نیکلای یوری سوویچ واسیلیف
آندره آلکساندرووویچ یه‌گوروف

مسأله‌های المپیادهای ریاضی در شوروی

ترجمهٔ پرویز شهریاری

نشر توسعه

انتشارات فردوس : خیابان دانشگاه - کوچهٔ میترا - شماره ۷ تلفن : ۶۴۶۹۹۶۵

مسأله‌های المپیادهای ریاضی در شوروی

نیکلای یوری سوویچ و اسیلی‌یف - آندره الکساندرویچ یه‌گوروف

ترجمه پرویز شهریاری

چاپ سوم : ۱۳۷۵ - ۲۲۰۰ نسخه

چاپ و صحافی : چاپخانهٔ رامین

شابک : ۲-۲۳-۵۵۰۹-۹۶۴

پیش‌گفتار

بسیار پیش آمده است که علاقه‌مندی به‌ریاضیات، ضمن برخورد با مسأله‌های جالب آغاز شده است. از این گونه مسأله‌ها، در کتاب‌های درسی، نشریه‌های ریاضی، کتاب‌های جنب درسی و کتاب‌های مربوط به‌معماها و سرگرمی‌های ریاضی هم وجود دارد. ولی، المپیادهای ریاضی (از المپیادهای مدرسه‌ای و ناحیه‌ای گرفته تا المپیادهای جهانی)، سرچشمه‌ای غنی از مسأله‌های پرکشش و جالب بوده است.

دراین کتاب، مجموعهٔ کامل مسأله‌های دور نهائی المپیادهای ریاضی سراسری روسیه و اتحاد شوروی سابق، از آغاز سال‌های ۶۰ آمده است. مسأله‌ها را از آغاز تا پایان با شمارهٔ ردیف آورده‌ایم، ولی در آغاز هرالمپیاد، مسأله‌های مربوط به‌کلاس‌های مختلف را (کلاس‌های هشتم، نهم و دهم) مشخص کرده‌ایم *.

مسأله‌های المپیادهای ۱۹۶۱ تا ۱۹۷۹ را به‌طور کامل حل کرده‌ایم و برای مسأله‌های المپیادهای سال‌های بعد راهنمائی‌های کوتاهی داده‌ایم.

---

*) دراتحاد شوروی سابق (و روسیه کنونی) دورهٔ دبیرستان در سال دهم تحصیل تمام می‌شود و، بنابراین، کلاس‌های هشتم، نهم و دهم، به‌معنای سه سال آخر دبیرستان است.

مسأله‌های نخستین المپیادهای سال‌های ۶۰ (که المپیادهای‌سراسری روسیه نامیده می‌شدند)، به‌طور نسبی ساده‌اند، با وجود این، در بین آن‌ها هم، به مسأله‌هایی برمی‌خوریم که جنبهٔ معمائی دارند و پیداکردن کلید حل آن‌ها، چندان ساده نیست. دشوارترین مسأله‌ها را، با علامت ستاره مشخص کرده‌ایم.

مسأله‌ها، از نظر مضمون ریاضی‌خود، بسیار متنوع‌اند. تقریباً در بین مسأله‌های هر المپیاد، با مسأله‌هایی‌که از لحاظ تنظیم خود، عادی و سنتی هستند روبه‌رو می‌شویم: مسأله‌های مربوط به‌دایره‌ها، مثلث‌ها، سه‌جمله‌ای‌های درجه دوم، معادله‌ها و نامعادله‌ها. البته، این‌ها تمرین‌های ساده‌ای نیستندکه تنها برای آزمایش میزان آگاهی‌ها وکاربرد روش‌های عادی دبیرستانی‌طرح شده‌باشند، بلکه اغلب برای حل آن‌ها، باید قضیه یاقضیه‌هایی را ثابت‌کرد؛ همچنین، مسأله‌های مربوط به مکان‌های هندسی (جست و جوی مجموعه‌ها) و می‌نیمم‌ها یا ماکزیمم‌ها، نیاز به بررسی جدی دارند.

با این‌همه، اهمیت بیشتررا باید به مسأله‌هایی دادکه از صورت‌های عادی و سنتی‌دورند. دراین موردها، برای پیداکردن جواب ویا اثبات،تنها آگاهی‌های دبیرستانی کفایت نمی‌کند، بلکه درکنار آن‌ها، به اندیشه‌ای سالم و خلاق، به نیروی منطق و استدلال، نیاز است وباید بتوان شرط‌های نامتعارف را به‌زبان ریاضی مناسبی ترجمه‌کرد. راه حل این‌گونه مسأله‌ها، همیشه زنجیره‌ای ازچندگام طبیعی‌را تشکیل‌نمی‌دهد. اغلب پیش‌می‌آیدکه، باوجود تجزیه و تحلیل دقیق شرط‌های مسأله، نمی‌توان به اندیشه‌ای رسید که، به‌طور مستقیم، ما را به‌سمت راه‌حل هدایت‌کند، اگرچه راه‌حل حاضر وآمادهٔ آن، ازچند سطر تجاوز نمی‌کند (و این، یکی از نشانه‌هایی است‌که آن‌ها را، ازمساله‌های عادی متمایزمی‌کند). اغلب، مسیر راه‌حل، به‌صورتی نامنتظر، شهودی، همچون چراغی‌که ناگهان روشن شود، ظاهرمی‌شود. این، همان لحظهٔ «کشف» و بروز «خلاقیت ریاضی» است‌که، برای دانش‌آموز، شادی فراوان به‌همراه دارد.

البته، با اندیشه‌ای‌که در آغاز نامنتظر است، ممکن‌است بعد از آن،

بارها و بارها رو به‌رو شویم (مثلا، بازیافت زیبائی که در مساله ۷ بدست می آید —چگونه مجموع عددهای جدول تغییر می کند— به صورت دیگری در مسأله‌های ۱۵۱، ۱۹۶، ۲۷۱ و غیره مورد استفاده قرار می گیرد). و به تدریج، همین اندیشه‌ها و استدلال‌های ظریف —که در آغاز دست نیافتنی بودند— به‌صورت استدلال‌هایی عادی درمی آیند و به‌عنوان یک‌روش، کار حل مسأله‌ها را ساده می کنند.

تسلط بر روش‌های مشخص استدلال، نه‌تنها برای المپیادها، بلکه برای هر گونه پیشرفت جدی در ریاضیات، اهمیت دارد و، به همین مناسبت، در پایان کتاب، «راهنمای روش‌ها» را آورده‌ایم. در این بخش، به صورتی گذرا، از مفهوم‌ها، قضیه‌ها و روش‌هایی صحبت شده است که، به طور سنتی، برای هر شرکت کنندهٔ در المپیادها، دانسته فرض می‌شود. مثلاً در بند ۱ از روش استقرای ریاضی، در بند ۲ از بخش پذیری عددهای درست، در بند ۵ از چندجمله‌ای‌ها، در بند ۸ از نابرابری بین واسطهٔ حسابی و واسطهٔ هندسی گفت و گو شده است. هرجا، در متن کتاب، به واژه‌های «بند ۱»، «بند ۲»، ... برخورد می کنید، به معنای آن است که به این بند از «راهنمای روش‌ها» تکیه شده است. روشن است که این «راهنما»، تنها می‌تواند در حل برخی از مسأله‌ها، آن هم اغلب به طور غیرمستقیم، کمک کند؛ در بسیاری ازمسأله‌ها، مجموعه‌ای از این «راهنماها» بـه کار می‌آیند و، در واقع، برای حل هر مساله، وجود «راهنمای» جداگانه‌ای ضرورت دارد.

هدف برگزاری هر المپیاد، این است کـه مسأله‌ها و پرسش‌هایی را در برابر دانش‌آمـوزان قـرار دهند، کـه هم از نظر مضمون و هم از نظر روش‌های حل، تازگی داشته باشند. ریاضی دانانی که این مساله‌ها را طرح می کنند، اغلب بر کتاب‌های کمتر شناخته شده و یا مقاله‌های علمی تازه تکیه می کنند. (بسیاری از پیش‌قضیه‌های علمی، بر اندیشه‌ای مقدماتی تکیه دارند و از همین گونه اندیشه‌های مقدماتی است که مسأله‌های المپیادها زاده می‌شوند. مثلاً، مساله‌های ۱۸۱، ۲۱۹، ۲۴۸، ۲۶۷ و ...، بـه همین ترتیب پدید آمده‌اند؛ و مسالهٔ ۱۴۸، کـه برای المپیادها در نظر گرفته شده است،

و به‌شعاع r_1، r_2، r_3 و r_4 رسم کرده‌ایم؛ درضمن $r_1+r_3=r_2+r_4<d$ (d، طول قطر مستطیل است؛ شکل ۲). مماس‌هـای مشترك بیرونی‌را برای دودایرهٔ ۱ و ۳ و برای دودایرهٔ ۲ و ۴ رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، درچهار‌ضلعی که از برخورد این‌مماس‌ها به‌دست می‌آید، می‌توان‌دایره‌ای محاط کرد.

۳. ثابت کنید، بین هر ۳۹ عدد طبیعی متوالی، می‌توان عددی راپیدا کرد که، مجموع رقم‌های آن، بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

۴. جدولی ۴ × ۴ خانه‌ای داده شده است. ثابت کنید، می‌توان هفت ستاره در خانه‌های جدول طوری قرار داد که، اگر دوسطر دلخواه ودوستون دلخواه از جدول را حذف کنیم، در خانه‌های باقی‌ماندهٔ جدول، همیشه‌دست کم یك ستاره وجود داشته‌باشد. ثابت کنید، اگر تعداد ستاره‌ها ازهفت کمتر باشد، همیشه می‌توان دوسطر و دو ستون جدول را طوری حـذف کرد که همهٔ خانه‌های باقی‌مانده، خالی باشند.

۵. a) چهار عدد مثبت (a, b, c, d) مفروض است. ازآن‌ها، چهار عدد جدید (ab, bc, cd, da) را طبق‌قاعدهٔ زیر می‌سازیم: هرعدد، درعدد بعدی خود، وعدد چهارم در عدد اول ضرب می‌شود. از گروه چهار عددی جدید، بنا برهمین‌قاعده، گروه چهارعددی سومی‌می‌سازیم وغیره. ثابت کنید، دردنبالهٔ این گروه‌های چهارعددی، هرگز دوباره به (a, b, c, d) نمی‌رسیم، مگر وقتی که داشته باشیم: $a=b=c=d=1$.

b) انتخاب دلخواهی ازعددهای ۱ و ۱ — را، به‌طول 2^k، در نظر می‌گیریم. ازاین‌گروه عددها، گروه تازه‌ای با قاعدهٔ زیر می‌سازیم: هرعدد را درعدد بعدی خود، وآخرین عدد، یعنی‌عدد 2^kام را در عدد اول ضرب می‌کنیم. ازاین گروه جدید و طبق همان قاعده، گروه سوم از عددهای ۱ و ۱ — را به دست می‌آوریم و غیره. ثابت کنید، سرآخر به‌گروهی ازعددها می‌رسیم که تنها شامل واحدها هستند.

۶. a) نقطه‌های A و B به‌طور یکنواخت و باسرعت زاویه‌ای برابر، به ترتیب، روی محیط دایره‌های به مرکزهای O_1 و O_2 (در جهت حرکت عقربه‌های‌ساعت) حرکت می‌کنند. ثابت کنید، رأس C ازمثلث متساوی‌الاضلاع

ABC هم، به‌طور یکنواخت، روی محیط دایره‌ای حرکت می‌کند.

(ا) فاصلهٔ نقطهٔ ثابت P واقع درصفحهٔ مثلث ABC، تا دورأس A و B از این مثلث برابراست با $AP = ۲$ و $BP = ۳$. حداکثر مقدار فاصلهٔ CP چقدر است؟

۷. درخانه‌های جدول $m \times n$، عددهایی‌نوشته‌ایم. تصمیم می‌گیریم، علامت‌های همهٔ عددهای یك ستون یا همهٔ عددهای یك سطر را عوض کنیم. ثابت کنید، با چندبار تکرار این‌عمل، می‌توان جدول را به‌صورتی در آورد که، در آن، مجموع عددهای واقع درهرستون و مجموع عددهای واقع در هرسطر، غیرمنفی باشد.

۸. n نقطه را، به‌کمك پاره خطهای راست غیرمتقاطع، طوری به‌هم وصل کرده‌ایم که، از هر نقطه بتوان، ازطریق این پاره‌خطها، به بقیهٔ نقطه‌ها عبور کرد؛ درضمن دونقطه‌ای پیدا نشودکه با دومسیر به‌هم وصل‌شده باشند. ثابت کنید، تعدادکل پاره خطهای راست، برابر است با $n-۱$.

۹. a، b و p، سه‌عدد درست دلخواهند. ثابت کنید، می‌توان دوعدد k و l پیداکردکه نسبت به‌هم اول باشند و $ak+bl$ بر p بخش‌پذیر باشد.

۱۰. کولیا و په‌تیا $۲n+۱$ گردو را بین‌خود تقسیم می‌کنند($n \geqslant ۲$)؛ درضمن، هرکسی می‌خواهد بیشترین مقدار ممکن گردو را به دست آورد. فرض می‌کنیم، سه روش تقسیم (و هرروش درسه مرحله) وجود داشته باشد.

مرحلهٔ اول. په‌تیا همهٔ گردوها را به دوبخش تقسیم می‌کند، به نحوی که، درهربخش، دست‌کم دو گردو باشد.

مرحلهٔ دوم. کولیا هربخش‌را دوباره به دو بخش تازه تقسیم می‌کند، به نحوی که درهربخش، دست‌کم یك گردو باشد.

(مرحله‌های اول و دوم، برای هرسه روش مشترك‌اند.)

مرحلهٔ سوم. در روش اول، کولیا بزرگترین و کوچکترین بخش را برمی‌دارد؛ در روش دوم، کولیا دوبخش وسط را برمی‌دارد؛ در روش‌سوم، کولیا یا دوبخش بزرگتر وکوچکتر ویا دوبخش متوسط را برمی‌دارد، ولی بنابرقرار قبلی، ازآن‌چه انتخاب کرده‌است، یك گردو به په‌تیا برمی‌گرداند.

کدام روش تقسیم، برای کولیا مناسب‌تر وکدام روش نامناسب‌تر است؟

۱۱. ثابت کنید، برای هرسه دنبالهٔ نامتناهی عددهای طبیعی

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$
$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$
$$c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$$

می‌توان شماره‌های p و q را طوری پیدا کرد که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$a_p \geqslant a_q, \; b_p \geqslant b_q, \; c_p \geqslant c_q$$

۱۲. درمستطیلی با ضلع‌های ۲۰ و۲۵، به‌تعداد ۱۲۰ مربع به‌ضلع واحد انداخته‌ایم. ثابت کنید، می‌توان درمستطیل دایره‌ای به قطر واحد قرارداد، به نحوی که حتی یکی از مربع‌ها را قطع نکند.

المپیاد دوم سراسری روسیه
سال ۱۹۶۲ (مسکو)

کلاس

:۸	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷
:۹	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۱۷
:۱۰	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶

۱۳. روی امتداد ضلع‌های AB، BC، CD و DA از چهارضلعی محدب $ABCD$، نقطه‌های A'، B'، C' و D' را طوری انتخاب کرده‌ایم، که داشته باشیم: $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{DA}$.
ثابت کنید، مساحت چهارضلعی $A'B'C'D'$، پنج برابر مساحت چهارضلعی $ABCD$ است.

۱۴. دایره s و خط راست l در یك صفحه داده شده است و می‌دانیم، خط راست l، از نقطهٔ O مرکز دایرهٔ s گذشته است. دایرهٔ s' را رسم می‌کنیم که از نقطهٔ O بگذرد و مرکز آن، روی خط راست l باشد. نقطهٔ تماس مماس مشترك دو دایرهٔ s و s' را با دایرهٔ s'، M می‌نامیم. مطلوب

است مکان هندسی نقطهٔ M.

۱۵. عددهای درست و مثبت a_0، a_1، ...، a_{99}، a_{100} داده‌شده‌اند. می‌دانیم $a_1 > a_0$، $a_2 = 3a_1 - 2a_0$، $a_3 = 3a_2 - 2a_1$، ...، $a_{100} = 3a_{99} - 2a_{98}$. ثابت کنید، $a_{100} > 2^{99}$.

۱۶. ثابت کنید، عددهای درست a، b، c و d وجود ندارند، به نحوی که به ازای آن‌ها، عبارت $ax^3 + bx^2 + cx + d$ به ازای $x = 19$ برابر واحد و به ازای $x = 62$ برابر ۲ شود.

۱۷. در هر یك از خانه‌های جدول مربعی $n \times n$، که در آن n عددی فرد است، یکی از عددهای ۱ یا ۱ — را به‌دلخواه نوشته‌ایم. زیر هر ستون، حاصل‌ضرب همهٔ عددهای این ستون، و درسمت راست هر سطر، حاصل‌ضرب همهٔ عددهای این سطر نوشته شده است. ثابت کنید، مجموع همهٔ این $2n$ حاصل‌ضرب، نمی‌تواند برابر صفر باشد*.

۱۸. دو ضلع از مثلثی داده شده‌اند و می‌دانیم میانه‌های وارد بر این دو ضلع در مثلث، برهم عمودند. مثلث را رسم کنید.

۱۹. a، b، c و d، عددهایی مثبت‌اند که حاصل ضرب آن‌ها، برابر واحد است. ثابت کنید:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geqslant 10$$

۲۰. پنج‌ضلعی منتظمی داده شده است. M، نقطهٔ دلخواهی واقع در درون یا روی محیط این پنج‌ضلعی است. فاصله‌های نقطهٔ M را ازضلع‌های پنج‌ضلعی (و یا امتدادآن‌ها)، به‌ترتیب مقدارهای صعودی آن‌ها شماره گذاری می‌کنیم:

$$r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3 \leqslant r_4 \leqslant r_5$$

همهٔ موضع‌های نقطهٔ M را پیدا کنید که، به ازای آن‌ها، r_3 کمترین مقدار ممکن را قبول کند؛ همچنین، همهٔ موضع‌های M را پیدا کنید که، برای آن‌ها، r_3 بیشترین مقدار ممکن باشد.

---

*) این مساله در کلاس هشتم، برای $n = 25$ داده شده است.

۲۱. عددی با ۱۹۶۲ رقم درنظر گرفته‌ایم که بر ۹ بخش پذیر است. مجموع همهٔ رقم‌های این عدد را با a، مجموع رقم‌های عدد a را با b و مجموع رقم‌های عدد b را با c نشان می‌دهیم. عدد c را پیدا کنید.

۲۲. از نقطهٔ M وسط قاعدهٔ AC در مثلث متساوی الساقین ABC، عمود MH را بر ضلع BC فرود آورده‌ایم. P را وسط پاره خط راست MH می‌گیریم. ثابت کنید $AH \perp BP$.

۲۳. حداکثر مساحت مثلثی را پیدا کنید که برای ضلع‌های آن، aوbو c، داشته باشیم:

$$۰ \leqslant a \leqslant ۱ \leqslant b \leqslant ۲ \leqslant c \leqslant ۳$$

۲۴. x و y و z، سه عدد درست دلخواه و دو به‌دو متمایز از یکدیگرند. ثابت کنید:

$$(x-y)^۵+(y-z)^۵+(z-x)^۵ \text{ بر } ۵(y-z)(z-x)(x-y)$$

بخش‌پذیر است.

۲۵. دربارهٔ عددهای $a_۰$، $a_۱$، ....، a_n می‌دانیم

$$a_۰ = a_n = ۰ \text{ و } a_{k-۱} - ۲a_k + a_{k+۱} \geqslant ۰$$

(برای $k = ۱ ، ۲، ... ، n-۱$). ثابت کنید همهٔ a_kها، غیرمثبت‌اند.

۲۶. عددهای مثبت $a_۱$، $a_۲$،....، a_n، $b_۱$، $b_۲$، ....، b_m مفروض‌اند و می‌دانیم:

$$a_۱ + a_۲ + \dots + a_m = b_۱ + b_۲ + \dots + b_n$$

ثابت کنید، درجدول شامل m سطر و nستون، می‌توان حداکثر $m+n-۱$ عدد مثبت طوری قرار داد که، درآن، مجموع عددهای سطر iام برابر a_i و مجموع عددهای ستون k ام برابر b_k باشد.

المپیاد سوم سراسری روسیه
سال ۱۹۶۳ (مسکو).

کلاس

۸:	۲۷	۲۸	۲۹a	۳۰	۳۱a
۹:	۳۲	۳۳	۳۴	۳۱b	۲۸
۱۰:	۳۵	۳۶	۳۷	۲۹b	۲۸
۱۱:	۳۸	۲۸	۳۹	۴۰	۲۹b

۲۷. از پنج دایرهٔ مفروض، هر چهار دایره، از یك نقطه می‌گذرند. ثابت کنید، نقطه‌ای وجود دارد که هر پنج دایره از آن می‌گذرند.

۲۸. ۸ نفر در یك مسابقهٔ شطرنج شرکت کردند و همهٔ آن‌ها، امتیازهایی مختلف به دست آوردند. شطرنج‌بازی که مقام دوم را کسب کرده است، به اندازهٔ مجموع امتیازهای چهار مقام آخر، امتیاز آورده است. دو نفری که در مقام‌های سوم و هفتم قرار دارند، چگونه بازی را تمام‌کرده‌اند، نفرسوم برده است یا نفر هفتم؟

۲۹. a) هرقطر چهارضلعی محدب $ABCD$، مساحت آن را نصف می‌کند. ثابت کنید، $ABCD$ یك متوازی‌الاضلاع است.

b) در شش ضلعی محدب $ABCDEF$ می‌دانیم، هر یك از قطرهای AD، BE و CF، مساحت آن را نصف می‌کند. ثابت کنید، این قطرها، در یك نقطه به‌هم می‌رسند.

۳۰. عددهای طبیعی a و b نسبت به هم اول‌اند. ثابت کنید، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دو عدد $a+b$ و a^2+b^2، برابر است با ۱ یا ۲.

۳۱. دو نقطهٔ A و B روی محیطِ دایـره ثابت‌اند و نقطهٔ M تمامی محیط دایره را می‌پیماید. ازنقطهٔ K وسط پاره‌خط راست MB، عمود KP را بر خط راست MA رسم کرده‌ایم.

a) ثابت کنید، همهٔ خط‌های راست KP ازیك نقطه می‌گذرند.

b) مجموعهٔ نقطه‌های P (مکان هندسی نقطهٔ P) را پیدا کنید.

۳۲. مثلث متساوی‌الاضلاعی بـه‌ضلع واحد مفروض است. حـداقل

مقدار d را پیدا کنید که، به‌ازای آن، پاره خط راست به‌طول d، درحالی که دو انتهای آن، روی ضلع‌های مثلث است، بتواند تمامی سطح مثلث را جارو کند.

۳۳. صفحهٔ شطرنجی 6×6 را، با ۱۸ مهره به اندازهٔ 1×2 دومینو پوشانده‌ایم (هر مهره، دوخانه را اشغال کرده است). ثابت کنید، مهره‌ها را به‌هرترتیبی چیده باشیم، می‌توان صفحهٔ شطرنجی را، با یك خط راست‌افقی یا یك خط راست قائم بـه دو بخش تقسیم کرد، به نحوی که به هیچ‌کدام از مهره‌ها لطمه‌ای وارد نیاید.

۳۴. n عدد مثبت و مختلف a_1، a_2، ...، a_n داده شده است. از این عددها، همهٔ مجموع‌های ممکن را، باهرتعداد جمله، ساخته‌ایم (تعدادجمله‌های هرمجموع، از ۱ تا n است). ثابت کنید، در بین این مجموع‌ها، دست‌کم $\frac{1}{2}n(n+1)$ عدد پیدا می‌شود که دو به‌دو با هم فرق دارند.

۳۵. در مثلث ABC، دو نیمسازی را رسم کرده‌ایم که از رأس‌های A و B گذشته‌اند؛ سپس از رأس C، خط‌های راستی موازی با این دو نیمساز کشیده‌ایم. محل برخورد این خط‌های راست با نیمسازها را، به ترتیب، D و E می‌نامیم. معلوم شد دو خط راست DE و AB با هم موازی‌اند. ثابت کنید، مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

۳۶. تصاعد حسابی نامتناهی، با جمله‌های مثبت مفروض است. ثابت کنید، اگر یکی از جمله‌های تصاعد مجذور کامل باشد، آن وقت، در تصاعد، بی‌نهایت جملهٔ مجذور کامل پیدا می‌شود.

۳۷. ۴۵ ضلعی منتظم مفروض است. آیا می‌توان رأس‌های آن را، با عددهای از ۰ تا ۹ طوری شماره‌گذاری کرد که، برای هر دو عدد مختلف، ضلعی وجود داشته باشد که دو انتهای آن با این عددها شماره‌گذاری شده باشد؟

۳۸. عددهای حقیقی a، b، p و q را طوری پیدا کنید که برابری

$$(2x-1)^{20}-(ax+b)^{20}=(x^2+px+q)^{10}$$

برای هر مقدار x برقرار باشد.

۳۹. در دو انتهای قطری از دایره، عددهای ۱ را قرار داده‌ایم. هر یك از دو نیم دایره‌های حاصل را نصف کرده‌ایم و در نقطهٔ وسط کمان هرنیم‌دایره، مجموع دو عددی را قرار داده‌ایم که در دو انتهای آن وجود دارند (گام اول). سپس، هریك از چهار کمان حاصل را نصف کرده و در نقطهٔ وسط آن‌ها، مجموع دو عددی را که در دو انتهای آن است، قرار داده‌ایم (گام دوم). این عمل را nبار ادامه داده‌ایم. مجموع همهٔ عددهایی را پیدا کنید که روی محیط دایره نوشته‌ایم.

۴۰. مثلثی متساوی‌الساقین مفروض است. مکان هندسی نقطه‌هایـی از درون مثلث را پیدا کنید کـه فاصلهٔ هرکدام از آن‌ها تا قاعده، برابر با واسطهٔ هندسی فاصلهٔ آن تا دو ساق باشد.

المپیاد چهارم سراسری روسیه
سال ۱۹۶۴ (مسکو)

کلاس					
۸:	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵a
۹:	۴۱	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹
۱۰:	۵۰	۵۱	۵۴a،b	۵۲	۵۳
۱۱:	۵۴	۵۵	۵۲	۵۳	۴۴

۴۱. در مثلثی، طول هریك از دو ارتفاع آن، از طول ضلعی که بر آن رسم شده‌است، کوچکتر نیست. زاویه‌های مثلث را پیدا کنید.

۴۲. ثابت کنید، عدد $m(m+1)$ نمی‌تواند، به ازای مقداری طبیعی m، برابر با توانی از یك عدد درست باشد.

۴۳. در هر یك از عددهای ۱ تا ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰، مجموع رقم‌ها را محاسبه کرده‌ایم. در هـریك از میلیارد عددی کـه به‌دست می‌آید، دوباره مجموع رقم‌ها را بـه دست آورده‌ایم و غیره، تا وقتی کـه همهٔ عددها، یك رقمی بشوند. کدام عدد بیشتر به دست می‌آید: ۱ یا ۲؟

۴۴. n عدد درست دلخواه a_1، a_2، ...، a_n داده شده‌است. ازاین گروه عددها، گروه جدیدی درست می کنیم:

$$\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_2+a_3}{2}, \ldots, \frac{a_{n-1}+a_n}{2}, \frac{a_n+a_1}{2}$$

واز این گروه جدید، گروه بعدی را با همان قاعده به دست می آوریم وغیره. ثابت‌کنید، اگر همهٔ عددهای حاصل درست باشند، آن وقت، همهٔ عددهای اولیه، برابرند.

۴۵. a) درشش ضلعی محدب $ABCDEF$، همهٔ زاویه‌ها برابرند. ثابت کنید:

$$AB-DE=EF-BC=CD-FA$$

b)ثابت کنید، عکس این‌حکم هم درست است: اگر برای شش‌پاره‌خط راست به طول‌های a_1، a_2، a_3، a_4، a_5 و a_6 داشته باشیم:

$$a_1-a_4=a_5-a_2=a_3-a_6$$

آن وقت می‌توان، با این پاره خطهای راست، یك شش ضلعی محدب با زاویه‌های برابر ساخت.

۴۶. این‌معادله را، در مجموعهٔ عددهای درست، حل کنید:

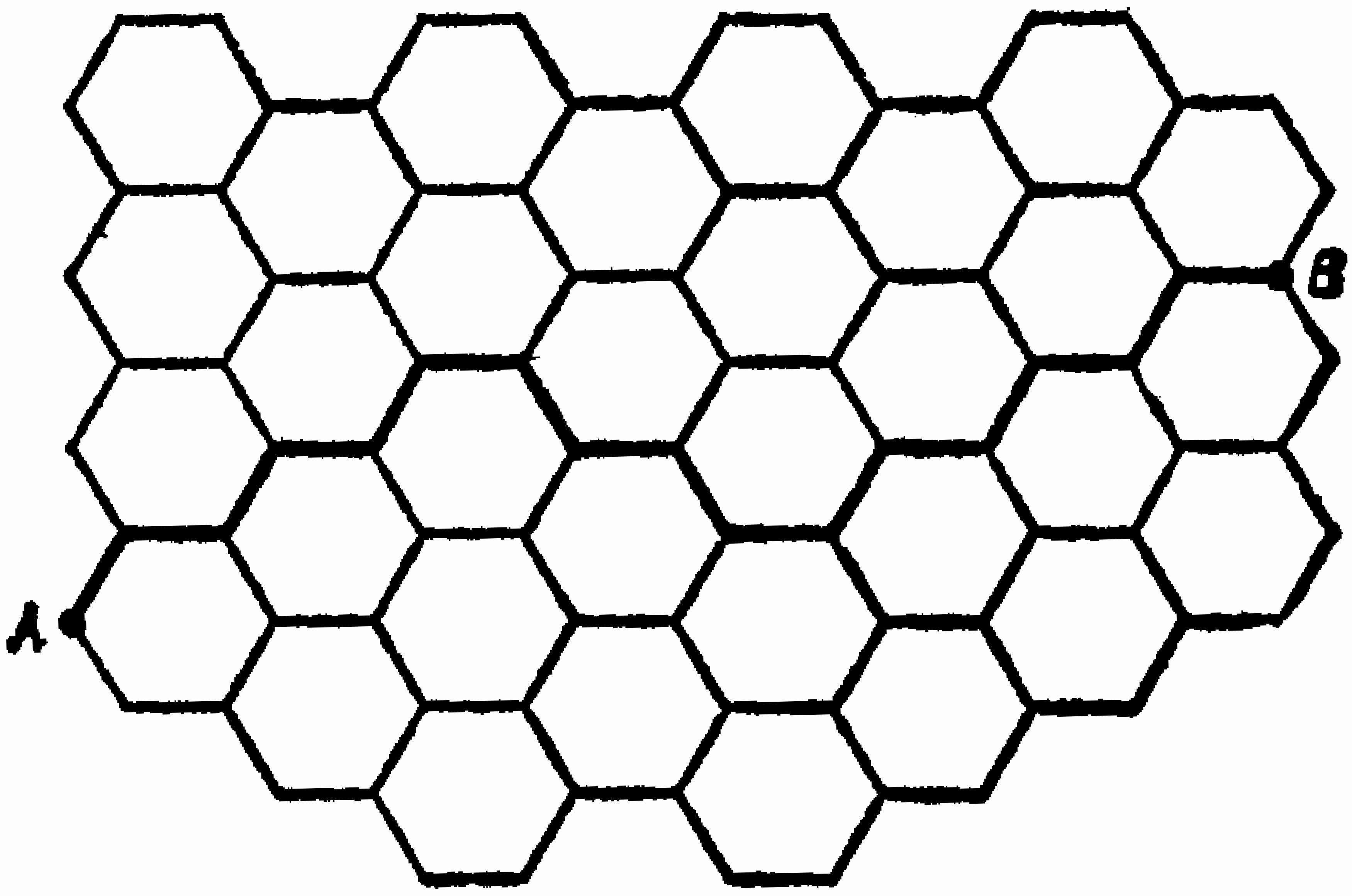
$$\underbrace{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots+\sqrt{x}}}}}=y$$

۱۹۶۴ رادیکال

۴۷. ازرأس‌های چهارضلعی محدب $ABCD$، عمودهایی بر قطرهای آن رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، چهارضلعی که رأس‌های آن، بر پای این عمودها منطبق باشد، با چهارضلعی اصلی متشابه است.

۴۸. همهٔ عددهای طبیعی و فرد n را پیداکنید که، برای آن‌ها، عدد $(n-1)!$ بر n^2 بخش‌پذیر نباشد.

۴۹°. به‌کمك شش‌ضلعی‌های منتظم به ضلع واحد، شبکه‌ای را روی



شکل ۳

صفحه رسم کرده‌ایم (شکل ۳). حشره‌ای روی ضلع‌های شبکه، از نقطهٔ A به طرف نقطهٔ B، روی کوتاه‌ترین مسیر ممکن، راهی به اندازهٔ ۱۰۰ را می‌پیماید. ثابت کنید، نیمی از تمامی مسیر را، در یك جهت طی می‌کند.

۵۰. چهار ضلعی $ABCD$ را بر دایرهٔ بـه مرکز O محیط کرده‌ایم. ثابت کنید، مجموع دو زاویهٔ AOB و COD برابر ۱۸۰ درجه است.

۵۱. a، b و n، سه عـدد طبیعی ثابت‌اند. می‌دانیم، به ازای هر عدد طبیعی k $(k \neq b)$، عدد $a-k^n$ برعدد $b-k$ بخش‌پذیر است. ثابت کنید، در این صورت $a=b^n$.

۵۲. در عبارت $x_1 : x_2 : \ldots : x_n$، بـرای نشان دادن ردیف عمل‌ها، پرانتزهایی گذاشته و نتیجه را به این صورت نوشته‌ایم:

$$\frac{x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}}{x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_{n-k}}}$$

(درضمن، هـر یك از حرف‌های x_1، x_2، …، x_n، یا در صورت کسر قرار دارد و یا در مخرج آن). اگـر همهٔ روش‌های ممکن پرانتز گذاری را در نظر بگیریم، به چند کسر از این گونه می‌رسیم؟

۵۳. مکعبی را به چهار وجهی‌هایی تقسیم کـرده‌ایم که یکدیگر را نمی‌پوشانند. کمترین تعداد این چهاروجهی‌ها چقدر است؟

۵۴. بزرگترین عدد مجذور کاملی را پیدا کنیدکه، بعد از حذف دو

رقم آخر آن (دو رقم راست)، دوباره یك مجذور کامل به دست آید (فرض بر این است که، یکی از رقم‌های حذف شده، برابرصفر نیست).

۵۵. $ABCD$، یك ذوزنقهٔ محیطی است؛ E را نقطهٔ برخورد قطرهای AC و BD، و $r_۱$، $r_۲$، $r_۳$، $r_۴$ را، بــه ترتیب، شعاع دایـره‌های محاط در مثلث‌های ABE، BCE، CDE، DAE می‌گیریم. ثابت کنید:

$$\frac{۱}{r_۱}+\frac{۱}{r_۳}=\frac{۱}{r_۲}+\frac{۱}{r_۴}$$

المپیاد پنجم سراسری روسیه
سال ۱۹۶۵ (مسکو)

کلاس

:۸	۵۶a	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰
:۹	۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵
:۱۰	۵۶b	۶۶	۶۷a	۶۸a	۶۹
:۱۱	۶۳	۶۷b	۷۰	۶۸b	۷۱

۵۶. a) هر یك از عددهای $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n، می‌توانند بدون ارتباط با بقیه، مقدار ۱، ۰ یا ۱ — را قبول کنند. حداقل مجموع حاصل ضرب‌های دو به دوی این n عدد، چقدر می‌تواند باشد؟

b) حداقل مقدار مجموع همهٔ حاصل ضرب‌های دو به دوی n عدد $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n چقدر است، به شرطی که قدرمطلق هیچ کدام از این عددها، از واحد تجاوز نکند؟

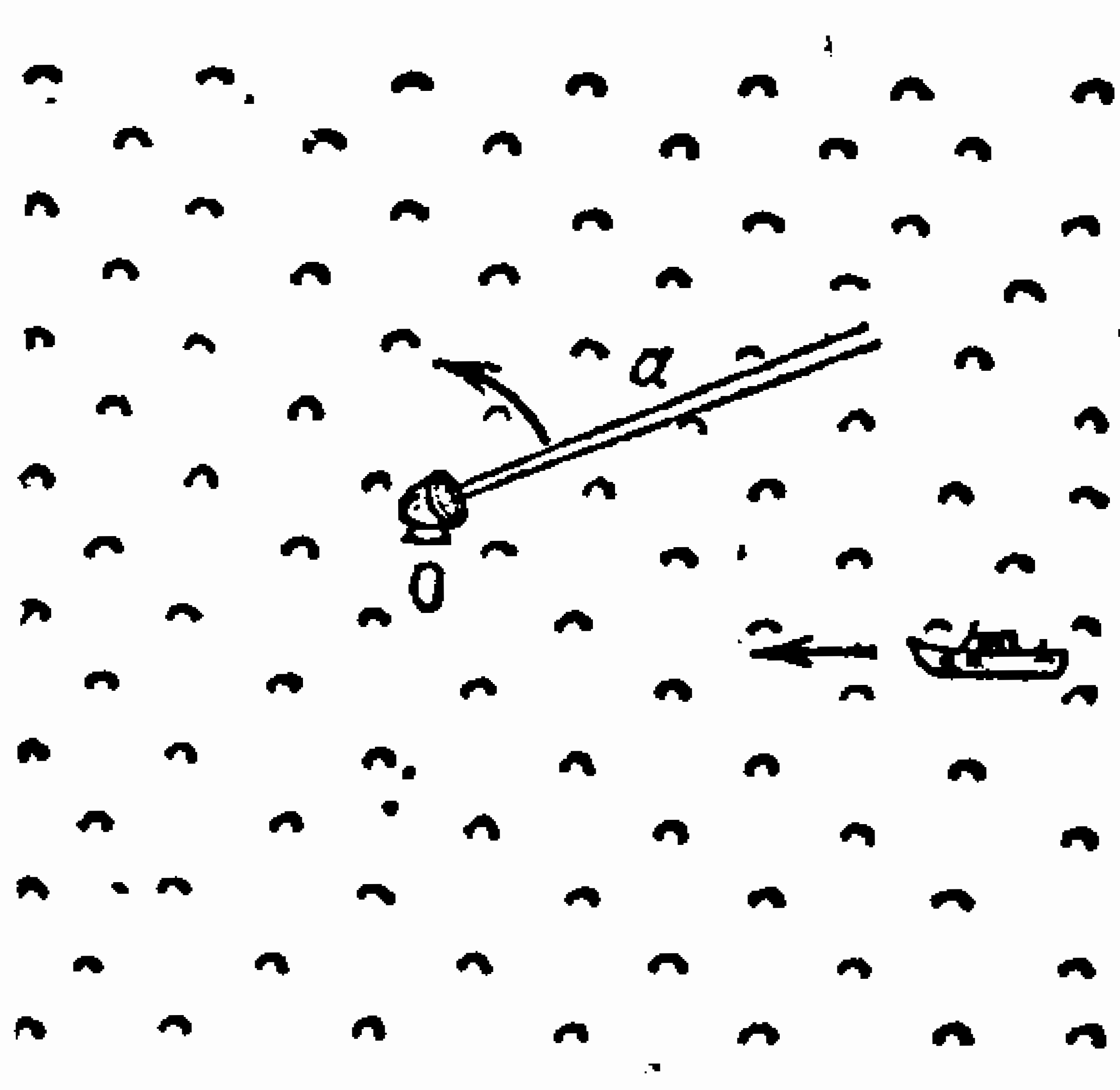
۵۷. صفحه‌ای مربعی با ۳ × ۳ خانه و ۹ کارت، که اندازه‌های یکی از آن‌ها بـرابر با اندازه‌های یك خانه است، در اختیار داریم. روی هــر کارت عددی نوشته شده است. دو نفر که با هم بازی می‌کنند، به نوبت این کارت‌ها را روی خانه‌ها می‌گذارند. بعد از آن که همهٔ کارت‌ها در خانه‌ها قرار گرفتند، اولی (آغاز کنندهٔ بازی) مجموع شش عددی را به دست می‌آورد که در دوسطر بالایی و پایینی قرار دارند و، دومی، مجموع سش عددی

را که در ستون‌های سمت چپ و سمت راست واقع است، محاسبه می‌کنند. کسی بازی را برده است که صاحب مجموع بیشتری باشد. ثابت کنید، اگر بازی درست انجام شود، دومی نمی‌تواند از اولی ببرد، بدون ارتباط با عددهایی که روی کارت‌ها نوشته شده است.

۵۸. دایره‌ای را بر مثلث ABC محیط کرده‌ایم. وترهایی که وسط کمان AC را به وسط کمان‌های AB و BC وصل کرده‌اند، ضلع‌های AB و BC را در نقطه‌های D و E قطع می‌کنند. ثابت کنید، پاره خط راست DE، با ضلع AC موازی است و ازمرکزدایرهٔ محاطی‌مثلث ABC می‌گذرد.

۵۹. شمارهٔ بلیت اتوبوس عددی شش رقمی است. بلیتی را «بلیت خوشبختی» می‌نامیم که مجموع سه رقم آن، با مجموع سه رقم آخر بلیت برابر باشد. ثابت کنید، مجموع همهٔ شماره‌های بلیت‌های خوشبختی، بر عدد ۱۳ بخش‌پذیر است.

***۶۰.** روی دریاچهٔ کوچکی، یك نورافکن قرار داده‌اند که، پرتو آن، پاره خط راستی ازسطح‌آب‌دریا به طول a را روشن می‌کند (شکل۴). نورافکن، به طور یکنواخت، دور محور قائم، طوری دوران می‌کند که، انتهای پرتو آن، باسرعت v جا به‌جا می‌شود. ثابت کنید، ناوچه‌ای که سرعت حداکثرآن برابر $\frac{v}{8}$ است، نمی‌تواند به دریاچه نزدیك شود، بدون آن‌که



شکل ۴

در معرض پرتو نورافکن قرار گیرد.

۶۱. در یك گروه ملی، ۱۰۰ نفر عضویت دارند و هر شب، سه نفر نگهبانی می‌دهند. ثابت کنید، نمی‌توان برنامهٔ نگهبانی‌ها را طوری تنظیم کرد که، هر دو نفر، تنها یك بار باهم نگهبانی بدهند.

۶۲. پاره خط راستی، محدود بــه دو ضلع جانبی مثلث و مماس با دایرهٔ محاطی مثلث، با قاعدهٔ مثلث موازی شده است. اگر محیط مثلث برابر $2p$ باشد، حداکثر طول این پاره‌خط راست چقدر است؟

۶۳. n^2 عدد x_{ij} $(i, j = 1, 2, \dots, n)$، در دستگاهی شامل n^3 معادله صدق می‌کنند:

$$x_{ij}+x_{jk}+x_{ki}=0, \ (i, j, k=1, 2, \dots, n)$$

ثابت کنید، عددهای a_1، a_2، ...، a_n وجود دارند، به نحوی کـه برابری $x_{ij}=a_i-a_j$، برای هر i و j، برقرار باشد.

۶۴*. آیا می‌توان ۱۹۶۵ نقطه را، در مربع به ضلع واحد، طوری قرار داد که هر مستطیل بــه مساحت $\frac{1}{200}$ و با ضلع‌هایی موازی ضلع‌های مربع، دست‌کم یکی از این نقطه‌ها را در درون خود داشته باشد؟

۶۵*. گردکردن یك عدد را، به‌این معنا می‌گیریم که، آن را، با یکی از دو عدد درست نزدیك به‌آن، عوض کنیم.

nعدد داده شده‌است. ثابت کنید، می‌توان این nعدد را طوری گردکرد که، مجموع هر m عدد گردشده $(1 \leqslant m \leqslant n)$، از مجموع خود m عـدد (یعنی درحالتی که گرد نشده‌اند)، بیش‌از $\frac{1}{4}(n+1)$ اختلاف نداشته باشد.

۶۶. جهان‌گردی که با قطار به مسکو آمده بود، تمام روز را درشهر قدم زد. در رستورانی واقع در یك میدان شام خــورد و تصمیم گرفت به ایستگاه برگـردد و، در ضمن، تنها از خیابان‌هایی عبور کند کــه، تا آن ساعت، به تعداد فرد ازآن‌ها گذشته است. ثابت‌کنید، جهان‌گرد در هرحال می‌تواند، به این ترتیب، خود را به ایستگاه برساند.

۶۷. a) یك کمیسیون ۴۰ بار تشکیل شده است. در هر نشست ۱۰ عضو کمیسیون شرکت کرده‌اند، در ضمن هیچ دو عضوی از کمیسیون با هم، بیش از یکبار، درنشست‌ها نبوده‌اند. ثابت کنید، تعدادعضوهای کمیسیون از ۶۰ بیشتر است.

b) ثابت کنید، با ۲۵ نفر نمی‌توان بیش از ۳۰ کمیسیون ۵ عضوی تشکیل داد، به شرطی که هیچ دو کمیسیونی، بیش ازیك عضو مشترك نداشته باشند.

*۶۸. دو عدد مثبت p و q، نسبت به هم اول‌اند. عدد درست n را «خوب» می‌نامیم، وقتی‌که بتوان آن را به‌صورت $n=px+qy$ نشان داد که، در آن، x و y عددهای درست غیر منفی‌اند؛ و در حالت عکس، آن را «بد» می‌نامیم.

a) ثابت کنید، عدد درست c وجود دارد، به نحوی که از دو عدد درست n و $c-n$، همیشه یکی عدد «خوب» و دیگری عدد «بد» است.

b) روی هم، چند عدد «بد» غیرمنفی وجود دارد؟

۶۹. هواپیمای اکتشافی روی دایره‌ای به مرکز نقطهٔ A و به شعاع ۱۰ کیلومتر، با سرعت ساعتی ۱۰۰۰ کیلومتر پرواز می‌کند. درلحظه‌ای، از نقطهٔ A موشکی پرتاب می‌شودکه دارای همان سرعت هواپیما است ومسیر حرکت آن، همیشه، روی خط راستی قرار داردکه نقطهٔ A را به هواپیما وصل می‌کند. موشك، چه مدتی بعد از پرتاب، به هواپیما می‌رسد؟

۷۰. ثابت کنید، مجموع طول یال‌های هر چندوجهی از $3d$ بیشتر است‌که، درآن، d عبارت است از فاصله بین دورترین دو راس چندوجهی از یکدیگر.

*۷۱. در سیاره‌ای که به شکل کره است، موجودی زندگی می‌کند که می‌تواند، روی سطح سیاره، با سرعتی که از u تجاوز نمی‌کند، حرکت کند. یك سفینهٔ فضایی در اطراف این سیاره در پرواز است که می‌تواند با سرعت v حرکت کند. ثابت‌کنید، اگـر داشته باشیم $\frac{v}{u}>10$، آن وقت،

موجود روی سیاره نمی‌تواند خود را از دید سفینه مخفی کند.

المپیاد ششم سراسری روسیه
سال ۱۹۶۶ (وورونژ)

کلاس					
۸:	۷۲	۷۳a	۷۴	۷۵a	۷۶
۹:	۷۷	۷۳b	۷۵b	۷۸	۷۹
۱۰و۱۱:	۷۵b	۸۰	۸۱	۸۲	۸۳

۷۲. روی هرسیاره از یك منظومه، یك اخترشناس، نزدیك‌ترین سیاره را مشاهده می‌کند. فاصله‌های بین سیاره‌ها، دو به دو، با هم اختلاف دارند. ثابت کنید، اگر تعداد سیاره‌ها فرد باشد، سیاره‌ای وجود دارد که کسی آن را مشاهده نمی‌کند.

۷۳. a) نقطه‌های B و C در درون پاره‌خط راست AD واقـع‌اند. ثابت کنید، اگر AB برابر CD باشد، آن وقت، برای هر نقطهٔ P ازصفحه، داریم:

$$PA+PD \geqslant PB+PC$$

b) نقطه‌های A، B، C و D، روی یك صفحه مفـروض‌اند. می‌دانیم، برای هر نقطهٔ P از صفحه، این نابرابری برقرار است.

$$PA+PD \geqslant PB+PC$$

ثابت کنید، نقطه‌های B و C روی پاره‌خط راست AD واقع‌اند و $AB=CD$.

۷۴. آیا عددهای طبیعی x و y وجود دارند که، به ازای آن‌ها، x^2+y و y^2+x، مجذورهای کاملی باشند؟

۷۵. a) دانش‌آموزان کلاس هشتم در یك صف ایستاده‌اند. جلو هر کدام از آن‌ها، دانش‌آموزی از کلاس هفتم ایستاده است که قدی کوتاه‌تر دارد. ثابت کنید، اگر صف دانش‌آموزان کلاس هشتم به ردیف قد وصف دانش‌آموزان کلاس هفتم هم به‌ردیف قد خود ایستاده باشند، بازهم مثل قبل،

ه) دانش آموز کلاس هشتم بلندتر از دانش آموز کلاس هفتم جلوخود است.

(ا) گروهی سرباز به شکل مستطیلی ایستاده‌اند، به نحوی که در هر صف، ردیف قد آن‌ها رعایت شده است. ثابت کنید، اگر سربازان را، در هر ستون، به‌ردیف قد خود قراردهیم، بازهم مثل سابق، در هرصف، به‌ردیف قد خود قرار می گیرند.

۷۶. روی یك صفحهٔ کاغذ شطرنجی، مستطیل $ABCD$ را رسم کرده‌ایم، به نحوی که ضلع‌های آن، روی خطهای راست شبکه قرار داشته باشد و، در ضمن، AD، k برابر AB باشد (k، عددی درست است). همهٔ مسیرهای ممکن را از طریق خطهای راست شبکه در نظر می گیریم، به نحوی که کوتاه‌ترین راه از A به C باشند. ثابت کنید. بین این مسیرها، نمونه‌هایی پیدا می‌شود که، در آن‌ها، نخستین حلقه بر AD واقع است و، این حلقه، k برابر نمونه‌هایی است که، در آن‌ها، نخستین حلقه بر AB قرار دارد.

۷۷. برای عددهای a_1، a_2، ...، a_n می‌دانیم:

$$0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant 2a_1;\ a_2 \leqslant a_3 \leqslant 2a_2, \ldots, a_{n-1} \leqslant a_n \leqslant 2a_{n-1}$$

ثابت کنید، در مجموع $s = \pm a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_n$، می‌توان علامت‌ها را طوری در نظر گرفت که داشته باشیم: $0 \leqslant s \leqslant a_1$.

۷۸. ثابت کنید، در چهارضلعی محدب به مساحت S و محیط P، می‌توان دایره‌ای به‌شعاع $\frac{S}{P}$ جاداد.

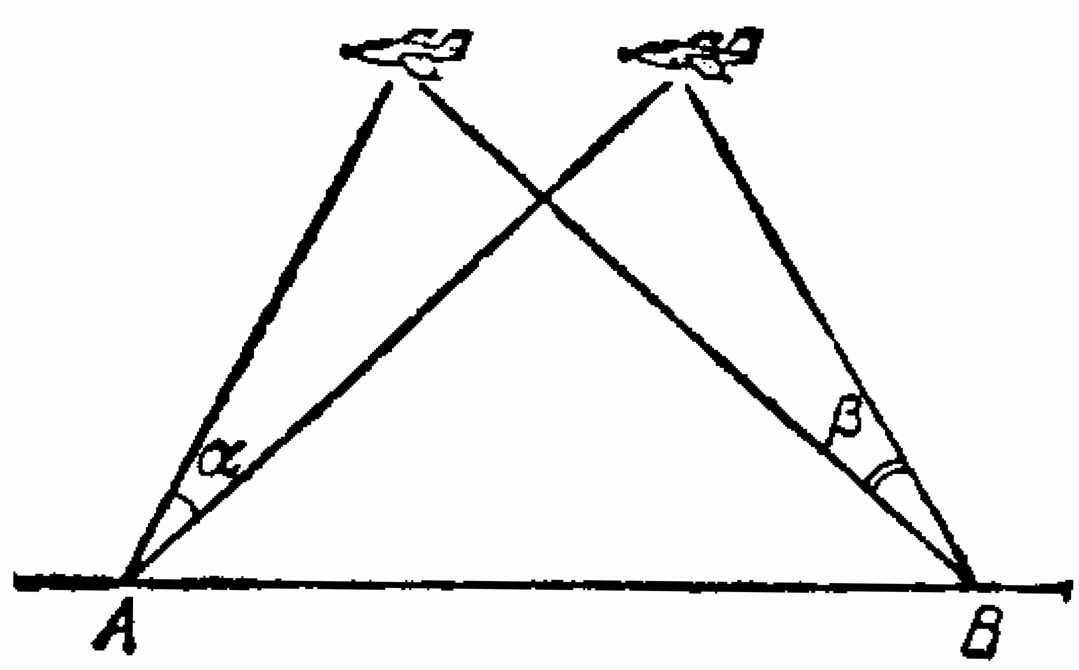
۷۹. در یك شهر، برای هر سه چهار راه A، B و C، مسیری وجود دارد که از A به B می‌رود، ولی از C نمی گذرد. ثابت کنید، هر چهارراه با هرچهارراه دیگر، دست‌کم به‌وسیلهٔ دومسیر غیرمتقاطع، مربوط است. (چهارراه، به‌نقطه‌ای می گوئیم که، از آن جا، دست‌کم دو خیابان عبور کند؛ در شهر، دست‌کم، دو چهارراه وجود دارد.)

۸۰. مثلث ABC مفروض است. همهٔ چهاروجهی‌های ممکن $PABC$

را در نظر می‌گیریم کــه، در آن‌ها، PH کوچکترین ارتفاع چهاروجهی باشد (H، تصویر نقطهٔ P بـر صفحهٔ ABC است). مجموعهٔ نقطه‌های H (مکان هندسی نقطهٔ H) را پیدا کنید.

*۸۱. ۱۰۰ نقطه روی صفحه داده شده است. ثابت کنید، این نقطه‌ها را می‌توان با چند دایرهٔ غیرمتقاطع پوشاند، به نحوی که مجموع قطرهای این دایره‌ها، کوچکتر از ۱۰۰ و فاصلهٔ بین هـر دو دایره بیشتر از واحد باشد (فاصلهٔ بین دو دایرهٔ غیر متقاطع، بـه فاصلهٔ بین نزدیك‌ترین نقطه‌های آن‌ها گفته می‌شود).

۸۲. از دو نقطهٔ A و B، کــه به فاصلهٔ d کیلومتر از یکدیگر قرار دارند، به طور هم زمان و در طول یك ثانیه، هواپیمائی را مشاهده می‌کنند



شکل ۵

که روی خط راست و با سرعتی ثابت حـرکت می‌کند (شکل ۵). از نقطهٔ A اطلاع می‌دهند کــه، این هواپیما، در طول یك ثانیه، به اندازهٔ زاویهٔ α جا به‌جا شده است؛ ازنقطهٔ B اطلاع می‌دهند که، درطول این یك ثانیه، هواپیما به اندازهٔ زاویهٔ β جا به جا شده است (α و β. زاویه‌هایی حاده‌اند). حداقل سرعت هواپیما، چقدر می‌تواند باشد؟

*۸۳. ۲۰ عدد ۱؛ ۲، ...، ۲۰ روی کاغذ نوشته شده‌است. دو بازی کن، به نوبت، جلو این عددها، علامت «+» یا «−» می‌گذارند (علامت را، می‌توان جلوی هر عددی گذاشت که بی‌علامت باقی مانده‌است). اولی می‌خواهد ترتیبی بدهد که، بعداز پایان علامت گذاری‌ها، مجموع همهٔ عددها، کمترین مقدارممکن را، از لحاظ قدرمطلق، داشته باشد. نفر دوم، چه‌مجموع حداکثری را، از لحاظ قدرمطلق، می‌تواند برای خود تأمین کند؟

نخستین المپیاد سراسری شوروی
سال ۱۹۶۷ (تفلیس)

کلاس

۸:	۸۴a	۸۵a	۸۶a	۸۷a	۸۸
۹:	۸۷b	۸۶a	۸۵b	۸۴b	۸۹
۱۰:	۹۰	۸۶b	۹۱	۹۲	۹۳

۸۴. a) در مثلث ABC، که زاویه‌هایی‌حاده دارد، بزرگترین ارتفاع آن، AH، با میانهٔ BM برابر است. ثابت‌کنید، زاویهٔ ABC از ۶۰ درجه تجاوز نمی‌کند.

b) در مثلث ABC، با زاویه‌های حاده، ارتفاع AH با میانهٔ BM وبانیمساز CD برابر است. ثابت‌کنید، ABC مثلثی متساوی‌الاضلاع است.

۸۵. a) دریك عدد طبیعی، جای رقم‌ها را به دلخواه عوض کرده‌ایم. ثابت‌کنید، مجموع عدد اصلی با عددی که به‌دست می‌آید، نمی‌تواندبرابر با عدد زیرباشد:

$$\underbrace{999\ldots9}_{\text{۱۹۶۷ رقم}}$$

b) رقم‌های عـددی را جابه‌جا و، سپس آن را، باعـدد اصلی جمع کرده‌ایم. ثابت کنید، اگر این مجموع برابر 10^{10} باشد، عدد اصلی بر ۱۰ بخش‌پذیر است.

۸۶. a) نورافکن زاویهٔ ۹۰ درجه را روشن می‌کند. ثابت کنید، با قراردادن نورافکن در چهار نقطهٔ دلخواه صفحه، می‌توان طوری آن‌ها را جهت‌گیری کرد که تمامی صفحه روشن شود.

b) در هر یك از هشت نقطهٔ فضا، نورافکنی قرار دارد کـه می‌تواند یك هشتم فضا را (یعنی درون یك کنج سه وجهی را که یال‌های آن دو به دو بر هم عمودند) روشن کند. راس این کنج را باید در نقطه‌ای در نظر

گرفت که نورافکن در آن‌جا قرار دارد. ثابت کنید، می‌توان جهت نورافکن‌ها را طوری تنظیم کرد که تمامی فضا روشن شود.

۸۷. a) آیا می‌توان عددهای ۰، ۱، ۲، ...، ۹ را روی محیط یک دایره طوری قرار داد کـه، هر دو عدد مجاور، ۳، ۴ یا ۵ واحد با هـم اختلاف داشته باشند؟

b) آیا می‌توان عددهای ۱، ۲، ...، ۱۳ را روی محیط دایره طوری قرار داد که، هر دو عـدد مجاور به اندازهٔ ۳، ۴ یا ۵ واحد با هم اختلاف داشته باشند؟

۸۸. ثابت کنید، عددی وجود دارد که بر 5^{1000} بخش‌پذیر است و در بین رقم‌های آن، حتی یک صفر وجود ندارد.

۸۹*. همهٔ زوج عددهای درست x و y را پیدا کنید کـه در معادلهٔ زیر صدق کنند:

$$x^2+x=y^4+y^3+y^2+y$$

۹۰. در دنباله‌ای از عددهای درست و مثبت، با آغاز از جملهٔ سوم، هرجمله برابر است با قدرمطلق تفاضل دو جملهٔ قبل از آن.

این دنباله، حداکثر چند جمله می‌تواند داشته باشد، به شرطی که هر جملهٔ آن، از ۱۹۶۷ تجاوز نکند؟

۹۱. «خودکشی شاه». روی یک صفحهٔ شطرنجی ۱۰۰۰ × ۱۰۰۰، شاه سیاه و ۴۹۹ رخ سفید وجود دارد. ثابت کنید، مهرهٔ شاه در هر خانه‌ای باشد و سفید بـه هر ترتیبی بازی کند، شاه زیر ضربهٔ رخ‌های سفید است. (حرکت‌ها، مثل بازی معمولی شطرنج انجام می‌شوند.)

۹۲. سه راس متوالی لوزی، به ترتیب، روی ضلع‌هـای AB، BC و CD از مربع مفروض به ضلع واحد قرار دارند. مطلوب است مساحت شکلی که به‌وسیلهٔ رأس چهارم چنین لوزی‌هایی پر می‌شود.

۹۳*. عدد طبیعی k، دارای این ویژگی است که، اگر عدد n بر آن بخش‌پذیر باشد، مقلوب عدد n هم (یعنی عددی که با همان رقم‌های n، ولی در جهت عکس نوشته شده باشد) بر k بخش پذیر است. ثابت کنید، عدد

۸. مقسوم علیهی از عدد ۹۹ است.

دومین المپیاد سراسری شوروی
سال ۱۹۶۸ (لنین‌گراد)

کلاس	دور کتبی					دور شفاهی				
۸:	۹۴	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۱۰۵a	۱۰۶	۱۰۷	۱۰۸	۱۰۹
۹:	۹۹	۱۰۰	۱۰۱	۹۷	۱۰۲	۱۱۰	۱۱۱	۱۰۵a	۱۰۸	۱۰۹
۱۰:	۱۰۳	۹۵	۱۰۴	۹۷	۹۶	۱۰۵b	۱۱۲	۱۱۳	۱۱۴	۱۰۹

۹۴. در یك هشت‌ضلعی، همهٔ زاویه‌ها برابرند و طول ضلع‌ها عددهایی درست‌اند. ثابت کنید، در این هشت‌ضلعی، ضلع‌های رو به‌رو با هم برابرند.

۹۵. کدام یك بزرگترند: 31^{11} یا 17^{14}؟

۹۶. صفحه‌ای شطرنجی که طول ضلع هرخانهٔ آن برابر یك سانتی‌متر است، در اختیار داریم. دایره‌ای به‌شعاع ۱۰۰ سانتی‌متر رسم کرده‌ایم، به نحوی که محیط آن، از هیچ رأسی از خانه‌ها نمی‌گذرد و بر هیچ ضلعی از خانه‌ها مماس نیست. محیط این دایره، چند خانه را می‌تواند قطع کند؟

۹۷. بین دانشجویانی که به دانشگاه «دوستی ملت‌ها» آمده‌اند، درست ۵۰ نفر زبان انگلیسی، درست ۵۰ نفر زبان فرانسوی و درست ۵۰ نفر زبان اسپانیائی می‌دانند. ثابت کنید، دانشجویان را می‌توان به ۵ گروه (لازم نیست برابر باشند)، چنان تقسیم کرد که، در هر گروه، درست ۱۰ نفر که زبان انگلیسی می‌دانند، درست ۱۰ نفر که زبان فرانسوی می‌دانند و درست ۱۰ نفر که زبان اسپانیائی می‌دانند، وجود داشته باشد. (فرض بر این است که، از بین دانشجویان، برخی هیچ‌کدام ازاین زبان‌ها رانمی‌دانند و برخی دیگر به دو یا هر سه زبان مسلط‌اند.)

۹۸. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$\frac{2}{x^2-1}+\frac{4}{x^2-4}+\frac{6}{x^2-9}+\dots+\frac{20}{x^2-100}=$$

$$=11\left(\frac{1}{(x-1)(x+10)}+\frac{1}{(x-2)(x+9)}+\dots+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(x-10)(x+1)}\right)$$

۹۹. در یك n ضلعی منتظم $(n>5)$، اختلاف بین بزرگترین و کوچکترین قطر، برابر با ضلع nضلعی است. n را پیدا کنید.

۱۰۰. دنبالهٔ a_1، a_2، a_3، ...، به این ترتیب تعریف شده است:

$$a_1=1,\ a_2=a_1+\frac{1}{a_1},\dots,a_n=a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}$$

ثابت کنید: $a_{100}>14$.

۱۰۱. نقطهٔ O را در درون مثلث ABC و نقطهٔ O' را در درون مثلث $A'B'C'$ انتخاب کرده‌ایم؛ زاویه‌های هردو مثلث، حاده‌اند. از نقطهٔ O، عمود OA_1 را بر ضلع BC، عمود OB_1 را بر ضلع CA و عمود OC_1 را بر ضلع AB رسم کرده‌ایم. به همین ترتیب، عمودهای $O'A'_1$، $O'B'_1$ و $O'C'_1$ را، به ترتیب، بر ضلع‌های $B'C'$، $C'A'$ و $A'B'$ رسم کرده‌ایم. معلوم شد:

$$OA_1\|O'A',\ OB_1\|O'B',\ OC_1\|O'C',$$
$$OA_1\cdot O'A'=OB_1\cdot O'B'=OC_1\cdot O'C'$$

ثابت کنید:

$$O'A'_1\|OA,\ O'B'_1\|OB,\ O'C'_1\|OC,$$
$$O'A'_1\cdot OA=O'B'_1\cdot OB=O'C'_1\cdot OC$$

***۱۰۲.** ثابت کنید، هر عدد طبیعی را که از $n!$ تجاوز نکند، می‌توان به صورت مجموعی از عددهای طبیعی مختلف نشان داد، به نحوی که، تعداد جمله‌های مجموع، از n تجاوز نکند و، درضمن، هرجملهٔ مجموع، مقسوم‌علیهی از $n!$ باشد.

۱۰۳. نقطهٔ D را روی ضلع AB و نقطهٔ E را روی ضلع AC از مثلث ABC گرفته‌ایم. در ضمن، می‌دانیم:

$$DE \| BC ، AD = DE = AC ، BD = AE$$

ثابت کنید، طول BD برابر است با طول ضلع ده ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع $R = AC$.

۱۰۴. چهاروجهی $ABCD$ مفروض است. سه کره، به‌ترتیب، با قطرهای AB، AC و AD در نظر می‌گیریم. ثابت کنید، این کره‌ها، چهاروجهی را می‌پوشانند.

۱۰۵. a) در جدول ۴ × ۴، علامت‌های «+» و «−» را، طبق شکل ۶، قرار داده‌ایم. تصمیم می‌گیریم، علامت همهٔ خانه‌هایی را که در

+	−	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

شکل ۶

یک سطر، یا یک ستون، یا به روی خط راستی موازی یک قطر (و درحالت خاص، یکی ازخانه‌های گوشه‌ای) قراردارند، به‌طور هم‌زمان، عوض کنیم. ثابت کنید، اگر این عمل را هر چندبار انجام دهیم، به‌جدولی نمی‌رسیم که همهٔ علامت‌های خانه‌های آن مثبت باشد.

b) در همهٔ خانه‌های صفحهٔ شطرنجی ۸ × ۸، علامت مثبت گذاشته‌ایم، به استثنای یکی از خانه‌ها (و البته، به جز خانه‌های گوشه‌ای)، که در آن، علامت منفی قرار داده‌ایم. تصمیم گرفتیم، بــه طور هم زمان، علامت همهٔ خانه‌های یک سطر، یک ستون یا یک قطر را تغییر دهیم (و درحالت خاص، هرکدام ازخانه‌های گوشه‌ای را؛ قطررا به خطی گوییم که مهرهٔ فیل می‌تواند روی آن حرکت کند). ثابت کنید، اگر هر چند بار، به این ترتیب، علامت‌ها را تغییر دهیم، به جدولی نمی‌رسیم که همهٔ علامت‌های آن، مثبت باشد.

۱۰۶. میانه‌های مثلث ABC، آن را به شش مثلث تقسیم می‌کنند. معلوم شد، از بین دایره‌های محاطی این مثلث‌ها، چهار دایره باهم برابرند. ثابت کنید، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

۱۰۷. ثابت کنید، معادله

$$x^2+x+1=py$$

برای بی‌نهایت عدد اول p، در مجموعهٔ عددهای درست (x, y)، جواب‌دارد.

۱۰۸. بعداز هنرنمائی ۲۰ هنرمند رقص، هریك از ۹ داور، بنا به نظر خود، ردیفی بـرای مقام‌های آن‌ها، از ۱ تا ۲۰ معین کـردند. معلوم شد، اختلاف مقام‌هایی که داوران مختلف برای‌هر هنرمند تعیین کرده‌اند، بیشتر از ۳ نیست.

مقام‌های هر هنرمند را جمع کردند و عددهای حاصل را، به ترتیب صعودی نوشتند، ردیف

$$c_1 \leqslant c_2 \leqslant c_3 \leqslant c_4 \leqslant \dots \leqslant c_{20}$$

به دست آمد. داوران روی هم، به c_1، حداکثر چه عددی داده‌اند؟

۱۰۹. عددهای a_1، a_2، ...، a_n از بین عددهای 1، $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$، ...، $\frac{1}{n}$ و هر کدام یك بار و، هم‌چنین، عددهای b_1، b_2، ...، b_n هم از بین همین عددها، بازهم هر کدام یك بار، انتخاب شده‌اند. در ضمن، می‌دانیم:

$$a_1+b_1 \geqslant a_2+b_2 \geqslant a_3+b_3 \geqslant \dots \geqslant a_n+b_n$$

ثابت کنید، بـه ازای هر m از بین عددهای ۱ تا n، داریم:

$$a_m+b_m \leqslant \frac{4}{m}$$

۱۱۰. روی میز معلم یك ترازو گذاشته شده است. درکفه‌های ترازو وزنه‌هایی وجود داردکه ممکن است برابر نباشند. روی هر وزنه، نام فامیل یك یا چند نفر ازدانش‌آموزان نوشته شده است. هر دانش‌آموزی کـه به

کلاس وارد می‌شود، وزنه‌ای را که نام فامیل او روی آن نوشته شده است، بر می‌دارد و در کفهٔ دیگر ترازو می‌گذارد. ثابت کنید، می‌توان ورود دانش‌آموزان به کلاس را طوری اجازه داد که، در نتیجه، آن کفه‌ای از ترازو سبك‌تر باشد که در ابتدا سنگین‌تر بوده است.

۱۱۱. طرح یك شهر به صورت مستطیلی است که به خانه‌هائی تقسیم شده است. n خیابان موازی با هم، و m خیابان دیگر عمود بر آن‌ها، در آن وجود دارد. درخیابان‌های شهر (و نه درچهار راه‌ها)، پاسبان‌های ادارهٔ راهنمائی و رانندگی مستقر شده‌اند. هر پاسبان، شماره، جهت حرکت وزمان اتوبوس‌هایی را که از مقابل او می‌گذرند، اطلاع می‌دهد. همهٔ اتوبوس‌ها، روی‌مسیرهای بسته‌ای درخیابان‌های شهرحرکت می‌کنند (وقتی‌که اتوبوسی، یك بارمسیرخود را طی می‌کند، از هیچ نقطه‌ای دوبار نمی‌گذرد). حداکثر، چند پاسبان باید در خیابان‌های شهر گذاشت، تا بتوان بنابر آگاهی‌هایی که می‌دهند، مسیر هراتوبوس را، به‌صورتی یك‌ارزشی، معین کرد؟

۱۱۲. دایرهٔ محاطی مثلث ABC، بر ضلع AC در نقطهٔ K مماس است. ثابت کنید، خط راستی که وسط ضلع AC را به مرکز دایرهٔ محاطی مثلث وصل می‌کند، پاره خط راست BK را نصف می‌کند.

۱۱۳. دنبالهٔ عددهای $a_1, a_2, \ldots, a_n$، به این ترتیب تعریف شده است:

$$a_1 = 0, |a_2| = |a_1 + 1|, |a_3| = |a_2 + 1|, \ldots$$

$$\ldots, |a_n| = |a_{n-1} + 1|$$

ثابت کنید: $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant -\frac{1}{2}$.

۱۱۴. در چهارضلعی محدب $ABCD$، طول همهٔ ضلع‌ها و قطرها، عددهایی گویا هستند. اگر O محل برخورد قطرهای چهار ضلعی باشد، ثابت کنید، طول پاره‌خط راست AO، عددی گویاست.

سومین المپیاد سراسری شوروی
سال ۱۹۶۹ (کیف)

کلاس	روز اول			روز دوم		
۸:	۱۱۵	۱۱۶	۱۱۷	۱۲۲	۱۲۳	۱۲۴a
۹:	۱۱۸	۱۱۹	۱۱۵	۱۲۴	۱۲۵	۱۲۶
۱۰:	۱۱۹	۱۲۰	۱۲۱	۱۲۵	۱۲۷	۱۲۸

۱۱۵. روی قاعدهٔ AD در ذوزنقهٔ $ABCD$، نقطهٔ E طوری انتخاب شده است که مثلث‌های ABE، BCE و CDE، محیط‌هایی برابر پیدا کرده‌اند. ثابت کنید: $BC=\frac{1}{2}AD$.

۱۱۶. در مرکز میدانی مربع شکل، یك گرگ و در چهار رأس این مربع، چهار سگ ایستاده‌اند. گرگ می‌تواند، در تمامی میدان بدود، ولی سگ‌ها، تنها روی ضلع‌های مربع حرکت می‌کنند. گرگ می‌تواند از عهدهٔ یك سگ برآید، ولی در برابر دو سگ مغلوب می‌شود. حداکثر سرعت هر سگ، ۱/۵ برابر حداکثر سرعت گرگ است. ثابت کنید، سگ‌ها، این امکان را دارند که مانع خروج گرگ از میدان مربعی بشوند.

۱۱۷. دنباله‌ای متناهی از رقم‌های صفر و واحد. با دو ویژگی زیر داده شده است:

الف) اگر در جای دلخواهی از دنباله، ۵ رقم متوالی را جدا کنیم و، در جای دلخواه دیگری، دوباره ۵ رقم متوالی را در نظر بگیریم، آن‌وقت، این دو ردیف ۵ رقمی با هم اختلاف دارند (مثلاً در دنبالهٔ ۰۱۱۰۱۰۱)؛

ب) اگر در سمت راست دنباله، رقم ۰ یا رقم ۱ را قرار دهیم، ویژگی الف)، برقرار نباشد.

ثابت کنید، چهار رقم اول این دنباله، بر چهار رقم آخر آن منطبق است.

۱۱۸. a، b، c و d را، عددهایی مثبت می‌گیریم. ثابت کنید، در

$$a+b<c+d،$$

$$(a+b)(c+d)<ab+cd،$$

$$(a+b)cd<ab(c+d)$$

دست کم یکی، نادرست است.

۱۱۹. کوچکترین عدد طبیعی a را پیدا کنید که، به ازای آن، سه جمله‌ای درجهٔ دوم با ضریب‌های درست وضریب بزرگترین درجهٔ a، وجود داشته باشد، به نحوی که دارای دوریشهٔ مختلف کوچکتر از واحد باشد.

۱۲۰. عدد طبیعی n مفروض است. همهٔ کسرهای به‌صورت $\frac{1}{pq}$ را می‌نویسیم که، در آن، p و q نسبت به هم اول‌اند و $0<p<q\leqslant n$، $p+q>n$. ثابت کنید، مجموع همهٔ این کسرها، برابر است با $\frac{1}{2}$.

۱۲۱*. n نقطه را در فضا طوری مستقر کرده‌ایم که، هر سه نقطهٔ آن، رأس‌های مثلثی را با یك زاویهٔ بزرگتراز ۱۲۰ درجه تشکیل می‌دهند. ثابت کنید، این نقطه‌ها را، می‌توان با حرف‌های A_1، A_2، ...، A_n طوری نام‌گذاری کرد که، هر کدام از زاویه‌های $A_iA_jA_k$ $(1\leqslant i<j<k\leqslant n)$، بزرگتراز ۱۲۰ درجه باشد.

۱۲۲. درچهارعدد سه رقمی مختلف، رقم اول سمت چپ، یکی است. درضمن، مجموع این چهار عدد، بر سه تا ازاین عددها بخش‌پذیر است. این عددها را پیدا کنید.

۱۲۳. خط‌های هوایی بین شهرهای یك کشور طوری تنظیم شده‌اند که، هرشهر، حداکثر با سه شهر ارتباط هوایی دارد. درضمن، برای مسافرت ازهرشهر به هر شهر دیگر، بیش از یك بار، نیاز به تعویض هواپیما نیست. حداکثر تعداد شهرهای این کشور، چقدر است؟

۱۲۴. در یك پنج‌ضلعی محدب، همهٔ ضلع‌ها با هم برابرند.

a) ثابت کنید: در درون این پنج‌ضلعی و روی قطر بزرگتر، نقطه‌ای وجود دارد که، از آن‌جا، هر ضلع پنج ضلعی به زاویه‌ای دیده می‌شود که از ۹۰ درجه تجاوز نمی‌کند.

b) ثابت کنید، دایره‌هایی‌که به قطرضلع‌ها رسم شوند، پنج ضلعی را نمی‌پوشانند.

۱۲۵. روی تختهٔ سیاه، معادله‌ای به این صورت نوشته شده است:

$$x^{3}+\dots+x^{2}+\dots+x+\dots=0$$

دو نفر، به صورت زیر، با هم بازی می‌کنند. نفر اول، در یکی از جاهای خالی، عدد درستی مخالف صفر (مثبت یا منفی) می‌نویسد؛ سپس، نفر دوم، در یکی ازجاهای خالی باقی مانده، عددی درست وغیر صفر را جا می‌دهد. سرآخر، نفر اول، در تنها جای باقی‌مانده، عدد درستی را قرار می‌دهد. ثابت‌کنید، نفر اول می‌تواند طوری بازی کند که، بدون توجه به حرکت دومی، ریشه‌های معادله‌ای‌که به دست می‌آید، عددهایی درست باشند.

۱۲۶*. ۲۵ تیم فوتبال، بـرای کسب عنوان قهرمانی کشور، با هم مسابقه می‌دهند. دست‌کم، چند بازی باید انجام شود تا بین هر سه تیم، دو تیم وجود داشته باشد که بازی خود را انجام داده باشند؟

۱۲۷. یك k ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R مفروض است. اگر h_k، فاصلهٔ مرکز چندضلعی تا یکی از ضلع‌های آن باشد، ثابت‌کنید:

$$(n+1)h_{n+1}-nh_n>R$$

۱۲۸*. ثابت کنید، برای عددهای مثبت و دلخواه a_1، a_2، ...، a_n داریم:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\dots$$

$$\dots+\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2}>\frac{\pi}{4}$$

چهارمین المپیاد سراسری شوروی
سال ۱۹۷۰ (سیمفه روپول - مرکز کریمه)

کلاس	روز اول					روز دوم		
۸:	۱۲۹	۱۳۰	۱۳۱	۱۳۲	۱۳۳a			
۹:	۱۳۴	۱۳۵	۱۳۳b	۱۳۶	۱۳۷			
۱۰:	۱۳۸	۱۳۹	۱۳۳b	۱۳۶	۱۴۰	۱۴۱	۱۴۲	۱۴۳

۱۲۹. یك دایره، قطر AB از آن و نقطهٔ C واقع بر این قطر، مفروض اند. روی محیط دایره، دو نقطهٔ X و Y را، قرینهٔ هم نسبت به قطر AB، طوری پیدا کنید که، خط راست YC بر خط راست XA عمود باشد.

۱۳۰. ثابت کنید، اگر حاصل ضرب سه عدد مثبت برابر واحد، و مجموع این سه عدد از مجموع عکس آن‌ها بزرگتر باشد، آن وقت، درست یکی از این عددها، از واحد بزرگتر است.

۱۳۱. در یك چندضلعی محدب، چندضلع می‌تواند وجود داشته باشد که، طول هرکدام از آن‌ها، برابر با طول بزرگترین قطر چندضلعی باشد.

۱۳۲. رقم‌های یك عدد هفده رقمی را، در جهت عکس نوشته‌ایم. عدد حاصل را، با عدد اصلی جمع کرده‌ایم. ثابت کنید، دست کم یکی از رقم‌های این مجموع، عددی زوج است.

۱۳۳. a) زمین قلعه‌ای به شکل مثلث متساوی الاضلاع، با ضلع به طول ۱۰۰ متر است. آن را به ۱۰۰ سالن مثلثی شکل تقسیم کرده‌اند. همهٔ دیوارهای سالن، طول‌هایی برابر دارند: ۱۰ متر. در وسط هر دیوار بین هردو سالن، دری تعبیه شده است. ثابت کنید، اگر کسی بخواهد، سالن‌های قلعه را بازدید کند، بدون این که دوبار وارد یك سالن بشود، نمی‌تواند بیش از ۹۱ سالن را ببیند.

b) هریك از ضلع‌های مثلث متساوی‌الاضلاع را به k بخش برابر تقسیم کرده‌ایم. از هر نقطهٔ تقسیم، خط‌های راستی موازی ضلع‌ها کشیده‌ایم. به این ترتیب، مثلث مفروض، به k^2 مثلث کوچکتر تقسیم می‌شود. دنبالهٔ مثلث‌هایی را یك «زنجیره» می‌نامیم که، در آن، هیچ مثلثی دوبار تکرار نشده باشد

و، در ضمن، هر مثلث با مثلث قبلی خود، در یك ضلع مشترك باشد. حداکثر تعداد مثلث‌های این «زنجیره» چند است؟

۱۳۴. پنج پاره خط راست چنان‌اندکه، با هر سه تای آن‌ها، می‌توان یك مثلث ساخت. ثابت کنید، دست کم یکی از این مثلث‌ها، زاویه‌هایی حاده دارد.

۱۳۵. در مثلث ABC که زاویه‌هایی حاده دارد، نیمساز AD، میانهٔ BM و ارتفاع CH، در یك نقطه به هم رسیده‌اند. ثابت کنید، زاویهٔ BAC از ۴۵ درجه بیشتر است.

۱۳۶. با رقم‌های ۱ و ۲، پنج عدد n رقمی طوری ساخته‌ایم که، رقم‌های هر دو عدد، درست در m مرتبه خود بر هم منطبق‌اند؛ ولی رقم‌های هر پنج عدد، در هیچ مرتبه‌ای بر هم منطبق نیستند. ثابت کنید:

$$\frac{۲}{۵} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \frac{۳}{۵}$$

۱۳۷*. ثابت کنید، از بین هر دویست عدد درست، می‌توان صد عدد طوری انتخاب کرد که، مجموع آن‌ها، بر ۱۰۰ بخش‌پذیر باشد.

۱۳۸. در مثلث ABC، از نقطهٔ M وسط ضلع BC و نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی مثلث، خط راستی گذرانده‌ایم تا ارتفاع AH را در نقطهٔ E قطع کند. ثابت کنید، طول پاره‌خط راست AE برابر است با شعاع دایرهٔ محاطی مثلث.

۱۳۹. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی k، بی‌نهایت عدد طبیعی t وجود دارد که، در عددنویسی به‌مبنای ده، شامل رقم‌های صفر نباشد و، درضمن در عدد t و kt، درمجموع رقم‌ها برابر باشند.

۱۴۰. دو مستطیل برابر، طوری روی هم قرار گرفته‌اند که، محیط‌های آن‌ها، در هشت نقطه، یکدیگر را قطع کرده‌اند. ثابت کنید، مساحت بخش مشترك دو مستطیل، از نصف مساحت هر یك از مستطیل‌ها، بیشتر است.

۱۴۱. روی کارت‌های جداگانه، همهٔ عددهای پنج رقمی از ۱۱۱۱۱

تا ۹۹۹۹۹ را نوشته‌ایم. این کارت‌ها را، به‌ترتیب دلخواه، در کنار هم‌قرار می‌دهیم. ثابت کنید، عدد حاصل (که عددی با ۴۴۴۴۴۵ رقم است)، نمی‌تواند توانی از ۲ باشد.

۱۴۲*. همهٔ عددهای طبیعی را، که تعداد رقم‌های هرکدام از آن‌ها از n تجاوز نمی‌کند، به دو گروه تقسیم کرده‌ایم. در گروه اول، همهٔ عددهایی را قرار داده‌ایم که، مجموع رقم‌های هریك از آن‌ها، عددی فرد است، و در گروه دوم، همهٔ عددهای با مجموع رقم‌های زوج. ثابت کنید، اگر $1 \leqslant k < n$، آن وقت، مجموع توان‌های kام همهٔ عددهای گروه اول، برابر است با مجموع توان‌های kام همهٔ عددهای گروه دوم.

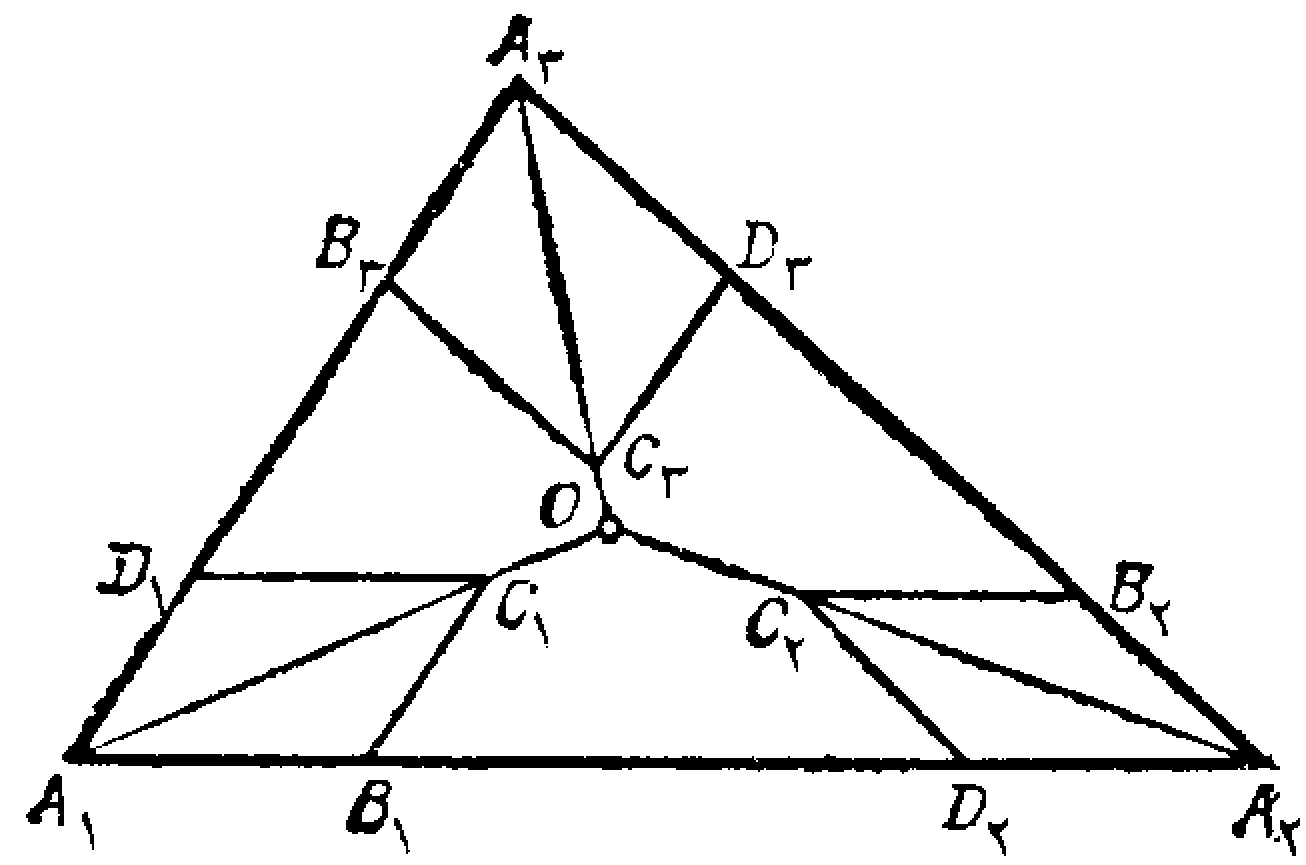
۱۴۳*. رأس‌های یك n ضلعی منتظم را با چند رنگ مختلف، طوری رنگ کرده‌ایم (هر رأس، تنها یك رنگ دارد) که، نقطه‌های هم رنگ، رأس‌های یك چندضلعی منتظم را تشکیل می‌دهند. ثابت کنید، در بین این چندضلعی‌ها، دو چندضلعی برابر وجود دارد.

پنجمین المپیاد سراسری شوروی
سال ۱۹۷۱ (ریگا)

کلاس	روز اول					روز دوم		
۸:	۱۴۴	۱۴۵a	۱۴۶a	۱۴۷		۱۵۲a,b	۱۵۳	۱۵۴
۹:	۱۴۴	۱۴۵a	۱۴۸	۱۴۷	۱۴۶b	۱۵۶	۱۵۳c	۱۵۵
۱۰:	۱۴۹	۱۴۵b	۱۵۰	۱۴۷	۱۵۱	۱۵۶	۱۵۷	۱۵۸

۱۴۴. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n، می‌توان عددی n رقمی با رقم‌های ۱ و ۲ پیدا کرد که بر 2^n بخش‌پذیر باشد.

۱۴۵. a) مثلث $A_1A_2A_3$ مفروض است. نقطه‌های B_1 و D_2 را روی ضلع A_1A_2، نقطه‌های B_2 و D_3 را روی ضلع A_2A_3 و نقطه‌های B_3 و D_1 را روی ضلع A_3A_1 طوری انتخاب می‌کنیم که، اگر متوازی‌الاضلاع‌های $A_1B_1C_1D_1$، $A_2B_2C_2D_2$ و $A_3B_3C_3D_3$ را بسازیم، آن وقت، خط‌های راست A_1C_1، A_2C_2 و A_3C_3 در یك نقطهٔ O به هم برسند. ثابت کنید،



شکل۷

اگر داشته باشیم: $A_1B_1 = A_2D_2$ و $A_2B_2 = A_3D_3$، آن وقت داریم: $A_3B_3 = A_1D_1$ (شکل۷).

b) چند ضلعی محدب $A_1A_2 \dots A_n$ داده شده است. نقطه‌های B_1 و D_2 را روی ضلع A_1A_2، نقطه‌های B_2 و D_3 را روی ضلع A_2A_3، ...، نقطه‌های B_n و D_1 را روی ضلع A_nA_1 طوری انتخاب می‌کنیم که، اگر متوازی‌الاضلاع‌های $A_1B_1C_1D_1$، $A_2B_2C_2D_2$، ...، $A_nB_nC_nD_n$ را بسازیم، آن وقت، خط‌های راست A_1C_1، A_2C_2، A_3C_3، ...، A_nC_n در یك نقطهٔ O به هم برسند. ثابت کنید، برابری زیر، از حاصل‌ضرب طول‌ها، برقرار است:

$$A_1B_1 \cdot A_2A_2 \cdot A_3B_3 \cdots A_nB_n = A_1D_1 \cdot A_2D_2 \cdots A_nD_n$$

۱۴۶. a) دو نفر، به‌این ترتیب، باهم بازی می‌کنند. نفر اول پشت سرهم، دو ردیف عدد و در هرردیف ۱۰ عدد می‌نویسد، به نحوی که بااین قانون سازگار باشند: اگرعدد b زیرعدد a، و عدد d زیرعدد c نوشته شده باشد، داشته باشیم $a+d=b+c$. بازی‌کن دوم، ازاین‌قانون اطلاع‌دارد و می‌خواهد همهٔ عددها را پیدا کند. تصمیم می‌گیرد، پرسش‌هایی از این نوع از بازی‌کن اول بکند: «در ردیف اول ودرجای سوم چه عددی قرار دارد؟» یا «چه‌عددی در ردیف دوم وجای نهم قراردارد؟» وغیره. بازی‌کن دوم، دست‌کم چند پرسش‌مطرح کند تا ازهمهٔ عددها اطلاع داشته باشد؟

b) درجدول $m \times n$، عددهایی را طوری نوشته‌ایم که، برای هر دو

سطر و هردو ستون، مجموع‌های واقع در دورأس متقابل مستطیلی که تشکیل می‌شود، برابر بامجموع دوعدد دورأس دیگر مستطیل باشد. بخشی ازعددها پاك شده‌اند. ولی به‌کمك عددهای باقی مانده می‌توان آن‌ها را پیدا کرد. ثابت کنید، تعداد عددهای باقی مانده، از $m+n-1$ عدد کمتر نیست.

۱۴۷*. دریك مربع به‌ضلع واحد، چند دایره رسم کرده‌ایم که، شعاع هرکدام ازآن‌ها، از ۰/۰۰۱ کوچکتر است. فاصلهٔ بین هر دونقطه از هر دو دایره، برابر ۰/۰۰۱ نیست. ثابت کنید، مساحتی که به وسیلهٔ دایره‌ها پوشیده می‌شود، از ۰/۳۴ تجاوز نمی‌کند.

۱۴۸*. در سه ظرف مقداری آب وجود دارد. مقدار آب هر ظرف، برحسب لیتر، با عدد درستی بیان می‌شود. تصمیم می‌گیریم، در هر ظرف به اندازهٔ آبی که در آن وجود دارد، از یکی از ظرف‌های دیگر وارد کنیم. ثابت کنید، با چند بار جابه‌جائی، می‌توان یکی از ظرف‌ها را آزاد کرد. (ظرف‌ها به‌اندازهٔ کافی بزرگ‌اند: هرکدام ازآن‌ها، می‌توانند همهٔ آب‌های سه ظرف را درخود جای دهد.)

۱۴۹. عددهای p_1، p_2، q_1، q_2 در نابرابری زیرصدق می‌کنند:

$$(q_1-q_2)^2+(p_1-p_2)(p_1q_2-p_2q_1)<0$$

ثابت کنید، سه جمله‌ای‌های $x^2+p_1x+q_1$ و $x^2+p_2x+q_2$ دارای ریشه‌های حقیقی هستند و، درضمن، بین دو ریشهٔ هرسه جمله‌ای، ریشه‌ای از سه جمله‌ای دیگر واقع است.

۱۵۰. تصویرهای جسمی بر دو صفحه، دایره شده است. ثابت کنید، این دو دایره، شعاع‌هایی برابر دارند.

۱۵۱. روی محیط دایره‌ای، چند عدد نوشته‌ایم. اگر برای چهار عدد متوالی a، b، c و d داشته باشیم: $(a-d)(b-c)<0$، آن وقت، جای دوعدد b و c را عوض می‌کنیم. ثابت کنید، به تعداد محدودی می‌توان این عمل را انجام داد.

۱۵۲. a) ثابت کنید، خط راستی که مثلث مفروض را به دوچند ضلعی با محیط‌ها و مساحت‌های برابر تقسیم کند، از مرکز دایرهٔ محاطی مثلث

می‌گذرد.

b) همین حکم را در مورد چندضلعی دلخواهی ثابت کنید که بتوان یك دایره در آن محاط کرد.

c) ثابت کنید، همهٔ خط‌های راستی که، هم مساحت و هم محیط مثلث را نصف می‌کنند، از یك نقطه می‌گذرند.

۱۵۳. ثابت کنید، از بین ۲۵ عدد مثبت مختلف، می‌توان دوعددطوری انتخاب کرد که، حتی یکی از بقیهٔ عددها، برابر مجموع و یا برابر تفاضل این دوعدد نباشد.

۱۵۴. a) دررأس A_1 از دوازده ضلعی منتظم $A_1 A_2 \dots A_{12}$،علامت منفی، و در بقیهٔ رأس‌ها، علامت مثبت گذاشته‌ایم. تصمیم می‌گیریم، به‌طور هم زمان، علامت رأس‌های شش رأس متوالی را، عوض کنیم. ثابت کنید، نمی‌توان باتکرار چندبار این‌عمل، به‌جایی رسید که علامت رأس A_2 منفی وعلامت بقیهٔ رأس‌ها مثبت باشد.

b) همین‌حکم را، برای حالتی که به‌جای شش رأس متوالی، علامت‌های چهار رأس متوالی چندضلعی را عوض کنیم، ثابت کنید.

c) همین حکم را برای موردی ثابت کنید که، تصمیم بگیریم، به‌طور هم زمان، علامت‌های سه رأس متوالی چندضلعی را عوض کنیم.

۱۵۵*. روی صفحهٔ شطرنجی نامتناهی، N خانه را به رنگ سیاه درآورده‌ایم. ثابت کنید، ازاین صفحه می‌توان تعداد محدودی مربع،طوری جدا کرد که با دوشرط زیر سازگار باشند:

۱) همهٔ خانه‌های سیاه در داخل این‌مربع‌ها باشند؛

۲) در هر مربع جدا شده، مساحت خانه‌های سیاه از $\frac{۱}{۵}$ مساحت‌این مربع کمتر و از $\frac{۴}{۵}$ مساحت آن بیشتر نباشد.

□

مساله‌های از ۱۵۶ تا ۱۵۸، در روز دوم و به دانش‌آموزان کلاس دهم

داده شده است. این توضیح هم، قبل‌ازصورت مسأله‌ها، برای دانش‌آموزان آمده است:

«سه مسأله به‌شما پیشنهاد می‌شود. حل‌درست هریك از این سه مسأله، به اندازهٔ کافی دشوار است و وقت‌زیادی رامی‌گیرد. یکی ازاین مساله‌ها راانتخاب کنید وحل آن را، تا هرجا که می‌توانید جلو ببرید.

بعد از حل‌مسأله، «خلاصهٔ نتیجه‌گیری‌ها» را بنویسید: گزاره‌هایی راکه ثابت‌کرده‌اید نام ببرید، چند مثال در موردهایی که به‌نتیجه رسیده‌اید بیاورید، نظریه‌هایی را تنظیم‌کنیدکه به‌نظرتان درست می‌آیند.»

۱۵۶. مکعب به‌ضلع n را، به n^3 مکعب واحد تقسیم کرده‌ایم. چند مکعب‌کوچك را انتخاب وازمرکز هرکدام از آن‌ها، سه‌خط راست موازی با سه یال مکعب رسم می‌کنیم. دست‌کم چندمکعب کوچك را باید انتخاب کرد تا، این خطهای راست، همهٔ مکعب‌های کوچك را خط بزنند؟

a) پاسخ را، برای مقدارهای کوچك n بدهید: برای $n = ۲، ۳، ۴$.

b*) سعی‌کنید، پاسخ را برای $n = ۱۰$ پیداکنید.

c*) مسأله را درحالت‌کلی حل‌کنید. اگر نتوانستید پاسخ دقیق‌را به دست‌آورید، حدبالا وحد پایینی‌را، برای تعداد مکعب‌های کوچکی که باید انتخاب‌کنیم، تخمین بزنید.

d*) توجه‌کنیدکه، این مسأله را، می‌توان به‌این صورت تنظیم‌کرد:

همهٔ انتخاب‌های ممکن $(x_1، x_2، x_3)$ را درنظرمی‌گیریم که، در آن، هریك از حرف‌های x_1، x_2 و x_3 می‌توانند یکی از n مقدار ۱، ۲، ...، n را قبول کنند. دست‌کم چندگروه سه تایی باید انتخاب‌کرد تا، برای هریك ازگروه‌های سه‌تایی باقی مانده، گروهی از بین سه تایی‌های انتخاب شده پیدا بشودکه باآن تنها دریك مقدار اختلاف داشته باشد (یعنی دو گروه، تنها دریکی از مختص‌های x_1، x_2 یا x_3 اختلاف داشته باشند)؟ سعی کنید پاسخ را برای مسألهٔ‌کلی‌تر پیداکنید، وقتی‌که، به جای سه‌عدد، گروه‌ها را با چهارعدد یا بیشتر درنظرگرفته باشیم.

۱۵۷. a) تابع $f(x، y) = x^2 + xy + y^2$ را درنظر می‌گیریم.

ثابت کنید، برای هرنقطهٔ (x, y)، می‌توان عددهای درست (m, n) را پیدا کرد که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$f(x-m, y-n)=(x-m)^۲+(x-m)(y-n)+(y-n)^۲\leqslant\frac{۱}{۲}$$

b*) کمترین‌مقدار ازعددهای $f(x-m, y-n)$ را $\bar{f}(x, y)$ می‌نامیم. (برای همهٔ عددهای درست m و n). حکم مسألهٔ a) به این معناست که برای هر x و y، نابرابری $\bar{f}(x, y)\leqslant\frac{۱}{۲}$ برقرار است.

ثابت کنید که: در واقع، نابرابری نیرومندتری برقرار است: $\bar{f}(x, y)\leqslant\frac{۱}{۳}$. همهٔ نقطه‌هایی را پیدا کنید که، برای آن‌ها، برابری $\bar{f}(x, y)=\frac{۱}{۳}$ برقرار باشد.

c*) این تابع را درنظر می‌گیریم:

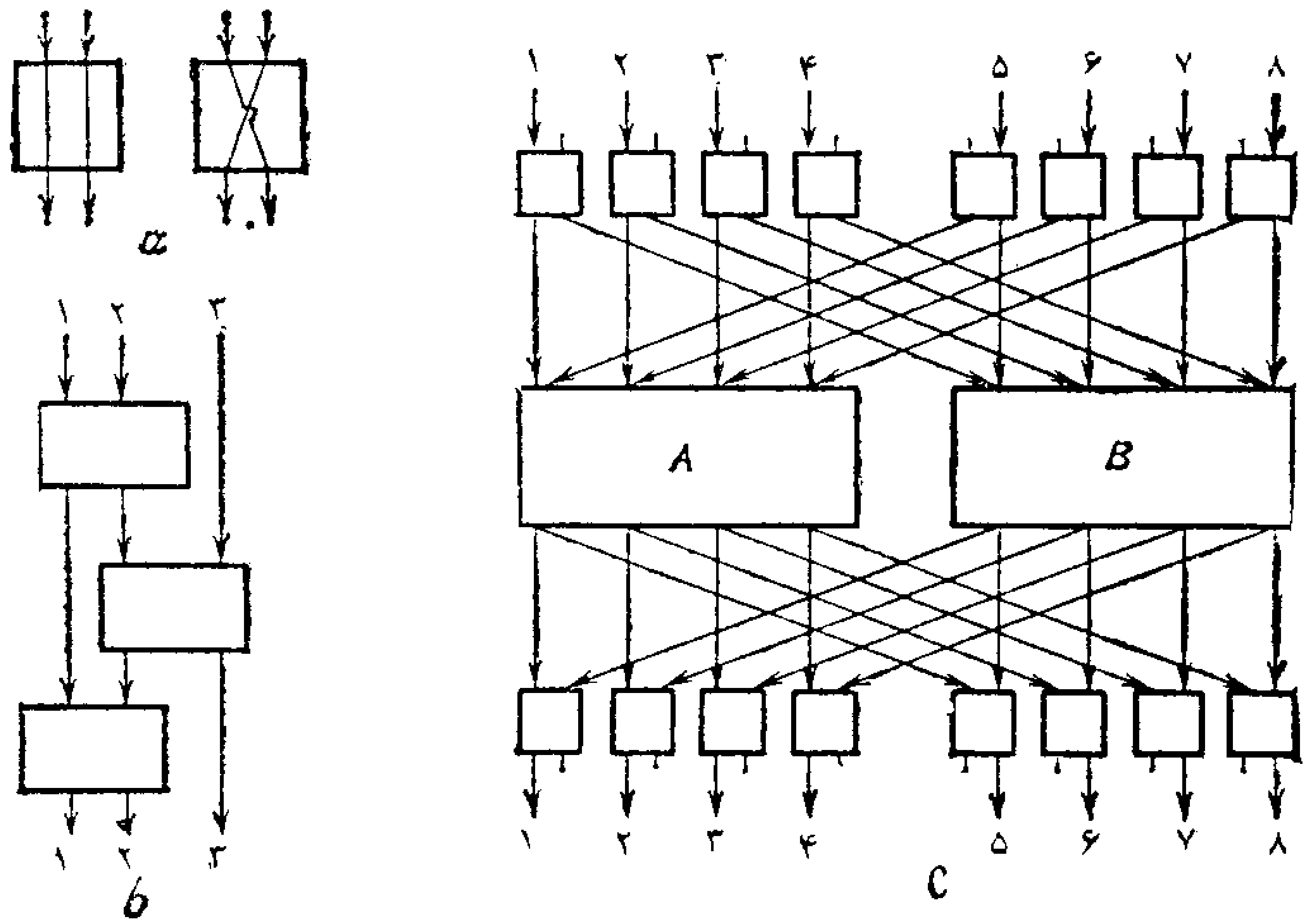
$$f_a(x, y)=x^۲+axy+y^۲, (۰\leqslant a\leqslant ۲)$$

عدد c را، در بستگی با a، طوری پیدا کنید که، بە ازای همهٔ (x, y)ها، نابرابری $|\bar{f}_a(x, y)|\leqslant c$ برقرارباشد. بکوشید ارزیابی‌دقیق راپیداکنید.

۱۵۸. کلید با دو ورودی و دو خروجی را می‌توان در دو موقعیت مختلف قرار داد (شکل ۸ـa).

در شکل ۸ـb، طرح ارتباط تلفنی با سه ورودی و سه خروجی داده شده است، که ویژگی «همه کاره بودن» را دارد: با تغییر دادن وضع کلید، می‌توان به‌هریك از شش‌حالتی‌که سه ورودی را به‌سه خروجی‌مختلف وصل می‌کند، رسید، یعنی

$$\begin{array}{cccccc} ۱۲۳ & ۱۲۳ & ۱۲۳ & ۱۲۳ & ۱۲۳ & ۱۲۳ \\ \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow \\ ۱۲۳ & ۳۱۲ & ۲۳۱ & ۲۱۳ & ۳۲۱ & ۱۳۲ \end{array}$$



شکل ۸

(این را آزمایش کنید. توجه کنید که، تعداد حالت‌های مختلف این طرح، برابر است با $۸ = ۲^۳$، زیرا هر کلید می‌تواند در دو وضع قرار گیرد.)

a) طرح مربوط به چهار ورودی و چهار خروجی را بسازید، به‌نحوی که «همه‌کاره» باشد، یعنی امکان هریك از ۲۴ اتصال ممکن ورودی‌ها و خروجی‌ها را فراهم کند.

b) حداقل تعداد کلیدهایی که برای این طرح لازم می‌شود، چقدر است؟

c*) وقتی که با n ورودی و n خروجی سروکار داشته باشیم، طرحی را که، به‌کمك آن، امکان همهٔ $n!$ اتصال n ورودی با n خروجی مختلف فراهم شود، «طرح همهٔ کارهٔ مرتبهٔ n» می‌نامیم.

در شکل ۸ــc، طرحی با هشت ورودی و هشت خروجی داده شده است که، در آن، A و B، «همه‌کارهٔ مرتبهٔ ۴» هستند. ثابت کنید، این طرح «همه‌کارهٔ مرتبهٔ ۸» است.

حد بالا و حد پایین تعداد کلیدها را در «طرح همه‌کارهٔ مرتبهٔ n» تخمین بزنید.

ششمین المپیاد سراسری شوروی
سال ۱۹۷۲ (چه لیانبیسك)

کلاس	روز اول				روز دوم		
۸:	۱۵۹	۱۶۰	۱۶۱		۱۶۶	۱۶۷	۱۶۸
۹:	۱۶۲a	۱۶۳	۱۶۱	۱۶۴	۱۶۹	۱۷۰	۱۷۱
۱۰:	۱۶۲b	۱۶۳	۱۶۵	۱۶۴	۱۶۶	۱۷۲	۱۷۳

۱۵۹. M را وسط ضلع AD و N را وسط ضلع BC در مستطیل $ABCD$ گرفته‌ایم. روی امتداد پاره خط راست CD، و از طرف D، نقطهٔ P را انتخاب کرده‌ایم. محل برخورد خط‌های راست PM و AC را Q می‌نامیم. ثابت کنید:

$$\widehat{QNM}=\widehat{MNP}$$

۱۶۰. روی خط راستی، ۵۰ پاره خط راست داده شده است. ثابت کنید، دست کم یکی از دو حکم زیر درست است:

الف) هشت پاره خط راست پیدا می‌شود که دارای نقطهٔ مشترکی هستند؛

ب) هشت پاره خط راست وجود دارد که، هیچ دوتایی از آن‌ها، نقطهٔ مشترکی ندارند.

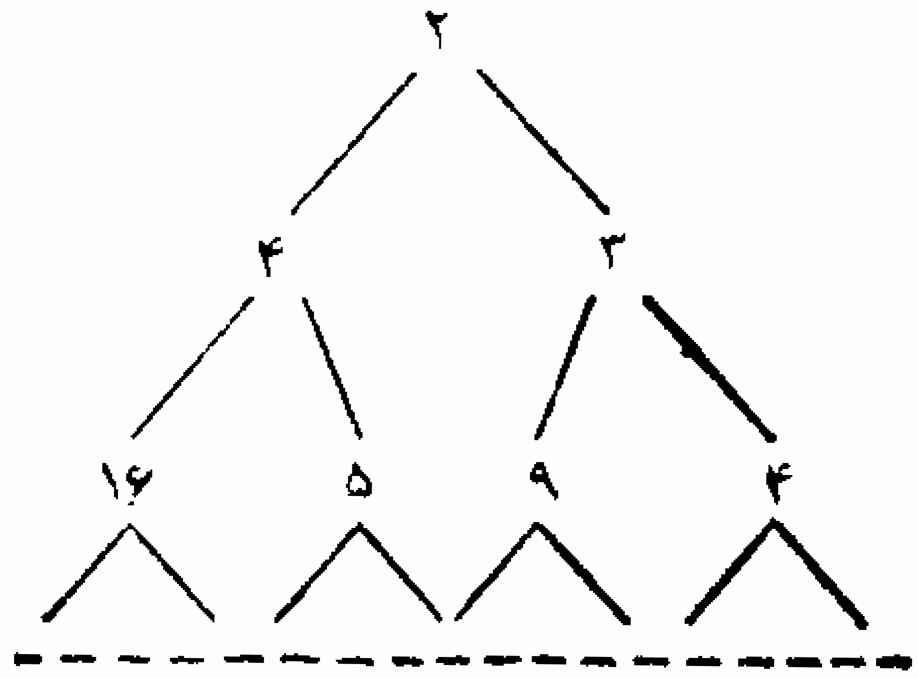
۱۶۱. بزرگترین عدد درست x را پیدا کنید که، به‌ازای آن، عدد

$$۴^{۲۷}+۴^{۱۰۰۰}+۴^{x}$$

برابر با مجذور یك عدد درست باشد.

۱۶۲. a) فرض کنید a، m و n، سه عدد طبیعی باشند و $a>۱$. ثابت کنید، اگر $a^m+۱$ بر $a^n+۱$ بخش‌پذیر باشد، آن وقت m بر n بخش‌پذیر است.

b) فرض کنید، a، b، m و n، عددهایی طبیعی باشند؛ در ضمن، a و b نسبت به هم اول و $a>۱$. ثابت کنید، اگر a^m+b^m بر a^n+b^n بخش‌پذیر باشد، آن وقت m بر n بخش‌پذیر است.



شکل ۹

۱۶۳. جدولی مثلثی را، با قانون زیر ساخته‌ایم: در سطر بالا، عدد طبیعی a را می‌نویسیم، سپس، زیر هر عدد k، درسمت چپ k^2، ودرسمت راست $k+1$ را قرارمی‌دهیم. مثلاً، به ازای $a=2$، جدولی به‌دست می‌آید که درشکل ۹ نشان داده‌ایم. ثابت کنید، در هر سطر این جدول، همهٔ عددها با هم اختلاف دارند.

***۱۶۴.** چند مربع داده شده است که، مجموع مساحت‌های آن‌ها، برابر است با ۱. ثابت کنید، می‌توان همهٔ این‌مربع‌ها را درمربعی به مساحت ۲ جا داد، بدون این که روی هم قرار گیرند.

۱۶۵. O، محل برخورد قطرها، در چهارضلعی محدب $ABCD$ است. ثابت کنید، خط راستی که از نقطه‌های برخورد میانه‌های دو مثلث AOB و COD می‌گذرد، بر خط راستی که از نقطه‌های برخورد ارتفاع‌های دو مثلث BOC و AOD می‌گذرد، عمود است.

۱۶۶. هر یك از نه خط راست، مربع را به دو چهارضلعی تقسیم کرده‌اند که، نسبت مساحت‌های آن‌ها، برابر ۲:۳ شده است. ثابت کنید، دست کم سه خط راست، از این نه خط راست، از یك نقطه می‌گذرند.

۱۶۷. هفت‌ضلعی $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$، در یك دایره محاط شده است. ثابت کنید، اگر مرکز این دایره، دردرون هفت‌ضلعی باشد، آن وقت، مجموع زاویه‌های رأس‌های A_1، A_3 و A_5، از ۴۵۰ درجه کمتر است.

***۱۶۸.** دو نفر، به این بازی مشغول‌اند. اولی یك رقم را نام می‌برد، دیگری، بنا به نظر خود، آن را به جای یکی از ستاره‌ها، در تفاضل زیر

قرار می‌دهد:

$$\begin{array}{c} -**** \\ \underline{****} \end{array}$$

بعد اولی رقم دیگری را نام می‌برد و دومی آن را به جای ستارهٔ دیگری می‌گذارد؛ این روند ۸ بار تکرار می‌شود تا همهٔ ستاره‌ها به رقم تبدیل شوند. اولی می‌خواهد تا آن‌جا که ممکن است، به تفاضل بزرگتری برسد، در حالی که تمایل دومی به هر چه کوچکتر بودن تفاضل است. ثابت کنید:

a) دومی می‌تواند رقم‌ها را طوری قرار دهد که، بدون ارتباط با نوع رقم‌هایی که اولی نام برده است، تفاضل حاصل از ۴۰۰۰ تجاوز نکند.

b) اولی می‌تواند رقم‌هایی را نام ببرد که، بدون ارتباط با این که این رقم‌ها را دومی درکجا قرار می‌دهد، تفاضل حاصل کمتر از ۴۰۰۰ نباشد.

۱۶۹. xو y را عددهایی مثبت و s را کوچکترین عدد از بین عددهای x، $y+\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{y}$ فرض می‌کنیم. حداکثر مقدار s چقدر می‌تواند باشد؟ به‌ازای چه مقدارهایی از x و y، مقدار s به‌این حداکثر می‌رسد؟

۱۷۰. نقطهٔ O، در درون چندضلعی محدب طوری انتخاب شده است که، با هر دو رأس چندضلعی، یك مثلث متساوی الساقین می‌سازد. ثابت کنید، این نقطه، از رأس‌های چندضلعی، به‌یك فاصله است.

۱۷۱. آیا می‌توان عددهای ۰، ۱ و ۲ را در خانه‌های یك جدول شطرنجی ۱۰۰ × ۱۰۰ طوری قرار داد که، در هر مستطیل ۴ × ۳ آن، سه تا صفر، چهار تا واحد و پنج تا دو وجود داشته باشد؟

۱۷۲. مجموع عددهای مثبت x_1، x_2، ...، x_n، برابر واحد است. s را بزرگترین عدد از بین عددهای زیر می‌گیریم:

$$\frac{x_1}{1+x_1}, \frac{x_2}{1+x_1+x_2}, \ldots, \frac{x_n}{1+x_1+x_2+\cdots+x_n}$$

حداقل ممکن‌عدد s را پیدا کنید. به‌ازای چه مقدارهایی از x_1، x_2، ...، x_n، به این حداقل می‌رسیم؟

۱۷۳*. بعد از پایان یك‌دور بازی‌هاکی، معلوم شد، برای هر گروهی از تیم‌ها، می‌توان تیمی را پیداکرد (که ممکن است جزو همین گروه تیم‌ها باشد)، به نحوی که در بازی با تیم‌های این گروه، امتیازهایی کسب کرده باشد که، تعداد آن‌ها، عددی فرد باشد. ثابت کنید، تعدادتیم‌هایی که در این دور با هم مسابقه داده‌اند، عددی زوج است. (باخت، ۰ امتیاز؛ تساوی، ۱ امتیاز و برد، ۲ امتیاز دارد.)

هفتمین المپیاد سراسری شوروی
سال ۱۹۷۳ (کیشی‌نو)

کلاس	روز اول			روز دوم			
۸:	۱۷۴a	۱۷۵	۱۷۶	۱۸۲	۱۸۳	۱۸۴	
۹:	۱۷۴b	۱۷۷	۱۷۸	۱۷۹	۱۸۵	۱۸۶	۱۸۴
۱۰:	۱۸۰	۱۷۷	۱۸۱	۱۸۷	۱۸۸	۱۸۴	

۱۷۴. برای تعیین کیفیت ۱۴ سکه به قاضی مراجعه‌کردند. متخصص کشف کرد که سکه‌های اول تا هفتم تقلبی و سکه‌های هشتم تا چهاردهم، واقعی‌اند. قاضی فقط این را می‌داندکه، سکه‌های تقلبی یك وزن دارند و سکه‌های واقعی هم، هم وزن‌اند؛ در ضمن آگاه است که یك سکهٔ تقلبی از یك سکهٔ واقعی سبك‌تر است. متخصص، یك ترازو در اختیار دارد، ولی وزنه‌هایی در اختیار او نیست.

a) متخصص می‌خواهد به قاضی ثابت کندکه سکه‌های اول تا هفتم، تقلبی‌اند. چگونه می‌تواند، تنها با سه بار استفادهٔ از ترازو، به این امر توفیق یابد؟

b) ثابت کنید، متخصص می‌تواند، با سه بار استفاده از ترازو، چیز بیشتری را ثابت کند: او می‌تواند ثابت کنید، سکه‌های اول تا هفتم تقلبی و سکه‌های هشتم تا چهاردهم واقعی‌اند.

۱۷۵. ثابت کنید، عدد نه رقمی که، در آن، از همهٔ رقم‌ها به جز صفر استفاده شده است و، در ضمن، رقم آخر آن برابر ۵ است، نمی‌تواند مجذور یك عدد درست باشد.

۱۷۶. n نقطه داده شده‌است و $n>4$. ثابت کنید، می‌توان این نقطه‌ها را، با پیکان چنان به هم وصل کرد که، از هر نقطه به هر نقطهٔ دیگر، به کمك یك یا دو پیکان رسید (هر دو نقطه را می‌توان با پیکانی به هم وصل کرد که تنها یك جهت داشته باشد؛ حرکت روی هر پیکان، تنها درمسیری ممکن است که با جهت آن مشخص شده است).

۱۷۷. زاویهٔ به‌راس O و دایره‌ای که برضلع‌های این زاویه در نقطه‌های A و B مماس است، رسم شده‌اند. از نقطهٔ A، نیم‌خط راستی موازی OB رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطهٔ C قطع کند. پاره‌خط راست OC دایره را در نقطهٔ دیگر E قطع کرده است و خط‌های راست AE و OB در نقطهٔ K به‌هم رسیده‌اند. ثابت کنید: $OK=KB$.

۱۷۸. عددهای حقیقی a، b و c چنان‌اند که، برای هر مقدار x واقع در بازهٔ $[-1, 1]$، این نابرابری برقرار است:

$$|ax^2+bx+c|\leqslant 1$$

ثابت کنید، به ازای همین مقدارهای x، نابرابری زیر هم برقرار است:

$$|cx^2+bx+a|\leqslant 2$$

۱۷۹. فدراسیون تنیس، بـه تنیس‌بازان عضو خود، شماره داده است: به بهترین بازی‌کن، شمارهٔ اول، به نفر بعدی از لحاظ قدرت بازی، شمارهٔ دوم وغیره. می‌دانیم، تنیس بازی که با رقیب خود، بیش از ۲ شماره اختلاف داشته باشد، همیشه پیروز می‌شود. دوره‌ایی از مسابقه، که در آن ۱۰۲۴

تنیس‌باز شرکت کرده بودند، به شیوهٔ المپیك برگزار شد: بنابر قرعه، هردو نفر با هم بازی می‌کنند، بعد برندگان دور اول در گروه‌های دونفری به‌زورآزمایی می‌پردازند و غیره، به‌نحوی که تعداد بازی‌کنان هردور، نصف تعداد بازی‌کنان دور قبل است. به این ترتیب، بعد ازده دور، قهرمان مسابقه معلوم می‌شود. قهرمان‌مسابقه، حداکثرچه شماره‌ای می‌تواند داشته باشد؟

۱۸۰. سه جمله‌ای $f(x)=ax^2+bx+c$ چنان است کــه، معادلهٔ $f(x)=x$، جواب حقیقی ندارد. ثابت کنید، معادلهٔ $f(f(x))=x$ هم، دارای ریشهٔ حقیقی نیست.

۱۸۱. روی کاغذ شطرنجی نامتناهی سفیدی، n خانه را به رنگ سیاه درآورده‌ایم. درهرلحظهٔ زمانی ...، ۲، ۱ $=t$، به‌طور هم‌زمان و طبق قاعدهٔ زیر، خانه‌های صفحهٔ شطرنجی، تغییر رنگ می‌دهند: هرخانهٔ K به رنگی درمی‌آید که دست‌کم دو خانه ازسه خانهٔ K، خانهٔ سمت چپ و خانهٔ سمت راست آن، در مرحلهٔ قبل، آن رنگ را داشته‌اند (اگردرمرحلهٔ قبل، دوخانه سفید بــوده‌اند، K به رنگ سفید در می‌آید و اگر دو خانه در مرحلهٔ قبل، رنگ سیاه داشته‌اند، K سیاه می‌شود).

a) ثابت‌کنید، بعد از گذشت زمان معینی، روی صفحهٔ شطرنجی،خانهٔ سیاه باقی نمی‌ماند.

b) ثابت کنید، از بین رفتن خانه‌های سیاه، به بعــد از لحظهٔ $t=n$، موکول نمی‌شود.

۱۸۲. روی ضلع‌های مثلث ABC، که زاویه‌هایی حاده دارد، سه مثلث متشابه با هم AC_1B، BA_1C و CB_1A را، در بیرون مثلث و با زاویه‌های حاده ساخته‌ایم؛ در ضمن

$$\widehat{AB_1C}=\widehat{ABC_1}=\widehat{A_1BC}\text{ ، }\widehat{BA_1C}=\widehat{BAC_1}=\widehat{B_1AC}$$

a) ثابت‌کنید، دایره‌های محیطی مثلث‌های AC_1B، BA_1C و CB_1A، در یك نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

b) ثابت کنید، خط‌های راست AA_1، BB_1 و CC_1 هــم، در همین

نقطه به‌هم می‌رسند.

۱۸۳. N نفر با هم آشنا نیستند. می‌خواهیم بعضی از آن‌ها را طوری با هم آشنا کنیم که، وقتی سه نفر را به دلخواه از بین این N نفر انتخاب کردیم، تعداد آشناهای آن‌ها، یکسان نباشد. ثابت‌کنید، برای هر N، می‌توان به‌این نتیجه رسید.

۱۸۴. شاه صفحهٔ ۸×۸ شطرنج را طی کرده است، به نحوی‌که در هر میدان درست یکبار بوده است و با حرکت آخر به میدان اولیه برگشته است (شاه، طبق قانون عادی شطرنج حرکت می‌کند). وقتی که مرکز میدان‌هایی را که شاه پشت سر هم پیموده است، به هم وصل کردیم، خط شکسته بسته‌ای به دست آمد که خودش را قطع نکرده است.

a) مثالی پیداکنیدکه شاه درست ۲۸ حرکت، در جهت افقی و قائم، انجام داده باشد.

b) ثابت کنید، که شاه نمی‌تواند کمتر از ۲۸ حرکت داشته باشد.

c) حداکثر و حداقل طول مسیری که شاه طی می‌کند، چقدر است، به شرطی که طول ضلع یك خانهٔ صفحهٔ شطرنج، برابر واحد باشد؟

۱۸۵. مثلثی با مساحت واحد و ضلع‌های a، b و c داده شده است. می‌دانیم:

$$a \geqslant b \geqslant c$$

ثابت‌کنید: $b \geqslant \sqrt{2}$.

۱۸۶. یك nضلعی محدب، که هیچ دو ضلعی از آن با هم موازی نیستند، و نقطه‌ای در درون آن داده شده است. ثابت کنید، از این نقطه، نمی‌توان بیش از n خط راست رسم‌کرد، به نحوی‌که هر کدام از آن‌ها، مساحت n ضلعی را نصف کند.

۱۸۷. x_1، x_2، x_3، x_4 و x_5 عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید:

$$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2 \geqslant$$

$$\geqslant 4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1)$$

۱۸۸. ۴ نقطـه، غیرواقع بریك صفحــه، در فضا داده شده‌اند. چند متوازی‌السطوح وجود دارد، به نحوی که، این چهار نقطه، راس‌هایی ازآن باشند؟

هشتمین المپیاد سراسری شوروی
سال ۱۹۷۴ (ایروان)

کلاس	روز اول			روز دوم			
۸:	۱۸۹a,b,c	۱۹۰	۱۹۱	۱۹۷	۱۹۸	۱۹۹	۲۰۰a
۹:	۱۹۰	۱۹۲	۱۸۹d	۱۹۳	۲۰۱	۲۰۲	۲۰۰b
۱۰:	۱۹۴	۱۹۵	۱۹۶	۱۹۳	۲۰۳	۲۰۴	۲۰۰b

۱۸۹. روی‌هریك ازکارت‌ها عدد «۱+» یا «۱ —» نوشته شده است. سه کارت را انتخاب می‌کنیم و می‌پرسیم: حاصل ضرب عــددهای روی این کارت‌ها، چقدر است؟ (از خود عددها، اطلاعی به ما نمی‌دهند.)

حداقل چندباربایداین پرسش را تکرارکرد تا حاصل‌ضرب عددهای روی همهٔ کارت‌ها را بدانیم، به شرطی‌که تعداد کارت‌ها: a) ۳۰؛ b) ۳۱؛ c)۳۲ باشد؟ در هـر حالت ثابت کنید، با تعداد کمتری پرسش، نمی‌توان به نتیجه رسید.

d) روی محیط دایــره‌ای، ۵۰ عـدد نوشته شده است‌که، هرکدام از آن‌ها، برابر «۱+» یا «۱ —» است. می‌خــواهیم، حاصل‌ضرب همـهٔ این عددها را بدانیم. با هر پرسش، می‌توان بـه حاصل‌ضرب سه عدد مجاور هم، پی برد، حداقل چند پرسش‌لازم است؟

۱۹۰. بین عددهای بـه صورت $36^k - 5^l$، کوچکترین عدد را، از لحاظ قدرمطلق، پیدا کنید (k و l، عددهایی طبیعی‌اند). ثابت کنید، عددی را که پیدا کرده‌اید، به واقع کوچکترین است.

۱۹۱. a) هر یك از ضلع‌های یك شش ضلعی، محدب، طولی بزرگتر از واحــد دارد. آیا همیشه، در ایـن شش‌ضلعی، می‌تــوان قطری با طـول بزرگتر از ۲ پیدا کرد؟

b) در شش‌ضلعی محدب $ABCDEF$، طول هر یك از قطرهای AD، BE و CF از ۲ بیشتر است. آیا، در این شش‌ضلعی، همیشه می‌توان ضلعی با طول بزرگتر از واحد پیدا کرد؟

۱۹۲. دو دایره، به شعاع‌های R و r، مماس خارج‌اند. ذوزنقه‌های مختلف $ABCD$ را طوری می‌سازیم که، هر یك از دایره‌ها، بر هر دو ساق و یکی ازقاعده‌های ذوزنقه مماس باشند. حداقل طول ساق AB چقدراست؟

۱۹۳*. روی صفحه، n برداداده شده است که طول هرکدام از آن‌ها، برابر واحد است. مجموع این n بردار، برابر بردار صفر شده است. ثابت کنید، این بردارها را می‌توان طوری شماره گذاری کرد که به ازای هر $k=1, 2, \dots, n$، مجموع k بردار اول، طولی بیشتر از ۲ نداشته باشد.

۱۹۴. به‌ازای کدام عددهای حقیقی a، b و c، برابری

$$|ax+by+cz|+|bx+cy+az|+|cx+ay+bz|=$$
$$=|x|+|y|+|z|$$

برای همهٔ عددهای حقیقی x و y و z برقرار است؟

۱۹۵. مربع $ABCD$ مفروض است. نقطه‌های P و Q، به‌ترتیب، بر- ضلع‌های AB و BC واقع‌اند و در ضمن $BP=BQ$. H را پای عمودی می‌گیریم که از B برپاره‌خط راست PC رسم شده است. ثابت کنید، زاویهٔ DHQ برابر ۹۰ درجه است.

۱۹۶. چندنقطهٔ قرمز و چندنقطهٔ آبی‌داده شده است. برخی‌ازآن‌ها را، با پاره‌خط‌های راست به هم وصل کرده‌ایم. یك نقطه را درنظرمی‌گیریم ودر حالتی‌که بیش ازنیمی ازپاره‌خط‌های راست متصل به‌آن، به‌نقطه‌هایی منتهی شده باشندکه رنگی‌مخالف‌رنگ نقطهٔ مفروض دارند،نقطهٔ مفروض را «ویژه» می‌نامیم. تصمیم می‌گیریم، نقطه‌های «ویژه» را تغییررنگ بدهیم: درهرگام، یکی از نقطه‌های ویژه را انتخاب می‌کنیم و رنگ آن را، به‌رنگ مخالف خود درمی‌آوریم. ثابت کنید، بعد ازچندگام، نقطهٔ «ویژه‌ای» باقی‌نمی‌ماند.

۱۹۷. عددهای طبیعی n و k را طوری پیدا کنیدکه عدد n^n دارای

k رقم و عدد k^k دارای n رقم باشد.

۱۹۸. روی ضلع‌های مجاور بــه زاویهٔ قائمــهٔ CA و CB از مثلث قائم‌الزاویه ومتساوی‌الساقین ABC، به ترتیب، نقطه‌های D و E را طوری انتخاب کرده‌ایم کــه داشته باشیم: $CD=CE$. امتداد عمودهای وارد از نقطه‌های D و C بــر خط راست AE، بــه ترتیب، وتر AB را در K و L قطع کرده‌اند. ثابت کنید: $KL=LB$.

۱۹۹. دو نفر، روی صفحهٔ شطرنجی ۸×۸، «موش و گـربه» بازی می‌کنند. اولی یك مهره دارد(موش)، ودومی دارای‌چندمهره است (گربه‌ها). حرکت همهٔ مهره‌ها، یکسان است: به‌راست، به‌چپ، به‌طرف بالا وبه‌طرف پایین؛ و در هرحرکت یك خانه. اگر موش به‌یکی ازخانه‌های‌کناری برسد، می‌تواند از صفحه به بیرون بپرد. اگر موش و گربه دریك خانه قرار گیرند، گربه، موش را می‌خورد.

بازی‌کن‌ها، به نوبت، حرکت می‌کنند؛ در ضمن دومی، در هرحرکت خود، همهٔ گربه‌ها را با هم حرکت می‌دهد (البته،گربه‌های مختلف، می‌توانند در جهت‌های مختلف حرکت کنند). حرکت اول را، مــوش آغاز می‌کند. کوشش موش در این است که از صفحه بیرون بپرد، و گــربه‌ها می‌خواهند، قبل از فرارموش، به‌او دسترسی پیداکنند.

a) تعدادگربه‌ها را، دو تا می‌گیریم. موش دریکی از خانه‌ها ــ البته، به جــز خانه‌های کناری، قرار دارد. آیا می‌توان گربه‌ها را در کناره‌های صفحه طوری جا دادکه آن‌ها، بتوانند موش را بخورند؟

b) سه گربه داریم، ولی موش می‌تواند، بار اول، دو حرکت متوالی انجام دهد. ثابت کنید، گربه‌ها در هــر نقطه‌ای باشند، موش می‌تواند خود را از دست آن‌ها نجات دهد.

۲۰۰. a) ثابت کنید، عددهای ۱، ۲، ۳، ...، ۳۲ را می‌توان طوری ردیف کرد که، برای هردو عددی از این‌ردیف، نصف‌مجموع آن‌ها، برابر با هیچ کدام از عددهای واقع در بین آن‌ها، نباشد.

b) آیا صد عدد ۱، ۲، ۳، ...، ۱۰۰ را می‌توان طوری ردیف کرد که، نصف مجموع هر دو عدد دلخواه از این ردیف، برابر با هیچ کدام از عددهای واقع در بین آن‌ها، نباشد؟

۲۰۱. عدد سه رقمی A دارای این ویژگی است: اگر واسطهٔ حسابی همهٔ عددهایی را پیدا کنیم که از عدد A و با جابه‌جا کردن رقم‌های آن به دست آمده‌اند، دوباره خود عدد A به دست می‌آید. همهٔ عددهای A را پیدا کنید.

۲۰۲. چندضلعی محدبی مفروض است و در آن، نمی‌توانیم هیچ‌کدام از مثلث‌های به مساحت واحد را جا بدهیم. ثابت کنید، این چندضلعی را می‌توان در مثلثی با مساحت ۴ جا داد.

۲۰۳. تابع f، در بازهٔ $۰ \leqslant x \leqslant ۱$ داده شده است. می‌دانیم، این تابع، غیرمنفی است و در ضمن $f(۱)=۱$. بـه جز این، برای هر دو عدد $x_۱$ و $x_۲$، با شرط $x_۱ \geqslant ۰$، $x_۲ \geqslant ۰$ و $x_۱+x_۲ \leqslant ۱$، داریم:

$$f(x_۱+x_۲) \geqslant f(x_۱)+f(x_۲)$$

a) ثابت کنید، برای هر تابع f از این گونه، به ازای هر مقداری از x، نابرابری $f(x) \leqslant ۲x$ بر قرار است.

b) آیا درست است که، برای هر مقدار x

$$f(x) \leqslant ۱/۹x$$

۲۰۴. مثلث ABC با مساحت واحدداده شده است. $A_۱$، $B_۱$ و $C_۱$ را، به‌ترتیب، وسط ضلع‌های BC، CA و AB می‌گیریم. اگـر K، L و M، به ترتیب، نقطه‌هایی واقع بر پاره‌خط‌های راست $AB_۱$، $CA_۱$ و $BC_۱$ باشند، بخش مشترك مثلث‌های $A_۱B_۱C_۱$ و KLM، چه مقـدار مساحتی می‌تـواند داشته باشد؟

نهمین المپیاد سراسری شوروی
سال ۱۹۷۵ (ساراتوف)

کلاس	روز اول				روز دوم		
:۸	۲۰۵a	۲۰۶	۲۰۷	۲۰۸a	۲۱۳	۲۱۴	۲۱۵
:۹	۲۰۹	۲۰۶	۲۱۰	۲۰۸b	۲۱۶	۲۱۵	۲۱۷
:۱۰	۲۱۱	۲۱۲	۲۰۵b	۲۰۸	۲۱۴	۲۱۸	۲۱۹

۲۰۵. a) مثلث ABC را، دور مرکز دایرهٔ محاطی آن، بـه اندازهٔ زاویه‌ای کوچکتر از ۱۸۰ درجه، دوران داده‌ایم تا مثلث $A_1B_1C_1$ به دست آید. پاره‌خطهای راست AB و A_1B_1 در نقطهٔ C_2، پاره خطهای راست BC و B_1C_1 در نقطهٔ A_2 و پاره‌خطهای راست CA و C_1A_1 در نقطهٔ B_2 یکدیگر را قطع کرده‌اند. ثابت کنید، دو مثلث $A_2B_2C_2$ و ABC متشابه‌اند.

b) چهارضلعی $ABCD$ را که در دایره‌ای محـاط شده است، دور مرکز دایرهٔ محیطی آن، به‌اندازهٔ زاویه‌ای کمتر از ۱۸۰ درجه دوران‌داده‌ایم تا چهارضلعی $A_1B_1C_1D_1$ به‌دست آید. محل برخورد خطهای راست AB و A_1B_1، BC و B_1C_1، CD و C_1D_1، DA و D_1A_1 را پیدامی‌کنیم. ثابت کنید، چهار نقطهٔ اخیر، راس‌های یك متوازی‌الاضلاع‌اند.

۲۰۶. مثلث ABC به مساحت واحد داده شده‌است. دو نفر که با هم بازی می‌کنند، اولی نقطهٔ X را روی ضلع AB انتخاب می‌کند، بعد دومی نقطهٔ Y را روی BC و، سپس اولی نقطهٔ Z را روی AC در نظر می‌گیرند. اولی می‌خواهد، تا آن جا که ممکن‌است، مساحت مثلث XYZ بیشتر باشد، در حالی که دومی علاقه‌مند است به حداقل مساحت برای این مثلث برسد. اولی، حداکثر به‌چه مساحتی دست می‌یابد؟

۲۰۷. رأس‌های یك ۳۲ ضلعی محدب در نقطه‌های گرهی یك صفحهٔ کاغذ شطرنجی‌قرار دارند. اگر طول ضلع هرخانه برابر واحد باشد، حداقل محیط ۳۲ ضلعی چقدر است؟

***۲۰۸.** a) می‌خواهیم دریك جدول مربعی ۷ × ۷، مرکزهای k خانه را طوری علامت بگذاریم که، اگر به هر ترتیبی چهار نقطهٔ دلخواه از بین

آن‌ها انتخاب کنیم، رأس‌های یک مستطیل با ضلع‌هایی موازی ضلع‌های مربع نباشند. k حداکثر چه عددی می‌تواند باشد تا به این امر توفیق یابیم؟

b) همین مسأله را در مورد مربع ۱۳ × ۱۳ خانه‌ای حل کنید.

۲۰۹. در شش‌ضلعی محدب $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$، وسط قطرهای A_6A_2، A_1A_3، A_2A_4، A_3A_5، A_4A_6 و A_5A_1 را، به ترتیب، B_1، B_2، B_3، B_4، B_5 و B_6 می‌نامیم. ثابت کنید، اگر شش ضلعی $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ محدب باشد، مساحت آن، برابر $\frac{1}{4}$ مساحت شش ضلعی $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ است.

۲۱۰. ثابت کنید، با رقم‌های ۱ و ۲ می‌توان 2^{n+1} عدد ساخت، به‌نحوی که هر کدام از آن‌ها دارای 2^n رقم باشد و، در ضمن، هر دو عدد، دست کم در 2^{n-1} مرتبهٔ خود، با هم اختلاف داشته باشند.

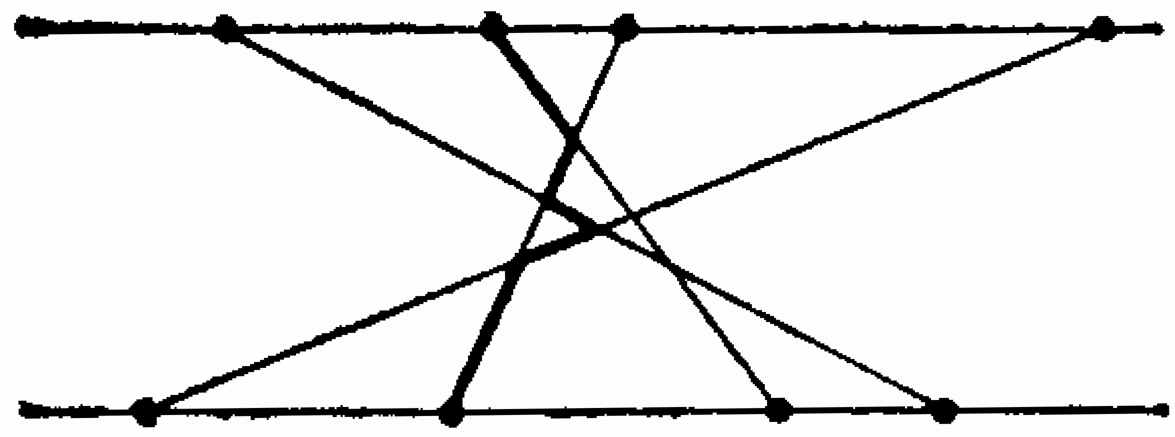
۲۱۱. مجموعه‌ای متناهی از چندضلعی‌ها، در صفحه داده شده است، به نحوی که هردو تا از آن‌ها، دارای نقطهٔ مشترکی هستند. ثابت کنید، خط راستی وجود دارد که همهٔ این چندضلعی‌ها را قطع می‌کند.

۲۱۲. ثابت کنید، برای عددهای مثبت a، b و c، این نابرابری برقرار است:

$$a^3+b^3+c^3+3\,abc>ab(a+b)+bc\,(b+c)+ac\,(a+c)$$

۲۱۳. سه مگس روی ضلع‌های مثلث ABC طوری حرکت می‌کنند که، مرکز ثقل مثلثی که تشکیل می‌دهند، تغییرجا نمی‌دهد. ثابت کنید، این نقطه برمرکز ثقل مثلث ABC منطبق است، به شرطی که بدانیم، یکی از مگس‌ها، روی تمامی محیط مثلث حرکت می‌کند. (مرکز ثقل یک مثلث، درمحل برخورد میانه‌های آن واقع است.)

۲۱۴. روی تختهٔ سیاه، چند ۰، ۱ و ۲ نوشته‌شده است. درهر گام، دو عددنابرابر را پاک می‌کنیم و، به جای آن‌ها، عدد سوم را می‌نویسیم (به جای ۰ و ۱، عدد ۲؛ به جای ۰ و ۲، عدد ۱ و به جای ۱ و ۲، عدد ۰). ثابت کنید، اگر بعداز چندگام، تنها یک عدد باقی بماند، این عدد بستگی به این



شکل ۱۰

ندارد که گام‌ها را به چه ردیفی برداشته‌ایم.

۲۱۵. روی صفحه، نواری داده شده است که دو مرز آن را، دو خط موازی با هم تشکیل می‌دهند. n خط راست، این نوار را قطع کرده است. هردوخط راست، در درون نوار، یکدیگر را قطع می‌کنند و هیچ سه خط راستی در یك نقطه به هم نمی‌رسند. همهٔ مسیرهایی را در نظر می‌گیریم که، با آغاز از کنارهٔ پایین نوارو روی این خط‌های راست، تا کنارهٔ بالای نوار امتداد دارند. این مسیرها، باید دارای این ویژگی باشند: ضمن عبور از مسیر، همیشه رو به‌بالا برویم؛ وقتی که به یك نقطه برخورد می‌رسیم، باید روی‌خط راست دیگری حرکت کنیم (شکل ۱۰). ثابت کنید، بین این‌مسیرها

a) دست‌کم $\frac{n}{۲}$ مسیر، بدون برخورد با یکدیگر وجود دارد؛

b) مسیری وجود دارد که شامل دست‌کم n پاره خط راست است؛

c*) مسیری وجوددارد که شامل بیش از $\frac{n}{۲}+۱$ پاره خط راست‌نیست؛

d*) مسیری وجود دارد که از طریق هر n خط راست می‌گذرد.

[در کلاس‌هشتم، بخش‌های a، b) و d) برای حالت $n=۲۰$؛ و برای کلاس نهم، بخش‌های b)، c) و d) درحالت کلی خواسته شده است.]

۲۱۶. عددهای طبیعی k را طوری پیدا کنید که وقتی مکعب به ضلع k را به مکعب‌های به‌ضلع واحد تقسیم می‌کنیم، بتوان مکعب‌های واحد را طوری به رنگ‌های سیاه و سفید در آورد که، هر مکعب کوچك، درست مجاور با دو مکعب دیگر هم رنگ خود باشد. (دو مکعب را وقتی مجاور هم می‌دانیم که در یك وجه مشترك باشند.)

۲۱۷. چندجمله‌ای $P(x)$

a) با ضریب‌های طبیعی؛

b) با ضریب‌های درست

داده شده است. مجموع رقم‌های عدد $P(n)$ را، در دستگاه عدد نویسی به مبنای ده، a_n می‌نامیم. ثابت کنید، عددی پیدا می‌شود که در دنبالهٔ عددهای a_1، a_2، ....، a_n، ....، بی‌نهایت بار تکرار شده است.

۲۱۸. در مسابقهٔ قهرمانی جهان و اروپا، ۲۰ تیم شرکت‌کرده‌اند. در بین این تیم‌ها، k تیم اروپایی وجود دارد که نتیجهٔ مسابقه‌های بین آن‌ها، به حساب مسابقهٔ اروپائی گذاشته می‌شود. مسابقه دریك دور انجام می‌شود. حداکثر k را طوری پیدا کنید که، به ازای آن، بتوان این نتیجه را به‌دست آورد: تیمی که بیشترین امتیاز را در مسابقه اروپایی به دست‌آورده است، کمترین امتیاز را درمسابقهٔ جهانی به‌دست آورده باشد؛ به‌شرطی که

a) این مسابقه در هاکی باشد و تساوی هم به حساب آید؛

b) این مسابقه در والیبال باشد وتساوی به‌حساب نیاید؟

۲۱۹. a) عددهای حقیقی a_1، a_2، b_1، b_2 و عددهای مثبت p_1، p_2، q_1، q_2 مفروض‌اند. ثابت کنید، درجدول ۲ × ۲

$$\begin{pmatrix} \dfrac{a_1+b_1}{p_1+q_1} & \dfrac{a_1+b_2}{p_1+q_2} \\[2ex] \dfrac{a_2+b_1}{p_2+q_1} & \dfrac{a_2+b_2}{p_2+q_2} \end{pmatrix}$$

می‌توان عددی را پیداکردکه از عدد هم‌سطر خود کمتر و از عدد هم ستون خود بیشتر نباشد.

b*) عددهای حقیقی a_1،a_2، ....، a_m،b_1، b_2، ....، b_n و عددهای مثبت p_1، p_2، ....، p_m،q_1، q_2، ....، q_n مفروض‌اند. جدولی $m\times n$ تشکیل می‌دهیم که در برخورد سطر iام ($i=1$، ۲، ....، m) با ستون jام آن ($j=1$، ۲، ....، n)، عدد

$$\frac{a_i+b_j}{p_i+q_j}$$

قرار گرفته باشد، ثابت کنید، در این جدول عددی پیدا می‌شود که کمتر از هر عدد هم‌سطر خود و بیشتر از هر عدد هم‌ستون خود نباشد.

دهمین المپیاد سراسری شوروی
سال ۱۹۷۶ (دوشنبه)

کلاس	روز اول	روز دوم
۸:	۲۲۰ ۲۲۱ ۲۲۲a,b ۲۲۳	۲۲۹ ۲۳۰ ۲۳۱
۹:	۲۲۲b ۲۲۴ ۲۲۳ ۲۲۵	۲۳۰ ۲۳۲ ۲۳۱
۱۰:	۲۲۳ ۲۲۶ ۲۲۷ ۲۲۸ ۲۲۵	۲۳۳ ۲۳۴ ۲۳۱

۲۲۰. ۵۰ ساعتی که درست‌کار می‌کنند، روی میز قرار دارند. ثابت کنید، لحظه‌ای وجود دارد که، در آن، مجموع فاصله‌های مرکزمیز تا انتهای عقربه‌های دقیقه شمار، از مجموع فاصله‌های مـرکز میز تا مرکز ساعت‌ها، بیشتر است.

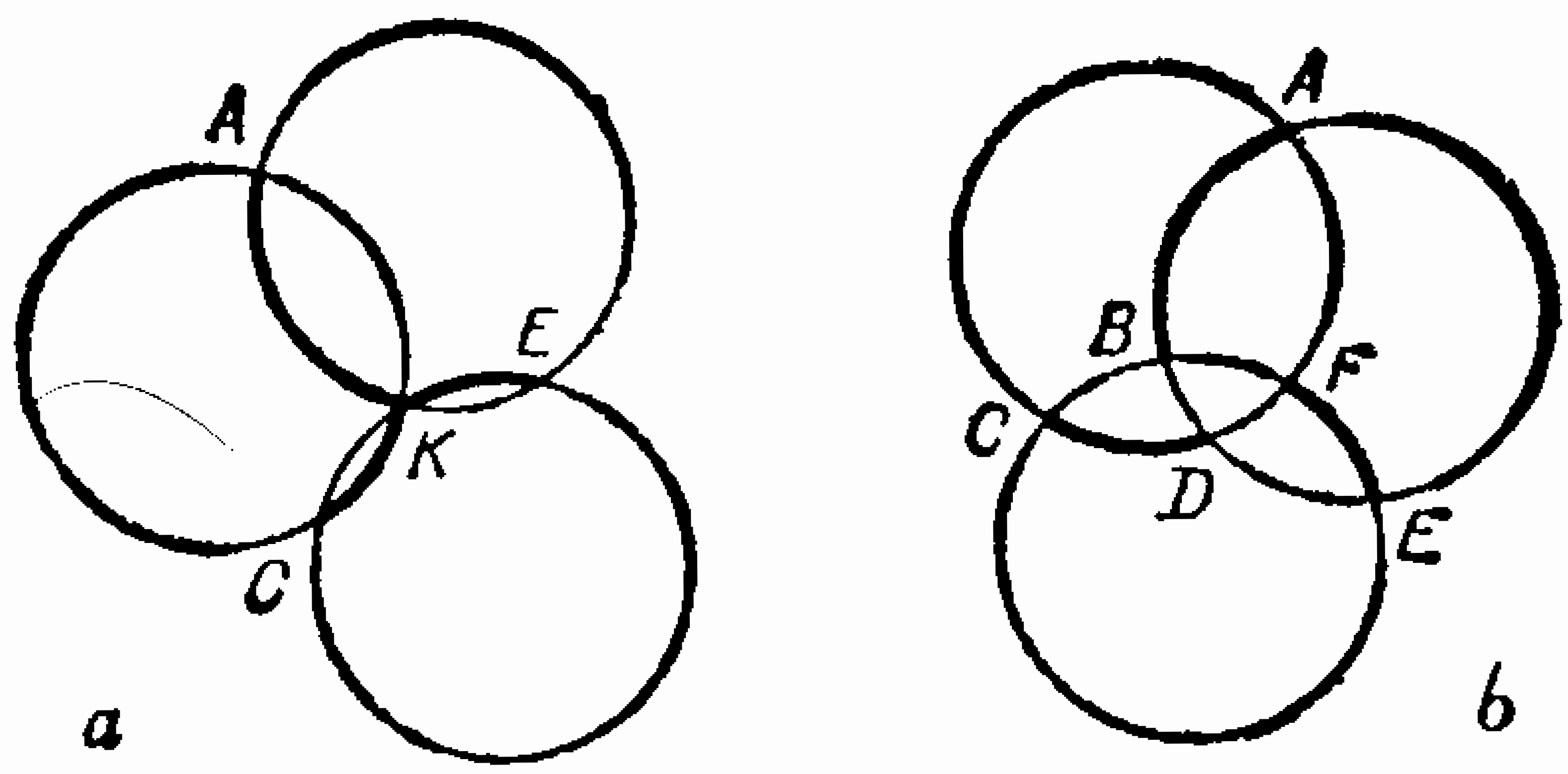
۲۲۱. ۱۰۰۰ عدد را در یك سطر پشت سر هم نوشته‌ایم. زیـر این عددها، سطر دوم را با قانون زیر می‌نویسیم: زیر هر عدد a از سطر اول، عددی طبیعی را می‌نویسیم که برابر باشد با تعداد عددهای a در سطر اول. با همین روش، سطر سوم را زیرسطر دوم می‌نویسیم: زیر هر عدد b، عددی طبیعی رامی‌نویسیم کـه برابر باشد با تعداد عددهای b در سطر دوم. سپس، با همین روش، سطر چهارم و بعد سطر پنجم و غیره را می‌سازیم.

a) ثابت‌کنید، یکی از سطرها، با سطر بعدی خود، یکی درمی‌آید.

b) دقیق‌تر، ثابت کنید، سطر یازدهم، با سطر دوازدهم، یکی است.

c) برای سطر اول، نمونه‌ای پیدا کنید کـه، به ازای آن، سطرهای دهم و یازدهم برهم منطبق نباشند.

۲۲۲. سه دایره با شعاع‌های برابر، روی یك صفحه داده شده است.



شکل ۱۱

a) ثابت کنید، اگر این سه دایره، مثل شکل ۱۱، a از یك نقطه بگذرند، مجموع کمان‌های مشخص شدهٔ $\overset{\frown}{AK}$، $\overset{\frown}{CK}$ و $\overset{\frown}{EK}$ برابراست با ۱۸۰ درجه.

b) ثابت کنید، اگر سه دایره در وضع شکل ۱۱، b باشند، مجموع کمان‌های مشخص شدهٔ $\overset{\frown}{AB}$، $\overset{\frown}{CD}$ و $\overset{\frown}{EF}$ برابر است با ۱۸۰ درجه.

۲۲۳. عددهای طبیعی x_1 و x_2 از ۱۰۰۰۰ کوچکترند. با آغاز از این دو عدد، دنبالهٔ x_1، x_2، x_3، ...، x_n را می‌سازیم که، در آن، x_3 برابر است با $|x_1-x_2|$، x_4 برابر است با کوچکترین عدد از بین عددهای

$$|x_1-x_2| \text{ ، } |x_2-x_3| \text{ ، } |x_1-x_3|$$

x_5 برابرست با کوچکترین عدد از بین عددهای

$$|x_1-x_2|\text{، }|x_1-x_3|\text{، }|x_1-x_4|\text{، }|x_2-x_3|\text{، }|x_2-x_4|\text{، }|x_3-x_4|$$

و به‌همین ترتیب، برای عددهای بعدی دنباله (هرجملهٔ دنباله، برابر است با کوچکترین عدداز بین قدرمطلق تفاضل‌های دو به‌دوی جمله‌های قبلی). ثابت کنید، درهر حال $x_{21}=0$.

۲۲۴. آیا می‌توان راس‌های یك مکعب را با عددهای سه رقمی طوری شماره‌گذاری کرد که، اولاً این عددها تنها با رقم‌های ۱ و ۲ ساخته شده باشند، ثانیاً شماره‌های هر دو راس مجاور، دست‌کم در دومرتبه از رقم‌های خود با هم اختلاف داشته باشند؟

۲۲۵*. بردارهای **a**، **b**، **c** و **d** به‌مجموع ۰، روی یك صفحه‌داده شده‌اند.

ثابت کنید:

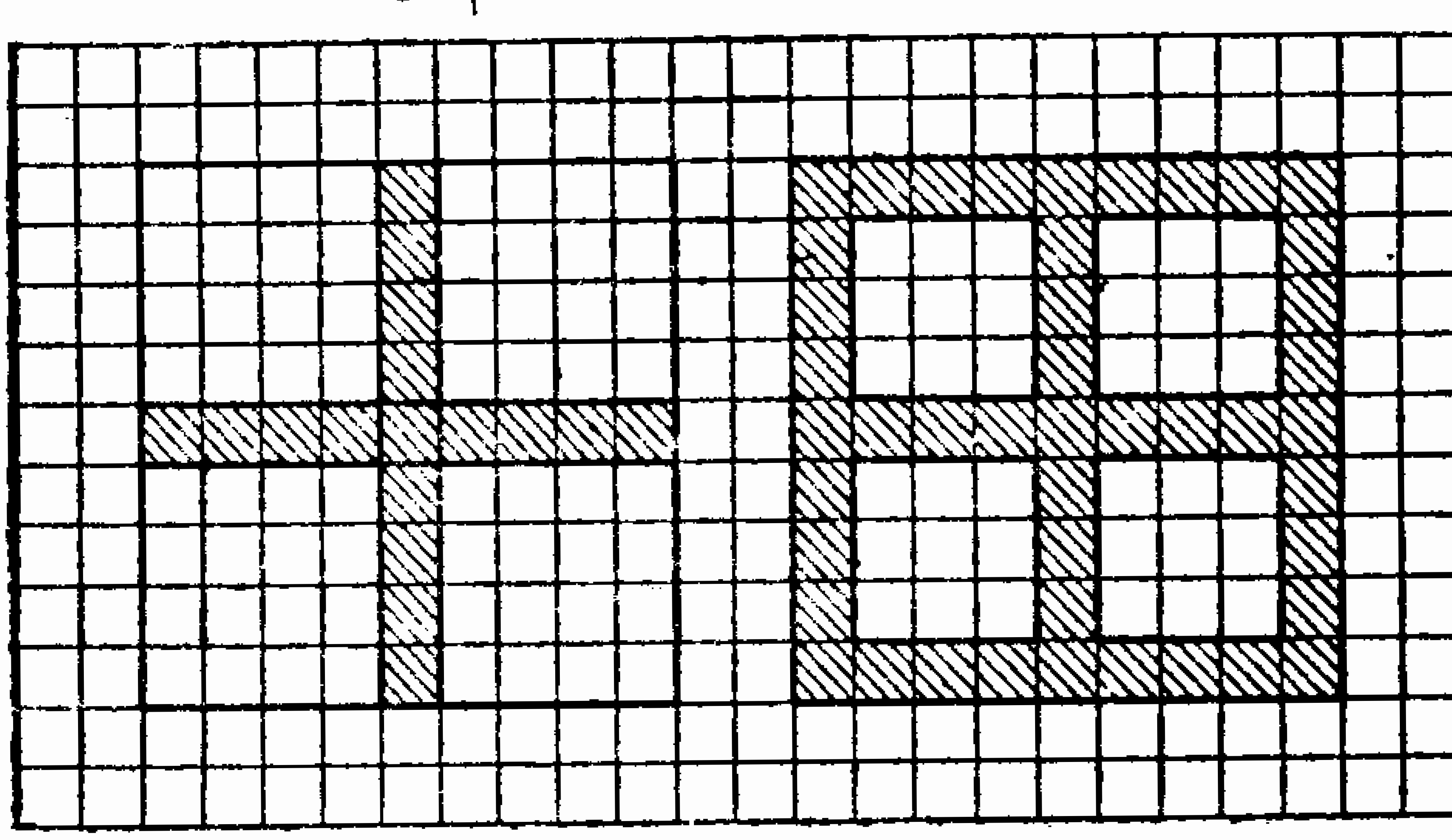
$$|a|+|b|+|c|+|d| \geqslant |a+d|+|b+d|+|c+d|$$

۲۲۶. در ۱۹۷۶ ضلعی منتظم، وسط همهٔ ضلع‌ها و وسط همهٔ قطرها را علامت گـذاشته‌ایم. از این نقطه‌ها، حداکثر چند نقطـه روی محیط یك دایره‌اند؟

۲۲۷. روی یك صفحهٔ مربع شکل کاغذ، n مستطیل رسم کرده‌ایم، به نحوی که ضلع‌های آن‌ها، موازی با ضلع‌های صفحه باشد. بین این مستطیل‌ها، هیچ دو مستطیلی، دارای نقطهٔ درونی مشترك نیستند. ثابت کنید، اگـر همهٔ این مستطیل‌ها را از صفحهٔ مربعی شکل کاغذ جدا کنیم، تعداد قطعه‌های بخش باقی‌ماندهٔ کاغذ، از $n+1$ تجاوز نمی‌کند.

