرا $f'(x)$ حول صفرازمنفی به مثبت تغییرعلامت می‌دهد. همچنین ممکن است برای تابع f ، $f''(c)$ وجـود نداشته باشد ، ولی c طول نقطهٔ عطف منحنی تابع f باشد

مثلاً درتابع $f(x)=(x-۱)^{\frac{۱}{۳}}$ داریم:

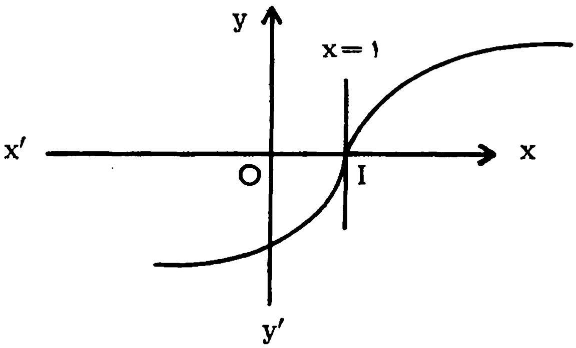
و

$$f'(x)=\frac{۱}{۳}(x-۱)^{-\frac{۲}{۳}}$$

$$f''(x)=-\frac{۲}{۹}(x-۱)^{-\frac{۵}{۳}}=\frac{-۲}{۹(x-۱)\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}}$$

نقطهٔ I(۱ , ۰) ، نقطهٔ عطف منحنی تابع f است زیرا $f''(x)$ حول (۱) تغییرعلامت می‌دهد ، اما ملاحظه می‌شود $f''(۱)$ وجود ندارد. به جدول تغییرات ورسم نمودارتابع توجه نمایید مماس در I موازی y ها است چون حد $f'(x)$ وقتی $x\to ۱$ برابر $+\infty$ می‌باشد.

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
y′			+		$+\infty$			+	
y	$-\infty$	↗	−۱	↗	۰	↗	۱	↗	$+\infty$



مثال: درتقعرمنحنی تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲ ، & x<۰ \\ -x^۲ ، & x\geqslant ۰ \end{cases}$ بحث نموده ونقطهٔ عطف نمودار تابع را بیابید.

حل: تابع درتمام‌نقاط پیوسته بوده وداریم:

و
$$f'(x)=\begin{cases} ۲x \text{ ، } x<۰ \\ -۲x \text{ ، } x>۰ \end{cases}$$

و
$$f'_{+}(۰)=\underset{x\to ۰^{+}}{\text{حد}}\ \frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\underset{x\to ۰^{+}}{\text{حد}}\ \frac{-x^{۲}}{x}=\underset{x\to ۰^{+}}{\text{حد}}\ (-x)=۰$$

$$f'_{-}(۰)=\underset{x\to ۰^{-}}{\text{حد}}\ \frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\underset{x\to ۰^{-}}{\text{حد}}\ \frac{x^{۲}}{x}=\underset{x\to ۰^{-}}{\text{حد}}\ (x)=۰$$

بنابراین $f'(۰)=۰$ می‌باشد پس داریم

$$f'(x) \text{ ، } f'(x)=\begin{cases} ۲x \text{ ، } x<۰ \\ -۲x \text{ ، } x\geqslant ۰ \end{cases}$$

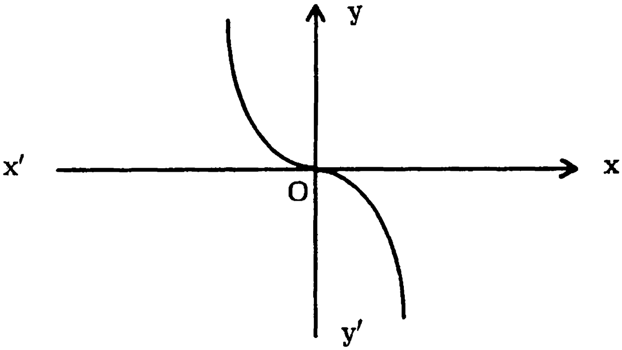
روی اعداد حقیقی پیوسته بوده وداریم:

و
$$f''(x)=\begin{cases} ۲ \text{ ، } x<۰ \\ -۲ \text{ ، } x>۰ \end{cases}$$

و
$$f''_{+}(۰)=\underset{x\to ۰^{+}}{\text{حد}}\frac{f'(x)-f'(۰)}{x-۰}=\underset{x\to ۰^{+}}{\text{حد}}\ \frac{-۲x}{x}=\underset{x\to ۰^{+}}{\text{حد}}\ (-۲)=-۲$$

$$f''_{-}(۰)=\underset{x\to ۰^{-}}{\text{حد}}\ \frac{f'(x)-f'(۰)}{x-۰}=\underset{x\to ۰^{-}}{\text{حد}}\ \frac{۲x}{x}=\underset{x\to ۰^{-}}{\text{حد}}\ (۲)=۲$$

بنابراین $f''(۰)$ وجود ندارد زیرا مشتق دوم راست و چپ آن درصفر برابر نمی‌باشند. مماس برمنحنی در مبدأ مختصات وجود داشته که همان محور xها است و $f''(x)$ در حول صفر تغییر علامت داده پس مبدأ مختصات نقطهٔ عطف منحنی می‌باشد به ازای $x<۰$ ، $f''(x)>۰$ یعنی تقعرمنحنی به‌سوی yهای مثبت وبه ازای $x>۰$ ، $f''(x)<۰$ یعنی تقعر منحنی به سوی yهای منفی است، به شکل نمودار تابع توجه نمایید.



تبصرهٔ۲: همان‌طور که درقضیهٔ ۴۵ (صفحهٔ۷۱) بیان نمـودیم اگر در نقطهٔ M به‌طول c، $f''(c) > ۰$ باشدگوییم تقعرمنحنی درنقطهٔ M به‌سوی yهای مثبت واگر $f''(c) < ۰$ باشدگوییم تقعر منحنی درنقطهٔ M به سوی y های منفی است، اما اگر $f''(c)=۰$ باشد دراین صورت مشتقات بعدی را تشکیل داده اگرمشتقات بعدی به ازای (c) صفر شوند واولین مشتق ازمرتبهٔ زوج مخالف صفر ومثبت باشد، تقعر منحنی درنقطهٔ M به سوی yهـای مثبت و اگر منفی باشد، تقعر منحنی درنقطهٔ M به سوی yهـای منفی است واگر اولین مشتق از مرتبهٔ فرد به ازای (c) مخالف صفر باشد، نقطهٔ M نقطهٔ عطف منحنی خواهد بود، مثلا درتابع $f(x)=x^۴$ داریم:

$$f'(x)=۴x^۳ \text{ و } f''(x)=۱۲x^۲ \text{ و } f'''(x)=۲۴x \text{ و } f^{(۴)}(x)=۲۴$$

ملاحظه می‌شود $f''(۰)=۰$ و $f'''(۰)=۰$ و $f^{(۴)}(۰)=۲۴$ چون مشتق مرتبهٔ چهارم که ازمرتبه زوج است مثبت می‌باشد، پس تقعرمنحنی درمبدأ مختصات به سوی yهـای مثبت است ویا درتابع $f(x)=x^۵$ داریم:

و

$$f'(x)=۵x^۴ \text{ و } f''(x)=۲۰x^۳ \text{ و } f'''(x)=۶۰x^۲$$

$$f^{(۴)}(x)=۱۲۰x \text{ و } f^{(۵)}(x)=۱۲۰$$

ملاحظه می‌شود:

$$f''(۰)=۰ \text{ و } f'''(۰)=۰ \text{ و } f^{(۴)}(۰)=۰ \text{ و } f^{(۵)}(۰)=۱۲۰$$

مشتق مرتبه پنجم که‌ازمرتبهٔ فرد است مخالف صفرمی‌باشد، پس مبدأ مختصات‌نقطهٔ عطف منحنی است. اثبات مطالب بالا چون به طریق بسط تیلور می‌باشد از آن صرف‌نظر می‌نماییم.

ب : طریقهٔ به دست آوردن طولهای نقاط عطف بعضی از منحنیهای توابع بدون استفاده از مشتق دوم

مسأله: اگر منحنی تابع $y=\frac{۲x+۱}{۲x^۲+۱}$ دارای سه نقطهٔ عطف باشد بدون استفاده از y'' نشان دهید نقاط عطف آن بر یک استقامتند.

حل: خط $y=ax+b$ را با منحنی قطع داده داریم:

$$\begin{cases} y=\frac{۲x+۱}{۲x^۲+۱} \\ y=ax+b \end{cases} \Longrightarrow ۲ax^۳+۲bx^۲+(a-۲)x+b-۱=۰ \quad ❶$$

روابط بین ضرایب وریشه‌ها را تشکیل داده بین آنها a و b را حذف می‌کنیم داریم:

$$\begin{cases} x_۱+x_۲+x_۳=-\frac{b}{a} \\ x_۱x_۲+x_۱x_۳+x_۲x_۳=\frac{a-۲}{۲a}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{a} \Longrightarrow \\ x_۱x_۲x_۳=\frac{۱-b}{۲a}=\frac{۱}{۲a}-\frac{b}{۲a} \end{cases}$$

$$۴x_۱x_۲x_۳+۲(x_۱x_۲+x_۱x_۳+x_۲x_۳)-۲(x_۱+x_۲+x_۳)=۱$$

رابطهٔ بالا طولهای سه نقطه از منحنی را می‌دهد که بریک استقامتند ومی‌دانیم نقطهٔ عطف منحنی نقطه‌ای از منحنی است که مماس درآن نقطه از منحنی عبور می‌کند ، اگر خط $y=ax+b$ را ازیکی ازنقاط عطف عبوردهیم دراین صورت داریم:

$$x_۱=x_۲=x_۳=x_{عطف}$$

بنابراین معادلهٔ زیر:

$$۴x^۳+۶x^۲-۶x-۱=۰ \quad ❷$$

طولهای نقاط عطف را می‌دهد که درواقع همان معادله $y''=۰$ می‌باشد ازطرفی معادلهٔ ❶ طولهای سه نقطه ازمنحنی را می‌دهد که بریک استقامتند ، شرط آنکه نقاط عطف بریک استقامت باشند آن است که معادلات ۱ و ۲ دارای ریشه‌های مساوی باشند واین درصورتی است که ضرایب آنها متناسب باشند یعنی:

$$\frac{۲a}{۴}=\frac{۲b}{۶}=\frac{a-۲}{-۶}=\frac{b-۱}{-۱}$$

و

$$\frac{a}{۲}=\frac{a-۲}{-۶} \Longrightarrow -۶a=۲a-۴ \Longrightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

$$b=\frac{۳}{۲}a \Longrightarrow b=\frac{۳}{۴}$$

اگرمقادیر a و b در رابطهٔ $\frac{a-۲}{-۶}=\frac{b-۱}{-۱}$ صدق کنند حکم ثابت است.

$$\frac{\frac{۱}{۲}-۲}{-۶}=\frac{\frac{۳}{۴}-۱}{-۱} \Longrightarrow \frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

و معادله خطی که نقاط عطف را به هم وصل می‌کند به صورت $y=\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۴}$ می‌باشد روش بالا طرز به دست آوردن طولهای نقاط عطف را بدون استفاده از y'' نشان می‌دهد.

تمرین

مسألهٔ ۱۲۲: نقاط عطف منحنی توابع زیر را درصورت وجود به‌دست‌آورید ودر تقعر آنها بحث کنید:

۱) $f(x)=(x-۲)^{\frac{۳}{۲}}$

۲) $f(x)=\begin{cases} x^۲ ، & x<0 \\ -x^۲ ، & x\geqslant 0 \end{cases}$

۳) $f(x)=۳x^۲+x|x|$

۴) $f(x)=\begin{cases} x^۲ ، & x<۱ \\ x^۳-۴x^۲+۷x-۳ ، & x\geqslant ۱ \end{cases}$

۵) $f(x)=(۲x-۶)^{\frac{۳}{۲}}+۱$

۶) $f(x)=\sqrt[۳]{(x-۱)^۵}$

مسألهٔ ۱۲۳: نشان دهید تقعر منحنی به معادلهٔ $y=\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x}$ همواره به سوی y های مثبت است.

مسألهٔ ۱۲۴: در تابع $f(x)=ax^۴+bx^۳+cx^۲+dx+e$ ، ضرایب را چنان بیابید که منحنی تابع ازمبدأ بگذرد و درنقطهٔ $I(۱,-۱)$ دارای عطف بوده و محور تقارن منحنی تابع محور yها باشد.

مسألهٔ ۱۲۵: اگر مشتق دوم تابع f در فاصلهٔ باز (a,b) وجود داشته و برای $c\in(a,b)$ ، $f''(c)=۰$ باشد، همچنین $f'''(c)$ وجود داشته و مخالف صفر باشد، آنگاه $I(c,f(c))$ یك نقطهٔ عطف نمودارتابع f خواهد بود.

مسألهٔ ۱۲۶: تابع $y=\frac{x^۲+bx+c}{x^۲+px+q}$ مفروض است:

اولاً: مقادیر c و b و p و q را چنان بیابید که به ازای $x=۱$ تابع دارای ماکزیممی برابر(۳) وبه ازای $x=-۱$ تابع دارای مینیممی برابر(۳—) باشد.

ثانیاً: ثابت کنید برای آنکه سه نقطه از منحنی به معادلهٔ $y=\frac{x^۲+۶x+۱}{x^۲+\frac{۲}{۳}x+۱}$ بریك استقامت باشند، باید داشته باشیم:

$$x_۱x_۲x_۳-(x_۱+x_۲+x_۳)=\frac{۲}{۳}$$

ثالثاً: به‌کمك رابطهٔ ثانیاً ثابت کنید منحنی دارای سه نقطهٔ عطف واقع بریك استقامت می‌باشد.

رابعاً: به‌کمك رابطهٔ ثانیاً ثابت کنیدازهرنقطه به طول a واقع برمنحنی‌دومماس به غیراز مماس در$x=a$ می‌توان‌برآن رسم کرد که طولهای نقاط تماس ریشه‌های معادلهٔ $۳ax^۲-۶x-(۳a+۲)=۰$ می‌باشند.

۹

پوش منحنیهای مسطحه و تمرینهای آن

تعریف: منحنیهای به معادلهٔ $f(x , y , \lambda)=۰$ را که‌در آن λ پارامتری است متغیر در نظر گرفته به ازای هرمقدار λ یك منحنی مربوط به‌آن را داشته ، منحنی را که برتمام این منحنیها مماس می‌باشد پوش منحنیها نامند.

مثال: اگر m پارامترمتغیری باشد ، نشان دهید منحنیهای به معادلهٔ $y=\frac{۲x^۲+m^۲}{x-۲m}$ به ازای تمام مقادیر m بجز $m=۰$ بردوخط ثابت‌که معادله آنها را تعیین خواهید کرد مماسند.

حل:

$$\begin{cases} y=\dfrac{۲x^۲+m^۲}{x-۲m} \\ y=ax+b \end{cases} \Longrightarrow (a-۲)x^۲+(b-۲am)x-(m^۲+۲mb)=۰$$

$$\Delta=۴(a^۲+a-۲)m^۲+۴b(a-۴)m+b^۲\equiv ۰$$

چون به ازای جمیع مقادیر m ، Δ صفراست ، پس داریم:

$$\begin{cases} a^۲+a-۲=۰ \Longrightarrow a=۱ \text{ و } -۲ \\ b(a-۴)=۰ \Longrightarrow b=۰ \text{ و } a=۴ \\ b^۲=۰ \Longrightarrow b=۰ \end{cases}$$

بنابراین معادله دو خط ثابت به صورتهای $y=x$ و $y=-۲x$ می‌باشند ، این دو خط پوش منحنیها هستند. برای به‌دست‌آوردن‌معادلهٔ پوش‌می‌توان پارامتر λ را بین‌معادلات

❶ $$\begin{cases} f(x , y , \lambda)=۰ \\ f'_{\lambda}(x , y , \lambda)=۰ \end{cases}$$

حذف نمود ، استدلال این روش در سطح متوسطه نیست اما چون‌کاربردآن زیاد می‌باشد فقط روش را بیان نمودیم مثلاً پوش منحنیهای بالاباین روش چنین به دست می‌آید:

$$\begin{cases} 2x^2-xy+2my+m^2=0 \\ f'_m=2y+2m=0 \Rightarrow m=-y \end{cases} \Rightarrow 2x^2-xy-2y^2+y^2=0$$

$$\Rightarrow y^2+xy-2x^2=0 \Rightarrow y=\frac{-x\pm 3x}{2}$$

$$\Rightarrow y=x \text{ و } y=-2x$$

چون می‌دانیم معادلات (۱) شرط ریشه مضاعف را نسبت به پارامتر λ بیان می‌کنند، پس می‌توان معادله‌را نسبت به m از درجهٔ دوم‌مرتب نموده، مبین‌آن را صفر قراردهیم بنا براین داریم:

$$m^2+2ym+2x^2-yx=0 \text{ و } \Delta'=y^2+yx-2x^2=0 \Rightarrow$$
$$y=x \text{ و } y=-2x$$

تمرین

مسألهٔ ۱۲۷: اگر m پارامترمتغیری باشد، معادلهٔ پوش منحنیهای زیررا بیابید:

$$y_1=mx+\frac{3}{m} \text{ و } y_2=\frac{4x^2-mx+m^2}{x-m} \text{ و } y_3=\frac{2}{m}\left(1-\frac{x}{m}\right)$$

مسألهٔ ۱۲۸: تابع $y=(m+1)x^2-(6m+\alpha)x+8m+8$ مفروض است، ثابت‌کنید اگر α عددی ثابت و m پارامترتابع و A و B دونقطه ثابت منحنی‌تابع باشند، عمود منصف AB با تغییر α همواره بریک سهمی ثابت مماس است.

مسألهٔ ۱۲۹: پوش قطعه خط مستقیم AB، به طول ثابت l راکه برمحورهای متعامد مختصات متکی بوده و تغییروضع می‌دهد، بیابید.

۱۰

مطالبی دربارهٔ مجانبهای منحنی

مسألهٔ ۱: آیا منحنی به معادلهٔ $y^۳(x^۲-۱)+۳xy(x+۱)+۱۲x^۲(x-۱)=۰$ دارای مجانبهایی به موازات yها و xها می‌باشد؟

حل: برای به دست‌آوردن مجانبهای موازی yهـا، y را به سمت بینهایت میل داده اگربرای x عدد معین a به دست‌آید یعنی x به سمت a میل‌کند، گوییم $x=a$ مجانب موازی yها می‌باشد، طرفین معادله را بر $y^۳$ کـه درجه‌اش از yهـای‌دیگر بیشتر است بخش نموده، داریم:

$$(x^۲-۱)+\frac{۳x(x+۱)}{y^۲}+\frac{۱۲x^۲(x-۱)}{y^۳}=۰$$

اگر $\alpha=\frac{۱}{y}$ می‌دانیم شرط لازم و کافی برای‌آنکه حد $\frac{۱}{y}$، صفر باشدآن است کـه y به‌سمت‌بینهایت‌میل‌کند.(قضیهٔ ۲۰) صفحه ۱۱۹ اگر به‌جای y مساویش $\frac{۱}{\alpha}$ را قرار دهیم، داریم:

$$(x^۲-۱)+۳\alpha^۲x(x+۱)+۱۲\alpha^۳x^۲(x-۱)=۰$$

$$\underset{\alpha\to ۰}{\text{حد}}(x^۲-۱)+\underset{\alpha\to ۰}{\text{حد}}۳\alpha^۲x(x+۱)+\underset{\alpha\to ۰}{\text{حد}}۱۲\alpha^۳x^۲(x-۱)=۰$$

$$\Longrightarrow \underset{\alpha\to ۰}{\text{حد}}(x^۲-۱)=۰ \Longrightarrow x\to \pm ۱$$

ممکن است سؤال شود، چرا برای حدگرفتن ازطریقهٔ طولانی استفاده شده، دلیلش‌آن است‌که در تعمیم قضیهٔ۲ (صفحه۸) باید x به‌سمت عدد معین a میل‌کند ودر اینجا $y\to\infty$ معین نیست. این مسأله نشان می‌دهد کـه برای به دست آوردن مجانبهای قائم ضریب بزرگترین درجهٔ y را مساوی صفرقرارمی‌دهیم.

حال اگر x به سمت بینهایت میل کند و y به سمت a میل کند گوییم $y=a$ مجانب افقی است. اگر معادله را برحسب قوای نزولی x مرتب نماییم وطرفین را بر $x^{۳}$ بخش کنیم و x را به سمت بینهایت میل دهیم، ضریب بزرگترین درجه یعنی $x^{۳}$ که ۱۲ می باشد، مخالف صفر است پس منحنی مجانب موازی xها ندارد. بنابراین برای یافتن مجانبهای موازی xها معادلهٔ منحنی را برحسب قوای نزولی x مرتب کرده ضریب بزرگترین درجهٔ x را مساوی صفرقرارمی‌دهیم.

مسألهٔ ۴: معادلهٔ مجانب مایل منحنی به معادلهٔ $x^{۳}+y^{۳}-۳xy=۰$ را بیابید.

حل: می‌دانیم ضریب زاویهٔ مجانب مایل منحنی $m=\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\,\frac{y}{x}$ حال در معادلهٔ منحنی به جای y ، mx قرار می‌دهیم. داریم $x^{۳}+m^{۳}x^{۳}-۳mx^{۲}=۰$ طرفین را بر $x^{۳}$ بخش کرده داریم $۱+m^{۳}-\frac{۳m}{x}=۰$ اگر x به سمت بینهایت میل کند m به سمت $(۱-)$ میل می‌نماید، بنابراین اگر معادلهٔ منحنی $f(x,y)=۰$ را برحسب جمله‌های همگن از x و y با قوای نزولی به صورت زیرمرتب کنیم داریم:

$$f(x,y)=\varphi_{n}(x,y)+\varphi_{n-۱}(x,y)+\cdots=۰$$

حال اگر به جای y ، mx قرارداده وطرفین را بر x^{n} بخش کنیم داریم:

$$x^{n}\varphi_{n}(۱,m)+x^{n-۱}\varphi_{n-۱}(۱,m)+\cdots=۰$$

$$\varphi_{n}(۱,m)+\frac{\varphi_{n-۱}(۱,m)}{x}+\cdots=۰$$

اگر x به سمت بینهایت میل کند $\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\,\varphi_{n}(۱,m)=۰$ ، بوده این معادله ضریب زوایای مجانبهای مایل را می‌دهد که درمسألهٔ بالا چنانچه دیدیم:

$$m=-۱ \quad \text{یا} \quad \varphi_{۳}(۱,m)=۱+m^{۳}=۰$$

می‌باشد پس معادلهٔ مجانب مایل به صورت $y=-x+h$ که چون در معادلهٔ منحنی قراردهیم داریم:

$$۳x^{۲}(۱+h)-۳h(۱+h)x+h^{۳}=۰ \Longrightarrow$$

$$۳(۱+h)-\frac{۳h(۱+h)}{x}+\frac{h^{۳}}{x^{۲}}=۰$$

اگر x را به سمت بینهایت میل دهیم $۳(۱+h)$ به‌سمت صفرمیل کرده و $h=-۱$ می‌باشد ومعادله مجانب مایل به صورت $y=-x-۱$ خواهد بود.

قضیهٔ ۴۷: مسائل (۱) و (۲) مربوط بـه مجانبها نشان می‌دهـد. برای به دست آوردن معادلات مجانبهای منحنی به معادلهٔ $f(x, y) = 0$ اگرضریب بزرگترین درجه نسبت به y را صفر قرار دهیم معادلات مجانبهای قائم واگرضریب بزرگترین درجه نسبت به x را صفرقرار دهیم معادلات مجانبهای افقی بـه دست می‌آیند و برای به دست‌آوردن ضریب زوایای مجانبهای مایل کـه آنها را m می‌گیریم معادلهٔ منحنی را برحسب جمله‌های همگن از x و y وبا قوای نزولی به صورت :

$$f(x , y) = \varphi_n(x , y) + \varphi_{n-1}(x , y) + \cdots = 0$$

مرتب‌کرده معادلهٔ $\varphi_n(1 , m) = 0$ ضریب زوایای مجانبها را می‌دهد و برای به‌دست آوردن h عرض ازمبدأ معادلهٔ مجانب $y = mx + h$ را درمعادله منحنی برده ضریب بزرگترین درجه x را صفرقرارداده، h به دست می‌آید.

۱۱

طرز تشخیص مقاطع مخروطی

قضیهٔ ۴۸: می‌دانیم معادلهٔ مقطع مخروطی درحالت‌کلی به صورت:

$$f(x , y)=Ax^{۲}+۲Bxy+cy^{۲}+۲Dx+۲Ey+F=۰$$

می‌باشد که در آن A و B و C هرسه باهم صفر نمی‌باشند، ثابت کنید اگر $B^{۲}-AC>۰$ باشد، منحنی هذلولی واگر $B^{۲}-AC<۰$ باشد، منحنی بیضی واگر $B^{۲}-AC=۰$ باشد، منحنی سهمی است ودرحالت اخیرچه موقع منحنی تبدیل به دوخط می‌گردد ونیز به چه شرط به دایره تبدیل می‌شود.

اثبات: برای به دست‌آوردن ضریب زوایای مجانبها در:

$$\varphi(x , y)=Ax^{۲}+۲Bxy+Cy^{۲}$$

x را به (۱) و y را به m تبدیل‌کرده مساوی صفرقرارمی‌دهیم، یعنی:

$$\varphi(۱ , m)=Cm^{۲}+۲Bm+A=۰$$

اگر $\Delta'=B^{۲}-AC>۰$ باشد، منحنی دارای دوامتداد مجانب بوده یعنی هذلولی است واگر $\Delta'<۰$ باشد، منحنی دارای امتداد مجانب نبوده، یعنی بیضی است و اگر $\Delta'=۰$ باشد، امتداد مجانبها برهم منطبق‌بوده و می‌گوییم‌منحنی ازنوع‌سهمی‌است، دراین حالت $m=\frac{-B}{C}$ وچون طرفین‌رابطه $B^{۲}-AC=۰$ را بر $B\times C$ بخش کنیم، داریم $\frac{B}{C}=\frac{A}{B}$ پس $m=\frac{-A}{B}$ می‌باشد، حال اگر طرفین معادله مقطع مخروطی را بر A بخش نماییم داریم:

$$x^{۲}+\frac{۲B}{A}xy+\frac{C}{A}y^{۲}+\frac{۲D}{A}x+\frac{۲E}{A}y+\frac{F}{A}=۰$$

چون طرفین $B^{۲}-AC=۰$ را بر $A^{۲}$ تقسیم نماییم داریم $\frac{B^{۲}}{A^{۲}}=\frac{C}{A}$ چون به

جای $\frac{C}{A}$ دررابطهٔ مقطع مخروطی $\frac{B^{۲}}{A^{۲}}$ را قراردهیم داریم:

$$x^{۲}+\frac{۲B}{A}xy+\frac{B^{۲}}{A^{۲}}y^{۲}+\frac{۲D}{A}x+\frac{۲E}{A}y+\frac{F}{A}=۰$$

یا :

$$\left(x+\frac{B}{A}y\right)^{۲}+\frac{۲D}{A}x+\frac{۲E}{A}y+\frac{F}{A}=۰$$

یا :

$$(Ax+By)^{۲}+۲DAx+۲EAy+FA=۰ \qquad ❶$$

چون ضریب زاویه خط $Ax+By=۰$ برابر $\frac{-A}{B}$ می‌باشد ، پس‌این خط معادله امتداد مجانب می‌باشد ، چنانچه‌خط $DAx+EAy=۰$ یا $Dx+Ey=۰$ موازی مجانب نباشد ، معادلهٔ مقطع مخروطی نمایش سهمی می‌باشد و اگر خط $Dx+Ey=۰$ موازی $Ax+By=۰$ باشد ، داریم:

$$DAx+EAy=K(Ax+By)$$

بنابراین معادله ❶ به صورت:

$$(Ax+By)^{۲}+۲K(Ax+By)+FA=۰$$

ویا به‌صورت:

$$(Ax+By+K)^{۲}+FA-K^{۲}=۰$$

یا:

$$Ax+By+K=\pm\sqrt{K^{۲}-FA}$$

که نمایش دوخط می‌باشد درمی‌آید. ضمناً اگر $A=C\neq۰$ و $B=۰$ باشدطرفین معادله مخروطی را بر A بخش‌کرده داریم:

$$x^{۲}+\frac{۲D}{A}x+y^{۲}+\frac{۲E}{A}y+\frac{F}{A}=۰$$

یا:

$$\left(x+\frac{D}{A}\right)^{۲}-\frac{D^{۲}}{A^{۲}}+\left(y+\frac{E}{A}\right)^{۲}-\frac{E^{۲}}{A^{۲}}+\frac{F}{A}=۰$$

یا:

$$\left(x+\frac{D}{A}\right)^{۲}+\left(y+\frac{E}{A}\right)^{۲}=\frac{D^{۲}}{A^{۲}}+\frac{E^{۲}}{A^{۲}}-\frac{F}{A}$$

اگر $\frac{D^۲}{A^۲}+\frac{E^۲}{A^۲}-\frac{F}{A}>۰$ یا $D^۲+E^۲-FA>۰$ باشد معادلهٔ بالا معادلهٔ دایره به مرکز $C\left(\frac{-D}{A}, \frac{-E}{A}\right)$ و به‌شعاع $R=\sqrt{\frac{D^۲}{A^۲}+\frac{E^۲}{A^۲}-\frac{F}{A}}$ می‌باشد.

۱۲

مطالبی دربارهٔ تقارن و حل دو مسألهٔ مهم

۱: منحنی به معادلهٔ $y=\pm f(x)\sqrt{g(x)}$ محور تقارنش محور x ها می‌باشد. زیرا اگر در معادلهٔ $y^{۲}=f^{۲}(x)g(x)$ ، y را به $-y$ تبدیل نماییم معادله تغییر نمی‌کند.

۲: منحنی به معادلهٔ $y=a\pm f(x)\sqrt{g(x)}$ ، محور تقارنش خط $y=a$ می‌باشد، زیرا اگر مبدأ مختصات را به نقطهٔ $O'(۰\,,\,a)$ به موازات خود انتقال دهیم داریم:

$$x=X+۰ \text{ و } y=Y+a \implies Y=\pm f(X)\sqrt{g(X)}$$

پس طبق قسمت (۱) محور تقارن منحنی اخیر محور xهای جدید یعنی خط $y=a$ می‌باشد.

قضیهٔ ۴۹: اگر معادلهٔ $f(x\,,\,y)=Ax^{۲}+۲Bxy+cy^{۲}+۲Dx+۲Ey+F=۰$ نمایش بیضی یا هذلولی و یا دایره باشد تحقیق کنید مختصات مرکز تقارن منحنی از حل دستگاه $\begin{cases} f'_x(x\,,\,y)=۰\\ f'_y(x\,,\,y)=۰\end{cases}$ به دست می‌آید که $f'_x(x,y)$ ، یعنی مشتق $f(x\,,\,y)$ نسبت به x وقتی y ثابت است و نیز $f'_y(x\,,\,y)$ یعنی مشتق $f(x\,,\,y)$ نسبت به y وقتی x ثابت است.

اثبات: مرکز تقارن منحنی را $O'(\alpha\,,\,\beta)$ فرض نموده محورها را به نقطهٔ O' به‌موازات خود انتقال می‌دهیم داریم:

$$x=X+\alpha \quad \text{و} \quad y=Y+\beta$$

و

$$A(X+\alpha)^{۲}+۲B(X+\alpha)(Y+\beta)+C(Y+\beta)^{۲}+۲D(X+\alpha)$$
$$+۲E(Y+\beta)+F=۰$$
$$AX^{۲}+۲BXY+CY^{۲}+X(۲A\alpha+۲B\beta+۲D)$$
$$+Y(۲B\alpha+۲C\beta+۲E)+K=۰$$

اگر $X\to -X$ و $Y\to -Y$ تبدیل شوند معادلهٔ بالا نباید تغییر کند و این

درصورتی است که ضرایب X و Y صفر باشند، یعنی:

$$\begin{cases} ۲A\alpha+۲B\beta+۲D=۰ & (۱) \\ ۲B\alpha+۲C\beta+۲E=۰ & (۲) \end{cases}$$

حال $f'_x(x\ ,\ y)=۰$ و $f'_y(x\ ,\ y)=۰$ را تشکیل داده، داریم:

$$\begin{cases} f'_x(x\ ,\ y)=۲Ax+۲By+۲D=۰ \\ f'_y(x\ ,\ y)=۲Bx+۲Cy+۲E=۰ \end{cases}$$

این معادلات همان معادلات ۱ و ۲ بوده که در آن x و y همان α و β می‌باشند.

تبصره: معادلات $f'_x(x\ ,\ y)=۰$ و $f'_y(x\ ,\ y)=۰$ محورهای تقارن دایره، بیضی، هذلولی وسهمی را به شرط آنکه $B=۰$ باشد مشخص می‌نمایند.

مسألهٔ ۱: نشان دهید منحنی به‌معادلهٔ $y=x-۲\pm\sqrt{۴x-x^۲}$ یک بیضی است. مرکز تقارن آن‌را بیابید ومختصات ماکزیمم نسبی منحنی‌تابع $y=x-۲+\sqrt{۴x-x^۲}$ را به دست‌آورید.

حل:

$$۴x-x^۲\geqslant ۰ \Longrightarrow ۰\leqslant x\leqslant ۴$$

$$(y-x+۲)^۲=۴x-x^۲ \Longrightarrow$$

$$y^۲+x^۲+۴-۲yx+۴y-۴x+x^۲-۴x=۰ \Longrightarrow$$

و

$$۲x^۲-۲yx+y^۲-۸x+۴y+۴=۰ \quad و \quad A=۲$$

$$B=-۱ \quad و \quad C=۱$$

$$\Delta'=B^۲-AC=۱-۲=-۱<۰ \Longrightarrow \text{منحنی بیضی است}$$

$$\begin{cases} f'_x(x\ ,\ y)=۴x-۲y-۸=۰ \\ f'_y(x\ ,\ y)=-۲x+۲y+۴=۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} x=۲ \\ y=۰ \end{matrix}$$

پس مرکز تقارن $O'(۲\ ,\ ۰)$ می‌باشد.

$$y'=\frac{-x+۲+\sqrt{۴x-x^۲}}{\sqrt{۴x-x^۲}}\doteq ۰ \qquad x=۲\pm\sqrt{۲}$$

چون $x=۲-\sqrt{۲}$ طرف اول معادلهٔ $x-۲=\sqrt{۴x-x^۲}$ را منفی می‌نماید وحال آنکه طرف دوم یعنی رادیکال مثبت است، پس این جواب قابل قبول نمی‌باشد چون $x=۲+\sqrt{۲}$ جواب معادله $\sqrt{۴x-x^۲}=x-۲$ می‌باشد، پس:

$$y=x-۲+\sqrt{۴x-x^{۲}}=x-۲+x-۲$$
$$=۲x-۴=۲(۲+\sqrt{۲})-۴=۲\sqrt{۲}$$

بنابراین $\mathrm{Max}(۲+\sqrt{۲}\ ,\ ۲\sqrt{۲})$ بررسی اینکه $x=۲+\sqrt{۲}$ طول ماکزیمم نسبی است ، به عهدهٔ خوانندگان می‌گذاریم.

مسألهٔ ۲: نشان دهید اگر $c\neq ۰$ باشد منحنی به معادلهٔ $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ هذلولی است مرکز تقارن آن را بیابید و به کمک تبدیلات تعامدی درماتریسها معادلات محورهای تقارن هذلولی را بیابید.

حل:

و
$$f(x\ ,\ y)=cxy+dy-ax-b=۰$$
$$\Delta'=B^{۲}-AC=\frac{c^{۲}}{۴}-۰=\frac{c^{۲}}{۴}>۰$$

چون Δ' مثبت است ، پس منحنی هذلولی است و مرکز تقارن آن به طریق زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} f'_x(x\ ,\ y)=cy-a=۰ \\ f'_y(x\ ,\ y)=cx+d=۰ \end{cases} \Longrightarrow O'\left(-\frac{d}{c}\ ,\ \frac{a}{c}\right)$$

برای به دست آوردن محورهای تقارن منحنی به صورت زیر عمل می‌نماییم:

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & \frac{c}{۲} \\ \frac{c}{۲} & ۰ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} ۰-K & \frac{c}{۲} \\ \frac{c}{۲} & ۰-K \end{vmatrix}$$

$$=K^{۲}-\frac{c^{۲}}{۴}=۰ \quad \text{و} \quad K=\pm\frac{c}{۲}$$

به ازای $K=\dfrac{c}{۲} \Longrightarrow y=x$

$$\begin{bmatrix} ۰ & \frac{c}{۲} \\ \frac{c}{۲} & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=K\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Longrightarrow \frac{c}{۲}y=Kx \Longrightarrow \frac{c}{۲}y=\frac{c}{۲}x$$
$$\Longrightarrow y=x$$

به ازای $x=۱$ یکی از بردارهای ویژه به صورت $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ می‌باشد و به ازای $K=\frac{-c}{۲}$ داریم $y=-x$ و به ازای $x=۱$ یکی از بردارهای ویژه به صورت $\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$ می‌باشد و ماتریس تبدیل تعامد V به صورت:

$$V=\begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ \frac{-۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۲}} \end{bmatrix}$$

بوده و داریم:

$$X=VX_۱ \Longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \frac{-\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ y_۱ \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}x_۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}y_۱ \\ y=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}x_۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}y_۱ \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x+y=\sqrt{۲}\,y_۱ \quad \text{و} \quad x-y=\sqrt{۲}\,x_۱$$

چون مقادیر x و y را درمعادلهٔ $f(x , y)=۰$ قرار دهیم داریم:

$$-\frac{c}{۲}x_۱^۲+\frac{c}{۲}y_۱^۲-\frac{\sqrt{۲}}{۲}dx_۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}dy_۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}ax_۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}ay_۱-b=۰$$

$$f(x_۱ , y_۱)=x_۱^۲+\frac{\sqrt{۲}}{c}(d+a)x_۱-y_۱^۲-\frac{\sqrt{۲}}{c}(d-a)y_۱+\frac{۲b}{c}=۰$$

چون معادلهٔ بالا جملهٔ $x_۱y_۱$ ندارد، پس طبق تبصرهٔ قضیهٔ ۴۹ (صفحه ۸۹) محورهای تقارن از معادلات $f'_{x_۱}(x_۱ , y_۱)=۰$ و $f'_{y_۱}(x_۱ , y_۱)=۰$ به دست می‌آیند.

$$f'_{x_۱}(x_۱ , y_۱)=۲x_۱+\frac{\sqrt{۲}}{c}(d+a)=۰ \Longrightarrow x_۱=-\frac{\sqrt{۲}(d+a)}{۲c}$$

$$f'_{y_۱}(x_۱ , y_۱)=-۲y_۱-\frac{\sqrt{۲}}{c}(d-a)=۰$$

$$\Longrightarrow y_۱=\frac{-\sqrt{۲}}{۲c}(d-a)$$

$$x+y=\sqrt{۲}\,y_۱ \Longrightarrow x+y=\sqrt{۲}\times\frac{-\sqrt{۲}}{۲c}(d-a)$$

$$\Longrightarrow y=-x+\frac{a-d}{c}$$

$$x-y=\sqrt{۲}\,x_۱ \Longrightarrow x-y=\sqrt{۲}\times-\frac{\sqrt{۲}(d+a)}{۲c}$$

$$\Longrightarrow y=x+\frac{a+d}{c}$$

بنابراین محورهای تقارن هذلولی بالا ، خطوط به معادلات $y=x+\frac{a+d}{c}$ و $y=-x+\frac{a-d}{c}$ می‌باشند.

۱۳

مسائل مربوط به مجانبها ـ تقارن ـ رسم توابع

مسألهٔ ۱۳۰: مقادیر a و b را چنان بیابید که داشته باشیم:

$$\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\left(\frac{x^۳+x^۲-x+۲}{x^۲+x+۱}+ax+b\right)=۲$$

مسألهٔ ۱۳۱: مطلوب است معادلهٔ مجانبهای منحنیهای به معادلات زیر:

۱) $\therefore \quad y^۲(x-۲)-x^۳+x^۲=۰$

۲) $\therefore \quad x(y^۲-x^۲)+x^۲-۲y^۲=۰$

۳) $\therefore \quad x^۲y(y-x)+x^۳-۲y^۲=۰$

۴) $\therefore \quad x(y^۲-x^۲)^۲+۳(y^۴-x^۴)+۵xy^۲=۰$

۵) $\therefore \quad x^۴(۲x-y)-۴x^۳(y-x)+۲(y-x)^۲(y+x)=۰$

مسألهٔ ۱۳۲: مطلوب است رسم منحنیهای به معادلات زیر:

$y=\frac{x^۳+۳x+۱}{x^۲}$ و $y=\frac{(x+۱)^۳}{x}$ و $y=\pm\frac{\sqrt{۱-x^۲}}{x}$ و

$y=\pm x\sqrt{\frac{۱+x}{۱-x}}$ و $y=\pm x\sqrt{\frac{x-۱}{x-۲}}$ و

$y=\sqrt{x^۲-x^۴}$ و $y=\sqrt[۳]{(x+۱)^۲}-\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}$ و

$y=x+\sqrt{y^۲+۲(x+۱)y+۴}$ و

$y=\sqrt{x-۱}-\sqrt{x-۲}$ و $y=\sqrt{x-۲}+\sqrt{x-۳}$ و

$y=|\sin x|+|\cos x|$

مسألهٔ ۱۳۳: تابع $y=\frac{x^{۲}+mx+۱}{x^{۲}+x-m}$ مفروض است . هرگاه منحنی (C) نمایش تابع مجانب افقی را در L قطع کند:

اولاً : تحقیق کنید اگر تابع فوق دارای مرکز تقارن باشد ، مرکز تقارن همان L است.

ثانیاً: پارامتر m را چنان بیابید که تابع فوق دارای مرکز تقارن باشد و به‌ازای m به دست آمده منحنی را رسم کنید.

مسألهٔ ۱۳۴: منحنی به معادلهٔ $y^{۲}=\frac{x^{۳}}{x-a}$ که در آن $a > ۰$ می‌باشد را رسم کنید.

اگر از مبدأ مختصات دو خط عمود بر هم مرور دهیم تا منحنی را در نقاط M و N قطع نمایند ، مکان هندسی وسط MN و نیز پوش خط MN را بیابید.

مسألهٔ ۱۳۵: اولاً : منحنی نمایش به معادلهٔ $y=\frac{x^{۳}}{x^{۲}-۱}$ را رسم کنید.

ثانیاً : از نقطهٔ A واقع بر منحنی مماسهایی به غیر از مماس در A بر منحنی رسم می کنیم، نقاط تماس این مماسها را B و D می‌نامیم ، اگر خط BD منحنی را در نقطهٔ E قطع کند ، معادلهٔ مکان هندسی وسط پاره خط BD و معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ برخورد مماسهای در نقاط A و E را بیابید.

۱۴

مطالبی دربارهٔ توابع معکوس مثلثاتی و تمرینهای آن

مطلوب است جدول تغییرات ومنحنی نمایش توابع:

$y=\text{Arc}\cot g\,x$ و $y=\text{Arc}tg\,x$ و $y=\text{Arc}\cos x$ و $y=\text{Arc}\sin x$

۱: $y=\text{Arc}\sin x$

ابتدا نشان می‌دهیم تابع $y=\sin x$ در هرنقطهٔ $x_0\in R$ پیوسته است ، باید ثابت‌کنیم $\underset{x\to x_0}{\text{حد}}\ \sin x=\sin x_0$ ، می‌دانیم شرط‌آنکه تابع $f(x)$ در x_0 پیوسته باشد ، آن است‌که برای هر $\varepsilon>0$ وجود داشته‌باشد $\delta>0$ به طوری‌که:

و $$|x-x_0|<\delta \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

$$|x-x_0|<\delta \Longrightarrow |\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$$

$$|\sin x-\sin x_0|=2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\leqslant 2\times1\times\left|\frac{x-x_0}{2}\right|$$
$$=|x-x_0|<\varepsilon$$

چون $\delta\leqslant\varepsilon$ انتخاب گردد پیوستگی تابع‌در x_0 محقق‌خواهد بود اگر برای $y=\sin x$ فرض کنیم $x\in\left[\frac{-\pi}{2}\ \text{و}\ \frac{\pi}{2}\right]$ باشد ، چون $y'=\cos x$ دراین فاصله مثبت یاصفر است ، پس تابع $y=\sin x$ روی این فاصله اکیداً صعودی بوده:

$$(x_1<x_2 \Longrightarrow f(x_1)<f(x_2))$$

پس تابع یك به یك می باشد،یعنی معکوس آن وجود داشته آن را به $f^{-1}(x)=\text{Arc}\sin x$ نشان می‌دهیم.

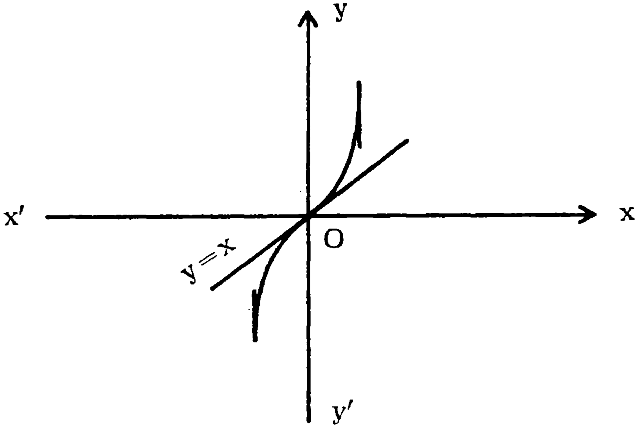
و $$\frac{-\pi}{2}\leqslant y=\text{Arc}\sin x\leqslant\frac{\pi}{2} \Longrightarrow y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}>0$$

$$y''=\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

به ازای $x > 0$ تقعر منحنی به سوی yهای مثبت و به ازای $x < 0$ تقعر منحنی به سوی yهـای منفی بوده و $x = 0$ طول نقطهٔ عطف منحنی می‌باشد ومعادلهٔ مماس در نقطهٔ عطف (مبدأ مختصات) به صورت $y = x$ است:

x	-1		0		1
y'	$+\infty$	$+ + +$		$+ + +$	$+\infty$
y	$\frac{-\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

چون مشتق درنقاط به طولهای (-1) و (1) به سمت $+\infty$ میل می‌کند، مماسها در این نقاط موازی محور y هـا مـی‌باشند. جدول تغییرات و منحنی نمایش تابع $y = \text{Arc}\sin x$ نشان می‌دهد این تابع روی فاصلهٔ $[-1 , 1]$ پیوسته واکیداً صعودی می‌باشد.



