مقدمه ای بر آنالیز ریاضی

تألیف:

محمّد اکبری توتکابنی (هیات علمی دانشگاه شاهد)
علیرضا باقری ثالث (هیات علمی دانشگاه قم)

فهرست مطالب

فصل ۱

میدان اعداد حقیقی و اصل کمال

اصل بقای نادانی: نادانی از شکلی به شکل دیگر تبدیل می‌شود، امّا از بین نمی‌رود.

در این بخش به معرفی اعداد حقیقی می پردازیم. در ابتدا با اصل کمال (خاصیت کوچکترین کران بالایی) آشنا می شویم و به یکی از نواقص مهم اعداد گویا اشاره می کنیم. ما به جزییات ساخت اعداد حقیقی نمی پردازیم. برای آشنایی با ساخت اعداد حقیقی به مراجع [۱] و [۲] مراجعه نمایید. روش برش ددکیند و روش دنباله‌ای کانتور، روش های شناخته شده ایی برای ساخت اعداد حقیقی هستند. روش برش ددکیند ماهیتی مجموعه‌ای داشته و روش دنباله‌ای کانتور بر مفهوم دنباله و همگرایی آن استوار است.

۱.۱ مجموعه‌های مرتب و خاصیت کوچکترین کران بالایی

فرض کنید S مجموعه ای ناتهی باشد. یک ترتیب بر S رابطه‌ای است که با " $<$ " نشان داده می‌شود و از دو خاصیت زیر برخوردار است:

الف) برای $x, y \in S$، آنگاه یکی و فقط یکی از گزاره‌های $x < y$، $x = y$ و $x > y$ درست است.

ب) برای $x, y, z \in S$ اگر $x < y$ و $y < z$، آنگاه $x < z$.

عبارت "$x < y$" را "x کمتر از y است"، می‌خوانیم و نماد "$x \leq y$" را به مفهوم "$x < y$" یا "$x = y$" در نظر می‌گیریم.

یک مجموعهٔ مرتب، مجموعه‌ای است که روی آن ترتیبی قرار داده شده باشد. برای مثال $\mathbb{Q}$، با این ترتیب که "برای اعداد گویای s و r، می‌گوییم $r < s$ اگر $s - r$ عدد گویای مثبتی باشد"، یک مجموعهٔ مرتب است.

تعریف ۱.۱.۱. *فرض کنید S یک مجموعهٔ مرتب و $E \subseteq S$ باشد. اگر $\beta \in E$ موجود باشد که به ازای هر $x \in E$ نتیجه شود، $x \leq \beta$، می‌گوئیم E از بالا کراندار است و β را یک کران بالایی E می‌نامیم. از پایین کراندار و کران پائینی، به روش مشابه تعریف می‌شود.*

تعریف ۲.۱.۱. *فرض کنید S یک مجموعهٔ مرتب و $E \subseteq S$ یک زیرمجموعهٔ از بالا کراندار باشد. عنصر $\alpha \in S$ را کوچکترین کران بالایی E می‌نامیم اگر*

الف) عنصر α یک کران بالایی E باشد و

ب) اگر $\lambda < \alpha$، آنگاه λ کران بالایی برای E نباشد.

در صورت وجود، α یکتاست و آن را سوپریمم E می‌نامیم و می‌نویسیم، $\alpha = \sup E$. بزرگترین کران پائینی مجموعهٔ از پائین کراندار E، اینفیمم E نامیده می‌شود و با $\alpha = \inf E$ نمایش داده می شود، و بدین معناست که α یک کران پائینی E است و β با شرط $\alpha < \beta$ یک کران پائینی E نمی‌باشد.

تعریف ۳.۱.۱. *می‌گوئیم مجموعهٔ مرتب S، خاصیت کوچکترین کران بالایی دارد اگر برای هر $E \subseteq S$ که ناتهی و از بالا کراندار است، $\sup E$ در S موجود باشد. به همین ترتیب، می‌گوئیم مجموعهٔ مرتب S، خاصیت بزرگترین کران پائینی دارد اگر برای هر $E \subseteq S$ که ناتهی و از پائین کراندار است، $\inf E$ در S موجود باشد.*

قضیه ۴.۱.۱. *فرض کنید S مجموعه‌ای مرتب و ناتهی باشد. در این صورت S دارای خاصیت کوچکترین کران بالای است اگر و تنها اگر دارای خاصیت بزرگترین کران پائینی باشد.*

اثبات. فرض کنید S دارای خاصیت کوچکترین کران بالایی، E زیر مجموعهٔ ناتهی و از پائین کرانداری از S و L مجموعهٔ تمام کران‌های پائینی E باشد. از آنجا که E از پائین

کراندار است، L ناتهی است. مجموعهٔ L از همهٔ $y \in S$هایی تشکیل شده است که در نامساوی $y \leq x$، به ازای هر $x \in E$ صدق می‌کنند؛ پس هر $x \in E$ یک کران بالایی L می‌باشد و به این ترتیب L از بالا کراندار است. از طرفی S دارای خاصیت کوچکترین کران بالایی است؛ بنابراین $\alpha = \sup L$ در S موجود می‌باشد. هرگاه $\lambda < \alpha$، آنگاه λ یک کران بالایی L نیست و در نتیجه $\lambda \notin E$. بنابراین به ازای هر $x \in E$، $\alpha \leq x$ و لذا $\alpha \in L$.

هرگاه $\alpha < \beta$ آنگاه $\beta \notin L$؛ زیرا α یک کران بالایی L است. به این ترتیب نشان دادیم که $\alpha \in L$ و اگر $\alpha < \beta$، $\beta \notin L$. پس $\alpha = \inf E$؛ یعنی S دارای خاصیت بزرگترین کران پائینی است. عکس قضیه به طور مشابه ثابت می‌شود. $\square$

نتیجه ۵.۱.۱. *فرض کنید S دارای خاصیت کوچکترین کران بالایی باشد. اگر A ناتهی و از بالا کراندار و B مجموعهٔ کران‌های بالایی A باشد، آنگاه $\sup A = \inf B$.*

تعریف ۶.۱.۱. *هرگاه میدان $\mathbb{F}$ با رابطهٔ ترتیب $<$ مجموعه‌ای مرتب باشد و در گزاره‌های زیر صدق نماید، آن را یک میدان مرتب می نامیم.*

الف) برای $x, y, z \in \mathbb{F}$ اگر $y < z$، آنگاه $x + y < x + z$.

ب) برای $x, y \in \mathbb{F}$ اگر $x > 0$ و $y > 0$، آنگاه $xy > 0$.

اگر $x > 0$ ، آنگاه x را مثبت و اگر $x < 0$، آنگاه x را منفی می‌گوئیم.

برای مثال، $\mathbb{Q}$ یک میدان مرتب است.

قضیه ۷.۱.۱. *گزاره‌های زیر در هر میدان مرتب برقرارند.*

الف) هرگاه $x > 0$، آنگاه $-x < 0$ و بالعکس.

ب) هرگاه $x > 0$ و $y < z$، آنگاه $xy < xz$.

پ) هرگاه $x < 0$ و $y < z$، آنگاه $xy > xz$.

ت) هرگاه $x \neq 0$، آنگاه $x^2 > 0$؛ بویژه $1 > 0$.

ث) هرگاه $0 < x < y$، آنگاه $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

اثبات. اثبات به عهدهٔ خوانندهٔ گرامی. $\square$

۲.۱ میدان اعداد حقیقی

هر بحثی از مفاهیم بنیادین آنالیز باید بر مفهوم عدد که به دقت تعریف شده است، بنا شود. دستگاه اعداد گویا، خواه به شکل یک میدان و خواه به صورت مجموعه‌ای مرتب، برای بسیاری از اهداف نارساست. به عنوان مثال، عدد گویایی چون p وجود ندارد که $p^۲ = ۲$. این ضعف منجر به معرفی اعداد گنگ می‌شود که اغلب به صورت بسط اعشاری نامتناهی نوشته و به وسیلهٔ بسط های اعشاری متناهی مربوط به خود، تقریب زده می‌شوند(روش دنباله‌ای کانتور).

فرض کنید A مجموعهٔ تمام اعداد گویای مثبت p باشد که $p^۲ < ۲$ و B از همهٔ اعداد گویای مثبت p باشد که $p^۲ > ۲$. در این صورت A دارای بزرگترین عدد(عنصر ماکزیمال) و B دارای کوچکترین عدد(عنصر مینیمال) نیست؛ زیرا به ازای هر $p \in A$، می‌توان عدد گویای $q \in A$ را طوری یافت که $p < q$ و برای هر $p \in B$ عدد گویای $q \in B$ را به قسمی یافت که $q < p$. بدین منظور، به هر عدد گویای $p > ۰$ عدد

$$q = p - \frac{p^۲ - ۲}{p + ۲} = \frac{۲p + ۲}{p + ۲},$$

را نظیر می‌کنیم. در این صورت داریم

$$q^۲ - ۲ = \frac{۲(p^۲ - ۲)}{(p + ۲)^۲}.$$

هرگاه $p \in A$، آنگاه $p^۲ - ۲ < ۰$ ، لذا $q > p$، از طرفی $q^۲ - ۲ < ۰$ و بنابراین $q \in A$.
هرگاه $p \in B$، $p^۲ - ۲ > ۰$ انگاه $۰ < q < p$، در نتیجه $q^۲ - ۲ > ۰$ و لذا $q \in B$.

قضیه ۱.۲.۱. *اعداد گویا دارای خاصیت کوچکترین کران بالایی نیست.*

اثبات. به برهان خلف فرض کنید $\mathbb{Q}$، دارای خاصیت کوچکترین کران بالایی باشد. در این صورت A را مجموعهٔ تمام اعداد گویای مثبت p که $p^۲ < ۲$ و Bرا کلیهٔ اعداد گویای مثبت p که $p^۲ > ۲$ باشد، در نظر بگیرید. مجموعهٔ A ناتهی و از بالا کراندار است، پس با توجه به فرض خلف $\alpha = \sup A$ در $\mathbb{Q}$ موجود است. از طرفی $\alpha \notin A$؛ زیرا اگر $\alpha \in A$، آنگاه α عضو ماکزیمال مجموعهٔ A خواهد بود که تناقض است. اگر $\alpha \in B$، در این صورت $\alpha = \inf B$ و بنابراین α عضو مینیمال B خواهد بود، که تناقض است. به این ترتیب $\alpha^۲ \geq ۲$ و $\alpha^۲ \leq ۲$، یعنی $\alpha^۲ = ۲$ که تناقض است؛ پس فرض خلف باطل می‌باشد. □

قضیه ۲.۲.۱. *یک میدان مرتب مانند $\mathbb{R}$ هست که دارای خاصیت کوچکترین کران بالایی است و $\mathbb{Q}$ را به عنوان یک زیر میدان دربرخواهد داشت.*

اثبات. برای اثبات به قضیه ۱.۱۹ در [؟] مراجعه نمایید. $\square$

قضیه ۳.۲.۱. *ویژگی‌های زیر در $\mathbb{R}$ برقرار است.*

الف) ***خاصیت ارشمیدسی.*** *هرگاه $x, y \in \mathbb{R}$ و همچنین $x > 0$ باشد، آنگاه عدد صحیح و مثبت n وجود دارد به طوری که $nx > y$.*

ب) هرگاه $x, y \in \mathbb{R}$ و همچنین $x < y$ باشد، آنگاه $p \in \mathbb{Q}$ هست که $x < p < y$.

اثبات. الف) فرض کنید $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$ و به برهان خلف فرض کنید حکم نادرست باشد. چون A ناتهی است، پس $\alpha = \sup A$ در $\mathbb{R}$ موجود است. از آنجا که $x > 0$، پس $\alpha - x < \alpha$ و $\alpha - x$ کران بالایی A نیست. بنابراین $m \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $\alpha - x < mx$ و در نتیجه $\alpha < (m+1)x \in A$، که تناقض است.

ب) از آنجا که $x < y$، پس $y - x > 0$. بنابراین با توجه به خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی، $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $n(y-x) > 1$. با بکار گرفتن مجدد خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی، $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ موجودند به طوری که $m_1 > nx$ و $m_2 > -nx$، به این ترتیب $m_2 < nx < m_1$. حال $B = \{k \in \mathbb{Z} : nx < k\}$ را در نظر بگیرید. از آنجا که B ناتهی و از پائین کراندار است، پس B در $\mathbb{Z}$دارای عضو ابتداست. فرض کنید m عضو ابتدای B باشد، در این صورت $m - 1 \le nx < m$. از تلفیق نامساوی‌ها، رابطه $nx < m \le 1 + nx < ny$ نتیجه می‌شود؛ چون $n > 0$، پس $x < \frac{m}{n} < y$ و اثبات کامل می‌شود. $\square$

حال وجود ریشهٔ nام اعداد حقیقی مثبت را ثابت می‌کنیم. این برهان نشان می‌دهد که چگونه می‌توان در $\mathbb{R}$، بر مشکل ناقص بودن اعداد گویا فائق آمد.

قضیه ۴.۲.۱. *به ازای هر عدد حقیقی $x > 0$ و هر عدد طبیعی n، یک و فقط یک عدد حقیقی مثبت وجود دارد که $y^n = x$. این y را با $\sqrt[n]{x}$ یا $x^{\frac{1}{n}}$ نمایش می‌دهیم.*

اثبات. فرض کنید $E = \{t \in \mathbb{R} : t > 0, t^n < x\}$. اگر $t = \frac{x}{1+x}$، آنگاه $0 < t < 1$ و لذا $t^n < t < x$. بنابراین $t \in E$ و E ناتهی است. اگر $t > 1 + x$، آنگاه $t^n > t > x$ و

در نتیجه $t \notin E$. به این ترتیب $x + ۱$ یک کران بالایی برای E است و $y = supE$ موجود می‌باشد. ادعا می‌کنیم $y^n = x$. با توجه به $b^n - a^n = (b-a)(b^{n-۱} + ... + a^{n-۱})$، وقتی $۰ < a < b$ نتیجه می‌شود $b^n - a^n < (b-a)nb^{n-۱}$.

فرض کنید $y^n < x$. h را طوری در نظر می‌گیریم که $۰ < h < ۱$ و $h < \dfrac{x - y^n}{n(y+۱)^{n-۱}}$. حال قرار می‌دهیم $b = y + h$ و $a = y$. در این صورت

$$(y+h)^n - y^n < hn(y+h)^{n-۱} < hn(y+۱)^{n-۱} < x - y^n,$$

پس $(y+h)^n < x$ و لذا $y+h \in E$؛ اما $y+h > y$ و بنابراین به تناقض می‌رسیم. فرض کنید $y^n > x$. قرار دهید $k = \dfrac{y^n - x}{ny^{n-۱}}$. در این صورت $۰ < k < y$. هرگاه $t \geq y - k$، آنگاه

$$y^n - t^n \leq y^n - (y-k)^n < kny^{n-۱} = y^n - x.$$

در نتیجه $t^n > x$، $t \notin E$ و لذا $y - k$ یک کران بالایی E است که با کوچکترین کران بالایی بودن y در E تعارض دارد. به این ترتیب $y^n = x$ و اثبات تمام است. □

نتیجه ۵.۲.۱. هرگاه b و a *اعداد حقیقی مثبت باشند و* $n \in \mathbb{N}$*، آنگاه* $(ab)^{\frac{۱}{n}} = a^{\frac{۱}{n}} b^{\frac{۱}{n}}$.

اثبات. قرار می‌دهیم $\alpha = a^{\frac{۱}{n}}$ و $\beta = b^{\frac{۱}{n}}$. از آنجا که ضرب جابه‌جایی است داریم، $ab = \alpha^n \beta^n = (\alpha\beta)^n$ و چون ریشهٔ nام یک عدد حقیقی مثبت و یکتاست، نتیجه می‌گیریم $(ab)^{\frac{۱}{n}} = \alpha\beta = a^{\frac{۱}{n}} b^{\frac{۱}{n}}$. □

۳.۱ دستگاه توسعه‌یافتهٔ اعداد حقیقی

با حفظ ترتیب روی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$، دو علامت $+\infty$ و $-\infty$ را به آن می‌افزاییم و مجموعهٔ حاصل را دستگاه وسعت یافتهٔ اعداد حقیقی می‌نامیم؛ به عبارتی $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ که با $\overline{\mathbb{R}}$ نمایش می‌دهیم. در این صورت $+\infty$ یک کران بالایی هر زیر مجموعهٔ ناتهی از $\overline{\mathbb{R}}$ است و $-\infty$ یک کران پائینی برای هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از $\bar{\mathbb{R}}$ است. به راحتی دیده می‌شود، هرگاه E زیر مجموعه‌ای ناتهی از $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه E در $\mathbb{R}$ از بالا کراندار نیست اگر و تنها اگر در $\overline{\mathbb{R}}$، $\sup E = +\infty$. همین نکته دربارهٔ کران‌های پائینی قابل بیان است.

قضیه ۱.۳.۱. $\overline{\mathbb{R}}$ *دارای خاصیت کوچکترین کران بالایی است.*

اثبات. به عهدهٔ خوانندهٔ گرامی. □

توجه ۲.۳.۱. *مجموعهٔ $\overline{\mathbb{R}}$ یک میدان نیست، اما روابط زیر را روی آن خوش تعریف است.*

الف) *هرگاه* $x \in \mathbb{R}$*، آنگاه* $x + \infty = +\infty$ ، $x - \infty = -\infty$ و $\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = \circ$.

ب) *هرگاه* $x > \circ$*، آنگاه* $x(+\infty) = +\infty$ و $x(-\infty) = -\infty$.

پ) *هرگاه* $x < \circ$*، آنگاه* $x(+\infty) = -\infty$ و $x(-\infty) = +\infty$.

۴.۱ فضاهای خاص

در این بخش، بعضی از فضاهای مهم که در بخش‌ها و فصول آینده مورد بررسی قرار می‌گیرند، معرفی می‌شوند.

الف) **میدان اعداد مختلط.** هر عدد مختلط جفت مرتبی از اعداد حقیقی مانند (a, b) است، مجموعهٔ همهٔ اعداد مختلط را با $\mathbb{C}$ نمایش می‌دهیم. مجموعهٔ $\mathbb{C}$ با اعمال جمع و ضرب که به صورت زیر تعریف می‌شوند، تشکیل یک میدان می‌دهد.

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

عضو خنثی جمعی را با $(\circ, \circ)$ یا $\circ$ و عضو خنثی ضربی را با $(۱, \circ)$ و یا ۱ نشان می‌دهیم. اگر تعریف کنیم $i = (\circ, ۱)$، آنگاه $i^۲ = i \cdot i = -۱$. با یکی در نظر گرفتن $\mathbb{R} \times \{\circ\}$ با $\mathbb{R}$ خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} a + bi =& (a, \circ) + (b, \circ)(\circ, ۱) \\ =& (a, \circ) + (\circ, b) \\ =& (a, b). \end{aligned}$$

بنابراین هر عدد مختلط را می‌توان به صورت $a + ib$ نمایش داد. عدد مختلط $a - ib$ را مزدوج عدد مختلط $a + ib$ می‌نامیم و با $\overline{a + ib}$ نمایش می‌دهیم. منظور از قدر مطلق عدد مختلط z، عدد حقیقی $|z| = (z\overline{z})^{\frac{۱}{۲}}$ می‌باشد. که به‌معنای فاصله از مبدأ می‌باشد. برای عدد مختلط $z = a + ib$، قسمت حقیقی z را با $Rez = a$ و قسمت موهومی z را با

$Imz = b$ نمایش می‌دهیم. براحتی دیده می‌شود که برای اعداد مختلط u و v روابط زیر برقرارند.

الف) $|u| = 0$ اگر و تنها اگر $u = 0$.

ب) $|Reu| \leq |u|$.

ت) $|uv| = |u||v|$

پ) $|u+v| \leq |u| + |v|$

نامساوی کوشی- شوارتس. هرگاه $a_1, ..., a_n$ و $b_1, ..., b_n$ اعدادی مختلط باشند، آنگاه

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i\overline{b_i}|^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2)(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2)$$

اثبات. برای هر $1 \leq i \leq n$ و هر $\lambda \in \mathbb{R}$ داریم $|a_i\lambda + b_i|^2 \geq 0$ و در نتیجه

$$\lambda^2|a_i|^2 + 2\lambda|a_i\overline{b_i}|^2 + |b_i|^2 \geq 0,$$

و لذا

$$\lambda^2(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2) + 2\lambda\sum_{i=1}^{n} |a_i\overline{b_i}| + \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 \geq 0,$$

در نتیجه

$$(\sum_{i=1}^{n} |a_i\overline{b_i}|)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2.$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i\overline{b_i}|^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2)(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2).$$

$\square$

ب) **فضاهای نرمدار.** فرض کنید E یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$ باشد. تابع $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ را یک نُرم می‌نامیم هرگاه

الف) به ازای هر $x \in E$، $\|x\| \geq 0$ و بعلاوه $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

ب) برای هر $x \in E$ و هر اسکالر c از میدان، $\|cx\| = |c|\|x\|$.

پ) برای هر E $y \in$ و x، $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

در این صورت $(E, \|\cdot\|)$ را یک فضای نرمدار می‌نامیم.

مثال ۱.۴.۱. فرض کنید $\mathbb{R}^k$ مجموعهٔ *تمام kتایی‌های مرتب* $x = (x_۱, ...x_k)$ *باشد که برای هر* $i = ۱, ..., k$، $x_i \in \mathbb{R}$. *در این صورت با اعمال زیر،* $\mathbb{R}^k$ *یک فضای برداری حقیقی(با میدان اسکالر* $\mathbb{R}$*) خواهد بود.*

$$(x_۱, ...x_k) + (y_۱, ..., y_k) = (x_۱ + y_۱, ..., x_k + y_k)$$

$$\alpha(x_۱, ..., x_k) = (\alpha x_۱, ..., \alpha x_k).$$

هرگاه $x = (x_۱, ..., x_k)$ *و* $y = (y_۱, ..., y_n)$ *اختیار کنیم، حاصل ضرب داخلی* x *و* y *را با*

$$x \cdot y = \sum_{i=۱}^{k} x_i y_i$$

و نرم x *را با* $|x| = \sqrt{x \cdot x}$*، تعریف می‌کنیم. در این صورت* $|\cdot|$ *یک نرم روی* $\mathbb{R}^k$ *است. به‌راحتی دیده می‌شود که برای* $x, y \in \mathbb{R}^k$ *و* $\alpha \in \mathbb{R}$ *داریم:*

الف) $|x| \ge ۰$.

ب) $|x| = ۰$ *اگر و تنها اگر* $x = ۰$.

پ) $|\alpha x| = |\alpha||x|$.

پ) $|x \cdot y| \le |x||y|$.

ث) $|x + y| \le |x| + |y|$.

روی فضای برداری $\mathbb{R}^k$ نرم‌های متفاوتی را می‌توان تعریف کرد. به عنوان مثال، تعاریف زیر روی $\mathbb{R}^k$ یک نرم معرفی می‌کنند.

$$|(x_۱, ..., x_k)|_۱ = \sum_{i=۱}^{k} |x_i|,$$

$$|(x_۱, ..., x_k)|_\infty = \max\{|x_i| : i = ۱, ..., k\}.$$

مثال ۲.۴.۱. برای مجموعهٔ ناتهی X، مجموعهٔ همهٔ توابع کراندار $f : X \to \mathbb{R}$ را با $B(X)$ نمایش می‌دهیم. هرگاه $f, g \in B(X)$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ اختیار شوند، برای هر $x \in X$؛

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

و

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

$B(X)$ را به یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ تبدیل می‌کند. هرگاه برای هر $f \in B(X)$، سوپریوم نرم $\|f\|_u$ را با $\|f\|_u = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ تعریف می‌کنیم، آنگاه برای هر $f, g \in B(X)$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$ داریم:

الف) $\|f\|_u = ۰$ اگر و تنها اگر $f = ۰$.

ب) $\|\alpha f\|_u = |\alpha| \|f\|_u$.

پ) $\|f+g\|_u \leq \|f\|_u + \|g\|_u$.

الف) و ب) واضح است. برای اثبات پ)، $\epsilon > ۰$ را به دلخواه اختیار می‌کنیم. در این صورت $x \in X$ هست که

$$\begin{aligned} \|f+g\|_u - \epsilon &< |f(x) + g(x)| \\ &\leq |f(x)| + |g(x)| \\ &\leq \|f\|_u + \|g\|_u \end{aligned}$$

و چون $\epsilon > ۰$ دلخواه است، پس $\|f+g\|_u \leq \|f\|_u + \|g\|_u$. در نتیجه $(B(X), \|\cdot\|_u)$ یک فضای نرمدار می‌باشد.

۵.۱ تمرین

۱. اتحاد لاگرانژ را برای اعداد حقیقی ثابت کنید،

$$\left(\sum_{k=۱}^{n} a_k b_k\right)^۲ = \left(\sum_{k=۱}^{n} a_k^۲\right)\left(\sum_{k=۱}^{n} b_k^۲\right) - \sum_{۱ \leq k < j \leq n} (a_k b_j - a_j b_k)^۲$$

نامساوی کشی-شوارتس را می‌توان از این نامساوی نتیجه گرفت.

۲. ثابت کنید به ازای اعداد حقیقی a_k، b_k و c_k نامساوی زیر برقرار است:

$$(\sum_{k=۱}^{n} a_k b_k c_k)^۴ \leq (\sum_{k=۱}^{n} a_k^۴)(\sum_{k=۱}^{n} b_k^۲)(\sum_{k=۱}^{n} c_k^۴)$$

۳. نامساوی مینکوفسکی را ثابت کنید.

$$(\sum_{k=۱}^{n}(a_k + b_k)^۲)^{\frac{۱}{۲}} \leq (\sum_{k=۱}^{n} a_k^۲)^{\frac{۱}{۲}} + (\sum_{k=۱}^{n} b_k^۲)^{\frac{۱}{۲}}$$

۴. فرض کنید $a_n \geq ... \geq a_۲ \geq a_۱$ و $b_n \geq ... \geq b_۲ \geq b_۱$، ثابت کنید:

$$(\sum_{k=۱}^{n} a_k)(\sum_{k=۱}^{n} b_k) \leq n \sum_{k=۱}^{n} a_k b_k.$$

راهنمایی $\sum_{۱\leq j\leq k\leq n}(a_k - a_j)(b_k - b_j) \geq ۰$.

۱.۵.۱ کران‌های بالایی

۱. کوچکترین کران بالایی و بزرگترین کران پائینی مجموعه‌های زیر را بیابید.

الف) $\{\frac{۱}{۲^n} + \frac{۱}{۳^m} + \frac{۱}{۵^k} : n, m, k \in \mathbb{N}\}$.

ب) $\{\frac{k}{۲^n} : ۰ < k < ۲^n\}$.

فصل ۲

فضاهای متریک

در نظریه مجموعه ها و نیز در بررسی ساختارهای جبری (به عنوان مثال نظریه گروهها و یا جبرخطی) مکان نقطه در فضای مورد بررسی برای ما اهمیتی ندارد. در این فصل به مکان نقطه در یک مجموعه می پردازیم. طبیعی ترین وسیله برای بحث در خصوص مکان یک نقطه، مفهوم فاصله است. به این منظور بر اساس اصولی منطبق بر هندسه اقلیدسی، تعریف فاصله را پایه ریزی می‌کنیم و در یک فضای مرجع که به یک متر مجهز شده مفاهیم داخل، خارج، مرز، نقطه چسبیدگی و ... را برای یک زیرمجموعه از فضا تعریف می نمائیم. این مفاهیم با شهود ما از فضا و فاصله انطباق دارند.

۱.۲ فضاهای متریک و مفاهیم توپولوژیک

تعریف ۱.۱.۲. *فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی باشد. تابع $d : X \times X \to [0, \infty)$ را یک متر روی X می‌نامیم هرگاه در ویژگی‌های زیر صدق کند.*

الف) برای هر $x, y \in X$، $d(x, y) = 0$ اگر وتنها اگر $x = y$،

ب) برای هر $x, y \in X$، نتیجه شود $d(x, y) = d(y, x)$، و

پ) برای هر $x, y, z \in X$، داشته باشیم $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

در اینصورت (X, d) یک فضای متریک نامیده می‌شود، چنانچه دچار سردرگمی نشویم، به اینکه X یک فضای متریک است، بسنده می‌نمائیم.

مثال ۲.۱.۲. *الف)* هرگاه $(E, \|\cdot\|)$ یک فضای نرمدار باشد، نرم $\|\cdot\|$ یک متر روی E القا می‌کند. به این منظور کافی است برای هر $u, v \in E$ قرار دهیم،

$$d(u,v) = \|u-v\|.$$

متر d را متر القا شده توسط نرم $\|\cdot\|$ می‌نامیم. بنابراین فضاهای $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ و $(B(X), \|\cdot\|_u)$ ، فضاهای متریک می‌باشند.

ب) هرگاه X مجموعه‌ای ناتهی باشد، تابع $d : X \times X \to [\circ, +\infty)$ با ضابطهٔ

$$d(x,y) = \begin{cases} ۱ & x \neq y \\ \circ & x = y \end{cases}$$

یک متر روی X معرفی می‌کند. فضای (X, d) را یک فضای متریک گسسته می‌نامیم و d را با تعریف فوق متر گسسته می‌نامیم.

پ) هرگاه $(X, d_۱)$ و $(X, d_۲)$ دو فضای متریک باشند، آنگاه برای هر $\alpha > \circ$، فضای $(X, \alpha d_۱ + d_۲)$ نیز یک فضای متریک است.

ت) هرگاه (X, d_X) و (Y, d_Y) فضاهایی متریک باشند، آنگاه برای هر $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$ در $X \times Y$ تعریف می‌کنیم:

$$d((x_۱, y_۱), (x_۲, y_۲)) = d_x(x_۱, x_۲) + d_y(y_۱, y_۲)$$

آنگاه $(X \times Y, d)$ یک فضای متریک خواهد بود که فضای متریک حاصلضربی نامیده می‌شود.

ث) فرض کنید $X = \{[a,b] : -\infty < a < b < +\infty\}$. قرار می‌دهیم:

$$D([a,b], [c,d]) = \inf\{|t-s| : t \in [a,b], s \in [c,d]\},$$

در اینصورت D یک متر روی X نیست.

مفهوم متر، تداعی کنندهٔ مفهوم فاصله است؛ بنابراین می‌توان با استفاده از متر، مفهوم «مجموعهٔ نقاط نزدیک به یک نقطه» را معرفی نمود. برای تمایز بین مفاهیم نسبی "نزدیک" و "نزدیک‌تر"، استفاده از عدد مفید می‌باشد و با توجه به آن، جملهٔ «مجموعه نقاطی که به اندازهٔ $\delta > \circ$ به $a \in X$ نزدیکند»، با معنا خواهد شد.

تعریف ۳.۱.۲. همسایگی باز. *فرض کنید (X,d) فضایی متریک و $a \in X$ باشد. یک همسایگی باز به مرکز a و به شعاع $r > 0$، عبارتست از مجموعهٔ نقاطی که به a به اندازهٔ حداکثر r نزدیکند. همسایگی باز را با $N_r(a)$ نمایش می‌دهیم. به بیانی دیگر،*

$$N_r(a) = \{x \in X : d(x,a) < r\}$$

مثال ۴.۱.۲. *الف)* در فضای متریک $(\mathbb{R}, |\cdot|)$، برای $a \in \mathbb{R}$ و $r > 0$،

$$N_r(a) = (a-r, a+r).$$

ب) در فضای متریک $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$ برای $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ و عدد مثبت $r > 0$،

$$N_r((a,b)) = \{(x,y) : (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\}.$$

پ) فرض کنید $(\mathbb{R}, d)$ فضای متریک گسسته باشد. برای هر $a \in \mathbb{R}$ و $r > 0$،

$$N_r(a) = \begin{cases} \mathbb{R} & r \geq 1 \\ \{a\} & 0 < r < 1. \end{cases}$$

مفهوم نقاط نزدیک به $a \in X$، ما را به تعریف همسایگی نقطهٔ a رساند. حال فرض کنید A زیر مجموعه‌ای ناتهی از X و $a \in A$ باشد. هرگاه نقاطی که به "اندازهٔ کافی" به a نزدیکند در A واقع شوند، می‌توانیم تصور کنیم که a در "داخل" مجموعهٔ A واقع است. در اینجا بایستی توجه نمود که مفاهیم "a در داخل A" است و "a متعلق به A" است، از هم متمایزند؛ گزارهٔ اول در خصوص مکان نقطهٔ a اظهار نظر می‌کند که اطلاعات بیشتری نسبت به متعلق بودن، به دست می‌دهد.

تعریف ۵.۱.۲. نقطهٔ درونی و مجموعهٔ باز. *فرض کنید (X,d) فضایی متریک و $A \subseteq X$ باشد. هرگاه برای هر $a \in A$، $r > 0$ موجود باشد که $N_r(a) \subseteq A$، آنگاه a را نقطهٔ درونی مجموعهٔ A می‌نامیم. مجموعهٔ همهٔ نقاط درونی A را با $intA$ یا A° نمایش می‌دهیم. مجموعهٔ A را در X باز گوییم اگر $A = A^\circ$؛ یعنی هر نقطهٔ A، یک نقطهٔ درونی A باشد.*

مثال ۶.۱.۲. *الف)* زیر مجموعهٔ $A = (0,1]$ *از اعداد حقیقی را در نظر بگیرید. از آنجا که* $1 \notin A^\circ$، *پس* A *باز نیست. از طرفی* $A^\circ = (0,1)$.

ب) برای هر $a,b \in \mathbb{R}$ که $a < b$، مجموعهٔ $A = (a,b)$ *در* $\mathbb{R}$ *باز است؛ زیرا اگر برای هر* $x \in A$، $r = min\{|x-a|, |x-b|\}$ *اختیار کنیم. در اینصورت* $N_r(x) = (x-r, x+r)$، *آنگاه*

$$x - r \geq x - |x-a| = r - (x-a) = a$$

و

$$x + r \leq x + |x - b| = x + b - x = b.$$

بنابراین $N_r(x) \subseteq (a, b)$.

پ) مجموعه‌های $\emptyset$ و X در X، باز هستند.

ت) هرگاه (X, d) فضای متریک گسسته باشد، آنگاه هر $A \subseteq X$ باز است؛ زیرا برای هر $a \in A$ و $r = \frac{۱}{۲}$، داریم $N_r(a) = \{a\} \subseteq A$. بنابراین هر نقطهٔ $a \in A$، یک نقطهٔ درونی است و در نتیجه $A^\circ = A$.

تعریف ۷.۱.۲. مجموعهٔ بسته. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک و $A \subseteq X$ باشد. مجموعهٔ A را در X بسته گوییم اگر A^c در X باز باشد.

مثال ۸.۱.۲ *الف)* بازهٔ $A = (\circ, +\infty)$ در $\mathbb{R}$ بسته نیست؛ زیرا $A^c = (-\infty, \circ]$ و $\circ$، نقطهٔ درونی A^c نمی‌باشد.

ب) هرگاه (X, d) یک فضای متریک گسسته باشد، هر زیر مجموعه X بسته است.

پ) فرض کنید $a < b$ و $A = [a, b]$. در اینصورت A در $\mathbb{R}$ بسته است؛ زیرا برای $x \in A^c$ ، با قرار دادن $r = min\{|x - a|, |x - b|\}$، نتیجه می‌شود که

$$N_r(x) = (x - r, x + r) \subseteq A^c.$$

لذا A^c باز است.

ت) مجموعهٔ $[\circ, ۱)$ در $\mathbb{R}$ نه باز است و نه بسته.

قضیه ۹.۱.۲. فرض کنید (X, d) فضایی متریک باشد. در این صورت،

الف) به ازای هر گردایهٔ $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ از مجموعه‌های باز در X، $\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ در X باز است.

ب) به ازای هر گردایهٔ $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ از مجموعه‌های بسته در X، $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ در X بسته است.

پ) به ازای هر گردایهٔ متناهی $G_۱, ..., G_n$ از مجموعه‌های باز در X، $\bigcap_{i=۱}^{n} G_i$ در X باز است.

ت) *به ازای هر گردایهٔ متناهی* $F_1, ..., F_n$ *از مجموعه‌های بسته در* X، $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ *در* X *بسته است.*

اثبات. مورد الف) و پ) را ثابت می‌کنیم، مورد ب) و ت) به‌راحتی نتیجه می‌شوند. فرض کنید $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های باز در X باشد و $G = \bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha$. فرض کنید $x \in G$ دلخواه باشد؛ در این صورت $\alpha \in I$ موجود است که $x \in G_\alpha$. از آنجا که G_α باز است، $r > 0$ وجود دارد به طوری که $N_r(x) \subseteq G_\alpha \subseteq G$. بنابراین x نقطهٔ درونی G است و لذا G باز است.

پ)فرض کنید $G_1, ..., G_n$ در X باز باشند و $G = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$. فرض کنید $x \in G$؛ در این صورت برای هر $i = 1, ..., n$، $x \in G_i$. بنابراین $r_i > 0$ وجود دارد که $N_{r_i}(x) \subseteq G_i$. حال اگر $r = min\{r_i : i = 1, ..., n\}$ ، آنگاه $N_r(x) \subseteq N_{r_i}(x)$، برای هر $i = 1, ..., n$. در نتیجه $N_r(x) \subseteq G$ و لذا x نقطهٔ درونی G است. $\square$

در قضیهٔ قبل، متناهی بودن گردایه‌ها در قسمت پ) و ت) ضروری است. زیرا اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، قرار دهیم $G_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ ، آنگاه G_nها بازند، ولی $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \{0\}$ در $\mathbb{R}$ باز نیست. همچنین اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، قرار دهیم $F_n = [\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}]$، آنگاه F_nها در $\mathbb{R}$ بسته‌اند؛ اما $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = (0, 2)$ در $\mathbb{R}$ بسته نیست.

فرض کنید X فضای متریک و $A \subseteq X$ باشد. نقاطی از X که از هر نقطهٔ دیگری، به A نزدیکترند(نقاط چسبیده به A)، از اهمیت خاصی برخوردارند. به‌عبارتی ساده‌تر نقاطی که فاصلهٔ آنها از مجموعه A صفر باشد. بین «نقاط چسبیده» به A، بر حسب فراوانی نقاط A در نزدیکی نقاط چسبیده، می‌توان تمایز قائل شد. در تعریف زیر، این تفاوت‌ها بیان شده است.

تعریف ۲.۱.۱۰. ***نقطهٔ حدی و نقطهٔ بستاری.*** *فرض کنید* X *فضایی متریک باشد و* $A \subseteq X$.

الف) *نقطهٔ* $a \in X$ *را نقطهٔ بستاری* A *می‌نامیم اگر برای هر* $r > 0$، $N_r(a) \cap A \neq \emptyset$. *مجموعه نقاط بستاری* A *را با* $\bar{A}$ *یا* clA *نمایش می‌دهیم و آن را بستار مجموعهٔ* A *می‌نامیم.*

ب) $a \in X$ *را نقطهٔ حدی* A *می‌نامیم اگر برای هر* $r > 0$، $N_r(a) \cap A \neq \emptyset$ *نامتناهی باشد. مجموعهٔ نقاط حدی* A *را با* A' *نشان می‌دهیم.*

ج) $a \in X$ را نقطه تراکم A گوئیم اگر برای هر $r > 0$؛ $N_r(a) \cap A$ ناشمارا باشد. مجموعه نقاط تراکم مجموعهٔ A را با P_A نمایش می‌دهیم.

مثال ۱۱.۱.۲. *الف)* فرض کنید $A = (0, 1]$. نقطهٔ $a = 0$، نقطهٔ حدی و نقطه تراکم A است؛ زیرا برای هر $r > 0$،

$$N_r(0) \cap A = (-r, r) \cap (0, 1] = \begin{cases} (0, r) & r < 1 \\ (0, 1] & r \geq 1. \end{cases}$$

ب) برای مجموعهٔ $A = (0, 1]$، $P(A) = [0, 1]$ و $A' = [0, 1]$.

پ) مجموعهٔ نقاط بستاری $A = (0, 1]$، عبارتست از $\bar{A} = [0, 1]$.

ت) مجموعهٔ $A = (0, 1] \cup \{2\}$ را در نظر بگیرید. در این صورت در $\mathbb{R}$، $\bar{A} = [0, 1] \cup \{2\}$، $A' = [0, 1]$ و $A^\circ = (0, 1)$.

ث) اگر (X, d) فضای متریک گسسته باشد و $A \subseteq X$، آنگاه $A' = \emptyset$ و $A^\circ = \bar{A} = A$.

ج) فضای متریک $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ را در نظر بگیرید. برای اعداد گویای $\mathbb{Q}$ داریم، $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$ و $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$. زیرا برای هر $x \in \mathbb{Q}$ و هر $r > 0$، $N_r(x) = (x - r, x + r)$ مشمول در $\mathbb{Q}$ نیست و بنابراین $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$. از طرفی برای هر $x \in \mathbb{R}$ و هر $r > 0$، $N_r(x) \cap \mathbb{Q}$ نامتناهی است. لذا نتیجه می‌شود که $x \in \mathbb{Q}'$ و $x \in \overline{\mathbb{Q}}$.

چ) در فضای متریک $(\mathbb{R}, |\cdot|)$، مجموعهٔ $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ را در نظر بگیرید. در این صورت $A^\circ = \emptyset$، $\bar{A} = A \cup \{0\}$ و $A' = \{0\}$ و $P(A) = \emptyset$.

تعریف ۱۲.۱.۲. **نقطهٔ تنها.** در فضای متریک X، نقطهٔ $x \in A$ را نقطهٔ تنهای A می‌نامیم اگر $r > 0$ موجود باشد به طوری که $N_r(a) \cap A$ مجموعه‌ای متناهی باشد. مجموعه نقاط تنهای A را با $\mathrm{iso}(A)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱۳.۱.۲. *الف)* در فضای متریک $(\mathbb{R}, |\cdot|)$، نقاط $\mathbb{Z}$، نقاط تنها هستند.

ب) مجموعه‌های باز در $\mathbb{R}^n$، دارای نقطهٔ تنها نیستند.

ج) $a \in A$ نقطهٔ نتهای A است اگر و تنها اگر $r > 0$ موجود باشد که

$$N_r(a) \cap A = \{a\}.$$

در ادامه، قضایایی در خصوص همسایگی‌های باز، مجموعه‌های باز، مجموعه‌های بسته، نقاط حدی و نقاط بستاری بیان می‌شود.

قضیه ۱۴.۱.۲. *فرض کنید X فضای متریک باشد و $A \subseteq X$. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:*

الف) *برای هر $a \in X$ و هر $r > 0$، $N_r(a)$ در X باز است.*

ب) *$a \in A'$ اگر وتنها اگر برای هر $r > 0$؛ $N_r(a) \cap A - \{a\} \neq \emptyset$.*

پ) *مجموعهٔ $\bar{A}$، کوچکترین مجموعهٔ بستهٔ شامل A است، یعنی اگر F مجموعه‌ای بستهٔ شامل A باشد، آنگاه $\bar{A} \subseteq F$.*

ت) *مجموعهٔ A°، بزرگترین مجموعهٔ باز مشمول در A است؛ یعنی اگر G زیر مجموعهٔ بازی از A باشد آنگاه $G \subseteq A^\circ$.*

ث) *$a \in \bar{A}$ اگر تنها اگر $d(a, A) = \inf\{d(a, x) : x \in A\} = 0$. ($d(a, A)$ فاصلهٔ نقطهٔ a از مجموعه A است).*

اثبات. الف) فرض کنید $a \in X$ و $r > 0$. برای $x \in N_r(a)$، $\delta = r - d(a, x)$ اختیار کنید، آنگاه $\delta > 0$ و $N_\delta(x) \subseteq N_r(a)$؛ زیرا اگر $y \in N_\delta(x)$ را در نظر بگیرید، داریم $d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + r - d(a.x) = r$ و لذا $y \in N_r(a)$. بنارااین $N_r(a)$ باز است.

ب) اگر $a \in A'$، حکم واضحست. به‌عکس، به برهان خلف فرض کنید مجموعهٔ $N_r(a) \cap A - \{a\}$ برای یک $r > 0$، متناهی باشد. در این صورت

$$N_r(a) \cap A - \{a\} = \{x_1, ..., x_n\}$$

متناهی است که با فرض $a \in A'$ در تناقض است و بنابراین فرض خلف باطل است.

پ) برای آنکه نشان دهیم $\bar{A}$

بسته است، نشان می‌دهیم $(\bar{A})^c$ باز است. فرض کنید $x \in (\bar{A})^c$، در این صورت $x \notin \bar{A}$ و بنابراین $r > 0$ وجود دارد که $N_r(x) \cap A = \emptyset$. ادعا می‌کنیم $N_r(x) \cap$

$\bar{A} = \emptyset$. به برهان خلف، فرض کنید $y \in N_r(x) \cap \bar{A}$. پس $y \in N_r(x)$ و بنابراین $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که $N_\delta(y) \subseteq N_r(x)$. از طرفی $N_\delta(y) \cap A \subseteq N_r(x) \cap A = \emptyset$ و در نتیجه $y \notin \bar{A}$ ، که یک تناقض است. به این ترتیب $N_r(x) \cap \bar{A} = \emptyset$ ، پس $N_r(x) \subseteq (\bar{A})^c$ و لذا x نقطهٔ درونی $(\bar{A})^c$ می‌باشد.

حال نشان می‌دهیم $\bar{A}$ کوچکترین مجموعهٔ بستهٔ شامل A است. فرض کنید F مجموعه‌ای بسته، شامل A باشد. هرگاه $x \notin F$، آنگاه $x \in F^c$ و چون F^c باز است، پس $\delta > 0$ وجود دارد که $N_\delta(x) \subseteq F^c$. بنابراین $N_\delta(x) \cap A = \emptyset$ و در نتیجه $x \notin \bar{A}$. به این ترتیب $\bar{A} \subseteq F$ و حکم ثابت می‌شود.

ت) و ث) به عنوان تمرین به خوانندهٔ گرامی واگذار می‌شود.

□

نتیجه ۱۵.۱.۲. *فرض کنید X یک فضای متریک باشد و $A \subseteq X$. در این صورت،*

الف) *مجموعهٔ A بسته است اگر و تنها اگر $\bar{A} = A$ اگر و تنها اگر $A' \subseteq A$.*

ب) $\bar{A} = A \cup A'$.

پ) *هرگاه A متناهی باشد، آنگاه A بسته است.*

ت) *هرگاه A متناهی باشد، آنگاه $A' = \emptyset$.*

مثال ۱۶.۱.۲. *الف) مجموعهٔ $A = \{\frac{k}{2^n} : k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ را در فضای متریک $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ، در نظر بگیرید. در این صورت $\bar{A} = \mathbb{R}$ ، $A^\circ = \emptyset$ و $A' = \mathbb{R}$. بدون اینکه از کلیت مسئله کاسته شود، فرض کنید $x > 0$. برای هر $r > 0$ ، همسایگی $N_r(x) = (x-r, x+r)$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت $m \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $\frac{1}{2^m} < r$. از آنجا که $n \in \mathbb{N}$ موجود است که $n \leq x < n+1$ ، فاصلهٔ $[n, n+1)$ را به 2^m قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. بنابراین برای یک $k \in \mathbb{N}$ ، داریم $x \in [\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m})$. به وضوح $|x - \frac{k}{2^m}| \leq |\frac{k+1}{2^m} - \frac{k}{2^m}| = \frac{1}{2^m} < r$ و بنابراین $\frac{k}{2^m} \in N_r(x)$ ؛ یعنی $x \in \bar{A}$. با استدلالی مشابه می‌توان نشان داد که $x \in A'$. با توجه به گزاره زیر به راحتی دیده می‌شود که $A^\circ = \emptyset$ و $P(A) = \emptyset$.*

ب) *هر مجموعهٔ باز در $\mathbb{R}^n$، ناشماراست. به خصوص در $\mathbb{R}^n$ ، هر همسایگی، مجموعه‌ای ناشماراست. بنابراین در $\mathbb{R}^n$ ، مجموعه‌های ناتهی شمارا، باز نیستند. به عبارتی دقیق تر نقطه درونی ندارند.*

دیدیم که شرط لازم و کافی برای بسته بودن مجموعهٔ A این است که $A' \subseteq A$. به نظر می‌رسد $A = A'$ ، خصوصیات ویژه‌ای را برای مجموعهٔ A پدید می‌آورد. همچنین در مثال‌های قبل با مجموعه‌هایی آشنا شدیم که در شرط $\bar{A} = X$ صدق می‌کنند. این مجموعه‌ها نیز در بررسی و مطالعهٔ فضاهای متریک، از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند.

تعریف ۲.۱.۱۷. مجموعهٔ کامل و مجموعهٔ چگال. *فرض کنید X فضایی متریک و $A \subseteq X$ باشد.*

الف) *مجموعهٔ A را در X چگال گوییم هرگاه $\bar{A} = X$.*

ب) *مجموعهٔ A را یک زیر مجموعهٔ کامل X گوییم اگر $A' = A$.*

پ) *فضای متریک X را جدایی‌پذیر گوییم اگر X شامل مجموعهٔ چگال شمارش‌پذیر باشد.*

قضیه ۲.۱.۱۸. *فرض کنید (X, d) فضایی متریک و $A \subseteq X$ باشد. در این صورت A' مجموعه‌ای بسته است.*

اثبات. نشان می‌دهیم $(A')' \subseteq A'$. اگر $(A')' = \emptyset$ حکم واضح است. فرض کنید $x \in (A')'$. در این صورت برای هر $r > 0$، $N_r(x) \cap A'$ نامتناهی است. حال فرض کنید $y \in N_r(x) \cap A'$. از آنجا که $y \in N_r(x)$، پس $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که $N_\delta(y) \subseteq N_r(x)$ و چون $N_\delta(y) \cap A$ نامتناهی است، از $N_\delta(y) \cap A \subseteq N_r(x) \cap A$ نتیجه می‌شود که $N_r(x) \cap A$ نامتناهی است. بنابراین $x \in A'$ و حکم ثابت می‌شود. □

نتیجه ۲.۱.۱۹. *مجموعهٔ A ، یک مجموعهٔ کامل است اگر و تنها اگر A بسته باشد و هر نقطهٔ A ، نقطهٔ حدّی A باشد.*

مثال ۲.۱.۲۰. الف) *از آنجا که $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ چگال است، $\mathbb{R}$ جدایی‌پذیر است.*

ب) *بازهٔ $[0, 1]$ در $\mathbb{R}$ مجموعه‌ای کامل است.*

پ) مجموعهٔ $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}^۲$ چگال است؛ زیرا برای هر $(x,y)\in\mathbb{R}^۲$ و هر $r>۰$ ؛ اعداد گویای q و p موجودند که $x<q<x+\frac{r}{۴}$ و $y<p<y-\frac{r}{۴}$. در این صورت،

$$\begin{aligned}|(x,y)-(q,p)|_r =&\sqrt{|x-q|^۲+|y-p|^۲}\\ \leq&|x-q|+|y-p|\\ <&\frac{r}{۴}+\frac{r}{۴}\\ <&r.\end{aligned}$$

بنابراین $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\cap N_r((x,y))\ni(q,p)$ و در نتیجه $\overline{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}}=\mathbb{R}^۲$.

ت) فرض کنید A زیرمجموعهٔ فضای متریک X باشد. چنانچه $\delta>۰$ موجود باشد که برای هر $x,y\in A$ داشته باشیم $d(x,y)\geq\delta$، آنگاه $A'=\emptyset$ ؛ زیرا اگر $x\in A'$ موجود باشد، آنگاه برای هر $r>۰$، $N_r(x)\cap A\neq\emptyset$ نامتناهی است. بنابراین برای $r=\frac{\delta}{۳}>۰$، نتیجه می‌شود که $N_{\frac{\delta}{۳}}(x)\cap A$ نامتناهی است. فرض کنید $y_۱$ و $y_۲\in N_{\frac{\delta}{۳}}(x)\cap A$ ، در این صورت

$$d(y_۱,y_۲)\leq d(y_۱,x)+d(x,y_۲)<\frac{\delta}{۳}+\frac{\delta}{۳}<\delta$$

که تناقض است و بنابراین $A'=\emptyset$.

ث) هرگاه A در $\mathbb{R}^n$ و B در $\mathbb{R}^m$ باز باشند، آنگاه $A\times B$ در $\mathbb{R}^{m+n}$ باز است؛ زیرا اگر $x\in A\times B$ ، آنگاه $a\in A$ و $b\in B$ موجودند که $x=(a,b)$. به خاطر داشته باشیم که a یک nتایی مرتب و b یک mتایی مرتب است که در کنار هم یک $m+n$تایی را تشکیل می‌دهند. چون A در $\mathbb{R}^n$ و B در $\mathbb{R}^m$ بازند، پس $r_a>۰$ و $r_b>۰$ موجودند که $N_{r_a}(a)\subseteq A$ و $N_{r_b}(b)\subseteq B$ که به ترتیب همسایگی به مرکز a و شعاع r_a در $\mathbb{R}^n$ و همسایگی به مرکز b و شعاع r_b در $\mathbb{R}^m$ می‌باشند. حال اگر $r=min\{r_a,r_b\}$، در این صورت

$$N_{\frac{r}{۲}}((a,b))\subseteq N_r(a)\times N_r(b)\subseteq A\times B.$$

زیرا اگر $y\in N_{\frac{r}{۲}}((a,b))$ اختیار نمائیم، آنگاه $y_b\in\mathbb{R}^m$ و $y_a\in\mathbb{R}^n$ موجودند که $y=(y_a,y_b)$. در نتیجه $\sqrt{|y_a-a|^۲+|y_b-b|^۲}=|y-(a,b)|<\frac{r}{۲}$ و لذا $x=(a,b)$ نقطهٔ درونی $A\times B$ است. به این ترتیب $A\times B$ در $\mathbb{R}^{n+m}$ باز است.

ج) هرگاه $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ، $B \subseteq \mathbb{R}^m$ و $A \times B$ در $\mathbb{R}^{n+m}$ باز باشد، آنگاه A در $\mathbb{R}^n$ و B در $\mathbb{R}^m$ باز هستند. به این منظور $a \in A$ و $b \in B$ را در نظر بگیرید. چون $A \times B$ باز است پس $r > \circ$ وجود دارد که $N_r((a,b)) \subseteq A \times B$. حال اگر $\delta = \frac{r}{\mathsf{r}} > \circ$ اختیار شود، آنگاه $N_\delta(a) \times N_\delta(b) \subseteq N_r((a,b))$ ؛ زیرا هرگاه $x \in N_\delta(a)$ و $y \in N_\delta(b)$ ، آنگاه

$$\begin{aligned}|(x,y)-(a,b)| =& \sqrt{|x-a|^{\mathsf{r}} + |y-b|^{\mathsf{r}}}\\ \le& |x-a| + |y-b|\\ <& \delta + \delta\\ <& r.\end{aligned}$$

بنابراین $(x,y) \in N_r((a,b))$ و این نتیجه می‌دهد که $N_\delta(a) \subseteq A$ و $N_\delta(b) \subseteq B$. پس A در $\mathbb{R}^n$ و B در $\mathbb{R}^m$ بازند.

چ) هرگاه $(\mathbb{R}, d)$ فضای متری گسسته باشد، آنگاه $\mathbb{R}$ جدایی‌پذیر نیست.

خ) اگر $A \subseteq \mathbb{R}^n$ باز باشد آنگاه برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ ، $A + x$ در $\mathbb{R}^n$ باز است.

ح) اگر A در $\mathbb{R}^n$ باز و $B \subseteq \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ای دلخواه باشد

$$A + B = \{a + b : a \in, b \in B\}$$

در $\mathbb{R}^n$ باز است.

تعریف ۲.۱.۲۱. مجموعهٔ کراندار. در فضای متریک X ، $A \subseteq X$ را یک مجموعهٔ کراندار گوییم اگر $b \in X$ و $M > \circ$ موجود باشند که برای هر $x \in A$ داشته باشیم، $d(x,b) \le M$.

مثال ۲.۱.۲۲. الف) هر مجموعهٔ متناهی در یک فضای متریک، کراندار است.

ب) مجموعهٔ $\mathbb{N}$ در $\mathbb{R}$ مجموعه‌ای کراندار نیست.

پ) هرگاه X فضایی متریک باشد، آنگاه $A \subseteq X$ مجموعه‌ای کراندار است اگر و تنها اگر $M > \circ$ و $a \in X$ موجود باشند که $A \subseteq N_M(a)$.

ت) *هرگاه $(E, \|\cdot\|)$ فضایی نرمدار باشد، $A \subseteq E$ کراندار است اگر و تنها اگر $M > 0$ موجود باشد که برای هر $x \in A$ داشته باشیم $\|x\| \leq M$.*

در کنار همسایگی باز، همسایگی بسته نیز قابل تعریف است که در ذیل تعریف آن بیان می‌شود.

تعریف ۲۳.۱.۲. ***همسایگی بسته.*** *فرض کنید X فضایی متریک باشد. یک همسایگی بسته به مرکز $a \in X$ و شعاع $r > 0$، عبارت است از*

$$\overline{N_r}(a) = \{x \in X : d(x, a) \leq r\}.$$

قضیه ۲۴.۱.۲. *هر همسایگی بسته در X، مجموعه‌ای بسته در X است.*

اثبات. فرض کنید $a \in X$ و $r > 0$ داده شده‌اند. برای آنکه نشان دهیم همسایگی بسته $\overline{N_r}(a)$ مجموعه‌ای بسته است، نشان می‌دهیم متمم آن، یعنی $\{x \in X : d(x, a) > r\}$، در X مجموعه‌ای باز است. فرض کنید برای $x \in X$ داشته باشیم $d(x, a) > r$. قرار می‌دهیم $\delta = d(x, a) - r > 0$ و در نتیجه $N_\delta(x) \subseteq \{y \in X : d(y, a) > r\}$؛ زیرا هرگاه $y \in N_\delta(x)$، آنگاه $d(y, a) \geq d(a, x) - d(y, x) > d(a, x) - \delta = r$. $\square$

مثال ۲۵.۱.۲. الف) *در فضای متریک گسسته (X, d)، برای هر $a \in X$ و هر $r > 0$ داریم،*

$$\overline{N_r}(a) = \begin{cases} X & r \geq 1 \\ \{a\} & 0 < r < 1. \end{cases}$$

ب) *هر همسایگی باز در $\mathbb{R}$ یک فاصلهٔ باز (a, b) است و هر فاصلهٔ باز (a, b) یک همسایگی باز در $\mathbb{R}$ است.*

پ) *هر همسایگی بسته در $\mathbb{R}$ یک فاصلهٔ بستهٔ $[a, b]$ است و هر فاصلهٔ بستهٔ $[a, b]$ یک همسایگی بسته در $\mathbb{R}$ است.*

ت) *در هر فضای متریک (X, d)، برای $a \in X$ و $r > 0$ لزوماً رابطهٔ زیر برقرار نیست:*

$$\overline{N_r(a)} = \bar{N}_r(a).$$

به عنوان مثال، در فضای متریک گسسته، رابطهٔ فوق برای هر $a \in X$ و $r = 1$، برقرار نیست.

ث) در فضای $\mathbb{R}^n$، برای هر $a \in \mathbb{R}^n$ و هر $r > 0$ داریم، $\overline{N_r(a)} = \bar{N_r}(a)$. به وضوح $\overline{N_r(a)} \subseteq \bar{N_r}(a)$. حال فرض کنید $x \in \bar{N_r}(a)$. اگر $|x - a| < r$، آنگاه $x \in \overline{N_r(a)}$. بنابراین فرض کنید $|x - a| = r$. در این صورت برای هر $\delta > 0$، نتیجه می‌شود $N_\delta(x) \cap N_r(a) - \{x\} \neq \emptyset$. به این ترتیب $x \in \overline{N_r(a)}$ و $\bar{N_r}(a) \subseteq \overline{N_r(a)}$.

تعریف ۲.۱.۲۶. نقطهٔ مرزی. نقطهٔ $a \in A$ را نقطهٔ مرزی مجموعهٔ A گوییم اگر برای هر $r > 0$، $N_r(a) \cap A \neq \emptyset$ و $N_r(a) \cap A^c \neq \emptyset$. مجموعهٔ تمام نقاط مرزی A را با ∂A نمایش می‌دهیم.

مثال ۲.۱.۲۷. *الف)* فرض کنید $A = [a, b]$ ، در این صورت در فضای متریک $(\mathbb{R}, |\cdot|)$، $\partial A = \{a, b\}$ می‌باشد.

ب) هرگاه $A = \{a\}$ که $a \in \mathbb{R}^n$، آنگاه $\partial A = \{a\}$.

پ) هرگاه (X, d) فضای متریک گسسته باشد، آنگاه برای هر $A \subseteq X$، $\partial A = \emptyset$.

ت) در فضای $\mathbb{R}^2$، $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ را در نظر بگیرید. در این صورت $\partial A = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

ث) هرگاه $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ و $A = [0, 1]$ رادر نظر بگیریم، آنگاه مرز A در $\mathbb{R}$، عبارتست از $\{0, 1\}$ و مرز A در $\mathbb{R}^2$ عبارتست از $[0, 1]$.

۲.۲ زیر فضاهای متریک

زیرمجموعه های یک فضای متریک را می‌توان به عنوان یک فضای متریک در نظر گرفت. بنابراین تمام آنچه در بخش قبل بیان شد برای این فضاهای متریک برقرار خواهند بود. آنچه در اینجا برای ما مهم است ارتباط مفاهیم گفته شده با فضای اولیه است. در این بخش می بینیم که مفاهیمی چون باز بودن و بسته بودن مفاهیمی نسبی هستند که از یک فضا به فضای دیگر قابل انتقال نیستند.

فضای متریک $\mathbb{R}^2$، فضای متریک $\mathbb{R}$ را در بر دارد، به راحتی می‌توان مشاهده کرد که متر $\mathbb{R}$ از تحدید متر $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}$ بدست می‌آید. برای $(a, 0) \in \mathbb{R}^2$ و هر $r > 0$ ،

همسایگی $N_r((a,\circ))$ در $\mathbb{R}^۲$ مجموعهٔ نقاطی از $\mathbb{R}^۲$ است که در یک دایره به مرکز $(a,\circ)$ و شعاع $r > \circ$ واقع است. همچنین برای $a \in \mathbb{R}$ $= (a,\circ)$ و $r > \circ$، همسایگی $N_r(a) = N_r((a,\circ))$ در $\mathbb{R}$ پاره خط $(a-r,a+r) = (a-r,a+r) \times \{\circ\}$ می‌باشد. بنابراین برای نقطهٔ $a = (a,\circ) \in \mathbb{R}$ و $r > \circ$، با توجه به اینکه فضای متریک $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{R}^۲$ باشد، به دو همسایگی دست می‌یابیم؛ اما آنچه که مهم است ارتباط بین دو همسایگی است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$N_r(a) = N_r((a,\circ)) \cap \mathbb{R}.$$

در این بخش زیر فضای یک فضای متریک را معرفی و در خصوص اینکه خواص باز بودن، بسته بودن و ... از یک فضا به زیر فضا قابل انتقال هست یا نه، بحث می‌کنیم. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد و $Y \subseteq X$. از آنجا که $d : Y \times Y \to [\circ,\infty)$ یک متر روی Y است؛ بنابراین (Y,d) یک فضای متریک می‌باشد و به این ترتیب Y را زیر فضای متریک X می‌نامیم.

برای هر $a \in Y$ و هر $r > \circ$، همسایگی به مرکز نقطهٔ a و به شعاع $r > \circ$ به دو صورت قابل بیان است:

۱. همسایگی a در X و

۲. همسایگی a در Y؛

بنابراین برای پرهیز از سردرگمی در این بخش همسایگی در مجموعهٔ Y، به مرکز a و به شعاع $r > \circ$ را به این صورت در نظر می‌گیریم:

$$N_r(a,Y) = \{x \in Y : d(x,a) < r\}.$$

اگر (X,d) فضایی متریک باشد و $Y \subseteq X$، آنگاه برای هر $a \in Y$ و هر $r > \circ$ داریم،

$$N_r(a,Y) = N_r(a,X) \cap Y.$$

با توجه به اینکه (Y,d) فضایی متریک است، $A \subseteq Y$ در Y باز است اگر که برای هر $a \in A$ و هر $r > \circ$ داشته باشیم $N_r(a,Y) \subseteq A$. همچنین $A \subseteq Y$ در Y بسته است اگر که $A^c = Y - A$ (متمم نسبت به Y) در Y باز باشد.

مثال ۱.۲.۲. *فرض کنید $Y = [\circ,۱) \cup \{۲\} \in \mathbb{R}$. در این صورت $N_{\frac{۱}{۲}}(۲,Y) = \{۲\}$ و لذا $\{۲\}$ در Y باز است؛ اما $\{۲\}$ در $\mathbb{R}$ باز نیست.*

قضیه ۲.۲.۲. *فرض کنید (X,d) فضایی متریک و $Y \subseteq X$ باشد. برای $A \subseteq Y$،*

الف) A در Y باز است اگر و تنها اگر زیر مجموعهٔ بازی چون G در X موجود باشد که $A = G \cap Y$.

ب) A در Y بسته است اگر و تنها اگر زیر مجموعه‌ای بسته چون F در X موجود باشد که $A = F \cap Y$.

اثبات. الف) فرض کنید A در Y باز باشد. بنابراین برای هر $a \in A$، $r_a > ۰$ وجود دارد که $N_{r_a}(a,Y) \subseteq A$ و به این ترتیب $A = \bigcup_{a\in A} N_{r_a}(a,Y)$. از آنجایی که $N_{r_a}(a,Y) = N_{r_a}(a,X) \cap Y$ ، لذا $A = \left(\bigcup_{a\in A} N_{r_a}(a,X)\right) \cap Y$. حال اگر $G = \bigcup_{a\in A} N_{r_a}(a,X)$ قرار دهیم، آنگاه G در X باز است و $A = G \cap Y$.

به عکس، فرض کنید برای مجموعهٔ باز G در X داشته باشیم $A = G \cap Y$. در این صورت برای هر $a \in A$، $r > ۰$ وجود دارد به طوری که $N_r(a,X) \subseteq G$. از طرفی $N_r(a,Y) = N_r(a,X) \cap Y$، پس

$$N_r(a,Y) = N_r(a,X) \cap Y \subseteq G \cap Y = A,$$

یعنی a نقطهٔ درونی A است و لذا A در Y باز می‌باشد.

ب) فرض کنید A در Y بسته باشد، آنگاه $Y - A$ در Y باز است؛ بنابراین برای یک مجموعهٔ باز G در X داریم $Y - A = G \cap Y$. لذا

$$\begin{aligned}
A =& Y - (Y - A) \\
=& Y - (G \cap Y) \\
=& Y \cap (G \cap Y)^c \\
=& Y \cap (G^c \cap Y^c) \\
=& G^c \cap Y.
\end{aligned}$$

چون G^c در X بسته است، حکم نتیجه می‌شود.

به عکس، اگر مجموعه بسته F در X به قسمی موجود باشد که $A = Y \cap F$، آنگاه

چون F^c در X باز است، پس

$$\begin{aligned} Y - A =& Y - (Y \cap F) \\ =& Y \cap (Y \cap F)^c \\ =& Y \cap (Y^c \cup F^c) \\ =& Y \cap F^c \end{aligned}$$

در Y باز است و بنابراین A در Y بسته می‌باشد. □

مثال ۲.۲.۲. *الف)* $Y = [\circ, ۱) \cup \{۲\} \subseteq \mathbb{R}$ *در نظر بگیرید، آنگاه* $\{۲\} = Y \cap (۱, ۳) = Y \cap [۱, ۳]$. *بنابراین* $\{۲\}$*(و به روش مشابه* $[\circ, ۱)$*) در* Y *هم باز و هم بسته می‌باشد.*

ب) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ *را در نظر بگیرید. مجموعهٔ* $A = (\sqrt{۲}, \sqrt{۳}) \cap \mathbb{Q} = [\sqrt{۲}, \sqrt{۳}] \cap \mathbb{Q}$ *در* $\mathbb{Q}$ *هم باز و هم بسته است.*

پ) مجموعهٔ $(\circ, ۱)$ *در* $\mathbb{R}$ *باز است و در* $\mathbb{R}^۲$ *نه باز است و نه بسته.*

۳.۲ زیر فضاهای متریک و ابر فضاهای متریک

به هر مجموعهٔ X، گردایه‌ی زیر مجموعه‌های آن را با $P(X)$ نشان می دهیم. هر متر روی X، هر عضو $P(X)$ را نیز تبدیل به فضایی متریک می‌سازد. در این قسمت ارتباط بعضی مفاهیم توپولوژیک بین فضا و زیر فضا، به صورت دیگر بررسی می کنیم.

