مسابقه‌ها
کنکورها و المپیادهای ریاضی

نوشته پرویز شهریاری

مسابقه‌ها، کنکورها و المپیادهای ریاضی

نوشتهٔ

پرویز شهریاری

انتشارات جاودان خرد

مقدمه

در دهه‌های آغازین «رونسانس» اروپایی، و به خصوص در ایتالیا، محفل‌های متعددی از روشنفکران، صنعت‌کاران و هنرمندان، این‌جا و آن‌جا، و اغلب جنب دکان‌ها و مغازه‌های صنعت‌کاران جمع می‌شدند و دربارهٔ مسأله‌های مورد نیاز صنعت و هنر روبه رشد زمان خود بحث می‌کردند. درهمین محفل‌ها بود که مسأله‌های حل نشده‌ای از ریاضیات و فیزیك به مسابقه گذاشته می‌شد و گاه برای حل کنندهٔ آن‌ها هم، جایزه‌هایی در نظر می‌گرفتند. این محفل‌های علمی، هیچ ربطی به «دانشگاه‌ها» و «استادان دانشگاه» نداشتند. چرا که در «دانشگاه‌ها» تنها به بحث‌های نظری و کلامی می‌پرداختند و کاری به نیازهای زندگی مردم و صنعت‌کاران نداشتند. آن‌ها، حتی به این فعالیت‌های علمی به دیدهٔ تحقیر می‌نگریستند و در شأن و مقام خود نمی‌دانستند به این بحث‌ها و مسابقه‌های علمی «آلوده» شوند.

در ایران سده‌های سوم و چهارم و پنجم هجری هم، چنین محفل‌هایی وجود داشت. در این‌جا، «دکان‌های وراقی» (یعنی کتابفروشان)، محل مناسبی برای بحث‌ها و مناظره‌های علمی بود و روشنفکران و دانشمندان زمان را به «مسابقه» دعوت می‌کرد و انگیزه‌ای جدی برای پیشرفت دانش بود. در ایران هم، این محفل‌های علمی، هیچ ربطی به آموزش‌های رسمی و مکتب‌های سنتی نداشت و، جدا از آن‌ها و در برخورد با واقعیت

و نیاز زندگی، کار خلاق خود را ادامه می‌داد.

ولی به تدریج، هم آن و هم این، و هر کدام به دلایلی، از رونق افتاد و منسوخ شد و این، به ویژه برای پرورش استعدادهای جوان، یک فاجعه بود.

...

از زمانی که دوباره سنت مسابقه‌های علمی و به مبارزه طلبیدن استعدادهای جوان، کم و بیش از آغاز سدهٔ بیستم، احیا شد، دوباره امکانی برای عام‌تر شدن دانش (و به‌ویژه ریاضیات) پدید آمد و زمینه برای گسترش دانش در سطح جامعه فراهم شد. این بار، مسابقه‌ها و زورآزمائی‌ها، در سطحی گسترده‌تر و اندیشیده‌تر نسبت به سنت گذشتهٔ دور، و البته باشرکت نسبی دانشگاه‌ها بود و «استادان دانشگاه‌ها» هم، گرچه درابتدا با بی‌میلی و لنگ‌لنگان ولی به هرحال سهم شایستهٔ خود را در این مسیر اداکرده و می‌کنند.

...

مسابقه‌ها، کنکورها و المپیادهای ریاضی، چه درسطح ملی و چه درسطح جهانی، نقش عمده‌ای در بارور کردن و شکفتن استعدادهای جوان دارند و، اگر از برخی مسابقه‌های سطحی و وظیفه‌ای که نه به‌خاطر کشف استعدادها، بلکه به خاطرفرار ازتنگناهای مربوط به هجوم جوانان به‌طرف تحصیل دانشگاهی انجام می‌شود، بگذریم، این مسابقه‌ها والمپیادها توانسته‌اند خون تازه‌ای در رگ‌های جوانان وارد کنند و این اعتماد را در آن‌ها به‌وجود آورند که توانائی روبه‌رو شدن با جوانان سایر نقطه‌های جهان را دارند و این، می‌تواند نقشی عمده در ایجاد اعتماد به نفس، چه درسطح شخصی و چه درسطح ملی، داشته باشد.

این مسابقه‌ها، به خصوص غنای ریاضیات دبیرستانی را نشان داد و روشن کرد، تنها با به خاطرسپردن دستورها و آلگوریتم‌ها، نمی‌توان

به «هنر کشف» دست یافت. برای دست‌یابی به «هنر کشف»، علاوه‌بر آشنائی بادستورها وقضیه‌ها، باید عمق وماهیت مفهوم‌ها را شناخت و، سپس، باحوصله وتحمل یك دانشمند، به تك‌تك جنبه‌های کاربردی این مفهوم پرداخت وبا مسأله‌های متنوع وبی‌پایان ناشی از آن‌ها آشناشد.

...

اگرمسابقه رابه معنای عام‌آن‌بگیریم، این کتاب شامل مسأله‌های مسابقه‌ای است. برخی از مسأله‌ها، درطول تاریخ، استعدادها رابرای حل، به مبارزه طلبیده است و برخی دیگر، درمسابقه‌ها، کنکورها یا المپیادها برای حل پیشنهاد شده است.

کوشش مؤلف دراین جهت بوده است که ازتکرار مسأله‌هایی که درکتاب‌های دیگرآمده،اجتناب کند ویا، دست کم، راه‌حل تازه‌تر وساده‌تری برای آن‌ها ارائه دهد. ضمن حل مسأله‌ها، کـه کوشش شده است برای دانش آموز دبیرستانی قابل دسترس باشد، نکته‌های لازم تاریخی یاکاربردی‌آمده است و، دربرخی موردها، از مسأله‌های مشابه ویا تعمیم آن‌ها یاد شده است.

توصیهٔ مؤلف به دانش آموزان عزیزعلاقه‌مند این است که، به سادگی وفوری، به بخش حل مسأله‌ها مراجعه نکنند؛ حتی اگرمسأله را مشکل می‌پندارد، از میدان درنرود، بـه خودش وبه استعداد خودش اعتماد داشته باشد. تنها وقتی باید به‌بخش حل مسأله‌ها مراجعه‌کنید که قانع شده باشید، ازحل مسأله عاجزید و یا می‌خواهید راه حل خود را با راه حل کتاب مقایسه‌کنید.

مؤلف ادعاندارد که راه‌حل کتاب، ساده‌ترین وزیباترین راه‌حل است. شاید این راه حل ساده وزیبا، نزد شماباشد.

فهرست

۱. اندیشه کارسازتر ازفرمول ۹
۲. رازهای درون عدد. شگفتی‌های شکل ۲۱
۳. ازمسابقه‌ها،کنکورها والمپیادهای ریاضی ۳۶
§ ۱. نظریهٔ عددها، جبر، مثلثات، آنالیز ۳۶
§۲. هندسهٔ روی صفحه ۵۰
§۳. هندسه درفضا ۵۶
حل. راهنمایی، پاسخ ۶۵

۱. «اندیشه» کارسازتر از «فرمول»

۰۱ در زمان «آفرین برشویك سرباز» ، دیـوانه‌ای وجود داردکه مدعی است، در داخل کرهٔ زمین،کرهٔ دیگری وجود داردکه به‌مراتب ازکرهٔ زمین بزرگتراست. دراین‌جا، به‌ادعای اوکاری نداریم، ولی‌ادعای دیگری داریم‌که، به ظاهر،با ادعای بالا تفاوتی‌ندارد، باوجود این، ادعای درستی‌است: درمکعب می‌توان تونلی ایجادکرد، به نحوی‌که بتوان‌از مسیر آن، مکعب بزرگتری را عبور داد. چگونه؟

۰۲ و. فلیس دانشمندآلمانی، زمانی، رابطهٔ عجیب $A = ۲۳x + ۲۸y$ راکشف‌کرد که، درآن، x و y، عددهای درست‌اند (مثبت یـا منفی). این رابطه چنـان است‌که، شما می‌توانید باقراردادن عددهای مناسبی به جای x و y، هرتاریخی‌از زندگی یك‌آدم راپیدا کنید. چه «رازی» در«رابطهٔ فلیس» وجود داردکه می‌توان هرعدد دلخواه درستی را ازآن به دست‌آورد؟

۰۳ ۱۰۰ جهان‌گرد وارد سویس شدند. ۱۰ نفر آن‌ها، نه زبان آلمانی می‌دانند ونه زبان فرانسوی. ۷۵ نفر بـا زبان آلمانی و ۸۳ نفربا زبان فرانسوی آشنا هستند. در بین جهان‌گردان، چند نفر، هردوزبان را می‌دانند؟

۰۴ ۱۰ مکعب داریم‌که چه از نظر اندازه وچه از نظرشکل ظاهری، هیچ تفاوتی با هم ندارند. چندتاازآن‌ها ازآلومی‌نیوم وبقیه ازفلز سنگین‌تری ساخته شده‌اند. می‌خواهیم تعداد مکعب‌های سنگین‌تر را، تنها با ۶ بار استفادهٔ ازترازو پیداکنیم.

۰۵ ۳۴۰ تیم‌فوتبال‌برای‌کسب قهرمانی باهم بازی‌کردند. مسابقه‌ها باروش‌بازی‌های المپیك انجام می‌گرفت. تیم‌ها، طبق‌قرعه، به‌گروههای دوتیمی تقسیم، تیم‌های بازنده ازدور مسابقه خارج و تیم‌های برنده، دوباره به‌گروه‌های دوتیمی تقسیم می‌شوند. اگر دوتیم با هم

مساوی می‌کردند، برنده را در وقت اضافی معین می‌کنند. اگر درمرحله‌ای تعداد تیم‌ها فرد باشد، یکی از تیم‌ها (با قرعه‌کشی)، می‌تواند بدون بازی، به مرحلهٔ بعدی راه یابد. چند مسابقه باید انجام گیرد، تا برندهٔ جام معلوم شود؟

۰۶ ۹ سکه داریم که یکی از آن‌ها تقلبی و اندکی سبک‌تر از هر سکه واقعی است. درضمن، دو ترازو داریم که یکی از آن‌ها دقیق و دیگری غیردقیق است: اگر در دوکفهٔ ترازوی غیر-دقیق، به تعداد مساوی سکه قرار دهیم، حتی درحالتی که یکی ازسکه‌ها تقلبی باشد، شاهین آن، تراز می‌ایستد واگر دریکی از کفه‌ها، سکهٔ بیشتری گذاشته شود، انحراف شاهین درست به همان اندازهٔ انحراف شاهین در ترازوی دقیق است. ترازوها کاملاً شبیه‌اند و نمی‌دانیم کدامیک از آن‌ها دقیق است. دست‌کم چندبار باید از ترازوها استفاده‌کرد تا سکهٔ تقلبی شناخته شود؟

۰۷ ازگفت وشنود بین دو ریاضی‌دان:

ـ چندتا بچه دارید و چندساله‌اند؟

ـ سه پسر دارم. خوشبختانه امروز روزتولد هرسه‌تای آن‌هاست. اگرسال‌های سن آن‌ها را درهم ضرب کنی، حاصل‌ضرب برابر ۳۶ می‌شود. اگرهمین سه عدد را باهم‌جمع کنی، همان عددی به دست می‌آیدکه امروز درتقویم نوشته شده است.

ریاضی‌دان اول، اندکی اندیشید و بعدگفت:

ـ آن‌چه به من گفتید، برای پیداکردن سن بچه‌های شماکافی نیست.

ـ کاملاً حق باشماست. فراموش‌کردم بگویم، وقتی پسرکوچکم متولد شد، دو پسر بزرگم، به طرف دیگرشهر رفتند تاپدربزرگ ومادربزرگ راباخبرکنند.

ـ متشکرم، حالا دیگر سن بچه‌های شما را می‌دانم.

آیا شما هم می‌توانید بگویید، سن هریك ازپسران ریاضی‌دان چقدر بوده است ودر چه روزی ازماه، به دنیا آمده‌اند؟

۰۸ با سه نفر آشنا شوید: آرش، برزو و بهرام. یکی ازآن‌ها آهنگر است، دومی باغبان وسومی آموزگار. یکی در بهبهان زندگی می‌کند، دومی دربوشهر و سومی درآمل. می‌خواهیم بدانیم، چه‌کسی درکجا زندگی می‌کند وچه حرفه‌ای دارد! تنها می‌دانیم:

۱) بهرام به‌ندرت به‌بهبهان می‌رود، اگرچه همهٔ نزدیکان اودرآن‌جا زندگی می‌کنند؛

۲) درمورد دونفر ازاین سه نفر، نام حرفه ونام شهری‌که درآن زندگی می‌کنند، با همان حرف اول نام آن‌ها آغاز می‌شود؛

۳) زن‌آهنگر، خواهرکوچکتر بهرام است.

۰۹ کاوه، داریوش، مهرداد وسیروس، چهار هم‌شهری ما هستند؛ یکی از آن‌ها نانوا، دیگری پزشك، سومی مهندس وچهارمی کلانتر است.

کاوه وداریوش همسایه‌اند وهمیشه باهم، با اتوبوس، به‌سرکار می‌روند.

داریوش از مهرداد بزرگتر است.

کاوه همیشه درتنیس روی میز، برسیروس پیروز می‌شود.

نانوا همیشه پیاده به سرکار می‌رود.

کلانتر درنزدیکی پزشك زندگی نمی‌کند.

مهندس تنها یك‌بار کلانتر رادیده است: وقتی‌که کلانتر اورا به خاطر تخلف‌رانندگی جریمه کرد.

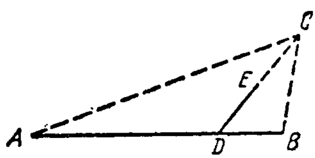
کلانتر ازپزشك ومهندس بزرگتر است.

چه‌کسی چه حرفه‌ای دارد؟

۱۰. خط راستی رسم‌کرده‌ایم‌که دو دایرهٔ هم مرکز را قطع‌کرده است. می‌دانیم، طول وتری‌که در دایرهٔ‌کوچکتر ایجاد شده است، برابر ۱۸ سانتی‌متر و طول وتر دایرهٔ بزرگتر، برابر ۲۸ سانتی‌متر است. مساحت حلقهٔ بین دو دایره چقدر است؟

۱۱. دردایره‌ای به قطر برابر ۵ سانتی‌متر، یك چهار ضلعی محاط‌کرده‌ایم و می‌دانیم، طول سه ضلع متوالی آن، به‌ترتیب برابر ۲، ۳ و ۴ سانتی‌متراست. طول ضلع چهارم این چهارضلعی چقدر است؟

۱۲. توکا، صفحهٔ کاغذی راکه، روی آن، مثلث‌مورد نظر خود راکشیده بود،کثیف‌کرد، تنها قاعده و بخشی از نیمساز زاویهٔ رو به روی همین قاعده، باقی ماند (در شکل ۱، خط چین‌ها، به‌معنای بخش‌های از بین رفته است). مثلث را بازسازی کنید.



شکل ۱

۱۳. درمسابقهٔ فینال دانشکده‌ها، تیم‌های چهار دانشکده شرکت‌کردند (دانشکده‌های زیست شناسی، تاریخ، ریاضیات وادبیات). دربارهٔ نتیجهٔ مسابقه، سه دانشجو باهم صحبت می‌کردند. یکی ازآن‌ها (۱)، باعدم اطمینان‌گفت:

ــ به نظرم ادبیات دوم وریاضیات سوم شد.

ولی دانشجوی دوم (۲)، حرف اورا تصحیح‌کرد:

ــ نه! دانشکدهٔ ادبیات به مقام اول رسید ودانشکدهٔ زیست شناسی دوم شد.

سومی (۳)، اعتراض‌کرد وگفت:

ــ هر دوی شمااشتباه می‌کنید؛ دانشکدهٔ تاریخ مقام‌دوم راگرفت ودانشکدهٔ ریاضیات چهارم شد.

معلوم شد، هرکدام‌ازاین سه دانشجو، یك‌پاسخ درست ویك‌پاسخ نادرست داده‌اند.

ردیف مقام‌ها را درمسابقه، پیداکنید.

۱۴. معلم به دونفر ازشاگردان خود پیشنهادکرد، هرکدام برای خود، یك عدد شش رقمی بنویسد و، بعد، باانتقال رقم سمت چپ به سمت راست، عدد دیگری به دست آورد. سپس، ازشاگردان خود خواست، یکی ازآن‌ها مجموع ودیگری تفاضل دوعددی راکه در اختیار دارد، به دست آورد. شاگردان، نتیجهٔ عمل خود را، به ترتیب به‌صورت ۹۱۳۴۸۵ و ۱۶۷۸۶۰ جلو معلم گذاشتند.

ولی معلم که ازعددهای شش‌رقمی اولیه اطلاعی نداشت، بلافاصله گفت: «هردواشتباه کرده‌اید». ازکجا فهمید؟

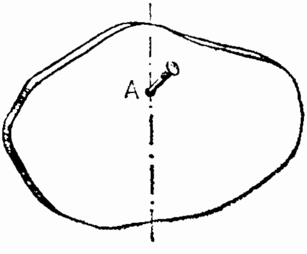
۱۵. رقم‌های عددی پنج‌رقمی را ازجهت عکس‌نوشته‌ایم. حاصل،درست چهاربرابر عدد اصلی شده است. عدد راپیداکنید.

۱۶. عددی به رقم ۲ ختم شده است. اگراین رقم ۲ را، از سمت راست عدد، به سمت چپ‌آن منتقل‌کنیم، عددی به دست می‌آیدکه دو برابر عدد نخستین است. عدد را پیداکنید.

۱۷. ظرفی‌باگنجایش ۱۰ لیتر، پراز سرکه‌است. چگونه می‌توان به‌کمك ظرف‌های ۷ لیتری و ۳ لیتری، ۵ لیتر سرکه برداشت؟

۱۸. به این مسأله،که درعمل کاربرد زیادی دارد، توجه‌کنید: «نقطهٔ A در درون‌یك شکل مسطحهٔ دلخواه داده شده است. می‌خواهیم، ازنقطهٔ A، خط راستی بگذرانیم‌که شکل را، به دوبخش هم‌ارز (یعنی به مساحت‌های برابر) تقسیم‌کند». آیا می‌توان، ازروش زیر، برای حل این مسأله استفاده‌کرد:

«از یك مقوا یا تختهٔ نازك، شکلی دقیقاً مساوی‌شکل مفروض می‌سازیم. مقوا یا تخته باید یکنواخت‌باشد، یعنی ضخامت آن درتمام نقطه‌ها، یکی باشد. در این صورت، وزن جسم با مساحت آن، متناسب می‌شود. اکنون در نقطهٔ A سوراخی به‌وجود می‌آوریم و به میخی افقی‌آویزان‌می‌کنیم، به‌نحوی که‌مقوا بتواند دور میخ‌آزادانه بچرخد.



شکل ۲

خط قائمی‌که ازنقطهٔ A می‌گذرد، جسم را به دوبخش هم‌وزن و، درنتیجه، هم مساحت تقسیم می‌کند»؟

۱۹. چهار رقم متوالی را پشت سرهم، ازچپ به راست نوشته‌ایم و، سپس، جای‌دو رقم سمت چپ راباهم عوض‌کرده‌ایم. به‌این‌ترتیب، عددی چهار رقمی به دست آمده است که مجذورکامل است. این عدد راپیداکنید.

۲۰. درآزمایشگاه، دوشیشه ازمخلوط الکل‌وآب، بادرصدهای متفاوت الکل،وجود دارد. از این دو مخلوط، یك لیتر مخلوط با ۹۶٪ الکل و نیم لیترمخلوط بـا ۴۰٪ الکل ساخته‌ایم. درضمن، برای این منظور، $\frac{۱۴}{۱۵}$ لیتر از مخلوط اول و $\frac{۱۷}{۳۰}$ لیتر از مخلوط دوم مصرف‌کرده‌ایم. درصد الکل را درهریك ازدو ظرف پیداکنید.

۲۱. عدد ۹۸۷۶۵۴۳۲۱۰ را بـر ۸۶۴۲۰ تقسیم‌کرده‌ایم، باقی‌ماندهٔ تقسیم را بـر ۶۴۲۰، باقیماندهٔ جدید را بـر ۴۲۰ و، سرانجام، باقی‌ماندهٔ تقسیم اخیر را بر ۲۰ تقسیم کرده‌ایم. باقی‌ماندهٔ آخرین تقسیم چقدر است؟

۲۲. دریك مهمانی، پنج افسر شرکت‌کرده بـودند: افسر پیاده نظام، توپچی، خلبان، افسر مخابـرات و، سرانجام، مهندس استحکامات. بین آن‌ها، یك سروان، سه سرگرد ویك سرهنگ وجود دارد. خانم‌ها چنان دور افسرها راگرفته بـودندکه‌گویا، مهمان دیگری در آن‌جا نیست. ازگفت وشنودهایی‌که درجریان بود، این جمله‌ها شنیده شد:

۱) بهروز بادوست خود، مهندس استحکامات، هم درجه است.

۲) افسرمخابرات وشروین، دوستان قدیمی هستند.

۳) افسرخلبان، با فرزاد وسیامك، چندی پیش نزد شروین به مهمانی رفته بودند.

۴) اندکی پیش ازمهمانی، رادیوی توپچی ومهندس استحکامات ازکار افتاده بـود. هردوی آن‌ها، دریك روز به سیامك مراجعه و از او خواهش‌کردند پیش‌آن‌ها برود وبـه افسرمخابرات، برای رفع اشکال رادیوها،کمك‌کند. آن‌ها اشتباه نکرده بودند، زیرا ازآن به بعد، هردو رادیو به خوبی‌کار می‌کردند.

۵) شروین‌کم مانده بود، خلبان بشود، ولی‌بنا به‌توصیهٔ افسراستحکامات، زمینهٔ‌دیگری را انتخاب‌کرد.

۶) درجهٔ بهروز بالاتر ازدرجهٔ سیامك ودرجهٔ فرزاد بالاتر ازدرجهٔ شروین است.

۷) افسر پنجم، شهریار، شب قبل، برای مهمانی به منزل سیامك رفته بود.

درجهٔ هرافسر ورشتهٔ کار او راپیدا کنید.

آیا می‌توان آگاهی‌های موجود دربخشی ازشرطهای مسأله راطوری تغییردادکه باز هم، یك جواب منحصر داشته باشد و، درضمن، همان جوابی را بدهدکه درمسألهٔ اصلی به دست آمده است؟

۲۳. دریك مسابقهٔ شطرنج، ۸ نفر شرکت‌کردند. بعد از پایان مسابقه معلوم شد، همهٔ امتیازها باهم فرق دارند (هیچ دونفری امتیاز برابر نیاورده‌اند). امتیاز شطرنج بازی‌که به مقام‌دوم‌رسید، برابر بود با مجموع امتیازهای چهار نفرآخر. بازی بین نفرسوم و نفرهفتم، چگونه پایان یافته است؟

۲۴. یك صفحهٔ شطرنجی 6×6 درنظر بگیرید. این صفحه را می‌توان بـا ۱۸ مهرهٔ استخوانی یاچوبی 1×2 پوشاند (هرمهره، دوخانهٔ مجاور را می‌پوشاند). ثابت کنید، بـه هر نحوی‌که این صفحهٔ شطرنج رابپوشانیم، همیشه می‌توان بایك خط راست افقی یایك خط راست قائم، طوری صفحه راتقسیم کردکه، به هیچ‌کدام ازمهره‌ها، صدمه‌ای نرسد.

۲۵. یك تصاعد حسابی داده شده است‌کـه، همهٔ جمله‌های آن، عددهایی طبیعی‌اند. می‌دانیم، دربین جمله‌های این تصاعد، یك عدد مجذورکامل وجود دارد. ثابت‌کنید، دراین صورت، بی‌نهایت مجذورکامل، دربین جمله‌های این تصاعد پیدا می‌شود.

۲۶. یك ۴۵ ضلعی منتظم مفروض است. آیا می‌توان بـا رقم‌های ۰، ۱، ۲، ...، ۹، رأس‌های این ۴۵ ضلعی راچنان شماره‌گذاری‌کردکه، برای هردو رقم مختلف، ضلعی پیدا شودکه با این رقم‌ها نامیده شده است.

۲۷. نمودارهای F و G راشامل نقطه‌هایی با مختصات (x,y) می‌گیریم‌که، بـرای آن‌ها، بـه ترتیب داشته بـاشیم: $x=y^2$ و $y=x^2$، مجموعه‌های $F\circ G$ و $G\circ F$ را روی صفحه نشان دهید.

۲۸. ثابت‌کنید، اگریك تصاعد هندسی متناهی، ازعددهای مختلف طبیعی تشکیل‌شده باشد و، درضمن، بیش از دوجمله داشته باشد، آن وقت، مجموع جمله‌های آن، نمی‌تواند برابرتوانی از ۳ باشد.

۲۹. عدد ۱۰۰۰۰۰۰، جمله‌ای از یك تصاعد حسابی نامتناهی است‌که از عددهای طبیعی تشکیل شده است. ثابت‌کنید، دراین تصاعد می‌توان بی‌نهایت جمله پیداکردکه، هر کدام از آن‌ها، برابرتوان ششم یك عدد درست باشد.

۳۰. دوتصاعد حسابی داده شده‌است. مطلوب است شرط لازم وکافی، برای این‌که، اگرجمله‌های دو تصاعد را، به ردیف صعودی پشت سرهم بنویسیم، بازهم‌یك تصاعدحسابی به دست آید.

۳۱. آیا می‌توان ۱۷ عدد درست (مثبت یا منفی) پیداکرد، به‌نحوی‌که اگر آن‌هارا دریك سطر، به دنبال هم‌بنویسیم، مجموع هرچهار عددمتوالی، عددی منفی ومجموع تمامی ۱۷ عدد برابر ۱۳۷۱ شود؟

۳۲. آیا می‌توان سه‌رقم مختلف‌راطوری‌پیداکردکه، همهٔ عددهای سه‌رقمی،که بدون تکرار رقم‌ها، باآن‌ها تشکیل می‌شود، عددهایی اول باشند؟

۳۳. آیا می‌توان ازیك نقطهٔ فضا، شش خط راست مختلف، طوری عبور دادکه،همهٔ زاویه‌های بین دو به دوی‌آن‌ها، باهم برابرباشند؟

۳۴. حاصل‌ضرب رقم‌های عدد n، بـرابر $n^2-10n-22$ شده است. عدد n را پیداکنید.

۳۵. ثابت کنید، درهر چند ضلعی، دست کم دوضلع وجود دارد که، برای طول‌های a و b آن‌ها، داشته باشیم:

$$1 \leqslant \frac{b}{a} < 2$$

۳۶. در خانه‌های جدول مربعی ۴×۴ (شکل۳)، عددهای ۱، ۹، ۸ و ۵ را، به ترتیبی که روی شکل ۳ می‌بینید، نوشته‌ایم. آیا می‌توان در بقیهٔ خانه‌های جدول، عددهایی را نوشت، به نحوی که عددهای هر سطر و هرستون جدول، به تصاعد حسابی باشند؟

	۹		
۱			
			۵
		۸	

شکل ۳

۳۷. جدول مربعی۳×۳، باعددهای‌طبیعی پرشده است (شکل ۴). بازی به‌این‌ترتیب است: در هرحرکت، به دو عدد مجاور جدول، عددی (مثبت یا منفی) اضافه می‌کنیم (دوعدد جدول را مجاور می‌نامیم وقتی‌که، خانه‌های آن‌ها، در یك ضلع مشترك باشند). آیا می‌توان با چند حرکت: الف) عددهای واقع در همهٔ خانه‌های جدول را، برابرصفرکرد؟ ب) عددهای چهارخانهٔ واقع در چهارگوشهٔ جدول رابرابر واحد، وعددهای پنج خانهٔ دیگر را، برابرصفر کرد؟

۰	۳	۲
۶	۷	۰
۴	۹	۵

شکل ۴

۳۸. کتابی در ۱۳ جلد چاپ شده‌است؛ تعدادصفحه‌های هرجلد، باتعداد صفحه‌های هرجلد دیگر برابراست؛ در ضمن، همهٔ صفحه‌ها را، در ۱۳ جلد، به ردیف صفحه‌گذاری کرده‌اند. درهرجلد، عدد شمارهٔ صفحهٔ اول را با عدد شمارهٔ صفحهٔ آخرآن جمع کرده‌ایم؛ مجموع این ۱۳ عدد، برابرشده است با ۳۹۳۹۰. هرجلدکتاب، چند صفحه دارد؟

۳۹. آیا می‌توان مثلث قائم‌الزاویه را، به دو مثلث متساوی‌الساقین با مساحت‌های برابرتقسیم کرد؟

۴۰. ثابت کنید، می‌توان ۱۳۷۱ عددطبیعی متوالی‌پیداکرد، به‌نحوی که در بین آن‌ها، درست یك عدد اول وجود داشته باشد.

۴۱. سه دانش‌آموز A، B و C، درپایان سال، دربارهٔ نمره‌های دودرس ریاضی خود، توضیح می‌دادند:

A: نمره‌های من ۱۶ و ۱۶ شده است؛

B: من ۱۲ و ۲۰ گرفته‌ام؛

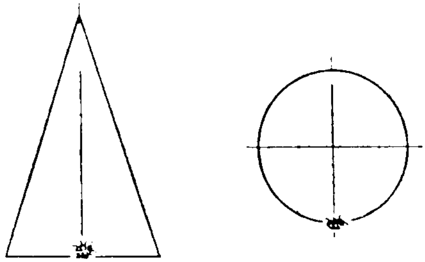
C: ولی من ۱۲ و ۱۶ گرفته‌ام.

معلوم شد که، هریك از آن‌ها، نمره‌های یکی از دو نفر دیگر را گفته است. ثابت کنید، می‌توان تنها با پرسیدن از یك نفر و دانستن یکی از نمره‌های واقعی او، می‌توان نمره‌های واقعی هریك از سه نفر را پیدا کرد. از چه کسی باید پرسید و، پس از آن، چگونه می‌توان نمره‌های واقعی دو نفر دیگر را پیدا کرد؟

۴۲. عددهای از ۱ تا ۱۳۷۱ را روی تختهٔ سیاه نوشته‌ایم. در هر گام، چند عدد را پاك می‌کنیم و، به جای آن‌ها، باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم مجموع آن‌ها را بر ۷، می‌نویسیم. بعد از چند گام، دو عدد روی تختهٔ سیاه باقی می‌ماند که، یکی از آن‌ها، برابر ۳۴۸ است. عدد دوم چند است؟

۴۳. حشره‌ای روی یك صفحه طوری می‌جهد که، طول هر جست او، q برابر طول جست قبلی اوست (q، عددی ثابت است). همهٔ مقدارهای ممکن q را پیدا کنید که، به ازای آن، حشره بتواند روی محیط بسته‌ای، به نقطهٔ آغاز حرکت خود برگردد.

۴۴. بسیاری از جانوران، پرندگان و حشره‌ها، قادرند برای رسیدن به هدف، کوتاه‌ترین راه را انتخاب کنند. یك کفش‌دوزك در لبهٔ قاعدهٔ مخروطی قرار دارد و می‌خواهد مخروط را، روی کوتاه‌ترین مسیر ممکن دور بزند و به نقطهٔ آغاز حرکت خود، برگردد. این مسیر را پیدا کنید.

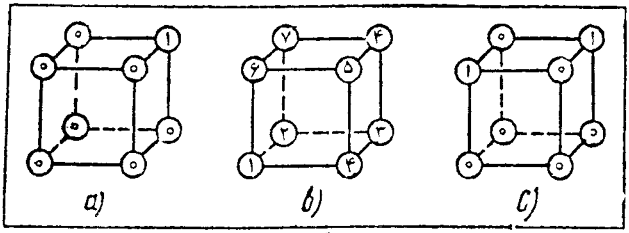


شکل ۵

۴۵. دو صفحهٔ شطرنجی مساوی 8×8 خانه‌ای را طوری روی هم گذاشته‌ایم که مرکزهای آن‌ها برهم منطبق شود و، درضمن، یکی نسبت به دیگری، به اندازهٔ ۴۵ درجه دور مرکز خود چرخیده باشد. اگر مساحت هر خانه برابر واحد باشد، سطح مشترك خانه‌های سیاه دو صفحه را پیدا کنید.

۴۶. دانش‌آموزی می‌خواهد یك چند ضلعی را که در دایره‌ای به شعاع واحد محاط است، بازسازی کند. ضلع اول را رسم می‌کند؛ از انتهای آن، ضلع دوم را، از انتهای ضلع دوم، ضلع سوم را رسم می‌کند و غیره. بعد از پایان کار، متوجه می‌شود، چند ضلعی او، بسته نیست و انتهای ضلع آخر با آغاز ضلع اول، با فاصله‌ای برابر d از هم جدا شده‌اند. می‌دانیم دانش‌آموز، زاویه‌ها را با دقت رسم کرده است و خطای نسبی رسم طول هر ضلع، از p تجاوز نمی‌کند. ثابت کنید $d\leqslant 4p$.

۴۷. درهر رأس مکعب، عددی نوشته شده است. درهر گام، به دوعددی که دردوسر



شکل ۶

یك یال دلخواه قراردارند، یك واحد اضافه می‌کنیم. آیا ممکن است، بعداز چندگام، همهٔ عددهایی‌که درهشت رأس مکعب قراردارند، باهم برابرشوند، به شرطی‌که عددهای اولیه: الف) به‌صورت شکل ۶–a، ب) به‌صورت شکل ۶–b، ج) به صورت شکل ۶–c باشند؟

۴۸. عددهای از ۱۰۰ تا ۹۹۹ را روی‌کارت‌هایی نوشته‌ایم: روی هرکارت فقط یك عدد. کارت‌ها راکاملاً مخلوط می‌کنیم و، سپس، دریك ستون روی هم قرارمی‌دهیم، به‌نحوی که عددها رو به پایین باشند ودیده نشوند. پشت سرهم‌کارت‌ها رابرمی‌گردانیم وباتوجه به رقم آخر آن‌ها (رقم سمت راست)؛ درستون‌های جداگانه، روی هم قرار می‌دهیم: یك‌ستون، عددهایی‌که به صفرختم شده‌اند، درستون دیگر، عددهایی‌که بـه واحد ختم شده‌اند وغیره، بعد، همهٔ کارت‌ها را دریك ستون وبه‌ردیف صعودی رقم‌های آخر آن‌ها قرار می‌دهیم. ستون را برمی‌گردانیم و، مثل قبل، درستون‌های مختلف می‌گذاریم، ولی این‌بار برحسب رقم دوم آن‌ها. دوبـاره، شبیه حالت قبل، کارت‌هـا را در یك ستون روی هم می‌چینیم؛ ستـون را برمی‌گردانیم و، این‌بار، آن‌ها را برحسب رقم اول (رقم سمت چپ) مرتب می‌کنیم. بعداز این عمل آخر، عددها به چه ردیفی قراردارند؟

۴۹. درمستطیل 4×3 سانتی‌متری، ۶ نقطه گذاشته‌ایم. ثابت‌کنید، در بین این‌نقطه‌ها می‌توان دونقطه پیداکردکه، فاصلهٔ بین آن‌ها، از $\sqrt{5}$ تجاوز نکند.

۵۰. درمجلسی $2n$ نفرجمع شده‌اند. می‌دانیم، هرنفردست‌کم با n نفرازحاضران‌در مجلس آشناست. ثابت‌کنید، از بین این $2n$ نفر، می‌تـوان ۴ نفر را طوری انتخاب‌کرد و آن‌ها را پشت یك میزگرد طوری جا دادکه هرکسی درکنارآشنای خود نشسته باشد.

۵۱. $2n$ شوالیه به دربارآرتورشاه رفتند. بعضی ازشوالیه‌ها باهم دشمنی دارند. ولی می‌دانیم، هریك از شوالیه‌ها، حداکثر با $n-1$ نفردشمن است. ثابت‌کنید، «مرلین» مشاورآرتورشاه، می‌تواند آن‌ها را طوری دور یك میزگرد بنشاندکه هیچ دو شوالیه‌ای، که باهم دشمنی دارند، کنارهم نباشند.

۵۲. روی یك‌کاغذ شطرنجی، خط شکستهٔ بسته‌ای رسم‌کرده‌ایم، به نحوی‌که هر رأس

آن در رأسی از خانه‌های صفحهٔ شطرنجی باشد؛ درضمن می‌دانیم، همهٔ ضلع‌های خط شکسته طولی برابر دارند. ثابت کنید، تعداد ضلع‌های این خط شکسته، عددی زوج است.

۵۳. در n شیشهٔ مدرج، n مایع مختلف ریخته‌ایم. به جز این، یك شیشهٔ مدرج خالی هم دراختیار داریم. آیا می‌توان درچندگام محدود، طوری مایع‌ها را جابه جا کرد که، در همهٔ ظرف‌ها، مخلوطی یکسان ازمایع‌ها وجود داشته باشد، یعنی درهر شیشهٔ مدرج، درست $\frac{1}{n}$ از مقدار هر مایع باشد و، درضمن، یك شیشهٔ مدرج خالی بماند؟ (شیشهٔ مدرج، امکان اندازه‌گیری هرحجمی، ازمایع را به ما می‌دهد.)

۵۴. یك نان شیرینی به شکل n ضلعی منتظم دراختیارداریم که قابل محاط در دایره‌ای به شعاع واحد است. از وسط هرضلع چند ضلعی ودرجهتی دلخواه در درون نان شیرینی برش دلخواهی به طول واحد به آن داده‌ایم. ثابت کنید، به‌این‌ترتیب، دست کم یك قطعه از نان شیرینی، از آن جدا می‌شود.

۵۵. می‌خواهیم هرضلع وهر قطر یك n ضلعی منتظم را به رنگی در آوریم که، هر دو پاره خط راست متقاطع، دارای رنگ‌های متفاوتی باشند. حداقل چند رنگ برای این منظور لازم است؟ (پاره خطهای راست را، همراه با دو انتهای آن‌ها در نظر بگیرید.)

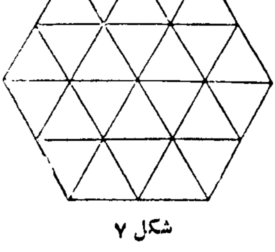
۵۶. یك مکعب ویك جعبهٔ مکعبی باهمان اندازه، وشش رنگ مختلف دراختیارداریم؛ جعبهٔ مکعبی دارای سرپوش است. با هررنگ، یکی ازوجه‌های مکعب ویکی ازوجه‌های جعبه رارنگ کرده‌ایم. ثابت کنید، مکعب رامی‌توان طوری در جعبه‌قرارداد که، هروجه‌مکعب مجاور وجهی ازجعبه باشدکه رنگ دیگری دارد.

۵۷. دانش‌آموزان انجمن‌ریاضی، ماشین حسابی ساختندکه، بافشار دادن شستی‌آن، عدهای چهارگانهٔ $(a، b، c، d)$ را، به عددهای چهارگانهٔ

$$(a-b، b-c، c-d، d-a)$$

تبدیل می‌کند. ثابت کنید، اگرچهارعدد نخستین، همه باهم برابرنباشند، بعداز چندبارفشار دادن شستی، دست‌کم یکی ازعددها، از ۱۳۷۱ بزرگتر می‌شود.

۵۸. شش ضلعی‌منتظمی را، به ۲۴ مثلث برابر تقسیم‌کرده‌ایم (شکل ۷). در هریك از ۱۹ گره (هر رأس مثلث) عددی نوشته‌ایم؛ همهٔ این عددها، با هم فرق دارند. ثابت کنید، از بین ۲۴ مثلث، دست کم ۷ مثلث می‌توان پیدا کرد که، عددهای واقع در سه‌رأس هرکدام از آن‌ها، در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت، به ردیف



شکل ۷

صعودی باشند.

۵۹. با مکعب‌های مساوی یکدیگر، مکعب مستطیلی ساخته‌ایم. سه وجه از مکعب مستطیل را، که رأس مشترکی‌دارند، رنگ زده‌ایم. معلوم شد، درنیمی ازهمهٔ مکعب‌ها،دست کم، یکی از وجه‌ها رنگ خورده است. چند مکعب، وجه‌های رنگ خورده دارند؟

۶۰. ده نفر درمسابقهٔ تنیس روی میزشرکت‌کردند. هر دونفر، درست یکبار با هم بازی‌کردند. نفراول،درجریان مسابقه، x_1 پیروزی و y_1 شکست داشت، دومی x_2 پیروزی و y_2 شکست وغیره. ثابت کنید:

$$x_1^2+x_2^2+\dots+x_{10}^2=y_1^2+y_2^2+\dots+y_{10}^2$$

۶۱. بابك وپیروز به‌این‌بازی مشغول‌اند. روی میزکپه‌ای شامل n سنگ‌ریزه وجود دارد. بابك بازی را آغازمی‌کند و، سپس، هریك به نوبت، حرکت خودرا انجام‌می‌دهند. هر نفر در نوبت حرکت خود، هرکپه‌ای راکه بیش از یك سنگ ریزه دارد، به دو بخش کوچکتر تقسیم می‌کند.کسی بازی را برده است‌که، بعدازحرکت او، همهٔ‌کپه‌ها شامل یك سنگ‌ریزه باشند. آیا بابك می‌تواند برنامه‌ای بریزدکه، باهرنوع بازی پیروز، برنده‌شود: الف) برای $n=31$؛ ب) برای $n=100$.

۶۲. دوکشور وجود داردکه‌آن‌ها را،کشورهای اول ودوم می‌نامیم. هرشهر ازکشور اول «هم‌نامی» درکشور دوم دارد وبرعکس. اگر دوشهر ازکشور اول، با راه‌آهن، به طور مستقیم به هم مربوط باشند، درکشور دوم، دوشهر هم‌نام‌آن‌ها، باخط مستقیم راه‌آهن، به‌هم مربوط نیستند؛ ولی اگردو شهرکشور اول به هم مربوط نباشند، دوشهر هم‌نام آن‌ها در کشور دوم، باخط مستقیمی از راه‌آهن به‌هم مربوط‌اند. درکشور اول، برای رفتن از شهر A به شهر B، دست‌کم باید دوبارقطار را عوض‌کرد. ثابت‌کنید درکشور دوم، حداکثر با دوتعویض قطار، می‌توان از هرشهری به هرشهر دیگر رفت.

۶۳. دریك مسابقهٔ فوتبال، n تیم شرکت‌کرده‌اند. هرتیم‌یکبار، باهرتیم دیگرروبه‌رو می‌شود. برد ۲ امتیاز، تساوی ۱ امتیاز و باخت ۰ امتیاز دارد. حداکثر اختلاف امتیاز، برای دوتیمی‌که رتبه‌های پشت سرهم راکسب‌کرده‌اند، چقدر می‌تواند باشد؟

۶۴. شهرهای یك‌کشور، دو به دو، به وسیلهٔ جاده به‌هم‌وصل شده‌اند. طول هرجاده از ۵۰۰ کیلومترکمتراست واز هرشهر به هرشهردیگر می‌توان ازطریق جاده‌ای‌که‌کمتراز ۵۰۰کیلومتر طول دارد، رفت. وقتی یکی ازجاده‌ها را، برای مرمت، بستند، معلوم شد می‌توان ازطریق جاده‌های باقی‌مانده، ازهرشهر به هرشهر دیگر رفت. ثابت‌کنید، درحالت اخیر، برای رسیدن ازهرشهر به هرشهردیگر، باید راهی را پیمودکه از ۱۵۰۰ کیلومتر کمتر است.

۶۵. گروهی جهانگرد تصمیم گرفتند با اتوبوس مسافرت کنند، به نحوی که تعداد مسافرها درهمه اتوبوس‌ها یکی باشد. ابتدا درهر اتوبوس ۲۲ نفر نشستند، ولی معلوم شد، دراین‌صورت، برای یکی از جهان‌گردان جایی باقی نمی‌ماند. یکی از اتوبوس‌ها راکنار گذاشتند وتوانستند دربقیه‌اتوبوس‌ها، به‌طور مساوی، جا بگیرند. اگر بدانیم درهراتوبوس بیش‌از۳۲نفر نمی‌توانند بنشینند، تعداد جهان‌گردان وتعداد اولیهٔ اتوبوس‌ها راپیداکنید.

۶۶. شهری در روی نقشه، به‌صورت یك چند ضلعی محدب است. خیابان‌های شهر، درامتداد قطرهای چندضلعی و، چهارراه‌ها، در نقطه‌های برخورد این خیابان‌هاست (البته غیراز خود رأس‌های چندضلعی). درشهر با تراموا جابه جا می‌شوند. هر مسیر در امتداد خیابان خودش‌واقع است،ازیك انتهاتاانتهای دیگر آن، باایستگاه‌هایی درهمهٔ‌چهارراه‌های این خیابان وهم در دوانتهای آن. می‌دانیم، درهرچهارراه، تنها دوخیابان به هم می‌رسند و دست‌کم دریکی ازآن‌ها، مسیر تراموا وجود دارد. ثابت‌کنید، از هر چهارراه می‌توان با تراموا، به هرچهارراه دیگر رفت، بدون این‌که به بیش‌از دوبار عوض‌کردن تراموا نیاز باشد(تعویض تراموا را ازیك‌مسیر به‌مسیردیگر، می‌توان درایستگاه مشترك آن‌ها انجام‌داد).

۶۷. ازدو نقطهٔ A و B، که به فاصلهٔ ۱۲۰ کیلومتر ازیکدیگرقراردارند، دریك‌لحظه، یك‌کامیون ویك اتوبوس به طرف نقطهٔ C و روی جاده‌های مستقیمی‌که با AB زاویهٔ ۶۰ درجه می‌سازند،به‌ترتیب، باسرعت‌های ۴۰ و ۶۰ کیلومتر درساعت حرکت‌کردند.اتوبوس یك‌ساعت زودتر ازکامیون به نقطهٔ C رسید، اتوبوس درچه مدت این‌مسیر را پیموده‌است؟

۶۸. افراد دوگروه A و B، برای مسابقهٔ شطرنج انتخاب شدند. قراربراین بودکه هرفرد از یك‌گروه با هرفرد ازگروه دیگر، دریك دور بازی شرکت‌کندکه، دراین‌صورت تعدادکل دورهای بازی، چهار برابر تعداد همهٔ شرکت‌کنندگان مسابقه دردوگروه می‌شد. ولی به دلیل این‌که ازهرگروه یك نفر، به علت بیماری نتوانست درمسابقه شرکت‌کند، از تعداد دورهای بازی، نسبت به‌آن‌چه پیش‌بینی شده بود، ۱۷ دورکاسته شد. اگربدانیم‌تعداد افرادگروه A، ازتعداد افرادگروه B کمتر است، تعداد شطرنج بازان‌گروه A راپیداکنید.

۶۹. هواپیما، پس‌از فرود، درطول زمانی، باسرعت ثابت v متر درثانیه، روی‌زمین حرکت‌کرد. سپس خلبان، بابه‌کار انداختن‌ترمز، حرکت هواپیما را به‌صورت متشابه‌ٔالتغییر کندشونده درآورد؛ درضمن، درهرثانیه، ۲متر ازسرعت آن‌کاسته‌شد. هواپیما، ازلحظهٔ‌فرود تا لحظهٔ توقف‌کامل، ۴کیلومترپیموده است. نسبت زمان حرکت هواپیما، در ۴۰۰ متراول، به‌کل زمانی‌که روی زمین حرکت‌کرده‌است، برابر $\frac{۴}{۶۵}$ شده است. سرعت v را پیداکنید.

۷۰. فاصلهٔ بین‌دوایستگاه A و B برابر ۳۶۰کیلومتراست. دوقطاردریك لحظه،یکی از A ودیگری از B به طرف یکدیگر حرکت‌کردند. برای قطاری‌که از A حرکت‌کرده

بود، دست‌کم ۵ ساعت طول کشید تا به B رسید. ولی اگر سرعت آن $\frac{۳}{۲}$ برابر سرعت واقعی او بود، کمتر از ۲ ساعت بعد از حرکت از ایستگاه A به قطار دوم می‌رسید. سرعت کدام قطار بیشتر است؟

۷۱. چهار گروه جهان‌گرد، مسیرهایی را برای خود انتخاب کردند که باهم متفاوت بود. مجموع طول مسیرهای دو گروه اول و چهارم، شش کیلومتر بیشتر از مجموع طول مسیرهای دو گروه دوم و سوم و طول مسیر گروه دوم، ۲ کیلومتر کمتر از طول مسیر گروه اول بود. تعداد جهان‌گردان گروه سوم، برابر است با عدد طول مسیری که گروه اول طی کرده است، و تعداد جهان‌گردان گروه دوم، برابر عدد طول مسیر گروه چهارم است. مجموع مجذورهای فاصله‌هایی که به‌وسیلهٔ هر گروه پیموده شده است، برابر ۴۹۴ است. هر گروه چند کیلومتر راه رفته است؟

۲. رازهای درون عدد. شگفتی‌های شکل

۷۲. عددی سه رقمی پیدا کنید که اگر آن را جلو آئینه بگیریم، تصویری $۷/۴۱(۶)$ برابر خود داشته باشد. $(۷/۴۱(۶) = ۷/۴۱۶۶۶...)$.

۷۳. عددی سه‌رقمی پیدا کنید که اگر آن را بر ۱۱ تقسیم کنیم، خارج‌قسمت برابر مجموع مجذورهای سه رقم عدد اصلی باشد.

۷۴. سه رقم داده شده است. مجموع همهٔ عددهای سه رقمی که می‌توان با این رقم‌ها درست کرد، برابر است با ۲۸۸۶. اگر بین این عددهای سه‌رقمی، عدد کوچکتر را از عدد بزرگتر کم کنیم، تفاضلی برابر ۴۹۵ به دست می‌آید. این سه رقم را پیدا کنید، به شرطی که در بین آن‌ها، رقم صفر وجود نداشته باشد.

۷۵. روشن است که $۲ + ۲ = ۲ \times ۲$ و شبیه آن

$$۱۱ + ۱/۱ = ۱۱ \times ۱/۱ = ۱۲/۱،$$

$$۳ + ۱/۵ = ۳ \times ۱/۵ = ۴/۵،$$

$$۲۱ + ۱/۰۵ = ۲۱ \times ۱/۰۵ = ۲۲/۰۵$$

دستوری پیدا کنید که، به‌کمک آن بتوان همهٔ این‌گونه زوج عددها را به دست آورد.

۷۶. سه ظرف، به ترتیب، با گنجایش‌های ۸، ۵ و ۳ لیتر در اختیار داریم. ظرف ۸

لیتری پر از آب ودوتای دیگر خالی است. چگونه می‌توانیم ۴ لیتر آب برداریم؟

۷۷. یك چندضلعی و نقطه‌ای واقع در داخل آن، طوری پیدا کنید که، هیچ‌کدام از ضلع‌های چندضلعی، ازاین نقطه به‌طورکامل دیده نشود، یعنی اگر از این نقطه به دوانتهای هرضلع دلخواه چندضلعی وصل کنیم، دست کم یکی از این خطهای راست، ضلع دیگری‌از چندضلعی را قطع کند.

۷۸. رأس‌های یك پنج‌ضلعی محدب غیرمشخص را، یك درمیان به‌هم وصل کرده‌ایم. مجموع پنج زاویهٔ رأس‌های پنج ضلعی ستاره‌ای را، که به این ترتیب بـه دست می‌آید، پیدا کنید.

۷۹. دو اسب سوار، باهم ودر یك لحظه، ازنقطهٔ A به طرف نقطهٔ B حرکت‌کردند. اولی نیمی ازمسیر را باسرعت ۱۲ کیلومتر درساعت ونیمهٔ‌دوم راه رابا سرعت ۶ کیلومتر درساعت طی‌کرد؛ ولی‌دومی، تمامی‌مسیر راباسرعت ۹ کیلومتردر ساعت $\left(\frac{۱۲+۶}{۲}=۹\right)$ پیمود و زودتر از اولی بـه B رسید. چطورممکن است؟ هردو اسب سوار دریك مسیر و بدون انحراف حرکت‌کرده‌اند.

۸۰. چندگلولهٔ یکسان داریم که می‌توانیم آن‌ها را روی میز، هم به‌شکل مثلث‌متساوی‌الاضلاع وهم به‌شکل مربع، پهلوی هم بچینیم. درحالت مثلث، تعدادگلوله‌های هرضلع،دو واحد بیش‌تر از تعدادگلوله‌های هرضلع درحالت مربع است. تعدادگلوله‌ها راپیداکنید.

۸۱. حاصل‌ضرب چهارعددد درست پشت سرهم، برابر ۳۰۲۴ شده‌است.این‌عددها را پیدا کنید.

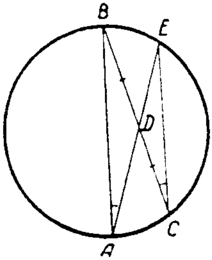
۸۲. می‌خواهیم ۷ سیب مساوی و یکسان را، بین ۸ نفر بـه طور مساوی تقسیم‌کنیم. چگونه عمل‌کنیم تا حداقل بریدگی درسیب‌ها انجام شود؟

۸۳. وقتی خسرو ازخواب بیدار شد، متوجه شد ساعت دیواری او خوابیده است. ساعت دیگری هم نداشت. لباس پوشید و به ساختمان دوست خود درطبقهٔ پایین‌تر رفت. در بدو ورود، ساعت دیواری اورا نگاه‌کرد،کمی با او صحبت‌کرد ودر موقع خداحافظی، دوباره به ساعت دیواری نظری انداخت. به‌آپارتمان خود برگشت وساعت دیواری خود را میزان‌کرد. چگونه؟

۸۴. دو منطقهٔ مسکونی A و B در نـزدیکی یکدیگرواقع‌اند. همهٔ ساکنان منطقهٔ A راستگو وهمهٔ ساکنان منطقهٔ B دروغگو هستند. شما بـه یکی از این دومنطقه رسیده‌ایـد. چگونه می‌توانید بایك پرسش (تنها یکی) ازنخستین‌کسی‌که به‌شما برخورد می‌کند، بفهمید، آیا به منطقهٔ A رسیده‌اید یا به منطقهٔ B!

۸۵. سه نفربه رستوران رفتند. حساب آن‌ها ۹۰۰۰ ریال شد. نفری ۳۰۰۰ ریـال

دادند؛ ولی صندوق دار گفت که اشتباه کرده است و ۱۵۰۰ ریال پس داد. آن‌ها ۶۰۰ ریال را انعام دادند ونفری ۳۰۰ ریال برداشتند. به این ترتیب، هرکدام ۲۷۰۰ ریال وروی هم ۸۱۰۰ ریال خرج کردند، ۶۰۰ ریال هم انعام دادند، روی هم می‌شود ۸۷۰۰ ریال. بقیهٔ ۹۰۰۰ ریال (یعنی ۳۰۰ ریال) کجا رفته است؟



شکل ۸

۸۶. در دایرهٔ به‌مرکز O، قطر AB را رسم می‌کنیم (شکل ۸). از نقطهٔ B، وتر دلخواه BC را، که ازمرکز نمی‌گذرد، می‌کشیم. بعد از نقطهٔ A بـه D، وسط وتر BC، وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا محیط دایره را در E قطع کند. از E بـه C وصل می‌کنیم. دو مثلث ABD و CDE برابرند، زیـرا $|BD|=|DC|$ (طبق فرض)، $\hat{A}=\hat{C}$ (زاویه‌های محاطی روبه‌رو به‌یك کمان)، $\hat{B}=\hat{E}$ (زاویه‌های محاطی رو به رو به یك کمان) و، $\widehat{BDA}=\widehat{EDC}$ (زاویه‌های روبه‌رو)، درنتیجه، دوزاویه و ضلع بین آن‌ها ازیك مثلث با دو زاویه وضلع بین آن‌ها از مثلث دیگر، برابرند. چون دو زاویهٔ $\widehat{EDC}$ و $\widehat{BDA}$ برابرند، بایددوضلع رو بـه‌رو به آن‌ها برابرباشند، یعنی $|AB|=|EC|$. قطر دایره با وتری ازدایـره برابر است! اشتباه درکجاست؟

۸۷. شخصی که همسرش باردار بود، درلحظهٔ مرگ وصیت کرد: اگر پسری بـه دنیا آمد، دوسوم دارایی او را بـه پسر و $\frac{۱}{۳}$ بقیه را به همسر او بدهند. ولی اگر فرزنداودختر بود، یك چهارم دارائی او را به دختر وسه چهارم بقیه را به مادرش بدهند. همسر او جملی (دوقلو) زایید: یك پسر ویك دختر. چگونه عمل کنیم تا به‌وصیت این مرد عمل کرده باشیم؟

۸۸. آقای Z که همسرش را ازدست داده بود، وصیت نامه‌ای تنظیم کرد که، دارائی او، بین شش پسرش، به نسبت سن آن‌ها درلحظهٔ مرگ پدر، تقسیم شود. دروصیت نامه آمده بود که، اگر یکی ازفرزندانش، پیش‌ازمرگ پدر ازدنیا برود، به شرطی که زن داشته باشد، همسر او جانشین شوهرش در ارث خواهد بود، ولی با حق نصف سهم شوهرش در لحظهٔ مرگ او. طبیعی است، هرسالی که می‌گذشت، سهم هرپسر (یـا بیوه‌هایی که جانشین ارثی شوهرانشان بودند)، تغییر می‌کرد. به‌این ترتیب، در بدو امر، شش وارث وجود داشت که نام‌های آن‌ها، به‌ترتیب، از بزرگتر به کوچکتر چنین بود: آدام، برتران، (این دو نفر همسر داشتند)، کلود، دانیل، ادوارد وفردریك (دونفر اخیر، همزاد (دوقلو) بودند).

بعداز سه سال، دانیل دریك سانحهٔ هوائی کشته شد. بازهم سه سال بعد، فردریك، از

بیماری درگذشت. ولی آقای Z، هر بار با شگفتی متوجه می‌شد که، گرچه تعداد وارث‌ها کم شده است، ولی مجموع سن آن‌ها تغییر نکرده است و همان است که درموقع تنظیم وصیت‌نامه بود.

۹ سال بعداز تنظیم وصیت‌نامه، کلود تصمیم به مهاجرت گرفت و ازپدر خواست مبلغی پول به او بدهد. پدر موافقت کرد، ولی به‌این شرط که سهم او را در وصیت‌نامه کمتر کند. با وجود این، شرط اضافه شدن سهم او در هر سال، به قوت خود باقی بماند. وقتی این تغییر را در وصیت‌نامه دادند، باز هم معلوم شد عدد سن‌ها، تغییر نکرده است.

بعد ازچندهفته، خانواده، برتران را از دست داد وبیوهٔ او وارد در وصیت‌نامه شد.

۴ سال که گذشت آقای Z مرد. باکمال شگفتی معلوم شد که، ضمن مقایسهٔ فهرست آخری با چهار فهرست قبلی، درهمهٔ موردها، مجموع سن وارث‌ها یکی است.

آدام درست $\frac{۲}{۵}$ دارائی پدرش را به‌ارث برد و، این‌مبلغ، برابر بامجموع سهم‌های کلود و ادوارد بود. هریك ازشش پسر، درلحظهٔ تنظیم وصیت‌نامه چندسال داشته است؟

۸۹. وقتی جواهرساز، الماس خود را که ۴۰۰۰ سکهٔ طلا می‌ارزید، تراش می‌داد، الماس‌شکاف برداشت و، درنتیجه، ازارزش آن ۲۰٪ کاسته شد. اگر بدانیم، ارزش الماس متناسب بامجذور وزن آن است، الماس ازکدام بخش خود شکاف برداشته است؟

۹۰. چند سال بعد ازمرگ پدر، دوبرادر تصمیم گرفتند دارائی اورا بین خودتقسیم کنند. تقسیم باتفاهم کامل انجام گرفت تااین‌که نوبت به‌جانوران اهلی رسید. تصمیم گرفتند آن‌ها را بفروشند و پول آن را، به‌طور مساوی، بین خود تقسیم کنند. عدد پولی‌که بابت هر جانور برحسب تومان گرفتند، برابرتعداد همهٔ جانوران‌گله بود. مبلغ را با اسکناس‌های ده تومانی وتنها آخرین بخش پول را، که از ۱۰ تومان کمتر بود، سکه دریافت کردند.

ساده‌ترین راه را این دیدندکه، هرکدام به‌نوبت، یك اسکناس ۱۰ تومانی بردارند. برادر بزرگتر آغازکرد. ۱۰ تومان برداشت، بعدبرادرکوچکتر برداشت، بعد دوباره‌برادر بزرگتر و غیره. آخرین اسکناس ۱۰ تومانی را برادر بزرگتر برداشت. برادرکوچکتر اعتراض کرد:

ــ ولی الان تو ۱۰ تومان بیشتر داری؟

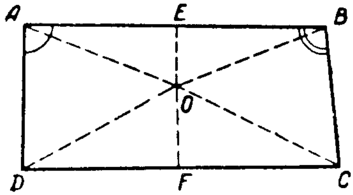
ــ حق با تو است. همهٔ سکه‌ها را توبردار.

ــ بسیارخوب من آن‌ها را برمی‌دارم. ولی هنوز تو به من بدهکاری!

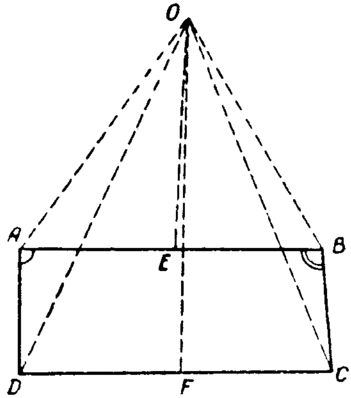
برادر بزرگتر، چقدر به برادرکوچکترخود بدهکار است؟

۹۱. پاره خط راستی را درنظرمی‌گیریم و آن را AB می‌نامیم. پاره خط‌های راست ومساوی AD و BC را از دو انتهای A و B، دریك طرف پاره خط راست AB طوری

رسم می‌کنیم که زاویهٔ $\widehat{DAB}$ قائمه وزاویه $\widehat{CBA}$ منفرجه باشد (شکل‌های ۹ و ۱۰). پاره‌خطها راست AB و CD موازی نیستند و، بنا بـراین، عمود منصف‌های آن‌ها، در نقطه‌ای مثل O یکدیگر راقطع می‌کنند (یادر زیر پاره خط راست AB (شکل ۹) ویا در بالای آن



شکل ۹



شکل ۱۰

(شکل ۱۰) از O به A، B، C و D وصل می‌کنیم. دومثلث AOD و BOC برابرند،زیرا

$$|AO| = |BO|،\ |AD| = |BC|،\ \ |DO| = |CO|$$

بنابر این $\widehat{OAD} = \widehat{OBC}$. ولی $\widehat{EAO} = \widehat{EBO}$، یعنی $\widehat{DAE} = \widehat{CBE}$؛ زاویهٔ قائمه بـا زاویهٔ منفرجه برابراست! اشتباه درکجاست؟

۹۲. کتاب فروشی ازیك ناشر، ۶۰ جلدکتاب، شیمی‌وریاضی به مبلغ ۱۱۵۰ تومان خرید. دربرگشت متوجه شد، ناشرهرجلدکتاب ریاضی رابه قیمت یك جلدکتاب شیمی و برعکس، هرجلدکتاب شیمی رابه قیمت یك جلدکتاب ریاضی محاسبه‌کرده است واز این بابت ۱۰۰ تومان به اوضرر زده است.

اگرتفاوت قیمت (به تومان) بین‌یك جلدکتاب ریاضی ویك جلدکتاب شیمی، برابر تفاوت تعداد دونوع کتاب خریداری شده باشد، قیمت یك جلد ازهرکدام را معین‌کنید.

۹۳. حاصل‌ضرب تعـداد دانش‌آموزانی‌که در دوکلاس مختلف درس می‌خوانند، برابر است با ۲۰۲۱. درهرکلاس، چند دانش‌آموز وجود دارد؟

۹۴. هرکدام از دوتصاعد حسابی

۲،۷، ۱۲، ۱۷، ۲۲، ۲۷، ...

۲، ۵، ۸، ۱۱، ۱۴، ۱۷، ...

راتا ۱۳۷۱ جملهٔ خودنوشته‌ایم. دراین‌صورت، دردوتصاعد، چندجملهٔ مساوی‌وجود دارد؟

۹۵. تعدادی سکهٔ هم‌اندازه دراختیار داریم. وقتی خواستیم آن‌ها را بــه شکل مربع درآوریم، ۵ سکه زیــادآمد. بدون دست زدن بــه مربع اول، خواستیم مربعی بسازیم‌که، ضلع آن، یك واحد بزرگتر باشد، ۸ سکه‌کم آوردیم. چند سکه داشته‌ایم؟

۹۶. چه ساعتی است؟

ـ اگریك چهارم زمانی راکه ازظهرگذشته است، به نصف فاصلهٔ زمانی از حالا تا ظهرفردا، اضافه‌کنید، پاسخ خود رابه دست می‌آورید.

۹۷. نیم دایره‌ای به شعاع واحد را (که قطری افقی دارد)، دور انتهای چپ آن، به اندازهٔ ۳۰ درجه ودرجهت مثلثاتی(عکس جهت حرکت عقربه‌های ساعت)دوران داده‌ایم. مطلوب است مساحت شکلی‌که، ضمن این دوران، بر نیم‌دایرهٔ اصلی محیط می‌شود.

۹۸. درستی این نابرابری را، بدون استفاده ازمحاسبهٔ تقریبی، ثابت‌کنید:

$$\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}<2\sqrt[3]{3}$$

۹۹. به این جمع توجه‌کنید:

$$\begin{array}{r} five+ \\ four \\ \hline nine \end{array}$$

که درآن، هرحرف بــه جای یك رقم است؛ حرف‌های مختلف نمایندهٔ رقم‌های مختلف و حرف یکسان، نمایندهٔ رقم‌های یکسان‌اند.

رقم‌ها راطوری پیداکنیدکه عدد «$five$» مضرب ۵، عدد «$four$» مضرب ۴ وعدد «$nine$» مضرب ۳ باشد.

۱۰۰. دومتحرك، باسرعت‌های ثابت و دریك جهت، روی محیط دایــره‌ای حرکت می‌کنند. متحرك اول، محیط دایــره را، ۲ ثانیه زودتر ازمتحرك دوم طی می‌کند و هر ۱۲ ثانیه یکبار، به متحرك دوم می‌رسد. هرمتحرك، درچند ثانیه، دایره را دور می‌زند؟

۱۰۱. می‌خواهیم در طرح شکل ۱۱، بــه جای هردایرهٔ سیاه، یك رقم قرار دهیم، بــا این شرط‌ها:

●● : ۵ + ● × ۷ = ۴●
● ۴ : ● − ۴ × ● = ●
●● − ۱ − ● × ۲ = ●●
● ۳ − ● + ●● − ۵ = ●●
●● + ● + ●۰ + ●● = ●●

شکل ۱۱

۱) در هرسطر، بعد از انجام عمل‌ها، بــه نتیجه‌ای برسیم که بعدازعلامت برابری‌وجود دارد؛

۲) درانجام عمل‌های هرسطر، عمل‌ها را بــه ترتیب انجام دهید، نه طبق قانون‌های ریاضی. مثلاً می‌دانید، اگرداشته باشیم: ۲ × ۴ + ۵، طبق قانون، بــاید ابتدا ۲ × ۴ را

محاسبه و، سپس، نتیجه را با ۵ جمع کرد: $۱۳ = ۲ \times ۴ + ۵$؛ ولی در این‌جا، منظور ما از چنین عملی، انجام عمل‌ها، به همان ردیفی است که نوشته شده است، یعنی اول ۵ را با ۴ جمع و، سپس، نتیجه را در ۲ ضرب کنیم؛

۳) هیچ عددی مساوی صفر نیست و با صفر آغاز نمی‌شود، ولی می‌تواند به صفر ختم شود؛

۴) مجموع عددهای هر ستون، باید برابر عددی شود که، زیـر آن ستون، نوشته شده است. درضمن، مجموع نخستین ستون (ازسمت چپ)، برابر است با نتیجهٔ سطر اول، مجموع ستون دوم برابر است با نتیجهٔ سطردوم وغیره.

۱۰۲. الف) به این برابری عجیب توجه کنید:

$$\frac{۷^۳+۵^۳}{۷^۳+۲^۳}=\frac{۷+۵}{۷+۲}=\frac{۴}{۳}$$

(محاسبه کنید تا به درستی نتیجه مطمئن شوید!). آیـا می‌توانید، دلیل این روش عجیب را پیدا کنید؟

ب) برای برابری $\sqrt[۵]{۲\frac{۲}{۳۱}}=۲\sqrt[۵]{\frac{۲}{۳۱}}$ چه دلیلی دارید؟

۱۰۳. مطلوب است محاسبهٔ حجم جسمی که ازدوران یك مکعب به‌ضلع a، دورقطرش به دست می‌آید.

۱۰۴. عددی چهار رقمی پیدا کنید که با مجذور عددی که ازدو رقم آخر آن به دست می‌آید، برابر باشد.

۱۰۵. معادلهٔ $x^۲+y^۲=z^۳$، درمجموعهٔ عددهای طبیعی، چند جواب برای x و y و z دارد؟

۱۰۶. ثابت کنید، اگر $f(x)$ تابعی زوج و مشتق‌پذیر باشد، مشتق آن $f'(x)$، تابعی فرد است.

۱۰۷. مقدارهای تقریبی تابع $y=\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}$ را، بـرای $۰/۳\leqslant x\leqslant ۰/۳۵۵$ پیدا کنید.

۱۰۸. جواب‌های تقریبی این معادله را ودقت تقریب جواب مثبت را پیدا کنید:

$$۰/۰۰۰۰۰۲x^۲+۴x-۱=۰$$

۱۰۹. مقدار تقریبی این عبارت را پیدا کنید:

$$\frac{\sqrt{۱/۰۰۰۰۱}-۱}{۰/۰۰۰۰۰۱}$$

۱۱۰. ثابت کنید، درعدد $\alpha=(\sqrt{۲۶}+۵)^{۱۰۱}$، صد رقم اول بعد از ممیز برابر صفر است.

۱۱۱. مقدار S را، با دقت تا ۰/۰۰۵ تقریب، به دست آورید:

$$S=\frac{۱}{۱۰^{۲}}+\frac{۱}{۱۱^{۲}}+\frac{۱}{۱۲^{۲}}+\dots+\frac{۱}{۱۰۰^{۲}}$$

۱۱۲. ثابت کنید، این معادله‌ها جواب ندارند (x، y، z و t، هر کدام یك رقم‌اند):

الف) $\overline{xyz}=x\cdot\overline{yz}$؛ ب) $\overline{xyz}=y\cdot\overline{xz}$؛

ج) $\overline{xy}\cdot\overline{zt}=t\cdot\overline{xyz}$

۱۱۳. ثابت کنید: الف) عددی بر ۱۹ بخش‌پذیر است که، مجموع دو برابر یکان با تعداد دهگان آن، بر ۱۹ بخش‌پذیر باشد مثلاً عدد ۴۱۸ بر ۱۹ بخش‌پذیر است، زیرا حاصل‌جمع دوبرابر یکان آن، یعنی ۱۶، با تعداد دهگان آن، یعنی ۴۱، برابر ۵۷ می‌شود که بر ۱۹ بخش‌پذیر است)؛ ب) عددی بر ۲۹ بخش‌پذیر است که، مجموع سه‌برابر یکان آن با تعداد دهگان آن، بر ۲۹ بخش‌پذیر باشد.

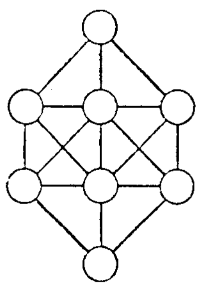
۱۱۴. m و n عددهایی طبیعی‌اند و a، رقمی مخالف صفر. ثابت کنید:

$$\overline{\underbrace{۹۹\dots۹}_{m\ \text{رقم}}}\times\overline{\underbrace{aa\dots a}_{n\ \text{رقم}}}=\overline{\underbrace{۹۹\dots۹}_{n\ \text{رقم}}}\times\overline{\underbrace{aa\dots a}_{m\ \text{رقم}}}$$

(مثلاً $۹۹۹\times۷۷=۹۹\times۷۷۷$).

۱۱۵. دو عدد n رقمی $\overline{a_۱a_۲\dots a_n}$ و $\overline{b_۱b_۲\dots b_n}$ راطوری پیداکنید که، حاصل‌ضرب آن‌ها، با حاصل‌ضرب مقلوب همان دوعدد، برابر باشد (مقلوب یك عدد، یعنی همان عدد، به شرطی که، رقم‌های آن، به ردیف عکس نوشته شود).

مثلاً $۳۵۲۱۱\times۲۰۶۴۶=۱۱۲۵۳\times۶۴۶۰۲$.



شکل ۱۲

۱۱۶. در دایره‌های شکل ۱۲، عددهای از ۱ تا ۸ را طوری قرار دهید که، اختلاف هر دوعدد واقع در دو دایرهٔ مجاور که به وسیلهٔ پاره خط راستی به هم وصل شده‌اند، از ۲ کمتر نباشد. مثلاً، اگر دردایرهٔ بالا، عدد ۳ را قرار داده‌اید، نمی‌توانید درهیچ کدام از سه دایرهٔ مجاور آن، یکی از دو عدد ۲ یا ۴ را قراردهید.

۱۱۷. یك نه ضلعی محدب وهمهٔ قطرهای آن را رسم کنید. اگر از هر نقطهٔ برخورد دوقطر، هیچ قطر دیگری عبور نکند، این قطرها، درچندنقطه یکدیگر راقطع می‌کنند؟

۱۱۸. درمجموع $1+2+3+4+\dots$، چند جمله انتخاب کنیم تا حاصل آن یك عدد سه رقمی با رقم‌های برابر بشود؟

۱۱۹. کدام بزرگترند: $\frac{10^{1370}+1}{10^{1371}+1}$ یا $\frac{10^{1371}+1}{10^{1372}+1}$؟

۱۲۰. موشك از ارتفاع H، تحت تأثیرجاذبهٔ ماه، باشتاب a (متر بر ثانیه) وسرعت اولیهٔ v (متر بر ثانیه) به‌طورقائم برسطح ماه فرود می‌آید. موشك به‌کمك موتور ترمز کننده، حرکت کند شوندهٔ متشابه‌بالتغییری پیدا می‌کند، به نحوی‌که، درهر ثانیه، a مترسرعت خود را از دست می‌دهد. درچه لحظه‌ای از آغاز سقوط، موتور ترمز کننده را به‌کار اندازیم، تا موشك درلحظهٔ برخورد به سطح ماه، سرعت صفر داشته باشد، (چیزی‌که، به‌آن، فرود آرام موشك برسطح ماه‌گویند)؟

۱۲۱. دوپیاده، یکی ازنقطهٔ A ودیگری ازنقطهٔ B، با سرعت‌های برابر v، به طرف چهارراه O، دریك زمان حرکت‌کردند. بعداز زمانی مثل t، فاصلهٔ بین‌آن‌ها برابر s شدکه کمترین فاصلهٔ ممکن بین دوپیاده بود.این فاصله راپیداکنید، به شرطی‌که بدانیم، جاده‌های OA و OB برهم عمودند وطول‌های $|OA|$ و $|OB|$ برابر نیستند.

۱۲۲. دراین جمع، رقم‌ها را پیدا کنید:

$$\begin{array}{r} A\,+ \\ A\;B \\ A\;B\;C \\ \hline B\;C\;B \end{array}$$

هرحرف نشانهٔ یك رقم، حرف‌های مختلف نشانهٔ رقم‌های مختلف و حرف‌های یکسان نشانهٔ رقم‌های یکسان است.

۱۲۳. روی تختهٔ سیاه، این عددها نوشته شده است:

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰

درهرگام، دوعدد راپاك می‌کنیم و، به جای‌آن‌ها، تفاضلشان را می‌نویسیم.آیا ممکن است، بعداز چندگام، تنها عدد صفر روی تختهٔ سیاه باقی بماند؟

۱۲۴. عددی داریم سه‌رقمی،که رقم سمت‌راست‌آن بارقم سمت‌چپ آن فرق دارد. این عدد را مقلوب می‌کنیم (مقلوب $\overline{abc}$ یعنی $\overline{cba}$). از دوعددی‌که در دست داریم، کوچکتر را از بزرگترکم می‌کنیم و، سپس، تفاضل حاصل را با مقلوب خودش جمع می‌کنیم. نتیجهٔ جمع، چه عددی است؟

۱۲۵. مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ با یال‌های جانبی AA_1، BB_1، CC_1 و DD_1 مفروض است. روی ادامهٔ یال‌های AB، AA_1 و AD، به ترتیب پاره‌خط‌های راست BP، A_1Q و DR را، هر کدام به طول $\frac{3}{2}|AB|$، جدا کرده‌ایم

$$\left(|AP|=|AQ|=|AR|=\frac{5}{2}|AB|\right)$$

از سه نقطهٔ P، Q و R، صفحه‌ای می‌گذرانیم. این صفحه، حجم مکعب را بـه چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

۱۲۶. x چه مقدارهایی می‌تواند باشد تا داشته باشیم:

$$log_x 2x \leqslant \sqrt{log_x(2x^3)}\ ?$$

۱۲۷. به ازای چه مقدارهایی از x و y، برابری زیر برقرار است:

$$tg^4 x + tg^4 y + 2\,cotg^2 x\, cotg^2 y = 3 + sin^2(x+y)?$$

۱۲۸. آیـا همیشه می‌توان n نقطهٔ دلخواه واقع بریك صفحه را، بـه‌کمك یك خط شکستهٔ بسته، طوری به‌هم وصل کرد که، ضلع‌های خط شکسته، جز در رأس‌های خط شکسته درجای دیگری یکدیگر راقطع نکرده باشند؟

۱۲۹. درمتوازی‌الاضلاع $ABCD$، رأس A رابه وسط ضلع‌های BC و CD وصل کرده‌ایم. این‌پاره‌خط‌های راست، قطر BD ازمتوازی‌الاضلاع رابه‌چه نسبتی تقسیم‌می‌کنند؟

۱۳۰. عددی سه رقمی پیدا کنیدکه مجذورآن عددی شش رقمی باشدکه بـه همان سه رقم عدد اصلی ختم شده است.

۱۳۱. دایره‌ای‌که یك قطرآن رسم شده‌است، مفروض است. می‌خواهیم، تنها به‌کمك خط‌کش، ازنقطه‌ای واقع درخارج دایره، عمودی براین قطر رسم‌کنیم.

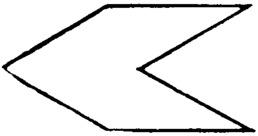
۱۳۲. دست‌کم چند برش لازم است تابتوانیم، ازیك مکعب، ۶۴ مکعب کوچکتر به دست آوریم؟ بعداز هر برش، می‌توان قطعه‌های جدا ازهم را، به هر ترتیبی روی هم گذاشت وآن‌ها را برش داد.

۱۳۳. می‌دانید ۳ نفر یا ۴ نفر از دوستانتان به دیدار شما می‌آیند. می‌خواهید یك نان شیرینی ۶۰۰ گرمی را، ازقبل، طوری تقسیم کنیدکه درهروضعی (چه ۳ نفرمهمان‌داشته باشید وچه ۴ نفر) بتوانید شیرینی رابه طور مساوی بین‌آن‌ها تقسیم‌کنید. البته، می‌شودنان شیرینی را به ۱۲ بخش مساوی تقسیم‌کرد، ولی اگردقت‌کنید، ۶ بخش‌کافی است. چطور؟

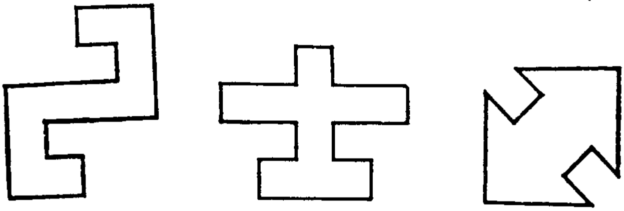
۱۳۴. چهار نقطه را روی یك صفحه طوری قراردهیدکه، برای بیان فاصلهٔ بین هر-دونقطهٔ دلخواه، تنها از دوعدد استفاده شود.

۱۳۵. الف) با یك خط راست، شکل ۱۳ را، به سه بخش،چنان تقسیم کنیدکه بتوان، با این بخش‌ها، یك‌مربع‌ساخت.

ب) از هر کدام از شکل‌های ۱۴، یك مربع بسازید. شکل سمت چپ را به سه بخش وهر یك ازدوشکل دیگر را به چهار بخش، تقسیم‌کنید.



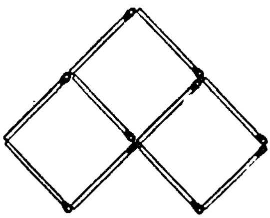
شکل ۱۳



شکل ۱۴

۱۳۶. درمثلث ABC، دو ارتفاع h_C و h_B از ضلع‌هایی‌که بر آن‌ها وارد شده‌اند، کوچکتر نیستند (یعنی، هریك ازاین دو ارتفاع، بزرگتریا برابر ضلعی است‌که بر آن عمود شده است). دربارهٔ این مثلث چه می‌گوئید؟

۱۳۷. درشکل ۱۵ می‌بینیدکه به‌کمك ۱۰ چوب کبریت، توانسته‌ایم‌سه چهارضلعی بسازیم. اکنون‌کوشش کنید با ۹ چوب‌کبریت، سه چهار ضلعی بسازید. باید ضلع‌های چهارضلعی‌ها باهم برابر باشند.

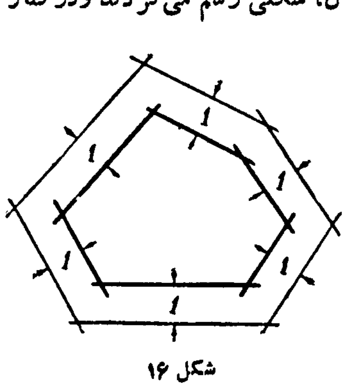


شکل ۱۵

۱۳۸. دودانش‌آموزمی‌خواستندکتابی رابخرند. دانش‌آموز اول برای خریدکتاب ۳۰ تومان‌کم داشت. اگر دانش‌آموز دوم می‌خواست خودش‌کتاب رابخرد، ۵ ریال‌کم داشت. وقتی «پول»های خود را روی هم ریختند، بازهم به اندازهٔ قیمت‌کتاب نشد. قیمت‌کتاب راپیداکنید.

۱۳۹. درهند باستان، اغلب به‌جای بیان استدلال، شکلی رسم می‌کردند ودرکنار آن می‌نوشتند: «ببینید». آن‌ها معتقدند بودند، کسی‌که به ریاضیات می‌پردازد، باید جست‌وجوگر باشدو خودش استدلال لازم راپیداکند. شماهم «ببینید» به‌کمك شکل ۱۶، چگونه می‌توان این مسأله را را حل‌کرد:

یك چندضلعی محدب داریم‌که محیط آن برابر ۱۲ سانتی‌متر است. چندضلعی محدب دیگری دربیرون آن قرار گرفته است‌که، فاصلهٔ



شکل ۱۶

هرضلع آن با ضلع نظیرش از چندضلعی درونی، برابریك سانتی‌متراست. ثابت کنید، برای مقدار S، تفاوت مساحت‌های دو چندضلعی داریم:

$$S>۱۵$$

۱۴۰. چند عضو ازمجموعهٔ زیر، که شامل ۱۳۷۱ عضو است، بر ۷ بخش‌پذیرند

$$\{۱، ۱۱، ۱۱۱، ۱۱۱۱، \ldots، ۱۱\ldots۱\}$$

۱۴۱. درمثلث متساوی‌الساقین ABC ($|CA|=|CB|$)، زاویهٔ رأس C برابر ۸۰ درجه است. از رأس‌های A و C، نیم خطهای راستی رسم می‌کنیم که با قاعده، به ترتیب، زاویه‌های ۱۰ درجه و ۳۰ درجه بسازند. اگراین دونیم خط راست، یکدیگر را در درون مثلث ودرنقطهٔ O قطع کنند. ثابت کنید، مثلث AOC متساوی‌الساقین است.

۱۴۲. عددی پنج رقمی چنان است که، اگر رقم ۶ را در سمت چپ آن قرار دهیم، عدد شش‌رقمی حاصل، چهار برابرعدد شش‌رقمی می‌شود که با قراردادن رقم ۶ در سمت راست، عدد پنج رقمی اصلی به دست می‌آید. عدد پنج رقمی راپیداکنید.

۱۴۳. پنج رقم سمت راست عدد $۵^{۱۳۷۳}$ راپیداکنید.

۱۴۴. دو دایرهٔ $\omega_۱$ و $\omega_۲$، یکدیگر را درنقطه‌های A و B قطع کرده‌اند. مماس بر $\omega_۱$ درنقطهٔ A، دایرهٔ $\omega_۲$ را درنقطهٔ C و مماس بر $\omega_۲$ در نقطهٔ B، دایرهٔ $\omega_۱$ را درنقطهٔ D قطع کرده‌اند. ثابت کنید:

۱) (AD) با (BC) موازی است؛　　　۲) $|AB|^۴=|AD|\cdot|BC|$

۳) $|BD|^۲:|AC|^۲=|AD|:|BC|$.

۱۴۵. عمل xoy رابرای عددهای گویا ومثبت، این طور تعریف می‌کنیم که، برای عددهای x، y، z و t داشته باشیم:

۱) $(xoy)(zot)=(xz)o(yt)$;　　۲) $xo۱=x$;　　۳) $xox=۱$

دراین‌صورت، حاصل $۲۷o۴۳$ چقدر است؟

۱۴۶. زاویهٔ A ازمثلث ABC برابر ۶۰ درجه‌است. وسط ضلع BC را $A_۱$ وپای ارتفاع‌های وارد از رأس‌های B و C برضلع‌های مقابل را، به‌ترتیب، $B_۱$ و $C_۱$ می‌نامیم. ثابت کنید، مثلث $A_۱B_۱C_۱$، متساوی‌الاضلاع است.

۱۴۷. متوازی‌الاضلاع $ABCD$ مفروض است. روی نیم‌خطهای راست AB، BC، CD و DA، نقطه‌های K، L، M و N را انتخاب کرده‌ایم، به نحوی که

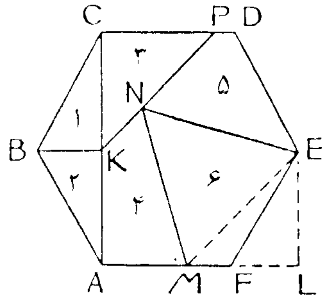
$$|AK|=\frac{1}{n}|AB|,\quad |BL|=\frac{1}{n}|BC|,\quad |CM|=\frac{1}{n}|CD|,\quad |DN|=\frac{1}{n}|AD|$$

نقطهٔ برخورد (AL) و (DK) را R، نقطهٔ برخورد (AL) و (BM) را S، نقطهٔ برخورد (BM) و (CN) را T و، سرانجام، نقطهٔ برخورد (CN) و (DK) را Q می‌نامیم. مطلوب است نسبت مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$ به مساحت چهارضلعی $RSTQ$. به ازای کدام مقدار طبیعی n، این نسبت برابر عددی درست است؟

۱۴۸. نقطه‌های O_1، O_2 و O_3، مرکز مربع‌هایی که روی ضلع‌های مثلث ودر بیرون آن ساخته‌ایم، داده شده‌اند. مثلث را رسم کنید.

۱۴۹. به‌کمك ۹ چوب کبریت برابر، ۷ مثلث واقع بر یك صفحه درست کنید. نمی‌توانید چوب کبریت‌ها را بشکنید یا روی هم قرار دهید.

۱۵۰. روی یك مقوا، شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ را رسم کنید. دو نقطهٔ A و C را به هم وصل وعمود BK را بر آن رسم کنید. EL را برامتداد ضلع AF عمود و LM را برابر LE جدا کنید. از E به M وصل کنید وروی پاره خط راست EM، مثلث متساوی‌الاضلاع EMN را بسازید. K را به N وصل کنید وامتداد دهید تا ضلع CD را در P قطع کند (اگر رسم شما دقیق باشد، دوپاره خط راست CP و CK، برابر می‌شوند. چرا؟)



شکل ۱۷

اکنون شکل را، روی خط‌های کامل (ونه نقطه چین) ببرید وباشش بخشی که به‌دست می‌آید، یك مثلث متساوی‌الاضلاع بسازید. مواظب باشید، بین بخش‌ها، شکاف نباشد وهیچ دو بخشی روی هم قرار نگیرند.

۱۵۱. الف) عدد دورقمی $\overline{xy}$ را طوری پیدا کنید که با $x+y^2$ برابر باشد؛

ب) عدد سه‌رقمی $\overline{xyz}$ را طوری پیدا کنید که برابر $x+y^2+z^3$ باشد.

۱۵۲. متوازی‌الاضلاع $ABCD$ داده‌شده‌است. روی ضلع‌های AB و BC، مربع‌های $ABPQ$ و $CBRS$ را ساخته‌ایم (در خارج متوازی‌الاضلاع). ثابت کنید، DQ و DS طول‌هایی برابر دارند وبرهم عمودند.

۱۵۳. سن متوسط عضوهای گروه ژیمناستیك ۱۱ سال است. بزرگترین آن‌ها ۱۷ سال دارد که اگر او را کنار بگذاریم، سن متوسط بقیه ۱۰ سال می‌شود. این گروه چند عضو دارد؟

۱۵۴. سن متوسط ۱۱ بازی‌کن تیم‌فوتبال، یك‌سال بیشتر ازسن متوسط ۱۰ بازی‌کن همان تیم، بدون کاپیتان تیم است. سن کاپیتان، چند سال بیشتر از سن متوسط تیم است؟

۱۵۵. چهارنقطه را روی صفحه یا درفضا طوری درنظر بگیرید که، هیچ سه نقطه‌ای، بریك خط راست نباشند. اگراین نقطه‌ها را دوبه‌دو بـه هم وصل‌کنیم، ۶ پاره خط راست به دست می‌آید. ۶، عددی کامل است، یعنی با مجموع همهٔ مقسوم علیه‌های کوچکتر از خود برابر می‌شود:

$$۶=۳+۲+۱$$

عددکامل بعدی، عدد ۲۸ است. برای‌این‌که از وصل دوبه‌دوی نقطه‌ها، ۲۸ پاره خط‌راست به دست‌آید، چند نقطه (درصفحه یادرفضا) لازم است؟

۱۵۶. هریك ازاین دو معادله راحل‌کنید:

$$۱)\ \ \overline{abc}=c\times\overline{ba};\qquad ۲)\ \ \overline{abcd}=(\overline{ab})^{۲}+(\overline{cd})^{۲}$$

۱۵۷. ازیك صفحهٔ کاغذ مربعی شکل، با پنج بار تاکردن، مربعی بسازیدکه،مساحت آن، $\frac{۳}{۴}$ مساحت مربع اصلی باشد.

۱۵۸. در این‌جا، دوضرب داده شده است. ستاره‌ها، بـه جای رقم‌های مجهول‌اند: ۱) ثابت‌کنید، درضرب سمت چپ،اشتباهی رخ داده‌است؛ ۲) برای ضرب سمت راست، چند جواب وجود دارد؟

$$\begin{array}{r} \text{***۳}\times \\ \text{**} \\ \hline \text{***۷} \\ \text{*****} \\ \hline \text{*****۷} \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r} \text{***۳}\times \\ \text{**} \\ \hline \text{***۴} \\ \text{*****} \\ \hline \text{*****۴} \end{array}$$

۱۵۹. می‌دانیم $\varphi=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$، جوابی ازاین معادله راپیداکنید:

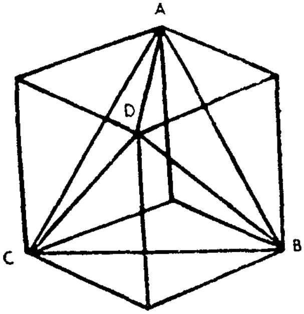
$$\varphi^{\varphi^{x}-\frac{x-۱}{\varphi}}-\frac{۱}{\varphi}=x$$

۱۶۰. حداکثر و حداقل $x^{۲}+y^{۲}$ را پیداکنید، به شرطی‌که بدانیم، x و y در این نابرابری‌ها صدق می‌کنند:

$\frac{x}{-2}+\frac{y}{5}\leqslant 1$ (۱)؛ $\frac{x}{12}+\frac{y}{14}\leqslant 1$ (۲)؛

$\frac{x}{5}+\frac{y}{-6}\leqslant 1$ (۳)؛ $\frac{x}{2}+\frac{y}{6}\geqslant 1$ (۴)؛ $y\geqslant 2$ (۵)

۱۶۱. در شکل ۱۸، بزرگترین چهاروجهی ممکن، که می‌توان در یك مکعب جاداد، نشان داده شده است. اگر طول یال مکعب برابر واحد باشد، حجم این چهاروجهی را پیدا کنید.



شکل ۱۸

۱۶۲. الف) حاصل کسر $\frac{1}{1/00\ldots01}$ (تعداد صفرهای بعداز ممیز درمخرج برابر است با ۹۹) را تا ۲۰۰ رقم بعداز ممیز پیدا کنید.

ب) حاصل عدد $\sqrt{0/99\ldots9}$ (تعداد رقم‌های ۹، بعداز ممیز در زیر رادیکال، برابر است با ۱۰۰) راتا ۱۰۰ رقم بعد از ممیز به دست آورید.

۱۶۳. پیاده‌ای باسرعت ۴ کیلومتر درساعت از شهر A بـه طرف شهر B حرکت کرد. بعداز مدتی پیادهٔ دوم و، سپس، بازهم بعدازگذشت همان فاصلهٔ زمانی، پیادهٔ سوم از A به طرف B حرکت‌کردند. در نیمهٔ راه بین A و B، پیادهٔ سوم به دومی رسید. از آن‌جا به بعد، دونفرباسرعتی برابر واسطهٔ عددی سرعت‌های قبلی خود به‌راه ادامه دادند وهمراه با اولی به B رسیدند. به شرطی‌که سرعت سومی در نیمهٔ اول‌راه، ۶ کیلومتر درساعت‌باشد، سرعت دومی را درنیمهٔ اول راه پیداکنید.

۱۶۴. چه سالی‌ازسدهٔ بیستم رامی‌توان به‌صورت $2^k - 2^n$ نوشت (k و n، عددهای طبیعی هستند)؟

۱۶۵. در دایره‌ای، دوشعاع رسم شده است. وتری از دایره رسم‌کنیدکه، بـه‌وسیلهٔ این دوشعاع، به سه بخش برابرتقسیم شود.

۱۶۶. نقطهٔ A در درون شش دایره قرار دارد. ثابت‌کنید، مرکزیکی از دایره‌ها، در درون یکی‌از دایره‌های دیگر واقع است.

۱۶۷. دوعدد دورقمی را درهم ضرب‌کرده‌ایم، حاصل‌ضرب راباعددی سه رقمی‌که رقم سمت چپ آن برابرواحداست، جمع‌کرده‌ایم، حاصل جمع، عدد پنج رقمی شده‌است. عددهای دورقمی وعدد سه رقمی راکه با حاصل‌ضرب آن‌ها جمع شده است، پیداکنید.

۱۶۸. دنبالهٔ عددهای زیر، ازچه قانونی پیروی می‌کنند؟ بــه جای پاره‌خطها، کدام عددها ر باید قرارداد؟

۱	۰	۱
۳	۴	۵
۵	۱۲	۱۳
۷	۲۴	۲۵
—	—	—
—	—	—
—	—	—

۱۶۹. آیامی‌توان پنج عدد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ رابه دوگروه چنان تقسیم کردکه، تفاضل هردوعدد ازیك گروه، برابرهیچ‌یك ازعددهای همان گروه نباشد؟

۱۷۰. همهٔ تصاعدهای حسابی راپیداکنیدکه هرکدام‌از آن‌ها، دست‌کم ۵ جمله‌داشته باشد و، همهٔ آن‌ها، عددهایی‌اول باشند. درضمن‌می‌دانیم قدرنسبت تصاعد، برابراست با۶.

۱۷۱. درتصاعد حسابی باجملهٔ اول a_1 وقدرنسبت برابر d، مجموع توان‌های سوم n جملهٔ اول راپیدا کنید.

۳. از مسابقه‌ها، کنکورها و المپیادهای ریاضی

§۱. نظریهٔ عددها، جبر، مثلثات، آنالیز

۱۷۲. کسر $\frac{(a^3+b^3)(a+b)^3+2a^3b^3}{(a^2+b^2)(a+b)^2+a^2b^2}$ را ساده‌کنید.

۱۷۳. ثابت‌کنید، به شرط $x^2+y^2+z^2>0$، داریم:

$$2x^2+5y^2+3z^2-6xy-2xz+5yz>0$$

۱۷۴. x را، بدون استفاده ازجدول، پیدا کنید:

$$tg\,x=\frac{\cos 20^\circ\ \cos 30^\circ}{\cos^2 10^\circ}$$

۱۷۵. ثابت کنید، عدد $10^n - 4^n + 3n$ $(n \in \mathbf{N})$، مضربی است از ۹.

۱۷۶. چه رابطه‌ای بین a، b، c و d برقرار است، اگر داشته باشیم:

$$\sin x + \sin y = a, \qquad \cos x + \cos y = b,$$

$$\sin z - \sin(x+y+z) = c, \qquad \cos z + \cos(x+y+z) = d$$

۱۷۷. p و q عددهایی درست‌اند و می‌دانیم $\cos\alpha = \frac{p}{q}$. ثابت کنید، به ازای هر $n \in \mathbf{N}$، مقدار $q^n \cos n\alpha$ عددی درست است.

۱۷۸. کدام بزرگترند: الف) $\log_3 16$ یا $\log_{16} 729$؛ ب) $\log_3 5$ یا $\log_4 9$؟

۱۷۹. در تقسیم عدد طبیعی n بر ۶، باقی‌مانده‌ای برابر ۴ و در تقسیم همان عدد بر ۱۵، باقی‌مانده‌ای برابر ۷ به دست آمده است. باقی‌ماندهٔ عدد n بر ۳۰ چقدر است؟

۱۸۰. این معادله‌ها را حل کنید:

الف) $\sin x\left(\cos\frac{x}{4} - 2\sin x\right) + \cos x\left(1 + \sin\frac{x}{4} - 2\cos x\right) = 0;$

ب) $\sin x - \sin 3x = \cos 2x \cdot \sin 3x$

ج) $$\left(\sqrt{\cos x} - 4\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} + 5\sqrt[4]{2}\right)^2 -$$
$$- 2\sqrt{\cos x}\left(\sqrt{\cos x} - 4\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} + 5\sqrt[4]{2}\right) - \sin x = 0$$

۱۸۱. به شرط $abc \neq 0$ و $ab^2 + 1 = 0$، این معادله را حل کنید:

$$\frac{x}{a} + \frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{c} = bc$$

۱۸۲. همهٔ عددهای مثبت a را پیدا کنید که، به‌ازای هریک از آن‌ها، همهٔ مقدارهای متمایز وغیرمنفی x که درمعادلهٔ

$$\cos(8a-3)x = \cos(14a+5)x$$

صدق می‌کنند، اگر به ردیف صعودی نوشته شوند، تشکیل یک تصاعد حسابی بدهند.

۱۸۳. این نامعادله‌ها راحل کنید:

الف) $\log_{\frac{1}{2}}(x+2)\log_2(x+1) > \log_{x+2}(x+1);$

ب) $|x-2|^{\log_4(x+2)-\log_2 x}<1$

ج) $(4x-x^2-3)\log_2(\cos^2\pi x+1)\geqslant 1$

۱۸۴. ثابت کنید، چند جمله‌ای زیر، به ازای همهٔ مقدارهای حقیقی a، دست‌کم یك ریشه در بازهٔ $[0,1]$ دارد:

$$f(x)=12x^3+12ax^2-8ax-3$$

۱۸۵. اگر $tg\left(\frac{\pi}{2}xy\right)=0$ و $0<a<2$، برای هر مقدار a، حداقل مقدار ممکن را، برای این عبارت پیدا کنید:

$$A=2x^2+\frac{1}{2}y^2-a(2x+y)$$

۱۸۶. برای عددهای مثبت a، b، c، A، B و C می‌دانیم:

$$a+A=b+B=c+C=k$$

ثابت کنید: $aB+bC+cA<k^2$.

۱۸۷. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n، عدد

$$A=1^{1371}+2^{1371}+3^{1371}+\ldots+n^{1371}$$

بر $n+2$ بخش‌پذیر نیست. چگونه می‌توان باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم A بر $n+2$ را به دست آورد؟

۱۸۸. پنج عدد طبیعی مختلف را طوری پیدا کنید که، هر دو عدد از آن‌ها، نسبت به هم اول باشند، ولی مجموع هر چند عدد از آن‌ها، عددی مرکب باشد.

۱۸۹. همهٔ عددهای α را پیدا کنید، که به‌ازای هر یك از آن‌ها، دنبالهٔ

$$\cos\alpha,\ \cos 2\alpha,\ \cos 4\alpha,\ \cos 8\alpha,\ \ldots,\ \cos 2^n\alpha,\ \ldots$$

تنها شامل عددهای منفی باشد.

۱۹۰. نمودار تابع $y=f(x)$، که برای هر عدد حقیقی x معین است، ضمن دوران به اندازهٔ زاویهٔ $\frac{\pi}{2}$، دور مبداء مختصات، برخودش منطبق می‌شود:

الف) ثابت کنید، معادلهٔ $f(x)=x$ درست یك ریشهٔ حقیقی دارد.

ب) نمونه‌ای از این تابع را پیدا کنید.

۱۹۱. درستی این نابرابری را، برای هر $n\in\mathbf{N}$، ثابت کنید:

$$(2n+1)^n\geqslant(2n)^n+(2n-1)^n$$

۱۹۲. اگر x و y عددهایی منفی باشند و بدانیم:

$$x^۲-۴xy+y^۲+۳\leqslant ۰$$

حداکثرمقدار عبارت $x+۲y$ را پیدا کنید.

۱۹۳. مختصات (x,y) هر نقطهٔ دلخواه ازخط راستی، به‌مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ

$$log_۴\frac{۴^x}{|x+y|}\cdot log_{|x+y|}\frac{|x+y|^x}{۴}(۲x^۲-۱۰\times ۲^{x+y}.x+۲xy+y^۲-۳)\geqslant ۰$$

تعلق دارند. معادلهٔ این خط راست را پیدا کنید.

۱۹۴. سهمی $y=x^۲$ مفروض است. دو نقطهٔ $A(a,a^۲)$ و $B(b,b^۲)$ را روی سهمی انتخاب کرده‌ایم $(a\geqslant b)$ ومماس‌های بر سهمی را درنقطه‌های A و B رسم کرده‌ایم تا در نقطهٔ C به هم برسند. مساحت مثلث ABC برابر ۲ واحد مربع شده است. مکان هندسی نقطهٔ C را پیدا کنید.

۱۹۵. به ازای چه مقدارهای حقیقی پارامتر a، هرجواب نامعادلهٔ $x^۲\geqslant x+a^۲$، جوابی ازنامعادلهٔ $\left(\frac{۴}{۵}\right)^{x^۲-۲x}\leqslant\left(\frac{۵}{۴}\right)^{a+x}$ است؟

۱۹۶. در دستگاه مختصات قائم، نمودار این تابع را رسم کنید:

$$y=cos x cos(x+۲)-cos^۲(x+۱)$$

۱۹۷. پارامتر a را طوری پیدا کنید که، مجموع مجذورهای همهٔ جواب‌های معادلهٔ

$$log_a|x-۲a|+log_a x=۲$$

برابر ۴ باشد.

۱۹۸. در دنبالهٔ ...۱۹۷۵۲۰، برای رقم پنجم ورقم‌های بعدازآن، هررقم رابرابر با رقم سمت راست عددی گرفته‌ایم که ازمجموع چهار رقم قبل‌ازآن به دست می‌آید. آیا در این دنباله

الف) به‌گروه رقم‌های ۱۲۳۴ و ۳۲۶۹؛

ب) به‌گروه رقم‌های ۱۹۷۵ (برای بار دوم)؛

ج) به‌گروه رقم‌های ۸۱۹۷ برخورد می‌کنیم؟

۱۹۹. همهٔ عددهای سه رقمی راپیداکنیدکه، هرکدام ازآن‌ها، درست ۵ مقسوم‌علیه داشته باشند.

۲۰۰. مجموعهٔ A شامل عددهای مثبت‌گویا، مفروض است. در این مجموعه، عدد $x\in A$ رامقدم برعدد $y\in A$ می‌نامیم، وقتی‌که بافرض $x=\frac{p}{q}$ و $y=\frac{r}{s}$ داشته باشیم $p<r$

(صورت ومخرج این‌کسرها مثبت وخودکسرها، ساده نشدنی‌فرض شده‌اند). آیا این‌قانون، مجموعهٔ A را مرتب می‌کند؟ اگر پاسخ منفی است، مثالی بیاورید.

۲۵۱. فرض‌کنید:

$$A=\{۱، ۲، \ldots، n\}، \qquad B=\{۱، ۲، \ldots، k\}$$

چند زیرمجموعهٔ $C \subset A$ وجود دارد، به نحوی که $C \cap B \neq \varnothing$؟

۲۵۲. دو عددگنگ α و β راطوری پیداکنیدکه α^{β}، عددی‌گویا باشد.

۲۵۳. دنبالهٔ (a_n)، به‌این ترتیب تعریف شده است:

$$a_۱=A، \quad a_۲=B، \quad \frac{۲}{a_n}=\frac{۱}{a_{n-۱}}+\frac{۱}{a_{n+۱}}، \ (A>B>۰)$$

ثابت‌کنید: $\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$.

۲۵۴. زاویه‌های حادهٔ α و β راپیدا کنید، به شرطی‌که داشته باشیم:

$$\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=\frac{۳}{۲}$$

۲۵۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a راپیداکنیدکه، به‌ازای هریك‌از آن‌ها، تعدادریشه‌های مثبت معادلهٔ

$$[(x-a-۱)^۲-۲](x-a-۱)^۲=a^۲-۱$$

بیش ازتعداد ریشه‌های منفی‌آن باشد.

۲۵۶. α و β، به ترتیب، ریشه‌های معادلهٔ

$$۲\sin x=\log_{\frac{۵}{۸}} x، \qquad ۲\cos x=\log_{\frac{۵}{۸}} x$$

هستند. ثابت‌کنید $\alpha>\beta$.

۲۵۷. مجموع توان‌های یازدهم ریشه‌های معادلهٔ زیر رامحاسبه‌کنید:

$$x^۳+x+۱=۰$$

۲۵۸. مطلوب است حداقل مقدار تابع

$$f(x،y)=۵|x|-۳|y|$$

درمجموعهٔ جواب‌های درست معادلهٔ $۴x+۵y=۷$.

۲۵۹. در دنبالهٔ زیر، چند عدد مختلف وجود دارد:

$$\left[\frac{1^2}{1980}\right],\left[\frac{2^2}{1980}\right],\left[\frac{3^2}{1980}\right],\ldots,\left[\frac{1980^2}{1980}\right]$$

منظور از $[a]$، بخش درست عدد a است.

۲۱۰. همهٔ عددهای طبیعی n را پیدا کنید که، به ازای هر یك از آن‌ها، عدد $2^8+2^{11}+2^n$ برابر مجذور یك عدد طبیعی باشد.

۲۱۱. ثابت کنید، با شرط فرد بودن n و $n>1$، دست‌کم یکی از عددهای

$$2^1-1,\ 2^2-1,\ 2^3-1,\ \ldots,\ 2^{n-1}-1$$

بر n بخش‌پذیر است.

۲۱۲. همهٔ تابع‌های $f(x)$ را پیدا کنید که، در مجموعهٔ $\mathbf{R}$ معین باشند و، برای عددهای حقیقی و دلخواه a، b و p، با این نابرابری سازگار باشند:

$$f(pa+(1-p)b)\leqslant pf(a)+f(1-p)f(b)$$

۲۱۳. این معادله را حل کنید:

$$||x|-[x]|=[|x|-[x]]$$

۲۱۴. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases}x+[y]+\{z\}=1/1\\ y+[z]+\{x\}=2/2\\ z+[x]+\{y\}=3/3\end{cases}$$

۲۱۵. برای دنبالهٔ (a_n) می‌دانیم $a_1=1$ و $a_{n+1}=(n+1)a_n+1$، مطلوب است محاسبهٔ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n!}$.

۲۱۶. تابع‌های f و g را پیدا کنید، به شرطی که

$$f(x)+f(y)+g(x)-g(y)=\sin x+\cos y$$

۲۱۷. اگر a یکی از عددهای $-1/2$، $-0/67$ و $-0/666$ باشد، به ازای کدام یك از آن‌ها، معادلهٔ

$$[2^{a+4}+15(x+a)]\left[1+2\cos\pi\left(a+\frac{x}{2}\right)\right]=0$$

دست‌کم یك جواب در بازهٔ $[0,1]$ دارد؟

۲۱۸. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases}|x-y|-\log_2^2(|x|+y+1)+6=0\\(x-y)^2-6(x-y)\log_2(|x|+y+1)+5\log_2^2(|x|+y+1)=0\end{cases}$$

۲۱۹. x_0 بزرگترین ریشهٔ معادلهٔ

$$x^2+2(a-b-3)x+a-b-13=0$$

است. باشرط $a\geqslant 2$ و $b\leqslant 1$، حداکثرمقدار x_0 چقدر است؟

۲۲۰. می‌دانیم $-1<a<1$. همهٔ مقدارهای a را پیدا کنید که، بـرای هریك از آن‌ها، عبارت

$$1+2\sqrt{x^2-2axy+y^2-6y+10}$$

تنها برای یك مقدار (x, y)، به حداقل خود برسد.

۲۲۱. حداکثر وحداقل مقدار y را پیداکنید، به شرطی‌که $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$ و

$$y=|x^2+x|+|x^2-3x+2|$$

۲۲۲. همهٔ مقدارهای a راپیداکنیدکه، به‌ازای هریك از آن‌ها، تنها یك جواب برای زوج عددهای درست (x, y) وجود داشته‌باشد، به نحوی‌که برای‌آن داشته باشیم:

$$-15x^2+11xy-2y^2=7,\quad x<y,\quad 2a^2x+3ay<0$$

۲۲۳. باشرط $-5<x<-3$، همهٔ جواب‌های این معادله را پیدا کنید:

$$2\sin^2 x=\sqrt{3}\sin x$$

۲۲۴. نامعادلهٔ $\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x+1}-x)<2$ را حل کنید.

۲۲۵. برای هرمقدار a، این معادله را حل کنید:

$$4\cos x\sin a+2\sin x\cos a=2\sqrt{7}+3\cos a$$

۲۲۶. رقم‌های x، y، z، t، u راپیدا کنید، به شرطی‌که

$$\overline{xyztu}=(\overline{xyz})^2-(\overline{tu})^2$$

۲۲۷. آیا این معادله، ریشه‌ای بزرگتر از ۲ دارد:

$$4x^3-5x^2-6x+3=0$$

۲۲۸. این معادله، چند ریشه دارد:

$$x=a+2\cos\frac{x+a}{2}$$

۲۲۹. ثابت‌کنید $1+2^{2^5}$ بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است.

۲۳۰. ثابت‌کنید، اگرعدد درست ومثبت a را بتوان به صورت $a=x^2+2y^2$ (x و y، عددهایی درست و مثبت‌اند) نوشت، آن وقت می‌توان a^2 را به صورت $a^2=u^2+2v^2$ نوشت (u و v، عددهایی درست ومثبت‌اند).

۲۳۱. با فرض $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$، ثابت‌کنید:

$$\frac{1}{a^5}+\frac{1}{b^5}+\frac{1}{c^5}=\frac{1}{(a+b+c)^5}$$

۲۳۲. p عددی است اول. ثابت‌کنید عدد $C_{2p}^{p}-2$ بر p بخش‌پذیر است.

۲۳۳. تابع $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\dots+a_n\sin nx$ را در نظر می‌گیریم. ثابت‌کنید، اگر برای هرمقدار حقیقی x داشته باشیم: $|f(x)|\leqslant|\sin x|$، آن وقت داریم:

$$|a_1+2a_2+\dots+na_n|\leqslant 1$$

۲۳۴. عدد چهار رقمی $\overline{abcd}$ را پیداکنید، به شرطی‌که

$$\sqrt[4]{\overline{abcd}}=a+b+c+d$$

۲۳۵. می‌دانیم معادلهٔ $x^2-ky^2=1$، برای $k\in\mathbf{N}$ و عددهای درست x و y، یك جواب دارد. ثابت‌کنید، دراین‌صورت، همین معادله، در مجموعهٔ عددهای درست، دارای بی‌نهایت جواب است.

۲۳۶. زیرمجموعه‌های A و B از مجموعهٔ C را طوری پیداکنیدکه، برای هر زیر-مجموعهٔ X از مجموعهٔ C، داشته باشیم: $X\cap A=X\cup B$.

۲۳۷. $n\in\mathbf{N}$ راطوری پیداکنیدکه $\frac{n^3-1}{5}$ عددی اول باشد.

۲۳۸. عددی پنج رقمی پیداکنیدکه شامل ۵ رقم متوالی باشد (لازم نیست،این پنج رقم، به ترتیب صعودی یا نزولی باشند) و مجذورآن، عددی ۹ رقمی باشدکه، درآن، همهٔ رقم‌های از ۱ تا ۹، و هرکدام یکبار، آمده باشد. می‌توانید از ماشین‌های حساب دستی استفاده کنید.

۲۳۹. ثابت‌کنید، اگر a_i عددی فرد وبخش‌ناپذیر بر ۳ باشد،آن وقت عدد

$$a_1^2-a_2^2+a_3^2-a_4^2+\dots+a_{2n-1}^2-a_{2n}^2$$

بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

۲۴۰. می‌دانیم $۲۲x+۵$ $(x\in\mathbf{N})$ برابر مجذور یك عدد طبیعی است. صورت کلی عدد x را پیدا کنید.

۲۴۱. ثابت کنید: $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin\frac{۱}{n+۱}}{n(n+۱)}<\frac{۱}{۲}$ $(n\in\mathbf{N})$.

۲۴۲. اگر عدد N را بتوان به صورت ضرب k عدد متوالی بزرگتر از واحد نوشت، می‌گوییم این عدد، دارای ویژگی (k) است.

الف) N را طوری پیدا کنید که، عدد N، در عین‌حال دارای ویژگی (k) و ویژگی $(k+۲)$ باشد.

ب) ثابت کنید، نمی‌توان عددی را پیدا کرد که هر دو ویژگی (۲) و (۴) را داشته باشد.

۲۴۳. مطلوب است حداقل مساحت مستطیلی که، ضلع‌های آن، موازی با محورهای مختصات باشد و شکلی را که با دستگاه نابرابری‌های

$$\begin{cases} y\leqslant -x^۲ \\ y\geqslant x^۲-۲x+a \end{cases}$$

داده شده است، در بر بگیرد $(a\in\mathbf{R})$.

۲۴۴. x و y عددهای مثبت‌اند و می‌دانیم $x^۳+y^۳=x-y$. ثابت کنید: $x^۲+y^۲<۱$.

۲۴۵. دربارهٔ عددهای a و b می‌دانیم، نامعادلهٔ

$$a\cos x+b\cos ۳x\leqslant ۱$$

جواب ندارد. ثابت کنید: $|b|\leqslant ۱$.

۲۴۶. دربارهٔ دنبالهٔ (x_n) می‌دانیم، ۱) شامل عددهای طبیعی متوالی است؛ ۲) به ازای هر n داریم: $x_n\leqslant n\sqrt{n}$؛ ۳) به ازای هر دو مقدار مختلف m و n، تفاضل x_m-x_n بر $m-n$ بخش‌پذیر است. همهٔ دنباله‌های (x_n) را پیدا کنید.

۲۴۷. این چند جمله‌ای داده شده است:

$$p(x,y)=۴+x^۲y^۴+x^۴y^۲-۳x^۲y^۲,\quad x\geqslant ۰,\ y\geqslant ۰$$

الف) حداقل $p(x,y)$ را پیدا کنید.

ب) ثابت کنید، $p(x,y)$ را نمی‌توان به‌صورت مجموع مجذورهای چندجمله‌ای‌هایی نسبت به x و y نوشت.

۲۴۸. ثابت کنید: $\int_{0}^{1} \frac{x}{\cos x}dx < \ln 2$.

۲۴۹. همهٔ تابع‌های y راپیدا کنید که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$y'' = \frac{1}{x}y' + x^3 - \frac{1}{x}$$

۲۵۰. معادلهٔ $\cos(x-\alpha) - \frac{1}{4}\sin 2(x+\alpha) = 4\sin\alpha$ راحل کنید.

۲۵۱. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} 2^{\cos x} + 2^{\frac{1}{\cos y}} = 5 \\ 2^{\cos x + \frac{1}{\cos y} - 2} = 1 \end{cases}$$

۲۵۲. ثابت کنید: $tg \sum_{k=1}^{4k+1} \operatorname{arc} tg \frac{k^2+k+2}{k^2+k} = 4n+2$.

۲۵۳. ثابت کنید، برای این‌که مثلثی متساوی‌الاضلاع باشد، لازم وکافی است که داشته باشیم:

$$\frac{1}{(m_a+m_b-m_c)^2} + \frac{1}{(m_a+m_c-m_b)^2} + \frac{1}{(m_b+m_c-m_a)^2} = \frac{4R^2}{9S^2}$$

که در آن، m_a و m_b و m_c طول میانه‌ها، R طول شعاع دایرهٔ محیطی و S اندازهٔ مساحت مثلث است. درمثلثی که متساوی‌الاضلاع نباشد، این رابطه، به چه صورتی درمی‌آید؟

۲۵۴. ثابت کنید، هرعدد طبیعی n را می‌توان، تنها به یك طریق، به‌صورت

$$n = \frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2}$$

نوشت که، در آن، x و y عددهایی درست وغیرمنفی‌اند.

۲۵۵. اگر a، b و c عددهایی حقیقی باشند، باچه شرطی، معادلهٔ

$$x^5 + ax^3 + bx^2 + c = 0$$

ریشه‌ای به صورت موهومی خالص دارد؟

۲۵۶. حداقل مقدار این تابع راپیدا کنید:

$$y = \sqrt{-x^2+4x+12} - \sqrt{-x^2+2x+3}$$

۲۵۷. به ازای چه مقدار a، این دو معادله، ریشهٔ مشترک دارند:

$$x^3+ax+1=0,\qquad x^4+ax^2+1=0?$$

۲۵۸. اگر $0\leqslant x\leqslant a$ و $0\leqslant y\leqslant a$، آن وقت حداقل z را پیدا کنید:

$$z=\frac{2a^2-x^2-y^2}{a^2-xy}$$

۲۵۹. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی $x>1$، که به‌صفر ختم نشده باشد، مقدار $\lg x$ عددی است گنگ ($\lg x=log_{10}x$).