۲۲۸. روی سه جادهٔ مستقیم، سه پیاده، با سرعت‌هایی ثابت حرکت می‌کنند. در لحظهٔ آغاز حرکت، این سه نفر، روی یك خط راست نیستند. ثابت کنید آن‌ها نمی‌توانند، بیش از دو بار، روی یك خط راست قرار گیرید.

مهم ✓ **۲۲۹.** روی صفحهٔ شطرنجی ۹۹ × ۹۹، شکلی را در نظر گـرفته‌ایم (ایـن شکل، در بخش‌های a، b و c متفاوت است). در هر خانهٔ شکل Φ، حشره‌ای قـرار دارد. در لحظه‌ای، حشره‌ها می‌پـرند و دوباره در خانه‌های همان شکل می‌نشینند؛ در ضمن، ممکن است در یك خانهٔ شکل، چند حشره بنشینند. هر دو حشره‌ای که در خانه‌های مجاور هم قرار دارند، بعد ازپرواز،



شکل ۱۲

a b

یا دوباره در دوخانهٔ مجاور می‌نشینند و یا هردو در یك خانه جا می‌گیرند. (دو خانه را، وقتی مجاور هم به حساب می‌آوریم که یك ضلع یا یك رأس مشترك داشته باشند.)

a) فرض کنید، شکل Φ، «صلیب مرکزی» باشد، یعنی شکلی که شامل خانه‌های افقی و خانه‌های قائم وسط صفحهٔ شطرنجی است (شکل ۱۲، a). ثابت کنید، در این حالت، حشره‌ای وجود دارد که یا به‌جای خود برمی‌گردد و یا به‌خانهٔ مجاور می‌پرد.

b) آیا این حکم، برای حالتی که Φ به شکل «چارچوب پنجره‌ای» باشد، یعنی وقتی که شامل صلیب مرکزی و همهٔ خانه‌های کناری صفحه باشد، (شکل ۱۲، b)، بازهم درست است؟

c*) آیا حکم، برای حالتی که شکل Φ، تمامی صفحه را فرا گرفته باشد، درست است؟

۲۳۰. مثلث را «بزرگ» می‌نامیم، وقتی که طول هر ضلع آن ازواحد بیشتر باشد. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، با طول ضلع ۵، داده شده است. ثابت کنید:

a) از مثلث ABC می‌توان ۱۰۰ مثلث «بزرگ» جدا کرد؛

b) مثلث ABC را می‌توان، به‌طور کامل، دست کم به ۱۰۰ مثلث «بزرگ» تقسیم کرد.

c*) مثلث ABC را می‌توان دست کم به ۱۰۰ مثلث «بزرگ» طوری تقسیم کرد که، هر دو مثلث «بزرگ» یا متقاطع نباشند، یا تنها یك راس مشترك داشته باشند و یا ضلع یکی از دو مثلث، ضلع دیگری هم باشد (این نوع تقسیم را، مثلث‌بندی گویند.)

d*) مساله‌های b) و c) را، برای مثلث متساوی‌الاضلاع به‌ضلع ۳ حل کنید.

۲۳۱. عددطبیعی n مفروض است. دنبالهٔ عددهای طبیعی $a_1، a_2، \ldots، a_k$ را، برای عدد n $(k \geqslant n)$: «عام» می‌نامیم، وقتی که بتوان از آن، با خط زدن بعضی از جمله‌ها، هر تبدیلی از عددهای ۱، ۲، ...، n را به دست آورد

(یعنی، هر دنباله‌ای از n عدد که، در آن، هر یك از عددهای ۱، ۲، ....، n یکبار آمده باشد). مثلاً دنباله

$$(1, 2, 3, 1, 2, 1, 3)$$

برای $n=3$، یك دنبالهٔ «عام» است، ولی دنبالهٔ

$$(1, 2, 3, 2, 1, 3, 1)$$

برای $n=3$، عام نیست، زیرا با هر حذفی، نمی‌توان تبدیل $(2, 1, 3)$ را ازآن به دست آورد. هدف این مساله آن است که برای به دست آوردن تعداد جمله‌های کوتاه‌ترین دنبالهٔ عام (با مفروض بودن n)، برآوردی پیدا کنیم.

a) نمونه‌ای از یك دنبالهٔ عام شامل n^2 جمله بدهید.

b) نمونه‌ای از دنبالهٔ عام شامل n^2-n+1 جمله پیدا کنید.

c*) ثابت کنید، هر دنبالهٔ عام، دست کم دارای $\frac{1}{2}n(n+1)$ جمله است.

d*) ثابت کنید، به ازای $n=4$، کوتاه‌ترین دنبالهٔ عام، از ۱۲ جمله تشکیل شده است.

e*) تحقیق کنید، برای عدد مفروض n، چگونه می‌توان، کوتاه‌ترین دنبالهٔ عام را پیدا کرد. (هیأت داوران مسابقه می‌تواند، دنبالهٔ عام را، برای هر n، با n^2-2n+4 جمله بسازد.)

۲۳۲. n عدد حقیقی روی محیط دایره نوشته شده است؛ مجموع این n عدد، برابر صفر و یکی از آن‌ها برابر واحد است.

a) ثابت کنید، دو عدد مجاور وجود دارد که دست کم به اندازهٔ $\frac{4}{n}$ با هم اختلاف دارند.

b*) ثابت کنید، عددی وجود دارد که با واسطهٔ حسابی دوعدد مجاور

خود، دست‌کم به اندازهٔ $\frac{8}{n^2}$ اختلاف دارد.

c*) ارزیابی بخش b) را می‌توان بهتر کرد. سعی کنید، به جای عدد ۸، عدد بزرگتری قرار دهید، به نحوی که حکم مساله برای همهٔ عددهای طبیعی n برقرار باشد.

d*) ثابت کنید، برای $n = ۳۰$، می‌توان عددی روی محیط دایره پیدا کرد که، دست کم، به اندازه $\frac{۲}{۱۱۳}$ با واسطهٔ حسابی دو عدد مجاور خود اختلاف داشته باشد. نمونه‌ای از انتخاب ۳۰ عدد روی محیط دایره بیاورید، به نحوی که اختلاف هیچ عددی با واسطهٔ حسابی دو عدد مجاور خود، بیشتر از $\frac{۲}{۱۱۳}$ نباشد.

۲۳۳. در رأس‌های n ضلعی منتظم به مرکز O، عددهای $(+۱)$ و (-۱) را قرارداده‌ایم. در گام اول، تصمیم می‌گیریم علامت همهٔ عددهایی را که در رأس‌های یك k ضلعی منتظم به مرکز O قرار دارند، عوض کنیم (در ضمن، پاره خط راستی را هم که از O می‌گذرد، یك دو ضلعی به مرکز O به‌حساب می‌آوریم). ثابت کنید. درحالت‌های a)، b) و c)، می‌توان انتخاب اولیهٔ $(+۱)$ و (-۱) را طوری در نظر گرفت که، با برداشتن هر چند گام، به حالتی که همهٔ عددها $(+۱)$ باشند، نرسیم:

a) $n = ۱۵$؛

b) $n = ۳۰$؛

c*) n، هرعدد دلخواه بزرگتراز ۲؛

d*) سعی کنید، برای عدددلخواه n، حداکثر $K(n)$، تعداد ترتیب‌های مختلف $(+۱)$ و (-۱) را پیدا کنید که، در بین آن‌ها، نتوان یکی را از دیگری، با هرچندگام، به‌دست آورد. مثلاً ثابت کنید: $K(۲۰۰) = ۲^{۸۰}$.

۲۳۴*. روی کرهٔ به شعاع واحد، دایرهٔ عظیمه‌ای را رسم کرده‌ایم که آن را، «استوا» می‌نامیم. به سادگی می‌توانیم، اصطلاح‌های جغرافیایی

دیگر را هم به کار بریم: قطب، نصف‌النهار، مدار.

a) تابع f را، با متناظر کردن هر نقطهٔ کره با مجذور فاصلهٔ این نقطه از صفحهٔ استوا، در نظر می‌گیریم. تحقیق کنید که، این تابع، دارای ویژگی زیر است:

(*) اگر M_1، M_2 و M_3 انتهای سه شعاع دو به دو عمود بر هم در کره باشند، آن وقت $f(M_1)+f(M_2)+f(M_3)=1$.

در همهٔ بخش‌های بعدی، f عبارت است از تابع غیر منفی دلخواهی روی کره، به نحوی که در همهٔ نقطه‌های استوا به سمت صفر میل می‌کند و، در ضمن، دارای ویژگی (*) است.

b) M و N را، نقطه‌هایی از یك نصف‌النهار، واقع در بین قطب شمال و استوا فرض می‌کنیم. ثابت کنید، اگر نقطهٔ M، دورتر از نقطهٔ N، نسبت به صفحهٔ استوا باشد، آن وقت $f(M)>f(N)$.

c) M و N را نقطه‌های دلخواهی از کره می‌گیریم. ثابت کنید، اگر نقطهٔ M، نسبت به نقطهٔ N، از صفحهٔ استوا دورتر باشد، آن وقت $f(M)>f(N)$.

d) ثابت کنید، اگر M و N روی یك مدار باشند، آن وقت

$$f(M)=f(N)$$

e) ثابت کنید، تابع f، بر تابعی که در بخش a) توضیح داده‌ایم، منطبق است.

یازدهمین المپیاد سراسری شوروی
سال ۱۹۷۷ (تالین)

کلاس	روز اول					روز دوم			
:۸	۲۳۵	۲۳۶	۲۳۷b	۲۳۸		۲۴۳	۲۴۴a,b	۲۴۵	۲۴۶
:۹	۲۳۷a	۲۳۹	۲۳۵	۲۴۰		۲۴۷	۲۴۸	۲۴۹	۲۵۰
:۱۰	۲۳۷a	۲۳۹	۲۴۱	۲۴۲	۲۳۵	۲۵۱	۲۴۴ a,c—e	۲۴۶	

۲۳۵. یك خط شکستهٔ بسته، کــه خودش را قطع نکرده است، روی صفحه‌داده‌شده است؛ هیچ سه‌رأسی ازخط شکسته، روی یك خطراست نیستند. دوضلع غیرمجاورآن‌را، «خاص»می‌نامیم،وقتی که ادامهٔ یکی ازآن‌ها، دیگری را قطع کند. ثابت کنید، تعداد جفت ضلع‌های خاص، عددی زوج است.

۲۳۶. چند نقطه، که بر یك خط راست واقع نیستند، روی صفحه در نظر می گیریم و روی هر کدام از آن‌ها، عددی می‌نویسیم. می‌دانیم، اگرخط راستی از دو یا چند نقطه بگذرد، مجموع همهٔ عددهای واقع بر آن، برابر صفرمی‌شود. ثابت کنید همهٔ عددها برابر صفرند.

۲۳۷. a) مثلث‌های T_1 و T_2 در دایره‌ای محاطاند، درضمن، راس‌های مثلث T_2 در وسط کمان‌هایی از دایره قرار دارند کــه به وسیلهٔ راس‌های مثلث T_1 به وجود آمده‌اند. ثابت کنید، در شش‌ضلعی $T_1 \cap T_2$، قطرهایی که راس‌های روبه‌رو را به‌هم وصل می‌کنند، باضلع‌های مثلث T_1 موازی‌اند و در یك نقطه به هم می‌رسند.

b) پاره خط راستی که وسط کمان‌های AB و AC از دایرهٔ محیطی مثلث ABC را به هم وصل می‌کند، ضلع‌های AB و AC را در نقطه‌های D و K قطع می‌کند. ثابت کنید. نقطه‌های A، D، K و O (مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC)، راس‌های یك لوزی‌اند.

۲۳۸. روی محیط دایره‌ای، چند کارت کــوچك سیاه و سفید قــرار داده‌ایم. دو نفر، به نوبت، این عمل را انجام می‌دهند: اولی همهٔ کارت‌های سیاهی را کــه در مجاورت خود (ولو در یك طرف) کارت سفیدی دارند بر می‌دارد و، سپس، دومی همهٔ کارت‌های سفیدی را برمی‌داردکه درمجاورت خودکارت‌سیاهی دارند. این‌عمل راآن‌قدرادامه می‌دهند تاهمهٔ کارت‌های باقی مانده، از یك‌رنگ باشند.

a) فرض کنید، در ابتدا، ۴۰ کارت وجود داشته باشد. آیا ممکن است این وضع پیش آید که بعد از آن که، هرکدام از دو نفر دوحرکت انجام دادند، روی محیط دایره تنها یك کارت باقی بماند؟

b*) روی‌محیط دایره هزارکارت وجود دارد. حداقل چندحرکت باید

انجام شود تا روی محیط دایره، فقط یك کارت باقی بماند؟

۲۳۹. دنبالهٔ عددی نامتناهی $\{a_n\}$ داده شده است. می‌دانیم:

$$\lim_{n \to \infty}\left(a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n\right) = 0$$

ثابت کنید: $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

۲۴۰*. در یك کشور، از هر شهر می‌توانیم به هر شهر دیگری برویم، بدون این که از شهرهای دیگر عبور کنیم. قیمت بلیت مسافرت بین هر دو شهر معلوم است. دو نوع مسافرت به همهٔ شهرها را درنظر می گیریم. درهر یك از این مسافرت‌ها، به هر شهر، تنها یکبار می‌رویم. در مسیری که برای مسافرت اول انتخاب می‌کنیم، از این اصل پیروی می کنیم: آغاز مسیر، یك شهردلخواه است؛ در هرمرحله، مسیر خود را به شهری ازشهرهای باقی‌مانده انتخاب می کنیم که، قیمت بلیت مسافرت به آن جا، نسبت به قیمت بلیت مسافرت به دیگر شهرها کمترین مقدار باشد (اگر چند شهر از این گونه وجود داشته باشد، یکی از آن‌ها را انتخاب می‌کنیم)؛ مسافرت را به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا همهٔ شهرها را ببینیم. در مسیر دوم، برای مسافرت، باز هم آغاز حرکت را، شهری دلخواه می گیریم، ولی درهرمرحله، برای مسیر بعدی، شهری را انتخاب می کنیم که، بلیت مسافرت بدآن، نسبت به بقیهٔ شهرهای باقی‌مانده، گران‌تر باشد. ثابت کنید، مجموع قیمت بلیت‌ها در مسیر اول، از مجموع قیمت بلیت‌ها در مسیر دوم، بیشتر نیست.

۲۴۱. در هریك از راس‌های چندوجهی محدب M، سه یال به هم رسیده‌اند. می‌دانیم، هر وجه این چندوجهی، یك چندضلعی قابل محاط در دایره است. ثابت کنید، می‌توان کره‌ای را بر این چندوجهی محیط کرد.

۲۴۲*. این چندجمله‌ای را در نظر می گیریم:

$$x^{10} + *x^9 + *x^8 + \ldots + *x^2 + *x + 1 = 0$$

دونفر با هم بازی می کنند. اولی به جای یکی ازستاره‌ها، یك عدد می گذارد،

بعد دومی بـه جای یکی از ستارهای باقی‌مانده یك عدد مـی گذارد، سپس دوباره نوبت به اولی می‌رسد. به نوبت جای ستاره‌ها را عدد می گذارند تا جایی که دیگر ستاره‌ای باقی نماند (روی هم ۹ حرکت). اگر در پایان کار، به چند جمله‌ای برسیم که ریشه‌های حقیقی نداشته باشد، اولی بازی را برده است، و اگر چند جمله‌ای حاصل، دست کـم یك ریشهٔ حقیقی داشته باشد، دومی بازی را برده است. آیا دومی می‌تواند، با هرنوع بازی اولی، برنده شود؟

۲۴۳. ۷ نفر پشت یك میز گرد نشسته‌اند. جلوی هـرکدام از آن‌ها، یك لیوان است. در بعضی از ایـن لیوان‌ها، مقداری شیر وجود دارد. یکی از افراد، تمامی شیر لیوان خود را در بقیهٔ لیوان‌ها، به طورمساوی، می‌ریزد. بعد، نفر سمت راست او، همین عمل را انجام می‌دهـد. سپس نفر سوم در سمت راست نفردوم، شیر موجود در لیوان خود را بین بقیه، به طورمساوی، تقسیم می‌کند و غیره. وقتی که نفر آخر (هفتمین نفر) شیر خود را به طور مساوی بین بقیهٔ لیوان‌ها تقسیم کرد، معلوم شد، در هـر لیوان، همان مقدار شیر وجود دارد که در ابتدا بوده است. اگر مجموع شیرهای همهٔ لیوان‌ها، برابر ۳ لیتر باشد، در آغاز کار، در هر لیوان، چقدر شیر بوده است؟

۲۴۴. عدد $2n$ رقمـی را وقتی «خاص» می‌نامیم که، اولاً خود عدد مجذور کامل باشد و ثانیاً، عددهایی که از n رقم اول و، از n رقم آخر به دست می‌آیند، هردو مجذور کامل باشند (در ضمن، عدد n رقمی دوم می‌تواند با صفر آغاز شود، ولی نباید برابر صفر باشد؛ عدد n رقمی اول، نمی‌تواند با صفر آغاز شود).

a) همهٔ عددهای «خاص» دورقمی و چهاررقمی را پیدا کنید.

b) آیا عددهای شش رقمی «خاص» وجـود دارد؟ (یا نمونه‌ای از این عددها بدهید و یا ثابت کنید، چنین عددهایی وجود ندارند.)

c*) ثابت کنید، دست کم یك عدد ۲۰ رقمی «خاص» وجود دارد.

d*) ثابت کنید، تعداد عـددهای «خاص» ۱۰۰ رقمی، بیشتر از ۱۰ نیست.

c^*) ثابت کنید، دست کم، یك عدد «خاص» ۳۰ رقمی وجود دارد.

۲۴۵*. مجموعهٔ $\{a_۱، a_۲، \dots، a_n\}$ از عددهای مثبت داده شده است. برای هرزیرمجموعهٔ آن، مجموع عددهایی‌را که در آن وجوددارد، می‌نویسیم (مجموع عددها، درزیرمجموعه‌های شامل یك، دو، ...، n جمله). ثابت کنید، همهٔ این‌عددها را می‌توان طوری بهnگروه تقسیم کرد که، درهر کدام ازآن‌ها، نسبت بزرگترین عدد به‌کوچکترین عدد، از ۲ تجاوز نکند.

۲۴۶. هزار بلیت با شماره‌های ۰۰۰، ۰۰۱، ۰۰۲، ...، ۹۹۹ و صد جعبه با شماره‌های ۰۰، ۰۱، ۰۲، ...، ۹۹ دراختیار داریم. بلیت درجعبه‌ای انداخته می‌شود که، با حذف یکی از رقم‌های شمارهٔ بلیت، شمارهٔ جعبه به دست آید، ثابت کنید:

a) می‌توان همهٔ بلیت‌ها را در ۵۰ جعبه انداخت؛

b) همهٔ بلیت‌ها را، درکمتر از ۴۰ جعبه، نمی‌توان جا داد؛

c^*) نمی‌توان همهٔ بلیت‌ها را در کمتر از ۵۰ جعبه جا داد؛

d^*) شمارهٔ بلیت‌ها را چهاررقمی می‌گیریم (از ۰۰۰۰ تا ۹۹۹۹) و هر بلیت را در جعبه‌ای می‌اندازیم که، شمارهٔ‌آن، از شمارهٔ بلیت، با حذف دو رقم آن به‌دست آید. ثابت کنید، همهٔ بلیت‌های چهاررقمی را می‌توان‌در ۳۴ جعبه جا داد.

e^*) حداقل چند جعبه لازم است تا بتوان همه بلیت‌های k رقمی را در آن‌ها جا داد ($k = ۴، ۵، ۶، \dots$)؟

۲۴۷. صفحهٔ شطرنجی مربعی با ۱۰۰ × ۱۰۰ خانه مفروض است. چند خط شکستهٔ غیر متقاطع با خود رسم‌کرده‌ایم که روی ضلع‌های خانه‌ها ساخته شده‌اند و، درضمن، نقطهٔ مشترکی با هم ندارند. این خط‌های شکسته، دقیقاً در داخل مربع‌اند، ولی دو انتهای آن‌ها، بـه مرزهای آن رسیده‌اند. ثابت کنید، به جز راس‌های مربع اصلی، گـره‌های دیگری هم (در داخل یا روی مرز مربع) وجود دارند کـه متعلق به هیچ کـدام از خط‌های شکسته نیستند (هر راس یك خانه از صفحهٔ شطرنجی را، یك گره می‌نامیم).

۲۴۸*. عددهای طبیعی $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n و $y_۱$، $y_۲$، ...، y_m مفروض‌اندو

می‌دانیم:

$$x_1+x_2+\dots+x_n=y_1+y_2+\dots+y_m<mn$$

ثابت کنید، در برابری

$$x_1+x_2+\dots+x_n=y_1+y_2+\dots+y_m$$

می‌توان بخشی از جمله‌ها را، طوری حذف کرد که، دوباره، به یك برابری برسیم.

۲۴۹. ۱۰۰۰ مربع را روی صفحه رسم کرده‌ایم، به نحوی که، ضلع‌های آن‌ها، موازی با محورهای مختصات باشد، M را، مجموعهٔ مرکزهای این مربع‌ها می‌گیریم، ثابت کنید، می‌توان بخشی ازمجموعهٔ مربع‌ها را، طوری جدا کرد که، هر نقطهٔ مجموعهٔ M، حداقل متعلق به‌یکی و حداکثر متعلق به‌چهارتا از مربع‌های جدا شده باشد.

۲۵۰. روی میز، یك ترازو و n وزنه، با وزن‌های مختلف، وجود دارد. وزنه‌ها را به‌نوبت، درکفه‌های ترازو قرار می‌دهیم (هربار، وزنه‌ای را از روی میز برمی‌داریم و در این یا آن کفه می‌گذاریم).

a) ثابت کنید، می‌توان وزنه‌ها را طوری ردیف کرد که، ابتدا کفهٔ چپ، بعد کفهٔ راست، سپس دوباره کفهٔ چپ ترازو و غیره، سنگین‌تر باشد.

این دنبالهٔ نتیجه‌ها را با حرف‌های L ، R نشان می‌دهیم و به‌صورت واژهٔ $LRLRLR\dots$ می‌نویسیم. در این جا، L به معنای آن است که کفهٔ چپ سنگین‌تر است و R، به معنای سنگین‌تر بودن کفهٔ راست ترازو است.

b*) ثابت کنید، برای هر واژهٔ به طول n از حرف‌های L و R، می‌توان وزنه‌ها را به چنان ردیفی تنظیم کرد که، اگر آن‌ها را باهمان ردیف به‌نوبت در این یا آن کفهٔ ترازو قرار دهیم، واژهٔ مفروض، متناظر با وضع کفه‌های ترازو باشد.

۲۵۱*. چند جمله‌ای با یك متغیر x و ضریب بزرگترین درجهٔ واحد را، در نظر می‌گیریم. چند جمله‌ای‌های P و Q را، قابل جابه‌جایی

می‌نامیم، وقتی که چندجمله‌ای‌های $P(Q(x))$ و $Q(P(x))$، متحد با یکدیگر باشند

a) برای هر عدد α، همهٔ چندجمله‌ای‌های $Q(x)$ را پیدا کنید که از درجهٔ سوم تجاوز نکنند و با چندجمله‌ای $P(x)=x^2-\alpha$ قابل جابه‌جایی باشند.

b) P را چندجمله‌ای از درجهٔ دوم و k را عددی طبیعی می‌گیریم. ثابت کنید، بیش از یك چندجمله‌ای درجهٔ k وجود ندارد که با P قابل جابه‌جایی باشد.

c) چند جمله‌ای‌های از درجهٔ ۴ و ۸ را پیدا کنید که با چندجمله‌ای مفروض از درجهٔ دوم، قابل جابه‌جایی باشند.

d) چندجمله‌ای‌های Q و R، با چندجمله‌ای مفروض P از درجهٔ دوم، قابل جابه‌جایی‌اند. ثابت کنید، این دو چند جمله‌ای نسبت به هم قابل جابه جایی‌اند.

e) ثابت کنید، دنباله‌ای نامتناهی از چندجمله‌ای‌های P_2، P_3، P_4، …، P_k، … وجود دارد (P_k چندجمله‌ای درجهٔ k است)، به نحوی که هر دو چندجمله‌ای دلخواه از آن، نسبت به هم قابل جابه‌جایی باشند و $p_2=x^2-2$.

دوازدهمین المپیاد سراسری شوروی
سال ۱۹۷۸ (تاشکند)

کلاس	روز اول				روز دوم			
۸:	۲۵۲	۲۵۳	۲۵۴	۲۵۵ a·b	۲۶۰	۲۶۱	۲۶۲	۲۶۳
۹:	۲۵۲	۲۵۳	۲۵۶	۲۵۷	۲۶۰	۲۶۱	۲۶۴	۲۶۵
۱۰:	۲۵۸	۲۵۹	۲۵۵ c·d·e	۲۵۷	۲۶۰	۲۶۶	۲۶۷	۲۶۸

۲۵۲. نزدیك‌ترین عدد درست به $\sqrt{n}$ را a_n می‌نامیم. این مجموع را

پیدا کنید:

$$\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۲}+\cdots+\frac{۱}{a_{۱۹۸۰}}$$

۲۵۳. نقطهٔ M را در درون چهار ضلعی $ABCD$ طوری در نظر می‌گیریم که $ABMD$ متوازی‌الاضلاع شود. ثابت کنید، اگر $\widehat{CBM}=\widehat{CDM}$، آن‌وقت $\widehat{ACD}=\widehat{BCM}$.

۲۵۴. ثابت کنید، عدد $۱۹۷۸^m-۱$، به‌ازای هیچ عدد طبیعی m، برعدد $۱۰۰۰^m-۱$ بخش‌پذیر نیست.

۲۵۵. روی صفحه (یا در فضا)، مجموعهٔ متناهی $K_۰$ داده شده است. همهٔ نقطه‌هایی را که می‌توان از راه قرینهٔ یك نقطه نسبت به‌نقطهٔ دیگر این مجموعه به دست آورد، به $K_۰$ اضافه می‌کنیم و مجموعهٔ حاصل را $K_۱$ می‌نامیم. به همین ترتیب، از مجموعهٔ $K_۱$، مجموعهٔ $K_۲$؛ از مجموعهٔ $K_۲$، مجموعهٔ $K_۳$ و غیره را پیدا می‌کنیم.

a) فرض کنید $K_۰$ از دونقطهٔ A و B بەفاصلهٔ واحد تشکیل شده باشد. کمترین مقدار n را پیدا کنید که، به‌ازای آن، در مجموعهٔ K_n نقطه‌ای وجود داشته باشد که در فاصلهٔ ۱۰۰۰ از نقطه A باشد.

b) $K_۰$ را مجموعه‌ای از سه نقطه بگیرید که در راس‌های یك مثلث متساوی‌الاضلاع به‌مساحت واحد قرار دارند. مطلوب است مساحت کوچکترین چندضلعی محدبی که مجموعهٔ K_n را در بر گرفته باشد ($n=۱،۲،\ldots$).

در بخش‌های زیر، $K_۰$، عبارت است ازمجموعهٔ چهارراس یك چهاروجهی منتظم با حجم واحد.

c) کوچکترین چندوجهی محدبی را در نظر می‌گیریم که مجموعهٔ $K_۱$ را در بر گرفته باشد. تعداد و نوع وجه‌های این چندوجهی را پیدا کنید.

d) حجم این چندوجهی چقدر است؟

e*) حجم کوچکترین چندوجهی محدبی را پیدا کنید که مجموعهٔ K_n را در بر گرفته باشد ($n=۲،۳،\ldots$).

۲۵۶. دو تودهٔ چوب کبریت داریم. در ابتدا، در یك توده m چوب کبریت و در دیگری n چوب کبریت وجود دارد ($m>n$). دو نفر، به نوبت، چوب کبریت‌هایی از توده‌ها برمی‌دارند. در هر حرکت؛ می‌توان از یك توده، به‌تعداد مضربی‌از تعداد چوب‌کبریت‌های تودهٔ دیگر برداشت (که البته باید مخالف صفر باشد). کسی بازی را برده است که آخرین چوب کبریت را از یك توده بردارد.

a) ثابت کنید، اگر $m>2n$، آن وقت: کسی که بازی را آغاز می‌کند، می‌تواند برد خود را تأمین کند.

b) گزارهٔ زیر به‌ازای چه مقداری از α درست است: اگر $m>\alpha n$ باشد، آغازکنندهٔ بازی می‌تواند برد خود را تأمین کند؟

۲۵۷*. ثابت کنید، دنبالهٔ نامتناهی‌و کران‌دار x_n وجود دارد، به نحوی که برای هر دو عدد مختلف و دلخواه m و k داشته باشیم:

$$|x_m - x_k| \geqslant \frac{1}{|m-k|}$$

۲۵۸. $f(x)=x^2-x+1$ می گیریم. ثابت کنید، بـرای هر عدد طبیعی $m>1$، عددهای m، $f(m)$، $f(f(m))$، ...، دو به دو نسبت به هم اول‌اند.

۲۵۹. ثابت کنید، عدد A وجود دارد که، به ازای آن، می‌توان در نمودار تابع $y=A\sin x$، دست کم ۱۹۷۸ مربع دو بـه‌دو نابرابر محاط کرد. (مربعی‌را محاطی می گوییم، وقتی‌که هرچهار راس آن، روی نمودار تابع باشد.)

۲۶۰. سه کامپیوتر کوچك، زوج عددهای طبیعی را روی‌کارت‌ها چاپ می‌کنند. آن‌ها، طوری برنامه ریزی شده‌اند که بـه‌ترتیب زیر کار می‌کند: اولی باخواندن کارت (a, b)، کارت جدید $(a+1, b+1)$ را می‌دهد؛ دومی با خواندن‌کارت (a, b)، کارت $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ را می‌دهد (دومی تنها وقتی‌کار می‌کند که a، b عددهایی زوج باشند)؛ سومی بعد از خـواندن دو کارت

$(a، b)$ و $(b، c)$، کارت $(a، c)$ را می‌دهد. درضمن، کامپیوترها، کارت‌های خوانده شده را هم بر می‌گردانند. فرض کنید، در ابتدا، کارت $(۵، ۱۹)$ را دراختیارداشته باشیم. آیا می‌توان بااستفاده ازاین سه‌کامپیوتر (به هر ردیفی)، a) کارت $(۱، ۵۰)$، b) کارت $(۱، ۱۰۰)$ را به دست آورد؟

c) کارت اولیه را $(a، b)$ می‌گیریم $(a<b)$ و می‌خواهیم کارت $(۱، n)$ را به دست آوریم. به ازای چه مقداری از n، این‌کار ممکن است؟

۲۶۱. دردایرهٔ به شعاع R، nضلعی به مساحت S را محاط کرده‌ایم. روی هر ضلع n ضلعی، نقطه‌ای را علامت گذاشته‌ایم. ثابت کنید، مساحت n ضلعی که، راس‌های آن در نقطه‌های مشخص شده باشد، از $\frac{۲S}{R}$ کمتر نیست.

۲۶۲. مهره‌ای در گوشهٔ صفحهٔ شطرنجی $n \times n$ قرار دارد. هر یك از دو نفری که با هم بازی می‌کنند، به نوبت، مهره را به میدان مجاور (که با میدانی‌که مهره در آن بود است، یك ضلع مشترك دارد) می‌برد. باردوم، نمی‌توان مهره را به‌میدانی برد که قبلاً بوده است. کسی می‌بازد که امکان حرکت نداشته باشد.

a) ثابت‌کنید، اگر n عددی زوج باشد، کسی‌که بازی را آغازکرده است، می‌تواند ببرد و، اگر n فرد باشد، دومی امکان برد دارد.

b) اگر مهره، به جای گوشه،در میدان مجاورآن باشد، چه‌کسی امکان برد دارد؟

۲۶۳. روی صفحه، چند پاره‌خط راست غیرمتقاطع داده شده است، به‌نحوی که هیچ دوپاره‌خط راستی بر یك امتداد نیستند. می‌خواهیم چند پاره‌خط راست دیگر رسم کنیم که هرکدام از آن‌ها، از وصل نقطه‌های انتهایی پاره‌خط‌های راست قبلی به دست آمده باشند و، روی هم، همهٔ پاره‌خط‌های راست، یك خط شکسته تشکیل دهند که خودش را قطع نکند. آیا همیشه، این کار ممکن است؟

۲۶۴. عددهای x_1 ، x_2 ، ...، x_n به بازهٔ $[a, b]$ تعلق دارند که، در آن، $0 < a < b$. درستی این نابرابری را ثابت کنید:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \leqslant \frac{(a+b)^2}{4ab} n^2$$

۲۶۵*. عدد اول $p > 3$ مفروض است. مجموعهٔ M را روی صفحهٔ مختصاتی، شامل نقطه‌هایی با مختصات درست (x, y) ، طوری درنظر می‌گیریم که داشته باشیم:

$$0 \leqslant x < p \text{ و } 0 \leqslant y < p$$

ثابت کنید، می‌توان p نقطهٔ مختلف از مجموعهٔ M را، طوری جدا کرد که، هیچ چهار نقطه‌ای از آن، راس یك متوازی‌الاضلاع و، هیچ سه نقطه‌ای از آن، روی یك خط راست نباشند.

۲۶۶*. ثابت کنید، برای هر چهاروجهی، می‌توان دو صفحه طوری پیدا کرد که، نسبت مساحت‌های دو تصویر چهاروجهی بر آن‌ها، از $\sqrt{2}$ کمتر نباشد.

۲۶۷. n عدد a_1، a_2، ...، a_n را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

$$b_k = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}, \ (k = 1, 2, \ldots, n);$$

$$C = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2;$$

$$D = (a_1 - b_n)^2 + (a_2 - b_n)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2$$

ثابت کنید: $C \leqslant D \leqslant 2C$.

۲۶۸*. دنبالهٔ این عددها را در نظر می‌گیریم:

$$x_n = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^n$$

هرکدام از جمله‌های این دنباله، به‌این‌صورت درمی‌آیند:

$$x_n = q_n + r_n\sqrt{۲} + s_n\sqrt{۳} + t_n\sqrt{۶}$$

که در آن، q_n، r_n، s_n و t_n، عددهای درستی هستند. این‌حدها را پیدا کنید:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{q_n},\quad \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{q_n},\quad \lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{q_n}$$

سیزدهمین المپیاد سراسری شوروی
سال ۱۹۷۹ (تفلیس)

کلاس	روز اول			روز دوم			
۸:	۲۶۹	۲۷۰	۲۷۱	۲۷۴	۲۷۵	۲۷۶	۲۷۷
۹:	۲۶۹	۲۷۲	۲۷۱	۲۷۸	۲۷۹	۲۸۰	۲۸۱
۱۰:	۲۷۳	۲۷۲	۲۷۱	۲۷۶	۲۷۵	۲۸۲	۲۸۳

۲۶۹. سه راس یك مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین، روی سه‌ضلع مختلف مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین دیگری قرار دارند. حداقل نسبت مساحت‌های این دو مثلث، چقدر است؟

۲۷۰. کانگورو، روی ربع اول دستگاه مختصات Oxy به‌این ترتیب می‌جهد ($x \geqslant ۰$، $y \geqslant ۰$): او می‌تواند از نقطهٔ $(x، y)$، به‌نقطهٔ $(x - ۵، y + ۷)$ یا بـه نقطهٔ $(x + ۱، y - ۱۰)$ بجهد؛ در ضمن، پرش به‌نقطه‌هایی که، در آن‌ها، یکی از مختص‌ها منفی است، مجاز نیست. کانگورو، از کدام نقطه‌های $(x، y)$، نمی‌تواند خود را به نقطه‌ای برساند که در فاصلهٔ بیش از ۱۰۰۰ از مبداء مختصات باشد؟ مجموعهٔ همهٔ این نقطه‌های $(x، y)$ را رسم و مساحت آن را پیدا کنید.

۲۷۱. در یك مجلس، هـر یك از عضوها، حداکثر سه دشمن دارد. ثابت کنید، این مجلس را می‌توان به‌دو گـروه چنان تقسیم کرد که، هر عضو مجلس، در گروه خود، بیش از یك دشمن نداشته باشد. (فرض بر این است که، اگر B دشمن A باشد، A هم دشمن B است.)

۲۷۲. روی صفحهٔ کاغذ، چند عدد نوشته‌ایم. تصمیم می‌گیریم، به این عددها، عدد دلخواه دیگری اضافه‌کنیم، با این شرط که، عددتازه، برابر واسطهٔ حسابی دو یا چند عدد از عددهای موجود باشد و، در ضمن، با هیچ کدام از عددهای قبلی برابر نباشد. ثابت‌کنید، با آغاز از دو عدد ۰ و ۱، می‌توان با تکرار عمل فوق،

a) عدد $\frac{1}{5}$ را به دست آورد؛

b*) هرعدد گویای بین ۰ و ۱ را به دست آورد.

۲۷۳. دنبالهٔ نزولی x_n، از عددهای مثبت، طوری است‌که برای هر عدد طبیعی n، داریم:

$$x_1+\frac{x_4}{2}+\frac{x_9}{3}+\ldots+\frac{x_{n^2}}{n}\leqslant 1$$

ثابت‌کنید، برای هرعدد طبیعی n، خواهیم داشت:

$$x_1+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{3}+\ldots+\frac{x_n}{n}\leqslant 3$$

۲۷۴. چند نقطه روی صفحه داده شده است. برای دو نقطهٔ A و B، بردار $\overrightarrow{AB}$ را در نظر می‌گیریم؛ در ضمن، تعداد بردارهایی که از هر نقطه آغاز شده‌اند، برابر است با تعداد بردارهایی که به این نقطه ختم شده‌اند. ثابت کنید، مجموع همهٔ این بردارها، برابر بردار صفراست.

۲۷۵. حداقل چندمهره بایددرمیدان‌های‌صفحهٔ شطرنجی با اندازه‌های

a) 8×8 خانه‌ای؛

b) $n\times n$ خانه‌ای

قرار داد تا روی هر خط راستی از مرکز یك میدان می‌گذرد و موازی با یك ضلع یا یك قطر صفحهٔ شطرنجی است، دست کم یك مهره واقع باشد؟ (مهره‌ها، در مرکز میدان‌ها قرار دارند.)

۲۷۶. x و y را، در این دستگاه پیدا کنید:

$$\frac{x-y\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=a,\ \frac{y-x\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=b$$

که در آن، a و b، عددهایی مفروض‌اند.

۲۷۷. چند مربع داریم که، مجموع مساحت‌های آن‌ها، برابر است با ۴. ثابت کنید، با این مربع‌ها، همیشه می‌توان مربع به‌مساحت واحد را پوشاند.

۲۷۸. ثابت کنید، برای عددهای دلخواه x_1، x_2، ...، x_n از بازهٔ $[0, 1]$، نابرابری زیر برقرار است:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n+1)^2\geqslant 4(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)$$

۲۷۹. عددهای طبیعی p و q نسبت به هم اول‌اند. بازهٔ $[0, 1]$ را، به $p+q$ بازهٔ یکسان تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید، در هریك از این بازه‌ها، به‌جز دو بازهٔ اول و آخر، درست یکی از $p+q-2$ عدد زیر قرار دارد:

$$\frac{1}{p},\frac{2}{p},\ldots,\frac{p-1}{p},\frac{1}{q},\frac{2}{q},\ldots,\frac{q-1}{q}$$

۲۸۰. از نقطهٔ O واقع در فضا، ۱۹۷۹ خط راست l_1، l_2، ...، l_{1979} رسم کرده‌ایم، به نحوی که هیچ دو خط راستی برهم عمود نباشند. روی خط راست l_1، نقطهٔ A_1 را، غیر از نقطهٔ O انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید، می‌توان نقطه‌های A_i را روی خط‌های راست l_i $(i=2, 3, \ldots, 1979)$ طوری انتخاب کرد که، ۱۹۷۹ زوج خط‌های راست زیر بر هم عمود باشند:

$$A_1A_3\perp l_2,\ A_2A_4\perp l_3,\ \ldots,\ A_{i-1}A_{i+1}\perp l_i,\ \ldots$$

$$\ldots,\ A_{1977}A_{1979}\perp l_{1978},\ A_{1978}A_1\perp l_{1979},\ A_{1979}A_2\perp l_1$$

۲۸۱*. دنبالهٔ متناهی a_1، a_2، ...، a_n از عددهای ۰ و ۱، باید باشرط

زیر سازگار باشد: برای هر عدد درست k از ۰ تا $n-1$. مجموع

$$a_1 a_{k+1}+a_2 a_{k+2}+\cdots+a_{n-k} a_n$$

عددی فرد باشد.

a) دربارهٔ چنین دنباله‌ای، برای $n=25$، بیندیشید.

b) ثابت کنید، چنین دنباله‌ای، برای مقداری از $n>1000$، وجود دارد.

۲۸۲. چهارضلعی محدب $ABCD$ را، به وسیلهٔ قطرهای آن، به چهار مثلث تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید، اگر شعاع‌های چهار دایرهٔ محاطی این مثلث‌ها، باهم برابر باشند، چهارضلعی $ABCD$ یک لوزی است.

۲۸۳*. روی خط راستی، نقطه‌های A_1، A_2، ...، A_n را، به همین ردیف، طوری قرار داده‌ایم که، طول هر یک از پاره‌خط‌های راست A_1A_2، A_2A_3، ...، $A_{n-1}A_n$ از واحد تجاوز نکنند. می‌خواهیم $k-1$ نقطه از نقطه‌های A_2، ...، A_{n-1} را طوری به‌رنگ قرمز در آوریم که، طول هر دو بخش دلخواه از k بخشی که به وسیلهٔ نقطه‌های قرمز روی پاره‌خط راست A_1A_n پدید آمده‌اند، اختلافی بیش از واحد نداشته باشند. ثابت کنید، این عمل را همیشه می‌توان انجام داد:

a) برای $k=3$؛

b) برای هرعدد طبیعی $k<n-1$.

چهاردهمین المپیاد سراسری اتحاد شوروی
سال ۱۹۸۰ (ساراتوف)

کلاس	روز اول				روز دوم			
:۸	۲۸۴	۲۸۵	۲۸۶	۲۸۷	۲۹۳	۲۹۴	۲۹۵	۲۹۶
:۹	۲۸۸	۲۸۹	۲۸۶	۲۹۰	۲۹۵	۲۹۷	۲۹۸	۲۹۹
:۱۰	۲۹۱	۲۸۹	۲۹۲	۲۹۰	۳۰۰	۳۰۱	۳۰۲	۳۰۳

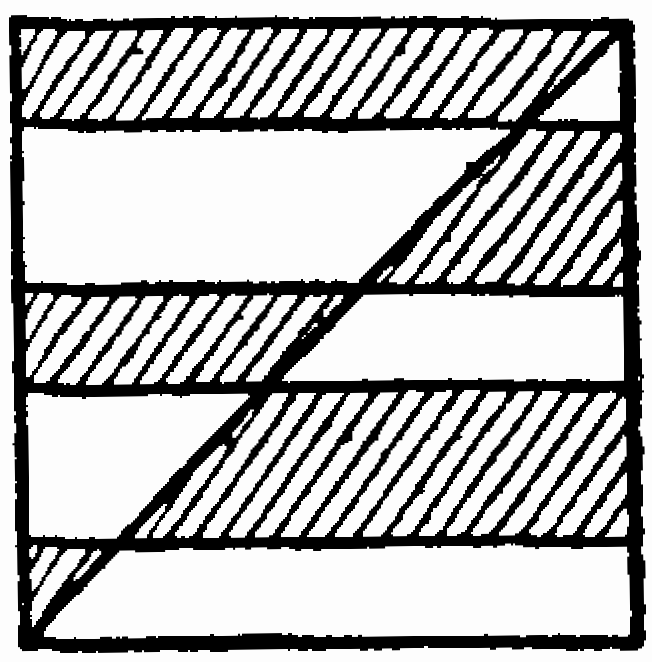
۲۸۴. عددهای دورقمی از ۱۹ تا ۸۰ را از چپ به راست کنار هم

نوشته‌ایم:

$$۱۹۲۰۲۱ \ldots ۷۸۷۹۸۰$$

آیا این عدد، بر ۱۹۸۰ بخش‌پذیر است؟

۲۸۵. ضلع قائم AB از مربع $ABCD$ را، بـه n پاره‌خط راست طوری تقسیم کرده‌ایم که، مجموع طول‌های پاره‌خط‌های راست ردیف زوج با مجموع طول‌های پاره‌خط‌های راست ردیف فرد، برابر شود. از نقطه‌های



شکل ۱۳

تقسیم، پاره‌خط‌های راستی موازی با ضلع AD رسم و، سپس، هریك از n نوار حاصل را، به وسیلهٔ قطر BD، به دو بخش چپ و راست تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید، مجموع مساحت‌های بخش‌های چپ در ردیف‌های فرد، برابر است با مجموع مساحت‌های بخش‌های راست در ردیف‌های زوج (در شکل ۱۳، این بخش‌ها را، هاشور زده‌ایم).

۲۸۶. محموله‌ای را که در صندوق‌هایی بسته‌بندی شده است، باید به ایستگاه فضایی «سالیوت» رسانید. تعداد صندوق‌ها از ۳۵ کمتر نیست و وزن کل محموله، برابر ۱۸ تـن است. هفت سفینهٔ فضایی «پروگرس» در اختیار داریم که، هرکدام از آن‌ها، می‌تواند ۳ تن بار را درمدار قرار دهد. می‌دانیم، این سفینه‌ها می‌توانند باهم، هر ۳۵ صندوق از صندوق‌های موجود را با خود حمل کنند. ثابت کنید، با این سفینه‌ها، می‌توان تمامی باررا در مدار قرار داد.

۲۸۷. نقطه‌های M و P، به ترتیب، وسط ضلع‌های BC و CD از چهارضلعی $ABCD$ هستند. می‌دانیم:

$$MP+AP=a$$

ثابت کنید، مساحت چهارضلعی $ABCD$، از $\frac{1}{2}a^2$ کمتر است.

۲۸۸. آیا معادلهٔ $z^4=x^2+y^3$، برای عددهای اول x، y و z، جواب دارد؟

۲۸۹. روی قطر AC از دایره‌ای، نقطهٔ E داده شده است. از نقطهٔ E، وتر BD را طوری رسم کنید که مساحت چهارضلعی $ABCD$، حداکثر مقدار ممکن باشد.

۲۹۰. در ساحل یك دریاچهٔ گرد بزرگ، چند نقطهٔ مسکونی وجود دارد. بین برخی از این نقطه‌های مسکونی، می‌توان با کشتی رفت و آمد کرد. می‌دانیم، تنها وقتی بین دو نقطه، رفت و آمد با کشتی ممکن است که، بین دو نقطهٔ مسکونی بعد از آن‌ها (درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)، این وسیلهٔ ارتباطی وجود نداشته باشد. ثابت کنید، ازهر نقطه به هر نقطهٔ دیگر، می‌توان با کشتی مسافرت کرد، به نحوی که حداکثر به دو بار جا به‌جایی نیاز باشد.

۲۹۱. عددی شش رقمی که ازشش رقم مختلف ومخالف صفر درست شده است، بر ۳۷ بخش پذیر است. ثابت کنید، با جابه‌جایی رقم‌های این عدد، می‌توان دست کم ۲۳ عدد مختلف شش رقمی دیگر به دست آورد که، باز هم، بر ۳۷ بخش‌پذیر باشند.

۲۹۲. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} \sin x+2\sin(x+y+z)=0 \\ \sin y+3\sin(x+y+z)=0 \\ \sin z+4\sin(x+y+z)=0 \end{cases}$$

۲۹۳. روی صفحه، ۱۹۸۰ بردار داده شده است؛ در ضمن، در بین آن‌ها، بردارهای ناهم‌راستا وجود دارد. می‌دانیم، مجموع هر ۱۹۷۹ بردار، با برداری که در این مجموع نیامده، هم راستا است. ثابت کنید، مجموع

این ۱۹۸۰ بردار، برابر با بردار صفر است.

۲۹۴. مجموع همهٔ رقم‌های عدد طبیعی n را، با $S(n)$ نشان می‌دهیم.

a) آیا عدد طبیعی n وجود دارد که، برای آن، داشته باشیم:

$$n+S(n)=۱۹۸۰$$

b) ثابت کنید، از هر دو عدد طبیعی متوالی، دست‌کم یکی را می‌توان به صورت $n+S(n)$، برای یك عدد طبیعی سوم n، نوشت.

۲۹۵. بعضی از خانه‌های یك صفحهٔ شطرنجی نامتناهی را به‌رنگ قرمز و بقیه را به‌رنگ آبی درآورده‌ایم؛ درضمن، این رنگ‌آمیزی به‌نحوی است که در هر مستطیل ۶ خانه‌ای با اندازه‌های ۳ × ۲، درست دو خانهٔ قرمز وجود دارد. دریك مستطیل ۹۹ خانه‌ای، با اندازه‌های ۱۱ × ۹، چند خانهٔ قرمز می‌تواند وجود داشته باشد؟

۲۹۶. مردمی که در باغ گل زندگی می‌کردند، ناگهان دچار بیماری سرماخوردگی شدند. در یك روز، چند نفر از آن‌ها سرما خوردند و بیمار شدند و، اگر چه پس از آن، کسی به خودی خود دچار سرماخوردگی نشد، کسانی که از دوستان بیمار خود عیادت می‌کردند، مریض می‌شدند. می‌دانیم، هر کسی درست یك روز دچار سرما خوردگی می‌شود؛ در ضمن، چنین فردی، دست کم یك روز مصونیت پیدا می‌کند، یعنی، در ایـن روز، سالم است و دوباره به بیماری سرما خوردگی دچار نمی‌شود. با وجود سرایت بیماری، هر کسی که سالم است، روزانه، از دوستان بیمار خود عیادت می‌کند. وقتی اپیدمی آغاز شد، مردم تلقیح را فراموش کردند و کسی واکسن ضد سرما-خوردگی نزد.

ثابت کنید:

a) اگـر، قبل از اپیدمی، بعضی از افـراد واکسن زده باشند و در نخستین روز، مصونیت داشته باشند، آن وقت اپیدمی می‌تواند برای همیشه ادامه پیدا کند؛

b) ولی اگر در روز اول، کسی مصونیت نداشته باشد، اپیدمی دیر

یا زود به‌پایان می‌رسد.

۲۹۷. حاصل ضرب همهٔ رقم‌های عـدد طبیعی n را، با $P(n)$ نشان می‌دهیم. آیا ممکن است دنبالهٔ (n_k) که با دستور برگشتی

$$n_{k+1}=n_k+P(n_k)$$

و جملهٔ اول $n_1\in\mathbf{N}$ داده شده است، کران‌دار نباشد؟

۲۹۸. مثلث ABC، با ضلع‌های بـرابر، مفروض است. خط راستی موازی با ضلع AC، خط‌های راست AB و BC را، به ترتیب، درنقطه‌های M و P قطع کرده است. نقطهٔ D را مرکز مثلث PMB ونقطهٔ E را وسط پاره خط AP می‌گیریم. زاویه‌های مثلث DEC را پیدا کنید.

۲۹۹. مکعب مستطیلی با یال‌های به طول x، y و z سانتی‌متر مفروض است؛ در ضمن

$$p=4(x+y+z),\ s=2(xy+yz+xz),\ d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

را، به ترتیب، محیط، مساحت سطح و قطر مکعب مستطیل می‌گیریم. ثابت کنید، به شرط $x<y<z$ داریم:

$$x<\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p-\sqrt{d^2-\frac{1}{2}s}\right),$$

$$z>\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p+\sqrt{d^2-\frac{1}{2}s}\right)$$

۳۰۰. مجموعهٔ A از عددهای درست تشکیل شده است؛ کـوچکترین عضو آن واحد، و بزرگترین عضو آن ۱۰۰ است. هرعضو A، به جز واحد، برابر است با مجموع دوعدد (که ممکن است برابر هم باشند) متعلق به این مجموعه. در بین همهٔ مجموعه‌های A، که با این شرط سازگار باشند، مجموعهٔ با حداقل تعداد جمله‌ها را پیدا کنید.

۳۰۱. ثابت کنید، بی‌نهایت عدد B وجود دارد که، به‌ازای آن، معادلهٔ

$$\left[\sqrt{x^{3}}\right]+\left[\sqrt{y^{3}}\right]=B$$

دست‌کم ۱۹۸۰ جواب، در مجموعهٔ عددهای طبیعی x و y داشته باشد ($[z]$ به معنای بزرگترین عدد درستی است که از z تجاوز نکند).

۳۰۲. درچهاروجهی $ABCD$، یال AC بر BC و یال AD بر BD عمود است. ثابت کنید، کسینوس زاویهٔ بین خط‌های راست AC و BD، از $\frac{CD}{AB}$ کمتر است.

۳۰۳. عدد $x \in [0, 1]$، به صورت کسر دهدهی نامتناهی نوشته شده است. با جابه‌جا کردن ۵ رقم اول بعد از ممیز در آن، به ترتیبی دلخواه، دوباره به‌کسر دهدهی نامتناهی می‌رسیم که، متناظر با عددی مثل x_1 است. اگر درنمایش دهدهی x_1، رقم‌های از دوم تا ششم بعد ازممیز را جابه‌جا کنیم، نمایش دهدهی عدد x_2 به دست می‌آید. به‌طورکلی، نمایش دهدهی x_{k+1} باجابه‌جاکردن رقم‌های‌عدد x_k، ازرقم $(k+1)$ام تارقم $(k+5)$ام بعد از ممیز به دست می‌آید.

a) ثابت کنید، صرف‌نظر از نوع جابه‌جایی رقم‌ها در هر گام، دنبالهٔ عددهای حاصل x_k، همیشه دارای حد است. این حد را y می‌نامیم.

b) آیا می‌توان، با این‌روند، از عددگویای x، به‌عددگنگ y رسید؟

c) کسر x را طوری پیدا کنید که، برای آن، روند فوق، همیشه منجر به‌عدد گنگ y شود، بدون توجه به‌این‌که، در هرگام، چه تبدیلی از ۵ رقم را جانشین کنیم.

پانزدهمین المپیاد سراسری اتحاد شوروی
سال ۱۹۸۱ (آلماآتا)

کلاس	روز اول				روز دوم			
:۸	۳۰۴	۳۰۵	۳۰۶	۳۰۷	۳۱۵	۳۱۶	۳۱۷	۳۱۸
:۹	۳۰۸	۳۰۷	۳۰۹	۳۱۰	۳۱۹	۳۲۰	۳۲۱	۳۲۲
:۱۰	۳۱۱	۳۱۲	۳۱۳	۳۱۴	۳۲۳	۳۲۴	۳۲۵	۳۲۶

۳۰۴. دوصفحهٔ شطرنج‌مساوی ۸×۸خانه‌ای، دارای مرکزمشترك‌اند؛ در ضمن، یکی از آن‌ها، نسبت به دیگری، به اندازهٔ ۴۵ درجه دور مرکز چرخیده‌است. مجموع مساحت‌های همهٔ بخش‌های متقاطع‌سیاه این‌دوصفحهٔ شطرنج را پیداکنید، به شرطی‌که مساحت هرخانه،برابر واحد باشد.

۳۰۵. نقطه‌های A، B، M و N روی محیط یك دایره‌اند. ازنقطهٔ M، وترهای $MA_۱$ و $MB_۱$ را، بـه ترتیب، عمود بر خط‌های راست NB و NA رسم کرده‌ایم. ثابت‌کنید، خط‌های راست $AA_۱$ و $BB_۱$ موازی‌اند.

۳۰۶. گوییم عددی دارای ویژگی $P(k)$ است وقتی‌که بتوان آن را به‌حاصل‌ضرب k عدد طبیعی متوالی بزرگتر از واحد تجزیه‌کرد.

a) k را طوری پیدا کنید که، به ازای آن، عددی مثل N، درعین‌حال، دارای ویژگی‌های $P(k)$ و $P(k+۲)$ باشد.

b) ثابت‌کنید، عددی وجود ندارد که، درعین‌حال، دارای دو ویژگی $P(۲)$ و $P(۴)$ باشد.

۳۰۷. جدولی ۴ سطر دارد. در سطر اول، عددهای طبیعی دلخواهی نوشته شده است،که در بین آن‌ها، عددهای برابر هم می‌توانند باشد. سطر دوم، به این ترتیب پرشده است: از چپ بـه راست به عددهای سطر اول نگاه می‌کنیم و، زیر عدد a، عدد k را می‌نویسیم، به شرطی که عدد a در سطر اول (و در سمت راست آن) k بار آمـده باشد. باهمین روش، سطر سوم را زیـر سطر دوم، و سطر چهارم را زیر سطر سوم می‌نـویسیم. ثابت کنید، سطر دوم و سطرچهارم، همیشه یکسان درمی‌آیند.

۳۰۸. عدد a داده شده است. مطلوب است، کمترین مقـدار مساحت مستطیلی‌که ضلع‌هایی موازی محورهای مختصات Ox و Oy داشته باشد و، در ضمن، شکلی را که از دستگاه نامعادله‌های زیـر به دست می‌آیـد، در بر بگیرد:

$$\begin{cases} y\leqslant -x^{۲} \\ y\geqslant x^{۲}-۲x+a \end{cases}$$

۳۰۹. مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ABC، CDE و EHK مفروض‌اند (راس‌ها را در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت در نظر بگیرید) و طوری روی صفحه قرار گرفته‌اند که داریم: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DK}$. ثابت کنید، مثلث BHD هم، متساوی‌الاضلاع است.

۳۱۰. در محله‌ای ۱۰۰۰ نفر زندگی می‌کنند. هرروزهریك از آن‌ها، خبرهای تازه‌ای را که دیروز شنیده است، با همهٔ آشناهای خود در میان می‌گذارد. می‌دانیم که، هر خبر تازه‌ای، سرانجام به‌گوش همهٔ ساکنان محله می‌رسد.

ثابت کنید، می‌توان از بین افراد محله، ۹۰ نفر طوری انتخاب کرد که، اگر همهٔ آن‌ها را ازخبر تازه‌ای آگاه کنیم، بعد از ۱۰ روز، همهٔ ساکنان محله آن را شنیده باشند.

۳۱۱. دربارهٔ عددهای a و b می‌دانیم که نامعادلهٔ

$$a\cos x+b\cos ۳x>۱$$

جواب ندارد. ثابت کنید $|b|\leqslant ۱$.

۳۱۲. نقطه‌های K و M، وسط ضلع‌های AB و CD از چهارضلعی محدب $ABCD$ هستند؛ نقطه‌های L و N روی دو ضلع دیگر چهارضلعی طوری قرار گرفته‌اند که، چهارضلعی $KLMN$، یك مستطیل شده است. ثابت کنید، مساحت چهارضلعی $ABCD$، دو برابر مساحت مستطیل $KLMN$ است.

۳۱۳*. همهٔ دنباله‌های (a_n) از عددهای طبیعی را طوری پیدا کنید که دو شرط زیر برقرار باشند:

الف) بـه‌ازای هر n داشته باشیم: $a_n\leqslant n\sqrt{n}$؛

ب) به‌ازای هـر دو عدد مختلف m و n، تفاضل a_m-a_n بر $m-n$ بخش‌پذیر باشد.

۳۱۴*. آیا می‌تـوان همهٔ خانه‌های یك جدول مستطیلی را، طوری به رنگ‌های سیاه و سفید درآورد که، تعداد خانه‌های سیاه با تعداد خانه‌های

سفید برابر باشد، ولی در هر سطر و هر ستون، بیش از $\frac{۳}{۴}$ خانـه‌ها از یك رنگ باشند؟

۳۱۵. ثابت کنید، اگر چهارضلعی‌های $ACPH$، $AMBE$، $AHBT$، $BKXM$، $CKXP$ متوازی‌الاضلاع باشند، آن وقت چهارضلعی $ABTE$ هـم یك متوازی‌الاضلاع است (رأس‌های همهٔ چهارضلعی‌ها را، در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت به حساب آورید).

۳۱۶. این معادله را، در مجموعهٔ عددهای طبیعی x و y حل کنید:

$$x^{۳}-y^{۳}=xy+۶۱$$

۳۱۷. در یك مسابقهٔ فوتبال، ۱۸ تیم، در ۸ مرحله با هم بازی کرده‌اند: هر تیم با هشت تیم مختلف بازی کرده است. ثابت کنید، سه تیم پیدا می‌شود که هنوز با هم حتی یك مسابقه هم نداده‌اند.

۳۱۸. نقطه‌های $C_۱$، $A_۱$ و $B_۱$ را، بـه ترتیب، روی ضلع‌های AB، BC و CA از مثلث ABC طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم:

$$AC_۱:C_۱B=BA_۱:A_۱C=CB_۱:B_۱A=\frac{۱}{۳}$$

اگر P را محیط مثلث ABC و p را محیط مثلث $A_۱B_۱C_۱$ بگیریم، ثابت کنید:

$$\frac{۱}{۲}P<p<\frac{۳}{۴}P$$

۳۱۹. ثابت کنید، اگر عددهای مثبت x و y در معادلهٔ

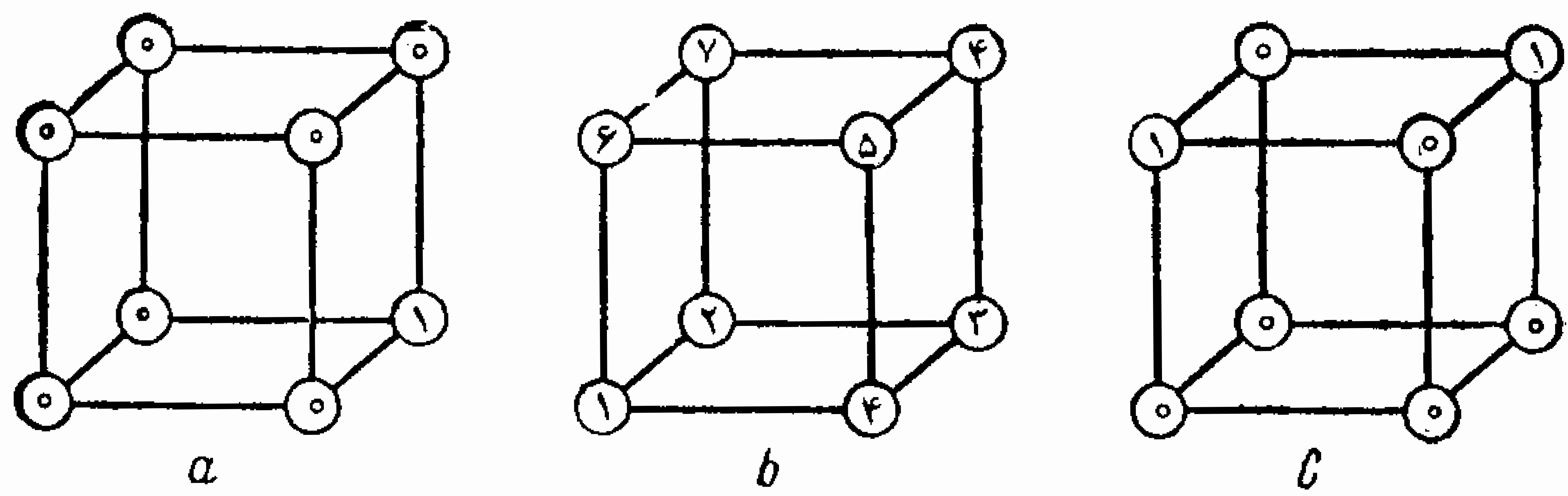
$$x^{۳}+y^{۳}=x-y$$

صدق کنند، آن وقت $x^{۲}+y^{۲}<۱$.

۳۲۰. دانش‌آموزی می‌خواهد یك چندضلعی محدب را، که‌در دایره‌ای به شعاع واحد قرار دارد، رسم کند. ابتدا، یکی از ضلع‌ها را رسم می‌کند،

از انتهای آن ضلع دوم، سپس، از انتهای ضلع دوم، ضلع سوم و غیره را رسم می‌کند. درپایان کارمتوجه می‌شودکه چندضلعی او بسته نیست و آخرین خط راستی که به دست آورده است، به فاصلهٔ d از رأس اول قرار دارد. می‌دانیم، دانش آمـوز زاویه‌ها را با دقت رسم کـرده و خطای نسبی او، در رسم هر ضلع، از عدد p تجاوز نمی‌کند. ثابت کنید: $d \leqslant ۴p$.

۳۲۱. در هر رأس مکعب، عددی نوشته‌ایم. در یك گام، به دو عددی که روی یك یال دلخواه قراردارند، یك واحد اضافه‌کرده‌ایم. آیا می‌توان،



شکل ۱۴

بعد از چند گام، هر هشت عدد را مساوی کرد، به شرطی که عددهای اولیه مطابق شکل ۱۴ — a باشند؟ دربارهٔ عددهای شکل ۱۴ — b چطور؟ و دربارهٔ عددهای شکل ۱۴ — c؟

۳۲۲. دست کم یك عدد طبیعی n را پیداکنید، به‌نحوی که، هریك از عددهای

$$n،\ n+۱،\ n+۲،\ \dots،\ n+۲۰$$

با عـدد $۳۰۰۳۰ = ۲ \times ۳ \times ۵ \times ۷ \times ۱۱ \times ۱۳$، مقسوم‌علیه مشترکـی بزرگتر از واحد داشته باشد.

۳۲۳. هر یك از عددهای طبیعی از ۱۰۰ تا ۹۹۹ را روی یك کارت نوشته‌ایم. کارت‌ها را روی میز طوری می‌گذاریم که عددها دیده نشوند (به طرف پایین باشند)؛ سپس، آن‌ها را مخلوط می‌کنیم و در یك ستون قـرار می‌دهیم. کارت‌های ستون را، یکی بعد از دیگری، برمی‌گردانیم، آن‌ها را طبقه‌بندی می‌کنیم و، روی هم، درستون‌هایی، به ترتیب، ازعددهای کوچکتر

قرار می‌دهیم، به نحوی که عددها دیده شوند (رو به بالا باشند). در ستون اول، همهٔ عددهایی که به ۰ ختم شده‌اند؛ در ستون دوم، همهٔ عددهایی که به ۱ ختم شده‌اند وغیره. همهٔ این‌ستون‌ها را در یك‌ستون جمع‌می‌کنیم: ستون‌دوم را روی ستون اول، سپس‌روی آن ستون سوم را، و سرآخرستون دهم را. ستونی را که به دست می‌آید، برمی‌گردانیم و دوباره طبقه‌بندی می‌کنیم، منتهی این‌بار، بعد از برگرداندن هرکارت و خواندن عدد روی آن، آن‌ها را برحسب رقم دوم خود، در ستون‌های جداگانه قرار می‌دهیم. مثل حالت قبل، این ستون‌ها را جمع می‌کنیم (به ترتیب صعودی، نسبت به رقم دوم). برای بارآخر، آن‌هارا، نسبت به‌رقم سمت چپ، طبقه‌بندی و، سپس، دریك ستون جمع می‌کنیم. بعد از طبقه‌بندی آخر، عددهای روی کارت‌ها، به چه ردیفی قرار گرفته‌اند؟

۳۲۴. درمستطیلی باضلع‌های برابر ۳ سانتی‌متر و ۴ سانتی‌متر، ۶ نقطه قرار گرفته‌اند. ثابت‌کنید، دو نقطه پیدا می‌شود که، فاصلهٔ بین آن‌ها، از $\sqrt{۵}$ سانتی‌متر تجاوز نمی‌کند.

۳۲۵. a) حداقل مقدار این چندجمله‌ای را پیدا کنید:

$$P(x, y) = ۴ + x^۲y^۴ + x^۴y^۲ - ۳x^۲y^۲$$

b*) ثابت کنید، ایـن چندجمله‌ای را نمی‌توان بـه صورت مجموع مجذورهای چندجمله‌ای‌هایی از دو متغیر x و y نوشت.

۳۲۶. پاره‌خط‌های راست AD، BE و CF یال‌های جانبی موازی، از یك منشور مثلث‌القاعده را تشکیل می‌دهند. روی قاعدهٔ ABC این منشور همهٔ نقطه‌هایی را پیداکنیدکه، از خط‌های راست AE، BF و CD به یك فاصله باشند.

شانزدهمین المپیاد سراسری اتحاد شوروی
سال ۱۹۸۲ (اودسا)

کلاس	روز اول				روز دوم			
:۸	۳۲۷	۳۲۸	۳۲۹a	۳۳۰	۳۳۷	۳۳۸	۳۳۹	۳۴۰
:۹	۳۳۱	۳۳۲	۳۳۳	۳۳۴	۳۴۱	۳۴۲	۳۴۳	۳۴۴
:۱۰	۳۳۵	۳۳۲	۳۲۹b	۳۳۶	۳۴۵	۳۴۶	۳۴۷	۳۴۸

۳۲۷. روی محیط دایرهٔ به مرکز O_1 و شعاع r_1، نقطه‌های M و K را انتخاب کرده‌ایم. در زاویهٔ مرکزی، MO_1K، دایره‌ای به مرکز O_2 و شعاع r_2 محاط شده است. مساحت چهارضلعی MO_1KO_2 را پیدا کنید.

۳۲۸. در دنباله‌های عددی (a_n) و (b_n)، با آغاز از جملهٔ سوم، هرجمله برابر است با مجموع دو جملهٔ قبل از آن. در ضمن

$$a_1 = ۱ ، a_2 = ۲ ; b_1 = ۲ ، b_2 = ۱$$

چند عدد وجود دارد که در هردودنباله، با آن‌ها برخورد می‌کنیم؟

۳۲۹. a) m و n، عددهایی طبیعی‌اند. ثابت کنید، اگر برای عددهای غیرمنفی k_1، k_2، ...، k_n، عدد $۲^{k_1}+۲^{k_2}+\ldots+۲^{k_n}$ بر عدد $۲^m-۱$ بخش‌پذیر باشد، آن وقت $n \geqslant m$.

b) آیا عددی طبیعی وجود دارد که بر $\underbrace{۱۱۱ \ldots ۱}_{m}$ بخش‌پذیر و مجموع رقم‌های آن، کوچکتر از m باشد؟

۳۳۰. هر رأس مکعب را متناظر با عددی حقیقی و غیر منفی قرار داده‌ایم؛ در ضمن، مجموع همهٔ این عددها، برابر است با واحد. دو نفر، به این ترتیب، با هم بازی می‌کنند. اولی، یکی از وجه‌ها را انتخاب می‌کند، دومی وجه دیگر را درنظر می‌گیرد و، سرانجام، اولی وجه سوم را انتخاب می‌کند. در ضمن، نمی‌توان وجهی را انتخاب کرد که، وجه موازی با آن، قبلاً انتخاب شده است. ثابت کنید، اولی می‌تواند طوری بازی کند که، عدد واقع بر رأس مشترک سه‌وجه انتخاب شده، از $\frac{۱}{۶}$ تجاوز نکند.

۳۳۱. یك روز، سه جوان در کتاب‌خانهٔ عمومی به هم رسیدند. یکی از آن‌ها گفت: «من یك روز در میان به‌کتاب‌خانه می‌آیم.» دومی اطلاع داد که، او دو روز درمیان به‌کتاب خانه مراجعه می‌کند. معلوم شد که سومی هم، سه روز در میان به‌کتاب‌خانه سرمی‌زند. کتاب‌دار که گفت‌وگوی آن‌ها را می‌شنید، یادآوری کرد که چهارشنبه‌ها، کتاب خانه تعطیل است. جوانان توضیح دادند که، اگر روز مراجعهٔ آن‌ها، با روز تعطیل کتاب‌خانه برخورد

کنند، روز بعد بــه کتاب‌خــانه می‌روند و دیدارهای بعدی خود را، از آن روز به حساب می‌آورند. این جوانان، یك روز دوشنبه، دوباره یکدیگر را در کتاب‌خانه ملاقات کردند. گفت‌وگوی بالا، درچه روزی از هفته، بین جوانان انجام گرفته است؟

۳۳۲. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، که لوزی نیست، نسبت طول‌های دوقطر داده شده است: $AC:BD=k$. نیم خط راست AM را قرینهٔ نیم‌خط AD نسبت به‌خط راست AC، نیم‌خط راست BM را قرینهٔ نیم خط BC نسبت به خط راست BD و نقطهٔ M را، محل برخــورد نیم‌خط‌های راست AM و BM می‌گیریم. مطلوب است محاسبهٔ نسبت $AM:BM$.

۳۳۳. $3k$ نقطه، روی محیط دایره‌ای قرار داده‌ایم، از $3k$ کمانی که به‌دست می‌آید، k کمان به طول ۱، k کمان به طول ۲ و k کمان باقی‌مانده به‌طول ۳ هستند. ثابت کنید، بین این نقطه‌ها، دونقطه وجود دارد که در دو انتهای یك قطرند.

۳۳۴. نقطهٔ M را، دردرون چهاروجهی درنظر گرفته‌ایم. ثابت کنید، دست کم یکی‌از یال‌های چهاروجهی، از نقطهٔ M، به زاویه‌ای دیده‌می‌شود که، کسینوس آن، از $-\frac{1}{3}$ تجاوز نمی‌کند.

۳۳۵. عددهای a، b و c دربازهٔ $(0, \frac{\pi}{2})$ قرار دارند و می‌دانیم:

$$\cos a = a,\ \sin\cos b = b,\ \cos\sin c = c$$

این عددها را، به ردیف صعودی بنویسید.

۳۳۶. خط شکستهٔ بستهٔ M، دارای تعداد فردی رأس است: A_1، A_2، ...، A_{2n+1}. $S(M)$ راخط شکستهٔ بستهٔ تازه‌ای می‌گیریم که رأس‌های‌متوالی آن، B_1، B_2، ...، B_{2n+1}، دروسط ضلع‌های خط شکستهٔ M قرار دارند: B_1 وسط پاره خــط راست A_1A_2، B_2 وســط A_3A_4، ...، B_{n+1} وســط $A_{2n+1}A_1$، B_{n+2} وسط A_2A_3، ...، B_{2n+1} وسط $A_{2n}A_{2n+1}$. ثابت کنید، در دنبالهٔ خط‌های شکستهٔ

$$M_1=S(M),\ M_2=S(M_1),\ \ldots,\ M_k=S(M_{k-1})$$

خط شکستهٔ بسته‌ای وجود داردکه با خط شکستهٔ M متجانس است.

۳۳۷. عددهای طبیعی از ۱ تا ۱۹۸۲ را، یکی پس از دیگـری، به ردیفی دلخواه نوشته‌ایم. کامپیوتر، دو به دوی عددهای مجاوررا، ازچپ به راست، مورد بررسی قرار می‌دهد (اولی و دومی، دومی و سومی و غیره) و هر جا عدد بزرگتر در سمت چپ عـددکوچکتر قرار داشته باشد، جای آن‌ها را با هم عـوض می‌کند. سپس دوباره، از راست به چپ، دوبه‌دوی عددهای مجاور را بررسی می‌کند و، طبق همان قانـون، در صورت لزوم، جای عددها را با هم‌عوض می‌کند. بعد ازپایان این برنامه، معلوم شد،عددی که در جای صدم قرار داد، در هر دوبار، بدون تغییر جا باقی مانده است. این عدد را پیداکنید.

۳۳۸. رودخانه‌ای در منطقهٔ نزدیك به مصب خـود، چند جزیره پدید آورده است که مجموع محیط‌های همهٔ آن‌ها برابر ۸ متر است. می‌خواهیم از نقطه‌ای واقع در یك طرف رود، با قایـق به طرف دیگر آن برویم. در فاصلهٔ بین این نقطه وکنارهٔ دیگر رود، جزیره‌ها قرار گرفته‌اند. ثابت کنید، ازاین نقطه به‌نقطه‌ای درکنارهٔ دیگر،کمتر از ۳ متر راه با قایق وجود دارد. دوکنارهٔ رود با هم موازی و عرض رودخانه برابر یك متر است.

۳۳۹. نمودار تابـع $y=x^2$ را روی صفحهٔ مختصاتی Oxy رسم کـرده‌ایم. سپس، محورهای مختصات را پاك کـرده و تنها سهمی را باقی گذاشته‌ایم. به‌کمك پرگار وخط‌کش، چگونه می‌توان محورها وواحد طول را باز سازی کرد؟

۳۴۰. خانه‌های یك‌جدول‌مربعی $n\times n$ را، باعددهای درست پر کرده‌ایم. در ضمن، در هر دو خانه‌ای‌که یك ضلع مشترك دارند، عددهایی گذاشته‌ایم که اختلاف آن‌ها، از واحد تجاوز نمی‌کند. ثابت‌کنید، در جدول، دست‌کم به‌یك عدد برخورد می‌کنیم که

a) لااقل $\left[\frac{n}{2}\right]$ مرتبه تکرارشده است (منظور از $[a]$، بخش درست

عدد a است)؛

b) لااقل n بار تکرار شده است.

۳۴۱. درستی این نابرابری را، برای همهٔ مقدارهای مثبت x، ثابت کنید:

$$2\sqrt[12]{x}+2\sqrt[4]{x}\geqslant 2\times 2\sqrt[6]{x}$$

۳۴۲. ازمجموعهٔ عددهای ۱، ۲، ...، ۱۹۸۲، دست‌کم چند عدد باید حذف کرد تا هیچ‌کدام از عددهای باقی‌مانده، برابر با حاصل ضرب دوعدد دیگر باقی‌مانده نباشد؟ به چه ترتیبی، باید این کار را انجام داد؟

۳۴۳. در هر خانه از یك صفحهٔ شطرنجی نامتناهی، یك عدد حقیقی نوشته‌ایم. ثابت کنید، می‌توان خانه‌ای پیداکرد که، عدد آن، دست‌کم از عددهای چهارخانه ازهشت خانه‌ای که آن را احاطه‌کرده‌اند، تجاوز نمی‌کند.

۳۴۴*. ثابت کنید، از هر دنبالهٔ عددهای حقیقی a_1، a_2، ...، a_n، می‌توان بخشی ازعددها را طوری جداکرد که با سه شرط زیرسازگار باشند:

الف) هیچ سه عددی را که در دنباله، پشت سر هم قرار دارند، با هم انتخاب نکرده باشیم؛

ب) از بین هر سه عدد متوالی در دنباله، دست‌کم یکی را در نظر گرفته باشیم؛

ج) قدرمطلق مجموع عددهایی که انتخاب کرده‌ایم، از مقدار زیر کمتر نباشد:

$$\frac{|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|}{6}$$

۳۴۵. $n-1$ خانه ازیك جدول مربعی $n\times n$ را علامت گذاشته‌ایم. ثابت‌کنید، با جابه‌جایی سطرها نسبت به هم و جابه‌جایی ستون‌ها نسبت به هم، می‌توان به جدولی رسید که همهٔ خانه‌های علامت‌دار، در زیر قطرهای جدول باشند.

۳۴۶. ثابت کنید، برای هرعدد طبیعی n وهرعدد حقیقی a، نابرابری زیر برقرار است:

$$|a| \cdot |a-۱| \cdot |a-۲| \cdots |a-n| \geqslant \langle a \rangle \frac{n!}{۲^n}$$

که در آن، $\langle a \rangle$ عبارت است از فاصلهٔ عدد a تانزدیك‌ترین عدد درست به آن و $n! = ۱ \times ۲ \times \cdots \times n$.

۳۴۷. a) آیا چندجمله‌ای‌های

$$P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z)$$

از متغیرهای x و y و z وجود دارند، به نحوی که، این اتحاد برقرار باشد:

$$(x-y+۱)^۳P+(y-z-۱)^۳Q+(z-۲x+۱)^۳R=۱$$

b) همان پرسش، برای اتحاد

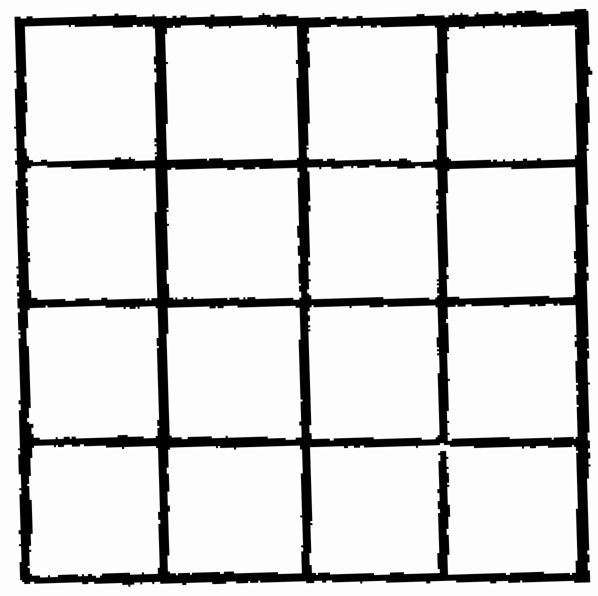
$$(x-y+۱)^۳P+(y-z-۱)^۳Q+(z-x+۱)^۳R=۱$$

۳۴۸*. رأس‌های چهاروجهی $KLMN$، روی وجه‌ها یا یال‌های چهاروجهی دیگر $ABCD$ قرار دارند. ثابت کنید، مجموع طول‌های همهٔ یال‌های چهاروجهی $KLMN$ از $\frac{۴}{۳}$ مجموع همهٔ یال‌های چهاروجهی $ABCD$ کمتر است.

هفدهمین المپیاد سراسری اتحاد شوروی
سال ۱۹۸۳ (کی‌شی نف)

کلاس	روز اول				روز دوم			
۸:	۳۴۹	۳۵۰	۳۵۱	۳۵۲	۳۶۰	۳۶۱	۳۶۲	۳۶۳
۹:	۳۵۳	۳۵۴	۳۵۵	۳۵۶	۳۶۴	۳۶۵	۳۶۶	۳۶۷
۱۰:	۳۵۷	۳۵۴	۳۵۸	۳۵۹	۳۶۰	۳۶۸	۳۶۹	۳۷۰

۳۴۹. در شبکهٔ شکل ۱۵، هر خانه دارای اندازهٔ ۱×۱ است. آیا می‌توان، این شبکه را: a) به صورت اجتماعی از هشت خط شکسته نشان



شکل ۱۵

داد، به‌نحوی که طول هر کدام از آن‌ها برابر ۵ باشد؛ b) به‌صورت اجتماعی از پنج خط شکسته نشان داد، به نحوی که طول هر کدام از آن‌ها، برابر ۸ باشد؟

۳۵۰. سه عدد درست را روی تختهٔ سیاه نوشته‌ایم. یکی از عددها را پاک کرده‌ایم و، به جای آن، عددی را نوشته‌ایم که از مجموع دو عدد دیگر یك واحد کمتر باشد. این عمل را چند بار تکرار کرده‌ایم و، در نتیجه، به عددهای ۱۷، ۱۹۶۷ و ۱۹۸۳ رسیده‌ایم. آیا ممکن است، در ابتدا، روی تخته سیاه، عددهای a) ۲، ۲، ۲؛ b) ۳، ۳، ۳ نوشته شده باشد؟

۳۵۱. سه دایره، در نقطه‌های X، Y و Z، دو به‌دو بر هم مماس بیرونی‌اند. شعاع‌های دایره‌ها را $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ برابر می‌کنیم و مرکزهای آن‌ها را ثابت نگه‌می‌داریم. ثابت کنید، هر نقطهٔ مثلث XYZ، دست‌کم به وسیلهٔ یکی از دایره‌ها پوشیده می‌شود.

۳۵۲. چند عدد طبیعی مختلف، که بین مجذورهای دو عدد طبیعی متوالی قرار دارند، داده شده‌اند. ثابت کنید، همهٔ حاصل ضرب‌های دو به‌دوی آن‌ها هم، عددهایی مختلف‌اند.

۳۵۳. همهٔ جواب‌های این دستگاه معادله‌ها را پیدا کنید:

$$\begin{cases} y^{۲}=x^{۳}-۳x^{۲}+۲x \\ x^{۲}=y^{۳}-۳y^{۲}+۲y \end{cases}$$

۳۵۴. عدد طبیعی k، در دستگاه دهدهی، دارای n رقم است. این عدد را درمرتبهٔ دهگان گرد کرده‌ایم (به‌جای رقم یکان، صفر گذاشته‌ایم؛ و اگر رقم

یکان از ۴ بزرگتر باشد، یك واحد به‌رقم دهگان اضافه‌کرده‌ایم). سپس، به همان ترتیب، عدد حاصل را در مرتبهٔ صدگان گرد کرده‌ایم و غیره. بعد از

$(n-1)$ امین گام، عدد k_1 به دست آمده است. ثابت کنید: $k_1 < \frac{18}{13}k$.

۳۵۵. نقطهٔ D وسط ضلع AB، و نقطه‌های E و F به ترتیب روی پاره‌خط‌های راست AC و BC از مثلث ABC قرار دارند. ثابت کنید، مساحت مثلث DEF، از مجموع مساحت‌های دو مثلث ADE و BDF تجاوز نمی‌کند.

۳۵۶. (α_n) و (β_n) دنباله‌هایی هستند که، بـه ترتیب، از آخرین رقم‌های عددهای درست $[(\sqrt{10})^n]$ و $[(\sqrt{2})^n]$ درست شده‌اند (در اینجا، $[x]$ به معنای بخش درست عدد x است). آیا دنباله‌های (α_n) و (β_n) متناوب‌اند؟

۳۵۷. α و β دو زاویهٔ حاده‌اند و می‌دانیم:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)$$

ثابت کنید: $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

۳۵۸. راس‌های چهاروجهی $ABCD$ را، به طور قائم، بر دو صفحه تصویر کرده‌ایم. این تصویرها را، به ترتیب، A_1، B_1، C_1، D_1 و A_2، B_2، C_2، D_2 می‌نامیم. ثابت کنید، یکی از صفحه‌ها را می‌تـوان در فضا طوری جابه‌جا کرد که A_1A_2، B_1B_2، C_1C_2 و D_1D_2 با هم موازی باشند.

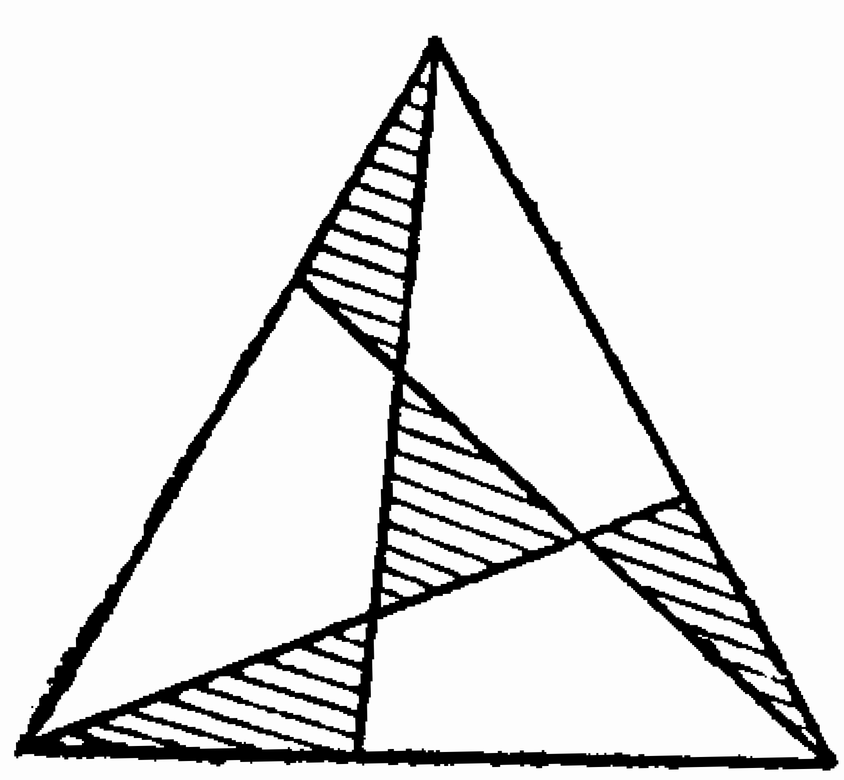
۳۵۹*. دانش‌آموزی، حل معادلـه‌های درجهٔ دوم را تمرین می‌کند. هر معادله‌ای را کـه حل می‌کند، بـه شرط داشتن ریشه‌های حقیقی، معادلهٔ دیگری به‌کمك ریشه‌های آن، به ترتیب زیر، می‌سازد: ریشه بزرگتر را به‌جای جملهٔ آزاد (مقدار ثابت) معادلهٔ جدید و ریشهٔ کوچکتر را در ضریب x قرار می‌دهد؛ ضریب x^2 را هم واحد انتخاب می‌کند. ثابت کنید، این تمرین را، نمی‌تواند تا بی‌نهایت ادامه دهد. بیشترین تعداد معادله‌هایی که می‌تواند به این ترتیب، پشت هر هم، حل کند، چندتاست؟

۳۶۰. عددهای طبیعی m و n و k چنان‌اندکه عدد m^n بر n^m و عدد n^k بر k^n بخش‌پذیر است. ثابت کنید، عدد m^k بر k^m بخش‌پذیر است.

۳۶۱. در زبان قبیلهٔ «آبا»، دو حرف وجود دارد. می‌دانیم، هیچ واژه‌ای از این زبان، درآغازواژهٔ دیگری قرارنگرفته است (یعنی نمی‌توان یك‌واژهٔ را طوری به دو بخش تقسیم کردکه، بخش اول آن، معنا داشته باشد). آیا واژه‌نامهٔ این زبان، می‌تواند شامل ۳ واژهٔ چهار حرفی، ۱۰ واژهٔ پنج حرفی، ۳۰ واژهٔ شش حرفی و ۵ واژهٔ هفت حرفی باشد؟

۳۶۲. آیا می‌توان درخانه‌های یك صفحهٔ شطرنجی نامتناهی، عددهای درست را طوری قرار دادکه در هر مستطیل ۶ × ۴ آن (که ضلع‌هایی در امتداد ضلع‌های خانه‌ها دارد)، مجموع عدد: a) برابر ۱۰، b) برابر ۱ شود؟

۳۶۳. چهار مثلثی که در شکل ۱۶ هاشور خورده‌اند، مساحت‌هایی برابردارند. ثابت کنید، مساحت‌های سه چهارضلعی، که هاشور نخورده‌اند، باهم برابرند. اگرمساحت یکی از مثلث‌ها، برابر یك سانتی‌متر مربع باشد، مساحت یکی از چهارضلعی‌ها چقدر است؟



شکل ۱۶

۳۶۴. بچه‌های مهدکودك را در دو ستون در کنار هم قرار داده‌اند. می‌دانیم، درهرستون، تعداد پسرها با تعداد دخترها برابر است و، همچنین، تعداد ردیف‌های دو نفری که، در آن‌ها، یك پسر و یك دختر وجود دارد، با تعداد بقیهٔ ردیف‌های دو نفری برابر است. ثابت کنید، تعدادکل بچه‌ها، بر ۸ بخش پذیر است.

۳۶۵. یکی از ضلع‌های مستطیلی برابر ۱ سانتی‌متر است. به جز این

می‌دانیم که، با رسم دو خط راست عمود بر هم، می‌توانیم آن را به چهار مستطیل کوچکتر طوری تقسیم کنیم که، مساحت سه تا از آن‌ها از ۱ سانتی‌متر مربع و مساحت چهارمی از ۲ سانتی‌متر مربع، کمتر نباشد. حداقل ضلع دوم مستطیل چقدر باشد، تا این عمل ممکن شود؟

۳۶۶. نقطهٔ دلخواه O را دردرون مثلث ABC انتخاب کرده‌ایم. درستی برابری زیر را ثابت کنید:

$$S_A \cdot \overrightarrow{OA} + S_B \cdot \overrightarrow{OB} + S_C \cdot \overrightarrow{OC} = 0$$

که در آن، S_A، S_B و S_C، به ترتیب، عبارتند از مساحت مثلث‌های BCO، CAO و ABO.

۳۶۷. ثابت کنید، بین هر $2m+1$ عدد درست مختلف، به شرطی که قدرمطلق آن‌ها از $2m-1$ تجاوز نکند، می‌توان سه عدد به مجموع 0 پیدا کرد.

۳۶۸. نقطه‌های D، E و F، به ترتیب، روی ضلع‌های AB، BC و CA (و نه روی رأس‌ها) از مثلث ABC داده شده‌اند. بزرگترین ضلع‌های مثلث‌های DEF، ADF، BDE و CEF را، به ترتیب، با طول‌های d_0، d_1، d_2 و d_3 می‌گیریم. ثابت کنید:

$$d_0 \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \min(d_1, d_2, d_3)$$

در چه حالتی، علامت برابری برقرار است؟

۳۶۹. مجموعهٔ M، شامل k پاره خط راست دوبه‌دو غیرمتقاطع و، واقع بریک خط راست است. می‌دانیم، هرپاره‌خط راستی را که طولی بیشتر از واحد ندارد، می‌توان طوری روی خط راست قرارداد که دو انتهای آن متعلق به مجموعهٔ M باشد. ثابت کنید، مجموع طول‌های پاره‌خط‌های راستی که M را تشکیل داده‌اند، از $\frac{1}{k}$ کمتر نیست.

*۳۷۰. در بسط نامتناهی عدد حقیقی a، در دستگاه عددنویسی به مبنای ۱۰، همهٔ رقم‌ها وجود دارد. فرض کنید، v_n، به معنای تعداد پاره‌خط‌های رقمی مختلف به طول n باشد، که در این بسط با آن‌ها برخورد می‌کنیم. ثابت کنید، اگر برای مقداری از n، شرط $v_n \leqslant n+8$ برقرار باشد، آن وقت، a، عددی گویاست.

هیجدهمین المپیاد سراسری اتحاد شوروی
سال ۱۹۸۴ (عشق‌آباد)

کلاس	روز اول				روز دوم			
:۸	۳۷۱	۳۷۲	۳۷۳	۳۷۴	۳۸۳	۳۸۴	۳۸۵	۳۸۶
:۹	۳۷۵	۳۷۶	۳۷۷	۳۷۸	۳۸۷	۳۸۸	۳۸۹	۳۹۰
:۱۰	۳۷۹	۳۸۰	۳۸۱	۳۸۲	۳۹۱	۳۹۲	۳۹۳	۳۹۴

۳۷۱. a) حاصل ضرب n عدد درست برابر n و مجموع آن‌ها برابر صفر شده است. ثابت کنید، عدد n بر ۴ بخش‌پذیر است.

b) n را عددی طبیعی و بخش‌پذیر بر ۴ می‌گیریم. ثابت کنید، می‌توان n عدد درست طوری پیدا کرد که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر n و مجموع آن‌ها برابر صفر باشد.

۳۷۲. a و b، عددهایی غیرمنفی و دلخواه هستند. ثابت کنید:

$$\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a+b) \geqslant a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$$

۳۷۳. دو مثلث متساوی‌الاضلاع $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$، روی صفحه داده شده‌اند؛ رأس‌های این مثلث‌ها، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، نام‌گذاری شده است. از نقطه‌ای مثل O، بردارهای $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$ را، به ترتیب، برابر بردارهای $\overrightarrow{A_1A_2}$، $\overrightarrow{B_1B_2}$ و $\overrightarrow{C_1C_2}$ رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، نقطه‌های A، B و C هم، رأس‌های یك مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند.

۳۷۴. چهاررنگ و بی‌نهایت تختهٔ مربعی شکل به ضلع واحد، در

اختیار داریم و تصمیم می‌گیریم، ضلع‌های تخته‌ها را رنگ کنیم، به نحوی که رنگ‌های هر چهارضلع در یك تخته، با هم اختلاف داشته باشند. این تخته‌های مربعی را طوری کنار هم قرار می‌دهیم که، ضلع‌های مجاور هم در دو تخته، هم رنگ باشند. به‌ازای چه عددهایی از m و n، می‌توان از این تخته‌ها، مستطیلی $m \times n$ ساخت، به نحوی که هر ضلع آن از یك رنگ، و چهارضلع آن، از چهار رنگ مختلف باشد؟

۳۷۵. $x>0$، $y>0$ و α عددهایی حقیقی ودلخواه‌اند. ثابت کنید:

$$x^{sin^2\alpha} \cdot y^{cos^2\alpha} < x+y$$

۳۷۶. یك مکعب و دو رنگ قرمز و سبز دراختیار داریم. دو نفر، به این ترتیب، باهم بازی می‌کنند. اولی ۳ یال مکعب را انتخاب می‌کند و آن‌ها را به رنگ قرمز در می‌آورد. رقیب او، ۳ یال دیگر را (از آن‌ها که تاکنون رنگ نشده‌اند) رنگ سبز می‌زند. بعد دوباره اولی ۳ یال بی‌رنگ را قرمز و، بالاخره، رقیب او، ۳ یال باقی‌مانده را سبز می‌کند. رنگ یك یال را نمی‌توان عوض کرد و یك یال را، نمی‌توان دوبار، ولو با یك رنگ، رنگ زد. کسی بازی را می‌برد که، برای نخستین‌بار، توانسته باشد همهٔ یال‌های یك وجه مکعب را، به رنگ مربوط به خود درآورد. آیا این‌حکم درست است که بازی‌کن اول، به شرطی که درست بازی کند، می‌تواند به طور قطع برنده باشد؟

۳۷۷. روی محیط دایره‌ای $n \geqslant 3$ عدد طبیعی نوشته‌ایم و می‌دانیم، برای هر عدد، نسبت مجموع دو عدد مجاور آن به خود عدد، باز هم عددی طبیعی است. ثابت کنید، مجموع همهٔ این نسبت‌ها: a) از $2n$ کمتر نیست؛ b*) از $3n$ کمتر است.

۳۷۸. دایرهٔ به مرکز O، درمثلث ABC محاط شده است و، نقطه‌های تماس آن با ضلع‌های BC، AC و AB، بــه ترتیب، عبارتند از نقطه‌های A_1، B_1 و C_1. پاره‌خط‌های راست AO، BO و CO، به‌ترتیب، محیط دایره را در نقطه‌های A_2، B_2 و C_2 قطع کرده‌اند. ثابت کنید، خط‌های راست

A_1A_2، B_1B_2 و C_1C_2 از یك نقطه می‌گذرند.

۳۷۹. به ازای چه مقدارهایی از m و n، این برابری برقرار است:

$$(5+3\sqrt{2})^m=(3+5\sqrt{2})^n$$

۳۸۰. n عـدد حقیقی مختلف را، در یك سطر و به ترتیب صعودی نوشته‌ایم. در سطر دوم وزیر آن‌ها، همان عددها را، و به احتمالی در ردیف دیگری، نوشته‌ایم. مجموع هر دو عـددی را که در یك ستون قرار دارند محاسبه کرده‌ایم و زیر آن‌ها آورده‌ایم. به این ترتیب، سطر سوم به دست می‌آید. معلوم شد، عددهای سطر سوم، بـه ردیف صعودی قرار گـرفته‌اند. ثابت کنید، دو سطر اول و دوم، بر هم منطبق‌اند.

۳۸۱. مثلث ABC مفروض است. از نقطهٔ P، خطهای راست PA، PB و PC را رسم کرده‌ایم. این خطهای راست، دایره محیطی مثلث را، درنقطه‌های A_1، B_1 و C_1 (غیر از A، B و C) قطع کرده‌اند. معلوم شد که مثلث $A_1B_1C_1$ با مثلث ABC برابراست. ثابت کنید، حداکثر ۸ نقطهٔ P با این ویژگی وجود دارد.

۳۸۲. عددهای مثبت x، y و z، در این معادله‌ها، صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} x^2+xy+\dfrac{y^2}{3}=25 \\ \dfrac{y^2}{3}+z^2=9 \\ z^2+zx+x^2=16 \end{cases}$$

مطلوب است محاسبهٔ $D=xy+2yz+3zx$.

۳۸۳. معلم، سه جمله‌ای درجه دوم $x^2+10x+20$ را روی تختهٔ سیاه نوشت. سپس، هر یك از دانش‌آموزان، به نوبت، یك واحد به ضریب x و یا به مقدار ثابت اضافه کردند و یا یك واحد کم کردند (تنها یکی از این دو عدد را، یك واحد بزرگتر یا یك واحدکوچکتر کردند و نه هر دوی آن‌هارا). درنتیجه، سه جمله‌ای درجه دوم $x^2+20x+10$ روی تختهٔ‌سیاه

نوشته شد. آیا این حکم درست است که، در لحظه‌ای، سه جمله‌ای درجه دومی با ریشه‌های درست، روی تختهٔ سیاه، ظاهر شده است؟

۳۸۴. سکه‌ای به شعاع r، روی صفحه طوری جا بـه‌جا می‌شود که، مرکز آن، محیط یك چند ضلعی محیط بر دایره‌ای به شعاع $R>r$ را می‌پیماید. اگر محیط ایـن چند ضلعی، برابر p باشد، مساحت شکلی را پیدا کنید که در اثر حرکت سکه به‌دست می‌آید (یك حلقهٔ چند زاویه‌ای).

۳۸۵. $n+۱$ وزنه، به وزن کلی $۲n$، و یك ترازوی دو کفه‌ای که در حال تعادل است، در اختیار داریم. وزن هـروزنه با یك عـدد طبیعی بیان می‌شود. وزنه‌ها را، به‌نوبت، در کفه‌های ترازو می‌گذاریم: ابتدا، سنگین‌ترین (یا یکی از سنگین‌ترین) آن‌ها را، سپس، سنگین‌ترین وزنه از آن‌چه باقی‌مانده است و غیره. در ضمن، هـر بار، وزنهٔ نوبتی را در کفه‌ای می‌گذاریم که سبك‌تر است و، اگر ترازو در حال تعادل باشد، به دلخواه در یکی از دو کفه قرار می‌دهیم. ثابت کنید، بعد از آن که همهٔ وزنه‌ها را در کفه‌های ترازو قرار دهیم، ترازو به حالت تعادل می‌ایستد.

۳۸۶. عددی را «عدد اول مطلق» می‌نامیم که هم خودش و هم عددهایی که از جا به‌جا کردن رقم‌های آن به دست می‌آیند، اول باشند. [مثلاً ۱۳۱، عدد اول مطلق است، زیرا عددهای ۱۳۱، ۱۱۳ و ۳۱۱ اول‌اند، در حالی که عدد ۱۰۱، اول مطلق نیست.] ثابت کنید، هر عدد اول مطلق، نمی‌تواند بیش از سه رقم متفاوت داشته باشد.

۳۸۷. رقم‌های $x\neq ۰$ و y چنان‌اند کـه، به ازای هر $n\geqslant ۱$، عدد

$$\underbrace{xx\ldots x}_{n}۶\underbrace{yy\ldots y}_{n}۴$$

برابر مجذور یك عدد درست است. همهٔ مقدارهای ممکن x و y را پیدا کنید.

۳۸۸. چهار نقطهٔ متفاوت A، B، C و D را روی خط راست، و به همین ردیف، انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید، برای هر نقطه E، که بر خط راست AD واقع نباشد، این نابرابری برقرار است:

$$AE+ED+|AB-CD|>BE+CE$$

۳۸۹. دنبالهٔ x_n به این ترتیب تعریف شده است:

$$x_۱=۱;\ x_۲=۱;\ x_{n+۲}=x^۲_{n+۱}-\frac{۱}{۲}x_n \quad (n\geqslant ۱)$$

ثابت کنید، دنبالهٔ x_n دارای حد است و آن را پیدا کنید.

۳۹۰*. در خانه‌های سفید یك جدول شطرنجی ۱۹۸۳ × ۱۹۸۴ خانه‌ای، عددهای ۱ و یا ۱− را طوری نوشته‌ایم که، برای هرخانهٔ سیاه، حاصلضرب عددهای واقع در خانه‌های سفید مجاور آن، برابر ۱ باشد. ثابت کنید، این وضع، وقتی پیش می‌آید که همهٔ عددهای نوشته شده، برابر ۱ باشند.

۳۹۱√. در خانه‌های جدول مربعی ۳ × ۳، عددهای ۱ یا ۱− را نوشته‌ایم. برای هر خانه، حاصلضرب عددهای واقع در خانه‌های مجاور آن را، محاسبه می‌کنیم (دوخانه را مجاور می‌دانیم که، در یك ضلع، مشترك باشند). حاصلضرب‌های حاصل را، در خانه‌های جدول، به جای عددهای قبلی قرار می‌دهیم. بعد، همان عمل را در مورد جدول جدید انجام می‌دهیم و غیره. ثابت کنید، بعد از چندگام، تنها عددهای ۱ در جدول خواهد بود.

۳۹۲. کدام یك ازاین دوعدد بزرگترند: $\frac{۲}{۲۰۱}$ یا $\ln\frac{۱۰۱}{۱۰۰}$؟

۳۹۳. سه دایرهٔ $c_۱$، $c_۲$، $c_۳$، به مرکزهای $C_۱$، $C_۲$، $C_۳$، و شعاع‌های $r_۱$، $r_۲$، $r_۳$، طوری روی صفحه‌اند که، هر دایره، در بیرون دو دایرهٔ دیگر قراردارد؛ درضمن $r_۱>r_۲$ و $r_۱>r_۳$. A، نقطهٔ برخورد مماس‌های بیرونی دودایرهٔ $c_۱$ و $c_۲$، دربیرون دایرهٔ $c_۳$؛ و B، نقطهٔ برخورد مماس‌های بیرونی دو دایرهٔ $c_۱$ و $c_۳$ در بیرون دایرهٔ $c_۲$ قرار دارند. از نقطهٔ A، مماس‌هایی بر دایرهٔ $c_۳$؛ واز نقطهٔ B، مماس‌هایی بردایره $c_۲$ رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، از برخورد این دو زوج مماس، یك چهارضلعی پدید می‌آید که در دایره قابل محاسبه است. شعاع این دایره را پیدا کنید.

۳۹۴. ثابت کنید، هرمقطع مکعب با صفحه‌ای که ازمرکز آن می‌گذرد، مساحتی دارد که از مساحت وجه مکعب کمتر نیست.

نوزدهمین المپیاد سراسری اتحاد شوروی
سال ۱۹۸۵ (موگی‌لو)

کلاس	روز اول				روز دوم			
:۸	۳۹۵	۳۹۶	۳۹۷	۳۹۸	۴۰۷	۴۰۸	۴۰۹	۴۱۰
:۹	۳۹۹	۴۰۰	۴۰۱	۴۰۲	۴۱۱	۴۱۰	۴۱۲	۴۱۳
:۱۰	۴۰۳	۴۰۴	۴۰۵	۴۰۶	۴۱۴	۴۱۵	۴۱۶	۴۱۷

۳۹۵. درمثلثی که زاویه‌هایی حاده دارد، ازوسط هر ضلع، عمودهایی بر دو ضلع دیگر رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، مساحت شش ضلعی محدود به این عمودها، برابر است با نصف مساحت مثلث.

۳۹۶. آیا عددطبیعی n، باویژگی زیر، وجود دارد: مجموع رقم‌های عدد n برابر ۱۰۰۰ و مجموع رقم‌های عدد n^2 برابر 1000^2 باشد؟

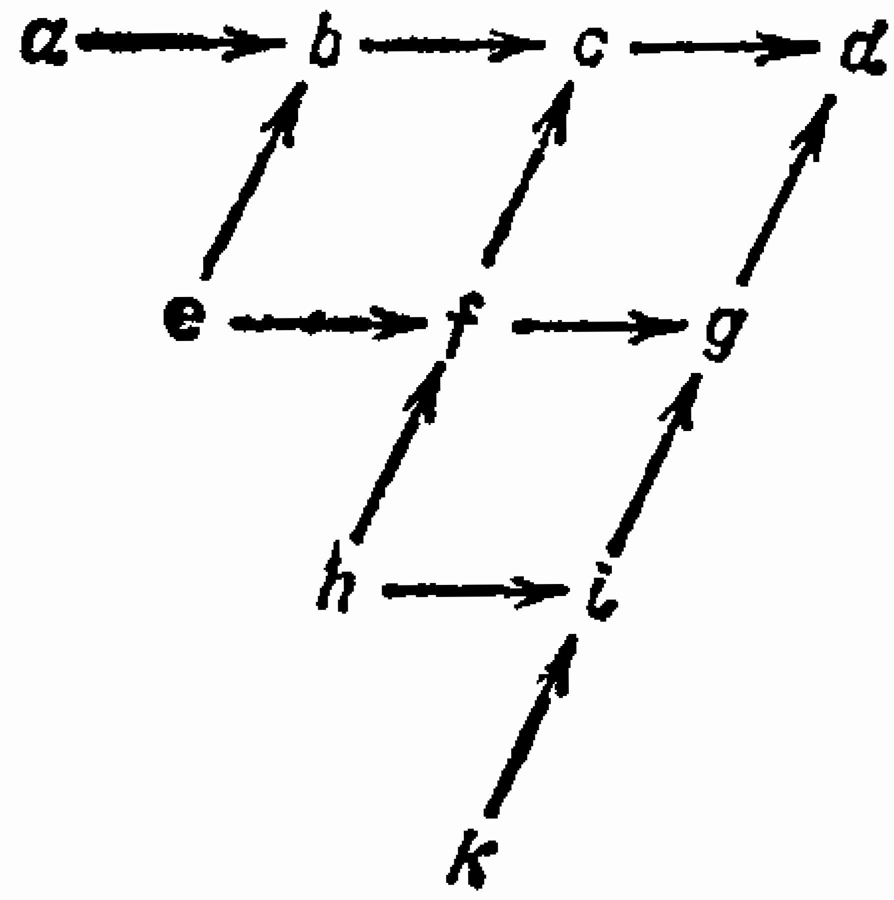
✓ **۳۹۷.** حداکثر چند مهره می‌توان روی صفحهٔ 8×8 خانه‌ای داما قرارداد تا، هرمهره، دست‌کم به وسیلهٔ یك مهرهٔ دیگر، درخطرزده شدن باشد؟

۳۹۸. می‌خواهیم هر ضلع و هر قطر یك n ضلعی منتظم را طوری رنگ کنیم که هر دو پاره‌خط راستی که نقطهٔ مشترکی دارند، به دو رنگ مختلف درآمده باشند. برای این منظور، دست‌کم به چند رنگ نیاز داریم؟

۳۹۹. خط راست l، نقطهٔ O در بیرون این خط راست ونقطهٔ دلخواه A، روی یك صفحه، داده شده‌اند. ثابت کنید، تنها با استفاده از تقارن نسبت به‌خط راست l ودوران به‌مرکز نقطهٔ O، می‌توان نقطهٔ O را به نقطهٔ A تبدیل کرد.

۴۰۰. حداکثر در چند نقطهٔ صحیح مختلف، سه جمله‌ای درجه دوم ax^2+bx+c، که در آن $a>100$، می‌تواند مقدارهایی را قبول کند که از ۵۰ تجاوز نکنند؟

۴۰۱. عددهای طبیعی و مختلف a، b، ...، k، بـه صورت جدول شکل ۱۷ نوشته شده‌اند. می‌دانیم، هر عددی که در روی شکل، دو پیکان به



شکل ۱۷

سمت آن می‌رود، برابر با مجموع عددهایی است که در ابتدای این پیکان‌ها قرار دارند. به ازای چه حداقلی برای d، این وضع ممکن است؟

۴۰۲*. دنبالهٔ نامتناهی و اکیداً صعودی عددهای a_1، a_2، ... داده شده است. ثابت کنید:

a) شماره‌ای مثل k_0 پیدا می‌شود که، برای هر $k \geqslant k_0$، نابرابری زیر برقرار است:

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\dots+\frac{a_k}{a_{k+1}}<k-1$$

b) برای شماره‌های به‌اندازهٔ کافی بزرگ k، داریم:

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\dots+\frac{a_k}{a_{k-1}}<k-1985$$

۴۰۳. همهٔ زوج عددهای (x, y) را پیدا کنید که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$|\sin x-\sin y|+\sin x\cdot\sin y\leqslant 0$$

۴۰۴. پنج ضلعی محدب $ABCDE$ روی صفحه داده شده است. A_1 را قرینهٔ A نسبت به نقطهٔ B، B_1 را قرینهٔ B نسبت به نقطهٔ C، ...، E_1 را قرینهٔ E نسبت به نقطهٔ A می‌گیریم. بعد از به دست آوردن این قرینه‌ها، خود پنج‌ضلعی $ABCDE$ را پاک می‌کنیم. ثابت کنید، با در دست داشتن

نقطه‌های A_1، B_1، C_1، D_1 و E_1، می‌توان به کمك پرگار و خط‌کش، پنج‌ضلعی $ABCDE$ را بازسازی کرد.

۴۰۵. دنبالهٔ a_1، a_2، a_3، ... با این قانون‌ها داده شده است:

به ازای $n \geqslant 1$: $a_{2n} = a_n$؛

به ازای $n \geqslant 0$: $a_{4n+1} = 1$، $a_{4n+3} = 0$.

ثابت کنید، این دنباله، دورهٔ تناوب ندارد.

۴۰۶*. n خط راست $(n > 2)$ روی صفحه‌ای رسم کرده‌ایم که صفحه را به چند حوزه تقسیم کرده‌اند. بعضی از این حوزه‌ها را رنگ زده‌ایم؛ درضمن، هیچ دو حوزه‌ای که رنگ شده‌اند، در مرزی مشترك نیستند. ثابت کنید، تعداد حوزه‌های رنگ شده، از $\frac{1}{3}(n^2+n)$ تجاوز نمی‌کند.

۴۰۷. یك مکعب، یك قوطی مکعبی سرپوش‌دار با همان اندازه‌های مکعب و شش نوع رنگ در اختیار داریم. با هر رنگ، یکی از وجه‌های مکعب و یکی از وجه‌های قوطی را رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید، می‌توان مکعب را در قوطی طوری قرار داد که، هر وجه مکعب، به وجهی از قوطی با رنگی دیگر مجاور باشد.

۴۰۸. قطر A_0A_5، دایرهٔ به مرکز O را، به دونیم دایره تقسیم کرده است. کمان یکی از این نیم دایره‌ها را، به پنج کمان برابر A_0A_1؛ A_1A_2، A_2A_3، A_3A_4 و A_4A_5 تقسیم کرده‌ایم. خط راست A_1A_4، پاره‌خط‌های OA_2 و OA_3 را در نقطه‌های M و N قطع کرده است. ثابت کنید، مجموع طول‌های دو پاره‌خط راست A_2A_3 و MN برابر است با شعاع دایره.

۴۰۹. دانش‌آموز عضو انجمن ریاضی، برای ماشین حساب خود برنامه‌ای ریخته‌است. طبق این برنامه، ماشین، با فشاردادن دکمه، چهارعدد $(a، b، c، d)$ را به‌چهارعدد $(a-b، b-c، c-d، d-a)$ تبدیل می‌کند. ثابت کنید، اگر هر چهارعدد نخستین، چهار عدد مساوی باهم نباشند، بعداز چهار بارکه دکمه‌را فشاردهیم، چهارعدد به‌دست می‌آید که، دست کم یکی از

آن‌ها، از ۱۹۸۵ بزرگتر است.

۴۱۰. عددهای ۱، ۲، ۳، ...، $۲n-۱$، $۲n$ را به‌دو گروه، ودرهر گروه n عدد، تقسیم کرده‌ایم. فرض کنید، عددهای گروه اول را به‌ردیف صعودی:

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$$

و عددهای گروه دوم را، به‌ردیف نزولی:

$$b_1 > b_2 > \cdots > b_n$$

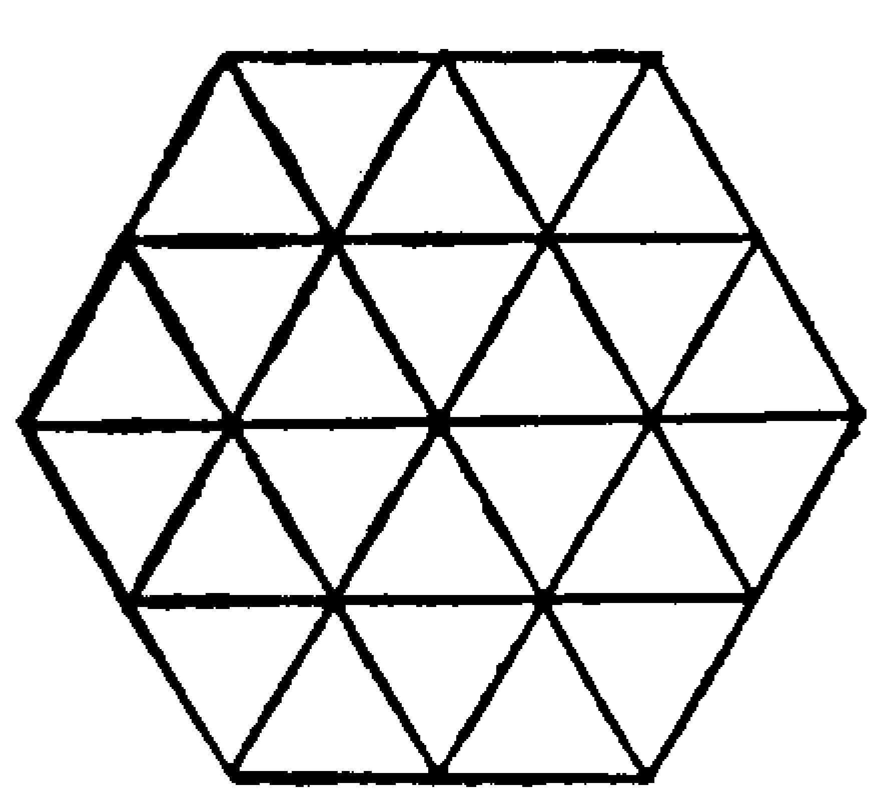
نوشته باشیم. ثابت کنید:

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n| = n^2$$

۴۱۱. با چند مکعب مساوی، یك مکعب مستطیل ساخته‌ایم. سه وجه مکعب مستطیل را،که رأسی مشترك دارند، رنگ کرده‌ایم، معلوم‌شدکه نصف تعداد مکعب‌ها، دست کم در یك وجه خود، رنگ خورده‌اند. چند مکعب، دارای وجه‌هایی رنگی هستند؟

۴۱۲. یکی از دو دایرهٔ به شعاع R از رأس‌های A و B و، دیگری، از رأس‌های B و C از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ گذشته است. نقطهٔ برخورد دوم دودایره را M می گیریم. ثابت کنید، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث AMD برابراست با R.

۴۱۳*. شش‌ضلعی منتظم را، به ۲۴ مثلث تقسیم کرده‌ایم (شکل ۱۸). در همهٔ گره‌های شکل، عددهای مختلفی نوشته‌ایم (شکل، دارای ۱۹ گـره



شکل ۱۸

است). ثابت کنید، دست‌کم ۷ مثلث از بین ۲۴ مثلث وجوددارند که عددهای رأس‌های آن‌ها، به‌ترتیب صعودی نوشته شده‌اند (عددهای راس‌ها را در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت، در نظر می‌گیریم).

۴۱۴. این معادله را حل کنید:

$$\cfrac{x}{۲+\cfrac{x}{۲+\cfrac{\vdots}{۲+\cfrac{x}{۱+\sqrt{۱+x}}}}}=۱$$

(در این کسر مسلسل، ۱۹۸۵ بار، عدد ۲ تکرار شده است).

۴۱۵. از پنج ضلعی منتظم به‌ضلع برابر ۱ سانتی متر، همهٔ نقطه‌هایی را که از همهٔ رأس‌های پنج‌ضلعی، بـه فاصله‌ای کمتر از ۱ سانتی‌متر قرار دارند، جداکرده‌ایم. مساحت بخش باقی‌مانده را پیدا کنید.

۴۱۶. صفحه‌ای شطرنجی نامتناهی، با خانه‌های به ضلع ۱ سانتی‌متر در اختیارداریم. تصمیم می‌گیریم، برش‌هایی روی خطهای راست شبکه انجام دهیم. ثابت کنید، به ازای هر عـدد درست $m>۱۲$، می‌توان مستطیلی را برید که مساحتی بیشتر از m سانتی‌متر مربع داشته باشد و، در ضمن، نتوان از آن، مستطیلی به مساحت m سانتی‌متر مربع جدا کرد.

۴۱۷. طول یال مکعب $ABCDA_۱B_۱C_۱D_۱$ بـرابـر یك سانتی‌متر است. دایرهٔ محاطی مربعی $ABCD$، و دایره‌ای را کـه از نقطه‌های A، C و $B_۱$ گذشته است، رسم کرده‌ایم. حداقل فاصلهٔ بین نقطه‌های محیط این دو دایره را پیدا کنید.

بیستمین المپیاد سراسری اتحاد شوروی
سال ۱۹۸۶ (اولیانوسلک)

کلاس	روز اول				روز دوم			
:۸	۴۱۸	۴۱۹	۴۲۰	۴۲۱	۴۳۰	۴۳۱	۴۳۲	۴۳۳
:۹	۴۲۲	۴۲۳	۴۲۴	۴۲۵	۴۳۴	۴۳۳b	۴۳۵	۴۳۶
:۱۰	۴۲۶	۴۲۷	۴۲۸	۴۲۹	۴۳۷	۴۳۸	۴۳۹	۴۴۰

۴۱۸. ریشه‌های معادلهٔ $x^2+ax+b+1=0$، عددهایی طبیعی‌اند. ثابت کنید، عدد a^2+b^2، یك عدد مرکب است.

۴۱۹. دو مربـع مساوی، در برخـورد با یکدیگر، یك هشت ضلعی ساخته‌اند. ضلع‌های یکی از مربع‌ها سبز وضلع‌های مربع دیگر قرمز است. ثابت کنید، مجموع طول ضلع‌های سبز هشت‌ضلعی، با مجموع طول ضلع‌های قرمز آن، برابر است.

۴۲۰. نقطهٔ M روی ضلع AC از مثلث ABC (با زاویه‌های حاده) قرار دارد. دایره‌هایی بر دو مثلث ABM و ACM محیط کـرده‌ایم. نقطهٔ M درچه وضعی باشد تا مساحت بخش مشترك دو دایـره، حداقل مقدار ممکن بشود؟

۴۲۱. می‌خواهند n شهر بسازند و آن‌ها را با $n-1$ جاده بـه هم وصل کنند، به‌نحوی که بتوان ازهرشهر به‌هرشهر دیگرمسافرت کرد. (هرجاده، دوشهر را به‌هم وصل می‌کند؛ جاده‌ها یکدیگررا قطع نمی‌کنند و ازشهرهای دیگر نمی‌گذرند.) در ضمن، می‌خواهند، کوتاه‌ترین فاصلهٔ بین هر دو شهر، به‌ترتیب، برابر با ۱، ۲، ۳، ...، $\frac{n(n-1)}{2}$ کیلومتر، ازطریق شبکهٔ جاده‌ها باشد. آیا چنین خواستی‌را می‌توان برآورد، به شرطی‌که داشته‌باشیم: a) $n=6$؛ b*) $n=1986$.

۴۲۲. ثابت کنید، نمی‌تـوان در دستگاه محورهای مختصات قائـم، چهارضلعی محدبی رسم کرد، به‌نحوی که یکی ازقطرهای آن دو برابر دیگری، زاویهٔ بین دوقطر برابر ۴۵ درجه و مختصات رأس‌های چهارضلعی، عددهایی

درست باشند.

۴۲۳. ثابت کنید، جـدول مستطیلی $m \times n$ خانه‌ای را، می‌توان با عددهای طبیعی مجذور کامل طوری پر کرد که، مجموع عددهای هر سطر و هر ستون، باز هم مجذور کامل باشند.

۴۲۴. دو دایـره، که فاصلهٔ بین مرکزهای آن‌ها برابر d است، در نقطه‌های P و Q یکدیگر را قطع کرده‌اند. از نقطه‌های P، Q و نقطـهٔ A واقع بـر محیط دایـرهٔ اول (A، غیر از P و Q است)، خطهای راستی گذرانده‌ایم که دایرهٔ دوم را، به ترتیب، در نقطه‌های B و C قطع کرده‌اند.

a) ثابت کنید، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC برابر است با d.

b) اگر نقطهٔ A روی محیط دایرهٔ اول حرکت کند، مرکزهای دایره‌های محیطی مثلث ABC، چه مجموعه‌ای را تشکیل می‌دهند؟

۴۲۵*. یك شش‌ضلعی منتظم، روی یك صفحه داده شده است. هرضلع آن را، به ۱۰۰۰ بخش بـرابر تقسیم کـرده‌ایم و، نقطه‌های تقسیم را، با پاره‌خطهای راستی موازی با ضلع‌های شش‌ضلعی، به هم‌وصل کرده‌ایم. در شبکه‌ای کـه به این ترتیب به دست می‌آید، سه گـره را، که رأس‌های یك مثلث متساوی‌الاضلاع باشند، در نظر می‌گیریم (با هـر اندازه‌ای و در هر موقعیتی) و آن‌ها را رنگ می‌کنیم. به همین طریق، گره‌های سه‌گانه را رنگ می‌کنیم تا جائی که دیگر نتوان چنین گره‌های سه گانه را پیدا کرد. ثابت کنید، اگر تنها یك گره بدون رنگ باقی بماند، این گره نمی‌تواند یکی از رأس‌های شش‌ضلعی اصلی باشد.

۴۲۶. همهٔ عددهای طبیعی را پیدا کنید، به‌نحوی که هر کدام از آن‌ها، برابر مجذور تعداد همهٔ مقسوم‌علیه‌های خود باشد.

۴۲۷. ثابت کنید، برای عددهای مثبت و دلخواه a_1، a_2، ....، a_n داریم:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\cdots+\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}<4\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

۴۲۸. در مثلث ABC $(AB \neq AC)$، از رأس A، خـطهای راست مختلفی گذرانده‌ایم. ثابت کنید، روی هرکدام از آن‌ها، بیش از یك نقطهٔ

M پیدا نمی‌شود که غیر از رأس‌های مثلث باشد و در شرط $A\widehat{BM} = A\widehat{CM}$ صدق کند. خط‌های راستی را معین کنید که شامل چنین نقطه‌ای نباشند.

۴۲۹. مکعب با یال به طول n $(n \geqslant 3)$، از n^3 مکعب واحد تشکیل شده است. ثابت کنید، می‌توان روی هر یک از این مکعب‌های واحد، عدد درستی نوشت، به نحوی که بین آن‌ها، عددهای برابر وجود نداشته باشد و مجموع عددها، در هر ردیفی که موازی با یك یال مکعب است، برابر صفر شود.

۴۳۰. در عددنویسی به مبنای ۱۰، عدد طبیعی a دارای n رقم برابر x، عدد b دارای n رقم برابر y و عدد c دارای $2n$ رقم برابر z است. برای هر $n \geqslant 2$، همهٔ این گونه رقم‌های x، y و z را پیدا کنید که، برای آن‌ها، داشته باشیم: $a^2 + b = c$.

۴۳۱. در درون یك دوازده ضلعی محدب، دو نقطه داده شده است که به فاصلهٔ ۱۰ سانتی متر از یکدیگر قرار دارند. برای هر یك از این نقطه‌ها، مجموع فاصله‌های از آن‌ها تا رأس‌های دوازده ضلعی را پیدا کرده‌اند. ثابت کنید، اختلاف این دو مجموع، از یك متر کمتر است.

۴۳۲. در ۳۰ لیوان، شیر وجود دارد. پسر بچه‌ای می‌خواهد کاری کند که مقدار شیر، در همهٔ لیوان‌ها برابر باشد. برای این منظور، به ترتیب، دو لیوان را برمی‌دارد و از یکی در دیگری می‌ریزد تا مقدار شیر آن‌ها برابر شود. آیا می‌توان، مقدار شیر اولیه را در لیوان‌ها، طوری انتخاب کرد که پسر بچه، هر قدر که به کار خود ادامه دهد، نتواند به هدف خود برسد؟

۴۳۳. مستطیلی را، به کمك خط‌های راست موازی با ضلع‌های آن، به مربع‌هایی به ضلع واحد تقسیم کرده‌ایم و، سپس، آن‌ها را، شبیه صفحهٔ شطرنج، به رنگ‌های سیاه و سفید در آورده‌ایم. قطر مستطیل، به پاره‌خط‌های راست سفید و سیاه تقسیم می‌شود، مطلوب است نسبت مجموع طول‌های پاره‌خط‌های سفید به مجموع طول‌های پاره‌خط‌های سیاه، به شرطی که اندازه‌های مستطیل a) 99×100؛ b) 99×101 باشد.

۴۳۴. n ضلعی منتظم $A_1A_2 \ldots A_n$، روی صفحه داده شده است. a) ثابت کنید، اگر n عددی زوج باشد، می‌توان برای هر نقطهٔ M از صفحه، در عبارت

$$\pm\overrightarrow{MA_1}\pm\overrightarrow{MA_2}\pm\cdots\pm\overrightarrow{MA_n}$$

علامت‌های مثبت و منفی را طوری انتخاب کرد که، مجموع حاصل، برابر صفر شود. b) ثابت کنید، در حالت فرد بودن n، عبارت مذکور به کمك انتخاب علامت‌های مثبت ومنفی، تنها برای تعداد محدودی نقطهٔ M ازٌصفحه، برابر صفر می‌شود.

۴۳۵. خانه‌های یك جدول مربعی $n\times n$ $(n\geqslant ۳)$ را، به‌این ترتیب، با عددهای ۱$\pm$ پرکرده‌ایم:

۱) در تمام خانه‌های مرزی جدول، عدد ۱ $-$ را گذاشته‌ایم؛

۲) عددهایی را که به نوبت در خانه‌های خالی جـدول می‌گذاریم، می‌توان به یکی ازاین‌دوصورت انتخاب کرد: برابربا حاصل‌ضرب دوعدد دو طرف آن در یك سطر و یا برابر حاصل‌ضرب دو عدد دو طرف آن در یك ستون باشد. این روش را ادامه می‌دهیم تا همهٔ خانه‌های جدول پرشود. a) حداکثر؛ b) حداقل تعداد عددهای ۱$+$ در جدول چقدر است؟

۴۳۶. درستی این نابرابری را، برای هرعدد طبیعی n، ثابت کنید:

$$|sin\,۱|+|sin\,۲|+\cdots+|sin(۳n-۱)|+|sin۳n|>\frac{۸}{۵}n$$

۴۳۷. m و n، عـددهایی طبیعی‌اند و $۱\leqslant m<n\leqslant ۱۹۸۶$. ثابت کنید، مجموع همهٔ عددهای به‌صورت $\frac{۱}{mn}$، عددی درست نیستند.

۴۳۸. یك مربع‌ویك مثلث‌را، بردایره‌ای به‌شعاع‌واحد محیط کرده‌ایم. ثابت‌کنید، مساحت بخش مشترك مربع و مثلث از ۳/۴ بیشتر است. آیا می‌توان گفت که، این مساحت، از ۳/۵ بیشتر است؟

۴۳۹*. چندجمله‌ای $P(x)$ را «مجاز» می‌نامیم،وقتی که همهٔ ضریب‌های آن، برابر ۰، ۱، ۲ یا ۳ باشند. برای عدد طبیعی مفروض n، تعداد همهٔ چندجمله‌ای‌های «مجاز» را پیدا کنید که، برای‌آن‌ها، داشته باشیم: $P(۲)=n$.

۴۴۰*. همهٔ چهاروجهی‌های $AXBY$ را درنظر می‌گیریم که بر کرهٔ

مفروضی محیط‌اند. ثابت کنید، اگر نقطه‌های A و B ثابت باشند، مجموع زاویه‌های چهارضلعی فضایی $AXBY$، یعنی مقدار

$$\widehat{AXB}+\widehat{XBY}+\widehat{BYA}+\widehat{YAX}$$

به انتخاب نقطه‌های X و Y بستگی ندارد.

بیست و یکمین المپیاد سراسری اتحاد شوروی
سال ۱۹۸۷ (فرونزه)

کلاس	روز اول				روز دوم			
:۸	۴۴۱	۴۴۲	۴۴۳	۴۴۴	۴۵۲	۴۵۳	۴۵۴	۴۵۵
:۹	۴۴۵	۴۴۶a	۴۴۷	۴۴۸	۴۵۶	۴۵۷	۴۵۸	۴۵۹
:۱۰	۴۴۹	۴۵۰	۴۵۱	۴۴۶b	۴۵۵	۴۶۰	۴۶۱	۴۶۲

۴۴۱. ده ورزشکار، در مسابقهٔ تنیس روی میز، مسابقه می‌دهند. هردو نفر آن‌ها، درست یك بار باهم بازی می‌کنند. اولی در x_1 بازی پیروزشد و در y_1 بازی باخت؛ دومی x_2 بازی را برد و y_2 بازی را شکست خورد و غیره. ثابت کنید:

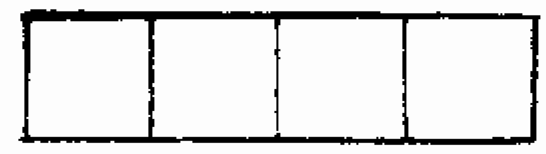
$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2=y_1^2+y_2^2+\cdots+x_{10}^2$$

۴۴۲. می‌دانیم، به‌کمك ۶ وزنه می‌توان ۶۳ جسم را که، وزن آن‌ها، عددهای طبیعی متوالی را تشکیل می‌دهند، وزن کرد. همهٔ این گونه وزنه‌ها را پیداکنید.

۴۴۳. هفت ضلعی منتظم $A_1A_2\ldots A_7$ مفروض است. ثابت کنید:

$$\frac{1}{A_1A_5}+\frac{1}{A_1A_3}=\frac{1}{A_1A_7}$$

۴۴۴. بازی «نبرد دریائی»، در مربع 7×7 خانه‌ای انجام می‌شود. حداقل چند شلیك لازم است تا، به طور حتم، چهارنفر عرشهٔ کشتی زخمی شوند، به شرطی که

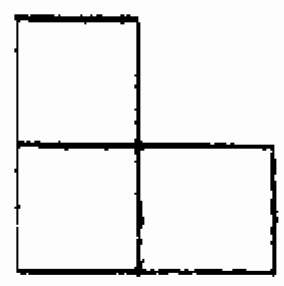
a) به صورت  باشد؛

b) از چهارخانه‌ای که ضلع‌های آن‌ها بــه هم متصل است، تشکیل شده باشد.

۴۴۵. ثابت کنید، به ازای هر عدد طبیعی n، عدد

$$۱^{۱۹۸۷}+۲^{۱۹۸۷}+\dots+n^{۱۹۸۷}$$

بر $n+۲$ بخش پذیر نیست.

۴۴۶. a) حداقل چند نمونه ازشکل  را باید درمربع ۸ × ۸ خانه‌ای جا داد، تا دیگر نتوان حتی یکی از این شکل‌ها را، بدون این که روی دیگران قرار گیرد، در آن مستقرکرد؟

b) درمربع ۱۹۸۷ × ۱۹۸۷ خانه‌ای، یکی‌از خانه‌ها را، به‌دلخواه، جداکرده‌ایم. ثابت کنید، در هرحال، بخش باقی‌مانده را می‌توان به صورت شکل‌های شبیه بخش a) برید.

۴۴۷. سه خط راست، موازی ضلع‌های مثلث رسم کرده‌ایم. هر یك از این خط‌های راست، از ضلعی‌که با آن موازی است، به فاصله‌ای برابر طول همان ضلع قرار دارد. درضمن، برای‌هرضلع مثلث، خط راست موازی با آن و رأس مقابل به این ضلع، در دو طرف مختلف ضلع قرار گرفته‌اند. ضلع‌های مثلث را امتداد داده‌ایم تا سه خط راستی راکه رسم‌کرده‌ایم، قطع کنند. ثابت کنید، این نقطه‌های برخورد، روی محیط یك دایره واقع‌اند.

۴۴۸*. دو خط شکستهٔ بسته، کـه تعداد ضلع‌های هر کدام از آن‌ها عددی فـرد است، روی صفحه‌ای داده شده‌اند. همهٔ ضلع‌های ایـن خط‌های شکسته، روی خط‌های راست مختلفی قرار دارند و هیچ سه تایی از آن‌ها. از یك نقطه نمی‌گذرند. ثابت کنید، از هر خط شکسته، می‌توان یك ضلع طوری انتخاب‌کردکه دو ضلع روبه‌رو در یك چهارضلعی محدب باشند.

۴۴۹. پنج عدد طبیعی طوری پیداکنید که، هر دو عدد آن‌ها، نسبت به هم اول باشند و، مجموع هر چند عدد از آن‌ها، عددی مرکب باشد.

۴۵۰. ثابت کنید، اگر، در پنج ضلعی محدب $ABCDE$ داشته باشیم:

$$\widehat{ABC}=\widehat{ADE} \text{،} \widehat{AEC}=\widehat{ADB}$$

آن وقت داریم: $\widehat{BAC}=\widehat{DAE}$.

۴۵۱. همهٔ مقدارهای α را پیدا کنید که، به ازای هر کدام از آن‌ها، دنبالهٔ

$$\cos\alpha \text{،} \cos ۲\alpha \text{،} \cos ۴\alpha \text{،} \cos ۸\alpha \text{،} \dots \text{،} \cos ۲^n\alpha$$

فقط شامل عددهای منفی باشد.

۴۵۲. برای عددهای مثبت a، b، c، A، B و C داریم:

$$a+A=b+B=c+C=k$$

ثابت کنید: $aB+bC+cA\leqslant k^۲$.

۴۵۳. در هر یك از خانه‌های جدول مربعی ۱۹۸۷ × ۱۹۸۷ خانه‌ای، عددی گذاشته‌ایم که، قدرمطلق آن، از واحد تجاوز نمی‌کند. در هر مربع ۲ × ۲ از این جدول، مجموع عددها، برابر صفر است. ثابت کنید، مجموع همهٔ عددهای این جدول، از ۱۹۸۷ تجاوز نمی‌کند.

۴۵۴. رأس B از زاویهٔ ABC در بیرون دایره‌ای قرار دارد و نیم‌خط‌های راست BA و BC، دایره را قطع می‌کنند. از نقطهٔ K، محل برخورد نیم‌خط راست BA با محیط دایره، خط راستی عمود بر نیمساز زاویه کشیده‌ایم، که دایره را در نقطه‌های K و P، و نیم خط راست BC را در نقطهٔ M قطع کرده است. ثابت کنید، طول پاره‌خط راست PM، دو برابر طول عمودی است که از مرکز دایره بر نیمساز زاویهٔ ABC فرود آید.

۴۵۵. دو نفر، به نوبت، عددی طبیعی را که از p تجاوز نمی‌کند، بر تختهٔ سیاه می‌نویسند. کسی بازنده است که نتواند، در نوبت خود، عددی را بنویسد. در ضمن، طبق قانون بازی، نمی‌توان عددی را روی تختهٔ سیاه نوشت که مقسوم‌علیهی از یکی از عددهای قبلی باشد.

a) روشن کنید. به‌ازای $p=۱۰$، چه‌کسی می‌تواند برنامه‌ای برای بردن خود طرح کند. این برنامه را توضیح دهید.

b) به همان پرسش دربارهٔ $p=۱۰۰۰$ پاسخ بدهید.

۴۵۶. عمو «دریا»، هر عصر از بین ۳۳ پهلوانی که برای نگهبانی نامزد شده‌اند، ۹ یا ۱۰ نفر را به صلاح دید خود، انتخاب می‌کند. حداقل بعد از چند روز، همهٔ پهلوانان، به تعداد برابر نگهبانی داده‌اند؟

۴۵۷. در شبکه‌ای، که مختصات گره‌های آن عددهایی درست‌اند، مجموعه‌ای غیرتهی از گره‌ها را علامت گذاشته‌ایم. به جز آن، دسته‌ای از بردارهای غیر صفر، با مختصات درست داده شده است. می‌دانیم، اگر از هر گره شبکه که علامت دارد، همهٔ بردارهای مفروض را رسم کنیم، بین نقطه‌های انتهائی آن‌ها، نقطه‌های علامت‌دار، بیش از نقطه‌های بی‌علامت است. ثابت کنید، تعداد گره‌های علامت‌دار، بی‌نهایت است.

۴۵۸. p ضلعی محدبی را $(p\geqslant ۵)$، روی همهٔ قطرها بریده‌ایم. ثابت کنید، بین بخش‌های حاصل، بخش‌هایی با مساحت‌های برابر وجود دارد.

۴۵۹*. مجموعهٔ $T_\circ$، شامل همهٔ عددهای به صورت $(۲^k)!$ است که، در آن، $k=۰, ۱, ۲, \ldots$، به ازای هر $p=۱, ۲, \ldots, ۱۹۸۷$، مجموعهٔ T_p را از مجموعهٔ $T_{p-۱}$ به این ترتیب به دست می‌آوریم که، به آن، همهٔ عددهایی را که به صورت مجموعی از چند جملهٔ $T_{p-۱}$ است، اضافه کنیم. ثابت کنید، دست کم یک عدد طبیعی وجود دارد که به مجموعهٔ $T_{۱۹۸۷}$ تعلق ندارد.

۴۶۰. نمودار تابع $y=f(x)$، که در تمامی محور عددی معین است، ضمن دوران دور مبداء مختصات، بر خودش منطبق می‌شود.

a) ثابت کنید، معادلهٔ $f(x)=x$، درست یک جواب دارد.

b) نمونه‌ای از این تابع را بدهید.

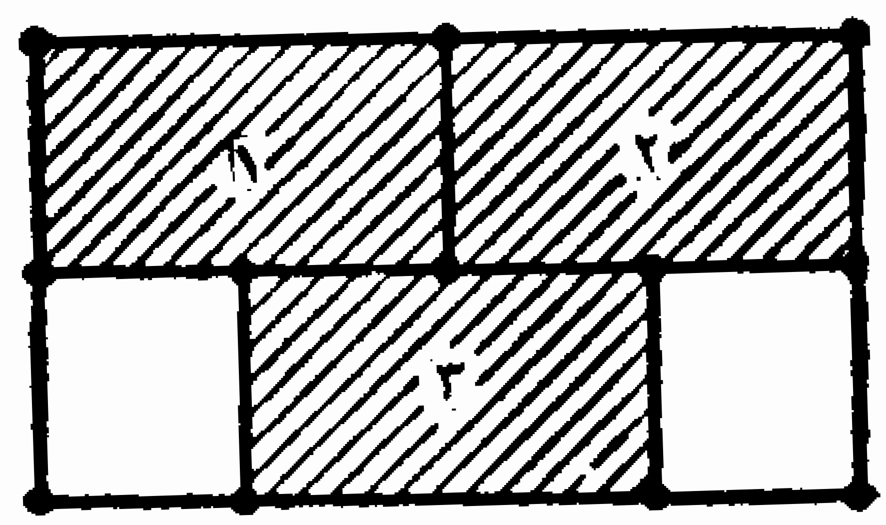
۴۶۱. همهٔ وجه‌های یک چند وجهی محدب، مثلث‌اند. ثابت کنید، هر یال این چندوجهی را، می‌توان طوری به رنگ قرمز یا آبی در آورد که، بتوانیم از هر راس به رأس دیگر، تنها روی یال‌های قرمز، و همچنین، تنها روی یال‌های آبی حرکت کنیم.

۴۶۲. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n، این نابرابری درست است:

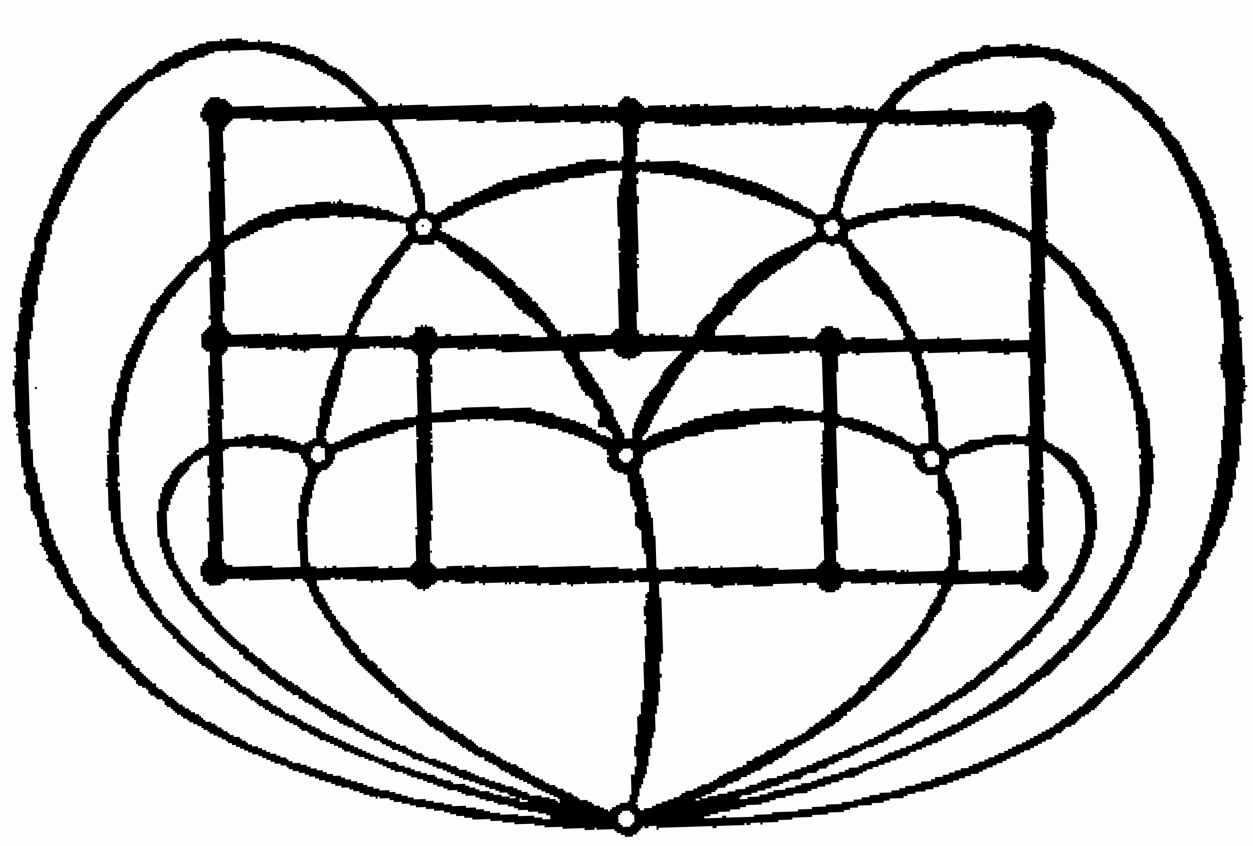
$$(۲n+۱)^n \geqslant (۲n)^n+(۲n-۱)^n$$

حل، راهنمائی، پاسخ

۱. فرض‌می‌کنیم، بتوانیم این‌خط شکسته را رسم‌کنیم. چون دورهٔ هر یك از بخش‌های ۱، ۲ و ۳، که در شکل ۱۹ هاشور خورده‌اند، شامل پنج پاره‌خط راست است و خط شکسته باید هرکدام ازاین پاره‌خط‌های راست را، درست یکبار قطع کند، بنابراین، هر یك از این سه بخش، باید شامل یکی از دو انتهای خط شکسته باشد (اگر در یکی از این بخش‌ها، انتهائی از خط شکسته نباشد، آن وقت، خط شکسته باید به تعداد مرتبه‌هایی که به آن وارد شده است، به همان تعداد هم از آن خارج شده باشد، یعنی باید پاره خط‌های راست مرزی را، به تعداد زوج قطع کرده باشد). ولی خط شکسته، تنها دو انتها دارد. تناقض حاصل، درستی حکم مساله را ثابت می‌کند.



شکل ۱۹



شکل ۲۵

▽ همین راه‌حل را می‌توان، به صورت دیگری بیان کرد. شکل ما، صفحه را به ۶ حوزه تقسیم کرده است. در هر یك از این حوزه‌ها، نقطه‌ای انتخاب می‌کنیم و، آن را، «پای تخت» حوزه می‌نامیم؛ و برای هر یك از ۱۶ پاره‌خط راست، «جاده»ای در نظر می‌گیریم که این پاره‌خط راست را قطع و پای تخت‌های دوحوزهٔ مجاور آن را به هم به وصل کرده باشد (شکل ۲۰). از این شبکهٔ جاده‌ها نمی‌توان به نحوی عبور کرد که، از هر جاده، تنها یکبار گذشته باشیم: زیرا ۴ پای تخت وجود دارد که، از هرکدام آن‌ها، به تعداد فردی جاده می‌گذرد. و برای این‌که بتوان برای مسیرخود درروی جاده‌ها، راهی پیدا کرد که، از هر جاده تنها یکبار عبور کنیم، لازم است (و به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که، کافی است) که، تعداد «پای تخت‌های فرد»، برابر ۰ یا ۲ باشد.

۲. $ABCD$ را مستطیل مفروض و LN را، مماس‌مشترك دایره‌های ۱ و ۳ (به مرکز نقطه‌های A و C) می‌گیریم. از نقطهٔ O، مرکز مستطیل، عمود OM را بر خط راست LN رسم می‌کنیم. چهارضلعی $ALNC$ یك ذوزنقه، و OM پاره‌خط راستی است کـه وسط دو ساق آن را به هم وصل کرده است، به نحوی که

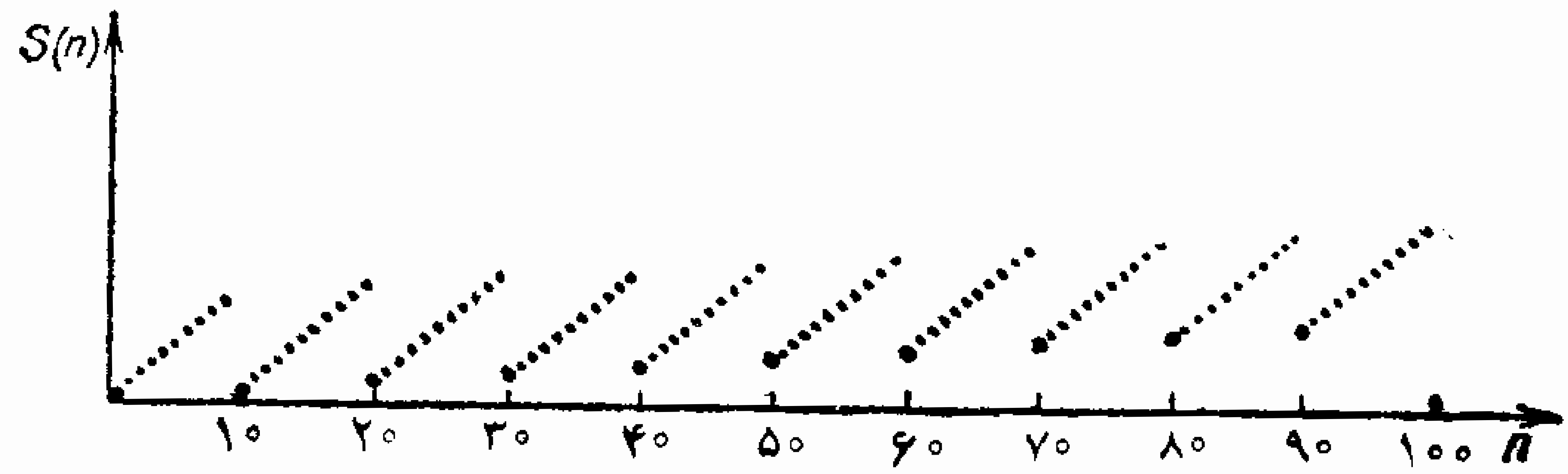
$$OM = \frac{۱}{۲}(r_۱ + r_۳)$$

فاصلهٔ نقطـهٔ O تا ممـاس مشترك دوم همین دو دایره، بازهـم برابر $\frac{۱}{۲}(r_۱ + r_۳)$ می‌شود.

به‌همین ترتیب ثابت‌می‌شود که، فاصلهٔ O، تاهریك ازمماس مشترك‌های دو دایرهٔ دیگر، برابر است با $\frac{۱}{۲}(r_۲ + r_۴)$. چون، بنا به‌فرض، باید داشته باشیم: $r_۱ + r_۳ = r_۲ + r_۴$، بنابراین نقطهٔ O، از هرچهار مماس مشترك به یك فاصله است، یعنی مرکز دایرهٔ محاطی چهارضلعی است کـه بوسیلهٔ این مماس‌ها تشکیل می‌شود.

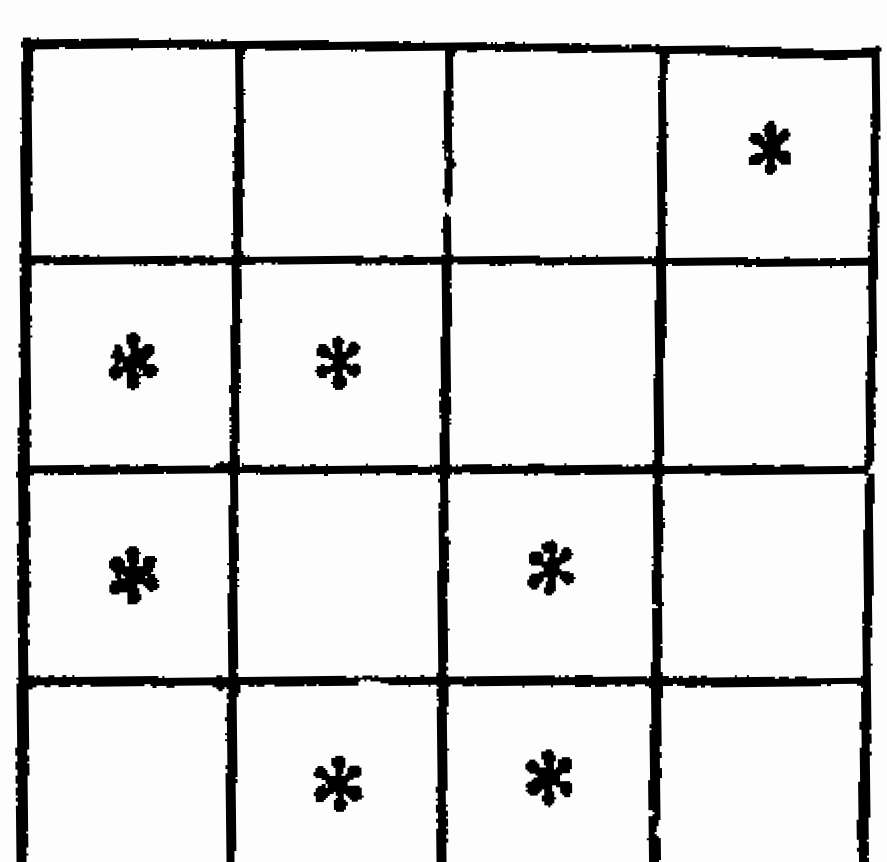
۳. بین بیست عدد نخستین از عددهای مفروض، دو عدد وجود دارد که به صفر ختم می‌شوند (در دستگاه دهدهی عددنویسی).