۲: $y = \text{Arc}\cos x$، تـابع $y = \cos x$ روی فاصلهٔ $[0 , \pi]$ بـه علت آنکـه $y' = -\sin x \leqslant 0$ می‌باشد، اکیداً نزولی بوده پس تابع معکوس آن وجود داشته‌آن‌را به $f^{-1}(x) = \text{Arc}\cos x$ نشان می‌دهیم مشابه آنچه در بارهٔ $y = \sin x$ گفتیم تابع $y = \cos x$ نیزهمواره پیوسته می‌باشد:

و $$0 \leqslant y = \text{Arc}\cos x \leqslant \pi \Longrightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} < 0$$

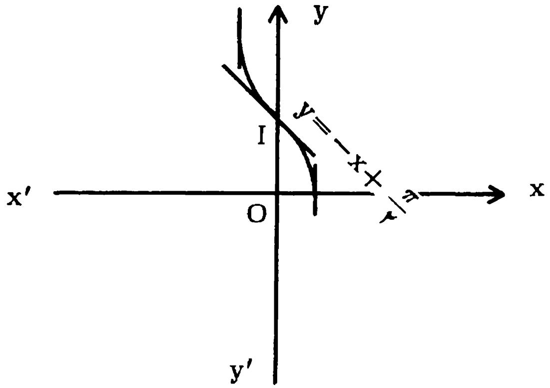
$$y'' = \frac{-x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

معادلهٔ مماس‌درنقطه عطف $I\left(0 , \frac{\pi}{2}\right)$ به صورت $y = -x + \frac{\pi}{2}$ یعنی با محور

xها ، زاویهٔ $\frac{۳\pi}{۴}$ می‌سازد چون مشتق در نقاط به‌طولهای (۱ −) و (۱) به سمت (∞−) میل می‌کند ، مماسها در این نقاط موازی محور yها می‌باشند:

x	-۱		۰		۱
y'	$-\infty$	—		—	$-\infty$
y	π	↘	$\frac{\pi}{۲}$	↘	۰

جدول تغییرات و منحنی نمایش تابع $y=\text{Arc}\cos x$ نشان می‌دهد این تابع روی فاصلهٔ [۱ , ۱ −] پیوسته و اکیداً نزولی می‌باشد.



۳: $y=\text{Arc}tg\,x$ تابع $y=tg\,x$ روی فاصلهٔ $\left(\frac{-\pi}{۲} , \frac{\pi}{۲}\right)$ به علت آنکه $y'=۱+tg^{۲}x>۰$ بوده اکیداً صعودی بوده پس تابع معکوس آن وجود داشته آن را به $f^{-۱}(x)=\text{Arc}tg\,x$ نشان می‌دهیم ، تابع $y=tg\,x$ روی فاصلهٔ $\left[\frac{-\pi}{۲}+\alpha , \frac{\pi}{۲}-\alpha\right]$ که $۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}$ همواره پیوسته است زیرا توابع $\sin x$ و $\cos x$ روی این فاصله پیوسته می‌باشند پس خارج قسمت آنها یعنی $tg\,x$ پیوسته خواهد بود ، بنابراین تابع روی فاصله $\left(\frac{-\pi}{۲} , \frac{\pi}{۲}\right)$ متصل است:

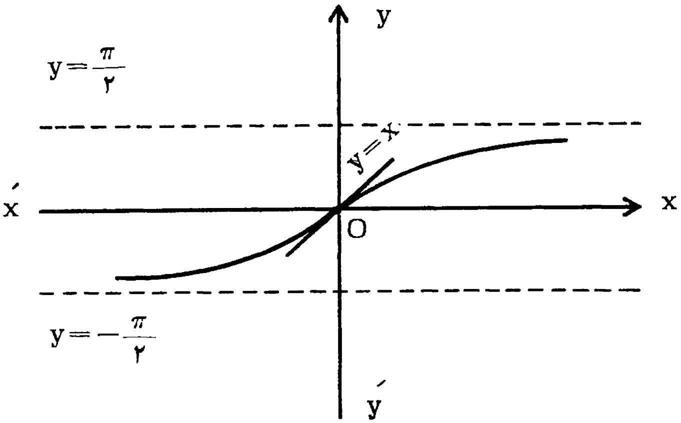
و
$$۰<y=\text{Arc}tg\,x<\frac{\pi}{۲} \Longrightarrow y'=\frac{۱}{۱+x^{۲}}>۰$$

و
$$y''=\frac{-۲x}{(۱+x^{۲})^{۲}}$$

معادلهٔ مماس درنقطهٔ عطف (مبدأ مختصات) به صورت $y=x$ بوده که با محور x ها زاویه $\frac{\pi}{۴}$ می‌سازد:

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	$\frac{-\pi}{۲}$	↗	۰	↗	$\frac{\pi}{۲}$

جدول تغییرات ومنحنی نمایش تابع $y=\mathrm{Arc}tg\,x$ نشان می‌دهد که این تابع روی فاصلهٔ $(-\infty , +\infty)$ پیوسته واکیداً صعودی است .



۴: $y=Arccotgx$ ، تابع $y=cotgx$ روی فاصلهٔ $(۰ , \pi)$ به علت آنکه $y'=-(۱+cotg^{۲}x)<۰$ بوده اکیداً نزولی است پس تابع معکوس آن وجود داشته وآنرا به $f^{-۱}(x)=\mathrm{Arc}cotg\,x$ نشان می‌دهیم . تابع $y=cotgx$ روی‌فاصلهٔ $[\alpha , \pi-\alpha]$ که $۰<\alpha<\pi$ همواره پیوسته است. زیرا توابع $sinx$ و $cosx$ روی این فاصله پیوسته می‌باشند ، پس خارج قسمت آنها یعنی $cotgx$ پیوسته خواهد بود ، بنابراین تابع روی فاصلهٔ $(۰ , \pi)$ متصل است.

و

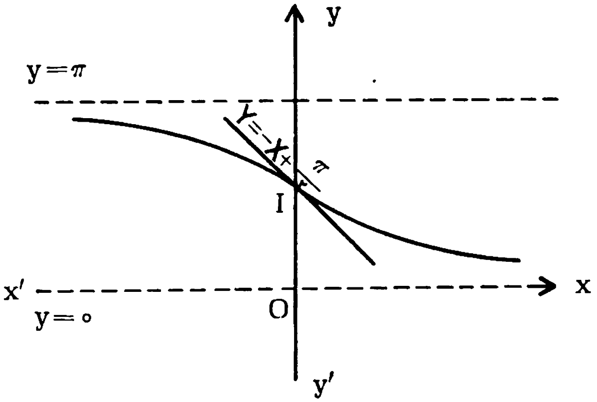
$$۰<y=\mathrm{Arc}cotg\,x<\pi \Longrightarrow y'=\frac{-۱}{۱+x^{۲}}<۰$$

$$y''=\frac{۲x}{(۱+x^{۲})^{۲}}$$

معادلهٔ مماس درنقطهٔ عطف $I\left(۰ \;,\; \frac{\pi}{۲}\right)$ به صورت $y=-x+\frac{\pi}{۲}$ بوده که با محور x ها زاویه $\frac{۳\pi}{۴}$ می‌سازد.

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
y'		—		—	
y	π	↘	$\frac{\pi}{۲}$	↘	۰

جدول تغییرات و منحنی نمایش $y=\mathrm{Arccotg}\,x$ نشان می‌دهدکه این تابع روی فاصلهٔ $(-\infty \;,\; +\infty)$ پیوسته واکیداً نزولی است ،



تبصرهٔ مهم: توابع مثلثاتی و معکوس آنها نشان می‌دهندکه اگر تابع f روی $[a \;,\; b]$ پیوسته و اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی باشند معکوس آنها وجود داشته و روی $[f(a) \;,\; f(b)]$ پیوسته واکیداً صعودی یا اکیداً نزولی می‌باشند. ازاثبات این مطلب در حالت کلی خود داری می‌نماییم.

تمرین

مسألهٔ ۱۳۶: مشتق توابع زیر را به‌دست آورده و نتیجه آنهارا برای توابع $y_۱$، $y_۲$، $y_۳$ بررسی نمایید. و $y_۲=\mathrm{Arctg}\,\frac{x^۲-۲x-۱}{x^۲+۲x-۱}$ و $y_۱=\mathrm{Arctg}\,\frac{x+a}{۱-ax}$

$y_۳ = \text{Arc}tg\sqrt{\frac{۱-x}{۱+x}}$ و $y_۴ = \text{Arc}sin(۲x^۲-۱)$ و

$y_۵ = \text{Arc}sin\ \frac{۲x}{x^۲+۱}$

مسألهٔ ۱۳۷: مطلوب است جدول تغییرات ومنحنی نمایش توابع زیر:

$y_۱ = \text{Arc}cos(۱-x)$ و $y_۲ = \text{Arc}cos\ \frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}$ و

$y_۳ = \text{Arc}sin\frac{۲\sqrt{x}}{۱+x}$ و $y_۴ = \text{Arc}tg(x-۱)$ و

$y_۵ = \text{Arc}cotg(۱-x)$ و $y_۶ = \text{Arc}sin\ \frac{۲x}{۱+x^۲}$ و

$y_۵ = \text{Arc}cotg(۱-x)$ و $y_۶ = \text{Arc}sin\ \frac{۲x}{۱+x^۲}$ و

$y_۷ = x\text{Arc}cotg\,x$ و $y_۸ = x - ۲\text{Arc}tg\,x$

مسألهٔ ۱۳۸: مطلوب است $\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\ \frac{x-\text{Arc}tg\,x}{x^۳}$.

۱۵

مطالبی راجع به معادلهٔ درجهٔ سوم و روابط بین ضرایب و ریشه‌ها و تمرینهای آن

قضیهٔ ۵۰: اگر معادلهٔ درجه سوم $x^۳+Px+q=۰$ فقط یک ریشهٔ حقیقی داشته باشد، یعنی $۰<۴P^۳+۲۷q^۲$ باشد آن ریشه از دستور زیر که به دستور کاردان معروف است به دست می‌آید:

$$x=\sqrt[۳]{\frac{-q}{۲}+\sqrt{\frac{P^۳}{۲۷}+\frac{q^۲}{۴}}}+\sqrt[۳]{\frac{-q}{۲}-\sqrt{\frac{P^۳}{۲۷}+\frac{q^۲}{۴}}}$$

اثبات: فرض می‌کنیم $x=U+V$ داریم:

$$(U+V)^۳+P(U+V)+q=۰ \Longrightarrow$$

$$U^۳+V^۳+(U+V)(P+۳UV)+q=۰$$

ارتباط بین U و V را چنان برقرار می‌کنیم که :

$$UV=\frac{-P}{۳} \quad \text{یا} \quad P+۳UV=۰$$

باشد، پس داریم $\begin{cases} U^۳+V^۳=-q \\ U^۳V^۳=\frac{-P^۳}{۲۷} \end{cases}$ حال معادلهٔ درجه دومی تشکیل می‌دهیم که ریشه‌هایش $U^۳$ و $V^۳$ باشند، در این صورت داریم:

$$Z^۲-SZ+P=۰ \Longrightarrow Z^۲+qZ-\frac{P^۳}{۲۷}=۰$$

$$\Longrightarrow Z=\frac{-q}{۲}\pm\sqrt{\frac{q^۲}{۴}+\frac{P^۳}{۲۷}}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} U^۳=\frac{-q}{۲}+\sqrt{\frac{P^۳}{۲۷}+\frac{q^۲}{۴}} \\ V^۳=\frac{-q}{۲}-\sqrt{\frac{P^۳}{۲۷}+\frac{q^۲}{۴}} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} U=\sqrt[۳]{\frac{-q}{۲}+\sqrt{\frac{P^۳}{۲۷}+\frac{q^۲}{۴}}} \\ V=\sqrt[۳]{\frac{-q}{۲}-\sqrt{\frac{P^۳}{۲۷}+\frac{q^۲}{۴}}} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x=U+V=\sqrt[۳]{\frac{-q}{۲}+\sqrt{\frac{P^۳}{۲۷}+\frac{q^۲}{۴}}}$$

$$+\sqrt[۳]{\frac{-q}{۲}-\sqrt{\frac{P^۳}{۲۷}+\frac{q^۲}{۴}}}$$

مسلماً شرط جواب آن است که $\frac{P^۳}{۲۷}+\frac{q^۲}{۴}>۰$ یا $۴P^۳+۲۷q^۲>۰$ همان طورکه می‌دانیم این شرط برای حالتی است که معادله یك ریشهٔ حقیقی دارد.

تبصره : اگر $۴P^۳+۲۷q^۲=۰$ باشد ، ریشهٔ سادهٔ معادله :

$$x=\sqrt[۳]{\frac{-q}{۲}}+\sqrt[۳]{\frac{-q}{۲}}=۲\sqrt[۳]{\frac{-q}{۲}}$$

پس ریشهٔ سادهٔ معادلهٔ $x_۱=-۲\sqrt[۳]{\frac{q}{۲}}$ وریشه مضاعف به‌طریق زیربه دست می‌آید،

و

$$x_۱+x_۲+x_۳=\frac{-b}{a}=۰ \quad \text{و} \quad x_۱=-۲\sqrt[۳]{\frac{q}{۲}}$$

$$x_۲=x_۳ \Longrightarrow -۲\sqrt[۳]{\frac{q}{۲}}+۲x_۲=۰ \Longrightarrow x_۲=x_۳=\sqrt[۳]{\frac{q}{۲}}$$

قضیهٔ ۵۱: اگر معادلهٔ $x^۳+Px+q=۰$ دارای سه ریشهٔ حقیقی باشد ، یعنی $۴P^۳+۲۷q^۲<۰$ باشد ، ریشه‌های معادله ازدستور $x=h\cos\alpha$ که درآن:

$$\cos ۳\alpha=\frac{۳q}{۲P\sqrt{\frac{-P}{۳}}} \quad \text{و} \quad h=۲\sqrt{\frac{-P}{۳}}$$

به دست می‌آیند.

اثبات: چون معادله سه ریشهٔ حقیقی دارد باید $P<۰$ باشد، چه اگر $P>۰$ باشد در این صورت $۴P^۳+۲۷q^۲>۰$ بوده و معادله فقط یك ریشهٔ حقیقی خواهد داشت که این یك تناقض می‌باشد، پس $P<۰$ بوده و $\sqrt{\frac{-P}{۳}}$ معنی دارد حال $x=h\cos\alpha$ انتخاب کرده درمعادله قرارمی‌دهیم داریم:

$$h^۳\cos^۳\alpha+Ph\cos\alpha+q=۰$$

چون به جای $\cos^۳\alpha$ مساویش $\frac{\cos۳\alpha+۳\cos\alpha}{۴}$ را قراردهیم داریم:

$$h^۳\cos۳\alpha+h\cos\alpha(۳h^۲+۴P)+۴q=۰$$

h را طوری انتخاب می‌کنیم که $۳h^۲+۴P$ برابر صفر شود، این امکان دارد زیرا $P<۰$ می‌باشد، پس:

$$۳h^۲+۴P=۰ \Longrightarrow h=۲\sqrt{\frac{-P}{۳}} \text{ و } h^۳\cos۳\alpha+۴q=۰ \Longrightarrow$$

$$\cos۳\alpha=\frac{-۴q}{h^۳}=\frac{-۴q}{\frac{-۴P}{۳}\times۲\sqrt{\frac{-P}{۳}}}=\frac{۳q}{۲P\sqrt{\frac{-P}{۳}}}$$

توجه کنید $\cos۳\alpha$ همواره درفاصله (۱ , ۱ —) می‌باشد زیرا:

$$-۱<\frac{۳q}{۲P\sqrt{\frac{-P}{۳}}}<۱ \Longrightarrow ۰<\frac{۹q^۲}{۴P^۲\times\frac{-P}{۳}}<۱ \Longrightarrow$$

$$۹q^۲<\frac{-۴P^۳}{۳} \Longrightarrow ۴P^۳+۲۷q^۲<۰$$

نامساوی بالا شرط سه ریشهٔ حقیقی را می‌دهد که طبق فرض قضیه برقرار بوده بنابراین انتخاب $\cos۳\alpha=\frac{۳q}{۲P\sqrt{\frac{-P}{۳}}}$ درست می‌باشد.

مثال: مطلوب است ریشه‌های معادلهٔ $x^۳-۳x+\sqrt{۲}=۰$

حل :

معادله سه ریشهٔ حقیقی دارد چون :

$$۴P^۳+۲۷q^۲=۴\times-۲۷+۲۷\times۲<۰ \Rightarrow$$

و $$x=h\cos\alpha \quad و \quad h=۲\sqrt{\frac{-P}{۳}}=۲\sqrt{\frac{۳}{۳}}=۲$$

$$\cos۳\alpha=\frac{۳q}{۲P\sqrt{\frac{-P}{۳}}}$$

$$\cos۳\alpha=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲\times(-۳)\times۱}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow \cos۳\alpha=\cos\frac{۳\pi}{۴}\Rightarrow$$

و $$۳\alpha=۲K\pi\pm\frac{۳\pi}{۴}\Rightarrow\alpha=\frac{۲K\pi}{۳}\pm\frac{\pi}{۴}$$

$$x=h\cos\alpha=۲\cos\left(\frac{۲K\pi}{۳}\pm\frac{\pi}{۴}\right)$$

چون معادله فقط سه ریشهٔ حقیقی دارد به K اعداد صفرو(۱)رانسبت می‌دهیم داریم:

و $$K=۰ \quad و \quad x_۱=۲\cos\frac{\pi}{۴}=\sqrt{۲} \quad و \quad K=۱$$

و $$x_۲=۲\cos(۱۲۰+۴۵)=۲\cos۱۶۵=-۲\cos۱۵=-\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۲}$$

$$K=۱ \text{ و } x_۳=۲\cos(۱۲۰-۴۵)=۲\cos۷۵=۲\sin۱۵=\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۲}$$

مثالهایی دربارهٔ روابط بین ضرایب وریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم:

مثال ۱: اگر ریشه‌های معادله $x^۳-۳x+\sqrt{۲}=۰$ ، $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ باشند مطلوب است محاسبهٔ $x_۱^۵+x_۲^۵+x_۳^۵$.

حل: چون جواب معادله مخالف صفر است، طرفین معادله را در $x^۲$ ضرب کرده داریم $x^۵-۳x^۳+\sqrt{۲}x^۲=۰$ دراین معادله به جای x به ترتیب $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ قرار داده باهم جمع می‌کنیم داریم:

$$(x_۱^۵+x_۲^۵+x_۳^۵)-۳(x_۱^۳+x_۲^۳+x_۳^۳)+\sqrt{۲}(x_۱^۲+x_۲^۲+x_۳^۲)=۰ \qquad ①$$

چون $x_۱+x_۲+x_۳=۰$ می‌باشد با استفاده از اتحاد لاگرانژ که به صورت:

$$x_۱^۳+x_۲^۳+x_۳^۳-۳x_۱x_۲x_۳$$
$$=(x_۱+x_۲+x_۳)(x_۱^۲+x_۲^۲+x_۳^۲-x_۱x_۲-x_۱x_۳-x_۲x_۳)$$

می‌باشد ، داریم:

$$x_۱^۳+x_۲^۳+x_۳^۳=۳x_۱x_۲x_۳=-۳\sqrt{۲}$$

حال طرفین معادله را بر x بخش کرده داریم $x^۲-۳+\frac{\sqrt{۲}}{x}=۰$ چون در این معادله به‌جای x، $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ قراردهیم ونتایج را جمع کنیم داریم:

$$(x_۱^۲+x_۲^۲+x_۳^۲)-۹+\sqrt{۲}\left(\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}+\frac{۱}{x_۳}\right)=۰ \Longrightarrow$$

$$x_۱^۲+x_۲^۲+x_۳^۲-۹+\sqrt{۲}\times\frac{x_۱x_۲+x_۱x_۳+x_۲x_۳}{x_۱x_۲x_۳}=۰ \Longrightarrow$$

$$x_۱^۲+x_۲^۲+x_۳^۲-۹+\sqrt{۲}\times\frac{-۳}{-\sqrt{۲}}=۰ \Longrightarrow x_۱^۲+x_۲^۲+x_۳^۲=۶$$

مقادیر به دست‌آمده را دررابطهٔ (۱) قرارداده ، داریم:

$$x_۱^۵+x_۲^۵+x_۳^۵+۹\sqrt{۲}+۶\sqrt{۲}=۰ \Longrightarrow x_۱^۵+x_۲^۵+x_۳^۵=-۱۵\sqrt{۲}$$

برای محاسبهٔ $x_۱^۲+x_۲^۲+x_۳^۲$ بدین جهت ازروش طولانی استفاده شد که به روش حل جدید آشنا شوید.

مثال ۲: اگر $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ ریشه‌های معادله $x^۳-۳x+\sqrt{۲}=۰$ باشند مطلوب است محاسبهٔ:

$$S=\frac{۱}{x_۱+۱}+\frac{۱}{x_۲+۱}+\frac{۱}{x_۳+۱}$$

حل : معادلهٔ درجهٔ سومی تشکیل می‌دهیم که ریشه‌هایش $\frac{۱}{x_۱+۱}$ و $\frac{۱}{x_۲+۱}$ و $\frac{۱}{x_۳+۱}$ باشند ، برای این کار فرض می‌کنیم $y=\frac{۱}{x+۱}$ باشد، بنابراین $x=\frac{۱-y}{y}$ می‌باشد ومعادله داده شده به صورت زیردرمی‌آید:

$$(\sqrt{۲}+۲)y^۳-۳y+۱=۰ \Longrightarrow S=y_۱+y_۲+y_۳$$

$$=\frac{۱}{x_۱+۱}+\frac{۱}{x_۲+۱}+\frac{۱}{x_۳+۱}=\frac{-b}{a}=۰$$

مثال۳ : بااستفاده ازروابط بین ضرایب وریشه‌های معادلهٔ درجه سوم:

$$x^{۳}-۳\sqrt{۳}x^{۲}-۳x+\sqrt{۳}=۰$$

مطلوب‌است محاسبهٔ $tg^{۲}۲۰^{\circ}+tg^{۲}۴۰^{\circ}+tg^{۲}۸۰^{\circ}$.

حل:

$$x^{۳}-۳\sqrt{۳}x^{۲}-۳x+\sqrt{۳}=۰ \Longrightarrow \sqrt{۳}(۱-۳x^{۲})=۳x-x^{۳}$$

$$\Longrightarrow \sqrt{۳}=\frac{۳x-x^{۳}}{۱-۳x^{۲}}$$

اگر $x=tg\alpha$ فرض نماییم داریم:

$$tg۳\alpha=tg\frac{\pi}{۳} \Longrightarrow ۳\alpha=K\pi+\frac{\pi}{۳} \Longrightarrow \alpha=\frac{K\pi}{۳}+\frac{\pi}{۹} \quad \text{و}$$

$$x=tg\alpha=tg\left(\frac{K\pi}{۳}+\frac{\pi}{۹}\right)$$

اگربه K اعداد صفرو ۱ و ۲ نسبت دهیم ریشه‌های معادله برابرند با:

$$x_{۳}=tg۱۴۰^{\circ}=-tg۴۰^{\circ} \quad \text{و} \quad x_{۲}=tg۸۰^{\circ} \quad \text{و} \quad x_{۱}=tg۲۰^{\circ}$$

ومجموع مربعات ریشه‌های معادله به صورت زیرمحاسبه می‌شود:

$$x_{۱}^{۲}+x_{۲}^{۲}+x_{۳}^{۲}=tg^{۲}۲۰^{\circ}+tg^{۲}۸۰^{\circ}+tg^{۲}۴۰^{\circ}$$

$$=(x_{۱}+x_{۲}+x_{۳})^{۲}-۲(x_{۱}x_{۲}+x_{۱}x_{۳}+x_{۲}x_{۳})$$

$$=(۳\sqrt{۳})^{۲}-۲(-۳)=۲۷+۶=۳۳$$

مثال ۴: با استفاده ازروابط بین ضرایب وریشه‌های معادلهٔدرجهٔ سوم مطلوب است حل دستگاه:

$$\begin{cases} ۱+x+y+z=۰ \\ ۸+۴x+۲y+z=۰ \\ ۲۷+۹x+۳y+z=۰ \end{cases}$$

حل: معادلهٔ درجهٔ سوم $u^{۳}+xu^{۲}+yu+z=۰$ را در نظر گرفته ریشه‌های این معادله اعداد ۱ و ۲ و ۳ می‌باشند ، زیرا اگراین اعداد را درمعادله قراردهیم هریك‌از معادلات دستگاه که صفرمی‌باشند به دست می‌آید ، روابط بین ضرایب وریشه‌ها را نوشته داریم:

$$u_{۱}+u_{۲}+u_{۳}=۱+۲+۳=۶=-\frac{b}{a}=-x \Longrightarrow x=-۶$$

$$u_{۱}u_{۲}+u_{۱}u_{۳}+u_{۲}u_{۳}=۲+۳+۶=۱۱=\frac{c}{a}=y \Longrightarrow y=۱۱$$

$$u_۱u_۲u_۳=۶=\frac{-d}{a}=-z \Longrightarrow z=-۶$$

تمرین

مسألهٔ ۱۳۹: اگر m پارامتر متغیری باشد معادلهٔ پوش خطوط $y=m(۳x-۴m^۲)$ را بیابید.

مسألهٔ ۱۴۰: معادلهٔ درجهٔ چهارمی تشکیل دهید که ریشه‌هایش ۱ و ۲ و ۳ و ۴ باشند.

مسألهٔ ۱۴۱: معادلهٔ درجه سومی تشکیل دهید کـه ریشه‌هایش $cos\frac{۵\pi}{۷}$ و $cos\frac{۳\pi}{۷}$ و $cos\frac{\pi}{۷}$ باشند.

مسألهٔ ۱۴۲: اگر $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۳-۳x+۱=۰$ باشند مطلوب است محاسبهٔ $S=\frac{۱}{x_۱^۲-۱}+\frac{۱}{x_۲^۲-۱}+\frac{۱}{x_۳^۲-۱}$

مسألهٔ ۱۴۳: اگر $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۳-۳x+۱=۰$ باشند مطلوب است محاسبهٔ $x_۱^۶+x_۲^۶+x_۳^۶$

مسألهٔ ۱۴۴: با استفاده از روابط بین ضرایب و ریشه‌هـای معادله مطلوب است حل دستگاههای زیر:

$$\begin{cases} ۱+t+z+y=x \\ ۱۶+۸t+۴z+۲y=x \\ ۸۱+۲۷t+۹z+۳y=x \\ ۲۵۶+۶۴t+۱۶z+۴y=x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=۶ \\ x^۲+y^۲+z^۲=۱۴ \\ x^۳+y^۳+z^۳=۳۶ \end{cases}$$

مسألهٔ ۱۴۵: معادلهٔ $f(x)=x^۳+Px^۲+qx+r=۰$ مفروض است اگر $P^۲<۳q$ باشد به‌کمك $f'(x)$ نشان دهید معادله فقط يك ریشهٔ حقیقی دارد.

مسألهٔ ۱۴۶: چه رابطه‌ای بین a و b و c برقرار است تا ریشه‌های معادلهٔ

$$x^۳+ax^۲+bx+c=۰$$

تشکیل تصاعد حسابی بدهند.

مسألهٔ ۱۴۷: به ازای چه مقادیر از a معادلهٔ

$$۲x^۴+x^۳-(۳a+۲)x^۲+۲x+a^۲-۱=۰$$

دارای چهار ریشهٔ حقیقی متمایز است.

(**راهنمایی:** معادله را نسبت به a حل کنید).

مسألهٔ ۱۴۸: مطلوب است حل معادلهٔ درجهٔ سوم $x^۳-(۳+\sqrt{۳})x+۳=۰$

(**راهنمایی:** $\sqrt{۳}=a$ فرض کرده معادله را نسبت به a حل کنید).

مسألهٔ ۱۴۹: به ازای چه مقادیری از m معادلهٔ $x^۳+۳x^۲-۹x+m=۰$ دارای ریشهٔ مضاعف است دراین صورت ریشه‌ها را بیابید.

مسألهٔ ۱۵۰: اگر:

$$P=(log N^{p-۳})^{\frac{۱}{۳}} \quad و \quad q=(log N^{q-۳})^{\frac{۱}{۳}} \quad و \quad r=(log N^{r-۳})^{\frac{۱}{۳}}$$

باشد مطلوب است محاسبهٔ $\frac{۱}{P}+\frac{۱}{q}+\frac{۱}{r}$.

مسألهٔ ۱۵۱: m را چنان بیابید که مجموع دوریشه ازریشه‌های معادلهٔ

$$x^۴-۸x^۳+mx^۲+۱۲۸x+۱۶۵=۰$$

مساوی ۶ باشد سپس ریشه‌های معادله را بیابید.

مسألهٔ ۱۵۲: درتعداد ریشه‌های معادله $(۲x-۱)^۳=۲x+m$ برحسب مقادیرمختلف m بحث کنید.

مسألهٔ ۱۵۳: اگر α و β و γ ریشه‌های معادلهٔ $x^۳+mx^۲+۲=۰$ باشند مطلوب است محاسبهٔ عبارت $(\alpha\beta)^۳+(\alpha\gamma)^۳+(\beta\gamma)^۳$.

مسألهٔ ۱۵۴: اگر α و β و γ ریشه‌های معادلهٔ $x^۳+mx^۲+۴=۰$ باشند m را چنان بیابید که داشته باشیم:

$$\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=-\gamma$$

مسألهٔ ۱۵۵: اگر α و β و γ ریشه‌های معادله $x^۳-۳x+۲m=۰$ باشند m را چنان بیابید که داشته باشیم:

$$\alpha(\alpha^۲+۱)+\beta(\beta^۲+۱)+\gamma(\gamma^۲+۱)=-۶$$

مسألهٔ ۱۵۶: حدود m را چنان بیابید که خط $y=mx$ منحنی به معادلهٔ

$$y=\frac{x^۳+۳x+۱}{x^۲}$$

را درسه نقطهٔ متمایز قطع کند و در حالتی که خط برمنحنی مماس است ، مختصات نقطهٔ تماس را بیابید.

مسألهٔ ۱۵۷: بدون استفاده از مشتق مینیمم نسبی تابع $y=\frac{۹-۹x}{x^۳}$ را بیابید.

۱۶

دیفرانسیل تابع یك متغیری و تمرینهای آن

تعریف دیفرانسیل تابع یك متغیری:

فرض می کنیم تابع $f(x)$ در x مشتق پذیرو معمولاً $f'(x)\neq 0$ باشد دراین صورت داریم:

$$f'(x)=\underset{\Delta x\to 0}{\text{حد}}\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\underset{\Delta x\to 0}{\text{حد}}\ \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

اگر فرض کنیم:

$$(۱)\qquad \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)+\varepsilon(\Delta x)$$

طبق قضیهٔ (۲۶) صفحه ۲۴ داریم $\underset{\Delta x\to 0}{\text{حد}}\ \varepsilon(\Delta x)=0$ ، اگر طرفین رابطه (۱) را در Δx ضرب کنیم داریم:

$$(۲)\qquad \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\Delta x+\varepsilon(\Delta x)\Delta x$$

چون تابع $f(x)$ در x مشتق‌پذیر است پس طبق قضیهٔ ۳۲ (صفحهٔ ۳۹) در x پیوسته بوده یعنی $\underset{\Delta x\to 0}{\text{حد}}\ f(x+\Delta x)=f(x)$ ، بنابراین اگر Δx بینهایت کوچك اصلی فرض شود: $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ بینهایت کوچك بوده که قسمت اصلی آن برابر $f'(x)\Delta x$ و چون:

$$\underset{\Delta x\to 0}{\text{حد}}\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)\neq 0$$

پس مرتبهٔ آن (۱) می‌باشد وبه موجب قضیهٔ ۲۸ (صفحهٔ ۲۷)

$$f(x+\Delta x)\underset{\Delta x\to 0}{\sim} f(x)+f'(x)\Delta x \quad \text{یا} \quad f(x+\Delta x)-f(x)\underset{\Delta x\to 0}{\sim} f'(x)\Delta x$$

مطابق تعریف $f'(x)\Delta x$ را به dy یعنی دیفرانسیل تابع y نشان می‌دهند ، پس رابطهٔ (۲) به‌صورت $\Delta y = dy + \varepsilon(\Delta x)\Delta x$ درمی‌آید اختلاف Δy و dy بینهایت کوچك $\varepsilon(\Delta x)\Delta x$ می‌باشد که چون $\underset{\Delta x\to ۰}{\text{حد}}\ \frac{\varepsilon(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = ۰$ ، بوده پس مرتبهٔ بینهایت کوچکی $\varepsilon(\Delta x)\Delta x$ از مرتبهٔ بینهایت کوچکی Δx بیشتراست بنابراین dy و Δy هردو بینهایت کوچك بوده منتها dy قسمت اصلی بینهایت کوچك Δy است و اختلاف Δy و dy بینهایت کوچکی است که مرتبه‌اش ازمرتبهٔ بینهایت کوچکی Δx بیشتراست، اگر x را متغیرمستقل گرفته وفرض کنیم $y = x$ داریم:

$$dy = dx = y'_x\Delta x = ۱\times\Delta x \Longrightarrow dx = \Delta x$$

$$dy = f'(x)\Delta x \Longrightarrow dy = f'(x)dx \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x)$$ و

حال دیفرانسیل مرتبهٔ دوم y را به $d^{۲}y$ نشان داده آن را حساب می‌نماییم ضمناً چون Δx بستگی به x ندارد ، مشتق‌آن نسبت به x صفراست.

$$d^{۲}y = (f'(x)\Delta x)'\times dx = f''(x)dx\times dx = f''(x)dx^{۲} \Longrightarrow$$

$$d^{۲}y = f''(x)dx^{۲} \Longrightarrow f''(x) = \frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}$$

به همین ترتیب داریم:

$$d^{n}y = f^{(n)}(x)dx^{n} \Longrightarrow \frac{d^{n}y}{dx^{n}} = f^{(n)}(x)$$

قضیهٔ ۵۲: اگرتوابع $y = f(u)$ نسبت به u و $u = \varphi(x)$ نسبت به x مشتق داشته باشند دراین صورت $dy = y'_x dx = y'_u du$.

اثبات: دیفرانسیل تابع $y = f(u) = f[\varphi(x)] = F(x)$ را به دست‌آورده داریم:

$$dy = F'(x)dx = y'_x dx = y'_u\times u'_x dx = y'_u du$$

توجه داشته باشید برای محاسبهٔ y'_x ازمشتق تابع تابع استفاده کردیم و نیز به جای $u'_x dx$ مساویش du را قرار دادیم تساوی $dy = y'_x dx = y'_u du$ نشان می‌دهد که برای دیفرانسیل گرفتن ازتابع نام ذکرمتغیرضروری نمی‌باشد ، اما برای مشتق گرفتن‌ذکر نام متغیر ضروری است زیرا مشتق تابع نسبت به u معمولاً با مشتق تابع نسبت به x برابرنیست (مگردرحالتی‌که $u'_x = ۱$ باشد دراین صورت $y'_u = y'_x$ است).

تبصره: در عبارت $dy = y'_x dx$ وقتی x متغیر مستقل است $dx = \Delta x$ است اما اگر x تابعی ازمتغیر دیگر باشد، $dx \neq \Delta x$ است مثلاً وقتی y تابعی از u و u تابعی از x می‌باشد در عبارت $dy = y'_u du$ ، $du \neq \Delta u$ می‌باشد، بهتر است در

همهٔ حالات، یعنی اعم از اینکه x متغیر مستقل و یا اینکه تابعی از متغیر دیگر باشد برای دیفرانسیل گرفتن از رابطهٔ $dy=y'_x dx$ استفاده نماییم.

مثال: شعاع داخلی یك کرهٔ فلزی ۴ و شعاع خارجی آن $۴\frac{۱}{۱۶}$ سانتیمتر است حجم تقریبی جدار کره را به دست آورید.

حل:

$$r=۴ \text{ و } dr=\frac{۱}{۱۶} \text{ و } \Delta V\sim dV$$

$$\text{و } V=\frac{۴}{۳}\pi r^{۳} \Longrightarrow dV=۴\pi r^{۲}dr=۴\pi\times۱۶\times\frac{۱}{۱۶}=۴\pi$$

$$\Longrightarrow \Delta V\sim ۴\pi cm^{۳}$$

مشتق اول ودوم تابع پارامتری:

تابع پارامتری $\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\end{cases}$ را درنظر می‌گیریم داریم:

$$\begin{cases}dx=x'_t dt\\ dy=y'_t dt\end{cases}\Longrightarrow \boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}} \text{ و } \frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=\frac{d\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)}{dx}$$

$$=\frac{d\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)}{dt}\times\frac{dt}{dx}=\frac{d\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)}{dt}\times\frac{۱}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y''x'-x''y'}{x'^{۲}}\times\frac{۱}{x'}$$

$$=\frac{y''x'-x''y'}{x'^{۳}}=\boxed{\frac{\begin{vmatrix}x' & y'\\ x'' & y''\end{vmatrix}}{x'^{۳}}}$$

مثال: ثابت کنید طول قطعهٔ مماس برمنحنی $a>۰$ و $x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}=a^{\frac{۲}{۳}}$ ومحدود به محورهای مختصات مقداری است ثابت.

حل: معادلات پارامتری منحنی را به صورت $\begin{cases} x = a\sin^{۳} t \\ y = a\cos^{۳} t \end{cases}$ می‌نویسیم:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-۳a\cos^{۲} t\sin t}{۳a\sin^{۲} t\cos t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\operatorname{cotg} t$$ مماس

$$Y - a\cos^{۳} t = \frac{-\cos t}{\sin t}\,(X - a\sin^{۳} t)$$: معادله مماس

و $X = ۰ \Longrightarrow Y = a\cos t$ و $Y = ۰ \Longrightarrow X = a\sin t$

$A(۰\ ,\ a\cos t)$ و $B(a\sin t\ ,\ ۰)$ و $AB = \sqrt{a^{۲}\sin^{۲} t + a^{۲}\cos^{۲} t} = a$

تمرین

مسألهٔ ۱۵۸: با استفاده از دیفرانسیل مقدار تقریبی $\operatorname{Arctg} ۰/۹۹$ را بیابید.

مسألهٔ ۱۵۹: در یك قطعه آهن، سوراخی به‌شکل استوانهٔ دوار به قطر ۶Cm و گودی ۳۰Cm کنده شده است ، اگر بخواهیم به وسیلهٔ تراش سوراخ به قطر ۶/۲Cm شود تقریباً چند سانتیمترمکعب ازحجم آهن را باید تراشید.

مسألهٔ ۱۶۰: با استفاده از دیفرانسیل از رابطهٔ $b^{۲}x^{۲} + a^{۲}y^{۲} = a^{۲}b^{۲}$ ، $\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}$ را بیابید.

مسألهٔ ۱۶۱: در هریك ازروابط زیر $\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}$ را بیابید.

۱) $\therefore \begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$

۲) $\therefore \begin{cases} x = t^{۳} + t \\ y = t^{۲} \end{cases}$

۳) $\therefore\ y = \cos(x + y)$

۴) $\therefore\ y = \operatorname{tg}(x + \theta)$

۵) $\therefore\ \cos(xy) = x$

۱۷

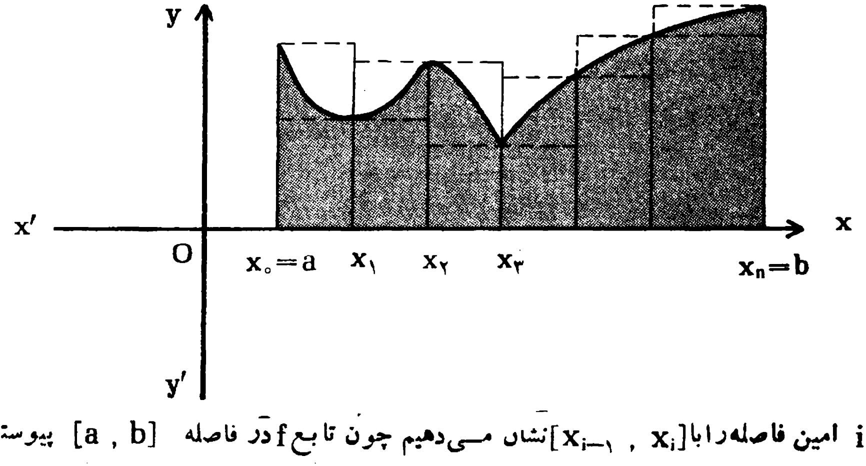
انتگرال معین و تمرین

قبل‌از تعریف انتگرال معین مساحت شکلهایی را که فرم هندسی ندارند محاسبه می‌نماییم. شکل زیررا محصور بین تابع متصل مثبت $y=f(x)$ و خطوط $x=a$ و $x=b$ ومحور xها در نظر می‌گیریم برای محاسبهٔ این سطح فاصلهٔ $[a , b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم می‌نماییم، اندازهٔ هرکدام ازاین تقسیمات برابر با $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

نقاط تقسیم را به ترتیب $x_{۰}$ و $x_{۱}$ و ۰۰۰ و x_n نامگذاری نموده ، داریم:

$x_{۰}=a$ و $x_{۱}=a+\Delta x$ و $x_{۲}=a+۲\Delta x$ و ۰۰۰ و $x_i=a+i\Delta x$ و ۰۰۰ و

$x_{n-۱}=a+(n-۱)\Delta x$ و $x_n=b$



i امین فاصله‌را با $[x_{i-۱} , x_i]$ نشان می‌دهیم چون تابع f در فاصله $[a , b]$ پیوسته است پس طبق قضیهٔ (۳۴) صفحه ۴۳ دارای ماکزیمم و مینیمم مطلق در تمام فواصل $[x_{i-۱} , x_i]$ به ازای تمام مقادیر i است فرض می‌کنیم نقطهٔ $c_i \in [x_{i-۱} , x_i]$ باشد به طوری که $f(c_i)$ مینیمم مطلق و نیز $m_i \in [x_{i-۱} , x_i]$ باشد ، به طوری که $f(m_i)$ ماکزیمم مطلق باشد اگر مساحت بالا را به A نمایش دهیم داریم:

$$S_n = f(c_۱)\Delta x + f(c_۲)\Delta x + \cdots + f(c_i)\Delta x + \cdots + f(c_n)\Delta x$$

$$= \sum_{i=۱}^{n} f(c_i)\Delta x \leqslant A \qquad (۱)$$

$$S'_n = f(m_۱)\Delta x + f(m_۲)\Delta x + \cdots + f(m_i)\Delta x + \cdots + f(m_n)\Delta x$$

$$= \sum_{i=۱}^{n} f(m_i)\Delta x \geqslant A \qquad (۲)$$

Δx و $f(c_i)$ ابعادمستطیلهای‌داخلی ونیز Δx و $f(m_i)$ ابعاد مستطیلهای‌خارجی می‌باشند ثابت می‌کنند اگر تابع $f(x)$ درفاصلهٔ بسته $[a , b]$ پیوسته باشد، وقتی n به‌سمت $(+\infty)$ میل کند حد سیگماهای بالاوجود دارد و مساویند بادر نظرگرفتن نامساویهای (۱) و (۲) مسلماً این حد برابر A می‌باشد یعنی برای هر $\varepsilon > ۰$ وجود دارد $N > ۰$ به طوری که:

$$n > N \Longrightarrow \left| \sum_{i=۱}^{n} f(c_i)\Delta x - A \right| < \varepsilon$$

روش بالا طرز به دست آوردن سطح بین تابع متصل $y=f(x)$ و محور xها وخطوط $x=a$ و $x=b$ رادرفاصلهٔ بسته $[a , b]$ را درصورتی‌که منحنی بالا یاپایین محور x ها باشد مشخص می‌نماید.

مثال: با استفاده ازروش بالاسطح محصوربین منحنی به‌معادلهٔ $y=x^۲$ ومحور x ها و دوخط $x=۰$ و $x=۳$ را بیابید.