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنید (X, d) و (Y, e) *فضاهایی متریک باشند.* می‌گوییم Y *زیر فضای متریک* X *و* X *ابر فضای متریک* Y *است اگر و فقط اگر* Y *زیر مجموعهٔ* X *و* e *تحدید* d *باشد.*

مثال ۲.۳.۲. $\mathbb{R}$ *زیر فضای* $\mathbb{R}^۲$ *و* $\mathbb{R}^۲$ *ابر فضای* $\mathbb{R}$ *است.*

سوال. فرض کنید (X, d) فضایی متریک باشد و $X \subsetneqq Y$. آیا همیشه می‌توان یک متر روی Y تعریف کرد که توسیع متر d باشد؟

برای توسیع d به $(X \times X) \cup ((Y - X) \times (Y - X))$، با انتخاب یک متر دلخواه روی

$Y-X$ که ما آن را نیز d می‌نامیم، آغاز می‌کنیم. نقاط $a\in X$ و $b\in Y-X$ را ثابت در نظر می‌گیریم و برای هر $x\in X$ و $y\in Y-X$ قرار می‌دهیم،

$$d(y,x)=d(x,y)=d(x,a)+1+d(b,y)$$

شکل

ثابت می‌شود که Y با این تعریف فضایی متریک است که ابر فضای X می‌باشد.

تعریف ۳.۳.۲. *فرض کنید (X,d) و (Y,e) فضاهایی متریک و $\phi:X\to Y$ یک تابع باشد. می‌گوییم ϕ یک ایزومتری یا یک نگاشت ایزومتریک است اگر و تنها اگر برای هر $a,b\in X$ داشته باشیم:*

$$e(\phi(b),\phi(a))=d(a,b)$$

اگر ϕ یک ایزومتری باشد، می‌گوییم $(\phi(X),e)$، به عنوان زیر فضایی از (Y,e) ، کپی ایزومتریک (X,d) می‌باشد.

مثال ۴.۳.۲. *الف) فضاهای $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^2$ زیرفضاهای متریک $\mathbb{R}^3$ می‌باشند؛ گرچه حتی زیر مجموعهٔ $\mathbb{R}^3$ نیستند. در واقع $\mathbb{R}$ ایزومتریک با $\{(a_1,a_2,a_3):a_2=a_3=0\}$ و $\mathbb{R}^2$ ایزومتریک با $\{(a_1,a_2,a_3):a_3=0\}$ از زیر فضایی از $\mathbb{R}^3$ می‌باشند.*

ب) فرض کنید Y مجموعه‌ای دلخواه و (X,d) فضایی متریک باشد. اگر $f:Y\to X$ تابعی یک به یک باشد، آنگاه f و d یک متر روی Y القا می‌کنند. به این منظور برای هر $a,b\in Y$ تعریف کنید:

$$e(a,b)=d(f(a),f(b))$$

در این صورت e یک متر روی Y است.

در ادامه نشان می‌دهیم که چگونه یک فضای متریک به یک فضای متریک بزرگتر توسیع داده می‌شود. به این منظور ابتدا با توابع نقطه ای و توابع شبه نقطه ای آشنا می شویم. یک متر روی مجموعهٔ X یک تابع روی $X \times X$ است و نه روی X. با این وجود بعضی مترها، به عنوان مثال متر اقلیدسی روی $\mathbb{R}$، با یک تابع روی X معین می‌شوند. برای هر فضای متریک وجود چنین تابعی قابل پیش‌بینی نیست؛ اما ما به کمک توابع نقطه‌ای تا حدودی این نقیضه را مرتفع می‌سازیم.

تعریف ۵.۳.۲. *فرض کنید (X, d) فضایی متریک و $a \in X$ باشد. در این صورت تابع $\delta_a : X \to [\circ, +\infty)$ با ضابطهٔ $\delta_a(b) = d(a, b)$ را تابع نقطه‌ای در $a \in X$ می‌نامیم و گردایهٔ همهٔ توابع نقطه‌ای روی X را با $\delta(X) = \{\delta_a : a \in X\}$ نمایش می‌دهیم.*

قضیه ۶.۳.۲. *برای فضایی متریک (X, d)، تابع $\delta : X \to \delta(X)$ ، $a \to \delta_a$ ، تابعی دو سویی است.*

اثبات. به عنوان تمرین. $\square$

مثال ۷.۳.۲. *برای هر a و b در $\mathbb{R}^n$، داریم $d(a, b) = \delta_\circ(b - a)$. همچنین برای $x \in \mathbb{R}^n$ می‌توان نوشت $d(a, b) = \delta_x(x - (b - a))$.*

باید توجه داشت که ساختار جبری $\mathbb{R}^n$ در تعاریف فوق، نقش مهمی دارد و این قابلیت در هر فضای متریک دلخواه لزوماً موجود نیست.

قضیه ۸.۳.۲. *فرض کنید (X, d) فضایی متریک و $a \in X$ باشد.*

الف) *برای هر x و y در X، داریم:*

$$\delta_a(x) - \delta_a(y) \leq d(x, y) \leq \delta_a(x) + \delta_a(y).$$

ب) $\delta_a(a) = \circ$.

اثبات. واضح است. $\square$

در فضای متریک (X, d) تابع $u : X \to [\circ, \infty)$ را تابع شبه نقطه‌ای می‌نامیم اگر و تنها اگر برای هر $a, b \in X$، داشته باشیم $u(a) - u(b) \leq d(a, b) \leq u(a) + u(b)$. به وضوح $u \in \delta(X)$ اگر و تنها اگر u تابع شبه نقطه‌ای بوده و $\circ \in u(X)$. در این صورت نقطهٔ یکتای $a \in X$ وجود دارد که $u = \delta_a$.

قضیه ۹.۳.۲. *فرض کنید (X,d) فضایی متریک ناتهی و X' مجموعهٔ همهٔ توابع شبه نقطه‌ای روی X باشد. تابع*
$$D : X' \times X' \to [\circ, \infty)$$
را با ضابطهٔ
$$D(u,v) = \sup\{|u(x) - v(x)| : x \in X\}$$
در نظر بگیرید. در این صورت D یک متر روی X' است. بعلاوه $\delta(X) \subseteq X'$ و نگاشت $z \to \delta_z : (X,d) \to (X',D)$ یک ایزومتری می‌باشد. در نتیجه $(\delta(X),D)$ یک کپی ایزومتریک از (X,d) است.

اثبات. برای $v \in X'$ و u و هر $b \in X$ و x داریم:
$$u(x) - u(b) \leq d(x,b) \leq v(x) + v(b)$$
و لذا
$$|u(x) - v(x)| \leq u(b) + v(b).$$
بنابراین
$$D(u,v) = \sup\{|u(x) - v(x)| : x \in X\}$$
موجود است. واضح است که D مثبت و متقارن است؛ یعنی برای هر $v \in X'$ و u ، $D(u,v) \geq \circ$ و $D(u,v) = D(v,u)$. از طرفی اگر $D(u,v) = \circ$، آنگاه $u = v$. از طرفی برای $x \in X$ و $u,v,w \in X'$ داریم:
$$|u(x) - v(x)| \leq |u(x) - w(x)| + |w(x) - v(x)| \leq D(u,w) + D(w,v)$$
لذا $D(u,v) \leq D(u,w) + D(w,v)$، پس (X',D) فضایی متریک می‌باشد. با توجه به تعریف، $\delta(X) \subseteq X'$. از طرفی،
$$|\delta_p(a) - \delta_y(a)| = |d(a,p) - d(a,y)| \leq d(p,y)$$
برای هر $a,b,y \in X$(به تمرین رجوع شود). هرگاه $a = p$ یا $a = y$، آنگاه
$$D(\delta_p, \delta_y) = d(p,y)$$
برای هر $p,y \in X$ ؛ لذا نگاشت
$$z \to \delta_z : (X,d) \to (\delta(X),D)$$
یک ایزومتری است. $\square$

۴.۲ تمرین

۱. درستی گزاره‌های زیر را اثبات کنید و یا با مثال نقض رد نمایید.

۱.۱. فضای متریک (X,d) گسسته است اگر وتنها اگر برای هر $x \in X$، $\{x\}$ باز باشد.

۱.۲. هر مجموعهٔ باز در فضای نرمدار، ناشماراست.

۱.۳. در یک فضای متریک، اگر اشتراک شمارا مجموعهٔ باز، مجموعه‌ای باز باشد، آنگاه مجموعه‌های تک عضوی باز هستند.

۱.۴. هر گاه هر زیر مجموعهٔ یک فضای متریک بسته باشد، آنگاه مجموعه‌های تک عضوی باز هستند.

۱.۵. گردایهٔ مجموعه‌های باز از هم جدا در $\mathbb{R}$، حداکثر شماراست.

۱.۶. هر مجموعهٔ باز، اجتماعی دلخواه از همسایگی‌هاست.

۱.۷. هر مجموعهٔ باز، اجتماعی شمارا از همسایگی‌هاست.

۱.۸. هر مجموعهٔ باز در $\mathbb{R}^۲$، اجتماعی شمارا از همسایگی‌هاست.

۱.۹. هرگاه $E \subseteq \mathbb{R}$ و $E' = \emptyset$، آنگاه E حداکثر شماراست.

۱.۱۰. هرمجموعهٔ نامتناهی در $\mathbb{R}$، دارای نقطهٔ حدی است.

۱.۱۱. هر مجموعهٔ ناشمارا در $\mathbb{R}$، دارای نقطهٔ حدی است.

۱.۱۲. اعداد جبری در $\mathbb{R}$، چگالند.

۱.۱۳. مجموعهٔ $\mathbb{R}$ را می‌توان به صورت اجتماع دو مجموعهٔ باز ناتهی و از هم جدا نوشت.

۱.۱۴. هر فاصله در $\mathbb{Q}$، هم باز است و هم بسته.

۱.۱۵. $\mathbb{Q} \cap [\sqrt{۲}, \sqrt{۳}]$ در $\mathbb{Q}$ باز است.

۲. هرگاه (X,d) فضایی متریک باشد، آنگاه $\frac{d}{۱+d}$ نیز یک متر روی X می‌باشد.

مجموعه‌های باز و بسته

(آ) در هر فضای متریک (X,d)، برای زیر مجموعه‌های B و A از X داریم:

الف) اگر $A \subseteq B$، آنگاه $\bar{A} \subseteq \bar{B}$.

ب) اگر $A \subseteq B$، آنگاه $A^\circ \subseteq B^\circ$.

پ) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ و $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$.

ت) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ و $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$.

(ب) فرض کنید (X,d) فضایی متریک و $\mathcal{C}$ خانواده‌ای ناتهی از زیر مجموعه‌های X باشد، آنگاه،

الف) $\overline{\bigcap \mathcal{C}} \subseteq \bigcap_{A \in \mathcal{C}} \bar{A}$ و تساوی لزوماً برقرار نیست.

ب) $\bigcup_{A \in \mathcal{C}} \bar{A} \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{C}}$ و تساوی وقتی برقرار است که $\mathcal{C}$ متناهی باشد.

پ) $\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A^\circ \subseteq (\bigcup \mathcal{C})^\circ$ و تساوی لزوما برقرار نیست.

ث) $(\bigcap \mathcal{C})^\circ \subseteq \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A^\circ$ و تساوی وقتی برقرار است که $\mathcal{C}$ متناهی باشد.

(ج) آیا در فضای متریک X برای $A \subseteq X$، این رابطه برقرار است؟

$$(A^\circ)^c = \overline{((\bar{A})^c)}$$

(د) نشان دهید در هر فضای متریک X، برای $A \subseteq X$، $\bar{A} = A' \cup iso(A)$ که $iso(A)$ مجموعهٔ نقاط تنهای A می‌باشد.

(هـ) فرض کنید (X,d) فضایی متریک باشد و $A \subseteq X$. در اینصورت گزاره‌های زیر معادلند.

الف) $\partial A \cap A = \emptyset$.

ب) $A = A'$.

پ) $(A^c)' \cap A = \emptyset$.

(و) فرض کنید (X,d) فضایی متریک باشد و $A \subseteq X$. در اینصورت گزاره‌های زیر معادلند.

الف) $\partial A \subseteq A$.

ب) $A = \bar{A}$.

پ) $A' \subseteq A$.

(ز) فرض کنید (X,d) فضایی متریک باشد و $A \subseteq X$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند.

الف) $\bar{A} = X$.

ب) A با هر زیر مجموعهٔ باز X، دارای مقطع ناتهی است.

(ح) به کمک مسئلهٔ قبل، نشان دهید $\mathbb{Q}^n = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \ldots \times \mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}^n$ چگال است.

(ط) فرض کنید (X,d) فضایی متریک باشد و $A \subseteq X$. در این صورت $\partial A = \emptyset$ اگر و تنها اگر A در X هم باز باشد و هم بسته.

(ی) در یک فضای متریک (X,d)، $A \subseteq X$ دارای درون ناتهی است اگر و تنها اگر A دارای متمم چگال باشد.

(یآ) دو مجموعهٔ بسته و از هم جدای A و B را در $\mathbb{R}$ چنان بیابید که

$$d(A,B) = \inf\{d(x,y) : x \in A, y \in B\} = ۰$$

(یب) مثالی از یک زیر فضای $\mathbb{R}$ ارائه دهید که همهٔ زیر مجموعه‌های باز آن در $\mathbb{R}$ باز باشند اما همهٔ زیر مجموعه‌های بستهٔ آن در $\mathbb{R}$ بسته نباشند.

(یج) فرض کنید (X,d) فضای متریک و $\mathcal{C}$ گردایهٔ همهٔ زیر مجموعه‌های چگال X باشد. در این صورت $\bigcap \mathcal{C} = iso(X)$.

(ید) در هر فضای متریک X، برای هر $x \in X$ داریم، $X = \bigcup_{k=۱}^{\infty} N_k(x)$.

(یه) فرض کنید E فضایی نرم‌دار باشد و $A \subseteq E$. قرار می‌دهیم $-A = \{-a : a \in A\}$ و برای $x \in E$، $x + A = \{x + a : a \in A\}$. نشان دهید:

الف) $\partial(-A) = -\partial A$.

ب) $int(-A) = -int(A)$.

پ) $\overline{-A} = -\bar{A}$.

ت) $int(x+A) = x + intA$.

ث) $\overline{x+A} = x + \bar{A}$.

ج) $\partial(x+A) = x + \partial A$.

نقاط حدی

۱. فرض کنید X فضایی متریک باشد و $A \subseteq X$. نقطهٔ z یک نقطهٔ حدی A است اگر و فقط اگر $d(z, A-\{z\}) = \circ$.

۲. در یک فضای متریک X، فرض کنید $A \subseteq X$ و $z \in A$. در این صورت z نقطهٔ حدی A است اگر و تنها اگر نقطهٔ تنهای A نباشد.

۳. فرض کنید X یک فضای متریک باشد و $A \subseteq X$. در این صورت $z \in A'$ اگر و تنها اگر z، نقطهٔ تنهای A نباشد و $d(z, A) = \circ$.

۴. در هر فضای متریک X برای زیرمجموعه های A و B از آن داریم:

الف) $A^\circ = A - (A^c)'$.

ب) $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$.

پ) $(\bar{A})^c = (A^c)^\circ$.

ت) $\bar{A} = \{x \in X : d(x, A) = \circ\}$

ث) $A^\circ = \{x \in X : d(x, A^c) > \circ\}$.

ج) اگر $A \subseteq B$، آنگاه $A' \subseteq B'$.

نقاط تنها و مرز مجموعه

(آ) در یک فضای متریک X، فرض کنید $A \subseteq X$. در این صورت $x \in A$، نقطهٔ تنهای A است اگر و تنها اگر $d(x, A-\{x\}) \neq \circ$.

(ب) هر نقطهٔ یک مجموعهٔ متناهی در یک فضای متریک، تنهاست.

(ج) فرض کنید A و B زیر مجموعه‌هایی از فضایی متریک X باشند. اگر $A \subseteq B$ ، آنگاه $A \cap \mathrm{iso}(B) \subseteq iso(A)$.

(د) فرض کنید X یک فضای متریک باشد و $A \subseteq X$. نقطهٔ تنهای a از A، یک نقطهٔ مرزی A در X است اگر و تنها اگر $a \in iso(X)$.

(ه) زیر مجموعه‌ای شمارا مانند A از $\mathbb{R}$ چنان بیابید که $(\partial A) - A$، تک نقطه‌ای باشد.

(و) فرض کنید $B([\circ,1],[\circ,1])$ گردایهٔ همهٔ توابع از $[\circ,1]$ به $[\circ,1]$ باشد. در این صورت این فضا زیر مجموعه‌ای از $B[\circ,1]$ است و لذا با توجه به نرم القایی از $B[\circ,1]$، یعنی $\|\cdot\|_u$، فضایی متریک است. هرگاه $\mathcal{C}$ گردایهٔ همهٔ توابع ثابت در $B([\circ,1],[\circ,1])$ باشد آنگاه $\partial\mathcal{C}=\mathcal{C}$.

(ز) نشان دهید در هر فضای متریک X، برای $A\subseteq X$ داریم $\partial A=\partial A^c$.

(ح) فرض کنید $(a,b)\subseteq\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$. در این صورت،

الف) مرز (a,b) را در $\mathbb{R}$ بیابید.

ب) مرز (a,b) را در $\mathbb{C}$ بیابید.

پ) از قسمت‌های (الف) و (ب) چه استنباط می نمایید.

(ط) فرض کنید X یک فضای متریک، $A\subseteq X$ و $a\in X$ باشد. در این صورت،

الف) اگر $a\notin A$، آنگاه $a\in\partial A$ اگر وتنها اگر $a\in A'$.

ب) اگر $a\in A$، آنگاه $a\in\partial A$ اگر وتنها اگر $a\in(A^c)'$.

(ی) در یک فضای متریک X، ∂X و $\partial\emptyset$ را بیابید.

(یآ) مثالی از یک فضای متریک X ارائه دهید که حداقل یک زیر مجموعهٔ سرهٔ آن دارای مرز تهی باشد.

(یب) نشان دهید که برای فضای متریک X و $A\subseteq X$ داریم، $\partial(\partial A)\subseteq\partial A$.

(یج) هرگاه (X,d) فضایی متریک باشد و $A\subseteq X$، آنگاه گزاره‌های زیر برقرارند:

الف) $\bar{A}=A\cup\partial A$.

ب) $A^\circ=A-\partial A$.

پ) $\overline{\partial A}=\partial A$.

ت) $\partial\bar{A}\subseteq\bar{A}$.

ث) $\partial(A^\circ)\cap A^\circ=\emptyset$.

ج) $\bar{\bar{A}}=\bar{A}$.

چ) $(A^\circ)^\circ=A^\circ$.

ح) $\bar{A}=A^\circ\cup\partial A$.

خ) $\partial A=\bar{A}\cap\bar{A^c}$.

(ید) هرگاه $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$، این صورت $(\partial T)^\circ = \emptyset$. آیا مرز هر مجموعه‌ای دارای درون تهی است؟

(یه) فرض کنید X یک فضایی متریک و A و B زیر مجموعه‌هایی از X باشند که $B \subseteq A \subseteq \partial B$، آنگاه $\partial A \subseteq \partial B$.

(یو) نشان دهید هر زیر مجموعهٔ شمارا از $\mathbb{R}$ دارای درون تهی است و مشمول در مرز خود است.

(یز) فضای متریکی بیابید که دارای زیر مجموعه‌های شمارای دارای درون تهی نباشد.

(یح) فرض کنید (X, d) فضایی متریک باشد. نشان دهید که برای هر x, y و $z \in X$ داریم:

$$|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z)$$

(یط) با توجه به اینکه تابع $(0, +\infty) \to (0, +\infty) : x \to x^{-1}$ یک به یک است، نشان دهید:

الف) $d(a,b) = |a^{-1} - b^{-1}|$ یک متر روی $(0, \infty)$ می‌باشد.

ب) قرار دهید $\widetilde{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ و تابع $d : \widetilde{\mathbb{N}} \times \widetilde{\mathbb{N}} \to [0, +\infty)$ را با ضابطهٔ

$$\begin{cases} d(m,n) = |m^{-1} - n^{-1}| & m, n \in \mathbb{N} \\ d(\infty, n) = d(n, \infty) = \frac{1}{n} & n \in \mathbb{N} \text{ و } \infty \in \widetilde{\mathbb{N}} \\ d(\infty, \infty) = 0 & \end{cases}$$

در نظر بگیرید. نشان دهید $(\widetilde{\mathbb{N}}, d)$ فضایی متریک است.

(ک) فرض کنید p عددی اول باشد. هر عدد گویای ناصفر را می‌توان به صورت یکتای $\frac{p^{-k}r}{s}$ که $k \in \mathbb{Z}$، $r \in \mathbb{Z}$ و $s \in \mathbb{N}$ و همچنین $(s,p) = 1$ و $(r,p) = 1$، توصیف نمود. قرار دهید $|x|_p = p^{-k}$ و $|0|_p = 0$. تابع d را با ضابطهٔ

$$d : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to [0, +\infty)$$

$$d(a,b) = |a - b|_p$$

در نظر بگیرید و نشان دهید $(\mathbb{Q}, d)$ فضایی متریک است. متر d یک $p-$متر روی $\mathbb{Q}$ نامیده می‌شود.

(کآ) فرض کنید $I = \{[a,b] \subseteq \mathbb{R} : a,b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$. برای هر $A = [a,b]$ و $B = [c,d]$ قرار دهید

$$d(A,B) = \max\{|a-c| \text{ و } |b-d|\}$$

و نشان دهید (I,d) فضایی متریک است.

مفاهیم توپولوژیک در زیر فضاهای متریک

فرض کنید X یک فضای متریک و Y زیرفضایی از آن باشد. هرگاه $A \subseteq Y$، مرز A در Y را با $\partial_Y A$ و مرز A در X را با $\partial_X(A)$ نشان می‌دهیم.

۱. نشان دهید که $\partial_X A \subseteq \partial_Y A$.

۲. $\partial_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}$ و $\partial_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ را بیابید.

۳. فرض کنید (X,d) فضایی متریک و $\mathcal{C}$ گردایه‌ای ناتهی و متناهی از زیر مجموعه‌های X باشد. نشان دهید،

الف) $\partial(\bigcup \mathcal{C}) \subseteq \bigcup\{\partial A : A \in \mathcal{C}\}$

ب) $\partial(\bigcap \mathcal{C}) \subseteq \bigcup\{\partial A : A \in \mathcal{C}\}$

پ) با مثالی نشان دهید که در روابط فوق، متناهی بودن $\mathcal{C}$ لازم است.

فصل ۳

حد بالایی و حد پایینی

در این فصل دنباله‌ها را در اعداد حقیقی معرفی می‌کنیم و قضایایی مرتبط با مفاهیم توپولوژیک بدست می‌آوریم. به عنوان مثال نشان می‌دهیم که مجموعه حدود زیردنباله‌ای یک دنباله در اعداد حقیقی مجموعه‌ای بسته است. در پایان حد بالایی و حد پایینی یک دنباله را معرفی می‌کنیم.

۱.۳ حد و همگرایی در مجموعهٔ اعداد حقیقی

یک دنباله در $\mathbb{R}$، تابعی مانند $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ است. اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ قرار دهیم $f(n) = x_n$ ، آنگاه می‌توان دنبالهٔ f را با $\{x_n\}$ نشان داد. برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، x_n را جملهٔ دنبالهٔ $\{x_n\}$ و مجموعهٔ $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ را برد دنبالهٔ $\{x_n\}$ می‌نامیم.

می‌گوییم دنبالهٔ $\{x_n\}$ در $\mathbb{R}$ همگراست اگر $x \in \mathbb{R}$ موجود باشد که برای هر $\epsilon > 0$ ، به ازای یک $N > 0$ داشته باشیم:

$$\forall n (n > N \Longrightarrow |x_n - x| < \epsilon).$$

در این صورت می‌نویسیم $x_n \to x$ یا $\lim_{x\to\infty} x_n = x$، و x را حد دنبالهٔ $\{x_n\}$ می‌نامیم. اگر دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرا نباشد، آن را واگرا می‌خوانیم و $x_n \nrightarrow x$ به این معناست که دنبالهٔ $\{x_n\}$ به x همگرا نیست.

دنبالهٔ $\{x_n\}$ را کراندار گوییم اگر برد دنباله در $\mathbb{R}$، مجموعه‌ای کراندار باشد؛ به عبارتی به ازای یک $M > ۰$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$، داشته باشیم:

$$|x_n| \leq M.$$

قضیه ۱.۱.۱.۳. *گزاره‌های زیر در $\mathbb{R}$ برقرار هستند.*

الف) ***قضیهٔ فشار.*** *فرض کنید $\{a_n\}$، $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ دنباله‌هایی در $\mathbb{R}$ باشند به طوری که برای یک $N_۱ > ۰$ داشته باشیم:*

$$\forall n(n > N_۱ \Longrightarrow a_n \leq b_n \leq c_n).$$

اگر $a_n \to x$ و $c_n \to x$، آنگاه $b_n \to x$.

ب) حد یک دنباله، در صورت وجود، یکتاست.

پ) هر دنبالهٔ همگرا، دنباله‌ای کراندار است.

ت) $x_n \to x$ اگر وتنها اگر $|x_n - x| \to ۰$. در این صورت $|x_n| \to |x|$.

ث) $x_n \to x$ در $\mathbb{R}$ اگر و تنها اگر هر همسایگی به مرکز x و شعاع $r > ۰$ ، جز تعداد متناهی، همهٔ جملات دنبالهٔ $\{x_n\}$ را شامل شود.

ج) $x_n \to x$ در $\mathbb{R}$ اگر و تنها اگر هر مجموعهٔ باز شامل x، جز تعداد متناهی، همهٔ جملات دنباله را شامل شود.

اثبات. الف) از آنجا که $a_n \to x$ و $c_n \to x$، پس برای $\epsilon > ۰$، یک $N_۲ > ۰$ وجود دارد به طوری که

$$\forall n(n > N_۲ \Longrightarrow |a_n - x| < \epsilon)$$

و

$$\forall n(n > N_۲ \Longrightarrow |c_n - x| < \epsilon).$$

حال اگر برای $\epsilon > ۰$ قرار دهیم $N = max\{N_۱ \text{ و } N_۲\}$، آنگاه

$$\forall n(n > N \Longrightarrow -\epsilon < a_n - x \leq b_n - x \leq c_n - x < \epsilon).$$

بنابراین

$$\forall n(n > N \Longrightarrow |b_n - x| < \epsilon)$$

و در نتیجه $b_n \to x$.

ب) فرض کنید $x_n \to x$ و $x_n \to y$. در این صورت برای $\frac{\epsilon}{۲} > ۰$، یک $N > ۰$ وجود دارد به طوری که

$$\forall n (n > N_۲ \Longrightarrow |x_n - x| < \frac{\epsilon}{۲}),$$

و

$$\forall n (n > N_۲ \Longrightarrow |x_n - y| < \frac{\epsilon}{۲}).$$

بنابراین

$$\forall n (n > N \Longrightarrow |x - y| \leq |x_n - x| + |x_n - y| < \epsilon)$$

و در نتیجه برای هر $\epsilon > ۰$، $|x - y| < \epsilon$ و این بدین معناست که $x = y$.

پ) فرض کنید $x_n \to x$. در این صورت برای $\epsilon = ۱$، یک $N > ۰$ وجود دارد به طوری که

$$\forall n (n > N \Longrightarrow |x_n - x| < ۱)$$

و لذا

$$\forall n (n \geq N \Longrightarrow |x_n| \leq ۱ + |x|).$$

حال اگر $M = \{|x_۱|, |x_۲|, ..., |x_N|, |x| + ۱\}$، آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$، خواهیم داشت

$$|x_n| \leq M$$

لذا دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگراست.

ت) واضح است.

ث) فرض کنید $x_n \to x$. لذا برای هر $\epsilon > ۰$، یک $N > ۰$ وجود دارد به طوری که

$$\forall n (n > N \Longrightarrow |x_n - x| < \epsilon),$$

در نتیجه

$$\forall n (n > N \Longrightarrow x_n \in N_\epsilon(x)).$$

پس هر همسایگی به مرکز x و شعاع $r > ۰$، جز تعداد متناهی، همهٔ جملات دنباله را شامل می‌شود. به عکس، فرض کنید هر همسایگی به مرکز x و شعاع $r > ۰$، جز تعداد متناهی، همهٔ جملات دنباله را شامل باشد. حال

فرض کنید $\epsilon > 0$ ثابت باشد. در این صورت فقط تعداد متناهی جملهٔ $x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}$ در $N_\epsilon(x)$ واقع نیست. اگر برای $\epsilon > 0$، قرار دهیم $N = max\{n_1, n_2, ..., n_k\}$ ، آنگاه

$$\forall n(n > N \Longrightarrow x_n \in N_\epsilon(x) \Rightarrow |x_n - x| < \epsilon),$$

پس $x_n \to x$.

ج) با توجه به اینکه x نقطهٔ درونی مجموعهٔ A است اگر و تنها اگر $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که $N_\delta(x) \subseteq A$ ، حکم با توجه به قسمت قبل به دست می‌آید.

□

نتیجه ۲.۱.۳. *الف) فرض کنید $x_n \to x$ و $x > \alpha$. در این صورت $N > 0$ وجود دارد به طوری که*

$$\forall n(n > N \Longrightarrow x_n > \alpha).$$

ب) هرگاه $x_n \to x$ و تعداد نامتناهی جملهٔ دنباله از α بزرگتر باشد، آنگاه $x \geq \alpha$

اثبات. الف) چون $x_n \to x$ و $(\alpha, +\infty)$ مجموعه‌ای باز و شامل x است. لذا با توجه به قضیهٔ قبل قسمت ث)، جز تعداد متناهی، همهٔ جملات دنباله را شامل می‌شود؛ یعنی

$$\exists N > 0 \quad s.t. \quad \forall n(n > N \Longrightarrow x_n > \alpha).$$

ب) به برهان خلف فرض کنید $x < \alpha$. از آنجا که $(-\infty, \alpha)$ باز و شامل x است لذا با توجه به قضیهٔ قبل قسمت ث)، جز تعداد متناهی، همهٔ جملات دنباله را شامل می‌شود؛ به عبارتی، جز تعداد متناهی، همهٔ جملات دنباله از α کوچکتر هستند و این در تناقض با فرض می‌باشد. در نتیجه فرض خلف باطل است.

□

قضیه ۳.۱.۳. *فرض کنید $x_n \to x$ و $y_n \to y$ در $\mathbb{R}$. در این صورت،*

الف) $x_n \pm y_n \to x \pm y$.

ب) برای هر $k \in \mathbb{N}$، $kx_n \to kx$.

پ) $x_n y_n \to xy$.

ت) اگر $y \neq 0$، آنگاه $\frac{1}{y^n} \to \frac{1}{y}$.

اثبات. الف) برای هر $\frac{\epsilon}{2}$، یک $N > 0$ وجود دارد به طوری که

$$\forall n(n > N \Longrightarrow |x_n - x| < \frac{\epsilon}{2})$$

و

$$\forall n(n > N \Longrightarrow |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}).$$

بنابراین برای $\epsilon > 0$، یک $N > 0$ وجود دارد به طوری که

$$\forall n(n > N \Longrightarrow |(x_n + y_n) - (x + y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \epsilon)$$

و لذا $x_n + y_n \to x + y$.

ب) به استقرا حکم به دست می‌آید.

پ) $x_n \to x$ لذا $k \in \mathbb{N}$ وجود دارد که‌برای هر $n \in \mathbb{N}$، داریم

$$|x_n| \leq k,$$

و نیز $m \in \mathbb{N}$ هست که $|y| \leq m$. به این ترتیب با توجه به اینکه

$$|x_n y_n - xy| \leq k|y_n - y| + m|x_n - x|$$

و با توجه به قضیهٔ فشار و قسمت ب)، حکم نتیجه می‌شود.

ت) چون $y_n \to y$، پس $|y_n| \to |y|$. از آنجا که $|y| > 0$، بنابراین $N > 0$ وجود دارد به طوری که

$$\forall n(n \geq N \Longrightarrow |y_n| \geq \frac{|y|}{2}).$$

بنابراین برای $n \geq N$ داریم:

$$|\frac{1}{y^n} - \frac{1}{y}| = \frac{|y_n - y|}{|y_n||y|} \leq \frac{2}{|y|^2}|y_n - y|,$$

و لذا با توجه به قضیهٔ فشار، حکم نتیجه می‌شود.

□

دنبالهٔ $\{x_n\}$ را در $\mathbb{R}$ صعودی گوییم اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$، داشته باشیم:

$$x_n \leq x_{n+۱}$$

و آن را نزولی گوییم اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم:

$$x_n \geq x_{n+۱}.$$

دنبالهٔ $\{x_n\}$ یکنواست اگر صعودی یا نزولی باشد.

قضیه ۴.۱.۳. *فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای یکنوا باشد. دراین صورت $\{x_n\}$ همگراست اگر و تنها اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای کراندار باشد.*

اثبات. اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای همگرا باشد، آنگاه کراندار است. به عکس، فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای صعودی و کراندار باشد. در این صورت مجموعهٔ $A = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ کراندار و ناتهی است و لذا $\sup A = \alpha$ در $\mathbb{R}$ موجود است. برای $\epsilon > ۰$، $\alpha - \epsilon < \alpha$ و لذا $x_{n_۰} \in A$ هست که $\alpha - \epsilon < x_{n_۰} \leq \alpha$. حال برای $\epsilon > ۰$ ، $N = n_۰$ اختیار می‌کنیم، آنگاه

$$\forall n (n > N \Longrightarrow \alpha - \epsilon < x_{n_۰} \leq x_n \leq \alpha < \alpha + \epsilon \Rightarrow |x_n - \alpha| < \epsilon)$$

و بنابراین $x_n \to \alpha$.

اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای نزولی و کراندار باشد، آنگاه $\{-x_n\}$ دنباله‌ای صعودی و کراندار خواهد بود. در نتیجه $\{-x_n\}$ به نقطه‌ای چون $-x \in \mathbb{R}$ همگراست و بنابراین $x_n \to x$ و حکم ثابت می‌شود. $\square$

تعریف ۵.۱.۳. *فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای در $\mathbb{R}$ باشد. دنبالهٔ $\{n_k\}$ از اعداد طبیعی به طوری که $۱ \leq n_۱ < n_۲ < n_۳ < \ldots$ را در نظر می‌گیریم. دراین صورت $\{x_{n_k}\}$ را زیردنبالهٔ $\{x_n\}$ می‌نامیم. هرگاه $\{x_{n_k}\}$ دنباله‌ای همگرا باشد، حد آن یک حد زیر دنباله‌ای $\{x_n\}$ نامیده می‌شود.*

به وضوح دنبالهٔ $\{x_n\}$ به x همگراست اگر و تنها اگر هر زیر دنبالهٔ $\{x_n\}$ به x همگرا باشد.

قضیه ۶.۱.۳. *مجموعهٔ حدود زیردنباله‌ای هر دنباله در $\mathbb{R}$، مجموعه‌ای بسته است.*

اثبات. فرض کنید E مجموعهٔ حدود زیردنباله‌ای دنبالهٔ $\{x_n\}$ باشد. اگر $E' = \emptyset$، حکم نتیجه می‌شود. پس فرض کنید $x \in E'$ موجود باشد. در این صورت $n_۱$ را به قسمی اختیار می‌کنیم که $x_{n_۱} \neq x$. در غیر این صورت E فقط و فقط یک نقطه دارد.

قرار می‌دهیم $\delta = |x_{n_۱} - x|$ و فرض کنید $n_۱ < n_۲ < ... < n_{k-۱}$ به استقراء اختیار شده باشند. چون x نقطهٔ حدی E است، پس $y \in N_{\frac{۱}{k}\delta}(x) \cap E$ یافت می‌شود. از آنجا که $y \in E$، بنابراین زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ وجود دارد که به y همگراست. در نتیجه همسایگی $N_{\frac{۱}{k}\delta}(x)$ تعداد نامتناهی از جملات زیردنباله‌ای که به y همگراست را شامل می‌شود. پس اندیس $n_{k-۱} < n_k$ وجود دارد به طوری که $|x_{n_k} - x| < \frac{۱}{k}\delta$. به این ترتیب $x_{n_k} \to x$ و لذا $x \in E$. $\square$

مثال ۷.۱.۳. *فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای با برد متناهی در $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ مجموعه‌ای متناهی است. لذا عنصری از مجموعهٔ برد، مانند x، در رشتهٔ $x_۱, x_۲, ...$ به تعداد نامتناهی، تکرار می‌شود. اگر فرض کنیم $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n = x\}$، آنگاه دنبالهٔ $\{n_k\}$ به طوری که $۱ \leq n_۱ < n_۲ < ...$ را می‌توان از مجموعهٔ A اختیار کرد. به وضوح زیردنبالهٔ $\{x_{n_k}\}$ به x همگراست. بنابراین هر دنباله با برد متناهی، دارای زیردنباله‌ای همگراست.*

قضیه ۸.۱.۳. *فرض کنید $\{[a_n, b_n]\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای از فاصله‌های بسته در $\mathbb{R}$ باشد به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+۱}, b_{n+۱}]$. در این صورت،*

$$\bigcap_{n=۱}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

اثبات. فرض کنید $E = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. در این صورت E ناتهی و $b_۱$ کران بالایی آن است. در نتیجه $\sup E = \alpha$ در $\mathbb{R}$ وجود دارد. از طرفی برای هر $n \in \mathbb{N}$ و m داریم:

$$a_n \leq a_{m+n} \leq b_{m+n} \leq b_m.$$

بنابراین برای هر $m \in \mathbb{N}$، $\alpha \leq b_m$، لذا $\alpha \in [a_m, b_m]$ و حکم ثابت می‌شود. $\square$

قضیه ۹.۱.۳. *فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای کراندار در $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه $\{x_n\}$ دارای حد زیر دنباله‌ای است؛ یعنی زیردنباله‌ای چون $\{x_{n_k}\}$ از $\{x_n\}$ هست که در $\mathbb{R}$*

همگراست.

اثبات. اگر برد دنبالهٔ $\{x_n\}$ متناهی باشد، با توجه به مثال قبل، حکم بدیهی است. فرض کنید برد دنبالهٔ $\{x_n\}$، یعنی مجموعهٔ $E = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ نامتناهی باشد. با توجه به کران‌دار بودن دنبالهٔ $\{x_n\}$، b و a در $\mathbb{R}$ موجودند به طوری که $E \subseteq I = [a, b]$. فاصلهٔ بستهٔ I را به دو زیر فاصلهٔ بستهٔ مساوی تقسیم می‌کنیم. E حداقل با یکی از این دو زیر فاصله، دارای مقطع نامتناهی است. این فاصله را $I_۱$ می‌نامیم و طول این بازه $\frac{b-a}{۲}$ می‌باشد. اندیس $n_۱$ را به قسمی اختیار می‌کنیم که $x_{n_۱} \in E \cap I_۱$. به استقرا فرض کنید اندیس‌های $n_۱ < n_۲ < \ldots < n_k$ و زیر فواصل بستهٔ $I_۱ \subseteq I_۲ \subseteq \ldots \subseteq I_k$ که برای $۱ \leq i \leq k$، طول هر زیر فاصله، $\frac{b-a}{۲^i}$ است و $I_i \cap E$ نامتناهی است، بدست آمده باشد. در این صورت فاصلهٔ I_k را به دو زیر فاصلهٔ بستهٔ مساوی تقسیم می‌کنیم؛ حداقل یکی از زیر فاصله‌ها با E، مقطع نامتناهی دارد و طول این زیر فاصله $\frac{b-a}{۲^{k+۱}}$ می‌باشد. این زیر فاصله را $I_{k+۱}$ نامگذاری می‌کنیم. از آنجا که $I_{k+۱} \cap E$ نامتناهی است، لذا اندیس $n_{k+۱}$ بزرگتر از n_k وجود دارد به طوری که $x_{n_{k+۱}} \in I_{k+۱} \cap E$. با توجه به قضیهٔ قبل $\bigcap_{k=۱}^{\infty} I_k \neq \emptyset$. فرض کنید α عضو این مقطع باشد. از آنجا که برای هر $x_{n_k} \in I_k$ ، $k \in \mathbb{N}$ بنابراین

$$|x_{n_k} - \alpha| < \frac{b-a}{۲^k}$$

و در نتیجه $x_{n_k} \to \alpha$. □

قضیهٔ زیر ارتباط بین نقاط بستاری و دنباله‌ها را بیان می‌کند.

قضیه ۱۰.۱.۳. *فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}$ باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند.*

الف) $x \in \bar{A}$ اگر و تنها اگر دنبالهٔ $\{x_n\}$ که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $x_n \in A$، موجود باشد به طوری که $x_n \to x$.

ب) $x \in A'$ اگر و تنها اگر دنبالهٔ $\{x_n\}$ که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $x_n \in A - \{x\}$، موجود باشد به طوری که $x_n \to x$.

اثبات. الف) فرض کنید $x \in \bar{A}$، پس برای هر $n \in \mathbb{N}$، x_n در $N_{\frac{1}{n}}(x) \cap A$ وجود دارد. بنابراین دنبالهٔ $\{x_n\}$ در A موجود است به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$

، داریم $\frac{1}{n}>|x_n - x|$. به این ترتیب دنباله‌ای در A هست به طوری که $x_n \to x$.

به عکس، فرض کنید دنبالهٔ $\{x_n\}$ در A وجود دارد به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $x_n \in A$ و $x_n \to x$. بنابراین برای هر $\epsilon > 0$ ، $N_\epsilon(x)$ جز تعداد متناهی جمله، تمامی جملات دنباله را شامل می‌شود. در نتیجه برای هر $\epsilon > 0$ ، $N_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ و بنابراین $x \in \bar{A}$.

ب) مشابه قسمت الف) ثابت می‌شود.

□

مثال ۱۱.۱.۳. *الف) هرگاه $\{x_n\}$ دنباله‌ای در $\mathbb{R}$ با برد نامتناهی باشد، اگر $x_n \to x$ ، آنگاه $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}' = \{x\}$ ؛ زیرا x تنها نقطه‌ای است که برای هر $\epsilon > 0$ ، مجموعهٔ $N_\epsilon(x) \cap \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ نامتناهی است.*

ب) مجموعهٔ $A = \{\frac{1}{2n} + \frac{1}{3m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ را در نظر بگیرید. در این صورت

$$A' = \{\frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\frac{1}{3n} : m \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}.$$

زیرا برای هر $m \in \mathbb{N}$ ، دنبالهٔ $\{\frac{1}{2n} + \frac{1}{3m}\}_{n=1}^{\infty}$ به $\frac{1}{3m}$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$ دنبالهٔ $\{\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n}\}_{n=1}^{\infty}$ به $\frac{1}{2n}$ و دنبالهٔ $\{\frac{1}{2k} + \frac{1}{3k}\}_{k=1}^{\infty}$ به صفر همگرا هستند. از طرفی هر نقطهٔ مجموعهٔ A ، نقطه‌ای تنهاست.

پ) فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}$. در این صورت برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\overline{x + A} = x + \bar{A}.$$

به این منظور فرض کنید $y \in \overline{x + A}$ و بنابراین $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $x + A$ وجود دارد به طوری که $x_n \to y$. از آنجا که $x_n \in x + A$ ، برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $a_n \in A$ موجود است به طوری که $x_n = x + a_n$. بنابراین $a_n = x_n - x \to y - x$ و چون برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $a_n \in A$ ، لذا $y - x \in \bar{A}$ و در نتیجه $y \in x + \bar{A}$.

به عکس، فرض کنید $y \in x + \bar{A}$ و در نتیجه $y - x \in \bar{A}$. لذا دنبالهٔ $\{a_n\}$ در A وجود دارد به طوری که $a_n \to y - x$ بنابراین دنبالهٔ $\{x + a_n\}$ در $x + A$ موجود است به طوری که $x + a_n \to y$. لذا $y \in \overline{x + A}$ و به این ترتیب $\overline{x + A} = x + \bar{A}$.

تعریف ۱۲.۱.۳. *فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای در $\mathbb{R}$ باشد. می‌گوییم دنبالهٔ $\{x_n\}$ به ∞ واگراست اگر و تنها اگر برای هر $M \in \mathbb{R}$، یک $N > 0$ موجود باشد به طوری که*

$$\forall n(n \geq N \Longrightarrow x_n > M).$$

در این صورت می‌نویسیم $x_n \to +\infty$. به طور مشابه واگرایی یک دنباله به $-\infty$ تعریف می شود.

تعریف قبل در اعداد حقیقی، واگرایی‌های در $\mathbb{R}$ را به دو رده تقسیم می‌کند؛ دنباله‌هایی واگرا مانند $\{(-1)^n\}$ که به نوعی سرگردان هستند و دنباله‌هایی واگرا که در فضای $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ ، همگرا می‌باشند.

تعریف ۱۳.۱.۳. *فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای در اعداد حقیقی باشد. E را مجموعهٔ همهٔ $x \in \overline{\mathbb{R}}$ در نظر می‌گیریم که به ازای زیردنباله‌ای چون $\{x_{n_k}\}$ نتیجه شود $x_{n_k} \to x$. در واقع E شامل همهٔ حدود زیردنباله‌ای $\{x_n\}$ به انضمام احتمالاً $+\infty$ و یا $-\infty$ می‌باشد. در این صورت در $\overline{\mathbb{R}}$ قرار می‌دهیم:*

$$x^* = \sup E$$

و

$$x_* = \inf E$$

که x^* حد بالایی و x_* حد پائینی دنبالهٔ $\{x_n\}$ نامیده می‌شود و داریم،

$$x^* = \limsup_{n \to \infty} x_n$$

و

$$x_* = \liminf_{n \to \infty} x_n.$$

لم ۱۴.۱.۳. *الف) فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای در $\mathbb{R}$ باشد. هرگاه $x_n \to +\infty$ ، آنگاه دنبالهٔ $\{x_n\}$ کراندار نیست.*

ب) هرگاه $\{x_n\}$ دنباله‌ای در $\mathbb{R}$ باشد که کراندار نیست، آنگاه زیردنباله‌ای چون $\{x_{n_k}\}$ یافت می‌شود که $x_{n_k} \to +\infty$ و یا $x_{n_k} \to -\infty$.

اثبات. الف) با توجه به اینکه $x_n \to +\infty$ ، لذا برای هر $M \in \mathbb{R}$، یک $N > 0$ وجود دارد به طوری که

$$\forall n (n \geq N \Longrightarrow x_n > M).$$

بنابراین $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ از بالا کراندار نیست.

ب) از آنجا که $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ از بالا کراندار نیست، بنابراین حداقل یکی از مجموعه‌های $A \cap (0, +\infty)$ و یا $A \cap (-\infty, 0)$ کراندار نمی‌باشند. فرض کنید $A \cap (0, +\infty)$ کراندار نباشد. در این صورت $n_1 \geq 1$ وجود دارد به طوری که $x_{n_1} > 0$. از آنجا که $A \cap (0, +\infty)$ کراندار نیست، پس $n_2 > n_1$ موجود است به طوری که $x_{n_2} \in A \cap (2, +\infty)$. اگر $n_k > n_{k-1}$ یافت شود که $x_{n_k} \in A \cap (k, +\infty)$ ، آنگاه از آنجا که $A \cap (k+1, +\infty)$ نامتناهی است، اندیس n_{k+1} بزرگتر از n_k یافت می‌شود به طوری که $x_{n_{k+1}} \in A \cap (k+1, +\infty)$. به این ترتیب دنبالهٔ $\{x_{n_k}\}$ به طوری که $x_{n_k} > k$ تشکیل می‌شود و در نتیجه $x_{n_k} \to +\infty$.

□

قضیه ۳.۱.۱۵. *اگر* $E \subseteq \mathbb{R}$ *زیر مجموعه‌ای ناتهی و از بالا کراندار باشد، آنگاه* $\sup E \in \bar{E}$. *به ویژه، اگر* E *بسته باشد، آنگاه* $\sup E \in E$.

اثبات. فرض کنید $y = \sup E$. از آنجا که برای هر $\epsilon > 0$، یک $x \in E$ وجود دارد به طوری که $y - \epsilon < x \leq y$ ، پس $N_\epsilon(x) \cap E \neq \emptyset$ ، برای هر $\epsilon > 0$ و در نتیجه $y \in \bar{E}$. اگر E بسته باشد، آنگاه $\bar{E} = E$ و حکم ثابت می‌شود. □

قضیه ۳.۱.۱۶. *فرض کنید* $\{x_n\}$ ، E *و* x^* ، *نمادهای موجود در تعریف باشند. در این صورت،*

الف) $x^* \in E$.

ب) هرگاه $x > x^*$، *آنگاه* $N > 0$ *موجود است به طوری که*

$$\forall n (n > N \Longrightarrow x_n < x).$$

به علاوه، x^* *تنها عددی است که از خواص الف) و ب) برخوردار است. (به طور مشابه، حکم برای* x_* *نیز برقرار است.)*

اثبات. الف) هرگاه $x^* = +\infty$، آنگاه E از بالا کراندار نیست و لذا دنبالهٔ $\{x_n\}$ از بالا کراندار نمی‌باشد. بنابراین زیردنباله‌ای مانند $\{x_{n_k}\}$ وجود دارد به طوری که $x_{n_k} \to +\infty$ و در نتیجه $E \ni +\infty = x^*$. هرگاه $x^* \in \mathbb{R}$، آنگاه E از بالا کراندار است و لذا یک حد زیردنباله‌ای وجود دارد. حال از آنجا که E بسته است و $\sup E \in \bar{E}$ ، نتیجه می‌شود که $x^* \in E$. هرگاه $x^* = -\infty$ ، آنگاه E فقط شامل یک عنصر $-\infty$ است. بنابراین برای هر $M \in \mathbb{R}$ ، نامساوی $x_n > M$ به ازای حداکثر تعداد متناهی n برقرار است و در نتیجه $x_n \to -\infty$.

ب) فرض کنید عددی چون $x > x^*$ موجود است که به ازای تعداد نامتناهی n، $x_n \geq x$. در این صورت دنبالهٔ $\{n_k\}$ از اعداد طبیعی وجود دارد به طوری که

$$۱ \leq n_۱ < n_۲ < \dots$$

و $x_{n_k} \geq x$ ، برای هر n_k. اگر $\{x_{n_k}\}$ دنباله‌ای کراندار باشد، آنگاه دنبالهٔ $\{x_{n_k}\}$ دارای حد زیر دنباله‌ای y است و از آنجا که $x_{n_k} \geq x$ ، پس $y \geq x$ که با ویژگی x^* در تناقض می‌باشد. اگر $\{x_{n_k}\}$ دنباله‌ای کراندار نباشد، آنگاه زیر دنباله‌ای از آن به $+\infty$ واگرا خواهد بود و در این صورت $x^* = +\infty$ که یک تناقض است. در نهایت اگر x و y در الف) صدق کنند، آنگاه $x < y$ که با توجه به ب)، به تناقض می‌رسیم.

□

مثال ۱۷.۱.۳. *الف) فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای شامل تمام اعداد گویا باشد. در این صورت هر عدد حقیقی یک حد زیردنباله‌ای است و*

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \text{و} \quad \liminf_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

ب) فرض کنید $x_n = (-۱)^n$. در این صورت

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = ۱ \quad \text{و} \quad \liminf_{n\to\infty} x_n = -۱.$$

پ) برای دنبالهٔ $\{x_n\}$ در $\mathbb{R}$، $x_n \to x$ اگر و تنها اگر

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = x.$$

ت) هرگاه $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله‌هایی در $\mathbb{R}$ باشند که جز برای تعداد متناهی $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $x_n \leq y_n$ ، آنگاه

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} y_n$$

و

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \liminf_{n\to\infty} y_n.$$

ث) برای دنباله‌ها در $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در $\mathbb{R}$ داریم،

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n$$

مشروط به اینکه در طرف راست، عبارت $\infty - \infty$ ظاهر نشود. به این منظور، $\limsup_{n\to\infty} x_n = x^*$ و $\limsup_{n\to\infty} y_n = y^*$ را در نظر بگیرید.

اگر $x^* = +\infty$ یا $y^* = +\infty$ حکم نتیجه می‌شود. پس فرض کنید $x^* < \infty$ و $y^* < \infty$. در این صورت برای هر $x^* < x$ و هر $y^* < y$ ، یک $N > 0$ وجود دارد به طوری که

$$\forall n(n > N \Longrightarrow x_n < x)$$

و

$$\forall n(n > N \Longrightarrow y_n < y).$$

در نتیجه

$$\forall n(n > N \Longrightarrow x_n + y_n < x + y)$$

و بنابراین برای هر $x > x^*$ و هر $y > y^*$ ،

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq x + y.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) &\leq \inf\{x + y : x > x^* \text{ و } y > y^*\}\\ &= \inf\{x : x > x^*\} + \inf\{y : y > y^*\}\\ &= x^* + y^*.\end{aligned}$$

ج) فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد. در این صورت

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

و

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

نشان می‌دهیم که نامساوی دوم برقرار است. فرض کنید که $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. اگر $\alpha = \infty$ حکم واضح است؛ پس فرض کنید $\alpha \in \mathbb{R}$. در این صورت $\alpha < \beta$ را اختیار می‌کنیم و به این ترتیب یک $N > 0$ وجود دارد به طوری که

$$\forall n (n \geq N \Longrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < \beta).$$

بنابراین برای هر $k \in \mathbb{N}$، داریم $a_{N+k+1} < \beta a_{N+k}$ و در نتیجه برای هر $k \in \mathbb{N}$، $a_{N+k} < \beta^k a_N$. لذا

$$\sqrt[N+k]{a_{N+k}} \leq \sqrt[N+k]{a_N} \sqrt[N+k]{\beta^k}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} &\leq \limsup_{k\to\infty} \sqrt[N+k]{a_N} \sqrt[N+k]{\beta^k} \\
&= \lim_{k\to\infty} \sqrt[N+k]{a_N} \sqrt[N+k]{\beta^k} \\
&= \beta.
\end{aligned}$$

از آنجا که برای هر $\alpha < \beta$، نتیجهٔ فوق برقرار است، پس

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \alpha.$$

۲.۳ تمرین

۱. نشان دهید که زیر گروه‌های جمعی $\mathbb{R}$، یا دوری هستند و یا در $\mathbb{R}$ چگالند.

۲. با کمک تمرین قبل، حدود زیر دنباله‌ای $\{cosn\}_{n+1}^{\infty}$ و $\{sinn\}_{n+1}^{\infty}$ را بیابید.

۳. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای در $\mathbb{R}$ باشد. برای هر $n \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم:

$$\bigwedge_{k=n}^{\infty} x_k = \inf\{x_k : k \geq n\}$$

و

$$\bigvee_{k=n}^{\infty} x_k = \sup\{x_k : k \geq n\}.$$

نشان دهید:

الف) دنبالهٔ $\{\bigwedge_{k=n}^{\infty} x_k\}_{n=1}^{\infty}$، دنباله‌ای صعودی و دنبالهٔ $\{\bigvee_{k=n}^{\infty} x_k\}_{n=1}^{\infty}$، دنباله‌ای نزولی می‌باشد.

ب) حد دنباله‌های $\{\bigwedge_{k=n}^{\infty} x_k\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{\bigvee_{k=n}^{\infty} x_k\}_{n=1}^{\infty}$ در $\overline{\mathbb{R}}$ وجود دارد.

پ) برای دنبالهٔ $\{x_n\}$ در $\mathbb{R}$ داریم:

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \bigvee_{k=n}^{\infty} x_k = \bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{k=n}^{\infty} x_k$$

و

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \bigwedge_{k=n}^{\infty} x_k = \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{k=n}^{\infty} x_k$$

۴. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای در $\mathbb{R}$ باشد. نشان دهید،

الف) $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$.

ب) $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

پ) اگر $a_n \to a$، آنگاه $\dfrac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \to a$.

ت) با ارائهٔ مثالی نشان دهید که عکس پ)، لزوماً برقرار نیست.

فصل ۴

دنباله‌ها

در این فصل با توجه به آنچه در فصل قبل گفته شد، مفهوم دنباله را به فضاهای متریک تعمیم می دهیم و تمامی روابطی که مستقل از رابطه ترتیب روی اعداد حقیقی بدست آمده اند را برای دنباله ها در فضاهای متریک بدست می آوریم. مفهوم دنباله کشی را که به مفهوم همگرایی نزدیک است را معرفی می کنیم. دنباله‌های کشی به دنباله‌های همگرا از نظر ساختاری بسیار نزدیک هستند اما در بعضی مواقع در رده دنباله‌های واگرا قرار می گیرند. دنباله‌های کشی اهمیت فراوانی در بررسی مفهوم همگرایی دارند. در انتهای این فصل به همگرایی دنباله‌ها در فضاهای $\mathbb{R}^n$ می پردازیم.

۱.۴ دنباله‌ها در فضاهای متریک

یک دنباله در فضای متریک X، تابعی مانند $f : \mathbb{N} \to X$ است که برای سادگی آن را با $\{x_n\}$ که $f(n) = x_n$ برای $n \in \mathbb{N}$ ، نشان می‌دهیم. برای هر $n \in \mathbb{N}$، x_n را جملهٔ دنباله و $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ را برد دنبالهٔ $\{x_n\}$ می‌نامیم. می‌گوییم دنبالهٔ $\{x_n\}$، در فضای متریک X، همگراست هرگاه $x \in X$ موجود باشد که برای هر $\epsilon > 0$ ، یک $N > 0$ یافت شود که

$$\forall n (n > N \Longrightarrow d(x_n, x) < \epsilon)$$

x را حد دنبالهٔ $\{x_n\}$ می‌نامیم و می‌نویسیم $x_n \to x$ یا $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. به وضوح $x_n \to x$ در فضای متریک X اگر و تنها اگر $d(x_n, x) \to 0$ در $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. هرگاه دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرا نباشد، آن را واگرا می نامیم. گزاره $x_n \nrightarrow x$ به این معناست که دنباله $\{x_n\}$ به x همگرا نیست. دنبالهٔ $\{x_n\}$ را در فضای متریک X، کراندار گوییم اگر برد دنباله، در فضای متریک X، کراندار باشد. به وضوح دنبالهٔ $\{x_n\}$ کراندار است اگر و تنها اگر $M > 0$ و $x \in X$ موجود باشند به طوری که

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d(x_n, x) \leq M.$$

قضیه ۱.۱.۴. *گزاره‌های زیر در هر فضای متریک X برقرارند.*

الف) دنبالهٔ $\{x_n\}$ در فضای متریک X، به $x \in X$ همگراست اگر و تنها اگر هر همسایگی x، شامل همهٔ جملات دنبالهٔ $\{x_n\}$، جز تعداد متناهی از جملات باشد.

ب) حد دنبالهٔ $\{x_n\}$، در صورت وجود، منحصر به فرد است.

پ) هر دنبالهٔ همگرا در X، دنباله‌ای کراندار است.

ت) فرض کنید $E \subseteq X$. در این صورت $x \in \bar{E}$ اگر و فقط اگر دنبالهٔ $\{a_n\}$ در E موجود باشد که $a_n \to x$.

ث) فرض کنید $E \subseteq X$. در این صورت $x \in E'$ اگر و فقط اگر دنبالهٔ $\{a_n\}$ در $E - \{x\}$ موجود باشد به طوری که $a_n \to x$.

اثبات. الف) فرض کنید $x_n \to x$. در این صورت برای هر $r > 0$، یک $N > 0$ وجود دارد به طوری که

$$\forall n (n > N \Longrightarrow d(x_n, x) < r),$$

و لذا $\{x_k : k > N\} \subseteq N_r(x)$ که حکم را ثابت می‌کند.

به عکس فرض کنید $N_r(x)$ برای هر $r > 0$، شامل همه بجز تعداد متناهی جملهٔ دنبالهٔ $\{x_n\}$ باشد. در این صورت برای هر $\epsilon > 0$، فقط تعداد متناهی جملهٔ $x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}$ موجود می‌باشند که در $N_\epsilon(x)$ نیستند. برای $\epsilon > 0$ قرار می‌دهیم $N = max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$. بنابراین داریم،

$$\forall n (n > N \Longrightarrow d(x_n, x) < \epsilon)$$

و لذا $x_n \to x$.

ب) فرض کنید $y \in X$ و x موجود باشند به طوری که $x_n \to x$ و $x_n \to y$. در این صورت نامساوی

$$d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y)$$

و قضیهٔ فشار، حکم را نتیجه می‌دهند.

پ) فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای همگرا به x باشد. بنابراین در $\mathbb{R}$، $d(x_n,x) \to ۰$ ؛ یعنی $\{d(x_n,x)\}$ در $\mathbb{R}$ دنباله‌ای همگراست و دنباله‌های همگرا در $\mathbb{R}$ کراندار هستند. به این ترتیب $\{d(x_n,x)\}$ در $\mathbb{R}$ کراندار است؛ یعنی $M > ۰$ وجود دارد به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$ ،

$$d(x_n,x) \leq M.$$

ت) اگر $x \in \bar{E}$، آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $a_n \in N_{\frac{۱}{n}}(x) \cap E$ وجود دارد و به این ترتیب دنبالهٔ $\{a_n\}$ به طوری که $d(a_n,x) < \frac{۱}{n}$ بدست می‌آید. لذا $a_n \to x$ و $a_n \in E$.

به عکس، فرض کنید $a_n \to x$ و $a_n \in E$. در این صورت برای هر $\epsilon > ۰$ ، همسایگی $N_\epsilon(x)$ فقط تعداد متناهی جملهٔ $\{a_n\}$ را در بر ندارد و بقیهٔ جملات را شامل می‌شود. بنابراین $N_\epsilon(x) \cap E \neq \emptyset$ برای هر $\epsilon > ۰$ و در نتیجه $x \in \bar{E}$.

ث) مشابه با ت) ثابت می‌شود.

□

با فرض اینکه $\{x_n\}$ دنباله‌ای در فضای متریک X باشد، دنبالهٔ $\{x_{n_k}\}$ که $\{n_k\}$ دنباله‌ای از اعداد طبیعی است و $۱ \leq n_۱ < n_۲ < \dots$ ، زیردنبالهٔ $\{x_n\}$ نامیده می‌شود. به وضوح دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرا به x است اگر و تنها اگر هر زیردنبالهٔ آن به x همگرا باشد. به راحتی می‌توان دید که هر دنباله با برد متناهی در فضای متریک X، دارای زیردنباله‌ای همگراست. $x \in X$ را حد زیردنباله ای دنباله $\{x_n\}$ گوییم اگر زیردنباله ای از $\{x_n\}$ به آن همگرا باشد.

قضیه ۲.۱.۴. *مجموعهٔ حدود زیر دنباله‌ای یک دنباله، مجموعه‌ای بسته است.*

اثبات. مشابه قضیهٔ ۶.۱.۳، ثابت می‌شود. □

در بررسی همگرایی دنبالهٔ $\{x_n\}$، در فضای متریک X، در ابتدا باید عضو مناسبی چون $x \in X$ را بیابیم و سپس درستی $x_n \to x$ را باید بررسی کنیم. اما همیشه نمی‌توان براحتی حد یک دنبالهٔ همگرا را به طور دقیق، مشخص کرد. حال تصور کنید که دنبالهٔ $\{x_n\}$ واگرا باشد. در این صورت برای هر $x \in X$، $x_n \nrightarrow x$. لذا اگر بتوانیم بدون استفاده از حد دنباله و فقط بر اساس جملات دنباله، همگرایی یا واگرایی را مشخص کنیم، روش مناسب تری را برای بررسی همگرایی یا واگرایی خواهیم داشت. هرگاه دنبالهٔ $\{x_n\}$ در فضای متریک X دارای حد x باشد، برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ داریم،

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m)$$

حال اگر $n \to \infty$ و m، آنگاه $d(x_n, x_m) \to \circ$. بنابراین زمانی که $n \to \infty$ و m، اگر $x_n \to x$، آنگاه $d(x_n, x_m) \to \circ$ و به این ترتیب تعریف زیر با معنا خواهد بود.

تعریف ۳.۱.۴. *دنبالهٔ $\{x_n\}$ را در فضای متریک X کشی می‌نامیم اگر برای هر $\epsilon > \circ$، یک $N > \circ$ موجود باشد به طوری که*

$$\forall n, m (n, m > N \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon).$$

مثال ۴.۱.۴. *الف) دنبالهٔ $\{\frac{۱}{n}\}$ در $\mathbb{R}$ به صفر همگراست و لذا دنباله‌ای کشی است.*

ب) دنبالهٔ $\{\frac{۱}{n}\}$ در $(\circ, ۱]$ دنباله‌ای کشی است؛ اما همگرا نیست.

بنابراین ردهٔ دنباله‌های کشی از نظر رفتاری به ردهٔ دنباله‌های همگرا، نزدیک است؛ اما لزوماً به ردهٔ دنباله‌های همگرا تعلق ندارد. پس ردهٔ دنباله‌های کشی ما بین ردهٔ دنباله‌های همگرا و ردهٔ دنباله‌های واگرا قرار می‌گیرد و خصوصیات فضا به اینکه ردهٔ دنباله‌های کشی در کدام رسته قرار می‌گیرد، کمک می‌نماید. برای آنکه تصور بهتری از دنباله‌های کشی داشته باشیم به تعریف دیگری نیاز داریم.

تعریف ۵.۱.۴. *فرض کنید (X, d) فضایی متریک باشد و $A \subseteq X$. قطر مجموعهٔ A را با $diamA$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$diamA = sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

مثال ۶.۱.۴. *الف)* هرگاه $A=(0,1)\subseteq\mathbb{R}$، آنگاه $diamA=1$.

ب) زیر مجموعهٔ $A=\{z\in\mathbb{C}:|z|<2\}$ از $\mathbb{C}$ را در نظر بگیرید. در این صورت $diamA=2\sqrt{2}$.

پ) هرگاه X فضایی متریک و $A\subseteq X$ باشد، آنگاه $diamA=diam\bar{A}$؛ زیرا به وضوح $A\subseteq\bar{A}$ نتیجه می‌دهد که $diamA\leq diam\bar{A}$. از طرفی برای هر $\frac{\epsilon}{2}>0$ و برای هر $x,y\in\bar{A}$، $a_x,b_y\in A$ موجودند به طوری که $d(y,b_y)<\frac{\epsilon}{2}$ و $d(x,a_x)<\frac{\epsilon}{2}$. بنابراین،

$$\begin{aligned}d(x,y)\leq&d(x,a_x)+d(a_x,b_y)+d(by,y)\\<&\epsilon+d(a_x,b_y)\\\leq&\epsilon+diamA.\end{aligned}$$

لذا برای هر $\epsilon>0$، $diam\bar{A}\leq\epsilon+diamA$ و در نتیجه $diamA=diam\bar{A}$

ت) $A\subseteq X$ کراندار است اگر و تنها اگر $diamA<\infty$.

هرگاه $\{x_n\}$ دنباله‌ای در فضای متریک X باشد، برای هر $n\in\mathbb{N}$، قرار می‌دهیم $E_n=\{x_k:k\geq n\}$. از طرفی برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم $E_{n+1}\subseteq E_n$ که نتیجه می‌دهد $diamE_{n+1}\leq diamE_n$.

قضیه ۷.۱.۴. *فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای در فضای متریک X باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند.*

الف) هرگاه $\{x_n\}$ دنباله‌ای همگرا باشد، آنگاه دنباله ای کشی است.

ب) دنبالهٔ $\{x_n\}$، دنباله‌ای کشی است اگر و تنها اگر $\lim_{n\to\infty}diamE_n=0$ که در آن $E_n=\{x_k:k\leq n\}$ برای هر $n\in\mathbb{N}$.