دست‌کم، در یکی از این دو عدد، رقم قبل از صفر، برابر ۹ نیست. این عدد را N، و مجموع رقم‌های آن را s می‌گیریم. در این صورت، عددهای N، $N+۱$، $N+۲$، ...، $N+۹$، $N+۱۹$، جزو ۳۹ عدد مفروض‌اند و مجموع رقم‌های آن‌ها، به‌ترتیب برابر است با: s، $s+۱$، $s+۲$، ...، $s+۱۰$. ولی بین ۱۱ عدد متوالی، دست‌کم یکی، بر ۱۱ بخش‌پذیر است.



شکل ۲۱

▽ به‌طور کلی، برای هر ... ،$m = ۲$، ۳ می‌توان کوچکترین عدد c_m را طوری پیدا کرد که، بین هر c_m عدد طبیعی متوالـی، دست کم در مورد یکی، مجموع رقم‌ها بر m بخش‌پذیر باشد (برای $m < ۲۰$، کافی است رفتار تابع «مجموع رقم‌های عدد n» را، در محدودهٔ صد عدد مطالعه کنیم؛ نمودار این تابع در شکل ۲۱ داده شده است)؛ در چند حالت خاص داریم: $c_۲ = ۳$، $c_۳ = ۵$، ...، $c_{۱۰} = ۱۹$، $c_{۱۱} = ۳۹$، $c_{۱۲} = ۵۹$.



شکل ۲۲

۴. روشن است که، شکل ۲۲، با هفت ستاره‌ای که در خانه‌های آن گذاشته‌ایم، با شرط مساله سازگار است.

اگــر تعداد ستاره‌ها برابر ۶ یا کمتر باشد، آن وقت، دوستون پیدا می‌شود که، در هرکدام از آن‌ها، حداکثر یك ستاره وجود دارد. دوستون دیگر را حذف می‌کنیم. در این صورت، حداکثر دو ستاره باقی‌می‌ماند که، با حذف سطرهایی که این دو ستاره در آن‌ها قرار دارند، دیگر ستاره‌ای باقی نمی‌ماند.

▽ بررسی‌حالت‌کلی این‌مساله، جالب است: حداقل‌تعداد ستاره‌هایی که می‌توان در یك جدول $m \times n$ قرار داد، چقدر می‌تواند باشد تا اگر k ستون و l سطر را حذف کنیم، دست‌کم، یك ستاره باقی بماند (در این جا، k، l، m و n عـددهایی طبیعی‌اند و $m>k$، $n>l$). ولی حل این مساله، حتی برای $m=n$ و $k=l=n-2$، بسیار دشوار است (مسالهٔ ۲۰۸ را ببینید که، در آن جا، $n=7$ و $n=13$).

۵. a) از برهان خلف استفاده وفرض می‌کنیم، دوباره، با چهار عدد نخستین، یعنی $(a، b، c، d)$ برخورد کنیم.

ابتدا ثابت می‌کنیم که، در این صورت $abcd=1$.

$abcd=p$ می‌گیریم. در این صورت، حاصل ضرب عددهای گروه دوم برابر p^2، حاصل‌ضرب چهار عدد گـروه سوم برابر p^4، حاصل‌ضرب عددهای گروه چهارم برابر p^8 وغیره می‌شود. روشن است که، برای $p\neq 1$، در دنبالهٔ این حاصل‌ضرب‌ها، نمی‌توان به دو عدد برابر رسید و، بنابراین، همهٔ گروه‌ها، با هم فرق دارند. به‌این‌ترتیب $p=1$.

اکنون، گروه چهار عددی دوم را درنظرمی‌گیریم: ab، bc، cd، da. چون $abcd=1$، به سادگی می‌توان تحقیق کرد که گروه چهارم، به صورت عددهای b^2c^2، c^2d^2، d^2a^2، a^2b^2 درمی‌آید. به این ترتیب، گروه چهارم، از مجذور عددهای گروه دوم و جابه‌جایی آن‌ها، به دست می‌آید. به همین ترتیب، می‌توان از گروه چهارم عددها، گروه ششم و، سپس، از آن، گروه هشتم و غیره را به دست آورد.

اگر همهٔ عددهای گروه چهارم، برابر واحد نباشند، آن وقت، بزرگترین آن‌ها، از واحد بزرگتر است. بنا براین، بزرگترین عدد، از چهار عدد گروه $2n$ام، همراه با n، تا بی‌نهایت ترقی می‌کند؛ و این، متناقض با آن است که، به‌طور متناوب، تکرار شوند.

به این ترتیب $ab = bc = cd = da = 1$، که از آن‌جا، به سادگی به دست می‌آید: $a = b = c = d = 1$.

b) به سادگی روشن می‌شود که، حکم‌مساله، برای $n = 1$ درست‌است. فرض می‌کنیم، حکم، برای $n = k$ درست باشد و ثابت می‌کنیم که، دراین صورت، برای $n = k + 1$ هم درست است. سه سطر اول را می‌نویسیم:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots,\ x_{2^{k+1}};\quad (1)$$

$$x_1 x_2,\ x_2 x_3,\ x_3 x_4,\ \ldots,\ x_{2^{k+1}} x_1;$$

$$x_1 x_3,\ x_2 x_4,\ x_3 x_5,\ \ldots,\ x_{2^{k+1}} x_2;$$

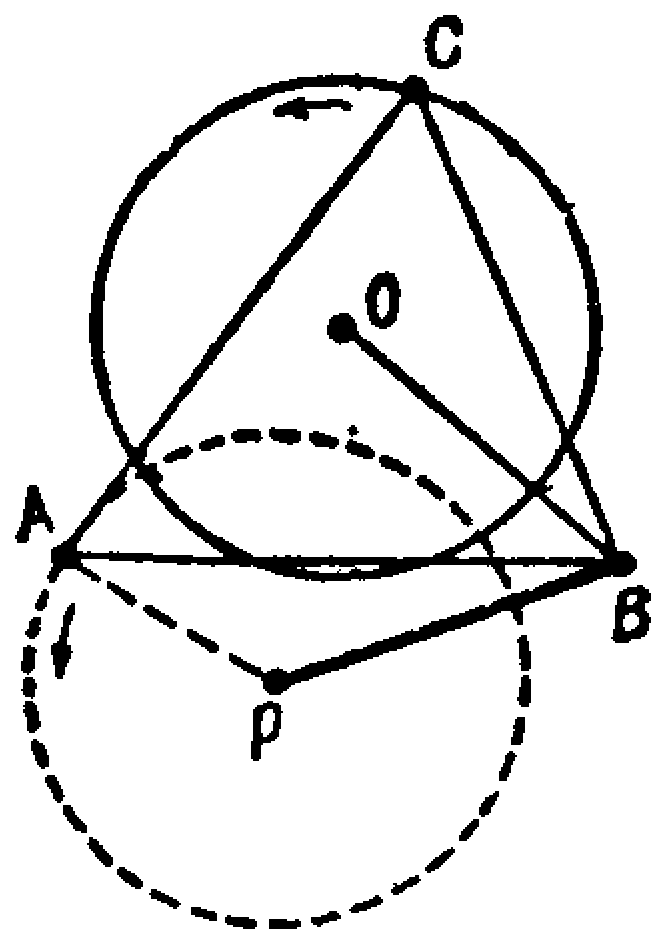
به سادگی می‌بینیم که، عددهای ردیف فرد وعددهای واقع در ردیف زوج، سطرهای

$$x_1,\ x_3,\ \ldots,\ x_{2^{k+1}-1} \text{ و } x_2,\ x_4,\ \ldots,\ x_{2^{k+1}}$$

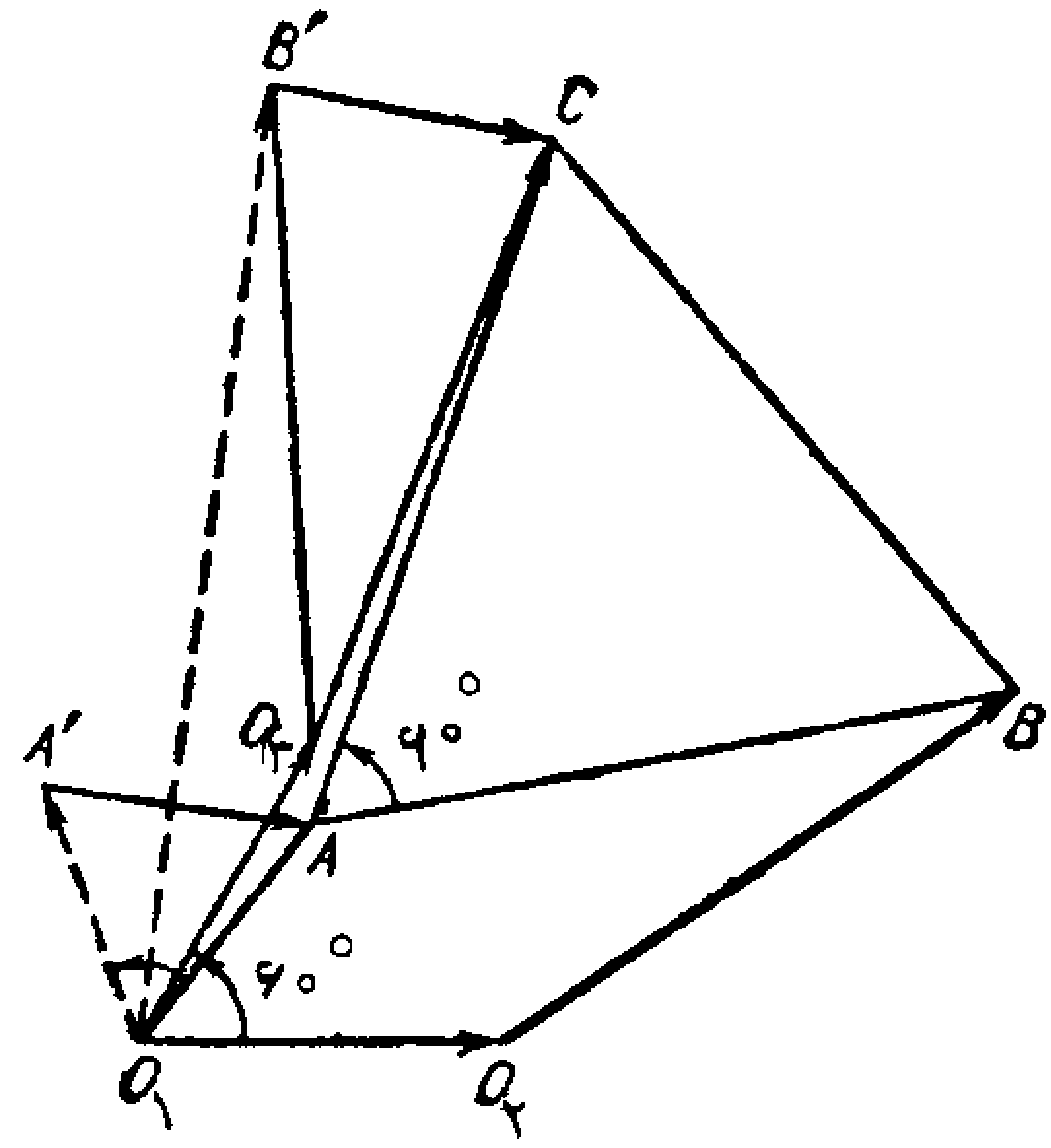
را به وجود می‌آورند که، هر کدام از آن‌ها طولی برابر 2^k دارد و، بنا بر فرض استقرا، سرانجام، به واحدهای مثبت می‌رسند. بنا براین، سطر (۱) هم، بعد از برداشتن گام‌هایی، منجر به‌واحدهای مثبت می‌شود.

▽ می‌توان ثابت کرد که ازسطر x به‌طول $m = 2^k.r$ (r، عددی‌فرد است)، تنها وقتی می‌توان به سطری با واحدهای مثبت رسید که، x از rبخش مساوی به طول 2^k تشکیل شده باشد، یعنی دورهٔ تناوبی برابر 2^kداشته باشد.

۶. a) فرض می‌کنیم $\overrightarrow{O_1O_3}$، برداری باشد که ازدوران بردار $\overrightarrow{O_1O_2}$ به اندازهٔ ۶۰ درجه (در همان جهتی که از دوران $\overrightarrow{AB}$، بردار $\overrightarrow{AC}$ به دست می‌آید) به دست آمده است؛ در همین دوران دور O_1، تصویر A و B را



شکل ۲۴



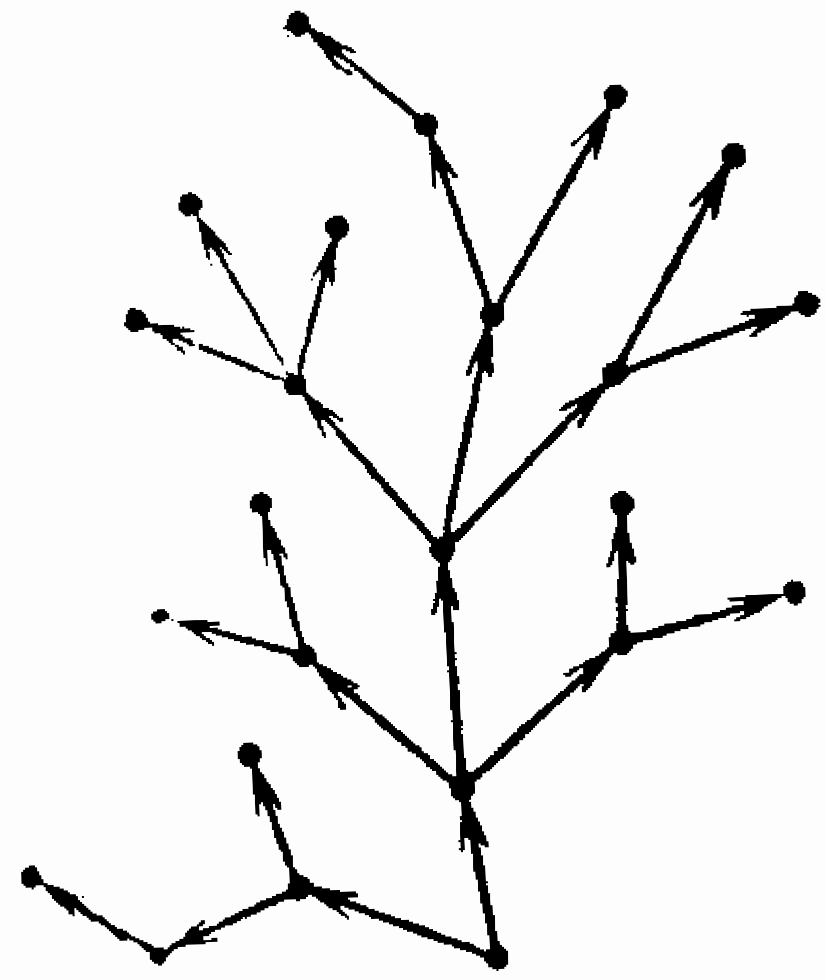
شکل ۲۳

A' و B' می‌گیریم. ضمن دوران یکنواخت بردارهای $\overrightarrow{O_1A}$ و $\overrightarrow{O_2B}$، مثلث $O_1A'A$ هم دور O_1، و بردارهای $\overrightarrow{O_2B'}$ و $\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{B'C}$ و در نتیجه مجموع آن‌ها $\overrightarrow{O_2C}$ هم دور O_2، با همان سرعت زاویه‌ای دوران می‌کنند (شکل ۲۳).

b) پاسخ: ۵. نقطهٔ B را به فاصلهٔ ۳ از P تثبیت می‌کنیم (شکل ۲۴). ضمن حرکت A روی محیط دایرهٔ به شعاع ۲ و به مرکز P، رأس C روی محیط دایرهٔ به شعاع ۲، که مرکز آن به فاصلهٔ $OP=3$ از P قرار دارد، حرکت می‌کند (مثلث OPB، متساوی‌الاضلاع است). دورترین نقطهٔ محیط این دایره از P، به فاصلهٔ $CO+OP$ یعنی ۵، قرار دارد.

▽ در نابرابری $PC \leqslant AP+PB$ هم (برای هر مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و هر نقطهٔ P)، وقتی به برابری می‌رسیم که، نقطهٔ P، روی کمان AB از دایره محیطی مثلث ABC (کمانی که شامل رأس C نیست) باشد.

۷. بین همهٔ جدول‌هایی که می‌توان از تغییر علامت سطرها و ستون‌ها به دست آورد، آن را انتخاب می‌کنیم که، مجموع همهٔ عددهای واقع در آن، حداکثر باشد. این جدول T (با حداکثر مقدار ممکن مجموع عددها) وجود دارد، زیرا مجموعهٔ روش‌های تغییر علامت‌ها در جدول $m \times n$، مجموعه‌ای متناهی و دارای 2^{mn} عضو است (تعداد روش‌های ممکن، برای تغییر علامت‌ها در سطرها و ستون‌ها، در عمل، از این هم کمتر است: 2^{m+n-1}). در جدول



شکل ۲۵

T، مجموع عددها درهرسطر وهرستون، عددی غیرمنفی‌است. در واقع، اگر مجموع عددها در یك سطر (یا یك ستون) از جـدول T، منفی باشد، آن‌وقت با تغییر علامت عددها در این سطر (یا ستون)، به جدولی می‌رسیم که، مجموع عددهای آن بیشتر از مجموع عددهای جـدول T می‌شود که، نوع انتخاب جدول T را، نقض می‌کند.

۸. یکی ازنقطه‌ها را «ریشه» می‌نامیم. هریك از $n-1$ نقطهٔ باقی‌مانده را، در تناظر با آخرین پاره‌خط مسیری قرار می‌دهیم که از «ریشه» به این نقطه می‌رود (بنا بر شرط، این مسیر، منحصر به فرد است). این تناظر، یعنی تناظر بین مجموعهٔ $n-1$ نقطه و مجموعهٔ همهٔ پاره‌خط‌ها، یك به یك است. اگر روی همهٔ پاره‌خط‌های راستی که از «ریشه» آغاز شده‌اند، در مسیری که به سمت نقطه‌های دیگـر می‌روند، علامت پیکان بگذاریم (شکل ۲۵)، آن وقت، به هر نقطه (به جز ریشه)، یك پیکان می‌رسد.

▽ گرافی که، در این مساله، مورد مطالعه قرارگرفته است «درخت» نامیده می‌شود (ضمیمهٔ ۱۱)؛ در این جا، یکی از «رأس‌های» گراف را به عنوان «ریشه» انتخاب کرده‌ایم. یادآوری می‌کنیم، این مساله را، با روش استقرای ریاضی (ضمیمهٔ ۱) هم می‌توان حل کرد.

۹. بزرگترین‌مقسوم‌علیه‌مشترك دوعدد b و $p-a$ را برابرdمی‌گیریم:

$$b=kd \quad و \quad p-a=ld$$

در این صورت، k و l نسبت به هم اول می‌شوند. سپس داریم:

$$ak+bl=\frac{ab}{d}+\frac{(p-a)\,b}{d}=pk$$

یعنی $ak+bl$ بر p بخش‌پذیر است.

۱۰. پاسخ: مناسب‌ترین روش، برای کولیا، روش اول است؛ درهر یك از روش‌های دوم و سوم، به شرط بازی آگاهانه، گردوی کمتری به‌او می‌رسد. (همان طور که خواهیم دید، در این تقسیم، بحث تنها بر سر یك گردو است.)

فرض کنیم په‌تیا، گردوها را، به نحوی، به دو بخش کرده باشد (در یك بخش a و در دیگری b گردو؛ $a<b$)؛ کولیا می‌تواند بخش بزرگتر را طوری تقسیم کند که در یکی ۱ گـردو و در دیگری $b-۱$ گردو وجود داشته باشد. همین دو بخش، کـوچکترین و بزرگترین بخش‌ها را تشکیل می‌دهند (واین، بستگی به تقسیم بخش شامل a گردو ندارد). به این ترتیب، باروش اول، به تعداد $n+۱ \geqslant b$ گردو به‌کولیا می‌رسد. (اگر په‌تیا $a=n$ و $b=n+۱$ گرفته باشد، سهم او در این روش، یك گردو کمتر از سهم کولیا می‌شود.)

در روش دوم، اگر بعـد از نخستین حـرکت داشته باشیم $a=۲$ و $b=۲n-۱$، بهترین نوع تقسیم برای کولیا عبارت است از

$$۲=۱+۱ \text{ ، } ۲n-۱=(n-۱)+n$$

که در ایـن صورت، n گردو به کولیا می‌رسد. (اگر حرکت اول، به نحو دیگری باشد، کولیا می‌تواند تقسیم را طوری انجام دهد که کمتر از $n+۱$ گردو به او نرسد.)

درروش سوم، اگر $a=n$ و $b=n+۱$ باشد، کولیا نمی‌تواند طوری تقسیم‌ها را انجام دهد که بیش از $n+۱$ گردو به او برسد (مجموع دو بخش متوسط و مجموع دو بخش کوچکتر و بزرگتر، همیشه یکی از دو مقدار n یا $n+۱$ را اختیار می‌کنند). دراین صورت، وقتی که کولیا یك گردو به په‌تیا بدهد، سهم په‌تیا بیشتر می‌شود.

۱۱. چـون $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n عددهایی طبیعی‌اند، بنابراین می‌تـوان

شماره‌های i_1، i_2، …، i_n را طوری در نظر گرفت که داشته باشیم:

$$a_{i_1} \leqslant a_{i_2} \leqslant \cdots \leqslant a_{i_n} \leqslant \cdots$$

(a_{i_1}، کوچکترین عدد در دنبالهٔ a_n؛ a_{i_2}، کوچکترین عدد از بقیهٔ جمله‌های دنبالهٔ a_n وغیره). به‌همین ترتیب، از دنبالهٔ شماره‌های i_1، i_2، …، i_n، … می‌توان دنبالهٔ j_1، j_2، …، j_n، … را طوری در نظر گرفت که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$b_{j_1} \leqslant b_{j_2} \leqslant \cdots \leqslant b_{j_n} \leqslant \cdots$$

روشن است که، در این ضمن، دنبالهٔ a_{j_1}، a_{j_2}، …، a_{j_n}، …، غیر نزولی باقی می‌ماند. اکنون، کافی است، ازدنبالهٔ c_{j_1}، c_{j_2}، …، c_{j_n}، …، دنباله‌ای غیرنزولی را انتخاب کنیم. در این صورت

$$a_{k_1} \leqslant a_{k_2} \leqslant \cdots \leqslant a_{k_n} \leqslant \cdots$$

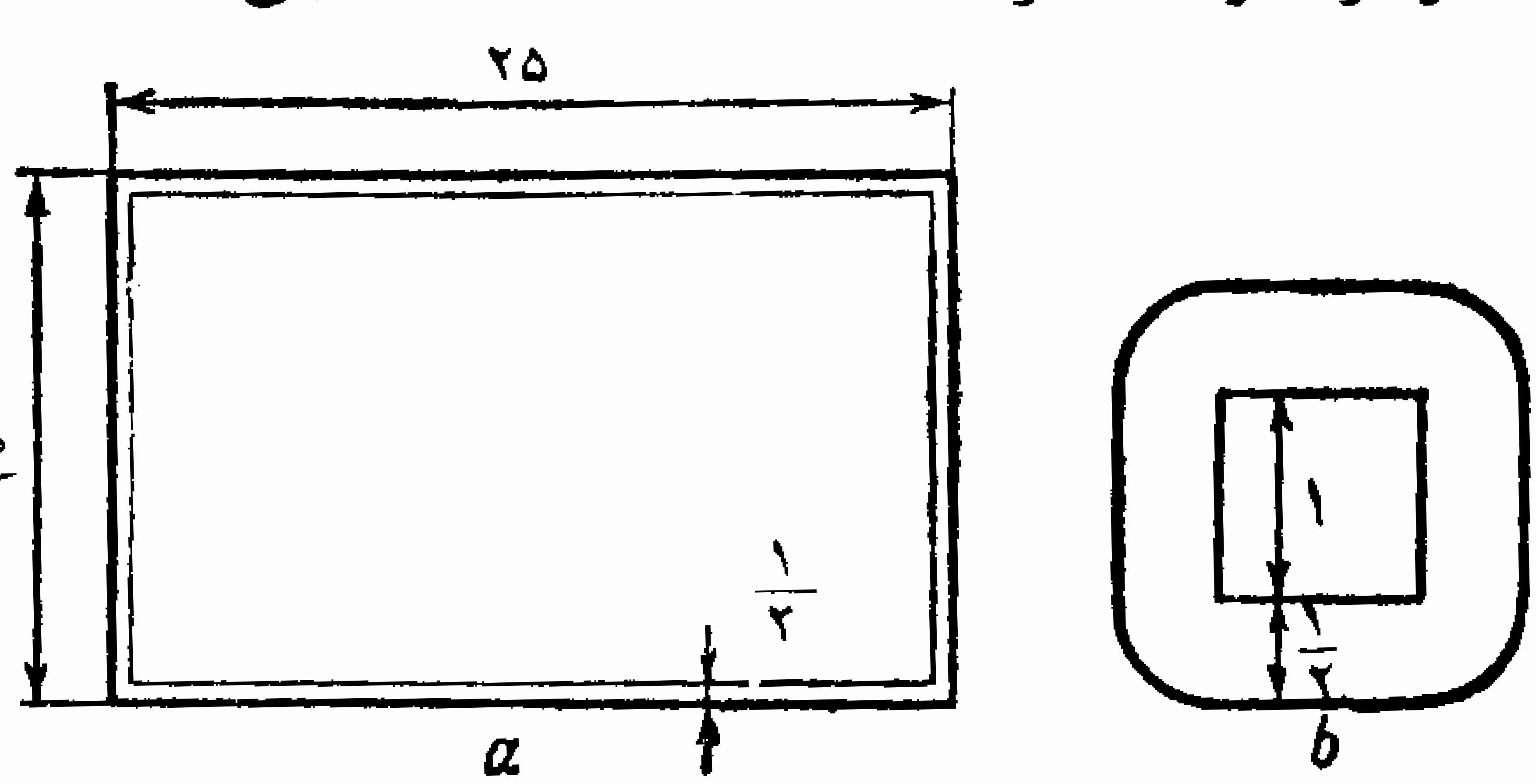
$$b_{k_1} \leqslant b_{k_2} \leqslant \cdots \leqslant b_{k_n} \leqslant \cdots$$

$$c_{k_1} \leqslant c_{k_2} \leqslant \cdots \leqslant c_{k_n} \leqslant \cdots$$

که از آن‌ها، درستی حکم مساله ثابت می‌شود.

▽ ضمن حل مساله، از این گزاره استفاده کردیم که، در هرمجموعهٔ عددهای طبیعی (ولو نامتناهی)، کوچکترین عدد وجود دارد. در واقع، این گزاره، با نظام استقرای ریاضی، هم ارز است (ضمیمهٔ ۱).

۱۲. مرکز دایرهٔ به‌قطر واحد، باید درون مستطیلی باشد که، ضلع‌های



شکل ۲۶

آن، به فاصله‌ای بیش از $\frac{۱}{۲}$ از ضلع‌های مستطیل اصلی قرار دارند و، در ضمن، دردرون مستطیل اصلی باشد؛ یعنی این مرکز، باید درددرون چارچوبی باشد که در شکل ۲۶ — a نشان داده شده است. مساحت این مستطیل درونی، برابر است با $۱۹ \times ۲۴ = ۴۵۶$.

به‌جز این، مرکز این دایره، باید به فاصلهٔ بیش از $\frac{۱}{۲}$ از محیط هر یك از مربع‌ها باشد، یعنی در بیرون هر شکلی به مساحت $۳ + \frac{\pi}{۴}$، که در شکل ۲۶ — b دیده می‌شود. حتی اگر این شکل‌ها یکدیگر را قطع نکنند، مجموع مساحت‌های آن‌ها چنین می‌شود:

$$۱۲۰\left(۳+\frac{\pi}{۴}\right) = ۳۶۰ + ۳۰\pi < ۳۶۰ + ۳۰ \times ۳/۲ = ۴۵۶$$

بنابراین، این شکل‌ها، نمی‌توانند مستطیل به‌مساحت ۴۵۶ را بپوشانند و، در نتیجه، دایره‌ای با قطر واحد پیدا می‌شود که هیچ کدام از مربع‌ها را قطع نکند.

۱۳. هرمیانه، مثلث را به دومثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند. بنابراین (شکل ۲۷) داریم:

$$S_{ABC} = S_{CBB'} = S_{CB'C'}$$

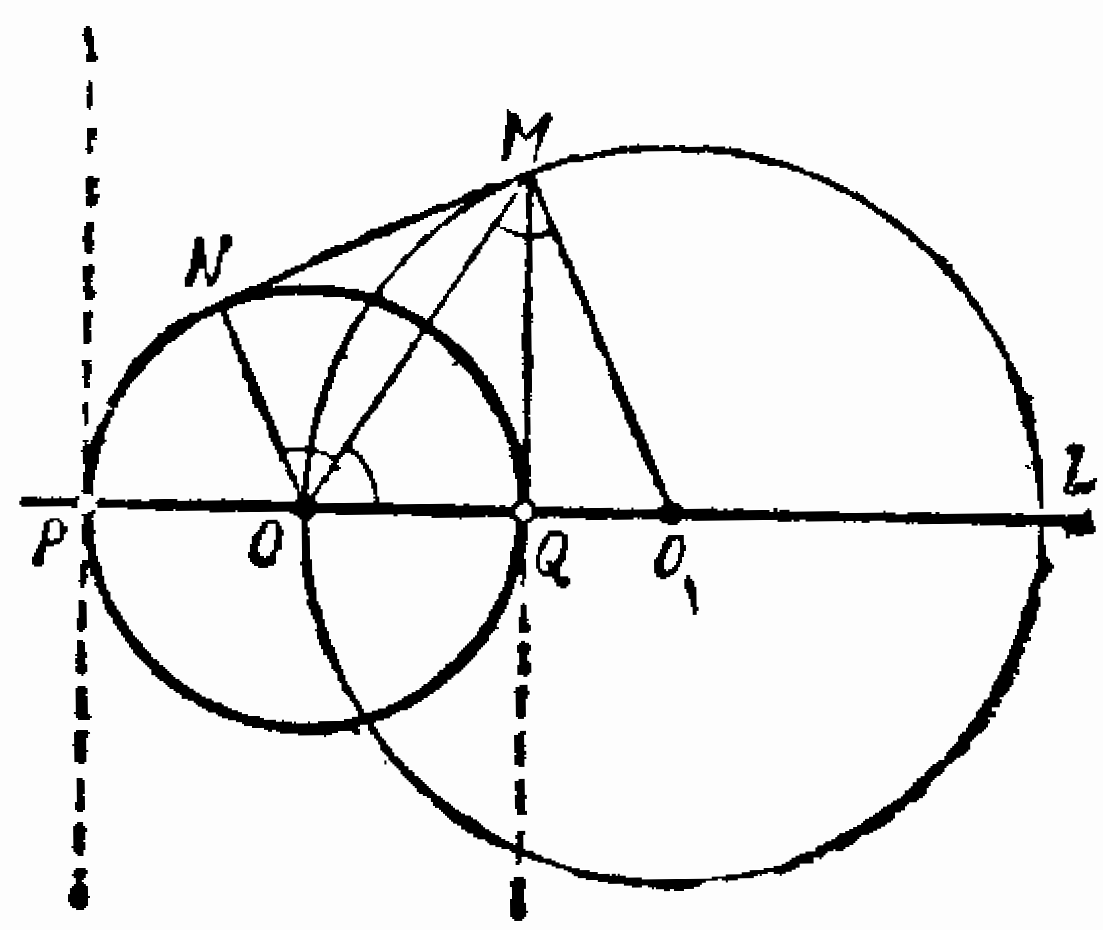
که از آن جا نتیجه می‌شود: $S_{BB'C'} = ۲S_{ABC}$.

به همین ترتیب، می‌توان به دست آورد:

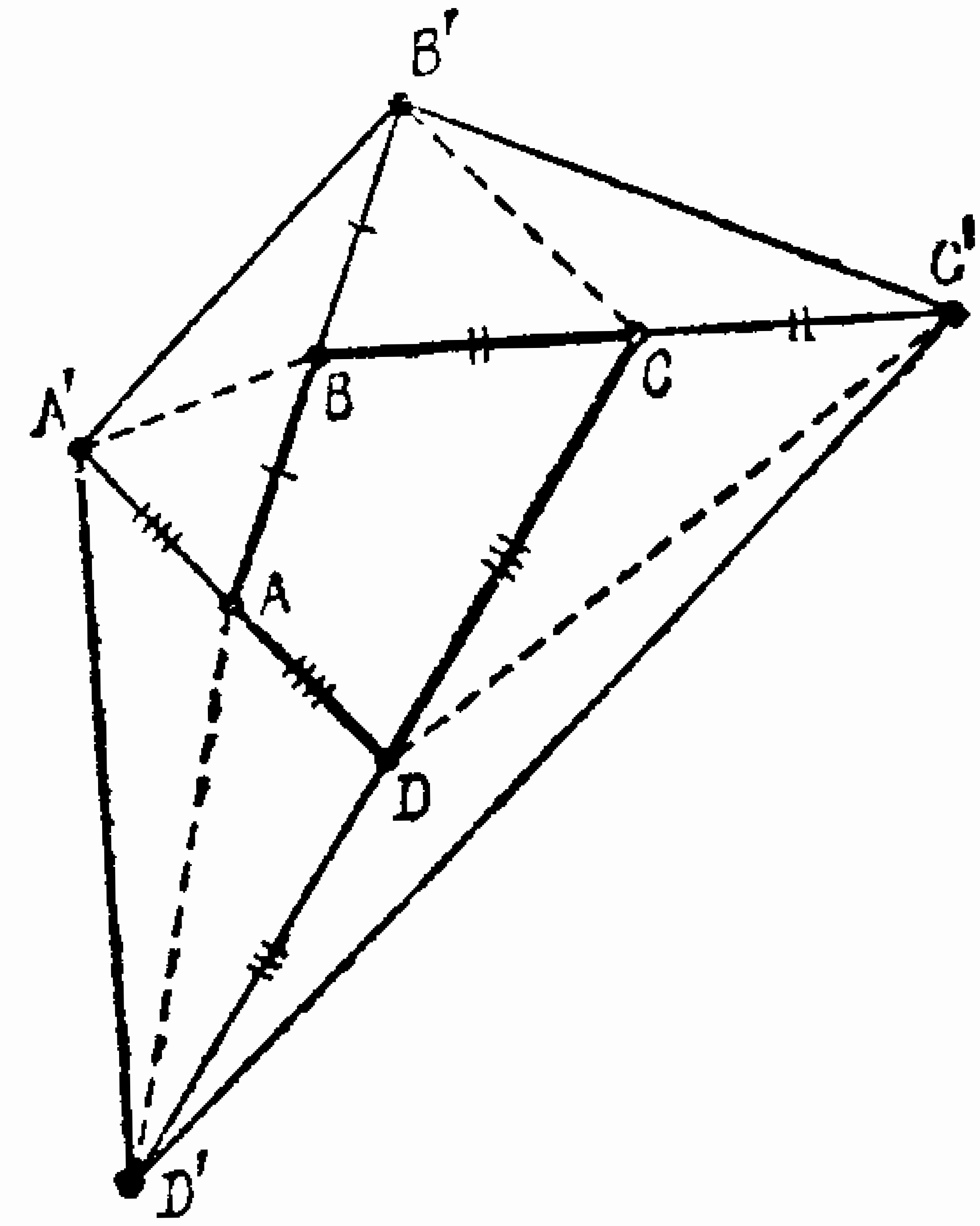
$$S_{CD'C'} = ۲S_{BCD};\ S_{DD'A'} = ۲S_{CDA};\ S_{AA'B'} = ۲S_{DAB}$$

و از مجموع این چهار برابری، به‌دست می‌آید:

$$S_{BB'C'} + S_{CC'D'} + S_{DD'A'} + S_{AA'B'} =$$
$$= ۲(S_{ABC} + S_{BCD} + S_{CDA} + S_{DAB}) = ۴S$$



شکل ۲۸



شکل ۲۷

به‌این ترتیب: $S_{A'B'C'D'} = 4S + S = 5S$.

۱۴. پاسخ: مکان مطلوب، عبارت است از دو خط راست مماس بر دایرهٔ s درنقطه‌های P و Q (به‌استثنای خود نقطه‌های P و Q).

نقطهٔ تماس مماس مشترك دودایرهٔ s و s' بادایرهٔ s را، N می‌نامیم. دراین‌صورت

$$\widehat{NOM} = \widehat{OMO_1} = \widehat{MOO_1}$$

($ON \| O_1M$ و $OO_1 = O_1M$). بنابراین زاویهٔ MQO قائمه است وخط راست MQ درنقطهٔ Q بردایرهٔ s مماس‌است (شکل۲۸).

ازطرف دیگر، از هرنقطهٔ واقع برخط راست جـواب، به شرطی‌که روی محیط s نباشد، می‌توان دایره‌ای گذراندکه مرکزش روی خط راست l باشد و، درضمن، از O بگذرد.

۱۵. بنابه‌فرض $a_1 - a_0 \geqslant 1$. سپس به‌ترتیب

$$a_2 - a_1 = 2(a_1 - a_0);\ a_3 - a_2 = 2(a_2 - a_1);\ \dots;$$

$$a_{100} - a_{99} = 2(a_{99} - a_{98})$$

اگراین۹۹ برابری را درهم ضرب‌کنیم (دوطرف هریك ازبرابری‌ها،عددی

مثبت است)، سرانجام به‌دست می‌آید:

$$a_{۱۰۰}=a_{۹۹}+۲^{۹۹}\,(a_۱-a_۲)>۲^{۹۹}$$

▽ ارزیابی دقیق‌تررا می‌توان، به‌کمك استقرا به‌دست‌آورد:

$a_k\geqslant ۲^k$، $a_{k+۱}-a_k\geqslant ۲^k$، $(k=۱،۲،\ldots)$، $a_{۱۰۰}\geqslant ۲^{۱۰۰}$.

۱۶. فرض کنید: $P(x)=ax^۳+bx^۲+cx+d$. تفاضل

$$P(۶۲)-P(۱۹)=a(۶۲^۳-۱۹^۳)+b(۶۲^۲-۱۹^۲)+c(۶۲-۱۹)$$

بر ۴۳ بخش‌پذیراست ونمی‌تواند برابر واحد باشد.

▽ به‌طورکلی، برای هرچندجمله‌ای $P(x)$ با ضریب‌هـای درست، برای هر دو عـدد درست $x_۱$ و $x_۲$، تفاضل $P(x_۱)-P(x_۲)$ بر $x_۱-x_۲$ بخش‌پذیر است (ضمیمهٔ ۶).

۱۷. $p_۱$، $p_۲$، ...، p_n را حاصل‌ضرب‌های سطرها و $q_۱$، $q_۲$، ...، q_n را حاصل‌ضرب‌های ستون‌ها می‌گیریم. دراین‌صورت

$$p_۱p_۲\cdots p_n=q_۱q_۲\cdots q_n$$

زیرا، هرطرف‌این‌برابری، معرف حاصل‌ضرب همهٔ عددهای واقع درجدول است. این برابری، به‌معنای آن است که، اگر تعداد عددهای ۱ — در بین $p_۱$، $p_۲$، ... p_n زوج باشد، تعداد عددهـای ۱ — دربین $q_۱$ و $q_۲$، ...، q_n هم زوج است و اگر تعداد عددهای ۱ — در دنبالهٔ اول فرد باشد، دردنبالهٔ دوم هم فرداست. به‌این ترتیب، دربین دو $۲n$ عـدد $p_۱$، $p_۲$، ...، p_n، $q_۱$، $q_۲$، ...، q_n، تعداد عددهای ۱ — زوج و، بنابراین، تعداد عددهای ۱+هم زوج است. ولی‌چون n، عددی فرد است، تعداد عددهای ۱ — *نمی‌تواند* با تعداد عددهای ۱ + برابرباشد و، درنتیجه، مجموع

$$p_۱+p_۲+\cdots+p_n+q_۱+q_۲+\cdots+q_n$$

نمی‌تواند برابر صفرشود.

▽ این‌مجموع،می‌تواند با$۲n$، اختلافی برابر dداشته‌باشد، به‌شرطی که d مضربی از ۴ باشد. جالب است، با پیداکردن مثال‌های متناظر،روشن کنیدکه، برای هر $d=۴k$، $|k|<\frac{n}{۲}$، مجموع مربـوط می‌تـواند برابر

$2n-d$ شود.

۱۸. a و b را طول ضلع‌های BC و AC ازمثلث ABC می گیریم و فرض‌می‌کنیم، میانه‌های AD و BE تحت‌زاویهٔ قائمه، یکدیگررا قطع کرده باشند. پاره‌خط راست AC به طول b را درنظرمی گیریم و نقطهٔ F راروی آن طوری انتخاب می کنیم که داشته باشیم: $AF : FC = 3$. دراین‌صورت FD با BE موازی و زاویهٔ ADF برابر ۹۰ درجه می‌شود. به این ترتیب، می‌توان نقطهٔ D را پیداکرد: این نقطه، اولاً روی محیط دایره‌ای به قطر AF و ثانیاً روی محیط دایره‌ای به مرکز C وشعاع $\frac{1}{2}a$ قرار دارد. با به دست آوردن نقطهٔ D، نقطهٔ B هم به سادگی پیدا می‌شود. مساله وقتی جواب دارد که داشته باشیم: $2 > \frac{b}{a} > \frac{1}{2}$ و، در ضمن، مساله تنها یك جواب دارد.

▽ به سادگی می‌توان ثابت‌کردکه، در چنین مثلثی، برای ضلع‌سوم به طول c داریم:

$$c^2 = \frac{1}{5}(a^2 + b^2)$$

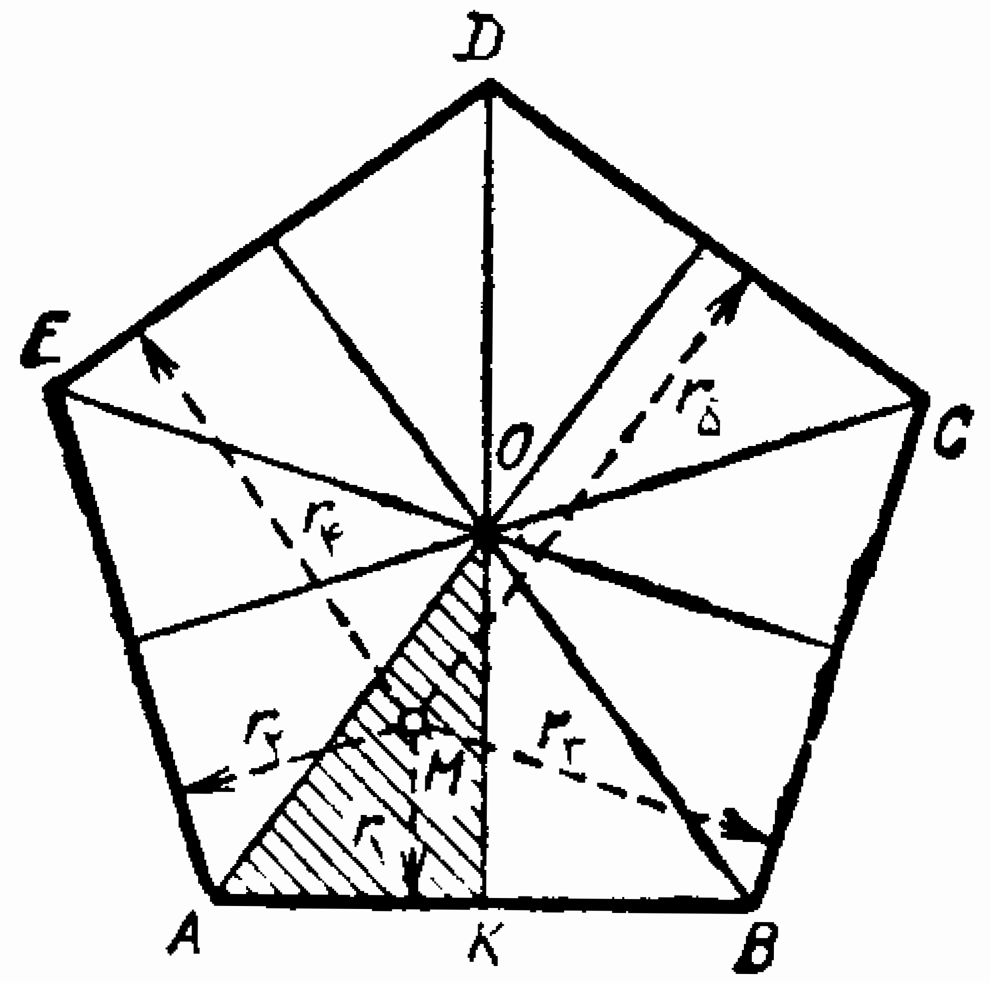
و از آن‌جا، راه دیگری برای رسم مثلث به دست آورد.

۱۹. از نابرابری $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$ نتیجه می‌شود:

$$(a^2+b^2)+(c^2+d^2) \geqslant 2(ab+cd) \geqslant 4\sqrt{abcd} = 4,$$

$$ab+cd \geqslant 2, \; bc+ad \geqslant 2, \; ac+bd \geqslant 2$$

▽ با استفاده از قضیهٔ کلی مربوط به واسطه‌های حسابی و هندسی، می‌توان مساله را به طریق دیگری حل کرد و، در ضمن، ثابت کرد که، برای هر n عدد مثبت به حاصل‌ضرب واحد، مجموع مجذورهای آن‌ها از n، و مجموع حاصل ضرب‌های دوبه‌دوی آن‌ها (که تعدادی برابر $\frac{1}{2}n(n-1)$ دارند) از $\frac{1}{2}n(n-1)$ کمتر نیست.



شکل ۲۹

۲۰. پاسخ: بیشترین مقدار برای رأس پنج‌ضلعی و کمترین مقدار برای وسط یکی از ضلع‌ها به دست می‌آید.

پنج ضلعی منتظم $ABCDE$ را، به وسیلهٔ محورهای تقارن آن، به ۱۰ مثلث تقسیم می‌کنیم. کافی است نقطهٔ M را، تنها در درون یکی از این مثلث‌ها، و مثلاً مثلث AOK مورد بررسی قراردهیم (شکل ۲۹). برای این که فاصلهٔ نقطهٔ M واقع در درون زاویه‌ای را تا ضلع‌های آن با هم مقایسه کنیم، کافی است روشن کنیم که، نقطهٔ M، در کدام طرف نیمساز این زاویه قراردارد. با توجه به این نکته، قانع می‌شویم که فاصلهٔ نقطهٔ M تا ضلع‌های پنج‌ضلعی: AB، AE، BC، DE و CD، به ترتیب صعودی است:

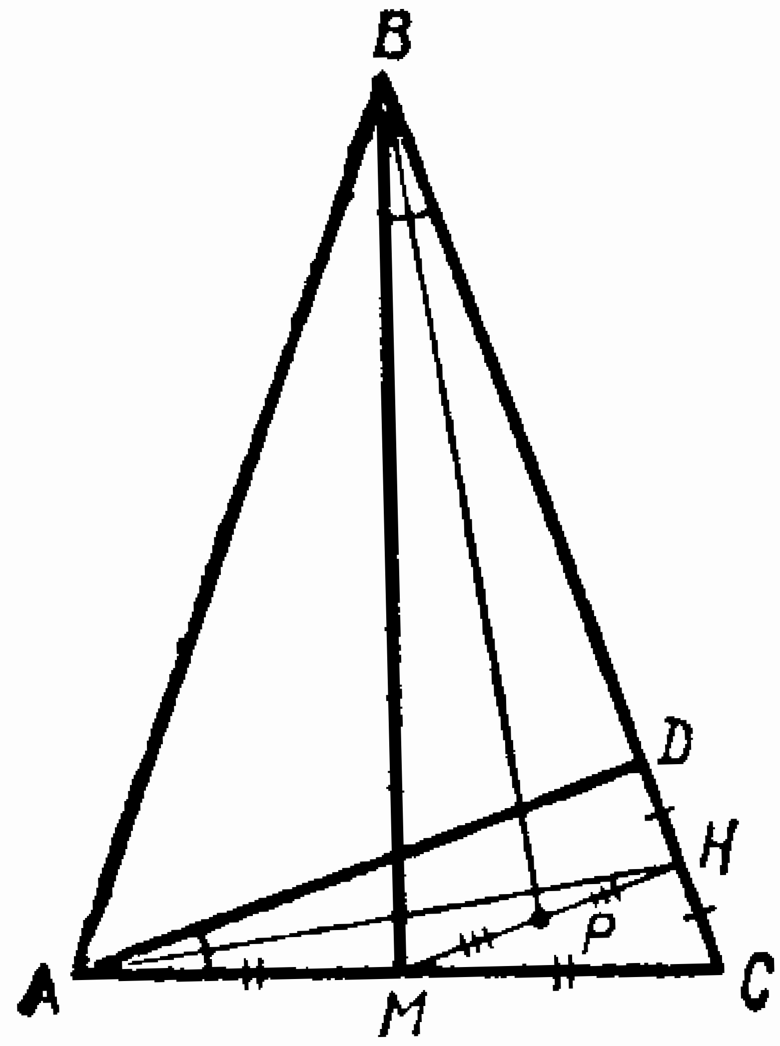
$$r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3 \leqslant r_4 \leqslant r_5$$

اکنون دیگر روشن است که فاصلهٔ r_3 وقتی به حداکثر خود می‌رسد که، نقطهٔ M، روی رأس A قرار گیرد، ووقتی به حداقل مقدار خود می‌رسد که، نقطهٔ M، بر نقطهٔ K منطبق باشد.

۲۱. پاسخ: $c = ۹$.

باقی‌ماندهٔ تقسیم مجموع رقم‌های هرعدد بر ۹، برابراست با باقی‌مانده تقسیم خودعددبر ۹ (ضمیمهٔ ۳). ازطرف دیگر $a \leqslant ۱۹۶۲ \times ۹ < ۱۹۹۹۹$؛

بنا براین $b \leqslant ۱ + ۴ \times ۹ = ۳۷$ و $c \leqslant ۹$



شکل ۳۰

۲۲. ارتفاع AD را در مثلث ABC رسم می‌کنیم (شکل ۳۰). در این صورت، در مثلث ADC، پاره‌خط راست MH ضلع DC را هم نصف می‌کند، یعنی $DH = CH$. مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ BHM و ADC متشابه‌اند، زیرا

$$\widehat{DAC} = ۹۰^\circ - \widehat{C} = \widehat{HBM}$$

اگر یکی از این مثلث‌ها را به اندازهٔ ۹۰ درجه دوران دهیم، ضلع‌های متناظر در آن‌ها، باهم موازی می‌شوند؛ درضمن میانه‌های آن‌ها، BP و AH هم، موازی با هم درمی‌آیند، یعنی قبل ازدوران، BP و AH برهم عمودند.

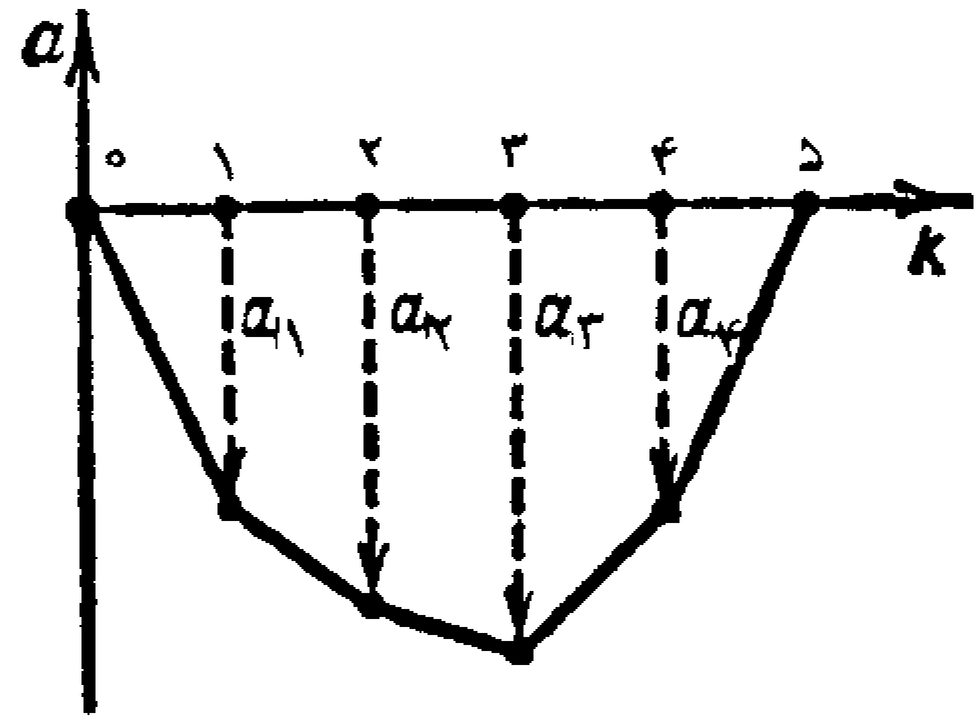
۲۳. پاسخ: ۱.

بین مثلث‌های بادوضلع a و b، باشرط‌های $۰ < a \leqslant ۱$ و $۱ \leqslant b \leqslant ۲$، حداکثر مساحت، مربوط به مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن $a = ۱$ و $b = ۲$ باشد (درواقع $s \leqslant \frac{ab}{۲} \leqslant ۱$، زیرا ارتفاع وارد بر ضلع b، از a تجاوز نمی‌کند). اکنون، و تراین مثاث $c = \sqrt{۵}$، با شرط $۲ \leqslant c \leqslant ۳$ سازگاراست؛ بنا براین، بین‌همهٔ این مثاث‌ها، مثلث قائم‌الزاویهٔ با ضلع‌های ۱، ۲ و $\sqrt{۵}$، حداکثر مساحت را دارد.

۲۴. خارج قسمت برابر است با

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۲xy - ۲yz - ۲zx$$

برای تحقیق، بهتراست فرض کنیم: $x - y = u$، $y - z = v$، دراین صورت



شکل ۳۱

$z-x=-(u+v)$ و، سپس، این اتحاد را ثابت کنیم:

$$(u+v)^5=u^5+v^5+5uv(u+v)(u^2+uv+v^2)$$

[به کمك بسط دوجمله‌ای (ضمیمهٔ ۶)].

۲۵. شکل ۳۱ به حل این مساله کمك می‌کند: خط شکستهٔ با رأس‌هایی در نقطه‌های $(k، a_k)$، محدب است، زیرا

$$a_{k+1}-a_k\geqslant a_k-a_{k-1}$$

(یعنی، ضریب‌زاویهٔ هرضلع، ازضریب‌زاویهٔ‌ضلع قبلی، بیشتراست)، به‌نحوی که همهٔ این نقطه‌ها، به‌جز دو انتها، در زیر محور Ok قرار دارند.

فرض می‌کنیم، به ازای مقداری از $m\geqslant 1$، داشته باشیم: $a_{m-1}\leqslant 0$ و $a_m>0$. در این صورت

$$a_n-a_{n-1}\geqslant a_{n-1}-a_{n-2}\geqslant\cdots\geqslant a_{m+1}-a_m\geqslant a_m-a_{m-1}>0$$

و بنابراین

$$a_n>a_{n-1}>\cdots>a_m>0$$

که با شرط $a_n=0$ متناقض است.

۲۶. جدولی $m\times n$ در نظر می‌گیریم و، استدلال را، با استقرا انجام می‌دهیم. درستی حکم، برای جدول 1×1 روشن است. فرض می‌کنیم، حکم مساله، برای هر تعدادی کمتر از $m+n$ عدد، درست باشد و ثابت می‌کنیم که، در این صورت، برای $m+n$ عدد هم درست است. کوچکترین

عدد، از بین $m+n$ عدد مفروض a_1، a_2، …، a_m، b_1، b_2، …، b_n را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم، این عدد، مثلاً a_1 باشد. a_1 را در گوشهٔ چپ و بالای جدول قرارمی‌دهیم و، سپس، سطراول را از جدول جدا می‌کنیم. اکنون باید‌مساله را، برای جدول $n \times (m-1)$ و گروه‌عددهای a_2،…،a_m، b_1-a_1، b_2، …، b_n حل کنیم‌که، بنا به فرض استقرء حل آن، برای ما ممکن است.

راه حل دوم. پاره‌خط راستی به طول

$$d=a_1+a_2+\cdots+a_m=b_1+b_2+\cdots+b_n$$

رسم و، آن را، با دو روش، تقسیم می‌کنیم: m پاره‌خط راست «قرمز» به طول‌های a_1، a_2، …، a_m و n پاره‌خط راست «آبی» به طول‌های b_1، b_2، …، b_n. روی‌هم $(m-1)+(n-1)$ نقطهٔ‌تقسیم و،متناظر با آن، $m+n-1$ پاره خط راست‌کوچك خواهیم داشت. این باقی می‌ماندکه طول هریك از این پاره‌خط‌های راست‌کوچك را (اشتراك پاره‌خط قرمز a_i با پاره‌خط آبی b_j) درخانهٔ متناظر آن درجدول (محل برخورد i امین سطر و j امین‌ستون) بنویسیم.

۲۷. نقطهٔ برخورد دایـره‌های اول، دوم، چهارم و پنجم را A؛ نقطهٔ برخورد دایره‌های‌اول، سوم، چهارم وپنجم را B؛ ونقطهٔ برخورد دایره‌های دوم، سوم، چهارم و پنجم را C می‌گیریم.

هر سه نقطهٔ A، B و C نمی‌توانند جدا از هم باشند، زیـرا این سه نقطه، بر محیط دایره‌های چهارم و پنجم قرار دارند و، دو دایره، نمی‌توانند بیش از دو نقطهٔ برخـورد داشته باشند. بنابراین، از سه نقطهٔ A، B و C، دو تا برهم منطبق‌اند (ضمیمهٔ ۹).

مثلاً فرض کنید $A=B$. دراین‌صورت، همهٔدایره‌ها، ازنقطهٔ A می‌گذرند.

۲۸. پاسخ: نفر سوم، از نفر هفتم برده است.

شطرنج بازانی‌که چهار مقام آخر را بـه دست آورده‌اند، روی هم ۶ بار با هم بازی کرده‌اند و، بنابراین، در این بازی‌ها، دست‌کم ۶ امتیاز کسب شده است. به این ترتیب، بازی‌کن مقام دوم، دست‌کم ۶ امتیازدارد.

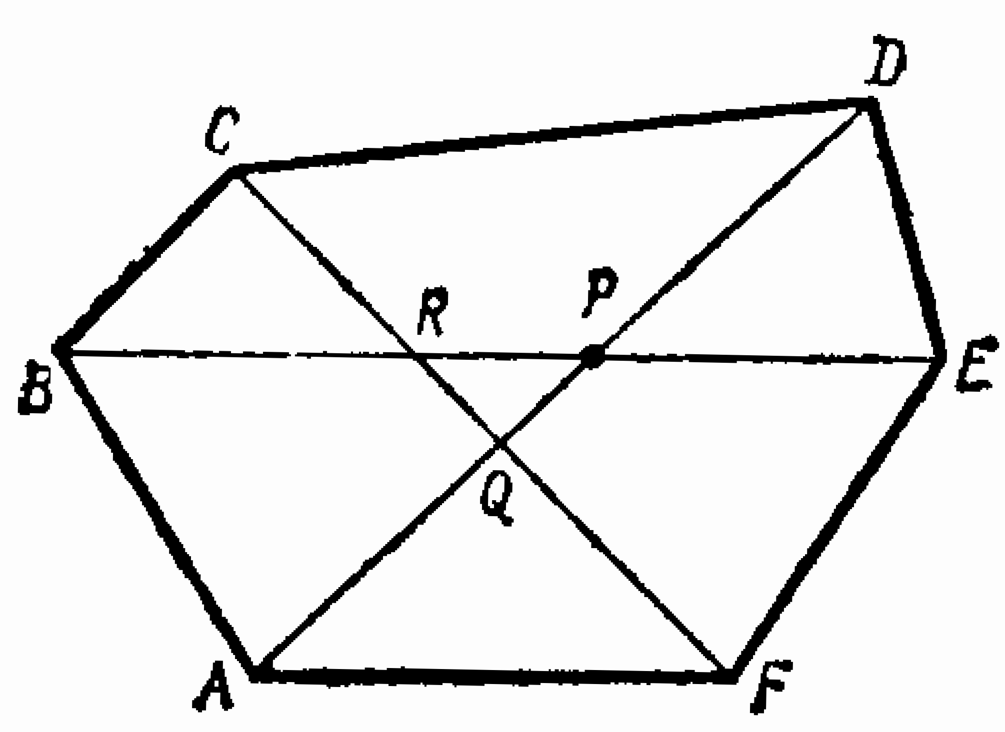
ازطرف دیگر، این شطرنج بازمقام دوم، نمی‌تواند بیش از ۶ امتیاز داشته باشد: اگربازی‌کن مقام اول ۷ امتیازآورده باشد، به معنای آن است که از نفر دوم برده است و نفردوم نمی‌تواند بیش از ۶ امتیاز داشته باشد؛ واگر اولی ۶/۵ امتیاز داشته باشد، بازهم دومی بیش از ۶ امتیاز ندارد. از این‌جا نتیجه می‌شود که، نفر مقام دوم، درست ۶ امتیاز کسب کرده است.

چهار نفر مقام‌های آخر هم، همین ۶ امتیاز را داشته‌اند و، بنابراین، در برابر شطرنج‌بازان مقام‌های اول تا چهارم، به همهٔ آن‌ها باخته‌اند.

۲۹. a) O را نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی $ABCD$ می‌گیریم. چون دو مثلث ABD و BCD، مساحت‌هایی برابر دارند و در قاعدهٔ BD مشترك‌اند، بنابراین، دوارتفاع وارد براین قاعده دردو مثلث، با هم برابرند، یعنی نقطه‌های A و C، از BD به یك فاصله‌اندکه، ازآن‌جا، نتیجه می‌شود: $AO = OC$. به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد: $BO = OD$.

به‌این ترتیب، قطرهای چهارضلعی $ABCD$، یکدیگررا نصف کرده‌اند، یعنی این چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع است.

b) راه‌حل اول. فرض می‌کنیم، در شش ضلعی محدب $ABCDEF$، قطرهایی‌که رأس‌های روبه‌رو را به هم وصل کرده‌اند، مساحت آن را نصف کنند و، درعین‌حال، ازیك نقطه نگذرند. دراین صورت، نقطه‌های برخورد این سه قطر، P و Q و R، رأس‌های مثلثی را تشکیل می‌دهندکه در درون شش‌ضلعی واقع است (شکل ۳۲). مساحت‌های دو چهارضلعی $ABCD$ و $BCDE$ برابرند و، بنابراین، دو مثلث ABP و EPD هم، مساحت‌هایی برابر دارند، زیرا



شکل ۳۲

$$S_{ABP}=S_{ABCD}-S_{BCDP}=S_{BCDE}-S_{BCDP}=S_{EPD}$$

به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد:

$$S_{BCR}=S_{EFR} \text{ و } S_{AQF}=S_{CQD}$$

از برابری مساحت‌های مثلث‌ها، به دست می‌آید:

$$AP\cdot BP=EP\cdot DP،$$
$$CQ\cdot DQ=AQ\cdot FQ،$$
$$ER\cdot FR=BR\cdot CR$$

و اگر این رابطه‌ها را، در هم ضرب کنیم:

$$AP\cdot BP\cdot CQ\cdot DQ\cdot ER\cdot FR=AQ\cdot BR\cdot CR\cdot DP\cdot EP\cdot FQ$$

ولی این، ممکن نیست، زیرا داریم:

$$AP>AQ،\ BP>BR،\ CQ>CR،\ DQ>DP،$$
$$ER>EP،\ FR>FQ$$

یعنی، حاصل‌ضرب سمت راست، از حاصل‌ضرب سمت چپ کوچکتر است. تناقض حاصل، ثابت می‌کند که قطرهای AD، BE و CF از یك نقطه می‌گذرند (یعنی $PQ=QR=RP=0$).

راه‌حل دوم. این راه‌حل، بر اساس استفاده از تبدیل هندسی است: تجانس. چون مساحت‌های چهارضلعی‌های $ABCD$ و $BCDE$ برابرند، بنابراین، مساحت‌های مثلث‌های ABD و BDE هم برابرند (هر کدام از آن‌ها، به اندازهٔ مساحت مثلث BCD، از چهارضلعی متناظر خود، کمتر است). این دو مثلث، در قاعدهٔ BD مشترك‌اند. برابری مساحت‌ها، به معنای برابری دو ارتفاعی است که از رأس‌های A و E بر قاعدهٔ BD فرود می‌آیند: یعنی نقطه‌های A و E، از BD به یك فاصله‌اند. به این ترتیب: $AE\parallel BD$ به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد: $CE\parallel BF$ و $AC\parallel DF$. بنابراین، مثلث‌های BDF و ACE متشابه‌اند.

P را نقطهٔ برخورد قطرهای AD و BE می‌گیریم. به تجانسی توجه می‌کنیم که به‌مرکز P و ضریب $PE : PB$ باشد. دراین‌تجانس، نقطهٔ B به نقطهٔ E، نقطهٔ D به نقطهٔ A، خط راست DF به خط راست AC وخط راست BF به خط راست EC تبدیل می‌شود.

چون F، نقطهٔ برخورد خطهای راست DF و BF است، بنابراین، ضمن تجانس، به نقطهٔ برخورد خطهای راست AC و EC، یعنی به نقطهٔ C، تبدیل می‌شود. به این ترتیب، نقطه‌های F، P و C روی یك خط راست‌اند واین به معنای آن است که، قطرهای AD ، BE و CF، ازنقطهٔ P می‌گذرند.

۳۰. اگر $a+b$ و $a^۲+b^۲$ بر d بخش پذیر باشند، آن وقت عدد

$$(a+b)^۲-(a^۲+b^۲)=۲ab$$

هم بر d بخش‌پذیر است. از این‌جا، باید عددهای

$$۲a^۲=۲a\,(a+b)-۲ab \text{ و } ۲b^۲=۲b(a+b)-۲ab$$

هم بر d بخش‌پذیر باشند.

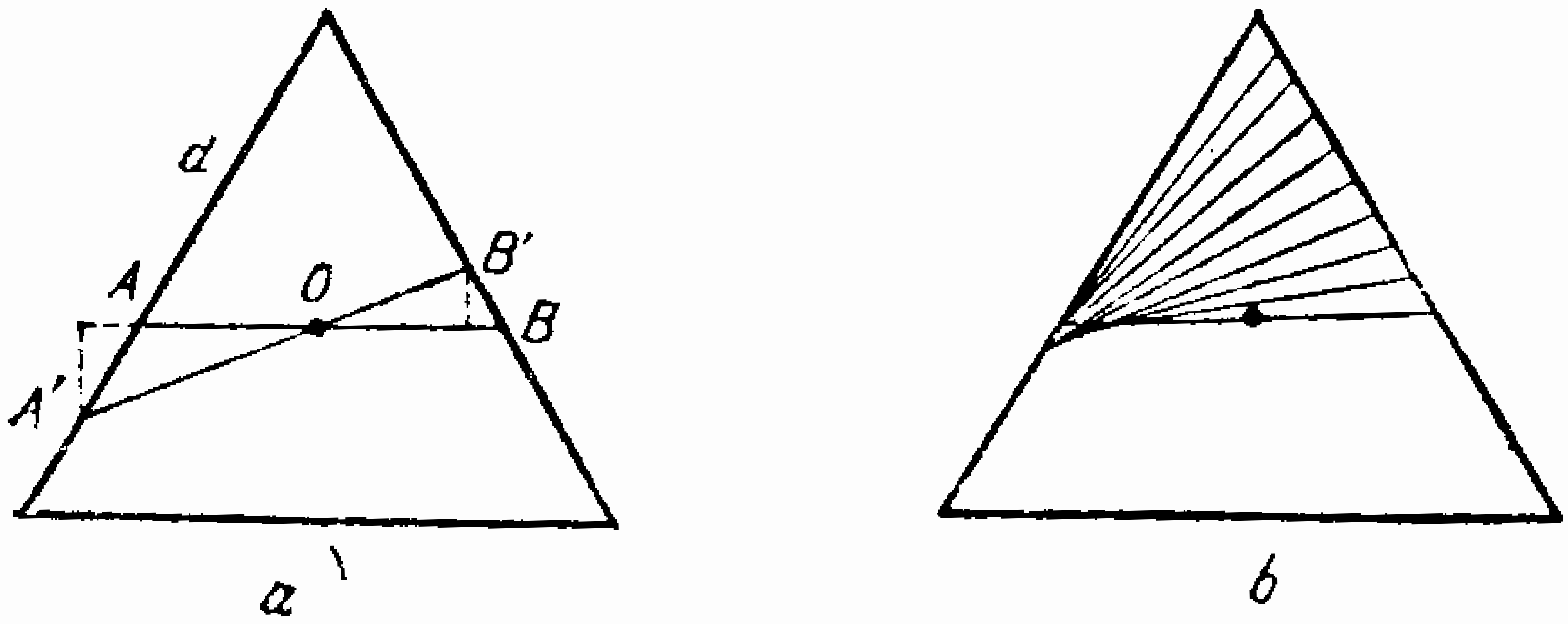
ولی، اگر a و b نسبت به‌هم‌اول باشند، $a^۲$ و $b^۲$ هم نسبت به‌هم‌اول می‌شوند و، بنابراین، نمی‌توانند به‌طورهم‌زمان، برعدد $d>۲$ بخش‌پذیر باشند. [در این‌جا، از قضیهٔ اصلی حساب استفاده کردیم (ضمیمهٔ ۲).]

۳۱. a) C را انتهای دیگر قطری از دایره می‌گیریم که از A گذشته است. AMC، زاویه‌ای قائمه است. چون $MK=KB$ و $PK \parallel MC$، بنابراین، خط راست PK، پاره‌خط راست BC را در وسط آن قطع می‌کند: $BH=HC$. به این ترتیب، همهٔ خطهای راست PK، از نقطهٔ H وسط پاره‌خط راست BC می‌گذرند.

b) از a) نتیجه می‌شود که، همهٔ نقطه‌های P، روی محیط دایره‌ای قرار دارند که به قطر AH رسم شود. چون زاویهٔ HBA قائمه است، این دایره از نقطهٔ B هم می‌گذرد.

۳۲. پاسخ: $d=\frac{۲}{۳}$.

اگرپاره‌خط راستی تمامی مثلث را جاروکند، دریکی ازموقعیت‌های



شکل ۳۳

خود، از مرکز مثلث می‌گذرد. ثابت می‌کنیم، از بین پاره‌خطهای راستی که از مرکز مثلث می‌گذرند و دو انتهای هر یك از آن‌ها، برضلع‌های مثلث تکیه‌دارند، پاره‌خط راست AB، موازی باضلع مثلث، ازهمه‌کوتاه‌تر است.

$A'B'$ راپاره‌خط راستی‌ می‌گیریم که دوانتهای آن برهمان ضلع‌ها تکیه داشته باشد، از مرکز مثلث بگذرد و، در ضمن $OB'<OA'$ (شکل ۳۳). در این صورت $AA'>BB'$ و روشن است که، حتی تصویر این پاره‌خط بر خط راست AB، طولی بیشتر از $\frac{۲}{۳}$ دارد. بنا بر این، پاره‌خط راستی که بتواند تمامی‌مثلث را جاروکند، طولی‌کمتر از $\frac{۲}{۳}$ ندارد.

از طرف دیگر، با پاره‌خط راست به طول $\frac{۲}{۳}$ می‌توان تمامی مثلث را جارو کرد. برای این منظور، باید ثابت کرد، از هر نقطهٔ P واقع در درون مثلث می‌توان پاره‌خط راستی به طول $\frac{۲}{۳}$ عبور داد، به نحوی که دو انتهای آن روی ضلع‌های مثلث باشد. ازنقطهٔ P، دوخط راست می‌گذرانیم که با نزدیك‌ترین و دورترین ضلع مثلث به P، موازی باشند. این خطهای راست، به وسیلهٔ محیط مثلث به دو پاره‌خط راست محدود می‌شوندکه اولی طولی بیشتراز $\frac{۲}{۳}$ و دومی طولی‌کمتر از $\frac{۲}{۳}$ دارد. پاره‌خط اول را دور نقطهٔ P دوران می‌دهیم تا بر پاره‌خط دوم منطبق شود؛ این پاره‌خط، در یکی از

موقعیت‌های بینابینی بر پاره‌خط راستی به‌طول $\frac{2}{3}$ منطبق می‌شود که دو انتهای آن بر ضلع‌های مثلث قرار دارد.

▽ یادآوری می‌کنیم که، با وجود روشن بودن گزارهٔ اخیر، برای اثبات دقیق، باید پیوستگی روندکار اثبات شود (ضمیمهٔ ۵).

۳۳. فرض می‌کنیم، بتوانیم مهره‌های دومینو را طوری روی صفحه قرار دهیم که هریك از خطهای راست افقی یا قائم، که صفحه را به خانه‌ها تقسیم می‌کنند، دست کم، یکی از مهره‌های دومینو را قطع کند.

۱۰ خط راست ازاین‌گونه وجود دارد. هریك ازاین خطهای راست، صفحه را به دو بخش تقسیم می‌کند که، هر بخش، شامل تعداد زوجی خانه است. در هر یك ازاین بخش‌ها، چند مهرهٔ دومینو وجود دارد که «بریده» نشده‌اند. این مهره‌ها، تعداد زوجی از خانه‌ها را اشغال می‌کنند. بقیهٔ خانه‌ها به وسیلهٔ مهره‌های دونیم‌شده، پرشده‌اند. وچون، تعداد این‌خانه‌ها زوج است بنابراین، تعداد مهره‌های دونیم شده هم باید زوج باشد.

به این ترتیب، هریك از ۱۰ خط راست، دست‌کم دوتا از مهره‌های دومینو را نصف می‌کند و چون، هر مهره، تنها به وسیلهٔ یك خط راست می‌تواند نصف شود، درنتیجه تعداد مهره‌های دونیم شده، از ۲۰ کمتر نیست. در حالی‌که، تعدادکل مهره‌ها، فقط ۱۸ تا است.

▽ جالب است، در این‌باره بررسی کنید که، برای چه مستطیل‌هایی با بعدهای $m \times n$ (m، عددی زوج)، گزارهٔ مشابه درست است؟

۳۴. می‌توان عددها را به‌ردیف صعودی درنظر گرفت:

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$$

این عددها را درنظر می‌گیریم:

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots a_{n-2}, \quad a_{n-1}, \quad a_n$$

$$a_1 + a_n, \quad a_2 + a_n, \ldots a_{n-2} + a_n, \quad a_{n-1} + a_n,$$

$$a_1+a_{n-1}+a_n, \quad \cdots \quad \cdots a_{n-2}+a_{n-1}+a_n,$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots\ \cdots$$

$$a_1+a_2+\cdots+a_n$$

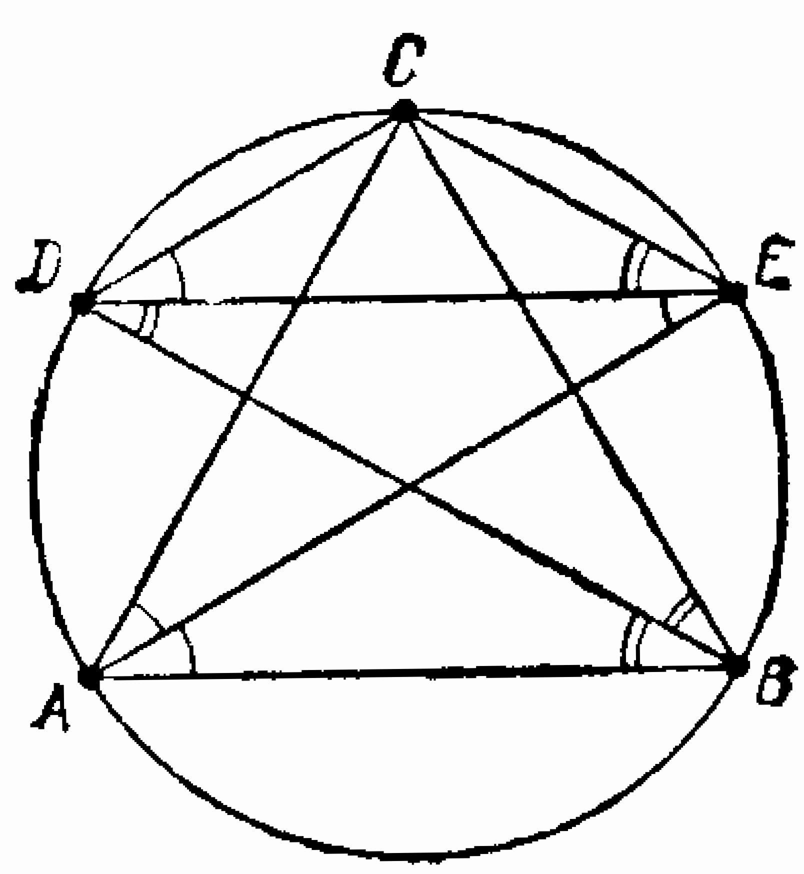
روشن است که، در این‌جا، هرعدد از عدد قبلی بزرگتر است؛ بنا براین، همهٔ این عددها، با هم فرق دارند. تعداد آن‌ها برابر است با

$$n+(n-1)+\cdots+1=\frac{1}{2}n(n+1)$$

یادآوری می‌کنیم که، n عدد طبیعی نخستین را می‌توان مثالی برای n عدد مختلف گرفت که، از آن، بیش از $\frac{1}{2}n(n+1)$ مجموع متفاوت نمی‌توان به دست آورد (این مجموع‌ها، عبارتند از همهٔ عددهای طبیعی از ۱ تا $1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$).

۳۵. از زاویه‌های برابر (شکل ۳۴ را ببینید)، نتیجه می‌شود که، نقطهٔ A، روی محیط دایره‌ای است که از نقطه‌های C و D و E گذشته است؛ نقطهٔ B هم روی محیط همین دایره قرار دارد و، در ضمن $DE \parallel AB$.

۳۶. قدر نسبت تصاعد را d می‌گیریم و فرض می‌کنیم، $a=m^2$ یکی از جمله‌های آن باشد (m، عددی طبیعی است). در این صورت، عدد



شکل ۳۴

$$(m+kd)^{2}=m^{2}+2mkd+k^{2}d^{2}=a+d(2mk+k^{2}d)$$

هم، جمله‌ای از همان تصاعد است (به ازای هر عدد طبیعی k). به این ترتیب، بی‌نهایت جمله، در تصاعد، وجود دارد که هر کدام مجذور یك عدد طبیعی‌اند.

۳۷. پاسخ: نمی‌توان.

با رقم a، ۹ زوج تشکیل می‌شود (با هر یك از ۹ رقم بقیه). اگر بخواهیم، برای هر زوج، ضلعی از ۴۵ ضلعی را، متناظر با آن، داشته باشیم، باید a را دست کم در پنج رأس آن قرار داد. چون با ده رقم سروکار داریم، بنابراین برای جادادن آن‌ها، به ۵۰ رأس نیاز داریم. به این ترتیب، نمی‌توان رقم‌های از ۰ تا ۹ را، به ترتیبی که مساله خواسته است، قرارداد (ضمیمهٔ ۹).

▽ از طرف دیگر، اگر n زوج باشد، عددهای ۰، ۱، ...، n را می‌توان در رأس‌های یك $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ ضلعی منتظم، طوری قرارداد که، برای هر دو عدد، ضلعی پیدا شود که این دو عدد در دو انتهای آن باشند.

۳۸. پاسخ: $a_{1,2}=\pm\sqrt[20]{2^{20}-1}$، $b_{1,2}=\mp\frac{1}{2}\sqrt[20]{2^{20}-1}$،

$p=-1$، $q=\frac{1}{4}$ (روی هم، دو گروه ضریب‌ها).

با قراردادن $x=\frac{1}{2}$ به دست می‌آید:

$$\left(\frac{a}{2}+b\right)^{20}+\left(\frac{1}{4}+\frac{p}{2}+q\right)^{10}=0$$

از آن‌جا $a=-2b$. اکنون، اتحاد به این صورت در می‌آید:

$$(2x-1)^{20}=(-2bx+b)^{20}+(x^{2}+px+q)^{10}$$

ضریب x^{20} را، در دو طرف برابری، محاسبه می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$2^{20}=2^{20}b^{20}+1\Rightarrow b=\pm\frac{1}{2}\sqrt[20]{2^{20}-1}$$

و اتحاد، به این صورت در می‌آید:

$$(x-\frac{۱}{۲})^{۲۰}=(x^۲+px+q)^{۱۰}$$

از آن‌جا $x^۲+px+q=(x-\frac{۱}{۲})^۲$، یعنی $p=-۱$ و $q=\frac{۱}{۴}$.

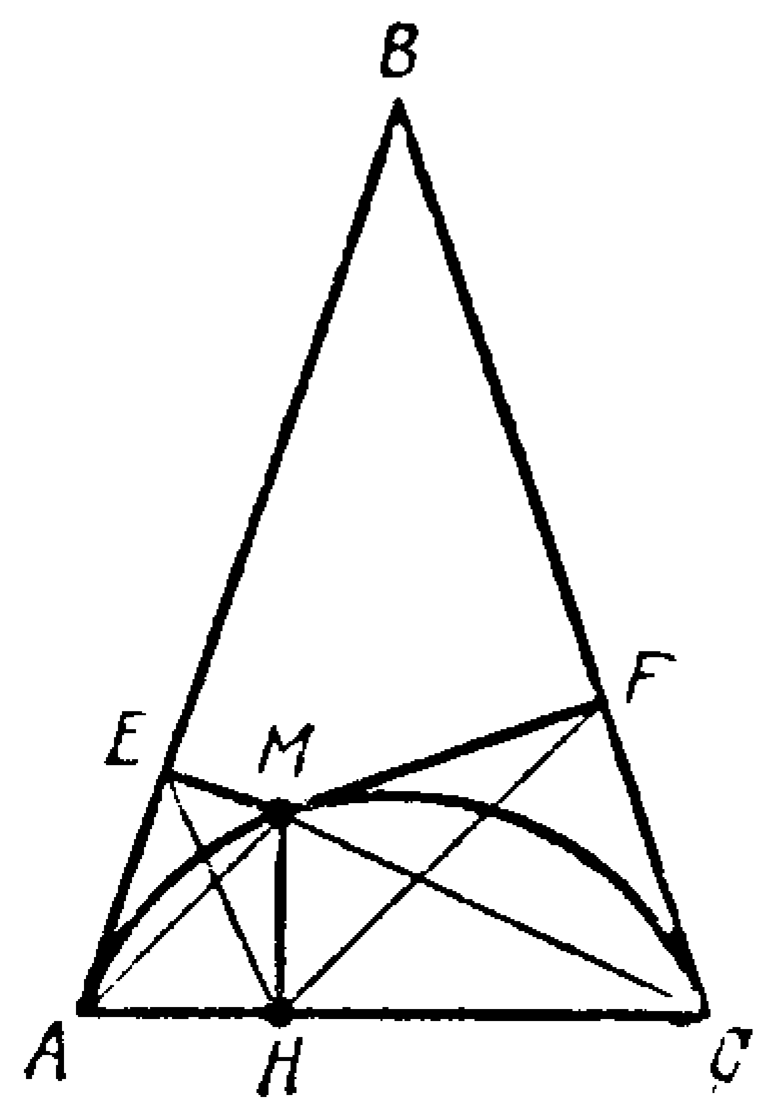
۳۹. پاسخ: ۲×۳^n. بعد از گـام اول، مجموع همهٔ عددها بـرابر $۲\times ۳=۶$ می‌شود.

مجموع همهٔ عددها را، بعداز گام n ام، برابر S_n می‌گیریم. به سادگی ثابت می‌شود کـه بعد از گـام $(n+۱)$ ام، مجموع همهٔ عـددها، برابر $۲S_n+S_n=۳S_n$ خواهد شد.

به این ترتیب، مجموع عددها، در هر گام سه برابر می‌شود، یعنی در گام nام، برابر است با ۲×۳^n.

۴۰. پاسخ: کمانی از دایره، که بر ساق‌های مثلث در نقطه‌های A و C (دوانتهای قاعده) مماس است.

ABC را مثلث مفروض ($AB=BC$). M را نقطه‌ای ازمکان مجهول و E و F و H را، به ترتیب، تصویرهای نقطهٔ M برضلع‌های AB و BC و AC می‌گیریـم (شکل ۳۵). چهارضلعی‌های $AEMH$ و $CHMF$ متشابه‌اند: زاویه‌های متناظر بـرابـرند و، بنا بـه شرط، دو ضلع مجاور، متناسب‌اند



شکل ۳۵

$\left(\frac{EM}{MH}=\frac{MH}{MF}\right)$؛ در ضمن، مثلث‌هایی که در ایـن چهارضلعی‌ها، به وسیلهٔ قطرها پـدید آمده‌اند، متشابه‌اند: مثلث EMA با HMC، و مثلث AMH با مثلث CMF. از آن‌جا

$$\widehat{AMC}=\widehat{AMH}+\widehat{HMC}=\widehat{HMC}+\widehat{CMF}=\widehat{HMF}$$

بـه این ترتیب، زاویهٔ AMC، مقداری ثابت دارد و، بنابراین، نقطهٔ M، روی کمان دایره‌ای است که پاره‌خط راست AC را احاطه کرده است. می‌توان تحقیق کرد که، هر نقطه از این کمان، به کمان مطلوب تعلق دارد.

$\triangledown$ اگر بخواهیم، این‌مکان را در تمامی‌صفحه، و نه‌فقط در درون‌مثلث، پیدا کنیم، آن وقت‌قطعه‌هایی از یك هذلولی، به‌این کمان دایره، اضافه‌می‌شود.

۴۱. پاسخ: زاویه‌های مثلث، ۹۰ درجه، ۴۵ درجه و ۴۵ درجه.

h_a و h_b را، طول ارتفاع های وارد بر ضلع‌های به طول a و b می‌گیریم. بنا بر شرط مساله، $a\leqslant h_a$ و $b\leqslant h_b$؛ ولی در هـر مثلثی $h_a\leqslant b$ و $h_b\leqslant a$، به نحوی که

$$a\leqslant h_a\leqslant b\leqslant h_b\leqslant a$$

یعنی $a=b=h_a=h_b$ و، بنا بـراین، با مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین، سروکار داریم.

۴۲. فرض می‌کنیم $m(m+۱)$، برابر توان k ام‌یك عددطبیعی باشد. چون m و $m+۱$ نسبت به هم اول‌اند، بنابراین، هـرکدام از آن‌ها، باید برابر توان k ام عددی طبیعی باشد. ولی این، ممکن نیست: اگر $m=a^k$، آن وقت

$$(a+۱)^k>(a+۱)a^{k-۱}=a^k+a^{k-۱}>m+۱،\quad (k>۱)$$

۴۳. پاسخ: از عدد ۱، یك واحد بیشتر از عدد ۲، به دست می‌آید.

باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۹، برابر است با باقی‌ماندهٔ تقسیم مجموع رقم‌های آن بر ۹ (ضمیمهٔ ۳). بنا براین، در مسالهٔ ما، عدد ۱، از عددهایی

به دست می‌آید که در تقسیم بر ۹، باقی‌مانده‌ای برابر ۱ داشته باشند، یعنی ازعددهای ۱، ۱۰، ۱۹، ۲۸، ۳۷، ...، ۹۹۹، ۹۹۱ ۹۹۹، ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰ و عدد ۲، از عددهایی که در تقسیم بر ۹، به‌باقی‌ماندهٔ ۲ می‌رسند، یعنی از عددهای

۲، ۱۱، ۲۰، ۲۹، ۳۸، ...، ۹۹۲ ۹۹۹ ۹۹۹

۴۴. گروه n عدد x_1، x_2، ...، x_n را هرطور انتخاب کنیم، اگر همهٔ آن‌ها با هم برابر نباشند، بعد از چندگام، بزرگترین عدد گروه، کوچکتر؛ و کوچکترین عدد گروه، بزرگتر می‌شود. از این‌جا روشن است که، بزرگترین عدد گروه، نمی‌تواند همیشه عددی درست باشد، البته به شرطی که گروهی از عددهای درست و برابر $(a، a، ...، a)$ به دست نیاید.

فرض کنید، از گروه عددهای z_1، z_2، ...، z_n، عددهای برابر به دست آید:

$$\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{z_2+z_3}{2}=\dots=\frac{z_{n-1}+z_n}{2}=\frac{z_1+z_n}{2}$$

آن وقت، عددهای z_i، یك در میان باهم برابر می‌شوند که، در حالت فرد‌بودن n، غیر ممکن است.

فرض می‌کنیم، n، عددی زوج باشد. ببینیم، از چه گروهی، می‌توان به گروه عددهای $(a، b، a، b، ...، a، b)$ رسید. فرض کنید.

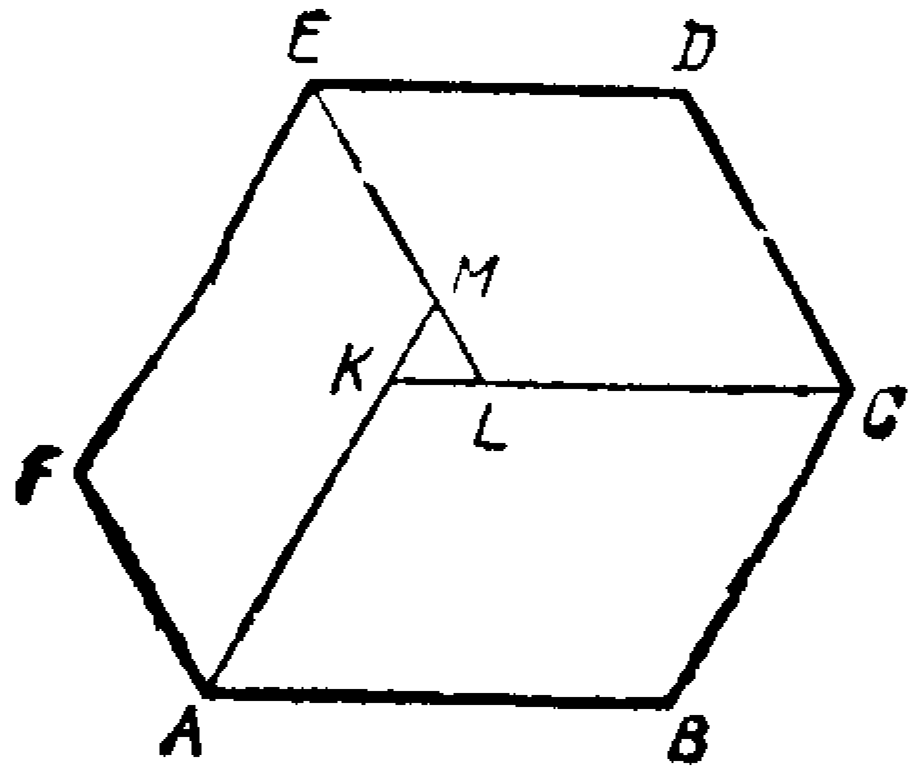
$$\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{y_3+y_4}{2}=\dots=\frac{y_n+y_{n-1}}{2}=a;$$

$$\frac{y_2+y_3}{2}=\frac{y_4+y_5}{2}=\dots=\frac{y_n+y_1}{2}=b$$

در این صورت

$$y_1+y_2+\dots+y_n=2an;\ y_2+y_3+\dots+y_n+y_1=2bn$$

یعنی $2an=2bn$ و $a=b$.



شکل ۳۶

به این ترتیب، نمی‌توان به‌گروهی از عددهای دو به‌دو مختلف رسید و این، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۴۵. a) مقدار هریك از زاویه‌های شش‌ضلعی برابر ۱۲۰ درجه و، بنا براین، ضلع‌های رو به‌رو، با هم موازی‌اند. در ضمن، می‌توان فرض کرد $AB \geqslant DE$ (شکل ۳۶).

اکنون، متوازی‌الاضلاع‌های $ABCK$، $CDEL$ و $AFEM$ را می‌سازیم. اگر نقطه‌های K، L و M منطبق بر هم نباشند، هر زاویهٔ مثلث KLM برابر ۶۰ درجه می‌شود، یعنی

$$KL = LM = KM$$

و بنابراین

$$AB - DE = CD - FA = FE - BC$$

b) می‌توان فرض کرد $a_1 > a_4$. مثلث‌متساوی‌الاضلاع KLM را، با این ضلع‌ها می‌سازیم:

$$KL = LM = MK = a_1 - a_4 = a_3 - a_6 = a_5 - a_2$$

KL را به اندازهٔ $LC = a_4$، LM را به اندازهٔ $ME = a_6$ و MK را به اندازهٔ $KA = a_2$ امتداد می‌دهیم و متوازی‌الاضلاع‌های $AKCB$، $CLED$ و $AFEM$ را می‌سازیم. $ABCDEF$ همان شش‌ضلعی مطلوب است.

۴۶. پاسخ: $x = y = 0$.

x و y را عددهای درستی می‌گیریم که درمعادلهٔ مفروض صدق کنند.

بعد از مجذور کردن‌های متوالی، به دست می‌آید:

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}=m \text{ و } \sqrt{x}=k$$

که در آن‌ها، m و n، عددهایی درست‌اند؛ در ضمن

$$m^{2}=k(k+1) \qquad (*)$$

برای $k>0$ باید داشته باشیم: $k^{2}<m^{2}<(k+1)^{2}$، در این صورت، به نابرابری‌های $k<m<k+1$ می‌رسیم که به معنای درست نبودن عدد m است. یعنی $k=0$ و بنابراین $x=0$.

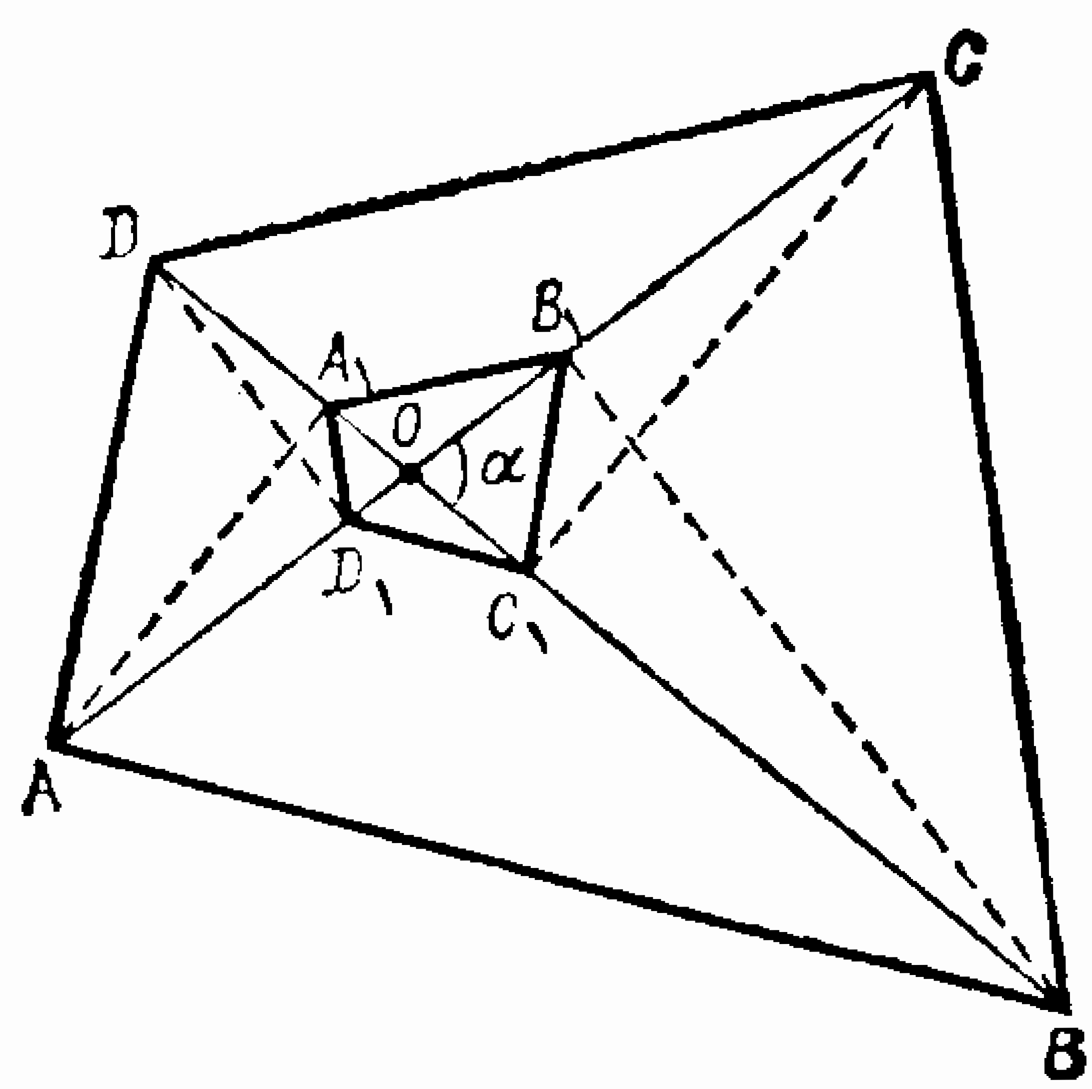
▽ متناقض بودن برابری (*) را، از مسالهٔ ۴۲ هم می‌توان نتیجه گرفت.

۴۷. A_1، B_1، C_1، D_1 را پای عمودهایی می‌گیریم که، به ترتیب، از رأس‌های A، B، C و D برقطرهای BD و AC رسم شده‌اند. فرض می‌کنیم، دو قطر، در نقطهٔ O یکدیگر را قطع کرده باشند و زاویهٔ حادهٔ بین دو قطر برابر α باشد (شکل ۳۷). در این صورت داریم:

$$OA_1=OA.\cos\alpha;\ OB_1=OB.\cos\alpha;$$

$$OC_1=OC.\cos\alpha;\ OD_1=OD.\cos\alpha$$

بنابراین، مثلث‌های A_1OB_1، B_1OC_1، C_1OD_1 و D_1OA_1 با مثلث‌های AOB، BOC، COD و DOA متشابه‌اند و، ضریب تشابه، برابر است با



شکل ۳۷

$\cos\alpha$. از این‌جا، نتیجه می‌گیریم که چهارضلعی‌های $ABCD$ و $A_1B_1C_1D_1$ هم، متشابه یکدیگرند.

$\triangledown$ یادآوری می‌کنیم که می‌توان چهارضلعی دوم را، ازچهارضلعی اول، با تبدیل‌های زیر به دست آورد: تقارن نسبت به نیمساز زاویهٔ حادهٔ بین دوقطر و، سپس، تجانس به مرکز O و ضریب $\cos\alpha$.

۴۸. پاسخ: n برابر است با عددی اول و یا $n = 9$.

اگر n را بتوان به صورت $n = ab$ ($a \geqslant 3$، $b \geqslant 3$ و $a \neq b$) نشان داد، آن وقت، در حاصل ضرب $1 \times 2 \times \ldots \times (n-1)$، عامل‌های a، $2a$، b و $2b$ وجود دارد و، بنابراین $(n-1)!$ بر $a^2 b^2 = n^2$ بخش‌پذیر می‌شود.

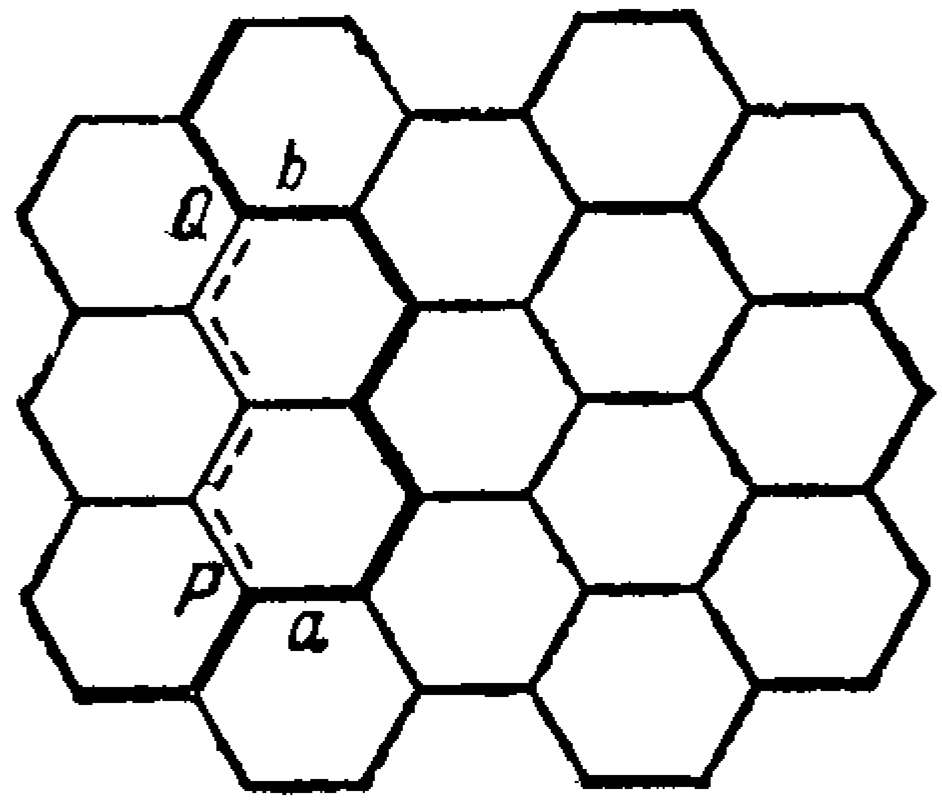
اگر $n = p^2$ و p عددی اول باشد، آن وقت به‌ازای $p^2 - 1 \geqslant 4p$، در حاصل‌ضرب $(p^2-1)! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (p^2-1)$، عامل‌های p، $2p$، $3p$ و $4p$ وجود دارد و بر $p^4 = n^2$ بخش‌پذیر است. (نابرابری $p^2 - 4p - 1 \geqslant 0$، برای هرعدد اول $p \geqslant 5$ برقرار است.)

دوامکان باقی می‌ماند: nعددی اول باشد(که دراین‌صورت $(n-1)!$، حتی بر n هم بخش‌پذیر نیست) و یا $n = 9$ (که در این صورت! ۸، بر ۹ بخش‌پذیر است، ولی بر ۸۱ بخش‌پذیر نیست).

$\triangledown$ بنا برقضیهٔ ویلسون، به‌ازای هرعدد اول p، عدد $(p-1)!$، همیشه در تقسیم برعدد p، باقی‌مانده‌ای برابر $p - 1$ می‌دهد.

۴۹. پاره‌خط‌های راستی راکه، حشره، روی آن‌ها حرکت می‌کند، به ترتیب شماره‌گذاری می‌کنیم. یکی ازسه پاره‌خط جهت‌دار شبکه را درنظر می‌گیریم و آن‌را افقی می‌نامیم. ثابت‌می‌کنیم، یا شماره‌های همهٔ پاره‌خط‌های راست افقی مسیرعددهایی فرد و یا، همهٔ این شماره‌ها، عددهایی زوج‌اند.

a و b را دوپاره‌خط راست افقی مجاور می‌گیریم، به این مفهوم‌که، مسیر بین a و b، شامل پاره‌خط‌های راستی با دوجهت دیگرباشند. این وضع ممکن نیست که، حشره، نوار قائمی از شش‌ضلعی‌ها را، ابتدا در «جائی» و سپس «به صورت برگشت» در«جای دیگر» قطع کند (آن طورکه درشکل ۳۸ نشان داده شده است، زیرا در این حالت، می‌توان راه‌کوتاه‌تری برای



شکل ۳۸

حشره پیدا کرد (مسیری که P و Q را با نقطه‌چین به هم وصل کرده است). از این‌جا نتیجه می‌شود که، تعداد پاره‌خط‌های راست بینابینی، بین a و b، عددی فرد است و، حشره، روی این پاره‌خط‌های راست، در یك جهت حرکت می‌کند. به این ترتیب، همهٔ پاره‌خط‌های افقی مسیر، یا شماره‌ای فرد دارند و یا شماره‌ای زوج (و حشره، روی آن‌ها، در یك جهت حرکت می‌کند).

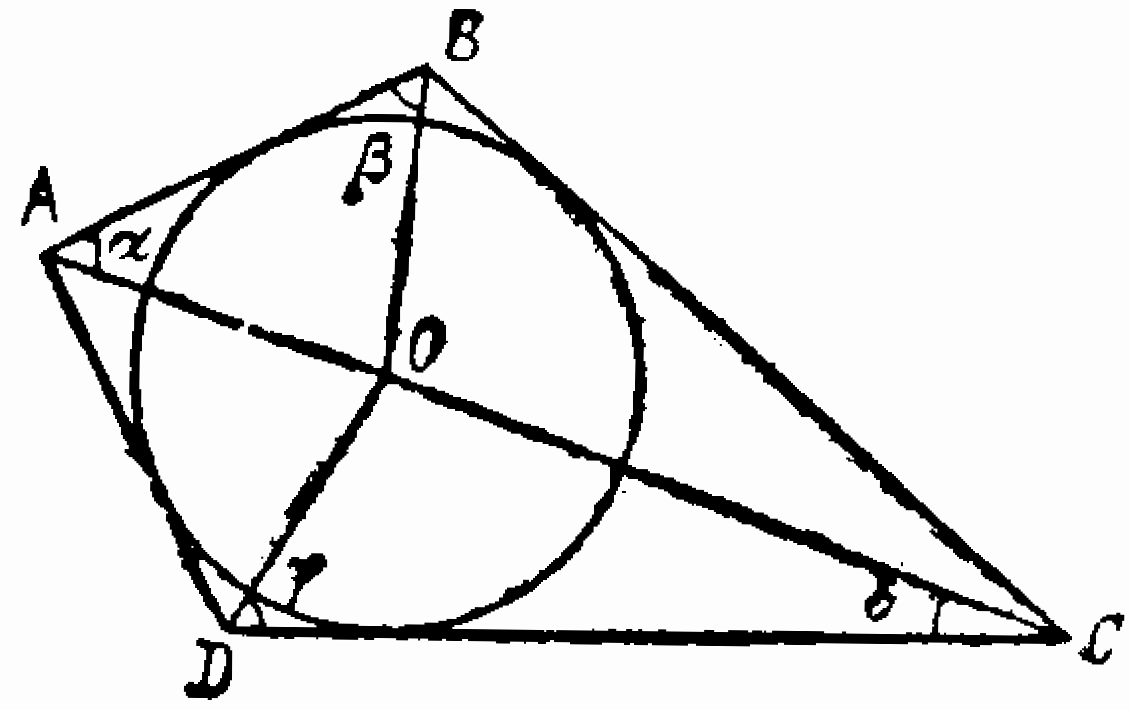
دربارهٔ پاره‌خط‌های راست مسیر، که در یکی از دو جهت دیگر قرار دارند، همین وضع درست است. از آن جا که، تنها با سه جهت سروکار داریم، یا همهٔ پاره‌خط‌های با شمارهٔ زوج و یا همهٔ پاره‌خط‌های با شمارهٔ فرد، در یك جهت‌اند. تعداد این گونه پاره‌خط‌ها برابر ۵۰ می‌شود.

▽ هر مسیری از حشره روی شبکه را می‌توان، با آغاز از یك گره، به وسیلهٔ «واژه‌ای» شامل حرف‌های p و q و r داد (هر حرف، متناظر است با پاره‌خط راستی از مسیر که در یکی از سه جهت ممکن باشد). جالب است، به شرح واژه‌ای بپردازیم که متناظر باشد با مسیری بسته (که به نقطهٔ آغاز برگشته است) و یا مسیری که خودش را قطع نکرده باشد.

۵۰. O را مرکز دایرهٔ محاط در چهارضلعی $ABCD$ می‌گیریم (شکل ۳۹). داریم:

$$\widehat{AOB}=180^\circ-\alpha-\beta ، \widehat{COD}=180^\circ-\gamma-\delta$$

در ضمن $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\frac{1}{2}(\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D})=180^\circ$. بنابراین



شکل ۳۹

$$\widehat{AOB}+\widehat{COD}=۳۶۰^\circ-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=۱۸۰^\circ$$

۵۱. می‌دانیم

$$k^n-b^n=(k-b)\,(k^{n-۱}+k^{n-۲}\,b+\dots+b^{n-۱})$$

یعنی k^n-b^n بر $k-b$ بخش‌پذیر است.

به‌این ترتیب $(k^n-b^n)-(k^n-a)=a-b^n$ بر $k-b$ بخش‌پذیر است؛ ولی این تنها وقتی ممکن است که داشته باشیم: $a=b^n$.

۵۲. پاسخ: $۲^{n-۲}$ کسر.

روشن است که، در هر حال، در کسر حاصل، $x_۱$ در صورت کسر قرار می‌گیرد. به همین ترتیب، تقریباً روشن است که، $x_۲$، در هر حال، درمخرج کسر واقع می‌شود (علامت تقسیم، که قبل از $x_۲$ قرار دارد، یا به خود $x_۲$ مربوط است و یا به عبارتی شامل $x_۲$).

بقیهٔ حرف‌های $x_۳$، $x_۴$، ...، x_n، بسته به‌نوع پرانتز گذاری، می‌توانند در صورت یا در مخرج قرار گیرند؛ از این‌جا نتیجه می‌شود که، روی هم، $۲^{n-۲}$ کسر مختلف به دست می‌آید: هریك از $n-۲$ حرف $x_۳$، $x_۴$، ...، x_n می‌تواند بدون ارتباط با حرف‌های دیگر، در صورت یا در مخرج باشد.

این حکم را، باروش استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم. به ازای $n=۳$، می‌توان دو کسر به دست آورد:

$$(x_۱:x_۲):x_۳=\frac{x_۱}{x_۲\cdot x_۳}\ \text{و}\ x:(x_۲:x_۳)=\frac{x_۱x_۳}{x_۲}$$

یعنی، به ازای $n=3$، حکم درست است.

فرض می‌کنیم، حکم، برای $n=k$ درست باشد و ثابت می‌کنیم که، در این صورت، به ازای $n=k+1$ هم درست است.

فرض می‌کنیم، عبارت $x_1 : x_2 : \ldots : x_k$، در یکی از حالت‌ها، بعد از قراردادن پرانتزها، به صورت کسر A درآید. اگر دراین عبارت، به‌جای x_k قرار دهیم $x_{k-1} : x_k$، آن وقت، x_{k+1} درجایی واقع می‌شود که x_k در آن جا نیست (اگر x_k در صورت باشد، x_{k+1} به مخرج می‌رود و بر عکس).

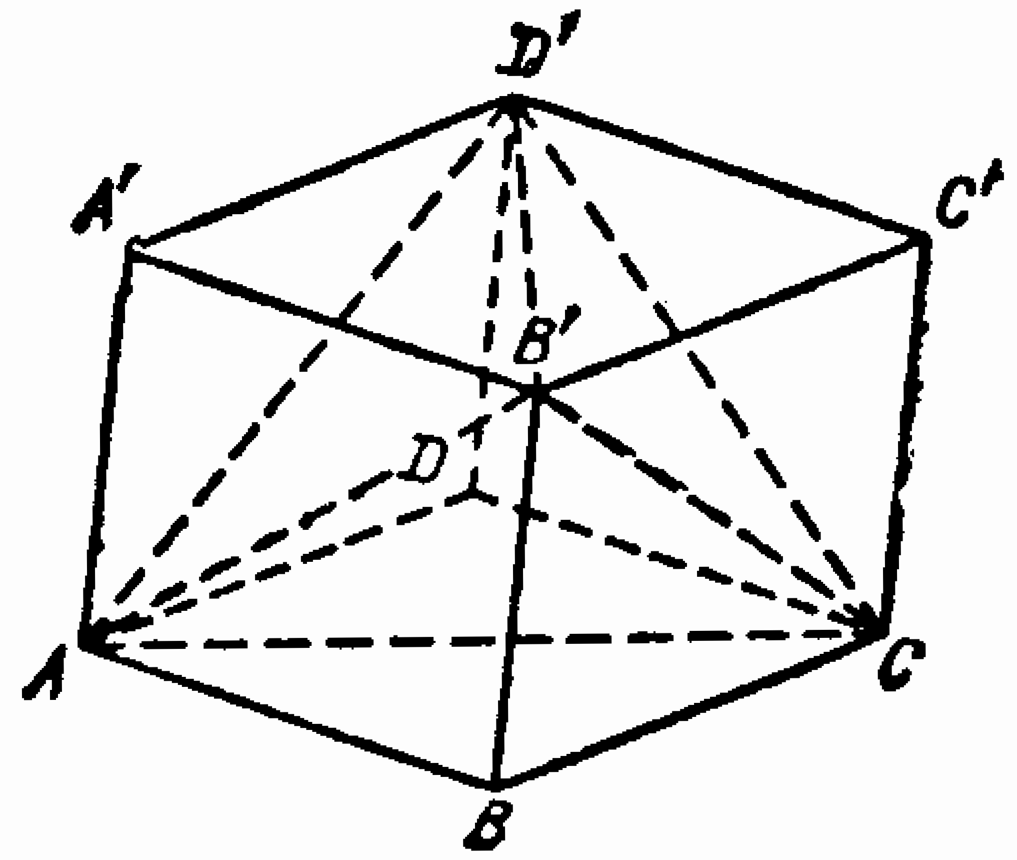
اکنون ثابت می‌کنیم، می‌توان x_{k+1} را در همان جایی قرار داد که x_k در آن‌جا است. در کسر A، بعداز گذاشتن پرانتزها، به ناچار به عبارتی به صورت $(p : x_k)$ می‌رسیم که، در آن، p، یا حرف x_{k-1} است و یا شامل چندحرف؛ $(p : x_k)$ را به صورت $((p : x_k) : x_{k+1}) = p : (x_k \cdot x_{k+1})$ تغییر می‌دهیم، روشن است که، در این صورت، به همان کسر A می‌رسیم که، در آن، به‌جای x_k، عبارت $x_k \cdot x_{k+1}$ قراردارد. حکم به‌طور کامل ثابت‌شد.

۵۳. به سادگی دیده می‌شود که، مکعب را می‌توان به ۵ چهار وجهی تقسیم کرد. در شکل ۴۰، این چهاروجهی‌ها، عبارتند از

$$AA'B'D',\ AB'BC,\ ACDD',\ B''C'D'C,\ ACD'B'$$

ثابت می‌کنیم که مکعب را نمی‌توان به تعداد کمتری چهاروجهی تقسیم کرد. فرض کنید، مکعب را به چند چهار وجهی تقسیم کرده باشیم. دست‌کم دو چهاروجهی وجود دارد که، قاعده‌های آن‌ها، بروجه $ABCD$ از مکعب قراردارند. به‌همین ترتیب، دست‌کم دوچهاروجهی وجود دارد که،قاعده‌های آن‌ها، بروجه $A'B'C'D'$ واقع‌اند.

روشن است که این چهار وجهی‌ها، با دوتای اولی فرق دارند، زیرا در یك چهاروجهی نمی‌توان دو وجه موازی پیدا کرد. به این ترتیب، با ۴ چهار وجهی سروکار داریم. حجم آن‌ها، روی هم، از $\frac{2}{3}a^3$ تجاوز نمی‌کند، یعنی کمترازحجم مکعب است. بنا براین، مکعب را نمی‌توان به‌۴ چهاروجهی



شکل ۴۰

تقسیم کرد.

۵۴. پاسخ: $۴۱^۲ = ۱۶۸۱$.

فرض کنید، عدد $n^۲$، با شرط مساله سازگار باشد، در این صورت

$$n^۲ = ۱۰۰a^۲ + b,\ ۰ < b < ۱۰۰$$

به این ترتیب $n > ۱۰a$ و بنابراین: $n \geqslant ۱۰a + ۱$؛ یعنی

$$b = n^۲ - ۱۰۰a^۲ \geqslant ۲۰a + ۱ \Rightarrow ۲۰a + ۱ < ۱۰۰$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $a \leqslant ۴$.

به‌ازای $n = ۴$، تنها عدد $n = ۱۰a + ۱ = ۴۱$ باشرط مساله سازگار است؛ اگر $n > ۴۱$، آن وقت $n^۲ - ۴۰^۲ \geqslant ۴۲^۲ - ۴۰^۲ > ۱۰۰$.

$\bigtriangledown$ مسالهٔ ۲۴۴، دنبالهٔ این‌مساله است.

۵۵. $S_۱$، $S_۲$، $S_۳$، $S_۴$ و $۲p_۱$، $۲p_۲$، $۲p_۳$، $۲p_۴$ را، به‌ترتیب، مساحت و محیط مثلث‌های ABE، BCE، CDE و DAE فرض می‌کنیم. باید ثابت کنیم:

$$\frac{p_۱}{S_۱} + \frac{p_۳}{S_۳} = \frac{p_۲}{S_۲} + \frac{p_۴}{S_۴}$$

چون $ABCD$، ذوزنقه است. بنابراین $S_۱ = S_۳ = S$. چون $ABCD$ یک چهارضلعی محیطی است، پس $AB + CD = BC + AD$. اگر به دو طرف این برابری، مجموع دو قطر را اضافه کنیم، به دست می‌آید:

$$۲p_۱+۲p_۳=۲p_۲+۲p_۴$$

برای این‌که به‌برابری موردنظر برسیم، کافی‌است دوطرف برابری اخیر را، بر $۲S$ تقسیم و از رابطه‌های ناشی از برابری‌های زیر استفاده کنیم:

$$\frac{S_۲}{S}=\frac{S}{S_۴}=\frac{AE}{EC}=\frac{BE}{ED}=\frac{AB}{CD}=\frac{p_۲}{p_۴}$$

$$\frac{p_۲}{S}=\frac{p_۴}{S_۴};\ \frac{p_۴}{S}=\frac{p_۲}{S_۲}$$

۵۶. پاسخ حداقل مقدار s_{min} برابر است با $-\left[\frac{n}{۲}\right]$، یعنی $-\frac{n}{۲}$ وقتی n زوج باشد و $-\frac{n-۱}{۲}$ وقتی n فرد باشد.

a) مقدار s، مجموع همهٔ حاصل‌ضرب‌های دوبه‌دوی عددهای $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n را می‌توان به این صورت نوشت:

$$s=\frac{۱}{۲}[(x_۱+x_۲+...+x_n)^۲-x_۱^۲-x_۲^۲-...-x_n^۲]$$

از این‌جا، معلوم می‌شود که $s\geqslant-\frac{n}{۲}$.

اگر n عددی زوج باشد، نیمی از عددهای x_k را برابر ۱ و نیم دیگر را برابر ۱ــ می‌گیریم؛ به دست می‌آید: $S=-\frac{n}{۲}$. اگر n عددی فرد باشد، چون s عددی درست است، $s\geqslant-\frac{n-۱}{۲}$. حداقل مقدار s وقتی به دست می‌آید که، بین عددهای x_k، به تعداد $\frac{n+۱}{۲}$ برابر ۱ و به تعداد $\frac{n-۱}{۲}$ برابر ۱ــ وجود داشته باشد.

b) به مسالهٔ a) منجر می‌شود: هـر یك از عددهای x_k را، می‌توان

پشت سرهم، با ۱ یا ۱ — عوض کرد، به‌نحوی که مجموع همهٔ حاصل‌ضرب‌های دو به‌دوی آن‌ها، زیادتر نشود (قانون تعویض: x_k را برابر ۱ — قرار می‌دهیم وقتی که مجموع بقیهٔ عددها غیرمنفی باشد؛ و برابر ۱ قرار می‌دهیم وقتی که مجموع بقیهٔ عددها منفی باشد). بنابراین، دراین‌جاهم، همان پاسخ بخش d) به دست می‌آید.

۵۷. فرض کنید $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_9$، عددهایی باشند که روی کارت‌ها نوشته شده‌اند. اگر $a_1+a_9>a_2+a_8$، آن وقت اولی، عدد a_9 را در خانهٔ ۲ می‌گذارد (شکل ۴۱)؛ دومی یکی از دو کارت a_1 یا a_2 را در یکی از خانه‌های ۱ یا ۴ می‌گذارد. اگر $a_1+a_9<a_2+a_8$، آن وقت اولی عدد a_1 را در خانهٔ ۲ و دومی عدد a_9 یا a_8 را در یکی از خانه‌های ۱ یا ۴ می‌گذارد. اگر $a_1+a_9=a_2+a_8$، اولی می‌تواند هرکدام از دو برنامهٔ فوق را، به دلخواه اجرا کند (در این حالت، اگر بازی درست انجام شود، نتیجهٔ کار، مساوی خواهد شد).

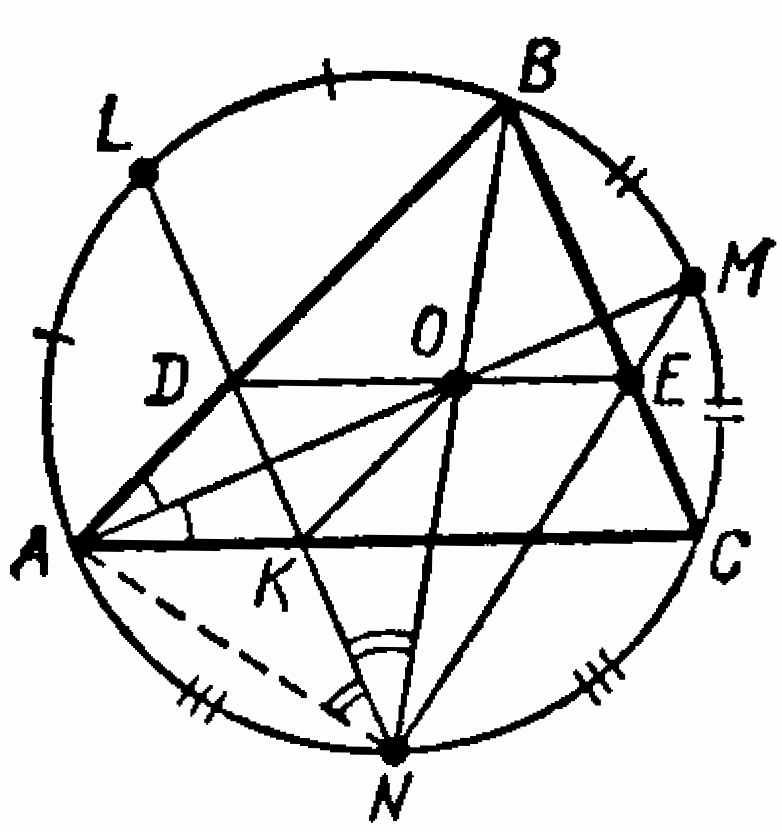
۵۸. L، M و N را وسط ضلع‌های AB، BC و CA، O را مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC، D و K را نقطه‌های برخورد پاره‌خط راست LN با ضلع‌های AB و AC می‌گیریم (شکل ۴۲).

ثابت می‌کنیم، چهارضلعی $ADOK$، لوزی است (که در ضمن، مسالهٔ ۲۳۷ هم حل می‌شود). برای این منظور، کافی است ثابت کنیم، **قطرهای** AO و DK، محورهای تقارن این چهارضلعی هستند.

درواقع $AM \perp LN$، زیرا $\overset{\frown}{LB}+\overset{\frown}{BM}+\overset{\frown}{AN}=180^\circ$، بنابراین

	۱	
۲		۳
	۴	

شکل ۴۱



شکل ۴۲

نقطه‌های D و K، نسبت به خط راست AM، قرینهٔ یکدیگرند (AM، نیمساز زاویهٔ BAC است)؛ همچنین، نقطه‌های A و O، نسبت به خط راست LN، قرینهٔ یکدیگرند (LN، نیمساز زاویهٔ ANB است).

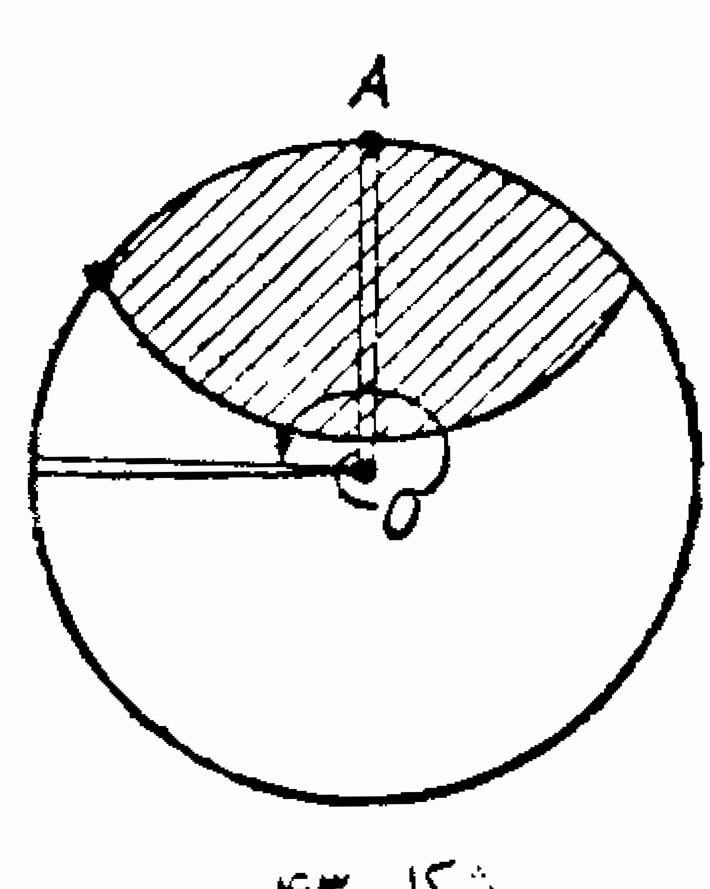
از این جا نتیجه می‌شود: $DO \parallel AC$. به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد $EO \parallel AC$ که، در آن، E را نقطهٔ برخورد پاره‌خط راست MN با ضلع BC گرفته‌ایم. به این ترتیب، نقطه‌های D، O و E، روی خط راستی قرار دارند که با AC موازی است.

۵۹. اگر شمارهٔ «بلیت خوشبختی» برابر A باشد، آن وقت بلیت با شمارهٔ $A'=۹۹۹۹۹۹-A$ هم یك «بلیت خوشبختی» است و، در ضمن، $A \neq A'$. از طرف دیگر داریم:

$$A+A'=۹۹۹۹۹۹=۱۰۰۱\times۹۹۹=۱۳\times۷۷\times۹۹۹$$

بنا براین، مجموع شماره‌های همهٔ «بلیت‌های خوشبختی» بر ۱۳ بخش پذیر است.

۶۰. اگر ناوچه، در نقطهٔ A به دایرهٔ K، که به وسیلهٔ نورافکن روشن می‌شود، وارد شود، آن وقت بعد از فاصلهٔ زمانی $\frac{۵\pi}{۲}\cdot\frac{a}{v}$، در فاصله‌ای از نقطهٔ A قرار می‌گیرد که از $\frac{v}{۸}\cdot\frac{a}{v}\cdot\frac{۵\pi}{۲}$ تجاوز نمی‌کند، یعنی در یکی از نقطه‌های اشتراك دایرهٔ K با دایرهٔ به شعاع $\frac{۵\pi a}{۱۶}<a$ و مرکز A (این بخش مشترك دو دایره، در شکل ۴۳، هاشور خورده است). به سادگی دیده



شکل ۴۳

می‌شود که، در این مدت، پرتو نورافکن به اندازهٔ زاویه‌ای برابر $\frac{5\pi}{2}$ می‌چرخد، همهٔ بخش هاشورخورده را در معرض دید قرار می‌دهد. بنابراین، ناوچه نمی‌تواند خودرا از دید نورافکن مخفی نگاه دارد.

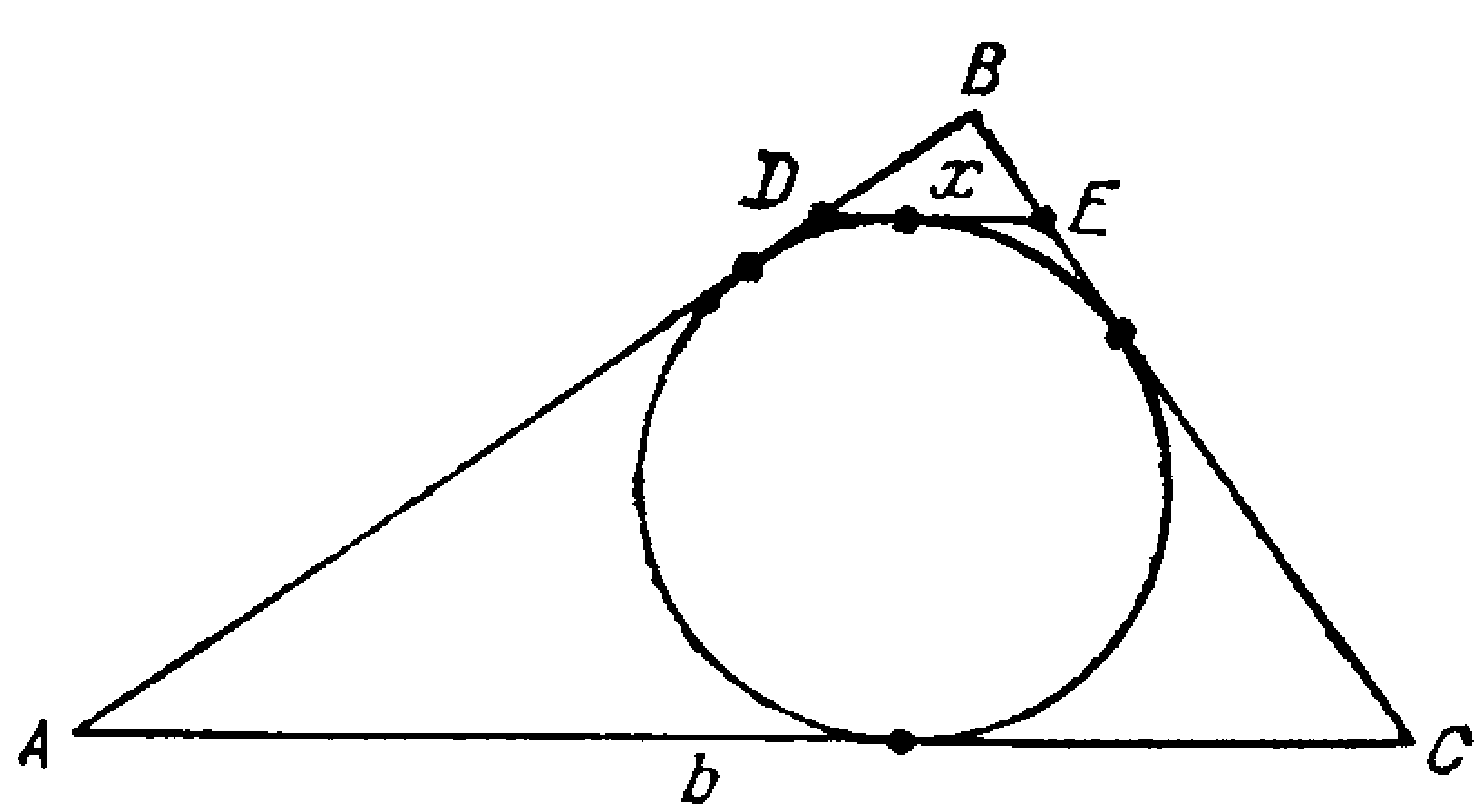
▽ با استدلالی ظریف‌تر،می‌توان ثابت کردکه، کمترین سرعت ناوچه برای عبورازدریاچه، برابر $v_{min}=v\cos\beta$ است که، در آن، β عبارت است از ریشهٔ معادلهٔ $2\pi+\beta=tg\beta$ $(0<\beta<\frac{\pi}{2})$: $v_{min}\approx 0/13v$.

۶۱. یکی از افراد را در نظر می‌گیریم. اگر چنین تقسیمی از افراد ممکن باشد،آن وقت، بقیهٔ ۹۹ نفررا باید بتوان به زوج‌هایی تقسیم کرد که، هرکدام از آن‌ها، با فرد انتخابی، به‌نگهبانی بپردازند. ولی این‌ممکن نیست، زیرا ۹۹، عددی فرد است.

▽ مسالهٔ کلی‌رامی‌توان به‌این‌ترتیب طرح کرد: به‌ازای چه‌مقدارهایی از n، می‌توان ازعضوهای مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, n\}$ دستگاهی ازسه‌تایی‌ها را طوری جداکردکه، هردو عضو، درست در یك سه‌تایی قرار گیرد. این دستگاه، به دستگاه «سه‌تایی‌های شتینر» معروف است.

۶۲. طول پاره خط راست مجهول‌را x و طول قاعـدهٔ AC از مثلث ABC را b مـی‌گیریم (شکل ۴۴). محیط مثلث BDE، برابـر $2p-2b$ می‌شود (با استفاده از ویژگی‌مماس‌های بردایره).

ازتشابه مثلث‌های BDE و ABC به‌دست می‌آید:



شکل ۴۴

$$x=\frac{۱}{p}b(p-b)=\frac{۱}{p}\left[\frac{p^۲}{۴}-(b-\frac{p}{۲})^۲\right]$$

حداکثر مقدار x برابراست با $\frac{p}{۴}$ و وقتی به‌دست می‌آید که داشته باشیم:

$$b=\frac{p}{۲}$$

۶۳. به‌سادگی ثابت می‌شود که، برای هر i و k، داریم:

$$x_{ii}=۰,\ x_{ik}=-x_{ki}$$

اگر n معادلهٔ $x_{ij}+x_{jk}+x_{ki}=۰$ را، با ثابت نگه داشتن i و j $(k=۱, ۲, \ldots, n)$ باهم جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$nx_{ij}=s_i-s_j$$

که در آن، s_j، مجموع همهٔ‌عددهای به‌صورت x_{jk} $(k=۱, ۲, \ldots, n)$ است.

اکنون $a_i=\frac{s_i}{n}$ می‌گیریم، در این‌صورت $x_{ij}=a_i-a_j$؛ همان چیزی که می‌خواستیم. ●

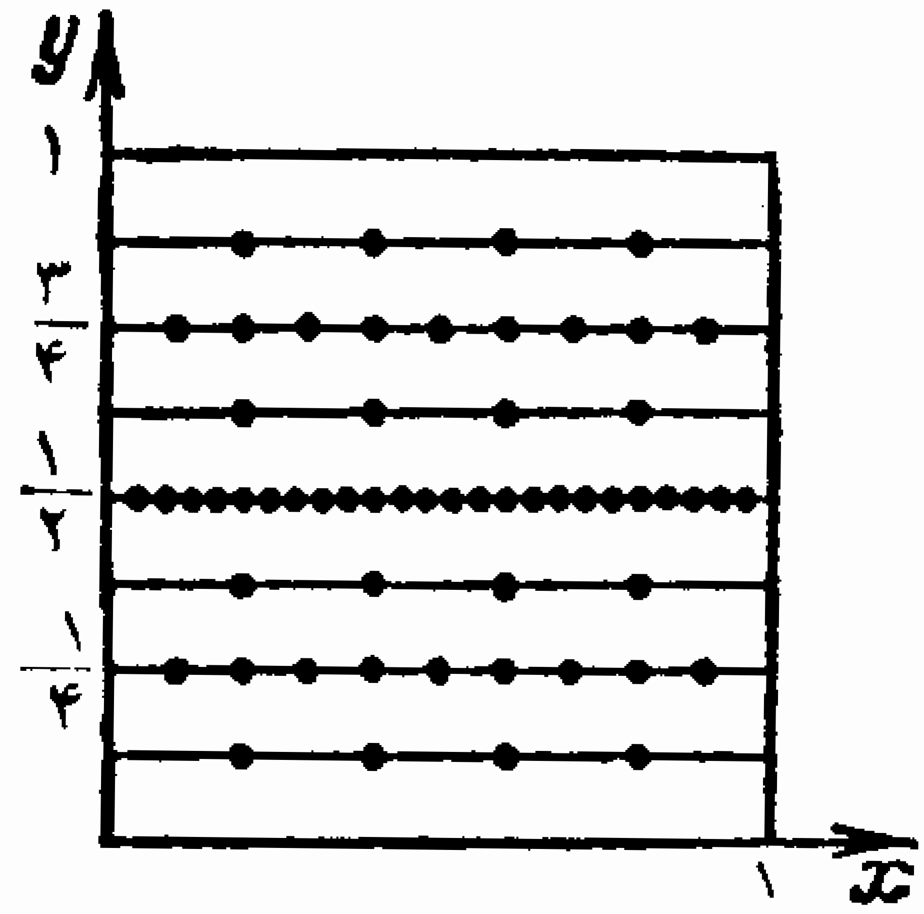
۶۴. پاسخ: می‌توان.

درمربع $۱\leqslant x\leqslant ۰$، $۱\leqslant y\leqslant ۰$ وروی خط راست $y=\frac{۱}{۲}$، به‌تعداد $c_۰=۲۰۰$ نقطه به‌طور یکنواخت قرارمی‌دهیم: $\left(\frac{k}{۲۰۱}, \frac{۱}{۲}\right)$؛ $k=۱, ۲, \ldots, ۲۰۰$.

سپس، روی هریك ازخطهای راست $y=\frac{۱}{۴}$ و $y=\frac{۳}{۴}$، به‌تعداد $c_۱=۱۰۰$ نقطه قرار می‌دهیم:

$$\left(\frac{k}{۱۰۱}, \frac{۱}{۴}\right) \text{ و } \left(\frac{k}{۱۰۱}, \frac{۳}{۴}\right),\ k=۱, ۲, \ldots ۱۰۰$$

این روند را، برای $m=۲, ۳, \ldots, ۷$، روی هریك از خطهای راست



شکل ۴۵

$y=(۲l-۱)۲^{-m-۱}$ $(۱\leqslant l\leqslant ۲^m)$ تکرار می‌کنیم و نقطهٔ c_m

$$\left(\frac{k}{c_m+۱}, \frac{۲l-۱}{۲^{m+۱}}\right), c_m=[۲۰۰\times ۲^{-m}]$$

را قرارمی‌دهیم (به‌ازای $m=۷$، روی هریك‌از ۱۲۸ خط‌راست متناظر آن، یك نقطه قرار می‌گیرد). تعدادکل نقطه‌ها، روی‌هم، چنین می‌شود:

$$\sum_{m=۰}^{۷}۲^m c_m=۲۰۰+۲\times ۱۰۰+۴\times ۵۰+۸\times ۲۵+۱۶\times$$

$$\times ۱۲+۳۲\times ۶+۶۴\times ۳+۱۲۸=۱۷۰۴$$

این ساختمان، بوسیلهٔ شکل ۴۵ روشن شده است.

روشن است که، هیچ یك از مستطیل‌های به‌مساحت $\frac{۱}{۲۰۰}$ رانمی‌توان درفاصلهٔ بین این‌نقطه‌ها جا داد. اگرخط راست $y=\frac{۱}{۲}$ را قطع‌کند، قاعدهٔ آن از $\frac{۱}{۲۰۱}$ بیشترنیست؛ اگرخط راست $y=\frac{۱}{۲}$ را قطع نکند، آن وقت به‌طورکامل در بالا ویا به‌طور کامل در پایین این‌خط راست قرارمی‌گیرد. در ضمن، اگر خط راست $y=\frac{۳}{۴}$ یا $y=\frac{۱}{۴}$ را قطع‌کند، ارتفاع آن از $\frac{۱}{۲}$ و قاعدهٔ آن از $\frac{۱}{۱۰۱}$ بیشترنیست و غیره. اگرمستطیل، به‌طورکامل بین‌خط‌های

راست به‌صورت $y=\frac{n}{256}$ $(n=1, 2, \ldots, 256)$ قرار گیرد. آن‌وقت ارتفاع

آن، از $\frac{1}{256}$ تجاوز نمی‌کند.

۶۵. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ را، عددهای مفروض می‌گیریم، به‌نحوی که، به ردیف صعودی، نسبت به‌بخش کسری آن‌ها، $\alpha_i = x_i - [x_i]$، شماره‌گذاری شده باشند.

k عدد اول را، درجهت کوچکتراز خود، و بقیه را درجهت بزرگتر از خود گرد می‌کنیم. به‌سادگی دیده می‌شود، حداکثر خطایی که در نتیجهٔ گرد-کردن به‌دست می‌آید، بامحاسبهٔ یکی از دومجموع زیر، مشخص می‌شود:

$$x_1+x_2+\ldots+x_k \text{ و } x_{k+1}+x_{k+2}+\cdots+x_n$$

قدرمطلق خطای اول برابراست با

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k \leqslant k\alpha_k$$

وقدرمطلق خطای دوم

$$(1-\alpha_{k+1})+\ldots+(1-\alpha_n) \leqslant (n-k)(1-\alpha_{k+1})$$

بنابراین، بایدk را طوری انتخاب کنیم که نابرابری‌های زیر برقرار باشند:

$$k\alpha_k \leqslant \frac{1}{4}(n+1) \text{ و } (n-k)(1-\alpha_{k+1}) \leqslant \frac{1}{4}(n+1)$$

برای این‌منظور، کافی‌است، بزرگترین مقدار k را پیدا کنیم که، به‌ازای آن، نابرابری اول برقرار باشد: دراین‌صورت $\alpha_{k+1} > \frac{n+1}{4(k+1)}$ و، بنابراین، نابرابری دوم هم برقرار خواهد بود:

$$1-\alpha_{k+1} < 1-\frac{n+1}{4(k+1)} \leqslant \frac{n+1}{4(n-k)}$$

زیرا $1 \geqslant \frac{(n+1)^2}{4(k+1)(n-k)} = \frac{n+1}{4(n-k)} + \frac{n+1}{4(k+1)}$ ، بـه‌ازای $0 < k < n$.

$\triangledown$ وقتی n عددی فرد باشد، این ارزیابی خطاً دقیق است. مثلا برای

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{2}$$

ولی وقتی n عددی زوج باشد؛ می‌توان این ارزیابی خطا را، با تبدیل $\frac{n+1}{4}$

به $\frac{n+1}{4} - \frac{1}{n+1}$، اندکی بهتر کرد. مثلاً

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{n}{2(n+1)}$$

۶۶. جهان‌گرد می‌تواند از رستوران در هر مسیری حرکت کند؛ تنها بااین‌شرط که، ازمیدان، خیابانی‌را برای‌عبور انتخاب کند که، قبلا، به‌تعدادی فرد از آن گذشته است. به‌سادگی دیده می‌شودکه، چنین خیابانی، برای هر تقاطعی، به‌جز ایستگاه، وجود دارد (در واقع، تعداد ورودهای جهان‌گرد به تقاطع، یکی بیشتراز‌تعداد خروج او از آن است)؛ همچنین، چنین مسیری، نمی‌تواند او را دوبار از خیابانی عبور دهد. چون تعداد خیابان‌ها محدود است، جهان‌گرد سر آخر به‌ایستگاه می‌رسد.

۶۷. (a راه حل‌اول. هردوعضوکمیسیون، در بیش‌از یك نشست، باهم برخورد نمی‌کنند. در هرنشست، به‌تعداد $C_{10}^2 = 45$ زوج وجوددارد. چون این‌افراد در ۴۰ نشست شرکت کرده‌اند، بنابراین از عضوهای کمیسیون‌ها، می‌توان به‌تعدادی‌که از 40×45، یعنی ۱۸۰۰ کمتر نیست، زوج تشکیل‌داد. ولی از ۶۰ نفر (و یـا کمتر از آن) می‌توان حـداکثر به‌تعداد C_{60}^2، یعنی $\frac{59}{2} \times 60$ زوج تشکیل دادکه از ۱۸۰۰ کمتراست.

راه حل دوم. فرض می‌کنیم، N، تعداد افـرادکمیسیون از ۶۰ بیشتر

نباشد. در این‌صورت، چون $6 > \frac{40}{N} \times 10$، بنا بر این فردی پیدا می‌شود که، دست کم، درهفت نشست حضور داشته‌است. تعداد همهٔ افرادی که، این شخص، با آن‌ها برخورد دارد (درهر نشست با ۹ نفر)، برابر است با $59 < 9 \times 7$. تناقض.

b) این‌مساله هم، کاملاً شبیه a) حل می‌شود (هریك ازدوراه حل).

▽ ارزیابی‌صورت مساله، در بخش b)، کاملاً دقیق‌است: ۳۰ کمیسیون ۵ نفری را، باتوجه به‌شرط مساله، می‌توان تشکیل داد.

۶۸. پاسخ: b) $\frac{1}{2}(p-1)(q-1)$.

اگر p و q دو عدد طبیعی و نسبت به‌هم اول باشند، هر عدد درست z به‌صورت $z = px + qy$ نشان داده می‌شود (ضمیمهٔ ۲). همهٔ این گونه نمایش‌ها، ازیك z ثابت به‌صورت $z = pa + qb$ و با دستور کلی:

$$z = p(a - qt) + q(b + pt)$$

به‌دست می‌آیند که، در آن، t، عددی است درست؛ در ضمن، نمایش منحصر به‌فردی وجود دارد که، برای آن داشته باشیم: $0 \leqslant x \leqslant q-1$.

هرعدد درست z را متناظر بازوج عددهای درست $(x، y)$ قرار می‌دهیم، به‌نحوی که

$$0 \leqslant x \leqslant q-1 ؛ z = px + qy$$

دراین تناظر، هرعدد، درست بایك زوج متناظراست؛ درضمن، z، تنها وقتی «خوب» است که داشته باشیم: $y \geqslant 0$؛ اگر $z = px + qy$، عددی، «خوب» باشد، آن وقت، به‌ازای $x = qt + r \geqslant 0$ و $0 \leqslant r \leqslant q-1$، این نمایش وجود دارد:

$$z = pt + q(y + t)$$

اکنون یادآوری می‌کنیم، اگرعدد $z = px + qy$، $0 \leqslant x \leqslant q-1$

«خوب» باشد، آن‌وقت عدد $z' = (q-1-x)p + (-1-y)q$ «بد» است و برعکس، اگر z «بد» باشد، آن‌وقت z' «خوب» است. نقطه‌های

$$(x, y) \text{ و } (q-1-x, -1-y)$$

نسبت به نقطهٔ $\left(\frac{q-1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = (x_0, y_0)$ متقارن‌اند، وخودعددهای z و z'، نسبت به نقطهٔ

$$z_0 = px_0 + qy_0 = \frac{1}{2}(pq - p - q)$$

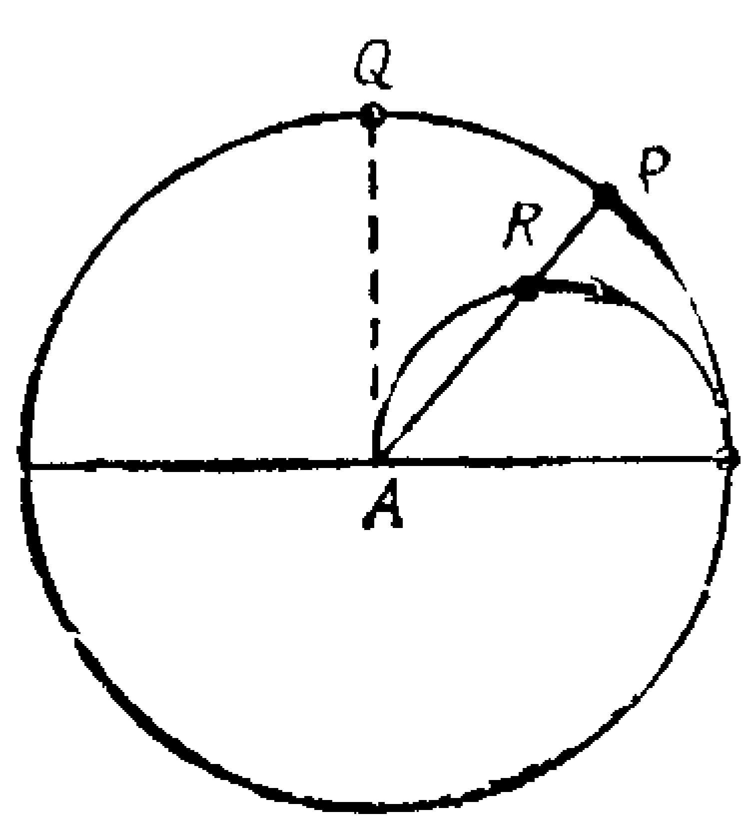
قرینهٔ‌هم‌اند، زیرا $z + z' = pq - p - q = 2z_0 = c$.

بداین ترتیب، ثابت‌شد که: a) عدد «خوب» z متناظر است باعدد «بد» (متقارن با آن) $c - z = z'$ و برعکس.

چون کوچکترین عدد «خوب» صفر است، بنا براین، بزرگترین عدد «بد» c می‌شود؛ وهمهٔ عددهای «بد» روی‌هم:

$$\frac{1}{2}(c+1) = \frac{1}{2}(p-1)(q-1)$$

▽ تعبیرهندسی حل این‌مساله، بسیارجالب است: (x, y) رانقطه‌هایی ازیك شبکهٔ واقع برصفحه و $px + qy = z$ را خط‌های راستی که از آن‌ها می‌گذرند، بگیرید وغیره.



شکل ۴۶

۶۹. پاسخ: بعد از $\frac{\pi}{200}$ ساعت.

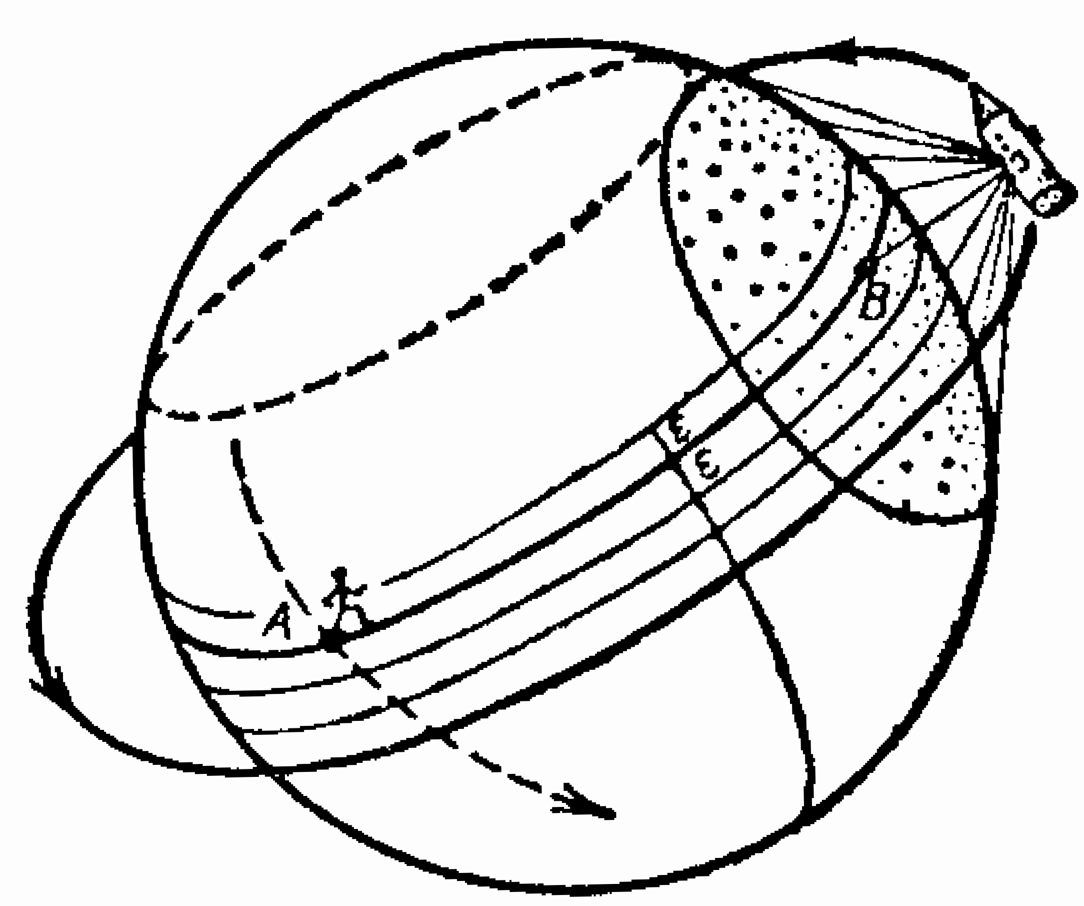
یادآوری می‌کنیم که، مسیر موشك، با توجه به‌شرط‌های مسا له، دایره‌ای با شعاعی برابر نصف شعاع مسیر هواپیماست (شکل ۴۶): مقدار کمان AR، ازنظر اندازه، دو برابر مقدار زاویهٔ QAP است (زاویهٔ بین مماس و وتر)؛ یعنی اندازهٔ کمان QP، برحسب درجه، برابر نصف کمان AR، برحسب درجه است. بنابراین، طول این دو کمان (برای هر وضع R) باهم برابرند. برای رسیدن موشك به‌هواپیما، باید هواپیما ربع دایره وموشك نیمی ازمحیط دایرهٔ مسیر خود را طی کنند.

▽ البته، باید منحصر به‌فرد بودن مسیر موشك را، با توجه به‌شرط‌های مسأله، ثابت کرد (ازشرکت کنندگان درالمپیاد، این اثبات را نخواسته بودند). این اثبات، نتیجه‌ای ازاین حکم کلی است که: اگر تابعی در نقطهٔ $t = 0$ مفروض ومشتق آن معلوم باشد. خود تابع منحصر به‌فرد است. اگرموشك، در زمان t فاصلهٔ $AR = AQf(t)$ ازنقطهٔ A راطی کند (درضمن $f(0) = 0$)، آن‌وقت برای سرعت آن، درجهت عمود برشعاع داریم: $f'(t) = v\sqrt{1 - f^2(t)}$ و

$$\frac{f'(t)}{\sqrt{1-f^2(t)}} = v \text{ ، } (ar\sin f(t))' = v$$

وازآن‌جا $f(t) = \sin vt$.

۷۰. A و B را دورأس چندوجهی می‌گیریم که به‌فاصلهٔ d ازیکدیگر باشند. ازنقطه‌های A و B، دوصفحه عمود برخط راست AB رسم می‌کنیم. روشن است که تمامی چندوجهی بین این‌دو صفحه قرار می‌گیرد. از هررأس چندوجهی، صفحه‌ای عمودبرخط راست AB رسم‌می‌کنیم وازآن‌ها، دوصفحهٔ مجاور را درنظر می‌گیریم. بین این دو صفحه، دست کم سه‌یال از چندوجهی وجود دارد. تصویر هریك ازاین یال‌ها برخط راست AB، از طول خود یال بزرگتر نیست؛ درضمن روشن است که، دربین آن‌ها، یال‌هایی وجود دارد که با AB موازی نیستند، بنابراین، مجموع طول‌های همهٔ این یال‌ها ازسه برابرطول AB، یعنی $3d$ بیشتراست.