حل:

$$b=۳ \text{ و } a=۰ \text{ و } \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{۳}{n}$$

$$x_۰ = ۰ \text{ و } x_۱ = ۰+\Delta x = \Delta x \text{ و } x_۲ = ۰+۲\Delta x = ۲\Delta x \text{ و } \cdots$$

$$x_{i-۱} = (i-۱)\Delta x \text{ و } \cdots \text{ و } x_{n-۱} = (n-۱)\Delta x$$

چون تابع درفاصلهٔ $[۳ , ۰]$ صعودی است، پس مینیمم آن در فاصلهٔ $[x_{i-۱} , x_i]$ برابر $f(x_{i-۱})$ می‌باشد وداریم:

$$\begin{aligned}\sum_{i=۱}^{n} f(x_{i-۱})\Delta x &= f(x_۰)\Delta x + f(x_۱)\Delta x + \cdots + f(x_i)\Delta x + \cdots \\ &\quad + f(x_{n-۱})\Delta x = ۰ + (\Delta x)^۳ + ۲^۲(\Delta x)^۳ + \cdots \\ &\quad + (n-۱)^۲(\Delta x)^۳ = (\Delta x)^۳[۱^۲ + ۲^۲ + \cdots \\ &\quad + (n-۱)^۲]\end{aligned}$$

ازطرفی می‌دانیم:

$$۱^۲+۲^۲+\cdots+n^۲=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

اگر n را به $(n-۱)$ تبدیل کنیم داریم:

$$۱^۲+۲^۲+\cdots+(n-۱)^۲=\frac{(n-۱)n(۲n-۱)}{۶}$$

بنابراین:

$$\sum_{i=۱}^{n} f(x_{i-۱})\Delta x=\frac{۲۷}{n^۳}\times\frac{(n-۱)n(۲n-۱)}{۶}$$

$$A=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\sum_{i=۱}^{n} f(x_{i-۱})\Delta x=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ \frac{۲\times ۲۷n^۳}{۶n^۳}=۹ \quad \text{واحد سطح}$$

تعریف انتگرال معین

تابع f روی فاصلهٔ $[a , b]$ را در نظر گرفته این فاصله را به وسیلهٔ نقاط دلخواه زیر:

$$a=x_۰<x_۱<x_۲<\cdots<x_{i-۱}<x_i<\cdots<x_n=b$$

به n فاصله $[a=x_۰ , x_۱]$ و $[x_۱ , x_۲]$ و ... و $[x_{i-۱},x_i]$ و ... و $[x_{n-۱},x_n=b]$ تقسیم کرده و فرض می‌کنیم $\Delta_i x=x_i-x_{i-۱}$ ، بزرگترین فاصله را به $||\Delta||$ نمایش می‌دهیم، نقاط دلخواه $\theta_۱$ و $\theta_۲$ و... و θ_i و... و θ_n را متعلق به فواصل $\theta_۱\in[a,x_۱]$ و $\theta_۲\in[x_۱, x_۲]$ و ... و $\theta_i\in[x_{i-۱} , x_i]$ و ... و $\theta_n\in[x_{n-۱}, b]$ فرض نموده اگر برای فواصل انتخابی دلخواه و نقاط انتخابی دلخواه متعلق به فواصل بالا $\underset{||\Delta||\to ۰}{\text{حد}}\sum_{i=۱}^{n} f(\theta_i)\Delta_i x$ وجود داشته باشد، یعنی برای هر $\varepsilon>۰$ وجود داشته باشد $\delta>۰$ به طوری که:

$$||\Delta||<\delta \Longrightarrow \left|\sum_{i=۱}^{n} f(\theta_i)\Delta_i x-L\right|<\varepsilon$$

گوئیم تابع f روی فاصلهٔ $[a , b]$ انتگرال پذیراست وچنین نمایش می‌دهیم:

$$\underset{||\Delta||\to ۰}{\text{حد}}\sum_{i=۱}^{n} f(\theta_i)\Delta_i x=\int_a^b f(x)dx$$

a را حد پایین و b را حد بالا و فاصلهٔ [a,b] را حدود یا فاصلهٔ انتگرال‌گیری نامند.

قضیهٔ ۵۳: اگر تابع f در فاصلهٔ بسته [a , b] متصل باشد f انتگرال پذیر است عکس این قضیه درست نیست یعنی ممکن است تابعی متصل نباشد، ولی انتگرال پذیر باشد اثبات این قضیه از حدود برنامه خارج می‌باشد.

تبصره: محاسبهٔ مساحت که قبلا انجام دادیم حالت خاصی از تعریف انتگرال معین است زیرا چون تابع f روی [a,b] متصل بوده پس طبق قضیه ۵۳ انتگرال‌پذیر بوده که در آن $\Delta_i x=\Delta x=\frac{b-a}{n}$ و θ_i طول نقطهٔ ماکزیمم یا مینیمم انتخاب کرده و می‌دانیم اگر $(n\to\infty\Longrightarrow\Delta x\to ۰)$ یا $(\Delta x\to ۰\Longrightarrow n\to\infty)$ چون Δx همان $||\Delta||$ می‌باشد، پس اگر تعریف انتگرال معین را بنویسیم به تعریف مساحت خواهیم رسید، زیرا:

$$\underset{||\Delta||\to ۰}{\text{حد}}\sum_{i=۱}^{n} f(\theta_i)\Delta_i x=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\sum_{i=۱}^{n} f(\theta_i)\Delta x=\int_a^b f(x)dx$$

مثال ۱: با استفاده از تعریف انتگرال معین مطلوب است محاسبهٔ $\int_a^b m dx$ وقتی $b>a$ باشد.

حل:

$$\Delta x=\frac{b-a}{n} \text{ و } x_{۰}=a \text{ و } x_{۱}=a+\Delta x \text{ و } x_{۲}=a+۲\Delta x \text{ و } \cdots \text{ و }$$

$$x_i=a+i\Delta x \text{ و } \cdots \text{ و } x_n=a+n\Delta x=b$$

θ_i ها را نقاط ابتدایی فواصل انتخاب می‌کنیم داریم:

$$\sum_{i=۱}^{n} f(\theta_i)\Delta_i x=\sum_{i=۱}^{n} f(x_{i-۱})\Delta x=f(x_{۰})\Delta x+f(x_{۱})\Delta x+\cdots$$
$$+f(x_{n-۱})\Delta x$$

چون $f(x)=m$ می‌باشد پس:

$$\sum_{i=۱}^{n} f(\theta_i)\Delta_j x=m\Delta x+m\Delta x+\cdots+m\Delta x=mn\Delta x$$

و

$$=mn\times\frac{b-a}{n}=m(b-a)$$

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ \sum_{i=۱}^{n} f(\theta_i)\Delta_i x = m(b-a) \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx = m(b-a)$$

مثال ۲: با استفاده از تعریف انتگرال معین مطلوب است محاسبهٔ $\int_a^b Kxdx$ وقتی $b > a$ باشد.

حل:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \text{ و } x_۰ = a \text{ و } x_۱ = a + \Delta x \text{ و}$$

$$x_۲ = a + ۲\Delta x \text{ و} \cdots \text{ و } x_i = a + i\Delta x \text{ و} \cdots \text{ و } x_{n-۱} = a + (n-۱)\Delta x \text{ و}$$

$$x_n = a + n\Delta x = b$$

θ_i ها را نقاط ابتدایی فواصل انتخاب کرده ، داریم:

$$\sum_{i=۱}^{n} f(\theta_i)\Delta_i x = \sum_{i=۱}^{n} f(x_{i-۱})\Delta x = f(x_۰)\Delta x + f(x_۱)\Delta x + \cdots$$

$$+ f(x_{n-۱})\Delta x = \Delta x[f(x_۰) + f(x_۱) + f(x_۲) + \cdots + f(x_{n-۱})]$$

$$= \frac{b-a}{n}[Ka + K(a+\Delta x) + K(a + ۲\Delta x) + \cdots$$

$$+ K(a + (n-۱)\Delta x)] = \frac{b-a}{n} \times K[na + \Delta x(۱ + ۲ + \cdots$$

$$+ (n-۱))] = \frac{b-a}{n} \times K\left[na + \frac{b-a}{n} \times \frac{n(n-۱)}{۲}\right]$$

$$= (b-a)K\left[a + \left(\frac{n-۱}{۲n}\right)(b-a)\right]$$

و

$$\underset{n\to+\infty}{\text{حد}}\ \sum_{i=۱}^{n} f(\theta_i)\Delta_i x = K(b-a)\left(a + \frac{b-a}{۲}\right) \Longrightarrow$$

$$\int_a^b Kxdx = K \times \frac{b^۲ - a^۲}{۲}$$

توجه: توابع زیر انتگرالهای مثالهای ۱ و ۲ یعنی m و Kx هردو در فواصل [a , b] پیوسته بوده پس انتگرال پذیر بودند.

تمرین

مسألهٔ ۱۶۲: با استفاده از تعریف انتگـرال معین مطلوب است محاسبهٔ انتگـرالهای معین زیر:

$$۱)\ \therefore\ \int_{-۲}^{۲}(x^{۳}+۱)dx \qquad ۲)\ \therefore\ \int_{۱}^{۴}(x^{۲}-۴x-۳)dx$$

۱۸

خواص اصلی انتگرال معین و تمرینهای آن

برای بررسی خواص انتگرال معین، توابع داده شده را روی فاصلهٔ [a , b] پیوسته فرض نموده تا اثبات قضایا به سهولت انجام گیرد ، البته اگر توابع روی فاصلهٔ [a , b] انتگرال پذیر باشند باز این خواص برقراراست ، اثبات آنها مستقیماً از روی تعریف انتگرال پذیری توابع روی فاصلهٔ [a , b] انجام می گردد وقتی هم توابع را پیوسته می گیریم. طبق قضیهٔ ۵۳ (صفحهٔ ۱۱۶) انتگرال‌پذیر خواهندبود.

قضیهٔ ۵۴ (خاصیت ۱): اگر تابع f روی فاصلهٔ [a , b] پیوسته باشد ، داریم:

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$$

اثبات:

$$\int_a^b Af(x)dx = \underset{\|\Delta\|\to 0}{\text{حد}} \sum_{i=1}^{n} Af(\theta_i)\Delta_i x = A \times \underset{\|\Delta\|\to 0}{\text{حد}} \sum_{i=1}^{n} f(\theta_i)\Delta_i x$$

$$= A\int_a^b f(x)dx$$

قضیهٔ ۵۵ (خاصیت ۲): اگر توابع f و g روی فاصلهٔ [a , b] پیوسته باشند ، داریم:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

اثبات:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \underset{\|\Delta\|\to 0}{\text{حد}} \sum_{i=1}^{n} [f(\theta_i)+g(\theta_i)]\Delta_i x$$

$$=\underset{||\Delta||\to ۰}{\text{حد}}\left[\sum_{i=۱}^{n} f(\theta_i)\Delta_i x+\sum_{i=۱}^{n} g(\theta_i)\Delta_i x\right]$$

$$=\underset{||\Delta||\to ۰}{\text{حد}}\sum_{i=۱}^{n} f(\theta_i)\Delta_i x+\underset{||\Delta||\to ۰}{\text{حد}}\sum_{i=۱}^{n} g(\theta_i)\Delta_i x$$

$$=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

قضیهٔ ۵۶ (خاصیت ۳): اگر توابع f و g روی $[a , b]$ پیوسته $(a < b)$ و $f(x) \leqslant g(x)$ باشد ، داریم:

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$$

اثبات:

$$\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)dx=\int_a^b [g(x)-f(x)]dx$$

$$=\underset{||\Delta||\to ۰}{\text{حد}}\sum_{i=۱}^{n} [g(\theta_i)-f(\theta_i)]\Delta_i x$$

چون $g(\theta_i)-f(\theta_i) \geqslant ۰$ و $\Delta_i x > ۰$ پس حاصلضرب آنها منفی نمی‌باشد و طبق قضیهٔ ۱۲ (صفحه ۱۳)، داریم:

$$\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)dx=\underset{||\Delta||\to ۰}{\text{حد}}\sum_{i=۱}^{n} [g(\theta_i)-f(\theta_i)]\Delta_i x \geqslant ۰ \Longrightarrow$$

$$\int_a^b g(x)dx \geqslant \int_a^b f(x)dx$$

قضیهٔ ۵۷ (خاصیت ۴): اگر تابع f روی فاصلهٔ $[a , b]$ $(a < b)$ پیوسته باشد m و M به ترتیب کمترین و بیشترین مقدار تابع باشند ، داریم:

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$$

اثبات: چون $m \leqslant f(x) \leqslant M$ پس طبق قضیهٔ ۵۶ (صفحه ۱۲۰) (خاصیت ۳) و مثال (۱) بعد از قضیهٔ ۵۳ (صفحه ۱۱۶) داریم:

$$\int_a^b mdx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b Mdx \Longrightarrow$$

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$$

قضیهٔ ۵۸ (خاصیت ۵): اگر تابع f در فاصلهٔ معینی پیوسته باشد، سه نقطهٔ a و b و c را در آن فاصله در نظر بگیریم، داریم:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

اثبات: فرض می‌کنیم $a < c < b$ فاصلهٔ $[a, b]$ را به دو فاصلهٔ $[a, c]$ و $[c, b]$ تقسیم نموده چون f روی این فواصل پیوسته می‌باشد، پس طبق قضیهٔ (۵۳) در این فواصل f انتگرال‌پذیر است و نقاط اختیاری مربوط به این فواصل را به طریق زیر انتخاب می‌نماییم:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < x_m =$$
$$c < x_{m+1} < x_{m+2} < \cdots < x_n = b$$

و $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ و $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ و $S' = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta_i x$

و $S'' = \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$ و $S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$

$\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta_i x + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\Delta_j x = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$ و

اگر λ' ماکزیمم $\Delta_i x$ درفاصلهٔ $[a , c]$ و λ'' ماکزیمم $\Delta_i x$ در فاصلهٔ $[c , b]$ و λ ماکزیمم $\Delta_i x$ در فاصلهٔ $[a , b]$ باشد داریم:

$$\underset{\lambda\to 0}{\text{حد}}\, S = \underset{\lambda'\to 0}{\text{حد}}\, S' + \underset{\lambda''\to 0}{\text{حد}}\, S''$$

، بنابراین:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

حال اگر $a < b < c$ باشد مطابق آنچه در بالا گفته شد ، داریم:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

به موجب تعریف $\int_b^c f(x)dx = -\int_c^b f(x)dx$ پس:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx \implies$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

این طریق استدلال را برای هرحالت دیگر c و b و a می‌توان به‌کار برد.

قضیهٔ ۵۹ (قضیهٔ میانه درانتگرال): اگر تابع $f(x)$ در فاصلهٔ بستهٔ $[a , b]$ پیوسته باشد ، عددی مانند c دراین فاصله وجود دارد به طوری‌که:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

چون اثبات این قضیه احتیاج به‌بیان قضایای دیگر دارد ازاثبات آن صرفنظر کرده فقط به‌ذکر یك مثال می‌پردازیم:

مثال: قضیه‌میانه رابرای تابع $f(x) = x^{۲}$ روی فاصله [۰,۳] به‌کاربرده c رابیابید.

حل: چون $f(x)=x^{۲}$ در فاصله $[۰\,,\,۳]$ پیوسته است، طبق قضیهٔ ۵۹ (میانه در انتگرال) داریم $\int_{۰}^{۳} x^{۲}dx=(۳-۰)f(c)$ که $c\in[۰\,,\,۳]$ می‌باشد در مثال مساحت صفحه ۱۱۴ نشان دادیم $\int_{۰}^{۳} x^{۲}dx=۹$ بنابراین:

$$۹=۳f(c)\implies ۹=۳c^{۲}\implies c=\pm\sqrt{۳}$$

جواب $c=\sqrt{۳}$ که متعلق به فاصلهٔ $[۰\,,\,۳]$ می‌باشد درست است.

تعریف کلی میانگین:

فاصلهٔ $[a\,,\,b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم نموده و عدد دلخواه θ_i را در این فواصل در نظر می‌گیریم در این صورت میانگین $f(\theta_{۱})$ و $f(\theta_{۲})$ و . . . و $f(\theta_i)$ و . . . و $f(\theta_n)$ برابر است با:

$$\frac{f(\theta_{۱})+f(\theta_{۲})+\cdots+f(\theta_n)}{n}=\frac{\sum_{i=۱}^{n} f(\theta_i)}{n}$$

می‌دانیم $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ یا $n=\frac{b-a}{\Delta x}$ بنابراین:

$$\frac{\sum_{i=۱}^{n} f(\theta_i)}{n}=\frac{\Delta x\sum_{i=۱}^{n} f(\theta_i)}{b-a}=\frac{\sum_{i=۱}^{n} f(\theta_i)\Delta x}{b-a}$$

اگر n به سمت ∞ میل کند، داریم:

$$\frac{\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\sum_{i=۱}^{n} f(\theta_i)\Delta x}{b-a}=\frac{\int_{a}^{b} f(x)dx}{b-a}$$

با توجه باین مطلب مقدار متوسط یک تابع در یک فاصله را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف: اگر تابع f درفاصلهٔ $[a , b]$ انتگرال پذیر باشد، مقدارمتوسط تابع f در این فاصله برابر است با : $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$.

مثال: مقدارمتوسط تابع $f(x)=x^۲$ را درفاصلهٔ $[۰ , ۳]$ بیابید.

حل: چون تابع $f(x)=x^۲$ متصل است پس انتگرال پذیرمی‌باشد و مقدار متوسط آن برابر است با $۳=\frac{۹}{۳}=\frac{\int_۰^۳ x^۲dx}{۳-۰}$.

قضیهٔ ۶۰: اگرمشتق تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $[a , b]$ مساوی با صفر باشد تابع $f(x)$ درفاصلهٔ $[a , b]$ مساوی با مقدار ثابتی است.

اثبات: چون‌مشتق تابع‌درفاصلهٔ داده‌شده‌وجوددارد، پس‌طبق‌قضیهٔ ۳۲ (صفحهٔ ۳۹) تابع‌درفاصلهٔ $[a , b]$ پیوسته است ، حال x را دراین‌فاصله انتخاب نموده تابع درفاصلهٔ $[a , x]$ پیوسته ودرفاصلهٔ (a , x) مشتق‌پذیر، پس‌طبق‌قضیهٔ ۴۰ (صفحهٔ ۵۷) (قضیهٔ لاگرانژ) عددی مانند $c \in (a , x)$ یعنی متعلق به فاصلهٔ $[a , b]$ وجود دارد به طوری که:

$$f(x)-f(a)=(x-a)f'(c)$$

ازطرفی $f'(c)=۰$ بوده ، بنابراین $f(x)=f(a)$ یعنی تابع ثابت می‌باشد.

تمرین

مسألهٔ ۱۶۳: بدون انتگرال‌گیری صحت نامساویهای زیررا اثبات نمایید.

۱) $\therefore \int_۰^۱ xdx \geqslant \int_۰^۱ x^۲dx$

۲) $\therefore \int_۱^۲ \frac{dx}{x} \geqslant \int_۱^۲ \frac{dx}{x-۳}$

۳) $\therefore \int_{-۲}^{-۱} \frac{dx}{x-۳} \geqslant \int_{-۲}^{-۱} \frac{dx}{x}$

مسألهٔ ۱۶۴: ماکزیمم و مینیمم مقادیری را که انتگرالهای معین زیر می‌توانند اختیار نمایند بیابید:

۱) $\therefore \int_{-۱}^{۲} \sqrt{x^۲+۵}\,dx$ ۲) $\therefore \int_{۱}^{۴} |x-۲|\,dx$

مسألهٔ ۱۶۵: مقدار تقریبی انتگرال $I=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sqrt{۱+\frac{۱}{۲}\sin^۲ x\,dx}$ را بیابید.

مسألهٔ ۱۶۶: مقدار c را در قضیهٔ میانه برای انتگرالهای زیر بیابید.

۱) $\therefore \int_{-۲}^{۲} (x^۳+۱)dx$

۲) $\therefore \int_{۱}^{۴} (x^۲+۴x+۵)dx$

مسألهٔ ۱۶۷: مقدار متوسط تابع $f(x)=x^۲\sqrt{x-۳}$ را در فاصلهٔ [۷ و ۱۲] بیابید.

۱۹

تابع اولی و انتگرال نامعین

تابع $F(x)$ را روی فاصلهٔ I تابع اولی $f(x)$ نامیم هرگاه برای $\forall x \in I$ داشته باشیم $F'(x)=f(x)$ مسلماً اگر $F(x)$ تابع اولی $f(x)$ باشد $F(x)+c$ نیز تابع اولی $f(x)$ خواهد بود.

قضیهٔ ۶۱: اگر توابع $F(x)$ و $G(x)$ تابع اولی $f(x)$ روی فاصله I باشند تفاضل آنها مقدار ثابتی است.

اثبات: فرض می‌کنیم $F(x)-G(x)=\varphi(x)$ از طرفین این رابطه مشتق می‌گیریم داریم $F'(x)-G'(x)=\varphi'(x)$ چون توابع $F(x)$ و $G(x)$ تابع اولی $f(x)$ می‌باشند پس $G'(x)=f(x)$ و $F'(x)=f(x)$ یعنی $\varphi'(x)=f(x)-f(x)=0$ طبق قضیهٔ ۶۰ (صفحهٔ ۱۲۴) باید $\varphi(x)=K$ یعنی $F(x)-G(x)=K$ این رابطه نشان می‌دهد هر تابع اولی $f(x)$ مانند $F(x)$ به صورت $G(x)+K$ نوشته می‌شود.

انتگرال نامعین:

هرگاه تابع $F(x)$ تابع اولی تابع $f(x)$ باشد، عبارت $F(x)+c$ را انتگرال نامعین تابع $f(x)$ گویند و آن‌را با علامت $\int f(x)dx$ نمایش می‌دهند.

تبصره: اگر $\int f(x)dx=F(x)+c$ یعنی:

$$dF(x)=F'(x)dx=f(x)dx \quad \text{یا} \quad F'(x)=f(x)$$

دراین صورت، داریم:

$$۱) \quad \therefore \quad \left[\int f(x)dx\right]'=(F(x)+c)'=f(x)$$

یعنی مشتق انتگرال نامعین یک تابع مساوی است با خود تابع:

۲) $$\therefore\quad d\left[\int f(x)dx\right]=d(F(x)+c)=F'(x)dx=f(x)dx$$

یعنی دیفرانسیل انتگرال نامعین یك تابع مساوی است با عبارت زیرانتگرال:

۳) $$\therefore\quad \int dF(x)=F(x)+c$$

یعنی انتگرال نامعین دیفرانسیل یك تابع مساوی است با خود تابع به اضافهٔ مقداری ثابت

۴) $$\therefore\quad \int af(x)dx=a\int f(x)dx$$

زیرا:

$$\left(a\int f(x)dx\right)'=af(x) \quad \text{و} \quad \left(\int af(x)dx\right)'=af(x)$$

چون مشتقات دوطرف رابطهٔ (۴) برابرند ، پس دوطرف می‌توانند برابر باشند.

۵) $$\therefore\quad \int [f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$

زیرا:

$$\left(\int [f(x)+g(x)]dx\right)'=f(x)+g(x)$$

$$\left(\int f(x)dx+\int g(x)dx\right)'=\left(\int f(x)dx\right)'$$
$$+\left(\int g(x)dx\right)'=f(x)+g(x)$$

چون مشتقات دوطرف رابطهٔ (۵) برابرند ، پس رابطهٔ (۵) می‌تواند برقرار باشد.

۶) $$..\quad \int f(ax)dx=\frac{1}{a}F(ax)+c$$

زیرا:

$$\left(\int f(ax)dx\right)'=f(ax)$$ و

$$\left(\frac{1}{a}F(ax)+c\right)'=\frac{1}{a}\times F'(ax)\times a=F'(ax)=f(ax)$$

چون مشتقات دوطرف رابطهٔ (۶) برابرند ، پس رابطه (۶) می‌تواند برقرار باشد.

$$۷)\quad \therefore\quad \int f(x+b)dx=F(x+b)+c$$

$$۸)\quad \therefore\quad \int f(ax+b)dx=\frac{۱}{a}F(ax+b)+c$$

اگر ازطرفین روابط ۷ و ۸ مشتق بگیرید ، برابرشده ، پس روابط ۷ و ۸ می توانند برقرار باشند.

قضیهٔ ۶۲: اگر تابع f در فاصله [a , b] پیوسته و x متعلق بـه این فاصله باشد در این صورت $\int_{a}^{x} f(t)dt$ یکی از توابع اولی f(x) می باشد.

اثبات: فرض مـی کنیم $\varphi(x)=\int_{a}^{x} f(t)dt$ باشد Δx را طوری انتخاب می کنیم که $x+\Delta x$ درفاصلهٔ [a , b] قرارگیرد حال x را تبدیل به $x+\Delta x$ نموده و ازقضیهٔ ۵۸ صفحه ۱۲۱ (خاصیت ۵) استفاده کرده ، داریم:

$$\varphi(x+\Delta x)=\int_{a}^{x+\Delta x} f(t)dt=\int_{a}^{x} f(t)dt+\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt$$

و

$$\Delta\varphi=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)=\int_{a}^{x} f(t)dt+\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_{a}^{x} f(t)dt=\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt$$

چون تابع f درفاصلهٔ [a , b] پیوسته بوده ، x و $x+\Delta x$ که متعلق به این فاصله می باشند : بنابراین تابع f درفاصلهٔ $[x , x+\Delta x]$ پیوسته است ومی توان قضیهٔ ۵۹ صفحه ۱۲۲ (قضیهٔ میانه درانتگرال)را دربارهٔ آن به کاربرد ، یعنی:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx=(b-a)f(c)$$

بنا براین ، داریم:

$$\Delta\varphi=\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt=(x+\Delta x-x)f(c)\Longrightarrow\Delta\varphi=\Delta x f(c)\Longrightarrow$$

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}=f(c)\Longrightarrow\underset{\Delta x\to 0}{\text{حد}}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}=\underset{\Delta x\to 0}{\text{حد}} f(c)$$

چون $c\in[x , x+\Delta x]$ می‌باشد ، پس اگر Δx به‌سمت صفر میل کند c به‌سمت x میل می‌نماید ازطرفی چون $f(x)$ تابع پیوسته است ، بنا براین $\underset{c\to x}{\text{حد}} f(c)=f(x)$

یعنی:

$$\underset{\Delta x\to 0}{\text{حد}}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}=\underset{\Delta x\to 0}{\text{حد}} f(c)=\underset{c\to x}{\text{حد}} f(c)=f(x)\Longrightarrow\varphi'(x)=f(x)$$

چون مشتق $\varphi(x)$ برابر $f(x)$ می‌باشد ، پس $\varphi(x)$ یکی‌ازتوابع اولی $f(x)$ است.

تعریف: درمحاسبه انتگرال $\int_{a}^{b} f(x)dx$ فرض آن است که $a<b$ باشد ، اگر $a>b$ باشد ، به موجب تعریف ، داریم : $\int_{a}^{b} f(x)dx=-\int_{b}^{a} f(x)dx$ اگر به جای a ، b را قراردهیم ، داریم $\int_{a}^{a} f(x)dx=0$.

۲۰

قضیه اصلی در انتگرال

قضیهٔ ۶۳ (قضیهٔ اصلی، فرمول نیوتن لیب نیتز) : اگر $F(x)$ تابع اولی تابع پیوسته $f(x)$ روی فاصلهٔ بستهٔ $[a , b]$ باشد، در این صورت، داریم:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

اثبات: به‌موجب قضیهٔ ۶۲ (صفحهٔ ۱۲۸) یکی از توابع اولی $f(x)$ انتگرال $\int_a^x f(t)dt$ می‌باشد

و چون $F(x)$ تابع اولی $f(x)$ نیز می‌باشد، پس به‌موجب قضیه‌های ۶۲ و ۶۱ (صفحه‌های ۱۲۸ و ۱۲۶)، داریم:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + c$$

اگر در این رابطه به جای x ، a قرار دهیم، داریم:

$$c = -F(a) \quad \text{یا} \quad \int_a^a f(t)dt = F(a) + c = 0$$

پس

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

و اگر به‌جای x ، b قرار دهیم فرمول نیوتن لیب نیتز به‌دست می‌آید یعنی:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

که آن را می‌توان به صورت $[F(x)]_a^b$ نمایش داد.

تبصره: قضیهٔ اصلی رابطهٔ بین تابع اولی و انتگرال معین را بیان می‌نماید حال برای اینکه رابطهٔ بین تابع اولی و انتگرال نامعین برقرار سازیم می‌توان از این به بعد به جای تابع اولی انتگرال نامعین را به‌کار برد توجه داشته باشید که انتگرال معین $\int_a^b f(x)dx$ عددی است که مقدار آن بستگی به a و b داشته و به صورت حد یك مجموع تعریف می‌شود درصورتی که انتگرال نامعین $\int f(x)dx$ تابعی است مانند $\varphi(x)$ به طوری که $\varphi'(x)=f(x)$.

۲۱

دستور تبدیل متغیر در انتگرالها

الف : دستور تبدیل متغیر در انتگرال نامعین

گاهی اوقات برای انتگرال‌گیری $\int f(x)dx$ ناچاریم x را به متغیر دیگری مانند t تبدیل نماییم در این صورت فرض می‌کنیم $x=\varphi(t)$ بنابراین:

$$dx=\varphi'(t)dt$$

ثابت خواهیم کرد:

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

می‌باشد برای اثبات، چنین عمل می‌نماییم:

$$d\int f(x)dx=f(x)dx=f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=d\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\int f(x)dx=\frac{d}{dt}\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

وطبق قضیهٔ شماره (۶۱) صفحه ۱۲۶ ، داریم:

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt+c$$

روش بالا نشان می‌دهد که یکی از محاسن علامت $\int f(x)dx$ آن است که با این علامت دستور تبدیل متغیر به صورت ساده درمی‌آید و با کمی دقت به خاطر می‌ماند.

ب : دستور تبدیل متغیر در انتگرال معین

تابع پیوسته $f(x)$ را روی فاصلهٔ بستهٔ $[a\ ,\ b]$ درنظر گرفته می‌خواهیم انتگرال

معین $\int_a^b f(x)dx$ را با تبدیل متغیر محاسبه نماییم ، تابع $x=\varphi(t)$ را متصل و دارای مشتق متصل وصعودی فرض می‌نماییم. بنابراین تابع معکوس آن وجود داشته و متصل وصعودی است فرض می‌کنیم:

$$x=a \Longleftrightarrow t=\alpha \quad \text{و} \quad x=b \Longleftrightarrow t=\beta$$

اگر $b>a$ باشد $\beta>\alpha$ خواهد بود ، وقتی t درفاصلهٔ $[\alpha , \beta]$ تغییر می‌کند x درفاصله $[a , b]$ تغییرمی‌نماید وبرعکس پس می‌توان گفت بین $[\alpha , \beta]$ و $[a , b]$ یك تناظریك به‌یك تحت تابع $x=\varphi(t)$ برقراراست حال فاصلهٔ $[\alpha , \beta]$ را بااعداد t_i به n فاصلهٔ جزئی و فاصلهٔ $[a , b]$ را با اعداد x_i به n فاصلهٔ جزئی تقسیم می‌کنیم ، یعنی:

$$[t_{۰}=\alpha , t_{۱}] \ \text{و}\ [t_{۱} , t_{۲}] \ \text{و} \cdots \text{و}\ [t_{i-۱} , t_i] \ \text{و} \cdots \text{و}$$
$$[t_{n-۱} , t_n=\beta]$$
$$[x_{۰}=a , x_{۱}] \ \text{و}\ [x_{۱} , x_{۲}] \ \text{و} \cdots \text{و}\ [x_{i-۱} , x_i] \ \text{و} \cdots \text{و}$$
$$[x_{n-۱} , x_n=b]$$

چون شرایط تابع $x=\varphi(t)$ دربارهٔ قضیهٔ ۴۰ صفحه ۵۷ (قضیهٔ لاگرانژ) صدق می‌کند داریم:

$$(۱) \quad x_i-x_{i-۱}=\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-۱})=(t_i-t_{i-۱})\varphi'(\omega_i)$$

که $\omega_i \in (t_{i-۱} , t_i)$ پس $\varphi(\omega_i)$ متعلق به فاصله $(x_{i-۱} , x_i)$ بوده که آن را θ_i نامیم یعنی،

$$\theta_i=\varphi(\omega_i) \quad \text{و} \quad f(\theta_i)=f[\varphi(\omega_i)]$$
$$\sum_{i=۱}^{n} f(\theta_i)(x_i-x_{i-۱})=\sum_{i=۱}^{n} f[\varphi(\omega_i)]\varphi'(\omega_i)(t_i-t_{i-۱})$$

اگرفرض کنیم $g(t)=f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ بنابراین $g(\omega_i)=f[\varphi(\omega_i)]\varphi'(\omega_i)$ وداریم:

$$(۲) \quad \sum_{i=۱}^{n} f(\theta_i)(x_i-x_{i-۱})=\sum_{i=۱}^{n} g(\omega_i)(t_i-t_{i-۱})$$

رابطهٔ (۱) نشان می‌دهد ، اگر $t_i-t_{i-۱}$ به سمت صفرمیل کند $x_i-x_{i-۱}$ به سمت صفرمیل خواهد نمود بنابراین:

$$\lim_{||\Delta||\to ۰} \sum_{i=۱}^{n} g(\omega_i)(t_i-t_{i-۱})=\lim_{||\Delta'||\to ۰} \sum_{i=۱}^{n} f(\theta_i)(x_{i-۱}-x_i)$$

یعنی:
$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

یا
$$\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

مثال ۱: $\int_{۲}^{۷} \frac{x}{\sqrt{x+۲}}dx$.

حل: $t=\sqrt{x+۲}$ درفاصله [۷ , ۲] تابع صعودی ومتصل است.

و $x=۲ \Rightarrow t=۲$ و $x=۷ \Rightarrow t=۳$

و $x=t^۲-۲ \Rightarrow dx=۲tdt$

$$\int_{۲}^{۳} \frac{t^۲-۲}{t}\times ۲tdt=۲\int_{۲}^{۳}(t^۲-۲)dt$$

$$=۲\left[\frac{۱}{۳}t^۳-۲t\right]_{۲}^{۳}=۸\frac{۲}{۳}$$

مثال۲: با انتخاب تغییرمتغیرمناسب نشان‌دهید:

$$\int_{۰}^{\pi} \sin x dx = ۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin x dx$$

ونیز با انتخاب $t=\sin x$ مقدارانتگرال $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin x dx$ را بیابید.

حل:

$$\int_{۰}^{\pi} \sin x dx = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} \sin x dx$$

اگر $x=\pi-u$ بگیریم ، داریم:

$$x=\frac{\pi}{۲} \Longrightarrow u=\frac{\pi}{۲} \quad \text{و} \quad x=\pi \Longrightarrow u=۰ \quad \text{و} \quad dx=-du$$

$$\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} \sin x\,dx=\int_{\frac{\pi}{۲}}^{۰} \sin(\pi-u)\times -du=-\int_{\frac{\pi}{۲}}^{۰} \sin u\,du$$

و

$$=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin u\,du=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin x\,dx$$

$$\int_{۰}^{\pi} \sin x\,dx=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin x\,dx+\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin x\,dx=۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin x\,dx$$

برای محاسبهٔ انتگرال اگر x را صفر و π بگیریم t مساوی صفر می‌شود یعنی حدود انتگرال جدید صفر است پس مقدار انتگرال صفر می‌شود وحال‌آنکه ، داریم:

$$\int_{۰}^{\pi} \sin x\,dx=-\Big[\cos x\Big]_{۰}^{\pi}=-(-۱-۱)=۲$$

اشکال در اینجاست که تابع $t=\sin x$ در فاصله $[۰ , \pi]$ هم صعودی و هم نزولی است ، لذا چنین عمل می‌نماییم:

$$\int_{۰}^{\pi} \sin x\,dx=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin x\,dx+\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} \sin x\,dx$$

تابع $t=\sin x$ درفاصله $\left[۰ , \frac{\pi}{۲}\right]$ صعودی ودرفاصله $\left[\frac{\pi}{۲} , \pi\right]$ نزولی است.

$$t=\sin x \Longrightarrow dt=\cos x\,dx \Longrightarrow dx=\frac{dt}{\cos x}$$

اگر x را در فاصلهٔ $\left[۰ , \frac{\pi}{۲}\right]$ بگیریم $\cos x=\sqrt{۱-\sin^{۲} x}=\sqrt{۱-t^{۲}}$ واگر

x را درفاصلهٔ $\left[\frac{\pi}{۲}\,,\,\pi\right]$ بگیریم $\cos x=-\sqrt{۱-\sin^{۲}x}=-\sqrt{۱-t^{۲}}$:

$x=\pi \Longrightarrow t=۰$ و $x=\frac{\pi}{۲} \Longrightarrow t=۱$ و $x=۰ \Longrightarrow t=۰$

$$\int_{۰}^{\pi}\sin x\,dx=\int_{۰}^{۱}\frac{t\,dt}{\sqrt{۱-t^{۲}}}+\int_{۱}^{۰}\frac{-t\,dt}{\sqrt{۱-t^{۲}}}$$

$$=\int_{۰}^{۱}\frac{t\,dt}{\sqrt{۱-t^{۲}}}+\int_{۰}^{۱}\frac{t\,dt}{\sqrt{۱-t^{۲}}}$$

$$=۲\int_{۰}^{۱}\frac{t\,dt}{\sqrt{۱-t^{۲}}}=۲\left[-\sqrt{۱-t^{۲}}\right]_{۰}^{۱}=۲(۰+۱)=۲$$

مثال ۳: مطلوب است انتگرال $\int\sqrt{\frac{۱+x}{۱-x}}\,dx$.

حل:

$dx=-\sin t\,dt$ و $x=\cos t$ و $\frac{۱+x}{۱-x}\geqslant ۰ \Longrightarrow -۱\leqslant x<۱$

$$\int\sqrt{\frac{۱+x}{۱-x}}\,dx=\int\sqrt{\frac{۱+\cos t}{۱-\cos t}}\times -\sin t\,dt$$

$$=\int\frac{\cos\frac{t}{۲}}{\sin\frac{t}{۲}}\times -۲\sin\frac{t}{۲}\cos\frac{t}{۲}\,dt$$

$$=-۲\int\cos^{۲}\frac{t}{۲}\,dt=-\int(۱+\cos t)\,dt$$

$$=-(t+\sin t)+C$$

$$=-(\mathrm{Arc}\cos x+\sqrt{۱-x^{۲}})+c$$

درحل این مسأله تمام رادیکالها را مثبت انتخاب کردیم وازبحث خودداری نمودیم.

۲۲

تعمیم انتگرال معین و تمرین

می‌خواهیم $\int_a^b f(x)dx$ را درحالتی‌که $f(x)$ در یکی از نقاط فاصله $[a,b]$ بینهایت بوده و یا آنکه a و b بینهایت باشند محاسبه‌نماییم.

مثال ۱: آیا $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ وجود دارد.

حل: چون تابع $f(x)=\frac{1}{x^2}$ به‌ازای $x=0$ منفصل است نمی‌توان قضیهٔ ۶۳ (صفحهٔ ۱۳۰) یعنی قضیهٔ اصلی را به‌کاربرد، اما تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $[\varepsilon,1]$ که ε عدد مثبت خیلی کوچك است پیوسته می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}\,dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^1=-1+\frac{1}{\varepsilon}$$

و

$$\underset{\varepsilon\to 0^+}{\text{حد}}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^2}=\underset{\varepsilon\to 0^+}{\text{حد}}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\to +\infty$$

پس انتگرال وجود ندارد.

مثال ۲: آیا $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ وجود دارد.

حل: تابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ به ازای $x=0$ منفصل است، مانند مثال (۱) عمل می‌نماییم:

و

$$\int_{\varepsilon}^{۱}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\Big[۲\sqrt{x}\Big]_{\varepsilon}^{۱}=۲-۲\sqrt{\varepsilon}$$

$$\underset{\varepsilon\to ۰^{+}}{\text{حد}}\int_{\varepsilon}^{۱}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\underset{\varepsilon\to ۰^{+}}{\text{حد}}\,(۲-۲\sqrt{\varepsilon})=۲$$

پس انتگرال وجود دارد.

مثال ۳: آیا $\int_{-۱}^{۱}\frac{dx}{x^{۲}}$ وجود دارد.

حل: تابع $f(x)=\frac{۱}{x^{۲}}$ درصفرمنفصل است پس‌نمی‌توان فرمول نیوتن لیب‌نیتز(قضیهٔ ۶۳ صفحه۱۳۰) رابه‌کاربرد واگربه‌کار ببریم، داریم:

$$\int_{-۱}^{۱}\frac{dx}{x^{۲}}=\left[-\frac{۱}{x}\right]_{-۱}^{۱}=-۲$$

اگر c را متعلق به فاصلهٔ $[a\,,\,b]$ بگیریم، این فاصله را می‌توان به صورت $[a\,,\,c+\varepsilon_{۱}]\cup[c+\varepsilon_{۲}\,,\,b]$ که در آن $\varepsilon_{۱}\to ۰^{-}$ و $\varepsilon_{۲}\to ۰^{+}$ نوشت، بنابراین:

$$\int_{-۱}^{۱}\frac{dx}{x^{۲}}=\underset{\varepsilon_{۱}\to ۰^{-}}{\text{حد}}\int_{-۱}^{\varepsilon_{۱}}\frac{dx}{x^{۲}}+\underset{\varepsilon_{۲}\to ۰^{+}}{\text{حد}}\int_{\varepsilon_{۲}}^{۱}\frac{dx}{x^{۲}}\;.$$

$$=\underset{\varepsilon_{۱}\to ۰^{-}}{\text{حد}}\left[-\frac{۱}{\varepsilon_{۱}}-۱\right]+\underset{\varepsilon_{۲}\to ۰^{+}}{\text{حد}}\left[-۱+\frac{۱}{\varepsilon_{۲}}\right]\to+\infty$$

ملاحظه می‌شود انتگرال وجود ندارد، پس ۲ — مقدارانتگرال نیست.

مثال ۴: آیا $\int_{۱}^{+\infty}\frac{dx}{x^{۲}}$ وجود دارد.

و
$$\int_{۱}^{b}\frac{dx}{x^{۲}}=\left[-\frac{۱}{x}\right]_{۱}^{b}=-\frac{۱}{b}+۱$$

$$\underset{b\to+\infty}{\text{حد}}\int_{۱}^{b}\frac{dx}{x^{۲}}=\underset{b\to+\infty}{\text{حد}}\left(-\frac{۱}{b}+۱\right)=۱$$

مثال ۵ : آیا $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{۱+x^{۲}}$ وجود دارد .

حل:

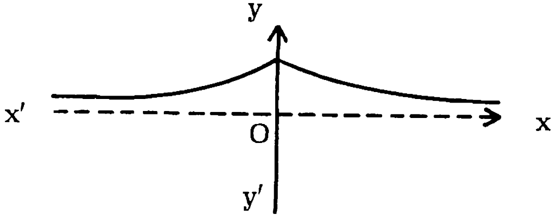
و
$$\int_{a}^{b}\frac{dx}{۱+x^{۲}}=\int_{a}^{۰}\frac{dx}{۱+x^{۲}}+\int_{۰}^{b}\frac{dx}{۱+x^{۲}}$$

و
$$\underset{a\to-\infty}{\text{حد}}\int_{a}^{۰}\frac{dx}{۱+x^{۲}}=\underset{a\to-\infty}{\text{حد}}\left(-\text{Arc}tg a\right)=\frac{\pi}{۲}$$

و
$$\underset{b\to+\infty}{\text{حد}}\int_{۰}^{b}\frac{dx}{۱+x^{۲}}=\underset{b\to+\infty}{\text{حد}}\left(\text{Arc}tg b\right)=\frac{\pi}{۲}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{۱+x^{۲}}=\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۲}=\pi$$

یعنی سطح بین منحنی $y=\frac{۱}{۱+x^{۲}}$ و محور xها از $-\infty$ تا $+\infty$ برابر π می‌باشد به شکل زیر توجه نمایید.