پ) هرگاه $\{x_n\}$ دنباله‌ای کشی باشد، آنگاه کراندار است.

ت) هرگاه $\{x_n\}$ دنباله‌ای کشی باشد و زیردنباله‌ای از آن به x همگرا باشد، آنگاه $x_n\to x$.

اثبات. الف) فرض کنید دنبالهٔ $\{x_n\}$ به x همگرا باشد. در این صورت برای $\frac{\epsilon}{۲} > ۰$ ، یک $N > \circ$ وجود دارد به طوری که

$$\forall n(n > N \Longrightarrow d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{۲})$$

در نتیجه برای $\epsilon > \circ$ ، یک $N > \circ$ وجود دارد به طوری که

$$\forall n \text{ و } m(n \text{ و } m > N \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon)$$

و این حکم را ثابت می‌کند.

ب) هرگاه $\{x_n\}$ دنباله‌ای کشی باشد، آنگاه برای $\frac{\epsilon}{۲} > \circ$ ، یک $N_\circ > \circ$ وجود دارد به طوری که

$$\forall n, m(n, m > N_\circ \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{۲}).$$

بنابراین برای $\epsilon > \circ$، یک $N_\circ > \circ$ موجود است که $diamE_{N_\circ} < \epsilon$. از آنجا که برای هر $n > n_\circ$ داریم $diamE_n \leq diamE_{N_\circ}$ ، پس برای هر $\epsilon > \circ$ ، یک $N_\circ > \circ$ وجود دارد به طوری که

$$\forall n(n > N_\circ \Longrightarrow diamE_n < \epsilon)$$

در نتیجه $diamE_n \to \circ$.

پ) فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای کشی باشد. در این صورت $\lim_{n\to\infty} diamE_n = \circ$، که برای $n \in \mathbb{N}$، $E_n = \{x_k : k \geq n\}$. بنابراین دنبالهٔ $\{diamE_n\}$ در $\mathbb{R}$ کراندار است و $M > \circ$ وجود دارد به طوری که

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad diamE_n \leq M.$$

لذا $diamE_۱ \leq M$ و با توجه به مثال قبل، قسمت ت)، مجموعهٔ $E_۱$ که همان برد دنبالهٔ $\{x_n\}$ است، مجموعه‌ای کراندار می‌باشد.

ت) فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای کشی و $\{x_{n_k}\}$ زیردنباله‌ای از آن باشد که دارای حد است. در این صورت برای هر n_k و هر n داریم،

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k} + x).$$

حال اگر $n_k, n \to +\infty$، در این صورت طرف راست نامساوی به صفر میل می‌کند و با توجه به قضیهٔ فشار $d(x_n, x) \to \circ$. به این ترتیب $x_n \to x$ در X.

□

نتیجه ۸.۱.۴. *هر دنبالهٔ کشی در $\mathbb{R}$، دنباله‌ای همگراست.*

اثبات. با توجه به قضیهٔ قبل، دنبالهٔ کشی دنباله‌ای کراندار است و از آنجا که هر دنبالهٔ کراندار در $\mathbb{R}$ دارای زیر دنباله‌ای همگراست، پس هر دنبالهٔ کشی در $\mathbb{R}$ دارای زیردنباله‌ای همگراست و با توجه به قضیهٔ قبل، قسمت ت)، هر دنبالهٔ کشی در $\mathbb{R}$، همگراست. □

تعریف ۹.۱.۴. *فضای متریک (X,d) را یک فضای متریک تام(کامل) گوییم اگر هر دنبالهٔ کشی در آن همگرا باشد.*

قضیه ۱۰.۱.۴. *فرض کنید (X,d) یک فضای متریک تام باشد. در این صورت $Y \subseteq X$ زیر فضای متریک تام است اگر و تنها اگر Y در X بسته باشد.*

اثبات. فرض کنید $x \in \bar{Y}$ در این صورت دنباله‌ای مانند $\{y_n\}$ در Y وجود دارد که به x همگراست. از آنجا که $\{y_n\}$ همگراست، پس کشی است و از آنجا که Y فضایی تام است، پس دنبالهٔ کشی $\{y_n\}$ در Y به نقطه‌ای چون y همگراست. از طرفی حد یک دنباله در صورت وجود یکتاست؛ یعنی $y = x$ و لذا $x \in X$. بنابراین $\bar{Y} = Y$ و در نتیجه Y بسته است.

به عکس، فرض کنید Y بسته است. هرگاه $\{x_n\}$ دنباله‌ای کشی در Y باشد، در X نیز کشی است. بنابراین $x \in X$ وجود دارد به طوری که $x_n \to x$ ؛ چون X فضای متریک تام است. از طرفی Y بسته است؛ پس برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $x_n \in Y$ و بنابراین $x \in \bar{Y} = Y$. در نتیجه هر دنبالهٔ کشی در Y همگراست و این یعنی Y یک فضای متریک تام است. □

قضیه ۱۱.۱.۴. *فرض کنید $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های بستهٔ فضای متریک تام X باشد. هرگاه $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \ldots$ و $\lim_{n\to\infty} diam F_n = 0$ ، آنگاه $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ تک عضوی است.*

اثبات. فرض کنید $A = \{x_i \in F_i : i\mathbb{N}\}$. در این صورت دنبالهٔ $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله‌ای کشی است؛ زیرا با قرار دادن $E_n = \{x_i : i \geq n\}$ ، برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $E_n \subseteq F_n$ و لذا $\lim_{n\to\infty} diam E_n = 0$. پس $x \in X$ وجود دارد به طوری که $x_n \to x$. در

نتیجه برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $x \in F_n$ و بنابراین $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. اگر $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ شامل دو عضو باشد، آنگاه با $\lim_{n\to\infty} diamF_n$ در تناقض است. □

۲.۴ دنباله‌ها در $\mathbb{R}^k$

فرض کنید $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در $\mathbb{R}^k$ باشد، در این صورت برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $x_{1n}, x_{2n}, ..., x_{kn}$ در $\mathbb{R}$ وجود دارند به طوری که

$$x_n = (x_{1n}, x_{2n}, ..., x_{kn}).$$

دنباله‌های $\{x_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$ و ... و $\{x_{1n}\}_{n=1}^{\infty}$ را دنباله‌های مولفه‌ای دنبالهٔ $\{x_n\}$ می‌نامیم. اگر برای $i \in \{1, ..., n\}$ ، $\pi_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ نگاشت های تصویر باشند یعنی برای هر $x = (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$ داریم $\pi_i((x_1, ..., x_k)) = x_i$. $\pi_i(x)$ معرف مولفه i-ام دنباله x_n است. با توجه به آنچه گفته شد، به راحتی دیده می‌شود که

۱- دنباله $\{x_n\}$ دنباله‌ای همگراست اگر وتنها اگر دنباله‌های مولفه‌ای آن همگرا باشند. (قضیه ۳.۲.۴ را ببینید .)

۲- دنباله $\{x_n\}$ دنباله‌ای کشی است اگر وتنها اگر دنباله‌های مولفه‌ای آن کشی باشند.

قضیه ۱.۲.۴. *در فضای $\mathbb{R}^n$ گزاره های زیر برقرارند:*

الف) هر دنباله کراندار حاوی یک زیردنباله کشی است.

ب) هر دنباله کشی همگراست.

اثبات. واضح است. □

قضیه ۲.۲.۴. *فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$، یک فضای متریک تام است.*

بین همگرایی دنبالهٔ $\{x_n\}$ و دنباله‌های مولفه‌ای آن ارتباط مستقیمی وجود دارد. قضیهٔ زیر این رابطه را بیان می‌کند.

قضیه ۳.۲.۴. *فرض کنید $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در $\mathbb{R}^k$ باشد و برای $i = 1, 2, ..., k$ ، $\{x_{in}\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌های مولفه‌ای آن باشند. دنبالهٔ $\{x_n\}$ به $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$ همگراست اگر و تنها اگر برای هر $i = 1, 2, ..., k$ داشته باشیم $x_{in} \to x_i$.*

اثبات. از آنجا که برای هر $i = 1, 2, ..., k$ و هر $n \in \mathbb{N}$ داریم،

$$|x_{in} - x_i| \leq |x_n - x| \leq \sum_{i=1}^{k} |x_{in} - x_i|$$

با توجه به قضیهٔ فشار، حکم ثابت می‌شود. □

قضیه ۴.۲.۴. *فرض کنید $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله‌هایی در $\mathbb{R}^k$ باشند و $\{\beta_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. اگر $x_n \to x$ ، $y_n \to y$ و $\beta_n \to \beta$ ، آنگاه*

الف) $x_n + y_n \to x + y$.

ب) $x_n \circ y_n \to x \circ y$. *(ضرب داخلی دو دنباله)*

پ) $\beta_n x_n \to \beta x$.

اثبات. واضح است. □

هرگاه دنباله $\{x_n\}$ را در $\mathbb{R}^2$ در نظر بگیریم، با توجه به اینکه $\mathbb{R}^2$ می‌تواند به عنوان میدان اعداد مختلط، $\mathbb{C}$، در نظر گرفته شود، قضیهٔ زیر را بیان می کنیم.

قضیه ۵.۲.۴. *فرض کنید $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله‌هایی در $\mathbb{C}$ باشند. هرگاه $x_n \to x$ و $y_n \to y$ ، آنگاه*

الف) $x_n + y_n \to x + y$.

ب) برای هر $c \in \mathbb{C}$ ، $cx_n \to cx$ و $c + x_n \to c + x$.

پ) $x_n y_n \to xy$.

ت) $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{x}$ ، مشروط بر اینکه $x_n \neq 0$ و $x \neq 0$.

اثبات. با توجه به آنچه که برای اعداد حقیقی ثابت شد، حکم به دست می‌آید. □

۳.۴ تمرین

۱.۳.۴ دنباله‌ها در فضای متریک

۱. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد. نشان دهید که در دستگاه گسترش یافتهٔ اعداد حقیقی،

$$diamS = \sup S - \inf S.$$

۲. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد و $z \in \mathbb{R}$. نشان دهید،

الف) $d(z,S) \leq |z - supS|$ و تساوی وقتی برقرار است که $z \geq \sup S$.

ب) $d(z,S) \leq |z - infS|$ و تساوی وقتی برقرار است که $z \leq \sup S$.

پ) اگر $\sup S \in \mathbb{R}$، آنگاه $d(\sup S, S) = 0$.

ت) اگر $\inf S \in \mathbb{R}$، آنگاه $d(\inf S, S) = 0$.

۳. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد و $x \in X$. همچنین فرض کنید A و B زیر مجموعه‌های ناتهی از X باشند به طوری که $A \subseteq B$. نشان دهید،

$$d(x,B) \leq d(x,A) \leq d(x,B) + diam(B).$$

۴. فرض کنید (X,d) فضایی متریک و S زیرمجموعه‌ای ناتهی از X باشد. $a, b \in X$ را در نظر بگیرید و نشان دهید،

الف) $d(a,S) \leq d(a,b) + d(b,S)$.

ب) $|d(a,S) - d(b,S)| \leq d(a,b) \leq d(a,S) + diamS + d(b,S)$.

۵. فرض کنید (X,d) فضایی متریک و $\mathcal{C}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X و $x \in X$ باشد. نشان دهید:

الف) $d(x, \bigcup \mathcal{C}) = \inf\{d(x,A) : A \in \mathcal{C}\}$.

ب) $\sup\{d(x,A) : A \in \mathcal{C}\} \leq d(x, \bigcap \mathcal{C})$.

۶. فرض کنید (X,d) فضایی متریک، $A \subseteq X$ و $z \in X$ باشد. عنصر $s \in A$ را نزدیک‌ترین نقطهٔ A به z در X گوییم اگر $d(z,s) = d(z,S)$. نشان دهید،

الف) با ارائهٔ یک مثال نشان دهید که نزدیک‌ترین نقطه، لزوماً وجود ندارد.

ب) فرض کنید (X,d) ابرفضای متریک $\mathbb{R}$ که با متر معمولی مجهز است، باشد. $x \in X$ را در نظر بگیرید و نشان دهید که نزدیکترین نقطه به z، در $\mathbb{R}$ وجود دارد.

۷. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک، $w \in X$ و $A \subseteq X$ باشد. نشان دهید:

الف) $d(w,A) \leq d(w,\partial A)$.

ب) $d(w,\bar{A}) = d(w,A)$.

۸. نشان دهید که دنبالهٔ $\{x_n\}$ در $\mathbb{R}^k$ کشی است اگر و تنها اگر دنباله‌های مولفه‌ای آن دنباله‌هایی کشی باشند.

۹. $\mathbb{R}^k$ یک فضای متریک تام است.

۱۰. برای دنبالهٔ $\{x_n\}$ در یک فضای متریک (X,d)، گزاره‌های زیر معادلند:

الف) $\{S$زیرمجموعه‌ای نامتناهی از $\mathbb{N}$ باشد: $\{z\} = \bigcap\{\overline{\{x_n | n \in S\}}$

ب) $x_n \to z$.

۱۱. فرض کنید (X,d_X) و (Y,d_Y) فضاهایی متریک باشند و $(X\times Y,d)$ فضای متریک حاصلضربی باشد که برای $(x_۱,y_۱)$ و $(x_۲,y_۲)$ در $X\times Y$ با ضابطهٔ

$$d((x_۱,y_۱),(x_۲,y_۲)) = d_X(x_۱,x_۲) + d_Y(y_۱,y_۲)$$

تعریف می‌شود. در این صورت دنبالهٔ $\{A_n = (a_n,b_n)\}_{n=۱}^{\infty}$در $X \times Y$ به (a,b) همگراست اگر و تنها اگر $a_n \to a$ در X و $b_n \to b$ در Y همگرا باشند.

۱۲. فرض کنید (X,d) فضایی متریک، $x \in X$ و A زیرمجموعه‌ای ناتهی از X باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

الف) $x \in A^\circ$.

ب) A شامل همهٔ جملات هر دنبالهٔ همگرا به x در X است جز احتمالاً تعداد متناهی از جملات دنباله.

ج) هیچ دنباله‌ای در A^c به $x \in X$ همگرا نیست.

۱۳. در هر فضای متریک (X,d)، برای $A \subseteq X$ گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

الف) A در X بسته است.

ب) هر دنباله در A که در X همگراست دارای حد در A است.

گزاره‌های زیر برای دنبالهٔ دلخواه $\{x_n\}$ در X و $x \in X$ هم‌ارز هستند:

۱۴. الف) زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ به x همگراست.

ب) هر همسایگی به مرکز x شامل تعداد نامتناهی جمله از دنباله می‌باشد.

ج) برای هر $k \in \mathbb{N}$، x نقطهٔ بستاری مجموعهٔ $\{x_n : n \geq k\}$ می‌باشد.

د) یا مجموعهٔ $\{n : x_n = x\}$ نامتناهی است و یا x نقطهٔ حدی $\{x_n : n \geq k\}$ برای هر $k \in \mathbb{N}$ می‌باشد.

۱۵. فرض کنید (X, d) فضایی متریک باشد و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشد که دارای هیچ زیردنبالهٔ همگرا در X نباشد. آنگاه هرنقطه مجموعهٔ $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ نتقطه تنهاست و در X بسته است.

۱۶. فرض کنید (X, d) فضایی متریک و$A \subseteq X$ باشد. در این صورت A در X چگال است اگر و تنها اگر برای هر $x \in X$، دنباله‌ای در A همگرا به x موجود باشد.

۴.۴ دنباله‌های کشی

۱. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای کشی در X باشد که در X همگرا نیست. آنگاه هر زیرمجموعه از $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ در X بسته است.

۲. فرض کنید (X, d_X) و (Y, d_Y) فضاهایی متریک باشند و $(X \times Y, d)$ فضای متریک حاصلضربی باشد. در این صورت دنبالهٔ $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ در $X \times Y$ دنباله‌ای کشی است اگر و تنها اگر $\{x_n\}$ در X و $\{y_n\}$ در Y دنباله‌هایی کشی باشند.

*۳. فرض کنید (X, d) فضایی متریک و $\{a_n\}$ دنباله‌ای کشی در X باشد که در X همگرا نیست. فرض کنید $z \notin X$ و $X_1 = X \cup \{z\}$ قرار دهید. آنگاه X_1 را می‌توان به عنوان یک فضای متریک که (X, d) زیرفضای متریکی از آن است توصیف نمود که در آن دنبالهٔ $\{a_n\}$ به z همگراست.

فصل ۵

سری‌ها و آزمون های همگرایی

در این فصل به همگرایی سری‌ها می پردازیم. در بخش نخست نشان میدهیم که مقدار همگرایی یک سری به ترتیب جمع بندی وابسته است و ثابت می‌کنیم که هرگاه سری همگرای مطلق باشد مقدار همگرایی سری مستقل از نوع ترتیب جمع بندی خواهد بود. همچنین نشان میدهیم که سری‌های همگرای مشروط رفتاری وابسته با ترتیب جع بندی از خود نشان می دهند. در بخش بعد با آزمون های همگرایی برای سری‌ها آشنا می شویم.

۱.۵ همگرایی سری‌ها و ترتیب جمع بندی

فرض کنید $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد مختلط باشد. برای $m \leq n$ از نماد $\sum_{k=m}^{n} a_k$ برای نمایش $a_m + a_{m+۱} + \dots + a_n$ استفاده می‌کنیم. به $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنبالهٔ $\{S_n\}_{n=۱}^{\infty}$ را که در آن $S_n = \sum_{k=۱}^{n} a_k$، مربوط می‌سازیم. $\sum_{k=۱}^{\infty} a_k$ را سری نامتناهی یا فقط سری می‌نامیم. S_nها مجموع‌های جزیی nام سری خوانده می‌شوند. هرگاه $\{S_n\}$ به s همگرا باشد، می‌گوییم سری همگراست و می‌نویسیم،

$$\sum_{n=۱}^{\infty} a_n = s.$$

عدد s را مجموع سری می‌نامیم و در واقع، s حد دنباله‌ای از مجموع‌ها می‌باشد. هرگاه $\{S_n\}$ واگرا باشد، سری را واگرا می‌نامیم.

قضیه ۱.۱.۵. *فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌هایی در اعداد مختلط باشند و ثابت c را در نظر بگیرید. در این صورت،*

الف) هرگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشند، سری $\sum_{n=1}^{\infty}(ca_n+b_n)$ همگراست و داریم،

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n + b_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

ب) هرگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا باشد، سری $\sum_{n=1}^{\infty} cb_n + a_n$ که $c \neq 0$، واگرا می‌باشد.

اثبات. الف) فرض کنید $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ و $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ ، به ترتیب، مجموع جزیی nام سری‌های $\sum a_n$ و $\sum b_n$ باشند. هرگاه $a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $b = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ، آنگاه $A_n \to a$ و $B_n \to b$ و از آنجا که $\sum_{k=1}^{n} ca_k + b_k = cA_n+B_n$ ، مجموع جزیی سری $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n+b_n$ است، حکم نتیجه می‌شود.

ب) به برهان خلف، فرض کنید برای $c \neq 0$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} cb_n + a_n$ همگرا باشد. در این صورت $\sum_{n=1}^{\infty} cb_n - a_n$ و در نتیجه $\sum_{n=1}^{\infty} 2cb_n$ همگراست؛ یعنی $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا می‌باشد که تناقض است.

$\square$

قضیه ۲.۱.۵. *سری $\sum a_n$ همگراست اگر و تنها اگر به ازای هر $\epsilon > 0$ یک $N > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ که $m \geq n \geq N$ ، داشته باشیم،*

$$|\sum_{k=n}^{m} a_k| < \epsilon.$$

به خصوص، اگر $m = n$،

$$\forall n(n \geq N \Longrightarrow |a_n| < \epsilon).$$

اثبات. فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد. هرگاه A_n مجموع جزیی nام سری باشد در این صورت $\{A_n\}$ دنباله‌ای همگراست و لذا دنباله‌ای کشی است. در

نتیجه برای $\epsilon > 0$ ، یک $N > 0$ وجود دارد به طوری که
$$\forall n, m(m \geq n \geq N \Longrightarrow |A_m - A_n| < \epsilon)$$
و لذا
$$\forall n, m(m \geq n \geq N \Longrightarrow |\sum_{k=n+1}^{m} a_k| < \epsilon).$$
به عکس، فرض کنید برای هر $\epsilon > 0$، یک $N > 0$ وجود دارد به طوری که
$$\forall n, m(m \geq n \geq N \Longrightarrow |\sum_{k=n+1}^{m} a_k| < \epsilon).$$
پس
$$\forall n, m(m \geq n \geq N \Longrightarrow |A_m - A_n| < \epsilon).$$

لذا $\{A_n\}$ دنباله‌ای کشی در $\mathbb{C}$ است و از آنجا که $\mathbb{C}$ فضای متریک تام است، پس همگراست و بنابراین $\sum a_n$ همگراست. قسمت آخر به راحتی ثابت می‌شود. □

می‌گوئیم سری $\sum a_n$ همگرای مطلق است اگر $\sum |a_n|$ همگرا باشد. هرگاه $\sum a_n$ همگرا و $\sum |a_n|$ واگرا باشد، می‌گوئیم $\sum a_n$ به طور مشروط همگراست.

قضیه ۵.۱.۳. *هرگاه سری $\sum a_n$ همگرای مطلق باشد، آنگاه همگراست.*

اثبات. فرض کنید $\sum a_n$ همگرای مطلق باشد؛ یعنی $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگراست. بنابراین برای $\epsilon > 0$ یک $N > 0$ وجود دارد به طوری که
$$\forall n, m(M \geq n \geq N \Longrightarrow \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \epsilon).$$
حال با توجه به اینکه $|\sum_{k=n}^{m} a_k| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k|$ ، حکم نتیجه می‌شود. □

با توجه به اینکه، سری‌هایی که به طور مطلق همگرا، همگرا می‌باشند، بنابراین همگرایی به دو رده تقسیم می‌گردد؛ همگرایی مطلق و همگرایی مشروط. حال تفاوت این دو همگرایی را بررسی می‌کنیم. هرگاه به دنبالهٔ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$، مجموع جزیی $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ را نظیر کنیم؛ ترتیب جمع کردن در شکل گرفتن A_n، نقش تعیین کننده در همگرایی و واگرایی سری خواهد داشت. برای درک بهتر این موضوع، فرض کنید $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ تابعی دوسویی باشد. در این صورت سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ را یک تجدید آرایش سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ می‌نامیم.

قضیه ۴.۱.۵. *هرگاه $\sum a_n$ همگرای مطلق باشد، آنگاه هر تجدید آرایش $\sum a_n$ نیز همگراست و هر دو به یک مجموع، همگرا می‌باشند.*

اثبات. فرض کنید $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ تابعی دوسویی و $\sum a_{f(n)}$ تجدید آرایشی با مجموع جزیی $T_n = \sum_{k=۱}^{n} a_{f(k)}$ باشد. هرگاه $s_n = \sum_{k=۱}^{n} a_k$ مجموع جزیی سری $\sum a_n$ باشد، برای هر $\epsilon > ۰$ ، یک $N > ۰$ وجود دارد به طوری که،

$$\forall n, m (m \geq n \geq N \Longrightarrow \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \epsilon).$$

حال p را به قسمی اختیار می‌کنیم که اعداد $۱, ..., N$ را در $f(۱), ..., f(p)$ باشند. در این صورت اگر $n > p$ ، آنگاه اعداد $a_۱, ..., a_N$ در تفاضل $S_n - T_n$ حذف می‌شوند و در نتیجه

$$|S_n - T_n| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \epsilon.$$

بنابراین $\{T_n\}$ همگرا به همان مجموع $\{S_n\}$ خواهد شد. □

اثباتی از قضیه زیر را که به ریمان منسوب است را می توانید در [؟] مشاهده بفرمایید.

قضیه ۵.۱.۵. *فرض کنید $\sum a_n$ یک سری همگرای مشروط باشد. اگر*

$$-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq \infty,$$

آنگاه تابعی دوسویی چون $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_{f(n)}$ با مجموع جزییnام $T_n = \sum_{k=۱}^{n} a_{f(k)}$ ، دارای خصوصیات زیر باشد؛

$$\limsup_{n\to\infty} T_n = \beta$$

و

$$\liminf_{n\to\infty} T_n = \alpha.$$

۲.۵ آزمون های همگرایی

فرض کنید $\sum a_n$ یک سری از اعداد حقیقی باشد. در این صورت از آنجا که $\sum a_n$ و $\sum -a_n$ هم‌رفتارند، برحسب علامت جملات سری $\sum a_n$، آن‌ها را به دو رده تقسیم

می‌کنیم و برای هر یک از رده‌ها، آزمون‌هایی را برای همگرایی سری ها معرفی می‌کنیم. دو رده سری مذکور، عبارتند از سری‌های با جملات مثبت و سری‌های با جملاتی که تعداد نامتناهی از جملات مثبت و تعداد نامتناهی از جملات منفی می‌باشند.

۱.۲.۵ آزمون همگرایی برای سری‌های با جملات مثبت

فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری با جملات مثبت باشد؛ یعنی $n_0 > 0$ موجود باشد که برای هر $n \geq n_0$ داشته باشیم $a_n \geq 0$. در این قسمت به آزمون‌هایی در خصوص همگرایی این سری‌ها می‌پردازیم.

قضیه ۱.۲.۵. فرض کنید $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد که برای هر* $n \in \mathbb{N}$، $a_n \geq 0$. *در این صورت* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *همگراست اگر و تنها اگر مجموع‌های جزیی* n*ام آن دنباله‌ای کراندار باشد.*

اثبات. واضح است. □

قضیه ۲.۲.۵. آزمون مقایسه.

الف) فرض کنید $N_0 \in \mathbb{N}$. *هرگاه به ازای هر* $n \geq N_0$، *داشته باشیم* $|a_n| \leq c_n$ *و* $\sum c_n$ *همگرا باشد، آنگاه* $\sum a_n$ *همگرای مطلق است.*

ب) هرگاه برای هر $n \geq N_0$، $0 \leq d_n \leq a_n$ *و* $\sum d_n$ *واگرا باشد، آنگاه* $\sum a_n$ *واگراست.*

اثبات. الف) هرگاه $\epsilon > 0$ دلخواه باشد، با توجه به محک کشی، $N \geq N_0$ وجود دارد که برای $m \geq n \geq N$،

$$\sum_{k=n}^{m} c_k < \epsilon.$$

پس

$$\sum_{k=n}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n}^{m} c_k < \epsilon$$

و بنابراین $\sum |a_n|$ و لذا $\sum a_n$ همگرای مطلق است.

ب) به برهان خلف، فرض کنید $\sum a_n$ همگرا باشد در این صورت با توجه به الف) $\sum d_n$ همگراست که تناقض می‌باشد.

$\square$

قضیه ۳.۲.۵. آزمون مقایسهٔ حدی. *فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌هایی از اعداد حقیقی باشند که جز تعداد متناهی، همهٔ جملاتشان مثبت باشد. فرض کنید*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L,$$

در این صورت

الف) اگر $\circ < L < \infty$، آنگاه $\sum a_n$ و $\sum b_n$ هم‌رفتارند.

ب) اگر $L = \circ$ و $\sum b_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum a_n$ همگراست.

پ) اگر $L = \infty$ و $\sum b_n$ واگرا باشد، آنگاه $\sum a_n$ واگراست.

اثبات. الف) برای $L < \beta < \infty$ یک $N > \circ$ وجود دارد به طوری که

$$\forall n(n > N \Longrightarrow \circ < \frac{a_n}{b_n} < \beta),$$

و در نتیجه

$$\forall n(n > N \Longrightarrow a_n < \beta b_n).$$

حال اگر $\sum b_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum \beta b_n$ نیز همگراست و با توجه به آزمون مقایسه، $\sum a_n$ همگراست. اگر $\sum a_n$ واگرا باشد، آنگاه $\sum \beta b_n$ نیز واگراست و لذا $\sum b_n$، واگرا خواهد بود.

ب) اگر $L = \circ$ در این صورت برای $\circ < \frac{۱}{۲}$ ، یک $N > \circ$ وجود دارد به طوری که

$$\forall n(n \geq N \Longrightarrow \circ < \frac{a_n}{b_n} < \frac{۱}{۲})$$

و لذا

$$\forall n(n \geq N \Longrightarrow \circ < a_n < \frac{۱}{۲} b_n).$$

بنابراین حکم با توجه به آزمون مقایسه نتیجه می‌شود.

پ) اگر $L=\infty$، آنگاه با توجه به تعریف واگرایی به ∞، برای $M=1$ ، یک $N>0$ وجود دارد به طوری که

$$\forall n (n \geq N \Longrightarrow \frac{a_n}{b_n} > 1)$$

و لذا

$$\forall n (n \geq N \Longrightarrow a_n < b_n).$$

حال با توجه به آزمون مقایسه، حکم نتیجه می‌شود.

□

قضیه ۴.۲.۵. سری هندسی. *اگر $|x|<1$، آنگاه* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ *و اگر $|x| \geq 1$، آنگاه سری واگراست.*

اثبات. هرگاه $x \neq 1$، برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

حال با توجه به اینکه اگر $|x|<1$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$، حکم نتیجه می‌شود. برای $|x| \geq 1$ به وضوح سری فوق واگراست. □

قضیه ۵.۲.۵. آزمون تراکم کوشی. فرض کنید $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq 0$. *در این صورت سری* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *و* $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ *هم‌رفتارند.*

اثبات. کافی است که کرانداری مجموعه‌های جزیی این سری‌ها را مورد بررسی قرار دهیم. فرض کنید $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ و $T_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}$. در این صورت برای $n < 2^k$ ،

$$\begin{aligned} S_n \leq & a_1 + (a_2 + a_3) + \ldots + (a_{2^k} + \ldots + a_{2^{k+1}-1}) \\ \leq & a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^k a_{2^k} \\ = & T_k \end{aligned}$$

و لذا $S_n \leq T_k$. از طرفی اگر $n > ۲^k$،

$$\begin{aligned} S_n \geq & a_۱ + a_۲ + (a_۳ + a_۴) + \ldots + (a_{۲^{k-۱}+۱} + \ldots + a_{۲^k}) \\ \leq & \frac{۱}{۲} a_۱ + a_۲ + ۲a_۴ + \ldots + ۲^{k-۱} a_{۲^k} \\ = & \frac{۱}{۲} T_k . \end{aligned}$$

بنابراین $۲S_n \geq T_k$. در نتیجه T_k و S_n یا هردو کراندارند و یا هر دو بی‌کرانند که این حکم را نتیجه می‌دهد. □

مثال ۶.۲.۵. *الف) سری* $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^p}$ *همگراست اگر* $p > ۱$ *و واگراست اگر* $p \leq ۱$

۱. *چون دنبالهٔ* $\{\frac{۱}{n^p}\}$ *نزولی و مثبت است. پس* $\sum \frac{۱}{n^p}$ *و* $\sum ۲^n \frac{۱}{(۲^n)^p}$ *هم‌رفتارند. از طرفی*

$$\sum ۲^n \frac{۱}{(۲^n)^p} = \sum (\frac{۱}{۲^{p-۱}})^n = \sum (۲^{۱-p})^n .$$

و لذا سری هندسی است. اگر $۱ > ۲^{۱-p} > ۰$ *، سری همگرا و اگر* $۲^{۱-p} \geq ۱$ *، سری واگراست. بنابراین اگر* $p > ۱$ *، سری همگرا و اگر* $p \leq ۱$ *، سری واگراست.*

ب) *سری* $\sum \frac{۱}{n(\ln n)^p}$ *برای* $p > ۱$ *همگرا و برای* $p \leq ۱$ *واگراست. دنبالهٔ* $\{\frac{۱}{n(\ln n)^p}\}$ *دنباله‌ای نزولی و مثبت است. لذا* $\sum \frac{۱}{n(\ln n)^p}$ *و* $\sum ۲^n \frac{۱}{۲^n(\ln ۲^n)^p}$ *هم‌رفتارند. از طرفی*

$$\sum ۲^n \frac{۱}{۲^n(\ln ۲^n)^p} = \sum \frac{۱}{n^p (\ln ۲)^p} = \frac{۱}{(\ln ۲)^p} \sum \frac{۱}{n^p},$$

نتیجه می‌دهد که برای $p > ۱$ *همگرا و برای* $p \leq ۱$ *واگراست.*

پ) *سری* $\sum \frac{۱}{n \ln n (\ln(\ln n))^p}$ *، برای* $p > ۱$ *همگرا و برای* $p \leq ۱$ *واگراست.*

ت) $\sum \frac{۱ \cdot ۳ \cdot ۵ \cdots (۲n-۱)}{۲ \cdot ۴ \cdots ۲n}$ *واگراست؛ زیرا*

$$\frac{۱ \cdot ۳ \cdot ۵ \cdots (۲n-۱)}{۲ \cdot ۴ \cdots ۲n} = \frac{۳}{۲} \cdot \frac{۵}{۴} \cdots \frac{۲n-۱}{۲n-۲} \cdot \frac{۱}{۲n} \geq \frac{۱}{۲n}.$$

حال با توجه به آزمون مقایسه و اینکه $\sum \frac{۱}{۲n}$ *واگراست، حکم نتیجه می‌شود.*

ث) *هرگاه سری* $\sum a_n$ *همگرا باشد، آنگاه* $\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$.

ج) هرگاه $\{a_n\}$ دنباله‌ای در $\mathbb{R}$ و همگرا به صفر باشد، آنگاه زیر دنباله‌ای چون $\{a_{n_k}\}$ وجود دارد به طوری که $\sum a_{n_k}$ همگرای مطلق است. به این منظور توجه نمایید که برای $1 \in \mathbb{N}$ ، یک $1 \leq n_1$ موجود است به طوری که $|a_{n_1}| < 1$. حال فرض کنید $n_{k-1} < n_k$ به طوری که $|a_{n_k}| < \frac{1}{k^2}$. در این صورت چون $a_n \to 0$ ، برای $(k+1)$ ، اندیس $n_k < n_{k+1}$ وجود دارد به طوری که

$$|a_{n_{k+1}}| < \frac{1}{(k+1)^2}.$$

بنابراین زیر دنباله‌ای چون $\{a_{n_k}\}$ به دست می آید که برای هر $k \in \mathbb{N}$ ، $|a_{n_k}| \leq \frac{1}{k^2}$. حال چون $\sum \frac{1}{k^2}$ همگراست، پس با توجه به آزمون مقایسه، $\sum a_{n_k}$ همگرای مطلق است.

چ) هرگاه $\sum a_n$ همگرا و $a_n \geq 0$ ، آنگاه $\sum a^2$ نیز همگراست؛ زیرا همگرایی $\sum a_n$ نتیجه می‌دهد که $a_n \to 0$. پس $N > 0$ وجود دارد به طوری که

$$\forall n (n \geq N \Longrightarrow a_n < 1).$$

در این صورت برای $n \geq N$ داریم،

$$0 \leq a_n^2 \leq a_n,$$

و لذا با توجه به آزمون مقایسه، $\sum a_n^2$ همگراست.

۳.۵ آزمون‌های همگرایی برای سری‌های با جملات مثبت و منفی

فرض کنید $\sum a_n$ یک سری دلخواه با جملات حقیقی باشد. هرگاه $\{n \in \mathbb{N} : a_n > 0\}$ و $\{n \in \mathbb{N} : a_n < 0\}$ نامتناهی باشد، با روش‌های گفته شده در بخش قبل، در خصوص همگرایی و واگرایی سری ها، لزوماً نمی‌توان اظهار نظر کرد.

قضیه ۱.۳.۵. فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌هایی دلخواه باشند. برای $n \geq 0$ ، قرار می‌دهیم،

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

فرض کنید $A_{-۱} = ۰$ ، *در این صورت اگر* $۰ \leq p \leq q$ ، *خواهیم داشت،*

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-۱} A_n(b_n - b_{n+۱}) + A_q b_q - A_{p-۱} b_p.$$

اثبات.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=p}^{q} a_n b_n &= \sum_{n=p}^{q} (A_n - A_{n-۱}) b_n \\
&= \sum_{n=p}^{q} A_n b_n - \sum_{n=p}^{q} A_{n-۱} b_n \\
&= \sum_{n=p}^{q} A_n b_n - \sum_{n=p-۱}^{q-۱} A_n b_{n+۱} \\
&= \sum_{n=p}^{q-۱} A_n b_n - \sum_{n=p-۱}^{q-۱} A_n b_{n+۱} + A_q b_q - A_{p-۱} b_p \\
&= \sum_{n=p-۱}^{q-۱} A_n (b_n - b_{n+۱}) + A_q b_q - A_{p-۱} b_p.
\end{aligned}$$

بنابراین حکم نتیجه می‌شود. □

قضیهٔ قبل برای بررسی همگرایی سری $\sum a_n b_n$ ، تحت شرایطی خاص، مفید می‌باشد.

قضیه ۲.۳.۵. *فرض کنید* $\{b_n\}_{n=۰}^{\infty}$ ، *دنباله‌ای نزولی و همگرا به صفر باشد. هرگاه مجموع جزیی* $A_n = \sum_{k=۰}^{n} a_k$ *از سری* $\sum a_n$ ، *کراندار باشد، آنگاه* $\sum a_n b_n$ *همگراست.*

اثبات. با توجه مفروضات، یک $M > ۰$ وجود دارد به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $|A_n| \leq M$. برای $\epsilon > ۰$، عدد $n \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که $b_N \leq \frac{\epsilon}{۲M}$. در

این صورت،

$$\begin{aligned}\forall n,m(n\geq m\geq N\Longrightarrow |\sum_{k=m}^{n}a_kb_k| &= |\sum_{k=m}^{n-1}A_k(b_k-b_{k+1})+A_nb_n-A_{m-1}b_m|\\ &\leq M|\sum_{k=m}^{n-1}(b_k-b_{k+1})+b_n+b_m|\\ &\leq 2Mb_m\\ &\leq 2mb_N\\ &< \epsilon),\end{aligned}$$

و لذا $\sum a_nb_n$ همگراست. $\square$

در قضیهٔ قبل، توجه داشته باشید که دنبالهٔ $\{a_n\}$ هیچ شرطی ندارد؛ به عبارتی، برای هر دنبالهٔ $\{a_n\}$ که مجموع جزیی $A_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$ کراندار باشد، با توجه به خصوصیاتی که دنبالهٔ $\{b_n\}$ دارد، $\sum a_nb_n$ همگرا خواهد شد.

قضیه ۳.۳.۵. لایب نیتز. *فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد که نزولی و همگرا به صفر است. در این صورت $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ همگراست.*

مثال ۴.۳.۵. *الف) سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ همگرای مشروط است.*

ب) فرض کنید $0<\alpha<\beta<2\pi$. در این صورت $\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}$ روی $[\alpha,\beta]$ تابعی کراندار است. از آنجائیکه

$$|\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin n\theta|\leq\frac{1}{|\sin\frac{\theta}{2}|},$$

پس مجموع جزیی nام سری $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\theta)$، برای $0<\alpha\leq\theta\leq\beta<2\pi$، دنباله‌ای کراندار است. از طرفی دنبالهٔ $\{\frac{1}{n}\}$، دنباله‌ای نزولی و همگرا به صفر است. بنابراین سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n}$$

برای هر $\theta\in[\alpha,\beta]\subseteq(0,2\pi)$ همگراست.

پ) هرگاه $\sum a_n$ همگرا و $\{b_n\}$ صعودی و کراندار باشد، در این صورت مجموع جزیی n ام $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ، دنباله‌ای کراندار است. همچنین α وجود دارد به طوری که $\{\alpha - b_n\}$ دنباله‌ای نزولی و همگرا به صفر می باشد. بنابراین $\sum(\alpha - b_n)a_n$ ، همگراست و در نتیجه $\sum a_n b_n$ همگرا خواهد بود.

قضیه ۵.۳.۵. *فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌هایی از اعداد مختلط باشند به طوری که $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ و $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$ همگرا هستند. در این صورت سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\overline{b_n}$ همگراست.*

اثبات. فرض کنید $A_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2$ و $B_n = \sum_{k=1}^{n} |b_n|^2$ مجموع های جزیی سری‌های $\sum |a_n|^2$ و $\sum |b_n|^2$ به ترتیب باشند. با توجه به نامساوی کشی شوارتس خواهیم داشت:

$$|\sum_{k=1}^{n} a_k\overline{b_k}|^2 \leq A_nB_n.$$

از آنجا که $\{A_n\}$ و $\{n\}$ صعودی هستند،

$$|\sum_{k=1}^{n} a_k\overline{b_k}| \leq (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

و بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\overline{b_n}$ همگراست. □

۴.۵ آزمون‌های نسبت و ریشه، سری‌های توانی

در بعضی از موارد، به کمک جملات دنباله، می‌توان همگرایی و واگرایی سری متناظر با دنباله را مشخص نمود.

قضیه ۱.۴.۵. آزمون ریشهٔ nام. *فرض کنید که $\sum a_n$ یک سری دلخواه باشد و*

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

در این صورت،

الف) هرگاه $\alpha < 1$ ، آنگاه $\sum a_n$ همگرای مطلق است.

ب) هرگاه $\alpha > 1$، آنگاه $a_n \nrightarrow 0$ و لذا $\sum a_n$ واگراست.

پ) هرگاه $\alpha = 1$، *آزمون نتیجه ای در بر ندارد.*

اثبات. الف) هرگاه $\alpha < 1$، آنگاه β را به گونه ای که $1 > \beta > \alpha$ اختیار می کنیم. در این صورت

$$\forall n(n \geq N \Longrightarrow \sqrt[n]{|a_n|} < \beta).$$

بنابراین برای $n \geq N$، داریم $|a_n| < \beta^n$. از آنجا که $\sum \beta^n$ همگراست، لذا به کمک آزمون مقایسه $\sum a_n$ همگرای مطلق می‌باشد.

ب) هرگاه $\alpha > 1$، زیر دنباله‌ای چون $\{a_{n_k}\}$ وجود دارد به طوری که

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \to \alpha.$$

پس برای تعدادنامتناهی جملهٔ دنباله داریم $|a_n| > 1$. بنابراین $a_n \nrightarrow 0$ و لذا سری $\sum a_n$ واگراست.

پ) به سری‌های $\sum \frac{1}{n}$ و $\sum \frac{1}{n^2}$ توجه کنید.

□

قضیه ۲.۴.۵. آزمون نسبت. *سری* $\sum a_n$ *را در نظر بگیرید و قرار دهید:*

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$$

و

$$\beta = \liminf_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|.$$

در این صورت،

الف) هرگاه $\alpha < 1$ *، آنگاه* $\sum a_n$ *همگرای مطلق است.*

ب) *هرگاه* $\beta > 1$، *آنگاه* $a_n \nrightarrow 0$ *و لذا* $\sum a_n$ *واگراست.*

پ) *هرگاه* $\alpha \leq 1 \leq \beta$، *آزمون بی نتیجه است.*

اثبات. الف) فرض کنید $\alpha < \beta < 1$. یک $N > 0$ وجود دارد به طوری که

$$\forall n(n \leq N \Longrightarrow |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < \beta).$$

بنابراین برای $k \in \mathbb{N}$ داریم:

$$|a_{N+k}| \leq \beta|a_{N+k-1}| \leq \beta^k|a_N|.$$

لذا با توجه به آزمون مقایسه، $\sum a_{N+k}$ و در نتیجه $\sum a_n$ همگرای مطلق است.

ب) $\beta > ۱$، در این صورت $N > ۰$ وجود دارد به طوری که
$$\forall n (n \geq N \Longrightarrow |\frac{a_{n+۱}}{a_n}| > ۱).$$
بنابراین برای هر $n \geq N$، $|a_{n+۱}| > |a_n|$. پس $a_n \nrightarrow ۰$ و در نتیجه $\sum a_n$ واگراست.

پ) به سری‌های $\sum \frac{۱}{n}$ و $\sum \frac{۱}{n^۲}$ توجه کنید.

□

مثال ۳.۴.۵. *الف) سری*
$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۳^۲} + \frac{۱}{۲^۳} + \frac{۱}{۳^۳} + \cdots$$
را در نظر بگیرید. هرگاه $a_۱ = \frac{۱}{۲}$، $a_۲ = \frac{۱}{۳}$، $a_۳ = \frac{۱}{۲^۲}$، $a_۴ = \frac{۱}{۳^۲}$ و ... *اختیار می کنیم، آنگاه*
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{۲}{۳})^n = ۰,$$
$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[۲n]{\frac{۱}{۳^n}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}},$$
$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[۲n]{\frac{۱}{۲^n}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}.$$
و
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{۳}{۲})^n = +\infty.$$
با توجه به ریشهٔ nام، می‌توان به راحتی همگرایی سری فوق را نتیجه گرفت؛ در حالی که با توجه به آزمون نسبت، امکان‌پذیر نیست.

ب) سری
$$\frac{۱}{۲} + ۱ + \frac{۱}{۲^۳} + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۲^۵} + \frac{۱}{۲^۴} + \frac{۱}{۲^۷} + \frac{۱}{۲^۶} + \cdots$$
را در نظر بگیرید. با فرض $a_۱ = \frac{۱}{۲}$، $a_۲ = ۱$، $a_۳ = \frac{۱}{۲^۳}$، $a_۴ = \frac{۱}{۲^۲}$، ...
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \frac{۱}{۸}$$

و

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$$

در نتیجه، آزمون نسبت در خصوص همگرایی یا واگرایی سری مذکور قادر به تصمیم‌گیری نیست. در حالیکه

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$$

و آزمون ریشهٔ nام همگرایی سری را نتیجه می‌دهد. البته با تجدید آرایش، به سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ می‌رسیم که همگراست.

آزمون نسبت از آزمون ریشه، به دلیل محاسبهٔ آسان‌تر آن، پرکاربردتر می‌باشد؛ اما دقت آزمون ریشهٔ nام بیشتر از آزمون نسبت است. گرچه در مورد واگرایی، هیچ کدام دقیق نیستند و همچنین در خصوص همگرایی، تنها همگرایی مطلق را نتیجه می‌دهند و در مورد همگرایی مشروط، قادر به تصمیم گیری نیستند.

تعریف ۴.۴.۵. *سری*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$$

که در آن دنبالهٔ $\{c_n\}$ از اعداد مختلط و z عددی مختلط است، یک سری توانی نامیده می‌شود. اعداد c_n را ضرایب سری می‌نامیم.

سری توانی بسته به انتخاب z، همگرا یا واگرا می‌باشد. در واقع $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ تابعی است که دامنهٔ تعریف آن، مجموعهٔ همهٔ zهایی است که به ازای آن‌ها، سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ همگراست. به وضوح $f(0)$ بامعناست.

قضیه ۵.۴.۵. *فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$، یک سری توانی باشد. قرار می‌دهیم*

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|},$$

و $R = \frac{1}{\alpha}$. مشروط به اینکه اگر $\alpha = 0$، آنگاه $R = \infty$ و اگر $\alpha = +\infty$، آنگاه $R = 0$. در این صورت برای $|z| < R$، سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ همگرا و برای $|z| > R$، سری واگراست.

اثبات. قرار می‌دهیم $a_n = c_n z^n$ و آزمون ریشه را به کار می‌بریم. در این صورت،

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |z| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{|z|}{R}.$$

R شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ نامیده می‌شود. □

قضیه ۶.۴.۵. *فرض کنید شعاع همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ مساوی با یک باشد. هرگاه $\{c_n\}$ دنباله‌ای نزولی و همگرا به صفر باشد، آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ در هر نقطهٔ دایرهٔ $|z| = 1$ همگراست، بجز احتمالاً در $z = 1$.*

اثبات. فرض کنید $a_n = z^n$ و $b_n = c_n$. هرگاه $|z| = 1$ و $z \neq 1$ ، آنگاه

$$|\sum_{k=0}^{n} z^k| = |\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}| \leq \frac{2}{|1 - z|}$$

و بنابراین سری $\sum c_n z^n$، برای هر z که $|z| = 1$ و $z \neq 1$ ، همگراست. □

سری‌های توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ را در نظر بگیرید. با ضرب این دو سری توانی و دسته‌بندی جملات همتوان z، خواهیم داشت،

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + \dots$$

با قرار دادن $z = 1$ ، تعریف زیر را خواهیم داشت.

حاصل ضرب کشی دو سری. فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ داده شده‌اند. قرار می‌دهیم،

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

در این صورت $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ را حاصل ضرب کشی دو سری می‌نامیم.

قضیه ۷.۴.۵. قضیهٔ مرتنس. *فرض کنید سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق باشد. اگر $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ و $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$، آنگاه حاصل ضرب کشی دو سری به AB همگراست.*

اثبات. قرار می‌دهیم:

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad B_k = \sum_{k=0}^{n} b_k \quad , \qquad \beta_n = B_n - B$$

و فرض می‌کنیم $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$ مجموع جزیی nام سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ باشد که در آن $C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. در این صورت،

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k B_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (B + \beta_{n-k}) \\ &= A_n B + a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_0. \end{aligned}$$

حال قرار می‌دهیم $\gamma_n = a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_n$. اگر نشان دهیم $\gamma_n \to 0$ ، آنگاه نتیجه می‌شود که $C_n \to AB$. به این منظور قرار می‌دهیم $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. از آنجا که $\beta_n \to 0$ ، پس برای $\epsilon > 0$ ، یک $N > 0$ وجود دارد به طوری که

$$\forall n (n \geq N \implies |\beta_n| < \epsilon).$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} |\gamma_n| \leq& |\beta_0 a_n + \ldots + \beta_N a_{n-N}| + |\beta_{N+1} a_{n-N-1} + \ldots + \beta_n a_0| \\ \leq& |\beta_0 a_n + \ldots + \beta_N a_{n-N}| + \epsilon\alpha. \end{aligned}$$

حال با توجه به اینکه $a_k \to 0$، با ثابت فرض کردن N و میل دادن n به ∞ خواهیم داشت،

$$\limsup_{n\to\infty} |\gamma_n| \leq \epsilon\alpha$$

و این حکم را نتیجه می‌دهد. □

در قضیهٔ قبل چنانچه شرط همگرایی مطلق سری حذف شود، قضیه لزوماً برقرار نخواهد بود. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۸.۴.۵. *سری*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$$

همگراست. حاصل ضرب کشی این سری را با خودش تشکیل می‌دهیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n = 1-(\frac{1}{\sqrt{2}}) + (\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}) - (\frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}) + \dots$$

بنابراین

$$C_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}$$

و چون

$$(n-k+1)(k+1) = (\frac{n}{2}+1)^2 - (\frac{n}{2}-k)^2 \leq (\frac{n}{2}+1)^2$$

در نتیجه

$$|C_n| \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{k+2} = \frac{2(n+1)}{n+2}.$$

بنابراین $c_n \nrightarrow 0$ و سری واگراست.

سوال. هرگاه $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$، $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ و حاصل ضرب کشی آنها $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$، به C همگرا باشد. آیا می‌توان نتیجه گرفت $C = AB$. آبل نشان داده است که جواب این سوال مثبت می‌باشد.

۵.۵ فضای دنباله‌ای

با توجه به رفتار دنباله‌ها، می‌توان فضاهای دنباله‌ای متفاوتی را تعریف کرد. فرض کنید $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد مختلط باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم،

$$\|\{a_n\}\|_{\infty} = \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

به وضوح دنبالهٔ $\{a_n\}$ کراندار است اگر و تنها اگر $\|\{a_n\}\|_{\infty} < \infty$. گردایهٔ همهٔ دنباله‌های کراندار $\{a_n\}$ را با $l_{\infty}(\mathbb{N})$ نمایش می‌دهیم؛ به عبارتی

$$l_{\infty}(\mathbb{N}) = \{\{a_n\} : \|\{a_n\}\|_{\infty} < \infty\}.$$

$l_{\infty}(\mathbb{N})$ با جمع و ضرب اسکالر که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$$

و

$$\alpha\{a_n\} = \{\alpha a_n\} \qquad (\alpha \in \mathbb{C})$$

فضایی برداری است. به راحتی دیده می‌شود که $(l_\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ فضایی نرمدار است. حال $\circ < p < \infty$ را در نظر بگیرید. در این صورت فضای $l_p(\mathbb{N})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$l_p(\mathbb{N}) = \{\{a_n\}_{n=۱}^{\infty} : \sum_{n=۱}^{\infty} |a_n|^p < \infty\}.$$

به وضوح همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty} |a_n|^p$، کراندار بودن دنبالهٔ $\{a_n\}$ را نتیجه می‌دهد. بنابراین برای هر $\circ < p$، $l_p(\mathbb{N}) \subseteq l_\infty(\mathbb{N})$. برای $p > \circ$ و دنبالهٔ $\{a_n\}$ تعریف می‌کنیم،

$$\|\{a_n\}\|_p = (\sum_{n=۱}^{\infty} |a_n|^p)^{\frac{۱}{p}}.$$

در این صورت قضیهٔ بعد نتیجه می‌شود.

قضیه ۱.۵.۵. *برای* $p \geq ۱$ ، $(l_p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p)$ *فضای برداری نرمدار است و اگر* $\circ < p < ۱$، *آنگاه تابع* $\|\cdot\|_p$ *یک نرم نیست.*

اثبات. به عنوان تمرین به عهده خواننده گرامی. □

روی فضای نرمدار $l_۲(\mathbb{N})$، می‌توان تابع زیر را تعریف کرد؛

$$\langle\cdot|\cdot\rangle : l_۲(\mathbb{N}) \times l_۲(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$$

$$\langle\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}|\{b_n\}_{n=۱}^{\infty}\rangle = \sum_{n=۱}^{\infty} a_n\overline{b_n}.$$

می‌توان بررسی کرد که،

الف) تابع فوق خوش تعریف است. کافی است نشان دهیم سری فوق همگراست. هرگاه $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ در $l_۲(\mathbb{N})$ واقع باشند و $A_n = \sum_{k=۱}^{n} |a_k|^۲$ و $B_n = \sum_{k=۱}^{n} |b_n|^۲$ مجموع جزیی سری‌های به ترتیب $\sum |a_n|^۲$ و $\sum |b_n|^۲$ باشند. در این صورت با توجه به نامساوی کشی-شوارتس داریم،

$$|\sum_{n=۱}^{m} a_n\overline{b_n}|^۲ \leq A_m B_m$$

و چون $A_n \leq \|\{a_n\}\|_۲^۲$ و $B_n \leq \|\{b_n\}\|_۲^۲$ بنابراین

$$|\sum_{n=۱}^{m} a_n\overline{b_n}|^۲ \leq \|\{a_n\}\|_۲\|\{b_n\}\|_۲$$

به عبارتی تابع $\langle\cdot|\cdot\rangle$ خوش تعریف است.

ب) تابع $\langle\cdot|\cdot\rangle$ با ثابت فرض کردن مولفهٔ دوم، نسبت به مولفهٔ اول خطی است؛ یعنی

$$\langle\alpha\{a_n\} + \{b_n\}|\{c_n\}\rangle = \alpha\langle\{a_n\}|\{c_n\}\rangle + \langle\{b_n\}|\{c_n\}\rangle$$

پ) برای دنباله‌های $A = \{a_n\}$ و $B = \{b_n\}$ داریم،

$$\langle A|B\rangle = \overline{\langle B|A\rangle}.$$

۶.۵ تمرین

۱. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای در $(۰, \infty)$ باشد. برای هر $n \in \mathbb{N}$ قرار دهید،

$$x_n = \sum_{k=۰}^{n}(a_k + \frac{۱}{a_k}).$$

نشان دهید $\frac{۱}{x_n} \to ۰$. (راهنمایی: برای $a > ۰$ داریم، $a + \frac{۱}{a} \geq ۲$)

۲. فرض کنید $a > ۰$ و $x_۰ \geq a$. برای $n \in \mathbb{N}$ قرار دهید،

$$x_{n+۱} = \frac{۱}{۲}(x_n + \frac{a}{x_n}).$$

نشان دهید $\{x_n\}$ دنباله‌ای نزولی و همگرا به $\sqrt{a}$ است.

۳. فرض کنید $a, x_۰ \in (۰, +\infty)$ و برای $n \in \mathbb{N}$، قرار دهید $x_{n+۱} = \frac{a}{۱ + x_n}$.
نشان دهید که دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگراست و سپس مقدار حد را بیابید.

۴. همگرایی دنبالهٔ بازگشتی زیر را ثابت کنید.

$$x_۰ > ۰, \quad x_۱ > ۰ \text{ و } \quad x_{n+۲} = \sqrt{x_n x_{n+۱}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

۵. نشان دهید دنبالهٔ بازگشتی زیر همگراست و حد آن را بیابید.

$$x_۰ = ۱ \text{ و } \quad x_{n+۱} = ۱ + \frac{۱}{x_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

۶. دنبالهٔ فیبوناتچی $\{x_n\}$ را که به صورت زیر تعریف می‌شود، در نظر بگیرید

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1 \text{ و } \quad f_{n+1} = f_n + f_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

و نشان دهید $\lim_{n\to\infty} \dfrac{f_{n+1}}{f_n} = g$ که g حد دنبالهٔ تمرین قبل می‌باشد.

۷. فرض کنید $x_0 = 5$، $x_1 = 1$ و $x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}x_{n-1}$ برای $n \in \mathbb{N}$. ثابت کنید دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگراست و حد آن را بیابید. (راهنمایی: $x_n - x_{n+1}$ را بدست آورید.)

۸. فرض کنید $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله‌هایی در $\mathbb{R}$ باشند و x^*، x_*، y^* و y_* به ترتیب حدود بالایی و پائینی دنباله‌های مذکور باشند. در این صورت،

الف) فرض کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$، $x_n \geq 0$ و $y_n \geq 0$. همچنین فرض کنید (x_*, y_*) در $\{(0, +\infty), (+\infty, 0)\}$ واقع نباشد، $(x_*, y^*) \neq (+\infty, 0)$ و $(x^*, y^*) \neq (0, +\infty)$. نشان دهید،

$$0 \leq x_* y_* \leq \liminf_{n\to\infty} x_n y_n \leq x_* y^* \leq \limsup_{n\to\infty} x_n y_n \leq x^* y^*.$$

ب) هرگاه $y_n \to y \in \mathbb{R}$، آنگاه

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x^* + y,$$

$$\liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x_* + y,$$

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n y_n) = x^* y, \quad y > 0$$

و

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x_* + y, \quad y < 0.$$

۹. فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری در $\mathbb{R}$ باشد. نشان دهید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست اگر و تنها اگر دنبالهٔ $\{\sum_{k=n}^{\infty} a_k\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا به صفر باشد.

۱۰. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای نزولی و $\sum x_n$ همگرا باشد. نشان دهید $kx_k \to 0$

۱۱. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای در $[0, \infty)$ است. نشان دهید $\sum x_n$ همگراست اگر و تنها اگر $\sum \dfrac{x_n}{1 + x_n}$ همگرا باشد.

۱۲. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای در $[0, \infty)$ و $\sum a_n$ واگرا باشد،

الف) در خصوص همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر چه نظری دارید.

۱) $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$.

۲) $\sum \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$.

ب) با مثال نشان دهید که سری‌های زیر می‌توانند همگرا یا واگرا باشند.

۱) $\sum \frac{a_n}{1+a_n^2}$.

۲) $\sum \frac{a_n}{1+na_n}$.

(راهنمایی برای الف): حالت‌های $\limsup_{n\to\infty} a_n < \infty$ و $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$ را جداگانه بررسی کنید.)

۱۳. فرض کنید $s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ و نشان دهید،

$$1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} - \frac{1}{10^2} + \ldots = \frac{4}{9}s.$$

۱۴. سری $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!}$ به طوری که c_kها اعداد طبیعی هستند و $0 \leq c_k \leq k$ برای $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ ، سری کانتور نامیده می‌شود. نشان دهید

الف) هر عدد حقیقی نامنفی x را می‌توان به صورت $x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!}$ نمایش داد و این نمایش یکتاست اگر تقریباً همهٔ c_kها با $k-1$ برابر نباشند.

ب) نشان دهید

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k-1}{k!} = \frac{1}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

پ) فرض کنید $x \in [0, 1)$ توسط $x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!}$ نمایش داده می‌شود. نشان دهید x گویاست اگر و تنها اگر $k_0 \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که $c_k = 0$ ، برای هر $k \geq k_0$.

فصل ۶

فشردگی و مجموعه های کلا کراندار

یکی از پرکاربردترین مفاهیم در آنالیز، مفهوم فشردگی است. فشردگی یک مجموعه به زبانی ساده، یعنی روند پوشاندن یک مجموعه توسط مجموعه های باز به هر شکل ممکن، بعد تعداد متناهی مرحله پایان بپذیرد. امروزه می دانیم این مفهوم که با توجه به پوشش های باز مطرح شده است در اشکال دیگری نیز طرح و بررسی می گردد. با توجه به خصوصیات مجموعه های فشرده، یافتن مجموعه های فشرده با از بعضی ویژگی ها، شامل مجموعه اصلی مورد بحث، از مباحث مورد علاقه ریاضیدانان می‌باشد(فشرده سازی). در این فصل ابتدا به معرفی مفاهیم اولیه فشردگی می پردازیم و سپس ارتباط فشردگی را با مفهوم کلا کراندار بیان می نماییم. ثابت می‌کنیم مفهوم متریک تام و کلا کراندار بودن با مفهوم فشردگی معادل است. در انتها مجموعه کانتور را معرفی می کنیم.

۱.۶ فضاهای متریک فشرده

تعریف ۱.۱.۶. *یک پوشش باز برای مجموعهٔ E در فضای متریک X ، گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های باز X مانند $\{G_\alpha\}$ است که $E \subseteq \bigcup G_\alpha$. می‌گوئیم پوشش باز $\{G_\alpha\}$ برای E ، حاوی زیرپوششی متناهی است اگر اندیس‌های $\alpha_1, \ldots \alpha_k$ موجود باشند به قسمی که $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} G_{\alpha_i}$.*

مثال ۲.۱.۶. *الف)* گردایهٔ $\{(-n,n)\}_{n=1}^{\infty}$ پوشش باز برای $\mathbb{R}$ می‌باشد که شامل زیر پوششی متناهی برای $\mathbb{R}$ نیست.

ب) گردایهٔ $\{(\frac{1}{n},1)\}_{n=1}^{\infty}$ پوشش بازی برای $(0,1)$ است که حاوی زیرپوشش متناهی برای $(0,1)$ نیست.

پ) گردایهٔ $\{(\frac{1}{n},1)\}_{n=1}^{\infty}$ پوشش بازی برای $E=\{\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}\}$ است که حاوی زیرپوشش متناهی برای E نیست.

ت) هر پوشش باز برای $E=\{\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$ حاوی یک زیرپوشش متناهی برای آن است. به این منظور فرض کنید $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک پوشش باز برای مجموعهٔ E باشد. از آنجا که $0\in E$ ، پس $\alpha_0\in I$ وجود دارد به طوری که $0\in G_{\alpha_0}$ و G_{α_0} باز است. از طرفی $\frac{1}{n}\to 0$ ، لذا مجموعهٔ باز G_{α_0} جز تعداد متناهی، همهٔ جملات دنبالهٔ $\{\frac{1}{n}\}$ را در بر خواهد داشت. فرض کنید $1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{N}$ جملاتی باشند که در G_α واقع نباشند. بنابراین برای هر $1\le i\le N$ ، یک $\alpha_i\in I$ وجود دارد به طوری که $\frac{1}{i}\in G_{\alpha_i}$ و در نتیجه $E\subseteq\bigcup_{i=0}^{N}G_{\alpha_i}$. بنابراین حکم نتیجه می‌شود.

ث) هر پوشش باز فاصلهٔ بستهٔ $I=[a,b]$ در $\mathbb{R}$ حاوی یک زیرپوشش متناهی است. به برهان خلف فرض کنید پوشش باز $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ در $\mathbb{R}$ برای $I=[a,b]$ موجود باشد که حاوی زیرپوشش متناهی برای I نباشد. فاصلهٔ I را به دو زیرفاصلهٔ بسته با طول(قطر) مساوی $\frac{b-a}{2}$ تقسیم می‌کنیم. حداقل یکی از این دو زیرفاصله توسط تعداد متناهی G_α پوشیده نمی‌شود؛ این زیرفاصلهٔ بسته را I_1 می‌نامیم. فرض کنید I_k زیرفاصلهٔ بسته‌ای از I_{k-1} با طول $\frac{b-a}{2^k}$ که توسط تعداد متناهی G_α پوشیده نمی‌شود، باشد. با تقسیم I_k به دو زیرفاصلهٔ بسته با قطر مساوی، زیرفاصله‌ای چون I_{k+1} با قطر $\frac{b-a}{2^{k+1}}$ بدست می‌آید که توسط تعداد متناهی G_α پوشیده نمی‌شود. به این ترتیب دنبالهٔ $\{I_k\}$ از زیرفاصله‌های بسته به دست می‌آید به طوری که $I_k\supseteq I_{k+1}$ ، I_kها توسط تعداد متناهی G_α پوشیده نمی‌شوند و $diamI_k=\frac{b-a}{2^k}$. با توجه به قضیهٔ ۸.۱.۳، $\bigcap_{k=1}^{\infty}I_k$ ناتهی است. فرض کنید $y\in\bigcap_{k=1}^{\infty}I_k$ ، در این صورت $\alpha\in J$ وجود دارد به طوری که $y\in G_\alpha$. از آنجا که G_α باز است،

یک $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که

$$y \in (-\delta + y, \delta + y) \subseteq G_\alpha.$$

حال $k_0 \in \mathbb{N}$ را به قسمی اختیار می‌کنیم که $\frac{b-a}{2^{k_0}} < \delta$. با توجه اینکه $y \in I_{k_0}$ ، پس $I_{k_0} \subseteq G_\alpha$ ؛ به این منظور فرض کنید $x \in I_{k_0}$. بنابراین $\delta > \frac{b-a}{2^{k_0}} > |y-x|$ و در نتیجه $x \in (y-\delta, y+\delta)$ و $x \in G_\alpha$. لذا I_{k_0} توسط G_α پوشیده می‌شود که با نحوهٔ انتخاب I_kها در تناقض است و به این ترتیب فرض خلف باطل می‌باشد.

تعریف ۳.۱.۶. زیرمجموعهٔ E از فضای متریک X را فشرده می‌نامیم اگر هر پوشش باز E حاوی زیرپوشش متناهی باشد؛ به عبارتی، هرگاه $\{g_\alpha\}_{\alpha\in I}$ پوششی باز برای E باشد، آنگاه $\alpha_1, ..., \alpha_k \in I$ موجود باشند به طوری که،

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} G_{\alpha_i}.$$

مثال ۴.۱.۶. الف) زیرمجموعه‌های متناهی از یک فضای متریک، مجموعه‌هایی فشرده هستند.

ب) $\mathbb{R}$ مجموعه‌ای فشرده نیست.

پ) $(0,1)$ مجموعه‌ای فشرده در $\mathbb{R}$ نیست.

پ) $[a,b]$ زیرمجموعه‌ای فشرده از $\mathbb{R}$ است.

ت) $\{\frac{1}{n}|n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ زیر مجموعه‌ای فشرده از $\mathbb{R}$ است.

ث) $\{\frac{1}{n}|n \in \mathbb{N}\}$ زیرمجموعه‌ای فشرده از $\mathbb{R}$ نیست.

مجموعه های فشرده ویژگی هایی دارند که به بعضی ار آن ها در قضیه زیر می پردازیم.

قضیه ۵.۱.۶. فرض کنید X فضایی متریک باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند.

الف) زیر مجموعه‌های فشردهٔ X ، بسته‌اند.

ب) زیر مجموعه‌های فشردهٔ X ، مجموعه‌هایی کراندارند.