شکل ۴۷

به‌طور خلاصه، می‌توان راه‌حل را، این طـور بیان کرد: تصویر بدنهٔ چندوجهی روی AB، دست‌کم سه‌بار آن را می‌پوشاند.

۷۱. شعاع سیاره را واحد می‌گیریم. دو نقطه از سطح سیاره را در نظر می‌گیریم که دوسر یك قطر آن باشند (قطب ها). از این دو نقطه، نصف‌النهاری به‌نام «نصف‌النهار مبداء» را می‌گذرانیم و آن را به‌کمان‌های برابر به‌طول ε تقسیم می‌کنیم و از هر نقطهٔ تقسیم، مداری عبور می‌دهیم (شکل ۴۷).

برای سفینه، این برنامهٔ جست‌وجو را می‌ریزیم: سفینه در فاصلهٔ ثابت $R>1$، نسبت به مرکز سیاره، روی مدارهایی که مشخص کرده‌ایم پرواز می‌کند؛ درضمن از نوار «شمالی» آغاز می‌کند و هر بار کـه به «نصف‌النهار مبداء» می‌رسد، در امتداد آن، خود را به مدار بعدی می‌رساند. فرض کنید: $R=\sqrt{2}$. در این صورت، از سفینه، «کلاهك کروی» به‌شعاع $\frac{\pi}{4}$ دیده‌می‌شود (همهٔ فاصله‌ها را، در روی سطح کره اندازه می‌گیریم).

از آن‌جا که ε را می‌توان به‌دلخواه کوچك گرفت، تنها باید تحقیق کرد، اگر نسبت سرعت‌ها بزرگتر از ۱۰ باشد، ساکن سیاره نمی‌تواند، در فاصلهٔ زمانی که سفینه یك مدار را دور می‌زند، از دید او خارج شود. و این، تقریباً روشن است. هر مدار از استوا کوتاه‌تر است. مرکز دایرهٔ دید سفینه، با سرعت دست‌کم $\frac{10}{\sqrt{2}}$ برابر سرعت موجود ساکن سیاره، جا به‌جا می‌شود. اگر این موجود، مدار را در نقطهٔ A قطع کند، آن وقت سفینه، در B قـرار دارد،

و، بنا بر این، یکی از دو کمان $\widehat{AB}$ ازمدار از π تجاوز نمی‌کند و، در زمانی که سفینه آن را طی می‌کند، ساکن سیاره می‌تواند از A، به‌فاصله‌ای که بیشتر از $\frac{\pi}{۴}<\frac{\pi\sqrt{۲}}{۱۰}$ نیست از A دورشود، به‌نحوی که در لحظهٔ بودن در A، باید ازسفینه دیده شود (قبل از دورزدن مدار یا بعدازآن).

۷۲. دوسیاره راکه ازهمه به‌هم نزدیك‌ترند، درنظر می‌گیریم. روشن است، اخترشناسانی که روی این دوسیاره باشند، به‌یکدیگر نگاه می‌کنند.

$n-۲$ سیاره و $n-۲$ اخترشناس باقی می‌مانند. اگردست‌کم یکی‌از این اخترشناسان به‌یکی‌از همین دوسیارهٔ انتخابی نگاه کند، آن‌وقت $n-۳$ اخترشناس باقی‌مانده، برای مشاهدهٔ $n-۲$ سیاره کفایت نمی‌کنند و یکی‌از سیاره‌ها، بدون مشاهده می‌ماند. ولی، اگر هیچ‌کدام از $n-۲$ اخترشناس روبه یکی از دوسیارهٔ انتخابی نداشته باشند، می‌توانیم دوباره به همان استدلال متوسل شویم: از $n-۲$ سیاره، دوسیاره راکه نسبت به‌دیگران، به‌هم نزدیك‌ترند درنظر می‌گیریم وغیره. چون n عددی فرد است، سرآخر، یك سیاره باقی می‌ماند که هیچ‌کدام از اختر شناسان، تلسکوپ خود را به طرف آن، نشانه نرفته‌است.

۷۳. a) اگرنقطهٔ P روی خط راست AD واقع باشد، درستی گزاره روشن است.

فرض می‌کنیم، نقطهٔ P روی خط راست AD نباشد و O را وسط پاره‌خط راست AD می‌گیریم. نقطهٔ P'، قرینهٔ P نسبت به O راپیدا می‌کنیم. چهارضلعی‌های $BPCP'$ و $P'APD$ متوازی‌الاضلاع‌اند و داریم:

$$AP+PD=AP'+AP>P'B+BP=BP+PC$$

b) بنا برشرط، P نقطه‌ای دلخواه است. P را منطبق بر A می‌گیریم. دراین صورت $AD\geqslant AB+AC$. اکنون P را منطبق بر D می‌گیریم. به دست‌می‌آید: $AD\geqslant BD+DC$. ازمجموع این دو نابرابری، خواهیم داشت:

$$۲AD\geqslant AB+AC+BD+CD$$

از طرف دیگر، همیشه داریم:

$$AD \leqslant AC + CD \text{ و } AD \leqslant AB + BD$$

در ضمن، درهریك ازاین دونا برابری، تنها وقتی به علامت برابری می‌رسیم که، سه نقطه، بر یك خط راست باشند. از مجموع دو نا برابری اخیر، به دست می‌آید:

$$2AD \leqslant BD + AB + AC + CD$$

از مقایسهٔ این‌نا برابری با نا برابری قبل نتیجه می‌شود:

$$2AD = BD + AB + AC + CD$$

از آن‌جا، بلافاصله نتیجه می‌شود که، نقطه‌های A و B و C و D، روی یك خط راست‌اندوهمهٔ نابرابری‌های قبلی، برابری‌اند و،درنتیجه، نقطه‌های B و C، روی پاره‌خط راست AD واقع‌اند و در ضمن $AB = CD$.

۷۴. پاسخ: چنین عددهایی برای x و y وجود ندارد.

فرض می‌کنیم: $y \geqslant x$. در این صورت

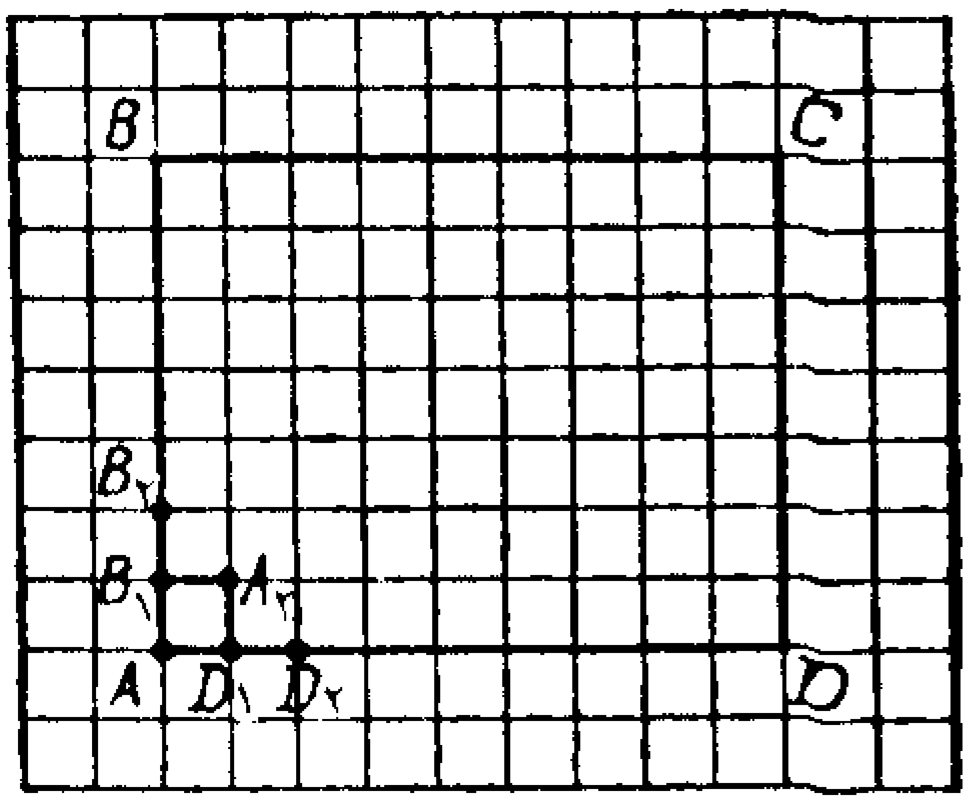
$$x^2 < x^2 + y \leqslant x^2 + x < (x+1)^2$$

بنا براین $x^2 + y$، که بین‌دومجذورکامل متوالی قراردارد، نمی‌تواند مجذور کامل باشد.

۷۵. a) کافی‌است ثابت‌کنیم، kامین‌نفر ازکلاس‌هشتم، قدی بلندتراز kامین نفر از کلاس هفتم دارد. A را kامین نفر کلاس هفتم، از لحاظ قد، فرض می‌کنیم. در این صورت، با خود A، دست کم k دانش‌آموز کلاس هفتم وجود داردکه از A کوتاه‌تر نیستند. همهٔ دانش‌آموزان‌کلاس هشتم،که پشت سر این k نفر قراردارند، از A بلندترند. بنا براین، k امین نفرکلاس هشتم، از لحاظ قد، از A بلندتر است.

b) این مساله هم، به مسالهٔ a) منجر می‌شود:کافی است همان استدلال را، برای هر دو ستون، داشته باشیم.

۷۶. مستطیل $ABCD$ را روی صفحهٔ کاغذ شطرنجی با اندازه‌های $m \times n$ درنظرمی‌گیریم (شکل۴۸)،کوتاه‌ترین‌مسیرهایی را که از رأس‌های B_1، D_1، B_2، D_2 و A_2، روی خط‌های شبکه به C می‌رسند، بـه ترتیب،



شکل ۴۸

b_1، d_1، b_2، d_2 و a_2 می‌نامیم. درواقع، باید ثابت کنیم: $\frac{d_1}{b_1}=\frac{n}{m}$. اثبات را، با استقرا روی $m+n$ می‌دهیم (ضمیمهٔ ۱)؛ در ضمن، اجباری نیست که نسبت $k=\frac{n}{m}$ را عددی درست فرض کنیم.

آغاز استقرا، $m=1$ یا $n=1$، روشن است. اکنون فرض می‌کنیم $m>1$ و $n>1$. بنا به‌فرض استقرا که دربارهٔ مستطیل‌های با اندازه‌های کوچکتر $n\times(m-1)$ و $(n-1)\times m$ در نظر گرفته‌ایم، داریم:

$$\frac{a_2}{b_2}=\frac{n}{m-1} \text{ و } \frac{d_2}{a_2}=\frac{n-1}{m}$$

بنابراین

$$\frac{d_1}{b_1}=\frac{d_2+a_2}{b_2+a_2}=\frac{\frac{d_2}{a_2}+1}{\frac{b_2}{a_2}+1}=\frac{\frac{n-1}{m}+1}{\frac{m-1}{n}+1}=\frac{n}{m}$$

$\triangledown$ درواقع، ضمن حل این مساله، ثابت کردیم:

$$C_{m+n-1}^{m-1}=nC_{m+n-1}^{m}=(m+n-1)C_{m+n-2}^{m-1}$$

(در مسالهٔما $n=km$). با اطلاع از دستور مربوط به C_n^m (ضمیمهٔ ۱۰)، می‌توان درستی این برابری‌ها را، به سادگی، تحقیق کرد. برعکس، می‌توان از این برابری‌ها، دستور مربوط به C_n^m را بیرون آورد.

۷۷. حکم مساله را، با روش استقرا ثابت می‌کنیم. به ازای $n=۱$، درستی حکم روشن است. فرض می‌کنیم، برای n عدد $a_۲$، $a_۳$، ...، $a_{n+۱}$، مجموع s' به صورت

$$\pm a_۲ \pm a_۳ \pm \cdots \pm a_{n+۱}$$

وجود داشته باشد، به نحوی که $۰ < s' \leqslant a_۲$.

ولی در این صورت از دو حال بیرون نیست: یا $۰ \leqslant s' \leqslant a_۱$ که از آن‌جا

$$۰ \leqslant s = a_۱ - s' \leqslant a_۱$$

و یا $a_۱ < s' \leqslant a_۲ \leqslant ۲a_۱$، که در این صورت

$$s = s' - a_۱ \leqslant a_۲ - a_۱ \leqslant a_۱$$

که درهرحال، درستی حکم مساله ثابت می‌شود.

۷۸. حکم مساله را، برای هر nضلعی محدب به مساحت S و محیط P ثابت می‌کنیم. طول ضلع‌های این n ضلعی را $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n می‌گیریم:

$$a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n = P$$

مستطیلی با مساحت Sوقاعدهٔ به طول P درنظرمی‌گیریم؛ ارتفاع این مستطیل، برابر $\frac{S}{P}$ می‌شود.

اکنون این‌مستطیل‌را، به‌کمك پاره‌خط‌های راست‌قائم، به n مستطیل با قاعده‌های برابر $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n تقسیم می‌کنیم وهر یك از آن‌ها را، متناظر با یك ضلع n ضلعی و در درون آن قرار می‌دهیم. بعضی از مستطیل‌ها، در بخشی، روی هم قرار می‌گیرند و بعضی‌ها ممکن است به بیرون از n ضلعی بروند؛ بنابراین، از آن‌جا که مجموع مساحت‌های آن‌ها برابر S و مساحت چندضلعی هم برابر S است، این مستطیل‌ها نمی‌توانند، به طور کامل، سطح چندضلعی را بپوشانند. هر نقطه‌ای از سطح چندضلعی را، که به وسیله این مستطیل‌ها پوشیده‌نشده باشد، می‌توان به‌عنوان مرکزدایرهٔ بەشعاع $\frac{S}{P}$ انتخاب

کرد.

$\bigtriangledown$ برای چهارضلعی می‌توان مساله را به‌طریق دیگری حل کرد، ولی برخی از شرکت کنندگان در المپیاد، آن را با روشی حل کرده‌اند که از آن می‌توان برای nضلعی هم استفاده کرد.

۷۹. هرمسیررا با تعداد پاره‌خط‌های راستی بیان می‌کنیم که، ازطریق آن‌ها، می گذرد. n را طول کوتاه‌ترین مسیری می گیریم که از A به B می‌رود. حکم را، با استقرا روی n ثابت می‌کنیم.

برای $n=1$، به جز کوتاه‌ترین مسیر AB، مسیری وجود دارد که از A به چهارراه $C\neq A$ می‌رود که از B به اندازهٔ ۱ فاصله داردواز B نمی گذرد.

$n>1$ می گیریم و فرض می کنیم، D نزدیکترین چهار راه به A، در کوتاه‌ترین مسیر از A به B باشد. بنا بر فرض استقرا، دو مسیر غیر متقاطع p و q از D به B وجود دارد. از A در مسیر l حرکت می کنیم، به نحوی که از D عبور نکند. اگر این مسیر، با مسیرهای p و q برخوردی نداشته باشد، همه چیز ثابت شده است. ولی اگر مثلا با p برخورد داشته باشد، از آن به بعد، باید مستقیماً روی p به سمت B رفت. این مسیر، q را قطع نخواهدکرد.

۸۰. h^* و PH را، به ترتیب، ارتفاع‌هایی از چهار وجهی می گیریم که از رأس‌های A و P گذشته باشند. h_a، h_b و h_c را ارتفاع‌های مثلث ABC و PL را، ارتفاع مثلث PBC فرض می کنیم.

داریم: $h^*.\ S_{PBC}=HP.\ S_{ABC}$؛ و چون $h^*\geqslant HP$، بنا براین $S_{PBC}\leqslant S_{ABC}$. از اینجا به‌دست می‌آید: $PL\leqslant h_a$ و از آنجا

$$HL<PL\leqslant h_a$$

به‌این ترتیب، فاصلهٔ H تا خط راست BC از h_a کوچکتر است، به نحوی که نقطهٔ H، در درون نواری قرارمی گیردکه به وسیلهٔ دوخط راست موازی و به فاصلهٔ h_a از خط راست BC به‌وجود آمده است.

به همین ترتیب، ثابت می‌شودکه H، از AC و AB هم به فاصله‌ای، به ترتیب کمتر از h_b و h_c قرار دارد.

به این ترتیب، نقطهٔ H، بــه اشتراك هر سه نوار تعلق دارد، یعنی در درون مثلث $A_1B_1C_1$ قرار دارد که نقطه‌های A، B و C، وسط ضلع‌های آن هستند. برعکس، اگـر H نقطهٔ دلخواهی در درون مثلث $A_1B_1C_1$ باشد، و نقطهٔ P را نزدیك به H طوری انتخاب کنیم که، خط راست PH، عمود بر صفحهٔ ABC باشد، آن وقت فاصلهٔ از نقطهٔ P تا ضلع‌های مثلث ABC، از ارتفاع‌های متناظر کمتر می‌شود و PH، کـوچکترین ارتفاع چهار وجهی $PABC$ در می‌آید.

۸۱. هر یك از نقطه‌های مفروض را بـه وسیلهٔ دایره‌ای بـه شعاع $\frac{۱}{۲}$ دور می‌زنیم. مجموع قطرهای این دایره‌ها برابر است با ۱۰۰.

هر جا دو دایره با هم متقاطع در آیند، به جای آن‌ها، دایره‌ای قرار می‌دهیم که شامل این دو دایره شود و کوچکترین قطر ممکن را داشته باشد. به این ترتیب، مقدارمجموع قطرها افزایش پیدا نمی‌کند، ولی تعداد دایره‌ها کمتر می‌شود.

اگر ایــن روند را ادامه دهیم، سرانجــام، به دستگاهی از دایره‌ها می‌رسیم کـه دو به دو نسبت به هم غیرمتقاطع‌اند و مجموع قطرهای آن‌ها از ۱۰۰ تجاوزنمی‌کند. یادآوری می‌کنیم که، فاصلهٔ هرنقطه تا محیط دایره، از $\frac{۱}{۲}$ کمتر نیست.

r راکوچکترین فاصلهٔ بین‌دایره‌ها می گیریم. اگر $r > ۱$، چیزی برای اثبات باقی‌نمی‌ماند. اگر $r \leqslant ۱$، آن‌وقت هردایره‌را بادایره‌ای‌هم مرکزآن عوض می کنیم، به نحوی که شعاع آن به اندازهٔ $\frac{r}{۳}-\frac{۱}{۲}$ کمتر باشد.

دستگاه دایره‌هایی که به این ترتیب به‌دست می آید، با شرط‌های مساله، سازگار است.

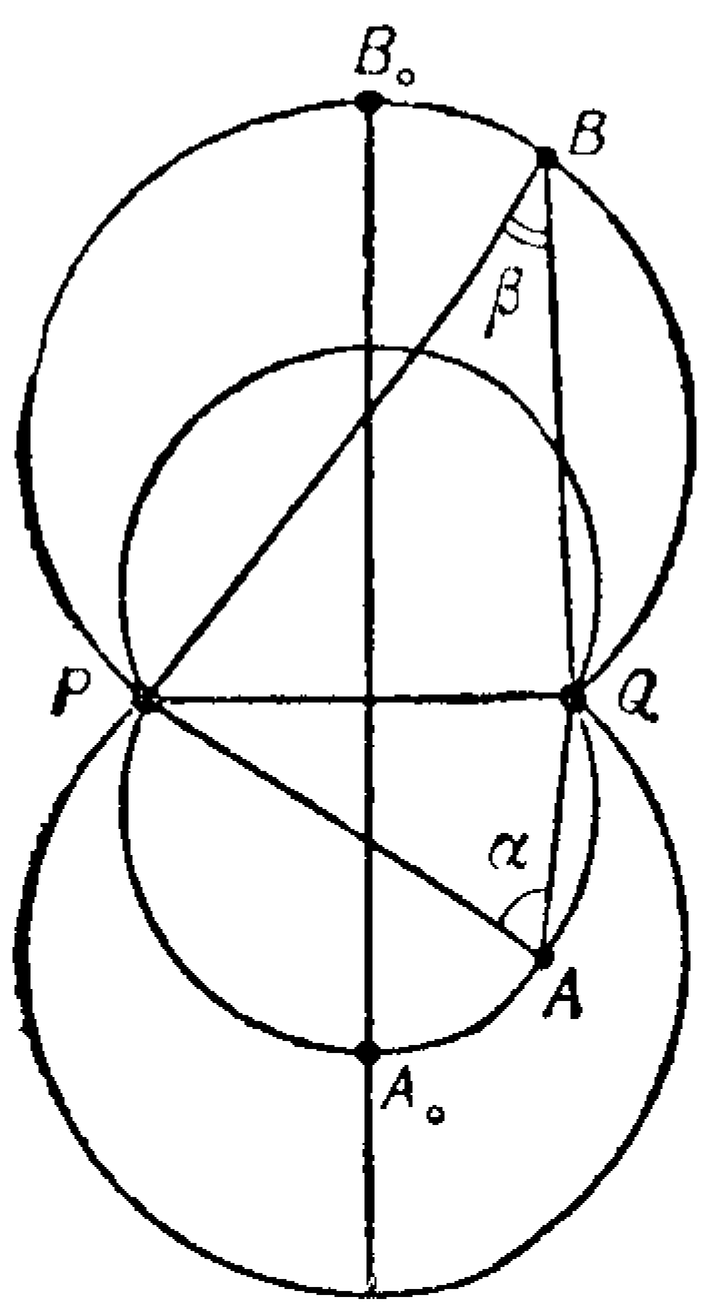
۸۲. پاسخ: $\dfrac{۲d}{cotg\,\frac{\alpha}{۲}+cotg\,\frac{\beta}{۲}}$ کیلومتر در ثانیه.

فرض کنید. هواپیما در یک ثانیه از نقطهٔ P تا نقطهٔ Q پرواز کند: $PQ=r$. باید، با شرط ثابت بودن $AB=d$، حداقل مقدار ممکن r را پیدا کنیم. به‌جای این حداقل می‌توان به‌جست و جوی حداکثر مقدار $\frac{d}{r}$ رفت و. در ضمن، راحت‌تر است که r را ثابت بگیریم.

اکنون می‌توانیم، مساله را، بداین‌صورت تنظیم کنیم: بین‌همهٔ نقطه‌های A و B از فضا، که از آن‌ها، پاره‌خط راست PQ، به ترتیب، با زاویه‌های α و β دیده می‌شود، دو نقطه‌ای را پیدا کنیم که، برای آن‌ها، فاصلهٔ AB، حداکثر مقدار ممکن باشد.

چون $\widehat{PAQ}=\alpha$، بنابراین نقطهٔ A روی کمان‌های در خور α قرار دارد که از P و Q گذشته‌اند (دو کمان) و. به‌همین ترتیب. نقطهٔ B روی کمان‌های درخورزاویه β قراردارد که از P و Q گذشته‌اند (باز هم دو کمان) (شکل ۴۹). به سادگی ثابت می‌شود: به حداکثر فاصلهٔ AB وقتی می‌رسیم که، دو نقطهٔ A و B «متقابل قطری» باشند (در شکل، نقطه‌های $A_\circ$ و $B_\circ$). برای چنین موقعیتی از A و B خواهیم داشت:

$$\frac{۲d}{r}=cotg\frac{\alpha}{۲}+cotg\frac{\beta}{۲}$$



شکل ۴۹

که از آن، پاسخ مساله به‌دست می‌آید.

۸۳. پاسخ: ۳۰.

برنامه‌ای راکه بازی‌کن دوم باید اجرا کند تا به این مجموع برسد، شرح می‌دهیم. عـددها را، به زوج‌های (۲، ۱)، (۴، ۳)، ...، (۲۰، ۱۹) تقسیم می‌کنیم. هر بار که اولی، علامتی را جلو یك عدد می‌گذارد، به جز ۱۹ و ۲۰، دومی باید عـدد دیگر همان زوج را، باعلامت مخالف، نشانه‌گذاری کند. اگـر اولی علامتی را جلو یکی از دو عدد زوج آخر، یعنی (۲۰، ۱۹) قرارداد، دومی‌همان علامت را جلو عدد دیگر زوج قرارمی‌دهد. روشن است‌که مجموع نهائی، از لحاظ قدرمطلق، حداقل برابر می‌شود با

$$۱۰+۲۰\underbrace{-۱-۱-\ldots-۱}_{\text{۹ بار}}=۳۰$$

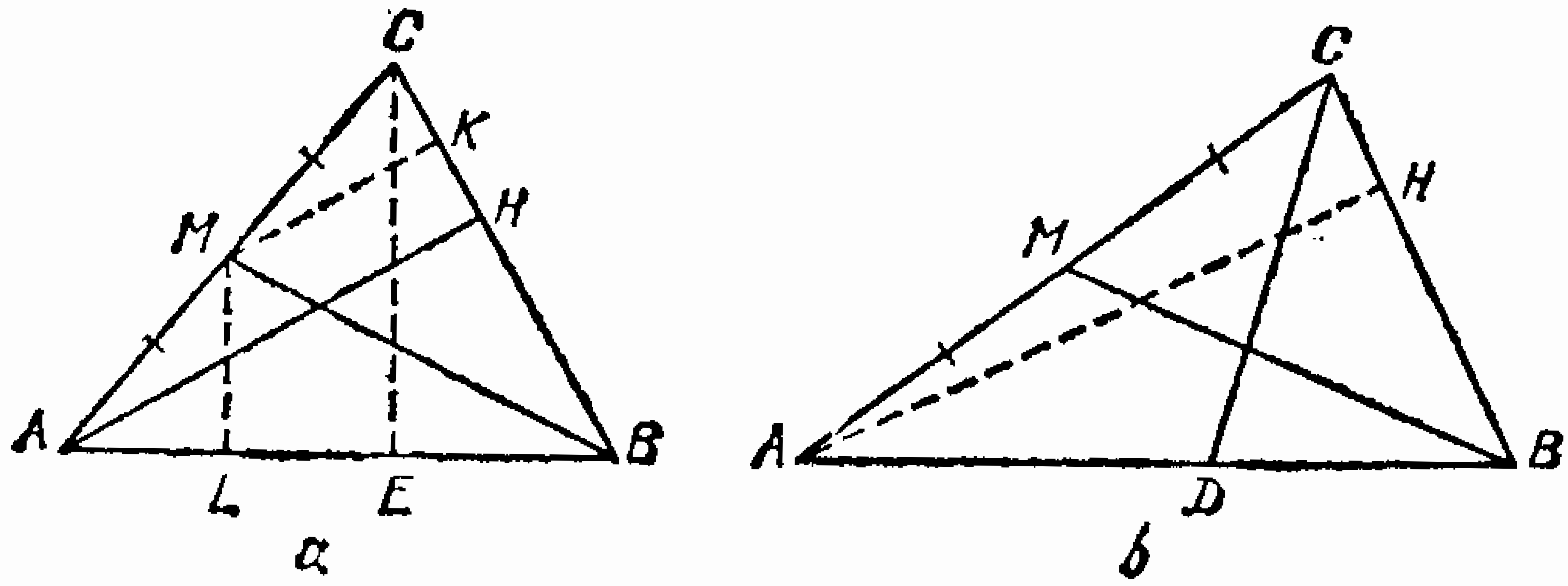
اکنون ثابت می‌کنیم، بازی‌کن اول، می‌تواند مانع آن شود که دومی بیش از ۳۰ را به‌دست آورد، به شرطی که درهرحرکت خود، جلو بزرگترین عدد ازعددهای باقی‌مانده، علامتی را بگذارد که مخالف علامت مجموع، در آن‌لحظه، باشد(اگرمجموع برابرصفر بود، بایدعلامت مثبت‌را انتخاب کند).

یکی از مرحله‌ها را در نظر می‌گیریم. فرض کنید، kامین حـرکت، آخرین حرکتی باشدکه، درنتیجهٔ آن، مجموع تغییرعلامت داده است (واین شامل حرکت‌هایی است که، قبل‌ازآن، مجموع برابر صفراست). در $k-۱$ حرکت اول، آگاهانه، ازعددهای ۲۰، ۱۹، ۱۸، ...، $۲۰-(k-۱)$ استفاده شده است، به‌نحوی که حداکثر قدرمطلق مجموع، که می‌تواند بعد از حرکت k ام به دست آید برابر است با

$$۲۰-(k-۱)+۲۰-k=۴۱-۲k$$

در هریك از $۱۰-k$ حرکت بعدی، مقدارمجموع دست‌کم یك واحدکاهش پیدا می‌کند، زیرااولی، هربار، ازقدرمطلق مجموع، بزرگترین عددباقی‌مانده را، مثلاً m، کم می‌کند، در حالی‌که دومی نمی‌تواند، بیش از $m-۱$، به آن اضافه کند. در نتیجه، مجموع نمی‌تواند از

$$۴۱-۲k-(۱۰-k)=۳۱-k\leqslant۳۰$$



شکل ۵۵

تجاوز کند.

۸۴. a) مقدار زاویهٔ B از مثلث قائم‌الزاویه برابر یا کوچکتر از ۳۰ درجه است، برحسب آن که، ضلع رو به‌روی به‌زاویهٔ B، طولی برابر با نصف طول وتر و یا کوچکتر از آن داشته باشد.

اگر از این مطلب، در مثلث‌های BMK و BML استفاده کنیم (شکل ۵۵، a: $MK \perp BC$)، به‌دست می‌آید: $\widehat{MBC} = ۳۰^\circ$، زیرا

$$BM = AH = ۲MK$$

و $\widehat{MBA} < ۳۰^\circ$، زیرا $BM = AH \geqslant EC = ۲ML$. بنا براین

$$\widehat{B} = \widehat{MBC} + \widehat{MBA} < ۶۰^\circ$$

یادآوری می‌کنیم که «حاده‌بودن زاویه‌های مثلث» ضرورت دارد؛ بدون آن، حکم مساله درست نیست.

b) از مسالهٔ a) نتیجه می‌شود: $\widehat{B} \leqslant ۶۰^\circ$. بنا براین، کافی است ثابت کنیم، ضلع AC از دوضلع دیگر کوچکتر نیست: دراین‌صورت

$$\widehat{A} \leqslant \widehat{B} \leqslant ۶۰^\circ ، \widehat{C} \leqslant \widehat{B} \leqslant ۶۰^\circ$$

(درهرمثلث، زاویهٔ بزرگتر، روبه‌رو به ضلع بزرگتراست) وازاین‌نابرابری‌ها بلافاصله نتیجه می‌شود:

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = ۶۰^\circ$$

برای اثبات، توجه می‌کنیم که BM، کوچکترین میانه‌است، زیرا میانهٔ وارد بر BC از ارتفاع $AH=BM$ کوچکتر نیست، و میانهٔ وارد برضلع AB از نیمساز CD کوچکتر نیست (آخر، نیمساز CD، ضلع AB را به نسبت $\frac{AC}{BC}$ تقسیم می‌کند؛ شکل ۵۰، b). ولی‌درهرمثلث، میانهٔ بزرگترمتناظر است باضلع کوچکتر: کافی‌است توجه کنیم که، مرکز ثقل مثلث ABC (نقطهٔ برخورد میانه‌ها) باراس C، در یك طرف عمود منصف AC قرار دارند.

۸۵. a) اگر مجموع دو عدد a و b، تنها از رقم‌های ۹ تشکیل شده باشد، به معنای آن است که، ضمن جمع دو عدد، در هیچ مرتبه‌ای، مجموع رقم‌ها از ۹ بیشتر نشده است. بنا براین، اگر $S(x)$ را به‌معنای مجموع‌رقم‌های عدد x بگیریم، باید داشته باشیم:

$$S(a+b)=S(a)+S(b)$$

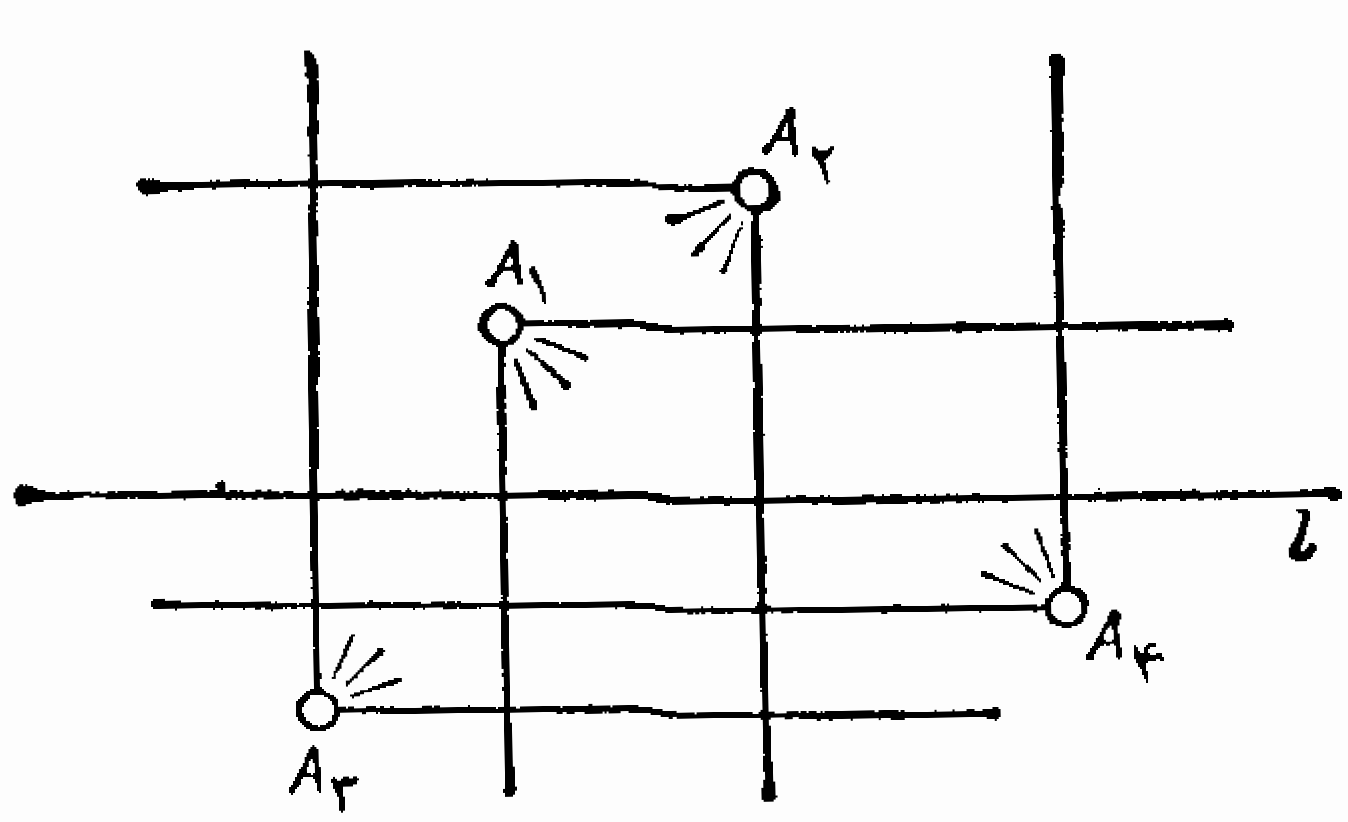
ولی اگر $S(a)=S(b)$، آن‌وقت $S(a+b)$ عددی زوج است و نمی‌تواند برابر با ۱۹۶۷×۹ باشد.

b) اگر رقم آخر عدد a برابر صفر نباشد، آن وقت مجموع آن با رقم آخر b، برابر ۱۰ می‌شود و، بنا براین، باید مجموع رقم‌ها در هریك از نه مرتبهٔ بعدی برابر ۹ باشد. ازاین‌جا نتیجه می‌شود

$$۲S(a)=۹\times ۹+۱۰=۹۱$$

که ممکن نیست.

۸۶. a) خط راست l را طوری رسم می‌کنیم که، درهر نیم صفحه‌ای



شکل ۵۱

که به دست می‌آید، دو نورافکن وجود داشته باشد. روشن است که (شکل ۵۱)، با دو نورافکنی که در یکی از نیم صفحه‌ها قرار دارد، می‌توان تمامی نیم‌صفحهٔ دیگر را روشن کرد.

b) صفحه‌ای رسم می‌کنیم که، از بین هشت نقطهٔ مفروض، چهار نقطه در یك طرف، و چهار نقطه درطرف دیگر آن قرار گیرند. با استفاده ازمسالهٔ a)، می‌توان به سادگی ثابت کرد، نورافکن‌هایی درچهار نقطهٔ یکی ازنیم فضاها قراردارند، می‌توانند تمامی نیم فضای دیگر را روشن کنند.

این مساله‌را می‌توان تعمیم داد: n زاویهٔ دلخواه α_1، α_2، ...، α_n را با شرط

$$\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n=360^\circ$$

می‌توان در n نقطهٔ مفروض صفحه طوری قرار داد که تمامی صفحه را بپوشانند.

۸۷. a) پاسخ: نمی‌توان.

هیچ دوعددی ازعددهای ۰، ۱، ۲، ۸، ۹ نمی‌توانند مجاورهم باشند؛ بنابراین، این‌عددها، باید یك درمیان قرار گیرند. ولی عدد ۷ را نمی‌توان در هیچ کدام از ۵ جای باقی‌مانده قرار داد؛ همچنین، برای ۳ هم جایی پیدا نمی‌شود (امتحان کنید!).

b) پاسخ: نمی‌توان.

استدلال را می‌توان شبیه a) انجام داد. هیچ دوعددی ازعددهای ۱، ۲، ۳، ۱۱، ۱۲، ۱۳ نمی‌توانند مجاورهم باشند؛ از بین این عددها، تنها ۱ می‌تواند درمجاورت ۴ و تنها ۱۳ می‌تواند درمجاورت ۱۰ قرار گیرند. در این صورت ۱۰ و ۴ درکنارهم قرار می‌گیرند که شرط مساله را نقض می‌کنند.

▽ جالب است که برای ۱۴ عدد (وظاهراً برای هر $n \geqslant 14$)، می‌توان برای مساله جوابی پیدا کرد:

۱، ۸، ۳، ۶، ۲، ۵، ۱۰، ۴، ۷، ۱۱، ۱۴، ۱۰، ۱۳، ۹، ۱۲

۸۸. عدد 5^{1000} به ۵ ختم شده است. فرض کنید، kامین رقم این‌عدد، ازراست به‌چپ، برابر ۰ وهمهٔ بقیهٔ رقم‌های سمت راست آن مخالف ۰ باشد. به این عدد، عدد $5^{1000}\times 10^{k-1}$ را اضافه می‌کنیم. دراین صورت، عددی به

دست می‌آید که بر 5^{1000} بخش‌پذیر است و k رقم آخر آن مخالف صفر است. با ادامهٔ این روند، می‌توان عددی به دست آورد که ۱۰۰۰ رقم آخر آن مخالف صفر باشد. اکنون، همهٔ رقم‌ها، به‌جز ۱۰۰۰ رقم آخر را حذف می‌کنیم. روشن است که عدد حاصل، بازهم بر 5^{1000} بخش‌پذیر است.

۸۹. پاسخ: $(0, -1)$، $(-1, -1)$، $(0, 0)$، $(-1, 0)$، $(5, 2)$، $(-6, 2)$.

اگر دوطرف معادله را ۴ برابرو، سپس، به‌هردوطرف یك واحد اضافه کنیم، به دست می‌آید:

$$(2x+1)^2=(2y^2+y)^2+$$

$$+3y^2+4y+1=(2y^2+y+1)^2-(y^2-2y)$$

اگر y عددی درست وغیرازعددهای ۱ـ، ۰، ۱ و ۲ باشد، آن‌وقت

$$3y^2+4y+1>0\ ,\ y^2-2y>0$$

درضمن

$$(2y^2+y)^2<(2x+1)^2<(2y^2+y+1)^2$$

این نابرابری‌ها نشان می‌دهند که $(2x+1)^2$، بین دو مجذورکامل متوالی قراردارد واین، برای‌عددهای درست x ممکن‌نیست. اگردرمعادله مقدارهای $y=-1$، $y=0$، $y=1$ و $y=2$ قراردهیم، پاسخ به‌دست می‌آید.

۹۰. پاسخ: ۲۹۵۲ جمله.

ثابت می‌کنیم، طول دنباله (تعداد جمله‌ها)، وقتی جملهٔ دوم آن برابر n وبزرگترین جمله باشد، از $d_n=\frac{3(n+1)}{2}$ تجاوزنمی‌کند و، درضمن، برای دنبالهٔ

$$n-1, n, 1, n-1, n-2, 1, \ldots, 1, 1$$

تعداد جمله‌ها، درست برابربا d_n است.

استدلال را با استقرا انجام می‌دهیم. برای $n\leqslant 4$، درستی حکم به

سادگی قابل تحقیق است ($d_1=۲$، $d_۲=۳$، $d_۳=۶$، $d_۴=۷$). حداکثر طول دنباله‌ای را ارزیابی می‌کنیم که این‌طور آغاز شده است:

$$a، n، n-a، a، \dots (a<n)$$

وفرض می‌کنیم؛ حکم موردنظر، برای عددهای کوچکتر از n درست باشد.

به ازای $۱\leqslant a<\frac{n}{۲}$، طول دنباله از $d_{n-a}+۱$ تجاوز نمی‌کند. زیرا اگر جملهٔ اول a را برداریم، می‌توان آغاز دنباله را این‌طور نوشت:

$$n-۲a، n-a، \dots$$

به‌ازای $\frac{n}{۲}\leqslant a<n-۱$، طول دنباله از $d_a+۲$ تجاوز نمی‌کند (کافی است دوجملهٔ اول را برداریم). بنا براین، باید تحقیق کنیم که، برای این‌مقدارهای a، این، نابرابری‌ها برقرارند:

$$d_{n-a}+۱\leqslant d_n، d_a+۲\leqslant d_n$$

به ازای $a=n-۱$، برای دنبالهٔ

$$n-۱، n، ۱، n-۱، n-۲، ۱، n-۳، \dots ۱، ۱$$

کافی است سه جملهٔ اول‌را برداریم ودو جملهٔ بعدی را جا به‌جا کنیم و، سپس دربارهٔ برابری $d_{n-۳}+۳=d_n$ تحقیق کنیم.

اگر این استدلال کلی را دربارهٔ $n=۱۹۶۷$ بکار بریم، پاسخ به‌دست می‌آید.

$$d_{۱۹۶۷}=\left[\frac{۳\times ۱۹۶۸}{۲}\right]=۲۹۵۲$$

۹۱. اگرشاه ازگوشهٔ چپ وپایین صفحه، روی قطر بــه طرف گوشهٔ راست وبالای‌صفحه برود، به ناچار دریکی‌ازحرکت‌ها، زیرضر بهٔ رخ سفید قرارمی گیرد.

برای اثبات، کافی است توجه کنیم‌که، بعد ازحرکت اول شاه، باید

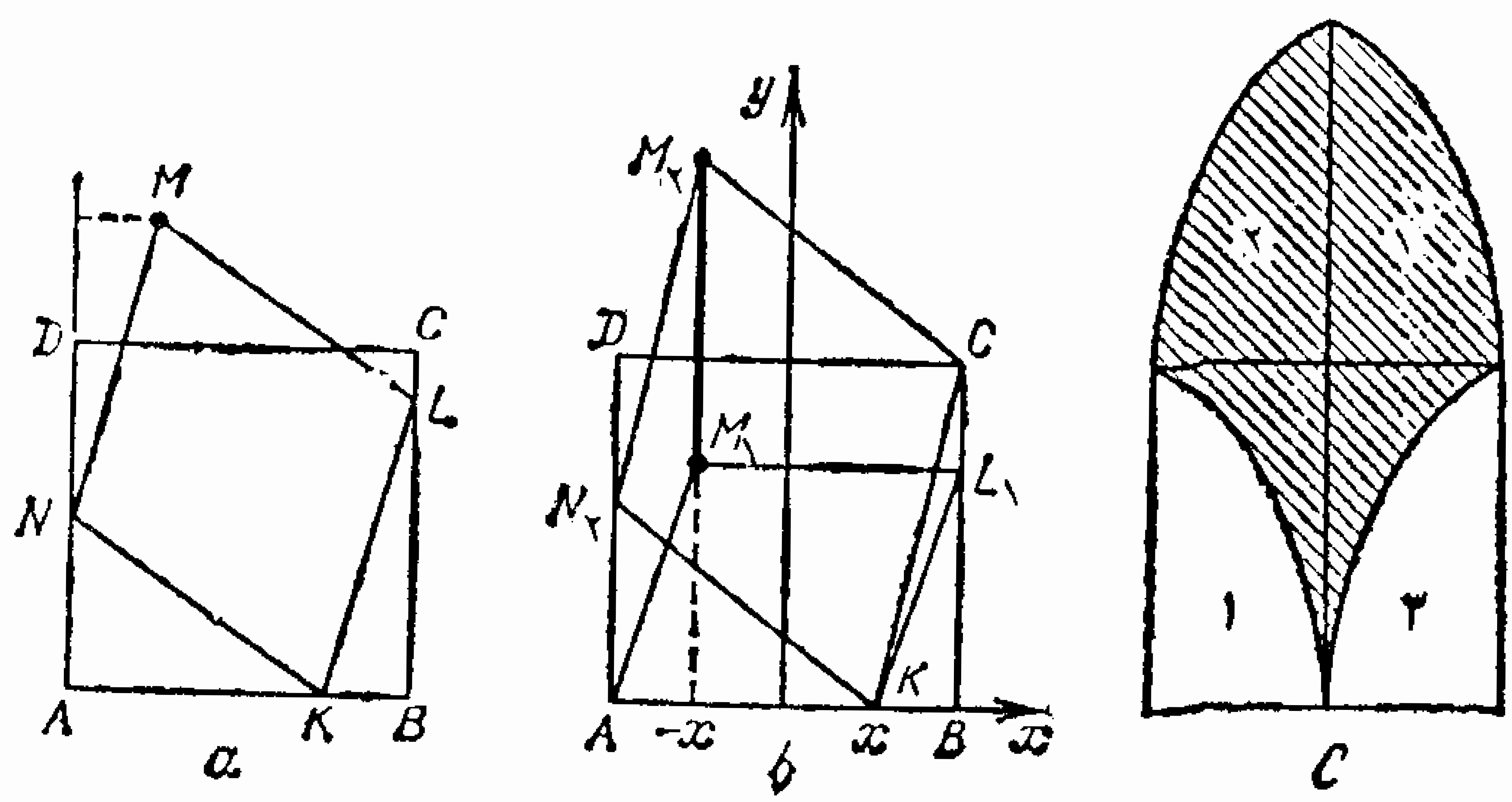
همهٔ رخ‌های سفید، بالای سومین ردیف افقی وسمت راست سومین ردیف قائم باشند.

به همین ترتیب، قبل ازحرکت شاه بـه گوشهٔ راست بـالا، باید همهٔ رخ‌ها، زیر ردیف ۹۹۸ افقی وسمت چپ ردیف ۹۹۸ قائم واقع باشند. شاه، روی‌هم، قبل ازآخرین حرکت خود درروی قطر، ۹۹۷ حرکت انجام می‌دهد. درضمن، هررخ، به ازای حرکت شاه، باید دوحرکت داشته باشد (تغییرردیف افقی وردیف قائم که درابتدا روی آن‌ها قراردارد)؛ ولی تعداد رخ‌ها برابر ۴۹۹ است، درحالی‌که باید ۴۹۹ × ۲ حرکت انجام‌دهد و ۹۹۷ < ۹۹۸ = ۴۹۹ × ۲.

۹۲. پاسخ: $S=1$.

K، L و N را رأس‌هایی ازلوزی می‌گیریم که، به‌ترتیب، برضلع‌های AB، BC و AD ازمربع واقع‌اند (شکل ۵۲، a). طول پاره‌خط راست KB، برابر است با فاصلهٔ ازنقطهٔ M تا خط راست AD. بنابراین، اگر نقطهٔ K را ثابت نگه داریم، آن وقت موضع نقطهٔ M، پاره‌خط راست M_2M_1 را، که بـا ضلع AD مـوازی است، پرمی‌کند. در ضمن، نقطهٔ M_1، پایین‌ترین موضع نقطهٔ M، متناظر با حالتی است که N_1 بر A منطبق باشد؛ به همین ترتیب، نقطهٔ M_2، با حالت $L_2=C$ تطبیق می‌کند.

برای این‌که موضع نقطه‌هـای M_1 و M_2 را معین کنیم (دررابطه با



شکل ۵۲

موضع نقطهٔ K)، دستگاه محورهای مختصات را، به آن گونه که در شکل ۵۲، b دیده می‌شود، در نظر می‌گیریم.

به سادگی می‌توان محاسبه کرد که، اگر طول نقطهٔ K برابر $0 < x$ باشد، آن وقت، خواهیم داشت:

$$M_1 = (-x \text{ ، } \sqrt{2x}) \text{ و } M_2 = (-x \text{، } \sqrt{1-2x}+1)$$

با استفاده از تقارن مجموعهٔ نقطه‌های M، نسبت به محور OY، معلوم می‌شود که، این مجموعه، به‌صورت شکلی درمی‌آید که هاشور زده‌ایم، برای محاسبهٔ مساحت، لزومی ندارد از محاسبهٔ انتگرالی استفاده کنیم؛ در شکل ۵۲، c، دو شکلی که با عددهای ۱ و ۲ نشان داده شده‌اند، برابرند.

۹۳. ابتدا یادآوری می‌کنیم که، عدد k، نسبت به عدد ۱۰ اول است. درواقع، عددی وجود دارد که با رقم ۱ آغاز می‌شود و بر k بخش‌پذیر است؛ مقلوب چنین عددی هم، بر k بخش‌پذیر است و به رقم ۱ ختم می‌شود.

اکنون، عددی را انتخاب می‌کنیم که با ۵۰۰ آغاز شود و بر k بخش‌پذیر باشد:

$$\overline{500\,abc\ldots z}$$

(a، b، c، ...، z، رقم‌های این عددند). در این‌صورت، باید هریک از عددهای زیر، بر k بخش‌پذیر باشند:

۱) عدد $\quad \overline{z\ldots cba\,005}$

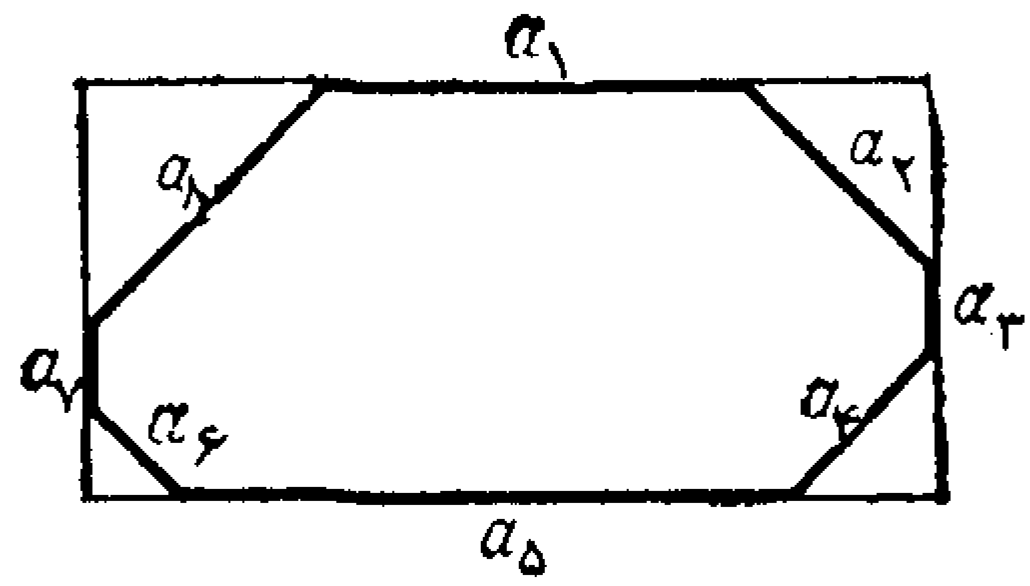
۲) مجموع دو عدد

$$\begin{array}{r} z\ldots cba00500\ldots\ldots 0+ \\ 500abc\ldots z \end{array}$$

یعنی عدد $\quad \overline{z\ldots cba0\,1000ab\ldots z}$

۳) مقلوب عدد اخیر، یعنی عدد $\quad \overline{z\ldots ba000\,10ab\ldots z}$

۴) تفاضل این دو عدد



شکل ۵۳

$$z \dots ba۰۱۰۰ab \dots z-$$
$$z \dots ba۰۰۰۱ab \dots z$$

یعنی عدد ۹۹۰۰...۰.

به‌این ترتیب دیده می‌شود که عدد ۹۹، بر k بخش‌پذیر است.

۹۴. $a_۱$، $a_۲$، ...، $a_۸$ را، به‌ترتیب، طول ضلع‌های هشت‌ضلعی می‌گیریم (شکل ۵۳). از برابری زاویه‌ها، بلافاصله نتیجه می‌شود که، ضلع‌های روبه‌رو، باهم موازی‌اند. دو ضلع روبه‌روی $a_۱$ و $a_۵$ و همچنین دو ضلع روبه‌روی $a_۳$ و $a_۷$ را ادامه می‌دهیم، مستطیلی به‌دست می‌آید که، از آن، می‌توان هشت‌ضلعی را «با بریدن گوشه‌ها» به‌دست آورد.

از برابری ضلع‌های روبه‌رو در مستطیل، به‌دست می‌آید:

$$\frac{a_۸}{\sqrt{۲}}+a_۱+\frac{a_۲}{\sqrt{۲}}=\frac{a_۶}{\sqrt{۲}}+a_۵+\frac{a_۴}{\sqrt{۲}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow a_۵-a_۱=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(a_۸+a_۲-a_۶-a_۴)$$

چون a_i عددی درست است و $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ عددی گنگ، بنابراین $a_۵=a_۱$ به‌همین ترتیب، برابری بقیهٔ ضلع‌های روبه‌روهم ثابت می‌شود.

۹۵. پاسخ: $۱۷^{۱۴}>۳۱^{۱۱}$.

نابرابری‌های زیر، درستی پاسخ را نشان می‌دهند:

$$۱۷^{۱۴}>۱۶^{۱۴}=۲^{۵۶}>۲^{۵۵}=۳۲^{۱۱}>۳۱^{۱۱}$$

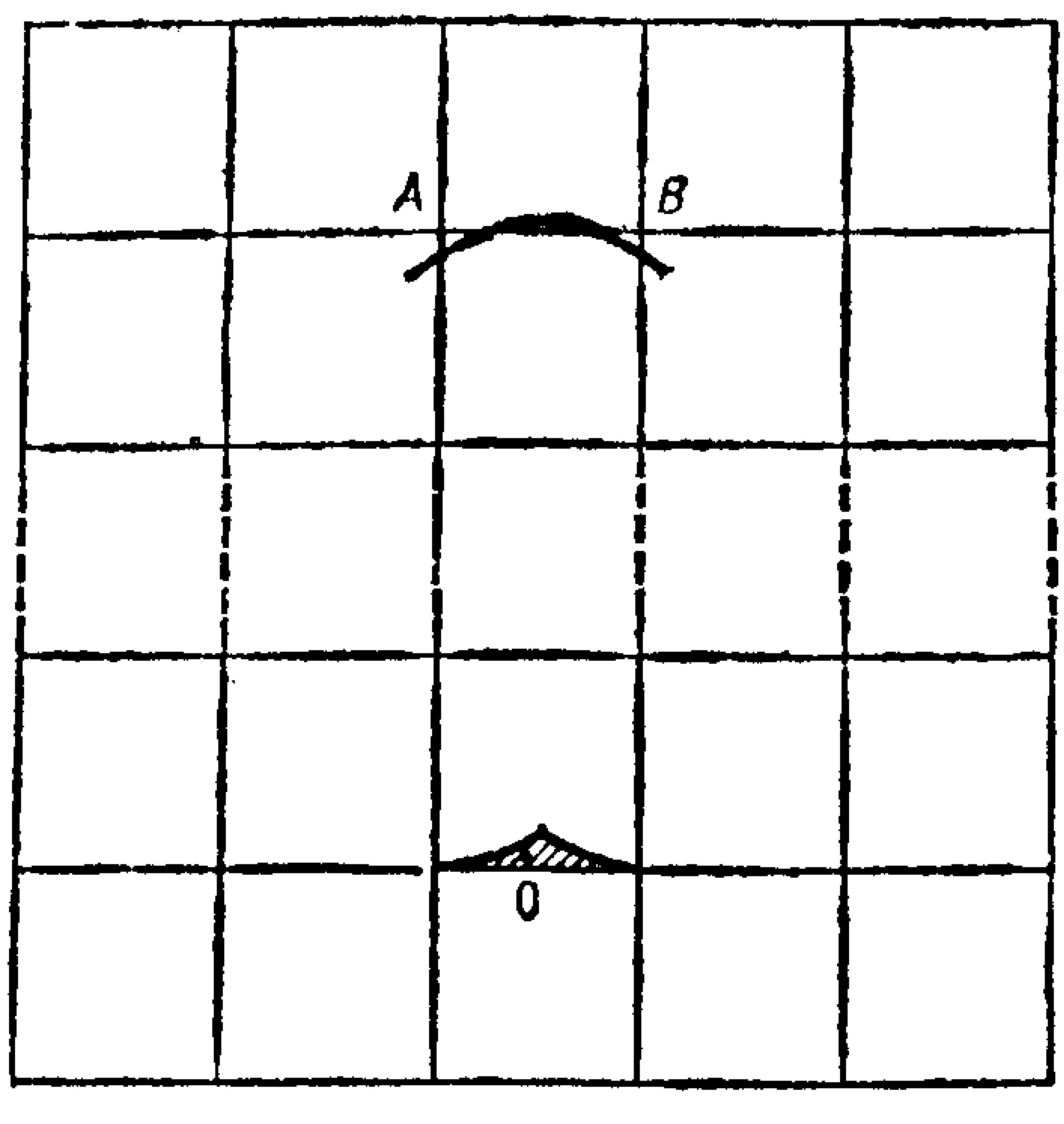
۹۶. پاسخ: ۸۰۰ یا ۷۹۹.

خط‌های راست شبکه را افقی و قائم می‌نامیم. دایرهٔ به‌قطر ۲۰۰، وقتی که از گره‌های شبکه عبور نکند و بر خط‌های راست شبکه مماس نباشد، ۲۰۰ خط راست افقی و ۲۰۰ خط راست قائم را قطع می‌کند و، درضمن هرکدام ازآن‌ها را دوبار. بنابراین، حداکثر تعداد نقطه‌های برخورد برابراست با ۸۰۰. این ۸۰۰ نقطه، محیط دایره را به ۸۰۰ بخش تقسیم می‌کنند. هریك ازاین بخش‌ها دردرون یکی ازخانه‌ها قراردارد. بنابراین، حداکثر ممکن برای تعداد خانه‌ها، ۸۰۰ است.

با وجود این، ممکن است، دو بخش ازاین بخش‌ها متعلق به یك خانه باشند، یعنی محیط دایره خانه‌ای رادوبارقطع کند (شکل ۵۴). ثابت می‌کنیم، ازاین‌گونه خانه‌های «خاص» بیش ازیکی نمی‌تواند وجود داشته باشد.

ببینیم، وقتی محیط دایره ضلع AB ازخانه‌ای را دوبارقطع می‌کند، نقطهٔ O، مرکزدایره، درکجا می‌تواند قرار گیرد؟

فاصلهٔ مرکز O ازدایرهٔ به قطر ۲۰۰، تا هریك ازنقطه‌های A و B، از ۱۰۰ بیشتر، ولی فاصلهٔ آن ازخط راست AB از ۱۰۰ کمتراست؛ بنابراین، نقطهٔ O، در بیرون دایره‌های به‌شعاع ۱۰۰ و به مرکزهای A و B، بین خط‌های قائم شبکه که از A و B می‌گذرند ودر درون نوار به عرض ۲۰۰ با محور



شکل ۵۴

افقی AB واقع است. همهٔ این نقطه‌ها، درون دو مثلث منحنی‌الخط را پر می‌کنند (یکی از این مثلث‌ها را، روی شکل، هاشور زده‌ایم).

روشن است که، برای پاره‌خط‌های راست متفاوت AB، چنین مجموعه‌هایی، دارای نقطه‌های مشترك نیستند و، بنا براین، بیش از یك خانهٔ «خاص» نمی‌تواند وجود داشته باشد.

۹۷. ابتدا ثابت می‌کنیم، می‌توان گروهی از دانشجویان را انتخاب کرد که، در آن، با هرزبان، درست دو نفر آشنا باشند.

هر دانشجو را با حرف اول زبانی که می‌داند، معرفی می‌کنیم: a به معنای دانشجوئی است که زبان انگلیسی را می‌داند، ولی با دو زبان دیگر آشنا نیست؛ if دانشجویی است که با دوزبان اسپانیائی و فرانسوی آشناست ولی انگلیسی نمی‌داند؛ و aif یعنی دانشجوئی که هر سه زبان را می‌داند.

N_a، N_i، N_f، N_{ai}، N_{if}، N_{af} و N_{aif} را به معنای تعداد دانش‌آموزان هر نوع می‌گیریم.

اگر $N_{ai} \neq 0$، $N_{af} \neq 0$ و $N_{if} \neq 0$، آن وقت گروه مورد نظر (ai, af, if) است.

اگر یکی از عددها، مثلاً N_{ai}، برابر صفر، N_{af} مخالف صفر و N_{if} مخالف صفر باشد، آن وقت $N_a \neq 0$ و $N_i \neq 0$ و گروه مورد نظر ما، چنین می‌شود:

$$(af, if, a, i)$$

اگر $N_{ai} = N_{af} = 0$، $N_{if} \neq 0$ و $N_{aif} \neq 0$، آن وقت، این گروه را انتخاب می‌کنیم:

$$(aif, uf, a)$$

اگر $N_{aif} = 0$، $N_{if} \geqslant 2$، گروه

$$(if, if, a, a)$$

و اگر $N_{if} = 1$، گروه (if, a, a, i, f) را انتخاب می‌کنیم.

اگر $N_{ai} = N_{af} = N_{if} = 0$، می‌توان یکی از این سه گروه را انتخاب کرد:

(aif, a, i, f) یا (a, i, f, a, i, f) یا $(aif$ و $aif)$

دنبالهٔ کار روشن است. از این گروه‌ها، که در هر کدام از آن‌ها هر زبان را درست دو نفر می‌داند، پنج بار انتخاب می‌کنیم، اولین گروهی به دست می‌آید که، در آن، با هر زبان درست ۱۰ نفر آشنایی دارد. بعد دومین گروه از این گونه را درست می‌کنیم و غیره.

▽ در حالت کلی، وقتی در گروهی از دانشجویان، با هر یك از سه زبان درست n نفر آشنا باشند، برای هر عدد زوج $p<n$، می‌توان گروهی انتخاب کرد که، در آن، با هر زبان، p نفر آشنا باشد (شرط زوج بودن p، شرطی لازم است).

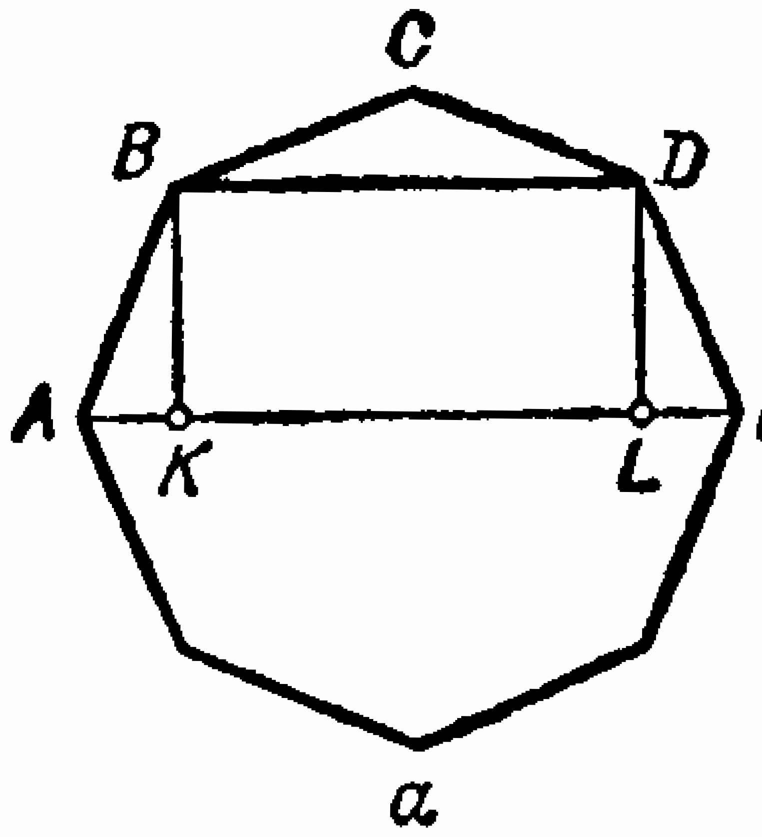
۹۸. برای اثبات، کافی است از این اتحادها استفاده کنیم:

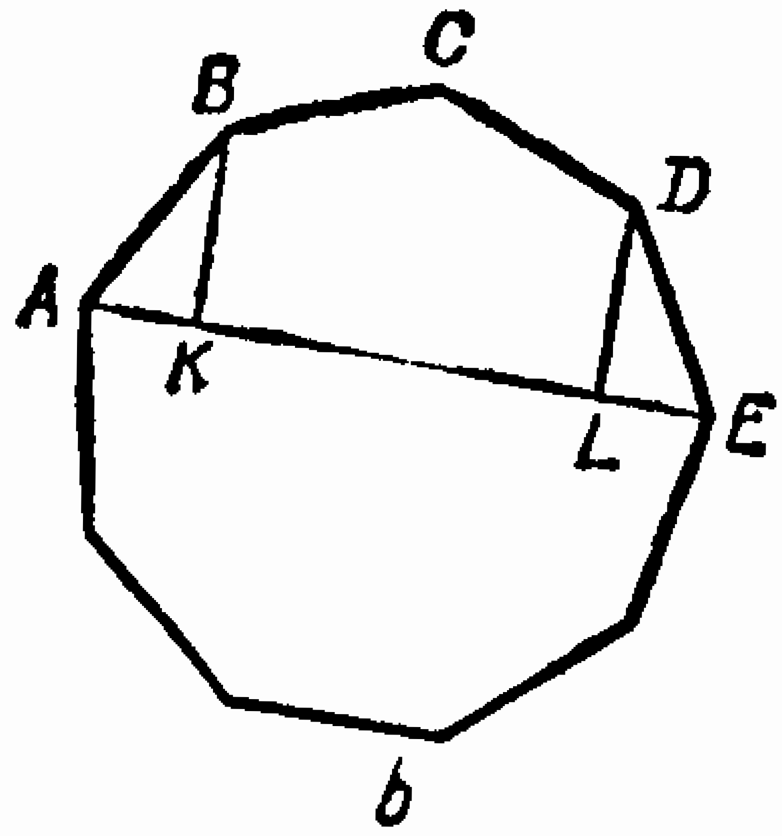
$$\frac{۲k}{x^۲-k^۲}=\frac{۱}{x-k}-\frac{۱}{x+k},$$

$$\frac{۱۱}{(x-۱۱+k)(x+k)}=\frac{۱}{x-۱۱+k}-\frac{۱}{x+k}$$

۹۹. پاسخ: $n=۹$.

a_n را طول ضلع و D_n و d_n را، به ترتیب، طول بزرگترین و کوچکترین قطر n ضلعی می‌گیریم. برای $n=۴$ و $n=۵$، همهٔ قطرها برابرند. برای $n=۶$ و $n=۷$ داریم $a_n<D_n-d_n$. برای $n=۸$ (شکل ۵۵، a)، عمودهای BK و DL را از دو انتهای قطر کوچکتر BD بر قطر بزرگتر AE فرود می‌آوریم. به سادگی روشن می‌شود که $\widehat{ABK}=۲۲/۵^\circ<۳۰^\circ$.





شکل ۵۵

بنا بر این

$$AB = a_{۸} > ۲AK = D_{۸} - d_{۸}$$

برای $n = ۹$ (شکل ۵۵، b)داریم: $\widehat{ABK} = ۳۰^\circ$ و بنا بر این

$$AB = a_{۹} = ۲AK = D_{۹} - d_{۹}$$

سپس، فرض می‌کنیم، n ضلعی منتظم در دایره‌ای محاط باشد. روشن است که، به ازای $n > ۹$، داریم: $D_n \geqslant D_{۹}$ و $d_n < d_{۹}$. بنا بر این

$$D_n - d_n > D_{۹} - d_{۹} = a_{۹} > a_n$$

۱۰۰. ثابت می‌کنیم $۱۴ < a_{۱۰۰} < ۱۸$. برای $k > ۱$ داریم:

$$a_k^۲ = a_{k-۱}^۲ + ۲ + \frac{۱}{a_{k-۱}^۲}, \quad (a_k > ۱)$$

بنا بر این $a_{k-۱}^۲ + ۲ < a_k^۲ < a_{k-۱}^۲ + ۳$.

اگـر در نا برابری اخیر، $k = ۲، ۳، \ldots ، n$ بگیـریم و، سپس، همهٔ نا برابری‌های حاصل را باهم جمع کنیم (با درنظر گرفتن $a_۱ = ۱$)، به‌دست می‌آید:

$$۲n - ۱ < a_n^۲ < ۳n - ۲$$

از آن‌جا $\sqrt{۲n-۱} < a_n < \sqrt{۳n-۲}$ که، به‌ازای $n = ۱۰۰$:

$$۱۴ < a_{۱۰۰} < ۱۸$$

$\bigtriangledown$ بدون دشواری‌می‌توان ثابت کرد، که، دنبالهٔ $\frac{a_n}{\sqrt{n}}$ بـه سمت حدی میل می‌کند و، در ضمن، می‌توان این حد را پیدا کرد.

۱۰۱. مثلث $A'B'C'$ را به موازات خود منتقل می‌کنیم تا نقطهٔ O' بر نقطهٔ O منطبق شود. رأس‌های مثلثی را که به این طریق به دست می‌آید، مثل سابق، A'، B' و C' می‌نامیم.

چون $\widehat{A'OB'}=\widehat{A_1OB_1}$ و $\frac{OA'}{OB'}=\frac{OB_1}{OA_1}$ (بنا بر فــرض)، بنا براین

دو مثلث A_1OB_1 و $B'OA'$ متشابه‌اند و

$$\widehat{OA_1B_1}=\widehat{OB'A'} \text{ و } \widehat{OB_1A_1}=\widehat{OA'B'}$$

چون برچهار ضلعی OA_1CB_1 می‌توان یك دایره محیط کرد (به قطر OC)، بنا براین

$$\widehat{B_1CO}=\widehat{OA_1B_1} \text{ و } \widehat{A_1CO}=\widehat{OB_1A_1}$$

در نتیجه مثلث‌های A_1OC و C'_1OA' و، همچنین، مثلث‌های BOC و C'_1OB_1 با هم متشابه‌اند، یعنی پاره‌خط راست OC' بر خط راست OC قرار دارد و

$$OC.O'C'_1=OA.O'A'_1=OB.O'B'_1$$

به‌همین ترتیب، می‌توان مثلث‌های $B'OC'$ و $C'OA'$ را موردمطالعه‌قرارداد.

۱۰۲. اثبات را، بااستقرای روی n می‌دهیم. به‌ازای $n=1$، درستی حکم روشن است. فرض می‌کنیم، حکم برای $n=k$ درست باشد.

$a<(k+1)!$ می گیریم. a را به $k+1$ تقسیم می کنیم:

$$a=d(k+1)+r$$

که در آن $d\leqslant k!$ و $r<k+1$. بنا برفرض استقرا داریم:

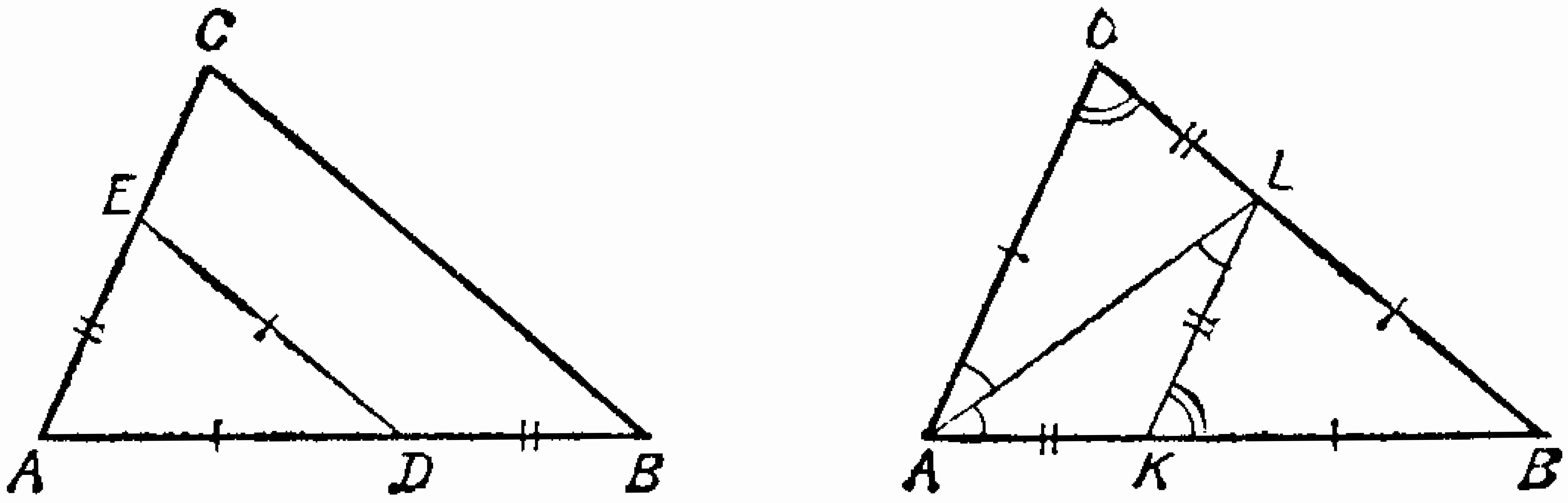
$$d=d_1+d_2+\dots+d_l$$

که در آن، d_iها مقسوم‌علیه‌های مختلف عدد $k!$ هستندو $l\leqslant k$. دراین‌صورت

$$a=d_1(k+1)+d_2(k+1)+\dots+d_l(k+1)+r$$

در این مجموع، بیش از $k+1$ جمله وجــود ندارد و، هر کدام از آن‌ها، مقسوم‌علیهی از $(k+1)$ هستند؛ در ضمن، همهٔ آن‌ها با هم فرق دارند.

۱۰۳. با انتقال موازی، نقطه D را بــه نقطهٔ B می‌رسانیم؛ در این صورت، مثلث ADE منجر به مثلث KBL می‌شود، که در آن $KL\|AC$ و،



شکل ۵۶

به‌جز آن، $KB=LB$ (شکل ۵۶).

اگر فرض کنیم: $\widehat{KAL}=\widehat{KLA}=\alpha$، آن وقت خواهیم داشت:

$$\widehat{BKL}=۲\alpha، \widehat{BAC}=\widehat{BCA}=۲\alpha$$

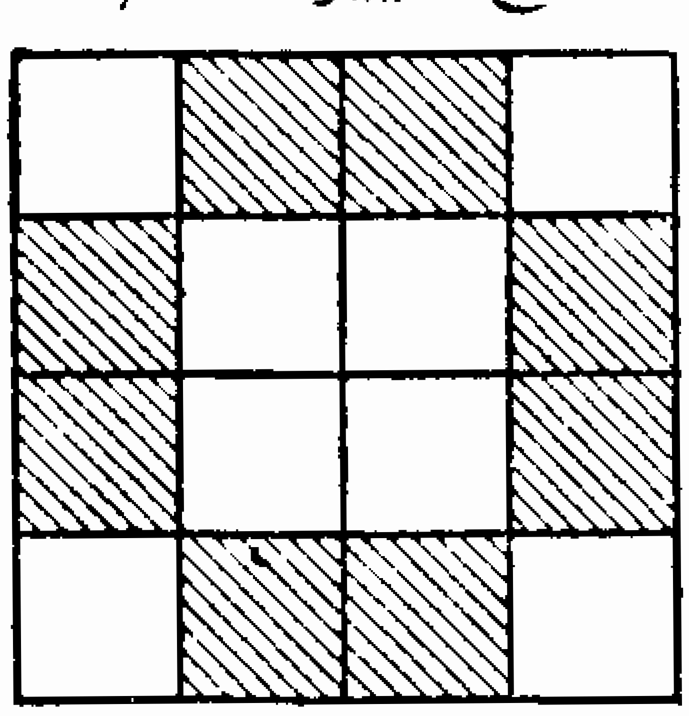
دو مثلث ACL و BKL با هم برابرند و

$$\widehat{ALC}=\widehat{KLB}=۲\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{۵}$$

و $LC=AK=BD$، یعنی طول پاره‌خط راست BD، برابر است با طول ضلع ده‌ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع $R=AC$.

۱۰۴. از نقطهٔ A، عمود AH را بر صفحهٔ BCD و، سپس، از نقطهٔ H، عمودهای HK، HL و HM را، به ترتیب، بر ضلع‌های BC، BD و CD فرود می‌آوریم. هر یك از هرم‌های $ABKL$، $ACKM$ و $ADML$ به وسیلهٔ کرهٔ متناظر خود پوشیده می‌شود.

۱۰۵. a) به سادگی دیده می‌شود که، هرخط راست موازی باضلع یا قطر مربع، تعداد زوجی از هشت خانهٔ هاشور خـورده در شکل ۵۷ را قطع می‌کند. بنابراین، تعداد منفی‌های واقع در این خانه‌ها را، نمی‌توان از زوج به فرد یا از فرد به زوج تغییر داد (ضمیمهٔ ۱۳).



شکل ۵۷

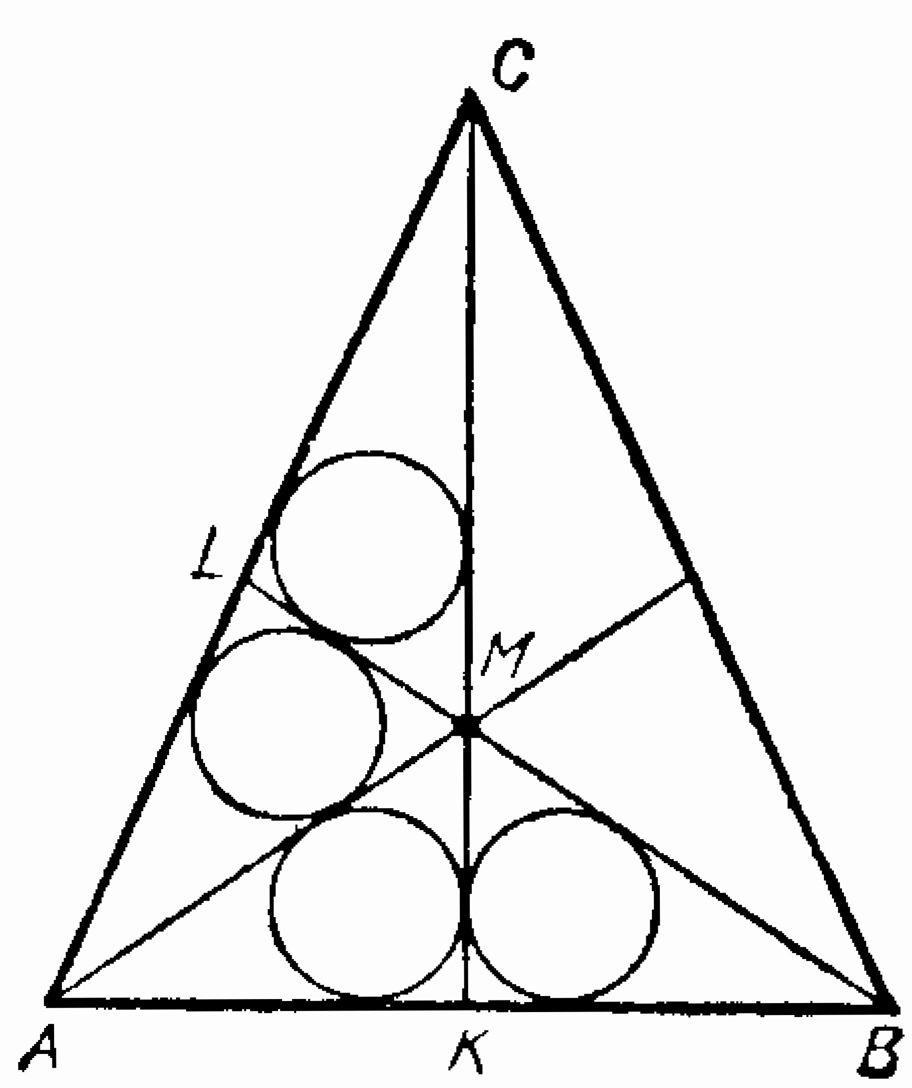
b) ازمربع ۸ × ۸ می‌توان مربع ۴ × ۴ را طوری جدا کرد که علامت منفی در آن، شبیه حالت مسالهٔ a) قرار گرفته باشد و، در نتیجه، این مساله، به‌همان مسالهٔ قبل منجر می‌شود.

۱۰۶. هرشش مثلثی که با رسم میانه‌ها، دریك مثلث، به‌وجود می‌آیند، مساحتی برابر دارند. از برابری شعاع‌های دایره‌های محاطی و با توجه به دستور $S = pr$، برابری محیط‌های چهار تا از این مثلث‌ها ثابت می‌شود.

از برابری محیط‌های دو مثلث AMK و BMK (شکل ۵۸)، نتیجه می‌شود*: $MK = MB$، یعنی MK ارتفاع مثلث AMB است و در نتیجه $AC = BC$.

اگر شعاع دایره‌های محاط در مثلث‌های ALM و AKM برابر باشند، آن وقت این مثلث‌ها برابرمی‌شوند (به عنوان مثلث‌هایی که مساحت‌ها، قاعده‌ها و محیط‌های برابر دارند): درضمن $AL = AK$، یعنی $AC = AB$ و مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

اگر محیط‌های دو مثلث CLM و KMB برابر باشند، آن وقت، با استفاده ازبرابری طول‌های دو مماسی که از یك نقطه بر دایره‌ای رسم می‌شوند، اگر x را فاصلهٔ نقطهٔ M تا نقطهٔ تماس با دایرهٔ متناظر بگیریم، به دست می‌آید:



شکل ۵۸

*) بدون شك، از این چهارمثلث با محیط برابر، دست‌کم دوتا، چسبیده به یك ضلع‌اند، و در این‌جا، آن‌ها را چسبیده به ضلع AB گرفته‌ایم.

$$CL+LM+CM=2CL+2x=2BK+2x$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود: $AC=AB$.

۱۰۷. اثبات حکم این مساله، اثبات نامتناهی بودن مجموعهٔ عددهای اول را، که به‌اقلیدس تعلق دارد، به‌یاد می‌آورد (ضمیمهٔ ۲).

فرض می‌کنیم، معادلهٔ $x^2+x+1=py$، تنها برای تعداد محدودی از عددهای اول p_1، p_2، ...، p_m، دارای جواب‌های درست (x, y) باشد. $P=p_1 p_2 \cdots p_m$ می‌گیریم. دراین‌صورت، عدد P^2+P+1، بر هیچ‌کدام ازعددهای p_1، p_2، ...، p_m بخش‌پذیر نیست و، بنا براین، دارای مقسوم‌علیه‌اول q است‌که برابر با هیچ‌کدام ازاین عددها نیست. ولی معادلهٔ

$$x^2+x+1=qy$$

دارای جواب درست $\left(P, \dfrac{P^2+P+1}{q}\right)$ است. تناقض حاصل، درستی‌حکم مساله را ثابت می‌کند.

۱۰۸. پاسخ: حداکثر عدد c_1، برابر ۲۴ است.

اگر همهٔ داوران در انتخاب مقام‌اول، هم‌رأی باشند، آن‌وقت $c_1=9$.

اگر داوران، مقام اول را به دو نفر داده باشند، آن وقت یکی‌از دو نفراز ۵ داور مقام اول را گرفته است واز چهارداور بقیه، مقامی‌که او، ازچهارم پایین‌تر نبوده است؛ بنا براین

$$c_1 \leqslant 5\times 1+4\times 4=21$$

اگر داوران به ۳ نفر مقام اول را داده باشند، چون بقیهٔ مقام‌هایی‌که این ۳ نفر از داوران دریافت کرده‌اند، از چهار تجاوز نمی‌کند، مجموع مقام‌های همهٔ این سه هنرمند، از

$$1\times 9+3\times 9+4\times 9=72$$

بیشتر نیست و، بنا براین $c_1 \leqslant 24$. در حالتی که از بین داوران، به چهار هنرمند، مقام اول را داده باشند، مجموع کل مقام‌های آن‌ها حداکثر برابر

۹۰ و مجموع نمره‌های یکی از آن‌ها، حداکثر ۲۲ می‌شود. حالتی که ۵ نفر یا بیشتر، مقام اول را گرفته باشند، ممکن نیست (مقام‌های اول تا چهارم برای آن‌ها کفایت نمی‌کند).

به این ترتیب $c_1 \leqslant ۲۴$. نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان مثالی برای $c_1 = ۲۴$ ساخت.

فرض کنیم، داوران، به هر یك از سه هنرمند بهتر مقام‌های

۱، ۱، ۱، ۳، ۳، ۳، ۴، ۴، ۴

به‌هر یك از سه هنرمند بعدی مقام‌های

۲، ۲، ۲، ۵، ۵، ۵، ۶، ۶، ۶

و به بقیه مقام‌های دلخواهی بدهند. در این صورت ردیفی به دست می‌آید که در آن $c_1 = ۲۴$.

۱۰۹. برای هر m $(۱ \leqslant m \leqslant n)$، بین m زوج (a_k, b_k) $(۱ \leqslant k \leqslant m)$، یکی از نابرابری‌های $a_k \geqslant b_k$ یا $b_k \geqslant a_k$، دست‌کم برای $\frac{m}{۲}$ زوج برقرار است.

مثلاً فرض کنید $b_k \geqslant a_k$، دست‌کم در $\frac{m}{۲}$ زوج برقرار باشد. اگر b_i را، کوچکترین عدد از بین عددهای b_k بگیریم، آن وقت $b_i \leqslant \frac{۲}{m}$. بـه این ترتیب $a_i + b_i \leqslant ۲b_i \leqslant \frac{۴}{m}$ و چون $i \leqslant m$، بنابراین

$$a_m + b_m \leqslant a_i + b_i \leqslant \frac{۴}{m}$$

۱۱۰. حکم مساله را می‌توان با استقرای روی n، تعداد دانش‌آموزان، ثابت کرد. ولی در اینجا آن‌را براساس قضیهٔ زیر (که تقریباً روشن است) ثابت می‌کنیم: مجموع ۲^k حاصل‌ضرب $x_1 x_2 \ldots x_k$، که در آن $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ عبارتند از همهٔ انتخاب‌های ممکن از عددهای ۱+ و ۱−، برابر است با

صفر (برای اثبات کافی است، k برابری $0=(-1)+1$ را درهم ضرب و سمت چپ را به همهٔ روش‌های ممکن ضرب جمله‌ها منجر کنیم). به‌دانش‌آموزان، شماره‌های از ۱ تا n را می‌دهیم. برای هر فهرستی از شماره‌های $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \dots \leqslant i_k$ (دراین‌جا $k<n$)، مجموع وزن وزنه‌هایی‌را، که روی آن‌ها، این فهرست نوشته شده است، با $a_{i_1 i_2 \dots i_k}$ نشان می‌دهیم، در ضمن وزنه‌های یکی از کفه‌ها را (که درابتدا سنگین‌تراست) بـا علامت مثبت و وزنه‌های کفهٔ دیگررا بـا علامت منفی درنظرمی‌گیریم. دراین‌صورت، حکم موردنظر به‌این‌صورت درمی‌آید: برای چندجمله‌ای به صورت

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)=a_1x_1+\dots+a_nx_n+a_{12}x_1x_2+$$

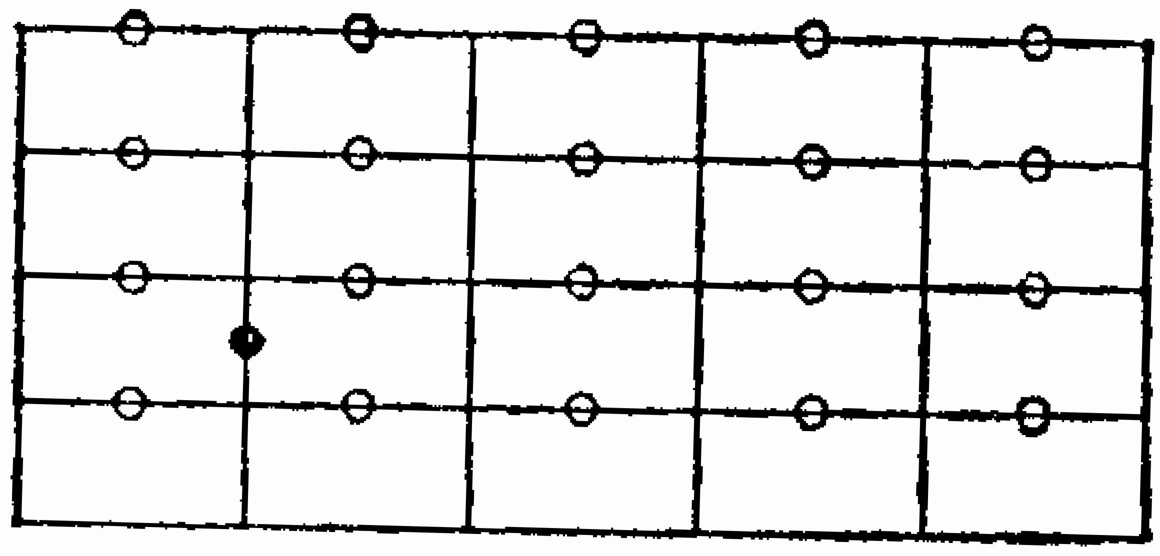
$$+a_{13}x_1x_3+\dots+a_{n-1n}x_{n-1}x_n+a_{123}x_1x_2x_3+\dots$$

$$\dots+a_{n-2n-1n}x_{n-2}x_{n-1}x_n+\dots+a_{12\dots n}x_1x_2\dots x_n$$

که در آن، مجموع ضریب‌ها، مثبت‌است، همیشه می‌توان گروه x_1، x_2، ...، x_n را ازعددهای ۱+ و ۱− طوری در نظر گرفت که مقدار $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ منفی باشد [$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ اختلاف وزن کفه‌های ترازورا نشان می‌دهد، به شرطی‌که $x_i=-1$ برای‌آن دانش‌آموزانی کـه وزنهٔ خود را جا به‌جا کرده‌اند و $x_i=1$ برای بقیهٔ دانش‌آموزان). این باقی‌می‌ماند که توجه کنیم، مجموع‌مقدارهای $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ درهرانتخابی– حتی‌مجموع‌مقدارهای هـر یك از جمله‌هـای تشکیل دهندهٔ آن– بـرابـر صفر است؛ بنابـراین $f(1, 1, \dots, 1)>0$، دراین‌صورت باید انتخابی پیدا شود که، برای‌آن، مقدار f منفی باشد (ضمیمهٔ ۹).

۱۱۱. پاسخ: حداقل تعداد پاسبان‌ها برابر $(n-1)(m-1)$ است.

اگر پاسبان‌ها به صورتی که مورد نظراست، مستقرشده باشند، آن وقت شبکهٔ خیابان‌ها، به k قطعه تقسیم می‌شود که شامل مسیرهای بسته نیستند، در غیراین صورت، مسیر بسته‌ای پیدا می‌شود که، درطول آن، حتی یك پاسبان وجود ندارد. اگرقطعهٔ باقی‌ماندهٔ شبکه، شامل p چهارراه باشد، آن وقت در آن، درست $p-1$ پاره‌خط راست ازخیابان‌هـا وجود دارد (مسالـهٔ ۸ را



شکل ۵۹

ببینید). چون روی هم به تعداد mn چهارراه داریم، بنابراین، تعداد پاره‌خطهای راستی که، در آن‌ها، پاسبان وجود ندارد، برابر $mn-k$ می‌شود. تعدادکل پاره‌خطهای راست‌خیابان‌ها برابر $2mn-m-n$ است. بنابراین، تعداد پاره‌خطهای راستی که اشغال می‌شود برابراست با

$$mn-m-n+k \geqslant (m-1)(n-1)$$

نمونهٔ استقرار $(m-1)(n-1)$ پاسبان، درشکل ۵۹ نشان داده شده است.

۱۱۲. از K به نقطهٔ O، مرکزدایرهٔ محاطی‌مثلث ABC وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم، تادایره را در L قطع کند. وسط پاره‌خط راست AC را D و نقطهٔ برخورد AC با BL را E می‌نامیم. کافی است ثابت کنیم $ED=DK$ (دراین صورت، DO؛ خط راستی می‌شودکه وسط دوضلع مثلث EBK را به هم وصل کرده است).

توجه می‌کنیم: تجانسی به‌مرکز B که دایرهٔ محاطی مثلث ABC را به دایرهٔ محاطی خارجی آن (مماس بر AC و امتدادهای BA و BC) تبدیل می‌کند، نقطهٔ L را به نقطه E منجرخواهدکردکه، درضمن، نقطهٔ تماس ضلع AC با دایرهٔ محاطی خارجی خواهد بود. با توجه به برابر بودن طول‌های دو مماسی که از یك نقطه بر دایره‌ای رسم می‌شوند، دو مجموع $AK+AE$ و $CK+CE$ باهم برابردرمی آیند (هرکدام برابر با پاره‌خطی ازخطهای راست BA و BC هستند و، خود این دوپاره‌خط راست، با هم برابرند؛ دوپاره‌خط راستی که این نقطه‌های تماس دو دایرهٔ محاطی ومحاطی خارجی با خطهای راست BA و BC قراردارند). درنتیجه

$$AK+AE=CK+CE \text{ و } AE=KC$$

۱۱۳. همهٔ برابری‌های

$$a_1=0,\ |a_2|=|a_1+1|,\ \dots,\ |a_{n+1}|=|a_n+1|$$

را مجذورو، سپس، با هم جمع می‌کنیم. بعد ازساده‌کردن. به‌دست می‌آید:

$$a_{n+1}^2=2(a_1+a_2+\dots+a_n)+n\geqslant 0$$

وازآن جا $a_1+a_2+\dots+a_n\geqslant -\frac{n}{2}$.

راه‌حل دیگر را (با استقرا)، می‌توان با توجه به این نکته به دست آورد که: اگر زوج جمله‌های متوالی را $a_n\geqslant 0$ و $a_{n+1}=-a_n-1$، با مقدارمتوسط $-\frac{1}{2}$ بگیریم، به‌دنبالهٔ قابل قبولی منجر می‌شود.

$\triangledown$ $-\frac{n}{2}$، برای مجموع عددها در این دنباله، ارزیابی دقیقی است.

به‌عنوان مثال، می‌توان هرانتخابی راکه به جملهٔ ۱ — ویا (وقتی‌که n عددی فرد باشد)، به صفرختم می‌شود، درنظر گرفت.

۱۱۴. $\widehat{ABC}=\beta$، $\widehat{ABD}=\beta_1$ و $\widehat{DBC}=\beta_2$ می‌گیریم. اگــر از قضیهٔ سینوس‌ها دردومثلث AOB و BOC استفاده‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{AO}{OC}=\frac{AO}{AB}\cdot\frac{BC}{OC}\cdot\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{BC}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}$$

چون AB و BC گویا هستند. کافی است گویا بودن نسبت سینوس‌ها را ثابت کنیم.

به‌کمک قضیهٔ کسینوس‌ها و با توجه به گویا بودن طول ضلع‌ها وقطرها. نتیجه می‌شود که $\cos\beta$، $\cos\beta_1$ و $\cos\beta_2$ عددهایی گویاهستند. به عنوان نمونه

$$\cos\beta=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}$$

به این ترتیب. عدد $\sin\beta_1\ \sin\beta_2$ هم گویا درمی‌آید، زیرا

$$\cos\beta=\cos\beta_1\cos\beta_2-\sin\beta_1\sin\beta_2$$

ودرنتیجه، با توجه به برابری $\sin^2\beta_2=1-\cos^2\beta_2$، نسبت $\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}$ هم، عددی گویا می‌شود.

۱۱۵. روی خط راست BC، نقطهٔ C_1 را طوری انتخاب می‌کنیم که چهارضلعی ABC_1E متوازی‌الاضلاع باشد دراین‌صورت، مثلث‌های ABE، BEC_1 و BEC، محیطی‌برابر پیدامی‌کنند. ازاین‌جانتیجه می‌شودکه دو نقطهٔ C و C_1 برهم منطبق‌اند. بنابراین $BC=AE$. به همین ترتیب، ثابت می‌شود $BC=ED$.

۱۱۶. حداکثرسرعت گرگ را vمی‌گیریم. ازنقطه‌ای‌که گرگ درآن جا ایستاده است، دوخط راست موازی با قطرهای مربع رسم می‌کنیم. محل برخورد این خطهای راست را با محیط مربع $C_1C_2C_3C_4$ می‌نامیم.

چون‌سرعت جابه‌جایی‌هریك ازنقطه‌های C_1، C_2، C_3 و C_4، از مقدار $v\sqrt{2}<\frac{3}{2}v$ بیشتر نیست، بنابراین، سگ‌هامی‌توانند درهرلحظه دراین چهار نقطه باشند ودرنتیجه، مانع فرار گرگ بشوند.

۱۱۷. $\overline{abcd}$ را چهاررقم آخر می‌گیریم. دردنباله، به ناچار باید ردیف $abcd0$ وردیف $abcd1$ وجود داشته باشد (درغیراین‌صورت، بااضافه‌کردن ۰ یا ۱، به انتهای آن، ویژگی a) برقرار می‌شود که درنتیجه ویژگی b) را نقض می‌کند). بنابراین، در دنباله، سه بار به ردیف $abcd$ برمی‌خوریم و چون، ۰ یا ۱ نمی‌تواند بیش ازیکباردرجلوآن قرارگیرد، بنابراین، جلویکی ازاین ردیف‌ها، هیچ رقمی وجود ندارد.

∇ برای هر n (ودرحالت خاص، برای $n=5$)، می‌توان 2^n رقم ۰ و ۱ را روی محیط دایره طوری قرارداد که، ضمن حرکت درجهت عکس عقربه‌های‌ساعت، به هر«واژهٔ» به‌طول n از ۰ و ۱، درست یکبار برخورد کنیم. همین حکم دربارهٔ حرف‌های الفبا هم، برای $k\geqslant 2$ حرف، درست است (دراین‌صورت، تعداد واژه‌های به طول n، برابر k^n است).

۱۱۸. اگر دو نابرابری اول را درهم ضرب کنیم، به دست می آید:

$$(a+b)^{۲}<ab+cd$$

ولی $(a+b)^{۲}\geqslant ۴ab$ و بنا براین $ab+cd\geqslant ۴ab$ یعنی $cd\geqslant ۳ab$.

اگر دو نابرابری دوم وسوم را درهم ضرب کنیم، به‌دست می آید:

$$ab(ab+cd)>(a+b)^{۲}cd\geqslant ۴abcd$$

از آن‌جا $ab+cd>۴cd$، یعنی $ab>۳cd$.

به این ترتیب، به‌طور هم‌زمان، به‌دست می‌آید:

$$ab>۳cd \text{ و } cd>۳ab$$

که ممکن نیست.

۱۱۹. پاسخ: $a=۵$.

فرض کنید $f(x)=ax^{۲}+bx+c=a(x-x_{۱})(x-x_{۲})$ که در آن a، b و c عددهایی درست‌اند $(a>۰)$ و $۰<x_{۱}<۱$ و $۰<x_{۲}<۱$.

$f(۰)$ و $f(۱)$، عددهایی درست و مثبت‌اند، بنا براین $f(۰)f(۱)\geqslant ۱$، یعنی $a^{۲}x_{۱}(۱-x_{۱})x_{۲}(۱-x_{۲})\geqslant ۱$.

اکنون توجه می‌کنیم که همیشه $x(۱-x)\leqslant\frac{۱}{۴}$، درضمن برابری تنها برای $x=\frac{۱}{۲}$ ممکن است. چون عددهای $x_{۱}$ و $x_{۲}$ مختلف‌اند و $x_{۱}(۱-x_{۱})$ و $x_{۲}(۱-x_{۲})$ عددهایی مثبت، بنا براین

$$x_{۱}(۱-x_{۱})x_{۲}(۱-x_{۲})<\frac{۱}{۱۶}$$

بنا براین $a^{۲}>۱۶$ و $a>۴$.

به ازای $a=۵$، معادلهٔ درجه دوم $۵x^{۲}-۵x+۱=۰$ به‌دست می‌آید که دارای دو ریشهٔ مختلف در بازهٔ $[۰،۱]$ است.

۱۲۰. حکم مساله را می‌توان با استقرا حل کرد.

حکم به ازای $n=۱$ درست است: $۱=\frac{۱}{۱\times ۱}$؛ برای عبور از $n-۱$

به n، باید همهٔ کسرهای $\frac{۱}{pq}$ را، کـه در آن‌ها p و q نسبت به هم اول‌انـد،

$p<q$ و $p+q=n$، حذف کنیم و، درعوض، همهٔ کسرهای به صورت $\frac{۱}{pn}$

را، که در آن $p<n$ و p و n نسبت به‌هم اول‌اند، اضافه کنیم.

فرض کنید $\frac{۱}{pq}$ یکی از کسرهای حذف شده باشد. چون

$$\frac{۱}{pq}=\frac{۱}{p(n-p)}=\frac{۱}{pn}+\frac{۱}{(n-p)n}$$

ا براین، حذف آن ازمجموع، به وسیلهٔ دو کسر جدید $\frac{۱}{pn}$ و $\frac{۱}{(n-p)n}$ (کـه ا شرط، سازگارند) جبران می‌شود. به این ترتیب، با عبور از $n-۱$ به n، مقدار مجموع تغییر نمی‌کند.

۱۲۱. ازدستگاه نقطه‌های مفروض، دو نقطه‌را انتخاب می‌کنیم که فاصلهٔ بین آن‌ها، بیشترین مقدار باشد: این نقطه‌ها را. A و B می‌نامیم.

ثابت می‌کنیم، هریك اززاویه‌های XAY (یا XBY)، که در آن X و Y دو نقطه از نقطه‌هـای مفروض‌اند، از ۱۲۰ درجه کوچکتر است. درواقع، ضلع AB درهریك ازمثلث‌های AXB و AYB، بزرگترین ضلع است، بنابراین

$$\widehat{AXB}>۱۲۰^\circ \text{ و } \widehat{AYB}>۱۲۰$$

یعنی $\widehat{XAB}<۶۰^\circ$ و $\widehat{YAB}<۶۰^\circ$. وچون درهـر کنج سه وجهی، هرزاویهٔ مسطح کوچکتر ازمجموع دوزاویهٔ دیگراست، بنابراین

$$\widehat{XAY}<\widehat{XAB}+\widehat{YAB}<۱۲۰^\circ$$

به این ترتیب، باید شماره‌گذاری را از A آغازو به B ختم کرد. یاد-آوری می‌کنیم که، همهٔ فاصله‌های بین نقطه‌های مفروض تـا نقطهٔ A، با هم

فرق دارند. درواقع، اگر داشته باشیم: $AX=AY$، آن وقت مثلث AXY متساوی‌الساقین می‌شود و، درضمن، $\widehat{XAY}>120^\circ$؛ و روشن است که چنین وضعی ممکن نیست. نقطه‌های مفروض را شماره‌گذاری می‌کنیم: $A_1=A$، A_2 نزدیکترین نقطهٔ دستگاه به A، A_3 نزدیکترین نقطه به A از بین بقیهٔ نقطه‌ها، ...، A_k نزدیکترین نقطه به A که هنوز شماره‌ای نگرفته‌اند، ...، $A_n=B$. ثابت می‌کنیم، این شماره‌گذاری، با شرط مساله سازگار است.

چون $\widehat{A_1A_iA_n}>120^\circ$ (به ازای $1<i<k\leqslant n$)، بنابراین کافی است ثابت کنیم $A_i\widehat{A_j}A_k>120^\circ$ $(1<i<j<k<n)$.

چون در دستگاه نقطه‌های A_1، A_2، ...، A_k، نقطه‌های A_1 و A_k بیشترین فاصله را نسبت به هم دارند، بنابراین $\widehat{A_iA_kA_j}<120^\circ$ (این مطلب را، در ابتدای حل، ثابت کردیم).

ثابت می‌کنیم $\widehat{A_kA_iA_j}<120^\circ$، درواقع، چون $\widehat{A_1A_iA_j}>120^\circ$ و $\widehat{A_1A_iA_k}>120^\circ$. اگر فرض کنیم $\widehat{A_kA_iA_j}\geqslant 120^\circ$، آن وقت مجموع زاویه‌های مسطحه در کنج سه وجهی به‌رأس A_i از 360 درجه بیشتر می‌شود.

به این ترتیب $\widehat{A_iA_jA_k}>120^\circ$ به‌ازای هر $1\leqslant i<j<k\leqslant n$.

$\triangledown$ در این مساله، درواقع ثابت کردیم که نسبت «$\widehat{A_iA_jA_k}>120^\circ$»، همان ویژگی‌هایی را دارد که نسبت «A_j بین A_i و A_k قرار دارد» (برای نقطه‌های واقعی بر خط راست)، یعنی این نسبت، امکان «مرتب کردن» یك مجموعه مفروض را به دست می‌دهد. مقدار 120 درجه را نمی‌توان با مقدار کمتری عوض کرد.

۱۲۲. پاسخ: ۱۰۸، ۱۳۵، ۱۸۰، ۱۱۷.

x_1، x_2، x_3، x_4 را عددهای مجهول، S را مجموع آن‌ها و a را رقم سمت چپ هریك ازآن‌ها فرض می‌کنیم. روشن است که

$$100a\leqslant x_i<100(a+1)\cdot\ (i=1,2,3,4)$$

با استفاده ازاین نابرابری، به‌دست می‌آید:

$$x_i+۳۰۰a \leqslant S < x_i + ۳۰۰(a+۱)$$

از آن‌جا

$$۱+\frac{۳۰۰a}{x_i} \leqslant \frac{S}{x_i} < ۱+\frac{۳۰۰(a+۱)}{x_i}$$

بنا بر این

$$۱+\frac{۳a}{a+۱} \leqslant \frac{S}{x_i} < ۴+\frac{۳}{a}$$

به‌ازای $a=۱$ به‌نا برابری $۲/۵ \leqslant \frac{S}{x_i} < ۷$ و به‌ازای $a \geqslant ۲$ نا برابری

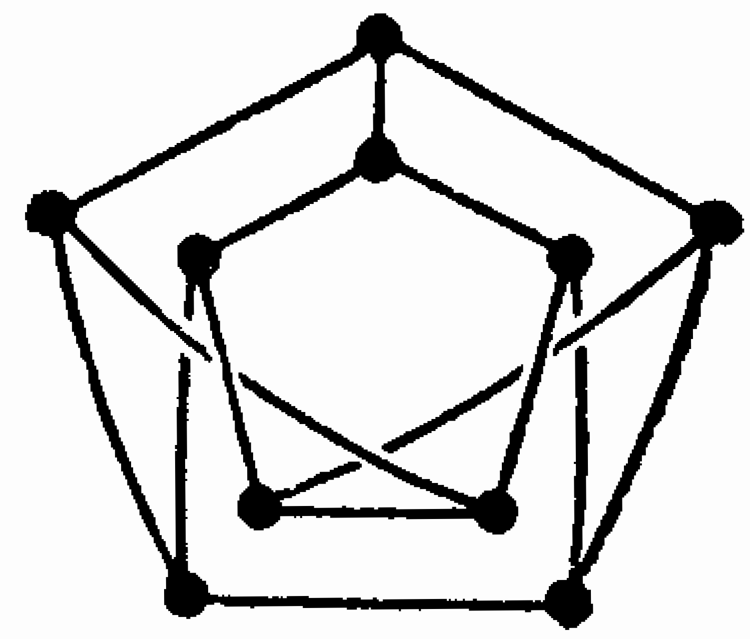
$۳ < \frac{S}{x_i} < ۵/۵$ به دست می‌آید. تحقیق می‌کنیم.

چون $\frac{S}{x_i}$ به‌ازای سه تا ازعددها، عددی درست است، بنا براین حالت $a \geqslant ۲$ ممکن نیست (بین ۳ و ۵/۵ تنها دوعدد درست وجود دارد). به‌این ترتیب $a=۱$ وخارج قسمت‌های درست را باید بین عددهای ۳، ۴، ۵، ۶ جست وجو کرد. ولی ۳ و ۶ نمی‌توانند باهم، دوتا ازخارج‌قسمت‌ها باشند، زیرا نسبت هردوعدد بین ۱۰۰ و ۱۹۹ از ۲ کمتراست. دوحالت باقی می‌ماند: ۱) سه خارج قسمت ۳ و ۴ و ۵ هستند؛ ۲) سه خارج قسمت ۴ و ۵ و ۶ هستند. درهردوحالت، S بر ۶۰ بخش‌پذیراست: $S=۶۰k$. درحالت‌اول، عددهای مجهول به‌صورت $۱۲k$، $۱۵k$، $۲۰k$ و $۱۳k$ درمی‌آیند.

تنها به‌ازای $k=۹$، رقم اول همهٔ عددها برابرمی‌شوندکه، از آن‌جا، جواب به‌دست می‌آید. درحالت دوم، گروه عددهای $۱۰k$، $۱۲k$، $۱۵k$، $۲۳k$، به‌ازای هیچ مقداری از k، با شرطهای مساله سازگار نیستند. زیرا نسبت دوعدد $۲۳k$ و $۱۰k$ از ۲ بزرگتراست.

۱۲۳. پاسخ: ۱۰ شهر.

ازهرشهر A می‌توان حداکثر به سه شهر پروازکرد و، ازهرکدام ازسه شهراخیر، به‌جز A، تنها به‌دوشهرمی‌توان با هواپیما پروازکرد. به‌این ترتیب، تعداد شهرها، نمی‌تواند از $۲\times۳+۳+۱$، یعنی ۱۰ بیشترباشد.



شکل ۶۰

درشکل ۶۰ نشان دادیم که چگونه می‌توان در کشوری که ۱۰ شهر دارد، این خطهای هوائی را برقرار کرد.

$\triangledown$ گراف شکل ۶۰، اغلب به عنوان نمونه مورد استفاده قرار می‌گیرد و به نام «گراف پترسن» معروف است.

۱۲۴. a) $ABCDE$ را پنج ضلعی محدب مفروض به ضلع a، و K را وسط قطر بزرگتر آن AD می‌گیریم؛ در این صورت $\widehat{AKE}=\widehat{EKD}=90^\circ$. چون $AC\leqslant AD$، بنابراین $\widehat{BAC}>\widehat{DAE}$ و در نتیجه $\widehat{BAK}>\widehat{KAE}$. از این‌جا معلوم می‌شود که، نقطه‌های A و B، در یك طرف خط راست EK قرار دارند. به‌همین ترتیب ثابت می‌شود که نقطه‌های C و D هم در یك طرف خط EK واقع‌اند. از این‌جا، بلافاصله، به دست می‌آید: $\widehat{BKA}<90^\circ$ و $\widehat{CKD}<90^\circ$.

فرض می‌کنیم $\widehat{BKC}\geqslant 90^\circ$، در این صورت $BK<a$ و $CK<a$، و از آن‌جا که $AK<a$ و $KD<a$، بنا براین $\widehat{AKB}>60^\circ$ و $\widehat{CKD}>60^\circ$ (ضلع بزرگتر مثلث، روبه‌رو به زاویهٔ بزرگتر آن است)؛ ولی این ممکن نیست، زیرا

$$\widehat{AKB}+\widehat{BKC}+\widehat{CKD}=180^\circ$$

و در نتیجه $\widehat{BKC}<90^\circ$. ثابت کردیم که نقطهٔ K، باشرطهای مساله سازگار است.

b) اگر روی امتداد پاره خط راست EK، نقطهٔ M را خیلی نزدیك به نقطهٔ K انتخاب کنیم، آن وقت، همهٔ زاویه‌های AMB، BMC، CMD،

DME وEMA، حاده می‌شوند، بنابراین، نقطهٔ M نمی‌تواند به هیچ‌کدام ازنیم دایره‌های به قطرضلع‌های پنج ضلعی متعلق باشد.

۱۲۵. اگرنفراول، عدد۱ −را جلوx (با توان واحد) قراردهد ودر حرکت بعدی خود، در جای خالی باقی مانده، قرینه عددی را بگذاردکه دومی درنوبت خود انتخاب کرده است، آن وقت به چند جمله‌ای

$$x^{3}-ax^{2}-x+a=(x^{2}-1)(x-a)$$

می‌رسد؛ و ریشه‌های این چندجمله‌ای، ۱ و ۱ − و a، عددهایی درست‌اند.

۱۲۶. پاسخ: ۹۰ بازی.

فرض کنیم، بین هرسه تیم، دو تیم وجود داشته باشدکه بازی خود را انجام داده‌اند. تیم A را درنظرمی‌گیریم که‌کمترین تعداد بازی‌ها را انجام داده باشد و، تعداد این بازی‌ها را، k می‌گیریم. هر یك از k تیمی‌که با A بازی‌کرده‌اند، وخود تیم A، دست‌کم k بازی داشته‌اند. از$(19-k)$ تیمی که با A بازی نکرده‌اند، هر کدام با هر یك از $(18-k)$ تیم باقی‌مانده بازی داشته‌اند، در غیر این‌صورت، سه تیم پیدا می‌شود که، در بین آن‌ها، هیچ دوتیمی با هم بازی نکرده‌اند. به‌این ترتیب، دو برابر همهٔ بازی‌هایی که باید تیم‌ها انجام داده باشند، دست کم برابر است با

$$k^{2}+k+(19-k)(18-k)=2k^{2}-36k+18\times 19=$$

$$=2(k-9)^{2}+180\geqslant 180$$

نمونه حالتی که، طبق شرط‌های مساله، درست ۹۰ بازی انجام شده باشد، به این ترتیب به دست می‌آیدکه ۲۰ تیم را به دو گروه ۱۰ تیمی تقسیم کنیم، تیم‌های هرگروه، همه با هم بازی کرده‌اند، ولی هیچ تیمی از گروه اول با هیچ تیمی از گروه دوم بازی نکرده است.

▽ اگر هر تیم را با یك نقطه نشان دهیم و هر دو تیمی راکه باهم بازی نکرده‌اند، به وسیلهٔ پاره‌خط راستی به هم وصل کنیم، یك گراف به دست می‌آیدکه، با رعایت شرط‌های مساله، گرافی بدون مثلث خواهد بود. می‌توان ثابت کردکه، در چنین گرافی، اگر n رأس داشته باشد، حداکثر

$\left[\frac{n^2}{4}\right]$ یال وجود دارد.

راه‌حلی‌که در مساله انتخاب کرده‌ایم، شبیه اثبات «پیش قضیهٔ مربوط به صلیب» است‌که در حل ۱۵۶ و ارزیابی ۲۴۶، C) آورده‌ایم.

۱۲۷. نابرابری مساله را می‌توان این‌طور نوشت:

$$(n+1)\cos\frac{\pi}{n+1}-n\cos\frac{\pi}{n}>1$$

و یا

$$n\left(\cos\frac{\pi}{n+1}-\cos\frac{\pi}{n}\right)>1-\cos\frac{\pi}{n+1}$$

یعنی

$$n\sin\frac{\pi}{2n(n+1)}\cdot\sin\frac{\pi(2n+1)}{2n(n+1)}>\sin^2\frac{\pi}{2(n+1)}$$

و نابرابری اخیر درست است، زیرا

$$\sin\frac{\pi(2n+1)}{2n(n+1)}>\sin\frac{2\pi n}{2n(n+1)}=\sin\frac{\pi}{n+1}>\sin\frac{\pi}{2(n+1)},$$

$$n\sin\frac{\pi}{2n(n+1)}\geqslant\sin\frac{n\pi}{2n(n+1)}=\sin\frac{\pi}{2(n+1)}$$

در این‌جا، از نابرابری $|\sin n\alpha|\leqslant|n\sin\alpha|$ استفاده کرده‌ایم‌که به سادگی، و به کمك استقرا، ثابت می‌شود.

۱۲۸. $a_{i_1}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_i$ می‌گیریم. همچنین فرض‌می‌کنیم a_{i_2} بزرگترین عدد در مخرج کسر با صورت a_{i_1}؛ a_{i_3} بزرگترین عـدد در مخرج کسر با صورت a_{i_2}؛ و به طور کلی، a_{i_k} بزرگترین عدد در مخرج کسر با صورت $a_{i_{k-1}}$ باشد.

روشن است‌که، سر آخر، به $a_{i_r}=a_{i_{r-1}}:a_{i_1}$ می‌رسیم.

اگر شماره‌های ۱، ۲، ...، n را روی محیط دایره‌ای قرار دهیم، آن

وقت i_{k+1} و i_k (همچنین i_r و i_1) یا در مجاورت هم و یا یك در میان قرار می‌گیرند، یعنی $r \geqslant \frac{n}{2}$.

مجموع مفروض، بزرگتر است از

$$\frac{a_{i_1}}{2a_{i_2}}+\frac{a_{i_2}}{2a_{i_3}}+\dots+\frac{a_{i_r}}{2a_{i_1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{a_{i_1}}{a_{i_2}}+\frac{a_{i_2}}{a_{i_3}}+\dots+\frac{a_{i_r}}{a_{i_1}}\right)=\frac{1}{2}S$$

اگر از نابرابری واسطه‌ها استفاده کنیم (ضمیمهٔ ۸)، آن وقت

$$\frac{S}{r}\geqslant\sqrt[r]{\frac{a_{i_1}}{a_{i_2}}\cdot\frac{a_{i_2}}{a_{i_3}}\dots\frac{a_{i_r}}{a_{i_1}}}=1$$

یعنی S از r کمتر نیست. بنابراین، مجموع مفروض، از $\frac{n}{4}$ بزرگتر است.

▽ می‌توان نابرابری قوی‌تری را ثابت کرد:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\dots+\frac{a_n}{a_1+a_2}\geqslant\frac{n}{2} \qquad (*)$$

(این فرضیه را، شاپیرو، ریاضی‌دان امریکایی، در سال ۱۹۵۴ مطرح کرد). در واقع، این نابرابری به تدریج برای عددهای فرد $n \leqslant 11$ و عددهای زوج $n \leqslant 12$ ثابت شد، ولی برای عددهای زوج $n \geqslant 14$ و عددهای فرد $n \geqslant 27$ نادرست از آب درنیامد (ابتدا، مثال‌های نقض‌کنندهٔ عددهای بزرگ n به‌دست آمد). ارزیابی دقیق $\gamma_n \frac{n}{2}$، که باید در $(*)$ به جای $\frac{n}{2}$ قرار داد، برای هر n، نامعلوم بود، ولی و. گ. درین‌فلد، یکی از شرکت‌کنندگان موفق در المپیاد، درسال ۱۹۶۹ موفق شد به نتیجهٔ جالبی برسد: او بهترین ارزیابی را برای $\gamma \cdot \frac{n}{2}$ پیدا کرد، که برای هرمقدار n درست است. این عدد، $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n$، عبارت است از عرض نقطهٔ برخورد مماس مشترك نمودار

تابع‌های $y=e^{-x}$ و $y=\dfrac{۲}{e^{\frac{x}{۲}}+e^{x}}$ با محور Oy: $\gamma\approx ۰/۹۸۹$.

۱۲۹. فرض می‌کنیم، مساله حل شده است. چون خط راست CY بر خط راست AX عمود است، بنا براین $BX \| CY$. K را نقطهٔ برخورد پاره‌خط‌های راست AB و XY می‌گیریم. روشن است که دو مثلث KBX و CKY برابرند. درنتیجه $CK=KB$.

برای رسم، کافی است از وسط پاره‌خط راست CB، عمودی بر خط راست AB رسم کنیم تا محیط دایره را در دو نقطهٔ X و Y قطع کنند.

۱۳۰. سه‌عدد را x، y و $\dfrac{۱}{xy}$ می‌گیریم. باید داشته باشیم:

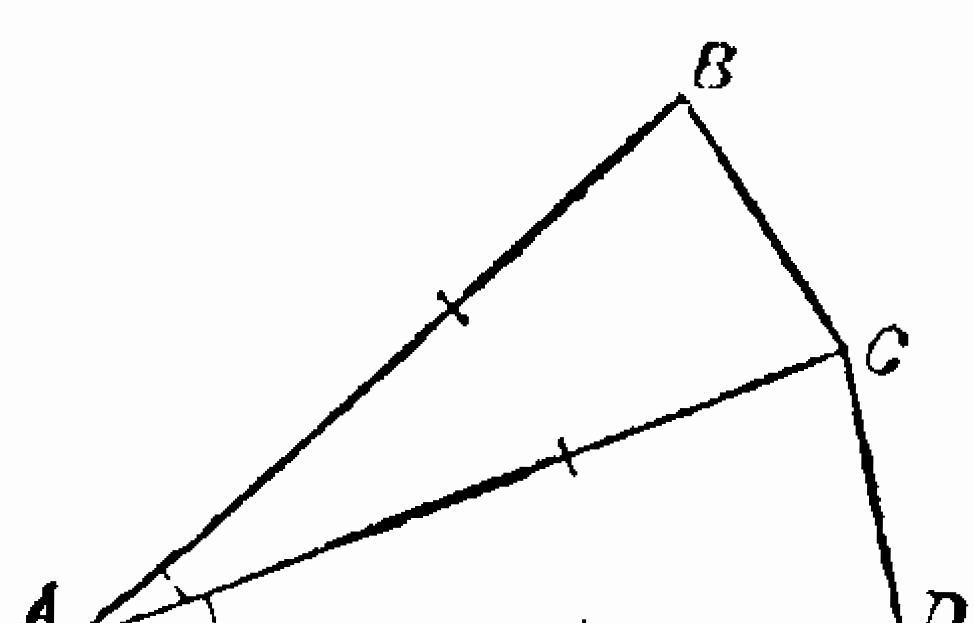
$$x+y+\frac{۱}{xy}>\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+xy$$

این نابرابری را، بعد از تبدیل‌های ساده، می‌توان این طور نوشت:

$$(x-۱)(y-۱)\left(\frac{۱}{xy}-۱\right)>۰$$

۱۳۱. پاسخ: حداکثردو ضلع. نمونه‌ای ازچندضلعی راکه، دو ضلع آن برابر با قطر بزرگ‌تر است، در شکل ۶۱ ببینید.

فرض می‌کنیم، تعداد چنین ضلع‌هایی، بیشتر از ۲ باشد. دو ضلع AB و CD از این ضلع‌ها را، که رأس مشترکی ندارند، در نظر می‌گیریم (این انتخاب ممکن است، زیرا وقتی چندضلعی دارای قطر باشد، مسلماً مثلث نیست). در این صورت، دست‌کم یکـی از قطرهای AC یا BC، طولی بزرگ‌تر از



شکل ۶۱

طول ضلع AB دارد. اگر این قطرها، در نقطهٔ K یکدیگر را قطع کرده باشند، آن وقت

$$AC+BD=AK+KC+BK+KD>AB+CD=2AB$$

۱۳۲. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. دو عدد را زیر هم می‌نویسیم و آن‌ها را، به صورت ستونی، با هم جمع می‌کنیم. چون آخرین رقم مجموع، عددی فرد است، بنا براین، ضمن جمع نخستین رقم‌ها، مجموعی فرد به دست می‌آید. بنا براین، از مرتبهٔ قبل، واحدی بـه این مرتبه، ضمن جمع، منتقل نشده است. و این به معنای آن است کـه، مجموع رقم‌ها در ستون دوم و، همچنین، مجموع رقم‌ها درستون ماقبل آخر، از ۱۰ کمتر است. توجه می‌کنیم که ازستون دوم به مرتبهٔ سوم هم، واحدی منتقل نشده است، زیرا این وضع تنها وقتی پیش می‌آید که مجموع رقم‌های مرتبهٔ دوم برابر ۹ باشد ومجموع رقم‌های‌مرتبهٔ اول بزرگتر از ۱۰؛ ولی دراین صورت، درمرتبهٔ دوم مجموع، رقم ۰ به دست می‌آید.

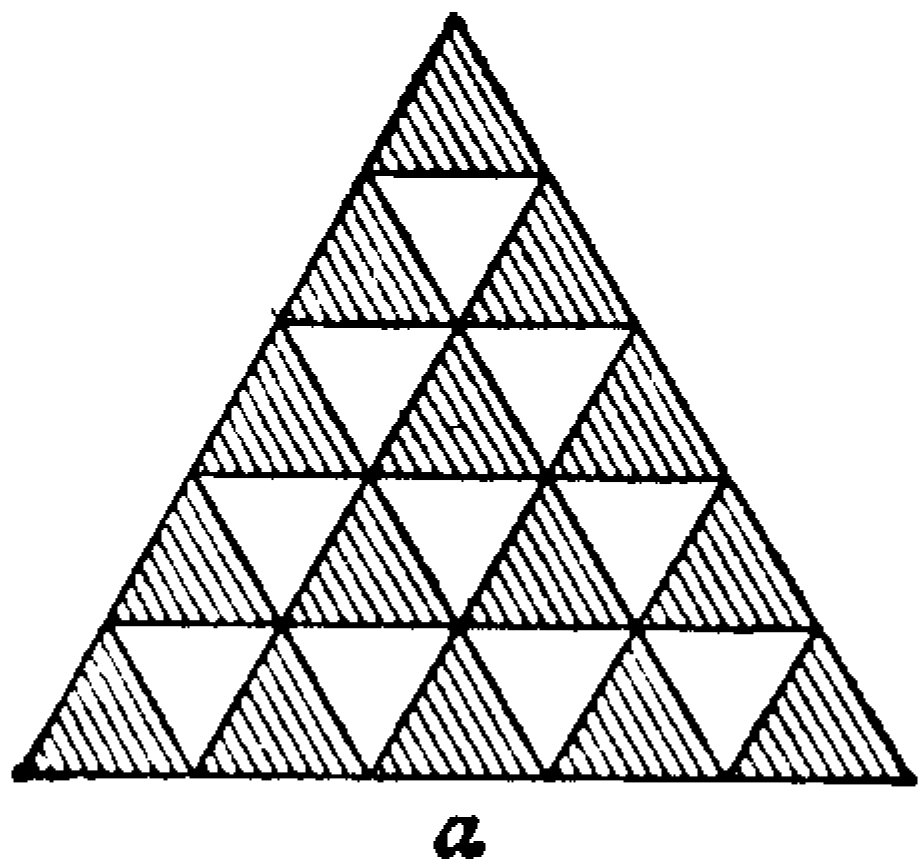
اکنون، دورقم آخرودورقم اول را، ازعدد مفروض حذف می‌کنیم و ازهمین‌استدلال، برای عدد۱۳ رقمی، سپس۹ رقمی وبالاخره ۵ رقمی‌تکرار می‌کنیم، به این نتیجه می‌رسیم کـه، به مرتبهٔ وسط مجموع، واحدی ازمرتبهٔ قبل منتقل نشده است. ولی رقم‌های وسط دوجملهٔ جمع، با هم برابرند ورقم وسط مجموع، عددی زوج می‌شود.

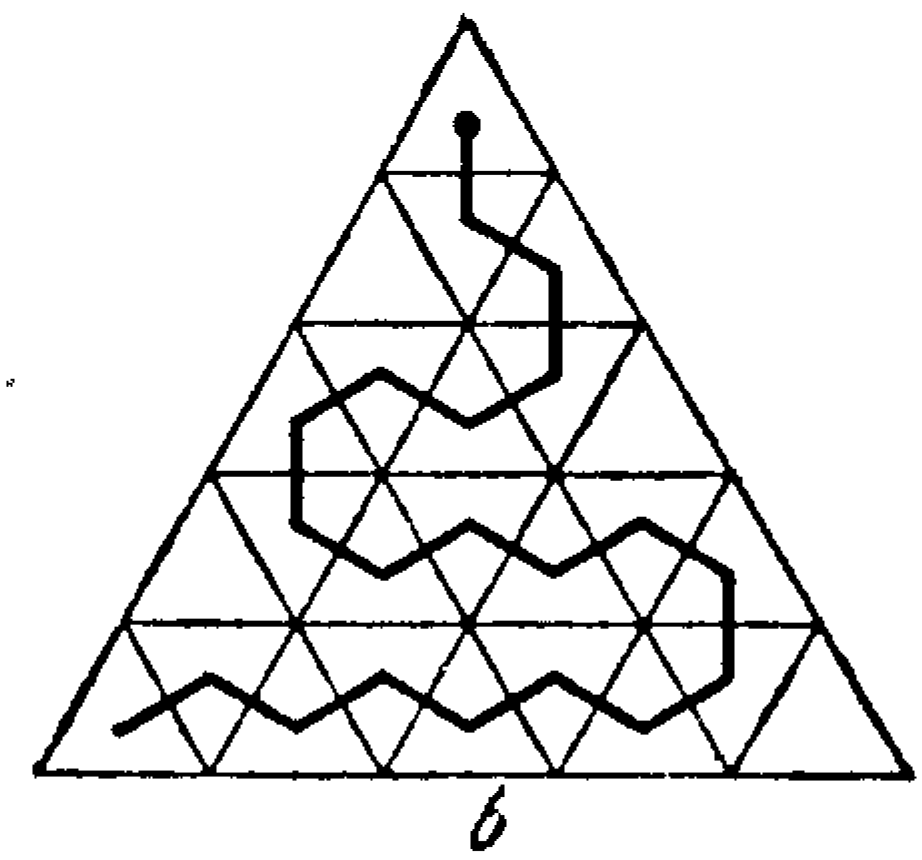
همان طورکـه ازحل مساله دیده می‌شود، این‌حکم برای هرعددی که $4k+1$ رقم داشته باشد، درست است. مثال‌هـای ساده‌ای (مثل ۱۲+۲۱، ۶۰۵+۵۰۶، ...) نشان‌می‌دهندکه حکم، برای عددهایی‌که با تعداد رقم‌های دیگری باشند، درست نیست.

۱۳۳. b) مثلث‌ها را به دورنگ درمی‌آوریم، شبیه شکل a،۶۲.

تعداد مثلث‌های سیاه، به‌اندازهٔ k، ازتعداد مثلث‌های سفید بیشتراست.

بنا براین تعداد مثلث‌های سفید برابر $\frac{1}{2}(k^2-k)$ وتعداد مثلث‌های‌سیاه‌برابر





شکل ۶۲

$\frac{1}{2}(k^2+k)$ است. در «زنجیره»، رنگ مثلث‌ها، یك درمیان سیاه و یك در میان سفید است. بنابراین تعداد مثلث‌هـای سیاه «زنجیره» نمی‌توانـد از $\frac{1}{2}(k^2-k)+1$ بیشتر باشد. درنتیجه، تعداد کل مثلث‌های «زنجیره»، از

$$\frac{1}{2}(k^2-k)+\frac{1}{2}(k^2-k)+1=k^2-k+1$$

بیشتر نیست. درشکل ۶۲، b نمونهٔ «زنجیره‌ای» داده شده است کـه، در آن، تعداد مثلث‌ها، درست برابر k^2-k+1 است.

۱۳۴. طول پاره‌خط‌های راست‌مفروض را $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$ می‌گیریم. فرض می‌کنیم، بـا هیچ سه پاره خط راستی ازاین پنج پـاره‌خط، نتوان مثلثی با زاویه‌های حاده ساخت. درهرمثلثی کـه یکی اززاویه‌های آن حاده نباشد، مجذورضلع بزرگتر، ازمجموع مجذورهای دوضلع دیگربزرگتر ویا با آن برابراست. بنابراین، باید داشته باشیم:

$$c^2 \geqslant a^2+b^2,\ d^2 \geqslant c^2+b^2,\ e^2 \geqslant d^2+c^2$$

که اگرآن‌ها را با هم جمع کنیم، به دست می‌آید:

$$e^2 \geqslant a^2+2b^2+c^2 \geqslant a^2+2ab+b^2$$

یعنی $e \geqslant a+b$، یعنی ازپاره‌خط‌های‌راست e، a و b نمی‌توان‌مثلثی تشکیل داد.

۱۳۵. راه حل اول. فرض می‌کنیم $\widehat{BAC} < 45^\circ$، دراین صورت

$$\widehat{ACH}>45^\circ,\ \widehat{BCH}<45^\circ,\ \widehat{CBA}>45^\circ,\ BC<AC$$

بنا براین، میانهٔ CP دردرون‌مثلث ACH قرارمی‌گیرد و با میانهٔ BM در نقطهٔ K متعلق بـه پاره خط راست OM برخورد دارد (O را نقطهٔ برخورد BM، AD و CH گرفته‌ایم). ازاین جا، با توجه به $PK=\frac{1}{2}KC$

$$OH:OC<\frac{1}{2}$$

ولی بنا به‌ویژگی نیمساز زاویهٔ مثلث

$$OH:OC=AH:AC$$

یعنی $AH<\frac{1}{2}AC$ و، بنا براین $\widehat{ACH}<30^\circ$. تناقض.

راه حل دوم. ثابت می‌کنیم، اگرداشته باشیم: $\widehat{BAC}<45^\circ$، آنوقت $\widehat{ACB}>90^\circ$. نقطهٔ B_1 را روی خط راست AB طوری‌انتخاب می‌کنیم که $HB_1=AH$. نیمساززاویهٔ AB_1C، کـه آن را B_1F می‌نامیم، ازنقطهٔ O می‌گذرد (در این نقطه، دونیمساز دیگر از زاویه‌هـای مثلث AB_1C به هم رسیده‌اند). بنا به‌ویژگی نیمساز

$$AF:FC=AB_1:B_1C$$

ولی $AB_1:B_1C>1$، زیـرا $\widehat{B_1AC}<45^\circ$. بـه این ترتیب، نقطهٔ B_1 بین نقطه‌های A و B قرارمی‌گیرد و، بنا براین $\widehat{B_1CA}>90^\circ$.

۱۳۶. همهٔ زوج رقم‌های‌ممکن را، که درعددهای مختلف دریك مرتبه واقع‌اند، در نظرمی‌گیریم؛ چون زوج عددهـا ۱۰، بنا براین همهٔ این گونه زوج‌ها برابر $10n$ است. درضمن، زوج رقم‌های مختلف، یعنی زوج (۱،۲) درهرردیف‌از۴ کمترو‌از۶ بیشتر نیست، به‌نحوی که، ازبین $10n$ زوج انتخابی، تعدادکل زوج‌های (۲ ،۱)، بین $4n$ و $6n$ قراردارد.

ازطرف‌دیگر، چون‌هردوعدد، در m مرتبهٔخود برهم‌منطبق‌اند، بنا براین

هردو عـدد، $n-m$ زوج (۲، ۱) می‌دهد. بـه این ترتیب، تعداد کل چنین زوج‌هایی برابر است با $۱۰(n-m)$ درنتیجه

$$۴n \leqslant ۱۰(n-m) \leqslant ۶n \Rightarrow \frac{۲}{۵} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \frac{۳}{۵}$$

۱۳۷. ثابت می‌کنیم، ازبین هر ۱۹۹ عدد درست، می‌توان ۱۰۰ عدد طوری انتخاب کرد که، مجموع آن‌ها، بر ۱۰۰ بخش‌پذیر باشد. درضمن تنها ازاین دو گزارهٔ درست استفاده می‌کنیم: بین‌هرسه عدد، یادوعدد زوج وجود دارد و یا دوعدد فرد (که روشن است)؛ ازاین هر ۹ عدد درست، می‌توان ۵ عدد طوری انتخاب کرد که، مجموع آن‌ها، بر ۵ بخش‌پذیر باشد.

گزارهٔ‌کلی زیررا P_m می‌نامیم: ازبین هر $۲m-۱$ عدد درست می‌توان m عدد طوری انتخاب کرد که، مجموع آن‌ها بر m بخش‌پذیر باشد (به زبان‌دیگر، می‌توان m عدد انتخاب کرد که، واسطهٔ حسابی آن‌ها، عددی‌درست باشد). ابتدا، یك پیش قضیه ثابت می‌کنیم.

پیش قضیهٔ ۱. اگر گزاره‌های P_k و P_m درست باشند، گزارهٔ P_{km} هم درست است.

فرض‌کنید $۲km-۱$ عـدد درست مفروض باشد. از این عددها، با توجه به P_m، می‌توان m عدد را، با واسطهٔ حسابی درست، انتخاب کرد؛ از بقیهٔ $۲km-m-۱$ عدد، دوباره m عدد ازاین‌گونه جدا می‌کنیم؛ سپس‌از بقیه $۲km-۲m-۱$ عدد، بازهم یك گروه m عددی با همین ویژگی درنظر می‌گیریم و غیره. وقتی‌که این روند انتخاب را $۲k-۱$ بارتکرارکنیم، به تعداد $۲km-(۲k-۱)m-۱=m-۱$ عدد باقی می‌ماند، یعنی‌می‌توانیم $۲k-۱$ بارازِ P_m استفاده‌کنیم. اکنون واسطه‌هـای حسابی را در $۲k-۱$ گروه انتخابی پیدا می‌کنیم (این واسطه‌ها، عددهایی درست‌اند). ازبین این واسطه‌ها، با توجه به p_k، می‌توان k عدد انتخاب کرد، به نحوی که مجموع آن‌ها بر k بخش‌پذیر باشد. دراین صورت روشن است که، مجموع km عدد ازعددهای اولیه که در k گروه وارد شده‌اند، بر km بخش‌پذیرمی‌شود، پیش‌قضیهٔ ۱ ثابت شد.

چون $5 \times 5 \times 2 \times 2 = 100$، با توجه به P_2 و P_5 وسه بار استفاده از پیش قضیه۱، درستی P_{100} روشن می‌شود. تنها این مانده است که P_5 را مورد آزمایش قرار دهیم.

باقی‌مانده‌های تقسیم ۹ عدد مفروض بر ۵ را r_1، r_2، ...، r_9 می‌نامیم:

$$0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant \dots \leqslant r_9 \leqslant 4$$

حالتی که بین r_iها $(1 \leqslant i \leqslant 9)$، ۵ عدد برابر وجود داشته باشد، یا حالتی که بین آن‌ها، سه عدد برابر پیدا نشود (و بنابراین، به همهٔ باقی‌مانده‌های ۰، ۱، ۲، ۳، و ۴ برخورد کنیم)، روشن است. دو حالت می‌ماند: وقتی که باقی‌مانده‌ای در بین r_iها، ۳ بار و یا ۴ بار تکرار شده باشد. درضمن می‌توان این باقی‌مانده را $r = 0$ گرفت؛

اگر $r \neq 0$، می‌توان به هر ۹ عدد، $5 - r$ را اضافه کرد (با این اضافه‌کردن، شرط «مجموع ۵ عدد باید بر ۵ بخش‌پذیر باشد»، تغییر نمی‌کند).

اگر پیش قضیهٔ مفید زیر را درنظر داشته باشیم، می‌توانیم خود را از آزمایش حالت‌های مختلف خلاص کنیم.

پیش قضیه۲. از هر q عدد درست، می‌توان چند عدد انتخاب کرد، به نحوی که مجموع آن‌ها بر q بخش‌پذیر باشد.

(برای اثبات پیش قضیه دربارهٔ عددهای a_1، a_2، ...، a_q، کافی است q عدد زیر را درنظر بگیریم:

$$a_1;\ a_1 + a_2;\ a_1 + a_2 + a_3;\ \dots;\ a_1 + a_2 + \dots + a_q$$

این عددها، درتقسیم بر q، یا به باقی‌مانده‌های مختلف می‌رسند و یا دست‌کم دوتا از آن‌ها، باقی مانده‌های برابر پیدا می‌کنند که، دراین صورت، تفاضل آن‌ها بر q بخش‌پذیر می‌شود.)

بنابر پیش قضیهٔ۲، از بین ۵ باقی‌ماندهٔ r_i که مخالف صفرند، می‌توان چند عدد (از ۲ تا ۵) انتخاب کرد، به‌نحوی که مجموع آن‌ها بر ۵ بخش‌پذیر باشد و، سپس، به‌تعدادی که لازم است، از باقی‌مانده‌های صفر به آن‌ها اضافه کرد.

$\triangledown$ می‌توان ثابت کرد، گزارهٔ p_n، برای هر عدد طبیعی n درست است

(با توجه به‌پیش‌قضیهٔ ۱، کافی است آن را برای عددهای اول n ثابت کنیم).
بررسی‌مسألهٔ زیرمی‌تواند جالب باشد: حداقل‌عدد طبیعی $F_d(n)$ چقدر باشد تا ازهر $F_d(n)$ بردار با مختصات درست بتوان چند بردارانتخاب کرد، به نحوی که درمجموع بردارها، همهٔ‌مختصات، بر n بخش‌پذیر باشند؟ (دراین‌جا، n عددی‌طبیعی و d، تعداد بعدهاست: $d=۲$ برای بردارهای واقع برصفحه، $d=۳$ برای بردارهای واقع درفضا.)

۱۳۸. راه حل اول. P را نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی با ضلع BC و PQ را قطردایرهٔ محاطی مثلث می‌گیریم. در حل مسالهٔ ۱۱۲ ثابت کردیم $AQ \| MO$، بنابراین $AEOQ$ متوازی‌الاضلاع است، به نحوی که $OQ=AE=r$.

راه حل‌دوم. a، b و c را، به‌ترتیب، طول ضلع‌های مقابل به راس‌های A، B و C ازمثلث می‌گیریم. می‌توان فرض کرد $b>c$. ازنقطهٔ O عمود OP را بر BC رسم می‌کنیم. دراین صورت

$$MC=\frac{a}{۲};\ PC=\frac{a+b-c}{۲};\ HC=\frac{a^۲+b^۲-c^۲}{۲a};$$

$$\frac{EH}{OP}=\frac{HM}{PM}=\frac{HC-MC}{PC-MC}=\frac{۲HC-a}{b-a}=$$

$$=\frac{a^۲+b^۲-c^۲-a^۲}{a(b-c)}=\frac{b+c}{a};$$

$$\frac{AE}{r}=\frac{AH}{r}-\frac{EH}{r}=\frac{a+b+c}{a}-\frac{b+c}{a}=۱$$

که ازآن‌جا $AE=r$.

۱۳۹. اگرعدد k به‌صورت $k=\overline{a_n a_{n-۱}\ldots a_۰}$ وعدد t شامل $m>n$ رقم برابر ۹ باشد: $t=\underbrace{۹۹\ldots۹}_{m}=۱۰^m-۱$، آن وقت

$$kt=\overline{a_n a_{n-۱}\ldots(a_۰-۱)\underbrace{۹۹\ldots۹(۹-a_n)(۹-a_{n-۱})\ldots(۹-a_۱)(۱۰-a_۰)}_{m \text{ رقم}}}$$

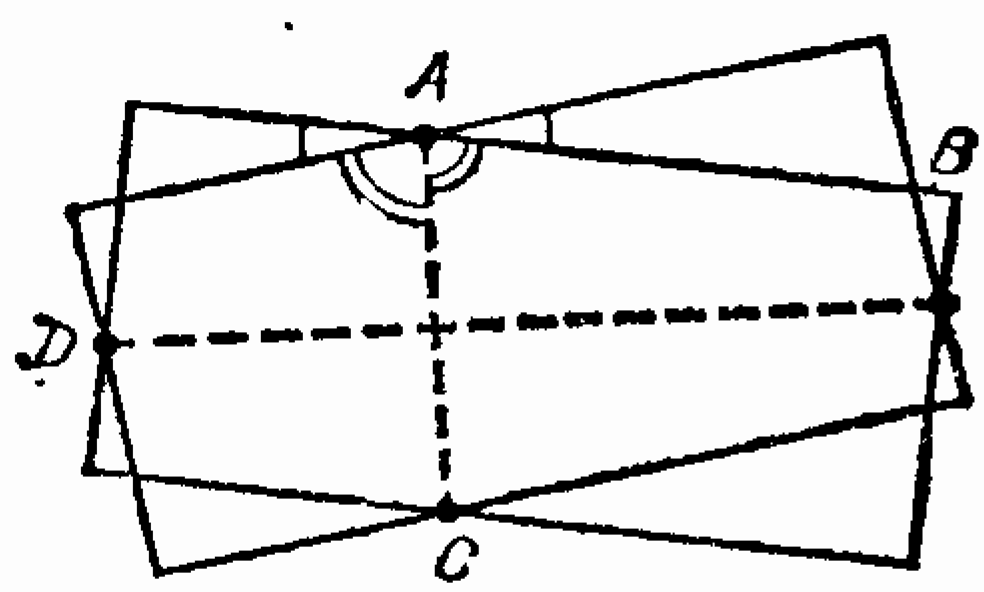
که مجموع رقم‌های آن با مجموع رقم‌های عدد t یکی است: این مجموع برابراست با $9m$.

۱۴۰. a و b را طول ضلع‌های هریك ازمستطیل‌ها می‌گیریم. اگر محیط‌های دومستطیل درهشت نقطه یکدیگر را قطع کرده باشند، آن وقت روی‌هر ضلع هرمستطیل، دو نقطهٔ برخورد بادوضلع مجاورمستطیل دیگروجود دارد. اگــر روی ضلعی، کمتر ازدو نقطهٔ برخورد وجود داشته باشد، آن وقت روی هــم، کمتر ازهشت نقطهٔ برخورد به‌دست می‌آید. بنا براین، ضلع یکی ازمستطیل‌ها، نمی‌تواند دوضلع موازی را درد‌یگری قطع کند.

A و C را نقطه‌های برخورد ضلع‌های به طول a، B و D را نقطه‌های برخورد ضلع‌های به طول b می‌گیریم (شکل ۶۳). به سادگی ثابت می‌شود که پاره‌خط‌های راست AC و BD، نیمسازهای بین ضلع‌هایی هستند که، به ترتیب، از A و C، و B و D گذاشته‌اند. بنا براین $BD \perp AC$. مساحت S. از چهارضلعی $ABCD$، برابراست با $AC \cdot BD$ وچون $AC \geqslant b$ و $BD \geqslant a$، بنا براین $S \geqslant \frac{1}{2}ab$.

۱۴۱. ثابت می‌کنیم، هرعددی‌ازاین گونه، بر ۱۱۱۱۱ بخش‌پذیراست و، بنا براین، نمی‌تواند توانی از ۲ باشد. برای این منظور، توجه می‌کنیم که 10^5، ضمن تقسیم بــر ۱۱۱۱۱، بــه باقی مانــدهٔ واحد مــی‌رسد، زیــرا $10^5 = 9 \times 11111 + 1$. بنا براین. هریك ازعددهای حاصل. درتقسیم بر ۱۱۱۱۱، به‌همان باقی‌مانده‌ای‌می‌رسد که درتقسیم‌مجموع همهٔ عددهای واقع برکارت، به آن می‌رسیم.

درضمن، به سادگی ثابت می‌شود که، هریك ازاین گونه عددها، بر ۹



شکل ۶۳

بخش‌پذیر است. ولی مجموع عددهای واقع برکارت‌ها، برابر است با

$$\frac{11111+99999}{2}(10^5-1)$$

یعنی، این مجموع، بر ۱۱۱۱۱ بخش‌پذیر است.

۱۴۲. $D_1=\{0, 1, \ldots, 9\}$ را مجموعهٔ ده رقم، $A_1=\{0, 2, \ldots, 8\}$ را مجموعهٔ رقم‌های زوج و $B_1=\{1, 3, \ldots, 9\}$ را مجموعهٔ رقم‌های فرد می‌گیریم. به‌طور کلی، برای هر n، D_n را به معنای مجموعهٔ همهٔ عددهایی که تعداد رقم‌هایشان از n تجاوز نمی‌کند، و A_n و B_n را، زیرمجموعه‌های از D_n می‌گیریم که، به ترتیب، مجموع رقم‌های هریك ازعضوهای آن‌ها، زوج وفرد باشد ($D_n=A_n \cup B_n$). اگرعددی را هم‌که ازصفرها تشکیل شده است به حساب آوریم، B_n و A_n به تعداد $5\times 10^{n-1}$ عضوخواهند داشت. مجموع همهٔ عضوهای x ازمجموعهٔ X را $\sum x$ با شرط $x\in X$ می‌نامیم. باید ثابت‌کنیم، $\sum a^k$ با شرط $a\in A_n$، برابراست با $\sum b^k$ با شرط $b\in B_n$؛ این مجموع را با $S_n^{(k)}$ نشان می‌دهیم.

به ازای $n=2$، $k=1$، حکم مسالهٔ، منجربه برابری روشن زیرمی‌شود (که در آن. $a\in A_1$، $p\in A_1$، $b\in B_1$، $q\in B_1$):

$$\sum(10a+p)+\sum(10b+q)=\sum(10a+q)+\sum(10b+p)$$

هردوطرف برابرند با $5(\sum 10d+\sum r)$ به شرط $d\in D_1$، $r\in D_1$، $S_2^{(1)}=5(10+1)(1+2+\ldots+9)$، زیرا هریك ازرقم‌های a، b، p و q، دراین یا آن مجموع، ۵ بارتکرار شده است.

عمل‌های بعدی را روی نمونهٔ $n=3$ روشن می‌کنیم. مجموع را به شرط $a\in A_1$، $p\in A_2$، $b\in B_1$، $q\in B_2$(ودرضمن $d\in D_1$، $r\in D_2$) پیدامی‌کنیم:

$$\sum(10a+p)^2+\sum(10b+q)^2=50\times 10^2(\sum a^2+\sum b^2)+$$

$$+2\times 10(\sum a.\ p+\sum b.\ q)+5\sum p^2+5\sum q^2=$$

$$=10^2\sum d^2+2\times 10(\sum a\cdot \sum p+\sum b\cdot \sum q)+5\sum r^2=$$

$$=5\times 10^{3}\sum d^{2}+20\sum dS_{2}^{(1)}+5\sum r^{2}$$

به همین ترتیب، مجموع $\sum(10a+q)^{2}+\sum(10b+p)^{2}$ را هم، می توان تبدیل کرد. دراین‌جا، ازاتحادهای زیراستفاده کرده‌ایم:

$$(x+y)^{2}=x^{2}+2xy+y^{2},\ \sum uv=\sum u.\ \sum v$$

(در دومی، مجموع نسبت به همهٔ $u\in U$ و $v\in V$).

اکنون، حکم کلی را، با استقرای روی n، ثابت‌می کنیم. درضمن، از دستورهای زیرهم، استفاده خواهیم کرد:

$$(x+y)^{k}=x^{k}+C_{k}^{1}x^{k-1}y+C_{k}^{2}x^{k-2}y^{2}+\dots+C_{k}^{k-1}xy^{k-1}+$$

$$+y^{k}=x^{k}+\sum C_{k}^{l}x^{k-l}y^{l}+y^{k};$$

$$\sum uv=\sum u\sum v$$

(در دستوراول، مقدارهای C_{k}^{l}، ضریب‌های دوجمله‌ای ($1\leqslant l<k-1$)، در استدلال‌هـا، نقشی ندارند). فرض می کنیم، برای عددهـای n رقمی وهر $1\leqslant k<n$، برابری لازم ثابت شده باشد:

$$\sum p^{j}=\sum q^{j}=S_{n}^{(j)}\ ,\ (p\in A_{n}\ ,\ q\in b_{n})$$

مجموع توان‌های kام عددها از A_{n+1} را ($k<n+1$) تبدیل می کنیم (در این‌جا،مجموع‌ها را باشرط $a\in A_{1}$، $p\in A_{n}$، $b\in B_{1}$، $q\in B_{n}$، $d\in D_{1}$، $r\in D_{n}$ و $1\leqslant j<k-1$ درنظر گرفته‌ایم):

$$\sum(10a+p)^{k}+\sum(10b+q)^{k}=$$

$$=5\times 10^{n-1}\times 10^{k}(\sum a^{k}+\sum b^{k})+$$

$$+\sum C_{k}^{j}.10^{\ k-j}(\sum a^{k-j}p^{j}+\sum b^{k-j}q^{j})+5(\sum p^{k}+\sum q^{k})=$$

$$=5\times 10^{n+k-1}\sum d^{k}+\sum_{j}C_{k}^{j}\ .10^{k-j}S_{k}^{(j)}\sum d^{k-j}+5\sum r^{k}$$

روشن است که مجموع توان‌های kام عددها از B_{n+1} هم، با همین عبارت بیان می‌شود (تنها باید جای حرف‌های p و q را عوض کرد).

▽ اتحادهای مشابهی، برای هردستگاه عددنویسی به مبنای d درست است، به شرطی‌که d، عددی زوج باشد؛ مثلاً درعددنویسی به مبنای ۲، کــه برای عددهای نه چندان بزرگ n، می‌توان به‌طورمستقیم موردتحقیق قرارداد.

۱۴۳. دستگاه بردارهای واحد $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$، …، $\mathbf{e}_m$ (بـا مبداء مشترک O) را متقارن می‌گوییم، وقتی‌که ضمن دوران به اندازهٔ زاویهٔ $\frac{2k\pi}{m}$ (بــه ازای مقداری‌مثل $k<m$) برخودش‌منطبق شود. مجموع بردارهای چنین‌دستگاهی به روشنی، برابره است، زیـرا این مجموع، ضمن دوران بــه اندازهٔ زاویهٔ $\frac{2k\pi}{m}<2\pi$ تغییرنمی‌کند.

درحالت خاص، بردارهایی‌که به رأس‌های متوالی یک mضلعی منتظم منتهی می‌شوند، دستگاهی متقارن را تشکیل می‌دهندکه، درآن، $k=1$.

همهٔ بردارهای واحد به مبداء O را در معرض تبدیل $\mathbf{e}\to D^l\mathbf{e}$ قرار می‌دهیم (l، مضرب دوران‌است): زاویهٔ بین‌جهت اولیهٔ Ox با e را l برابر می‌کنیم و بردارحاصل را با $D^l\mathbf{e}$ نشان می‌دهیم. ضمن تبدیل D^l، هردستگاه متقارن به دستگاهی متقارن منجرمی‌شود. تنها با این شرط‌که kl بر m بخش‌پذیرنباشد (زاویهٔ $\frac{2k\pi}{n}$، بین‌بردارهای مجاور $\mathbf{e}_i$ و $\mathbf{e}_{i+1}$، l برابرمی‌شود؛ اگر از $\frac{2kl\pi}{m}$ مضرب 2π را کم کنیم، معلوم‌می‌شودکه، زاویهٔ بین $D^l\mathbf{e}_i$ و $D^l\mathbf{e}_{i+1}$ برابر $\frac{2r\pi}{m}$ است‌که، درآن، r عبارت است ازباقی‌ماندهٔ تقسیم kl بر m).

درحالتی‌هم‌که kl بر m بخش‌پذیر باشد (ودرحالت خاص، به‌ازای $k=m$)، آن وقت همهٔ بردارهای $D^l\mathbf{e}_i$، دریک بردارمتحد می‌شوند.