۲۶۰. وتر AB از سهمی را موازی مماس در نقطهٔ C بر سهمی رسم کرده‌ایم. مرکز ثقل مثلث ABC را G می‌نامیم. AG را رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در M و سهمی را در N قطع کند. ثابت کنید: $|MN|:|AN|=\frac{1}{10}$

۲۶۱. دو سهمی که محورهایی موازی دارند، یکدیگر را درنقطه‌های A و B قطع کرده‌اند. از نقطهٔ A خط راستی می‌گذرانیم تا سهمی اول را در M_1 وسهمی دوم را در M_2 قطع کند. سپس، از نقطهٔ B خط راستی می‌گذرانیم تا سهمی‌های اول ودوم را، به ترتیب، در N_1 و N_2 قطع کند. ثابت کنید، خطهای راست M_1N_1 و M_2N_2 باهم موازی‌اند.

۲۶۲. فاصلهٔ خط راست $x-y=1$ را تا سهمی $y=x^2$ پیدا کنید.

۲۶۳. نقطهٔ $M\left(x=\frac{1-u^4}{1+u^4}, y=\frac{u^3-u}{1+u^4}\right)$ مفروض است. معادلهٔ مجموعهٔ نقطه‌های M را (مستقل از u) پیدا کنید. نمودار این مجموعهٔ نقطه‌ها، به‌چه‌صورتی درمی‌آید؟

۲۶۴. درسه جمله‌ای ax^2+bx+c می‌دانیم $a>100$. اگر x را عددی درست فرض کنیم، حداکثر به ازای چند مقدار x، حاصل این سه جمله‌ای از لحاظ قدرمطلق از ۵۰ تجاوز نمی‌کند؟

۲۶۵. نامعادلهٔ $|sin\,x-sin\,y|+sin\,x\,sin\,y\leqslant 0$ را حل کنید.

۲۶۶. برای دنبالهٔ عددهای a_1، a_2، ... می‌دانیم:

به ازای $n\geqslant 1$: $a_{2n}=a_n$؛

به ازای $n\geqslant 0$: $a_{4n+1}=1$ و $a_{4n+3}=0$،

ثابت کنید، این دنباله، متناوب نیست.

۲۶۷. مطلوب است: ۱) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{sin\,x}-\frac{1}{x}\right)$؛ ۲) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{sin^2x}-\frac{1}{x^2}\right)$.

۲۶۸. ثابت کنید، باشرط $a>0$ و $b>a+c$، معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$

دو ریشهٔ حقیقی ومتمایز دارد.

۲۶۹. مجموع ۱۰ عدد طبیعی برابر ۱۰۰۱ شده‌است. حداکثر مقدار ممکن‌را برای بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك این ۱۰ عدد پیدا کنید.

۲۷۰. می‌دانیم: $a_۱a_۲\cdots a_n=۱$. ثابت کنید:

$$(۱+a_۱^۲)(۱+a_۲^۲)\cdots(۱+a_n^۲)\geqslant ۲^n$$

۲۷۱. به شرط $۱\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant t\leqslant ۱۰۰$، حداقل مقدار عبارت $\frac{x}{y}+\frac{z}{t}$ راپیدا کنید.

۲۷۲. برای عددهای مثبت α، β، a و b می‌دانیم:

$$\alpha<\beta، \qquad \alpha+\beta<\pi، \qquad a+b<\pi، \qquad \frac{\sin a}{\sin b}\leqslant\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

ثابت کنید: $a<b$.

۲۷۳. معادلهٔ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=۱۳۷۱$، درمجموعهٔ عددهای درست، چندجواب دارد؟

۲۷۴. معادلهٔ $۲\log_۳ \cot g\, x=\log_۲ \cos x$ را حل کنید.

۲۷۵. دنبالهٔ (x_n) بارابطهٔ برگشتی $x_{n+1}=x_n(۱-x_n)$ داده شده‌است ومی‌دانیم $۰<x_۱<۱$. ثابت کنید: $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}(nx_n)=۱$.

۲۷۶. معادلهٔ $\sqrt[۳]{۲-x}+\sqrt{x-۱}=۱$ را حل کنید.

۲۷۷. $g(x)$، تابع معکوس تابع $f(x)=x^۳+x$ $(x\in\mathbf{R})$ است. معادلهٔ $f(x)=g(x)$ را حل کنید.

۲۷۸. این نامعادله راحل کنید.

$$tg^۲x_۱+\cot g^۲x_۱+tg^۲x_۲+\cot g^۲x_۲+\cdots+tg^۲x_{۶۸۵}+\cot g^۲x_{۶۸۵}\leqslant ۱۳۷۰$$

۲۷۹. مطلوب است حل دستگاه:

$$x+yzt=y+ztx=z+txy=t+xyz=۲$$

۲۸۰. همهٔ مقدارهای a راطوری پیداکنیدکه دستگاه زیر، برای مقدارهای مثبت x، y و z جواب داشته باشد:

$$x(۱-y^۲)>a، \qquad y(۱-z^۲)>a، \qquad z(۱-x^۲)>a$$

۲۸۱. برای‌معادلهٔ $x^y=y^x$: الف) جواب‌های‌درست‌مثبت‌ومتمایز؛ ب) جواب‌های مثبت‌گویا ومتمایز راپیدا کنید.

۲۸۲. $f(x)$ و $g(x)$، چندجمله‌ای‌هایی حقیقی وغیرصفرند ومی‌دانیم:

$$f(x^2+x+1)=f(x)\cdot g(x)$$

ثابت کنید، چندجمله‌ای $f(x)$ ازدرجهٔ زوج است.

۲۸۳. نامعادله‌ها را حل کنید:

الف) $\log_5(1+\sqrt{x})>\log_{16}x$؛ ب) $x^9+x^6+448<0$؛

ج) $\sqrt{4x+5}+\sqrt{3x+12}>4$؛ د) $\sqrt{4x+5}+\sqrt{3x+12}<4$

۲۸۴. معادله، چند ریشهٔ حقیقی دارد:

الف) $x^5+x^2+1=0$؛ ب) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}+\sqrt{3x+1}=9$

۲۸۵. این معادله راحل کنید:

$$2\log_{12}(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x})=\log_9 x$$

۲۸۶. همهٔ مقدارهای a را پیدا کنید که، برای هریك از آن‌ها، چندجمله‌ای

$$12x^3+12ax^2-8ax-3$$

دست کم یك ریشه در بازهٔ $(0,1)$ داشته باشد.

۲۸۷. n عددی است فرد ومی‌دانیم

$$f(x)=\sqrt[n]{(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)\cdots(x+n)}$$

ثابت کنید $|f'(0)|>\frac{12}{55}$.

۲۸۸. همهٔ عددهای طبیعی راپیدا کنید که درتقسیم برعدد دورقمی $\overline{ab}$ $(a\neq b)$، عدد دو رقمی $\overline{cd}$، ودر تقسیم برعدد $\overline{ba}$، عدد $\overline{dc}$ به دست آید.

۲۸۹. معادله‌ها را حل کنید:

الف) $x^3-(\sqrt{2}+1)x^2+2=0$؛ ب) $2x^3+x+\sqrt{2}=0$؛

ج) $3+\sqrt{3+\sqrt{x}}=x$؛ د) $x^4-2\sqrt{3}x^2+x+3-\sqrt{3}=0$

۲۹۰. دربارهٔ تابع مشتق‌پذیر $f(x)$ چه می‌توان گفت، به شرطی که، مشتق آن، تابعی متناوب باشد؟

۲۹۱. تابع پیوستهٔ $f(x)$ را، دربازهٔ $[a,b]$، صعودی ویکنوا می‌گیریم و فرض

می‌کنیم، دراین بازه، مقدارهایی مثبت داشته باشد. ثابت‌کنید، اگر $g(x)$ تـابع معکوس $f(x)$ باشد، داریم:

$$\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx=bf(b)-af(a)$$

۲۹۲. α، β و γ را زاویه‌های یك‌مثلث می‌گیریم. ثابت‌کنید، شرط لازم‌وکافی‌برای متساوی‌الاضلاع بودن مثلث، این است‌که داشته باشیم:

$$(cotg\alpha+cotg\beta+cotg\gamma)\sqrt[3]{sin\alpha sin\beta sin\gamma}=\frac{۳}{۲}$$

۲۹۳. می‌دانیم $P_n=\frac{۲^۳-۱}{۲^۳+۱}\cdot\frac{۳^۳-۱}{۳^۳+۱}\cdots\frac{n^۳-۱}{n^۳+۱}$. حد P_n را، وقتی $n\to\infty$، پیدا کنید.

۲۹۴. همهٔ تابع‌های f را پیداکنیدکه درمعادلهٔ زیرصدق‌کنند:

$$f\left(\frac{x}{x^۲+۱}\right)=\frac{x^۴+۱}{x^۲}$$

۲۹۵. نمودارهای f و g را، شامل نقطه‌هایی از (x,y) می‌گیریم‌که برای‌آن‌ها، به تـرتیب داشته باشیم $x=y^۲$ و $y=x^۲$. مجموعهٔ نقطه‌های $f\circ g$ و $g\circ f$ را روی صفحه نشان دهید.

۲۹۶. ثابت‌کنید، یك تصاعد هندسی‌که بیش‌از دوجمله داشته باشد و همهٔ جمله‌های آن، عددهایی طبیعی باشند، نمی‌تواند مجموعی به‌صورت ۳^n $(n\in\mathbf{N})$ داشته باشد.

۲۹۷. عدد $۱۰^۶$، جمله‌ای از یك تصاعد حسابی نـامتناهی است‌که تنها از عددهای طبیعی تشکیل شده است. ثابت‌کنید، دراین تصاعد، بی‌نهایت جمله وجود داردکه، هرکدام ازآن‌ها، برابر باتوان ششم یك عدد طبیعی‌است.

۲۹۸. آیا تابعی وجود داردکه، مشتق آن، دربازهٔ $(۰,۲)$ برابر $\{x\}$ باشد؟ (منظور از $\{x\}$، مقدارکسری عدد x است: $\{x\}=x-[x]$.)

۲۹۹. از نقطهٔ به طول t $(۰<t<۱)$، واقع بـر نمودار تابع $y=x^n$ خط راستی موازی بامحور طول رسم‌کرده‌ایم. t را طوری پیداکنید تـا مجموع مساحت‌های دو مثلث منحنی‌الخطی‌که به منحنی مفروض، خط راست مفروض و خط‌های راست $x=۰$ و $x=۱$ محدودند، حداقل مقدار ممکن باشد.

۳۰۰. همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیداکنیدکه، به ازای هریك ازآن‌ها، دستگاه

$$\begin{cases} 2^{|x|}+|x|=y+x^2+a \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

تنها یك جواب داشته باشد (a، x و y عددهایی حقیقی‌اند).

۳۰۱. باشرط $abc\neq 0$، این معادله را حل کنید:

$$2ab\cos 3x+2ac\cos 2x+2bc\cos x+a^2+b^2+c^2=0$$

۳۰۴. این دستگاه را، در مجموعهٔ عددهای درست، حل کنید:

$$\begin{cases} 2x^3-7x^2+8x-2=y \\ 2y^3-7y^2+8y-2=z \\ 2z^3-7z^2+8z-2=x \end{cases}$$

۳۰۲. معادلهٔ $\dfrac{x^2+12x+4}{x+2}=6\sqrt{x}$ را حل کنید.

۳۰۴. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} \sin^3 x+\sin^3 y=(\cos^3 x+\cos^3 y)\,tg^3(x+y) \\ \cos^2 x+\cos^2 y=\cos(x-y) \end{cases}$$

۳۰۵. دنبالهٔ (x_n) به‌این‌ترتیب، تعریف شده است:

$$x_1=\sqrt{3}\ ،\ x_{n+1}=\sqrt{9x_n^2+11x_n+3}$$

به ازای چه مقدارهایی از a، دنبالـهٔ $y_n=\left(\dfrac{x_n}{a^n}\right)$ دارای حد است؟

۳۰۶. درستی این برابری را ثابت کنید:

$$1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}=C_n^1-\frac{1}{2}C_n^2+\dots+(-1)^{n-1}C_n^n$$

§۲. هندسه روی صفحه

۳۰۷. شرط لازم وکافی برای متساوی‌الساقین‌بودن یك مثلث، این‌است‌که طول‌های دونیمساز داخلی آن، برابر باشند.

۳۰۸. روی هر ضلع متوازی‌الاضلاع و در بیرون آن، مربعی ساخته‌ایم. ثابت کنید،

مرکزهای این مربع‌ها، رأس‌های یك مربع را تشکیل می‌دهند.

۳۰۹. سه خط راست موازی ومتمایز، روی صفحه‌ای داده شده‌اند. مربعی رسم کنید که، هریك ازسه رأس آن، بریکی‌از این خطهای راست واقع باشد.

۳۱۰. مثلث‌های متساوی الاضلاع ABC ، CDE و EHK (راس‌ها، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت) با راس مشترك C برای دومثلث اول وراس مشترك E برای دو مثلث آخر، طوری روی صفحه قرار دارند که $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DK}$. ثابت کنید، مثلث BHD هم متساوی‌الاضلاع است.

۳۱۱. سه دایره که مرکز هیچ‌کدام معلوم نیست، دوبه‌دو برهم مماس‌اند. تنها با استفاده ازخط‌کش (وبدون کمك گرفتن ازپرگار) مرکز هردایره را پیدا کنید.

۳۱۲. درمربعی به ضلع برابر a ، مربعی بامساحت b^2 محاط کنید.

۳۱۳. سه خط راست، موازی با ضلع‌های یك مثلث رسم کرده‌ایم. فاصله هرخط راست تاضلع موازی با آن، برابر باطول همان ضلع است. درضمن، برای هرضلع مثلث خط راست موازی با آن وراس مقابل به‌آن، در دو طرف مختلف ضلع قرار دارند. ثابت کنید، شش نقطه‌ای‌که از برخورد امتداد ضلع‌های مثلث با این خطهای راست به دست می‌آیند، روی محیط یك دایره‌اند.

۳۱۴. ذوزنقهٔ $ABCD$ دردایره‌ای به شعاع R محاط شده است ومی‌دانیم

$$|AB|=|CD|=R$$

ثابت کنید، نقطه‌های وسط شعاع های OA و OD ونقطهٔ وسط قاعدهٔ BC ، راس‌های یك مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند.

۳۱۵. دومثلث متساوی‌الاضلاع ABC و $A_1B_1C_1$ (جهت حرکت روی ضلع‌ها را، درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت بگیرید) مفروض‌اند. (AB) و (A_1B_1) در M، (BC) و (B_1C_1) در N و (CA) و (C_1A_1) در P به هم رسیده‌اند. ثابت کنید، سه دایره‌ای‌که اولی از نقطه‌های M و A و A_1 ، دومی از نقطه‌های N و B و B_1 و سومی از نقطه‌های P و C و C_1 می‌گذرند، دریك نقطه مشترك‌اند.

۳۱۶. مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ABC و $A_1B_1C_1$ دریك‌صفحه قراردارند(راس‌ها را درجهت حرکت عقربه‌های ساعت درنظر بگیرید) ومی‌دانیم، وسط ضلع BC بروسط ضلع B_1C_1 منطبق شده‌است. مطلوب است: الف) زاویهٔ بین پاره خطهای راست AA_1 و BB_1 ؛ ب) نسبت $|AA_1|:|BB_1|$.

۳۱۷. سه مربع $ABCD$ ، $A_1B_1C_1D_1$ و $A_2B_2C_2D_2$ روی یك صفحه‌اند (راس‌های هرمربع را درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت بگیرید)؛ درضمن راس

A_1 بر A وراس C_2 بر C منطبق است. ثابت کنید، پاره خطهای راست D_1D_2 و BM برهم عمودند (M، وسط پاره خط راست B_1B_2 است) و $|D_1D_2| = 2|BM|$.

۳۱۸. (قضیهٔ فرما). در مستطیل $ABCD$ می‌دانیم: $\frac{|AB|}{|CB|} = \sqrt{2}$. نیم دایره‌ای به قطر $[AB]$، در بیرون مستطیل رسم کرده‌ایم. اگر E نقطه‌ای واقع برکمان نیم دایره باشد، نقطه‌های برخورد $[EC]$ و $[ED]$ را با $[AB]$، به‌ترتیب F و G می‌نامیم. ثابت کنید

$$|AF|^2 + |BG|^2 = |AB|^2$$

۳۱۹. (قضیهٔ اولر). شعاع دایرهٔ محیطی مثلث را برابر R، شعاع دایرهٔ محاطی آن را برابر r، و فاصلهٔ بین مرکزهای دو دایرهٔ محاطی و محیطی مثلث را برابر d می‌گیریم. ثابت کنید:

$$d^2 = R(R - 2r)$$

۳۲۰. (قضیهٔ دیگری از اولر). درهرچهارضلعی محدب $ABCD$ ، اگر وسط قطر AC را M و وسط قطر BD را N فرض کنیم، داریم:

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = |AC|^2 + |BD|^2 + 4|MN|^2$$

۳۲۱. (قضیهٔ پاپوس). یك چهار ضلعی در دایره‌ای محاط شده است. ثابت کنید ، حاصل ضرب فاصله‌های هر نقطه ازمحیط دایرهٔ محیطی تا دو ضلع روبه‌رو در چهارضلعی، برابراست باحاصل ضرب فاصله‌های همین نقطه تادوضلع روبه‌روی دیگر چهارضلعی.

۳۲۲. نقطه‌های K و M را وسط ضلع‌های AB و CD از چهار ضلعی محدب $ABCD$ می‌گیریم. نقطه‌های L و N را روی دو ضلع دیگر چهار ضلعی طوری انتخاب کرده‌ایم که چهار ضلعی $KLMN$ مستطیل باشد. ثابت کنید، مساحت چهارضلعی $ABCD$ ، دو برابر مساحت مستطیل $KLMN$ است.

۳۲۳. ثابت کنید، شرط لازم وکافی برای این‌که، محل برخورد ارتفاع‌های مثلث ABC، روی خط راستی باشدکه وسط دوضلع CA و CB را به‌هم وصل کرده،این‌است که

$$-\cos\hat{C} = \cos\hat{A}\cos\hat{B}$$

۳۲۴. درمثلث ABC، با زاویه‌های $\hat{C} = 90^\circ$ و $\hat{A} = 60^\circ$، مثلث‌متساوی‌الاضلاعی محاط کرده‌ایم که، هر رأس آن، روی یکی‌ازضلع‌های مثلث ABC است. باچه‌شرطی، ضلع این مثلث متساوی‌الاضلاع،کمترین مقدار ممکن است؟

۳۲۵. بامیانه‌های مثلث ABC، مثلث $A_1B_1C_1$ و سپس بامیانه‌های مثلث $A_1B_1C_1$

مثلث $A_2B_2C_2$ راساخته‌ایم. ثابت کنید، مثلث های ABC و $A_2B_2C_2$ متشابه‌اند و ضریب تشابه را پیداکنید.

۳۲۶. نقطهٔ M را در صفحـهٔ مثلث ABC و A_1 ، B_1 و C_1 را بـه ترتیب، وسط ضلع‌های BC ، AC و AB گرفته‌ایم. قرینه‌های نقطهٔ M را نسبت به C_1 ، B_1 و A_1، به ترتیب M_1 ، M_2 و M_3 می‌نامیم. ثابت کنید، خطهای راست CM_1، AM_2 و BM_3 از يك نقطه می گذرند.

۳۲۷. خط راست l، دایرهٔ به قطر AB رادر دونقطهٔ C و D (غیراز A و B) قطع کرده‌است. ازنقطه‌های A و B، به‌ترتیب، عمودهای AE و BF را برخط راست l فرود آورده‌ایم. ثابت کنید، دوپاره خط راست EC و DF، طول‌هایی برابر دارند.

۳۲۸. از رأس B درمثلث متساوی‌الساقین ABC ($|AB| = |BC|$)، خـط راست l را موازی باقاعدهٔ AC رسم کرده‌ایم. دایره‌ای به‌مرکز نقطه‌ای ازخط راست l، در نقطهٔ D برقاعدهٔ AC مماس شده وضلع‌های AB و BC را، به‌ترتیب، درنقطه‌های E و F قطع کرده است. ثابت کنید، طول کمان EDF ، به جای مرکز دایره در روی خـط راست l ، بستگی ندارد.

۳۲۹. نیم دایره‌ای به‌قطر $[AB]$ وبه مرکز O مفروض است. دو نیم دایره، یکی به قطر $[AO]$ و دیگری به‌قطر $[BO]$ و به مرکزهای O_1 و O_2، درهمان سمت نیم‌دایرهٔ اول نسبت به (AB)، رسم کرده‌ایم. دایرهٔ به مرکز O_3 بردایره‌های به مرکزهـای O و O_1، و دایرهٔ به مرکز O_4 بردایره‌های به مرکزهای O و O_2 مماس‌اند، در ضمن، دو دایرهٔ اخیـر (به‌مرکزهای O_3 و O_4) بریکدیگرمماس‌اند. ثابت کنید، چهارضلعی $O_1OO_4O_3$، متوازی‌الاضلاع است.

۳۳۰. چهار ضلعی محدب $ABCD$ به مساحت برابر S داده شده است. ثابت کنید، مساحت چهارضلعی بارأس‌های واقع دروسط پاره خطهای راست AC، AD، BC و BD، از $\frac{1}{2}S$ کمتراست.

۳۳۱. O را نقطهٔ دلخواهی از صفحهٔ پنج ضلعی منتظم $ABCDE$ می‌گیریم. اگـر مثلث DOE متساوی‌الاضلاع باشد، اندازهٔ زاویهٔ AOC را پیداکنید.

۳۳۲. مثلث متساوی‌الساقین ABC مفروض است ($|AB| = |BC|$). نقطه های K، M و P را، به ترتیب، روی ضلع هـای AB، BC و CA طوری انتخاب کـرده‌ایم کـه داشته باشیم:

$$|AK|:|KB| = |BM|:|MC| = |CP|:|PA|$$

اگر $|KM|=|MP|=1$، آن وقت محیط مثلث ABC، در چه محدوده‌ای می‌تواند تغییر کند؟

۳۳۳. چهارضلعی $ABCD$ بر دایره‌ای محیط است. خط راستی که از A بگذرد و با (BC) موازی باشد، خط راست CD را در B_1 قطع می‌کند. همچنین، خط راستی که از نقطهٔ C موازی (AD) رسم شود، با خط راست AB در نقطهٔ D_1 برخورد می‌کند. ثابت کنید، درچهارضلعی AB_1CD_1 هم می‌توان دایره‌ای محاط کرد.

۳۳۴. با معلوم بودن طول ضلع‌ها وقطرهای یک چهارضلعی، فاصلهٔ l، بین نقطه‌های وسط دوقطر را پیدا کنید.

۳۳۵. M را وسط وتر AB ازدایرهٔ به مرکز O می‌گیریم. وترهای دلخواه PQ و RS را ازنقطهٔ M گذرانده‌ایم (P و R روی یکی‌ازکمان‌های AB و Q و S روی کمان دیگر AB). پاره خطهای راست PS و RQ، وتر AB را، به ترتیب، در D و C قطع کرده‌اند. ثابت کنید: $|CM|=|MD|$.

۳۳۶. دایرهٔ به مرکز O را در مثلث ABC محاط کرده‌ایم. از نقطه‌های برخورد نیم خطهای راست OA، OB و OC بادایره، مماس‌هایی بردایره رسم کرده‌ایم. ثابت کنید از برخورد این مماس‌ها، مثلثی به‌دست می‌آید که، محیط آن، ازمحیط مثلث مفروض ABC تجاوز نمی‌کند.

۳۳۷. مطلوب‌است فاصلهٔ نقطهٔ مفروض O ازنقطهٔ M، محل برخورد میانه‌های مثلث ABC، برحسب طول ضلع‌های مثلث وفاصله‌های نقطهٔ O از رأس‌های مثلث.

۳۳۸. چهارضلعی $ABCD$ در دایره‌ای به‌شعاع R محاط شده است ومی‌دانیم:

$$|AB|^2+|CD|^2=4R^2$$

ثابت کنید، قطرهای این چهارضلعی برهم عمودند.

۳۳۹. زاویهٔ رأس A ازمثلث‌متساوی‌الساقین ABC ($|AB|=|AC|$)، برابراست ۲۰ درجه. خطهای راست BF و CE را طوری رسم می‌کنیم که، به‌ترتیب، باساق مجاور خود درمثلث ABC، زاویه‌های ۳۰ درجه و ۲۰ درجه بسازند. مطلوب است محاسبهٔ زاویهٔ x، بین خطهای راست EF و CE.

۳۴۰. ازمثلثی، طول دوضلع آن معلوم است ومی‌دانیم، میانه‌های وارد براین دوضلع برهم عمودند. مثلث را رسم کنید.

۳۴۱. ثابت کنید، اگر چهارضلعی $ABCD$، چنان باشد که بتوان دایره‌ای بر آن محیط ودایرهٔ دیگری درآن محاط کرد، داریم:

$$S=p^{۲}\left(tg\frac{\hat{A}}{۲}+tg\frac{\hat{B}}{۲}+tg\frac{\hat{C}}{۲}+tg\frac{\hat{D}}{۲}\right)^{-۱}$$

که در آن، S مساحت و $۲p$ محیط چهارضلعی است.

۳۴۲. a، b، c و d را طول ضلع‌ها، و e و f را طول قطرهای یك چهار ضلعی می‌گیریم. ثابت‌کنید، برای S، مساحت این چهارضلعی، داریم:

$$S=\frac{۱}{۴}\sqrt{۴e^{۲}f^{۲}-(a^{۲}-b^{۲}+c^{۲}-d^{۲})^{۲}}$$

۳۴۳. روی‌ضلع‌های چهارضلعی‌محدب $ABCD$ ودرخارج آن، مثلث‌های‌قائم‌الزاویه ومتساوی‌الساقین ABM، BCN، CDP و DAQ را ساخته‌ایم (هرضلع چهار ضلعی، وتر یکی‌از این مثلث‌ها را تشکیل می‌دهد). ثابت‌کنید، وسط پاره‌خط‌های راست MP و NQ ووسط قطرهای چهارضلعی، رأس‌های یك مربع‌اند.

۳۴۴. زاویه‌های مثلثی برابرند با α، β و γ. ضلع‌های مثلث، از نقطهٔ برخورد میانه‌های آن به زاویه‌های α'، β' و γ' دیده می‌شود. مثلث دیگری با ضلع‌های برابر میانه‌های‌این مثلث ساخته‌ایم. ثابت‌کنید، زاویه‌های مثلث جدید، برابرند با $۱۸۰^\circ-\alpha'$، $۱۸۰^\circ-\beta'$، $۱۸۰^\circ-\gamma'$ و ضلع‌های آن، از نقطهٔ برخورد میانه‌هایش، به زاویه‌های $۱۸۰^\circ-\alpha$، $۱۸۰^\circ-\beta$، $۱۸۰^\circ-\gamma$ دیده می‌شود.

۳۴۵. خط راست g ودایرهٔ ω به مرکز O وشعاع R، دریك‌صفحه قراردارند. نقطهٔ P رابه فاصلهٔ برابر d ازخط راست g طوری انتخاب کرده‌ایم‌که نسبت

$$\frac{|OP|^{۲}+R^{۲}}{d}$$

برابر مقدار مشخص ثابتی شده‌است. مکان نقطهٔ P را پیداکنید.

۳۴۶. دودایرهٔ مماس برهم، درزاویهٔ α محاط‌کرده‌ایم. مطلوب است نسبت شعاع دایرهٔ کوچکتر به‌شعاع دایرهٔ سومی‌که‌بردو دایرهٔ اول ویکی ازضلع‌های زاویه‌مماس‌است.

۳۴۷. خط‌های راستی راکه زاویه‌های داخلی یك مثلث را به سه زاویهٔ برابر تقسیم می‌کنند خط‌های ثلث می‌نامیم. ثابت‌کنید، خط‌های ثلث مجاور به‌هرضلع، دو به‌دو یکدیگر را در رأس‌های یك مثلث متساوی‌الاضلاع قطع می‌کنند.

۳۴۸. دودایره X و Y یکدیگر رادرنقطه‌های A و B قطع کرده‌اند. نقطهٔ P را روی کمان AB از دایرهٔ X ودربیرون دایرهٔ Y انتخاب می‌کنیم. خط‌های راست PA و PB دایرهٔ Y را در نقطه‌های C و D (غیراز A و B) قطع می‌کنند. ثابت‌کنید طول پاره خط راست CD، بستگی به جای نقطهٔ P در روی‌کمان AB ندارد.

۳۴۹. می‌دانیم، اگر درمتوازی‌الاضلاع و یا در ذوذنقه، وسط دوضلع رو به‌رو و کناری را به هم وصل کنیم، پاره خط راستی به‌دست می‌آید که طول آن، برابراست با نصف مجموع طول‌های دوقاعده. عکس این قضیه را تنظیم و، سپس، آن را ثابت کنید.

۳۵۰. این قضیهٔ ساده، درهر کتاب هندسهٔ مقدماتی وجود دارد:

مجموع فاصله‌های هرنقطه از درون مثلث، تا سه رأس آن، از محیط مثلث کوچکتر است. اکنون قضیهٔ زیر را، که قوی‌تر از قضیهٔ بالاست، ثابت کنید:

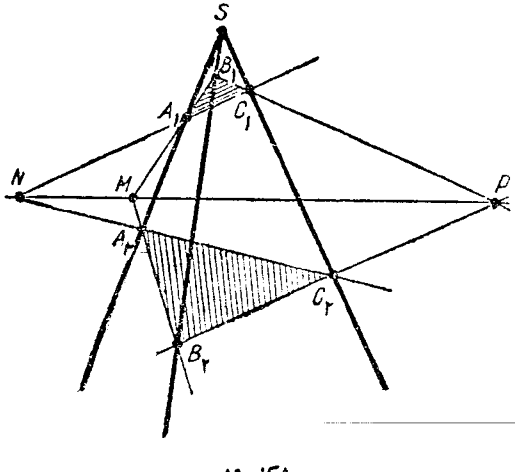
مجموع فاصله‌های هر نقطه ازدرون مثلث، تا سه رأس آن، ازمجموع دوضلع بزرگتر مثلث، کوچکتر است.

۳۵۱. درمثلث ABC، پای ارتفاع‌های وارد برضلع‌های BC، CA و AB را، به ترتیب، A'، B' و C'؛ نقطه‌های وسط همین‌ضلع‌ها را، به‌ترتیب D، E و F؛ محل برخورد ارتفاع‌های مثلث (مرکز ارتفاعی مثلث) را H و، سرانجام نقطه‌های وسط پاره خط‌های راست AH، BH و CH را، به‌ترتیب L، M و N می‌نامیم. ثابت کنید، نه نقطهٔ A'، B'، C'، D، E، F، L، M و N روی محیط یك دایره‌اند که شعاعی برابربا نصف شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC دارد.

۳§. هندسه درفضا

۳۵۲. سه‌دایرهٔ غیرمتقاطع، باشعاع‌هایی نابرابر، روی یك‌صفحه‌اند. مماس‌مشترك‌-های خارجی هردودایره دریك نقطه به‌هم می‌رسند. ثابت کنید، سه نقطه‌ای که به‌این ترتیب به‌دست می‌آیند، روی یك خط راست‌اند.

۳۵۳. دومثلث $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$، باضلع‌های متناظر ناموازی، طوری برصفحهٔ



شکل ۱۹

واقع شده‌اند که خطهای راست A_1A_2، B_2B_2 و C_1C_2، در نقطه‌ای مانند S به‌هم رسیده‌اند (نقطهٔ دزارك). اگر (A_1B_1) و (A_2B_2) در M، (A_1C_1) و (A_2C_2) در N و (B_1C_1) و (B_2C_2) در P یکدیگر را قطع کرده باشند، ثابت کنید، نقطه‌های M و N و P روی یك خط راست قراردارند (خط راست دزارك).

۳۵۴. مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$، با یالهای جانبی AA_1، BB_1، CC_1 و DD_1 مفروض است. صفحهٔ α، ازرأس A، وسط یال BC ومرکز وجه DCC_1D_1 گذشته است. این صفحه، حجم مکعب رابه چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

۳۵۵. هرم قائم $SABCD$، که قاعدهٔ $ABCD$ در آن یك مربع است، داده شده است. صفحه‌ای ازوسط یال‌های AB، AD و CS گذشته‌است. این صفحه حجم هرم را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

۳۵۶. درچهاروجهی $SABC$، دووجه SAC و SBC، مثلث‌های متساوی‌الاضلاعی به‌ضلع a ودووجه دیگر، مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی‌اند، شعاع کرهٔ محاط در این چهاروجهی را پیدا کنید.

۳۵۷. قاعدهٔ $|AB| = 2a$ از مثلث متساوی‌الساقین ABC $(|CA| = |CB|)$ بر صفحهٔ P واقع است. درضمن می‌دانیم، زاویهٔ رأس مثلث $\hat{C} = 2\alpha$، وصفحهٔ مثلث باصفحهٔ P، زاویه‌ای برابر β می‌سازد. مثلث به‌وسیلهٔ نقطهٔ S روشن می‌شود که به‌فاصلهٔ h ازصفحهٔ P، دربالای رأس C وبه فاصلهٔ l ازدونقطهٔ A و B قرارگرفته است. مساحت سایهٔ مثلث ABC را برصفحهٔ P پیدا کنید.

۳۵۸. قاعدهٔ مخروط قائمی برصفحهٔ P واقع است. شعاع قاعدهٔ مخروط برابر یك متر و ارتفاع مخروط برابر ۲ متر است. چشمهٔ نور در ۴ متری صفحه طوری قراردارد که فاصلهٔ تصویر قائم آن برصفحه، تامرکز قاعدهٔ مخروط برابر ۲ متر است. مساحت سایهٔ مخروط برصفحه را (بدون درنظرگرفتن قاعدهٔ مخروط) محاسبه کنید.

۳۵۹. کره‌ای به شعاع r بروجه‌های جانبی هرم $SABC$، در نقطه‌های برخورد ارتفاع‌های این وجه‌ها مماس است (S رأس و ABC قاعدهٔ هرم است). ثابت کنید، این هرم منتظم است (یعنی ABC مثلثی متوازی‌الاضلاع است و یالهای جانبی باهم برابرند). درضمن، طول هر یال جانبی را محاسبه کنید، به شرطی که مجموع سه زاویهٔ رأس هرم برابر α باشد.

۳۶۰. مثلث قائم‌الزاویه‌ای به مساحت برابر ۲ مترمربع، قاعدهٔ یك منشور قائم را تشکیل می‌دهد. اگرارتفاع منشور برابر وتر مثلث قاعده باشد، طول ضلع‌های قاعده را چگونه انتخاب کنیم تامساحت سطح جانبی مخروط، حداقل مقدار ممکن باشد؟

۳۶۱. اندازهٔ یك زاویه دووجهی برابراست با α. روی یکی از وجه‌ها، خط راستی رسم کرده‌ایم که با یال فصل مشترك دو وجه، زاویه‌ای برابر β ساخته‌است. این خط راست با وجه دوم، چه زاویه‌ای ساخته است؟

۳۶۲. خط راستی با صفحهٔ σ زاویه‌ای برابر α ساخته است. زاویهٔ بین تصویر قائم این خط راست بر صفحهٔ σ، با خط راستی از این صفحه که از نقطهٔ برخورد خط راست اول باصفحه گذشته، برابر β است. زاویهٔ بین این خط راست اخیر با خط راست اول چقدر است؟

۳۶۳. مثلث متساوی‌الاضلاعی با ضلع به‌طول a، قاعدهٔ هرم قائم منتظمی را تشکیل می‌دهد. اگر زاویهٔ بین هر وجه جانبی هرم با هرضلع مجاور خود درقاعده، برابر $\alpha_۱$ باشد، حجم هرم را پیدا کنید.

۳۶۴. صفحهٔ مربع $ABCD$ باصفحهٔ σ، زاویه‌ای برابر α ساخته است؛ زاویهٔ بین ضلع AB از این مربع با صفحهٔ σ، برابر β است. ضلع AD از مربع، با صفحهٔ σ چه زاویه‌ای می‌سازد؟

۳۶۵. ارتفاع یك منشور منتظم مثلث‌القاعده‌ای برابر h است. ازیك ضلع قاعده و رأس مقابل آن درقاعدهٔ دیگر، صفحه‌ای گذرانده‌ایم. مساحت شکل مقطع را پیدا کنید، به شرطی که، زاویهٔ آن دررأس انتخابی منشور، برابر ۲α باشد.

۳۶۶. زاویهٔ بین دو یال جانبی یك هرم منتظم با قاعده‌ای به شکل مربع، به شرطی که بریك وجه واقع نباشند، برابر است با α. مطلوب‌است محاسبهٔ هریك از زاویه‌های مسطح رأس هرم.

۳۶۷. مکعبی بایال به طول a مفروض است. قطر AC ازوجه $ABCD$ را درنظر می‌گیریم. صفحه‌ای از AC گذرانده‌ایم و می‌دانیم، مقطع این صفحه با مکعب، ذوزنقه‌ای است بازاویهٔ حادهٔ برابر $\arccos \frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$. مطلوب‌است فاصلهٔ رأس D ازصفحهٔ مقطع.

۳۶۸. سه پاره خط راست، با طول‌های برابر، در فضا داده شده‌اند. ثابت کنید، صفحه‌ای وجود دارد که طول‌های تصویرهای قائم این سه پاره خط راست بر آن، با هم برابر می‌شوند.

۳۶۹. چهاروجهی $ABCD$ درکره‌ای به مرکز O و به شعاع برابر R محاط شده است. خطهای راست AO، BO، CO و DO را رسم کرده‌ایم تاوجه‌های متناظر چهاروجهی را درنقطه‌های $A_۱$، $B_۱$، $C_۱$ و $D_۱$ قطع کنند. ثابت کنید:

$$|AA_۱|+|BB_۱|+|CC_۱|+|DD_۱| \geqslant \frac{۱۶}{۳}R$$

۳۷۰. درکنج سه وجهی $SABC$ می‌دانیم:

$$\widehat{BSC}=\alpha \text{ ، } \widehat{ASC}=\beta \text{ ، } \widehat{ASB}=\gamma$$

از یال SC، صفحه‌ای گذرانده‌ایم که وجه BSC را در خط راست ST قطع کرده است. مطلوب است محاسبهٔ زاویهٔ AST، به‌شرطی‌که

$$\widehat{CST}=\beta_1 \text{ ، } \widehat{BST}=\gamma_1$$

۳۷۱. روی یال‌های یك‌کنج سه وجهی به رأس O، ابتدا نقطه‌های A، B و C و، سپس روی نیم خط های راست OA ، OB و OC، به ترتیب، نقطه‌های A' ، B' و C' را انتخاب کرده‌ایم و می‌دانیم دو چهاروجهی $OABC$ و $OA'B'C'$، حجم‌هایی برابر دارند ودرضمن

$$\frac{|OA'|}{|OA|}=\frac{1}{2}, \ \frac{|OB'|}{|OB|}=\frac{1}{3}$$

مطلوب‌است محاسبهٔ نسبت $\frac{|OC'|}{|OC|}$.

۳۷۲. طول‌هریك‌ازیال‌های منشور $ABCA_1B_1C_1$ (باقاعده‌های ABCو $A_1B_1C_1$) برابر a واندازهٔ هریك‌از زاویه‌های به‌رأس A برابر α است. مساحت‌سطح کل این‌منشورو زاویهٔ بین خطهای راست BC_1 و AC را پیدا کنید.

۳۷۳. چهارضلعی محدبی‌که طول دوضلع آن برابر ۶ وطول هریك ازدوضلع دیگر آن برابر ۱۰ است، قاعدهٔ یك هرم را تشکیل می‌دهد. ارتفاع هرم برابراست با ۷ و، در ضمن، هریك ازوجه‌های جانبی هرم، زاویه‌ای ۶۰ درجه با صفحهٔ قاعده ساخته است. حجم هرم را پیداکنید.

۳۷۴. ثابت‌کنید، مساحت هرمقطعی ازچهاروجهی، ازمساحت بزرگترین وجه آن، تجاوز نمی‌کند.

۳۷۵. سه خط راست در فضا داده شده‌اند. صفحه‌ای از یکی‌ازاین سه خط راست طوری بگذرانیدکه، دوخط راست دیگر، باآن زاویه‌های برابر بسازند.

۳۷۶. یك بیضی‌کروی به‌کانونهای F_1 و F_2 و قطر بزرگتر $\widehat{A_1mA_2}$مفروض است. F'_1 را قرینهٔ F_1 و F'_2 را قرینهٔ F_2 نسبت به مرکزکره می گیریم. ثابت‌کنید همان بیضی مفروض‌رامی‌توان‌یك‌بیضی‌کروی به‌کانون‌های F'_2 وقطر بزرگتر $\widehat{A_1m'A_2}=2\pi-\widehat{A_1mA_2}$ به حساب آورد.

یادداشت. بیضی‌کروی، که منحنی بسته‌ای واقع برسطح کره‌است، تعریفی‌شبیه بیضی

واقع برصفحه دارد: مجموع فاصله‌های هرنقطه ازمحیط بیضی‌کروی تادونقطهٔ ثابت‌واقع برسطح کره، مقداری ثابت است.

وقتی ازفاصلهٔ بین دونقطه درروی سطح کره صحبت می‌کنیم، منظور کمانی از دایرهٔ عظیمه است که این دونقطه رابه‌هم وصل می‌کند(برحسب درجه یا رادیان). منظور ازقرینهٔ هر نقطه یا شکل، روی سطح کره، قرینهٔ آن نقطه یا شکل نسبت به‌مرکز کره است.

۳۷۷. قاعدهٔ یك منشور قائم، مثلث قائم‌الزاویه‌ای است به‌مساحت S وزاویهٔ حادهٔ برابر α. مساحت وجه جانبی بزرگتر برابر است با Q. به‌ازای چه مقداری‌از α، حداکثر حجم برای منشور به‌دست می‌آید؟

۳۷۸. درچهاروجهی $ABCD$ داریم: $|BC| = |AB|$ و $\widehat{ABC} = ۲\alpha$. طول هر یال جانبی برابراست با واحد وبا صفحهٔ قاعده، زاویه‌ای برابر α می‌سازد. به ازای چه مقدار α، حجم چهاروجهی به حداکثر مقدار خود می‌رسد؟

۳۷۹. بریك منشور مثلث‌القاعدهٔ منتظم، که یال‌هایی با طول‌های برابر دارد، هرم مثلث‌القاعدهٔ منتظمی محیط کرده‌ایم، به نحوی‌که رأس‌های قاعدهٔ بالای منشور بریال‌های جانبی هرم وسه‌رأس دیگرمنشورروی صفحهٔ قاعدهٔ هرم باشند. اگرهریال منشوربرابرواحد باشد،کمترین مقدار ممکن را برای حجم هرم محیطی به‌دست آورید.

۳۸۰. ازرأس یك مخروط، صفحه‌ای‌گذرانده‌ایم که‌ازمحیط دایرهٔ قاعده،کمان α را جداکرده و با صفحهٔ قاعده زاویه‌ای برابر β ساخته است. زاویهٔ راس مقطع حاصل را پیداکنید.

۳۸۱. همهٔ یال‌های چهاروجهی $ABCD$ طول‌هایی برابر دارند. نقطه‌های K، L و M را، به‌ترتیب روی یال‌های AB، AC و AD طوری انتخاب‌کرده‌ایم‌که طول پاره خط راست KB برابر ۱۲ وطول پاره‌خط راست MD برابر ۸ شده‌است. می‌دانیم شعاع کرهٔ محیط برچهاروجهی $ABCD$ برابر $۶\sqrt{۶}$ وحجم هرم $AKLM$ برابر $۱۹۲\sqrt{۲}$ می‌باشد. مطلوب است محاسبهٔ مجموع طول‌های شعاع‌های دوکرهٔ محاطی‌ومحیطی درهرم $AKLM$.

۳۸۲. درهرم قائم $SABC$، طول‌هرضلع قاعدهٔ ABC، برابر۶وطول SH (ارتفاع هرم) برابر $\sqrt{۱۵}$ است. ازنقطهٔ B، صفحه‌ای عمودبر(AS)گذرانده‌ایم‌که پاره‌خط راست SH رادرنقطهٔ O قطع‌کرده‌است. نقطه‌های P و Q را، به ترتیب، برخط های راست AS و CB طوری انتخاب کرده‌ایم که خط راست PQ، برکرهٔ به‌شعاع برابر $\sqrt{\frac{۲}{۵}}$ و به‌مرکز نقطهٔ O مماس باشد. حداقل طول پاره خط راست PQ چقدر است؟

۳۸۳. درمکعب $ABCDA_۱B_۱C_۱D_۱$ بایال به طول a، مرکزوجه $A_۱B_۱C_۱D_۱$ را

O می‌نامیم. حجم جسمی را پیدا کنید که از دوران مثلث OAB دورخط راست l (که از نقطه‌های L و K وسط یال‌های A_1B_1 و C_1D_1 گذشته است) به‌دست آمده باشد.

۳۸۴. طول یال مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ برابر است با a. وجه AA_1B_1B را دور خط راستی که‌ازوسط یال‌های AA_1 و CC_1 گذشته است، دوران داده‌ایم. حجم شکل حاصل ازدوران را پیداکنید.

۳۸۵. مکعب بایال به‌طول a را، دورقطر خود دوران داده‌ایم. حجم جسم حاصل‌را پیداکنید.

۳۸۶. قرینهٔ هررأس چهاروجهی‌را، نسبت به‌مرکز وجه روبه‌روی آن پیداکرده‌ایم؛ چهاروجهی تازه‌ای به‌دست می‌آیدکه رأس‌های‌آن دراین نقطه‌های قرینه است. نسبت حجم چهاروجهی جدید را به حجم چهاروجهی اصلی پیداکنید (مرکز مثلث، یعنی نقطهٔ برخورد میانه‌های آن).

۳۸۷. روی صفحهٔ α که از مرکزکره‌ای به شعاع R گذشته‌است، دایره‌ای به‌مرکز O_1 وشعاع برابر r_1 درداخل‌کره رسم شده است. همهٔ نقطه‌های محیط این دایره را با خط‌های راست، به نقطهٔ A واقع برسطح کره و به فاصلهٔ R ازصفحهٔ α وصل‌کرده‌ایم. مجموعهٔ نقطه‌های برخورد این خط‌های راست باسطح‌کره (به‌جز نقطهٔ A)، محیط دایره‌ای به شعاع برابر r_2 راتشکیل داده‌اندکه صفحهٔ آن باصفحهٔ α، زاویه‌ای برابر φ ساخته‌است. فاصلهٔ بین نقطه‌های A و O_1 را پیداکنید.

۳۸۸. یك لوزی باضلع به‌طول ۲ و زاویهٔ حادهٔ برابر $\frac{\pi}{۴}$، قاعدهٔ هرمی را تشکیل می‌دهد. کره‌ای به شعاع برابر $\sqrt{۲}$ برصفحه‌های هروجه جانبی در نقطه‌ای واقع برضلع قاعدهٔ هرم مماس است. ثابت‌کنید، ارتفاع هرم ازنقطه برخورد قطرهای لوزی می‌گذرد. حجم هرم را پیداکنید.

۳۸۹. مخروط قائم دواری به‌رأس S ومرکز قاعدهٔ O مفروض است. زاویهٔ رأس مخروط در مقطع محوری مخروط، برابر است با β. یال زاویه دووجهی α از رأس S گذشته ووجه‌های‌آن روی مولدهای SA و SB برسطح جانبی مخروط مماس‌اند (A و B، نقطه‌هایی ازمحیط قاعدهٔ مخروط‌اند). مقدار زاویهٔ AOB چقدر است؟

۳۹۰. مکعبی باقاعده‌های $ABCD$ و $A'B'C'D'$ مفروض است:

$$[AA']||[BB']||[CC']||[DD']$$

هریال مکعب، طولی برابر واحد دارد. E را وسط یال DC و F را وسط یال BB' می‌گیریم. نقطه‌های A، D'، E و F را دوبه‌دو به‌هم وصل می‌کنیم. حجم هرم $AD'EF$

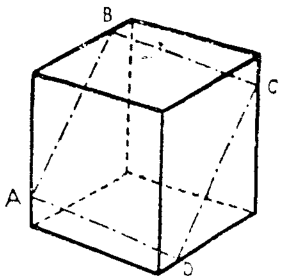
را پیدا کنید.

۳۹۱. می‌دانیم، برای هر مثلث، همیشه چهار دایره وجود دارد که بر ضلع‌ها و یا امتداد ضلع‌های مثلث مماس‌اند (یك دایرهٔ محاطی درونی و سه دایرهٔ محاطی بیرونی). درمـورد چهاروجهی چه می‌گویید؟ چندکره وجود دارد که بروجه‌های چهاروجهی و یا برصفحه‌هایی که از این وجه‌ها می‌گذرند، مماس باشد (کرهٔ محاطی درونی و کره‌های محاطی بیرونی)؟

حل، راهنمائی، پاسخ

۱۰ «اندیشه» کارسازتر از «فرمول»

۱. نقطه‌های A، B، C و D در شکل ۲۰، یال‌های مکعب را به نسبت ۱:۳ تقسیم کرده‌اند، بنابراین $ABCD$ یك مربع است؛ اگر طول ضلع مکعب را واحد بگیریم، طول ضلع این مربع برابر $\frac{۳}{۴}\sqrt{۲}$، یعنی به تقریب ۱/۰۶ می‌شود. در این مربع، می‌توان مربع دیگری محاط کرد که طول ضلع آن از ۱/۰۶ کمتر و از ۱ بیشتر باشد. همین مربع جدید، مقطع تونلی است که ازمسیر آن، مکعبی بزرگتر از مکعب اصلی عبورمی‌کند.



شکل ۲۰

۲. اگر در برابری $A = ۲۳x + ۲۸y$ فرض کنیم $x = ۱۱$ و $y = -۹$، به دست می‌آید:

$$A = ۲۳ \times ۱۱ - ۲۸ \times ۹ = ۲۵۳ - ۲۵۲ = ۱$$

بنابراین روشن است که، اگر مثلاً بخواهیم عدد درست m را به دست آوریم، باید $x = ۱۱m$ و $y = -۹m$ بگیریم.

۳. ده نفری را که نه بازبان آلمانی آشنا هستند و نه بازبان فرانسوی، کنارمی‌گذاریم. هریك از ۹۰ جهان‌گرد بقیه، ۷۵ نفر زبان آلمانی می‌دانند، پس (۷۵ − ۹۰) یعنی ۱۵ نفر، تنها با زبان فرانسوی آشنا هستند. به همین ترتیب، معلوم می‌شود که (۸۳ − ۹۰)، یعنی ۷ نفر، تنها زبان آلمانی را می‌دانند؛ بنابراین تعداد کسانی که با هر دو زبان آشنا هستند، برابر است با

$$۹۰-(۱۵+۷)=۹۰-۲۲=۶۸$$

۴. دومکعب را، به تصادف، انتخاب و به‌کمك ترازو باهم مقایسه می‌کنیم. دو حالت ممکن است پیش آید: ۱) مکعب‌ها، وزن‌های متفاوتی دارند؛ ۲) مکعب‌ها، هم‌وزن‌اند.

درحالت اول، ۸ مکعب باقی‌مانده رابه چهار زوج تقسیم وهر زوج را بازوج نخستین مقایسه می‌کنیم. هر زوجی که سنگین‌تر باشد، به معنای آن است که، هردو مکعب آن، از فلز سنگین‌تر ساخته شده است. ولی اگر زوجی بازوج نخستین هم‌وزن باشد، به معنای آن‌است که بین دومکعب این زوج، يك مکعب سنگین‌تر وجود دارد و، سرانجام، اگر زوجی سبك‌تر از دومکعب نخستین باشد، به معنای آن‌است که، هردوی آن‌ها، از آلومی‌نیوم ساخته‌شده‌اند. به‌این ترتیب، دراین حالت، تنها پنج بار استفادهٔ از ترازو، برای تعیین تعداد مکعب‌های سنگین‌تر، کافی است.

درحالت دوم هم، شبیه حالت اول، چهار زوج بقیه رابازوج نخستین مقایسه می‌کنیم، تا آن‌جاکه به‌زوجی با وزنی دیگر برسیم. اگر زوج جدید سنگین‌تر باشد، دومکعب نخستین از آلومی‌نیوم، و اگرزوج جدید سبك‌تر باشد، دومکعب نخستین از فلز سنگین‌ترساخته شده‌اند. بعد، مکعب‌های‌این زوج جدید را با هم مقایسه ومکعبی را انتخاب می‌کنیم که، از نظروزن، بامکعب‌های نخستین فرق دارد. زوجی ازدو مکعب متفاوت‌تشکیل می‌دهیم و بقیه زوج‌ها را با آن می‌سنجیم. دراین حالت هم، ۶ مقایسه کافی است.

۵. پاسخ: ۳۳۹ بازی. استدلال بسیارساده‌است. از ۳۴۰ تیم، تنها يك تیم، به‌عنوان برندهٔ جام باقی می‌ماندکه درهیچ‌کدام ازبازی‌ها، کنار نرفته است. بقیهٔ ۳۳۹ تیم، هر کدام دريك بازی‌کنار رفته‌اند و، بنابراین، ۳۳۹ بازی انجام‌گرفته است.

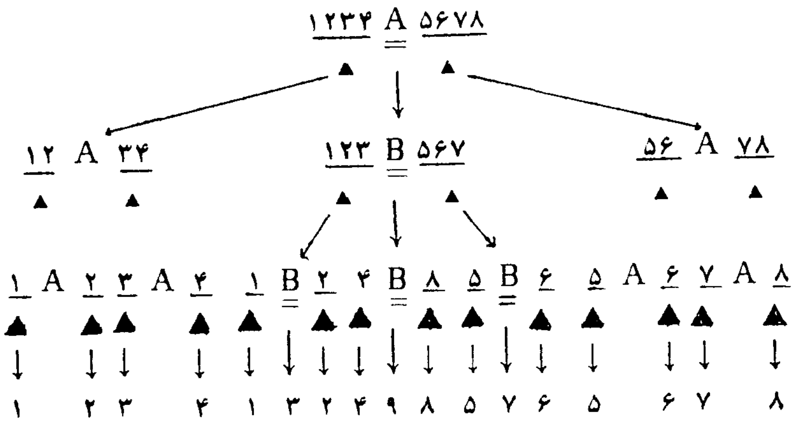
درحالت کلی، وبرای n تیم، $n-۱$ بازی لازم است تا تیم قهرمان مشخص شود.

۶. پاسخ: سه بار.

I. ابتدا ثابت می‌کنیم که با سه بار وزن‌کردن، می‌توان سکهٔ تقلبی راپیدا کرد. طرح توزین‌ها، درشکل ۲۱ داده شده است: سکه‌ها را با عددهای از ۱ تا ۹ و ترازوها را با حرف‌های A و B مشخص‌کرده‌ایم. علامت $=$ به معنای تعادل‌ترازو وعلامت Δ در زیريك کفه، به معنای سنگین‌تر بودن آن‌کفه است. علامت پیکان، بـه معنای عبور به سمت توزین بعدی است. آخرین عدد، نمایندهٔ سکهٔ تقلبی است، درحالت‌هایی‌که تعادل ممکن نیست، به‌طور طبیعی، علامت $=$ گذاشته نشده است.

یادداشت. اگر درنخستین توزین با ترازوی A، يك‌کفه سنگین‌تر از دیگری باشد، به معنای آن است‌که A، همان ترازوی دقیق است وسکهٔ تقلبی دربین یکی از ۴ سکهٔ معین است. ادامهٔ کار دراین حالت ساده است (شکل ۲۱ راببینید).

اگر ترازو درتعادل باشد، به معنای آن است‌که یاسکهٔ ۹ تقلبی است ویا A، ترازوی



شکل ۲۱

غیر دقیق است. دراین حالت، توزین‌های بعدی بـر این اساس است که،گویا، تـرازوی B، دقیق است. اگر ترازوی B دقیق باشد، سکهٔ تقلبی را مشخص می‌کند؛ ولی اگر دقیق نباشد، همیشه به حالت تعادل می‌ایستد و، درنتیجه، به معنای تقلبی بودن سکهٔ ۹ می‌شود.

II. اکنون ثابت می‌کنیم، دو تـوزین کافی نیست. درواقع، ترازویی راکه بـار اول انتخاب می‌کنیم، تصادفی است واگر با ترازوی غیردقیق سرکار داشته باشیم، به هیچ‌وجه‌به کمك توزین بعدی، نمی‌توانیم سکهٔ تقلبی رامشخص‌کنیم، حتی‌اگراین توزین دوم باترازوی دقیق انجام گرفته باشد.

۷. بنابرفرض مسأله، سن هرسه پسرباعددهای درستی بیان می‌شوند؛ درضمن،حاصل‌ضرب این سه عدد، برابراست با ۳۶.

به جز این، بعضی آگاهی‌های «پنهانی» هم، دربارهٔ مجموع این سه عدد، وجود دارد که ریاضی‌دان می‌تواند، بـه‌کمك آن‌ها، سن بچه‌های همکارش راپیدا کند، ولی موقعیت ما، دشوارتر از موقعیت ریـاضی‌دان است. مانمی‌دانیم، این‌گفت وشنود، درچه روزی از ماه جریان داشته است! بنابراین، تنها می‌تـوانیم سه عدد درستی را بنویسیم که، حاصل‌ضرب آن‌ها، برابر ۳۶ باشد.

به‌این‌ترتیب، ۳۶ را، به‌صورت ضرب سه‌عدد (درهمهٔ حالت‌های ممکن) می‌نویسیم. برای اینکه حالتی را از قلم نیندازیم، این‌کار را، نه به‌صورت تصادفی، بلکه بـه‌صورتی منظم وقانون‌مند، انجام می‌دهیم. همهٔ مقسوم‌علیه‌های عدد ۳۶ را ردیف می‌کنیم:

۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۹، ۱۲، ۱۸، ۳۶

روشن است، اگرسه عدد انتخابی، تنها در ردیف خود، باهم‌فرق داشته باشند، آن‌ها

را متفاوت به حساب نخواهیم آورد. درضمن، بهتر است، همیشه عددها را بــه‌ترتیب غیرـ نــزولی بنویسیم (یعنی، از چپ به راست، اول عدد کوچکتر، بعد عدد متوسط و سرآخر عدد بزرگتر).

فرض کنیم، نخستین عدد از این سه عدد، برابر ۱ باشد. بنابراین، حاصل‌ضرب دو عدد دیگر، برابر ۳۶ می‌شود، یعنی به یکی ازصورت‌های

$$۱\times۳۶، ۲\times۱۸، ۳\times۱۲، ۴\times۹، ۶\times۶$$

وبرای سه عددی که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۳۶ و نخستین آن‌ها واحد بــاشد، پنج حالت ممکن است:

$$(۱، ۱، ۳۶); (۱، ۲، ۱۸); (۱، ۳، ۱۲); (۱،۴،۹); (۱، ۶، ۶)$$

اکنون نخستین عامل را برابر ۲ می‌گیریم. باید حاصل‌ضرب دو عامل دیگر، برابر ۱۸ باشد، یعنی به یکی از صورت‌های ۱۸ $\times$ ۱، ۹ $\times$ ۲ و ۶ $\times$ ۳. چون نخستین عامل را برابر ۲ گرفته‌ایم، بقیهٔ عامل‌ها، نبایداز ۲ کوچکتر باشند (زیرا قرار گذاشتیم، مقسوم‌علیه‌های ۳۶ را به ترتیب غیرنــزولی بنویسیم). بنابراین، تنها دوحالت آخر را نگه می‌داریم؛ یعنی تنها دوحالت ازسه عدد مورد نظر وجود داردکه با ۲ آغاز می‌شوند:

$$(۲، ۲، ۹); (۲، ۳، ۶)$$

با استدلالی مشابه، روشن می‌شودکه، اگرعامل نخست را برابر ۳ بگیریم، تنها یك حالت ممکن پیش می‌آید:

$$(۳، ۳، ۴)$$

حالت دیگری برای تجزیهٔ عدد ۳۶ وجود ندارد. درواقع، درحالت‌های بعدی، باید دست‌کم‌از ۴ آغاز کنیم، یعنی هیچ‌کدام‌ازسه عامل، نباید از ۴ کوچکتر باشند، ولی کمترین حاصل‌ضربی‌که، بااین فرض، به دست می‌آید، برابراست با ۴ $\times$ ۴ $\times$ ۴، یعنی ۶۴، که از ۳۶ بزرگتراست. به‌این‌ترتیب، عدد ۳۶ را، تنها به ۸ طریق می‌توان به صورت ضرب سه عامل غیرنزولی نوشت.

ازآن‌جاکه، برای حل مسأله، به مجموع این سه عامل هم نیازداریم، این مجموع را برای هریك ازتجزیه‌ها می‌نویسیم:

$$۱\times۱\times۳۶، \qquad ۱+۱+۳۶=۳۸;$$

$$۱\times۲\times۱۸، \qquad ۱+۲+۱۸=۲۱;$$

$$۱\times۳\times۱۲، \qquad ۱+۳+۱۲=۱۶;$$

$$۱ \times ۴ \times ۹، \qquad ۱+۴+۹=۱۴;$$

$$۱ \times ۶ \times ۶، \qquad ۱+۶+۶=۱۳;$$

$$۲ \times ۲ \times ۹، \qquad ۲+۲+۹=۱۳;$$

$$۲ \times ۳ \times ۶، \qquad ۲+۳+۶=۱۱;$$

$$۳ \times ۳ \times ۴، \qquad ۳+۳+۴=۱۰;$$

کدام یك از تجزیه‌ها، ما را درانتخاب سه عدد مورد نظر (سن بچه‌ها) در تردید می‌گذارد؟

درصورت مسأله گفته شده است که ریاضی‌دان، بعداز اطلاع از مجموع سن سه پسر، نتوانست سن هریك ازآن‌ها را پیداکند. این تردید تنها وقتی می‌تواند به وجودآیدکه،در بین تجزیه‌های عدد ۳۶، دست‌کم دومورد وجود داشته باشدکه، مجموع عامل‌ها باهم‌برابر شده باشند. درضمن، حالت اول را هم می‌توان، بلافاصله، حذف کرد، زیرا هیچ ماهی ۳۸ روز ندارد.

اگر به مجموع‌ها توجه‌هاکنیم، تنهایك مجموع وجود داردکه دوبار تکرارشده‌است:

$$۱ \times ۶ \times ۶، \qquad ۱+۶+۶=۱۳;$$

$$۲ \times ۲ \times ۹، \qquad ۲+۲+۹=۱۳$$

بنابراین،گفت وشنود دو ریاضی‌دان، تنها می‌تواند در روز سیزدهم یکی از ماه‌ها انجام‌گرفته باشد: سن بچه‌ها یا ۱و۶و ۶ سال ویا ۲و۲و۹ سال است ولی درحالت اخیر، دوبرادر از برادر سوم‌کوچکترند، درحالی‌که بنابرگفت‌وشنود دو ریاضی‌دان، صحبت از این است‌که دوبرادر بزرگتر،تولد برادرکوچکترشان رابه پدربزرگ ومادربزرگ‌اطلاع داده‌اند. به‌این ترتیب، تنها یك حالت باقی می‌ماند: پسرکوچکتریك سال دارد و دو پسر بزرگتر، هرکدام، ۶ سال دارند (دوپسر بزرگتر ریاضی‌دان، همزاد هستند).

۸. بنابرشرط ۱، بهرام در بهبهان زندگی نمی‌کند (اگرچه همهٔ نزدیکان او، ساکن این‌شهرند). بنابرشرط ۲، آهنگر (که یکی‌ازنزدیکان بهرام است)دربهبهان زندگی‌می‌کند. بنابراین، آهنگر، جزو دونفری نیست‌که باید، بنابرشرط ۲، حرف اول شهر وحرفهٔ آن‌ها، یکی باشد. درضمن، آهنگر، غیراز بهرام است. تنها یك حالت ممکن است:

آرش درآمل زندگی‌می‌کند وآموزگار است؛

بهرام دربوشهرزندگی می‌کند وباغبان است؛

برزو دربهبهان زندگی می‌کند وآهنگراست.

تحقیق روشن می‌کندکه، این پاسخ، باهمهٔ شرط‌های مسأله سازگار است.

۹. چون نانوا همیشه پیاده سرکار می‌رود وکاوه وداریوش با اتوبوس، می‌توان نتیجه گرفت که کاوه و داریوش، هیچ‌کدام نانوا نیستند. درجدولی که تنظیم می‌کنیم، جلو نام‌های کاوه و داریوش و زیرعنوان نانوا، علامت منفی (—) می‌گذاریم.

کلانتر تنها یك بار بامهندس برخورد داشته است و، درضمن، همسایهٔ پزشك نیست. ازاین‌جا نتیجه‌می‌شود، دوهمسایهٔ «کاوه + داریوش»، نه «کلانتر + پزشك» اند ونه «کلانتر + مهندس». بنابراین، کاوه و داریوش، پزشك ومهندس‌اند، ولی هنوز معلوم نیست، کدام یك پزشك وکدام یك مهندس است.

اکنون به سن افراد توجه می‌کنیم. باتوجه به نتیجه‌گیری بالا وباتوجه به شرط آخر مسأله، نتیجه می‌گیریم که کلانتراز کاوه وداریوش بزرگتراست. درضمن می‌دانیم، داریوش ازمهرداد بزرگتراست؛ بنابراین، مهرداد کلانتر نیست و، درنتیجه، کلانترهمان سیروس است

	نانوا	پزشك	مهندس	کلانتر
کاوه	—			—
داریوش	—			—
مهرداد	+	—	—	—
سیروس	—	—	—	+

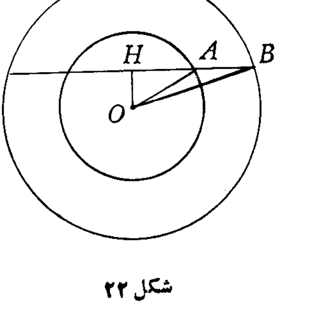
(درجدول جلو نام سیروس و زیرعنوان کلانترعلامت + و زیرسایرعنوان‌ها، علامت منفی می‌گذاریم. همچنین روشن می‌شودکه مهرداد، همان نانوا است (علامت‌های لازم را جلو نام مهرداد می‌گذاریم).

اکنون روشن است که هم‌بازی سیروس (کلانتر) درتنیس روی میز، پزشك است، نه مهندس (زیرا مهندس، جزیك بار باکلانترملاقات نداشته است). به‌این‌ترتیب، کاوه پزشك وداریوش مهندس است.

۱۰. از مرکز مشترك دایره‌ها، پاره خط راست OH را بر وترعمود می‌کنیم، بنابرفرض داریم:

$$|HA| = ۹, \ |HB| = ۱۴$$

اگر شعاع دایرهٔ بزرگتر را R و شعاع دایرهٔ کوچکتر را r بنامیم، باتوجه به مثلث‌های OBH و OAH داریم (شکل ۲۲):

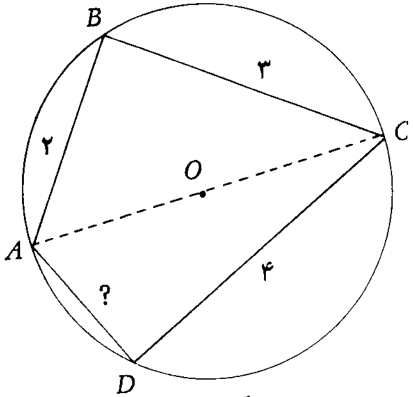


شکل ۲۲

$$\begin{cases} R^2 = |OH|^2 + |HB|^2 \\ r^2 = |OH|^2 + |HA|^2 \end{cases}$$

دوطرف هریك ازاین برابری‌ها را در π ضرب و، سپس، آن‌ها را ازهم کم می‌کنیم:

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(|HB|^2 - |HA|^2) = 115\pi \qquad \text{(سانتی‌متر مربع)}$$



شکل ۲۳

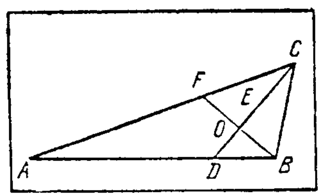
۱۱. در چهارضلعی $ABCD$ که در دایرهٔ به قطر برابر ۵ سانتی‌متر محاط شده است، خط راست BD از مرکز دایره می‌گذرد (شکل ۲۳)، زیرا در مثلث BCD، برابری $3^2+4^2=5^2$ برقرار است. به‌این‌ترتیب، درمثلث قائم‌الزاویهٔ ABD، طول ضلع AD به دست می‌آید:

$$|AD| = \sqrt{21}$$

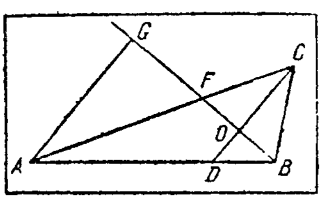
۱۲. نیمساز ممکن است بر قاعده عمود و یا نسبت به‌آن مایل باشد. درحالتی‌که نیمساز بر قاعده عمود باشد، مثلث متساوی‌الساقین است ومسأله بی‌نهایت جواب دارد.

حالت‌کلی را، وقتی (ED) بر (AB) عمود نیست، در نظر می‌گیریم (شکل ۲۴). نیمساز CD، که $[ED]$ بخشی از آن است، محور تقارن زاویهٔ ACB را تشکیل می‌دهد. نقطهٔ F، قرینهٔ نقطهٔ B نسبت به نیمساز را پیدا می‌کنیم. محل برخورد (AF) و (BE)، رأس سوم مثلث را به ما می‌دهد (می‌توانستیم، قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نیمساز را پیدا کنیم).

بررسی مسأله. ۱) درحالتی‌که (ED) بر (AB) عموداست، مسأله وقتی جواب‌دارد که داشته باشیم: $|AD| = |BD|$.



شکل ۲۴



شکل ۲۵

۲) فرض‌کنید BDC زاویه‌ای حاده‌باشد (شکل ۲۵). F راقرینهٔ B نسبت به CD و $[AG]$ را عمود بر (BF) می‌گیریم. چون $|OB| < |OG|$، پس $|DB| < |AD|$. بنابراین، اگر زاویهٔ BDC از زاویهٔ ADC کوچکتر باشد، برای داشتن جواب، باید

$|DB|$، از $|AD|$ کوچکتر باشد.

۱۳. از اولی آغاز می‌کنیم. ادعای او مبنی بر این است که «ادبیات» مقام دوم را دارد، درست نیست، زیرا دراین صورت، باید بپذیریم که دومی، در ادعای خود مبنی بر این‌که «ادبیات» مقام اول را به دست آورده است، اشتباه‌کرده است؛ ولی ادعای دوم نفر دوم هم قابل قبول نیست، زیرا دراین‌صورت، هم ادبیات وهم زیست شناسی بـه مقام دوم رسیده‌اند.

بنابراین اولی، دراین‌ادعای خودکه:دانشکدهٔ ریاضیات، مقام‌سوم را کسب کرده‌است، حق دارد.

از همین‌جا، بلافاصله معلوم می‌شودکه ادعای اول نفـر سوم درست است: دانشکدهٔ تاریخ مقام دوم رابه دست آورده است.

درنتیجه، دومی هم درحکم دوم خود اشتباه‌کرده است و حکم درست او این است: دانشکدهٔ ادبیات به مقام اول رسیده است.

اکنون دیگر ردیف تیم‌ها معلوم است: دراین‌مسابقه، دانشکدهٔادبیات اول، دانشکدهٔ تاریخ دوم، دانشکدهٔ ریاضیات سوم ودانشکدهٔ زیست شناسی چهارم شده است.

۱۴. اگـر عدد شش رقمی را $\overline{a_6a_5a_4a_3a_2a_1}$ بگیریم، باانتقال رقم سمت چپ به سمت راست، بـه عدد $\overline{a_5a_4a_3a_2a_1a_6}$ می‌رسیم و، برای مجموع وتفاضل آن‌ها، داریم:

$$\text{مجموع}=(10^5a_6+\overline{a_5a_4a_3a_2a_1})+(10\overline{a_5a_4a_3a_2a_1}+a_6)=$$

$$=(10^5+1)a_6+(10+1)\overline{a_5a_4a_3a_2a_1}=$$

$$=11(9091a_6+\overline{a_5a_4a_3a_2a_1});$$

$$\text{تفاضل}=9\,(11111a_6-\overline{a_5a_4a_3a_2a_1})$$

یعنی مجموع مضربی از ۱۱ وتفاضل مضربی از ۹ می‌شود وجواب‌های شاگردان، بـا این ویژگی‌های مجموع وتفاضل سازگار نبود.

۱۵. فرض مسأله را، می‌توان این‌طور نوشت:

$$4(\overline{a\,b\,c\,d\,e})=\overline{e\,d\,c\,b\,a} \qquad (1)$$

روشن است‌که $a\leqslant 2$، زیرا برای $a>2$، درسمت راست (۱)، به عدد شش رقمی می‌رسیم؛ از طرف دیگر، ۴ برابر یك عدد، عددی زوج‌می‌شود، یعنی $a=2$ ($a\neq 0$؛ زیرا به ازای $a=0$، به جای عددپنج رقمی، عددی چهار رقمی داریم).اکنون به حاصل‌ضرب ۴ در e توجه می‌کنیم. این حاصل‌ضرب باید به ۲ ختم شود، پس رقم e یا ۳ است ویا ۸.

ولی e، رقم سمت چپ یك عدد پنج رقمی است که از چهار برابر عدد پنج رقمی دیگری به دست آمده است و نمی‌تواند برابر ۳ باشد: $e=8$. از همین‌جا نتیجه می‌شود که b نمی‌تواند از ۲ بزرگتر باشد؛ به جز آن، b نمی‌تواند زوج باشد (زیرا b برابر است با رقم سمت راست عدد $4d+3$) پس $b=1$. حاصل‌ضرب $4d$ باید به ۸ ختم شود (تا $4d+3$ به ۱ ختم شده باشد)، یعنی $d=7$ یا $d=3$ و به سادگی می‌توان فهمید که $d=7$ و سرانجام $c=9$. عدد مجهول چنین است:

$$21978;$$

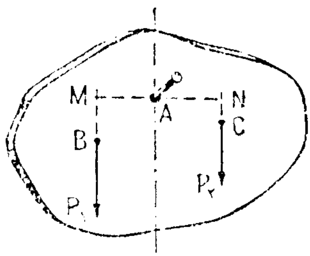
$$4 \times 21978 = 87912$$

۱۶. پاسخ. مسأله بی‌نهایت جواب دارد. یکی از آن‌ها چنین است:

۱۰۵ ۲۶۳ ۱۵۷ ۸۹۴ ۷۳۶ ۸۴۲

۱۷. با ظرف سه لیتری، دوبار از ظرف ۱۰ لیتری برمی‌داریم و در ظرف ۷ لیتری می‌ریزیم. برای بار سوم، ظرف ۳ لیتری را، با سرکهٔ باقی‌مانده در ظرف ۱۰ لیتری پر می‌کنیم و آن‌قدر در ظرف ۷ لیتری می‌ریزیم تا پر شود. روشن است که در ظرف ۳ لیتری، ۲ لیتر سرکه باقی می‌ماند. اکنون اگر ظرف ۷ لیتری را در ظرف ۱۰ لیتری خالی کنیم و ۲ لیتر موجود در ظرف ۳ لیتری را در آن بریزیم، کافی است یکبار دیگر با ظرف ۳ لیتری، آن را به ۵ لیتر برسانیم.

۱۸. نه، این راه حل درست نیست. B و C را، مرکز ثقل‌های دو بخش سمت چپ و سمت راست شکل، و P_1 و P_2 را وزن‌های این دو بخش می‌گیریم. (شکل ۲۶). جسم وقتی به‌حالت تعادل می‌ایستد که، گشتاور نیرو در B و C، نسبت به نقطهٔ A، برابر باشند؛ یعنی وقتی که داشته باشیم:



شکل ۲۶

$$P_1 \cdot |AM| = P_2 \cdot |AN|$$

و این برابری می‌تواند در حالتی هم که P_1 و P_2 برابر نیستند، برقرار باشد. به این ترتیب، ممکن است، دو بخش سمت چپ و سمت راست، هم‌وزن نباشند.

۱۹. برای نوشتن یك عدد چهار رقمی، به کمك چهار رقم متوالی، تنها ۶ حالت ممکن است:

۱۲۳۴، ۲۳۴۵، ۳۴۵۶، ۴۵۶۷، ۵۶۷۸، ۶۷۸۹

که اگر در آن‌ها، جای دو رقم سمت چپ را باهم عوض کنیم: به‌این عددها می‌رسیم:

$$۲۱۳۴، ۳۲۴۵، ۴۳۵۶، ۵۴۶۷، ۶۵۷۸، ۷۶۸۹$$

دو عدد اول مجذور کامل نیستند، زیرا اولی بر ۲ بخش‌پذیر است و بر ۴ بخش‌پذیر نیست و، عدد دوم، بر ۵ بخش‌پذیر و بر ۲۵ بخش‌ناپذیر است. عدد سوم، مجذور کامل است:

$$۴۳۵۶ = ۶۶^{۲}$$

عددهای چهارم و پنجم مجذور کامل نیستند، زیرا مجذور کامل هیچ عددی، به ۷ یا ۸ ختم نمی‌شود. عدد ششم هم مجذور کامل نیست، زیرا بر ۳ بخش‌پذیر و بر ۹ بخش‌ناپذیر است. بنابراین، تنها عدد ۴۳۵۶ با شرط‌های مسأله سازگار است.

۲۰. پاسخ. در شیشهٔ اول، الکل ۱۰۰٪ و در شیشه دوم، الکل ۴۰٪ وجود دارد.

درصد الکل را در شیشهٔ اول x و در شیشه دوم y می‌گیریم. در این‌صورت، مقدار الکل خالصی که از دو شیشه برداشته‌ایم، برابر است با:

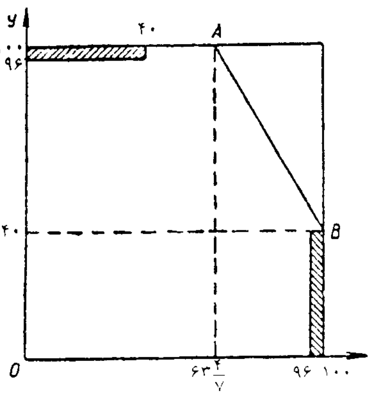
$$\left(\frac{۱۴}{۱۵}\times\frac{x}{۱۰۰}+\frac{۱۷}{۳۰}\times\frac{y}{۱۰۰}\right) \text{لیتر}$$

ازطرف دیگر، مقدار الکل خالص این یک لیتر و نیم، با توجه به شرط‌های مسأله، چنین است:

$$۰/۹۶+\frac{۱}{۲}\times ۰/۴ = ۱/۱۶\ (\text{لیتر})$$

که با برابر قراردادن آن‌ها، به این معادله می‌رسیم:

$$۲۸x+۱۷y=۳۴۸۰$$



شکل ۲۷

این معادله، معرف یک رابطهٔ خطی بین x و y است و ما به بخشی از آن نیاز داریم که در مربع $۰ \leqslant x، y \leqslant ۱۰۰$ واقع است (شکل ۲۷)، زیرا درصد کمتر از صفر یا بالاتر از صد، معنا ندارد. مثلاً، اگر $x = ۱۰۰$، آن‌گاه $y = ۴۰۰$، و اگر $y = ۱۰۰$، آن‌وقت $x = ۶۳\frac{۴}{۷}$.

آیا همهٔ مقدارهای x و y که از این معادله به دست می‌آید (یعنی مختصات همهٔ نقطه‌های واقع بر پاره خط راست AB)، جواب‌های مسأله‌اند؟ پاسخ به این پرسش، منفی است؛ زیرا ما، به‌طور ساده، یک مخلوط ۱/۵ لیتری

نساخته‌ایم، بلکه به‌طور جداگانه، یك لیتر مخلوط ۹۶٪ و نیم لیتر مخلوط ۴۰٪ درست کرده‌ایم آیا می‌توان از دو مخلوطی که، هردو، بیش از ۴۰٪ الکل دارند، مخلوط تازه‌ای بسازیم که ۴۰٪ الکل داشته باشد؟ روشن است که نه! [با توجه بـه‌صورت مسأله، درصد الکل، نباید دریکی از مخلوط‌ها، کمتر از ۹۶٪ و درمخلوط دیگر، بیشتر از ۴۰٪ باشد. بنابراین x و y، تنها می‌توانند، دریکی ازدو حوزهٔ هاشور خوردهٔ شکل، قرار گیرند.]

به این ترتیب، دریکی ازدوشیشه، نباید درصد الکل بیش از ۴۰٪ باشد. به‌سادگی معلوم می‌شود که، ازهمهٔ نقطه‌های واقع برپاره خط راست AB، تنها نقطهٔ B بـا این شرط سازگار است که، در آن، داریم:

$$x = ۱۰۰،\ y = ۴۰$$

این مقدارها را آزمایش می‌کنیم. $\frac{۱۴}{۱۵}$ لیتر ازمخلوط ۱۰۰٪ اول را با $\frac{۱}{۱۵}\left(=\frac{۲}{۳۰}\right)$ لیتر ازمخلوط ۴۰٪ دوم به هم می‌آمیزیم، یك لیتر محلول تازه به دست می‌آید که، در آن، به اندازهٔ $۰/۴ \times \frac{۱}{۱۵} + \frac{۱۴}{۱۵}$، یعنی ۹۶٪ الکل خالص وجود دارد.

۲۱. دراین تقسیم‌ها، همهٔ باقی‌مانده‌ها به صفر ختم می‌شوند و، درضمن، تعداد رقم‌های آن‌ها عددی زوج است. آخرین باقی‌مانده از ۲۰ کوچکتر و، بنابراین، برابر است با ۱۰.

۲۲. درمسأله باید درجهٔ هریك از پنج افسر ورشتهٔ کار آن‌ها را مشخص کرد. آیا ممکن است، در آغاز، به یکی از آن‌ها پرداخت: درجه یا رشتهٔ کار؟

وقتی می‌توان دوپرسش مسأله را ازهم جدا کرد که، دربخشی ازشرط‌های مسأله، تنها صحبت ازدرجه باشد و، دربخش دیگری از آن‌ها، تنها از رشتهٔ کار آن‌ها بحث شده باشد. در مسألهٔ ماهم، وضع بـه تقریب، به همین صورت است. شرط ۷، ازاین دیدگاه، بی‌معنی است (دراین شرط، تنها این آگاهی داده شده که، نام افسر پنجم، شهریار است). ولی در بین بقیهٔ شرط‌ها، چهار شرط «وسط» (۲، ۳، ۴ و ۵) آگاهی‌های مختلفی دربارهٔ حرفه یا ردهٔ افسرها می‌دهند وتنها درشرط ۶، دربارهٔ درجهٔ آن‌ها صحبت می‌کند. شرط ۱، خصلت دوگانه‌ای دارد: در آن هم ازدرجه وهم‌ازرده سخن رفته است.

باوجود این، می‌توانیم (با استفاده از شرط‌های ۱ و ۶)، در آغاز، درجهٔ افسرها را معین کنیم.

بنابرشرط ۱، بهروز بامهندس استحکامات، هم‌درجه است. بنابراین، هم بهروزوهم مهندس استحکامات، بایددرجهٔ سرگردی داشته باشند، چراکه دراین گروه پنج نفری، تنها یك سروان وتنهـا یك سرهنگ وجود دارد. ازشرط ۶، بلافاصله نتیجه می‌شود که سیامك، سروان است. ولی دراین صورت، فرزاد باید سرهنگ وشروین سرگرد باشد. زیرادربین

درجه‌های باقی‌مانده، تنها «سرهنگ» و «سرگرد» وجود دارد. به این ترتیب، تنها یك نفر باقی می‌ماند که درجهٔ او مشخص نشده است: شهریار؛ اوسرگرد است.

جدولی تشکیل می‌دهیم: درسطر اول جدول نام‌ها، درسطردوم درجه‌ها ودر سطرسوم حرفه‌ها را می‌نویسیم. دو سطر اول جدول کامل است. تنها باید روشن‌کنیم، هرکسی در چه رشته‌ای کار می‌کند!

بنابراین، از این‌جا به بعد، فرض براین‌است‌که نام و درجهٔ هریك روشن و «جدا-نشدنی» است؛ تنها باید معلوم‌کنیم، چه خدمتی انجام می‌دهند! به این‌ترتیب، بامسألهٔ‌تازه‌ای سروکار داریم‌که از مسألهٔ ما ساده‌تر است وما آن را، ازاین به بعد، «مسألهٔ تازه» می‌نامیم.

به یاد می‌آوریم؛ آگاهی‌های مربوط به رشتهٔ کار افسران، تنها در شرط‌های از ۱ تا ۵ داده شده است. عاقلانه این است‌که، ابتدا، درسطرسوم جدول، همهٔ حرفه‌ها را، زیرهر نـام بنویسیم وبعدکوشش‌کنیم، حالت‌های ناممکن را حذف‌کنیم، هروقت درهرخانه‌ای از سطرسوم جدول، تنها یك شغل باقی ماند، مسألهٔ ماحل شده است (درجدول، ازاین نشانه‌ها استفاده‌کرده‌ایم: «پ» برای پیاده نظام، «ت» برای توپچی، «خ» بـرای خلبان، «م» برای مخابرات و «ا» برای استحکامات؛ جدول I).

نام	شهریار	فرزاد	شروین	بهروز	سیامک
درجه	سرگرد	سرهنگ	سرگرد	سرگرد	سروان
رده	پ م ا خ ت	پ م خ ت	پ م ا خ ت	پ م ا خ ت	پ م خ ت

جدول *I*

توجه‌کنید، بنابه شرط ۱، مهندس استحکامات را بـاید دربین یکی از سرگـردها جست وجوکرد؛ به همین مناسبت، درجدول I، ازهمان ابتدا، زیر«سرهنگ» و «سروان»، شغل مهندسی استحکامات راحذف‌کرده‌ایم.

شرط‌ها را بررسی می‌کنیم:

بنابر شرط ۱، بهروز، مهندس استحکامات نیست؛

بنابر شرط ۲، شروین، افسرمخابرات نیست؛

بنابر شرط ۴، سیامك، توپچی یامهندس استحکامات یا افسرمخابرات نیست (این‌که

سیامک، مهندس استحکامات نیست، ازقبل هم معلوم بود).

بعد از به حساب آوردن این نکته‌ها، جدول ما، به‌صورت جدول II درمی‌آید.

شهریار	فرزاد	شروین	بهروز	سیامک
پ م ا خ ت	پ م ت	پ ا ت	پ م خ ت	پ

جدول *II*

می‌بینیم، زیر نام سیامک، تنها یك حرف باقی مانده است. سیامك، افسر پیاده نظام است. جالب است که هنوز، نشانهٔ پیاده نظام را زیر همهٔ نام‌ها نوشته‌ایم؛ چون تنها یك افسر پیاده نظام داریم، می‌توانیم همهٔ «پ»ها را از همهٔ خانه‌های جدول، به جز خانه‌ای که زیر نام سیامك است، حذف کنیم (جدول III).

شهریار	فرزاد	شروین	بهروز	سیامک
م ا خ ت	م ت	ا ت	م خ ت	پیاده نظام

جدول *III*

بنابرشرط ۵، شروین، نه خلبان است و نه مهندس استحکامات: ازاین شرط نتیجه می‌شودکه او توپچی است. بنابراین، نشانهٔ توپچی، یعنی «ت» را می‌توان از بقیهٔ خانه‌ها حذف کرد (جدول IV).

شهریار	فرزاد	شروین	بهروز	سیامک
م ا خ	م	توپچی	م خ	پیاده نظام

جدول *IV*

می‌بینیم، فرزاد افسرمخابرات است و، بنابراین نشانهٔ «م» را از بقیهٔ خانه‌ها حذف می‌کنیم (جدول V).

شهریار	فرزاد	شروین	بهروز	سیامک
ا خ	مخابرات	توپخانه	خ	پیاده‌نظام

جدول V

به‌این‌ترتیب، بهروز خلبان است و، برای شهریار، مهندسی استحکامات باقی‌می‌ماند. اکنون می‌توانیم، جدول رابه‌طورکامل بنویسیم (جدول VI).

شهریار	فرزاد	شروین	بهروز	سیامک
سرگرد	سرهنگ	سرگرد	سرگرد	سروان
استحکامات	مخابرات	توپخانه	خلبان	پیاده‌نظام

جدول VI

این تنها جواب مسأله است و به سادگی می‌توان تحقیق‌کردکه باهمهٔ شرطهای مسأله سازگار است.

روش تشکیل جدول را تکامل می‌دهیم

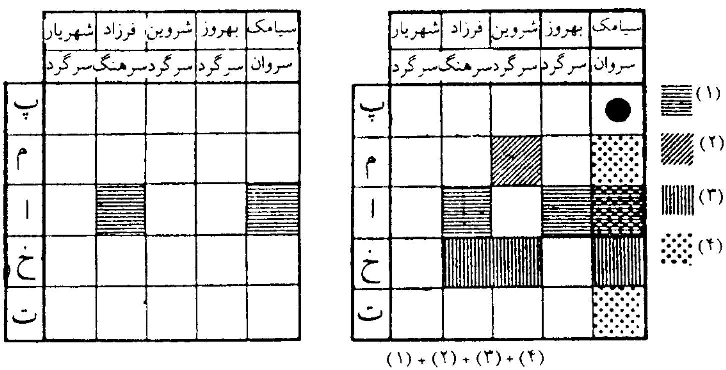
خواننده‌ای‌که دقیق ومنظم باشد، به احتمال قوی، جدول I را بــه صورتی مرتب‌تر می‌نویسد ورشتهٔ کار هر افسر را، درستونی زیرنام افسرها یادداشت می‌کند تابازبینی آن‌ها ساده‌ترباشد (جدول VII).

ولی وقتی درسطراول مربوط به‌حرفه‌ها، همه‌جا «پ» (افسرپیاده نظام) وجود دارد، لزومی ندارد، آن را، درهمهٔ ستون‌ها تکرارکنیم ومی‌توانیم نشانهٔ «پ» را درستونی، مثلاً درسمت چپ (یا راست)، دربیرون جدول بنویسیم؛ دربــارهٔ بقیهٔ حرفه‌ها هم، می‌توان بــه همین‌ترتیب عمل‌کرد. به‌این ترتیب، می‌توانیم جدول رابه‌صورتی‌که درشکل ۲۸ــa، نشان

شهریار سرگرد	فرزاد سرهنگ	شروین سرگرد	بهروز سرگرد	سیامک سروان
پ	پ	پ	پ	پ
م	م	م	م	م
ا	—	ا	ا	—
خ	خ	خ	خ	خ
ت	ت	ت	ت	ت

جدول *VII*

داده شده است، در آوریم وروشن است که، در این صورت، کار ساده‌تر خواهد شد. خانهٔ خالی (سفید) جدول، به معنای آن است که افسر مربوط، که نام او در بالای ستون آن خانه نوشته شده، می‌تواند دارای این شغل باشد. اگر در جریان حل، معلوم شد که افسری نمی‌تواند فلان شغل را داشته باشد، خانهٔ مربوط به آن را هاشور می‌زنیم. روی شکل ۲۸ـa، نشان داده‌ایم که چگونه، از آگاهی‌های موجود در شرط ۱ استفاده کرده‌ایم و امکان مهندس استحکامات بودن فرزاد وسیامك راکنار گذاشته‌ایم (خانه‌های مقابل سطر «۱» و زیر نام‌های فرزاد و سیامك را، هاشور زده‌ایم).



a b

شکل ۲۸

به همین ترتیب، آگاهی‌های مربوط به شرط ۲ را، در جدول وارد می‌کنیم: شروین نمی‌تواند افسرمخابرات باشد (شکل ۲۸ـb).

برتری این جدول، نسبت به جدول قبلی ــ که ضمن حل مسأله آورده بودیم ــ به تدریج روشن می‌شود:

ازشرط ۱ نه تنها نتیجه می‌شود که، مهندس استحکامات، درجهٔ سرگردی دارد (و همان طور که درشکل ۲۸ــa نشان داده شده است، مهندس استحکامات نمی‌تواند سروان یا سرهنگ باشد)، بلکه درضمن مشخص می‌شود که، بهروز هم، مهندس استحکامات نیست. این نتیجه، به معنای آن است که خانهٔ «بهروز ــ ا» راهم باید مثل خانه‌های «فرزاد ــ ا» و «سیامك ــ ا»، با خطهای افقی هاشور بزنیم.

ازشرط ۲ معلوم می‌شود که، شروین، افسرمخابرات نیست. این آگاهی را، با نوع دیگری ازهاشور (خطهای مایل) وارد جدول می‌کنیم.

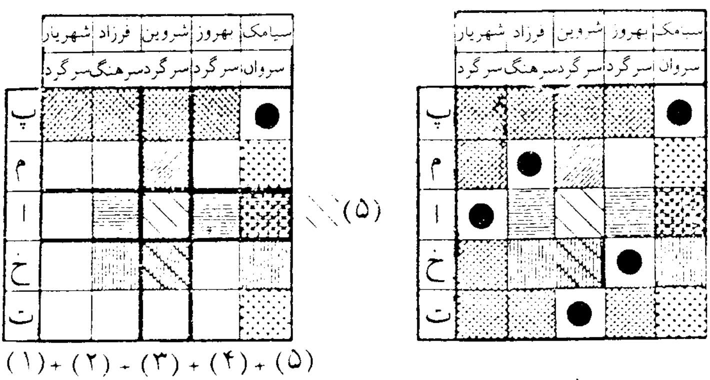
درواقع، درجدول‌های قبلی، معلوم نبود، آگاهی‌ها ازکدام منبع به دست آمده‌اند، درحالی‌که درجدول تازه، می‌توان باتغییر نوع هاشور، سرچشمهٔ نتیجه‌گیری‌ها را هم مشخص کرد: چیزی که درحل بسیاری از مسأله‌های منطقی، لازم است.

ازشرط ۳ برمی‌آید که فرزاد، سیامك و شروین، افسرخلبان نیستند. آگاهی ناشی از این شرط را، باهاشور قائم نشان می‌دهیم.

ازشرط ۴ نتیجه می‌شود که، سیامك، توپچی است نه افسرمخابرات و نه مهندس استحکامات. آگاهی مربوط به این شرط را، به‌صورت نقطه چین وارد جدول می‌کنیم.

همهٔ این آگاهی‌ها را درشکل ۲۹ــb نشان داده‌ایم. می‌بینیم، درستون سیامك، تنها یك خانهٔ خالی باقی‌مانده است: سیامك تنها می‌تواند افسرپیاده باشد (دایرهٔ سیاه).

وقتی سیامك، افسرپیاده نظام است، دیگران نمی‌توانند دراین حرفه باشند. بنابراین، می‌توان همهٔ خانه‌های سطر اول، به‌جز خانهٔ مربوط به‌سیامك‌را، حذف کرد. درشکل ۲۹ــa، این خانه‌ها را با خطهای مایل دوگانه، هاشور زده‌ایم.



شکل ۲۹

بنا بر شرط ۵، شروین نه خلبان است نه مهندس استحکامات. این آگاهی را، با سه پاره خط راست مایل موازی مشخص می‌کنیم. در خانه‌های ستون زیر نام شروین، تنها یك خانهٔ آزاد باقی می‌ماند: شروین توپچی است. همین استدلال را در مورد سطرمقابل نشانهٔ «ا» می‌توان کرد: شهریار مهندس استحکامات است (شکل ۲۹ــ b).

نتیجهٔ اخیر (این که شهریار، مهندس استحکامات است)، درراه حل قبلی، به ترتیب دیگری به‌دست آمدکه کمترعقلانی بود. برای این که دراین مورد قانع شویم، کافی‌است به جدول راه حل قبلی نظری بیندازیم. در روش قبلی راه حل، به‌خوبی نشان داده می‌شدکه، هر افسر، ممکن است یکی‌ازچند حرفه را داشته باشد، ولی این که هرحرفه، می‌تواند تنها به‌یکی‌از افسران متعلق باشد، به‌روشنی دیده نمی‌شد. درجدول کامل‌تر جدید، هردودیدگاه، به‌روشنی مشخص شده است. هرسطر، یکی‌ازحرفه‌ها را مشخص می‌کندکــه می‌تواند متعلق به‌هر افسری باشد؛ درهرستون، نام یکی‌ازافسران وجود داردکه می‌تواندهرکدام ازحرفه‌ها را داشته باشد. همین وجود تقارن نسبت به‌هردو دیدگاه است‌که برتری جدول جدیـد را، نسبت به‌جدول‌های قبلی‌نشان می‌دهد. اکنون جواب نهائی، بلافاصله به‌دست می‌آید (شکل ۲۹ــ b): درستون‌مربوط به‌شهریار، همهٔ خانه‌هارا، به‌جزخانهٔ مربوط به‌مهندسی‌استحکامات («ا») ودرسطر روبه روی «ت»، همهٔ خانه‌ها رابه‌جز خانهٔ متعلق به شروین، هاشورمی‌زنیم و، به‌این ترتیب، جواب مساله به‌دست می‌آید.

راه حل‌های مختلف

اکنون دیگر روشن شده است‌که، چگونه می‌توان باتوجه به‌هرشرط، این یا آن خانهٔ جدول را حذف کرد.

دوباره به شکل ۲۸ــ b برمی‌گردیم. ما به‌خصوص به‌ستون آخرعلاقه‌مند بودیم، زیرا همین ستون بودکه نخستین نتیجهٔ قطعی را به ما می‌داد. توجه‌کنیم‌که، برای به دست آوردن نتیجهٔ قطعی اول، کافی است ازستون مربوط به سیامك، خانه‌های نقطه چین و خانه‌های بـا هاشور قائم را حذف‌کنیم، یعنی شرطهای ۳ و ۴ را مورد استفاده قراردهیم.

درواقع می‌توانیم، نقطهٔ اتکای اولیه رابرای استدلال، به‌روش‌های‌گوناگون انتخاب کنیم. چه بسا، اگرشرطهای مسأله را به‌ردیفی غیرازآنچه درصورت مسأله‌آمده است، در نظربگیریم، بتوانیم سریع‌تر خود رابه‌هدف برسانیم. ازکجامعلوم است‌که، ردیف شرطها درصورت مساله، مناسب‌ترین ردیف ممکن‌است؟

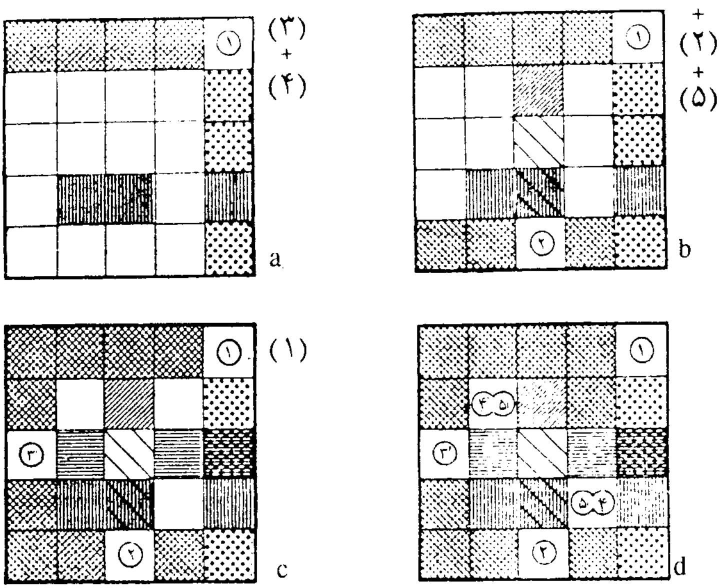
راه حل دیگری را، به طور خلاصه، دنبال می‌کنیم : این راه حل را می‌تـوان روی شکل‌های ۲۸ و ۲۹دید. روی شکل‌ها دیده می‌شودکه، براساس چه‌شرطهایی، کدام‌خانه‌ها

را می‌توان حذف کرد! بنابراین، هیچ مانعی وجود ندارد که، بعدازاین، خود صورت مساله را به «فراموشی» بسپاریم. به‌همین مناسبت، در شکل‌های ۳۰ و ۳۱ همهٔ خانه‌ها «گنگ» اند و، در آن جا، نه به‌شرط‌های متن‌مساله، بلکه به‌شکل‌های ۲۸ و ۲۹ نظر داریم. از آن‌چه قبلاً گفتیم نتیجه می‌شود که، اگر در یکی از این شکل‌ها، خانهٔ سیاهی ظاهر شد، باید همهٔ خانه‌های دیگر واقع در همان سطر یا همان ستون را، حذف کرد. به این ترتیب است که می‌توان، شرط‌های مساله را «کوتاه» کرد.

روش اول. دوشرط ۳ و ۴ را باهم می‌گیریم: با این دوشرط تنها می‌توان به جوابی جزئی رسید (شکل ۳۰-a) و، به‌این ترتیب، می‌توان شرط‌های مساله را «ساده‌تر» کرد (نتیجهٔ حاصل، امکان می‌دهد تا همهٔ خانه‌های بالاترین سطر را، به‌جز خانهٔ سمت راست، حذف کنیم). به همین ترتیب، باتوجه به شرط‌های ۲ و ۵، می‌توان جواب جزئی دیگری به‌دست آورد (شکل ۳۰ - b).

برای مقایسه، یادآوری می‌کنیم، درراه حل اول، جواب جزئی دوم را، تنها وقتی به دست آوردیم که از هر پنج شرط استفاده کرده بودیم. البته، این هم درست است که، در آن جا، همراه باجواب جزئی دوم، جواب جزئی سوم هم به‌دست آمده بود.

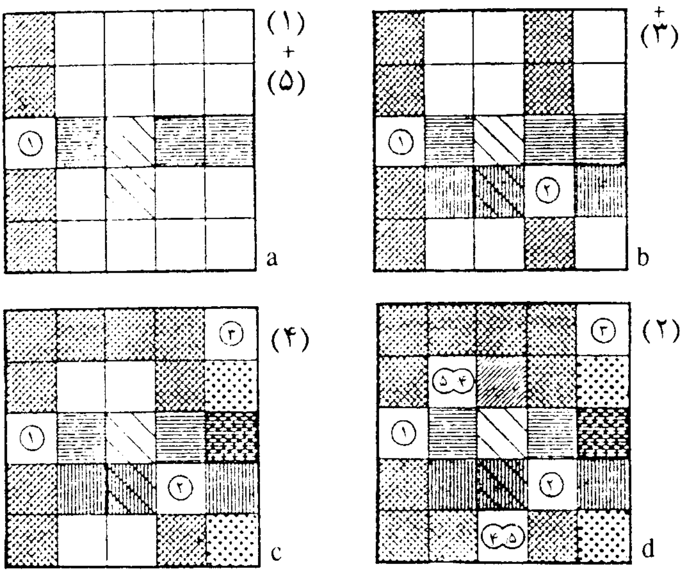
دراین‌جا، جواب‌جزئی‌سوم را، باتوجه به‌شرط ۱، به‌دست‌می‌آوریم (شکل ۳۰ - c) و، سپس، باحذف سطرها و ستون‌هایی‌که در ردیف مربوط به خانهٔ جواب قرار دارند، جواب‌های آخر به‌دست می‌آید (شکل ۳۰- d).



شکل ۳۰

روش دوم. به‌شکل ۲۹ـ b توجه کنیم. می‌بینیم که دایرهٔ سیاه سطر بالا (زیر نام سیامك)، نه براساس داوری، بلکه، به‌طور مستقیم، از خود شرط‌ها به‌دست آمد. درآخرین ستون سمت‌راست جدول، خط‌های مایل دوگانه وجود ندارد، بلکه هریك‌ازآن‌ها، به‌خاطروجود آگاهی‌های مربوط به‌این یا آن شرط، حذف شده‌است. دراین‌جا، هیچ چیز عجیبی وجود ندارد. این‌که سیامك افسر پیاده‌نظام است، نخستین جواب جزئی حاصل بود. ولی روی شکل ۲۹ ـ b می‌بینیم که، این‌ویژگی (فقدان هاشورهای مایل‌دوگانه)، مخصوص ستون‌آخر سمت راست نیست، بلکه سطرسوم هم، همین ویژگی را دارد. بنابراین، نتیجهٔ موجود دراین سطررا هم (که شهریار مهندس استحکامات است)، می‌توان به‌عنوان نخستین جواب جزئی درنظرگرفت.

به‌کمك شرط‌های ۱ و ۵، نخستین جواب جزئی به دست می‌آید شکل (۳۱ـa). با استفاده از آگاهی ناشی از آن و شرط ۳، جواب جزئی دوم پیدا می‌شود (شکل ۳۱ـb) و، باتوجه به‌شرط ۴، بـه جواب جزئی سوم می‌رسیم (شکل ۳۱ ـ c). نتیجه‌های حاصل ازاین‌آگاهی‌ها همراه با شرط ۲، دوجواب جزئی‌آخر را، به‌طور هم زمان، به‌ما می‌دهند (شکل ۳۱ـd).



شکل ۳۱

بنابراین، دو راه حلی‌که در شکل‌های ۳۰ و ۳۱ داده شده‌اند، شبیه یکدیگرند. با وجود این، یك تفاوت جدی بین‌آن‌ها وجود دارد: دراین دو راه حل، شرط‌های مسأله، با ردیف‌های متفاوتی مورداستفاده قرارگرفته‌اند و، به‌همین مناسبت، ردیف جواب‌های‌جزئی

حاصل از آن‌ها، باهم فرق دارد. بنابراین، با آن که روش راه‌حل، درهر دو حالت، یکی است نحوهٔ داوری در آن‌ها، برای رسیدن به جواب نهائی، متفاوت است.

کدام راه حل ساده‌تر است؟ ممکن است، دردید اول، به‌نظر برسدکه، این راه‌حل‌ها، ارزشی برابر دارند. از نظر تفصیل کار، به‌تقریب، فرقی باهم ندارند. درهر دو راه حل، برای پیدا کردن جواب جزئی اول، از دوشرط استفاده شده است، یعنی به‌ساده‌ترین روش ممکن متکی هستند. ولی روند بعدی راه حل، درروش دوم «اقتصادی‌تر» از روش اول است: در روش دوم، برای به‌دست آوردن دوجواب جزئـی اول، ازسه شرط استفاده شده، و شرط چهارم، منجر به جواب جزئی سوم شده است؛ درحالی‌که در روش اول راه حل، بـرای رسیدن به‌دوجواب جزئی اول، از ۴ شرط و برای به‌دست آوردن جواب جزئی سوم، از هر ۵ شرط استفاده شده است.

□

درشکل ۲۹ ـ b، همهٔ شرط‌های مسأله داده‌شده است. می‌بینیم، دوخانه‌ازاین جدول، هر کدام دوبار حذف شده‌است (سیامك مهندس استحکامات وشروین خلبان نیست): خـانهٔ اول، ضمن بررسی دوشرط ۱ یا ۴ وخانهٔ دوم، ضمن بررسی شرط ۳ یا ۵. ازآنجـاکه، برای حل مسأله، کافی‌است هرخانه تنها یك‌بارحذف شود، «حذف دوبارهٔ» خانه، می‌تواند به معنای این باشدکه، برخی شرط‌ها را می‌شود «کوتاه‌تر»کرد.

الف. شرط ۱ را بی‌تغییر نگـه می‌داریم (از آن بر می‌آیدکـه، سیامك، مهنـدس استحکامات نیست) و، به‌جای شرط ۴، مثلاً شرط زیررا انتخاب می‌کنیم:

′۴) چندی پیش رادیوی افسر توپخانه خراب شده بود. افسرمخابرات، به‌خواهش سیامك، نزد افسر توپخانه رفت و رادیوی او را درست کرد.

بنابرشرط جدید، سیامك نمی‌تواند افسر توپخانه یاافسرمخابرات باشد. ولی دربارهٔ این‌که، آیا می‌تواند مهندس استحکامات باشد یانه، اطلاعی به‌ما نمی‌دهد.

می‌توانستیم، شرط ۴ را به صورت قبلی خود نگه داریم وشرط ۱ را طـوری تغییر دهیم‌که شامل این‌آگاهی نباشدکه «سیامك افسر استحکامات نیست». ولی، درایـن صورت کار ما، به مراتب دشوارتر می‌شد. موضوع این است‌که این شرط، آگاهی های زیادی به ما می‌دهد: اولاً بهروزسرگرد است (به زبان دیگر، a) (بهروز سروان نیست، b) بهروز سرهنگ نیست)؛ ثانیـاً مهندس استحکامات، درجهٔ سرگـردی دارد (یعنی: c) مهنـدس استحکامات سروان نیست؛ ازاین‌جانتیجه می‌شودکه سیامك، بادرجهٔ سروانی‌خود، مهندس استحکامات نیست، d) مهنـدس استحکامات سرهنگ است)؛ ثالثاً e) بهـروز مهنـدس استحکامات نیست. همهٔ این‌هارا باید دریك‌گزاره جا داد، به‌نحوی‌که هم شامل نفی‌نفی d) باشد وهم شامل سایرنفی‌ها.

متن شرط تازه را، مثلا به‌این صورت می‌توان تنظیم کرد:

$1'$) بهروز همراه با دوست مهندس استحکامات خود که هم درجه بودند، با سروان گفت و گو می‌کردند.

ب. اگر شرط ۳ را بدون تغییر نگه داریم، شرط ۵ را مثلاً می‌توان این طور تغییر داد:

$5'$) شروین، بنا به توصیهٔ مهندس استحکامات، رشتهٔ انتخابی خود را عوض کرد.

درحالتی که بخواهیم، شرط ۵ را تغییر ندهیم، شرط ۳ را می‌توان به این صورت تغییر داد:

$3'$) افسر خلبان، با فرزاد و سیامك، چندی پیش، نزد یکی از افسران به‌مهمانی رفتند.

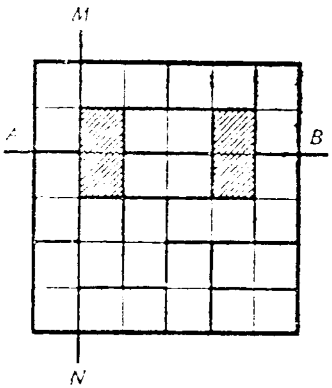
می‌بینیم که، مسألهٔ مفروض، «بار» زیادی دارد، یعنی شامل آگاهی‌هایی است که، از حد لزوم، زیادترند. درواقع، دراین مسأله، آگاهی‌هایی «اضافی» و «شرطهایی اضافی» داده شده است که می‌توان آن‌ها را حذف کرد، بدون این که به‌استحکام مسأله و به جواب آن لطمه‌ای وارد آید.

۲۳. چهار شطرنج بازی که پشت سرهم قرار گرفته‌اند، بین خود $۶ = \frac{۴ \times ۳}{۲}$ دور بازی کرده‌اند. بنابراین، تعداد امتیازهای نفر دوم، دست‌کم، برابر است با ۶. بنابر شرط مسأله، او به‌اندازهٔ مجموع امتیازهای چهار نفر آخر، امتیاز آورده است. اگر نفر اول ۷ امتیاز آورده باشد، به‌معنای آن است که از نفر دوم برده‌است (هر شطرنج باز، ۷ دور بازی می‌کند). اگر نفر اول ۶/۵ امتیاز آورده باشد، بازهم، امتیاز نفر دوم نمی‌تواند از ۶ بیشتر باشد، زیرا امتیازها، دو به‌دو باهم فرق دارند. نفر اول نمی‌تواند از ۶/۵ امتیاز کمتر داشته باشد، زیرا دراین صورت، امتیاز او از امتیاز نفر دوم کمتر یا با آن مساوی می‌شود.

به‌این ترتیب، امتیاز نفر دوم، درست برابر است با ۶؛ یعنی چهار نفر آخر روی هم ۶ امتیاز آورده‌اند، همان امتیازهایی که ضمن بازی با خودشان به‌دست می‌آید. به‌این ترتیب چهار نفر اول، بازی را، از چهار نفر آخر برده‌اند.

درحالت خاص، نفر سوم هم از نفر هفتم برده است.

۲۴. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید، بتوان مهره‌ها را طوری روی خانه‌های صفحهٔ شطرنجی قرار داد که، هر خط راست افقی یا هر خط راست قائم، دست کم از وسط یکی از مهره‌ها بگذرد. از این خطهای راست، فقط ۱۰ عدد وجود دارد: ۵ خط راست افقی و ۵ خط راست قائم. به‌سادگی می‌توان ثابت که، اگر



شکل ۳۲

خط راستی مهره‌ها را قطع کند، حتماً تعداد این مهره‌ها زوج است.

مثلاً، یکی از خط‌های راست افقی را در نظر می‌گیریم. این خط راست، صفحهٔ شطرنجی را به دو نیمه تقسیم می‌کند که، تعداد خانه‌های نیمهٔ بالای آن، زوج است (عرض صفحه، شامل ۶ خانه است). مهره‌هایی هم که، به طور کامل، در این خانه‌های بالای خط راست افقی قرار گرفته‌اند، تعداد زوجی از خانه‌ها را می‌پوشانند (هر مهره، روی دو خانه قرار می‌گیرد). علاوه بر این مهره‌ها، مهره‌های دیگری هم وجود دارند که نیمی از هر کدام از آن‌ها، بالای خط راست افقی است (مهره‌هایی که، خط راست افقی، آن‌ها را، قطع کرده است).

از آن‌جا که، هم تعداد کل خانه‌های بالای خط راست افقی و هم تعداد خانه‌هایی که به وسیلهٔ مهره‌های کامل پوشانده شده‌اند، زوج است. بنابراین، تفاضل آن‌ها هم، یعنی تعداد خانه‌هایی که به‌وسیلهٔ نیمی از مهره‌ها پوشانده‌شده‌اند، زوج خواهد بود (شکل ۳۲ را ببینید).

به‌این ترتیب، با طرح زیر روبه‌رو می‌شویم: هریك از ۱۰ خط راست، باید دست‌کم دو مهره را قطع کند. روشن است که، هر مهره را، تنها یك خط راست می‌تواند قطع کند، بنابراین باید دست‌کم ۲۰ مهره وجود داشته باشد. از طرف دیگر می‌دانیم، برای پوشاندن تمامی این صفحهٔ شطرنجی، به بیش از ۱۸ مهره (نصف تعداد خانه‌ها) نیاز نداریم.

وجود این تناقض نشان می‌دهد، به هر نحوی مهره‌ها را روی صفحهٔ شطرنجی گذاشته باشیم، دست‌کم یك خط راست (از بین ۱۰ خط راست موجود) پیدا می‌شود که هیچ کدام از مهره‌ها را قطع نکرده است.

۲۵. قدر نسبت تصاعد را d می‌گیریم و فرض می‌کنیم، یکی از جمله‌های آن $a=m^۲$ باشد (m، عددی طبیعی است). دراین‌صورت، عدد

$$(m+d)^۲=m^۲+۲md+d^۲=a+d(۲m+d)$$

هم، جمله‌ای از تصاعد است (زیرا، این عدد به‌صورت $a+nd$ است؛ $n\in\mathbf{N}$). به‌طور کلی، هر عدد به‌صورت

$$(m+kd)^۲=m^۲+۲kmd+k^۲d^۲=a+d(۲km+k^۲)$$

به ازای هر $k\in\mathbf{N}$، جمله‌ای از تصاعد مفروض است. به‌این ترتیب، بی‌نهایت جمله از تصاعد پیدا می‌شود که، همهٔ آن‌ها، مجذور کامل‌اند.

۲۶. با رقم ۰، می‌توان نه زوج تشکیل داد (با هریك از ۹ رقم دیگر). برای این‌که، هریك از این زوج‌ها، معرف یکی از ضلع‌های ۴۵ ضلعی باشد، باید رقم ۰ را، دست‌کم در ۵ رأس قرارداد: اگر ۰ را تنها در ۴ رأس (یا تعداد کمتری از رأس‌ها) قرار دهیم، تنها ۸ ضلع از ۴۵ ضلعی (و یا کمتر از آن) به دست می‌آید که، در یکی از رأس‌های آن‌ها، ۰ واقع شده است.

همین استدلال را، دربارهٔ هر رقم دیگری، غیراز ۰ هم، می‌توان انجام داد. به این ترتیب، برای‌این‌که شرط مسأله برآورده شود، باید ازهر رقم‌دست‌کم ۵ بار استفاده شود؛ ولی تعداد رقم‌ها برابراست با ۱۰ و $۴۵ > ۱۰ \times ۵$. بنابراین، این ۱۰ رقم را،نمی‌توان باشرط‌هایی‌که مسأله تعیین‌کرده است، در رأس‌های ۴۵ ضلعی قرارداد.

۲۷. نمودار $F \circ G$ شامل نقطه‌هایی به مختصات $(x، y)$ است‌که، برای‌آن‌ها،عددی مثل z وجود داشته باشد، به‌نحوی‌که داشته باشیم: $x = z^۲$ و $y = z^۲$، یعنی $y = x > ۰$. بنابراین، $F \circ G$ عبارت است ازنیمساز ربع اول دستگاه قائم محورهای مختصات.

نمودار $G \circ F$ ازنقطه‌هایی به مختصات $(x، y)$ تشکیل شده است‌که، برای‌آن‌ها،عدد z باشرط‌های $z = x^۲$ و $z = y^۲$ وجود داشته باشد؛ یعنی داشته‌باشیم: $x^۲ = y^۲$. بنابراین، $G \circ F$ مجموعهٔ همهٔ نقطه‌هایی است‌که بر نیمسازهای محورهای مختصات واقع‌اند.

۲۸. ازبرهان خلف استفاده می‌کنیم. تصاعد هندسی

$$a، aq، aq^۲، \ldots، aq^{n-۱}$$

را، باشرط $n \geqslant ۳$ و $q \neq ۱$ درنظر می‌گیریم وفرض می‌کنیم داشته باشیم:

$$a(۱ + q + q^۲ + \cdots + q^{n-۱}) = ۳^k$$

واین برابری، برای $a \in \mathbf{N}$ و $q \in \mathbf{N}$، تنها وقتی‌برقراراست‌که، هردوعامل سمت چپ،توانی از ۳ باشد، یعنی داشته باشیم:

$$۱ + q + q^۲ + \cdots + q^{n-۱} = ۳^l \qquad (۱)$$

برابری (۱)، برای حالتی‌که q مضرب ۳ باشد برقرار نیست. دوحالت درنظرمی‌گیریم:

۱) $q = ۳m + ۱$. چون باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم q بر ۳ برابر واحد است، برابری (۱) تنها وقتی ممکن است برقرار باشدکه، تعداد جمله‌های سمت چپ برابری، مضربی از ۳ باشد، یعنی $n = ۳p$. دراین صورت، برابری (۱)، به‌این صورت درمی‌آید:

$$(۱ + q + q^۲)(۱ + q^۳ + \cdots + q^{۳p-۳}) = ۳^l \qquad (۲)$$

واین، به معنای آن است‌که عبارت $۱ + q + q^۲$، مقسوم‌علیهی است از ۳^l، یعنی

$$۱ + q + q^۲ = ۳^r \qquad (۳)$$

که اگر $q = ۳m + ۱$ قراردهیم، به دست می‌آید:

$$۳m^۲ + ۳m + ۱ = ۳^{r-۱}$$

که تنها برای $t = ۱$ ممکن است. ولی، دراین صورت، از (۳) به دست می‌آید $q = ۱$،که شرط مسأله رانقض می‌کند.