تمرین

مسألهٔ ۱۶۸: مشتق عبارات زیر را حساب کنید و نشان دهید که این عبارتها مقادیر ثابتی هستند:

۱) ∴ $\int_{۱}^{x} x^{۲}dx+\int_{x}^{۱۰} x^{۲}dx$

۲) ∴ $\int_{۰}^{x} \sin^{۲}x dx-\int_{x}^{۳} \cos^{۲}x dx-x$

مسألهٔ ۱۶۹: مطلوب است محاسبه انتگرالهای معین زیر:

۱) ∴ $\int_{-۲}^{۳} |x+۱|dx$

۲) ∴ $\int_{-۳}^{۳} |x-۲|^{۳}dx$

۳) ∴ $\int_{-۱}^{۱} x|x+۱|dx$

مسألهٔ ۱۷۰: تحقیق کنید آیا انتگرالهای زیر وجود دارند، درصورت وجود داشتن مقدار آنها را بیابید:

۱) ∴ $\int_{۱}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ و $\alpha > ۱$

۲) ∴ $\int_{۱}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ و $\alpha < ۱$

۳) ∴ $\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ و $\alpha > ۱$

۴) .. $\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ و $\alpha < ۱$

۵) ∴ $\int_{۰}^{۴} \frac{x\,dx}{\sqrt{۴-x}}$

۶) ∴ $\int_{۰}^{+\infty} x(a^{۲}+x^{۲})^{-\frac{۳}{۲}}dx$

۷) ∴ $\int_{-۱}^{۲} \frac{dx}{(x-۱)^{۲}}$

۸) .. $\int_{۰}^{+\infty} \frac{x-۱}{x^{۳}-۱}\,dx$

۹) .. $\int_{۰}^{۲} \frac{dx}{\sqrt{۴-x^{۲}}}$

۱۰) ∴ $\int_{۵}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-۱}}$

۲۳

محاسبهٔ حد مجموع بعضی از رشته‌ها به کمک انتگرال معین و تمرین

مثال ۱: اگر $n\in N$ باشد مطلوب است محاسبهٔ:

$$\underset{n\to+\infty}{\text{حد}}\ \frac{\sqrt{۱}+\sqrt{۲}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

حل:

$$\frac{\sqrt{۱}+\sqrt{۲}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}=\frac{۱}{n}\left(\sqrt{\frac{۱}{n}}+\sqrt{\frac{۲}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)$$

تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را درنظر گرفته این تابع درفاصله $[۱\ ,\ ۰]$ پیوسته است پس $\int_{۰}^{۱}\sqrt{x}dx$ وجود دارد اگرفاصلهٔ $[۱\ ,\ ۰]$ را به n فاصلهٔ مساوی:

$$\Delta_i x=x_i-x_{i-۱}=\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{۱-۰}{n}=\frac{۱}{n}$$

تقسیم نماییم این فواصل به صورت زیردرمی‌آیند:

$$\left[x_۰=۰\ ,\ x_۱=\Delta x=\frac{۱}{n}\right]\ \text{و}\ \left[x_۱=\frac{۱}{n}\ ,\ x_۲=\frac{۲}{n}\right]\ \text{و}\cdots\text{و}$$

$$\left[x_{i-۱}=\frac{i-۱}{n}\ ,\ x_i=\frac{i}{n}\right]\ \text{و}\cdots\text{و}$$

$$\left[x_{n-۱}=\frac{n-۱}{n}\ ,\ x_n=\frac{n}{n}=۱\right]$$

$$\sum_{i=۱}^{n}f(\theta_i)\Delta_i x=\sum_{i=۱}^{n}f(x_i)\Delta x=f(x_۱)\Delta x+f(x_۲)\Delta x+\cdots$$

$$+f(x_i)\Delta x+\cdots+f(x_n)\Delta x=\Delta x[f(x_۱)+f(x_۲)+\cdots$$

$$+f(x_i)+\cdots+f(x_n)]=\frac{۱}{n}\left[\sqrt{\frac{۱}{n}}+\sqrt{\frac{۲}{n}}+\cdots\right.$$
$$\left.+\sqrt{\frac{i}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right]$$

مجموع بالا همان مجموع داده شده مسأله می‌باشد.

$$\underset{n\to+\infty}{\text{حد}}\sum_{i=۱}^{n}f(\theta_i)\Delta_i x=\underset{n\to+\infty}{\text{حد}}\sum_{i=۱}^{n}f(x_i)\Delta x$$
$$=\int_{۰}^{۱}\sqrt{x}dx=\left[\frac{۲}{۳}\,x\sqrt{x}\right]_{۰}^{۱}=\frac{۲}{۳}$$

مثال ۲: اگر $n\in N$ باشد مطلوب است محاسبهٔ

$$\underset{n\to+\infty}{\text{حد}}\frac{۱}{n}\left(۱+\cos^{۲}\frac{\pi}{n}+\cos^{۲}\frac{۲\pi}{n}+\cdots+\cos^{۲}\frac{n\pi}{n}\right)$$

حل: تابع $f(x)=\cos^{۲}x$ در فاصلهٔ $[۰\,,\,\pi]$ متصل بوده پس $\int_{۰}^{\pi}\cos^{۲}x\,dx$ وجود دارد. فاصلهٔ $[۰\,,\,\pi]$ را به n فاصلهٔ مساوی $\Delta x=\frac{\pi-۰}{n}=\frac{\pi}{n}$ تقسیم نموده، داریم:

$$\left[x_۰=۰\;,\;x_۱=\frac{\pi}{n}\right]\text{ و }\left[x_۱=\frac{\pi}{n}\;,\;x_۲=\frac{۲\pi}{n}\right]\text{ و }\cdots\text{ و}$$
$$\left[x_{i-۱}=\frac{(i-۱)\pi}{n}\;,\;x_i=\frac{i\pi}{n}\right]\text{ و }\cdots\text{ و}$$
$$\left[x_{n-۱}=\frac{(n-۱)\pi}{n}\;,\;x_n=\frac{n\pi}{n}=\pi\right]$$

$$\sum_{i=۱}^{n}f(\theta_i)\Delta_i x=\sum_{i=۱}^{n}f(x_i)\Delta x=\Delta x[f(x_۱)+f(x_۲)+\cdots$$
$$+f(x_i)+\cdots+f(x_n)]=\frac{\pi}{n}\left(\cos^{۲}\frac{\pi}{n}+\cos^{۲}\frac{۲\pi}{n}+\cdots\right.$$

$$+\cos^{۲}\frac{i\pi}{n}+\cdots+\cos^{۲}\frac{n\pi}{n}\Big)$$

$$\underset{n\to+\infty}{\text{حد}}\ \sum_{i=۱}^{n} f(\theta_i)\Delta_i x=\int_{۰}^{\pi}\cos^{۲}x\,dx=\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\pi}(۱+\cos ۲x)\,dx$$

$$=\frac{۱}{۲}\Big[x+\frac{۱}{۲}\sin ۲x\Big]_{۰}^{\pi}=\frac{\pi}{۲}$$

و

$$\underset{n\to+\infty}{\text{حد}}\ \frac{۱}{n}\Big(۱+\cos^{۲}\frac{\pi}{n}+\cos^{۲}\frac{۲\pi}{n}+\cdots+\cos^{۲}\frac{n\pi}{n}\Big)=\underset{n\to+\infty}{\text{حد}}\ \frac{۱}{n}$$

$$+\frac{۱}{\pi}\underset{n\to+\infty}{\text{حد}}\ \frac{\pi}{n}\Big(\cos^{۲}\frac{\pi}{n}+\cos^{۲}\frac{۲\pi}{n}+\cdots+\cos^{۲}\frac{n\pi}{n}\Big)=۰+\frac{۱}{\pi}\times\frac{\pi}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

تمرین

مسأله ۱۷۱: با استفاده از تعریف انتگرال معین مطلوب است محاسبهٔ حدهای زیر:

$$۱)\quad \therefore\quad \underset{n\to+\infty}{\text{حد}}\ \Big(\frac{n}{n^{۲}}+\frac{n}{n^{۲}+۱^{۲}}+\frac{n}{n^{۲}+۲^{۲}}+\cdots$$

$$+\frac{n}{n^{۲}+(n-۱)^{۲}}\Big)\quad \text{و}\quad n\in N$$

$$۲)\quad \therefore\quad \underset{n\to+\infty}{\text{حد}}\ \Big[\frac{n}{(n+۱)^{۲}}+\frac{n}{(n+۲)^{۲}}+\cdots+\frac{n}{(n+n)^{۲}}\Big]\text{و}\,n\in N$$

۲۴

حل چند انتگرال نمونه

مثال ۱: مطلوب است محاسبهٔ انتگرال:

$$\int_{۱}^{۲} \frac{dx}{\sqrt{-x^{۲}+۳x-۲}}$$

حل: $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{-x^{۲}+۳x-۲}}$ به‌ازای $x=۱$ و $x=۲$ منفصل است ، پس برای متصل بودن تابع فاصلهٔ انتگرال را به صورت $[۱+\varepsilon_{۱} , ۲+\varepsilon_{۲}]$ کـه $\varepsilon_{۱}$ به سمت ۰^{+} و $\varepsilon_{۲}$ به سمت ۰^{-} میل می‌نمایند ، فرض می‌کنیم:

$$\sqrt{-x^{۲}+۳x-۲}=\sqrt{(x-۱)(۲-x)}=t(x-۱)$$

چون $x>۱$ پس $x-۱>۰$ ومقداررادیکال مثبت‌است به ناچار $t>۰$ وداریم:

$$t=\sqrt{\frac{۲-x}{x-۱}}$$

$$x\to ۱^{+} \Longrightarrow t\to +\infty \quad \text{و} \quad x\to ۲^{-} \Longrightarrow t\to ۰^{+}$$

$$t=\sqrt{\frac{۲-x}{x-۱}} \Longrightarrow x=\frac{t^{۲}+۲}{t^{۲}+۱} \Longrightarrow dx=\frac{-۲tdt}{(t^{۲}+۱)^{۲}}$$

$$\int_{۱}^{۲} \frac{dx}{\sqrt{-x^{۲}+۳x-۲}}=-۲\int_{+\infty}^{۰}\frac{dt}{۱+t^{۲}}=۲\int_{۰}^{+\infty}\frac{dt}{۱+t^{۲}}$$

$$\underset{a\to+\infty}{\text{حد}}\ ۲\int_{۰}^{a}\frac{dt}{۱+t^{۲}}=\underset{a\to+\infty}{\text{حد}}\ ۲\Big[\text{Arctg}\,t\Big]_{۰}^{a}=۲\times\frac{\pi}{۲}=\pi$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $\int_{۰}^{+\infty}\frac{dx}{x^{۲}+۲x+۵}$.

حل:

و
$$\int\frac{dx}{x^{۲}+۲x+۵}=\int\frac{dx}{(x+۱)^{۲}+۴}$$

$$x+۱=۲t \Longrightarrow dx=۲dt$$

$$\int\frac{dx}{x^{۲}+۲x+۵}=\int\frac{۲dt}{۴t^{۲}+۴}=\frac{۱}{۲}\int\frac{dt}{۱+t^{۲}}=\frac{۱}{۲}\ \text{Arc}tg\,t$$

و
$$x\to+\infty \Longrightarrow t\to+\infty$$

$$x\to ۰ \Longrightarrow t\to\frac{۱}{۲}$$

$$\int_{۰}^{+\infty}\frac{dx}{x^{۲}+۲x+۵}=\frac{۱}{۲}\int_{\frac{۱}{۲}}^{+\infty}\frac{dt}{۱+t^{۲}}$$

$$\underset{t\to+\infty}{\text{حد}}\ \frac{۱}{۲}\int_{\frac{۱}{۲}}^{a}\frac{dt}{۱+t^{۲}}=\underset{a\to+\infty}{\text{حد}}\ \frac{۱}{۲}\Big[\text{Arc}tg\,t\Big]_{\frac{۱}{۲}}^{a}$$

$$=\underset{a\to+\infty}{\text{حد}}\ \frac{۱}{۲}\left(\text{Arc}tg\,a-\text{Arc}tg\frac{۱}{۲}\right)$$

$$=\frac{۱}{۲}\left(\frac{\pi}{۲}-\text{Arc}tg\,\frac{۱}{۲}\right)$$

مثال ۳: مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $\int \frac{xdx}{\sqrt{۱-x^{۴}}}$.

حل:

و $$۱-x^{۴} > ۰ \Longrightarrow ۰ < x^{۲} < ۱$$

$$x^{۲}=\sin t \Longrightarrow xdx=\frac{۱}{۲}\cos tdt$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{۱-x^{۴}}}=\int \frac{\frac{۱}{۲}\cos tdt}{\cos t}=$$

$$\frac{۱}{۲}\int dt=\frac{۱}{۲}t+c=\frac{۱}{۲}\mathrm{Arc}\sin x^{۲}+c$$

۲۵

مسائل مربوط به انتگرالها و کاربرد آنها

مسألهٔ ۱۷۲: مطلوب است محاسبهٔ انتگرالهای زیر:

۱) $\int \frac{x\,dx}{۱+x^{۴}}$

۲) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^{۲}+۱}\,(\sqrt{x^{۲}+۱}+x)}$

۳) $\int_{a}^{b} \frac{dx}{(d^{۲}-x^{۲})\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ $\quad ۰<a<b<d$

۴) $\int_{۰}^{۱} \sqrt{\frac{x}{۱-x}}\,dx$

۵) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} tg^{۴}x\,dx$

۶) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos ۳x \cos^{۳}x\,dx$

۷) $\int_{-۱}^{۱} \frac{dx}{(x+۲)\sqrt{۱-x^{۲}}}$

۸) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} \frac{dx}{\cos^{۴}x}$

۹) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{dx}{\sin^{۴} x+\cos^{۴} x}$

۱۰) $\int \frac{dx}{a+b\sin x}$

۱۱) $\int \frac{\sqrt{x^{۲}-۱}}{x^{۴}} dx$

۱۲) $\int \sqrt[۳]{x}\,(۱+\sqrt{x})^{۲} dx$

۱۳) $\int \sqrt[۳]{x}(۱+x^{\frac{۲}{۳}})^{\frac{۱}{۲}} dx$

۱۴) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^{۳}-۱}}$

۱۵) $\int \frac{x^{۱۱}}{\sqrt[۵]{x^{۳}-۱}} dx$

۱۶) $\int \frac{(۲x+۱)^{۳}}{(۳x-۱)^{۵}} dx$

۱۷) $\int (x^{۲}+x^{۳}+۱)(x+۱)^{۴} dx$

۱۸) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{۳\sin^{۲} x+۲\cos^{۲} x+۱}} dx$

۱۹) $\int \frac{x^{۳}(x^{۳}+۲x^{۲}+۳x+۴)}{(x^{۳}+x^{۲}+x+۱)^{۲}} dx$

۲۰) $\int \frac{۳\sin\frac{۳x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}{\sqrt[۱۵]{(\cos x-۱)^{۸}}} dx$

۲۱) $$\int \frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۱+\sqrt{(x^{۲}+۱)^{۳}}}}\,dx$$

۲۲) $$\int \frac{\sin^{n} x}{\cos^{n+۲} x}\,dx$$

۲۳) $$\int \frac{\operatorname{cotg} x(\operatorname{cotg} x-۱)^{۴}}{\sin^{۲} x}\,dx$$

۲۴) $$\int \frac{x^{۴}}{x^{۲}+۱}\,dx$$

۲۵) $$\int \frac{x+۳}{x^{۲}\sqrt{۲x+۳}}\,dx$$

۲۶) $$\int \frac{x}{(۱+x^{۲})\sqrt{۱-x^{۴}}}\,dx$$

۲۷) $$\int \frac{۴x^{۳}-۳x^{۲}-۲}{(x+۱)^{۲}(x^{۲}-x+۱)^{۲}}\,dx$$

۲۸) $$\int \frac{a}{\sin x+\cos x+\sqrt{۲}}\,dx$$

۲۹) $$\int \frac{\sin ۳x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$$

۳۰) $$\int \frac{a}{\cos x\sqrt{\sin ۲x}}\,dx$$

۳۱) $$\int \frac{a\,dx}{\sin^{۳} x\sqrt[۳]{\sin x\cos^{۲} x}}$$

۳۲) $$\int \frac{\sin ۲x}{\sqrt[۳]{۲+\sin x}}\,dx$$

---

۳۳) $$\int \frac{tg\,x - cotg\,x}{(tg\,x + cotg\,x)^{۲}}\,dx$$

۳۴) $$\int_{۰}^{+\infty} \frac{dx}{(۱+x^{۲})^{۲}}$$

۳۵) $$\int \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \cos^{۲}\sqrt{x}\,dx$$

۳۶) $$\int \frac{dx}{۱ - \sin x}$$

۳۷) $$\int \frac{dx}{۱ + \cos x}$$

۳۸) $$\int_{۰}^{\pi} \left| \cos x + \frac{۱}{۲} \right| dx$$

۳۹) $$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} |\sin x - \cos x|\,dx$$

۴۰) $$\int \frac{\cos x}{۱ - \cos x}\,dx$$

مسألهٔ ۱۷۳: ثابت کنید انتگرالهای زیر متساویند:

$$I_{۱} = \int_{۰}^{+\infty} \frac{x^{۲}}{x^{۴}+۱}\,dx \quad \text{و} \quad I_{۲} = \int_{۰}^{+\infty} \frac{dx}{x^{۴}+۱}$$

مسألهٔ ۱۷۴: درصورتی که تابع $f(x) = x + |x - ۱|$ باشد نشان دهید که تابع:

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{اگر } x < ۱ \\ x^{۲} - x + ۱ & \text{اگر } x \geqslant ۱ \end{cases}$$

تابع اولی $f(x)$ روی مجموعه اعداد حقیقی است.

مسألهٔ ۱۷۵: ثابت کنید که:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = ۲\int_{۰}^{a} f(x)dx \qquad \text{(اگر تابع } f \text{ زوج باشد)}$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = ۰ \qquad \text{(اگر تابع } f \text{ فرد باشد)}$$

مسألهٔ ۱۷۶: مطلوب است $f(x)$ به شرطی که $f'(x^{۲}) = \frac{۱}{x}$ ، $(x > ۰)$.

مسألهٔ ۱۷۷: مطلوب است کثیرالجمله $f(x)$ به شرطی که:

$f[f'(x)] = ۴x^{۲} - ۱۲x + ۸$

باشد.

مسألهٔ ۱۷۸: مطلوب است $f(x)$ به شرطی که $f'(\cos^{۲}x) = \sin^{۴}x$ باشد.

مسألهٔ ۱۷۹: مطلوب است معادله کلی منحنیهایی که قائم برآنها از نقطهٔ ثابت $c\Big|_{\beta}^{\alpha}$ عبور کنند.

مسألهٔ ۱۸۰: معادلهٔ منحنی تابعی را بیابید که مشتق تابع عکس تابع باشد ومنحنی‌نمایش تابع از نقطهٔ A (۱ و ۱) بگذرد.

مسألهٔ ۱۸۱: تابع $y = \frac{۱}{۶}\left(x^{۳} + \frac{۳}{x}\right)$ مفروض است α را چنان بیابید که مقدار انتگرال $\sqrt{۱ + y'^{۲}}$ از $x = ۱$ تا $x = \sqrt{tg\alpha}$ برابر $\frac{۱}{۳}$ باشد.

مسألهٔ ۱۸۲: مطلوب است تابع $y = f(x)$ درصورتی که منحنی نمایش تابع برمحور x ها درنقطهٔ به طول $\frac{۱}{۲}$ مماس باشد وبین y' و y'' تابع رابطه $y''(y' - ۱) = ۴x$ برقرار باشد.

مسألهٔ ۱۸۳: مطلوب است تابع $y = f(x)$ درصورتی که منحنی نمایش تابع برمحور طولها در نقطهٔ به طول (۱) مماس باشد و بین y' و y'' رابطهٔ $y'\,y'' = \frac{x^{۲} - ۱}{۲x^{۵}}$ برقرار باشد.

مسألهٔ ۱۸۴: قائم درنقطهٔ M یك منحنی (c) محورهای x ها و y ها را در نقاط A و B قطع می‌کند منحنیهای (c) را طوری تعیین کنید که $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = K$ باشد.

مسألهٔ ۱۸۵: مماس در نقطهٔ M یک منحنی (c) را رسم کرده نقطهٔ برخورد این مماس با محور Oy را T می‌نامیم از نقطهٔ T خطی موازی محور x ها مرور داده و نقطهٔ برخورد آن با قائم درنقطهٔ M منحنی را به N نمایش می‌دهیم معادلات پارامتری منحنیهای (c) را طوری مشخص کنید که $\overline{TN}=a$ باشد ($y'>۰$ و a فرض کنید).

مسألهٔ ۱۸۶: معادلات منحنیهایی را بیابید که هذلولیهای به معادله $xy=\lambda$ را به زاویه ثابت α قطع نمایند.

مسألهٔ ۱۸۷: معادلهٔ منحنیهایی را بیابید که چون درنقطهٔ $M(x , y)$ مماسی بر آنها رسم نماییم تا محور x ها را در T قطع کند، داشته باشیم $MT=TA$ ($A(۰,a)$ نقطه‌ای است ثابت).

مسألهٔ ۱۸۸: اگر معادلهٔ حرکت یک نقطهٔ $x=f(t)$ وشتاب در هر لحظهٔ $\gamma=-\omega^۲x$ باشد، نشان دهید حرکت نقطه نوسانی می‌باشد.

مسألهٔ ۱۸۹: نشان دهید منحنیهای انتگرال معادلهٔ $y'=\frac{y+x}{y-x}$ هذلولی می‌باشند.

مسألهٔ ۱۹۰: مطلوب است انتگرال معادلهٔ

$$y'=\frac{۲xy}{۱-x^۲}+\frac{x^۲}{۱-x^۲}:$$

مسألهٔ ۱۹۱: نشان دهید منحنی انتگرال معادلهٔ $y'=\frac{y-۲xy^۲}{x}$ که از نقطهٔ $c(۲,۱)$ می‌گذرد دارای دو مجانب قائم و یک مجانب افقی است.

مسألهٔ ۱۹۲: ثابت کنید منحنی انتگرال معادله $x^۲+۲xyy'-y^۲-۱=۰$ ، که از نقطهٔ $A(۱ , ۱)$ می‌گذرد دایره‌ای است به مرکز $c\left(\frac{۳}{۲} , ۰\right)$ و به شعاع $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$.

مسألهٔ ۱۹۳: اگر T فصل مشترک خط مماس بر منحنی در نقطهٔ M با محور y ها باشد و A نقطهٔ ثابتی از محور Ox به‌طول a فرض شود معادلهٔ منحنیهایی را تعیین کنید که قطعه خط MT از نقطهٔ A به زاویه قائمه دیده شود.

مسألهٔ ۱۹۴: اولاً جدول تغییرات و منحنی نمایش تابع $y=\frac{x}{(x+۱)^۳}$ را رسم کنید و در تقعر و تحدب منحنی بحث نموده نقطه عطف منحنی را بیابید وطول آن را α بنامید.

ثانیاً به فرض $m>\alpha$ باشد سطح محصور بین منحنی و محور x ها و دو خط $x=m$ و $x=\alpha$ را بیابید ونیز حجم حاصل ازدوران این سطح را حول x ها به‌دست آورید وحد این سطح وحجم را وقتی $m\to+\infty$ محاسبه نمایید.

مسألهٔ ۱۹۵: سطح محصور بین منحنی به‌معادلهٔ $y=x^۲+۴x+۳$ و محور x ها و

خط $y=۳$ راحول محورسهمی دوران داده حجم‌حاصل از این دوران را حساب کنید.

مسألهٔ ۱۹۶: ازنقطهٔ $A(-۲\ ,\ ۰)$ دومماس AB و AC را برسهمی $y^{۲}=x-۲$ رسم می‌کنیم مطلوب است محاسبهٔ سطح بین این دومماس ومنحنی و نیز حجم حاصل از دوران این سطح را حول BC بیابید B و C نقاط تماس می‌باشند.

مسألهٔ ۱۹۷: حجم‌حاصل‌ازدوران سطح محصوربین منحنی $y=x^{۲}$ وخط $y=x+۲$ را حول محور x ها بیابید.

مسألهٔ ۱۹۸: اولاً منحنی به معادله $y=\pm\frac{\sqrt{x^{۲}-۲x}}{x-۱}$ را رسم‌کنید.

ثانیاً حجم حاصل از دوران سطح بین منحنی و محور x ها و دو خط $x=۲$ و $x=۳$ را حول x ها بیابید.

مسألهٔ ۱۹۹: مطلوب است محاسبهٔ مساحت بین دو منحنی به معادلات $y^{۲}=۲Px$ و $۲۷Py^{۲}=۸(x-P)^{۳}$ $(P>۰)$.

مسألهٔ ۲۰۰: مطلوب است محاسبهٔ حجم حاصل ازدوران سطح محصوربین منحنی‌به‌معادله $y=\frac{x}{x^{۲}+x+۱}\sqrt{x^{۲}+۲x+۳}$ و خطوط $x=-۲$ و $x=۱$ و محور طولها ، حول محورطولها.

مسألهٔ ۲۰۱: تحقیق‌کنید اندازه حجم عرقچین به ارتفاع h ازکره به شعاع R برابر است بـا $(۳R-h)\ \frac{\pi h^{۲}}{۳}$.

مسألهٔ ۲۰۲: نیمکره‌ای بـه شعاع R را با صفحه‌ای موازی قاعده و به فاصلهٔ d از قاعده قطع می‌کنیم مطلوب است تعیین نسبت $\frac{d}{R}$ برای‌آنکه‌دوقطعهٔ کروی حادث‌دارای یك حجم باشند.

مسألهٔ ۲۰۳: منحنی به معادله $x(x^{۲}+y^{۲})=y^{۲}$ را رسم‌کنید ومساحت بین منحنی و مجانبش را بیابید.

مسألهٔ ۲۰۴: مطلوب است محاسبهٔ حجم حادث از دوران سطح بین منحنی به معادلـه $y=\frac{x}{۱-x}$ و مجانب $x=۱$ وخط $y=۱$ حول خط $x=۱$ (منظورسطح بالای خط $y=۱$ می‌باشد).

مسألهٔ ۲۰۵: اولاً منحنی به معادله $x^{۲}y(۲a-y)=a^{۴}$ $(a>۰)$ را رسم‌کنید.

ثانیاً سطح محصوربین منحنی مزبورومحور x ها وخط $y=۲a$ را بیابید.

۲۶

مسائل متفرقه

مسأله ۲۰۶: اگر x' و x'' طولها و y' و y'' عرضهای نقاط ماکزیمم ومینیمم منحنی تابع $y=\frac{x^۲+ax+b}{x^۲-۲x}$ باشند مقادیر a و b را چنان بیابید که داشته باشیم:

$$\begin{cases} ۲(x'+x'')+y'y''=۱۹ \\ y'+y''+۲x'x''=۱۶ \end{cases}$$

مسأله ۲۰۷: معادلهٔ منحنی به صورت $x^۲-xy+ax-cy+b=۰$ دردست‌است (هذلولی) ضرایب را طوری بیابید که نقاط $A(x_۱ , y_۱)$ و $B(x_۲ , y_۲)$ نقاط ماکزیمم ومینیمم منحنی باشند و بدانیم $x_۱x_۲+y_۱y_۲=۰$ ونیزاین نقاط ماکزیمم و مینیمم در روی دایره $x^۲+y^۲+۲x-۶y=۰$ واقع باشند.

مسأله ۲۰۸: علت تساوی مشتقات دوتابع $y_۱=\frac{۲tg^۲x}{۱+tg^۴x}$ و $y_۲=\frac{-۲}{۲+tg^۲۲x}$ را بیان کنید.

مسأله ۲۰۹: مطلوب است معادلهٔ مکان هندسی مراکز دوایری که از نقطه ثابت A عبور کنند وبرخط ثابت (d) مماس باشند.

مسأله ۲۱۰: منحنی C_λ به معادله $y=\frac{۲x}{\lambda(x-۲\lambda)}$ که درآن λ پارامتر اختیاری است مفروض است، اولا جهت تغییرات تابع را تعیین کنید. ثانیاً منحنی $C_۱$ را رسم کنید. ثالثاً معادله خط مماس برمنحنی $(C_۱)$ که موازی مماس براین منحنی درمبدأ مختصات است به دست‌آورید. رابعاً حجم حادث ازدوران سطح محصوربین منحنی $C_۱$ وخطوط $x=۲$ و $y=۳$ را بدورمجانب موازی محور y ها به دست‌آورید (منظور سطح بالای $y=۳$ می‌باشد). خامساً: نقاط برخورد C_α و C_β را پیداکنید یکی از نقاط برخورد، مبدأ مختصات نقطهٔ برخورد دیگررا به M نشان داده اگر A محل تلاقی

دو مجانب C_α و B محل تلاقی دومجانب C_β باشند ، ثابت کنید شکل OAMB متوازی الاضلاع است.

(مسأله کنکور ورودی پلی‌تکنیك درسال ۴۶)

مسألهٔ ۲۱۱: خط $y=h$ منحنی $y=\frac{x^۴+۱}{(x^۲+۱)^۲}$ را درچهارنقطه A و B و C و D ومحور y ها را درنقطهٔ H قطع کرده ثابت کنید:

$$\overline{HA}\cdot\overline{HB}\cdot\overline{HC}\cdot\overline{HD}=۱$$

مسألهٔ ۲۱۲: اگر $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{۲}$ باشد ، نشان دهید:

$$f[\log_e(u+\sqrt{u^۲+۱})]=u$$

مسألهٔ ۲۱۳: مطلوب است معادله‌مکان‌هندسی‌اوساط اوتارموازی با امتدادمفروض ومحصور به بیضی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$.

مسألهٔ ۲۱۴: منحنی به معادله $y^۲=۲x+۴$ مفروض است کوچکترین فاصلهٔ مبدأ مختصات ازمنحنی را بیابید.

مسألهٔ ۲۱۵: ازمرکز تقارن منحنی به معادله $۷۳x^۲+۷۲xy+۵۲y^۲=۱۰۰$ خطی با ضریب زاویهٔ m رسم نموده تا منحنی را در نقاط A و B قطع کند m را چنان بیابید که طول AB ماکزیمم ویا مینیمم گردد.

مسألهٔ ۲۱۶: چند خط موازی محور x ها وجود دارد که چون منحنی تابع:

$$y=\frac{x^۲+۳x-۴}{x^۲+۳x}$$

را در A و B قطع کنند زاویه $\widehat{AOB}=\frac{\pi}{۲}$ گردد.

مسألهٔ ۲۱۷: ریشه‌های معادله $x^۳+۴x^۲-۳x-۱۸=۰$ را بیابید.

مسألهٔ ۲۱۸: P و q را برحسب P' و q' به قسمی بیابید که توابع:

$$y_۱=x^۳+Px+q \quad و \quad y_۲=x^۳+P'x^۲+q'$$

دارای یك ماکزیمم و یك مینیمم برابر باشند. سپس جدول تغییرات ومنحنی نمایش تابع:

$$y=x^۳+Px+q-q'$$

را رسم کنید. ($P<۰$ و $P'>۰$ فرض شود)

مسألهٔ ۲۱۹: h را چنان بیابید که $۳ \leqslant \left|\frac{x^۲-hx+۱}{x^۲+x+۱}\right|$ باشد.

مسألهٔ ۲۲۰: تابع $y=\frac{x^۲+ax+b}{x-۳}$ مفروض است: اولا a و b را چنان بیابید که منحنی برمحور x ها مماس باشد ونقطه $O'\left|\begin{matrix}۳\\۴\end{matrix}\right.$ ، مرکز تقارن آن باشد. ثانیاً از مبدأ مختصات خط $y=mx$ را چنان رسم می‌کنیم تا منحنی تابع $y=\frac{(x-۱)^۲}{x-۳}$ را در A و B قطع کند، معادله مکان هندسی P مزدوج مبدأ O را وقتی m تغییر می‌کند یافته و فقط به‌کمك این مکان مختصات تماس خط $y=mx$ و منحنی تابع $y=\frac{(x-۱)^۲}{x-۳}$ را بیابید. ثالثاً موضع $N(\alpha , \beta)$ را در صفحه مختصات چنان بیابید که از N بتوان دومماس برمنحنی رسم کرد، سپس ثابت کنید مکان هندسی نقاطی که از N می‌توان دو مماس متعامد برمنحنی رسم نمود یك دایره است که معادلهٔ آن را به دست خواهیدآورد. رابعاً معادله خطی را که نقاط ماکزیمم ومینیمم منحنی را به هم وصل می‌کند بنویسید.

مسألهٔ ۲۲۱: تابع $y=\frac{(x-۲)^۲}{x(x-۱)}$ مفروض است. اولا جدول تغییرات و منحنی نمایش‌آن را رسم کنید. ثانیاً اگرخط $y=m$ منحنی را درنقاط M' و M'' قطع کند وتصاویراین نقاط را روی محور x ها H' و H'' بنامیم به‌کمك رابطهٔ مستقل از m بین طولهای‌نقاط M' و M'' ثابت‌کنید نقطهٔ ثابتی مانند P روی محور x هاوجود دارد به طوری‌که $\overline{PH'}\times\overline{PH''}$ مساوی مقدار ثابتی باشد ونشان دهید دوایر محیطی مستطیلهای $M'M''H''H'$ همواره بردایره ثابتی‌که معادله‌آن را تعیین خواهید کرد عمودند.

مسألهٔ ۲۲۲: تابع $y=\frac{ax^۲-۲x+b}{x^۲-ax+a}$ مفروض است. اولا اگرخط $y=m$ منحنی را درنقاط A و B قطع‌کند b را برحسب a چنان بیابیدکه حاصل‌ضرب طولهای A و B بستگی به m نداشته باشد ثانیاً بازاء $b=a^۲$ که در قسمت اولاً به دست آوردید با استفاده ازقسمت اولا مسأله نتیجه بگیریدکه اگرتابع دارای یك‌ماکزیمم‌ویك مینیمم‌باشد، ریشه‌های‌مشتق y دوعددقرینه‌اند.($a>۰$ فرض‌شود) ثالثاً به‌ازای $b=۸۱$ و $a=۹$ جدول تغییرات ومنحنی نمایش تابع را رسم‌کرده اگرتصاویر A و B را روی محور x ها نقاط M و N بنامیم، ثابت‌کنید دوایره محیطی مستطیلهای ABNM همواره بردایره ثابتی‌که معادله‌آن را به دست خواهیدآورد عمودند.

مسألهٔ ۲۲۳: موضع $M(a , b)$ را درصفحه مختصات‌چنان بیابیدکه ازآن بتوان‌فقط یك

مماس برمنحنی تابع $y=\frac{۱-x^۲}{x^۲}$ رسم نمود.

مسألهٔ ۲۲۴: اولا به فرض آنکه $M(x=۱-\sin\alpha\cos\alpha\ ,\ y=\sin\alpha-\cos\alpha)$ باشد معادله مکان هندسی M را وقتی α تغییر می‌کند بیابید و حدود تغییرات x و y را مشخص نمایند. ثانیاً ثابت کنید از نقطهٔ $A(۰\ ,\ a)$ فقط یك قائم با ضریب زاویهٔ m برمنحنی به معادله $y^۲=۲x-۱$ می‌توان رسم کرد. ودرحالت مخصوص نقطهٔ A را چنان بیابید که ضریب زاویه قائم برابر (۱ —) باشد. ثالثاً منحنی مزبوررا رسم کرده ازنقطهٔ $A(۰\ ,\ ۲)$ خطی با ضریب‌زاویه (۱ —) رسم کنید تامنحنی‌را قطع کند مطلوب است محاسبهٔ مساحت‌محصور بین‌منحنی‌وخط‌مزبور ومحور x ها (آن‌قسمت که بالای‌محور x ها است).

مسألهٔ ۲۲۵: منحنی به معادله $y=x\pm\sqrt{x^۲+x+۱}$ مفروض است. ثابت کنید دو مماس با ضریب زاویهٔ m برمنحنی می‌توان رسم کرد، اگر نقاط تماس را A و B بنامیم مطلوب است معادلهٔ خط AB ونشان دهید نقطه وسط AB نقطه‌ایست ثابت که همان مرکز تقارن منحنی می‌باشد، مسألهٔ مزبوررا برای حالتی که دوقائم با ضریب زاویه m برمنحنی رسم می‌نمائیم حل نمایید.

مسألهٔ ۲۲۶: از نقطهٔ $M\left(۱\ ,\ \frac{۱}{۲}\right)$ قائم MN را برمنحنی به معادله:

$$y=\frac{x^۲-۲x}{(x-۱)^۲}$$

رسم می‌نمائیم (N پای قائم) ثابت کنید، طول نقطهٔ N ازمعادلهٔ:

$$(x-۱)^۶+(x-۱)^۲=۲$$

که آن را حل خواهید کرد به دست می‌آید.

مسألهٔ ۲۲۷: اگرمنحنی انتگرال $y'=\sqrt{y}$ از نقطهٔ $A(۱\ ,\ ۱)$ بگذرد ثابت کنید، این منحنی که معادلهٔ آن را به دست خواهیدآورد برمحور x ها مماس است.

مسألهٔ ۲۲۸: بدنهٔ داخلی چراغهای وسایط نقلیهٔ معمولا یك سطح پارابولئید می‌باشد که ازدوران قوس سهمی $y^۲=۲px$ درحول محور x ها به دست می‌آید اگرقطر دایره قاعدهٔ چراغ d وارتفاع بدنه h باشد، حجم پارابولئید را برحسب d و h بیابید.

مسألهٔ ۲۲۹: با دردست داشتن شکل منحنی به معادله $y=\frac{x+۱}{x^۲-x}$ چگونه می‌توان شکل منحنی به معادله $y=\frac{x^۲+۱}{x^۲-x}$ را رسم نمود.

مسألهٔ ۲۳۰: معادله منحنیهایی را بیابید که اندازهٔ تحت قائم آنها نسبت به محور x ها مقدار ثابت a باشد.

مسألهٔ ۲۳۱: وضع نقطهٔ $M(۲ , ۳)$ را نسبت به منحنی به معادلهٔ:

$$x^۲+y^۲-۲x-۴y=۰$$

بهٔ دست آورید.

مسألهٔ ۲۳۲: اگر از نقطهٔ $M(a , b)$ به توان دومماس برمنحنی به معادله $y=\frac{۱}{x}$ رسم کرد با ساده‌ترین روش بیان کنید چرا $ab<۱$ می‌باشد.

مسألهٔ ۲۳۳: مطلوب است محاسبهٔ انتگرال:

$$\int\frac{۵dx}{۳sin\,x+۴cos\,x+۵}$$

مسألهٔ ۲۳۴: ازنقطهٔ $C(۱ , ۱)$ چند قائم می‌توان برمنحنی به معادلهٔ:

$$x^۲+y^۲-۲x-۲y+۱=۰$$

رسم نمود.

مسألهٔ ۲۳۵: معادلهٔ مکان هندسی نقاطی را که از آنها می‌توان دومماس متعامد برهذلولی به معادله $\frac{(x-۱)^۲}{۱۶}-\frac{(y-۱)^۲}{۱۲}=۱$ رسم کرد بیابید.

مسألهٔ ۲۳۶: درجه میدانی $f(x , y)=\sqrt{x^۲+y^۲-۱}$ معین است.

مسألهٔ ۲۳۷: $f(x)$ را چنان بیابید که داشته باشیم:

$$۲f(x-۱)+۳f(۱-x)=۵x$$

مسألهٔ ۲۳۸. بااستفاده ازتعریف مشتق نشان دهید تابع $y=sin\sqrt[۳]{x-۱}$ در $x=۲$ مشتق پذیرمی باشد.

مسألهٔ ۲۳۹: مشتق تابع $y=sin^۴[cos^۳(tg^۵x)]$ را بیابید.

مسألهٔ ۲۴۰: اگر $u_n=Arctg\frac{۱}{۱+n+n^۲}$ و $n\in N$ باشد مطلوب است محاسبهٔ حد مجموع زیر:

$$\underset{n\to+\infty}{\text{حد}}\ (u_۱+u_۲+u_۳+\cdots+u_n)$$

مسألهٔ ۲۴۱: اگر $n\in N$ باشد مطلوب است محاسبهٔ حد مجموع زیر:

$$\underset{n\to+\infty}{\text{حد}}\ \left(log\,cos\frac{x}{۲}+log\,cos\frac{x}{۴}+\cdots+log\,cos\frac{x}{۲^n}\right)$$

مسألهٔ ۲۴۲: نشان دهید که منحنیهای انتگرال معادلهٔ دیفرانسیل $\frac{dy}{۱+y^۲}=\frac{dx}{۱+x^۲}$ هذلولیهای متساوی‌الساقین می باشند.

مسألهٔ ۲۴۳: ضرایب b و c و d را برحسب a درتابع:

$$y_۱=ax^۳+bx^۲+cx+d$$

چنان بیابید که $y_۱$ یکی‌ازجوابهای معادلهٔ دیفرانسیل $xy''+(x-۴)y'-۳y=۰$ باشد.

مسألهٔ ۲۴۴: مطلوب است جدول تغییرات ومنحنی نمایش پوش سهمیهای به معادلهٔ:

$$y=m^۲x^۲-۲mx+۲m+۳$$

مسألهٔ ۲۴۵: تابع $y=f(x)$ را چنان بیابید که منحنی نمایش تغییرات آن در نقطهٔ به طول (۲)، برخط $y+۳x=۷$ مماس بوده وبین‌تابع ومشتقات اول ودوم آن‌رابطهٔ $۲x+۲yy'^۲+y^۲y''=۰$ برقرار باشد.

مسألهٔ ۲۴۶: مطلوب است محاسبهٔ انتگرالهای زیر:

۱) $\int\frac{x^۳-۱}{(x^۳+۲)^۲}dx$

۲) $\int\frac{۵x^۲+۸x+۱۴}{(x^۲+x-۲)^۲}dx$

۳) $\int\sqrt{\frac{۱-\sqrt{x}}{x}}dx$

۴) $\int\frac{x^۲-a^۲}{(x^۲+a^۲)^۲}dx$

مسألهٔ ۲۴۷: حداقل $\frac{y}{x}$ را چنان‌بیابید که داشته باشیم $\sqrt{x-۱}+\sqrt{y-۱}=۱$.

مسألهٔ ۲۴۸: نشان دهید:

$$y=\frac{\mathrm{Arc}\mathit{sin}\sqrt{x}}{\sqrt{x(۱-x)}} \Longrightarrow ۲x(۱-x)y'+(۱-۲x)y=۱$$

مسألهٔ ۲۴۹: اولا: معادله پوش‌دوایر به‌معادله $x^۲+y^۲-(\lambda^۲+۱)x-۲\lambda y-\lambda^۲=۰$ را پیدا کنید ومنحنی پوش را رسم نمایید. ثانیاً: ثابت‌کنید که این‌دوایر بردایرهٔ ثابتی که معادله‌آن را به دست خواهیدآورد عمودند.

مسألهٔ ۲۵۰: ماکزیمم تابع $y=\frac{\sqrt[۳]{(x^۲+۱)^۲(x^۲+۳)}}{۳x^۲+۴}$ را بیابید.

مسألهٔ ۲۵۱: اگر α و β و γ زوایای حادهٔ مثلثی باشند، مینیمم $\sum tg^۲\frac{\alpha}{۲}$ را بیابید.

مسألهٔ ۲۵۲: اگر α و β و γ سه زاویه حاده مثبت که مجموع آنها $\frac{\pi}{۲}$ باشدماکزیمم $tg\alpha tg\beta tg\gamma$ را بیابید.

مسألهٔ ۲۵۳: اگر A و B و C زوایای حادهٔ مثلثی باشند، ماکزیمم $cotg A\, cotg B\, cotg C$ را بیابید.

مسألهٔ ۲۵۴: به ازای چه مقادیری از x و y عبارت:

$$A=۵x^۲+۹y^۲-۱۲xy-۶x+۱۴$$

مینیمم می باشد.

مسألهٔ ۲۵۵: با استفاده ازتابع اولی، مجموع:

$$S_n=cos x+۲cos۲x+\cdots+ncosnx$$

را به دست آورید سپس با استفاده ازآن مجموع $A=۱+۲+\cdots+n$ را بیابید.

مسألهٔ ۲۵۶: فرض کنید تابع f روی فاصلهٔ بسته $[a, b]$ مشتق پذیراست، ثابت کنید: اگر $f'(a)f'(b)<۰$ باشد آنگاه عددی مانند c در فاصله (a, b) وجود دارد به طوری که $f'(c)=۰$ است.

مسألهٔ ۲۵۷: برد توابع زیررا روی اعداد حقیقی به دست آورید:

$$y_۱=۲sin^۲x-۴cos^۲x \quad \text{و} \quad y_۲=sin^۲x-۲\,sin x cos x+۴cos^۲x$$

$$y_۳=sin^۴x+cos^۴x \quad \text{و} \quad y_۴=\frac{x}{x^۲+۱}$$

$$y_۵=\sqrt{۱-x^۲} \quad \text{و} \quad y_۶=۱+\sqrt{-x^۲+۲x}$$

$$y_۷=x\pm\sqrt{-x^۲+۳x-۲} \quad \text{و}$$

$$\begin{cases} y_۸=tg x+cotg x \\ ۰<x<\frac{\pi}{۲} \end{cases} \quad \text{و} \quad y_۹=\sqrt{x^۳+۱}$$

مسألهٔ ۲۵۸: گسترشهای:

$f : Z \to Z^۲$ ، $f(x)=(x , ۱)$

$g : Z^۲ \to R$ ، $g(x , y)=x+y\sqrt{۲}$

$h : R \to Z$ ، $x \leqslant h(x) < x+۱$

و گسترش مرکب $g \circ f$ را درنظرمی‌گیریم ،کدام یك ازاین گسترشها پوششی و یا یك‌به یك می باشند.

مسألهٔ ۲۵۹: گسترش f از $R^{۲}$ در R که با $f(x , y) = x - y$ تعریف شده است و نیز گسترش g از R در $R^{۲}$ به قسمی‌که $g(x) = (x , -x)$ باشد، درنظرمی گیریم کدام یك از گسترشهای f ، g ، $f \circ g$ ، $g \circ f$ یك به یك ویا پوششی می‌باشند.

مسألهٔ ۲۶۰: نوع گسترشهای‌توابع زیررا تعیین‌نمایید (دربارهٔ یك به یك وپوششی بودن آنها بحث نمایید):

$$f : R \rightarrow R \text{ ، } f(x) = x^{۲}$$

$$g : R \rightarrow R \text{ ، } g(x) = x^{۳}$$

$$h : R \rightarrow Z \text{ ، } h(x) = [x]$$

مسألهٔ ۲۶۱: گسترش θ ار $R^{۲}$ در $R^{۲}$ که به صورت زیرتعریف شده است ، در نظر می گیریم:

$$\theta : R^{۲} \rightarrow R^{۲} \text{ ، } \theta(x , y) = (X , Y)$$

$$X = x \quad \text{و} \quad Y = xy - y^{۳}$$

نوع گسترش θ را بررسی کنید.

مسألهٔ ۲۶۲: ثابت کنید اگرتوابع $f : A \rightarrow B$ و $g : B \rightarrow C$ ، پوششی‌ویك‌به‌یك باشندآنگاه تابع $g \circ f : A \rightarrow C$ پوششی ویك به یك خواهد بود.

مسألهٔ ۲۶۳: تابع f روی اعداد حقیقی با ضابطه $f(x) = \sqrt{۱ - x^{۲}}$ مفروض‌است. بزرگترین میدانی‌راکه‌تابع f درآن معکوس پذیرباشد معین نموده سپس $f^{-۱}$ را بیابید.

مسألهٔ ۲۶۴: نشان دهید تابع معکوس $y = x + \frac{۱}{x}$ برای $x > ۱$ یا $x < -۱$ وجود داشته ودرهریك ازاین حالتها تابع معکوس را بیابید.

مسألهٔ ۲۶۵: نشان دهید تابع $f : R \rightarrow R$ با ضابطه $f(x) = x^{۳} + ۲x - ۱$ همواره یك به یك وپوششی می‌باشد ، سپس ضابطهٔ تابع معکوس f را بیابید.