پ) *زیرمجموعه‌های بستهٔ مجموعه‌های فشرده، فشرده‌اند.*

ت) *اگر $E \subseteq Y \subseteq X$ ، آنگاه E نسبت به X فشرده است اگر و تنها اگر E نسبت به Y فشرده باشد.*

اثبات. الف) فرض کنید E زیر مجموعهٔ فشردهٔ X باشد. نشان می‌دهیم E^c در X باز است. فرض می‌کنیم $x \in E^c$ و برای هر $y \in E$ ، $\delta_y = \frac{۱}{۳}d(x,y)$ را در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم $V_y = N_\delta(y)$ و $W_y = N_\delta(x)$. در این صورت $\{V_y\}_{y\in E}$ پوشش بازی برای E است و از آنجا که E فشرده است، $y_۱, y_۲, ..., y_k \in E$ موجودند به طوری که $E \subseteq \bigcup_{i=۱}^{k} V_{y_i}$. $V = \bigcup_{i=۱}^{k} V_{y_i}$ و $W = \bigcap_{i=۱}^{k} W_{y_i}$ قرار می‌دهیم. به وضوح W و V بازند و $V \cap W = \emptyset$. لذا $\delta > ۰$ وجود دارد به طوری که $N_\delta(x) \subseteq W$ و بنابراین $N_\delta(x) \subseteq E^c$ و E بسته است.

ب) فرض کنید E زیرمجموعه‌ای فشرده از X باشد. با توجه به اینکه برای $x \in X$ ، $X = \bigcup_{k=۱}^{\infty} N_k(x)$ ، پس $\{N_k(x)\}_{k=۱}^{\infty}$ پوشش بازی برای E است. از طرفی E فشرده است و لذا $n_k < ... < n_۲ < n_۱$ موجودند به طوری که $E \subseteq \bigcup_{i=۱}^{k} N_{n_i}(x)$ و بنابراین $E \subseteq N_{n_k}(x)$. در نتیجه $n_k > ۰$ وجود دارد به طوری که

$$\forall y \in E, \quad d(y,x) \leq n_k$$

که نشان می‌دهد E کراندار است.

پ) فرض کنید K زیرمجموعهٔ فشردهٔ X و $E \subseteq K$ نسبت به X بسته باشد. فرض کنید $\{G_\alpha\}$ پوشش بازی برای E باشد. در این صورت $\{G_\alpha\}$ به انضمام E^c پوشش بازی برای K می‌باشد. از آنجا که K فشرده است، $\alpha_۱, \alpha_۲, ..., \alpha_k$ موجودند به طوری که

$$K \subseteq E^c \cup G_{\alpha_۱} \cup ... \cup G_{\alpha_k}.$$

پس $E \subseteq G_{\alpha_۱} \cup ... \cup G_{\alpha_k}$ و بنابراین E فشرده است.

ت) فرض کنید E نسبت به X فشرده باشد و $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ پوشش بازی برای E در Y باشد. از آنجا که برای هر $\alpha \in I$ ، F_α در Y باز است، پس باز G_α در X وجود دارد به طوری که $F_\alpha = G_\alpha \cap Y$. بنابراین $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ پوشش

بازی برای E در X می‌باشد و چون E در X فشرده است، $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ موجودند به طوری که

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} G_{\alpha_i}$$

و لذا $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} F_{\alpha_i}$. پس E نسبت به Y فشرده می‌باشد.
به عکس، فرض کنید E نسبت به Y فشرده و $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ پوشش بازی برای E باشد. از آنجا که برای هر $\alpha \in I$ ، $F_\alpha = G_\alpha \cap Y$ در Y باز است، پس $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ پوشش بازی برای E در Y می‌باشد. از طرفی E در Y فشرده است و لذا $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ موجودند به طوری که

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} F_{\alpha_i}.$$

بنابراین $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} G_{\alpha_i}$ و در نتیجه E در X فشرده می‌باشد.

□

در قسمت ت) قضیهٔ قبل، نشان داده شده است که مفهوم فشردگی از یک فضا به فضای دیگر انتقال می‌یابد؛ برخلاف مفهوم مجموعهٔ باز و مجموعهٔ بسته که مفاهیمی نسبی هستند. نکتهٔ حائز اهمیت دیگر در قضیهٔ قبل، بسته و کراندار بودن مجموعه‌های فشرده می‌باشد. در حالت کلی عکس این مطلب، لزوماً برقرار نیست. مثال‌های بعد تا حدی این مطلب را روشن می‌سازند.

مثال ۶.۱.۶. *الف) فرض کنید (X, d) فضای متریک گسسته و X نامتناهی باشد. در این صورت زیرمجموعه‌های نامتناهی X فشرده نیستند؛ زیرا اگر فرض کنیم $E \subseteq X$ مجموعه‌ای نامتناهی باشد، با توجه به اینکه برای هر $x \in X$ ، $\{x\}$ مجموعه‌ای باز است، $\{\{x\}\}_{x \in E}$ یک پوشش باز برای E می‌باشد. اگر E فشرده باشد، آنگاه $x_1, x_2, ..., x_k \in E$ موجودند به طوری که*

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \{x_i\} = \{x_1, x_2, ..., x_k\};$$

یعنی E متناهی است و این با نامتناهی بودن E در تناقض است. به وضوح، $E \subseteq X$ در فضای متریک گسسته (X, d) فشرده است اگر و تنها اگر E مجموعه‌ای متناهی باشد.

ب) مجموعهٔ $E = [\sqrt{2}, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q}$ را در نظر بگیرید. E در $\mathbb{Q}$ مجموعه‌ای بسته و کراندار است. E در $\mathbb{Q}$ فشرده نیست؛ زیرا اگر E در $\mathbb{Q}$ فشرده باشد، باید در $\mathbb{R}$ نیز فشرده باشد. از طرفی فشردگی E در $\mathbb{R}$ یعنی اینکه E در $\mathbb{R}$ بسته است؛ اما

$$E \neq \bar{E} = [\sqrt{2}, \sqrt{3}].$$

بنابراین E در $\mathbb{R}$ فشرده نیست و در نتیجه E در $\mathbb{Q}$ فشرده نخواهد بود.

پ) هرگاه F بسته و K فشرده باشد، آنگاه $K \cap F$ بسته است و نیز $K \cap F \subseteq K$. پس $K \cap F$ فشرده می‌باشد؛ به عبارتی، "اشتراک یک مجموعهٔ بسته با یک مجموعهٔ فشرده، مجموعه‌ای فشرده است."

ت) مجموعهٔ $X \subseteq E$ فشرده است اگر و تنها اگر هر پوشش از همسایگی‌های باز برای E حاوی یک زیرپوشش متناهی برای E باشد.

تعریف ۷.۱.۶. می‌گوییم گردایهٔ $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ از زیرمجموعه‌های X دارای خاصیت مقطع متناهی است اگر و تنها اگر برای هر $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ در I داشته باشیم،

$$\bigcap_{i=1}^{k} F_{\alpha_i} \neq \emptyset.$$

مثال ۸.۱.۶. الف) گردایهٔ $\{(0, \frac{1}{n})\}_{n=1}^{\infty}$ دارای خاصیت مقطع متناهی است.

ب) گردایهٔ $\{[n, +\infty)\}_{n=1}^{\infty}$، خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های بستهٔ $\mathbb{R}$ است که دارای خاصیت مقطع متناهی است.

به کمک خاصیت مقطع متناهی، به گونه‌ای دیگر می‌توان مفهوم فشردگی را توصیف کرد. قضیهٔ زیر این توصیف را ارائه می‌دهد.

قضیه ۹.۱.۶. فضای متریک (X, d) فشرده است اگر و تنها اگر برای هر گردایهٔ $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ از زیرمجموعه‌های بستهٔ X که دارای خاصیت مقطع متناهی است، داشته باشیم

$$\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha \neq \emptyset.$$

اثبات. فرض کنید (X, d) فشرده باشد. به برهان خلف، فرض کنید $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های بستهٔ X باشد که دارای خاصیت مقطع متناهی است

و $\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha = \emptyset$. برای ثابت $\alpha_\circ \in I$ ، $F_{\alpha_\circ}$ فشرده است. از آنجا که $F_{\alpha_\circ} \cap (\bigcap_{\alpha\neq\alpha_\circ} F_\alpha) = \emptyset$ ، بنابراین

$$F_{\alpha_\circ} \subseteq \bigcup_{\alpha\neq\alpha_\circ} F_\alpha^c.$$

پس $\{F_\alpha^c\}_{\alpha\neq\alpha_\circ}$ پوشش بازی برای $F_{\alpha_\circ}$ می‌باشد و لذا $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ مخالف با $\alpha_\circ$ موجودند که $F_{\alpha_\circ} \subseteq \bigcup_{i=1}^k F_{\alpha_i}^c$. در نتیجه $F_{\alpha_\circ} \cap F_{\alpha_1} \cap ... \cap F_{\alpha_k} = \emptyset$ که تناقض است. به عکس، به برهان خلف فرض کنید $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ پوشش بازی برای X باشد که حاوی زیرپوشش متناهی برای X نباشد. بنابراین برای هر $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in I$ ، $\bigcup_{i=1}^k G_{\alpha_i}$ شامل X نمی‌باشد. در نتیجه $\bigcap_{i=1}^k G_{\alpha_i}^c \neq \emptyset$ ، برای هر $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in I$. لذا گردایهٔ $\{G_\alpha^c\}_{\alpha\in I}$ از زیر مجموعه‌های بستهٔ X دارای خاصیت مقطع متناهی است. پس

$$(\bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha\in I} G_\alpha^c \neq \emptyset$$

و بنابراین $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ پوشش بازی برای X نمی‌باشد که این تناقض است. □

نتیجه ۶.۱.۱۰. قضیه اشتراکی کانتور. *فرض کنید $\{K_\alpha\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های فشردهٔ فضای X باشد. اگر $\{K_\alpha\}_{\alpha\in I}$ دارای خاصیت مقطع متناهی باشد، آنگاه*

$$\bigcap_{\alpha\in I} K_\alpha \neq \emptyset.$$

اثبات. ثابت $\alpha_\circ \in I$ را در نظر بگیرد. در این صورت $K_{\alpha_\circ}$ فشرده و $\{K_{\alpha_\circ} \cap K_\alpha\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های بستهٔ $K_{\alpha_\circ}$ است که دارای خاصیت مقطع متناهی است. لذا

$$\bigcap_{\alpha\in I} K_\alpha = \bigcap_{\alpha\in I} (K_{\alpha_\circ} \cap K_\alpha) \neq \emptyset$$

و حکم ثابت می‌شود. □

مثال ۶.۱.۱۱. *گردایهٔ $\{[n, +\infty)\}_{n=1}^\infty$ ، خانواده‌ای از مجموعه‌های بسته در $\mathbb{R}$ است که دارای خاصیت مقطع متناهی است و* $\bigcap_{n=1}^\infty [n, +\infty) = \emptyset$. *در نتیجه $\mathbb{R}$ فشرده نیست.*

۲.۶ فشردگی و فضای متریک کلاً کراندار

در مفهوم فشردگی، گزارهٔ "هر پوشش باز حاوی یک زیرپوشش متناهی باشد" را در نظر بگیرید. هرگاه عبارت "هر پوشش باز" را به عبارت "هر پوشش از همسایگی‌های به شعاع $\epsilon > 0$ " تغییر دهیم، مجموعه‌هایی که در این خاصیت جدید صدق می‌کنند، لزوماً فشرده نخواهند بود. در حالیکه هر مجموعهٔ فشرده، از خاصیت مذکور تبعیت می‌کند. سوالی که مطرح می‌شود، این است که تفاوت آنها درچیست؟ و تحت چه شرایطی یکدیگر را نتیجه می‌دهند؟ مطلب دیگری که قابل طرح است، تعویض عبارت "زیرپوشش متناهی" در تعریف مفهوم فشردگی، با عبارت "زیرپوشش شمارا" می‌باشد.

تعریف ۱.۲.۶. *فرض کنید (X,d) فضایی متریک و $\epsilon > 0$ باشد. زیرمجموعهٔ $A \subseteq X$ را یک $\epsilon-$تور برای X گوئیم اگر برای هر $x \in X$ ، یک $y \in A$ موجود باشد به طوری که $d(x,y) < \epsilon$ ؛ به عبارتی*

$$X = \bigcup_{y\in A} N_\epsilon(y).$$

هرگاه A به عنوان یک $\epsilon-$تور، متناهی باشد، آن را $\epsilon-$تور متناهی می‌نامیم.

تعریف ۲.۲.۶. *فضای متریک (X,d) را کلاً کراندار می‌نامیم اگر برای هر $\epsilon > 0$ ، یک $\epsilon-$تور متناهی برای X موجود باشد؛ به عبارتی برای هر $\epsilon > 0$ ، $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ موجود باشند به طوری که*

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} N_\epsilon(x_i).$$

هرگاه $Y \subseteq X$ زیرمجموعه‌ای ناتهی باشد، Y را کلاً کراندار گوییم اگر Y خود به عنوان فضای متریک، کلاً کراندار باشد.

مثال ۳.۲.۶. *الف) هر فاصلهٔ کراندار (a,b)، کلاً کراندار است.*

ب) $\mathbb{R}$ کلاً کراندار نیست.

پ) هرگاه (X,d) یک فضای متریک گسستهٔ نامتناهی باشد، آنگاه X کلاً کراندار نیست.

قضیه ۴.۲.۶. *هر فضای متریک کلاً کراندار، کراندار است.*

اثبات. فرض کنید (X, d) کلاً کراندار باشد. $\epsilon = 1 > 0$ را در نظر بگیرید. در این صورت نقاط $x_1, x_2, ..., x_n$ در X موجودند به طوری که

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} N_1(x_i).$$

فرض کنید $M = diam\{x_1, ..., x_n\}$. برای هر x و $y \in X$ ، نقاط x_i و x_j وجود دارند به طوری که $d(x_i, x) < 1$ و $d(y, x_j) < 1$. در نتیجه

$$d(x, y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, y) \leq 1 + M + 1 = 2 + M$$

و لذا $diamX \leq 2 + M$. در نتیجه X مجموعه‌ای کراندار است. □

مثال ۵.۲.۶. *الف)* عکس *قضیهٔ فوق برقرار نیست. هر فضای متریک گسستهٔ نامتناهی، کراندار است اما کلاً کراندار نیست.*

ب) $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ *در فضای اقلیدسی* $\mathbb{R}^n$ *کراندار است اگر و تنها اگر* Y *کلاً کراندار باشد. کافی است توجه کنیم که اگر* $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ *کراندار باشد، آنگاه یک حجرهٔ* $n-$*بعدی شامل* Y *وجود دارد. برای* $\epsilon > 0$ *، می‌توانیم این حجره را به* n *حجرهٔ با قطر کمتر از* $\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$ *تقسیم کنیم.*

قضیه ۶.۲.۶. *اگر* (X, d) *فضای متریک فشرده باشد، آنگاه کلاً کراندار است.*

اثبات. $\epsilon > 0$ را در نظر بگیرید. گردایهٔ همهٔ همسایگی‌های باز $\{N_\epsilon(x)\}_{x \in X}$ یک پوشش باز برای X است و چون X فشرده است، لذا نقاط $x_1, x_2, ..., x_n$ در X وجود دارند به طوری که $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} N_\epsilon(x_i)$. در نتیجه (X, d) کلاً کراندار است. □

قضیه ۷.۲.۶. *فرض کنید* (X, d) *فضایی متریک باشد و* $Y \subseteq X$ *. آنگاه* Y *کلاً کراندار است اگر و تنها اگر هر دنبالهٔ در* Y *شامل یک زیردنبالهٔ کشی باشد.*

اثبات. فرض کنید Y کلاً کراندار و $\{y_n\}$ دنباله‌ای در Y باشد. اگر برد دنبالهٔ $\{y_n\}$ متناهی باشد، حکم واضح است. لذا فرض کنید برد دنبالهٔ $\{y_n\}$ نامتناهی است. $\frac{1}{2}-$تور متناهی در Y را در نظر بگیرید. در این صورت یکی از همسایگی‌ها به شعاع

$\frac{1}{2}$، شامل تعداد نامتناهی عضو از برد دنبالهٔ $\{y_n\}$ می‌باشد. بنابراین زیردنباله‌ای از $\{y_n\}$ مانند $\{y_n^{(1)}\}$ وجود دارد که در یک همسایگی به شعاع $\frac{1}{2}$ قرار دارد. $\frac{1}{4}-$تور متناهی در Y را در نظر بگیرید. همسایگی باز به شعاع $\frac{1}{4}$ وجود دارد که تعداد نامتناهی عضو برد دنبالهٔ $\{y_n^{(1)}\}$ را شامل می‌شود و لذا زیردنباله‌ای مانند $\{y_n^{(2)}\}$ وجود دارد. با ادامهٔ این روش به استقرا، برای هر $k \in \mathbb{N}$ ، زیردنباله‌ای چون $\{y_n^{(k)}\}$ از دنبالهٔ $\{y_n^{(k-1)}\}$ بدست می‌آید که دارای برد نامتناهی است که در یک همسایگی به شعاع $\frac{1}{2^k}$ به مرکز یک $\frac{1}{2^k}-$تور متناهی واقع شده است. حال دنبالهٔ $\{y_n^{(n)}\}$ را در نظر بگیرید. به وضوح $\{y_n^{(n)}\}$ زیردنباله‌ای از $\{y_n\}$ می‌باشد. برای $\epsilon > 0$ ، یک $n_0 \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $\frac{1}{2^{n_0-2}} < \epsilon$. در این صورت برای هر $m > n > n_0$ ،

$$\begin{aligned} d(y_n^{(n)}, y_m^{(m)}) &\leq d(y_n^{(n)}, y_{n+1}^{(n+1)}) + \dots + d(y_{m-1}^{(m-1)}, y_m^{(m)}) \\ &< \frac{2}{2^n} + \frac{2}{2^{n+1}} + \dots + \frac{2}{2^{m-1}} \\ &< \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^{n_0-2}} < \epsilon \end{aligned}$$

و لذا دنبالهٔ $\{y_n^{(n)}\}$ دنباله‌ای کشی است.

به عکس، فرض کنید هر دنباله در Y دارای یک زیردنبالهٔ کشی باشد. نشان می‌دهیم که Y کلاً کراندار است. $\epsilon > 0$ دلخواه و $y_1 \in Y$ را در نظر بگیرید. اگر $Y - N_\epsilon(y_1) = \emptyset$ ، آنگاه یک $\epsilon-$تور متناهی برای Y به دست آمده است. در غیر این صورت $y_2 \in Y - N_\epsilon(y_1)$ را در نظر می‌گیریم. اگر $Y - \bigcup_{i=1}^{2} N_\epsilon(y_i) = \emptyset$ ، آنگاه یک $\epsilon-$تور متناهی برای Y به دست می‌آید. در غیر این صورت $y_3 \in Y - \bigcup_{i=1}^{2} N_\epsilon(y_i)$ را در نظر می‌گیریم. با ادامهٔ این روند تا مرحلهٔ nام، یا حکم نتیجه می‌شود و یا دنباله‌ای به صورت $\{y_n\}$ به دست می‌آید که برای هر $n \neq m$ ، $d(y_n, y_m) \leq \epsilon$. اما به این ترتیب $\{y_n\}$ حاوی زیر دنباله‌ای کشی نخواهد بود که یک تناقض است. بنابراین این روند بعد از n مرحله متوقف می‌شود و حکم حاصل می‌شود. $\square$

توجه : در قضیه قبل، برای اثبات اینکه در یک فضای کلا کراندار هر دنباله ای شامل یک زیردنباله کشی است، می توان به طریق زیر نیز عمل نمود.
فرض کنید $\{y_n\}$ دنباله ای در فضای کلاکراندار Y باشد. با انتخاب $\frac{۱}{۲}$-تور ها، یکی از همسایگی ها تعداد نامتناهی جمله از دنباله را شامل می شود. جمله $y_{n_۱}$ را واقع در آن در نظر بگیرید. چون زیرمجموعه هر فضای کلاکرانداری کلاکراندار است $\frac{۱}{۴}$-تور این همسایگی را در نظر می گیریم. یکی از این همسایگی ها شامل بی نهایت جمله از دنباله است، $y_{n_۲}$ را در این همسایگی به گونه ای اختیار می کنیم که $n_۱ < n_۲$. به وضوح $d(y_{n_۱}, y_{n_۲}) < \frac{۱}{۲}$. با ادامه این روند زیردنباله ای چون $\{y_{n_i}\}$ بدست می آید که

$$d(y_{n_i}, y_{n_{i+۱}}) < \frac{۱}{۲^i}.$$

به وضوح دنباله بدست آمده دنباله ای کشی است.

قضیه ۸.۲.۶. *هر فضای متریک فشرده، جدایی‌پذیر است.*

اثبات. برای هر عدد طبیعی n، X دارای $\frac{۱}{n}$–تور متناهی چون A_n است. بنابراین برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$X = \bigcup_{a \in A_n} N_{\frac{۱}{n}}(a).$$

□

$A = \bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n$ زیر مجموعه‌ای شمارا از X می‌باشد. نشان می‌دهیم A در X چگال است. فرض کنید $N_\epsilon(x)$ یک همسایگی دلخواه به مرکز x و شعاع $\epsilon > ۰$ باشد. عدد $n \in \mathbb{N}$ را به در نظر بگیرید به طوری که $\frac{۱}{n} < \epsilon$. از آنجا که A_n، $\frac{۱}{n}$–تور متناهی است، پس $x \in \bigcup_{a \in A_n} N_{\frac{۱}{n}}(a)$. بنابراین $a \in A_n$ وجود دارد به طوری که $d(x, a) < \frac{۱}{n}$ و در نتیجه $a \in N_\epsilon(x) \cap A$ که حکم را ثابت می‌کند.

قضیه ۹.۲.۶. *هر فضای متریک فشرده، فضای متریک تام است.*

اثبات. فرض کنید (X, d) فضای متریک فشرده باشد که تام نیست. در این صورت دنباله‌ای کشی مانند $\{x_n\}$ در X وجود دارد به طوری که در X دارای حد نمی‌باشد.

اگر $y \in X$ ، از آنجا که $x_n \nrightarrow y$، برای هر $y \in Y$، یک $\epsilon(y) > \circ$ موجود است به طوری که $N_{\epsilon(y)}(y)$ شامل فقط تعداد متناهی جملهٔ دنبالهٔ $\{x_n\}$ می‌باشد. از آنجا که

$$X = \bigcup_{y \in X} N_{\epsilon(y)}(y)$$

و X فشرده است، $y_۱, y_۲, ..., y_n \in X$ موجودند به طوری که

$$X = \bigcup_{i=۱}^{n} N_{\epsilon(y_i)}(y_i).$$

در نتیجه X شامل تعداد متناهی جمله از دنبالهٔ $\{x_n\}$ می‌شود که یک تناقض است.

□

تا به اینجا نشان دادیم که هر فضای متریک فشرده، کلاً کراندار و تام است. قضیهٔ زیر ارتباط بین این مفاهیم را بیان می‌کند.

قضیه ۱۰.۲.۶. *فرض کنید (X, d) فضای متریک باشد. در این صورت X فشرده است اگر و تنها اگر تام و کلاً کراندار باشد.*

اثبات. اگر X فشرده باشد، حکم واضح است. فرض کنید X فضای متریک تام و کلاً کراندار باشد. به برهان خلف فرض کنید X فشرده نباشد. بنابراین پوشش بازی چون $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ برای X وجود دارد که حاوی زیرپوشش متناهی برای X نیست. از آنجا که (X, d) کلاً کراندار است، بنابراین کراندار خواهد بود و یک $r > \circ$ و $x_\circ \in X$ وجود دارد به طوری که $X \subseteq N_r(x_\circ)$. فرض کنید $\epsilon_n = \frac{r}{۲^n}$. از آنجا که X کلاً کراندار است، می‌توان X را با تعداد متناهی همسایگی باز به شعاع $\epsilon_۱$ پوشاند. حداقل یکی از این همسایگی‌ها با تعداد متناهی G_α پوشیده نمی‌شود. فرض کنید این همسایگی $N_{\epsilon_۱}(x_۱)$ باشد. $N_{\epsilon_۱}(x_۱)$ کلاً کراندار است و لذا $x_۲ \in N_{\epsilon_۱}(x_۱)$ وجود دارد که $N_{\epsilon_۲}(x_۲)$ توسط تعداد متناهی G_α پوشیده نمی‌شود. با ادامهٔ این روند به استقرا دنبالهٔ $\{x_n\}$ با این ویژگی به دست می‌آید که برای هر n، $N_{\epsilon_n}(x_n)$ توسط تعداد متناهی G_α پوشیده نمی‌شود و $x_{n+۱} \in N_{\epsilon_n}(x_n)$. حال نشان می‌دهیم دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگراست. با توجه به اینکه $d(x_n, x_{n+۱}) < \epsilon_n$

، خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) \leq & \sum_{k=n}^{n+p-۱} d(x_k, x_{k+۱}) \\ < & \epsilon_n + \epsilon_{n+۱} + \ldots + \epsilon_{n+p-۱} \\ < & \frac{r}{۲^{n-۱}} \end{aligned}$$

و بنابراین $\{x_n\}$ دنباله‌ای کشی است. از طرفی X تام است و لذا $y \in X$ وجود دارد به طوری که $x_n \to y$. از آنجا که $y \in X$ ، پس $\alpha \in I$ وجود دارد به طوری که $y \in G_\alpha$. G_α باز است. بنابراین $\delta > ۰$ موجود است به طوری که $N_\delta(y) \subseteq G_\alpha$. برای n به اندازه کافی بزرگ، x_n را به قسمی می‌توان یافت که $d(x_n, y) < \frac{\delta}{۲}$ و $\epsilon_n < \frac{\epsilon}{۲}$. به این ترتیب برای هر $x \in N_{\epsilon_n}(x_n)$ داریم،

$$\begin{aligned} d(x, y) \leq & d(x, x_n) + d(x_n, y) \\ < & \frac{۱}{۲}\delta + \frac{۱}{۲}\delta = \delta. \end{aligned}$$

در نتیجه $N_{\epsilon_n}(x_n) \subseteq N_\delta(y) \subseteq G_\alpha$ یعنی $N_{\epsilon_n}(x_n)$ با یک G_α پوشیده می‌شود که تناقض است. $\square$

قضیه ۶.۲.۱۱. *در هر فضای متریک (X, d) گزاره‌های زیر هم‌ارزند.*

الف) هر زیر مجموعهٔ نامتناهی در X ، دارای حداقل یک نقطهٔ حدی در X است.

ب) هر دنباله در X ، دارای زیر دنباله‌ای همگراست.

اثبات. مورد الف)، مورد ب) را نتیجه می‌دهد: اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشد، اگر برد دنباله متناهی باشد، به وضوح زیردنباله‌ای از آن همگراست. پس فرض کنید برد دنباله نامتناهی است که به این ترتیب دارای نقطهٔ حدی در X می‌باشد. فرض کنید x نقطهٔ حدی مورد نظر باشد. $n_۱ \in \mathbb{N}$ را انتخاب می‌کنیم به طوری که $d(x_{n_۱}, x) < ۱$. همسایگی $N_{\frac{۱}{k}}(x)$ دارای تعداد نامتناهی عنصر برد دنباله است. لذا می‌توان $n_{k-۱} < n_k$ را طوری انتخاب کرد که $d(x_{n_k}, x) < \frac{۱}{k}$. بنابراین زیردنبالهٔ $\{x_{n_k}\}$ همگرای به x وجود دارد. مورد ب)، مورد الف) را نتیجه می‌دهد:

فرض کنید $E \subseteq X$ مجموعه‌ای نامتناهی باشد. در این صورت E شامل یک زیرمجموعهٔ شماراست که می‌توان به صورت دنبالهٔ $\{y_n\}$ توصیف کرد. بنابراین زیردنباله‌ای از آن مانند $\{y_{n_i}\}$ به $y \in X$ همگراست. پس هر همسایگی به مرکز y، شامل تعداد نامتناهی نقطه از E خواهد بود و $t \in E'$. □

قضیه ۱۲.۲.۶. *فضای متریک X فشرده است اگر و تنها اگر هر دنباله در X دارای زیردنباله‌ای همگرا در X باشد.*

اثبات. فرض کنید X فشرده باشد که در نتیجه کلاً کراندار و تام است. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشد. به دلیل کلاً کراندار بودن X، دنباله دارای زیردنباله‌ای کشی است. از طرفی X تام است. بنابرین زیر دنبالهٔ کشی، همگرا خواهد بود.
به عکس، فرض کنید هر دنباله در X دارای زیردنباله‌ای همگرا باشد. بنابراین هر دنبالهٔ کشی در X، همگراست که نشان می‌دهد X تام است. از طرفی هر دنباله در X دارای زیر دنباله‌ای کشی می‌باشد. در نتیجه X کلاً کراندار است. به این ترتیب X تام و کلاً کراندار و لذا فشرده می‌باشد. □

قضیه ۱۳.۲.۶. *فرض کنید (X, d) فضایی متریک باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند.*

الف) *(X, d) فشرده است.*

ب) *(X, d) کلاً کراندار و تام است.*

پ) *هر مجموعهٔ نامتناهی در X دارای حداقل یک نقطهٔ حدی است.*

ت) *هر دنبالهٔ در X دارای زیردنباله ای همگراست.*

قضیه ۱۴.۲.۶. *فرض کنید (X, d) و (Y, e) فضاهایی متریک باشند. آنگاه فضای متریک حاصلضربی $X \times Y$ فشرده است.*

اثبات. اثبات به عنوان تمرین. □

تعریف ۱۵.۲.۶. *فضای متریک X را شمارا فشرده گوئیم اگر هر پوشش باز شمارای X دارای یک زیرپوشش متناهی باشد.*

قضیه ۱۶.۲.۶. *فضای متریک (X,d) فشرده است اگر و تنها اگر شمارا فشرده باشد.*

اثبات. به وضوح اگر (X,d) فشرده باشد، شمارا فشرده خواهد بود. لذا فرض کنید (X,d) شمارا فشرده باشد. فرض کنید $A \subseteq X$ مجموعه‌ای نامتناهی باشد که نقطه‌ای حدی در X ندارد. مجموعه‌ای شمارا از نقاط متمایز A را به عنوان مجموعهٔ F در نظر می‌گیریم و به برهان خلف فرض می کنیم $F' = \emptyset$. لذا برای هر $x_n \in F$ ، $r(x_n) > ۰$ موجود است به طوری که،

$$N_{r(x_۰)}(x_n) \cap F = \{x_n\}.$$

بنابراین

$$X = (X - F) \cup (\bigcup_{n=۱}^{\infty} N_{r(x_۰)}(x_n))$$

و از آنجا که X شمارا فشرده است، بنابراین $k \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که

$$X = (X - F) \cup (\bigcup_{n=۱}^{k} N_{r(x_n)}(x_n))$$

که با نامتناهی بودن F در تناقض است. بنابراین هر زیرمجموعهٔ نامتناهی از X، در X، دارای نقطهٔ حدی است و در نتیجه فشرده می‌باشد. $\square$

تعریف ۱۷.۲.۶. فرض کنید (X,d) *فضایی متریک و* $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *یک پوشش باز آن است. فرض کنید* $\lambda > ۰$ *ثابت به قسمی موجود باشد که برای هر* $x \in X$ ، *یک* $\alpha \in I$ *یافت شود به طوری که*

$$N_\lambda(x) \subseteq G_\alpha,$$

این عدد λ را عدد پوششی لبگ می‌نامیم.

قضیه ۱۸.۲.۶. *فرض کنید (X,d) فضای متریک فشرده و $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ یک پوشش باز برای X باشد. آنگاه $\lambda > ۰$ وجود دارد به طوری که هر همسایگی به مرکز x و شعاع λ مشمول در یک G_α می‌شود.*

اثبات. هر $x \in X$ ، به یک G_α در $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ تعلق دارد. بنابراین برای هر $x \in X$ ، یک $r(x) > ۰$ وجود دارد به طوری که به ازای یک $\alpha \in I$ ،

$$N_{r(x)}(x) \subseteq G_\alpha.$$

گردایهٔ $\{N_{\frac{r(x)}{۲}}(x)\}_{x\in X}$ پوششی باز برای X است و از آنجا که X فشرده است، $x_۱, ..., x_n$ در X موجودند به طوری که

$$X = \bigcup_{i=۱}^{n} N_{\frac{r(x_i)}{۲}}(x_i).$$

در این صورت قرار می‌دهیم $\lambda = \min\{\frac{r(x_i)}{۲} : i = ۱, ۲, ..., n\}$. حال $x \in X$ را دلخواه در نظر می‌گیریم. در این صورت $۱ \leq i \leq n$ وجود دارد به طوری که $x \in N_{\frac{r(x_i)}{۲}}(x_i)$. بنابراین برای هر $y \in N_\lambda(x)$ داریم،

$$\begin{aligned} d(y, x_i) \leq& d(y, x) + d(x, x_i) \\ <& \lambda + \frac{r(x_i)}{۲} \\ \leq& r(x_i) \end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد $N_\lambda(x) \subseteq N_{r(x_i)}(x_i)$ و حکم حاصل می‌شود. □

۳.۶ فشردگی در $\mathbb{R}^n$

مفهوم فشردگی در $\mathbb{R}^n$ علاوه بر آنچه در فضاهای متریک گفته شد، ویژگی های دیگری نیز دارد که آن را از فضاهای دیگر متمایز می سازد. با توجه به فصل چهارم می دانیم که فضای $\mathbb{R}^n$، فضایی تام است. قضیه زیر در بررسی فشردگی در فضاهای اقلیدسی مفید خواهد بود.

قضیه ۱.۳.۶. *فرض کنید E زیرمجموعه‌ای ناتهی از $\mathbb{R}^n$ باشد. در این صورت E کراندار است اگروتنها اگر کلاکراندار باشد.*

اثبات. از انجاییکه هر مجموعه کلاکراندار، کراندار است کافی است ثابت کنیم که اگر E کراندار باشد آنگاه کلاکراندار است. به این منظور فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای در E باشد. چون هر دنباله کراندار در $\mathbb{R}^n$ حاوی زیردنباله‌ای همگراست (قضیه ۱.۲.۴ را ببینید)، پس هر دنباله کراندار حاوی یک زیردنباله کشی است. حال با توجه به قضیه ۷.۲.۶ حکم نتیجه می‌شود. □

قضیه ۲.۳.۶. هاینه-بورل. *گزاره های زیر برای زیر مجموعه E از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ معادل هستند.*

آ) E بسته و کراندار است.

ب) E فشرده است.

ج) E کلا کراندار و بسته است.

د) E کلا کراندار و تام است.

ه) هر دنباله در E دارای زیردنباله‌ای همگراست.

و) هر زیرمجموعه نامتناهی E در E دارای نقطه حدی است.

اثبات. واضح است. □

مجموعه $I = [a_۱, b_۱] \times [a_۲, b_۲] \times ... \times [a_k, b_k]$ را در فضای $\mathbb{R}^n$ یک حجره k-بعدی یا مکعب مستطیل بسته می‌نامیم.

قضیه ۳.۳.۶. *گزاره های زیر در فضای اقلیدسی برقرارند.*

الف) هر مکعب مستطیل بسته ای، فشرده است.

ب) هرگاه $\{I_n\}_{n=۱}^{\infty}$ خانواده ایی از حجره ها در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^k$ باشد که دارای خاصیت مقطع متناهی است انگاه

$$\bigcap_{n=۱}^{\infty} I_n \neq \emptyset.$$

در قضیهٔ زیر یکی از مشخصه‌های مجموعه‌های کامل، در فضای $\mathbb{R}^n$، بیان شده است.

قضیه ۴.۳.۶. *فرض کنید P مجموعهٔ کامل ناتهی در $\mathbb{R}^n$ باشد. در این صورت P ناشمارا است.*

اثبات. P دارای نقطهٔ حدی است، لذا نامتناهی می‌باشد. فرض کنید P شمارای نامتناهی باشد و $P = \{x_۱, x_۲, ...\}$. حال دنبالهٔ $\{V_k\}_{k=۱}^{\infty}$ از همسایگی‌ها را تشکیل می‌دهیم. فرض کنید $V_۱$ همسایگی $x_۱$ باشد که $\overline{V_۱}$ در $\mathbb{R}^k$ فشرده باشد. فرض کنید V_n ساخته شده است به طوری که $V_n \cap P \neq \emptyset$. از آنجا که هر نقطهٔ P، نقطهٔ حدی P است، همسایگی $V_{n+۱}$ وجود دارد به طوری که

الف) $\overline{V_{n+1}} \subset V_n$.

ب) $x_n \notin \overline{V_{n+1}}$.

پ) $V_{n+1} \cap P \neq \emptyset$.

روند ساختن را به استقرا ادامه می‌دهیم و $K_n = \overline{V_n} \cap P$ قرار می‌دهیم. از آنجا که $\overline{V}_n$ فشرده است و $x_n \notin K_{n+1}$، پس نقطه‌ای از P در $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ قرار ندارد و چون $K_n \subseteq P$، پس $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$ که با قضیهٔ اشتراکی کانتور در تناقض است. □

۴.۶ مجموعهٔ کانتور

فرض کنید $A = [a, b]$ فاصله‌ای بسته در $\mathbb{R}$ باشد. با حذف یک سوم میانی فاصلهٔ A، آنچه که باقی می‌ماند را با $r(A)$(باقی ماندهٔ A) نمایش می‌دهیم؛ به عبارتی

$$r(A) = [a, a + \frac{b-a}{3}] \cup [b - \frac{b-a}{3}, b].$$

در حالت کلی، هرگاه $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$ اجتماعی متناهی از فواصل بستهٔ دوبه‌دو از هم جدا باشد، تعریف می‌کنیم،

$$r(A) = r(A_1) \cup ... \cup r(A_k)$$

برای $n \in \mathbb{N}$، قرار می‌دهیم $r^1(A) = r(A)$ و $r^{n+1}(A) = r(r^n(A))$. خواص زیر برای عملگر r برقرار است.

الف) $A \supseteq r(A) \supseteq r^2(A) \supseteq ...$.

ب) برای هر $n \in \mathbb{N}$، $r^n(A)$ مجموعه‌ای بسته است و در واقع اجتماع تعداد متناهی فاصلهٔ بسته می‌باشد.

پ) قرار می‌دهیم $r^{\infty}(A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} r^n(A)$ که در این صورت $r^{\infty}(A)$ مجموعه‌ای بسته است.

تعریف ۱.۴.۶. مجموعهٔ $\mathcal{C} = r^{\infty}([0, 1])$ را *مجموعهٔ کانتور می‌نامیم.*

فرض کنید $I = [0, 1]$. با استفاده از توضیحات داده شده،

$$r(I) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1] = I_0 \cup I_2$$

که I_0 یک سوم چپی و I_2 یک سوم راستی I می‌باشد. با ادامهٔ این روند

$$r^2(I) = I_{00} \cup I_{02} \cup I_{20} \cup I_{22}$$

که I_{20} یک سوم چپی I_2 و به همین ترتیب ... برای هر nتایی $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ که $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \{0, 2\}$، منظور از $I_\alpha = I_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}$، اگر $\alpha_n = 0$، یک سوم چپی $I_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1}}$ و اگر $\alpha_n = 2$ یک سوم راستی آن می‌باشد. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ را اندیس از رتبهٔ n می‌نامیم و می‌نویسیم $|\alpha| = n$. برای $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ و $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m)$ می‌گوییم $\alpha \leq \beta$ اگر $|\alpha| \leq |\beta|$ و $\alpha_i = \beta_i$، برای $i = 1, 2, ..., |\alpha|$؛ به عبارتی α یک $|\alpha|-$مولفه اول β باشد. خواص بعدی به آسانی ثابت می‌شوند.

الف) اگر $|\alpha| = n$، آنگاه I_α یکی از 2^n فاصلهٔ بستهٔ $r^n(I)$ می‌باشد و $diam I_\alpha = (\frac{1}{3})^n$.

ب) اگر $\alpha \leq \beta$، آنگاه $I_\beta \subseteq I_\alpha$.

پ) اگر دنباله $\alpha_1, \alpha_2, ...$ از اندیس ها با ویژگی های $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq ...$ و $\lim_{n\to\infty} |\alpha_n| = \infty$ مفروض باشد، آنگاه

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_{\alpha_k} = \{y\}$$

برای یک $y \in \mathcal{C}$.

ت) هرگاه $y \in \mathcal{C}$، آنگاه دنباله‌ای از اندیس‌ها مانند $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ وجود دارد به طوری که $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq ...$، $\lim_{k\to\infty} |\alpha_k| = \infty$ و $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_{\alpha_k} = \{y\}$.

ث) اگر $|\alpha| = |\beta|$ و $\alpha \neq \beta$، آنگاه $I_\alpha \cap I_\beta = \emptyset$.

قضیه ۲.۴.۶. *فرض کنید $\mathcal{C}$ مجموعهٔ کانتور باشد. آنگاه گزاره‌های زیر برقرارند.*

الف) $\mathcal{C}$ فشرده است.

ب) $\mathcal{C}^\circ = \emptyset$.

پ) $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$؛ یعنی $\mathcal{C}$ مجموعه‌ای کامل است.

ت) $\mathcal{C}=\{\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{3^i}:\alpha_i=0$ یا $\alpha_i=2\}$
ث) $\mathcal{C}$ ناشماراست.

اثبات. الف) واضح است.

ب) فرض کنید $y\in\mathcal{C}$، در این صورت دنباله‌ای از اندیس‌ها مانند $\{\alpha_k\}$ وجود دارد که $\alpha_1\leq\alpha_2\leq\ldots$، $\lim_{k\to\infty}|\alpha_k|=\infty$ و $\bigcap_{i=1}^{\infty}I_{\alpha_k}=\{y\}$. حال اگر به برهان خلف $y\in\mathcal{C}^\circ$، آنگاه یک $\delta>0$ وجود دارد به طوری که

$$(y-\delta,y+\delta)\subseteq\mathcal{C}^\circ.$$

اگر $k\in\mathbb{N}$ به طوری که $diamI_{\alpha_k}=\frac{1}{3^{|\alpha_k|}}<\delta$، آنگاه از آنجا که $y\in I_{\alpha_k}$ و $diamI_{\alpha_k}<\delta$، لذا $I_{\alpha_k}\subseteq(y-\delta,y+\delta)$. پس

$$r(I_{\alpha_k})\subseteq I_{\alpha_k}\subseteq(y-\delta,y+\delta)\subseteq\mathcal{C}$$

که تناقض است؛ چرا که $r(I_{\alpha_k})$ از حذف یک سوم میانی I_{α_k} به دست می‌آید. در نتیجه $\mathcal{C}^\circ=\emptyset$.

پ) چون $\mathcal{C}$ بسته است، پس $\mathcal{C}'\subseteq\mathcal{C}$. حال فرض کنید $y\in\mathcal{C}$ و $\delta>0$. طبق قسمت ب)، α_k وجود دارد به طوری که $y\in I_{\alpha_k}$ و $diamI_{\alpha_k}=\frac{1}{3^{|\alpha_k|}}<\delta$. پس $I_{\alpha_k}\subseteq(y-\delta,y+\delta)$ و در نتیجه برای هر $\delta>0$،

$$(y-\delta,y+\delta)\cap I_{\alpha_k}-\{y\}\neq\emptyset.$$

پس برای هر $\delta>0$،

$$(y-\delta,y+\delta)\cap\mathcal{C}-\{y\}\neq\emptyset$$

و لذا $y\in\mathcal{C}'$ که حکم را نتیجه می‌دهد. موارد پ) و ث) واضح هستند.

□

۵.۶ تمرین

-۱

-۲

فصل ۷

پیوستگی

اکثر توابع به آسانی تصویر نمی‌شوند. آن‌ها را اغلب به عنوان توابع حقیقی مقدار روی یک فاصله از خط حقیقی متصور می‌شویم. بعضی از آن‌ها طبیعتی بی پرش دارند، بدین معنا که در هنگام رسم آن‌ها نیازی به برداشتن قلم از روی صفحه نیستیم. این گراف‌ها با گراف توابعی که چندتکه‌ای هستند متمایزند. ریاضی‌دانان توابعی را که دارای گراف بی پرش هستند را با نام پیوسته می‌شناسند. رفتارها و پدیده های زیادی در پیرامون ما معرف پیوستگی هستند. به عنوان مثال حرکت ذرات – تغییرات دما – تابع فاصله و ... نمونه ای از توابع پیوسته اند.

۱.۷ پیوستگی موضعی

اجازه دهید مفهوم پیوستگی در یک نقطه برای تابع حقیقی f که روی فاصلهٔ $[۰, ۱]$ تعریف شده را یادآوری نمائیم. تابع f در نقطه $a \in [۰, ۱]$ پیوسته است اگر و تنها اگر "برای هر $\varepsilon > ۰$، $\delta > ۰$ای موجود باشد که برای هر $x \in [۰, ۱]$ که $|x - a| < \delta$ داشته باشیم $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$."

به طور معادل

برای هر فاصلهٔ باز V به مرکز $f(a)$، فاصلهٔ باز U به مرکز a وجود دارد که

$$f(U \cap [۰, ۱]) \subseteq V$$

به طور معادل

برای هر زیرمجموعهٔ باز V از $\mathbb{R}$ که شامل $f(a)$ است یک مجموعهٔ باز U از $[\circ, \text{۱}]$ شامل a هست که $f(U) \subseteq V$. ما می‌خواهیم مفهوم پیوستگی در یک نقطه را برای تابع دلخواه

$f : X \longrightarrow Y$ که (X, d) و (Y, e) فضاهایی متریک هستند، تعریف کنیم. ما به جای $[\circ, \text{۱}]$ و $\mathbb{R}$ از X و Y به ترتیب استفاده می‌کنیم. تعریف استاندارد $(\varepsilon - \delta)$ می‌تواند استفاده شود البته می‌بایست به جای $|x - a|$ و $|f(x) - f(a)|$ به ترتیب از $d(x, a)$ و $e(f(x), f(a))$ استفاده نمائیم. در صورت معادل دوم، می‌توانیم از همسایگی‌هایی به مرکز a و $f(a)$ استفاده کنیم و در سومین شکل تعریف از مجموعه‌های باز مناسب استفاده کنیم.

قضیه ۱.۱.۷. صورت های معادل پیوستگی در یک نقطه: *فرض کنید (X, d) و (Y, e) فضاهایی متریک و $z \in X$ باشد. فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ تابعی دلخواه باشد. آنگاه گزاره‌های زیر معادلند:*

الف) (ملاک $(\varepsilon - \delta)$) برای هر $\varepsilon > \circ$ ، $\delta > \circ$ ای هست که برای هر $x \in X$، که

$$(d(x, z) < \delta \Longrightarrow e(f(x), f(z)) < \varepsilon).$$

ب) (ملاک همسایگی $(\varepsilon - \delta)$) برای هر $\varepsilon > \circ$، $\delta > \circ$ای هست که

$$f(N_\delta(z)) \subseteq N_\delta(f(z)).$$

ج) (ملاک مجموعه باز) برای هر زیر مجموعه باز V از Y شامل $f(z)$ مجموعه باز U در X شامل z هست که $f(U) \subseteq V$.

د) (ملاک همگرایی) برای هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ در X که به z در X همگراست، دنبالهٔ $\{f(x_n)\}$ در Y به $f(z)$ همگراست.

اثبات. الف)، ب) و ج) به وضوح معادلند. فرض کنید ج) برقرار باشد. در این صورت اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X همگرا به $z \in X$ باشد، هرگاه V مجموعه‌ای باز در Y شامل $f(z)$ باشد در این صورت مجموعه باز U شامل z وجود دارد که

$$f(U) \subseteq V$$

چون $x_n \to z$ لذا U جز تعداد متناهی همهٔ جملات دنبالهٔ $\{f(x_n)\}$ را در بر خواهد داشت و در نتیجه V جز تعداد متناهی همهٔ جملات دنبالهٔ $\{f(x_n)\}$ را شامل می‌شود پس

$$f(x_n) \to f(z)$$

حال فرض کنید د) برقرار باشد، چون گزاره‌های الف)، ب) و ج) معادلند نشان می‌دهیم د)، الف) را نتیجه می‌دهد. لذا به برهان خلف فرض کنید $\varepsilon > ۰$ موجود باشد که برای هر $\delta > ۰$، $x \in X$ موجود باشد که $d(x,z) < \delta$ و $e(f(x), f(z)) \geq \varepsilon$. بنابراین برای هر $n \in \mathbb{N}$؛

$$A_n = \{x \in X : d(x,z) < \frac{۱}{n}, e(f(x), f(z)) \geq \varepsilon\}$$

ناتهی است. حال دنبالهٔ $\{a_n\}$ را در X اختیار کنید که $a_n \in A_n$ برای هر $n \in \mathbb{N}$. به وضوح $a_n \to z$ در حالیکه دنبالهٔ $\{f(a_n)\}$ به $f(z)$ همگرا نیست و این تناقض است. □

تعریف ۲.۱.۷. *فرض کنید X و Y فضاهایی متریک، $z \in X$ و $f : X \longrightarrow Y$ تابع باشد. می‌گوئیم f در $z \in X$ پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر مجموعه باز V در Y شامل $f(z)$ مجموعه باز U در X شامل z موجود باشد که*

$$f(U) \subseteq V.$$

روش دیگری برای بیان شرط $(\varepsilon - \delta)$ برای پیوستگی در یک نقطه وجود دارد که گاهی اوقات مفید است. ایدهٔ این روش بر پایهٔ حد بنا شده است.

تعریف ۳.۱.۷. *فرض کنید (X,d) و (Y,e) فضاهایی متریک و $E \subseteq X$ باشد. فرض کنید $f : E \longrightarrow Y$ یک تابع و $a \in E'$ باشد. می‌گوئیم تابع f در نقطهٔ a دارای حد $q \in E$ است اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon > ۰$، $\delta > ۰$ای موجود باشد که*

$$\forall x \in E \ (۰ < d(x,a) < \delta \Longrightarrow e(f(x), q) < \varepsilon).$$

اگر q در تعریف فوق وجود داشته باشد، منحصر به فرد است. در این صورت می‌نویسیم

$$\lim_{x \to a} f(x) = q$$

قضیه ۴.۱.۷. *فرض کنید (X, d) و (Y, e) فضاهایی متریک و $E \subseteq X$ باشد. فرض کنید $a \in E$ و $f : E \longrightarrow Y$ یک تابع باشد. در این صورت f در a پیوسته است اگر و تنها اگر a نقطهٔ تنها در E باشد و یا*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

اثبات. اگر $a \in E$ نقطهٔ تنهای E باشد در این صورت $U = \{a\}$ در E باز است لذا برای هر مجموعهٔ بازV در Y شامل $f(a)$ داریم

$$f(U) \subseteq V.$$

لذا f در a پیوسته است. حال فرض کنید a نقطهٔ تنهای E نباشد، پس $a \in E'$. با توجه به تعریف حکم به راحتی ثابت می‌شود. □

قضیه ۵.۱.۷. *فرض کنید (X, d) و (Y, e) فضاهایی متریک و $E \subseteq X$ باشد. فرض کنید $a \in E'$ و $f : E \longrightarrow Y$ تابعی دلخواه باشد در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

الف) f *در a دارای حد $q \in Y$ است.*

ب) *برای هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ در E که $x_n \to a$ و $x_n \neq a$ برای هر $n \in \mathbb{N}$، آنگاه $f(x_n) \to q$ در Y.*

اثبات. فرض کنید $\lim_{x \to a} f(x) = q$. لذا برای هر $\varepsilon > \circ$، $\delta > \circ$ای هست که

$$\forall x \in E \; (\circ < d(x, a) < \delta \Longrightarrow e(f(x), q) < \varepsilon).$$

اگر x_n دنباله‌ای در E باشد که $x_n \to a$ و $x_n \neq a$ برای هر $n \in \mathbb{N}$، در این صورت برای $\delta > \circ$، $N_\circ > \circ$ای هست که

$$\forall n \; (n \geq N_\circ \Longrightarrow d(x_n, a) < \delta).$$

حال اگر برای $\varepsilon > \circ$، $N = N_\circ$ اختیار کنیم آنگاه

$$\forall n \; (n \geq N_\circ \Longrightarrow e(f(x_n), q) < \varepsilon),$$

و این نتیجه می‌دهد که الف)، ب) را به دست می‌دهد.

به عکس؛ فرض کنید ب) برقرار باشد. هرگاه الف) برقرار نباشد؛ $\varepsilon_0 > 0$ موجود است که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $x_n \in E$، وجود دارد که

$$(0 < d(x_n, a) < \frac{1}{n} \wedge e(f(x_n), q) \geq \varepsilon_0)$$

لذا $\{x_n\}$ دنباله‌ای در $E - a$ خواهد بود که به a همگراست اما $f(x_n) \nrightarrow q$ و این تناقض است. پس فرض خلف باطل است. □

مثال ۶.۱.۷. *الف) تابع*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

در هیچ نقطه‌ای پیوسته نمی‌باشد.

ب) تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ -x^2 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

فقط در $x = 0$ پیوسته است.

ج) تابع

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \\ 1 & x = 0 \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

در نقاط گویا ناپیوسته و در نقاط گنگ پیوسته است. به این منظور فرض کنید $x \in \mathbb{Q}$. در این صورت دنباله‌ای از اعداد گنگ مانند $\{x_n\}$ وجود دارد که $x_n \to x$. اگر f در x پیوسته باشد می‌بایست $f(x_n) \to f(x)$ که چنین نیست. حال فرض کنید $x \notin \mathbb{Q}$. $\varepsilon > 0$ را در نظر بگیرید؛ در این صورت عدد طبیعی N چنان هست که $\frac{1}{N} < \varepsilon$. از آنجائیکه مجموعهٔ

$$A = (x - 1, x + 1) \cap \{\frac{k}{m} : k \in \mathbb{Z}, 1 \leq m \leq N - 1\}$$

متناهی است δ را به صورت زیر اختیار می‌کنیم

$$\delta = \min\{|x - r| : r \in A\},$$

آنگاه

$$\forall t\ (|t-x|<\delta \Longrightarrow |f(t)-f(x)|<\varepsilon)$$

و این حکم را کامل می‌کند.

۲.۷ پیوستگی سرتاسری

تابع f که در هر نقطه از دامنهٔ خود پیوسته است؛ تابع پیوسته نامیده می‌شود. روش‌های متفاوتی برای توصیف پیوستگی سرتاسری وجود دارد. قضیهٔ زیر این تنوع توصیف‌ها را نشان می‌دهد.

قضیه ۱.۲.۷. فرض کنید (X,d) و (Y,e) *فضاهایی متریک و* $f: X \longrightarrow Y$ *تابعی دلخواه باشد. آنگاه گزاره‌های زیر معادل هستند:*

الف) برای هر مجموعه باز V در Y، $f^{-1}(V)$ در X باز است.

ب) برای هر مجموعه بسته F در Y، $f^{-1}(F)$ در X بسته است.

ج) برای هر همسایگی باز B در Y، $f^{-1}(B)$ در X باز است.

د) f در هر نقطه از X، پیوسته است.

ه) برای هر دنبالهٔ همگرای $\{x_n\}$ در X دنبالهٔ $\{f(x_n)\}$ در Y به $f(\lim x_n)$ همگرا باشد.

اثبات. باتوجه به اینکه برای هر زیرمجموعهٔ A از Y داریم:

$$(f^{-1}(A))^c = f^{-1}(A^c)$$

الف) و ب) معادل هستند. فرض کنید ج) برقرار باشد و فرض کنید $x \in X$ دلخواه و V زیرمجموعهٔ بازی از Y شامل $f(x)$ باشد. در این صورت همسایگی باز B از Y هست که $f(x) \in B \subseteq Y$. با توجه به فرض، $f^{-1}(B)$ در X باز است و چون $x \in f^{-1}(B)$ و

$$f(f^{-1}(B)) \subseteq B \subseteq V$$

بنابراین f در x پیوسته است و لذا د) برقرار است. د) و ه) با توجه به قضیه ۱.۱.۷، معادل هستند. در نهایت، فرض کنید f در د) صدق نماید، نشان می‌دهیم الف) برقرار خواهد بود. فرض کنید V زیرمجموعه ای باز در Y باشد. فرض کنید G اجتماع همهٔ زیر مجموعه‌های باز U از X باشد که $f(U) \subseteq V$. نشان می‌دهیم $G = f^{-1}(V)$. به طورقطع، $G \subseteq f^{-1}(V)$ است، به علاوه برای هر $x \in f^{-1}(B)$ داریم $f(x) \in V$ و چون f در x پیوسته است، زیرمجموعه باز U از X هست که $x \in U$ و $f(U) \subseteq V$ آنگاه $x \in U \subseteq G$. از آنجائیکه x عضو دلخواهی از $f^{-1}(V)$ است، نتیجه می‌شود که $f^{-1}(V) \subseteq G$ و لذا $f^{-1}(V) = G$. از طرفی G اجتماع زیرمجموعه‌های باز X است و لذا G در X باز می‌باشد. نتیجه آنکه $f^{-1}(V)$ در X باز است. □

تعریف ۲.۲.۷. *فرض کنید X و Y فضاهایی متریک باشند. $f : X \longrightarrow Y$ را پیوسته گوئیم اگر و تنها اگر برای هر زیرمجموعه باز V از Y، $f^{-1}(V)$ در X باز باشد.*

مثال ۳.۲.۷. الف) *فرض کنید X و Y فضاهایی متریک و $f : X \longrightarrow Y$ تابعی دلخواه باشد. اگر X فضای متریک گسسته باشد آنگاه f پیوسته است.* چون *برای هر مجموعهٔ $A \subseteq Y$، $f^{-1}(A)$ در فضای متریک گسسته X، هم باز است و هم بسته.*

ب) *هر تابع ثابت $f : X \longrightarrow Y$، تابعی پیوسته است، چون برای هر مجموعهٔ باز V در Y؛ $f^{-1}(V) = \emptyset$ یا $f^{-1}(V) = X$ است که در X مجموعه‌هایی باز می‌باشند.*

ج) *فرض کنید (X, d) فضایی متریک و $Y \subseteq X$ باشد. در این صورت تابع همانی $i_Y : y \mapsto y : Y \longrightarrow X$ پیوسته است زیرا اگر V زیرمجموعهٔ بازی از X باشد در این صورت $i_Y^{-1}(V) = V \cap Y$ که در Y باز است.*

د) *فرض کنید $(\mathbb{R}, d)$ فضای متریک گسسته باشد. در این صورت تابع همانی $i : (\mathbb{R}, |.|) \longrightarrow (\mathbb{R}, d)$ پیوسته نیست.*

ه) *هرگاه X و Y فضای متریک و X متناهی باشد آنگاه هر تابع $f : X \longrightarrow Y$ تابعی پیوسته است.*

و) *فرض کنید (X,d) و (Y,e) فضاهایی متریک باشند. می‌گوئیم تابع $f : X \longrightarrow Y$ در شرط لیپ شوتس صدق می‌نماید اگر $M > 0$ موجود باشد که برای هر $x, y \in X$ نتیجه می‌شود*

$$e(f(x), f(y)) \leq Md(x,y)$$

به راحتی دیده می‌شود که هر تابعی که در شرط لیپ شوتس صدق نماید، پیوسته است.

ز) *فرض کنید (X,d) فضایی متریک و $a \in X$ باشد. در این صورت تابع $\delta_a : X \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $\delta_a(x) = d(a,x)$ که تابع نقطه‌ای نام دارد، تابعی پیوسته است زیرا برای هر $x, y \in X$ داریم:*

$$|\delta_a(x) - \delta_a(y)| = |d(a,x) - d(a,y)| \leq d(x,y)$$

و این نتیجه می‌دهد که تابع δ_a پیوسته است. در واقع تابع نقطه ای در شرط لیپ شوتس صدق می کند.

قضیه ۴.۲.۷. *فرض کنید (X,d) و (Y,e) فضاهایی متریک و $f : X \longrightarrow Y$ تابعی دلخواه باشد. در این صورت گزاره‌های زیر هم ارزند:*

الف) *f پیوسته است.*

ب) *برای هر $A \subseteq X$، داریم $f(\bar{A}) \subseteq \overline{(A)}$.*

ج) *برای هر $B \subseteq Y$، داریم $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\bar{B})$.*

د) *برای هر $B \subseteq Y$، داریم $f^{-1}(B^\circ) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$.*

اثبات. مورد الف)، مورد ب) را نتیجه می‌دهد: فرض کنید $x \in \bar{A}$ در این صورت دنباله‌ای چون $\{x_n\}$ از عناصر A هست که $x_n \to x$. از آنجائیکه f پیوسته است لذا

$$f(x_n) \to f(x).$$

چون $f(x_n) \in f(A)$ پس $f(x) \in \overline{f(A)}$.

مورد ب)، مورد الف) را نتیجه می‌دهد: فرض کنید $F \subseteq Y$ مجموعه‌ای بسته باشد.

$A = f^{-1}(F)$ قرار می‌دهیم. با توجه به فرض $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ و چون $f(A) = F$ بنابراین

$$F = f(A) \subseteq f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)} = \bar{F} = F$$

لذا $F = f(\overline{f^{-1}(F)})$ و در نتیجه

$$\overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(F) \subseteq \overline{f^{-1}(F)}$$

و بنابراین $f^{-1}(F)$ در X بسته است و حکم با توجه به قضیه ۱.۲.۷ اثبات می‌شود.

مورد الف)، مورد ج) را نتیجه می‌دهد: فرض کنید $B \subseteq Y$. در این صورت چون f پیوسته است لذا $f^{-1}(\bar{B})$ در X بسته است. از آنجائیکه $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(\bar{B})$ نتیجه می‌شود که

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq \overline{f^{-1}(\bar{B})} = f^{-1}(\bar{B}).$$

مورد ج)، مورد د) را نتیجه می‌دهد: برای $Y - B$ نتیجه می‌شود که

$$\overline{f^{-1}(Y - B)} \subseteq f^{-1}(\overline{Y - B})$$

بنابراین

$$\begin{aligned} f^{-1}(B^\circ) &= f^{-1}(Y - (\overline{Y - B})) \\ &= X - f^{-1}(\overline{Y - B}) \\ &\subseteq X - \overline{f^{-1}(Y - B)} \\ &= X - (\overline{X - f^{-1}(B)}) \\ &= (f^{-1}(B))^\circ. \end{aligned}$$

مورد د)، مورد الف) را نتیجه می‌دهد: برای هر مجموعهٔ باز $U \subseteq Y$ داریم $U = U^\circ$ در نتیجه $f^{-1}(U) \subseteq (f^{-1}(U))^\circ$ بنابراین داریم $f^{-1}(U) = (f^{-1}(U))^\circ$، پس $f^{-1}(U)$ در X باز است. □

مثال ۵.۲.۷. *الف) فرض کنید (X, d) فضایی متریک باشد فضای $X \times X$ را به عنوان فضای متریک حاصلضربی با متر*

$$D((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2)$$

برای هر (x_1, x_2) و (y_1, y_2) در $X \times X$ در نظر بگیرید. در این صورت تابع متر

$$d : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$$

تابعی پیوسته است زیرا برای هر $(a,b),(c,d) \in X \times X$ داریم
$$|d((a,b)) - d((c,d))| \leq d(a,c) + d(b,d).$$

حال اگر $\{(x_n,y_n)\}$ دنباله‌ای در $X \times X$ باشد که تحت متر حاصلضربی به (a,b) همگراست؛ در این صورت $x_n \to a$ و $y_n \to b$ تحت متر d. در نتیجه برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:
$$|d((a,b)) - d((x_n,y_n))| \leq d(a,x_n) + d(b,y_n)$$

و لذا d تابعی پیوسته است.

ب) تابع نرم $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$، باتوجه به اینکه در رابطهٔ $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$ صدق می‌نماید، بنابراین در شرط لیپ شوتس صدق می کند و لذا تابعی پیوسته است.

ج) فرض کنید (X,d) فضایی متریک و A زیرمجموعه‌ای ناتهی از X باشد. در این صورت تابع $f_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ
$$f_A(x) = d(x,A) = \inf\{d(x,y) : y \in A\}$$

در نظر می‌گیریم. به راحتی دیده می‌شود که برای هر $a,b \in X$ داریم:
$$|f_A(a) - f_A(b)| = |d(a,A) - d(b,A)| \leq d(a,b)$$

لذا f_A در شرط لیپ شوتس صدق می‌نماید و بنابراین پیوسته است.

قضیه ۶.۲.۷. فرض کنید (X,d) و (Y,e) فضاهایی متریک و $f : X \longrightarrow Y$ تابعی پیوسته باشد. فرض کنید Z یک ابر فضای متریک $(f(X),e)$ باشد. آنگاه $f : X \longrightarrow Z$ پیوسته است.

اثبات. فرض کنید U زیرمجموعهٔ بازی از Z باشد. آنگاه $U \cap f(X)$ در $(f(X),e)$ باز است و بنابراین به ازای یک مجموعهٔ باز W در Y، داریم $U \cap f(X) = W \cap f(X)$. چون $f : X \longrightarrow Y$ پیوسته است بنابراین
$$f^{-1}(W) = f^{-1}(W \cap f(X)) = f^{-1}(U \cap f(X)) = f^{-1}(U)$$

در X باز خواهد بود. پس $f^{-1}(U)$ در X باز و لذا $f : X \longrightarrow Z$ پیوسته است. □

قضیه ۷.۲.۷. *فرض کنید X، Y و Z فضاهایی متریک و $f : X \longrightarrow Y$ و $g : Y \longrightarrow Z$ توابعی پیوسته باشند. آنگاه $g \circ f$ پیوسته است.*

اثبات. فرض کنید W زیرمجموعهٔ بازی از Z باشد در این صورت $g^{-1}(W)$ در Y باز است و بنابراین $f^{-1}(g^{-1}(W))$ در X باز می‌باشد. حال با توجه به

$$(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$$

حکم نتیجه می‌شود. □

فرض کنید (X, d) فضایی متریک و $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ تابعی دلخواه باشد. در این صورت توابع $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$، $i = 1, \cdots, n$، موجودند که برای هر $x \in X$ داریم:

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))$$

f_iها را توابع مؤلفه‌ای f و f را تابع برداری می‌نامیم. در واقع اگر $\phi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $\phi_i(x_1, \cdots, x_n) = x_i$ برای $i = 1, \cdots, n$ تابع تصویر باشد. به وضوح برای تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$، $\phi_i \circ f$ برای $i = 1, \cdots, n$ توابع مولفه ای تابع f هستند.

قضیه ۸.۲.۷. *الف) فرض کنید $E \subseteq X$ و $x \in E'$ و $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ تابعی برداری باشد. f در $x \in E'$ دارای حد $q = (q_1, \cdots, q_n)$ است اگر و تنها اگر توابع مؤلفه‌ای $f_1, \cdots, f_n$ تابع f در x دارای حد باشند. در این صورت*

$$\lim_{t \to x} f(t) = (\lim_{t \to x} f_1(t), \cdots, \lim_{t \to x} f_n(t)) = (q_1, \cdots, q_n)$$

ب) تابع برداری $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ تابعی پیوسته است اگر و تنها اگر توابع مؤلفه‌ای آن پیوسته باشند.

اثبات. فرض کنید برای هر $x \in X$؛ داشته باشیم:

$$f(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x))$$

در این صورت برای هر $i = 1, 2, \cdots, n$ و هر $x, y \in X$ داریم:

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq |f(x) - f(y)| \leq \sum_{k=1}^{n} |f_k(x) - f_k(y)|$$

حال الف) و ب) به راحتی اثبات می‌شوند. □

به راحتی می‌توان استدلال نمود که اگر $f,g : X \longrightarrow \mathbb{C}$ توابعی پیوسته باشند آنگاه $f \pm g$، fg توابعی پیوسته‌اند و $\frac{f}{g}$ در نقاطی که $g(x) \neq 0$، پیوسته خواهد بود. همچنین می‌توان نشان داد که اگر $f,g : X \longrightarrow \mathbb{R}^k$ توابعی پیوسته باشند آنگاه $f \pm g$، $f \circ g$ توابعی پیوسته می‌باشند.($f \circ g$ به معنای ضرب داخلی دو تابع برداری است.)

مثال ۹.۲.۷. *تابع $\pi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $\pi_i((x_1,\cdots,x_n)) = x_i$ در نظر بگیرید. به وضوح π_i یک تبدیل خطی است که n-تایی $(x_1,\cdots,x_n)$ را به مؤلفهٔ iام تصویر می‌نماید. این تابع را تابع تصویر یا مختصی می‌نامیم. به راحتی دیده می‌شود که برای هر $x,y \in \mathbb{R}^n$،*

$$|\pi_i(x) - \pi_i(y)| \leq |x-y|$$

لذا تابع تصویرها پیوسته‌اند. بنابراین برای $x = (x_1,\cdots,x_n)$

$$p(x) = \sum c_{n_1\cdots n_k} x_1^{n_1}\cdots x_k^{n_k}$$

که جمع متناهی از $x_1^{n_1}\cdots x_k^{n_k}$ برای $n_1,\cdots,n_k \in \mathbb{N}$ می‌باشد تابعی پیوسته است.