۲) $q=۳m-۱$. دراین‌حالت، برابری (۱)، تنها برای عددهای زوج n می‌تواند برقرار باشد ($n=۲p$)که، دراین‌صورت، خواهیم داشت:

$$(۴) \qquad (۱+q)(۱+q^{۲}+q^{۴}+\dots+q^{۲p-۲})=۳^{l}$$

یعنی باید داشته باشیم:

$$(۵) \qquad ۱+q^{۲}+q^{۴}+\dots+q^{۲p-۲}=۳^{r}$$

درسمت چپ برابری (۵)، بامجموع جمله‌های یك تصاعد هندسی سروکار داریم، که قدرـ نسبت آن، $q^{۲}$، چنین است:

$$q^{۲}=(۳m-۱)^{۲}=۳(۳m^{۲}-۲m)+۱=۳m'+۱$$

وبنابراین، طبق استدلال حالت اول، برابری (۵)، برای $p>۲$، نمی‌تواند برقرار باشد. برای $p=۲$، برابری (۴) چنین می‌شود:

$$(۱+q)(۱+q^{۲})=۳^{l}$$

از آن‌جا

$$۱+q=۳^{s} \text{ و } ۱+q^{۲}=۳^{t}$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$(۳^{s}-۱)^{۲}+۱=۳^{t} \Longleftrightarrow ۳^{۲s}-۲\times۳^{s}+۲=۳^{t}$$

که تنها برای $s=t=۰$ برقراراست، یعنی برای $q=۰$ که باشرط مسأله، سازگارنیست.

۲۹. اگرقدرنسبت تصاعد رابرابر d بگیریم، برای هرعدد طبیعی k داریم:

$$(۱۰+dk)^{۶}=۱۰^{۶}+d.n, \ (n\in\mathbf{N})$$

یعنی عدد $(۱۰+dk)^{۶}$، برای $k\in\mathbf{N}$، یکی از جمله‌های این تصاعد است.

یادداشت. مسأله را به صورت کلی‌تری می‌تـوان حل‌کرد: اگر یك تصاعد حسابی نامتناهی، از عددهای طبیعی تشکیل شده باشد وعدد a^{k} یکی ازجمله‌های آن باشد، آن وقت، بی‌نهایت جمله ازتوان‌های kاُم عددهای‌طبیعی دراین تصاعد وجود خواهد داشت.

همچنین، به‌سادگی می‌توان ثابت‌کردکه تصاعد باجملهٔ عمومی $a_{n}=۴n+۲$، شامل هیچ توان بزرگتر از واحد نیست.

۳۰. قدرنسبت‌های دوتصاعد حسابی $\{a_{i}\}$ و $\{b_{i}\}$ را، بـه ترتیب، p و q می‌گیریم. این تصاعدها می‌توانند متناهی یا نامتناهی باشند، ولی مادر هرحال، تعداد جمله‌های هریك ازآن‌ها را، دست‌کم برابر ۲ می‌گیریم. اگردو جمله ازتصاعدها (دریك تصاعد، یا در دو

تصاعد مختلف) برابر باشند، کار تنظیم آن‌ها به ردیف صعودی، به صورتی نامعین درمی‌آید و، بنابراین، طبیعی است فرض کنیم $p\neq0$ و $q\neq0$ و، در ضمن، هیچ کدام از جمله‌های تصاعد اول با هیچ کدام از جمله‌های تصاعد دوم برابر نباشد. علاوه بر این، برای مشخص‌بودن وضع، فرض می‌کنیم $a_1<b_1$. چند حالت ممکن است پیش آید:

۱) $\{a_i\}$ و $\{b_i\}$، تصاعدهایی متناهی وصعودی، به ترتیب، با تعداد جمله‌های n و k باشند. برای این‌که ازدنبالهٔ جمله‌های دو تصاعد، بازهم یك تصاعد حسابی بــه دست آید، لازم وکافی است، یکی ازاین حالت‌ها را داشته باشیم:

الف) $p=q=b_1-a_n$؛

ب) $n=k$، $p=q$، $b_1-a_1=\frac{1}{2}p$؛

ج) $n-1=k$، $p=q$، $b_1-a_1=\frac{1}{2}p$.

دراین سه حالت، ازمجموعهٔ جمله‌های دوتصاعد، به‌این تصاعدهای حسابی می‌رسیم:

الف) $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_k$

ب) $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$

ج) $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}, a_n$

کافی بودن شرط روشن‌است. لازم بودن‌آن‌ها راثابت می‌کنیم. اگردرتصاعد جدید، همهٔ جمله‌های تصاعد دوم، بعد ازهمهٔ جمله‌های تصاعد اول قرار گیرند، یعنی تصاعد جدید به صورت (الف) درآید، روشن است که باید داشته باشیم: $p=q=b_1-a_n$. ولی اگر جمله‌های دو تصاعد، در تصاعد جدید، بــه تناوب و، یك در میان باشند، باید $n=k$ یــا $n-1=k$ باشد و، تصاعد جدید، به صورت (ب) یا (ج) درمی‌آید وباید داشته باشیم: $p=q$ و $b_1-a_1=\frac{1}{2}p$.

بقیهٔ حالت‌ها را بدون اثبات می‌آوریم، زیرا اثبات آن‌ها، کاملاً شبیه اثبات حالت اول است.

۲) $\{a_i\}$ و $\{b_i\}$، دو تصاعد حسابی متناهی نزولی و، به ترتیب، با تعداد جمله‌های n و k هستند. برای این‌کــه بتوان ازمجموعهٔ همهٔ جمله‌های این دو تصاعد، تصاعد حسابــی تازه‌ای درست کرد، لازم وکافی است داشته باشیم:

یا $p=q=-(b_k-a_1)$؛ یا $n=k$ ، $p=q$، $b_1-a_1=\frac{1}{2}p$؛ یا

$n+1=k$، $p=q$، $b_1-a_1=-\frac{1}{2}p$. دراین سه حالت، بــه ترتیب، این تصاعدها را خواهیم داشت:

$$a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, b_k, b_{k-1}, \dots, b_1;$$
$$a_n, b_n, a_{n-1}, b_{n-1}, \dots, a_1, b_1;$$
$$b_{n+1}, a_n, b_n, a_{n-1}, \dots, a_1, b_1$$

۳) تصاعدهای‌حسابی $\{a_i\}$ و $\{b_i\}$ متناهی‌اند و، به‌ترتیب، دارای n جمله و k جمله هستند؛ درضمن، یکی از آن‌ها صعودی ودیگری نزولی است. برای این‌که، دنبالهٔ صعودی مجموعهٔ همهٔ جمله‌های این‌دو تصاعد، تصاعد حسابی تازه‌ای تشکیل دهند، لازم وکافی‌است، یکی ازاین حالت‌ها را داشته باشیم:

- $q=-p=b_1-a_1$؛
- $p=-q=b_k-a_n$.

دراین‌صورت، به ترتیب، به دوتصاعد حسابی زیرمی‌رسیم:

$$a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, b_1, b_2, \dots, b_k;$$
$$a_1, a_2, \dots, a_n, b_k, b_{k-1}, \dots, b_1$$

۴) اگریکی ازتصاعدها متناهی و دیگری نامتناهی باشد، چون $a_1<b_1$، بنابراین تنها $\{a_i\}$ می‌تواند متناهی و $\{b_i\}$ نامتناهی باشد؛ درضمن تصاعد $\{b_i\}$ باید صعودی باشد. دراین‌صورت، برای‌این‌که باهمهٔ جمله‌های دوتصاعد، به تصاعد حسابی تازه‌ای برسیم،لازم وکافی است، یکی‌ازاین دوشرط را داشته باشیم:

- $p=q=b_1-a_n$؛
- $q=-p=b_1-a_1$.

که، درنتیجه، به‌ترتیب، این دوتصاعد راخواهیم داشت:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots;$$
$$a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, b_1, b_2, \dots$$

۵) اگرهردو تصاعد نامتناهی باشند، روشن است‌که باید، هردوی‌آن‌ها، صعودی باشند. دراین‌حالت، شرط لازم وکافی، برای وجود تصاعدجدید، این است‌که داشته‌باشیم:

$$p=q, \ b_1-a_1=\frac{1}{2}p$$

که، دراین‌صورت، به تصاعد زیرمی‌رسیم:

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$$

۳۱. عددهای a و b را طوری انتخاب می‌کنیم‌که، دنبالهٔ ۱۷ عدد

$$a, a, a, b, a, a, a, b, \dots, a, a, a, b, a$$

با شرط‌های مسأله سازگار باشد. برای این منظور، باید داشته باشیم:

$$3a+b<0 \text{ و } 13a+4b=1371$$

از نابرابری به دست می‌آید: $4b<-13a$ و از برابری $4b=1371-13a$؛ بنابراین

$$4b=1371-13a<12a \Longleftrightarrow a>1371$$

درضمن $1371-13a$ باید بر ۴ بخش‌پذیر باشد. چون

$$1371-13a=4(342-3a)+(3-a)$$

روشن است که a، باید درتقسیم بر ۴ به باقی‌ماندهٔ ۳ برسد؛ مثلاً $a=1375$ و

$$b=\frac{1371-13a}{4}=-4126$$

۳۲. روشن است که، در بین این رقم‌ها، عددزوج نمی‌تواند وجود داشته باشد، زیرا وقتی رقم زوج در سمت راست عدد سه رقمی قرارگیرد، عددی غیر اول می‌شود. همچنین، در بین این رقم‌ها، عدد ۵ هم نمی‌تواند باشد، زیرا عددی‌که به ۵ ختم‌شود، بر ۵ بخش‌پذیر است. بنابراین، اگر چنین سه رقمی وجود داشته باشند، در بین رقم‌های ۱، ۳، ۷ و ۹ هستند. ولی

$$371=7\times 53,\quad 391=17\times 23,\quad 791=7\times 113,$$
$$793=13\times 61$$

بنابراین، چنین رقم‌هایی وجودندارند.

۳۳. بله، می‌توان. به‌عنوان مثال، می‌توان شش قطر اصلی بیست وجهی منتظم را در نظرگرفت، یعنی شش قطری‌که از مرکز آن می‌گذرند.

۳۴. ابتدا ثابت می‌کنیم هرعدد m رقمی $(m>1)$، ازحاصل‌ضرب رقم‌های خود بزرگتراست. این عدد m رقمی را درنظرمی‌گیریم:

$$A=\overline{a_0a_1a_2\cdots a_{m-1}}$$

دراین‌صورت داریم:

$$a_0\times a_1\times a_2\times\cdots\times a_{m-1}\leqslant 9^{m-1}\cdot a_0;$$
$$A=10^{m-1}a_0+10^{m-2}a_1+\cdots+a_{m-1}\geqslant 10^{m-1}\cdot a_0$$

بنابراین، باتوجه به فرض مسأله، باید داشته باشیم:

$$n^2-10n-22<n \text{ و } n^2-10n-22\geqslant 0$$

از نامعادلهٔ اول به دست می‌آید $n<13$ و از نامعادلهٔ دوم $n\geqslant 12$؛ یعنی عدد مطلوب، برابراست با $n=12$.

۳۵. نابرابری‌سمت‌چپ روشن‌است، چون، هر‌دوضلعی راکه‌به‌دلخواه انتخاب‌کنیم، یا باهم برابرندویا، یکی‌ازدیگری بزرگتراست. نابرابری سمت راست را، بابرهان‌خلف، ثابت می‌کنیم.

طول ضلع‌های n ضلعی را، $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n می‌گیریم وفرض می‌کنیم:

$$a_۱ \geqslant a_۲ \geqslant a_۳ \geqslant \cdots \geqslant a_n$$

(لزومی ندارد، این ضلع‌ها روی محیط n ضلعی، به‌همین ردیف باشند). اگر برای هر دو ضلع دلخواه n ضلعی داشته باشیم:

$$\frac{a_i}{a_{i+۱}} \geqslant ۲, \ (i=۱,۲, \ldots, n-۱)$$

به این معناست‌که

$$a_۲ \leqslant \frac{۱}{۲}a_۱, \ a_۳ \leqslant \frac{۱}{۴}a_۱, \ \ldots, \ a_n \leqslant \frac{۱}{۲^{n-۱}}a_۱$$

وازآن‌جا

$$a_۲+a_۳+\cdots+a_n \leqslant a_۱\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\cdots+\frac{۱}{۲^{n-۱}}\right)<a_۱$$

که ممکن نیست.

۳۶. بایاری‌گرفتن ازبرهان خلف ثابت می‌کنیم، مسأله جواب ندارد. فرض‌می‌کنیم، جدول مورد نظرمسأله وجود داشته باشد. قدرنسبت تصاعدها را درسطرهای اول وچهارم، به ترتیب a و c ودر ستون‌های اول وچهارم، به‌ترتیب b و d می‌گیریم (سطرها را ازچپ به راست وستون‌ها را از بالا بـه پایین به حساب می‌آوریم). چون درخانه‌گوشهٔ راست‌و بالای جدول، باید عدد $۹+۲a$ قرارگیرد، بنابراین

$$۵=۹+۲a+۲d$$

(شکل ۳ راببینید). به همین ترتیب، به دست می‌آید:

$$۸=۱+۲b+۲c$$

درخانه‌های چپ بالا وراست پایین، باید به‌ترتیب عددهای

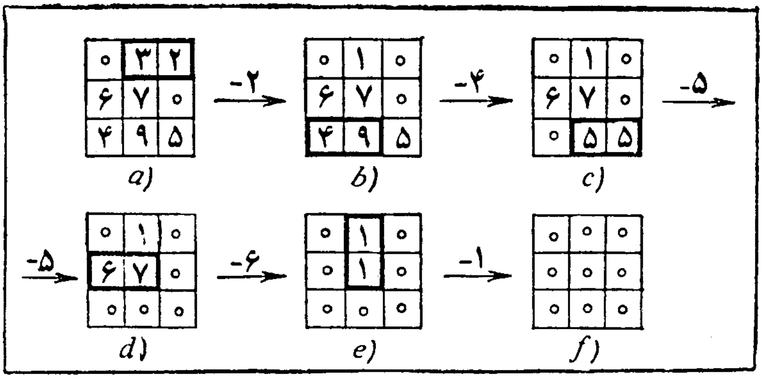
$$۹-a=۱-b \ \text{و} \ ۵+d=۸+c$$

قرارگیرند. به‌این‌ترتیب، به‌دستگاه معادله‌های زیرمی‌رسیم:

$$\begin{cases} a+d=-۲ \\ b+c=\dfrac{۷}{۲} \\ a-b=۸ \\ d-c=۳ \end{cases}$$

وازمجموع چهار معادله به دست می‌آید: $a+d=\frac{۲۵}{۴}$، که معادلهٔ اول دستگاه را نقض می‌کند. دستگاه جواب ندارد و، بنابراین، فرض ما مبنی بر وجود جدول مورد نظر، نفی می‌شود.

۳۷. الف) در ۵ حرکت، می‌توان به چنین جدولی رسید (شکل ۳۳-a تا f).



شکل ۳۳

ب) اگر دریك جدول ۳×۳، عددهای سطر اول را ازچپ به‌راست a، b، c، سطر دوم را d، e، f وسطرسوم را g، h، k بنامیم، آن‌وقت بـه سادگی روشن می‌شود که، بـا اضافه‌کردن یك عدد به دوخانهٔ مجاور، مجموع زیر تغییر نمی‌کند:

$$S=(a+c+e+g+k)-(b+d+f+h)$$

اگر بخواهیم، عددهای واقع درچهارگوشهٔ جدول ما، برابرواحد وعددهای واقع‌در پنج خانهٔ دیگر، برابرصفرشوند، باید این مجموع برابر ۴ باشد، درحالی‌که درجدول ما، این‌مجموع برابرصفراست. بنابراین،ازجدول مفروض، نمی‌توان به جدولی رسیدکه مسأله خواسته است.

۳۸. اگرتعداد صفحه‌های هرجلدکتاب را برابر n بگیریم، باید داشته باشیم:

$$۳۹۳۹۰=(۱+n)+((n+۱)+۲n)+((۲n+۱)+۳n)+\dots$$
$$\dots+((۱۲n+۱)+۱۳n)=۱۳(۱۳n+۱)$$

وازآن‌جا $n=۲۳۳$.

۳۹. راهنمایی. میانهٔ وارد بروتر را رسم‌کنید.

۴۰. $n=۱۳۷۱!+۱$ می‌گیریم‌وکوچکترین عدداول p را، که از n بزرگتراست، درنظرمی‌گیریم. روشن است کـه $p>n+۱۳۷۰$، زیـرا عددهای $n+۱$، $n+۲$، ...، $n+۱۳۷۰$، به ترتیب، برعددهای ۲،۳،۴،...،۱۳۷۱ بخش‌پذیرند. بهاین‌ترتیب،عددهای

$$p-۱۳۷۰،\ p-۱۳۶۹،\ \dots،\ p-۲،\ p-۱$$

عددهایی مرکب‌اند، زیرا همهٔ آن‌ها، از n بزرگتر واز p کوچکترند. این عددها، همراه با p، ۱۳۷۱ عدد متوالی را تشکیل می‌دهندکه، دربین آن‌ها، تنها عدد p، عددی اول است.

۴۱. باتوجه به شرط مسأله، تنها یکی ازاین دوحالت، برای نمره‌ها می‌تواند وجود داشته باشد:

$$۱)\quad A(۱۲،۲۰);\ B(۱۲،\ ۱۶);\ C(۱۶،۱۶)$$

$$۲)\quad A(۱۲،۱۶);\ B(۱۶،\ ۱۶);\ C(۱۲،۲۰)$$

که به صورت یك ارزشی، بامعلوم بودن یکی از نمره‌های C (ونه A یا B) تشخیص داده می‌شوند.

پاسخ. باید از C پرسید. اگریکی ازنمره‌های او ۱۶ باشد،آن وقت، نمره‌های A برابر ۱۲ و ۲۰، نمره‌های B برابر ۱۲ و ۱۶ ونمره‌های C برابر ۱۶ و ۱۶ است؛ اگر یکی ازنمره‌های C برابر ۱۲ یا برابر ۲۰ باشد،آن‌وقت، نمره‌های A برابر ۱۲ و ۱۶، نمره‌های B برابر ۱۶ و ۱۶ ونمره‌های C برابر ۱۲ و ۲۰ است.

۴۲. عددی راکه همراه با عدد ۳۴۸ در پایان‌کار، روی تختهٔ سیاه مانده است، x می‌گیریم. یکی از این دوعدد، باید برابرباقی‌ماندهٔ تقسیم عددی بر ۷ باشد. چون ۳۴۸از ۷ بزرگتراست، پس $۰ \leqslant x \leqslant ۶$.

ازطرف دیگر، مجموع همهٔ عددهای از ۱ تا ۱۳۷۱، بر۷ بخش‌پذیر است، زیرا

$$۱+۲+۳+\dots+۱۳۷۱=\frac{۱+۱۳۷۱}{۲}\times ۱۳۷۱=۶۸۶\times ۱۳۷۱=$$

$$=۷\times ۹۸\times ۱۳۷۱$$

پس مجموع $x+۳۴۸$ هم باید بر ۷ بخش‌پذیر باشد. باقی‌ماندهٔ حاصل ازتقسیم ۳۴۸ بر۷، برابراست با ۵، یعنی $x=۲$.

۴۳. طول‌جست‌های متوالی حشره را $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، ... می‌گیریم. دراین‌صورت،اگر $۰<q\leqslant\frac{۱}{۲}$، آن‌وقت

$$a_۱>a_۱(q+q^۲+\dots+q^{n-۱})=a_۲+a_۳+\dots+a_{n-۱}$$

(برای $n=۱،۲،۳،\dots$)؛ یعنی بعد از نخستین جست، به هیچ ترتیبی با n جست بعدی، نمی‌تواند خود را به نقطهٔ آغاز حرکت برساند.

اگر $\frac{۱}{۲}<q\leqslant ۱$، آن وقت می‌توان $n>۱$ راطوری پیداکردکه داشته باشیم:

$$q^n \leqslant q+q^2+\dots+q^{n-1}<1<q+q^2+\dots+q^{n-1}+q^n$$

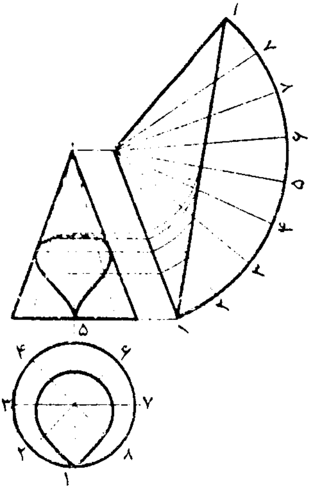
دراین‌صورت، مثلثی باضلع‌های

$$a=a_1,\ b=a_2+a_3+\dots+a_n,\ c=a_{n+1}$$

وجود دارد (نابرابری‌های مثلثی، از نابرابری‌های $c \leqslant b<a<b+c$ نتیجه می‌شود) و اگر حشره روی محیط این مثلث حرکت کند، به نقطهٔ آغاز برمی‌گردد.

روشن است که می‌توان فرض کرد $2>q>1$، زیرا هرمسیر بسته رامی‌توان درجهت عکس وبا جست‌هایی برابرعکس جست‌های قبلی پیمود.

پاسخ. $\frac{1}{2}<q<2$.

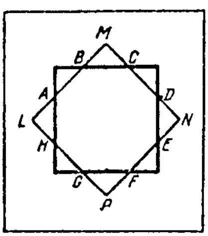


شکل ۳۴

۴۴. برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر، سطح مخروطی را، روی مولدی که ازمحل استقرار کفش‌دوزك گذشته است، باز و، سپس، دوانتهای آن را با خط راستی بــه هم وصل می‌کنیم. روی شکل ۳۴ همه چیز به‌روشنی دیده می‌شود.

۴۵. مساحت مشترك خانه‌های سیاه دوصفحه را S_1، مساحت مشترك خانه‌های سفید دو صفحه را S_2، مساحت مشترك خانه‌های سفید مربع بالا با خانه‌های سیاه مربع پایین را S_3 و، سرانجام، مساحت مشترك خانه‌های سیاه مربع بالا با خانه‌های سفید مربع پایین را S_4 می‌نامیم، دراین صورت، اگرمساحت هشت‌ضلعی $ABCDEFGH$ (شکل ۳۵) را S بگیریم، باید داشته باشیم:

$$S_1+S_2+S_3+S_4=S$$



شکل ۳۵

اگرصفحهٔ بالا را، بــه‌اندازهٔ ۹۰ درجه دور مرکزخود، دوران دهیم، جای خانه‌های سفیدآن بــا خانه‌های سیاه عوض می‌شود وبرعکس. بنابراین

$$S_1=S_3,\ S_2=S_4$$

اگر هر دو صفحه را، به اندازهٔ ۹۰ درجه دور محور مشترکشان دوران دهیم، آن وقت خانه‌های سیاه وسفید، درهردو صفحه، جا به‌جا می‌شوند. درنتیجه

$$S_2=S_3,\ S_1=S_4$$

به این ترتیب، به دست می‌آید:

$$S_1=S_2=S_3=S_4;\ S_1=\frac{1}{4}S$$

اکنون تنها این می‌ماند که مساحت هشت ضلعی $ABCDEFGH$ را محاسبه کنیم. محاسبهٔ این مساحت دشوار نیست (هرضلع هشت ضلعی، برابر است با $\frac{1}{3}$).

۴۶. $\mathbf{f}$ را برداری می‌گیریم که، در رسم دانش‌آموز، رأس اول را به رأس آخر وصل می‌کند. بنا بر فرض مسأله، طول این بردار برابر است با d. اگر ضلع‌های متناظر چند ضلعی اصلی را، با بردارهای $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$، ...، $\mathbf{e}_n$ نشان دهیم، از آن‌جا که با یك چندضلعی بسته سر و کار داریم، مجموع این بردارها، برابر بردار صفر می‌شود:

$$\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\cdots+\mathbf{e}_n=0$$

خطای نسبی را، ضمن رسم ضلع‌ها، به ترتیب p_1، p_2، ...، p_n می گیریم؛ در این صورت، باید داشته باشیم:

$$\mathbf{f}=(1+p_1)\mathbf{e}_1+(1+p_2)\mathbf{e}_2+\cdots+(1+p_n)\mathbf{e}_n=$$
$$=(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\cdots+\mathbf{e}_n)+(p_1\mathbf{e}_1+p_2\mathbf{e}_2+\cdots+p_n\mathbf{e}_n)=$$
$$=p_1\mathbf{e}_1+p_2\mathbf{e}_2+p_n\mathbf{e}_n$$

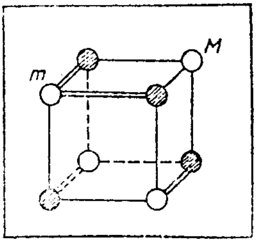
حاصل‌ضرب عددی (اسکالر) بردارهای $\mathbf{f}$ و $\mathbf{e}_1$ را در نظر می‌گیریم. بدون این که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد آید، می‌توان این حاصل‌ضرب را مثبت گرفت. چون چندضلعی محدب است. زاویهٔ بین بردار $\mathbf{f}$ و بردارهای $\mathbf{e}_k$، با افزایش k، به‌طور یکنوا افزایش می‌یابد و، حاصل‌ضرب عددی $\mathbf{f}\cdot\mathbf{e}_k$ ، تاجایی مثل $\mathbf{e}_s$ مثبت و، سپس، از $\mathbf{e}_{s+1}$ تاجایی‌مثل $\mathbf{e}_m$ منفی و، دوباره، برای بردارهای از $\mathbf{e}_{m+1}$ تا $\mathbf{e}_n$ مثبت درمی‌آید.

اکنون، برای ساده‌تر شدن کار، بردارهای متناظر با ضلع‌های چندضلعی را، به‌صورت تازه‌ای نام‌گذاری می‌کنیم: بردار $\mathbf{e}_{m+1}$ را با $\mathbf{a}_1$، بردار $\mathbf{e}_{m+2}$ را با $\mathbf{a}_2$ وغیره؛ وخطاهای نسبی آن‌ها را، به ترتیب q_1، q_2، ... می‌نامیم. دراین‌صورت، حاصل‌ضرب عددی بردار $\mathbf{f}$ در بردار $\mathbf{a}_k$ وقتی مثبت است که k ازعدد $n-m+s$ تجاوز نکند و، برای همهٔ بردارهای دیگر بعداز آن، منفی است. عدد $n-m+s$ را با t نشان می‌دهیم. $\mathbf{f}\cdot\mathbf{f}$ ، یعنی d^2 را در نظر می گیریم:

$$d^2=\mathbf{f}(p_1\mathbf{e}_1+p_2\mathbf{e}_2+\cdots+p_n\mathbf{e}_n)=$$
$$=\mathbf{f}(q_1\mathbf{a}_1+\cdots+q_t\mathbf{a}_t)+\mathbf{f}(q_{t+1}\mathbf{a}_{t+1}+\cdots+q_n\mathbf{a}_n)\leqslant$$
$$\leqslant p\mathbf{f}(\mathbf{a}_1+\cdots+\mathbf{a}_t)-p\mathbf{f}(\mathbf{a}_{t+1}+\cdots+\mathbf{a}_n)=$$
$$=p\mathbf{f}\cdot(\mathbf{a}_1+\cdots+\mathbf{a}_t-\mathbf{a}_{t+1}-\cdots-\mathbf{a}_n)=$$
$$=2p\mathbf{f}(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\cdots+\mathbf{a}_t)$$

بـه ایـن تـرتیب $d^2\leqslant 2p|\mathbf{f}|\cdot|\mathbf{a}_1+\cdots+\mathbf{a}_t|$. ولـی $|\mathbf{f}|=d$؛ در ضمن $|\mathbf{a}_1+\cdots+\mathbf{a}_t|\leqslant 2$، زیرا این مجموع، برابر یکی‌ازقطرهای چندضلعی است که‌نمی‌تواند ازقطر دایرهٔ محیطی چندضلعی بزرگتر باشد. بنابراین $d\leqslant 4p$.

۴۷. الف) مجموع عددهای همهٔ رأس‌ها، برابرواحد است. درهر گام، دو واحد به این‌مجموع اضافه می‌شود. یعنی مجموع عددهای رأس‌های مکعب، همیشه عددی فرد باقی می‌ماند. ولی مجموع ۸ عدد برابر، نمی‌تواند عددی فـرد بـاشد؛ بنابراین دراین حالت، پاسخ مسأله منفی است.



شکل ۳۶

ب و ج) دوچهاروجهی محاط درمکعب را درنظرمی‌گیریم که چهار رأس یکی ازآن‌ها رادر شکل ۳۶ هاشور زده‌ایم‌وچهار رأس چهاروجهی دوم، چهار رأس دیگرمکعب است. یالی‌ازمکعب را درنظرمی‌گیریم که رأسی ازیك چهار وجهی‌را بـه رأسی از چهار وجهی دیگروصل‌کرده باشد (دو رأس ازیك چهاروجهی نمی‌توانند دوسریك یال ازمکعب باشند). بـااضافه‌کردن یك واحد به چنین دو رأسی، بـه‌مجموع عددهای واقع در رأس‌های هرچهاروجهی، یك واحد اضافه می‌شود. بنابراین، اگراین مجموع‌ها با هم اختلاف داشته باشند، تفاضل آن‌ها همیشه ثابت می‌ماند ونمی‌توانیم، همهٔ عددهای واقع درهشت رأس مکعب رابرابر کنیم.

این استدلال نشان می‌دهدکه، پاسخ بـه مسألهٔ (ج) منفی است، زیـرا دراین‌حالت، مجموع عددهای واقع درچهار رأس یك چهاروجهی، بامجموع عددهای واقع درچهاررأس چهاروجهی دیگر، برابر نیستند.

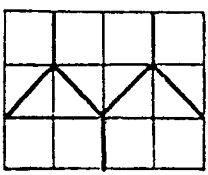
ثابت می‌کنیم، درحالت برابر بودن این‌دومجموع، می‌توان بعدازچندگام، به‌برابری عددها در رأس‌های مکعب رسید. مجموع عددهای واقع در رأس‌های‌هر چهـاروجهی را، می‌توان مضربی‌از ۴ درنظر گرفت،زیرا اگراین‌مجموع (که درهردوچهاروجهی‌یکی‌است)، مضربی از ۴ نباشد، می‌توان بابرداشتن حداکثر سه‌گام، به‌این‌هدف رسید (یعنی،مجموع‌ها را، به‌صورت مضربی از ۴ درآورد). فـرض‌کنید، دریك چهاروجهی، همهٔ عددهای واقع

در رأس‌ها، برابر نباشند. بزرگترین و کوچکترین این عددها را انتخاب می‌کنیم. روی شکل ۳۶، عدد بزرگتر را M وعددکوچکتر را m گرفته‌ایم. توجه‌کنیم که $M \geqslant m+۲$، زیرا مجموع هرچهارعدد از $۴m$ بزرگتراست و، بنابراین، از $۴m+۴$ کمتر نیست؛ یعنی اگر در سه رأس دیگر (غیراز رأس متناظرعدد m) هیچ کدام ازعددها از $m+۱$ تجاوز نکنند، آن وقت مجموع چهارعدد، از $۴m+۳$ تجاوز نمی‌کند.

اکنون، به‌ترتیب‌زیر، چهارگام (اضافه‌کردن واحدها) برمی‌داریم. به سریال‌هایی‌که درشکل۳۶، بادوپاره خط راست به‌هم وصل‌شده‌اند، یك واحد اضافه می‌کنیم. به‌این‌ترتیب، به هررأس، یك واحد اضافه می‌شود، به جز دورأس: عدد M بی‌تغییرمی‌ماند وعدد m به $m+۲$ تبدیل می‌شود. درضمن، باز هم مجموع عددهای مربوط به هرچهاروجهی، بر۴ بخش‌پذیرمی‌ماند. روشن است‌که، با ادامهٔ این روش، می‌توان عددهای واقع در رأس‌های یك چهاروجهی رایکسان‌کرد؛ بعدبه‌چهاروجهی دوم می‌پردازیم‌که، درنتیجه، عددهای‌واقع درهمهٔ رأس‌های مکعب، یکسان‌می‌شود.

۴۸. بعداز عمل اول، کارت‌هاطوری روی هم قرار می‌گیرندکه رقم‌های آخرعددهای آن‌ها، نزولی نیستند. این ردیف رقم‌های آخر، بعداز جداکردن کارت‌ها هم، درهرستون حفظ می‌شود. یعنی وقتی آن‌ها را به‌صورت یك ستون درمی‌آوریم (درپایان عمل دوم)، به صورتی قرار می‌گیرندکه، عددهای روی کارت‌ها، نسبت به عددهای دورقمی سمت راست خود، غیرنزولی‌اند. این ردیف، بعداز جداکردن کارت‌ها، درعمل سوم، به‌قوت خود باقی می‌ماند. به‌این‌ترتیب، درپایان عمل سوم، کارت‌ها به ردیف صعودی عددهای خود قرار می‌گیرند.

۴۹. شبیه شکل ۳۷، مستطیل‌مفروض را، به‌پنج چندضلعی تقسیم می‌کنیم. به سادگی روشن می‌شودکه، اگردو نقطه دریکی از این چندضلعی‌ها باشد، فاصلهٔ بین آن‌ها از $\sqrt{۲^۲+۱}=\sqrt{۵}$ تجاوز نمی‌کند. ازطرف دیگر، ازمیان ۶ نقطهٔ مفروض، دست‌کم دونقطه در درون یکی ازاین چندضلعی‌ها قرار می‌گیرندکه، البته، فاصلهٔ بین‌آن‌ها از $\sqrt{۵}$ تجاوزنمی‌کند.



شکل ۳۷

۵۰. اگرهمهٔ افراد باهم‌آشنا باشند، چیزی برای‌اثبات باقی نمی‌ماند. فرض‌می‌کنیم، A و B باهم آشنا نباشند؛ دراین‌صورت، هم A و هم B دربین $۲n-۲$ نفردیگر، هرکدام دست‌کم n آشنادارند. بنابراین A و B، دست‌کم دوآشنای مشترك دارند. A و B راپشت یك میزگرد، روبه‌روی هم می‌نشانیم ودوآشنای مشترك آن‌ها را، دربین آن‌ها قرارمی‌دهیم.

۵۱. شوالیه‌ها را، به ترتیبی دلخواه، پشت میزگرد می‌نشانیم. ثابت می‌کنیم، اگر درجاهایی، دوشوالیهٔ دشمن‌کنارهم نشسته باشند، می‌توان طوری آن‌ها را تغییرجا دادکه

تعداد این‌گونه زوج شووالیه‌های دشمن (که‌کنارهم قرارگرفته‌اند)، کاهش پیدا کند.

فرض‌کنید A و B، که دشمن یکدیگرند، کنارهم قرار گرفته باشند و، درضمن، B در سمت راست A باشد. ثابت می‌کنیم، می‌توان جایی را پیداکردکه، در آن، دوست B در سمت راست دوست A نشسته است. درواقع، تعداد دوستان A کمتراز n نیست، درحالی که دشمن‌های B از $n-1$ تجاوز نمی‌کنند. به‌این‌ترتیب، جایی رامی‌توان پیداکردکه،در آن‌جا، درسمت راست A' (دوست A)، شوالیهٔ B' (دوست B) نشسته است. همهٔ کسانی راکه از B تا A' ودرسمت راست B نشسته‌اند، به‌ردیف عکس می‌نشانیم. روشن است‌که دراین‌صورت، تعداد زوج افراد دشمنی‌که‌کنارهم نشسته‌اند، یك واحدکم می‌شود (اگر A' و B' دوست باشند)؛ در حالتی‌که A' و B' باهم دشمن باشند، این تعداد، حتی دو واحد کاهش می‌یابد.

۵۲. $A_1A_2\dots A_n$ را خط شکستهٔ مفروض می‌گیریم. دستگاه قائم محورهای مختصات Ox و Oy راطوری رسم‌می‌کنیم‌که، محورهای آن، روی خطهای‌راست شبکهٔ کاغذشطرنجی باشند وطول هرضلع یك خانهٔ صفحهٔ شطرنجی را، به عنوان واحد انتخاب می‌کنیم. دراین صورت، مختصات (x_i, y_i) برای رأس A_i ازخط شکسته، به‌ازای هر i، عددهایی‌درست‌اند. فرض می‌کنیم:

$$X_i = x_{i+1} - x_i,\ Y_i = y_{i+1} - y_i,\ (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$X_n = x_1 - x_n,\ Y_n = y_1 - y_n$$

به‌این‌ترتیب، مسأله منجر به‌یك‌مسألهٔ مربوط به‌حساب می‌شود: X_i و Y_i عددهایی‌درست‌اند؛ در ضمن

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n = 0,\ Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = 0,$$

$$X_1^2 + Y_1^2 = X_2^2 + Y_2^2 = \dots = X_n^2 + Y_n^2 = c$$

می‌خواهیم ثابت‌کنیم، n عددی است زوج.

یادآوری می‌کنیم، با شرط درست بودن عددهای X و Y، از تقسیم عدد X^2+Y^2 بر ۴، درحالت زوج بودن X و Y به باقی‌ماندهٔ صفر، درحالت فرد بودن X و Y به‌باقی‌ماندهٔ ۲ ودرحالتی‌که یکی از دوعدد X و Y زوج و دیگری فرد باشد، به باقی‌ماندهٔ ۱ می‌رسیم. می‌توان‌فرض‌کرد، دربین عددهای X_1، X_2، ...، X_n، Y_1، Y_2، ...، Y_n،دست‌کم یکی فرد باشد. اگرچنین نباشد، می‌توان همهٔ این عددها را بر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك آن‌ها تقسیم و، سپس، مسأله را درمورد عددهای جدید حل‌کرد. به این ترتیب، دوحالت پیش می‌آید:

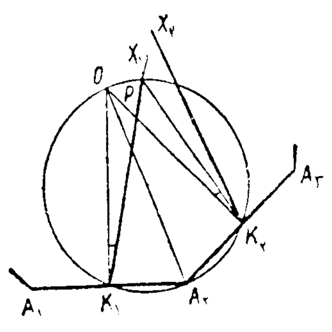
۱) عدد c درتقسیم بر ۴، به باقی‌ماندهٔ ۲ می‌رسد؛ دراین صورت همهٔ X_iها و Y_iها

عددهایی فردند و از شرط $X_1+X_2+\dots+X_n=0$ نتیجه می‌شود که n، عددی است زوج.

۲) از تقسیم عدد c بر ۴، باقی‌مانده‌ای برابر ۱ به دست می‌آید. در این صورت، برای هر i، یا X_i فرد است و Y_i زوج، و یا X_i زوج است و Y_i فرد. با توجه به شرط $X_1+X_2+\dots+X_n=0$ نتیجه می‌شود که، در حالت اول، باید زوج عددهای (X_i, Y_i) به تعداد زوج باشند و از شرط $Y_1+Y_2+\dots+Y_n=0$ معلوم می‌شود که، در حالت دوم هم، جفت عددهای (X_i, Y_i)، به تعدادی زوج‌اند. به این ترتیب، در هر حال، n عددی است زوج.

۵۳. امکان عمل را با روش استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم. برای $n=2$ راه عمل روشن است: نصف مایع هریك از دو شیشه را در شیشهٔ مدرج خالی می‌ریزیم و، سپس، مایع باقی‌مانده یکی از دو شیشهٔ اولیه را در دیگری می‌ریزیم؛ به این ترتیب، به اندازهٔ $\frac{1}{2}$ از مایع‌ها وجود دارد و یك شیشه هم خالی می‌ماند.

اکنون فرض می‌کنیم، مسأله را برای k شیشهٔ مدرج حل کرده باشیم. $(k+1)$ شیشهٔ مدرج با مایع‌های مختلف (ولی با حجم‌های مساوی) و یك شیشهٔ خالی درنظر می‌گیریم. ابتدا k شیشهٔ مدرج را انتخاب می‌کنیم؛ بنا به فرض استقرا، می‌توانیم مایع‌های درون آن‌ها را، به کمك شیشهٔ مدرج خالی، طوری جابه‌جا کنیم که، در هر کدام از k شیشهٔ مدرج، به اندازهٔ $\frac{1}{k}$ از هر مایع وجود داشته باشد و، درضمن، یکی از شیشه‌ها خالی بماند. اکنون از هریك از شیشه‌های مدرج (ومنجمله شیشهٔ $(k+1)$ام) به اندازهٔ $\frac{1}{k+1}$ ام مایع درون خود، در شیشهٔ خالی می‌ریزیم و، سپس، باقی‌ماندهٔ مایع درون ظرف $(k+1)$ام را، به‌طور مساوی در k شیشهٔ اول تقسیم می‌کنیم. روشن است که، درنتیجه، در هر شیشهٔ مدرج، مخلوطی یکسان از $(k+1)$ مایع به دست می‌آید (و یکی از شیشه‌های مدرج هم خالی می‌شود).



شکل ۳۸

۵۴. K_i را وسط ضلع A_iA_{i+1} می‌گیریم. فرض می‌کنیم، برش‌های K_iX_i را به طول واحد داده باشیم، به نحوی که، هیچ دوتائی از آن‌ها، یکدیگر را قطع نکرده باشند. ثابت می‌کنیم: $\widehat{OK_1X_1}<\widehat{OK_2X_2}$ (شکل ۳۸: O مرکز دایرهٔ محیطی چندضلعی است). روشن است که، عمودمنصف‌های ضلع‌های چندضلعی از مرکز دایرهٔ محیطی آن می‌گذرند؛ بنابراین، دایرهٔ به قطر OA_2، از نقطه‌های K_1 و K_2 می‌گذرد و پاره خط راست

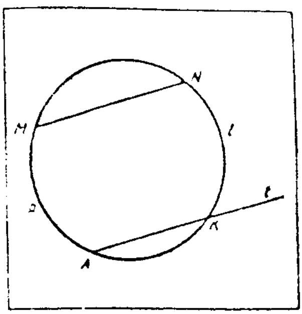
K_1X_1، به‌طول واحد، محیط دایره را در نقطه‌ای مثل P قطع می‌کند. سپس، $\widehat{OK_1P}=\widehat{OK_2P}$ و، اگر پاره خط‌های راست K_1X_1 و K_2X_2 متقاطع نباشند، $\widehat{OK_2P}<\widehat{OK_2X_2}$؛ بنابراین $\widehat{OK_1X_1}<\widehat{OK_2X_2}$. به همین ترتیب، می‌توان این رشته نابرابری‌ها را ثابت کرد:

$$\widehat{OK_1X_1}<\widehat{OK_2X_2}<\widehat{OK_3X_3}<\dots<\widehat{OK_nX_n}<\widehat{OK_1X_1}$$

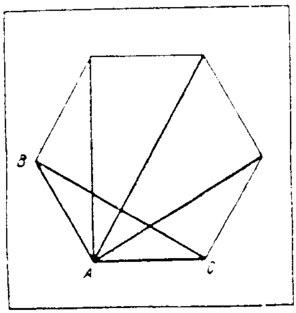
تناقض حاصل ثابت می‌کند که، دست‌کم دو تا از برش‌ها، یکدیگر را قطع می‌کنند.

با تجزیه و تحلیل دقیق‌تر راه حل، می‌توان روشن کرد که، برش‌ها، نمی‌توانند طولی کمتر از واحد داشته باشند.

۵۵. ابتدا ثابت می‌کنیم، دست‌کم n رنگ لازم است. برای این منظور، رأس دلخواهی مثل A از n ضلعی را در نظر می‌گیریم. ضلع‌های AB و AC از رأس A خارج شده‌اند. این دو ضلع، همهٔ قطرهایی که از رأس A گذشته‌اند و قطر BC را مورد توجه قرار می‌دهیم (شکل ۳۹ را، در حالت شش‌ضلعی ببینید). تعداد این پاره خط‌های راست، برابر n است؛ درضمن، هر دو تا از آن‌ها، نقطهٔ مشترکی دارند. بنابراین آن‌ها را باید با رنگ‌های مختلفی رنگ کرد، یعنی برای این n پاره خط راست، دست‌کم n رنگ لازم است.



شکل ۴۰



شکل ۳۹

اکنون ثابت می‌کنیم، با همین n رنگ می‌توان رنگ‌آمیزی تمامی پاره خط‌های راست را کامل کرد. برای این منظور، ثابت می‌کنیم، n پاره خط راستی که در بالا در نظر گرفتیم، دارای ویژگی زیر هستند: هریک از ضلع‌ها یا قطرهای n ضلعی، با یکی از این پاره‌خط‌های راست موازی‌اند.

ω را دایرهٔ محیطی n ضلعی می‌گیریم و فرض می‌کنیم MN، یکی از ضلع‌ها یا قطرهای n ضلعی باشد. اگر (MN) موازی (BC) باشد، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. در حالتی که (MN) با (BC) موازی نیست، از رأس A، خط راست t را موازی (MN) رسم می‌کنیم تا محیط دایرهٔ ω را در K قطع کند (شکل ۴۰). درواقع، خط راست t

نمی‌تواند بر دایرهٔ ω مماس باشد، زیرا دراین‌صورت، t با (BC) و، در نتیجه (BC) با (MN) موازی می‌شود.

چون A و M دوراْس nضلعی‌اند، بنابراین کمان ApM، شامل تعداد درستی‌کمان باطول‌های برابراست که، به‌وسیلهٔ رأس‌هایی‌از n ضلعی، روی ω پدید آمده‌اند. چون(MN) با (AK) موازی است، بنابـراین دوکمان APM و KlN برابرند؛ درنتیجه،کمان KN هم، شامل کمان‌هایی باطول‌های برابراست که، به‌وسیلهٔ رأس‌هایی از n ضلعی، روی ωپدید آمده‌اند؛ یعنی K هم، رأسی از n ضلعی است.

به این‌ترتیب، (MN) موازی‌بایکی‌ازپاره خط‌های راستی است که ازنقطهٔ A خارج شده است (دوضلع AB و AC و $n-3$ قطر). اکنون، همهٔ پاره‌خط‌های راست مورد نظر مسأله را، به n گروه تقسیم می‌کنیم، به نحوی‌که پاره خط‌های راست هر گروه، بـا یکی از پاره خط‌های راست ما (که ازنقطهٔ A گذشته‌اند و، در ابتدای حل، دربـارهٔ‌آن‌ها، صحبت کرده‌ایم) موازی باشد. پاره خط‌های راست هرگروه را، بایکی‌از رنگ‌ها، رنگ می‌زنیم؛ روی هم n رنگ مصرف خواهد شد.

۵۶. رنگ قاعدهٔ جعبه را، رنگ اول ورنگ سرپوش آن را، رنگ دوم می‌نامیم.دو وجه‌دیگر جعبه راکه روبه‌روی یکدیگرند و، به‌طور طبیعی، رنگ‌هایی غیراز رنگ‌های‌اول ودوم دارند، انتخاب می‌کنیم‌ورنگ‌های آن‌ها راسوم وچهارم می‌نامیم. دو وجه باقی‌ماندهٔ جعبه، با رنگ‌های پنجم‌وششم مشخص می‌شوند. برای مکعب هم، رنگ‌ها رابه‌همین‌صورت درنظرمی‌گیریم. مکعب راطوری درجعبه می‌گذاریم‌که رنگ‌های سوم و چهارم‌آن، مجاور قاعده وسرپوش جعبه باشند. درنتیجه درمورد قاعده‌های پایین و بالا، شرط مسأله بـرقرار می‌شود. رنگ‌های جانبی مکعب، بـه رنگ‌های ۱، ۲، ۵ و ۶ ووجه‌های جانبی جعبه بـه رنگ‌های ۳، ۴، ۵ و ۶ هستند. تنها وجه‌های با رنگ‌های ۵ و ۶، ممکن است برهم منطبق شوند. اگرجای قاعدهٔ پایین مکعب راعوض‌کنیم، بـه چهارصورت می‌توان آن را درجعبه قرار داد. تنها دریکی ازاین حالت‌ها، دو وجه به رنگ ۵ و، تنها دریکی از حالت‌ها، دو وجه به رنگ ۶، روی هم قرارمی‌گیرند. بنابراین، دست‌کم دو حالت باقی می‌ماندکه، در آن‌ها، وجه‌های هم‌رنگ، روی هم واقع نمی‌شوند. به‌این‌ترتیب، باثابت نگه داشتن قاعدهٔ پایین مکعب، دست‌کم دردوحالت، شرط مسأله برقرار است.

۵۷. (x,y,z,t) راچهار عدد نخستین و (x_i,y_i,z_i,t_i) را، چهار عددی می‌گیریم‌که بعداز i بار فشاردادن شستی به دست‌آمده‌اند. درضمن، درهرحالت، به جزحالت نخستین، مجموع چهارعددبرابرصفراست. اگر(a,b,c,d) را، چهارعددبه‌مجموع صفر بگیریم،داریم:

$$0=(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+$$

$$+2bc+2bd+2cd \qquad (1)$$

اکنون، چهار عدد (a_1, b_1, c_1, d_1) رادر نظرمی‌گیریم که بلافاصله از چهار عدد (a, b, c, d) به‌دست آمده‌اند. برای آن، باتوجه به (۱)، داریم:

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2=$$
$$=2(a^2+b^2+c^2+d^2)-2ab-2bc-2cd-2ad=$$
$$=3(a^2+b^2+c^2+d^2)+2ac+2bd$$

وچون $2ac\leqslant a^2+c^2$ و $2bd\leqslant b^2+d^2$، بنابراین

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2\geqslant 2(a^2+b^2+c^2+d^2) \qquad (2)$$

ازطرف دیگر، چهارعدد نخستین (x, y, z, t)، همه باهم برابر نیستند، درنتیجه

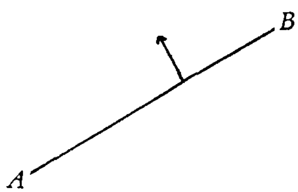
$$x_1^2+y_1^2+z_1^2+t_1^2>0$$

به‌این‌ترتیب، باتوجه به (۲)، به‌دست می‌آید:

$$x_i^2+y_i^2+z_i^2+t_i^2\geqslant 2^{i-1}(x_1^2+y_1^2+z_1^2+t_1^2)$$

ازاین‌جا نتیجه می‌شود، اگر i رابه اندازهٔ کافی بزرگ بگیریم، می‌توانیم به‌گروهی از چهارعدد برسیم که، دست‌کم یکی‌ازآن‌ها، ازلحاظ قدرمطلق، از۱۳۷۱ × ۳ بزرگترباشد. اگراین عدد منفی باشد، آن وقت درهمین‌گروه چهارعددی، باید عدد مثبتی بزرگتر از ۱۳۷۱ وجود داشته باشد، زیرا مجموع چهارعدد برابرصفراست.

۵۸. روی هرپاره خط راستی‌که دوگروه مجاور را به هم وصل می‌کند، پیکانی رسم می‌کنیم که، اگرروی پاره‌خط راست ازسمت عدد کوچکتر به سمت عدد بزرگتربرویم، این‌پیکان در سمت چپ پاره خط راست واقع شود (در شکل ۴۱، فرض براین است‌که عدد متعلق به نقطهٔ A، از عدد متعلق به نقطهٔ B کوچکتراست). از ۱۲ پیکان واقع برپاره خطهای راست روی ضلع‌های شش‌ضلعی اصلی، دست‌کم یکی، درجهت درون شش‌ضلعی قرارمی‌گیرد، زیرا اگر چنین نباشد، آن وقت به نابرابری متناقض



شکل ۴۱

$$a_1<a_2<\cdots<a_{12}<a_1$$

می‌رسیم (a_iها را عددهای واقع در نقطه‌های تقسیم ضلع‌های شش‌ضلعی و رأس‌های آن

گرفته‌ایم). ۳۰ پیکان مربوط به پاره خطهای راست درونی هم، به روشنی در درون شش‌ضلعی قرار دارند. به‌این‌ترتیب، دست‌کم ۳۱ پیکان در درون ۶ ضلعی وجود دارد.

مثلثی‌راکه، عددهای واقع درسه رأس آن، به‌ردیف صعودی ودرخلاف جهت‌حرکت عقربه‌های ساعت باشند، «مثلث راست»، و مثلثی راکه عددهای رأس‌های آن، به ردیف صعودی ودرجهت حرکت عقربه‌های ساعت‌باشند، «مثلث چپ» می‌نامیم. توجه‌کنیم: اگر در درون یك مثلث، دوپیکان وجود داشته باشد، با «مثلث راست» واگر در درون آن یك پیکان وجود داشته باشد، با «مثلث چپ» سر وکار داریم. بنابراین، اگرتعداد مثلث‌های راست را n وتعداد مثلث‌های چپ را m فرض‌کنیم، بایدروی‌هم، $2n+m$ پیکان در درون شش‌ضلعی داشته باشیم. n و m باید دردستگاه زیر صدق‌کنند:

$$\begin{cases} 2n+m \geqslant 31 \\ n+m = 24 \end{cases}$$

که اگر برابری را ازنابرابری‌کم‌کنیم، به دست می‌آید: $n \geqslant 7$.

۵۹. ضلع هرمکعب را برابر واحد می‌گیریم وفرض می‌کنیم، مکعب مستطیل حاصل، دارای اندازه‌های $m \times n \times k$ باشد ($m \geqslant n \geqslant k$). دراین صورت، تعدادکل مکعب‌هایی که مکعب مستطیل را تشکیل داده‌اند، برابر mnk و تعداد مکعب‌هایی‌که رنگ نخورده‌اند، برابر $(m-1)(n-1)(k-1)$ می‌شود. بنابراین، باتوجه به‌شرط مسأله، بایدداشته‌باشیم:

$$mnk = 2(m-1)(n-1)(k-1)$$

روشن است‌که $k > 2$. به جزاین، برای $k \geqslant 5$، این برابری بـه تناقض برخورد می‌کند، زیرا باتوجه به برابری $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = 0/512$ به دست می‌آید:

$$2(m-1)(n-1)(k-1) = 2mnk\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{k}\right) \geqslant$$

$$\geqslant 2mnk\left(\frac{4}{5}\right)^3 > mnk$$

به‌ازای $k=3$، برابری چنین می‌شود:

$$3mn = 4(m-1)(n-1) \Longleftrightarrow (m-4)(n-4) = 12$$

ازآن‌جا، به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} (m-4)(n-4) = 14 \\ m \geqslant n \geqslant 3 \end{cases}$$

که سه جواب دارد: $(16, 5)$، $(10, 6)$ و $(8, 7)$.

به ازای $k=4$، دستگاه

$$\begin{cases}(m-3)(n-3)=6\\ m\geqslant n\geqslant 4\end{cases}$$

به‌دست می‌آید که دوجواب دارد: $(9, 4)$ و $(6, 5)$.

به‌این ترتیب، تعداد مکعب‌های رنگ خورده، می‌تواند یکی ازعددهای ۱۲۰، ۹۰، ۸۴، ۷۲ یا ۶۰ باشد.

۶۰. هر نفر درست ۹ بار بازی کرده است، یعنی $x_i+y_i=9$؛ درضمن

$$x_1+x_2+\dots+x_{10}=y_1+y_2+\dots+y_{10}$$

(درهر بازی، یکی می‌برد ودیگری می‌بازد). بنابراین

$$(x_1^2+x_2^2+\dots+x_{10}^2)-(y_1^2+y_2^2+\dots+y_{10}^2)=$$
$$=(x_1^2-y_1^2)+(x_2^2-y_2^2)+\dots+(x_{10}^2-y_{10}^2)=$$
$$=9[(x_1-y_1)+(x_2-y_2)+\dots+(x_{10}-y_{10})]=0$$

۶۱. برای عدد n، تنها یك عدد طبیعی k وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم:

$$2^k-1\leqslant n<2^{k+1}-1$$

ثابت می‌کنیم، به شرط $n>2^k-1$، بابك، باهر نوع بازی پیروز، برنده می‌شود.

بابك درحرکت اول، کپه شامل n سنگ ریزه را، به دوبخش تقسیم می‌کند:

$$2^k-1 \quad \text{و} \quad m=n-(2^k-1)، \ (m\leqslant 2^k-1)$$

بـه هر ترتیبی که پیروز، بخش‌های حاصل را تقسیم کند، در یکی ازکپه‌های جدید، بیش از $2^{k-1}-1$ سنگ ریزه می‌ماند، زیرا

$$(2^{k-1}-1)+(2^{k-1}-1)=2^k-2<2^k-1$$

در این‌صورت، بابك، بـا حرکت خود، تعداد سنگ ریـزه‌ها را درکپهٔ بـزرگتر، برابر $2^{k-1}-1$ می‌کند. کپهٔ شامل m سنگ ریزه از اولی بزرگترنیست ونمی‌تواند به‌بخش‌های بزرگتر تقسیم شود.

دردنبالهٔ بازی، بابك، همین برنامه رادنبال می‌کند. او تلاش می‌کند، هر بـار بعد از حرکت او، تعداد سنگ‌ریزه‌هادرکپهٔ بزرگتر، برابر $\max=2^\alpha-1$ باشد (α، عددی‌طبیعی است) دراین‌صورت، درحرکت بعدی، باحرکت پیروز، این نابرابری برقرارمی‌شود:

$$۲^{a-۱}-۱<\max<۲^{a}-۱$$

وکپهٔ بزرگتر رامی‌توان طوری به دوبخش تقسیم کرد که به‌دست آید:

$$\max=۲^{a-۱}-۱$$

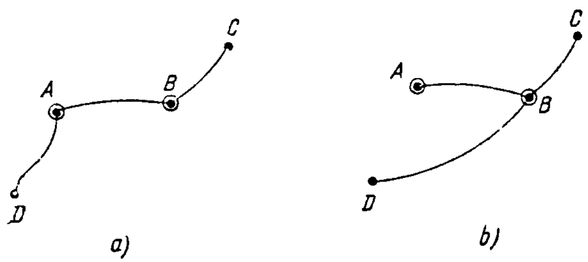
وبقیهٔ کپه‌ها، با تقسیم خود، هیچ کدام ازاین max بزرگتر نمی‌شوند. بابك درحرکت آخر خود، n کپه به دست می آورد که، درهرکدام، يك سنگ ریزه است وبازی را می برد.

درحالت $n=۲^{k-۱}$، نقش بابك وپیروز باهم عوض می‌شود و، درنتیجه، بابك می بازد.

پاسخ. به ازای $n=۳۱=۲^{۵}-۱$، بابك بازنده می‌شود و به ازای $n=۱۰۰\neq ۲^{k}-۱$، بابك می برد.

۶۲. درکشور اول، دوشهر A و B، با راه‌آهن به هم مربوط نیستند. در غیراین صورت، می‌شد از A به B، بدون هیچ تعویضی سفر کرد. بنابراین، درکشور دوم، دوشهر A و B، به‌طور مستقیم با راه‌آهن، به‌هم مربوط‌اند.

C راشهر دلخواهی غیراز A و B می‌گیریم. این شهر درکشور اول، نمی‌تواند، به‌طور مستقیم، هم به شهر A مربوط باشد وهم به شهر B (زیرا، اگر C به هردوشهر A و B مربوط بود، می‌توانستیم، از A به B، تنها بایك تعویض قطار سفر کنیم، درحالی‌که، طبق صورت مسأله، این تعویض قطار، ازدوبارکمتر نیست). بنابراین درکشور دوم، بین شهر C ویکی ازدو شهر A یا B، خط راه‌آهن وجود دارد. همین وضع، برای هرشهر دیگر D هم درست است.



شکل ۴۲

برای این‌که، درکشور دوم، از شهر C به شهر D برویم، ابتدا باید از C به A یا B برسیم (واین، باتوجه به اثبات بالا، ممکن است) و، سپس، اگرلازم باشد، مسیر AB را طی‌کنیم و، بعد، خود را به D برسانیم (که باز هم ممکن است؛ شکل ۴۲). درضمن، برای انجام این سفر، یا دوتعویض قطار لازم است (شکل a–۴۲) ویا يك تعویض (شکل b–۴۲)؛ یعنی درهرحال، بیش‌ازدو تعویض قطار پیش نمی‌آید.

۶۳. فرض‌کنید، تیم‌های ردیف‌های s و $s+۱$، حداکثر اختلاف امتیاز را داشته

باشند. تیم‌های ردیف‌های ۱، ۲، ۳، ...، s، روی هم به‌تعداد $\frac{1}{2}s(s-1)$ بازی با هم داشته‌اند و، روی هم، به اندازهٔ $s(s-1)$ امتیاز کسب کرده‌اند. به جز آن، این تیم‌ها، با تیم‌های ردیف‌های $s+1$، $s+2$، ...، n، به‌تعداد $s(n-s)$ بازی داشته‌اند وروی هم به اندازهٔ $2s(n-s)$ امتیاز به دست آمده است. بنابراین، مجموع امتیازهای تیم‌های ۱، ۲، ...، s، روی هم، ازاین مقدار تجاوز نمی‌کند:

$$s(s-1)+2s(n-s)=(2n-s-1)s$$

ازاین‌جا نتیجه می‌شود، تیمی‌که در ردیف s قراردارد، نمی‌تواند بیش‌از

$$\frac{(2n-s-1)s}{s}=2n-s-1$$

امتیاز به دست آورد (زیرا این تیم درگروه اول،که شامل ردیف‌های از ۱ تا s است، در ردیف آخر قراردارد).

تیم‌های ردیف $s+1$، $s+2$، ...، n، دربین‌خود، به‌تعداد

$$\frac{(n-s)(n-s-1)}{2}$$

بازی داشته‌اند و $(n-s)(n-s-1)$ امتیاز به دست آورده‌اندبنا بر این،تیمی که‌درردیف $(s+1)$ام قراردارد، حداقل به اندازهٔ

$$\frac{(n-s)(n-s-1)}{n-s}=n-s-1$$

امتیاز آورده است. به‌این ترتیب، حداکثراختلاف امتیازهای دو تیم ردیف‌های s و $s+1$، برابراست با

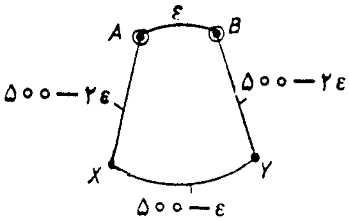
$$(2n-s-1)-(n-s-1)=n$$

اختلاف n امتیاز می‌تواند، مثلاً، در موقعیت زیرپیش‌آید: تیم شمارهٔ ۱، از همهٔ تیم‌های دیگرمی‌برد و $(2n-2)$ امتیازکسب می‌کند؛ بقیهٔ تیم‌ها، همه باهم مساوی می‌کنند وهرکدام $(n-2)$ امتیاز به‌دست می‌آورند: $2n-2-(n-2)=n$.

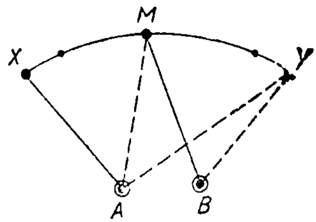
۶۴. فرض‌کنید، دوشهر X و Y وجود داشته‌باشدکه، نتوان آن‌ها رابامسیری به‌طول کمتر از ۱۵۰۰ کیلومتر به‌هم‌وصل کرد. XY را کوتاه‌ترین مسیری می‌گیریم که از ۱۵۰۰ کیلومترکمتر نیست. دراین‌صورت، بین دونقطه ازاین مسیر،که یکی در ۵۰۰ کیلومتری X ودیگری در ۵۰۰ کیلومتری Y قراردارد، فاصله‌ای وجود داردکه از ۵۰۰ کیلومترکمتر

نیست. بنابراین، در روی کمان بین این دو نقطه، شهری پیدا می‌شود. این شهر را M می‌نامیم (شکل ۴۳). به‌این‌ترتیب، درطول مسیر، فاصلهٔ XM وفاصلهٔ MY، هردو از ۵۰۰ کیلومتر بیشترند.

قبل ازبسته شدن جاده، مسیر XM وجود داشته است با طولی کمتراز ۵۰۰ کیلومتر و، اکنون، این جاده وجود ندارد (درغیراین‌صورت، مسیر XMY، کوتاه‌ترین نیست). بنابراین، این مسیر دیگر، به‌صورت $XABM$ است که، درآن، AB همان جادهٔ بسته شدهٔ بین شهرهای A و B است. یعنی مجموع مسیرهای $XA+BM$ از ۵۰۰ کیلومتر کمتراست (مسیرهای XA و BM بازند، شکل ۴۳).



شکل ۴۴



شکل ۴۳

همچنین، مسیر MY، به‌نحوی که کمتراز ۵۰۰ کیلومتر باشد، باید ازطریق $MABY$ یا $MBAY$ درنظرگرفته شود، درحالت اول مجموع مسیرهای باز $MA+BY$ کمتراز ۵۰۰ کیلومتر و، درحالت دوم، مسیر $MB+AY$ کمتر از ۵۰۰ کیلومترمی‌شود. درحالت اول، مسیر $XAMBY$ طولی کمتراز ۱۰۰۰ کیلومتر و، درحالت دوم، طول مسیر XAY کمتراز ۱۰۰۰ کیلومتر است؛ می‌بینیم، برای رفتن از X به Y، مسیری کوتاه‌تر از XMY وجود دارد.

تناقض حاصل، ثابت می‌کند که مسیر XY، برای هردوشهردلخواه X و Y، بایدکمتر از ۱۵۰۰ کیلومترباشد.

یادداشت. ۱) ارزیابی ۱۵۰۰ کیلومتردقیق است و نمی‌توان آن راکمترکرد. مثال زیر، دقت عدد ۱۵۰۰ رانشان می‌دهد (شکل ۴۴): طول جاده‌های AX، XY، YB و BA، به‌ترتیب برابر $500-2\varepsilon$، $500-\varepsilon$، $500-2\varepsilon$ و ε است، که باشرط مسأله سازگارند. وقتی جادهٔ AB برای مرمت بسته شود، برای رسیدن از A به B، می‌توان درمسیر $AXYB$ حرکت کردکه طولی برابر $1500-5\varepsilon$ دارد.

۲) تعداد جاده‌ها را دراین‌کشور، محدود فرض‌کردیم، ولی درواقع، بدون این محدودیت هم، می‌توان مسأله راحل کرد.

۶۵. تعداد اتوبوس‌های اولیه را k می‌گیریم؛ درضمن فرض می‌کنیم، بعدازکنار

گذاشتن یک اتوبوس، درهریک از اتوبوس‌های باقی‌مانده، n نفر نشسته باشند. توجه داریم که $۲ \leqslant k$ و $n \leqslant ۳۲$. روشن است که تعداد جهان‌گردان، برابر است با $(۲۲k+۱)$. از طرف دیگر، چون در هریک از $(k-۱)$ اتوبوس، n نفر نشسته‌اند، بنابراین تعداد جهان‌گردان، برابر $n(k-۱)$ می‌شود. یعنی

$$۲۲k+۱=n(k-۱) \Longleftrightarrow n=\frac{۲۲k+۱}{k-۱}=۲۲+\frac{۲۳}{k-۱}$$

n عددی طبیعی است و، بنابراین، باید ۲۳ بر $k-۱$ بخش‌پذیر باشد. ۲۳ عددی‌است‌اول وتنها بر ۱ و ۲۳ بخش‌پذیراست؛ پس یا $k-۱=۱$ یا $k-۱=۲۳$.

برای $k=۲$ بـه دست می‌آید $n=۴۵$ که بـا شرط $n \leqslant ۳۲$ نمی‌سازد. بنابراین $k=۲۴$ و $n=۲۳$. تعداد جهان‌گردان، برابراست با ۲۳×۲۳، یعنی ۵۲۹.

۶۶. A و B را دوچهارراه دلخواه می‌گیریم. ازدو خیابانی‌که در A (B) یکدیگر راقطع کرده‌اند، آن راکه دارای مسیر تراموااست $a(b)$ می‌نامیم (اگردرهردوخیابانی‌که در چهارراه $A(B)$ به‌هم رسیده‌اند، خط تراموا وجود داشته باشد، آن وقت، به عنوان خیابان $a(b)$، به دلخواه، یکی را انتخاب می‌کنیم). سه حالت پیش می‌آید:

۱) خیابان‌های a و b برهم منطبق‌اند؛

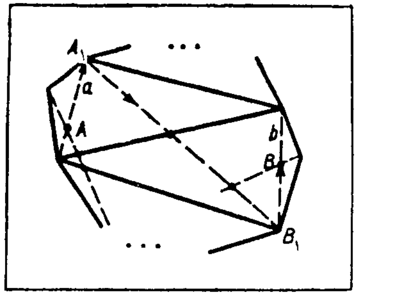
۲) خیابان‌های a و b درچهارراه C به‌هم‌می‌رسند ویا دارای ایستگاه انتهائی مشترک C هستند؛

۳) خیابـان‌های a و b، بـرهم منطبق نیستند، یکدیگر را قطع نمی‌کنند و ایستگاه مشترکی ندارند.

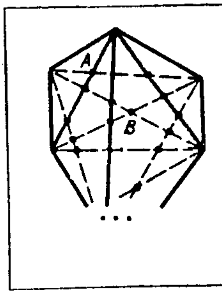
روشن است‌که، درحالت ۱)، می‌توان، بدون عوض‌کردن تراموا، رفت.

درحالت ۲)، باید به‌این ترتیب عمل‌کرد: از چهارراه A، با ترامـوای مسیرخیابان a، تا ایستگاه C می‌رویم و، درآن‌جا، تراموا راعوض می‌کنیم وبا ترامـوای مسیرخیابان b، خود رابه چهارراه B می‌رسانیم.

اکنون به حالت ۳) می‌پردازیم. ازخیابـان‌هایی‌که ایستگاه‌های انتهائی مسیرهای a و b رابه‌هم وصل می‌کنند، می‌توان دوخیابان متقاطع‌انتخاب کرد (چندضلعی، محدب‌است) دست‌کم، دریکی ازآن‌ها، مسیر تراموا وجود داردکه، درنتیجه، ایستگاه انتهائی مشترک $A_۱$ را، بامسیری‌که ازخیابان a می‌گذرد وایستگاه انتهائی مشترک $B_۱$ را با مسیری‌که ازخیابان b می‌گذرد، دارد. بنابراین، برای رفتن ازچهارراه A به چهارراه B، می‌توان بـه صورتی عمل‌کردکه درشکل ۴۵ نشان داده شده است (پیکان‌ها نشان می‌دهندکه، چگونه می‌توان با دوتعویض،از A به B رفت.خیابان‌هایی راکه، درآن‌ها،مسیرتراموا وجود دارد، باخط‌چین



شکل ۴۵



شکل ۴۶

مشخص کرده‌ایم. ضلع‌های چندضلعی و خیابان‌های بدون مسیر ترامو ا را با خط کامل نشان داده‌ایم). ترامو ائی که در خیابان a می‌رود، به A_1 می‌رسد و، در آن‌جا، می‌توان با ترامو ای دیگر از A_1 به B_1 رسید. در ایستگاه انتهائی B_1، از طریق ترامو ای مسیر خیابان b، سرانجام به چهارراه B می‌رسیم.

یادداشت. استدلال بالا را می‌توان محکم‌تر کرد. در حالتی‌که چهارراه‌های A و B چنان‌اند که، برای رسیدن از A به B، دو تعویض لازم است، می‌توان مسیری‌را انتخاب کرد که، به‌ازای آن، تعویض‌ها را در ایستگاه‌های انتهائی مسیرها انجام‌داد. اگر تعویض ترامو ا، در ایستگاه‌های انتهائی منع شده باشد، آن‌وقت دیگر، حکم مسأله درست نخواهد بود. مثلاً در حالت‌هایی‌که مسیر ترامو ا، از همهٔ خیابان‌های شهر، به جز آن‌هایی‌که در رأس چندضلعی به هم رسیده‌اند، بگذرند، چنین وضعی پیش می‌آید (شکل ۴۶).

۶۷. پاسخ. ۲ ساعت (راهنمائی. مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است).

۶۸. تعداد افراد گروه A را x و تعداد افراد گروه B را y می‌گیریم. در این‌صورت

$$\begin{cases} xy = ۴(x+y) \\ (x-۱)(y-۱) = xy - ۱۷ \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} xy = ۴(x+y) \\ x+y = ۱۸ \end{cases}$$

که از آن‌جا، x و y به دست می‌آیند: $x = ۶$، $y = ۱۲$.

یادداشت. وقتی‌با معادله یا دستگاه معادله‌هایی سروکار داشته باشیم که، در آن، مجهول‌ها عددهایی درست یا عددهایی طبیعی باشند، می‌توان برخی از شرط‌های مسأله را حذف کرد. مثلاً مسألهٔ ۶۸ را می‌شد. این‌طور تنظیم کرد:

دو گروه A و B در مسابقهٔ شطرنج شرکت کردند. قرار بر این است که هر فرد از یك گروه با هرفرد از گروه دیگر مسابقه بدهد. اگر تعداد کل دورهای بازی، چهار برابر تعداد همهٔ شرکت کنندگان، که عددی زوج است، باشد و بدانیم، تعداد افراد گروه A از تعداد افراد گروه B کمتر است، تعداد افراد هریك از دوگروه را پیدا کنید.

مسأله، منجر به حل معادلهٔ

$$xy=۴(x+y)\Longleftrightarrow(x-۴)(y-۴)=۱۶$$

می‌شود، با این شرط که $x+y$ عددی است زوج و $x<y$.

چون x و y عددهایی طبیعی‌اند، بنابراین $x-۴$ و $y-۴$ مثبت‌اند (چرا؟) و باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}x-۴=۱\\y-۴=۱۶\end{cases}\quad\text{یا}\quad\begin{cases}x-۴=۲\\y-۴=۸\end{cases}\quad\text{یا}\quad\begin{cases}x-۴=۴\\y-۴=۴\end{cases}$$

ولی تنها حالت دوم قابل‌قبول‌است، زیرا درحالت اول $x+y$ عددی فرد، ودرحالت‌سوم دوعدد x و y برابرمی‌شود. به‌این‌ترتیب: $x=۶$ و $y=۱۲$.

۶۹. ابتدا فرض می‌کنیم در ۴۰۰ متراول، ترمزهواپیما به کارنیفتاده باشد. اگرزمان حرکت هواپیما را، قبل ازترمز، برابر τ وزمان حرکت باترمز را t بگیریم، باتوجه به این‌که شتاب‌کند شدن حرکت هواپیما، درزمان وجود ترمز، ۲ متربرمجذور ثانیه است، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}v-۲t=۰\\v\tau+vt-t^۲=۴۰۰۰\\\dfrac{۴۰۰}{v(t+\tau)}=\dfrac{۴}{۶۵}\end{cases}$$

اگرمقدار v را از معادلهٔ اول، درمعادله‌های دوم وسوم قراردهیم، به دست می‌آید:

$$\begin{cases}۲t\tau+t^۲=۴۰۰۰\\۲t\tau+۲t^۲=۶۵۰۰\end{cases}$$

از آن‌جا $t=۵۰$ (ثانیه) و $v=۱۰۰$ (متر بر ثانیه).

اکنون فرض می‌کنیم، ترمزهواپیما، قبل‌از ۴۰۰ متر به‌کارافتاده باشد. زمان لازم برای این ۴۰۰ متر را $t_۱$ و زمان لازم بـرای ۳۶۰۰ متردیگـر را $t_۲$ می‌گیـریم. چون داریم: $۳۶۰۰=۲\times\frac{t_۲^۲}{۲}$، پس $t_۲=۶۰$ (ثانیه). با آغاز حرکت درمسیر ۳۶۰۰ متر آخر، سرعت هواپیما، برابر $۲t_۲=۱۲۰$ (متر بر ثانیه) بـوده است، یعنی هواپیما ۴۰۰ متراول را، بـا سرعتی‌که‌کمتر از ۱۲۰ متردرثانیه نیست، حرکت‌کرده است و

$$t_1 \leqslant \frac{۴۰۰}{۱۲۰} = \frac{۱۰}{۳} \text{ (ثانیه)}$$

از طرف دیگر، باید داشته باشیم: $t_1 + t_2 = \frac{۶۵}{۴} t_1$، یعنی

$$t_1 = \frac{۴}{۶۱} t_2 = \frac{۲۴۰}{۶۱}$$

وچون $\frac{۱۰}{۳} < \frac{۲۴۰}{۶۱}$، بنابراین فرض این‌که هواپیما قبل‌ازپیمودن ۴۰۰ متر،ترمز گرفته‌باشد، به تناقض می‌انجامد.

۷۰. سرعت قطاری راکه از A حرکت کرده است، x کیلومتر درساعت، وسرعت قطاری راکه از B حرکت کرده است، y کیلومتر درساعت می‌گیریم. دراین‌صورت

$$\frac{۳۶۰}{x} \geqslant ۵ \,,\ \frac{۳۶۰}{\frac{۳}{۲}x + y} < ۲$$

ازنامعادلهٔ اول به دست می‌آید: $x \leqslant ۷۲$؛ وازنامعادلهٔ دوم

$$y > ۱۸۰ - \frac{۳}{۲}x \geqslant ۱۸۰ - \frac{۳}{۲} \cdot ۷۲ = ۷۲$$

یعنی $x \leqslant ۷۲ < y$. سرعت قطاردوم بیشتراست.

۷۱. طول مسیرهای چهارگروه را، به ترتیب، x_1، x_2، x_3 و x_4 می‌گیریم. با توجه به‌فرض‌های مسأله، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - ۶ = x_2 + x_3 \\ x_1 - ۲ = x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = ۴۹۴ \end{cases}$$

وبعداز تبدیل‌های ساده، به‌این معادله می‌رسیم:

$$(x_1 - ۱)^2 + (x_4 - ۲)^2 = ۲۴۲$$

ازآن‌جا $x_1 = ۱ + \sqrt{۲۴۲ - (x_4 - ۲)^2}$. با توجه بـه فرض‌های دیگرمسأله، باید عدد درست x_4 راطوری انتخاب کردکه، برای x_1 هم، عدد درستی به دست آید. روشن‌است که $x_4 < ۱۸$، زیرا بـرای $x_4 \geqslant ۱۸$، زیر رادیکال منفی می‌شود. اگر بـرای $۲ \leqslant x_4 \leqslant ۱۷$ آزمایش‌کنیم، تنها به‌ازای $x_4 = ۱۳$، برای x_1 عدد درستی برابر ۱۲ به‌دست می‌آید.

پاسخ. $x_1=۱۲$، $x_۲=۱۰$، $x_۳=۹$، $x_۴=۱۳$.

یادداشت. درمعادلهٔ

$$(x_1-۱)^۲+(x_۴-۲)^۲=۲۴۲$$

باید دوعدد درست پیداکنیم ($x_1-۱$ و $x_۴-۲$)؛ بـه نحوی که مجموع مجذورهای آن‌ها برابر با ۲۴۲ بشود. آزمایش نشان می‌دهد که، تنها $۱۱^۲+۱۱^۲$ برابر ۲۴۲ خواهدشد، یعنی

$$x_1-۱=۱۱\Longleftrightarrow x_1=۱۲\ ;\ x_۴-۲=۱۱\Longleftrightarrow x_۴=۱۳$$

۲. رازهای درون عدد. شگفتی‌های شکل

۷۲. عدد را $\overline{xyz}=۱۰۰x+۱۰y+z$ می‌گیریم. باید داشته باشیم:

$$۷/۴۱(۶)(۱۰۰x+۱۰y+z)=۱۰۰z+۱۰y+x$$

ویا، اگر z رابرحسب x و y به دست آوریم $\left(۰/۴۱(۶)=\frac{۵}{۱۲}\right)$:

$$z=۸x+\frac{۷۰y}{۱۰۱}$$

z عددی است درست ویك رقمی، بنابراین باید $۷۰y$ بر ۱۰۱ بخش‌پذیر بـاشد وچون y هم یك رقمی است، جز $y=۰$ حالت دیگری پیدا نمی‌شود. سپس، به سادگی بـه دست می‌آید: $x=۱$، $z=۸$.

به‌این‌ترتیب، عدد مفروض برابر ۱۰۸ وتصویر آئینه‌ای آن برابر ۸۰۱ است.

۷۳. عـدد را $\overline{xyz}$ می‌گیریم. این عدد باید بـر ۱۱ بخش‌پذیر باشد، بنابراین یـا $x+z-y=۰$ ویا $x+z-y=۱۱$. درضمن طبق فرض مسأله باید داشته باشیم:

$$۱۰۰x+۱۰y+z=۱۱(x^۲+y^۲+z^۲)\qquad(*)$$

ابتدا فرض می‌کنیم $x+z=y$. دراین‌صورت، برابری (*)، بعداز عمل‌های لازم، به‌این صورت درمی‌آید:

$$۲(x^۲+z^۲+xz-۵x)=z\qquad(**)$$

که به معنای زوج بودن z است. اگر در برابری (**) به جای z، هرکدام از عددهای ۲، ۴، ۶، یا ۸ را قراردهیم، برای x عددی موهومی بـه‌دست می‌آید. تنها بـه ازای $z=0$ خواهیم داشت $x=0$ یا $x=5$. رقم سمت چپ یك عدد سه رقمی نمی‌تـواند برابرصفر باشد، پس $x=5$ وازآن‌جا $y=5$.

به همین‌ترتیب می‌توان باحل دستگاه

$$\begin{cases}100x+10y+z=11(x^2+y^2+z^2)\\ x+y-z=11\end{cases}$$

که درآن $0<x\leqslant 9$، $0\leqslant y\leqslant 9$ و $0\leqslant z\leqslant 9$، بـه جواب $x=8$، $y=0$، $z=3$ می‌رسیم.

پاسخ. $550=11(5^2+5^2+0^2)$؛ $803=11(8^2+0^2+3^2)$.

۷۴. رقم‌ها را a، b، c می‌گیریم وفرض می‌کنیم، دربین این سه رقم، a بزرگترین‌و c کوچکترین باشد.

با سه رقم a، b و c می‌توان شش عدد سه رقمی درست‌کرد:

$$\overline{abc}, \overline{acb}, \overline{bac}, \overline{bca}, \overline{cab}, \overline{cba}$$

به‌این‌ترتیب، هررقم شش‌بار به کار می‌رود: دوبار در صدگان، دوبار در دهگان ودوبار در یکان. بنابراین، اگرمجموع همهٔ این عددها، یعنی ۲۸۸۶ رابـر ۲۲۲ تقسیم‌کنیم، مجموع سه رقم a، b و c به دست می‌آید:

$$a+b+c=13$$

باتوجه به‌فرض مسأله وباتوجه به‌این‌که رقم‌بزرگتررا a ورقم‌کوچکتر را c گرفته‌ایم،داریم:

$$(100a+10b+c)-(100c+10b+a)=495$$

ویا $a-c=5$.

با حذف a، بین دومعادلهٔ حاصل، به‌دست می‌آید:

$$b=8-2c$$

روشن است‌که $0<c<4$. برای $c=1$ بـه دست می‌آید $b=6$ و $a=6$ که قابل قبول نیست (رقم‌های عدد، مختلف‌اند). به ازای $c=2$ به دست می‌آید: $b=4$ و $a=7$. بـه ازای $c=3$ به دست می‌آید $b=2$ و $a=8$ که قابل‌قبول‌نیست، زیرا c راکوچکترین‌رقم گرفته بودیم، درحالی‌که دراین‌جا b از c کوچکترشده است.

پاسخ. ۲، ۴، ۷.

۷۵. اگر a و b را دوعدد دلخواه بگیریم، باتوجه به مسأله، باید داشته باشیم:

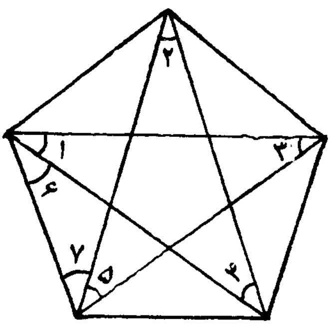
$$ab=a+b \Longleftrightarrow b=\frac{a}{a-۱}\ (a\neq ۱)$$

مثلاً به‌ازای $a=۶$ به دست می‌آید $b=۱/۲$ و

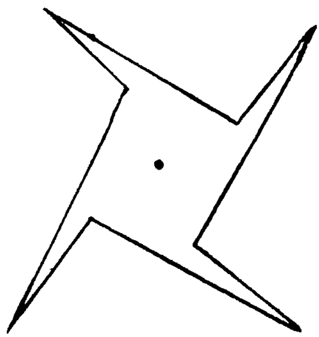
$$۶\times ۱/۲=۶+۱/۲=۷/۲$$

۷۶. ۵ لیتر از ظرف اول به ظرف دوم می‌ریزیم؛ بعد ۳ لیتر ازدومی به‌سومی؛ از سومی به اولی ۳ لیتر؛ ازدومی به سومی ۲ لیتر؛ از اولی به دومی ۵ لیتر؛ ازدومی‌به‌سومی ۱ لیتر. دراین‌صورت، درظرف دوم ۴ لیتر، درظرف اول ۱ لیتر ودر ظرف سوم ۳ لیتر آب می‌ماند. اگرآب ظرف سوم رادرظرف‌اول خالی‌کنیم، ظرف اول هم دارای ۴ لیتر آب خواهد شد.

۷۷. یکی ازجواب‌های ممکن، درشکل ۴۷ داده شده است.



شکل ۴۸



شکل ۴۷

۷۸. باتوجه به شکل ۴۸، به‌سادگی روشن می‌شود:

$$\hat{۲}+\hat{۴}=\hat{۶}+\hat{۷}$$

وبنابراین

$$\hat{۱}+\hat{۲}+\hat{۳}+\hat{۴}+\hat{۵}=\hat{۱}+\hat{۳}+\hat{۵}+\hat{۶}+\hat{۷}=۱۸۰^\circ$$

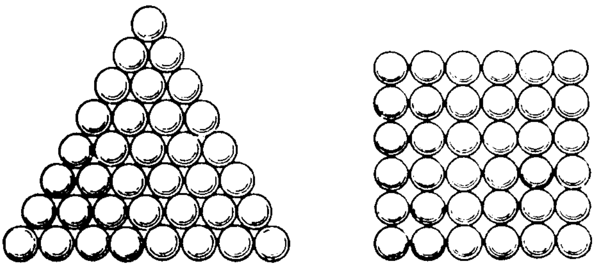
۷۹. هیچ رازی در این مسأله وجود نـدارد. طول راه را s کیلومترمی‌گیریم. اسب اول، نیمی از راه را در مدت $\frac{s}{۲\times ۱۲}$ ساعت ونیم دیگر راه را درمدت $\frac{s}{۲\times ۶}$ ساعت طی‌کرده‌است، بنابراین، روی هم به اندازهٔ

$$\frac{s}{۲۴}+\frac{s}{۱۲}=\frac{s}{۸}\ (\text{ساعت})$$

وقت صرف کرده است. سوار دوم، تمامی راه را با سرعت ۹ کیلومتر در ساعت طی کرده است و، بنابراین، $\frac{s}{۹}$ ساعت در راه بوده است و $\frac{s}{۹}<\frac{s}{۸}$.

یادداشت. درحالت کلی هم، وضع به‌همین‌گونه است. وقتی‌که یك متحرك نیمی از راه‌را باسرعت $v_۱$ ونیم‌دیگررا باسرعت $v_۲$ حرکت کند، به‌شرط $v_۱\neq v_۲$، دیرتر ازمتحرکی به مقصد می‌رسدکه تمامی راه را با سرعت $\frac{v_۱+v_۲}{۲}$ طی کند.

۸۰. تعدادگلوله‌های واقع درضلع مثلث را n می‌گیریم. در ردیف روی این ضلع،



شکل ۴۹

$(n-۱)$ گلوله،در ردیف بعدی $(n-۲)$ گلوله وغیره قرارداد (شکل ۴۹). بنابراین،تعداد گلوله‌هایی‌که مثلث راساخته‌اند، برابراست با

$$n+(n-۱)+(n-۲)+\dots+۲+۱=\frac{۱}{۲}n(n+۱)$$

طبق فرض، تعدادگلوله‌ها در هرضلع مربع برابر $(n-۲)$ و، بنابراین، تعداد همهٔ گلوله‌ها برابر $(n-۲)^۲$ می‌شود؛ باید داشته باشیم:

$$\frac{۱}{۲}n(n+۱)=(n-۲)^۲ \Longleftrightarrow n^۲-۹n+۸=۰$$

یعنی $n=۸$. تعداد همهٔ گلوله‌ها برابراست با ۳۶.

۸۱. بین این چهار عدد، ۵ و ۱۰ وجود ندارد (زیرا، درآن صورت، حاصلضرب آن‌ها به صفر ختم می‌شد). چهارعدد از ۱۰ بزرگتر نیستند، زیرا حاصلضرب آن‌ها از $۱۰^۴$ کوچکتر است. بنابراین، باید یکی ازدوحالت ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۶، ۷، ۸، ۹ باشد. درحالت اول، حاصل ضرب ۴ عدد برابر ۲۴ می‌شود؛ یعنی عددهای مورد نظر ۶، ۷، ۸ و ۹ هستند

که، حاصل‌ضرب آن‌ها هم، به‌واقع، برابر ۳۰۲۴ می‌شود.

۸۲. به هر نفر $\frac{۷}{۸}$، یعنی $\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}\right)$ سیب می‌رسد. بنابراین می‌توان، مثلاً، به‌این ترتیب عمل کرد: یك سیب را به ۸ قسمت، ۲ سیب را هر کدام به ۴ قسمت و ۴ سیب را، هر کدام به ۲ قسمت مساوی تقسیم کنیم.

۸۳. وقتی خسرو از ساختمان خود خارج می‌شد تا به خانهٔ دوستش برود، ساعت دیواری خود را به راه انداخت و به ذهن خود سپرد، چه ساعتی را نشان می‌دهد. در ساختمان دوستش، چون هم در لحظهٔ ورود و هم در لحظهٔ خروج، ساعت را دیده بود، متوجه شد چه مدتی پیش او بوده است. وقتی به ساختمان خودش رسید، برایش روشن شد، از لحظهٔ رفتن تا لحظهٔ برگشتن، چقدر طول کشیده است (این را، ساعت دیواری خودش نشان می‌داد). از این مدت، زمانی را که صرف صحبت با دوستش کرده بود، کم کرد. نصف باقی‌مانده، صرف آمدن از ساختمان دوستش به‌ساختمان خودش شده بود. این مقدار را به زمان ساعت دیواری دوستش در لحظهٔ خروج از ساختمان او، اضافه کرد تا ساعت دقیق آن لحظه را پیدا کند.

۸۴. می‌توان مثلاً پرسید: «آیا شما در این منطقه زندگی می‌کنید؟»، اگر پاسخ مثبت باشد، شما در منطقهٔ A هستید و اگر پاسخ منفی باشد، در منطقهٔ B.

۸۵. پرسش این مسأله درست نیست. دیگر ۹۰۰۰ ریالی در کار نیست. هر کدام ۲۷۰۰ ریال و روی هم ۸۱۰۰ ریال پرداخته‌اند که، از آن، ۷۵۰۰ ریال را بابت حساب خود و ۶۰۰ ریال را انعام داده‌اند و حساب کاملاً درست است.

۸۶. وقتی سه زاویه و یك ضلع از مثلثی، با سه زاویه و یك ضلع از مثلث دیگر، برابر باشند، همیشه به معنای آن نیست که دو مثلث با هم برابرند. برابری دو مثلث، تنها وقتی پیش می‌آید که زاویه‌ها و ضلع‌های برابر، متناظر یکدیگر باشند.

۸۷. نظر وصیت کننده، این بوده است که پسر دو برابر همسر و دختر $\frac{۱}{۳}$ همسر سهم ببرد، بنابراین اگر سهم همسر را x بگیریم، سهم پسر $۲x$ و سهم دختر $\frac{x}{۳}$ می‌شود و داریم:

$$x+۲x+\frac{x}{۳}=۱ \Longleftrightarrow x=\frac{۳}{۱۰}$$

پاسخ. مادر $\frac{۳}{۱۰}$، پسر $\frac{۳}{۵}$ و دختر $\frac{۱}{۱۰}$ دارائی را به ارث می‌برند.

۸۸. سن پسرها را، در لحظهٔ تنظیم وصیت‌نامه، به ترتیب A، B، C، D، E، F می‌گیریم (که درضمن، بر حرف اول نام آن‌ها منطبق است) و مجموع سن‌های آن‌ها را با T

نشان می‌دهیم.

سه سال بعد، روی هم ۱۸ سال، به‌مجموع سال‌های سن آن‌ها اضافه می‌شود، ولی در این موقع، دانیل را از دست می‌دهند و، بنا به فرض، مجموع سال‌های سن بقیه، همان عدد T باقی می‌ماند. به‌این ترتیب، دانیل درزمان مرگ ۱۸ سال ودرلحظهٔ تنظیم وصیت‌نامه ۱۵ سال داشته است.

بـازهم سه سال بعد، بلافاصله قبل از مرگ فردریك، به T به اندازهٔ ۱۵(۳×۵) اضافه شده بود، یعنی فردریك دراین موقع ۱۵ سال و، در لحظهٔ تنظیم وصیت‌نامه، ۹ سال داشته است. تکلیف ادوارد هم روشن است، زیرا او و فردریك همزاد بودند. اکنون بـه این معادله می‌رسیم:

$$(A+۶)+(B+۶)+(C+۶)+(E+۶)=T$$

وچون $E=۹$، بنابراین

$$A+B+C=T-۳۳ \qquad (۱)$$

سه سال بعد، وقتی‌کلود تصمیم بـه مسافرت می‌گیرد، سن افراد مشمول وصیت نامه چنین است:

$$A+۹، \; B+۹، \; C+۹، \; ۹+۹=۱۸$$

ودرنتیجه، باید داشته باشیم:

$$A+B+C+۴۵=T+x \qquad (۲)$$

که درآن، x عبارت است ازتعداد سال‌هایی‌که ازکلود، بـه مناسبت پولی‌که‌گرفته است، کم می‌شود. ازمقایسهٔ معادله‌های (۱) و (۲) به دست می‌آید: $x=۱۲$.

اکنون دیگر، صورت تازهٔ وصیت‌نامه، بر این اساس است:

$$A+۹، \; B+۹، \; (C+۹)-۱۲، \; ۱۸$$

(۱۸، سن‌ادوارد است). بعدازمرگ برتران،عددهای وصیت‌نامه،صورت تازه‌ای‌پیداکردند:

$$A+۹، \; \frac{B+۹}{۲}، \; C-۳، \; ۱۸$$

بعداز ۴ سال‌که آقای Z مرحوم شد، به‌هرکدام ازاین عددها، ۴ واحد اضافه شده است:

$$A+۱۳، \; \frac{B+۱۷}{۲}، \; C+۱، \; ۲۲$$

که باید مجموع آن‌ها، بازهم برابر T باشد:

$$A+\frac{B}{۲}+C+۴۴\frac{۱}{۲}=T \qquad (۳)$$

با توجه به شرط‌های دیگر مسأله، دومعادلهٔ دیگرهم داریم:

$$A+۱۳=\frac{۲}{۵}T \Longleftrightarrow ۵A+۶۵=۲T \qquad (۴)$$

$$A+۱۳=C+۱+۲۲ \Longleftrightarrow A-C=۱۰ \qquad (۵)$$

این سه معادله، همراه با معادلهٔ (۱)، دستگاه چهارمعادلهٔ چهارمجهولی راتشکیل می‌دهندکه، با حل آن، مجهول‌ها به دست می‌آیند.

پاسخ. درلحظهٔ تنظیم وصیت‌نامه، سن بچه‌ها، بـه این‌ترتیب بوده است: آدام ۲۷ سال، برتران ۲۳ سال،کلود ۱۷ سال، دانیل ۱۵ سال،ادوارد وفردریك ۹ سال.

۸۹. فرض‌می‌کنیم $\frac{۱}{x}$ الماس جدا و $\left(۱-\frac{۱}{x}\right)$ آن باقی‌مانده باشد.ارزش‌قسمت‌اول $۴۰۰۰\left(\frac{۱}{x}\right)^۲$ وارزش قسمت دوم $۴۰۰۰\left(۱-\frac{۱}{x}\right)^۲$ است. در ضمن، ارزش تمامی الماس هم ۸۰٪ ارزش اصلی‌آن است، پس

$$\frac{۴۰۰۰}{x^۲}+۴۰۰۰\left(۱-\frac{۱}{x}\right)^۲=۴۰۰۰\times ۰/۸$$

ازآن‌جا به دست می‌آید $x=۹$. ضمن تراش، $\frac{۱}{۹}$ الماس ازآن جدا شده است.

۹۰. بنابرشرط مسأله، عددی‌که قیمت هرحیوان‌رابرحسب تومان معین می‌کند،برابر است با عددی‌که معرف تعداد جانوران‌گله است. اگر تعداد جانوران‌گله را n فرض‌کنیم، قیمت تمامی‌گله برابر$n^۲$ تومان می‌شود. چون برادر بزرگتر، نخستین وآخرین ۱۰تومانی رابرداشته‌است، بنابراین، تعداد اسکناس‌های ده‌تومانی، عددی فرد است؛ یعنی رقم‌دهگان عدد قیمت‌گله، عددی فرد است.

اگرعدد n رابه صورت $\overline{Au}$ بنویسیم(u رقم‌یکان و A تعداد دهگان‌های عددnاست)، قیمت‌گله برحسب تومان، چنین‌می‌شود:

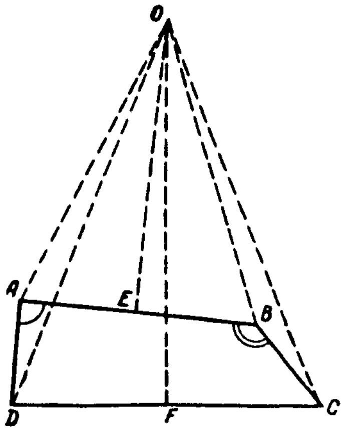
$$n^۲=(۱۰A+u)^۲=۱۰۰A^۲+۲۰A\cdot u+u^۲$$

$۱۰۰A^۲$ و $۲۰A\cdot u$ هردو زوج‌اند، بنابراین، برای‌این‌که تعداد دهگان‌های $n^۲$، عددی فرد باشد، باید رقم دهگان عدد $u^۲$، عددی فرد شود؛ یعنی u تنها می‌تواند برابر ۴ یا ۶ باشد. درهرکدام ازاین دوحالت، رقم یکان $u^۲$ برابر ۶ می‌شود و، بنابراین، $n^۲$ به ۶ ختم

شده است.

پاسخ. برادر کوچکتر، به جای ۱۰ تومان ۶ تومان برداشته است و، در نتیجه، ۲ تومان از برادر بزرگتر طلبکار است.

۹۱. موضوع خیلی ساده است: هیچ‌کدام از دوشکل ۹ و ۱۰ درست رسم نشده‌اند. رسم درست را در شکل ۵۵ می‌بینید.



شکل ۵۵

۹۲. قیمت یك جلد کتاب ریاضی را x و قیمت یك جلد کتاب شیمی را y و تعداد این کتاب‌ها را، به‌ترتیب، N_x و N_y می‌گیریم. در این‌صورت داریم:

$$x \cdot N_y + y \cdot N_x = ۱۱۵۰ \qquad (۱)$$

ازطرف دیگر

$$x \cdot N_y + y \cdot N_x - x \cdot N_x - y \cdot N_y = ۱۰۰$$

که می‌توان آن را چنین نوشت:

$$(N_x - N_y)(y - x) = ۱۰۰ \qquad (۲)$$

درضمن می‌دانیم $N_x - N_y = y - x$؛ یعنی، با توجه به (۲): $N_x - N_y = ۱۰$ وچون، طبق‌فرض $N_x + N_y = ۶۰$، بنابراین

$$N_x = ۳۵، \ N_y = ۲۵$$

اکنون باتوجه به برابری $y - x = ۱۰$ ورابطهٔ (۱)، به دست می‌آید:

$$x = ۱۵، \quad y = ۲۵$$

۹۳. تعداد دانش‌آموزان یك کلاس، عددی دورقمی است وازعدد حاصل‌ضرب روشن می‌شودکه این دوعدد، باید یکی به ۳ ودیگری به ۷ ختم شده باشند. عدد ۲۰۲۱ بر ۱۳، ۲۳ یا ۳۳ بخش‌پذیر نیست ودرتقسیم بر ۴۳ به‌خارج قسمت ۴۷ می‌رسد.

پاسخ. ۴۳ و ۴۷ نفر.

۹۴. فرض می‌کنیم $(n+۱)$امین جملهٔ تصاعد اول با $(m+۱)$امین جملهٔ تصاعد دوم برابر باشد. $(n+۱)$امین جملهٔ تصاعد اول برابراست با $۲+۵n$ و $(m+۱)$امین جملهٔ تصاعد دوم برابراست با $۲+۳m$ و، بنابراین، باید داشته باشیم:

$$۲+۵n = ۲+۳m \Longleftrightarrow n = \frac{۳m}{۵}$$

برای این‌که n، عددی طبیعی باشد، m باید عددی طبیعی ومضربی از ۵ باشد:

$$\begin{cases} m=۵، ۱۰، ۱۵، ۲۰، \dots \\ n=۳، ۶، ۹، ۱۲، \dots \end{cases}$$

جمله‌های برابر،عبارتنداز هر سه جمله یکی، درتصاعداول؛ وهر پنج جمله یکی،درتصاعددوم.

ازتقسیم ۱۳۷۱ بـه ۵، به خارج قسمت ۲۷۴ (وبـاقی‌ماندهٔ واحد) می‌رسیم: تعداد جمله‌های برابر، دردو تصاعد ،برابر ۲۷۴ است.

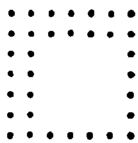
۹۵. مسأله رابه دوصورت می‌توان فهمید:

اول، باسکه‌ها، تمامی سطح یك مربع را بپوشانیم. دراین‌صورت، اگر تعداد سکه‌ها را x وضلع مربع راشامل n سکه بگیریم، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x-۵=n^{۲} \\ x+۸=(n+۱)^{۲}=n^{۲}+۲n+۱ \end{cases}$$

که ازآن‌جا، به سادگی به دست می‌آید:

$$n=۶، \quad x=۴۱$$


شکل ۵۱

دوم، باسکه‌ها، تنها محیط مربع رابپوشانیم. باتوجه بـه شکل ۵۱ معلوم می‌شودکه، در این حالت، اگرضلع مربع اول را n بگیریم، بـاید داشته باشیم:

$$۲n+۲(n-۲)=x-۵ \Longleftrightarrow ۴n=x-۱$$

و وقتی‌بخواهیم، بدون دست‌زدن به‌مربع اول، مربعی بسازیم که، درضلع آن، یك سکه بیشتر وجود داشته باشد، بایدبه‌اندازهٔ $n+(n+۱)$، یعنی $۲n+۱$ سکهٔ دیگردراختیار داشته باشیم، یعنی

$$(۴n-۴)+(۲n+۱)=x+۸ \Longleftrightarrow ۶n=x+۱۱$$

وبه دستگاه

$$\begin{cases} ۴n=x-۱ \\ ۶n=x+۱۱ \end{cases}$$

می‌رسیم و،ازآن‌جا: $n=۶$، $x=۲۵$.

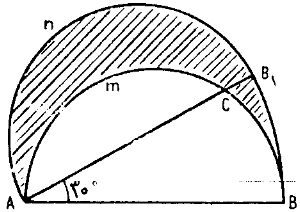
به‌این‌ترتیب، بسته به‌این‌که صورت مسأله راچگونه تفسیر کنیم، به‌عنوان پاسخ، یکی

ازدوعدد ۴۱ یا ۲۵، برای تعداد سکه‌ها، به دست می‌آید.

۹۶. فرض می‌کنیم، x ساعت‌ازظهر گذشته باشد. طبق‌شرط مسأله، باید داشته‌باشیم:

$$\frac{x}{4}+\frac{1}{2}(24-x)=x \Longleftrightarrow x=\frac{48}{5}=\text{(ساعت) ۹ و (دقیقه) ۳۶}$$

۹۷. بایدمساحت شکل AnB_1BCmA را به دست‌آوریم (شکل ۵۲). این شکل، شامل دو شکل است: AnB_1CmA و B_1CBB_1. ولی دو شکل AnB_1CmA و $ACBA$، مساحت‌هایی‌برابر دارند، زیرا وقتی به‌هرکدام از آن‌ها،مساحت‌شکل $AmCA$ را اضافه‌کنیم، مساحت نیم‌دایرهٔ مفروض به دست می‌آید. بنابراین، مساحت شکل AnB_1BCmA، برابراست بامساحت قطاع B_1AB باشعاع برابر ۲ و زاویهٔ مرکزی ۳۰ درجه و، روشن است‌که، مساحت این قطاع، برابر $\frac{4\pi}{3}$ می‌شود.



شکل ۵۲

۹۸. این تابع را درنظرمی‌گیریم:

$$f(x)=\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}, \qquad -1<x<1$$

این تابع، درفاصلهٔ مفروض، مشتق‌پذیراست وداریم:

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}$$

که تنها به ازای $x=0$ برابرصفرمی‌شود و، درضمن، دراین نقطه، ازمثبت بـه‌منفی، تغییر علامت می‌دهد. بنابراین $f(x)$، دربارهٔ $-1<x<1$، به‌ازای $x=0$ به حداکثرمقدار خود می‌رسد؛ یعنی

$$f(0)>f\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{3}\right) \Longleftrightarrow \sqrt[3]{1+\frac{\sqrt[3]{3}}{3}}+\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt[3]{3}}{3}}<2$$

که بعداز ضرب دوطرف نابرابری در $\sqrt[3]{3}$، به‌همان نابرابری مورد نظرمی‌رسیم.

۹۹. چون $e+r=e$، پس $r=0$. بنابراین، بـرای این‌که عدد «$four$» بـر ۴ بخش‌پذیرباشد، باید رقم u، عددی زوج باشد. ازطرف دیگر، برای این‌که عدد «$five$» بر ۵ بخش‌پذیرباشد، باید این عدد، به ۰ یا ۵ ختم‌شده باشد؛ ولی چون $r=0$ (و $r\neq e$) پس $e=5$.

اگر ستون سوم (ازسمت راست) را در جمع در نظر بگیریم، معلوم می‌شود که یا $O=0$ و $u+v<1$ و یا $O=9$ و $u+v>10$؛ ولی $O\neq 0$ (زیرا قبلاً داشتیم: $r=0$)، پس $O=9$. درنتیجه، برای ستون چهارم جمع (ازسمت راست) به دست می‌آید:

$$n=2f+1 \qquad (1)$$

ازستون اول، چیزی به ستون دوم منتقل نمی‌شود، بنابراین

$$v+u=10+n \qquad (2)$$

اگر n رابین دوبرابری (۱) و (۲) حذف‌کنیم، نتیجه می‌شود

$$u+v=2f+11$$

ولی $u\leqslant 8$ و $v\leqslant 8$ (از رقم ۹، قبلاً استفاده‌کرده‌ایم)، یعنی $u+v\leqslant 16$ و، بنابراین، تنها رقم‌های ممکن برای f، یکی از دورقم ۱ یا ۲ است؛ ولی $f\neq 2$، زیرا با فرض $f=2$، ازبرابری (۱)، به‌دست می‌آید $n=5$، درحالی‌که ۵ را، قبلاً، برای رقم e در نظر گرفته‌ایم. به‌این‌ترتیب $f=1$ و، ازآن‌جا $n=3$ و $u+v=13$. تاکنون، ازرقم‌های ۲، ۴، ۶، ۷ و ۸ استفاده نکرده‌ایم. بلافاصله روشن می‌شود که: $u=6$ و $v=7$ (ونه‌عکس آن، زیرا درآغاز حل به این نتیجه رسیدیم که u، عددی زوج است). آخرین رقم نامعلوم، یعنی i را، می‌توان ازروی شرطی که برای عدد «$nine$» داریم (یعنی، بخش‌پذیر بودن بر ۳) به دست آورد. برای این منظور، باید مجموع رقم‌های این عدد، بر ۳ بخش‌پذیر باشد. مجموع این رقم‌ها، برابراست با:

$$2n+e+i=11+i$$

رقم‌های ۱ و ۷ راقبلاً استفاده‌کرده‌ایم، پس $i=4$ و،درنتیجه، جمع موردنظر چنین‌است:

$$\begin{array}{r} 1475+ \\ 1960 \\ \hline 3435 \end{array}$$

۱۲۰.۱۵۵ ثانیه بعد ازآغاز حرکت، متحرك اول، برای نخستین‌بار، به متحرك دوم می‌رسد (فرض می‌کنیم، دومتحرك، ازیك نقطهٔ محیط دایره، حرکت‌کرده‌باشند). اگردراین مدت، متحرك اول a دور زده باشد، متحرك دوم $(a-1)$ دورحرکت‌کرده است (لزومی ندارد a، عددی درست باشد). اگرمتحرك اول، هردور را در x ثانیه طی‌کند، آن وقت متحرك دوم، برای یك دورکامل باید $(x+2)$ ثانیه وقت صرف‌کند. به دومعادله می‌رسیم:

$$\begin{cases} ax=(a-1)(x+2) \\ ax=12 \end{cases}$$

باحل این دستگاه، وباصرف نظرکردن ازجواب منفی، به‌دست می‌آید: $x=4$.

پاسخ. متحرك اول، هردور دایره رادر ۴ ثانیه ومتحرك دوم، در ۶ ثانیه می‌پیماید.

۱۵۱. ابتدا ازشرط آخراستفاده می‌کنیم: مجموع عددها درهرستون، برابراست با نتیجه‌ای‌که درسطرمتناظرآن به دست آمده است:

$$\begin{array}{l} \bullet\bullet : 5 + \bullet \times 7 = 4\bullet \\ \bullet 4 : \bullet - 4 \times \bullet = \bullet \\ \bullet\bullet - 1 - \bullet \times 2 = \bullet 0 \\ \bullet 3 - \bullet + \bullet\bullet - 5 = \bullet\bullet \\ \hline 4\bullet + \bullet + \bullet 0 + \bullet\bullet = \bullet\bullet \end{array}$$

مجموع عددهای ستون اول، از ۴۹ بزرگتر نیست وهیچ‌کدام آن‌ها، باصفر آغاز نمی‌شوند. بنابراین، به ناچار، رقم اول هرچهار عدد برابر واحد است. نخستین عدد این ستون یا ۱۰ است ویا ۱۵ (چون بایدبر ۵ بخش‌پذیر باشد)؛ ولی ۱۵ نمی‌تواند باشد،زیرا دراین‌صورت، مجموع رقم‌های یکان چهارعدد ستون اول، از ۹ تجاوز می‌کند. بنابراین نخستین عدد ازستون اول برابراست با ۱۰. عدد سوم این ستون، می‌تواند یکی‌ازعددهای ۱۰، ۱۱ یا ۱۲ باشد (اگراز ۱۲ بیشترباشد، باز هم مجموع عددهای ستون اول، از ۴۹ بیشترمی‌شود).

حالا به سطر اول مراجعه می‌کنیم. اگر به‌جای ۱۰:۵، حاصل آن یعنی ۲ راقرار دهیم، به دست می‌آید:

$$2+\bullet\times 7=4\bullet$$

روشن است، به‌جای دایرهٔ سیاهی‌که باید با ۲ جمع شود، یا ۴ می‌توان گذاشت ویا ۵؛ولی اگر۴ قرار دهیم، داریم:

$$2+4\times 7=42$$

که درنتیجه، حاصل جمع عددهای ستون‌اول هم‌باید ۴۲ شود.درحالی‌که، این‌حاصل‌جمع، به‌روشنی از ۴۷ کمتر نیست. بنابراین، سطراول چنین می‌شود:

$$10:5+5\times 7=49$$

یعنی سومین عدد ازستون اول باید ۱۲ باشد. تا این‌جا، به‌این جدول می‌رسیم:

۱۰ : ۵ + ۵ × ۷ = ۴۹
۱۴ : ● − ۴ × ● = ●
۱۲ − ۱ − ● × ۲ = ●۰
۱۳ − ● + ●● − ۵ = ●●

---

۴۹ + ● + ●۰ + ●● = ●●

در سطر دوم، عدد ۱۴، تنها بر ۱، ۲ یا ۷ بخش‌پذیر است. ۱ را باید کنار گذاشت، زیرا درغیر این‌صورت، نتیجهٔ سطر دوم، عددی دورقمی می‌شود. ۷ راهم باید کنار گذاشت، زیرا از تقسیم ۱۴ بر ۷، به‌عدد ۲ می‌رسیم که نمی‌توان ۴ را از آن کم کرد. بنابراین، سطر دوم، چنین است

۱۴ : ۲ − ۴ × ● = ●،
۳ × ● = ●

که یکی از سه حالت زیر است:

۳ × ۱ = ۳ یا ۳ × ۲ = ۶ یا ۳ × ۳ = ۹

ولی اگر به‌ستون دوم مراجعه کنیم، چهارمین عدد این ستون، تنها می‌تواند ۱ باشد و، در نتیجه، مجموع این‌ستون، برابر ۹ می‌شود وسطر دوم باید چنین باشد:

۱۴ : ۲ − ۴ × ۳ = ۹

وجدول به‌این‌صورت درمی‌آید

۱۰ : ۵ + ۵ × ۷ = ۴۹
۱۴ : ۲ − ۴ × ۳ = ۹
۱۲ − ۱ − ● × ۲ = ●۰
۱۳ − ۱ + ●● − ۵ = ۱۷

---

۴۹ + ۹ + ●۰ + ۱۷ = ●●

سطر چهارم، خودبه خود کامل می‌شود: عدد نامعلوم برابراست با ۱۰؛ واگر به‌ستون سوم مراجعه کنیم، روشن می‌شود که سومین عدد ازاین ستون برابر ۱ است. به‌این ترتیب، جدول، به‌صورت نهائی خود، چنین‌است:

$$10 : 5 + 5 \times 7 = 49$$
$$14 : 2 - 4 \times 3 = 9$$
$$12 - 1 - 1 \times 2 = 20$$
$$13 - 1 + 10 - 5 = 17$$
$$\overline{49 + 9 + 20 + 17 = 95}$$

۱۰۲. الف) برابری عددی، با استفاده ازاین اتحاد نوشته شده است:

$$\frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3} \equiv \frac{a+b}{a+(a-b)}$$

بنابراین، بی‌نهایت برابری ازاین‌گونه می‌توان درست‌کرد:

$$\frac{10^3+6^3}{10^3+4^3} = \frac{10+6}{10+4} = \frac{8}{7},$$

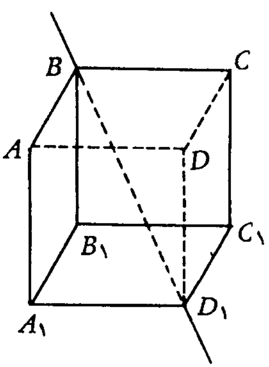
$$\frac{15^3-7^3}{15^3+22^3} = \frac{15-7}{15+22} = \frac{8}{37}$$

ب) این برابری عددی هم، با توجه به‌اتحاد

$$\sqrt[n]{a+\frac{a}{a^n-1}} \equiv a\sqrt[n]{\frac{a}{a^n-1}}$$

نوشته شده است (درستی اتحاد را ثابت‌کنید وچند نمونهٔ عددی بیاورید!).

۱۰۳. مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ رادور قطرش BD_1 دوران داده‌ایم (شکل ۵۳). روشن است، جسمی‌که دراثر این دوران به‌دست می‌آید، همان است‌که محدود بـه سطح حاصل از دوران خط شکستهٔ $BB_1A_1D_1$ دورهمان قطر بـاشد. از آن‌جاکـه پـاره خطهای راست این خط شکسته، طول‌هایی برابر دارند و تمایل آن‌ها، نسبت به‌قطر، یکی است، تصویرقائم هرکدام از آن‌ها بـرقطر، طولی برابر $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ پیدامی کند(a،طول‌ضلع‌مکعب است)؛ بنابراین رأس‌های A_1 و B_1 به فاصلهٔ $a\sqrt{\frac{2}{3}}$ ازقطرقرارگرفته‌اند.



شکل ۵۳

به‌این ترتیب، جسم‌دوار موردنظر، ازدو مخروط برابر ویك هیپر بولوئید دوار تشکیل شده است. ارتفاع هریك از این سه جسم برابر $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ وشعاع قاعده‌ها برابر $a\sqrt{\frac{2}{3}}$ است.

حجم‌هرمخروط رابادستوری‌که برای آن می‌شناسیم‌محاسبه می‌شود؛ حجم‌هیپر بولوئید را هم می‌توان طبق دستور سیمپسون به‌دست‌آورد، زیرا مساحت مقطع‌های موازی باقاعده، تابع‌های درجه دومی‌ازفاصلهٔ صفحهٔ مقطع تاقاعده است.

به‌این ترتیب، اگرحجم هیپر بولوئید را V_2 بنامیم، داریم:

$$V_2=\frac{h}{6}(S_1+S_2+4M)$$

که در آن، S_1وS_2 مساحت قاعده‌های آن و M مساحت مقطع متوسطاست ودراین‌جاداریم:

$$h=\frac{a\sqrt{3}}{3}, \qquad S_1=S_2=\frac{2}{3}\pi a^2, \qquad M=\frac{\pi}{2}a^2$$

ودر نتیجه، برای حجم جسمْ دوار موردنظر به دست می‌آید:

$$V=2V_1+V_2=\frac{4\pi a^3}{9\sqrt{3}}+\frac{5\pi a^3}{9\sqrt{3}}=\frac{\pi a^3}{\sqrt{3}}$$

۱۰۴. بنابر فرض مسأله، باید داشته باشیم:

$$\overline{abcd}=(\overline{cd})^2$$

از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$100(10a+b)+(10c+d)=(10c+d)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 100(10a+b)=(10c+d)(10c+d-1)$$

$10c+d=k$ می‌گیریم. روشن است‌که $c\neq 0$؛ بنابراین k عددی دورقمی است وداریم:

$$100(10a+b)=k(k-1)$$

حاصل‌ضرب $k(k-1)$ باید بر ۱۰۰ بخش‌پذیر باشد، بنابراین یکی از دوعدد k و $k-1$ بر ۴ ودیگری بر ۲۵ بخش‌پذیراست. تنها دوحالت ممکن است:

$$k=25, k-1=24 \quad \text{یا} \quad k=76, k-1=75$$

ولی‌ازحالت‌اول به‌دست می‌آید: $10a+b=6$ که ممکن‌نیست (زیرا $a\neq 0$). درحالت‌دوم

$$10a+b=3\times 19=57$$

یعنی $a=5$ و $b=7$. ازطرف دیگرداشتیم:

$$k=10c+d=76 \Longleftrightarrow c=7,\ d=6$$

پاسخ. ۵۷۷۶.

۱۰۵. می‌دانید، معادلهٔ $x^n+y^n=z^n$، برای $n>2$، در مجموعهٔ عددهای طبیعی، جواب ندارد (قضیهٔ بزرگ فرما). دقیق‌تر بگوییم: تاکنون ثابت شده است که، این‌معادله، برای‌بسیاری ازعددهای طبیعی $n>2$ جواب ندارد.ولی معادلهٔ $x^n+y^n=z^{n+1}$، دارای بی‌نهایت جواب، درمجموعهٔ عددهای طبیعی‌است. یکی از روش‌های پیداکردن جواب‌های این معادله رامی‌آوریم.

n را عددی طبیعی و مفروض می‌گیریم. دوعدد طبیعی و دلخواه a و b را انتخاب می‌کنیم ومجموع a^n+b^n را c می‌نامیم. دراین‌صورت، اگرفرض‌کنیم:

$$x=a\cdot c,\quad y=b\cdot c,\quad z=c \qquad (*)$$

آن‌وقت، به‌دست می‌آید:

$$a^nc^n+b^nc^n=c^n(a^n+b^n)=c^n\cdot c=c^{n+1}$$

یعنی،هر(x, y, z)که‌بادستورهای (*) سازگارباشد،جوابی‌است‌ازمعادلهٔ $x^n+y^n=z^{n+1}$.