۲۷

جواب ، راهنمایی، حل بعضی از مسائل

مسألهٔ ۱:

و دامنه تابع $= D_{f_۱} =]-\infty\ ,\ +\infty[$

برد تابع $= R_{f_۱} = [۰\ ,\ +\infty[$

نمودار تابع $f_۱$ به صورت:

$D_{f_۳} =]-\infty\ ,\ ۰[U[۱\ ,\ +\infty[$ و $R_{f_۳} = [-۱\ ,\ ۰[U[۱\ ،\ ۲[$

مسألهٔ ۴:

و $K(x) = \frac{۱}{۲}[f(x) - f(-x)]$ و $h(x) = \frac{۱}{۲}[f(x) + f(-x)]$

$f(x) = h(x) + K(x)$

$h(-x) = \frac{۱}{۲}[f(-x) + f(x)] = h(x) \Longrightarrow$ تابع h زوج است

$$K(-x) = \frac{۱}{۲}[f(-x) - f(x)] = -\frac{۱}{۲}[f(x) - f(-x)]$$

$= -K(x) \Longrightarrow$ تابع K فرد است

$$f(x) = \frac{۱}{۲}\left[\frac{x-۱}{x+۱} + \frac{-x-۱}{-x+۱}\right] + \frac{۱}{۲}\left[\frac{x-۱}{x+۱} - \frac{-x-۱}{-x+۱}\right]$$

$$= \underset{\text{تابع زوج}}{\underleftrightarrow{\frac{x^۲+۱}{x^۲-۱}}} + \underset{\text{تابع فرد}}{\underleftrightarrow{\frac{۲x}{۱-x^۲}}}$$

مسألهٔ ۵:

$f(x) = ۰$

مسألهٔ ۷:

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{|x|} & \text{اگر} \quad x \geqslant ۰ \\ -\sqrt{|x|} & \text{اگر} \quad x < ۰ \end{cases}$$

مسألهٔ ۸:

$$Sgn(x)=\begin{cases} -۱ \text{ ، } x<۰ \\ ۰ \text{ ، } x=۰ \\ ۱ \text{ ، } x>۰ \end{cases} \quad \text{و} \quad U(t)=\begin{cases} ۰ \text{ ، } t<۰ \\ ۱ \text{ ، } t\geqslant ۰ \end{cases}$$

درتابع $Sgn(x)$ ، x را به $x^۲$ تبدیل کرده داریم:

$$Sgn(x^۲)=\begin{cases} -۱ \text{ ، } x^۲<۰ \\ ۰ \text{ ، } x^۲=۰ \\ ۱ \text{ ، } x^۲>۰ \end{cases}$$

$x^۲ < ۰$ بی معنی است و $x^۲ > ۰$ وقتی برقرار می‌باشد که $x > ۰$ یا $x < ۰$ باشد پس داریم:

و

$$Sgn(x^۲)=\begin{cases} ۱ \text{ ، } x<۰ \\ ۰ \text{ ، } x=۰ \\ ۱ \text{ ، } x>۰ \end{cases}$$

$$f(x)=Sgn(x^۲)-Sgn(x)=\begin{cases} ۱-(-۱) \text{ ، } x<۰ \\ ۰-۰ \text{ ، } x=۰ \\ ۱-۱ \text{ ، } x>۰ \end{cases}$$

و

$$=\begin{cases} ۲ \text{ ، } x<۰ \\ ۰ \text{ ، } x=۰ \\ ۰ \text{ ، } x>۰ \end{cases}$$

$$D_f=]-\infty , +\infty[\quad \text{و} \quad R_f=\{۰ , ۲\}$$

و

$$g(x)=\begin{cases} ۰ & \text{ ، } x<-۱ \\ x+۱ & \text{ ، } x\geqslant -۱ \end{cases}$$

$$D_g=]-\infty , +\infty[\quad \text{و} \quad R_g=[۰ , +\infty[$$

و

$$h(x)=\begin{cases} ۰ \text{ ، } x<-۱ \\ -۱ \text{ ، } -۱\leqslant x<۰ \\ ۰ \text{ ، } x=۰ \\ ۱ \text{ ، } x>۰ \end{cases}$$

$$D_h=]-\infty\ ,\ +\infty[\quad \text{و} \quad R_h=\{-۱\ ,\ ۰\ ,\ ۱\}$$

مسألهٔ ۹: $g\circ f(x)$ را به دست‌آورده ، $f\circ g(x)$ به همان ترتیب به دست می‌آید:

یا

$$g\circ f(x)=g[f(x)]=\begin{cases} g(۰) \text{ ، } x<۰ \\ g(۲x) \text{ ، } ۰\leqslant x\leqslant ۱ \\ g(۰) \text{ ، } x>۱ \end{cases}$$

و

$$g\circ f(x)=\begin{cases} \frac{۱}{۲}\times ۰=۰ \text{ ، } x<۰ \\ g(۲x) \text{ ، } ۰\leqslant x\leqslant ۱ \\ \frac{۱}{۲}\times ۰=۰ \text{ ، } x>۱ \end{cases}$$

یا

$$g(۲x)=\begin{cases} ۱ \text{ ، } ۲x<۰ \\ \frac{۱}{۲}\times ۲x \text{ ، } ۰\leqslant ۲x\leqslant ۱ \\ ۱ \text{ ، } ۲x>۱ \end{cases}$$

یا

$$g(۲x)=\begin{cases} ۱ \text{ ، } x<۰ \\ x \text{ ، } ۰\leqslant x\leqslant \frac{۱}{۲} \\ ۱ \text{ ، } x>\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

و

$$g(۲x)=\begin{cases} ۱ \text{ ، } x<۰ \\ x \text{ ، } ۰\leqslant x\leqslant \frac{۱}{۲} \\ ۱ \text{ ، } \frac{۱}{۲}<x\leqslant ۱ \\ ۱ \text{ ، } x>۱ \end{cases}$$

$$g\circ f(x)=\begin{cases} ۰ \text{ ، } x<۰ \\ x \text{ ، } ۰\leqslant x\leqslant \frac{۱}{۲} \\ ۱ \text{ ، } \frac{۱}{۲}<x\leqslant ۱ \\ ۰ \text{ ، } x>۱ \end{cases}$$

$$D_{g\circ f}=]-\infty \,,\, +\infty[\quad \text{و} \quad R_{g\circ f}=\left[۰ \,,\, \frac{۱}{۲}\right]U\{۱\}$$

مسألهٔ ۱۰:

$$f\circ g(x)=\begin{cases} ۱ \text{ ، } x<۰ \\ ۴x^{۲} \text{ ، } ۰\leqslant x\leqslant \frac{۱}{۲} \\ ۰ \text{ ، } \frac{۱}{۲}<x\leqslant ۱ \\ ۱ \text{ ، } x>۱ \end{cases}$$

مسألهٔ ۱۱: $g(x)=x-۳ \quad \text{و} \quad g(x)=-x+۱$

مسألهٔ ۱۲:

$$\begin{cases} D_f=\left]\frac{\pi}{۳}+۲K\pi \,,\, \frac{۵\pi}{۳}+۲K\pi\right[\quad \text{و} \quad R_f=]-\infty \,,\, ۳] \\ K\in Z \end{cases}$$

مسألهٔ ۱۳: $f[g(x)]=x$

مسألهٔ ۱۴: $f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}{x} \quad \text{و} \quad x<۰$

چون $f\left(\frac{y}{x}\right)<۰$ می‌باشد، پس اگر x را داخل رادیکال برده و $\frac{y}{x}$ را تبدیل به x نمایید، دارید $f(x)=-\sqrt{۱+x^{۲}}$.

مسألهٔ ۱۵: از اتحاد $(x+y)^{۲}-(x-y)^{۲}=۴xy$ استفاده کرده، داریم:

$f(x\,,\,y)=x^{۲}-y^{۲}$

مسألهٔ ۱۶: در تابع $f(\sqrt{x}-۱)=x-۱$ ، $\sqrt{x}-۱=u$ قرارداده $f(u)$ به‌دست می‌آید.

مسألهٔ ۱۷: از حل دستگاه $\begin{cases} x+y=a \\ \dfrac{y}{x}=b \end{cases}$ ، x و y را به دست آورده ، داریم:

$$f(x\,,\,y)=\frac{x^{۲}(۱-y)}{۱+y}$$

مسألهٔ ۱۸: $f(x)=x^{۲}-۲$

مسألهٔ ۱۹: به جای n از ۲ تا n وخود n را قرارداده ، داریم:

$$f(n)=\begin{cases} ۱+\dfrac{a^{n+۱}-a^{۲}}{a-۱} \text{ ، } a\neq ۱ \\ n \text{ ، } a=۱ \end{cases}$$

مسألهٔ ۲۰: x را به $-x$ تبدیل کرده‌ازحل‌دستگاه $f(x^{۳})$ را به دست آورده ، داریم:

$$f(x)=\sqrt[۳]{x}$$

مسألهٔ ۲۱: $\begin{cases} f(x+۲)=(x-۲)^{۲}G(x) & ❶ \\ f(x-۱)=(x+۳)^{۲}Q(x) & ❷ \end{cases}$ در رابطه ❶ x را به $x-۲$ و

در رابطه (۲) x را به $x+۱$ تبدیل نموده، داریم:

$$\begin{cases} f(x)=(x-۴)^{۲}G(x-۲) \\ f(x)=(x+۴)^{۲}Q(x+۱) \end{cases}$$

پس $f(x)=(x^{۲}-۱۶)^{۲}H(x)$ چون $f(x)$ ازدرجهٔ چهارم‌است به‌ناچار $H(x)=K$

و $f(x)=K(x^{۲}-۱۶)^{۲}$ وداریم:

و $$f(۵)=۸۱=۸۱K \Longrightarrow K=۱ \Longrightarrow f(x)=(x^{۲}-۱۶)^{۲}$$

$$f(۳)=۴۹$$

مسألهٔ ۲۲: $f(x)=[f(۱)]^{x}$

مسألهٔ ۲۳: $f(x)=x\sin x-x\cos x$

مسألهٔ ۲۴:

$$\underset{x\to ۴}{\text{حد}}\ \frac{\sqrt{x}-۲}{x-۴}=\frac{۱}{۴}$$

$$\forall\varepsilon>۰ \qquad \exists\delta>۰ \ni$$

و $$۰<|x-۴|<\delta \Longrightarrow \left|\frac{\sqrt{x}-۲}{x-۴}-\frac{۱}{۴}\right|<\varepsilon$$

$x \neq ۴$ و $\dfrac{\sqrt{x}-۲}{x-۴}=\dfrac{\sqrt{x}-۲}{(\sqrt{x}-۲)(\sqrt{x}+۲)}=\dfrac{۱}{\sqrt{x}+۲}$

و $\left|\dfrac{۱}{\sqrt{x}+۲}-\dfrac{۱}{۴}\right|=\dfrac{۱}{۴}\left|\dfrac{۲-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+۲}\right|=\dfrac{۱}{۴}\left|\dfrac{\sqrt{x}-۲}{\sqrt{x}+۲}\right|$

$$=\frac{۱}{۴}|x-۴|\times\frac{۱}{(\sqrt{x}+۲)^{۲}}$$

$$|x-۴|<۱ \Longrightarrow ۳<x<۵$$

$$\Longrightarrow (\sqrt{۳}+۲)^{۲}<(\sqrt{x}+۲)^{۲}<(\sqrt{۵}+۲)^{۲}$$

$$\Longrightarrow \frac{۱}{(\sqrt{۵}+۲)^{۲}}<\frac{۱}{(\sqrt{x}+۲)^{۲}}<\frac{۱}{(\sqrt{۳}+۲)^{۲}}$$

$$\frac{۱}{۴}|x-۴|\times\frac{۱}{(\sqrt{x}+۲)^{۲}}<\frac{۱}{۴}\delta\times\frac{۱}{(\sqrt{۳}+۲)^{۲}}=\varepsilon$$

و $\Longrightarrow \delta=۴\varepsilon(\sqrt{۳}+۲)^{۲}$

و $\begin{cases}|x-۴|<۱\\ |x-۴|<\delta=۴\varepsilon(\sqrt{۳}+۲)^{۲}\end{cases}$

$$۰<|x-۴|<\mathrm{Min}\{۴\varepsilon(\sqrt{۳}+۲)^{۲},۱\}$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{\sqrt{x}-۲}{x-۴}-\frac{۱}{۴}\right|<\varepsilon$$

برای نشان دادن $\underset{x\to a}{\text{حد}}\sqrt[۳]{x}=\sqrt[۳]{a}$ ، درحالتی‌که $a>۰$ می‌باشد، عیناً مانند قضیهٔ (۹) صفحه ۱۲ عمل می‌نماییم و درحالتی‌که $a<۰$ باشد، فرض می‌کنیم $|x-a|<-a$، پس $۲a<x<۰$ ودرهردوحالت داریم:

$$۰<|x-a|<\mathrm{Min}\{|a|\ ,\ \varepsilon\sqrt[۳]{a^{۲}}\}\Longrightarrow|\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{a}|<\varepsilon$$

اگر $a=۰$ باشد، کافی است $\delta\leqslant\varepsilon^{۳}$ بگیریم.

مسألهٔ ۲۵: چون x مثبت است، باید نشان دهیم:

$$\forall\varepsilon>۰\qquad\exists\delta>۰\ni$$

$$۰<x<\delta\Longrightarrow\left|\frac{\sin x}{x}-۱\right|<\varepsilon$$

از نامساوی $\sin x<x<tg\,x$ استفاده نمود، نشان دهید $\delta\leqslant\varepsilon$ می‌باشد.

مسألهٔ ۲۶: ازنامساوی $۱ > |[a]-a|$ استفاده نموده،نشان دهید $\delta \leqslant \varepsilon$ می‌باشد.

مسألهٔ ۲۷: ثابت می‌کنیم اگر $\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\ \sin\frac{۱}{x}=c$ ، باشد به تناقض برخورد می‌نماییم

تعریف حد را می‌نویسیم:

$$\forall\varepsilon>۰ \qquad \exists\delta>۰ \ni$$
$$۰<|x|<\delta \Longrightarrow \left|\sin\frac{۱}{x}-c\right|<\varepsilon$$

$\varepsilon=\frac{۱}{۲}$ اختیارکرده ، اگر $\sin\frac{۱}{x}$ را (۱) و (-۱) درنظر بگیریم و $K\in Z$ را آنقدربزرگ اختیارنماییم تا $۰<|x|<\delta$ گردد. دراین صورت:

$$x_۱=\frac{۱}{۲K\pi+\frac{\pi}{۲}} \quad \text{یا} \quad \sin\frac{۱}{x_۱}=۱=\sin\frac{\pi}{۲}$$

و

$$x_۲=\frac{۱}{۲K\pi-\frac{\pi}{۲}} \quad \text{یا} \quad \sin\frac{۱}{x_۲}=-۱=\sin-\frac{\pi}{۲}$$

داریم:

و $$\left|\sin\frac{۱}{x_۱}-c\right|=|۱-c|<\frac{۱}{۲}$$

و $$\left|\sin\frac{۱}{x_۲}-c\right|=|-۱-c|=|۱+c|<\frac{۱}{۲}$$

$$۲=|(۱-c)+(۱+c)|\leqslant|۱-c|$$
$$+|۱+c|<\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱ \Longrightarrow ۲<۱$$

ملاحظه می‌نماییم اگر حد وجود داشته باشد به تناقض می‌رسیم ، پس حد وجود ندارد. درمسألهٔ ۴۱(صفحه۲۳)نشان خواهیم‌داد، اگرحدتابعی درx وجود داشته‌باشد، تابع‌محدود است ، یعنی $|f(x)|\leqslant M$ می‌باشد ولی عکس قضیه برقرار نیست ؛ یعنی اگر تابع محدود باشد ، ممکن است حد نداشته باشد ، چنانچه $\left|\sin\frac{۱}{x}\right|\leqslant ۱$ محدود بوده ، ملاحظه شدکه درصفر حد ندارد.

مسألهٔ ۲۸: $\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(x)=l$ ، انتخاب کرده، تعریف حد را بنویسید به نتیجه خواهید رسید.

مسألهٔ ۲۹: از برهان خلف ومسأله ۲۸ استفاده نمایید.

مسألهٔ ۳۰: روش حل شبیه قضیهٔ (۲) صفحهٔ۸ می باشد.

مسألهٔ ۳۲: فرض کنید $g(h)=t-h$، از قضیهٔ ۲۲ (صفحهٔ ۲۰) استفاده کرده، به نتیجه خواهید رسید.

مسألهٔ ۳۳: از برهان خلف استفاده کرده ، فرض می کنیم تابع $f+g$ در a پیوسته باشد، به تناقض خواهیم رسید.

مسألهٔ ۳۵: اگر:

$$f(x)=\begin{cases} x-۱ \ ، \ x<۰ \\ x+۱ \ ، \ x\geqslant ۰ \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=\begin{cases} x+۱ \ ، \ x<۰ \\ x-۱ \ ، \ x\geqslant ۰ \end{cases}$$

فرض نمایید ، مسأله را بررسی نموده ودراین مورد مثالهای دیگری بنویسید.

مسألهٔ ۳۶: اگر:

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{۱}{x} \ ، \ x\neq ۰ \\ ۰ \ ، \ x=۰ \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=\begin{cases} x \ ، \ x\neq ۰ \\ ۲ \ ، \ x=۰ \end{cases}$$

فرض نمایید ، مسأله را بررسی نموده دراین مورد مثال دیگری بیاورید.

مسألهٔ ۳۷: از برهان خلف استفاده کرده ، فرض کنید تابع $\dfrac{f}{g}$ در a پیوسته باشد ، به تناقض خواهید رسید.

مسألهٔ ۳۸: با استفاده از تعریف حد راست وحد چپ تابع ، نشان دهید شرط لازم و کافی برای آنکه تابع f درفاصلهٔ تعریف‌شده پیوسته باشد .آن است که $\underset{h\to ۰}{\text{حد}}\, f(x+h)=f(x)$ و $\underset{h\to ۰}{\text{حد}}\, f(x-h)=f(x)$ ، بنابراین داریم : $\underset{h\to ۰}{\text{حد}}\, f(x-h)=\underset{h\to ۰}{\text{حد}}\, f(x+h)$ ،

مفهوم رابطه اخیر آن است که درتابع پیوسته حد راست تابع در x با حد چپ تابع در x و یا حد چپ تابع در x با حد راست تابع در x برابر می‌باشد، ولی عکس مطلب درست نیست ، یعنی ممکن است حد راست تابع با حد چپ تابع در x برابر باشد ، ولی تابع در x پیوسته نباشد. مانند تابع

$$f(x)=\begin{cases} x+۱ \ ، \ x<۰ \\ ۱-x \ ، \ x>۰ \\ ۲ \ ، \ x=۰ \end{cases}$$

که

در صفر پیوسته نیست.

مسألهٔ ۳۹: با توجه به آنکه تابع f در صفر پیوسته است، داریم: $\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\ f(x)=f(۰)$ ، باید ثابت نماییم $\underset{x\to a}{\text{حد}}\ f(x)=f(a)$ ، فرض می‌کنیم $x=t+a$ اگر $x\to a$ آنگاه $t\to ۰$ و اگر $t\to ۰$ آنگاه $x\to a$ طبق فرض، داریم:

$$f(t+a)=f(t)f(a)$$

ازطرفین این رابطه حد گرفته، داریم:

$$\underset{t\to ۰}{\text{حد}}\ f(t+a)=\underset{t\to ۰}{\text{حد}}\ f(t)\times\underset{t\to ۰}{\text{حد}}\ f(a)=f(۰)\times f(a)=f(۰+a)=f(a)$$

$$\Longrightarrow \underset{t\to ۰}{\text{حد}}\ f(t+a)=f(a)\Longrightarrow \underset{x\to a}{\text{حد}}\ f(x)=f(a)$$

مسألهٔ ۴۱: به اثبات قضیه ۵ (صفحه ۱۰۵) مراجعه نموده خواهیم داشت $|f(x)|<|L|+۱$ در نتیجه، داریم: $|f(x)|\leqslant M$.

مسألهٔ ۴۲:

(۱) (جواب ۵، (۳) (جواب ۴، $\left(\frac{۳}{۲}\right)$ (جواب ۳ ، $\left(\frac{۱}{۸}\right)$ (جواب ۲، (۴) (جواب ۱

مسألهٔ ۴۳: برای حل قسمت (۳) ازفرمول:

$$\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b}=\frac{a-b}{\sqrt[۳]{a^{۲}}+\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{b^{۲}}}$$

استفاده نموده، داریم:

$$\underset{x\to ۰}{\sqrt[۳]{۱+x}-۱}\sim\underset{x\to ۰}{\frac{x}{۳}}\quad \text{و قسمت اصلی}=\frac{x}{۳}\quad\text{و مرتبه}=۱$$

(جواب ۱ قسمت اصلی $=|x|$ و مرتبه $=۱$ ، (جواب ۲ قسمت اصلی $=x^{۲}$ و مرتبه $=۲$

مسألهٔ ۴۴: ازفرمول:

$$\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}=\frac{a-b}{\sqrt[n]{a^{n-۱}}+\sqrt[n]{a^{n-۲}b}+\cdots+\sqrt[n]{b^{n-۱}}}$$

استفاده نمایید.

مسألهٔ ۴۵: نشان دهید رادیکال اول ودوم هم‌ارز x ورادیکال سوم هم‌ارز $۲x$ در نتیجه مجموع رادیکالها هم‌ارز $۴x$ ، می‌باشند.

مسألهٔ ۴۶: رادیکالها را تبدیل به فرجهٔ (۶) نموده، داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^۲+۳x-۱}-\sqrt[۳]{x^۳+x^۲-۱}\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[۶]{(x^۲+۳x-۱)^۳}-\sqrt[۶]{(x^۳+x^۲-۱)^۲}\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^۲+۳x-۱)^۳-(x^۳+x^۲-۱)^۲}{\sqrt[۶]{(x^۲+۳x-۱)^{۱۵}}+\sqrt[۶]{(x^۲+۳x-۱)^{۱۲}(x^۳+x^۲-۱)^۲}+\cdots+\sqrt[۶]{(x^۳+x^۲-۱)۱۰}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^۲)^۳+۳(x^۲)^۲(۳x-۱)+۳(۳x-۱)^۲x^۲+(۳x-۱)^۳-(x^۳)^۲-۲x^۳(x^۲-۱)-(x^۲-۱)^۲}{\text{مخرج}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۷x^۵+\cdots}{x^۵+x^۵+x^۵+x^۵+x^۵+x^۵}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۷x^۵}{۶x^۵}=\frac{۷}{۶}$$

مسألهٔ ۴۷: (۰) (جواب

مسألهٔ ۴۸: n! (جواب ۱

۲) ∴ از رابطهٔ $\operatorname{Arctg}a+\operatorname{Arctg}b=\operatorname{Arctg}\frac{a+b}{۱-ab}$ ، استفاده کرده، داریم:

$$\lim_{x\to۱}\frac{\operatorname{Arctg}۲x+\operatorname{Arctg}۳x-\frac{۳\pi}{۴}}{x^۲-۱}=$$

$$\lim_{x\to۱}\frac{\operatorname{Arctg}\frac{۶x^۲-۵x-۱}{۶x^۲+۵x-۱}}{x^۲-۱}=\frac{۷}{۲۰}$$

۳) ∴ $\sqrt[۶۰]{x}=t$ قرارداده دراین صورت اگر $x\to۱ \iff t\to۱$ ، و جواب $\frac{۱۵}{۸}$ می‌باشد.

۴) ∴ صورت ومخرج کسررا بر $\sqrt{x-۱}$ بخش نموده ، کسرهای به دست آمده درصورت ومخرج را درمزدوج صورت ورادیکال مخرج ضرب نموده ، جواب $\sqrt{۲}$ می گردد.

(۰) (جواب ، ۵ ∴ $\left(\frac{m}{n}\right)$ (جواب ، ۶ $\left(\frac{۱}{a}\right)$ (جواب ۷

۸) ∴ ازفرمول:

$$\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}=\frac{a-b}{\sqrt[n]{a^{n-۱}}+\sqrt[n]{a^{n-۲}b}+\cdots+\sqrt[n]{b^{n-۱}}}$$

استفاده کرده ، جواب n! می باشد.

۹) ∴ $\left(\frac{۱}{۲}\right)$ (جواب

۱۰) ∴ صورت و مخرج را بر ۳^{n} بخش کرده ، جواب ۲۷ می باشد.

۱۱) ∴ داریم:

$$\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\ [(\sqrt{x^۲+x+۱}-x)+(\sqrt{۴x^۲+x+۱}-۲x)+(\sqrt{۹x^۲+x+۱}-۳x)]=$$

$$\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\ \frac{x+۱}{\sqrt{x^۲+x+۱}+x}+\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\ \frac{x+۱}{\sqrt{۴x^۲+x+۱}+۲x}+\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\ \frac{x+۱}{\sqrt{۹x^۲+x+۱}+۳x}=$$

$$\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\ \frac{x}{۲x}+\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\ \frac{x}{۴x}+\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\ \frac{x}{۶x}=\frac{۱۱}{۱۲}$$

۱۲) ∴ (۰) (جواب

۱۳) ∴ $x=\frac{\pi}{۲}+t$ قرار داده ، جواب $-\sqrt{۲\pi}$ می باشد.

۱۴) ∴ صورت ومخرج را بر $۲^{۱/x}$ بخش کرده ، جواب (۱) می باشد.

(-۱) (جواب ۱۵ ∴ $\left(\frac{۱}{۲}\right)$ (جواب ۱۶

۱۷) ∴ عبارات داخل پرانتزهارا ازطریق بی‌نم نیوتن بسط داده به جای‌صورت جمله‌ای راکه درجه‌اش ازهمه‌کمتراست ، قرارداده . داریم:

$$\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\ \frac{\left[\frac{m^۲n(n-۱)}{۲}-\frac{n^۲m(m-۱)}{۲}\right]x^۲}{x^۲}=\frac{mn}{۲}(n-m)$$

۱۸) ∴ $\left(\frac{۱}{۳}\right)$ (جواب

۱۹) ∴ $x=t+۱$ قرارداده، جواب $\frac{n(n+۱)}{۲}$ می باشد.

۲۰) ∴ رادیکالها را به یك فرجه تبدیل کرده ، جواب $\left(-\frac{۱}{۱۲}\right)$ می باشد.

۲۱) ∴ از فرمول $tg۳x$ استفاده کرده $tg^{۳}x-۳tg\,x$ را به دست آورده ، به جای x ، $\frac{\pi}{۳}+t$ قرارداده ، جواب (−۲۴) می‌باشد.

۲۲) ∴ صورت کسر را به صورت $۲tg\,x \times sin^{۲}\frac{x}{۲}$ نوشته، جواب $\left(\frac{۱}{۲}\right)$ است.

۲۳) ∴ کسر را به صورت $\dfrac{cos\left(\frac{x}{۲}-\frac{\pi}{۶}\right)}{۲\,sin\left(\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۶}\right)}$ در آورده، جواب $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ می‌باشد.

۲۴) ∴ $\dfrac{n(n-۱)a^{n-۲}}{۲}$ ∴ (جواب

۲۵) ∴

$$\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\left(\frac{۱}{sin\,x}-\frac{۱}{x}\right)=\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\frac{x-sin\,x}{x\,sin\,x}=\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\frac{x-sin\,x}{x^{۲}}$$

باید کوشش نماییم کسر اخیر را به دست آوریم ، x را بین صفر و $\frac{\pi}{۲}$ قرار داده ، نامساوی $sin\,x > x-\frac{x^{۳}}{۴}$ را ثابت می‌نماییم.

$$sin\,x=۲\,sin\frac{x}{۲}\,cos\frac{x}{۲}=۲\left(tg\frac{x}{۲}\,cos\frac{x}{۲}\right)cos\frac{x}{۲}$$

$$=۲\,tg\frac{x}{۲}\,cos^{۲}\frac{x}{۲}=۲\,tg\frac{x}{۲}\left(۱-sin^{۲}\frac{x}{۲}\right)$$ و

$$tg\frac{x}{۲}>\frac{x}{۲}\Longrightarrow ۲\,tg\frac{x}{۲}>x$$ و

$$۰<sin\frac{x}{۲}<\frac{x}{۲}\Longrightarrow sin^{۲}\frac{x}{۲}<\frac{x^{۲}}{۴}$$

$$\Longrightarrow -sin^{۲}\frac{x}{۲}>-\frac{x^{۲}}{۴}$$

$$\Longrightarrow ۱-sin^{۲}\frac{x}{۲}>۱-\frac{x^{۲}}{۴}$$ و

$$\left\{\begin{array}{l} ۲\,tg\frac{x}{۲}>x \\ ۱-sin^{۲}\frac{x}{۲}>۱-\frac{x^{۲}}{۴}\end{array}\right. \xrightarrow{\text{ازضرب نامساویها}}$$

$$۲tg\frac{x}{۲}\left(۱-\sin^۲\frac{x}{۲}\right) > x-\frac{x^۳}{۴} \Longrightarrow$$

$$\sin x > x-\frac{x^۳}{۴} \Longrightarrow ۰ < x-\sin x < \frac{x^۳}{۴} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow ۰ \leqslant \frac{x-\sin x}{x^۲} \leqslant \frac{x}{۴} \quad ❶$$

چون $\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\frac{x}{۴}=۰$ ، و $\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\,O=۰$ ، پس طبق قضیهٔ ۱۴ (صفحهٔ ۱۴) با توجه به نامساوی (۱) $\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\frac{x-\sin x}{x^۲}=۰$ ، می باشد. اگر $-\frac{\pi}{۲} < x < ۰$ باشد، کافی است در عملیات بالا x را به $-x$ تبدیل نموده به نتیجه خواهیم رسید.

مسألهٔ ۴۹: با استفاده از تعریف مشتق $f'(x_۰)=\underset{x\to x_۰}{\text{حد}}\frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰}$ و رابطهٔ:

$$\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b}=\frac{a-b}{\sqrt[۳]{a^۲}+\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{b^۲}}$$

به نتیجه خواهید رسید.

مسألهٔ ۵۰: درصورت کسر $f(a)$ را کم و اضافه نمایید و از تعریف مشتق استفاده کرده به نتیجه خواهید رسید.

مسألهٔ ۵۱: چون $f'(۱)$ وجود دارد، پس طبق قضیهٔ (۳۲) صفحه ۳۹ تابع در (۱) پیوسته است، یعنی $\underset{x\to ۱^+}{\text{حد}}f(x)=\underset{x\to ۱^-}{\text{حد}}f(x)=f(۱)$ یا $a+b=۱$ از طرفی $f'(۱)$ را از راست و چپ حساب نموده باید مساوی باشند.

و $$f'_+(۱)=\underset{x\to ۱^+}{\text{حد}}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\underset{x\to ۱^+}{\text{حد}}\frac{ax+b-a-b}{x-۱}=a$$

$$f'_-(۱)=\underset{x\to ۱^-}{\text{حد}}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\underset{x\to ۱^-}{\text{حد}}\frac{x^۲-a-b}{x-۱}=\underset{x\to ۱^-}{\text{حد}}\frac{x^۲-(a+b)}{x-۱}=$$

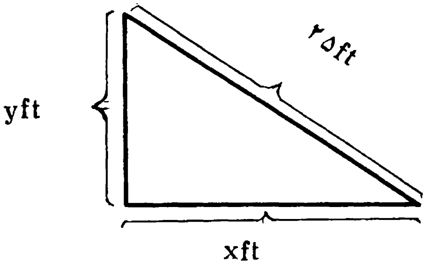
$$\underset{x\to ۱^-}{\text{حد}}\frac{x^۲-۱}{x-۱}=۲ \Longrightarrow a=۲ \quad \text{و} \quad a+b=۱ \Longrightarrow b=-۱$$

مسألهٔ ۵۲: $$f'(x_۱)=\underset{x\to x_۱\in R-Z}{\text{حد}}\frac{[x]-[x_۱]}{x-x_۱}=\underset{x\to x_۱}{\text{حد}}\frac{۰}{x-x_۱}=۰$$

اگر $x_۱ \in Z$ باشد $\underset{x\to x_۱^{+}}{\text{حد}}[x]=x_۱$ ، و $\underset{x\to x_۱^{-}}{\text{حد}}[x]=x_۱-۱$ ، پس تابع $f(x)$ دراعداد صحیح x پیوسته نیست. بنابراین $f'(x_۱)$ وجود ندارد، زیرا اگر $f'(x_۱)$ وجود داشته باشد، باید طبق قضیهٔ ۳۲ (صفحهٔ ۳۹) در $x_۱$ پیوسته باشد.

مسألهٔ ۵۹: ازرابطهٔ $x^۲+y^۲=۶۲۵$ نسبت به زمان t مشتق گرفته ، داریم:

و
$$۲x'_tx+۲y'_ty=۰ \implies y'_t=-\frac{x}{y}\,x'_t$$



و
$$x=۱۵ \implies y^۲=۶۲۵-۲۲۵=۴۰۰ \implies y=۲۰$$
$$y'_t=-\frac{۱۵}{۲۰}\times ۳=-\frac{۹}{۴}\ \frac{ft}{Sec}$$

چون y با افزایش t کاهش می‌یابد ، لذا $y'_t<۰$ است.

مسألهٔ ۶۰: $\frac{۳۲}{۲۵\pi}$ (جواب

مسألهٔ ۶۱: ۴۸ — مایل درساعت (جواب

مسألهٔ ۶۲: $\frac{۵}{۸\pi}$ (جواب

مسألهٔ ۶۳: $-\frac{۱۵}{۴}\ \frac{ft}{Sec}$ (جواب

مسألهٔ ۶۴: $-\frac{۲۵۰}{۳}\ \frac{\text{فوت}}{\text{دقیقه}}$ (جواب

مسألهٔ ۶۵:
$$f(x)=\begin{cases}-x^۴ ، & x<۰\\ x^۴ ، & x\geqslant ۰\end{cases} \quad \text{و} \quad f'(x)=\begin{cases}-۴x^۳ ، & x<۰\\ ۴x^۳ ، & x>۰\end{cases}$$

و
$$f'_+(۰)=\underset{x\to ۰+}{\text{حد}}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\underset{x\to ۰+}{\text{حد}}\frac{x^۴-۰}{x-۰}=\underset{x\to ۰+}{\text{حد}}\,x^۳=۰$$

$$f'_-(\circ)=\underset{x\to\circ^-}{\text{حد}}\ \frac{-x^{۴}-\circ}{x-\circ}=\underset{x\to\circ^-}{\text{حد}}\ -x^{۳}=\circ \Longrightarrow f'(\circ)=\circ$$

و
$$f'(x)=\begin{cases}-۴x^{۳}\ ، & x<\circ\\ ۴x^{۳}\ ، & x\geqslant\circ\end{cases}\Longrightarrow f'(x)=۴x^{۲}|x|$$

$$D_{f'}=]-\infty\ ,\ +\infty[$$

به همین ترتیب: $f''(x)=۱۲x|x|$ و $D_{f''}=]-\infty\ ,\ +\infty[$

مسألهٔ ۶۷: تابع را به صورت $f(x)=\left(\sqrt{(x+۱)^{۲}}-\sqrt{x^{۲}}\right)^{۲}$ نوشته، سپس مشتق بگیرید.

مسألهٔ ۶۸: $c=۱$ و $b=-۳$ و $a=۳$ (جواب)

مسألهٔ ۶۹: $f(x)=\frac{۱}{x}$ و $g(x)=x-۱$ فرض نمایید، آنگاه مسأله را بررسی نمایید، مثالهای دیگر دراین مورد بیاورید.

مسألهٔ ۷۱: $f(x)=x^{۲}$ و $g(x)=|x|$ فرض نموده مسأله را بررسی نمایید.

مسألهٔ ۷۳: درصورت کسر $x_{۱}f(x_{۱})$ اضافه وکم نمایید.

مسألهٔ ۷۵: $Z'_x=\frac{۲}{x}$ (جواب)

حل قسمت ۵ مسألهٔ ۷۶:

$$\frac{y}{Z}=f(x)\Longrightarrow\frac{y'Z-Z'y}{Z^{۲}}=f'(x)\Longrightarrow y'Z-Z'y=۱$$
$$\Longrightarrow y''Z+Z'y'-Z''y-y'Z'=\circ$$
$$\Longrightarrow y''Z=Z''y\Longrightarrow\frac{y''}{y}=\frac{Z''}{Z}$$

مسألهٔ ۷۷: می‌دانیم مشتق n ام تابع $y=\sin ax$ به صورت:

$$y^{(n)}=a^{n}\sin\left(\frac{n\pi}{۲}+ax\right)$$

ومشتق n ام تابع $y=\cos ax$ به صورت: $y^{(n)}=a^{n}\cos\left(\frac{n\pi}{۲}+ax\right)$

می‌باشد، برای به دست‌آوردن مشتق n ام توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس، آنها را به شکل توان (۱) به صورت حاصل جمع درآورده با استفاده از فرمولهای اخیر مشتق n ام توابع مثلثاتی را به دست می‌آوریم. مثلاً :

$$y_{۴}=\sin^{۴}x+\cos^{۴}x\Longrightarrow y_{۴}=۱-\frac{۱}{۲}\sin^{۲}۲x=\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۴}\cos ۴x$$

$$\Longrightarrow\ y^{(n)}=۴^{n-۱}\cos\left(\frac{n\pi}{۲}+۴x\right)$$

$$y_۱=\sin^۲x\ \Longrightarrow\ y_۱^{(n)}=-۲^{n-۱}\cos\left(\frac{n\pi}{۲}+۲x\right)$$

$$y_۲=\sin^۳x\ \Longrightarrow\ y_۲^{(n)}=\frac{۳}{۴}\sin\left(\frac{n\pi}{۲}+x\right)-\frac{۳^n}{۴}\sin\left(\frac{n\pi}{۲}+۳x\right)$$

$$y_۴=\sin^۲x\cos۴x\ \Longrightarrow\ y_۴^{(n)}=\frac{۴^n}{۲}\cos\left(\frac{n\pi}{۲}+۴x\right)$$

$$-\frac{۱}{۴}\left[۶^n\cos\left(\frac{n\pi}{۲}+۶x\right)+۲^n\cos\left(\frac{n\pi}{۲}+۲x\right)\right]$$

برای به دست‌آوردن مشتق n ام توابع کسری ابتدا ، آنها را رفع کرده سپس کسر را به حاصل جمع کسرهای ساده‌تر تبدیل نموده ،آنگاه مشتق n ام می‌گیریم:

و
$$y_۵=\frac{x^۲+۱}{x^۲-۳x+۲}\ \Longrightarrow\ y_۵=۱+\frac{۳x-۱}{x^۲-۳x+۲}$$

$$\frac{۳x-۱}{x^۲-۳x+۲}=\frac{۳x-۱}{(x-۲)(x-۱)}\equiv\frac{a}{x-۲}+\frac{b}{x-۱}$$

برای به دست آوردن صورت هر کسر طرفین را درمخرج آن کسر ضرب کرده به جای x ، جواب مخرج را دررابطهٔ به دست‌آمده قراردهید:

$$\frac{۳x-۱}{x-۱}\equiv a+\frac{b}{x-۱}(x-۲)\ \text{و}\ x=۲\ \Longrightarrow\ a=۵$$

$$\frac{۳x-۱}{x-۲}\equiv\frac{a}{x-۲}(x-۱)+b\ \text{و}\ x=۱\ \Longrightarrow\ b=-۲$$

$$y_۵=۱+\frac{۵}{x-۲}-\frac{۲}{x-۱}=۱+۵(x-۲)^{-۱}-۲(x-۱)^{-۱}$$

$$\Longrightarrow\ y_۵^{(n)}=(-۱)^n n!\left[\frac{۵}{(x-۲)^{n+۱}}-\frac{۲}{(x-۱)^{n+۱}}\right]$$

مسألهٔ ۷۸: ماکزیمم ومینیمم مطلق توابع داده شده را می‌توانید با استفاده از رسم شکل بیابید، نقطه بحرانی ندارد (جواب $y_۳$ ، ۰ ، ۲ $\pm$ (جواب $y_۲$ $\frac{\sqrt[۳]{۱۵^۲}}{۱۵^۴}$ و ۰ (جواب $y_۱$

مینیمم مطلق برابر (۲ —) وماکزیمم مطلق ندارد (جواب $y_۴$

مینیمم مطلق $\frac{۱}{۳}$ و ماکزیمم مطلق $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد (جواب $y_۵$

مینیمم مطلق صفر و ماکزیمم مطلق ندارد (جواب $y_۶$

مینیمم مطلق (۱) و ماکزیمم مطلق ندارد (جواب $y_۷$

ماکزیمم مطلق (۲) و مینیمم مطلق ندارد (جواب $y_۸$

مسألهٔ ۷۹: ماکزیمم و مینیمم مطلق توابع داده شده را با استفاده از قضیهٔ (۳۴) صفحه ۴۳ می‌توانید به دست آورید.

ماکزیمم مطلق (۱۰ −) و مینیمم مطلق (۴۶ −) (جواب $y_۱$

ماکزیمم مطلق (۱۴۴) و مینیمم مطلق صفر (جواب $y_۲$

ماکزیمم مطلق (۷) و مینیمم مطلق (۱۳ −) (جواب $y_۳$

مسألهٔ ۸۰: $۳\sqrt{۲}$ = شعاع قاعده و $۶\sqrt{۲}$ = ارتفاع (جواب

مسألهٔ ۸۱: اگر $M(x\ ,\ \pm\sqrt{۹-x^۲}\,)$ ، نقطهٔ دلخواهی از دایره در نظر بگیریم ، داریم:

$$S_۱=AM=\sqrt{(x-۴)^۲+(\sqrt{۹-x^۲}-۵)^۲}\ ،\ -۳\leqslant x\leqslant ۳$$

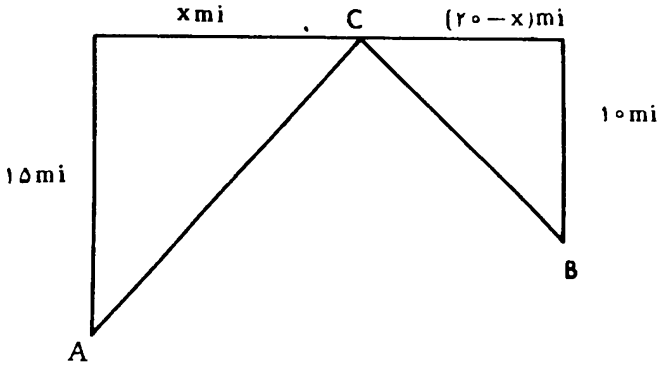
$$S_۲=AM=\sqrt{(x-۴)^۲+(-\sqrt{۹-x^۲}-۵)^۲}\ ،\ -۳\leqslant x\leqslant ۳$$

با استفاده از قضیهٔ (۳۴) ماکزیمم مطلق $۳+\sqrt{۴۱}$ و مینیمم مطلق $۳-\sqrt{۴۱}$ می‌باشد. ضمناً برای انجام محاسبات از رابطهٔ:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^۲-B}}{۲}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^۲-B}}{۲}}$$

که در آن باید $A^۲-B$ مربع کامل باشد ، استفاده شد.

مسألهٔ ۸۲:



$$y=AC+BC=\sqrt{x^۲+۲۲۵}+\sqrt{x^۲-۴۰x+۵۰۰}\ ،\ x\in[۰\ ,\ ۲۰]$$

با استفاده از قضیهٔ ۳۴ (صفحه ۴۳) مینیمم مطلق به‌دست می‌آید.

مسألهٔ ۸۳: حل این مسأله مانند مثال ۲ مربوط به قضیهٔ ۳۴ (صفحه ۴۳) است و جواب ۹۰۰ می‌باشد.

مسألهٔ ۸۴: تابع را به‌صورت $y=(x^{۲})^{\frac{۳}{۴}}(۱-x^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$ نوشته ، از قضیهٔ ۳۷ (صفحه ۵۱) استفاده نموده ماکزیمم تابع $\frac{\sqrt{۵}}{۲۵}\sqrt[۴]{۵۴۰}$ می‌باشد.

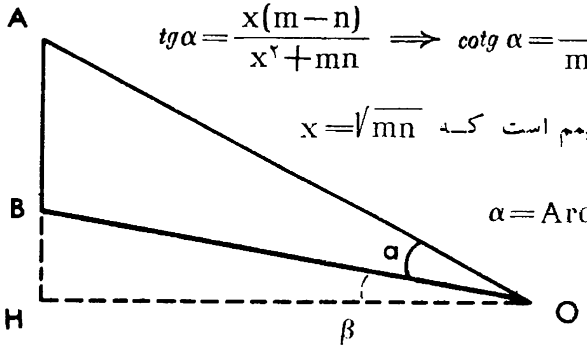
مسألهٔ ۸۵: با استفاده ازقضیهٔ (۳۸) صفحه ۵۳ مینیمم تابع $\frac{۳}{۲}a^{۵}\sqrt[۳]{۲ab^{۲}}$ می‌باشد.

مسألهٔ ۸۶:

$$x=cos^{۲}\alpha \implies y=a^{۲}+b^{۲}+a^{۲}tg^{۲}\alpha+b^{۲}cotg^{۲}\alpha \quad و \quad y_{min}=(a+b)^{۲}$$

مسألهٔ ۸۷: زاویهٔ قطر اطول لوزی را با ضلع لوزی α فرض نموده ، محیط لوزی را به دست آورده ، این محیط وقتی مینیمم است که ضلع لوزی $۲R$ باشد.

مسألهٔ ۸۸: اگر $HA=m$ و $HB=n$ و $OH=x$ فرض نماییم ، داریم:



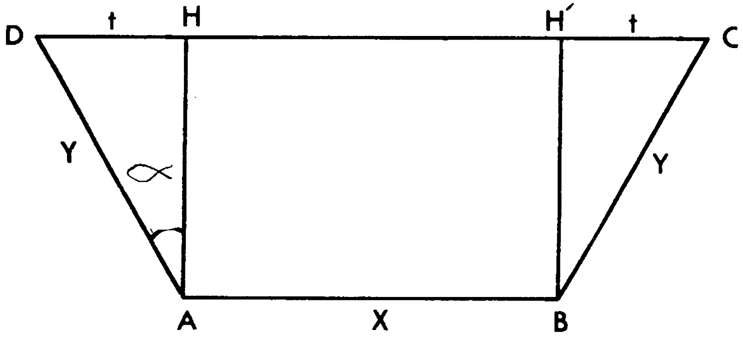
$$tg\alpha=\frac{x(m-n)}{x^{۲}+mn} \implies cotg\,\alpha=\frac{۱}{m-n}\left(x+\frac{mn}{x}\right)$$

زاویهٔ α وقتی ماکزیمم است که $x=\sqrt{mn}$ باشد و $\alpha=Arccotg\,\frac{۲\sqrt{mn}}{m-n}$ می‌باشد.

مسألهٔ ۸۹: $S=۴R^{۲}$ (جواب)

مسألهٔ ۹۰: صورت و مخرج کسر را بر $x^{۲}$ بخش نموده و از اینکه $a\,x^{۲}\times\frac{c}{x^{۲}}=ac$ مقدار ثابتی است ، استفاده کرده $y_{max}=\frac{۳}{b+۲\sqrt{ac}}$ می‌باشد.