بعد ازاین نکته‌هـا، به حل مساله می‌پردازیم. فرض می‌کنیم توانسته باشیم رأس‌های یک nضلعی‌منتظم را، باچند رنگ، طوری رنگ کرده باشیم که راس‌های هم‌رنگ، تشکیل چندضلعی‌های منتظم داده باشند. l ضلعی، q_1

ضلعی، q_2ضلعی، ...، q_sضلعی، که، در آن‌ها $l<q_1<q_2<\ldots<q_s$. دستگاه متقارن بردارهایی را که به رأس‌های nضلعی رسیده‌اند، می‌توان به $s+1$ دستگاه متقارن شامل l، q_1، q_2، ... و q_s بردار تقسیم کرد. تا این‌جا، هیچ تناقضی وجود ندارد: مجموع بردارهای هریك ازاین دستگاه‌ها و، همچنین، مجموع کل آن‌ها، برابر بردار o است ولی اگر همهٔ بردارها را درمعرض تبدیل با مضرب دوران l قرار دهیم، تناقض پدید می‌آید: همهٔ l بردار دستگاه اول دریك بردارمتحد می‌شوند، به نحوی که مجموع آن‌ها، مخالف o است، و بقیهٔ دستگاه‌ها ــ از q_i بردار $(i=1, 2, \ldots, s)$ و ازهمهٔ n بردار ــ منتظم باقی می‌مانند، چون زاویهٔ بین بردارهای مجاور در آن‌ها

$$\frac{2\pi l}{q_1}<2\pi, \frac{2\pi l}{q_2}<2\pi, \ldots, \frac{2\pi l}{n}<2\pi$$

به نحوی که، مجموع در آن‌ها، برابر o باقی می‌ماند.

∇ اگر بردارها را همچون عددهای مختلط در نظر بگیریم، اندیشهٔ «دوران با ضرب l» یا «دوران ازمرتبه l» روشن‌ترمی‌شود: تبدیل D^l، خیلی ساده، یعنی به توان رساندن $z\to z^l$ ازعدد مختلط z، $|z|=1$، دستگاه متقارن بردارها، عبارت است ازتصاعد هندسی u، uz، uz^2، ...، uz^n که، در آن، $|u|=1$ و z برابراست با یکی ازریشه‌های nام واحد $(z\neq 1)$؛ اگرآوند (آرگومان) عدد z ــ زاویهٔ بین بردارهای مجاوردستگاه ــ برابر $\frac{2k\pi}{m}$ باشد، آن وقت می‌توان ثابت کرد که، چنین دستگاهی، شامل بردارهایی است که به رأس‌های $\frac{m}{d}$ضلعی منتظم می‌روند که، در آن، d مقسوم‌علیهی از m است، $d<m$؛ درضمن به هر رأس، d بردار می‌رود.

حل این مساله نشان می‌دهد که، هرتقسیمی ازمجموعهٔ عددهای درست $\mathbf{Z}$ را به چند تصاعد حسابی غیرمتقاطع (که ازهردوطرف نامتناهی باشند)، تنها با این روش می‌توان انجام داد: $\mathbf{Z}$ به d تصاعد با قدر نسبت‌های برابر d تقسیم‌می‌شود، سپس ممکن است یکی (یا چند تا) ازآن‌ها به تصاعدهایی

با قدرنسبت‌های برابر تقسیم‌شود وغیره. کاربرد عددهای‌مختلط درحل مساله‌های‌نظری مربوط به عددها را، «روش مجموع‌های مثلثاتی» گویند.

۱۴۴. این‌مساله را می‌توان باروش‌استقرا حل کرد. به‌ازای $n=۱$ باید عدد ۲ را انتخاب کرد. اگر $A=۲^n.B$، عـددی n رقمی و بر ۲^n بخش‌پذیر باشد، آن وقت، یکی ازعددهای $A+۲\times ۱۰^n$ یا $A+۱\times ۱۰^n$ بر $۲^{n+۱}$ بخش‌پذیرخواهد بود، زیرا یکی‌ازعددهای $B+۵^n$ یا $B+۲\times ۵^n$ زوج‌است.

▽ برای هرn، تنها یك جواب بـه دست می‌آید؛ ازاین گذشته، همهٔ عددهای n رقمی، که ازرقم‌های ۱ و ۲ تشکیل شده باشند، ضمن تقسیم برn، به باقی مانده‌هـای مختلف می‌رسند. با استفاده ازاین نکته، می‌توان راه حل دیگری برای مساله پیداکرد.

۱۴۵. مسالهٔ a) نتیجه‌ای ازمسالهٔ b) است، بنابراین تنها به حل این مسالهٔ کلی‌ترمی‌پردازیم.

نقطه‌هـای B_k و D_k ازخط راست OA_k بـه یك فاصله‌انـد. بنابراین $S_{OA_kB_k}=S_{OA_kD_k}$. اگر n برابری‌ازاین گونه را درهم‌ضرب کنیم وهرمساحت را به‌صورت ضرب قاعدهٔ A_kB_k یا A_kD_k درنصف ارتفاع متناظربنویسیم (این ارتفاع، برابراست با فاصلهٔ از نقطهٔ O تا ضلع چندضلعی)، به برابری موردنظر می‌رسیم: طول ارتفاع‌ها، درحاصل ضرب‌ها، حذف می‌شوند.

▽ درمسالهٔ a)، با توجه به شرط‌ها، نیروهای $\overrightarrow{A_kC_k}$ که درنقطه‌های A_k برصفحهٔ سخت $A_۱A_۲A_۳$ اثرمـی‌کنند، یکدیگـررا خنثا می‌کنند، زیرا صفحه بی‌حرکت می‌مانـد؛ مجموع نیروها (به عنوان بردارهـا) و مجموع گشتاورهای آن‌ها برابرصفراست، زیرا گشتاورهریك ازاین نیروهـا، نسبت به نقطهٔ O، برابرصفراست.

برای مثلث، برابری حاصل ضرب‌هائی‌که در صورت مساله آمده، نه تنها لازم، بلکه درضمن کافی است تا خطهای راست A_kC_k دریك نقطهٔ O به‌هم برسند.

۱۴۶. a) پاسخ: ۱۱ پرسش.

اگرهمهٔ ۱۰ عدد واقع دریك سطر، ویکی ازعددهـای واقع درسطر

دیگررا بدانیم، به سادگی می‌توانیم بقیهٔ عددها را بازسازی کنیم. ولی اگر تنها از ۱۰عدد اطلاع داشته باشیم، نمی‌توانیم همهٔعددها را، به‌صورت یك‌ارزشی، پیدا کنیم؛ از یك طرف، درهرستون، باید دست‌کم یکی ازعددها را بشناسیم، درغیراین‌صورت می‌توان به هردوعدد این ستون، عدد دلخواه x را اضافه‌کرد، بدون این‌که شرط مساله به هم بخورد؛ ازطرف دیگر، دست کم دریکی ازستون‌ها باید هردوعدد را بشناسیم، زیرا درغیراین صورت، می‌توان عدد دلخواه y را، به عنوان تفاضل دوعدد درهرستون درنظر گرفت و، سپس، جدول را ساخت.

b) اثبات را می‌توان با روش‌استقرای ریاضی‌داد. $n \geqslant m$ می گیریم واستقرا را نسبت به $m+n$ می‌دهیم. اگردریکی از n ستون، همهٔ عددها مجهول باشند، آن وقت روشن است که، عددها، به صورت یك ارزشی به دست نمی‌آیند. واگردرهریك از n ستون عددهای معلومی وجود داشته باشد، آن وقت (با توجه به این‌که تعدادکل $m+n-۲$ عدد معلوم، از $۲n-۲$ تجاوزنمی‌کند)، ستونی پیدا می‌شود که درآن، تنها یك عدد معلوم است، و بقیهٔ جدول $m \times (n-۱)$، که بعد ازحذف این ستون باقی می‌ماند، تنها شامل $m+(n-۱)-۲$ عدد معلوم است و، بنابر فرض استقرا، نمی‌توان جدول را به صورت یك ارزشی بازسازی کرد.

▽ ارزیابی مربوط به این مساله، دقیق است: جدول به صورت

$$\begin{array}{cccc} x_۱ & x_۲, & \cdots & x_n, \\ x_۱+y_۱, & x_۲+y_۱, & \cdots & x_n+y_۱, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_۱+y_{m-۱}, & x_۲+y_{m-۱}, & \cdots & x_n+y_{m-۱} \end{array} \qquad (*)$$

رامی‌توان، به‌وسیلهٔ $m+n-۱$عددواقع‌درسطراول‌وستون‌اول، بازسازی کرد.

پاسخ به پرسش ظریف‌تر ــ چه انتخاب Γ ازعددهای جدول $m \times n$ برای این منظورمناسب است ــ می‌تواند به زبان نظریهٔ گراف‌ها، تنظیم شود (ضمیمهٔ ۱۱).

«گراف دوبخشی» Γ را با $m+n$ رأس A_1، ...، A_m، B_1، ....، B_n درنظرمی‌گیریم که، در آن، برخی ازرأس‌های A_i با برخی از رأس‌های B_j مربوط باشد؛ به این ترتیب، مجموعه‌ای مثل Γ اززوج‌های $(i، j)$ ـ عضوـ های جدول $m\times n$، به‌دست می‌آید $(j=1، ...، n; i=1، ...، m)$. برای این‌که، به وسیلهٔ این انتخاب Γ اززوج عددهـا، بتوان تمامی جدول را به صورت یك ارزشی بازسازی کرد، لازم وکافی است کـه، گراف Γ، مرتبط باشد. دردرخت با $m+n$ رأس، با توجه به مسالهٔ ۸، بایددرست $m+n-1$ یال‌وجود داشته باشد. اگر Γ، یك درخت باشد، آن وقت‌هر گروه $m+n-1$ عددی را، که خانه‌های $(i، j)\in\Gamma$ را اشغال کرده‌اند، می‌توان طوری تکمیل کرد که، جدول حاصل، شکل موردنظر (*) را داشته باشد.

۱۴۷. شکل‌های F_1 و F_2 راکه ازشکل مفروض F (اجتماع دایره‌ها) با انتقال به اندازهٔ بردارهای بـه طول ۰/۰۰۱ و با زاویهٔ ۶۰ درجه بین آن‌ها، به دست آمده‌اند، در نظر می‌گیریم.

سه شکل F، F_1 و F_2، یکدیگر را نمی‌پوشانند و در درون مربع به ضلع ۱/۰۰۱ قراردارند. بنا براین، مساحت S هریك ازآن‌ها، کمتراست از

$$\frac{۱}{۳}(۱/۰۰۱)^{۲}<۰/۳۴$$

∇ به همین ترتیب، برای مسالهٔ فضایی مشابه ایـن مسالهٔ، می‌توان ارزیابی $۰/۲۶>(۱/۰۰۱)^{۲}\frac{۱}{۴}$ را به دست آورد.

درروی صفحه، می‌توان ارزیابی را دقیق‌تر کرد و، مثلاً، ثابت کرد که

$$S<۰/۲۸۷$$

۱۴۸. مقدار آب ظرف‌های A، B و C را، به ترتیب، a، b و c لیتر می‌گیریم $(۰<a\leqslant b\leqslant c)$. کافی است با چندبار جابه‌جایی آب ظرف‌ها، به آن‌جا برسیم که، در یکی از ظرف‌ها، کمتر از a لیتر آب وجود داشته باشد (با تکراراین روند، می‌توانیم مقدار آب را در یکی از ظرف‌ها، مرتباً کاهش

دهیم تا بــه صفر برسد). از تقسیم b بر a بــه دست می‌آید: $b=ad+r$ $(0\leqslant r<a)$. از B و C در ظرف A آب می‌ریزیم (در A، $2a$، 2^2a، 2^3a، ...، 2^ka لیتر آب خواهد بود) تا جایی‌که از B به اندازهٔ da لیتر آب خارج شده باشد؛ درنتیجه، در B به اندازهٔ $r<a$ لیتر باقی‌می‌ماند. این عمل ممکن است، زیرا هر عدد طبیعی را می‌تــوان (و در ضمن تنهــا به یك طریق) به صورت مجموع بعضی ازعددهای 1، 2، 2^2، ...، 2^l، ... نوشت: بخش‌های متناظر 2^ka، باید از B و بقیهٔ آن از C ریخته شود.

در ضمن، مقدار آبی که از C ریخته می‌شود، باید از مقدار آبی که از B ریخته می‌شود، بیشتر نباشد. به این ترتیب، آبی که در C وجود دارد، کفایت می‌کند.

۱۴۹. این شرط که ریشه‌های سه‌جمله‌ای‌های

$$f_1(x)=x^2+p_1x+q_1 \quad \text{و} \quad f_2(x)=x^2+p_2x+q_2$$

حقیقی‌اند و، نسبت به هم، به طور متناوب قرار دارند، هم‌ارز با این است که نمودارهای $y=f_1(x)$ و $y=f_2(x)$ درنقطهٔ (x_0, y_0)، واقع در زیر محور طول، یکدیگر را قطع کرده باشند: $y_0<0$. اگر معادلهٔ $f_1(x)=f_2(x)$ را حل کنیم، به دست می‌آید:

$$x_0=\frac{q_2-q_1}{p_2-p_1},\ y_0=R(p_1-p_2)^2$$

که در آن داریم:

$$R=(q_1-q_2)^2+(p_1-p_2)(p_1q_2-p_2q_1)$$

$\bigtriangledown$ عبارت R، تنها وقتی برابر صفر می‌شود که f_1 و f_2 ریشه‌ای مشترك (و احتمالاً مختلط) داشته باشند. این چند جمله‌ای شامل ضریب‌های دو چندجمله‌ای f_1 و f_2 را (از هر درجه‌ای)، «برآیند» آن‌ها گویند.

۱۵۰. اگر صفحه‌ها موازی باشند، درستی حکم روشن است. اکنون فرض می‌کنیم، دو صفحه، موازی نباشند در این صورت، تصویر جسم برخط راست l، فصل مشترك دوصفحه را می‌توان به‌عنوان تصویر هریك از تصویرها ی

جسم بر این یا آن صفحه، بر خط راست l به دست آورد. (همه‌جا، صحبت بر سر تصویر قائم است: مجموعهٔ پای عمودها.) ولی تصویر هر دایره بر خط راستی واقع در صفحهٔ خودش، برابر است با قطر دایره.

۱۵۱. در نتیجهٔ هر عمل، مجموع S از حاصل‌ضرب‌های دوبه‌دوی عددهای مجاور افزایش می‌یابد. درواقع، در این مجموع، $ab+bc+cd$ به $ac+cb+bd$ تبدیل می‌شود و اگر $(a-d)(b-c)<0$. آن وقت $ab+cd<ac+bd$. ولی، مجموع S، به تعداد محدودی می‌تواند مقدارهای مختلف را اختیار کند (ضمیمهٔ ۱۳).

۱۵۲. مسالهٔ کلی b) را حل می‌کنیم. فرض کنید، خط راست l محیط چند ضلعی محیطی را در دو نقطهٔ R و Q قطع و این محیط را به دو بخش برابر تقسیم کند. در این صورت، اگر O را مرکز دایرهٔ محاطی چند ضلعی بگیریم، خط شکستهٔ شامل پاره‌خط‌های راست OR و OQ، مساحت چندضلعی را به‌دو بخش برابر تقسیم خواهد کرد (این مطلب، شبیه دستور $S=\frac{1}{2}Pr$ برای مساحت یك چندضلعی محیطی به محیط P ثابت می‌شود). ولی می‌دانیم، خط راست PQ هم، مساحت چندضلعی را نصف می‌کند. بنابراین نقطهٔ O برخط راست PQ واقع است.

$\triangledown$ حل این مساله‌جالب است که: برای مثلث و برای n ضلعی محیطی، چند خط راست از این گونه وجود دارد؟

۱۵۳. حکم مساله، برای n عدد، با شرط $n>4$، درست است و با برهان خلف ثابت می‌شود. فرض می‌کنیم، مجموع یا تفاضل هردوعدددلخواه از عددهای مختلف

$$a_1<a_2<\dots<a_{n-1}<a_n$$

بین بقیهٔ $n-2$ عدد وجود داشته باشد. چون $a_n+a_i>a_n$، بنابراین باید داشته باشیم: $a_n-a_i=a_{n-i}$ $(1\leqslant i\leqslant n-1)$. وقتی $n=2k$ عددی زوج باشد، به دست می‌آید: $a_n-a_k=a_k$، یعنی تفاضل a_n و a_k در بین بقیهٔ‌عددها وجود ندارد. وقتی $n=2k+1$ عددی فرد باشد. زوج (a_{n-1}, a_i)

را در نظر می‌گیریم: برای آن‌ها

$$a_{n-1}+a_1=a_n,\ a_{n-1}+a_i>a_n\ (2\leqslant i\leqslant n-2)$$

و بنابراین باید برابری $a_{n-1}-a_i=a_{n-i-1}$ برقرار باشد و، در حالت خاص $a_{n-1}-a_k=a_k$ که بازهم به تناقض می‌رسد.

۱۵۴. a) ۱۲ راس دوازده‌ضلعی را، به ۶ جفت رأس روبه‌رو تقسیم می‌کنیم: A_1A_7، A_2A_8، A_3A_9، ...، A_6A_{12}. در هر عمل، در هر زوج، تنها یکی از رأس‌ها تغییر علامت می‌دهد. بنابراین، در جفت‌های A_2A_8، ...، A_6A_{12}، بعد از عمل $(2k-1)$ ام علامت‌های مختلف و بعد از عمل $(2k)$ام علامت‌های یکسان وجود خواهد داشت (در جفت A_1A_7، همه چیز برعکس است). به این ترتیب، حالتی پیش نمی‌آید که در جفت A_2A_8 علامت‌های مختلف و در جفت A_3A_9 علامت‌های یکسان داشته باشیم.

b) چهار گروه و درهر گروه سه رأس را در نظر می‌گیریم: $A_1A_5A_9$، $A_2A_6A_{10}$، $A_3A_7A_{11}$ و $A_4A_8A_{12}$ و مثل حالت قبل استدلال می‌کنیم. فرد یا زوج بودن تعداد عددهای منفی هر گروه، در هر عمل تغییر می‌کند و در دو گروه $A_2A_6A_{10}$ و $A_3A_7A_{11}$ فرد یا زوج بودن تعداد عددهای منفی، یکسان است.

c) رأس‌ها را به‌سه گروه $A_1A_4A_7A_{10}$، $A_2A_5A_8A_{11}$ و $A_3A_6A_9A_{12}$ تقسیم و به‌همان ترتیب استدلال می‌کنیم.

▽ به طور کلی می‌توان روشن کرد، اگر درهر عمل k رأس متوالی یك n ضلعی را تغییرعلامت دهیم، پشت سرهم چه وضعی پیش می‌آید. پاسخ این است: هر گروه ε_1، ε_2، ...، ε_n ازعددهای $\varepsilon_k=\pm 1$ در رأس‌های nضلعی را با گروه d عدد

$$(x_1, x_2, \dots, x_d)$$

به‌ترتیب زیر مقایسه می‌کنیم (d، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك n و k است):

$$x_i=\varepsilon_i\ \varepsilon_{i+d}\cdots\varepsilon_{i+n-d}$$

در این صورت، دو گروه (ε_i) و (ε'_i)، تنها درحالتی به یکدیگرمنجر

می‌شوند که یا گروه‌های متناظر آن‌ها (x_i) و (x'_i) یکی باشند و یا $\frac{k}{d}$ عـددی زوج و گروه‌های (x_i) و (x'_i) متقابل باشند: $x_i=-x'_i$ (برای هر i).

۱۵۵. می‌توان از روش «نصف کردن» استفاده کرد. مربع بزرگ K_0 را از صفحه شامل $2^n \times 2^n$ خانه جدا می‌کنیم، به نحوی که همهٔ خانه‌های سیاه را فرا گیرد و بیش از چهار برابر آن‌ها، خانهٔ سفید داشته باشد. در این صورت، مساحت خانه‌های سیاه، کمتر از $\frac{1}{5}$ مساحت مربع K_0 است. K_0 را به چهار مربع K_1، و در هر کدام $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ خانه، تقسیم می‌کنیم. در هریك از مربع‌های K_1، خانه‌های سیاه، بیش از $\frac{4}{5}$ مساحت را پر نمی‌کنند، به نحوی که یا با هـر دو شرط ۱) و ۲) سازگار است و یا می‌توان آن را دوباره به چهار مربع K_2 تقسیم کرد و غیره، تا جایی که مربع‌های 2×2 به‌دست آید که، از آن‌ها، همهٔ مربع‌های سفید را کنار می‌گذاریم و مربع‌های شامل یك، دو یا سه خانهٔ سیاه را نگه می‌داریم.

▽ شبیه این مساله را می‌توان برای خط راستی که به پاره‌خط‌های راست واحد تقسیم شده است (با مقدارهای ثابت $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$)، و برای فضا که به مکعب‌های واحد تقسیم شده است (با مقدارهای ثابت $\frac{1}{9}$ و $\frac{8}{9}$) تنظیم کرد.

۱۵۶. پاسخ: کمترین تعداد A_n ازمکعب‌ها که با شرط سازگار باشند، برابر است با

$$A_n=\begin{cases}\frac{1}{2}n^2 & (\text{برای } n \text{ زوج})\\ \frac{1}{2}(n^2+1) & (\text{برای } n \text{ فرد})\end{cases}$$

درحالت‌های خاص: $A_2=2$، $A_3=5$، $A_4=8$، $A_5=12$، $A_{10}=50$.

اثبات این که با تعداد کمتری مکعب، نمی‌توان به‌نتیجهٔ مطلوب رسید،

به‌این‌صورت است: برای تنظیم مکعب‌های کوچک که با شرط مساله سازگار باشند، در هرخانه ازوجه پایینی مکعب اصلی عددی را می‌نویسیم که نشان دهد چند مکعب کوچک روی آن خانه قرار دارد. اکنون از یك پیش قضیه استفاده می کنیم.

پیش قضیه. درجدولی $n \times n$ عددهای درست غیرمنفی راقرارداده‌ایم؛ درضمن، برای هرجفت سطر و ستونی که، در برخوردآن‌ها، عدد صفر قرار دارد، مجموع $2n-1$ عددموجود درآن‌ها(که «صلیبی» را تشکیل داده‌اند)، از n کمتر نیست. دراین صورت، مجموع همهٔ عددهای جدول، از $\frac{n^2}{2}$ کمتـر نخواهد بود.

اثبات ایـن پیش قضیه، با استدلالی خیلی شبیه حل مساله ۱۲۶ به دست می آید.

اگر کمترین مجموع را در سطرها و ستون‌ها بـرابر $m<n$ بگیریم (فرض کنید، این کمترین مجموع، متعلق بـه سطر اول باشد)، آن وقت، در این سطر، حداقل $n-m$ صفر وجود دارد؛ و در هر یك $n-m$ ستونی که از آن‌ها آغازمی‌شود، حداقل مجموع عددها برابر $n-m$ است. ولی درهر یك از m ستون بقیه، مجموع عددها، از m کمتر نیست و، به این ترتیب، مجموع کل، حداقل برابر است با

		۴	۳	۵
		۳	۵	۴
		۵	۴	۳
۱	۲			
۲	۱			

$n=5$

					۶	۷	۸	۹	۱۰
					۷	۸	۹	۱۰	۶
					۸	۹	۱۰	۶	۷
					۹	۱۰	۶	۷	۸
					۱۰	۶	۷	۸	۹
۱	۲	۳	۴	۵					
۲	۳	۴	۵	۱					
۳	۴	۵	۱	۲					
۴	۵	۱	۲	۳					
۵	۱	۲	۳	۴					

$n=10$

شکل ۶۴

$$(n-m)^2+m^2 \geqslant \frac{n^2}{2}$$

نمونهٔ استقرار ۱۲ مکعب واحد در مکعب، ۵ × ۵ × ۵ و ۵۰ مکعب واحد در مکعب ۱۰ × ۱۰ × ۱۰ را درشکل ۶۴ داده‌ایم که، در آن، عدد واقع در خانه، شمارهٔ قشری را نشان می‌دهد که، مکعب واحد، در روی این خانه، واقع‌شده است. به‌همین ترتیب، می‌توان نمونهٔ لازم برای بقیهٔ مقدارهای n را ساخت.

۱۵۷. باید برای هر نقطهٔ $(x، y)$ از صفحه، نقطهٔ $(m، n)$ را، با مختصات درست، طوری پیدا کنیم که، به‌ازای آن، مقدار $f_a(x-m، y-n)$، حداقل مقدار ممکن باشد و مرز بالای این حداقل

$$\bar{f}_a(x، y)=\min_{m,n} f_a(x-m، y-n)$$

را پیدا کنیم. مقدار $\sqrt{f_a(x_1-x_2، y_1-y_2)}$ را فاصلهٔ بین نقطه‌های $(x_1، y_1)$ و $(x_2، y_2)$ می‌نامیم. شبیه فاصلهٔ عادی

$$\sqrt{f_0(x_1-x_2، y_1-y_2)}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

یادآوری می‌کنیم که، برای این فاصله، ارزیابی دقیق، چنین است:

$$\bar{f}_0(x، y)\leqslant\frac{1}{2}$$

در واقع، برای هر مربع $m-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant m+\frac{1}{2}$، $n-\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant n+\frac{1}{2}$، فاصلهٔ از هر نقطهٔ $(x، y)$ آن تا مرکز $(m، n)$ آن، از $\frac{\sqrt{2}}{2}$ بیشتـــر نیست؛ در ضمن، برای هـــر رأس این مـــربع، این فـــاصله برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است، یعنی $\bar{f}_0(x_0، y_0)=\frac{1}{2}$.

بقیهٔ «فاصله‌های» $\sqrt{f_a}$ $(0<a<2)$ را هم مورد بررسی قرار می-

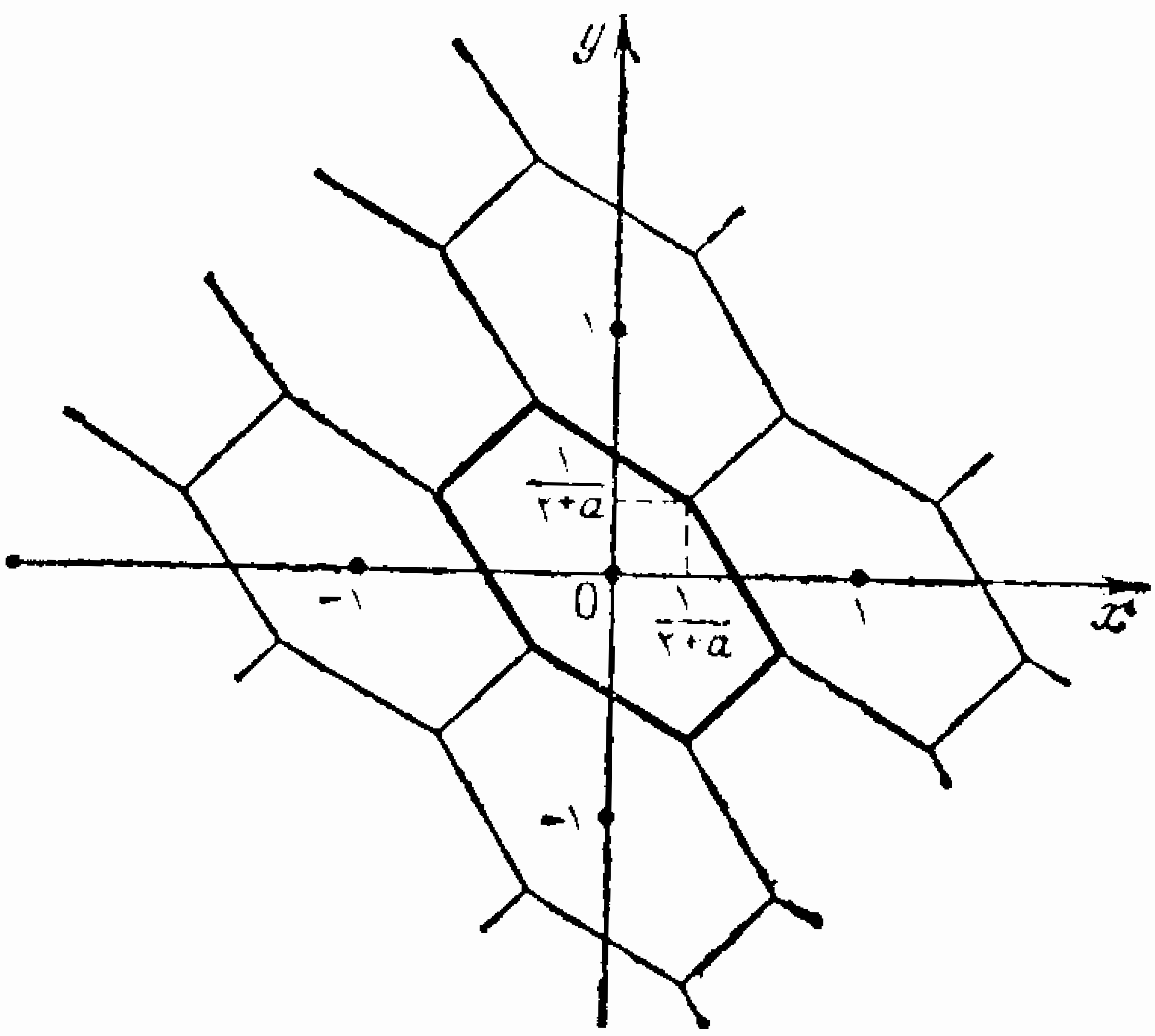
دهیم. صفحه را به شکل‌های $\Phi_{m,n}$ با معیار زیر تقسیم می‌کنیم: نقطهٔ $(x، y)$ به $\Phi_{m,n}$ تعلق دارد، وقتی که «فاصلهٔ» از آن تا $(m، n)$ کمتر (یا نه بیشتر) از فاصلهٔ آن تا هر نقطهٔ دیگر شبکه باشد (منظور از شبکه، مجموعهٔ نقطه‌های با مختصات درست است). کافی است شکل $\Phi_{0,0}$ را بامرکز $(0،0)$ پیدا کنیم؛ بقیهٔ به‌کمك آن، باانتقال‌مرکزها روی بردار بامختصات $(m، n)$ به‌دست می‌آیند؛ چون ضمن این انتقال‌ها، «فاصلهٔ» $\sqrt{f_a}$ حفظ می‌شود، بنا براین نظامی هم که بـه وسیلهٔ آن، نقطه‌های حوزه با این یا آن مرکز انتخاب می‌شوند، حفظ می‌شود. اکنون از این نکته استفاده می‌کنیم که مجذورفاصله، f_a، تابع درجه دومی از مختصات است. مجموعهٔ نقطه‌هایی کـه به $(0 ، 0)$ نزدیکترند تا به $(m، n)$، یك نیم صفحه را تشکیل می‌دهند؛ نابرابری

$$x^2+axy+y^2\leqslant(x-m)^2+a(x-m)(y-n)+(y-n)^2$$

هم‌ارز است با نابرابری خطی

$$(2m+an)x+(2n+am)y\leqslant m^2+amn+n^2$$

برای اینکه شکل $\Phi_{0,0}$ را پیدا کنیم، باید اشتراك همهٔ این نیم صفحه‌ها را نسبت به همـهٔ مقدارهای $(m، n)$، به جز $(0 ، 0)$ بـه دست آوریم. برای این منظور، کافی است تنها شش تا از آن‌ها را، کـه متناظر با شش زوج



شکل ۶۵

$(\pm 1, 0)$، $(0, \pm 1)$، $(1, -1)$ و $(-1, 1)$ هستند، در نظر بگیریم.

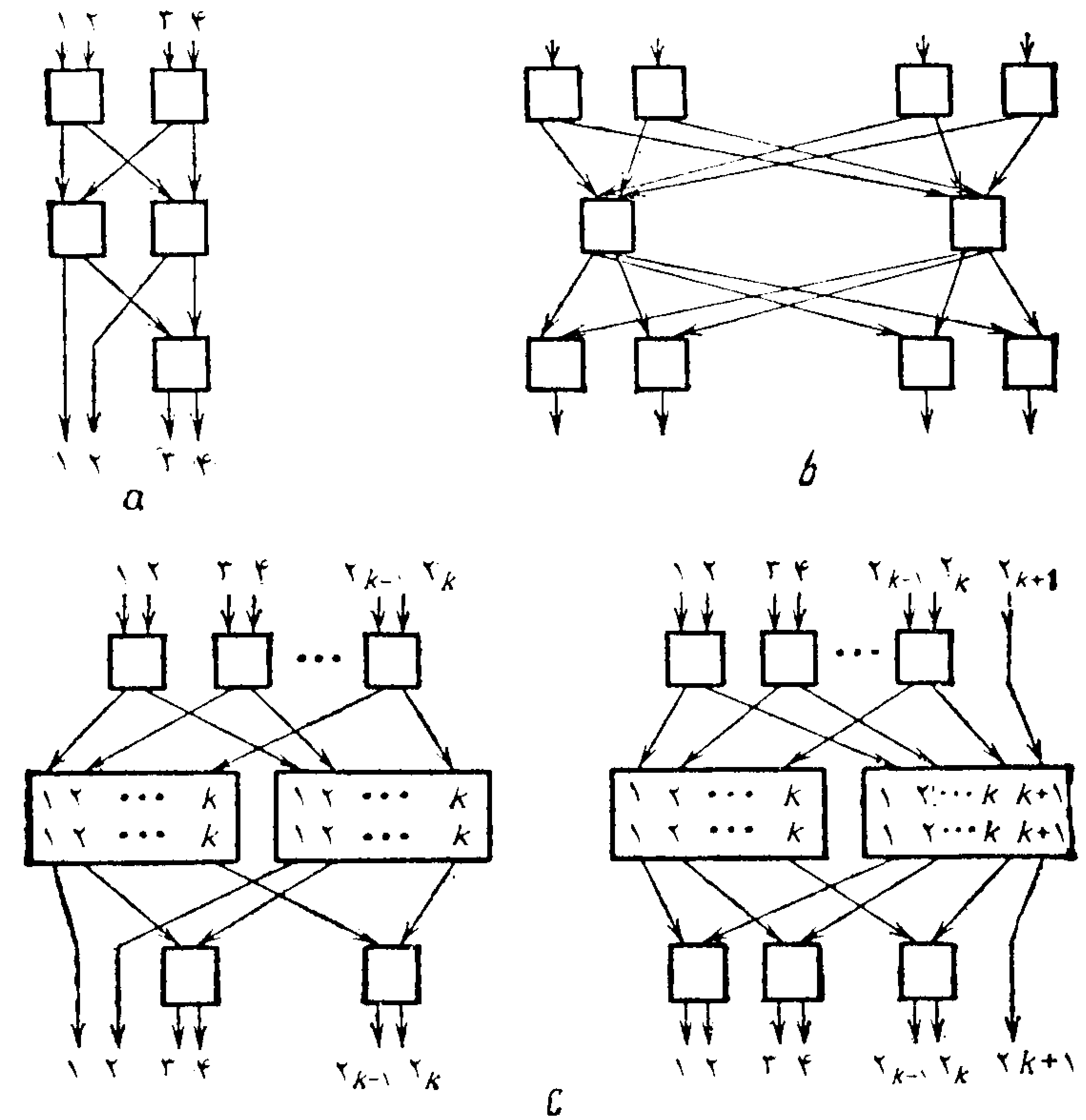
این مطلب وقتی روشن می‌شود که قانع شویم، اشتراك این شش نیم صفحه (ایـن اشتراك، یك شش ضلعـی محـدب است: $-1 \leqslant 2x+ay \leqslant 1$، $-1 \leqslant ax+2y \leqslant 1$، $-1 \leqslant x-y \leqslant 1$) با تصویرهای خـود، ضمن انتقال موازی روی بردارهای (m, n)، برخورد ندارد (اگردقیق‌تر بگوییم، با آن‌ها، تنها در بخشی از مرزها مشترك است؛ شکل ۶۵). بـه این ترتیب، $\Phi_{0,0}$ نمی‌تواند کوچکتر از این شش‌ضلعی باشد و، بنابراین، بر آن منطبق است. ماکزیمم $f_a(x, y)$ به‌ازای $(x, y) \notin \Phi_{0,0}$، دررأس‌های این‌شش‌ضلعی به دست می‌آید، زیرا ضمن حرکت پاره‌خطی از هر خط راست

$$x=b+ut, \quad y=c+vt$$

مجذور فاصلهٔ $f_a(b+ut, c+vt)$، به صورت سه جمله‌ای درجه دومی به t بستگی‌دارد که، در آن، ضریب t^2 برابر $u^2+auv+v^2$ و مثبت است، به نحوی که f_a دردو انتهای پارخط به‌ماکزیمم خود می‌رسد. با پیداکردن مختصات رأس‌ها (شکل ۶۵) و قرار دادن آن‌ها در عبارت f_a، ارزیابی دقیقی برای f_a، به دست می‌آید: $\bar{f}_a \leqslant \frac{1}{a+2}$. همین ارزیابی برای $a=2$ هم درست است، وقتی‌که $f_2(x, y)$، به طور ساده عبارت است ازمجذور فاصلهٔ بین $x+y$ و نزدیکترین عدد درست: $\bar{f}_2(x, y) \leqslant \frac{1}{4}$.

▽ اندیشهٔ اصلی حل این مساله ــ تقسیم صفحه به حوزه‌هایی شامل مرکزهای مفروض، به‌نحوی‌که هر نقطه متناظر با نزدیکترین مرکز باشد ــ در مساله‌های مختلف آنالیز، هندسه و نظریهٔ عددها کاربرد دارد.

۱۵۸. ابتدا حداقل کلیدهای تبدیل لازم را تخمین می‌زنیم (ارزیابی از پایین). چون هر کلید تبدیل می‌تواند در دوموقعیت قرار گیرد، بنابراین طرح شامل m کلید، می‌تواند 2^m موقعیت مختلف داشته باشد. اگر بخواهیم، هر $n!$ اتصال مختلف n ورودی و n خروجی برای تعداد m کلید تحقق یابد:



شکل ۶۶

$$\begin{array}{cccc} ۱ & ۲ & \dots & n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ i_۱ & i_۲ & \dots & i_n \end{array}$$

که در آن $(i_۱، i_۲، \dots، i_n)$، هر تبدیلی از عددهای ۱، ۲، ...، n است، باید نابرابری $n \leqslant ۲^m$ برقرار باشد، یعنی، تعداد کلیدها در طرح «همه کاره»، حداقل برابر $log_۲(n!)$ باشد.

درحالت خاص، برای $n = ۳$ به‌دست می‌آید: $۶ \leqslant ۲^m$، یعنی $m = ۳$؛ به‌سادگی روشن می‌شود که، طرح مربوط به شکل ۸، b (درصورت مساله)، نمونه‌ای از «طرح همه‌کارهٔ مرتبهٔ ۳» است. برای $m = ۴$ به دست می‌آید: $۲۴ = ۴! \leqslant ۲^m$؛ از آن‌جا $m \geqslant ۵$. درواقع، طرح همه‌کارهٔ با ۵ کلید را می‌توان ساخت: تحقیق کنید، طرح شکل ۶۶، a، به ازای $۳۲ = ۲^۵$ وضع مختلف

کلید، همهٔ ۲۴ تبدیل ممکن از مجموعهٔ {۴، ۳، ۲، ۱} را تحقق می‌بخشد.

اثبات طرح همه‌کارهٔ مرتبهٔ ۸، که در شکل ۸، c (در صورت مساله) داده شده است؛ درعمل ممکن نیست: عدد !۸، عدد خیلی بزرگی‌است، ولی می‌توان قانون ساده‌ای را پیداکرد و، به‌کمك آن، روشن کردکه هرتبدیل مفروض φ از ۸عنصر $k \to i_k$ ($k \in \{۱، ۲، ...، ۸\}$)، روی طرح وجود دارد. این قانون باید نشان دهد که، از طریق هر بلوك ــ A یا B ــ هریك از ۸ ارتباط $k \to \varphi(k) = i_k$ تحقق می‌یابد. درضمن باید این شرطها هم برقرار باشند:

اگر $k - l = ۴$ یا $i_k - i_l = ۴$، آن وقت ارتباطهای $k \to i_k$ و $l \to i_l$ باید از بلوكهای مختلف A و B بگذرند.

روشن است که، این شرطها، برای نبودن «چسبندگی» (موقعیتی که در آن، درشبکهٔ تلفنی، دوورودی به‌یك خروجی، یا برعکس، مربوط شده باشد)، لازم و کافی است.

قانون مورد نیاز ما، چنین است:

دو زوج $j \to \varphi(j)$ و $l \to \varphi(l)$ را «مجـاورهای» زوج $k \to \varphi(k)$ می‌نامیم، وقتی‌که داشته باشیم: $|k - j| = ۴$ و $|\varphi(k) - \varphi(l)| = ۴$، در این صورت، همهٔ زوجهای $k \to \varphi(k)$ بـه گـروه هایی (دورهایی) تقسیم می‌شوند که، برای هرکدام ازآنها، دو «مجاور» وجود دارد؛ درضمن این دورها، شامل تعداد زوجی از این زوجها خواهند بود. درهردور، به تناوب، ارتباط $k \to \varphi(k)$ از طریق بلوك A و یا از طریق بلوك B تحقق می‌یابد، بنا براین، «مجاورها» ازطریق بلوكهای مختلف، به هم ارتباط پیدا می‌کنند.

اکنون از «همهٔ کاره‌های مرتبهٔ ۴» بلوكهای A و B، «همه کارهٔ مرتبهٔ ۸» تمامی طرح نتیجه می‌شود:

به همین ترتیب، می‌توان «طرح همه‌کارهٔ مرتبهٔ $۲^{k+۱}$» را باآغاز از دو «طرح همه‌کارهٔ مرتبهٔ ۲^k» و، بازهم، ۲×۲^k کلید ساخت. اگراز «طرح همه کارهٔ مرتبهٔ ۴» با ۵ عضو آغازکنیم (واین البته، بهتر ازآن است‌که از کلید همه‌کارهٔ مرتبهٔ ۲ آغازکنیم و، به جای شکل ۶۶، a از طرح همه‌کارهٔ

مرتبهٔ ۴ ـ شکل ۶۶، b ـ از ۱۰ عضو را به دست آوریم)، آن وقت به‌ازای $n=2^k$، طرح شامل $2nlog_2n-\frac{11n}{4}$ کلیدخواهد بود (و درحالت خاص $n=8$، ۲۶ کلید)،که برای هر $n\neq 2^k$، ارزیابی از بالا را، برای تعداد کلیدها درطرح «همه کارهٔ مرتبهٔ n» از ردیف $4nlog_2n$ می‌دهد. تنها بهتر است، برای ساختن طرح (شکل ۶۶، c)، از «همهٔ کارهٔ مرتبهٔ k» به همه‌کارهٔ $2k$ و $2k+1$ برویم وارزیابی ازبالارا، تا $nlog_2n$ بهبود بخشیم. توجه‌کنیم‌که، برای مقدارهای بزرگ n، داریم:

$$log_2n\approx n(log_2n-log_2e)$$

۱۵۹. نقطهٔ برخورد خطهای راست CDوQN را R ومرکز مستطیل $ABCD$ راO می‌نامیم. از$OM=ON$نتیجه می‌شود:$PC=CR$و، بنا براین، مثلث PNR متساوی الساقین است (NC، هم ارتفاع و هم میانهٔ این مثلث است).

حکم مساله، از برابری‌های زیر نتیجه می‌شود:

$$\widehat{MNP}=\widehat{NPR}، \widehat{QNM}=\widehat{QRP}$$

۱۶۰. $[a_1، b_1]$ را، پاره‌خط راستی با حداقل انتهای راست فرض می‌کنیم. اگرتعداد پاره‌خطهای شامل نقطهٔ b_1، از ۷ بیشترباشد، مساله حل شده است. اگـر این تعداد، کمتر یا برابر ۷ باشد، آن وقت دست‌کم ۴۳ پاره‌خط راست وجود دارد که در سمت راست $[a_1، b_1]$ قرارگرفته‌اند، در بین آن‌ها، نقطهٔ $[a_2، b_2]$ را، با حداقل انتهای راست در نظـر می‌گیریم. در این صورت یا b_2 متعلق بـه ۸ پاره‌خط راست است و یا ۳۶ پاره‌خط راست وجـود دارد کـه در سمت راست b_2 قـرار دارنـد. بـا ادامـهٔ این استدلال، یا به نقطه‌ای برخورد می‌کنیم که به ۸ پاره‌خط راست تعلق دارد ویا ۷ پاره‌خط راست $[a_1، b_1]$، $[a_2، b_2]$، ...، $[a_7، b_7]$ پیدا می‌شوندکه برخـوردی با هم ندارند. درسمت راست این ۷ پاره‌خط راست، دست‌کم $50-7k$ پاره‌خط راست دیگروجودخواهدداشت، یعنی‌دست‌کم یك‌پاره‌خط

راست $[a_8, b_8]$ در سمت راست $[a_7, b_7]$ پیدا می‌شود.

$\bigtriangledown$ درست به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که در بین $mn+1$ پاره‌خط واقع بر یك خط راست یا $m+1$ پاره‌خط دو به‌دو نامتقاطع وجود دارد و یا $n+1$ پاره‌خطی که دارای نقطهٔ مشترك‌اند. دراین‌جا، مسالهٔ دیگری شبیه این مساله را می‌آوریم: از بین $mn+1$ عددطبیعی می‌توان یا زنجیره‌ای از $m+1$ عدد طبیعی انتخاب کرد که، هرکدام از آن‌ها، بر عدد قبلی خود بخش‌پذیر باشد و یا $n+1$ عددکه، از آن‌ها، هیچ‌کدام بردیگری بخش‌پذیر نباشد. این‌ها، حالت‌های خاصی از قضیهٔ کلی دیلواورس‌اند: در هرمجموعهٔ مرتب جزئی، که دارای $mn+1$ عضو است، یا زنجیره‌ای از $m+1$ عضو وجود داردکه به ردیف صعودی‌اند و یا $n+1$ عضوکه دو به‌دو نسبتی باهم ندارند.

برای این‌که، این قضیه را، در مورد مسالهٔ مربوط به پاره‌خط‌ها به کار بریم، باید این طور به حساب آوریم که: یك پاره‌خط وقتی «بزرگتر» از دیگری است که، به طورکامل، درسمت راست آن واقع باشد؛ دراین‌صورت، پاره‌خط‌های «دو به‌دو نامتقاطع»، به‌ناچار نقطهٔ مشترکی خواهند داشت (این نقطهٔ مشترك، عبارت است ازسمت چپ‌ترین نقطه ازانتهاهای راست آن‌ها).

۱۶۱. پاسخ: $x=1972$.

به سادگی می‌توان نوشت:

$$4^{27}+4^{1000}+4^{x}=2^{54}(1+2\times 2^{1945}+2^{2x-54})$$

و برای این‌که مقدار داخل پرانتز مجدور کامل باشد، باید داشته باشیم:

$$2x-54=2\times 1945 \Rightarrow x=1972$$

اکنون اگر فرض کنیم $x>1972$، آن‌وقت.

$$2^{2(x-27)}<1+2\times 2^{1945}+2^{2(x-27)}<(2^{x-27}+1)^{2}$$

یعنی عدد مفروض، بین مجذورهای دو عدد متوالی قرار می‌گیرد.

۱۶۲. ابتدا درستی این دو گزاره را ثابت می‌کنیم:

الف) اگر a^k+b^k بر a^n+b^n بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت $a^{k-n}-b^{k-n}$ هم بر a^n+b^n بخش‌پذیر است.

ب) اگر a^t-b^t بر a^n+b^n بخش‌پذیر باشد، آن وقت $a^{t-n}+b^{t-n}$ هم بر a^n+b^n بخش‌پذیر است.

این دو گزاره، با توجه به این که a و b نسبت به‌هم اول‌اند، از اتحادهای زیر نتیجه می‌شوند:

$$a^k+b^k=a^{k-n}(a^n+b^n)-b^n(a^{k-n}-b^{k-n});$$

$$a^t-b^t=a^{t-n}(a^n+b^n)-b^n(a^{t-n}+b^{t-n})$$

ضمن تقسیم m بر n می‌توان نوشت:

$$m=qn+r، \ (\circ\leqslant r<n)$$

اگر q مرتبه، n را از m کم کنیم، r به دست می‌آید.

از شرط مساله و گزاره‌های الف) و ب) نتیجه می‌شود که: $a^r+(-۱)^qb^r$ بر a^n+b^n بخش‌پذیر است، ولی $\circ\leqslant|a^r+(-۱)^qb^r|<a^n+b^n$. بنابراین $r=\circ$ (و در ضمن، q عددی است فرد).

۱۶۳. فرض می‌کنیم، در برخی سطرهای جدول، به عددهای یکسان برخورد کنیم. در بین این سطرها، بالاترین سطر را با شمارهٔ n، و عددهای برابر دراین سطر را با p و q نشان می‌دهیم.

چون در $(n-۱)$امین سطر، عددهای برابر وجود ندارد، باید p و q ازعددهای r و s این سطر و با عمل‌های متفاوت به دست آمده باشند: فرض کنید $p=r^۲$ و $q=s+۱$؛ در این صورت $s=r^۲-۱$.

در مسیر از بالاترین عدد a به طرف s، می‌توان هم به مجذور کردن و هم به اضافه کردن یک واحد، برخورد کرد. بزرگترین عددی که مجذور شده است، می‌تواند $r-۱$ باشد (زیرا $s=r^۲-۱$). و این به‌معنای آن است که، عدد s، می‌تواند از آخرین مجذور کاملی که در مسیر واقع است ودست کم بعد از $r^۲-۱-(r-۱)^۲=۲r-۲$ گام به‌دست آمده باشد؛ درضمن، در هر گام، یک واحد اضافه شده است. به این ترتیب، عدد s، از عدد a،

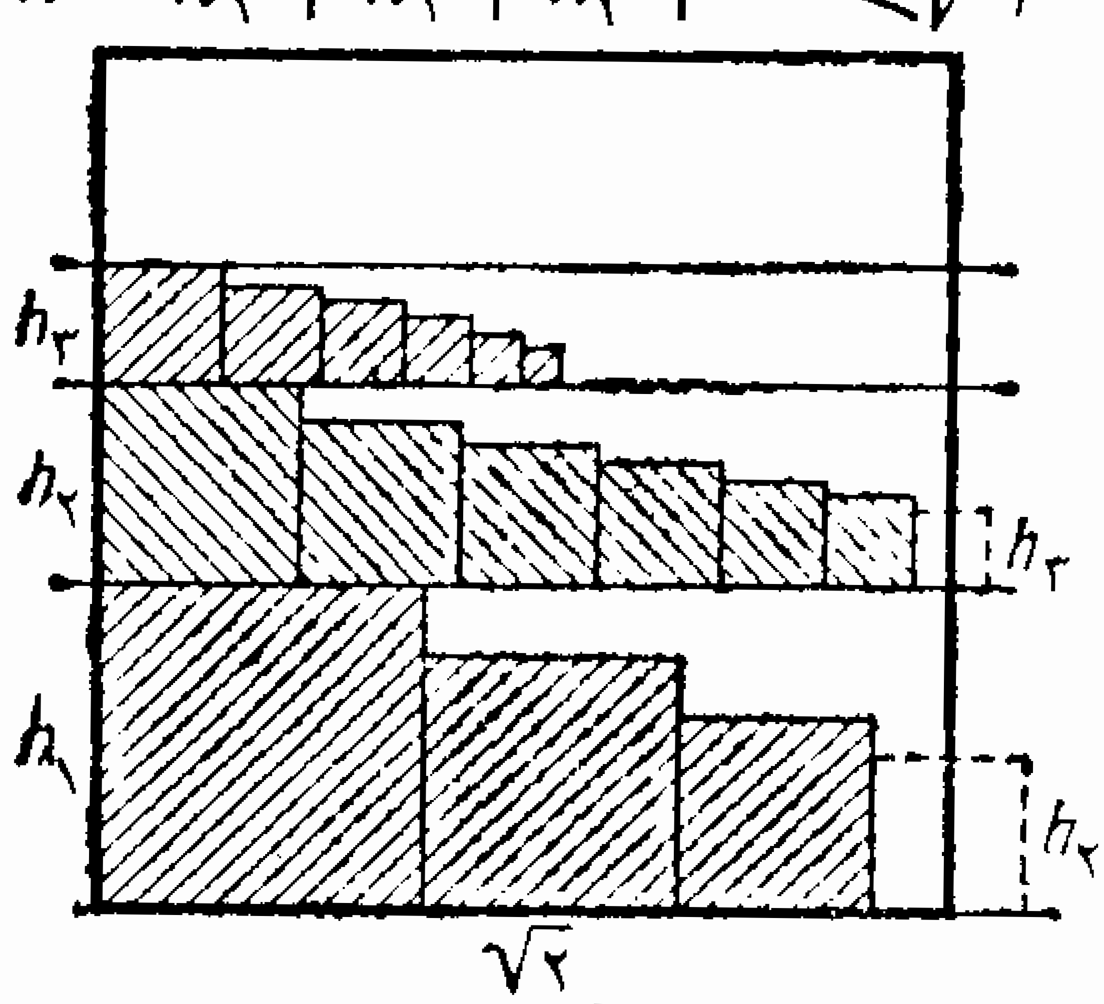
دست‌کم بعد از ۱ — $۲r$ گام به دست آمده است (یعنی ۱ — $۲r \geqslant$ ۲ — n).
ولی عـدد r هم، درهمان سطر s واقع است و برای رسیدن از a به چنین عددی، دست‌کم $a+۲r-۱>r$ گام لازم است. به این ترتیب، درمسیر به دست آمدن s ، مجذور کردنی وجود نداشته است، به نحوی که q در انتهای سمت راست قرار دارد و کوچکترین عدد در سطر nام است؛ چیزی که با فرض $p=q$ تناقض دارد.

▽ با تجزیه و تحلیل راه‌حل‌مساله، روشن می‌شود که، عمل مجذور-کردن را، می‌توان با هر تابع f که مقدارهای طبیعی را قبول می‌کند عوض کرد، به شرطی‌که داشته باشیم:

$$f(n+۱)-f(n)>n+۱$$

۱۶۴. مربع‌ها را بـه ردیف نزولی ضلع‌ها و با آغاز از بزرگترین مربع $x \times x$، ازچپ بدراست، روی‌ضلع‌پایینی مربع به مساحت $\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}$ قرار می‌دهیم (شکل ۶۷)؛ وقتی به‌جایی رسیدیم که جایی برای مربع بعدی نمانده باشد ــ یعنی از ضلع سمت راست مربع به ضلع $\sqrt{۲}$ خارج شود ــ به ضلع بالای مربع چپ می‌رویم، این ضلع را به صورت خط راست افقی ادامه می‌دهیم و ردیف جدید را آغاز می‌کنیم. ضلع مربع‌هایی را که به ضلع‌سمت چپ‌مربع به‌ضلع $\sqrt{۲}$ چسبیده‌اند، به‌ترتیب، $x=h_۱$، $h_۲$، $h_۳$،... می‌گیریم. باید ثابت کنیم، ارتفاع

$$h=h_۱+h_۲+h_۳+\cdots<\sqrt{۲}$$



شکل ۶۷

یعنی، این مربع‌های سمت چپ، از ضلع بالایی مربع به ضلع $\sqrt{۲}$، بیرون نمی‌روند.

مجموع مساحت‌های این مربع‌ها را ارزیابی می‌کنیم. در ذهن خود، هر مربع سمت چپ به‌ضلع h_k را $(k=۲, ۳, \ldots)$ به‌انتهای ردیف قبلی $(k-۱)$ام منتقل می‌کنیم. این مربع از ضلع سمت راست مربع به ضلع $\sqrt{۲}$ بیرون می‌زند، بنابراین بعد از این روند، مساحت مربع‌های ردیف $(k-۱)$ ام، کمتر از $h_k(\sqrt{۲}-x)$ نخواهد بود؛ درضمن در ردیف اول، مربع بزرگتر سمت چپ را به‌حساب نمی‌آوریم. به این ترتیب، مجموع مساحت‌های همهٔ مربع‌ها ــ که بنابر فرض برابر واحد است ــ کمتر از

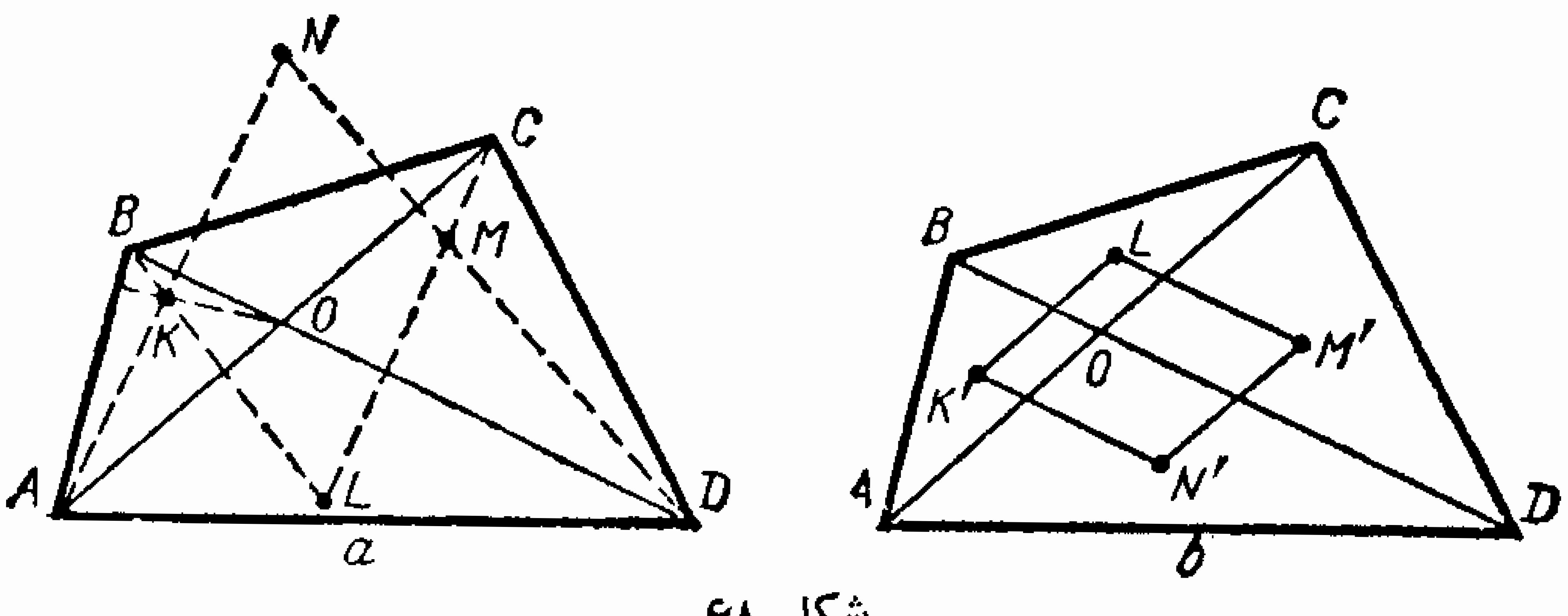
$$x^{۲}+(\sqrt{۲}-x)(h_{۲}+h_{۳}+\cdots)=x^{۲}+(\sqrt{۲}-x)(h-x)$$

نخواهد بود. از این‌جا می‌توان h را ارزیابی کرد. چون $\sqrt{۲}-x>۰$، بنابراین از نابرابری $x^{۲}+(\sqrt{۲}-x)(h-x)\leqslant ۱$ نتیجه می‌شود:

$$h\leqslant\frac{۱-x^{۲}}{\sqrt{۲}-x}+x=۳\sqrt{۲}-\sqrt{۲}\left(۲-x\sqrt{۲}+\frac{۱}{۲-x\sqrt{۲}}\right)\leqslant\sqrt{۲}$$

زیرا مقدار داخل پرانتز به صورت $t+\frac{۱}{t}$ است و از ۲ کمتر نیست (برابری تنها به‌ازای $x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ممکن است).

۱۶۵. K، L، M و N را، به ترتیب، محل برخورد ارتفاع‌های مثلث‌های AOB، BOC، COD و DOA می‌گیریم. این نقطه‌ها، رأس‌های یك متوازی‌الاضلاع را تشکیل می‌دهند، زیرا دو ضلع آن روی خط‌های



شکل ۶۸

راستی قرار دارند که از A و C بر BD عمود شده‌اند و دو ضلع دیگر آن روی خط‌های راستی که از B و D بر AC عمود شده‌اند (شکل ۶۸، a).

نقطه‌های K'، L'، M' و N'، محل برخورد میانه‌های مثلث‌های AOB، BOC، COD و DOA، رأس‌های متوازی‌الاضلاعی را تشکیل می‌دهند که دو ضلع آن موازی BD هستند و پاره‌خط راست AC را به سه بخش برابر تقسیم می‌کنند و دوضلع دیگر آن با AC موازی‌اند و BD را به سه بخش برابر تقسیم می‌کنند (شکل ۶۸، b).

روشن است که، ضلع‌های متناظر این دومتوازی‌الاضلاع، برهم‌عمودند. ثابت می‌کنیم که متوازی‌الاضلاع‌ها متشابه‌اند؛ از آن‌جا نتیجه می‌گیریم که، اگر یکی از آن‌ها را به اندازهٔ ۹۰ درجه دوران دهیم، نه تنها ضلع‌ها، بلکه قطرهای آن‌ها هم باهم موازی می‌شوند، یعنی $K'M' \perp KM$ (و $L'N' \perp LN$). برای اثبات تشابه دو متوازی‌الاضلاع، باید نسبت ضلع‌ها برابر باشند. طول ضلع‌های $K'L'$ و KN برابرند با $\frac{1}{3}\, AC$ و $\frac{1}{3}\, BD$.

تصویر ضلع KL بر BD، بر تصویر پاره‌خط راست AC بر BD، منطبق است. بنابراین

$$KL = AC \cdot cotg\varphi$$

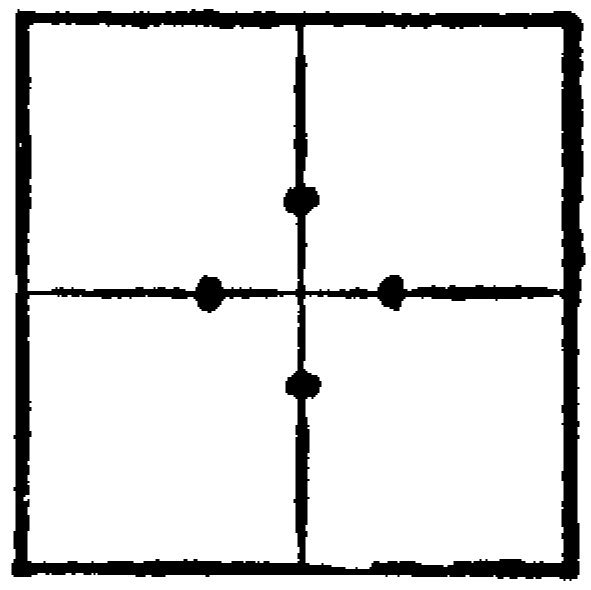
که در آن، φ، زاویهٔ حادهٔ بین خط‌های راست AC و BD است. به همین ترتیب

$$KN = BD \cdot cotg\varphi$$

به این ترتیب، ضلع‌های دو متوازی‌الاضلاع به نسبت $AC:BD$ هستند، یعنی با هم متشابه‌اند.

در حالتی که، φ، زاویه‌ای قائمه باشد، نقطه‌های K، L، M و N برهم منطبق می‌شوند و مساله مفهوم خود را از دست می‌دهد.

۱۶۶. هرخط راست، مربع را به دوذوزنقه (یا دو مستطیل)، با نسبت مساحت‌های ۳:۲ تقسیم می‌کند. پاره‌خط راستی هم‌که وسط دوضلع روبه‌روی



شکل ۶۹

مربع را به هم وصل می‌کند (که در ضمن، از وسط ساق‌های ذوزنقه‌ها هم می‌گذرد)، به وسیلهٔ ساق مایل ذوزنقه، به‌همین نسبت قطع می‌شود؛ و این، از آن‌جا ناشی می‌شود که، مساحت ذوزنقه برابر است با حاصل‌ضرب ارتفاع در پاره‌خط راستی که وسط دو ساق را به هم وصل می‌کند.

از این گونه نقطه‌ها ـ که پاره‌خط راست بین وسط دوضلع روبه روی مربع را به نسبت ۲:۳ تقسیم می‌کنند، روی هم چهار تا وجود دارد (شکل ۶۹) و، بنابراین، از بین ۹ خط راست مفروض، دست‌کم سه تا از یکی از این نقطه‌ها می‌گذرند (ضمیمهٔ ۹).

۱۶۷. با استفاده از قضیهٔ مربوط بـه زاویه‌های محاطی، مجموع سه زاویهٔ $A_۱$، $A_۳$ و $A_۵$ را می‌توان به عنوان نصف مقدار زیر در نظر گرفت:

$$(۳۶۰^\circ - \widehat{A_۷A_۱A_۱}) + (۳۶۰^\circ - \widehat{A_۲A_۳A_۴}) + (۳۶۰^\circ - \widehat{A_۴A_۵A_۶}) =$$
$$= ۷۲۰^\circ + \widehat{A_۶A_۷}$$

بنا بر شرط مساله، نقطهٔ O دردرون هفت ضلعی است و، بنابراین کمان $A_۶A_۷$ نمی‌تواند از ۱۸۰ درجه بیشتر و یا با آن برابر باشد، یعنی

$$\widehat{A_۱} + \widehat{A_۳} + \widehat{A_۵} < ۳۶۰^\circ + ۹۰^\circ = ۴۵۰^\circ$$

۱۶۸. چهارمرتبهٔ این تفاضل را، به‌ترتیب ازچپ به‌راست، $r_۱$، $r_۲$، $r_۳$، $r_۴$ می‌نامیم. بازی به دو مرحله تجزیه می‌شود: «آغاز» و «پایان» ــ مرحلهٔ دوم وقتی شروع می‌شود که نفردوم، رقمی را در مرتبهٔ بزرگتر $r_۱$ قرار می‌دهد. روشن است که در مرحلهٔ «آغاز»، نفراول نباید رقم‌های کوچك (از ۰ تا ۳) یا رقم‌های بزرگ (از ۶ تا ۹) را نام ببرد. زیرا نفر دوم، این رقم را، در

r_1 می‌گذارد (رقم کوچکتر را درعدد اول، و رقم بزرگتررا در عدد دوم) و. در این صورت، نفر دوم برنده می‌شود: اگر اختلاف رقم‌های اول از ۳ بیشتر نباشد، اختلاف عددها از ۳۹۹۹ بیشتر نمی‌شود. برعکس. اگر اولی از رقم ۴ (یا ۵) شروع کند، آن وقت، دومی می‌تواند به تفاضلی برسدکه از ۴۰۰۰ کمتر نباشد: اودرحرکت خود، $r_1=\binom{4}{*}$ یا $r_1=\binom{*}{5}$ قرارمی‌دهد، سپس همهٔ رقم‌های ۰ (یا ۹) را. اگر اولی نام ببرد، در مرتبه‌های r_2، r_3 و r_4 می‌گذارد، تا وقتی‌که کار به پایان برسد؛ دراین صورت، اولی نمی‌تواند به وضعی بهتراز $\begin{pmatrix}4000\\0000\end{pmatrix}$ (یا $\begin{pmatrix}9999\\5999\end{pmatrix}$)برسد. برای دومی برنامه‌ای تنظیم‌کردیم که حکم a) را ثابت می‌کند.

ولی، اگردومی رقم‌های ۴ و ۵ را در مرتبه‌های r_2 تا r_4 قرار می‌داد و، در لحظهٔ مناسب.کار را تمام می‌کرد، آیا نمی‌توانست به تفاضل بیشتری برسد؟ برای این‌که اولی مانع این امر شود، باید مرتبهٔ r_i را با کوچکترین i، که در آن یکی از رقم‌ها عدد و دیگری ستاره است و یا دو عدد مختلف در آن قرار دارد، در نظر بگیرد. اگــر r_i برابر $\binom{*}{4}$ یا $\binom{*}{5}$باشد، باید رقم ۵ را نام ببرد واگربا $\binom{4}{*}$ یا $\binom{5}{*}$ روبه‌رو شود. رقم ۴ را (اگرهمهٔ ردیف‌ها بر هم منطبق و یا r_i به صورت $\binom{4}{5}$ باشد، می‌توان هــرکدام از دو عدد، و مثلاً ۵، را نام برد؛ با این برنامه‌ریزی. اولی به موقعیت خطرناک $r_i=\binom{4}{5}$ برخورد نمی‌کند). بعد ازحرکت دومی، اولی می‌تواند ۰ را نام ببرد (وقتی که در r_i، رقم در عدد بالا گــذاشته شده باشد و یا ۹ را (وقتی رقم، در r_i پایین گذاشته شود). بهاین ترتیب، برنامهٔ حرکت اولی، برای اثبات b) روشن می‌شود.

▽ اگر با عددهایی سروکار داشته‌باشیم که دارای $n \geqslant 1$ رقم باشند، می‌توان ثابت کردکه، به شرط بازی درست، برای تفاضل، عدد $4 \times 10^{n-1}$ به دست می‌آید.

۱۶۹. پاسخ: حداکثر مقدار s برابراست با $\sqrt{2}$ و به ازای $x=\sqrt{2}$ و $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ به دست می‌آید.

باید روشن کنیم که، به‌ازای چه حداکثری از s، نابرابری‌های

$$x \geqslant s, \quad y+\frac{1}{x} \geqslant s, \quad \frac{1}{y} \geqslant s$$

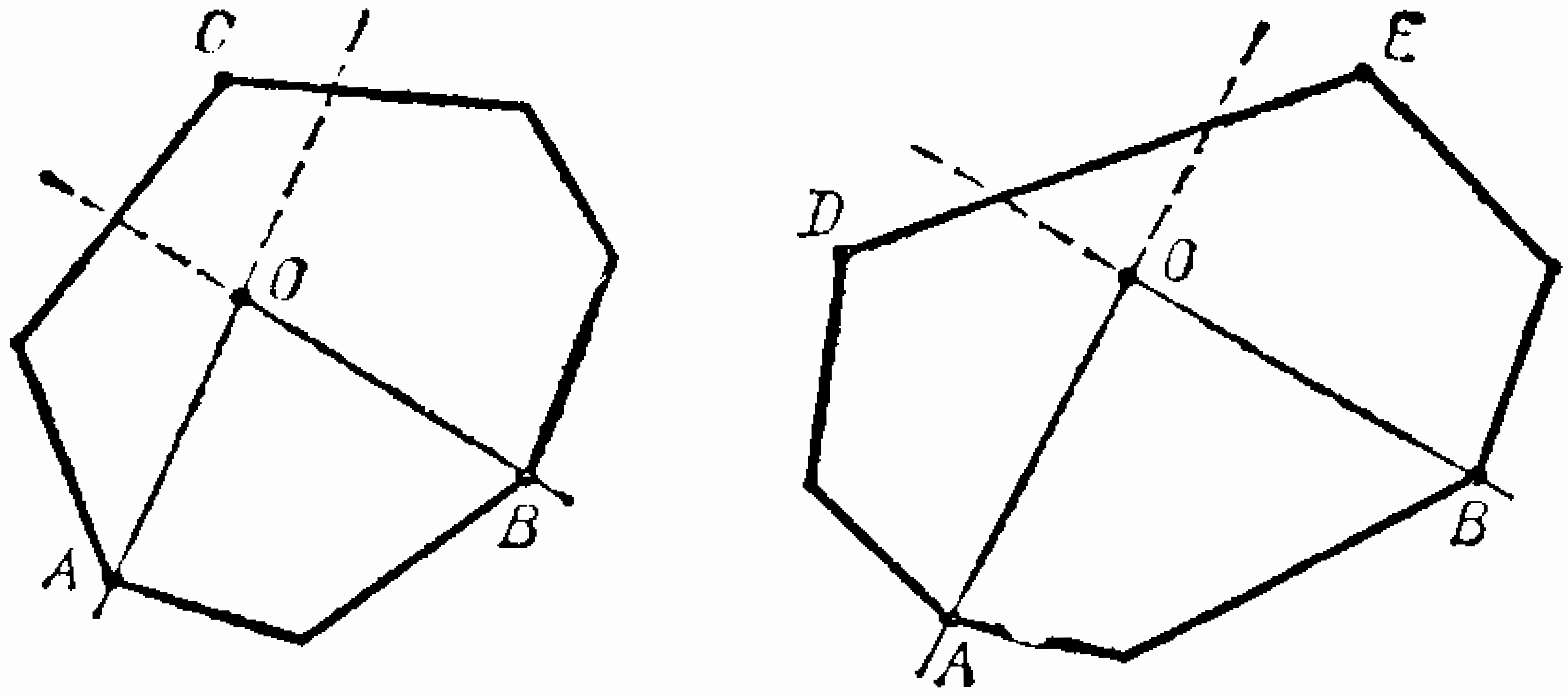
به‌طور هم زمان برقرارند (درضمن، دست‌کم یکی از آن‌ها باید برابری باشد). s عددی است مثبت و، مثلاً برای $s=1$، نابرابری‌ها متوافق‌اند (مثلاً برای $x=1$ و $y=1$ و یا $x=1$ و $y=\frac{1}{2}$). از این نابرابری‌ها می‌توان نتیجه گرفت:

$$y \leqslant \frac{1}{s}, \quad \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{s}, \quad s \leqslant y+\frac{1}{x} \leqslant \frac{2}{s}$$

از آنجا $s^2 \leqslant 2$ و $s \leqslant \sqrt{2}$. حالتی وجود دارد که هر سه نابرابری، به برابری تبدیل می‌شوند: $y=\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و در ضمن $s=\sqrt{2}$.

۱۷۰. حکم، برای مثلث ABC به سادگی ثابت می‌شود: اگر نقطهٔ O دردرون مثلث و، درضمن، مثلث‌های AOB، BOC و COA متساوی‌الساقین باشند، آن وقت از بین زاویه‌های AOB، BOC و COA، دست‌کم دوتا، از ۱۲۰ درجه بیشترند. این زاویه‌ها را AOB و BOC می‌گیریم. دراین‌صورت $AO=BO=OC$.

اکنون با استفاده ازاین‌حالت خاص، به‌عنوان پیش قضیه، حکم مساله را برای چندضلعی ثابت می‌کنیم. اگر A و B دورأس دلخواه از چندضلعی

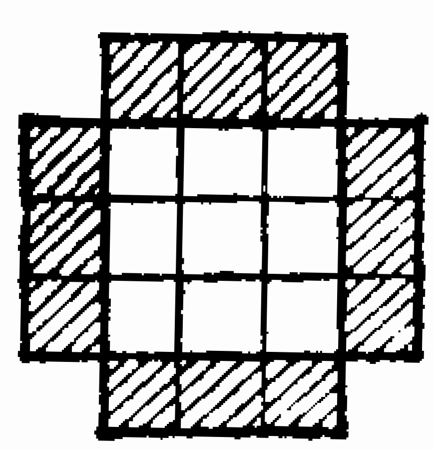


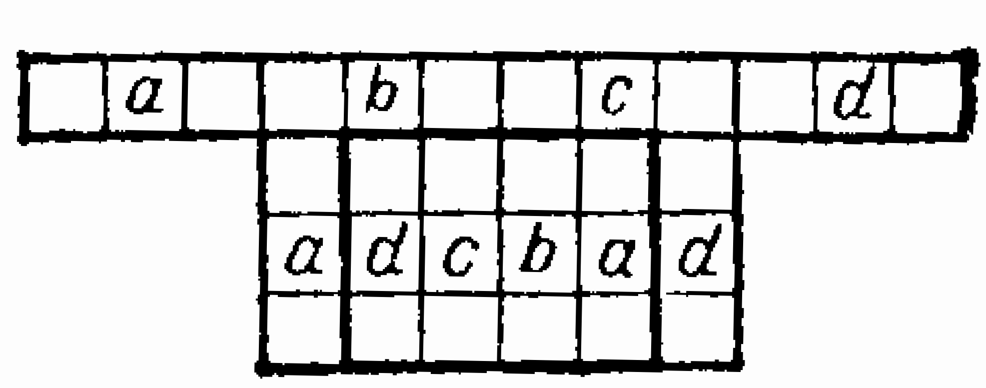
شکل ۷۵

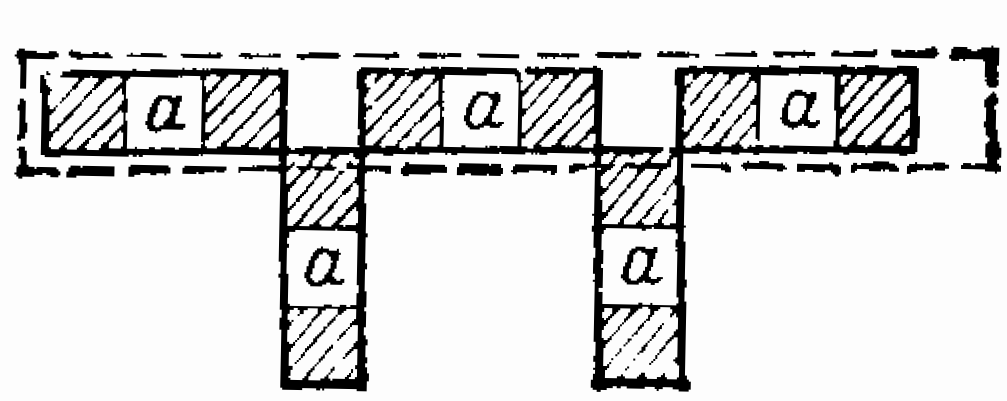
باشند، آن وقت یا در درون زاویه‌ای که از امتدادهای AO و BO در نقطهٔ O تشکیل می‌شود، رأس E از چندضلعی قرار دارد و یا ضلع‌های این زاویه، ضلع ED از چندضلعی را قطع می‌کند (شکل ۷۰). در حالت اول، نقطهٔ O در درون مثلث ABC واقع است و، همان‌طورکه در بالا ثابت کردیم، $AO=BO=CO$؛ درحالت دوم، نقطهٔ Oدردرون مثلث‌های BDEوADE قرار دارد و بنا براین $AO=DO=EO=BO$.

۱۷۱. پاسخ: نمی‌توان.

یکی از کوتاه‌ترین روش‌هایی را می‌آوریم که ما را به‌تناقض می‌رساند. دوشکل را «یکسان» می‌نامیم،وقتی که، در آن،تعدادصفرها، واحدها ورقم‌های ۲، یکی باشد. مستطیل‌های هاشورخورده در شکل ۷۱، a را «یکسان» می‌گیریم (مربعی ۳×۳، با هر یك از این شکل‌ها، مستطیلی ۴×۳ تشکیل می‌دهد، بنا براین کافی است از شکل استاندارد برای چهار مستطیل ۴×۳ «یکسان» که در مربع ۳×۳ مشترك‌اند، این مربع را حذف کنیم تا چهار مستطیل باقی‌مانده، «یکسان» باشند). نوار ۱۲×۱ هم دارای همان محتوی







شکل ۷۱

استاندارد مستطیل ۴ × ۳ است (در شکل ۷۱، b، مستطیل‌های «یکسان»، با یك حرف نشان داده شده‌اند)، یعنی در این نوار پنج تا رقم ۲ وجود دارد. اکنون، مستطیل‌های a را با اندازه‌های ۱ × ۳ درنظرمی‌گیریم (که درمرز صفحهٔ کاغذ نباشند)، که دست‌کم شامل دوتا رقم ۲ باشند؛ ازچنین مستطیل‌هایی در هر مستطیل ۴ × ۳، که از چهار مستطیل ۱ × ۳ تشکیل شده و شامل پنج رقم ۲ است، پیدا می‌شود. آن‌ها را، آن‌طورکه در شکل ۷۱، c (به صورت نقطه‌چین) نشان داده شده است، در ردیف بـه صورت مستطیل ۱۲ × ۱ قرار می‌دهیم. در این نوار، دست‌کم، ۶ × ۳، یعنی ۶ رقم ۲ وجود دارد. تناقض.

۱۷۲. پاسخ: کمترین مقدار s برابر است با $۱ - ۲^{-\frac{۱}{n}}$، و وقتی بـه دست می‌آید که داشته باشیم: $x_k = ۲^{\frac{k}{n}}\left(۱ - ۲^{-\frac{۱}{n}}\right)$.

فرض می‌کنیم:

$$y_{\circ} = ۱،\ y_k = ۱ + x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k،\ (۱ \leqslant k \leqslant n)$$

در این صورت $y_n = ۲$ و $x_k = y_k - y_{k-۱}$. اگر هیچ کدام از عددهای مفروض، از s تجاوز نکنند، یعنی

$$\frac{x_k}{y_k} = \frac{y_y - x_{k-۱}}{y_k} = ۱ - \frac{y_{k-۱}}{y_k} \leqslant s$$

آن وقت $\frac{y_{k-۱}}{y_k} \geqslant ۱ - s$. اگر این نابرابری‌ها را، برای مقدارهای k از ۱ تا n، درهم ضرب کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(۱ - s)^n \leqslant \frac{y_{\circ}}{y_n} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow s \geqslant ۱ - ۲^{-\frac{۱}{n}}$$

s وقتی به‌این مقدار می‌رسد که، برای هر k، داشته باشیم:

$$۲^{-\frac{۱}{n}}=۱-s=\frac{y_{k-۱}}{y_k}$$

یعنی وقتی که y_kها، تشکیل یك تصاعد هندسی به‌قدر نسبت $۲^{\frac{۱}{n}}$ بدهند:

$$y_۱=۲^{\frac{۱}{n}},\ y_۲=۲^{\frac{۲}{n}},\ \dots,\ y_n=۲$$

که دراین‌صورت خواهیم داشت:

$$x_k=۲^{\frac{k}{n}}-۲^{\frac{k-۱}{n}}$$

۱۷۳. درجدول مسابقه همهٔ عددهای زوج را با ۰ وهمهٔ عددهای فرد را با ۱، نشان می‌دهیم. جدول حاصل را A و عضوهای آن را a_{ij} می‌نامیم $(i, j=۱, \dots, n)$: $a_{ij}=۱$، وقتی تیم‌های iام و jام مساوی کرده باشند و $a_{ij}=۰$ درحالت عکس آن. جدولی‌کـه باصورت مساله سازگار باشد، متقارن است وعددهای روی قطرها برابرصفر است:

$$a_{ij}=a_{ji},\ a_{ij}=۰\quad (\text{برای‌هر } i \text{ و } j) \qquad (۱)$$

شرطی‌راکه درجدول ظاهر می‌شود، باتوجه به‌صورت مساله، می‌توان به‌این ترتیب تنظیم‌کرد: برای هر انتخـاب $x=(x_۱, x_۲, \dots, x_n)$ از صفرها و واحدها، به‌جز $o=(۰, \dots, ۰)$، دست‌کم یکی ازعددهای

$$y_i=a_{i۱}x_i+a_{i۲}x_۲+\dots+a_{in}x_n \qquad (A)$$

فرداست. برای هرگروهی ازتیم‌ها، انتخاب x را درنظر می‌گیریم. با این شرط‌که، اگر jامین تیم جزو گروه باشد $x_j=۱$، واگر تیم jام جزوگروه نباشد $x_j=۰$؛ درضمن، y_i، برابراست باتعداد تساوی‌هـایی‌که تیم iام با این‌گـروه داشته است. گروه $(y_۱, \dots, y_n)$ را، که از x به‌کمك جدول A وطبق قانون (A) به‌دست می‌آید، Ax می‌نامیم. ازآن‌جاکه، تنها به‌اختلاف بین عددهای زوج و فرد علاقه‌مندیم، بهتر است تنها با درنظرگرفتن دوعدد ۰و۱، و به‌حساب‌آوردن $۱=۰+۱=۱+۰$ و $۰=۰+۰=۱+۱$، کار راساده‌کنیم (درضمن، قانون‌های ضرب وهمهٔ قانون‌های دیگرحساب، به‌قوت

خود باقی است). در این صورت، y هم، انتخابی از ۰ و ۱ خواهد بود. درضمن، نیاز اصلی ما از جدول، به این صورت درمی آید:

(۲) اگر $x \neq 0$، آن وقت $y = Ax \neq 0$.

این گونه جدول A را «رو به راه» می نامیم.

اکنون که، از بازی هاکی، خودرا به طور کامل، به جبر رسانده ایم، می‌توانیم به حل مساله بپردازیم: باید ثابت کنیم، وقتی n عددی زوج باشد، شرطهای (۱) و (۲) نمی توانند باهم برقرار باشند. جدول A را، با حفظ این شرطها، ساده می کنیم.

اگر در جدول A، سطر دوم را به سطر اول اضافه کنیم، شرط (۲) خراب نمی‌شود: اگر

$$Ax = y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

آن وقت، برای جدول جدید A'، خواهیم داشت:

$$A'x = y' = (y_1 + y_2, y_2, \dots, y_n)$$

و اگر $y \neq 0$، آن وقت $y' \neq 0$. همچنین، اگر ستون دوم جدول A را به ستون اول آن اضافه کنیم، باز هم شرط (۲) به هم نمی‌خورد: اگر

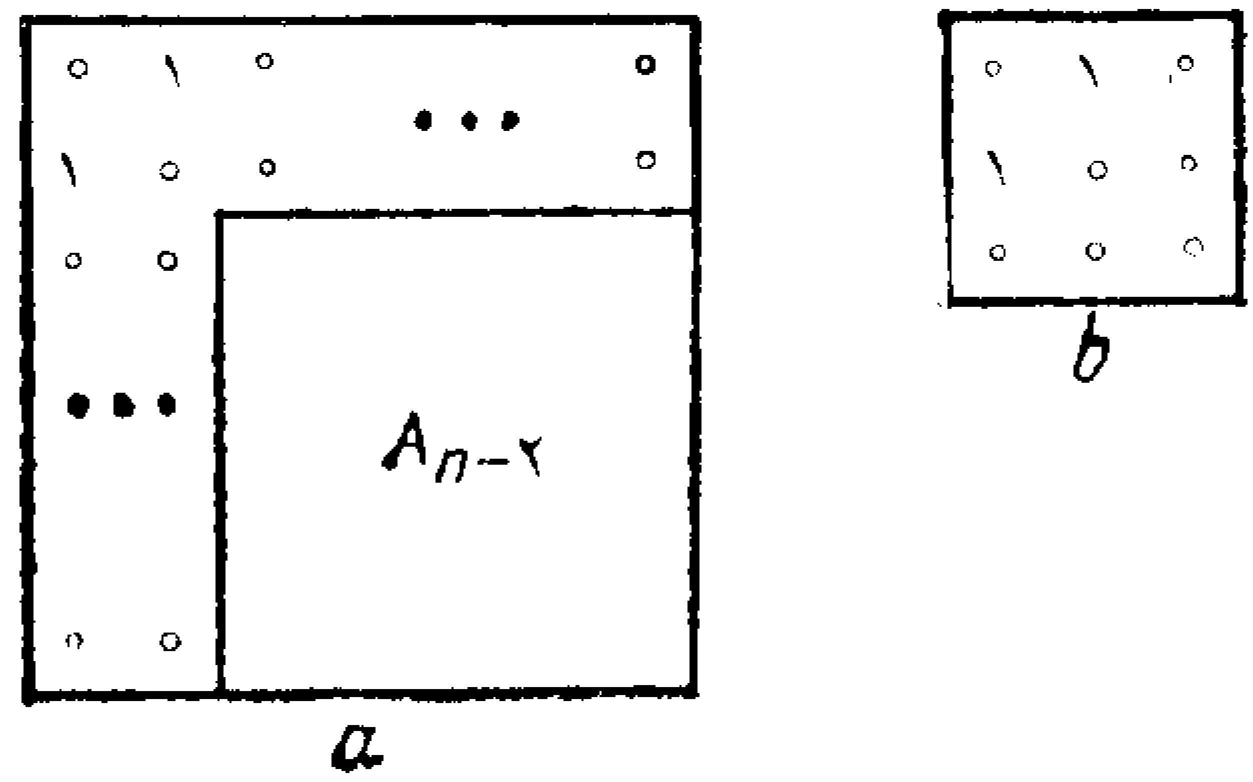
$$Ax = y \cdot x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

آن وقت، برای جدول جدید A'' خواهیم داشت:

$$A''x'' = y, \quad x'' = (x_1 + x_2, x_2, \dots, x_n)$$

و اگر $x \neq 0$، آن وقت $x'' \neq 0$. روشن است که، به همین ترتیب، می توان iامین سطر را به jامین سطر و یا iامین ستون را به jامین ستون اضافه کرد؛ همچنین اگر دو تبدیل را باهم و به طور همزمان انجام دهیم، آن وقت، جدول جدید، نه تنها نسبت به (۲) بلکه درضمن نسبت به تقارن (۱) هم، «رو به راه» خواهد بود (درضمن، قانون $0 = 1 + 1$، صفرها را در قطرها حفظ می کند).

اکنون سعی می کنیم، جدول A را ساده کنیم. می توان فرض کرد که، «دو



شکل ۷۲

تیم اول، باهم بازی کرده‌اند»، یعنی $a_{12} = a_{21} = 1$. اگر سطر اول (وهمچنین ستون اول) را به‌سطر (یاستونی) که در آن، واحدها درستون دوم (وسطرمتناظر آن) قرار گرفته‌اند، اضافه کنیم، آن‌وقت ازهمهٔ این‌واحدها، خلاص‌می‌شویم؛ به‌همین ترتیب به‌کمك سطردوم (وستون دوم)، از واحدهای ستون اول (و واحدهای سطر اول) خلاص‌می‌شویم و به‌جدول A_{n-2}، به‌صورتی که درشکل ۷۲، a نشان داده شده‌است، می‌رسیم. اگر دوسطر اول و دوستون اول‌را از جدول‌حذف کنیم، به‌جدول A_{n-2} با اندازه‌های $(n-2)\times(n-2)$ می‌رسیم که، مثل قبل، باشرطهای (۱) و (۲) سازگار است؛ درواقع برای‌هر

$$x = (0, 0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-2})$$

داریم $Ax \neq 0$ وجدول باقی‌ماندهٔ A_{n-2}، درست به‌همان ترتیب، مختصات

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2})$$

را تبدیل می‌کند. اگر ساده کردن جدول را، به‌همین ترتیب ادامه دهیم، به جدول‌های A_{n-4}، A_{n-6}، ... می‌رسیم. اگر n عددی فرد باشد، سرآخر به جدول 3×3 می‌رسیم که، بعد ازساده‌کردن، جدول A_3 در شکل ۷۲، b به دست می‌آید. ولی‌این‌جدول «روبه‌راه» نیست: اگر $x=(1, 0, 0)$، آن‌وقت $A_3x = 0$. تناقض‌حاصل، درستی‌حکم مساله را ثابت می‌کند.

▽ مضمون این‌مسأله بااین قضیهٔ جبرخطی تفاوتی ندارد که: ماتریس چپ $n\times n$، وقتی n عددی فردباشد، «روبه‌راه نیست». این‌قضیه، درحوزهٔ دوعنصر ۰و۱، تا حدی دشوارتر می‌شود.

۱۷۴. حل مسالهٔ b) را می‌آوریم. متخصص می‌تواند به این ترتیب عمل کند.

۱°. متخصص، سکهٔ اول را در کفهٔ چپ و سکهٔ هشتم را در کفهٔ راست ترازو می‌گذارد و چون کفهٔ راست سنگین‌تر است، قاضی اطمینان پیدا می‌کند که سکهٔ اول تقلبی و سکهٔ هشتم واقعی است.

۲°. سکه‌های دوم، سوم و هشتم را در کفهٔ راست و سکه‌های نهم، دهم و اول را در کفه چپ می‌گذارد. کفهٔ چپ سنگین‌تر است، و قاضی قانع می‌شود که سکه‌های دوم و سوم تقلبی و سکه‌های نهم و دهم واقعی‌اند.

۳°. در کفهٔ چپ، سکه‌های چهارم، پنجم، ششم، هفتم، هشتم، نهم و دهم؛ و در کفهٔ راست، بقیهٔ سکه‌ها را قرار می‌دهد. کفهٔ راست سنگین‌تر است و قاضی می‌بیند که در آن، سکه‌های واقعی بیشتر از کفهٔ چپ است، همچنین، در کفهٔ چپ، تعداد سکه‌های تقلبی بیشتر از کفهٔ راست است و این ثابت می‌کند که، سکه‌های چهارم، پنجم، ششم و هفتم تقلبی و سکه‌های ۱۱، ۱۲، ۱۳ و ۱۴ حقیقی‌اند.

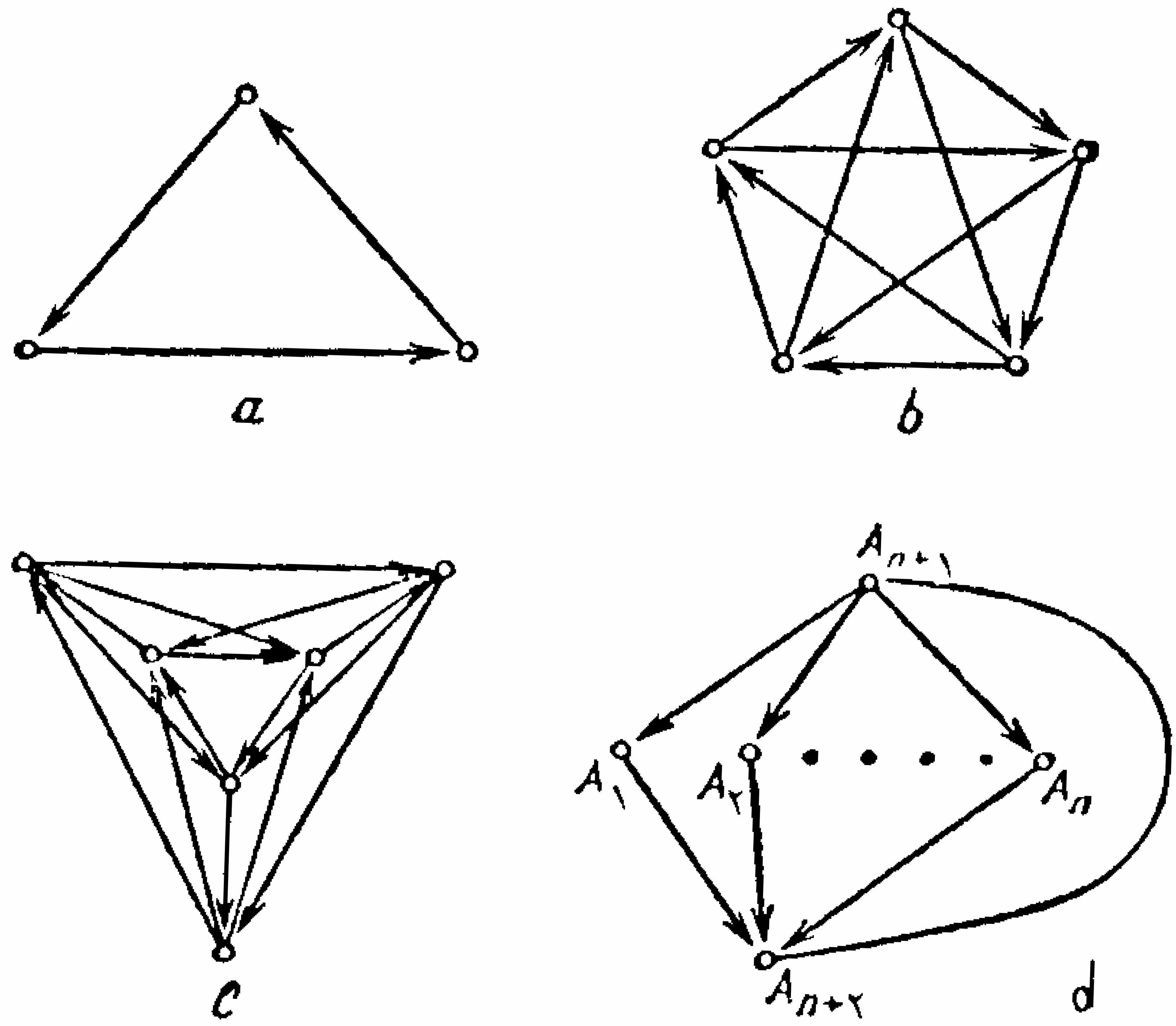
$\triangledown$ به همین ترتیب می‌توان $۱-۲^k$ سکهٔ تقلبی و $۱-۲^k$ سکهٔ حقیقی را، ضمن k مرتبه استفاده از ترازو، از هم جدا کرد (برای هر $k \geqslant ۱$).

۱۷۵. فرض می‌کنیم، عدد $D=A^۲$، که با شرط‌های مساله سازگار است، وجود دارد. روشن است که عدد A به ۵ ختم شده است، بنابراین $A=۱۰a+۵$. از اینجا

$$D=۱۰۰a(a+۱)+۲۵$$

به ۲۵ ختم می‌شود عدد $a(a+۱)$ به ۲، ۶ یا صفر ختم می‌شود. بنابراین، سومین رقم از سمت راست عدد D برابر ۶ است (۰ بین رقم‌های عدد D وجود ندارد، از رقم ۲ هم دو بار استفاده نمی‌شود)، یعنی $D=۱۰۰۰k+۶۲۵$. می‌بینیم که D، بر $۵^۳=۱۲۵$، و بنابراین بر $۵^۴$ بخش‌پذیر است. یعنی k بخش‌پذیر بر ۵ است و، بنابراین، رقم چهارم عدد از سمت راست باید برابر ۰ یا ۵ باشد، که ممکن نیست.

۱۷۶. مساله با استقرا حل می‌شود. برای $n=۳$، $n=۵$ و $n=۶$،



شکل ۷۳

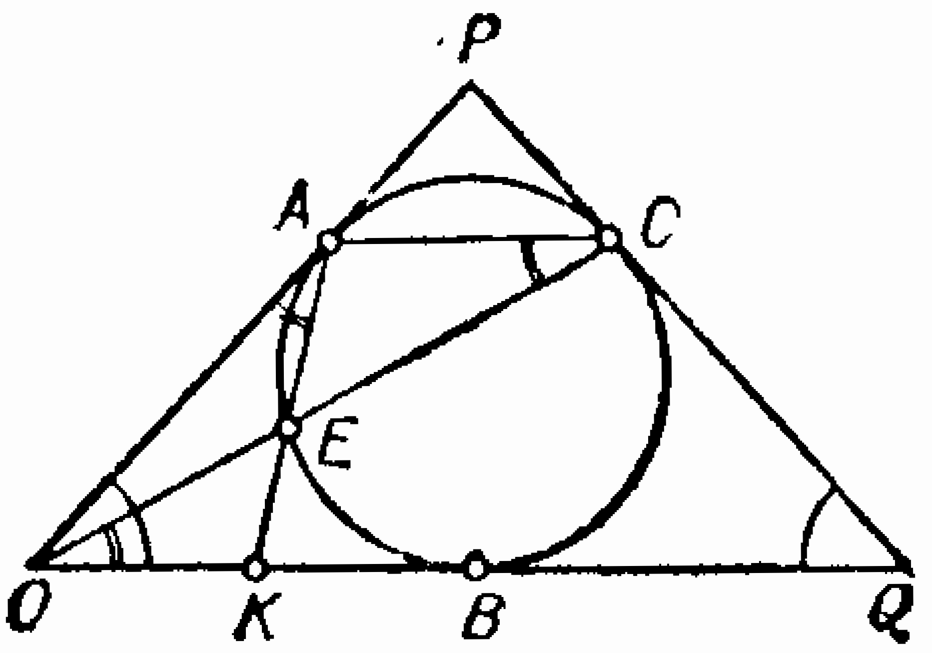
دستگاه لازم پیکان‌ها، در شکل‌های ۷۳، a، b و c نشان داده شده‌است. در شکل ۷۳، d یکی از روش‌هایی نشان داده شده است که، به کمك آن می‌توان، از دستگاه شامل n نقطهٔ A_1، A_2، ...، A_n (که با پیکان‌هایی به‌صورت مورد-نظر به‌هم وصل شده‌اند)، بـه‌دستگاه لازم برای $n+2$ نقطهٔ A_1، A_2، ...، A_n، A_{n+1}، A_{n+2} رسید. برای این‌منظور، به‌پیکان‌های موجود، این پیکان‌ها را اضافـه می‌کنیم: از A_{n+1} به‌سمت همهٔ نقطه‌هـای A_1، A_2، ...، A_n و، سپس، از هریك از نقطه‌های A_1، A_2، ...، A_n به‌سمت A_{n+2} و، سرانجام، از A_{n+2} به‌سمت A_{n+1}.

دراین‌صورت، بنا بر اصل استقرای ریاضی، حکم مساله برای عددهای فرد $n \geqslant 3$ و عددهای زوج $n \geqslant 6$ درست است.

برای $n=4$، نمی‌توان چنین دستگاهی را پیدا کرد.

۱۷۷. مماس بر دایرهٔ مفروض‌را در نقطهٔ C رسم می‌کنیم و نقطه‌های برخورد آن را باضلع‌های زاویه، P و Q می‌نامیم. چون $AP=PC$، پس مثلث APC و، همـراه با آن، مثلث OPQ متساوی‌الساقین است. بنا براین (شکل ۷۴):

$$AO=CQ=OB=BQ$$



شکل ۷۴

توجه می‌کنیم: $\widehat{AOB}=\widehat{CQB}$ و $\widehat{OAE}=\widehat{OCA}=\widehat{COQ}$. از تشابه دو مثلث OAK و QOC نتیجه می‌شود:

$$\frac{OK}{OA}=\frac{CQ}{OQ}=\frac{1}{2}$$

یعنی $OK=\frac{OA}{2}=\frac{OB}{2}$. برابری دو زاویهٔ OAE و ACO از قضیهٔ مربوط به‌زاویهٔ بین‌مماس و وتر (زاویهٔ ظلی) نتیجه می‌شود.

۱۷۸. فرض کنید: $f(x)=ax^2+bx+c$ و $g(x)=cx^2+bx+a$.
چون $f(1)=g(1)$ و $f(-1)=g(-1)$، بنا براین $|g(1)|\leqslant 1$ و $|g(-1)|\leqslant 1$، به‌جز این، $|c|=|f(0)|\leqslant 1$.
فرض می‌کنیم، برای مقداری از x داشته باشیم: $|g(x)|>2$. دراین‌صورت، اگر رأس سهمی را با مختصات $(x_0, g(x_0))$ بگیریم، داریم: $|x_0|\leqslant 1$ و $|g(x_0)|>2$. از طرف دیگر، $g(x)$ را می‌توان این‌طور نوشت:

$$g(x)=c(x-x_0)^2+g(x_0)$$

دراین برابری به‌جای x، از بین دو عدد ۱− و ۱، آن‌را که به x_0 نزدیکتر است، قرار می‌دهیم (برای روشن‌بودن وضع، این عدد را ۱+ می‌گیریم). دراین‌صورت $|1-x_0|\leqslant 1$ و بنا براین

$$|g(x_0)|=|g(1)-c(1-x_0)^2|\leqslant g(1)+|c|<1+|c|\leqslant 2$$

که با نابرابری $g(x)>2$ متناقض است.

مثال ۱ــ $f(x)=2x^2-1$ نشان می‌دهد کــه ارزیابی $|g(x)|\leqslant 2$ را نمی‌توان بهتر کرد. (دراین حالت $(g(x))=-x^2+2$).

۱۷۹. پاسخ: بزرگترین شمارهٔ ممکن برای برنده، برابراست با ۲۰.

چون بازی‌کن باشمارهٔ k (بدون در نظر گرفتن تنیس‌بازان قوی‌تر)، تنها ممکن‌است به‌دو تنیس‌باز باشماره‌های $k+1$ و $k+2$ ببازد، بنا براین، بعداز هر دور بازی، در بین پیروزشدگان، هیچ‌کس نمی‌تواند بیش از دو ردیف جلوتر رفته باشد؛ بداین ترتیب، شمارهٔ برندهٔ همهٔ دورها، نمی‌تواند از ۲۱ بیشتر باشد. باوجــود این، ثابت می‌کنیم، تنیس‌باز با شمارهٔ ۲۱، نمی‌تواند برندهٔ مسابقه باشد. برای این‌منظور، باید بعداز دور اول بازی، شماره‌های ۳ و۴، شماره‌های ۱و ۲ را ازمیدان بیرون کرده باشند (درغیراین صورت، شمارهٔ برنده از ۲۱ کمتر می‌شود)؛ در دوردوم باید شماره‌های ۵ و ۶، شماره‌های ۳ و۴ را شکست دهند و غیره تاآن‌جاکه، در دور نهم‌بازی، که شماره‌های ۱۹و۲۰ برشماره‌های ۱۷ و۱۸ پیروزمی‌شوند. به‌این‌ترتیب، شمارهٔ ۲۱ به‌فینال،که درآن باید دونفر باهم روبه‌رو شوند، نمی‌رسد.

این‌مطلب باقی می‌ماندکه نمونه‌ای از مسابقه را بیاوریم کــه، درآن، تنیس‌باز شمارهٔ ۲۰ به‌پیروزی می‌رسد. برای این منظور، همهٔ تنیس‌بازان را، به‌دو گروه ۵۱۲ نفری تقسیم می‌کنیم. در گروه اول، شماره‌های ۱۹ و۲۰ و۵۱۰ نفراز ضعیف‌ترین بازی‌کن‌ها را قرار می‌دهیم. مسابقهٔ گروه راطوری تنظیم‌می‌کنیم که شمارهٔ ۲۰ برنده شود (روشن‌است که، این‌امر، ممکن‌است). درگروه دوم شماره‌های ۱ تا۱۸ و بقیهٔ ضعیف‌ترین بازی‌کن‌ها را قرار می‌دهیم و مسابقه را طــوری تنظیم می‌کنیم که نفر شمارهٔ ۱۸ پیروز شود. اگر مسابقه را، به‌شکلی که دربالا شرح دادیم، تنظیم‌کنیم، این‌امر ممکن‌است: در دور اول شماره‌های ۳و۴، ازشماره‌های ۱و ۲ می‌برند، دردور دوم ۵ و۶از ۳و۴ می‌برند وغیره تاجایی‌که شماره‌های ۱۷و۱۸ از شماره‌های ۱۵ و۱۶ برنده شوند و، بعدازآن، در دورنهم، شمارهٔ ۱۸ ازشمارهٔ ۱۷ ببرد. درفینال شماره‌های ۱۸ و۲۰ باهم روبه‌رو می‌شوند و، بنابراین، شمارهٔ ۲۰می‌تواند برنده باشد.

▽ با استقرای ریاضی می‌توان ثابت کرد که، اگر با 2^n بازی‌کن سروکار داشته باشیم، بزرگترین شماره‌ای که می‌تواند برنده شود، شمارهٔ $2n$ است.

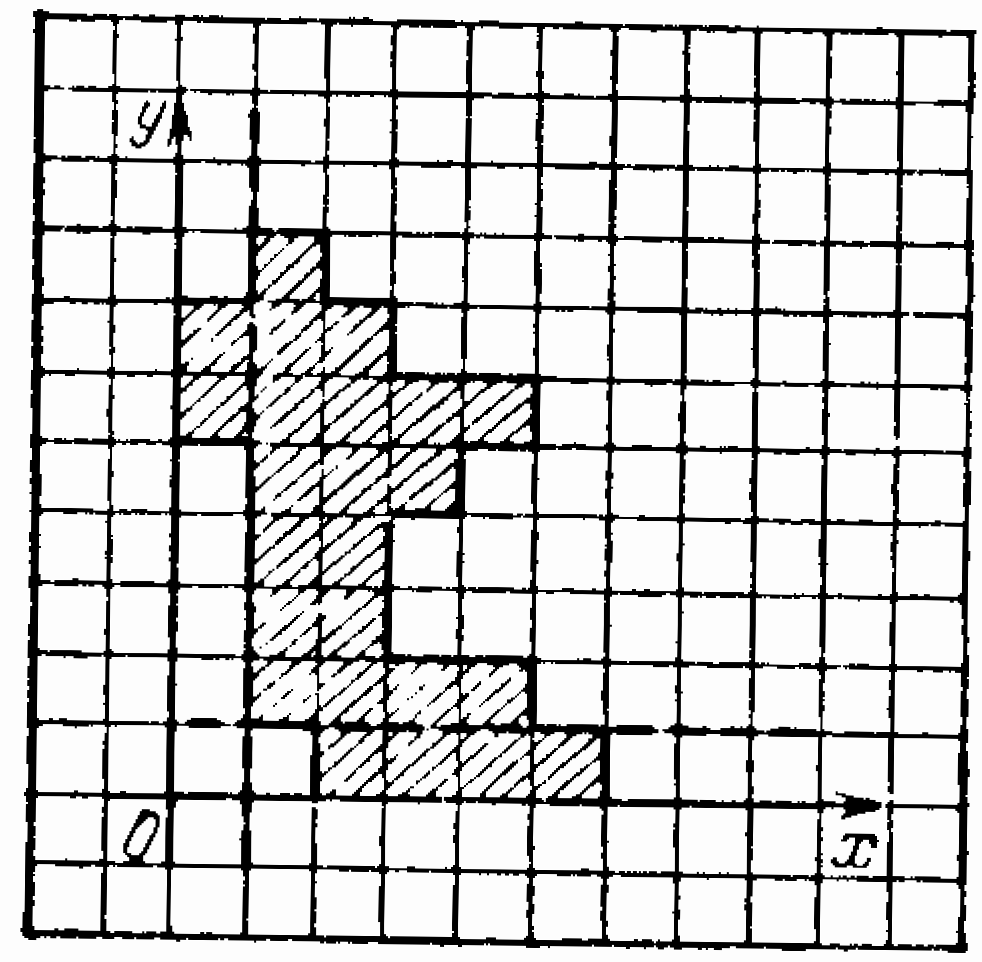
۱۸۰. اگرمعادلهٔ $f(x)=x$ ریشهٔ حقیقی نداشته باشد، به‌معنای آن است که به‌ازای همهٔ مقدارهای x، یا $f(x)>x$ (اگر $a>0$) و یا $f(x)<x$ (اگر $a<0$)، ولی دراین‌صورت، یا $f(f(x))>f(x)>x$ ویا $f(f(x))<f(x)<x$؛ واین به‌معنای آن‌است که‌معادلهٔ $f(f(x))=x$ ریشهٔ حقیقی ندارد.

▽ حکم مساله، نه تنها برای سه جمله‌ای درجه دوم، بلکه برای هر تابع پیوسته‌ای درست است.

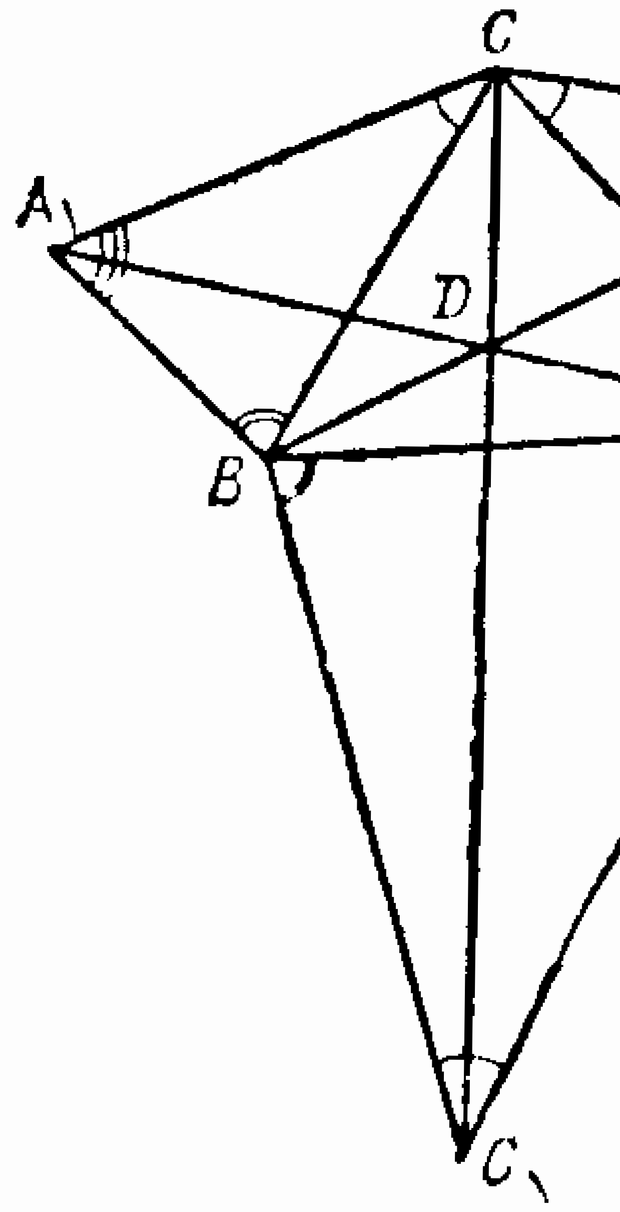
۱۸۱. a) یادآوری می‌کنیم که، اگر، به مجموعهٔ مفروض خانه‌های سیاه، بازهم چند خانهٔ سیاه اضافه کنیم، آن‌وقت بعد از رنگ‌آمیزی، تنها می‌تواند خانه‌های‌سیاه اضافی، حاصل‌شود، به‌مجموعهٔ نخستین M ازخانه‌ها، خانه‌هایی اضافه می‌کنیم تا مربع سیاه $m+m$ خانه‌ای به‌دست آید.

بعداز $2m-1$ گام، ازمربع (ودرنتیجه، از M) چیزی باقی نمی‌ماند.

b) مجموعهٔ خانه‌های سیاه را، که از M بعداز t گام به‌دست می‌آید، M_t می‌نامیم. بااستقرا نسبت به n ثابت می‌کنیم، برای هرمجموعهٔ M از n خانه، M_n مجموعه‌ای تهی‌است. این‌مطلب، به‌ازای $n=1$ روشن‌است. فرض می‌کنیم، حکم، برای مجموعه‌هایی که کمتر از n خانه دارند، ثابت‌شده باشد ومجموعهٔ دلخواه M را، شامل n خانه، درنظر می‌گیریم. می‌توان M رادر صفحهٔ مختصاتی Oxy، در ربع $x\geqslant 0$ و $y\geqslant 0$ در نظرگرفت، به‌نحوی که درنوار $0\leqslant x\leqslant 1$ و $0\leqslant y\leqslant 1$، دست‌کم یک‌خانه از M وجودداشته باشد (شکل ۷۵). در این صورت، بنابر فرض استقرا، M_{n-1} با ربع $x\geqslant 1$، $y\geqslant 1$ اشتراکی ندارد (خانه‌هایی که در نوار $0\leqslant x\leqslant 1$ قرار دارند، اثری در اصل مطلب، به‌ازای $x\geqslant 1$ ندارند). بنابراین، M_{n-1} در نوار $0\leqslant y\leqslant 1$ واقع است. به‌همین ترتیب می‌توان ثابت‌کردکه M_{n-1} تنها شامل یک خانه است و M_n تهی می‌شود.



شکل ۷۵



شکل ۷۶

۱۸۲. D را نقطهٔ برخورد AA_1 و BB_1 می‌گیریم. چون دو زاویهٔ A_1CA و B_1CB باهم برابرند (شکل ۷۶) و $A_1C:BC = AC:B_1C$، دو مثلث A_1CA و B_1CB باهم متشابه‌اند و، بنابراین زاویه‌های DBC و DA_1C باهم برابر می‌شوند. بداین ترتیب، نقطه‌های B، D، C و A_1 روی محیط یك دایره‌اند. به‌همین‌ترتیب، ثابت می‌شود که نقطه‌های A، D، C و B_1 هم روی محیط یك دایره واقع‌اند. یعنی D نقطهٔ برخورد دایره‌های محیطی مثلث‌های A_1BC و AB_1C است.

اکنون توجه می‌کنیم که

$$\widehat{ADB} = \text{۱۸۰}^\circ - \widehat{ADB_1} = \text{۱۸۰}^\circ - \widehat{AC_1B}$$

بنابراین نقطه‌های A، D، B و C_1 روی محیط یك دایره‌اند. به این ترتیب، D، نقطهٔ بر خوردِ هر سه دایرهٔ محیط بر مثلث‌هاست و، طبق آن چه قبلاً ثابت‌شد، خط راست CC_1 هم از نقطهٔ D می‌گذرد.

۱۸۳. این مساله را می‌توان با استقرای ریاضی حل کرد. در این جا از راه‌حل دیگری استفاده می‌کنیم.

افراد را از ۱ تا N شماره گذاری و فرد با شمارهٔ i را به شرطی با فرد شمارهٔ j آشنا می‌کنیم که داشته باشیم: $|i-j| \leqslant \frac{N}{۲}$. به سادگی دیده

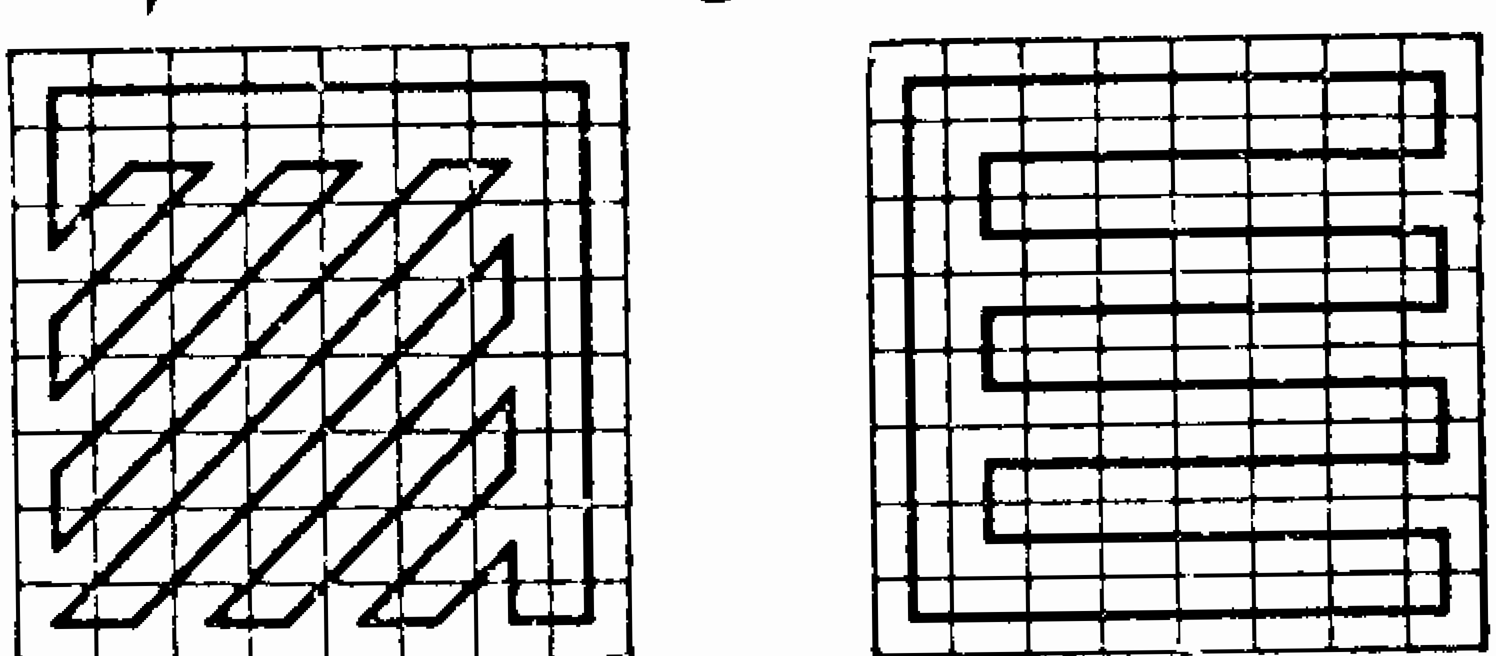
می‌شود که، در این صورت، تعداد آشناهای یکسان تنها بین افراد با شماره‌های k و $N-k$ خواهد بود. به این ترتیب، هیچ سه نفری، تعداد آشناهای مساوی ندارند.

۱۸۴. a) شکل ۷۷. b را ببینید.

b) هر یك از ۲۸ میدان کناری را روی صفحهٔ شطرنج جدا می‌کنیم. شاه ضمن دور زدن صفحه، در هر یك از آن‌ها خواهد بود. این میدان‌ها را به‌همان ردیفی که شاه دیدن کرده است، شماره‌گذاری می‌کنیم. مسیر شاه به ۲۸ قطعه تقسیم می‌شود: از میدان ۱ به میدان ۲، ازمیدان ۲ به میدان ۳، ...، ازمیدان ۲۸ به میدان ۱. فرض می‌کنیم، مسیر شاه برخوردی با خود نداشته باشد، بنا براین، خانه‌های ۱ و ۲، ۲ و ۳، ...، ۲۷ و ۲۸، ۲۸ و ۱، خانه‌های مجاور حاشیهٔ باریك را تشکیل می‌دهند. (اگر مثلاً خانه‌های ۱ و ۲ مجاور نباشند، آن وقت این خانه‌ها، حاشیهٔ کناری را به دو بخش تقسیم می‌کنند و مسیرشاه، ازهرخانهٔ یکی ازاین بخش‌ها، به هرخانهٔ دیگر، بخش «۲ — ۱» را قطع می‌کندکه با شرط مساله درتناقض است.) ولی برای این‌که شاه در خانهٔ مجاور حاشیه بیفتد، باید در یکی از گام‌ها، از خانه‌ای به خانهٔ با رنگ دیگری برود، یعنی حرکت خود را درجهت قائم یا جهت افقی انجام دهد. ازاین‌جا نتیجه‌می‌شودکه، درمسیرشاه، کمتر از ۲۸ حرکت ممکن نیست.

c) روشن است که، طول مسیر شاه، از ۶۴ کمتر نیست و چنین‌مسیری وجود دارد (شکل ۷۷–b).

از طرف دیگر ثابت کردیم که مسیر شاه، کمتر از ۲۸ پاره خط راست به طول واحد ندارد. بنا براین، شاه می‌تواند حداکثر ۳۶ حرکت قطری داشته باشد، به نحوی که تمامی مسیر او از $۲۸+۳۶\sqrt{۲}$ بیشتر



a b

شکل ۷۷

نمی‌شود (نمونهٔ چنین مسیری در شکل ۷۷، a داده شده است).

۱۸۵. چون $\frac{۱}{۲}b^۲ \geqslant \frac{۱}{۲}bc \geqslant ۱$؛ پس $b \geqslant \sqrt{۲}$.

۱۸۶. هر دو خط راستی را که از نقطهٔ O، واقع در درون n ضلعی می‌گذرند و مساحت n ضلعی M را نصف می‌کنند، باهم، در نظر می‌گیریم. در این صورت، بین دوزاویه روبه‌روکه به وسیلهٔ این دو خط راست تشکیل شده است، بخش‌های برابری ازمساحت n ضلعی واقع است ($s_۱$ و $s_۲$ روی شکل ۷۸).

چندضلعی M' راقرینهٔ چندضلعی M نسبت به O فرض‌می‌کنیم. اگر از نقطهٔ O، k خط‌راست طوری عبور کندکه، هرکدام از آن‌ها مساحت را نصف کند، آن وقت در هر یك از $۲k$ زاویه که به وسیلهٔ این k خط راست در صفحه به وجود می‌آید، باید نقطهٔ برخوردی از محیط‌های M و M' وجود داشته باشد.ولی روی‌هرضلع چندضلعی M، بیش‌ازدونقطه ازاین‌گونه نقطه‌های برخورد وجود ندارد. یعنی، اگر M دارای n ضلع باشد،تعداد نقطه‌های برخورد از $۲k$ کمتر و از $۲n$ بیشتر نیست، از این جا $k \leqslant n$.

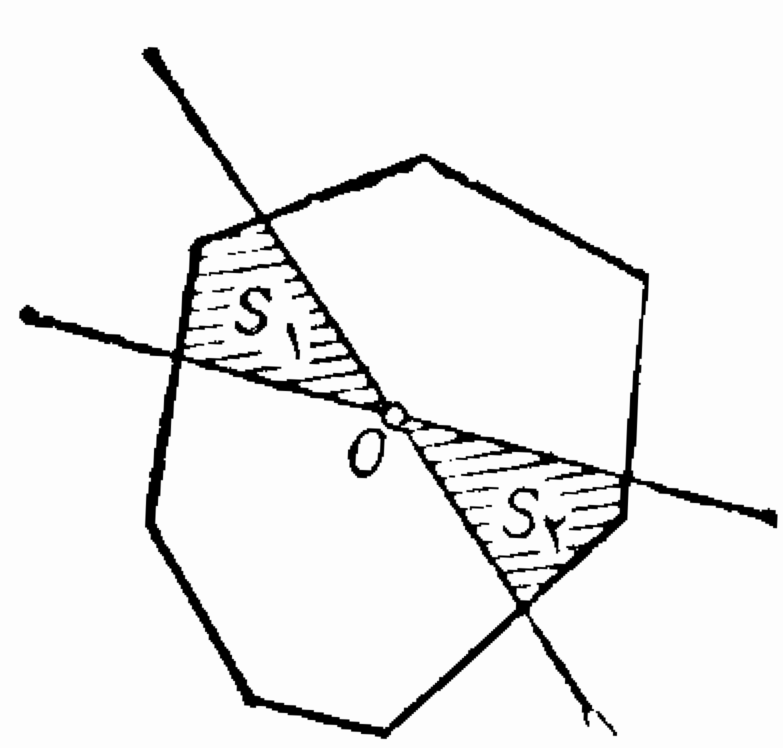
۱۸۷. اگر $x_۱ \geqslant x_۲$، آن وقت نابرابری نتیجه‌ای ازاتحاد زیر است:

$$(x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵)^۲-(x_۱-x_۲+x_۳-x_۴+x_۵)^۲=$$

$$=۴(x_۱+x_۳+x_۵)(x_۲+x_۴)=۴(x_۱x_۲+x_۲x_۳+x_۳x_۴+$$

$$+x_۴x_۵+x_۵x_۱)+۴x_۵(x_۲-x_۱)+۴x_۱x_۴ .$$

و اگر $x_۲ > x_۱$، به همان ترتیب، از اتحاد زیر استفاده می‌شود:



شکل ۷۸

$$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2-(x_1-x_2-x_3+x_4-x_5)^2=$$
$$=4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1)+$$
$$4x_3(x_1-x_2)+4x_2x_4$$

▽ به‌طور کلی، نابرابری

$$(x_1+x_2+\dots+x_n)^2\geqslant c_n(x_1x_2+x_2x_3+\dots+x_nx_1)$$

برای $c_2=2$، $c_3=3$ و $c_4=4$ برقرار است (درضمن، به‌ازای این مقدارهای n، نابرابری برای همهٔ مقدارهای x_i برقرار است ولزومی ندارد x_iها، مثبت باشند). همچنین، به ازای همهٔ مقدارهای $n\geqslant 5$ (و $x_i>0$)، برای $c_n=4$ برقرار است. حکم اخیر از اثباتی که برای $n=5$ داشتیم، به کمك استقرا به دست می‌آید: اگر به صورت دوری حرکت کنیم و شماره‌ها را طوری بگیریم که x_{n+1} کوچکترین باشد، آن وقت

$$(x_1+x_2+\dots+x_{n+1})^2-(x_1+x_2+\dots+x_n)^2\geqslant$$
$$\geqslant-4x_1x_n+4x_1x_{n+1}+4x_nx_{n+1}$$

زیرا

$$2x_{n+1}(x_2+\dots+x_{n-1})+(x_{n+1}-2x_1)(x_{n+1}-2x_n)\geqslant 0$$

۱۸۸. پاسخ: ۲۹ متوازی‌السطوح.

یادآوری می‌کنیم که متوازی‌السطوح با معلوم بودن یکی از رأس‌ها و سه صفحهٔ «میانه» (صفحه‌هایی که، هر کدام از آن‌ها، از رأس‌های متوازی‌السطوح به یك فاصله‌اند، یعنی از مرکز متوازی‌السطوح می‌گذرند و با دو وجه آن موازی‌اند)، به‌طور یك ارزشی‌معین می‌شود.

برای چهار نقطهٔ مفروض K، L، M و N، (به شرطی که روی یك صفحه نباشند)، هفت صفحه وجود دارد که از این نقطه‌ها به یك فاصله‌اند (آن‌ها. چهاروجهی $KLMN$ را در یال‌های «میانه» قطع می‌کنند). از این هفت صفحه، سه صفحه را می‌توان به $C_7^3=35$ طریق انتخاب کرد.

ولی ما به سه صفحه‌ای نیاز داریم که در یك نقطه به هم رسیده باشند. بنا براین، از بین این سه‌تایی‌ها، باید آن‌هایی را که با یك خط راست موازی‌اند، کنار گذاشت. از این گونه صفحه‌های سه‌تایی، ۶ مورد وجود دارد: این‌ها گروه‌های سه‌تایی صفحه‌هایی‌هستند که با یکی از ۶ یال چهاروجهی موازی‌اند. با انتخاب یکی از ۲۹ = ۶ − ۳۵ گروه سه‌تایی از صفحه‌های «میانه»، می‌توانیم به‌وسیلهٔ چهار رأس مفروض، یك متوازی‌السطوح بسازیم؛ برای این منظور، کافی است از چهار نقطهٔ مفروض، صفحه‌هایی موازی با صفحه‌های «میانه» رسم کنیم.

۱۸۹. پاسخ: a) ۱۰ پرسش؛ b) ۱۱؛ c) ۱۲؛ d) ۵۰.

a) ۳۰ عدد را به ۱۰ گروه سه‌تایی تقسیم می‌کنیم و حاصل‌ضرب عددهای هر گروه را می‌پرسیم. روشن است که با تعداد کمتری پرسش نمی‌توان به نتیجه رسید، زیرا هر عدد باید در یکی از گروه‌های سه‌تایی وارد شده باشد.

b) حاصل‌ضرب هفت عدد اول را می‌توان به کمك حاصل‌ضرب‌های $a_1a_2a_3$، $a_1a_4a_5$ و $a_1a_6a_7$ پیدا کرد؛ و بقیهٔ ۲۴ عدد را، مثل حالت a)، به گروه‌های سه تایی تقسیم می‌کنیم. روشن است که، در این حالت‌هم، نمی‌توان با تعداد کمتری پرسش به نتیجه رسید.

c) حاصل‌ضرب ۵ عدداول را ازروی $a_1a_2a_3$، $a_1a_2a_4$ و $a_1a_2a_5$ به دست می‌آوریم و بقیهٔ عددها را به گروه‌های سه‌تایی تقسیم می‌کنیم.

از آن‌جا که هرعدد باید در یك گروه سه‌تایی وارد شده‌باشد، بنا براین روشن است که، تعداد پرسش‌ها نمی‌تواند از ۱۱ کمتر باشد. درضمن، یکی از عددها، درست در دو گروه سه‌تایی وارد شده است (اگر در بیش از دو گروه وارد شده باشد، آن وقت عددی پیدا می‌شود که درهیچ کدام از گروه‌ها وارد نشده است). در حاصل‌ضرب ۱۱ گروه سه‌تایی، مجذور این عدد وجود دارد و، بنا براین، حاصل‌ضرب همهٔ این عددها روشن نمی‌شود.

d) با ۵۰ پرسش می‌توان از حاصل‌ضرب‌های $a_1a_2a_3$، $a_2a_3a_4$، $a_3a_4a_5$، ...، $a_{50}a_1a_2$ اطلاع پیدا کرد. از حاصل‌ضرب این‌ها، مکعب حاصل‌ضرب همهٔ عددها به‌دست می‌آید که بر حاصل‌ضرب خود عددها منطبق است.

کمتر از ۵۰ پرسش کافی نیست. اگر حاصل‌ضرب یکی از گروه‌های سه‌تایی، و مثلاً $a_1a_2a_3$ را ندانیم، آن‌وقت، دو نوع انتخاب از حاصل‌ضرب‌های مختلف وجود دارد که، برای آن‌ها، حاصل‌ضرب همهٔ بقیهٔ سه‌تایی‌ها، یکی است: گروهی که در آن

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \dots = a_{48} = 1$$

و بقیهٔ عددها مساوی ۱ــ باشند و گروهی که همهٔ عددها برابر ۱ باشند. در گروه اول، حاصل‌ضرب همهٔ سه‌تایی‌ها به جز $a_1a_2a_3$ برابر ۱ و در گروه دوم حاصل‌ضرب همه سه‌تایی‌ها برابر ۱ می‌شود.

▽ برای n عدد که، بین آن‌ها، می‌توان از حاصل ضرب سه عدد اطلاع پیدا کرد، مثل مساله‌های a) و b) و c)، کمترین تعداد پرسش، برای $n=3k$ برابر k، برای $n=3k+1$ برابر $k+1$ و برای $n=3k+2$ برابر $k+2$ است. ولی اگر بخواهیم از حاصل‌ضرب عددهای واقع بر محیط دایره اطلاع داشته باشیم (و در هر پرسش تنها بتوانیم حاصل‌ضرب سه عدد مجاور را مشخص کنیم)، وقتی n بر ۳ بخش‌پذیر باشد، به $\frac{n}{3}$ پرسش و وقتی n بر ۳ بخش‌پذیر نباشد، به n پرسش نیاز داریم.

۱۹۰. پاسخ: $36-5^2=11$.

رقم آخر عدد $6^{2k}=36^k$ برابر ۶ و رقم آخر 5^l برابر ۵ است. بنابراین، عدد $|6^{2k}-5^l|$ یا به ۱ ختم می‌شود (اگر $5^l<6^{2k}$) و یا به ۹ (وقتی $5^l>6^{2k}$). برابری $6^{2k}-5^l=1$ ممکن نیست. زیرا در این صورت باید داشته باشیم:

$$5^l=(6^k-1)(6^k+1)$$

و عدد 6^k+1 بر ۵ بخش‌پذیر نیست. به‌ازای $k=1$ و $l=2$ به‌دست می‌آید:

$$36^k-5^l=11$$

برابری $5^l-6^{2k}=9$ هم ممکن نیست، زیرا 5^l، به ازای عددهای طبیعی

l، بر ۳ بخش‌پذیر نیست.

۱۹۱. a) پاسخ: نه همیشه. مثلاً، اگر روی هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع به طول ۲، مثلث‌های متساوی‌الساقین به ارتفاع $\frac{1}{10}$ بسازیم، همهٔ ضلع‌های شش‌ضلعی حاصل، بیشتر از واحد است. در حالی که طول هر قطر آن از ۲ تجاوز نمی‌کند.

b) پاسخ: همیشه.

بین قطرهای AD، BE و CF، دو قطر پیدا می‌شود که زاویهٔ بین آن، α، از ۶۰ درجه کمتر نیست. این دو قطر را، مثلاً، AD و BE می‌گیریم. متوازی‌الاضلاع $BEDK$ را می‌سازیم. چون

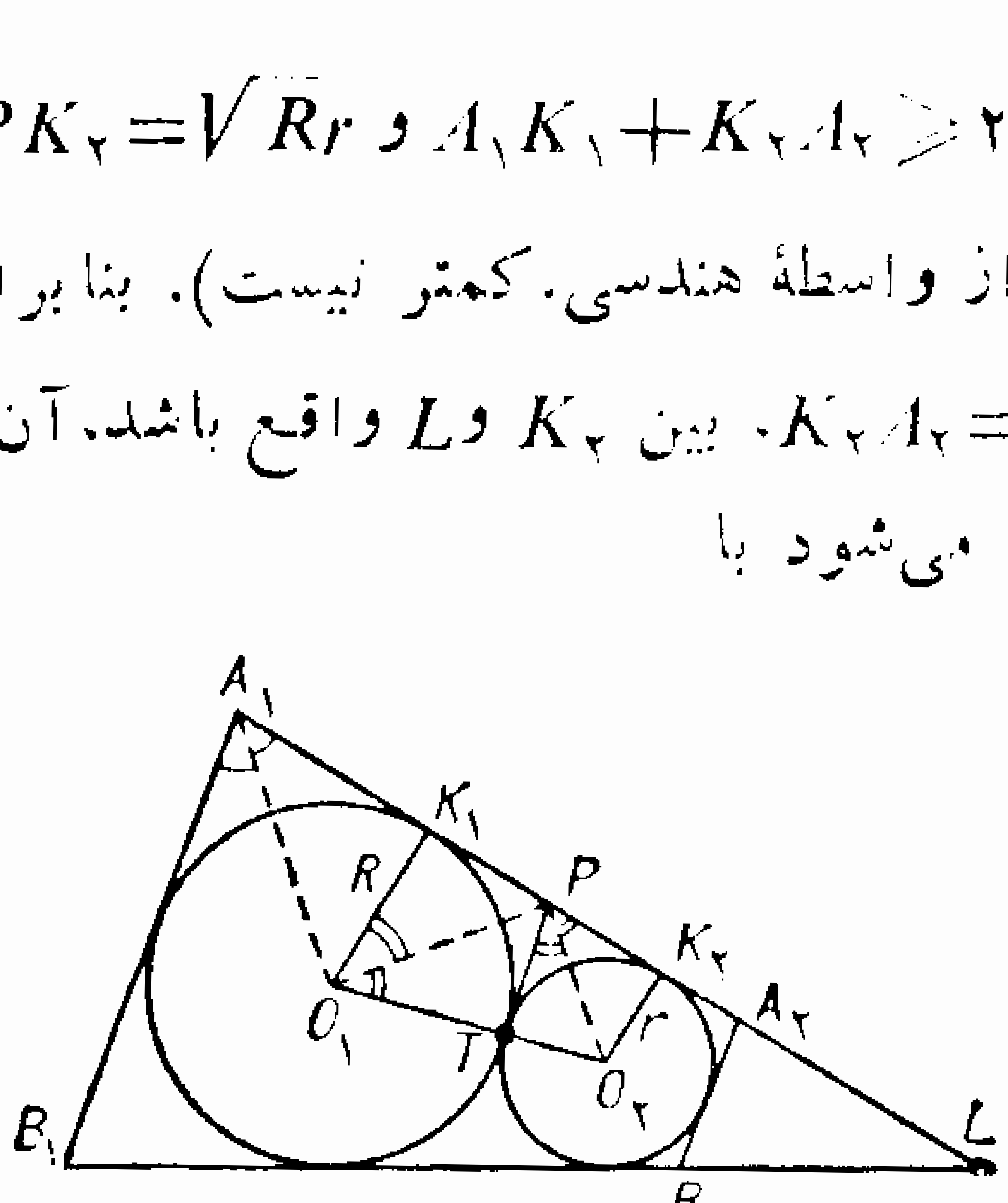
$$BE=DK>2;\ AD>2,\ \widehat{DAK}=\alpha>60^\circ$$

بنابرایـن $AK>2$، ولی $AB+BK\geqslant AK$، بنابراین یا $AB>1$ و یا $ED=BK>1$.

۱۹۲. از تشابه مثلث‌های O_1K_1P و PK_2O_2 (طبق نام‌گذاری‌های شکل ۷۹) به دست می‌آید $K_1P\cdot PK_2=Rr$. همچنین از تشابه مثلث‌های $O_1K_1A_1$ و $O_2K_2A_2$ نتیجه می‌شود: $K_2A_2=Rr\cdot A_1K_1$. اکنون، بدون زحمت، به دست می‌آید:

$$K_1P=PK_2=\sqrt{Rr}\ \text{و}\ A_1K_1+K_2A_2\geqslant 2\sqrt{Rr}$$

(واسطهٔ حسابی، از واسطهٔ هندسی، کمتر نیست). بنابراین، اگر نقطهٔ A_2، که برای آن $K_2A_2=\sqrt{Rr}$، بین K_2 و L واقع باشد، آن‌وقت طول کوچکترین ساق ذوزنقه برابر می‌شود با



شکل ۷۹

$$A_1K_1+K_1K_2+K_2A_2=4\sqrt{Rr}$$

و اگر $K_2L \geqslant A_2K_2$، یعنی

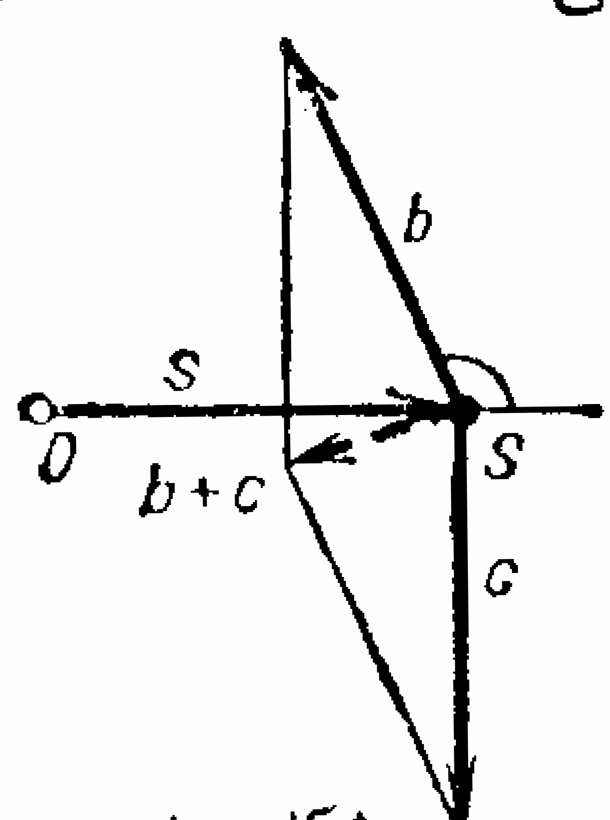
$$\sqrt{Rr} \geqslant \sqrt{Rr}\cdot\frac{2r}{R-r}=q, \quad R\geqslant 3r$$

آن وقت

$$A_1A_2>2\sqrt{Rr}+q+\frac{Rr}{q}=\sqrt{Rr}\cdot\frac{(R+r)^2}{2r(R-r)}$$

به این ترتیب، به‌ازای $R>3r$، حداقل طول ساق برابر $2\sqrt{Rr}$ می‌شود. اگر هم $R\leqslant 3r$، آن وقت ذوزنقهٔ با کوچکترین ساق وجود ندارد. درضمن، می‌توان حکم کرد که طول ساق، از $\sqrt{Rr}\cdot\frac{(R+r)^2}{2r(R-r)}$ بیشتر است (این ارزیابی، دقیق است).

۱۹۳. همهٔ بردارها را، به مبداء نقطه‌ای مثل O می‌گیریم. ثابت‌می‌کنیم، اگر k بردار به مجموع $s=\overrightarrow{OS}$ (شکل ۸۰) و $|s|\leqslant 1$ انتخاب کنیم، آن وقت، از بین بقیهٔ بردارها می‌توان یا یك بردار a را انتخاب کرد که برای آن $|\mathbf{s}+\mathbf{a}|\leqslant 1$ و یا دو بردار $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ را می‌توان درنظر گرفت که برای آنها $|\mathbf{s}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|\leqslant 1$. درواقع، اگر بین بقیهٔ بردارها بردار $\mathbf{a}$ وجود دارد که برای آن $\widehat{(\mathbf{a},\mathbf{s})}\geqslant 120^\circ$، آن‌وقت $|\mathbf{a}+\mathbf{s}|\leqslant 1$. ولی اگر چنین برداری وجود نداشته باشد، آن وقت، چون در هردو طرف خط راست DS، بردارهایی از دستگاه وجود دارد، می‌توان به عنوان $\mathbf{b}$



شکل ۸۵

برداری را انتخاب کرد که، در یکی از دو نیم‌صفحه، بزرگترین زاویه را با s بسازد. به همین ترتیب، بردار c را درنیم صفحهٔ دیگر درنظرمی گیریم.

روشن است که یکی از دو زاویهٔ $(\widehat{\mathbf{c}\text{،}\mathbf{s}})$ یا $(\widehat{\mathbf{b}\text{،}\mathbf{s}})$ منفرجه است و، بنابراین، $(\mathbf{b}\text{،}\mathbf{c})>۱۲۰^\circ$ (مثلا فرض کنید $(\mathbf{b}\text{،}\mathbf{s})>۹۰^\circ$)دراینصورت $|\mathbf{s}+\mathbf{b}|<\sqrt{۲}$،

ولی، $(\widehat{\mathbf{b}+\mathbf{c}\text{،}\mathbf{s}})>۱۲$ و در نتیجه $|\mathbf{s}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|\leqslant ۱$. بـه این ترتیب، اگر به دستگاه با مجموع $\mathbf{s}$، ابتدا بردار $\mathbf{b}$ وسپس بردار $\mathbf{c}$ را اضافه کنیم، بعد از هر کام، مجموع از $\sqrt{۲}$ کوچکتر است.

۲/ ثابت کردیم که، در صورت مساله، می‌توان ۲ را با $\sqrt{۲}$ عوض کرد. با استدلالی ظریف‌تر می‌توان ثابت کرد که همیشه می‌توان بردارها را طوری شماره‌گذاری کرد که مجموع k بردار اول آن از $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ بیشتر نباشد؛ در ضمن، ارزیابی اخیر، کاملاً دقیق است: مثال $۲n+۱$ بردار که یکی از آن‌هـا $(۰\text{،}۱-)$، n عـدد آن‌هـا $\left(\frac{۱}{n}\text{،}\sqrt{۱-\frac{۱}{n^۲}}\right)$ و n عدد دیگـر آن باشند، $\left(\frac{۱}{n}\text{،}-\sqrt{۱-\frac{۱}{n^۲}}\right)$ نشان می‌دهد که عدد $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ را نمی‌توان کوچکتر کرد.

قضیهٔ مشابهی وجود دارد، که آن را پیش‌قضیه شتینر گـویند. و آن رامی‌توان درفضای m بعدی ثابت کرد (برای هر«نُرم» وطولی از بردارها)؛ در ضمن، ثابت متناظر شتینر از m تجاوز نمی‌کند.

۱۹۴. پاسخ: از بین عـددهای a، b و c، دو عدد برابر ۰ و سومی برابر $۱\pm$ (روی هم، شش جواب).

کافی است در اتحاد مفروض، پشت سر هم قرار دهیم:

$$x=y=z=۱;\ x=y=۰ \text{ و } z=۱;\ x=۱ \text{ و } y=-\text{ و } z=۰$$

به این دستگاه می‌رسیم:

$$|a+b+c|=۱\text{،}\ |a|+|b|+|c|=۱\text{،}$$

$$|a-b|+|b-c|+|c-a|=۲$$

چون $|a+b+c|=|a|+|b|+|c|$، بنا بر این a، b و c هم‌علامت‌اند، یعنی $ab \geqslant ۰$، $bc \geqslant ۰$، $ca \geqslant ۰$ ولی در نابرابری

$$|a-b|+|b-c|+|c-a| \leqslant ۲|a|+۲|b|+۲|c|=۲$$

(برای نابرابری، از $|a-b| \leqslant |a|+|b|$ استفاده کرده‌ایم)؛ برابری تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم: $ab \leqslant ۰$، $bc \leqslant ۰$، $ac \leqslant ۰$. از این‌جا نتیجه می‌شود:

$$ab=bc=ac=۰$$

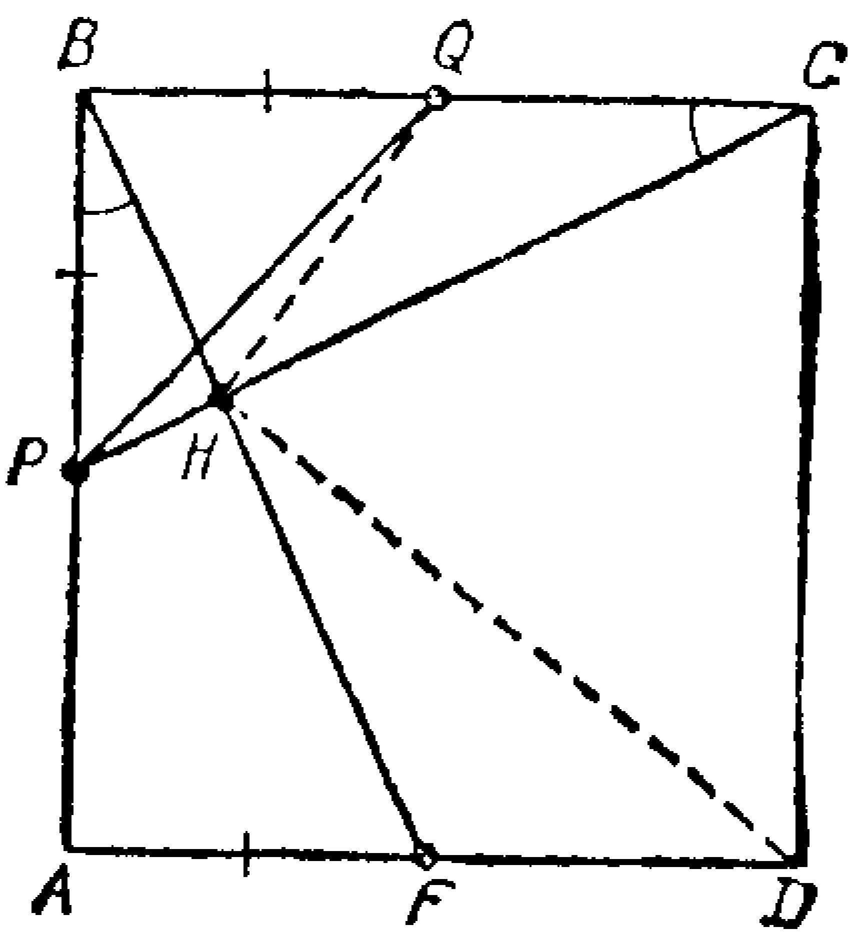
یعنی دو عدد از سه عدد a، b و c برابر صفر و سومی (با توجه به یکی از معادله‌های دستگاه)، از لحاظ قدرمطلق، برابر واحد است.

۱۹۵. F را نقطهٔ برخورد خط راست BH با خط راست AD می‌گیریم (شکل ۸۱) از برابری مثلث‌های ABF و BPC (در یک ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه و یک زاویهٔ حاده) نتیجه می‌شود:

$$AF=BP=BQ \text{ و } FD=CQ$$

بنا بر این، چهارضلعی $QCDF$، یک مستطیل است.

دایرهٔ محیط بر این مستطیل، از نقطهٔ H می‌گذرد، زیرا FC قطر این دایره است و، درضمن $\widehat{FHC}=۹۰^\circ$. چون DQ قطر مستطیل است، بنا بر این



شکل ۸۱

$\widehat{DHQ}=90^\circ$.

۱۹۶. برای اثبات کافی است به این نکته توجه کنیم که، ضمن تغییر رنگ هر نقطهٔ «ویژه»، از تعداد پاره‌خط‌های راستی که در دو انتهای خود دو رنگ مختلف دارند، دست‌کم یکی کم می‌شود. بنابراین، تجدید رنگ را تنها به تعداد محدودی می‌توان انجام داد و، بعد از آن، نقطهٔ «ویژه‌ای» باقی نمی‌ماند.

۱۹۷. پاسخ: $n=k$ و k برابر ۱، ۸ یا ۹.

اگر n^n دارای k رقم و k^k دارای n رقم باشد، آن وقت

$$10^{k-1}\leqslant n^n<10^k \text{ و } 10^{n-1}\leqslant k^k<10^n$$

برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم: $k\geqslant n$. دراین‌صورت $n^n<10^n$، یعنی $n<10$ و $k<10$. کافی است تحقیق کنیم:

$$2^2<10,\ 3^3<100,\ 4^4<1000,\ 5^5<10^4,\ 6^6<10^5,$$

$$7^7<10^6,\ 10^7<8^8<10^8,\ 10^8<9^9<10^9$$

۱۹۸. مثلث ABC را دور نقطهٔ C به اندازهٔ ۹۰ درجه طوری دوران می‌دهیم که نقطهٔ A به نقطهٔ B برود. دراین صورت، نقطهٔ E به نقطهٔ F واقع بر خط راست AC می‌رود که، برای آن داریم:

$$FB\|CL\|DK \text{ و } FC=BD$$

بنابراین $BL=LK$.

۱۹۹. a) می‌توان.

موش در هر جا که باشد، باید گربه‌ها را طوری قرار داد که موش، روی پاره‌خط راست بین آن‌ها و موازی یکی از قطرهای صفحهٔ شطرنج باشد. با هر حرکت موش، گربه‌ها طوری حرکت می‌کنند که باز هم، مثل قبل، موش در بین آن‌ها، روی خط راستی موازی قطر قرار گیرد.

b) از جایی که موش قرار دارد، دو پاره‌خط راست موازی قطرها رسم و خانه‌های این پاره‌خط‌های راست را استثنا می‌کنیم. در یکی از چهار

بخشی که به این‌وسیله روی صفحهٔ شطرنج پیدا می‌شود، گربه‌ای وجود ندارد و موش باید در همین بخش، روی مسیر قطری بـه سمت کنارهٔ صفحه برود. روشن است که گربه‌ها نمی‌توانند به او برسند، زیرا بعد از هر حرکت گربه‌ها، دربرابر موش و درجهت حرکت او، بخشی از صفحه وجود دارد که گربه‌ای در آن پیدا نمی‌شود.

۲۰۰. a) برای این‌که ردیف موردنظر را به دست آوریم، در نیمی از سطر، عددهای زوج و در نیم دیگرسطر، عددهای فرد را می‌نویسیم. در این صورت، اگر دو عدد از دو نیمهٔ مختلف سطررا در نظر بگیریم، نصف مجموع آن‌ها، عددی درست نمی‌شود و، بنابراین، برابر با عددی واقع در بین آن‌ها نخواهد بود. سپس، در هریك از دونیمه سطر، مشابه همان عمل را انجام می‌دهیم: هر یك از دونیمه را به دو گروه چهارتایی تقسیم می‌کنیم و در آن‌ها، عددهای بـه صورت $۴k$، $۴k+۲$، $۴k+۱$ و $۴k+۳$ را قرار می‌دهیم. در این صورت نصف مجموع دو عدد در هر یك از دو نیمهٔ سمت چپ عددی فرد و در هر یك از دونیمهٔ سمت راست عددی زوج است و، بنابراین، برابر با عددی در بین آن دو عـدد نیست. سپس، هر یك از چهار بخش را، به دو بخش تقسیم می‌کنیم؛ درضمن دراین جا، نقش «زوج» و «فرد» به عهدهٔ عددهایی است که در تقسیم بر ۸ به باقی‌مانده‌های مختلف می‌رسند و غیره. نتیجهٔ ردیف عددها، به‌این‌صورت درخواهد آمد:

۲۶، ۱۰، ۱۸، ۲، ۳۰، ۱۴، ۲۲، ۶، ۲۶، ۱۲، ۲۰، ۴، ۳۲، ۱۶، ۲۴، ۸،

۲۵، ۹، ۱۷، ۱، ۲۹، ۱۳، ۲۱، ۵، ۲۷، ۱۱، ۱۹، ۳، ۳۱، ۱۵، ۲۳، ۷

b) برای این‌که حکم مساله را برای هرتعداد N عدد ثابت کنیم، کافی است اثبات را، برای $N=۲^n$ بیاوریم (عددهای اضافی را می‌توان حذف کرد: مثلاً، اگرردیف عددها را برای‌تعداد $۲^۷=۱۲۸$ عدد به دست آوریم، می‌توان عددهای بزرگتر از ۱۰۰ را از بین آن‌ها حذف کرد و ردیف لازم را برای $N=۱۰۰$ عدد به‌دست‌آورد). اندیشهٔ اصلی راه‌حل، در a) نشان داده شد؛ اثبات کوتاه‌تر را می‌توان با روش استقرای روی n به دست آورد.