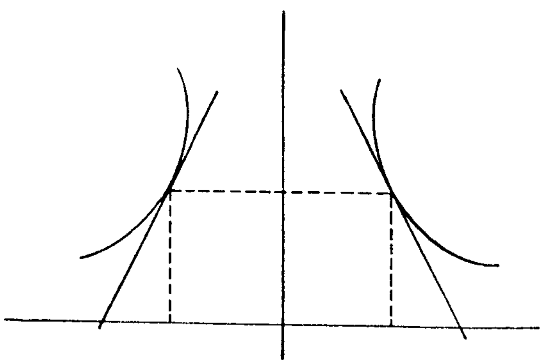
درمسألهٔ‌ما داریم $n=2$.اگرمثلاً $a=4$ و$b=7$ بگیریم،آن‌وقت $c=4^2+7^2=65$ وعددهای

$$x=4\times 65=260,\quad y=7\times 65=455,\quad z=65$$

درمعادلهٔ موردنظر ماصدق می‌کنند:

$$260^2+455^2=65^3$$

۱۰۶. اثبات رابه‌کمك نمودار $y=f(x)$ می‌دهیم.



شکل ۵۴

چون $f(x)$ تابعی زوج است، بنابراین نمودار $y=f(x)$، نسبت به محور yy' متقارن می‌شود (شکل ۵۴). اگر دونقطهٔ متقارن نسبت به‌محور عرض را روی نمودار درنظر بگیریم وفرض کنیم: مماس‌های دراین دونقطه، بامحور xx'، به‌ترتیب، زاویه‌های α و β را بسازند، آن‌وقت

$$\alpha+\beta=\pi \Longleftrightarrow tg\alpha=-tg\beta$$

و به‌این‌ترتیب $f'(x)=-f'(-x)$، یعنی $f'(x)$ تابعی فرد است.

۱۰۷. اگر فرض کنیم $x=\sin\alpha$، بـه دست می‌آید $y=tg\alpha$. مسأله، منجر بـه این می‌شود که، بامعلوم بودن سینوس یك زاویه، تانژانت آن راپیدا کنیم. برخی مقدارهای تقریبی را دراین‌جا داده‌ایم:

x	α	y
۰/۳۰۰	۱۷°۳۰′	۰/۳۱۵
۰/۳۰۵	۱۷°۴۵′	۰/۳۲۰
۰/۳۱۰	۱۸°۳′	۰/۳۲۶
۰/۳۱۵	۱۸°۲۲′	۰/۳۳۲
...	...	...

۱۰۸. اگر جملهٔ درجهٔ دوم را، به دلیل کوچکی آن، حذف کنیم، به‌دست می‌آید:

$$۴x_۱-۱\approx ۰ \qquad (۱)$$

از آن‌جا $x_۱\approx\frac{۱}{۴}$. از طرف دیگرداریم:

$$x_۱\cdot x_۲=\frac{-۱}{۰/۰۰۰۰۰۲}=-۵\times ۱۰^۵$$

یعنی $x_۲\approx ۲\times ۱۰^۶$. دقت مقدار تقریبی $x_۱$ راپیدا می‌کنیم. اگر برابری (۱) را از برابری معادلهٔ اصلی کم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$۰/۰۰۰۰۰۲x^۲=۴(x_۱-x)$$

به‌سادگی می‌توان متوجه‌شدکه، ریشهٔ $x_۱$، اندکی از $\frac{۱}{۴}$ کوچکتراست. بنابراین

$$۴|x_۱-x|<۰/۰۰۰۰۰۲\left(\frac{۱}{۴}\right)^۲$$

که از آن‌جا خواهیم داشت:

$$|x_1-x|<2\times 10^{-6}\times\frac{1}{64}=\frac{1}{10^6}\times\frac{1}{32}<\frac{1}{10^7}$$

همان‌طور که می‌بینیم، درجهٔ دقت، بسیار بالاست.

۱۰۹. به‌ترتیب داریم:

$$\frac{\sqrt{1.00001}-1}{0.000001}=\frac{0.00001}{0.000001(\sqrt{1.00001}+1)}=$$

$$=\frac{10}{\sqrt{1.00001}+1}\approx\frac{10}{2}=5$$

۱۱۰. عدد مفروض را، به‌این صورت می‌نویسیم:

$$\alpha=(\sqrt{26}+5)^{101}-(\sqrt{26}-5)^{101}+(\sqrt{26}-5)^{101}$$

توجه کنیم، نتیجهٔ تفاضل دو جملهٔ اول، عددی درست است (چرا؟) که آن را A می‌نامیم. در این‌صورت، داریم:

$$\alpha=A+(\sqrt{26}-5)^{101}=A+\frac{1}{(\sqrt{26}+5)^{101}}<$$

$$<A+\frac{1}{10^{101}}=A.\underbrace{000\ldots0001}_{\text{۱۰۰ رقم}}$$

۱۱۱. ازیک طرف داریم:

$$S>\frac{1}{10\times 11}+\frac{1}{11\times 12}+\cdots+\frac{1}{100\times 101}=$$

$$=\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)=$$

$$=\frac{1}{10}-\frac{1}{101}>0.1-0.01=0.09$$

وازطرف دیگر

$$S<\frac{1}{9\times 10}+\frac{1}{10\times 11}+\cdots+\frac{1}{99\times 100}=$$

$$=\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)=$$

$$=\frac{1}{9}-\frac{1}{100}<0.11-0.01=0.10$$

به‌این ترتیب: $0/09 < S < 0/1$. درنتیجه، باتقریب $\pm 0/005$ داریم:

$$S = 0/095$$

۱۱۲. الف) از یك طرف $\overline{xyz} > 100x$ وازطرف دیگر $x \cdot \overline{yz} \leqslant 99x$؛ بنابراین، معادلهٔ مفروض جواب ندارد.

ب) ازیك طرف داریم:

$$y \cdot \overline{xz} = y(10x+z) < 10xy + 10y < 100x + 10y$$

وازطـرف دیگر: $\overline{xyz} \geqslant 100x + 10y$. معادله جواب ندارد.

ج) ازبرابری

$$(10x+y)(10z+t) = t(100x+10y+z)$$

به دست می‌آید:

$$(10z-9t)(10x+y) = zt$$

وچون $10x+y > t$، پس باید داشته باشیم:

$$10z - 9t < z \Longleftrightarrow z < t$$

وبنابراین، می‌توان نوشت $\frac{z}{t} \leqslant \frac{8}{9}$، از طرف دیگر، روشن است‌که $10z - 9t > 0$، یعنی، $\frac{z}{t} > \frac{9}{10}$. تناقض حاصل، به‌معنای آن است‌که معادلهٔ مفروض، جواب ندارد.

۱۱۳. قضیهٔ کلی‌تری رااثابت می‌کنیم:

قضیه. عدد $10a+b$ برعدد $10m-1$ (یعنی برعددی‌که‌به ۹ ختم‌می‌شود)، وقتی و تنها وقتی بخش‌پذیراست‌که $mb+a$ بر $10m-1$ بخش‌پذیرباشد.

اثبات. درستی این اتحاد روشن است:

$$10a+b = 10(mb+a) - b(10m-1)$$

ازاین‌جا، روشن‌است که، اگر $mb+a$ بر $10m-1$ بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت $10a+b$ هم بر $10m-1$ بخش‌پذیرخواهد بود وبرعکس.

مثلاً درحالت $m=6$، برای بخش‌پذیری بر ۵۹:

اولاً عدد ۱۷۷ بر ۵۹ بخش‌پذیراست، زیرا

$$6 \times 7 + 17 = 59$$

ثانیاً عدد ۱۷۸ بر ۵۹ بخش‌پذیر نیست، زیرا

$$6 \times 8 + 17 = 65$$

یادداشت. شبیه این‌قضیه را می‌توان برای بخش‌پذیری بر عدد به‌صورت $۱۰m+۱$ (یعنی عددی‌که به ۱ ختم شده است) ثابت‌کرد. درواقع

$$۱۰a+b=b(۱۰m+۱)-۱۰(mb-a)$$

یعنی، عدد $۱۰a+b$، وقتی‌وتنهاوقتی برعدد $۱۰m+۱$ بخش‌پذیراست‌که $mb-a$ بر $۱۰m+۱$ بخش‌پذیرباشد.

مثلاً به‌ازای $m=۷$، یعنی بخش‌پذیری بر ۷۱:

ـ عدد ۳۵۵ بر ۷۱ بخش‌پذیر است، زیرا

$$۷\times ۵-۳۵=۰$$

ـ عدد ۸۵۲ بر ۷۱ بخش‌پذیر است، زیرا

$$۷\times ۲-۸۵=-۷۱$$

ـ عدد ۲۴۲ بر ۷۱ بخش‌پذیر نیست، زیرا

$$۷\times ۲-۲۴=-۱۰$$

با اندکی توجه‌می‌توانید شرط بخش‌پذیری برعددهایی‌را هم‌که به ۳ یا ۷ ختم‌شده‌اند، پیدا کنید. به‌ویژه، شرط بخش‌پذیری بر ۷ جالب است.

عدد $۱۰a+b$، تنها وقتی بر ۷ بخش‌پذیر است‌که $۲a-b$ بر ۷ بخش‌پذیر باشد. چند مثال می‌آوریم.

$$۹۱ : ۲\times ۱-۹=-۷$$ (۹۱ بر ۷ بخش‌پذیر است)

$$۱۱۹ : ۲\times ۹-۱۱=۷$$ (۱۱۹ بر ۷ بخش‌پذیر است)

$$۱۸۹ : ۲\times ۹-۱۸=۰$$ (۱۸۹ بر ۷ بخش‌پذیر است)

$$۱۶۳ : ۲\times ۳-۱۶=-۱۰$$ (۱۶۳ بر ۷ بخش‌پذیر نیست)

۱۱۴. $m>n$ می‌گیریم (این‌فرض، هیچ لطمه‌ای به‌کلی‌بودن مسأله نمی‌زند). داریم:

$$\underbrace{۹۹\ldots ۹}_{m\text{ رقم}}\times\underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{n\text{ رقم}}=(۱۰^m-۱)(۱۰^{n-۱}+۱۰^{n-۲}+\ldots+۱۰+۱)a=$$

$$=(۱۰^{m+n-۱}+۱۰^{m+n-۲}+\ldots+۱۰^m)a-$$

$$-(۱۰^{n-۱}+۱۰^{n-۲}+\ldots+۱۰+۱)a$$

ازطرف دیگر

$$\underbrace{\overline{aa\cdots a}}_{\text{رقم } m}\times\underbrace{99\ldots9}_{\text{رقم } n}=(10^{m-1}+10^{m-2}+\ldots+1)a\times(10^{n}-1)=$$

$$=(10^{m+n-1}+10^{m+n-2}+\ldots+10^{n})a+$$

$$+(10^{m-1}+10^{m-2}+\ldots+10^{n})a-$$

$$-(10^{m-1}+10^{m-2}+\ldots+10^{n})a-$$

$$-(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+1)a=$$

$$=(10^{m+n-1}+10^{m+n-2}+\ldots+10^{n})a-$$

$$-(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+10+1)a$$

۱۱۵. قبل ازهمه روشن است‌که باید داشته باشیم:

$$a_1\cdot b_1=a_n\cdot b_n$$

ازعددهای دورقمی آغاز می‌کنیم. هرعدد یك رقمی‌که به دوصورت قابل تبدیل به ضرب دوعدد درست باشد، می‌تواند سرچشمه‌ای برای پیداکردن این‌گونه عددهای دو رقمی باشد.

مثلاً $2\times2=1\times4=4$. بااین‌عامل‌های ضرب، می‌توان دوعدد دورقمی درست کرد: ۴۲ و ۱۲؛ دراین‌صورت داریم:

$$42\times12=24\times21$$

به‌کمك $2\times3=1\times6=6$، می‌توان دوزوج عدد دورقمی باویژگی مورد نظر به‌دست آورد: ۶۲ و ۱۳ یا ۶۳ و ۱۲؛ دراین‌صورت داریم:

$$62\times13=26\times31,\quad 63\times12=36\times21$$

روی هم ۱۴ زوج ازاین عددهای دورقمی(باویژگی موردنظر) وجود دارد. خودتان همهٔ آن‌ها راپیداکنید!

به جست‌وجوی عددهای سه‌رقمی می‌پردازیم. به‌کمك هردوعدد دورقمی‌که در بالا پیداکردیم، می‌توان به عددهای سه‌رقمی (باویژگی موردنظر) دست یافت.

به‌عنوان نمونه، عددهای دورقمی ۴۲ و ۱۲ را درنظرمی‌گیریم و، با آن‌ها، دوعدد سه‌رقمی $\overline{4x2}$ و $\overline{1y2}$ رامی‌سازیم. باید داشته‌باشیم:

$$\overline{4x2}\times\overline{1y2}=\overline{2x4}\times\overline{2y1}$$

ضرب‌ها رابه‌صورت ستونی انجام می‌دهیم:

$$
\begin{array}{r}
2\,y\,1\times \\
2\,x\,4 \\
\hline
8\,(4y)\,4 \\
(2x)\,(xy)\,x\quad \\
4\,(2y)\,2\qquad \\
\hline
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
4\,x\,2\times \\
1\,y\,2 \\
\hline
8\quad(2x)\,4 \\
(4y)\,(xy)\,(2y)\quad \\
4\quad x\quad 2\qquad\qquad \\
\hline
\end{array}
$$

اگرستون دوم(ازسمت راست) را، دراین دوضرب درنظر بگیریم، باید داشته‌باشیم:

$$2x+2y=4y+x$$

یعنی $x=2y$. این امکان‌ها وجود دارد:

x	۰	۲	۴	۶	۸
y	۰	۱	۲	۳	۴

ازیك زوج عددهای دورقمی، پنج زوج عددهای سه‌رقمی به‌دست می‌آید:

$$402\times 102=204\times 201،$$

$$422\times 112=224\times 211،$$

$$442\times 122=244\times 221،$$

$$462\times 132=264\times 231،$$

$$482\times 142=284\times 241$$

به‌همین‌ترتیب، می‌توان ازهرزوج عددهای دورقمی، زوج‌های بسیاری برای‌عددهای چهاررقمی (باویژگی موردنظر) به‌دست آورد. همان دوعدد ۴۲ و ۱۲ را درنظرمی‌گیریم. حاصل‌ضرب‌های

$$\overline{4xy2}\times\overline{1uv2}\ \text{و}\ \overline{2yx4}\times\overline{2vu1}$$

مارا به دومعادلهٔ چهارمجهولی زیرمی‌رساند:

$$\begin{cases}2y+2v=4u+x\\ 2x+vy+2u=4v+xu+y\end{cases}$$

البته x، y، u و v، عددهایی غیرمنفی ویك رقمی‌اندکه، پیداکردن آن‌ها، دشوارنیست. مثلاً به‌ازای $x=0$ و $y=3$، به دست می‌آید: $2u-v=3$ که، درنتیجه، پنج زوج عددچهار رقمی به مامی‌دهد، مثل

۴۰۳۲ × ۱۲۱۲ = ۲۳۰۴ × ۲۱۲۱

همچنین، برای پیداکردن زوج عددهای پنج رقمی، می‌توان با همین روش عمل کرد وجواب‌های غیرمنفی ویك رقمی یك دستگاه شامل سه معادله وشش مجهول رابه‌دست آورد.

بازهم چند قانون:

۱) اگر دوعدد سه‌رقمی (باویژگی موردنظر)، رقم‌وسط رادرهر کدام ازآن‌ها، چندبار تکرارکنیم، بازهم به یك زوج عدد باهمان ویژگی می‌رسیم. مثلاً از دو عدد ۴۶۲ و ۱۳۲ می‌توان به دست آورد:

۴۶۶۶۲ × ۱۳۳۳۲ = ۲۶۶۶۴ × ۲۳۳۳۱

۲) اگر دریك زوج عدد دورقمی یاسه رقمی، هرعدد را دویاسه‌بار (واحتمالاً بیشتر) تکرارکنیم، بازهم به‌زوج عددی باهمان ویژگی‌می‌رسیم. مثلاً از ۴۲ × ۱۲ = ۲۴ × ۲۱ می‌توان نتیجه گرفت:

۴۲۴۲۴۲ × ۱۲۱۲۱۲ = ۲۴۲۴۲۴ × ۲۱۲۱۲۱

واز ۳۲۴ × ۸۴۶ = ۴۲۳ × ۶۴۸ به دست می‌آید:

۶۴۸۶۴۸ × ۴۲۳۴۲۳ = ۸۴۶۸۴۶ × ۳۲۴۳۲۴

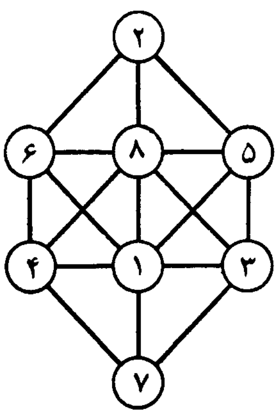
۳) اگر بین n رقم‌اول و n رقم‌آخر، دریك زوج عدد $2n$رقمی(باویژگی موردنظر)، چند صفرقراردهیم، برابری به‌هم نمی‌خورد. مثلاً ازبرابری

۴۲۴۲۴۲ × ۱۲۱۲۱۲ = ۲۴۲۴۲۴ × ۲۱۲۱۲۱

می‌توان نتیجه‌گرفت:

۴۲۴۰۰۲۴۲ × ۱۲۱۰۰۲۱۲ = ۲۴۲۰۰۴۲۴ × ۲۱۲۰۰۱۲۱

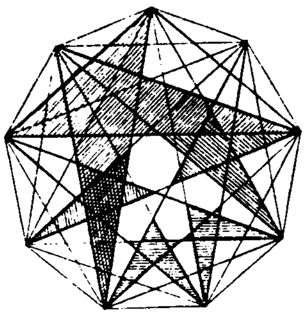
۱۱۶. یکی ازجواب‌های ممکن رادرشکل ۵۵ داده‌ایم.



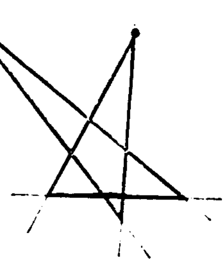
شکل ۵۵

۱۱۷. طبیعی است، برای تعیین تعداد نقطه‌های برخورد قطرهای یك نه ضلعی، می‌توان آن‌ها را، روی شکل شمرد. برای این‌کار تنها شکیبائی ودقت لازم است. به‌همین‌مناسبت، طرح چنین مسأله‌هایی می‌تواند برای تقویت این دو خصلت آدمی، که بسیارهم برای او سودمند ولازم است، به‌کارگرفته شود. ولی اگرمثلاً، به‌خواننده پیشنهادکنیم، تعداد نقطه‌های برخورد قطرهای‌یك

۲۰۰۰ ضلعی محدب را، به‌طریق تجربی، پیدا کند، بدون تردید، بـه شوخی بیشتر شباهت پیدا می‌کند. بنابراین، چاره‌ای نیست، جز این‌که به دنبال یک راه حل کلی ریاضی برویم.



شکل ۵۷



شکل ۵۶

استدلال بسیار ساده است. در یک چهارضلعی، قطرها تنها در یک نقطه به هم می‌رسند. بنابراین کافی است حساب کنیم، از یک نه‌ضلعی، به چندطریق می‌توان یک چهارضلعی به‌دست آورد؛ یعنی چند ترکیب ۴ به ۴ از بین ۹ چیز می‌توان پیدا کرد:

$$C_{۹}^{۴}=\frac{۹!}{۴!\,۵!}=۱۲۶$$

و طبیعی است که، برای محاسبهٔ تعداد نقطه‌های برخورد قطرهای یک ۲۰۰۰ ضلعی محدب هم می‌توان به‌همین ترتیب عمل کرد:

$$C_{۲۰۰۰}^{۴}=\frac{۱۹۹۷\times۱۹۹۸\times۱۹۹۹\times۲۰۰۰}{۴!}$$

اکنون ببینید آیا می‌توانید محاسبه کنید: بـه وسیله قطرهای یک نه ضلعی، چند ستارهٔ پنج‌پر شبیه شکل ۵۷ بـه‌دست می‌آید؟ مثل قبل، فرض بـر این است که هیچ قطری از محل برخورد دوقطر دیگر نمی‌گذرد. هر ستارهٔ پنج‌پر ــ که شامل پنج خط راست (و نه خط شکسته) است ــ از دو زوج «نیم‌خط» متقابلاً متقاطع و خط راستی که آن‌ها را بریده است، درست شده است.

۱۱۸. می‌دانیم $۱+۲+۳+\dots+n=\frac{۱}{۲}n(n+۱)$. درضمن هرعدد سه رقمی بـا رقم‌های برابر را می‌توان بـه صورت $k\times۱۱۱=۳k\times۳۷$ نوشت. بنابراین باید داشته باشیم:

$$۶k\times۳۷=n(n+۱)$$

چون ۳۷ عددی اول است، بنابراین باید n یا $n+1$ بر ۳۷ بخش‌پذیر باشد. درضمن چون $\frac{1}{2}n(n+1)<1000$، پس $n<50$. دیگر به سادگی روشن می‌شود: $n=36$ و $k=6$.

پاسخ. باید ۳۶ جمله از تصاعد را انتخاب کرد تا مجموع آن‌ها برابر ۶۶۶ شود.

۱۱۹. به‌ترتیب داریم:

$$\frac{10^{1370}+1}{10^{1371}+1}=\frac{10^{1370+1372}+10\times10^{1371}+10^{1370}+1}{(10^{1371}+1)(10^{1372}+1)}>$$

$$>\frac{10^{1371+1371}+2\times10^{1371}+1}{(10^{1371}+1)(10^{1372}+1)}=\frac{10^{1371}+1}{10^{1372}+1}$$

۱۲۰. اگر t_1 ثانیه بعد از سقوط، موتور ترمز کننده را روشن کنیم، آن وقت موشك، در لحظهٔ ترمز کردن موتور، دارای سرعت $v_1=v+at_1$ و ارتفاع $H_1=vt_1+\frac{at_1^2}{2}$ خواهد بود؛ و اگر t_2 ثانیه بعد از روشن کردن موتور، فرود آرام انجام گیرد، به این معناست که

$$v_2=v+at_1-at_2=0,$$

$$H_2=H-H_1-\left(v_1t_2-\frac{at_2^2}{2}\right)$$

اگر مقدارهای v_1، H_1 و t_2 را از معادله‌های قبلی، برحسب t_1 به‌دست آوریم و در معادلهٔ اخیر قرار دهیم، بعد از ساده کردن به‌دست می‌آید:

$$H=at_1^2+2vt_1+\frac{v^2}{2a}$$

و از آن‌جا: $t_1=\frac{1}{a}\left(\sqrt{\frac{1}{2}v^2+aH}-v\right)$. به ازای $v^2>2aH$، فرود آرام، ممکن نیست.

۱۲۱. بعد از گذشت زمان t، فاصلهٔ پیاده‌ها از چهارراه، به‌ترتیب، برابر است با $|OA|-vt$ و $|OB|-vt$. بنابراین، فاصلهٔ بین دو پیاده، در این لحظه، چنین است:

$$s=\sqrt{(|OA|-vt)^2+(|OB|-vt)^2}$$

عبارت زیر رادیکال را، می‌توان این‌طور نوشت:

$$s^2=2\left(vt-\frac{|OA|+|OB|}{2}\right)^2+\frac{1}{2}(|OA|-|OB|)^2$$

جملهٔ دوم سمت راست برابری مقداری ثابت است؛ بنابراین s^2 وقتی به حداقل مقدار

خود می‌رسد که، جملهٔ اول آن، برابر صفر باشد، که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$t=\frac{|OA|+|OB|}{۲v}$$

و این فاصلهٔ حداقل، بین دو پیاده، چنین است:

$$s=\frac{۱}{۲}\big|\,|OA|-|OB|\,\big|$$

۱۲۲. این معادله‌ها به سادگی به دست می‌آیند:

$$A+C=۱۰،\quad A+B+۱=۱۰+C،\quad A+۱=B$$

یعنی $A=۶$، $B=۷$، $C=۴$.

پاسخ.

$$\begin{array}{r} ۶+ \\ ۶۷ \\ ۶۷۴ \\ \hline ۷۴۷ \end{array}$$

۱۲۳. روشن است که اگر مجموع دو عدد زوج باشد، تفاضل آن‌ها هم عددی است زوج؛ همچنین، اگر مجموع دو عدد، عددی فرد باشد، تفاضل آن‌ها هم عددی است فرد.

مجموع همهٔ عددهایی که روی تختهٔ سیاه نوشته شده، برابر است با ۵۵ که عددی فرد است. وقتی به جای دو عدد، تفاضل آن‌ها را می‌نویسیم، باید مجموع همهٔ عددهای روی تختهٔ سیاه، باز هم، عددی فرد باشد؛ درحالی‌که صفر عددی زوج است. پاسخ به پرسش مسأله منفی است.

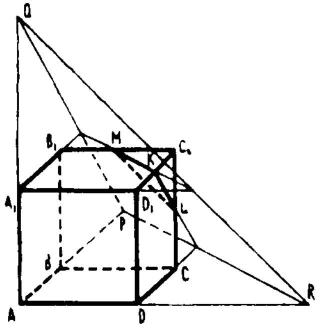
۱۲۴. عدد سه رقمی را $\overline{abc}$ و $a>c$ فرض می‌کنیم. مقلوب آن را از خودش کم می‌کنیم:

$$\begin{array}{ccc} a & b & c- \\ c & b & a \\ \hline (a-c-۱) & ۹ & (۱۰+c-a) \end{array}$$

بعد، این تفاضل را با مقلوب خودش جمع می‌کنیم:

$$\begin{array}{ccc} (a-c-۱) & ۹ & (۱۰+c-a)+ \\ (۱۰+c-a) & ۹ & (a-c-۱) \\ \hline ۱۰ & ۸ & ۹ \end{array}$$

پاسخ. ۱۰۸۹.



شکل ۵۸

۱۲۵. دشواری اصلی، در رسم شکل و نشان دادن مقطع است (شکل ۵۸ را ببینید). از مکعب، هرمی بـا قاعدهٔ مثلثی جدا می‌شود، کـه یکی از رأس‌های آن بر رأس C_1 از مکعب و سه رأس دیگر آن، وسط یـال‌هایی از مکعب‌اند که از رأس C_1 می‌گذرند. از این‌جا، به‌سادگی، می‌توان حجم این هرم را که برابر $\frac{1}{6}\left(\frac{a}{2}\right)^3$، یعنی $\frac{1}{48}a^3$ است، بـه دست آورد. به‌این ترتیب، نسبت حجم‌های دو بخش مکعب، برابر $\frac{1}{47}$ می‌شود.

۱۲۶. اگر فرض کنیم $y = 2\log_x 2$ $(y \neq 0)$، به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} 1+y \leqslant \sqrt{3+y} \\ y \neq 0 \end{cases}$$

درحالتی‌که سمت چپ نابرابری غیرمثبت $(y \leqslant -1)$ و سمت راست نـابرابری حقیقی $(y \geqslant -3)$ باشد، دستگاه برقرار است و به دست می‌آید:

$$-3 \leqslant y \leqslant -1$$

اگر $1+y > 0$، آن‌وقت دوطرف نابرابری دستگاه مثبت می‌شود و می‌توان آن را مجذور کرد که درنتیجه، به دست می‌آید:

$$y^2 + y - 2 \leqslant 0$$

که باتوجه به‌شرط‌های $y \neq 0$ و $y > -1$، نتیجه می‌دهد:

$$-1 < y < 0, \quad 0 < y \leqslant 1$$

به‌این‌ترتیب، به‌این نامعادله‌های ساده می‌رسیم:

$$-3 \leqslant \log_x 2 < 0, \quad 0 < \log_x 2 \leqslant 1$$

پاسخ. $0 < x \leqslant \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ و $x \geqslant 2$.

۱۲۷. روشن است که سمت راست برابری، نمی‌تواند از ۴ بـزرگتر باشد. اکنون $tg^2 x = u$ و $tg^2 y = v$ می‌گیریم. برای سمت چپ برابری داریم:

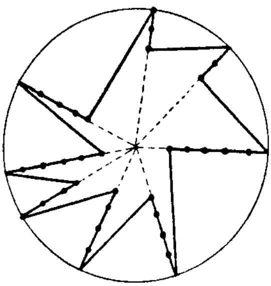
$$u^2+v^2+\frac{2}{uv}\geqslant 2uv+\frac{2}{uv}=2\left(uv+\frac{1}{uv}\right)\geqslant 4$$

(علامت برابری، تنها برای $u=v$). به‌این‌ترتیب، تنها وقتی این برابری برقرار است که، هرطرف آن، برابر ۴ باشد، یعنی

$$\sin^2(x+y)=1 \quad \text{و} \quad tg^2x=tg^2y$$

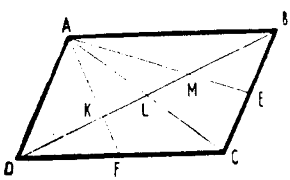
پاسخ.
$$\begin{cases}x=k\pi+\frac{\pi}{4}\\ y=k_1\pi+\frac{\pi}{4}\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}x=m\pi-\frac{\pi}{4}\\ y=m_1\pi-\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

۱۲۸. از آن‌جا که تعداد نقطه‌ها محدود است، همیشه می‌توان دایره‌ای رسم کرد که، مرکز آن، منطبق برهیچ‌کدام ازاین نقطه‌ها نباشد و، درضمن، همهٔ نقطه‌ها در درون دایره قرارگیرند. شعاع‌هایی از دایره راکه ازهرکدام ازاین نقطه‌ها می‌گذرند، رسم می‌کنیم (شکل ۵۹). روشن است که، روی بعضی ازاین شعاع‌ها، ممکن است، بیش ازیك نقطه واقع باشد. روی یکی ازشعاع‌ها، نزدیك‌ترین نقطه به مرکزدایره را انتخاب وازآن، به‌انتهای شعاع وصل می‌کنیم، سپس ازاین انتهای شعاع، به نزدیك‌ترین نقطه به‌مرکزدایره در روی شعاع مجاور وصل می‌کنیم و، بعد، روی همین شعاع دوم تا انتهای آن جلو می‌رویم و، به همین ترتیب، تا آخر. حرکت رامی‌توان همه‌جا، درجهت حرکت عقربه‌های ساعت یا همه جا درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت انجام داد (منظورازانتهای شعاع، نقطهٔ برخورد شعاع بامحیط دایره است). همان‌طورکه ازشکل ۵۹ دیده می‌شود (درآن‌جا، حرکت رادرخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت‌انجام داده‌ایم)، خط شکستهٔ بسته‌ای که، بااین‌روش، به دست می‌آید، ازهمهٔ n نقطه‌گذشته است و، درضمن، هیچ‌کدام ازضلع‌های خط شکسته، یکدیگر راقطع نکرده‌اند.



شکل ۵۹

۱۲۹. قطرهای متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند، پس $|DL|=|LB|$ و $|AL|=|LC|$. یعنی پاره خط‌های راست DL و BL، به ترتیب، میانه‌های مثلث‌های ACD و ABC هستند. ولی $[AF]$ و $[AE]$ هم،میانه‌های



شکل ۶۰

همین دومثلث اند. میانه‌های هرمثلث، درنقطهٔ ثلث خود، یکدیگر راقطع می‌کنند، بنابراین

$$|BM|=2|LM|,\ |DK|=2|KL|$$

درنتیجه $|LB|=|LM|+|BM|=3|LM|$. اکنون دیگرروشن است که

$$|DK|=|KM|=|MB|$$

(زیرا $|LB|=|DL|$، یعنی $|LM|=|KL|$). به‌این‌ترتیب، دوپـاره خط راست مورد نظر، قطرمتوازی‌الاضلاع رابه‌سه بخش برابر تقسیم می‌کنند.

۱۳۰. حل مسأله را، ازجای ساده‌تری آغاز می‌کنیم:

مجذور کدام عدد یك رقمی به خودش ختم می‌شود؟

پاسخ به‌این‌پرسش، روشن است: مجذورعددهای ۱، ۵ و ۶، به‌ترتیب، برابراست با ۱، ۲۵، ۳۶ که به‌همان رقم‌های ۱، ۵ و ۶ ختم شده‌اند.

ابتدا به ۵ می‌پردازیم واین مسأله رامطرح می‌کنیم:

رقم دهگان a رادر عـدد دو رقمی $\overline{a5}$ طوری پیداکنیدکه، مجذور آن، بـه $\overline{a5}$ ختم شده باشد.

مجذور $\overline{a5}$ راپیدا می‌کنیم:

$$(\overline{a5})^2=(10a+5)^2=100a^2+100a+25=100(a^2+a)+25$$

یعنی، به‌ازای هرمقدار رقم a، عدد $(\overline{a5})^2$ به ۲۵ ختم می‌شود. بنابراین، مجذور ۲۵ هم، به ۲۵ ختم می‌شود: $25^2=625$.

اکنون، به سراغ عددهای سه رقمی می‌رویم:

رقم صدگان b رادر عدد سه رقمی $\overline{b25}$ طوری پیداکنیدکه، مجذورآن، به‌همین عدد $\overline{b25}$ ختم شده باشد.

شبیه حالت دورقمی عمل می‌کنیم:

$$(\overline{b25})^2=(100b+25)^2=10000b^2+5000b+625=$$
$$=1000(10b^2+5b)+625$$

یعنی مجذور هرعدد سه رقمی به صورت $\overline{b25}$ به ۶۲۵ ختم می‌شود و، بنابراین، $b=6$:

$$625^2=390625$$

(واین، یکی ازجواب‌های مسأله است).

اگر با همین روش، به جست وجوی رقم‌های بعدی باشیم، می‌توانیم عددهای چهار-رقمی، پنج رقمی و غیره را پیدا کنیم که، مجذور آن‌ها، به‌همان عددهای اصلی، ختم شده باشند. در این جا، این عددها را، از یك رقمی تا شش رقمی آورده‌ایم:

$$۵،\ ۲۵،\ ۶۲۵،\ ۰۶۲۵،\ ۹۰۶۲۵،\ ۸۹۰۶۲۵،\ \ldots$$

مثلاً

$$۸۹۰۶۲۵^{۲}=۷۹۳\ ۲۱۲\ ۸۹۰\ ۶۲۵$$

اکنون به ۶ می‌پردازیم: کدام عدد دورقمی به صورت $\overline{k۶}$ وجود دارد که، مجذور آن، به $\overline{k۶}$ ختم شود؟ داریم:

$$(\overline{k۶})^{۲}=(۱۰k+۶)^{۲}=۱۰۰k^{۲}+۱۲۰k+۳۶=$$
$$=۱۰۰(k^{۲}+k)+۱۰(k+۳)+(۱۰k+۶)$$

روشن است که، اگر بخواهیم این حاصل به $\overline{k۶}$، یعنی $۱۰k+۶$ ختم شود، باید بقیهٔ جمله‌ها، دست کم به دورقم برابر صفر، ختم شده باشند. جملهٔ اول (با توجه به ضریب ۱۰۰ در آن)، دست کم به دورقم صفر ختم می‌شود؛ برای این که جملهٔ دوم هم، به دورقم صفر ختم شود، باید $(k+۳)$ بر ۱۰ بخش‌پذیر باشد و چون k، عددی یك رقمی است، پس $k=۷$. یعنی مجذور عدد ۷۶، به‌همین دورقم ۷۶ ختم می‌شود:

$$۷۶^{۲}=۵۷۷۶$$

اگر همین روش را ادامه دهیم می‌توانیم، در عدد سه رقمی $\overline{m۷۶}$، رقم m را طوری پیدا کنیم که، مجذور آن، به $\overline{m۷۶}$ ختم شود. این رقم $m=۳$ است:

$$۳۷۶^{۲}=۱۴۱۳۷۶$$

که جواب دیگری از مسألهٔ ماست.

با ادامهٔ این روش، می‌توان عددهای زیر را به دست آورد که، مجذور آن‌ها، به‌همین عددها ختم شده‌اند (عددها را از یك رقمی تا هفت رقمی داده‌ایم):

$$۶،\ ۷۶،\ ۳۷۶،\ ۹۳۷۶،\ ۰۹۳۷۶،\ ۱۰۹۳۷۶،\ ۷۱۰۹۳۷۶،\ \ldots$$

پاسخ. ۶۲۵ و ۳۷۶.

یادداشت ۱: در این جا، از عددهایی که به ۱ ختم شده‌اند، به این جهت صرف نظر کردیم

که، با ادامهٔ روش بالا، رقم‌های بعدی، همه‌جا برابر صفر درمی‌آید.

درواقع، ازمجذورهرعددی که به ۰۱ ختم شود، عددی به‌دست می‌آید که بازهم به ۰۱ ختم شده است:

$$۲۰۱^۲ = ۴۰۴۰۱$$

(عدد مجذور، به ۰۱ ختم شده است، نه ۲۰۱). همچنین از مجذور عددی که به ۰۰۱ ختم شده باشد، عددی به دست می‌آید که بازهم به ۰۰۱ ختم شده است:

$$۳۰۰۱^۲ = ۹۰۰۶۰۰۱$$

بنابراین، بادنبال کردن عددهایی که به ۱ ختم‌شده‌اند، جوابی‌برای مسألهٔ ما به‌دست نمی‌آید.

یادداشت ۲. این دوعدد رادرنظرمی‌گیریم:

$$...۲۸۹۰۶۲۵$$

$$...۷۱۰۹۳۷۶$$

نقطه‌هایی که درسمت چپ این دوعدد قرارداده‌ایم، به‌این معناست که می‌توان، این عددها را، تا هرجاکه لازم باشد، ادامه داد. اگرفرض کنیم، هریك ازاین دوعدد را، تا بی‌نهایت رقم سمت چپ آن پیداکرده باشیم و آن را، به‌ترتیب، α و β بنامیم، آن‌وقت

$$\alpha^۲ = \alpha، \ \beta^۲ = \beta$$

به‌این‌ترتیب، برای معادلهٔ درجه دوم $x^۲ = x$ (علاوه بردوریشهٔ ۰ و ۱) دوریشهٔ‌دیگر هم پیدا می‌شودکه، البته، عددهایی بابی‌نهایت رقم‌اند.

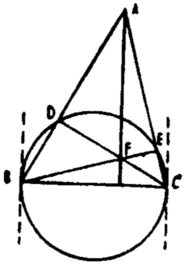
این مطلب، روشن می‌کندکه، قانون‌های ریاضی‌هم، مثل قانون‌های هردانش دیگری، جامع نیستند. مثلاً، وقتی‌می‌گوئیم: معادلهٔ درجهٔ دوم‌نمی‌تواند بیش ازدوریشهٔ حقیقی داشته باشد؛ تنها وقتی می‌توانیم بــه درستی آن اعتمادکنیم که خود را، محدود به عددهای متناهی کنیم، چراکه دوعدد حقیقی، ولی نامتناهی α و β هم می‌توانند ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^۲ = x$ باشند.

یادداشت ۳. به‌سادگی‌می‌توان روشن کردکه عدد

$$\alpha = ...۲۸۹۰۶۲۵$$

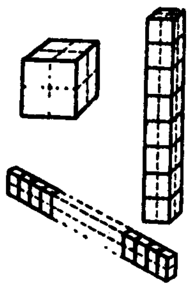
را می‌توان این‌طور نوشت.

$$\left(\left(\left(5^{2}\right)^{2}\right)^{2}\right)^{2}$$


شکل ۶۱

۱۳۱. نقطه را A و قطر دایره را BC می‌نامیم. پاره خطهای راست AB و AC را رسم می‌کنیم تا محیط دایره را در دو نقطهٔ دیگر D و E قطع کنند. BE و CD یکدیگر را در نقطه‌ای مثل F قطع می‌کنند (شکل ۶۱). اکنون اگر (AF) را رسم کنیم، بر BC عمود خواهد بود (چرا؟). مسأله را وقتی می‌توانیم به این طریق حل کنیم که نقطهٔ A، بین دو مماسی باشد که از نقطه‌های A و B بر دایره رسم می‌شود. آیا برای حالتی که نقطهٔ A درخارج این دو مماس باشد، می‌توان از همین روش استفاده کرد؟

۱۳۲. شش برش کافی است. ابتدا با سه برش، مکعب مفروض را به ۸ مکعب کوچکتر تقسیم می‌کنیم (شکل ۶۲)؛ سپس، این ۸ مکعب را روی هم می‌چینیم و با دو برش عمود برهم، آن‌ها را به ۳۲ مکعب مستطیل مساوی تبدیل می‌کنیم؛ سرانجام، با یك برش دیگر، آن‌ها را به مکعب‌های برابر تقسیم می‌کنیم.


شکل ۶۲

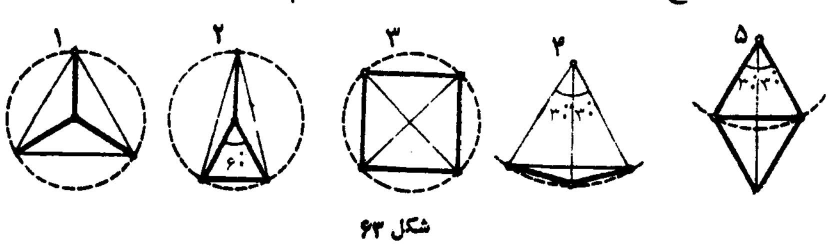
شش، حداقل تعداد برش‌هاست؛ زیرا هر برش می‌تواند تعداد موجود را، حداکثر دو برابر کند. بنابراین، برای این‌که چیزی را به ۶۴ بخش تقسیم کنیم، دست‌کم به شش برش نیاز داریم ($۶۴ = ۲^{۶}$).

۱۳۳. وزن این شش قسمت را می‌توان به یکی از این دو طریق انتخاب کرد:

۱) دوقطعهٔ ۱۵۰ گرمی، دوقطعهٔ ۱۰۰ گرمی و دوقطعهٔ ۵۰ گرمی؛

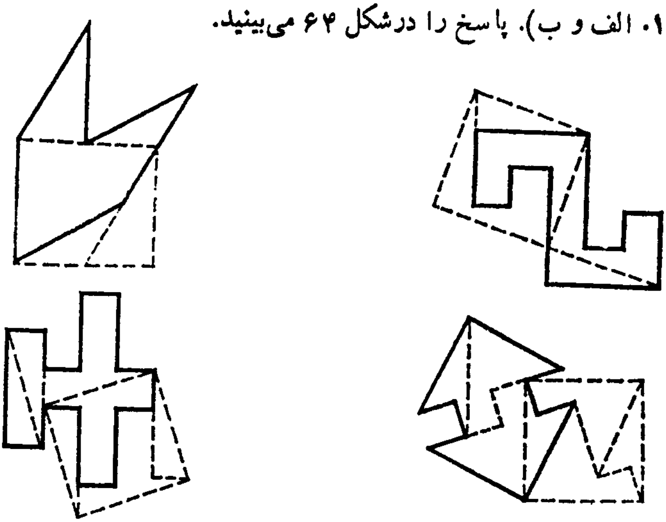
۲) سه قطعهٔ ۱۵۰ گرمی و سه قطعهٔ ۵۰ گرمی.

۱۳۴. پنج جواب ممکن را در شکل ۶۳ داده‌ایم.



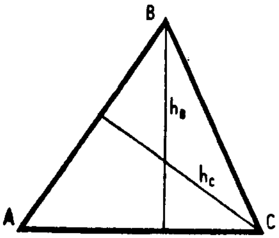
شکل ۶۳

۱۳۵. الف و ب). پاسخ را در شکل ۶۴ می‌بینید.



شکل ۶۴

۱۳۶. فرض می‌کنیم $h_C \geqslant h_B$؛ در این صورت:



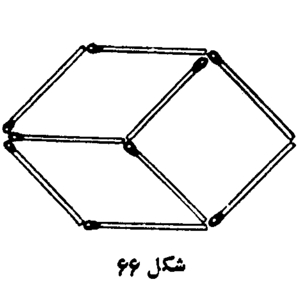
شکل ۶۵

$$h_C \geqslant h_B \geqslant |AC| \qquad (۱)$$

ولی h_C بر AB عمود است. درحالی‌که AC نسبت به AB مایل است، بنابراین، $|AC|$ نمی‌تواند از h_C کوچکتر باشد، یعنی $|AC| = h_C$. و این، به معنای آن است که h_C بر $[AC]$ منطبق است. در این‌صورت، مثلث، در رأس A قائمه می‌شود و ارتفاع h_B هم، برضلع AB قرار می‌گیرد؛ درنتیجه، رابطهٔ (۱) چنین می‌شود:

$$h_C = h_B = |AC| = |AB|$$

مثلث موردنظر، قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.



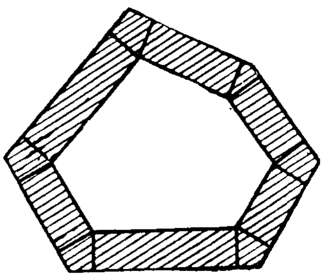
شکل ۶۶

۱۳۷. به‌کمك ۹ چوب کبریت نمی‌توان سه مربع ساخت. ولی درمسأله هم، صحبتی از مربع نشده‌است، تنها چهارضلعی‌های باضلع‌های برابر خواسته شده‌است. در شکل ۶۶ می‌بینید که، ازاین چهارضلعی‌ها، یکی مربع و دوتای دیگر لوزی هستند.

۱۳۸. دانش‌آموز دوم، برای خرید کتاب، تنها ۵ ریال کم داشت؛ سکهٔ کوچکتر از ۵

ریالی هم وجود ندارد. وقتی «پول‌های» خود را روی هم ریختند، بازهم نتوانستند کتاب را بخرند. و این، به‌معنای آن است که دانش‌آموز اول، اصلاً پولی نداشته است. قیمت کتاب، همان ۳۰ تومان است.

۱۳۹. به شکل ۶۷ توجه کنید. تفاوت مساحت‌های دو چند ضلعی، برابر است با بخش هاشورخورده. این بخش، از مستطیل‌هایی تشکیل شده است (که روی ضلع‌های چند ضلعی درونی ساخته شده‌اند) ومساحت مجموع آن‌ها، برابر است با ۱۲ سانتی‌مترمربع (چرا؟). علاوه براین مستطیل‌ها، چهارضلعی‌هایی درگوشه‌ها و بین مستطیل‌ها، باقی می‌ماندکه، اگر آن‌ها راکنار هم قرار دهیم، شکلی به دست می‌آیدکه مساحتی بزرگترازمساحت دایرهٔ به شعاع واحد دارد (چرا؟). بنابراین، مساحت بخش هاشور خورده از $\pi + ۱۲$، و به طور بدیهی، از ۱۵ بیشتراست.



شکل ۶۷

۱۴۰. به سادگی قابل تحقیق است که عدد ۱۱۱۱۱۱ (شامل ۶ رقم برابر واحد) بر ۷ بخش‌پذیر است:

$$۱۱۱۱۱۱ = ۷ \times ۱۵۸۷۳$$

ودرضمن، هیچ‌کدام ازعضوهای قبل از آن درمجموعه، بر ۷ بخش‌پذیر نیست. به‌این ترتیب، عضوهایی ازمجموعه بر ۷ بخش‌پذیرندکه، تعداد رقم‌های هرکدام از آن‌ها، مضربی از ۶ باشد. چون

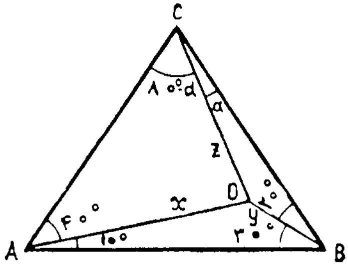
$$۱۳۷۱ = ۲۲۸ \times ۶ + ۳$$

بنابراین، ۲۲۸ عضو این مجموعه، بر ۷ بخش‌پذیر است.

۱۴۱. زاویهٔ OCB را برابر α می‌گیریم، دراین صورت $\widehat{ACO} = ۸۰^\circ - \alpha$. زاویه‌های CAO و CBO معلوم و، به‌ترتیب، برابر ۴۰ درجه و ۲۰ درجه‌اند. طول پاره‌خطهای راست OA، OB و OC را، به‌ترتیب، برابر x، y و z می‌گیریم وقضیهٔ سینوس‌ها را، برای سه مثلث AOB، BOC و COA می‌نویسیم:

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin ۱۰^\circ}{\sin ۳۰^\circ}; \qquad \frac{z}{y} = \frac{\sin ۲۰^\circ}{\sin \alpha}; \qquad \frac{x}{z} = \frac{\sin(۸۰^\circ - \alpha)}{\sin ۴۰^\circ}$$

اگر این سه برابری را در یکدیگر ضرب کنیم، به معادله‌ای نسبت به مجهول α می‌رسیم:



شکل ۶۸

$$1=\frac{2\sin(80^\circ-\alpha)\sin 20^\circ \sin 10^\circ}{\sin 40^\circ \sin\alpha} \quad (1)$$

که با توجه به اتحادهای

$$\sin 40^\circ = 2\sin 20^\circ \cos 20^\circ,$$

$$\sin(80^\circ-\alpha)=\cos(10^\circ+\alpha)$$

معادلهٔ (۱) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\cos 20^\circ \sin\alpha = \cos(10^\circ+\alpha)\sin 10^\circ$$

هر دو طرف برابری را به مجموع تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{1}{2}\left[\sin(20^\circ+\alpha)-\sin(20^\circ-\alpha)\right]=\frac{1}{2}\left[\sin(20^\circ+\alpha)-\sin\alpha\right]$$

و از آن‌جا

$$\sin(20^\circ-\alpha)=\sin\alpha$$

که با توجه به شرط $0^\circ<\alpha<80^\circ$، به دست می‌آید $\alpha=10^\circ$. در نتیجه

$$\widehat{ACO}=\widehat{AOC}=70^\circ$$

و مثلث AOC متساوی‌الساقین است: $|AO|=|AC|$.

۱۴۲. بنا بر شرط مسأله، باید داشته باشیم:

$$\overline{abcde6}\times 4=\overline{6abcde}$$

از ضرب ۴ در ۶ روشن می‌شود که $e=4$؛ بعد با ضرب ۴ در e (یعنی ۴) و به‌حساب آوردن دو واحدی که از مرتبهٔ قبل داشتیم، به‌دست می‌آید $d=8$ و... به‌همین ترتیب، همهٔ رقم‌ها به دست می‌آیند:

$$e=4,\ d=8,\ c=3\ b=5,\ a=1$$

پاسخ. ۱۵۳۸۴.

۱۴۳. می‌توان نوشت:

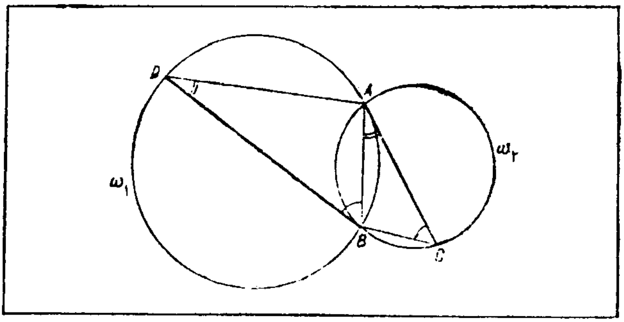
$$5^{1373}=5^{171\times 8+5}=5^5[(5^{171})^8-1]+1=$$
$$=5^5[(5^{171}-1)(5^{171}+1)(5^{342}+1)(5^{684}+1)+1]=$$
$$=5^5(5^{171}-1)(5^{171}+1)(5^{342}+1)(5^{684}+1)+5^5$$

جملهٔ اول این مجموع، عددی است که، دست‌کم، به پنج رقم برابرصفرختم می‌شود، زیرا $(5^{171}-1)$ بر۴ و هریك ازسه پرانتز بعد بر ۲ و، بنابراین، حاصل‌ضرب چهارپرانتز بر 2^5 بخش‌پذیراست وچون باید در عامل 5^5 ضرب شود، پس جملهٔ اول بر 10^5 بخش‌پذیر است. به‌این‌ترتیب، پنج رقم سمت راست عدد 5^{1373} همان پنج رقم‌سمت راست 5^5، یعنی ۰۳۱۲۵ است.

۱۴۴. ۱) وترمشترك دودایره، یعنی AB را رسم می‌کنیم (شکل ۶۹). داریم:

$$\widehat{ACB}=\widehat{ABD} \text{ و } \widehat{BAC}=\widehat{ADB}$$

پس زاویهٔ سوم دو مثلث ABC و BAD برابرند: $\widehat{CBA}=\widehat{BAD}$؛ واین به‌معنای موازی‌بودن (AD) و (BC) است.



شکل ۶۹

۲) مثلث‌های ABC و BAD متشابه‌اند، بنابراین

$$\frac{|AB|}{|BC|}=\frac{|AD|}{|AB|}\Longleftrightarrow |AB|^2=|AD|\cdot|BC|$$

۳) ازتشابه همان دومثلث ABC و BAD به دست می‌آید:

$$\frac{|BD|}{|AC|}=\frac{|AB|}{|BC|};\qquad \frac{|BD|}{|AC|}=\frac{|AD|}{|AB|}$$

وازضرب این دوبرابری دریکدیگر، به همان برابری موردنظر می‌رسیم.

۱۴۵. بنا برقانون (۲): $y=y\,o\,۱$، بنا براین

$$(۱\,o\,y)y=(۱\,o\,y)(y\,o\,۱)$$

و بنا برقانون(۱): $(۱\,o\,y)(y\,o\,۱)=yoy$ و، سرانجام، بنا برقانون (۳): $yoy=۱$. پس

$$(۱\,o\,y)y=۱\Longleftrightarrow ۱\,o\,y=\frac{۱}{y} \qquad (۱)$$

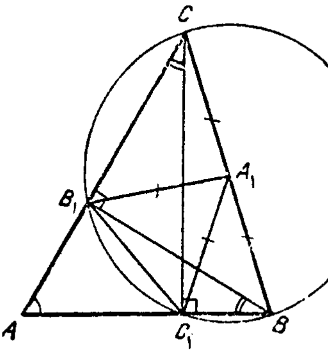
به‌همین ترتیب؛

$$x(۱\,o\,y)=(x\,o\,۱)(۱\,o\,y)=xoy \qquad (۲)$$

وچون باتوجه به (۱): $۱\,o\,y=\frac{۱}{y}$، پس از (۲) نتیجه می‌شود:

$$xoy=x\times\frac{۱}{y}$$

به‌این ترتیب: $۲۷o۴۳=\frac{۲۷}{۴۳}$.

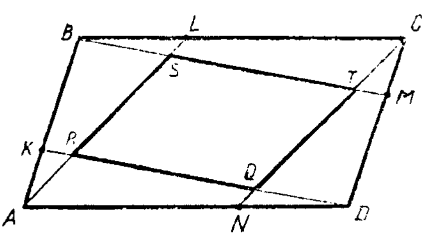


شکل ۷۰

۱۴۶. نقطه‌های C، $B_۱$، $C_۱$ و B، روی محیط دایره‌ای به‌مرکز $A_۱$ وشعاع $A_۱B$ قراردارند (شکل ۷۰). بنا براین مثلث $A_۱B_۱C_۱$ متساوی‌الساقین است:

$$|A_۱B_۱|=|A_۱C_۱|$$

چون $\widehat{C_۱BB_۱}=۳۰°$، پس کمان $B_۱C_۱$ برابر ۶۰ درجه و، درنتیجه $\widehat{C_۱A_۱B_۱}=۶۰°$؛ یعنی مثلث $A_۱B_۱C_۱$ متساوی‌الاضلاع است.



شکل ۷۱

۱۴۷. به سادگی می‌توان ثابت کرد، چهارضلعی $RSTQ$ متوازی‌الاضلاع است (شکل ۷۱ را ببینید). فرض می‌کنیم:

$$S_{ABCD}=s،\ S_{AKB}=x،\ S_{BLS}=y،$$

$$S_{KRSB}=z،\ S_{RSTQ}=\sigma$$

دراین‌صورت روشن است که

$$S_{SLCT}=S_{TMDQ}=S_{QNAR}=z،\ S_{CMT}=x،\ S_{DNQ}=y$$

از تشابه دومثلث ABS و AKR وهم دومثلث BCT و BLS به دست می‌آید:

$$\left(\frac{z+x}{x}=\frac{z+y}{y}=n^۲\right)\Longleftrightarrow\left(x=y، z=(n^۲-۱)x\right) \qquad (۱)$$

ازطرف دیگر

$$S_{ABL}=۲x+z، \qquad (۲)$$

درضمن (اگر h ارتفاع متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشد):

$$S_{ABL}=\frac{۱}{۲}|BL|\cdot h=\frac{|BC|}{۲n}\cdot h=\frac{s}{۲n}$$

یعنی، باتوجه به (۲) داریم:

$$۲x+z=\frac{s}{۲n} \qquad (۳)$$

برابری‌های (۱) و (۳) به ما می‌دهند:

$$x=\frac{s}{۲n(n^۲+۱)}، \; z=\frac{(n^۲-۱)s}{۲n(n^۲+۱)}$$

ولی $s=۴(x+z)+\sigma$. از آن‌جا

$$\sigma=s-۴(x+z)=s-\frac{۴n^۲s}{۲n(n^۲+۱)}=\frac{(n-۱)^۲}{n^۲+۱}s$$

وبنابراین: $\frac{s}{\sigma}=\frac{n^۲+۱}{(n-۱)^۲}$.

اگر نقطهٔ K را روی امتداد ضلع BA (در بیرون ضلع) و با همان شرط $|AK|=\frac{۱}{n}|AB|$ و، به طریق مشابهی، نقطه‌های L، M و N را انتخاب می‌کردیم، با استدلالی شبیه قبل، به دست می‌آید:

$$\frac{s}{\sigma'}=\frac{n^۲+۱}{(n+۱)^۲} \qquad (۴)$$

ببینیم، به‌ازای چه مقدارهایی از n، نسبت $\frac{s}{\sigma}$ برابرعددی درست است. داریم:

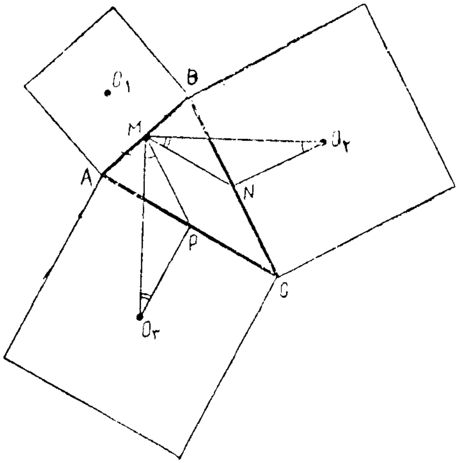
$$\frac{s}{\sigma}=\frac{n^۲+۱}{(n-۱)^۲}=۱+\frac{۲n}{(n-۱)^۲} \qquad (۵)$$

برای‌این‌که $\frac{2n}{(n-1)^2}$ عددی درست باشد، باید داشته باشیم:

$$2n \geqslant (n-1)^2 \Longleftrightarrow 2 \leqslant n < 2+2\sqrt{3}$$

وچون n عددی طبیعی است، پس $n=2$ یا $n=3$؛ ولی با آزمایش در (۵) معلوم‌می‌شود که تنها $n=2$ قابل قبول است و، دراین صورت $\frac{s}{\sigma}=5$.

ولی، $\frac{n^2+1}{(n+1)^2}$، به‌ازای هیچ مقداری از n، برابرعددی درست نمی‌شود (چرا؟).



شکل ۷۲

۱۴۸. فرض می‌کنیم، مثلث ABC را رسم‌کرده باشیم. M و N و P راوسط ضلع‌های مثلث می‌گیریم(شکل ۷۲).ثابت می‌کنیم، مثلث‌هـای O_2MN و O_3MP برابرند. درواقع

$$\left(|MN|=\frac{1}{2}|AC|،\ |PO_3|=\frac{1}{2}|AC|\right)$$

$$\Longrightarrow |MN|=|PO_3|$$

به همین‌ترتیب $|MP|=|NO_2|$. به جز این،دوزاویهٔ O_3PM و O_2NM برابرند، زیرا

$$\widehat{O_2NM}=90^\circ+\widehat{BNM}=90^\circ+\hat{C};$$

$$\widehat{O_3PM}=90^\circ+\widehat{APM}=90^\circ+\hat{C}$$

از برابری دو مثلث نتیجه می‌شود: $|O_2M|=|O_3M|$. فرض می‌کنیم: $\widehat{PMO_3}=\alpha$ و $\widehat{MO_3P}=\beta$؛ دراین‌صورت داریم:

$$\alpha+\beta=180^\circ-\widehat{MPO_3}=180^\circ-(90^\circ+\hat{C})=90^\circ-\hat{C};$$

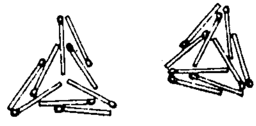
$$\widehat{O_2MO_3}=\alpha+\widehat{PMN}+\beta=\alpha+\beta+\hat{C}=90^\circ$$

یعنی نقطهٔ M، رأس قائمه ازمثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی است‌که، وتر آن، پاره خط راست O_2O_3 است؛ درضمن، این رأس، نسبت به خط راست O_2O_3، درهمان نیم‌صفحه‌ای

قرار دارد که O_1 واقع است. نقطه‌های N و P هم، همین ویژگی را دارند. به‌این ترتیب، رسم مثلث، بامعلوم بودن وسطهای سه ضلع آن، روشن است.

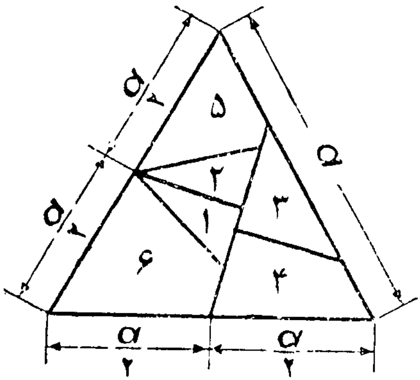
مسأله تنها یك جواب دارد و، این جواب، وقتی وجود دارد که، نقطه‌های O_1 و O_2 و O_3، روی یك خط راست نباشند و یك مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین را تشکیل ندهند.

۱۴۹. نمونه‌ای ازجواب، درشکل ۷۳ داده شده است.



شکل ۷۳

۱۵۰. پاسخ رادر شکل ۷۴ داده‌ایم. درستی شکل را ثابت کنید (جزء جزء شکل را در نظر بگیرید و، هر جا لازم است، برابری پاره خطهای راست و زاویه‌ها ویادریك امتداد بودن پاره خطهای راست را، براساس فرض‌های مسأله، ثابت کنید).



شکل ۷۴

۱۵۱. این دومعادله، حالت خاصی ازمعادلهٔ کلی

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1} = a_n + a_{n-1}^2 + \cdots + a_2^{n-1} + a_1^n$$

هستند که، در آن، n عدد طبیعی $(n \geqslant 2)$، $a_n \neq 0$ و $0 \leqslant a_i \leqslant 9$.

برای $n=2$، به‌معادلهٔ $\overline{xy} = x + y^2$ می‌رسیم که به‌سادگی قابل حل است:

$$10x + y = x + y^2 \Longleftrightarrow 9x = y(y-1)$$

y و $y-1$ نسبت به‌هم اول‌اند، بنابراین $y=9$ وازآن‌جا $x=8$. به‌این ترتیب، برای عددهای دورقمی، یك جواب به دست می‌آید:

$$89 = 8 + 9^2$$

به حالت $n=3$ می‌پردازیم. باید داشته باشیم:

$$\overline{xyz} = x + y^2 + z^3 \Longleftrightarrow 99x + y(10-y) = (z-1)z(z+1)$$

$y(10-y)$ باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد واین، وقتی ممکن است که y برابر یکی از رقم‌های ۰، ۱، ۳، ۴، ۶، ۷ یا ۹ باشد. برای حالت‌هایی که y برابر ۰، ۴ یا ۶ باشد، به جواب نمی‌رسیم (آزمایش کنید!). به‌ازای $y=3$ و $y=7$ به دست می‌آید:

$$3(33x+7) = z^3 - z$$

که برای $z=۵$ و $x=۱$ برقرار است. سرانجام به‌ازای $y=۱$ یا $y=۹$ داریم:

$$۹(۱۱x+۱)=(z-۱)z(z+۱)$$

$z-z^۳$ باید بر ۹ بخش‌پذیر باشد و این، تنها برای $z=۹$ یا $z=۸$، ممکن است. برای $z=۹$ جوابی برای x به‌دست نمی‌آید و برای $z=۸$، به‌دست می‌آید: $x=۵$.

به‌این‌ترتیب، درحالت $n=۳$، چهار جواب خواهیم داشت:

$$۱۳۵=۱+۳^۲+۵^۳,$$

$$۱۷۵=۱+۷^۲+۵^۳,$$

$$۵۱۸=۵+۱^۲+۸^۳,$$

$$۵۹۸=۵+۹^۲+۸^۳$$

درحالت $n=۴$ هم می‌توان معادله را، البته به‌صورتی پیچیده‌تر، حل کرد و ثابت کرد، معادلهٔ

$$\overline{xyzt}=x+y^۲+z^۳+t^۴$$

سه جواب دارد (خودتان ثابت کنید!):

$$۱۶۷۶=۱+۶^۲+۷^۳+۶^۴,$$

$$۱۸۰۶=۱+۸^۲+۰^۳+۶^۴,$$

$$۲۴۲۷=۲+۴^۲+۲^۳+۷^۴$$

همچنین، می‌توان ثابت کرد که معادلهٔ

$$\overline{xyztu}=x+y^۲+z^۳+t^۴+u^۵$$

جواب ندارد. ولی، به ظاهر، حل معادله‌های

$$\overline{xyztuv}=x+y^۲+z^۳+t^۴+u^۵+v^۶$$

$$\overline{xyztuvw}=x+y^۲+z^۳+t^۴+u^۵+v^۶+w^۷$$

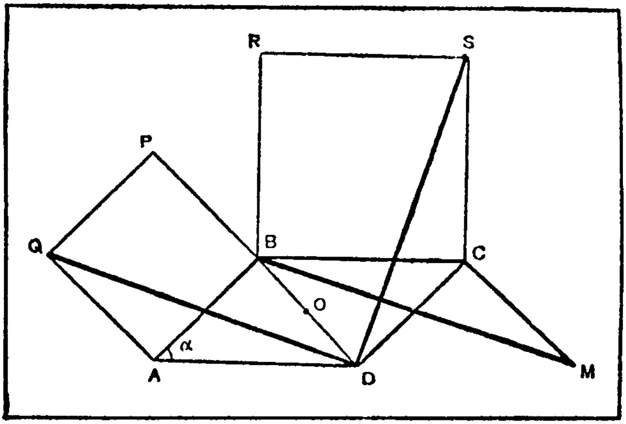
کار چندان ساده‌ای نیست. دربارهٔ معادلهٔ اخیر، این جواب پیدا شده است:

$$۲۶۴۶۷۹۸=۲^۱+۶^۲+۴^۳+۶^۴+۷^۵+۹^۶+۸^۷$$

وروشن است که، هرچه n بزرگتر شود، حل معادله هم، دشوارتر می‌شود.

۱۵۲. برای دو مثلث DQA و DSC داریم (شکل ۷۵):

$$|AD|=|SC|,\ |AQ|=|DC|,\ \widehat{QAD}=\widehat{DCS}=۹۰^\circ+\alpha$$



شکل ۷۵

بنابراین، مثلث‌های DQA و DSC برابرند و $|DQ|=|DS|$. ازطرف دیگر

$$\widehat{QDS}=\widehat{ADC}-(\widehat{QDA}+\widehat{SDC})=۱۸۰^\circ-\alpha-$$

$$-(\widehat{QDA}+\widehat{AQD})=۱۸۰^\circ-\alpha-(۱۸۰^\circ-۹۰-\alpha)=۹۰^\circ$$

۱۵۳. تعداد افرادگروه را n ومجموع سال‌های سن آن‌ها را،به جز بزرگترین آن‌ها، S می‌گیریم. دراین‌صورت داریم:

$$\frac{S+۱۷}{n}=۱۱،\quad \frac{S}{n-۱}=۱۰$$

که ازآن‌جا، به دست می‌آید: $n=۷$.

۱۵۴. سن کاپیتان تیم را n ومجموع سن بقیهٔ بازی‌کنان تیم را s می‌گیریم. باتوجه به شرط مسأله، به‌ترتیب، داریم:

$$\frac{s+n}{۱۱}-\frac{s}{۱۰}=۱;$$

یعنی

$$۱۰n-s=۱۱۰;$$

یا

$$۱۱n-(s+n)=۱۱۰;$$

ازآن‌جا

$$n-\frac{s+n}{۱۱}=۱۰$$

سن کاپیتان، ۱۰ سال ازسن متوسط تیم بیشتراست.

۱۵۵. دربارهٔ عددهای کامل، اندکی بیشترصحبت می‌کنیم.

نخستین دوعدد کامل، یعنی ۶ و ۲۸، از دوران باستان، شناخته شده بودند. دوعدد کامل بعدی (یعنی ۴۹۶ و ۸۱۲۸) را اقلیدس، در سدهٔ چهارم پیش ازمیلاد پیداکرد. هزار وپانصدسال گذشت تاپنجمین عددکامل (۳۳۵۵۰۳۳۶) شناخته شد. تا میانه‌های سدهٔ بیستم، تنها ۷ نمونه از این عددها بـه دست آمده بود. ازسال ۱۹۵۲، کامپیوتر بـه‌کمك آمد و، به‌تدریج، تا ۲۴ عددکامل پیدا شد؛ ولی اگر نخستین عددکامل (۶)، یك رقمی است، بیست وچهارمین عدد کامل، بیش‌از ۱۲۰۰۰ رقم دارد.

اقلیدس، نه‌تنها دوعدد کامل راپیداکرد، بلکه کلید جست‌وجوی عددهای کامل را هم، به‌دست‌داد. اوثابت کردکه، اگرعددی زوج، یك‌عددکامل باشد، به‌صورت $2^{p-1}(2^p-1)$ است که، در آن، هم p وهم 2^p-1 عددهایی اول‌اند. مثلاً

$$496=2^4(2^5-1);\quad 8128=2^6(2^7-1)$$

دوپرسش در برابرماقرار می‌گیرد: آیا تعداد عددهای زوج‌کامل، بی‌نهایت است؟ و آیاعدد فرد کامل وجود دارد؟ تاکنون، بـه هیچ‌کدام ازاین دوپـرسش، پاسخی داده نشده است. مرسن ریاضی‌دان فرانسوی هم، درسدهٔ هفدهم، به بررسی عددهای کامل پرداخت و حدس زدکه، اگرعدد اول p را بـرابریکی ازعددهای ۱۷، ۱۹، ۳۱، ۶۷، ۱۲۷ و ۲۵۷ بگیریم، دستوراقلیدس، منجربه عدد کامل می‌شود. خود مرسن نتوانست فرضیهٔ خودراموردآزمایش‌قراردهد: بغرنجی وتفصیل محاسبه‌ها، موجب اشتباه می‌شد. حقانیت مرسن‌رابرای $p=17$، $p=19$ و $p=31$، لئونار اولر، در سدهٔ هجدهم ثابت‌کرد. بعدها روشن شد، پیش‌بینی مرسن دربارهٔ $p=67$ و $p=257$ نادرست است. برای این‌که کارمان دربحث بعدی ساده شود، ازاین به بعد، عددهای به‌صورت 2^p-1 را، عددهای مرسن می‌نامیم.

درقدیم، وبه‌خصوص در سده‌های میانه، عددهای کامل را ـ شاید بـه دلیل دشواری پیداکردن‌آن‌ها و به‌دلیل ویژگی اسرارآمیزی‌که داشتند، «مقدس» و «خدایی» می‌دانستند. کلیسا اعلام‌کرده بودکه، مطالعهٔ عددهای کامل، روح رانجات می‌دهد و، اگـرکسی بتواند یك عدد جدید کامل کشف کند، به‌سعادت ابدی خواهد رسید. اعتقاد داشتندکه جهان، ازآن جهت زیباست‌که، آفریدگار، آن را در ۶ روزآفریده است و، نوع بشر، به‌این‌جهت‌ناقص است‌که، آفرینش‌آن، باعدد غیرکامل ۸ مربوط می‌شود. درواقع، تنها ۸ نفربودندکه همراه باحضرت نوح، ازطوفان جهانی، جان به سلامت بـردند. البته می‌توان این نظر را اصلاح کرد، زیرا درهمین طوفان، درضمن؛ هفت زوج حیوان اصیل وهفت زوج حیوان غیراصیل نجات یـافتندکه، روی هم، برابرعددکامل ۲۸ می‌شود. نمونه‌هایی ازاین‌قبیل را، بـاز هم می‌توان پیداکـرد. مثلاً دست‌های آدمی، مجهزبه یك عدد کامل‌اند: درده انگشت دست‌ها، ۲۸ بند وجود دارد.

به ریاضیات برگردیم.

مربعی رسم کنید وقطرهای آن رابکشید. چهار رأس مربع، به‌وسیلهٔ ۶ پاره‌خط‌راست به هم وصل شده‌اند. این را می‌توان پیش‌آمد جالبی دانست، زیرا ۶ عددی کامل است. جست‌وجو را ادامه می‌دهیم. مکعبی درنظرمی‌گیریم وهمهٔ قطرهای آن را، چه روی وجه‌ها و چه در درون مکعب رسم می‌کنیم. مکعب دارای ۱۲ یال است، روی ۶ وجه‌آن، بـه تعداد ۲ × ۶، یعنی ۱۲ قطروجود دارد،خود مکعب هم ۴ قطردارد. ۸ رأس مکعب به وسیلهٔ ۲۸ پاره خط راست به‌هم وصل شده‌اند، بازهم عددی کامل.

اگر به جای مربع، یك چهاروجهی درنظر بگیریم، رأس‌های آن به‌وسیلهٔ ۶ یال به‌هم وصل شده‌اند. همچنین، اگر بـه جای مکعب، یك ۸ ضلعی درنظر بگیریم، دارای ۸ ضلع و ۲۰ قطراست و، روی هم، تعداد ضلع‌ها وقطرها، برابر ۲۸ می‌شود؛ می‌توانستیم هرمی با قاعدهٔ ۷ ضلعی درنظر بگیریم، این هرم ۱۴ یـال دارد (۷ یـال جانبی و ۷ ضلع قاعده) و قاعدهٔ آن دارای ۱۴ قطراست، روی هم بازهم عدد کامل ۲۸ به دست می‌آید.

واین، تصادفی نیست. n نقطه را (به‌شرطی‌که هیچ سه نقطه‌ای روی یك خط راست نباشند)، می‌توان به وسیلهٔ $\frac{۱}{۲}n(n-۱)$ پاره خط راست بـه‌هم وصل کرد. بنابراین، اگر ۲^p رأس داشته باشیم (به شرطی‌که p و $۲^p-۱$ عددهایی اول باشند)، بـرای تعداد این پاره خطهای راست به دست می‌آید:

$$\frac{۱}{۲}\cdot ۲^p(۲^p-۱)=۲^{p-۱}(۲^p-۱)$$

که همان شرط اقلیدس، برای عددهای کامل است.

به‌این‌ترتیب، اگر درصفحه (یا درفضا) ۲^p نقطه داشته باشیم وهیچ سه‌نقطه‌ای بریك خط راست نباشند، به‌شرط اول بودن p و $۲^p-۱$، تعداد پاره‌خطهای راستی‌که این‌نقطه‌ها رابه هم وصل می‌کنند، برابر با یك عدد مرسن می‌شود: رابطهٔ اقلیدس دربارهٔ عددهای کامل به نحوی، باهندسهٔ اقلیدسی مربوط می‌شود.

به‌ویژگی دیگری ازعددهای کامل می‌پردازیم.

عددی طبیعی درنظربگیرید، رقم‌های آن‌راباهم جمع‌کنید تا عدد طبیعی تازه‌ای بـه دست‌آید. سپس، رقم‌های عددهای تازه راباهم جمع‌کنید، و این روند را ادامه دهید تا به عددی یك رقمی برسید. این عدد یك رقمی را «مجموع نهائی رقم‌ها» می‌نامیم وآن را با σ نشان می‌دهیم. مثلاً، σ برای عدد ۲۷۸۱۶۳۶۵ برابراست با ۲، زیرا داریم:

$$۲+۷+۸+۱+۶+۳+۶+۵=۳۸،$$

$$۳+۸=۱۱، \qquad ۱+۱=۲$$

باقی‌ماندهٔ هر عددی بر ۹، برابر است با «مجموع نهائی رقم‌ها» ی آن عدد. روشن است که اگر عددی بر ۹ بخش‌پذیر باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۹ برابر صفر، و «مجموع رقم‌های نهائی» در آن برابر ۹ می‌شود.

این عدد طبیعی را در نظر می‌گیریم:

$$۱۰^n \cdot a + ۱۰^{n-۱} \cdot b + ۱۰^{n-۲} \cdot c + \dots + ۱۰ p + r$$

آن را به این صورت می‌نویسیم:

$$(۱۰-۱)^n a + (۱۰-۱)^{n-۱} b + (۱۰-۱)^{n-۲} c + \dots +$$
$$+ (۱۰-۱) p + (a+b+c+\dots+p+r)$$

روشن است که جمله‌های شامل عامل‌های به صورت $(۱۰-۱)^k$ بر ۹ بخش‌پذیرند. جمله‌های بعدی را ــ که در واقع، همان مجموع رقم‌های عدد مفروض است، به‌این‌صورت می‌نویسیم:

$$(۱۰-۱)^m a_۱ + (۱۰-۱)^{m-۱} b_۱ + (۱۰-۱)^{m-۲} c_۱ + \dots +$$
$$+ (۱۰-۱) p_۱ + (a_۱+b_۱+c_۱+\dots+p_۱+r_۱)$$

مجموع رقم‌های تازه $(a_۱+b_۱+c_۱+\dots+p_۱+r_۱)$، بازهم عدد کوچکتری است. اگر این روند را ادامه دهیم، سرانجام، به‌عددی یک رقمی می‌رسیم که همان «مجموع نهائی رقم‌ها» یا σ برای عدد مفروض است.

به‌این‌ترتیب، برای محاسبهٔ σ، لازم نیست مرتباً رقم‌های عدد را باهم جمع کنیم. کافی است، ضمن جمع کردن رقم‌ها، مضرب‌های ۹ را کنار بگذاریم، تا در نتیجه، به عددی یک رقمی برسیم. مثلاً، در مثال عدد ۲۷۸۱۶۳۶۵؛ از ۷+۲ و ۱+۸ و ۳+۶ (که همه برابر ۹ هستند) صرف نظر می‌کنیم و در ۱۱ = ۵+۶، از عدد ۱۱، ۹ واحد کنار می‌زنیم، به همان عدد ۲، یعنی «مجموع نهائی رقم‌ها» می‌رسیم: $\sigma = ۲$.

از این‌جا نتیجه می‌شود که همیشه، اختلاف بین عدد مفروض A و «مجموع نهائی رقم‌ها»ی آن، برابر مضربی از ۹ می‌شود، بنابراین، می‌توانیم این رابطهٔ هم‌نهشتی را بنویسیم:

$$A \equiv \sigma (\mathrm{mod}\cdot ۹) \qquad (۱)$$

حالا، همهٔ عددهای طبیعی را در جدول ۱، طوری قرار می‌دهیم که مقدار σ برای عددهای هر سطر، ثابت و برابر عدد ستون سمت چپ در همان سطر باشد.

اگر عددهای نخستین ستون (یعنی ستون سمت چپ) را به a_i نشان دهیم، در آن صورت، هر عدد سطر i ام (A_i) به‌این‌ترتیب نوشته می‌شود:

جدول ۱

۱	۱۰	۱۹	۲۸	۳۷	۴۶	۵۵	۶۴	...
۲	۱۱	۲۰	۲۹	۳۸	۴۷	۵۶	۶۵	...
۳	۱۲	۲۱	۳۰	۳۹	۴۸	۵۷	۶۶	...
۴	۱۳	۲۲	۳۱	۴۰	۴۹	۵۸	۶۷	...
۵	۱۴	۲۳	۳۲	۴۱	۵۰	۵۹	۶۸	...
۶	۱۵	۲۴	۳۳	۴۲	۵۱	۶۰	۶۹	...
۷	۱۶	۲۵	۳۴	۴۳	۵۲	۶۱	۷۰	...
۸	۱۷	۲۶	۳۵	۴۴	۵۳	۶۲	۷۱	...
۹	۱۸	۲۷	۳۶	۴۵	۵۴	۶۳	۷۲	...

$$A_i \equiv a_i (\text{mod}\cdot ۹) \qquad (۲)$$

هم‌نهشتی‌ها را، مثل تساوی‌های معمولی، می‌توان باهم جمع کرد (و بنا براین، می‌توان درهم ضرب کرد و یا به توان رساند).

$$+\begin{cases} A_۱ \equiv a_۱ (\text{mod}\cdot ۹) \\ A_۲ \equiv a_۲ (\text{mod}\cdot ۹) \end{cases}$$
$$\overline{A_۱ + A_۲ \equiv (a_۱ + a_۲)(\text{mod}\cdot ۹)} \qquad (۳)$$

این حکم را ثابت می‌کنیم. از (۳) نتیجه می‌شود:

$$\frac{A_۱ - a_۱}{۹} = B_۱, \quad \frac{A_۲ - a_۲}{۹} = B_۲$$

که درآن‌ها، $B_۱$ و $B_۲$، عددهایی طبیعی‌اند. ازهمین‌جا، صحت هم‌نهشتی (۳) روشن‌می‌شود.

اثبات مربوط به ضرب هم‌نهشتی‌ها و یا بـه توان رساندن یك هم‌نهشتی را، خودتان می‌توانید به سادگی به‌دست آورید.

چند مثال:

a)
$$\begin{cases} ۲۱ \equiv ۳ (\text{mod}\cdot ۹) \\ ۳۲ \equiv ۵ (\text{mod}\cdot ۹) \end{cases}$$
$$\overline{۵۳ \equiv ۸ (\text{mod}\cdot ۹)}$$

b) $$۲۱ \times ۳۲ \equiv ۱۵ (\mathrm{mod}\cdot ۹)$$

یا به عبارت دیگر:

$$۲۱ \times ۳۲ \equiv ۶ (\mathrm{mod}\cdot ۹)$$

بنابراین، برای این‌که روشن کنیم، مجموع چندد عدد طبیعی (یاحاصل‌ضرب یا توان آن‌ها)، درچه سطری از جدول ۱ قرارگرفته‌اند، کافی است σ های آن‌ها راجمع‌کنیم (یا ضرب‌کنیم ویا به توان برسانیم).

حالا، جدول ۲ را، از توان‌های ۹ عدد طبیعی اول، با شروع ازتوان ۲، تشکیل می‌دهیم؛ در داخل پرانتزها σ های عددها نوشته شده است.

درجدول ۲ دیده‌می‌شودکه درهرسطر، مقدار σ، بعداز ۶ توان فاصله،تکرارمی‌شود. بنابراین، کافی است تنها توان‌های از ۲ تا ۷ رادرنظربگیریم.

ازمقایسهٔ دوجدول ۱ و ۲، نتیجه‌های بسیار جالب و زیادی بـه دست می‌آید. مثلاً:

جدول ۲

$۱^{۲}=۱$	(۱)	$۱^{۳}=۱$	(۱)	$۱^{۴}=۱$	(۱)	$۱^{۵}=۱$	(۱)
$۲^{۲}=۴$	(۴)	$۲^{۳}=۸$	(۸)	$۲^{۴}=۱۶$	(۷)	$۲^{۵}=۳۲$	(۵)
$۳^{۲}=۹$	(۹)	$۳^{۳}=۲۷$	(۹)	$۳^{۴}=۸۱$	(۹)	$۳^{۵}=۲۴۳$	(۹)
$۴^{۲}=۱۶$	(۷)	$۴^{۳}=۶۴$	(۱)	$۴^{۴}=۲۵۶$	(۴)	$۴^{۵}=۱۰۲۴$	(۷)
$۵^{۲}=۲۵$	(۷)	$۵^{۳}=۱۲۵$	(۸)	$۵^{۴}=۶۲۵$	(۴)	$۵^{۴}=۳۱۲۵$	(۲)
$۶^{۲}=۳۶$	(۹)	$۶^{۳}=۲۱۶$	(۹)	$۶^{۴}=۱۲۹۶$	(۹)	$۶^{۵}=۷۷۷۶$	(۹)
$۷^{۲}=۴۹$	(۴)	$۷^{۳}=۳۴۳$	(۱)	$۷^{۴}=۲۴۰۱$	(۷)	$۷^{۵}=۱۶۸۰۷$	(۴)
$۸^{۲}=۶۴$	(۱)	$۸^{۳}=۵۱۲$	(۸)	$۸^{۴}=۴۰۹۶$	(۱)	$۸^{۵}=۳۲۷۶۲$	(۸)
$۹^{۲}=۸۱$	(۱)	$۹^{۳}=۷۲۹$	(۹)	$۹^{۴}=۶۵۱۱$	(۹)	$۹^{۵}=۵۹۰۴۹$	(۹)

$۱^{۶}=۱$	(۱)	$۱^{۷}=۱$	(۱)	$۱^{۸}=۱$	(۱)
$۲^{۶}=۶۴$	(۱)	$۲^{۷}=۱۲۸$	(۲)	$۲^{۸}=۲۵۶$	(۴)
$۳^{۶}=۷۲۹$	(۹)	$۳^{۷}=۱۲۸۷$	(۹)	$۳^{۸}=۶۵۶۱$	(۹)
$۴^{۶}=۴۰۹۶$	(۱)	$۴^{۷}=۱۶۳۸۴$	(۴)	$۴^{۸}=۶۵۵۲۶$	(۷)
$۵^{۶}=۱۵۶۲۵$	(۱)	$۵^{۷}=۷۸۱۲۵$	(۵)	$۵^{۸}=۳۹۰۶۲۵$	(۷)
$۶^{۶}=۴۶۶۵۶$	(۱)	$۶^{۷}=۲۷۹۹۳۶$	(۹)	$۶^{۸}=۱۶۷۹۶۱۶$	(۹)
$۷^{۶}=۱۱۷۶۴۹$	(۱)	$۷^{۷}=۴۲۳۵۴۳$	(۷)	$۷^{۸}=۵۷۶۴۸۰۱$	(۴)
$۸^{۶}=۲۶۲۱۴۴$	(۱)	$۸^{۷}=۲۰۹۷۱۵۲$	(۸)	$۸^{۸}=۱۶۷۷۷۲۱۶$	(۱)
$۹^{۶}=۵۳۱۴۴۱$	(۹)	$۹^{۷}=۴۷۸۲۹۶۹$	(۹)	$۹^{۸}=۴۳۰۴۶۷۲۱$	(۹)

توانی (به جز توان واحد) وجود ندارد که در آن: σ برابر ۳ یا ۶ باشد. σ برای توان ششم تنها برابر ۱ یا ۹ می‌باشد، و برای توان سوم علاوه بر ۱ و ۹، عدد ۸ هم برای σ پیدا می‌شود. برای توان‌های دوم و چهارم، مقدار σ (درهر دو مورد)، تنها عددهای ۱، ۴، ۷ و ۹ می‌شود، ولی جای ۴ و ۷ در آن‌ها عوض شده است.

این هم از این نتیجه‌ها: $\sigma = ۲$، تنها در دوحالت پیدا شده است در $۵^۵$ و $۲^۷$؛ و $\sigma = ۵$ هم در دو حالت $۲^۵$ و $۵^۷$. پایهٔ عددها درهر دوحالت یکی است، ولی نماهای آن‌ها جا به‌جا شده است.

چنین ویژگی‌ها از این نوع را می‌توان دراین جدول‌ها پیداکرد. ولی همهٔ این‌ها، مقدمه چینی بود، مقدمه‌ای برای خود داستان.

کمی دقت می‌خواهد تا به خاصیت جالب وبسیار مهم دیگری ازجدول ۱ پی ببریم. معلوم می‌شودکه همهٔ عددهای کامل زوج (به استثنای ۶)، تنها در سطر اول جدول ۱ قرار دارند. به‌زبان دیگر، همهٔ عددهای زوج کامل (به جز نخستین آن‌ها) نسبت به مدل ۹، با ۱ هم‌نهشت هستند. اگرعدد کامل را به S نشان دهیم، داریم:

$$S = ۱(\text{mod.}\ ۹)$$

عددهای کاملی‌که ازآن‌ها صحبت می‌کنیم (وعددهای کامل‌دیگری راهم‌نمی‌شناسیم)، در رابطهٔ اقلیدس صدق می‌کنند:

$$S = ۲^{p-۱}(۲^p - ۱) \qquad (۵)$$

که درآن، هم p وهم $۲^p - ۱$ باید عددهایی اول باشند.

حالا، به اثبات این حکم می‌پردازیم. می‌دانیم‌که عدد p، مثل هرعدد اول (به جز حالت استثنائی $p = ۲$)، عددی فرد است. از جدول ۲ معلوم است‌که برای توان فرد ۲، تنها باتوان‌های ۳ و ۵ و ۷ سروکار داریم. ضمناً، مقدار σ، دراین موارد، به ترتیب، برابر است با ۸، ۵ و ۲. دراین‌صورت، مقدار σ برای $(۲^p - ۱)$، به‌ترتیب، برابر ۷، ۴ و ۱ می‌شود. ازطرف دیگر،نمای نخستین عامل دررابطهٔ(۵)،یعنی $p - ۱$، ۲ یا ۴ یا ۶ می‌شود ومقدار σ برای $۲^{p-۱}$، به‌ترتیب، برابر ۴، ۷ و ۱ می‌شود.

مقدار σ را در مورد دوعامل رابطهٔ (۵) درهم ضرب می‌کنیم، ۴×۷، ۷×۴ و ۱، یعنی ۲۸، ۲۸ و ۱ به‌دست می‌آید. به‌این‌ترتیب، مقدار σ، برای هرسه حاصل‌ضرب برابر واحد می‌شود واین همان چیزی است‌که می‌خواستیم ثابت‌کنیم.

از آن‌جاکه هیچ شرطی، به جز فرد بودن برای p نکردیم، علاوه‌بر عددهای‌کامل،همهٔ عددهای دیگری هم‌که در رابطهٔ (۵) صدق‌کنند، درسطر اول جدول ۱ قرارگرفته‌اند.

۱۰۱۵۶) معادلهٔ مفروض رامی‌توان به‌صورت

$$۱۰۰a+۱۰b+c=c(۱۰b+a)$$

ویا، بعداز اندکی تبدیل، به‌صورت زیرنوشت:

$$۱۰(۱۰a-bc+b)=c(a-۱) \qquad (۱)$$

$c(a-۱)$ باید بر ۱۰ بخش‌پذیر باشد. حالت‌های مختلف را بررسی می‌کنیم.

اگر $a=۱$، آن‌وقت $b(c-۱)=۱۰$ که، درنتیجه، $b=۲$ و $c=۶$ یـا $b=۵$ و $c=۳$:

$$۱۲۶=۶\times ۲۱ \quad \text{و} \quad ۱۵۳=۳\times ۵۱$$

$c\neq ۵$، زیرا به‌ازای $c=۵$، معادلهٔ (۱) به‌صورت

$$۴(۵a-۲b)=a-۱$$

درمی‌آیدکه تنها به‌ازای $a=۱$، $a=۵$ یا $a=۹$ برقرار است، ولی بـه‌ازای هیچ‌یك از ازاین مقدارها، مقدار مناسبی برای b به‌دست نمی‌آید.

پس باید داشته باشیم $a-۱=۵$، یعنی $a=۶$. معادلهٔ (۱) چنین می‌شود:

$$۲(۶۰-bc+b)=c$$

c عددی است زوج: $c=۲k$ $(۱\leqslant k\leqslant ۴)$ و

$$k=\frac{۶۰+b}{۲b+۱}$$

چون $k\leqslant ۴$، پس $b\geqslant ۸$، یعنی $b=۸$ یا $b=۹$. ولی $b=۹$ به جواب مناسبی‌نمی‌رسد، بنابراین $b=۸$ و $k=۴$ یا $c=۸$:

$$۶۸۸=۸\times ۸۶$$

یادداشت. معادلهٔ $a\cdot\overline{bc}=\overline{ab}\cdot c$ هم دارای جواب است.

$$۱\times ۹۵=۱۹\times ۵; \qquad ۲\times ۶۵=۲۶\times ۵;$$

$$۴\times ۹۸=۴۹\times ۸; \qquad ۱\times ۶۴=۱۶\times ۴$$

خودتان ثابت‌کنید، معادلهٔ $a\cdot\overline{bc}=\overline{ab}\cdot c$ جواب دیگری ندارد.

همچنین می‌توان ثابت‌کرد (والبته، نه چندان ساده)که معادلهٔ

$$\overline{ab}\cdot\overline{cd}=a\cdot\overline{bcd}$$

دارای این جواب‌ها، وتنها همین جواب‌هاست:

$۱۳ \times ۲۵ = ۱ \times ۳۲۵;\quad ۱۹ \times ۵۰ = ۱ \times ۹۵۰;\quad ۲۷ \times ۵۶ = ۲ \times ۷۵۶;$

$۴۹ \times ۸۰ = ۴ \times ۹۸۰;\quad ۱۶ \times ۴۰ = ۱ \times ۶۴۰;\quad ۲۶ \times ۵۰ = ۲ \times ۶۵۰;$

$$۳۹ \times ۷۵ = ۳ \times ۹۷۵;\qquad ۸۳ \times ۳۲ = ۸ \times ۳۳۲$$

۲) معادلهٔ $\overline{abcd} = (\overline{ab})^۲ + (\overline{cd})^۲$ دوجواب دارد:

$$۱۲۳۳ = ۱۲^۲ + ۳۳^۲,\qquad ۸۸۳۳ = ۸۸^۲ + ۳۳^۲$$

می‌توان ثابت کرد که، این معادله، جواب دیگری ندارد. طرح اثبات، بسیار ساده است. به سادگی می‌توان نتیجه‌گرفت که، برای برقراری معادله، باید عبارت $b^۲ + d(d-۱)$ بر ۱۰ بخش‌پذیر باشد. ازهمین‌جا، می‌توان حالت‌های ممکن را برای b و d و، از آن‌جا، برای a و c پیدا کرد.

یادداشت. جالب است که معادلهٔ $\overline{ab} = a^۲ + b^۲$ جواب ندارد و برای معادلهٔ

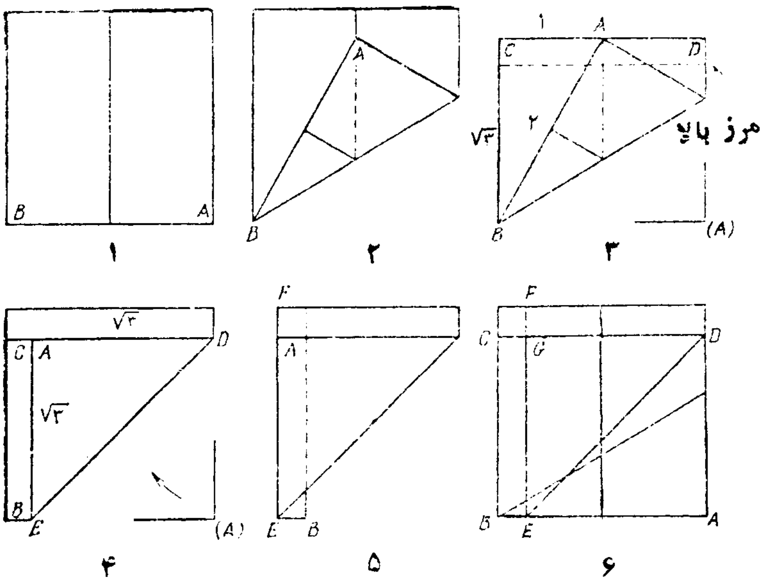
$$\overline{abcdef} = (\overline{abc})^۲ + (\overline{def})^۲$$

کار بسیار دشوار می‌شود.

۱۵۷. ۱) دوزاویهٔ A و B راروی هم بگذاریدوخط تای‌وسط راپیداکنید(شکل۷۶)؛

۲) رأس زاویهٔ A را روی خط تای وسط بگذارید وخط تای تازه‌ای پیدا کنید؛

۳) مرزبالا رابه طرف پشت کاغذ تاکنید، به نحوی که خط تا، یعنی CD، از نقطهٔ A بگذرد (اگردوبخش خط تای وسط راروی هم قراردهید، CD به‌صورت افقی درمی‌آید)،



شکل ۷۶

بعد زاویهٔ A را، به جای اول خود (A) برگردانید؛

۴) AD را روی بخشی از پاره خط راست CD قرار دهید که تای جدید DE را به‌وجود آورد؛

۵) CB را به طرف پشت تا کنید که خط تای EF درامتداد AE پیدا شود.

اکنون، صفحهٔ کاغذ را به صورت نخستین خود درآورید، مربع مجهول $AEGD$ ظاهر می‌شود.

فرض کنید $|AB| = ۲$. مساحت مربع اصلی برابر ۴ می‌شود. روی شکل ۷۶ در حالت ۳ داریم: $|AC| = ۱$ و $|AB| = ۲$. بنابراین $|CB| = \sqrt{۳}$. درحالت ۶، برای مساحت مربع $AEGD$ به دست می‌آید $\sqrt{۳}\times\sqrt{۳} = ۳$ که برابراست با $\frac{۳}{۴}$ عدد ۴.

۱۵۸. درضرب سمت چپ، رقم اول عامل دوم ضرب باید برابر ۹ باشد، زیرا تنها دراین‌صورت، حاصل‌ضرب آن در ۳، به رقم ۷ ختم می‌شود. ازضرب ۹ در عامل اول ضرب، عددی چهار رقمی به دست آمده است، بنابراین رقم دهگان عامل دوم ضرب، باید از ۹ بزرگتر باشد تا ازضرب آن در جملهٔ اول ضرب، عددی پنج‌رقمی به‌دست آید که ممکن نیست.

امادربارهٔ ضرب سمت راست. رقم یکان عامل‌دوم‌ضرب برابر ۸ است. حاصل‌ضرب ۸ در عامل اول، عددی چهار رقمی و حاصل‌ضرب دهگان عامل دوم در عامل اول، عددی پنج‌رقمی شده است، یعنی دهگان عامل‌دوم ضرب، باید برابر ۹ باشد. پس عامل‌دوم‌ضرب برابراست با ۹۸.

اگرعامل اول ضرب را x بگیریم، روشن است که

$$۸x \leqslant ۹۹۹۹ \quad \text{و} \quad ۹x \geqslant ۱۰۰۰۰$$

ازآن‌جا

$$۱۱۱۲ \leqslant x \leqslant ۱۲۴۹$$

وچون عدد x به ۳ ختم شده است، پس

$$x \in \{۱۱۱۳، ۱۱۲۳، \ldots، ۱۲۴۳\}$$

با آزمایش روشن می‌شود که هر ۱۴ عدد، جواب‌های مسأله‌اند.

۱۵۹. عدد $\varphi = \frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$ راعدد طلائی‌گویند.

فرض کنید، پاره خط راست AB را به وسیلهٔ نقطهٔ C به دوبخش تقسیم کرده باشیم و

$$|AC| = a،\ \ |CB| = b،\ \ a > b$$

دراین‌صورت، اگر نسبت بخش کوچکتر به‌بخش بزرگتر، با نسبت بخش بزرگتر به تمامی پاره خط برابر باشد، نسبت $\frac{a}{b}$ را نسبت طلائی گویند. درواقع

$$\frac{b}{a}=\frac{a}{a+b}\Longleftrightarrow a^۲-ba-b^۲=۰$$

وازآن‌جا

$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}=\varphi=۱/۶۱۸۰۳۴...$$

عدد φ، ویژگی‌های جالبی دارد، مثلاً

$$\varphi+۱=\varphi^۲,\quad \varphi-۱=\frac{۱}{\varphi},$$

وازاین دوبرابری به دست می‌آید: $\varphi^۲-\frac{۱}{\varphi}=۲$.

اگر درمعادلهٔ مفروض $x=۲$ بگیریم، آن‌وقت

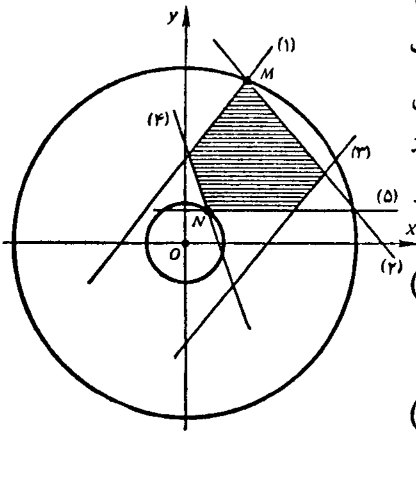
$$\varphi^x-\frac{x-۱}{\varphi}=\varphi^۲-\frac{۱}{\varphi}=۲$$

ومعادلهٔ ما به صورت یك اتحاد درمی‌آید:

$$\varphi^۲-\frac{۱}{\varphi}=۲$$

پاسخ. یکی ازجواب‌های معادله $x=۲$ است.

۱۶۰. مجموعهٔ نقطه‌های (x, y) که با نامعادله‌های مفروض سازگار باشند، دردرون یك پنج‌ضلعی قراردارند (شکل ۷۷ را ببینید) وروشن است که، برای این نقطه‌ها، حداکثر $x^۲+y^۲$ برابراست بافاصلهٔ OM وحداقل $x^۲+y^۲$ برابر فاصلهٔ ON است:



شکل ۷۷

$$(x^۲+y^۲)_{max}=|OM|=$$
$$=\frac{۴}{۲۹}\sqrt{۵۶۲۹}\approx۱۰/۳,$$

$$(x^۲+y^۲)_{min}=|ON|=$$
$$=\frac{۲}{۳}\sqrt{۱۳}\approx۲/۴$$

۱۶۱. با جداکردن چهاروجهی ازمکعب، چهارهرم‌مثلث‌القاعدهٔ برابر، باقی‌می‌ماند (درشکل ۱۸، رأس‌های این هرم‌ها، بررأس‌هایی ازمکعب که نام‌گذاری نکرده‌ایم، قرار دارند). ازبین این چهارهرم، مثلاً هرمی را انتخاب می‌کنیم که، چهار رأس آن، رأس‌های

مثلث CBD و رأس پایینی مکعب است. حجم این هرم برابر است با $\frac{۱}{۳}$ حاصل‌ضرب مساحت قاعده در ارتفاع آن. قاعدهٔ این هرم، مثلثی است که، مساحت آن، برابر است با نصف مساحت قاعدهٔ مکعب، یعنی $\frac{۱}{۲}$، وارتفاعی به طول واحد دارد. بنابراین حجم این هرم برابر $\frac{۱}{۶}$ و، مجموع حجم‌های چهارهرم کوچك، برابر $\frac{۲}{۳}$ می‌شود. درنتیجه، باقی‌ماندهٔ حجم مکعب، یعنی حجم هرم مورد نظرما، برابراست با $\frac{۱}{۳}$.

۱۶۲. الف) عدد ۰/۰۰...۰۱ (با ۹۹ رقم صفر بعدازممیز) رابا a نشان می‌دهیم. در این‌صورت خواهیم داشت:

$$\frac{1}{1+a}=\frac{1+a-a}{1+a}=1-\frac{a}{1+a}=1-a\cdot\frac{1+a-a}{1+a}=$$

$$=1-a+\frac{a^2}{1+a}=1-a+a^2\cdot\frac{1+a-a}{1+a}=1-a+a^2-\frac{a^3}{1+a}$$

روشن است که $\frac{a^3}{1+a}<a^3=\frac{1}{10^{300}}$.

بنابراین، عدد مطلوب، بادقتی که خواسته شده، برابراست با

$$1-a+a^2=1-\frac{1}{10^{100}}+\frac{1}{10^{200}}=0/99...900...01$$

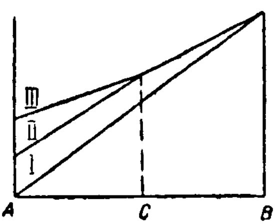
که در آن، بعداز ممیز، ابتدا صدرقم ۹ و، سپس ۹۹ رقم صفروجود دارد.

ب) جذر هرعددکوچکتر ازواحد، ازواحدکوچکتر وازخود عدد بزرگتراست:

$$0/99...9<\sqrt{0/99...9}<1$$

درهردوجا، بعداز ممیز ۱۰۰ رقم برابر ۹ داریم. بنابراین، صدرقم اول بعداز ممیزدر جواب، همه ازرقم‌های ۹ تشکیل شده‌اند.

۱۶۳. سرعت پیادهٔ دوم را درنیمهٔاول راه x، ووسط مسیررا C می‌گیریم (شکل ۷۸). دراین‌صورت، پیادهٔدوم، فاصلهٔ AC رادر $\frac{|AC|}{x}$ ساعت وپیادهٔ سوم در $\frac{|AC|}{۶}$ ساعت طی می‌کنند. بنابراین، فاصلهٔ زمانی بین آغازحرکت دوپیادهٔ



شکل ۷۸

اول ودوم، وهم دوپیادهٔ دوم وسوم، برابراست با

$$\left(\frac{|AC|}{x}-\frac{|AC|}{۶}\right)$$ ساعت

پیادهٔ اول، فاصلهٔ AB را در $\frac{|AC|}{۲}$ ساعت وپیادهٔ سوم، که به اندازهٔ $۲\left(\frac{|AC|}{x}-\frac{|AC|}{۶}\right)$ ساعت دیرتر ازپیادهٔ اول حرکت کرده است، در $\frac{|AC|}{۶}+\frac{۲|AC|}{x+۶}$ ساعت پیموده است وچون باهم به B رسیده‌اند، بنابراین

$$\frac{|AC|}{۲}=\left[۲\left(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{۶}\right)+\frac{۱}{۶}+\frac{۲}{x+۶}\right]\cdot|AC|$$

ویا، بعداز ساده کردن

$$\frac{۲}{۳}=\frac{۲}{x}+\frac{۲}{x+۶}$$

که از آن‌جا به دست می‌آید: $x=۳\sqrt{۲}$. سرعت پیادهٔ دوم در نیمهٔ اول مسیر، برابر $۳\sqrt{۲}$ کیلومتر درساعت بوده است.

۱۶۴. باید عددهای طبیعی n و k را طوری انتخاب کرد که داشته باشیم:

$$۱۹۰۰<۲^n-۲^k\leqslant ۲۰۰۰$$

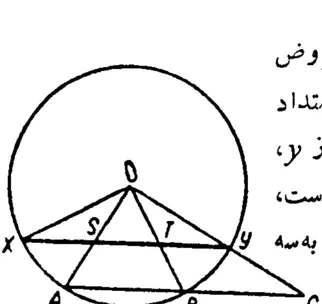
چون $۱۹۰۰<۲^{۱۰}$، پس $۱۱\geqslant n$. اگر $۱۲\geqslant n$، آن‌وقت $۴۰۸۶\geqslant ۲^n$ و برای هر مقدار n و k $(n>k)$ به‌دست می‌آید $۲۰۰۰>۲^k-۲^n$. پس $۱۱=n$.

به‌همین‌ترتیب، می‌توان مقدار k راهم به دست آورد.

پاسخ. مسأله دوجواب دارد:

$$۱۹۲۰=۲^{۱۱}-۲^{۷} \quad و \quad ۱۹۸۴=۲^{۱۱}-۲^{۶}$$

۱۶۵. ۱) ساختمان. OA و OB را دوشعاع مفروض می‌گیریم (شکل ۷۹). AB رابه‌اندازهٔ $|BC|=|AB|$ امتداد می‌دهیم. فرض کنید OC، محیط دایره رادر y قطع کند. از y، خط راستی موازی وتر AB رسم می‌کنیم؛ این خط راست، وتری در دایره می‌سازد که به وسیلهٔ شعاع‌های OA و OB به‌سه بخش برابر تقسیم‌می‌شود.



شکل ۷۹

۲) اثبات. نقطه‌های برخورد xy را با شعاع‌های OA

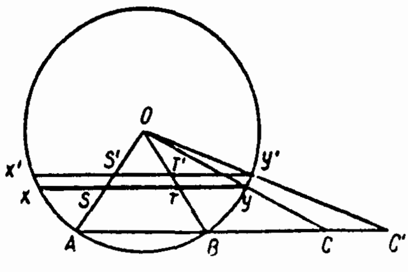
و OB، به‌ترتیب S و T می‌گیریم. چون $(AC)\|(xy)$، پس دو مثلث OST و OAB، همچنین، دو مثلث OTy و OBC متشابه‌اند، یعنی

$$\frac{|ST|}{|AB|}=\frac{|OT|}{|OB|} \text{ و } \frac{|OT|}{|OB|}=\frac{|Ty|}{|BC|}$$

و چون $|AB|=|BC|$، بنابراین $|ST|=|Ty|$.

اکنون ثابت می‌کنیم $|xS|=|Ty|$. برای این منظور، ثابت می‌کنیم، دومثلث OSx و OyT برابرند.درواقع داریم: $|Ox|=|Oy|$ (شعاع‌های دایره)، $\widehat{OSx}=\widehat{OTy}$ (مکمل‌های $\widehat{OST}$ و $\widehat{OTS}$) و $|OS|=|OT|$.

بررسی راه حل. این ساختمان همیشه ممکن است، مگر در حالتی‌که دوشعاع OA و OB درامتداد هم باشند. درضمن، این ساختمان منجربه یك جواب منحصرمی‌شود. ممکن است ادعا شود، می‌توان باساختمان دیگری، جواب دیگری هم پیداکرد. ثابت می‌کنیم، مسأله، جواب دیگری ندارد.



شکل ۸۰

فرض می‌کنیم،وتر $x'y'$، شعاع‌های OA و OB رادرنقطه‌های S' و T' طوری قطع کرده باشدکه داشته باشیم:

$$|x'S'|=|S'T'|=|T'y'|$$

ثابت می‌کنیم، دراین‌صورت، وترهای xy و $x'y'$ برهم منطبق‌اند (شکل ۸۰).

ابتدا ثابت می‌کنیم $\widehat{OSy}=\widehat{OS'y'}$. در دو مثلث OSx و OTy داریم: $\widehat{OxS}=\widehat{OyT}$ (مثلث Oxy متساوی‌الساقین‌است)، $|xS|=|yT|$، $|Ox|=|Oy|$،یعنی این دو مثلث برابرند و، درنتیجه $\widehat{OSx}=\widehat{OTy}$ و از آن‌جا $\widehat{OST}=\widehat{OTS}$. به‌همین ترتیب ثابت می‌شود: $\widehat{OS'T'}=\widehat{OT'S'}$. ازاین‌جا به دست می‌آید: $\widehat{OST}=\widehat{OS'T'}$، زیرا هرکدام ازآن‌ها، با $\frac{1}{2}(180^\circ-\widehat{AOB})$ برابراست. به‌این ترتیب، وترهای xy و $x'y'$، یابرهم منطبق‌اند ویا باهم موازی‌اند.آن‌ها راموازی باهم می‌گیریم. بدون این‌که به کلی بودن بحث لطمه‌ای بخورد، می‌توان فرض‌کرد: $|OS|>|OS'|$. دراین صورت $|ST|>|S'T'|$، زیرا

$$|ST|:|OS|=|S'T'|:|OS'|$$

ولی چون وترهای xy و $x'y'$ دوجواب مسأله‌اند، باید داشته باشیم: $|xy|>|x'y'|$.

ازطرف دیگر، وتر xy درفاصلهٔ دورتری ازمرکز (نسبت به وتر $x'y'$) قراردارد و، بنابراین، $|xy|<|x'y'|$.

تناقض حاصل روشن می‌کندکه، دو وتر xy و $x'y'$، برهم منطبق‌اند.

۱۶۶. اگرمرکزیکی ازدایره‌ها،روی نقطهٔ A باشد،چیزی برای‌اثبات باقی‌نمی‌ماند. بنابراین، فرض می‌کنیم، مرکزهیچ دایره‌ای، منطبق بر A نباشد. دراین‌صورت، اگرازنقطهٔ A، به مرکزهای دایره‌ها وصل‌کنیم، شش زاویه به مجموع ۳۶۰ درجه به دست می‌آید؛ یعنی دست‌کم یکی ازاین زاویه‌ها، از ۶۰ درجه تجاوز نمی‌کند. مرکزهای نظیراین زاویه را، $O_۱$ و $O_۲$ می‌نامیم ($\widehat{O_۱AO_۲}\leqslant ۶۰^\circ$).

اگر $\widehat{O_۱AO_۲}=۰^\circ$، درستی حکم روشن است. بنابراین فرض می‌کنیم:

$$۰^\circ<\widehat{O_۱AO_۲}\leqslant ۶۰^\circ$$

دوزاویهٔ $AO_۱O_۲$ و $AO_۲O_۱$ رادرنظرمی‌گیریم:

$$\widehat{AO_۱O_۲}+\widehat{AO_۲O_۱}=۱۸۰^\circ-\widehat{O_۱AO_۲}\geqslant ۱۲۰^\circ$$

یعنی یکی ازاین دوزاویه، برابریا بزرگترازه ۶۰ درجه است. برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم $\widehat{AO_۱O_۲}\geqslant ۶۰^\circ$. درمثلث $AO_۱O_۲$، ضلع بزرگتر روبه روی زاویهٔ بزرگتر است، یعنی $|AO_۲|\geqslant|O_۱O_۲|$. چون دایرهٔ به مرکز $O_۲$ شامل نقطهٔ A است، پس برای $r_۲$، شعاع آن، داریم: $r_۲>|AO_۲|\geqslant|O_۱O_۲|$. یعنی $O_۱$ در درون‌دایرهٔ به‌مرکز $O_۲$ قرار دارد که، درنتیجه، درستی حکم راثابت می‌کند.

۱۶۷. دراین‌جا، صورت مسأله وجواب آن را داده‌ایم:

$$\begin{array}{r} **\times \\ ** \\ \hline *** \\ *** \\ \hline ****+ \\ ۱** \\ \hline ***** \end{array} \quad\Longrightarrow\quad \begin{array}{r} ۹۹\times \\ ۹۹ \\ \hline ۸۹۱ \\ ۸۹۱ \\ \hline ۹۸۰۱+ \\ ۱۹۹ \\ \hline ۱۰۰۰۰ \end{array}$$

رمزکار، در پنج رقمی‌بودن نتیجهٔ آخر است. هردوعدد دیگر، به جز ۹۹ را درنظر بگیریم، نمی‌توانیم درپایان‌کار، به عددی پنج رقمی برسیم.

۱۶۸. درهر سطر، سه عدد فیثاغوری قراردارد:

$$۱^۲=۰^۲+۱^۲$$

$$۵^۲=۳^۲+۴^۲$$

$$۱۳^۲=۵^۲+۱۲^۲،$$

$$۲۵^۲=۷^۲+۲۴^۲$$

درضمن،درهر سطر،دوعدد متوالی‌وجود دارد و،عددهای ستون‌اول، عددهای فردمتوالی‌اند. بنابراین، برای سه سطربعدی باید داشته باشیم:

۹ ۴۰ ۴۱

۱۱ ۶۰ ۶۱

۱۳ ۸۴ ۸۵

یادداشت. می‌دانیم، عددهای فیثاغوری رامی‌توان به‌صورت

$$a=m^۲+n^۲،\ \ b=m^۲-n^۲،\ \ c=۲mn$$

نشان داد ($m،\ n\in\mathbf{N}$)که، درآن‌ها، a طول وتر و b و c، طول‌های دوضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه دریك مثلث قائم‌الزاویه‌اند، زیرا

$$(m^۲+n^۲)^۲=(m^۲-n^۲)^۲+(۲mn)^۲$$

درمسألهٔ ما، باید تفاضل طول‌های وتر ویکی ازدو ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه (ضلعی که طول آن، عددی زوج است)، برابرواحد شود، یعنی داشته باشیم:

$$(m^۲+n^۲)-۲mn=۱\Longrightarrow m=n+۱$$

که دراین‌صورت، طول‌های a، b و c، چنین می‌شوند:

$$a=۲n^۲+۲n+۱،\ b=۲n+۱،\ c=۲n^۲+۲n$$

اکنون، اگـرمثلاً بخواهیم داشته بـاشیم $b=۱۳$، آن وقت بـاید داشته بـاشیم: $۲n+۱=۱۳$ و $n=۶$، یعنی

$$a=۲n^۲+۲n+۱=۸۵،\quad c=۲n^۲+۲n=۸۴$$

و برای $b=۱۱۳$ به‌دست می‌آید: $n=۵۶$ و

$$a=۶۳۸۵,\quad c=۶۳۸۴;$$

$$۶۳۸۵^۲=۱۱۳^۲+۶۳۸۴^۲$$

۱۶۹. دوگروه را A و B می‌نامیم وفرض می‌کنیم، عدد ۱، درگروه A باشد. عدد۲ نمی‌تواند دراین‌گروه قرارگیرد، زیرا تفاضل (۱ — ۲) برابرعدد ۱ می‌شودکه در همان گروه است. عدد ۲ متعلق به‌گروه B است.

عدد ۴، تنها درگروه A می‌تواند باشد، زیرا اگر درگروه B قرارگیرد، آن وقت تفاضل (۲ — ۴)، برابر ۲، یعنی یکی ازعددهای همان‌گروه می‌شود.

عدد ۳ باید درگروه B قرارگیرد،زیرا اگردرگروه A باشد،آن‌وقت‌تفاضل(۳ — ۴) برابریکی ازعددهای همان‌گروه می‌شود.

آخرین عدد، یعنی ۵، درهیچ‌کدام ازدوگروه نمی‌تواند باشد، زیرا اگردرگروه A قرارگیرد، تفاضل‌های (۴ — ۵) و (۱ — ۵)، عددهایی ازگروه A هستند؛ و اگردرگروه B باشد،آن‌وقت تفاضل‌های (۳ — ۵) و (۲ — ۵)، عددهایی ازهمان‌گروه درمی‌آیند. مسأله جواب ندارد.

۱۷۰. هرعدد طبیعی، ومنجمله هرعدداول را، می‌توان به‌یکی‌از ۵ حالت زیرنوشت:

$$۵k,\ ۵k+۱,\ ۵k+۲,\ ۵k+۳,\ ۵k+۴$$

حالت $۵k$، تنها به‌ازای $k=۱$، برابرعدداول ۵ می‌شود. دراین‌حالت، باتوجه به‌شرطهای مسأله، به‌این تصاعد حسابی (شامل ۵ جمله) می‌رسیم:

$$۵,\ ۱۱,\ ۱۷,\ ۲۳,\ ۲۹ \qquad (۱)$$

که همهٔ جمله‌های آن، عددهایی اول‌اند.

اگر $a_۱=۵k+۱$ (a_i، جملهٔ i ام تصاعد است)،آن‌وقت

$$a_۵=a_۱+۲۴=۵k+۲۵=۵(k+۵)$$

که بر ۵ بخش‌پذیر وعددی غیر اول است.

اگر $a_۱=۵k+۲$،آن‌وقت

$$a_۴=a_۱+۱۸=۵k+۲۰=۵(k+۴)$$

که عددی غیر اول است.