مسألهٔ ۹۱:



اگرعرض ورقه را m ومساحت‌آن را S فرض نماییم ، داریم:

$$2y+x=m \quad \text{و} \quad S=(x+t)\sqrt{y^2-t^2}$$

با استفاده ازقضیهٔ (۳۵) صفحه ۵۰ نتیجه می‌شود که عرض ورقه را باید به سه قسمت مساوی‌تقسیم نماییم وباریکه‌ها را به اندازهٔ زاویهٔ ۱۲۰° خم کنیم.

مسألهٔ ۹۲: معادلهٔ بیضی‌به اقطار $2a$ و $2b$ به صورت $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ مـی‌باشد ، اگر نقطهٔ $M(x\,,\,y)$ از بیضی را درنظر بگیریم ، مساحت ماکزیمم مستطیل $S=2ab$ می‌باشد.

مسألهٔ ۹۳:

y_1 جواب) $\begin{cases} y_{max}=1 \\ y_{Min}=\frac{1}{4} \end{cases}$ ، y_2 جواب) $\begin{cases} y_{max}=3 \\ y_{Min}=-1 \end{cases}$

و $$y_3=a\sin x+b\cos x+c \Longrightarrow \frac{y_3-c}{a}=\sin x+\frac{b}{a}\cos x$$

و $$\frac{b}{a}=tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Longrightarrow \frac{y_3-c}{a}=\frac{\sin(x+\alpha)}{\cos\alpha}$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

α را حاده گرفته ، ازبحث خودداری نمودیم.

و $$\sin(x+\alpha)=\cos\alpha\times\frac{y_3-c}{a}=\frac{y_3-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

و $$-1\leqslant\frac{y_3-c}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant 1 \Longrightarrow y_{max}=c+\sqrt{a^2+b^2}$$

$$y_{Min}=c-\sqrt{a^2+b^2}$$

y_4 جواب) $\begin{cases} y_{max}=\frac{9}{4} \\ y_{Min}=2 \end{cases}$

مسألهٔ ۹۴: $$y_1=\frac{9}{2}\sin^2x\cos^2x=\frac{9}{8}\sin^2 2x \Longrightarrow y_{max}=\frac{9}{8}$$

y_2 جواب) $\frac{6}{125}\sqrt{15}$ ، $y_3=3+5\sin x \Longrightarrow y_{max}=8$

در y_4 به جای $tg3x$ برحسب tgx قرارداده و $tg^2x=Z$ فرض کرده ، داریم:

$$۳Z^۲+(۳y_۴-۲)Z+۳-y_۴=۰$$

شرط $tg^۲x=Z>۰$ را نوشته خواهیم داشت $y_۴\leqslant\frac{-۴\sqrt{۲}}{۳}$ یعنی ماکزیمم تابع $\frac{-۴\sqrt{۲}}{۳}$ می‌باشد.

$$y_۵=\sin^۲x\left(\frac{۱}{۴}-\sin^۲x\right)\Longrightarrow y_{max}=\frac{۱}{۶۴}$$

$y_۶$ جواب) $a^۲$

مسألهٔ ۹۵:

$y_۱$ جواب) (۲) ، $y_۲$ جواب) $\frac{۵}{۳}\sqrt[۵]{\frac{۹}{۴}}$

$$y_۳=۱-۲\sin^۲x\cos^۲x+(۱+tg^۲x)^۲+(۱+cotg^۲x)^۲=$$

$$۳-\frac{۱}{۲}\sin^۲۲x+۲(tg^۲x+cotg^۲x)+(tg^۴x+cotg^۴x)$$

برای آنکه $y_۳$ مینیمم باشد ، باید $tg^۲x+cotg^۲x$ و $tg^۴x+cotg^۴x$ مینیمم و $\sin^۲۲x$ ماکزیمم گردند و این درصورتی است که $x=\frac{\pi}{۴}$ باشد ، پس $y_{min}=\frac{۱۷}{۲}$.

مسألهٔ ۹۶:

$$y=\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}\Longrightarrow$$

$$\sin^۲\frac{A}{۲}-\cos\frac{B-C}{۲}\sin\frac{A}{۲}+۲y=۰$$

شرط جواب را نوشته $y_{max}=\frac{۱}{۸}$ می‌باشد.

مسألهٔ ۹۷:

$C=-\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$ (جواب ۲ ، $C=\frac{۲\pm\sqrt{۷}}{۳}$ (جواب ۱

مسألهٔ ۹۸:

$C=۲$ (جواب ۲ ، $C=\frac{۸}{۲۷}$ (جواب ۱

مسألهٔ ۱۰۱: فرض کنید چند جمله‌ای درجهٔ پنجم $f(x)=۰$ دارای شش ریشه می‌باشد، با استفاده از قضیهٔ رل ثابت کنید: $f'(x)=۰$ که ازدرجهٔ چهارم است، دارای پنج ریشه است که این یك تناقض می‌باشد.

مسألهٔ ۱۰۴:

$$۴):\ f(x)=\begin{cases} ۱۲-(x+۵)^۲ \ ، \ x\leqslant -۳ \\ ۵-x \ ، \ -۳<x\leqslant -۱ \\ \sqrt{۱۰۰-(x-۷)^۲} \ ، \ -۱<x\leqslant ۱۷ \end{cases}$$

تابع مزبوردر (-۳) و (-۱) پیوسته ودر (۱۷) پیوستگی چپ دارد. پس تابع روی فاصلهٔ $]-\infty\ ,\ ۱۷]$ پیوسته می‌باشد ومشتق تابع در (-۳) و (-۱) و (۱۷) وجود ندارد‌وریشه‌های مشتق برابراست با:

و

$$f'(x)=\begin{cases} -۲(x+۵) \ ، \ x<-۳ \\ -۱ \ ، \ -۳<x<-۱ \\ \dfrac{-(x-۷)}{\sqrt{۱۰۰-(x-۷)^۲}} \ ، \ ۱۷>x>-۱ \end{cases}$$

$$f'(x)=۰ \Longrightarrow x=-۵<-۳ \ \text{و}\ x=۷\in(-۱\ ,\ ۱۷)$$

x	$-\infty$		-۵		-۳		-۱		۷		۱۷
f'(x)		+	۰	−	‖	−	‖	+	۰	−	$-\infty$
f(x)	$-\infty$	↗	۱۲	↘	۸ ‖ ۸	↘	۶ ‖ ۶	↗	۱۰	↘	۰

ماکزیمم نسبی   مینیمم نسبی   ماکزیمم نسبی

مسألهٔ ۱۰۵: تعریف صعودی بودن تابع را برای توابع f و g نوشته، مسأله ثابت می‌شود.

مسألهٔ ۱۰۶: تعریف تابع صعودی را برای f وتابع نزولی را برای h نوشته، مسأله ثابت می‌شود.

مسألهٔ ۱۰۷:

$$y=\frac{x-۱}{x^۲+۱} \Longrightarrow y'=\frac{-x^۲+۲x+۱}{(x^۲+۱)^۲}=۰\Longrightarrow x=۱\pm\sqrt{۲}$$

و

$$y''=\frac{(-۲x+۲)(x^۲+۱)^۲-۴x(x^۲+۱)(-x^۲+۲x+۱)}{(x^۲+۱)^۴}$$

چون به‌ازای $x=۱\pm\sqrt{۲}$ ، عبارت $-x^۲+۲x+۱$ صفراست(زیرا $(۱\pm\sqrt{۲})$

ریشهٔ این عبارت است). پس به ازای این مقادیر $y''=\frac{-۲x+۲}{(x^۲+۱)^۲}$ و چون مخرج کسر مثبت است، علامت y'' بستگی به علامت $-۲x+۲$ دارد وداریم:

$x=۱+\sqrt{۲} \Longrightarrow$ علامت $y''=-۲(۱+\sqrt{۲})+۲<۰$

$\Longrightarrow$ $۱+\sqrt{۲}$ طول ماکزیمم نسبی

$x=۱-\sqrt{۲} \Longrightarrow$ علامت $y''=-۲(۱-\sqrt{۲})+۲>۰$

$\Longrightarrow$ $۱-\sqrt{۲}$ طول مینیمم نسبی

توجهٔ نمایید ازقضیهٔ (۴۴) صفحه ۶۴ برای تشخیص طولهای ماکزیمم ومینیمم نسبی استفاده نمودیم.

چون ریشه‌های مشتق، مخرج تابع ومشتق مخرج تابع را صفرنمی‌کنند، برای به دست آوردن عرضهای ماکزیمم ومینیمم نسبی از $y=\frac{f'(x)}{g'(x)}$ استفاده کرده، داریم:

$$y=\frac{۱}{۲x} \quad \text{و} \quad x=۱+\sqrt{۲} \Longrightarrow y=\frac{۱}{۲(\sqrt{۲}+۱)}=\frac{-۱}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

با مقایسه $۱+\sqrt{۲}$ و $۱-\sqrt{۲}$ ملاحظه می‌شود (۱) تغییر نکرده و $\sqrt{۲}$ به $-\sqrt{۲}$ تبدیل شده است. پس به ازای $x=۱-\sqrt{۲}$ مقدار تابع $-\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ خواهد بود.

بنا براین:

$$\max\left|\begin{array}{l} ۱+\sqrt{۲} \\ -\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{array}\right. \quad \text{و} \quad \text{Min}\left|\begin{array}{l} ۱-\sqrt{۲} \\ -\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{array}\right.$$

مسألهٔ ۱۰۸: $m=\pm ۱$ جواب)

مسألهٔ ۱۰۹: $a=-۱$ جواب)

مسألهٔ ۱۱۰: $\begin{cases} a=۱ \\ b=۲ \end{cases}$ جواب)

مسألهٔ ۱۱۱: $y'+۳y''=۴$ جواب)

مسألهٔ ۱۱۲: اگر ریشه‌های مشتق تابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ مخرج تابع ومشتق مخرج تابع را صفرنکنند، مختصات ماکزیمم و مینیمم در $y=\frac{f'(x)}{g'(x)}$ صدق می‌نماید. بنا براین معادله خط مرورشده برنقاط ماکزیمم ومینیمم تابع به صورت $y=۲x-۲$ می‌باشد و معادله مکان نیزبه صورت $y=۲x-۲$ است.

مسألهٔ ۱۱۳: حل این مسأله شبیه مسألهٔ ۱۱۲ می‌باشد.

مسألهٔ ۱۱۴: $m < -۱$ (جواب

مسألهٔ ۱۱۵: عرض قاعده و ارتفاع و قیمت هر واحد مربع قاعده و قیمت کل مصالح و حجم مکعب مستطیل را به ترتیب x و y و a و Z و V فرض نموده. داریم:

$$Z = ۸ax^{۲} + \frac{۹aV}{x} \quad \text{و} \quad \frac{y}{x} = \frac{۸}{۹}$$

مسألهٔ ۱۱۶: ۶۲ دقیقه (جواب

مسألهٔ ۱۱۷:

$$x = ۲tg\alpha \Longrightarrow y = \sqrt{۱ - \sin ۲\alpha + \cos^{۲}\alpha}$$

و

$$= \sqrt{\frac{۱}{۲}\cos ۲\alpha - \sin ۲\alpha + \frac{۳}{۲}}$$

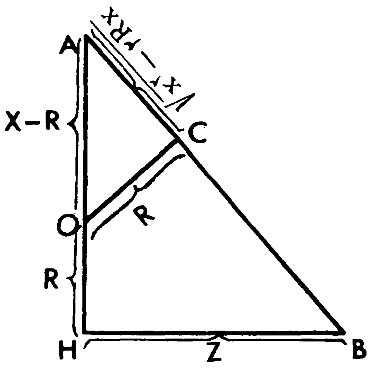
$$y_{max} = \frac{\sqrt{۵}+۱}{۲} \quad \text{و} \quad y_{Min} = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$$

مسألهٔ ۱۱۸: مرکز کره را O و شعاع آن را R و شعاع مخروط را Z و ارتفاع آن را x فرض نموده، از تشابه دو مثلث قائم‌الزاویه AHB و AOC داریم:

$$Z = \frac{Rx}{\sqrt{x^{۲} - ۲Rx}}$$

حجم مخروط را به دست آورده، شرط مینیمم حجم را نوشته، داریم:

$$\text{شعاع قاعده} = R\sqrt{۲} \quad \text{و} \quad x = ۴R$$



مسألهٔ ۱۱۹: طول AB از رابطهٔ $Z = AB = \frac{a}{\cos\theta} + \frac{b}{\sin\theta}$ به دست می‌آید،

شرط مینیمم AB آن است که $\theta=\mathrm{Arc}tg\sqrt[۳]{\frac{b}{a}}$ باشد، معادلهٔ خط AB به‌صورت $y=-xtg\theta+atg\theta+b$ بوده و با استفاده ازاین معادله، داریم:

$$W=OA+OB=a+b+atg\theta+bcotg\theta$$

و شرط مینیمم W آن است که $\theta=\mathrm{Arc}tg\sqrt{\frac{b}{a}}$ باشد و نیز شرط مینیمم OA^n+OB^n آن است که $\theta=\mathrm{Arc}tg\sqrt[n+۱]{\frac{b}{a}}$ باشد.

مسألهٔ ۱۲۰: معادلهٔ مماس بربیضی را در نقطهٔ $M(a\cos\theta , b\sin\theta)$ نوشته، مختصات تلاقی این مماس را با محورها به دست‌آورده $B\left(\frac{a}{\cos\theta} , ۰\right)$ و $A\left(۰ , \frac{b}{\sin\theta}\right)$ داریم:

$$AB^۲=a^۲+b^۲+a^۲tg^۲\theta+b^۲cotg^۲\theta$$

با استفاده از شرط مینیمم $tg^۲\theta=\frac{b}{a}$ ، درنتیجه $AB=a+b$ می‌باشد.

مسألهٔ ۱۲۱: مبدأ رانقطهٔ A وطول نقطهٔ M را x فرض‌نموده وازروابط زیراستفاده کرده:

$$\sum_{n=۱}^{n} n^۲=۱^۲+۲^۲+\cdots+n^۲=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

$$\sum_{n=۱}^{n} n=۱+۲+\cdots+n=\frac{n}{۲}(n+۱)$$

درنتیجه:

$$y=\frac{n(n+۱)}{۲}x^۲-\frac{۲an(n+۱)(n-۱)}{۳}x+K$$

$$y'=۰ \Longrightarrow x=\frac{۲}{۳}a(n-۱)$$

مسألهٔ ۱۲۲:

$$۴) : f(x)=\begin{cases} x^۲ ، x<۱ \\ x^۳-۴x^۲+۷x-۳ ، x\geqslant ۱ \end{cases}$$

تابع در(۱) پیوسته و به طور کلی روی اعداد حقیقی پیوسته می‌باشد.

و $$f'(x)=\begin{cases} ۲x ، \ x<۱ \\ ۳x^{۲}-۸x+۷ ، \ x>۱ \end{cases}$$

و $$f'_-(۱)=f'_+(۱)=۲ \Longrightarrow f'(x)=\begin{cases} ۲x ، \ x<۱ \\ ۳x^{۲}-۸x+۷ ، \ x\geqslant ۱ \end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases} ۲ ، \ x<۱ \\ ۶x-۸ ، \ x>۱ \end{cases}$$

چون $f''_-(۱)=۲$ و $f''_+(۱)=-۲$ پس $f''(۱)$ وجود ندارد و:

$$f''(x)=۰ \Longrightarrow ۶x-۸=۰ \Longrightarrow x=\frac{۴}{۳}>۱$$

x	$-\infty$		۱		$\frac{۴}{۳}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	۲ | -۲	$-$	۰	$+$	
تقعر منحنی		تقعر منحنی به سوی y های مثبت		تقعرمنحنی به سوی y های منفی		تقعر منحنی به سوی y های مثبت	

عطف $I(۱ , ۱)$ عطف $I'\left(\frac{۴}{۳} , \frac{۴۳}{۲۷}\right)$

باوجودی‌که $f''(۱)\neq ۰$ بوده : اما چون $f''(x)$ درمجاورت (۱) تغییرعلامت داده و $f(۱)$ معین است. پس $x=۱$ طول نقطه ، عطف منحنی می‌باشد.

تقعرمنحنی به ازای $x>۲$ به سوی yهای مثبت (جواب ۱

تقعرمنحنی همواره به سوی yهای مثبت (جواب ۳

برای $x>۳$ تقعرمنحنی به سوی y های مثبت (جواب ۵

(جواب ۶ x	$-\infty$		۱		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	∞	$+$	
تقعرمنحنی		تقعرمنحنی به سوی y های منفی		تقعر منحنی به‌سوی y های مثبت	

عطف $I(۱ , ۰)$

مسألهٔ ۱۲۳:

$$y''=\frac{۲(۲-\sin x)}{(۱+\sin x)^{۲}}>۰ \Longrightarrow$$ تقعر منحنی به سوی y های مثبت

مسألهٔ ۱۲۴:

(جواب $b=d=e=۰$ و $a=\frac{۱}{۵}$ و $c=\frac{-۶}{۵}$

مسألهٔ ۱۲۵: اثبات مشابه قضیه ۴۴ صفحه ۶۴ می‌باشد.

مسألهٔ ۱۲۶:

(جواب اولا $b=۶$ و $c=۱$ و $P=\frac{۲}{۳}$ و $q=۱$

روش حل مشابه به مسألهٔ مربوط به قسمت ب بخش ۸ (صفحه ۷۷) می‌باشد (جواب ثانیاً و ثالثاً، رابعاً : نقطهٔ تماس را که دو نقطهٔ منطبق بر یك نقطه حساب می‌شود T وطول آن را x فرض می‌نماییم چون سه نقطهٔ A و T و T به طولهای a و x و x بر یك استقامت می‌باشند ، پس این طولها در رابطه ثانیاً صدق نموده ، داریم:

$$a.x.x-(a+x+x)=\frac{۲}{۳}$$

یا

$$۳ax^{۲}-۶x-(۳a+۲)=۰$$

بآسانی می‌توان نشان داد معادلهٔ بالا همواره دو ریشهٔ حقیقی دارد.

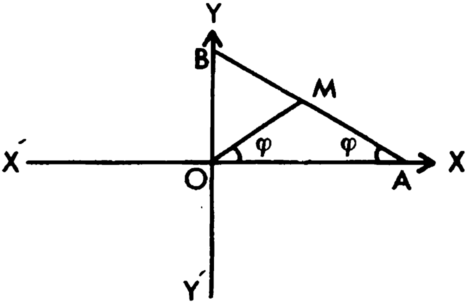
مسألهٔ ۱۲۷: معادلات را نسبت به m مرتب کرده، Δ را صفر قراردهید.

$y_۱$ (جواب $y_۱^{۲}=۱۲x$ ، $y_۲$ (جواب $y_۲=۳x$ و $y_۲=-۵x$

$y_۳$ (جواب $y_۳=\frac{۱}{۲x}$

مسألهٔ ۱۲۸: ضریب پارامتر m را صفر قرارداده ، مختصات نقاط A و B را برحسب α به دست آورده ، معادلهٔ عمود منصف AB را که در آن $۶-\alpha=m'$ فرض کرده برحسب m' نوشته معادلهٔ پوش به صورت $y^{۲}=-۱۲(x-۳)$ درمی‌آید.

مسألهٔ ۱۲۹ :



نقطهٔ وسط AB را M و $x\hat{O}M=\varphi$ فرض می‌کنیم ، داریم:

$$\overline{OA}=l\cos\varphi \quad و \quad \overline{OB}=l\sin\varphi$$

معادلهٔ خط AB به صورت:

$$x\sin\varphi+y\cos\varphi=l\sin\varphi\cos\varphi \quad یا \quad \frac{x}{l\cos\varphi}+\frac{y}{l\sin\varphi}=۱$$

می‌باشد. از این معادله نسبت به φ مشتق گرفته ، داریم:

$$x\cos\varphi-y\sin\varphi=l\cos ۲\varphi$$

$$\begin{cases} x\sin\varphi+y\cos\varphi=l\sin\varphi\cos\varphi \\ x\cos\varphi-y\sin\varphi=l\cos ۲\varphi \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x=l\cos^{۳}\varphi \\ y=l\sin^{۳}\varphi \end{cases} \Longrightarrow x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}=l^{\frac{۲}{۳}}$$

مسألهٔ ۱۳۰: کسر را رفع کرده ، برای آنکه حد بی‌نهایت نشود باید ضریب **x** صفر گردد. در نتیجه $a=-۱$ و $b=۲$ می‌باشد.

مسألهٔ ۱۳۱: رابطهٔ (۱) را به صورت $y=\pm x\sqrt{\frac{x-۱}{x-۲}}$ نوشته ، معادلهٔ مجانبها عبارتند از: $x=۲$ و

$$\begin{cases} y=x\sqrt{\frac{x-۱}{x-۲}} \\ Y=x+\frac{۱}{۲} \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} y=-x\sqrt{\frac{x-۱}{x-۲}} \\ Y=-x-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

در رابطهٔ (۲) فرض می‌کنیم $y=tx$ ، معادلهٔ پارامتری منحنی به صورت:

$$\begin{cases} x=\frac{۲t^{۲}-۱}{t^{۲}-۱} \\ y=t\times\frac{۲t^{۲}-۱}{t^{۲}-۱} \end{cases}$$

ومعادلهٔ مجانبها عبارتند از:

$$Y=-x-\frac{۱}{۲} \quad و \quad Y=x+\frac{۱}{۲} \quad و \quad x=۲$$

۳) $x^{۲}y(y-x)+x^{۳}-۲y^{۲}=۰ \Longrightarrow$

$$(۱-y)x^{۳}+y^{۲}x^{۲}-۲y^{۲}=۰$$

$x \to \pm\infty \Rightarrow y=۱$ مجانب افقی

و $(x^۲-۲)y^۲-x^۳y+x^۳=۰$

$y \to \pm\infty \Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}$ مجانبهای قائم

و $\varphi_۴(x\ ,\ y)=x^۲y(y-x)$

$\varphi_۴(۱\ ,\ m)=۱^۲\times m(m-۱)=۰ \Rightarrow m=۰\ ,\ ۱$

و $m=۱$ و $Y=mx+h=x+h$

$(x+h)^۲x^۲-(x+h)x^۳+x^۳-۲(x+h)^۲=۰$

$x\to\infty \Rightarrow$ ضریب بزرگترین درجهٔ x یعنی ضریب $x^۳=۰$

$\Rightarrow h=-۱$ و $Y=x-۱$

و (جواب ۴ $x=-۳$ و $Y=x-\frac{۱}{۲}$ و $Y=x-\frac{۵}{۲}$

$Y=-x+\frac{۱}{۲}$ و $Y=-x+\frac{۵}{۲}$

توجه نمایید وقتی به ازای $m=۱$ مجانبها را به دست می‌آورید، چون محور xها محور تقارن منحنی می‌باشد لازم نیست به‌ازای $m=-۱$ مجانبها را بیابیم، کافی‌است درمعادلهٔ مجانبها Y را به $-Y$ تبدیل نمایید:

(جواب ۵ $Y=۲x-۴$

مسألهٔ ۱۳۲: فقط جدول تغییرات و معادلات مجانبهای مایل و منحنی، توابع را درصورت وجود داشتن می‌نویسیم:

$y=\frac{x^۳+۳x+۱}{x^۲}$ ، معادلهٔ مجانب مایل : $Y=x$

x	$-\infty$		-۱		۰		۲		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	∞	$-$	۰	$+$	
y	$-\infty$	↗	-۳	↘	$+\infty$ | $+\infty$	↘	$\frac{۱۵}{۴}$	↗	$+\infty$

$y=\frac{(x+۱)^۳}{x}$ ، معادلهٔ مجانب منحنی : $Y=x^۲+۳x+۳$

x	$-\infty$		-۱		۰		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
y'	—	—	۰	—	—	—	۰	+	
y	$+\infty$	↘	۰	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{۲۷}{۴}$	↗	$+\infty$

$y=\frac{\sqrt{۱-x^۲}}{x}$ ،

x	-۱		۰		۱
y'	$-\infty$	—		—	$+\infty$
y	۰	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	۰

$y=x\sqrt{\frac{۱+x}{۱-x}}$ ،

x	-۱		$-۰/۶$		۰		۱
y'	$-\infty$	—	۰		+		$+\infty$
y	۰	↘	$-۰/۳$	↗	۰	↗	$+\infty$

$y=x\sqrt{\frac{x-۱}{x-۲}}$ ، معادله مجانب مایل : $Y=x+\frac{۱}{۲}$

x	$-\infty$		۰		۰/۷۲		۱		۲		۲/۷۸		$+\infty$
y'		+	+		۰	—	$-\infty$	///	$-\infty$	—	۰	+	
y	$-\infty$	↗	۰	↗	۰/۳۲	↘	۰	///	$+\infty$	↘	۴/۱	↗	$+\infty$

$y=\sqrt{x^۲-x^۴}$ ،

x	-۱		$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$		۰		$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$		۱
y'	$+\infty$	+	۰	—	-۱ ‖ ۱	+	۰	—	$-\infty$
y	۰	↗	$\frac{۱}{۲}$	↘	۰	↗	$\frac{۱}{۲}$	↘	۰

$y=\sqrt[۳]{(x+۱)^۲}-\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}$ ،

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
y'	—		∞		—|—		∞		—
y	۰	$\searrow$	$-\sqrt[۳]{۴}$	$\nearrow$	۰	$\nearrow$	$\sqrt[۳]{۴}$	$\searrow$	۰

$$y=x+\sqrt{y^۲+۲(x+۱)y+۴}\implies$$

و $$y-x=\sqrt{y^۲+۲(x+۱)y+۴}\geqslant ۰\implies y-x\geqslant ۰$$

$$y^۲-۲xy+x^۲=y^۲+۲xy+۲y+۴\implies y=\frac{x^۲-۴}{۴x+۲}$$

$$y-x=\frac{x^۲-۴}{۴x+۲}-x\geqslant ۰\implies x<-\frac{۱}{۲}$$

شرط دیگر آن است که $f(x\ ,\ y)=y^۲+۲(x+۱)y+۴\geqslant ۰$ باشد ، برای حل نامعادلهٔ بالا $f(x\ ,\ y)$ را مساوی صفر قرارداده ، منحنی:

$$y=-x-۱\pm\sqrt{x^۲+۲x-۳}$$

را رسم می‌کنیم. این منحنی دستگاه مختصات را به سه ناحیه ، نقاط داخل منحنی ، خارج منحنی ، روی منحنی تقسیم می‌نماید ، مبدأ مختصات خارج منحنی بوده $f(۰,۰)=۴>۰$ و نقاط روی منحنی $f(x\ ,\ y)$ را صفر می‌نمایند. بنابراین جواب نامعادلهٔ بالا روی منحنی و خارج منحنی می‌باشد ، با توجه به‌آنکه $x<-\frac{۱}{۲}$ می‌باشد ، نقاط سمت چپ $x=-\frac{۱}{۲}$ مورد قبول است ، منحنی $y=\frac{x^۲-۴}{۴x+۲}$ را در همان دستگاهی که منحنی $y=-x-۱\pm\sqrt{x^۲+۲x-۳}$ را رسم نموده بودیم رسم نموده آن قسمت ازمنحنی که سمت چپ $x=-\frac{۱}{۲}$ وخارج و روی منحنی $f(x\ ,\ y)=۰$ است قابل قبول است

$y=-x-۱+\sqrt{x^۲+۲x-۳}$ ، معادلهٔ مجانب مایل : $\begin{cases} x\to-\infty \\ Y=-۲x-۲ \end{cases}$

x	$-\infty$		-۳		۱		$+\infty$
y'		$-$	$-\infty$	///	$+\infty$	$+$	
y	$+\infty$	↘	۲	///	-۲	↗	۰

$y=\sqrt{x-۱}-\sqrt{x-۲}$ ،

x	۲		۳		$+\infty$
y'	$+\infty$	$+$	$+$	$+$	
y	۱	↗	$\sqrt{۲}-۱$	↗	۰

$y=\sqrt{x-۲}+\sqrt{x-۳}$ ،

x	۳		۴		$+\infty$
y'	$+\infty$		$+$	$+$	
y	۱	↗	$\sqrt{۲}+۱$	↗	$+\infty$

$y=|\sin x|+|\cos x|$

اگر x را به $x+\frac{\pi}{۲}$ تبدیل نماییم تابـع تغییر نمی‌کند ، پس دورهٔ تناوب $\frac{\pi}{۲}$ بوده و تابع $y=\sin x+\cos x$ را درفاصلهٔ $۰\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{۲}$ رسم می‌نماییم.

مسألهٔ ۱۳۳: اولاً مجـانب افقی $y=۱$ ، را بـا منحنی قطـع داده $L\left|\begin{matrix}\frac{۱+m}{۱-m}\\ ۱\end{matrix}\right.$ به دست می‌آید ، مرکز تقارن منحنی را $O'\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ گرفته مبدأ مختصات را به O' انتقال داده در معادلهٔ به دست‌آمده $X\rightarrow -X$ و $Y\rightarrow -Y$ تبدیل نموده، برای آنکه معادله تغییر نکند باید:

$$\alpha^۲+\alpha m+۱-\alpha^۲\beta-\alpha\beta+m\beta=۰ \quad \text{و} \quad ۱-\beta=۰\Longrightarrow\beta=۱$$

در نتیجه $\alpha=\frac{۱+m}{۱-m}$ و حکم ثابت است جواب ثانیاً $m=-۳$ بوده ، منحنی $y=\frac{x^۲-۳x-۱}{x^۲+x+۳}$ را رسم می‌نمایید.

مسألهٔ ۱۳۴: اولاً:

$$y^{۲}=\frac{x^{۳}}{x-a} \Longrightarrow y=\pm x\sqrt{\frac{x}{x-a}}$$

$y=x\sqrt{\dfrac{x}{x-a}}$ ، معادلهٔ مجانب مایل : $Y=x+\dfrac{a}{۲}$

x	$-\infty$		۰		a		$\frac{۳a}{۲}$		$+\infty$
y'		$+$	۰	$////$	$+\infty$	$-$	۰	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	۰	$//////$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{۳a}{۲}\sqrt{۳}$	$\nearrow$	$+\infty$

ثانیاً : خطوط $y=tx$ و $y=-\dfrac{۱}{t}x$ را که برهم عمودند با منحنی قطع داده ، داریم:

$$N\left|\begin{array}{l}\dfrac{a}{۱-t^{۲}}\\[2ex] \dfrac{a}{t^{۳}-t}\end{array}\right. \quad \text{و} \quad M\left|\begin{array}{l}\dfrac{at^{۲}}{t^{۲}-۱}\\[2ex] \dfrac{at^{۳}}{t^{۲}-۱}\end{array}\right.$$

در نتیجه معادلهٔ مکان وسط MN ، خط $x=\dfrac{a}{۲}$ می‌باشد:

MN معادله خط : $x(t^{۲}-۱)^{۲}-ty(t^{۲}-۱)+at^{۲}=۰$

چون طرفین معادلهٔ اخیررا بر $t^{۲}$ بخش نمایید و $t-\dfrac{۱}{t}=m$ انتخاب نمایید، دارید $xm^{۲}-ym+a=۰$ ، درنتیجه معادلهٔ پوش به صورت $y^{۲}=۴ax$ می‌باشد.

مسألهٔ ۱۳۵: اولاً:

$y=\dfrac{x^{۳}}{x^{۲}-۱}$ ، معادلهٔ مجانب مایل : $Y=x$

x	$-\infty$		$-\sqrt{۳}$		-۱		۰		۱		$\sqrt{۳}$		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$-$		$-$	۰	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-۳\sqrt{۳}}{۳}$	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	۰	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	$\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$	$\nearrow$	$+\infty$

ثانیاً : ابتدا بررسی نمایید شرط آنکه سه نقطه از منحنی به طولهای $x_{۱}$ و $x_{۲}$ و

x_3 بریک استقامت باشند آن است که (۱) $x_1+x_2+x_3+x_1x_2x_3=0$ (رجوع شود به طرز به دست آوردن طولهای نقاط عطف بدون استفاده از y'') حال طول نقطهٔ تماسی را که از نقطه به طول a بر منحنی رسم می‌شود x گرفته ، چون سه نقطه به طولهای a و x و x بریک استقامتند طبق رابطهٔ (۱) داریم : $ax^2+2x+a=0$ اگر جوابهای این معادله را x' و x'' بگیریم ، $x_B=x'$ و $x_D=x''$ ، که:

$$D\left|\begin{array}{l} x'' \\ \dfrac{x''^3}{x''^2-1} \end{array}\right. \quad و \quad B\left|\begin{array}{l} x' \\ \dfrac{x'^3}{x'^2-1} \end{array}\right.$$

و مختصات نقطهٔ M وسط BD به صورت $M\left|\begin{array}{l} -\dfrac{1}{a} \\ -\dfrac{1}{a} \end{array}\right.$ پس مکان M خط $y=x$ می‌باشد. چون نقاط B و D و E بریک استقامت می‌باشند ، طبق رابطهٔ (۱) داریم:

$$x'+x''+x_E+x'x''x_E=0 \Longrightarrow x_E=\frac{1}{a}$$

نقطهٔ برخورد خط مماس در A با منحنی را P گرفته ، بنابراین نقاط A و A و P بریک استقامتند ، داریم:

$$a+a+x_P+aax_p=0 \Longrightarrow x_P=\frac{-2a}{a^2+1}$$

به همین ترتیب اگر نقطهٔ برخورد خط مماس در E را با منحنی Q بگیریم:

$$x_Q=\frac{-2a}{a^2+1}$$

پس مکان تلاقی مماسها در A و E روی منحنی می‌باشد (زیرا $x_p=x_Q$) و معادله مکان $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ می‌باشد.

مسألهٔ ۱۳۶:

و $$y_1=\mathrm{Arc}tg\frac{x+a}{1-ax} \Longrightarrow y_1'=\frac{1}{1+x^2} \Longrightarrow y_1=\mathrm{Arc}tg\,x+c$$

$$x=0 \Longrightarrow y_1=\mathrm{Arc}tg\,a=c \Longrightarrow y_1=\mathrm{Arc}tg\,x+\mathrm{Arc}tg\,a$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Arc}tg\frac{x+a}{1-ax}=\mathrm{Arc}tg\,x+\mathrm{Arc}tg\,a$$

$$y_2=\mathrm{Arc}tg\frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1} \Longrightarrow y_2'=2\times\frac{1}{1+x^2}$$

و

$$\Longrightarrow y_۲ = ۲\,\mathrm{Arc}tg\,x + c$$

$$x = ۰ \Longrightarrow y_۲ = \mathrm{Arc}tg\,۱ = \frac{\pi}{۴} = c$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Arc}tg\,\frac{x^۲ - ۲x - ۱}{x^۲ + ۲x - ۱} = ۲\,\mathrm{Arc}tg\,x + \frac{\pi}{۴}$$

$$y_۳ = \mathrm{Arc}tg\sqrt{\frac{۱ - x}{۱ + x}} \Longrightarrow y'_۳ = -\frac{۱}{۲\sqrt{۱ - x^۲}}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Arc}tg\sqrt{\frac{۱ - x}{۱ + x}} = \frac{۱}{۲}\,\mathrm{Arc}cos\,x$$

$$y_۴ = \mathrm{Arc}sin(۲x^۲ - ۱) \Longrightarrow y'_۴ = \frac{۴x}{\sqrt{۴x^۲ - ۴x^۴}}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{۲}{\sqrt{۱ - x^۲}} ، & x > ۰ \\ \dfrac{-۲}{\sqrt{۱ - x^۲}} ، & x < ۰ \end{cases}$$

تابع درصفر مشتق ندارد.

$$y_۵ = \mathrm{Arc}sin\,\frac{۲x}{۱ + x^۲} \Longrightarrow y'_۵ = \begin{cases} \dfrac{۲}{۱ + x^۲} ، & |x| < ۱ \\ \dfrac{-۲}{۱ + x^۲} ، & |x| > ۱ \end{cases}$$

تابع در $x = \pm ۱$ مشتق ندارد.

مسأله ۱۳۷:

$$y_۱ = \mathrm{Arc}cos(۱ - x) \quad ،$$

x	۰		۱		۲
y'	$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+\infty$
y	۰	↗	$\frac{\pi}{۲}$	↗	π

$y_2 = \mathrm{Arc}\cos\frac{1-x^2}{1+x^2}$ و $\cos y_2 = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ و

$$-1 \leqslant \frac{1-x^2}{1+x^2} \leqslant 1 \Rightarrow -1-x^2 \leqslant 1-x^2 \leqslant 1+x^2،$$

همواره برقرار می‌باشد: $\Longrightarrow x \in R$

x	$-\infty$		-1		0			1		$+\infty$
y'		$-$			-2	2		$+$		
y	π	↘	$\frac{\pi}{2}$	↘	0	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	π

$y_3 = \mathrm{Arc}\sin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ ،

x	0		1			$+\infty$
y'	$+\infty$	$+$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-$	
y	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	↘	0

$y_4 = \mathrm{Arc}tg(x-1)$ ،

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$		$+$	
y	$\frac{-\pi}{2}$	↗	$\frac{-\pi}{4}$	↗	0	↗	$\frac{\pi}{2}$

$y_5 = \mathrm{Arc}cotg(1-x)$ ،

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$		$+$	
y	0	↗	$\frac{\pi}{4}$	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	π

$y_{۶}=\text{Arc}sin\,\frac{۲x}{۱+x^{۲}}$ ،

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
y'		$-$	-۱ ‖ ۱		$+$		۱ ‖ -۱		$-$
y	۰	↗	$\frac{-\pi}{۲}$ ‖ $\frac{-\pi}{۲}$	↗	۰	↗	$\frac{\pi}{۲}$ ‖ $\frac{\pi}{۲}$	↘	۰

$$y_{۷}=x\,\text{Arc}cotg\,x$$

و $$y'=\text{Arc}cotg\,x-\frac{x}{۱+x^{۲}}$$

و $$\text{Arc}cotg\,x=\alpha \Longrightarrow x=cotg\,\alpha \text{ و } ۰<\alpha<\pi$$

$$y'=\alpha-\frac{cotg\,\alpha}{۱+cotg^{۲}\alpha}=\frac{۱}{۲}(۲\alpha-sin\,۲\alpha)>۰$$

$$x\to+\infty \Longrightarrow \text{حد}\;y_{۷}=\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\frac{\text{Arc}cotg\,x}{\frac{۱}{x}}=$$

$$\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\frac{\frac{-۱}{۱+x^{۲}}}{\frac{-۱}{x^{۲}}}=۱$$

و $$\underset{x\to-\infty}{\text{حد}}\;x\,\text{Arc}cotg\,x\to-\infty$$

و $$m=\underset{x\to-\infty}{\text{حد}}\frac{y}{x}=\pi$$

$$h=\underset{x\to-\infty}{\text{حد}}(x\,\text{Arc}cotg\,x-\pi x)=\underset{x\to-\infty}{\text{حد}}\frac{\text{Arc}cotg\,x-\pi}{\frac{۱}{x}}=$$

$Y=\pi x+۱ \quad (x\to-\infty)$: معادلهٔ مجانب مایل و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^۲}{x^۲+۱}=۱$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
y'		+	+	+	
y	$-\infty$	↗	۰	↗	۱

$\begin{cases} Y=x-\pi \\ x\to+\infty \\ Y=x+\pi \\ x\to-\infty \end{cases}$: معادلات مجانب‌های مایل ، $y_۸=x-۲\operatorname{Arctg}x$

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
y'		+	۰	−		−	۰	+	
y	$-\infty$	↗	$-۱-\frac{\pi}{۲}$	↘	۰	↘	$۱-\frac{\pi}{۲}$	↗	$+\infty$

مسألهٔ ۱۳۸: با استفاده از دستور هوپیتال جواب $\frac{۱}{۳}$ می‌باشد.

مسألهٔ ۱۳۹: $۴p^۳+۲۷q^۲=۰$ قرار داده ، معادلهٔ پوش $y=\pm x\sqrt{x}$ می‌باشد.

مسألهٔ ۱۴۰:

جواب : $x^۴-۱۰x^۳+۳۵x^۲-۵۰x+۲۴=۰$

مسألهٔ ۱۴۱:

$$x^۳-(x_۱+x_۲+x_۳)x^۲+(x_۱x_۲+x_۱x_۳+x_۲x_۳)x-x_۵x_۲x_۳=۰$$

و $x^۳-\frac{۱}{۲}x^۲-\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۸}=۰$

مسألهٔ ۱۴۲: معادلهٔ درجه سوم را به صورت $x^۲-۱=۲-\frac{۱}{x}$ نوشته ، درنتیجه:

$$y=\frac{۱}{x^۲-۱}=\frac{x}{۲x-۱} \quad و \quad x=\frac{y}{۲y-۱}$$

معادلهٔ اصلی به صورت:

$۳y^۳-۳y+۱=۰$ و $S=y_۱+y_۲+y_۳=۰$ می‌باشد.

مسألهٔ ۱۴۴: معادلات دستگاه را نسبت به ۱ و ۲ و ۳ و ۴ ازدرجهٔ چهارم مرتب نموده ، معادلهٔ $u^۴+tu^۳+zu^۲+yu-x=۰$ را تشکیل داده ، ریشه‌هایش ۱ و ۲ و ۳ و ۴ بوده باا ستفاده ازروابط بین ضرایب وریشه‌ها داریم:

$$t=-۱۰ \text{ و } z=۳۵ \text{ و } y=-۵۰ \text{ و } x=-۲۴$$

$$\begin{array}{l} (۱) \\ (۲) \\ (۳) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=۶ \\ x^۲+y^۲+z^۲=۱۴ \\ x^۳+y^۳+z^۳=۳۶ \end{array} \right.$$

ازرابطهٔ (۲) داریم:

$$xy+xz+yz=۱۱$$

با استفاده از اتحاد لاگرانژ از رابطه (۳) داریم: $xyz=۶$ ، حال معادلهٔ درجه سومی تشکیل می‌دهیم که ریشه‌هایش x و y و z باشد. این معادله به صورت:

$$W^۳-۶W^۲+۱۱W-۶=۰$$

درنتیجه ۳ و ۲ و $W=۱$ که همان x و y و z می‌باشند ، واضح است جای x و y و z را می‌توان عوض کرد.

مسألهٔ ۱۴۵: چون تابع درجهٔ سوم $f(x)$ پیوسته و صعودی است ، پس معادلـهٔ درجه سوم یك ریشه دارد.

مسألهٔ ۱۴۶: یك جواب معادله را با استفاده ازمجموع ریشه‌ها وخاصیت تصاعد حسابی به دست‌آورده ، درمعادله قرارداده ، داریم:

$$۲a^۳-۹ab+۲۷c=۰$$

مسألهٔ ۱۴۷: معادله را نسبت به پارامتر a ازدرجهٔ دوم مرتب‌کرده ، داریم:

$$a^۲-۳ax^۲+۲x^۴+x^۳-۲x^۲+۲x-۱=۰ \Longrightarrow$$

$$a=\frac{۳x^۲ \pm \sqrt{x^۴-۴x^۳+۸x^۲-۸x+۴}}{۲}$$

$$\begin{array}{r|l} & x^۲-۲x+۲ \\ \hline \sqrt{x^۴-۴x^۳+۸x^۲-۸x+۴} & ۲x^۲-۲x \\ -x^۴ & \quad -۲x \\ \hline -۴x^۳+۸x^۲ & ۲x^۲-۴x+۲ \\ +۴x^۳-۴x^۲ & \qquad\quad ۲ \\ \hline ۴x^۲-۸x+۴ & \\ -۴x^۲+۸x-۴ & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

و $a=\frac{۳x^۲ \pm (x^۲-۲x+۲)}{۲} \Longrightarrow ۲x^۲-x+۱-a=۰$

و $x^۲+x-(۱+a)=۰$ و $\Delta>۰ \Longrightarrow a>\frac{۷}{۸}$

$$\Delta>۰ \Longrightarrow a>-\frac{۵}{۴} \therefore \boxed{a>\frac{۷}{۸}}$$

مسألهٔ ۱۴۹: شرط ریشه مضاعف آن است که جواب مشتق معادله، جواب معادله باشد، دراین صورت ۲۷− یا $m=۵$ است.

مسألهٔ ۱۵۰: طرفین روابط داده شده را به توان ۳ رسانیده، روابط به صورتهای زیر درمی‌آیند:

و $P^۳-P\log N+۳\log N=۰$ و $q^۳-q\log N+۳\log N=۰$

$r^۳-r\log N+۳\log N=۰$

جوابهای معادلهٔ $u^۳-u\log N+۳\log N=۰$، عبارتند از p و q و r، در نتیجه $\frac{۱}{p}+\frac{۱}{q}+\frac{۱}{r}=\frac{۱}{۳}$ می‌باشد.

مسألهٔ ۱۵۱: $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۸$ و $x_۱+x_۲=۶ \Longrightarrow x_۳+x_۴=۲$

درنتیجه معادله مزبور به صورت $(x^۲-۶x+P)(x^۲-۲x+P')=۰$ درآمده از مساوی قراردادن ضرائب داریم:

و $P'+P+۱۲=m$ و $-۶P'-۲P=۱۲۸$

$PP'=۱۶۵ \Longrightarrow m=-۴۶$ و $\frac{-۴۶}{۳}$

مسألهٔ ۱۵۲: $۲x-۱$ را X قرارداده درنتیجه $x=\frac{X+۱}{۲}$ و معادله به صورت $X^۳-X-(۱+m)=۰$ درآمده، حال درتعداد ریشه‌ها بحث نمایید.

مسألهٔ ۱۵۳: $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=\frac{c}{a}=۰$ بوده، بااستفاده ازاتحاد لاگرانژ جواب ۱۲ می‌باشد.