حکم مساله برای $n=۱$ و $n=۲$ درست است: ردیف‌های $(۱، ۲)$ و $(۳، ۱، ۴، ۲)$ به دست می‌آید. اگر $(a_۱، a_۲، \ldots، a_N)$ ردیف موردنظر $N=۲^n$ عدد ۱، ۲، ...، N باشد، آن وقت

$$۲a_۱، ۲a_۲، \ldots، ۲a_N، ۲a_۱-۱، ۲a_۲-۱، \ldots، ۲a_N-۱$$

ردیف مورد نظر برای $۲N=۲^{n+۱}$ عـدد خواهد بود: درستی حکم برای هر یك از دو نیمهٔ این ردیف، با توجه به فرض استقرا، با شرط لازم مساله سازگارند.

۲۰۱. پاسخ: ۱۵ عدد (۱۱۱، ۲۲۲، ...، ۹۹۹، ۴۰۷، ۵۱۸، ۶۲۹، ۳۷۰، ۴۸۱، ۵۹۲).

$\overline{abc}$ را عدد مجهول می‌گیریم: بنا بر شرط مساله باید داشته باشیم:

$$\overline{abc}+\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba}=۶\overline{abc}$$

از آن‌جا

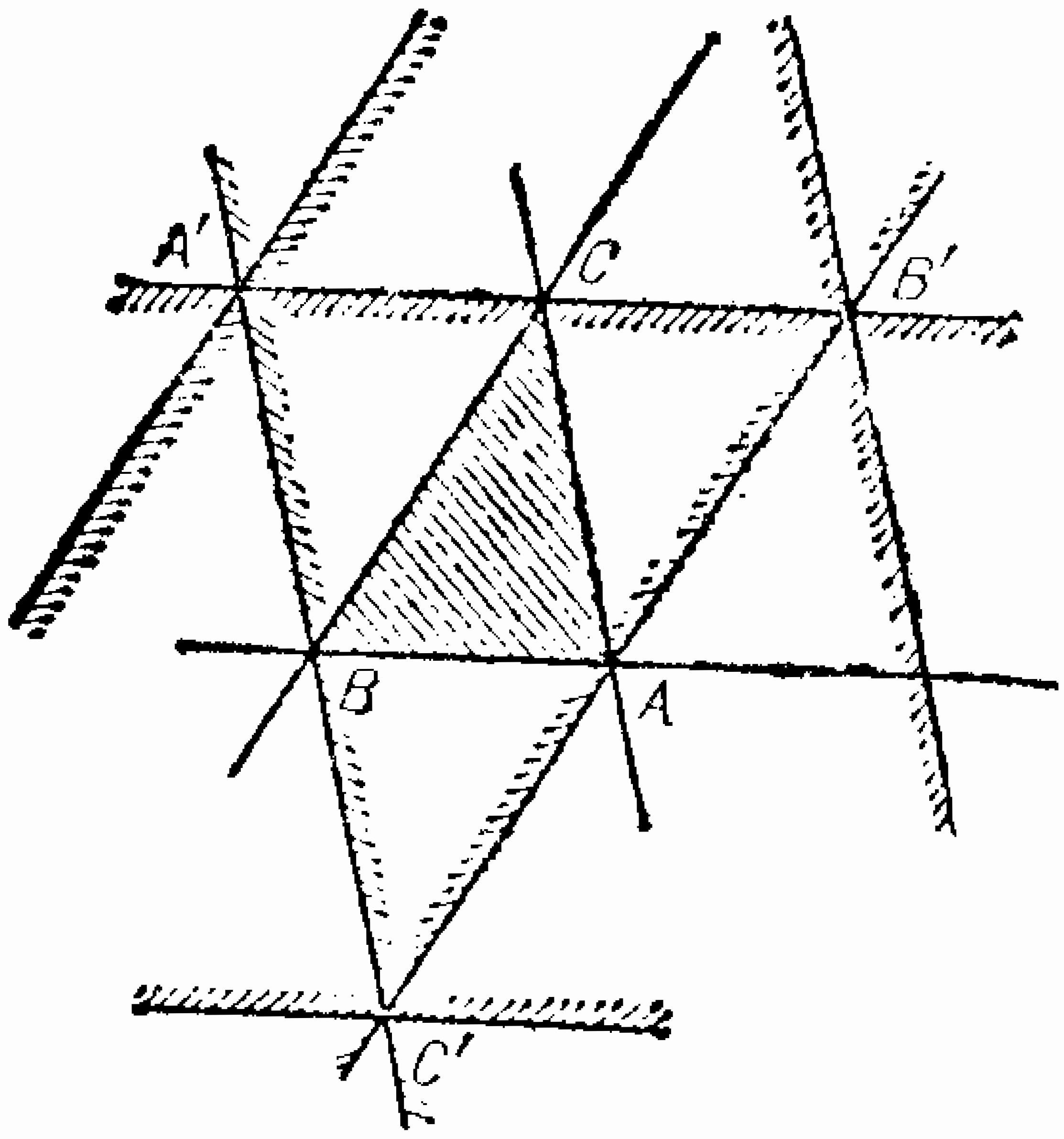
$$۲۲۲(a+b+c)=۶(۱۰۰a+۱۰b+c)\Rightarrow ۷a=۳b+۴c$$

این معادله را می‌توان، با آزمایش همهٔ حالت‌ها، حل کـرد (مثلاً a را، به ترتیب، برابر ۱، ۲، ...، ۹ گرفت و درهر مورد، معادلهٔ حاصل را با توجه به این که b و c دورقم‌اند، حل‌کرد). ولی با اندکی تغییردرمعادله، می‌توان راه‌حل کوتاه‌تری به دست آورد. معادله را به‌این‌صورت می‌نویسیم:

$$۷(a-b)=۴(c-b)$$

از آن‌جا یا $a=b=c$، و یا $a-b=۴$ و $c-b=۷$ (که دراین صورت $۰\leqslant b\leqslant ۲$)؛ ویا $b-a=۴$ و $b-c=۷$ (که دراین‌صورت $۷\leqslant b\leqslant ۹$).

۲۰۲. مجموعهٔ رأس‌های چندضلعی مفروض P را درنظر می‌گیریم و، از بین آن‌ها، سه رأس A، B و C را طوری انتخاب می‌کنیم که، مساحت مثلث ABC، حداکثر باشد. (روشن است که، مساحت مثلث ABC، ازمساحت هر مثلثی کـه بتوان در چندضلعی P جا داد، کمتر نیست. در ایـن‌جا، از



شکل ۸۲

حالت‌های خاص این حقیقت استفاده خواهیم کرد.)

M را نقطه‌ای از چندضلعی P می‌گیریم. چون مساحت مثلث MBC از مساحت مثلث ABC بیشتر نیست، بنابراین M در نواری قرار دارد که، محور تقارن آن، خط راست BC و عرض آن دو برابر ارتفاعی از مثلث ABC است که از رأس A گذشته باشد. اگر به همین استدلال دربارهٔ مثلث‌های MAB و MCA متوسل شویم، معلوم می‌شود که، همهٔ نقطه‌های چندضلعی، متعلق به اشتراك سه نوار حاصل‌اند، مثلث $A'B'C'$ (شکل ۸۲)، که مساحت آن برابر است با $۴S_{ABC}=۴$.

$\bigtriangledown$ شبیه این استدلال را در مسالهٔ ۸۰ داشتیم. در واقع در آن‌جا، ثابت کردیم، مثلث $A'B'C'$، مجموعهٔ نقطه‌های M است که، برای آن‌ها، همهٔ سه مساحت S_{MAB}، S_{MBC}، S_{MCA} از S_{ABC} تجاوز نمی‌کنند.

a.۲۰۳) تابع f در بازهٔ $[۰،۱]$ غیر نزولی است، زیرا از $۰\leqslant y\leqslant x\leqslant ۱$ نتیجه می‌شود:

$$f(x)=f((x-y)+y))\geqslant f(x-y)-f(y)\geqslant f(y)$$

به جزاین، برای همهٔ مقدارهای x، داریم: $f(۲x)\geqslant ۲f(x)$. با توجه به این نکته‌ها، به دست می‌آید:

$$\text{به‌ازای } \tfrac{۱}{۲}<x\leqslant ۱:\ f(x)\leqslant f(۱)\leqslant ۲x\ ؛$$

به‌ازای $\frac{1}{4}<x\leqslant\frac{1}{2}$: $2x\geqslant\frac{1}{2}\geqslant f(2x)\frac{1}{2}\geqslant f(x)$؛

. . . .

به‌ازای $\frac{1}{2^{n+1}}<x\leqslant\frac{1}{2^n}$: $2x\geqslant\frac{1}{2^n}\geqslant f(2x)\frac{1}{2}\geqslant f(x)$؛

. . . .

و چون $f(0)=0$، پس $f(2x)\leqslant 2x$ (به‌ازای همهٔ مقدارهای x).

b) پاسخ: درست نیست. مثال

$$f(x)=\begin{cases}0 & \left(0\leqslant x<\frac{1}{2}\right)\\ 1 & \left(\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\right)\end{cases}$$

این تابع، با همهٔ شرط‌های مساله سازگار است. ولی

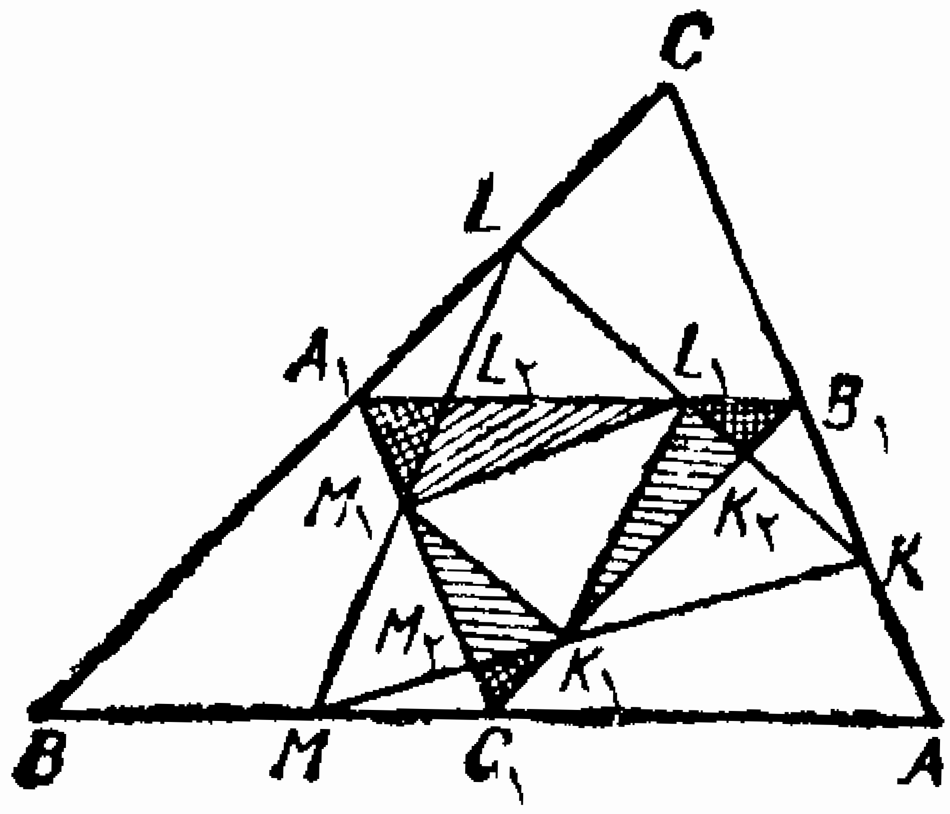
$$f(0/51)=1>1/9\times 0/51=0/969$$

۲۰۴. پاسخ: $\frac{1}{8}$.

با توجه به نام‌گذاری‌های شکل ۸۳ داریم:

$$\frac{C_1M_2}{M_2M_1}\leqslant\frac{AK}{KC}\leqslant\frac{AB_1}{B_1C}=1$$

بنابراین $C_1M_2\leqslant M_2M_1$ و در نتیجه $S_{C_1M_2K_1}\leqslant S_{M_2M_1K_1}$. به‌همین ترتیب



شکل ۸۳

ثابت می‌شود: $S_{L_2L_1M_1} \leqslant S_{AL_2M_1}$ و $S_{K_2K_1L_1} \leqslant S_{B_1K_2L_1}$.

S را مساحت بخش مشترك مثلث‌های KLM و $A_1B_1C_1$ می گیریم.

از مجموع نابرابری‌های حاصل، به دست می آید:

$$S_{A_1B_1C_1} - S \leqslant S_{K_1M_2M_1} + S_{M_1L_2L_1} + S_{L_1K_2K_1} =$$

$$= S - S_{K_1M_1L_1} \leqslant S$$

از آن‌جا $\frac{1}{4} = S_{A_1B_1C_1} \leqslant 2S$، یعنی $S \geqslant \frac{1}{8}$. اگر نقطهٔ M بر C_1، نقطهٔ L بر C و نقطهٔ K بر A منطبق باشند، آن وقت $S = \frac{1}{8}$.

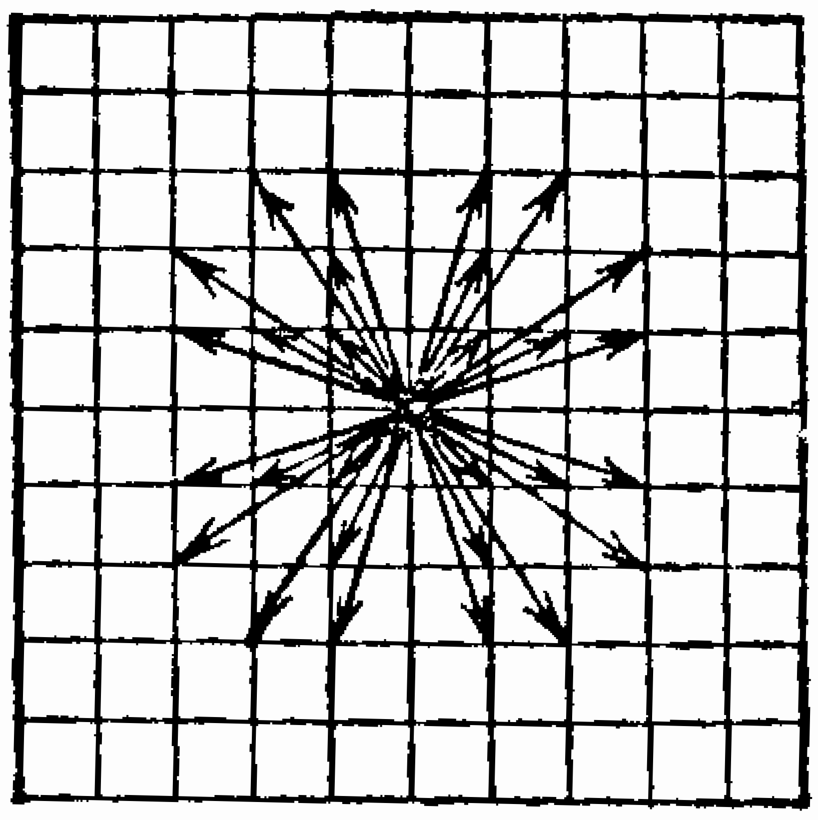
۲۰۵. اگرضمن دوران به اندازهٔ زاویهٔ α، دور نقطهٔ O، وتر Q_1Q_2 از دایرهٔ به مرکز O، از وتر P_1P_2 به دست آید، آن وقت می‌توان نقطهٔ R، محل برخورد خط‌های راست P_1P_2 و Q_1Q_2 را از نقطهٔ M وسط وتر P_1P_2، ضمن دوران به اندازهٔ $\frac{\alpha}{2}$ دور نقطهٔ O (درضمن، نقطهٔ M، بـه نقطهٔ M' از پاره‌خط راست OR می‌رود) تجانس به مرکز O و ضریب

$$k = \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} = OR : OM = OR : OM'$$

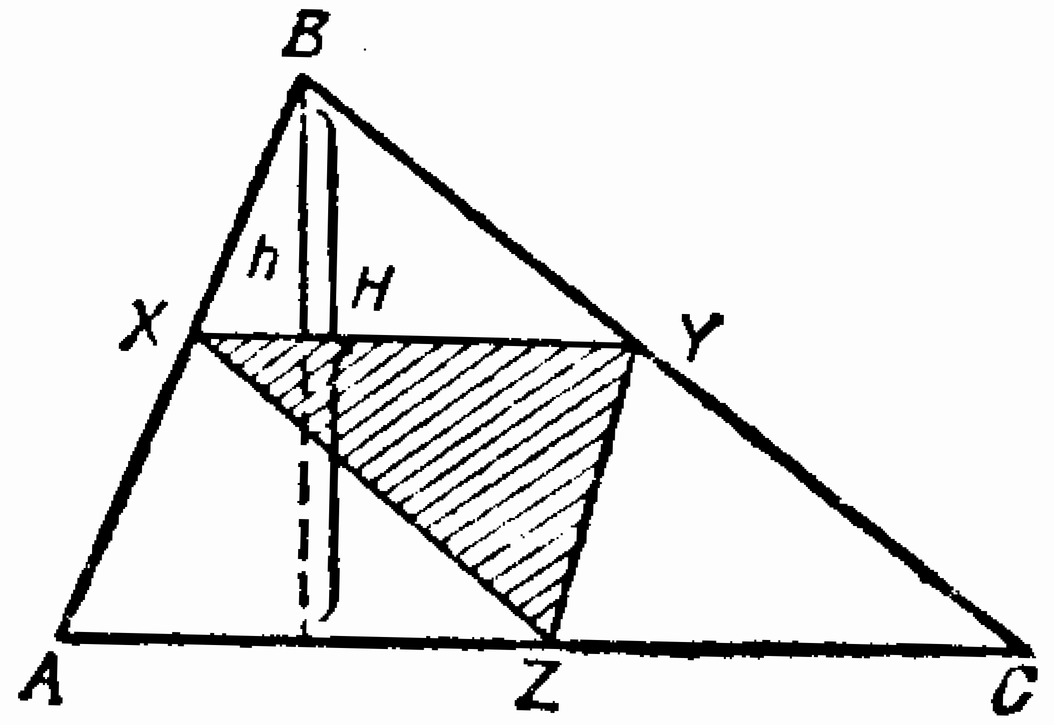
به دست می‌آید. ازاین نکته‌ها، برای حل مسالهٔ استفاده می کنیم.

a) مثلث $A_2B_2C_2$ با تبدیل‌هایی کـه شرح دادیم، از مثلث KLM بەدست می آیدکه از وصل وسط ضلع‌های مثلث ABC بەدست آمده است. چون دومثلث KLM و $A_2B_2C_2$ و،هم‌چنین، دومثلث KLM و ABC متشابه‌اند، بنا براین، مثلث‌های ABC و $A_2B_2C_2$ متشابه می‌شوند.

b) چهارضلعی موردنظرمساله، با تبدیل تشابهی، ازچهارضلعی بەدست می‌آیدکه وسط ضلع‌های $ABCD$ را بەهم وصل کرده است. ولی از وصل وسط ضلع‌های هر چهارضلعی، یك متوازی‌الاضلاع بەدست می‌آید.



شکل ۸۵



شکل ۸۴

۲۰۶ پاسخ: $\frac{1}{4}$.

قبل ازهمه یادآوری می‌کنیم که، بازی‌کن دوم، می‌تواند بدون توجه به بازی اولی، خود را به $S_{XYZ} \leqslant \frac{1}{4}$ برساند. برای این‌منظور، باید Y را طوری انتخاب کند که XY موازی با AC در آید (شکل ۸۴). دراین‌صورت، برای هر نقطهٔ Z واقع برضلع AC، خواهیم داشت:

$$\frac{S_{XYZ}}{S_{ABC}} = \frac{XY}{AC} \cdot \frac{H-h}{H} = \frac{h(H-h)}{H^2} \leqslant \frac{1}{4}$$

از طرف دیگر، اگر نفراول، نقطه‌های X و Z را در وسط ضلع‌های AB و AC درنظر بگیرد، می‌تواند به $S_{XYZ} = \frac{1}{4}$ برسد (بدون ارتباط با بازی دومی).

▽ مسالهٔ مشابهی که در آن، به‌جای مساحت‌ها، صحبت بر سر محیط‌ها باشد، مساله‌ای دشوارتر است.

۲۰۷. پاسخ: $4+4\sqrt{2}+8\sqrt{5}+8\sqrt{10}+8\sqrt{13}$.

محیط ۳۲ضلعی $A_1A_2 \ldots A_{32}$ را به‌صورت مجموع ۳۲ بردارمی گیریم:

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{32}A_1}=0$$

چون با هر ۳۲ بردار با جهت‌های مختلف ومجموع ۰، می‌توان یك ۳۲ضلعی محدب ساخت، مساله به این جا منجر می‌شود که: ۳۲ بردار پیدا کنیم که با

شرط‌های زیر سازگار باشند:

الف) ابتدا وانتهای هر بردار، در نقطه‌های گرهی کاغذ شطرنجی باشد؛

ب) هر دو بردار، دارای جهت‌های مختلف باشند؛

ج) مجموع همهٔ بردارها، برابر ۰ باشد؛

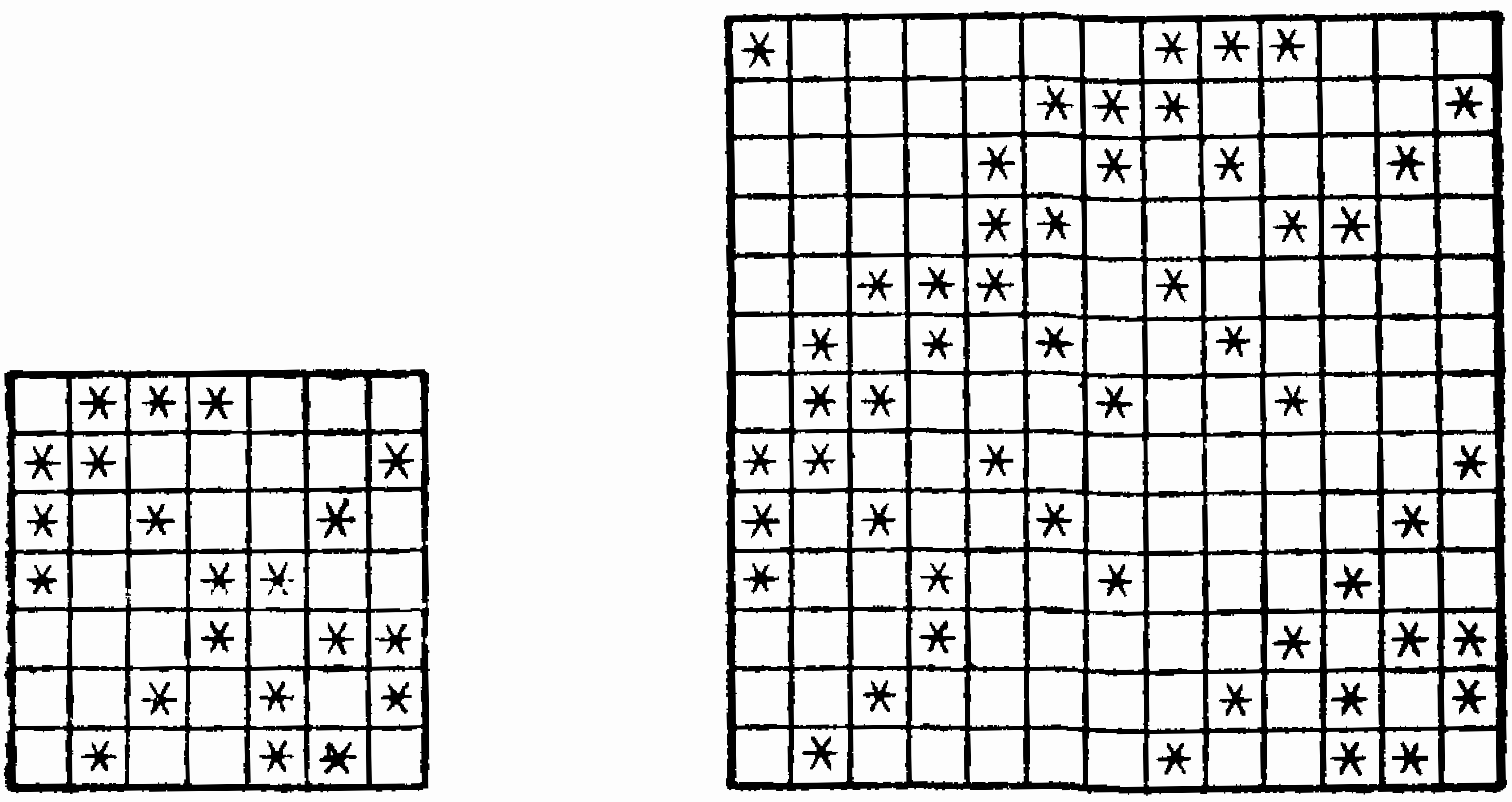
د) با برقراری شرط‌های الف) تا ج)، مجموع طول‌های همهٔ بردارها، حداقل ممکن باشد.

همهٔ بردارها را با مبداء مشترك درنظر می‌گیریم. دستگاه ۳۲ بردار شکل ۸۵، با همهٔ شرط‌های الف) تا د) سازگارند. در بین آن‌ها، چهار بردار به طول واحد (آن‌ها را روی شکل ۸۵ نیاورده‌ایم)، چهار بردار به طول $\sqrt{۲}$ و سه گروه هشت برداری، به ترتیب، به طول $\sqrt{۵}$، $\sqrt{۱۰}$ و $\sqrt{۱۳}$ وجود دارد.

▽ به همین ترتیب می‌توان n گروه چهار برداری با جهت‌های مختلف انتخاب کرد، به‌نحوی که $۴n$ ضلعی محدبی که با ضلع‌هایی به طول این بردارها و با رأس‌هایی واقع در نقطه‌های گرهی صفحهٔ شطرنجی ساخته می‌شود، حداقل محیط را داشته باشد.

۲۰۸. پاسخ: a) $k=۲۱$؛ b) $k=۵۲$ (شکل ۸۶).

تعداد این گونه‌نقطه‌ها را، درحالت کلی، برای مربع $m \times m$ محاسبه



a　　　　b

شکل ۸۶

می کنیم.

x_i را تعداد نقطه‌های واقع در سطر با شماره i و $\sum_{i=1}^{m} x_i = k$ می گیریم.

اگر در یك سطر، دو نقطه را علامت بگذاریم، آن وقت در هیچ سطر دیگری نمی‌توان دو نقطه را در همین دوستون علامت گذاری کرد. چون در سطر iام به تعداد x_i نقطه علامت گذاشته شده است، از آن می‌توان به تعداد $\frac{1}{2}x_i(x_i-1)$ زوج ساخت. ولی همهٔ این زوج‌ها باید مختلف باشند، بنا براین تعداد آن‌ها نمی‌تواند از تعداد کل زوج‌های ممکن تجاوز کند، یعنی

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i(x_i-1)}{2} \leqslant \frac{m(m-1)}{2}$$

از این جا نتیجه می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \leqslant m(m-1) + \sum_{i=1}^{m} x_i = m(m-1) + k$$

از آن جا که

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \geqslant \frac{1}{m}(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^2 = \frac{1}{m}k^2$$

به این نا برابری می‌رسیم:

$$\frac{1}{m}k^2 \leqslant m(m-1) + k$$

و از این نا برابری به‌دست می‌آید:

$$k \leqslant \frac{1}{2}(m + m\sqrt{4m-3}) \qquad (*)$$

به‌ازای $m=7$ و $m=13$، به‌ترتیب به‌دست می‌آید: $k \leqslant 21$ و $k \leqslant 52$.

▽ دشوارتر از حل مسأله، پیدا کردن مثال‌هایی است که حداکثر مقدار k را تحقق بخشد. راه ساختن آن‌ها را می آوریم. در مثال a) به‌عنوان

«شمارهٔ» سطرها (و همچنین ستون‌ها) از سه‌تایی‌های شامل عددهای ۰ و ۱ استفاده می‌کنیم، به‌جز سه‌تایی (۰، ۰، ۰). از این سه‌تایی‌ها، ۷ عدد وجود دارد:

$$(۱،۱،۱)؛ (۱،۱،۰)؛ (۱،۰،۱)؛ (۰،۱،۱)؛ (۱،۰،۰)؛$$
$$(۰،۱،۰)؛ (۰،۰،۱)$$

خانهٔ محل برخورد سطر $(a_1، a_2، a_3)$ وستون $(x_1، x_2، x_3)$ را به‌شرطی علامت می‌گذاریم که $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$، عددی زوج باشد.

در مثال b)، به جای «شمارهٔ» سطرها وستون‌ها، از سه‌تایی‌های شامل عددهای ۰، ۱ و ۱ـــ، به‌جز سه‌تایی (۰، ۰، ۰) استفاده می‌کنیم؛ درضمن از بین دو «سه‌تایی» که یکی از آن‌ها ازضرب دیگری در ۱ـــ پیدا می‌شود، تنها یکی را درنظر می‌گیریم. تعداد این سه‌تایی‌ها برابراست با ۱۳:
(۱، ۱، ۱)؛ سه‌تبدیل (۰، ۱، ۱)؛ سه تبدیل (۱ـــ، ۱، ۱)؛ سه‌تبدیل (۰، ۱، ۱ـــ) وسه‌تبدیل (۰، ۰، ۱).

خانهٔ محل برخورد سطر $(a_1، a_2، a_3)$ و ستون $(x_1، x_2، x_3)$ را به شرطی علامت می‌گذاریم که $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

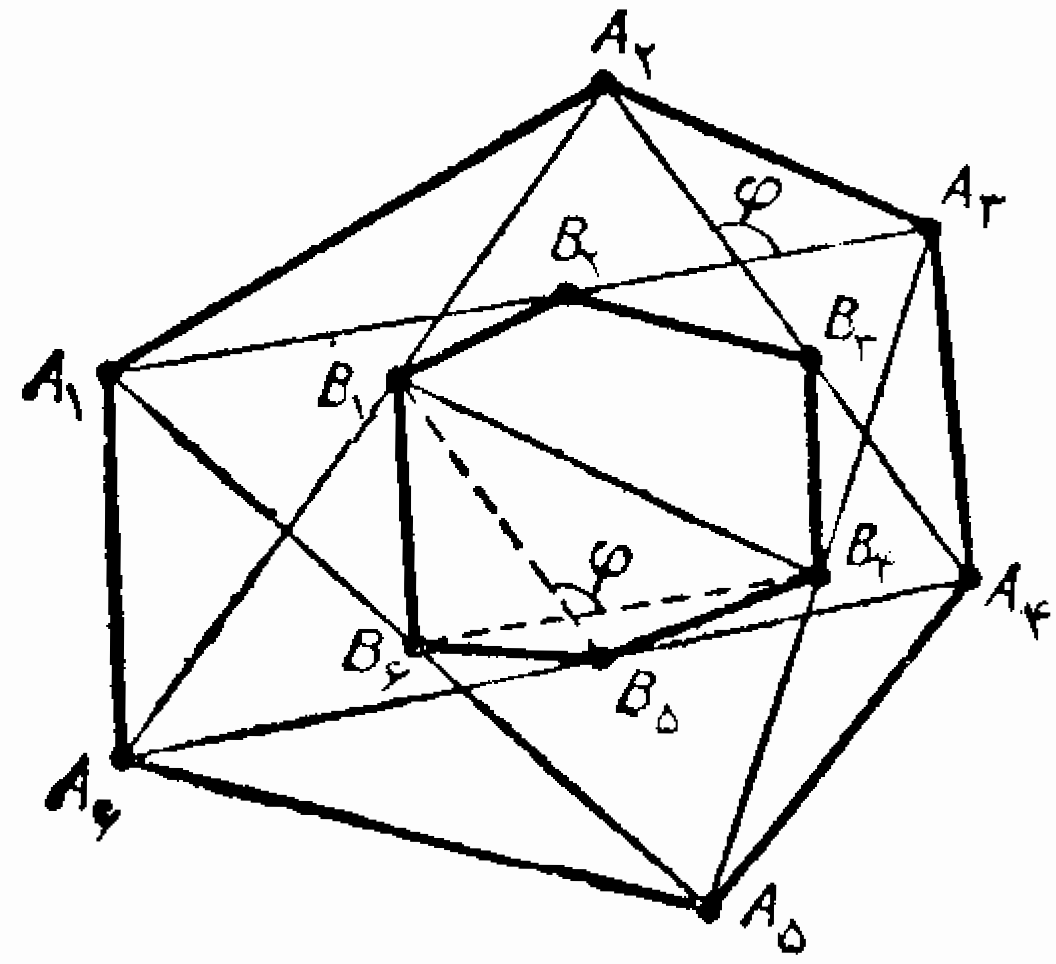
واین، عبارت است ازساختمان صفحه‌های تصویری متناهی برمیدانی از $p=۲$ و $p=۳$ عضو: ستون‌ها متناظر با نقطه‌ها و سطرها متناظر با خط‌های راست صفحهٔ تصویری هستند. ویژگی موردنظر ما در جدول، منجر به این می‌شود که، از هردو نقطه یك خط راست بگذرد و هردو خط راستی دریك نقطه به‌هم برسند[خط راست $(a_1، a_2، a_3)$ وقتی شامل نقطهٔ $(x_1، x_2، x_3)$ است که $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$، نسبت به جدول p، برابر با ۰ باشد].

می‌توان ثابت کرد: نابرابری (*) وقتی به برابری تبدیل می‌شود که داشته باشیم:

$$m=p^۲+p+۱$$

که در آن، p عددی طبیعی است؛ درضمن

$$k=(p+۱)(p^۲+p+۱)$$



شکل ۸۷

پاسخ به این پرسش که: آیا برای این گونه m و k، می‌توان جدول متناظر را پیدا کرد، بسیار دشوار است. این منجر به مسالهٔ وجود صفحه‌های تصویری متناهی مرتبهٔ p می‌شود که هنوز حل نشده است. در حالت‌هایی که p عددی اول یا توانی از یك عدد اول باشد، پاسخ به این پرسش مثبت است.

۲۰۹. مساحت چهارضلعی $B_1B_4B_5B_6$ (شکل ۸۷) برابر است با $\frac{1}{4}$ مساحت چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$، زیرا قطرهای چهارضلعی اول موازی قطرهای چهارضلعی دوم و برابر نصف آن‌ها هستند: B_1B_5 موازی A_2A_4 و برابر نصف آن، B_4B_6 موازی A_1A_3 و برابر نصف آن. درضمن می‌دانیم، اگر طول قطرهای یك چهارضلعی محدب را d_1 و d_2 و زاویه بین دو قطر را φ بنامیم، مساحت چهارضلعی با دستور $S=d_1d_2\sin\frac{\varphi}{2}$ بیان می‌شود. به‌همین ترتیب، ثابت می‌شود که، مساحت چهارضلعی $B_1B_2B_3B_4$ هم، برابر $\frac{1}{4}$ مساحت چهارضلعی $A_1A_4A_5A_6$ است.

۲۱۰. به‌ازای $n=1$، چهار عدد ۱۱، ۲۱، ۱۲، ۲۲ با شرط‌های مساله سازگارند.

a' را به معنای عددی می‌گیریم که از a، با تبدیل رقم ۱ به ۲ و ۲ به ۱ در آن، به دست آمده باشد؛ همچنین $a\,b$ را به این معنا می‌گیریم که عدد b را کنار a نوشته‌ایم. فرض کنید، مجموعهٔ A_n شامل 2^{n+1} عدد 2^n

رقمی باشد، به نحوی که هردوتا از آن‌ها، دست کم در 2^{n-1} مرتبهٔ خود، با هم فرق داشته باشند. مجموعهٔ A_{n+1} را درنظر می‌گیریم که ازعددهای aa و aa' تشکیل شده باشد $(a\in A_n)$. همهٔ این عددها 2^{n+1} رقمی‌اند و روی هم، 2^{n+2} عدد را معرفی می‌کنند. به جز ایـن، هر دو عدد، دست کم در 2^n مرتبهٔ خود، باهم تفاوت دارند. درواقع، عددهای aa و aa'، و، هم‌چنین، عددهای aa و bb'، بـه‌ازای هـر a و b، درست در 2^n مرتبه، باهم متفاوتند (در مرتبه‌هایی که در آن‌ها، a و b برهم منطبق‌اند، a' و b' با هم فرق دارند و برعکس)؛ عددهای aa و bb، بنا بر فرض استقرا، دست کم در 2^n مرتبهٔ خود، با هم فرق دارند. حکم ثابت شد.

۲۱۱. همهٔ چندضلعی‌ها را بر یك خط راست تصویر می‌کنیم. تصویر هرکدام ازچندضلعی‌ها، به صورت یك پاره‌خط راست درمی‌آید و، درضمن، با توجه به‌شرط مساله، هر دوپاره‌خط، دارای نقطه‌ای مشترك‌اند. از این جا، می‌توان نتیجه گرفت که، همهٔ این پاره‌خط‌های راست، نقطهٔ مشترکی دارند (برای این که دراین‌مورد قانع‌شوید، کافی‌است خط‌راست مفروض‌را همچون یك محورعددی درنظر بگیرید وکوچکترین عددرا، دربین عددهای نمایندهٔ انتهای راست این‌پاره‌خط‌ها انتخاب کنید). خط راستی‌که ازنقطهٔ مشترك این پاره‌خط‌های راست، عمود برآن‌ها رسم شود، همهٔ چندضلعی‌ها راقطع‌می‌کند.

۲۱۲. بدون این که به‌کلی‌بودن مساله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد:

$$a \geqslant b \geqslant c$$

در این‌صورت $c(a-c)(b-c) \geqslant 0$ و از آن‌جا

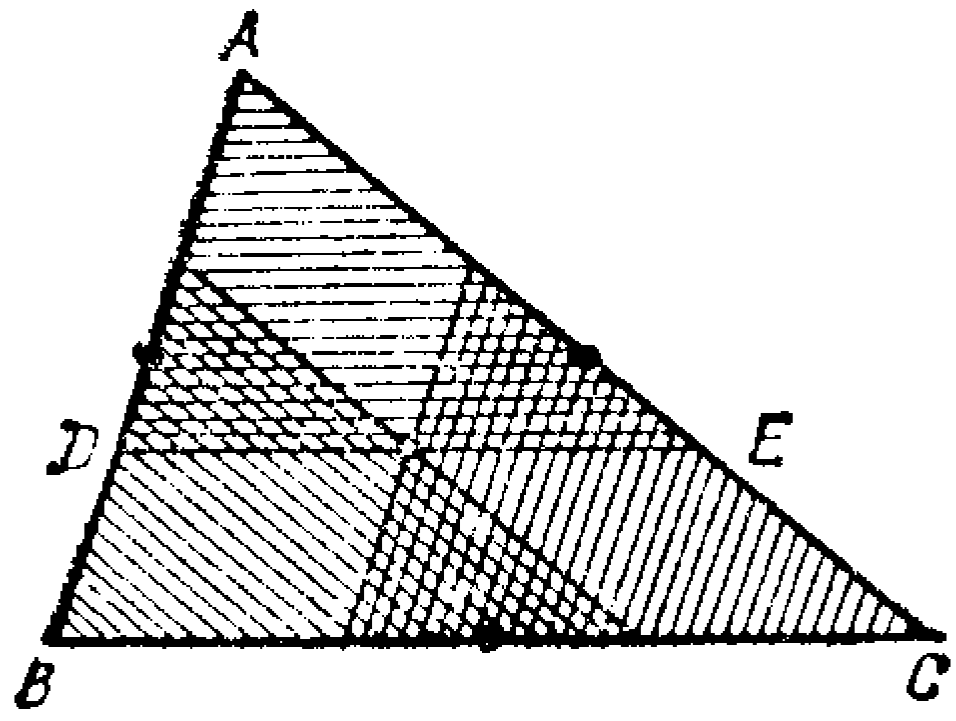
$$a^3+abc \geqslant ac^2+bc^2$$

و کافی است ثابت کنیم:

$$a^3+b^3+2abc \geqslant ab(a+b)+a^2c+b^2c$$

ولی نابرابری اخیر را، می‌توان به این صورت نوشت:

$$(a-b)^2(a+b-c) \geqslant 0$$



شکل ۸۸

∇ به سادگی دیده می‌شود که نابرابری، تنها وقتی به‌برابری تبدیل می‌شود که داشته باشیم: $a=b=c$.

۲۱۳. اگر یکی از مگس‌ها در رأس A قرار گیرد، آن وقت مرکز ثقل مثلثی که ازمگس‌ها تشکیل می‌شود، درمثلث ADE قراردارد (شکل۸۸) که در آن $\frac{DE}{BC}=\frac{۲}{۳}$. چون یکی ازمگس‌ها، ازهمهٔ رأس‌ها می‌گذرد، بنابراین مرکز ثقل «مثلث مگس‌ها» باید متعلق به سه مثلثی باشد که روی شکل‌هاشور زده‌ایم. تنها نقطهٔ مشترك این سه مثلث، مرکز ثقل مثلث مفروض است.

۲۱۴. تعداد صفرها را p، تعداد واحدها را q و تعداد دوها را r می‌گیریم. درهرگام، هرسه عدد p و q و r به اندازهٔ یك واحد تغییرمی‌کنند: آن‌ها که فردند زوج، و آن‌ها که زوج‌اند فرد می‌شوند. وقتی که تنها یك رقم روی تختهٔ سیاه باقی می‌ماند، از عددهای p، q و r، یکی برابر ۱ و دوتای دیگر برابره می‌شود. بنابراین، در ابتدا هم، زوج یا فردبودن یکی از عددها بازوج یا فرد بودن دو عدد دیگر فرق داشته است؛ و همین عدد است که، سرآخر، روی تختهٔ سیاه باقی می‌ماند.

۲۱۵. A_1، A_2، ...، A_n رانقطه‌های برخورد خط‌های راست باکنارهٔ بالای نوار وآن‌ها را به ردیف (از چپ به‌راست) شماره‌گذاری می‌کنیم؛ همچنین P_1، B_2، ...، B_n را نقطه‌های برخورد خط‌های راست باکنارهٔ پایین و باز هم از چپ به راست، فرض می‌کنیم. مسیرهایی را که از نقطه‌های B_1، B_2، ...، B_n آغاز می‌شوند، با شماره‌های ۱، ۲، ...، n شماره‌گذاری می‌کنیم. با توجه به‌قانون ساختمان مسیر، این ویژگی‌ها به‌دست می‌آید.

۱°. از هر پاره‌خط راست، درست یك مسیر می‌گذرد؛

۲°. مسیرهای مجاور ـ kام و $(k+1)$ام ـ در رأس‌هایی با هم تماس دارند؛ درضمن، مسیر kام همیشه درسمت چپ مسیر $(k+1)$ام است (برای هر k از ۱ تا $n-1$). مسیرهای غیر مجاور، دارای نقطهٔ مشترکی نیستند.

۳°. مسیری که از B_k آغاز شده است، به A_k ختم می‌شود.

اکنون به اثبات بخش‌های مختلف مساله می‌پردازیم.

a) همهٔ مسیرهایی را درنظر می‌گیریم که از شماره‌های فرد آغاز شده‌اند. بنا بر ویژگی ۲°، این مسیرها، نقطهٔ مشترکی ندارند و، تعداد آن‌ها، از $\frac{n}{2}$ کمتر نیست.

b) با دو روش، تعدادکل پاره‌خط‌های راست همهٔ مسیرها را محاسبه می‌کنیم، هریك ازپاره‌خط‌های راست B_iA_{n+1-i}، یکی ازخط‌های راست، به‌وسیلهٔ خط‌های راست دیگر، به n پاره‌خط تقسیم می‌شود. بنا براین، تعداد کل این پاره‌خط‌ها برابر n^2 است. با توجه‌به ویژگی ۱°، باید همین‌مجموع n^2، با جمع تعداد پاره‌خط‌های همهٔ n مسیر هم، بـه دست آید. بنا براین، دست‌کم یکی از جمله‌های این جمع، از n کمتر نیست.

البته حکم b) را از حکم d) هم می‌توان نتیجه گرفت.

c) تعداد پاره‌خط‌ها را در دومسیر مرزی ـ مسیر اول و مسیر nام ـ ارزیابی می‌کنیم.

این مسیرها، مجموعه‌های متناهی را، که در سمت چپ مسیر اول و در سمت راست مسیر nام قرار دارند، محدود می‌کنند؛ مسیر اول در درون زاویهٔ B_1PA_1 و مسیرnام دردرون زاویهٔ B_nPA_n قرار دارند که، در آن‌ها، P عبارت است ازنقطهٔ برخورد خط‌های راست B_1A_n و B_nA_1. بقیهٔ‌خط‌های راست B_2A_{n-1}، B_3A_{n-2}، ...، $B_{n-1}A_2$ تنها می‌توانند با یکی ازدو مسیر مرزی، پاره‌خط مشترکی داشته باشند (و در واقع، با آن مسیری که، نسبت به نقطهٔ P، در طرف دیگراین خط راست باشد). به این ترتیب، دردومسیر مرزی، بیش از $(n-2)+4$ پاره‌خط وجود ندارد و، بنا براین، در یکی از آن‌ها، حداکثر $\frac{n}{2}+1$ پاره‌خط خواهدبود.

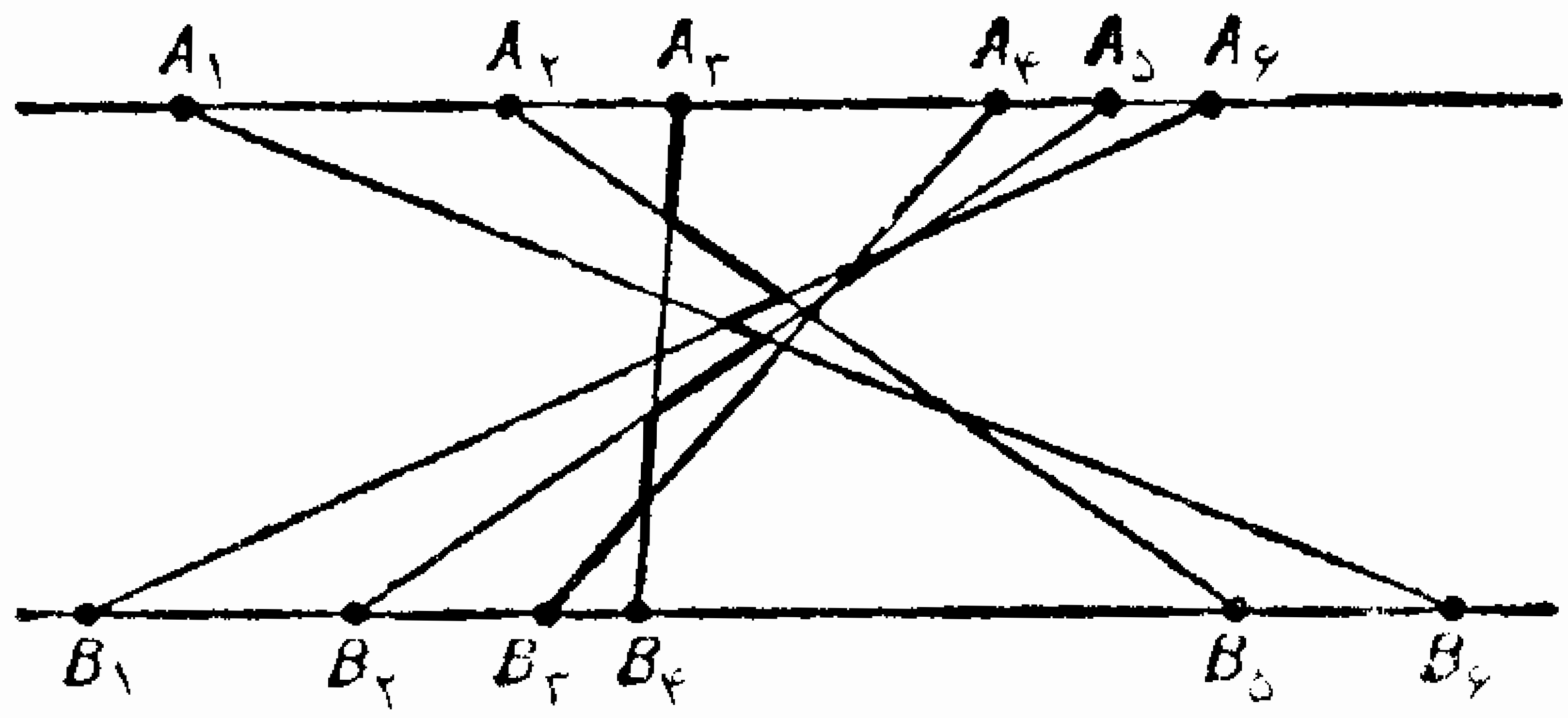
d) مسیر وسط، یعنی مسیر باشمارهٔ $m=\frac{1}{2}(n+1)$ (اگر n عددی فرد باشد)، یا مسیر $m=\frac{n}{2}$ (اگر n عددی زوج باشد) را درنظرمی‌گیریم و ثابت می‌کنیم که، این‌مسیر، ازهمهٔ خطهای راست می‌گذرد (شکل ۸۹). درواقع، این مسیر، نوار را به‌دو بخش تقسیم می‌کند؛ هریك ازپاره خطهای راست B_1A_n، B_2A_{n-1}، ...، B_nA_1 ازیك بخش آغاز ودربخش دیگرختم می‌شوند(یکی‌ازآن‌ها، ممکن‌است روی‌مرز دو بخش‌واقع باشد) و، بنا براین، بامسیر وسط، دارای نقطهٔ مشترك‌اند و، در نتیجه (بنا برقانون ساختمان مسیر) باآن‌ها، دریك پاره‌خط مشترك است.

▽ دراین مساله، جالب است‌که بتوانیم بهترین ارزیابی از پایین و ازبالارا، برای تعداد پاره‌خطهای طولانی‌ترین مسیر (طولانی، از نظرتعداد پاره‌خطها) پیداکنیم.

۲۱۶. پاسخ: وقتی k عددی زوج باشد می‌توان؛ و وقتی k عددی فرد باشد نمی‌توان.

وقتی k عددی زوج باشد، به‌سادگی می‌توان نمونهٔ رنگ‌آمیزی را پیداکرد: می‌توان مکعب را ازبلوك‌های ۱ × ۲ × ۲، که یك‌درمیان سیاه و سفیدند، آماده‌کرد.

اکنون فرض می‌کنیم توانسته باشیم مکعب موردنظر را، درحالتی‌که k عددی فرد است، ساخته باشیم. مرکزهای مکعب‌های واحد سفید را، به وسیلهٔ پاره‌خطهای راست، به‌هم وصل می‌کنیم. از هر مرکز، دوپاره خط خارج می‌شود. این‌دستگاه پاره خطها، یك یا چند خط شکستهٔ بسته به‌وجود



شکل ۸۹

می‌آورند. توجه کنیم که، تعداد حلقه‌هایی از خط شکسته، که از پاره‌خط‌های باطول برابر تشکیل شده‌اند وسه جهت دو به‌دو عمـود برهم دارند، عددی زوج است (حتی تعداد حلقه‌های هریك ازجهت‌ها هم، زوج است). به این ترتیب، تعداد مکعب‌های سفید، باید عددی زوج باشد. به‌همین ترتیب ثابت می‌شود که، تعداد مکعب‌های واحد سیاه‌هم، زوج است. تناقض.

۲۱۷. a) $n_{\circ}$ را طوری درنظر می‌گیریم که $10^{n_{\circ}}$ ازهمهٔ ضریب‌های چندجمله‌ای $P(x)$ بزرگتر باشد. اکنون روشن‌است که، به‌ازای هر $n \geqslant n_{\circ}$، عددهای a_{10^n} با a_1 برابرمی‌شوند.

b) نتیجهٔ a) را می‌توان دربارهٔ چندجمله‌ای $Q(x)=P(x+d)$ به کار برد که، در آن، d عددطبیعی بزرگی‌است؛ درضمن‌معلوم می‌شود که، وقتی $n_{\circ}=n_{\circ}(d)$ به‌قدرکافی بزرگ باشد، برای هر $n \geqslant n_{\circ}$، مجموع رقم‌هادر همهٔ عددهای $Q(10^n)=a_{10^n+d}$ باهم برابر می‌شوند. البته، باید این‌شرط را تحقیق‌کرد که، همهٔ ضریب‌ها در $Q(x)$، هم‌علامت باشند.

اگر $d>0$ را به‌اندازهٔ‌کافی بزرگ بگیریم، ضریب‌های‌چندجمله‌ای

$$Q(x)=P(x+d)$$

همان علامت ضریب بزرگترین درجهٔ چندجمله‌ای

$$P(x)=p_{\circ}x^n+p_1x^{n-1}+\dots+p_n$$

را خواهند داشت. دو راه برای اثبات می‌آوریم.

۱°. برای چندجمله‌ای $Q(x)$ داریم:

$$Q(x)=p_{\circ}(x+d)^n+p_1(x+d)^{n-1}+\dots+p_n=$$

$$=p_{\circ}(x^n+C_n^1x^{n-1}d+\dots+C_n^{n-1}xd^{n-1}+d^n)+$$

$$+p_1(x^{n-1}+C_{n-1}^1x^{n-2}d+\dots+d^{n-1})+\dots+p^n=$$

$$=q_{\circ}x^n+q_1(d)x^{n-1}+\dots+q_n(d)$$

دراین‌جا، $q_k(d)$ $(k=0, 1, \dots, n)$، یك چندجمله‌ای نسبت به d است. درضمن، $q_k(d)$ ازدرجهٔ k است وجملهٔ بادرجهٔ بزرگتر آن، به‌صورت

$p_\circ C_n^k d^k$ در می‌آید (و $q_\circ$، به‌طور ساده برابر $p_\circ$ است). در این صورت، برای عددهای به اندازهٔ کافی بزرگ $d>d_\circ$، هر یك از عددهای $q_k(d)$ دارای همان علامت عدد $p_\circ$ خواهند بود.

۲°. اگر درچندجمله‌ای $P(x)$، چند ضریب اول $p_\circ$، p_1، ...، p_{n-k} هم علامت باشند، آن‌وقت، ضمن گذار $P(x)\to P(x+d)=Q(x)$، به چندجمله‌ای جدیدی می‌رسیم که، در آن، ضریب‌های $q_\circ$، q_1، ...، q_{n-k} با همان علامت باقی می‌مانند وضریب بعدی

$$q_{n-k+1}=p_\circ C_n^{n-k+1}d^{n-k+1}+p_1C_n^{n-k}d^{n-k}+\dots+$$
$$+p_{n-k}d+p_{n-k+1}$$

وقتی d به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد، به‌همان علامت درمی‌آید. به‌این ترتیب، بعد از $n-1$ گذار، می‌توانیم از هر چندجمله‌ای $P(x)$، به چندجمله‌ای دیگری برسیم که، در آن، همهٔ ضریب‌ها، دارای علامت $p_\circ$ باشند.

$\triangledown$ دراین‌جا، تنها ازاین حقیقت استفاده کردیم که، عدد C_n^k، یعنی ضریب بسط دو جمله‌ای $(a+b)^n=\sum\limits_{k=1}^{n}C_n^ka^kb^{n-k}$، عددی مثبت است (ضمیمهٔ ۱۶).

۲۱۸. حالت کلی‌را درنظر می‌گیریم، وقتی‌که n تیم درمسابقه شرکت کرده باشند.

a) پاسخ: $k=n-2$، با شرط $n\geqslant 3$ (در حالت خاص، به‌ازای $n=20$، داریم: $k=18$).

کل امتیازهایی‌که، ضمن مسابقهٔ جهانی به‌دست می‌آید برابر $n(n-1)$ و برای مسابقهٔ اروپایی برابر $k(k-1)$ است (برای برد ۲، برای تساوی ۱ و برای باخت ۰ امتیاز).

x را مقدار امتیازهای قهرمان اروپا در بازی‌های قهرمانی جهان، و y را مقدار امتیازهای او در بازی‌های با تیم‌های اروپایی فرض می‌کنیم: $y\geqslant x$. فرض کنید، هریك از تیم‌های دیگر، درمسابقهٔ قهرمانی جهان بیشتر از x امتیاز آورده باشند، یعنی دست‌کم $x+1$ امتیاز. دراین‌صورت

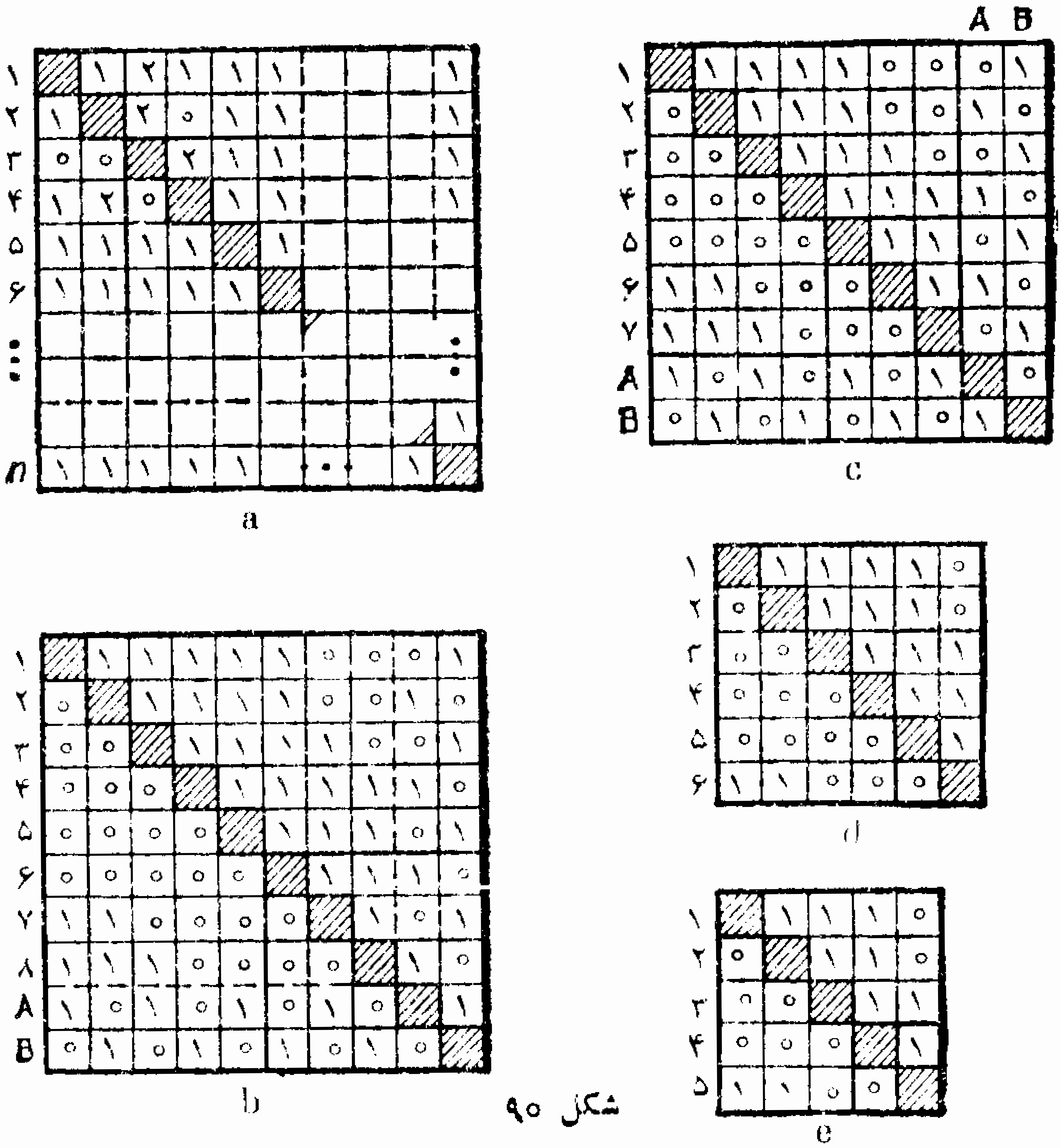
$$x+(n-1)(x+1)\leqslant n(n-1)\Rightarrow x\leqslant n-2+\frac{1}{n}$$

و چون x عددی درست است، بنابراین $x\leqslant n-2$.

هریك از بقیهٔ تیم‌های اروپائی، بیش‌از $y-1$ امتیاز نیاورده‌اند (در مسابقهٔ قهرمانی اروپا) و بنابراین

$$y+(y-1)(k-1)\geqslant k(k-1)\Rightarrow y\geqslant k-\frac{1}{k}$$

وچون y عددی درست است، پس $y\geqslant k$. به‌این ترتیب



شکل ۹۵

a) مسابقهٔ قهرمانی هاکی: n تیم و $k=n-2$. تیم‌های ۳، ۴، ...، n، اروپائی وتیم ۳ قهرمان اروپا. b) مسابقهٔ قهرمانی والیبال: $n=8$، $k=2$. تیم‌های ۶ و ۷ و ۸ اروپائی وتیم ۶، قهرمان اروپا. تیم‌های A و B اضافه شده است. c) مسابقهٔ قهرمانی والیبال: $n=7$، $k=2$. تیم‌های ۵ و ۶ و ۷ اروپائی وتیم ۵ قهرمان اروپاست. تیم‌های A وB اضافه‌شده است. d) مسابقهٔ قهرمانی والیبال: $n=6$، $k=2$. e) مسابقهٔ‌قهرمانی والیبال: $n=5$، $k=2$.

$$k\leqslant y\leqslant x\leqslant n-۲ \Rightarrow k\leqslant n-۲$$

در شکل ۹۰، a مثالی ازیك جدول مسابقه داده شده است ونشان‌می‌دهدکه قهرمان اروپا (تیم سوم) می‌تواند جای آخـر را در مسابقهٔ قهرمانی جهان آورده باشد.

b) پاسخ: اگر $n\geqslant ۸$ عددی زوج باشد، آن‌وقت $k=n-۵$ (ودر حالت خاص، برای $n=۲۰$، $k=۱۵$)؛ اگر $n\geqslant ۷$ عـددی فرد باشد، آن وقت $k=n-۴$؛ واگر $n=۶$ یا $n=۵$، آن‌وقت $k=۲$.

در مسابقهٔ قهرمانی والیبال، تیم برنده ۱ امتیاز وتیم بازنده ۰ امتیاز می‌گیرد، به‌نحوی‌که روی هم، $\frac{۱}{۲}n(n-۱)$ امتیاز وجود دارد. حالتی راکه n عددی زوج است، $n=۲l$، به‌تفصیل بررسی می‌کنیم.

اگرمثل بالا استدلال کنیم (x و y را به‌همان معنای مسالهٔ a) بگیرید)، به‌دست می‌آید:

$$x+(۲l-۱)(x+۱)\leqslant\frac{۲l(۲l-۱)}{۲}=l(۲l-۱) \qquad (۱)$$

$$y+(k-۱)(y-۱)\geqslant\frac{۱}{۲}k(k-۱) \qquad (۲)$$

از (۱) نتیجه می‌شود: $x\leqslant l-\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲l}$، یعنی $l\leqslant l-۲$. از نابرابری $y\geqslant x\geqslant l-۲$ ونابرابری (۲) به‌دست می‌آید:

$$k^{۲}+(۵-۲l)k-۲\leqslant ۰ \qquad (۳)$$

به‌ازای $l\geqslant ۴$، بزرگترین عدد درست k که در نابرابری (۳) صدق می‌کند، برابر $۲l-۵$ است (بـه‌ازای $k=۲l-۵$، نابرابری (۳) برقرار است، ولی به‌ازای $k=۲l-۴$، مقدارسمت چپ نابرابری، مثبت‌می‌شود).

اکنون ثابت‌می‌کنیم، برابری $k=۲l-۵=n-۵$، به‌ازای $l\geqslant ۴$ ممکن است. روی شکل ۹۰، b، جدول مسابقه‌ها برای $n=۸$، $k=۳$ داده شده است (سه‌تیم آخر، اروپائی‌اند). این جدول را، مبنای استقرا می‌گیریم

ساختمان‌های بعدی را، به‌کمك استقرا و با اضافه‌کردن در هر گام، ۲ تیم اروپائی انجام می‌دهیم.

قبل از همه توجه کنیم که، به‌ازای $k=2l-5$، به طور مسلم $x=y=l-2$. درواقع

$$y \geqslant \frac{(k-1)(k+2)}{2k}=\frac{k}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{k} \Rightarrow y \geqslant l-2-\frac{1}{2l-5}$$

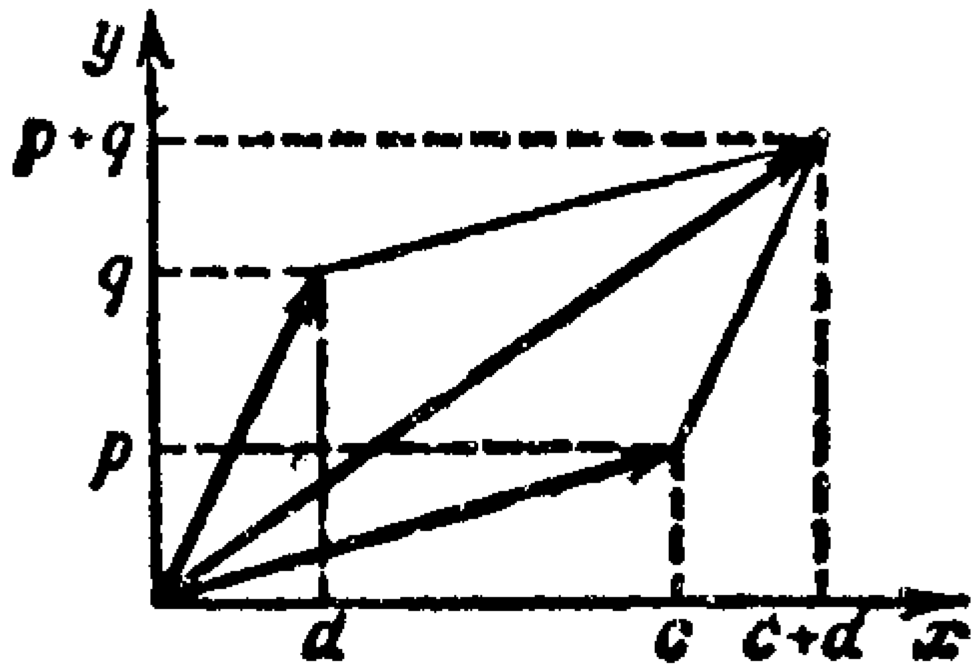
وچون y عددی درست است، بنابراین $x=l-2=y$. واین، به‌معنای آن است که، قهرمان اروپا، به‌همهٔ تیم‌های غیراروپایی باخته است.

اکنون فرض‌می‌کنیم، جدول‌مسابقهٔ قهرمانی با $k=n-5=2l-5$، تحقق پذیرفته باشد. دوتیم اروپائی A و B را باقانون زیر اضافه می‌کنیم: تیم A از همهٔ تیم‌های قبلی ردیف فرد واز تیم B می‌برد و به‌بقیه می‌بازد؛ تیم B ازتیم‌های سابق ردیف زوج می‌برد و به‌بقیه می‌بازد. هریك ازتیم‌های قبلی، در نتیجهٔ آخر، به‌تعداد برابر امتیاز می‌آورند و، بنابراین، در مقام آن‌ها تغییری پیش نمی‌آید.

اکنون، قهرمان اروپا $l-1$ امتیاز، تیم A، $l+1$ امتیاز و تیم B، l امتیاز آورده‌اند، به‌نحوی‌که قهرمان قبلی اروپا، بازهم درمقام آخر است. درضمن، دربازی‌های اروپائی، تیم A به‌اندازهٔ $l-2$ امتیاز ($l-3$ امتیاز دربازی با تیم‌های قبلی، و یك امتیاز دربازی با B) آورده؛ وتیم Bهم در بازی با تیم‌های اروپایی، همان $l-2$ امتیاز را آورده است، به‌نحوی‌که قهرمان اروپا تغییر نمی‌کند.

حالت‌های فرد بودن n، $n=2l-1$، برای $l>4$ و، همچنین، $n\leqslant 6$ راهم می‌توان، به‌طریق مشابهی مورد بررسی قرارداد (شکل‌های ۹۰، c، d و e).

۲۱۹. a) ازبین چهار عددی‌که جدول 2×2 را تشکیل داده‌اند، دوعدد بزرگتر را درنظر می‌گیریم. اگراین دوعدد متعلق به‌یك ستون باشند، آن‌وقت، کوچکترین آن‌ها، عدد مطلوب است؛ واگراین دوعدد متعلق به‌یك سطر باشند، آن‌وقت بزرگترین عدد ازبین دوعدد دیگر، همان عدد مطلوب است (درضمن، با نابرابری‌های غیراکید سروکار داریم).



شکل ۹۱

حالتی باقی می‌ماند که: دو عدد انتخابی روی قطر باشند (واکیداً از دوتای دیگر بزرگتر). ولی این حالت ممکن نیست. برای این‌که در این مورد قانع شویم، کافی است توجه کنیم که، کسر $\frac{c+d}{p+q}$، همیشه بین دو کسر $\frac{c}{p}$ و $\frac{d}{q}$ قرار دارد (به‌ازای $p>0$ و $q>0$؛ در شکل ۹۱، تعبیر هندسی این حقیقت داده شده است). از این حقیقت، که مقدار

$$\frac{a_1+b_1+a_2+b_2}{p_1+q_1+p_2+q_2}$$

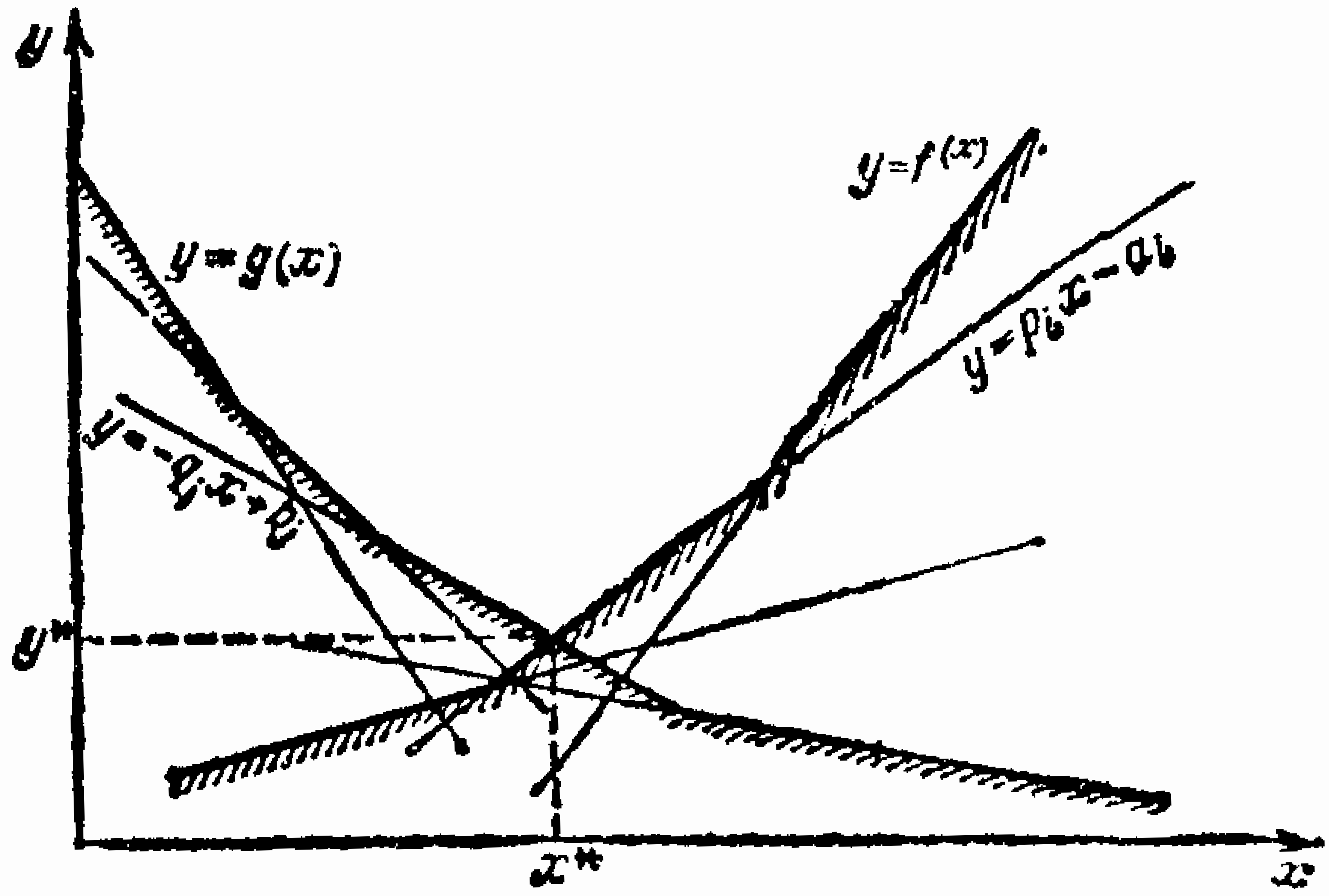
بین $\frac{a_1+b_1}{p_1+q_1}$ و $\frac{a_2+b_2}{p_2+q_2}$ وهمچنین، بین $\frac{a_1+b_2}{p_1+q_2}$ و $\frac{a_2+b_1}{p_2+q_1}$ قرار می‌گیرد، بنابراین دو عدد بزرگتر و دو عدد کوچکتر، نمی‌توانند روی قطر باشند.

b) دو راه حل، برای این مساله می‌آوریم که، یکی از آن‌ها، ربطی به a) ندارد و، بنابراین، می‌تواند راه‌حل تازه‌ای برای حالت‌خاص a) باشد؛ ولی در راه حل دوم، از a) به‌عنوان یك پیش‌قضیه استفاده شده است.

راه‌حل اول: باید عددی مثل $x^*=\frac{a_k+b_l}{p_k+q_l}$ را در جدول $m\times n$ طوری پیدا کنیم که شرط‌های

$$\text{(برای همه } i\text{ها)}\ \frac{a_i+b_l}{p_i+q_l}\geqslant x^* \quad \text{و} \quad \text{(برای همهٔ } j\text{ها)}\ \frac{a_k+b_j}{p_k+q_j}\leqslant x^*$$

برقرار باشند، شرط‌ها را، این‌طور می‌نویسیم:



شکل ۹۲

$$p_k x^* - a_k \geqslant -q_j x^* + b_j;\ \ p_i x^* - a_i \leqslant -q_l x^* + b_l \qquad (*)$$

تابع‌های قطعه به‌قطعه خطی زیر را درنظر می‌گیریم:

$$f(x) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m}(p_i x - a_i);\ \ g(x) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n}(-q_j x + b_j)$$

نمودار هریك ازاین دوتابع، ازپاره خط‌هـای راست و دونیم خط راست، تشکیل‌شده‌است. اولی‌صعودی یکنوا، ودومی‌نزولی است و، بنابراین، معادلهٔ $f(x)=g(x)$ دارای جواب منحصر به‌فرد (x^*, y^*) است [نقطهٔ (x^*, y^*) که، درآن، $y^* = f(x^*) = g(x^*)$، بلندترین نقطهٔ برخورد خط‌های راست $y = p_i x - a_i$ با خط‌های راست $y = -q_j x + b_j$ است؛ شکل ۹۲]. در ضمن، k و l، شمارهٔ تابع‌های خطی $y = p_k x - a_k$ و $y = -q_l x + b_l$ است که، ازبرخورد نمودارهای آن‌ها، نقطهٔ (x^*, y^*) به‌دست می‌آید، یعنی آن تابع‌هایی که، برای آن‌ها داریم:

$$p_k x^* - a_k = \max_{1 \leqslant i \leqslant m}(p_i x^* - a_i) = y^* = -q_l x^* + b_l =$$

$$= \max_{1 \leqslant j \leqslant n}(-q_j x^* + b_j)$$

برای این مقدارهای k، l و x^*، همهٔ شرط‌های لازم $(*)$ برقرارند.

راه حل دوم. می‌گوییم، جدول دارای «زین» است، وقتی که عضوی در

آن وجودداشته باشد که ازهمهٔ عضوهای‌هم سطرخودکمتر وازهمهٔ عضوهای هم‌ستون خود بیشتر نباشد.

پیش‌قضیه. اگر هر جدول ۲ × ۲، که از جـدول مفروض $m \times n$ با حذف $m - ۲$ سطر و $n - ۲$ ستون به‌دست می‌آیـد، دارای «زین» باشد، آن‌وقت تمامی جدول $m \times n$ هم، دارای «زین» است.

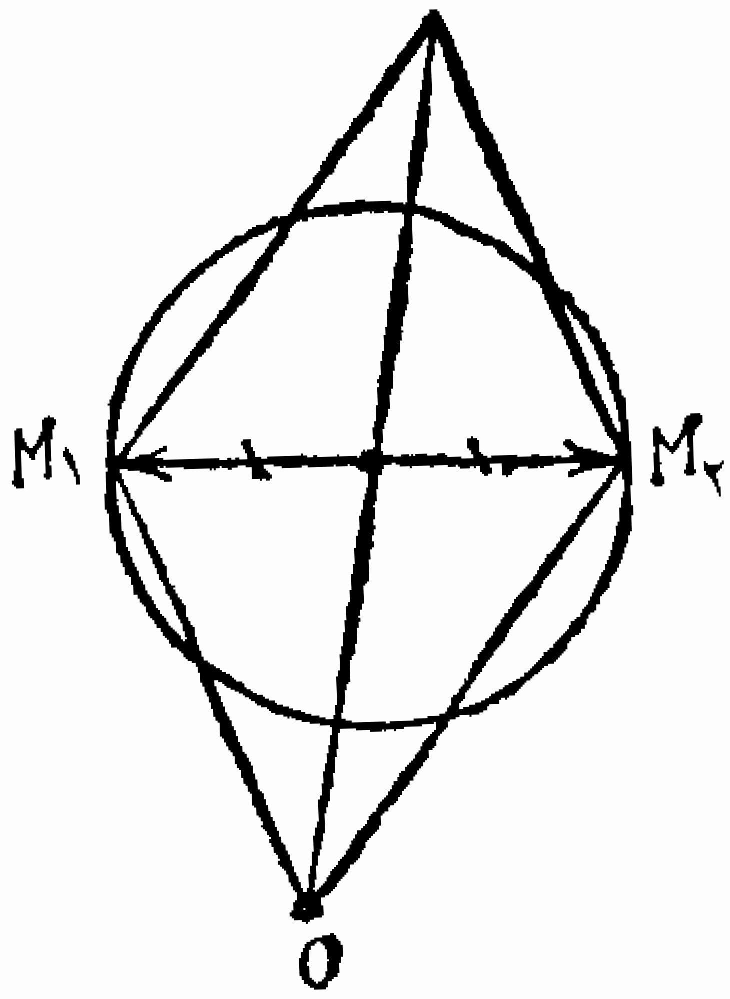
این پیش‌قضیه، مسالهٔ کلی b) را، به‌حالت خاص a) منجر می‌کند.

پیش‌قضیه را ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم جدولی وجود داشته باشد که، درآن، «زین» نباشد، ولی‌هرجدول ۲ × ۲ درآن، دارای «زین» باشد. درسطر iام این‌جدول، بزرگترین عدد M_i و درستون jام آن، کوچکترین عدد m_j را نشان می‌کنیم. به‌کمك این عـددهای نشان شده، زنجیره‌ای می‌سازیم: بزرگترین عدد سطر به‌کوچکترین عددی‌که درستون آن قرار دارد و، سپس، ازآن به‌بزرگترین عددی‌که درسطرعدد اخیرواقع‌است وغیره. این زنجیره نمی‌تواند روی یك عضو جدول، به‌پایان خود برسد (زیرا جدول دارای «زین» نیست)، بنابراین باید یك دور تشکیل بدهد. با عوض‌کردن شماره‌ها، یعنی‌تبدیل سطرها وستون‌ها به‌صورت مناسب، می‌توان فرض‌کرد که، این‌دور، ازعضوهای $M_۱ = x_{۱۱}$، $m_۱ = x_{۲۱}$، $M_۲ = x_{۲۲}$، $m_۲ = x_{۳۲}$، ...، $m_{r-۱} = x_{r,r-۱}$، $M_r = x_{rr}$، $m_r = x_{۱r}$ تشکیل شده است (شکل ۹۳): درضمن $M_۱ = \min\limits_{۱ \leqslant i \leqslant r} M_i$. چون جدول ۲ × ۲ درگوشه چپ وبالای جدول اصلی، دارای «زین» است و، در ضمن $m_۱ \lneqq M_۱ \leqslant M_۲$؛ $m_۱ < M_۲$ و $x_{۱۲} < M_۱$، بایدداشته باشیم: $M_۱ = x_{۱۲} \leqslant M_۲$. به‌همین ترتیب، می‌توان ثابت‌کرد [با درنظر گرفتن جدول‌های ۲ × ۲ درسطرهای پایین $(m_۲، M_۳)$، $(m_۳، M_۴)$، ...]، که، همهٔ عضوهای سطراول برابرند با $M_۱$:

$$x_{۱۱} = x_{۱۲} = \ldots = x_{۱r} = M_۱$$

دراین‌صورت، $m_r = x_{۱r}$، یك نقطهٔ «زینی» است. تناقض.

▽ جالب این است که، هیات داوران المپیاد، برای مساله b) راه حل دیگری را می‌شناختند و به‌راه‌حل اخیر، یعنی‌استفادهٔ از a) وپیش‌قضیه، وقتی پی‌بردندکه ورقه‌های دانش‌آموزان شرکت‌کننده را تصحیح کردند.



شکل ۹۴

M_1	M_1	...	...	m_r
m_1	M_2	...	...	...
...	m_2	M_3	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	m_{r-1}	M_r
...	...	...	...	...

شکل ۹۳

۲۲۰. با توجه بـه‌یك حقیقت، اندیشهٔ راه حل تلقین می‌شود: مجموع فاصله‌های تاانتهای عقربه‌ها به‌طور متوسط (درطول زمان) بیشتراز مجموع فاصله‌های تامرکزهای ساعت‌هاست. اثبات‌را می‌توان به‌این‌ترتیب انجام‌داد. مجموع s_1 و s_2، فاصله‌های ازنقطهٔ O، مرکز میز، تاانتهای عقربه‌های دقیقه شمار را، در دو لحظهٔ زمـانی، واقع در ۳۰ دقیقه، در نظر می‌گیریم، مقدار s_1+s_2، از $2s_0$ بیشتر است (s_0، مجموع فاصله‌های از O تا مرکز ساعت‌هاست)، زیرا درهرمثلث OM_1M_2، مجموع طول‌های دوضلع OM_1 و OM_2 از دوبرابر میانهٔ بین آن‌ها برگتر است (شکل ۹۴). بنابراین، دست‌کم یکی‌ازعددهای s_1 یا s_2 از s_0 بیشتراست.

۲۲۱. حل‌مسالهٔ a) ناشی‌از دونکتهٔ زیراست:

۱) زیرهرعدد a در m امین‌سطر ($m \geqslant 2$) عددی به‌دست می‌آید که از a کمتر نیست؛

۲) هریك ازاین عددها، از ۱۰۰۰ تجاوز نمی‌کنند.

برای حل b) باید توجه‌کردکه اگرعدد a، در mامین سطر $m \geqslant 2$، ازعدد b واقع درزیرخودکمتر باشد، آنوقت $b \geqslant 2a$: گروهی ازعددهای a (هرگروه زیر عددهای برابر قرار دارد)، به‌گروهی ازعددهای b متصل می‌شود؛ از این جا، و با استقرا، کـه در این مـوقعیت $b \geqslant 2^{m-1}$. ولـی $1000 < 2^{m-1}$ تنها برای $m \leqslant 10$ برقرار است.

نمونه‌ای از دنبالهٔ عددها کـه، در آن، سطرهای دهم و یازدهم برهم منطبق نیستند، درزیر داده شده است:

(۵، ۱، ۲، ۲، ۴، ۴، ۴، ۴، $\underbrace{\text{۸، ...، ۸}}_{\text{۸}}$، ...، $\underbrace{\text{۲۵۶، ...، ۲۵۶}}_{\text{۲۵۶}}$، $\underbrace{\text{۴۸۸، ...، ۴۸۸}}_{\text{۴۸۸}}$

که برای سطرهای بعد خواهیم داشت:

سطر ۲: ۱، ۱، ۲، ۲، ۴، ...، ۴، ۸، ...، ۸، ...، ۲۵۶، ...، ۲۵۶، ۴۸۸، ...، ۴۸۸

سطر ۳: ۲، ۲، ۲، ۲، ۴، ...، ۴، ۸، ...، ۸، ...، ۲۵۶، ...، ۲۵۶، ۴۸۸، ...، ۴۸۸

. . . .

سطر ۱۰: ۲۵۵، ۲۵۶، ... ...، ۲۵۶، ۴۸۸، ...، ۴۸۸

سطر ۱۱: ۵۱۲، ۵۱۲، ... ...، ۵۱۲، ۴۸۸، ...، ۴۸۸

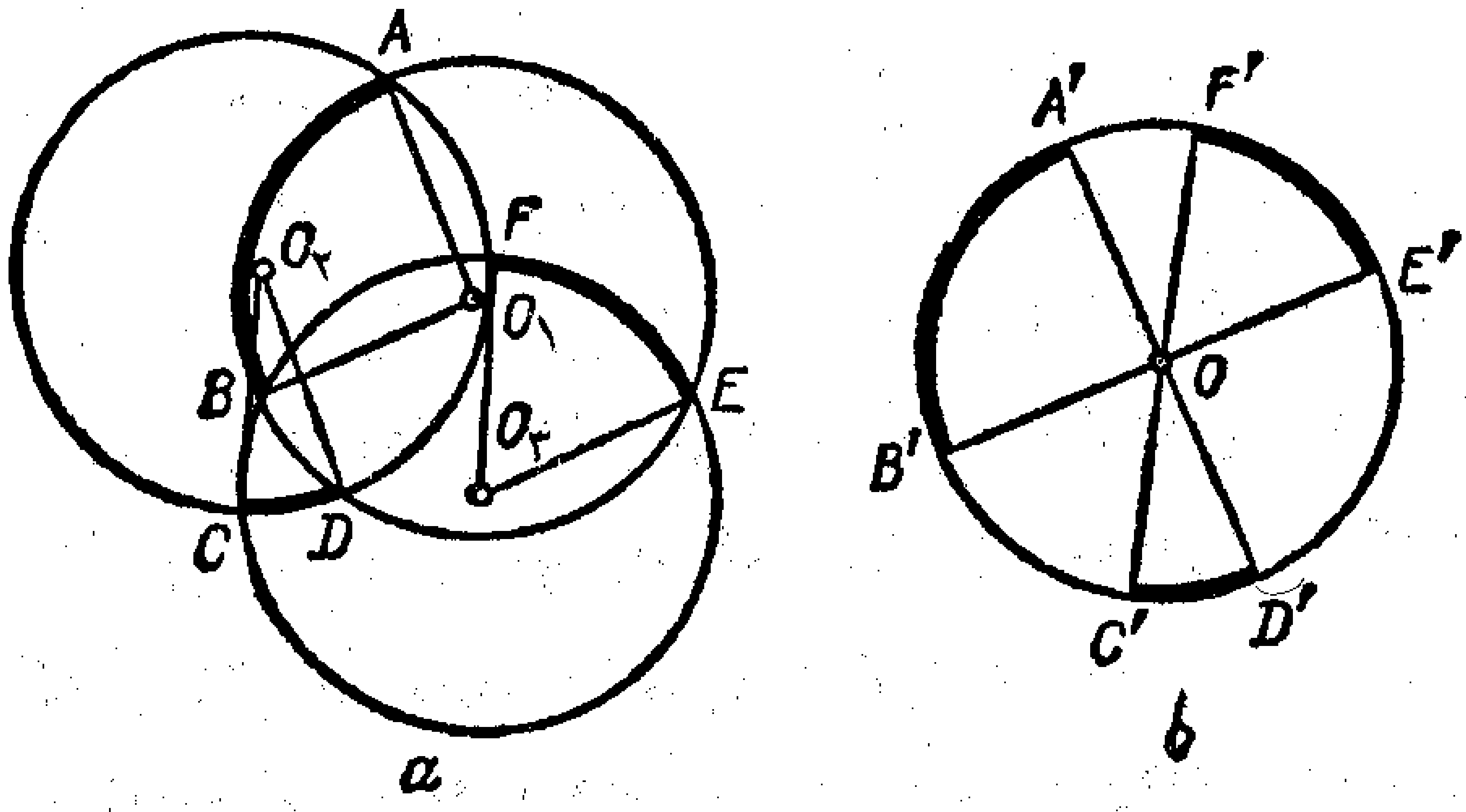
▽ به‌همین ترتیب، برای دنباله‌ای از n عدد ($2^{k-1} \leqslant n < 2^k$)، می‌توان ثابت کرد که $(k+2)$امین سطر برسطر $(k+1)$ام منطبق است، ولی ممکن است سطر $(k+1)$ام برسطر kام منطبق نباشد.

۲۲۲. مسالهٔ a) حالت خاصی از b) است و شبیه آن حل می‌شود. اندیشهٔ حل مسالهٔ b) را می‌دهیم.

O_1، O_2، O_3 را مرکز دایره‌هایی می‌گیریم که، به‌ترتیب، شامل کمان‌های $\overset{\frown}{AB}$، $\overset{\frown}{CD}$ و $\overset{\frown}{EF}$ هستند (شکل ۹۵، a). دراین‌صورت داریم:

$$\overrightarrow{O_1A} = -\overrightarrow{O_2D}, \overrightarrow{O_1B} = -\overrightarrow{O_3E}, \overrightarrow{O_3F} = -\overrightarrow{O_2C}$$

(به‌عنوان ضلع‌های روبه‌روی لوزی‌ها). بنابراین، اگر قطاع‌های O_1AB،



شکل ۹۵

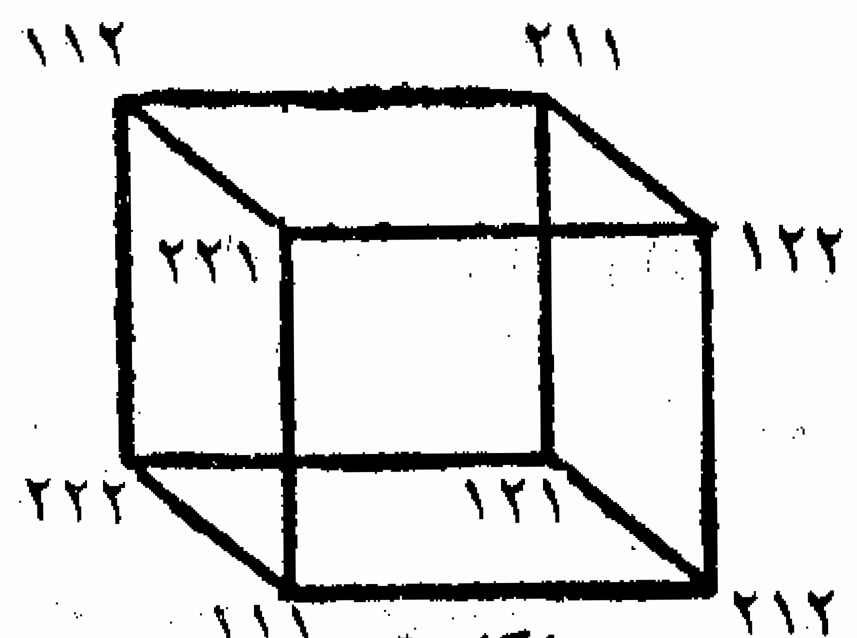
O_3EF و O_2CD را به‌مرکز مشترک O منتقل کنیم، سه قطاع به‌دست می‌آید که، همراه با قرینه‌های آن‌ها نسبت به O، دایره را به‌طور کامل پر می‌کنند (شکل ۹۵، b).

۲۲۳. اگرسه جملهٔ اول دنباله را به‌ردیف نزولی درنظر بگیریم، آن وقت، برای همهٔ جمله‌های دنباله، خواهیم داشت:

$$x_k \leqslant x_{k-2} - x_{k-1}$$

ودنباله به‌صورت نزولی در می‌آید:

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \dots \geqslant x_{21}$$



شکل ۹۶

اگر فرض کنیم $x_{21} \geqslant 1$، آن وقت از $x_{k-2} \geqslant x_k + x_{k-1}$، نتیجه می‌شود:

$$x_{20} \geqslant 1,\ x_{19} \geqslant 2,\ x_{18} \geqslant 3,\ x_{17} \geqslant 5,\ \dots$$

بنا براین،کافی است ۲۱ جملهٔ متوالی دنبالهٔ فیبوناچی را بنویسیم:

۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ...، ۶۷۴۵، ۱۰۹۱۶

x_1 بزرگتر از ۱۰۰۰۰ می‌شود و، این تناقض، ثابت می‌کند که $x_{21} = 0$.

۲۲۴. پاسخ: می‌توان (مثال در شکل ۹۶ داده شده است). درواقع، می‌توان نگاشت مجموعهٔ رأس‌های مکعب را برخودش، طوری به‌دست آورد که، هردورأس مجاور (که به‌وسیله یالی به‌هم وصل می‌شوند)، به رأس‌هایی بروندکه به‌وسیله‌یالی به‌هم وصل نشده‌اند.

۲۲۵. بنا به‌شرط مساله، مجموع بردارها برابر بردارِ o است، بنا براین

$$\mathbf{b}+\mathbf{c} = -(\mathbf{a}+\mathbf{d}),\ \mathbf{b}+\mathbf{d} = -(\mathbf{a}+\mathbf{c}),\ \dots$$

به‌این ترتیب، سمت‌راست، وهم‌چنین سمت‌چپ نابرابری، نسبت‌به **a**، **b**، **c** و **d**،

عبارتی متقارن است. در نتیجه، مـی‌توان سمت راست نابرابری را برابر نصف‌مجموع همهٔ مجموع‌های دو به‌دوی بردارهای مفروض دانست. با توجه به‌این نکته، می‌توان برای چهار بردار مفروض به مجموع o، به‌نحوی نام‌گذاری‌کرد که خط شکستهٔ شامل بردارهای

$$\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}، \overrightarrow{BC}=\mathbf{b}، \overrightarrow{CD}=\mathbf{c}، \overrightarrow{DA}=\mathbf{d}$$

خودش را قطع کند. برای این‌منظور، کافی‌است که، اگر بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ را با یك مبداء O درنظر بگیریم، در یك نیم صفحه قرار گیرند و، درضمن، $\mathbf{a}$ و $\mathbf{c}$ در یك طرف خط راستی باشند که از O موازی $\mathbf{b}$ رسم شده است: دراین صورت

$$|\mathbf{a}+\mathbf{d}|+|\mathbf{c}+\mathbf{d}|=BD+AC\leqslant|\mathbf{b}|+|\mathbf{d}|$$

تنها این می‌ماندکه نابرابری زیر را به آن اضافه کنیم:

$$|\mathbf{b}+\mathbf{d}|=|\mathbf{a}+\mathbf{c}|\leqslant|\mathbf{a}|+|\mathbf{c}|$$

۲۲۶. پاسخ: ۱۹۷۶.

همه این نقطه‌های علامت گذاری شده، به‌جز نقطهٔ O (مرکز ۱۹۷۶ ضلعی) روی محیط ۹۸۷ دایرهٔ به مرکز O، وروی هریك از ۱۹۷۶ نقطه، قرار دارد. هردایرهٔ دیگر γ، هریك ازاین ۹۸۷ دایره را در دو نقطه قطع می‌کند؛ به‌جز این نقطه‌های برخورد، ممکن است نقطهٔ O هم (که یکـی از نقطه‌های علامت‌دار است) روی محیط دایرهٔ γ قرار گیرد. بنا براین، روی چنین دایره‌ای، بیش از $۱+۲\times۹۸۷$، یعنی ۱۹۷۵ (از نقطه‌های موردنظر ما) نمی‌تواند وجود داشته باشد.

۲۲۷. فرض می‌کنیم ، بخش باقی ماندهٔ صفحه، شامل k قطعه باشد. چهار رأس هریك از این قطعه‌ها را (که رأس زاویه‌هایی برابر ۹۰ درجه یا ۲۷۰ درجه‌اند) علامت می‌گذاریم. هریك از این $۴k$ نقطه‌ای که علامت گذاشته‌ایم،رأس یکی ازnمستطیلی‌است که جداکرده‌ایم و یا یکی ازراس‌های مربع اصلی؛ درضمن اگر یك نقطه دو بار علامت‌گذاری شده باشد، به‌معنای

آن است،که در این نقطه، دو مستطیل بههم وصل شدهاند. بهاینترتیب:

$$۲k \leqslant ۴n+۴ \Rightarrow k \leqslant n+۱$$

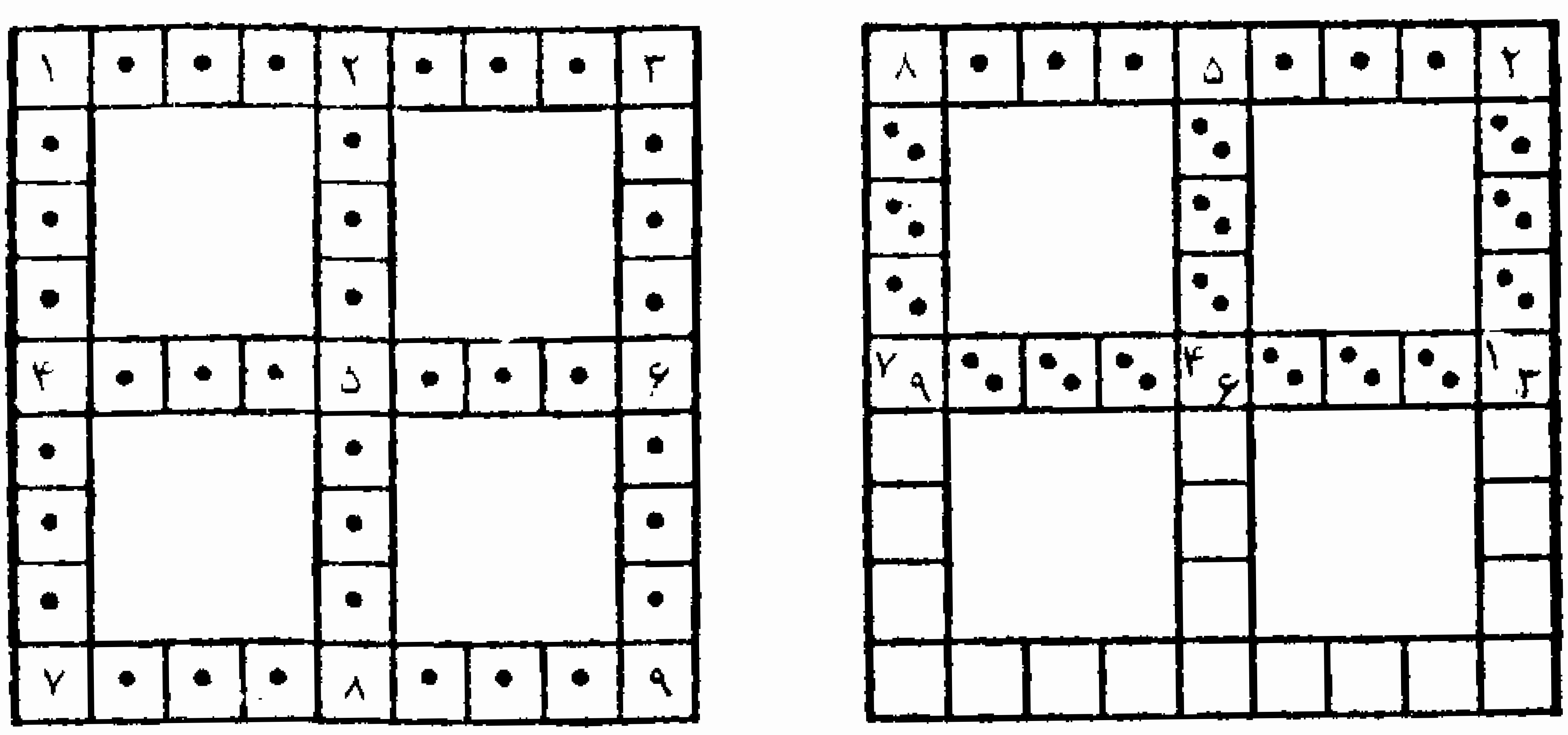
۲۲۸. سه نقطهٔ $(x_۰, y_۰)$، $(x_۱, y_۱)$، $(x_۲, y_۲)$ تنها وقتی روی یك خط راست قرار دارندکه داشته باشیم:

$$(x_۱-x_۰)(y_۲-y_۰)-(x_۲-x_۰)(y_۱-y_۰)=۰ \qquad (*)$$

اگر x_i و y_i $(i=۰, ۱, ۲)$، تابعهایی خطی اززمان t باشند،آن وقت $(*)$، به صورت معادلهای درجه دوم نسبت به t، در میآید و نمیتواند بیش از دو ریشه داشته باشد.

۲۲۹. a) میتوان فرض کرد که، حشره، از خانهٔ مرکزی، به سمت راست و به اندازهٔ $k \geqslant ۲$ خانه جابهجا شود. در هریك از ۴۹ خانهٔ ردیف راست، تعداد خانههای افقی را مینویسیم که حشرهمیتواند از خانهٔ متناظر به آن جا برود؛ جابهجایی بــه سمت راست را مثبت و جابهجایی به سمت چپ را منفی به حساب میآوریم. روشن است، برای حشرهای که درسمت راستترین خانه قرار دارد، جابهجائی منفی است و، درضمن، عددهایی که در دوخانهٔ مجاور نوشته میشود، بیش از ۲ واحــد باهم اختلاف ندارند. وقتیکه دورديف ازخانهٔ مرکزی به راست برویم، باید درجایی «از ۰عبور کنیم»، بنابراین، یکی ازعددهای نوشته شده، برابر است با۱، ۰ یا ۱ــ، یعنی یکی از حشرهها باید حداکثر يك خانه جابهجا شود.

b). پاسخ: حکم درست نیست. در شکل ۹۷، مثالی داده شده است



شکل ۹۷

که، در آن، همهٔ حشره‌ها، دور از خانهٔ آغازین خود قراردارند(در سمت چپ نشان داده شده است که چه شماره‌ای را به حشره نسبت داده‌ایم؛ و در سمت راست، شماره‌ای که مشخص می‌کند، حشره، از خانهٔ مربوط به کجا می‌تواند پرواز کند).

c) پاسخ: حکم درست است.

این حکم را، درحالت کلی، و برای مستطیل شامل $m\times n$ خانه ثابت می‌کنیم. برای مربع‌های ۱ × ۱ و ۲ × ۲ و مستطیل ۲ × ۱، درستی حکم روشن است (به‌طور کلی، برای مستطیل‌های $n\times$ ۱ و $n\times$ ۲، می‌توان حکم را به سادگی، وشبیه a) ثابت کرد). فرض می‌کنیم، بعدهای‌مستطیلی $m\times n$، از ۲ بیشتر باشد: $n\geqslant m>$ ۲. ثابت می‌کنیم، از این مستطیل (با جدا کردن ردیف‌های کناری)، می‌توان مستطیل کوچکتر π را به دست آورد، که همهٔ حشره‌های آن، دوباره در π فرود می‌آیند و، بنابراین، کافی است قانع شویم که، در π، حشرهٔ موردنظر که «تقریباً بی‌حرکت» است، وجود دارد.

بهتر است فاصلهٔ ρ، بین دو خانهٔ A و B را، با تعداد حرکت‌هایی نشان دهیم که، شاه شطرنج می‌تواند خود را از A به B برساند: مجموعهٔ خانه‌های M (در صفحهٔ شطرنجی) که از خانهٔ مفروض C، به فاصله‌ای حداکثر برابر r قرار داشته باشند (برای هر ... ۲، ۱ = r)، مربع $(2r+1)\times(2r+1)$ به مرکز خانهٔ C را پرمی‌کنند. بنا برشرط، حشره از خانهٔ K به خانهٔ $f(K)$ می‌رود، به نحوی که برای خانه‌های A و B به‌فاصله ۱، داریم: $\rho(f(A),f(B))\leqslant 1$. دراین صورت، برای‌هردوخانهٔ A و B داریم:

$$\rho(f(A), f(B))\leqslant\rho(A, B) \qquad (*)$$

درمستطیلی $m\times n$ $(m\leqslant n)$، خانه‌هایی را «مرزی» می‌نامیم که، فاصلهٔ از آن‌ها تا خانه‌هایی از مستطیل، برابر $n-1$ باشد. اگر $m<n$، این خانه‌ها، دو ردیف مرزی را (که متناظر با ضلع‌های کوچکتر مستطیل‌اند) پر می‌کنند؛ و در مربع $n\times n$، این خانه‌ها، چهار ردیف مرزی (حاشیه) را پر می‌کنند. توجه می‌کنیم که، فاصلهٔ ρ بین دو خانه از ردیف‌های مرزی متقابل، برابر $n-1$ و برای هردو خانه دیگر، کمتر از $n-1$ است.

اگر در یکی از ردیف‌های کناری، حتی یك حشره نیفتد، آن وقت با کنار گذاشتن این ردیف، مستطیل لازم π را با اندازه‌های $m \times (n-1)$ به دست می‌آوریم که، در آن، حشره از هر خانهٔ K به خانهٔ $f(K)$ از π پرواز می‌کند.

در حالت عکس، می‌توانیم به عنوان π، مستطیلی را انتخاب کنیم که با حذف همهٔ ردیف‌های مرزی از مستطیل مفروض، به دست آمده است. درواقع، می‌توان چند (دو، سه یا چهار) خانه K_i را طوری نشان گذاشت که، هر ردیف مرزی شامل یکی از خانه‌های $f(K_i)$ باشد. چون برای هرخانهٔ M از π و هرخانهٔ K_i داریم: $\rho(M, K_i) \leqslant n-2$، بنابراین با توجه به (*)، خواهیم داشت:

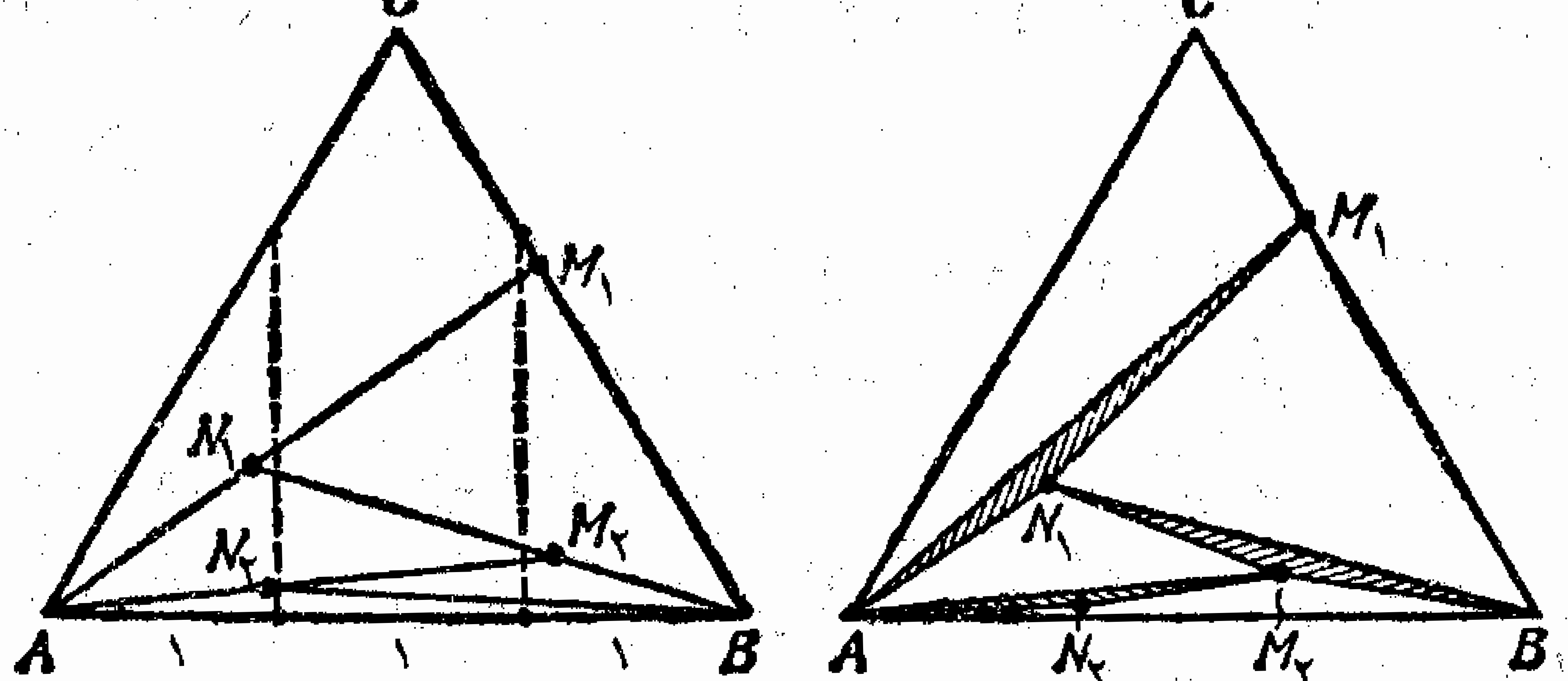
$$\rho(f(M), f(K_i)) \leqslant n-2$$

از این‌جا، و با توجه به ردیف‌های متقابل، نتیجه می‌شود که $f(M)$ در π قرار دارد.

اکنون دیگر، برای تکمیل اثبات، می‌توان به‌استقرا، نسبت به $m+n$ و یا نسبت به $n=\max(m, n)$، متوسل شد. از این گذشته، درضمن ثابت می‌شود که همیشه، مربعی 2×2 وجود دارد که به خودش منجر می‌شود.

$\triangledown$ این مساله، درواقع، بیان خاصی ازقضیهٔ معروف براِئوور است که بنا بر آن: هر نگاشت پیوستهٔ یك مجموعهٔ محدب برخودش، دارای یك نقطهٔ بی‌حرکت است.

۲۳۰. در شکل ۹۸، مسیر ساختمان تقسیم، که با شرط‌های کلی‌تر



شکل ۹۸

b)، c)، d) سازگار باشد و برای مثلث متساوی‌الاضلاع به‌ضلع ۳ داده‌شده است.

ضمن‌عبور ازشکل سمت چپ به‌شکل‌سمت راست، هریك ازنقطه‌های $M_۲$، $M_۳$،...، $N_۱$، $N_۲$، $N_۳$،...، به‌سادگیٔ خودرا پایین می‌کشد تا مثلث‌های تکمیلی خیلی باریك‌تر AM_kN_k، $BN_kM_{k+۱}$ را بسازند ($k = ۱، ۲،...$).

۲۳۱. مثال a) به سادگی به دست می‌آید: کافی است «بلوك»

$$۱، ۲، ۳، ...، n$$

را n مرتبهٔ پشت سر هم بنویسیم؛ i امین عدد هر تبدیل را می‌توان از iامین بلوك‌انتخاب کرد.

به عنوان مثالی برای b)، می‌توان این دنباله را در نظر گرفت.

$$\underbrace{۱، ۲، ...، n، \quad ۱، ۲، ...، n، \quad ...، \quad ۱، ۲، ...، n}_{n-۱}، ۱$$

در واقع، اگر در تبدیل $(k_۱، k_۲، ...، k_n)$، دست‌کم دو عدد مجاور k_j و $k_{j+۱}$ به ترتیب صعودی باشند، آن وقت این دو عدد را می‌توان ازیك بلوك $(n، ...، ۲، ۱)$، که در ردیف jام قرار دارد، انتخاب کرد؛ درضمن، عدد ۱ آخر هم لازم نخواهد شد ولی اگر هیچ دو جملهٔ متوالی به ترتیب صعودی نباشند، به ناچار به‌صورت

$$n، n-۱، n-۲، ...، ۲، ۱$$

است؛ در این صورت باید از بلوك jام $n-j$ را انتخاب‌کرد وعدد ۱ آخر دنباله هم به درد می‌خورد.

c) برای هر عدد k (از ۱ تا n)، آن را کــه برای نخستین‌بار در «دنبالهٔ عام» با آن برخورد می‌کنیم، علامت می‌گذاریم. یکی ازاین عددهای علامت دار، در nامین جــا از آغاز، و یا کمی دورتـر قـرار دارد. برای مشخص بودن وضع، این عدد را n می‌گیریم. قبل ازآن، دست‌کم $n-۱$

عدد وجود دارد. بعد از آن، دنباله‌ای قرار دارد که باید، برای تبدیل‌های عددهای $(۱، ۲، ...، n-۱)$ «عام» باشد و، با روش استقرایی، فرض را بر این می‌گیریم که طول آن، از $\frac{۱}{۲}n(n-۱)$ کمتر نباشد. به‌این ترتیب، برای به‌دست آوردن تبدیل‌های مختلف n عدد، طول دنبالهٔ عام از $n+\frac{۱}{۲}n(n-۱)$، یعنی $\frac{۱}{۲}n(n+۱)$ کمتر نیست.

d) یادآوری می‌کنیم، اگر عدد n، در دنبالهٔ عام مرتبهٔ n [یعنی دنبالهٔ عامی که بتوان از آن، همهٔ تبدیل‌های n عدد را به‌دست آورد]، تنها یکبار آمده باشد، آن وقت، چه قبل از آن و چه بعد از آن، باید دنبالهٔ عامی از مرتبهٔ $(n-۱)$ وجود داشته باشد. این نکته به ما امکان می‌دهد تا، نسبت به c)، ارزیابی دقیق‌تری از تعداد جمله‌های دنبالهٔ عام داشته باشیم.

کوتاه‌ترین طول دنبالهٔ عام مرتبهٔ n را با l_n نشان می‌دهیم. در این صورت $l_۲=۳$. ثابت می‌کنیم $l_۳=۷$ (نمونه‌های ۱۲۱۳۱۲۱ یا ۱۲۳۱۲۳۱) اگر عددی، و مثلاً ۳، تنها یکبار در دنباله آمده باشد، آن وقت طول آن، از $۷ \leqslant ۲l_۲+۱$ کمتر نیست. در حالت دیگر، عددی را در نظر می‌گیریم که، برای نخستین بار، در جای سوم یا بعدتر، با آن رو به‌رو می‌شویم (فرض کنید، این عدد ۳ باشد). به دنبال آن، یکبار دیگر با ۳ برخورد می‌کنیم و، هم‌چنین، یك دنبالهٔ عام‌هم (به دنبال ۳) وجود دارد، به نحوی که طول تمامی آن از

$$۲+۱+۱+l_۲=۴+l_۲=۷$$

کمتر نیست. به‌همین ترتیب، می‌توان قانع شد که $l_۴=۱۲$. مثال

۱۲۳۴۱۲۳۱۴۲۳۱ یا ۴۱۲۳۴۱۲۴۳۱۴۲

ارزیابی: اگر عددی تنها یکبار در دنباله آمده باشد، آن وقت، طول آن نمی‌تواند از $۲l_۳+۱=۱۵$ کمتر باشد؛ در حالت دیگر، از $۱۲=۳+۱+۱+l_۲$ کمتر نیست.

با همین استدلال می‌توان ثابت کرد:

$$l_n \geqslant \frac{۱}{۲}\, n(n+۱)+n-۲$$

e) می‌توان ثابت کـرد که، دنبالهٔ عام مرتبهٔ n را می‌تـوان با طول $n^{۲}-۲n+۴$، به صورت زیر نوشت:

$$\underbrace{n\,۱۲\cdots(n-۱)\,n}\ \underbrace{۱۲\cdots(n-۲)\,n\,(n-۱)}\cdots$$

$$\cdots\underbrace{۱۲n۳\cdots(n-۱)}\ ۱n۲ \qquad (*)$$

که در آن، در هر یك از $(n-۲)$ بلوك، عدد n ابتدا درآخر، سپس، قبل‌از $(n-۱)$، بعد از آن قبل از $(n-۲)$، ...، و سرانجام قبل از ۳ مـی‌آید؛ به جز این، عدد n در ابتدا و $۱n۲$ در انتها آمده است (به ایـن ترتیب، مثال دیگری برای $n=۴$ پیدا می‌شود). برای این منظور، کافی است قانع شویم‌که، از سمت چپ، از k امین باری کـه n در $(*)$ وارد شده است، می‌توان با حذف، هردنباله‌ای از $(k-۱)$ عددمختلف را(بین ۱، ۲، ...، $n-۱$) پیدا کرد؛ و همچنین از سمت راست، هردنباله‌ای از $n-k$ عدد. واقع این است که هر دو بخش راست و چپ، بعد از حذف همهٔ nها، به این‌صورت در می‌آیند:

$$\underbrace{\underbrace{۱۲\cdots m}\ \underbrace{۱۲\cdots m}\cdots\underbrace{۱۲\cdots m}}_{r-۱\ \text{مرتبه}}\ ۱۲\cdots r$$

که در آن $m=n-۱\geqslant r$. واین دنباله، دارای ویژگی زیر است [ویژگی «دنبالهٔ عام» $(m، r)$]: از این‌دنباله، می‌توان با حذف، هردنباله‌ای را با r عدد مختلف (از بین ۱، ۲، ...، m) به‌دست آورد.

۲۳۱. $m=\left[\frac{n}{۲}\right]$ می‌گیریم، به نحوی‌که $n=۲m$ یا $n=۲m+۱$.

عددهای مفـروض را، به صورت زیر شماره‌گـذاری می‌کنیم: $x_۰=۱$ را

«مبدا» عددها می‌گیریم، سپس، از x_0 در جهت حرکت عقربه‌های ساعت x_1، x_2، ...، x_m و از x_0 درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت x_{-1}، x_{-2}، ...، x_{-m+1} (و x_{-m}، اگر n عددی فرد باشد).

a) اگر اختلاف هر دوعدد مجاور، بیش از ε نباشد، آن وقت

$$x_1 \geqslant 1-\varepsilon \qquad x_{-1} \geqslant 1-\varepsilon$$

$$x_2 \geqslant 1-2\varepsilon, \qquad x_{-2} \geqslant 1-2\varepsilon,$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$x_{m-1} \geqslant 1-(m-1)\varepsilon, \qquad x_{-m+1} \geqslant 1-(m-1)\varepsilon,$$

$$x_m \geqslant 1-m\varepsilon, \qquad (x_{-m} \geqslant 1-m\varepsilon)$$

این نابرابری‌ها را باهم جمع می‌کنیم، همچنین برابری $x_0=1$ را هم در این جمع درنظر می‌گیریم، با توجه به این که، مجموع همهٔ عددها برابر صفر است، به دست می‌آید:

$$0 \geqslant n-(1+2+\dots+(m-1)+m+(m-1)+\dots$$
$$\dots+2+1)\,\varepsilon = n-m^2\varepsilon$$

از آن‌جا $\varepsilon \geqslant \frac{n}{m^2} \geqslant \frac{4}{n}$ (زیرا $m^2 \leqslant \frac{n^2}{4}$).

▽ این ارزیابی برای حالتی که n عددی زوج باشد، دقیق است. در حالت $n=2m+1$، می‌توان آن را، با استفاده از x_{-m}، دقیق‌تر کرد:

$$\varepsilon \geqslant \frac{n}{m^2+m} = \frac{4n}{n^2-1}$$

b) در این‌جا می‌توان از نتیجه‌گیری a)، دوبار استفاده کرد. فرض کنید، بزرگترین اختلاف عددهای مجاور، از لحاظ قدرمطلق، برابر ε باشد. با توجه به a: $\varepsilon \geqslant \frac{4}{n}$. ازطرف دیگر، تفاضل‌های «به‌معیاردرآمدهٔ» عددهای

مجاور از گروه $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$، یعنی عدد $y_k=\frac{x_k-x_{k-1}}{\varepsilon}$ هم، به نوبهٔ خود با همهٔ شرط‌های مسالهٔ a) سازگارند؛ بنا بر این، برای مقداری از k داریم:

$$\left|\frac{x_{k+1}+x_{k-1}}{2}-x_k\right|=\left|\frac{x_{k+1}-x_k}{2}-\frac{x_k-x_{k-1}}{2}\right|=$$

$$=\left|y_{k+1}-y_k\right|\cdot\frac{\varepsilon}{2}\geqslant\frac{8}{n^2}$$

(در این‌جا، گاهی لازم می‌شود، اندیس را، به اندازهٔ n کم یا زیاد کنیم، زیرا عددها، روی محیط یك دایره‌اند.)

c) و d) نشان می‌دهیم که چگونه، برای هر n، بهترین ارزیابی ممکن از بالا، برای مقدار δ به دست می‌آید، δ عبارت است از حداکثر ممکن برای قدرمطلق تفاضل بین یك عدد واقع برمحیط دایره و واسطهٔ حسابی دو عدد مجاور آن، و سپس، انتخاب بهین را (با کمترین مقدار δ) می‌سازیم. درضمن، انتخاب (x_k) را می‌توان متقارن به حساب آورد: $x_k=x_{-k}$، زیرا با تغییر x_k به $\frac{x_k+x_{-k}}{2}$، همهٔ ویژگی‌هایی که در شرط مساله آمده‌است و هم ارزیابی

$$|x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}|\leqslant 2\delta$$

حفظ می‌شود. قبل از آن‌که خود عددهای x_k را ارزیابی کنیم، تفاضل‌های $x_{k-1}-x_k$ را، با آغاز از x_0 و سپس با آغاز از نفطهٔ متقابل (وسط گروه)، ارزیابی می‌کنیم. چون $x_1=x_{-1}$

$$x_0-x_1\leqslant\frac{1}{2}|-x_{-1}+2x_0-x_1|\leqslant\delta;$$

$$x_1-x_2\leqslant(x_0-x_1)+|-x_0+2x_1-x_2|\leqslant 3\delta;$$

$$x_2-x_3\leqslant(x_1-x_2)+|-x_1+2x_2-x_3|\leqslant 5\delta;$$

. . . .

$$x_{k-1}-x_k \leqslant (2k-1)\delta \qquad (1)$$

وقتی $n=2m$ زوج باشد،وقتی که تنها عدد x_m، نسبت به x_0، متقابل است، به همان ترتیب، به دست می‌آید:

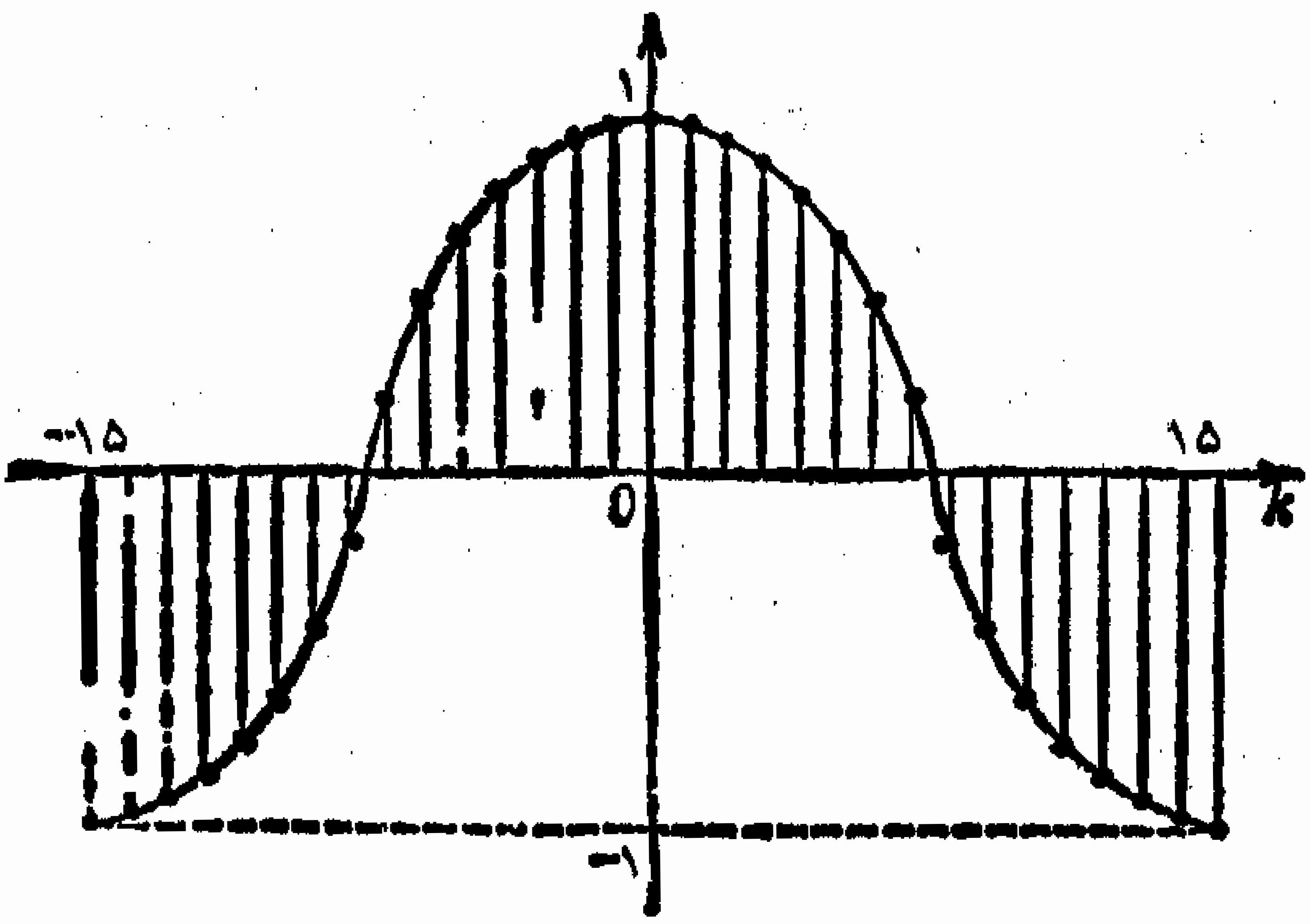
$$x_{m-1}-x_m \leqslant \delta;\ x_{m-2}-x_{m-1} \leqslant 3\delta;\ \dots;$$

$$x_{m-j}-x_{m-j+1} \leqslant (2j-1)\,\delta \qquad (2)$$

وقتی $n=2m+1$ فرد باشد ($x_m=x_{-m}$ دوعدد مجاورند)، آن وقت

$$x_{m-1}-x_m \leqslant 2\delta;\ x_{m-2}-x_{m-1} \leqslant 4\delta;\ \dots;$$

$$x_{m-j}-x_{m-j+1} \leqslant 2j\delta \qquad (2')$$



شکل ۹۹

یادآوری می‌کنیم، اگر k کمتر از $\frac{n}{2}$ باشد، بهترین ارزیابی برای $x_{k-1}-x_k$ عبارت است از (۱)، برای k بیشتراز $\frac{n}{2}$، (۲) یا (′۲)؛ برای انتخاب بهینه از عددهای (x_k)، باید نابرابری‌ها بـه برابری تبدیل شوند؛ درضمن، نمودار دنبالهٔ بهینه، روی قطعه‌ای ازسهمی قرار دارد (شکل ۹۹).

برای این که این مطلب را ثابت کنیم، و ارزیابی دقیقی از δ برای هر n

بدهیم، باید به طور جداگانه، چهار حالتی را که متناظر باقی‌مانده‌های n در تقسیم بر ۴ هستند، درنظر بگیریم مثلاً فرض کنید $n=4l+2$، از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$x_k = x_{-k} \geqslant 1 - s_k\delta$$

که در آن، s_k عبارت است از مجموع نخستین k عدد در سطر

$$1, 3, \ldots, 2l-1, 2l+1, 2l-1, \ldots, 3, 1$$

ارزیابی دقیق δ از این شرط به دست می‌آید که، مجموع همهٔ x_kها، برابر صفر باشد و انتخاب $x_k = x_{-k} = 1 - s_k\delta$، بهینه خواهد بود. در حالت خاص، برای $n=30$ $(l=7)$، به دست می‌آید:

$$0 = x_0 + 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_{14}) + x_{15} \geqslant 30 - S\delta$$

که در آن $S = 2(s_1 + s_2 + \ldots + s_{14}) + s_{15}$. این مجموع را، بهتر است این‌طور تبدیل کنیم. چون

$$s_{15} = 1+3+5+\cdots+11+13+11+\cdots+3+1 =$$
$$= 7^2 + 8^2 = 113 = s_1 + s_{14} = s_2 + s_{13} = \ldots = s_7 + s_8$$

آن وقت $S = (2\times 7+1)s_{15} = 15 \times 113$. به این ترتیب $\delta \geqslant \frac{2}{113}$،

درضمن، $\delta = \frac{2}{113}$ تنها برای انتخاب زیر به دست می‌آید (که روی شکل نشان داده شده است):

$$x_k = x_{-k} = 1 - s_k\delta =$$

$$= \begin{cases} 1 - k^2\delta & (\text{به‌ازای } 0, 1, \ldots, 7) \\ 1 - (113 - (15-k)^2)\delta = -1 + (15-k)^2\delta & (k = 8, \ldots, 15) \end{cases}$$

به‌همین ترتیب، می‌توان مرزهای دقیق δ را، برای هر n به‌دست‌آورد و قانع شد که، برای همهٔ مقدارهای n، نابرابری $\delta \geqslant \frac{16}{n^2}$ برقرار است.

رهرچه n بزرگتر باشد، این ارزیابی به مقدار دقیق آن نزدیکتر می‌شود).

▽ مسالهٔ زیر، کاملاً شبیه مسالهٔ اخیر است: مطلوب است حداکثر مقدار ممکن تفاضل، بین ماکزیمم و می‌نیمم تابع متناوب T، به شرطی که مشتق آن، از لحاظ قدرمطلق، از واحد تجاوز نکند. این مساله، حتی از حالت «ناپیوستهٔ» آن، ساده‌تر است. در این‌جا هم، نمودار تابعی که دارای حداکثر «نوسان» باشد، از قطعه سهمی‌ها تشکیل شده است.

۲۳۳. ابتدا، به ذکر بعضی نکته‌ها می‌پردازیم که به هرمقدارعددطبیعی n مربوط می‌شوند. روی هم، 2^n ترتیب ازعددهای ۱+ و ۱− درراس‌های nضلعی منتظم وجود دارد. دو تبدیل را وقتی هم‌ارز به حساب می‌آوریم که بتوان، با توجه بـه شرط مساله، یعنی تغییر علامت‌ها در رأس‌های n ضلعی منتظم، از یکی به دیگری (و برعکس) رسید. هردو عمل ازاین گونه، «قابل جابه‌جائی»اند: نتیجهٔ کار، به‌ردیف این عمل‌ها بستگی ندارد؛ تکرار دوبار متوالی از یك عمل را می‌توان حذف کرد، زیرا با حالت نخست خود متحد می‌شود. درضمن، می‌توان خود را تنها به عمل‌هایی محدود کرد که علامت‌ها را در رأس‌های p ضلعی‌های منتظم، که p یعنی تعداد رأس‌های آن‌ها عددی اول است، تغییر می‌دهند. (ایـن p ضلعی‌ها را «مولد» می‌نامیم)؛ مجموعهٔ رأس‌های n ضلعی منتظم را، برای هر n، که بر p بخش‌پذیر باشد، می‌توان به تعداد $\frac{n}{p}$ از p ضلعی‌های مولد تقسیم کرد.

قبل از این که دورتر برویم، مساله‌های مشخص را درنظر می‌گیریم.

a) برای $n=15$، روی‌هم هشت p ضلعی‌مولد وجوددارد: ۵مثلث و ۳ پنج‌ضلعی. ترتیبی را که تنها شامل عددهای ۱+ باشد، E می‌نامیم. هر ترتیب هم ارز E، با توجه به یکی از زیـر مجموعه‌های مجمـوعهٔ شامل ۸ pضلعی معین‌می‌شود؛ تعدادزیرمجموعه‌های مختلف (با به‌حساب آوردن مجموعهٔ درستی) برابر است با 2^8 و ایـن، از تعداد کل 2^{15} ترتیب، کمتر است. بنا براین ترتیب‌هایی وجود دارد که هم‌ارز E نیستند.

b) برای $n=30$، تعداد کل p ضلعی‌های مولد، برابر است با

$$۱۵+۱۰+۶=۳۱$$

برای حل مساله، به نکته‌های دیگری نیاز داریم. می‌توان به تعداد کمتری از مولدها اکتفا کرد: مثلاً از هر دو مثلث (و پنج‌ضلعی) که نسبت به مرکز متقارن‌اند، می‌توان تنها یکی را در نظر گرفت، زیرا تغییر علامت‌ها در آن و، هم‌چنین، در سه (پنج) «دوضلعی» شامل رأس‌های آن، با تغییر علامت در سه‌ضلعی (پنج‌ضلعی) متقارن آن، هم‌ارز است. از این جا، تعداد مولدها برابر ۳+۵+۱۵، یعنی ۲۳ می‌شود و بنابراین $۲^{۲۳}$ ترتیب هم‌ارز E به دست می‌آید که از $۲^{۳۰}$ کمتر است.

C) سعی می‌کنیم، برای هر n، تعداد $T(n)$، یعنی تعداد ترتیب‌های هم‌ارز E را پیدا کنیم. توجه کنیم، تعداد ترتیب‌های هم‌ارز با ترتیب دیگر A از ۱+ و ۱−، باز هم برابر $T(n)$ است؛ همهٔ آن‌ها، از ضرب جمله به جملهٔ علامت‌های ترتیب A، در هر ترتیبی از گروه هم‌ارزهای E به‌دست می‌آیند. اگر تعداد «گروه‌های هم‌ارز» ــ حداکثر تعداد ترتیب‌های دو به‌دو ناهم‌ارزــ را $K(n)$ بنامیم، داریم:

$$K(n)=\frac{۲^n}{T(n)}$$

فرض کنید، n شامل s عامل اول باشد:

$$n=p_۱^{\alpha_۱}\,p_۲^{\alpha_۲}\cdots\,p_s^{\alpha_s} \qquad (*)$$

$p_۱p_۲\ldots p_s=q$ و $\frac{n}{q}=m$ می‌گیریم. nضلعی منتظم را به q ضلعی‌های منتظم، به تعداد m، تقسیم می‌کنیم. مسالهٔ محاسبهٔ $T(n)$، بــه مسالهٔ ساده‌تر محاسبهٔ

$$T(q)=T(p_۱p_۲\cdots p_s)$$

منجر می‌شود. درواقع، هر یك ازمولدهای p_i ضلعی، مشمول تنها یکی از q ضلعی‌ها می‌شود؛ به زبان دیگر، تغییر علامت‌ها در q ضلعی‌های مختلف، به هم بستگی ندارند، بنابراین

	۰	۱	۲	۳	۴
۰	۰	۶	۱۲	۳	۹
۱	۱۰	۱	۷	۱۳	۴
۲	۵	۱۱	۲	۸	۱۴

شکل ۱۰۰

هر عدد از ۰ تا ۱۴، نسبت به باقی‌مانده‌های خود در تقسیم بر ۵ و بر ۳، به‌صورت یك ارزشی معین می‌شود.

$$T(n)=(T(q))^m,\ K(n)=(K(q))^m$$

ازحالت $s=2$ آغاز می‌کنیم: فرض کنید $n=p_1p_2$. راس‌های n ضلعی‌را، با عددهای ۰، ۱، ۲، ...، $n-1$ شماره گذاری می‌کنیم. این عددها را، در جدول $p_1\times p_2$ طوری می‌نویسیم که، عددهای یك سطر، در تقسیم بر p_1، وعددهای یك ستون در تقسیم بر p_2، دارای یك باقی‌مانده باشند. این جدول را می‌توان تشکیل داد، زیرا دو باقی‌ماندهٔ (r_1, r_2)، از تقسیم بر p_1 و p_2، به‌صورت یك ارزشی، شماره‌های از ۰ تا n را معین می‌کنند (شکل ۱۰۰). ترتیب عددهای ۱+ و ۱− روی محیط دایره، متناظرند با ترتیب عددهای

$$\sigma(r_1,r_2)=+1 \text{ و } -1$$

در خانه‌های جدول (r_1، شمارهٔ سطر؛ r_2، شمارهٔ ستون): تغییر علامت‌ها در p_1 ضلعی‌ها و p_2 ضلعی‌ها، متناظر است با تغییر علامت‌های σ در سطرها و ستون‌ها. هر ترتیبی ازاین عمل‌ها را می‌توان به این‌جا منجر کرد که، در سطر اول و ستون اول، ۱+ باشد. این گونه ترتیب‌ها، دو به‌دو ناهم‌ارزند؛ در واقع، با تغییرعلامت σ در سطرها و ستون‌ها، مقدار حاصل‌ضرب

$$\sigma(r_1, r_2)\,\sigma(0, r_2)\,\sigma(r_1, 0)\,\sigma(0, 0)$$

تغییر نمی‌کند (انتخاب این‌مقدارها، برای هر(r_1, r_2)، $1\leqslant r_1\leqslant p_1-1$، $1\leqslant r_2\leqslant p_2-1$، گروه هم‌ارزها را معین می‌کند). بنا براین‌

$$K(p_1p_2)=2^{(p_1-1)(p_2-1)},T(p_1p_2)=2^{p_1+p_2-1}$$

در حالت خاص: $K(15)=2^8$، $T(15)=2^7$، $K(10)=2^4$. برابری اخیر، امکان می‌دهد تا $K(200)$ را پیدا کنیم:

$$n=200=2^3\times 5^2,\ q=10,\ m=20,$$
$$K(200)=(K(10))^{20}=2^{4\times 20}=2^{80}$$

به‌همین ترتیب، می‌توان $K(n)$ را، برای هر حالتی از s، پیدا کرد. فرض کنید $q=p_1p_2\ldots p_s$؛ شمارهٔ k از 0 تا $q-1$، به‌صورت یك‌ارزشی به وسیلهٔ باقی‌مانده‌های r_1، r_2، …، r_s در تقسیم q بر p_1، p_2، …، p_s معین می‌شود (قضیهٔ چینی در بارهٔ باقی‌مانده‌ها: ضمیمهٔ ۲). با تبدیل‌های $\sigma(r_1,r_2,\ldots,r_s)$ــ به‌تابع‌های درمجموعهٔ انتخاب‌های r_i، $0\leqslant r_i\leqslant p_i-1$ $(1\leqslant i\leqslant s)$، که علامت‌های $+1$ و -1 را می‌پذیرند ــ می‌توان به‌طور هم‌زمان، عمل‌های مربوط به تغییر علامت‌ها را در یك «ردیف»، که از p_i انتخاب تشکیل شده است و در آن‌ها، iامین مختص r_i دلخواه (و از 0 تا p_i-1 تغییر می‌کند) و بقیهٔ $s-1$ عدد r_i ثابت‌است (برای هر $i=1,2,\ldots,s$)، انجام داد. با این عمل‌ها، هر تبدیل به این‌جا منجر می‌شود که، اگر دست‌کم یکی از r_iها صفر باشد $\sigma(r_1, r_2, \ldots, r_s)=+1$؛ درضمن، این منجرشدن تبدیل‌ها، به هم بستگی ندارند (حاصل‌ضرب 2^n مقدار σ برای انتخاب‌ها، که از تبدیل بعضی مختص‌ها به صفر به دست می‌آیند، تغییر نمی‌کند). پاسخ را، برای $q=p_1p_2\ldots p_s$ و برای هر $n=qm$ به‌صورت (*) می‌نویسیم:

$$K(q)=2^{(p_1-1)\ldots(p_s-1)};\ K(n)=2^{\varphi(n)}$$

که در آن $\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_s}\right)$. و در حالت خاص

$$K(30)=2^8;\ T(30)=2^{32}$$

▽ در این‌جا، به‌صورتی نامنتظر، تابع $\varphi(n)$ پدیدارشدکه درنظریهٔ عددها، معروف است: این، تابع اولر است و معرف تعداد عددهای طبیعی کوچکتر از n است که نسبت به n اول باشند.

۲۳۴. تنها نقطه‌های واقع بر نیم‌کرهٔ «شمالی» به قطب P را در نظر می‌گیریم (مقدارهای تابع f، متناظر با دوانتهای یك قطر، با هم برابرند). قطب P را، بلندترین نقطهٔ کره به‌حساب می‌آوریم. روشن است که $f(P)=1$ و، برای هر نقطهٔ دیگر M، از کره، داریم: $0 \leqslant f(M) < 1$.

a) O را مرکز کره بگیرید. فاصلهٔ c_M از نقطهٔ M تا صفحهٔ استوا، برابر است با کسینوس زاویهٔ MOP، به‌نحوی که

$$f(M)=c_M^2=\cos^2\gamma, \ (\gamma=\widehat{MOP})$$

اگر c_1، c_2 و c_3، کسینوس زاویه‌هایی باشند که سه شعاع دوبه‌دو عمود برهم OM_1، OM_2 و OM_3 با OP تشکیل می‌دهند، آن‌وقت $c_1^2+c_2^2+c_3^2=1$، زیرا c_1، c_2 و c_3 عبارتند از طول تصویر پاره‌خط راست واحد OP برسه خط راست دوبه‌دوعمود برهم (می‌توان مکعب مستطیل با یال‌های c_1، c_2 و c_3 و قطر $OP=1$ را ساخت).

حل مساله‌های b) و c) بر نتیجه‌ای که از شرط (*) به دست می‌آید، تکیه دارد: Γ_X را نیمی ازدایرهٔ عظیمه (به‌جز استوا و نصف‌النهار) می‌گیریم که دو انتهای آن، روی استوا باشد و، برای آن، X را بلندترین نقطه فرض می‌کنیم. در این صورت، برای هر نقطهٔ Y از کمان Γ_X (غیراز خود X) داریم $f(Y)<f(X)$. در واقع

$$f(Y)+f(Y')+f(Q)=f(X)+0+f(Q)=1$$

که در آن، Y' نقطه‌ای از کمان Γ_X است که برای آن $\widehat{YOY'}=90°$؛ و Q، انتهای شعاع عمود بر صفحهٔ Γ_X است.

b) از هر نقطهٔ X کمان Γ_M می‌توان کمان Γ_X مربوط به آن را رسم و، سپس از آن‌ها، Γ_Y را طوری انتخاب کرد که شامل N باشد. دراین‌صورت

$$f(M)>f(Y)>f(N)$$

c) شبیه حالت قبل، برای هر دو نقطهٔ M و N (که در آن، M بالای N است). می‌توان زنجیرهٔ

$$M = X_0، X_1، X_2، \ldots، X_r = N$$

را طوری ساخت که X_j (برای $j = 1، 2، \ldots، r$) روی $\Gamma_{X_{j-1}}$ باشد (اگر M و N، عرض‌های نزدیك به‌هم داشته باشند، ولی طول جغرافیائی آن‌ها، اختلاف زیادی داشته باشد، آن وقت، باید تعداد بیشتری از گام‌های r را برداشت).

d) اگر برای دو نقطهٔ M و N، واقع بر یك مدار Π و به فاصلهٔ c_1 از صفحهٔ استوا، داشته باشیم $f(M) - f(N) = \varepsilon > 0$، آن وقت برای هر دو نقطهٔ M' و N' (که در آن، M' بلندتر از c_1 و N' کوتاه‌تر از c_1 است) خواهیم داشت:

$$f(M') - f(N') \geqslant f(M) - f(N) = \varepsilon$$

یعنی تابع f، روی ارتفاع c_1، «جهشی» به اندازهٔ ε دارد. از (*) نتیجه می‌شود که، در این صورت، برای هر دو نقطهٔ $c_2 > c_3 \geqslant 0$، با شرط $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$، باید تابع f، «جهشی» که کمتر از $\frac{\varepsilon}{2}$ نیست، یا در ارتفاع c_2 و یا در ارتفاع c_3 داشته باشد. اگر زوج‌های $(c_2، c_3)$ از این گونه را، بیش از $\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$ بگیریم، آن وقت با توجه به شرط $1 \geqslant f \geqslant 0$، به تناقض می‌رسیم.

e) از آن چه گفتیم، معلوم می‌شود که تابع $f(M)$ برابر $g(c_M^2)$ است که، در آن، c_M فاصلهٔ نقطهٔ M تا صفحهٔ استوا، و $y = g(x)$، تابعی است صعودی یکنوا از بازهٔ $1 \geqslant x \geqslant 0$ که با این شرط‌ها سازگار است: $g(0) = 0$، $g(1) = 1$ و به فرض $x_1 + x_2 + x_3 = 1$:

$$g(x_1) + g(x_2) + g(x_3) = 1$$

با توجه به شرط اخیر (به‌ازای $x_1 = 0$) نتیجه می‌شود:

$$g(x_3) = 1 - g(1 - x_3)$$

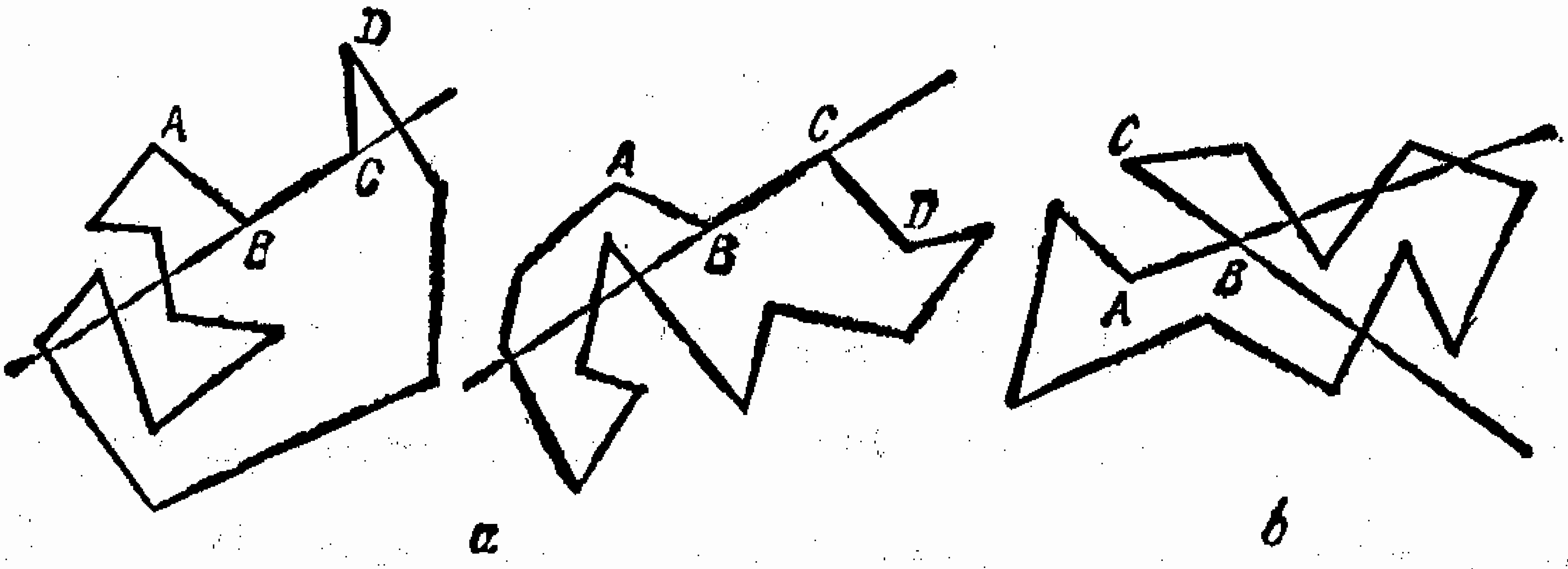
و بنابراین، برای هر x_1 و x_2:

$$g(x_1)+g(x_2)=1-g(1-x_1-x_2)=g(x_1+x_2)$$

ولی تنها تابعی که در این معادلهٔ تابعی صدق می‌کند و، درضمن، با شرط $g(1)=1$ سازگار است، تابع $g(x)=x$ است. این حکم، ابتدا برای x گویا (اول $x=\frac{1}{n}$ و سپس $x=\frac{k}{n}$) و بعد برای همهٔ مقدارهای x (و با توجه به‌یکنوابودن تابع) ثابت می‌شود.

۲۳۵. خط راستی که با امتداد یك ضلع BC از خط شکسته به‌دست آمده است، برحسب این که دوضلع مجاور آن AB و CD در یك طرف مختلف‌خط راست BC واقع باشند، ضلع‌های دیگرخط شکسته‌را در تعدادی زوج یا تعدادی‌فرد قطع می‌کند (در حالت اخیر، ضلع BC را «زیگزاگ» می‌نامیم). در درواقع، زوج یا فردبودن تعداد برخوردهای خط شکسته با خط راست BC، با این مطلب معلوم می‌شود که بدانیم، نقطه‌های A و D، در یك طرف این خط راست قرار دارند یا دردوطرف آن (شکل ۱۰۱، a) ولی روی هر خط شکستهٔ بسته، تعداد «زیگزاگ‌ها» زوج است: وقتی روی محیط این خط شکسته حرکت می‌کنیم، اگر توجه کنیم که در هر راس به کدام طرف می‌چرخیم ــ به راست یا به چپ ــ روشن می‌شود که تعداد چرخش‌های به راست برابر است با تعداد چرخش‌های به چپ، با توجه به این دو نکته، حکم مساله ثابت می‌شود.

اگر به نکتهٔ زیر توجه کنیم، می‌توان اثبات کوتاه‌تری به‌دست آورد: ضلع‌های زاویه‌ای که از امتداد هر دوضلع مجاور AB و BC حاصل می‌شود، خط شکسته را به‌تعدادی زوج قطع می‌کند (شکل ۱۰۱، b).



شکل ۱۰۱

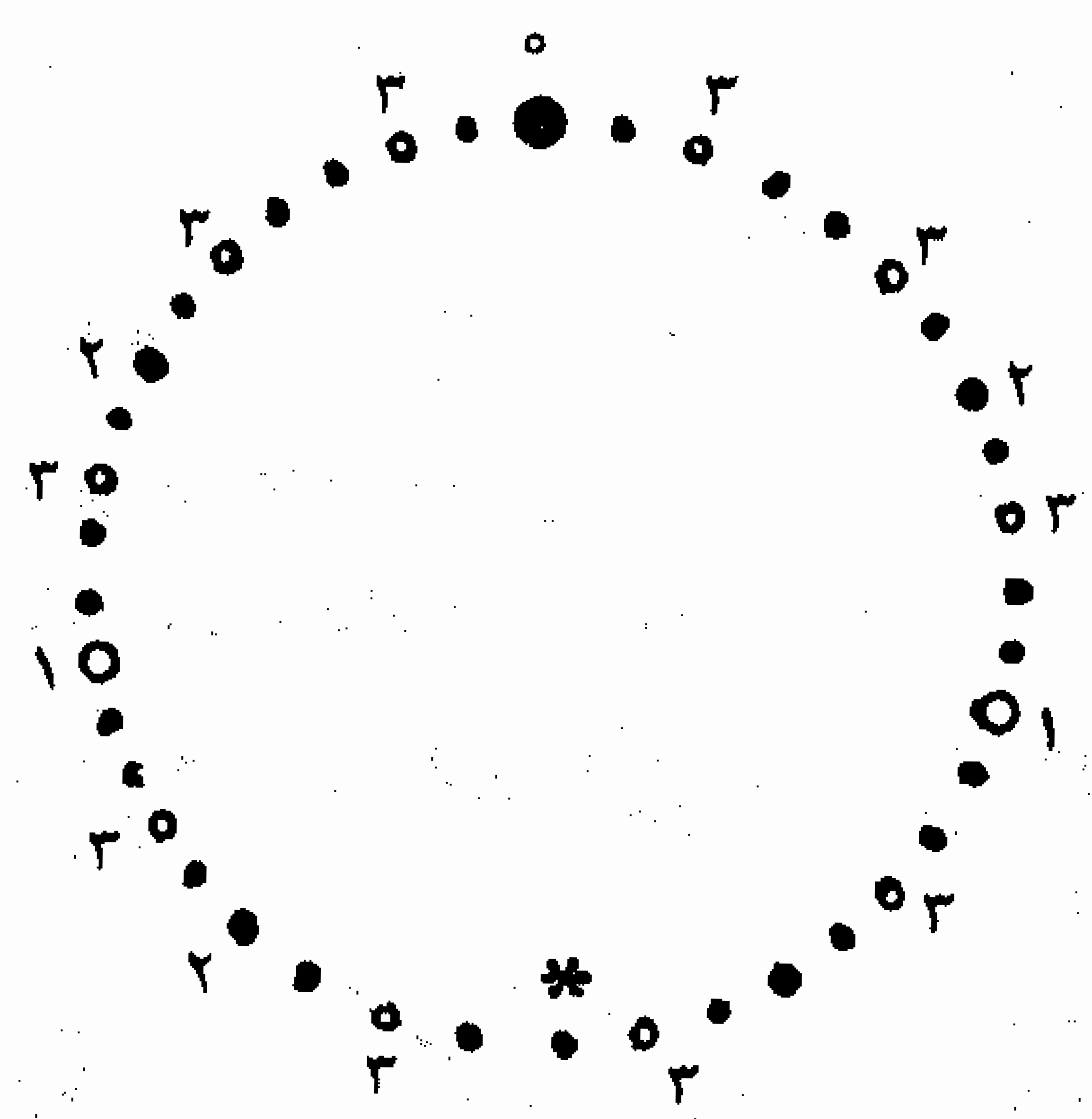
۲۳۶. فرض می‌کنیم درنقطهٔ X، عدد a_X را نوشته باشیم و، درضمن، به تعداد $n_X > ۱$ خط راست از آن بگذرد (این خطهای راست، نقطهٔ X را به نقطه‌های مفروض دیگر، وصل کرده‌اند). مجموع عددهای واقع بر هر یك از این خطهای راست، طبق شرط، برابر صفراست. مجموع کل عددهای روی n_X خط راست (که درآن، عدد a_X، n_X بارشرکت دارد) برابراست با

$$s + (n_X - ۱)\, a_X = ۰$$

که درآن، s عبارت است ازمجموع همهٔعددهایی‌که روی نقطه‌های جداگانه نوشته شده است.- فرض $s \neq ۰$ به تناقضی آشکار می‌انجامد: برای هر نقطهٔ X علامت عدد a_X با علامت مجموع s این عددها، مخالف است؛ بنابراین $s = ۰$ و درنتیجه، برای هر X: $a_X = ۰$.

۲۳۷. حکم b) را، ضمن حل مسالهٔ ۵۸، ثابت کردیم. اگر از دو لوزی ازاین‌گونه (با رأس‌های B و C) استفاده کنیم، نتیجهٔ a) هم به‌سادگی به دست می‌آید.

۲۳۸. پاسخ: بله ممکن است؛ b) ۸ حرکت (هر نفر ۴ حرکت).



شکل ۱۰۲

در شکل ۱۰۲ مثالی از ۴۱ کارت نشان داده شده است؛ کنار هر کارت، عددی را نوشته‌ایم که نشان می‌دهد، بعد از چند حرکت از آخر، این کارت برداشته‌می‌شود. چنین ترتیبی رامی‌توان، به‌راحتی، وازآخرساخت. به آخرین کارت سیاه باقی‌مانده با شمارهٔ ۰، دو کارت سفید با شمارهٔ ۱،

اضافه می‌کنیم؛ در کنار هرکدام از آن‌ها، دو کارت سیاه با شمارهٔ ۲ (در این طرف و آن طرف) می‌گذاریم؛ کنار هرکدام از کارت‌های سیاه، دو کارت سفید شمارهٔ ۳ قرار می‌دهیم و غیره. روشن است که، با این روش، در هرگام، حداکثر تعداد ممکن کارت‌های متناظر با شماره گذاشته می‌شود. برای هر t، ترتیبی با حداکثر تعداد ممکن $a_t=b_t+w_t$ ازکارت‌ها به‌دست می‌آید (b_tکارت‌های سیاه و w_tکارت‌های سفید) که می‌توانند در t حرکت، به‌یك‌کارت سیاه تبدیل شوند ($b_0=1$، $w_0=0$). قانون نوشتن پشت سرهم (b_t, w_t) خیلی ساده است: ضمن عبور از t به $t+1$، عدد بزرگتر از بین دو عدد b_t و w_t تغییر نمی‌کند، به عددکوچکتر، دو برابر عدد بزرگتر اضافه می‌شود:

t	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
b_t	۱	۱	۵	۵	۲۹	۲۹	۱۶۹	۱۶۹	۹۸۵
w_t	۰	۲	۲	۱۲	۱۲	۷۰	۷۰	۴۰۸	۴۰۸
a_t	۱	۳	۷	۱۷	۴۱	۹۹	۲۳۹	۵۷۷	۱۳۹۳

برای حل مسالهٔ a) کافی است یکی از ۴۱ نقطهٔ شکل ۱۰۲ را، که شمارهٔ ۴ داشته باشد، حذف کرد؛ این حذف تاثیری در موقعیت ما، بعد از نخستین حرکت ندارد، مثلاً، برای حفظ تقارن، می‌توان نقطه‌ای را که با علامت * مشخص کرده‌ایم، حذف کرد.