درحالت‌های $a_۱=۵k+۳$ و $a_۱=۵k+۴$، به ترتیب، $a_۳$ و $a_۲$ بر ۵ بخش‌پذیر می‌شوند و، بنابراین، تنها همان حالت $a_۱=۵$ باقی می‌ماند و تصاعد (۱)، تنها پاسخ مسأله است.

$$a_1 a_2, \ldots, a_n$$

را باقدر نسبت d درنظرمی‌گیریم؛ درضمن، a_0 راجملهٔ پیش‌از a_1، و a_{n+1} راجملهٔ بعداز a_n فرض می‌کنیم. درستی این برابری‌ها روشن است:

$$(a_n^2+da_n)^2-(a_n^2-da_n)^2=4da_n^3$$

$$(a_{n-1}^2+da_{n-1})^2-(a_{n-1}^2-da_{n-1})^2=4da_{n-1}^3$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad (1)$$

$$(a_2^2+da_2)^2-(a_2^2-da_2)^2=4da_2^3$$

$$(a_1^2+da_1)^2-(a_1^2-da_1)^2=4da_1^3$$

ازطرف دیگر، برای $k=2, 3, \ldots, n$ داریم:

$$a_k^2-da_k=a_k(a_k-d)=a_ka_{k-1},$$

$$a_{k-1}^2+da_{k-1}=a_{k-1}(a_{k-1}+d)=a_ka_{k-1}$$

یعنی $a_k^2-da_k=a_{k-1}^2+da_{k-1}$.

با توجه به‌اتحاد اخیر، ازمجموع n برابری (۱) به‌دست می‌آید:

$$(a_n^2+da_n)^2-(a_1^2-da_1)^2=4d(a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3)$$

از آن‌جا، سرانجام خواهیم داشت:

$$a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3=\frac{(a_na_{n+1})^2-(a_1a_0)^2}{4d}$$

مثلاً برای تصاعد حسابی

$$1, 2, 3, \ldots, n$$

داریم: $a_0=0$، $a_1=1$، $a_n=n$، $a_{n+1}=n+1$ و $d=1$. بنابراین

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

ویا برای محاسبهٔ مجموع

$$S=1^3+6^3+11^3+\cdots+96^3$$

($a_0=-4$، $a_1=1$، $a_n=96$، $a_{n+1}=101$ و $d=5$) داریم:

$$S=\frac{(۹۶\times ۱۰۱)^۲-۴^۲}{۲۰}=\frac{(۹۶۹۶+۴)(۹۶۹۶-۴)}{۲۰}=$$

$$=۴۸۴۶۰\times ۹۷=۴۷۰۰۶۲۰$$

۳. از مسابقه‌ها، کنکورها و المپیادهای ریاضی

§۱. نظریهٔ عددها، جبر، مثلثات، آنالیز

۱۷۲. مخرج کسر، به‌سادگی به‌صورت $(a^۲+ab+b^۲)^۲$ درمی‌آید و برای صورت کسر داریم:

$$(a^۳+b^۳)(a+b)^۳+۲a^۳b^۳=$$
$$=a^۶+۳a^۵b+۳a^۴b^۲+۴a^۳b^۳+۳a^۲b^۴+۳ab^۵+b^۶=$$
$$=(a^۲+ab+b^۲)(a^۴+۲a^۳b+۲ab^۳+b^۴)$$

وبنابراین، کسرمفروض، باکسر $\dfrac{a^۴+۲a^۳b+۲ab^۳+b^۴}{a^۲+ab+b^۲}$ هم‌ارز است.

۱۷۳. عبارت مفروض، به‌این‌صورت قابل تبدیل است:

$$\frac{۱}{۲}(۲x-۳y-z)^۲+\frac{۱}{۲}(y+۲z)^۲+\frac{۱}{۲}z^۲$$

که مثبت بودن آن روشن است. ولی اغلب، تبدیل به مجذورهای کامل، کار ساده‌ای نیست و بهتراست ازویژگی سه جمله‌ای درجه دوم استفاده‌کنیم. عبارت را نسبت به مجهول x منظم می‌کنیم:

$$۲x^۲-۲(۳y+z)x+(۵y^۲+۳z^۲+۵yz)$$

مبین این سه جمله‌ای درجه دوم، منفی است، زیرا

$$\Delta'=b'^۲-ac=(۳y+z)^۲-۲(۵y^۲+۳z^۲+۵yz)=$$
$$=-y^۲-۵z^۲-۴yz=-z^۲-(y+۲z)^۲<۰$$

وبنابراین، علامت سه جمله‌ای، برای هرمقدار x و y و z (به شرطی‌که باهم برابرصفر

نباشند)، همان علامت ضریب $x^۲$، یعنی مثبت است.

۱۷۴. به‌ترتیب داریم:

$$tg x=\frac{cos ۲۰^\circ \cdot cos ۳۰^\circ}{cos^۲ ۱۰^\circ}=\frac{cos ۵۰^\circ+cos ۱۰^\circ}{۲cos^۲ ۱۰^\circ}=\frac{sin ۴۰^\circ+cos ۱۰^\circ}{۲cos^۲ ۱۰^\circ}=$$

$$=\frac{۴ sin ۱۰^\circ cos ۱۰^\circ cos ۲۰^\circ+cos ۱۰^\circ}{۲cos^۲ ۱۰^\circ}=\frac{۴cos ۸۰^\circ cos ۲۰^\circ+۱}{۲cos ۲۰^\circ}=$$

$$=\frac{۲(cos ۱۰۰^\circ+cos ۶۰^\circ)+۱}{۲cos ۲۰^\circ}=\frac{cos ۱۰۰^\circ+۱}{cos ۲۰^\circ}=\frac{۱-cos ۸۰^\circ}{sin ۸۰^\circ}=$$

$$=\frac{۲sin^۲ ۴۰^\circ}{۲ sin ۴۰^\circ cos ۴۰^\circ}=tg ۴۰^\circ$$

و بنابراین $x=(۱۸۰n)^\circ+۴۰^\circ$ $(n\in \mathbf{Z})$.

۱۷۵. از آن‌جاکه

$$۱۰^n=(۹+۱)^n=۹M+۱;\ ۴^n=(۳+۱)^n=۹N+۳n+۱$$

(M و N، عددهایی درست‌اند). بنابراین

$$۱۰^n-۴^n+۳n=(۹M+۱)-(۹N+۳n+۱)+۳n=۹(M-N)$$

یادداشت. مسأله‌هایی ازاین‌گونه را، اغلب می‌توان با استفاده از روش استقرای ریاضی، حل کرد.

اگر فرض‌کنیم $S_n=۱۰^n-۴^n+۳n$، داریم:

$$S_۱=۱۰-۴+۳=۹;$$

$$S_{n+۱}-S_n=۱۰^n(۱۰-۱)-۴^n(۴-۱)+۳=$$

$$=۹\times ۱۰^n-۳(۴^n-۱)=۹\times ۱۰^n-۹(۴^{n-۱}+۴^{n-۲}+\dots+۱)$$

۱۷۶. پاسخ. $ad+bc=۰$.

۱۷۷. برای $n=۱$ و $n=۲$ داریم:

$$q cos\alpha=p،\ \ q^۲ cos ۲\alpha=q^۲(۲cos^۲\alpha-۱)=۲p^۲-q^۲$$

بنابراین حکم مسأله برای $n=۱$ و $n=۲$ درست است. فرض می‌کنیم، حکم مسأله، برای $n\leqslant k$ درست باشد وثابت می‌کنیم که، دراین‌صورت، برای $n=k+۱$ هم درست است. با استفاده ازاتحاد

$$\cos(k+1)\alpha = 2\cos k\alpha\cos\alpha - \cos(k-1)\alpha$$

(درستی اتحاد راثابت کنید)، به‌دست می‌آید:

$$q^{k+1}\cos(k+1)\alpha = 2(q^k\cos k\alpha)(q\cos\alpha) - q^2[q^{k-1}\cos(k-1)\alpha]$$

سمت راست برابری، بنا به‌فرض استقرا، عددی درست است، درنتیجه، حکم مسأله، برای هرعدد طبیعی n، درست است.

۱۷۸. الف) ثابت می‌کنیم $\log_3 16 > \log_{16} 729$. داریم:

$$\log_3 16 . \log_{16} 729 = \frac{\log_a 16}{\log_a 3} . \frac{\log_a 729}{\log_a 16} = \frac{\log_a 729}{\log_a 3} =$$

$$= \log_3 729 = \log_3(3^6) = 6$$

بنابراین، کافی است ثابت‌کنیم $\log_3 16 > \sqrt{6}$. چون $24 < 25$، پس $\left(\frac{5}{2}\right)^2 > 6$ و $\frac{5}{2} > \sqrt{6}$. کافی است ثابت‌کنیم $\log_3 16 > \frac{5}{2}$ یا $3^{\frac{5}{2}} < 16$. ولی

$$256 = 16^2 > 3^5 = 243 \Longrightarrow 16 > \sqrt{3^5} = 3^{\frac{5}{2}}$$

ب) ثابت می‌کنیم $\log_3 5 < \frac{3}{2}$ و $\log_4 9 > \frac{3}{2}$ که، درستی هردوی آن‌ها روشن‌است، زیرا اولی منجربه نابرابری $3^3 > 5^2$ ودومی منجر به نابرابری $4^3 < 9^2$ می‌شود. به‌این ترتیب $\log_3 5 < \log_4 9$.

۱۷۹. چون باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد n بر ۱۵، برابر ۷ شده است، بنابراین، عدد n، به یکی ازدوصورت زیراست:

$$n = 30k + 7, \quad n = 30k + 22$$

ولی عدد n، درتقسیم بر ۶، به باقی‌ماندهٔ ۴ رسیده است، بنابراین حالت دوم، یعنی $n = 30k + 22$ قابل‌قبول است.

پاسخ. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد n بر ۳۰ برابر ۲۲ وخود عدد به‌صورت $30k + 22$ $(k \in \mathbf{N})$ است.

۱۸۰. الف) ضرب‌ها را انجام دهید، به‌معادلهٔ زیرمی‌رسید:

$$\sin\frac{5x}{2} + \cos x = 2$$

واین معادله، تنها وقتی جواب دارد که، به‌طورهم زمان، داشته باشیم:

$$\sin\frac{5x}{2}=1 \text{ و } \cos x=1$$

ازمعادلهٔ اول به‌دست می‌آید $x=2\pi\frac{4k+1}{5}$ و از دومی $x=2\pi n$ ($k\in\mathbf{Z}$ و $n\in\mathbf{Z}$).

برای این‌که، این دو مقدار، یکی باشند، باید $\frac{4k+1}{5}$ عدد درستی باشد. هرعدد درست k می‌تواند به یکی ازاین صورت‌ها باشد:

$$5m، 5m+1، 5m+2، 5m+3، 5m+4;\ m\in\mathbf{Z}$$

که تنها به ازای $k=5m+1$، کسر $\frac{4k+1}{5}$ عددی درست‌می‌شود. به‌این‌ترتیب، جواب کلی معادلهٔ مفروض چنین است:

$$x=2(4m+1)\pi،\ m\in\mathbf{Z}$$

ب) پاسخ. $x=\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{4}$ و $x=m\pi$ ($k، m\in\mathbf{Z}$).

ج) راهنمائی. فرض کنید:

$$y=\sqrt{\cos x}-4\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}+5\sqrt[4]{2}$$

پاسخ. $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$ ($k\in\mathbf{Z}$).

۱۸۱. راهنمائی. $a=-\frac{1}{b^2}$ را درمعادله قرار دهید، به‌این معادله می‌رسید:

$$(x^2-b^2c)(bx+c)=0$$

پاسخ. $x_1=-\frac{b}{c}$، $x_2=b\sqrt{c}$، $x_3=-b\sqrt{c}$ (برای x_2 و x_3، باید داشته باشیم $c>0$).

۱۸۲. معادلهٔ مفروض هم‌ارز است بامعادلهٔ

$$\sin(11a+1)x\sin(3a+4)x=0$$

چون $a\geqslant 0$، پس $11a+1\neq 0$ و $3a+4\neq 0$ وجواب‌های معادله چنین‌اند:

$$x_k=\frac{k\pi}{11a+1},\quad x_m=\frac{ma}{3a+4},\ (k, m\in\mathbf{Z})$$

وجواب‌های غیرمنفی x، متناظرند بامقدارهای غیرمنفی k و m.

به‌این ترتیب، جواب‌های غیرمنفی معادلهٔ مفروض، عبارتند از: جمله‌های دوتصاعد حسابی باجملهٔ اول برابرصفر و، به‌ترتیب، باقدرنسبت‌های

$$d_1=\frac{\pi}{11a+1}\ ,\ d_2=\frac{\pi}{3a+4}$$

ثابت می‌کنیم، درحالت کلی، دوتصاعد حسابی باجملهٔ اول صفر وقدرنسبت‌های d_1و d_2، وقتی وتنهاوقتی روی هم، یك تصاعد حسابی می‌سازندکه یکی ازقدرنسبت‌ها بردیگری بخش‌پذیر باشد. یعنی وقتی‌که $\frac{d_1}{d_2}$ یا $\frac{d_2}{d_1}$، عددی طبیعی باشد.

درواقع، اگرعددهای 0، d_1، $2d_1$، ...، d_2، $2d_2$، ...، با ردیف معینی، یك تصاعد حسابی تشکیل دهندواگر $d_1\leqslant d_2$، آن‌وقت قدرنسبت تصاعد حسابی‌کلی، باید برابرتفاضل دوجملهٔ اول 0 و d_1، یعنی برابر d_1 باشد. ولی، دراین صورت، d_2،که خود باید جمله‌ای ازاین تصاعد حسابی باشد، به‌ناچار مضرب درستی از d_1 می‌شود:

$$d_2=0+(n-1)d_1=(n-1)d_1$$

چون $d_2\geqslant d_1$ وچون $n-1$ عددی طبیعی است، پس $\frac{d_2}{d_1}$ عددی طبیعی می‌شود. به‌همین ترتیب، در حالت $d_1\geqslant d_2$ نتیجه می‌شودکه $\frac{d_1}{d_2}$ باید عددی طبیعی باشد.

برعکس، اگر $\frac{d_2}{d_1}$ عددی طبیعی‌باشد، آن‌وقت هرجمله از تصاعد حسابی باجملهٔ‌اول صفروقدرنسبت d_2، جمله‌ای ازتصاعد حسابی باجملهٔ اول صفروقدرنسبت d_1 می‌شود و،در نتیجه، دوتصاعد روی هم، یك تصاعد حسابی باجملهٔ اول برابرصفروقدرنسبت برابر d_1 تشکیل می‌دهند.

اکنون به مسألهٔ خودمان می‌پردازیم. باتوجه به‌نتیجه‌گیری بالا، باید دوحالت را دنبال‌کنیم:

۱) d_2 بر d_1 بخش‌پذیرباشد، یعنی داشته باشیم $(n\in\mathbf{N})$:

$$\frac{\pi}{3a+4}=n\cdot\frac{\pi}{11a+1}\Longleftrightarrow a=\frac{4n-1}{11-3n}$$

چون $a>0$ وچون برای هر عدد طبیعی n: $4n-1>0$، پس باید داشته باشیم:

$$11-3n>0 \iff n<\frac{11}{3} \implies n=1, 2, 3$$

وبه‌ازای هریك ازاین مقدارهای n، مقداری برای a به دست می‌آید:

$$a=\frac{3}{8}, \frac{7}{5}, \frac{11}{2}$$

۲) d_1 بر d_2 بخش‌پذیر باشد؛ یعنی

$$\frac{\pi}{11a+1}=n\cdot\frac{\pi}{3a+4} \iff a=\frac{4-n}{11n-3}$$

برای مثبت بودن a، باید داشته باشیم: $n=1, 2, 3$. از آن‌جا

$$a=\frac{3}{8}, \frac{2}{19}, \frac{1}{30}$$

پاسخ. $\frac{1}{30}$، $\frac{2}{19}$، $\frac{3}{8}$، $\frac{7}{5}$ و $\frac{11}{2}$.

۱۸۳. الف) نامعادلهٔ مفروض را می‌توان این‌طور نوشت:

$$-\log_2(x+2)\cdot\log_2(x+1)>\frac{\log_2(x+1)}{\log_2(x+2)}$$

که با آوردن همهٔ جمله‌ها به سمت چپ وتبدیل به یك مخرج، چنین می‌شود.

$$\frac{\log_2(x+1)}{\log_2(x+2)}\left[1+\log_2^2(x+2)\right]<0$$

روشن است که، برای $x+1\geqslant 1$، یعنی $x\geqslant 0$، سمت چپ نابرابری غیر منفی می‌شود. بنابراین باید داشته باشیم:

$$0<x+1<1 \quad \text{و} \quad x+2>1$$

که دراین‌صورت، سمت چپ نابرابری منفی می‌شود.

پاسخ. $-1<x<0$.

ب) نامعادلهٔ مفروض، هم‌ارزاست بادستگاه

$$\begin{cases} |x-2|^{\log_4\frac{x+2}{x^2}}<1 \\ x>0 \end{cases}$$

که به‌نوبهٔ خود، به‌یکی ازاین دودستگاه تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases}|x-2|>1\\x>0\\\log_4\dfrac{x+2}{x^2}<0\end{cases} \text{ و } \begin{cases}|x-2|<1\\x>0\\\log_4\dfrac{x+2}{x^2}>0\end{cases}$$

این‌دستگاه‌هارا، می‌توان این‌طور نوشت:

$$\begin{cases}|x-2|>1\\x>0\\\dfrac{x+2}{x^2}<1\end{cases} \text{ و } \begin{cases}|x-2|<1\\x>0\\\dfrac{x+2}{x^2}>1\end{cases}$$

پاسخ. $2<x<1$ و $x>3$.

ج) روشن است که $2 \leqslant \cos^2\pi x+1 \leqslant 1$. بنابراین

$$0 \leqslant \log_2(\cos^2\pi x+1) \leqslant 1$$

ازطرف دیگر

$$4x-x^2-3=-(x-2)^2+1 \leqslant 1$$

بنابراین، باتوجه به‌نامعادلهٔ اصلی، به ناچار باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}\log_2(\cos^2\pi x+1)=1\\4x-x^2-3=1\end{cases}$$

وتنها جواب مشترك این دو معادله $x=2$ است.

پاسخ. $x=2$.

۱۸۴. می‌توان ثابت کرد، به‌ازای هرمقدار a، ریشه‌ای در بازهٔ $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ وجود دارد. درواقع داریم:

$$f(0)=-3<0;\ f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{32}{9}+\frac{16a}{3}-\frac{16a}{3}-3=\frac{5}{9}>0$$

یعنی، باتوجه به پیوستگی چندجمله‌ای برای هر $a\in\mathbf{R}$، عددی مثل x_0 دربازهٔ $\left[0, \frac{2}{3}\right]$

وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم $f(x_\circ)=\circ$.

یادداشت. ممکن است کسی بپرسد، این $\frac{۲}{۳}$ را از کجا آورده‌ایم! خیلی روشن است: تنها دوجمله ازعبارت مفروض، شامل a است ($۱۲ax^۲-۸ax$)، که به‌ازای $x=\frac{۲}{۳}$ برابر صفر می‌شود.

ولی اثبات حکم مسأله، در بازهٔ $[\circ, ۱]$ هم دشوار نیست. چون $f(\circ)<\circ$، اگرچند جمله‌ای در بازهٔ $[\circ, ۱]$ ریشه‌ای نداشته باشد، باید در تمامی این بازه مقدارهای منفی را بپذیرد. اما، دراین‌صورت، باتوجه به پیوسته بودن چندجمله‌ای، باید مقدار انتگرال معین $\int_\circ^۱ f(x)dx$ هم منفی شود؛ درحالی‌که داریم:

$$\int_\circ^۱ f(x)dx=۳x^۴+۴ax^۳-۴ax^۲-۳x\Big|_\circ^۱=\circ$$

۱۸۵. حداقل عبارت A را باید دربین مقدارهای غیرمنفی x و y جست وجو کرد، زیرا اگرمثلاً x مقداری منفی باشد، با تبدیل آن به‌مقداری مثبت(با همان قدرمطلق)، به‌مقدار کمتری برای A می‌رسیم. بنابراین، می‌توانیم حداقل عبارت

$$B=A+۲a^۲=(z-a)^۲+(y-a)^۲$$

را، برای مقدارهای غیرمنفی y و z پیداکنیم که، در آن $z=۲x$. در ضمن، شرط $tg\left(\frac{\pi}{۴}yz\right)=\circ$ می‌دهد: $yz=۴k$ (k، عددی است طبیعی یاصفر).

عبارت B، برابراست بامجذور فاصلهٔ ازنقطهٔ $M(a, a)$ تا نقطهٔ متغیر (z, y) که یا روی یکی ازمحورها (به‌ازای $k=\circ$) ویاروی شاخهٔ مثبت یکی ازهذلولی‌های $zy=۴k$ (به‌ازای $k>\circ$) قراردارد.

خط راست l، مماس برهذلولی $zy=۴$ در نقطهٔ $P(۲, ۲)$، معادله‌ای به صورت $z+y=۴$ دارد و، تمامی آن، به جز نقطهٔ تماس، درزیرهذلولی واقع است، زیرا برای $z\neq۲$، دربارهٔ نقطهٔ (z, y) ازهذلولی‌داریم: $z+y=z+\frac{۴}{z}>۴$. ازطرف دیگر، دایرهٔ به مرکز M که ازنقطهٔ P بگذرد، برخط راست l مماس است ودرزیراین خط راست‌قرار دارد. بنابراین، دایره نسبت به شاخه‌های همهٔ هذلولی‌های $zy=۴k$، در دوطرف مختلف خط راست l واقع است.

ازاین‌جا نتیجه می‌شودکه، فاصلهٔ نقطهٔ M تا هرنقطه ازهذلولی‌های $zy=۴k$، کمتر

ازطول پاره خط راست MP نیست. به‌این‌ترتیب، حداقل‌مقدار B، برابر کوچکترین عدد، ازعددهای زیر است:

$$|MP|^۲=(a-۲)^۲+(a-۲)^۲ \text{ و } a^۲$$

چون $۰<a<۲$؛ درضمن، اگر داشته باشیم:

$$۲(a-۲)^۲\leqslant a^۲ \Longleftrightarrow a^۲-۸a+۸\leqslant ۰$$

به دست می‌آید: $۴-۲\sqrt{۲}\leqslant a\leqslant ۴+۲\sqrt{۲}$؛ بنابراین، حداقل مقدار B، برای $۴-۲\sqrt{۲}\leqslant a<۲$، برابر $۲(a-۲)^۲$ و، برای $۲<a<۴+۲\sqrt{۲}$، برابر $a^۲$ است. مقدارهای متناظرعبارت A، برابرند با $۴a-۴$ و $-\dfrac{a^۲}{۲}$.

۱۸۶. داریم:

$$k^۳=(a+A)(b+B)(c+C)=abc+ABC+k(aB+bC+cA)$$

چون $abc+ABC>۰$، پس

$$k(aB+bC+cA)<k^۳ \Longrightarrow aB+bC+cA<k^۲$$

۱۸۷. چند حالت درنظرمی‌گیریم:

۱) n عددی فرد است. اگرجملهٔ اول، یعنی $۱^{۱۳۷۱}=۱$ راکناربگذاریم، تعدادبقیهٔ جمله‌ها زوج می‌شود و می‌توان عبارت A را این‌طور نوشت:

$$A=۱+(۲^{۱۳۷۱}+n^{۱۳۷۱})+(۳^{۱۳۷۱}+(n-۱)^{۱۳۷۱})+\dots+$$
$$+\left(\left(\frac{n+۱}{۲}\right)^{۱۳۷۱}+\left(\frac{n+۳}{۲}\right)^{۱۳۷۱}\right)$$

چون ۱۳۷۱، عددی است فرد، بنابراین همهٔ پرانتزها بر $(n+۲)$ بخش‌پذیرند و، باقی‌ماندهٔ حاصل ازتقسیم A بر $n+۲$ برابرواحد می‌شود.

مثلاً اگرداشته باشیم $(n=۹)$:

$$A=۱^{۱۳۷۱}+۲^{۱۳۷۱}+\dots+۹^{۱۳۷۱}$$

آن‌وقت خواهیم داشت:

$$A=۱+(۲^{۱۳۷۱}+۹^{۱۳۷۱})+(۳^{۱۳۷۱}+۸^{۱۳۷۱})+(۴^{۱۳۷۱}+۷^{۱۳۷۱})+$$
$$+(۵^{۱۳۷۱}+۶^{۱۳۷۱})$$

همهٔ پرانتزها بر $n+۲=۱۱$ بخش‌پذیرند، یعنی $A=۱۱M+۱$ $(M\in\mathbf{N})$.

۲) n عددی‌است مضرب ۴، یعنی هم n وهم $\frac{n}{2}$ عددهایی‌زوج‌اند. A را به‌این‌صورت می‌نویسیم:

$$A=1+(2^{1371}+n^{1371})+\dots+\left(\left(\frac{n}{2}\right)^{1371}+\left(\frac{n+4}{2}\right)^{1371}\right)+\left(\frac{n}{2}+1\right)^{1371}$$

بخش‌پذیر نبودن A بر $n+2$ روشن است و باقی‌ماندهٔ تقسیم A بر $n+2$ برابراست بـا باقی‌ماندهٔ تقسیم $1+\left(\frac{n}{2}+1\right)^{1371}$ بر $n+2$.

چون $\frac{n}{2}$ عددی‌است زوج، پس $\frac{n}{2}+1$ عددی فرد است وباقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم هرتوانی ازیك عدد فرد بردو برابرآن عدد، همیشه برابرهمان عدد فرد است.

درواقع، اگـر بخواهیم بـاقی‌ماندهٔ حاصل ازتقسیم $(2k+1)^m$ را $(m\in\mathbf{N})$، بـر $2(2k+1)=4k+2$ پیداکنیم، ابتدا از $(2k+1)^2$ آغاز می‌کنیم:

$$(2k+1)^2=4k^2+4k+1=k(4k+2)+(2k+1)$$

می‌بینیم ازتقسیم مجذوریك عدد فرد بردوبرابر آن، بـه باقی‌مانده‌ای برابرهمان عدد فـرد می‌رسیم. روشن‌است که، ازاین‌جا، بلافاصله، همین حکم‌برای توان سوم، سپس توان‌چهارم یك عدد فرد وغیره نتیجه می‌شود.

به این‌ترتیب درحالت زوج بودن $\frac{n}{2}$، باقی‌ماندهٔ تقسیم A بر $n+2$، برابراست با

$$1+\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{n}{2}+2$$

مثلاً، برای $n=8$ داریم:

$$A=1^{1371}+\dots+8^{1371}=1+(2^{1371}+8^{1371})+(3^{1371}+7^{1371})+$$
$$+(4^{1371}+6^{1371})+5^{1371}$$

دراین‌جا، عدد ۵ همان $\frac{n}{2}+1$ است وازتقسیم هرتوانی از ۵ بر ۱۰ به‌باقی‌مانده‌ای برابر خود ۵ می‌رسیم و، بنابراین، دراین‌جا، باقی‌ماندهٔ تقسیم A بر ۱۰ برابراست با ۶.

۳) n عدد زوج، ولی $\frac{n}{2}$ عددی فرد است. دراین‌حالت، A بـه‌همان صورت حالت قبل درمی‌آید:

$$A=1+(2^{1371}+n^{1371})+\dots+\left(\left(\frac{n}{2}\right)^{1371}+\left(\frac{n}{2}+2\right)^{1371}\right)+\left(\frac{n}{2}+1\right)^{1371}$$

ولی در این‌جا $\frac{n}{2}+1$ عددی است زوج و، بنابراین، هر توان بزرگتر ازواحد آن، بر $n+2$، یعنی دوبرابر $\frac{n}{2}+1$ بخش‌پذیراست وباقی‌ماندهٔ تقسیم A بر $n+2$ برابرواحد می‌شود.

پاسخ. اگر n عددی فرد یا به‌صورت $4k+2$ باشد، ازتقسیم A بر $n+2$ به‌باقی‌ماندهٔ واحد می‌رسیم واگر n مضربی از ۴ باشد، درتقسیم A بر $n+2$، باقی‌مانده‌ای برابر $\frac{n}{2}+2$ به دست می‌آید.

۱۸۸. پاسخ. مثلاً پنج‌عدد ۱، ۷، ۱۳، ۱۹، ۲۵؛ یا پنج عدد ۲، ۷، ۱۹، ۳۷، ۳۴۹.

۱۸۹. اگر α در شرط مسأله صدق کند، باید داشته باشیم $\cos\alpha<-\frac{1}{4}$، زیرا به ازای $-\frac{1}{4}\leqslant\cos\alpha<0$ به دست می‌آید:

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1>-\frac{7}{8} \text{ و } \cos 4\alpha=2\cos^2 2\alpha-1>0$$

بنابراین، برای هر $n\in\mathbf{N}$، باید داشته باشیم:

$$\cos 2^n\alpha\leqslant-\frac{1}{4}\Longrightarrow\left|\cos 2^n\alpha-\frac{1}{2}\right|\geqslant\frac{3}{4}\qquad (*)$$

اکنون این اتحاد رادرنظربگیرید

$$\left|\cos 2x+\frac{1}{2}\right|=2\left|\cos x+\frac{1}{2}\right|\cdot\left|\cos x-\frac{1}{2}\right|$$

یعنی، باتوجه به (*):

$$\left|\cos x+\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{2}{3}\left|\cos 2x+\frac{1}{2}\right|$$

وبنابراین، به‌ترتیب داریم:

$$\left|\cos\alpha+\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{2}{3}\left|\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\right|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^2\left|\cos 4\alpha+\frac{1}{2}\right|\leqslant$$

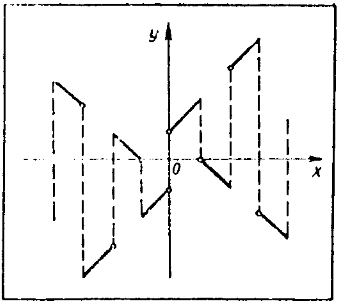
$$\leqslant\dots\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n\left|\cos 2^n\alpha+\frac{1}{2}\right|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

با بزرگ شدن n، مقدار $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ به سمت صفر میل می‌کند و، درنتیجه، به‌دست می‌آید:

$$\left|\cos\alpha+\frac{1}{2}\right|=\left|\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\right|=\dots=\left|\cos 2^n\alpha+\frac{1}{2}\right|=\dots=0$$

یعنی $\alpha=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ $(k\in\mathbf{Z})$ که، بـه‌ازای آن

$$\cos\alpha=\cos 2\alpha=\cos 4\alpha=\cos 8\alpha=\dots=-\frac{1}{2}<0$$



شکل ۸۱

۱۹۰. الف) اگر $f(0)=y_0$، آن وقت نقطهٔ $(0,\ y_0)$ ازنمودار تابع $y=f(x)$، بعداز دوران به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$، به‌نقطهٔ $(-y_0,\ 0)$ ازهمین نمـودار مـی‌رسد. بنـابـراین $y_0=-y_0$ و $f(0)=0$. از طرف دیگر، بـرای هر جواب $x=x_0$ ازمعادلـهٔ $f(x)=x$، نقطهٔ $x=x_0$ از نمودار تـابع $y=f(x)$، بعداز سه دوران بـه اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$، به نقطهٔ $(x_0,\ -x_0)$ ازهمان نمودار می‌رسد، یعنی $x_0=-x_0=0$. بـه این ترتیب معادلهٔ $f(x)=x$، دارای یك، وتنها یك ریشه است: $x=0$.

ب) نمودار یکی ازتابع‌های ممکن، درشکل ۸۱ داده شده است.

۱۹۱. این دواتحاد رادرنظرمی‌گیریم:

$$(1+x)^n=1+nx+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\dots,$$
$$(1-x)^n=1-nx+a_2x^2-a_3x^3+a_4x^4-a_5x^5+\dots$$

که در آن‌ها $a_i\geqslant 0$ $(i=2,\ 3,\ \dots)$. ازتفاضل این دواتحاد به‌دست می‌آید:

$$(1+x)^n-(1-x)^n-2nx=2(a_3x^3+a_5x^5+\dots)$$

یعنی، برای مقدارهای مثبت x، داریم:

$$(1+x)^n-(1-x)^n-2nx\geqslant 0$$

که اگر، در رابطهٔ اخیر، فـرض‌کنیم $x=\frac{1}{2n}$، به‌دست می‌آید:

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\geqslant\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n+1$$

وسرانجام، باضرب دوطرف برابری، در $(۲n)^n$:

$$(۲n+۱)^n \geqslant (۲n-۱)^n+(۲n)^n$$

(علامت برابری، تنها برای $n=۱$ و $n=۲$).

۱۹۲. ابتدا ببینیم، به‌ازای چه مقدارهایی از a، دستگاه

$$\begin{cases} x+۲y=a \\ x^۲-۴xy+y^۲+۳\leqslant ۰ \end{cases}$$

دارای‌جواب‌های منفی‌برای x و y است و، سپس، بزرگترین‌مقدارممکن a راانتخاب‌کنیم.

اگر درنامعادلهٔ دستگاه قراردهیم $x=a-۲y$، به‌دست می‌آید:

$$۱۳y^۲-۸ay+a^۲+۳\leqslant ۰$$

مبین سه جمله‌ای درجه دوم سمت چپ، برابراست با $۳a^۲-۳۹$؛ یعنی این سه جمله‌ای، برای $a^۲<۱۳$ مثبت، برای $a^۲=۱۳$ غیرمنفی‌وبرای $a^۲>۱۳$ منفی‌است. پس $a^۲\geqslant ۱۳$؛ وچون بنابرشرط مسأله، a مقداری منفی است، پس $a\leqslant -\sqrt{۱۳}$ و، بنابراین، حداکثر a، یا $x+۲y$، برابراست با $-\sqrt{۱۳}$ که، دراین‌صورت، جواب دستگاه $\left(-\frac{۵}{\sqrt{۱۳}}, -\frac{۴}{\sqrt{۱۳}}\right)$ می‌شود.

پاسخ. حداکثرمقدار $x+۲y$، برابراست با $-\sqrt{۱۳}$.

۱۹۳. با توجه به دامنهٔ تعریف نامعادله، باید داشته باشیم $x+y\neq ۰$ و، بنابراین، خط راست مورد نظرما، نمی‌تواند باخط راست $x+y=۰$ برخوردی داشته باشد، یعنی معادله‌ای به‌صورت $x+y=a$ دارد. اگر درنامعادله قراردهیم $y=a-x$، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$(x^۲-(\log_{|a|}۴+\log_۴|a|)x+۱)(x^۲-۱۰\times ۲^a\cdot x+a^۲-۳)\geqslant ۰$$

باید مقدارهایی از a راپیداکنیم‌که، به‌ازای هریك ازآن‌ها، این نابرابری، برای هرمقدار x، برقرار باشد.

عامل اول‌سمت چپ نابرابری، برای $|a|\neq ۴$، دوریشهٔ متمایز دارد و، درفاصلهٔ‌بین این دوجواب، علامتی‌منفی پیدا می‌کنند، به‌نحوی‌که برای برقراری نابرابری، عامل دوم‌هم باید درهمین فاصله منفی باشد، یعنی عامل دوم هم باید همان دوریشهٔ عامل اول را داشته باشد. ولی دراین‌صورت، باید داشته باشیم:

$$۱۰\times ۲^a=\log_{|a|}۴+\log_۴|a| \quad \text{و} \quad a^۲-۳=۱$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید $a=-2$.

اکنون حالت $|a|=4$ را آزمایش می‌کنیم. به ازای $|a|=4$ عامل اول برابر $(x-1)^2$ وغیرمنفی می‌شود؛ ولی عامل دوم که به‌صورت

$$x^2-160x+13$$

درمی‌آید، تنها به‌ازای $a=-4$ غیرمنفی است. یعنی $a=-4$ هم، با شرط‌های مسأله سازگار است.

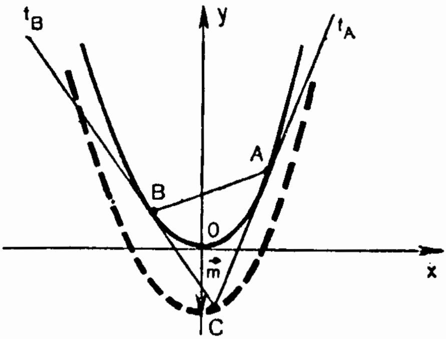
پاسخ. $x+y=-2$ یا $x+y=-4$.

۱۹۴. معادله‌های مماس‌های بر سهمی، در نقطه‌های A و B، به سادگی به دست می‌آیند:

مماس درنقطهٔ A: $y=2ax-a^2$

مماس درنقطهٔ B: $y=2bx-b^2$

ازحل این دومعادله، مختصات نقطهٔ C پیدا می‌شود:



شکل ۸۲

$$x_C=\frac{a+b}{2},\quad y_C=ab$$

و برای پیداکردن معادلهٔ مکان نقطهٔ C، باید رابطه‌ای بین x_C و y_C پیداکرد.

معادلهٔ خط‌راست AB به‌صورت $(a+b)x-y-ab=0$؛ می‌توان طول پاره‌خط راست AB وطول‌ارتفاع CH ازمثلث ABC و، سپس، مساحت این‌مثلث را به‌دست‌آورد:

$$|AB|=\sqrt{(a-b)^2+(a^2-b^2)^2}=(a-b)\sqrt{(a+b)^2+1};$$

$$|CH|=\frac{\frac{(a+b)^2}{2}-ab-ab}{\sqrt{(a+b)^2+1}}=\frac{(a-b)^2}{\sqrt{(a+b)^2+1}};$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|CH|=\frac{1}{4}(a-b)^3$$

و چون، بنابه‌فرض مسأله $S_{ABC}=2$، به‌دست‌می‌آید: $a-b=2$؛ درضمن $a+b=2x_C$. بنابراین $a=x_C+1$ و $b=x_C-1$ که، اگر در برابری $y_C=ab$ قراردهیم:

$$y_C=(x_C+1)(x_C-1)=x_C^2-1$$

به‌این‌ترتیب، معادلهٔ مکان C عبارت است از سهمی $y=x^2-1$، یعنی سهمی‌که با انتقال سهمی $y=x^2$ به‌اندازهٔ یك واحد ودرجهت yهای منفی به دست می‌آید.

۱۹۵. باضرب دو طرف نامعادلهٔ دوم در عدد مثبت $\left(\frac{5}{4}\right)^{x^2-2}$ به‌دست می‌آید:

$$1\leqslant\left(\frac{5}{4}\right)^{x^2-x+a}\Longleftrightarrow x^2-x\geqslant -a$$

بنابراین، باتوجه به‌نامعادلهٔ اول، باید داشته‌باشیم $a^2\geqslant -a$ که برای $a\leqslant -1$ و $a\geqslant 0$ برقرار است.

۱۹۶. مشتق این تابع برابرصفراست، زیرا

$$y'=-\sin x\cos(x+2)-\cos x\sin(x+2)+2\sin(x+1)\cos(x+1)=$$
$$=-\sin(2x+2)+\sin 2(x+1)=0$$

یعنی، تابع مفروض، برابرمقدار ثابتی است وبا قراردادن مقدار دلخواهی، مثل $x=\frac{\pi}{2}$، این مقدارثابت‌به‌دست می‌آید: $y=-\sin^2 1$. نمودار تابع، خطراستی‌است موازی $x'x$ که ازنقطهٔ $\left(\frac{\pi}{2}, -\sin^2 1\right)$ می‌گذرد.

به‌طور مستقیم هم، می‌توان ثابت بودن مقدار y راثابت‌کرد:

$$y=\cos x\ \cos(x+2)-\cos^2(x+1)=\frac{1}{2}\left[\cos(2x+2)+\cos 2\right]-$$
$$-\frac{1}{2}\left[1+\cos(2x+2)\right]=\frac{1}{2}\left(\cos 2-1\right)=-\sin^2 1$$

و $y=-\sin^2 1$ خط راستی است موازی محور طول.

۱۹۷. معادلهٔ مفروض، بامعادلهٔ $x|x-2a|=a^2$ هم‌ارز است‌که، برای حل آن، باید ریشه‌های مثبت معادلهٔ $x^2(x-2a)^2=a^4$ راپیداکرد. معادلهٔ اخیر، به‌این صورت درمی‌آید:

$$(x-a)^2(x^2-2ax-a^2)=0$$

a عددی است مثبت (مبنای لگاریتم، نمی‌تواند منفی یا صفر باشد)؛ بنابراین معادلهٔ اخیر، دارای دوجواب مثبت a و $a(1+\sqrt{2})$ است و، مجموع مجذورهای آن‌ها وقتی برابر ۴ می‌شودکه داشته باشیم: $a=\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

۱۹۸. الف) اگردر دنباله‌ای‌که به دست می‌آید، به‌جای هررقم زوج عدد ۰، وبه

جای هر رقم فرد، عدد ۱ را قرار دهیم، به‌این دنباله می‌رسیم:

۱۱۱۱۰۱۱۱۱۰۱۱۱۱۰۱...

که در آن، بعداز چهار رقم برابرواحد، رقم صفرمی‌آید؛ سپس، دوباره چهار رقم برابر واحد ویك رقم برابرصفر و غیره. گروه رقم‌های ۱۲۳۴ متناظر با ۱۰۱۰ وگروه رقم‌های ۳۲۶۹ متناظر با ۱۰۰۱ است و، بنابراین، نمی‌توانند دردنبالهٔ ما ظاهر شوند.

ب) برای حل، ازدو اندیشه استفاده می‌کنیم:

۱) به‌طورکلی، بیش از ۱۰ رقم مختلف وجود ندارد و، بنابراین، تعداد عددهای مختلف چهار رقمی‌که دراین‌دنباله ظاهرمی‌شوند، محدود است. ولی خود دنباله نامحدود است، یعنی، عدد چهار رقمی مثل $\overline{abcd}$ می‌توان‌پیداکردکه‌تکرارشده‌است. دوگروه‌نزدیك ازاین‌گونه عددهای چهاررقمی را $A_۱$ و $A_۲$ می‌نامیم:

$$۱۹۷۵ \cdots \underbrace{\overline{abcd}}_{A_۱} \cdots \underbrace{\overline{abcd}}_{A_۲} \cdots$$

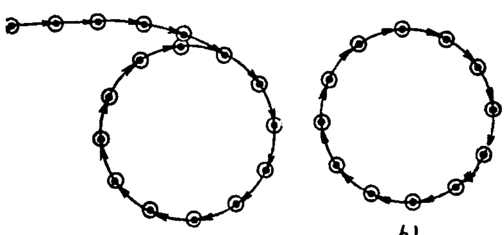
۲) روشن است‌که، اگر $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، $x_۴$، چهار رقم متوالی دردنبالهٔ ما باشند و، به کمك آن‌ها، رقم بعدی $x_۵$ رابه دست‌آوریم، آن‌وقت، می‌توانیم به‌کمك رقم‌های $x_۲$، $x_۳$، $x_۴$، $x_۵$، رقم $x_۱$ رابه صورت یك ارزشی پیداکنیم. بنابراین، این دنباله را،که ازسمت راست نامحدوداست، می‌توان‌با حفظ شرط‌مسأله، ازسمت چپ‌هم، به‌طورنامحدودادامه‌داد.

دردنباله، ازعدد $A_۱$ به سمت راست وتاعدد $A_۲$ پیش می‌رویم، ثابت می‌کنیم،دراین فاصله، بدون شك به عدد ۱۹۷۵ برمی‌خوریم.

برای این‌منظور توجه می‌کنیم‌که، دنبالهٔ ما،که از دوطرف نامحدود است، با دورهٔ تناوبی برابرطول فاصلهٔ از $A_۱$ تا $A_۲$ متناوب است. بنابراین، اگرعدد ۱۹۷۵ درفاصلهٔ بین $A_۱$و$A_۲$ ظاهر نشود، آن‌وقت نبایددرتمامی‌دنباله، به‌این‌عددبرخوردکنیم که‌درست‌نیست.

به‌این‌ترتیب، چه دردنباله‌ای‌که ازدو طرف نامتناهی است وچه دردنبالهٔ ما (که تنها ازسمت راست نامتناهی است)، بارها به عدد ۱۹۷۵ برخورد می‌کنیم.

یادداشت. هر دو اندیشه را می‌توان، به‌نحوی تعبیر هندسی‌کرد. نقطه‌هایی رادرنظرمی گیریم که،طبق قانونی، به‌هم مربوط شده باشند؛در ضمن، روشی برای اثبات این‌مطلب وجود داشته باشدکه، این نقطه‌ها، یك «دور» تشکیل می‌دهند (شکل



a)   b)

شکل ۸۳

a-۸۳). سپس، اگر روشن شود که، طبق نوعی قانون معکوس، بتوان این دنباله را، به‌عقب «بازکرد» آنوقت، با یك «دورکامل» سروکار خواهیم داشت.

ج) نتیجهٔ این بخش مسأله را، می‌توان از استدلالی که درحالت ب) داشتیم، به‌سادگی نتیجه گرفت.

رقم پیش ازگروه چهار رقمی ۱۹۷۵ را، در دنباله‌ای که ازدوطرف نامتناهی است، x می‌نامیم. دراین‌صورت، مقدار x به سادگی پیدا می‌شود: باید رقم سمت راست عدد $x+1+9+7$ برابر ۵ شود. چون $10=9+1$، پس باید درتقسیم $x+7$ بر ۱۰، به باقی‌ماندهٔ ۵ برسیم، یعنی $x=8$. می‌بینیم که، دراین‌دنباله، باعدد ۸۱۹۷ برخورد می‌کنیم. بنابراین، دردنبالهٔ مفروض هم (که تنها ازسمت راست نامتناهی است)، بارها به‌عددچهار رقمی ۸۱۹۷ می‌رسیم.

۱۹۹. اگر p و q را دو عدد مختلف اول فرض‌کنیم، عدد pq دارای چهارمقسوم علیه (1، p، q و pq) وعدد p^2q دارای شش‌مقسوم‌علیه (1، p، p^2، q، pq، p^2q)است؛ بنابراین، هرعددی‌که دارای پنج مقسوم‌علیه باشد، بـه صورت p^n است (p، عددی است اول). ولی عدد p^n دارای $n+1$ مقسوم‌علیه است:

$$1,\ p,\ p^2,\ p^3,\ \dots,\ p^n$$

پس باید داشته باشیم: $n=4$. اگر p عددی اول باشد، هرعدد به صورت p^4 دارای پنج مقسوم علیه است (1، p، p^2، p^3، p^4). برای ما، باید p^4، عددی سه رقمی باشد واین، تنها به‌ازای $n=5$ ممکن است.

پاسخ. $5^4=625$.

۲۰۰. نشانهٔ تقدم را $\rightarrow$ می‌گیریم و فـرض می‌کنیم، برای دو عضو x و y، نسبت $x\rightarrow y$ برقرار بـاشد. یك مجموعه وقتی مرتب است‌که دوشرط زیر، برای عضوهای آن، وجود داشته باشد:

۱) از $x\rightarrow y$ و $y\rightarrow z$ نتیجه‌شود $x\rightarrow z$؛ ۲) از $x\rightarrow y$ و $y\rightarrow x$ نتیجه‌شود $y=x$.

چنین ترتیبی را، ترتیب جزئی گویند. اگرهردوعضودلخواه S، قابل مقایسه باشند، آن‌وقت، مجموعه را مرتب خطی‌گویند. به‌این مفهوم، مجموعه‌ای‌که درآن، قانون تقدم برقرارباشد، یك مجموعهٔ مرتب جزئی است. این مجموعه، ممکن است خطی نبـاشد وآن، وقتـی پیش می‌آیدکه درمجموعه،کسرهای ساده‌نشدنی، باصورت‌های برابر ومخرج‌های مختلف وجود داشته باشد.

جالب است، اگردرصورت مسأله، نابرابری اکید $p<r$ را، به نابرابری غیراکید $p\leqslant r$ تبدیل‌کنیم، آن وقت این قانون تقدم، ممکن است مجموعه را مرتب نکند، زیرا در

این‌صورت، شرط ۲)، برای کسرهای ساده‌نشدنی که صورت‌های برابرومخرج‌های مختلف، دارند، برقرارنیست.

۲۵۱. هر مجموعهٔ m عضوی، دارای ۲^m زیرمجموعه است، زیرا برای هر عضو مجموعه، دو امکان وجود دارد: یاعضوی‌از زیرمجموعه است ویاعضوی از آن نیست. بنابراین، درحالت $n \leqslant k$، هرزیرمجموعه‌ای غیرتهی ازمجموعهٔ A، باشرط مسأله سازگار است و، تعداد چنین زیرمجموعه‌هایی برابر $(۲^n - ۱)$ است. برای حالت $n > k$، بهتر است، تعدادزیرمجموعه‌های $C \subset A$ رامحاسبه‌کنیم که، برای آن‌هاداشته باشیم: $C \cap B = \varnothing$. این‌گونه زیرمجموعه‌های C، باید تنها شامل عضوهای $k+۱$، $k+۲$، ...، n باشند و، بنابراین، تعدادآن‌ها برابراست با ۲^{n-k} (که‌البته، زیرمجموعهٔ تهی هم دربین‌آن‌هاست). چون A، روی هم ۲^n زیرمجموعه دارد، در نتیجه، شرط مساله، برای بقیهٔ $۲^n - ۲^{n-k}$ زیرمجموعه صدق می‌کند.

۲۵۲. مثلاً $\alpha = \sqrt{۲}$ و $\beta = log_{\sqrt{۲}} ۳$. گنگ بودن $\sqrt{۲}$ روشن است. ثابت‌می‌کنیم $log_{\sqrt{۲}} ۳$ هم عددی است گنگ. ازبرهان خلف استفاده می‌کنیم. اگرداشته باشیم:

$$log_{\sqrt{۲}} ۳ = \frac{m}{n}$$

که در آن $m \neq ۰$ و $n \neq ۰$ عددهایی طبیعی‌اند. دراین‌صورت

$$(\sqrt{۲})^{\frac{m}{n}} = ۳ \Longrightarrow ۲^m = ۳^{۲n}$$

که ممکن نیست (سمت چپ برابری عدد زوج وسمت راست آن عددی فرد است). به‌این ترتیب، $log_{\sqrt{۲}} ۳$ عددی گنگ است. درضمن، عدد α^β گویاست، زیرا

$$(\sqrt{۲})^{log_{\sqrt{۲}} ۳} = ۳$$

۲۵۳. ازفرض مسأله نتیجه می‌شود:

$$\frac{۱}{a_{n+۱}} - \frac{۱}{a_n} = \frac{۱}{a_n} - \frac{۱}{a_{n-۱}}$$

یعنی دنبالهٔ $\left(\frac{۱}{a_n}\right)$، یك تصاعد حسابی است باجملهٔ عمومی

$$\frac{۱}{a_n} = \frac{۱}{A} + \left(\frac{۱}{B} - \frac{۱}{A}\right)(n-۱)$$

که‌از آن به‌دست می‌آید:

$$a_n = \frac{AB}{B+(A-B)(n-۱)}$$

ودیگر روشن است که $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

۲۰۴. به‌ترتیب داریم:

$$\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{2};$$

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+1=\frac{3}{2};$$

$$\left(4\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}+1=0;$$

$$\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2+2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=0$$

وحل معادلهٔ مفروض، منجر به حل این دستگاه می‌شود:

$$\begin{cases}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0\\[2ex] 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0\end{cases}$$

ازمعادلهٔ اول دستگاه به‌دست‌می‌آید: $\alpha=\beta$ (α و β، زاویه‌هائی حاده‌اند). سپس،ازمعادلهٔ دوم، به‌ازای $\beta=\alpha$، به معادلهٔ $2\cos\alpha=1$ می‌رسیم.

پاسخ. $\alpha=\beta=\frac{\pi}{3}$.

۲۰۵. این معادله،بعدازاندکی تبدیل، به‌صورت $f(x)g(x)=0$ درمی‌آیدکه‌در آن

$$f(x)=x^2-2(a+1)x+a(a+1),$$
$$g(x)=x^2-2(a+1)x+a(a+3)$$

سه جمله‌ای $f(x)$، برای $x\geqslant -1$، ریشه‌های حقیقی دارد. به ازای $a>0$، ریشه‌های آن مثبت و، به‌ازای $-1<a<0$، ریشه‌هایی بـا علامت‌های مختلف دارد (حالت‌های خاص $a=-1$ و $a=0$ را، به طور جداگانه بررسی می‌کنیم). اگر به‌همین ترتیب دربارهٔ سه جمله‌ای $g(x)$ استدلال کنیم و، سپس، نتیجهٔ دواستدلال را با هم مقایسه‌کنیم، معلوم می‌شود که، برای $a>0$، تعداد ریشه‌های مثبت معادله، ازتعداد ریشه‌های منفی آن بیشتراست.

دربارهٔ‌حالت‌های خاص $a=0$، $a=1$، $a=-1$ و $a=-3$، تنها $a=0$ باشرط مسأله سازگار است.

پاسخ. $a \geqslant 0$.

۲۰۶. اگر نمودارهای تابع‌های $y = 2\sin x$، $y = 2\cos x$ و $y = \log_{\frac{5}{8}} x$ را رسم کنیم، قانع می‌شویم که

$$\beta \leqslant \frac{\pi}{6} \leqslant \alpha$$

اکنون ثابت می‌کنیم، علامت برابری، درهیچ‌کدام ازاین دونابرابری پیش نمی‌آید.
برای اثبات نابرابری‌های $\frac{\pi}{6} > \beta$ و $\frac{\pi}{6} < \alpha$، کافی است ثابت کنیم:

$$\log_{\frac{5}{8}}\left(\frac{\pi}{6}\right) < 2\cos\frac{\pi}{6} \quad \text{و} \quad \log_{\frac{5}{8}}\left(\frac{\pi}{6}\right) > 2\sin\frac{\pi}{6}$$

به زبان دیگر، باید ثابت کنیم:

$$1 < \log_{\frac{5}{8}}\left(\frac{\pi}{6}\right) < \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{5}{8} > \frac{\pi}{6} > \left(\frac{5}{8}\right)^{\sqrt{3}}$$

نابرابری سمت چپ، منجر به نابرابری $15 > 4\pi$ می‌شود که درست است.
برای اثبات نابرابری سمت راست، توجه می‌کنیم که، برای پایهٔ کوچکتر از واحد، هرچه توان بزرگتر باشد، حاصل کوچکتر می‌شود. می‌دانیم $\frac{3}{2} < \sqrt{3}$، پس $\left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{3}{2}} > \left(\frac{5}{8}\right)^{\sqrt{3}}$
بنابراین اگر ثابت کنیم $\frac{\pi}{6} > \left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{3}{2}}$، به‌طور طبیعی روشن می‌شود که $\frac{\pi}{6} > \left(\frac{5}{8}\right)^{\sqrt{3}}$. به‌ترتیب داریم:

$$\frac{\pi}{6} > \left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{3}{2}} \Longrightarrow \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 > \left(\frac{5}{8}\right)^3 \Longrightarrow \pi^2 > \frac{125 \times 9}{128}$$

که نابرابری عددی درستی است (مقدار سمت راست از ۹ کوچکتر است).

۲۰۷. α، β و γ را ریشه‌های این معادله می‌گیریم، دراین‌صورت

$$\alpha^3 = -(\alpha+1) \Longrightarrow \alpha^{11} = -\alpha^2(\alpha+1)^3 = -\alpha^5 - 3\alpha^4 - 3\alpha^3 - \alpha^2 =$$
$$= -(\alpha^3+\alpha+1)(\alpha^2+3\alpha+2) + 2\alpha^2+5\alpha+2 =$$
$$= 3\alpha^2+5\alpha+2$$

به همین‌ترتیب $\beta^{11} = 3\beta^2+5\beta+2$ و $\gamma^{11} = 3\gamma^2+5\gamma+2$. درنتیجه

$$\alpha^{11}+\beta^{11}+\gamma^{11}=3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+5(\alpha+\beta+\gamma)+6=0$$

یادداشت. اگر فرض کنیم $s_k=\alpha^k+\beta^k+\gamma^k$ و برابری‌های $\alpha^3+\alpha+1=0$، $\beta^3+\beta+1=0$ و $\gamma^3+\gamma+1=0$ را، به‌ترتیب، در α^n، β^n و γ^n ضرب کنیم، بعداز جمع برابری‌های حاصل، به رابطهٔ برگشتی

$$s_{n+3}+s_{n+1}+s_n=0 \qquad (*)$$

می‌رسیم که، به‌کمک آن، می‌توان مجموع توان‌های متشابه ریشه‌ها را محاسبه کرد:

$$s_0=3,\ s_1=0,\ s_2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-$$
$$-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)=0-2=-2$$

اکنون با توجه به برابری $(*)$ ومقدارهای s_0، s_1، s_2، به‌ترتیب داریم:

$$s_3=-(s_1+s_0)=-3,\ s_4=2,\ s_5=5,\ s_6=1,\ s_7=-7,$$
$$s_8=-6,\ s_9=6,\ s_{11}=-(s_9+s_8)=-(6-6)=0$$

۲۵۸. چون $4x+5y$ به ازای $x=1$ و $y=1$ برابر ۹ (بزرگتر از ۷) می‌شود، بنابراین x و y باید علامت‌های متفاوتی داشته باشند؛ درضمن $y=\frac{7-4x}{5}$.

$x>0$ و $y<0$ می‌گیریم. دراین‌صورت مقدار

$$f(x,y)=5x+3y=\frac{21+13x}{5}$$

وقتی به حداقل مقدار خود می‌رسد که، عدد درست و مثبت x، حداقل مقدار ممکن باشد و، درضمن، به‌ازای این مقدار x، برای y هم، عدد منفی درستی به‌دست آید. برای $x=1$ و $x=2$، مقدار y برابرعددی درست‌نمی‌شود و، برای $x=3$، به‌دست می‌آید $y=-1$. بنابراین، حداقل مقدار $f(x,y)$ دراین‌حالت، برابراست با $f(3,-1)=12$.

برای $x<0$ و $y>0$ به دست می‌آید:

$$f(x,y)=-5x-3y=-\frac{21+13x}{5}$$

که وقتی به حداقل خود می‌رسد که x، بـه حداکثرمقدار منفی خود رسیده باشد. بـه‌ازای $x=-1$ عدد درستی برای y بـه دست نمی‌آید؛ بـه‌ازای $x=-2$ بـه دست می‌آید $y=3$؛ یعنی حداقل مقدار تابع دراین‌حالت، برابر $f(-2,3)=1$ است. وهمین‌مقدار هم، حداقل مقدارممکن برای تابع است.

۲۵۹. kامین جملهٔ دنبالهٔ مفروض را x_k می‌نامیم:

$$x_k=\left[\frac{k^2}{1980}\right],\ k=1,2,\dots,1980$$

دنبالهٔ (x_k) غیرنزولی است وروشن است که

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{44} = 0$$

زیرا برای $k \leqslant 44$ داریم $\frac{k^2}{1980} < 1$. به‌همین‌ترتیب، به‌سادگی قابل تحقیق است که

$$x_{45} + x_{46} + \dots + x_{62} = 1$$

زیرا برای $45 \leqslant k \leqslant 62$ داریم: $1 < \frac{k^2}{1980} < 2$. درضمن، جملهٔ بعداز x_{62} برابراست با ۲؛ یعنی ۱۸ جمله از دنبالهٔ ما برابر واحد است.

می‌بینیم، دربین ۶۲ جملهٔ اول‌دنباله، تنها دوعدد متفاوت وجود دارد. ازطرف‌دیگر

$$x_{1980} = \left[\frac{1980^2}{1980}\right] = 1980$$

واین به معنای آن است‌که، در دنبالهٔ (x_n)، همهٔ عددهای طبیعی‌از ۰ تا ۱۹۸۰ وجودندارد و «جاافتادگی‌هایی» درآن پیدا می‌شود.

این تفاضل را درنظرمی‌گیریم:

$$y_k = \frac{(k+1)^2}{1980} - \frac{k^2}{1980} = \frac{2k+1}{1980}$$

اگر $y_k > 1$، آن وقت عددهای x_k و x_{k+1} مختلف‌اند. ولی این موقعیت وقتی پیش می‌آید که داشته باشیم:

$$k > \frac{1979}{2} > 989$$

بنابراین، همهٔ عددهای x_{990}، x_{991}، ...، x_{1980} مختلف‌اند (که تعدادآن‌ها، برابر ۹۹۱ است).

درحالت $y_k < 1$، یا x_k و x_{k+1} برهم منطبق‌اند ویا یك واحد باهم اختلاف دارند؛ یعنی دراین‌حالت، «جاافتادگی» وجود ندارد. چون

$$x_{989} = \left[\frac{989^2}{1980}\right] = 494$$

پس درمجموعهٔ $\{x_1, x_2, \dots, x_{989}\}$، به‌همهٔ عددهای طبیعی از ۰ تا ۴۹۴ برخورد می‌کنیم (روی هم ۴۹۵ عدد).

به‌این ترتیب، تعداد عددهای مختلف x دردنبالهٔ مفروض برابراست با

$$991 + 495 = 1486$$

۲۱۵. اگر $n \leqslant 8$: آن‌وقت عدد

$$N=2^8+2^{11}+2^n=2^n(2^{8-n}+2^{11-n}+1)$$

برابر با حاصل‌ضرب عددزوج 2^n درعدد فرد $2^{11-n}+2^{8-n}+1$ می‌شود و برای این که مجذور کامل باشد، باید n عددی زوج درنظر گرفته شود. ولی آزمایش مستقیم روشن‌می‌کند که،وقتیn برابریکی‌ازعددهای ۲، ۴، ۶ یا ۸ باشد،N نمی‌توانده‌مجذور یك‌عدددرست باشد.

برای $n=9$ هم، عدد $N=2^8(1+2^3+2)=2^8\times 11$، مجذور کامل نیست.

اکنون فرض می‌کنیم $n\geqslant 10$. داریم:

$$N=2^8(1+2^3+2^{n-8})=2^8(9+2^{n-8})$$

باید عدد فرد $9+2^{n-8}$ مجذور کامل باشد و، البته، مجذور یك عدد فرد.

$$9+2^{n-8}=(2k+1)^2=4k^2+4k+1,\ (k\in\mathbf{N})$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$2^{n-8}=4(k^2+k-2)=2^2(k-1)(k+2);$$

$$2^{n-10}=(k-1)(k+2) \qquad (*)$$

ازدوعدد $k-1$ و $k+2$، یکی زوج ودیگری فرد است (زیـرا، تفاضل آن‌ها برابر ۳، یعنی عددی فرد است). بنابراین، برابری (*) تنها وقتی برقرار است‌که داشته باشیم:

$$k-1=1 \text{ و } k+2=2^{n-10}$$

که از آن‌جا به دست می‌آید: $k=2$ و $n=12$ وبه‌این ترتیب

$$N=2^8+2^{11}+2^{12}=2^8\times 25=80^2$$

۲۱۱. باقی‌ماندهٔ حاصل ازتقسیم عددهای ۱، ۲، 2^2، ...، 2^{n-1} بر n را، به‌ترتیب، برابر r_0، r_1، r_2، ...، r_{n-1} می‌گیریم. چون n، عددی‌فرد و بزرگتر ازواحداست،هیچ‌کدام از عددهای 2^j $(j=0, 1, \ldots, n-1)$، برn بخش‌پـذیر نیستند، یعنی همهٔ بـاقی‌مانده‌ها مخالف صفرند: هریك از n بـاقی‌ماندهٔ r_0، r_1، ...، r_{n-1} باید برابر یکی از $n-1$ عدد ۱، ۲، ...، $n-1$ باشند. بنابراین، دست‌کم دوتا ازاین باقی‌مانده‌ها با هم برابرند (بنابر اصل دیریکله). این دوباقی‌مانده را r_k و r_l می‌نامیم‌که درآن‌ها

$$0\leqslant k<l\leqslant n-1 \qquad (1)$$

ازآن‌جاکه 2^k و 2^l، درتقسیم بر n، به یك باقی‌مانده می‌رسند، بنابراین عدد 2^l-2^k برn بخش‌پذیراست وداریم:

$$2^l-2^k=2^k(2^{l-k}-1)$$

وروشن است‌که عدد $2^{l-k}-1$ عددی‌فرد است. چون 2^l-2^k برn بخش‌پذیر است‌وچون 2^k نمی‌تواند برعددفرد n بخش‌پذیر باشد، بنابراین عدد $2^{l-k}-1$ برn بخش‌پذیر خواهد

بود و، با توجه به نابرابری‌های (۱)، این عدد یکی از همان عددهای $۱-۲^۱$، $۱-۲^۲$، $۱-۲^۳$، ...، $۱-۲^{n-۱}$ است.

یادداشت. اگر $m>n-۱$، آن‌وقت می‌توان در بین عددهای

$$۲^۱-۱،\ ۲^۲-۱،\ ...،\ ۲^m-۱$$

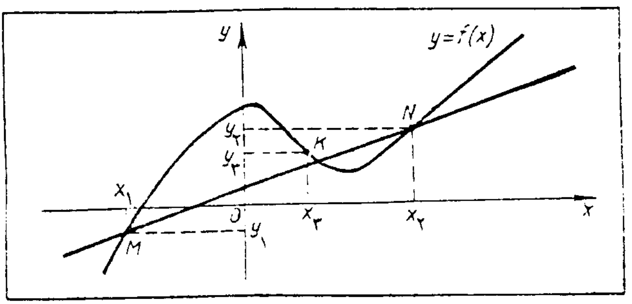
عددی را پیدا کرد که بر n بخش‌پذیر باشد. ولی در دنبالهٔ عددهای

$$۲^۱-۱،\ ۲^۲-۱،\ ...،\ ۲^{n-۲}-۱ \qquad (۲)$$

ممکن است عددی وجود نداشته باشد که بر n بخش‌پذیر باشد (که البته، در این‌صورت، **عدد** $۲^{n-۱}-۱$ بر n بخش‌پذیر است). مثلاً برای $n=۵$، دنبالهٔ عددهای (۲)، شامل عددهای ۱، ۳ و ۷ است که، هیچ‌کدام، بر ۵ بخش‌پذیر نیست، درحالی‌که $۱۵=۱-۲^۴=۱-۲^{n-۱}$ بر ۵ بخش‌پذیر است.

۲۱۲. آزمایش مستقیم نشان می‌دهد که تابع خطی دلخواه $f(x)=Ax+B$، به‌ازای عددهای حقیقی و دلخواه a، b و p، با نابرابری مورد نظر مسأله سازگار است (در حالت تابع خطی، نابرابری به برابری تبدیل می‌شود). ثابت می‌کنیم، جز تابع خطی، تابع دیگری وجود ندارد که با شرط مسأله بسازد.

$f(x)$ را تابعی غیرخطی و سازگار با شرط مسأله فرض می‌کنیم. در این‌صورت، باید بتوان سه نقطهٔ $M(x_۱، y_۱)$، $N(x_۲، y_۲)$ و $K(x_۳، y_۳)$ را روی نمودار $f(x)$ طوری پیدا کرد که روی یک خط راست نباشند. برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم، نقطهٔ K در بالای خط راست MN قرار گیرد (شکل ۸۴).



شکل ۸۴

معادلهٔ خط راست MN به‌این‌صورت است:

$$y=y_۱+\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}(x-x_۱)$$

چون نقطهٔ K، بالای خط راست MN قرار دارد، باید داشته باشیم:

$$y_3 > y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1)$$

این نابرابری را، با توجه به‌این‌که $y_3 = f(x_3)$، می‌توان این‌طور نوشت:

$$f(x_3) > \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1} y_1 + \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} y_2 \qquad (1)$$

که باید برای هر $a \in \mathbf{R}$، $b \in \mathbf{R}$ و $p \in \mathbf{R}$ برقرار باشد، مثلاً برای

$$a = x_1,\ \ b = x_2,\ \ pa + (1-p)b = x_3 \qquad (2)$$

دراین‌صورت

$$p = \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1},\ \ \ 1 - p = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}$$

ازنابرابری فرض مسأله و(۲) نتیجه می‌شود:

$$f(x_3) \leqslant pf(x_1) + (1-p)f(x_2) = \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1} y_1 + \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} y_2 \qquad (3)$$

باید هردونابرابری (۱) و (۳) برقرارباشندکه ممکن نیست.

پاسخ. تنها تابع خطی است‌که باشرط مسأله سازگاراست.

یادداشت. جالب است‌که، اگر برای p، شرط $0 < p < 1$ وجود داشته باشد، آن وقت‌گروه جواب‌های نابرابری فرض‌گسترش می‌یابد ونابرابری، برای همهٔ تابع‌هایی‌که، تقعرنمودارآن‌ها، به‌سمت yهای مثبت باشد، ومثلاً برای تابع

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \ (\alpha > 0)$$

وخیلی ازتابع‌های دیگر برقراراست.

۲۱۳. چون $[x] \leqslant x \leqslant |x|$، پس عبارت سمت چپ معادله، برابر است با $|x| - [x]$. چون $[x]$ عددی درست است، پس عبارت سمت راست معادله برابر با $[|x|] - [x]$ است. درنتیجه، معادلهٔ مفروض به‌این صورت درمی‌آید:

$$|x| = [|x|]$$

واین برابری وقتی برقراراست‌که $|x|$ و، درنتیجه، خود x، عددی درست باشد.

پاسخ. هرعدد درستی، ریشهٔ معادله است.

۲۱۴. با توجه به اتحاد $[a] + \{a\} = a$، بعد از جمع همهٔ معادله‌های دستگاه، به‌دست می‌آید: $x + y + z = 3/3$. ازاین‌معادله، مجموع دومعادلهٔ اول‌ودوم راکم‌می‌کنیم،

به‌دست می‌آید: $\{x\}+[y]=0$، که تنها وقتی برقرار است که هر دو جملهٔ سمت چپ برابری برابری صفر باشد. به‌این‌ترتیب، x عددی درست است و $0 \leqslant y < 1$.

اکنون، معادلهٔ اول دستگاه به صورت $x+\{z\}=1/1$ درمی‌آید؛ یعنی $x=1$ و $\{z\}=0/1$. معادلهٔ دوم دستگاه چنین می‌شود: $y+[z]=2/2$ که، از آن‌جا، نتیجه می‌شود: $[z]=2$ و $y=0/2$.

پاسخ. $x=1$، $y=0/2$، $z=2/1$.

۲۱۵. $\frac{a_n}{n!}$ را با b_n نشان می‌دهیم. در این‌صورت

$$b_1=1, \quad b_{n+1}-b_n=\frac{1}{(n+1)!}$$

اگر در برابری اخیر، به‌جای n، عددهای از ۱ تا n را قرار دهیم و، سپس، همهٔ برابری‌ها را باهم جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$b_{n+1}=b_1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{(n+1)!}$$

بنابراین $\lim\limits_{n\to\infty} b_{n+1}=e-1$.

۲۱۶. $f(x)$ به‌سادگی و با فرض $x=y$ در رابطهٔ تابعی‌شرط مسأله، به‌دست‌می‌آید:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\sin x+\cos x\right)$$

و اتحاد مفروض، چنین می‌شود:

$$g(x)-g(y)=\frac{1}{2}\left(\sin x-\cos x\right)-\frac{1}{2}\left(\sin y-\cos y\right)\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow g(y)-\frac{1}{2}\left(\sin y-\cos y\right)=g(x)-\frac{1}{2}\left(\sin x-\cos x\right)$$

بنابراین، باید تابع $g(x)-\frac{1}{2}\left(\sin x-\cos x\right)$ مقدار ثابتی باشد.

$$g(x)=\frac{1}{2}\left(\sin x-\cos x\right)+C$$

که در آن، C، مقدار ثابت دلخواهی است. آزمایش نشان می‌دهد، تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ که به‌این‌ترتیب به‌دست آمده‌اند، در اتحاد مسأله صدق می‌کنند.

۲۱۷. معادلهٔ مفروض به ازای $a=-1/2$، ریشه‌ای در بازهٔ $[0, 1]$ دارد، زیرا

$$f(x)=2^{a+4}+15(x+a)$$

دراین حالت، در دوانتهای بازه، مقدارهایی باعلامت‌های مختلف پیدا می‌کند.

$$f(0)=2^{4-1/2}-15\times 1/2<8-18<0,$$
$$f(1)=2^{4-1/2}-15\times 0/2>4-3>0$$

اکنون فرض می‌کنیم $a=-0/66$. دراین‌صورت، ازیك‌طرف، برای $x\in[0,1]$ داریم:

$$f(x)=2^{4-0/66}+15(x-0/66)>2^{4-\frac{2}{3}}-15\times\frac{2}{3}=$$

$$=2(2^{\frac{7}{3}}-5)=2(\sqrt[3]{128}-5)>0$$

ازطرف دیگر، اگردست‌کم برای یکی ازریشه‌های

$$x=-2\left(a+\frac{2}{3}\right)+4n,\quad n\in\mathbf{Z}$$

ازتابع $q(x)=1+2\cos\pi\left(a+\frac{x}{2}\right)$ داشته باشیم $0\leqslant x\leqslant 1$، آن‌وقت باید داشته‌باشیم:

$$0<\frac{a}{2}+\frac{1}{3}\leqslant n\leqslant\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+\frac{1}{3}<1$$

و یا

$$-1<\frac{a}{2}-\frac{1}{3}\leqslant n\leqslant\frac{1}{4}+\frac{a}{2}-\frac{1}{3}<0$$

که برای مقدار درستی از n، برقرارنیستند.

به‌ازای $a=-0/67$، تابع $g(x)$، ریشه‌ای برابر

$$x=2\left(0/67-\frac{2}{3}\right)$$

داردکه متعلق به بازهٔ $[0,1]$ است.

پاسخ. $-1/2$ و $-0/67$.

۲۱۸. بافرض $u=x-y$ و $v=\log_2(|x|+y+1)$، به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases}v^2-|u|-6=0\\(u-v)(u-5v)=0\end{cases}$$

بنابراین u و v، جواب یکی ازدو دستگاه زیراست:

$$\begin{cases} u=v \\ |v|^2-|v|-6=0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u=5v \\ |v|^2-5|v|-6=0 \end{cases}$$

ازدستگاه اول، جواب‌های $u=v=\pm 3$ به‌دست می‌آید وازآن‌جا $x=5$ و $y=2$؛ واز دستگاه دوم $x=46\frac{1}{2}$ و $y=16\frac{1}{2}$.

۲۱۹. $p=a-b-3$ می‌گیریم، به‌این معادله می‌رسیم:

$$x^2+2px+p-10=0 \qquad (1)$$

که درآن $p\in[-2, +\infty)$ (در واقع، از یك طرف $a\geqslant 2$ و $-b\geqslant -1$، یعنی $p\geqslant 2-1-3=-2$؛ ازطرف دیگر، هرمقدار $p\geqslant -2$ را می‌توان، مثلاً به ازای $a=2$ و $b=-p-1\leqslant 1$ به‌دست آورد).

به‌این ترتیب، مسأله رامی‌توان به‌این ترتیب تنظیم کرد. بین‌همهٔ زوج عددهای $p\geqslant -2$ و $x=x_0$، که دربرابری (۱) صدق‌می‌کنند، زوجی رابا بزرگترین مقدار x_0 پیداکنید. ولی برای چنین زوج‌هایی باید داشته باشیم:

$$p=\frac{10-x_0^2}{2x_0+1}\geqslant -2$$

($x_0\neq-\frac{1}{2}$، زیرا به‌ازای $x_0=-\frac{1}{2}$، به‌دست می‌آید:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2p\left(-\frac{1}{2}\right)+p-10=-9-\frac{3}{4}\neq 0$$

یعنی $x_0=-\frac{1}{2}$ درمعادلهٔ (۱) صدق نمی‌کند). ازاین‌جا نتیجه می‌شود

$$\frac{(x_0-6)(x_0+2)}{2x_0+1}\leqslant 0$$

یعنی $x_0\leqslant 6$؛ درضمن، آزمایش‌نشان می‌دهد که عددهای $p=-2$ و $x=6$ درمعادلهٔ(۱) صدق می‌کنند.

پاسخ. $x_0=6$.

۲۲۰. عبارت زیررادیکال را تبدیل می‌کنیم:

$$x^2-2axy+y^2-6y+10=(x-ay)^2+$$
$$+\left(y\sqrt{1-a^2}-\frac{3}{\sqrt{1-a^2}}\right)^2+\left(10-\frac{9}{1-a^2}\right)$$

به این ترتیب، عبارت اصلی بـه صورت $1+2\sqrt{A+B^2+C^2}$ است که در آن

$$10-\frac{9}{1-a^2}=A، \quad x-ay=B،$$

$$y\sqrt{1-a^2}-\frac{3}{\sqrt{1-a^2}}=C$$

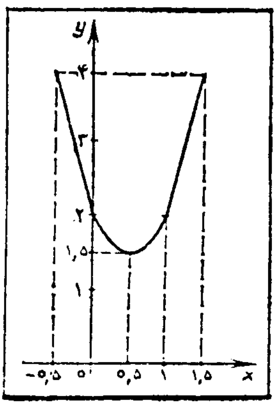
(یادآوری می‌کنیم، برای هرانتخاب $a\in(-1، 1)$، از برابری‌های بالا، یك جواب منحصر برای A، B و C به‌دست می‌آید).

اگر $A\geqslant 0$ (که با شرط $a^2\leqslant\frac{1}{10}$ هم ارزاست)، آن وقت عبارت موردنظر، به‌حداقل مقدارخود $1+2\sqrt{A}$، تنها به ازای $B=C=0$ می‌رسد، یعنی تنها بـه‌ازای یك جواب از $(x، y)$. اگر $A<0$، آن‌وقت، حداقل عبارت ما، برابرواحد می‌شود که به‌ازای $B=0$ و $C=\pm\sqrt{-A}$ به دست می‌آید. یعنی دست‌کم به‌ازای دو جواب از $(x، y)$. درواقع، دراین‌حالت، تعداد زوج عددهای $(x، y)$، بی‌نهایت است.

پاسخ. $-\frac{1}{\sqrt{10}}\leqslant a\leqslant\frac{1}{\sqrt{10}}$.

۲۲۱. با بازکردن قدرمطلق، به‌دست می‌آید:

$$y=\begin{cases}-4x+2 & \left(-\frac{1}{2}\leqslant x<0\right)\\ 2x^2-2x+2 & (0\leqslant x<1)\\ 4x-2 & \left(1<x\leqslant\frac{3}{2}\right)\end{cases}$$



شکل ۸۵

تابع پیوستهٔ $y(x)$، دربازه‌های $\left(-\frac{1}{2}، 0\right)$ و $\left(0، \frac{1}{2}\right)$ نزولی ودربازه‌های $\left(\frac{1}{2}، 1\right)$ و $\left(1، \frac{3}{2}\right)$ صعودی است (شکل ۸۵). بنابراین، حداقل مقدار y، به‌ازای $x=\frac{1}{2}$ وحداکثر آن به‌ازای $x=-\frac{1}{2}$ یا $x=\frac{3}{2}$ بـه دست می‌آید.

پاسخ. $y_{min}=\frac{3}{2}$، $y_{max}=4$.

۲۲۲. معادلهٔ مفروض، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$(3x-y)(2y-5x)=7$$

بنابراین، دوعددهای درست $3x-y$ و $2y-5x$ می‌توانند یکی ازچهار زوج $(1, 7)$، $(7, 1)$، $(-1, -7)$ یا $(-7, -1)$ باشند. به‌این‌ترتیب، چهارجواب برای (x, y)، درمجموعهٔ عددهای درست، به‌دست می‌آید:

$$(15, 38), (9, 26), (-15, -38), (-9, -26)$$

که ازبین آن‌ها، تنها دوجواب اول، باشرط $x<y$ سازگارند. اکنون باید همهٔ مقدارهای a راپیداکرد که دریکی ازنابرابری‌های

$$2a^2\times 15+3a\times 38<0 \quad \text{یا} \quad 2a^2\times 9+3a\times 26<0$$

صدق‌کنند.

پاسخ. $-\frac{19}{5}<a<0$.

۲۲۳. پاسخ. $-\frac{4\pi}{3}$.

۲۲۴. پاسخ. $-1\leqslant x\leqslant \frac{5}{2}$.

۲۲۵. دوطرف معادله رابرعدد

$$A=\sqrt{(4\sin a)^2+(2\cos a)^2}=2\sqrt{4-3\cos^2 a}>0$$

تقسیم می‌کنیم، به‌این معادله می‌رسیم:

$$\cos x\cos\varphi+\sin x\sin\varphi=B$$

که در آن $B=\frac{2\sqrt{7}+3\cos a}{A}>0$ وبرای زاویهٔ φ داریم:

$$\sin\varphi=\frac{4\sin a}{A}, \cos\varphi=\frac{2\cos a}{A}$$

چون $B=\sin(x+\varphi)\leqslant 1$، اگر به جای B مقدارش را قرار دهیم، به‌دست می‌آید: $(\sqrt{7}\cos a+2)^2\leqslant 0$ که تنها برای $\cos a=-\frac{2\sqrt{7}}{7}$ برقرار است. درنتیجه، معادلهٔ

مفروض، به‌صورت $\sin(x+\varphi)=1$ درمی‌آیدکه، در آن $\cos\varphi=-\frac{1}{2}$ و $\sin\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (در رابطه باعلامت $\sin a$). مثلاً می‌توان $\varphi=\frac{2\pi}{3}$ گرفت که، در نتیجه، $\sin a>0$ و یا $\varphi=\frac{4\pi}{3}$ که برای آن $\sin a<0$.

پاسخ. اگر $a=-\arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}+(2n+1)\pi\ (n\in\mathbf{Z})$، آن وقت

$$x=2m\pi-\frac{5\pi}{6},\ \ m\in\mathbf{Z}$$

معادلهٔ مفروض، برای سایرمقدارهای a، جواب ندارد.

۲۲۶. اگر فرض‌کنیم $\overline{xyz}=a$ و $\overline{tu}=b$، بایدداشته باشیم:

$$100a+b=a^2-b^2$$

که به سادگی، منجر به این معادله می‌شود:

$$(2a-2b-99)(2a+2b-101)=999$$

درسمت چپ برابری، مقدار پرانتزاول ازمقدار پرانتز دوم‌کمتراست. باتجزیهٔ ۹۹۹ بـه ضرب دوعامل درست ومثبت، ۶ حالت ممکن به‌دست می‌آیدکه، ازبین آن‌ها، تنهایك‌حالت باشرطهای مسأله سازگاراست: $a=134$ و $b=67$:

$$13467=134^2-67^2$$

۲۲۷. اگرعبارت سمت چپ برابری را $f(x)$ بنامیم، می‌توان نوشت:

$$f(x)=4x^3-5x^2-6x+3=4x^2(x-2)+3(x-1)^2$$

وروشن است‌که $f(x)$، به‌ازای $x\geqslant 2$، مقداری است مثبت ونمی‌تواند برابرصفرشود.

پاسخ. معادلهٔ مفروض، ریشه‌ای بزرگتریا برابر ۲ ندارد.

۲۲۸. فرض می‌کنیم: $f(x)=x-a-2\cos\frac{x+a}{2}$. برای هر $x\in\mathbf{R}$ داریم:

$$f'(x)=1+\sin\frac{x+a}{2}\geqslant 0$$

بنابراین، تابع $f(x)$، در هربازه‌ای‌که بین ریشه‌های معادلهٔ $\sin\frac{x+a}{2}=-1$ بـاشد، صعودی است، ولی تابع $f(x)$ پیوسته است و، بنابراین، روی تمامی محور عددی‌صعودی

است. درنتیجه، معادلهٔ مفروض نمی‌تواند بیش ازیك ریشه داشته باشد.

ازطرف‌دیگر: $f(a-۳)<۰$ و $f(a+۳)>۰$ بنابراین $f(x)$، دست‌کم در یکی ازنقطه‌های بازهٔ $[a-۳، a+۳]$، برابر صفرمی‌شود.

پاسخ. معادلهٔ مفروض، به‌ازای هرمقدار حقیقی a، دارای یك ریشه، وتنها یك ریشه است.

۲۲۹. فرما، ریاضی‌دان فرانسوی، تصور می‌کرد، هرعدد به‌صورت

$$A_n=۲^{۲^n}+۱ \qquad \text{(} n \text{، عددی درست وغیرمنفی)}$$

عددی است اول. درواقع هم

$$A_۰=۲^{۲^۰}+۱=۳; \qquad A_۱=۲^{۲^۱}+۱=۵;$$

$$A_۲=۱۷; \qquad A_۳=۲۵۷; \qquad A_۴=۶۵۵۳۷$$

این‌ها، همه عددهایی اول‌اند. ولی می‌توان ثابت کرد که، عدد فرما، به‌ازای $n=۵$، یعنی $A_۵=۲^{۲^۵}+۱$، غیر اول و بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است. یکی ازراه‌های اثبات رامی‌آوریم. داریم:

$$۲۵۰۰۰=۳۹\times ۶۴۱+۱=۳۹(۵\times ۲^۷+۱)+۱ \qquad (۱)$$

ازطرف دیگر

$$۲۵۰۰۰(۲^{۲^۵}+۱)=۲^۳\times ۵^۵(۲^{۳۲}+۱)=$$

$$=(۵\times ۲^۷)^۵+۱+۲^۳\times ۵^۵-۱ \qquad (۲)$$

اکنون اگر در (۲) به جای $۲^۳\times ۵^۵$ (یعنی ۲۵۰۰۰)، مقدارآن را از (۱) قراردهیم، به‌دست می‌آید:

$$۲۵۰۰۰(۲^{۲^۵}+۱)=[(۵\times ۲^۷)^۵+۱]+۳۹(۵\times ۲^۷+۱)$$

وروشن است که، این‌عبارت، بر $۵\times ۲^۷+۱$، یعنی بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است؛ و چون عدد ۲۵۰۰۰ بر ۶۴۱ بخش‌پذیر نیست، بنابراین باید عدد $۲^{۲^۵}+۱$ بر ۶۴۱ بخش‌پذیر باشد.

۲۳۰. چون $a=x^۲+۲y^۲$، پس

$$a^۲=(x^۲+۲y^۲)^۲=(x^۲-۲y^۲)^۲+۲(۲xy)^۲$$

$x^۲-۲y^۲$ نمی‌تواند برابرصفر باشد، زیرا بافرض $x^۲-۲y^۲=۰$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{x^۲}{y^۲}=\left(\frac{x}{y}\right)^۲=۲ \quad \text{و} \quad \left|\frac{x}{y}\right|=\sqrt{۲}$$

درحالی‌که نسبت دوعدد درست نمی‌تواند برابر عددی گنگ باشد. اکنون اگرفرض کنیم

$$u=|x^۲-۲y^۲| \text{ و } v=۲xy$$

به برابری $a^۲=u^۲+۲v^۲$ می‌رسیم.

۲۳۱. در برابری فرض، جملهٔ $\frac{۱}{c}$ را به سمت راست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{b}+\frac{۱}{a}=\frac{۱}{a+b+c}-\frac{۱}{c} \Longleftrightarrow \frac{a+b}{ab}=-\frac{a+b}{(a+b+c)\,c}$$

اگر $a+b=۰$، یعنی $a=-b$، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{a^۵}+\frac{۱}{b^۵}+\frac{۱}{c^۵}=\frac{۱}{a^۵}-\frac{۱}{a^۵}+\frac{۱}{c^۵}=\frac{۱}{c^۵};$$

$$\frac{۱}{a^۵+b^۵+c^۵}=\frac{۱}{a^۵-a^۵+c^۵}=\frac{۱}{c^۵}$$

یعنی $\frac{۱}{a^۵}+\frac{۱}{b^۵}+\frac{۱}{c^۵}=\frac{۱}{a^۵+b^۵+c^۵}$.

اگر $a+b\neq ۰$، آن‌وقت باید داشته باشیم:

$$(a+b+c)c=-ab \Longleftrightarrow c^۲+(a+b)c+ab=۰$$

یعنی $c=-a$ یا $c=-b$ که درهر حالت، مثل حالت $a=-b$، رابطهٔ حکم برقرار است.

یادداشت. روشن است که در رابطهٔ حکم، به‌جای ۵، می‌توان هر نمای فردی را قرار داد، یعنی با شرط $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}=\frac{۱}{a+b+c}$، همیشه داریم:

$$\frac{۱}{a^{۲n+۱}}+\frac{۱}{b^{۲n+۱}}+\frac{۱}{c^{۲n+۱}}=\frac{۱}{a^{۲n+۱}+b^{۲n+۱}+c^{۲n+۱}}$$

۲۳۲. داریم:

$$C_{۲p}^{p}-۲=\frac{(۲p)!}{p!\,p!}-۲=\frac{۲p(۲p-۱)\cdots(p+۱)}{p(p-۱)\cdots۱}-۲=$$

$$=\frac{۲}{(p-۱)!}\Big\{\underbrace{[(p-۱)+p]\cdot[(p-۲)+p]\cdots(۱+p)}_{A}-$$

$$-\underbrace{(p-۱)(p-۲)\cdots۱}_{B}$$

روشن است که از تقسیم $p+(p-۱)$ بر p باقی‌ماندهٔ $p-۱$، از تقسیم $p+(p-۲)$ بر

p به باقی‌ماندهٔ $p-۲$ و، به‌طورکلی، ازتقسیم $p+(p-a)$ بر p به باقی‌ماندهٔ $p-a$ می‌رسیم. بنابراین، باقی‌ماندهٔ حاصل ازتقسیم

$$A=[(p-۱)+p][(p-۲)+p]\cdots(۱+p)$$

بر p، برابراست با باقی‌مانده حاصل ازتقسیم

$$B=(p-۱)(p-۲)\cdots۱$$

بر p، واین، به‌معنای آن است که $A-B$ بر p بخش‌پذیراست.

یادداشت. می‌توان ثابت کرد که $C_{۲p}^{p}-۲$، برای هرعدداول p، بر $p^۲$ و برای‌هر عدد $p>۳$ بر $p^۳$ بخش‌پذیراست. مثلاً

$$C_{۴}^{۲}-۲=۶-۲=۴$$

که بر $۲^۲$ بخش‌پذیراست و

$$C_{۱۰}^{۵}-۲=۲۵۲-۲=۲۵۰$$

که بر $۵^۳$ بخش‌پذیراست.

۲۳۳. روشن است که

$$f'(x)=a_۱\cos x+۲a_۲\cos ۲x+\dots+na_n\cos nx$$

ازاین‌جا، به‌ترتیب، داریم:

$$|a_۱+۲a_۲+\dots+na_n|=|f'(۰)|=\lim_{x\to ۰}\left|\frac{f(x)-f(۰)}{x}\right|=$$

$$=\lim_{x\to ۰}\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\lim_{x\to ۰}\left|\frac{f(x)}{\sin x}\right|\cdot\left|\frac{\sin x}{x}\right|=\lim_{x\to ۰}\left|\frac{f(x)}{\sin x}\right|\leqslant ۱$$

۲۳۴. روشن است که

$$۱۰\leqslant\sqrt[۳]{\overline{abcd}}<۲۲$$

وچون a، b، c و d عددهایی طبیعی‌اند، باید داشته باشیم:

$$۱۰\leqslant a+b+c+d\leqslant ۲۱ \qquad (۱)$$

درضمن، ازبرابری

$$۱۰۰۰a+۱۰۰b+۱۰c+d=(a+b+c+d)^۳$$

باکم کردن $a+b+c+d$ ازدوطرف، به‌دست می‌آید:

$$9(111a+11b+c)=(a+b+c+d)(a+b+c+d+1)\times$$
$$\times(a+b+c+d-1) \qquad (2)$$

درسمت راست برابری، ضرب سه‌عدد درست متوالی قراردارد، بنابراین تنها یکی از آن‌ها بر ۹ بخش‌پذیر است که، باتوجه به‌رابطهٔ (۱)، این‌عدد، تنها می‌تواند برابر ۱۸ باشد.

۱) فرض می‌کنیم $a+b+c+d=18$، دراین‌صورت، باتوجه به (۲):

$$111a+11b+c=\frac{17\times18\times19}{9}=646$$

که تنها جواب آن $a=5$، $b=8$، $c=3$ و، از آن‌جا $d=2$ است:

$$\sqrt[3]{5832}=5+8+3+2$$

۲) فرض می‌کنیم $a+b+c+d+1=18$. دراین حالت هم، باهمان روش کار، یك جواب به دست می‌آید:

$$a=4,\ b=9,\ c=1,\ d=3;$$

$$\sqrt[3]{4913}=4+9+1+3$$

۳) فرض می‌کنیم $a+b+c+d-1=18$. این حالت، جوابی به ما نمی‌دهد (ثابت کنید!).

یادداشت. معادلهٔ $\sqrt[3]{\overline{abc}}=a+b+c$، تنها یك جواب دارد:

$$\sqrt[3]{512}=5+1+2$$

درضمن، برای عددهای پنج رقمی، این جواب را می‌آوریم:

$$\sqrt[3]{17576}=1+7+5+7+6$$

مسأله را خودتان، برای عددهای سه رقمی وپنج رقمی مورد بررسی قراردهید!

۲۳۵. ابتدا ثابت می‌کنیم، با فرض درست بودن عددهای a_1 و b_1، همیشه می‌توان $(a_1+b_1\sqrt{k})^n$ رابه صورت $a_n+b_n\sqrt{k}$ نوشت ($k\in\mathbf{N}$). برای $n=2$ داریم:

$$(a_1+b_1\sqrt{k})^2=(a_1^2+kb_1^2)+(2a_1b_1)\sqrt{k}$$

یعنی $a_2=a_1^2+kb_1^2$ و $b_2=2a_1b_1$. اکنون فرض می‌کنیم:

$$(a_1+b_1\sqrt{k})^n=a_n+b_n\sqrt{k}$$

دراین‌صورت، خواهیم داشت:

$$(a_1+b_1\sqrt{k})^{n+1}=(a_1+b_1\sqrt{k})^n\cdot(a_1+b_1\sqrt{k})=$$

$$=(a_n+b_n\sqrt{k})(a_1+b_1\sqrt{k})=(a_na_1+kb_nb_1)+$$

$$+(a_nb_1+a_1b_n)\sqrt{k}=a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{k}$$

به‌همین‌ترتیب ثابت می‌شود:

$$(a_1-b_1\sqrt{k})^n=a_n-b_n\sqrt{k}$$

به حل مسأله می‌پردازیم. (x_1, y_1) را جوابی از معادلهٔ مفروض می‌گیریم، دراین‌صورت باید داشته باشیم:

$$(x_1+y_1\sqrt{k})(x_1-y_1\sqrt{k})=1$$

یعنی، برای هر $n\in\mathbf{N}$ داریم:

$$(x_1+y_1\sqrt{k})^n\cdot(x_1-y_1\sqrt{k})^n=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x_n+y_n\sqrt{k})(x_n-y_n\sqrt{k})=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_n^2-ky_n^2=1$$

یعنی (x_n, y_n) هم، به‌ازای هر $n\in\mathbf{N}$، جوابی ازمعادله است.

۲۳۶. A و B را زیرمجموعه‌هایی ازمجموعهٔ C می‌گیریم‌که باشرط مسأله سازگار باشند. چون X زیرمجموعهٔ دلخواهی ازمجموعهٔ C است، می‌توان $X=C$ گرفت‌که، دراین صورت باید داشته‌باشیم $C\cap A=C\cup B$، ولی $C\cup B=C$، بنابراین به‌ناچار $A=C$. این بار $X=\varnothing$ می‌گیریم (مجموعهٔ تهی، زیرمجموعهٔ هرمجموعه‌ای است)، آن‌وقت باید داشته باشیم $\varnothing\cap A=\varnothing\cup B$، ولی $\varnothing\cap A=\varnothing$، بنابراین به‌ناچار $B=\varnothing$.

برعکس، اگر داشته‌باشیم $A=C$ و $B=\varnothing$، آن‌وقت برای‌هر $X\subset C$ خواهیم‌داشت:

$$X\cap A=X\cup B=X$$

پاسخ. $A=C$ و $B=\varnothing$.

۲۳۷. برای این‌که $\frac{n^3-1}{5}$ عددی اول باشد، قبل از همه باید n^3-1 بر ۵ بخش‌پذیر باشد، یعنی داشته باشیم $n=5k+1$. دراین‌صورت خواهیم داشت:

$$\frac{n^3-1}{5}=25k^3+15k^2+3k=k(25k^2+15k+3)$$

حاصل‌ضرب دوعامل نمی‌تواند عددی اول باشد، مگراین‌که یکی‌از آن‌ها برابرواحد شودو

چون $k<25k^2+15k+3$، بنابراین تنها وقتی ممکن است به جواب برسیم که داشته باشیم $k=1$ یا $n=6$.

پاسخ. به‌ازای $n=6$ به عدد ۴۳ می‌رسیم که عددی است اول.

۲۳۸. عدد مجهول را n می‌گیریم: $n^2<10^9$، یعنی

$$n<10000\sqrt{10}<32000$$

به‌این ترتیب، عدد پنج رقمی n، که شامل رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ است، روی هم ۵۴ «نامزد» پیدا می‌کند: ۲۴ عدد بـا رقم ۱ آغاز می‌شود، ۴ عدد با رقم ۲ و ۶ عدد با رقم ۳.

آزمایش این ۵۴ عدد، باماشین‌های حساب دستی، که تنها ۷ رقم سمت چپ عددرا می‌دهند ممکن است. برای همهٔ این ۵۴ عدد در ۷ رقم سمت چپ، یا رقم ۰ پدید می‌آید ویا رقم تکراری، به جز دربارهٔ عدد $n=12543$. واین، همان عدد مطلوب است.

$$n^2=12543^2=157326849$$

۲۳۹. مجموع مفروض را می‌توان این‌طور نوشت:

$$a_1^2-a_2^2+a_3^2-a_4^2+\dots+a_{2n-1}^2-a_{2n}^2=$$
$$=(a_1^2-1)-(a_2^2-1)+(a_3^2-1)-(a_4^2-1)+\dots+$$
$$+(a_{2n-1}^2-1)-(a_{2n}^2-1)$$

هر جملهٔ به‌صورت a_i^2-1 بر ۲۴ بخش‌پذیراست، زیرا چون a_i عددی فرد است، عددهای a_i-1 و a_i+1، دوعدد زوج متوالی‌اندکه یکی بر ۲ ودیگری بر ۴ وحاصل‌ضربشان بر ۸ بخش‌پذیراست؛درضمن، چون a_i بر ۳ بخش‌پذیر نیست، یکی‌ازدوعدد a_i-1 یا a_i+1 بر ۳ بخش‌پذیرمی‌شود، یعنی a_i^2-1 بر ۲۴ بخش‌پذیر است (۸ و ۳، نسبت به هم‌اول‌اند).

۲۴۰. $22x+5=N^2$ می‌گیریم (N، عددی است فرد). داریم:

$$N^2-16=(N-4)(N+4)=11(22x-1)$$

یعنی یا $N-4$ ویا $N+4$ بر ۱۱ بخش‌پذیر است.

۱) $N=(2k-1)11+4$ (به‌یاد بیاوریم، N عددی فرد بود)؛ ازاین‌جا به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{N^2-5}{22}=\frac{(22k-7)^2-5}{22}=22k^2-14k+2$$

۲) $N=(2k-1)11-4$ یا $N=22k-15$ وبنابراین

$$x=\frac{N^۲-۵}{۲۲}=\frac{(۲۲k-۱۵)^۲-۵}{۲۲}=۲۲k^۲-۳۰k+۱۰$$

۲۴۱. بازهٔ [۰، ۱] را به وسیلهٔ نقطه‌های $x_n=\frac{۱}{n}$، به‌فاصله‌های کوچکتر تقسیم می‌کنیم ($n=۱، ۲، ۳، ...، N$)، اکنون ذوزنقهٔ منحنی‌الخطی را درنظر می‌گیریم که به‌نمودار تابع $y=\sin x$ درفاصلهٔ $\left[\frac{۱}{N}، ۱\right]$ محدود باشد؛ شکلی به دست می‌آید که شامل مستطیل‌هایی است باقاعده‌های $\left[\frac{۱}{n+۱}، \frac{۱}{n}\right]$ و ارتفاع $\sin\frac{۱}{n+۱}$. بنابراین S_N، مساحت این شکل، برابراست با

$$\sum_{n=۱}^{N-۱}\sin\frac{۱}{n+۱}\left(\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n+۱}\right)=\sum_{n=۱}^{N-۱}\frac{\sin\frac{۱}{n+۱}}{n(n+۱)}$$

از آن‌جا

$$S_N<\int_۰^۱\sin x dx=۱-\cos ۱$$

وبنابراین

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin\frac{۱}{n+۱}}{n(n+۱)}=\lim_{n\to\infty}S_N\leqslant ۱-\cos ۱<\frac{۱}{۲}$$

توجه‌کنیم $\frac{\pi}{۳}>۱$، یعنی $\cos ۱>\frac{۱}{۲}$ و $۱-\cos ۱<\frac{۱}{۲}$.

۲۴۲. الف) برای عدد N دونمونه می‌آوریم:

$$N=۷۲۰=۲\times۳\times۴\times۵\times۶=۸\times۹\times۱۰;$$

$$N=۲\times۳\times۴\times\cdots\times۲۲\times۲۳=۵\times۶\times۷\times\cdots\times۲۳\times۲۴$$

ب) از برهان خلف استفاده و فرض می‌کنیم، عددهای درست m و n وجود داشته باشند، به نحوی که

$$m(m+۱)=n(n+۱)(n+۲)(n+۳) \qquad (*)$$

عبارت سمت راست برابری را می‌توان به‌این‌ترتیب تبدیل کرد:

$$n(n+۳)(n+۱)(n+۲)=(n^۲+۳n)(n^۲+۳n+۲)=$$

$$=[(n^2+3n+1)-1][(n^2+3n+1)+1]=(n^2+3n+1)^2-1$$

وبنابراین، برابری (*) به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$m^2+m+1=(n^2+3n+1)^2$$

یعنی باید m^2+m+1 برابرمجذور یك عدد درست باشدکه ممکن نیست، زیرا این‌عدد بین مجذورهای دوعدد درست متوالی قرار دارد:

$$m^2<m^2+m+1<(m+1)^2$$

۲۴۳. راهنمایی. ازدونابرابری دستگاه، وقتی‌یك شکل به‌دست می‌آیدکه‌سهمی‌های $y=-x^2$ و $y=x^2-2x+a$ یکدیگر را در دونقطه قطع‌کرده باشند، یعنی برای $a<\frac{1}{2}$. درضمن، برای $a<0$، طول‌های دونقطهٔ برخورد باعلامت‌های مختلف و برای $0<a<1$ دارای علامت‌های مثبت‌اند.

پاسخ. برای $a\leqslant 0$ مساحت مستطیل برابر $(1-a)$، به‌ازای $0<a<\frac{1}{2}$، برابر $(1-a)\sqrt{1-2a}$ و به ازای $a\geqslant\frac{1}{2}$ برابرصفراست.

۲۴۴. روشن است‌که $x>y>0$. اگردو طرف معادلهٔ مفروض را برعدد مثبت $x-y$ تقسیم‌کنیم، به‌دست‌می‌آید $\frac{x^3+y^3}{x-y}=1$؛ بنابراین $\frac{x^3-y^3}{x-y}<1$. ازطرف‌دیگر

$$x^2+y^2<x^2+xy+y^2=\frac{x^3-y^3}{x-y}<1$$

۲۴۵. اگرفرض‌کنیم $f(x)=a\cos x+b\cos 3x-1$، بنابه‌فرض مسأله باید داشته باشیم: $f(x)\leqslant 0$ (برای هر $x\in\mathbf{R}$). داریم:

$$f(\pi)=-a-b-1\leqslant 0;\quad 2f\left(\frac{\pi}{3}\right)=a-2b-2\leqslant 0$$

ازمجموع این دونابرابری به‌دست می‌آید: $-3b\leqslant 3$ یا $-b\leqslant 1$؛ همچنین

$$f(2\pi)=a-b-1\leqslant 0;\quad 2f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-a+2b-2\leqslant 0$$

که ازمجموع آن‌ها نتیجه می‌شود: $b\leqslant 1$. سرانجام دو نابرابری $-b\leqslant 1$ و $b\leqslant 1$ به معنای $|b|\leqslant 1$ است.

۲۴۶. با توجه به شرط $x_n \leqslant n\sqrt{n}$ (برای هر n)، به‌دست می‌آید $x_1 \leqslant 1$ و چون دنبالهٔ مفروض، تنها شامل عددهای طبیعی است، پس $x_1 = 1$.

برای $n=2$ داریم: $x_2 < 2\sqrt{2} < 3$، پس x_2 می‌تواند برابر ۱ یا برابر ۲ باشد.

حالت اول $x_2 = 1$. بنا بر شرط مسأله، باید تفاضل‌های

$$x_n - x_1 = x_n - 1 \quad \text{و} \quad x_n - x_2 = x_n - 1$$

بر $n-1$ و $n-2$ بخش‌پذیر باشند، یعنی باید x_n راطوری درنظر بگیریم که $x_n - 1$ بر حاصل‌ضرب $(n-1)(n-2)$ بخش‌پذیر شود. اگر $x_n \neq 1$، آن‌وقت باید داشته باشیم:

$$(n-1)(n-2) \leqslant |x_n - 1| \leqslant n\sqrt{n} - 1$$

که برای مقدارهای بزرگ $n(n \geqslant 5)$ برقرارنیست؛ یعنی برای این مقدارهای n باید داشته باشیم $x_n = 1$. اکنون m راعددطبیعی دلخواهی می‌گیریم؛ بایدتفاضل $x_{n+m} - x_m$ بر n بخش‌پذیر باشد، یعنی‌برای مقدارهای به‌قدرکافی بزرگ n، باید $1 - x_m$ بر n بخش‌پذیر باشدکه تنها برای $x_m = 1$ ممکن است. دنبالهٔ ما به‌صورت زیردرمی‌آید:

$$1,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ \ldots$$

حالت دوم $x_2 = 2$. دراین‌حالت، باید تفاضل‌های

$$x_k - x_1 = x_k - 1 \quad \text{و} \quad x_k - x_2 = x_k - 2$$

به ترتیب، بر $k-1$ و $k-2$ بخش‌پذیر باشند. وقتی $x_k - 1$ بر $k-1$ بخش‌پذیر است، تفاضل آن‌ها هم، یعنی

$$(x_k - 1) - (k-1) = x_k - k$$

بایدبر $k-1$ بخش‌پذیر باشد، به‌همین ترتیب، تفاضل

$$(x_k - 2) - (k-2) = x_k - k$$

بر $k-2$ بخش‌پذیراست؛ یعنی باید $x_k - k$ برهردو مقدار $k-1$ و $k-2$ قابل بخش باشد. اگر $x_k \neq k$، آن‌وقت

$$(k-1)(k-2) \leqslant |x_k - k| \leqslant k\sqrt{k} - k$$

که برای مقدارهای به‌قدرکافی بزرگ k نادرست است. بنابراین $x_k = k$.

اکنون باثابت‌نگه داشتن m وانتخاب عددطبیعی به‌اندازهٔ‌کافی بزرگ n، بایدتفاضل

$$x_{n+m} - x_n = n + m - x_n$$

بر n بخش‌پذیر باشد، یعنی $x_m - m$ بر m بخش‌پذیر است (برای هرمقدار به‌اندازهٔ کافی

بزرگ n) و این، تنها وقتی ممکن است که داشته باشیم: $x_m = m$ در این حالت، دنبالهٔ ما به این صورت است:

$$1، 2، 3، 4، \dots$$

۲۴۷. الف) با توجه به نابرابری بین واسطه‌های حسابی و هندسی سه عدد مثبت داریم:

$$1+x^2y^4+x^4y^2 \geqslant 3\sqrt[3]{1\times x^2y^4\times x^4y^2}=3x^2y^2 \qquad (*)$$

علامت برابری، تنها وقتی پیش می‌آید که داشته باشیم:

$$x^2y^4=x^4y^2=1 \Longrightarrow x=y=1$$

اکنون، با توجه به نابرابری (*)، می‌توان نوشت:

$$P(x، y)=3+(1+x^2y^4+x^4y^2)-3x^2y^2 \geqslant 3$$

حداقل $P(x، y)$ برابر است با ۳ که به‌ازای $x=y=1$ به دست می‌آید.

ب) اثبات را با برهان خلف می‌دهیم. فرض می‌کنیم، داشته باشیم:

$$3+x^2y^4+x^4y^2-3x^2y^2=g_1^2+g_2^2+\dots \qquad (1)$$

که در آن g_1، g_2، ... چندجمله‌ای‌ها هستند. روشن است که درجهٔ این چندجمله‌ای‌ها، از ۳ تجاوز نمی‌کند. فرض می‌کنیم:

$$g_i=a_i+b_i+c_i+d_i، \quad (i=1، 2، \dots)$$

که در آن a_i، b_i، c_i و d_i چندجمله‌ای‌های متجانسی، بـه ترتیب، از درجهٔ ۳، ۲، ۱ و ۰ هستند. اگر در (۱)، جمله‌های درجهٔ ۶، درجهٔ ۴ و درجهٔ ۲ را مقایسه کنیم، به‌دست می‌آید:

$$x^2y^4+x^4y^2=a_1^2+a_2^2+\dots \qquad (2)$$

$$-3x^2y^2=(b_1^2+2a_1c_1)+(b_2^2+2a_2c_2)+\dots \qquad (3)$$

$$0=(c_1^2+2b_1d_1)+(c_2^2+2b_2d_2)+\dots \qquad (4)$$

از (۲) نتیجه می‌شود که، هیچ‌کدام از چندجمله‌ای‌های a_i، جمله‌هایی شامل x^3 یا y^3 ندارند، یعنی همهٔ جمله‌ها بر xy بخش‌پذیرند همین نتیجه از (۳) برای b_i و از (۴) بـرای c_i نتیجه می‌شود. چون c_i یک چندجمله‌ای درجه اول و بر xy بخش‌پذیر است، پس $c_i=0$ و برابری (۳) چنین می‌شود:

$$3x^2y^2+b_1^2+b_2^2+\dots=0$$

ولی مجموع مجذورهای چندجمله‌ای‌ها نمی‌تواند برابر صفر باشد. تناقض حاصل، به معنای

درستی حکم است.

۲۴۸. در بازهٔ $[0, 1]$ داریم $0 < \sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2}$، پس $\sin^2\frac{x}{2} < \frac{x^2}{4}$ و از آن‌جا $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} > 0$. بنابراین

$$\int_0^1 \frac{x}{\cos x}dx < \int_0^1 \frac{2x}{2-x^2}dx = -\ln(2-x^2)\Big|_0^1 = \ln 2$$

۲۴۹. به ترتیب داریم:

$$\frac{y''}{x} - \frac{y'}{x^2} = x^2 - \frac{1}{x^2}; \qquad \left(y'\cdot\frac{1}{x}\right)' = x^2 - \frac{1}{x^2};$$

$$y'\cdot\frac{1}{x} = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C\,(C\in\mathbf{R});$$

$$y' = \frac{1}{3}x^4 + Cx + 1;$$

$$y = \frac{1}{15}x^5 + \frac{1}{2}Cx^2 + x + C'\,(C'\in\mathbf{R})$$

۲۵۰. معادلهٔ مفروض را می‌توان این‌طور نوشت:

$$2\cos[(x+\alpha)-2\alpha] - \sin(x+\alpha)\cos(x+\alpha) = 2\sin 4\alpha$$

از آن‌جا

$$2\cos(x+\alpha)\cos 2\alpha + 2\sin(x+\alpha)\sin 2\alpha - \sin(x+\alpha)\cos(x+\alpha) -$$
$$-4\sin 2\alpha\cos 2\alpha = 0$$

که به‌سادگی به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$[\sin(x+\alpha) - 2\cos 2\alpha]\cdot[2\sin 2\alpha - \cos(x+\alpha)] = 0$$

پاسخ.

$$\begin{cases} x = (-1)^n \arcsin(2\cos 2\alpha) + n\pi - \alpha \\ \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}k\pi \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm\arccos(2\sin 2\alpha) + 2n\pi - \alpha \\ -\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}k\pi \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}k\pi \end{cases}$$

۲۵۱. دستگاه مفروض را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\begin{cases} ۲^{\cos x}+۲^{\frac{۱}{\cos y}}=۵ \\ ۲^{\cos x}\cdot ۲^{\frac{۱}{\cos y}}=۴ \end{cases}$$

یعنی $۲^{\cos x}$ و $۲^{\frac{۱}{\cos y}}$، ریشه‌های معادلهٔ $t^۲-۵t+۴=۰$ هستند.

پاسخ. $\begin{cases} x=k\pi+\frac{\pi}{۲} \\ y=۲l\pi\pm\frac{\pi}{۳} \end{cases}$ $(k\in\mathbf{Z}، l\in\mathbf{Z})$

۲۵۲. ابتدا به‌این اتحادها توجه کنید:

$$\operatorname{arctg}\frac{k^۲+k+۲}{k^۲+k}=\operatorname{arctg}\frac{(k^۲+k+۱)+۱}{(k^۲+k+۱)-۱}=$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{۱+\frac{۱}{k^۲+k+۱}}{۱-\frac{۱}{k^۲+k+۱}}=\operatorname{arctg}۱+\operatorname{arctg}\frac{۱}{k^۲+k+۱};$$

$$\operatorname{arctg}\frac{۱}{k^۲+k+۱}=\operatorname{arctg}\frac{(k+۱)-k}{۱+(k+۱)k}=\operatorname{arctg}(k+۱)-\operatorname{arctg}k$$

بنابراین

$$\operatorname{arctg}\frac{k^۲+k+۲}{k^۲+k}=\operatorname{arctg}۱+\operatorname{arctg}(k+۱)-\operatorname{arctg}k$$

واز آن‌جا

$$\sum_{k=۱}^{۴n+۱}\operatorname{arctg}\frac{k^۲+k+۲}{k^۲+k}=(۴n+۱)\frac{\pi}{۴}+\operatorname{arctg}(۴n+۲)-$$

$$-\operatorname{arctg}۱=\frac{\pi}{۴}(۴n+۱)+\operatorname{arctg}\frac{۴n+۱}{۴n+۳}$$

ودراین‌صورت

$$tg\sum_{k=1}^{4n+1}\operatorname{arctg}\frac{k^2+k+2}{k^2+k}=tg\left(\frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg}\frac{4n+1}{4n+3}\right)=$$

$$=\frac{1+\frac{4n+1}{4n+3}}{1-\frac{4n+1}{4n+3}}=4n+2$$

۲۵۳. شرط لازم است. می‌دانیم درمثلث متساوی‌الاضلاع داریم:

$$m_a=m_b=m_c=\frac{3}{2}R$$

بنابراین

$$\frac{1}{(m_a+m_b-m_c)^2}+\frac{1}{(m_a+m_c-m_b)^2}+\frac{1}{(m_b+m_c-m_a)^2}=\frac{4}{3R^2}$$

ازطرف دیگر، برای مثلث متساوی‌الاضلاع به‌دست می‌آید:

$$\frac{9R^2}{4S^2}=\frac{9R^2}{4\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2\right)^2}=\frac{4}{3R^2}$$

شرط کافی است. باتوجه به‌نابرابری بین واسطه‌های حسابی و هندسی سه عدد مثبت داریم:

$$\frac{1}{(m_a+m_b-m_c)^2}+\frac{1}{(m_a+m_c-m_b)^2}+\frac{1}{(m_b+m_c-m_a)^2}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{3}{\sqrt[3]{(m_a+m_b-m_c)^2(m_a+m_c-m_b)^2(m_b+m_c-m_a)^2}}$$

ولی برای ضلع‌های هرمثلث، نابرابری زیرهمیشه برقرار است:

$$(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)\leqslant abc$$

همین نابرابری را می‌توان بامیانه‌های مثلث نوشت، زیرا بـا میانه‌های هرمثلث؛ می‌تـوان مثلث دیگری ساخت:

$$(m_a+m_b-m_c)(m_a+m_c-m_b)(m_b+m_c-m_a)\leqslant m_am_bm_c$$

درنتیجه

$$\frac{1}{(m_a+m_b-m_c)^2}+\frac{1}{(m_a+m_c-m_b)^2}+\frac{1}{(m_b+m_c-m_a)^2}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{\sqrt[3]{m_a^2m_b^2m_c^2}}$$

ولی

$$\sqrt[3]{m_a^2m_b^2m_c^2}\leqslant\sqrt{\frac{m_a^2+m_b^2+m_c^2}{4}}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{4}}\leqslant\frac{3}{2}R$$

(زیرا $a^2+b^2+c^2\leqslant 9R^2$)، یعنی

$$\sqrt[3]{m_a^2m_b^2m_c^2}\leqslant\frac{9}{4}R^2$$

به این ترتیب $\frac{3}{\sqrt[3]{m_a^2m_b^2m_c^2}}\geqslant\frac{4}{3R^2}$. علامت برابری، تنها برای حالتی پیش می‌آید که داشته باشیم: $m_a=m_b=m_c$، یعنی برای مثلث متساوی‌الاضلاع؛ و اگر مثلث متساوی‌الاضلاع نباشد، آن‌وقت

$$\frac{1}{(m_a+m_b-m_c)^2}+\frac{1}{(m_a+m_c-m_b)^2}+\frac{1}{(m_b+m_c-m_a)^2}>\frac{4}{3R^2}$$

۲۵۴. $k=x+y$ می‌گیریم. باید هر عدد درست و غیرمنفی را به صورت

$$\frac{(x+y)^2+3x+y}{2}=\frac{k^2+\ \ k+2x}{2}=\frac{k(k+1)}{2}+x$$

نشان دهیم که، در آن $0\leqslant x$ و $y=k-x\geqslant 0$، یعنی

$$0\leqslant x\leqslant k$$

روشن است که وقتی k، عددی ثابت باشد و x از 0 تا k تغییر کند، آن‌وقت

$$n=\frac{k(k+1)}{2}+x$$

همهٔ عددهای درست از $\frac{1}{2}k(k+1)$ تا $\frac{1}{2}k(k+1)+k$ را می‌پذیرد و، درضمن، هر کدام را یکبار. عدد بعدی برابر است با

$$\frac{1}{2}k(k+1)+k+1=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

به‌این ترتیب هرعدد n، دریکی ازگروه‌های

$$0;\quad 1, 2;\quad 3, 4, 5;\quad \frac{1}{2}k(k+1), \ldots, \frac{1}{2}k(k+1)+k;$$

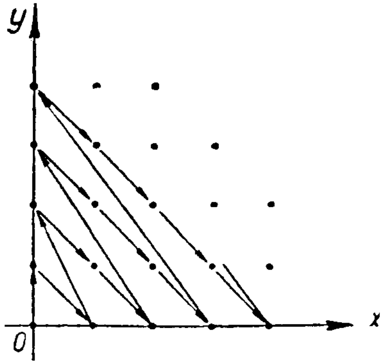
$$\frac{1}{2}(k+1)(k+2), \ldots, \frac{1}{2}(k+1)(k+2)+k+1$$

قرار می‌گیرد و، بنابراین، می‌توان‌آن را، به‌صورت زیر نشان داد:

$$\frac{1}{2}k(k+1)+x,\quad 0 \leqslant x \leqslant k$$

یادداشت. این مسأله تعبیرهندسی جالبی دارد. همهٔ نقطه‌های بامختصات درست وغیرمنفی (x, y) را، روی صفحه، علامت می‌گذاریم و، آن‌ها را، باعددهای ۰، ۱، ۲، ...، به‌ردیفی که‌در شکل ۸۶ نشان داده شده است، شماره گذاری می‌کنیم. خودتان ثابت‌کنیدکه، در این صورت، شمارهٔ نقطهٔ (x, y)، برابر با

$$\frac{(x+y)^2+3x+y}{2}$$



شکل ۸۶

درمی‌آید؛ وبه این ترتیب، راه حل دومی برای مسأله پیداکنید.