مسألهٔ ۱۵۴: با استفاده از روابط بین ضرایب و ریشه‌ها $\gamma=-(m+۴)$ در نتیجه

مسأله ۱۵۵: $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}=۰\Longrightarrow\alpha^۳+\beta^۳+\gamma^۳=۳\alpha\beta\gamma$ ، (اتحاد لاگرانژ)

جواب : $m=۱$

مسأله ۱۵۶: $T\left(-\frac{۱}{۲},\ -\frac{۵}{۲}\right)$ نقطه تماس و $۱<m<۵$: جواب

مسأله ۱۵۷: معادله را نسبت به x مرتب کرده $۴p^۳+۲۷q^۲=۰$ قرار داده $y_{Min}=-\frac{۴}{۳}$ می‌باشد.

مسأله ۱۵۸: ۰/۷۸ : جواب

مسأله ۱۵۹: از $v=\pi r^۲h$ دیفرانسیل گرفته ، $dv \# ۵۶/۵۲Cm^۳$ می‌باشد.

مسأله ۱۶۰:

$$b^۲x^۲+a^۲y^۲=a^۲b^۲\Longrightarrow ۲b^۲xdx+۲a^۲ydy=۰$$

و

$$\Longrightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{b^۲x}{a^۲y}.$$

$$b^۲xdx+a^۲ydy=۰\Longrightarrow b^۲(dx)^۲+a^۲(dy)^۲+a^۲yd^۲y=۰$$

$$\Longrightarrow b^۲+a^۲\left(\frac{dy}{dx}\right)^۲+a^۲y\ \frac{d^۲y}{dx^۲}=۰$$

$$\Longrightarrow\frac{d^۲y}{dx^۲}=-\frac{b^۲}{a^۲y}-\frac{b^۴x^۲}{a^۴y^۳}$$

مسأله ۱۶۱: $\frac{۲-۶t^۲}{(۳t^۲+۱)^۳}$: جواب ۲، $\frac{-۱}{\cos^۳t}$ $\therefore$ (جواب ۱

$$۳)\quad\therefore\quad y=\cos(x+y)\Longrightarrow dy=-(dx+dy)\sin(x+y)$$

$$\Longrightarrow\frac{dy}{dx}=-\left(۱+\frac{dy}{dx}\right)\sin(x+y)$$

و

$$\Longrightarrow y'_x=-\frac{\sin(x+y)}{۱+\sin(x+y)}$$

$$d^۲y=-d^۲y\sin(x+y)-(dx+dy)^۲\cos(x+y)\Longrightarrow$$

$$d^۲y[۱+\sin(x+y)]=-(dx^۲+۲dxdy+dy^۲)\cos(x+y)\Longrightarrow$$

$$\frac{d^۲y}{dx^۲}[۱+\sin(x+y)]=-\left[۱+۲\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^۲\right]\cos(x+y)$$

$$\Longrightarrow\frac{d^۲y}{dx^۲}=-\frac{\cos(x+y)}{[۱+\sin(x+y)]^۳}$$

$$۴)\quad \therefore\quad y=tg(x+\theta)\implies \frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=۲tg(x+\theta)[۱+tg^{۲}(x+\theta)]$$

$$۵)\quad \therefore\quad x=cos(xy)\implies$$

$$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=\frac{-x\,cos(xy)+۲y\,sin^{۳}(xy)+۲sin^{۲}(xy)}{x^{۲}sin^{۳}(xy)}$$

مسألهٔ ۱۶۲:

و $$۱)\quad \therefore\quad \int_{-۲}^{۲}(x^{۳}+۱)dx=\underset{n\to+\infty}{\text{حد}}\sum_{i=۱}^{n}f(x_{i-۱})\Delta x$$

و $x_{۰}=-۲$ و $x_{۱}=-۲+\Delta x$

و $x_{۲}=-۲+۲\Delta x$ و $\cdots$ و $x_{i-۱}=-۲+(i-۱)\Delta x$

و $$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{۲+۲}{n}=\frac{۴}{n}$$

$$\sum_{i=۱}^{n}f(x_{i-۱})\Delta x=\sum_{i=۱}^{n}[((i-۱)\Delta x-۲)^{۳}+۱]\Delta x$$

$$=\sum_{i=۱}^{n}[(i-۱)^{۳}(\Delta x)^{۳}-۶(i-۱)^{۲}(\Delta x)^{۲}+۱۲(i-۱)\Delta x-۷]\Delta x$$

و $$\sum_{i=۱}^{n}i^{۳}=۱^{۳}+۲^{۳}+\cdots+n^{۳}=\frac{n^{۲}(n+۱)^{۲}}{۴}$$

و $$\sum_{i=۱}^{n}i^{۲}=۱^{۲}+۲^{۲}+\cdots+n^{۲}=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

$$\sum_{i=۱}^{n}i=۱+۲+\cdots+n=\frac{n}{۲}(n+۱)$$

برای محاسبهٔ $\sum_{i=۱}^{n}(i-۱)^{۳}$ و $\sum_{i=۱}^{n}(i-۱)^{۲}$ و $\sum_{i=۱}^{n}(i-۱)$ در روابط بالا کافی است n را به $n-۱$ تبدیل نمایم ، داریم:

$$\sum_{i=۱}^{n}f(x_{i-۱})\Delta x=\frac{(n-۱)^{۲}\,n^{۲}}{۴}\times\frac{۲۵۶}{n^{۴}}$$

$$-۶\times\frac{(n-۱)n(۲n-۱)}{۶}\times\frac{۶۴}{n^{۳}}$$

و $$+۱۲\times\frac{(n-۱)n}{۲}\times\frac{۱۶}{n^{۲}}-۷n\times\frac{۴}{n}$$

$$\underset{n\to+\infty}{\text{حد}}\sum_{i=۱}^{n} f(x_{i-۱})\Delta x=۶۴-۱۲۸+۹۶-۲۸=\boxed{۴}$$

$$۲)\quad \therefore\quad \int_{۱}^{۴}(x^{۲}-۴x-۳)dx=-۱۸$$

مسألهٔ ۱۶۳:

$$۲)\quad \therefore\quad \int_{-۲}^{-۱}\frac{dx}{x-۳}\geqslant\int_{-۲}^{-۱}\frac{dx}{x}$$

توابع $\frac{۱}{x-۳}$ و $\frac{۱}{x}$ روی فاصله [−۲ و −۱] پیوسته بوده ودراین فاصله:

$$x-۳<x<۰ \Longrightarrow \frac{۱}{x}<\frac{۱}{x-۳}<۰$$

می باشد ، پس طبق قضیه (۵۶) صفحه ۱۲۰ (خاصیت ۳) داریم:

$$\int_{-۲}^{-۱}\frac{dx}{x-۳}>\int_{-۲}^{-۱}\frac{dx}{x}$$

مسألهٔ ۱۶۴: $\int_{-۱}^{۲}\sqrt{x^{۲}+۵}\,dx$ $\therefore$ (۱ ، $f(x)=\sqrt{x^{۲}+۵}$ درفاصله [−۱ و ۲] پیوسته است ، مطابق قضیهٔ مقادیرنهایی (قضیهٔ ۳۴) صفحه ۴۳ ماکزیمم تابع ۳ و مینیمم تابع $\sqrt{۵}$ است ، درنتیجه $\sqrt{۵}\leqslant\sqrt{x^{۲}+۵}\leqslant ۳$ وطبق قضیهٔ ۵۷ صفحه ۱۲۰ (خاصیت ۴) داریم:

$$\sqrt{۵}(۲+۱)\leqslant\int_{-۱}^{۲}\sqrt{x^{۲}+۵}\,dx\leqslant ۳(۲+۱)$$

یعنی ماکزیمم ومینیمم انتگرال به ترتیب ۹ و $۳\sqrt{۵}$ است.

$$۲)\quad ..\quad \int_{۱}^{۴}|x-۲|dx$$

شکل منحنی تابع $y=f(x)=|x-۲|=\begin{cases}۲-x \text{ ، } ۱\leqslant x<۲\\ x-۲ \text{ ، } ۲\leqslant x\leqslant ۴\end{cases}$ را رسم نموده ماکزیمم تابع $f(x)$ برابر ۲ و مینیمم تابع برابر صفر و ماکزیمم انتگرال ۶ و

مینیمم آن صفراست.

مسألهٔ ۱۶۵: چون $۰ \leqslant \sin^{۲}x \leqslant ۱$ پس $۱ \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{\frac{۳}{۲}}$ ، درنتیجه:

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} dx \leqslant \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} f(x)dx \leqslant \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sqrt{\frac{۳}{۲}}\, dx \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{۲} \leqslant \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} f(x)dx \leqslant \sqrt{\frac{۳}{۲}} \times \frac{\pi}{۲} \Rightarrow$$

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} f(x)dx \# \frac{\frac{\pi}{۲} + \sqrt{\frac{۳}{۲}} \times \frac{\pi}{۲}}{۲} = ۱/۷۴$$

(f(x) تابع زیرانتگرال می‌باشد.)

مسألهٔ ۱۶۶: با استفاده ازقضیهٔ ۵۹ صفحه ۱۲۲ (قضیهٔ میانه درانتگرال) برای انتگرال (۱) $c=۰$ و برای انتگرال (۲) ، $c=\sqrt{۲۱}-۲$ می‌باشد.

مسألهٔ ۱۶۷: مقدار متوسط تابع f(x) روی فاصله [a , b] از $\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ بدست می‌آید.

مسألهٔ ۱۶۸:

$$۱)\quad \therefore\ \varphi(x) = \int_{۱}^{x} x^{۲}dx + \int_{x}^{۱۰} x^{۲}dx$$

طبق قضیهٔ ۶۲ صفحه ۱۲۸ ، اگر تابع f درفاصله [a , b] پیوسته و x متعلق به این فاصله باشد، دراین صورت داریم:

$$\varphi(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt \Rightarrow \varphi'(x) = f(x)$$

پس:

$$\varphi(x)=\int_{۱}^{x} x^{۲}dx-\int_{۱۰}^{x} x^{۲}dx \Longrightarrow \varphi'(x)=x^{۲}-x^{۲}=۰$$

$$\Longrightarrow \boxed{\varphi(x)=K}$$

مسألهٔ ۱۶۹:

$$۱)\quad \therefore\quad \int_{-۲}^{۳}|x+۱|dx=\int_{-۲}^{-۱}(-x-۱)\,dx+\int_{-۱}^{۳}(x+۱)dx=\frac{۱۷}{۲}$$

$\frac{۲}{۳}$ (جواب ۳ و $\frac{۳۱۳}{۲}$ (جواب ۲

مسألهٔ ۱۷۰: ، وجود ندارد (جواب ۲ ، $\frac{۱}{\alpha-۱}$ (جواب ۱

$\frac{۳۲}{۳}$ (جواب ۵ ، $\frac{۱}{۱-\alpha}$ (جواب ۴ ، وجود ندارد (جواب ۳

و $$۶)\quad \therefore\quad \int_{۰}^{+\infty} x(a^{۲}+x^{۲})^{-\frac{۳}{۲}}dx$$

$$x=a\,tg\,t \Longrightarrow \underset{\varepsilon\to ۰+}{\text{حد}}\ \frac{۱}{a}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}-\varepsilon} \sin t\,dt=\frac{۱}{a}$$

وجود ندارد (جواب ۷

$$۸)\quad \therefore\quad \int_{۰}^{+\infty}\frac{x-۱}{x^{۳}-۱}dx=\underset{\varepsilon\to ۰+}{\text{حد}}\int_{۰}^{۱-\varepsilon}\frac{x-۱}{x^{۳}-۱}dx$$

$$+\underset{\varepsilon'\to ۰+ \text{ و } a\to+\infty}{\text{حد}}\int_{۱+\varepsilon'}^{a}\frac{x-۱}{x^{۳}-۱}dx$$

و $$\int \frac{dx}{x^۲+x+۱}=\int \frac{dx}{\left(x+\frac{۱}{۲}\right)^۲+\frac{۳}{۴}}$$

$x+\frac{۱}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}t$

جواب) $\frac{۲\pi\sqrt{۳}}{۹}$

و ۹) $\therefore \int_۰^۲ \frac{dx}{\sqrt{۴-x^۲}}$ و $x=۲\sin t$

$$\int_۰^۲ \frac{dx}{\sqrt{۴-x^۲}}=\underset{\varepsilon\to ۰^+}{\text{حد}}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}-\varepsilon} dt=\frac{\pi}{۲}$$

جواب ۱۰) وجود ندارد

مسألهٔ ۱۷۱:

جواب ۱) $\int_۰^۱ \frac{dx}{۱+x^۲}=\frac{\pi}{۴}$ ، جواب ۲) $\int_۱^۲ \frac{dx}{(۱+x)^۲}=\frac{۱}{۶}$

مسألهٔ ۱۷۲:

و ۱) $\therefore \int \frac{xdx}{x^۴+۱}$ و $x^۲=u \Longrightarrow xdx=\frac{۱}{۲}du$

جواب) $\frac{۱}{۲}\operatorname{Arc}tg\, x^۲+C$

۲) $$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x^۲+۱}\,(\sqrt{x^۲+۱}+x)}=\int \frac{(\sqrt{x^۲+۱}-x)}{\sqrt{x^۲+۱}}dx$$
$$=x-\sqrt{x^۲+۱}+c$$

و ۳) $\therefore \int_a^b \frac{dx}{(d^۲-x^۲)\sqrt{(x-a)(b-x)}}$

و $(x-a)(b-x)>۰ \Longrightarrow a<x<b$

و $$\sqrt{(x-a)(b-x)}=t(x-a) \Longrightarrow t=\sqrt{\frac{b-x}{x-a}}$$

و $$x=\frac{at^۲+b}{t^۲+۱} \Longrightarrow dx=\frac{۲(a-b)tdt}{(t^۲+۱)^۲}$$

$$\frac{۱}{d^۲-x^۲}\equiv\frac{۱}{(d-x)(d+x)}\equiv\frac{A}{d-x}+\frac{B}{d+x} \Longrightarrow$$

و $$A(d+x)+B(d-x)\equiv ۱$$

$$\begin{cases} x=d \\ A=\frac{۱}{۲d} \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} x=-d \\ B=\frac{۱}{۲d} \end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(d^۲-x^۲)\sqrt{(x-a)(b-x)}}=$$

$$\int_a^b \left(\frac{\frac{۱}{۲d}}{d-x}+\frac{\frac{۱}{۲d}}{d+x}\right)\times\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=$$

$$\frac{۱}{۲d}\int_a^b \underbrace{\frac{dx}{(d-x)\sqrt{(x-a)(b-x)}}}_{I_۲}+$$

$$\frac{۱}{۲d}\int_a^b \underbrace{\frac{dx}{(d+x)\sqrt{[x-a)(b-x)}}}_{I_۱}$$

$$I_۱=\frac{۱}{۲d}\int_a^b \frac{dx}{(d+x)\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

$$=-\frac{۱}{d(d+a)}\int_{+\infty}^{۰} \frac{dt}{t^۲+\frac{d+b}{d+a}}$$

$$=\frac{۱}{d(a+d)}\int_{۰}^{+\infty}\frac{dt}{t^{۲}+\frac{d+b}{d+a}}$$ و

$$\frac{d+b}{d+a}=K^{۲} \quad و \quad \int\frac{dt}{t^{۲}+K^{۲}}=\frac{۱}{K}\mathrm{Arc}\,tg\,\frac{t}{K}$$ و

$$I_{۱}=\frac{۱}{d(d+a)}\times\sqrt{\frac{d+a}{d+b}}\left[\mathrm{Arc}\,tg\,t\sqrt{\frac{d+a}{d+b}}\right]_{۰}^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{۲d\sqrt{(d+a)(d+b)}}$$

برای به دست آوردن $I_{۲}$ کافی است، در $I_{۱}$، d را به $-d$ تبدیل نماییم، در نتیجه:

$$I_{۲}=\frac{-\pi}{۲d\sqrt{(a-d)(b-d)}}$$ و

$$I=I_{۱}+I_{۲}=\frac{\pi}{۲d}\left[\frac{۱}{\sqrt{(a+d)(b+d)}}-\frac{۱}{\sqrt{(a-d)(b-d)}}\right]$$

$$۴)\quad\therefore\quad\int_{۰}^{۱}\sqrt{\frac{x}{۱-x}}\,dx$$ و

$$\frac{x}{۱-x}>۰\Longrightarrow ۰<x<۱ \quad و \quad x=\sin^{۲}t$$

$\frac{\pi}{۲}$ (جواب

$$۵)\quad\therefore\quad\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}tg^{۴}x\,dx \quad و \quad tg\,x=t\Longrightarrow x=\mathrm{Arc}\,tg\,t$$ و

$$dx=\frac{dt}{۱+t^{۲}}$$ و

$$\int_{۰}^{۱}\frac{t^{۴}dt}{۱+t^{۲}}=\int_{۰}^{۱}\left[(t^{۲}-۱)+\frac{۱}{t^{۲}+۱}\right]dt=\frac{\pi}{۴}-\frac{۲}{۳}$$

$$۶)\quad\therefore\quad\int_{-\pi}^{\pi}\cos ۳x\cos^{۳}x\,dx$$ و

و $\cos ۳x = ۴\cos^{۳} x - ۳\cos x \Longrightarrow \cos^{۳} x = \frac{۳}{۴}\cos x + \frac{۱}{۴}\cos ۳x$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{۳}{۴}\cos ۳x\cos x + \frac{۱}{۴}\cos^{۲} ۳x\right)dx = \frac{\pi}{۴}$$

و $۷)\ \therefore\ I = \int_{-۱}^{۱}\frac{dx}{(x+۲)\sqrt{۱-x^{۲}}}$ و $x = \sin t$

و $$I = \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{dt}{۲+\sin t} = \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{dt}{۲+\dfrac{۲tg\,\frac{t}{۲}}{۱+tg^{۲}\,\frac{t}{۲}}}$$

و $tg\,\frac{t}{۲} = Z$ و $t = ۲\,\mathrm{Arc}tg Z$

و $$I = \int_{-۱}^{۱}\frac{dZ}{Z^{۲}+Z+۱} = \int_{-۱}^{۱}\frac{dZ}{\left(Z+\frac{۱}{۲}\right)^{۲}+\frac{۳}{۴}}$$

و $Z + \frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}u$

$$I = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}\left[\mathrm{Arc}tg\,\frac{۲Z+۱}{\sqrt{۳}}\right]_{-۱}^{۱} = \boxed{\frac{\pi}{\sqrt{۳}}}$$

$$۸)\ \therefore\ \int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\frac{dx}{\cos^{۴}x} = \frac{۴}{۳}$$

$$۹)\ \therefore\ I = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{dx}{\sin^{۴}x+\cos^{۴}x} = ۴\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{dx}{۳+\cos ۴x}$$

$$=۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱+tg^{۲}۲x}{۲+tg^{۲}۲x}dx \quad و \quad tg۲x=\sqrt{۲}t$$

و $x=\frac{۱}{۲}\text{Arc}tg\sqrt{۲}\,t$

$$I=\underset{\varepsilon\to ۰^{+}}{\text{حد}}\,۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}-\varepsilon}\frac{۱+tg^{۲}۲x}{۲+tg^{۲}۲x}dx+\underset{\varepsilon'\to ۰^{+}}{۲\text{حد}}\int_{\frac{\pi}{۴}+\varepsilon'}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱+tg^{۲}۲x}{۲+tg^{۲}۲x}dx$$

$$=\frac{\sqrt{۲}}{۲}[\text{Arc}tg\,t]_{۰}^{+\infty}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}[\text{Arc}tg\,t]_{-\infty}^{۰}=\boxed{\frac{\pi}{\sqrt{۲}}}$$

۱۰) $\therefore\ I=\int\frac{dx}{a+b\sin x}$ و $b^{۲}<a^{۲}$ و $a>۰$

و $I=\int\frac{dx}{a+b\times\frac{۲tg\frac{x}{۲}}{۱+tg^{۲}\frac{x}{۲}}}$ و $tg\frac{x}{۲}=t$ و $t+\frac{b}{a}=u\sqrt{۱-\frac{b^{۲}}{a^{۲}}}$

$$I=\frac{۲}{\sqrt{a^{۲}-b^{۲}}}\text{Arc}tg\,\frac{a\,tg\frac{x}{۲}+b}{\sqrt{a^{۲}-b^{۲}}}+C$$

و ۱۱) $\therefore\ I=\int\frac{\sqrt{x^{۲}-۱}}{x^{۴}}dx$ و $x=\frac{۱}{\cos t}$

$$I=\int\sin^{۲}t\cos t\,dt=\frac{(x^{۲}-۱)^{\frac{۳}{۲}}}{۳x^{۳}}+C$$

۱۲) $\therefore$ (جواب) $\frac{۳}{۴}x\sqrt[۳]{x}+\frac{۱۲}{۱۱}x\sqrt[۶]{x^{۵}}+\frac{۳}{۷}x^{۲}\sqrt[۳]{x}+C$

و ۱۳) .. $I=\int\sqrt[۳]{x}\left(۱+x^{\frac{۲}{۳}}\right)^{\frac{۱}{۲}}dx$

و $۱+x^{\frac{۲}{۳}}=t^{۲}\implies x=(t^{۲}-۱)^{\frac{۳}{۲}}$

$$I=\frac{۳}{۵}\left(۱+x^{\frac{۲}{۳}}\right)^{\frac{۵}{۲}}-\left(۱+x^{\frac{۲}{۳}}\right)^{\frac{۳}{۲}}+c$$

$۱۴)\ \therefore\ I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^۳-۱}}$ و $x^۳-۱=t^۲ \Longrightarrow x=(t^۲+۱)^{\frac{۲}{۳}}$

$$I=\frac{۲}{۳}\ \mathrm{Arc}tg\sqrt{x^۳-۱}+C$$

$۱۵)\ \therefore\ I=\int\frac{x^{۱۱}}{\sqrt[۵]{x^۳-۱}}dx$ و $x^۳-۱=t$ و $x^۲dx=\frac{۱}{۳}dt$ و

$I=\int\frac{(x^۳)^۳\,x^۲dx}{\sqrt[۵]{x^۳-۱}}$ ، (انتگره خواهد شد)

و $۱۶)\ \therefore\ I=\int\frac{(۲x+۱)^۳}{(۳x-۱)^۵}dx$

و $\frac{۲x+۱}{۳x-۱}=u \Longrightarrow \frac{dx}{(۳x-۱)^۲}=-\frac{۱}{۵}du$

$$I=-\frac{(۲x+۱)^۴}{۲۰(۳x-۱)^۴}+C$$

و $۱۷)\ \therefore\ I=\int(x^۲+x^۳+۱)(x+۱)^۴dx$

(به‌آسانی انتگره می‌شود) ، $x+۱=t \Longrightarrow x=t-۱$ و $dx=dt$

۱۸ : $۳\sin^۲x+۲\cos^۲x+۱=u$ گرفته $\sin x\cos x\,dx=\frac{۱}{۲}du$

جواب به صورت $\sqrt{۳\sin^۲x+۲\cos^۲x+۱}+C$ درمی‌آید.

۱۹ : تابع زیر انتگرال را رفع کرده سپس انتگرال گرفتهٔ جواب به صورت $x+\frac{۱}{x^۳+x^۲+x+۱}+C$ می‌باشد.

۲۰ : $\sqrt{x^۲+۱}=u \Longrightarrow x=\sqrt{u^۲-۱}$ و

(جواب $۲\sqrt{\sqrt{x^۲+۱}+۱}+C$

۲۱ (جواب $\frac{۱۵}{۴\sqrt[۵]{۸}}\sqrt[۵]{\sin^۴\frac{x}{۲}}+C$

۲۲ (جواب $\frac{۱}{n+۱}\,tg_x^{n+۱}+C$

جواب ۲۳) $-\frac{۱}{۶}(cotg\,x-۱)^۶-\frac{۱}{۵}(cotg\,x-۱)^۵+C$

جواب ۲۴) $\frac{۱}{۳}x^۳-x+Arctg\,x+C$

و ۲۵) $\therefore\quad I=\int\frac{x+۳}{x^۲\sqrt{۲x+۳}}dx$

و $\sqrt{۲x+۳}=u\Longrightarrow x=\frac{۱}{۲}u^۲-\frac{۳}{۲}$

$$I=\int\frac{۲u^۲+۶}{(u^۲-۳)^۲}du$$

چون مخرج کسر مربع کامل است ممکن است تابع اولی به صورت $y=\frac{au+b}{u^۲-۳}$ باشد ، در نتیجه:

و $y'=\frac{-au^۲-۲bu-۳a}{(u^۲-۳)^۲}\equiv\frac{۲u^۲+۶}{(u^۲-۳)^۲}\Longrightarrow a=-۲$

و $b=۰$ و $-۳a=۶\Longrightarrow a=-۲$

$$I=\frac{-۲u}{u^۲-۳}+C=\frac{-\sqrt{۲x+۳}}{x}+C$$

و ۲۶) $\therefore\quad I=\int\frac{x}{(۱+x^۲)\sqrt{۱-x^۴}}dx$

و $۰<x^۲<۱$ و $x^۲=sin\,t$

$$I=\frac{۱}{۲}\int\frac{dt}{۱+sin\,t}=\frac{۱}{۲}\int\frac{۱-sin\,t}{cos^۲t}dt=\frac{x^۲-۱}{۲\sqrt{۱-x^۴}}+C$$

۲۷) $\therefore\quad I=\int\frac{۴x^۳-۳x^۲-۲}{(x+۱)^۲(x^۲-x+۱)^۲}dx$

$$=\int\frac{۴x^۳-۳x^۲-۲}{(x^۳+۱)^۲}dx$$

اگر تابع اولی‌را $y=\frac{ax+b}{x^۳+۱}$ بگیریم، جواب انتگرال $c+\frac{-۲x+۱}{x^۳+۱}$ می‌باشد.

۲۸) $\therefore\quad I=\int\frac{adx}{sin\,x+cos\,x+\sqrt{۲}}=\int\frac{adx}{\sqrt{۲}cos\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)+\sqrt{۲}}$

$$=\frac{a\sqrt{۲}}{۲}\,tg\left(\frac{x}{۲}-\frac{\pi}{۸}\right)+c$$

جواب ۲۹) $۲\sqrt{\cos x}-\frac{۸}{۵}\cos^{۲}x\sqrt{\cos x}+c$

۳۰) به جای $\sin ۲x$ ، $۲\sin x\cos x$ قرارداده صورت و مخرج را بر $\cos^{۲}x$ بخش کرده ، جواب $a\sqrt{۲tgx}+c$ می باشد.

۳۱) صورت ومخرج را بر $\cos^{۴}x$ بخش کرده ، جواب :

$$a\left(\frac{-۳}{۷tg^{۲}x\sqrt[۳]{tgx}}-\frac{۳}{\sqrt[۳]{tgx}}\right)+C$$

می باشد.

۳۲) به جای $\sin ۲x$ ، $۲\sin x\cos x$ قرارداد ، و $۲+\sin x=u$ فرض کرده ، جواب $\frac{۶}{۵}(۲+\sin x)\sqrt[۳]{(۲+\sin x)^{۲}}-۶\sqrt[۳]{(۲+\sin x)^{۲}}+c$ می باشد.

۳۳) صورت ومخرج را در $tgx+cotgx$ ضرب کرده $tgx+cotgx=u$ فرض کرده ، $(tg^{۲}x-cotg^{۲}x)dx=du$ ، جواب به صورت $-\frac{۱}{۷(tgx+cotgx)^{۷}}+C$ می باشد.

۳۴) $x=tgt$ گرفته جواب $\frac{\pi}{۴}$ می باشد.

جواب ۳۵) $\frac{۱}{۲}\sqrt{x}+\frac{۱}{۴}\sin ۲\sqrt{x}+C$

جواب ۳۶) $tgx+\frac{۱}{\cos x}+c$

۳۷) صورت ومخرج را درمزدوج مخرج ضرب کرده ، جواب:

$$-cotgx+\frac{۱}{\sin x}+C$$

می باشد.

۳۸) $$I=\int_{۰}^{\pi}\left|\left(\cos x+\frac{۱}{۲}\right)\right|dx$$

و $$\cos x+\frac{۱}{۲}=۰\ \Longrightarrow\ x=\frac{۲\pi}{۳}$$

x	۰	$\frac{۲\pi}{۳}$	π
$\cos x+\frac{۱}{۲}$	$+$	۰	$-$

$$I=\int_{۰}^{\frac{۲\pi}{۳}}\left(\cos x+\frac{۱}{۲}\right)dx-\int_{\frac{۲\pi}{۳}}^{\pi}\left(\cos x+\frac{۱}{۲}\right)dx=\sqrt{۳}+\frac{\pi}{۶}$$

جواب ۳۹) $۲\sqrt{۲}-۲$ ، جواب ۴۰) $-\cot g\, x-x-\frac{۱}{\sin x}+c$

مسألهٔ ۱۷۳:

و $x=\frac{۱}{t}$ و $t=\frac{۱}{x}$ و $dx=-\frac{dt}{t^{۲}}$

$$I_{۱}=\int_{۰}^{+\infty}\frac{x^{۲}}{x^{۴}+۱}dx=-\int_{+\infty}^{۰}\frac{dt}{t^{۴}+۱}=\int_{۰}^{+\infty}\frac{dt}{۱+t^{۴}}$$

$$=\int_{۰}^{+\infty}\frac{dx}{۱+x^{۴}}=I_{۲}$$

مسألهٔ ۱۷۴: باید نشان دهید که $F'(x)$ به صورت زیر است:

$$f(x)=x+|x-۱|=\begin{cases}۱ \text{ ، } x<۱\\ ۲x-۱ \text{ ، } x\geqslant ۱\end{cases}$$

مسألهٔ ۱۷۵: مسأله را برای حالتی‌که تابع f زوج است استدلال می‌نمائیم.

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{۰}f(x)dx+\int_{۰}^{a}f(x)dx$$

و $$=\int_{-a}^{۰}f(-x)dx+\int_{۰}^{a}f(x)dx$$

و $-x=t \Rightarrow x=-t \Rightarrow dx=-dt$

و $x=-a \Rightarrow t=a$ و $x=۰ \Rightarrow t=۰$

$$\int_{-a}^{\circ} f(-x)dx = \int_{a}^{\circ} -f(t)dt = -\int_{a}^{\circ} f(t)dt$$

و
$$= \int_{\circ}^{a} f(t)dt = \int_{\circ}^{a} f(x)dx$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{\circ}^{a} f(x)dx + \int_{\circ}^{a} f(x)dx = ۲\int_{\circ}^{a} f(x)dx$$

مسألهٔ ۱۷۶: x را به $\sqrt{x}$ تبدیل کرده ، $f(x)=۲\sqrt{x}+c$.

مسألهٔ ۱۷۷: اگر $f(x)$ از درجهٔ n باشد $f'(x)$ از درجهٔ $n-۱$ بوده و درجهٔ $f[f'(x)]$ برابر $n(n-۱)$. پس $n(n-۱)=۲$ بنابراین $n=۲$ و $f(x)=ax^۲+bx+c$ حال $f[f'(x)]$ را تشکیل داده ، متحد با $۴x^۲-۱۲x+۸$ قرارداده ، $f(x)=x^۲-۲x$ خواهد بود.

مسألهٔ ۱۷۸: $cos^۲x$ را به x تبدیل کرد ، $f(x)=x-\frac{۲}{۳}x^۳+\frac{۱}{۵}x^۵+c$ می باشد.

مسألهٔ ۱۷۹: ضریب زاویهٔ قائم در $M(x\ ,\ y)$ برابر $\frac{-۱}{y'}$ از طرفی چون قائم در M ازنقطهٔ $C(\alpha\ ,\ \beta)$ می گذرد ، داریم: $-\frac{۱}{y'}=\frac{y-\beta}{x-\alpha}$ که پس‌از طرفین وسطین وتابع اولی گرفتن معادلهٔ منحنی دایره $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=\alpha^۲+\beta^۲+۲c$ می باشد.

مسألهٔ ۱۸۰: $y'=\frac{۱}{y}$ را طرفین وسطین نموده سپس تابع اولی گرفته داریم:

$$y^۲=۲x-۱$$

مسألهٔ ۱۸۱:

و
$$\int_{۱}^{\sqrt{tg\alpha}} \sqrt{۱+y'^۲}\,dx=\int_{۱}^{\sqrt{tg\alpha}} \frac{۱}{۲}\left(x^۲+\frac{۱}{x^۲}\right)dx=\frac{۱}{۳}$$

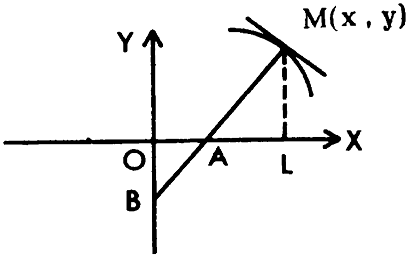
$$\alpha=K\pi+\frac{\pi}{۳}$$

مسألهٔ ۱۸۲: $۱-y'$ را u فرض کرده ، y'' مساوی u' می‌شود از طرفین رابطهٔ تابع اولی گرفته $y'=۱\pm۲x$ که جواب $y'=۱-۲x$ درست است و بالاخره معادله منحنی به‌صورت $y=-\left(x-\frac{۱}{۲}\right)^{۲}$ می‌باشد.

مسألهٔ ۱۸۳:

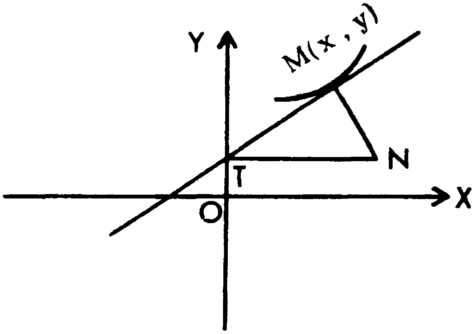
$$y=\pm\frac{(x-۱)^{۲}}{۲x}$$ (جواب

مسألهٔ ۱۸۴:



معادلهٔ قائم درنقطهٔ M را نوشته درآن $Y_A=۰$ قرارداده $X_A=x+yy'$ گردیده و چون $\overline{LA}=yy'$ و $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{LA}}{\overline{LO}}=K$ پس $yy'=-Kx$ و معادلهٔ منحنی به‌صورت $y^{۲}+Kx^{۲}=۲c$ که معادله یك مقطع مخروطی است درمی‌آید.

مسألهٔ ۱۸۵:



معادلات مماس و قائم در نقطهٔ M منحنی را نوشته در معادلهٔ مماس $X_T=۰$ قرارداده ، $Y_T=Y_N=y-xy'$ به دست می‌آید Y_N را درمعادلهٔ قائم قرارداده

$X_N=\overline{TN}=xy'^{۲}+x=a$ گردیده و $y=\int\sqrt{\frac{a-x}{x}}\,dx$ که $۰<x<a$ بوده $x=a\cos^{۲}t$ قرار داد، جواب $y=-\frac{a}{۲}(۲t-\sin ۲t)+C$. بنابراین معادلات پارامتری منحنی به صورت:

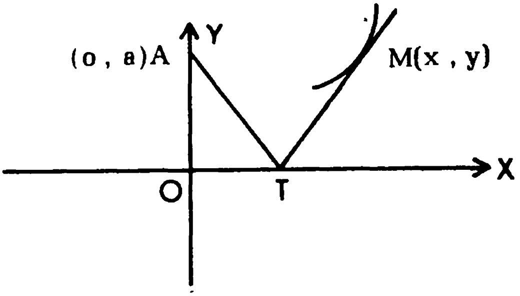
$$\begin{cases} x=a\cos^{۲}t \\ y=-\frac{a}{۲}(۲t-\sin ۲t)+C \end{cases}$$

می‌باشد.

مسألهٔ ۱۸۶: نقطهٔ برخورد دو منحنی را $M(x\ ,\ y)$ فرض کرده، ضریب زاویهٔ مماس برمنحنی $xy=\lambda$ ، $y'=-\frac{y}{x}$ بوده و $tg\alpha=\frac{m-m'}{۱+mm'}$ یا:

$$tg\alpha=\frac{y'+\frac{y}{x}}{۱-\frac{yy'}{x}}\Longrightarrow (x^{۲}-y^{۲})tg\alpha-۲xy-C=۰$$

مسألهٔ ۱۸۷:



درمعادلهٔ مماس درنقطهٔ M به جای $Y_T=۰$ قرارداده، داریم:

$$T\left(x-\frac{y}{y'}\ ,\ ۰\right)$$

$$MT^{۲}=TA^{۲}\Longrightarrow y^{۲}y'=x^{۲}y'-۲xy+a^{۲}y'\Longrightarrow$$

$$x^{۲}y'-۲xy=y^{۲}y'-a^{۲}y'\Longrightarrow\frac{x^{۲}y'-۲xy}{y^{۲}}=y'-a^{۲}y'y^{-۲}$$

$$\Longrightarrow -\frac{x^{۲}}{y}=y+\frac{a^{۲}}{y}+c\Longrightarrow$$

$x^{۲}+y^{۲}+cy+a^{۲}=۰$ (معادله دسته دوایر)

مسألهٔ ۱۸۸: می‌دانیم شتاب در هر لحظه مشتق دوم مسافت نسبت به زمان می‌باشد، یعنی

$$\text{شتاب}=\gamma=x''=-\omega^{۲}x \Longrightarrow x''+\omega^{۲}x=۰ \Longrightarrow$$

$$۲x'x''+۲\omega^{۲}xx'=۰ \Longrightarrow x'^{۲}+\omega^{۲}x^{۲}=K^{۲} \Longrightarrow x'^{۲}=K^{۲}-\omega^{۲}x^{۲}$$

$\Longrightarrow x'=\sqrt{K^{۲}-\omega^{۲}x^{۲}}$ (جواب مثبت را درنظر گرفتیم) $\Longrightarrow$

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{K^{۲}-\omega^{۲}x^{۲}} \Longrightarrow \frac{dx}{\sqrt{K^{۲}-\omega^{۲}x^{۲}}}=dt \Longrightarrow$$

و

$$\int\frac{dx}{\sqrt{K^{۲}-\omega^{۲}x^{۲}}}=t+c \quad \text{و} \quad \frac{-K}{\omega}<x<\frac{K}{\omega}$$

$$x=\frac{K}{\omega}\sin\theta \quad \text{و} \quad \int\frac{\frac{K}{\omega}\cos\theta d\theta}{K\cos\theta}=\frac{۱}{\omega}\theta=t+c \Longrightarrow$$

و

$$\theta=\omega t+\omega c \Longrightarrow \theta=\text{Arc}\sin\frac{\omega x}{K}=\omega t+\omega c$$

$$\omega c=\varphi \Longrightarrow \frac{\omega x}{K}=\sin(\omega t+\varphi) \Longrightarrow$$

$$x=\frac{K}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)=a\sin(\omega t+\varphi)$$

معادلهٔ اخیر همان طور که می‌دانید معادلهٔ حرکت نوسانی است.

مسألهٔ ۱۸۹: معادله را به صورت $y'y=(xy'+y)+x$ نوشته از طرفین انتگرال گرفته داریم: $x^{۲}+۲xy-y^{۲}+۲K=۰$ چون $B^{۲}-AC$ مثبت است منحنی هذلولی است.

مسألهٔ ۱۹۰: از طرفین معادله $y'(۱-x^{۲})-۲xy=x^{۲}$ تابع اولی گرفته، داریم:

$$y=\frac{\frac{۱}{۳}x^{۳}+C}{۱-x^{۲}}$$

مسألهٔ ۱۹۱: معادلهٔ منحنی انتگرال را به صورت $\frac{y-xy'}{y^{۲}}=۲x$ نوشته از طرفین انتگرال گرفته به جای x، ۲ و به جای y، (۱) قرارداده، داریم:

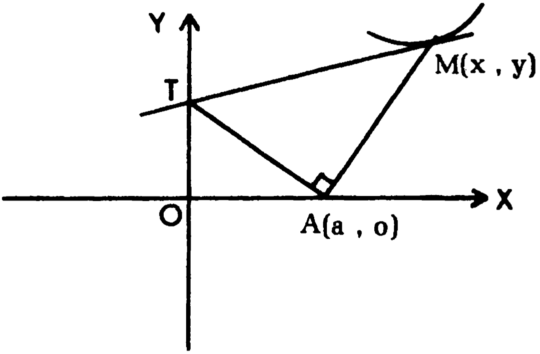
$$\frac{x}{y}=x^{۲}+c \Longrightarrow y=\frac{x}{x^{۲}-۲}$$

معادلهٔ مجانبها $y=۰$ و $x=\pm\sqrt{۲}$ می‌باشند.

مسألهٔ ۱۹۲:

$\left(x-\frac{۳}{۲}\right)^{۲}+y^{۲}=\frac{۵}{۴}$ (جواب

مسألهٔ ۱۹۳:



و معادلهٔ مماس در M : $Y-y=y'(X-x)$

و $X_T=۰ \Longrightarrow Y_T=y-xy'$ و $T(۰ , y-xy')$

$$m_{AM}\times m_{AT}=-۱ \Longrightarrow \frac{y}{x-a}\times\frac{y-xy'}{-a}=-۱ \Longrightarrow$$

$$xy'y-y^{۲}+ax-a^{۲}=۰ \Longrightarrow \frac{۲xy'y-۲y^{۲}}{x^{۳}}+\frac{۲a}{x^{۲}}-\frac{۲a^{۲}}{x^{۳}}=۰$$

$$\Longrightarrow \frac{y^{۲}}{x^{۲}}-\frac{۲a}{x}+\frac{a^{۲}}{x^{۲}}=c \Longrightarrow cx^{۲}-y^{۲}+۲ax-a^{۲}=۰$$

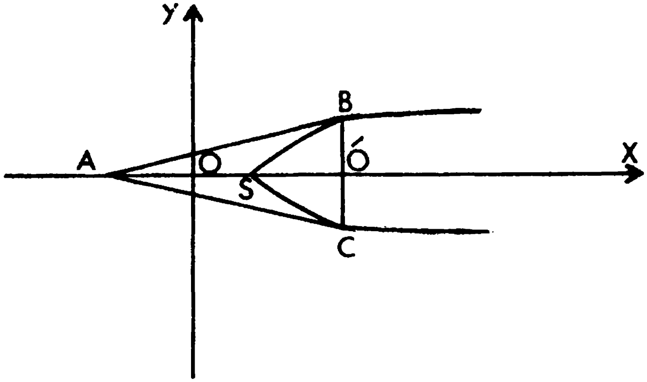
(معادلهٔ مقطع مخروطی)

مسألهٔ ۱۹۴: $\underset{m\to+\infty}{\text{حد}}\; V=\frac{\pi}{۶۰}$ و $\underset{m\to+\infty}{\text{حد}}\; S=\frac{۳}{۸}$ (جواب ثانیاً

مسألهٔ ۱۹۵: مبدأ مختصات را به $O'\left|\begin{matrix}-۲\\ ۰\end{matrix}\right.$ انتقال داده، سطح بین منحنی ومحور Y ها و خطوط $Y=۰$ و $Y=۳$ را حول محور سهمی دوران داده، داریم:

$$V=\pi\int_{۰}^{۳}X^{۲}\,dY=\frac{۱۵\pi}{۲}$$

مسألهٔ ۱۹۶: مختصات تماس نقاط B و C عبارتند از C(۶ , −۲) و B(۶ , ۲) محل تلاقی BC را با محور x ها o′ نامیده مساحت مثلث ABO′ برابر ۸ و مساحت BSO′ (S رأس منحنی می‌باشد) $\frac{۱۶}{۳}$ و بالاخره مساحت مطلوب $\frac{۱۶}{۳}$ می‌باشد، حجم مخروط از دوران مثلث AO′B حول O′B برابر $\frac{۱۲۸\pi}{۳}$ ، مبدأ مختصات را به (۰ و ۶)O′ انتقال داده حجم حاصل ازدوران منحنی حول O′B (محور Y ها) برابر است با $V=\pi\int_{۰}^{۲} X^{۲}\,dY=\frac{۲۵۶\pi}{۱۵}$ وحجم مطلوب $\frac{۷۶۸\pi}{۱۵}$ می‌باشد.



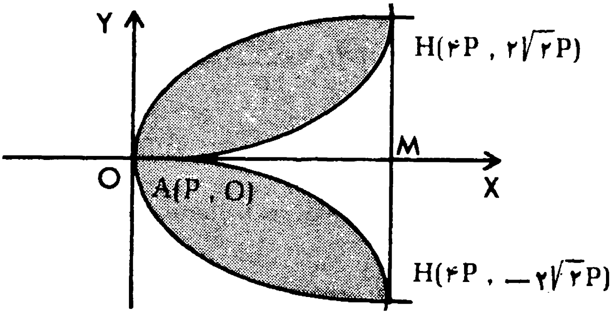
مسألهٔ ۱۹۷: $\frac{۷۲}{۵}\pi$ (جواب

مسألهٔ ۱۹۸: اولاً:

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
y′		+	$+\infty$	////	$+\infty$	+	
y	−۱	↗	۰	////	۰	↗	۱

$\frac{\pi}{۲}$ (جواب ثانیاً

مسألهٔ ۱۹۹:



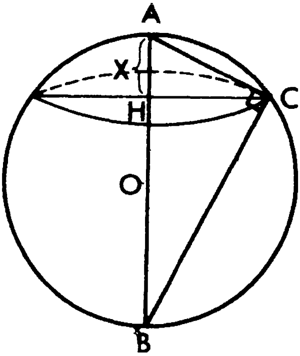
دو منحنی را تلاقی داده معادلــهٔ $۲۷P^۲x=۴(x-P)^۳$ به دست مــی‌آید ، $x-P=X$ قرار داده به آسانی می‌توان بررسی کرد ، معادلهٔ درجه سوم حاصل ، یک ریشهٔ مضاعف و یک ریشهٔ ساده دارد ، ریشهٔ مضاعف معادلهٔ اصلی:

$$x_۱=x_۲=-\frac{P}{۲}<۰$$

غیرقابل قبول و ریشهٔ سادهٔ معادلهٔ اصلی $x_۳=۴P$ می‌باشد. با توجه به شکل مساحت هاشورزده دوبرابرمساحت $S_{OHM}-S_{AHM}$ بوده و برابر $\frac{۸۸}{۱۵}\sqrt{۲}P^۲$ می‌باشد.