عبور از ۱۰۰۰کارت به یك کارت را، نمی‌توان با کمتر از ۸ حرکت انجام داد، زیرا، همان‌طور که درجدول دیده می‌شود: $a_7=۵۷۷<۱۰۰۰$. برای این که مثال مربوط به ۱۰۰۰ کارت را به دست آوریم، می‌توان ابتدا نمونهٔ $a_8=۱۳۹۳$ را، که با حداکثر ۸ حرکت وجود دارد، در نظر گرفت و،سپس، ۳۹۳کارت با شمارهٔ ۸ را ازآن حذف کردکه برموقعیت‌ما، بعدازحرکت اول تأثیری‌ندارد. این‌عمل‌را می‌توان‌انجام‌داد،زیرا۴۰۸×۲، یعنی ۸۱۶ کارت دارای شمارهٔ ۸ هستند که در بین ۵۷۷کارتی قراردارند که شماره‌ای بیش از ۷ ندارند و، دست‌کم، $۸۱۶-۵۷۷=۲۳۹$ زوج

کارت ردیف هم را تشکیل می‌دهند.

۲۳۹. از تعریف حد دنباله استفاده می‌کنیم (ضمیمهٔ ۲۱). اگر برای هر $n \geqslant N$ و عددی مثل k، نابرابری‌های

$$|a_n - \frac{1}{2}a_{n+1}| < \varepsilon \text{ و } \frac{|a_N|}{2^k} < \varepsilon$$

برقرار باشند، آن وقت، به‌ازای $m \geqslant N + k$ خواهیم داشت:

$$|a_m| < \frac{1}{2}|a_{m-1}| + \varepsilon < \frac{1}{2^2}|a_{m-2}| + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon < \dots$$

$$\dots < \frac{1}{2^{m-N}}|a_N| + \frac{\varepsilon}{2^{m-N+1}} + \dots + \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon <$$

$$< \frac{1}{2^k}|a_N| + 2\varepsilon < 3\varepsilon$$

۲۴۰. تناظر متقابل و یک به یک f را، بین $n-1$ پاره‌خط راست از مسیر اول و $n-1$ پاره خط راست از مسیر دوم به نحوی برقرار می‌کنیم که مسافرت روی پاره‌خط راست اول به‌قیمتی تمام‌شود، که ازمسافرت روی پاره‌خط راست دوم بیشتر نباشد. $t_i(A)$ را «دم» i امین مسیری می‌گیریم $(i = 1, 2)$ که از شهر A آغاز شده است، یعنی مجموعهٔ شهرهایی که، در i امین مسیر، بعد از شهر A قرار دارند. شهر بلافاصله بعد از A را، در مسیر اول A' و در مسیر دوم A'' می‌نامیم.

f را به این ترتیب معین می‌کنیم. اگر AA'، پاره‌خط مسیراول، چنان باشد که $t_1(A)$ با $t_2(A)$ برخورد دارد (یعنی در شهری مشترک‌اند)، آن وقت فرض می‌کنیم: $f(AA') = AA''$. در حالت عکس، فرض می‌کنیم $f(AA') = BB'$ که، در آن، B عبارت است ازآخرین شهر از $t_1(A)$ در مسیر دوم. توجه کنیم که، در این حالت، $t_1(B)$ هم با $t_2(B)$ برخوردی ندارد؛ درضمن، A، آخرین شهر از $t_2(B)$ در مسیر اول است (از این‌جا، نتیجه می‌شود که، تناظر f، یك به یك است و، درضمن، معکوس آن، f^{-1}

هم، با همین قاعده تعریف می‌شود).

اگر $|a|$ را به معنای قیمت بلیت روی پاره‌خط راست a فرض کنیم، تحقیق می‌کنیم که $|f(a)|\geqslant|a|$. اگر C، شهر برخورد $t_1(A)$ و $t_2(A)$ باشد، آن وقت $|AA'|\leqslant|AC|\leqslant|AA''|$: و در حالت دوم

$$|AA'|\leqslant|AB|=|BA|\leqslant|BB''|$$

(در هردوحالت، نابرابری‌ها، نتیجه‌ای از نظام انجام‌مسافرت است: برای‌هر D از $t_1(A)$ داریم: $|AA'|\geqslant|DA|$؛ و برای هر E از $t_2(A)$، برعکس: $|EA|\leqslant|AA''|$).

۲۴۱. دو دایره‌ای را درنظر می‌گیریم که بر دو وجه مجاور یال AB از چندوجهی، محیط باشند. این دو دایره، به‌صورتی یك ارزشی، کرهٔ σ را معین می‌کنند که این دو دایره روی آن قرار گرفته‌اند؛ از این گذشته، همهٔ رأس‌های این دو وجه مجاور هم، روی کره‌اند. اگر BC و BD، دویال دیگر چند وجهی باشند که از B خارج شده‌اند، آن وقت دایره‌ای هم که از سه نقطهٔ B، C و D می‌گذرد (دایرهٔ محیطی وجه شامل این سه رأس)، به کرهٔ σ تعلق دارد، به نحوی که همهٔ رأس‌های دو وجه متصل به یال BC، روی همان σ واقع‌اند. اکنون به همان ترتیب، می‌توان وجه‌های متصل به یالی را در نظر گرفت که از C خارج شده است و، با همین روش، خود را به هر رأسی از چندوجهی رسانید ــ همهٔ آن‌ها روی یك کرهٔ σ قرار دارند: برای هر یك از این رأس‌ها، می‌توان زنجیره‌ای از یال‌ها ساخت که از یال AB آغاز و به رأس موردنظر ختم شده باشد.

۲۴۲. پاسخ: بله، دومی می‌تواند برنده شود.

برای اثبات، باید برنامهٔ برد را توضیح دهیم. دومی می‌تواند درچهار حرکت خود، طوری عمل کندکه، برای حرکت پنجم اولی، ضریب یکی از توان‌های فرد x، x^{2l+1}، باقی‌مانده باشد. فرض کنید، قبل از حرکت چهارم دومی، به چندجمله‌ای

$$P(x)+*\,x^m+l*\,x^{2l+1}$$

رسیده باشیم که، در آن: $P(x)$ چندجمله‌ای معلومی با ضریب‌های عددی است. عددهای μ و $c>0$ را طوری در نظر می‌گیریم که، به‌ازای هرمقدار λ، برای چندجمله‌ای $F(x)=P(x)+\mu x^m+\lambda x^{2l+1}$ داشته باشیم:

$$cF(1)+F(-2)=0$$

که دراین صورت $F(x)$، دارای ریشه‌ای در بازهٔ $[-2, 1]$ خواهد داشت (ضمیمهٔ ۵ را ببینید). برای این منظور کافی است فرض کنیم:

$$c=2^{2l+1} \text{ و } \mu=\frac{P(-2)-cP(1)}{c+(-2)^m}$$

(روشن است که، بـه جای ۱ و ۲ −، می‌توان دو عدد دیگر با علامت‌های مختلف را در نظر گرفت). اگر دومی، در حرکت چهارم خود، این مقدار μ را انتخاب کند، وجود ریشه را در معادلهٔ مفروض، تأمین خواهد کرد.

۲۴۳. پاسخ: $\frac{6}{7}$، $\frac{5}{7}$، $\frac{4}{7}$، $\frac{3}{7}$، $\frac{2}{7}$، $\frac{1}{7}$ و ۰ لیتر.

تحقیق درستی این جواب، دشوار نیست: اگر اولی شیر لیوان خود را، بین ۶ لیوان دیگر به طور برابر تقسیم کند، به هر لیوان $\frac{1}{7}$ لیترشیرمی‌رسد و، درضمن، لیوان اولی خالی می‌ماند، یعنی همان عددهای قبلی ظاهر می‌شوند، با این تفاوت که، جای لیوان‌ها، عوض شده است؛ هر لیوان قبلی، نصیب نفر سمت راستی شده است. تنها این می‌ماند که، ثابت کنیم، جواب دیگری وجود ندارد. از برهان خلف استفاده می‌کنیم.

x را بیشترین مقدار شیری می‌گیریم که، در تمامی مدت جا به‌جایی شیرها، به لیوان Γ، قبل از آن‌که زمان تقسیم آن رسیده باشد، ریخته شده است. در این صورت، بعد از یک‌دور عمل شامل ۷ بار «جا به‌جایی» شیرها (این دور را می‌توان به طور نامحدود ادامه داد، به‌نحوی‌که Γ را می‌توان حلقهٔ اول این دور دانست)، در لیوان Γ حداکثر $x=\frac{x}{6}\times 6$ لیترشیر جمع

می‌شود؛ درضمن، خود این مقدار وقتی به‌دست می‌آید که از هر یك از شش لیوان دیگر، درست $\frac{x}{6}$ لیترشیر به لیوان Γ ریخته شده باشد. به این ترتیب، با توجه به شرط نتیجه می‌شود که، هر لیوان، همان مقدار x لیتر شیر را بخش می‌کند و، بعد از دریافت k سهم، درآن، $\frac{kx}{6}$ لیتر خواهد بود ($k=1, 2, \ldots, 6$)؛ مقدار x، از این شرط به‌دست می‌آید که، مجموع کل شیرها، برابر ۳ لیتر است.

۲۴۴. a) پاسخ: یك عدد دورقمی ۴۹ و یك عددچهار رقمی ۱۶۸۱ (41^2)، عدد «خاص» است.

فرض می‌کنیم: $(10x+t)^2=100x^2+20xt+t^2$ که، در آن، باید عدد $20xt+t^2$ مجذور کامل عددی طبیعی کوچکتر از ۱۰، و t عدد درستی از ۱ تا ۹ باشد، درضمن $x^2>10$. دراین صورت $x \geqslant 4$ و $xt \leqslant 4$ که تنها برای $x=4$ و $t=1$ ممکن است.

b) پاسخ: بله وجود دارد، $256036=506^2$.

c) برای این‌که، عدد «خاص» لازم، به صورت

$$(10^5x+1)^2=10^{10}x^2+2\times 10^5x+1$$

را به‌دست آوریم، کافی است عدددرست xرا طوری پیداکنیم که داشته باشیم:

$$10^9<x^2<10^{10} \text{ و } 2\times 10^5x+1=y^2<10^{10}$$

می‌توان $x=5\times 10^4-1$ انتخاب کرد (عدد ۲۰ رقمی «خاص» موردنظر چنین است:

$$(4999900001)^2=24999000019999800001$$

که از 49999^2 و 99999^2 تشکیل شده است).

d) برای هر k، عدد «خاص» $4k$ رقمی تنها می‌تواند

$$(10^kx+t)^2=10^{2k}x^2+2\times 10^kxt+t^2$$

به ازای $10^{2k} > x^2 \geqslant 10^{2k-1}$ باشد، از این‌جا

$$10^{2k} > 6 \times 10^{2k-1}t \text{ و } x > 3 \times 10^{k-1}$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید $t = 1$. درضمن، برابری

$$2 \times 10^k x + 1 = (2u+1)^2$$

که با برابری $2^{k-1} \times 5^k x = u(u+1)$ هم ارز است، تنها در سه حالت می‌تواند برقرار شود:

(۱) $u+1$ بر $5 \times 10^{k-1}$ بخش پذیر باشد؛

(۲) u بر 2^{k-1} و $u+1$ بر 5^k بخش‌پذیر باشد؛

(۳) u بر 5^k و $u+1$ بر 2^{k-1} بخش‌پذیر باشد.

هر حالت، بیش از یك جواب که با شرط $u < 5 \times 10^{k-1}$، هم‌ارز با شرط $2u+1 < 10^k$ سازگار باشد، ندارد [در حالت‌های (۲) و (۳)، کافی است اختلاف دو جواب را درنظربگیریم تا با این شرط تناقض پیدا کند). بنابراین، بیش از ۳ عدد «خاص» وجود ندارد.

$\triangledown$ با بحثی مفصل‌تر، می‌توان ثابت‌کردکه، از این گونه عدد، بیش از دوتا وجود ندارد.

c) برای‌هر k، دست‌کم یك عددخاص $(4k+2)$ رقمی، یعنی $z^2 = v + w$ وجود داردکه، در آن، $v = 25 \times 10^{2k-1}$، و w عددی طبیعی بزرگتر از $\sqrt{v}$. فرض می‌کنیم $y = w^2 - v$؛ درضمن

$$z^2 = 4v.\, w^2 + y^2 = 10^{2k+1}w^2 + y^2$$

از w^2 و y^2 «تشکیل» شده و عددی خاص است، به شرطی‌که داشته باشیم:

$$10^{2k} \leqslant w^2 < 10^{2k+1} \text{ و } 0 < y^2 < 10^{2k+1}$$

چون $w - 1 < \sqrt{v}$ و $(w-1)^2 \leqslant v - 1$، بنابراین

$$y < 2\sqrt{v} \text{ ، } y^2 < 4v = 10^{2k+1}$$

سپس داریم:

$$10^{2k}<v<w^2=v+y<v+2\sqrt{v}<3v<10^{2k+1}$$

$\triangledown$ در حالت خاص می‌توان به کمك کامپیوتر، عدد زیر را به ازای $k=7$ به‌دست آورد:

$$z=25\times10^{13}+15811389^2=500000022109321$$

که مجذور آن، عدد ۳۰ رقمی خاصی است

۲۴۵. عددهای مفروض را، به ردیف صعودی می‌نویسیم:

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$$

ثابت می‌کنیم، هر مجموع s، شامل چند تا از این جمله‌ها، در یکی از فاصله‌های بین $\frac{1}{2}b_k$ و b_k قرار دارد‌که، در آن، $b_k=a_1+\cdots+a_k$ ($k=1,\ldots,n$). کافی است ثابت کنیم کـه، هیچ‌کدام از مجموع‌های s، نمی‌تواند، به طـور اکید، بین b_k و $\frac{1}{2}b_{k+1}$ واقع باشد. فرض می‌کنیم:

$$s>b_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$$

درضمن، فرض می‌کنیم، s، شامل عضوی مثل $a_i\geqslant a_{k+1}$ باشد، بنا براین $s\geqslant a_{k+1}$. با جمع کردن نابرابری‌ها، به‌دست می‌آید:

$$2s>a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}=b_{k+1}\Rightarrow s>b_{k+1}$$

۲۴۶. a) ده‌رقم ۰، ۱، ...، ۹ را، به دو گروه و در هر گروه ۵ رقم، تقسیم می‌کنیم (مثلاً از ۰ تا ۴ در یك گروه، و از ۵ تا ۹ درگروه دیگر). کافی است از جعبه‌هایی استفاده‌کنیم که، در آن‌ها، هر دو رقم متعلق به یکی از این دو گروه باشند، زیـرا چنین دورقمی، در هر شمارهٔ سه رقمی وجود دارد. (و به این ترتیب، جعبه‌هایی که دورقم آن‌ها، از دو گروه مختلف باشند، خالی می‌ماند).

b) به جز ۱۰ جعبهٔ با شماره‌های ۰۰، ۱۱، ...، ۹۹ کـه حتماً باید

اشغال شوند، دست‌کم به ۳۰ جعبهٔ دیگر نیاز داریم تا بلیت‌های با رقم متفاوت را در آن‌ها جا دهیم: تعداد چنین بلیت‌هایی روی‌هم برابر $10 \times 9 \times 8 = 720$ است و در هر جعبهٔ با شمارهٔ $\overline{pq}\,(p \neq q)$، بیش از $3 \times 8 = 24$ تا از این بلیت‌هـا وارد نمی‌شود ($\overline{zpq}$، $\overline{pzq}$ و $\overline{pqz}$ که، در آن‌ها، z رقمی دلخواه، مخالف با p و q است).

c) x را کمترین تعداد جعبه‌های اشغال‌شده‌ای می‌گیریم که، شماره‌های آن‌ها، با یك رقم آغاز شده باشند ($1 \leqslant x$)؛ چون همهٔ رقم‌ها، حقوقی برابر دارند، می‌توان فرض کرد که، کمتر از همه، جعبه‌هایی باشند که با شمارهٔ ۹ آغاز شده‌اند: ۹۹، ۹۸، ...، $\overline{9y}$ که، در آن، $y = 10 - x$. در این صورت، هر بلیت با شمارهٔ $\overline{9pq}$ را، که در آن، $p < y$ و $q < y$، نمی‌توان در جعبه‌های $\overline{9p}$ و $\overline{9q}$ قرارداد، یعنی باید جعبهٔ $\overline{pq}$ را اشغال کنند. به این ترتیب، تعداد جعبه‌هایی که باید اشغال شوند، برابر است با دست‌کم همهٔ y^2 جعبه‌ای که هردو رقم شمارهٔ آن‌ها از ۰ تا $(y-1)$ است و همچنین، دست‌کم x^2 جعبه‌ای که شماره‌های آن‌ها با یکی از رقم‌های y تا ۹ آغاز می‌شوند (برای هر یك از این x رقم، دست‌کم x جعبه لازم است)؛ یعنی تعداد کل جعبه‌ها، نمی‌تواند از این مقدار کمتر باشد:

$$y^2 + x^2 = (10 - x)^2 + x^2 \geqslant 50$$

d) و e). برای عددهای طبیعی و مفروض k و s ($k < s$)، $F(k, s)$ را به معنای کوچکترین عدد از عددهای $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2$ می‌گیریم که، در آن، x_1، x_2، ...، x_k، عددهایی طبیعی به‌مجموع s هستند. مقدار $F(k, s)$ را می‌توان برحسب k و s بیان کرد. حداقل مقدار مجموع مجذورها وقتی به دست می‌آید که عددهای x_i «تقریباً برابر» باشند: اگر $s = kq + r$، $0 \leqslant r < k$، آن وقت $(k - r)$ تا از آن‌ها برابر q، و r تای بقیه، برابر $q + 1$ باشند، به‌نحوی که

$$F(k, s) = (k - r)q^2 + r(q + 1)^2 = kq^2 + r(2q + 1)$$

بهتر است، مسالهٔ کلی‌تر را مورد بررسی قرار دهیم، وقتی که «بلیت‌ها» k رقمی و با رقم‌های از ۰ تا $s-1$ باشند (در مسالهٔ ما: $s=10$). ثابت می‌کنیم، حداقل تعداد $M(k،s)$ جعبه‌ها با شماره‌های $\overline{pq}$ $(0\leqslant p,q<s)$ که در آن، می‌توان بلیت‌های، با حذف $(k-2)$ رقم‌را جاداد، برابر است با $F(k-1،s)$.

در حالت خاص مسالهٔ d):

$$M(4،10)=F(3،10)=3^2+3^2+4^2=34$$

پاسخ مسالهٔ e) را در این جدول داده‌ایم:

k	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
$M(k،10)=F(k-1،10)$	۵۰	۳۴	۲۶	۲۰	۱۸	۱۶	۱۴	۱۲	۱۰

نابرابری $M(k،s)\geqslant F(k-1،s)$ را می‌توان، با استدلالی شبیه مسالهٔ c) و با استفاده از استقرا روی $k+s$، ثابت کرد:

$$M(k،s)\geqslant \min_{x=1,2,\ldots,s}\left(M(k-1،s-x)+x^2\right)$$

برای جا دادن بلیت‌ها، در $F(k-1،s)=x_1^2+\ldots+x_{k-1}^2$، جعبه کافی است شبیه مسالهٔ a)، s رقم را به $k-1$ گروه (با x_1، x_2، …، x_{k-1} رقم) تقسیم کرد و جعبه‌هایی را درنظر گرفت که، در آن‌ها، هر دو رقم از یکی از گروه‌ها انتخاب شده‌اند.

۲۴۷. همهٔ گره‌ها را، به ردیف به‌شطرنجی، رنگ‌های سیاه وسفید در می‌آوریم. در مرز به جز رأس‌های مربع اصلی، 99×4 گره وجود دارد که، به طور برابر، بین گره‌های سیاه و سفید تقسیم شده‌اند. فرض کنید، همهٔ آن‌ها، درانتهای خط‌های شکسته واقع باشند. دراین صورت، تعداد خط‌های شکسته‌ای که دو انتهای سفیددارند با تعداد خط‌های شکسته‌ای که دوانتهای سیاه دارند، برابر است. بنابراین، تعداد کل گره‌های سفید و سیاه هم، که روی خط‌های شکسته و در درون صفحهٔ شطرنجی قرار دارند، برابر می‌شوند. ولی در درون صفحهٔ شطرنجی، روی هم 99^2، یعنی به تعدادی فرد

گره‌وجود دارد که، دست‌کم، یکی از آن‌ها، روی خط‌های شکسته واقع نیستند.

۲۸۴. با توجه به شرط مساله، معلوم می‌شود که مقدار

$$s = x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_m$$

از ۲ کمتر نیست (زیرا $n \leqslant s$، $m \leqslant s$ و $s < mn$). در حالتی که داشته باشیم: $m = n = 2$، $2 \leqslant s \leqslant 3$، حکم مساله به سادگی قابل تحقیق است. حکم را درحالت کلی، بااستقرا روی $m + n = k$ $(k \geqslant 4)$ ثابت می کنیم. $x_1 > y_1$ را، به ترتیب، بزرگترین عددها بین x_i و y_j می گیریم $(1 \leqslant i \leqslant n$، $1 \leqslant j \leqslant m)$؛ حالت $x_1 = y_1$ روشن است). برای این که، فرض استقرا را، در مورد برابری

$$(x_1 - y_1) + x_2 + \dots + x_n = y_2 + \dots + y_m$$

که شامل $k - 1 = m + n - 1$ عدد است، در دو طرف برابری به‌کار بریم (بعد از آن‌که، در صورت لزوم، y_1 را به سمت راست منتقل کنیم)، کافی است برقراری نابرابری

$$s' = y_2 + \dots + y_m < n(m-1)$$

را مورد تحقیق قرار دهیم؛ چون $y_1 > \dfrac{s}{m}$، بنابراین

$$s' < s - \frac{s}{m} = \frac{mn(m-1)}{m} = n(m-1)$$

۲۴۹. K_1 را بزرگترین مربع از مربع‌های مفروض، سپس K_2 را بزرگترین مربع از بین مربع‌هایی که مرکزشان در K_1 قرار ندارد، بعد K_3 را بزرگترین مربع از بین آن‌هایی که مرکزی درداخل مربع‌های K_1 و K_2 ندارند و غیره، فرض می کنیم.

فرض می کنیم، نقطهٔ C، مرکز یك مربع، در بیش از چهار مربع، از مربع‌های K_1، K_2، ...، واقع باشد، دراین‌صورت، مرکزهای دوتا از آن‌ها $(K_i$ و $K_j)$ در یکی از چهار بخش صفحه که به وسیلهٔ محور های تقارن

مربع به مرکز C به وجود آمده‌اند، قرار می‌گیرد. از بین K_i و K_j، آن مربعی که مرکز آن، نسبت به این محورها، دورتر است (مثلاً نسبت به مجموع‌ها، یا نسبت به بزرگترین فاصله‌ها) شامل مرکز دیگری هم می‌شود. ولی این، با قانون انتخاب مربع‌ها، متناقض است.

۲۵۰. $m_1 < m_2 < \ldots < m_n$ را به ترتیب وزن وزنه‌ها می‌گیریم.

a) m_1 را در کفهٔ چپ، بعد m_2 را در کفهٔ راست، m_3 را در کفهٔ چپ، m_4 را در کفهٔ راست و غیره قرار می‌دهیم؛ همان دنبالهٔ مورد نظر $LRLRLR\ldots$ به‌دست می‌آید. و این، نتیجه‌ای است از حکم سادهٔ زیر:

پیش‌قضیه. اگر $0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_{k-1} < m_k$، آن وقت، از دو مجموع

$$m_1 + m_3 + m_5 + \ldots \text{ و } m_2 + m_4 + m_6 + \ldots$$

(که شامل همهٔ n عدد مفروض باشند)؛ آن مجموعی بزرگتر است که، عدد بزرگتر m_k، در آن باشد.

برای اثبات پیش‌قضیه، کافی است درحالت زوج بودن k، نابرابری‌های

$$m_1 < m_2,\ m_3 < m_4,\ \ldots,\ m_{k-1} < m_k$$

و درحالت فردبودن k، نابرابری‌های

$$m_1 > 0,\ m_3 > m_2,\ \ldots,\ m_k > m_{k-1}$$

را با هم جمع کنیم.

همین پیش‌قضیه، ولی برای $m_l < m_{l+1} < \ldots < m_{k-1} < m_k$ که از $k-l+1$ عدد تشکیل شده است، برای حل مسالهٔ b) استفاده خواهیم کرد.

b) بهتراست ردیف وزنه‌ها را، که متناظر باواژهٔ مفروض با حرف‌های L و R است، «با آغاز از پایان» واژه شرح دهیم.

همهٔ وزنه‌های با شمارهٔ زوج را در یکی ازکفه‌ها، و همهٔ شماره‌های فرد را درکفهٔ دیگرمی گذاریم، درضمن، سنگین‌ترین وزنهٔ m_n را، درکفه‌ای قرار می‌دهیم که متناظر با آخرین حرف از واژهٔ مفروض باشد؛ سپس، با

عبور از هر حرف به حرف قبلی خود، اگر حرف عوض شده است (از L به R یا از R به L)، سنگین‌ترین وزنه را از بین وزنه‌های باقی‌مانده بر می‌داریم و اگر با تغییر حرف رو به رو نیستیم، سبک‌ترین آن‌ها را. درضمن هربار، ردیفی از وزنه‌ها (به ردیف شماره‌ها) باقی می‌مانند که، با عوض‌کردن جای خود، در این یا آن کفه قرار دارند؛ درمورد این ردیف، پیش قضیه را به کار می‌بریم.

۲۵۱. a) پاسخ: چند جمله‌ای‌های $Q_1(x)=x$ و $Q_2(x)=P(x)$ با چندجمله‌ای $P(x)=x^2-\alpha$، به‌ازای هرمقدار دلخواهٔ α، قابل جا به‌جایی‌اند؛ چندجمله‌ای Q از درجهٔ سوم، که با $x^2-\alpha$ قابل جا به‌جایی باشد، به‌ازای $\alpha=0$ $(Q(x)=x^3)$ و به‌ازای $\alpha=2$ $(Q(x)=x^3-3x)$ وجود دارد.

اثبات این‌که چندجمله‌ای دیگری وجود ندارد، ازراه مقایسهٔ ضریب‌ها به دست می‌آید. مثلاً برای چندجمله‌ای درجهٔ سوم، اتحاد

$$(x^3+\beta_1x^2+\beta_2x+\beta_3)^2-\alpha=(x^2-\alpha)^3+\beta_1(x^2-\alpha)^2+$$
$$+\beta_2(x^2-\alpha)+\beta_3$$

وقتی برقرار است که داشته باشیم: $\beta_1=\beta_3=0$ (مقایسهٔ ضریب‌های x^5، x^3 و x)، $2\beta_2=-3\alpha$ (مقایسهٔ ضریب‌های x^4)، $\beta_2^2=3\alpha^2+\beta_2$ (مقایسهٔ ضریب‌های x^2)، $\alpha=\alpha^3+\beta_2\alpha$ (مقایسهٔ مقدارهای ثابت). از آن‌جا یا $\alpha=0$ و $\beta_2=0$ و یا

$$\beta_2=-\frac{3}{2}\alpha=1-\alpha^2=\beta_2^2-3\alpha^2$$

و این سه معادلهٔ با دومجهول، منجر به جواب $\alpha=2$، $\beta_2=-3$ می‌شوند.

b) به سادگی قابل تحقیق است که اگر چندجمله‌ای‌های قابل جا به‌جایی $P(x)$ و $Q(x)$ را، با هم، به این صورت تبدیل کنیم:

$$P(x)\to P^*(x)=P(x-\gamma)+\gamma \text{ و } Q(x)\to Q^*(x)=Q(x-\gamma)+\gamma$$

(γ، عددی دلخواه است)، آن وقت چند جمله‌ای‌های $P^*(x)$ و $Q^*(x)$ هم،

نسبت به یکدیگر، قابل جابه‌جایی‌اند. هرچندجمله‌ای درجهٔ دومی که ضریب بزرگترین درجهٔ آن واحد باشد، می‌توان (با جداکردن مربع کامل آن)، به صورت $P^*(x)=x^2-\alpha$ تبدیل کرد. بنابراین، می‌توان از ابتدا فرض کرد $P(x)=x^2-\alpha$ و شبیه a) عمل کرد.

با توجه به‌اتحاد $(Q(x))^2-\alpha=Q(x^2-\alpha)$، که در آن

$$Q(x)=x^k+\beta_1x^{k-1}+\beta_2x^{k-2}+\ldots+\beta_k$$

دستگاه معادله‌هایی برای β_1، β_2، ...، β_k به‌دست می‌آید. قبل‌ازهمه خواهیم داشت: $\beta_1=\beta_3=\ldots=0$ و، سپس، معادله‌های به‌صورت $\beta_2=F_2$، $\beta_4=F_4$، ... که، در آن‌ها، تابع‌های F_i بــه α و به β_{2j} بستگی دارند $(2j<i)$، به نحوی‌که ضریب‌های β_2، β_4، ... به طور یك ارزشی پیدا می‌شوند (تنها $\left[\frac{k}{2}\right]$ معادله، از بین k معادله‌ای‌که با برابر قراردادن ضریب‌های x^{2k-2}، x^{2k-4}، ...، x^2 و مقدار ثابت به دست می‌آیند، بــرای جست وجوی β_{2j} کافی است؛ بقیه، شرطهایی اضافی هستند که ممکن است، برقرار نباشند).

c) این چندجمله‌ای‌ها، عبارتند از $(P(P(x))$ و $P(P(P(x)))$.

d) بــه جای $P(Q)$ و $P(Q(R))$ از نمادهای $P\circ Q$ و $P\circ Q\circ R$ استفاده می‌کنیم. طبق شرط $Q\circ P=P\circ Q$ و $R\circ P=P\circ R$، از آنجا

$$(Q\circ R)\circ P=Q\circ R\circ P=Q\circ P\circ R=P\circ Q\circ R=P\circ(Q\circ R),$$

$$(R\circ Q)\circ P=R\circ Q\circ P=R\circ P\circ Q=P\circ R\circ Q=P\circ(R\circ Q)$$

می‌بینیم که، چندجمله‌ای‌های $Q\circ R$ و $R\circ Q$، هردو با P قابل جا به‌جایی‌اند؛ و چون از یك درجه هستند (حاصل‌ضرب درجه‌های R و Q)، با تــوجه به b)، بر هم منطبق‌اند.

e) با روش استقرای ریاضی می‌توان ثابت کرد که، برای هر $k\geqslant 2$، چندجمله‌ای P_k از درجهٔ k وجود دارد، به‌نحوی که

$$t^k+\frac{1}{t^k}=P_k\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

$$t^2+\frac{1}{t^2}=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2,\ t^3+\frac{1}{t^3}=\left(t+\frac{1}{t}\right)^3-3\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

به نحوی که $P_2(x)=x^2-2$، $P_3(x)=x^3-3x$. درضمن

$$t^{mn}+\frac{1}{t^{mn}}=P_m\left(t^n+\frac{1}{t^n}\right)=P_n\left(t^m+\frac{1}{t^m}\right)=$$

$$=P_m\left(P_n\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)=P_n\left(P_m\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)=P_{mn}\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

از این اتحادها، نتیجه می‌شود: $P_m\circ P_n=P_n\circ P_m=P_{mn}$.

▽ این چندجمله‌ای‌ها، با تغییر متغیرهای ساده‌ای، از چندجمله‌ای‌های چبیشف، T_k، که با اتحادهای زیر معین می‌شوند، به دست می‌آیند:

$$\cos k\varphi=T_k(\cos\varphi),\ k=2,3,\dots,\quad P_k(x)=2T_k\left(\frac{x}{2}\right)$$

۲۵۲. پاسخ: ۸۸.

با هر یك از عددهای ...، ۳، ۲، ۱ $=k$، در دنبالهٔ (a_n)، k ۲ بار برخورد می‌کنیم، زیرا شرط $a_n=k$ هم‌ارز است با

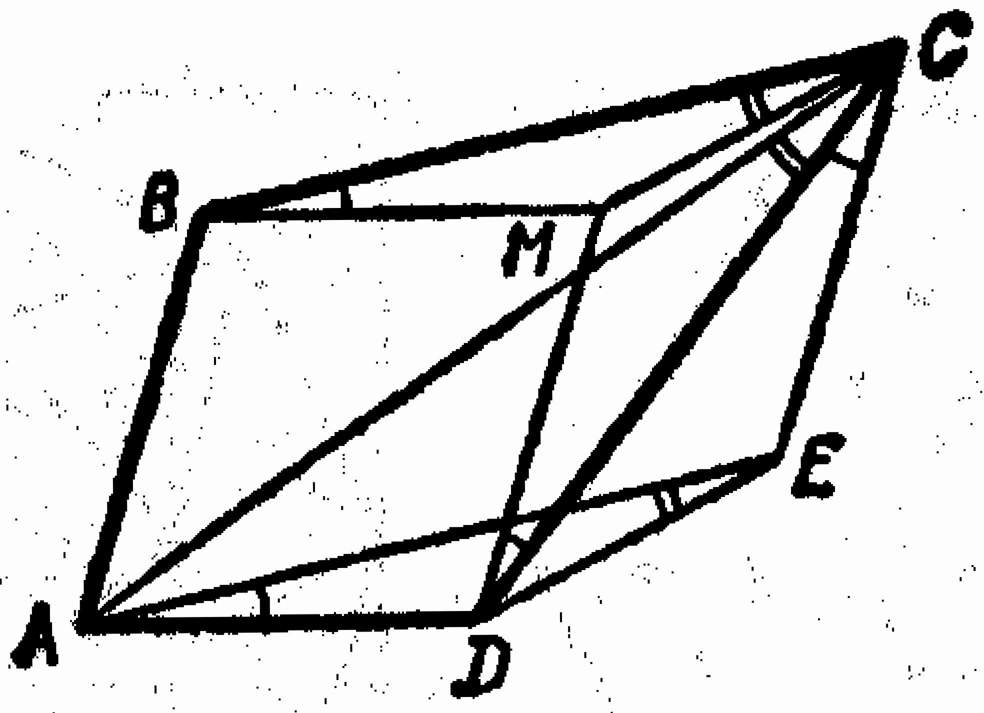
$$k-\frac{1}{2}<\sqrt{n}<k+\frac{1}{2} \text{ یا } k^2-k<n\leqslant k^2+k$$

بنا براین، درمجموع

$$\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\frac{1}{a_6}\right)+\dots$$

$$\dots+\left(\frac{1}{a_{44\times43+1}}+\dots+\frac{1}{a_{44\times45}}\right)$$

مقدار هر یك از پرانتزها، برابر است با $2k\times\frac{1}{k}=2$.



شکل ۱۵۳

۲۵۳. E را رأس مثلث ADE می‌گیریم که از انتقال مثلث BMC به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{BA}$ به دست آمده باشد (شکل ۱۵۳). در این صورت $MDEC$ متوازی‌الاضلاع است و زاویه‌های EAD، CMB، CDM و ECD برابر می‌شوند و نقطه‌های A، C، E و D روی محیط یك دایره قرار می‌گیرند. بنابراین، زاویه‌های ACD، AED و BCM هم برابر می‌شوند.

۲۵۴. اگر $۱۹۷۸^m-۱$ بر $d=۱۰۰۰^m-۱$ بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت عدد

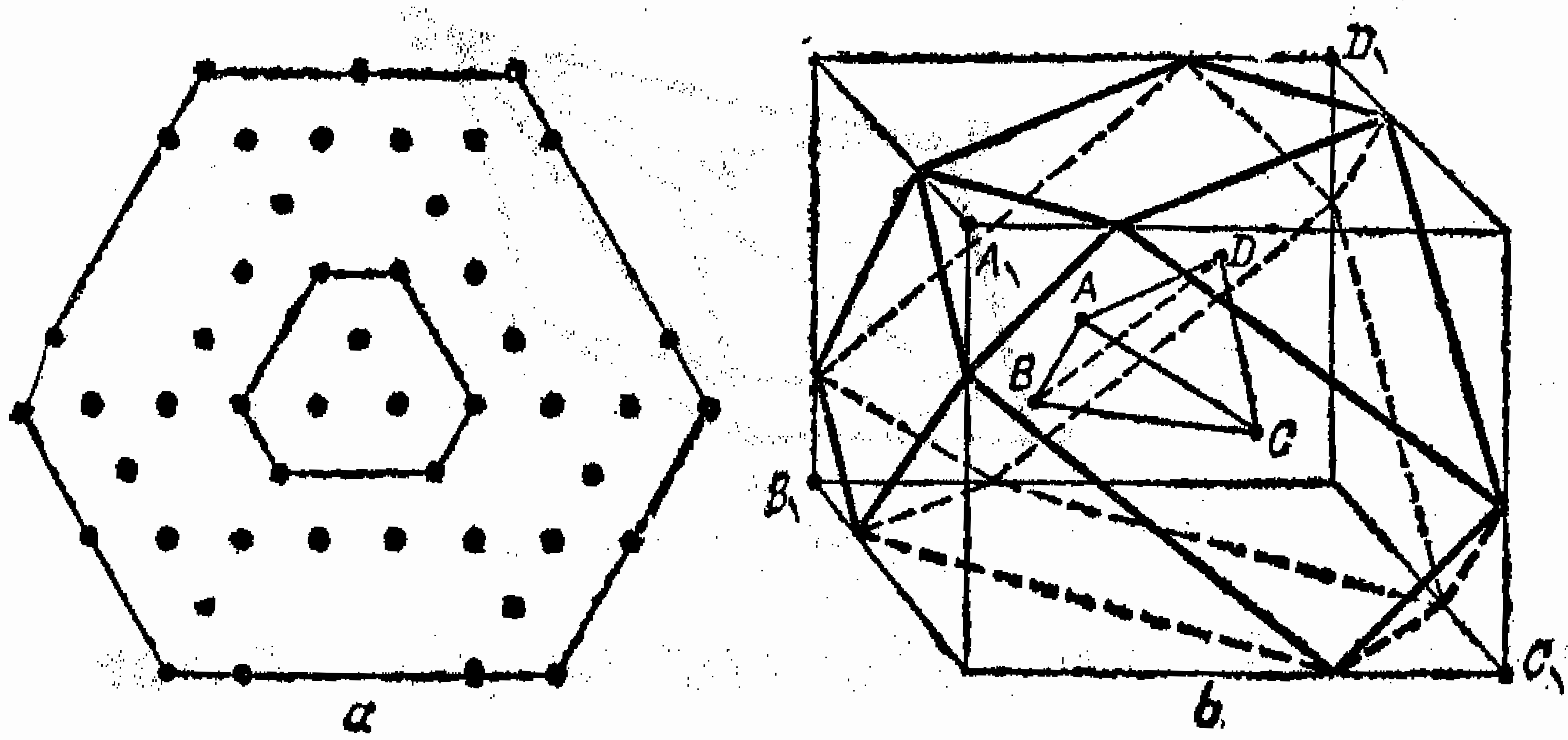
$$۱۹۷۸^m-۱۰۰۰^m=۲^m(۹۸۹^m-۵۰۰^m)$$

هم باید بر d بخش‌پذیر باشد. ولی این ممکن نیست، زیرا $۹۸۹^m-۵۰۰^m$ از d کوچکتر، و d عددی فرد است.

۲۵۵، a) پاسخ: $n=۷$.

مجموعهٔ K_n، از نقطه‌های واقع برخط راست AB تشکیل شده است که از نقطه‌های A و B به فاصله‌هایی که با عددهای درست بیان می‌شوند، قرار دارند؛ درضمن، دو نقطهٔ انتهایی این مجموعه، از وسط پاره‌خط راست AB، به فاصلهٔ $\frac{۳^n}{۲}$ قرار دارند $(n=۱،۲،...)$. بنابراین، دو نقطهٔ انتهایی به فاصلهٔ $\frac{۳^n-۱}{۲}$ و $\frac{۳^n+۱}{۲}$ از A واقع‌اند. چون

$$\frac{۳^۶+۱}{۲}=۳۶۵<۱۰۰۰ \text{ و } \frac{۳^۷+۱}{۲}=۱۰۹۴>۱۰۰۰$$



شکل ۱۰۴

بنا براین، مجموعهٔ مطلوب K_7 است.

b) چندضلعی‌هایی کــه پوش‌های محدب (ضمیمهٔ ۱۷) مجموعه‌های K_1، K_2، ... باشند، شش‌ضلعی‌ها هستند (شکل ۱۰۴، a). رأس‌های پوش محدب K_n، به این ترتیب به دست می‌آید: باید هر دو رأس مثلث ABC را در نظر گرفت و، در مورد آن‌ها، n بار عمل «تقارن» را، شبیه مسالهٔ a)، انجام داد. برای این‌که ثابت کنیم، همهٔ نقطه‌های K_n درمرزهای پوش محدب H_n، که از شش «نقطهٔمرزی» ساختمان به دست آمده است، قــرار دارند، بهتر است H_n را به عنوان اشتراك سه نواری در نظر بگیریم که، مرزهای هر يك از آن‌ها را، دو ضلع رو به روی شش‌ضلعــی H_n تشکیل مــی‌دهند ($n = ۱، ۲، ...$). مثلث‌اولیهٔ ABC را هم، می‌توان همچون اشتراك‌سه نوار درنظر گرفت: مرزهای یکی از این نـوارها عبارتند از خط راست AB و خط راستی کـه از C موازی با آن رسم شده باشد؛ و به همین ترتیب، دو نوار دیگر. اگر قرینه‌های هر نوار را نسبت به نقطه‌های آن پیداکنیم، نوار جدیدی به‌دست می‌آید که دارای همان محور تقارن است، ولی پهنای آن سه برابر شده‌است. با استفاده‌ازاین‌نکته،می‌توان ثابت کرد که K_n ($n = ۱، ۲، ...$) به هر يك از سه نوار تعلق دارد، که در برخورد H_n را می‌دهند.

مساحت H_n را می‌توان، به‌عنوان ترکیب مساحت مثلث‌های متجانس با ABC، محاسبه کرد. این مساحت، برابراست با $\frac{1}{۲}(۳^{۲n+۱} - ۱)$.

c) مجموعهٔ K_1، به‌جز نقطه‌های K_0، شامل ۱۲ نقطهٔ دیگر است که از قرینهٔ هریك از رأس‌های چهاروجهی $ABCD$ نسبت به رأس‌های دیگر، به‌دست می‌آیند. مکعب L_0 را طوری می‌سازیم که، نقطه‌های A و B و C و D، رأس‌های غیـر مجاور آن باشند، سپس، مکعب L_1 را از تجانس L_0 نسبت به مرکز آن و با ضریب ۳، با رأس‌های متناظر A_1، B_1، C_1 و D_1 می‌سازیم ۱۲ نقطهٔ K_1، هرکدام روی یکی از یال‌های مکعب L_1 قرار می‌گیرد و آن را (با به حساب آوردن از رأس‌های A_1، B_1، C_1 و D_1) به نسبت ۱:۲ تقسیم می‌کند. از هررأس L_1 سه یال می‌گذرد و روی هر یك از این یال‌ها، یك نقطهٔ مرزی K_1 وجود دارد؛ صفحه‌ای که از این سه نقطه می‌گذرد، با رأس متناظر L_1، یك چهاروجهی تشکیل می‌دهد. اگر این چهاروجهی‌ها را از L_1 جدا کنیم، چند وجهی M_1 باقی می‌ماند که پوش محدب K_1 است و ۱۴ وجه‌دارد: ۶مستطیل $a\times ۲a$ (a، طول یال چهاروجهی $ABCD$است) و ۸مثلث‌متساوی‌الاضلاع، ۴ تا به ضلع a و ۴ تا به ضلع $۲a$ (شکل ۱۰۴،b).

d) حجم‌چندوجهی ازاین‌طریق به‌دست‌می‌آید که، حجم‌چهاروجهی‌های جدا شده را $(۱۸=۴\times۴+\frac{۱}{۲}\times۴)$، ازحجم مکعب کم‌کنیم. حجم مکعب برابر است با ۸۱ و، بنا براین، حجم چندوجهی مورد نظر برابر ۶۳ می‌شود.

e) پوش محدب M_n از مجموعهٔ K_n، چندوجهی محدبی است که، رأس‌های آن، در ۱۲ نقطهٔ «مرزی» قرار دارند و، هر یك از این رأس‌ها، از دو رأس چهاروجهی $ABCD$ به دست آمـده است. هر رأس M_n روی یکی از یال‌های مکعب L_n قرار دارد، که ازتجانس L_0 نسبت به مرکزخود وبا ضریب ۳^n به‌دست‌آمده و یال مکعب را به‌نسبت $\frac{۳^n-۱}{۳^n+۱}$ تقسیم می‌کند.

برای اثبات، بهتر است ۷ نوار را درنظر بگیریم که در برخورد با هم، M_n را می‌سازند: هر یك ازاین نوارها، از راه ۳^n برابرکردن نواری به‌دست می‌آید که مرزهای آن، شامل هر چهار رأس چهاروجهی $ABCD$ است. حجم M_n برابر است با

$$\frac{1}{2}(5\times 3^{3n}-3^{n+1})$$

۲۵۶. a) فرض کنید $m \geqslant 2n$. ثابت می‌کنیم، در موقعیت (m, n)، اولی می‌تواند طوری حرکت کند که، موقعیت حاصل، دومی را دچار شکست کند. اگر موقعیت $(m-n, m)$ موجب شکست دومی‌شود، آن وقت، حرکت موردنظر چنین است.

$$(m, n)\rightarrow(m-n, m)$$

ولی اگر موقعیت $(m-n, m)$ موجب برد دومی شود، به معنای آن است که، برای $(m-n, n)$ حرکتی وجود دارد که به باخت طرف‌مقابل می‌انجامد. چون $m-n \geqslant n$، این حرکت باید به صورت

$$(m-n, n)\rightarrow(m-kn, n)$$

باشد (k، عددی طبیعی است). ولی دراین صورت، اولی می‌تواند حرکت نخستین خود را، بداین‌صورت انجام دهد:

$$(m, n)\rightarrow(m-kn, n)$$

تا برد او تأمین شود.

راه‌حل این مساله، ازاین جهت جالب است که توانستیم برد اول را در موقعیت (m, n)، بـرای $m \geqslant 2n$، ثابت کنیم، بـدون این که برنامهٔ حرکت‌های او را، مشخص کرده باشیم.

b) پاسخ: $\alpha \geqslant \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

هر موقعیت (m, n) را $(m \geqslant n)$، در تناظر با نقطهٔ $x=\frac{m}{n}\geqslant 1$، از محور عددی، قرار می‌دهیم. بعد از هر حرکت، بـه اندازهٔ عدد درست k، به سمت چپ جابه‌جا می‌شود؛ اگر این نقطه در بازهٔ $0<x<1$ قرار گیرد، در جهت عکس تغییر جا می‌دهد: $x \rightarrow \frac{1}{x}$؛ وقتی در نقطهٔ 0 قرار گیرد، طرف دیگر باخته است. بازهٔ $[\frac{1}{\beta}, \beta]$ به طول واحد را روی‌محور درنظرمی گیریم؛

از $1=\beta-\frac{1}{\beta}$ به دست می‌آید: $\beta=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. نقطهٔ $x=\frac{m}{n}$، که در این بازه واقع باشد، متناظر با موقعیت باخت و سمت راست آن متناظر با برد است؛ در واقع، از این نقطه، با حرکت نوبتی، می‌توان در این بازه قرار گرفت؛ اگر $\beta>x>1$، آن وقت حرکت نوبتی، از بازه بیرون می‌رود؛ اگر $x=1$، آن وقت بسه باخت منجر می‌شود. چون حداکثر تعداد چوب‌کبریت‌ها، کاهش می‌یابد، بعد از چند حرکت، بازی به پایان می‌رسد.

۲۵۷. شرط مسالهٔ، با دنبالهٔ $4\{n\sqrt{2}\}$ سازگار است که، در آن،

$$\{x\}=x-[x]$$

عبارت است از بخش کسری عدد x ($n=1, 2, \ldots$). درواقع، اگر p و q دو عدد طبیعی باشند و $p<(4-\sqrt{2})q$، آن وقت

$$|\sqrt{2}-\frac{p}{q}|=\frac{|2q^2-p^2|}{q(q\sqrt{2}+p)}>\frac{1}{4q^2}$$

بنابراین، برای $m>k\geqslant 1$ داریم:

$$|\{m\sqrt{2}\}-\{k\sqrt{2}\}|=|(m-k)\sqrt{2}-l|>\frac{1}{4(m-k)}$$

که در آن

$$l=[m\sqrt{2}]-[k\sqrt{2}]<m\sqrt{2}-k\sqrt{2}+1\leqslant(m-k)(\sqrt{2}+1)<$$
$$<(4-\sqrt{2})(m-k)$$

$\triangledown$ در این‌جا، از این حقیقت استفاده کردیم که، عدد گنگ $\sqrt{2}$، به کسرهای با مخرج‌های نه‌چندان بزرگ، بد نزدیک می‌شود.

۲۵۸. چون $f(1)=f(0)=1$، بنابراین جملهٔ آزاد $P_n(0)$ در چندجمله‌ای

$$P_n(x)=\underbrace{f(f(\ldots(f(x))\ldots))}_{n}$$

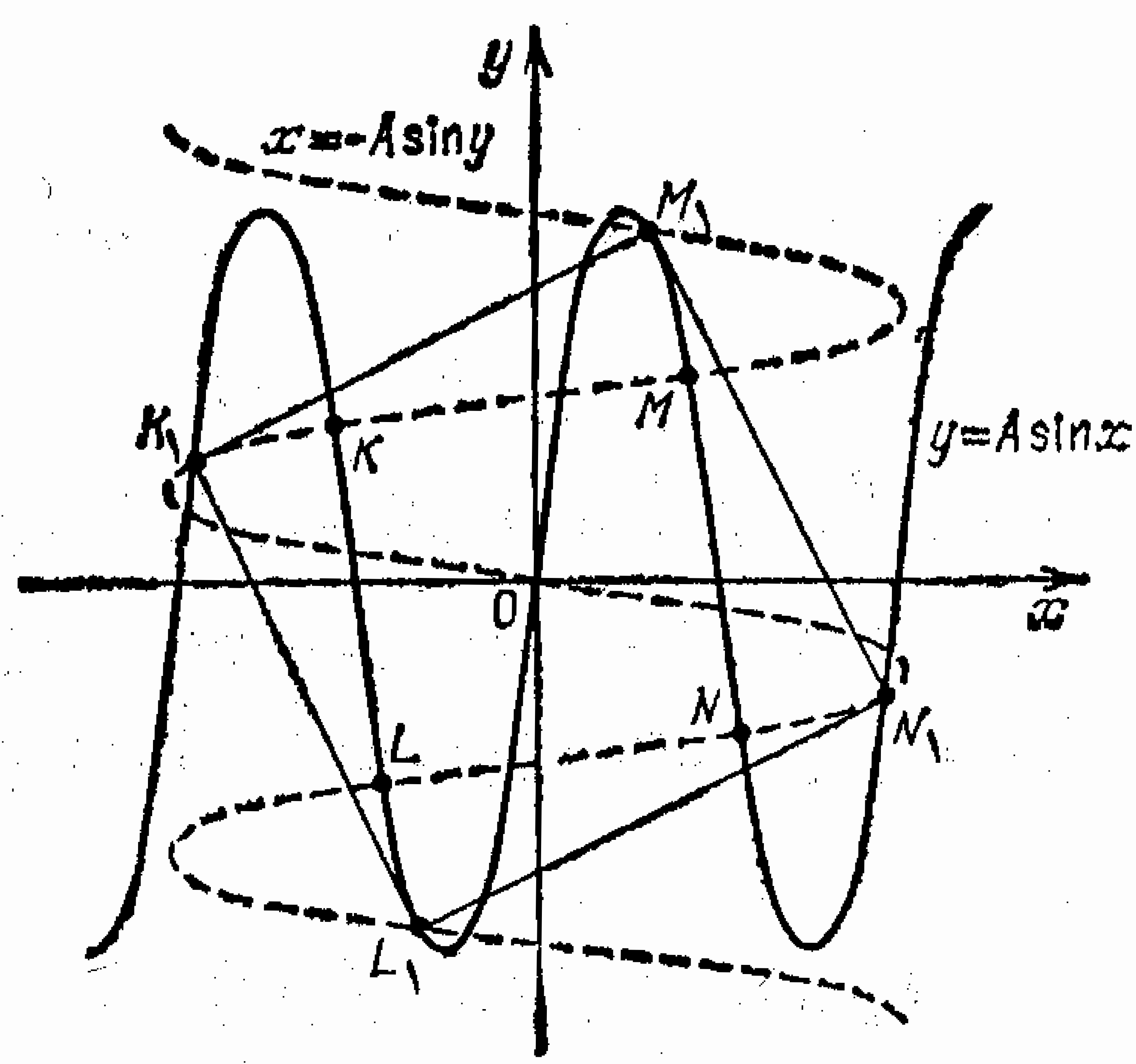
برابر واحد است. در نتیجه، به‌ازای هرمقدار m، باقی‌ماندهٔ تقسیم $P_n(m)$ بر m، برابر است با واحد.

اگر در این‌جا، m را به $m' = P_k(m)$ تبدیل کنیم، معلوم می‌شود که $P_{n+k}(m)$ و $m' = P_k(m)$، نسبت به‌هم اول‌اند.

$\triangledown$ از این حقیقت که، دنبالهٔ $(P_n(۲))$ وجود دارد، به نحوی که همهٔ جمله‌های آن، نسبت به‌هم اول‌اند، بلافاصله، نامتناهی بودن مجموعهٔ عددهای اول نتیجه می‌شود.

۲۵۹. M را، نقطهٔ دلخواهی از برخورد نمودار $y = A\sin x$، با مبدل آن $x = -A\sin y$، ضمن دوران به‌اندازهٔ ۹۰ درجه دورمبداء مختصات، می‌گیریم (شکل ۱۰۵). در این صورت، نقطهٔ M ومبدل‌های آن K و L و N، در دوران به اندازه ۹۰، ۱۸۰ و ۲۷۰ درجه دور O، به نمودار $y = A\sin x$ تعلق دارند، به نحوی که، مربع $MKLN$ در نمودار مفروض، محاط است. اگر A به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد، نقطهٔ M، برخورد نمودارها را، می‌توان به‌بیش از ۱۹۷۸ طریق به‌دست آورد که، درضمن، به فاصله‌های مختلف از نقطهٔ O واقع باشند؛ مثلاً به‌ازای

$$A > ۱۹۷۸ \times ۲\pi$$



شکل ۱۰۵

می‌توان یکی از نقطه‌های برخورد k امین موج مسیر اصلی و k امین موج مسیر دوران‌یافته را انتخاب کرد (موج را از O درنظر می‌گیریم). دراین‌جا، از این قضیه استفاده می‌شود که، هر تابع پیوسته‌ای که تغییر علامت بدهد، دارای ریشه است (ضمیمهٔ ۵): ازآن، به سادگی، این حقیقت ملموس نتیجه می‌شود که، در بخش‌های موردنظر، نمودارها متقاطع‌اند.

۲۶۰. a) پاسخ: می‌توان.

ابتدا کارت (۱، ۸) را پیدا می‌کنیم:

$$(۵, ۱۹)\to(۶, ۲۰)\to(۳, ۱۰)\to\ldots\to(۱۰, ۱۷)\to(۳, ۱۷)\to$$
$$\to(۴, ۱۸)\to(۲, ۹)\to\ldots\to(۹, ۱۶)\to(۲, ۱۶)\to(۱, ۸)$$

که ازآن، به سادگی، کارت‌های (۱، ۱۵)، (۱، ۲۲)، ...، $(۱, ۱+۷k)$ (برای هرمقدر طبیعی k) به‌دست می‌آید.

b) پاسخ: نمی‌توان.

با هرچند عمل، همیشه تفاوت دوعدد روی‌کارت، بر ۷ بخش‌پذیراست.

c) پاسخ: d را بزرگترین مقسوم‌علیه فرد تفاضل $b-a$ می‌گیریم؛ در این‌صورت، از کارت (a, b)، تنها وقتی می‌توان به‌کارت $(۱, n)$ رسید که داشته باشیم:

$$n=۱+dk \quad (k\text{، عددی طبیعی است})$$

لازم بودن این‌شرط، روشن است (شبیه مسالهٔ (b) ثابت می‌شود). برای اثبات کافی بودن شرط، کافی‌است ثابت‌کنیم، از کارت (a, b) می‌توان به‌کارت $(۱, ۱+d)$ رسید. اگر دو عدد a و b، هر دو زوج یا هر دو فرد باشند، ردیف عمل‌ها چنین است:

$$(a, b)\to\left(\frac{a}{۲}, \frac{b}{۲}\right) \text{ یا } \left(\frac{a+۱}{۲}, \frac{b+۱}{۲}\right)$$

یعنی به زوجی می‌رسیم که تفاضل‌آن، نصف تفاضل a و b است؛ این عمل را ادامه می‌دهیم تا بـه زوج $(a, a+d)$ برسیم و، سپس، این عمل‌ها را

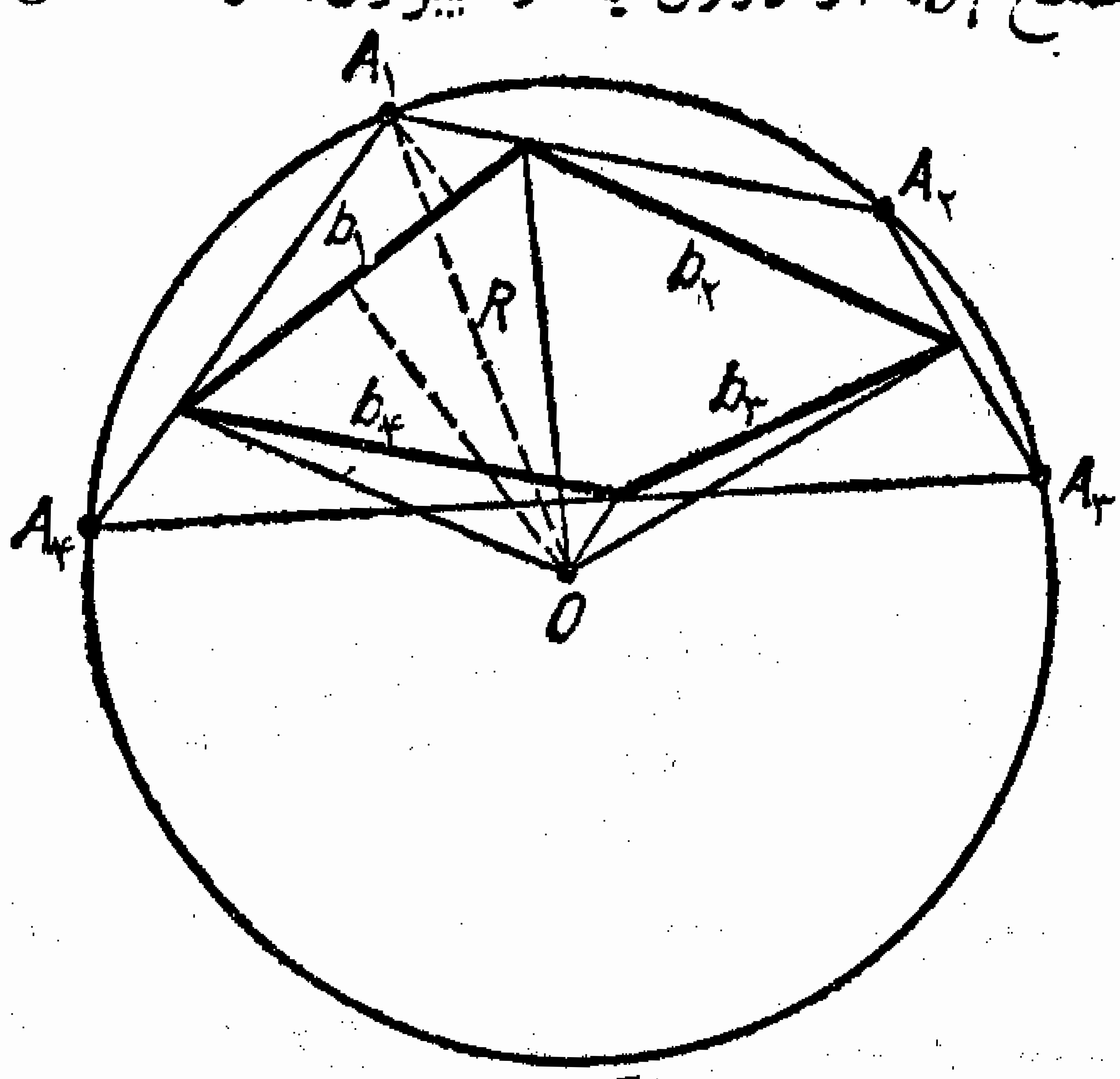
انجام می‌دهیم:

$$(a، a+d)\to(a+d، a+۲d)\to\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{a}{۲}, \frac{a}{۲}+d\right)\\ \text{یا}\ \left(\frac{a+۱}{۲}, \frac{a+۱}{۲}+d\right)\end{array}\right.$$

$$\to(a، a+۲d)\to$$

که زوجی با همان تفاصل، ولی به وسیلهٔ عـددهایی کوچکتر، می‌دهد (اگر $a>۱$). با ادامهٔ این روش، شبیه مسالهٔ a)، سرانجام، به زوج $(۱، ۱+d)$ می‌رسیم.

۲۶۱. A_i را رأس n ضلعی محاطی $(i=۱، ۲، \ldots، n)$، b_i راپاره‌خط راستی که دو نقطهٔ علامت گذاری شده را، در روی دوضاهی که از A_i خارج شده‌اند، به هم وصل می‌کند و O را مرکـز دایره می‌گیریم (شکل ۱۰۶)؛ همچنین، s_i و s'_i را مساحت‌های مثلث‌های با قاعدهٔ b_i و رأس‌های A_i و O فرض می‌کنیم، در ضمن، اگر A_i و O در یك طرف خط راستی باشند که از b_i می‌گذرد، علامت s'_i رامنفی درنظرمی گیریم. دراین‌صورت $s_i+s'_i\leqslant\frac{b_iR}{۲}$، برای‌هر i، ومجموع $s'_۱+s'_۲+\ldots+s'_n$، برابراست با مساحت چند ضلعی با رأس‌های در نقطه‌های علامت گذاری شده (علامت $+$ یا $-$ عددهای s'_i، نشان می‌دهد که ضلع b_i، از درون یا از بیرون، از نقطهٔ O دیده می‌شود).



شکل ۱۰۶

◀ به این ترتیب

$$S=s_1+s_2+\cdots+s_n+s'_1+s'_2+\cdots+s'_n \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}R(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$

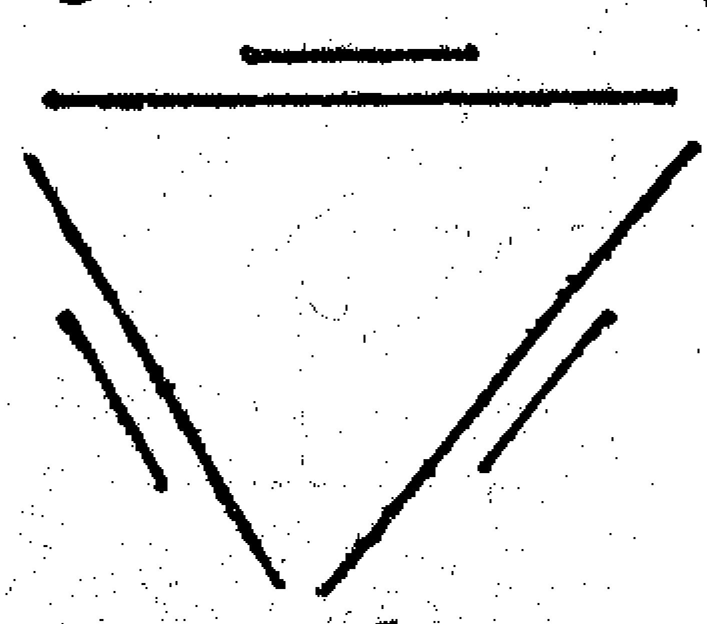
۲۶۲. a) اگر n زوج باشد، همهٔ صفحهٔ شطرنجی را می‌توان به مستطیل‌های ۱ × ۲ («دومینو») تقسیم کرد. کسی که بازی را آغاز می‌کند، همیشه امکان حرکت دارد (و بنابراین می‌برد)، به شرطی که از برنامهٔ زیر پیروی کند: اگر مهره در یکی از خانه‌های دومینو (مستطیل ۲ × ۱) باشد، آن را به همان خانهٔ دومینو می‌برد (دومینو را «می‌پوشاند»).

اگر n فرد باشد، آن وقت می‌توان همهٔ صفحهٔ شطرنجی را، به‌جز خانهٔ گوشهٔ اول، به دومینو تقسیم کرد. اکنون، اگر دومی از همان برنامه پیروی کند، برنده می‌شود.

b) پاسخ: همیشه آغاز کنندهٔ بازی برنده می‌شود. در حالت زوج‌بودن، برنامهٔ بازی شبیه مسالهٔ a) است. وقتی که n فرد باشد، همهٔ خانه‌ها را، به‌جز خانهٔ گوشه‌ای، به مستطیل‌های ۲ × ۱ تقسیم می‌کنیم. اگر صفحه را به‌ردیف صفحهٔ شطرنج رنگ‌آمیزی کنیم، به سادگی قانع می‌شویم که، بازی‌کن دوم نمی‌تواند به این خانهٔ گوشه‌ای برود و، بنابراین، اولی برنده می‌شود (به شرطی که از همان برنامهٔ «پوشاندن» دومینو پیروی کند).

۲۶۳. پاسخ: نه همیشه.

روی شکل ۱۵۷، نمونه‌ای از ۶ پاره‌خط راست داده شده است (۳ پاره‌خط کوتاه و سه پاره‌خط بلند) کــه نمی‌توان آن‌ها را به صورت خط شکسته‌ای (ولو غیر بسته) در آورد که خودش را قطع نکند. درواقع، یکی



شکل ۱۵۷

از پاره‌خط‌های راست، پاره‌خط مرزی درخط شکسته نیست، ولی دوانتهای آن را، تنها می‌توان به دوانتهای پاره‌خط راست بلند نزدیک به آن وصل کرد.

۲۶۴. راه‌حل اول. با استفاده ازنابرابری $ab\leqslant \frac{1}{4}(a+b)^2$، برای هر عدد دلخواه $c>0$ داریم:

$$P=(x_1+x_2+\dots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}\right)=$$

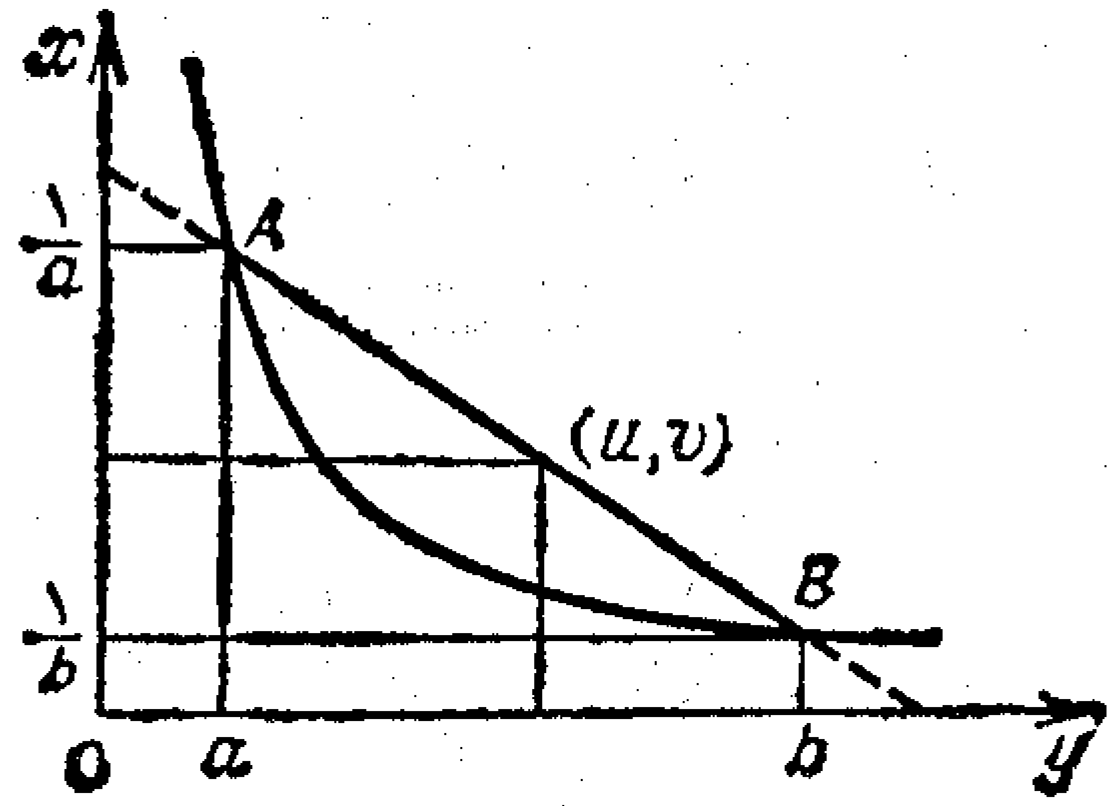
$$=\left(\frac{x_1}{c}+\frac{x_2}{c}+\dots+\frac{x_n}{c}\right)\left(\frac{c}{x_1}+\frac{c}{x_2}+\dots+\frac{c}{x_n}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{x_1}{c}+\frac{c}{x_1}+\frac{x_2}{c}+\frac{c}{x_2}+\dots+\frac{x_n}{c}+\frac{c}{x_n}\right)^2$$

یادآوری می‌کنیم، تابع $f(t)=\frac{c}{t}+\frac{t}{c}$ دربازهٔ $[a, b]$ وقتی به حداکثرخود می‌رسد که، t، برابر این یا آن انتهای بازه باشد. c را طوری انتخاب می‌کنیم که این دو مقدار با هم برابر باشند: $f(a)=f(b)$. برای این منظور باید فرض کرد: $c=\sqrt{ab}$. دراین صورت، برای $a\leqslant t\leqslant b$ خواهیم داشت: $f(t)\leqslant\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}$. بنابراین

$$P\leqslant\frac{1}{4}n^2\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2=n^2\frac{(a+b)^2}{4ab}$$

راه‌حل دوم. روی کمان هذلولی $y=\frac{1}{x}$ دربازهٔ $a\leqslant x\leqslant b$، درنقطه‌های



شکل ۱۵۸

به طول‌های x_1، x_2، ...، x_n، وزنه‌هایی با وزن‌های برابر قرار می‌دهیم. مرکز جرم این وزنه‌ها، نقطه‌ای است، به ترتیب، با طول و عرض p و q:

$$p=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\dots+x_n),\quad q=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}\right)$$

این مرکز جرم، در مرزهای قطعه‌ای قرار دارد که به وسیلهٔ کمان هذلولی و پاره‌خط راستی که دوانتهای آن را به هم وصل می‌کند، محدود شده است. روشن است، برای این که مقدار pq به‌حداکثر مقدار خود برسد، باید نقطهٔ (p, q) را، در این قطعه روی پاره‌خط راست مرز بالایی قطعه، جست‌وجو کرد (شکل ۱۰۸). برای نقطه‌های (p, q) از خط راستی که شامل این پاره‌خط راست است، می‌توان q را به‌عنوان یك تابع خطی نسبت به p نوشت؛ در این صورت، pq سه جمله‌ای درجهٔ دومی از p خواهد بود (که به‌ازای $p=0$، به‌سمت صفر میل می‌کند). برای این که این سه جمله‌ای را به‌صورت صریح خود ننویسیم ــ اگر چه، کار دشواری نیست ــ یادآوری می‌کنیم که، به ازای $p=a$ و $p=b$، مقدارهای برابر $a\times\frac{1}{a}=b\times\frac{1}{b}=1$ را قبول می‌کند. بنابراین، به حداکثر مقدار خود، در وسط این دو نقطه می‌رسد که برابر است با $\frac{1}{4}(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$. از این جا، نابرابری مطلوب، به‌دست می‌آید.

$\triangledown$ با توجه به راه‌حل دوم، می‌توان این نتیجهٔ جنبی را به‌دست آورد: دو پاره‌خط راستی که، بین نقطه‌های برخورد هرخط راست دلخواه با هذلولی $y=\frac{1}{x}$ و محورهای مختصات (که در ضمن مجانب‌های منفی هستند) قرار دارند، باهم برابرند (این دو پاره‌خط راست، روی شکل، با خطچین نشان داده شده‌اند).

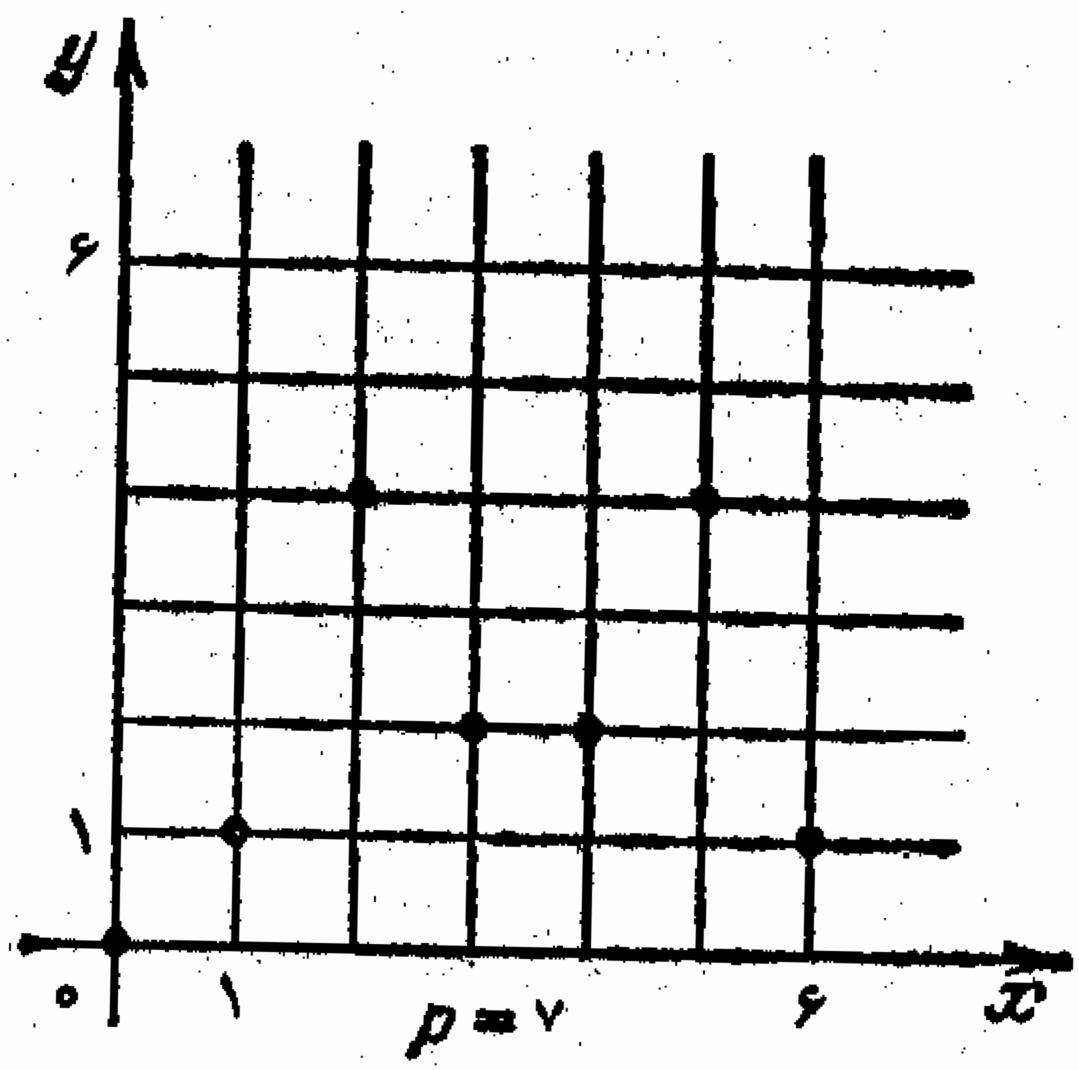
اگر به مسالهٔ اصلی برگردیم، باید یادآوری کنیم که، وقتی n زوج باشد، نابرابری، تخمین دقیق سمت چپ را به‌دست می‌دهد؛ ولی وقتی n فرد باشد، می‌توان تا حدی آن را دقیق‌تر کرد. (این مساله، به‌ازای $n=5$، همین چندی پیش، در یکی از المپیادهای داخلی امریکا ــ سال ۱۹۷۷ــ داده

شده است: مسالهٔ ۱۴۶ از کتاب «مساله‌های المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف»، ترجمهٔ فارسی، انتشارات فردوس، صفحهٔ ۳۶ را ببینید.)

۲۶۵. به عنوان مجموعهٔ مطلوب می‌توان مجموعه‌ای را در نظر گرفت که از نقطه‌های

$$A_k=(k، r(k))، k=۰، ۱، ۲، ...، p-۱$$

تشکیل شده باشد؛ منظور از $r(k)$، باقی‌ماندهٔ تقسیم $k^۲$ بر p است. برای $p=۷$، این مجموعه روی شکل ۱۰۹ داده شده است.



شکل ۱۰۹

اگر سه نقطهٔ A_l، A_m و A_n بر یك خط راست باشند $(l<m<n<p)$، باید داشته باشیم:

$$\frac{r(m)-r(l)}{m-l}=\frac{r(n)-r(m)}{n-m}$$

یعنی، برای عددهای درستی مثل a و b، این برابری برقرار باشد:

$$(n-m)(m^۲-l^۲+ap)=(m-l)(n^۲-m^۲+bp)$$

اگر جمله‌هایی را که شامل p نیستند به‌سمت چپ ببریم، می‌بینیم که

$$(n-m)(m-l)(n-l)$$

بر p بخش‌پذیر است. ولی از آن‌جا که p، عددی اول است، این امر ممکن نیست.

اگر هم، چهار نقطهٔ A_k، A_l، A_m و A_n رأس‌های یك متوازی‌الاضلاع

باشند، $\overrightarrow{A_kA_l}=\overrightarrow{A_nA_m}$، آن وقت، باید داشته باشیم:

$$l-k=m-n \text{ و } r(l)-r(k)=r(m)-r(n)$$

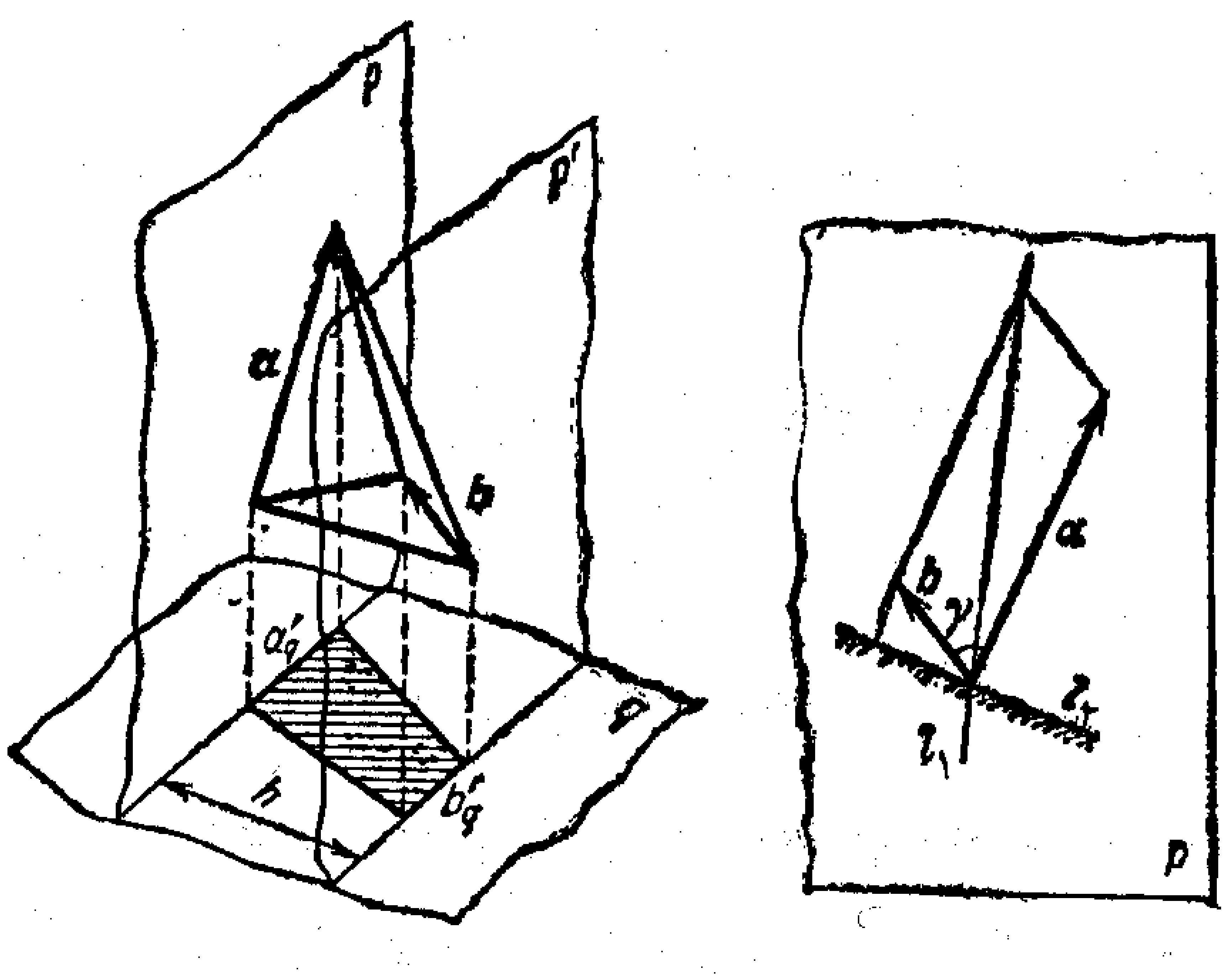
یعنی عدد $(l^۲-k^۲)-(m^۲-n^۲)$ بر p بخش‌پذیر است. در این صورت عدد

$$l+k-(m+n)=۲l-۲m$$

و همچنین، چون $p>۳$، عدد $l-m$ هم باید بر p بخش‌پذیر باشد، که ممکن نیست.

۲۶۶. از دو یال متقابل a و b در چهاروجهی، صفحه‌های موازی p و p' را رسم می‌کنیم. فاصلهٔ بین این‌دو صفحه را، h می‌گیریم. تصویرهای چهاروجهی را، بر صفحه‌های q، که بر صفحهٔ p عمودند، در نظر می‌گیریم و، از بین آن‌ها، صفحه‌هایی را پیدا می‌کنیم که، برای آن‌ها، نسبت مساحت تصویرها، کمتر از $\sqrt{۲}$ نباشد. تصویر چهاروجهی بر صفحهٔ q، ذوزنقه‌ای است با قاعده‌های $a'q$ و $b'q$ (تصویرهای a و b بر q) و ارتفاع h (در حالت خاصی که تصویرهای یکی از دو یال a یا b، به‌صورت یک نقطه در آید، بـه جای ذوزنقه، با یک مثلث سروکار خـواهیم داشت)؛ مساحت این تصویر برابر است با

$$\frac{۱}{۲}h(a'q+b'q)$$



شکل ۱۱۵

برای این که ببینیم، این مقدار با شیب یال‌های a و b نسبت بـه صفحهٔ q، چه رابطه‌ای دارد، بردارهای a و b را (که معرف یال‌های چهاروجهی‌اند) در نظر می‌گیریم (شکل ۱۱۰). روشن است که می‌توان فرض کرد: $a \geqslant b$؛ درضمن، زاویهٔ γ بین بردارهای **a** و **b**، از ۹۰ درجه تجاوز نمی‌کند. این بردارها را از یك نقطهٔ O در نظر می‌گیریم، در این صورت به‌جای طول تصویرهای یال‌های چهاروجهی برصفحه q، می‌توانیم در بارهٔ طول تصویرهای بردارهای **a** و **b** بر خط راست صحبت کنیم (خط راستی که بر صفحهٔ موازی p و p' قرارداد). مجموع تصویرها، برخط راست l_1 موازی بردار $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ برابر است با $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$، و بر خط راست l_2 عمود بـر **a** برابر $b\sin\gamma$، و نسبت این دو مقدار، از $\sqrt{2}$ تجاوز نمی‌کند:

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2=a^2+b^2+2ab\geqslant a^2+b^2\geqslant 2b^2\geqslant 2b^2\sin^2\gamma$$

$\triangledown$ یادآوری کنیم که، برای چهاروجهی منتظم، ارزیابی $\sqrt{2}$، بهترین ارزیابی است: مساحت هر تصویری از ایـن چهاروجهی، بین $\frac{a^2}{2}$ و $\frac{a^2}{2\sqrt{2}}$ قرار دارد (a، طول یال چهاروجهی منتظم است).

۲۶۷. فرض می‌کنیم:

$$f(x)=(x-a_1)^2+\dots+(x-a_n)^2$$

در این سه جمله‌ای درجهٔ دوم، مقدار مجذور کامل را جدا می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$f(x)=n(x-b_n)^2+f(b_n) \qquad (*)$$

برای تحقیق درستی این برابری، باید توجه داشت که

$$nb_n=a_1+a_2+\dots+a_n$$

بـه ازای $n=1$، درستی نابرابری مطلوب، روشن است $(C=D)$.
برای این که، این نابرابری‌ها را با استقرای ریاضی ثابت کنیم، کافی است، نابرابری‌های زیر را ثابت کنیم:

$$\circ \leqslant f(b_{n+1})-f(b_n)\leqslant(a_{n+1}-b_{n+1})^{2}$$

زیرا، اگر به a_1، a_2، ...، a_n، عدد a_{n+1} را اضافه کنیم، مقدار C به‌اندازهٔ $(a_{n+1}-b_{n+1})^{2}$ و مقدار D به‌اندازهٔ

$$(a_{n+1}-b_{n+1})^{2}+f(b_{n+1})-f(b_n)$$

ترقی می‌کنند. نابرابری سمت چپ، از برابری (*) و به ازای $x=b_{n+1}$، بلافاصله نتیجه‌می‌شود؛ نابرابری سمت‌راست هم، نتیجه‌ای است از برابری‌های

$$(n+1)b_{n+1}=nb_n+a_{n+1}\text{،}\ n(b_{n+1}-b_n)=a_{n+1}-b_{n+1}\text{،}$$

$$f(b_{n+1})-f(b_n)=n(b_{n+1}-b_n)^{2}=\frac{1}{n}(a_{n+1}-b_{n+1})^{2}$$

▽ اتحاد (*)، که مجموع مجذورهای فاصله‌های از n نقطه را، بر حسب مجذور فاصلهٔ تا «نقطهٔ مرکزی» آن‌ها (یا «مقدارمتوسط» آن‌ها) می‌دهد، درنظریهٔ احتمال، آمار و در هندسه (مسطحه یا فضایی) کاربردهای زیادی دارد.

۲۶۸. همراه با عدد $\lambda_1=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$، «مزدوج‌های» آن را که در علامت رادیکال‌ها با آن فرق دارند، در نظر می‌گیریم:

$$\lambda_2=1-\sqrt{2}+\sqrt{3}\text{،}\ \lambda_3=1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\text{،}\ \lambda_4=1-\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

اگر $\lambda_1^n=q_n+r_n\sqrt{2}+s_n\sqrt{3}+t_n\sqrt{6}$، آن وقت به سادگی می‌توان تحقیق کرد که، برای $n=1, 2, 3, \ldots$، داریم:

$$\lambda_2^n=q_n-r_n\sqrt{2}+s_n\sqrt{3}-t_n\sqrt{6}\text{،}$$
$$\lambda_3^n=q_n-r_n\sqrt{2}-s_n\sqrt{3}-t_n\sqrt{6}\text{،}$$
$$\lambda_4^n=q_n-r_n\sqrt{2}-s_n\sqrt{3}+t_n\sqrt{6}$$

اگر این چهار برابری را با هم جمع و، سپس، مجموع را بر $4\lambda_1^n$ تقسیم کنیم و به سمت حد برویم، به‌دست می‌آید:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{\lambda_1^n}=\frac{1}{4}$$

زیرا، برای $j=۲،۳،۴$ داریم: $|\lambda_j|<\lambda_۱$ و بنابراین: $\text{حد}\,\frac{|\lambda_j|^n}{\lambda_۱^n}=۰$.

اگـر برابری اول را با یکی از سه برابری دیگـر جمع و، سپس، دوبرابری دیگر را از آن کم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\frac{r_n\sqrt{۲}}{\lambda_۱^n}=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\frac{s_n\sqrt{۳}}{\lambda_۱^n}=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\frac{t_n\sqrt{۶}}{\lambda_۱^n}=\frac{۱}{۴}$$

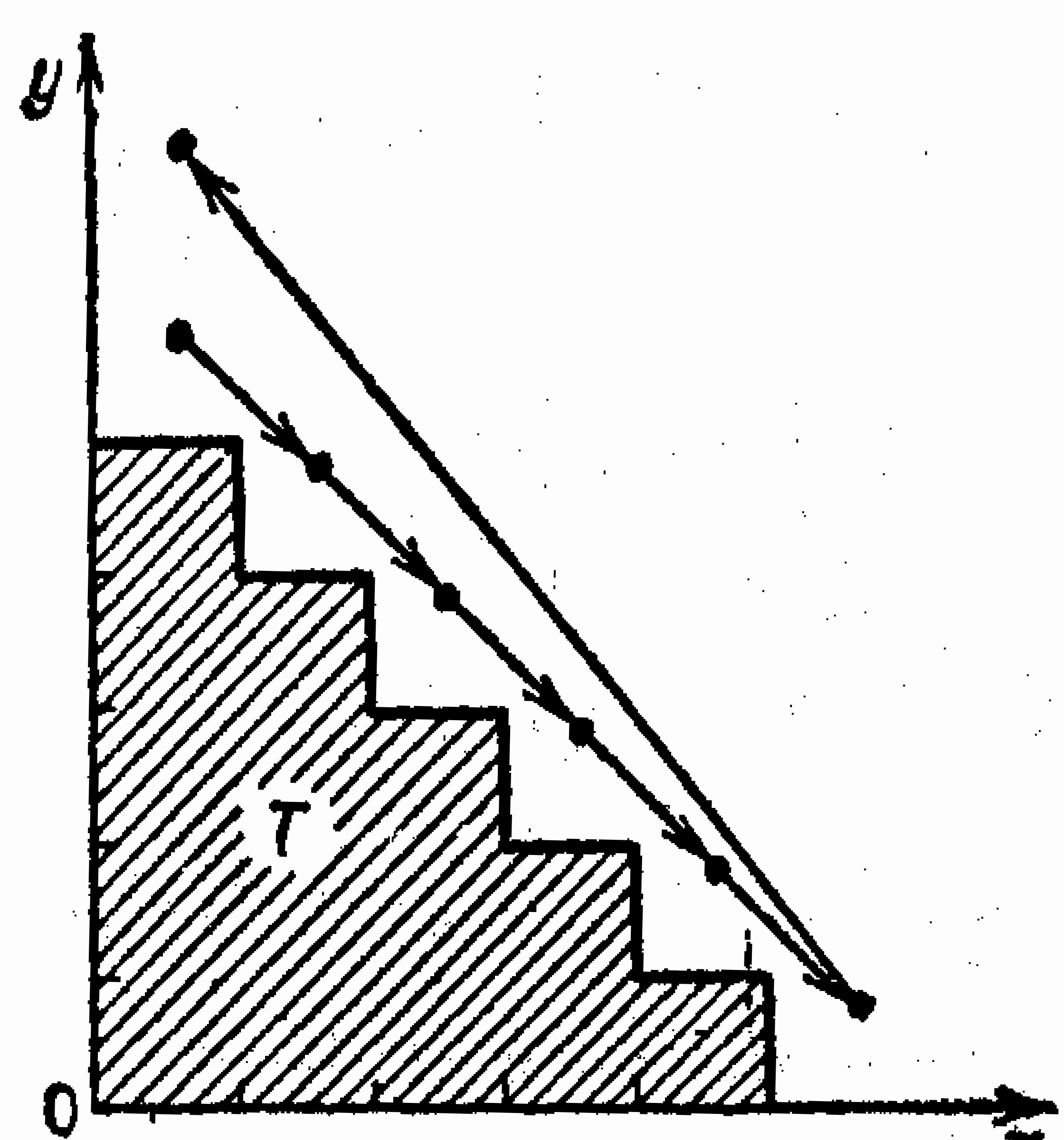
(به این ترتیب، در مجموع $q_n+r_n\sqrt{۲}+s_n\sqrt{۳}+t_n\sqrt{۶}$، وقتی n خیلی بزرگ باشد، همهٔ جمله‌ها، به تقریب، با هم برابر می‌شوند)، از این جا به دست می‌آید:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\frac{r_n}{q_n}=\frac{۱}{\sqrt{۲}},\ \underset{n\to\infty}{\text{حد}}\frac{s_n}{q_n}=\frac{۱}{\sqrt{۳}},\ \underset{n\to\infty}{\text{حد}}\frac{t_n}{q_n}=\frac{۱}{\sqrt{۶}}$$

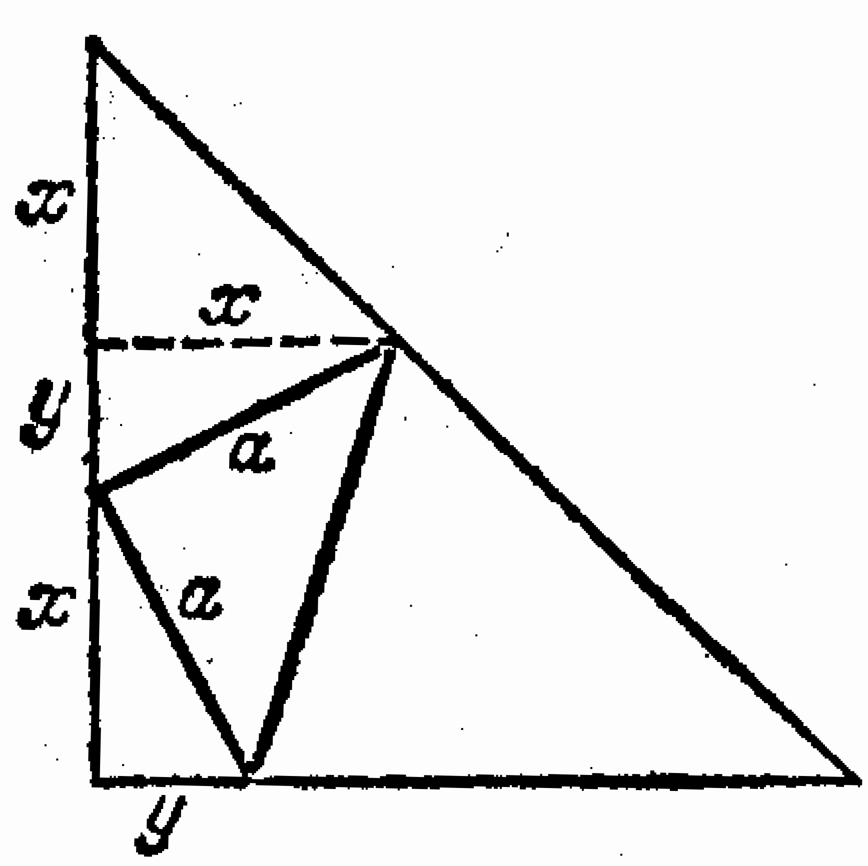
▽ یادآوری می‌کنیم، اگر عبارت $a+b\sqrt{۲}+c\sqrt{۳}+d\sqrt{۶}$ را درنظر می‌گرفتیم، به شرطی که a، b، c و d، عددهایی طبیعی باشند، بازهم به‌همان جواب‌ها می‌رسیدیم.

۲۶۹. پاسخ: $\frac{۱}{۵}$.

باید دو حالت را در نظرگرفت: رأس زاویهٔ قائمهٔ مثلث کوچکتر، یا



شکل ۱۱۲



شکل ۱۱۱

روی وتر مثلث بزرگتر قرار دارد و یا روی یك ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن. درحالت اول، نسبت ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمهٔ دو مثلث از $\frac{1}{2}$ و، بنابراین، نسبت مساحت‌های آن‌ها از $\frac{1}{4}$ کمتر نیست. در حالت دوم، مثلث کوچکتر را ثابت می‌گیریم و ازاین نکته استفاده می‌کنیم که، رأس‌های مثلث بزرگتر، روی کمانی ازدایره حرکت می‌کنند. در این صورت، جواب مساله، با روش خالص هندسی به دست می‌آید.

مساله راه‌حل دیگری هم دارد: تصویر ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ مثلث کوچکتر را روی ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمهٔ مثلث بزرگتر، برابر x و y می‌گیریم (شکل ۱۱۱). در این صورت $x^2+y^2=a^2$ و ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ مثلث بزرگتر، برابر می‌شود با

$$2x+y\leqslant a\sqrt{5}$$

۲۷۰. پاسخ: مجموعهٔ نقطه‌هایی که کانگورو نمی‌تواند «به سمت بی‌نهایت» بجهد، مساحتی برابر ۱۵ دارد؛ این، شکل پله مانند T است که در شکل ۱۱۲ نشان داده شده است.

از هرنقطهٔ بیرون T می‌توان، با گام‌های $(1 ، -1)$ به حوزهٔ $x\geqslant 5$ رسید و، سپس، گام‌های

$$(-5 ، 7)+5(1 ، -1)=(0 ، 2)$$

را برداشت.

▽ اگر در این مساله، تعداد روش‌های مجاز جهیدن کانگورو را ۳ یا بیشتر بگیریم، شکل‌های جالب‌تری به دست می‌آید.

۲۷۱. ابتدا عضوهای مجلس را، به صورتی دلخواه، به دو گروه تقسیم می‌کنیم. اگر در یکی از گروه‌ها، عضو A، دست کم دو دشمن داشته باشد، آن وقت این عضو A، در گروه دیگر بیش ازیك دشمن نخواهد داشت. A را به گروه دیگر می‌فرستیم؛ به این ترتیب، مجموع s، زوج دشمن‌ها در

هر دو گروه، کاهش می‌یابد. چون s، عددی درست و غیرمنفی است، این کاهش زوج دشمن‌ها را، می‌توان با تعداد محدودی عمل (شبیه آن چه برای A انجام دادیم) از بین برد که، در نتیجه، تقسیم موردنظر به دست می‌آید.

۲۷۲. به سادگی می‌توان همهٔ کسرهای گویای با مخرج‌های ۲، ۴، ۸، ۱۶، ... را به‌دست آورد.

برای این که، از زوج (۱ ، ۰)، به کسر $\frac{1}{n}$ برسیم، کافی است n کسر مختلف از این گونه، با مجموعی برابر واحد را انتخاب و، سپس، واسطهٔ حسابی آن‌ها را محاسبه کنیم، مثلاً برای $n=5$

$$\frac{1}{5}=\frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\frac{3}{4^4}+\frac{1}{4^4}}{5}$$

(چنین انتخابی را، برای هر n، می‌توان داشت)

اکنون یادآوری می‌کنیم که، اگر بتوانیم با برنامه‌ای، از دو عدد (۱ ، ۰) عدد t را به‌دست‌آوریم، با همان برنامه می‌توانیم ازدوعدد (۰ ، ۱)، عدد $t-1$ را به دست‌آوریم، همچنین ازدوعدد $(0, r)$ باهمان برنامه، می‌توان $(0, rt)$ را پیدا کرد. بنابراین، اگر کسر $\frac{1}{n}$ و همهٔ کسرهای $\frac{k}{n-1}$ $(k=1, 2, \ldots, n-1)$ را بـه دست آورده باشیم، آن وقت می‌توانیم $1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}$ و همهٔ $\frac{k}{n}=\frac{n-1}{n}\times\frac{k}{n-1}$ را به دست آوریم.

۲۷۳. بازه‌هایی ازرشته عددهای $\frac{x_m}{m}$ را درنظر می‌گیریم، به‌نحوی که

$$k^2\leqslant m\leqslant(k+1)^2-1, (k=1, 2, 3, \ldots)$$

kامین بازه، از $2k+1=(k+1)^2-k^2$ عدد تشکیل‌شده است: عددهای از $\frac{x_{k^2}}{k^2}$ تا $\frac{x_{(k+1)^2-1}}{(k+1)^2-1}$.

اگر هر عدد $\frac{x_m}{m}$ در kامین بازه را با جملهٔ اول این بازه، که بزرگترین

آن‌ها و برابر $\frac{x_{k^2}}{k^2}$ است، عوض کنیم، متوجه می‌شویم که مجموع عددهای

این بازه، بیشتر از

$$\frac{(2k+1)x_{k^2}}{k^2} \leqslant \frac{3kx_{k^2}}{k^2} = \frac{3x_{k^2}}{k}$$

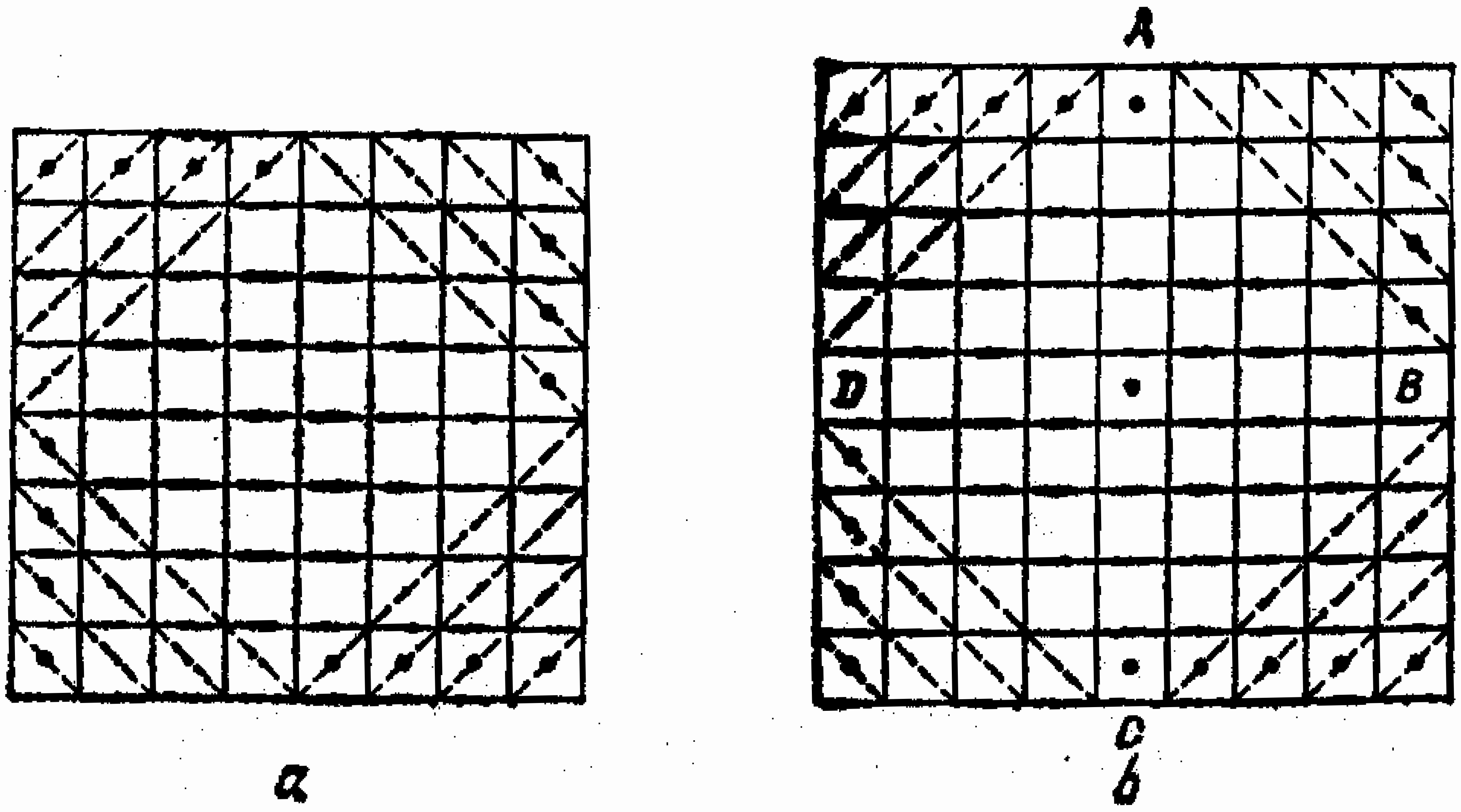
نیست. اکنون، برای هرعدد طبیعی n داریم:

$$\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}+\dots+\frac{x_n}{n} \leqslant 3\left(\frac{x_1}{1}+\frac{x_4}{2}+\frac{x_9}{3}+\dots+\frac{x_{q^2}}{q}\right)$$

که در آن، q کوچکترین عددی است که برای آن داشته باشیم: $q^2>n$.

۲۷۴. نقطهٔ O را به دلخواه انتخاب می‌کنیم و هر بردار $\overrightarrow{AB}$ را به صورت $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ می‌نویسیم. در مجموع بردارها، هر بردار $\overrightarrow{OM}$ (M، یکی از نقطه‌های مفروض)، به همان تعداد که با علامت «مثبت» آمده باشد، با علامت «منفی» هم وجود دارد، به‌نحوی که مجموع آن‌ها، برابر ۰ می‌شود.

۲۷۵. پاسخ: a) بـرای $n=8$، ۱۶ مهره؛ b) وقتی n زوج باشد $2n$ مهره وقتی n فرد باشد $2n+1$ مهره.



شکل ۱۱۳

وضع استقرار این تعداد مهره، در شکل ۱۱۳، a و b، دیده می‌شود. اثبات این که با تعداد کمتری مهره، ممکن نیست، در حالت زوج بودن n ساده است: روی هر خط راست موازی با یك قطر، یك مهره و روی خود قطرها دو مهره (در گوشه‌ها)، باید قرار داد.

اثبات دیگر: باید روی هرخط راستی که در شکل‌ها به‌صورت «خط‌چین» آمده‌اند، یك مهره قرار گیرد. این‌استدلال، به خصوص برای حالتی که n عددی فرد است، به درد می‌خورد (شکل ۱۱۳، b): به جز $۲n-۲$ خط راست «خط چین» (که روی هر کدام، یك مهره قرار دارد)، باید شش خط راست دیگر را هم، که مرکز خانه‌های A، B، C و D را به هم وصل می‌کنند در نظر گرفت؛ برای آن‌ها، دست‌کم ۳ مهرهٔ دیگر هم لازم است.

۲۷۶. پاسخ: $x=\frac{a+b\sqrt{a^۲-b^۲}}{\sqrt{۱-a^۲+b^۲}}$ و $y=\frac{b+a\sqrt{a^۲-b^۲}}{\sqrt{۱-a^۲+b^۲}}$.

اگر معادله‌های مفروض را یکبار با هم جمع و یکبار از هم کم و، سپس، نتیجه‌ها را درهم ضرب کنیم، به دست می‌آید:

$$x^۲-y^۲=a^۲-b^۲\Rightarrow\sqrt{x^۲-y^۲}=\sqrt{a^۲-b^۲}$$

که اگر آن را درمعادله‌های دستگاه اصلی‌قراردهیم، به‌دستگاهی ازمعادله‌های خطی می‌رسیم و جواب به سادگی به دست می‌آید. اگر در جواب، a را به x و b را به y — تبدیل کنیم، به همان کسرهای مربوط بـه دستگاه اصلی می‌رسیم؛ واین به ما امکان می‌دهد که به دنبال تحقیق درستی جواب نرویم: از دستورهای جواب، می‌توان دستورهای مشابهی با تبدیل x به a و y به $-b$ به دست آورد.

▽ اگر معادله‌های دستگاه را به این صورت در نظر بگیریم:

$$\frac{x-yf(x^۲-y^۲)}{\sqrt{۱-f^۲(x^۲-y^۲)}}=a،\ \frac{y-xf(x^۲-y^۲)}{\sqrt{۱-f^۲(x^۲-y^۲)}}=b$$

که در آن، f، تابعی دلخواه است که قدرمطلق آن ازواحد تجاوز نمی‌کند،

وات هیچ چیز تغییر نمی‌کند. اهمیت این مساله در آن است که «تبدیل
لنس»

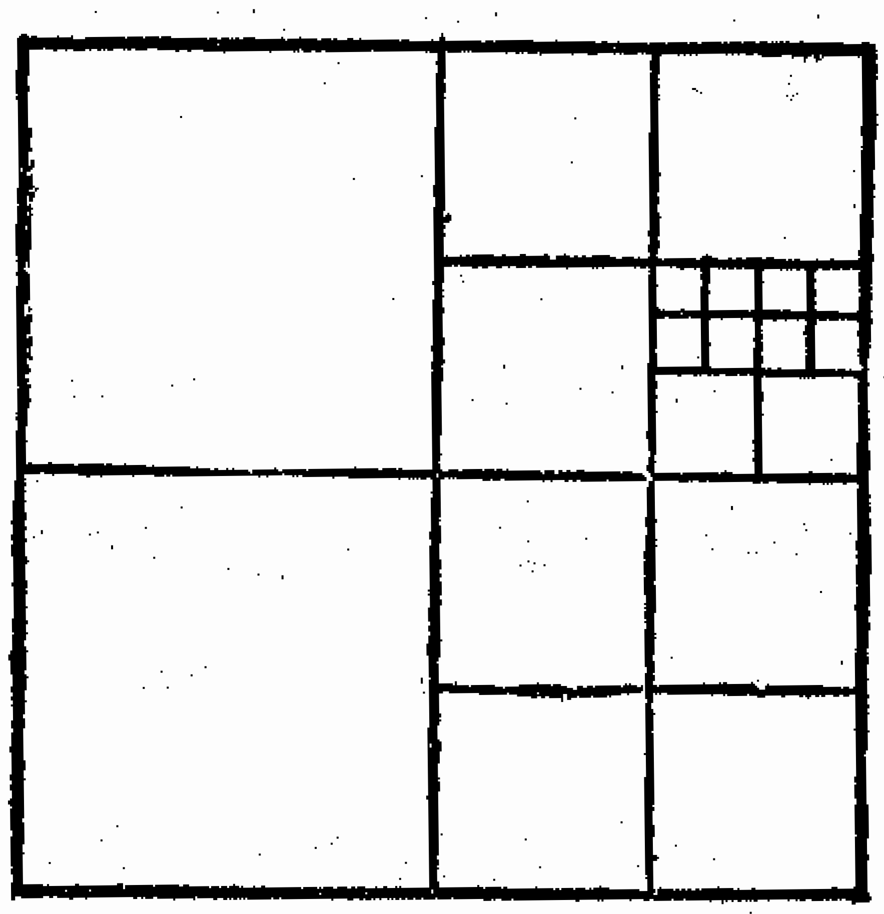
$$(x, y) \to (x', y'), \; x' = \frac{x - vy}{\sqrt{1 - v^2}}, \; y' = \frac{y - vx}{\sqrt{1 - v^2}}$$

ای نقشی اساسی در نظریهٔ نسبیت انیشتین است؛ این تبدیل $x^2 - y^2$ را
ت نگه می‌دارد: $x^2 - y^2 = (x')^2 - (y')^2$.

۲۷۷. اگر مربع‌های مفروض را طوری کوچك کنیم که، ضلع هرکدام
آن‌ها، برابر کوچکترین عدد نزدیك به خود، به صورت $\frac{1}{2^k}$ باشد
$(k = 1, 2, \ldots)$ آن‌وقت این مربع‌ها را می‌توان، بدون این‌که روی هم‌قرار
گیرند، جاداد (شکل ۱۱۴). چون‌مساحت هرمربع جدید، بیشتر از $\frac{1}{4}$ مساحت
مربع اصلی است، بنا براین مجموع مساحت‌های آن‌ها ازواحد بیشتر می‌شود،
به نحوی‌که تمامی مربع واحد را می‌پوشانند.

۲۷۸. $s = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ می گیریم.
چون، برای‌هر $i = 1, 2, \ldots, n$، داریم: $x_i \geqslant x_i^2$، بنا براین، نا برابری
مطلوب، نتیجه‌ای از نا برابری $(s+1)^2 \geqslant 4s$ است که، به روشنی، با
نا برابری $(s-1)^2 \geqslant 0$ هم‌ارز است.

۲۷۹. چون p و q نسبت به هم اول‌اند، بنا براین هرکدام از آن‌ها،
نسبت به $n = p + q$، اول می‌شود. بنا براین، همهٔ عددهای



شکل ۱۱۴

$$\frac{i}{p}, \frac{j}{q}, \frac{i+j}{n} \quad (i=۱، ۲، \ldots، p-۱;\ j=۱، ۲، \ldots، q-۱)$$

با هم فرق دارند. توجه کنیم که همیشه، $\frac{i+j}{p+q}$ بین $\frac{i}{p}$ و $\frac{j}{q}$ واقع است؛ به این ترتیب روشن است که، همهٔ کسرهای $\frac{i}{p}$ و $\frac{j}{q}$، در بازه‌های مختلف

$$\left[\frac{k}{n}, \frac{k+۱}{n}\right], \quad k=۱، ۲، \ldots، n-۲$$

قرار دارند.

۲۸۰. $\mathbf{e}_i$ را بردار واحدی می‌گیریم که درجهت خط راست l_i باشد، فرض می‌کنیم $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_{i+۱}=c_i$ $(i=۱، ۲، \ldots، ۱۹۷۸)$، $\mathbf{e}_{۱۹۷۹}\mathbf{e}_۱=c_{۱۹۷۹}$ (c_i عبارت است از کسینوس زاویهٔ بین $\mathbf{e}_i$ و بردار بعد از آن $\mathbf{e}_{i+۱}$). اگر $\overrightarrow{OA_i}=a_i\mathbf{e}_i$ بگیریم شرط عمود بودن خطهای راست $A_{i-۱}A_{i+۱}$ و l_i، هم‌ارز است با

$$(*) \qquad (a_{i-۱}\mathbf{e}_{i-۱}-a_{i+۱}\mathbf{e}_{i+۱})\mathbf{e}_i=۰، \quad a_{i-۱}c_{i-۱}=a_{i+۱}c_i$$

$a_۱$ را به‌دلخواه انتخاب می‌کنیم؛ سپس، $a_۳$، $a_۵$، …، $a_{۱۹۷۹}$، $a_۲$، $a_۴$، $a_{۱۹۷۸}$ را طوری در نظر می‌گیریم که هر ۱۹۷۹ شرط (*) برقرار باشند، به جز احتمالاً یکی: $a_{۱۹۷۸}c_{۱۹۷۸}=a_۱c_{۱۹۷۹}$. ولی اگر همهٔ ۱۹۷۸ برابری زیر را در هم ضرب کنیم:

$$\frac{a_۳}{a_۱}=\frac{c_۱}{c_۲}, \frac{a_۵}{a_۳}=\frac{c_۳}{c_۴}, \ldots, \frac{a_{۱۹۷۹}}{a_{۱۹۷۷}}=\frac{c_{۱۹۷۷}}{c_{۱۹۷۸}}$$

$$\frac{a_۲}{a_{۱۹۷۹}}=\frac{c_{۱۹۷۹}}{c_۱}, \frac{a_۴}{a_۲}=\frac{c_۲}{c_۳}, \ldots, \frac{a_{۱۹۷۸}}{a_{۱۹۷۶}}=\frac{c_{۱۹۷۶}}{c_{۱۹۷۷}}$$

بعد از ساده‌کردن، ۱۹۷۹امین برابری هم پیدا می‌شود.

۲۸۱. مقداری را که در صورت مساله داده شده است:

$$p_k=a_۱a_{k+۱}+a_۲a_{k+۲}+\ldots+a_{n-k}a_n$$

به سادگی می‌توان محاسبه کرد: دنبالهٔ

$$A_n=(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

از عددهای ۰ و ۱ را می‌نویسیم و، سپس، در سطر بعدی (زیر سطر اول)، همان دنباله را طوری می‌نویسیم که a_1 زیر a_{k+1}، a_2 زیر a_{k+2} و غیره قرار گیرد(درسطردوم، به اندازهٔ k ردیف، به‌سمت راست رفته‌ایم)؛ درضمن $p_k=p_k(A_n)$ برابر است با تعداد ردیف‌هایی‌که، در آن‌ها، در هردوسطر، عدد ۱ قرار دارد.

دنبالهٔ A_n به طول n، وقتی باشرط مساله‌ساز گاراست که، همهٔ $p_k(A_n)$ها، به‌ازای $0 \leqslant k \leqslant n-1$، فرد باشند.

ساختمان بعدی امکان می‌دهد تا به کمك دو دنبالهٔ A_m و A_n از این گونه، $A_l=A_n \cup A_m$ را به طول

$$l=(2m-1)n-(m-1)=2mn-m-n+1$$

بسازیم. و بلوك $\underbrace{0\,0 \dots 0}_{m-1}$ A_m از $2m-1$ رقم، هر ۱ را به A_n، ودربلوك شامل $2m-1$ صفر، هر ۰ را به A_n تغییر می‌دهیم و $m-1$ صفر آخر را حذف می‌کنیم. ضمن محاسبه p_k برای A_l با روش فوق، بـه ازای هرجلو-رفتن k، هر بلوك A_m در سطر بالا، تنها یك بلوك A_m در سطر پایین گذاشته می‌شود؛ اگر

$$k=(2m-1)q+r \text{ یا } k=(2m-1)q-r$$

که در آن $0 \leqslant r \leqslant m-1$ و $0 \leqslant q \leqslant n-1$، آن وقت

$$p_k(A_l)=p_q(A_n)\cdot p_r(A_m)$$

زیرا درست $p_q(A_n)$ زوج ازبلوك‌های A_m وجود دارد و، درضمن، به‌اندازهٔ r ردیف، جلو کشیده‌شده‌اند؛ ازاین‌جاروشن‌می‌شود که دنبالهٔ $A_l=A_n \cup A_m$، همراه با A_n و A_m، باشرط مساله سازگار است.

این‌ساختمان به‌ما امکان‌می‌دهدکه‌از $A_4=1101$، پاسخ $A_{25}=A_4 \cup A_4$ را، برای مسالهٔ a) پیدا کنیم:

$$A_{25}=\underbrace{1101000}\,\underbrace{1101000}\,\underbrace{0000000}\,\underbrace{1101}$$

سپس، $A_{25} \cup A_{25}$ دارای $2\times 25^2-50+1=1201$ یعنی بیش از ۱۰۰۰ رقم است که در مسالهٔ b) خواسته شده است.

۲۸۲. فرض می‌کنیم، قطرهای چهارضلعی $ABCD$، که در نقطهٔ O به هم رسیده‌اند، برهم عمود نباشند و، مثلاً، AOB زاویه‌ای حاده باشد. نقطه‌های A' و B'، قرینهٔ نقطه‌های A و B نسبت به O را پیدا می‌کنیم. شعاع‌های دایره‌های محاط در مثلث‌های $A'OB$ و $B'OC$، از شعاع دایرهٔ محاط در مثلث AOB کوچکترند (مساحت همهٔ این مثلث‌ها، یکی است، ولی محیط مثلث AOB کمتر است)؛ بنابراین، مماس‌هایی که از نقطه‌های A و B بر دایره‌های به شعاع r، محاط در زاویه‌های BOC و AOD رسم شوند، نیم‌خط‌های راست OA' و OB' را در نقطه‌ها C و D قطع می‌کنند که، به ترتیب، دورتر از نقطه‌های A' و B' نسبت به O قرار دارند، به نحوی که پاره‌خط راست CD، نمی‌تواند بر دایرهٔ به شعاع r، محاط در مثلث $OA'B'$ مماس شود.

به این ترتیب، خط‌های راست AC و BD بر هم عمودند و، با توجه به برابری شعاع‌های دایره‌های محاطی، این قطرها، محورهای تقارن چهارضلعی $ABCD$ را تشکیل می‌دهند و این، به معنای آن است که چهارضلعی $ABCD$، یك لوزی است.

۲۸۳. a) همهٔ ترتیب‌های ممکن T، از زوج نقطه‌های قرمز (A_l, A_r) را، که پاره‌خط راست A_0A_n را به سه بخش A_0A_l، A_lA_r و A_rA_n تقسیم کرده‌اند، در نظر می‌گیریم؛ بزرگترین طول این بخش‌ها را M و کوچکترین آن‌ها را m می‌نامیم. از بین همهٔ ترتیب‌های T، آن‌هایی را جدا می‌کنیم که، در آن‌ها، مقدار M حداقل باشد و، سپس، از بین ترتیب‌های اخیر، آن را (یا یکی از آن‌هایی را) در نظر می‌گیریم که، برای آن، مقدار m

شکل ۱۱۵

حداکثر باشد. ثابت می‌کنیم که، برای این موقعیت $T=(A_l, A_r)$، شرط مساله، $M-m\leqslant 1$، برقرار است.

فرض کنید، بـرای ایـن موقعیت، داشته باشیم: $M-m>1$. اگر بخش‌های M و m در ردیف هم باشند، با جابه‌جاکردن مرز قرمزبین آن‌ها روی یکی از پاره خط‌های راست، بـه ترتیب T' می‌رسیم کـه، در آن، کوچکترین بخش از m بزرگتر و بزرگترین بخش، کوچکتر از M است که، درواقع، نوع انتخاب T رانقض می‌کند. اگر $m=A_0A_l$ و $M=A_rA_n$، آن وقت، یا درترتیب (A_{l+1}, A_r)، کوچکترین بخش از m بزرگتر است ویا $A_{l+1}A_r\leqslant m<M-1$، که دراین‌صورت، درترتیب (A_{l+1}, A_{r+1})، بزرگترین بخش‌از M کوچکتراست؛ودرهرحال، نوع‌انتخاب $T=(A_l, A_r)$ نقض می‌شود (شکل ۱۱۵).

b) ترتیبی را درنظر می‌گیریم که، درآن، بزرگترین طول از k بخش Δ_1، Δ_2، ...، Δ_k برابر M و طول کـوچکترین بخش برابر $m<M-1$ باشد. فـرض کنید $\Delta_i=m$ در سمت چپ $\Delta_j=M$ واقع باشد. انتهـای راست بخش Δ_i را، روی یك یا چند پاره‌خط راست، طوری جا به‌جا می‌کنیم‌که، این بخش، کمتراز $M-1$ (والبته، بزرگتر از M) نباشد. اکنون اگر $\Delta_{i+1}<M-1$، همـان عمل را دربارهٔ آن انجام می‌دهیم، سپس به Δ_{i+2} مـی‌پـردازیـم و غیره، تا جایـی کـه یا طـول همهٔ بخش‌هـای Δ_i، Δ_{i+1}، ...، Δ_{j-1}، بـزرگتر یا بـرابـر $M-1$ نشوند و یا ایـن که موفق شویم $\Delta_j=M$ را، دست کـم روی یك پاره‌خط، کاهش دهیم. سپس (اگر بازهم در ترتیب حاصل $M-m>1$)، دوباره همین روند را ادامه می‌دهیم (هر چندبار که لازم باشد)، درضمن، هیچ ترتیبی تکرار نمی‌شود، زیرا ترتیب جدیدی‌که به دست می‌آید، همیشه «بهتر است»، به این مفهوم که، درآن، یا طول بخش بزرگتر M، کوچکتر است و یا M تغییرنمی‌کند، ولی تعداد بخش‌های برابر M کمتر می‌شود و یا این تعدادهم فرقی نمی‌کند ولی در آن صورت m بزرگتر می‌شود و یا تعداد mهای برابر کاهش می‌یابد. چون تعداد ترتیب‌ها محدود است، بعدازچند روند، به ترتیبی می‌رسیم

که دیگر «کم کردن» ممکن نیست، یعنی $M-m\leqslant ۱$.

۲۸۴. پاسخ: بله، بخش‌پذیر است.

عدد مفروض به روشنی بر ۲۰ بخش پذیر است. بخش‌پذیری آن بر ۹۹ ازاین جا نتیجه می‌شود که $۱+۹۹=۱۰۰$. درضمن

$$۱۹+۲۰+\ldots+۸۰=۹۹\times۳۱$$

۲۸۵. اگر $S_۱$ و $S_۲$ را، بـه ترتیب، مجموع مساحت‌های بخش‌های چپ در ردیف‌های زوج و فـرد و، بـه همین ترتیب، $S_۳$ و $S_۴$ را مجموع مساحت بخش‌های سمت راست بگیریم، داریم:

$$S_۲+S_۴=S_۳+S_۱=S_۳+S_۴=S_۱+S_۲$$

۲۸۶. کافی است ثابت کنیم، در هر موقعیتی می‌توان صندوقی را که وزنی بیشتر از ۰/۵ تن ندارد، بارگیری کرد.

۲۸۷. $S_{ABCD}=۲S_{AMPC}$. $AM=x$ فرض کنید، در این صورت

$$S_{AMCD}<۲S_{AMP}\leqslant x(a-x)\leqslant\frac{a^۲}{۴}$$

۲۸۸. پاسخ. نه، جواب ندارد.

از $(z^۲-x)(z^۲+x)=y^۳$ و اول بـودن عدد y نتیجه می‌شود که یا $z^۲-x=۱$ و $z^۲+x=y^۳$، یا $z^۲-x=y$ و $z^۲+x=y^۲$. ایـن دستگاه‌ها، درمجموعهٔ عددهای اول، جواب ندارند.

۲۸۹. پاسخ: مرکز دایرهٔ مفروض را O، شعاع آن را R می‌گیریم و فرض می‌کنیم: $OE=a$. اگر $a\geqslant\frac{R}{\sqrt{۲}}$، آن وقت وتر BD باید بردایرهٔ به مرکز O و شعاع $\frac{R}{\sqrt{۲}}$ مماس باشد. اگر $a<\frac{R}{\sqrt{۲}}$، وتر مجهول BD بر قطر AC عمود است.

کافی است توجه کنیم $S_{ABCD}=\frac{۲R}{a}S_{BOD}$ و $S_{BOD}=\frac{۱}{۲}R^۲\sin\varphi$، که

در آن، φ را مقدار زاویهٔ BOD گـرفته‌ایم و، سپس، حدکثر مقدار $\sin\varphi$ را در رابطه با موقعیت نقطهٔ E پیدا کنیم.

۲۹۰. A، B و C را، سه نقطهٔ متوالی در ساحل دریاچه می گیریـم. از شرط مساله معلوم می‌شود که، تنها وقتی A و B به هم مربوطاند که B و C به هم مربوط نباشند. بنابراین، همهٔ نقطه‌ها، بـه زوج نقطه‌های مجاوری تقسیم می‌شوند که با کشتی به هم مربوطاند. در ضمن، هردوتا از این زوج نقطه‌ها هم با یکـدیگر ارتباط دارند، یعنی یکی از نقطه‌های زوج اول، با یکی از نقطه‌های زوج دوم مربوط است.

۲۹۱. وقتی عـدد $N=\overline{abcdef}$ بر ۳۷ بخش‌پـذیر باشد، عددهـای

$$\overline{abc}+\overline{def}، \overline{bcafde}، \overline{cabdef}$$

هم بر ۳۷ بخش‌پذیرند.

۲۹۲. پاسخ: $(k\pi، l\pi، m\pi)$، $k، l، m\in\mathbf{Z}$.

دو معادلهٔ اول را با هم جمـع و، سپس، معادلهٔ سوم را از مجموع حاصل کم کنید، به معادلهٔ زیر می‌رسید:

$$\sin\frac{x+y}{۲}.\cos\frac{x+z}{۲}.\cos\frac{y+z}{۲}=۰$$

۲۹۳. اگر $\mathbf{s}\neq۰$ ($\mathbf{s}$، مجموع همهٔ بـردارهای دستگاه)، آن وقت برای هر $\mathbf{a}\neq۰$ ازاین دستگاه، به دست می‌آید: $\mathbf{s}=k\mathbf{a}$ که، درآن، k یك عدد است.

۲۹۴. a) پاسخ: $۱۹۶۲+S(۱۹۶۲)=۱۹۸۰$.

b) $S(n)+n$ را S_n می‌نامیم، در این صورت اگر عدد n به ۹ ختم شده باشد، آن وقت $S_{n+۱}<S_n$؛ و اگـر به ۹ ختم نشده باشد، آن وقت $S_{n+۱}=S_n+۲$. برای هر عدد طبیعی $m>۲$، بزرگترین عـدد ممکن N را طوری انتخاب می کنیم کـه، برای آن، داشته باشیم: $S_N<m$. در ایـن صورت $S_{N+۱}\geqslant m$؛ درضمن، رقم آخر N برابر ۹ نیست و، بنابرایـن، یا

$S_{N+1}=m$ و یا $S_{N+1}=m+1$.

۲۹۵. پاسخ: ۳۳.

هرمستطیل ۱ × ۳، درست شامل یك خانهٔ قرمز است.

۲۹۶. a) مثلاً، اگر در روز اول، برای سه دوست A، B و C، A به خاطر واکسن زدن مصونیت داشته باشد، B بیمار و C سالم باشد، اپیدمی به پایان نمی‌رسد.

b) اگر اپیدمی تمام نشود، آن وقت می‌توان A را پیداکردکه، قبل از دیگران، دوبار بیمار شده باشد، ولی دراین صورت، برای بار دوم باید بیماری مثلاً از B به او سرایت کرده باشد که، خودش قبل از A، دوبار بیماری را گرفته باشد.

۲۹۷. پاسخ: ممکن نیست.

دنبالهٔ n_k، با آغاز از شماره‌ای مثل p، ثابت می‌ماند، یعنی

$$n_p=n_{p+1}=n_{p+2}=\dots$$

۲۹۸. پاسخ: $\widehat{DEC}=90^\circ$، $\widehat{EDC}=60^\circ$ و $\widehat{DCE}=30^\circ$.

اگر دوران دو نقطهٔ D، به اندازهٔ ۶۰ درجه و در جهت مناسب و، سپس، تجانس به مرکز D و ضریب $\frac{1}{2}$ را در نظر بگیریم، نقطهٔ P به نقطه H وسط پاره‌خط راست MP، نقطهٔ B به نقطهٔ K وسط پاره‌خط راست BP و خط راست BP به خط راست KH (که AP را در E قطع می‌کند) منجر می‌شود.

۲۹۹. عددهای α و β، ریشه‌های سه جمله‌ای زیر هستند:

$$f(t)=(t-\alpha)(t-\beta)=t^2-\frac{1}{6}pt+\frac{1}{6}s$$

در ضمن $z<\frac{\alpha+\beta}{2}<x$، $f(x)>0$ و $f(z)>0$.

۳۰۰. پاسخ: $\{1, 2, 3, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$.

فرض کنید: $k_1=1\leqslant k_2\leqslant\dots\leqslant k_n=100$، عـددهای مفروض باشند. چون $2k_i\geqslant k_{i+1}$؛ بنابراین $k_i\leqslant 2^{i-1}$ (برای هر i). به خصوص $100\leqslant 2^{n-1}$، از آن‌جا $n\geqslant 8$. با فرض $n=8$، نتیجه می‌شود: $k_7=50$؛ ولی $2k_5=25$. تناقض.

۳۰۱. هریك از n^2 زوج عدد طبیعی (x, y) با شرط $1\leqslant x\leqslant n$ و $1\leqslant y\leqslant n$، جوابی از معادلهٔ $\left[x^{\frac{3}{2}}\right]+\left[y^{\frac{3}{2}}\right]=c$ $\left(1\leqslant c\leqslant 2\left[n^{\frac{3}{2}}\right]\right)$ می‌باشد. اگر به‌ازای هر c، تعداد جواب‌ها از M بیشتر نباشد، آن وقت

$$2\left[n^{\frac{3}{2}}\right]\cdot M\geqslant n^2 \text{ یا } M\geqslant \frac{1}{2}\sqrt{n}$$

۳۰۲. $BE\|CA$ و $AE\|BC$ رارسم می‌کنیم. نقطه‌های A، C، B، E و D روی سطح کره‌ای به قطر AB و به مرکز O قرار دارند؛ CE هم قطر این کره است، $\widehat{CDE}=90^\circ$ و $\cos\widehat{DCE}=\frac{|CN|}{|AB|}$. کافی است ثابت کنیم:

$$\sin\widehat{DBE}>\sin\widehat{DCE}$$

(از قضیهٔ سینوس‌ها، در مثلث‌های DBE و DCE استفاده کنید.)

۳۰۳. a) برای $k>m$، همهٔ عددهای x_k، در m رقم بعد ازممیزخود، یکسان هستند.

b) پاسخ: می‌توان. در کسر متناوب $0/(10)$ در قطعهٔ با شماره‌های $10^n<k<10^n+5$، گروه رقم‌های ۱۰۱۰ را به ۱۱۰۰ تبدیل می‌کنیم.

c) پاسخ: $x=0/x_1x_2\dots x_k\dots$ که، در آن، $x_k=1$ برای وقتی که داشته باشیم: $10^n<k\leqslant 10^n+5$ و بقیهٔ x_kها برابر صفر.

۳۰۴. پاسخ: $32(\sqrt{2}-1)$.

باید از این نکته استفاده کرد که، اگر یکی از صفحه‌های شطرنج را به اندازهٔ ۹۰ درجه دوران دهیم، خانه‌های سیاه يك صفحه برخانه‌های سفید صفحهٔ دیگر منطبق می‌شود و برعکس؛ و اگـر هـر دو صفحه را بچرخانیم،

خانه‌های سیاه در هر دو صفحه، جای خود را با خانه‌های سفید عوض می‌کنند. بنا براین، مساحت موردنظر برابراست با یك چهارم مساحت هشت‌ضلعی که از برخورد صفحه‌ها به‌دست می‌آید.

۳۰۵. کافی است ثابت کنیم: $\widehat{B_1MA}=\widehat{AA_1B_1}=\widehat{A_1B_1B}$.

۳۰۶. a) $k=3$؛ $720=2\times3\times4\times5\times6=8\times9\times10$.

b) اگر داشته باشیم: $m(m+1)=n(n+1)(n+2)(n+3)$، آن وقت

$$m^2+m+1=(n^2+3n+1)^2$$

که ممکن نیست.

۳۰۷. اگر در یکی از ستون‌های جدول، سه عدد اول (از بالا به پایین) a، m و n باشند، آن وقت به هر یك از عددهای ۱، ۲، ...، $m-1$، m، در سطر دوم و درسمت چپ m، دست‌کم n بار و به هرعدد بزرگتر از m، کمتر از n بار برخورد می‌کنیم.

۳۰۸. پاسخ: $S=(1-a)\sqrt{1-a}$ به‌ازای $a\leqslant 0$؛ $S=1-2a$ به‌ازای $0<a<\frac{1}{2}$ و $S=0$ به‌ازای $a\geqslant\frac{1}{2}$.

۳۰۹. اگر مثلث CAD را به اندازهٔ ۶۰ درجه دور رأس C دوران دهیم، به مثلث CBE می‌رسیم؛ و اگرمثلث HBE را به اندازهٔ ۶۰ درجه دور H دوران دهیم، مثلث HDK به‌دست می‌آید.

۳۱۰. گوییم افراد

$$X,\ A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_k,\ Y$$

یك زنجیره تشکیل داده‌اند، وقتی که X با A_1، A_1 با A_2، A_2 با A_3، ...، A_k با Y آشنا باشند. با توجه به شرط مساله، معلوم می‌شود که، هر ساکن محله، به‌زنجیره‌ای مربوط است. فرض می‌کنیم، زنجیره‌های بسته (یعنی، زنجیره‌هایی که، درآن‌ها، X با Y آشنا باشد) وجود نداشته باشد. طولانی‌ترین زنجیره را در نظر می‌گیریم:

$$X - A_1 - A_2 - \dots - A_{10} - \dots - A_k - Y$$

اگر $k \leqslant 19$، آن وقت خبر تازه‌ای که به اطلاع A_{10} رسیده است، بعد از ۱۰ روز به گوش همهٔ ساکنان محله خواهد رسید. اگر $k \geqslant 20$، همهٔ ساکنان X، A_1، ...، A_{10} و همهٔ آن‌هایی را که به این‌ها، به جز از طریق A_{11}، مربوط‌اند (تعداد آن‌ها از ۱۱ کمتر نیست)، جدا می‌کنیم. گروه باقی‌ماندهٔ ساکنان، باز هم با شرط مساله سازگار است. روندی را که شرح دادیم، ۸۹ بار تکرار می‌کنیم (درهر گام، با جدا کردن A_{10} مربوط)؛ یا درمرحله‌ای، همهٔ اهالی دهکده به‌پایان می‌رسندو یا تعدادی که‌از $1000 - 89 \times 11 = 21$ بیشتر نیست، باقی‌می‌مانند، که درباره آن‌ها، دوباره مثل بالا، عمل می‌کنیم.

اگر هم، در دهکده، زنجیرهٔ بسته‌ای وجود داشته باشد، آن وقت می‌توان آن‌ها را، با حفظ شرط مساله، جدا کرد.

۳۱۱. داریم:

$$f(n\pi) = (-1)^n a + (-1)^n b, \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{a}{2} - b, \quad f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{a}{2} + b$$

بنا براین $|a+b| \leqslant 1$، $|a - 2b| \leqslant 2$.

۳۱۲. L' و N' را وسط ضلع‌های BC و AD بگیرید. یامتوازی‌الاضلاع $KL'MN'$ بر $KLMN$ منطبق است و یا منطبق نیست؛ در حالت اخیر، چهارضلعی $ABCD$ ذوزنقه است $(BC \| AD)$.

۳۱۳. پاسخ: برای $n \in \mathbf{N}$ داریم $x_n = 1$ و برای $n \in \mathbf{Z}$: $x_n = n$.

۳۱۴. سطری از جدول $m \times n$ را سفید می‌نامیم، وقتی که تعداد خانه‌های سفید آن بیشتر باشد، و در حالت عکس، آن را سیاه می‌نامیم. p و q را، به ترتیب، تعداد خانه‌های سفید و سیاه و r و s را، به ترتیب، تعداد ستون‌های سفید وسیاه می گیریم ($p+q=m$ و $r+s=n$). می‌توان فرض کرد $p \leqslant q$. فرض کنید در هر ردیف (سطر و ستون)، کمتر از یك چهارم خانه‌ها، از رنگ «دیگر» باشند در این صورت، $ps+qr$، از کل تعداد خانه‌های به رنگ «دیگر» در همهٔ سطرها و ستون‌ها، بیشتر نیست، یعنی از

$\frac{mn}{۲}=\frac{mn}{۴}+\frac{mn}{۴}$ کمتر است؛ بنا براین $s \leqslant r$ و تعداد کل خانه‌های سفید کمتر است از

$$pr+\frac{qn}{۴}+\frac{sm}{۴}=\frac{mn}{۲}+pr-\frac{np}{۴}-\frac{mr}{۴}=\frac{mn}{۲}-$$

$$-\frac{p}{۲}\left(\frac{n}{۲}-r\right)-\frac{r}{۲}\left(\frac{m}{۲}-p\right)\leqslant\frac{mn}{۲}$$

۳۱۵. با توجه به شرط مساله داریم:

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{XK}=\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{BT}$$

۳۱۶. پاسخ: $x=۶$، $y=۵$.

$x=d+y$ می‌گیریم $(d\geqslant ۱)$، در این صورت به دست می‌آید:

$$(۳d-۱)\,y^۲+(۳d^۲-d)\,y+d^۳=۶۱\Rightarrow d\leqslant ۳$$

۳۱۷. برای هر تیم، ۹ تیم پیدا می‌شود که این تیم با آن‌ها بازی نکرده است و، بین این تیم‌های نه‌گانه، دو گروه نه تیمی وجود دارد که با هم روبه‌رو نشده‌اند.

۳۱۸. $A_۲$، $B_۲$ و $C_۲$ را، نقطه‌هایی از ضلع‌های BC، CA و AB به‌نحوی انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم:

$$AC_۲:C_۲B=BA_۱:A_۱C=CB_۲:B_۲A=۳$$

محیط شش ضلعی $A_۱A_۲B_۱B_۲C_۱C_۲$ برابر با $\frac{۳}{۴}P$ و بزرگتر از محیط مثلث $A_۱B_۱C_۱$ است. سپس باید نابرابری مثلث را برای مثلث‌های $A_۲C_۱B_۱$، $C_۱B_۲A_۱$ و $A_۱B_۱C_۲$ نوشت.

۳۱۹. باید از این نابرابری‌ها استفاده کرد:

$$x>y>۰ \quad و \quad ۰<x^۳-y^۳<x^۳+y^۳$$

۳۲۰. دو انتهای خط شکسته‌ای را که رسم شده است، A و B می‌گیریم. خط شکسته را روی خط راست AB تصویر می‌کنیم. خطای نسبی هر یك از ضلع‌های خط شکسته، برابر است با p، بنا براین مجموع خطاهای مطلق همهٔ ضلع‌ها، از $۴p$ تجاوز نمی‌کند؛ به این ترتیب $d \leqslant ۴p$.

۳۲۱. a) نمی‌توان (مجموع عددهای همهٔ رأس‌ها، همیشه عددی فرد است).

b) می‌توان.

c) نمی‌توان.

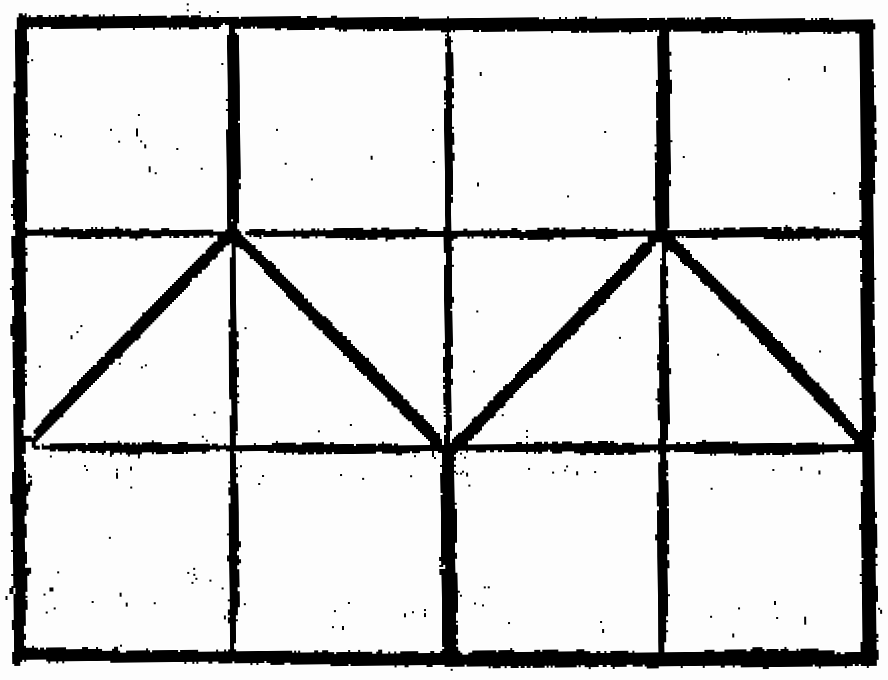
برای اثبات در حالت‌های b) و c)، بهتر است دو چهار وجهی را در نظر بگیریم که رأس‌های آن‌ها در رأس‌های مکعب واقع باشند و، درضمن، هیچ دو رأسی از هر چهار وجهی، متعلق به یك یال مکعب نباشد. در این صورت، درهر گام، به مجموع عددهای رأس‌های هر چهاروجهی، یك واحد اضافه می‌شود.

۳۲۲. پاسخ: مثلاً $n = ۹۴۲۰$.

فرض کنید $n = ۲ \times ۳ \times ۵ \times ۷ \times k$. عدد k را طوری پیدا می‌کنیم که $m-۱$ بر ۱۱ و $m+۱$ بر ۱۳ بخش‌پذیر باشد. در این صورت، $n = m - ۱۰$ با شرط مساله سازگار است (ضمیمهٔ ۲).

۳۲۳. پاسخ: در آخرین ستون، کارت‌ها، به ترتیب غیرنزولی عددهای خود قرار گرفته‌اند.

۳۲۴. از شش نقطهٔ مفروض، به هر صورتی که باشند، دست‌کم دوتا، در یکی از شکل‌هایی قرار دارند که روی شکل ۱۱۶ نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۱۶

۳۲۵. a) پاسخ: ۳ و به‌ازای $x=y=1$.

از نابرابری مربوط به واسطهٔ حسابی نتیجه می‌شود:

$$1+x^2y^4+x^4y^2\geqslant 3x^2y^2$$

b) فرض کنید: $P(x,y)=g_1^2(x,y)+g_2^2(x,y)+\dots+g_n^2(x,y)$، که در آن، $g_i(x,y)$ $(i=1,2,\dots,n)$، یك چندجمله‌ای است. چون

$$P(x,0)=P(0,y)=4$$

چندجمله‌ای‌های $g_i(x,y)$، نمی‌توانند شامل یك جمله‌ای‌های به صورت ax^k و by^l باشند. بنابراین، ضریب x^2y^2 باید مثبت باشد.

۳۲۶. پاسخ: تنها نقطهٔ O، مرکز مثلث ABC.

۳۲۷. پاسخ: r_1r_2.

۳۲۸. پاسخ: سه عدد. با استقرای ریاضی ثابت می‌شود که، برای $n\geqslant 4$، داریم: $a_{n-1}<b_n<a_n$.

۳۲۹. a) از بین همهٔ عددهای به‌صورت $2^{k_1}+2^{k_2}+\dots+2^{k_n}$، که بر 2^m-1 بخش‌پذیرند، عددهای با کمترین مقدار برای n را انتخاب می‌کنیم و، سپس، از بین عددهای حاصل، عددی را در نظر می‌گیریم که، در آن، مقدار $k_1+k_2+\dots+k_n$ کمترین باشد. همهٔ عددها در گروه $(k_1,\dots,k_n)$ مختلف‌اند. اگر $n<m$، آن وقت

$$k_i\leqslant m-1 \text{ و } 2^{k_1}+2^{k_2}+\dots+2^{k_n}<2^m-1$$

که یك تناقض است.

b) پاسخ: وجود ندارد.

$P=a_1\times 10^r+\dots+a_r$ را کوچکترین عددی می‌گیریم که بر $M=\underbrace{11\dots1}_{m}$ بخش‌پذیر و مجموع رقم‌های آن از m کمتر باشد. در این صورت $r\geqslant m$ و، درنتیجه، عدد $P_1=P-(10^r-10^{r-m})$ هم بر M بخش‌پذیر می‌شود که، مجموع رقم‌های آن، از مجموع رقم‌های عدد P تجاوز نمی‌کند.

۳۳۰. بین هشت عدد، سه عدد وجود دارد که از $\frac{۱}{۶}$ تجاوز نمی‌کنند؛

درضمن، دوتا از آن‌ها، دردوانتهای قطر یکی از وجه‌ها قرار دارند. بازی‌کن اول، باید همین وجه را، در بازی اول خود، انتخاب کند.

۳۳۱. پاسخ: شنبه.

۳۳۲. پاسخ: $MA:MB=k^{۲}$. نقطهٔ O را مرکز متوازی‌الاضلاع بگیرید. دو مثلث AOM و MOB متشابه‌اند.

۳۳۳. فرض می‌کنیم، حکم درست نباشد. انتهای کمان‌ها را با سیاه رنگ می‌کنیم. تمامی محیط دایره را، به کمان‌های به طول واحد تقسیم و نقطه‌های تقسیم را با قرمز رنگ می‌کنیم. کمانی مثل AC به طول ۲ را در نظر می‌گیریم که دو انتهای آن سیاه و وسط آن قرمز باشد. نقطهٔ B، انتهای دیگری که از B' می‌گذرد، سیاه است. فرض کنید، روی کمان AB به طول $۳k-۱$، $n_۱$ کمان به طول ۱، $n_۲$ کمان به طول ۲ و $n_۳$ کمان به طول ۳ وجود داشته باشد. روی کمان BC، $n_۱$ کمان به طول ۳ وجود خواهد داشت (انتهای دیگر قطرهایی که از انتهای کمان‌های به طول واحد می‌گذرند، قرمزند). بنابراین $n_۳=k-n_۱$، که با برابری $۳k-۱=n_۱+۲n_۲+۳n_۳$ متناقض است.

۳۳۴. AM، BM، CM و DM را پاره‌خط‌های راستی به طول واحد می‌گیریم؛ این پاره‌خط‌های راست، روی نیم‌خط‌های راستی قرار دارند که نقطهٔ M را به رأس‌های چهاروجهی وصل می‌کنند. خط راست DM، مثلث ABC را در نقطه‌ای مثل P قطع می‌کند. اگر کسینوس زاویه‌های AMD، BMD و CMD بزرگتر از $-\frac{۱}{۳}$ باشند، آن وقت این زاویه‌ها، از $\varphi=\arccos\left(-\frac{۱}{۳}\right)$ کوچکترند و زاویه‌های AMB، BMP و CMP از $\pi-\varphi$ بزرگتر. می‌توان فرض کرد $\widehat{APB}\geqslant ۱۲۰^{\circ}$. در این صورت، اگر قضیهٔ کسینوس‌ها را برای مثلث‌های APB و AMB بنویسیم، به‌دست می-

آید: $\cos\widehat{AMB} < -\frac{۱}{۳}$.

۳۳۵. پاسخ: $b < a < c$.

۳۳۶. O را نقطه‌ای می‌گیریم که، برای آن، داشته باشیم:

$$\overrightarrow{OA_۱} + \overrightarrow{OA_۲} + \dots + \overrightarrow{OA_{۲n+۱}} = ۰$$

k را طوری انتخاب می‌کنیم که $۲^k - ۱$ بر $۲n+۱$ بخش پذیر باشد. در این صورت، خط شکستهٔ M_k، نسبت به نقطهٔ O و با ضریب برابر ۲^{-k}، با خط شکستهٔ M متجانس است.

۳۳۷. پاسخ: ۱۰۰.

باید عدد a، بزرگترین عدد در ۹۹ عدد نخستین، و عدد b، کوچکترین عدد از بین ۱۸۸۲ عدد آخر را درنظر گرفت و قانع شد که $a < ۱۰۰ < b$.

۳۳۸. طول کل تصویر جزیره‌ها برساحل از ۲متر کمتر است. بنا براین، از این کناره تا نزدیك‌ترین مسیر بین جزیره‌ها، کمتر از ۲ متر است.

۳۳۹. این عمل‌ها را پشت سر هم انجام می‌دهیم: ۱) دو خط راست موازی رسم می‌کنیم، به نحوی که هرکدام از آن‌ها، سهمی را در دو نقطه قطع کند؛ ۲) وسط دو پاره خط راست حاصل را، با یك خط راست، به هم وصل می‌کنیم؛ ۳) عمودی بر این خط راست رسم می‌کنیم تا سهمی را در دو نقطهٔ A و B قطع کند؛ ۴) عمودمنصف پاره‌خط راست AB، همان محور Oy است. محور Ox، عمود بر Oy در نقطهٔ برخورد آن با سهمی است. واحد طول برابراست باطول نقطهٔ برخوردسهمی با خط‌راست $y = x$.

۳۴۰. b) m_k و M_k را، کوچکترین و بزرگترین عدد، در بین عددهای ستون kام می‌گیریم. در این صورت، در ستون با هر $m_k \leqslant x \leqslant M_k$ برخورد می‌کنیم. بنا براین، یا x وجود دارد که برای آن، به‌ازای همهٔ kها (از ۱ تا n) داشته باشیم: $m_k \leqslant x \leqslant M_k$؛ و یا برای بعضی از مقدارهای k و p: $M_k \geqslant m_k > M_p \geqslant m_p$، ولی در این صورت درهرسطر، به‌هر

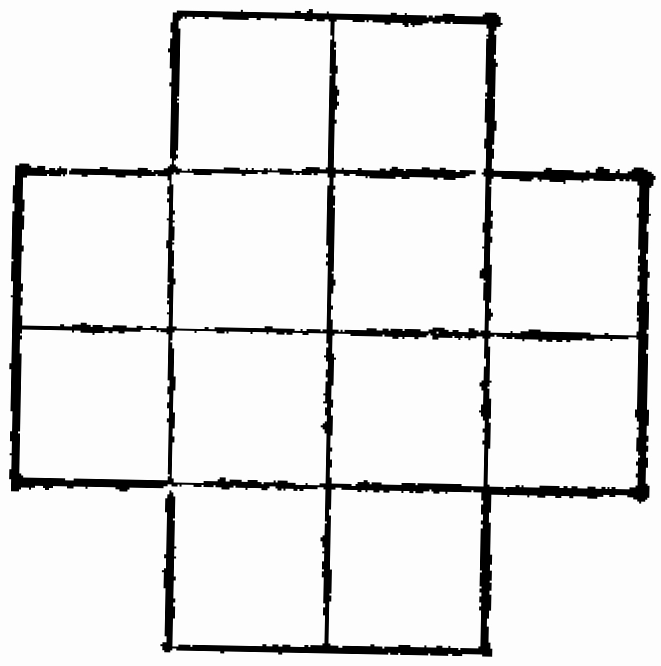
عدد y برمی‌خوریم که برای آن $M_p \leqslant y \leqslant m_p$.

۳۴۱. $$2^{\sqrt[12]{x}}+2^{\sqrt[4]{x}}\geqslant 2\times 2^{\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[12]{x}}{2}}\geqslant 2\times 2^{\sqrt[6]{x}}.$$

۳۴۲. پاسخ: ۴۳ عدد ۲، ۳، ...، ۴۴.

اگر کمتر از ۴۳ عدد حذف کنیم، دست کم سه عدد k، $89-k$ و $k(89-k)$، $(2\leqslant k\leqslant 42)$، در بین عددهای حذف‌نشده باقی می‌مانند.

۳۴۳. از بین عددهای واقع در خانه‌های شکلی که در ۱۱۷ نشان داده‌ایم، کوچکترین عدد، با شرط مساله سازگار است.



شکل ۱۱۷

۳۴۴. می‌توان فرض کرد: $a_1+a_2+\dots+a_n\geqslant 0$. مجموعهٔ M_{ik} را در نظر بگیرید $(i\neq k\ ؛\ i, k=0, 1)$ که از همهٔ عددهای a_l با شرط $l\equiv i \pmod{3}$ و همچنین عددهای مثبت a_m با شرط $m\equiv k \pmod{3}$ تشکیل شده باشد. یکی از مجموعه‌های M_{ik}، مجموعهٔ مناسب است.