۲۵۵. iy را ریشهٔ این معادله می‌گیریم. دراین‌صورت

$$iy^5 - aiy^3 - by^2 + c = 0$$

یا

$$(c-by^2)+y^3(y^2-a)=0$$

ازآن‌جا $a = y^2$ و $c = by^2$. بنابراین، شرط لازم وکافی برای این‌که، معادلهٔ مفروض، ریشهٔ موهومی خالص داشته باشد، این است که $a > 0$ و $ab = c$ که، دراین‌صورت، معادله چنین می‌شود:

$$(x^2+a)(x^3+b)=0$$

و درآن، ریشه‌های $x = \pm i\sqrt{a}$ موهومی خالص‌اند.

۲۵۶. به‌ترتیب داریم:

$$y^2=(\sqrt{(x+2)(6-x)}-\sqrt{(x+1)(3-x)})^2=$$
$$=(\sqrt{(x+1)(6-x)}-\sqrt{(x+2)(3-x)})^2+3\geqslant 0$$

یعنی $\sqrt{3}\leqslant|y|$. ازطرف‌دیگر، به‌سادگی ثابت می‌شود که، برای مقدارهای قابل قبول x

$$-x^2+4x+12>-x^2+2x+3$$

یعنی $y>0$ و $y=|y|$. به‌این‌ترتیب $\sqrt{3}\leqslant y$. علامت برابری آن وقتی به‌دست می‌آید که داشته باشیم:

$$\sqrt{(x+1)(6-x)}=\sqrt{(x+2)(3-x)}$$

یعنی به‌ازای $x=0$.

پاسخ. $y_{min}=y(0)=\sqrt{3}$.

۲۵۷. ریشهٔ مشترک دومعادله را x_0 می‌گیریم، دراین‌صورت

$$(x_0^4+ax^2=-1,\ x_0^3+ax_0=-1)\Longrightarrow\frac{x_0^4+ax_0^2}{x_0^3+ax_0}=x_0=1$$

اگر $x_0=1$ را، مثلاً درمعادلهٔ اول قراردهیم، به‌دست می‌آید $a=-2$.

پاسخ. دومعادله به‌ازای $a=-2$، دارای ریشه مشترک $x_0=1$ هستند.

۲۵۸. مربع $0\leqslant x\leqslant a$ و $0\leqslant y\leqslant a$ را، دردستگاه محورهای قائم مختصات در نظرمی‌گیریم ونقطهٔ $A_1(x_1, y_1)$ را دردرون آن انتخاب می‌کنیم. کمانی ازیك دایره را در درون مربع رسم می‌کنیم که، مرکز آن، درمبداء مختصات باشد و، درضمن، از نقطهٔ A_1 بگذرد. مختصات هرنقطهٔ ازاین کمان چنین است:

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad (r=\sqrt{x_1^2+y_1^2})$$

روی این‌کمان، تابع مفروض، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$z=\frac{2a^2-r^2}{a^2-\frac{1}{2}r^2\sin 2\varphi}$$

وروشن است که، این‌عبارت، درمرزهای مربع به حداقل مقدار خود می‌رسد. بنابراین، حداقل مقدار تابع مفروض (اگرچنین حداقلی‌وجود داشته باشد)، دریکی ازنقطه‌های‌محیط مربع به‌دست می‌آید. به‌این‌ترتیب، کافی‌است تابع راروی خط‌های راست $x=0$، $y=0$، $x=a$، $y=a$ مورد بررسی قراردهیم.

۱) $x=0$؛ $z=\frac{2a^2-y^2}{a^2}$ که حداقل آن برابر است با $z=1$ و در نقطهٔ $M_1(0, a)$ به دست می‌آید؛

۲) $y=0$؛ $z=\frac{a^2-x^2}{a^2}$ که، حداقل آن $z=1$ است و در نقطهٔ $M_2(a, 0)$ به دست می‌آید؛

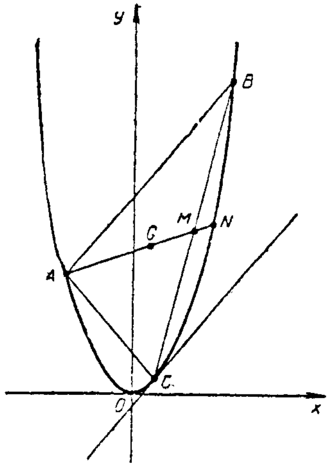
۳) $x=a$؛ $z=\frac{a+y}{a}$ که حداقل آن درهمان نقطهٔ M_2 به‌دست می‌آید؛

۴) $y=a$؛ $z=\frac{a+x}{a}$، به حداقل مقدار خود، درهمان نقطهٔ M_1.

پاسخ. $z_{min}=1$، به‌ازای $x=0$، $y=a$ یا $x=a$، $y=0$.

۲۵۹. راهنمائی. اگر فرض کنیم $\lg=\frac{m}{n}$، به برابری $x^n=10^m$ می‌رسیم.

۲۶۰. سهمی مفروض به هرصورتی باشد، می‌توان محورهای مختصات و اندازهٔ واحد را طوری انتخاب کرد که، معادلهٔ آن، به صورت $y=x^2$ درآید. درواقع، اگر رأس سهمی را مبداء مختصات و محور سهمی را منطبق برمحور عرض بگیریم، معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=ax^2$ درمی‌آید. اکنون، اگر واحد را a برابر قبلی فرض کنیم ($X=ax$ و $Y=ay$)، آن‌وقت، معادلهٔ سهمی به‌صورت $\frac{1}{a}Y=a\left(\frac{1}{a}X\right)^2$ یا $Y=X^2$ درخواهد آمد.



شکل ۸۷

در سهمی $y=x^2$، مختصات نقطهٔ A را (x_0, x_0^2) و مختصات نقطهٔ C را (x_1, x_1^2) می‌گیریم (شکل ۸۷). وتر AB، با مماس بر سهمی درنقطهٔ C موازی است، بنابراین، ضریب زاویه خط راست AB برابراست با $2x_1$ ومعادلهٔ خط راست AB چنین می‌شود:

$$y-x_0^2=2x_1(x-x_0)$$

ومختصات نقطهٔ B، که‌محل برخورد خط راست AB باسهمی‌است، ازاین دستگاه به‌دست‌می‌آید:

$$\begin{cases} y-x_0^2=2x_1(x-x_0) \\ y=x^2 \end{cases}$$

که از آن، به‌دست می‌آید: $x_B=2x_1-x_0$ و $y_B=(2x_1-x_0)^2$.
نقطهٔ M وسط ضلع BC است، بنابراین

$$x_M=\frac{3x_1-x_0}{2},\quad y_M=\frac{(2x_1-x_0)^2+x_1^2}{2}$$

با در دست‌داشتن مختصات A و M، معادلهٔ خط راست AM به‌دست می‌آید:

$$y-x_0^2=\frac{5x_1+x_0}{3}(x-x_0)$$

ازاین معادله ومعادلهٔ $y=x^2$، دستگاهی به‌دست می‌آید که، جواب آن، مختصات نقطهٔ N، محل برخورد خط راست AM باسهمی است:

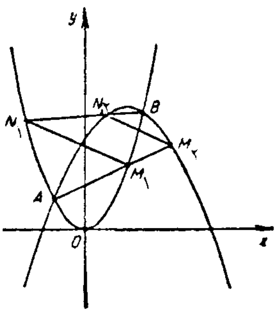
$$x_N=\frac{5x_1-2x_0}{3},\quad y_N=\frac{(5x_1-2x_0)^2}{9}$$

وچون، نسبت طول‌های دو بردار موازی، برابر نسبت تصویرهای آن‌هاست، پس

$$\frac{|\overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{NA}|}=\frac{x_M-x_N}{x_A-x_N}=\frac{1}{6}(x_1-x_0):\frac{5}{3}(x_1-x_0)=\frac{1}{10}$$

۲۶۱. دستگاه محورهای مختصات و واحد اندازه‌گیری را طوری انتخاب می‌کنیم که معادلهٔ یکی از سهمی‌ها به‌صورت $y=x^2$ باشد. معادلهٔ سهمی دوم را

$$y=ax^2+bx+c$$



شکل ۸۸

فرض می‌کنیم (شکل ۸۸). درحالت کلی $a\neq 1$، زیرا به‌ازای $a=1$، سهمی‌ها حداکثر دریك نقطه یکدیگر راقطع می‌کنند. طول‌های نقطه‌های A و B (نقطه‌های برخورد دو سهمی) را x_1 و x_2 می‌گیریم. داریم:

$$x_1+x_2=\frac{b}{1-a},\quad y_1=x_1^2,\quad y_2=x_2^2$$

$y-y_1=k_1(x-x_1)$ و $y-y_2=k_2(x-x_2)$ را، به‌ترتیب، معادله‌های خط‌های راستی می‌گیریم که از A و B گذشته‌اند. مختصات نقطهٔ M_1، محل برخورد خط راست اول باسهمی $y=x^2$، ازدستگاه شامل معادله‌های

$$y=x^2,\quad y-y_1=k_1(x-x_1)$$

به‌دست می‌آید: $x_1+x_{M_1}=k_1$، $y_{M_1}=x_{M_1}^2$.

به‌همین‌ترتیب، برای نقطهٔ M_2 خواهیم داشت:

$$x_1+x_{M_2}=\frac{k_1-b}{a},\quad y_{M_2}=ax_{M_2}^2+bx_{M_2}+c$$

و با روشی مشابه، برای نقطه‌های N_1 و N_2:

$$x_{N_1}+x_2=k_2\quad y_{N_1}=x_{N_1}^2,$$

$$x_{N_2}+x_2=\frac{k_2-b}{a},\quad y_{N_2}=ax_{N_2}^2+bx_{N_2}+c$$

اکنون به محاسبهٔ ضریب زاویه‌های دوخط راست M_1N_1 و M_2N_2 می‌پردازیم:

$$k_{M_1N_1}=\frac{y_{M_1}-y_{N_1}}{x_{M_1}-x_{N_1}}=k_1-x_1+k_2-x_2=k_1+k_2-\frac{b}{1-a};$$

$$k_{M_2N_2}=\frac{y_{M_2}-y_{N_2}}{x_{M_2}-x_{N_2}}=a(x_{M_2}+x_{N_2})+b=$$

$$=a\left(\frac{k_1-b}{a}-x_1+\frac{k_2-b}{a}-x_2\right)+b=$$

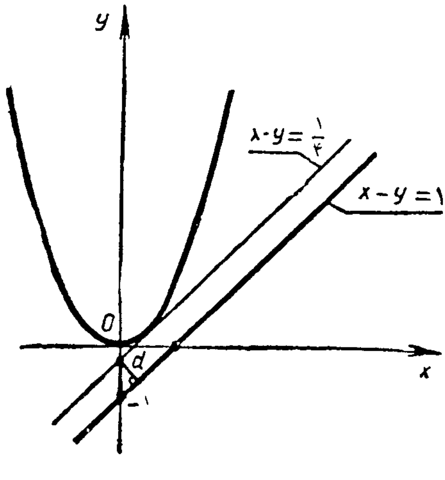
$$=k_1+k_2-a\,(x_1+x_2)+b=k_1+k_2-\frac{b}{1-a}$$

دوضریب زاویه برابرند و، بنابراین، خطهای راست M_1N_1 و M_2N_2 باهم موازی‌اند.

۲۶۲. خط راست مماس بر سهمی، که با $x-y=1$ موازی باشد، به‌صورت $x-y=m$ است. درضمن، اگر خط راست $x-y=m$ بر سهمی $y=x^2$ مماس باشد، باید ازحل این دو معادله، به‌معادله‌ای با ریشهٔ مضاعف برسیم. بنابراین باید معادلهٔ

$$x^2-x+m=0$$

ریشه‌ای مضاعف داشته باشد که، از آن‌جا به دست می‌آید $m=\frac{1}{4}$.



شکل ۸۹

به‌این‌ترتیب، باید فاصلهٔ بین دوخط راست موازی $y=x-1$ و $y=x-\frac{1}{4}$ را پیداکرد (شکل ۸۹).

پاسخ. فاصلهٔ خط راست تا سهمی، برابراست با $\frac{3\sqrt{2}}{8}$.

۲۶۳. برای پیداکردن معادلهٔ مجموعهٔ نقطه‌های M (یعنی، مکان هندسی نقطهٔ M)، باید u را بین x و y نقطهٔ M حذف کرد ورابطه‌ای بین x و y به‌دست‌آورد. داریم:

$$\frac{x}{y}=-\left(u+\frac{1}{u}\right) \quad \text{و} \quad u^2+\frac{1}{u^2}=\frac{x^2}{y^2}-2$$

سپس

$$y=\frac{u-\frac{1}{u}}{u^2+\frac{1}{u^2}}=\frac{u-\frac{1}{u}}{\frac{x^2}{y^2}-2}\Longrightarrow u-\frac{1}{u}=\frac{x^2-2y^2}{y}$$

با در دست داشتن $u+\frac{1}{u}$ و $u-\frac{1}{u}$، به‌دست می‌آید:

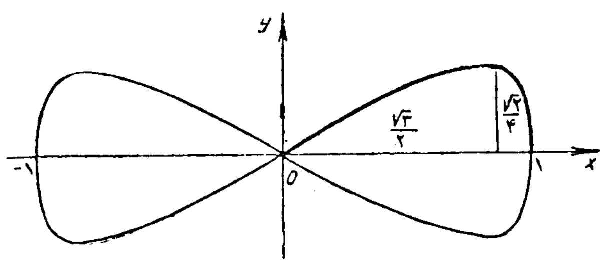
$$u=\frac{x^2-2y^2-x}{2y},\quad \frac{1}{u}=\frac{2y^2-x^2-x}{2y}$$

$$u\times\frac{1}{u}=\frac{(x^2-2y^2-x)(2y^2-x^2-x)}{4y^2}=1$$

ومعادلهٔ مکان نقطهٔ M به‌این صورت درمی‌آید:

$$4y^4-4(x^2-1)y^2+x^4-x^2=0$$

که نمودار آن، نسبت به‌هردومحور مختصات (ودرنتیجه، نسبت به مبداء مختصات) متقارن



شکل ۹۵

است واز مبداء مختصات می‌گذرد. ازمعادلهٔ مکان به‌دست می‌آید:

$$y^2=\frac{x^2-1\pm\sqrt{1-x^2}}{2}\;;\;\; x^2=\frac{4y^2+1\pm\sqrt{1-8y^2}}{2}$$

یعنی $-1\leqslant x\leqslant 1$ و $-\frac{\sqrt{2}}{4}\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}$. به ازای $x=\pm 1$ به $y=0$ و بـه ازای $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$ بـه $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ می‌رسیم. نمودارمجموعهٔ نقطه‌های M، روی شکل ۹۰ داده شده است.

۲۶۴. پاسخ. دومقدار.

اگر به ازای سه مقدار درست x، شرط مسأله برقرار باشد، به‌ناچار دوتا ازآن‌ها در یك طرف $x_0=-\frac{b}{2a}$ (طول رأس سهمی $y=ax^2+bx+c$) قـرار می‌گیرند. بدون این‌که به‌کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌تـوان فرض‌کردکه این دو نقطه x_1 و x_2 $(x_2>x_1)$ درسمت راست x_0 واقع باشند. دراین‌صورت

$$x_1+\frac{b}{2a}\geqslant 0,\;\; x_2+\frac{b}{2a}\geqslant 1$$

وداریم:

$$100\geqslant|y(x_2)-y(x_1)|=a(x_2-x_1)\left(x_1+x_2+\frac{b}{2a}\right)>$$

$$>100\left(x_1+x_2+\frac{b}{2a}\right)\geqslant 100$$

تناقض حاصل، به معنای آن است‌که، بیش ازدوعدد درست نمی‌توان برای x پیداکردکه، به‌ازای آن‌ها، قدرمطلق مقدار سه جمله‌ای از ۵۰ تجاوز نکند.

درضمن، برای دوعدد می‌توان مثال‌هایی پیداکرد: چند جمله‌ای $101x^2-100$، به ازای $x=1$ و $x=-1$، برابرواحد می‌شود.

۲۶۵. روشن است‌که نامعادله، برای $\sin x=0$ و $\sin y=0$ برقرار است. ثـابت می‌کنیم، نامعادله جواب دیگری ندارد. ازنامعادله دیده می‌شودکه $\sin x$ و $\sin y$ نمی‌توانند هم‌علامت‌باشند،زیرا دراین‌صورت، سمت چپ نا برابری‌مثبت می‌شود.همچنین $\sin x=0$ و $\sin y\neq 0$ یا $\sin x\neq 0$ و $\sin y=0$ هم‌درنامعادله صدق نمی‌کنند (امتحان‌کنید!). برای موردهای دیگر، دوحالت درنظرمی‌گیریم:

۱) $\sin x > \sin y$. نامعادله، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\sin x - \sin y + \sin x \sin y \leqslant ۰ \Longleftrightarrow (۱ - \sin x)(۱ + \sin y) \geqslant ۱$$

دیدیم $\sin x$ و $\sin y$ هم‌علامت نیستند. بنابراین باید داشته باشیم: $\sin x > ۰$ و $\sin y < ۰$
دراین‌صورت

$$۱ - \sin x < ۱ \text{ و } ۱ + \sin y < ۱$$

وحاصل‌ضرب آن‌ها، نمی‌تواند از واحد بزرگتر شود.

۲) $\sin x < \sin y$. دراین‌حالت به‌دست می‌آید:

$$-\sin x + \sin y + \sin x \sin y \leqslant ۰ \Longleftrightarrow (۱ - \sin y)(۱ + \sin x) \geqslant ۱$$

که با استدلالی شبیه حالت قبل، نمی‌تواند برقرار باشد.

پاسخ. $x = n\pi$ و $y = m\pi$ $(m, n \in \mathbf{Z})$.

۲۶۶. برای هرعدد طبیعی k داریم: $a_{۲^k} = a_۱ = ۱$ فرض می‌کنیم، دنبالهٔ (a_n) متناوب باشد، بادورهٔ تناوبی برابر T. دوحالت درنظرمی‌گیریم.

۱) $T = ۲^p.q$ و $q = ۴m + ۳$. دراین‌صورت، برای مقدارهای به‌اندازهٔ کافی بزرگ k باید داشته باشیم:

$$a_{۲^k} = a_{۲^k + T} = a_{۲^p(۲^{k-p} + q)} = a_{۲^{k-p} + q} = ۰$$

زیرا به‌ازای $k \geqslant p + ۲$، باقی‌ماندهٔ حاصل ازتقسیم $۲^{k-p} + q$ بر ۴، برابراست با ۳. به این ترتیب، به تناقض می‌رسیم.

۲) اگر $T = ۲^p.\,q$ و $q = ۴n + ۱$، آن وقت

$$a_{۲^k} = a_{۲^k + ۳T} = a_{۲^p(۲^{k-p} + ۳q)} = a_{۲^{k-p} + ۳q} = ۰$$

بازهم تناقض.

۲۶۷. ۱) اگردوبار ازروش هوپیتال استفاده‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\lim_{x \to ۰}\left(\frac{۱}{\sin x} - \frac{۱}{x}\right) = \lim_{x \to ۰}\frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \to ۰}\frac{۱ - \cos x}{\sin x + x\cos x} =$$

$$= \lim_{x \to ۰}\frac{\sin x}{۲\cos x - x\sin x} = ۰$$

۲) بازهم از روش هوپیتال استفاده می‌کنیم (چهار بارمتوالی):

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{2x\sin^2 x+x^2\sin 2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin^2 x+2x\sin 2x+x^2\cos 2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{3\sin 2x+6x\cos 2x-2x^2\sin 2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x}{3\cos 2x-4x\sin 2x-x^2\cos 2x}=\frac{1}{3}$$

یادداشت. همین روش و، البته، اندکی مفصل‌تر، می‌توان ثابت‌کرد:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^3 x}-\frac{1}{x^3}\right)=\infty$$

به‌طور کلی، برای عدد حقیقی t، ثابت می‌شود که

برای $t<2$: $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sin^t x}-\frac{1}{x^t}\right)=0$؛

برای $t=2$: $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sin^t x}-\frac{1}{x^t}\right)=\frac{1}{3}$؛

برای $t>2$: $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sin^t x}-\frac{1}{x^t}\right)=\infty$.

(برای آشنا شدن با روش اثبات این قضیه، مثلاً می‌توانید بـه صفحهٔ ۴۱۷ نشریهٔ «آشنائی با ریاضیات» جلد سی‌ام مراجعه‌کنید.)

۲۶۸. در حالت منفی بـودن c، چون $a>0$، مبین معادلهٔ درجه دوم، بـه‌روشنی، مثبت می‌شود ومعادله، دوجواب حقیقی متمایز پیدا می‌کند.

اگر $c\geqslant 0$، آن‌وقت $a+c>0$ (چون $a>0$) وهردوطرف نابرابری $b>b+c$، عددهایی مثبت‌اند و، بنابراین $b^2>(a+c)^2$ و

$$\Delta=b^2-4ac>(a+c)^2-4ac=(a-c)^2\geqslant 0$$

۲۶۹. a_1، a_2، ...، a_{10} راعددهایی طبیعی بـه‌مجموع ۱۰۰۱، و d را بـزرگترین مقسوم‌علیه مشترك آن‌ها می‌گیریم. دراین‌صورت

$$a_1=db_1,\ a_2=db_2,\ \dots,\ a_{10}=db_{10}$$

(b_1، b_2، ...، b_{10} عددهایی طبیعی‌اند). از این جا به دست می‌آید:

$$1001 = d(b_1 + b_2 + \cdots + b_{10}) \geqslant 10d$$

یعنی $d \leqslant 100$. درضمن d باید مقسوم‌علیهی از ۱۰۰۱ باشد (مجموع چند عدد، برمقسوم‌علیه مشترک آن‌ها، بخش‌پذیر است). داریم:

$$1001 = 7 \times 11 \times 13$$

یعنی، بزرگترین مقسوم علیه ۱۰۰۱ که از ۱۰۰ تجاوز نکند، برابر 7×13، یعنی ۹۱ است. به‌این‌ترتیب، بزرگترین مقسوم علیه مشترک a_1، a_2، ...، a_{10} نمی‌تواند از ۹۱ بزرگتر باشد. درضمن، اگر فرض کنیم:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_9 = 91 \text{ ، } a_{10} = 182$$

مجموعی برابر ۱۰۰۱ پیدا می‌کنند و بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها، برابر ۹۱ است.

۲۷۰. برای هر دوعدد مثبت x و y، همیشه داریم: $x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$، بنابراین

$$1 + a_1^2 \geqslant 2\sqrt{a_1^2} = 2|a_1| \text{ ، } 1 + a_2^2 \geqslant 2\sqrt{a_2^2} = 2|a_2| \text{ ، } \ldots$$
$$\ldots \text{ ، } 1 + a_n^2 \geqslant 2\sqrt{a_n^2} = 2|a_n|$$

از ضرب این نابرابری‌ها دریکدیگر (درهر نابرابری، دردو طرف، عددهایی مثبت قرار دارند)، به‌دست می‌آید:

$$(1 + a_1^2)(1 + a_2^2)\cdots(1 + a_n^2) \geqslant 2^n \cdot |a_1| \cdot |a_2| \cdots |a_n| =$$
$$= 2^n |a_1 \cdot a_2 \cdots a_n| = 2^n$$

۲۷۱. چون $\frac{x}{y} \geqslant \frac{1}{y} \geqslant \frac{1}{z}$ و $\frac{z}{t} \geqslant \frac{z}{100}$، بنابراین

$$\frac{x}{y} + \frac{z}{t} \geqslant \frac{1}{z} + \frac{z}{100} \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{z} \cdot \frac{z}{100}} = \frac{1}{5}$$

یعنی، برای هرمقدار ازمتغیرهای x، y، z، t داریم:

$$\frac{x}{y} + \frac{z}{t} \geqslant \frac{1}{5}$$

ومثلاً، به‌ازای $x = 1$، $y = z = 10$ و $t = 100$، این حداقل به‌دست می‌آید:

$$\frac{x}{y} + \frac{z}{t} = \frac{1}{10} + \frac{10}{100} = \frac{1}{5}$$

۲۷۲. ابتدا ثابت می‌کنیم، به شرط مثبت بودن α و β و $\alpha+\beta<\pi$، نابرابری‌های $\sin\alpha<\sin\beta$ و $\alpha<\beta$ هم‌ارزند.

بافرض $\alpha<\beta$، دوحالت پیش می‌آید:

الف) $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$. تابع $y=\sin x$، در بازهٔ $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$، اکیداً صعودی است، یعنی $\sin\alpha<\sin\beta$.

ب) $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi-\alpha$. چون تابع $y=\sin x$، در بازهٔ $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi$، اکیداً نزولی است و، درضمن $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$، بنابراین بازهم بـه همان نابرابری $\sin\alpha<\sin\beta$ می‌رسیم.

برعکس، فرض کنید $\sin\alpha<\sin\beta$. ثابت می‌کنیم، دراین‌صورت $\alpha<\beta$. از برهان خلف استفاده می‌کنیم و $\beta<\alpha$ می‌گیریم (روشن‌است که $\alpha\neq\beta$). دراین‌صورت بایدداشته باشیم $\beta<\alpha<\pi-\beta$؛ درنتیجه، باتوجه به‌قضیهٔ مستقیم، باید داشته باشیم: $\sin\beta<\sin\alpha$ که، فرض ما را، نقض می‌کند. پس $0<\sin\alpha<\sin\beta$ و یـا $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}<1$؛ بنابراین

$$\frac{\sin a}{\sin b}\leqslant\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}<1\Longrightarrow\frac{\sin a}{\sin b}<1\Longrightarrow\sin a<\sin b$$

(زیـرا $0<b<\pi$، $\sin b>0$). چون، بنابـرفرض، a و b عددهایی مثبت‌اند و داریم: $a+b<\pi$، نتیجه می‌گیریم: $a<b$.

۲۷۳. اگرعددهای درست x و y درمعادلهٔ مفروض صدق کنند، آن‌وقت

$$\sqrt{y}=1371-\sqrt{x}\Longrightarrow y=1371^2+x-2\times1371\sqrt{x}$$

ازاین‌برابری نتیجه می‌شودکه x، باید مجذوریك عدد درست باشد(تابرای y، عدددرستی به‌دست آید). ولی دراین‌صورت، ازخود معادلهٔ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1371$ روشن می‌شودکه y هم، مجذوریك عدد درست است. بنابراین، تعداد جواب‌های درست معادله، برابراست با تعداد تبدیل‌های عدد۱۳۷۱، به‌مجموع دوعددغیرمنفی(بارعایت ترتیب آن‌ها)، یعنی۱۳۷۲.

۲۷۴. $y=\log_2\cos x$ می‌گیریم. به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$\cos x=2^y,\quad \cot g^2x=3^y,\quad \cot g\,x>0$$

ولی $\cot g^2x=\frac{\cos^2x}{1-\cos^2x}$، بنابراین

$$3^y=\frac{4^y}{1-4^y}\Longrightarrow 3^y-12^y=4^y\Longrightarrow\left(\frac{3}{4}\right)^y=1+3^y$$

سمت چپ برابری اخیر، تابعی نزولی و سمت راست آن تابعی صعودی است، بنابراین، جوابی منحصر به‌فرد دارد: $y=-1$. به‌این‌ترتیب

$$\cos x=\frac{1}{2}\Longrightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{3},\quad k\in\mathbf{Z}$$

۲۷۵. بنابه‌فرض، باید داشته باشیم:

$$x_2=x_1(1-x_1)\Longleftrightarrow x_1^2-x+x_2=0$$

و برای این‌که x_1 عددی حقیقی باشد، باید $1-4x_2\geqslant 0$، یعنی

$$x_2\leqslant\frac{1}{4}<\frac{1}{3}$$

باروش استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم، برای $n\geqslant 2$ داریم $x_n<\frac{1}{n+1}$.

فرض می‌کنیم $x_{n-1}<\frac{1}{n}$. تابع $x(1-x)$ برای $x<\frac{1}{2}$ صعودی است، بنابراین

$$x_n=x_{n-1}(1-x_{n-1})<\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{n-1}{n^2}<\frac{1}{n+1}$$

روشن‌است‌که همهٔ جمله‌های دنبالهٔ (x_n) مثبت‌اند و، بنابراین، حداین‌دنباله برابرصفراست.

سپس، چون $x_n>0$، بنابراین برای $n\geqslant 2$

$$(n+1)x_{n+1}=(n+1)x_n(1-x_n)=nx_n+x_n[1-(n+1)x_n]>nx_n$$

یعنی دنبالهٔ (nx_n) صعودی است؛ علاوه براین، از بالا کران‌دار است، زیرا $nx_n<(n+1)x_{n+1}<1$؛ یعنی دارای حد است. این حد را a می‌نامیم.

قضیه‌ای وجود دارد به‌نام «قضیهٔ شتولتس» که، درمحاسبهٔ حدها، در برخی موردها، کار راساده می‌کند. بنابراین قضیه

$$(*)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$$

(برای اثبات این‌قضیه، می‌توانید مثلاً به‌کتاب «آنالیز ریاضی» تألیف فیختن‌گولتس‌ترجمهٔ باقرامامی ـ پرویزشهریاری، جلد اول صفحهٔ ۸۴ مراجعه‌کنید.)

توجه‌کنیم، این قضیه، تنها برای حالتی می‌تواند مورد استفاده قرارگیردکه

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\infty \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} y_n=\infty$$

درضمن، باید $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ هم وجود داشته باشد.

اکنون، با توجه به (*) به‌ترتیب داریم:

$$a=\lim_{n\to\infty}(nx_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_nx_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_nx_{n+1}}{x_n-x_n(1-x_n)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n(1-x_n)}{x_n}=\lim_{n\to\infty}(1-x_n)=1$$

۲۷۶. اگر فرض کنیم $y=\sqrt[3]{2-x}$ و $z=\sqrt{x-1}$، به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$y^3+x=2,\quad z^2+1=x,\quad y+z=1$$

ازمجموع دومعادلهٔ اول به‌دست می‌آید: $y^3+z^2=1$ که اگر، در آن، $z=1-y$ را از معادلهٔ سوم قراردهیم، به‌این معادلهٔ ساده برای مجهول y می‌رسیم:

$$y^3+y^2-2y=0 \Longrightarrow y\in\{0,\ 1,\ -2\}$$

وباتوجه به معادلهٔ $y^3+x=2$، مقدار x به‌دست می‌آید.

پاسخ. $x_1=1$، $x_2=2$، $x_3=10$.

۲۷۷. برای $x>0$، نابرابری $f(x)>0$ برقراراست. بنابراین، بخشی ازنمودار تابع f،که در ربع‌اول دستگاه محورهای مختصات واقع است، بالای خط راست $y=x$ قراردارد (زیرابرای $x>0$ داریم $x^3+x>x$). بنابراین، نمودار تابع g دراین ربع، به‌عنوان‌قرینهٔ نمودارتابع f نسبت به‌خط راست $y=x$، زیراین‌خطراست واقع می‌شود. درنتیجه، به‌ازای $x>0$، نمودارهای دوتابع نقطهٔ برخوردی ندارند.

از طرف دیگر، تابع‌های f و g، تابع‌هایی فردند، بنابراین معادلهٔ $f(x)=g(x)$ نمی‌تواند ریشهٔ منفی داشته باشد (زیرا اگر x_0 ریشه‌ای ازمعادله باشد، باید $-x_0$ هم در آن صدق کند).

معادلهٔ $f(x)=g(x)$ تنهایک ریشه دارد: $x=0$، زیرا $f(0)=0$ و، بنابرتعریف تابع معکوس $g(0)=0$، یعنی $f(0)=g(0)$.

۲۷۸. اگرعدد $۱۳۷۰ = ۶۸۵ \times ۲$ را از دوطرف معادله کم کنیم، بـه این نامعادله می‌رسیم:

$$(tg\,x_۱ - cotg\,x_۱)^۲ + (tg\,x_۲ - cotg\,x_۲)^۲ + \dots + (tg\,x_{۶۸۵} - cotg\,x_{۶۸۵})^۲ \leqslant ۰$$

یعنی باید همه پرانتزها برابر صفر باشند.

پاسخ. $x_i = \frac{۱}{۲}k\pi + \frac{\pi}{۴}$ $(i = ۱، ۲، \dots، ۶۸۵ ،k_i \in \mathbf{Z})$

۲۷۹. $(a، b، c، d)$ راجوابی‌ازدستگاه می‌گیریم. اگراین مقدارها را درمعادله‌های دستگاه قراردهیم و، سپس، معادلهٔ دوم را ازمعادلهٔ اول کم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(a-b)(cd-۱) = ۰ \qquad (۱)$$

دستگاه نسبت بـه مجهول‌های x، y، z و t متقارن است (یعنی اگـر در دستگاه، دومجهول دلخواه، ومثلاً x و y را، به‌هم تبدیل کنیم، دردستگاه تغییری پدید نمی‌آید). بنابراین، از رابطهٔ (۱) می‌تـوان نتیجه‌گرفت: اگرمقدارهای عددی دومجهول برابر نبـاشند، آن وقت، حاصل‌ضرب مقدارهای عددی دومجهول دیگر، برابرواحد می‌شود؛ یعنی

$$(a \neq b، c) \Longrightarrow (cd = ۱، bd = ۱) \Longrightarrow b = c$$

به‌این ترتیب، دست‌کم دوتا ازعددهای a، b، c و d باهم برابرند.

فرض می‌کنیم $a = b$، وهمهٔ حالت‌های ممکن را (باتوجه بـه تقارن دستگاه)، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱) $a = b = c = d$؛ ۲) $a = b = c \neq d$؛ ۳) $a = b \neq c$، $d \neq c$، $d \neq a$؛ ۴) $a = b \neq c = d$.

درحالت ۱)، به دست می‌آید $a + a^۳ = ۲$، یعنی $a = ۱$. این جواب منحصر به‌فرد است، زیرا دوجواب دیگرمعادلهٔ درجه سوم $a + a^۳ = ۲$، حقیقی‌نیستند. درضمن، آزمایش نشان می‌دهدکه $(۱، ۱، ۱، ۱)$ جوابی ازدستگاه است.

درحالت ۲)، چون $c \neq d$، پس $ab = ۱$ وچون $a = b$، پس $a^۲ = ۱$. اگرفرض‌کنیم $a = ۱$، آن‌وقت ازمعادلهٔ اول دستگاه به‌دست می‌آید $۱ + d = ۲$، یعنی $d = ۱$ که بافرض حالت ۲) متنـاقض است. بنـابـر این $a = -۱$ و $d = ۳$. آزمـایش نشان می‌دهدکـه $(-۱، -۱، -۱، ۳)$، جوابی ازدستگاه است.

درحالت ۳) به‌دست می‌آید: $bc = ۱$، $bd = ad = ۱$، یعنی $bc = bd$ یا $c = d$ که فرض این حالت را نقض می‌کند.

درحالت ۴)، $bc = ۱$ وازدستگاه به‌دست می‌آید $b + c = ۲$، یعنی $b = c = ۱$ که

شرط این‌حالت را نقض می‌کند.

پاسخ. دستگاه، پنج جواب دارد.

$$(1, 1, 1, 1);\ (-1, -1, -1, 3);\ (-1, -1, 3, -1);$$
$$(-1, 3, -1, -1);\ (3, -1, -1, -1)$$

۲۸۰. برای $x=y=z$، دستگاه مفروض به‌صورت نامعادلهٔ $x-x^3>a$ درمی‌آید. تابع $t=x-x^3$ $(x>0)$، به‌ازای $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ به‌حداکثر مقدار خود می‌رسد و این مقدار حداکثر برابر $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ است. بنابراین نابرابری $x-x^3>a$، به ازای $a<\frac{2}{3}\sqrt{3}$ دارای جواب مثبت است و، در نتیجه، دستگاه اصلی هم، برای x و y و z مثبت، جواب دارد.

فرض می‌کنیم $a\geqslant\frac{2}{3}\sqrt{3}$ و (x, y, z) را جوابی از دستگاه می‌گیریم (x و y و z مثبت‌اند). دراین‌صورت، باید عددهای x^2-1، y^2-1 و z^2-1 مثبت باشند، یعنی

$$0<x, y, z<1 \qquad (*)$$

اگر نابرابری‌های دستگاه را درهم ضرب کنیم، به‌دست می‌آید:

$$x(1-x^2)y(1-y^2)z(1-z^2)>a^3$$

که باتوجه به‌شرط $(*)$، نمی‌تواند برای $a>\frac{2}{3}\sqrt{3}$ برقرار باشد.

پاسخ. $a<\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

۲۸۱. الف) x و y، عددهایی درست، مثبت و متمایزند. از برابری $x^y=y^x$ روشن است که، هرعدد اولی‌که مقسوم‌علیهی از x باشد، باید درضمن، مقسوم‌علیهی از y است. فرض می‌کنیم:

$$x=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n},$$
$$y=p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\dots p_n^{\beta_n}$$

که در آن، p_1، p_2، ...، p_n، عددهایی اول‌اند. باتوجه به معادله، باید داشته باشیم:

$$p_1^{\alpha_1 y}\cdot p_2^{\alpha_2 y}\dots p_n^{\alpha_n y}=p_1^{\beta_1 x}\cdot p_2^{\beta_2 x}\dots p_n^{\beta_n x}$$

از آن‌جا

$$\alpha_1 y=\beta_1 x, \alpha_2 y=\beta_2 x, \ldots, \alpha_n y=\beta_n x \tag{1}$$

اگر $y>x$ بگیریم، از برابری‌های (۱) نتیجه می‌شود:

$$\alpha_1<\beta_1, \alpha_2<\beta_2, \ldots, \alpha_n<\beta_n$$

و این، به معنای آن است که y بر x بخش‌پذیر است: $y=kx$ $(k\in\mathbf{Z})$. درمعادله، $y=kx$ می‌گذاریم:

$$x^{kx}=(kx)^x \Longrightarrow x^k=kx \Longrightarrow x^{k-1}=k \tag{2}$$

چون $y>x$، پس $kx>x$ و $k>1$ و، بنابراین، باتوجه به (۲): $x>1$. برای $k=2$، به برابری $2^{2-1}=2$ می‌رسیم، یعنی $x=2$، $y=4$ جوابی ازمعادله است.

معادله، برای $k>2$ و $x\geqslant 2$ جواب ندارد، زیرا، برای این مقدارهای k و x

$$x^{k-1}\geqslant 2^{k-1}>k$$

$x=2$، $y=4$ تنهاجواب معادله، برای‌عددهای درست، مثبت‌ومتمایز x و y است.

ب) مثل حالت قبل، بافرض $k=\frac{y}{x}$، به معادلهٔ $x^{k-1}=x$ می‌رسیم. از آن‌جا

$$x=k^{\frac{1}{k-1}}, \quad y=k\cdot k^{\frac{1}{k-1}}=k^{\frac{k}{k-1}} \tag{3}$$

می‌گیریم $\frac{1}{k-1}=\frac{p}{q}$ (p و q نسبت به هم‌اول‌اند وکسر $\frac{p}{q}$ ساده نشدنی است). در این‌صورت‌داریم:

$$k-1=\frac{q}{p}, \qquad k=1+\frac{q}{p}=\frac{p+q}{p}, \qquad \frac{k}{k-1}=\frac{p+q}{q},$$

$$x=\left(\frac{p+q}{p}\right)^{\frac{p}{q}} \text{ و } y=\left(\frac{p+q}{p}\right)^{\frac{p+q}{q}}$$

می‌خواهیم x و y عددهایی‌گویا باشند، ولی p و q نسبت به هم اول‌اند و کسرهای $\frac{p}{q}$ و $\frac{p+q}{q}$ ساده نشدنی‌اند، بنابراین تنها برای $q=1$ ممکن است. دراین‌صورت به دست می‌آید:

$$x=\left(\frac{p+1}{p}\right)^p \text{ و } y=\left(\frac{p+1}{p}\right)^{p+1} \tag{4}$$

که درآن‌ها، p عددی است درست ودلخواه مخالف ۰ و ۱ −. به‌این ترتیب، معادلهٔ $x^y = y^x$، درمجموعهٔ عددهای گویا، بی‌نهایت جواب به‌صورت (۴) دارد.

۲۸۲. وقتی $f(x)$ ازدرجهٔ فرد باشد، آن‌وقت $f(x)=0$ دست‌کم یک ریشهٔ حقیقی دارد. اگر بزرگترین ریشهٔ $f(x)=0$ را α فرض کنیم، به‌دست می‌آید:

$$f(\alpha^2+\alpha+1)=f(\alpha)\cdot g(\alpha)=0$$

یعنی $\alpha^2+\alpha+1$ هم ریشهٔ دیگری ازمعادلهٔ $f(x)=0$ است، درحالی‌که $\alpha^2+\alpha+1>\alpha$ و شرط α را (که بزرگترین ریشهٔ $f(x)=0$ فرض کرده بودیم) نقض می‌کند. بنابراین $f(x)$ یک چند جمله‌ای است ازدرجهٔ زوج و، درضمن، $f(x)=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد.

۲۸۳. الف) روشن است که $x>0$. $\log_{16}x=y$ می‌گیریم؛ دراین‌صورت $x=16^y$ ونامعادلهٔ مفروض، چنین می‌شود:

$$\log_5(1+4^y)>y \Leftrightarrow 1+4^y>5^y$$

که ازآن‌جا نتیجه می‌شود:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^y+\left(\frac{4}{5}\right)^y>1 \qquad (1)$$

تابع $f(y)=\left(\frac{1}{5}\right)^y+\left(\frac{4}{5}\right)^y$، تابعی نزولی است، زیرا از مجموع دوتابع نزولی تشکیل شده است؛ واین، به‌معنای آن است که معادلهٔ $f(y)=1$ تنها یک ریشه دارد: $y=1$ ونامعادلهٔ (۱) برای $y<1$ برقرار است:

$$\log_{16}x<1 \Longrightarrow 0<x<16$$

ب) $x=-2$ درمعادلهٔ $x^9+x^6+448=0$ صدق می‌کند (اولاً روشن است که این معادله، ریشهٔ مثبت ندارد؛ ثانیاً اگرعدد درستی ریشهٔ آن باشد، این عدد درست، مقسوم‌علیهی ازعدد ۴۴۸ است). ثابت می‌کنیم، این‌معادله، به‌جز $x=-2$ ریشهٔ دیگری‌ندارد.

چون $x=0$، ریشه‌ای از معادله نیست، می‌توان فرض‌کرد $x=\frac{1}{y}$ و به معادلهٔ $448y^9+y^3+1=0$ رسید. $f(y)=448y^9+y^3+1$، تابعی‌پیوسته وصعودی‌است (زیرا $f'(y)>0$) و، بنابراین، معادلهٔ $f(y)=0$ بیش از یک ریشهٔ حقیقی ندارد؛ یعنی معادلهٔ مورد نظرما هم، تنها یک ریشهٔ حقیقی دارد. $x=-2$، دامنهٔ تعریف‌نامعادلهٔ مفروض را، به دوبازهٔ $(-\infty, -2)$ و $(-2, +\infty)$ تقسیم می‌کند. بنابراین، مقدارهای تابع پیوستهٔ

$$\varphi(x)=x^۹+x^۶+۴۴۸$$

درهر یك از این دو فاصله، علامت ثابتی دارد. آزمایش نشان می‌دهد که نامعادله، برای مقدارهای $x<-۲$ برقرار است.

ج) و د). اگر فرض کنیم:

$$f(x)=\sqrt{۴x+۵}+\sqrt{۳x+۱۲}$$

اولاً $f(x)$ در بازهٔ $x\geqslant-\frac{۵}{۴}$ معین است، ثانیاً معادلهٔ $f(x)=۴$ دارای ریشهٔ $x=-۱$ است. این ریشهٔ منحصر به‌فرد است، زیرا $f(x)$ در دامنهٔ تعریف خود پیوسته وصعودی‌است.

پاسخ. ج) $x>-۱$؛ د) $-\frac{۵}{۴}<x<-۱$.

۲۸۴. الف) $x=۰$ ریشهٔ معادله نیست ومی‌توان فرض کرد $x=\frac{۱}{y}$. به‌دست‌می‌آید:

$$y^۵+y^۳+۱=۰$$

تابع $f(y)=y^۵+y^۳+۱$، پیوسته و صعودی است و، بنابراین، معادلهٔ $f(y)=۰$ حداکثر یك ریشه دارد. از طرف دیگر $f(۰)>۰$ و $f(-۱)<۰$، بنابراین، این ریشه در بازهٔ $(-۱،۰)$ واقع است.

پاسخ. معادلهٔ مفروض تنها یك ریشهٔ حقیقی دارد.

ب) عبارت سمت چپ معادله، تابعی است پیوسته‌وصعودی، بادامنهٔ تعریف $[۱،+\infty)$ وحداقل مقدار آن برابر است با $۲+\sqrt{۵}$ که به ازای $x=۱$ به دست می‌آید. چون $۲+\sqrt{۵}<۹$، بنابراین معادلهٔ مفروض، تنها یك جواب دارد (در واقع، تنها جواب این معادله $x=۵$ است).

۲۸۵. $y=\frac{۱}{۲}\log_۹ x$ می‌گیریم. دراین‌صورت $x=۹^{۲y}$. معادلهٔ مفروض، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\log_{۱۲}(۹^y+۳^y)=y\Longrightarrow ۹^y+۳^y=۱۲^y$$

$y=۱$ ریشهٔ روشن معادله است. ثابت می‌کنیم، این معادله ریشهٔ دیگری ندارد.

اگر دوطرف معادله را بر ۱۲^y تقسیم کنیم، به معادلهٔ

$$\left(\frac{۳}{۴}\right)^y+\left(\frac{۱}{۴}\right)^y=۱$$

می‌رسیم. ولی تابع $f(y)=\left(\frac{۳}{۴}\right)^y+\left(\frac{۱}{۴}\right)^y$، نزولی است و، بنابراین، تنها یکبار می‌تواند

برابر واحد شود.

پاسخ. $x=81$.

۲۸۶. چندجمله‌ای را $f(x)$ می‌نامیم. توجه می‌کنیم که $f(0)<0$. اگر $f(x)$ در بازهٔ $(0,1)$ ریشه‌ای نداشته باشد، به‌دلیل پیوسته بودن تابع، باید دراین‌بازه، تغییرعلامت ندهد. یعنی برای هر $x\in(0,1)$ داشته باشیم $f(x)<0$. دراین‌صورت باید انتگرال $\int_0^1 f(x)\,dx$ منفی باشد، ولی

$$\int_0^1 f(x)dx=3x^4+4ax^3-4ax^2-3x\Big|_0^1=0$$

بنابراین، چندجمله‌ای $f(x)$، به‌ازای هر $x\in\mathbf{R}$، دست‌کم یک ریشه در بازهٔ $(0,1)$ دارد.

۲۸۷. داریم:

$$f'(x)=\frac{1}{n}\Big[(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)\dots(x+n)\Big]^{\frac{1}{n}-1}\times$$
$$\times[(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)\dots(x+n)]'$$

درنتیجه، باتوجه به فرد بودن n به دست می‌آید:

$$|f'(0)|=\frac{1}{n}(n!)^{\frac{1}{n}-1}\cdot\left|\frac{n!}{1}-\frac{n!}{2}+\dots+\frac{n!}{n}\right|=$$
$$=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}\right)$$

ازطرف دیگرمی‌دانیم

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}-\dots=\ln 2$$

بنابراین

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots+\frac{1}{n}>\ln 2$$

به‌این‌ترتیب، کافی است ثابت‌کنیم:

$$\sqrt[n]{n!}>\frac{n}{e} \quad \text{و} \quad \frac{\ln 2}{e}>\frac{12}{55}$$

زیرا، بادرستی این دونابرابری به دست می‌آید:

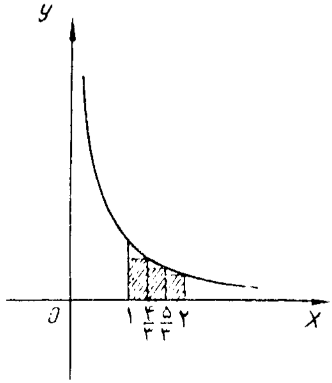
$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}>\frac{۱}{e}>\frac{۱۲}{۵۵\ln ۲} \Longrightarrow \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\ln ۲>\frac{۱۲}{۵۵}$$

نابرابری اول، به‌سادگی وبا استفاده از روش استقرای ریاضی به دست می‌آید.

برای اثبات نابرابری دوم،از تعبیرهندسی انتگرال معین استفاده می‌کنیم. روی شکل ۹۱ دیده می‌شود:

$$\ln ۲=\int_{۱}^{۲}\frac{۱}{x}dx>\frac{۱}{۳}\left(\frac{۳}{۴}+\frac{۳}{۵}+\frac{۱}{۲}\right)=$$

$$=\frac{۳۷}{۶۰}>\frac{۳}{۵}$$



شکل ۹۱

بنابراین

$$\frac{\ln ۲}{e}>\frac{۳}{۵\times ۲/۷۵}=\frac{۱۲}{۵۵}$$

۲۸۸. هرعدد طبیعی k را، که باشرط مسأله سازگارباشد، باید بتوان هم به صورت $\overline{ab}\cdot\overline{cd}$ وهم به‌صورت $\overline{ba}\cdot\overline{dc}$ نوشت. بنابراین

$$\overline{ab}\cdot\overline{cd}=\overline{ba}\cdot\overline{dc}$$

که اگرعددها راباز کنیم، به‌برابری $a{\cdot}c=b{\cdot}d$ می‌رسیم و، دراین‌صورت، خواهیم داشت:

$$\overline{ad}\cdot\overline{cb}=\overline{da}\cdot\overline{bc}$$

روشن است‌که، برای حالت خاص $a=d$ و $b=c$، برابری $a{\cdot}c=b{\cdot}d$ برقرار است (وبه‌صورت $a{\cdot}b=b{\cdot}a$ درمی‌آید). بنابراین، دراین حالت، عدد k به‌صورت حاصل‌ضرب $\overline{ab}$ در $\overline{ba}$ است. اگر برای مشخص بودن وضع $a<b$ بگیریم، ۳۶ عدد از این‌گونه برای k به‌دست می‌آید: ۸ عدد برای $a=۱$ (۱۲، ۱۳، ...، ۱۹)، ۷ عدد برای ۲ (۲۳، ۲۴، ...، ۲۹) وغیره.

برای ما حالتی جالب است‌که درآن $a\neq d$. باید عددهای یك‌رقمی a، b، c و d راطوری پیداکنیم‌که، برابری $a{\cdot}c=b{\cdot}d$ برقرارباشد. تنها عددهای زیر رامی‌توان، بادو روش، به‌صورت ضرب دوعدد یك رقمی نوشت:

۴، ۶، ۸، ۹، ۱۲، ۱۶، ۱۸، ۲۴، ۳۶

برای عددهای ۴، ۹، ۱۶ و ۳۶ (مجذورهای کامل) داریم:

$$۱\times۴=۲\times۲;\quad ۱\times۹=۳\times۳;\quad ۲\times۸=۴\times۴;\quad ۴\times۹=۶\times۶$$

که برای هرمورد، یك جواب برای مسألهٔ ما به دست می‌آید:

$$۱۳\times۹۳=۳۱\times۳۹;\qquad ۱۲\times۴۲=۲۱\times۲۴;$$

$$۴۶\times۹۶=۶۴\times۶۹\qquad ۲۴\times۸۴=۴۲\times۴۸;$$

ولی ازبقیهٔ عددها، ضرب‌هایی باعامل‌های مختلف به‌دست می‌آید:

$$۲\times۶=۳\times۴;\qquad ۱\times۸=۲\times۴;\qquad ۱\times۶=۲\times۳;$$

$$۴\times۶=۳\times۸\qquad ۲\times۹=۳\times۶;$$

وبنابراین، هرکدام ازآن‌ها، متناظر با دوجواب است:

$$۱۳\times۶۲=۳۱\times۲۶;\qquad ۱۲\times۶۳=۲۱\times۳۶;$$

$$۱۴\times۸۲=۴۱\times۲۸;\qquad ۱۲\times۸۴=۲۱\times۴۸;$$

$$۲۴\times۶۳=۴۲\times۳۶;\qquad ۲۳\times۶۴=۳۲\times۴۶;$$

$$۲۶\times۹۳=۶۲\times۳۹;\qquad ۲۳\times۹۶=۳۲\times۶۹;$$

$$۳۶\times۸۴=۶۳\times۴۸\qquad ۴۳\times۶۸=۳۴\times۸۶;$$

اگرهمهٔ جواب‌های حاصل رامقایسه‌کنیم، تنها دریك مورد، عدد ۱۰۰۸ را دوبار به دست‌آورده‌ایم: یکبار درحالت $a=d$ و $b=c$:

$$۱۰۰۸=۲۴\times۴۲$$

ویکبار هم بارقم‌های $۱\times۸=۲\times۴$:

$$۱۰۰۸=۱۲\times۸۴=۲۱\times۴۸$$

پاسخ. روی هم ۴۹ عدد برای k به‌دست می‌آید.

۲۸۹. الف) راهنمائی. $t=\sqrt{۲}$ بگیرید، به‌این معادلهٔ درجه دوم می‌رسید:

$$t^{۲}-x^{۲}t+(x^{۳}+x^{۲})=۰$$

پاسخ. $x_{۱}=\sqrt{۲}$ ، $x_{۲,۳}=\dfrac{۱\pm\sqrt{۴\sqrt{۲}+۱}}{۲}$.

ب) ابتدا معادله را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$x^۳+\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)x+\frac{۱}{\sqrt{۲}}=۰$$

اگر $t=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$xt^۲-t-(x^۳+x)=۰$$

پاسخ. $x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ (دو ریشهٔ دیگر معادله، موهومی‌اند).

ج) $t=۳$ می‌گیریم، به‌این معادله می‌رسیم:

$$t^۲-(۲x+۱)t+(x^۲-\sqrt{x})=۰$$

از آن‌جا، دومقدار برای t (برحسب x) به‌دست می‌آید که، با قرار دادن $t=۳$، به این دو معادله می‌رسیم:

$$x-\sqrt{x}-۳=۰ \text{ و } x+\sqrt{x}-۲=۰$$

(البته، جواب‌ها را باید درمعادلهٔ اصلی، آزمایش کنیم).

پاسخ. $x=\frac{۷+\sqrt{۳۱}}{۲}$.

د) راهنمائی. $t=\sqrt{۳}$ بگیرید.

پاسخ. $x_{۱,۲}=\frac{-۱\pm\sqrt{۴\sqrt{۳}+۱}}{۲}$ ، $x_{۳,۴}=\frac{-۱\pm\sqrt{۴\sqrt{۳}-۳}}{۲}$

۲۹۵. $f'(x)$ را تابعی متناوب بادورهٔ تناوب T فرض می‌کنیم. ثابت می‌کنیم، $f(x)$ را می‌توان به‌صورت $g(x)+kx$ $(k\in\mathbf{R})$ نوشت که، در آن، $g(x)$ تابعی است متناوب با دورهٔ تناوب T.

روشن است که متناوب بودن $f'(x)$، بادورهٔ تناوب T، به‌این معناست که

$$f'(x+T)=f'(x)$$

یعنی دوتابع $f(x)$ و $f(x+T)$، مشتق‌هایی برابر دارند و، بنابراین، تفاضل آن‌ها، مقدار ثابتی است:

$$f(x+T)-f(x)=b$$

(b، عددی ثابت است). اکنون اگر فرض کنیم:

$$g(x)=f(x)-\frac{b}{T}x$$

به‌دست می‌آید:

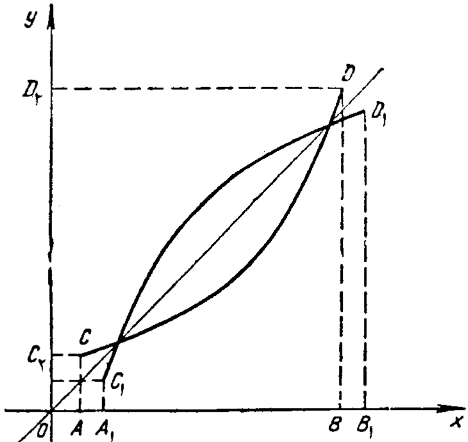
$$g(x+T)-g(x)=f(x+T)-\frac{b}{T}(x+T)-$$

$$-\left[\ f(x)-\frac{b}{T}x\right]=[f(x+T)-f(x)]-b=\text{۰}$$

یعنی $g(x+T)=g(x)$؛ $g(x)$ تابعی است متناوب بادورهٔ تناوب T.

پاسخ. تابع اولیهٔ یك تابع متناوب، تابعی است با همان دورهٔ تناوب به‌اضافه یك تابع خطی.

۲۹۱. ابتدا $a\geqslant \text{۰}$ می‌گیریم‌وازقاعدهٔ مربوط به‌محاسبهٔ مساحت ذوزنقهٔ منحنی‌الخط واقع در زیرنمودارهای دوتابع $f(x)$ و $g(x)$ استفاده می‌کنیم.



شکل ۹۲

عددسمت چپ برابری فرض، برابر است با مجموع مساحت‌های دو ذوزنقهٔ $ACDB$ و $A_\text{۱}C_\text{۱}D_\text{۱}B_\text{۱}$، یاهم‌ارزآن، دو ذوزنقهٔ $ACDB$ و $C_\text{۲}CDD_\text{۲}$ (شکل۹۲) ولی این دو ذوزنقه، روی هم، مستطیل $OBDD_\text{۲}$، بدون مستطیل $OACC_\text{۲}$ را تشکیل می‌دهند و، بنابراین، مجموع مساحت‌های دو ذوزنقه، برابر است با تفاضل مساحت‌های این دو مستطیل، یعنی $bf(b)-af(a)$.

اکنون فرض می‌کنیم $a<\text{۰}$ وتابع $h(x)=f(x+\text{۲}a)$ را، که در بازهٔ $[-a, b-\text{۲}a]$ معین است، در نظرمی‌گیریم. تابع $h(x)$ صعودی است، مقدارهای مثبت را می‌پذیرد وتابع معکوس آن عبارت است از $k(x)=g(x)-\text{۲}a$. درواقع

$$k(k(x))=f(k(x)+\text{۲}a)=f(g(x))=x$$

به‌این‌ترتیب

$$\int_{-a}^{b-\text{۲}a} h(x)\,dx+\int_{h(a)}^{h(b-\text{۲}a)} k(x)\,dx=$$

$$=(b-۲a)\cdot h(b-۲a)+a\cdot h(-a)=(b-۲a)f(b)-af(a) \qquad (۱)$$

ولی اگر درانتگرال اول فرض‌کنیم $t=x+۲a$، به‌دست می‌آید:

$$\int_{-a}^{b-۲a} h(x)\,dx=\int_{-a}^{b-۲a} f(x+۲a)dx=\int_{a}^{b} f(t)dt \qquad (۲)$$

علاوه‌بر آن

$$\int_{h(-a)}^{h(b-۲a)} k(x)\,dx=\int_{f(a)}^{f(b)}(g(x)-۲a)dx=$$

$$=\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx-۲a(f(b)-f(a)) \qquad (۳)$$

اکنون اگر به‌برابری‌های (۱) تا (۳) توجه‌کنیم، داریم:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx-۲a[f(b)-f(a)]=$$

$$=(b-۲a)f(b)+af(a)$$

وازآن‌جا، درستی برابری مورد نظر ثابت می‌شود.

یادداشت. شرط مثبت بودن $f(x)$ رامی‌توان کنار گذاشت.ضمن حل مسأله دیدیم که، اگر $f(x)$ «به‌طرف راست حرکت کند» (درضمن تابع معکوس آن، «به‌طرف بالا برود»)، برابری موردنظر درست است. به‌همین ترتیب می‌توان درستی‌برابری رابرای حالتی هم که $f(x)$ «به چپ حرکت کند» (ومعکوس آن «به‌طرف پایین برود») ثابت کرد.

توجه خواننده را به این نکته هم جلب می‌کنیم که، از این برابری، می‌توان برای محاسبهٔ انتگرال معین ازتابع‌های معکوس استفاده کرد.

۲۹۲. ازآن‌جاکه‌داریم:

$$cotg\alpha+cotg\beta=\frac{sin(\alpha+\beta)}{sin\alpha\ sin\beta}=\frac{sin\gamma}{sin\alpha sin\beta}=\frac{sin^۲\gamma}{sin\alpha\ sin\beta\ sin\gamma}$$

به دست می‌آید:

$$۲(cotg\alpha+cotg\beta+cotg\gamma)=(cotg\alpha+cotg\beta)+$$
$$+(cotg\beta+cotg\gamma)+(cotg\alpha+cotg\gamma)=\frac{sin^۲\alpha+sin^۲\beta+sin^۲\gamma}{sin\ \alpha\ sin\ \beta\ sin\ \gamma}$$

بنابراین، برابری صورت مسأله، به‌صورت

$$\frac{sin^۲\alpha+sin^۲\beta+sin^۲\gamma}{۳}=\sqrt[۳]{sin^۲\alpha sin^۲\beta sin^۲\gamma}$$

درمی‌آید (واسطهٔ حسابی سه عدد مثبت، برابر با واسطهٔ هندسی آن‌ها شده است). و این، تنها وقتی ممکن است که داشته باشیم:

$$(\sin^۲\alpha=\sin^۲\beta=\sin^۲\gamma)\Longleftrightarrow\alpha=\beta=\gamma$$

یعنی وقتی که مثلث متساوی‌الاضلاع باشد.

۲۹۳. روشن است که

$$\frac{k^۳-۱}{k^۳+۱}=\frac{k-۱}{k+۱}\cdot\frac{k^۲+k+۱}{k^۲-k+۱}$$

سپس

$$\prod_{k=۱}^{n}\frac{k-۱}{k+۱}=\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۴}\times\frac{۳}{۵}\times\frac{۴}{۶}\times\cdots\times\frac{n-۱}{n+۱}=\frac{۲}{n(n+۱)};$$

$$\prod_{k=۱}^{n}\frac{k^۲+k+۱}{k^۲-k+۱}=\frac{۷}{۳}\times\frac{۱۳}{۷}\times\frac{۲۱}{۱۳}\times\cdots\times\frac{n^۲+n+۱}{n^۲-n+۱}=\frac{n^۲+n+۱}{۳}$$

در نتیجه

$$P_n=\prod_{k=۱}^{n}\frac{k^۳-۱}{k^۳+۱}=\prod_{k=۱}^{n}\frac{k-۱}{k+۱}\cdot\prod_{k=۱}^{n}\frac{k^۲+k+۱}{k^۲-k+۱}=$$

$$=\frac{۲}{n(n+۱)}\cdot\frac{n^۲+n+۱}{۳}=\frac{۲}{۳}\cdot\frac{n^۲+n+۱}{n^۲+n}$$

و $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=\frac{۲}{۳}$.

۲۹۴. از آن‌جا که داریم:

$$\left|\frac{x}{x^۲+۱}\right|=\frac{۱}{\left|x+\frac{۱}{x}\right|}\leqslant\frac{۱}{۲}\Longleftrightarrow-\frac{۱}{۲}\leqslant\frac{x}{x^۲+۱}\leqslant\frac{۱}{۲}$$

اگر $z=\frac{x}{x^۲+۱}$ بگیریم. تابع

$$f\left(\frac{x}{x^۲+۱}\right)=\frac{x^۴+۱}{x^۲}=\frac{۱}{\left(\frac{x}{x^۲+۱}\right)^۲}-۲$$

یا $f(z)=\frac{1}{z^{2}}-2$، تنها برای $-\frac{1}{2}\leqslant z\leqslant\frac{1}{2}$ معین است. به‌این ترتیب

$$f(z)=\begin{cases}\frac{1}{z^{2}}-2 & \left(|z|\leqslant\frac{1}{2}\right)\\ \varphi(z) & \left(|z|>\frac{1}{2}\right)\end{cases}$$

که در آن، $\varphi(z)$، تابعی است دلخواه (که حتی ممکن است، در تمامی مجموعهٔ $|z|>\frac{1}{2}$ هم، معین نباشد).

۲۹۵. نمودار fog، شامل نقطه‌هایی به‌مختصات (x, y) است که، برای آن‌ها، عددی مثل z وجود داشته باشد، به نحوی که داشته باشیم: $x=z^{2}$ و $y=z^{2}$، یعنی $x=y>0$. بنابراین، نمودار fog عبارت است از نیم‌خط راست منطبق بر نیمساز زاویهٔ واقع در ربع اول دستگاه محورهای مختصات.

نمودار gof از نقطه‌هایی به مختصات (x, y) تشکیل شده است که، برای آن‌ها، عدد z با شرط‌های $z=x^{2}$ و $z=y^{2}$ وجود داشته باشد؛ یعنی $y^{2}=x^{2}$. gof، عبارت است از مجموعهٔ نقطه‌های واقع بر نیمسازهای زاویه‌های دستگاه محورهای مختصات.

۲۹۶. از برهان خلف استفاده می‌کنیم و فرض می‌کنیم، برای تصاعد هندسی

$$a_{1}, a_{1}q, a_{1}q^{2}, \ldots, a_{1}q^{n-1}$$

با شرط $n\geqslant 3$ و $q\neq 1$ داشته باشیم:

$$a_{1}(1+q+q^{2}+\cdots+q^{n-1})=3^{k}$$

و این، به معنای آن است که، هر دو عامل سمت چپ برابری، باید توانی از ۳ باشند، به‌ویژه

$$1+q+q^{2}+\cdots+q^{n-1}=3^{l} \qquad (1)$$

روشن است که q نمی‌تواند مضربی از ۳ باشد. دو حالت پیش می‌آید:

۱) $q=3m+1$. در این‌حالت، در تقسیم هر توانی از q به ۳، به باقی‌مانده‌ای برابر واحد می‌رسیم و، بنابراین برای برقراری برابری (۱)، باید تعداد جمله‌ها مضربی از ۳ باشد، یعنی $n=3p$. در این‌حالت، برابری (۱) به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$(1+q+q^{2})(1+q^{3}+q^{6}+\cdots+q^{3p-3})=3^{l}$$

یعنی $1+q+q^{2}$ مقسوم‌علیهی از 3^{l} است:

$$1+q+q^2=3^r \qquad (2)$$

ولی $q=3m+1$ و، بنابراین، از (۲) به‌دست می‌آید:

$$9m^2+9m+3=3^r \Leftrightarrow 3m^2+3m+1=3^{r-1}$$

که تنها به‌ازای $r=1$ و $m=0$ و، درنتیجه $q=1$ ممکن است که شرط $q\neq 1$ را نقض کند.

۲) $q=3m-1$. دراین حالت، برای برقراری برابری (۱)، باید n، عددی زوج باشد: $n=2p$. دراین‌صورت، برابری (۱) چنین می‌شود:

$$(1+q)(1+q^2+q^4+\dots+q^{2p-2})=3^l \qquad (3)$$

که‌از آن‌جا، باید داشته باشیم:

$$1+q^2+q^4+\dots+q^{2p-2}=3^r$$

درسمت چپ برابری، مجموع جمله‌های یك تصاعد هندسی با قدر نسبتی برابر $q^2=3m^2+1$ قراردارد که، بنابه استدلال حالت اول، نمی‌تواند برای $p>2$ برقرار باشد. برای $p=2$، باتوجه به برابری (۳)، باید داشته باشیم:

$$(1+q)(1+q^2)=3^l$$

یعنی $1+q=3^s$ و $1+q^2=3^t$. بنابراین

$$(3^s-1)^2+1=3^t \Leftrightarrow 3^{2s}-2\times 3^s+2=3^t$$

که تنها برای $s=t=0$، یعنی $q=0$ ممکن است که بازهم، شرط مسأله رانقض می‌کند.

۲۹۷. اگرقدرنسبت تصاعد را d و k راعددی طبیعی بگیریم، داریم:

$$(10+dk)^6=10^6+d.n, \quad (n\in \mathbf{N})$$

بنابراین، عدد $(10+dk)^5$، برای هر $k\in\mathbf{N}$، یکی ازجمله‌های این تصاعد است.

یادداشت. می‌توان مسألهٔ کلی‌تری راحل کرد: اگریك تصاعد حسابی، از بی‌نهایت‌عدد طبیعی تشکیل شده باشد و، درضمن، عدد a^k یکی ازجمله‌های آن باشد، آن وقت بی‌نهایت جمله ازتوان‌های k ام عددهای طبیعی، دراین تصاعد وجود دارد.

ازطرف دیگر، به سادگی می‌توان ثابت کرد که، تصاعد حسابی با جملهٔ عمومی $a_n=4n+2$، شامل هیچ توان بزرگتر از واحد، ازعددهای طبیعی، نیست.

۲۹۸. $f(x)$ راتابع اولیهٔ $y=\{x\}$ دربازهٔ $(0, 2)$ می‌گیریم. دراین‌صورت، مشتق آن، دربازهٔ $(0, 1)$ برابر x می‌شود و، دراین‌بازه، داریم:

$$f(x)=\frac{۱}{۲}x^{۲}+C_{۱}$$

دربازهٔ $(۱, ۲)$، مشتق تابع $f(x)$ برابر $x-۱$ می‌شود، یعنی دراین‌بازه

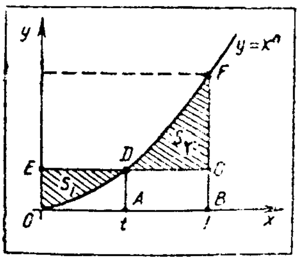
$$f(x)=\frac{۱}{۲}x^{۲}-x+C_{۲}$$

به‌این ترتیب، مشتق تابع $f(x)$، درنقطهٔ $x=۱$، ازسمت چپ برابر

$$\lim_{\Delta x \to ۰}\frac{f(۱+\Delta x)-f(۱)}{\Delta x}=۱$$

واز سمت راست، برابرصفرمی‌شود، به‌نحوی‌که $f(x)$ درنقطهٔ $x=۱$، مشتق نـدارد. این وضع،ثابت می‌کندکه، نمی‌توان تابعی‌پیداکردکه مشتق آن دربازهٔ $(۰, ۲)$، برابر$\{x\}$باشد.

یادداشت. می‌توان گزارهٔ‌کلی‌تری آورد: تابع مشتق، نمی‌تواند ناپیوستگی از نـوع اول داشته باشد.



شکل ۹۳

۲۹۹. باتوجه به‌شکل ۹۳ روشن‌است که، مساحت $S_۱$ برابراست بااختلاف مساحت مستطیل $OADE$ با مساحت مثلث منحنی‌الخط OAD:

$$S_۱=t.t^n-\int_۰^t x^n dx=\frac{n}{n+۱}t^{n+۱}$$

به همین‌ترتیب

$$S_۲=\int_t^۱ x^n\,dx-(۱-t)t^n=\frac{n}{n+۱}\,t^{n+۱}-t^n+\frac{۱}{n+۱}$$

وبنابراین

$$S=S_۱+S_۲=\frac{۲n}{n+۱}\,t^{n+۱}-t^n+\frac{۱}{n+۱}$$

اگر از S نسبت به متغیر t مشتق بگیریم:

$$S'=۲nt^n-nt^{n-۱}=nt^{n-۱}(۲t-۱)$$

S' درنقطهٔ $t=\frac{۱}{۲}$ برابرصفراست و، دراین‌نقطه ازمنفی به مثبت می‌رود؛ یعنی S در نقطهٔ $t=\frac{۱}{۲}$ به حداقل مقدارخود می‌رسد.

یادداشت. این مسأله را می‌توان به‌صورت کلی‌تری طرح و حل کرد:

از نقطهٔ به طول t $(a<t<b)$ واقع بر نمودار تابع $y=f(x)$، که تابعی است اکیداً صعودی و مشتق‌پذیر، خط راستی موازی محور طول رسم کرده‌ایم. برای چه مقداری از t، مجموع مساحت‌های دو مثلث منحنی‌الخط محدود به نمودار تابع $y=f(x)$، خط راست مفروض و خط‌های راست $x=a$ و $x=b$، به حداقل مقدار خود می‌رسد؟

مثل حالت خاص، می‌توان نوشت:

$$S_1(t)=(t-a)f(t)-\int_a^t f(x)dx;$$

$$S_2(t)=\int_t^b f(x)dx-(b-t)f(t);$$

$$S(t)=S_1(t)+S_2(t)=$$

$$=(2t-a-b)f(t)-\int_a^t f(x)dx+\int_t^b f(x)dx$$

اکنون، با توجه به برابری‌های

$$\left(\int_a^t f(x)\,dx\right)'=f(t), \quad \left(\int_b^t f(x)\,dx\right)'=f(t)$$

برای مشتق $S(t)$ داریم:

$$S'(t)=(2t-a-b)f'(t)+2f(t)-f(t)-f(t)=$$

$$=(2t-a-b)f'(t)$$

چون $f'(t)>0$ ($f(t)$ اکیداً صعودی است)، پس

$$S'(t)=0 \Longrightarrow t=\frac{a+b}{2}$$

درضمن، $S'(t)$ دراین نقطه، از منفی به مثبت می‌رود. به این ترتیب تابع S، در نقطهٔ $t=\dfrac{a+b}{2}$، به حداقل مقدارخود می‌رسد.

۳۰۰. درهریك ازمعادله‌های دستگاه، می‌توان x را به $-x$ تبدیل کرد، بدون این‌که تغییری دردستگاه به‌وجودآید؛ بنابراین اگر (x_0, y_0) جوابی ازدستگاه باشد، آن وقت $(-x_0, y_0)$ هم جواب دیگری ازدستگاه است. به‌این‌ترتیب، برای $x_0\neq 0$، دستگاه مفروض، دست‌کم دوجواب دارد و، برای این‌که جوابی منحصرداشته باشد، باید داشته

باشیم $x_\circ = \circ$ و، جواب دستگاه، باید به‌صورت $(\circ, y_\circ)$ باشد.

ازمعادلهٔ دوم دستگاه معلوم می‌شودکه، این جواب تنها می‌تواند به صورت $(\circ, \text{۱})$ یا $(\circ, -\text{۱})$ باشد. ببینیم، بـه ازای چه مقدارهایی از a، این جواب‌ها درمعادلهٔ اول هم صدق می‌کنند! به سادگی روشن می‌شودکه $(\circ, \text{۱})$ به‌ازای $a = \circ$ و $(\circ, -\text{۱})$ بـه‌ازای $a = \text{۲}$ درمعادلهٔ اول دستگاه صدق می‌کنند.

روشن است که، به ازای هیچ مقدار دیگری از a، نمی‌توانیم بـه جواب مورد نظر برسیم. ولی نباید گمان کرد، حل مسأله تمام شده است. درواقع، به‌ازای این مقدارهای a، دستگاه مفروض جوابی به‌صورت $(\circ, y_\circ)$ دارد، ولی هیچ ضمانتی وجود نداردکه، به‌جز این جواب، جواب دیگری وجود نداشته باشد. باید تحقیق کنیم، به‌ازای هریك ازاین دو مقدار a، دستگاه چند جواب دارد!

۱) $a = \circ$. دراین‌حالت، دستگاه به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\begin{cases} y = \text{۲}^{|x|} + |x|(\text{۱} - |x|) \\ x^\text{۲} + y^\text{۲} = \text{۱} \end{cases}$$

ازمعادلهٔ دوم دستگاه نتیجه می‌شود $|x| \leqslant \text{۱}$ و $|y| \leqslant \text{۱}$. بـه ازای همهٔ مقدارهای $|x| \leqslant \text{۱}$ داریم:

$$y = \text{۲}^{|x|} + |x|(\text{۱} - |x|) \geqslant \text{۱}$$

یعنی اگر $(x_\circ, y_\circ)$ جوابی ازدستگاه باشد، باید داشته باشیم: $y_\circ = \text{۱}$، زیرا ازمعادلهٔاول نتیجه‌گرفتیم $y_\circ \geqslant \text{۱}$ واز معادلهٔ دوم به‌دست آوردیم $y_\circ \leqslant \text{۱}$. ولی به‌ازای $y_\circ = \text{۱}$، به‌دست می‌آید $x_\circ = \circ$. به‌این‌ترتیب، برای $a = \circ$، تنها جواب $(\circ, \text{۱})$ دردستگاه صدق می‌کند.

۲) $a = \text{۲}$. دراین‌حالت، دستگاه مفروض، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\begin{cases} y = \text{۲}^{|x|} + |x|(\text{۱} - |x|) - \text{۲} \\ x^\text{۲} + y^\text{۲} = \text{۱} \end{cases}$$

ازقبل می‌دانیم که $(\circ, -\text{۱})$ جوابی ازاین‌دستگاه‌است؛ ولی به‌سادگی روشن‌می‌شود که $(\text{۱}, \circ)$ و $(-\text{۱}, \circ)$ هم دراین دستگاه صدق می‌کنند. به این ترتیب، دستگاه مفروض، به‌ازای $a = \text{۲}$، دست‌کم سه جواب دارد.

پاسخ. $a = \circ$.

۳۵۱. با استفاده ازاتحاد

$$\cos \text{۳}x = \cos \text{۲}x \cos x - \sin \text{۲}x \sin x$$

معادلهٔ مفروض، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$(a\cos 2x+b\cos x+c)^2+(a\sin 2x-b\sin x)^2=0$$

بنابراین، اگرمقداری از x، درمعادلهٔ مفروض صدق کند، باید به‌طور هم‌زمان، در دومعادلهٔ زیرهم صدق کند:

$$a\sin 2x-b\sin x=0 \quad \text{و} \quad a\cos 2x+b\cos x+c=0 \qquad (*)$$

از معادلهٔ اول، به دست می‌آید:

$$x_1=2n\pi,\ \ x_2=(2n+1)\pi,\ \ x_3=2n\pi\pm\arccos\frac{b}{2a}$$

($n\in\mathbf{Z}$، $|b|\leqslant|2a|$). باید ببینیم، بـا چه شرطهایی برای a، b و c، این جواب‌ها، در معادلهٔ دوم هم صدق می‌کنند.

معادلهٔ دوم دستگاه $(*)$ را می‌توان این‌طور نوشت:

$$2a\cos^2 x+b\cos x+(c-a)=0 \qquad (1)$$

۱) اگر $x_1=2n\pi$ را در (۱) قراردهیم، به‌دست می‌آید:

$$a+b+c=0$$

۲) اگر $x_2=(2n+1)\pi$ را در (۱) قراردهیم، به‌دست می‌آید:

$$a-b+c=0$$

۳) وسرانجام، باقراردادن $x_3=2n\pi\pm\arccos\frac{b}{2a}$ در (۱):

$$c=\frac{a^2-b^2}{a}$$

پاسخ. ۱) باشرط $a+b+c=0$: $x=2n\pi$ $(n\in\mathbf{Z})$؛

۲) باشرط $a-b+c=0$: $x=(2n+1)\pi$ $(n\in\mathbf{Z})$؛

۳) باشرط $|b|\leqslant|2a|$ و $c=\frac{a^2-b^2}{a}$.

$$x=2n\pi\pm\arccos\frac{b}{2a}\quad(n\in\mathbf{Z})$$

۳۰۲. (a, b, c) را، یکی از جواب‌های دستگاه می‌گیریم و، ابتدا، فرض می‌کنیم،

این سه عدد، مختلف باشند.

اگر فرض کنیم $f(t)=۲t^۳-۷t^۲+۸t-۲$، باید داشته باشیم:

$$f(a)=b،\ \ f(b)=c،\ \ f(c)=a$$

می‌دانیم، اگر u و v دو عدد درست باشند، همیشه $f(u)-f(v)$ بر $u-v$ بخش‌پذیر است. بنابراین $f(a)-f(b)$ بر $a-b$ بخش‌پذیر است، ولی $f(a)-f(b)=b-c$، پس $b-c$ بر $a-b$ بخش‌پذیر است. به‌همین ترتیب، $c-a$ بر $b-c$ و $a-b$ بر $c-a$ بخش‌پذیر می‌شوند. بنابراین، اگر m، l و k را بـه ترتیب، برابر خارج قسمت‌ها بگیریم، باید داشته باشیم:

$$a-b=k(c-a)=kl(b-c)=klm(a-b)،$$

(که در آن‌ها $k، l، m\in \mathbf{Z}$). از آن‌جا $|klm|=۱$.

اگر یکی از سه عدد k، l یا m برابر -۱ باشد، به‌دست می‌آید:

$$a=b=c$$

و اگر $k=l=m=۱$، آن وقت

$$۲a=b+c،\ \ ۲c=a+b،\ \ ۲b=a+c$$

که بازهم منجر به $a=b=c$ می‌شوند. به‌این ترتیب، a، b و c نمی‌توانند سه عدد مختلف باشند.

بنابراین، کافی است، این معادلهٔ درجه سوم را حل کنیم:

$$۲x^۳-۷x^۲+۸x-۲=x$$

یکی از ریشه‌های این معادله برابر واحد است و، از آن‌جا، دو ریشهٔ دیگر هم به‌دست می‌آیند: ۲ و $\frac{۱}{۲}$.

پاسخ. دستگاه، درمجموعهٔ عددهای درست، دو جواب دارد:

$$(۱، ۱، ۱)، (۲، ۲، ۲)$$

۳۵۳. اگر معادله را به‌صورت

$$(x+۲)^۲+۸x=۶(x+۲)\sqrt{x}$$

بنویسیم، روشن می‌شود که نسبت بـه $x+۲$ و $\sqrt{x}$ همگن (متجـانس) است (اگـر مثلاً $x+۲=u$ و $\sqrt{x}=v$ فرض کنیم، همهٔ جمله‌های معادله نسبت به u و v از درجهٔ دوم‌اند).

$y=\frac{x+۲}{\sqrt{x}}$ می‌گیریم، به معادلهٔ درجه دوم زیر می‌رسیم:

$$y^۲-۶y+۸=۰ \Longrightarrow y=۲، ۴$$

ولی $y=۲$ قابل‌قبول نیست، زیرا

$$y=\frac{x+۲}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\frac{۲}{\sqrt{x}}\geqslant ۲\sqrt{\sqrt{x}\cdot\frac{۲}{\sqrt{x}}}=۲\sqrt{۲}$$

پاسخ. $x_۱=۶+۴\sqrt{۲}$ و $x_۲=۶-۴\sqrt{۲}$.

۳۰۴. اگر فرض کنیم:

$$a=\sin x، \ b=\sin y، \ c=\sin(x+y)،$$

$$p=\cos x، \ q=\cos y، \ r=\cos(x+y)$$

به دست می‌آید:

$$cq-br=\sin(x+y)\cos y-\cos(x+y)\sin y=\sin x=a،$$

$$cp-ar=\sin(x+y)\cos x-\cos(x+y)\sin x=\sin y=b$$

و در نتیجه

$$a^۳+b^۳=(cq-br)^۳+(cp-ar)^۳=c^۳(p^۳+q^۳)-$$

$$-r^۳(a^۳+b^۳)-۳bcqr(cq-br)-۳acpr(cp-ar)$$

یعنی

$$c^۳(p^۳+q^۳)=a^۳+b^۳+r^۳(a^۳+b^۳)+۳abcqr+۳abcpr=$$

$$=a^۳+b^۳+r^۳(a^۳+b^۳)+۳abcr(p+q) \qquad (۱)$$

ولی ازمعادلهٔ اول دستگاه داریم:

$$(a^۳+b^۳)r^۳=(p^۳+q^۳)c^۳ \qquad (۲)$$

که اگر در (۱) قراردهیم به برابری

$$a^۳+b^۳=-۳abcr(p+q) \qquad (۳)$$

می‌رسیم. ازطرف دیگر، معادلهٔ دوم دستگاه، چنین است:

$$\cos^۲x+\cos^۲y=\cos x\cos y+\sin x\sin y$$

ویا $ab=p^۲+q^۲-pq>۰$. مثبت بودن ab، بــه معنای این‌است که $a^۳+b^۳\neq ۰$ و، بنابراین، باتوجه به (۳): $r\neq ۰$ و $p+q\neq ۰$.

به‌این ترتیب، می‌توانیم، برابری (۲) رابر برابری (۳) تقسیم‌کنیم که به‌دست‌می‌آید:

$$r^۳=\frac{p^۲+q^۲-pq}{-۳abcr}\cdot c^۳$$

وچون داشتیم $ab=p^۲+q^۲-pq$، پس

$$r^۳=-\frac{c^۲}{۳r}\Longleftrightarrow c^۲=-۳r^۴$$

ولی c و r نمی‌توانند باهم برابرصفر باشند (کمانی وجود نداردکه، درعین‌حال، هم‌سینوس وهم‌کسینوس آن برابرصفر باشد)، یعنی دستگاه مفروض جواب ندارد.

۳۰۵. x_n عددی مثبت است، بنابراین

$$x_{n+۱}=\sqrt{۹x_n^۲+۱۱x_n+۳}<\sqrt{۹x_n^۲+۱۲x_n+۴}=۳x_n+۲،$$
$$x_{n+۲}=\sqrt{۹x_n^۲+۱۱x_n+۳}>\sqrt{۹x_n^۲}=۳x_n$$

پس

$$۳x_n<x_{n+۱}<۳x_{n+۲} \qquad (۱)$$

باتوجه به نابرابری اول داریم:

$$x_۲>۳x_۱،\ x_۳>۳x_۲،\ \dots،\ x_{n+۱}>۳x_n$$

که اگر آن‌ها را درهم ضرب‌کنیم، به دست می‌آید:

$$x_{n+۱}>۳^nx_۱>۳^n$$

یعنی x_n به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند. ازطرف دیگرداریم:

$$۳<\frac{x_{n+۱}}{x_n}<۳+\frac{۲}{x_n}$$

ازآن‌جا

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+۱}}{x_n}=۳\ ,\ \lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+۱}}{y_n}=\frac{۳}{a}$$

(باتوجه به صورت مسأله، روشن است که $a\neq ۰$).

اگر $|a|<۳$، آنوقت

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{y_{n+1}}{y_n}\right|=\frac{3}{|a|}>1$$

و در نتیجه، برای هر $q<1$، از جمله‌ای به بعد داریم:

$$\left|\frac{y_{n+1}}{y_n}\right|>q \text{ ، } |y_{n+1}|>q|y_n|$$

که از آن به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$|y_{n+1}|>q^n|y_1|$$

یعنی دنبالهٔ (y_n) حدی ندارد.

اگر $|a|>3$، آن وقت (با همان روش) به نابرابری

$$|y_{n+1}|<q^n|y_1| \quad (0<q<1)$$

می‌رسیم و از آن‌جا

$$\lim_{n\to\infty} y_{n+1}=0 \text{ یا } \lim_{n\to\infty} y_n=0$$

تنها دو حالت $a=3$ و $a=-3$ می‌ماند. برای $a=3$، جمله‌های نابرابری‌های (۱) را، بر 3^{n+1} تقسیم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$y_n<y_{n+1}<y_n+\frac{2}{3^{n+1}}$$

نابرابری سمت چپ، به معنای صعودی بودن دنبالهٔ (y_n) است. ولی از نابرابری سمت راست، می‌توان نتیجه گرفت:

$$y_{n+1}<y_n+\frac{2}{3^{n+1}}<y_{n-1}+\frac{2}{3^n}+\frac{2}{3^{n+1}}<$$

$$<y_{n-2}+\frac{2}{3^{n-1}}+\frac{2}{3^n}+\frac{2}{3^{n+1}}<\cdots<$$

$$<y_1+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots+\frac{2}{3^{n+1}}<y_1+\frac{2}{1-\frac{1}{3}}=y_1+3$$

به‌این‌ترتیب، دنبالهٔ (y_n)، ازسمت بالامحدود است. حداین دنباله مخالف صفراست، زیرا این حد، ازهر جملهٔ دنباله بزرگتراست (این حد را c می‌نامیم).

برای $a=-3$، زیردنبالهٔ (y_{2k})، وضعی مثل دنبالهٔ (y_n) در حالت $a=3$ دارد. بنابراین، حدآن برابر c می‌شود. زیردنبالهٔ (y_{2k+1})، با زیردنبالهٔ متناظرخود به ازای $a=3$، درعلامت اختلاف دارد و، بنابراین، حدآن برابر $-c$ می‌شود. چون $c\neq 0$، بنابراین، این دوزیردنباله، حدهای متفاوتی پیدا می‌کنند، یعنی دنبالهٔ (y_n) حدی ندارد.

پاسخ. (y_n) وقتی دارای حد است که داشته باشیم: $a < -3$ یا $a \geqslant 3$.

۳۰۶. یك انتگرال معین را، به دو طریق محاسبه می‌کنیم:

$$\text{1)} \qquad \int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}dx = \int_0^1 (C_n^1 - C_n^2 x + C_n^3 x^2 - \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1} C_n^n x^{n-1})dx =$$

$$= C_n^1 - \frac{1}{2}C_n^2 + \frac{1}{3}C_n^3 - \dots + (-1)^{n-1}C_n^n$$

اکنون، با فرض $x = 1 - t$، داریم:

$$\text{2)} \qquad \int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}dx = \int_0^1 \frac{t^n - 1}{t-1}dt =$$

$$= \int_0^1 (1 + t + \dots + t^{n-1})dt = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

به‌این ترتیب، درستی برابری ثابت می‌شود.

§۲. هندسه روی صفحه

۳۰۷. این، یکی ازمسأله‌هایی است که حل آن، با روش خالص هندسی، استعدادها وکوشندگان بسیاری را درطول تاریخ بـه خود جلب کرده است. خود قضیه دشوارنیست، ولی اثبات عکس قضیه به سادگی بـه دست نمی‌آید؛ درحالی‌که برای قضیه‌های مشابه آن، هیچ‌گونه دشواری پدید نمی‌آید: به سادگی ثابت می‌شود که اگر درمثلثی، دوارتفاع یا دو میانه یا دوعمود منصف (تانقطهٔ برخورد بـا یکدیگر) طول‌هایی برابر داشته بـاشند، مثلث متساوی‌الساقین است، ولی دربارهٔ برابری طول‌های دونیمساز داخلی، راه حل مقدماتی به سادگی به‌دست نمی‌آید. نخستین راه حل‌را، که راه حلی پیچیده ومفصل بود، ژاکوب شتینر ریاضی‌دان سویسی درسال ۱۸۴۰ میلادی داد و، ازآن به بعد تاکنون، ده‌ها راه حل ارائه شده‌است که ما، دراین‌جا، یکی ازساده‌ترین آن‌ها را آورده‌ایم.

لازم بودن شرط روشن‌است و، به‌سادگی‌روشن‌می‌شودکه: اگرمثلثی متساوی‌الساقین باشد، آن وقت طول نیمسازهای داخلی وارد بردوساق، باهم برابرند (خودتان‌ثابت‌کنید).

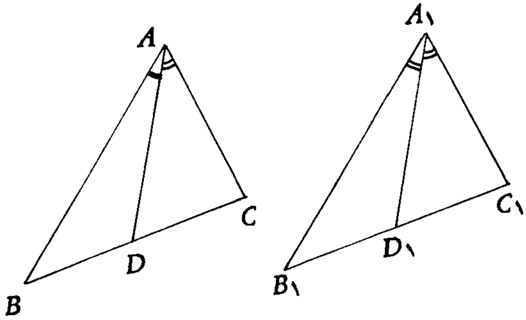
کافی بودن شرط را ثابت می‌کنیم: اگردر مثلثی طول‌های دو نیمساز داخلی با هم برابرباشند، این مثلث متساوی الساقین است.

برای این منظور، ابتدا یك پیش قضیه را ثابت می‌کنیم. این‌پیش قضیه، معرف‌معیار

دیگری برای برابری دو مثلث است.

پیش‌قضیه. شرط لازم‌وکافی، برای برابری دو مثلث، این است‌که دریك ضلع، زاویهٔ روبه‌رو به‌آن ضلع وطول نیمساز همین زاویه برابرباشند.

لازم بودن شرط روشن‌است؛ یعنی اگردومثلث قابل انطباق برهم باشند، طول ضلع‌های متناظر، اندازهٔ زاویه‌های متناظر و طول نیمسازهای داخلی‌متناظر، باهم‌برابر می‌شوند.



شکل ۹۴

برای اثبات‌کافی بودن‌شرط، درواقع، بافرض‌نیمساز بودن $[AD]$ و $[A_1D_1]$ و

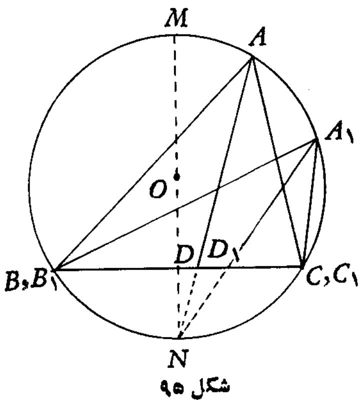
$$|BC| = |B_1C_1| \quad , \quad \hat{A} = \hat{A}_1 \quad , \quad |AD| = |A_1D_1|$$

باید برابری دومثلث ABC و $A_1B_1C_1$ راثابت‌کنیم (شکل ۹۴).

اثبات رابا روش برهان خلف می‌دهیم، یعنی ثابت می‌کنیم، باشرط

$$|BC| = |B_1C_1| \quad \text{و} \quad \hat{A} = \hat{A}_1$$

اگردو مثلث ABC و $A_1B_1C_1$ برابرنباشند، آن وقت، نیمسازهای $[AD]$ و $[A_1D_1]$ هم برابر نیستند.



شکل ۹۵

مثلث $A_1B_1C_1$ رابرمثلث ABC، به‌نحوی قرار می‌دهیم که $[BC]$ بر $[B_1C_1]$ ورأس‌های A و A_1، دریك طرف (BC) قرارگیرند (شکل ۹۵). روشن است که اگرکمان درخور زاویهٔ A یا زاویهٔ A_1 را طوری رسم کنیم‌که از دونقطهٔ B و C بگذرد، از نقطه‌های A و A_1 هم خواهدگذشت. $[MN]$ راقطری ازاین دایره‌می‌گیریم که بر $[BC]$ عمود باشد. روشن است‌که نیمسازهای داخلی زاویه‌های A و A_1، ازنقطهٔ N می‌گذرد.

دومثلث ABC و $A_1B_1C_1$ (بامشترك بودن قاعده وبرابربودن زاویه‌های روبه‌رو به آن)، برابرنیستند؛ بایدثابت‌کنیم نیمسازهای $[AD]$ و $[A_1D_1]$ دراین‌دومثلث، طول‌هایی نابرابر دارند. این دونابرابری روشن‌اند:

$$|AD|+|DN|>|A_1D_1|+|D_1N|$$
$$|D_1N|>|DN|$$

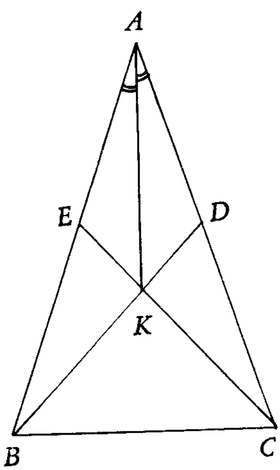
وازمجموع این دونابرابری به‌دست می‌آید:

$$|AD|>|A_1D|$$

به‌این ترتیب، پیش قضیه، ثابت شد.

اکنون دیگر، اثبات قضیهٔ مربوط به مسألهٔ ۳۰۷ ساده است.

مثلث ABC را درنظرمی‌گیریم: $[BD]$ و $[CE]$ را، نیمسازهای داخلی دوزاویهٔ B و C فرض می‌کنیم وثابت می‌کنیم، به شرط $|BD|=|CE|$، مثلث ABC متساوی‌الساقین است، یعنی $|AB|=|AC|$.



شکل ۹۶

دومثلث ABD و AEC را درنظرمی‌گیریم (شکل ۹۶). این دومثلث، درزاویهٔ A مشترك‌اند؛ $[BD]$ و $[CE]$، ضلع‌های روبه‌روی این زاویه (بنابرفرض) طولی برابر دارند؛ $[AK]$ نیمساز زاویهٔ A، برای دومثلث، یکی است (به‌یاد بیاوریم، سه نیمساز داخلی مثلث، ازیك نقطه می‌گذرند)، بنابراین، باتوجه به پیش قضیه‌ای‌که ثابت‌کردیم، این دومثلث برابرند، یعنی $|AB|=|AC|$.

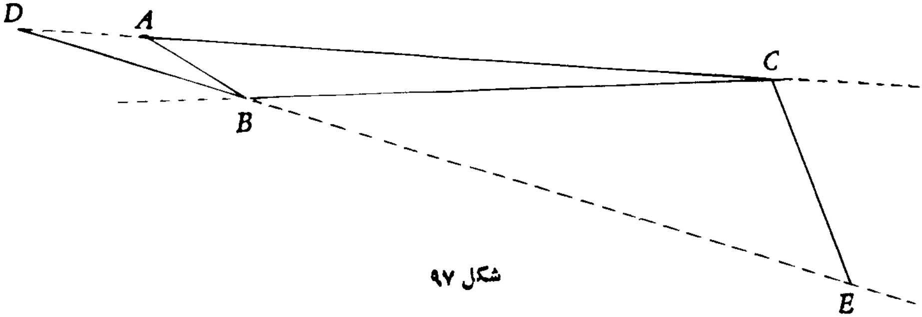
اگراندکی دقت‌کنیم، متوجه می‌شویم‌که، دراین‌اثبات، از نیمساز بودن $[BD]$ و $[CE]$ استفاده نکرده‌ایم؛ تنها از این نکته استفاده‌کردیم‌که پاره خطهای راست BD و CE، روی نیمساز داخلی زاویهٔ A به هم رسیده‌اند. به‌این‌ترتیب، درواقع، قضیهٔ‌کلی‌تری را ثابت‌کردیم:

اگردرمثلث ABC، پاره خطهای راست BD و CD، که روی نیمساز زاویهٔ A به‌هم رسیده‌اند، طولی برابرداشته باشند، مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

یادداشت. ازهمین روش، استدلال، برای نیمسازهای خارجی هم می‌توان استفاده کرد. ولی دراین‌مورد، باید به‌یك شرط توجه‌کرد: باید نیمسازهای خارجی دوزاویهٔ B و C، امتداد ضلع‌های AB و AC راروی نیم‌خطهای‌راست $(AC]$ و $(AB]$ قطع‌کرده‌باشند، درغیراین‌صورت، ممکن است، بابرابر بودن $[BD]$ و $[CE]$، مثلث ABC متساوی‌الساقین نباشد (شکل ۹۷ را ببینید).

اگرمسأله را، با استفاده ازمثلثات حل‌کنیم، مطلب روشن‌ترمی‌شود.

طول نیمسازهای داخلی‌زاویه‌های B و C را، به‌ترتیب، d_b و d_c وطول نیمسازهای



شکل ۹۷

خارجی‌همین دوزاویه را d'_b و d'_c می‌نامیم؛ درضمن، فرض‌می‌کنیم: $c=|AB|$، $b=|AC|$ و $a=|BC|$. این‌رابطه‌ها، به‌سادگی به‌دست می‌آیند:

$$d_b=\frac{2ac}{a+c}\cdot\cos\frac{\hat{B}}{2},\ \ d_c=\frac{2ab}{a+b}\cdot\cos\frac{\hat{C}}{2},\qquad (1)$$

$$d'_b=\frac{2ac}{|a-c|}\cdot\sin\frac{\hat{B}}{2},\ \ d'_c=\frac{2ab}{|a-b|}\cdot\sin\frac{\hat{C}}{2}\qquad (2)$$

درحالت برابری طول‌های دونیمساز داخلی، باید داشته باشیم:

$$\frac{ac}{a+c}\cdot\cos\frac{\hat{B}}{2}=\frac{ab}{a+b}\cos\cdot\frac{\hat{C}}{2}\qquad (3)$$

که اگر ازبرابری‌های معروف (رابطهٔ سینوس‌ها)

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R$$

استفاده‌کنیم، برابری (۳)، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\frac{\sin\hat{A}\ \sin\hat{C}}{\sin\hat{A}+\sin\hat{C}}\cdot\cos\frac{\hat{B}}{2}=\frac{\sin\hat{A}\ \sin\hat{B}}{\sin\hat{A}+\sin\hat{B}}\cdot\cos\frac{\hat{C}}{2}$$

$\sin\hat{A}$ را از دوطرف برابری حذف می‌کنیم ($\sin\hat{A}\neq 0$)، سپس مخرج‌ها را به‌

صورت ضرب درمی‌آوریم ودرصورت‌ها، ازاتحاد $\sin x = ۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}$ استفاده می‌کنیم،

باتوجه به برابری $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi$، بعداز تبدیل‌های لازم، به‌دست می‌آید:

$$\cos\frac{\hat{B}}{۲}\cos\frac{\hat{A}+\hat{C}}{۲}\cos\frac{\hat{A}-\hat{C}}{۲}=\cos\frac{\hat{C}}{۲}\cos\frac{\hat{A}+\hat{B}}{۲}\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{۲}$$

$\cos\frac{\hat{A}+\hat{C}}{۲}\cos\frac{\hat{A}-\hat{C}}{۲}$ و، همچنین، $\cos\frac{\hat{A}+\hat{B}}{۲}\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{۲}$ را به‌صورت مجموع درمی‌آوریم،

سرانجام، به‌این معادله می‌رسیم:

$$\left(\cos\frac{\hat{B}}{۲}-\cos\frac{\hat{C}}{۲}\right)\left(۱-\cos\hat{A}+۲\cos\frac{\hat{B}}{۲}\cos\frac{\hat{C}}{۲}\right)=۰ \qquad (۴)$$

اما $۱-\cos\hat{A}>۰$ و $۲\cos\frac{\hat{B}}{۲}\cos\frac{\hat{C}}{۲}>۰$ وبنابراین

$$۱-\cos\hat{A}+۲\cos\frac{\hat{B}}{۲}\cos\frac{\hat{C}}{۲}>۰$$

یعنی، از معادلهٔ (۴)، تنهایك جواب به‌دست می‌آید:

$$\cos\frac{\hat{B}}{۲}-\cos\frac{\hat{C}}{۲}=۰\Longrightarrow\hat{B}=\hat{C}$$

ومثلث ABC متساوی‌الساقین است.

اکنون به نیمسازهای خارجی می‌پردازیم.

طول نیمسازهای خارجی دوزاویهٔ B و C را، برابرمی‌گیریم. دراین صورت، بنابر رابطه‌های (۲) داریم:

$$\frac{ac}{|a-c|}\cdot\sin\frac{\hat{B}}{۲}=\frac{ab}{|a-b|}\cdot\sin\frac{\hat{C}}{۲}$$

با عمل‌هایی‌کم وبیش شبیه حالت دونیمساز داخلی، سرانجام به‌این معادله می‌رسیم:

$$\left(\sin\frac{\hat{B}}{۲}-\sin\frac{\hat{C}}{۲}\right)\left(\sin^۲\frac{\hat{A}}{۲}-\sin\frac{\hat{B}}{۲}\sin\frac{\hat{C}}{۲}\right)=۰$$

از معادلهٔ $\sin\frac{\hat{B}}{2}=\sin\frac{\hat{C}}{2}$ به دست می‌آید $\hat{B}=\hat{C}$؛ یعنی یکی از جواب‌های مسأله، مثلث متساوی‌الساقین است.

ولی دراین‌حالت، معادلهٔ $\sin^2\frac{\hat{A}}{2}=\sin\frac{\hat{B}}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2}$ هم جواب دارد. می‌توان مثلث‌هایی پیداکردکه، درآن‌ها، $\sin\frac{\hat{A}}{2}$، واسطهٔ هندسی بین دومقدار $\sin\frac{\hat{B}}{2}$ و $\sin\frac{\hat{C}}{2}$ باشد. در چنین مثلث‌هایی، نیمسازهای خارجی دوزاویهٔ B و C، طول‌هایی برابر دارند، ولی مثلث متساوی‌الساقین نیست. این‌گونه مثلث‌ها را «شبه متساوی‌الساقین» نامیده‌اند.

معادلهٔ $\sin^2\frac{\hat{A}}{2}=\sin\frac{\hat{B}}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2}$، به سادگی به‌این صورت درمی‌آید:

$$2\sin^2\frac{\hat{A}}{2}+\sin\frac{\hat{A}}{2}-\cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}=0 \tag{4}$$

برابری (۴)، به‌این معناست که

$$2\sin^2\frac{\hat{A}}{2}+\sin\frac{\hat{A}}{2}-1\leqslant 0$$

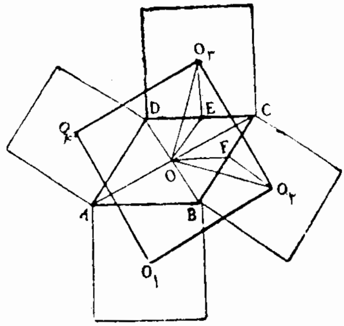
یعنی $\left(\sin\frac{\hat{A}}{2}+1\right)\left(2\sin\frac{\hat{A}}{2}-1\right)\leqslant 0$ یا $2\sin\frac{\hat{A}}{2}-1\leqslant 0$ و $\sin\frac{\hat{A}}{2}\leqslant\frac{1}{2}$. درحالت $\sin\frac{\hat{A}}{2}=\frac{1}{2}$ به‌مثلث متساوی‌الاضلاع می‌رسیم و در حالت $\sin\frac{\hat{A}}{2}<\frac{1}{2}$ به مثلث شبه متساوی‌الساقین. به‌این ترتیب، درمثلث شبه متساوی‌الساقین داریم $\hat{A}<60^\circ$.

اگر تفاضل $\hat{B}-\hat{C}\neq 0$ رامفروض بگیریم، می‌توانیم زاویه‌های مثلث شبه متساوی‌الساقین را پیداکنیم. مثلاً، بافرض $\hat{B}-\hat{C}=120^\circ$، ازمعادلهٔ (۴) به دست می‌آید:

$$\sin\frac{\hat{A}}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\sin 18^\circ\Longrightarrow\hat{A}=36^\circ$$

که دراین‌صورت خواهیم داشت: $\hat{B}=132^\circ$ و $\hat{C}=12^\circ$. مثلث بازاویه‌های 12°، 36° و 132°، یك مثلث شبه متساوی‌الساقین است، یعنی در آن، نیمسازهای خارجی زاویه‌های 12° و 132° طولی برابردارند.

۳۵۸. متوازی‌الاضلاع را $ABCD$ و مرکزهای مربع‌های روی ضلع‌های AB، BC، CD و DA را، به ترتیب، O_1، O_2، O_3 و O_4 می‌نامیم (شکل ۹۸). اگر نقطهٔ برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع را O و وسط ضلع‌های BC و CD را، به‌ترتیب، F و E بگیریم، دومثلث OFO_2 و OEO_3 با هم برابرند، زیرا $|OE|=|FO_2|$ (هرکدام ازآن‌ها، برابراست با نصف طول ضلع BC)؛ به‌همین‌ترتیب $|EO_3|=|OF|$؛ درضمن، دو زاویهٔ منفرجهٔ OEO_3 و OFO_2، ضلع‌هایی عمود برهم دارند وباهم برابرند. از برابری این دومثلث نتیجه می‌شود:



شکل ۹۸

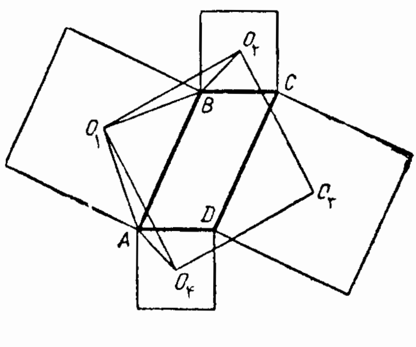
$$|OO_3|=|OO_2| \quad \text{و} \quad \widehat{OO_3E}=\widehat{O_2OF}$$

چون $[O_3E]$ بر $[OF]$ عمود است، $[O_3O]$ هم بر $[OO_2]$ عمود خواهد بود دومثلث O_3OO_2 قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین می‌شود. به‌همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که مثلث‌های O_2OO_1، O_1OO_4 و O_4OO_3 هم، قائم‌الزاویه ومتساوی‌الساقین‌اند. درنتیجه، چهارضلعی $O_1O_2O_3O_4$، یک مربع است.

یادداشت. این مسأله رامی‌توان، با استفاده ازجبربرداری هم حل کرد.

با توجه به شکل ۹۹ دیده می‌شود:

$$\overrightarrow{O_1O_4}=\overrightarrow{O_1A}+\overrightarrow{AO_4} \qquad (1)$$



شکل ۹۹

بردارهای سمت راست برابری (۱) رابه اندازهٔ ۹۰+ درجه دوران می‌دهیم. چون مرکزدوران، ضمن دوران بردارها، نقشی ندارد، روی شکل بـه جست‌وجوی چنان بردارهایی می‌رویم که بابردارهای‌مفروض طولی بـرابـر داشته باشند و، بـا آن‌ها، زاویه‌هایی برابر ۹۰+ درجه بسازند. چنین بردارهایی وجود دارند و عبارتند از $\overrightarrow{O_1B}$ و $\overrightarrow{BO_2}$:

$$\overrightarrow{O_1A} \to \overrightarrow{O_1B} \text{ و } \overrightarrow{AO_4} \to \overrightarrow{BO_2} \qquad (۲)$$

ولی با توجه به‌شکل ۹۹ داریم:

$$\overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{BO_2} = \overrightarrow{O_1O_2} \qquad (۳)$$

مقایسهٔ برابری‌های (۱) و (۳)، روشن می‌کند که $\overrightarrow{O_1O_2}$ از $\overrightarrow{O_1O_4}$ با دوران به‌اندازهٔ ۹۰+ درجه به‌دست می‌آید (اگر همهٔ بردارهایی را که در یک برابری شرکت دارند، در یک جهت و با یک زاویه دوران دهیم، برابری به‌هم نمی‌خورد)، یعنی

$$\widehat{O_2O_1O_4} = 90^\circ \text{ و } |O_1O_2| = |O_1O_4|$$

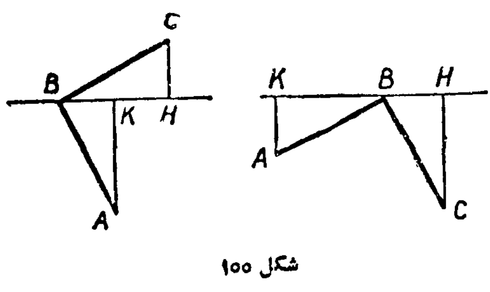
به همین ترتیب، ثابت می‌شود:

$$|O_1O_2| = |O_2O_3| \text{ و } \widehat{O_1O_2O_3} = 90^\circ$$

۳۰۹. همه‌جا، رأس‌های A، B و C را رأس‌هایی از مربع $ABCD$ می‌گیریم که روی سه خط راست موازی باشند و A، B، C و D را، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت فرض می‌کنیم. از بین راه حل‌های زیادی که برای این مسأله وجود دارد، دو راه حل را در این‌جا می‌آوریم.

راه حل اول. فرض کنید A، B و C، سه رأسی که روی خطهای راست موازی قرار دارند، معلوم باشند. اگر پاره خطهای راست AK و CH را، عمود بر خط راستی رسم کنیم که از نقطهٔ B گذشته است، چون $[AB] \perp [BC]$، بنابراین مجموع دو زاویهٔ ABK و CBH برابر ۹۰ درجه است (شکل ۱۰۰) و مثلث‌های ABK و CBH در وتر و زاویه‌های حاده باهم برابر می‌شوند، یعنی

$$|BK| = |CH| \text{ و } |BH| = |AK|$$



شکل ۱۰۰

اندازه‌های $|CH|$ و $|AK|$ را از قبل می‌دانیم (فاصله‌های بین خطهای راست موازی مفروض)، بنابراین با انتخاب نقطهٔ B، می‌توان جای نقطه‌های K و H و، سپس، جای رأس‌های C و A از مربع را پیدا کرد.

خطهای راست موازی را افقی می‌گیریم: فاصلهٔ بین دو خط راست بالایی را p و فاصلهٔ بین دو خط راست پایینی را q

می‌نامیم. بسته به این که، سه نقطهٔ A و B و C، به چه ترتیبی روی خط‌های راست موازی باشند، شش حالت پیش می‌آید. درهریك ازاین شش حالت، طول‌های $|BK|$ و $|BH|$را محاسبه می‌کنیم.

	روی‌خط راست بالا	روی‌خط راست وسط	روی‌خط راست پایین	$\|BK\|=\|CH\|$	$\|BH\|=\|AK\|$
۱	A	B	C	q	p
۲	C	B	A	p	q
۳	B	A	C	$p+q$	p
۴	B	C	A	p	$p+q$
۵	A	C	B	q	$p+q$
۶	C	A	B	$p+q$	q

جای نقطهٔ B برخط راست را، می‌توان به دلخواه انتخاب کرد: روشن‌است که‌مربع را می‌توان، باحرکت دادن B درطول خط راست، انتقال داد.

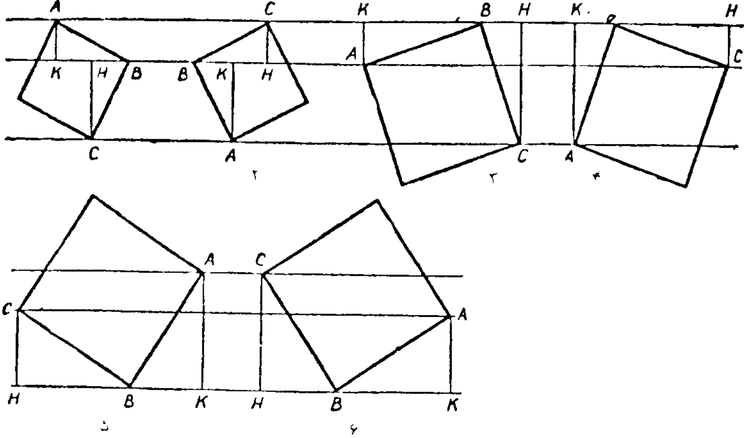
به این ترتیب، برای رسم مربع، بعداز انتخاب نقطهٔ B روی یکی ازخط‌های‌راست موازی، نقطه‌های K و H رابا جداکردن $[BK]$ و $[BH]$ روی خط راست مفروض، پیدا می‌کنیم (این‌که K و H رادرکدام سمت B درنظر بگیریم، باتوجه به‌این شرط‌که‌نقطه‌های A، B و C باید درجهت‌حرکت عقربه‌های ساعت باشند،مشخص می‌شود). سپس،عمودهای KA و HC را برخط راست مفروض وتابرخورد با دو خط راست دیگر رسم می‌کنیم و، به‌این‌ترتیب، رأس‌های A و C به دست می‌آیند (شکل ۱۰۱).

ثابت می‌کنیم، درهمهٔ حالت‌های از ۱ تا ۶، نقطه‌های A، B و C،که‌به‌این‌ترتیب به‌دست می‌آیند، رأس‌های یك مربع‌اند. مثلث‌های ABK و BCH، در دو ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه برابرند، بنابراین

$$|AB|=|BC| \text{ و } \widehat{ABC}=۹۰^\circ$$

(در حالت اول و دوم $\widehat{ABC}=\widehat{ABK}+\widehat{CBH}$، و در حالت‌های دیگر $\widehat{ABC}+\widehat{ABK}+\widehat{CBH}=۱۸۰^\circ$)؛ یعنی‌مثلث ABC، قائم‌الزاویه‌ومتساوی‌الساقین‌است.

بـه‌این ترتیب، مسأله درحالت‌کلی، شش جواب مختلف دارد (جواب‌هایی راکه از



شکل ۱۵۱

حرکت مربع درطول خط راست به دست می‌آیند، مختلف به حساب نمی‌آوریم). درحالت $p=q$، حالت‌های اول ودوم، منجر به یك مربع می‌شوند و، بنابراین، دراین‌حالت، مسأله پنج جواب دارد.

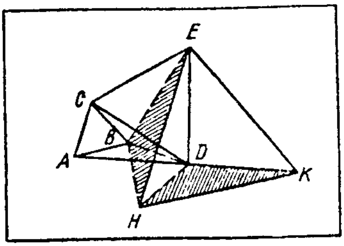
راه حل دوم. این راه حل، زیبا وساده است، ولی اندیشهٔ آن دیرتر به ذهن می‌رسد. فرض می‌کنیم مربع $ABCD$ ساخته شده باشد. تمامی شکل را، دوباره روی کاغذ شفافی رسم می‌کنیم وآن را، با دقت روی تصویر اولی قرارمی‌دهیم؛ سپس، درنقطهٔ B سنجاقی فرو می‌کنیم. روشن است که، اگرکاغذ شفاف را، بـه اندازهٔ ۹۰ درجه، درجهت حرکت عقربه‌های ساعت، دور نقطهٔ B دوران دهیم، رأس C از مربع کاغذ شفاف، روی رأس A ازمربع اصلی قرارمی‌گیرد. اکنون،اگرسه خط راست موازی مفروض را a، b و c بنامیم، آن وقت، این‌سه خط راست افقی، ضمن دوران، به سه خط راست قائم a'، b' و c' منجر می‌شوند؛ درضمن رأس A، درمحل برخورد خطهای راست a و a'، و نقطهٔ B درمحل برخورد خطهای راست b و b' قرار می‌گیرد.

به‌این‌ترتیب، روش زیر، برای رسم مربع به دست می‌آید. سه خط راست مفروض را، به‌اندازهٔ ۹۰ درجه ودرجهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم؛ دراین‌صورت، اگرنقطهٔ B درمحل‌برخورد یکی‌ازسه‌خط راست مفروض باخط راستی باشدکه ازدوران آن به‌دست‌آمده، آن وقت، نقطهٔ A درمحل برخورد یکی دیگرازسه خط راست با خط راست حاصل‌ازدوران خط راست سوم قرارمی‌گیرد. بنابراین، اگر B درنقطهٔ B' باشد، آن‌وقت نقطهٔ A می‌تواند دریکی ازدونقطهٔ A_1 یا A_2 باشد (شکل ۱۵۱). اگر B درنقطهٔ B'' باشد، آن‌وقت A می‌تواند درنقطهٔ A_3 یا A_4 قرارگیرد و، سرانجام، اگر B در نقطهٔ B''' باشد، آن‌وقت نقطهٔ A می‌تواند درنقطهٔ A_5 یا نقطهٔ A_6 واقع شود.

اثبات این‌که، رأس C از مربع $ABCD$، ضمن این ساختمان، روی خط راست مفروض قرار می‌گیرد، دشوار نیست. باید همراه با پاره خط راست BA، هرسه خط راست قائم را، به‌اندازهٔ ۹۰ درجه و در جهت عکس‌حرکت عقربه‌های ساعت، دور نقطهٔ B دوران داد؛ دراین‌صورت، نقطهٔ A به‌رأس C منجرمی‌شود وخط راست قائمی‌که از نقطهٔ A می‌گذرد، روی یکی ازسه خط راست افقی مفروض قرار می‌گیرد.

به این‌ترتیب، دراین‌جاهم، شش جواب متناظر با جواب‌های شکل ۱۰۱ به دست می‌آید.