۳.۷ نگاشت‌های باز و بسته

مجموعه‌های باز ملاکی برای بیان پیوستگی تابع هستند، بدین معنا که تصویر وارون هر مجموعه باز چنانچه خود یک مجموعهٔ باز باشد، پیوستگی تابع نتیجه خواهد شد. این موضوع برای مجموعه‌های بسته نیز برقرار است. نگاشت‌هایی که برخلاف مفهوم پیوستگی عمل می‌کنند، نگاشت باز و یا بسته نامیده می‌شوند.

تعریف ۱.۳.۷. *فرض کنید (X,d) و (Y,d) فضاهایی متریک باشند. تابع $f : X \longrightarrow Y$ را نگاشتی باز می‌نامیم اگر برای هر مجموعهٔ باز U از X، $f(U)$ در Y باز باشد و آن را نگاشتی بسته گوییم اگر تصویر هر زیرمجموعه بسته از X تحت آن در Y بسته باشد.*

سؤالات زیر در خصوص ارتباط بین توابع پیوسته، توابع باز و توابع بسته قابل طرح می باشند.

- آیا هر تابع پیوسته، نگاشتی باز است؟
- آیا هر تابع پیوسته، نگاشتی بسته است؟
- آیا هر تابع باز یا بسته، پیوسته است؟
- آیا هر نگاشت باز، بسته است؟
- آیا هر نگاشت بسته، باز است؟

برای تمام سؤالات فوق، تنها یک پاسخ وجود دارد و آن "خیر" است.

مثال ۲.۳.۷. *الف) چند جمله‌ای $x \mapsto x^{۳} - x^{۲}$ را روی $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. این تابع فاصلهٔ باز $(۰, ۱)$ را به روی $[\frac{-۴}{۲۷}, ۰)$ می‌نگارد، که باز نیست.*

ب) تابع $\frac{۱}{x} : \mathbb{R} - \{۰\} \longrightarrow \mathbb{R}$ ، $x \mapsto$ باز و پیوسته است؛ اما بسته نیست.

ج) تابع

$$g(x) = \begin{cases} ۱ & x \in \mathbb{Q} \\ ۰ & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

، $g : \mathbb{R} \longrightarrow$ باز و بسته است اما پیوسته نیست. البته توجه داشته باشید که $\{۰, ۱\}$ در نظر گرفته شود. حال اگر تابع فوق را به صورت $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ در نظر بگیریم، g نه باز و نه پیوسته است، اما بسته است.

قضیه ۳.۳.۷. *فرض کنید $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی اکیدا یکنوا و پیوسته باشد انگاه f تابعی باز است.*

اثبات. به عنوان تمرین به عهده خواننده گرامی. □

۴.۷ قضیه توسیع

در مسایلی که تاکنون با آن ها روبرو شدیم، از کوچک کردن دامنه تابع استفاده برده ایم(تحدید تابع). به راحتی دیده می شود که تحدید تابع، پیوستگی آن را با مشکل مواجه نمی کند. اما یکی از سوالاتی که با آن در ریاضی برخورد می کنیم این است که:

چگونه می توان دامنه تابعی پیوسته را بدون آنکه پیوستگی آن خدشه دار شود، گسترش داد؟
تابع $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ را با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{1}{x}$ در نظر بگیرید. تابعی پیوسته مانند $g:[0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ وجود ندارد که $g(x)=f(x)$ برای هر $x\in(0,+\infty)$.
به عبارتی f دارای توسیع پیوسته نیست.

تعریف ۱.۴.۷. *فرض کنید X و Y مجموعه‌هایی دلخواه و A زیرمجموعه‌ای از X باشد. فرض کنید $f:A\longrightarrow Y$ تابعی دلخواه و $g:X\longrightarrow Y$ تابعی دیگر باشد. g را توسیع f گوئیم اگر برای هر $x\in A$، $g(x)=f(x)$ باشد و f را تحدید g به A می‌نامیم.*

اگر X و Y فضاهایی متریک باشند و $A\subseteq X$. در این صورت چنانچه $f:A\longrightarrow X$ پیوسته باشد، می‌توانیم در خصوص وجود توسیع پیوسته f جویا شویم. مسئلهٔ وجود توسیع پیوسته از موضوعات جالب در ریاضی است.

قضیه ۲.۴.۷. *فرض کنید (X,d) و (Y,e) فضاهایی متریک و $f,g:X\longrightarrow Y$ توابعی پیوسته باشند. آنگاه $\{x\in X: f(x)=g(x)\}$ در X بسته است.*

اثبات. فرض کنید $A=\{x\in X: f(x)=g(x)\}$ و $a\in\bar{A}$ باشد. در این صورت دنبالهٔ $\{x_n\}$ در A هست که $x_n\to a$ و چون f و g پیوسته‌اند بنابراین

$$f(a)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}g(x_n)=g(a)$$

لذا $a\in A$ و حکم نتیجه می‌شود. □

نتیجه ۳.۴.۷. *فرض کنید (X,d) و (Y,e) فضاهایی متریک و $f,g:X\longrightarrow Y$ توابعی پیوسته باشند. اگر $\{x\in X: f(x)=g(x)\}$ در X چگال باشد، آنگاه $f=g$ روی X.*

اثبات. بدیهی است. □

۵.۷ تمرین

۱. فرض کنید C مجموعه کانتور باشد. در این صورت هر نقطهٔ $x \in C$ دارای توصیف یکتایی به فرم $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$ که $a_k \in \{0, 2\}$ است. حال تابع

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^{k+1}}$$

را برای $x \in C$ تعریف کنید. آنگاه

الف) Φ تابعی صعودی، پوشا و پیوسته از C به $[0, 1]$ می‌باشد.

ب) Φ دارای توسیع پیوسته $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ است که روی هر فاصله در $[0, 1] - C$ ثابت است. تابع f را تابع کانتور می‌نامند.

۲. فرض کنید X فضایی متریک باشد. تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را در $x_0 \in X$ از پایین پیوسته گوئیم اگر برای هر دنباله $\{x_n\}$ در X که $x_n \to x_0$ داشته باشیم $f(x_0) \leq \lim_{n\to\infty} \inf f(x_n)$، و از بالا پیوسته در x_0 نامیده می‌شود اگر برای هر دنباله $\{x_n\}$ در X که $x_n \to x_0$ داشته باشیم $\lim_{n\to\infty} \sup f(x_n) \leq f(x_0)$.

الف) نشان دهید گزاره‌های زیر معادلند:

(i) f از پایین پیوسته است.

(ii) برای هر $a \in X$ و هر $\varepsilon > 0$، مجموعهٔ باز U شامل a وجود دارد که $f(x) > f(a) - \varepsilon$ برای هر $x \in U$.

(iii) برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $f^{-1}((\alpha, \infty))$ باز است.

(iv) برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $f^{-1}((-\infty, \alpha])$ بسته است.

ب) f پیوسته است اگر و تنها اگر f از بالا و از پایین پیوسته باشد.

ج) فرض کنید χ_A تابع مشخصهٔ $A \subseteq X$ باشد. آنگاه A باز است اگر و تنها اگر χ_A از پایین پیوسته باشد.

د) فرض کنید X فشرده و $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ از پایین پیوسته باشد. آنگاه f مینیمم خود را اختیار می‌کند. یعنی $x \in X$ هست که برای هر $y \in X$، $f(x) \leq f(y)$. (راهنمائی: به دنبالهٔ $\{x_n\}$ که $f(x_n) \to \inf f(X)$ توجه نمایید.)

۳. توابع $f, g : [\circ, \text{۱}] \longrightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه‌های زیر در نظر بگیرید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{۱}}{n} & x \in \mathbb{Q}, x = \frac{m}{n}, (m,n) = \text{۱} \\ \circ & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

و

$$g(x) = \begin{cases} (-\text{۱})^n \frac{n}{n+\text{۱}} & x \in \mathbb{Q}, x = \frac{m}{n}, (m,n) = \text{۱} \\ \circ & x = y \end{cases}$$

آنگاه اثبات یا رد نمایید.

(a) f در نقاط گنگ پیوسته و در نقاط گویا ناپیوسته است.

(b) g از بالا پیوسته است.

(c) g از پایین پیوسته است.

(d) f از بالا پیوسته است.

(e) f از پایین پیوسته است.

فصل ۸

پیوستگی و پیوستگی یکنواخت

پیوستگی تابع که در فصل قبل مورد بررسی قرار گرفت، خصوصیتی موضعی برای تابع محسوب می شود. به عبارتی تعریف پیوستگی به نقطه ای که در آن پیوستگی مورد بررسی قرار می گیرد وابسته است. به بیانی دقیق تر، در تعریف پیوستگی $\delta > 0$ تابعی وابسته به نقطه پیوستگی و $\epsilon > 0$ است.

۱.۸ پیوستگی یکنواخت

فرض کنید (X, d) و (Y, e) فضاهایی متریک و $f : X \longrightarrow Y$ تابعی دلخواه باشد. فرض کنید $S \subseteq X$. آنگاه f را پیوسته یکنواخت رویS گوئیم اگر برای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ای موجود باشد که

$$\forall x, y \in S \; (d(x, y) < \delta \Longrightarrow e(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

قضیه ۱.۱.۸. *فرض کنید (X, d) و (Y, e) فضاهایی متریک و S زیرفضایی از X و $f : X \longrightarrow Y$ تابعی دلخواه باشد.*

الف) اگر f روی S پیوسته یکنواخت باشد آنگاه $f|_S$ پیوسته است.

ب) اگر f روی X پیوسته یکنواخت باشد آنگاه $f|_S$ پیوسته یکنواخت است.

مثال ۲.۱.۸. *الف) همهٔ چندجمله‌ای‌های با درجهٔ بزرگ‌تر از یک، پیوسته یکنواخت نیستند.*

ب) تابع e^x روی $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت نیست.

قضیه ۳.۱.۸. *فرض کنید (X,d) و (Y,e) فضاهایی متریک باشند. در این صورت $f: X \longrightarrow Y$ پیوسته یکنواخت است اگر و تنها اگر برای هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در X که $d(x_n,y_n) \to 0$ نتیجه شود $e(f(x_n),f(y_n)) \to 0$.*

اثبات. فرض کنید $f: X \longrightarrow Y$ پیوسته یکنواخت باشد. لذا برای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ ای هست که

$$\forall x,y \in X\ (d(x,y) < \delta \Longrightarrow e(f(x),f(y)) < \varepsilon).$$

فرض کنید $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله‌هایی دلخواه در X باشند که $d(x_n,y_n) \to 0$ در این صورت برای $\delta > 0$، $N_0 > 0$ای هست که

$$\forall n\ (n > N \Longrightarrow d(x_n,y_n) < \delta).$$

حال اگر برای $\varepsilon > 0$، $N = N_0$ اختیار کنیم

$$\forall n\ (n > N \Longrightarrow d(x_n,y_n) < \delta \Longrightarrow e(f(x_n),f(y_n)) < \varepsilon)$$

و لذا $e(f(x_n),f(y_n)) \to 0$.

به عکس؛ فرض کنید $f: X \longrightarrow Y$ پیوسته یکنواخت نباشد. لذا $\varepsilon_0 > 0$ای هست که برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$\exists x_n, y_n \in X (d(x_n,y_n) < \frac{1}{n} \wedge e(f(x_n),f(y_n)) \geq \varepsilon_0).$$

بنابراین برای دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در X داریم $d(x_n,y_n) \to 0$. پس دنباله $\{e(f(x_n),f(y_n))\}$ به صفر همگراست و با توجه به مفروضات قضیه، در حالیکه برای هر $n \in \mathbb{N}$، $e(f(x_n),f(y_n)) \geq \varepsilon_0$ و این تناقض است. $\square$

مثال ۴.۱.۸. *تابع $f(x) = x^2$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت نیست. به این منظور برای هر $n \in \mathbb{N}$، $x_n = n$، $y_n = n + \frac{1}{n}$ اختیار نمایید. در این صورت $|x_n - y_n| \to 0$ در حالیکه*

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |n^2 - (n + \frac{1}{n})^2| \to 2 \neq 0$$

قضیه ۵.۱.۸. *فرض کنید (X,d) و (Y,e) فضاهایی متریک و (X,d) فضای متریک تام باشد. فرض کنید $f: X \longrightarrow Y$ پیوسته و $S \subseteq X$ زیرمجموعه‌ای کلاً کراندار باشد. آنگاه f روی S پیوسته یکنواخت است.*

اثبات. به برهان خلف فرض کنید دنباله های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در X موجود باشندکه

$$d(x_n, y_n) \to \circ$$

اما دنباله $\{e(f(x_n), f(y_n))\}$ به صفر همگرا نباشد. لذا $\epsilon_\circ > \circ$ وجود دارد که به ازای یک زیردنباله ای چون $\{n_k\}$ از $\{n\}$ داریم $e(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq \epsilon$. چون $\overline{S}$ فشرده است لذا زیردنباله ای چون $\{(x_{m_k}, y_{m_k})\}$ از $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}$ هست که به $(x,y) \in \overline{S} \times \overline{S}$ همگراست، (قضیه ۱۴.۲.۶). در نتیجه $\{d(x_{m_k}, y_{m_k})\}$ همگرا به صفر است پس

$$d(x,y) \leq d(x, x_{m_k}) + d(x_{m_k}, y_{m_k}) + d(y_{m_k}, y)$$

نتیجه می دهد که $x = y$. بنابراین $e(f(x_{m_k}), f(y_{m_k})) \to \circ$ در حالیکه

$$e(f(x_{m_k}), f(y_{m_k})) \geq \epsilon,$$

و این تناقض است. □

قضیه ۶.۱.۸. *فرض کنید (X,d) و (Y,e) فضاهایی متریک و $f : X \longrightarrow Y$ پیوسته یکنواخت باشد آنگاه*

الف) f هر دنبالهٔ کشی در X را به یک دنبالهٔ کشی در Y می‌نگارد.

ب) f هر زیرمجموعهٔ کلاً کراندار از X را به روی یک زیر مجموعهٔ کلاً کراندار از Y می‌نگارد.

اثبات. الف) فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای کشی در X باشد. چون f پیوسته یکنواخت است لذا برای هر $\varepsilon > \circ$، $\delta > \circ$ ای هست که

$$\forall x,y \in X \ (d(x,y) < \delta \Longrightarrow e(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

چون $\{x_n\}$ دنباله‌ای کشی در X است لذا برای هر $\delta > \circ$، $N_\circ > \circ$ای هست که

$$\forall n,m \ (n,m \geq N_\circ \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \delta).$$

حال اگر برای $\varepsilon > \circ$، $N = N_\circ$ اختیار کنیم

$$\forall n, m\ (n, m \geq N \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \delta \Longrightarrow e(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon).$$

لذا $\{f(x_n)\}$ دنباله‌ای کشی در Y است.

ب) فرض کنید S زیرمجموعه‌ای کلاً کراندار از X باشد. فرض کنید $\{y_n\}$ دنباله‌ای دلخواه در $f(S)$ باشد. برای هر $n \in \mathbb{N}$، $x_n \in S \cap f^{-۱}(\{y_n\})$ اختیار می‌کنیم. چون S کلاً کراندار است بنابراین دنبالهٔ $\{x_n\}$ در S دارای زیردنباله‌ای کشی است مانند $\{x_{n_k}\}$، لذا $\{f(x_{n_k})\}$ دنباله‌ای کشی در $f(S)$ است. در نتیجه هر دنباله در $f(S)$ دارای زیر دنباله‌ای کشی در $f(S)$ است پس $f(S)$ کلاً کراندار است.

□

مثال ۷.۱.۸. *الف) تابع* $f : (\circ, ۱] \longrightarrow [۱, +\infty)$ *را با ضابطهٔ* $f(x) = \dfrac{۱}{x}$ در نظر بگیرید. f پیوسته یکنواخت نیست زیرا دنبالهٔ کشی $\{\dfrac{۱}{n}\}$ در $(\circ, ۱]$ تحت f به دنبالهٔ $\{f(\frac{۱}{n}) = n\}$ *تصویر می‌شود که به وضوح دنباله‌ای کشی نیست.*

ب) *تابع* $\tan x : (\frac{-\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *پیوسته یکنواخت نیست. اما* $\tan^{-۱} x$ *پیوسته یکنواخت است.*

زیرمجموعه‌های مجموعهٔ کانتور، کلاً کراندار هستند و بنابراین هر تصویر آنها تحت توابع پیوسته یکنواخت، کلاً کراندار خواهد بود. اما چه کسی می‌تواند حدس بزند که این مطلب فضاهای متریک کلاً کراندار را مشخص نماید!

قضیه ۸.۱.۸. *فرض کنید* (X, d) *فضایی متریک باشد. آنگاه* X *کلاً کراندار است اگر و تنها اگر تابع پیوسته یکنواخت دوسویی از زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ کانتور* C *به روی* X *وجود داشته باشد.*

اثبات. فرض کنید X کلاً کراندار باشد. برای هر $m \in \mathbb{N}$، گردایه متناهی B_m از گوی‌های باز به شعاع $\dfrac{۱}{m}$ را که X را می‌پوشاند اختیار کنید. در این صورت اعضاء B_mها را به صورت $\{U_n\}$ شماره‌گذاری می‌نمائیم که اعضاء B_m قبل از $B_{m+۱}$ قرار بگیرند. در این صورت $\operatorname{diam} U_n \to \circ$. برای هر $x \in X$، فرض کنید

$\alpha_n(x) = ۲$ اگر $x \in U_n$ در غیر این صورت $\alpha_n(x) = ۰$. قرار می‌دهیم $g(x) =$ $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\alpha_n(x)}{۳^n}$. آنگاه $g(x) \in C$، چون تعداد نامتناهی n هست که $\alpha_n(x) = ۲$. از طرفی g یک‌به‌یک است. زیرا برای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$ داریم $\alpha_n(y) = ۰$ و $\alpha_n(x) = ۲$ هرگاه $\operatorname{diam} U_n < d(x,y)$. فرض کنید $\phi = g^{-۱}$. آنگاه ϕ نگاشتی دوسویی از زیرمجموعهٔ $g(X)$ از C به روی X است. نشان می‌دهیم ϕ پیوسته یکنواخت است. فرض کنید $\varepsilon > ۰$ اختیار شده باشد. برای یک $p \in \mathbb{N}$ که $p > \frac{۲}{\varepsilon}$، آنگاه قطر اعضاء B_p از ε کمتر است. فرض کنید $k \in \mathbb{N}$ بزرگترین اندیسی باشد که در B_p واقع است و در $\{U_n\}$ نمود پیدا می‌نماید. فرض کنید $a, b \in g(X)$ اعضایی دلخواه باشند که $|a - b| < \frac{۱}{۳^k}$. فرض کنید $\phi(a) = x$ و $\phi(b) = y$. آنگاه $g(x) = a$ و $g(y) = b$، لذا $\alpha_n(x) = \alpha_n(y)$ برای همهٔ $n \in \{۱, \cdots, k\}$، به عبارت دیگر برای هر $n \in \{۱, \cdots, k\}$، $x \in U_n$ اگر و تنها اگر $y \in U_n$. از آنجائیکه B_p، X را می‌پوشاند و همهٔ اعضاء B_p در اولین k جملهٔ $\{U_n\}$ ظاهر می‌شود. بنابراین $q \in \{۱, \cdots, k\}$ وجود دارد که $y \in U_q \in B_p$، و همچنین $x \in U_q$. آنگاه

$$d(\phi(a), \phi(b)) = d(x,y) \leq \operatorname{diam} U_q \leq \frac{۲}{p} < \varepsilon.$$

از آنجائیکه $\varepsilon > ۰$ دلخواه اختیار شده است، ϕ پیوسته یکنواخت است. □

۲.۸ پیوستگی و فشردگی

رفتار توابع پیوسته روی مجموعه‌های فشرده از موضوعاتی است که پرداختن به آنها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. خواهیم دید که توابع پیوسته روی مجموعه‌های پیوسته به طور اتوماتیک پیوسته یکنواخت می‌باشند و نیز تصویر پیوستهٔ مجموعه‌های فشرده، فشرده‌اند. ما نشان می‌دهیم که هر تابع پیوسته یک‌به‌یک روی مجموعه‌های فشرده دارای وارون پیوسته می‌باشند.

قضیه ۱.۲.۸. *فرض کنید (X, d) و (Y, e) فضاهایی متریک و (X, d) فشرده باشد. فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ تابعی پیوسته باشد. آنگاه*

الف) $f(X)$ فشرده است.

ب) f پیوسته یکنواخت است.

اثبات. الف) فرض کنید $\mathcal{V}$ یک پوشش باز برای $f(X)$ باشد. آنگاه $\{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{V}\}$ یک پوشش باز برای X است و چون X فشرده است لذا زیر مجموعهٔ متناهی A از $\mathcal{V}$ هست که $\{f^{-1}(U) : U \in A\}$، X را می‌پوشاند. در نتیجه A از $f(X)$ را می‌پوشاند. بنابراین $f(X)$ فشرده است.

ب) با توجه به قضیه ۴.۱.۸ حکم واضح است.

□

با توجه به قضیهٔ قبل به راحتی دیده می‌شود که اگر $f : X \to Y$ پیوسته و X فشرده باشد آنگاه $f(X)$ کراندار است.

قضیه ۲.۲.۸. قضیه اکسترمم مطلق: *فرض کنید X فضای متریک فشرده و $f : X \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد. آنگاه $p, q \in X$ موجودند که برای هر $x \in X$؛*

$$\inf f(X) = f(q) \leq f(x) \leq f(p) = \sup f(X)$$

اثبات. $f(X)$ در $\mathbb{R}$ فشرده است و لذا $f(X)$ در $\mathbb{R}$ بسته و کراندار است. بنابراین $M = \sup f(X)$ و $m = \inf f(X)$ در $\mathbb{R}$ موجودند و چون $f(X)$ بسته است لذا m, M به $f(X)$ تعلق دارند. پس $p, q \in X$ موجودند که $M = f(p)$ و $m = f(p)$. □

قضیه اکسترمم مطلق کاربردهای فراوانی دارد. مثال‌های زیر به بعضی از این کاربردها اشاره می‌نماید.

مثال ۳.۲.۸. *الف) برای $x = (x_1, \cdots, x_n)$ در $\mathbb{R}^n$؛ $\|(x_1, \cdots, x_n)\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$ یک نرم روی $\mathbb{R}^n$ می‌باشد. هرگاه $\| \cdot \|$ یک نرم دلخواه روی $\mathbb{R}^n$ باشد آنگاه عدد ثابت $c > 0$ موجود است که برای هر $x \in \mathbb{R}^n$؛*

$$c^{-1}\|x\|_1 \leq \|x\| \leq c\|x\|_1.$$

فرض کنید $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 = 1\}$. تابع $\| \cdot \|_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته و S فشرده است. حال تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x) = \|x\|$ در نظر

می‌گیریم. f پیوسته است. زیرا برای هر $x = (x_۱, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ با در نظر گرفتن پایه استاندارد $\{e_۱, \cdots, e_n\}$ در $\mathbb{R}^n$ خواهیم داشت:

$$\|x\| = \|\sum_{i=۱}^{n} x_i e_i\| \leq \sum_{i=۱}^{n} |x_i|\|e_i\| \leq c_\circ \|x\|_۱$$

که $c_\circ = \sum_{k=۱}^{n} \|e_k\|$. در نتیجه

$$|f(x) - f(y)| = |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq c_\circ \|x - y\|_۱$$

بنابراین f در شرط لیپ‌شوتس صدق می‌نماید و در نتیجه f پیوسته است. به وضوح برای هر $x \in S$؛ $f(x) > \circ$ و لذا $m = \inf f(S) > \circ$. در نتیجه

$$\circ < m = \inf f(S) \leq f(x) = \|x\|$$

برای هر $x \in S$. حال فرض کنید $x \in \mathbb{R}^n - \{\circ\}$. آنگاه $\frac{x}{\|x\|_۱} \in S$ و بنابراین $m \leq \|\frac{x}{\|x\|_۱}\|$. پس $m\|x\|_۱ \leq \|x\|$ برای هر $x \in \mathbb{R}^n$. حال $c = \max\{c_\circ, \frac{۱}{m}\}$ اختیار نمایید در این صورت حکم نتیجه می‌شود.
این مثال نشان می دهد که، تمامی نرم ها روی فضای $\mathbb{R}^n$ معادل هستند. به این معنا که برای دو نرم $\|\cdot\|_a$ و $\|\cdot\|_b$ روی $\mathbb{R}^n$، مجموعه A با توجه به $\|\cdot\|_a$ باز است اگر وتنها اگر A نسبت به $\|\cdot\|_b$ باز باشد.

ب) فرض کنید A و B زیرمجموعه‌هایی از هم جدا در فضای متریک X باشند که A فشرده و B بسته باشد آنگاه

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\} > \circ$$

به این منظور تابع $f_B : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ

$$f_B(x) = d(x, B) = \inf\{d(x, b) : b \in B\}$$

در نظر بگیرید. f_B تابعی پیوسته است. بنابراین f_B مینیمم مطلق خود را روی A اختیار می کند. فرض کنید

$$m = \inf\{d(x, B) : x \in A\} = \inf\{f_B(x) : x \in A\}$$

لذا $p \in A$ هست که $m = f_B(p)$. اگر $f_B(p) = \circ$ در این صورت

$$f_B(p) = \inf\{d(p, x) : x \in B\} = \circ$$

ولذا $p \in \bar{B} = B$. در نتیجه $p \in A \cap B$ و این تناقض است.

توجه ۴.۲.۸. *در مثال فوق با حذف فشردگی، حکم لزوماً برقرار نخواهد بود. فرض کنید $A=\mathbb{N}$ و $B=\{n+\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}\}$. در این صورت A و B بسته و از هم جدا هستند و $d(A,B)=0$.*

قضیه ۵.۲.۸. قضیه تابع وارون: *فرض کنید X و Y فضاهایی متریک و X فشرده باشد. هرگاه $f:X\longrightarrow Y$ دوسویی و پیوسته باشد، آنگاه $f^{-1}:Y\longrightarrow X$ پیوسته است.*

اثبات. فرض کنید $S\subseteq Y$ بسته باشد. آنگاه S فشرده است و در نتیجه $f(S)$ در Y فشرده است. از طرفی $f(S)=(f^{-1})^{-1}(S)$. چون S زیرمجموعهٔ بستهٔ دلخواهی از X بود، لذا f^{-1} پیوسته است. □

در قضیهٔ تابع وارون، شرط پیوستگی X لازم است. به این منظور تابع

$$f:[0,2\pi)\longrightarrow\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$$

را با ضابطهٔ $f(t)=(\cos t,\sin t)$ در نظر بگیرید. به وضوح f پیوسته است. از طرفی f دوسویی است و بنابراین $f^{-1}:\mathbb{T}\longrightarrow[0,2\pi)$ با معناست. اما f^{-1} پیوسته نیست. به این منظور نشان می‌دهیم f^{-1} در نقطه $(1,0)$ پیوسته نیست. دنباله‌های

$$x_n=(\cos(\frac{1}{n}),\sin(\frac{1}{n}))$$

و

$$y_n=(\cos(2\pi-\frac{1}{n}),\sin(2\pi-\frac{1}{n}))$$

را در $\mathbb{T}$ در نظر می‌گیریم. به وضوح $x_n\to(1,0)$ و $y_n\to(1,0)$. اما $f^{-1}(x_n)\to 0$ و $f^{-1}(y_n)\to 2\pi$ و این نتیجه می‌دهد که f^{-1} پیوسته نیست.

۳.۸ توابع لیپ‌شوتس

فرض کنید (X,d) و (Y,e) فضاهایی متریک و $f:X\longrightarrow Y$ تابعی دلخواه باشد. هرگاه $K>0$ای موجود باشد که برای هر $a,b\in X$ داشته باشیم:

$$e(f(x),f(y))\le Kd(x,y)$$

آنگاه می‌گوئیم f یک تابع لیپ‌شوتس روی X است و K را ثابت لیپ‌شوتس تابع f می‌نامیم.

قضیه ۸.۳.۱. *فرض کنید (X,d) و (Y,e) فضاهایی متریک و $f : X \longrightarrow Y$ تابع لیپ‌شوتس با ثابت K باشد. آنگاه f پیوسته یکنواخت است. هرگاه $S \subseteq X$ زیرمجموعه‌ای کراندار باشد آنگاه $f(S)$ در Y کراندار است.*

اثبات. به عهده خواننده. □

قضیه ۸.۳.۲. *الف) ترکیب توابع پیوسته یکنواخت، پیوسته یکنواخت است.*

ب) هرگاه f تابع لیپ‌شوتس با ثابت K و g تابع لیپ‌شوتس با ثابت L باشد آنگاه چنانچه ترکیب آنها با معنا باشد، تابعی لیپ‌شوتس با ثابت KL است.

قضیه ۸.۳.۳. *فرض کنید X فضایی متریک و S زیرمجموعه چگال شمارا یی از X باشد. هرگاه $f : S \to \mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت باشد آنگاه f دارای توسیعی یکتا از X به $\mathbb{R}$ است.*

اثبات. اثبات به عنوان تمرین. □

۸.۴ انقباض

تعریف ۸.۴.۱. *تابع $f : X \longrightarrow X$ را یک انقباض گوئیم اگر f یک تابع لیپ شوتس با ثابت $K \in [0,1)$ باشد.*

قضیه ۸.۴.۲. *فرض کنید (X,d) فضای متریک تام و f یک تابع انقباض روی X باشد. آنگاه $x_0 \in X$ هست که $f(x_0) = x_0$.*

اثبات. چون f یک انقباض است پس $K \in [0,1)$ هست که برای هر $a,b \in X$،

$$d(f(a), f(b)) \leq Kd(a,b).$$

بنابراین به استقراء برای هر $n \in N$،

$$d(f^n(a), f^n(b)) \leq K^n d(a,b)$$

چون $K^n \to 0$، لذا $d(f^n(a), f^n(b)) \to 0$. برای هر $n \in \mathbb{N}$، به استقراء داریم:

$$\begin{aligned} d(f^m(x), f^{m+n}(x)) \leq & K^m d(x, f^n(x)) \\ \leq & K^m \sum_{i=1}^{n} d(f^{i-1}(x), f^i(x)) \\ \leq & K^m (\sum_{i=0}^{n-1} K^i d(x, f(x)) \\ \leq & \frac{K^m}{1-K} d(x, f(x)), \end{aligned}$$

بنابراین $\{f^m(x)\}$ دنباله‌ای کشی در X است. لذا $y \in X$ هست که y $f^m(x) \to y$ و بنابراین $y = \lim_{m\to\infty} f^{m+1}(x) = f(y)$. □

۵.۸ تمرین

۱. نشان دهید برای هر $a, b \in \mathbb{R}$، که $a < b$ داریم:
$$\frac{e^a - e^b}{b - a} > e^a.$$

۲. فرض کنید C زیرمجموعه‌ای بسته و ناتهی از فضای متریک X باشد. در این صورت تابع $f_C : X \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f_C(x) = d(x, C)$ پیوسته یکنواخت است.

۳. مشخص کنید که کدارم یک از توابع زیر پیوسته یکنواخت هستند.

الف) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ روی $\mathbb{R}$.

ب) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ روی $\mathbb{R}$.

ج) $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ روی $(1, +\infty)$.

د) $f(x) = x^3$ روی $\mathbb{R}$.

۱. فرض کنید $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ تابعی پیوسته و

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : tF(x) + (1-t)x = x, \text{برای هر } t \in [0, 1]\}$$

مجموعه‌ای ناتهی باشد. ثابت کنید A بسته است.

فصل ۹

همبندی

عدم پرش در گراف یک تابع یکی از ویژگی های توابع پیوسته است. بنابراین بررسی پرش در یک مجموعه می تواند یکی از موضوعات جالب توجه باشد. بیان دقیق برای پرش در یک مجموعه، ما را به این مهم رهنمون می سازد که، اگر در دامنه تابع پیوسته پرش نداشته باشیم، برد تابع پیوسته نیز این ویژگی را خواهد داشت. در این فصل مفهوم پرش در یک مجموعه را مطرح می سازیم و ارتباط آن را با توابع پیوسته بیان می نماییم.

۱.۹ مجموعه های همبند

قضیه ۱.۱.۹. *فرض کنید X فضایی متریک باشد. آنگاه گزاره‌های زیر معادل هستند.*

الف) هر زیرمجموعهٔ سرهٔ ناتهی از X دارای مرز ناتهی در X است.

ب) زیرمجموعهٔ ناتهی و سره از X که هم باز باشد و هم بسته، وجود ندارد.

ج) X اجتماعی از دو مجموعهٔ باز ناتهی و از هم جدا نیست.

د) X اجتماعی از دو مجموعهٔ بسته ناتهی و از هم جدا نیست.

ه) یا $X = \emptyset$ و یا تنها توابع پیوسته از X به فضای گسسته $\{۰, ۱\}$ دو تابع ثابت هستند.

اثبات. مورد الف) مورد ب) را نتیجه می‌دهد: فرض کنید $\emptyset \neq A \subseteq X$ هم باز و هم بسته باشد. با توجه با اینکه A باز است لذا $\partial A \cap A = \emptyset$. از طرفی چون A بسته است $A = A^{\circ} \cup \partial A$. لذا $\partial A = \emptyset$ و این تناقض است.

مورد ب) مورد ج) را نتیجه می‌دهد: فرض کنید U زیرمجموعهٔ ناتهی و باز و سره از X باشد. در این صورت U^c بسته است و با توجه به مفروضات نه تهی است و نه باز. بنابراین X در ج) سازگار است.
مورد ج) مورد د) را نتیجه می‌دهد: واضح است.

مورد د) مورد ه) را نتیجه می‌دهد: فرض کنید $f : X \longrightarrow \{۰, ۱\}$ پیوسته باشد. آنگاه $f^{-۱}(\{۰\})$ و $f^{-۱}(\{۱\})$ در X بسته و از هم جدا هستند و X اجتماع آنها است. بنابراین با توجه به د) $f^{-۱}(\{۰\})$ یا $f^{-۱}(\{۱\})$ تهی است و این حکم را نتیجه می‌دهد.

مورد د) مورد الف) را نتیجه می‌دهد: فرض کنید $A \subseteq X$ زیرمجموعه‌ای ناتهی و سره باشد که $\partial A = \emptyset$. آنگاه $\partial(A^c) = \emptyset$. بنابراین A و A^c در X باز هستند. بنابراین χ_A پیوسته است و این تناقض می‌باشد. لذا الف) برقرار است. □

تعریف ۲.۱.۹. *فضای متریک X را همبند گوئیم اگر X را نتوان به صورت اجتماع دو زیر مجموعهٔ باز ناتهی از هم جدا بیان کرد. فضای متریکی را که همبند نباشد، ناهمبند می‌نامیم.*

مثال ۳.۱.۹. *$\mathbb{R}$ با متر معمولی همبند است. به این منظور فرض کنید U زیرمجموعهٔ سره و ناتهی از $\mathbb{R}$ باشد و $a \in \mathbb{R} - U$ باشد. اگر $(a, +\infty) \cap U$ ناتهی باشد، فرض کنید b، اینفیمم آن باشد. آنگاه $d(b, U) = ۰$. در این صورت یا $b = a$ و یا $[a, b) \subseteq \mathbb{R} - U$. در هر حالت $d(b, \mathbb{R} - U) = ۰$، بنابراین $b \in \partial U$. به طریق مشابه هرگاه $(-\infty, a) \cap U \neq \emptyset$ می‌توان نشان داد که ∂U ناتهی است. لذا با توجه به قضیه قبل، $\mathbb{R}$ همبند است.*

زیرمجموعهٔ همبند یک فضای متریک زیرفضایی همبند است.

تعریف ۴.۱.۹. *زیرمجموعهٔ E از فضای متریک X، زیرمجموعه‌ای همبند است اگر E به عنوان یک فضای متریک، همبند باشد. در غیر این صورت آن را ناهمبند می‌نامیم.*

به راحتی دیده می‌شود که

قضیه ۵.۱.۹. *فرض کنید X فضایی متریک و Y زیرفضایی از آن باشد. آنگاه E زیرمجموعهٔ همبندی از X است اگر و تنها اگر E زیرمجموعهٔ همبندی از Y باشد.*

اثبات. واضح است. □

حال از منظری دیگری به مفهوم همبندی توجه می‌نمائیم. مجموعه‌های A و B را در فضای متریک X از هم جدا شده می‌نامیم اگر و تنها اگر $\overline{A}\cap B=\emptyset$، $A\cap\overline{B}=\emptyset$ و A و B ناتهی باشند. زوج (A,B) یک جداسازی برای X است اگر و تنها اگر A و B از هم جدا شده باشند و داشته باشیم $X=A\cup B$.

قضیه ۶.۱.۹. *فرض کنید X فضایی متریک و $A,B\subseteq X$ مجموعه‌هایی ناتهی باشند. آنگاه گزاره‌های زیر معادل هستند:*

الف) (A,B) یک جداسازی برای X است.

ب) A و B در X باز و از هم جدا هستند و داریم $X=A\cup B$.

ج) A و B در X بسته و از هم جدا هستند و داریم $X=A\cup B$.

اثبات. به عهده خواننده گرامی. □

با توجه به قضیه قبل، X ناهمبند است اگر و تنها اگر یک جداسازی مانند (A,B) برای آن موجود باشد.

قضیه ۷.۱.۹. *فرض کنید (A,B) یک جداسازی برای X و E زیرمجموعه‌ای همبند از X باشد. آنگاه $E\subseteq A$ یا $E\subseteq B$.*

اثبات. (A,B) یک جداسازی برای X است. لذا A در X هم باز است و هم بسته، بنابراین $E\cap A$ در E هم باز است وهم بسته، و این تناقض با همبند بودن E دارد. پس $E\cap A=\emptyset$ یا $E\cap A=E$. بنابراین $E\subseteq A$ و یا $E\subseteq B$. □

قضیه ۸.۱.۹. *فرض کنید $\{E_\alpha\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های همبند فضای متریک X باشد. هرگاه $\bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha$ ناتهی باشد آنگاه $E=\bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha$ همبند است.*

اثبات. فرض کنید (A,B) یک جداسازی برای E باشد، برهان خلف؛ فرض کنید

$$x_\circ \in \bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha$$

در این صورت $x_\circ \in A$ یا $x_\circ \in B$. فرض کنید$x_\circ \in A$. چون E_αها همبند هستند و $x_\circ \in A$ لذا برای هر $\alpha\in I$؛ $E_\alpha \subseteq A$. در نتیجه $\bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha \subseteq A$ و بنابراین $B=\emptyset$ و این تناقض است. □

نتیجه ۹.۱.۹. *فرض کنید X فضایی متریک و L یک زنجیر شمارا از زیرمجموعه‌های همبند X باشد آنگاه $\bigcup L$ همبند است.*

اثبات. فرض کنید $L=\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ که A_i ها همبند و $A_i\cap A_{i+1}\neq\emptyset$. در این صورت قرار می‌دهیم $E_i=\bigcup_{j=1}^{i} A_j$. به وضوح E_1 همبند است. هرگاه E_n همبند باشد آنگاه چون $E_n\cap A_{n+1}\neq\emptyset$ و E_n و A_{n+1} همبند هستند نتیجه می‌شود که $E_{n+1}=\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$ همبند است. پس $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های همبند است و $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = A_1 \neq \emptyset$. لذا $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ همبند می‌باشد. □

مثال ۱۰.۱.۹. *الف) فرض کنید X فضایی متریک و $E\subseteq X$ همبند باشد. آنگاه برای هر $x\in \overline{E}$، $E_x=E\cup\{x\}$ همبند است زیرا هرگاه (A,B) یک جداسازی برای E_x باشد، چون E همبند است آنگاه $E\subseteq A$ یا $E\subseteq B$. فرض کنید $E\subseteq A$؛ در این صورت $E\cup\{x\}=\overline{E}\subseteq\overline{A}$. و چون $\overline{A}\cap B=\emptyset$ بنابراین $x\notin B$ و چون (A,B) یک جداسازی برای E_x است آنگاه $x\in A$. پس $E_x\subseteq A$ و $B=\emptyset$ و این تناقض است.*

ب) در قسمت قبل؛ هر A شامل E و مشمول در $\overline{E}$، همبند است. به خصوص $\overline{E}$ همبند است. به این منظور، $\{E_x\}_{x\in A}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های همبند است که $\bigcap_{x\in A} E_x\neq\emptyset$، لذا $A=\bigcup_{x\in A} E_x$ با توجه به قضیه قبل همبند است.

ج) هر مجموعهٔ تک عضوی، مجموعه‌ای همبند است.

قضیه ۱۱.۱.۹. *در فضاهای متریک، زیرمجموعه‌های شمارا با بیش از یک عضو ناهمبند هستند.*

اثبات. فرض کنید E مجموعه‌ای شمارا با بیش از یک عضو از فضای متریک X باشد. فرض کنید $x_۱, x_۲ \in E$. در این صورت

$$r \in (\circ, d(x_۱, x_۲)) \cap \{d(x,y) : x, y \in E\}$$

اختیار می‌کنیم. آنگاه همسایگی $N_r(x_۱)$ را در E تشکیل می‌دهیم. به وضوح در E

$$\overline{N_r(x_۱)} = N_r(x_۱).$$

لذا E ناهمبند است. □

قضیه ۱۲.۱.۹. *هر فاصله در $\mathbb{R}$، تصویر پیوسته $\mathbb{R}$ می‌باشد.*

اثبات. فرض کنید $(a, b]$ یک فاصله در $\mathbb{R}$ می‌باشد. به وضوح تابع $L_{ab} : [\circ, ۱) \longrightarrow (a, b]$ با ضابطهٔ $L_{ab}(t) = (۱ - t)b + ta$ پیوسته است. از طرفی تابع $f : [\circ, ۱) \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(t) = \dfrac{t^۲}{۱ + t^۲}$ تابعی پیوسته و پوشاست. در نتیجه تابع $L_{ab} \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow (a, b]$ پیوسته و پوشاست. پس $(a, b]$ تصویر پیوسته $\mathbb{R}$ است. به طریق مشابه $[a, b)$ نیز تصویر پیوسته $\mathbb{R}$ می‌باشد. برای فاصلهٔ (a, b) کافی است تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow (a, b)$ با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{be^x + ae^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ در نظر بگیریم. f پیوسته و پوشاست؛ بنابراین (a, b) تصویر پیوستهٔ $\mathbb{R}$ می‌باشد. □

۲.۹ پیوستگی و همبندی

قضیه ۱.۲.۹. *فرض کنید (X, d) و (Y, e) فضاهایی متریک و (X, d) همبند باشد. هرگاه $f : X \longrightarrow Y$ تابعی پیوسته باشد آنگاه $f(X)$ همبند است.*

اثبات. فرض کنید $f(X)$ همبند نباشد. بنابراین تابع پیوسته و پوشای g از $f(X)$ به $\{\circ, ۱\}$ وجود دارد. بنابراین $g \circ f : X \longrightarrow \{\circ, ۱\}$ تابع پیوسته و پوشاست. لذا X همبند نخواهد بود و این تناقض است. □

نتیجه ۲.۲.۹. *فرض کنید E زیرمجموعهٔ ناتهی $\mathbb{R}$ باشد. آنگاه E همبند است اگر و تنها اگر E یک فاصله باشد.*

اثبات. فرض کنید E یک فاصله نباشد، پس $w \in \mathbb{R}$ هست که $\inf E < w < \sup E$ و $w \notin E$. بنابراین $E\cap(-\infty, w)$ و $E\cap(w, +\infty)$ زیرمجموعه‌های باز و ناتهی از E هستند که E اجتماع این دو مجموعه باز و از هم جداست. بنابراین E ناهمبند است. به عکس؛ با توجه به اینکه $\mathbb{R}$ همبند است و هر فاصله از $\mathbb{R}$، تصویر پیوسته $\mathbb{R}$ می‌باشد، قضیه ۱۲.۱.۹. بنابراین هر فاصله در $\mathbb{R}$ همبند می‌باشد. $\square$

قضیه ۳.۲.۹. قضیه مقدار میانی: *فرض کنید X فضای متریک همبند و $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد. فرض کنید $\alpha \in (\inf f(X), \sup f(X))$. آنگاه $x \in X$ هست که*

$$f(x) = \alpha.$$

اثبات. $f(X)$ در $\mathbb{R}$ همبند است لذا $f(X)$ یک فاصله در $\mathbb{R}$ است. حال تحت شرایط قضیه، $\alpha \in f(X)$. $\square$

نتیجه ۴.۲.۹. *فرض کنید $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته و λ بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد آنگاه $c \in (a, b)$ هست که $f(c) = \lambda$.*

مثال ۵.۲.۹. *الف) زیرمجموعهٔ $\mathbb{T} = \{(x, y) : x^۲ + y^۲ = ۱\}$ از $\mathbb{R}^۲$ همبند است زیرا $f : [\circ, ۲\pi] \longrightarrow \mathbb{T}$ با ضابطهٔ $f(t) = (\cos t, \sin t)$ پیوسته و پوشاست و لذا $\mathbb{T} = f([\circ, ۲\pi])$ همبند است.*

ب) مجموعهٔ $\{(x, \sin \frac{۱}{x}) : x \in (\circ, ۱)\}$ همبند است.

حال مفهومی نزدیک به همبندی را معرفی می‌نمائیم که تفاوت‌هایی با همبندی دارد.

تعریف ۶.۲.۹. *فضای متریک X را همبند مسیری می‌نامیم اگر برای هر $a, b \in X$ خمی پیوسته مانند $\Phi : [\circ, ۱] \longrightarrow X$ موجود باشد که $\Phi(\circ) = a$ و $\Phi(۱) = b$.*

مثال ۷.۲.۹. *الف) فرض کنید V فضایی نرمدار باشد. برای هر $a, b \in V$، مجموعهٔ $L_{ab} = \{ta + (۱ - t)b : t \in [\circ, ۱]\}$، پاره خط واصل بین a و b، همبند مسیری است که همبند نیز می‌باشد.*

ب) مجموعهٔ $A = \{(x, \sin\frac{1}{x}) : x \in (0, +\infty)\}$ همبند مسیری *است و* همبند نیز می‌باشد. *با توجه به آنچه گفته شد،* $\overline{A}$ *نیز همبند است اما* همبند مسیری نیست.

قضیه ۸.۲.۹. *هر فضای متریک همبند مسیری، همبند است.*

اثبات. فرض کنید X همبند مسیری باشد. $a \in X$ را ثابت در نظر می‌گیریم. در این صورت برای هر $b \in X$، تابع پیوستهٔ Φ از $[0, 1]$ به X هست که $\Phi(0) = a$ و $\Phi(1) = b$. چون Φ پیوسته است بنابراین $C_b = \Phi([0, 1])$ همبند است. بنابراین خانواده‌ای چون $\{C_b\}_{b \in X}$ از مجموعه‌های همبند که در نقطهٔ $a \in X$ اشتراک دارند به دست می‌آید. لذا با توجه به قضیه ۸.۱.۹، $X = \bigcup_{b \in X} C_b$ همبند است. $\square$

قضیه ۹.۲.۹. *تصویر پیوسته هر فضای متریک همبند مسیری، همبند مسیری است.*

اثبات. به عهده خواننده گرامی. $\square$

حال فرض کنید V فضایی نرمدار باشد. زیرمجموعهٔ E از V را محدب گوئیم اگر برای هر $a, b \in E$ و هر $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم:

$$\lambda a + (1 - \lambda) b \in E,$$

به عبارتی دیگر برای هر $a, b \in E$؛

$$L_{ab} = \{ta + (1 - t)b : t \in [0, 1]\} \subseteq E.$$

مثال ۱۰.۲.۹. *الف) هر همسایگی در فضای نرمدار، یک مجموعهٔ محدب است.* فرض کنید $N_r(x)$ *همسایگی به مرکز* x *و شعاع* $r > 0$ *باشد. فرض کنید* $z, y \in N_r(x)$ *و* $t \in [0, 1]$ *باشد. در این صورت*

$$\begin{aligned}
|tz + (1 - t)y - x| &\leq |tz - tx| + |(1 - t)(y - x)| \\
&= t|z - x| + (1 - t)|(y - x)| \\
&< tr + (1 - t)r \\
&= r
\end{aligned}$$

ب) *هر حجره n-بعدی در $\mathbb{R}^n$، مجموعه‌ای محدب است.*

ج) *هر مجموعهٔ محدب در $\mathbb{R}$، یک فاصله است.*

قضیه ۱۱.۲.۹. *هر مجموعهٔ محدب در فضای نرمدار، مجموعه‌ای همبند است.*

اثبات. هر مجموعهٔ محدب، همبند مسیری است و لذا همبند است. □

۳.۹ تمرین

فصل ۱۰

انواع ناپیوستگی

در این فصل با انواع ناپیوستگی های توابع حقیقی مقدار آشنا می شویم. توابعی که در یک نقطه دارای پرش هستند، مثال هایی روشن از توابع ناپیوسته می باشند. با این وجود مفهوم پرش در حالت کلی آنچنان گویا نیست. در فصل بعد خواهیم دید، توابعی که ناپیوستگی آنها پرشی است، دارای تابع اولیه نیستند. همچنین خواهیم دید که اگر وزن مجموعه نقاط ناپیوستگی یک تابع صفر باشد(به عنوان مثال شمارا باشد) آنگاه این تابع انتگرال پذیر ریمان است و بالعکس.

۱.۱۰ انواع ناپیوستگی

فرض کنید $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی دلخواه باشد. می‌گوییم تابع f در نقطه $x \in [a, b)$ دارای حد راست $f(x^+)$ است اگر و تنها اگر برای هر $\epsilon > 0$، $\delta > 0$ ای موجود باشد که

$$\forall t \in [a, b] \ \ (x < t < x + \delta \Longrightarrow |f(t) - f(x^+)| < \epsilon).$$

در این صورت می‌نویسیم $\lim_{t \to x^+} f(t) = f(x^+)$. به وضوح $\lim_{t \to x^+} f(t) = f(x^+)$ اگر و تنها اگر برای هر دنباله $\{t_n\}$ واقع در (x, b) که به x همگراست داشته باشیم

$$\lim_{n \to \infty} f(t_n) = f(x^+).$$

به طریق مشابه حد چپ تابع f را در نقطه $x \in (a,b]$ در صورت وجود با $f(x^-)$ نمایش می‌دهیم و شبیه حد راست تعریف می کنیم. به وضوح، تابع f در نقطه $x \in (a,b)$ دارای حد L است اگر وتنها اگر $f(x^+) = f(x^-) = L$. تابع f در x پیوسته راست است اگر و تنها اگر $f(x^+) = f(x)$ و پیوسته چپ است اگر و تنها اگر $f(x^-) = f(x)$. بنابراین f در x پیوسته است اگر وتنها اگر $f(x) = f(x^+) = f(x^-)$. هرگاه f در نقطه x ناپیوسته و $f(x^+)$ و $f(x^-)$ موجود باشند، می‌گوییم f در x ناپیوستگی از نوع اول (یا ناپیوستگی ساده)دارد. در غیر اینصورت ناپیوستگی f از نوع دوم نامیده می‌شود.

مثال ۱.۱.۱.۱۰ *الف) تابع*

$$f(x) = \begin{cases} sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

در $x = 0$ دارای ناپیوستگی نوع دوم است.

ب) تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

در $x = 0$ دارای ناپیوستگی نوع اول است. این نوع از ناپیوستگی ها را ناپیوستگی رفع شدنی می نامند.

ج) تابع

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x < 0 \\ x^2 - 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

در $x = 0$ دارای ناپیوستگی نوع اول است.

با توجه به آنچه در فصول قبل گفته شد، توابع پیوسته مجموعه های همبند را به مجموعه های همبند تصویر می کنند. توابعی را که دارای این خاصیت هستند خصوصیات جالبی دارند، در این قسمت این نوع از توابع را بررسی می کنیم. این نوع از توابع لزوما پیوسته نیستند.

تعریف ۲.۱.۱۰. *فرض کنید X فضایی متریک باشد. تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ دارای خاصیت مقدار میانی است اگر تصویر هر مجموعه همبند تحت f یک مجموعه همبند در $\mathbb{R}$ باشد.*

قضیه زیر علت نامگذاری خاصیت مقدار میانی را بیان می کند.

قضیه ۳.۱.۱۰. *تابع $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دارای خاصیت مقدار میانی است اگر وتنها اگر برای هر λ بین $f(x)$ و $f(y)$ یک c بین x و y موجود باشد که $f(c) = \lambda$.*

اثبات. فرض کنید f دارای خاصیت مقدار میانی باشد و λ عددی مابین $f(x)$ و $f(y)$ باشد. بدون اینکه از کلیت مساله کاسته شود فرض کنید $x < y$. از آنجاییکه $f[x,y]$ همبند است پس $\lambda \in f[x,y]$ و بنابراین $c \in (x,y)$ هست که $f(c) = \lambda$.

حال فرض کنید $E \subseteq [a,b]$ مجموعه ایی همبند باشد و $f(E)$ همبند نباشد. لذا $f(E)$ یک زیرفاصله از $\mathbb{R}$ نیست. پس $\lambda \in \mathbb{R}$ هست که $\lambda \notin f(E)$. حال $x,y \in [a,b]$ را به قسمی اختیار کنید که $f(x) < \lambda < f(y)$. در این صورت با توجه به خصوصیت تابع f، $c \in [a,b]$ موجود است که $\lambda = f(c) \in f(E)$ و این تناقض است. $\square$

به وضوح هر تابع پیوسته دارای خاصیت مقدار میانی است. تابع

$$f(x) = \begin{cases} sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

دارای خاصیت مقدار میانی است اما پیوسته نیست. پس خانواده توابع دارای خاصیت مقدار میانی شامل توابع پیوسته است. قضیه زیر بیان می کند که جنس ناپیوستگی توابع دارای خاصیت مقدار میانی از چه نوع است.

قضیه ۴.۱.۱۰. *فرض کنید تابع $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دارای خاصیت مقدار میانی باشد. آنگاه ناپیوستگی f در صورت وجود از نوع دوم است.*

اثبات. فرض کنید در $c \in [a,b]$ ناپیوستگی نوع اول f اتفاق بیافتد. پس $f(c^+)$ و $f(c^-)$ موجودند. در این صورت یکی از این دو حالت اتفاق می افتد:

الف) $f(c^+) \neq f(c^-)$. در این حالت فرض می‌کنیم $L = \frac{f(c^+)-f(c^-)}{۳} > ۰$. با توجه به تعریف حد راست و حد چپ، برای $L > ۰$، $\delta > ۰$ هست که

$$\forall x \in [a,b]\ (c < x < c+\delta \Longrightarrow |f(x) - f(c^+)| < L),$$

$$\forall x \in [a,b]\ (c-\delta < x < c \Longrightarrow |f(x) - f(c^-)| < L).$$

با توجه به اینکه تصویر $(c-\delta, c) \cup (c, c+\delta)$ تحت تابع f شامل فاصله

$$(f(c^-)+L, f(c^+)-L)$$

نیست به تناقض خواهیم رسید.

ب) $f(c^+) = f(c^-)$. مشابه قسمت قبل اثبات می‌شود. $\square$

قضیه ۵.۱.۱۰. *توابع دارای ناپیوستگی نوع اول، دارای خاصیت مقدار میانی نیستند.*

هرگاه ناپیوستگی های تابع از نوع اول باشد و این ناپیوستگی ها رفع شدنی نباشند یعنی $f(c^+) \neq f(c^-)$، آنگاه مجموع پرش ها یعنی $\sum |f(c^+) - f(c^-)|$ در صورتی که تابع کراندار باشد مجموعی همگراست. بنابراین با کمی تلاش می‌توان تعداد نقاط ناپیوستگی نوع اول را در حالت کلی تعیین نمود. به این منظور به تمهیداتی نیاز داریم. فرض کنید $\{a_i\}_{i\in I}$ خانواده ایی از اعداد حقیقی نامنفی باشد و I مجموعه اندیس گذار دلخواهی باشد. در این صورت مجموع $\sum_{i\in I} a_i$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sum_{i\in I} a_i = Sup\{\sum_{i\in F} a_i : F \in P_f(I)\},$$

که $P_f(I)$ خانواده همه زیرمجموعه های ناتهی و متناهی از I می‌باشد. سری $\sum_{i\in I} a_i$ همگراست اگر مجموعه $\{\sum_{i\in F} a_i : F \in P_f(I)\}$ مجموعه‌ای کراندار باشد. به وضوح

قضیه ۶.۱.۱۰. *اگر مجموع $\sum_{i\in I} a_i$ همگرا باشد آنگاه مجموعه $\{i \in I : a_i > ۰\}$ حداکثر شمارش‌پذیر است.*

اثبات. فرض کنید چنین نباشد. در اینصورت $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $\{i \in I : a_i > \frac{۱}{n}\}$ ناشماراست. اگر M کرانی بالا برای مجموعه $\{\sum_{i\in F} a_i : F \in P_f(I)\}$

باشد، مجموعه متناهی F را به قسمی اختیار می‌کنیم که $F \subseteq \{i \in I : a_i > \frac{1}{n}\}$ و $card(F) > Mn$. در نتیجه $\frac{1}{n}card(F) < \sum_{i\in F} a_i \leq M$ یک تناقض است. $\square$

قضیه ۱۰.۱.۷. *فرض کنید $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی کراندار و مجموعه*

$$E = \{x \in [a,b] : f(x^+) \neq f(x^-)\}$$

ناتهی باشد. اگر برای هر $x, y \in E$ که $x < y$ داشته باشیم

$$f(x^-) < f(x^+) < f(y^-) < f(y^+).$$

انگاه E مجموعه ایی حداکثر شمارشپذیر است.

اثبات. به وضوح چون تابع f کراندار است، مجموع $\sum_{x\in E}(f(x^+) - f(x^-))$ متناهی است. پس با توجه به قضیه ۱۰.۱.۶ مجموعه E حداکثر شمارشپذیر است. $\square$

قضیه ۱۰.۱.۸. *فرض کنید $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی اکیدا صعودی باشد. در این صورت گزاره های زیر برقرارند:*

الف) برای هر $x \in (a,b)$، $f(x^+)$ و $f(x^-)$ موجودند و داریم

$$f(x^+) = Inf\{f(t) : x < t < b\},$$

$$f(x^-) = Sup\{f(t) : a < t < x\}.$$

ب) اگر $a < x < y < b$ انگاه $f(x^-) \leq f(x^+) \leq f(y^-) \leq f(y^+)$.

ج) ناپیوستگی های f در صورت وجود از نوع اول است.

د) مجموعه نقاط ناپیوستگی f حداکثر شمارشپذیر است.

اثبات. اثبات به عهده خواننده گرامی. $\square$

مجموعه نقاط ناپیوستگی یک تابع یکنوا $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ با توجه به قضیه فوق، حداکثر شمارشپذیر است. نقاط ناپیوستگی نوع اول در شهود به صورت نقاط تنها متصور می‌شوند . با این وجود مثال هایی می‌توان ساخت که مجموعه نقاط

ناپیوستگی نوع اول در فضای مورد نظر چگال باشد. به این منظور فرض کنید $E \subseteq (a,b)$ مجموعه‌ای شمارا باشد که می‌تواند در (a,b) چگال اختیار شود. تابع یکنوای f را روی (a,b) به گونه ای می سازیم که نقاط ناپیوستگی آن E باشد. فرض کنید $E = \{x_۱, x_۲, \cdots\}$ و $\{c_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت اختیار شود که $\sum c_n$ همگرا باشد. در این صورت برای $a < x < b$ تعریف می کنیم.

$$f(x) = \sum_{x_n < x} c_n.$$

در مجموع بالا جمع روی اندیس تهی را صفر تعریف می کنیم. با توجه به اینکه سری $\sum c_n$ همگرای مطلق است لذا ترتیب جمع بستن فاقد اهمیت است و بنابراین f خوش تعریف است. خصوصیات زیر برای تابع f برقرار است:

الف) f تابعی صعودی است.

ب) f در هر نقطه $x \in E$ ناپیوسته است، در واقع داریم $f(x^+) - f(x^-) = c_n$.

ج) f در هر نقطه دیگر (a,b) پیوسته است.

د) در هر نقطه x، $f(x^-) = f(x)$. یعنی f در هر نقطه پیوسته چپ است.

۲.۱۰ تمرینات

۱. فرض کنید X و Y فضاهایی متریک باشند. تابعی چون $f : X \longrightarrow Y$ بیابید که پیوسته نباشد و دارای خاصیت زیر باشد: " برای هر همسایگی بستهٔ B از Y، $f^{-۱}(B)$ در X بسته است. "

۲. آیا تابعی پیوسته، یک‌به‌یک و پوشا از $[۰,۱)$ به $(۰,۱)$ وجود دارد؟

۳. فرض کنید X و Y فضاهایی متریک و $X \times Y$ فضای متریک حاصلضربی باشد. فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ تابعی پیوسته باشد. نشان دهید

$$G(f) = \{(x, f(x))\} : x \in X\}$$

در $X \times Y$ بسته است.

۴. فرض کنید X و Y فضاهایی متریک و $f : X \longrightarrow Y$ تابعی دلخواه باشد. نشان دهید f تابعی باز است اگر و تنها اگر برای هر همسایگی باز B از X، $f(B)$ در Y باز باشد.

۵. تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ را بگونه‌ای بسازید که در همه نقاط ناپیوسته باشد اما زیرمجموعه‌ای چون $S\subseteq\mathbb{R}$ موجود باشد که $f|_S$ و $f|_{\mathbb{R}-S}$ پیوسته باشند.

۶. آیا گزاره زیر درست است:

فرض کنید A زیرمجموعه‌ای ناتهی از $\mathbb{R}$ باشد. نشان دهید که هر تابع پیوسته حقیقی با دامنه A دارای برد بسته است اگر و تنها اگر A در $\mathbb{R}$ بسته باشد.

۷. فرض کنید (X,d) و (Y,e) فضاهایی متریک و $f:X\longrightarrow Y$ تابعی پیوسته باشد. اگر X فشرده باشد نشان دهید گراف f،

$$G(f)=\{(x,f(x)):x\in X\}$$

در $X\times Y$ فشرده است.

۸. فرض کنید $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ پیوسته و $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$ باشد. ثابت کنید f پیوسته یکنواخت است.

۹. فرض کنید (X,d) جدایی‌پذیر و $f:X\longrightarrow Y$ پیوسته باشد. آنگاه $f(X)$ جدایی‌پذیر است.

۱۰. آیا تصویر یک فضای متریک تام تحت یک نگاشت دوسویی پیوسته که دارای وارون پیوسته است (همئومورفیسم)، فضایی تام است؟

۱۱. فرض کنید X فضایی متریک و $f:[0,1)\longrightarrow X$ پیوسته باشد. اگر $\lim_{x\to 1}f(x)$ موجود باشد آنگاه f پیوسته یکنواخت است.

۱۲. فرض کنید $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x+y)=f(x)+f(y)$. آنگاه $a\in\mathbb{R}$ هست که برای $x\in\mathbb{R}$، $f(x)=ax$.

۱۳. نشان دهید تابعی دوسویی و پیوسته که دارای وارون پیوسته است بین فضاهای داده شدهٔ زیر وجود ندارد.

الف) $X=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ و $Y=[0,1]$.

ب) $X=\mathbb{R}$ و $Y=\mathbb{R}^n$ و $n\geq 2$.

ج) $X=(0,1)\cup(2,3)$ و $Y=(0,1)\cup(2,3]$.

د) $X=[0,1]$ و $Y=[0,1]\times[0,1]$.

۵) $X = [\circ, \backslash]$ و $Y = (\circ, \backslash)$.

۱۴. فرض کنید $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ تابعی دوسویی باشد. برای هر $x \in \mathbb{R}$، قرار دهید $N_x = \{k \in \mathbb{N} : \alpha(k) \leq x\}$. فرض کنید $\{y_n\}$ دنباله‌ای در $(\circ, +\infty)$ باشد که $\sum y_n < \infty$. تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x) = \sum_{k \in N_x} y_k$ را تعریف کنید. در این صورت:

الف) f اکیداً یکنواست.

ب) f در هر عدد گنگ پیوسته است.

ج) در هر عدد گویای q، یک پرش به اندازهٔ y_n وجود دارد که $n = \alpha^{-\backslash}(q)$.

• فرض کنید (X, d) و (Y, e) فضاهایی متریک و $f : X \longrightarrow Y$ تابعی دلخواه باشد. برای هر $\varepsilon > \circ$ و هر $x \in X$،

$$\omega_f(x, \varepsilon) = \sup\{e(f(y), f(z)) : y, z \in N_\varepsilon(x)\}$$

تعریف می‌کنیم. قرار دهید

$$\omega_f(x) = \inf\{\omega_f(x, \varepsilon) : \varepsilon > \circ\}$$

$\omega_f(x)$ را نوسان تابع f در نقطهٔ x می‌نامیم.

الف) نشان دهید f در x پیوسته است اگر و تنها اگر $\omega_f(x) = \circ$.

ب) نشان دهید برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$A_n = \{x \in X : \omega_f(x) \geq \frac{\backslash}{n}\}$$

بسته است.

ج) فرض کنید $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی یکنوا باشد. ثابت کنید

$$\omega_f(x) = |f(x^+) - f(x^-)|.$$

فصل ۱۱

مشتق توابع

۱.۱۱ مشتق توابع یک متغیره

تعریف ۱.۱.۱۱. فرض کنید $I \subseteq \mathbb{R}$ یک فاصله، $f : I \to \mathbb{R}$ یک تابع و $c \in I$ باشد. می‌گوییم f در c مشتقپذیر است اگر حد زیر موجود باشد،

$$lim_{x \to x} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

در این صورت مقدار حد فوق را با $f'(c)$ نمایش میدهیم و آن را مشتق تابع f در نقطه c می نامیم. اگر f در هر نقطه $c \in I$ مشتقپذیر باشد، f را روی I مشتقپذیر گوییم.

به راحتی دیده می شود که اگر f در $c \in I$ مشتقپذیر باشد، آنگاه f در c پیوسته است. به این منظور کافی است توجه کنیم که

$$f(x) - f(c) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c).$$

همچنین اگر f و g در $c \in I$ مشتقپذیر باشند، آنگاه $f \pm g$ ، fg و با شرط $g(c) \neq \circ$، f/g در c مشتقپذیرند، و داریم :

الف) $(f \pm g)'(c) = f'(c) \pm g'(c)$.

ب) $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$.

ج) $(f/g)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{(g(c))^۲}$.

قضیه ۲.۱.۱۱. *فرض کنید f روی $[a,b]$ پیوسته، $f'(x)$ در نقطه ای چون $x \in [a,b]$ موجود باشد. فرض کنید g روی فاصله I شامل برد f تعریف شده و در نقطه $f(x)$ مشتقپذیر باشد. اگر برای $t \in [a,b]$، تابع $h(t) = g(f(t))$ تعریف شود، آنگاه h در x مشتقپذیر است و*

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

اثبات. فرض کنید $y = f(x)$. با توجه به تعریف مشتق داریم:

$$f(t) - f(x) = (t-x)(f'(x) + u(t)),$$

و

$$g(s) - g(y) = (s-y)(g'(y) + v(s)),$$

که $t \in [a,b]$، $s \in I$، $lim_{t\to x}u(t) = ۰$ و $lim_{s\to y}v(s) = ۰$. بنابراین

$$\begin{aligned} h(t) - h(x) &= g(f(t)) - g(f(x)) \\ &= (f(t) - f(x))(g'(y) + v(s)) \\ &= (t-x)(f'(x) + u(t))(g'(y) + v(s)). \end{aligned}$$

در نتیجه اگر $t \neq x$،

$$\frac{h(t) - h(x)}{t-x} = (g'(y) + v(s))(f'(x) + u(t)).$$

حال اگر $t \to x$، در این صورت $s \to y$ و حکم نتیجه می شود. □

مثال ۳.۱.۱۱. *الف) تابع*

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ & x \in \mathbb{Q} \\ ۰ & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

فقط و فقط در نقطه $x = ۰$ مشتقپذیر است.