مسألهٔ ۲۰۰: (جواب (۳)

مسألهٔ ۲۰۱:



مساحت مقطع به شعاع HC را برحسب x را به دست‌آورده ، حجم عــرقچین از رابطهٔ $V=\pi\int_۰^h Hc^۲dx$ به دست می‌آید.

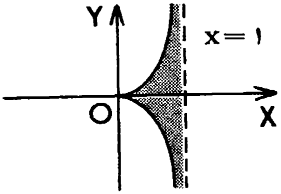
مسألهٔ ۲۰۲: حجم عرقچین به ارتفاع $R-d$ طبق فرض مسأله، نصف حجم نیمکره می‌باشد. یعنی:

$$\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}\pi R^{۳}=\frac{\pi(R-d)^{۲}}{۳}[۳R-(R-d)]$$

اگر در رابطهٔ اخیر $۰<\frac{d}{R}=x<۱$ بگیریم با استفاده از حل معادلهٔ درجه سوم به روش مثلثاتی $x=۲\cos ۸۰^{\circ}$ می‌باشد.

مسألهٔ ۲۰۳:

$$x(x^{۲}+y^{۲})=y^{۲}\Rightarrow y=\pm x\sqrt{\frac{x}{۱-x}}$$



$$S=۲\int_{۰}^{۱}x\sqrt{\frac{x}{۱-x}}\,dx=\frac{۳\pi}{۴}$$

مسألهٔ ۲۰۴: مبدأ مختصات را به نقطه $O'(۱\,,\,۱)$ انتقال داده حجم از رابطهٔ:

$$V=\pi\int_{۰}^{+\infty}X^{۲}dY=\frac{\pi}{۲}$$

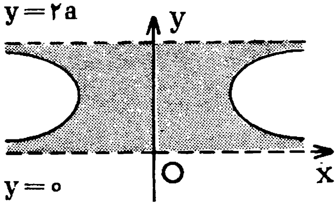
به دست می‌آید.

مسألهٔ ۲۰۵:

$$x^{۲}y(۲a-y)=a^{۴}\Rightarrow x=\pm\frac{a^{۲}}{\sqrt{y(۲a-y)}}$$

x را تابع y گرفته جدول تغییرات و منحنی به شکل زیر می‌باشد.

y	۰		a		۲a
x′	−	−	۰	+	+
x	+∞	↘	a	↗	+∞



$$\frac{S}{۲}=\int_{۰}^{۲a} xdy=\int_{۰}^{۲a}\frac{a^{۲}}{\sqrt{y(۲a-y)}}dy \Longrightarrow S=۲\pi a^{۲}$$

مسأله ۲۰۶: معادلاتی که طولها و عرضهای نقاط ماکزیمم ومینیمم تابع را می‌دهند، عبارتند از:

$$a=۲ \text{ و } b=-۹ \text{ ، } \begin{cases}(a+۲)x^{۲}+۲bx-۲b=۰\\ ۴y^{۲}+۴(a+b)y+a^{۲}-۴b=۰\end{cases}$$

مسأله ۲۰۷: معادلهٔ منحنی‌را به صورت $y=\frac{x^{۲}+ax+b}{x+c}$ نوشته معادلاتی که طولها وعرضهای نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع را می‌دهند، عبارتند از:

$$\begin{cases}x^{۲}+۲cx+ac-b=۰\\ y^{۲}-۲(a-۲c)y+a^{۲}-۴b=۰\end{cases}$$

از اینکه نقاط ماکزیمم ومینیمم روی دایره می‌باشند و این نقاط رؤس هذلولی بوده، پس این دایره، دایرهٔ اصلی می‌باشد ومرکز دایره وسط نقاط ماکزیمم ومینیمم بوده، روابط طول وعرض نقاط وسط رانوشته، داریم: $a=۵$ و $b=۶$ و $c=۱$

مسأله ۲۰۸: $y_{۱}-y_{۲}=۱$ بوده پس $y'_{۱}=y'_{۲}$ می‌باشد.

مسأله ۲۰۹: نقطهٔ ثابت‌را $A(۰ , a)$ روی محور yها فرض‌کرده وخط ثابت d را محور x ها گرفته مکان $C(x , y)$ به صورت $y=\frac{۱}{۲a}x^{۲}+\frac{a}{۲}$ یعنی سهمی می‌باشد.

مسأله ۲۱۰: ، تابع نزولی است (جواب اولاً

$y=-x+۸$(جواب ثالثاً

مبدأ را به $O'\Big|^{۲}_{۳}$ انتقال داده حجم برابر ۱۶π می‌باشد (جواب رابعاً

کافی است نشان دهید:

$y_{O}+y_{M}=y_{A}+y_{B}$ و $x_{O}+x_{M}=x_{A}+x_{B}$ (جواب خامساً

مسأله ۲۱۱: کافی است نشان دهید حاصل‌ضرب ریشه‌های طولهای نقاط تلاقی برابر یك می‌باشد یعنی:

$$x_{۱}x_{۲}x_{۳}x_{۴}=\frac{e}{a}=\frac{h-۱}{h-۱}=۱$$

مسألهٔ ۲۱۲: از رابطه $a^{\log_{a}^{b}}=b$ استفاده نمایید.

مسألهٔ ۲۱۳: خط $y=mx+h$ راکه در آن m ثابت و h متغیر است با منحنی قطع داده ، نقاط تلاقی را M و N و طولهای آنها را x' و x'' می‌نامیم. مختصات P وسط MN به صورت

$$P\left|\begin{array}{l} x=\frac{۱}{۲}\ (x'+x'')=\frac{-a^۲mh}{a^۲m^۲+b^۲} \\ \\ y=mx+h \end{array}\right.$$

P ، h را بین x و y حذف نموده معادلهٔ مکان ، به صورت $y=-\frac{b^۲}{a^۲m}x$ می‌باشد.

مسألهٔ ۲۱۴: اگر $M(x\ ,\ y)$ یك نقطه ازمنحنی باشد ،کافی است مینیمم:

$$OM^۲=Z=x^۲+y^۲=x^۲+۲x+۴$$

را بیابیم جواب $\sqrt{۳}$ می‌باشد.

مسألهٔ ۲۱۵: خط $y=mx$ را با منحنی قطع داده طولهای نقاط تلاقی را x' و x'' گرفته ، داریم:

و $B(x''\ ,\ mx'')$ و $A(x'\ ,\ mx')$

و $Z'=۰ \Longrightarrow m=\frac{۳}{۴}$ و $Z=AB^۲=\frac{۴۰۰(۱+m^۲)}{۵۲m^۲+۷۲m+۷۳}$

و ۲=طول مینیمم پاره خط AB و $-\frac{۴}{۳}$

۴=طول ماکزیمم پاره خط AB

مسألهٔ ۲۱۶: نقاط تلاقی خط $y=m$ ، با منحنی را $B(x''\ ,\ m)$ و $A(x'\ ,\ m)$ فرض کرده شرط تعامد OA و OB آن است که:

$$m_{OA}\times m_{OB}=-۱ \Longrightarrow \frac{m}{x'}\times\frac{m}{x''}=-۱$$

$$\Longrightarrow x'x''=-m^۲ \Longrightarrow m^۳-m^۲+۴=۰$$

نشان دهید معادلهٔ اخیر دارای یك ریشه منفی است یعنی یك خط پایین محور x ها وجود دارد.

مسألهٔ ۲۱۷: یکی از ریشه‌های $f'(x)=۰$ یعنی (-۳) در معادله صدق می‌کند ، این ریشه جواب مضاعف معادله است ، ریشهٔ سادهٔ معادله (۲) می‌باشد.

مسألهٔ ۲۱۸: به ازای ریشه‌های مشتق ماکزیمم و مینیمم توابع $y_۱$ و $y_۲$ را به دست آورده ، چون این توابع پیوسته می‌باشند ، عرض بیشتر ماکزیمم وعرض کمتر مینیمم تابع خواهد بود:

و $$y_{۱_{\text{Min}}} = q + \frac{۲P}{۳}\sqrt{\frac{-P}{۳}} = y_{۲_{\text{Min}}} = q'$$

$$y_{۱_{\text{Max}}} = q - \frac{۲P}{۳}\sqrt{\frac{-P}{۳}} = y_{۲_{\text{Max}}} = q' + \frac{۴P'^{۳}}{۲۷}$$

و $$\Longrightarrow q = q' + \frac{۲P'^{۳}}{۲۷}$$

$$P = -\frac{P'^{۲}}{۳} \Longrightarrow y = x^{۳} - \frac{P'^{۲}}{۳}x + \frac{۲P'^{۳}}{۲۷}$$

x	$-\infty$		$\frac{-P'}{۳}$		۰		$\frac{P'}{۳}$		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	$-$	$-$	۰	$+$	
y	$-\infty$	↗	$\frac{۴P'^{۳}}{۲۷}$	↘	$\frac{۲P'^{۳}}{۲۷}$	↘	۰	↗	$+\infty$

مسألهٔ ۲۱۹:

$$\left|\frac{x^{۲}-hx+۱}{x^{۲}+x+۱}\right| \leqslant ۳ \Longrightarrow -۳ \leqslant \frac{x^{۲}-hx+۱}{x^{۲}+x+۱} \leqslant ۳ \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} ۲x^{۲}+(h+۳)x+۲ \geqslant ۰ \\ ۴x^{۲}-(h-۳)x+۴ \geqslant ۰ \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \Delta_{۱} \leqslant ۰ \\ \Delta_{۲} \leqslant ۰ \end{cases} \Longrightarrow -۵ \leqslant h \leqslant ۱$$

مسألهٔ ۲۲۰:

$y = \frac{۲}{۳}x - \frac{۲}{۳}$ (جواب ثانیاً) ، $b = ۱$ و $a = -۲$ (جواب اولاً)

اگر مکان را با منحنی تلاقی دهیم، طولهای نقاط تماس خط $y = mx$ با منحنی به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} y = \frac{۲}{۳}x - \frac{۲}{۳} \\ y = \frac{(x-۱)^{۲}}{x-۳} \end{cases} \Longrightarrow x = ۱ \quad \text{و} \quad x = -۳$$

$$\Longrightarrow T\left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right. \quad و \quad T'\left|\begin{matrix}-۳\\-\frac{۸}{۳}\end{matrix}\right.$$

زیرا وقتی خط $y=mx$ حول نقطهٔ O دوران نماید تا به شکل مماس درآید، نقطهٔ P مزدوج o نسبت به نقاط نقاط تلاقی A و B که بین A و B می‌باشد، بر نقطهٔ تماس منطبق می‌گردد، به عبارت دیگر مکان مزدوج از نقطهٔ تماس می‌گذرد.

ثالثاً: معادلهٔ خطی را که از $N(\alpha\ ,\ \beta)$ با ضریب زاویهٔ m می‌گذرد نوشته با منحنی قطع داده Δ تلاقی را صفر قرارداده، داریم:

$$(\alpha^۲-۶\alpha+۹)m^۲-۲(\alpha\beta-۳\beta-۴\alpha+۴)m+\beta^۲-۸\beta=۰ \quad (۱)$$

شرط آنکه بتوان دو مماس برمنحنی رسم نمود، باید Δ' معادله (۱) مثبت باشد، یعنی:

$$\Delta'>۰ \Longrightarrow \alpha^۲-\alpha\beta+۳\beta-۲\alpha+۱>۰$$

$$\Longrightarrow (\alpha-۱)^۲-\beta(\alpha-۳)>۰$$

اگر $\alpha=x$ و $\beta=y$ بگیریم، داریم: $(x-۱)^۲-y(x-۳)>۰$ برای حل این نامعادله آن را مساوی صفر قرارداده. درنتیجه $y=\dfrac{(x-۱)^۲}{x-۳}$ که منحنی آن را رسم نموده این منحنی دستگاه مختصات را به دو ناحیه، نقاط خارج منحنی و نقاط داخل منحنی تقسیم می‌نماید، نقطهٔ مبدأ یعنی $O(۰\ ,\ ۰)$ که خارج منحنی می‌باشد درنامعادلهٔ بالا صدق می‌کند، پس نقاط خارج منحنی جواب مسأله می‌باشند، شرط آنکه دو خط مماس متعامد باشند، باید $m'm''=-۱$ یعنی حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ (۱) برابر (-۱) باشد و معادله مکان به صورت $(x-۳)^۲+(y-۴)^۲=۱۶$ می‌باشد.

رابعاً: $$y=\frac{f'(x)}{g'(x)}=۲x-۲$$

مسألهٔ ۲۲۱:

ثانیاً: $$\begin{cases} y=m \\ y=\dfrac{(x-۲)^۲}{x(x-۱)} \end{cases} \Longrightarrow (m-۱)x^۲-(m-۴)x-۴=۰$$

$$\begin{cases} S=\dfrac{m-۴}{m-۱}=۱-\dfrac{۳}{m-۱} \\ P=\dfrac{-۴}{m-۱} \end{cases} \Longrightarrow ۴S-۳P=۴$$

و $P(x\,,\,۰)$ و $\Longrightarrow ۴(x'+x'')-۳x'x''=۴$

$$\overline{PH'}\times\overline{PH''}=(x'-x)(x''-x)=K\Longrightarrow$$

$$x^۲-(x'+x'')x+x'x''=K$$

چون معادلهٔ درجه دوم فقط یك رابطهٔ مستقل از m دارد ، پس باید دو رابطهٔ:

$$\begin{cases}-x(x'+x'')+x'x''=K-x^۲\\ ۴(x'+x'')-۳x'x''=۴\end{cases}$$

یکسان باشند ، یعنی:

$\dfrac{-x}{۴}=\dfrac{۱}{-۳}=\dfrac{K-x^۲}{۴}$ یا $K=\dfrac{۴}{۹}$ و $x=\dfrac{۴}{۳}$

می‌دانیم اگر خط $y=m$ منحنی $y=\dfrac{ax^۲+bx+c}{a'x^۲+b'x+c'}$ را درنقاط M' و M'' قطع کند ، تصاویر M' و M'' روی محور x ها ، یعنی H' و H'' مزدوجند نسبت به تصاویر نقاط ماکزیمم و مینیمم روی x ها ، یعنی نقاط $D\left(\dfrac{۲}{۳}\,,\,۰\right)$ و $C(۲\,,\,۰)$ دوایر محیطی مستطیلهای $M'M''H''H'$ همواره بردایره ثابت به قطر CD ، یعنی دایره $\left(x-\dfrac{۴}{۳}\right)^۲+y^۲=\dfrac{۴}{۹}$ عمودند ، زیرا قطر CD به وسیلهٔ دوایرمحیطی به توافق تقسیم می‌شود.

مسألهٔ ۲۲۲:

اولاً : حاصل‌ضرب طولهای نقاط تلاقی را K قرار داده ضریب m را صفر قرارمی‌دهیم $b=a^۲$ می گردد.

ثانیاً : در رابطهٔ $x'x''=a$ اگر خط $y=m$ برمنحنی مماس باشد ، یعنی $x'=x''$ یا $x'^۲=a$ یا $x'=x''=\pm\sqrt{a}$ این ریشه‌ها که قرینهٔ یکدیگرند طولهای نقاط ماکزیمم ومینیمم می‌باشند.

ثالثاً : معادلهٔ دایره ثابت $x^۲+y^۲=۹$ می‌باشد.

مسألهٔ ۲۲۳: نقطهٔ تماس را T نامیده $T\left(x\,,\,\dfrac{۱-x^۲}{x^۲}\right)$ وداریم:

مماس $m=y'=-\dfrac{۲}{x^۳}=\dfrac{y_T-y_M}{x_T-x_M}=\dfrac{\dfrac{۱-x^۲}{x}-b}{x-a}\Longrightarrow$

$$x^۳-\frac{۳}{b+۱}x+\frac{۲a}{b+۱}=۰$$

شرط یک ریشه:

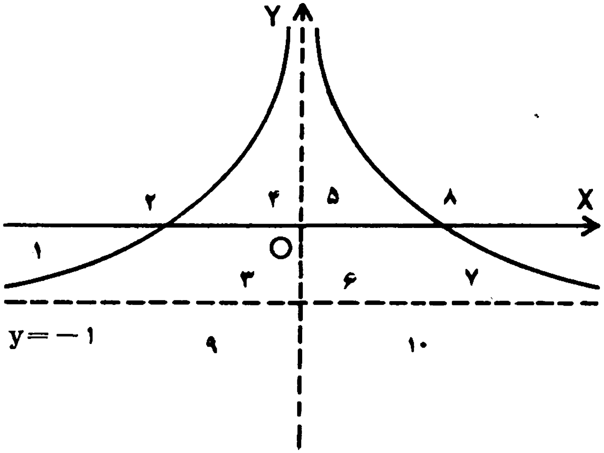
$$۴p^۳+۲۷q^۲>۰ \Rightarrow \frac{-۱+a^۲b+a^۲}{b+۱}>۰$$

اگر $a=x$ و $b=y$ بگیریم ، داریم:

$$\frac{-۱+x^۲y+x^۲}{y+۱}>۰$$

$$\begin{cases} x^۲y+x^۲-۱=۰ \\ y+۱=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{۱-x^۴}{x^۲} \\ y=-۱ \end{cases}$$

و



منحنی $y=\frac{۱-x^۲}{x^۲}$ کـه مربوط به $f(x,y)=x^۲y+x^۲-۱=۰$ می‌باشد ، دستگاه مختصات را به دوناحیه نقاط داخل منحنی وخارج منحنی تقسیم می‌کند:

$$f(۰,۰)=-۱<۰$$

چون نقطهٔ O خارج منحنی است ، پس خارج منحنی منفی وداخل منحنی مثبت است ، خط $y=-۱$ که مربوط به مخرج نامعادله است دستگاه مختصات را به دو ناحیهٔ نقاط بالای خط وپایین خط تقسیم می‌نماید بالای خط مثبت و پایین خط منفی می‌باشد و

جدول زیررا ، داریم:

۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	ناحیه
−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	$y+۱$
−	−	+	+	−	−	−	−	+	+	$-۱+x^۲y+x^۲$
+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	نتیجه

نقطهٔ M می‌تواند درنواحی ۱ و ۲ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰ تغییر نماید.

مسألهٔ ۲۲۴: اولاً به جای $\sin\alpha\cos\alpha$ ، $\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha$ و بـه جـای $\sin\alpha-\cos\alpha$ ، $\sqrt{۲}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{۴}\right)$ قرارداده با توجه به‌اینکه $\sin ۲\alpha$ و $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{۴}\right)$ بین ۱ — و ۱ می‌باشند ، داریم:

و $-\sqrt{۲}\leqslant y\leqslant\sqrt{۲}$ و $\frac{۱}{۲}\leqslant x\leqslant\frac{۳}{۲}$

معادله مکان : $y^۲=۲x-۱$

ثانیاً : اگـر $y'=-\frac{۱}{m}$ قراردهیم ، مختصات پای قائم $T\left(\frac{m^۲+۱}{۲}\ ,\ -m\right)$ می‌باشد ، دراین صورت ، داریم:

$$m^۳+۳m+۲a=۰$$

که این معادله یك ریشه دارد واگر $m=-۱$ باشد نقطهٔ $A(۰\ ,\ ۲)$ می‌گردد.

ثالثاً : $S=\frac{۵}{۶}$

مسألهٔ ۲۲۵:

$$y=x\pm\sqrt{x^۲+x+۱}\Longrightarrow y'=m=۱\pm\frac{۲x+۱}{۲\sqrt{x^۲+x+۱}}$$

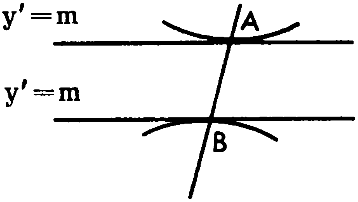
$$\Longrightarrow ۴[(m-۱)^۲-۱]x^۲+۴[(m-۱)^۲-۱]x$$

$$+۴(m-۱)^۲-۱=۰\qquad(۱)$$

$\Delta'>۰$ درنتیجه $۰<m<۲$ پس می‌توان‌دومماس باضریب زاویهٔ m برمنحنی رسم کرد،

$$y=x\pm\sqrt{x^۲+x+۱}\Longrightarrow(y-x)^۲=x^۲+x+۱$$
$$\Longrightarrow y^۲-۲xy-x-۱=۰$$
و $$\Longrightarrow ۲y'y-۲(y+y'x)-۱=۰$$
$$y'=m\Longrightarrow ۲(m-۱)y-۲mx-۱=۰\qquad(۲)$$

چون به جای y' ، m یعنی ضریب زاویهٔ مماس را قراردادیم ، باید به جای x و y طول وعرض نقاط تماس A و B را قراردهیم ، چون مختصات A و B درمعادله (۲) صدق می کنند. پس معادلهٔ (۲) ، معادلهٔ خط AB است.



طولهای نقاط A و B ریشهٔ معادله (۱) یعنی x' و x'' بوده ، اگرنقطهٔ C وسط AB باشد ، $x_C=\frac{۱}{۲}(x'+x'')=-\frac{۱}{۲}$ ، که چون در معادلهٔ (۲) قرار دهیم $y_C=-\frac{۱}{۲}$ می‌شود ، نقطهٔ $C\left(\frac{-۱}{۲},\frac{-۱}{۲}\right)$ مرکزتقارن هذلولی:

$$y^۲-۲xy-x-۱=۰$$

می باشد. برای حالتی‌که دوقائم با ضریب زاویهٔ m رسم می‌نماییم ،کافی است m را درحالات قبل به $-\frac{۱}{m}$ تبدیل نماییم.

مسألهٔ ۲۲۶: اگرمختصات پای قائم را به صورت $N\left|\begin{matrix}x\\ ۱-\frac{۱}{(x-۱)^۲}\end{matrix}\right.$ بنویسیم‌ضریب زاویهٔ قائم به صورت $-\frac{۱}{y'}=-\frac{(x-۱)^۳}{۲}$ درآمده به‌آسانی معادلهٔ:

$$(x-۱)^۶+(x-۱)^۲=۲$$

به دست می‌آید وجوابهای این معادله ۰ و ۲ می‌باشد.

مسألهٔ ۲۲۷: معادلهٔ داده شده را به صورت $y'y^{-\frac{۱}{۲}}=۱$ نوشته جواب:

$$y=\frac{۱}{۴}(x+۱)^۲$$

می‌باشد که منحنی آن برمحور x ها مماس است.

مسألهٔ ۲۲۸: $\frac{\pi d^۲h}{۸}$ (جواب .

مسألهٔ ۲۲۹: کافی است عرضهای نقاط منحنی اول را به اندازهٔ (۱+) انتقال دهیم.

مسألهٔ ۲۳۰: ابتدا نشان دهید اندازهٔ تحت قائم برمنحنی در نقطهٔ $M(x , y)$ برابر $y'y$ است ،آنگاه معادلهٔ منحنیها ، سهمیهای $y^۲=۲ax+c$ می‌باشند.

مسألهٔ ۲۳۱: چون مختصات مرکزدایره طرف اول معادله دایره را منفی می‌نماید ، داخل دایره منفی است، ازآنجا نتیجه بگیرید که M داخل دایره است.

مسألهٔ ۲۳۲: می‌دانیم ازنقاط خارج هموگرافیک $y=\frac{۱}{x}$ می‌توان دومماس برهموگرافیک رسم کرد. درمعادلهٔ $f(x , y)=xy-۱=۰$ داریم : $f(۰ , ۰)=-۱<۰$. چون مبدأ مختصات خارج هموگرافیك است، پس خارج منحنی منفی‌است، حال به‌آسانی می‌توانید ثابت‌کنید چرا $ab<۱$ می‌باشد.

مسألهٔ ۲۳۳: صورت و مخرج را بر ۵ بخش‌کرده ، $\frac{۴}{۵}=\cos\alpha$ و $\frac{۳}{۵}=\sin\alpha$ بگیرید و به‌جای $۱+\cos(x-\alpha)$ ، $۲\cos^۲\left(\frac{۱}{۲}x-\frac{\alpha}{۲}\right)$ قرار داده انتگرال را بیابید.

مسألهٔ ۲۳۴: نقطهٔ $C(۱ , ۱)$ مرکزدایره بوده به آسامی می‌توانید جواب را حدس بزنید.

مسألهٔ ۲۳۵: مکان دایره‌ای است‌به مرکزهذلولی و به شعاع $\sqrt{a^۲-b^۲}$ ، یعنی:

$$(x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۴$$

مسألهٔ ۲۳۶: جواب نقاط خارج وروی دایره $x^۲+y^۲=۱$ می‌باشد.

مسألهٔ ۲۳۷: در رابطهٔ داده شده x را به $x+۱$ و x را به $x-۱$ تبدیل کرده $f(x)=-۵x+۱$ می‌باشد.

مسألهٔ ۲۳۸: طبق تعریف مشتق $f'(۲)=\underset{x\to ۲}{\text{حد}}\frac{\sin\sqrt[۳]{x-۱}-\sin ۱}{x-۲}$ ، به جای :

$$\underset{x\to ۲}{\text{حد}}\ \sin\frac{\sqrt[۳]{x-۱}-۱}{۲}=\underset{x\to ۲}{\text{حد}}\ \frac{\sqrt[۳]{x-۱}-۱}{۲}$$

را قرار داده ، جواب $\frac{۱}{۳}\cos ۱$ می‌باشد.

مسألهٔ ۲۳۹:

$$y'=-۶۰\sin^{۳}[\cos^{۳}(tg^{۵}x)]\cos[\cos^{۳}(tg^{۵}x)]$$
$$\times\cos^{۲}(tg^{۵}x)\sin(tg^{۵}x)tg^{۴}x(۱+tg^{۲}x)$$

مسألهٔ ۲۴۰:

$$u_n=\mathrm{Arc}tg\frac{۱}{۱+n+n^{۲}}=\mathrm{Ar\ c}tg\ \frac{(n+۱)-n}{۱+n(n+۱)}$$
$$=\mathrm{Arc}tg(n+۱)-\mathrm{Arc}tg n$$

و

$$S_n=\mathrm{Arc}tg(n+۱)-\mathrm{Arc}tg ۱$$

$$\underset{n\to+\infty}{\text{حد}}\ S_n=\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴}=\frac{\pi}{۴}$$

مسألهٔ ۲۴۱:

$$\underset{n\to+\infty}{\text{حد}}\ \log\cos\frac{x}{۲}\times\cos\frac{x}{۴}\times\cdots\times\cos\frac{x}{۲^{n}}=$$

$$\underset{n\to+\infty}{\text{حد}}\ \log\frac{\sin x}{۲^{n}\sin\frac{x}{۲^{n}}}=\underset{n\to+\infty}{\log}\frac{\sin x}{۲^{n}\times\frac{x}{۲^{n}}}=\log\frac{\sin x}{x}$$

مسألهٔ ۲۴۲: ازطرفین انتگرال گرفته به‌جای ثابت $\mathrm{Arc}tg c$ قرار داده ، داریم:

$$y=\frac{x+c}{۱-cx}$$

اگرجمله xy حذف شود در هذلولی به دست‌آمده $a=b$ می‌گردد ، یعنی هذلولی متساوی‌القطرین است.

مسألهٔ ۲۴۳: به جای y و y' و y'' درمعادلهٔ دیفرانسیل قرارداده ، داریم:

$$(۶a+b)x^{۲}+۲(۳b+c)x+۴c+۳d\equiv ۰$$
$$b=-۶a \text{ و } c=۱۸a \text{ و } d=-۲۴a$$

مسألهٔ ۲۴۴: جواب $y=\frac{۲x^{۲}+۲x-۱}{x^{۲}}$ وجدول تغییرات به صورت زیرمی‌باشد:

x	$-\infty$		$\frac{-۱-\sqrt{۳}}{۲}$		۰		$\frac{-۱+\sqrt{۳}}{۲}$		۱		$+\infty$
y'			$-$		∞		$+$		۰	$-$	
y	۲	↘	۰	↘	$-\infty \| -\infty$	↗	۰	↗	۳	↘	۲

مسألهٔ ۲۴۵: توجه نمایید تابع اولی $۲yy'^{۲}+y^{۲}y''$ برابر $y^{۲}y'$ است ، جواب مسأله $y=\sqrt[۳]{-x^{۳}+۳x+۳}$ می‌باشد.

مسألهٔ ۲۴۶:

جواب ۱) $\frac{-\frac{۱}{۲}x}{x^{۲}+۲}+c$ ، جواب ۲) $\frac{-۵x-۴}{x^{۲}+x-۲}+c$

و $۳)\ \therefore\ I=\int\sqrt{\frac{۱-\sqrt{x}}{x}}\,dx$ و $\sqrt{x}=t \Longrightarrow x=t^{۲}$

$dx=۲tdt$ و $I=-\frac{۴}{۳}(۱-\sqrt{x})\sqrt{۱-\sqrt{x}}+c$

و $۴)\ \therefore\ I=\int\frac{x^{۲}-a^{۲}}{(x^{۲}+a^{۲})^{۲}}\,dx$ و $x=a\,tg\,t$

$$I=-\frac{۱}{a}\int cos\,۲t\,dt=-\frac{۱}{۲a}\,sin\,۲t+c$$

$$=-\frac{۱}{a}\times\frac{tg\,t}{۱+tg^{۲}t}+c=-\frac{x}{x^{۲}+a^{۲}}+c$$

مسألهٔ ۲۴۷:

و $۰\leqslant\sqrt{x-۱}$ و $\sqrt{y-۱}\leqslant ۱ \Longrightarrow ۲\geqslant x\geqslant ۱$

$۲\geqslant y\geqslant ۱ \Longrightarrow \frac{۱}{۲}\leqslant\frac{y}{x}\leqslant ۲ \Longrightarrow$ مینیمم $\frac{y}{x}=\frac{۱}{۲}$

(ضمناً توجه‌نمایید $A(۲,\ ۱)$ دررابطهٔ داده شده صدق می‌کند)

مسألهٔ ۲۴۸: طرفین وسطین نموده ازطرفین مشتق بگیرید ، به نتیجه خواهید رسید.

مسألهٔ ۲۴۹: اولاً : معادله را نسبت به λ ازدرجهٔ دوم مرتب‌کرده Δ' را مساوی‌صفر قرارداده معادلهٔ پوش به‌صورت $y^{۲}=\frac{x-x^{۳}}{x+۲}$ می‌باشد.

$$y=\sqrt{\frac{x-x^۳}{x+۲}} \Longrightarrow y'=\frac{-x^۳-۳x^۲+۱}{(x+۲)^۲\sqrt{\frac{x-x^۳}{x+۲}}}=۰$$

$$\Longrightarrow x^۳+۳x^۲-۱=۰$$

شرط معین بودن تابع $-۲ < x \leqslant -۱$ و $۰ \leqslant x \leqslant ۱$ می‌باشد اگر منحنی $Z=x^۳+۳x^۲-۱$ را رسم نماییم ملاحظه می‌شود یک جواب معادله درفاصلهٔ $(۰ , ۱)$ بوده که مورد قبول است ، چون $x=\frac{۱}{X}$ قراردهیم ، داریم:

$x \neq ۰/۵$ و $X=h\,cos\alpha=۲cos۲۰^\circ=۱/۹۸$ و $X^۳-۳X-۱=۰$

x	-۲		-۱		۰		$۰/۵$		۱
y'	$-\infty$	$-$	$-\infty$	////	$+\infty$	$+$	۰	$-$	$-\infty$
y	$+\infty$	↘	۰	////	۰	↗	$۰/۳۸$	↘	۰

ثانیاً : شرط تعامد دو دایره

$$\begin{cases} x^۲+y^۲+ax+by+c=۰ \\ x^۲+y^۲+a'x+b'y+c'=۰ \end{cases}$$

آن است که $aa'+bb'-۲c-۲c'=۰$ باشد اگر این شرط را نسبت به λ از درجهٔ دوم متحد صفرقراردهیم ، معادلهٔ دایره ثابت به صورت $x^۲+y^۲+۲x-۱=۰$ می‌باشد.

مسألهٔ ۲۵۰: اگر a و b و c و $\cdots$ و k و $l > ۰$ باشد داریم:

$$\frac{a+b+c+\cdots+K+l}{n} \geqslant \sqrt[n]{abc\cdots kl} \Longrightarrow$$

و

$$\frac{a+b+c}{۳} \geqslant \sqrt[۳]{abc} \quad \text{و} \quad \sqrt[۳]{۵۰}\,y \leqslant \frac{۴}{۳}$$

(این مقدار به‌ازای $x^۲=\frac{۱}{۳}$ به دست می‌آید) $y=\frac{۴}{۳\sqrt[۳]{۵۰}}$ ماکزیمم

مسألهٔ ۲۵۱: اگرسه نامساوی $\left(tg\frac{\alpha}{۲}-tg\frac{\beta}{۲}\right)^۲ \geqslant ۰$ و $\left(tg\frac{\beta}{۲}-tg\frac{\gamma}{۲}\right)^۲ \geqslant ۰$ و $\left(tg\frac{\alpha}{۲}-tg\frac{\gamma}{۲}\right)^۲ \geqslant ۰$ را باهم جمع نماییم ، داریم:

$$tg^{۲}\frac{\alpha}{۲}+tg^{۲}\frac{\beta}{۲}+tg^{۲}\frac{\gamma}{۲}\geqslant ۱$$

در نتیجه مینیمم برابر (۱) می‌باشد.

مسألهٔ ۲۵۲:

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{۲}\implies tg\alpha tg\beta+tg\alpha tg\gamma+tg\beta tg\gamma=۱$$

چون حاصل جمع عوامل مثبت بالا ثابت می‌باشد حاصل‌ضرب $tg^{۲}\alpha tg^{۲}\beta tg^{۲}\gamma$ وقتی ماکزیمم است که:

$$\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{۶}\implies \text{ماکزیمم}\; tg\alpha tg\beta tg\gamma=\frac{\sqrt{۳}}{۹}$$

مسألهٔ ۲۵۳: $\frac{\sqrt{۳}}{۹}$ (جواب

مسألهٔ ۲۵۴:

$$A=(۲x-۲y)^{۲}+(x-۳)^{۲}+۵\implies \text{مینیمم}\; A=۵$$

مسألهٔ ۲۵۵: اگر از $y=sin x+sin ۲x+\cdots+sin nx$ ، مشتق بگیریم S_n به‌دست می‌آید برای محاسبه y طرفین را در $۲sin\frac{x}{۲}$ ضرب کرده ، داریم:

$$y=\frac{cos\frac{x}{۲}-cos\left(nx+\frac{x}{۲}\right)}{۲sin\frac{x}{۲}}$$

و

$$S_n=y'=\frac{-۱+(n+۱)cos nx-n cos(nx+x)}{۲-۲cos x}$$

برای محاسبهٔ A کافی است در S_n به جای x ، صفر قرار دهیم با استفاده از دستور هوپیتال داریم : $A=\frac{n}{۲}(n+۱)$.

مسألهٔ ۲۵۶: چون تابع f روی فاصلهٔ بسته $[a , b]$ مشتق پذیر است، پس طبق قضیهٔ ۳۲ صفحهٔ ۳۹ روی این فاصله متصل است و طبق قضیهٔ ۳۴ (صفحهٔ ۴۳) روی این فاصله دارای یک ماکزیمم مطلق و یک مینیمم مطلق می‌باشد ، ثابت می‌کنیم که نمی‌تواند $f(a)$ ماکزیمم مطلق و $f(b)$ مینیمم مطلق باشد. اگر $f(a)$ ماکزیمم مطلق باشد ، داریم:

$$f(a) \geqslant f(x) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant ۰ \Rightarrow f'_+(a) \leqslant ۰ \\ a<x<b \end{cases}$$

اگر $f(b)$ مینیمم مطلق باشد ، داریم:

$$f(b) \leqslant f(x) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} \leqslant ۰ \Rightarrow f'_-(b) \leqslant ۰ \\ a<x<b \end{cases}$$

اما طبق فرض $f'(a)f'(b) < ۰$ بنابراین $f'(a)$ و $f'(b)$ نمی‌توانند صفر باشند ، لذا باید $f'(a) < ۰$ و $f'(b) < ۰$ باشد ، در این صورت $f'(a)f'(b) > ۰$ بوده و این خلاف فرض است به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که $f(a)$ نمی‌تواند مینیمم مطلق و $f(b)$ ماکزیمم مطلق باشد ، لذا عددی مانند $c \in (a , b)$ وجود دارد که $f(c)$ ماکزیمم یا مینیمم مطلق باشد و مطلق آنچه در قضیهٔ ۳۳ (صفحه ۴۰) استدلال نمودیم باید $f'(c) = ۰$ باشد.

مسألهٔ ۲۵۷: $y_۱ = ۲\sin^۲ x - ۴\cos^۲ x$

$\sin^۲ x$ را به‌دست آورده بین صفر و (۱) قرار دهید درنتیجه $-۴ \leqslant y_۱ \leqslant ۲$ می‌باشد، پس $D_{y_۱} = [-۴ , ۲]$

$$y_۲ = \sin^۲ x - ۲\sin x \cos x + ۴\cos^۲ x \Rightarrow$$

و $$y_۲ = \frac{۳}{۲}\left(\cos ۲x - \frac{۲}{۳}\sin ۲x\right) + \frac{۵}{۲}$$

و $$\frac{۲}{۳} = tg\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \quad \text{و} \quad \cos\varphi = \frac{۳}{\sqrt{۱۳}}$$

$$\cos(۲x+\varphi) = \frac{۲y_۲ - ۵}{\sqrt{۱۳}} \Rightarrow \frac{۵-\sqrt{۱۳}}{۲} \leqslant y_۲ \leqslant \frac{۵+\sqrt{۱۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow D_{y_۲} = \left[\frac{۵-\sqrt{۱۳}}{۲} , \frac{۵+\sqrt{۱۳}}{۲}\right]$$

$$y_۳ = \sin^۴ x + \cos^۴ x \Rightarrow \frac{۱}{۲} \leqslant y_۳ \leqslant ۱ \Rightarrow D_{y_۳} = \left[\frac{۱}{۲} , ۱\right]$$

و $$y_۴ = \frac{x}{x^۲+۱} \Rightarrow y_۴ x^۲ - x + y_۴ = ۰$$

$$\Delta \geqslant ۰ \Longrightarrow \frac{-۱}{۲} \leqslant y_۴ \leqslant \frac{۱}{۲} \Longrightarrow D_{y_۴} = \left[-\frac{۱}{۲} , \frac{۱}{۲}\right]$$

و $y_۵ = \sqrt{۱-x^۲}$ و $y_۵ \geqslant ۰$

$$x^۲ = ۱ - y_۵^۲ \geqslant ۰ \Longrightarrow \begin{cases} -۱ \leqslant y_۵ \leqslant ۱ \\ y_۵ \geqslant ۰ \end{cases} \Longrightarrow ۰ \leqslant y_۵ \leqslant ۱$$

$$\Longrightarrow D_{y_۵} = [۰, ۱]$$

$$y_۶ = ۱ + \sqrt{-x^۲ + ۲x}$$

$y_۶ \geqslant ۱$ بوده ، Δ معادلهٔ درجه دوم نسبت به x را بزرگتر مساوی صفر قرار داده ، داریم: $۰ \leqslant y_۶ \leqslant ۲$ پس $D_{y_۶} = [۱ , ۲]$

$$y_۷ = x \pm \sqrt{-x^۲ + ۳x - ۲} \Longrightarrow \frac{۳ - \sqrt{۲}}{۲} \leqslant y_۷ \leqslant \frac{۳ + \sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Longrightarrow D_{y_۷} = \left[\frac{۳ - \sqrt{۲}}{۲} , \frac{۳ + \sqrt{۲}}{۲}\right]$$

و $\begin{cases} y_۸ = tg\,x + cotg\,x \\ ۰ < x < \frac{\pi}{۲} \end{cases}$ و $tg\,x = X$

$$\begin{cases} y_۸ = X + \frac{۱}{X} \\ y_۸ > ۰ \end{cases} \Longrightarrow y_۸ \geqslant ۲ \Longrightarrow D_{y_۸} = [۲ , +\infty[$$

و $\begin{cases} y_۹ = \sqrt{x^۳ + ۱} \\ y_۹ \geqslant ۰ \end{cases}$

$$x^۳ \geqslant -۱ \Longrightarrow y_۹^۲ - ۱ \geqslant -۱$$

$\Longrightarrow y_۹^۲ \geqslant ۰$ (همواره برقرار است)

پس کافی است $y_۹ \geqslant ۰$ باشد یعنی $D_{y_۹} = [۰ , +\infty[$.

مسألهٔ ۲۵۸:

$$f(x_۱) = f(x_۲) \Longrightarrow (x_۱ , ۱) = (x_۲ , ۱) \Longrightarrow x_۱ = x_۲$$

$\Longrightarrow$ تابع f یك به یك است

تابع f پوششی نیست ، زیرا $(۲ , ۳) \in Z^۲$ درضابطه تابع صدق نمی‌کند:

$$g(x , y)=g(x' , y') \Longrightarrow x+y\sqrt{۲}=x'+y'\sqrt{۲}$$

و $\Longrightarrow x-x'+(y-y')\sqrt{۲}=۰ \Longrightarrow x-x'=۰$

$y-y'=۰ \Longrightarrow x=x'$ و $y=y' \Longrightarrow$ تابع g یك به یك است

تابع g پوششی نیست زیرا مثلا $\frac{۴}{۵}\in R$ درضابطه تابع صدق نمی‌کند:

تابع h یك به یك نیست زیرا ، هرعدد صحیح مانند ۲ در نامساویهای $۱/۵<۲<۲/۵$ و $۱/۴<۲<۲/۴$ و غیره صدق می‌کند ، یعنی به ازای یك مقدار h برای x جوابهای متعدد به دست می‌آید ، واضح است که تابع h پوششی می‌باشد.

تابع $g\circ f : Z\to R$ با ضابطه $g\circ f(x)=x+\sqrt{۲}$ یك به یك بوده اما پوششی نیست.

مسألهٔ ۲۵۹: تابع f یك به یك نیست ، زیرا $f(۷ , ۲)=۵$ و $f(۶ , ۱)=۵$ ، اما این تابع پوششی است، زیرا هرعدد حقیقی‌را می‌توان به‌تفاضل دوعدد تبدیل نمود.

تابع g یك به یك بوده ولی پوششی نیست.

تابع $f\circ g : R\to R$ باضابطهٔ $f\circ g(x)=۲x$ یك به یك و پوششی‌است.

تابع $g\circ f : R^۲\to R^۲$ با ضابطهٔ $g\circ f(x , y)=(x-y , y-x)$ نه یك به یك است و نه پوششی.

مسألهٔ ۲۶۰: تابع f نه یك به یك است و نه پوششی، تابع g هم یك به یك است‌وهم پوششی است ، تابع h پوششی بوده ولی یك به یك نمی‌باشد.

مسألهٔ ۲۶۱: معادلهٔ $y^۳-Xy+Y=۰$ چون به‌ازای هر X و Y برای y حداقل یك جواب به دست می‌آید (زیرا معادلهٔ درجه سوم حداقل یك جواب دارد) پس تابع θ پوششی است ، چون معادلهٔ درجه سوم فوق با شرط $-۴X^۳+۲۷Y^۲\leqslant ۰$ می‌تواند بیشتر ازیك جواب داشته باشد. بنابراین تابع θ یك به یك نمی‌باشد.

مسألهٔ ۲۶۲: $g\circ f : A \longrightarrow C$ و $g[f(x_۱)]=g[f(x_۲)]$

چون تابع g یك به یك است ، پس $f(x_۲)=f(x_۲)$ و چون تابع f یك به یك است ، پس $x_۱=x_۲$ بنابرین:

$$g\circ f(x_۱)=g\circ f(x_۲) \Longrightarrow x_۱=x_۲$$

یعنی تابع $g\circ f$ یك به یك می‌باشد ، برای آنکه ثابت نماییم $Z=g[f(x)]$ پوششی است. کافی است ثابت نماییم اگر به Z عددی مانند $\alpha\in C$ بدهیم ، برای x عددی مانند $\beta\in A$ به دست می‌آید . این موضوع هم به آسانی از اینکه توابع g و f پوششی می‌باشند ، استدلال می‌گردد.

مسألهٔ ۲۶۳:

$$f(x)=\sqrt{۱-x^۲} \quad و \quad ۱-x^۲ \geqslant ۰ \Longrightarrow -۱ \leqslant x \leqslant ۱$$

به‌آسانی می‌توان بررسی کرد اگر $D_f=[۰ , ۱]$ یا $D_f=[-۱ , ۰]$ باشد، تابع f یك به یك بوده یعنی معکوس پذیراست و $f^{-۱}(x)$ به ترتیب برابراست با:

$$\sqrt{۱-x^۲} \quad و \quad -\sqrt{۱-x^۲}$$

مسألهٔ ۲۶۴:

$$y=x+\frac{۱}{x} \Longrightarrow y'=\frac{x^۲-۱}{x^۲}$$

چون به ازای $x>۱$ تابع پیوسته و اکیداً صعودی می‌باشد، پس معکوس‌آن وجود دارد وبه صورت $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۲}(x+\sqrt{x^۲-۴})$ مـی‌باشد و به همین دلیل تابع معکوس به‌ازای $x<-۱$ وجود داشته‌به‌صورت $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۲}(x-\sqrt{x^۲-۴})$ می‌باشد.

مسألهٔ ۲۶۵:

$$y=x^۳+۲x-۱ \Longrightarrow x^۳+۲x-(۱+y)=۰$$

چون $P=۲>۰$ می‌باشد به ازای $\forall y \in R$ معادلهٔ درجهٔ سوم فقط یك جواب دارد، پس تابع‌یك به یك ونیزپوششی است وتابع معکوس به صورت زیرمی‌باشد:

$$f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{\frac{۱+x}{۲}+\sqrt{\frac{۸}{۲۷}+\frac{(۱+x)^۲}{۴}}}$$

$$+\sqrt[۳]{\frac{۱+x}{۲}-\sqrt{\frac{۸}{۲۷}+\frac{(۱+x)^۲}{۴}}}$$

از انتشارات:
فرهنگ آموزشی و کتابخانه‌ها

چاپ و توزیع:
وزارت فرهنگ و ارشاد اسلامی سازمان چاپ و انتشارات

۴۰۰ ریال