۳۱۰. اگرمثلث CAD را به اندازهٔ ۶۰ درجه دورنقطهٔ C دوران دهیم، روی مثلث CBE قرار می‌گیرد، زیرا مثلث‌های ABC و CDE متساوی‌الاضلاع وهم‌جهت‌اند (شکل ۱۰۲). بنابراین $|AD|=|BE|$؛ درضمن، زاویهٔ بین (BE) و (AD) برابر ۶۰ درجه است. اکنون مثلث HBE را، به اندازهٔ ۶۰ درجه دور رأس H دوران می‌دهیم. چون مثلث EHK متساوی‌الاضلاع است، نقطهٔ E بر K منطبق می‌شود و، با توجه به شرط $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DK}$، به‌دست می‌آید:

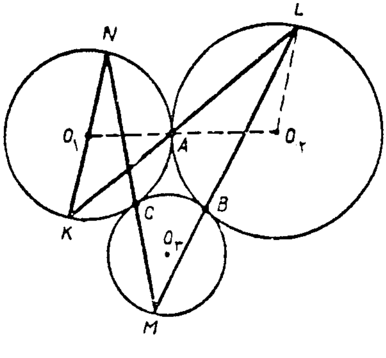


شکل ۱۰۲

$$|DK|=|AD|=|BE|$$

(برابری $|AD|$ و $|BE|$ راقبلاً ثابت‌کردیم). همچنین ثابت‌کردیم، زاویهٔ بین (BE) و (AD)، یعنی زاویهٔ بین (BE) و (DK) برابر ۶۰ درجه است. بنابراین، ضمن دوران مذکور، نیم خط راست $[EB)$ بر نیم‌خط‌راست $[KD)$، و نقطهٔ B برنقطهٔ D واقع می‌شود. به این ترتیب $|HB|=|HD|$، $\widehat{BHD}=60°$ ومثلث BHD متساوی‌الاضلاع است.

۳۱۱. اگر دو دایرهٔ O_1 و O_2 درنقطهٔ A مماس باشند (ازبیرون یا ازدرون) و خط راستی از نقطهٔ A بگذردکه محیط دایرهٔ O_1 را در K و محیط دایرهٔ O_2 را در L قطع‌کند، آن‌وقت دو زاویهٔ O_1KA و O_2LA برابرمی‌شوند (چرا؟)و، بنابراین، خطهای راست O_1K و O_2L موازی ازآب درمی‌آیند (شکل ۱۰۳).



شکل ۱۰۳

اکنون فرض‌کنید، سه دایره، دوبه دو ودر نقطه‌های A، B و C مماس بیرونی باشند. خطهای

راست KAL، LBM و MCN را رسم می‌کنیم. بنا بر آن‌چه گفتیم:

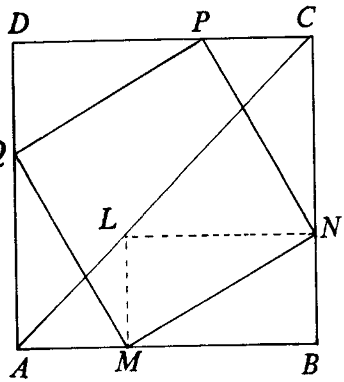
$$[O_1K]||[O_2L]||[O_3M]||[O_1N]$$

یعنی $(O_1K)||(O_1N)$ و $[NK]$ قطری از دایرهٔ O_1 می‌شود. به‌همین ترتیب، می‌توان قطر دیگری ازاین دایره و، در نتیجه مرکز آن را پیدا کرد.

توجه کنید، ازنقطه‌های O_1 و O_2 و O_3، تنها برای اثبات این‌که $[KL]$ قطر دایره است، استفاده کردیم، نه برای رسم آن.

درحالتی هم که، دوزوج ازدایره‌ها مماس درونی ویك زوج مماس بیرونی باشند، به‌همین ترتیب می‌توان عمل کرد.

حالتی‌که همهٔ دایره‌ها، دوبه دومماس درونی باشند، قابل بررسی نیست، زیرادراین حالت، نقطه‌های A، B و C برهم قرار می‌گیرند.



شکل ۱۰۴

۳۱۲. $ABCD$ را مربعی با ضلع به طول a می‌گیریم. بایدمربعی باضلع به‌طول b درآن محاط کنیم. به مرکز رأس B و به شعاع برابر b، کمانی رسم می‌کنیم ویکی ازنقطه‌های برخوردآن راباقطر AC، L می‌نامیم. اگرعمودهای LM و LN را، به‌ترتیب، برضلع‌های AB و BC فرودآوریم، به‌دلیل مستطیل بودن چهارضلعی $MBNL$، خواهیم داشت $|MN|=b$. اگر روی ضلع‌های CDوDA، به‌ترتیب $|CP|=|DQ|=|AM|$ جداکنیم، چهار ضلعی $MBNL$، همان مربع مطلوب خواهد بود.

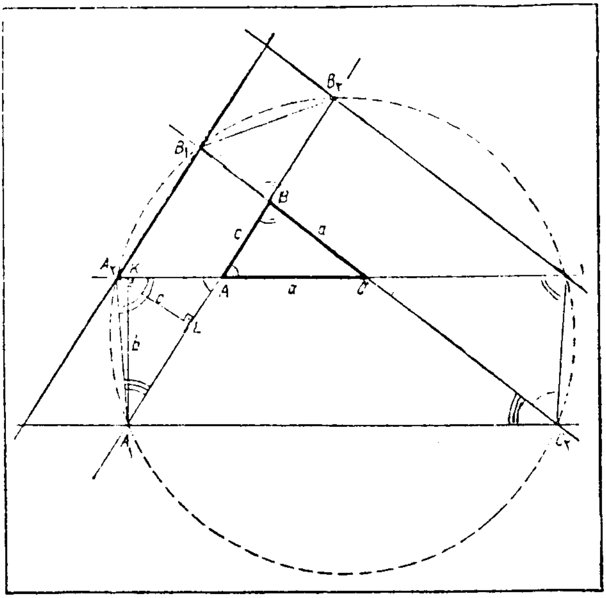
برای این‌که مسأله جواب داشته باشد، باید داشته باشیم $\frac{\sqrt{2}}{2}a\leqslant b<a$. درحالت $b=\frac{\sqrt{2}}{2}a$، مربع جواب، رأس‌هایی دروسط ضلع‌های مربع اصلی‌دارد.

۳۱۳. ABC را مثلث مفروض و A_1، A_2، B_1، B_2، C_1، C_2 را نقطه‌های برخورد امتدا ضلع‌های مثلث باخطهای راست مورد نظرمی‌گیریم (شکل ۱۰۵) وفرض می‌کنیم:

$$|BC|=a,\ |CA|=b,\ |AB|=c$$

ثابت می‌کنیم، هریك از مثلث‌های AA_1A_2، BB_1B_2 و CC_1C_2، با مثلث ABC متشابه‌اند و

$$|A_1A_2|=|B_1B_2|=|C_1C_2|$$



شکل ۱۵۵

درمثلث $AA_۱A_۲$، ارتفاع‌های $A_۱K$ و $A_۲L$ را رسم می‌کنیم. با توجه به‌شرط مسأله $b=|A_۱K|$ و $c=|A_۲L|$، به نحوی‌که

$$\sin \widehat{A_۱AA_۲}=\frac{b}{|AA_۱|}=\frac{c}{|AA_۲|}\Longrightarrow\frac{|AA_۱|}{|AA_۲|}=\frac{b}{c}=\frac{|AC|}{|AB|}$$

به جز این $\widehat{BAC}=\widehat{A_۱AA_۲}$. بنابـراین، دومثلث $AA_۱A_۲$ و ABC متشابـه‌اند؛ درضمن، ضریب تشابه برابراست با $\sin\widehat{BAC}$. اگر R را شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC بگیریم، باتوجه به‌ضریب تشابه دومثلث وباتوجه به‌قضیهٔ سینوس‌ها، داریم:

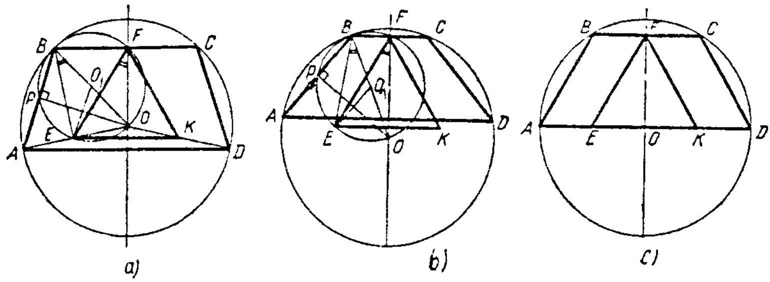
$$|A_۱A_۲|=\frac{a}{\sin\widehat{BAC}}=۲R$$

به‌همین‌ترتیب، بااثبات تشابه هریك ازمثلث‌های $BB_۱B_۲$ و $CC_۱C_۲$ بامثلث ABC،ثابت ثـابت می‌شود: $|B_۱B_۲|=|C_۱C_۲|=۲R$. اکنون، چهارضلعی $A_۱A_۲C_۱C_۲$ را در نظر می‌گیریم. این چهارضلعی ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین است (ومتوازی‌الاضلاع نیست، زیـرا ازتشابه، برابری هریك‌از زاویه‌های $A_۱A_۲C_۱$ و $A_۲C_۱C_۲$ بازاویهٔ ABC روشن‌می‌شود). بنابراین، ازچهار رأس این چهارضلعی، می‌توان دایره‌ای‌گذراند. وازبرابری‌های

$$\widehat{A_۱A_۲C_۱}=\widehat{A_۱B_۲C_۱}\text{ و }\widehat{A_۲C_۱C_۲}=\widehat{A_۲B_۱C_۲}$$

نتیجه می‌شود که نقطه‌های $B_۲$ و $B_۱$ هم، روی محیط همین دایره قراردارند. به‌این ترتیب، شش نقطهٔ $A_۱$، $A_۲$، $B_۱$، $B_۲$، $C_۱$ و $C_۲$، روی محیط یك دایره‌اند.

۳۱۴. نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ محیطی ذوزنقه، ممکن است در درون ذوزنقه، یادر بیرون آن ویا روی قاعدهٔ AD واقع شود.



شکل ۱۰۶

الف) فرض می‌کنیم، نقطهٔ O، در درون‌ذوزنقهٔ $ABCD$ باشد (شکل ۱۰۶–a). اگر وسط $[BC]$ را F بنامیم، خط راست OF، محور تقارن ذوزنقه است و بنابراین: $|FK|=|FE|$ که درآن E و K، به‌ترتیب، وسط شعاعهای OA و OD هستند.

از نقطهٔ O، عمود OP را برضلع AB فرود می‌آوریم (P، پای عمود است). درچهارضلعی $OPBF$، زاویه‌های رأس‌های P و F قائمه‌اند، بنابراین دردایرهٔ به‌قطر $[BO]$ قابل محاط است. مرکز این دایره (یعنی وسط $[BO]$) را $O_۱$ می‌نامیم. چون $[O_۱E]$، در مثلث AOB، وسط دوضلع را به هم وصل کرده است، پس $|O_۱E|=\frac{R}{۲}$. ازاین‌جا معلوم‌می‌شود، نقطهٔ E، متعلق به محیط دایرهٔ به مرکز $O_۱$ است، بنابراین

$$\widehat{EFO}=\widehat{EBO}=۳۰^\circ \text{ و } \widehat{EFK}=۶۰^\circ$$

که، باتوجه به‌برابری $|FK|=|FE|$، به‌معنای متساوی‌الاضلاع بودن مثلث EFKاست.

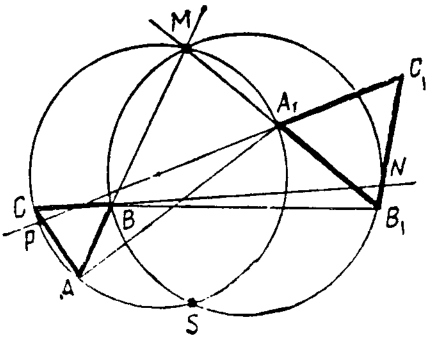
ب) استدلال، درحالتی‌که مرکز دایرهٔ محیطی در بیرون ذوزنقه باشد، کاملاً شبیه استدلال درحالت الف) است (شکل ۱۰۶–b).

ج) اگر $O\in[AD]$، آن‌وقت به‌سادگی ثابت می‌شود:

$$\widehat{FEK}=\widehat{EFK}=\widehat{EKF}=۶۰^\circ$$

۳۱۵. دو مثلث متساوی‌الاضلاع متشابه‌اند. چون ABC و $A_۱B_۱C_۱$ هم‌جهت‌اند. بنابراین، باتبدیل تشابهی نوع اول سروکارداریم که، ضمن آن، $A\to A_۱$، $B\to B_۱$ و $C\to C_۱$.

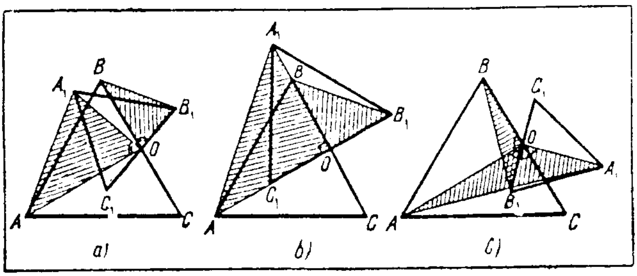
نقطهٔ S، محل برخورد دو دایره‌ای که، یکی از نقطه‌های A، M و A_1، و دیگری از نقطه‌های B، M و B_1 می‌گذرد، ضمن این تبدیل، ثابت می‌ماند (شکل ۱۰۷). به همین ترتیب، نقطهٔ برخورد دو دایرهٔ $(B، N، B_1)$ و $(C، N، C_1)$ و نقطهٔ برخورد دو دایرهٔ $(C، P، C_1)$ و $(A، P، A_1)$ نیز ثابت است. از آن‌جا که، تبدیل تشابهی، نمی‌تواند بیش از یك نقطهٔ ثابت داشته باشد، بنابراین، هر سه نقطه بر S منطبق‌اند.



شکل ۱۰۷

یادداشت. توجه کنیم، از متساوی‌الاضلاع بودن مثلث‌های ABC و $A_1B_1C_1$، تنها برای متشابه‌بودن آن‌ها استفاده کردیم، بنابراین حکم مسأله، دربارهٔ هر دو مثلث متشابه و هم‌جهت، درست است.

۳۱۶. وسط ضلع BC یا (B_1C_1) را O می‌نامیم ومثلث‌های AOA_1 و BOB_1 رادر نظرمی‌گیریم (شکل ۱۰۸). ثابت می‌کنیم، این دومثلث، متشابه‌اند و، درضمن، ضریب تشابهی برابر $\sqrt{3}=|OB|:|OA|$ دارند.



شکل ۱۰۸

درواقع، باتوجه به متساوی‌الاضلاع بودن مثلث‌های ABC و $A_1B_1C_1$، داریم:

$$\frac{|AO|}{|OB|}=\frac{|A_1O|}{|OB_1|}=\sqrt{3}$$

علاوه بر آن، زاویه‌های AOA_1 و BOB_1 برابرند، زیر اضلع‌های متناظر آن‌ها برهم‌عمودند ($[AO]$ بر $[OB]$ و $[A_1O]$ بر $[OB_1]$)؛ درضمن، هردوزاویه‌حاده (شکل ۱۰۸–a)، یا هر دو قائمه (شکل ۱۰۸–b) ویاهردو منفرجه‌اند (شکل ۱۰۸–c).

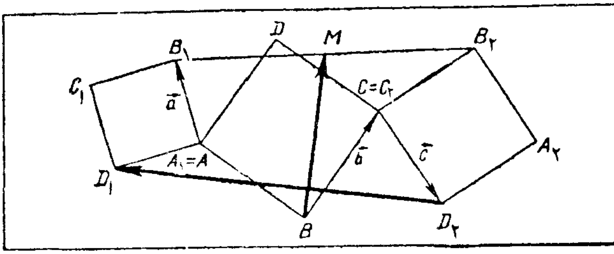
به‌این‌ترتیب، مثلث‌های AOA_1 و BOB_1 متشابه‌اند. اگرمثلث AOA_1 را دور نقطهٔ

O و بـه اندازهٔ ۹۰ درجه، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم و، سپس، طول ضلع‌های آن را $\frac{\sqrt{3}}{3}$ برابر کنیم، بـه مثلث BOB_1 می‌رسیم. از این‌جا نتیجه می‌شود کـه، زاویهٔ بین پاره خطهای راست AA_1 و BB_1 برابر ۹۰ درجه و نسبت $|AA_1|$ به $|BB_1|$ برابر $\sqrt{3}$ است.

۳۱۷. مسأله را به کمك جبر برداری حل می‌کنیم. روشن است که (شکل ۱۰۹)

$$2\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BB_2}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB_2};$$

$$\overrightarrow{D_2D_1}=\overrightarrow{D_2C}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD_1} \qquad (1)$$



شکل ۱۰۹

بردارهای $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB_1}$، $\mathbf{b}=\overrightarrow{BC}$ و $\mathbf{c}=\overrightarrow{CD_2}$ را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم، R، دورانی‌ازصفحه، درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت و به‌اندازهٔ ۹۰ درجه باشد. چون

$$\overrightarrow{AD_1}=R(\mathbf{a})\ ,\ \overrightarrow{CB_2}=R(\mathbf{c})\ ,\ \overrightarrow{BA}=R(\mathbf{b})$$

بنابراین، از (۱) نتیجه می‌شود:

$$2\overrightarrow{BM}=R(\mathbf{b})+\mathbf{a}+\mathbf{b}+R(\mathbf{c}) \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{D_2D_1}=-\mathbf{c}-\mathbf{b}+R(\mathbf{b})+R(\mathbf{a}) \qquad (3)$$

ازطرف دیگر، می‌دانیم، تبدیل R، دارای این‌ویژگی‌هاست: برای هردوبردار $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$

$$R(\mathbf{x}+\mathbf{y})=R(\mathbf{x})+R(\mathbf{y});\ \ R(R(\mathbf{x}))=-\mathbf{x}$$

با استفاده ازاین ویژگی‌ها وبرابری (۲) به‌دست می‌آید:

$$R(2\overrightarrow{BM})=R(R(\mathbf{b})+\mathbf{a}+\mathbf{b}+R(\mathbf{c}))=$$

$$= R(R(\mathbf{b})) + R(\mathbf{a}) + R(\mathbf{b}) + R(R(\mathbf{c})) =$$

$$= -\mathbf{b} + R(\mathbf{a}) + R(\mathbf{b}) - \mathbf{c}$$

که اگر آن را با برابری (۳) مقایسه کنیم، به‌دست می‌آید:

$$R(\text{۲}\overrightarrow{BM}) = \overrightarrow{D_\text{۲}D_\text{۱}}$$

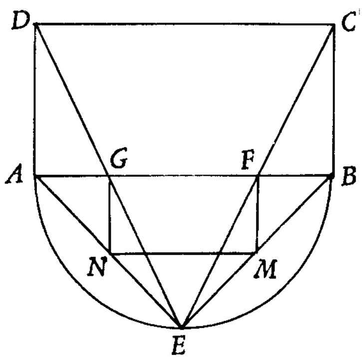
یعنی اولاً پاره خطهای راست BM و $D_\text{۱}D_\text{۲}$ برهم عمودند، ثانیاً $\text{۲}|BM| = |D_\text{۱}D_\text{۲}|$.

۳۱۸. اگر $a = |AG|$، $b = |GF|$ و $c = |FB|$ فرض کنیم، باید ثابت کنیم:

$$(a+b)^\text{۲} + (b+c)^\text{۲} = (a+b+c)^\text{۲}$$

این برابری، بعداز ساده‌کردن، چنین می‌شود:

$$b^\text{۲} = \text{۲}ac$$

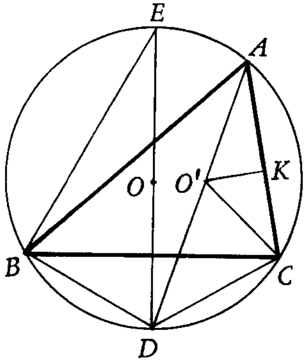


شکل ۱۱۵

از F و G عمودهایی بر $[AB]$ اخراج می‌کنیم تا $[EB]$ و $[EA]$ را در M و N قطع کنند. مستطیل $NMFG$ بامستطیل $ABCD$ متشابه است، زیرا

$$\frac{|FM|}{|BC|} = \frac{|EF|}{|EC|} = \frac{|EG|}{|ED|} = \frac{|GN|}{|AD|} = \frac{|GF|}{|CD|}$$

پس $|NG| = |FM|$ و $\text{۲}|MF|^\text{۲} = |FG|^\text{۲} = b^\text{۲}$، زیرا نسبت طول به‌عرض درهریك از مستطیل‌ها برابر $\sqrt{\text{۲}}$ است. ازطرف دیگر، دومثلث قائم‌الزاویهٔ MBF و ANG متشابه‌اند و $\frac{|MF|}{c} = \frac{a}{|NG|}$، یعنی $|MF|^\text{۲} = ac$؛ درنتیجه $b^\text{۲} = \text{۲}ac$.



شکل ۱۱۱

۳۱۹. دایرهٔ به مرکز O را، دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌گیریم. اگر نیمسازهای دوزاویهٔ A و C ازمثلث ABC را رسم کنیم، درنقطهٔ O' ــ مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ــ به هم می‌رسند وروشن است که خط راست (AO')، از نقطهٔ D وسط کمان BC عبورمی‌کند (شکل ۱۱۱)؛ یعنی (OD) عمود منصف پاره خط راست BC است. محل برخورد دوم قطری راکه از O و D می‌گذرد، با محیط دایره، با E نشان می‌دهیم.

مثلث $O'DC$ متساوی‌الساقین است، زیرا از یك

طرف $\widehat{CO'D}$ زاویهٔ بیرونی مثلث $AO'C$ و برابر مجموع دوزاویهٔ غیرمجاور خود در این مثلث است:

$$\widehat{CO'D}=\widehat{CAO'}+\widehat{O'CA}=\frac{\hat{A}}{۲}+\frac{\hat{C}}{۲}$$

ازطرف دیگر، چون $\widehat{DCB}=\widehat{CAB}$، بنابراین

$$\widehat{DCO'}=\widehat{DCB}+\widehat{BCO'}=\frac{\hat{A}}{۲}+\frac{\hat{C}}{۲}$$

یعنی $|DC|=|O'D|$ وچون $|DC|=|DB|$، پس

$$|DC|=|DB|=|DO'|$$

اکنون قوت نقطهٔ O' رانسبت به‌دایرهٔ به مرکز O می‌نویسیم. این قوت، ازیك‌طرف برابر $R^۲-|OO'|^۲=R^۲-d^۲$ وازطرف دیگر، برابر $|O'A|\cdot|O'D|=|AO'|\cdot|DB|$ است. بنابراین

$$R^۲-d^۲=|AO'|\cdot|DB| \qquad (۱)$$

اگرعمود $O'K$ رابرضلع AC فرودآوریم (K، پای عمود است)، روشن است که $r=|O'K|$. ازتشابه دومثلث $AO'K$ و BDE، به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$\frac{|AO'|}{|DE|}=\frac{|O'K|}{|BD|}\Longrightarrow|AO'|=\frac{۲Rr}{|BD|}$$

که اگر در (۱) قراردهیم، به رابطهٔ اولر می‌رسیم:

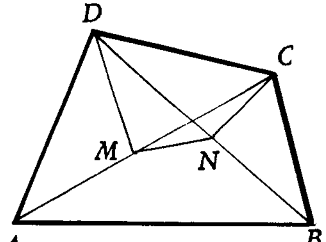
$$R^۲-d^۲=\frac{۲Rr}{|BD|}\cdot|BD|=۲Rr\Longrightarrow d^۲=R(R-۲r)$$

۳۲۵. ازاین قضیه استفاده می‌کنیم:

در هر مثلث، مجموع مجذورهای دو ضلع، برابر است با نصف مجذور ضلع سوم به‌اضافهٔ دو برابر مجذور میانهٔ وارد به‌این ضلع.

این‌قضیه، درواقع، صورت دیگری‌ازقضیهٔ‌معروف زیر است:

در هر متوازی‌الاضلاع، مجموع مجذورهای چهار



شکل ۱۱۲

ضلع، برابر است با مجموع مجذورهای دو قطر.

درمثلث‌های BCD و ABD، به‌ترتیب، داریم:

$$|BC|^2+|CD|^2=2|CN|^2+\frac{1}{2}|BD|^2$$

$$|AB|^2+|AD|^2=2|AN|^2+\frac{1}{2}|BD|^2$$

که از مجموع آن‌ها به‌دست می‌آید:

$$|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2=2(|AN|^2+|CN|^2)+|BD|^2 \quad (1)$$

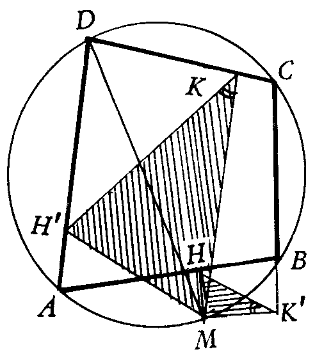
همین قضیه، درمثلث ANC منجر به‌برابری

$$|AN|^2+|CN|^2=2|MN|^2+\frac{1}{2}|AC|^2$$

می‌شود. بنابراین، برابری (۱)، به‌این صورت درمی‌آید:

$$|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2=4|MN|^2+|AC|^2+|BD|^2$$

درستی قضیهٔ اول ثابت شد.



شکل ۱۱۳

۳۲۱. راهنمائی. با توجه به چهارضلعی‌های محاطی $MH'DK$ و $MHBK'$، تشابه دو مثلث $MH'K$ و MHK' را ثابت کنید(شکل ۱۱۳).از آن‌جا، برابری مورد نظر به‌دست می‌آید:

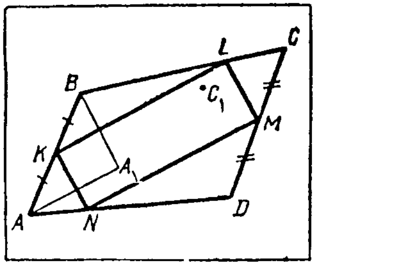
۳۲۲. رسم چنین‌مستطیلی ساده است. وسط پاره‌خط راست KM را O می‌گیریم؛ سپس، به مرکز O و به شعاع برابر $|OM|=|OK|$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا $[BC]$ رادر L و $[AD]$ رادر K قطع کند. $KLMN$ یک مستطیل است.

قرینهٔ A نسبت به خط راست KN را A_1 می‌نامیم (شکل ۱۱۴). دراین‌صورت

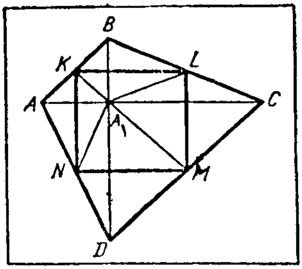
$$|KB|=|KA|=|KA_1|;$$

$$\widehat{A_1KL}=\frac{\pi}{2}-\widehat{A_1KN}=\frac{\pi}{2}-\widehat{AKN}=\widehat{BKL}$$

یعنی نقطهٔ B، قرینهٔ نقطهٔ A_1 نسبت به خط راست KL است. به همین ترتیب، نقطهٔ C_1، قرینهٔ نقطهٔ C نسبت به(LM)، برقرینهٔ نقطهٔ D نسبت به (NM) منطبق است. سپس



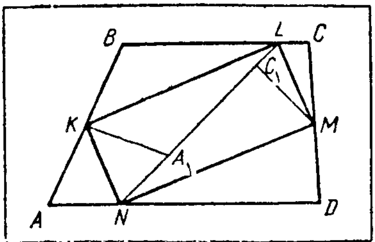
شکل ۱۱۴



شکل ۱۱۵

$$\widehat{DNM}=\widehat{C_1NM} \quad و \quad \widehat{ANK}=\widehat{A_1NK}$$

وچون $\widehat{DNM}+\widehat{ANK}=\frac{\pi}{2}$، پس $\widehat{C_1NM}+\widehat{A_1NK}=\frac{\pi}{2}$. یعنـی نقطهٔ C_1، روی خط راست NA_1 قراردارد. بـه‌همین‌ترتیب، ثـابت می‌شود، نقطهٔ C_1 روی خط راست LA_1 قرار دارد.



شکل ۱۱۶

اگرخطهای راست NA_1 و LA_1 مختلف باشند، آن وقت، به‌ناچار A_1 و C_1 بـرهم منطبق می‌شوند(شکل ۱۱۵)و برابری $S_{ABCD}=2S_{KLMN}$ روشن‌است.

اگرخطهای راست NA_1 و LA_1 بـر هم منطبق نباشند، آن وقت نقطه‌های A_1 و C_1،برخط راست NL قرار می‌گیرند (شکل ۱۱۶) ودوباره $S_{ABCD}=2S_{KLMN}$.

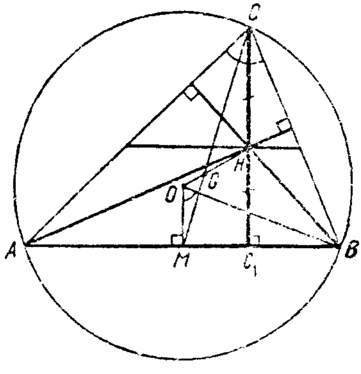
یادداشت. این مسأله را می‌توان درحالت‌کلی‌تری هم حل کرد:

نقطه‌های K و M را وسط ضلع‌های AB و CD از چهار ضلعی محدب $ABCD$ می‌گیریم؛ سپس، نقطه‌های L و N راروی ضلع‌های BC و AD طوری انتخاب می‌کنیم که، چهارضلعی $KLMN$ متوازی‌الاضلاع باشد. ثابت‌کنید، مساحت‌چهارضلعی $ABCD$ دوبرابر مساحت متوازی‌الاضلاع $KLMN$ است.

۳۲۳. ابتدا توجه می‌کنیم که $\hat{C}<90°$، زیرا در حالت $\hat{C}\geqslant 90°$، نقطهٔ برخورد ارتفاع مثلث، یا دربیرون مثلث ویاروی رأس C واقع می‌شود و، درنتیجه، نمی‌تواندروی پاره خط راستی باشدکه وسط دوضلع CA و CB رابه هم وصل‌کرده است.

M را وسط ضلع AB می‌گیریم (شکل ۱۱۷)، دراین صورت اگر O مرکز دایـرهٔ محیطی‌مثلث ABC و R اندازهٔ شعاع آن باشد، چون $\widehat{MOB}=\hat{C}$، پس

$$|OM| = R\cdot cos\hat{C} \qquad (۱)$$



شکل ۱۱۷

چون می‌خواهیم پاره خط راستی که وسط دوضلع CA و CB را به‌هم وصل می‌کند، از H، محل برخورد سه‌ارتفاع مثلث بگذرد، باید نقطهٔ H وسط ارتفاع CC_1 باشد، یعنی $|CC_1| = ۲|CH|$. از طرف دیگر می‌دانیم

$$|CH| = ۲|OM| \qquad (۲)$$

(اگر G را، محل برخورد میانه‌های مثلث ABC فرض کنیم، برابری (۲)، از تشابه دومثلث MDG و CGH به دست می‌آید.) بنابراین

$$|CC_1| = ۲|CH| = ۴|OM| = ۴Rcos\hat{C}$$

یعنی از یک‌طرف

$$c\cdot|CC_1| = (۲Rsin\hat{C})\,(۴Rcos\hat{C}) = ۸R^۲sin\hat{C}cos\hat{C}$$

و از طرف دیگر

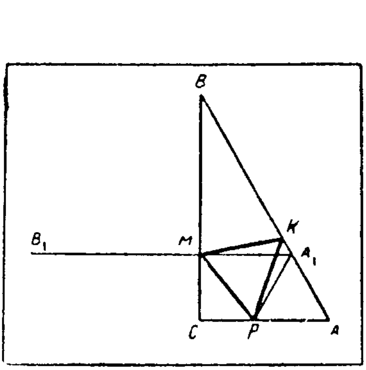
$$c\cdot|CC_1| = absin\hat{C} = (۲Rsin\hat{A})(۲Rsin\hat{B})sin\hat{C} = ۴R^۲sin\hat{A}sin\hat{B}sin\hat{C}$$

پس

$$۲cos\hat{C} = sin\hat{A}sin\hat{B} \Longleftrightarrow cos\hat{C} = -cos\hat{C} + sinAsinB \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow cos\hat{C} = cos(\hat{A}+\hat{B}) + sin\hat{A}sin\hat{B} = cos\hat{A}cos\hat{B}$$

برعکس، از برابری $cos\hat{C} = cos\hat{A}\cdot cos\hat{B}$، نتیجه می‌شود $|CC_1| = ۴Rcos\hat{C}$ و یا $|CC_1| = ۲|CH|$، یعنی نقطهٔ H روی پاره خط راستی است که وسطهای دوضلع CA و CB را به هم وصل می‌کند.

۳۲۴. فرض می‌کنیم، مثلث، متساوی‌الاضلاع PMK، در مثلث مفروض ABC محاط شده باشد (شکل ۱۱۸). $|AC| = ۱۰$ و $|CP| = x$ می‌گیریم. دراین‌صورت، اگر K را به اندازهٔ ۶۰ درجه ودر جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت دور نقطهٔ P دوران دهیم، بـه نقطهٔ M می‌رسد. اکنون، اگر $|AA_1| = |AP|$ جدا کنیم، روشن است که مثلث PAA_1 متساوی‌الاضلاع است و در همان دوران، نقطهٔ A به‌نقطهٔ A_1 می‌رسد. بـه‌این ترتیب، در دوران به اندازهٔ ۶۰، درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت ودور نقطهٔ P، پاره خط



شکل ۱۱۸

راست AB به‌پاره خط راست A_1B_1 تبدیل می‌شود که از M می‌گذرد. درضمن، چون $[AB]$ با $[BC]$ زاویه‌ای برابر ۳۰ درجه می‌سازد، بعداز دوران به‌اندازهٔ ۶۰ درجه، دوران یافتهٔ آن، یعنی $[A_1B_1]$ با $[BC]$ زاویه‌ای برابر ۹۰ درجه خواهد ساخت:

$$(A_1B_1)||(AC)$$

اکنون به سادگی، و به‌کمك قضیهٔ تالس، به‌دست می‌آید:

$$|MC|=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)$$

از آن جا، درمثلث قائم‌الزاویهٔ MCP می‌توان نوشت:

$$|MP|^2=x^2+\frac{3}{4}(1-x)^2=\frac{1}{4}(7x^2-6x+3)$$

که به‌ازای $x=\frac{3}{7}$ به‌کمترین مقدار خود می‌رسد. بنابراین، برای این‌که ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط درمثلث ABC، کمترین مقدار را داشته باشد، باید داشته باشیم:

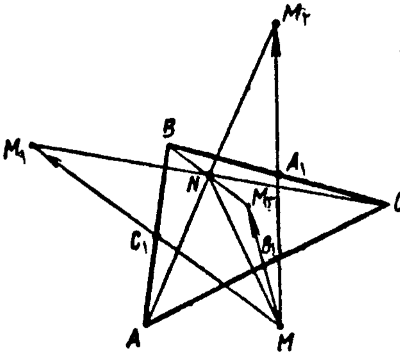
$$|CP|=\frac{3}{7}|CA|,\quad |PA|=\frac{4}{7}|CA|,\ |CP|:|PA|=3:4$$

۳۲۵. وسط ضلع‌های BC، AC و AB را، به ترتیب D، E و F می‌نامیم. روی مثلث EDC، متوازی‌الاضلاع $EDCK$ را می‌سازیم. به‌سادگی ثابت می‌شود که، چهار-ضلعی‌های $BDKE$ و $AFCK$ هم متوازی‌الاضلاع‌اند. بنابراین، ضلع‌های مثلث ADK، با میانه‌های مثلث ABC، مساوی وموازی‌اند، یعنی مثلث ADK همان مثلث $A_1B_1C_1$ است. H را نقطهٔ برخورد DK و EC می‌گیریم؛ AH میانهٔ مثلث ADK است، زیرا $|DH|=|HK|$. سپس

$$|EH|=|HC|=\frac{1}{2}|EC|=\frac{1}{2}|AE|$$

بنابراین، نقطهٔ E پاره خط راست AH را به نسبت ۲:۱ تقسیم می‌کند، یعنی نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث ADK است، بنابراین پاره خط‌های راست DE، KE و AE، هر کدام $\frac{2}{3}$ میانهٔ متناظر خود درمثلث ADK هستند، و مثلث $A_2B_2C_2$، ضلع‌هایی برابر $\frac{3}{2}|DE|$، $\frac{3}{2}|KE|$ و $\frac{3}{2}|AE|$ دارد. ولی $|DE|=\frac{|AB|}{2}$، $|EK|=\frac{|BC|}{2}$ و $|AE|=\frac{|AC|}{2}$، به‌این ترتیب، ضلع‌های مثلث $A_2B_2C_2$ برابرند با $\frac{3}{4}|AB|$، $\frac{3}{4}|BC|$ و

$\frac{3}{4}|AC|$. ثابت شد، مثلث $A_2B_2C_2$، بامثلث ABC متشابه‌است، باضریب تشابهی برابر $\frac{3}{4}$.



شکل ۱۱۹

۳۲۶. اثبات برداری حکم مسأله‌را می‌دهیم. M را مبداء بردارها می‌گیریم. اگر M_1 قرینهٔ M نسبت به نقطهٔ C_1 (وسط $[AB]$) باشد، چهارضلعی MAM_1B (که قطرهایش یکدیگررا نصف‌کرده‌اند) متوازی‌الاضلاع‌است و

$$\overrightarrow{M_1} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$$

(تنهـا، نقطهٔ انتهایـی بـردارها را نـوشته‌ایم: $\overrightarrow{M_1} = \overrightarrow{MM_1}$). به‌همین ترتیب، داریم:

$$\overrightarrow{M_2} = \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} \quad , \quad \overrightarrow{M_3} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{C}$$

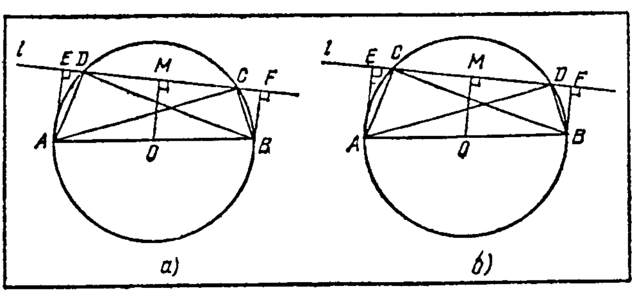
پاره خطهای راست CM_1، AM_2 و BM_3 را درنظرمی‌گیریم ونقطه‌های وسطاین پاره خطها را، به‌ترتیب N_1، N_2 و N_3 می‌نامیم. اگر از دستور برداری برای وسط پاره خطهای راست استفاده‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\overrightarrow{N_1} = \overrightarrow{N_2} = \overrightarrow{N_3} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C})$$

یعنی پـاره خطهای راست CM_1، AM_2 و BM_3، در نقطهٔ وسط خود، مشترک‌اند. (روی شکل ۱۱۹، این نقطه را N نامیده‌ایم)؛ یعنی‌سه خطراست موردنظر،ازیك نقطه می‌گذرند.

یادداشت. اگرنقطهٔ M، در صفحهٔ مثلث نباشد، بازهم بدون هیچ تفاوتی، ازهمین‌راه حل، برای اثبات متقارب بودن سه خط راست موردنظر می‌توان استفاده‌کرد.

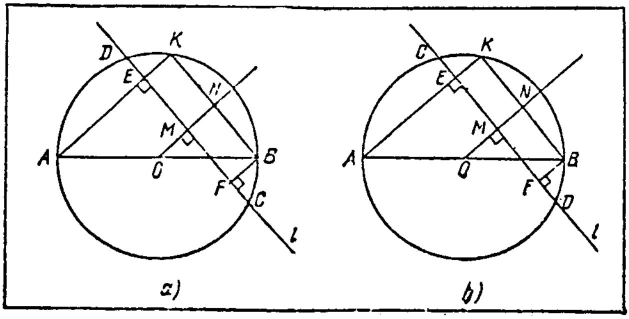
۳۲۷. درحالتی‌که خط راست l از مرکزدایـره بگذرد، درستی حکم روشن است. بنابراین فرض می‌کنیم $O \notin l$ و M را پای عمود وارد از O بر l می‌گیریم. دراین‌صورت،



شکل ۱۲۵

دوپاره خط راست DM و MC طول‌هایی برابر دارند. دوحالت پیش می‌آید.

a) پاره خط‌های راست AB و CD متقاطع نیستند (شکل ۱۲۰–a و b). چون در این‌حالت مثلث‌های ACD و BCD، دارای زاویه‌ای منفرجه درمجاورت قاعدهٔ CD هستند، بنابراین نقطه‌های E و F (تصویرهای A و B، برخط راست l) در بیرون خط راست CD قرارمی‌گیرند. توجه کنیم، طول پاره خط راست EC، یا برابر مجموع طول‌های دوپاره خط راست EM و MC است (شکل ۱۲۰–a)، ویا برابر تفاضل آن‌ها (شکل ۱۲۰–b)؛ به‌همین ترتیب، طول پاره خط راست DF، برابرمجموع یا تفاضل پاره خط‌های راست MF و DM است. چون خط‌های راست AE، OM و BF باهم موازی‌اند، بنابراین، از برابری طول‌های $|OA|$ و $|OB|$، برابری طول‌های $|EM|$ و $|MF|$، یعنی درستی حکم نتیجه می‌شود.



شکل ۱۲۱

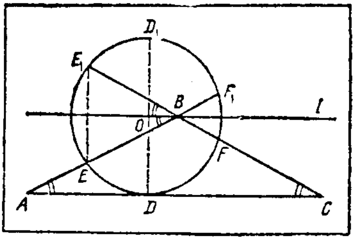
b) پاره‌خط‌های راست AB و CD متقاطع‌اند. دراین‌حالت، پاره خط راست EF درداخل پاره خط راست CD قرارمی‌گیرد (شکل ۱۲۱–a و b). دراین‌جا هم، کافی‌است، برابری طول‌های EM و MF را ثابت کنیم. AE را ازطرف E امتداد می‌دهیم تا محیط دایره را در K قطع کند و، سپس، K را به B وصل می‌کنیم. خط‌های راست KB و EF موازی‌اند، نقطهٔ برخورد (OM) و (KB) را N می‌نامیم. چون (AK) و (ON) موازی و پاره‌خط‌های راست AO و OB، طول‌هایی برابردارند، بنابراین $|KN|=|NB|$. به‌این ترتیب، از موازی‌بودن (KB) و (EF)، برابری $|EM|$ و $|MF|$ نتیجه می‌شود.

یادداشت. مسأله، راه حل برداری ساده‌ای دارد. وسط پاره خط راست CD را M می‌نامیم (که در حالت خاص، ممکن است داشته باشیم: $M=O$). در این صورت $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{MD}$. بردارهای $\overrightarrow{BO}$ و $\overrightarrow{OA}$ برابرند، بنابراین تصویرهای آن‌ها بر (CD) برابر می‌شوند: $\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{ME}$. درضمن

$$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{FD}$$

یعنی $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{FD}$.

۳۲۸. شعاع هر دایره‌ای که، مرکز آن، برخط راست l واقع و بر (AC) مماس باشد، برابر با طول ارتفاعی از مثلث است که از رأس B می‌گذرد. برای مشخص شدن وضع، فرض می‌کنیم، نقطهٔ O مرکز دایره، روی خط راست l در سمت چپ نقطهٔ B واقع باشد؛ در ضمن، قرینه‌های نقطه‌های D و E و F رانسبت به خط راست l به‌ترتیب، D_1 و E_1 و F_1 می‌نامیم (شکل ۱۲۲). دراین صورت، کمان‌های EDF و $E_1D_1F_1$ و، همچنین زاویه‌های E_1BO و OBE برابرند و چون زاویهٔ OBE با زاویه BAC برابر است، بنابراین



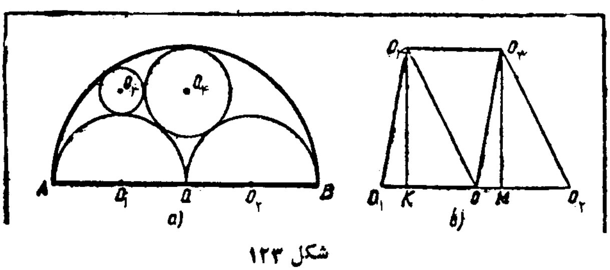
شکل ۱۲۲

$$\widehat{E_1BO}=\widehat{BAC}$$

یعنی نقطه‌های F و B و E_1 روی یك خط راست‌اند. به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد، نقطه‌های E و B و F_1 هم، روی یك خط راست قرار دارند. به این ترتیب، مقدار زاویهٔ EBF برابراست با نصف مجموع اندازه‌های دوکمان EDF و $E_1D_1F_1$، یعنی برابر است با اندازهٔ کمان EDF (اندازه‌های دوکمان $E_1D_1F_1$ و EDF، یکی است). ولی اندازهٔ زاویهٔ EBF، به جای نقطهٔ O روی خط راست l بستگی ندارد (این زاویه برابر است با زاویهٔ B ازمثلث ABC).

۳۲۹. ثابت می‌کنیم، درچهارضلعی $O_1OO_4O_3$، ضلع‌های روبه‌رو، دوبه‌دو برابرند (شکل ۱۲۳–a). شعاع هریك از دایره‌های به مرکز O_1 و O_2 را r وشعاع دایره‌های به مرکزهای O_3 و O_4 را، به‌ترتیب، x و y می‌گیریم. باتوجه به شرط مسأله (مماس بودن دایره‌ها) داریم:

$$|O_1O_3|=r+x,\quad |OO_3|=2r-x,$$
$$|O_2O_4|=r+y,\quad |OO_4|=2r-y,\quad |O_3O_4|=x+y$$



شکل ۱۲۳

برای متوازی‌الاضلاع بودن $O_1OO_4O_3$ باید ثابت کنیم:

$$|O_3O_4|=|O_1O| \text{ و } |O_1O_3|=|OO_4|$$

یعنی باید ثابت کنیم:

$$x+y=r \text{ و } r+x=2r-y$$

به‌این ترتیب، باید ثابت شود $x+y=r$.

از O_3 و O_4، عمودهای O_3K و O_4M را بر (O_1O_2) فرود می‌آوریم (شکل ۱۲۳-b)، بنا به‌قضیهٔ کسینوس‌ها درمثلث OO_1O_3 داریم:

$$|O_1O_3|^2=|OO_1|^2+|OO_3|^2-2|OO_1|\cdot|OO_3|\cdot\cos\widehat{O_1OO_3}$$

که با قراردادن مقدارهای آن‌ها، بعداز عمل‌های ساده‌ای به‌دست می‌آید:

$$\cos\widehat{O_1OO_3}=\frac{2r-3x}{2r-x}$$

چون $\cos\widehat{O_1OO_3}=\frac{|OK|}{|OO_3|}$ و، درضمن $|OO_3|=2r-x$، پس

$$|OK|=2r-3x$$

اکنون درمثلث O_3OK، با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث می‌توان به دست آورد:

$$|O_3K|=\sqrt{8x(r-x)}$$

به‌همین ترتیب $|OM|=2r-3y$ و $|O_4M|=\sqrt{8y(r-y)}$.

اگر از نقطهٔ O_3، خط راست O_3L را موازی خط راست KM رسم کنیم (L روی خط راست O_4M است؛ روی شکل ۱۲۳، این نقطه‌وجود ندارد)، آن‌وقت، مثلث قائم‌الزاویهٔ O_3O_4L برای ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمه O_3LO_4 داریم:

$$|O_3L|=|OK|+|OM|=4r-3(x+y);$$

$$|O_4L|=||O_3K|-|O_4M||=\left|\sqrt{8x(r-x)}-\sqrt{(8y(r-y)}\right|$$

و برای وتر این مثلث می‌دانیم $|O_3O_4|=x+y$. بنابراین، باتوجه به قضیهٔ فیثاغورث داریم:

$$(x+y)^2=[4r-3(x+y)]^2+\left(\sqrt{8x(r-x)}-\sqrt{8y(r-y)}\right)^2$$

که بعد از ساده کردن، ابتدا به برابری

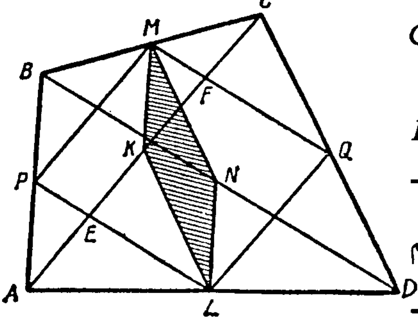
$$(r-x)(r-y)=\sqrt{(r-x)(r-y)xy}$$

وسپس به برابری

$$\sqrt{(r-x)(r-y)}=\sqrt{xy}$$

وسرانجام به برابری $x+y=r$ می‌رسیم.

۰۳۳۰. K، L، M و N را، به‌ترتیب، وسط پاره‌خطهای راست AC، AD، BC و BD؛ و P و Q را وسط پاره خطهای راست AB و CD می‌گیریم (شکل ۱۲۴).



شکل ۱۲۴

چهارضلعی‌های $PMQL$ و $KMNL$ متوازی‌الاضلاع‌اند؛ درضمن مساحت متوازی‌ـ اضلاع $PMQL$ برابر با $\frac{1}{2}S$ است. ثابت می‌کنیم متوازی‌الاضلاع $KMNL$ در درون متوازی‌ـ الاضلاع $PMQL$ قرار دارد که، در نتیجه، مساحت آن، از $\frac{1}{2}S$ کمتر می‌شود.

E و F را، نقطه‌های برخورد پاره‌خطهای راست PL و MQ با قطر AC می‌گیریم. ثابت می‌کنیم، نقطهٔ K، بین نقطه‌های E و F واقع است. اگر مثلاً، نقطهٔ K روی پاره‌خط راست AE باشد، آن‌وقت باید داشته باشیم: $|AK|\leqslant|AE|$. دراین‌صورت، چون

$$|EF|=|PM|=|AK|=\frac{1}{2}|AC|$$

بنابراین

$$|AC|=2|AK|=|AK|+|EF|\leqslant|AE|+|EF|<|AC|$$

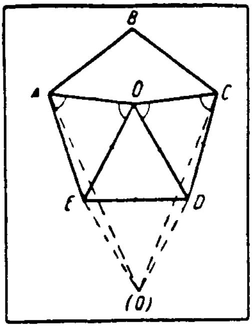
که ممکن نیست. به‌همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد، نقطهٔ K، نمی‌تواند روی پاره خط راست FC باشد. بـه‌این ترتیب، نقطهٔ K بین نقطه‌های E و F، یعنی در درون متوازی‌الاضلاع $PMQL$ واقع است. باروشی مشابه ثابت می‌شود، نقطهٔ N هم، در درون متوازی‌الاضلاع $PMQL$ قراردارد. از آن‌جا، درستی حکم مسأله، ثابت می‌شود.

۰۳۳۱. اگر نقطهٔ O در درون پنج ضلعی $ABCDE$ باشد (شکل ۱۲۵)، آن‌وقت

$$\widehat{AEO}=\widehat{CDO}=108^{\circ}-60^{\circ}=48^{\circ}$$

بنابراین، ازمثلث‌های متساوی‌الساقین AEO و CDO به‌دست می‌آید:

$$\widehat{AOE}=\widehat{COD}=۶۶^\circ;$$



شکل ۱۲۵

$$\widehat{AOC}=۳۶۰^\circ-۶۰^\circ-۲\times ۶۶^\circ=۱۶۸^\circ$$

به‌همین ترتیب، اگر نقطهٔ O در بیرون پنج‌ضلعی $ABCDE$ باشد، آن وقت

$$\widehat{AEO}=\widehat{CDO}=۱۰۸^\circ+۶۰^\circ=۱۶۸^\circ;$$

$$\widehat{AOE}=\widehat{CDO}=۶^\circ;$$

$$\widehat{AOC}=۶۰^\circ-۲\times ۶^\circ=۴۸^\circ$$

۳۳۲. قرار می‌گذاریم: $x=|MC|=|BK|$، $kx=|BM|=|AK|$، $y=|AP|$، $|CP|=ky$. اگر از قضیهٔ کسینوس‌ها درمثلث ABC، یکبار برای زاویهٔ ABC وبار دیگر برای زاویهٔ BAC استفاده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\cos\widehat{ABC}=\frac{۲x^۲-y^۲}{۲x^۲} \text{ و } \cos\widehat{BAC}=\frac{y}{۲x} \qquad (۱)$$

(شکل را رسم کنید ومحاسبه‌ها را انجام دهید!).

اکنون، اگر از قضیهٔ کسینوس‌ها، درمثلث‌های KBM و PMC استفاده کنیم و به‌جای $\cos\widehat{ABC}$ و $\cos\widehat{BAC}$، مقدارشان را از (۱) قراردهیم $(\hat{A}=\hat{C})$ به‌این دومعادله می‌رسیم:

$$۱=x^۲+k^۲x^۲-k(۲x^۲-y^۲) \text{ و } ۱=x^۲+k^۲y^۲-ky^۲ \qquad (۲)$$

اگرمعادلهٔ دوم را ازمعادلهٔ اول کم کنیم، به‌این معادله می‌رسیم:

$$x^۲(k^۲-۲k)=y^۲(k^۲-۲k)$$

بنابراین یا $y=x$ ویا $k^۲-۲k=۰$.

درحالت $x=y$، مثلث ABC، متساوی‌الاضلاع می‌شود. محیط این مثلث از ۳ بیشتر است و هرچه نقطه‌های K و M و P به رأس‌های مثلث نزدیکتر باشند، این محیط بـه ۳ نزدیکترمی‌شود. دراین‌حالت، حداکثر مقدار محیط مثلث ABC برابراست با ۶، و وقتی به‌این مقدار می‌رسدکه، نقطه‌های K و M و P، در وسط ضلع‌های مثلث باشند.

درحالت $k^۲-۲k=۰$ داریم $k=۲$ ($k=۰$ قابل قبول نیست) وباتوجه به یکی ازمعادله‌های (۲) به دست می‌آید $y^۲=\frac{۱-x^۲}{۲}$ وضلع‌های مثلث KBM، برابر x و $۲x$ و ۱ می‌شوند، یعنی باید داشته باشیم:

$$1-x<2x<1+x \Longrightarrow \frac{1}{3}<x<1$$

ومحیط مثلث ABC چنین است:

$$6x+3y=\left(2x+\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}\right)$$

به‌این ترتیب، مسأله در این‌حالت، منجر به‌این می‌شود که حداکثر وحداقل تابع

$$f(x)=3\left(2x+\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}\right),\ \left(\frac{1}{3}<x<1\right)$$

را به دست آوریم. اگر تمامی بازهٔ $\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$ را در نظر بگیریم، تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ به حداکثر مقدار خود برابر $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ و در نقطهٔ $x=\frac{1}{3}$ به حداقل مقدارخودبرابر ۴ می‌رسد.

اگر دوحالت را باهم درنظر بگیریم، بـه‌این نتیجه می‌رسیم که مقدار P (محیط مثلث ABC)، درنابرابری‌های زیر صدق می‌کند:

$$3<P\leqslant\frac{9\sqrt{2}}{2}$$

۳۳۳. می‌دانیم درهر چهارضلعی محیطی، یعنی چهارضلعی که ضلع‌های آن بردایره‌ای مماس باشند، مجموع طول‌های دوضلع روبه‌رو بامجموع طول‌های دوضلع روبه روی دیگر برابـراست. درمورد چهارضلعی‌های محیطی، دو شرط لازم وکافی دیگرهم وجود داردکه کمترمعروف‌اند. آن‌ها را اثابت می‌کنیم.

فرض کنید، درچهارضلعی $KLMN$، امتدادضلع‌های روبه‌رو، یکدیگر رادرنقطه‌های P و Q قطع کرده باشند (شکل ۱۲۶-a). دراین‌صورت درکنارشرط

$$|KL|+|MN|=|LM|+|NK|$$

شرط لازم وکافی، برای محیطی‌بودن چهارضلعی $KLMN$، این است که داشته باشیم:

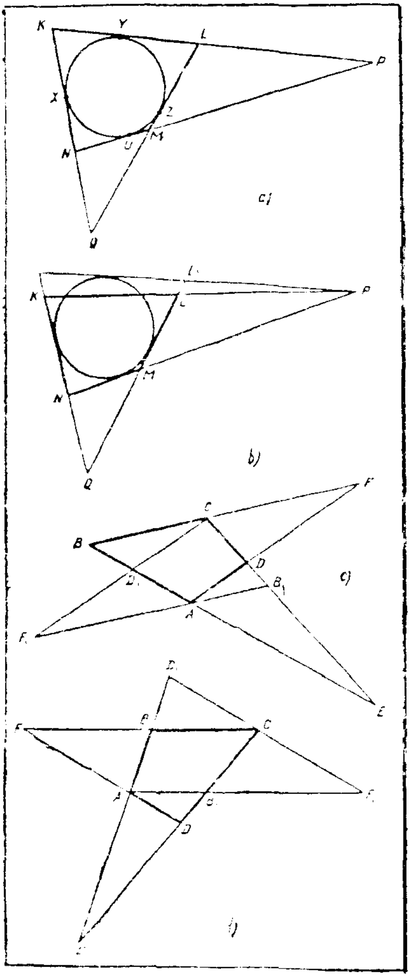
$$|QM|+|KP|=|MP|+|QK| \qquad (1)$$

$$|QN|+|NP|=|QL|+|LP| \qquad (2)$$

اثبات این شرط‌ها، کاملاً شبیه اثبات برابری مجموع طول‌های دوضلع روبه رو، بامجموع طول‌های دوضلع روبه‌روی دیگراست. به‌عنوان نمونه، اثبات (۲) را می‌آوریم.

شرط لازم است. $KLMN$ را یك چهارضلعی محیطی می‌گیریم و نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی باضلع‌های آن‌را، X، Y، Z و U می‌نامیم. دراین‌صورت داریم:

$$|QN|+|NP|=|QX|-|XN|+|NU|+$$
$$+|UP|=|QZ|-|NU|+|NU|+$$
$$+|YP|=|QZ|+|YL|+|LP|=|QZ|+$$
$$+|ZL|+|LP|=|QL|+|LP|$$



شکل ۱۲۶

شرط کافی است. فرض‌کنید، برابری (۲) برقرار باشد. دایره‌ای رسم می‌کنیم که برسه ضلع KN، NM و ML مماس‌باشد (شکل ۱۲۶–b؛ مرکزاین دایره، در محل برخورد نیمسازهای دو زاویهٔ‌به‌رأس‌های NوM ازچهارضلعی$KLMN$ قرار دارد). فرض‌کنید، این دایره، برضلع KL مماس نباشد. اگر (KL) و (NM) در P به‌هم رسیده باشند، از P مماسی (غیر از (PM)) بر دایره رسم می‌کنیم ونقطهٔ برخورد آن را بــاخط راست QL، L_1 می‌نــامیم. اگرشرط لازم را در نظر بگیریم، باید داشته باشیم:

$$|QL_1|+|L_1P|=|QN|+$$
$$+|Np|=|QL|+|LP|$$

از آن‌جا

$$|QL_1|-|QL|+|L_1P|=|LP|$$

ویا $|LL_1|+|L_1P|=|LP|$؛ واین، به‌معنای آن است که، دونقطهٔ L و L_1، برهم‌منطبق‌اند.

به مسألهٔ خودمان‌برمی‌گردیم. فرض‌می‌کنیم درچهارضلعی $ABCD$، ضلع‌های‌موازی وجود نداشته‌باشد. محل برخوردخطهای راست AB و CD را E ومحل‌برخوردخطهای راست BC و AD را F می‌نامیم (شکل ۱۲۶–c). اگر نقطهٔ برخورد خطهای راست AB_1 و CD_1 را F_1 بنامیم، چون $ABCD$، یك چهارضلعی محیطی است، بنابراین

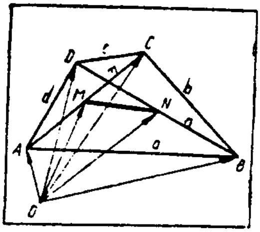
$$|EC|+|CF|=|EA|+|AF|=|EA|+|F_1C|$$

(چهارضلعی $AFCF_1$ متوازی‌الاضلاع است)؛ یعنی AB_1CD_1 هم، یك چهارضلعی محیطی است.

ممکن است نقطه‌های E و F به‌وضع دیگری باشند (شکل ۱۲۶–d). دراین‌حالت، تنها استفادهٔ از رابطه‌ها، ردیف خود را عوض می‌کنند.

برای تکمیل اثبات، باید حالتی را هم، که $ABCD$ یك ذوزنقه است، مورد بررسی قراردهیم، که بدون دشواری انجام می‌شود.

۳۳۴. چهارضلعی $ABCD$ را درنظر می‌گیریم (شکل ۱۲۷) وفرض می‌کنیم:



شکل ۱۲۷

$$|AB|=a،\ |BC|=b،\ |CD|=c،\ |DA|=d$$

$$|AC|=m،\ |BD|=n$$

M و N را وسط قطرهای AC و BD، و O را نقطهٔ دلخواهی از فضا می‌گیریم. دراین‌صورت داریم:

$$2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\ ;\ 2\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$$

از آن‌جا

$$2\overrightarrow{MN}=2(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM})=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$$

بنابراین

$$4|MN|^2=4l^2=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})^2=$$

$$=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})^2+(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})^2+2(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})=$$

$$=a^2+c^2+2(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC})=$$

$$=a^2+b^2+c^2+d^2-m^2-n^2$$

(دراین‌جا، ازاین برابری‌برداری استفاده‌کرده‌ایم که، برای هرسه نقطهٔ P و Q و R، همیشه داریم: $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=\frac{|PQ|^2+|PR^2|-|QR|^2}{2}$.) به‌این ترتیب

$$l=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2-m^2-n^2}$$

روشن است که درهر چهارضلعی $ABCD$ داریم:

$$a^2+b^2+c^2+d^2-m^2-n^2 \geqslant 0$$

درضمن، علامت برابری، تنها برای متوازی‌الاضلاع برقرار است، یعنی وقتی‌که M و N برهم منطبق باشند. دراین‌حالت داریم:

$$a^2+b^2+c^2+d^2=m^2+n^2$$

یادداشت. اگر به‌جای‌نقطهٔ دلخواه O، نقطهٔ D را درنظرمی‌گرفتیم، حل‌مسأله‌کوتاه‌تر می‌شد، زیـرا دراین‌حالت $\overrightarrow{OD}=0$ و

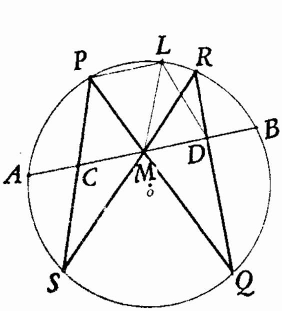
$$2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}$$

از راه حل ما، روشن می‌شودکه، لزومی‌ندارد چهارضلعی‌مفروض، دریك صفحه‌واقع باشد. درضمن، یکی ازمعادل‌های فضائی این مسأله، چنین است:

اگرطول همهٔ یال‌های یك چهار وجهی معلوم باشد، فاصلهٔ بین نقطه‌های وسط دو یال روبه‌رو را پیداکنید.

۳۳۵. درهندسهٔ مقدماتی، گاه به‌مسأله‌هایی برمی‌خوریم که، با وجود سادگی ظاهری خود، همچون دژی مقاوم دربرابر ریاضی‌دان می‌ایستند وبـاوجود تلاش‌های بسیار، تسلیم نمی‌شوند. یکی‌ازاین‌گونه مسأله‌هارادرمسألهٔ ۳۰۷ آوردیم وراه حلی برای‌آن ارائه‌دادیم. اگرچه امروز راه حل‌های فراوانی برای مسألهٔ ۳۰۷ پیدا شده است، ولی درطول تـاریخ ریاضیات، توانسته بود دربرابر بسیاری ازعلاقه‌مندان بـه ریاضیات سرسختی نشان دهد و تسلیم نشود.

مسألهٔ ۳۳۵،که به مسألهٔ پروانه معروف شده‌است،نمونهٔ دیگری ازاین‌گونه مسأله‌ها ومسألهٔ ۳۴۷ نمونهٔ سومی ازآن‌هاست. تلاش برای پیداکردن راه حل‌های تازه‌ای بـرای این مسأله‌ها، اگرچه از نظرماهیت ریـاضیات امروزی نمی‌تواندخیلی‌جالب باشد،ولی‌ازنظر کسی که‌به‌آن‌مشغول می‌شود، می‌تواندبسیار آموزنده باشد؛ به‌ویژه اگربتواند به‌نحوی مسأله را تعمیم دهد ویا روش‌های تازه‌ای برای حل‌آن بیابد.



شکل ۱۲۸

دربارهٔ مسألهٔ پروانه، راه حل‌های فراوانی وجود داردکه بـرخی ازآن‌ها درمجلهٔ «آشنائی با ریاضیات» (جلد بیستم، شهریـور ۱۳۶۷، صفحه‌های ۱۸۹تا۲۱۲) آمده است. درآن‌جا، مسألهٔ پروانه را، حتی دردوجهت

تعمیم داده است: وقتی‌که نقطهٔ M، دروسط وتر AB نباشد؛ و وقتی‌که به جای دایره، یکی دیگـر از مقطع‌های مخروطی را (مثل بیضی) درنظر بگیریم. دراین جا، یکی از ساده‌ترین راه حل‌ها را می‌آوریم.

وتر PL راموازی وتر AB رسم می‌کنیم. مثلث MPL متساوی‌الساقین است(چرا؟) و $|MP|=|ML|$ و $\widehat{MPL}=\widehat{MLP}$. ازطرف دیگر، باتوجه به موازی بودن (AB) و (PL)

$$\widehat{MPL}=\widehat{PMC} \text{ و } \widehat{PLM}=\widehat{LMD}$$

یعنی $\widehat{PMC}=\widehat{LMD}$.

چهارضلعی $MLRD$ محاطی است، زیرا

$$\widehat{LMD}+\widehat{LRD}=۱۸۰^\circ$$

(درواقع $\widehat{LMD}$ با $\widehat{LPM}$ برابراست؛ در ضمن مجموع دوزاویهٔ LPQ و LRQ برابر با اندازهٔ نصف محیط دایره، یعنی ۱۸۰ درجه است.)

ازمحاطی بـودن چهارضلعی $MLRD$، برابری دو زاویهٔ MLD و MRD نتیجه می‌شود، وچون $\widehat{MRD}=\widehat{MPC}$، پس

$$\widehat{MLD}=\widehat{MPC}$$

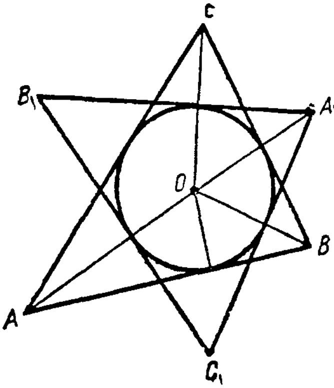
به‌این ترتیب، دومثلث CPM و MLD بـاهم برابرمی‌شوند (دو زاویه وضلع بین آن‌ها ازیکی، با دوزاویه وضلع بین آن‌ها ازدیگری باهم برابرند)؛ یعنی

$$|CM|=|MD|$$

۳۳۶. اگر نقطهٔ برخورد $[OA]$ بادایره را M ونقطهٔ برخورد $[OB]$ بادایره را N بگیریم (M و N را روی شکل ۱۲۹، ننوشته‌ایم). چهـارضلعی $MONA_۱$ محاطی است، زیرا دوزاویهٔ M و N درآن قائمه‌اند، بنابراین $\widehat{COB}+\hat{A}_۱=۱۸۰^\circ$. ازطرف دیگر،در مثلث$COB$داریم: $\widehat{COB}+\frac{\hat{B}+\hat{C}}{۲}=۱۸۰^\circ$ (منظوراز $\hat{B}$ و $\hat{C}$، زاویه‌های مثلث ABC است)؛ بنابراین $\hat{A}_۱=\frac{\hat{B}+\hat{C}}{۲}$ وشبیه آن

$$\hat{B}_۱=\frac{\hat{A}+\hat{C}}{۲}\ ,\ \hat{C}_۱=\frac{\hat{A}+\hat{B}}{۲}$$

اکنون، اگر محیط مثلث ABC را P و محیط مثلث $A_۱B_۱C_۱$ را $P_۱$ بنامیم، داریم (r، شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC است):



شکل ۱۲۹

$$P=r\left(cotg\frac{\hat{A}}{۲}+cotg\frac{\hat{B}}{۲}+cotg\frac{\hat{C}}{۲}\right)\ ;$$

$$P_۱=r\left(cotg\frac{\hat{B}+\hat{C}}{۴}+cotg\frac{\hat{A}+\hat{C}}{۴}+\right.$$

$$\left.+cotg\frac{\hat{A}+\hat{B}}{۴}\right)$$

به سادگی ثابت می‌شود که، به شرط $\alpha+\beta+\gamma=۹۰^\circ$، داریم:

$$cotg\alpha+cotg\beta+cotg\gamma=cotg\alpha\cdot cotg\beta\cdot cotg\gamma$$

بنابراین

$$cotg\frac{\hat{A}}{۲}+cotg\frac{\hat{B}}{۲}+cotg\frac{\hat{C}}{۲}=cotg\frac{\hat{A}}{۲}\cdot cotg\frac{\hat{B}}{۲}\cdot cotg\frac{\hat{C}}{۲};$$

$$cotg\frac{\hat{B}+\hat{C}}{۴}+cotg\frac{\hat{C}+\hat{A}}{۴}+cotg\frac{\hat{A}+\hat{B}}{۴}=$$

$$=cotg\left(۴۵^\circ-\frac{\hat{A}}{۴}\right)+cotg\left(۴۵^\circ-\frac{\hat{B}}{۴}\right)+cotg\left(۴۵^\circ-\frac{\hat{C}}{۴}\right)=$$

$$=cotg\left(۴۵^\circ-\frac{\hat{A}}{۴}\right)\cdot cotg\left(۴۵^\circ-\frac{\hat{B}}{۴}\right)\cdot cotg\left(۴۵^\circ-\frac{\hat{C}}{۴}\right)$$

اکنون نسبت محیط‌های دو مثلث را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{P_۱}{P}=\frac{cotg\left(۴۵^\circ-\frac{\hat{A}}{۴}\right)\cdot cotg\left(۴۵^\circ-\frac{\hat{B}}{۴}\right)\cdot cotg\left(۴۵^\circ-\frac{\hat{C}}{۴}\right)}{cotg\ \frac{\hat{A}}{۲}\cdot cotg\ \frac{\hat{B}}{۲}\cdot cotg\ \frac{\hat{C}}{۲}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\hat{A}}{۲}\sin\frac{\hat{B}}{۲}\sin\frac{\hat{C}}{۲}}{\left(۱-\sin\frac{\hat{A}}{۲}\right)\left(۱-\sin\frac{\hat{B}}{۲}\right)\left(۱-\sin\frac{\hat{C}}{۴}\right)}$$

(ازبرابری

$$\cot g\left(۴۵^\circ-\frac{\hat{A}}{۴}\right)=\frac{۱+tg\frac{\hat{A}}{۴}}{۱-tg\frac{\hat{A}}{۴}}=\frac{\cos\frac{\hat{A}}{۴}+\sin\frac{\hat{A}}{۴}}{\cos\frac{\hat{A}}{۴}-\sin\frac{\hat{A}}{۴}}=$$

$$=\frac{\cos^۲\frac{\hat{A}}{۴}-\sin^۲\frac{\hat{A}}{۴}}{\left(\cos\frac{\hat{A}}{۴}-\sin\frac{\hat{A}}{۴}\right)^۲}=\frac{\cos\frac{\hat{A}}{۲}}{۱-\sin\frac{\hat{A}}{۲}}$$

وبرابری‌های نظیر آن استفاده کرده‌ایم.)

که اگر از نابرابری معلوم

$$\sin\frac{\hat{A}}{۲}\sin\frac{\hat{B}}{۲}\sin\frac{\hat{C}}{۲}\leqslant\frac{۱}{۸}$$

که برای زاویه‌های هرمثلث برقرار است، استفاده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{P_۱}{P}\leqslant\frac{۱}{۸\left(۱-\sin\frac{\hat{A}}{۲}\right)\left(۱-\sin\frac{\hat{B}}{۲}\right)\left(۱-\sin\frac{\hat{C}}{۲}\right)}$$

ازطرف دیگر

$$۱-\sin\frac{\hat{A}}{۲}=۱-\cos\left(۹۰^\circ-\frac{\hat{A}}{۲}\right)=۲\sin^۲\left(۴۵^\circ-\frac{\hat{A}}{۴}\right);$$

$$۱-\sin\frac{\hat{B}}{۲}=۲\sin^۲\left(۴۵^\circ-\frac{\hat{B}}{۴}\right);\ ۱-\sin\frac{\hat{C}}{۲}=۲\sin^۲\left(۴۵^\circ-\frac{\hat{C}}{۴}\right)$$

وبنابراین

$$\left(1-\sin\frac{\hat{A}}{2}\right)\left(1-\sin\frac{\hat{B}}{2}\right)\left(1-\sin\frac{\hat{C}}{2}\right)=$$

$$=8\sin^2\left(45^\circ-\frac{\hat{A}}{4}\right)\sin^2\left(45^\circ-\frac{\hat{B}}{4}\right)\sin^2\left(45^\circ-\frac{\hat{C}}{4}\right)\leqslant$$

$$\leqslant 8\times\left(\frac{1}{8}\right)^2=\frac{1}{8}$$

زیرا $\left(45^\circ-\frac{\hat{A}}{4}\right)+\left(45^\circ-\frac{\hat{B}}{4}\right)+\left(45^\circ-\frac{\hat{C}}{4}\right)=90^\circ$.

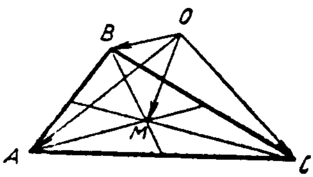
به این ترتیب $1\leqslant\frac{P_1}{P}$ و $P\leqslant P_1$. علامت برابری، تنها وقتی پیش می‌آید که داشته باشیم:

$$\sin\left(45^\circ-\frac{\hat{A}}{4}\right)=\sin\left(45^\circ-\frac{\hat{B}}{4}\right)=\sin\left(45^\circ-\frac{\hat{C}}{4}\right)$$

یعنی وقتی که $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}$. وقتی ABC مثلثی متساوی‌الاضلاع باشد، محیط‌های دو مثلث ABC و $A_1B_1C_1$ باهم برابر می‌شوند.

۳۳۷. فرض می‌کنیم $|BC|=a$، $|AC|=b$، $|AB|=c$، $|OA|=a_1$، $|OB|=b_1$، $|OC|=c_1$ و $|OM|=d$ (شکل ۱۳۰). می‌دانیم:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\qquad(*)$$



شکل ۱۳۰

[درواقع، از برابری برداری $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MC}$ به‌دست می‌آید: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$. ازطرف دیگرداریم:

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM};\ \ \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM};\ \ \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}$$

که از مجموع آن‌ها، به‌برابری $(*)$ می‌رسیم]. به‌این ترتیب

$$d^2=\frac{1}{9}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})^2=\frac{1}{9}(a_1^2+b_1^2+c_1^2+$$

$$+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA})$$

وچون

$$2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2-(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})^2=a_1^2+b_1^2-c^2;$$

$$2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=b_1^2+c_1^2-a^2;\ 2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=c_1^2+a_1^2-b^2$$

بنابراین، بعد از جای‌گزینی‌وتبدیل‌های ساده

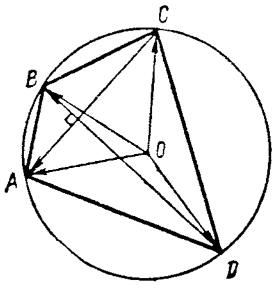
$$d^2=\frac{1}{3}(a_1^2+b_1^2+c_1^2)-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2) \qquad (1)$$

درضمن، از برابری (۱) نتیجه می‌شود:

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2\geqslant\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

یادداشت. اگر دوباره به‌راه حل‌مسأله مراجعه‌کنیم، متوجه می‌شویم که، ضمن آن، هیچ استفاده‌ای ازاین‌که، نقطهٔ O درصفحهٔ مثلث قرار دارد، نکردیم. برابری (۱) (که به‌رابطهٔ لایب‌نیتس مشهور است)، برای هر نقطهٔ دلخواه O ـ خواه روی صفحهٔ مثلث ABC ویا در بیرون این صفحه باشد، درست است.

۳۳۸. مجموع $|AB|^2+|CD|^2$ را محاسبه می‌کنیم (شکل ۱۳۱):



شکل ۱۳۱

$$|AB|^2+|CD|^2=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})^2+$$
$$+(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})^2=4R^2-2(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD})$$

بنابراین، باتوجه به شرط مسأله، باید داشته باشیم:

$$OA\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=0 \qquad (1)$$

یعنی

$$\cos(\widehat{AOB})+\cos(\widehat{COD})=0\Longrightarrow\widehat{AOB}+\widehat{COD}=180^\circ$$

و این به معنای آن است که $\widehat{BOC}+\widehat{DOA}=180^\circ$ وبنابراین

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OA}=0 \qquad (2)$$

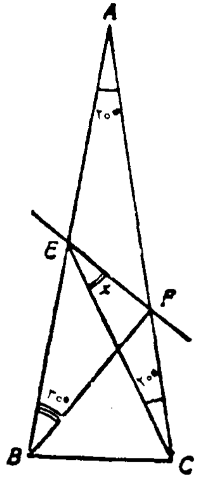
اگر برابری (۲) را ازبرابری (۱) کم‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})-\overrightarrow{OD}(\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{OC})=0\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD})=0\Longrightarrow\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB}=0$$

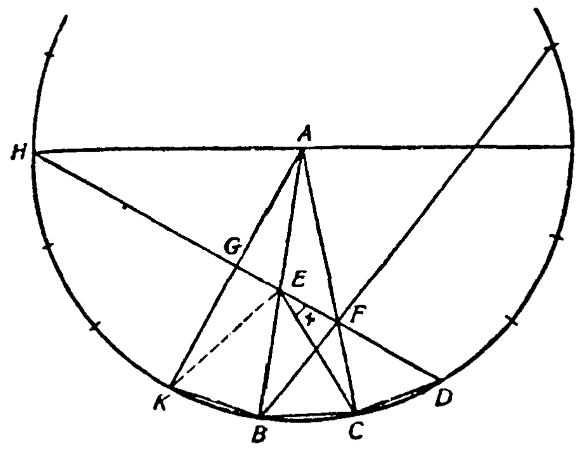
یعنی قطرهای CA و DB برهم عمودند.

۳۳۹. این مسأله هم، ازهمان‌گونه مسأله‌هایی است که ضمن حل مسألهٔ **۳۳۵**،از آن‌ها یادکردیم. برای این مسأله، راه حل‌های زیادی وجود دارد، ولی بیشتر این راه حل‌ها «هنرمندانه» است و به تکمیل شکل و رسم خط‌های راست واحیاناً دایره‌های اضافی نیازدارد؛ درحالی که صورت ظاهری مسأله (شکل ۱۳۲ راببینید) چنان است که تصور می‌رود، باهمین شکل موجود و اندکی محاسبه، بتوان مجهول رابه دست آورد. ولی هر ترکیبی از زاویه‌ها را تشکیل دهیم، سرانجام به معادله‌ای با دومجهول می‌رسیم. دوراه حل از این مسأله را دراین جا می آوریم.



شکل ۱۳۲

راه حل اول. زاویهٔ ۲۰ درجه، یك هیجدهم زاویهٔ کامل ۳۶۰ درجه است، یعنی اگرنیم دایره‌ای به مرکز A وبه شعاع $|AB|$ رسم‌کنیم، قاعدهٔ BC از مثلث ABC، وتر کمان $\frac{1}{18}$ دایره، یعنی ضلع ۱۸ ضلعی منتظم محاط در دایره می‌شود. خط راست BF را طوری رسم می‌کنیم‌که زاویهٔ ABF برابر ۳۰ درجه باشد. زاویهٔ FBC (که درشکل ۱۳۳، زاویه‌ای محاطی است)، برابر $۸۰^\circ - ۳۰^\circ$، یعنی ۵۰ درجه می‌شود.



شکل ۱۳۳

اگر کمان CD را به دنبال کمان BC و برابر با آن جدا کنیم و از نقطهٔ D، خط راست DF را بگذرانیم، دومثلث BCF و FCD برابرند، زیرا ضلع CF در دو مثلث مشترك است، $|BC|=|CD|$ و، با توجه به‌این که F روی شعاع دایره است $\widehat{BCF}=\widehat{FCD}$. بنا بر این

$$\widehat{CDF}=\widehat{FBC}=50^\circ$$

$\widehat{CDF}$ زاویه‌ای محاطی وروبه‌رو به‌کمان ۱۰۰ درجه است، یعنی امتداد (DF) ازنقطهٔ H (انتهای قطر) می‌گذرد وضلع AB را درنقطه‌ای مثل E قطع می‌کند (هنوز نمی‌دانیم، این همان نقطهٔ E ازشکل ۱۳۲ است؛ زیرا اندازهٔ زاویهٔ ECF برای ما معلوم نیست).

$\widehat{AHD}$ زاویه‌ای محاطی وروبه‌رو به‌کمان ۶۰ درجه است، بنابراین خود این زاویه برابر ۳۰ درجه می‌شود وچون زاویهٔ HAK، زاویه‌ای مرکزی و روبه‌روی به‌کمان ۶۰ درجه است، بنابراین $\widehat{HGA}=90^\circ$.

درمثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه رو به زاویهٔ ۳۰ درجه، طولی برابرنصف طول وتر دارد. درمثلث HGA، وترهمان شعاع دایره است، یعنی $|GA|=|GK|$.

(HD) عمود منصف پاره خط راست AK است، بنابراین $|EA|=|KE|$.

دو مثلث KBE و EBC برابرند ($|KB|=|BC|$، BE ضلع مشترك و $\widehat{KBE}=\widehat{EBC}$). بنا بر این

$$|EC|=|KE|=|EA|$$

مثلث CAE متساوی‌الساقین است و $\widehat{ECA}=20^\circ$ واین ثابت‌می‌کند، نقطهٔ E روی ضلع AB، همان نقطهٔ E درشکل ۱۳۲ است وزاویهٔ FEC همان زاویهٔ مجهول x.

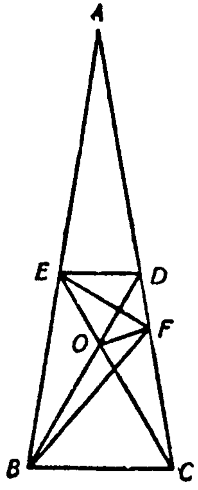
ازمثلث GEA معلوم‌می‌شودکه زاویهٔ GEA وهم زاویهٔ روبه‌رو به‌آن DEB، برابر ۷۰ درجه است؛ واز مثلث BCE،که در آن $\widehat{CEB}=40^\circ$ (زاویهٔ خارجی مثلث AEC)، به‌دست می‌آید:

$$x=\widehat{BED}-\widehat{CEB}=70^\circ-40^\circ=30^\circ$$

راه حل دوم. ازنقطهٔ E موازی با BC رسم می‌کنیم تا AC را در D قطع کند. اگر نقطهٔ برخورد پاره خطهای راست BD و CE را O بنامیم،روشن است که مثلث‌های EOD و OBC متساوی‌الاضلاع‌اند وزاویه‌هایی برابر ۶۰ درجه دارند وداریم:

$$|ED|=|EO| \qquad (1)$$

به مثلث BCF توجه می‌کنیم. این مثلث متساوی‌الساقین است (زاویهٔ رأس C در این مثلث، برابر ۸۰ درجه ویکی از زاویه‌های مجاور بـه قاعدهٔ آن برابر ۵۰ درجه است، بنابراین زاویـهٔ سوم این مثلث هم بـرابـر ۵۰ درجه می‌شود)؛ یعنی $|CF|=|BC|$. از آنجاکه مثلث OBC متساوی‌الاضلاع است، بنابراین $|CF|=|CO|$ ومثلث OCF متساوی‌الساقین می‌شود. چون زاویهٔ رأس C ازاین مثلث برابر ۲۰ درجه است، هریك از زاویه‌های مجاور به‌قاعدهٔ آن برابر ۸۰ درجه می‌شود:



شکل ۱۳۴

$$\widehat{CFO}=\widehat{COF}=۸۰^\circ$$

در نقطهٔ O از خط راست CE، سه زاویه (به رأس O) وجود داردکه اندازهٔ دوتای آن‌ها برای ما معلوم است:

$$\widehat{EOD}=۶۰^\circ,\quad \widehat{FOC}=۸۰^\circ$$

بنابراین $\widehat{DOF}=۴۰^\circ$. درمثلث BCD هم، دو زاویه معلوم است:

$$\widehat{DBC}=۶۰^\circ,\quad \widehat{DCB}=۸۰^\circ$$

یعنی $\widehat{BDC}=۴۰^\circ$. بنابراین DOF مثلثی متساوی‌الساقین است و

$$|FD|=|FO| \qquad (۲)$$

بـا توجه به (۱) و (۲) می‌بینیم درچهارضلعی $EOFD$، بـاید قطر EF زاویه‌های رأس‌های این چهارضلعی رانصف کند، وچون $\widehat{DFO}=۶۰^\circ$، بنابراین

$$\widehat{CEF}=۳۰^\circ$$

یادداشت. مساله را می‌توان درحالت کلی، بـه یاری رابطه‌های مثلثاتی حل کرد (در حالت کلی، نمی‌توان مسأله را باروش خالص هندسی به نتیجه رساند).

مثلث متساوی‌الساقین ABC ($|AB|=|AC|$) را درنظرمی‌گیریم وفرض می‌کنیم:

$$\hat{A}=۲\alpha,\quad \widehat{FBC}=\beta,\quad \widehat{ECB}=\gamma$$

(درمسألهٔ ۳۳۹: $\alpha=۱۰^\circ$، $\beta=۵۰^\circ$ و $\gamma=۶۰^\circ$). درمثلث EBC داریم:

$$\frac{|EC|}{\sin\hat{B}}=\frac{|BC|}{\sin\hat{E}} \Longrightarrow \frac{|EC|}{\sin(۹۰^\circ-\alpha)}=\frac{|BC|}{\sin(۹۰^\circ+\alpha-\gamma)}$$

از آن‌جا

$$|EC| = \frac{|BC| \cdot \cos\alpha}{\cos(\gamma - \alpha)} \qquad (1)$$

به‌همین ترتیب، ازمثلث FBC به‌دست می‌آید:

$$|FC| = \frac{|BC| \cdot \sin\beta}{\cos(\beta - \alpha)} \qquad (2)$$

اکنون، با توجه به مثلث FEC می‌توان نوشت:

$$\frac{|FC|}{\sin x} = \frac{|EC|}{\cos(x - \alpha - \gamma)}$$

که باتوجه به (۱) و (۲)، سرانجام به‌دست می‌آید:

$$\frac{\sin\beta}{\sin x \cdot \cos(\beta - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\cos(x - \alpha - \gamma) \cdot \cos(\gamma - \alpha)} \qquad (3)$$

که معادله‌ای است به‌صورت $A\sin x + B\cos x = 0$ واز آن‌جا $tg\,x$ ودرنتیجه x به‌دست می‌آید.

مثلاً اگر به مسألهٔ ۳۳۹ برگردیم ودرمعادلهٔ (۳) قراردهیم:

$$\alpha = 10^\circ, \ \beta = 50^\circ, \ \gamma = 60^\circ$$

خواهیم داشت (باتوجه به معادلهٔ (۳)):

$$\frac{\sin 50^\circ}{\sin x \cdot \cos 40^\circ} = \frac{\cos 10^\circ}{\cos(x - 70^\circ)\cos 50^\circ}$$

که باتوجه به‌برابری‌های

$$\cos 10^\circ = \sin 80^\circ = 2\sin 40^\circ \cos 40^\circ, \ \sin 50^\circ = \cos 40^\circ$$

به‌این صورت درمی‌آید:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{2\cos 40^\circ}{\cos(x - 70^\circ)}$$

که بعداز تبدیل‌های ساده‌ای، نتیجه می‌شود:

$$tg\,x = \frac{\cos 70^\circ}{2\cos 40^\circ - \sin 70^\circ}$$

وچون

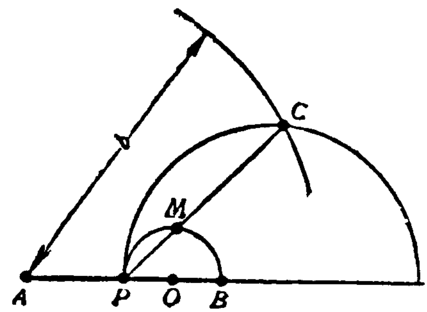
$$2\cos 40^\circ - \sin 70^\circ = \cos 40^\circ + (\cos 40^\circ - \cos 20^\circ) =$$
$$= \cos 40^\circ - 2\sin 30^\circ \sin 10^\circ = \cos 40^\circ - \cos 80^\circ =$$
$$= 2\sin 60^\circ \sin 20^\circ = \sqrt{3}\cos 70^\circ$$

بنابراین

$$tg x = \frac{\cos 70^\circ}{\sqrt{3}\cos 70^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow x = 30^\circ$$

۳۴۰. نقطه برخورد میانه‌ها را M می‌نامیم (شکل ۱۳۵) و فرض می‌کنیم $a = |AB|$، یکی از ضلع‌های مفروض باشد. نقطهٔ M روی محیط دایره‌ای به‌قطر $\frac{1}{2}|AB|$، زیرا $\widehat{PMB} = 90^\circ$ (P، نقطهٔ وسط $[AB]$ است).

اگر رأس سوم مثلث را C بنامیم: $|PM| = \frac{1}{3}|PC|$؛ یعنی C روی یک منحنی است که از تبدیل دایرهٔ به‌قطر $|PB|$، در تجانس به‌مرکز P و نسبت تجانس ۱:۳ به‌دست می‌آید.



شکل ۱۳۵

می‌دانیم، این منحنی، دایره‌ای است که مرکز آن، از نقطهٔ P به‌اندازهٔ $3|OP|$ فاصله دارد و شعاع آن، سه‌برابر $|OP|$ است (O را وسط PB گرفته‌ایم).

بارسم این دایره، مثلث مجهول به سادگی به‌دست می‌آید: کافی است، به مرکز A و به شعاع برابر طول ضلع مفروض b، کمانی رسم کنیم تا محیط دایرهٔ قبلی رادر C قطع کند.

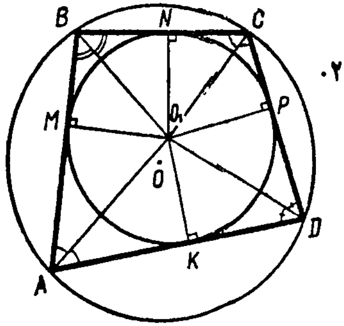
مسأله در دوحالت $b \leqslant \frac{a}{2}$ و $b \geqslant 2a$ جواب ندارد (هریک از دوضلع معلوم، باید از نصف دیگری، بزرگتر باشد).

۳۴۱. دایرهٔ به مرکز O_1 و به شعاع برابر r را، دایرهٔ محاط در چهارضلعی می‌گیریم (شکل ۱۳۶). روشن است که مرکز این دایره، درمحل برخورد نیمسازهای درونی چهارضلعی واقع است. شعاع‌های O_1K، O_1M، O_1N و O_1P را، که از نقطه‌های تماس دایره باضلع‌ها می‌گذرند، رسم می‌کنیم. به روشنی دیده می‌شود که:

$$S = p \cdot r \qquad (۱)$$

که در آن $۲p = |AB| + |BC| + |CD| + |DA|$.

ولی



شکل ۱۳۶

$$|AB| = |AM| + |MB| =$$

$$= r\,cotg\frac{\hat{A}}{۲} + r\,cotg\frac{\hat{B}}{۲}$$

به همین ترتیب

$$|BC| = r\,cotg\frac{\hat{B}}{۲} + r\,cotg\frac{\hat{C}}{۲};\ \ |CD| = r\,cotg\frac{\hat{C}}{۲} + r\,cotg\frac{\hat{D}}{۲};$$

$$|DA| = r\,cotg\frac{\hat{D}}{۲} + r\,cotg\frac{\hat{A}}{۲}$$

بنابراین

$$r = p\left(cotg\frac{\hat{A}}{۲} + cotg\frac{\hat{B}}{۲} + cotg\frac{\hat{C}}{۲} + cotg\frac{\hat{D}}{۲}\right)^{-۱} \qquad (۲)$$

چون چهارضلعی قابل محاط در دایره‌است، بنابراین

$$\hat{A} = ۱۸۰^\circ - \hat{C} \text{ و } \hat{B} = ۱۸۰^\circ - \hat{D}$$

یعنی

$$cotg\frac{\hat{A}}{۲} = tg\frac{\hat{C}}{۲},\quad cotg\frac{\hat{B}}{۲} = tg\frac{\hat{D}}{۲},$$

$$cotg\frac{\hat{C}}{۲} = tg\frac{\hat{A}}{۲},\quad cotg\frac{\hat{D}}{۲} = tg\frac{\hat{B}}{۲}$$

ودرنتیجه، برابری (۲) به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$r = p\left(tg\frac{\hat{A}}{۲} + tg\frac{\hat{B}}{۲} + tg\frac{\hat{C}}{۲} + tg\frac{\hat{D}}{۲}\right)^{-۱} \qquad (۳)$$

واگر (۳) را در (۱) قرار دهیم:

$$S=\frac{p^2}{tg\frac{\hat{A}}{2}+tg\frac{\hat{B}}{2}+tg\frac{\hat{C}}{2}+tg\frac{\hat{D}}{2}}$$

۳۴۲. A_1، B_1، C_1 و D_1 را، به‌ترتیب وسط ضلع‌های AB، BC، CD و DA از چهارضلعی $ABCD$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

$$|AB|=a,\ |BC|=b,\ |CD|=c,\ |DA|=d,\ |AC|=f,\ |BD|=e$$

می‌دانیم درهرمثلث PQR، با ضلع‌های به طول‌های p، q و r، طول میانهٔ واردبـر ضلع به طول p (m_p)، ازاین رابطه به دست می‌آید:

$$4m_p^2=2q^2+2r^2-p^2$$

ابتدا میانه‌های BD_1 و CD_1 ازمثلث‌های ABD و ACD و، سپس، میانهٔ D_1B_1 از مثلث BCD_1 رابه دست می‌آوریم؛ به این برابری می‌رسیم:

$$4|B_1D_1|^2=a^2-b^2+c^2-d^2+e^2+f^2 \qquad (1)$$

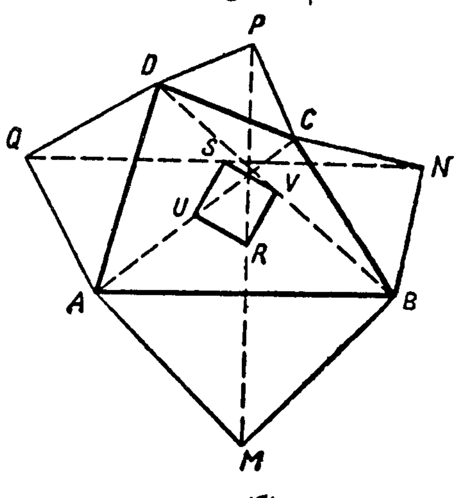
ازطرف دیگر، باتوجه به رابطهٔ کسینوس‌ها درمثلث $B_1C_1D_1$ داریم:

$$4|B_1C_1|^2=e^2+f^2-2ef\cos\varphi \qquad (2)$$

(φ، زاویهٔ بین قطرهای چهارضلعی $ABCD$ است). ازدورابطهٔ (۱) و (۲) به‌دست‌می‌آید:

$$\sin^2\varphi=1-\frac{(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}{4e^2f^2}$$

که اگر آن را دربرابری $16S^2=4e^2f^2\sin^2\varphi$ قراردهیم، درستی برابری صورت مسأله ثابت می‌شود.



شکل ۱۲۷

۳۴۳. رأس‌های چهارضلعی $ABCD$ را، بـاعددهای مختلط a، b، c و d نشان می‌دهیم. اگرنقطهٔ M را متناظر با عدد m بگیریم، داریم:

$$a-m=(b-m)i,\ (i=\sqrt{-1})$$

که ازآن‌جا به‌دست می‌آید:

$$m=\frac{a-bi}{1-i}$$

وبه‌همین ترتیب

$$n=\frac{b-ci}{1-i},\ p=\frac{c-di}{1-i},\ q=\frac{d-ai}{1-i}$$

R و S وسط پاره خطهای راست MP و NQ، با این عددها متناظرند:

$$r=\frac{a+c-(b+d)i}{2(1-i)},\quad s=\frac{b+d-(a+c)i}{2(1-i)}$$

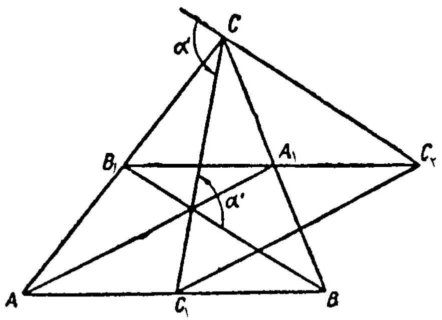
اگر روی پاره خط راست RS، به‌عنوان قطر، مربع $URVS$ را بسازیم، داریم:

$$v=\frac{r-si}{1-i}=\frac{-2(b+d)i}{2(1-i)^2}=\frac{b+d}{2},$$

$$u=\frac{s-ri}{1-i}=\frac{a+c}{2}$$

یعنی نقطه‌های U و V وسط قطرهای چهارضلعی مفروض‌اند. درستی حکم مسأله ثابت شد.

۳۴۴. A_1، B_1 و C_1 را، به‌ترتیب، وسط ضلع‌های BC، CA و AB از مثلث ABC می‌گیریم (شکل ۱۳۸).



شکل ۱۳۸

متوازی‌الاضلاع CB_1BC_2 را می‌سازیم. ضلع‌های مثلث CC_1C_2، به‌ترتیب، مساوی و موازی میانه‌های مثلث مفروض‌اند، زیرا چهارضلعی $AC_1C_2A_1$ متوازی‌الاضلاع است و پاره‌خطهای راست AA_1 و C_1C_2 مساوی و موازی‌اند. زاویه‌های خارجی مثلث CC_1C_2 برابرند با α'، β' و γ'. بنابراین، اندازهٔ زاویه‌های داخلی این مثلث، برابر با $180^\circ-\alpha'$، $180^\circ-\beta'$ و $180^\circ-\gamma'$ می‌شود. نقطهٔ A_1، محل برخورد میانه‌های مثلث CC_1C_2 است و ضلع‌های مثلث، از این نقطه، با زاویه‌های $180^\circ-\alpha$، $180^\circ-\beta$ و $180^\circ-\gamma$ دیده می‌شوند.

۳۴۵. مسأله را با روش تحلیلی حل می‌کنیم. دستگاه محورهای مختصات قائم را، روی صفحه، طوری انتخاب می‌کنیم که خط راست g، با محورعرض موازی باشد و محور طول را در نقطهٔ $A(m, 0)$ $(m>0)$ قطع کند. درضمن، نقطهٔ O مرکز دایره را، به‌عنوان مبداء مختصات در نظر می‌گیریم.

ابتدا فرض می‌کنیم، نقطهٔ $P(x, y)$ درسمت راست خط راست g واقع باشد. باتوجه به این که

$$|OP|^2=x^2+y^2 \text{ و } d=x-m>0$$

باید داشته باشیم:

$$\frac{x^2+y^2+R^2}{x-m}=k \qquad (1)$$

که درآن $k>0$، مقدار ثابت مفروض است. معادلهٔ (۱) رامی‌توان به‌این‌صورت نوشت:

$$\left(x-\frac{k}{2}\right)^2+y^2=-mk+\frac{k^2}{4}-R^2$$

با شرط $\delta=-mk+\frac{1}{4}k^2-R^2>0$، مکان مطلوب دایره‌ای است به‌مرکز نقطهٔ $\left(\frac{k}{2}, 0\right)$ وشعاع برابر $\sqrt{\delta}$. بـا شرط $\delta=0$، مکان هنـدسی مطلوب، از یك نقطهٔ $\left(\frac{k}{2}, 0\right)$ تشکیل می‌شود وباشرط $\delta<0$، نقطهٔ P وجود ندارد.

اگر P درسمت چپ خط راست g باشد، آن‌وقت معادلهٔ مکان نقطهٔ P به صورت

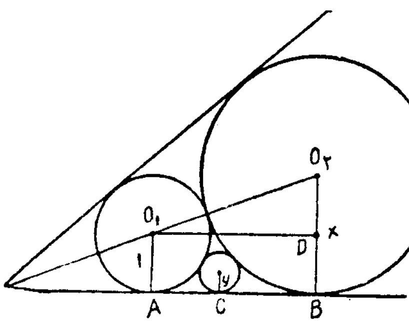
$$\left(x+\frac{k}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}k^2+mk-R^2=\delta_1$$

درمی‌آیدکه با شرط $\delta_1>0$، دایره‌ای به مرکز $\left(-\frac{k}{2}, 0\right)$ وشعاع $\sqrt{\delta_1}$، باشرط $\delta_1=0$، ازنقطهٔ $\left(-\frac{k}{2}, 0\right)$ تشکیل شده است وباشرط $\delta_1<0$ وجود ندارد.

توجه‌کنیم‌که، دایرهٔ مفروض، به‌طور مستقیم درحل مسأله دخالت ندارد.

۳۴۶. وقتی دو دایره با شعاع‌های برابر R و r بریکدیگرمماس ودر بیرون هم‌واقع باشند، طول پاره‌خط مماس‌مشترك بیرونی آن‌ها، چنین است:

$$|AB|=\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}=$$
$$=2\sqrt{Rr} \qquad (1)$$



شکل ۱۳۹

[عکس این حکم هم درست است: اگـرطول پـاره خط راست مماس مشترك بیرونی دو دایره (باشعاع‌های برابر R و r) برابر $2\sqrt{Rr}$ باشد، آن وقت، خود دودایره نسبت به‌هم مماس بیرونی‌اند (چرا؟).]

اگر شعاع دایرهٔ کوچکتر محاط درزاویهٔ مفروض را برابر واحد بگیریم، آن‌وقت شعاع x، از دایرهٔ بزرگتر محاط دراین زاویه، ازرابطهٔ زیر به دست می‌آید (شکل ۱۳۹):

$$\frac{|DO_۲|}{|O_۱O_۲|}=\frac{x-۱}{x+۱}=\sin\frac{\alpha}{۲}$$

(α، اندازهٔ زاویهٔ مفروض است). ازآن‌جا

$$x=\frac{۱+\sin\frac{\alpha}{۲}}{۱-\sin\frac{\alpha}{۲}}$$

($O_۱$ و $O_۲$ را، به‌ترتیب، مرکز دایرهٔ کوچکتر ومرکز دایرهٔ بزرگتر محاط درزاویه گرفته‌ایم).

نقطه‌های تماس دو دایره را بایکی ازضلع‌های زاویه A و B ونقطهٔ تماس دایرهٔ سوم را با همین ضلع، C می‌نامیم. دراین‌صورت

$$|AC|+|CB|=|AB|$$

اگر شعاع دایرهٔ سوم را y بنامیم، به‌دست می‌آید. (با توجه به (۱)):

$$۲\sqrt{y}+۲\sqrt{xy}=۲\sqrt{x}\Longrightarrow \sqrt{y}=\frac{\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}$$

ازآن‌جا

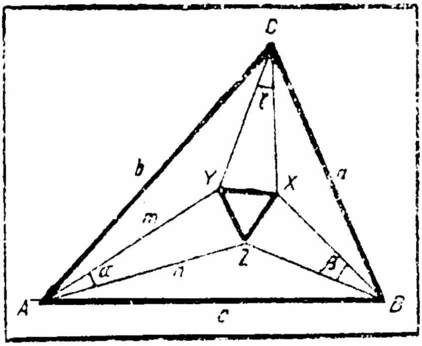
$$\frac{۱}{\sqrt{y}}=۱+\frac{۱}{\sqrt{x}}=۱+\sqrt{\frac{۱-\sin\frac{\alpha}{۲}}{۱+\sin\frac{\alpha}{۲}}}$$

بنابراین، نسبت مجهول چنین می‌شود:

$$\frac{۱}{y}=۱+۲\sqrt{\frac{۱-\sin\frac{\alpha}{۲}}{۱+\sin\frac{\alpha}{۲}}}+\frac{۱-\sin\frac{\alpha}{۲}}{۱+\sin\frac{\alpha}{۲}}=\frac{۲\left(۱+\cos\frac{\alpha}{۲}\right)}{۱+\sin\frac{\alpha}{۲}}$$

۳۴۷. این هم مسألهٔ دیگری ازهمان‌گونه‌است که درحل مسألهٔ **۳۳۵** ازآن‌هاصحبت کردیم وبه قضیهٔ مودلی معروف است. قضیه را، برای نخستین بار ف. مودلی، ریاضی‌دان

امریکائی (۱۸۶۰–۱۹۳۷) طرح کرد. نخستین راه حل، برای قضیهٔ مورلی درسال ۱۹۰۹ چاپ شد. از آن به بعد، بیش از ده راه حل برای این قضیه پیدا شدکه، البته، برای این مسألهٔ هندسهٔ مقدماتی،کم و بیش دشوار وپیچیده‌اند. دراین جا راه حلی داده می‌شود که، تا حدی، ساده، و برای دانش‌آموزان سال‌های آخر دبیرستان قابل فهم است.



شکل ۱۴۰

فرض‌می‌کنیم،خطهای ثلث زاویه‌های‌مثلث ABC،که مجاور ضلع‌های BC، CA و AB قرار گرفته‌اند، به ترتیب در X، Y و Z یکدیگر راقطع کنند (شکل ۱۴۰). فرض می کنیم:

$$|AZ|=n، \ |AY|=m، \ \hat{C}=۳\gamma، \ \hat{B}=۳\beta، \ \hat{A}=۳\alpha،$$

$$|AB|=c، \ |AC|=b، \ |BC|=a$$

زاویه‌های AZY و BZX را محاسبه می کنیم.

چون $۳\alpha+۳\beta+۳\gamma=۱۸۰^\circ$،بنابراین $\alpha+\beta+\gamma=۶۰^\circ$ و $\alpha+\beta=۶۰^\circ-\gamma$.

ازقضیهٔ سینوس‌ها درمثلث AZB استفاده می کنیم:

$$\frac{n}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$[\widehat{AZB}=۱۸۰^\circ-(\alpha+\beta)]$. از آن‌جا

$$n=\frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{c\sin\beta}{\sin(۶۰^\circ-\gamma)}$$

به همین‌ترتیب $m=\dfrac{b\sin\gamma}{\sin(۶۰^\circ-\beta)}$.

ازمثلث ABC، باتوجه به قضیهٔ سینوس‌ها، داریم:

$$\frac{b}{c}=\frac{\sin ۳\beta}{\sin ۳\gamma}$$

وبنابراین

$$\frac{m}{n}=\frac{\sin ۳\beta\sin\gamma\sin(۶۰^\circ-\gamma)}{\sin ۳\gamma\sin\beta\sin(۶۰^\circ-\beta)}$$

این برابری را می‌توان با استفاده از اتحاد

$$\sin ۳x = ۴\sin x \sin(۶۰^\circ + x)\sin(۶۰^\circ - x)$$

ساده کرد که، درنتیجه، به دست می‌آید:

$$\frac{m}{n} = \frac{\sin(۶۰^\circ + \beta)}{\sin(۶۰^\circ + \gamma)}$$

اکنون دیگر، بدون هرگونه محاسبه‌ای، می‌توان ثابت کرد، زاویه‌های مورد علاقهٔ ما، یعنی $\widehat{AZY}$ و $\widehat{AYZ}$ ازمثلث AYZ، برابرندبا

$$۶۰^\circ + \gamma،\ ۶۰^\circ + \beta$$

درواقع، چون $۶۰^\circ = \gamma + \beta + \alpha$، مثلثی وجود داردکه زاویه‌های آن برابر α، $۶۰^\circ + \beta$ و $۶۰^\circ + \gamma$ باشد ونسبت ضلع‌های مجاور بهزاویهٔ α در آن، برابرباشد با

$$\frac{\sin(۶۰^\circ + \beta)}{\sin(۶۰^\circ + \gamma)} = \frac{m}{n}$$

چون $\widehat{YAZ} = \alpha$، بنابراین مثلث AYZ باچنین مثلثی متشابه است و

$$\widehat{AZY} = ۶۰^\circ + \beta،\quad \widehat{AYZ} = ۶۰^\circ + \gamma$$

بــه همین‌ترتیب ثابت می‌شود $\widehat{BZX} = ۶۰^\circ + \alpha$. ولی چون

$$\widehat{AZB} = ۱۸۰^\circ - (\alpha + \beta) = ۱۸۰^\circ - (۶۰^\circ - \gamma) = ۱۲۰^\circ + \gamma;$$

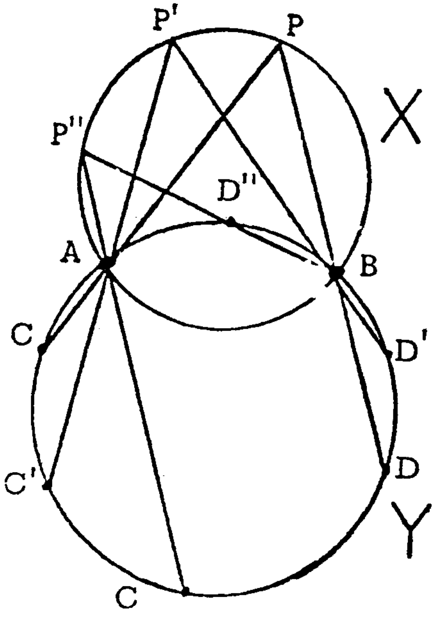
$$\widehat{AZY} + \widehat{AZB} + \widehat{BZX} = (۶۰^\circ + \beta) + (۱۲۰^\circ + \gamma) + (۶۰^\circ + \alpha) = ۳۰۰^\circ$$

بنابراین $\widehat{XZY} = ۶۰^\circ$.

به‌همین ترتیب، می‌توان ثابت‌کردکه، هریك‌ازدوزاویهٔ دیگرمثلث XYZ هم، برابر ۶۰ درجه واین مثلث متساوی‌الاضلاع است.

یادداشت. برای بررسی دقیق‌ترقضیهٔ مورلی و برای آشنا شدن با تعمیم‌های مختلفی از آن، می‌توانید به مجلهٔ «آشنائی باریاضیات»، جلد اول صفحهٔ ۷۸ مراجعه‌کنید.

۳۴۸. برای حل کامل مسأله، بـاید همهٔ حالت‌های ممکن را درنظر گرفت. بسته به ـ انتخاب نقطهٔ P، خط راست PA می‌تواند دایرهٔ Y را دربیرون دایرهٔ X (مثل حالت‌های (PA) و $(P'A)$) قطع‌کند ویا در درون دایرهٔ X؛ به همین‌ترتیب دربارهٔ خط راست PB (خط راست $P''B$، روی شکل ۱۴۱، محیط دایرهٔ Y رادردرون دایرهٔ X قطع‌کرده‌است).



شکل ۱۴۱

دراین‌جا تنها به حالتی می‌پردازیم که، هر دونقطهٔ برخورد بامحیط دایرهٔ Y، دربیرون دایرهٔ X باشند.

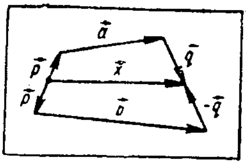
با توجه به شکل ۱۴۱، کافی است ثابت کنیم، دوکمان CD و $C'D'$ برابرند. دوزاویهٔ محاطی $P'AP$ و $P'BP$ روبه‌روی یك کمان و، بنابراین برابرند وداریم:

$$\widehat{CAC'}=\widehat{P'AP}=\widehat{P'BP}=\widehat{DBD'}$$

درنتیجه $\widehat{CC'}=\widehat{DD'}$ اگر به دو طرف این برابری $\widehat{C'D}$ را اضافه کنیم، نتیجهٔ مورد نظر به دست می‌آید.

۳۴۹. عکس قضیه چنین است:

اگردریك چهارضلعی، طول پاره خط راستی که وسط دوضلع روبه‌رو رابه‌هم وصل کرده است، برابر با نصف مجموع طول‌های دوضلع دیگرباشد، آن وقت دوضلع اخیر باهم موازی‌اند.



شکل ۱۴۲

روی شکل ۱۴۲ نام‌گذاری‌هایی کرده‌ایم که اجازه می‌دهد مسأله را به زبان برداری بیان کنیم. باید ثابت کرد اگر

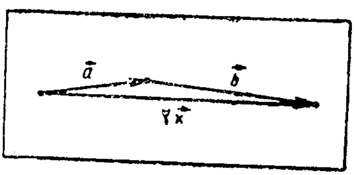
$$|\overrightarrow{x}|=\frac{۱}{۲}\left(|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|\right)$$

آن وقت $\overrightarrow{a}$ با $\overrightarrow{b}$ موازی است. داریم:

$$\overrightarrow{x}=\overrightarrow{p}+\overrightarrow{a}+\overrightarrow{q}\ ;\ \ \overrightarrow{x}=-\overrightarrow{p}+\overrightarrow{b}-\overrightarrow{q}$$

ازمجموع این‌دوبرابری برداری به‌دست می‌آید:

$$۲\overrightarrow{x}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$$



شکل ۱۴۳

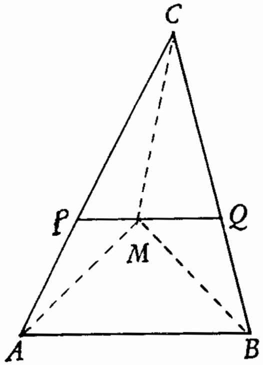
واگر بردارهای $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ موازی نباشند، چون طول هرضلع مثلث ازمجموع طول‌های دو ضلع دیگر کوچکتر است، باید داشته باشیم (شکل ۱۴۳):

$$2|\vec{x}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

یعنی $|\vec{x}|<\frac{1}{2}\left(|\vec{a}|+|\vec{b}|\right)$ که فرض قضیه‌را نقض می‌کند. پس $\vec{b} \parallel \vec{a}$، یعنی چهار-ضلعی مفروض ذوزنقه یا متوازی‌الاضلاع است.

۳۵۰. مثلث ABC و نقطهٔ M را درون آن انتخاب می‌کنیم. $[AB]$ را کوچکترین و $[AC]$ را بزرگترین ضلع مثلث می‌گیریم، یعنی

$$|AC|>|BC|>|AB|$$



شکل ۱۴۴

اگر از M به موازات (AB) رسم کنیم تا $[AC]$ را در Q قطع کند، با توجه به تشابه مثلث‌های ABC و PQC به دست می‌آید:

$$|CP|>|CQ|>|PQ|$$

M را روی $[PQ]$، سمت چپ یا روی پای عمودی می‌گیریم که از C بر $[PQ]$ فرود آمده باشد، یعنی $|CM|<|CP|$. اکنون این نابرابری‌های روشن را می‌نویسیم:

$$|MA|<|MP|+|AP|$$

$$|MB|<|MQ|+|BQ|$$

$$|MP|+|MQ|<|CQ|$$

$$|MC|<|CP|$$

ازمجموع این چهار نابرابری به‌دست می‌آید:

$$|MA|+|MB|+|MC|<|AC|+|BC|$$

درحالتی هم که نقطه M سمت راست پای ارتفاع وارد از رأس C بر $[PQ]$ باشد، به‌همین ترتیب عمل می‌شود، جزاین‌که به‌جای دونابرابری آخر باید نوشت:

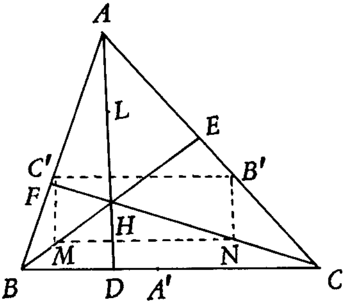
$$|MP|+|MQ|<|CP|$$

$$|MC|<|CQ|$$

۳۵۱. این دایره، درتاریخ ریاضیات، به «دایرهٔ نه نقطه» مشهور شده است؛ گاهی‌هم آن را «دایرهٔ اولر» می‌نامند، زیرا اولر، برای نخستین‌بار، بخشی ازاین مسأله راحل کرد:

او ثابت کرد، دایرهٔ محیطی مثلث ارتفاعیه (مثلثی که رأس‌های آن، پای ارتفاع‌های مثلث است)، از نقطه‌های وسط ضلع‌ها می‌گذرد. حل کامل مسأله، به وسیله ریاضی‌دان فرانسوی تعلق دارد. درضمن فویرباخ ثابت کرد که دایرهٔ نه نقطه، بر دایره‌های محاطی مثلث (درونی یا بیرونی) مماس است و، به‌همین دلیل، در برخی‌موردها، آن را «دایرهٔ فویرباخ»می‌گویند.

اثبات بخش آخر قضیه دشوار نیست. مثلث $A'B'C'$ (مثلثی که رأس‌های آن، نقطه‌های وسط ضلع باشد) بامثلث ABC متشابه است و طول هرضلع آن، نصف طول ضلع نظیرش درمثلث ABC است. بنابراین، دایره‌ای که‌ازسه‌نقطهٔ A' و B' و C' بگذرد، شعاعی برابر نصف شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC دارد.



شکل ۱۴۵

اکنون به‌اثبات خودقضیه‌می‌پردازیم. ارتفاع‌های AD، BE و CF ازمثلث ABC، درنقطهٔ H به هم رسیده‌اند (شکل ۱۴۵). B' و C'، نقطه‌های وسط ضلع‌های AC و AB و M و N نقطه‌های وسط پاره خط‌های راست BH و CH هستند. چهارضلعی $C'MNB'$ مستطیل است، زیرا ازیك طرف، پاره‌خط‌های راست $C'B'$ و MN طولی برابردارند وباهم‌موازی‌اند (هردو، موازی‌باضلع BCاند وطولی برابرنصف طول BC دارند)؛ ازطرف دیگر، باتوجه به مثلث‌های AHC و ABH، روشن می‌شود که پاره‌خط‌های‌راست $B'N$ و $C'N$ با (AH) موازی و، بنابراین بر(BC) و، در ضمن، بر(MN) عمودند.

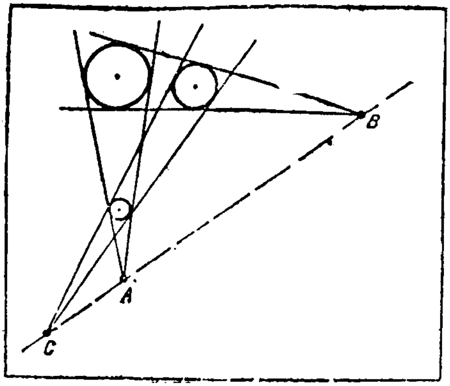
دایره‌ای که ازچهار نقطهٔ C'، M، N و B' می‌گذرد، از نقطه‌های E و F هم عبور می‌کند، زیرا $[MB']$یا$[C'N]$ قطراین دایره‌اند و، درضمن، زاویه‌های $\widehat{MEB'}$و$\widehat{C'FN}$ قائمه‌اند.