ب) تابع $f(x) = |x|$ فقط وفقط در نقطه $x = ۰$ مشتقپذیر نیست.

ج) تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ sin(\frac{۱}{x} & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$$

روی $\mathbb{R}$ مشتقپذیر است، اما $f'(x)$ در $x = ۰$ پیوسته نیست.

۲.۱۱ قضایای مقدار میانگین

تعریف ۱.۲.۱۱. *فرض کنید $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ تابعی دلخواه باشد. می‌گوییم f در نقطه $p \in (a, b)$ دارای ماکسیمم نسبی است اگر $\delta > 0$ای موجود باشد که*

$$\forall x \in (a, b)(|x - p| < \delta \Longrightarrow f(x) \leq f(p)).$$

مینیمم نسبی به طریق مشابه تعریف می شود. f در $p \in (a, b)$ دارای اکسترمم نسبی است اگر f در نقطه p مینیمم نسبی یا ماکسیمم نسبی خود را اختیار کند.

قضیه ۲.۲.۱۱. *فرض کنید f در نقطه $p \in (a, b)$ دارای اکسترمم نسبی باشد، آنگاه $f'(p) = 0$ یا $f'(p)$ وجود ندارد.*

اثبات. فرض کنید f در نقطه p مشتقپذیر باشد. در این صورت برای $a < p < x < b$، داریم

$$\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \leq 0$$

و برای $a < x < p < b$، داریم

$$\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \geq 0.$$

بنابراین $f'(p) = 0$. □

قضیه ۳.۲.۱۱. قضیه مقدار میانگین کشی: *فرض کنید f و g توابعی پیوسته روی $[a, b]$ و روی (a, b) مشتقپذیر باشند، آنگاه $c \in (a, b)$ هست که*

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - f(a))f'(c).$$

اثبات. تابع

$$h(t) = (f(b) - f(a))g(t) - (g(b) - g(a))f(t)$$

را روی $[a, b]$ در نظر بگیرید. h روی $[a, b]$ پیوسته و روی (a, b) مشتقپذیر است و نیز $h(a) = h(b)$. اگر h روی $[a, b]$ ثابت باشد حکم واضحست. فرض کنید h ثابت نباشد، بنابراین در نقطه ای چون $p \in (a, b)$ اکسترمم مطلق خود را اختیار می کند. در نتیجه $h'(p) = 0$ و حکم را بدست می دهد. □

قضیه ۴.۲.۱۱. قضیه مقدار میانگین: *اگر f روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتقپذیر باشد، آنگاه $c \in (a,b)$ هست که*

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

اثبات. در قضیه قبل $g(x)=x$ اختیار کنید. □

قضیه ۵.۲.۱۱. *فرض کنید f روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتقپذیر باشد، آنگاه*

الف) اگر $f'(x)=0$ برای هر $x \in (a,b)$، آنگاه f روی $[a,b]$ تابعی ثابت است.

ب) اگر $f'(x) \geq 0$ برای هر $x \in (a,b)$، آنگاه f روی $[a,b]$ تابعی صعودی است.

ج) اگر $f'(x) \leq 0$ برای هر $x \in (a,b)$، آنگاه f روی $[a,b]$ تابعی نزولی است.

اثبات. اثبات بدیهی است. □

مثال ۶.۲.۱۱. *الف) برای هر $x \in \mathbb{R}$، داریم $-x \leq sin(x) \leq x$.* زیرا با بکار گرفتن قضیه مقدار میانگین روی فاصله $[0,x]$، $x>0$، $c \in (0,x)$ یافت می شود که

$$sin(x)=cos(c)(x-0) \leq x,$$

و لذا $-x \leq sin(x) \leq x$.

ب) **نامساوی برنولی:** *فرض کنید $\alpha > 1$. آنگاه برای هر $-1 < x$ داریم*

$$(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x.$$

به این منظور تابع $h(x)=(1+x)^\alpha$ را روی $[-1,+\infty)$ در نظر می گیریم. تابع h مشتقپذیر است لذا $h'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$ روی $x>-1$. برای $x>0$، به کمک قضیه مقدار میانگین برای h روی $[0,x]$، $c \in (0,x)$ یافت می شود که

$$(1+x)^\alpha - 1 = \alpha(1+c)^{\alpha-1}x.$$

چون $c>0$ و $\alpha>1$ بنابراین $(1+c)^\alpha > 1$ و در نتیجه $(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x$. برای وقتی که $-1 < x < 0$، به طریقی مشابه به نامساوی برنولی دست میابیم. همچنین دیده می شود که در نامساوی برنولی برای $x > -1$، تساوی وقتی وفقط وقتی اتفاق می افتد که $x=0$ اختیار شود.

ج) برای $\alpha \in (0,1)$، فرض کنید $g(x)=\alpha x - x^\alpha$ روی $[0,+\infty)$. در اینصورت

$g'(x) = \alpha(1 - x^{\alpha-1})$. به راحتی دیده می شود که برای $x \in (0,1)$، $g'(x) < 0$ و برای $x > 1$، $g'(x) > 0$. لذا اگر $x \geq 0$ آنگاه $g(x) \geq 1$ و $g(x) = g(1)$ اگر وتنها اگر $x = 1$. در نتیجه، اگر $x \geq 0$ و $1 > \alpha > 0$ داریم:

$$x^{\alpha} \leq \alpha x + (1-\alpha).$$

حال $a, b \in (0, +\infty)$ اختیار کنید و فرض کنید $x = \frac{a}{b}$. در این صورت داریم

$$(\frac{a}{b})^{\alpha} \leq \alpha\frac{a}{b} + (1-\alpha),$$

و در نتیجه

$$a^{\alpha}b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b.$$

تساوی وقتی اتفاق می افتد که $a = b$.

د) هرگاه $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ مشتقپذیر و f' روی (a,b) تابعی کراندار باشد، آنگاه f روی (a,b) در شرط لیپ شوتس صدق می کند. به عبارتی $M > 0$ هست که برای هر $x, y \in (a,b)$ داریم:

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|.$$

ه) فرض کنید f تابعی مشتقپذیر روی فاصله باز I باشد. اگر f' در $x \in I$ مشتقپذیر باشد، خواهیم داشت:

$$lim h \to 0^{+} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f'(x).$$

به این منظور $F(h) = f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)$ و $G(h) = h^2$ قرار دهید. در اینصورت

$$\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = \frac{F(h) - F(0)}{G(h) - G(0)}.$$

حال به کمک قضیه مقدار کشی، $\alpha \in (0, b)$ وجود دارد که جمله آخر برابر با $\frac{F'(\alpha)}{G'(\alpha)}$ خواهد شد. در این صورت

$$\begin{aligned}
\frac{F'(\alpha)}{G'(h)} &= \frac{f'(x+\alpha) - f'(x-\alpha)}{2\alpha} \\
&= \frac{1}{2}\frac{f'(x+\alpha) - f'(x)}{\alpha} + \frac{1}{2}\frac{f'(x-\alpha) - f'(x)}{\alpha}.
\end{aligned}$$

حال اگر $h \to 0$ در این صورت $\alpha \to 0$ و حکم نتیجه می شود.

قاعده هوپیتال I**:** فرض کنید $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ و f و g توابعی مشتقپذیر روی (a,b) و $g'(x) \neq 0$ برای هر $x \in (a,b)$. فرض کنید
$$lim_{x\to a^+} f(x) = 0 = lim_{x\to a^+} g(x).$$

در این صورت

الف) اگر $lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$ آنگاه $lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

ب) اگر $lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \{\pm\infty\}$ آنگاه $lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

اثبات. اگر $a < \alpha < \beta < b$ اختیار شوند، آنگاه $g(\beta) \neq g(\alpha)$. بنابراین با توجه به قضیه مقدار میانگین کشی، $u \in (\alpha,\beta)$ هست که
$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)} = \frac{f'(u)}{g'(u)}.$$

حالت الف) اگر $L \in \mathbb{R}$ و $\epsilon > 0$ داده شده باشند، $c \in (a,b)$ هست که
$$L-\epsilon < \frac{f'(u)}{g'(u)} < L+\epsilon,$$

برای هر $u \in (a,c)$. در نتیجه
$$L-\epsilon < \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)} < L+\epsilon,$$

برای هر $a < \alpha < \beta < c$. حال اگر $\alpha \to a^+$، برای هر $\beta \in (a,c]$ خواهیم داشت

$$L-\epsilon \leq \frac{f(\beta)}{g(\beta)} \leq< L+\epsilon.$$

لذا حکم نتیجه می شود.

حالت ب) اگر $L=+\infty$، $M > 0$ را اختیار می کنیم. بنابراین $c \in (a,b)$ هست که برای هر $u \in (a,,c)$،
$$\frac{f'(u)}{g'(u)} > M.$$

در نتیجه برای هر $a < \alpha < \beta < c$ خواهیم داشت
$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)} < M.$$

حال اگر $\alpha \to a^+$ نتیجه می شود
$$\frac{f(\beta)}{g(\beta)} \geq M$$

برای هر $\beta \in (a,c)$. ار آنجاییکه M دلخواه است حکم نتیجه می شود. برای $L = -\infty$ حکم به طریقی مشابه نتیجه می شود. $\square$

قاعده هوپیتال II**:** فرض کنید $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ و f و g توابعی مشتقپذیر روی (a,b) و $g'(x) \neq 0$ برای هر $x \in (a,b)$. فرض کنید

$$lim_{x \to a^+} g(x) = \pm\infty.$$

در این صورت

الف) اگر $lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$ آنگاه $lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

ب) اگر $lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \{\pm\infty\}$ آنگاه $lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

اثبات. فرض کنید $lim_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$. با توجه به مفروضات برای هر $a < \alpha < \beta < b$ داریم $g(\alpha) \neq g(\beta)$. بنابراین با توجه به قضیه مقدار میانگین کشی، $u \in (\alpha, \beta)$ هست که

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(u)}{g'(u)}.$$

حالت الف) اگر $L \in \mathbb{R}$ و $\epsilon > 0$ داده شده باشند، $c \in (a,b)$ هست که

$$L - \epsilon < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} < L + \epsilon,$$

برای هر $a < \alpha < \beta \leq c$. از آنجاییکه $g(x) \to +\infty$، می توانیم فرض کنیم که $g(x) > 0$. حال $\beta = c$ اختیار می کنیم در نتیجه برای هر $\alpha \in (a,c)$ داریم

$$L - \epsilon < \frac{f(c) - f(\alpha)}{g(c) - g(\alpha)} < L + \epsilon. \qquad (1)$$

چون $\frac{g(c)}{\alpha} \to 0$ وقتی که $\alpha \to a^+$، می توانیم فرض کنیم $0 < \frac{g(c)}{g(\alpha)} < 1$، برای هر $\alpha \in (a,c)$. بنابراین برای هر $\alpha \in (a,c)$ خواهیم داشت

$$\frac{g(\alpha) - g(c)}{g(\alpha)} = 1 - \frac{g(c)}{g(\alpha)} > 0.$$

با ضرب عبارت $\frac{g(\alpha)-g(c)}{g(\alpha)}$ در (۱) نتیجه می شود

$$(L - \epsilon)(1 - \frac{g(c)}{g(\alpha)}) < \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} - \frac{f(c)}{g(\alpha)} < (L + \epsilon)(1 - \frac{g(c)}{g(\alpha)}).$$

حال چون $\frac{g(c)}{g(\alpha)} \to \circ$ و $\frac{f(c)}{g(\alpha)} \to \circ$ وقتی $\alpha \to a^+$، آنگاه برای هر $\delta \in (\circ, \text{۱})$، $d \in (a,c)$ هست که برای هر $\alpha \in (a,d)$ داریم

$$\frac{|f(c)|}{g(\alpha)} < \delta \text{ و } \circ < \frac{g(c)}{g(\alpha)} < \delta.$$

در نتیجه

$$(L-\epsilon)(\text{۱}-\delta) - \delta < \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} < (L+\epsilon) + \delta.$$

حال اگر $\delta = min\{\text{۱}, \epsilon, \frac{\epsilon}{|L|+\text{۱}}\}$ اختیار کنیم، دیده می شود که

$$L - \text{۲}\epsilon \leq \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \leq L + \text{۲}\epsilon.$$

چون $\epsilon > \circ$ دلخواه است، حکم نتیجه می شود.

حالت ب) اگر $L = +\infty$، $M > \text{۱}$ را در نظر بگیرید. برای $c \in (a,b)$، $\frac{f'(u)}{g'(u)} > M$ برای هر $u \in (a,c)$. آنگاه از آنچه که گفته شد، داریم

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} > M$$

برای هر $a < \alpha < \beta \leq c$. چون $g(x) \to +\infty$، می توانیم فرض کنیم $g(c) > \circ$، $\frac{|f(c)|}{g(\alpha)} < \frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ و $\circ < \frac{g(c)}{g(\alpha)} < \frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ برای هر $\alpha \in (a,c)$. حال اگر $\beta = c$ اختیار کنیم با ضرب رابطه بالا در $\text{۱} - \frac{g(c)}{g(\alpha)} > \frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ خواهیم داشت:

$$\frac{f(\alpha) - f(c)}{g(\alpha)} > M(\text{۱} - \frac{g(c)}{g(\alpha)}) > \frac{\text{۱}}{\text{۲}}M,$$

بنابراین

$$\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} > \frac{\text{۱}}{\text{۲}}M + \frac{f(c)}{g(\alpha)} > \frac{\text{۱}}{\text{۲}}(M - \text{۱})$$

برای هر $\alpha \in (a,c)$. چون $M > \text{۱}$ دلخوا بود، حکم نتیجه می شود. برای $L = -\infty$ به طریق مشابه حکم ثابت می شود. □

۳.۱۱ خاصیت مقدار میانی

در این بخش به یکی از خواص جالب مشتق تابع f که منتسب به داربو هست، می پردازیم. اگر تابع f در هر نقطه فاصله I مشتقپذیر باشد آنگاه تابع f' دارای خاصیت مقدار میانی است. به این معنا که اگر f' مقدارهای a و b را اختیار کند،

در این صورت مقادیر بین a و b را نیز اختیار می کند، قضیه ۳.۱.۱۰. به عبارتی، f' مجموعه های همبند را به مجموعه های همبند تصویر می کند.

لم ۱.۳.۱۱. *فرض کنید I یک فاصله و $f: I \to \mathbb{R}$ تابعی باشد که در نقطه $c \in I$ مشتقپذیر است. آنگاه*

الف) اگر $f'(c) > \circ$، آنگاه $\delta > \circ$ ای هست که

$$\forall x \in I(c < x < c + \delta \Longrightarrow f(x) > f(c)).$$

ب) اگر $f'(c) < \circ$، آنگاه $\delta > \circ$ ای هست که

$$\forall x \in I(c - \delta < x < c \Longrightarrow f(x) > f(c).$$

اثبات. به عنوان تمرین به عهده خواننده گرامی. □

قضیه ۲.۳.۱۱. قضیه داربو: *فرض کنید f روی $I = [a, b]$ مشتقپذیر و k مقداری بین $f'(a)$ و $f'(b)$ باشد، آنگاه $c \in (a, b)$ هست که*

$$f'(c) = k.$$

اثبات. فرض کنید $f'(a) < k < f'$. روی I تابع $g(x) = kx - f(x)$ را در نظر می گیریم. به وضوح g روی I پیوسته است و لذا ماکسیمم خود را روی I اختیار می کند. چون $g'(a) = k - f'(a) > \circ$، لذا از لم قبل قسمت الف) نتیجه می شود که ماکسیمم در $x = a$ اتفاق نمی افتد. از طرفی $g'(b) = k - f'(b) < \circ$، پس از لم قبل نتیجه می شود که ماکسیمم در $x = b$ اتفاق نمی افتد. لذا تابع ماکسیمم خود را در نقطه ای چون $c \in (a, b)$ اختیار می کند. در نتیجه $g'(c) = \circ$ و لذا $f'(c) = k$. □

مثال ۳.۳.۱۱. *تابع*

$$sgn(x) = \begin{cases} ۱ & x > \circ \\ \circ & x = \circ \\ -۱ & x < \circ \end{cases}$$

را روی فاصله $[-۱, ۱]$ در نظر بگیرید. تابعی چون f وجود ندارد که $f'(x) = sgn(x)$.

نتیجه ۴.۲.۱۱. *اگر f روی فاصله I مشتقپذیر باشد، آنگاه ناپیوستگی های f' از نوع دوم است.*

مثال ۵.۲.۱۱. *اگر f روی فاصله I جز احتمالا در نقطه $c \in I$ مشتقپذیر باشد و اگر*

$$lim_{x\to c} f'(x) = L$$

موجود باشد، آنگاه $f'(c)$ موجود است و $f'(c) = L$.

۴.۱۱ مشتق مراتب بالاتر

یکی از تکنیک های مفید در آنالیز توابع حقیقی مقدار، تقریب توابع توسط چند جمله ای هاست. در این بخش، قضیه اساس در این حیطه را که به بروک تیلور (۱۷۳۱-۱۶۸۵) منسوب است را ثابت می کنیم. اگرچه بیان امروزی آن به جوزف-لوییس لاگرانژ (۱۷۳۶-۱۸۱۳) مدیون است. قضیه تیلور از نتایج قوی و پرکاربرد است. قضیه تیلر به بیانی توسیعی از قضیه مقدار میانگین به مشتقات مراتب بالاتر است.

تعریف ۱.۴.۱۱. *فرض کنید تابع f روی فاصله I دارای مشتق f' باشد. اگر f' مشتقپذیر باشد، مشتق آن را با f'' نمایش می دهیم و آن را مشتق مرتبه دوم f می نامیم. ادامه این روش، ما را به توابع*

$$f, f', f'', f^{(۳)}, \cdots, f^{(n)}$$

می رساند. $f^{(n)}$ مشتق nام تابع f است. برای وجود $f^{(n)}(x)$ در یک نقطه x، می بایست $f^{(n-۱)}(t)$ در یک همسایگی از x موجود باشد.

اگر تابع f در نقطه $x_\circ$، دارای مشتق nام باشد، به آسانی می توان یک چند جمله ای از درجه n، چون P_n را به گونه ای ساخت که $P_n(x_\circ) = f(x_\circ)$ و

$$P_n^{(k)}(x_\circ) = f^{(k)}(x_\circ)$$

برای هر $k = ۱, ۲, \cdots, n$. در حقیقت، چند جمله ای

$$P_n(x) = f(x_\circ) + \sum_{k=۱}^{n} \frac{f^{(k)}(x_\circ)}{k!}(x - x_\circ)^k.$$

چندجمله ای P_n را چندجمله ای تیلور تابع f در نقطه $x_\circ$ می نامیم.

قضیه ۲.۴.۱۱. قضیه تیلور: فرض کنید $n \in \mathbb{N}$، $I = [a,b]$ و تابع $f : I \to \mathbb{R}$ دارای n مشتق پیوسته $f', \cdots, f^{(n)}$ روی I باشد و نیز $f^{(n+1)}$ روی (a,b) موجود باشد. اگر $x_\circ \in I$، آنگاه برای هر $x \in I$، یک c بین x و $x_\circ$ هست که

$$f(x) = \sum_{k=\circ}^{n} \frac{f^{(k)}(x_\circ)}{k!}(x-x_\circ)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_\circ)^{n+1}.$$

اثبات. فرض کنید x و $x_\circ$ داده شده اند و J فاصله ای بسته با نقاط انتهایی x و $x_\circ$ باشد. روی J تابع F را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$F(t) = f(x) - f(t) - (x-t)f'(t) - \cdots - \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t),$$

برای هر $t \in J$. به آسانی دیده می شود که

$$F'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t).$$

حال روی J، G را با ضابطه زیر تعریف می کنیم

$$G(t) = f(t) - (\frac{x-t}{x-x_\circ})^{(n+1)}F(x_\circ).$$

در این صورت $G(x) = G(x_\circ) = \circ$، و لذا $c \in J$ هست که

$$\circ = G'(c) = F'(c) + (n+1)\frac{(x-c)^n}{(x-x_\circ)^{(n+1)}}F(x_\circ).$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} F(x_\circ) &= -\frac{1}{n+1}\frac{(x-x_\circ)^{(n+1)}}{(x-c)^n}F'(c) \\ &= \frac{1}{n+1}\frac{(x-x_\circ)^{(n+1)}}{(x-c)^n}\frac{(x-c)^n}{n!}f^{(n+1)}(c) \\ &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_\circ)^{(n+1)}, \end{aligned}$$

و این حکم را نتیجه می دهد. $\square$

در قضیه فوق $R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_\circ)^{(n+1)}$ باقیمانده تابع f نامیده می شود.

مثال ۳.۴.۱۱. *الف) از قضیه تیلور با $n = ۲$ می توان برای تقریب $(۱+x)^{\frac{۱}{۳}}$، $x > ۱$، استفاده نمود.*

ب) برای تقریب عدد نپر، e، با دقت $۱۰^{-۵}$ می توان از قضیه تیلور سود برد.

ج) برای هر $x \in \mathbb{R}$، $1 - \frac{1}{2}x^2 \leq cosx$. به این منظور $f(x) = cos(x)$، $x_0 = 0$ اختیار کنید. برای $n = 2$ داریم

$$cosx = 1 - \frac{1}{x^2} + R_2(x),$$

که برای یک c بین x و 0 داریم

$$R_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!} = \frac{sinc}{6}x^3.$$

اگر $x \in [0, \pi]$ آنگاه $c \in [0, \pi]$ و چون x و c مثبت هستند، نتیجه می شود $R_2(x) \geq 0$. اگر $x \in [-\pi, 0]$، آنگاه $c \in [-\pi, 0]$، چون $sinc$ و x^3 هردو منفی اند، $R_2(x) \geq 0$. در نتیجه $1 - \frac{1}{2}x^2 \leq cosx$ برای $|x| \leq \pi$. اگر $|x| \geq \pi$ آنگاه داریم

$$1 - \frac{1}{2}x^2 < 3 \leq cosx$$

و این حکم را برای هر $x \in \mathbb{R}$ نتیجه می دهد.

د) برای هر $k \in \mathbb{N}$، و برای هر $x > 0$ داریم

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots - \frac{1}{2k}x^{2k} < Ln(1 + x) < x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots - \frac{1}{2k+1}x^{2k+1}.$$

از آنجاییکه $Ln(1 + x)' = \frac{1}{1+x}$ برای $x > 0$، nامین چندجمله ای تیلور تابع $Ln(1 + x)$ در $x_0 = 0$ عبارتست از

$$P_n(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

و باقیمانده آن عبارتست از

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n c^{n+1}}{n+1}x^{n+1},$$

برای یک $c \in (0, x)$. پس برای $x > 0$، اگر $n = 2k$، $R_{2k}(x) > 0$ و اگر $n = 2k + 1$، $R_{2k+1}(x) < 0$. حال نامساوی به راحتی بدست می‌آید.

ه) $e^\pi > \pi^e$. به کمک قضیه تیلور، برای هر $x > 0$ داریم

$$e^x > 1 + x.$$

چون $\pi > e$، $x = \frac{\pi}{e} - 1$ و در نتیجه

$$e^{\frac{\pi}{e} - 1} > 1 + (\frac{\pi}{e} - 1) = \frac{\pi}{e}.$$

بنابراین $e^{\frac{\pi}{e}} > \frac{\pi}{e}e = \pi$ و لذا $e^\pi > \pi^e$.

با توجه به آنچه دیدیم، اگر $f : I \to \mathbb{R}$ در $c \in int(I)$ مشتقپذیر باشد، آنگاه شرط لازم برای آنکه f در c دارای اکسترمم نسبی باشد این است که $f'(c) = 0$.
قضیه زیر محک مناسبی را به کمک مشتق های مراتب بالاتر برای تعیین ماکسیمم و مینیمم نسبی بودن تابع در نقطه c، بدست می دهد.

قضیه ۱۱.۴.۴. *فرض کنید I یک فاصله و x_0 نقطه درونی آن باشد. فرض کنید $n \geq 2$، مشتقات $f', \cdots, f^{(n)}$ موجود و در یک همسایگی x_0 پیوسته باشند. اگر*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

و $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. آنگاه

الف) اگر n زوج و $f^{(n)}(x_0) > 0$ آنگاه f در x_0 مینیمم نسبی دارد.

ب) اگر n زوج و $f^{(n)}(x_0) < 0$ آنگاه f در x_0 ماکسیمم نسبی دارد.

ج) اگر n فرد باشد آنگاه f در x_0 نه ماکسیمم دارد و نه مینیمم.

اثبات. قضیه تیلور را در نقطه x_0 بکار ببرید، در این صورت برای $x \in I$ داریم

$$f(x) = P_{n-1}(x) + R_{n-1}(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n,$$

که c نقطه ای بین x و x_0 است. چون $f^{(n)}(x)$ پیوسته است، $f^{(n)}(x_0) \neq 0$، نتیجه می دهد که در یک همسایگی U شامل x_0، $f^{(n)}(x)$ و $f^{(n)}(x0)$ هم علامت هستند.

الف) اگر n زوج و $f^{(n)}(x_0) > 0$ باشد، آنگاه برای هر $x \in U$، داریم $f^{(n)}(c) > 0$ و $(x - x_0)^n \geq 0$ لذا $R_{n-1}(x) \geq 0$. در نتیجه $f(x) \geq f(x_0)$ برای هر $x \in U$. پس f در x_0 مینیمم نسبی دارد.

ب) مشابه قسمت قبل استدلال می شود.

ج) اگر n فرد باشد، آنگاه $(x - x_0)^n > 0$ اگر $x > x_0$ و $(x - x_0)^n < 0$ اگر $x < x_0$. در نتیجه اگر $x \in U$، $R_{n-1}(x)$ در دو طرف x_0 دارای علامات مثبت و منفی خواهد بود و این نتیجه می دهد f در x_0 اکسترمم نسبی ندارد. $\square$

۵.۱۱ توابع محدب

مفهوم تحدب و مفاهیم مرتبط با آن نقش مهمی را در بعضی از گرایش های ریاضی بازی می کند، بویژه در بهینه سازی. در این بخش نگاهی مختصر به توابع محدب یک متغیره و رابطه آن با مشتقپذیری می نماییم.

تعریف ۱.۵.۱۱. *فرض کنید I زیر فاصله ای از $\mathbb{R}$ باشد. تابع $f : I \to \mathbb{R}$ روی I محدب نامیده می شود اگر برای هر $t \in [0, 1]$ و هر $x_1, x_2 \in I$ داشته باشیم:*

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

قضیه ۲.۵.۱۱. *فرض کنید I یک فاصله باز و $f : I \to \mathbb{R}$ دو بار مشتقپذیر باشد. آنگاه f محدب است اگر و تنها اگر $f''(x) \geq 0$ روی I.*

اثبات. $(\Rightarrow)$ چون f دو بار مشتقپذیر است لذا

$$f''(a) = lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

برای هر $a \in I$. برای $a \in I$، h را به گونه ای اختیار می کنیم تا $a + h$ و $a - h$ در I واقع شوند. در این صورت $a = \frac{1}{2}((a+h) + (a-h))$، و چون f محدب است داریم

$$f(a) \leq \frac{1}{2}f(a+h) + \frac{1}{2}f(a-h).$$

پس $f(a+h) - 2f(a) + f(a-h) \geq 0$ و این حکم را نتیجه می دهد.

$(\Leftarrow)$ برای $x_1, x_2 \in I$ قضیه تیلور را بکار می بریم. برای $t \in (0, 1)$، $x_0 = (1-t)x_1 + tx_2$ قرار می دهیم. در نتیجه

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2}f''(c_1)(x_1 - x_0)^2,$$

در یک نقطه c_1 بین x_0 و x_1، و با نقطه ای چون c_2 بین x_0 و x_2 داریم

$$f(x_2) = f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) + \frac{1}{2}f''(c_2)(x_2 - x_0)^2.$$

اگر $f''^{(x)} \geq 0$ روی I آنگاه

$$R = \frac{1}{2}(1-t)f''(c_1)(x_1 - x_0)^2 + \frac{1}{2}(t)f''(c_2)(x_2 - x_0)^2 \geq 0$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}(1-t)f(x_1)+tf(x_2) &= f(x_0)+f'(x_0)((1-t)x_1+tx_2-x_0)\\ &+ \frac{1}{2}f''(c_1)(x_1-x_0)^2+\frac{1}{2}(t)f''(c_2)(x_2-x_0)^2\\ &= f(x_0)+R\\ &\geq f(x_0)=f((1-t)x_1+tx_2).\end{aligned}$$

بنابراین f تابعی محدب روی I است. □

۶.۱۱ مشتق توابع برداری

تعریف مشتق که در ابتدای این فصل برای توابع یک متغیره حقیقی مقدار بیان شد را می توان بدون هیچگونه تغییری برای توابع مختلط مقدار و یا برای توابع برداری روی فاصله (a,b) تعریف نمود. اگر $f_1,\cdots,f_n$ توابع مولفه ای تابع برداری $f:(a,b)\to\mathbb{R}^n$ باشند، یعنی $f=(f_1,\cdots,f_n)$، در این صورت به راحتی دیده می شود که f در نقطه t مشتقپذیر است اگر وتنها اگر f_iها در t برای $i=1,\cdots,n$ مشتقپذیر باشند. در این صورت داریم

$$f'(t)=(f_1'(t),\cdots,f_n'(t)).$$

می بایست توجه داشت که قضیه مقدار میانگین برای توابع برداری درست نیست و برای توابع مختلط مقدار قاعده هوپیتال درست نیست.

مثال ۱.۶.۱۱. *الف) برای $x\in\mathbb{R}$، $f(x)=e^{ix}=cosx+isinx$ تابعی مشتقپذیر است و $f'(x)=ie^{ix}$. به وضوح روی $[0,2\pi]$ رابطه زیر برای هر $c\in[0,\pi]$ برقرار نیست،*

$$f(2\pi)-f(0)=f'(c)(2\pi-0).$$

بنابراین قضیه مقدار میانگین برای توابع برداری برقرار نیست.

ب) روی فاصله $(0,1)$، تابع $f(x)=x$ و تابع $g(x)=x+x^2e^{\frac{i}{x^2}}$ را در نظر بگیرید. چون $|e^{it}|=1$ به راحتی دیده می شود که

$$lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

از طرفی $g\prime(x) = ۱ + (۲x - \frac{۲i}{x})e^{\frac{i}{x^۲}}$ برای $x \in (\circ, ۱)$. در نتیجه
$$|g(x)| \geq |۲x - \frac{۲i}{x}| - ۱ \geq \frac{۲}{x} - ۱.$$
بنابراین
$$|\frac{f'(x)}{g'(x)}| = |\frac{۱}{g'(x)}| \leq \frac{x}{۲ - x},$$
و لذا $lim_{x\to\circ}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \circ$. *پس برای توابع مختلط مقدار قاعده هوپیتال برقرار نیست.*

با این وجود شکل ضعیفی از قضیه مقدار میانگین برای توابع برداری برقرار است.

قضیه ۲.۶.۱۱. *فرض کنید* $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *تابعی پیوسته و* f *روی* (a,b) *مشتقپذیر باشد. آنگاه* $c \in (a,b)$ *وجود دارد که*
$$|f(b) - f(a)| \leq (b-a)|f'(c)|.$$

اثبات. تابع $\phi(t) = (f(b) - f(a)) \circ f(t)$ را روی $[a,b]$ در نظر بگیرید و قضیه مقدار میانگین را برای آن بکار ببرید. $\square$

تمرین

۱- اگر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در $c \in \mathbb{R}$ مشتقپذیر باشد آنگاه داریم
$$f'(c) = lim_{n\to\infty} n(f(c + \frac{۱}{n}) - f(c)).$$
مثالی ارایه دهید که وجود حد دنباله ای، وجود مشتق را نتیجه ندهد.

۲- فرض کنید $f : I \to \mathbb{R}$ در $c \in I$ مشتقپذیر باشد. ثابت کنید برای هر $\epsilon > \circ$، $\delta > \circ$ وجود دارد که برای هر $u, v \in I$ خواهیم داشت:
$$(c-\delta < u \leq c \leq v < c+\delta \Longrightarrow |f(v)-f(u)-(v-u)f'(c)| \leq \epsilon(v-u)).$$

۳- فرض کنید $a_۱, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$، f را روی $\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \sum_{i=۱}^{n}(x - a_i)^۲$ در نظر بگیرید. مینیمم تابع f را بیابید.

۴- فرض کنید $a > b > 0$ و $n \geq 2$ عددی طبیعی باشد. ثابت کنید
$$a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}} < (a-b)^{\frac{1}{n}}.$$

(راهنمایی: نشان دهید تابع $f(x) = x^{\frac{1}{n}} - (x-1)^{\frac{1}{n}}$ برای $x \geq 1$ نزولی است. سپس f را در ۱ و $\frac{a}{b}$ محاسبه کنید).

۵- به کمک قضیه مقدار میانگین نشان دهید برای $x > 1$ داریم:
$$\frac{x-1}{x} < Lnx < x-1.$$

۶- فرض کنید $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ روی $(0, , +\infty)$ مشتقپذیر و $lim_{x\to+\infty} f'(x) = b$. در این صورت

الف) برای هر $h > 0$ داریم
$$lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = b.$$

ب) اگر $lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ انگاه $b = 0$.

ج) $lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = b$.

۷- فرض کنید f و g روی $\mathbb{R}$ مشتقپذیر، $f(0) = g(0)$ و برای هر $x \geq 0$ داشته باشیم $f'(x) \leq g'(x)$. نشان دهید برای هر $x \geq 0$ خواهیم داشت $f(x) \leq g(x)$.

۸- می گوییم تابع $f : I \to \mathbb{R}$ بطور یکنواخت مشتقپذیر است اگر برای هر $\epsilon > 0$، $\delta > 0$ موجود باشد که برای هر $x, y \in I$
$$(0 < |x-y| < \delta \Longrightarrow |\frac{f(x) - f(y)}{x-y} - f'(x)| < \epsilon).$$

نشان دهید اگر f بطوریکنواخت روی I مشتقپذیر باشد آنگاه f' روی I پیوسته است.

۹- فرض کنید $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ پیوسته و روی $(0, 2)$ مشتقپذیر باشد. اگر $f(0) = 0$، $f(1) = 1$ و $f(2) = 1$، آنگاه

الف) نشان دهید $c_1 \in (0, 1)$ هست که $f'(c_1) = 1$.

ب) نشان دهید $c_2 \in (1, 2)$ هست که $f'(c_2) = 0$.

ج) نشان دهید $c_3 \in (0, 2)$ هست که $f'(c_3) = 0$.

۱۰- فرض کنید f روی $(0,+\infty)$ مشتقپذیر و $lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))=L$.
نشان دهید $lim_{x\to+\infty}f(x)=L$ و $lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$.
(راهنمایی: $f(x)=\frac{e^x f(x)}{e^x}$).

۱۱- نشان دهید اگر $c>0$، داریم

$$lim_{x\to c}\frac{x^c-c^x}{x^x-c^c}=\frac{1-Lnc}{1+Lnc}.$$

۱۲- فرض کنید f روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) دو بار مشتقپذیر باشد. اگر گراف تابع f پاره خطی که $(a,f(a))$ و $(b,f(b))$ را بهم وصل می کند در نقطه ای چون $(z,f(z))$ قطع نماید، آنگاه $c\in(a,b)$ هست که $f''(c)=0$.

۱۳- فرض کنید

$$g_a(x)=\begin{cases} x^a sin(\frac{1}{x}) & x\neq 0 \\ 0 & x=0. \end{cases}$$

مقداری برای a بیابید که

الف) g_a روی $\mathbb{R}$ پیوسته اما g'_a روی $[0,1]$ کراندار نباشد.

ب) g_a روی $\mathbb{R}$ مشتقپذیر، g'_a پیوسته اما در مبدا مشتقپذیر نباشد.

ج) g''_a روی $\mathbb{R}$ موجود اما g''_a در مبدا پیوسته نباشد.

۱۴- نقطه x را نقطه ثابت f گوییم اگر $f(x)=x$.
نشان دهید که اگر f روی یک فاصله مشتقپذیر باشد و $f'(x)\neq 1$، آنگاه f حداکثر یک نقطه ثابت خواهد داشت.

۱۵- فرض کنید $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ دو بار مشتقپذیر باشد و $g''(x)>0$ روی $[0,1]$.
اگر $g(0)>0$ و $g(1)=1$، نشان دهید $d\in(0,1)$ وجود دارد که $g(d)=d$ اگر و تنها اگر $g'(1)>1$.

۱۶- اگر $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ در $c\in(a,b)$ مشتقپذیر باشد و $g'(c)\neq 0$، آنگاه همسایگی $V\subseteq(a,b)$ از c هست که $g(x)\neq g(c)$ برای هر $x\in V$.

فصل ۱۲

فضاهای متریک تام

فضاهای متریک تام از اهمیت زیادی برخوردارند، چرا که همگرایی دنباله های کشی را تضمین می نماید. با این وجود با فضاهایی برخورد می کنیم که فضای متریک تام نیستند، به عبارتی هر دنباله کشی لزوما همگرا نیست. حال اگر بطور مناسبی یک فضای متریک که یک فضای متریک تام نیست را در یک فضای متریک تام بنشانیم، تضمین می شود که هر دنباله کشی همگراست. این فصل به این مهم می پردازد.

۱.۱۲ توابع نقطه‌ای و توابع شبه نقطه‌ای

یک متر روی مجموعهٔ X روی $X \times X$ تعریف می‌شود و نه روی X. با این وجود، بعضی مترها، به عنوان مثال متر اقلیدسی روی $\mathbb{R}$، با یک تابع روی X معین می‌شود. برای هر فضای متریک وجود چنین تابعی قابل پیش‌بینی نیست، اما ما به کمک توابع نقطه‌ای تا حدودی این نقیصه را مرتفع می‌سازیم.

تعریف ۱.۱.۱۲. *فرض کنید (X, d) فضایی متریک و $a \in X$ باشد. در این صورت تابع $\delta_a : X \longrightarrow [0, +\infty)$ را با ضابطهٔ $\delta_a(b) = d(a, b)$ را تابع نقطه‌ای در $a \in X$ می‌نامیم. مجموعهٔ $\{\delta_a : a \in X\}$ را با $\delta(X)$ نمایش می‌دهیم.*

قضیه ۲.۱.۱۲. *فرض کنید (X,d) فضایی متریک باشد. آنگاه تابع*

$$a \mapsto \delta_a : X \to \delta(X)$$

تابعی دوسویی است.

اثبات. به عنوان تمرین. □

مثال ۳.۱.۱۲. *فرض کنید $n \in \mathbb{N}$. در $\mathbb{R}^n$ متر اقلیدسی d را می‌توانیم با $\delta_\circ$ نیز بیان کنیم، در واقع برای هر $a,b \in \mathbb{R}^n$ داریم:*

$$d(a,b) = \delta_\circ(b-a).$$

همچنین برای یک $x \in \mathbb{R}^n$؛ می‌توان نوشت

$$d(a,b) = \delta_x(x-(b-a)).$$

البته می‌بایست توجه داشت که ساختار جبری $\mathbb{R}^n$ در تعاریف فوق، نقش مهمی در ارائه این مثال داشته است و این کار در هر فضای متریک دلخواه لزوماً برقرار نیست.

قضیه ۴.۱.۱۲. *فرض کنید (X,d) فضای متریک باشد و $a \in X$. آنگاه*

الف) برای هر $x,y \in X$ داریم:

$$\delta_a(x) - \delta_a(y) \leq d(x,y) \leq \delta_a(x) + \delta_a(y).$$

ب) $\delta_a(a) = \circ$.

اثبات. واضح است. □

در یک فضای متریک (X,d) تابع $u : X \longrightarrow [\circ, +\infty)$ را تابع شبه نقطه‌ای روی X می‌نامیم. اگر و تنها اگر برای هر $a,b \in X$ داشته باشیم:

$$u(a) - u(b) \leq d(a,b) \leq u(a) + u(b).$$

به وضوح $u \in \delta(X)$ اگر و تنها اگر u تابع شبه نقطه‌ای بوده و $\circ \in u(X)$. در این صورت نقطهٔ یکتای $a \in X$ وجود دارد که $u \in \delta_a$.

۲.۱۲ نزدیک‌ترین نقاط

در فضای متریک X، فاصلهٔ نقطهٔ $x \in X$ از یک زیرمجموعهٔ $A \subseteq X$ عبارتست از:

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}.$$

تحت چه شرایطی $y \in A$ وجود دارد که $d(x, y) = d(x, A)$؟ برای ما مهم است که بدانیم چه خاصیتی از A وجود چنین نقطه‌ای را تضمین می‌نماید. این نقطه را در صورت وجود، نزدیکترین نقطهٔ A به x می‌نامیم.

تعریف ۱.۲.۱۲. فرض کنید (X, d) *فضایی متریک،* $A \subseteq X$ *و* $x \in X$ *باشد.* $y \in A$ *را نزدیک‌ترین نقطهٔ* A *به* x *در* X *می‌نامیم اگر و تنها اگر*

$$d(x, y) = d(x, A).$$

مثال ۲.۲.۱۲. *الف) نزدیک‌ترین نقطه لزوماً وجود ندارد. به عنوان مثال در فضای* $(\mathbb{R}, |.|)$، $A = (۰, ۱)$ *و* $x = ۲$ *اختیار نمایید. در این صورت* $y \in A$ *وجود ندارد که*

$$|x - y| = d(x, A).$$

ب) نزدیک‌ترین نقطه در صورت وجود، منحصر بفرد نیست. به عنوان مثال در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۲$، $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{R}^۲ : |z| = ۱\}$. *قرار دهید* $a = (۰, ۰)$. *در این صورت برای هر* $y \in \mathbb{T}$ *نزدیک‌ترین نقطه به* a *است.*

قضیه ۳.۲.۱۲. *فرض کنید* (X, d) *فضای متریک ناتهی باشد. آنگاه گزاره‌های زیر معادلند:*

الف) برای هر نقطه x *در هر ابرفضای* X، X *دارای نزدیک‌ترین نقطه به* x *است.*

ب) هر تابع شبه نقطه‌ای روی X، *مینیمم خود را روی* X *اختیار می‌کند.*

اثبات. فرض کنید (Y, d) ابرفضایی برای X و $y \in Y$ باشد. آنگاه نگاشت $x \mapsto d(x, y)$ شبه نقطه‌ای روی X است. اگر این تابع مینیمم خود را روی X اختیار نماید آنگاه بایستی $w \in X$ موجود باشد که

$$d(y, w) = \inf\{d(y, x) : x \in X\} = d(y, X)$$

بنابراین w نزدیک‌ترین نقطهٔ X به z خواهد بود.

به عکس؛ فرض کنید u تابعی شبه نقطه‌ای روی X باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که اگر X در ب) صدق نماید؛ آنگاه u مینیمم خود را روی X اختیار می‌نماید. اگر ۰ در برد u واقع شود آنگاه به وضوح u مینیمم خود را روی X اختیار می‌نماید. بنابراین فرض می‌کنیم چنین نباشد. $w \notin X$ اختیار می‌کنیم، فرض کنید $X' = X \cup \{w\}$ و d را به $X' \times X'$ به صورت زیر توسیع دهید

$$d(w, w) = 0$$

و

$$d(x, w) = d(w, x) = u(x) \neq 0$$

برای هر $x \in X$. به وضوح d یک متر روی X' است. اگر نقطهٔ $p \in X$ نزدیک‌ترین نقطه به $w \in X'$ باشد آنگاه

$$u(p) = d(w, p) = d(w, X) = \inf\{d(w, x) : x \in X\},$$

لذا u مینیمم خود را در نقطهٔ $p \in X$ اختیار می‌نماید. $\square$

قضیه ۴.۲.۱۲. *فرض کنید (X, d) یک ابرفضای متریک برای $(\mathbb{R}, |.|)$ باشد. فرض کنید $a \in X$. آنگاه نزدیک‌ترین نقطهٔ $\mathbb{R}$ به $a \in X$ وجود دارد.*

اثبات. فرض کنید $t = d(a, \mathbb{R})$. برای هر $r > 0$، فرض کنید

$$S_r = \{x \in \mathbb{R} : d(x, a) \leq t + r\}.$$

به وضوح برای هر $r > 0$، $t \in S_r$ و لذا $S_r \neq \emptyset$. قرار می‌دهیم: $b_r = \sup S_r$ و $a_r = \inf S_r$. در نتیجه $\operatorname{diam} S_r \leq ۲(t + r)$. از آنجائیکه $\operatorname{diam} S_r = b_r - a_r$ بنابراین کراندار بودن $\operatorname{diam} S_r$ نتیجه می‌دهد که $a_r, b_r \in \mathbb{R}$. با توجه به اینکه $d(a_r, S_r) = 0$، خواهیم داشت

$$d(a_r, a) \leq t + r.$$

حال $\varepsilon > 0$ را اختیار کنید و فرض کنید $w = \sup\{a_r : r > 0\}$. در این صورت برای هر $s \geq r > 0$ داریم:

$$a_s \leq a_r.$$

پس $w \in \mathbb{R}$ و در نتیجه
$$w = \sup\{a_r : r \in (0, \frac{\varepsilon}{2})\}.$$
بنابراین با توجه به تعریف سوپریمم، $p \in (0, \frac{\varepsilon}{2})$ هست که
$$w - a_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$
آنگاه خواهیم داشت:
$$t \leq d(w,a) \leq d(a,a_p) + d(a_p,w) < t + p + \frac{\varepsilon}{2} < t + \varepsilon,$$
و چون رابطه برای هر $\varepsilon > 0$ برقرار است بنابراین
$$d(w,a) = t,$$
واین حکم را اثبات می‌کند. □

یکی از موضوعات مورد بحث، این است که آیا فضایی متریک وجود دارد که در هر ابر فضای متریک مجموعه‌ای باز و یا بسته باشد؟ پاسخ سؤال اول منفی است. اما پاسخ سؤال دوم به معرفی فضاهایی خاص منجر می‌شود. خواهیم دید که فضای متریکی که در هر ابرفضای خود بسته باشد، یک فضای تام است.

قضیه ۵.۲.۱۲. *فرض کنید (X,d) یک ابر فضای متریک $(\mathbb{R}, |.|)$ باشد. آنگاه $\mathbb{R}$ زیرمجموعهٔ بستهٔ X است.*

اثبات. فرض کنید $a \in cl_X\mathbb{R}$. آنگاه $d(a,\mathbb{R}) = 0$ و لذا با توجه به قضیه ۴.۲.۱۲، $w \in \mathbb{R}$ هست که $d(a,w) = 0$ بنابراین $a = w \in \mathbb{R}$. از آنجائیکه a عضو دلخواهی از $cl_X\mathbb{R}$ است نتیجه می‌شود که $\mathbb{R}$ در X بسته است. □

۳.۱۲ قضیه اشتراکی کانتور

هرگاه $\mathcal{A}$ یک زنجیر از زیرمجموعه‌های فضای متریک X باشد، ممکن است $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$ تهی باشد. به عنوان مثال $\bigcap_{r>0}(0,r)$ که اشتراکی از فواصل باز می‌باشند، مجموعه‌ای تهی است. اما یک شرط ساده این امکان را فراهم می‌آورد که اشتراک اعضاء یک زنجیر تهی نشود. قضیه زیر شاهدی است براین مدعا:

قضیه ۱.۳.۱۲. *فرض کنید (X, d) فضایی متریک و $\mathcal{A}$ یک زنجیر از زیرمجموعه‌های ناتهی X باشد که*

$$\inf\{\text{diam } A : A \in \mathcal{A}\} = \circ.$$

فرض کنید $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} \bar{A} = \emptyset$. آنگاه برای $X \; z \notin$ می‌توان d را به یک متر روی $X' = X \cup \{z\}$ توسیع داد که

$$cl_{X'}(A) = cl_X(A) \cup \{x\},$$

برای هر $A \in \mathcal{A}$ و بنابراین

$$\bigcap_{A\in\mathcal{A}} cl_{X'} A = \{z\}.$$

اثبات. با تعریف زیر، d را به $X' \times X'$ توسیع می‌دهیم:

$$d(z, z) = \circ.$$

$$d(x, z) = d(z, x) = \sup\{d(x, A) : A \in \mathcal{A}\}$$

از آنجائیکه به ازای یک $A \in \mathcal{A}$، $x \notin \bar{A}$ پس $d(x, z) > \circ$ برای هر $x \in X$. از طرفی $d(z, x) < \infty$، به این منظور $A \in \mathcal{A}$ اختیار می‌کنیم که $\text{diam } A < \infty$. آنگاه با توجه به اینکه

$$d(x, B) \leq d(x, A) + \text{diam } A,$$

برای هر $B \in \mathcal{A}$. زیرا $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$. بنابراین با توجه به تعریف

$$d(x, z) \leq d(x, A) + \text{diam } A < \infty.$$

در نتیجه d تابعی متقارن و حقیقی است. حال فرض کنید $\varepsilon > \circ$ و $C \in \mathcal{A}$ با $\text{diam } C < \varepsilon$ اختیار شده باشد. فرض کنید $a, b \in X$ دلخواه اختیار شوند. در این صورت

$$\begin{aligned} d(a, b) \leq& d(a, C) + \text{diam } C + d(b, C) \\ \leq& d(a, z) + \varepsilon + d(z, b), \end{aligned}$$

و چون $\varepsilon > \circ$ دلخواه است؛ پس

$$d(a, b) \leq d(a, z) + d(z, b).$$

به همین ترتیب

$$d(a, A) \leq d(a, b) + d(b, A) \leq d(a, b) + d(b, z),$$

برای هر $A \in \mathcal{A}$. لذا با توجه به تعریف

$$d(a, z) \leq d(a, b) + d(b, z).$$

این دو محاسبه نشان می‌دهد که d در نامساوی مثلثی صدق می‌نماید. لذا d یک متر روی X' است. حال $A \in \mathcal{A}$ را دلخواه اختیار کنید، از آنجائیکه $\mathcal{A}$ یک زنجیر است. برای هر $C \in \mathcal{A}$، $A \cap C$ یا A است و یا C و لذا ناتهی است. فرض کنید $C \in \mathcal{A}$ و $\operatorname{diam} C < \varepsilon$ و $x \in A \cap C$ باشد. آنگاه برای هر $B \in \mathcal{A}$، $B \cap C$ از C و B کوچک‌تر است و چون $x \in C$ بنابراین

$$d(x, B) \leq d(x, B \cap C) \leq \operatorname{diam} C < \varepsilon,$$

و چون $B \in \mathcal{A}$ دلخواه است به کمک تعریف نتیجه می‌شود که

$$d(x, z) \leq \varepsilon.$$

از آنجائیکه $x \in A$ بنابراین $d(z, A) \leq \varepsilon$. چون $\varepsilon > ۰$ دلخواه است بنابراین

$$d(z, A) = ۰$$

لذا

$$cl_{X'}(A) = cl_X(A) \cup \{z\},$$

و چون A دلخواه است حکم نتیجه می‌شود. $\square$

شرطی که روی قطر اعضاء زنجیر $\mathcal{A}$ تحمیل شده، تضمین می‌کند که

$$\bigcap \{\bar{A} : A \in \mathcal{A}\}$$

حداکثر دارای یک عضو باشد. همچنین تهی بود آن به کمک قضیه قبل نتیجه می‌دهد که فضای X در حداقل یک ابرفضا بسته نیست. قضیه زیر عکس این موضوع را به تصویر می‌کشد.

قضیه ۲.۳.۱۲. *فرض کنید (X, d) فضایی متریک باشد. آنگاه گزاره‌های زیر معادل هستند:*

الف) X در هر ابرفضای متریک شامل X، بسته است.

ب) هر زنجیر $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های بسته و ناتهی X که
$$\inf\{\mathrm{diam}\, A : A \in \mathcal{A}\} = \circ$$
دارای مقطع تک عضوی است.

اثبات. فرض کنید الف) برقرار باشد؛ هرگاه $\mathcal{A}$ یک زنجیر از زیرمجموعه‌های بسته و ناتهی X باشد که
$$\inf\{\mathrm{diam}\, A : A \in \mathcal{A}\} = \circ,$$
آنگاه با توجه به قضیه قبل، فضای متریک X' که ابرفضای X است، وجود دارد که
$$\bigcap_{A\in\mathcal{A}} cl_{X'}(A) = \{z\}$$
چون X در الف) صدق می‌نماید و $d(z, X) = \circ$ پس $x \in X$ هست که $d(z, x) = \circ$ و این حکم را نتیجه می‌دهد.

به عکس؛ فرض کنید Y ابرفضای متریک X باشد و X بسته نباشد. فرض کنید $z \in cl_Y(X) - X$. برای هر $r > \circ$، فرض کنید
$$B_r = cl_X(\{x \in X : d(x, z) < r\}).$$
به وضوح $\{B_r : r > \circ\}$ یک زنجیر از زیرمجموعه‌های بسته ناتهی از X است، $\mathrm{diam}\, B_r \leq ۲r$ برای هر $r > \circ$،
$$\bigcap_{r>\circ} B_r = \emptyset,$$
و این تناقض است. □

مثال ۳.۳.۱۲. *در قضایای قبل شرط روی قطرهای مجموعه‌ها لازم است. به عنوان مثال $\{[n, +\infty) : n \in \mathbb{N}\}$ یک زنجیر از مجموعه‌های بسته ناتهی در $\mathbb{R}$ است. با توجه به اینکه نشان داده شد $\mathbb{R}$ در هر ابرفضای متریک بسته است می‌بایست اشتراک اعضاء هر زنجیر از مجموعه‌های بسته ناتهی، ناتهی باشد در حالیکه*
$$\bigcap_{n=۱}^{\infty} [n, +\infty) = \emptyset.$$

در اینجا ما نقاط مجازی را تعریف می‌نمائیم. در واقع آنها توابع شبه نقطه‌ای هستند که به $\circ$ نزدیک می‌شوند اما آن را اختیار نمی‌کنند. تعریف زیر این نقاط را دقیق‌تر توصیف می‌نماید.

تعریف ۴.۳.۱۲. *فرض کنید (X,d) فضایی متریک و $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد. u را نقطهٔ مجازی X می‌نامیم اگر و تنها اگر u در شرایط زیر صدق نماید:*

الف) برای هر $a,b \in X$ داشته باشیم:

$$u(a) - u(b) \leq d(a,b) \leq u(a) + u(b)$$

ب) $\inf u(X) = \circ$.

ج) $\circ \notin u(X)$.

مجموعهٔ همهٔ نقاط مجازی فضای متریک X را با $vp(X)$ نمایش می‌دهیم.

به راحتی دیده می‌شود که اگر u یک نقطهٔ مجازی فضای متریک X باشد، در این صورت برای هر $a,b \in X$ داریم:

$$|u(a) - u(b)| \leq d(a,b).$$

قضیه ۵.۳.۱۲. صورت های معادل فضای متریک تام: *فرض کنید (X,d) فضایی متریک باشد. آنگاه گزاره‌های زیر هم‌ارزند:*

الف) X دارای نقطه مجازی نیست.

ب) X در هر ابرفضای متریک خود، بسته است.

ج) X فضای متریک تام است.

د) برای هر زنجیر $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های ناتهی و بسته X که

$$\inf\{\operatorname{diam} A : A \in \mathcal{A}\} = \circ,$$

آنگاه $\bigcap \mathcal{A}$ تک عضوی است.

ه) برای هر دنبالهٔ $\{F_n\}$ از زیرمجموعه‌های ناتهی و بسته X که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $F_{n+1} \subseteq F_n$ باشد اگر $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = \circ$ آنگاه $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ ناتهی است.

اثبات. به عنوان تمرین. $\square$

قضیه ۶.۳.۱۲. *فرض کنید (X,d) و (Y,e) فضاهایی متریک باشند و Y فضایی تام باشد. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای چگال در X باشد و $f:S\longrightarrow Y$ پیوسته یکنواخت باشد. آنگاه تابع پیوسته یکنواخت یکتای $\tilde{f}:X\longrightarrow Y$ وجود دارد که $\tilde{f}|_S=f$.*

اثبات. چون S در X چگال است لذا برای هر $x\in X$ دنباله ای چون $\{s_n\}$ در S یافت می شود که $s_n\to x$. از آنجاییکه $f:S\to Y$ پیوسته یکنواخت است لذا دنباله $\{f(s_n)\}$ در Y دنباله ای کشی است. با توجه به تام بودن Y برای $x\in X$، عنصر $\tilde{f}(x)\in Y$ یافت می شود که $f(s_n)\to f(x)$. تابع $\tilde{f}:X\to Y$ خوش تعریف است. به این معنا که اگر دنباله های $\{t_n\}$ و $\{s_n\}$ در S به $x\in X$ همگرا باشند آنگاه

$$lim_{n\to\infty}f(s_n)=lim_{n\to\infty}f(t_n).$$

با توجه به مفروضات چون $d(s_n,t_n)\to 0$ و f پیوسته یکنواخت است خواهیم داشت $e(f(s_n),f(t_n))\to 0$. حال اگر حدود دنباله های $\{f(s_n)\}$ و $\{f(t_n)\}$ به ترتیب y و z باشند در اینصورت رابطه زیر نتیجه می دهد که $y=z$، یعنی $\tilde{f}:X\to Y$ خوش تعریف است،

$$e(y,z)\leq e(y,f(s_n))+e(f(s_n),f(t_n))+e(f(t_n),z).$$

تابع $\tilde{f}$ تابعی پیوسته است. به این منظور فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله ای در X همگرا به $x\in X$ باشد. در اینصورت دنباله ای چون $\{s_n\}$ در S هست که برای هر $n\in\mathbb{N}$

$$d(s_n,x_n)<\frac{1}{n},\quad e(f(s_n),\tilde{f}(x_n))<\frac{1}{n}.$$

به وضوح $s_n\to x$. حال با توجه به

$$e(\tilde{f}(x),\tilde{f}(x_n))\leq e(\tilde{f}(x),f(s_n))+e(f(s_n),\tilde{f}(x_n))$$

پیوستگی تابع $\tilde{f}$ به راحتی ثابت می شود. بوضوح $f|_S=\tilde{f}$. یکتایی $\tilde{f}$ به سهولت اثبات می‌شود. $\square$

تصویر پیوسته فضای متریک تام، لزوماً تام نیست. به عنوان مثال $(0,+\infty)$ تصویر پیوسته فضای متریک تام $\mathbb{R}$ است و $(0,+\infty)$ فضایی تام نیست.

قضیه ۷.۳.۱۲. *فرض کنید (X,d) و (Y,e) فضاهایی متریک و (X,d) فضای متریک تام باشد. فرض کنید تابع دوسویی $f:X\longrightarrow Y$ موجود باشد که f پیوسته و f^{-1} پیوسته یکنواخت باشند. آنگاه Y فضای متریک تام است.*

اثبات. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای کشی در Y باشد. آنگاه $\{f^{-1}(a_n)\}$ در X کشی است، چون f^{-1} پیوسته یکنواخت است. در نتیجه $x\in X$ هست که $f^{-1}(a_n)\to x$ و لذا $a_n\to f(x)$ و این حکم را نتیجه می‌دهد. □

مثال ۸.۳.۱۲. *الف) فرض کنید $\mathbb{R}^+=[0,+\infty)$. $\mathbb{R}^+$ با متر معمولی القایی از $\mathbb{R}$ فضای متریک تام است. حال تابع $m:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\longrightarrow[0,+\infty)$ را با ضابطهٔ*

$$m(a,b)=|e^a-e^b|$$

در نظر بگیرید. در این صورت $(\mathbb{R}^+,m)$ فضایی متریک است. حال تابع همانی i را از $(\mathbb{R}^+,m)$ به $(\mathbb{R}^+,|.|)$ در نظر بگیرید. آنگاه $|a-b|\leq|e^a-e^b|$ برای هر $a,b\in\mathbb{R}^+$. در نتیجه $(\mathbb{R}^+,m)$ فضای متریک تام است.

ب) $[1,+\infty)$ با متر معمولی القایی از $\mathbb{R}$، تام است. این فضا با متر وارون

$$(a,b)\mapsto\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right|$$

یک فضای متریک تام نیست. زیرا تحت این متر، دنبالهٔ $\{n\}$ در $[1,+\infty)$ کشی است اما همگرا نیست.

۴.۱۲ متر هاسدورف

فرض کنید (X,d) فضایی متریک باشد. فرض کنید $S(X)$ گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های بسته، کراندار و ناتهی از X باشد. فرض کنید $A,B\in S(X)$، در این صورت جداسازی هاسدورف B از A را با

$$d_H^*(B,A)=\sup\{d(b,A):b\in B\}$$

تعریف می‌کنیم. عموماً، $d_H^*(B,A)\neq d_H^*(A,B)$. حال می‌توانیم متر هاسدورف را روی $S(X)$ تعریف کنیم. برای A,B در $S(X)$ تعریف می‌کنیم:

$$d_H(A,B)=\max\{d_H^*(A,B),d_H^*(B,A)\}$$

لم ۱.۴.۱۲. فرض کنید $A, B, C \in S(X)$. در این صورت:

الف) $d_H(A, B) \geq 0$ و $d_H(A, B) = 0$ اگر و تنها اگر $\bar{A} = \bar{B}$.

ب) $d_H(A, B) = d_H(B, A)$.

ج) $d_H(A, B) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B)$.

اثبات. به عنوان تمرین. $\square$

با توجه به لم قبل، $(S(X), d_H)$ یک فضای متریک است.

قضیه ۲.۴.۱۲. *فرض کنید (X, d) فضایی متریک و $(S(X), d_H)$ فضای متریک هاسدورف حاصل از (X, d) باشد. آنگاه $X_0 = \{\{x\} : x \in X\}$ یک کپی ایزومتریک از X در $S(X)$ است که در $S(X)$ بسته است.*

اثبات. فرض کنید $a, b \in X$. در این صورت $d_H(\{a\}, \{b\}) = d(a, b)$. لذا X_0 و X ایزومتریک هستند. حال نشان می‌دهیم X_0 بسته است. فرض کنید $d_H(F, X_0) = 0$ که $F \in S(X)$. لذا برای هر $\varepsilon > 0$، $x \in X$ هست که $d_H(F, \{x\}) < \frac{\varepsilon}{2}$، لذا $d(x, z) < \frac{\varepsilon}{2}$ برای هر $z \in F$. در نتیجه $\operatorname{diam} F \leq \varepsilon$ و چون $\varepsilon > 0$ دلخواه است؛ پس $\operatorname{diam} F = 0$. بنابراین F تک نقطه‌ای است و لذا $F \in X_0$. بنابراین X_0 در $S(X)$ بسته است. $\square$

قضیه ۳.۴.۱۲. *فرض کنید (X, d) فضایی متریک و $(S(X), d_H)$ فضای متریک هاسدورف آن باشد. $(S(X), d_H)$ فضای متریک تام است اگر و تنها اگر (X, d) فضای متریک تام باشد.*

اثبات. فرض کنید X فضای متریک تام باشد و $\{A_n\}$ دنباله‌ای کشی در $S(X)$ باشد. فرض کنید $m_0 = 1$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$، m_n را کوچکترین عدد طبیعی بزرگ‌تر از m_{n-1} باشد که جملهٔ نظیر آن از $\{A_n\}$ در همسایگی باز به شعاع $\frac{1}{2^{n+1}}$ در $(S(X), d_H)$ واقع گردد. به ویژه؛ $d_H(A_{m_n}, A_{m_{n+1}}) < \frac{1}{2^n}$ برای هر $n \in \mathbb{N}$.
فرض کنید

$$Z = \{z \in X | \text{حد دنبالهٔ } a_n \text{ باشد که } a_n \in A_{m_n} \text{ برای هر } n \ z\}.$$

اگر $\{n \in \mathbb{N} | A_n = \bar{Z}\}$ نامتناهی باشد آنگاه $\{A_n\}$ دارای یک زیردنبالهٔ ثابت است و لذا دنبالهٔ کشی $\{A_n\}$ همگراست. بنابراین فرض می‌کنیم که مجموعه مذکور متناهی باشد. برای هر $\varepsilon > ۰$، $k \in \mathbb{N}$ هست که $\frac{۱}{۲^k} < \varepsilon$ و $A_{m_n} \neq \bar{Z}$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ که $n \geq k$. فرض کنید $w \in A_{m_k}$ حال دنبالهٔ $\{C_n\}$ را که $C_۱ = \{w\}$ و $C_{n+۱} = A_{m_{k+n}}$ برای هر $n \in \mathbb{N}$، در نظر می‌گیریم. برای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر $u \in C_n$، $v \in C_{n+۱}$ هست که $d(u,v) < \frac{۱}{۲^{k+n-۱}}$ زیرا $d_H(A_{m_{k+n-۱}}, A_{m_{k+n}}) < \frac{۱}{۲^{k+n-۱}}$. بنابراین دنبالهٔ $\{c_n\}$ که $c_n \in C_n$ و $d(c_n, c_{n+۱}) < \frac{۱}{۲^{k+n-۱}}$ وجود دارد که در X کشی است و چون X تام است پس $\ell \in X$ هست که $c_n \to \ell$. بنابراین $\ell \in Z$ و $Z \neq \emptyset$ حال چون $C_۱ = \{w\}$ خواهیم داشت

$$d(w, \bar{z}) \leq d(w, \ell) \leq \sum_{n=۱}^{\infty} d(c_n, c_{n+۱}) \leq \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۲^{k+n-۱}} = \frac{۱}{۲^{k-۱}}$$

چون w عنصری دلخواه در A_{m_k} بود، لذا

$$\sup\{d(x, \bar{z}) | x \in A_{m_k}\} \leq \frac{۱}{۲^{k-۱}} < \varepsilon$$

بعلاوه، برای هر $u \in \bar{Z}$، $z \in Z$ هست که $d(z,u) < \frac{\varepsilon}{۴}$ و دنبالهٔ $\{b_n\}$ که $b_n \in A_{m_n}$، برای هر $n \in \mathbb{N}$، وجود دارد که $b_n \to z$. لذا $j > k$ هست که $d(z, b_j) < \frac{\varepsilon}{۴}$. چون $j > k$، بنابراین $d_H(A_{m_j}, A_{m_k}) < \frac{۱}{۲^k}$ و لذا $v \in A_{m_k}$ بقسمی موجود است که $d(b_j, v) < \frac{۱}{۲^k} < \frac{\varepsilon}{۲}$. آن نتیجه می‌دهد که

$$d(u,v) \leq d(u,z) + d(z, b_j) + d(b_j, v) < \varepsilon,$$

و بنابراین $d(u, A_{m_k}) < \varepsilon$، که چون u عنصری دلخواه در $\bar{Z}$ است، خواهیم داشت:

$$\sup\{d(x, A_{m_k}) : x \in \bar{Z}\} \leq \varepsilon$$

چون A_{m_k} کراندار است، بنابراین $\bar{Z}$ نیز کراندار است و در نتیجه $\bar{Z} \in S(X)$. نامساوی‌های آخری نتیجه می‌دهند که

$$d_H(\bar{Z}, A_{m_k}) \leq \varepsilon$$

و چون $A_{m_k} \neq \bar{Z}$،

$$\alpha = \inf\{d_H(\bar{Z}, A_n) : A_n \neq \bar{Z}\} \leq \varepsilon$$

از آنجاییکه ε دلخواه است بنابراین $\alpha = \circ$. چون $\{A_n\}$ دنباله‌ای کشی در $S(X)$ است، و $\alpha = \circ$، بنابراین دنبالهٔ $\{A_n\}$ در $S(X)$ همگراست. پس $S(X)$ فضایی تام است.

به عکس؛ اگر $S(X)$ فضایی تام باشد. آنگاه $\{\{x\} : x \in X\}$ با توجه به قضیه ۲.۳.۱۲ بسته است و چون $S(X)$ تام است پس $\{\{x\} : x \in X\}$ زیرفضایی تام از $S(X)$ است. بنابراین X تام است. $\square$

۵.۱۲ قضیه بیر

فضای متریک تام دارای خاصیت جالبی است، که هر مقطع شمارا از زیرمجموعه‌های باز و چگال، ناتهی است. در آنالیز مدرن این خاصیت کاربردهای فراوانی دارد. عموماً اشتراک دو مجموعه چگال، ممکن است تهی باشد. به عنوان مثال $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ چگال هستند اما مقطع آنها تهی است.