به همین‌ترتیب، اگرمستطیل $C'A'NL$ را درنظربگیریم (این مستطیل روی شکل ۱۴۵ رسم نشده است)، روشن می‌شود، دایره‌ای‌که از C'، F و N می‌گذرد (همان دایرهٔ قبلی)، ازنقطه‌های D، A' و L هم خواهدگذشت؛ یعنی هر ۹ نقطهٔ مورد نظر، روی محیط این دایره قراردارند.

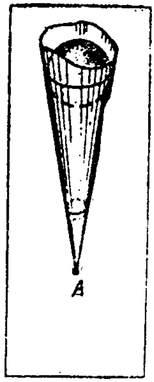
۳§. هندسه درفضا

۳۵۴. مسأله‌های ۳۵۲ و ۳۵۳ به هندسهٔ روی صفحه تعلق دارند، ولی ظریف‌ترین‌و

زیباترین راه حل برای آن‌ها، باوارد شدن درفضا به دست می‌آید. برخلاف معمول، اثبات کلی‌تر آن‌ها، یعنی وقتی‌که برای شکل‌های فضائی مطرح شوند، به‌سادگی به‌دست می‌آید و، آن وقت، حالت مسطحهٔ آن‌ها، به‌عنوان حالتی خاص ونتیجه‌ای ازحالت عام‌تر آن‌ها به‌دست می‌آید. به‌همین مناسبت، آن‌ها رادر بخش «هندسه درفضا» قرارداده‌ایم. یادآوری می‌کنیم که مسألهٔ ۳۵۳ متعلق به دزارك ریاضی‌دان فرانسوی است.



شکل ۱۴۷



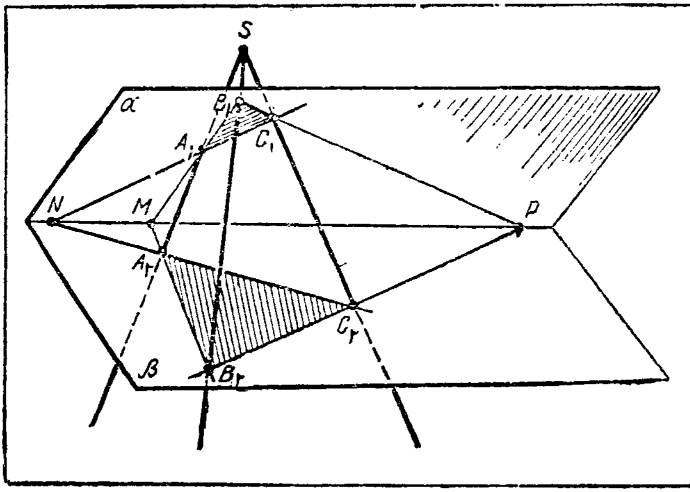
شکل ۱۴۶

سه‌کره باشعاع‌هایی بـرابـرشعاع‌های دایره‌های مفروض درنظرمی‌گیریم (هر دایرهٔ مفروض، دایرهٔ عظیمه‌ای برای یکی ازکره‌هاست). صفحهٔ α، که دایره‌های ما روی آن قرار گرفته‌اند، ازمرکزهای سه‌کره می‌گذرد. برای هردوکره، مخروطی درنظرمی‌گیریم که شامل کره‌ها باشد وبرهرکدام از آن‌ها، درطول دایرهٔ عظیمه‌ای مماس باشد (شکل ۱۴۶). صفحهٔ β که «ازپایین» برهرسه‌کره مماس‌است، ازیك مولد هرمخروط می‌گذرد و، بنابراین، رأس مخروط را هم دربرمی‌گیرد. به‌این‌ترتیب، هرسه رأس مخروط‌ها (نقطه‌های A، B و C) بر صفحهٔ β واقع‌اند. ازآن‌جاکه، این سه نقطه، علاوه برصفحهٔ β، برصفحهٔ α هم قرار دارند، بنابراین نقطه‌های A، B و C، برخط راست فصل‌مشترك دوصفحه $(\alpha \cap \beta)$ قرارمی‌گیرند.

۳۵۴. اگردو مثلث $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ را درفضا وبـردوصفحهٔ ناموازی α و β فرض‌کنیم (شکل ۱۴۸)، حل مسأله بسیار ساده می‌شود.

چون (A_1A_2) و (B_1B_2) در S به‌هم رسیده‌اند، بنابراین خطهای راست A_1B_1 و A_2B_2 برصفحهٔ A_1B_1S واقع‌اند و روی این صفحه، درنقطهٔ M یکدیگر را قطع کرده‌اند. نقطهٔ M، هم برصفحهٔ α قراردارد (زیرا (A_1B_1) متعلق به α است) وهم برصفحهٔ β (زیرا (A_2B_2) متعلق بـه β است). یعنی نقطهٔ M روی خط راست فصل مشترك دو صفحهٔ α و β قراردارد (شکل ۱۲۸):

$$M \in (\alpha \cap \beta)$$



شکل ۱۴۸

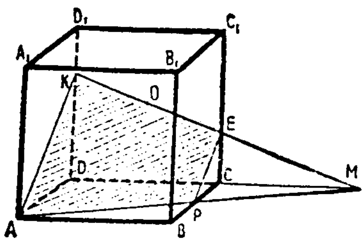
به‌همین ترتیب، ثابت می‌شود:

$$N\in(\alpha\cap\beta) \quad \text{و} \quad P\in(\alpha\cap\beta)$$

می‌بینیم سه نقطهٔ M و N و P روی یك خط راست (فصل مشترك صفحه‌های α و β) قرار دارند.

حالت مسطحهٔ مسأله (شکل ۱۹ درصفحهٔ ۴۶)، چیزی نیست جز تصویر شکل فضائی.

یادداشت. خود دزارك (ژیرار دزارك، ریاضی‌دان فرانسوی سدهٔ هفدهم که، درعین حال، مهندس نظامی بود و بنیان‌های اصلی هندسهٔ تصویری و هندسهٔ ترسیمی را طرح ریخت)، عکس این قضیه را ــ که آن هم قضیه‌ای درست است ــ آورده‌است: اگر در دو مثلث، نقطه‌های برخورد ضلع‌های متناظر، بریك خط راست باشند، آن وقت خط‌های راستی که رأس‌های متناظر دو مثلث را به هم وصل می‌کنند، ازیك نقطه می‌گذرند.



شکل ۱۴۹

۳۵۴. وسط یال BC را P می‌نامیم (شکل ۱۴۹). خط راستی که ازدونقطهٔ A و P می‌گذرد، امتداد یال DC را درنقطهٔ M قطع می‌کند، درضمن $|DC|=|CM|$ (زیرا پاره خط راست PC که از وسط یك ضلع مثلث AMD موازی با قاعده رسم‌شده‌است، ازوسط ضلع دیگرمی‌گذرد). مرکز وجه DCC_1D_1 را O می‌نامیم. خط راستی که از نقطه‌های O و M می‌گذرد، یال‌های CC_1 و DD_1 را، به‌ترتیب، درنقطه‌های E و K قطع می‌کند. اگر از O، عمود OO_1 رابر $[DC]$ فرود آوریم (این عمود روی شکل رسم نشده

است)، با توجه به تشابه مثلث‌های MEC و MOO_1 و همچنین تشابه مثلث‌های MOO_1 و MKD روشن می‌شود:

$$|C_1E|:|EC|=2:1 \quad \text{و} \quad |D_1K|:|KD|=1:2$$

اگر حجم چهاروجهی $KAMD$ را V_1 وحجم چهاروجهی $EPMC$ را V_2 بنامیم، به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$V_1=\frac{2}{9}V \quad \text{و} \quad V_2=\frac{1}{36}V$$

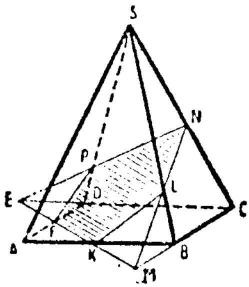
منظور از V، حجم مکعب است. بنابراین حجم چندوجهی واقع درزیر مقطع، چنین می‌شود:

$$V_1-V_2=\frac{2}{9}V-\frac{1}{36}V=\frac{7}{36}V$$

ودیگر روشن است که حجم چند وجهی بالای صفحهٔ مقطع برابراست با

$$V-\frac{7}{36}V=\frac{29}{36}V$$

وبنابراین، صفحهٔ α، حجم مکعب را به نسبت ۷:۲۹ تقسیم می‌کند.



شکل ۱۵۰

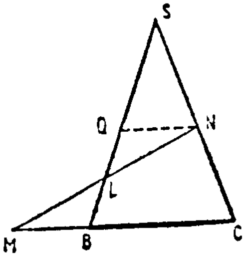
۳۵۵. K و F را به‌ترتیب، وسط یال‌های AB و AD می‌گیریم (شکل ۱۵۰). این دونقطه را به هم وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا امتداد یال‌های CB و CD را، به ترتیب، در M و E قطع کند. هریك ازمثلث‌های قائم‌الزاویهٔ BKM و DEF با مثلث قائم‌الزاویهٔ AKF برابراست؛ از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$|MB|=\frac{1}{2}|BC| \quad \left(|MC|=\frac{3}{2}|BC|\right),$$

$$|ED|=\frac{1}{2}|DC| \quad \left(|EC|=\frac{3}{2}|DC|\right)$$

N را وسط یال CS می‌گیریم. نقطه‌های N و M روی صفحهٔ وجه SBC واقع‌اند. بنابراین خط راست NM یال SB را در نقطه‌ای مثل L قطع می‌کند. ببینیم نقطهٔ L، یال SB را به‌چه نسبتی قطع می‌کند! درمثلث SBC، خط راست NQ را ــ که وسط دویال SC و SB را بــه هم وصل می‌کند ــ رسم می‌کنیم. (شکل ۱۵۱). مثلث‌های NQL و LMB برابرند، زیرا

$$|BM|=|NQ|=\frac{1}{2}|BC|, \quad \widehat{LBM}=\widehat{NQL}$$



شکل ۱۵۱

از برابری این دومثلث نتیجه می‌شود: $|BL|=|QL|$. از آن‌جا

$$|BL|:|LS|=1:3$$

چون نقطه‌های E و N برصفحهٔ وجه SDC قراردارند، خط راست EN یـال SD را درنقطه‌ای مثل P قطع می‌کند. به‌سادگی‌می‌توان ثابت‌کرد که، این‌نقطه هم، یال DS را به‌نسبت ۱:۳ تقسیم‌می‌کند.

به‌این‌ترتیب، توانستیم مقطع موردنظرخود را بسازیم. صفحهٔ این مقطع، هرم را در پنج ضلعی $LKFPN$ قطع و آن را به دو چندوجهی تقسیم می‌کند که باید نسبت‌حجم‌های آن‌ها را به دست آورد.

اگر به‌شکل دقیق‌شویم، روشن می‌شودکه حجم چندوجهی $CDFKBLNP$ (درزیر صفحهٔ مقطع)، که به وسیلهٔ مثلث‌های DFP و KLB، چهارضلعی‌های $CNLB$ و $CDPN$ وپنج ضلعی‌های $PFKLN$ و $DFKBC$ احاطه شده‌است، برابراست باحجم چهاروجهی $NEMC$، به شرطی‌که حجم‌های دوچهاروجهی $LKBM$ و $PEDF$ از آن‌کم شود.

حجم این چهاروجهی‌ها را به دست می‌آوریم.

ارتفاع هرم $SABCD$ را برابر h وطول ضلع قاعدهٔ آن را برابر a می‌گیریم. در این‌صورت، حجم هرم $SABCD$ برابراست با

$$V=\frac{1}{3}a^2h$$

چون نقطهٔ N وسط یال CS است، بنابراین طول عمودی‌که از نقطهٔ N برصفحهٔ $ABCD$ فرودآید، برابر نصف طول عمودی است‌که از S براین صفحه فرود می‌آید، یعنی بـرابـر است با $\frac{1}{2}h$. به‌همین ترتیب، طول هریك از عمودهای وارد ازنقطه‌های L و P بـر صفحهٔ $ABCD$، برابر با $\frac{1}{4}h$ است.

مساحت مثلث ECM برابر $\frac{9}{8}a^2$ و مساحت هریك از مثلث‌های DEF و BMK برابر $\frac{1}{8}a^2$ است. به‌این ترتیب، حجم هرم $NECM$ برابراست با

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}h\times\frac{9}{8}a^2=\frac{3}{16}a^2h=\frac{9}{16}V$$

وحجم هریك از هرم‌های $PEDF$ و $LKBM$ برابراست با

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}h\times\frac{1}{8}a^2=\frac{1}{96}a^2h=\frac{1}{32}V$$

بنابراین، حجم چندوجهی $CDFKBLNP$ چنین می‌شود:

$$V_1=\frac{9}{16}V-2\times\frac{1}{32}V=\frac{1}{2}V$$

صفحهٔ مفروض، هرم را به دو چندوجهی باحجم‌های برابرتقسیم می‌کند.

۳۵۶. اگرمرکز کرهٔ محاط درچهاروجهی رابه‌رأس‌های‌هرم‌وصل‌کنیم، چهاروجهی به چهار هرم‌کوچکتر تقسیم می‌شودکه اگر رأس مشترك آن‌ها رامرکزکره به حساب آوریم، ارتفاع هریك ازآن‌ها برابر r (شعاع‌کرهٔ محاطی) می‌شود. بنابراین

$$V=V_1+V_2+V_3+V_4=\frac{1}{3}r(S_1+S_2+S_3+S_4)=\frac{1}{3}rS$$

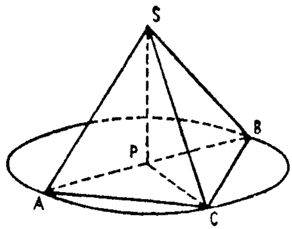
(V_iها حجم هرم‌های‌کوچکتر، S_iها مساحت وجه‌های هرم $SABC$ ($i=1, 2, 3, 4$)، V حجم این هرم و S مساحت‌کل وجه‌های آن است). S، به‌سادگی قابل محاسبه است:

$$S=a^2+\frac{1}{2}a^2(2+\sqrt{3})$$

و بنابراین

$$V=\frac{1}{6}(2+\sqrt{3})ra^2 \qquad (1)$$

درشکل ۱۵۲، چهاروجهی‌راطوری رسم کرده‌ایم که، قاعدهٔ آن، یك مثلث قائم‌الزاویه است. چون یال‌های SA، SB و SC، طول‌هایی‌برابردارند(مثلث‌های SAB و SCB، بنابه شرط، متساوی‌الاضلاع‌اند)، تصویرقائم رأس S، برمرکزدایرهٔ‌محیطی‌قاعدهٔ ABC قرارمی‌گیرد. ولی مثلث ABC قائم‌الزاویه است و نقطهٔ Pـ تصویر قائم S برصفحهٔ ABC ـ دروسط وتر این مثلث واقع



شکل ۱۵۲

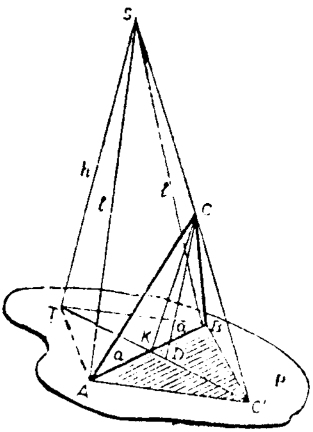
می‌شود. حالا دیگر به‌سادگی،ارتفاع هرم $SABC$ به‌دست‌می‌آید: $|SP|=\frac{a}{\sqrt{2}}$ وحجم آن

$$V=\frac{۱}{۳}|SP|\cdot S_{ABC}=\frac{۱}{۳}\cdot\frac{a}{\sqrt{۲}}\cdot\frac{a^۲}{۲}=\frac{a^۳\sqrt{۲}}{۱۲} \qquad (۲)$$

وازمقایسهٔ (۱) و (۲)، مقدار r ــ شعاع کره محاطی هرم ــ پیدا می‌شود:

$$r=\frac{۲-\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}a$$

۳۵۷. پاره خطهای راست ST و CD را، عمود برصفحهٔ P رسم می‌کنیم. از برابری $|SA|=|SB|$ نتیجه می‌شود که، خطراست TD، ازنقطهٔ K وسط قاعدهٔ AB ونقطهٔ C'ــ سایهٔ C ــ می‌گذرد (شکل ۱۵۳).[هر یك ازاین دوحکم را، بــه طور جداگانه، خودتان ثابت کنید.] به‌جز این‌ها، روشن است که، زاویهٔ CKD،همان زاویهٔ دووجهی بین صفحهٔ مثلث ABC وصفحهٔ P، یعنی برابراست با β.



شکل ۱۵۳

سایهٔ مثلث ABC، یعنی ABC'، یك‌مثلث‌متساوی‌الساقین است و، برای پیداکردن مساحت آن، باید طول ارتفاع آن KC' راپیداکرد. دو مثلث STC' و CDC' متشابه‌اند وبنابراین

$$\frac{|CD|}{|DC'|}=\frac{|ST|}{|TK|+|KD|+|DC'|}$$

که ازآن‌جا به‌دست می‌آید:

$$|DC'|=\frac{|CD|\cdot(|TK|+|KD|)}{|ST|-|CD|}$$

$|CD|$ و $|KD|$، از مثلث CKD محاسبه می‌شوند.

$$|CD|=|CK|\cdot\sin\beta=a\operatorname{cotg}\alpha\sin\beta،$$

$$|DK|=a\operatorname{cotg}\alpha\cos\beta$$

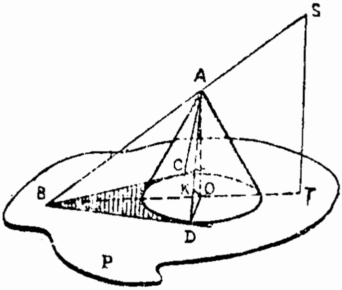
ازطرف دیگر، ازمثلث‌های ATK و ATS به‌دست می‌آید:

$$|TK|^۲=|TA|^۲-|AK|^۲=l^۲-h^۲-a^۲$$

اکنون دیگربا دردست داشتن طول پــاره خطهای راست CD، KD و TK، طول

پاره خط راست DC' و،سپس $|KC'|=|KD|+|DC'|$ به‌دست می‌آید. ادامهٔ مسأله، تنها مقداری محاسبه است.

۳۵۸. ابتدا یادآوری می‌کنیم، اگر (OK) بر مولد AD عمود خود (شکل ۱۵۴)،صفحه‌ای که‌از (AD) بگذرد و بر (OK) عمود باشد، جز نقطه‌های واقع بر AD،نقطهٔ مشترك دیگری باسطح مخروطی‌ندارد. بنابراین هیچ خط راستی ازاین صفحه، به جز خود (AD)، نمی‌تواند بیش‌ازیك نقطهٔ مشترك باسطح مخروطی داشته باشد.



شکل ۱۵۴

ازنقطهٔ B، مماس‌های BC و BD رابردایرهٔقاعدهٔ مخروط رسم می‌کنیم. (BD) بر (DO) و، بنابراین، بر صفحهٔ AOD عمود است، یعنی (BD) بر (OK) عمود می‌شود. چون بنابرفرض (OK) بر (DA) عمود است، بنابراین (OK)، برصفحهٔ ABD عمود خواهد شد؛ یعنی صفحهٔ ABD ازهمان‌گونه‌ای است‌که در ابتدای حل، دربارهٔ آن صحبت‌کردیم. به‌این‌ترتیب، هرنیم‌خط راستی‌که ازنقطهٔ S، روی این صفحه رسم شود، بر سطح مخروطی مماس است و، بنابراین، مرزسایه، به‌وسیلهٔ همین‌نیم‌خطهای راست مشخص می‌شود؛ مرزهای سایه عبارتنداز نیم‌خطهای راست BD و BC.

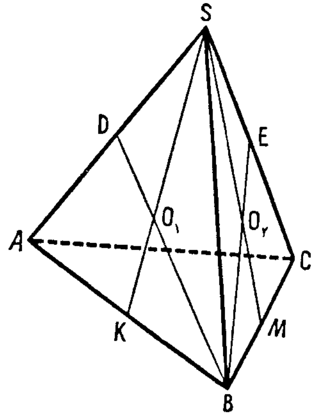
به‌این‌ترتیب، سایهٔ مخروط، مثلث منحنی‌الخطی است‌که ازدوپاره خط راست BD و BC وکمان‌کوچکتر CD تشکیل شده است.

حل را ادامه دهید ومساحت این مثلث منحنی‌الخط راپیداکنید!

۳۵۹. قبل ازحل، به‌صورت مسأله توجه‌کنیم‌و، مثلاً، دچاراین‌اشتباه نشویم‌که،گمان کنیم،کره برصفحهٔ قاعده هم‌مماس‌است (درصورت مسأله،گفته شده است‌که‌کره، بروجه‌های جانبی هرم مماس است). نکتهٔ دوم، به‌رسم شکل‌مربوط می‌شود. لزومی ندارد،تلاش‌کنید، هرم وکره را دروضعی‌که مسأله خواسته است، به‌طورکامل رسم‌کنید (کاری‌که چندان ساده نیست). درواقع، دراین مسأله (وخیلی‌ازمساله‌های شبیه‌آن)، خودکره نقش عمده‌ای‌ندارد. تنها کافی استازاین قضیه‌آگاه باشیم‌که: طول مماس‌هایی که ازیك نقطه، برکرهٔ مفروضی رسم شوند، باهم برابرند.

هرم $SABC$ را در شکل ۱۵۵ رسم‌کرده‌ایم. O_1 را نقطهٔ برخورد ارتفاع‌های BD و SK از وجه جانبی SAB، و O_2 را نقطهٔ برخورد ارتفاع‌های BE و SM از وجه جانبی SBC می‌گیریم. O_3، نقطهٔ برخورد ارتفاع‌های وجه SAC را در شکل نشان نداده‌ایم.

دو وجه‌جانبی SAB و SBC رادرنظرمی‌گیریم. کره، درنقطه‌های O_1 و O_2، بر این دو وجه مماس است. بنا بر این، هرخط راستی‌که ازیکی ازاین دو نقطه بگذرد وروی وجه متناظر آن باشد، بـر کره مماس است؛ یعنی خط‌های راست SM، BE، SK و BD بر کرهٔ مفروض مماس‌اند؛ یعنی



شکل ۱۵۵

$$|SO_2|=|SO_1|,\ \ |BO_2|=|BO_1|$$

دو مثلث SBO_1 و SBO_2 قابل انطباق‌اند، زیرا سه ضلع مثلث اول، باسه ضلع نظیرخود در مثلث دوم، برابرند؛ بنا بر این

$$\widehat{BSO_2}=\widehat{BSO_1},\ \widehat{SBO_2}=\widehat{SBO_1}$$

ولی دراین صورت، مثلث‌های قائم‌الـزاویهٔ SBE و SDB بـرابـرمی‌شوند و، درنتیجه $\widehat{BSD}=\widehat{BSE}$. به همین ترتیب، ازبرابری مثلث‌های SBM و SKB بـه‌دست می‌آید: $\widehat{SBM}=\widehat{SBK}$. اکنون، دومثلث SAB و SBC را درنظرمی‌گیریم. این دومثلث درضلع SB مشترک‌اند و زاویـه‌های مجاوراین ضلع ازیک مثلث، بـازاویه‌های نظیرخود درمثلث دیگر برابرند. به‌این‌ترتیب

$$|BA|=|BC|,\ \ |SA|=|SC|$$

اگر دربارهٔ دو وجه SAB و SAC، به‌همین‌ترتیب استدلال کنیم، به‌دست می‌آید:

$$|AB|=|AC|,\ \ |SB|=|SC|$$

یعنی یال‌های جانبی هرم باهم برابرند و، قاعدهٔ هرم، مثلثی متساوی‌الاضلاع است.

محاسبهٔ طول یال جانبی هرم دشوار نیست و به‌پاسخ اکتفا می‌کنیم:

$$|SA|=|SB|=|SC|=r\cdot\frac{cotg\frac{\alpha}{6}}{cos\frac{\alpha}{3}}\cdot\sqrt{3\cos^2\frac{\alpha}{6}-\sin^2\frac{\alpha}{6}}$$

(قبل ازمحاسبه، ثابت‌کنید، مرکزکره، روی ارتفاع هرم واقع است.)

۳۶۰. ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمه را درقاعدهٔ منشور به طول‌های برابر **x و y**

می‌گیریم. دراین‌صورت، بنابه فرض $xy=2$ یا $y=\frac{2}{x}$ و ارتفاع منشور به طول $h=\sqrt{x^2+y^2}$ است. به‌این‌ترتیب، سطح جانبی منشور، چنین می‌شود:

$$S=(x+y+\sqrt{x^2+y^2})\cdot\sqrt{x^2+y^2}$$

که با قراردادن $y=\frac{2}{x}$ به‌صورت تابعی از x درمی‌آید:

$$S=\left(x+\frac{2}{x}+\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}\right)\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right) \qquad (1)$$

اگر برای هریك از تابع‌های $x+\frac{2}{x}$ و $x^2+\frac{4}{x^2}$، ازنابرابری مربوط به واسطه‌های حسابی وهندسی استفاده‌کنیم، برای هرمقدار $x>0$ داریم:

$$x+\frac{2}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{2}{x}}=2\sqrt{2}$$

$$x^2+\frac{4}{x^2}\geqslant 2\sqrt{x^2\cdot\frac{4}{x^2}}=4, \qquad \sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}\geqslant 2$$

درضمن، همه‌جا، علامت برابری به‌ازای $x=\sqrt{2}$ به‌دست می‌آید. یعنی تابع S، به ازای همین مقدار x، به حداقل مقدار خود، یعنی $4\sqrt{2}+4$ می‌رسد.

سطح جانبی منشور وقتی به‌حداقل مقدارخود می‌رسدکه مثلث قائم‌الزاویهٔ قاعدهٔ آن، مثلثی متساوی‌الساقین باشد.

یادداشت. درتابع (۱)، حداقل‌ها را به‌طور جداگانه محاسبه‌کردیم؛ ولی بایدبه‌این نکتهٔ مهم توجه داشت که، اگرحاصل‌ضرب (یامجموع) دوتابع داده شده باشد، تنها وقتی این حاصل‌ضرب (یامجموع) همراه باعامل‌های ضرب (یا جمله‌های جمع) به حداقل خود می‌رسدکه همهٔ عامل‌های ضرب (یا همهٔ جمله‌های مجموع) به ازای یك مقدار مشترك متغیر به طور هم‌زمان به حداقل خود برسند. در مسألهٔ ما و برای تابع (۱)، هم $x+\frac{2}{x}$، هم $x^2+\frac{4}{x^2}$ و هم $\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}$، به‌ازای $x=\sqrt{2}$ حداقل مقدار خود را اختیار می‌کنند و، بنابراین S هم، به‌ازای همین $x=\sqrt{2}$ به‌حداقل مقدار خود می‌رسد.

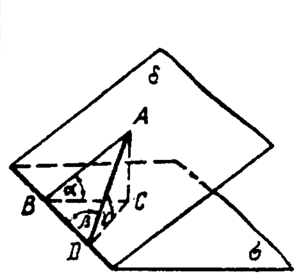
مثلاً تابع $y=(x^2+2)+(x^2-4x+5)$ را درنظربگیرید. x^2+2 به ازای $x=0$ و x^2-4x+5 به ازای $x=2$ به حداقل خود می‌رسند؛ چون $2\neq 0$، بنابراین

حداقل تابع y را نمی‌توان از این راه پیدا کرد. حداقل $۲+x^۲$ برابر ۲ و حداقل $x^۲-۴x+۵$ برابر ۱ است، ولی حداقل y برابر ۱+۲، یعنی ۳ نیست؛ زیرا

$$y=۲x^۲-۴x+۷$$

وحداقل آن به ازای $x=۱$ به‌دست می‌آیدکه برابراست با ۵.

درضمن، اگر می‌خواستیم، حداقل تابع (۱) را، به‌کمك مشتق به‌دست بیاوریم،کار به‌چنان تفصیلی می‌کشیدکه به سختی می‌شد خود را از آن نجات داد.



شکل ۱۵۶

۳۶۱. $\widehat{ABC}=\alpha$ را زاویهٔ دو وجهی مفروض می‌گیریم و وجه‌های زاویهٔ دو وجهی را δ و σ می‌نامیم. (شکل ۱۵۶). فرض می‌کنیم (AD) که روی صفحهٔ δ است، با فصل مشترك دوصفحه، زاویه‌ای برابر β ساخته باشد: $\widehat{ADB}=\beta$. $[AC]$ راعمود بر σ رسم می‌کنیم، $\widehat{ADC}$ همان زاویهٔ مجهول است که آن را γ می‌نامیم. داریم:

$$|AB|=|AD|\cdot \sin\beta،$$

$$|AC|=|AB|\sin\alpha=|AD|\sin\alpha\sin\beta$$

از آن‌جا $\sin\gamma=\dfrac{|AC|}{|AD|}=\sin\alpha\sin\beta$:

$$\sin\gamma=\sin\alpha\sin\beta \qquad (۱)$$

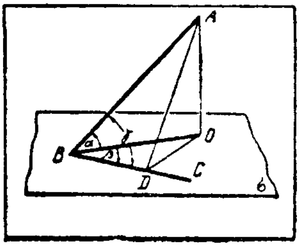
سینوس زاویه‌ای که خط راست واقع بر صفحهٔ یکی از وجه‌های زاویهٔ دووجهی با وجه دوم می‌سازد، برابراست با حاصل‌ضرب سینوس زاویهٔ دو وجهی در سینوس زاویه‌ای‌که همان خط راست، بافصل مشترك دو وجه می‌سازد.

برابری (۱) رابرای حالتی ثابت‌کردیم‌که α حاده باشد، ولی بـه سادگی می‌توان تحقیق کردکه، این برابری، برای حالتی هم‌که زاویهٔ دو وجهی منفرجه باشد، درست‌است.

درحالت قائمه بودن زاویهٔ دو وجهی، به‌طور مستقیم می‌توان ثابت کرد: $\gamma=\beta$. به‌این‌ترتیب، برابری (۱) برای هرحالت دلخواه زاویهٔ دووجهی درست است.

۳۶۲. (AB) رانسبت به صفحهٔ σ مایل، $[AO]$ راعمود بر σ، $[BO]$ را تصویرقائم $[AB]$ بر σ و، سرانجام، BC را خط راستی می‌گیریم که درصفحهٔ σ واقع است واز نقطهٔ B، نقطهٔ برخورد خط راست مایل باصفحهٔ σ،گذشته است. داریم:

$$\widehat{ABO}=\alpha، \quad \widehat{OBC}=\beta$$



شکل ۱۵۷

$\widehat{ABC}$ را γ می‌نامیم و $[OD]$ را عمود بر (BC) رسم می‌کنیم. ازمثلث‌های قائم‌الزاویهٔ AOB، BOD و ADB به‌دست می‌آید (شکل ۱۵۷):

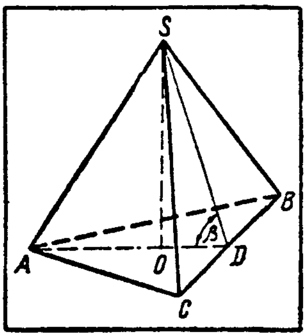
$$|BO|=|AB|\cos\alpha، \quad |BD|=|AB|\cos\alpha\cos\beta;$$

$$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta \qquad (۲)$$

یادداشت. لزومی به‌این شرط نیست که، خط راست واقع برصفحهٔ σ، از پـای مایل گذشته است. برابری (۲) برای حالتی هم که، این‌خط راست ازنقطهٔ برخورد مایل باصفحه نگذرد، ولی باتصویرمایل برصفحهٔ α متقاطع باشد، درست است.

برابری (۱) درمسألهٔ **۳۶۱** وبرابری (۲) درمسألهٔ **۳۶۲**، بـرابـری‌های سودمندی هستندکه، به‌کمك آن‌ها، می‌توان خیلی ازمسأله‌های هندسهٔ فضائی راحل‌کرد.

۳۶۳. درهرم منتظم $SABC$ (شکل ۱۵۸)، طبق شرط داریم: $|AC|=a$ وزاویهٔ بین (AC) وصفحهٔ SBC برابر α است. اگر، زاویهٔ دو وجهی مجاور یال BC را β بگیریم، حجم هرم چنین می‌شود:



شکل ۱۵۸

$$V=\frac{۱}{۳}\cdot\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}\cdot\frac{a\sqrt{۳}}{۶}\cdot tg\,\beta=\frac{a^۳ tg\beta}{۲۴}$$

برای محاسبهٔ $tg\beta$، ازبرابری(۱) درمسألهٔ **۳۶۱** استفاده می‌کنیم(باتوجه به‌نام‌های برابری (۱)، دراین‌جا داریم: $\left(\beta=\frac{\pi}{۳}، \alpha=\beta، \gamma=\alpha\right)$:

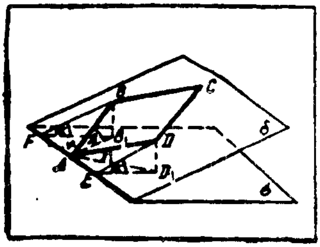
$$\sin\alpha=\sin\beta\cdot\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Longrightarrow\sin\beta=\frac{۲}{\sqrt{۳}}\sin\alpha،$$

$$tg\beta=\frac{\frac{۲}{\sqrt{۳}}\sin\alpha}{\sqrt{۱-\frac{۴}{۳}\sin^۲\alpha}}=۲\sqrt{\frac{\sin^۳\alpha}{\sin ۳\alpha}};$$

$$V=\frac{a^۳}{۱۲}\sqrt{\frac{\sin^۳\alpha}{\sin ۳\alpha}}$$

استفاده از برابری (۱)، ما را از رسم عنصرهای اضافی درشکل، معاف کرد.

۳۶۴. صفحهٔ مربع $ABCD$ را δ می‌نامیم. δ با σ یك زاویهٔ دووجهی می‌سازد که، بنا برشرط، برابر α است (شکل ۱۵۹). بدون این‌که به‌کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان رأس A از مربع را، منطبق بریال زاویهٔ دووجهی (فصل مشترك صفحه‌های δ و σ) فرض کرد. $\widehat{DED_1}$ و $\widehat{BFB_1}$، زاویه‌های خطی این‌زاویهٔ دووجهی‌اند و بنابراین



شکل ۱۵۹

$$\widehat{BFB_1} = \widehat{DED_1} = \alpha$$

پاره خطهای راست AB_1 و AD_1، تصویرهای ضلع‌های AB و AD برصفحهٔ σ هستند. با توجه به شرط مسأله $\widehat{BAB_1} = \beta$.

$\widehat{BAF} = \varphi$ و $\widehat{DAD_1} = \gamma$ فرض می‌کنیم. مسأله می‌خواهد، مقدار زاویهٔ γ را به‌دست آوریم.

ازبرابری (۱) درمسألهٔ **۳۶۱** استفاده می‌کنیم (دربارهٔ زاویه‌های متصل به‌ضلع AD وبا توجه به برابری $\widehat{DAF} = 90^\circ - \varphi$)، به‌دست می‌آید:

$$\sin\gamma = \sin\alpha \sin(90^\circ - \varphi) = \sin\alpha \cos\varphi$$

اکنون، برابری (۱) را برای زاویه‌های متصل به‌ضلع AB به‌کار می‌بریم، به‌دست می‌آید:

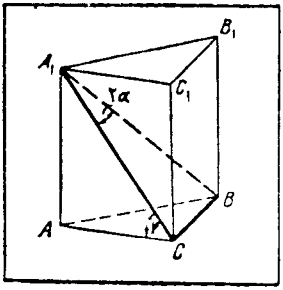
$$\sin\beta = \sin\alpha \cdot \sin\varphi \Longrightarrow \sin\varphi = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

سرانجام، بامحاسبهٔ $\cos\varphi$، به پاسخ مسأله می‌رسیم:

$$\gamma = \arcsin\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(a-\beta)}$$

۳۶۵. دشواری حل این مسأله، مربوط به‌این است‌که عنصرخطی و زاویه‌ای‌که در فرض داده شده‌است، روی یك صفحه نیستند و،بنابراین، مثلث قائم‌الزاویه‌ای وجود ندارد که بتوان، به‌کمك آن، جواب راپیداکرد. ولی اگر برابری (۲) ازمسألهٔ **۳۶۲** را به‌خاطر بیاوریم، این دشواری برطرف می‌شود.

$A_1CA = \varphi$ و $CA_1B = 2\alpha$ می‌گیریم (شکل ۱۶۰). اگر $|AA_1| = h$، آن‌وقت



شکل ۱۶۰

$$S_{CA_۱B}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{h}{\sin\varphi}\right)^۲\sin ۲\alpha \qquad (*)$$

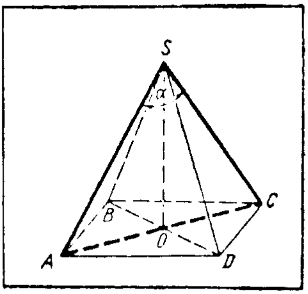
و با توجه به برابری (۲) مسألهٔ **۳۶۲** به‌دست‌می‌آید:

$$\cos(۹۰^\circ-\alpha)=\cos\varphi\cos ۶۰^\circ \Longrightarrow \cos\varphi=۲\sin\alpha$$

که اگر در رابطهٔ (*) قرار دهیم:

$$S_{CA_۱B}=\frac{h^۲\sin ۲\alpha}{۱-۴\sin^۲\alpha}$$

۳۶۶. در هرم منتظم $SABCD$، مقطع قطری ASC را رسم می‌کنیم (شکل ۱۶۱).



شکل ۱۶۱

$[SD]$ نسبت به صفحهٔ مقطع مایل است وتصویر قائم آن برصفحهٔ مقطع، بر $[SO]$، ارتفاع هرم، منطبق می‌شود. SC خط راستی است که درصفحهٔ ASC از پای مایل (SD) گذشته است و بنابرشرط، داریم: $\widehat{ASC}=\alpha$. با توجه به برابری (۲) ازمسألهٔ **۳۶۲** داریم:

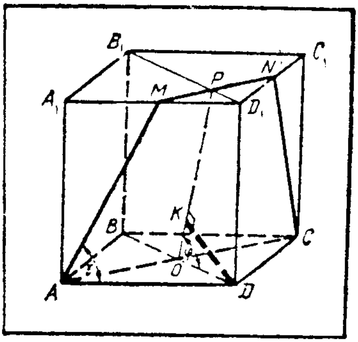
$$\cos\widehat{DSC}=\cos\widehat{DSO}\cdot\cos\widehat{CSO}،$$

یعنی

$$\cos\widehat{DSC}=\cos\frac{\alpha}{۲}\cdot\cos\frac{\alpha}{۲}=\frac{۱+\cos\alpha}{۲}$$

و بنابراین $\widehat{DSC}=\arccos\frac{۱+\cos\alpha}{۲}$.

۳۶۷. درشکل ۱۶۲، مقطع موردنظر، یعنی ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $AMNC$، نشان داده شده است و، بنابرفرض داریم:



شکل ۱۶۲

$$|AB|=a،\ \cos\widehat{MAC}=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$$

روشن است که صفحهٔ مقطع قطری $B_۱BDD_۱$ بر صفحهٔ $AMNC$ عمود است و (OP) فصل مشترک آن‌هاست.

$[DK]$ را عمود بر (OP) رسم می‌کنیم. چون صفحهٔ $BDD_۱$ برصفحهٔ ACN عمود است، بنابراین $[DK]$ بر صفحهٔ ACN عمود می‌شود؛

یعنی $|DK|$ همان فاصلهٔ مجهول است. روشن‌است که $\widehat{DOK}$، معرف زاویهٔ بین دو صفحهٔ ACN و ABC است. $\widehat{DOK}=\varphi$ و $\widehat{MAD}=\gamma$ می‌گیریم. دراین‌صورت

$$|DK|=\frac{a\sqrt{۲}}{۲}\sin\varphi$$

ازطرف دیگر، باتوجه به برابری (۱) ازمسألهٔ ۳۶۱ داریم:

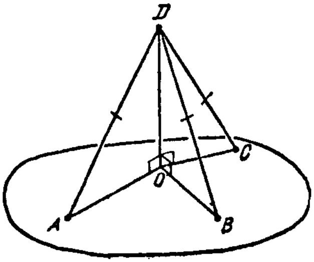
$$\sin\gamma=\sin\varphi\cdot\sin\left(\arccos\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}\right)\Longrightarrow\sin\varphi=\frac{\sqrt{۱۰}}{۳}\sin\gamma$$

اکنون، باتوجه به‌برابری (۲) درمسألهٔ ۳۶۲، می‌نویسیم:

$$\cos\left(\arccos\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}\right)=\cos\gamma\cdot\cos۴۵^\circ\Longrightarrow\cos\gamma=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

درنتیجه، سرانجام به‌دست می‌آید:

$$|DK|=\frac{a\sqrt{۲}}{۲}\cdot\frac{\sqrt{۱۰}}{۳}\cdot\frac{۲}{\sqrt{۵}}=\frac{۲}{۳}a$$



شکل ۱۶۳

۳۶۸. می‌دانیم، اگرپاره خط راستی رابه‌موازات خود، درفضا جابه‌جاکنیم، طول تصویرقائم آن بریک صفحه، تغییر نمی‌کند.

پاره‌خطهای راست مفروض راطوری به موازات خود جابه‌جا می‌کنیم تا به صورت پاره خطهای راست DA، DB و DC ــ بانقطهٔ مشترك D ــ درآیند. اگر نقطه‌های A، B و C روی یك خط راست باشند، آن‌وقت، هرصفحه‌ای‌که ازاین خط راست بگذرد، صفحهٔ موردنظراست.

اگر A، B و C روی یك خط راست نباشند،صفحه‌ای مثل α رامشخص می‌کنند.ثابت می‌کنیم، صفحهٔ α، صفحهٔ مطلوب است.

اگرنقطهٔ D به صفحهٔ α تعلق داشته باشد، درستی حکم روشن است. بنابراین، D را بیرون α و O راتصویرقائم آن برصفحهٔ α می‌گیریم(شکل ۱۶۳)؛دراین‌صورت،پاره‌خطهای راست OA، OB و OC، به‌ترتیب، تصویرهای قائم پاره‌خطهای راست DA، DB و DC هستند و برابری مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ DOA، DOB و DOC، به معنای برابری این تصویرهاست. صفحهٔ α، صفحهٔ موردنظرماست.

۳۶۹. روشن است‌که

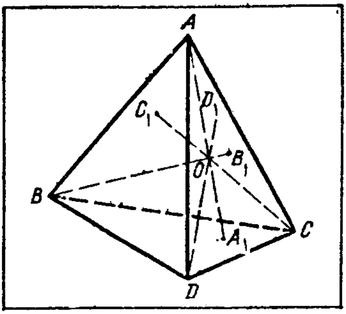
$$V_{OABC}+V_{OBCD}+V_{OCDA}+V_{ODAB}=V_{ABCD}$$

(شکل ۱۶۴)، یعنی

$$\frac{V_{OABC}}{V_{ABCD}}+\frac{V_{OBCD}}{V_{ABCD}}+\frac{V_{OCDA}}{V_{ABCD}}+\frac{V_{ODAB}}{V_{ABCD}}=1$$

درضمن می‌دانیم، حجم دوهرم با قاعده‌های برابر به نسبت ارتفاع‌های آن‌هاست. درنتیجه

$$\frac{|OA_1|}{|AA_1|}+\frac{|OB_1|}{|BB_1|}+\frac{|OC_1|}{|CC_1|}+\frac{|OD_1|}{|DD_1|}=1$$



شکل ۱۶۴

که به ترتیب به‌این صورت‌ها درمی‌آید:

$$\frac{|AA_1|-R}{|AA_1|}+\frac{|BB_1|-R}{|BB_1|}+\frac{|CC_1|-R}{|CC_1|}+\frac{|DD_1|-R}{|DD_1|}=1;$$

$$\frac{1}{|AA_1|}+\frac{1}{|BB_1|}+\frac{1}{|CC_1|}+\frac{1}{|DD_1|}=\frac{3}{R}$$

ازطرف دیگر، باتوجه به‌نابرابری کوشی داریم:

$$(|AA_1|+|BB_1|+|CC_1|+|DD_1|)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{|AA_1|}+\frac{1}{|BB_1|}+\frac{1}{|CC_1|}+\frac{1}{|DD_1|}\right)\geqslant 4$$

وبنابراین

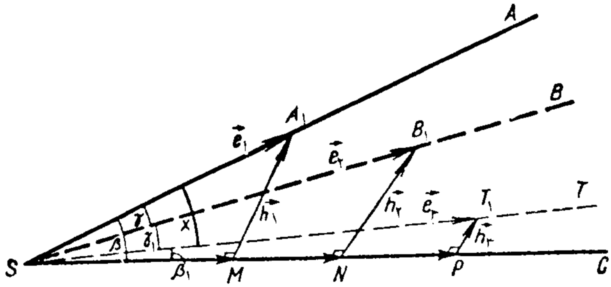
$$|AA_1|+|BB_1|+|CC_1|+|DD_1|\geqslant\frac{16}{3}R$$

۳۷۵. روی نیم‌خط‌های راست SA، SB و ST (شکل ۱۶۵) و از نقطهٔ S، بردارهای واحد

$$\overrightarrow{SA_1}=\overrightarrow{e_1},\quad \overrightarrow{SB_1}=\overrightarrow{e_2},\quad \overrightarrow{ST_1}=\overrightarrow{e_3}$$

را جدا می‌کنیم. پاره‌خط‌های راست A_1M، B_1N و T_1P را بر نیم‌خط راست SC عمود می‌کنیم و بردارهای $\overrightarrow{MA_1}=\overrightarrow{h_1}$، $\overrightarrow{NB_1}=\overrightarrow{h_2}$ و $\overrightarrow{PT_1}=\overrightarrow{h_3}$ را درنظر می‌گیریم. روشن است که

$$(\widehat{\overrightarrow{h_1},\overrightarrow{h_2}})=(\widehat{\overrightarrow{h_1},\overrightarrow{h_3}})=\varphi \qquad (1)$$



شکل ۱۶۵

که در آن، φ عبارت است از زاویهٔ دووجهی بایال SC. به جزاین

$$\vec{e}_1 = \overrightarrow{SM} + \vec{h}_1 \qquad (۲)$$

$$\vec{e}_2 = \overrightarrow{SN} + \vec{h}_2 \qquad (۳)$$

$$\vec{e}_3 = \overrightarrow{SP} + \vec{h}_3 \qquad (۴)$$

برابری (۲) را در برابری‌های (۳) و (۴)، ضرب می‌کنیم. باتوجه به‌این‌که

$$\overrightarrow{SM} \perp \vec{h}_2,\ \ \overrightarrow{SN} \perp \vec{h}_1,\ \ \overrightarrow{SM} \perp \vec{h}_3,\ \ \overrightarrow{SP} \perp \vec{h}_1$$

به‌ترتیب به‌دست می‌آید:

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{SN} + \vec{h}_1 \cdot \vec{h}_2;$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{SP} + \vec{h}_1 \cdot \vec{h}_3 \qquad (۵)$$

ازمثلث‌های قائم‌الزاویهٔ SMA_1، SNB_1 و SPT_1 داریم:

$$|\overrightarrow{SM}| = \cos\beta,\ \ |\vec{h}_1| = \sin\beta,\ \ |\overrightarrow{SN}| = \cos\alpha,\ \ |\vec{h}_2| = \sin\alpha,$$

$$|\overrightarrow{SP}| = \cos\beta_1,\ \ |\vec{h}_3| = \sin\beta_1 \qquad (۶)$$

فرض می‌کنیم:

$$\widehat{AST} = (\vec{e}_1, \vec{e}_3) = x \qquad (۷)$$

درضمن $\gamma = (\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2})$ و $(\widehat{\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SN}}) = (\widehat{\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SP}}) = 0$. بنابراین، براساس برابری‌های

(۶) و با توجه به (۱) و (۷)، می‌توان برابری‌های (۵) را این‌طور نوشت:

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\varphi,$$

$$\cos x = \cos\beta_1\cos\beta + \sin\beta_1\sin\beta\cos\varphi$$

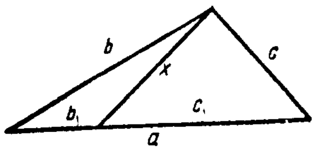
که اگر $\cos\varphi$ را بین آن‌ها حذف کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\cos x = \frac{\cos\gamma\sin\beta_1 + \cos\beta\sin\gamma_1}{\sin\alpha} \qquad (8)$$

یادداشت. دستور (۸)، دستور «ستووارت» برای کنج سه وجهی است و بـا دستور ستووارت برای مثلث، شباهت دارد:

$$x^2 = \frac{c^2b_1 + b^2c_1 - ab_1c_1}{a}$$

که در آن، a و b و c طول ضلع‌های مثلث، x طول پاره خط راستی‌که رأس را به‌نقطه‌ای ازضلع روبه رو وصل می‌کند و b_1 و c_1 طول قطعه‌هایی ازاین ضلع است‌که بـه وسیلهٔ نقطهٔ انتخابی تقسیم شده است (شکل ۱۶۶).



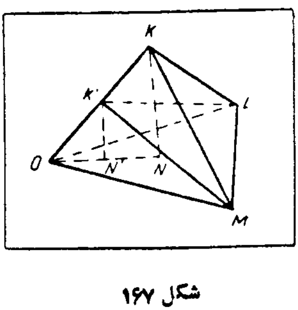
شکل ۱۶۶

اگر $(ST]$ نیمساز زاویهٔ BSC بـاشد، آن‌وقت صفحه‌ای راکه ازیك یال کنج و نیمساز زاویهٔ مسطحهٔ‌وجه روبه‌روی این یال می‌گذرد، صفحهٔ میانهٔ کنج می‌گویند. (AST) راصفحهٔ میانه می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\widehat{AST} = \delta$. اگر دردستور (۸) قراردهیم، $x = \delta$، $\beta_1 = \gamma_1 = \frac{\alpha}{2}$، آن‌وقت

$$\cos\delta = \frac{\cos\beta + \cos\gamma}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$

۳۷۱. اگر درچهاروجهی دلخواه $KOML$ (شکل ۱۶۷)، K' را روی $[OK]$ انتخـاب و عمودهای KN و $K'N'$ رابر صفحه OML فرود آوریم، روشن است که

$$\frac{V_{OK'LM}}{V_{OKLM}} = \frac{|K'N'|}{|KN|} = \frac{|OK'|}{|OK|}$$



شکل ۱۶۷

با توجه به‌این نکته، دربارهٔ مسألهٔ خودمان داریم:

$$\frac{V_{OA'BC}}{V_{OABC}}=\frac{|OA'|}{|OA|},\quad \frac{V_{OB'A'C}}{V_{OBA'C}}=\frac{|OB'|}{|OB|},\quad \frac{V_{OC'A'B'}}{V_{OCA'B'}}=\frac{|OC'|}{|OC|}$$

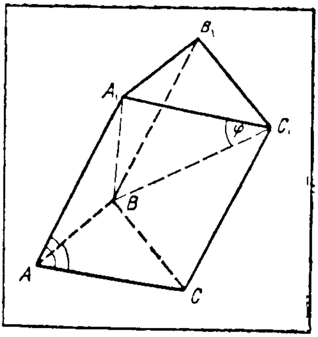
ازضرب این سه برابری به‌دست می‌آید:

$$\frac{V_{OA'B'C'}}{V_{OABC}}=\frac{|OA'|}{|OA|}\cdot\frac{|OB'|}{|OB|}\cdot\frac{|OC'|}{|OC|}=\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{۳}\cdot\frac{|OC'|}{|OC|}$$

وچون دوچهاروجهی $OABC$ و $OA'B'C'$، حجم‌هایی برابردارند:

$$\frac{۱}{۶}\cdot\frac{|OC'|}{|OC|}=۱\Longrightarrow\frac{|OC'|}{|OC|}=۶$$

۳۷۲. چون همهٔ یال‌های منشور با هم برابرند، بنابراین مثلث ABC متساوی‌الاضلاع وزاویهٔ BAC برابر ۶۰ درجه می‌شود (شکل ۱۶۸). درنتیجه



شکل ۱۶۸

$$\widehat{A_1AB}=\widehat{A_1AC}=\widehat{BAC}=\alpha=۶۰^\circ$$

پس

$$S_1=S_{AA_1C_1C}=|AA_1|\cdot|AC|\cdot\sin ۶۰^\circ=\frac{۱}{۲}a^۲\sqrt{۳},$$

$$S_۲=S_{ABC}=\frac{۱}{۴}a^۲\sqrt{۳}$$

$$S_۳=S_{BB_1C_1C}=|CC_1|\cdot|BC|=a^۲,\ (\widehat{BAC_1}=۹۰^\circ)$$

واگرمساحت سطح کل منشور را S بگیریم:

$$S=۲S_1+۳S_۲+S_۳=\frac{۱}{۲}a^۲(۳\sqrt{۳}+۲)$$

اکنون‌به محاسبهٔ زاویهٔ φ بین‌خط‌های راست BC_1 و AC می‌پردازیم. چون (AC) با (A_1C_1) موازی است، بنابراین $\widehat{A_1C_1B}=\varphi$. چون بنابه فرض $|A_1C_1|=a$ و $|A_1B|=a$، بنابراین $|BC_1|=a\sqrt{۲}$ (به‌عنوان قطرمربع BB_1C_1C). به‌این‌ترتیب

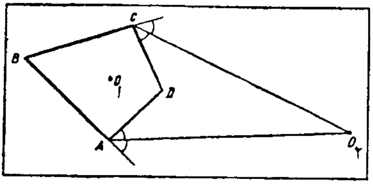
$$|A_1B|^۲+|A_1C_1|^۲=|BC_1|^۲$$

و بنابراین $\widehat{BA_1C_1}=۹۰^\circ$، $\widehat{A_1BC_1}=\widehat{A_1C_1B}=\varphi=۴۵^\circ$.

۳۷۳. روشن است که دراین هرم، پای ارتفاع ازضلع‌های قاعده (یا دقیق‌تر، از

خط‌های راستی که ازضلع‌های قاعده‌گذشته‌اند)، به‌یك فاصله است. از این‌جا نتیجه می‌شود که چهارضلعی‌قاعده نمی‌تواند متوازی‌الاضلاع باشد ومثلاً (شکل ۱۶۹):

$$|AB|=|BC|=10, \quad |AD|=|DC|=6$$



شکل ۱۶۹

دو نقطهٔ O_1 و O_2 وجوددارند که ازخط‌های راست شامل ضلع‌های چهارضلعی $ABCD$ به‌یك فاصله‌اند: O_1 مرکزدایرهٔ محاطی چهارضلعی و O_2 نقطهٔ برخورد نیمسازهای زاویه‌های خارجی چهارضلعی در رأس‌های A و C. باتوجه به‌تقارن، نقطهٔ O روی خط راست BD قراردارد.

با توجه به شرط‌های مسأله، فاصلهٔ پای ارتفاع وارد برقاعدهٔ $ABCD$، از ضلع‌های هرم، برابزاست با

$$r=7\cot g\,60^\circ=\frac{7\sqrt{3}}{3}$$

اگر نقطهٔ O_1 پای ارتفاع باشد، آن‌وقت

$$S_{ABCD}=p\cdot r=\frac{112\sqrt{3}}{3}$$

(p، نصف محیط چهارضلعی $ABCD$ است). ازطرف دیگر

$$S_{ABCD}\leqslant|AB|\cdot|AD|=60$$

درحالی‌که $\frac{112\sqrt{3}}{3}>60$. این تناقض، به‌معنای آن‌است که، تصویر قائم رأس هرم برصفحهٔ قاعده، نقطهٔ O_2 است. دراین‌صورت

$$S_{ABCD}=S_{ABO_2}+S_{BCO_2}-S_{DCO_2}-S_{DAO_2}=$$

$$=(10-6)\frac{7\sqrt{3}}{3}=\frac{28\sqrt{3}}{3}$$

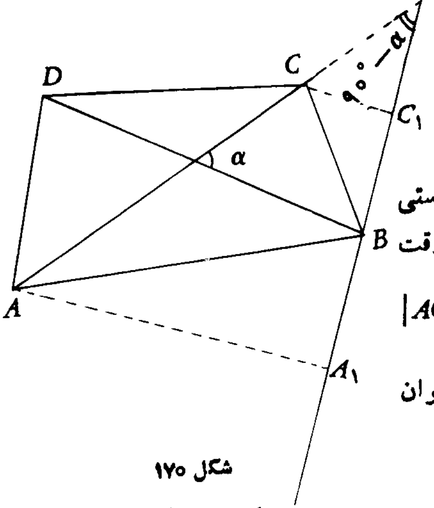
وبرای حجم هرم داریم:

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{28\sqrt{3}}{3}\cdot 7=\frac{196\sqrt{3}}{9}$$

۳۷۴. ابتدا چند قضیهٔ ساده ازهندسهٔ روی صفحه رابه یاد می‌آوریم.

۱) می‌دانیم S، مساحت چهارضلعی $ABCD$ رامی‌توان با این دستور، به‌دست آورد

(شکل ۱۷۰):



شکل ۱۷۰

$$S=\frac{1}{2}|BD|\cdot|AC|\cdot\sin\alpha$$

که اگرمثلاً تصویرقائم $[AC]$ رابـرخط راستی عمود بر (BD)، با $[A_1C_1]$ نشان دهیم، آن‌وقت

$$|AC|\sin\alpha=|AC|\cos(90^\circ-\alpha)=|A_1C_1|$$

یعنی $S=\frac{1}{2}|BD|\cdot|A_1C_1|$. این قضیه رامی‌توان این‌طور بیان‌کرد:

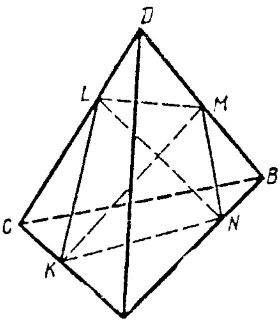
مساحت هرچهارضلعی، برابراست بانصف حاصل‌ضرب یکی ازقطرها در تصویر قائم قطردیگربرصفحه‌ای که برقطراول عمود است.

۲) طول نیمسازداخلی هرمثلث،ازطول میانه‌ای‌که ازهمان‌رأس‌گذشته است،تجاوز نمی‌کند.

۳) طول هرمیانهٔ مثلث، ازنصف مجموع طول‌های دوضلعی‌که دردوطرف میانه قرار دارند، تجاوز نمی‌کند.

[اثبات قضیه‌های ۲) و۳) دشوارنیست، ولی خودتان‌آن‌ها را ثابت‌کنید.]

اکنون به حل مسأله می‌پردازیم.

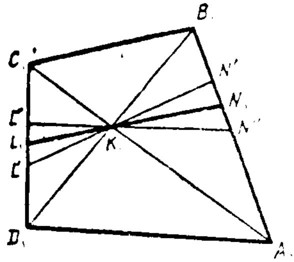


شکل ۱۷۱

$KLMN$ را مقطعی از چهـار وجهی $ABCD$ می‌گیریم (شکل ۱۷۱). ثابت می‌کنیم مساحت‌این مقطع از مساحت یکـی از مثلث‌های AMC و DKB تجاوز نمی‌کند (درحالتی‌کـه مقطع، یك مثلث باشد، می‌تـوان فرض‌کرد، نقطه‌های L و M برنقطهٔ D منطبق‌اند).

چهاروجهی رابرصفحه‌ای عمود بر (KM)تصویر مـی‌کنیم (شکل ۱۷۲). چـون مساحت مقطع $KLMN$ بـرابـر $\frac{1}{2}|KM|\cdot|L_1N_1|$ ومساحت مثلث‌های AMC و DKB، به‌ترتیب، برابر $\frac{1}{2}|KM|\cdot|A_1C_1|$ و $\frac{1}{2}|KM|\cdot|D_1B_1|$ است، بـایـد ثـابت‌کنیم $|L_1N_1|$، ازیکی‌ازقطرهای‌چهارضلعی $A_1B_1C_1D_1$،یعنی $|A_1C_1|$ یا $|B_1D_1|$تجاوزنمی‌کند. به‌زبان دیگر، باید ثابت‌کنیم، درهرچهارضلعی محدب، طول هرپاره خط راستی‌که ازمحل

برخورد دوقطر بگذرد و بــه دوضلع چهارضلعی محدود باشد، ازطول یکی ازقطرها تجاوز نمی‌کند.



شکل ۱۷۲

دو پاره خط راست دیگر $L'N'$ و $L''N''$ راکه ازنقطهٔ K_1 محل برخورد قطرهای چهارضلعی می‌گذرند طوری درنظرمی‌گیریم که بـا (L_1N_1) زاویه‌های برابر بسازند. (شکل ۱۷۲ راببینید). باتوجه به‌قضیه‌های ۲)و ۳) درابتدای حل، داریم:

$$|K_1N_1|\leqslant\frac{1}{2}(|K_1N'|+|K_1N''|),$$

$$|K_1L_1|\leqslant\frac{1}{2}(|K_1L'|+|K_1L''|)$$

ازمجموع این نابرابری‌ها به‌دست می‌آید:

$$|L_1N_1|\leqslant\frac{1}{2}(|L'N'|+|L''N''|)$$

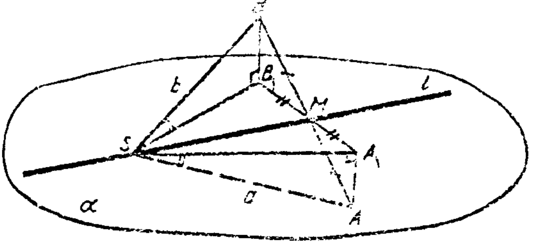
یعنی $|L_1N_1|$، ازیکی ازمقدارهای $|L'N'|$ و $|L''N''|$ تجاوزنمی‌کند. به‌این‌ترتیب، حداکثر مقدار برای طول پاره خط راست L_1N_1 وقتی بــه دست می‌آیدکه درموقعیت حدی خود باشد، یعنی وقتی‌که $[L_1N_1]$ برقطر $[A_1C_1]$ ویا $[B_1D_1]$ منطبق باشد؛ واین، همان‌چیزی است‌که می‌خواستیم ثابت‌کنیم.

اثبات حکم مسأله را، می‌توان تمام‌شده تلقی‌کرد، زیرا به‌همین‌ترتیب (وحتی‌ساده‌تر) می‌توان‌ثابت‌کردکه، مثلاً، مساحت مثلث AMC ازمساحت یکی‌ازوجه‌های ADC یاABC تجاوز نمی‌کند (باتصویر برصفحهٔ عمود بر(AC) وغیره).

۳۷۵. نقطهٔ S را در فضا درنظرمی‌گیریم و، از آن‌جا، خطهای راست a، b و c را موازی خطهای راست مفروض a_1، b_1 و c_1 رسم می‌کنیم. برای ما حالتی جالب است‌که، این سه خط راست، روی یك صفحه نباشند. l و l'، محورهای تقارن دوخط راست a و b را رسم می‌کنیم. اگرصفحهٔ α را از l و c (یا l' و c) بگذرانیم، با a و b زاویه‌های‌برابر می‌سازد. درواقع، تقارن محوری نسبت به l، a را به b، b رابه a و α رابه خودش تبدیل می‌کند، یعنی $(\widehat{a, \alpha})=(\widehat{b, \alpha})$.

برعکس، ثابت می‌کنیم،اگرصفحهٔ α از S بگذرد وبا a و b زاویه‌های برابر بسازد، آن وقت از l یا از l' می‌گذرد.

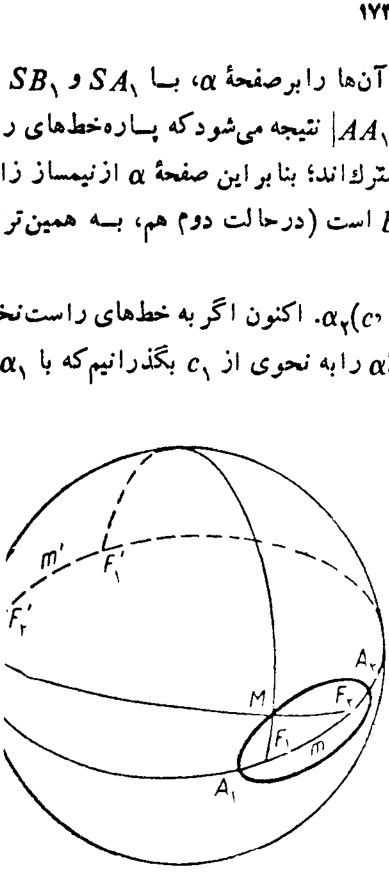
روی خطهای راست a و b وازنقطهٔ S، پاره‌خطهای راست SA و SB را برابربا



شکل ۱۷۳

هم جدا می‌کنیم (دوحالت) و تصویرهای قائم آن‌ها رابرصفحهٔ α، بـا SA_1 و SB_1 نشان می‌دهیم (شکل ۱۷۳). از برابری $|AA_1|=|BB_1|$ نتیجه می‌شودکه پـاره‌خط‌های راست AB و A_1B_1 درنقطهٔ وسط خود، یعنی M، مشترك‌اند؛ بنابراین صفحهٔ α ازنیمساز زاویـهٔ B_1SA_1 می‌گذرد وشامل l محور تقارن a و b است (درحالت دوم هم، بـه همین‌ترتیب، ثابت می‌شود).

مسأله دوجواب‌دارد:$\alpha_1=(c, l)$ و$\alpha_2(c, l')$. اکنون اگر به خط‌های راست‌نخستین a_1، b_1 و c_1 برگردیم، باید صفحه‌های α'_1 و α'_2 رابه نحوی از c_1 بگذرانیم‌که با α_1 وα_2 موازی باشند.



شکل ۱۷۴

۳۷۶. بیضی‌کروی باکانون‌های F_1 وF_2 درشکل۱۷۴، باخط پر درپائین نشان داده شده است:

$$\widehat{MF_1}+\widehat{MF_2}=\widehat{A_1mA_2}$$

F'_1 را قرینهٔ F_1 و F'_2 راقرینهٔ F_2 نسبت به مرکزکره فرض می‌کنیم.دراین‌صورت، بـرای هرنقطهٔ دلخواه M ازمحیط بیضی کروی مفروض داریم:

$$\widehat{MF'_1}+\widehat{MF'_2}=(\pi-\widehat{F_1M})+$$
$$+(\pi-\widehat{F_2M})=2\pi-(\widehat{MF_1}+\widehat{MF_2})=2\pi-\widehat{A_1mA_2}=\widehat{A_1m'A_2}$$

یادداشت. به‌این‌ترتیب، هربیضی‌کروی دارای دوجفت‌کانـون (هرجفت قرینهٔ جفت دیگر) ودارای دوقطربزرگتر (به مجموع 2π) است.

به‌همین‌ترتیب،هردونقطه ازسطح کره، می‌تواند به‌عنوان‌کانون دوبیضی‌کروی(که‌نسبت

به مرکز کره قرینهٔ یکدیگرند) درنظر گرفته شود.

۳۷۷. اگر AB وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای باشد که قاعدهٔ منشور را تشکیل می‌دهد، داریم: $|CB|=|AB|\sin\alpha$ ، $|CA|=|AB|\cos\alpha$ و

$$2S=|CB|\cdot|CA|=|AB|^2\cdot\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}|AB|^2\sin 2\alpha$$

از آن‌جا $|AB|=2\sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}}$. به‌این‌ترتیب، ارتفاع وسپس حجم منشور به‌دست می‌آید:

$$h=\frac{Q}{2\sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}}}=\frac{Q\sqrt{\sin 2\alpha}}{2\sqrt{S}}\,;V=\frac{1}{2}Q\sqrt{\sin 2\alpha\cdot S}$$

چون $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$، پس $0<\sin 2\alpha\leqslant 1$، یعنی حجم منشور به ازای $\alpha=\frac{\pi}{4}$ به حداکثر مقدار خود می‌رسد (وقتی‌که قاعدهٔ منشور، مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی باشد).

۳۷۸. حجم چهاروجهی به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$V=\frac{4}{5}\sin^2\alpha\cos^5\alpha$$

فرض می‌کنیم: $f(\cos\alpha)=(1-\cos^2\alpha)\cos^5\alpha$، دراین‌صورت

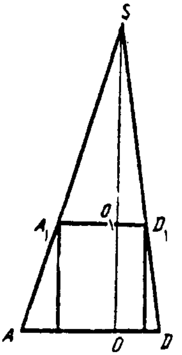
$$f'(\cos\alpha)=5\cos^4\alpha-7\cos^6\alpha$$

(مراقب باشید، نسبت به $\cos\alpha$ مشتق گرفتیم، نه نسبت به α). چون $\cos\alpha\neq 0$ (هرسه یال جانبی چهاروجهی نمی‌توانند برقاعده عمود باشند)، بنابراین برای $f'(\cos\alpha)=0$ به‌دست می‌آید:

$$\cos^2\alpha=\frac{5}{7}\text{ ، }\cos\alpha=\sqrt{\frac{5}{7}}$$

وقتی α به سمت $\frac{\pi}{2}$ میل کند، مقدار حجم به‌سمت صفر میل می‌کند، بنابراین حجم چهاروجهی به‌ازای $\alpha=\arccos\sqrt{\frac{5}{7}}$ به حداکثر مقدار خود می‌رسد.

۳۷۹. درشکل ۱۷۵، مقطع هرم باصفحه‌ای‌که ازیال جانبی SA وارتفاع SO هرم می‌گذرد، دیده می‌شود؛ $[SD]$ ارتفاع وجه جانبی و O_1 مرکز قاعدهٔ بالای منشور است. $x=[SO_1]$ می‌گیریم. دراین‌صورت



شکل ۱۷۵

$$\frac{x}{x+۱}=\frac{۱}{\sqrt{۳}|AO|} \Longrightarrow |AO|=\frac{x+۱}{x\sqrt{۳}}$$

و برای حجم هرم به‌دست می‌آید:

$$V=\frac{\sqrt{۳}(x+۱)^{۳}}{x^{۲}}\cdot\frac{\sqrt{۳}}{۱۲}$$

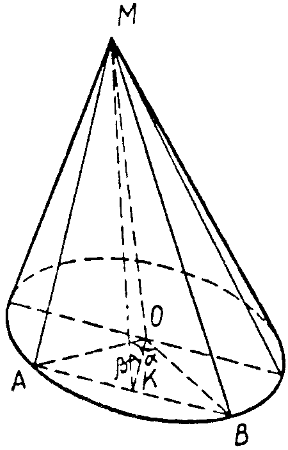
فرض می‌کنیم $f(x)=\frac{(x+۱)^{۳}}{x^{۲}}$، از آن‌جا

$$f'(x)=\frac{۳(x+۱)^{۲}x^{۲}-۲x(x+۱)^{۳}}{x^{۴}}=\frac{(x+۱)^{۲}(x-۲)}{x^{۳}}$$

چون $x>۰$، پس $f'(x)$ تنها به‌ازای $x=۲$ برابر صفر می‌شود و، به‌سادگی روشن می‌شود که، حجم هرم به‌ازای همین $x=۲$ به حداقل مقدار خود می‌رسد.

پاسخ. کمترین مقدار حجم هرم محیطی برابر $\frac{۹\sqrt{۳}}{۱۶}$ است که برای هرمی با ارتفاع برابر ۳، به‌دست می‌آید.

۳۸۰. زاویهٔ مجهول را γ می‌گیریم و فرض می‌کنیم $|KB|=x$ و $|KM|=y$ (شکل ۱۷۶). داریم:



شکل ۱۷۶

$$|OK|=x\,cotg\frac{\alpha}{۲}\ (\text{در مثلث } KOB)$$

$$|OK|=y\cos\beta\ (\text{در مثلث } OKM)$$

یعنی $x\,cotg\frac{\alpha}{۲}=y\cos\beta$ و $\frac{x}{y}=\cos\beta\, tg\frac{\alpha}{۲}$؛ ولی در مثلث KMB:

$$\frac{x}{y}=tg\frac{\gamma}{۲}$$

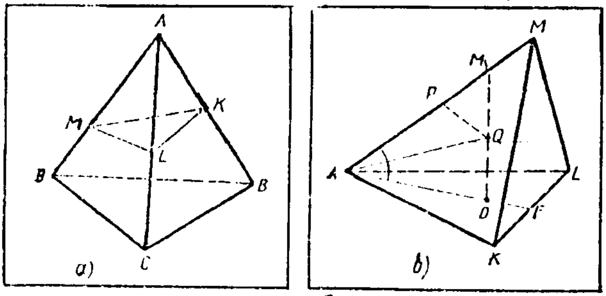
به‌این ترتیب

$$tg\frac{\gamma}{۲}=\cos\beta\, tg\frac{\alpha}{۲} \Longrightarrow \gamma=۲\,\mathrm{arc}tg\left(\cos\beta\, tg\frac{\alpha}{۲}\right)$$

۳۸۱. چهاروجهی $ABCD$ به‌دلیل برابر بودن همهٔ یال‌ها، یك چهاروجهی منتظم است. اگر طول یال آن‌را a بگیریم، حجم آن $V=\frac{a^{۳}\sqrt{۲}}{۱۲}$ و شعاع کرهٔ محیطی آن $R=\frac{a\sqrt{۶}}{۴}$

می‌شود، یعنی $\frac{a\sqrt{۶}}{۴}=۶\sqrt{۶}$ یا $a=۱۲$ و بنابراین

$$V_{ABCD}=۲\times ۲۴^{۲}\sqrt{۲}\ ،\ \frac{V_{AKLM}}{V_{ABCD}}=\frac{۱۹۲\sqrt{۲}}{۲\times ۲۴^{۲}\sqrt{۲}}=\frac{۱}{۶}$$



شکل ۱۷۷

ازطرف دیگر، باتوجه به شکل ۱۷۷-a داریم:

$$\frac{V_{AKLM}}{V_{ABCD}}=\frac{|AK|}{|AB|}\cdot\frac{|AM|}{|AD|}\cdot\frac{|AL|}{|AC|}=\frac{۲۴-۱۲}{۲۴}\cdot\frac{۲۴-۸}{۲۴}\cdot\frac{|AL|}{۲۴}=\frac{|AL|}{۷۲}$$

از آن‌جا $\frac{۱}{۶}=\frac{|AL|}{۷۲}$ ، $|AL|=۱۲$.

همهٔ زاویه‌های رأس A درهرم $AKLM$ برابر ۶۰ درجه است و برای یال‌هایی‌که ازاین رأس خارج می‌شوند، داریم (شکل ۱۷۷-b):

$$|AK|=|AL|=۱۲\ ،\ |AM|=۱۶$$

O رامرکزمثلث متساوی‌الاضلاع AKL می‌گیریم ونقطهٔ $M_۱$ را روی یال AM بـا شرط $|AM_۱|=۱۲$ انتخاب می‌کنیم. دراین‌صورت، همهٔ یال‌های هرم $AKLM_۱$ بـاهم برابرمی‌شوندو، برای ارتفاع آن، داریم: $|M_۱O|=۴\sqrt{۶}$. نقطهٔ Q مرکز کرهٔ محیطی چهار-وجهی $AKLM$ درنقطهٔ برخورد $(OM_۱)$ باعمودمنصف $[AM]$ واقع است.اگر P وسط یال AM باشد،آن وقت $|AQ|$ (شعاع کرهٔ محیطی چهاروجهی $AKLM$)، برابر است با قطر دایرهٔ محیطی مثلث APO،که در آن داریم:

$$|AO|=۴\sqrt{۳}،\ \ |AP|=۸،\ \ \cos\widehat{PAO}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}،\ \ \sin\widehat{PAO}=\sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

باتوجه به قضیهٔ‌کسینوس‌ها به‌دست می‌آید $|PO|=۴\sqrt{۳}$ و، سپس، بـاتوجه بـه دستور $۲R=\frac{a}{\sin\hat{A}}$، نتیجه می‌شود: $|AQ|=\frac{۴\sqrt{۳}}{\sqrt{\frac{۲}{۳}}}=۶\sqrt{۲}$؛ یعنی‌شعاع کرهٔ محیطی چهاروجهی

$AKLM$ برابر است با $۶\sqrt{۲}$.

برای محاسبهٔ شعاع کرهٔ محاطی، می‌توان از دستور $V=\frac{۱}{۳}Sr$ استفاده کرد (که در آن، S مساحت کل و $V=۱۹۲\sqrt{۲}$) داریم:

$$S_{AMK}=S_{AML}=۴۸\sqrt{۳}\ ;\ S_{LMK}=۱۲\sqrt{۴۳}\ ;$$

$$S=۱۳۲\sqrt{۳}+۱۲\sqrt{۴۳}$$

از آن‌جا

$$r=\frac{۳\times ۱۹۲\sqrt{۲}}{۱۳۲\sqrt{۳}+۱۲\sqrt{۴۳}}=\frac{۴۸\sqrt{۲}}{۱۱\sqrt{۳}+۱۲\sqrt{۴۳}}$$

و مجموع موردنظر مسأله، چنین می‌شود:

$$۶\sqrt{۲}+\frac{۴۸\sqrt{۲}}{۱۱\sqrt{۳}+۱۲\sqrt{۴۳}}$$

۳۸۲. درهرم $SABC$ (که قاعدهٔ آن مثلثی متساوی‌الاضلاع است و، درضمن، سه‌یال جانبی‌آن باهم برابرند)، خطهای راست SA و BC برهم عمودند و، اگر L و M وسط یال‌های BC و SA باشند، (LM) عمود مشترك (SA) و (BC)، در صفحهٔ SAH واقع است (شکل ۱۷۸–a). روشن است که نقطهٔ O، نقطهٔ برخورد (LM) و (SH)، همان‌محل برخورد (SH) باصفحه‌ای است که از B بر (SA) عمود شده است (صفحهٔ BCM). در مثلث SLA داریم:

$$|LA|=۳\sqrt{۳}\ ،\ |HA|=۲\sqrt{۳}\ ،\ |LH|=\sqrt{۳}\ ،\ |SH|=\sqrt{۱۵}$$

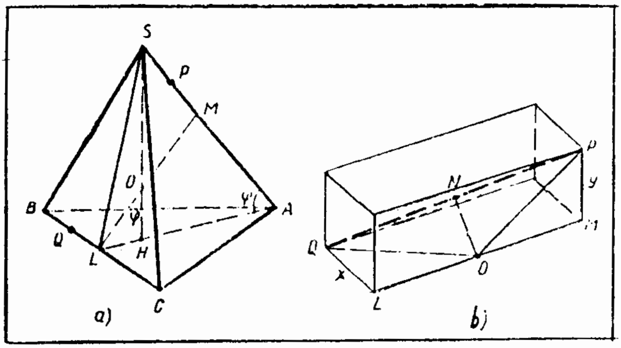
اگر $\widehat{SAH}=\varphi$، آن‌وقت $tg\varphi=\frac{|SH|}{|AH|}=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ و

$$|LM|=|LA|\cdot\sin\varphi=\frac{۳\sqrt{۳}tg\varphi}{\sqrt{۱+tg^۲\varphi}}=\sqrt{۱۵}\ ;\ |LO|=\frac{|LN|}{\sin\varphi}=\frac{۳}{۵}\sqrt{۱۵}$$

$|QL|=x$ و $|PM|=y$ می‌گیریم و به مکعب مستطیل با یال‌های $[QL]$، $[LM]$ و $[MP]$ توجه می‌کنیم (شکل ۱۷۸–b). درمثلث QOP داریم:

$$|OQ|=\sqrt{x^۲+\frac{۲۷}{۵}},\ |OP|=\sqrt{y^۲+\frac{۱۲}{۵}},\ |QP|=\sqrt{x^۲+y^۲+۱۵}$$

ارتفاع ON وارد از O بر (QP)، طولی برابر $\sqrt{\frac{۲}{۵}}$ دارد(بنابر شرط، برکرهٔ به‌



شکل ۱۷۸

شعاع $\sqrt{\frac{۲}{۵}}$ و به مرکز O، مماس است). بنابراین

$$|QN|=\sqrt{|QO|^{۲}-|ON|^{۲}}=\sqrt{x^{۲}+۵}, |NP|=\sqrt{y^{۲}+۲}$$

چون $|QN|+|NP|=|QP|$ ، پس

$$\sqrt{x^{۲}+۵}+\sqrt{y^{۲}+۲}=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+۱۵}$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$x^{۲}y^{۲}+۵y^{۲}+۲x^{۲}=۶ \qquad (۱)$$

باید با توجه به شرط (۱)، حداقل مقدار $l=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+۱۵}$ را پیدا کنیم. داریم:

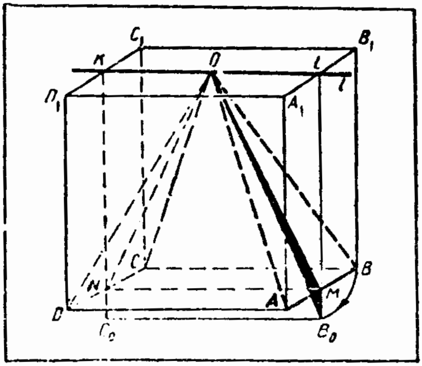
$$y^{۲}=l^{۲}-x^{۲}-۱۵$$

که اگر در (۱) قراردهیم، به‌دست می‌آید:

$$x^{۴}+(۱۸-l^{۲})x^{۲}+۸۱-۵l^{۲}=۰ \qquad (۲)$$

معادلهٔ (۲)، به‌ازای $l^{۲}\geqslant\frac{۸۱}{۵}$ جواب حقیقی دارد، زیرا برای $l^{۲}<\frac{۸۱}{۵}$، همهٔ جمله‌های سمت چپ درمعادلهٔ (۲) غیرمنفی می‌شوند. به‌ازای $l^{۲}=\frac{۸۱}{۵}$، به‌دست می‌آید $x=۰$ و $y=\sqrt{\frac{۶}{۵}}$، یعنی $l=\frac{۹}{\sqrt{۵}}$، حداقل ممکن برای طول $[PQ]$ است.

۰.۳۸۳ M و N را وسط یال‌های AB و CD می‌گیریم و، برای مجسم‌کردن شکلی که ازدوران به‌دست می‌آید، دقت می‌کنیم که مثلث OAB، ضمن دوران‌خود دورخطراست



شکل ۱۷۹

KL، از کدام نقطه‌های صفحهٔ $KLMN$ می‌گذرد (شکل ۱۷۹). دراین‌صورت، روشن می‌شود که، شکل حاصل ازدوران مثلث OAB دور خط راست KL، همان شکل حاصل از دوران مثلث $OMB_\circ$ دور خط راست KL است.

چون $|LM|=a$ ،$|OL|=\frac{a}{\text{۲}}$، $|LB_\circ|=|LB|=\frac{a\sqrt{\text{۵}}}{\text{۲}}$، بنابراین برای حجم‌شکل دوار داریم:

$$V=V_{OB_\circ L}-V_{OML}=\frac{\text{۱}}{\text{۳}}\pi|LB_\circ|^\text{۲}\cdot\frac{a}{\text{۲}}-\frac{\text{۱}}{\text{۳}}\pi|LM|^\text{۲}\cdot\frac{a}{\text{۲}}=$$

$$=\frac{\text{۱}}{\text{۳}}\pi\cdot\frac{a}{\text{۲}}(|LB_\circ|^\text{۲}-|LM|^\text{۲})=\frac{\text{۱}}{\text{۳}}\pi\cdot\frac{a}{\text{۲}}|MB|^\text{۲}=\frac{\text{۱}}{\text{۲۴}}\pi a^\text{۳}$$

یادداشت. اگر بخواهیم حجم حاصل ازدوران هرم $OABCD$ را دور خط راست KL به‌دست آوریم، باید به‌محاسبهٔ حجم شکلی بپردازیم که ازدوران پنج ضلعی $OMB_\circ C_\circ N$ دورخط راست KL به‌دست می‌آید. یعنی

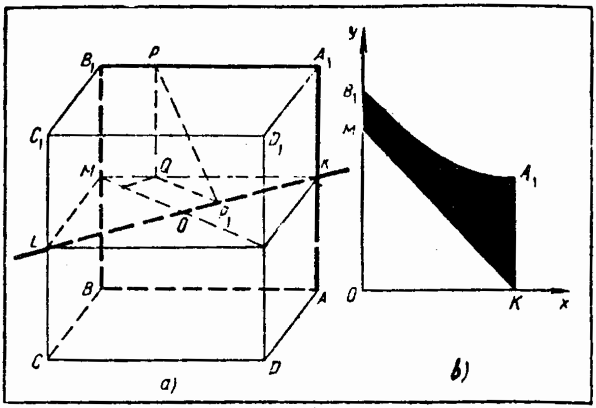
$$V=\pi|LB_\circ|^\text{۲}\cdot|CB_\circ|-\text{۲}\times\frac{\text{۱}}{\text{۳}}\pi|LM|^\text{۲}\cdot|OL|=$$

$$=\pi a\cdot\frac{\text{۵}a^\text{۲}}{\text{۴}}-\pi a\cdot\frac{a^\text{۲}}{\text{۳}}=\frac{\text{۱۱}}{\text{۱۲}}\pi a^\text{۳}$$

۳۸۴. صفحهٔ LMK راکه از خط راست KL گذشته و باصفحهٔ $ABCD$ موازی است، درنظرمی‌گیریم (شکل ۱۸۰–a). نقطهٔ دلخواه P را بر $[A_\text{۱}B_\text{۱}]$ انتخاب و پاره‌خطهای راست PQ و $QP_\text{۱}$ را، به‌ترتیب، موازی باخطهای راست $B_\text{۱}B$ و MO رسم و، سپس، نقطه‌های P و $P_\text{۱}$ را به هم وصل می‌کنیم.

اگر $x=|P_\text{۱}O|$ فرض‌کنیم، آن وقت $|QP_\text{۱}|=\frac{a\sqrt{\text{۲}}}{\text{۲}}-x$ ودراین‌صورت

$$|PP_\text{۱}|^\text{۲}=\left(\frac{a}{\text{۲}}\right)^\text{۲}+\left(\frac{a\sqrt{\text{۲}}}{\text{۲}}-x\right)^\text{۲}=\frac{\text{۳}a^\text{۲}}{\text{۴}}-a\sqrt{\text{۲}}x+x^\text{۲}$$



شکل ۱۸۰

ضمن دوران پاره خط راست MK، سطح جانبی مخروطی تشکیل می‌شود که، شعاع قاعده وارتفاع آن طولی‌برابر $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ دارند؛ وهمچنین از دوران $[AA_1]$، دایره‌ای به‌شعاع برابر $\frac{a}{2}$ واز دوران $[B_1B]$،حلقه‌ای باشعاع‌های $|OM|=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ و

$$|OB_1|=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

به‌وجود می‌آید.

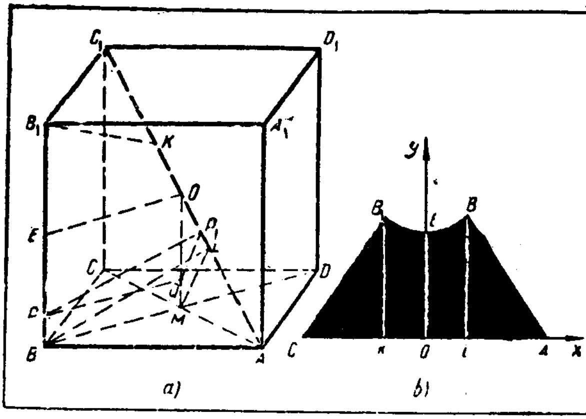
بنابـراین، جسم دوار مورد نظر، ازدوران سطح محدودی‌که درشکل ۱۸۰–b نشان داده شده است، دور خط راست OK، به‌دست می‌آید ودرنتیجه

$$V=\pi\int_0^{\frac{a\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{3a^2}{4}-a\sqrt{2}x+x^2\right)dx-\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3=$$

$$=\pi\left(\frac{3a^2x}{4}-\frac{a\sqrt{2}x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{a\sqrt{2}}{2}}-\frac{1}{12}\pi a^3\sqrt{2}=$$

$$=\pi a^3\sqrt{2}\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{8}\pi a^3\sqrt{2}$$

۳۸۵. پاره‌خط‌های‌راست C_1B_1، C_1D_1 و C_1C بامحور دوران (C_1A)،زاویه‌های برابرمی‌سازند (کسینوس هریك از این زاویه‌ها، برابراست بـا $\frac{1}{\sqrt{3}}$؛ شکـل ۱۸۱–a).



شکل ۱۸۱

بنابراین، جسم دوار، تشکیل شده است از دومخروط که درنتیجهٔ دوران مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ C_1B_1K و BAL دورخط راست AC_1 به وجود می‌آیند، به اضافهٔ شکلی که ضمن دوران LBB_1K به‌دست می‌آید (شکل اخیر رامی‌توان به‌عنوان مجموعهٔ همهٔ پاره خطهای‌راستی مجسم کرد که ازنقطه‌های پاره خط راست B_1B، برخط راست AC_1 عمود شده‌اند). داریم:

$$|C_1K| = |KL| = |LA| = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \quad |B_1K| = |BL| = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

نقطهٔ E وسط یال BB_1 رابه‌نقطهٔ O، مرکز مکعب و،سپس نقطهٔ O رابه محل برخورد قطرهای وجه $BCDA$ وصل می‌کنیم. به محاسبهٔ فاصلهٔ نقطهٔ دلخواه P واقع برخط راست BB_1، ازخط راست CC_1 می‌پردازیم.

چون $[BM] \perp (ACC_1)$ و $[BL] \perp (AC_1)$، پس $[ML] \perp (AC_1)$. $[PQ]$ را عمود بـر (OM) و $[QP_1]$ راموازی (ML) رسم می‌کنیم، دراین‌صورت $|PP_1|$، فاصلهٔ نقطهٔ P ازخط راست AC_1 است. اگر $|OP_1| = x$، آن‌وقت

$$|P_1Q| = x\,tg\,\widehat{MOA} = x\sqrt{2}$$

ولی $|PQ| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$، بنابراین $|PP_1|^2 = \frac{a^2}{2} + 2x^2$.

به‌این نتیجه می‌رسیم کـه جسم دوار مجهول، ازدوران شکلی دور (KL) بـه دست می‌آید که درشکل ۱۸۰ـb نشان داده شده‌است؛ درضمن، معادلهٔ منحنی B_1EB چنین‌است:

$$y = \sqrt{\frac{a^2}{2} + 2x^2}$$

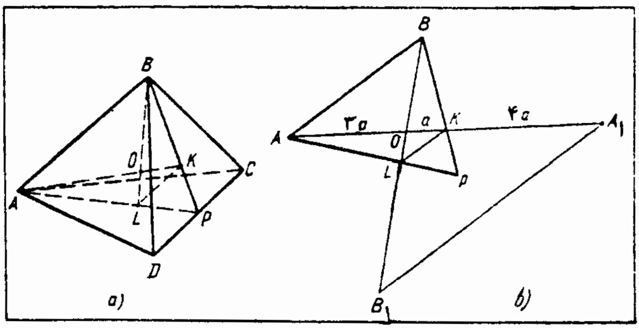
حجم جسم دوار راپیدا می‌کنیم:

$$V=۲\times\frac{۱}{۳}\pi\left(\frac{a\sqrt{۶}}{۳}\right)^{۲}\cdot\frac{a\sqrt{۳}}{۳}+۲\pi\int_{۰}^{\frac{a\sqrt{۳}}{۶}}\left(\frac{a^{۲}}{۲}+۲x^{۲}\right)dx=$$

$$=\frac{۴}{۲۷}\pi a^{۳}\sqrt{۳}+۲\pi\left(\frac{a^{۲}x}{۲}+\frac{۲x^{۳}}{۳}\right)\Bigg|_{۰}^{\frac{a\sqrt{۳}}{۶}}=\frac{۱}{۳}\pi\sqrt{۳}a^{۳}$$

۳۸۶. $ABCD$ راچهاروجهی مفروض ونقطه‌های K، L، M و N را، بـه ترتیب، محل برخورد میانه‌های وجه‌های BCD، ACD، ABD و ABC می‌گیریم. ابتدا، این قضیه راثابت می‌کنیم.

قضیه. پاره‌خطهای راستی‌که، هرراس چهاروجهی را به‌مرکزوجه روبه‌روی آن‌وصل می‌کنند، دریك نقطه به‌هم می‌رسند و درآن نقطه، به‌نسبت (۳:۱) (ازطرف راس) تقسیم می‌شوند.



شکل ۱۸۲

اثبات. دو رأس چهاروجهی، و مثلاً رأس‌های A و B، را درنظـرمی‌گیریم (شکل ۱۸۲–a). روشن است‌که پاره خطهای راست AK و BL، یکدیگر راقطع می‌کنند، زیرا هردوی‌آنها، بـرصفحه‌ای قراردارندکه از رأس‌های A و B ونقطهٔ P (وسط یـال CD) می‌گذرد. O رانقطهٔ برخورد پاره خطهای راست AK و BL می‌گیریم. چون K و L، به‌ترتیب، محل برخوردمیانه‌های وجه‌های BCD و ACD هستند، بنابراین

$$|PK|:|KB|=۱:۲ \quad \text{و} \quad |PL|:|LA|=۱:۲$$

یعنی (LK) و(AB) موازی‌اند و، بنابراین، مثلث ABP بامثلث LKP و، همچنین، مثلث ABO بامثلث LKO متشابه است وداریم:

$$\frac{|AO|}{|OK|}-\frac{|BO|}{|OL|}=\frac{|AB|}{|LK|}=\frac{|BP|}{|KP|}=\frac{۳}{۱}$$

به همین ترتیب، اگر دو رأس A و C، یا دو رأس A و D را در نظر بگیریم، معلوم می‌شود که پاره خطهای راست AK و CM و، همچنین AK و DN، در نقطه‌ای به هم می‌رسند که پاره خط راست AK را، از طرف رأس A، به‌نسبت $(۳:۱)$ تقسیم می‌کنند. در نتیجه، این نقطه‌ها بر O منطبق‌اند. به‌این ترتیب، چهارپاره خط راست AK، BL، CM و DN در نقطهٔ O به هم می‌رسند و، به‌وسیلهٔ این نقطه، به نسبت $(۳:۱)$ تقسیم می‌شوند. قضیه ثابت شد.

اکنون به حل مسأله می‌پردازیم. $A_۱$، $B_۱$، $C_۱$ و $D_۱$ را قرینهٔ راس‌های A، B، C و D، به‌ترتیب، نسبت به‌نقطه‌های K، L، M و N فرض می‌کنیم. چهاروجهی $A_۱B_۱C_۱D_۱$ مجانس چهاروجهی $ABCD$، با ضریب تجانس برابر $\frac{۵}{۳}$ است. درواقع، اگر فرض کنیم $a=|OK|$، بنابر آن چه ثابت کردیم، داریم:

$$|AO|=۳|OK|=۳a \quad و \quad |AK|=۴a$$

وچون بنابر شرط $|KA_۱|=|AK|$ (شکل b-۱۸۲)، پس

$$|OA_۱|=۵a \ و \ |OA_۱|:|OA|=\frac{۵}{۳}$$

به‌همین ترتیب، می‌توان به‌دست آورد:

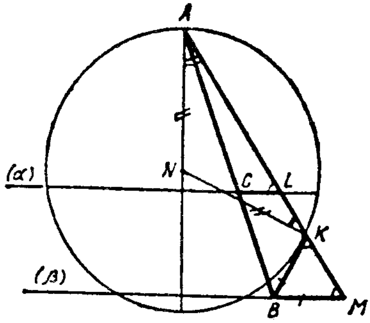
$$|OB_۱|:|OB|=|OC_۱|:|OC|=|OD_۱|:|OD|=\frac{۵}{۳}$$

چون دو چهاروجهی $A_۱B_۱C_۱D_۱$ و $ABCD$ با هم متشابه‌اند، بنابراین، نسبت حجم‌های آن‌ها، برابر است با مکعب ضریب تشابه، یعنی $\frac{۱۲۵}{۲۷}$.

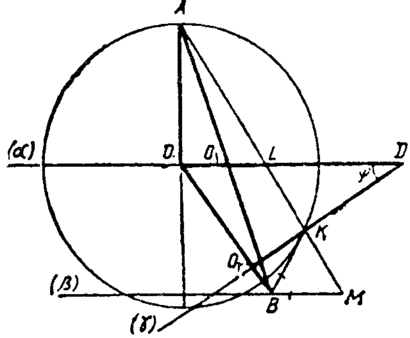
۳۸۷. O و $O_۲$ را، به‌ترتیب، مرکز کره ودایرهٔ دوم می‌گیریم (شکل ۱۸۲). نقطهٔ B راروی خط راست $OO_۲$ (عمود برصفحهٔ γ، صفحهٔ دایره دوم) طوری انتخاب می‌کنیم که برای نقطه‌ای مثل K (یعنی برای هر نقطه) از دایرهٔ دوم، خط راست BK درنقطهٔ K برکره مماس می‌باشد. دراین صورت، در مثلث قائم‌الزاویهٔ BKO باارتفاع $KO_۲$ (وارد بروتر) داریم:

$$\frac{|BK|}{|BO|}=\frac{|KO_۲|}{|KO|}=\frac{r_۲}{r};$$

$$|BO|^۲=|BK|^۲+|KO|^۲=|BO|^۲.\frac{r_۲^۲}{R^۲}+R^۲;$$



شکل ۱۸۳



شکل ۱۸۴

یعنی $|BO|=\frac{R^2}{\sqrt{R^2-r_2^2}}$ و $|BK|=\frac{r_2 p}{\sqrt{R^2-r_2^2}}$.

ثابت می‌کنیم نقطهٔ C محل برخورد خط راست AB با صفحهٔ α، برمرکز O_1 از دایرهٔ اول منطبق‌است. صفحه‌ای راکه ازنقطهٔ B موازی صفحهٔ α رسم‌شود، با β ونقطه‌های برخورد خط راست AK راباصفحه‌های α و β، به‌ترتیب، با L و M نشان‌می‌دهیم (شکل ۱۸۳). N را مرکز دایره‌ای می‌گیریم که در مقطع‌کره باصفحهٔ ABK قراردارد. دراین صورت، خط رست AN برخط راست LC (وبنابراین، برخط راست MB) عموداست، زیرا خط راست LC بر خط راست AO (عمود برصفحهٔ α) عمود است و، در حالت $O\neq N$، برخط راست ON (عمود برصفحهٔ ABK) هم‌عمود می‌شود. چون (BK) مماس است، بنابراین خط‌های راست BK و NK هم بریکدیگر عمودند. مثلث ANK متساوی‌ـ الساقین است، بنابراین

$$\widehat{KMB}=\frac{\pi}{2}-\widehat{KAN}=\frac{\pi}{2}-\widehat{AKN}=\widehat{BKM}$$

بااستفاده ازبرابری اخیر وتشابه مثلث‌های ALC و AMB به‌دست می‌آید:

$$|LC|=\frac{|AC|}{|AB|}\cdot|BM|=\frac{|AC|}{|AB|}\cdot|BK|=k\cdot\frac{r_2 R}{\sqrt{R^2-r_2^2}}$$

که درآن $k=\frac{|AC|}{|AB|}$. ضریب تشابه، به انتخاب جای نقطهٔ K روی دایرهٔ دوم بستگی ندارد. به‌این‌ترتیب، نقطهٔ C از همهٔ نقطه‌های محیط دایرهٔ اول به‌یك فاصله است، یعنی در مرکز آن قراردارد.

مقطع‌کره را با صفحهٔ AOO_2 درنظر می‌گیریم که شامل عمودهای OO_2 و AO، به‌ـ

ترتیب بر γ و $(\alpha$ و $\beta)$ و، بنابراین، عمود برصفحهٔ α و $(\beta$ و $\gamma)$ هستند. D را نقطهٔ برخورد صفحه‌های AOO_2، α و γ می‌گیریم (شکل ۱۸۴). دراین صورت

$$\widehat{AOB}=\widehat{O_2OD}+\widehat{DOA}=\left(\frac{\pi}{2}-\widehat{O_2DO}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi-\varphi$$

و بنابرقضیهٔ کسینوس‌ها درمثلث OAB داریم:

$$|AB|^2=|AO|^2+|BO|^2-2|AO|\cdot|BO|\cdot\cos\widehat{AOB}=$$

$$=R^2+\frac{R^4}{R^2-r_2^2}+\frac{2R^3}{\sqrt{R^2-r_2^2}}\cos\varphi=$$

$$=\frac{R^2}{\sqrt{R^2-r_2^2}}\left(2R^2-r_2^2+2R\sqrt{R^2-r_2^2}\cos\varphi\right)$$

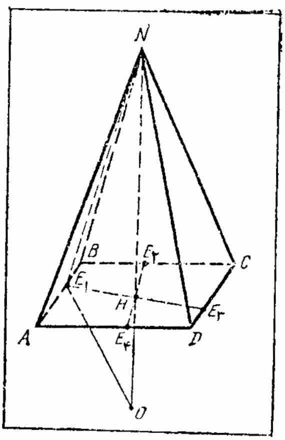
سرانجام، باتوجه به تشابه مثلث‌های ALO_1 و AMB باضریب تشابه

$$k=\frac{|LO_1|}{|MB|}=\frac{r_1}{|BK|}=\frac{r_1\sqrt{R^2-r_2^2}}{Rr_2}$$

به‌دست می‌آید $|AO_1|=k|AB|$.

پاسخ: $\frac{r_1}{r_2}\sqrt{2R^2-r_2^2+2R\sqrt{R^2-r_2^2}\cos\varphi}$.

۳۸۸. لوزی $ABCD$ را قاعدهٔ هرم $NABCD$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم، کرهٔ به مرکز O، بروجه‌های هرم، در نقطه‌های E_1، E_2، E_3، E_4، (به‌ترتیب، واقع بر یال های AB، BC، CD و DA) مماس باشد (شکل ۱۸۵). دراین صورت، چهار مثلث قائم‌الزاویهٔ NOE_i $(i=1، 2، 3، 4)$ با هم برابرند، یعنی در نقطهٔ H، پای‌ارتفاع‌های E_iH که برو تر مشترک NO رسم‌شده‌اند، مشترک‌اند. بنابراین، خط راست NO برصفحهٔ $HE_1E_2E_3E_4$، یعنی برصفحهٔ قاعدهٔ هرم عمود است. چون پاره خط‌های راست E_iH با هم برابرند و به‌ترتیب، برضلع‌های لوزی $ABCD$ عمودند (زیرا بر صفحه‌های NOE_i قرار دارند)، بنابراین نقطهٔ H از



شکل ۱۸۵

چهارضلع لوزی به‌یك فاصله است و، درنتیجه، همان نقطهٔ برخورد قطرهای آن است.

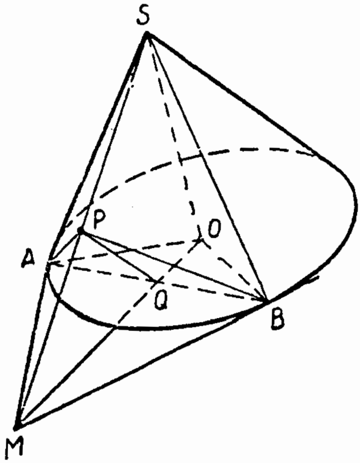
برای محاسبهٔ حجم هرم، به‌ترتیب داریم:

$$S_{ABCD}=|AB|\cdot|AD|\cdot\sin\hat{A}=۲\sqrt{۲};$$

$$|E_۱H|=\frac{S_{ABCD}}{۲|AB|}=\frac{\sqrt{۲}}{۲};$$

$$|OH|=\sqrt{|OE_۱|^۲-|E_۱H|^۲}=\frac{\sqrt{۶}}{۲};|NH|=\frac{|E_۱H|}{|OH|}=\frac{\sqrt{۶}}{۶}$$

پاسخ. $\frac{۲\sqrt{۳}}{۹}$



شکل ۱۸۶

۳۸۹. ازنقطه‌های A و B، مماس‌هایی بر دایرهٔ قاعدهٔ مخروط رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن‌ها را M می‌نامیم؛ در ضمن، فرض می‌کنیم خطهای راست OM و AB، یکدیگر را درنقطهٔ Q قطع کرده باشند (شکل۱۸۶). خطهای‌راست AB و SM برهم عمودند، زیرا خط راست AB برتصویر قائم خط راست SM روی صفحهٔ قاعدهٔ مخروط، یعنی بر (MO) عمود است. بنابراین می‌توان ازخط راست AB، صفحه‌ای عبور داد که برخط راست SM عمود باشد. P را نقطهٔ برخورداین صفحه با خط راست SM می‌گیریم.

اکنون اگرزاویهٔ مجهول AOB را x بنامیم داریم:

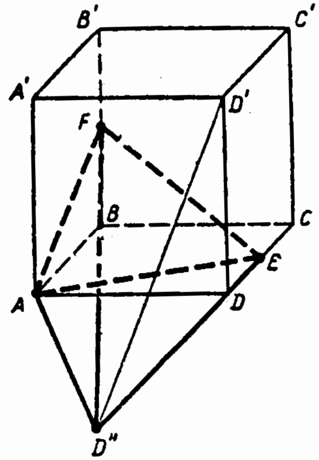
$$\widehat{AOQ}=\widehat{QAM}=\frac{x}{۲}$$

و از آنجا

$$\sin\frac{x}{۲}=\frac{|MQ|}{|MA|}=\frac{|MQ|}{|SM|}\cdot\frac{|SM|}{|MA|}=\frac{|PQ|}{|SQ|}\cdot\frac{|SA|}{|AP|}=$$

$$=\frac{|PQ|:|AP|}{|SQ|:|SA|}=\frac{\cos\frac{\alpha}{۲}}{\cos\frac{\beta}{۲}}$$

پاسخ. $\widehat{AOB}=2\arcsin\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$.



شکل ۱۸۷

۳۹۰. از نقطهٔ D'، خط راست l را موازی با (AF) رسم می‌کنیم تا خط راست CD را در نقطهٔ D'' قطع کند. l بر صفحهٔ $DD'C'C$ واقع است، زیرا دو وجه $DD'C'C$ و $AA'B'B$ باهم موازی‌اند و خط راست AF بر صفحهٔ وجه $AA'B'B$ منطبق است.

برای رسم خط راست l، کافی است پاره خط راست CD را از طرف D امتداددهیم، به نحوی که $|DD''|=2|CD|$ (شکل ۱۸۷). چون خط راست l با صفحهٔ AFE هم موازی است، یعنی دو هرم $D'AEF$ و $D''AEF$، حجم‌هایی برابر دارند. ارتفاع هرم $FAD''E$ برابراست با $|FB|=\frac{1}{2}$ ومساحت قاعدهٔ این هرم، برابر است با $\frac{5}{4}$ (AD بر $D''E$ عمود است و $|AD|=1$ و $|D''E|=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$).

به‌این‌ترتیب، حجم هرم $AD''EF$، یاحجم هرم $AD'EF$ برابراست با

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{24}$$

۳۹۱. چهاروجهی را $A_1A_2A_3A_4$ و صفحه‌هایی را که از وجه‌های $A_2A_3A_4$، $A_1A_3A_4$، $A_1A_2A_4$ و $A_1A_2A_3$ می‌گذرند، به‌ترتیب a_1، a_2، a_3 و a_4 می‌نامیم.

M را نقطهٔ دلخواهی از فضا می‌گیریم. از M بر a_i عمودی وارد می‌کنیم؛ طول این عمودرا x_i می‌نامیم و، اگر باجهت ارتفاع h_i که ازرأس A_i برصفحهٔ a_i فرود آمده است، هم‌جهت باشد، آن را مثبت و، درغیراین صورت، منفی به‌حساب می‌آوریم. عددهای x_i را، مختصات نرمال نقطهٔ M نسبت به چهاروجهی می‌نامند. [دراین جا، اندیس i می‌تواند هریك ازعددهای ۱، ۲، ۳، و ۴ را اختیارکند.]

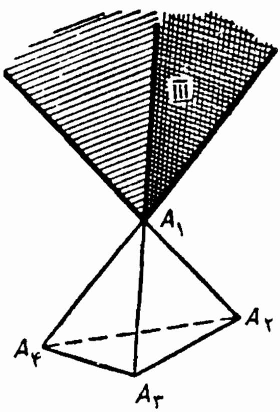
صفحه‌هایی‌که ازوجه‌های چهاروجهی می‌گذرند، فضارابه‌پانزده منطقه تقسیم می‌کنند

که، هر کدام از آن‌ها، به وسیلهٔ علامت‌های مختصات نرمال نقطه‌های متعلق به آن مشخص می‌شود:

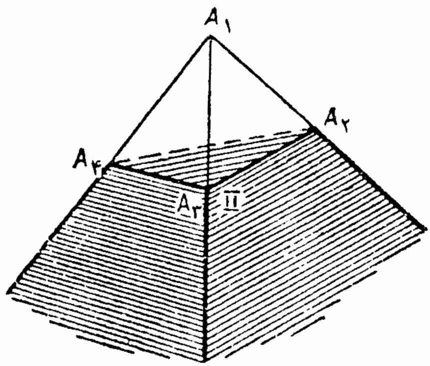
۱) درمنطقه I، که شامل نقطه‌های درونی چهاروجهی است، برای همهٔ نقطه‌ها داریم: $x_i>0$؛

۲) چهارمنطقه II، که شامل همهٔ نقطه‌های درونی چهارکنج سه‌وجهی به‌رأس‌های A_i (بدون نقطه‌های منطقهٔ I) می‌شوند. دراین منطقه‌ها، از چهارمختص نقطهٔ M، آن‌که با رأس کنج متناظر است منفی و بقیه مثبت‌اند (شکل ۱۸۸). مثلاً درکنج سه‌وجهی بـه رأس A_1 داریم: $x_1<0$ و $x_2>0$، $x_3>0$، $x_4>0$؛

۳) چهار منطقهٔ III (شکل ۱۸۹)، شامل چهارکنج سه‌وجهی‌که روبه‌روی چهارکنج سه‌وجهی درونی چهاروجهی قرار دارند؛ نقطه‌های این منطقه‌ها، دارای سه مختص نـرمال منفی ویک مختص نرمال مثبت‌اند (مختص مثبت، متناظر بارأس A_i ازکنج است)؛



شکل ۱۸۹



شکل ۱۸۸

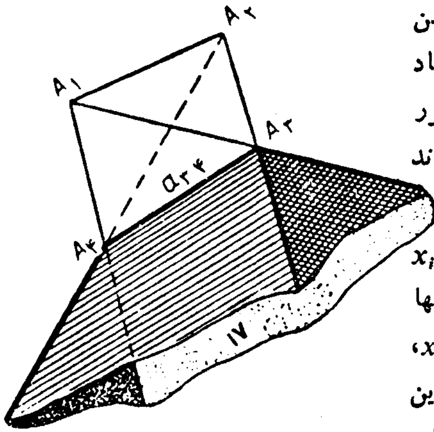
۴) شش‌منطقهٔ IV به‌شکل «شیروانی» (شکل ۱۹۰)، متناظر بایال‌های $A_iA_j\equiv A_{ij}$؛ نقطه‌های این منطقه‌ها، دارای دو مختص مثبت (x_i، x_j) ودومختص منفـی (x_k، x_u) هستند (i، j، k و u دوبه‌دو متمایزند و هرکدام می‌توانند برابر ۱، ۲، ۳ و ۴ باشند).

ازاین اتحاد استفاده می‌کنیم:

$$x_1S_1+x_2S_2+x_3S_3+x_4S_4=3V \qquad (1)$$

که در آن، V، حجم چهاروجهی مفروض و S_i مساحت مثلث $A_jA_kA_u$ مقابل به رأس A_i است. اگر نقطهٔ M رادرهریك ازچهارنوع منطقه درنظربگیریم وازآن به رأس‌های چهار-وجهی وصل‌کنیم، درستی اتحاد (۱) به سادگی روشن می‌شود.

روی هم، ۱۶ ترکیب مختلف از علامتهای مختصات نرمال وجود دارد، ولی یکی از این ترکیب‌ها، درواقع امر، وجود ندارد: از اتحاد (۱) دیده می‌شود که، همهٔ x_iها، نمی‌توانند به‌طور همزمان، منفی باشند. ۱۵ ترکیب دیگر، متناظرند با ۱۵ منطقه‌ای که درفضا به‌وجود آمده است.



شکل ۱۹۵

اگر برای یك چهاروجهی، عددهای x_i دراتحاد (۱) صدق کنند، آن وقت یك نقطه، وتنها یك نقطه وجود دارد، به نحوی که عددهای x_i، مختصات نرمال آن نسبت به چهاروجهی‌اند. این نقطه عبارت است ازمحل برخورد سه صفحه‌ای که، مثلاً، موازی وجه‌های a_1، a_2 و a_3 و به‌ترتیب به‌فاصلهٔ $|x_1|$، $|x_2|$ و $|x_3|$ از آن‌هاوواقع درنیم‌فضای متناظر باعلامت‌های x_1، x_2 و x_3 نسبت به‌صفحه‌های a_1، a_2 و a_3، رسم شده باشند. از آن‌جاکه عددهای x_i، به‌برابری (۱) مربوط‌اند، بنابراین صفحهٔ چهارم متناظر با مختص x_4 هم از همین نقطه عبور می‌کند.

برای این‌که نقطه‌ای، مرکز کرهٔ مماس بروجه‌های چهاروجهی باشد، لازم و کافی است که این نقطه، ازچهارصفحهٔ وجه‌ها، به‌یك فاصله باشد. دراین‌حالت، همهٔ x_iها ازلحاظ قدرمطلق برابرند وازبرابری (۱) به‌دست می‌آیند که، به‌کمك آن‌ها، می‌توان مرکز مجهول را پیدا کرد. بنابراین، باتوجه به‌برابری (۱)، برای‌وجود کرهٔ مماس برچهاروجه‌چهاروجهی، لازم وکافی است که داشته باشیم:

$$\varepsilon_1 S_1+\varepsilon_2 S_2+\varepsilon_3 S_3+\varepsilon_4 S_4>0 \qquad (۲)$$

که در آن $\varepsilon_i=\pm 1$، بسته به علامت‌های مختصات نرمال نقطه‌های ۱۵ منطقهٔ فضاست.

ازاین‌جا می‌توان به‌نتیجه‌های زیررسید:

۱. درمنطقهٔ درونی I ازچهاروجهی (برای هر i داریم: $\varepsilon_i=1$)، همیشه نقطهٔ J وجود داردکه ازوجه‌های چهاروجهی به‌یك فاصله است؛ J مرکز کرهٔ محاطی چهاروجهی است.

۲. چون مساحت مثلث هروجه چهاروجهی، ازمجموع مساحت‌های سه وجه دیگر آن، کوچکتر است، بنابراین وقتی‌که تنها یکی‌از ε_iها منفی وسه‌تای دیگر مثبت باشند، برابری (۲) برقرار است؛ واین، به‌معنای آن است‌که، درهریك ازمنطقه‌های از نوع II،

همیشه می‌توان نقطهٔ J_i را، به‌یك فاصله از وجه‌های چهاروجهی پیدا کرد. نقطه‌های J_i مرکزهای چهار کره‌ای هستندکه بروجه متناظر a_i به‌صورت خارجی و بر سه وجه دیگر، به صورت داخلی مماس‌اند. تماس کره باوجه را داخلی یاخارجی می‌نامیم، به‌شرطی‌که این کره ورأس مقابل به‌وجه مفروض، دریك نیم فضا یادو نیم‌فضای مختلف نسبت به این وجه، واقع باشند. این چهارکره را، کره‌های محاطی خارجی نوع اول، در چهاروجهی مفروض، می‌نامند.

۳. برای‌منطقه‌های III داریم: $\varepsilon_i=\varepsilon_j=\varepsilon_k=-1$ و $\varepsilon_u=1$ و، بنابراین‌نابرابری (۲) نمی‌تواند برقرار باشد. به‌این ترتیب، درهیچ یك از چهارمنطقهٔ نوع III، نمی‌توان نقطه‌ای پیداکردکه از وجه‌های چهاروجهی به یك فاصله باشد، یعنی‌کرهٔ مماس بروجه‌های چندوجهی، در این منطقه‌ها وجود ندارد.

۴. سرانجام، به‌منطقه‌های ازنوع IV («شیروانی») می‌رسیم. اگر

$$\varepsilon_k=\varepsilon_u=-1 \text{ و } \varepsilon_i=\varepsilon_j=1 \text{ و } S_i+S_j>S_k+S_u$$

آن وقت نابرابری (۲) برقراراست ودرمنطقه‌های نوع «شیروانی»، نسبت به‌یال a_{ij} از چهاروجهی، نقطهٔ J_{ij} وجود داردکه ازوجه‌ها به‌یك فاصله است. از همین نابرابری روشن است‌که، دراین حالت، چنین نقطه‌ای، در «شیروانی» مربوط به یال روبه‌روی a_{ku} وجود ندارد، زیرا دراین‌منطقه $\varepsilon_i=\varepsilon_j=-1$ و $\varepsilon_k=\varepsilon_u=1$. بنابراین‌از بین‌شش «شیروانی»، درسه‌تا ازآن‌ها، نقطه‌ای پیدا می‌شودکه ازسه وجه چهاروجهی به‌یك فاصله است.

باوجود این، باشرط $S_i+S_j=S_k+S_u$، نابرابری (۲) برای‌این دومنطقه‌برقرار نیست ونقطهٔ J_{ij} وجود ندارد. بنابراین، اگرمجموع مساحت‌های دووجه چهاروجهی با مجموع مساحت‌های دووجه دیگربرابر باشد، آن وقت، یکی‌از کره‌های محاطی خارجی نوع دوم وجود ندارد. درحالتی‌که هرچهاروجه، مساحت‌های برابرداشته باشند (که دراین صورت می‌توان ثابت‌کرد، هرچهار وجه باهم برابرند)، آن وقت، هیچ‌کدام ازکره‌های محاطی خارجی نوع دوم وجود ندارند.

به‌این‌ترتیب، حداکثر ۸ وحداقل ۵ کرهٔ مماس بروجه‌های چهاروجهی وجود دارد.

مرکزهای این‌کره‌ها، از برخورد صفحه‌های نیمساز زاویه‌های دووجهی داخلی و خارجی چهاروجهی به‌دست می‌آیند، زیرا صفحهٔ نیمساز یك زاویهٔ دووجهی، مکان هندسی نقطه‌هایی را تشکیل می‌دهدکه ازدووجه زاویهٔ دووجهی به‌یك فاصله‌اند.

باتوجه به‌برابری (۱)، می‌توان شعاع‌های‌کره‌های محاطی و محاطی خارجی چهار-وجهی را پیداکرد:

$$r=\frac{3V}{S_1+S_2+S_3+S_4},\quad r_i=\frac{3V}{S_j+S_k+S_n-S_i}$$

درآن‌ها، r شعاع کرهٔ محاطی و r_i، شعاع کرهٔ محاطی خارجی نوع اول است. از اینجا به دست می‌آید:

$$\frac{2}{r}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}$$