قضیه ۱.۵.۱۲. *فرض کنید (X, d) فضایی متریک و $\mathcal{U}$ گردایه‌ای متناهی از زیرمجموعه‌های باز و چگال در X باشد. آنگاه $\bigcap \mathcal{U}$ زیرمجموعه باز و چگال در X است.*

اثبات. به عنوان تمرین. $\square$

مثال ۲.۵.۱۲. *اشتراک گردایهٔ ناشمارا از مجموعه‌های باز چگال، لزوماً ناتهی نیست. به عنوان مثال، به $\{\mathbb{R} - \{r\} : r \in \mathbb{R}\}$ توجه نمایید.*

تعریف ۳.۵.۱۲. در یک *فضای متریک* (X, d)، $A \subseteq X$ *را هیچ جا چگال گوئیم اگر $(\bar{A})^\circ = \emptyset$. فضای متریک X را از رسته اول گوئیم اگر X ، اجتماع شمارایی از مجموعه‌های هیچ جا چگال بباشد، در غیر این صورت آن را از رستهٔ دوم می‌نامیم. فضای متریک X را یک فضای متریک بیر می‌نامیم اگر مقطع هر گردایه‌ی شمارا از زیرمجموعه‌های باز و چگال در X ، در X چگال باشد.*

قضیه ۴.۵.۱۲. قضیه بیر : *هر فضای متریک تام، یک فضای بیر است.*

اثبات. فرض کنید X فضای متریک تام و $\mathcal{C}$ گردایه‌ای شمارا از زیرمجموعه‌های باز چگال در X باشد. اگر $\mathcal{C}$ متناهی باشد حکم واضح است. در غیر این صورت فرض کنید $\mathcal{C}$ نامتناهی باشد. فرض کنید W مجموعه ناتهی و باز دلخواهی در X باشد. نشان می‌دهیم $W \cap (\cap\mathcal{C})$ ناتهی است. این به طور قطع برقرار است اگر $W \cap iso(X) \neq \emptyset$ چون

$$iso(X) \subseteq \cap\mathcal{C}.$$

بنابراین فرض کنید W شامل نقاط تنهای X نباشد. فرض کنید $\{U_n\}$ اعضاء $\mathcal{C}$ باشد که اندیس گذاری شده‌اند. قرار دهید $V_\circ = X$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$V_n = \cap\{U_i : i = ۱, ۲, \cdots, n\}$$

فرض کنید $\mathcal{L}$ گردایهٔ همهٔ همسایگی‌های باز مشمول در W باشد. چون W ناتهی و باز است لذا $\mathcal{L}$ ناتهی است. هر عضو $\mathcal{L}$ دارای قطر مثبت است چون W دارای نقطهٔ تنها نیست. اگر عضوی از $\mathcal{L}$ مشمول در همه V_nها بشود، آنگاه $W \cap (\cap\mathcal{C}) \neq \emptyset$. پس فرض کنیم چنین نباشد. برای هر $A, B \in \mathcal{L}$ می‌نویسیم $B \prec A$ اگر و تنها اگر $\bar{B} \subseteq A$ و $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد که $B \subseteq V_n$ و $A \nsubseteq V_n$. قرار می‌دهیم

$$\rho = \{(A, B) : A, B \in \mathcal{L}, B \prec A, \operatorname{diam} B \leq \frac{(\operatorname{diam} A)}{۲}\}.$$

دامنهٔ رابطهٔ ρ، $\mathcal{L}$ می‌باشد. زیرا برای هر $A \in \mathcal{L}$، $n \in \mathbb{N}$ هست که $A \subseteq V_{n-۱}$ و $A \nsubseteq V_n$، با توجه به مفروضات $A \cap U_n \neq \emptyset$ چون A باز و U_n در X چگال است. چون A و U_n بازند لذا $A \cap U_n$ نیز باز خواهد بود. از آنجائیکه $\operatorname{diam} A > \circ$، $B \in \mathcal{L}$ که $\operatorname{diam} B < \frac{۱}{۲}(\operatorname{diam} A)$ و $\bar{B} \subseteq A \cap U_n$ وجود دارد که نتیجه می‌شود $B \subseteq V_n$ و بنابراین $B \prec A$. بنابراین $ran(\rho) \subseteq dom\rho$. لذا به کمک اصل انتخاب دنبالهٔ $\{B_n\}$ در $\mathcal{L}$ موجود است که $(B_n, B_{n+۱}) \in \rho$ برای هر $n \in \mathbb{N}$. آنگاه $\operatorname{diam} B_n \to \circ$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$، $B_{n+۱} \prec B_n$. لذا به استقراء نتیجه می‌شود که $B_{n+۱} \subseteq V_n$ برای هر $n \in \mathbb{N}$. از آنجائیکه X فضای متریک تام است، آنگاه $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_n} \neq \emptyset$، قضیه ۱۰.۲.۱۲ را ببینید. بعلاوه، چون برای هر $n \in \mathbb{N}$، $B_{n+۱} \prec B_n$ در نتیجه $\overline{B_{n+۱}} \subseteq B_n$ و $B_{n+۱} \subseteq V_n$ خواهیم داشت:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_n} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \bigcap \mathcal{C}.$$

بعبارت دیگر $\cap\mathcal{C}$ شامل مجموعه ناتهی $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_n}$ است. پس $W \cap (\cap\mathcal{C}) \neq \emptyset$ و این حکم را نتیجه می‌دهد. $\square$

به عنوان یک کاربرد از قضیه بیر به مثال زیر توجه نمایید که ما اثبات آن را به عهده خواننده گرامی محول می‌نمائیم.

مثال ۵.۵.۱۲. *فرض کنید X یک فضای برداری حقیقی و یا مختلط باشد. فرض کنید $|.|$ و $|.|'$ نرم‌هایی روی X باشند که X نسبت به هر دوی آنها فضای متریک تام است. آنگاه نگاشت همانی $i : (X, |.|) \longrightarrow (X, |.|')$ پیوسته است اگر و تنها اگر وارون آن پیوسته باشد.*

۶.۱۲ تکمیل فضاهای متریک

همه فضاهای متریک، فضای متریک تام نیستند. موضوعات زیادی هستند که در آنها ما نمی‌توانیم فرض تام بودن فضا را حذف نمائیم؛ مانند قضیه اصلی نقطه ثابت باناخ، قضیه بیر و ... .

تعریف ۱.۶.۱۲. *فرض کنید (X, d) فضای متریک باشد. فضای متریک (Y, e) را تکمیل شده (X, d) می‌نامیم اگر و تنها اگر (Y, e) فضای متریک تام باشد و (X, d) با یک زیرفضای چگال از (Y, e) ایزومتریک باشد.*

قضیه ۲.۶.۱۲. *فرض کنید (X, d) فضایی متریک و $\tilde{X} = \delta(X) \cup vp(X)$ که $\delta(X)$ گردایه توابع نقطه‌ای و $vp(X)$ مجموعهٔ نقاط مجازی X باشند. حال متر*

$$(u, v) \mapsto \sup\{|u(x) - v(x)| : x \in X\}$$

را روی $\tilde{X}$ در نظر بگیرید. آنگاه $(\tilde{X}, s)$ تکمیل شده (X, d) است.

اثبات. با توجه به قضیه ۹.۳.۲، $(\delta(X), s)$ از $(\tilde{X}, s)$ و (X, d) ایزومتریک هستند و نیز $(\tilde{X}, s)$ فضایی متریک است. برای آنکه نشان دهیم $\delta(X)$ در $\tilde{X}$ چگال است، فرض کنید $u \in \tilde{X}$ و $r > \circ$ آنگاه $x \in X$ هست که $u(x) < r$ و برای هر $a \in X$ چون u شبه نقطه‌ای است، داریم

$$|u(a) - \delta_x(a)| = |u(a) - d(x, a)| \leq u(x) < r$$

بنابراین $s(u, \delta_x) \leq r$ و لذا $s(u, \delta(X)) \leq r$. چون $r > \circ$ دلخواه اختیار شده است، نتیجه می‌شود که $s(u, \delta(X)) = \circ$ و لذا u در بستار مجموعهٔ $\delta(X)$ در $\tilde{X}$ واقع می‌گردد و بنابراین $\delta(X)$ در $\tilde{X}$ چگال است.

حال نشان می‌دهیم $\tilde{X}$ تام است. فرض کنید α یک نقطه مجازی از $\tilde{X}$ باشد. چون $\delta(X)$ در $\tilde{X}$ چگال است و α پیوسته است داریم

$$\inf \alpha(\delta(X)) = \inf \alpha(\tilde{X}) = \circ$$

بنابراین $\alpha|_{\delta(X)}$ یک نقطه مجازی $\delta(X)$ است. آنگاه نگاشت متناظر v روی کپی ایزومتریک X از $\delta(X)$، که با ضابطهٔ $v(x) = \alpha(\delta_x)$ برای هر $x \in X$ بیان می‌شود، به وضوح نقطهٔ مجازی X است. بنابراین $v \in \tilde{X}$. برای هر $x \in X$، داریم $\alpha(v) - \alpha(\delta_x) \leq s(v, \delta_x)$، و

$$\alpha(\delta_x) = v(x) = v(x) - \delta_x(x) \leq s(v, \delta_x).$$

بنابراین، $\alpha \leq ۲s(v, \delta_x)$. چون x دلخواه است بنابراین $\alpha \leq ۲s(v, \delta(X)) = \circ$ و در نتیجه $\alpha(v) = \circ$. این با فرض اینکه α نقطهٔ مجازی $\tilde{X}$ است، تناقض دارد. پس $\tilde{X}$ دارای نقطهٔ مجازی نیست و این با توجه به قضیه ۱۰.۲.۱۲، نتیجه می‌دهد که $\tilde{X}$ تام است. □

مثال ۳.۶.۱۲. فرض کنید (X, d) و (Y, e) *فضاهای متریک و* $f : S \longrightarrow Y$ *پیوسته یکنواخت روی زیرمجموعه چگال* S *از* X *باشد. آنگاه با توجه به قضایای فوق،* f *دارای توسیع پیوسته یکنواخت* $\tilde{f} : X \longrightarrow \tilde{Y} = Y \cup vp(Y)$ *است.*

قضیه ۴.۶.۱۲. *فرض کنید* (X, d) *فضایی متریک و* (X', m) *و* (X'', s) *تکمیل شده فضای متریک* X *باشند. فرض کنید* $\Psi : X \longrightarrow X'$ *و* $\Phi : X \longrightarrow X''$ *ایزومتریک‌هایی به روی زیرفضاهای چگال* X' *و* X'' *به ترتیب باشند. آنگاه یک ایزومتریک از* X' *به* X'' *وجود دارد که* $\Psi(X)$ *را به روی* $\Phi(X)$ *می‌نگارد.*

اثبات. به عنوان تمرین. □

فصل ۱۳

توابع انتگرال‌پذیر

۱.۱۳ تعاریف ابتدایی و خاصیت‌های انتگرال ریمان-اشتیلیس

یک افراز P روی $[a,b]$ مجموعه‌ای متناهی و مرتب از نقاط فاصله بسته $[a,b]$ شامل نقاط ابتدایی و انتهایی می‌باشد. مجموعهٔ همهٔ افرازهای روی $[a,b]$ را با $P[a,b]$ نشان می‌دهیم. نرم افراز P را با $\|P\|$ نشان داده و عبارتست از درازای بزرگ‌ترین زیربازهٔ P. براحتی دیده می‌شود که $P \subseteq P'$ آنگاه $\|P'\| \leq \|P\|$. می‌گوئیم افراز P' از افراز P ظریف‌تر است (یا P' یک تظریف P است) اگر $P \subseteq P'$. برای تابع α علامت $\Delta\alpha_k$ تفاضل $\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$ را نشان می‌دهد و روی یک افراز P داریم

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta\alpha_k = \alpha(b) - \alpha(a)$$

تعریف ۱.۱.۱۳. انتگرال ریمان-اشتلیس *فرض کنید f و α توابعی حقیقی مقدار روی فاصله بسته $[a,b]$ باشند. هرگاه $P = \{x_0, \cdots, x_n\}$ یک افراز روی $[a,b]$ و t_k عضوی دلخواه از $[x_{k-1}, x_k]$ باشد. هر مجموع به شکل*

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta\alpha_k$$

را یک مجموع ریمان-اشتیلیس f برحسب α می‌نامیم. می‌گوئیم f برحسب α بر $[a,b]$ انتگرال ریمان دارد اگر عددی مانند A با خاصیت زیر موجود باشد: "برای هر

$\varepsilon > 0$، افراز $P_\varepsilon \in P[a,b]$ موجود باشد بقسمی که به ازای هر افراز P ظریف‌تر از P_ε و هر انتخاب نقطه‌های $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ داشته باشیم: $|S(P,f,\alpha) - A < \varepsilon|$ ".
در این صورت می‌نویسم $f \in R(\alpha, [a,b])$.

اگر عدد A با خاصیت فوق موجود باشد، منحصربفرد خواهد بود, این عدد را با نماد $\int_a^b f d\alpha$ یا با $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$ نشان می دهیم. لذا می‌توانیم بگوئیم انتگرال ریمان اشتیل-یس $\int_a^b f d\alpha$ وجود دارد. f را انتگرالده و α را انتگرال‌گیر می‌نامیم. در حالت خاص که $\alpha(x) = x$، به جای $S(P,f,\alpha)$ نماد $S(P,f)$ و به جای $f \in R(\alpha,[a,b])$ از نماد $f \in R([a,b])$ استفاده می‌بریم. انتگرال در این حالت انتگرال ریمان نامیده می‌شود و با نماد $\int_a^b f dx$ یا $\int_a^b f(x) dx$ نشان داده می‌شود. مقدار عدد $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$ فقط به f، α، a و b وابسته است و از علامت x مستقل است.

قابل ذکر است که تعریف فوق، یکی از چند تعریف مورد قبول انتگرال ریمان-اشتیل‌یس است. انتگرال ریمان-اشتیل‌یس دارای خصوصیاتی است که در این قسمت به آنها می‌پردازیم.

قضیه ۲.۱.۱۲. هرگاه $f, g \in R(\alpha, [a,b])$ و $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ آنگاه $c_1 f + c_2 g \in R(\alpha,[a,b])$ و

$$\int_a^b (c_1 f + c_2 g) d\alpha = c_1 \int_a^b f d\alpha + c_2 \int_a^b g d\alpha.$$

اثبات. فرض کنید $h = c_1 f + c_2 g$ و $P \in P[a,b]$، لذا

$$S(P,h,\alpha) = c_1 S(P,f,\alpha) + c_2 S(P,g,\alpha).$$

حال برای $\varepsilon > 0$، P''_ε و P'_ε را بقسمی اختیار می‌کنیم. در این صورت برای هر افراز P،

$$(P'_\varepsilon \subseteq P \Longrightarrow |S(P,f,\alpha) - \int_a^b f d\alpha| < \varepsilon)$$

و

$$(P''_\varepsilon \subseteq P \Longrightarrow |S(P,g,\alpha) - \int_a^b g d\alpha| < \varepsilon)$$

بنابراین اگر برای $\varepsilon > 0$، $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$ اختیار کنیم، آنگاه برای هر افراز P که ظریفتر از P_ε است، خواهیم داشت

$$|S(P,h,\alpha) - c_1 \int_a^b f d\alpha - c_2 \int_a^b g d\alpha| \le |c_1|\varepsilon + |c_2|\varepsilon.$$

بنابراین $h \in R(\alpha, [a,b])$ و
$$\int_a^b (c_1 f + c_2 g) d\alpha = c_1 \int_a^b f d\alpha + c_2 \int_a^b g d\alpha,$$
لذا حکم نتیجه می‌شود. □

قضیه ۳.۱.۱۳. *هرگاه $f \in R(\alpha, [a,b]) \cap R(\beta, [a,b])$ باشد. آنگاه برای هر $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ نتیجه می‌شود $f \in \mathbb{R}(c_1\alpha + c_2\beta, [a,b])$ و خواهیم داشت:*
$$\int_a^b f d(c_1\alpha + c_2\beta) = c_1 \int_a^b f d\alpha + c_2 \int_a^b f d\beta$$

اثبات. مشابه قضیه قبل. □

قضیه ۴.۱.۱۳. فرض کنید $c \in (a,b)$. *هرگاه دو تا از سه انتگرال رابطهٔ (۱) موجود باشند آنگاه سومی نیز وجود دارد وداریم*
$$\int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha. \quad (۱)$$

اثبات. فرض کنید P یک افراز $[a,b]$ باشد بقسمی که $c \in P$. حال $P' = P \cap [a,c]$ و $P'' = P \cap [c,b]$ اختیار کنید. به وضوح P' و P'' به ترتیب افرازهایی روی $[a,c]$ و $[c,b]$ می‌باشند. در این صورت
$$S(P,f,\alpha) = S(P',f,\alpha) + S(P'',f,\alpha).$$

حال فرض کنید $\int_a^c f d\alpha$ و $\int_c^b f d\alpha$ موجود باشند در این صورت برای $\varepsilon > ۰$ افرازهای P'_ε و P''_ε به ترتیب روی $[a,c]$ و $[c,b]$ موجودند که
$$\forall P \in P[a,c]\ (P'_\varepsilon \subseteq P \Longrightarrow |S(P,f,\alpha) - \int_a^c f d\alpha| < \varepsilon)$$
و
$$\forall P \in P[c,b]\ (P''_\varepsilon \subseteq P \Longrightarrow |S(P,f,\alpha) - \int_c^b f d\alpha| < \varepsilon).$$
حال اگر برای $\varepsilon > ۰$، $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$ را به عنوان یک افراز روی $[a,b]$ اختیار کنیم، خواهیم داشت
$$\forall P \in P[a,b]\ (P_\varepsilon \subseteq P \Longrightarrow |S(P,f,\alpha) - \int_a^c f d\alpha - \int_c^b f d\alpha| \le \varepsilon).$$
لذا $f \in R(\alpha, [a,b])$ و
$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha.$$

بنابراین حکم نتیجه می‌شود. □

حالت‌های دیگر مشابه مطالب بالا اثبات می‌شود. اگر $\int_a^b fd\alpha$ وجود داشته باشد، انتگرال $\int_a^c fd\alpha$ نیز وجود دارد. ولی آن را نمی‌توان با دلیلی مشابه قضیه فوق ثابت نمود. برای وقتی که α با تغییر کراندار باشد بعداً ثابت خواهد شد.

تعریف ۵.۱.۱۳. *اگر $a < b$ و $\int_a^b fd\alpha$ وجود داشته باشد، $\int_b^a fd\alpha$ را مساوی $-\int_a^b fd\alpha$ تعریف می‌کنیم و $\int_a^a fd\alpha = ۰$ قرار می‌دهیم.*

به کمک تعریف فوق و قضیه قبل داریم:

$$\int_a^b fd\alpha + \int_b^c fd\alpha + \int_c^a fd\alpha = ۰.$$

قضیه ۶.۱.۱۳. هرگاه $f \in R(\alpha, [a,b])$ آنگاه $\alpha \in R(f, [a,b])$ و

$$\int_a^b fd\alpha = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) = \int_a^b \alpha df.$$

اثبات. فرض کنید $\varepsilon > ۰$ اختیار شده باشد. چون $\int_a^b fd\alpha$ وجود دارد لذا $P_\varepsilon \in P[a,b]$ هست که

$$\forall P' \in P[a,b]\ (P_\varepsilon \subseteq P' \Longrightarrow |S(P', f, \alpha) - \int_a^b fd\alpha| < \varepsilon).$$

برای افراز دلخواه P، مجموع ریمان-اشتیلیس دلخواهی برای $\int_a^b \alpha df$ در نظر می‌گیریم،

$$\begin{aligned} S(P, \alpha, f) &= \sum_{k=۱}^{n} \alpha(t_k)\Delta f_k \\ &= \sum_{k=۱}^{n} \alpha(t_k)f(x_k) - \sum_{k=۱}^{n} \alpha(t_k)f(x_{k-۱}). \end{aligned}$$

حال اگر $P_\varepsilon \subseteq P$ و $A = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a)$ اختیار شوند، خواهیم داشت:

$$A = \sum_{k=۱}^{n} f(x_k)\alpha(x_k) - \sum_{k=۱}^{n} f(x_{k-۱})\alpha(x_{k-۱}).$$

با تفریق دو معادله نتیجه می‌شود

$$A - S(P, \alpha, f) = \sum_{k=۱}^{n} f(x_k)[\alpha(x_k) - \alpha(t_k)] + \sum_{k=۱}^{n} f(x_{k-۱})[\alpha(t_k) - \alpha(x_{k-۱})].$$

با تلفیق دو مجموع طرف راست مجموعی به شکل $S(P', f, \alpha)$ بدست می‌آید که P' افرازی روی $[a, b]$ و متشکل از نقاط x_k و t_k می‌باشد. در این صورت P' از P و در نتیجه از P_ε ظریف‌تر است. پس

$$\forall P \in P[a, b]\ (P_\varepsilon \subseteq P \Longrightarrow |A - S(P, \alpha, f) - \int_a^b f d\alpha| < \varepsilon).$$

بنابراین $\int_a^b \alpha df$ وجود دارد و مساوی با $A - \int_a^b f d\alpha$ است. $\square$

قضیه ۷.۱.۱۳. تغییر متغیر در انتگرال ریمان-اشتلیس: *فرض کنید $f \in R(\alpha, [a, b])$ و g بر بازهٔ S با نقطه‌های انتهایی d, c تعریف شده و بر آن پیوسته و یکنوای اکید باشد. همچنین قرار دهید $a = g(c)$ و $b = g(d)$. اگر برای $x \in S$، $h(x) = f(g(x))$ و $\beta(x) = \alpha(g(x))$ تعریف کنیم. در این صورت $h \in R(\beta)$ بر S است و داریم*

$$\int_a^b f d\alpha = \int_c^d h d\beta,$$

بعبارتی

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(t) d\alpha(t) = \int_c^d f(g(x)) d(\alpha(g(x))).$$

اثبات. فرض کنید g اکیدا صعودی باشد لذا $c < d$. بنابراین g دارای تابع وارون پیوسته و اکیدا صعودی $g^{-۱}$ روی $[a, b]$ است. در نتیجه برای هر افراز $P = \{y_۰, \cdots, y_n\}$ از $[c, d]$، یک و فقط یک افراز $P' = \{x_۰, \cdots, x_n\}$ از $[a, b]$ با شرط $x_k = g(y_k)$ وجود دارد. در حقیقت، $P' = g(P)$ و $P = g^{-۱}(P')$.

برای $\epsilon > ۰$، افراز P'_ϵ از $[a, b]$ موجود است که برای هر تظریف P' از آن داریم

$$|S(P', f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha| < \epsilon.$$

فرض کنید $P_\epsilon = g^{-۱}(P'_\epsilon)$ افراز روی $[a, b]$ و $P = \{y_۰, \cdots, y_n\}$ افرازی ظریفتر از P_ϵ باشد. از جمع ریمان-اشتلیس

$$S(P, h, \beta) = \sum_{k=۱}^{n} h(u_k) \Delta\beta_k,$$

که $u_k \in [y_{k-۱}, y_k]$ و $\Delta\beta_k = \beta(y_k) - \beta(y_{k-۱})$، قرار می دهیم $t_k = g(u_k)$ و $x_k = g(y_k)$. آنگاه $P' = \{x_۰, \cdots, x_n\}$ افرازی ظریفتر از P'_ϵ روی $[a, b]$ است.

بعلاوه،

$$S(P,h,\beta) = \sum_{k=۱}^{n} f[g(u_k)](\alpha(g(y_k)) - \alpha(g(y_{k-۱})))$$
$$= \sum_{k=۱}^{n} g(t_k)(\alpha(x_k) - \alpha(t_{k-۱})) = S(P', f, \alpha),$$

که $t_k \in [x_{k-۱}, x_k]$. بنابراین $S(P,h,\beta) - \int_a^b f d\alpha| < \epsilon$ و این حکم را ثابت می کند. □

قضیه ۸.۱.۱۳. *الف) فرض کنید* $f \in R(\alpha, [a,b])$ *و* α *بر این بازه دارای مشتق پیوسته باشد. در این صورت* $f\alpha' \in R([a,b])$ *و داریم*

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f\alpha' dx.$$

ب) فرض کنید α *اکیدا صعودی و* $\alpha' \in R([a,b])$. *فرض کنید* f *تابعی حقیقی مقدار و کراندار روی* $[a,b]$ *باشد. آنگاه* $f \in R(\alpha,[a,b])$ *اگر و تنها اگر* $f\alpha' \in R([a,b])$. *در این صورت*

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f\alpha' dx.$$

اثبات. فرض کنید $g(x) = f(x)\alpha'(x)$. مجموع ریمانی

$$S(P,g) = \sum_{k=۱}^{n} g(t_k)\Delta x_k = \sum_{k=۱}^{n} f(t_k)\alpha'(t_k)\Delta x_k$$

را در نظر بگیرید. با توجه به قضیه مقدار میانگین، برای v_k $in(x_{k-۱}, x_k)$ مناسب داریم $\Delta\alpha_k = \alpha'(v_k)\Delta x_k$. در نتیجه

$$S(P,f,\alpha) - S(P,g) = \sum_{k=۱}^{n} f(t_k)(\alpha'(v_k) - \alpha'(t_k))\Delta x_k.$$

چون f تابعی کراندار است، $M > ۰$ای هست که $|f(x)| \leq M$ برای هر $x \in [a,b]$. پیوستگی α' روی $[a,b]$ نتیجه می دهد که α' پیوسته یکنواخت است. بنابراین، برای $\epsilon > ۰$، $\delta > ۰$ای هست که برای هر $x, y \in [a,b]$،

$$(|x-y| < \delta \Longrightarrow |\alpha'(x) - \alpha'(y)| < \frac{\epsilon}{۲M(b-a)}).$$

اگر P'_ϵ افرازی با نرم کمتر از δ باشد، آنگاه برای هر تظریف P از آن داریم $|\alpha'(v_k) - \alpha'(t_k)| < \frac{\epsilon}{۲M(b-a)}$. برای چنین Pای خواهیم داشت

$$|S(P,f,\alpha) - \int_a^b f d\alpha| < \frac{\epsilon}{۲}.$$

چون $f \in R(\alpha,[a,b])$، افراز P''_ϵ وجود دارد که برای هر افراز P ظریفتر از آن نتیجه می شود

$$|S(P,f,\alpha) - \int_a^b f d\alpha| < \frac{\epsilon}{۲}.$$

ترکیب این دو نامساوی وقتی که برای افراز های ظریفتر از $P_\epsilon = P'_\epsilon \cup P''_\epsilon$ حکم نتیجه می شود.

ب) به عنوان تمرین به عهده خواننده گرامی. □

۲.۱۲ انتگرال‌های بالایی و پایینی

فرض کنید f تابعی کراندار و α تابعی دلخواه روی $[a,b]$ باشد. برای افراز P از $[a,b]$ قرار می‌دهیم:

$$M_k(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-۱}, x_i]\},$$

و

$$m_k(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-۱}, x_i]\}.$$

عددهای

$$U(P,f,\alpha) = \sum_{k=۱}^{n} M_k(f)\Delta\alpha_k$$

و

$$L(P,f,\alpha) = \sum_{k=۱}^{n} m_k(f)\Delta\alpha_k,$$

به ترتیب مجموع‌های اشتیل‌یس بالایی و پایینی f برحسب α برای افراز P نامیده می‌شوند. واضح‌است که $m_k(f) \le M_k(f)$ و چنانچه α روی $[a,b]$ صعودی باشد $\Delta\alpha_k > ۰$ و لذا $m_k(f)\Delta\alpha_k \le M_k(f)\Delta\alpha_k$. همچنین $m_k(f) \le f(t_k) \le M_k(f)$ برای هر $t_k \in [x_{k-۱}, x_k]$. وقتی α روی $[a,b]$ صعودی باشد، در این

صورت بین مجموع‌های بالایی و پایینی و مجموع‌های ریمان-اشتیلیس رابطهٔ زیر برقرار است

$$L(P, f, \alpha) \leq S(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha).$$

قضیه ۱.۲.۱۳. *فرض کنید α بر $[a, b]$ صعودی باشد در این صورت برای افرازهای P و P' داریم*

الف) اگر $P \subseteq P'$

$$L(P, f, \alpha) \leq L(P', f, \alpha) \leq U(P', f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha).$$

ب) $L(P', f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$.

اثبات. اثبات به عهده خواننده گرامی. $\square$

تعریف ۲.۲.۱۳. *فرض کنید α بر $[a, b]$ صعودی باشد. برای تابع کراندار f روی $[a, b]$،*

$$\overline{\int_a^b} d\alpha = \inf\{U(p, f, \alpha) : p \in P[a, b]\},$$

را انتگرال اشتیلیس بالایی f نسبت α و

$$\underline{\int_a^b} d\alpha = \sup\{L(p, f, \alpha) : p \in P[a, b]\},$$

را انتگرال اشتیلیس پایینی f نسبت α می‌نامیم. از آنجائیکه f تابعی کراندار است، قرارمی‌دهیم $M = \sup\{f(x), x \in [a, b]\}$ و $m = \inf\{f(x), x \in [a, b]\}$.
با توجه به اینکه α صعودی است، داریم:

$$m(\alpha(b) - \alpha(a)) \leq L(p, f, \alpha) \leq U(p, f, \alpha) \leq M(\alpha(b) - \alpha(a)),$$

لذا انتگرال‌های بالایی و پایینی موجودند. گاهی انتگرال‌های بالایی و پایینی را با نمادهای $\overline{I}(f, \alpha)$ و $\underline{I}(f, \alpha)$ نمایش می‌دهیم. چنانچه $\alpha(x) = x$، $L(p, f)$ و $U(p, f)$ را برای مجموعه‌های پائینی و بالایی به کار می‌بریم و آنها را مجموع‌های ریمان پایینی و بالایی می‌نامیم. انتگرال‌های $\overline{\int_a^b} f dx$ و $\underline{\int_a^b} f dx$ توسط داربو معرفی شدند.

قضیه ۳.۲.۱۳. *هرگاه α بر $[a, b]$ صعودی باشد آنگاه*

$$\underline{I}(f, \alpha) \leq \overline{I}(f, \alpha).$$

تعریف ۴.۲.۱۳. *می‌گوئیم f در شرط ریمان نسبت α صدق می‌کند اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$، افراز P_ε یافت شود بقسمی که برای هر افراز [ظریف تر از P_ε داشته باشیم:*

$$0 \leq U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \varepsilon.$$

قضیه ۵.۲.۱۳. *فرض کنید α بر $[a,b]$ صعودی باشد. در این صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند:*

الف) $f \in R(\alpha,[a,b])$.

ب) f *در شرط ریمان برحسب* α *بر* $[a,b]$ *صدق می‌کند.*

ج) $\underline{I}(f,\alpha) = \overline{I}(f,\alpha)$.

اثبات. مورد الف) مورد ب) را نتیجه می‌دهد: فرض کنید الف) برقرار باشد. هرگاه $\alpha(a) = \alpha(b)$ حکم واضح‌است. پس فرض کنید $\alpha(a) < \alpha(b)$. برای $\varepsilon > 0$، افراز P_ε را بقسمی اختیار می‌کنیم که به ازای هر افراز P ظریف‌تر از P_ε و هر $t_k, t'_k \in [x_{k-1}, x_k]$ داشته باشیم

$$|\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta\alpha_k - A| < \frac{\varepsilon}{3}$$

و

$$|\sum_{k=1}^{n} f(t'_k)\Delta\alpha_k - A| < \frac{\varepsilon}{3},$$

که در آنها $A = \int_a^b f d\alpha$. در نتیجه خواهیم داشت

$$|\sum_{k=1}^{n}(f(t_k) - f(t'_k))\Delta\alpha_k| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

از آنجائیکه $M_k(f) - m_k(f) = \sup\{f(x) - f(x') : x, x' \in [x_{k-1}, x_k]\}$، لذا برای هر $h > 0$ می‌توان t_k و s_k را بقسمی یافت که

$$M_k(f) - m_k(f) - h < f(t_k) - f(s_k).$$

حال اگر $h = \frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{۳}\varepsilon$ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha) &= \sum_{k=۱}^{n}(M_k(f)-m_k(f))\Delta\alpha_k \\ &< \sum_{k=۱}^{n}(f(t_k)-f(s_k))\Delta\alpha_k + h\sum_{k=۱}^{n}\Delta\alpha_k \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

مورد ب) مورد ج) را نتیجه می‌دهد: فرض کنید ب) برقرار باشد. برای $\varepsilon > ۰$، افراز P_ε هست که به ازای هر افراز P ظریف‌تر از P_ε داریم

$$U(P,f,\alpha) < L(P,f,\alpha)+\varepsilon.$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\overline{I}(f,\alpha) \le U(P,f,\alpha) < L(P,f,\alpha)+\varepsilon \le \underline{I}(f,\alpha)+\varepsilon,$$

و لذا $\overline{I}(f,\alpha) \le \underline{I}(f,\alpha)$. حال با توجه به قضیه قبل حکم نتیجه می‌شود.

مورد ج) مورد الف) را نتیجه می‌دهد: فرض کنید $A = \underline{I}(f,\alpha) = \overline{I}(f,\alpha)$. ثابت می‌کنیم $f \in R(\alpha,[a,b])$ و $A = \int_a^b f d\alpha$. برای این منظور برای $\varepsilon > ۰$، افراز P'_ε را بقسمی اختیار می‌کنیم که به ازای هر افراز P ظریف‌تر از P'_ε،

$$\underline{I}(f,\alpha)-\varepsilon < L(P,f,\alpha).$$

و برای $\varepsilon > ۰$ افراز P''_ε را بقسمی اختیار می‌کنیم که به ازای هر افراز P ظریف‌تر از P''_ε داشته باشیم

$$U(P,f,\alpha) < \overline{I}(f,\alpha)+\varepsilon.$$

حال اگر برای $\varepsilon > ۰$، $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$ اختیار کنیم، به ازای هر افراز P ظریف‌تر از P_ε خواهیم داشت

$$\underline{I}(f,\alpha)-\varepsilon < L(P,f,\alpha) \le S(P,f,\alpha) \le U(P,f,\alpha) < \overline{I}(f,\alpha)+\varepsilon.$$

اما چون $A = \overline{I}(f,\alpha) = \underline{I}(f,\alpha)$ لذا برای هر افراز P ظریف‌تر از P_ε،

$$|S(P,f,\alpha)-A| < \varepsilon.$$

لذا $\int_a^b f d\alpha$ وجود دارد و با A مساوی است. $\square$

مثال ۶.۲.۱۳. *الف) تابع*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q},\ (m,n) = 1 \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. در این صورت f روی $[0,1]$ ریمان انتگرالپذیر است. به این منظور برای $\epsilon > 0$، $N \in \mathbb{N}$ را به قسمی اختیار کنید که $\epsilon < \frac{1}{N}$. مجموعه

$$A = \{\frac{k}{l} : 0 \leq k \leq l \leq N,\ k,l \in \mathbb{N}\}$$

متناهی است. تعداد اعضای A حداکثر N^2 است. حال $k \in \mathbb{N}$ را به قسمی اختیار کنید تا $\frac{N^2}{k} < \frac{\epsilon}{2}$. در این صورت برای $\epsilon > 0$، افراز

$$\{0, \frac{1}{k}, \cdots, \frac{k-1}{k}, 1\},$$

را روی $[0,1]$ در نظر بگیرید. بنابراین

$$U(P,f) - L(P,f) = \sum_{i=1}^{k} (M_i(f) - m_i(f))\Delta x_i < \epsilon + \frac{N^2}{k} < \frac{3\epsilon}{2}.$$

حال چون ϵ دلخواهست، حکم نتیجه می شود.

ب) فرض کنید C مجموعه کانتور باشد. تابع

$$f(x) = \begin{cases} x & x \notin C \\ 5 & x \in C \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. در این صورت f روی $[0,1]$ ریمان انتگرالپذیر است.

۳.۱۳ پیوستگی و انتگرال

در این بخش شرایط وجود $\int_a^b f d\alpha$ را وقتی که α تابعی صعودی بر $[a,b]$ است مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه ۱.۳.۱۳. *فرض کنید f بر $[a,b]$ پیوسته و α بر $[a,b]$ صعودی باشد آنگاه f نسبت به α روی $[a,b]$ انتگرالپذیر است.*

اثبات. فرض کنید $\varepsilon > \circ$ داده شده باشد، چون f بر $[a,b]$ پیوسته یکنواخت است؛ لذا $\delta > \circ$ای هست که

$$\forall x, y \in [a,b]\ (|x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{۲}).$$

هرگاه افراز P_ε را بقسمی اختیار کنیم که $\|P_\varepsilon\| < \delta$، آنگاه $M_i - m_i \leq \frac{\varepsilon}{۲}$ و در نتیجه

$$\begin{aligned} U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) &= \sum_{i=۱}^{n} (M_i - m_i)\Delta\alpha_i \\ &\leq \frac{\varepsilon}{۲} \sum_{i=۱}^{n} \Delta\alpha_i \\ &< \varepsilon(\alpha(b) - \alpha(a)), \end{aligned}$$

و چون $\varepsilon > \circ$ دلخواه است لذا $f \in R(\alpha, [a,b])$. □

قضیه ۲.۳.۱۳. *هرگاه* f *بر* $[a,b]$ *یکنوا و* α *بر* $[a,b]$ *پیوسته باشد. آنگاه* $f \in R(\alpha, [a,b])$.

اثبات. واضح‌است. □

قضیه ۳.۳.۱۳. *فرض کنید* f *بر* $[a,b]$ *کراندار و فقط در* $x_\circ \in [a,b]$ *ناپیوسته باشد. هرگاه* α *بر* $[a,b]$ *صعودی و در* $x_\circ \in [a,b]$ *پیوسته باشد آنگاه* $f \in R(\alpha, [a,b])$.

اثبات. فرض کنید $\varepsilon > \circ$ اختیار شده باشد و $M = \{\sup|f(x)| : x \in [a,b]\}$ قرار می‌دهیم. بدون اینکه از کلیت مسئله کاسته شود فرض کنید $x_\circ \in (a,b)$. از آنجائیکه α در $x_\circ$ پیوسته است، u و v چنان یافت می‌شوند که $x_\circ \in (u,v) \subseteq [a,b]$ و

$$\alpha(v) - \alpha(u) < \frac{\varepsilon}{۶M}.$$

f بر $[a,u]$ و $[v,b]$ پیوسته است در نتیجه $f \in R(\alpha, [a,u])$ و $f \in R(\alpha, [v,b])$. بنابراین برای $\frac{\varepsilon}{۳} > \circ$، افرازهای P'_ε و P''_ε بر $[a,u]$ و $[v,b]$ موجودند که

$$\forall P \in P[a,u]\ (P'_\varepsilon \subseteq P \Longrightarrow U(P,f,\alpha) - L(p,f,\alpha) < \frac{\varepsilon}{۳}),$$

و

$$\forall P \in P[v,b]\ (P''_\varepsilon \subseteq P \Longrightarrow U(P,f,\alpha) - L(p,f,\alpha) < \frac{\varepsilon}{۳}).$$

حال اگر برای $\varepsilon > ۰$، $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon \cup \{u,v\}$ اختیار کنیم، در این صورت

$$\begin{aligned}\forall P \in P[a,b]\ (P_\varepsilon \subseteq P \Longrightarrow & U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha)\\ \leq & (U(P\cap[a,u],f,\alpha) - L(P\cap[a,u],f,\alpha))\\ + & (M_u(f) - m_u(f))(\alpha(v)-\alpha(u))\\ + & U(P\cap[v,b],f,\alpha) - L(P\cap[v,b],f,\alpha)\\ < & \frac{\varepsilon}{۳} + \frac{۲M\varepsilon}{۶} + \frac{\varepsilon}{۳}\\ = & \varepsilon).\end{aligned}$$

بنابراین $f \in R(\alpha,[a,b])$. □

نتیجه ۴.۳.۱۲. *فرض کنید f بر $[a,b]$ کراندار بوده و دارای تعداد متناهی نقطه ناپیوستگی بر $[a,b]$ باشد. هرگاه α تابعی صعودی و در هر نقطهٔ ناپیوستگی f پیوسته باشد آنگاه* $f \in R(\alpha,[a,b])$.

اثبات. حکم به استقراء روی تعداد نقاط ناپیوستگی f اثبات می‌شود. □

قضیه ۵.۳.۱۲. *فرض کنید α بر $[a,b]$ صعودی باشد و $a < c < b$. فرض کنید f و α در c از راست ناپیوسته باشند. در این صورت* $f \notin R(\alpha,[a,b])$.

اثبات. چون α و f در c از راست ناپیوسته‌اند لذا $\varepsilon > ۰$ هست که به ازای هر $\delta > ۰$، x و y در $(c, c+\delta)$ یافت می‌شوند که به ازای آنها $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$ و $|\alpha(x) - \alpha(y)| \geq \varepsilon$. حال اگر P افرازی از $[a,b]$ شامل c باشد در این صورت

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) = \sum (M_k(f) - m_k(f))\Delta\alpha_k.$$

فرض کنید $x_{i-۱} = c$، آنگاه

$$(M_i(f) - m_i(f))(\alpha(x_i) - \alpha(c)) \leq U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha).$$

اگر c ناپیوستگی مشترک f و α از راست باشد، x_i را می‌توان به گونه‌ای اختیار کرد که $\alpha(x_i) - \alpha(c) \geq \varepsilon$. از طرفی $M_i(f) - m_i(f) \geq \varepsilon$ ، در نتیجه

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \geq \varepsilon^{۲},$$

یعنی شرط ریمان نمی‌تواند برقرار باشد. □

توجه ۶.۳.۱۳. *اثبات حالتی که c ناپیوستگی چپ f و α باشد مشابه بالا خواهد بود.*

مثال ۷.۳.۱۳. $[x] \notin R([x], [\circ, ۲])$

قضیه ۸.۳.۱۳. *فرض کنید $f \in R(\alpha, [a, b])$ و $m \leq f \leq M$، Φ بر $[m, M]$ پیوسته باشد. تابع $h(x) = \Phi(f(x))$ را بر $[a, b]$ تعریف می‌کنیم در این صورت $h \in R(\alpha, [a, b])$.*

اثبات. $\epsilon > \circ$ را در نظر بگیرید. چون Φ رو بازه بسته $[m, M]$ پیوسته یکنواخت است، $\delta > \circ$ای هست که $\delta < \epsilon$ و $|\Phi(s) - \Phi(t)| < \epsilon$ هرگاه $|s - t| < \delta$ و $s, t \in [m, M]$.

از آنجاییکه $f \in R(\alpha, [a, b])$، افراز $P = \{x_\circ, \cdots, x_n\}$ از $[a, b]$ وجود دارد که

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \delta^{۲}.$$

مجموعه اعداد $\{۱, \cdots, n\}$ را به دو بخش تقسیم کنید.

الف) $A = \{i : M_i(f) - m_i(f) < \delta\}$. ب) $B = \{i : M_i - m_i \geq \delta\}$.

برای $i \in A$، انتخاب ما از δ نشان می دهد که $M_i^(h) - m_i(h) \leq \epsilon$. برای $i \in B$،

$$M_i(h) - m_i(h) \leq ۲K = ۲sup\{|\Phi(t)| : t \in [m, M]\}.$$

بنابراین

$$\delta \sum_{i \in B} \Delta\alpha_i \leq \sum_{i \in B} (M_i(f) - m_i(f)) \leq U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \delta^{۲}.$$

در نتیجه $\sum_{i \in B} \Delta\alpha_i < \delta$. لذا

$$\begin{aligned} U(p, h, \alpha) - L(P, h, \alpha) &= \sum_{i \in A} (M_i(h) - m_i(h))\Delta\alpha_i + \sum_{i \in B} (M_i(h) - m_i(h))\Delta\alpha_i \\ &\leq \epsilon(\alpha(b) - \alpha(a)) + ۲K\delta \\ &< \epsilon(\alpha(b) - \alpha(a) + ۲K). \end{aligned}$$

از آنجاییکه ϵ دلخواه است، حکم نتیجه می شود. $\square$

۴.۱۳ خواص انتگرال

هرگاه f بر $[a,b]$ کراندار و α بر $[a,b]$ صعودی باشد آنگاه $\int_a^b fd\alpha$ دارای خصوصیاتی خواهد بود که با حذف شرط صعودی بودن α لزوماً برقرار نخواهد بود.

قضیه ۱.۴.۱۳. *الف) هرگاه $f_1, f_2 \in R(\alpha,[a,b])$ و α صعودی باشد اگر $f_1 \leq f_2$ روی $[a,b]$ آنگاه*

$$\int_a^b f_1 d\alpha \leq \int_a^b f_2 d\alpha.$$

ب) هرگاه $f \in R(\alpha,[a,b])$ و α صعودی باشد و $a < c < b$ آنگاه $f \in R(\alpha,[a,c])$، $f \in R(\alpha,[c,b])$ و داریم:

$$\int_a^c fd\alpha + \int_c^b fd\alpha = \int_a^b fd\alpha.$$

ج) هرگاه $f \in R(\alpha,[a,b])$ و α صعودی باشد بر $[a,b]$ و برای هر $x \in [a,b]$ داشته باشیم $|f(x)| \leq M$ آنگاه

$$|\int_a^b fd\alpha| \leq M(\alpha(b)-\alpha(a)).$$

اثبات. به عنوان تمرین. $\square$

قضیه ۲.۴.۱۳. *هرگاه $f,g \in R(\alpha,[a,b])$ و α بر $[a,b]$ صعودی باشد آنگاه*

الف) $fg \in R(\alpha)$.

ب) $|f| \in R(\alpha)$ و $|\int_a^b fd\alpha| \leq \int_a^b |f|d\alpha$.

اثبات. الف) هرگاه $\Phi(t)=t^۲$ در نظر بگیریم. در این صورت بنا به قضیه ۸.۳.۱۳، اگر $f \in R(\alpha)$ آنگاه $f^۲ \in R(\alpha)$. لذا

$$fg = \frac{۱}{۴}((f+g)^۲-(f-g)^۲)$$

حکم را نتیجه می‌دهد.

ب) قرار می‌دهیم $\Phi(t) = |t|$ بنابراین با توجه به قضیه ۸.۳.۱۳، $|f| \in R(\alpha, [a,b])$.
$c = \pm ۱$ را به گونه‌ای اختیار می‌کنیم که

$$c \int_a^b f d\alpha \geq ۰$$

در این صورت $cf \leq |f|$ در نتیجه

$$|\int_a^b f d\alpha| = c \int_a^b f d\alpha = \int_a^b c f d\alpha \leq \int_a^b |f| d\alpha$$

بنابراین حکم نتیجه می‌شود.

□

۵.۱۳ انتگرال‌گیری‌های با تغییر کراندار

فرض کنید تابع صعودی α را بتوان به صورت تفاضل دو تابع صعودی $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ نوشت، بعبارتی $\alpha = \alpha_۱ - \alpha_۲$. در این صورت

$$R(\alpha_۱, [a,b]) \cap R(\alpha_۲, [a,b]) \subseteq R(\alpha, [a,b])$$

و برای fهایی که نسبت به $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ انتگرال پذیرند داریم

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha_۱ - \int_a^b f d\alpha_۲.$$

عکس این مطلب همواره درست نیست، بعبارتی اگر α را بتوان به صورت تفاضل دو تابع صعودی $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ بنویسیم و f نسبت به α انتگرال پذیر باشد انگاه f لزوما نسبت به $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ انتگرال پذیر نیست. آنچه در اینجا به آن می پردازیم چگونگی برقراری رابطه زیر است، وقتی که α به صورت تفاضل دو تابع صعودی $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ نوشته شود.

$$R(\alpha, [a,b]) = R(\alpha_۱, [a,b]) \cap R(\alpha_۲, [a,b]).$$

برای تابع α روی فاصله $[a,b]$ تغییر کل تابع α را با $v_\alpha([a,b])$ نمایش می‌دهیم و بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$V_\alpha([a,b]) = \sup\{\sum_{x_i \in P} |\Delta\alpha_i| : P \in P([a,b])\},$$

که در آن $\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-۱})$. هرگاه $V_\alpha([a,b]) < \infty$، می‌گوییم α با تغییر کراندار است و $V_\alpha([a,b])$ را تغییرکل تابع بر بازه بسته $[a,b]$ می‌نامیم. هرگاه

برای تابع با تغییرکراندار α بر بازه بسته $[a,b]$، قرارداد کنیم تغییر کل تابع در فاصله $[a,a]$ صفر باشد در اینصورت تابع تغییرات α بر $[a,b]$ را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$v(x) = V_\alpha([a,x]).$$

به وضوح $v(x)$، برای هر $x \in [a,b]$ خوش تعریف و با توجه به تعریف صعودی است. همچنین تابع $\beta = v - \alpha$ نیز صعودی خواهد بود و خواهیم داشت $\alpha = v - \beta$. توابع یکنوا مثالهای بارزی از توابع با تغییرکراندار هستند. با کمی تلاش می‌توان نشان داد توابعی با تغییر کراندار هستند که دارای طول متناهی باشند و بالعکس. پس توابعی که دارای طول نامتناهی هستند نمی توانند با تغییر کراندار باشند.

قضیه ۱.۵.۱۳. *فرض کنید α بر $[a,b]$ با تغییر کراندار و $v(x)$ تابع تغییرات α بر $[a,b]$ باشد. هرگاه $f \in R(\alpha,[a,b])$ آنگاه $f \in R(v,[a,b])$.*

اثبات. اگر $v(b) = ۰$ در این صورت v تابعی ثابت خواهد بود و حکم بدیهی است. فرض می‌کنیم $v(b) > ۰$ و برای هر $x \in [a,b]$، $|f(x)| \leq M$. چون v روی $[a,b]$ صعودی است کافی است برای اثبات حکم ثابت کنیم f در شرط ریمان برحسب v صدق می‌کند. به این منظور برای $\varepsilon > ۰$، با توجه به اینکه $f \in R(\alpha,[a,b])$ و v تغییر کل α بر $[a,x]$ است؛ افراز P_ε را بقسمی اختیار می‌کنیم که به ازای هر افراز $P_\varepsilon \subseteq P$ داشته باشیم:

$$|\sum_{k=۱}^{n}(f(s_k) - f(t_k))\Delta\alpha_k| < \frac{\varepsilon}{۳}, \forall s_k, t_k \in [x_{k-۱}, x_k]$$

و

$$v(b) < \sum_{k=۱}^{n}|\Delta\alpha_k| + \frac{\varepsilon}{۴M}.$$

برای هر افراز P ظریف‌تر از P_ε دو نامساوی زیر را اثبات می‌کنیم:

الف) $\sum_{k=۱}^{n}(M_k(f) - m_k(f))(\Delta v_k - |\Delta\alpha_k|) < \frac{\varepsilon}{۲}$.

ب) $\sum_{k=۱}^{n}(M_k(f) - m_k(f))|\Delta\alpha_k| < \frac{\varepsilon}{۲}$.

در صورت اثبات این دو نامساوی نتیجه می‌شود:

$$U(P,f,v) - L(P,f,v) < \varepsilon.$$

الف) با توجه به اینکه $\Delta v_k - |\Delta\alpha_k| \geq \circ$ در نتیجه

$$\begin{aligned}\sum_{k=\text{۱}}^{n}(M_k(f)-m_k(f))(\Delta v_k - |\Delta\alpha_k|) \leq & \text{۲}M\sum_{k=\text{۱}}^{n}(\Delta v_k - |\Delta\alpha_k|)\\ =& \text{۲}M(v(b)-|\Delta\alpha_k|)\\ <& \frac{\varepsilon}{\text{۲}}.\end{aligned}$$

ب) فرض کنید $A(P)=\{k|\Delta\alpha_k \geq \circ\}$ و $B(P)=\{k|\Delta\alpha_k < \circ\}$ و $h=\frac{\varepsilon}{\text{۴}v(b)}$. اگر $k\in A(P)$، t_k و s_k را بقسمی اختیار می کنیم که

$$f(t_k)-f(s_k) > M_k(f)-m_k(f)-h,$$

و اگر $k\in B(P)$، s_k و t_k را چنان اختیار کنیم که

$$f(s_k)-f(t_k) > M_k(f)-m_k(f)-h.$$

در این صورت

$$\begin{aligned}\sum_{k=\text{۱}}^{n}(M_k(f)-m_k(f))|\Delta\alpha_k| <& \sum_{k\in A(p)}(f(t_k)-f(s_k))|\Delta\alpha_k|\\ &+\sum_{k\in B(p)}(f(s_k)-f(t_k))|\Delta\alpha_k| + h\sum_{k=\text{۱}}^{n}|\Delta\alpha_k|\\ =& \sum_{k=\text{۱}}^{n}(f(t_k)-f(s_k))\Delta\alpha_k + h\sum_{k=\text{۱}}^{n}|\Delta\alpha_k|\\ <& \frac{\varepsilon}{\text{۴}}+hv(b)\\ <& \frac{\varepsilon}{\text{۴}}+\frac{\varepsilon}{\text{۴}}\\ =& \frac{\varepsilon}{\text{۲}},\end{aligned}$$

لذا $f\in R(v,[a,b])$.

□

قضیه ۲.۵.۱۳. *فرض کنید α بر $[a,b]$ با تغییرکراندار و $v(x)$ تابع تغییرات α بر $[a,b]$ باشد. آنگاه $f\in R(\alpha,[a,b])$ اگر و تنها اگر $f\in R(v)$ و $f\in R(v-\alpha)$ روی $[a,b]$.*

اثبات. واضحست. □

۶.۱۳ تابع‌های پله‌ای به عنوان انتگرال‌گیر

اگر α روی $[a,b]$ تابعی ثابت باشد آنگاه برای هر تابع f روی $[a,b]$، $f \in R(\alpha,[a,b])$ و $\int_a^b f d\alpha = ۰$. هرگاه تابع α روی فاصلهٔ $[a,b]$ ساده ترین نوع پیچیدگی را داشته باشد، (یعنی جز در یک نقطه، در بقیه نقاط بطور موضعی ثابت باشد)، در این صورت اگر تابع f و تابع α در نقطه پرش α، هر دو ناپیوستگی راست و یا هردو ناپیوستگی چپ داشته باشند آنگاه $\int_a^b f d\alpha$ وجود ندارد. اما چنانچه ناپیوستگی و پیوستگی f و α از راست و از چپ یکدیگر را پوشش دهند، نتیجه به گونه ای دیگر رقم خواهد خورد.

تعریف ۱.۶.۱۳. *تابع پله‌ای یکهٔ I را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$I(x) = \begin{cases} ۰ & x \leq ۰ \\ ۱ & x > ۰ \end{cases}$$

قضیه ۲.۶.۱۳. *هرگاه $a < s < b$ و f بر $[a,b]$ کراندار و در s پیوسته باشد و $\alpha(x) = I(x-s)$ آنگاه*

$$\int_a^b f d\alpha = f(s).$$

اثبات. افراز $P = \{x_۰, x_۱, x_۲, x_۳\}$ را که در آنها $x_۰ = a$ و $x_۱ = s < x_۲ <$ و $x_۳ = b$ در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$L(P,f,\alpha) = m_۲$$

و

$$U(P,f,\alpha) = M_۲.$$

چون f در s پیوسته است، اگر $x_۲ \to s$ آنگاه $M_۲ - m_۲ \to ۰$، $f(s)$ ،$m_۲ \to$، $M_۲ \to f(s)$ و این حکم را ثابت می‌کند. □

قضیه ۳.۶.۱۳. *فرض کنید $\{c_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد که سری متناظر آن $\sum c_n$ همگرا بوده و $\{s_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای از نقاط متمایز در (a,b) باشد. هرگاه*

$$\alpha(x)=\sum_{n=۱}^{\infty}c_nI(x-s_n),$$

و f بر $[a,b]$ پیوسته باشد انگاه

$$\int_a^b fd\alpha=\sum_{n=۱}^{\infty}c_nf(s_n).$$

اثبات. آزمون مقایسه نشان می‌دهد که $\alpha(x)$ موجود و صعودی است، $\alpha(a)=۰$ و $\alpha(b)=\sum_{n=۱}^{\infty}c_n$. فرض کنید $\varepsilon>۰$ داده شده باشد، N را طوری اختیار می‌کنیم که $\sum_{n=N+۱}^{\infty}c_n<\varepsilon$. حال

$$\alpha_۱(x)=\sum_{n=۱}^{N}c_nI(x-s_n)$$

و

$$\alpha_۲(x)=\sum_{n=N+۱}^{\infty}c_nI(x-s_n)$$

اختیار می کنیم. بنابراین $\int_a^b fd\alpha_۱=\sum_{n=۱}^{N}c_nf(s_n)$ و چون $\alpha_۲(b)-\alpha_۲(a)<\varepsilon$ لذا

$$|\int_a^b fd\alpha_۲|\leq\int_a^b|f|d\alpha_۲\leq M(\alpha_۲(b)-\alpha_۲(a))<M\varepsilon,$$

که $M=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$. از آنجائیکه $\alpha=\alpha_۱+\alpha_۲$ خواهیم داشت

$$|\int_a^b fd\alpha-\sum_{n=۱}^{N}c_nf(s_n)|\leq M\varepsilon$$

حال اگر $N\to\infty$، حکم به دست می‌آید. $\square$

قضیه ۴.۶.۱۳. *اگر $\{a_k\}_{k=۱}^{n}$ دنباله‌ای متناهی از نقاط $[a,b]$ باشد. آنگاه $\sum_{k=۱}^{n}a_k$ را می‌توان به صورت یک انتگرال ریمان-اشتیلیس نوشت.*

اثبات. تابع $f(x)=۱$ روی $[a,b]$ در نظر می‌گیریم و

$$\alpha(x)=\sum_{k=۱}^{n}a_kI(x-a_k)$$

در نظر می‌گیریم $(a < a_1 < a_2 < \cdots < a_k < b)$. در این صورت
$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$
بنابراین حکم نتیجه می‌شود. □

قضیه ۵.۶.۱۳. *فرض کنید $a < c < b$. تابع α را بر $[a, b]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم*
$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha(a) & a \leq x < c \\ \alpha(b) & c < x \leq b. \end{cases}$$
بعلاوه f بر $[a, b]$ بقسمی تعریف شده باشد که دست کم یکی از تابع‌های f و α از چپ و دست کم یکی از آنها از راست در نقطه c پیوسته باشند. در این صورت $f \in R(\alpha, [a, b])$ و
$$\int_a^b f d\alpha = f(c)(\alpha(c^+) - \alpha(c^-)).$$

اثبات. اثبات به عنوان تمرین به عهده خواننده گرامی. □

قضیه ۶.۶.۱۳. *فرض کنید $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از نقاط متمایز در فاصلهٔ باز (a, b) باشند و برای هر $i \in \mathbb{N}$، α_i بر $[a, b]$ به صورت زیر تعریف شود*
$$\alpha_i(x) = \begin{cases} \alpha_i(a) & a \leq x < c_i \\ \alpha_i(b) & c_i < x \leq b \end{cases}$$
بعلاوه f بر $[a, b]$ بقسمی مفروض باشد که دست کم یکی از تابع‌های f و $\alpha_i(i \in \mathbb{N})$ از چپ و دست کم یکی از آنها از راست در نقطهٔ $c_i(i \in \mathbb{N})$ پیوسته باشند. در این صورت چنانچه $\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha(c_i^+) - \alpha(c_i^-))$ همگرای مطلق باشد آنگاه $f \in R(\alpha, [a, b])$ و
$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} f(c_i)(\alpha_i(c_i^+) - \alpha_i(c_i^-))$$
که در آن $\alpha(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(x)$ و برای هر $x \in [a, b]$ موجود است.

اثبات. مشابه قضیه ۳.۶.۱۳ اثبات می شود. □

مثال ۷.۶.۱۳. *الف)* فرض کنید $\{r_n\}$ دنبالهٔ اعداد گویای $[0,1]$ باشد و $\alpha(x)=\sum_{r_n\le x}\frac{1}{2^n}$. اگر f بر $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه $f\in R(\alpha,[0,1])$. $\alpha(x)$ تابعی صعودی است و چون f بر $[0,1]$ پیوسته است لذا $f\in R(\alpha,[0,1])$.
برای هر $n\in\mathbb{N}$،

$$I(x-r_n)=\begin{cases}0 & x\le r_n\\ 1 & x>r_n\end{cases}$$

در نتیجه

$$1-I(x-r_n)=\begin{cases}1 & x\le r_n\\ 0 & x>r_n\end{cases}$$

بنابراین اگر $\beta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2^n}(1-I(x-r_n))$ قرار دهیم. $\beta(x)$ صعودی است و مشابه قضیهٔ ۳.۶.۱۳، $f\in R(\beta)$. از آنجائیکه برای هر $x\in[0,1]$، $\beta(x)=\alpha(x)$ لذا $f\in R(\alpha)$. نتیجه آنکه

$$\int_0^1 fd\alpha=\int_0^1 fd\beta=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(r_n)}{2^n}.$$

ب) $f\in R[a,b]$ اگر و تنها اگر

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0 s.t.\forall p\in P[a,b](\|p\|<\delta\Longrightarrow|S(p,f)-\int_a^b fdx|<\varepsilon).$$

ج) با توجه به مسئلهٔ قبل اگر $f\in R([a,b])$ آنگاه

$$\int_a^b f(x)dx=\lim\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(a+k\frac{b-a}{n}).$$

د) اگر f بر $[a,b]$ پیوسته و مثبت باشد و $M=\sup|f(x)|,x\in[a,b]$ آنگاه

$$M=\lim_{n\to\infty}(\int_a^b|f(x)|^n dx)^{\frac{1}{n}}.$$

ه) فرض کنید C مجموعه کانتور باشد. تابع f را روی $[0,1]$ بصورت زیر در نظر بگیرید:

$$f(x)=\begin{cases}2 & x\in C\\ x & x\in x\in[0,1]-C.\end{cases}$$

مجموعه کانتور نقاط ناپیوستگی تابع f است و براحتی دیده می شود که $f\in R([0,1])$ و نقاط ناپیوستگی f ناشماراست.

۷.۱۳ محک لبگ برای وجود انتگرال‌های ریمان

دیدیم که تابع f چنانچه دارای تعداد متناهی نقطهٔ ناپیوستگی در فاصلهٔ $[a, b]$ باشد، تابعی انتگرال‌پذیر ریمان روی $[a, b]$ خواهد بود. با توجه به مثال‌های قسمت های قبل، تعداد نقاط ناپیوستگی تابع انتگرال پذیر f در فاصلهٔ $[a, b]$، می‌تواند شمارا و حتی ناشمارا باشد. از طرفی تابع دیریکله f در فاصلهٔ $[a, b]$ انتگرال‌پذیر ریمان نیست و تعداد نقاط ناپیوستگی آن ناشماراست. بنابراین به طور طبیعی این سؤال مطرح می‌شود مجموعهٔ ناپیوستگی‌های یک تابع دارای انتگرال ریمان تا چه حدی می‌تواند بزرگ باشد؟

در بررسی ریمان انتگرال پذیر بودن تابعی چون f روی یک فاصله بسته و کراندار، تفاضل دو مجموعه ریمان بالایی و پایینی به صورت زیر است

$$\sum (M_k(f) - m_k(f))\Delta x_k.$$

بطور نادقیق می‌توان گفت f وقتی و فقط وقتی انتگرال‌پذیر است که بتوانیم مجموع بالا را به دو قسمت $S_1 + S_2$، تقسیم کنیم. که در آن S_1 مجموع جمله‌های متناظر زیر بازه‌هایی است که فقط حاوی نقطه‌های پیوستگی f اند و S_2 مجموع بقیه جمله‌هاست. در S_1 بخاطر پیوستگی f، $M_k(f) - m_k(f)$ کوچک است. بنابراین حتی اگر تعداد جملات S_1 زیاد باشد S_1 را می‌توان کوچک نگه داشت. ولی در S_2 تفاضل $M_k(f) - m_k(f)$ لزوماً کوچک نیستند، اما چون تفاضل‌ها کراندار هستند (مثلاً محدود به M) پس $|S_2| \leq M \sum \Delta x_k$ ، بنابراین S_2 در صورتی کوچک است که مجموع درازاهای زیربازه‌های متناظر جمله‌های S_2 کوچک باشد. از این رو انتظار می‌رود که مجموعهٔ ناپیوستگی‌های یک تابع انتگرال‌پذیر را بتوان با تعدادی بازه که مجموع درازای آن ها کوچک باشد، پوشانید. حال این فرایند را بطور دقیق تر مورد بررسی قرار می دهیم.

تعریف ۱.۷.۱۳. *برای فاصلهٔ (a, b) ، طول فاصله را با $\ell(a, b)$ نمایش می‌دهیم و عبارت است از $\ell(a, b) = b - a$. برای زیرمجموعه $E \subseteq \mathbb{R}$ ، اندازهٔ خارجی (اندازه) E را که با $m^*(E)$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$m^*(E) = \inf\{\sum_{i\in I} \ell(a_i, b_i) : E \subseteq \bigcup_{i\in I}(a_i, b_i)\ \}$$

حال بعضی از خصوصیات اندازه خارجی را بیان می کنیم.

۱. $m^*(\emptyset) = 0$.

۲. $A \subseteq B \Longrightarrow m^*(A) \leq m^*(B)$.

۳. برای هر $a \in \mathbb{R}$، $m^*(\{a\})$.

۴. اگر $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ باشند آنگاه

$$m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i)$$

۵. هرگاه A مجموعه‌ای شمارا باشد؛ آنگاه $m^*(A) = 0$.

۶. $m^*((a,b)) = m^*([a,b)) = m^*((a,b]) = m^*([a,b]) = b-a$.

تعریف ۲.۷.۱۳. مجموعه E *دارای اندازهٔ صفر می‌گوئیم اگر* $m^*(E) = 0$.

به عبارتی معادل، E دارای اندازه صفر است اگر وتنها اگر برای هر $\epsilon > 0$، پوشش باز $\{(a_i, b_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ برای E موجود باشد که

$$\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) < \epsilon.$$

مثال ۳.۷.۱۳. *الف)* مجموعهٔ کانتور *دارای اندازهٔ صفر است.*

ب) مجموعهٔ اعداد گویا $\mathbb{Q}$ *دارای اندازهٔ صفر است.*

تعریف ۴.۷.۱۳. خاصیت تقریبا همه جا : *فرض کنید P یک خاصیت روی یک زیرمجموعه $\mathbb{R}$ باشد. می گوئیم خاصیت P تقریباً همه جا برقرار است هرگاه مجموعه نقاطی که دارای خاصیت P نیستند، دارای اندازه صفر باشد.*

مثال ۵.۷.۱۳. *الف) دو تابع $f, g : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تقریباً همه جا مساویند اگر*

$$A = \{x \in [a,b] : f(x) \neq g(x)\}$$

دارای اندازه صفر باشد.

ب) تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تقریباً همه جا پیوسته است اگر

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \text{پیوسته نیست.}\ x\ \text{در}\ f\}$$

دارای اندازه صفر در $\mathbb{R}$ باشد.

تعریف ۶.۷.۱۲. حد بالایی و حد پایینی:
فرض کنید (X,d) فضایی متریک و $f : X \to \mathbb{R}$ در همسایگی $x_\circ \in X$ ، تابعی کراندار باشد. در این صورت حد بالایی f در $x_\circ$ را با $\overline{\lim}_{x\to x_\circ} f(x)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\overline{\lim}_{x\to x_\circ} f(x) = \limsup_{\delta\to\circ^+}\{f(x) : d(x,x_\circ) < \delta\}$$

به طریق مشابه حد پائینی f در $x_\circ$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\underline{\lim}_{x\to x_\circ} f(x) = \liminf_{\delta\to\circ^+}\{f(x) : d(x,x_\circ) < \delta\}$$

به راحتی دیده می شود که حد بالایی و حد پائینی تابع f وجود دارند و داریم:

$$\underline{\lim}_{x\to x_\circ} f(x) \le f(x_\circ) \le \overline{\lim}_{x\to x_\circ} f(x)$$

قضیه ۷.۷.۱۲. *تابع $f : X \to \mathbb{R}$ در $x_\circ \in X$ پیوسته است اگر وتنها اگر*

$$\overline{\lim}_{x\to x_\circ} f(x) = \underline{\lim}_{x\to x_\circ} f(x) = f(x_\circ)$$

اثبات. به عنوان تمرین. $\square$

تعریف ۸.۷.۱۲. نوسان تابع در یک نقطه : *فرض کنید تابع $f : X \to \mathbb{R}$ در یک همسایگی $x_\circ \in X$ کراندار باشد. در این صورت قرار می دهیم:*

$$o(f,x_\circ) = \overline{\lim}_{x\to x_\circ} f(x) - \underline{\lim}_{x\to x_\circ} f(x)$$

و $o(f,x_\circ)$ را نوسان تابع f در نقطه ی $x_\circ$ می نامیم.

به وضوح f در $x_\circ$ پیوسته است اگر وتنها اگر $o(f,x_\circ) = \circ$.

قضیه ۹.۷.۱۲. *فرض کنید $f : X \to \mathbb{R}$ تابعی دلخواه باشد. آنگاه برای هر $\varepsilon > \circ$ مجموعه ی $\{x \in X : o(f,x) \ge \varepsilon\}$ مجموعه ای بسته است.*

اثبات. مجموعه ی $B = \{x \in X : o(f,x) \le \varepsilon\}$ قرار می دهیم. نشان می دهیم B^c باز است. فرض کنید $x_\circ \in B^c$ بنابراین $o(f,x_\circ) < \varepsilon$.

حال $\gamma = \frac{۱}{۲}(\varepsilon - o(f,x_\circ))$ اختیار می کنیم در این صورت $\delta_\circ > \circ$ ای هست که:

$$\sup\{f(x) : d(x,x_\circ) < \delta_\circ\} - \inf\{f(x) : d(x,x_\circ) < \delta_\circ\} < \varepsilon$$

حال ادعا می کنیم $B(x_0,\delta_0) \subseteq B^c$. از آنجائیکه برای هر $y \in B(x_0,\delta_0)$ ، $\delta_1 > 0$ ای هست که:

$$B(y,\delta_1) \subseteq B(x_0,\delta_0)$$

درنتیجه:

$$\sup_{x\in B(y,\delta_1)} f(x) - \inf_{x\in B(y,\delta_1)} f(x) \leq \sup_{x\in B(x_0,\delta_0)} f(x) - \inf_{x\in B(x_0,\delta_0)} f(x) < \varepsilon$$

و لذا

$$o(f,y) \leq \sup_{x\in B(y,\delta_1)} f(x) - \inf_{x\in B(y,\delta_1)} f(x) < \varepsilon$$

پس $y \in B^c$ و در نتیجه $B(x_0,\delta_0) \subseteq B^c$. □

قضیه ۱۰.۷.۱۳. محک لبگ:
فرض کنید $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی کراندار باشد. آنگاه f انتگرال پذیر ریمان است اگر و تنها اگر f تقریباً همه جا پیوسته باشد.

قضیه ۱۱.۷.۱۳. *فرض کنید تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ انتگرال پذیر باشد. آنگاه:*

(آ)اگر f روی $[a,b]$ به جز یک مجموعه با اندازه صفر، صفر باشد. آنگاه:

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

(ب)اگر f روی $[a,b]$ نامنفی و $\int_a^b f(x)dx = 0$ آنگاه f روی $[a,b]$ تقریباً همه جا صفر می شود.

اثبات. (آ) فرض کنید f روی $[a,b]$ به جز روی مجموعه E ، صفر شود. هرگاه P یک افراز روی $[a,b]$ باشد در این صورت $L(f,P) \leq 0$ و $U(f,P) \geq 0$. چون f روی $[a,b]$ انتگرال پذیر است، بنابراین با توجه به تعریف، انتگرال هم مثبت و هم منفی است لذا $\int_a^b f(x)dx = 0$.

(ب)فرض کنید $f(x) \geq 0$ و $\int_a^b f(x)dx = 0$. نشان می دهیم اگر f در a پیوسته باشد آنگاه $f(a) = 0$. هرگاه f در a پیوسته و $f(a) > 0$ در این صورت برای $\varepsilon = f(a)$، $\delta > 0$ وجود دارد که:

$$\forall x \quad (|x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > \frac{\varepsilon}{2})$$

حال افراز P روی $[a,b]$ را به قسمی اختیار می کنیم که برای یک زیر فاصله از افراز داشته باشیم $[x_{i-1}, x_i] \subseteq N_\delta(a)$. در این صورت $m_\circ(f) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ در نتیجه

$$L(f,P) = \sum m_i(f)\Delta x_i \geq \frac{\varepsilon}{2}\Delta x_i > \circ$$

و بنابراین

$$\circ < L(f,P) \leq \int_a^b f(x)dx = \circ$$

و این تناقض است. □

اگر f بر بازهٔ S تعریف شده باشد و بر این بازه کراندار باشد. چنانچه $T \subseteq S$، عدد

$$\Omega_f(T) = \sup\{f(x) - f(y) : x, y \in T\}$$

با معناست. حال می توان به راحتی نشان داد که نوسان تابع f در نقطه x به صورت زیر نیز توصیف می شود.

$$o(f,x) = \lim_{h \to \circ^+} \Omega_f((x-h, x+h) \cap S).$$

از آنجائیکه $\Omega_f((x-h, x+h) \cap S)$ برحسب h تابعی نزولی است، حد بالا همواره وجود دارد، در حقیقت هرگاه $T_1 \subseteq T_2$ آنگاه $\Omega_f(T_1) \leq \Omega_f(T_2)$. همچنین $\omega_f(x) = \circ$ اگر و تنها اگر f در x پیوسته باشد.

قضیه ۱۲.۷.۱۳. *فرض کنید f بر $[a,b]$ کراندار باشد و $\varepsilon > \circ$ داده شده باشد. فرض کنید برای هر $x \in [a,b]$، $\omega_f(x) < \varepsilon$. در این صورت عدد مثبت δ (فقط تابع ε) هست بقسمی که به ازای هر زیربازهٔ بسته $[a,b]$ مانند T که $\ell[a,b] < \delta$ داریم $\Omega_f(T) < \varepsilon$.*

قضیه ۱۳.۷.۱۳. *(محک لبگ) فرض کنید f بر $[a,b]$ تعریف شده باشد و بر این بازه کراندار باشد. فرض کنید D مجموعهٔ ناپیوستگی‌های f بر $[a,b]$ باشد در این صورت $f \in R([a,b])$ اگر وتنها اگر $m^*(D) = \circ$.*

نتیجه ۱۴.۷.۱۳. *(الف) اگر f بر $[a,b]$ با تغییر کراندار باشد آنگاه $f \in R([a,b])$.*

ب) هرگاه $f \in R[a,b]$ آنگاه به ازای هر زیربازهٔ $[c,d]$ از $[a,b]$، $f \in R([c,d])$، $|f| \in R$، و $f^2 \in R$ بر $[a,b]$.

ج) هرگاه $f, g \in R[a,b]$ آنگاه $fg \in R[a,b]$.

د) هرگاه $f, g \in R[a,b]$ و g دور از ۰ کراندار باشد آنگاه $\dfrac{f}{g} \in R[a,b]$.

ه) هرگاه f و g بر $[a,b]$ کراندار باشند و ناپیوستگی‌های آنها بر این بازه یکی باشند، آنگاه $f \in R[a,b]$ اگر و تنها اگر $g \in R[a,b]$.

و) فرض کنید $g \in R[a,b]$ و به ازای هر $x \in [a,b]$، $m \le g(x) \le M$. اگر f بر $[m,M]$ پیوسته باشد تابع $f \circ g \in R[a,b]$.

۸.۱۳ قضیه مقدار میانگین برای انتگرال‌ها

قضیه ۱.۸.۱۳. *(قضیه مقدار میانگین) فرض کنیم α صعودی و $f \in R(\alpha,[a,b])$. فرض کنید $M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$ و $m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$. در این صورت $c \in [m,M]$ هست که*

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = c\int_a^b d\alpha(x) = c(\alpha(b)-\alpha(a))$$

بخصوص هرگاه f بر $[a,b]$ پیوسته باشد؛ آنگاه $x_\circ \in [a,b]$ هست که $c = f(x_\circ)$.

با استفاده از انتگرال‌گیری به طریقه جزء به جزء از قضیه مقدار میانگین می‌توان به قضیه دیگری از این نوع دست یافت.

هرگاه $f \in R(\alpha,[a,b])$ و α با تغییر کراندار باشد. آنگاه برای هر $x \in [a,b]$، $\int_a^x fd\alpha$ وجود دارد. قرار می‌دهیم $F(x) = \int_a^x f(t)d\alpha(t)$، برای $x \in [a,b]$. حال بعضی از خواص $F(x)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه ۲.۸.۱۳. *فرض کنید α بر $[a,b]$ با تغییر کراندار و $f \in R(\alpha,[a,b])$ باشد. برای هر $x \in [a,b]$ قرار می‌دهیم $F(x) = \int_a^x f(t)d\alpha(t)$. در این صورت:*

الف) F بر $[a,b]$ با تغییر کراندار است.

ب) هر نقطه پیوستگی α نقطه پیوستگی F نیز هست.

ج) اگر α بر $[a,b]$ صعودی باشد، در هر نقطه $x \in (a,b)$، $\alpha'(x)$ موجود و f پیوسته باشد. آنگاه $F'(x)$ وجود خواهد داشت و برای چنین xای داریم:

$$F'(x) = f(x)\alpha'(x).$$

اثبات. کافی است فرض کنیم α بر $[a,b]$ صعودی است. اگر $x \neq y$ در این صورت برای یک $c \in [m, M]$، داریم $F(y) - F(x) = \int_x^y f d\alpha = c(\alpha(y) - \alpha(x))$. با توجه به رابطهٔ فوق گزاره‌های الف) و ب) براحتی بدست می‌آیند. از طرفی

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x} = c\frac{\alpha(y) - \alpha(x)}{y - x},$$

حال اگر $x \to y$ چون $c \to f(x)$ حکم نتیجه می‌شود. $\square$

قضیه ۱۳.۸.۳. اگر $f, g \in R[a,b]$، برای $x \in [a,b]$ قرار می‌دهیم $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ و $G(x) = \int_a^x g(t)dt$. در این صورت F و G بر $[a,b]$ پیوسته و با تغییر کراندارند و $f \in R(G)$ و $g \in R(F)$ بر $[a,b]$ داریم:

$$\int_a^b fgdx = \int_a^b fdG(x) = \int_a^b gdF(x).$$

۱۳.۹ انتگرال‌های ریمان-اشتیلیس

قضیه ۱۳.۹.۱. فرض کنید f در هر نقطهٔ (x,y) از مستطیل

$$R = \{(x,y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} = [a,b] \times [c,d]$$

پیوسته باشد و نیز α بر $[a,b]$ با تغییر کراندار باشد. تابع F را بر $[c,d]$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)d\alpha(x).$$

در این صورت F بر $[c,d]$ پیوسته است، بعبارتی دیگر اگر $y_\circ \in [c,d]$،

$$\lim_{y \to y_\circ} \int_a^b f(x,y)d\alpha(x) = \int_a^b \lim_{y \to y_\circ} f(x,y)d\alpha(x) = \int_a^b f(x,y_\circ)d\alpha(x)$$

اثبات. فرض کنید α بر $[a,b]$ صعودی باشد. چون R فشرده است لذا f بر R پیوسته یکنواخت می‌باشد بنابراین برای هر $\epsilon > \circ$، $\delta > \circ$ای هست که

$$\forall (x,y), (x',y') (|(x,y) - (x',y')| < \delta \Longrightarrow |f(x,y) - f(x',y')| < \varepsilon).$$

حال اگر برای $\varepsilon > \circ$، $\delta = \delta_\circ$ اختیار کنیم در این صورت برای هر $y \in [c,d]$

$$\begin{aligned}&(|y - y'| \le |(x,y) - (x',y')| < \delta\\ \Longrightarrow &|F(y) - F(y')| \le \int_a^b |f(x,y) - f(x',y')| d\alpha(x) < \varepsilon(\alpha(b) - \alpha(a)).\end{aligned}$$

لذا F بر $[c,d]$ پیوسته است. $\square$

قضیه ۲.۹.۱۳. *هرگاه f بر مستطیل $[a,b] \times [c,d]$ پیوسته و $g \in R[a,b]$ آنگاه تابع F که با ضابطه*

$$F(y) = \int_a^b g(x) f(x,y) dx$$

تعریف می‌شود بر $[c,d]$ پیوسته خواهد بود.

اثبات. به عنوان تمرین به عهده خواننده گرامی. $\square$

۱۰.۱۳ مشتق‌گیری زیر علامت انتگرال

قضیه ۱.۱۰.۱۳. فرض کنید $R = [a,b] \times [c,d]$ و α بر $[a,b]$ *با تغییر کراندار باشد و به ازای هر* $y \in [c,d]$، $F(y) = \int_a^b f(x,y) d\alpha(x)$ موجود باشد. *اگر* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ بر R پیوسته باشد، *به ازای هر* $y \in (c,d)$، $F'(y)$ *وجود دارد و داریم*

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) d\alpha(x).$$

اثبات. اگر $y_\circ \in (c,d)$ و $y \neq y_\circ$ داریم:

$$\frac{F(y) - F(y_\circ)}{y - y_\circ} = \int_a^b \frac{f(x,y) - f(x,y_\circ)}{y - y_\circ} d\alpha(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,\bar{y}) d\alpha(x)$$

که $\bar{y}$ بین y و $y_\circ$ است. حال کافی است $y \to y_\circ$ که حکم با توجه به پیوستگی $\frac{\partial f}{\partial y}$ حاصل می‌شود. $\square$

قضیه ۲.۱۰.۱۳. *فرض کنید $R = [a,b] \times [c,d]$. فرض کنید α بر $[a,b]$ و β بر $[c,d]$ با تغییر کراندار باشند و f بر R پیوسته باشد. اگر $(x,y) \in R$، تابع‌های F و G را با ضوابط زیر تعریف می‌کنیم:*

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)d\alpha(x)$$

و

$$G(y) = \int_a^b f(x,y)d\beta(x).$$

در این صورت $F \in R(\beta,[c,d])$ و $G \in R(\alpha,[a,b])$ و داریم:

$$\int_c^d F(y)d\beta(y) = \int_a^b G(y)d\alpha(y).$$

به بیان دیگر می‌شود گفت که می‌توان ترتیب عمل انتگرال‌گیری را به صورت زیر عوض کرد:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)d\beta(y)d\alpha(x) = \int_c^d \int_a^b f(x,y)d\alpha(x)d\beta(y).$$

۱۱.۱۳ انتگرال‌های ناسره

هنگامی که مفهوم $f \in R(\alpha,[a,b])$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم، دو مطلب جلب توجه می‌کند: ۱-کراندار بودن f ۲-بسته و کراندار بودن فاصلهٔ $[a,b]$. هرگاه یکی از این دو مورد برقرار نباشد در این صورت شرایط لازم برای بررسی انتگرال پذیری تابع f مهیا نیست. حال اگر می خواهیم تحت شرایطی که در آن f کراندار نیست یا فاصلهٔ داده شده بسته یا کراندار نباشد؛ انتگرال پذیری را تعریف کنیم. در قدم اول می بایست توجه داشت که توسیع مفهوم انتگرال پذیری در حالت خاص می بایست منطبق با تعریف انتگرال‌پذیری باشد. مثال زیر ایده اصلی تعمیم مفهوم انتگرال پذیری را بدست می دهد.

مثال ۱.۱۱.۱۳. *فرض کنید f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد. در این صورت داریم*

$$\lim_{c\to a^+} \int_c^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

مثال فوق راهکار مناسبی برای تعمیم مفهوم انتگرال به فاصله‌های باز یا فاصله‌های بی‌کران ارائه می‌کند، بخصوص طرحی را برای تعریف مفهوم انتگرال برای توابع بی‌کران نیز بیان می‌کند.

تعریف ۲.۱۱.۱۳. فرض کنید f بر بازه $(a,b]$ *تعریف شده باشد و برای هر* $a < c < b$، f روی $[c,b]$ *انتگرال‌پذیر باشد. هرگاه*

$$\lim_{c\to a^+} \int_c^b f(t)dt$$

موجود باشد، می‌گوئیم $\int_a^b f dt$ *وجود دارد.*

تعریف ۳.۱۱.۱۳. فرض کنید f بر $[a,+\infty)$ *تعریف شده باشد و برای هر* $a < b$، f بر $[a,b]$ *انتگرال‌پذیر باشد. می‌گوئیم* $\int_a^{+\infty} f dt$ *همگراست اگر حد زیر موجود باشد*

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(t)dt,$$

مقدار حد فوق را در صورت وجود با $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *نمایش می‌دهیم.*

به طریق مشابه روی $[a,b)$ و $(-\infty,a]$ انتگرال پذیری تابع f تعریف می شود.

قضیه ۴.۱۱.۱۳. فرض کنید برای هر $a < T$، $f \in R[a,T]$. *در این صورت* $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *همگراست اگر و تنها اگر*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists T_0\ s.t. \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}\ (t_2 > t_1 > T_0 \Longrightarrow |\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt| < \varepsilon)$$

فصل ۱۴

فضای توابع

۱.۱۴ همگرایی یکنواخت و همگرایی نقطه وار

فرض کنید X مجموعه ای ناتهی و $\mathbb{F}$ میدان اسکالر اعداد حقیقی یا اعداد مختلط مجهز به نرم معمولی باشد. گردایه همه توابع از X به $\mathbb{F}$ را با $\mathbb{F}^X$ نمایش می دهیم. این فضا با اعمال جمع برداری، ضرب اسکالر و ضرب توابع تشکیل یک جبر می دهد که یک ساختار جبری شناخته شده است. بطور طبیعی روی فضای $\mathbb{F}^X$ یک متر تعریف نمی شود، بنابراین برای بحث در خصوص توپولوژی و مفاهیم مرتبط، از همسایگی هایی که توسط متر تولید می شوند نمی توان سود برد. با این وجود به طور طبیعی می توان با کمک ساختار میدان $\mathbb{F}$ و اعضای فضای $\mathbb{F}^X$، مجموعه هایی با خصوصیات رفتاری شبیه به مجموعه های باز را تولید نمود، که از خصوصیات مجموعه های باز بدست آمده در فضاهای متریک تبعیت می نمایند.

برای $\epsilon > 0$ ، $a \in \mathbb{F}$ و $x \in X$ مجموعه

$$B(x, a, \epsilon) = \{f \in \mathbb{F}^X : |f(x) - a| < \epsilon\}.$$

همسایگی نقطه وار به مرکز $a \in \mathbb{F}$ و شعاع $\epsilon > 0$ نامیده می شود. گردایه متشکل از همسایگی های نقطه وار یک سیستم همسایگی است.

با توجه به آنچه در فضاهای متریک برای همگرایی دنباله ها دیدیم، قضیه ۱.۱.۴ ،

می توانیم با استفاده از همسایگی های نقطه وار، همگرایی دنباله ها در $\mathbb{F}^X$ را تعریف کنیم. مشابه آنچه که قبلا دیدیم، دنباله $\{f_n\}$ در نقطه $x \in X$ به $a \in \mathbb{F}$ همگراست اگروتنها اگر هر همسایگی نقطه وار به مرکز $a \in \mathbb{F}$ جز تعداد متناهی همه جملات دنباله $\{f_n(x)\}$ را شامل شود. به عبارتی

تعریف ۱.۱.۱۴. *فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله ای در $\mathbb{F}^X$ باشد. می گوییم دنباله $\{f_n\}$ در نقطه $x \in X$ همگراست اگر برای یک $a \in \mathbb{F}$ و برای هر $\epsilon > 0$، $N \in \mathbb{N}$ موجود باشد که*

$$\forall n(n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - a| < \epsilon).$$

در این صورت می نویسیم $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = a$. چنانچه برای هر $x \in X$ دنباله $\{f_n\}$ همگرا باشد می گوییم دنباله ی $\{f_n\}$ بطور نقطه وار روی X همگراست. از آنجاییکه مقدار حد در صورت وجود منحصربفرد است برای هر $x \in X$ مقدار حد را با $f(x)$ نمایش می دهیم. بنابراین دنباله $\{f_n\}$ روی X همگرای نقطه وار است اگر تابعی چون $f \in \mathbb{F}^X$ موجود باشد که برای هر $x \in X$ داشته باشیم $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$، برای راحتی می نویسیم $f_n \xrightarrow{p} f$. به همین نحو، اگر برای هر نقطه $x \in X$ سری $\Sigma f_n(x)$ همگرا باشد، می گوییم سری Σf_n به $f(x) = \Sigma f_n(x)$ همگرای نقطه وار است.

فرض کنید P یک خاصیت باشد. می گوییم دنباله $\{f_n\}$ روی X بطور نقطه وار دارای خاصیت P است اگر وتنها اگر برای هر $x \in X$ دنباله $\{f_n(x)\}$ در $\mathbb{F}$ دارای خاصیت P باشد. بنابراین مفاهیم بطور نقطه وار کراندار، بطور نقطه وار صعودی، بطور نقطه وار نزولی با معنا می باشند. به عنوان مثال، دنباله $\{f_n\}$ روی X بطور نقطه وار کراندار است اگر وتنها اگر برای هر $x \in X$ دنباله $\{f_n(x)\}$ در $\mathbb{F}$ دنباله ای کراندار باشد. به عبارتی برای هر $x \in X$ یک M_x موجود باشد که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم

$$|f_n(x)| \leq M_x.$$

برای $\epsilon > 0$ و $f \in \mathbb{F}^X$ مجموعه

$$U(f, \epsilon) = \{g \in \mathbb{F}^X : |f(x) - g(x)| < \epsilon, \ \forall x \in X\},$$

همسایگی یکنواخت به مرکز $f \in \mathbb{F}^X$ و شعاع $\epsilon > 0$ نامیده می شود. گردایه متشکل از همسایگی های یکنواخت یک سیستم همسایگی است.

با استفاده از همسایگی های یکنواخت، همگرایی یکنواخت دنباله ها در $\mathbb{F}^X$ را تعریف می کنیم. دنباله $\{f_n\}$ روی X به $f \in \mathbb{F}^X$ همگرای یکنواخت است اگروتنها اگر هر همسایگی یکنواخت به مرکز $f \in \mathbb{F}^X$ جز تعداد متناهی همه جملات دنباله $\{f_n\}$ را شامل شود. به عبارتی

تعریف ۲.۱.۱۴. *فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله ای در $\mathbb{F}^X$ باشد. می گوییم دنباله $\{f_n\}$ روی X همگرای یکنواخت است اگر تابع $f \in \mathbb{F}^X$ موجود باشد به طوریکه برای هر $\epsilon > 0$، $N \in \mathbb{N}$ موجود باشد که*

$$\forall n(n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in X).$$

دراینصورت می نویسیم $f_n \overset{U}{\to} f$. می گوییم سری Σf_n روی X همگرای یکنواخت است، هرگاه دنباله $\{s_n\}$ از مجموعه های جزیی که با

$$s_n(x) = \Sigma_{i=1}^n f_i(x)$$

تعریف می شوند بر X همگرای یکنواخت باشد.

براحتی دیده می شود که اگر دنباله $\{f_n\}$ به $f \in \mathbb{F}^X$ همگرای یکنواخت باشد آنگاه دنباله $\{f_n\}$ به طور نقطه وار به $f \in \mathbb{F}^X$ همگرا خواهد بود. می گوییم دنباله $\{f_n\}$ روی X بطور یکنواخت کراندار است اگر وتنها اگر $M > 0$ موجود باشد که برای هر $x \in X$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم

$$|f_n(x)| \leq M.$$

فرض کنید دنباله $\{f_n\}$ همگرای یکنواخت به $f \in \mathbb{F}^X$ باشد. در این صورت برای هر $\epsilon > 0$، $N \in \mathbb{N}$ موجود است که برای هر $n \geq N$ داریم

$$\|f_n - f\|_u = sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} < \epsilon.$$

در نتیجه

قضیه ۳.۱.۱۴. *برای دنباله $\{f_n\}$ در $\mathbb{F}^X$ گزاره های زیر معادلند :*

الف) دنباله $\{f_n\}$ همگرای یکنواخت به $f \in \mathbb{F}^X$ است.

ب) $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_u = 0$.

ج) برای هر $\epsilon > 0$، $N > 0$ ای هست که

$$\forall n, m(n, m \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \;\; \forall x \in X).$$

اثبات. کافی است نشان دهیم که ج)، الف) را نتیجه می دهد. قسمت های دیگر براحتی اثبات می شوند.
با توجه به ج)، برای هر $x \in X$ دنباله $\{f_n(x)\}$ دنباله ای کشی است و چون $\mathbb{F}$ تام است لذا تابعی چون $f \in \mathbb{F}^X$ وجود دارد که $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. ادعا می کنیم که $f_n \overset{U}{\to} f$. به این منظور با توجه به ج) برای $\frac{\epsilon}{۲} > ۰$ و اینکه $m > n$ کافی است $m \to \infty$. در این صورت خواهیم داشت:

$$\forall n(n > N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{۲} < \epsilon \ \ \forall x \in X),$$

و این حکم را کامل می کند. □

دنباله ی $\{f_n\}$ را دنباله ی بطور یکنواخت کشی می نامیم اگر برای هر $\epsilon > ۰$، $N > ۰$ ای موجود باشد که

$$\forall n, m(n, m \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \ \forall x \in X).$$

بنابراین با توجه به قضیه فوق، مفاهیم بطور یکنواخت کشی و همگرایی یکنواخت معادل هستند.

مثال ۴.۱.۱۴. *الف) برای هر* $n = ۱, ۲, ...$، *دنباله* $f_n(x) = x^n$ *را روی* $[۰, ۱]$ *در نظر بگیرید. به راحتی دیده می شود این دنباله توابع همگرای یکنواخت نیست. به برهان خلف فرض کنید این دنباله همگرای یکنواخت باشد در این صورت این دنباله به تابع*

$$f(x) = \begin{cases} ۰ & x \in [۰, ۱) \\ ۱ & x = ۱ \end{cases}$$

همگرا خواهد شد. از طرفی

$$\|f_n - f\|_u = sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [۰, ۱]\} = ۱,$$

بنابراین $lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_u = ۱ \neq ۰$ *و با توجه به قضیه قبل به تناقض می رسیم.*

ب) برای هر $n \in \mathbb{N}$، $f_n(x) = x^n$ *را روی* $\mathbb{C}$ *تعریف کنید. در این صورت سری* Σf_n *روی مجموعه* $\{z \in \mathbb{C} : |z| < ۱\}$ *همگرای نقطه وار است.*

ج) به وضوح، عمل جمع $+:\mathbb{F}^X\times\mathbb{F}^X\to\mathbb{F}^X$ با ضابطه $+(f,g)=f+g$ بطور نقطه وار پیوسته است، به این معنا که اگر $f_n\xrightarrow{p}f$ و $g_n\xrightarrow{p}g$ انگاه $f_n+g_n\xrightarrow{p}f+g$. همچنین براحتی ثابت می شود که این عمل حافظ همگرایی یکنواخت است، یعنی اگر $f_n\xrightarrow{U}f$ و $g_n\xrightarrow{U}g$ آنگاه $f_n+g_n\xrightarrow{U}f+g$.

د) عمل ضرب $\cdot:\mathbb{F}^X\times\mathbb{F}^X\to\mathbb{F}^X$ با ضابطه $\cdot(f,g)=f\cdot g$ بطور نقطه وار پیوسته است، به این معنا که اگر $f_n\xrightarrow{p}f$ و $g_n\xrightarrow{p}g$ انگاه $f_n\cdot g_n\xrightarrow{p}f\cdot g$. اما عمل ضرب توابع حافظ همگرایی یکنواخت نیست. به این منظور روی $\mathbb{R}$، فرض کنید $f_n(x)=x+\frac{۱}{n}$. بوضوح $\{f_n\}$ بطور یکنواخت همگرا به $f(x)=x$ است اما

$$\|f_n^۲-f^۲\|_u=Sup\{|(x+\frac{۱}{n})^۲-x^۲|:x\in\mathbb{R}\}=+\infty.$$

لذا عمل ضرب توابع حافظ همگرایی یکنواخت نیست.

قضیه ۵.۱.۱۴. فرض کنید X فضایی متریک، $E\subseteq X$ و $a\in X$ نقطه حدی E باشد. هرگاه دنباله $\{f_n\}\subseteq\mathbb{R}^E$ همگرای یکنواخت به تابع $f\in\mathbb{R}^E$ باشد و برای نقطه $a\in X$ داشته باشیم

$$\lim_{x\to a}f_n(x)=L_n.$$

آنگاه $\lim_{n\to}L_n=L$ موجود است و داریم

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a}f_n(x)=\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty}f_n(x).$$

اثبات. با توجه به تعریف همگرایی یکنواخت برای دنباله توابع $\{f_n\}$، برای هر $\epsilon>۰$، $N>۰$ ای یافت می شود که

$$\forall k,n(k,n\geq N\Longrightarrow|f_k(x)-f_n(x)|<\epsilon,\quad\forall x\in E).$$

حال اگر $x\to a$، برای هر ϵ، برای یک $N>۰$ خواهیم داشت

$$\forall k,n(k,n\geq N\Longrightarrow|L_k-L_n|\leq\epsilon,).$$

لذا دنباله $\{L_n\}$ کشی است و بنابراین $L\in\mathbb{R}$ هست که $L_n\longrightarrow L$. از طرفی چون $f_n\xrightarrow{U}f$، پس برای $\epsilon>۰$، $N>۰$ ایی هست که

$$\forall k(k\geq N\Longrightarrow|f_k(x)-f(x)|\leq\epsilon,\quad\forall x\in E).$$

چون f_N در a دارای حد L_N است پس برای $\epsilon > ۰$، $\delta > ۰$ ایی هست که

$$\forall x \in E(۰ < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| \leq$$
$$|f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - L_N| + |L_N - L| < ۳\epsilon).$$

بنابراین $\lim_{x\to a} f(x) = L$ و حکم نتیجه می شود. □

قضیه ۶.۱.۱۴. *فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله ایی از توابع پیوسته حقیقی مقدار روی فضای متریک X باشد که به تابع f بطور یکنواخت همگراست. آنگاه f تابعی پیوسته است.*

مثال ۷.۱.۱۴. *دنباله توابع $f_n(x) = x^n$ روی $[۰, ۱]$ همگرای یکنواخت نیست زیرا رابطه زیر برقرار نمی باشد*

$$۱ = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to ۱} x^n = \lim_{x\to ۱} \lim_{n\to\infty} x^n = ۰.$$

۲.۱۴ $B(X)$ فضای توابع کراندار

برای مجموعه ناتهی X، گردایه همه توابع مختلط مقدار کراندار روی X را با $B(X)$ نمایش می دهیم. به عبارتی

$$B(X) = \{f : X \to \mathbb{C} : \text{.تابعی کراندار باشد } f\}.$$

این فضا به همراه اعمال جمع، ضرب اسکالر و ضرب معمولی زیر جبری از $\mathbb{C}^X$ است. فضای $B(X)$ به همراه نرم سوپریموم

$$\|f\|_u = sup\{|f(x)| : x \in X\},$$

فضایی نرمدار است. یعنی برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ و $f, g \in B(X)$ داریم:

الف) $\|f\|_u = ۰$ اگر وتنها اگر $f = ۰$.

ب) $\|\alpha f\|_u = |\alpha| \|f\|_u$.

ج) $\|f + g\|_u \leq \|f\|_u + \|g\|_u$.

همچنین برای هر $f, g \in B(X)$ داریم :

$$\|fg\|_u \leq \|f\|_u \|g\|_u.$$

با توجه به آنچه در خصوص همگرایی دنباله ها در فضاهای متریک گفته شد، دنبا له ی $\{f_n\}$ در $B(X)$ همگراست اگر و تنها اگر $f \in B(X)$ موجود باشد بطوریکه برای هر $\epsilon > ۰$، $N \in \mathbb{N}$ موجود باشد که

$$\forall k(k > N \Longrightarrow \|f_k - f\|_u < \epsilon).$$

باتوجه به تعریف سوپریموم نرم، گزاره فوق معادل گزاره زیر است. برای هر $\epsilon > ۰$، $N \in \mathbb{N}$ موجود باشد که

$$\forall k(k > N \Longrightarrow |f_k(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in X).$$

بنابراین برای هر $x \in X$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

با توجه به آنچه در بخش قبل گفته شد، فضای $B(X)$ زیرجبری از $\mathbb{C}^X$ می باشد. بنابراین همگرایی نقطه وار و همگرایی یکنواخت از فضای $\mathbb{C}^X$ می تواند به $B(X)$ انتقال یابد. قضایای زیر ارتباط مفاهیم گفته شده را با نرم سوپریموم روی $B(X)$ بیان می نماید.

قضیه ۱.۲.۱۴. *برای دنباله $\{f_n\}$ در فضای $B(X)$ گزاره های زیر معادلند.*
الف) دنباله $\{f_n\}$ در $B(X)$ تحت نرم سوپریموم به تابع $f \in B(X)$ همگراست.
ب) دنباله $\{f_n\}$ روی X به تابع $f \in B(X)$ همگرای یکنواخت است.
ج) برای یک تابع f، برای هر $\epsilon > ۰$ و برای همه $n \in \mathbb{N}$ جز تعداد متناهی داریم

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in X.$$

اثبات. واضحست. □

فضاهای نرمداری که فضایی تام هستند، یعنی هر دنباله کشی در آن دنباله ایی همگرا باشد، فضای باناخ نامیده می شود. این فضاها از اهمیت فراوانی برخوردارند. فضای $B(X)$ نیز از جمله این فضاهاست.

قضیه ۲.۲.۱۴. *فضای $B(X)$ فضایی باناخ است.*

اثبات. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله ای کشی در $B(X)$ باشد. با توجه به قضیه ۳.۱.۱۴، تابعی چون $f \in \mathbb{C}^X$ وجود دارد که $f_n \overset{U}{\to} f$. بنابراین برای $۱ > ۰$، $n \in \mathbb{N}$ وجود

دارد که $\|f_n - f\|_u < ۱$ و در نتیجه $\|f\|_u \leq \|f_n\| + ۱$. لذا $f \in B(X)$ و با توجه به قضیه ۱.۲.۱۴، $\{f_n\}$ به f تحت سوپریموم نرم همگراست. □

برای دنباله های $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ در $B(X)$ که به ترتیب به f و g در $B(X)$ همگرا هستند، داریم:

$$\|(f_n + g_n) - (f + g)\|_u \leq \|f_n - f\|_u + \|g_n - g\|_u,$$

و

$$\|f_n g_n - fg\|_u \leq \|f_n\|_u \|g_n - g\|_u + \|f_n - f\|_u \|g\|_u.$$

در نتیجه اعمال جمع و ضرب توابع در $B(X)$ نسبت به نرم سوپریموم پیوسته هستند. بعبارتی، اعمال جمع و ضرب توابع حافظ همگرایی یکنواخت می باشند و در نتیجه حافظ همگرایی نقطه وار نیز هستند.

می گوییم سری Σf_n همگرای مطلق است اگر وتنها اگر سری $\Sigma\|f_n\|_u$ در فضای اعداد حقیقی همگرا باشد. حال برای آنکه با همگرایی یکنواخت بیشتر آشنا شویم، به سری دنباله توابع می پردازیم. ابتدا آزمون M–وایرشتراوس را بیان می کنیم.

قضیه ۳.۲.۱۴. *هرگاه سری Σf_n همگرای مطلق باشد آنگاه سری Σf_n همگرای یکنواخت است.*

اثبات. با توجه به اینکه برای هر $n > m$ رابطه زیر برقرار است حکم براحتی نتیجه می شود.

$$\|\Sigma_{k=m}^{n} f_k\| \leq \Sigma_{k=m}^{n} \|f_k\|.$$

□

۳.۱۴ زیرفضاهای $B(X)$

فرض کنید X فضایی متریک باشد. گردایه همه توابع پیوسته ی مختلط مقدار روی X را با $C(X)$ نمایش می دهیم. منظور ما از $CB(X)$ مجموعه $B(X) \cap C(X)$ می باشد، (خانواده همه توابع مختلط مقدار پیوسته و کراندار روی X).

قضیه ۱.۳.۱۴. فضای $CB(X)$ زیرفضای بسته ای از $B(X)$ است. به عبارتی $CB(X)$ فضای باناخ است.

اثبات. فرض کنید $f \in \overline{CB(X)}$، در این صورت دنباله $\{f_n\}$ در $CB(X)$ موجود است که $f_n \xrightarrow{\|\|} f$. در نتیجه $f_n \xrightarrow{U} f$ و با توجه به قضیه ۶.۱.۱۴، f پیوسته است و در نتیجه $f \in CB(X)$. □

مثال ۲.۳.۱۴. *الف)* مجموعه همه توابع کراندار و پیوسته حقیقی مقدار روی $\mathbb{R}$ که در بی نهایت به صفر همگرا هستند را با $C_\circ(\mathbb{R})$ نمایش می دهیم. به وضوح $C_\circ(\mathbb{R})$ زیر فضایی بسته (فضای باناخ) از $CB(\mathbb{R})$ است. به این منظور فرض کنید $f \in \overline{C_\circ(\mathbb{R})}$ در اینصورت دنباله $\{f_n\}$ در $C_\circ(\mathbb{R})$ موجود است که $f_n \xrightarrow{U} f$. به وضوح f پیوسته و کراندار است. کافی است نشان دهیم f در بی نهایت صفر می شود. با توجه به اینکه $f_n \xrightarrow{U} f$، برای هر $\epsilon > \circ$، $N > \circ$ایی هست که

$$\forall k(k \geq N \Longrightarrow |f(x) - f_n(x)| < \epsilon \ \ \forall x \in \mathbb{R}).$$

حال اگر $x \longrightarrow \pm\infty$ در اینصورت برای هر $\epsilon > \circ$ داریم

$$|\liminf_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) - \circ| \leq |\limsup_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) - \circ| \leq \epsilon.$$

لذا $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \circ$ و این حکم را کامل می کند.

ب) تابع پیوسته $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را محمل فشرده گوییم اگر بستار مجموعه

$$\{x :\in \mathbb{R} : f(x) \neq \circ\}$$

فشرده باشد. گردایه همه توابع پیوسته ایی که محمل فشرده هستند را با $C_{\circ\circ}(\mathbb{R})$ نمایش می دهیم. این فضا زیرفضایی بسته در $CB(\mathbb{R})$ نیست. به عبارتی فضایی باناخ نیست. به این منظور دنباله توابع $f_n(x) = \chi_{[-n\pi, n\pi]}(x) sin(x) e^{-x^{۲}}$ برای $x \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}$ در نظر بگیرید، به وضوح $f_n \in C_{\circ\circ}(\mathbb{R})$. از طرفی $\{f_n\}$ به $f(x) = sin(x) e^{-x^{۲}}$ بطوریکنواخت همگراست و $f \notin C_{\circ\circ}(\mathbb{R})$. بنابراین $C_{\circ\circ}(\mathbb{R})$ بسته نیست.

ج) فضای چندجمله ایها با ضرایب حقیقی رو فاصله $[-۱, ۱]$ زیرفضای بسته $C[-۱, ۱])$ نیست. زیرا دنباله چندجمله ایهای $P_n(x) = \Sigma_{k=۱}^{n} \frac{x^k}{k^{۲}}$ روی فاصله

$[-۱,۱]$ به تابع $f(x) = \Sigma_{k=۱}^{\infty} \frac{x^k}{k^۲}$ همگرای یکنواخت است و به وضوح f یک چند جمله ای نیست.

د) برای $x \in \mathbb{R}$، قرار دهید $M_x = \{f \in CB(\mathbb{R}) : f(x) = ۰\}$. در این صورت M_x ایده الی دوطرفه از فضای $CB(\mathbb{R})$ است که یک زیرفضای بسته می باشد.

قضیه ۳.۳.۱۴. *فرض کنید α تابعی صعودی بر $[a,b]$ باشد. در اینصورت فضای همه توابع ریمان–اشتیلیس انتگرال پذیر نسبت به تابع α روی فاصله $[a,b]$ زیرفضای بسته ایی از $B([a,b])$ است. به عبارتی $\mathcal{R}(\alpha,[a,b])$ یک فضای باناخ است.*

اثبات. فرض کنید $f \in \overline{\mathcal{R}(\alpha,[a,b])}$، در این صورت دنباله ای از توابع در $\mathcal{R}(\alpha,[a,b])$ همگرای یکنواخت به f موجود است که برای هر $\epsilon > ۰$ جز تعداد متناهی برای همه $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in [a,b].$$

در نتیجه برای n به اندازه کافی بزرگ خواهیم داشت

$$\underline{\int_a^b} f_n d\alpha - \epsilon \leq \underline{\int_a^b} f d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f d\alpha \leq \epsilon + \overline{\int_a^b} f_n d\alpha.$$

بنابراین $|\underline{\int_a^b} f d\alpha - \overline{\int_a^b} f d\alpha| \leq ۲\epsilon$ و چون $\epsilon > ۰$ دلخواه است نتیجه می شود که $f \in \mathcal{R}(\alpha,[a,b])$. □

قضیه ۴.۳.۱۴. *فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله ای از توابع در $\mathcal{R}(\alpha,[a,b])$ باشد که به f بطور یکنواخت همگراست. در این صورت*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_a^b f_n d\alpha = \int_a^b f d\alpha.$$

اثبات. با توجه به قضیه قبل f انتگرالپذیر ریمان–اشتیلیس است. لذا برای هر $\epsilon > ۰$ جز تعداد متناهی برای تمامی $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in [a,b].$$

پس برای هر $\epsilon > ۰$ جز تعداد متناهی n داریم:

$$|\int_a^b f_n(x) d\alpha - \int_a^b f(x) d\alpha| < \epsilon(\alpha(b) - \alpha(a)),$$

و این حکم را کامل می کند. □

قضیه ۵.۳.۱۴. *فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله ایی در $\mathcal{R}(\alpha,[a,b])$ باشد که بطور نقطه وار به تابع $f \in \mathcal{R}(\alpha,[a,b])$ همگرا باشد. آنگاه*
$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_a^b f_n d\alpha = \int_a^b f d\alpha.$$

مجموعه همه توابعی که روی فاصله بسته $I \subseteq \mathbb{R}$ دارای مشتق پیوسته هستند را با $C^{1}(I)$ نمایش می دهیم. $C^{1}(I)$ زیرفضایی از $CB(I)$ می باشد که بسته نیست.

قضیه ۶.۳.۱۴. *فرض کنید I فاصله ای باز و $\{f_n\}$ دنباله ایی از توابع مشتقپذیر روی I باشد که مشتق آن بطور یکنواخت به تابعی چون g همگراست. هرگاه به ازای $x_0 \in I$ دنباله $\{f_n(x_0)\}$ همگرا باشد. آنگاه دنباله $\{f_n\}$ بطور یکنواخت به تابعی چون f همگرای یکنواخت است و برای هر $x \in I$ داریم $f'(x) = g(x)$.*

دنباله توابع $f_n(x) = \frac{sin(nx)}{\sqrt{n}}$ را روی $I = [0,1]$ در نظر بگیرید. بوضوح $\{f_n\}$ به صفر همگرای یکنواخت است اما مشتق آن $f'_n(x) = \sqrt{n}cos(nx)$ روی I همگرای یکنواخت نیست.

۴.۱۴ سری دنباله توابع

فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله ای از توابع در فضای $\mathbb{F}^X$ باشد. بنابر آنچه در بخش های قبل دیدیم چنانچه مجموع جزیی n-ام سری $\sum f_n$ بطور نقطه وار همگرا باشد سری $\sum f_n$ همگرای نقطه وار نامیده میشود و اگر مجموع جزیی n-ام آن بطور یکنواخت همگرا باشد سری $\sum f_n$ را همگرای یکنواخت می نامیم. در این بخش به بیان آزمون هایی برای همگرایی یکنواخت می پردازیم و در حالتی خاص سری های توانی را مور توجه قرار می دهیم. بخاطر داریم که برای دنباله $\{f_n\}$ از توابع در فضای $B(X)$ سری $\sum f_n$ همگرای مطلق است اگر وتنها اگر سری $\sum \|f_n\|$ در فضای اعداد حقیقی همگرا باشد. به عنوان یک آزمون شناخته شده، آزمون M-وایرشتراوس را یادآور می شویم:
هرگاه سری $\sum f_n$ همگرای مطلق باشد آنگاه سری $\sum f_n$ همگرای یکنواخت است.

محدوده ای که به کمک آزمون فوق می توانیم در خصوص همگرایی یکنواخت سری دنباله توابع اظهار نظر کنیم بسیار محدود است. آزمون زیر یکی از آزمون های مفید برای بررسی همگرایی یکنواخت سری توابع است.

قضیه ۱.۴.۱۴. *فرض کنید $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ دنباله هایی از توابع روی X باشند. اگر مجموع جزیی n-ام سری $\sum f_n$ بطور یکنواخت کراندار باشد، دنباله $\{g_n\}$ بطور نقطه وار نزولی و بطور یکنواخت به صفر همگرا باشد آنگاه سری $\sum f_n g_n$ بطور یکنواخت همگراست.*

اثبات. □

مثال ۲.۴.۱۴. *الف)* فرض کنید $\circ < \alpha < \beta < ۲\pi$. در این صورت $\dfrac{۱}{\sin\frac{\theta}{۲}}$ روی $[\alpha, \beta]$ تابعی کراندار است. از آنجائیکه

$$|\sin\theta + \sin ۲\theta + \dots + \sin n\theta| \leq \frac{۱}{|\sin\frac{\theta}{۲}|},$$

پس مجموع جزییnام سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \sin(n\theta)$ ، برای $\circ < \alpha \leq \theta \leq \beta < ۲\pi$ ، دنباله‌ای بطور یکنواخت کراندار است. از طرفی دنبالهٔ $\{\frac{۱}{n}\}$ ، دنباله‌ای نزولی و همگرای یکنواخت به صفر است. بنابراین سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$$

روی $\theta \in [\alpha, \beta] \subseteq (\circ, ۲\pi)$ همگرای یکنواخت است.

پ) هرگاه $\sum a_n$ همگرا و $\{b_n\}$ صعودی و کراندار باشد، در این صورت مجموع جزیی $A_n = \sum_{k=۱}^{n} a_k$ ، دنباله‌ای کراندار است و α وجود دارد به طوری که $\{a_n - b_n\}$ دنباله‌ای نزولی و همگرا به صفر باشد. بنابراین $\sum(\alpha - b_n)a_n$ ، همگراست و در نتیجه $\sum a_n b_n$ همگرا خواهد بود.

قضیه ۳.۴.۱۴. *فرض کنید $f(x) = \Sigma a_n x^n$ یک سری توانی با شعاع همگرایی $R > \circ$ باشد. در اینصورت برای هر$\circ < r < R$ در صفحه مختلط سری توانی $f(x) = \Sigma a_n x^n$ روی $|x| \leq r$ همگرای یکنواخت است. در نتیجه سری توانی $f(x) = \Sigma a_n x^n$ روی $|x| < R$ پیوسته و مشتقپذیر است.*

۵.۱۴ زیرمجموعه های فشرده ی $B(X)$

فضای نرمدار $CB(X)$ وقتی که X مجموعه ایی نامتناهی است، یک فضای برداری با بعد نامتناهی است و قضیه هاینه بورل در این فضا برقرار نیست. همچنین بر خلاف فضای $\mathbb{R}^n$ که زیر فضاهای برداری آن بسته هستند، با توجه به بخش قبل زیرفضاهایی از آن بسته نیستند.

مثال ۱.۵.۱۴. *الف) فرض کنید* $S = \{f \in B([\cdot,\backslash]) : \|f\|_u = \backslash\}$. S *زیرمجموعه ایی بسته و کراندار است اما فشرده نیست. به این منظور برای هر* $n \in \mathbb{N}$ *و هر* $x \in [\cdot,\backslash]$ *تابع* $f_n(x) = \chi_{\{\frac{1}{n}\}}(x)$ *را در نظر می گیریم. بوضوح* $\|f_n - f_m\|_u = \backslash$ *برای هر* $n, m \in \mathbb{N}$*، در نتیجه دنباله توابع* $\{f_n\}$ *دارای زیردنباله ایی که همگرا ی یکنواخت باشد، نیست. این دنباله بطور نقطه وار به ثابت* $f = \backslash$ *همگراست.*

ب) فرض کنید $S = \{f \in C([\cdot,\backslash]) : \|f\|_u = \backslash\}$. S *زیرمجموعه ایی بسته و کراندار است اما فشرده نیست. به این منظور برای هر* $n \in \mathbb{N}$ *و هر* $x \in [\cdot,\backslash]$ *تابع* $f_n(x) = \frac{\backslash}{\backslash+(\backslash-nx)^2}$ *را در نظر می گیریم. بوضوح* $\|f_n - f_m\|_u = \backslash$ *برای هر* $n, m \in \mathbb{N}$*، در نتیجه دنباله توابع* $\{f_n\}$ *دارای زیردنباله ایی که همگرا ی یکنواخت باشد، نیست. این دنباله بطورنقطه وار به تابع ثابت* $f = \cdot$ *همگراست.*

ج) روی فاصله $[\cdot,\backslash]$ *دنباله توابع* $f_n(x) = sin(nx)$ *را برای هر* $n \in \mathbb{N}$ *در نظر بگیرید. دنباله توابع* $\{f_n\}$ *دارای زیر دنباله ای که بطور نقطه وار همگرا باشد، نیست. به این منظور فرض کنید* $\{f_{n_k}\}$ *زیردنباله ای بطور نقطه وار همگرا از دنباله* $\{f_n\}$ *باشد. در اینصورت* $\lim_{n\to\infty}(sin(n_k x) - sin(n_{k+\backslash}x))^2 = \cdot$

بنابراین بستار برد این دنباله بطورنقطه وار فشرده نیست.

حال که زیرمجموعه های بسته و کراندار لزوما تحت توپولوژی همگرایی یکنواخت و توپولوژی همگرایی نقطه وار فشرده نیستند، بطور طبیعی با این پرسش مواجه می شویم فشردگی در فضای توابع با کدام خصوصیت مربوط با این فضا مشخص می شود. به این منظور به تعاریفی جدید نیاز داریم.

تعریف ۲.۵.۱۴. فرض کنید (X, d) *فضایی متریک باشد. خانواده* $\mathcal{A} \subseteq C(X)$

را در نقطه $a \in X$ همپیوسته گوییم اگر برای هر $\epsilon > ۰$، $\delta > ۰$ موجود باشد که برای هر $x \in X$ داشته باشیم

$$(d(x,a) < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon, \forall f \in \mathcal{A}).$$

خانواده $\mathcal{A}$ را همپیوسته گوییم اگر $\mathcal{A}$ در هر نقطه از X همپیوسته باشد.

قضیه ۳.۵.۱۴. *فرض کنید (X,d) فضای متریک فشرده باشد. در این صورت $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ همپیوسته است اگر و تنها اگر برای هر $\epsilon > ۰$، $\delta > ۰$ای موجود باشد که*

$$\forall x, y \in X(d(x,y) < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon, \forall f \in \mathcal{A}).$$

اثبات. $(\Longrightarrow)$ واضحست.
برای عکس چون $\mathcal{A}$ همپیوسته است برای هر $\epsilon > ۰$، برای هر $x \in X$، $\delta_x > ۰$ وجود دارد که

$$\forall y \in X(d(x,y) < \delta_x \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{۲}, \forall f \in \mathcal{A}).$$

از آنجاییکه $X \subseteq \bigcup_{x \in X} N_{\delta_{\frac{x}{۳}}}(x)$ و X فشرده است لذا $x_۱, \cdots, x_n$ موجودند که

$$X \subseteq \bigcup_{i=۱}^{n} N_{\frac{\delta_{x_i}}{۳}}(x_i).$$

حال اگر $\delta = \frac{۱}{۳} min\{\delta_۱, \cdots, \delta_n\}$ اختیار کنیم در این صورت برای هر $x, y \in X$، اگر $d(x,y) < \delta$ آنگاه $i \in \{۱, \cdots, n\}$ هست که $x \in N_{\frac{\delta_{x_i}}{۳}}(x_i)$. در نتیجه

$$\begin{aligned} d(y, x_i) &\leq d(y,x) + d(x, x_i) \\ &< \frac{\delta_{x_i}}{۳} + \frac{\delta_{x_i}}{۳} \\ &< \delta_{x_i}. \end{aligned}$$

بنابراین $x, y \in N_{\frac{\delta_{x_i}}{۳}}(x_i)$. در نتیجه برای هر $f \in \mathcal{A}$ خواهیم داشت

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)| < \epsilon.$$

□

قضیه ۴.۵.۱۴. *فرض کنید X فضای متریک فشرده و برای هر $n \in \mathbb{N}$، $f_n \in C(X)$ باشند. اگر $\{f_n\}$ روی X همگرای یکنواخت باشد آنگاه $\{f_n\}$ روی X همپیوسته است.*

اثبات. $\epsilon > 0$ را ثابت اختیار کنید. $\{f_n\}$ همگرای یکنواخت است لذا $N > 0$ای هست که
$$\forall n(n \geq N \Longrightarrow \|f_n - f_N\| < \epsilon).$$
چون f_nها پیوسته و X فشرده است، پس f_nها پیوسته یکنواخت هستند. لذا برای هر $\epsilon > 0$، $\delta > 0$ای هست که برای هر $x, y \in X$
$$(d(x,y) < \delta \Longrightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \epsilon),$$
برای هر $i = 1, \cdots, N$. حال اگر برای $\epsilon > 0$ و δی بدست آمده، برای هر $x, y \in X$ که $d(x,y) < \delta$ خواهیم داشت:
$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(y) &\leq |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_n(y)| \\ &< 3\epsilon \end{aligned}$$
برای هر $n \geq N$. حال حکم به راحتی برای هر $n \in \mathbb{N}$ نتیجه می شود. $\square$

قضیه ۵.۵.۱۴. قضیه آرزلا-آسکولی: *فرض کنید X فضای متریک فشرده و $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ باشد. آنگاه $\mathcal{A}$ کلا کراندار است اگر وتنها اگر $\mathcal{A}$ کراندار و همپیوسته باشد.*

اثبات. فرض کنید $\mathcal{A}$ کلا کراندار باشد. در نتیجه $\mathcal{A}$ کراندار است. حال $\epsilon > 0$ را ثابت اختیار کنید. در این صورت $f_1, \cdots, f_n$ در $\mathcal{A}$ موجودند که
$$\mathcal{A} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \{f \in C(X) : \|f - f_k\| < \frac{\epsilon}{3}\}.$$
برای $a \in X$، فرض کنید U همسایگی به مرکز a به شعاع δ_a باشد که
$$|f_k(x) - f_k(a)| < \frac{\epsilon}{3}$$
برای هر $x \in U$ و هر $k = 1, \cdots, n$. برای $f \in \mathcal{A}$، f_k هست که $\|f - f_k\| < \frac{\epsilon}{3}$.
لذا برای هر $x \in U$،
$$\begin{aligned} |f(x) - f(a) &\leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(a)| + |f_k(a) - f(a)| \\ &< 3\epsilon. \end{aligned}$$
بنابراین $\mathcal{A}$ همپیوسته است.

حال فرض کنید $\mathcal{A}$ همپیوسته باشد و $\mathcal{A} \subseteq \{f \in C(X) : \|f\|_u \leq ۱\}$. برای $\epsilon > ۰$ و برای هر $x \in X$، همسایگی باز U_x به شعاع $\delta_x > ۰$ موجود است که
$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{۳},$$
برای هر $y \in U_x$ و هر $f \in \mathcal{A}$. از آنجاییکه $\{U_x : x \in X\}$ پوششی باز برای X است و با توجه به فشردگی X، نقاط $x_۱, \cdots, x_n$ در X یافت می شوند که
$$X = \bigcup_{i=۱}^{n} U_{x_i}.$$
فرض کنید $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < ۱\}$ و $\{\alpha_۱, \cdots, \alpha_m\} \subseteq D$، به طوریکه
$$\overline{D} \subseteq \bigcup_{k=۱}^{m} \{z : |z - \alpha_k| < \frac{\epsilon}{۶}\}.$$
فرض کنید B گردایه همه n تایی های $b = (\beta_۱, \cdots, \beta_n)$ که به ازای آن یک تابع $f_b \in \mathcal{A}$ موجود باشد که $|f_b(x_j) - \beta_j| < \frac{\epsilon}{۶}$ برای $۱ \leq j \leq n$. از آنجاییکه برای هر $f \in \mathcal{A}$ داریم $f(X) \subseteq \overline{D}$، نتیجه می شود $B \neq \emptyset$. از طرفی B مجموعه ای متناهی است. فرض کنید $f_b \in \mathcal{A}$ با $b \in B$ متناظر باشد.

ادعا: $\mathcal{A} \subseteq \bigcup_{b \in B} \{f : \|f - f_b\| < \epsilon\}$.

با اثبات این ادعا، ثابت می شود که $\mathcal{A}$ کلا کراندار است. اگر $f \in \mathcal{A}$، $b \in B$ هست که $|f(x_j) - f_b(x_j)| < \frac{\epsilon}{۳}$ برای $۱ \leq j \leq n$. لذا اگر $x \in X$، x_j را به گونه ای اختیار می کنیم که $x \in U_{x_j}$. پس

$$\begin{aligned} |f(x) - f_b(x) &\leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - f_b(x_j)| + |f_b(x_j) - f_b(x)| \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

حال چون x دلخواهست، خواهیم داشت $\|f - f_b\|_u < \epsilon$. □

نتیجه ۶.۵.۱۴. *فرض کنید X فضای متریک فشرده باشد و $\mathcal{A} \subseteq C(X)$. آنگاه $\mathcal{A}$ فشرده است اگر وتنها اگر $\mathcal{A}$ بسته، کراندار و همپیوسته باشد.*

قضیه ۷.۵.۱۴. *فرض کنید X فضای متریک فشرده باشد. $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ بطور نسبی فشرده است اگر وتنها اگر $\mathcal{A}$ همپیوسته و همه مجموعه های $\mathcal{A}(x) = \{f(x) : f \in \mathcal{A}\}$ بطور نسبی فشرده باشد.*

اثبات. اگر $\mathcal{A}$ بطور نسبی فشرده باشد، در این صورت $\mathcal{A}$ کلا کراندار است در نتیجه با توجه به قضیه آرزلا–آسکولی، $\mathcal{A}$ کراندار و همپیوسته است. در نتیجه $\mathcal{A}(x)$ برای هر x کراندار و لذا بطور نسبی فشرده اند.

به عکس، کافی است نشان دهیم $\mathcal{A}$ کلا کراندار است. چون $\mathcal{A}$ همپیوسته است، برای هر $\epsilon > ۰$، همسایگی U_x از $x \in X$ هست که برای هر $y \in U_x$، رابطه $|\phi(x) - \phi(y)| < \epsilon$ برای هر $\phi \in \mathcal{A}$ برقرار است. با توجه به فشردگی X، $x_۱, \cdots, x_n$ موجودند که $X \subseteq \bigcup_{i=۱}^n U_{x_i}$. بنابراین $\bigcup_{i=۱}^n \mathcal{A}(x_i)$ بطور نسبی فشرده و لذا کلا کراندار است. فرض کنید $N_{\frac{\epsilon}{۴}}(y_۱)$، ...، $N_{\frac{\epsilon}{۴}}(y_k)$ پوششی برای این اجتماع باشند. اگر T مجموعه همه نگاشت های

$$\alpha : \{۱, \cdots, n\} \to \{۱, \cdots, k\}$$

را نمایش دهد، آنگاه T متناهی است و

$$\mathcal{A} = \bigcup_{\alpha \in T} \mathcal{A}_\alpha,$$

که در آن $\mathcal{A}_\alpha = \{f \in \mathcal{A} : \forall i \in \{۱, \cdots, n\} \quad |f(x_i) - y_{\alpha(i)}| < \frac{\epsilon}{۴}\}$. اما اگر $\phi, \psi \in \mathcal{A}_\alpha$، آنگاه $z \in N_{\frac{\epsilon}{۴}}(y_i)$ برای یک i، و بنابراین

$$\begin{aligned} |\phi(z) - \psi(z)| &\leq |\phi(y) - \phi(x_i)| + |\phi(x_i) - y_{\alpha(i)}| \\ &+ |y_{\alpha(i)} - \psi(x_i)| + |\psi(x(i)) - \psi(z)| \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

لذا $\epsilon \leq diam\mathcal{A}$. بنابراین $\mathcal{A}$ کلا کراندار است. $\square$

۶.۱۴ قضیه استون–وایرشتراس

یک نتیجه اساسی در این فصل، این است که فضای چندجمله ایها در فضای توابع پیوسته روی فاصله فشرده به سوپریموم نرم مجهز شده باشد، چگال است. تعمیم این نتیجه قضیه استون–وایرشتراس است که برای بیان آن نیاز به پاره ای تمهیدات داریم.

یک جبر A از توابع روی مجموعه S، نقاط را جدا می کند اگر برای هر دو نقطه متمایز $x, y \in S$، تابعی چون $f \in A$ یافت شود که $f(x) \neq f(y)$.

قضیه ۱.۶.۱۴. قضیه استون وایرشتراس: *فرض کنید S فضای متریک فشرده و A جبر توابع پیوسته حقیقی مقدار روی S باشد که نقاط S را جدا می کند. آنگاه بستار A تحت سوپریموم نرم یا جبر تمام توابع پیوسته روی S است و یا جبر همه توابع پیوسته روی S است که همه آن ها در یک نقطه تنها به نام x_∞ صفر می شوند.*

لم ۲.۶.۱۴. *فرض کنید جبر A شامل توابع حقیقی مقدار کراندار روی مجموعه S تحت نرم سوپریموم بسته باشد. آنگاه تحت عمل های $\bigwedge$ و $\bigvee$ بسته است.*

اثبات. از آنجاییکه $f \vee g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ و $f \wedge g = \frac{1}{2}(f - g - |f - g|)$، کافی است نشان دهیم اگر $f \in A$ آنگاه $|f| \in A$. بدون اینکه ار کلیت مساله کاسته شود، فرض کنید $|f| \leq 1$.

بسط تیلور تابع $t \mapsto (t + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}}$ در نقطه $\frac{1}{2}$ روی $[0, 1]$ همگرای یکنواخت است. بنابراین برای هر $\epsilon > 0$، چندجمله ای P وجود دارد که

$$|P(x^2) - (x^2 + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}}| < \epsilon$$

روی $[0, 1]$. فرض کنید $Q = P - P(0)$. چون $|P(0) - \epsilon| < \epsilon$ لذا $|P(0)| < 2\epsilon$. بنابراین $Q(0) = 0$ و $|Q(x^2) - (x^2 + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}}| < 3\epsilon$. اما

$$(x^2 + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}} - |x| \leq \epsilon$$

برای $\epsilon > 0$ به اندازه کافی کوچک. در نتیجه $|Q(x^2) - |x|| < 4\epsilon$ روی $[0, 1]$. چون Q دارای جمله ثابت نیست، و A یک جبر است لذا $Q(f^2) \in A$ برای هر $f \in A$. از آنجاییکه فرض کردیم $|f| \leq 1$ لذا داریم $Q(f^2) \in A$ و $\|Q(f) - |f|\|_u < 4\epsilon$. چون A تحت $\|\cdot\|_u$ بسته است، بنابراین $|f| \in A$ و این اثبات را کامل می کند. $\square$

لم ۳.۶.۱۴. *فرض کنید A مجموعه توابع پیوسته حقیقی مقدار روی فضای متریک فشرده S باشد، بطوریکه اگر $f, g \in A$ آنگاه $f \vee g \in A$ و $f \wedge g \in A$. آنگاه بستار A تحت نرم سوپریموم شامل همه توابع پیوسته روی S است که هر جفت از نقاط S توسط تابعی از A تقریب زده می شوند.*

اثبات. فرض کنید f تابعی پیوسته روی S باشد که در هر جفت از نقاط بوسیله اعضای A تقریب زده می شود. فرض کنید $p, q \in S$ و $\epsilon > ۰$ اختیار شده باشند. فرض کنید $f_{p,q,\epsilon} \in A$ به قسمی باشد که

$$|f(p) - f_{p,q,\epsilon}(p)| < \epsilon$$

و

$$|f(q) - f_{p,q,\epsilon}(q)| < \epsilon.$$

فرض کنید

$$U_{p,q,\epsilon} = \{x : f_{p,q,\epsilon}(x) < f(x) + \epsilon\}$$

و

$$V_{p,q,\epsilon} = \{x : f_{p,q,\epsilon}(x) > f(x) - \epsilon\}.$$

ϵ و q را ثابت اختیار می کنیم. $\{U_{p,q,\epsilon}\}_{p\in S}$ پوششی باز برای S است، لذا تعداد متناهی از این مجموعه ها هستند که S را می پوشانند. فرض کنید $p_۱, \cdots, p_n$ در S یافت شوند که

$$S \subseteq \bigcup_{i=۱}^{n} U_{p_i,q,\epsilon}.$$

در این صورت قرار می دهیم

$$f_{q,\epsilon} = \bigwedge_{i=۱}^{n} f_{p_i,q,\epsilon}.$$

به وضوح $f_{q,\epsilon} < f(x) + \epsilon$ و $f_{q,\epsilon}(x) > f(x) - \epsilon$، برای هر $x \in \bigcap_{i=۱}^{n} V_{p_i,q,\epsilon} = V_{q,\epsilon}$. به طریقی مشابه تعداد متناهی تابع $q_۱, \cdots, q_m$ در S یافت می شوند که

$$S \subseteq \bigcup_{i=۱}^{m} V_{q_i,\epsilon}.$$

حال قرار میدهیم

$$f_\epsilon = \vee_{i=۱}^{m} f_{q_i,\epsilon} \in A,$$

که $f - \epsilon < f_\epsilon < f + \epsilon$. یعنی $\|f - f_\epsilon\| < \epsilon$. چون A تحت نرم سوپریموم بسته است، لذا $f \in A$ و حکم ثابت می شود. $\square$

اثبات قضیه استون وایرشتراس: فرض کنید برای هر $x \in S$، $g \in A$ هست که $g(x) \neq ۰$. فرض کنید $y \neq x$ و $h \in A$ که $h(y) \neq ۰$. آنگاه اعداد حقیقی c و d را به قسمی اختیار می کنیم که $f = cg + dh$ و

$$۰ \neq f(x) \neq f(y) \neq ۰.$$

آنگاه برای هر $a, b \in \mathbb{R}$، ثابت های $A_۱$ و $B_۱$ موجودند که

$$A_۱ f(x) + B_۱ f^۲(x) = a,$$

و

$$A_۱ f(y) + B_۱ f^۲(y) = b.$$

بنابراین هر تابع را در هرنقطه می توان تقریب زد. می دانیم که بستار A تحت $\vee$ و $\wedge$ بسته است. لذا بستار A جبر همه توابع پیوسته حقیقی مقدار است.

شق دوم، وجود نقطه ای چون p_∞ است که همه $f \in A$ در آن صفر می شوند. تلاش ما این است که نشان دهیم بستار A شامل همه توابعی است که در p_∞ صفر می شوند. فرض کنید B جبر بدست آمده از A باشد که با اضافه کردن مقادیر ثابت حاصل شده است. در این صورت B در شرایط قضیه استون-وایرشتراس صدق می کند و شامل توابعی است که در p_∞ صفر نمی شوند، پس برای هر $\epsilon > ۰$، $f \in A$ و عدد ثابت c یافت می شوند که

$$\|g - (f + c)\|_u < \frac{\epsilon}{۲}.$$

محاسبه در نقطه p_∞ نتیجه می دهد که $|c| < \frac{\epsilon}{۲}$. لذا $\|g - f\|_u < \epsilon$، و این اثبات را کامل می کند.

نتیجه ۴.۶.۱۴. *فرض کنید $P[a, b]$ فضای چند جمله ای های با ضرایب حقیقی مقدار روی فاصله $[a, b]$ باشد. در این صورت $P[a, b]$ در $c[a, b]$ چگال است.*

نتیجه ۵.۶.۱۴. *برای هر تابع پیوسته $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ یک دنباله از چند جمله ای ها با ضرایب حقیقی روی $[a, b]$ مانند $\{p_n\}$ موجودند که به f بطور یکنواخت همگراست.*

۷.۱۴ سوالات