۳۴۵. ستونی را که شامل خانهٔ علامت‌دار نیست، با ستون کناری سمت راست جابه‌جا می‌کنیم؛ سپس، آخرین سطر جدولی را که به دست می‌آید، با یکی از سطرهایی که دارای نقطهٔ علامت‌دار است، عوض می‌کنیم. مساله منجر به جدول $(n-1)\ (n-1)$ می‌شود.

۳۴۶. a_0، a_1، ...، a_n را همان عددهای ۰، ۱، ۲، ...، n فرض کنید، به نحوی که داشته باشیم:

$$|a|\leqslant|a-a_0|\leqslant|a-a_1|\leqslant\dots\leqslant|a-a_n|$$

برای هر $1\leqslant k\leqslant n$ همیشه داریم: $|a-a_k|\geqslant\frac{k}{2}$، که از ضرب، آن‌ها در

هم به دست می‌آید:

$$|a|\cdot|a-1|\cdots|a-n|=$$

$$=|a-a_0|\cdot|a-a_1|\cdots|a-a_n|\geqslant\langle a\rangle\frac{n!}{2^n}$$

۳۴۷. a) نه، وجود ندارد. سمت چپ برابری، به‌ازای $x=1$، $y=2$، $z=1$ برابر صفر می‌شود.

b) بله وجود دارد. فرض کنید:

$$u=x-y+1,\ v=y-z-1,\ w=z-x+1$$

در برابری $(u+v+w)^7=1$، بعد از باز کردن پرانتز و گروه‌بندی، به دست می‌آید: $u^3P+v^3Q+w^3R=1$.

۳۴۸. فرض کنید، وجه KLM از چهاروجهی $KLMN$، دارای حداکثر محیط باشد. A_1، B_1، C_1 و D_1 را تصویر نقطه‌های A، B، C و D بر صفحهٔ KLM و Γ را خط شکسته‌ای می‌گیریم که تصویر چهاروجهی $KLMN$ روی این صفحه را محدود کرده باشد. درضمن P_{RSTQ} را به‌معنای مجموع طول‌های شش پاره‌خط راستی فرض می‌کنیم که نقطه‌های R، S، T و Q را دو به‌دو به هم وصل کرده‌اند. در این صورت

$$1)\ P_{KLMN}\leqslant 2P_{KLM};\ 2)\ P_{KLM}\leqslant P_\Gamma;$$

$$3)P_\Gamma\leqslant\frac{2}{3}P_{A_1B_1C_1D_1};\ 4)\ P_{A_1B_1C_1D_1}\leqslant P_{ABCD}$$

۳۴۹. b) هیچ دو خط شکسته‌ای نباید دارای پاره‌خط راست مشترکی باشند. بنابراین، ۱۲ گره شبکه که، به جز رأس‌های مربع، در مرزهای آن قرار دارند در دو انتهای خط‌های شکسته باشند، ولی ۵ خط شکسته، تنها دارای ۱۰ انتها هستند.

۳۵۰. a) نه؛ b) بله.

در این‌جا، بهتر است استدلال را «از آخر» آغاز کنیم: سه عدد

$(17, 1967, 1983)$

را تنها می‌توان از سه عدد (۳ و ۳ و ۵)، وسه عدد(۳ و ۳ و ۵) را تنها می‌توان از سه عدد (۳ و ۳ و ۳) به‌دست آورد و نه از (۲ و ۲ و ۲).

۳۵۱. O را نقطه‌ای ازدرون مثلث XYZ می‌گیریم. از O به‌نقطه‌های O_1 و O_2 و O_3 (مرکزهای سه دایره) ونقطه‌های X و Y و Z وصل می‌کنیم. یکی از شش زاویه‌ای که به این ترتیب به دست می‌آید (همهٔ این زاویه‌ها، حاده‌اند)، از ۶۰ درجه کوچکتر نیست (مثلاً، زاویهٔ O_1OX). دراین‌صورت

$$O_1O < \frac{OX}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} OX$$

۳۵۲. فرض کنید:

$$n^2 < a < b < c < d < (n+1)^2, \quad ad = bc$$

در این صورت $(a+d)^2 - (d-a)^2 < (b+c)^2$ و $a+d > b+c$.

از آن‌جا

$$(d-a)^2 > (a+d+b+c)(a+d-b-c) > 4n^2$$

ولی $d-a < 2n$؛ تناقض.

۳۵۳. پاسخ: $(0, 0)$، $(2+\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$، $(2-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$.

اگرمعادلهٔ دوم‌را ازمعادلهٔاول کم کنیم، به‌دست‌می‌آید $f(x) = f(y)$ که، در آن، تابع $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$، تابعی‌صعودی است $(f'(x) > 0)$.

۳۵۴. اگر $k \geqslant a\underbrace{44\ldots4}_{n-2}5$ ($a \geqslant 1$، رقم‌اول عدداست)، آن‌وقت

$$k_1 = (a+1) \times 10^{n-1} \text{ و } \frac{k_1}{k} \leqslant \frac{(a+1) \times 10^{n-1}}{a\underbrace{44\ldots4}_{n-2}5} < \frac{a+1}{a+\frac{4}{9}} \leqslant \frac{18}{13}$$

و اگر $k \leqslant a\underbrace{44\ldots4}_{n-1}$، آن وقت $k_1 = a \times 10^{n-1}$ و $\frac{k_1}{k} \leqslant 1$.

۳۵۵. به ترتیب داریم:

$$S_{DEF}=\frac{۱}{۲}(S_{DEF}+S_{AEF})<\frac{۱}{۲}(S_{BEF}+S_{ADF})=$$

$$=\frac{۱}{۲}S_{ABFE}=\frac{۱}{۲}(S_{ABF}+S_{AFE})\leqslant\frac{۱}{۲}(S_{ABF}+S_{ABE})=S_{BDF}+S_{ADE}$$

۳۵۶. پاسخ: a) نه؛ b) نه.

a) آخرین رقم عدد $\alpha_{۲k+۱}$ برابراست با k امین رقم بعد از ممیز در بسط دهدهی عدد $\sqrt{۱۰}$.

b) اگر β_n زوج باشد، فرض می‌کنیم $\gamma_n=۰$ و در حالت فرد بودن β_n، فرض می‌کنیم $\gamma_n=۱$. چون $\gamma_{۲n+۱}$، بر nامین رقم بعد ازممیز در بسط عدد $\sqrt{۲}$ در مبنای عددنویسی ۲ می‌باشد، بنابراین $\gamma_{۲n+۱}$، متناوب نیست.

۳۵۷. از شرط نتیجه می‌شود:

$$\sin\alpha(\sin\alpha-\cos\beta)=\sin\beta(\sin\alpha-\sin\beta)$$

اگر $\sin\alpha>\cos\beta$ و $\cos\alpha>\sin\beta$، آن وقت $\sin^۲\beta+\cos^۲\beta<۱$. نابرابرهای $\sin\alpha<\cos\beta$ و $\cos\alpha<\sin\beta$ هم ممکن نیست. بنابراین

$$\sin\alpha=\cos\beta \text{ و } \cos\alpha=\sin\beta$$

۳۵۸. α و β را دو صفحهٔ مفروض، و l را فصل مشترک آن‌ها بگیرید. کافی است صفحهٔ α را دور خط راست l دوران دهیم تا بر صفحهٔ β منطبق شود (نقطه‌های $A_۱$، $B_۱$، $C_۱$، $D_۱$، همراه با صفحهٔ α دوران می‌کنند).

۳۵۹. پاسخ: ۵ معادله.

اگر $f_n(x)=x^۲+p_nx+q_n=۰$، آخرین معادله نباشد، آن وقت، با شرط $n\geqslant۳$ و $p_nq_n>۰$ داریم:

$$p_n^۲>۴q_n,\ q_n>p_n,\ p_nq_n>-(p_n+q_n)$$

اگرمعادلهٔ $f_۵(x)=۰$، آخرین معادله نباشد، آن وقت یا $p_۴<۰<q_۴$ و یا $۰<p_۴<q_۴$ و، در ضمن $p_۳<۰<q_۳$. هردو حالت غیرممکن است.

مثال برای $n=5$:

$$f_5(x)=x^2-\frac{1}{2}x+4,\ f_4(x)=x^2-\frac{7}{2}x-2,$$

$$f_3(x)=x^2+\frac{11}{2}x+7,\ f_2(x)=x^2-\frac{25}{2}x+\frac{77}{2},$$

$$f_1(x)=x^2-26x-\frac{1925}{4}$$

۳۶۰. اگر a^n بر b^n بخش پذیر باشد، آن وقت a بر b بخش‌پذیر است.

۳۶۱. پاسخ: نه. روی هم ۱۲۸ واژهٔ هفت حرفی می‌توان به کمك دو حرف ساخت. از آن‌ها، به تعداد

$$3\times 8+10\times 4+30\times 2=124$$

واژه «ممکن نیست».

۳۶۲. پاسخ: a) می‌توان؛ b) می‌توان.

a) دو صفحهٔ شطرنجی نامتناهی در نظر می‌گیریم. روی قطرهایی که ۴ خانه باهم فاصله دارند: درصفحهٔ شطرنجی اول عددهای ۱ ودر بقیهٔ خانه‌ها، صفر قرار می‌دهیم؛ و در صفحهٔ شطرنجی دوم، عددهای ۱ را روی قطرهایی قرارمی‌دهیم که ۶ خانه‌ازهم فاصله دارند و، سپس،عددهای‌واقع درخانه‌های متناظر را با هم جمع می‌کنیم.

b) روی همان قطرها، یك در میان، عددهای ۰ و ۱ را قرار می‌دهیم و عددهای خانه‌های متناظر را از هم کم می‌کنیم.

۳۶۳. پاسخ: $\sqrt{5}+1$.

۳۶۴. اگر a تعداد کل زوج‌ها، و m تعداد زوج‌هایی که از پسرها تشکیل شده‌اند باشد، آن وقت $2a=8m$.

۳۶۵. پاسخ: $3+2\sqrt{2}$.

اگر مساحت مستطیل‌ها را، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت

S_1، S_2، S_3 و S_4 بگیریم، آن‌وقت:

$$S_1+S_2+S_3+S_4 \geqslant 3+2\sqrt{2}$$ ولی $S_1S_3=S_2S_4 \geqslant 2$،

۳۶۶. $\mathbf{e}_1$،$\mathbf{e}_2$،$\mathbf{e}_3$ را بردارهای واحد درجهت بردارهای $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$، و $\overrightarrow{OC}$ فرض می‌کنیم. $\widehat{BOC}=\alpha$، $\widehat{COA}=\beta$، $\widehat{AOB}=\gamma$ کافی است ثابت کنیم:

$$\mathbf{e}_1 \sin\alpha+\mathbf{e}_2 \sin\beta+\mathbf{e}_3 \sin\gamma=0$$

برای‌این‌منظور، بایدمثلث PQR راکه ضلع‌هایی موازی با OA،OB و OC دارد، در نظر گرفت و از برابری $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{QP}=0$ استفاده کرد.

۳۶۷، استقرا نسبت به m: برای $m=1$، حکم درست است. فرض می‌کنیم، حکم برای $m=k-1$ $(k \geqslant 2)$ درست باشد. مجموعهٔ دلخواه A را در نظر می گیریم که شامل $2k+1$ عدد باشد وقدرمطلق هرعدد از $2k-1$ بزرگتر نباشد. اگر در بین آن‌ها، $2k-1$ عدد وجود داشته باشد که از لحاظ قدرمطلق از $2k-3$ تجاوز نکنند، آن وقت همه چیز روشن است. در حالت عکس، می‌توان، فرض کرد که، مجموعهٔ A، یا شامل عددهای $2k-1$، $2k-2$ و $-2k+1$ است و یا شامل $2k-1$، $2k-2$ و $-2k+2$. درحالت اول، باید زوج‌های $(1, 2k-2)$،$(2, 2k-3)$، ...، $(k-1, k)$ و $(0, -2k+1)$، $(-1, -2k+2)$، ...، $(-k+1, -k)$ را درنظر گرفت، دست‌کم یکی اززوج‌ها شامل عضوهای مجموعهٔ A است. درحالت‌دوم، به‌همین‌ترتیب، باید زوج‌های $(1, 2k-3)$، ...، $(k-2, k)$ و $(0, -2k+1)$، $(-1, -2k)$، ...، $(-k+1, -k)$ را درنظر گرفت.

۳۶۸. پاسخ: علامت برابری، تنها وقتی پیش می‌آید که مثلث‌های ABC و DEF متساوی‌الاضلاع و، درضمن، ضلع‌های متناظر آن‌ها، برهم عمود باشند. از نابرابری

$$d_0<\frac{2}{\sqrt{3}}\min(d_1, d_2, d_3)$$

نتیجه می‌شود که همهٔ زاویه‌های مثلث ABC، باید از ۶۰ درجه کمتر باشند که ممکن نیست.

۳۶۹. اگر پاره خط‌های راست و غیر متقاطع Δ_1 و Δ_2 را، با طول‌های α و β روی خط راستی داده باشند، آن وقت، مجموعهٔ طول‌های پاره خط‌های راستی که دو انتهای آن‌ها متعلق به Δ_1 و Δ_2 باشند، پاره‌خط راستی به طول $\alpha+\beta$ را پرمی‌کنند. بنابراین، اگر δ_1، δ_2، ...، δ_k طول‌های پاره‌خط‌های مفروض باشند، آن وقت

$$\delta_1+(\delta_1+\delta_2)+(\delta_1+\delta_3)+\dots+(\delta_1+\delta_k)+\dots$$
$$\dots+(\delta_{k-1}+\delta_k)+\delta_k=k(\delta_1+\delta_2+\dots+\delta_k)\geqslant 1$$

۳۷۰. روشن است که $v_1=10$ و $v_n\leqslant v_{n+1}$. اگر برای مقداری از n، داشته باشیم: $v_n=v_{n+1}$، آن وقت، کسر متناوب است. اگر $v_{n+1}>v_n$ (به‌ازای همهٔ مقدارهای n)، آن وقت

$$v_n\geqslant v_{n-1}+1\geqslant v_{n-2}+2\geqslant\dots\geqslant v_1+n-1=$$
$$=n+9>n+8$$

۳۷۱. a) اگر n بر ۴ بخش پذیر نباشد، به معنای آن است که بین عامل‌ها، تنها یك عدد زوج وجود دارد که، درنتیجه، مجموع آن‌ها برابر صفر نمی‌شود.

b) پاسخ: $n=4k$ می‌گیریم. وقتی k عددی زوج باشد:

$$n=2\times(-2k)\times 1^{3k-2}\times(-1)^k$$

و اگر k عددی فرد باشد:

$$n=(-2)(-2k)\times 1^{3k}\times(-1)^{k-2}$$

۳۷۲. $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ و $a+b+\frac{1}{2}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

۳۷۳. بردار $\overrightarrow{AB}$ از بردار $\overrightarrow{AC}$ با دوران ۶۰ درجه به دست می‌آید؛

$$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B}, \quad \overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{A_2C}$$

۳۷۴. پاسخ: وقتی که m و n، هر دو زوج یا هر دو فرد باشند.

وقتی m و n عددهایی فرد باشند، باید نوار $n\times 1$ را ساخت و، به کمك m نوار از این گونه، مستطیل $m\times n$ را به‌دست آورد. وقتی m و n عددهایی زوج باشند، ابتدا مستطیل‌های $(n-1)\times(m-1)$، $1\times(n-1)$، $(m-1)\times 1$ و 1×1 را می‌سازیم.

در حالتی که m و n، یکی زوج و دیگری فرد باشد، اگر فرض را بر این بگیریم که می‌توان مستطیلی با شرط مساله ساخت، آن وقت به‌این نتیجه می‌رسیم که تعداد کل تخته‌های مربعی، عددی فرد است.

۳۷۵. $x^{\sin^2\alpha}\cdot y^{\cos^2\alpha}\leqslant \max(x, y)<x+y$.

۳۷۶. پاسخ: درست نیست. کافی است دومی، سه‌یال دو به‌دو متنافر را به رنگ سبز درآورد و، این عمل، همیشه برای او ممکن است.

۳۷۷. a_1، a_2، …، a_n را عددهای مفروض بگیرید و فرض کنید:

$$S_n=\frac{a_n+a_2}{a_1}+\frac{a_1+a_3}{a_2}+\dots+\frac{a_{n-1}+a_1}{a_n}$$

a) داریم:

$$S_n=\left(\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}\right)+\dots+\left(\frac{a_1}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}\right)\geqslant 2n$$

b) نابرابری $S_n\leqslant 3n$ با استقرای ریاضی ثابت می‌شود. برای این منظور، ابتدا باید حالت $n=3$ را بررسی کرد و، درضمن، توجه داشت که بزرگترین عدد از بین عددهای a_1، a_2،…، a_n، برابر است با مجموع دو عدد مجاور خود.

۳۷۸. A_1A_2، B_1B_2 و C_1C_2، نیمسازهای زاویه‌های مثلث $A_1B_1C_1$ هستند.

۳۷۹. پاسخ: $m=n=0$.

اگر برابری $(5+3\sqrt{2})^m=(3+5\sqrt{2})^n$ برقرار باشد، آن‌وقت باید برابری $(5-3\sqrt{2})^m=(3-5\sqrt{2})^n$ هم درست باشد. ولی این، ممکن نیست، زیرا

$$0<5-3\sqrt{2}<1 \text{ و } 5\sqrt{2}-3>1$$

۳۸۰. عددهای سطر اول را

$$a_1<a_2<\cdots<a_m<a_{m+1}<\cdots<a_n$$

و عددهای سطر دوم را

$$a_{k_1},\ a_{k_2},\ \ldots,\ a_{k_m},\ a_{k_{m+1}},\ \ldots,\ a_{k_n}$$

فرض می‌کنیم. بنابراین، عددهای سطر سوم، چنین‌اند:

$$a_1+a_{k_1},\ a_2+a_{k_2},\ \ldots,\ a_m+a_{k_m},\ \ldots,\ a_n+a_{k_n}$$

$a_1\neq a_{k_1}$ می‌گیریم. در این صورت، به‌ازای مقداری از $m\geqslant 2$ داریم: $a_1=a_{k_m}$. بنابر شرط مساله،

$$a_1+a_{k_1}<a_m+a_{k_m},\ a_2+a_{k_2}<a_m+a_2,\ \ldots,$$
$$a_{m-1}+a_{k_{m-1}}<a_m+a_{k_m}$$

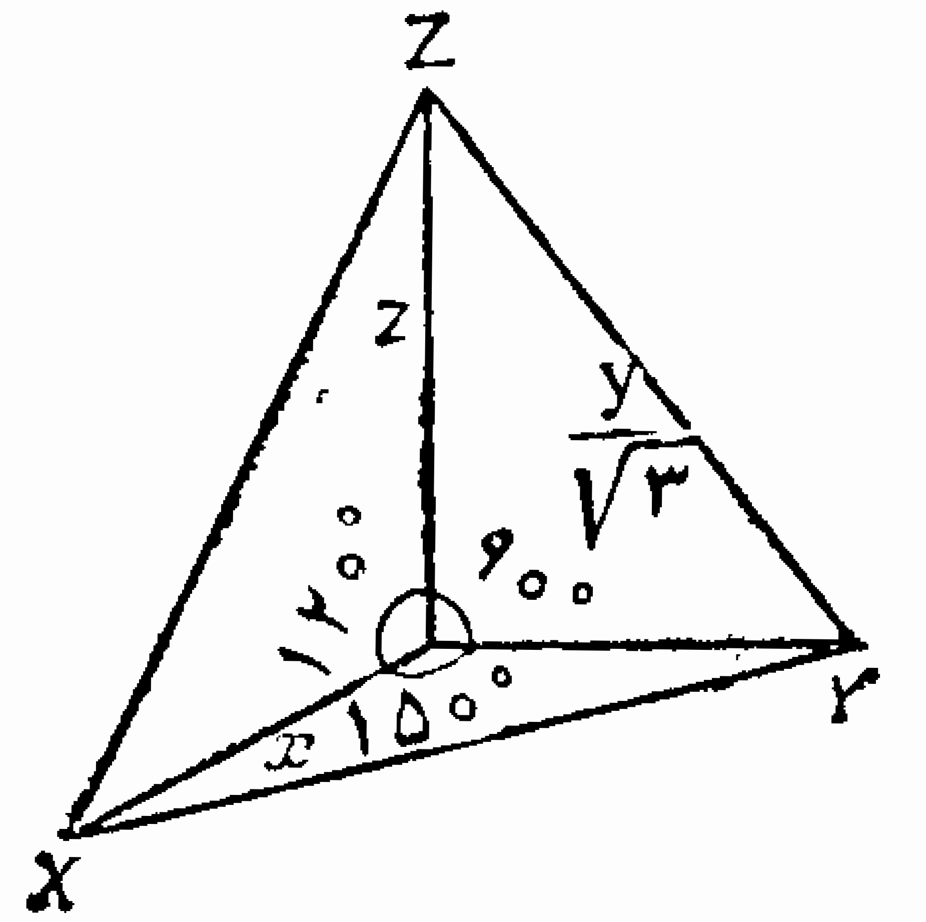
از آن‌جا به دست می‌آید:

$$a_{k_2}<a_m,\ a_{k_3}<a_m,\ \ldots,\ a_{k_{m-1}}<a_m$$

به جز این $a_1<a_m$ و $a_{k_1}<a_m$. به m عدد مختلف کوچکتر از a_m می‌رسیم. تناقض حاصل، درستی حکم مساله را ثابت می‌کند.

۳۸۱. در این جا بهتر است از یك پیش‌قضیه استفاده کنیم: اگر وتر AB از دایره‌ای ثابت باشد، ولی دو انتهای وتر A_1B_1 روی این دایره بلغزند، آن وقت، مکان هندسی نقطهٔ برخورد خط‌های راست AA_1 و BB_1، دایره‌ای است که از نقطه‌های A و B می‌گذرد.

۳۸۲. پاسخ: $24\sqrt{3}$.



شکل ۱۱۸

D را برحسب مساحت مثلث XYZ بنویسید (شکل۱۱۸).

۳۸۳. پاسخ: بله درست است.

درواقع، از آن‌جا که داریم: $f(-۱)=۱۱$ و $g(-۱)=-۹$، بنابراین در لحظه‌ای، یکی از ریشه‌های سه جمله‌ای حاصل، برابر ۱ − بوده است.

۳۸۴. پاسخ: $\pi r^۲+۲pr-\frac{pr^۲}{۲R}$.

۳۸۵. k را وزن سنگین‌ترین وزنه، و m را تعداد وزنه‌های به وزن ۱ بگیرید. دراین صورت $m\geqslant k$. در هر لحظه، وزن وزنه‌های دوکفه، بیش از k با هم اختلاف ندارند. بنابراین، بعد از آن که همهٔ وزنه‌های با وزن بیشتر از واحد را در ترازو گذاشتیم می‌توان کفه‌ها را با اضافه کردن وزنهٔ با وزن واحد به حالت تعادل درآورد.

۳۸۶. در هـر عدد اول مطلق، تنها رقم‌های ۱، ۳، ۷ و ۹ می‌توانند شرکت کنند. برای هر عدد M، یکی از عددهای

$$M+۱۳۷۹،\ M+۳۱۷۹،\ M+۹۱۳۷،\ M+۷۹۱۳،$$
$$M+۱۳۹۷،\ M+۳۱۹۷،\ M+۷۱۳۹$$

بر ۷ بخش‌پذیر است. تناقض.

۳۸۷. پاسخ: $x=۹$ و $y=۰$ یا $x=۴$ و $y=۲$.

۳۸۸. اگر نقطهٔ M در درون یا روی محیط مثلث PQR $(M\neq P)$ باشد، آن وقت $MQ+MR<PQ+PR$. نابرابری مورد نظر را کافی

است برای حالت $AB=CD$ ثابت کنیم.

۳۸۹. پاسخ : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

(به ازای $n \geqslant 1$ داریم: $\left|x_{n+2}\right| \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^n$.)

۳۹۰. جدول شطرنجی 1986×1985 را درنظر بگیرید که جدول 1984×1983 را دربر گرفته و با آن دارای یك مرکز باشد. خانه‌های سیاه مجاور خانه‌های سفیدی که در آن‌ها، عدد $1-$ واقع باشد، روی مسیر بستهٔ حرکت فیل شطرنج قرار دارند که، روی صفحهٔ بزرگ از قطر بیش از یك بار نمی‌گذرد ومسیر حرکت خود را تنها روی مرز این صفحهٔ بزرگ عوض می‌کند. روی صفحهٔ شطرنجی 1985×1984، چنین‌مسیری وجود ندارد.

۳۹۱. بعد از ۴ گام، همهٔ عددهای جدول، برابر واحد می‌شود.

۳۹۲. پاسخ: $\ln 1/01 > \frac{2}{201}$.

تابع $y=\ln(1+x)-\frac{2x}{x+2}$، برای $x>0$، صعودی است.

۳۹۳. پاسخ: $r=\frac{r_1r_2r_3}{r_1r_2-r_2r_3+r_1r_3}$.

۳۹۴. چنین مقطعی یا متوازی‌الاضلاع است و یا یك شش ضلعی که نسبت به مرکز متقارن است و محیط آن از $4a$ کمتر نیست (با بررسی گستردهٔ مکعب، می‌توانید به این مطلب قانع شوید).

۳۹۵. A_1، B_1، C_1 را وسط ضلع‌ها و O را مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC فرض کنید. پاره خطهای راست OA_1، OB_1، OC_1، شش‌ضلعی را به متوازی الاضلاع‌هایی تقسیم می‌کنند. بنابراین، مساحت شش‌ضلعی، دو برابر مساحت مثلث $A_1B_1C_1$ است.

۳۹۶. پاسخ : وجود دارد.

اثبات، با روش استقرا. n را عددی k رقمی می‌گیریم که شامل m رقم برابر واحد و چند رقم برابر صفر باشد و، در ضمن، داشته باشیم $S(n^2)=m^2$. دراین صورت، برای عدد $n_1=10^{k+1}n+1$ که، در آن، k تعداد رقم‌های عدد n است، خواهیم داشت

$$S(n_1)=m+1 \quad , \quad S(n_1^2)=(m+1)^2$$

(در مسالهٔ ما، داشتیم $m=1000$).

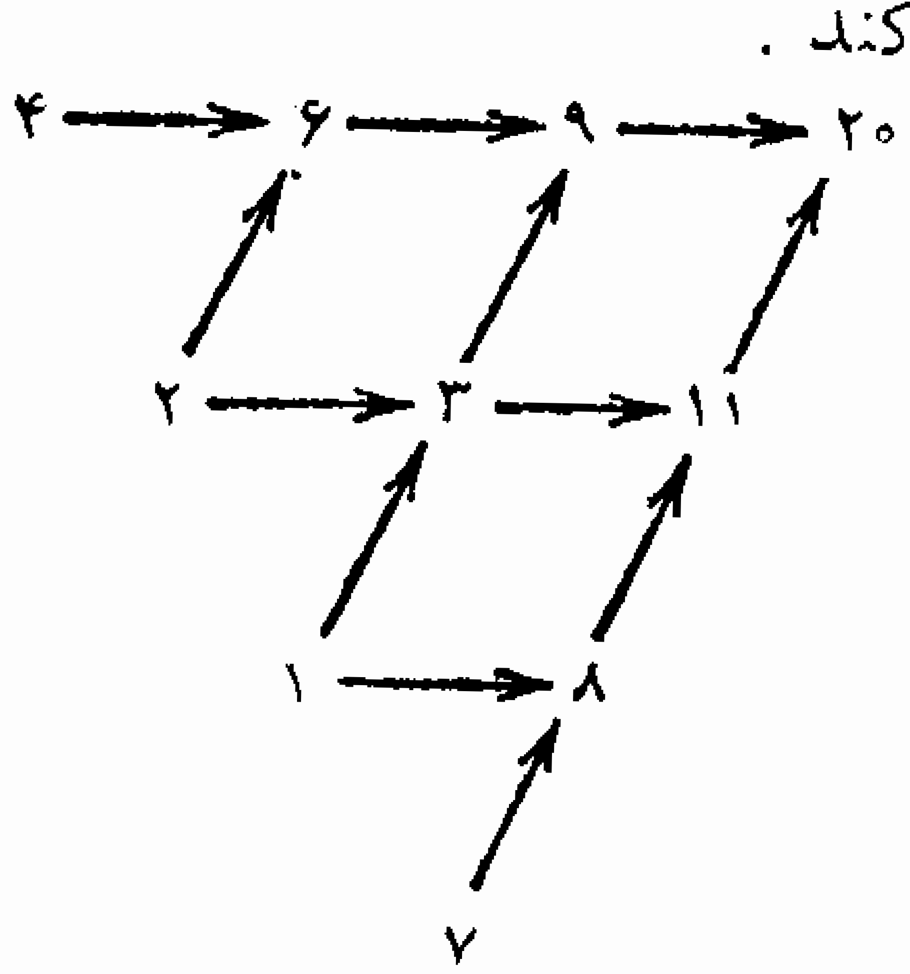
۲۹۷. پاسخ: ۱۶.

همهٔ مهره‌های دام را باید در صفحهٔ شطرنجی 6×6، که مرکزی منطبق برمرکزصفحهٔ 8×8 دارد، قرارداد.

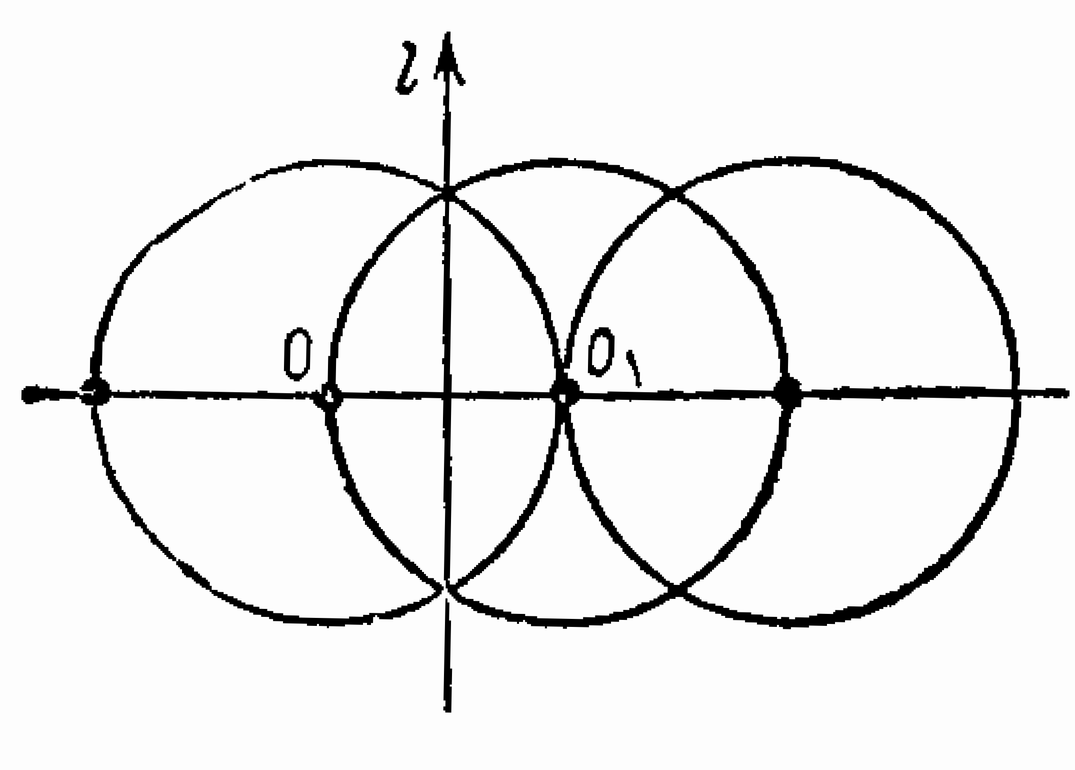
۲۹۸. پاسخ: n رنگ.

A، B و C را، سه راس متوالی می‌گیریم. هــردو پاره خط از n پاره‌خط راست BA، BC، AC و $(n-3)$ قطری که از B گذشته‌انــد، دارای نقطهٔ مشترك‌اند. سپس، باید همهٔ ضلع‌ها وقطرهایی را که بــا ضلع AB، زاویه‌ای برابر $\frac{k\cdot 180^\circ}{n}$ می‌سازند $(k=0,1,2,\dots,n-1)$، به یك رنگ درآورد.

۲۹۹. $S_l(O)=O_1$ فرض می‌کنیم. به‌کمك تقارن S_l و دوران به مرکز O، می‌توان نقطهٔ O را به هرنقطه ازمحیط دایرهٔ ω به مرکز O_1 و شعاع $r=OO_1$ منتقل کرد. دایرهٔ ω را می‌توان به هریك ازدایره‌هایی که درشکل ۱۱۹ نشان داده شده است، منجر کرد. به‌کمك دوران دورنقطهٔ O، زنجیرهٔ دایره‌ها، ازتمامی صفحه عبور می‌کند.



شکل ۱۲۵



شکل ۱۱۹

۴۰۰. پاسخ: در دونقطه.

اگر سه نقطهٔ سازگار با شرط مساله وجود داشته باشد، آن‌وقت دو تا از آن‌ها، دریك طرف نقطهٔ $x=-\frac{b}{2a}$ واقع می‌شوند. این باقی‌می‌ماند که قدرمطلق تفاضل $y(x_1)-y(x_2)$ را ارزیابی کنیم.

۴۰۱. پاسخ: $d=20$ (شکل ۱۲۰).

اگر $d<20$، آن‌وقت

$$20>d=2(l+h)+a+l+h+k\geq 2(l+h)+10$$

از آن جا $l+h\leq 4$. درضمن، می‌توان فرض کرد $l<h$. از آن‌جا، یا $l=1$، $h=3$ و یا $l=1$، $h=2$. وهر دو حالت، منجر بــه تناقض می‌شوند.

۴۰۲. $S_k=\frac{a_1}{a_2}+\ldots+\frac{a_k}{a_{k+1}}$ بگیرید. وقتی k بــه اندازهٔ کافی بزرگ باشد $(m<k)$، این نابرابری‌ها برقرارند:

$$S_k<k-\frac{1}{2}\ ;\ S_k-S_m<k-m-\frac{1}{2}$$

۴۰۳. پاسخ: $x=m\pi$ ؛ $y=n\pi$ $(m,n\in \mathbf{Z})$.

ازشرط، نتیجه می‌شود: $|\sin x|\cdot|\sin y|\leq|\sin x|+|\sin y|$.

۴۰۴. O و X را دونقطــه ازصفحه و $\mathbf{x}=\overrightarrow{OX}$ فرض کنید. بنا بر شرط داریم:

$$\mathbf{e}+\mathbf{e}_1=2\mathbf{a},\ \mathbf{a}+\mathbf{a}_1=2\mathbf{b},\ \mathbf{b}+\mathbf{b}_1=2\mathbf{c},\ \mathbf{c}+\mathbf{c}_1=2\mathbf{d},$$
$$\mathbf{d}+\mathbf{d}_1=2\mathbf{e}$$

باحل این دستگاه، بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، $\mathbf{c}$، $\mathbf{d}$ و $\mathbf{e}$ به‌دست می‌آیند.

۴۰۵. اگر $T=2^r\cdot q$ (q، عددی فرد) دورهٔتناوب این دنباله باشد،

آن وقت، به‌ازای $q=4m+3$ و $k \geqslant p+2$ داریم:

$$1=a_{2^k}=a_{2^k+T}=0$$

که یك تناقض است. وهمچنین، به‌ازای $q=4m+1$:

$$1=a_{2^k}=a_{2^k+3T}=0$$

که بازهم، یك تناقض است.

۴۰۶. اگر همهٔ این خطهای راست موازی باشند، درستی **حکم** روشن‌است. m_2 ، m_3 ، ...، m_k را، به‌ترتیب‌تعدادحوزه‌های‌رنگ‌خورده‌ای می‌گیریم که دارای ۲ ، ۳ ، ...، k ضلع‌اند. دراین‌صورت $m_2 \leqslant n$. به‌جز این، هرخط راست، به وسیلهٔ بقیهٔ خطهای راست ، بـه بیش از n بخش تقسیم نمی‌شود، به نحوی‌که ، تعدادکل بخش‌های خطهای راست، از n^2 تجاوز نمی‌کند. بنابراین

$$2m_2+3m_3+\dots \leqslant n^2$$

و سرانجام

$$m_2+m_3+\dots+m_k+\dots \leqslant$$

$$\leqslant \frac{m_2}{3}+\frac{2m_2+\dots+km_k}{3} \leqslant \frac{n(n+1)}{3}$$

۴۰۷. A و B را، رنگ‌های کف وسرپوش قوطی می‌گیریم. دووجه روبه‌روی مکعب را با دو رنگ دیگـر C و D رنگ می‌کنیم. مکعب را طوری در قوطی قرار می‌دهیم که، وجه به‌رنگ D ، مجاور کف قوطی ، و وجه به‌رنگ E ازمکعب، مجاور وجه به‌رنگ F از قوطی باشد.

۴۰۸. مثلث‌های A_2MN ، A_2A_3N و NA_3O، متساوی‌الساقین‌اند.

۴۰۹. اگر چهارعدد (a_n, b_n, c_n, d_n)، از چهارعدد مفروض وبعد از n گام به دست آمده باشند $(n \geqslant 1)$، آن‌وقت بایدداشته باشیم:

$$a_n+b_n+c_n+d_n=0$$

$$a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2 \geqslant 2(a_{n-1}^2+b_{n-1}^2+c_{n-1}^2+d_{n-1}^2)$$

۴۱۰. هرجملهٔ $|a_k-b_k|$ $(k=1,2,\ldots,n)$، برابراست با تفاضل دوعدد که یکی از n بزرگتراست ودیگری از n تجاوزنمی کند. بنابراین

$$|a_1-b_1|+\cdots+|a_n-b_n|=(n+1)+(n+2)+\ldots$$
$$\ldots+2n-(1+2+\ldots+n)=n^2$$

۴۱۱. تعداد مکعب‌های رنگ‌خورده، یکی از پنج عدد زیر است:

۶۰، ۷۲، ۸۴، ۹۰، ۱۲۰.

مکعب مستطیل را $m\times n\times k$ فرض کنید $(k\leqslant n\leqslant m)$. تعداد وجه‌های رنگ نشده، برابراست با $(m-1)(n-1)(k-1)$. بنابرشرط

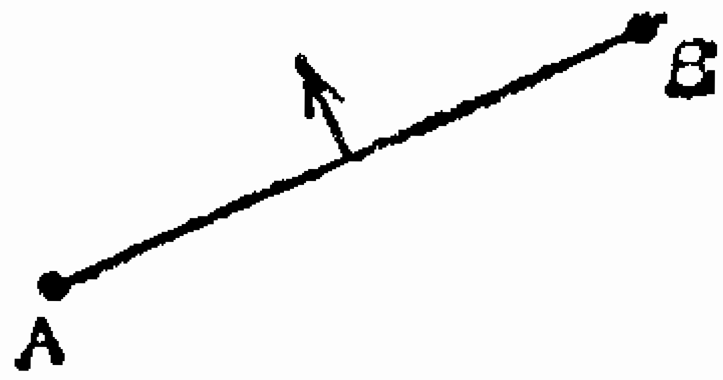
$$mnk=2(m-1)\,(n-1)\,(k-1)$$

ازاین‌جا نتیجه می‌شود: $2<k<5$ براین باقی‌می‌ماند که معادله را برای $k=3$ و $k=4$، درمجموعهٔ عددهای درست مثبت حل کنیم.

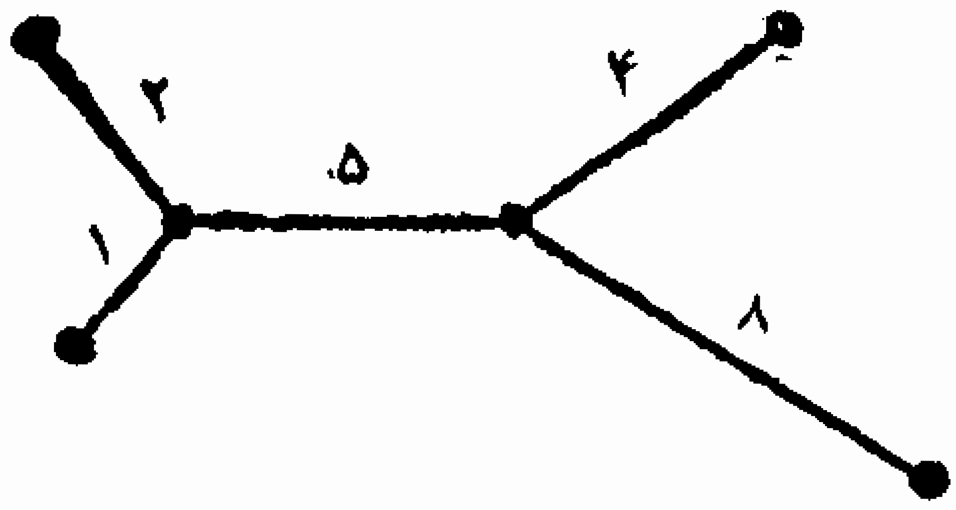
۴۱۲. اگر P را وسط وتر مشترك دودایره بگیریم، نقطهٔ K، قرینهٔ نقطهٔ C نسبت به P، روی محیط دایره‌ای قرار دارد که ازرأس A می‌گذرد و $AKMD$ یك متوازی‌الاضلاع است، بـه نحوی که مثلث‌های AKM و AMD برابرند.

۴۱۳. فرض کنید، عددهای a و b $(a<b)$ در دو گره مجاور A و B ازشبکه واقع باشند. وقتی که از A بـه سمت B حرکت می کنیم، پیکان کوچکی به‌طرف چپ AB قرارمی‌دهیم (شکل ۱۲۱).

اگر عددهای واقع در رأس‌های مثلث، درجهت حرکت عقربه‌های ساعت، بـه ترتیب صعودی باشند، آن وقت درداخل مثلث ۲ پیکان ظاهر می‌شود؛ واگر این عددها، درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت، بـه ترتیب صعودی باشند، درداخل مثلث، یك پیکان وجود خواهد داشت. n را تعداد مثلث‌های نوع اول می گیریم. تعداد کل پیکان‌ها، درداخل شش‌ضلعی، برابر است با



شکل ۱۲۱



شکل ۱۲۲

$$N = ۲n + ۲۴ - n = n + ۲۴$$

کافی است توجه کنیم که $N \geqslant ۳۱$ (۳۰ پیکان از پاره‌خط‌های راست درونی و، دست‌کم یکی، از مرزها).

۴۱۴. پاسخ : ۳.

داریم : $\sqrt{x+۱} - ۱ = \dfrac{x}{۱+\sqrt{۱+x}}$. بنابراین ، برای $x \geqslant -۱$، کسرمفروض، برابر $\sqrt{x+۱} - ۱$ می‌شود.

۴۱۵. پاسخ: $\dfrac{\pi}{۶} - \dfrac{۵\sqrt{۳}}{۴}$.

۴۱۶. مستطیلی با شرط مساله سازگاراست که، برای ضلع‌های آن x و y ($y \geqslant ۱$) داشته باشیم:

$$xy > m \quad \text{و} \quad x(y-۱) < m$$

این دستگاه، برای $m > ۱۲$ جواب دارد:

به ازای $m = k^۲$: $x = k - ۱$ و $y = k + ۲$ ؛

به ازای $k^۲ < m < k(k+۱)$: $x = k$ و $y = k + ۱$ ؛

به ازای $m = k(k+۱)$: $x = k - ۱$ و $y = k + ۳$ ؛

به ازای $k(k+۱) < m < (k+۱)^۲$: $x = y = k + ۱$.

۴۱۷. پاسخ : $\dfrac{۱}{۲}(\sqrt{۳} - \sqrt{۲})$.

دایره‌های مفروض، روی دو کرهٔ هم‌مرکز قرار دارند: کره محیط بر-

مکعب و کرهٔ محاط در آن. حداقل فاصلهٔ موردنظر، برابراست بـا تفاضل شعاع‌های این دو کره.

۴۱۸. اگر x_1 و x_2 را ریشه‌های معادله بگیریم، داریم:

$$a^2+b^2=(x_1^2+1)(x_2^2+1)$$

۴۱۹. اگرمربع سبز را درطول یکی ازضلع‌های آن، انتقال موازی بدهیم، مجموع ضلع‌های سبز هشت‌ضلعی تغییر نمی‌کند، ووقتی که مرکز مربع‌های سبزوقرمز، برهم‌منطبق باشند، مجموع ضلع‌های سبز برابرمجموع ضلع‌های قرمز است.

۴۲۰. پاسخ: وقتی BM ارتفاع مثلث باشد.

۴۲۱. پاسخ: a) می‌توان (شکل ۱۲۲)؛ b) **نمی‌توان.**

اگرچنین شبکه‌ای وجود داشته باشد، آن‌وقت، یکی ازعددهای n یا $n-2$ مجذورکامل است.

شهری مثل A را انتخـاب می‌کنیم و آن را «خوب» می‌نامیم . بـه شهری «خوب» گفته می‌شودکه طول مسیر A و B زوج باشد و، درحالتی که طول این مسیر عددی فرد باشد، به‌آن «بد» می‌گویند. تعداد شهرهـای «خوب» را x وتعداد شهرهای «بد» را y می‌گیریم $(x+y=n)$. تمامی شبکه، دارای xy زوج شهراست که، درآن‌ها، یك شهر «خوب» و دیگری «بد» است . توجه کنید: در بین عددهای ۱، ۲، ...، $\frac{n(n-1)}{2}$، xy عددفرد وجود دارد. اگر n عددی فرد باشد، آن وقت

$$n=n^2-4xy=(x-y)^2$$

و اگر n عددی زوج باشد، آن وقت

$$n=(x-y)^2+2$$

۴۲۲. برابری $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=BD^2\sqrt{2}$ ممکن نیست ($\overrightarrow{AC}$، $\overrightarrow{BD}$ و BD^2، عددهای درستی هستند) .

۴۲۳. فرض کنید: $a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}$ که، در آن‌ها، $a_1\geqslant 3$ عددی فرد و بقیهٔ a_iها $(i=2,\ldots,n-1)$ زوج باشند. فرض کنید:

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2=2k+1 \quad \text{و} \quad a_n=k$$

دراین صورت، خواهیم داشت:

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=(k+1)^2$$

به همین ترتیب، عددهای $b_1<b_2\cdots<b_{m-1}$ را درنظر می‌گیریم که، درآن‌ها، $b_1>2a_n$ عددی فرد وبقیهٔ عددهای $b_2,\ldots,b_{m-1}$، زوج باشندو، درضمن $b_{i+1}>b_ia_n$ و $b_m=S$ که، درآن،

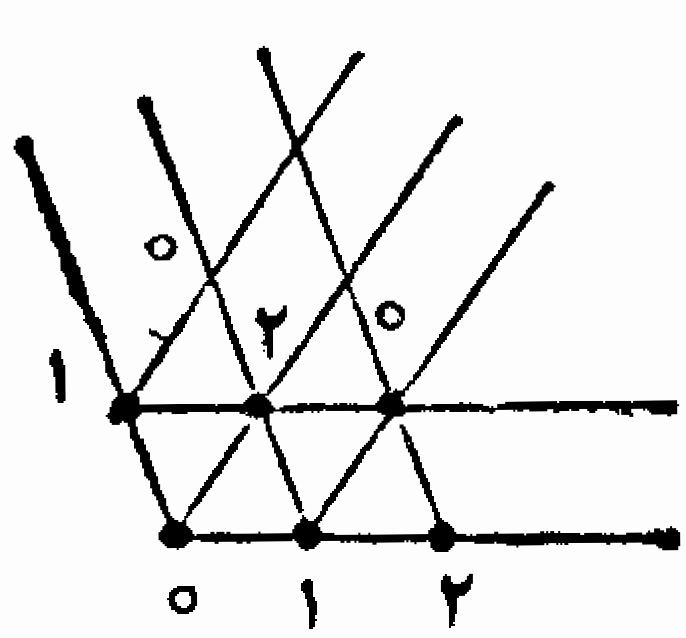
$$2S+1=b_1^2+_2^2+\cdots+b_{m-1}^2$$

جدول موردنظر، ازاین راه به‌دست می‌آیدکه درخانهٔ محل برخورد iامین سطر و jامین ستون، عدد $a_i^2\ a_j^2$ را قرار دهیم.

۴۲۴. a) O_1 و O_2 را مرکزهای دو دایرهٔ مفروض بگیرید و O_3 را طوری انتخاب کنید که چهارضلعی $AO_1O_2O_3$ متوازی‌الاضلاع بـاشد. نقطه O_3، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC است.

b) پاسخ: مکان مطلوب، عبارت است از محیط دایرهٔ بـه مرکز O_2 (ازدایرهٔ دوم) وبا شعاعی برابربا شعاع دایرهٔاول، به جزدونقطهٔ P^* و O^* که با انتقالی که O_1 را به O_2 می‌رساند، از دونقطـهٔ P و Q بـه دست آمده‌اند.

۴۲۵. گره‌های‌شبکه را با عددهای ۰ و ۱ و ۲ طوری شماره گذاری می‌کنیم که: الف) در رأس‌های هرمثلث‌کوچك، هر سه عدد باشند؛ ب) در رأس‌های شش ضلعی عددها ی ۰ و ۱ قرار گرفتـه باشند (شکل ۱۲۳). مجموع همهٔ عددهای واقـع درگره‌های شبکه، درتقسیم بـر ۳، بـه باقی‌ماندهٔ ۲ می‌رسد. P ، Q و R را رأس‌های هرمثلث متساوی‌الاضلاعی می‌گیریم کـه د‌ر گره‌های شبکه واقـع باشند. اگر در رأس‌های P و Q عددهای مساوی



شکل ۱۲۳

باهم وجود داشته باشد، آن‌وقت، همین عدد، در رأس R هم خواهد بود. اگر در رأس‌های P و Q، دوعدد مختلف واقع باشند، آن‌وقت، عددسوم، در رأس R قرارمی‌گیرد. درهرحالت، مجموع عددهای رأس‌های P ، Q و R بر ۳ بخش‌پذیر است. بنابراین درهرحال، مجموع عددهایی که رنگ نخورده‌اند، درتقسیم بر ۳ به‌باقی‌ماندهٔ ۲ می‌رسد.

۴۲۶. پاسخ: ۱ و ۹.

اگرعدد $n=m^2$ دارای $m>1$ مقسوم‌علیه باشد، آن‌وقت m عددی فرداست ($m=2k+1$)، و n درست k مقسوم علیه کوچکتر از m دارد و، بنابراین، بر $2k-1$ بخش‌پذیر است.

۴۲۷. می‌توان فرض کرد: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_n$. نابرابری مطلوب، نتیجه‌ای از ارزیابی‌های زیر است:

$$\frac{2}{a_1+a_2} \leqslant \frac{1}{a_1};$$

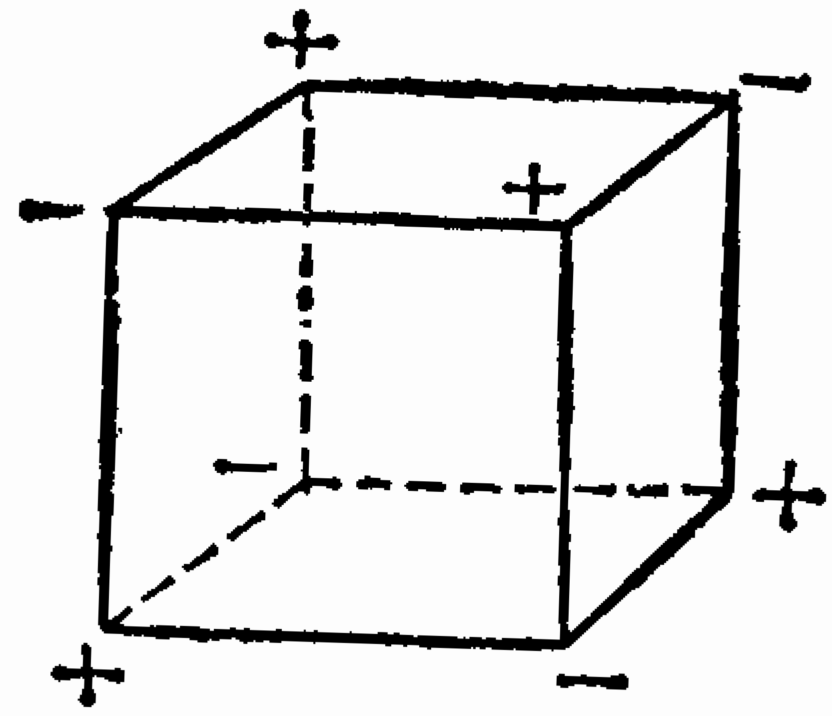
$$\frac{2k-1}{a_1+a_2+\dots+a_{2k-1}} \leqslant \frac{2k-1}{a_k+\dots+a_{2k-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2k-1}{k \cdot a_{k-1}} < \frac{2}{a_{k-1}} \quad \left(2 \leqslant k \leqslant \frac{n+1}{2}\right);$$

$$\frac{2k}{a_1+a_2+\dots+a_{2k}} \leqslant \frac{2k}{a_{k+1}+\dots+a_{2k}} \leqslant \frac{2}{a_k}$$

۴۲۸. پاسخ: AB ، AC ، نیمساز زاویهٔ BAC ، مماس بردایرهٔ محیطی مثلث ABC درنقطهٔ A، مماس بردایرهٔ محیطی مثلث AB_1C درنقطهٔ A (B_1، قرینهٔ B نسبت به A است).

۴۲۹. موقعیت موردنظر را می‌توان به این ترتیب به دست آورد که، ابتدا، تنها عددهای صفر را قراردهیم و، سپس ، دوعمل زیر را مرتباً تکرار کنیم: الف) جای دوقشر ازمکعب‌های واحدرا، که با وجهی ازمکعب موازی‌اند، عوض کنیم؛ ب) عددی را به‌عددهای واقع درراس‌های مکعب اصلی اضافه کنیم وجلوآن‌ها، علامت «+» راقرار دهیم و، همراه با آن،



شکل ۱۲۴

علامت عدد را، از عددهای راس‌ها کم کنیم و با علامت «—» قرار دهیم (شکل ۱۲۴).

۴۳۰. پاسخ: $x=۳$ ، $y=۲$ ، $z=۱$ ، $n\geqslant ۲$ ؛ $x=۶$ ، $y=۸$ ، $z=۴$ ، $n\geqslant ۲$ ؛ $x=۸$ ، $y=۳$ ، $z=۷$ ، $n=۲$.

۴۳۱. O و O' را دو نقطهٔ مفروض می‌گیریم و، برای مشخص بودن وضع ، فرض می‌کنیم، نقطهٔ O'، در درون یا روی ضلع‌های مثلث $OA_۱A_۲$ واقع باشد. دراین صورت داریم:

$$O'A_۱+O'A_۲<OA_۱+OA_۲ \text{ و } O'A_i-OA_i\leqslant ۱۰$$

$(i=۳،۴،...،۱۲)$.

۴۳۲. پاسخ: بله، می‌توان.

باید در یکی از لیوان‌ها ۲۰۰ گرم و در هریك از لیوان‌های دیگر ۱۰۰ گرم شیر ریخت.

۴۳۳. پاسخ : a) ۱ ؛ b) $\frac{۵۰۰۰}{۴۹۹۹}$.

a) در تقارن نسبت به مرکز مستطیل، رنگ‌ها جای خود را عوض می‌کنند.

b) باید تصویرهای پاره‌خطهای راست‌سفید وسیاه را، روی یکی از ضلع‌های مستطیل، مورد بررسی قرارداد.

۴۳۴. a) O را مرکز دایرهٔ محیطی چندضلعی می‌گیریم. دراین‌صورت

$$\overrightarrow{MA_i}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA_i}$$

وکافی است، در مجموع ، علامت «+» را جلو جمله‌های با شمارهٔ زوج، وعلامت «ــ» را جلو بقیهٔ جمله‌ها قرار داد.

b) فرض کنید، در مجموع مورد نظر مـا، $\overrightarrow{MA_{i_1}}$، $\overrightarrow{MA_{i_2}}$، …، $\overrightarrow{MA_{i_k}}$ با علامت «+» و $\overrightarrow{MA_{j_1}}$، $\overrightarrow{MA_{j_2}}$، …، $\overrightarrow{MA_{j_{n-k}}}$ باعلامت «ــ» آمده باشند. اگرمجموع برابر ۰ باشد، آن وقت

$$\overrightarrow{MO}=\frac{1}{n-2k}\left(\overrightarrow{OA_{i_1}}+\overrightarrow{OA_{i_2}}+\cdots+\overrightarrow{OA_{i_k}}-\overrightarrow{OA_{j_1}}-\cdots-OA_{j_{n-k}}\right)$$

وبا این شرط، M به صورت یك‌ارزشی به دست می‌آید.

۴۳۵. پاسخ: a) ۱ به‌ازای $n=3$ ؛ $(n-1)^2-1$ به‌ازای $n\geqslant 4$؛

b) $n-2$:

۴۳۶. کافی است درستی این نابرابری را ، برای هرمقدار x ثابت کنیم :

$$|\sin x|+|\sin(x+1)|+|\sin(x+2)|>\frac{8}{5}$$

۴۳۷. بین عددهای از ۱ تا ۱۹۸۶، درست دوعدد بر 3^6 بخش‌پذیرند:

$$729=3^6 \quad \text{و} \quad 1458=2\times 3^6$$

اگرمجموع همهٔ کسرها، به جز $\frac{1}{729\times 1458}$ را بـه یك مخرج تبدیل کنیم، به کسری به‌صورت $\frac{a}{3^{11}\times b}$ می‌رسیم که، در آن b بر ۳ بخش‌پذیر نیست.

۴۳۸. هرمماسی مثلث قائم‌الزاویه با زاویهٔ حادهٔ φ و مساحت

$$1-\frac{2}{\cos\varphi+\sin\varphi+1}\leqslant(\sqrt{2}-1)^2$$

را قطع می‌کند. مساحت S، بخش مشترک مربع و مثلث، در این نابرابری صدق می‌کند:

$$S \geqslant ۴-۳(\sqrt{۲}-۱)^۲ > ۳/۴$$

۴۳۹. پاسخ: $\left[\frac{n}{۲}\right]+۱$.

هر مقدار ...،۲،۱،۰ $m=$ را متناظر با $P_m(x)=\sum_{i=۱}^{n}(a_i+۲b_i)x^i$ قرار می‌دهیم که، در آن، a_i و b_i، به ترتیب، عبارتند از رقم‌های عددهای $n-۲m$ و m در عددنویسی به مبنای ۲. در این صورت، هرچندجمله‌ای $P_m(x)$، «مجاز» است و، برعکس، هرچندجمله‌ای «مجاز»، منطبق بر یکی از $P_m(x)$ هاست.

۴۴۰. $A_۱$، $B_۱$، $X_۱$، $Y_۱$ را، به ترتیب نقطه‌های تماس کره با وجه‌های BXY، XYA، YAB و ABX می‌گیریم. در این صورت مثلث‌های $XY_۱B$ و $XA_۱B$، همچنین مثلث‌های $AY_۱X$ و $AB_۱X$ وغیره، باهم برابرند. با استفاده از این برابری‌ها، می‌توان ثابت کرد که، مجموع زاویه‌های چهارضلعی فضایی $AXBY$ برابر است با

$$\widehat{AY_۱B}+\widehat{AX_۱B}=۲\widehat{AX_۱B}$$

و نتیجه گرفت که $\widehat{AY_۱B}+\widehat{AX_۱B}$، به X و Y بستگی ندارد.

۴۴۱. داریم:

$$x_۱+y_۱=x_۲+y_۲=\dots=x_{۱۰}+y_{۱۰}=۹,$$

$$x_۱+x_۲+\dots+x_{۱۰}=y_۱+y_۲+\dots+y_{۱۰}$$

به‌این ترتیب، خواهیم داشت:

$$x_۱^۲+x_۲^۲+\dots+x_{۱۰}^۲-y_۱^۲-y_۲^۲-\dots-y_{۱۰}^۲=$$

$$=۹(x_۱+x_۲+\dots+x_{۱۰}-y_۱-y_۲-\dots-y_{۱۰})=۰$$

۴۴۲. پاسخ: ۱، ۲، ۴، ۸، ۱۶، ۳۲.

$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_p$ را وزن وزنه‌ها بگیرید. روشن است که $x_1=1$ ، $x_2=2$ و $x_3=4$. اگر برای هر $k \leqslant m$ داشته باشیم $x_k = 2^{k-1}$ ، آن‌وقت، $x_{m+1}=2^m$، زیرا بیشترین وزنی را که می‌توان با وزنه‌های ۱، ۲، ...، 2^{m-1} وزن کرد، برابر است با $2^m - 1$.

۴۴۳. نقطهٔ برخورد A_1A_2 و A_3A_4 را B بگیرید. مثلث BA_3A_1 متساوی‌الساقین است ودو مثلث A_2BA_3 و A_1BA_4 متشابه‌اند.

۴۴۴. پاسخ: a) ۱۲ شلیك؛ b) ۲۰ شلیك.

a) در مربع 7×7 می‌توان ۱۲ مستطیل 1×4 را جا داد، بدون این که روی هم قرار گیرند؛ b) باید به هرمستطیل 3×4، ۵ شلیك کرد.

۴۴۵. داریم:

$$2(1^{1987}+2^{1987}+\dots+n^{1987}) = 2+(n^{1987}+2^{1987})+$$
$$+\dots+(2^{1987}+n^{1987}) = 2+(n+2)M$$

۴۴۶. a) پاسخ: ۱۱ شکل. باید درهرجدول 2×2 ، دست کم دو خانه را پوشاند.

b) حکم برای مربع 7×7 درست است. اگر حکم برای مربع $(6n+1)(6n+1)$ درست باشد، آن وقت، در یکی از گوشه‌های مربع $(6n+7)(6n+7)$ ، مربع $(6n+1)(6n+1)$ را قرار می‌دهیم و یك خانهٔ آن را جدا می‌کنیم؛ سپس، بخش باقی‌مانده را به مستطیل‌های 2×3 تقسیم می‌کنیم.

۴۴۷. A_1 ، A_2 ، B_1 ، B_2 ، C_1 ، C_2 را نقطه‌های برخورد امتداد ضلع‌ها، با خط‌های راست موازی با آن‌ها فرض می‌کنیم. نقطه‌های B_1وB_2 روی محیط دایره‌ای واقع‌اند که بر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $A_1A_2C_1C_2$ محیط است.

۴۴۸. اگر حکم مساله درست نباشد، هرخط راستی که شامل ضلعی از یك‌خط شکسته است، ضلع‌های خط شکستهٔ دیگررا، درنقطه‌های داخلی آن قطع می‌کند وتعداد چنین نقطه‌هایی، عددی زوج است.

۴۴۹. پاسخ: ۱۲۱، ۲۴۱، ۳۶۱، ۴۸۱، ۶۰۱.

شرط مساله ، برای هر گروهی از n عدد $a_i = i\cdot n! + ۱$ ($i = ۱،۲،\ldots،n$) برقرار است. مجموع هر k عدد از این گروه، بر k بخش‌پذیر است.

۴۵۰. F را نقطهٔ برخورد قطرهای BD و CE بگیرید. نقطه‌های A، F، D، E روی محیط یک دایره‌اند. نقطه‌های A، B، C و F هم روی محیط یک دایره قراردارند.

۴۵۱. پاسخ: $\alpha = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$ $(k \in \mathbf{Z})$.

اگر α با شرط مساله سازگار باشد، آن‌وقت $\cos\alpha \leqslant -\frac{۱}{۴}$ (در غیر این صورت $\cos ۴\alpha > ۰$). به همین ترتیب، برای هرعدد طبیعی n ، باید داشته باشیم: $\cos ۲^n\alpha \leqslant -\frac{۱}{۴}$. از آن‌جا $|\cos ۲^n\alpha - \frac{۱}{۲}| \geqslant \frac{۳}{۴}$. ولی دراین صورت

$$|\cos ۲^n\alpha + \frac{۱}{۲}| = ۲|\cos ۲^{n-۱}\alpha - \frac{۱}{۲}|\cdot|\cos ۲^{n-۱}\alpha + \frac{۱}{۲}| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{۳}{۲}|\cos ۲^{n-۱}\alpha + \frac{۱}{۲}|$$

وبه این ترتیب، به‌ازای هرمقدار n:

$$|\cos\alpha + \frac{۱}{۲}| \leqslant \frac{۲}{۳}|\cos ۲\alpha + \frac{۱}{۲}| \leqslant \cdots$$

$$\cdots \leqslant \left(\frac{۲}{۳}\right)^n |\cos ۲^n\alpha + \frac{۱}{۲}| \leqslant \left(\frac{۲}{۳}\right)^{n-۱}$$

که از آن جا نتیجه می‌شود: $\cos\alpha = -\frac{۱}{۲}$.

۴۵۲. داریم:

$$k^۳ = (a+A)(b+B)(c+C) =$$

$$= abc + ABC + k(aB + bC + cA)$$

۴۵۳. خانهٔ گوشهٔ بالا وسمت چپ جدول را جدا می‌کنیم. سپس، این حوزه‌ها را درنظر می‌گیریم: مربع گوشه‌ای ۳ × ۳ بدون این خانه، مربع ۵ × ۵ بدون مربع ۳ × ۳، مربع ۷ × ۷ بدون مربع ۵ × ۵ وغیره. مجموع عددها، درهریك ازاین حوزه‌ها، از ۲ بیشتر نیست.

۴۵۴. فرض کنید، نیمساز زاویهٔ ABC و خط راست l ـ قرینهٔ نیمساز نسبت به مرکز دایره ـ خط راست PM را، به‌ترتیب، درنقطه‌های L و N قطع کنند. دراین صورت

$$NP = KL = LM, \quad PM = LN$$

۴۵۵. پاسخ a) و b) : آغازکنندهٔ بازی، برنده می‌شود.

a) مثلاً، اولی، درحرکت اول خود، عدد ۶ را می‌نویسد. نفر دوم، تنها می‌تواند یکی ازشش عدد زیر را بنویسد، که ما آن‌ها را به صورت زوج عددها نوشته‌ایم:

$$(۴،۵)، (۷،۸)، (۹،۱۰)$$

اولی باید درپاسخ هرحرکت دومی، عدد دیگرهمان زوج‌رابنویسد.

b) بازی تازه‌ای درنظر می‌گیریم: قانون همان است، ولی واحد دربین عددها وجود ندارد. اگر دراین بازی تازه، طرحی برای برد اولی وجود دارد، ازهمان طرح استفاده می‌کند؛ ولی اگردربازی جدیدمی‌توان طرحی برای برد دومی ریخت، آن‌وقت، اولی درحرکت اول خود، عدد ۱ را می‌نویسد و، سپس، ازهمان طرح دومی استفاده می‌کند.

۴۵۶. پاسخ: بعد از ۷ روز.

k را تعداد روزها برای حالتی می‌گیریم که تعداد نگهبان‌ها ۹ نفر باشند و l را تعداد روزها، برای حالتی که تعداد نگهبان‌ها ۱۰ نفرباشند؛ در ضمن، هر کدام از آن‌ها m بار نگهبانی داده‌اند. به‌این ترتیب، باید داشته باشیم:

$$۹k + ۱۰l = ۳۳m$$

به ازای $m = ۱$ جوابی به دست نمی‌آید وبه‌ازای $m = ۲$ داریم:

$$k = ۴ \quad و \quad l = ۳$$

۴۵۷. اگر تعداد نقطه‌های علامت‌دار محدود باشد، آن‌وقت اگر از گرهٔ بالا وسمت راست، همهٔ بردارها را قرار دهیم، معلوم می‌شود که بردارهای (x , y) باشرط $y > 0$ و $x > 0$ و $y = 0$، بیشتر از بقیهٔ بردارها هستند. ولی اگر همهٔ بردارها را از گرهٔ پایین وسمت چپ در نظر بگیریم، تعداد آن‌ها، کمتر از تعداد بقیه درمی‌آید.

۴۵۸. راس‌های A_{p-1} ، A_p ، A_1 ، A_2 ، A_3 و A_4 از p ضلعی مفروض را درنظر می‌گیریم. قطرهای A_1A_3 ، A_2A_4 ، A_pA_2 و $A_{p-1}A_2$ را رسم می‌کنیم. B_1 و B_2 را نقطهٔ برخورد قطر A_pA_2 با قطرهای A_1A_4 و A_1A_3 وهمچنین، B_4 و B_3 رانقطهٔ برخورد $A_{p-1}A_2$ باهمان قطرهافرض می‌کنیم. (اگر $p = 5$، آن‌وقت $B_4 = A_4$.)

از برابری مساحت‌ها، نتیجه می‌شود: $B_1B_2 = B_2A_2$ و $A_1B_2 = B_2B_3$.

بنابراین $A_2A_{p-1} \| A_1A_4$. تناقض.

۴۵۹. $T_p(n)$ رامجموعهٔ همه عددهایی از T_p که کوچکتر از $!(2^n)$ باشند، و $N_p(n)$ را تعداد عددهای آن می‌گیریم، هرعدد از $T_p(n)$ را می‌توان به‌این‌صورت نوشت:

$$\beta_0 + \beta_1(2^1)! + \beta_2(2^2)! + \dots + \beta_{n-1}(2^{n-1})!$$

$A_p(n) - 1$ را بزرگترین عدد از ضریب‌های β_0 ، β_1 ، ...، β_{n-1} بین همهٔ عددهای $T_p(n)$ فرض می‌کنیم. برای هر k $(k = 0, 1, \dots, n-1)$، ضریب $!(2^k)$، بیش‌از $A_p(n)$ مقدارمختلف قبول نمی‌کند. بنابراین

$$N_p(n) \leqslant \left(A_p(n)\right)^n$$

دیگر کافی است، پیش‌قضیه‌های زیررا ثابت کنیم:

$$1)\quad A_{p+1}(n) \leqslant A_p(n) \cdot N_p(n) \leqslant \left(A_p(n)\right)^{n+1}\ ;$$

$$2)\quad A_{1987}(n) \leqslant 2^{(n+1)^{1987}}\ ;$$

3) $(2^n)! > 2^{(n+1)^{1987}}$ (به‌ازای مقداری از n)؛

۴) $(2^n)! > 2^{2^n}$ (به ازای $n \geqslant 2$)؛

۵) $2^n > (n+1)^{1987}$ (به ازای مقداری از n).

۴۶۰. a) اگر $f(0)=a$ ، آن‌وقت $f(-a)=0$ و $f(0)=-a$ به نحوی که $f(0)=0$. برابری $f(x_0)=x_0$، برای $x_0 \neq 0$، ممکن نیست.

b) پاسخ:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x=0) \\ -\dfrac{x}{2} & (4^k \leqslant |x| < 2\times 4^k) \\ 2x & (2\times 4^{k-1} \leqslant |x| < 4^k) \end{cases}$$

۴۶۱. A را راس چند وجهی و AA_1 ، AA_2 ، ...، AA_n را یال‌های خارج شده از راس A می‌گیریم. یال AA_1 را آبی و بقیهٔ یال‌ها را قرمز می‌کنیم. سپس، همهٔ ضلع‌های خط شکستهٔ $A_1A_2\ldots A_n$ را بـه رنگ آبـی درمی‌آوریم و یال A_1A_2 رابه رنگ قرمز. پشت‌سرهم، وجه‌هایی را که بـه بخش‌های رنگ خوردهٔ چندوجهی متصل‌اند، اضافه می‌کنیم. اگر دو یال ازوجه دارای رنگ باشند، یال سوم رابه رنگ دلخواه درمی‌آوریم؛ ولی اگر تنها یك یال آن رنگ داشته باشد، آن‌وقت دویال دیگر را بارنگ‌های مختلف رنگ می‌کنیم.

۴۶۲. داریم:

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n-\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n-1=\frac{a_3}{(2n)^3}+\frac{a_5}{(2n)^5}+\ldots$$

که در آن a_3 ، a_5 ، ... ، عددهایی مثبت‌اند.

ضمیمه

۱. روش استقرای ریاضی

روش استقرای ریاضی، که برای اثبات درستی یك گزاره به‌ازای هرعدد طبیعی n به‌کار می‌رود، برنظام زیراستوار است: اگر گزاره‌ای برای $n=1$ درست باشد و، درضمن، ازدرستی آن برای $n=k$، بتوان درستی گزاره را برای $n=k+1$ نتیجه گرفت، آن وقت، این گزاره، برای هر مقدار طبیعی n درست است. (اصل استقرای ریاضی). گاهی درستی گزارهٔ n به کمك درستی گزاره یا گزاره‌هایی کوچکتر از n ثابت می‌شود؛ در این حالت، اصل استقرای ریاضی به‌این‌صورت است: اگر گزاره‌ای برای $n=1$ و (به‌ازای $n>1$) برای هر $k<n$ درست باشد، آن وقت برای $k=n$ هم درست است. گاهی بهتر است استقرا را، نه از $n=1$، بلکه از $n=0$ یا ازعددی‌مثل $n=n_0$ آغاز کنیم. نظام استقرای‌ریاضی، براین‌اصل موضوع تکیه دارد: در هر مجموعه‌ای ازعددهای طبیعی، کوچکترین عضو وجود دارد (مسألهٔ ۱۱ را ببینید).

گاهی روش استقرای ریاضی، به‌صورتی «نیمه پنهانی» در استدلال وجود دارد. مثلا اثبات اتحاد

$$1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$$

منجر به این می‌شود که ابتدا آن را برای $n=1$ مورد تحقیق قراردهیم و،

سپس، «گام استقرائی» را به این ترتیب برداریم. اگر داشته باشیم:

$$1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2$$

آن وقت

$$1+3+\dots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

درواقع، همین استدلال را می‌توان به‌صورت زیر ارائه کرد (n گام نخستین استقرا را باهم برداریم):

$$1+3+5+\dots+(2n+1)=$$

$$=1+(4-1)+(9-4)+\dots+[(n+1^2-n^2]=(n+1)^2$$

مساله‌های ۵، ۱۵، ۲۶، ۳۶، ۴۹، ۵۲، ۷۲، ۷۶، ۷۷، ۹۰، ۹۷، ۱۰۰، ۱۰۲، ۱۱۰، ۱۱۳، ۱۲۰، ۱۳۷، ۱۴۲، ۱۴۴، ۱۴۸، ۱۶۴، ۱۷۶، ۱۷۹، ۱۸۱، ۱۸۳، ۱۹۳، ۲۰۳، ۲۱۰، ۲۱۸، ۲۲۳، ۲۲۹، ۲۳۱، ۲۴۰، ۲۴۶، ۲۴۸، ۲۶۰، ۲۶۷، ۳۵۴، ۳۶۷، ۳۹۶، ۴۴۶ b).

همچنین مساله‌های ۱۵۵، ۲۰۰، ۲۷۷ که اندیشه‌های خاصی در حل آن‌ها به‌کار رفته است.

۲. عددهای درست. بخش‌پذیری

دربسیاری ازمساله‌های مربوط به عددهای درست، از مفهوم‌ها و قضیه‌های بخش‌پذیری استفاده می‌شود. هرعدد درست a را می‌توان، ضمن تقسیم برعدد طبیعی m، به صورت $a=mq+r$ نوشت که، در آن، q و r عددهایی درست‌اند و $0\leqslant r<m$.

بین هر m عدد درست متوالی، درست یك عدد پیدا می‌شود که بر m بخش‌پذیر است. اگر دوعدد a و b، درتقسیم برعدد m، به‌یك‌باقی‌مانده برسند، می‌گویند a با b، نسبت به مدول m، هم‌نهشت است و به‌این‌صورت نشان می‌دهند:

$$a\equiv b \bmod (m)$$

اگر a و b عددهایی طبیعی و $a=bq+r$ $(0\leqslant r<b)$، آن‌وقت بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دو عدد a و b با بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دوعدد b و r یکی‌است؛ اگر این بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك را d بنامیم، می‌توان آن رابا چندباراستفاده از گزارهٔ بالا، و به عنوان آخرین باقی‌ماندهٔ غیرصفر، درزنجیرهٔ تقسیم‌های زیر به‌دست آورد:

$$a=bq+r,\ b=rq_1+r_1,\ r=r_1q_2+r_2,\ r_1=r_2q_3+r_3,\ldots$$

$$\ldots,\ r_{n-1}=r_nq_{n+1}+d,\ r_n=dq_{n+2}$$

(روش تقسیم‌های متوالی : آلگوریتم اقلیدس)؛ از این جا نتیجه می‌شود: عددهای درست x و y وجود دارند، به نحوی که داشته باشیم : $d=ax+by$. درحالت خاصی که a و b نسبت به هم اول باشند (یعنی، مقسوم علیه مشترکی بزرگتر از واحد نداشته باشند)، آن وقت می‌توان عددهای درست x و y را طوری پیدا کرد که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$ax+by=1$$

(مسالهٔ ۶۸ را ببینید).

هر عددطبیعی را، تنها به يك‌طریق می‌توان به‌صورت ضرب‌عامل‌های اول‌نوشت (قضیهٔ اصلی حساب). تعداد عددهای اول بی‌نهایت است.اثبات این گزاره، به وسیلهٔ اقلیدس، براین اساس است که: اگر به حاصل‌ضرب چند عدد اول، يك‌واحد اضافه کنیم، عددی به‌دست می‌آید که مقسوم‌علیهی غیرازهمهٔ این عددهای اول دارد.

اگرعددهای b_1، b_2، ...، b_n دو به دو نسبت به‌هم اول باشند، آن وقت، برای هر باقی ماندهٔ r_1، r_2، ...، r_n $(0\leqslant r_i<b_i)$ می‌توان عدد a را طوری پیدا کرد که ضمن تقسیم بر b_i به باقی‌ماندهٔ r_i برسد، یعنی

$$a\equiv r_i(\mathrm{mod}\ b_i),\ i=1,2,\ldots,n$$

(قضیهٔ چینی دربارهٔ باقی‌مانده‌ها).

مساله‌های ۳، ۹، ۱۶، ۳۰، ۳۶، ۴۲، ۴۶، ۴۸، ۵۱، ۵۹، ۶۸، ۷۴، ۸۵، ۸۸، ۸۹، ۹۳، ۱۰۲، ۱۰۷، ۱۲۲، ۱۳۷، ۱۴۱، ۱۶۲،

۱۹۰، ۲۳۳، ۲۵۴، ۲۵۸، ۲۶۰، ۲۸۸،۳۰۶،۳۱۶،۳۲۲،
۳۵۲، ۳۶۰، ۳۷۱، ۳۸۶، ۴۱۱، ۴۱۶،۴۲۶،۴۳۶،۴۴۵،
۴۴۹، ۴۵۶.

۳. رقم‌ها ودستگاه‌های عددشماری

درمساله‌هایی که صحبت برسر رقم‌ها درعددنویسی به‌مبنای ۱۰ باشد:

$$A=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\dots+a_1\cdot 10+a_0$$

(A، عددی طبیعی است؛ گاهی آن را به صورت $\overline{a_na_{n-1}\dots a_1a_0}$ نشان می‌دهند)، از موضوع‌های گوناگونی استفاده می‌شود: بخش‌پذیری‌عددهای درست، تبدیل‌های جبری، ارزیابی وتخمین رقم یاعدد. به‌خصوص، معیار بخش‌پذیری بر ۳ وبر ۹،کاربرد زیادی دارد: عدد $A=\overline{a_na_{n-1}\dots a_1a_0}$ و عددی‌که ازمجموع رقم‌های‌آن به دست می‌آید، درتقسیم بر ۹ (یابر ۳)، به‌یك باقی‌مانده می‌رسند. روشن است که تفاضل

$$A-(a_n+a_{n-1}+\dots+a_1+a_0)=$$
$$=a_n(10^n-1)+a_{n-1}(10^{n-1}-1)+\dots+a_1(10-1)$$

بر ۹ بخش‌پذیر است.

گاهی مفید است، عدد A را، در دستگاه عددنویسی به مبنای q، بنویسیم:

$$A=a_nq^n+a_{n-1}q^{n-1}+\dots+a_1q+a_0$$

که در آن a_iها، $0\leqslant a_i<q$ $(i=1،2،\dots،n)$، «رقم‌ها» در این دستگاه عددنویسی‌اند.

مساله‌های ۳، ۲۱، ۴۳، ۵۴، ۸۵، ۸۸، ۹۳، ۱۲۲،۱۳۹،۱۴۱،۱۴۲، ۱۴۴، ۱۴۸، ۱۶۸، ۱۷۵، ۱۹۷، ۲۰۱،۲۴۴،۲۹۱،۲۹۴، ۲۹۷، ۳۲۹، ۳۵۴، ۳۹۶، ۴۳۰، ۴۳۹.

۴. عددهای گویا وعددهای‌گنگ

عددگویای a را می‌توان به صورت $a=\dfrac{m}{n}$ نشان داد که، در آن

$m \in \mathbf{Z}$ و $n \in \mathbf{N}$؛ همچنین، هر عدد گویا را می‌توان، در دستگاه عددنویسی به‌مبنای ۱۰ (یا هر دستگاه عددنویسی دیگر)، به‌صورت کسر دهدهی متناوبی نوشت. کسر دهدهی معرف عدد گنگ، متناوب نیست.

همراه با عدد گنگ $a+b\sqrt{d}$ (a و b، عددهای گویا و d عددی درست است که مجذور یك عدد طبیعی نیست)، اغلب بهتر است «مزدوج» آن، عدد $a-b\sqrt{d}$ را هم در نظر بگیریم: مجموع و حاصلضرب دو عدد گنگ مزدوج، منجر به عددهایی گویا می‌شود، به‌نحوی که $a \pm b\sqrt{d}$، ریشه‌های معادله‌ای درجه دوم با ضریب‌های درست درمی‌آیند.

مساله‌های ۹۴، ۱۱۴، ۲۵۷، ۲۶۸، ۳۰۳، ۳۵۶، ۳۷۰، ۳۷۹، ۴۲۲.

۵. سه‌جمله‌ای درجه دوم. تابع‌های پیوسته، نمودارها و ریشه‌های معادله‌ها

در بسیاری ازمساله‌هایی که منجر به‌استفاده از تابع درجه دوم

$$y=f(x)=ax^{2}+bx+c$$

می‌شوند، بهتر است نمودار آن را درنظر بگیریم. اگر این نمودار، محور Ox را در دو نقطهٔ x_1 و x_2 (ریشه‌های سه‌جمله‌ای) قطع کند، آن‌وقت مقدار‌های تابع $y=f(x)$، در بین ریشه‌ها، علامتی مخالف علامت a و در بیرون بازهٔ $[a, b]$ همان علامت a را دارند. درضمن، راس سهمی $y=f(x)$ (که طول آن، برابر نصف مجموع ریشه‌هاست)، متناظر با نقطهٔ اکسترمم تابع $y=f(x)$ است: می‌نیمم اگر $a>0$ و ماکزیمم اگر $a<0$.

دریك رشته از مساله‌ها، می‌توان از این حقیقت استفاده کرد؛ اگر تابع $y=f(x)$، که در بازهٔ $[a, b]$ پیوسته است، در دو انتهای این بازه، برابر با مقدارهایی با علامت‌های مختلف باشد، آن‌وقت، بین دو نقطهٔ a و b دست کم یکی از ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ قرار دارد.

مساله‌های ۳۲، ۱۱۹، ۱۴۹، ۱۵۷، ۱۷۸، ۱۸۰، ۲۰۶، ۲۲۸، ۲۴۲، ۲۵۹، ۲۶۴، ۲۶۹، ۲۷۸، ۲۹۹، ۳۰۸، ۳۳۹، ۳۵۹، ۳۸۳، ۴۰۰، ۴۰۸.

۶. جبر چندجمله‌ای‌ها

اگر a ریشهٔ چندجمله‌ای $P(x)$ باشد، آن وقت $P(x)$ بر دوجمله‌ای $x-a$ بخش‌پذیر است و می‌توان آن را به‌صورت $P(x)=(x-a)Q(x)$ نوشت که، در آن، $Q(x)$ یك چندجمله‌ای است با درجه‌ای یك واحد کمتر از درجهٔ $P(x)$ (درضمن، اگر $P(x)$ ضریب‌های درستی داشته باشد، ضریب‌های $Q(x)$ هم، عددهایی درست‌اند). چندجمله‌ای درجهٔ n، بیش n ریشه ندارد (حتی با درنظر گرفتن ریشه‌های تکراری). ازاین‌جا می‌توان نتیجه گرفت که: اگر دو چندجمله‌ای $P(x)$ و $Q(x)$، که درجهٔ آن‌ها از n تجاوز نمی‌کند، در n نقطه، مقدارهای برابر را قبول کنند، آن وقت ضریب‌های متناظر توان‌های برابر در دو چندجمله‌ای، باهم برابرند.

اغلب، از اتحادهای مربوط به تجزیه دوجمله‌ای‌های شامل‌دومتغیر، استفاده می‌شود:

$$x^n-y^n=(x-y)\,(x^{n-1}+x^{n-2}y+\dots+xy^{n-2}+y^{n-1});$$

$$x^{2m+1}+y^{2m+1}=$$

$$=(x+S)\,(x^{2m}-x^{2m-1}y+x^{2m-2}y^2-\dots-xy^{2m-1}+y^{2m})$$

وهمچنین، ازدستور بسط دوجمله‌ای:

$$(x+y)^n=x^n+C_n^1x^{n-1}y+C_n^2x^{n-2}y^2+\dots+C_n^{n-1}xy^{n-1}+y^n$$

که درآن، ضریب‌های بسط، ازاین دستوربه دست می‌آیند:

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\times2\times\dots\times k}\,,\quad k=1,2,\dots,y$$

مساله‌های ۱۶، ۲۴، ۳۸، ۵۱، ۱۲۵، ۱۴۲، ۱۶۲، ۲۱۷، ۲۴۲، ۲۵۱، ۲۵۸، ۳۲۵، ۳۴۷، ۴۳۹.

۷. اتحادها. معادله‌ها ودستگاه‌های معادله‌ها

برای حل وبررسی معادله‌ها، درکنار روش‌های رسمی ودبیرستانی، گاهی می‌توان ازمفهوم یکنوائی استفاده کرد: اگرتابع $y=f(t)$، اکیداً

صعودی یا اکیداً نزولی باشد، آن وقت معادله‌های $f(g_1)=f(g_2)$ و $g_1=g_2$ هم‌ارزند. برای حل دستگاه‌های معادله‌ها، گاهی مفید است از تعبیر هندسی، مفهوم تقارن درعبارت‌های جبری وغیره استفاده کنیم.

یك‌رشته ازمساله‌ها، به‌رابطهٔ خطی بین چندمتغیر مربوط می‌شوند.

مساله‌های ۳۸، ۶۳، ۹۸، ۱۴۶، ۱۸۹، ۱۹۴، ۲۴۳، ۲۷۶، ۲۹۲، ۳۵۳، ۳۵۷، ۳۶۴، ۳۸۲، ۴۱۴، ۴۶۰.

۸. نابرابری‌ها

در بین نابرابری‌هایی که، در مساله‌ها، مورد استفاده قرار می‌گیرند، این‌ها را می‌توان آورد:

۱) $|x+y| \leqslant |x|+|y|$ ، $|x-y| \geqslant |x|-|y|$ ؛

۲) $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ (برای هر $a \geqslant 0$ و $b \geqslant 0$) ؛

۳) اگر a_1 ، a_2 ، ...، a_n، عددهایی غیرمنفی باشند:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

(نابرابری کوشی، برای واسطه‌های هندسی وعددی) ؛

۴) $$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2 \leqslant \frac{1}{n}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$$

برای هر a_1 ، a_2 ، ...، a_n.

۵) برای هردوعدد مثبت a و b، کسر $\frac{c+d}{a+b}$ ، بین کسرهای $\frac{c}{a}$ و $\frac{d}{b}$ قراردارد (مساله ۲۱۹ را ببینید).

۶) $\sin x < x$ برای هر $x > 0$.

مساله‌های ۱۹، ۵۶، ۹۵، ۱۰۹، ۱۱۳، ۱۱۸، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۳۰، ۱۳۴، ۱۶۹، ۱۷۲، ۱۸۷، ۲۰۳، ۲۰۸، ۲۱۲، ۲۳۲، ۲۶۴،

۲۶۷، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۹۹،۳۰۸،۳۱۱،۳۱۹،۳۲۵a،۳۳۵،
۳۴۱، ۳۴۶، ۳۵۴، ۳۵۷، ۳۶۵، ۳۷۲،۳۷۵،۳۷۷،۳۹۲،
۴۰۳، ۴۲۷، ۴۳۶، ۴۵۲، ۴۶۲.

۹. اصل دیریکله

اگر در k لانه، بیش‌از nk خرگوش باشند، آن وقت، دست کم در یك لانه، بیش از n خرگوش وجود دارد. این اصل درمساله‌های مختلفی مورد استفاده قرار می‌گیرد که، در آن‌ها، باید «وجود» عضو یا عددی را ثابت کرد.

چند گزارهٔ شبیه «اصل دیریکله» را، که به همان اندازه روشن‌اند و درمساله‌های هندسی‌وجبری کاربرد دارند، می‌آوریم. اگرمجموع مساحت‌های چندشکل کمتر از S باشد، با آن‌ها نمی‌توان سطحی به مساحت S را پوشاند. اگرروی پاره‌خطراستی به‌طول واحد، چند پاره‌خط راست بامجموع طول‌های L قراردهیم، آن وقت نقطه‌ای پیدا می‌شود که با بیش از $[L]$ عدد ازاین پاره‌خط‌ها پوشیده نشده است. اگر واسطهٔ حسابی چند عدد، از a بزرگتر باشد، آن وقت، دست کم یکی از این عددها، از a بزرگتراست.

مساله‌های ۳، ۴، ۱۲، ۳۷، ۶۷، ۷۲، ۷۸، ۸۷، ۹۱، ۱۱۰، ۱۶۶، ۲۲۰، ۳۴۲، ۳۶۷، ۴۴۴، ۴۴۶.

۱۰. آرایش‌ها

روش اصلی درحل مساله‌های مربوط به تعداد ترکیب‌های مختلف عضوهای یك مجموعهٔ محدود، عبارت است ازبرقراری تناظر بین مجموعه‌هایی که با شرط‌های مختلف داده شده‌اند.

مثلا، مجموعهٔ همهٔ گروه‌های مرتب شامل n واحد وصفر را (از این گروه‌ها به تعداد 2^n وجود دارد) می‌توان درتناظر با مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های یك مجموعهٔ n عضوی قرارداد. مجموعهٔ این گروه‌ها، وقتی که شامل k واحد باشد، متناظراست با مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های k عضوی ازیك مجموعهٔ n عضوی. تعداد همهٔ این گروه‌ها، برابراست با

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\times 2\times\cdots\times k}$$

که به‌ازای $k=2$، برابربا تعدادزوج عضوهای نامرتب ازمجموعهٔمفروض می‌شود: $C_n^2=\frac{1}{2}n(n-1)$.

تعداد تبدیل‌های (مرتب) دریك مجموعهٔ n عضوی، برابراست با

$$n!=1\times 2\times\cdots\times n$$

مساله‌های ۵۲، ۶۱، ۷۶، ۱۱۷، ۱۳۶، ۲۱۰، ۲۳۱، ۲۴۶، ۳۰۱، ۳۶۱، ۴۳۹، ۴۴۲.

۱۱. گراف‌ها. نگاشت‌ها

اگر عضوهای یك مجموعه رابه کمك نقطه‌ها مشخص کنیم و برخی از زوج نقطه‌ها رابه وسیلهٔ پاره‌خط‌هائی به‌هم وصل کنیم، تصوری برای یك شاخه از ریاضیات، که‌گراف نامیده می‌شود، به‌دست می‌آید: نقطه‌ها(یعنی عضوهای مجموعه) را راس‌ها وپاره‌خط‌های راست (یا کمان‌ها) رایال‌های گراف گویند. گرافی که از هرراس آن بتوان بـه هرمسیر دیگری، شامل یال‌ها، واردشد، گراف مرتبط نامیده می‌شود. هرمسیر بسته درطول‌یال‌های گراف را، یك دور می‌نامند. در گراف مرتبطی که بدون دور باشد (که در این حالت، آن را درخت می‌گویند)، تعداد راس‌ها، یکی بیشتر از تعـداد یال‌هاست (مسالهٔ ۸ را ببینید). اگرهمهٔ دورهای گراف، طولی زوج داشته باشند (یعنی از تعـداد زوجی یال عبور کنند)، آن وقت راس‌های آن را می‌توان طوری به دورنگ درآورد که راس‌های هم‌رنگ به‌وسیلهٔ یك‌یال به هم مربوط نباشند؛ چنین گرافی را، دوبخشی گویند.

وقتی که یال‌های گراف، دارای جهت باشند، با گراف توجیه شده یا گراف جهت‌دار سروکارداریم. هرنگاشت f ازمجموعهٔ متناهی A برخودش، یك گراف توجیه شده می‌دهـد کـه از هررس $a\in A$ آن، پیکانی بـه سمت راس $f(a)$ وجود دارد (درضمن، ممکن است گره‌هایی هـم وجود داشته باشد: پیکان‌هایی که از a به a می‌روند؛ این‌ها، نقطه‌های بی‌حرکت نگاشت

f هستند). اگر f درتناظر یك‌به‌یك باشد، آن‌وقت گراف بـه دورها (و گره‌ها) تجزیه می‌شود.

یکی ازنمونه‌های یك‌گراف پیچیده، طرح شبکهٔ تلفنی است (مسالهٔ ۱۵۸ را ببینید).

گراف‌هایی هم مورد بررسی قرار می‌گیرند که یال‌ها یـا راس‌های آن‌ها را رنگ کرده‌اند ویا با عددهایی مشخص شده‌اند.

مساله‌های ۸، ۷۲، ۷۹، ۱۱۱، ۱۲۳، ۱۲۶، ۱۶۳، ۱۷۶، ۱۸۳، ۱۹۶، ۲۴۰، ۲۷۱، ۲۹۰، ۲۹۶، ۳۱۰، ۳۱۷، ۴۲۱، ۴۶۱.

۱۲. رنگ‌آمیزی. مساله‌های مربوط به شبکه‌ها

در مساله‌های مربوط به گراف‌هـا، اغلب تصور زوج یـا فردبودن، اهمیت دارد. مثلا تعداد راس‌هایی کـه تعداد فردی یال بـه آن‌هـا متصل می‌شود، عددی زوج است (مسالهٔ ۱ راهم ببینید). تصور مشابهی، بـرای مساله‌های دیگر لازم است، مثلا برای حل این مسالهٔ معمول: آیا می‌تـوان صفحهٔ شطرنجی ۸ × ۸ را، که دوخانه متقابل دوگوشهٔ آن حذف شده‌است، با مستطیل‌های ۲ × ۱ پوشانـد؟ برای حل این مساله، کافی است توجـه کنیم که، هر مستطیل ۲ × ۱، دو خانهٔ با رنگ‌های مختلف را می‌پوشاند؛ در حالی‌که دو خانهٔ روبه‌رو در دوگوشهٔ صفحهٔ شطرنجی از یك رنگ‌اند. گاهی، برای حل مساله، لازم می‌شود از تعداد رنگ‌هـای بیشتری استفاده کنیم:

مسالهٔهای ۱، ۱۷، ۳۳، ۴۹، ۶۱، ۷۲، ۸۵، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۵۴، ۱۸۴، ۲۳۵، ۲۴۷، ۲۶۲، ۳۳۳، ۳۶۴، ۳۷۴، ۴۱۳.

به جز استفاده از زوج یا فرد بودن و رنگ کـردن، در مساله‌های مربوط به صفحه‌های شطرنجی ودیگر شبکه‌های مسطحه وفضایی، اغلب از تصورهای هندسی وروش‌مختصاتی‌هم می‌توان استفاده کرد. صفحهٔ‌شطرنجی را می‌توان همچون یك صفحهٔ عددی در نظر گرفت که، در آن، گـره‌های شبکه، دارای مختصاتی درست‌اند ویا مربعی شامل p^2 گره را موردتوجه قرار دادکه، مختصات آن‌ها، در تقسیم بر p، بـه باقی‌مانده‌های (x و y) می‌رسند.

مساله‌های ۹۱، ۹۶، ۱۱۱، ۱۸۱، ۱۹۹، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۲۹، ۲۶۵، ۲۷۵، ۲۹۵، ۳۰۴، ۳۱۴، ۳۴۹، ۳۶۲، ۳۹۷، ۴۱۶، ۴۲۵، ۴۳۳، ۴۴۴، ۴۴۶، ۴۵۷.

۱۳. عمل‌ها و تغییرناپذیرها

در مساله‌هایی که باید روشن کنیم: آیا می‌توان بـه کمك عمل‌های مفروضی، ازیك موقعیت به موقعیت دیگری رسید، اغلب بهتراست «تغییر-ناپذیرها» را پیدا کرد، یعنی عنصرهایی را کـه ضمن این عمل‌ها، تغییر نمی‌کنند. درضمن، اگر تعداد «تغییرناپذیرها» در دومجموعه برابر نباشند، به معنای آن است که تبدیل یکی به‌دیگری ممکن نیست. درمساله‌های‌مربوط به عددهای درست یا دیگر «چیزهای» ناپیوسته، اغلب می‌توان باقی‌ماندهٔ تقسیم بر ۲ را، به‌عنوان «تغییرناپذیر» درنظرگرفت (ویا باقی‌ماندهٔ تقسیم‌بر یك عدد طبیعی دیگر).

اگرهمهٔ عمل‌های انجام شده معکوس‌پذیر باشند، آن وقت می‌تـوان همهٔ مجموعهٔ عضوهایی را، که عمل‌ها را درمورد آن‌ها انجام داده‌ایم، به صورت دودستهٔ هم‌ارز درنظرگرفت (دوعضو را هم‌ارز گوییم، وقتی که بتوان یکی ازآن‌ها را، ضمن انجام عمل‌ها، ازدیگری به‌دست آورد).

مساله‌های ۱۰۵، ۱۵۴، ۲۱۴، ۲۳۳، ۲۶۰، ۲۷۶، ۳۲۱، ۴۲۵.

درمساله‌هایی که باید تعداد عمل‌ها را تخمین زد ویا ثابت کرد که، این عمل‌ها را، نمی‌توان به صورت نامتناهی ادامه داد، اغلب بهتـر است دربارهٔ تابعی بیندیشیم که، به‌ازای هرعمل، صعودی (یا نزولی) می‌شود.

مساله‌های ۵، ۷، ۲۱، ۴۴، ۱۵۱، ۱۹۶، ۲۷۱، ۲۸۳، ۴۰۹.

۱۴. ترتیب رقم‌ها وعددهای درست، تبدیل‌های آن‌ها. مسابقه‌ها.

برای حل مساله‌های مربوط به‌دنباله‌های متناهی ازعددهای درست، حرف‌ها یامهره‌ها، که آن‌ها را روی محیط‌دایره یا دریك‌جدول قرارداده‌ایم، می‌توان ازشیوه‌های مختلف مربوط به‌بخش‌پذیری، آنالیزترکیبی، ارزیابی یا نابرابری‌ها، واستقرای ریاضی استفاده کرد.

مساله‌های ۴، ۳۷، ۳۹، ۸۷، ۱۱۷، ۱۴۳، ۱۵۴، ۱۵۶، ۱۸۱، ۲۰۰، ۲۲۱، ۲۲۴، ۲۲۹، ۲۳۱، ۲۳۸، ۲۷۵، ۲۸۱، ۳۰۰، ۳۰۷، ۳۲۱، ۳۲۳، ۳۳۷، ۳۴۰، ۳۴۵، ۳۵۰، ۳۸۵، ۳۹۰، ۳۹۱، ۴۰۹، ۴۱۳، ۴۳۲، ۴۳۵، ۴۴۲، ۴۵۶.

دربارهٔ مسابقه‌ها، میزان امتیازها ومقام شرکت کنند گان :

مساله‌های ۲۸، ۱۰۸، ۱۲۶، ۱۷۹، ۲۱۸، ۳۱۷، ۴۴۱.

۱۵. هندسهٔ مسطحه

تقریباً درهرالمپیاد با مساله‌های هندسهٔ مسطحه مواجه می‌شویم.

الف) دربارهٔ چندضلعی‌های منتظم:

مساله‌های ۲۰، ۹۹، ۱۰۳، ۱۲۷، ۲۲۶، ۳۹۸، ۴۰۸، ۴۳۴، ۴۴۳.

ب) دربارهٔ مفهوم «مکان هندسی» :

مساله‌های ۶، ۱۲، ۱۴، ۱۸، ۲۰، ۳۱، ۴۰، ۶۰، ۶۹، ۷۸، ۸۲، ۱۵۷، ۲۰۲، ۲۰۷، ۲۱۳، ۲۷۰، ۴۲۴.

ج) تبدیل‌های هندسی (دوران، انتقال موازی، تشابه و ترکیب‌های آن‌ها) :

مساله‌های ۶، ۲۲، ۴۵، ۴۷، ۷۳، ۱۰۱، ۱۱۲، ۱۴۰، ۱۴۷، ۱۶۵، ۱۸۲، ۱۹۸، ۲۰۵، ۲۲۲، ۲۵۳، ۲۵۹، ۲۹۸، ۳۰۹، ۳۱۵، ۳۷۳، ۳۹۹، ۴۱۴، ۴۶۰.

د) مساله‌هایی که در آن، صحبت برسرمساحت شکل است (و یا از مساحت، به عنوان یك ابزار کمکی استفاده می‌شود):

مساله‌های ۱۲، ۱۳، ۲۳، ۲۹، ۵۳، ۵۵، ۷۸، ۱۰۶، ۱۴۷، ۱۵۲، ۱۸۶، ۲۰۴، ۲۶۱، ۲۵۵، ۲۸۵، ۳۱۲، ۳۲۷، ۳۶۳، ۳۶۶، ۳۸۴، ۳۹۵، ۴۱۵، ۴۲۸، ۴۵۸.

۱۶. هندسهٔ فضایی

درحل‌مساله‌ها، اغلب پیدا کردن تصویرشکل برصفحه (یاخطراست) مفید است. از قضیه‌ای هم که در کتاب‌های درسی وجود ندارد، یاد می‌کنیم: در هر کنج سه‌وجهی، هرزاویهٔ مسطحه ازمجموع دو زاویهٔ دیگر

کوچکتر است.

مساله‌های ۵۳، ۷۰، ۸۰، ۸۲، ۱۰۴، ۱۲۱، ۱۵۰، ۱۸۸، ۲۳۴، ۲۴۱، ۲۵۵، ۲۶۶، ۲۹۹، ۳۲۶، ۳۴۸، ۳۵۸، ۳۹۴، ۴۱۷، ۴۶۱.

۱۷. هندسهٔ ترکیبی

منظور ما، ارزیابی‌های مختلف نسبت بـه جابه‌جایی‌ها، پوشش‌هـا وترکیب‌های مختلفِ شکل‌هاست. دراین‌جا، ازکلی‌ترین ویژگی‌های‌مربوط به استقرار شکل درصفحه (یا درفضا) استفاده می‌شود.

ازبین این ویژگی‌هـا، قضیهٔ ژردان را می‌آوریـم: هـرخط شکستهٔ بسته‌ای‌که با خودش متقاطع نباشد، صفحه را به دوبخش درونی وبیرونی تقسیم می‌کند؛ درضمن، هرمسیری که از نقطه‌ای درونی به نقطه‌ای بیرونی برود، این خط شکسته را قطع می‌کند ودونقطهٔ هر حـوزه را می‌توان بـا مسیری به‌هم وصل کرد که خط شکسته را قطع نکند.

تعریف مجموعهٔ محدب رابـه یاد می‌آوریم: به مجموعه‌ای محدب گویندکه، علاوه برنقطه‌ها، شامل همهٔ پاره‌خط‌های راستی‌باشدکه این‌نقطه‌ها را دوبه‌دو به‌هم وصل می‌کنند. به کوچکترین مجموعهٔ محدبی که شامل یك شکل باشد، پوش محدب آن شکل گویند؛ پوش محدب یك‌مجموعهٔ متناهی، عبارت است ازیك چندضلعی (ودرفضا، یك چندوجهی) کـه راس‌های آن، دربرخی نقطه‌های مفروض باشند.

همراه با شکل مفروض، خوب است همسایگی r آن را هـم درنظر بگیریم: مجموعه‌ای ازنقطه‌ها که کمترین‌فاصلهٔ ازآن‌ها‌تا نقطه‌های‌شکل کمتر از r باشد؛ دوشکل (ودرحالت خاص، نقطه‌ها) تنها وقتی به فاصله‌ای‌که از $2r$ کمتر نیست قرار دارند کـه ، همسایگی‌های r آن‌هـا. متقاطع نباشند (مساله‌های ۱۲، ۸۱).

مساله‌های ۲۷، ۴۹، ۵۳، ۶۴، ۸۶، ۱۴۷، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۶۴، ۱۸۸، ۲۰۲، ۲۱۱، ۲۱۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۳۵، ۲۳۷، ۲۴۹، ۲۵۵، ۲۷۷، ۳۱۴، ۳۲۴، ۳۳۸، ۳۵۱، ۴۰۶، ۴۴۸، ۴۶۱.

۱۸. نابرابری‌های هندسی، ارزیابی‌ها، اکسترمم‌ها

از بین قضیه‌های زیادی که برای اثبات این نابرابری‌های هندسی به کار می‌روند، چند قضیه را که کاربرد گسترده‌تری دارند، می‌آوریم: در هر مثلث، هرضلع ازمجموع دوضلع دیگر کوچکتر است (نابرابری مثلثی). یك زاویهٔ مثلث، کوچکتر، برابر ویا بزرگتراز ۹۰ درجه است، وقتی که، مجذورضلع روبه‌روبه‌آن، کوچکتر، برابریا بزرگترازمجموع مجذورهای دوضلع مجاوربه‌آن باشد. طول تصویریك پاره‌خط راست برصفحه یاخط راست، ازطول خود پاره‌خطراست، بزرگترنیست. مساحت تصویریك‌چندضلعی برصفحه، ازمساحت خود چندضلعی بیشترنیست.

مساله‌های ۲۳، ۲۹، ۳۲، ۴۱، ۶۲، ۷۰، ۷۳، ۷۸، ۸۲، ۸۴، ۸۶، ۱۰۴، ۱۱۵، ۱۲۱، ۱۲۴، ۱۲۷، ۱۳۱، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۴۰، ۱۶۷، ۱۸۵، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳، ۲۰۲، ۲۰۴، ۲۰۶، ۲۱۳، ۲۲۲، ۲۲۵، ۲۶۱، ۲۶۶، ۲۶۹، ۲۸۲، ۲۹۰، ۲۹۷، ۲۹۹، ۳۰۲، ۳۱۸، ۳۲۰، ۳۳۴، ۳۴۸، ۳۵۵، ۳۵۶، ۳۶۸، ۳۸۸، ۳۹۴، ۴۴۰، ۴۳۱، ۴۳۸.

۱۹. بردارها

به جزعمل‌های عادی روی بردارها (جمع، تفریق وضرب در یك عدد)، گاهی مفید است ازضرب عددی (اسکالر) بردارها هم استفاده کنیم:

$$\mathbf{uv} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\alpha \text{ ،} \quad \alpha = \widehat{(\mathbf{u} \text{ ،} \mathbf{v})}$$

برای n نقطهٔ A_1، A_2، ...، A_n ازصفحه (یافضا)، نقطهٔ منحصر به‌فرد O وجود دارد (مرکزثقل)، به نحوی که

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = 0$$

مساله‌های ۶، ۱۳، ۱۴۳، ۱۹۳، ۲۰۷، ۲۲۲، ۲۲۵، ۲۳۴، ۲۷۰، ۲۷۴، ۲۸۰، ۲۹۳، ۳۱۵، ۳۳۶، ۳۶۶، ۳۷۳، ۴۰۴، ۴۳۴، ۴۵۷.

۲۰. ارزیابی وجست‌وجوی حداقل وحداکثر درمساله‌های مربوط به عددها وجدول‌ها

بسیاری ازمساله‌های المپیادها، به مقایسهٔ مقدار عددها از یك گروه محدود، نقطه‌های واقع برخط راست، ارزیابی مجموع‌ها، تفاضل‌ها ودیگر تابع‌های مربوط به‌گروه عددها ویا جدول‌ها، مربوط می‌شوند.

مساله‌های ۵۶، ۷۷، ۱۲۷، ۲۳۲، ۲۵۲، ۲۸۳، ۳۴۴، ۳۵۴، ۳۶۹، ۳۷۷، ۴۵۳.

گاهی درچنین‌مساله‌هایی مفید است.

الف) کوچکترین یا بزرگترین عددگروه را درنظر بگیریم:

مساله‌های ۲۶، ۴۴، ۷۲، ۱۰۹، ۱۲۶، ۱۲۸، ۱۵۶، ۱۶۰، ۱۶۳، ۲۰۲، ۲۱۹، ۲۴۳، ۲۴۶، ۲۴۸، ۲۸۳،۳۳۷،۳۴۳،۳۸۰، ۴۰۱، ۴۰۹.

ب) عددهای گروه را برحسب مقدارآن‌ها مرتب‌کنیم:

مساله‌های ۳۴، ۶۵، ۷۵، ۱۵۳، ۲۴۵، ۲۵۰، ۳۴۶، ۴۱۰.

۲۱. دنباله‌ها

دنبالـهٔ x_n را متناوب گویند، وقتی کـه $x_{n+t}=x_n$ ، $n\in\mathbf{N}$ (عـدد طبیعی t، دورهٔ تناوب دنباله است). در بسیاری از مساله‌ها، بـا دنباله‌های برگشتی روبه‌رو می‌شویم؛ دنبالـهٔ x_n وقتی برگشتی است کـه، برای آن، داشته باشیم؛ $x_{n+1}=f(x_n)$ که، در آن، f یك تـابع است؛ گاهی هـم جمله‌های دنباله (ازجملهٔ $(k+1)$ام) به‌کمك k جملهٔ قبل ازآن معین‌می‌شود. به‌عنوان نمونه، می‌توان از دنبالهٔ فیبوناچی نام برد.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

که درآن، هرجمله برابراست با مجموع دو جملهٔ قبل ازآن. در ارزیابی دنباله‌ها، اغلب روش استقرای ریاضی به‌کار می‌آید.

مساله‌های ۱۱، ۱۵، ۲۵، ۳۶، ۹۰، ۱۰۰، ۱۱۳، ۲۲۳، ۲۵۱، ۲۵۵، ۲۵۷، ۲۶۷، ۲۷۳، ۳۰۳، ۳۱۳، ۳۲۸، ۳۵۶، ۴۰۲، ۴۰۵، ۴۵۹.

عدد a را حد دنبالهٔ x_n گویند، وقتی‌که برای هر $\varepsilon>0$، بتوان N

را طوری پیدا کرد که، برای هر $n>N$، نابرابری $|x_n-a|<\varepsilon$ برقرار باشد.

مساله‌های ۲۳۹، ۲۶۸، ۳۰۰، ۳۸۹، ۴۵۱.

۲۲. بازی‌ها، تعقیب، برنامه‌ریزی

درحل مساله‌هایی که، در آن‌ها، صحبت برسر رسیدن به هدفی، با انجام حرکت‌های متوالی است (به‌خصوص، در موردهایی که باید روشن کرد، چه‌کسی امکان‌برد بازی را دارد)، باید برنامه وقانونی برای حرکت‌ها تنظیم کرد که، با اجرای آن، رسیدن به هدف تضمین شود؛ در این گونه مساله‌ها. درضمن، باید ثابت کرد که، هرحرکت دلخواهی که رقیب داشته باشد، موفقیت طرف موردنظر ما، حتمی است.

مساله‌های ۱۰، ۵۷، ۶۰، ۷۱، ۸۳، ۹۱، ۱۱۰، ۱۱۶، ۱۲۵، ۱۶۸، ۱۷۴، ۱۹۹، ۲۰۶، ۲۴۲، ۲۵۰، ۲۵۶، ۲۶۲، ۲۸۳، ۳۳۰، ۳۷۶، ۴۵۵.

۲۳. مثال‌ها وساختمان‌های جالب

دربسیاری ازمساله‌ها، دشوارترین بخش حل، نه اثبات، بلکه ساختن نمونه‌ای غیرعادی است، که باشرط مساله سازگار باشد ویا آن‌را نقض کند.

مساله‌های ۱۲۳، ۱۵۶، ۲۰۲، ۲۰۸، ۲۳۰، ۲۳۱، ۲۴۴، ۲۵۷، ۲۶۳، ۳۰۰، ۳۷۱، ۳۹۸، ۴۰۱، ۴۱۶، ۴۲۳، ۴۴۴، ۴۴۶، ۴۵۶، ۴۶۰.

مساله‌هایی هم که، در آن‌ها، پیدا کردن وبررسی مثال، با گام‌های زیادی به‌دست می‌آید، به‌همین مبحث مربوط‌اند (واغلب، استفاده ازروش استقرای ریاضی به‌کارمی‌آید).

مساله‌های ۶۴، ۱۴۴، ۱۵۸، ۱۸۳، ۲۰۰، ۲۱۰، ۲۳۸، ۲۷۲، ۲۸۱، ۴۰۵.

مساله‌هایی برای تمرین

دراین‌جا نزدیك به صد مساله، برای تمرین آورده‌ایم. این مساله‌ها را، دراساس به‌ردیف بحثهای ضمیمه تنظیم کرده‌ایم. بعضی ازاین مساله‌ها، ازبین مساله‌هایی‌انتخاب شده‌اندکه برای المپیادها پیشنهاد شده‌بود. برخی دیگر ازالمپیادهای شهرها ویا جمهوری‌ها برداشته شده‌اند. مساله‌هایی هم ازالمپیادهای بلغارستان ولهستان دراین‌جا آورده‌ایم.

۱. درستی این برابری را، برای هرعدد طبیعی n، ثابت کنید:

$$۱\times ۱!+۲\times ۲!+\cdots+n\times n!=(n+۱)!$$

۲. ثابت کنید، برای هرعدد طبیعی n ، داریم:

$$۱^۳+۲^۳+\cdots+n^۳=(۱+۲+\cdots+n)^۲$$

۳. این نابرابری را، برای $n>۱$ ثابت کنید:

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\cdots+\frac{۱}{۲^n}>\frac{n}{۲}$$

۴. a) n خط راست روی یك صفحه‌اند، به نحوی‌که هیچ دوتایی باهم موازی نیستند وهیچ‌سه‌تایی ازیك نقطه نمی‌گذرند. این n خط‌راست صفحه رابه چند بخش تقسیم می‌کنند؟

b) ثابت کنیدکه، n صفحه درحالت کلی (وقتی‌که هیچ سه‌صفحه‌ای موازی با یك خط راست نباشند وهیچ چهارصفحه‌ای ازیك‌نقطه نگذرند)،

فضا را به $\frac{1}{6}(n^3+5n)+1$ بخش تقسیم می‌کنند.

۵. a) صفحه، به وسیلهٔ چند دایره، به بخش‌هایی تقسیم شده است. ثابت کنید، هر بخش‌را می‌توان با یکی از دو رنگ موجود، طوری رنگ کرد که، هر دو بخشی کــه بــا یك کمان از هم جدا شده‌اند، رنگ‌هـای مختلفی داشته باشند.

b) چند «سه شاخه» روی صفحه‌ای قرار دارند (منظور از «سه‌شاخه»، شکلی است شامل سه نیم‌خط راست با راس مشترك). ثابت کنید، بخش‌هایی را که به وسیلهٔ این «سه شاخه‌ها» روی صفحه پدید می‌آیند، می‌توان با سه رنگ طوری رنگ کرد که، هر دو بخشی که در یك پاره‌خط راست یا یك نیم خط راست مشترك‌اند، رنگ‌های مختلفی داشته باشند.

۶. در جدولی که ۳ سطر و n ستون دارد، مهره‌هایی از سه رنگ را به ترتیب دلخواه قـرار داده‌ایم: n مهرهٔ سفید، n مهرهٔ قرمز و n مهرهٔ آبـی. ثابت کنید می‌توان مهره‌ها را در سطرها طوری قرارداد که، در هر ستون، از هر سه رنگ داشته باشیم.

۷. روی محیط دایره‌ای، n نقطه ــ سیاه و قرمز ــ قرارداده‌ایم. ثابت کنید، حداکثر می‌تـوان $\frac{3n}{2}-2$ وتر طوری در دایره رسم کـرد کــه دو انتهای هر یك از آن‌ها دو نقطهٔ مفروض با رنگ‌های مختلف باشند و، در ضمن، هیچ دو وتری در درون دایره باهم برخورد نکنند.

۸. ثابت کنید، هر عدد درست غیرمنفی را، تنها به‌یك‌طریق می‌تـوان بــه صورت $x+\frac{1}{2}(y^2+y)$ نوشت که، در آن، x و y عددهای درست و غیرمنفی و $x \leqslant y$ است.

۹. ثابت کنید، اگر $\alpha+\frac{1}{\alpha}$ عــددی درست بـاشد، آن وقـت عــدد $\alpha^n+\frac{1}{\alpha^n}$ به‌ازای هر عدد طبیعی n عددی درست است.

۱۰. n نفر در مسابقهٔ تنیس شرکت کرده‌اند. هر دو نفر یك‌بار با هم

روبه‌رومی‌شوند. ثابت کنید، مسابقه می‌تواند طوری به پایان برسد که نفر kام از نفر $(k+1)$ام $(k=1, 2, \ldots, n-1)$ برده باشد.

۱۱. درشهری N نفر زندگی می‌کنند که، هردو نفر آن‌ها، یا با هم دوست‌اند ویا دشمن یکدیگرند. در هر روز ممکن است، حداکثر برای یك نفر، «زندگی تازه‌ای» آغاز شود: با همهٔ دوستان خود دعوا کند وبا همهٔ دشمنان خود دوست شود. می‌دانیم، هر سه نفر از مردم این شهر، می‌توانند دوست شوند، ثابت کنید، همهٔ مردم این شهر، می‌توانند با هم دوست شوند.

۱۲. a) بزرگترین توان‌عدد ۳ را طوری پیدا کنید که، عدد $2^{3^n}+1$ بر آن بخش‌پذیر باشد.

b) ثابت کنید، عددی که دردستگاه دهدهی با 3^n رقم برابر واحد نوشته شده است، بر 3^n بخش‌پذیر و بر 3^{n+1} بخش‌ناپذیر است.

۱۳. ثابت کنید، به کمك nوزنه باوزن‌های ۱، ۳، ۹،...، 3^{n-1} گرم، می‌توان هرجسم به‌وزن $M \leqslant \frac{1}{2}(3^n-1)$ گرمی را با ترازو وزن کرد (M، عددی درست است؛ از وزنه‌ها در هر دو کفهٔ ترازو می‌توان استفاده کرد).

۱۴. پاره‌خط راستی به‌طول 3^k رابه سه بخش برابرتقسیم کرده‌ایم. بخش‌های اول وسوم را درنظر می‌گیریم و، هرکدام ازآن‌ها را، دوباره به سه بخش تقسیم می‌کنیم؛ بازهم بخش‌های اول وسوم را در هر کدام ازآن‌ها درنظر می‌گیریم و، هرکدام را، به سه‌بخش تقسیم می‌کنیم‌وغیره، تا آن‌جا که پاره‌خط‌هایی به‌طول واحد به دست آید. نقطه‌های تقسیم را در روی پاره‌خط‌های راستی که مورد تقسیم قرار گرفته‌اند، نشان می‌گذاریم. ثابت کنید، برای هر d، که از 3^n کوچکتر باشد، می‌توان دو نقطهٔ نشان‌دار پیدا کرد که فاصلهٔ بین آن‌ها، برابر d باشد.

۱۵. a) درستی این برابری را ثابت کنید:

$$(1+2)(1+2^2)(1+2^{2^2})(1+2^{2^3})\ldots(1+2^{2^n})=2^{2^{n+1}}-1$$

b) ثابت کنید، هردو عدد، از دنبالهٔ ۳، ۵، ۱۷، ...، $۲^{۲^n}+۱$، نسبت به هم اول‌اند.

۱۶. ۱۵ عدد اول، یك تصاعد حسابی ساخته‌اند. ثابت کنید، قدر نسبت تصاعد از ۳۰۰۰۰ بزرگتر است.

۱۷. عدد طبیعی x را پشت سر هم بر عددهای از ۲ تا $x-۱$ تقسیم کرده‌ایم و باقی‌مانده‌های حاصل از تقسیم‌ها را نوشته‌ایم. x را طوری پیدا کنید که، مجموع همهٔ این باقی‌مانده‌ها، برابر x شود.

۱۸. ثابت کنید، حاصل‌ضرب رقم‌های هرعدد بزرگتر از ۱۰۰، از $\frac{۲۷}{۳۷}$ این عدد تجاوز نمی‌کند.

۱۹. ۹۹ رقم ۹ را به ردیف نوشته‌ایم. ثابت کنید، می‌توان درست ۱۰۰ رقم درسمت راست این عدد نوشت، به‌نحوی که عدد ۱۹۹ رقمی حاصل، مجذور کامل یك عدد درست باشد.

۲۰. ثابت کنید، عددهای گنگ α و β وجود دارند، به نحوی که α^β، عددی گویا باشد.

۲۱. α و β عددهایی گنگ‌اند و می‌دانیم $\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=۱$. ثابت کنید، دربین عددهای $[n\alpha]$ و $[m\beta]$ (که در آن‌ها، m و n، همه عددهای درست هستند)، به هرعدد درست، درست یکبار برخورد می‌کنیم.

۲۲. ثابت کنید، n رقم اول بعدازممیز، دربسط دهدهی عدد

$$(\sqrt{۲۶}+۵)^n$$

یا همه برابر صفرند و یا همه برابر ۹.

۲۳. a) ثابت کنید، اگر $\cos\varphi$ و $\sin\varphi$ عددهایی گویا باشند، آن‌وقت $\cos n\varphi$ و $\sin n\varphi$ هم، برای هرعدد طبیعی n، گویا هستند.

b) ثابت کنید، برای هرعدد طبیعی N، می‌توان N نقطه‌را برصفحه طوری پیدا کرد که، هیچ سه نقطه‌ای روی یك خط راست نباشد و، درضمن، فاصلهٔ بین هردوتا از آن‌ها، برابر با عددی درست باشد.

۲۴. a و b را طوری پیدا کنید که هریك از سه جمله‌ای‌های

$$x^2-ax+b \quad و \quad x^2-bx+a$$

دارای ریشه‌های مختلف مثبت باشند.

۲۵. ثابت کنید، اگر عدد سه‌رقمی $\overline{abc}$ اول باشد، عدد b^2-4ac نمی‌تواند مجذور کامل یك عدد درست باشد.

۲۶. ثابت کنید، اگر $a^2+pa+q=0$ و $b^2-pb-q=0$، آن وقت معادلهٔ $x^2+2px+q=0$، دارای ریشه‌ای بین a و b است $(q\neq 0)$.

۲۷. ثابت کنید، برای هر دوعدد p و q، مجموع طول‌های پاره‌خط‌هایی ازمحور Ox، که روی آن‌ها نابرابری $|x^2+2px+2q|\leqslant 2$ برقراراست، از ۴ تجاوز نمی‌کند.

۲۸. همهٔ عددهای درست n را پیدا کنید که، به‌ازای هریك از آن‌ها:
a) n^2+1 بر $n+5$؛ b) n^5+3 بر n^2+1 بخش‌پذیر باشد.

۲۹. همهٔ چندجمله‌ای‌های $F(x)$ را پیدا کنید که، برای آن‌ها، به ازای هر x و y داشته باشیم:

$$F(x+y)=F(x)+F(y)+3xy(x+y)$$

۳۰. همهٔ شرکت کنندگان در دو راه‌پیمائی باهم جمع‌شدند(بعضی‌ها در هر دو راه‌پیمائی شرکت داشتند وبرخی دیگر، تنها دریك راه‌پیمائی). در راه‌پیمائی اول، ۶۰٪ افراد مرد بودند ودر راه‌پیمائی دوم ۷۵٪. ثابت کنید، دراجتماع آن‌ها، تعداد مردها، کمتراز تعداد زن‌ها نیست.

۳۱. کدام یك بزرگترند: $\sqrt{999}+\sqrt{1001}$ یا $2\sqrt{1000}$؟

۳۲. ثابت کنید، برای هر n، داریم:

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{15}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)<2$$

۳۳. ثابت کنید:

$$\frac{1}{15}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$$

۳۴. $x_1+x_2+\cdots+x_k=0$؛ m کوچکترین و M بزرگترین عدد، از بین عددهای x_1، x_2، ...، x_k است. ثابت کنید.

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2\leqslant -kmM$$

۳۵. مجموع عددهای غیرمنفی a و b و c برابر واحد است. ثابت کنید:

$$a^2b+b^2c+c^2a\leqslant \frac{4}{27}$$

۳۶. روی محیط دایره‌ای n عدد قرار داده‌ایم که، مجموع آن‌ها، عددی مثبت است. ثابت کنید، می‌توان از بین آن‌ها عددی را انتخاب کرد که مثبت باشد و، درضمن، ازمجموع آن با عدد بعدی، با دوعدد بعدی،...، با $n-2$ عدد بعدی، عددهایی مثبت به‌دست آید (حرکت روی‌محیط‌دایره را، درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت بگیرید).

۳۷. ثابت کنید، برای هرعدد طبیعی n، می‌توان عددی به‌صورت

$111\ldots100\ldots0$

پیدا کرد که بر n بخش‌پذیر باشد. (عددها درمبنای دهدهی نوشته شده‌اند.)

۳۸. درگروهی ۳۰ نفر وجود دارند. به هر فرد، درست k نفر از این گروه، علاقه‌مند است. کمترین مقدار k را پیدا کنید که، به ازای آن، بتوان حکم کرد که: حتماً دونفرپیدا می‌شوند که به یکدیگر علاقه‌مندند.

۳۹. عدد α مفروض است. ثابت کنید، برای هرعدد طبیعی N، می‌توان عدد درست n را طوری پیدا کرد که $0\leqslant n\leqslant N$ و، در ضمن، اختلاف $n\alpha$ با عدد درست، کمتراز $\frac{1}{N}$ باشد.

۴۰. روی‌زمین ۵ میلیارد انسان زندگی می‌کنند که کمتر از ۱٪آن‌ها، بیش‌از ۱۰۰ سال دارند. ثابت‌کنید، می‌توان ۱۰۰ نفررا پیدا کرد که باهم ودرجریان یك ثانیه به دنیا آمده‌اند.

۴۱. ۳۰ سکهٔ ۱، ۲، ۳ و ۵ کوپکی داریم. ثابت کنید از آن‌ها می‌توان چند سکه به مجموع ۳۰ کوپك انتخاب کرد.

۴۲. روی یك نوار بلندکاغذی دنباله‌ای از ۳۶۰ رقم به صورت

۱۲۳ ۱۲۳ ۱۲۳ ... ۱۲۳ ۱۲۳

نوشته‌ایم. این نوار را حداکثر به چندبخش می‌توان تقسیم کرد؛ بـه نحوی که، همهٔ عددهای بخش‌های مختلف نوار، باهم فرق داشته باشند؟

۴۳. a) ثابت کنید، از بین n عددطبیعی کوچکتراز $۲n-۱$، می‌توان دوعدد پیدا کرد، به‌نحوی که یکی بر دیگری بخش‌پذیر باشد.

b) ثابت کنید، ازبین n عدد طبیعی مختلف کوچکتر از $۲n-۲$، می‌توان سه‌عدد طوری انتخاب کرد که یکی از آن‌ها، برابر با مجموع دو عدد دیگر باشد.

۴۴. حداکثرچند نقطه می‌توان روی پاره‌خط راست به‌طول واحـد قرارداد تا روی هرپاره‌خط راست به‌طول d واقع بر پاره‌خط اصلی، بیش از $۱۰۰d^۲+۱$ نقطه وجود نداشته باشد؟

۴۵. a) دردایره‌ای به قطر ۱، چند وتر رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، اگرهرقطر دربیش‌از k نقطه وترها راقطع نکند، آن‌وقت مجموع‌طول‌های همهٔ وترها، از $۳/۱۵k$ کمتر است.

b) درمکعبی بایال به‌طول a خط شکسته‌ای وجود دارد، که‌هر صفحهٔ موازی با یکی ازوجه‌ها را، دربیش از k نقطه قطع نمی‌کند. ثابت کنید، طول خط شکسته، از $۳ka$ تجاوز نمی‌کند.

۴۶. درسطحی یك کیلومتر در یك کیلومتر، بیشه‌ای از درختـان کاج وجود داردکه از ۴۵۰۰ درخت تشکیل‌شده وقطر هردرخت ۵۰ سانتی‌متر است. ثابت کنید، روی این سطح مربعی، می‌توان ۵۰ قطعهٔ مستطیلی ۱۰ متر در ۲۰ متر طوری جدا کرد که، درآن‌ها، حتی یك درخت هم نروئیده باشد.

۴۷. ۱۰۰ نقطهٔ $A_۱$، $A_۲$، ...، $A_{۱۰۰}$ را روی محیط دایره‌ای علامت گذاشته‌ایم. کدام یك ازچهارضلعی‌های محدب بزرگترند: آن‌هایی که‌یکی از راس‌هایشان $A_۱$ است، یابقیه ؟ چقدر؟

۴۸. ازبین عددهای شش‌رقمی، کدام بزرگترند: آن‌هایی کـه قابل بیان به‌صورت حاصل‌ضرب دوعدد سه‌رقمی هستند یابقیه ؟

۴۹. a) آیا می‌توان همهٔ عددهای ده‌رقمی را که بارقم‌های ۱ و ۲ نوشته شده‌اند، طوری به دو گروه تقسیم کرد که، مجموع هردو عدد از یك گروه، دست کم دورقم برابر ۳ داشته باشد؟

b) ثابت کنید، بین عددهای n رقمی که تنها شامل رقم‌های ۱ و ۲ هستند، نمی‌توان بیش‌از $\frac{2^n}{2n+1}$ عدد طوری انتخاب کرد که، هردوتا از آن‌ها، دست کم در رقم‌های سه‌مرتبهٔ خود باهم فرق داشته باشند.

۵۰. به چندطریق می‌توان دایره‌ای‌که بــه p قطاع تقسیم شده است (p، عددی است اول) به‌وسیلهٔ n رنگ مختلف، رنگ کرد؟ (هر قطاع فقط یك رنگ دارد؛ اجباری نیست از همهٔ رنگ‌هــا استفاده شود؛ اگر ضمن دوران دایره، دو روش رنگ آمیزی، برهم منطبق شوند، آن‌ها را یکی به حساب می‌آوریم.)

b) ثابت کنید، برای هرعدد طبیعی n وهرعدد اول p، عدد n^p-n برعدد p بخش‌پذیر است (قضیه‌کوچك فرما).

۵۱. دریك فستیوال، ۶ موسیقی‌دان شرکت دارند. در هر کنسرت، بخشی ازموسیقی‌دان‌ها شرکت می‌کنند و، بقیه، در سالن بــه آن‌ها گوش می‌دهند. حداقل چند کنسرت باید داده شود تا هریك از ۶ موسیقی‌دان، به اجرای هریك ازدیگران، ازطریق سالن، گوش کرده باشند؟

۵۲. درشهر X، هرخانواده درآپارتمان‌جداگانه‌ای زندگی‌می‌کند. تصمیم گرفته می‌شود، هردوخانواده، آپارتمان‌های خودرا باهم عوض کنند (دوخانواده‌ای‌که دریك روزآپارتمان‌های خودرا با هــم عوض کرده‌اند، هیچ‌کدام درتعویض آپارتمان با یك خانوادهٔ دیگر، در آن روز شرکت نمی‌کند). ثابت کنید، هرگونه تعویض آپارتمان‌ها را، که موردنظرما باشد، می‌توان درشهر X، در دوروز انجام داد.

۵۳. ثابت کنید، ازقطعه مفتول به طول ۱۲۰ سانتی‌متر، نمی‌تــوان قالب مکعبی را با یال ۱۰ سانتی‌متر، بدون پاره کردن مفتول، درست کرد.

۵۴. ۳۰ اردك‌ماهی را دربرکه‌ای رها کرده‌ایم که، به‌تدریج یکدیگر را می‌خورند. اردك ماهی را وقتی سیر به‌حساب می‌آوریم که سه‌اردك‌ماهی

(سیر یا گرسنه) را خورده‌باشد. حداکثر چند اردک‌ماهی می‌تواند سیر بشود؟

۵۵. چگونه می‌توان ۵۰ شهر را با حداقل تعداد خط‌های هوایی به هم مربوط کرد تا این‌که بتوانیم از هرشهر به هرشهردیگر پرواز کنیم، بدون این‌که بیش‌ازحداکثر دوهواپیما، عوض کنیم؟

۵۶. هر یک از ۸ تیم فوتبال، یک بار با بقیهٔ تیم‌ها بازی می‌کند. در ضمن، دراین بازی‌ها، «مساوی» نداریم. ثابت کنید، می‌توان چهار تیم A، B، C، D را طوری پیداکرد که A از B و C و D، B از C و D، C از D برده باشند.

۵۷. روی ۲۰ کارت، رقم‌های ۰، ۱، ...، ۹ را نوشته‌ایم (هـر رقم را روی دوکارت). ثابت کنید، این‌کارت‌ها را نمی‌توان طوری درردیف هم‌جا داد که، بین دوکارت بارقم «k» درست k رقم دیگرقرارداشته باشد (برای هر $k = 0, 1, \dots, 9$).

۵۸. عددی $(2m+1)$ رقمی نوشته‌ایم. ثابت کنید، می‌توان یک‌رقم آن‌را طوری حذف کرد که درعدد $2m$ رقمی حاصل، تعداد رقم‌های ۷ در مرتبه‌های زوج، برابر با تعداد رقم‌های ۷ درمرتبه‌های فرد باشد.

۵۹. آیا می‌توان ۱۰۰ عدد فرد $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ را طوری پیدا کرد که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_{100}}=1$$

۶۰. ثابت کنید، یک صفحهٔ شطرنجی 50×50 را نمی‌توان بـه شکل‌هایی شامل چهارخانه وبه صورت T برید.

۶۱. ثابت کنید، برای هرعدد طبیعی n داریم:

$$[\sqrt{n}]+[\sqrt[3]{n}]+\dots+[\sqrt[n]{n}]=$$

$$=[\log_2 n]+[\log_3 n]+\dots+[\log_n n]$$

۶۲. اگر دونقطه روی یک‌صفحه داده شده باشد، می‌توان نقطهٔ سوم را ازطریق پیدا کردن‌قرینهٔ یکی‌ازاین نقطه‌ها نسبت به‌دیگری به‌دست آورد.

سه‌راس مربعی داده شده‌است، آیا ازاین طریق می‌توان راس چهارم این مربع را پیدا کرد؟

۶۳. قرینهٔ یکی ازراس‌های مثلث را نسبت به‌راس دیگر آن پیدا کرده‌ایم. آیا با تکرارعمل‌هایی ازاین‌گونه، می‌توان به سه‌راس یك مثلث قائم‌الزاویه یا متساوی‌الاضلاع رسید؟

۶۴. ثابت کنید، مساحت یك چندضلعی محدب که راس‌های آن در گره‌های یك صفحهٔ شطرنجی باشد، برابراست با $i+\frac{r}{2}-1$ که، در آن، i تعداد گره‌های واقع دردرون این چندضلعی و r تعداد گره‌های واقع بر ضلع‌ها وراس‌های چندضلعی است؛ طول ضلع هرخانه ازصفحهٔ شطرنجی را واحد به‌حساب می‌آوریم (قضیهٔ پیك).

۶۵ تعداد زیادی مثلث‌های متساوی‌الاضلاع برابر داریم که، در راس‌های هر کدام از آن‌ها، عددهای ۱، ۲ و ۳ را (به ترتیب دلخواهی) گذاشته‌ایم. مثلث‌ها را دریك ستون روی‌هم قرارمی‌دهیم ومجموع عددهای هرراس را می‌نویسیم، آیا ممکن است در هرراس a) عدد ۲۵؛ b) عدد ۶۰ به دست آید.

۶۶. یك چندضلعی غیرمحدب مفروض است. باآن، این‌عمل راانجام می‌دهیم: دوراس غیرمجاور A و B ازآن را انتخاب می‌کنیم، به نحوی که تمامی چندضلعی دریك طرف خط راست AB واقع باشد وقرینهٔ بخشی از محیط چندضلعی را، که بین دونقطهٔ A و B قراردارد، نسبت به‌وسط‌پاره‌خط راست AB پیدا می‌کنیم. اگر بازهم به یك چندضلعی غیرمحدب برسیم، عمل را تکرارمی‌کنیم. ثابت کنید، بعدازچندعمل، چندضلعی مفروض، به یك چندضلعی محدب تبدیل می‌شود.

۶۷. درراس‌های: a) ۷ضلعی منتظم؛ b) ۸ضلعی‌منتظم؛ c) nضلعی منتظم ($n \geqslant 9$)، کارت‌هایی با رنگ‌های سیاه یا سفید قرارداده‌ایم. آیا این درست است که، همیشه می‌توان سه‌کارت هم‌رنگ پیدا کرد، به نحوی که راس‌های یك مثلث متساوی‌الساقین را تشکیل دهند؟

۶۸. آیا می‌توان یال‌های یك‌مکعب را، با عددهای ۱، ۲، ۳، ...، ۱۲

طوری شماره‌گذاری کرد که، مجموع عددهای هر سه‌یالی که از یك راس می‌گذرد، با مجموع عددهای هر سه یال دیگری از این گونه، برابر باشد؟ آیا می‌توان یال‌های مکعب را با عددهای ۶—، ۵—، ...، ۱—، ۱، ۲، ...، ۶ طوری شماره‌گذاری کرد تا همان شرط برقرار باشد؟

۶۹. سه دایرهٔ برابر، از یك نقطه می‌گذرند. ثابت کنید، سه نقطهٔ دیگر برخورد این دایره‌ها، روی دایره‌ای با همان شعاع قرار دارند.

۷۰. روی دوخط راستی که در نقطهٔ P به‌هم رسیده‌اند، دو متحرك به طور یکنواخت و با سرعت‌های برابر حرکت می‌کنند؛ متحرك‌ها را، نقطه‌های M و N می‌نامیم. آن‌ها، در یك لحظه، از نقطهٔ P عبور نکرده‌اند. ثابت کنید، دایرهٔ محیطی مثلث MNP، همیشه از نقطهٔ ثابت دیگری (به‌جز P) می‌گذرد.

۷۱. نقطه‌های A، B، C و D روی محیط دایره‌ای چنان قرار دارند که مماس‌های مرسوم از A و C بر دایره، روی خط راست BD به‌هم می‌رسند. ثابت کنید، مماس‌های مرسوم از B و D بر دایره هم، روی خط راست AC یکدیگر را قطع می‌کنند.

۷۲. روی ضلع‌های AB و BC از مثلث ABC، مربع‌های $ABDK$ و $CBEL$ را، در بیرون مثلث ساخته‌ایم. ثابت کنید، امتداد ارتفاع BH از مثلث ABC، بر میانهٔ مثلث DBE منطبق می‌شود.

۷۳. ثابت کنید، در درون مثلثی که، زاویه‌هایی کمتر از ۱۲۰ درجه دارد، تنها یك نقطهٔ T پیدا می‌شود که، از آن‌جا، هر سه ضلع مثلث به زاویهٔ ۱۲۰ درجه دیده می‌شوند و، درضمن، مجموع فاصله‌های نقطهٔ T از سه راس مثلث، از مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ دیگری از صفحه تا سه راس، کوچکتر است.

۷۴. a، b، c و d را طول ضلع‌های متوالی یك چهارضلعی می‌گیریم. ثابت کنید، مساحت چهارضلعی از: a) $\frac{1}{2}(ab+cd)$؛ b) $(\frac{1}{2}ac+bd)$ تجاوز نمی‌کند.

۷۵. روی هر ضلع متوازی‌الاضلاع، نقطه‌ای انتخاب کرده‌ایم. ثابت

کنید، اگر مساحت چهارضلعی باراس‌های در این نقطه‌ها، برابر نصف مساحت متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌وقت، دست کم یکی از قطرهای چهارضلعی، با یکی از ضلع‌های متوازی‌الاضلاع، موازی است.

۷۶. نقطهٔ K روی قاعدهٔ ذوزنقهٔ $ABCD$ داده شده است. نقطهٔ M را روی قاعدهٔ دیگر CD در کجا انتخاب کنیم تا مساحت چهارضلعی که از برخورد مثلث‌های AMB و CKD به دست می‌آید، حداکثر مقدار ممکن باشد؟

۷۷. آیا ۷ نقطه را می‌توان روی صفحه طوری قرارداد، به نحوی که بین هر سه تا از آن‌ها، دو نقطه به‌فاصلهٔ واحد وجود داشته باشد؟

۷۸. تصویر یك شکل مسطحه، بر هر خط راستی که در صفحهٔ شکل واقع باشد، از واحد تجاوز نمی‌کند. آیا درست است که، این شکل را، می‌توان در دایره‌ای به‌قطر a) ۱؛ b) ۱/۵ جا داد؟

۷۹. متوازی‌السطوحی درفضا جابه‌جا می‌شود. ثابت کنید، «سایهٔ» آن (یعنی تصویر قائم آن برصفحهٔ افقی)، در موقعیتی دارای حداکثر مساحت است که، سه راس دلخواه ازمتوازی‌السطوح، روی یك صفحهٔ افقی واقع باشند.

۸۰. نقطه‌ای درروی سطح زمین درعرض جغرافیایی φ قرار دارد ($0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$). چه رابطه‌ای بین زمان T کوتاه‌ترین روز این نقطه و φ وجود دارد؟ زمین را می‌توان کره‌ای به‌حساب آورد که، محور دوران آن، با صفحهٔ حرکت زمین به دور خورشید، زاویهٔ معلومی برابر α می‌سازد.

۸۱. ۳۰۰ نفر، یك مستطیل 10×30 تشکیل داده‌اند (۳۰ نفر در هر ردیف و ۱۰ نفر در هرستون). از هر ردیف بلندقدترین را انتخاب می‌کنیم؛ معلوم شد در بین ۱۰ نفری که انتخاب کرده‌ایم، پتروف از همه کوتاه‌تر است. بعد، از هرستون، کوتاه قدترین را انتخاب می‌کنیم؛ در بین این ۳۰ نفر، ایوانف از همه بلندتر از آب درآمد. کدام بلندترند: پتروف یا ایوانف؟

۸۲. عددهای ۱،۲،...،۸۱ را درجدول 9×9 طوری قرار داده‌ایم

که، در هر سطر، عددها به ردیف صعودی‌اند. چه مجموع حداکثر و چه مجموع حداقل را می‌توان درستون پنجم به‌دست آورد؟

۸۳. عددهای درست غیرمنفی را درجدول $n \times n$ قرار داده‌ایم. می‌دانیم، اگر درخانهٔ محل برخورد یك سطر و یك ستون عدد صفر قرار گرفته باشد، آن‌وقت مجموع $2n-1$ عدد واقع دراین سطر و این ستون، از n کمتر نیست. ثابت کنید، مجموع همهٔ n^2 عدد، از $\frac{1}{2}n^2$ کمتر نیست.

۸۴. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$x_1+\sqrt{x_2}=1, \quad x_2+\sqrt{x_3}=1, \quad \ldots,$$

$$x_8+\sqrt{x_9}=1, \quad x_9+\sqrt{x_1}=1$$

۸۵. دونفر باهم بازی می‌کنند. جلو آن‌ها، دو کوپهٔ چوب کبریت وجود دارد. یکی از آن‌ها، یکی از کوپه‌های چوب کبریت را کنار می‌گذارد و کوپهٔ باقی‌مانده را به دو بخش تقسیم می‌کند. بعد دومی، یکی از کوپه‌ها را کنار می‌زند و کوپهٔ دیگر را به دو بخش تقسیم می‌کند و غیره. کسی می‌بازد که نتواند حرکت نوبتی خود را انجام دهد، یعنی در هر بخش، تنها یك چوب کبریت وجود داشته باشد. اگر درابتدا، دریکی از کوپه‌ها ۱۶ چوب کبریت و در دیگری ۸۸ چوب کبریت باشد و بازی را آگاهانه انجام دهند، کدام یك برنده می‌شود: آن‌که بازی را آغاز می‌کند یا رقیب او؟

۸۶. چند کوپه سنگ‌ریزه داریم. دونفر باهم بازی می‌کنند. هر بازی کن، در نوبت خود، هر کوپه‌ای را که بیش از یك سنگ‌ریزه دارد، به دو کوپهٔ کوچکتر تقسیم می‌کند. بازی تا آن‌جا ادامه پیدا می‌کند که، همهٔ کوپه‌ها، تنها از یك سنگ‌ریزه تشکیل شده باشند. کسی بازی را می‌برد که آخرین حرکت را انجام‌داده‌باشد. کسی‌که بازی را آغاز می‌کند، چگونه باید بازی کند، به‌شرطی‌که، درابتدا، در هر کوپه از ۸۰ تا ۱۲۰ سنگ‌ریزه وجود داشته باشد؟

۸۷. بین n سکه، که درظاهر خود هیچ فرقی با هم ندارند، احتمالا یك یا دوسکهٔ تقلبی وجود دارد که وزن آن‌ها با دیگران یکی نیست (ولی

ممکن است حتی یك‌سکهٔ تقلبی هم وجود نداشته‌باشد، و اگر دوسکهٔ تقلبی دربین آن‌ها باشد، این دوسکه دارای یك‌وزن هستند). می‌خواهیم با سه‌بار استفاده از ترازو (بدون استفادهٔ ازوزنه) روشن کنیم: آیا سکه‌هـای تقلبی دربین n سکه وجود دارد‌یا نه، ودرصورت وجود، سکهٔ‌تقلبی سنگین‌تر است یا سکهٔ‌واقعی؟ چگونه می‌توان این عمل را انجام داد، اگـر a) $n=۸$ ؛ b) n برابر هرعدد درست بزرگتر از ۸ باشد؟

۸۸. N دوست دریك زمان، از N خبرتازه اطلاع پیدا کردند، در ضمن هرنفردرست ازیك خبرتازه آگاه شد. آن‌ها با تلفن، خبرها را باهـم مبادله کردند. هرتلفن یك ساعت طول کشید و، ضمن آن، هرخبـر تازه‌ای ردوبدل شد. چند ساعت طول می‌کشد تا همه از همهٔ خبرها آگـاه شوند؟ جواب را در حـالت‌های a) $N=۶۴$؛ b) $N=۵۵$؛ c) $N=۱۰۰$ پیدا کنید.

مساله‌های المپیاد دهم شهرها، دور بهاری

(مارس سال ۱۹۸۸)

مساله‌های ۱ تا ۷ برای دانش‌آموزان کلاس‌های ۷ و ۸ و مساله‌های ۸ تا ۱۲، برای کلاس‌های ۹ و ۱۰.

۱. a، b و c، عددهایی درست‌اند. ثابت کنید، به شرط $a+b=c$، عدد $a^{۴}+b^{۴}+c^{۴}$، برابر است با دو برابر مجذور یک عدد درست.

۲. مثلث ABC مفروض است. قرینه‌های خط راست AB و BC نسبت به AC، یکدیگر را درنقطهٔ K قطع کرده‌اند. ثابت کنید، خط راست BK، ازمرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌گذرد.

۳. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} (x_{۲}+x_{۴}+x_{۵})^{۵}=۳x_{۱} \\ (x_{۴}+x_{۵}+x_{۱})^{۵}=۳x_{۲} \\ (x_{۵}+x_{۱}+x_{۲})^{۵}=۳x_{۳} \\ (x_{۱}+x_{۲}+x_{۳})^{۵}=۳x_{۴} \\ (x_{۲}+x_{۳}+x_{۴})^{۵}=۳x_{۵} \end{cases}$$

۴. وزنه‌هایی با وزن‌های ۱، ۲، ۴، ... دراختیارداریم (وزن هروزنه، توانی از ۲ است)، درضمن دربین آن‌ها، ممکن است وزنه‌های برابر هم وجود داشته باشد. در دوکفهٔ ترازو، وزنه‌هایی را قرارداده‌ایم، به‌نحوی

که ترازو در تعادل بایستد. می‌دانیم در کفهٔ سمت چپ، همهٔ وزنه‌ها با هم فرق دارند. ثابت کنید، تعداد وزنه‌های کفهٔ سمت راست، از تعداد وزنه‌های کفهٔ سمت چپ کمتر نیست.

۵. آیا می‌توان صفحه را با دایره‌ها طوری پوشاند که، از هر نقطه، درست ۱۹۸۸ دایره بگذرد؟

۶. واژه‌های شامل دو حرف A و B را، پشت سرهم، در نظر می‌گیریم: واژهٔ اول «A»، واژهٔ دوم «B» و واژهٔ k ام را به این ترتیب به‌دست می‌آوریم که $(k-1)$امین واژه را درسمت‌راست واژهٔ $(k-2)$ام بنویسیم، چندواژه اول این دنباله، چنین می‌شود:

«A» ، «B» ، «AB» ، «BAB» ، «$ABBAB$»

آیا ممکن است، دراین دنباله، با واژه‌ای «متناوب» برخورد کنیم، **یعنی** واژه‌ای به‌صورت $PP...P$ که، درآن، P واژه‌ای باشد که، دست کم، دوبار تکرار شده باشد؟

۷. زاویهٔ قائمه را به بی‌نهایت خانهٔ مربعی تقسیم کرده‌ایم. ردیف خانه‌هایی را درنظر می‌گیریم که با یکی از ضلع‌های زاویه، موازی‌اند (ردیف‌های «قائم» و ردیف‌های «افقی»). آیا می‌توان درهرخانه یك عدد طبیعی نوشت، به‌نحوی که درهرردیف، همهٔ عددهای طبیعی و، از هر کدام یکبار آمده باشند؟

۸. دو قاعدهٔ ذوزنقه چه نسبتی داشته باشند تا خط راستی وجود داشته باشد که از۶ نقطهٔ برخورد آن باقطرها، ساق‌ها وامتدادهای دوقاعده، ۵ پاره‌خط راست برابر به دست آید؟

۹. چندجمله‌ای با ضریب‌های درستی در اختیار داریم که ۱ و ۲ ریشه‌های آن‌هستند. ثابت کنید، می‌توان ضریبی ازچندجمله‌ای را پیدا کرد که از ۱ــ کوچکتر باشد.

۱۰. کارت‌هایی دراختیار داریم که، روی هر کدام از آن‌ها، یکی‌از شماره‌های ۱ تا ۳۰ نوشته شده است (ممکن است شماره‌ای تکرار شده باشد). هردانش‌آموزی، یکی ازکارت‌ها را برمی‌دارد. معلم می‌تواند از گروهی دانش‌آموزان، شمارهٔ‌کارت را بپرسد واز آن‌ها بخواهد تا دست

خودرا بلند کنند (ممکن است، این گروه شامل یک نفر باشد). معلم دست کم ازچند گروه باید سئوال کند تا شمارهٔ کارت‌های همهٔ دانش آموزان را بداند؟ (ضرورتی ندارد، تعداد دانش آموزان، ۳۰ باشد.)

۱۱. مکعبی ۲۰ × ۲۰ × ۲۰ از ۲۰۰۰ قوطی کبریت ۱ × ۲ × ۲ تشکیل شده‌است. ثابت کنید، می‌توان آن را با سوزن طوری سوراخ کرد که سوزن، ازمکعب بگذرد، ولی به قوطی کبریت‌ها فرونرود.

۱۲. واژه‌هایی را درنظر می‌گیریم که با دو حرف A و B درست شده‌اند. نخستین واژه دراین دنباله «A» و kامین واژه از واژهٔ (k — ۱)ام بااین قاعده به‌دست آمده است. هرحرف A به AAB وهرحرف B به A تبدیل می‌شود. به سادگی دیده می‌شود که، هرواژه، به صورت زیر آغاز می‌شود و، درضمن، دنباله‌ای نامتناهی ازحرف‌ها به دست می‌آید.

$$AAB\,AAB\,AAAB\,AAB\,AAAB\,\ldots$$

a) درکجا ازاین دنباله، به هزارمین حرف A برخورد می‌کنیم؟

b) ثابت کنید، این دنباله نامتناوب است.

سیاههٔ نمادها

$\mathbf{N}$: مجموعهٔ عددهای طبیعی

$\mathbf{Z}$: مجموعهٔ عددهای درست

$\mathbf{R}$: مجموعهٔ عددهای حقیقی

$a \in A$: عضو a متعلق به مجموعهٔ A است

$A \cap B$: اشتراك مجموعه‌های A و B

$A \cup B$: اجتماع دو مجموعهٔ A و B

$\overline{a_1 a_2 \cdots a_n}$: عدد n رقمی در دستگاه دهدهی

$a \equiv b \pmod{m}$: (a نسبت بـه مدول m با b هم نهشت است)
باقی‌مانده‌های تقسیم دوعدد درست a و b بر m یکی است؛ تفاضل $a-b$ بر m بخش‌پذیر است.

$n!$: (فاکتوریل n) حاصل‌ضرب $n \times \cdots \times 2 \times 1$؛ $1 = !1 = !0$

C_n^k : ضریب بسط دو جمله‌ای برابر با $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

$[x]$: بخش درست عدد x (بزرگترین عدد درستی که از x تجاوز نمی‌کند).

$\max\limits_i x_i = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$: بزرگترین عدد از بین عددهای $x_1، x_2، \ldots، x_n$

$\min\limits_i x_i = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$: کوچکترین عـدد از بین عددهای

$x_1، x_2، \ldots، x_n$

$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{1 \leqslant x \leqslant n} x_i$: مجموع $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

AB : پاره‌خط راست با دوانتهای A و B ؛ طول این پاره‌خط، نیم خط راست به مبداء A که از B می‌گذرد؛ خط راستی که از دونقطهٔ A و B می‌گذرد.

$AB : CD = \frac{AB}{CD}$: نسبت طول‌های دوپاره‌خط راست AB و CD

$\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$: بردار به مبداء A وانتهای B

$\mathbf{u.v} = \mathbf{uv}$: حاصل‌ضرب اسکالر (عددی) دوبردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$

$\widehat{ABC} = (\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}})$: زاویهٔ ABC ، مقداراین زاویه (مقدارزاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$)

$\overset{\frown}{AB}$ $(\overset{\frown}{AMB})$: کمانی بـا دو انتهای A و B (که از نقطـهٔ M می‌گذرد)

S_{ABC} (S_{ABCD}) : مساحت‌مثلث ABC (مساحت‌چهارضلعی $ABCD$).

برخی از اثرهای مترجم این کتاب

I. ریاضیات خالص

۱. روش‌های جبر (دو جلد تألیف)
۲. دوره اختصاصی جبر مقدماتی
۳. مثلثات مستقیم الخط و کروی
٤. هندسه غیراقلیدسی
۵. انعکاس
٦. نامساوی‌ها
۷. ورودی به منطق ریاضی
۸. روش مختصاتی و هندسهٔ چهار بعدی
۹. نظریهٔ مجموعه‌ها
۱۰. استقراء ریاضی
۱۱. مثلثات
۱۲. جبر، از آغاز تا پایان
۱۳. ماکزیمم و می‌نیمم بدون استفاده از مشتق (با آقای عادل)
۱٤. جبر برداری (با آقای عادل)
۱۵. روش‌های مثلثات (با آقای فیروزنیا)
۱٦. عبارت‌های متقارن در جبر مقدماتی (تألیف)
۱۷. قدرمطلق در حوزهٔ عددهای حقیقی (تألیف)
۱۸. بخش درست عدد (تألیف)
۱۹. تابع‌های متناوب (تألیف)
۲۰. روش استقرای ریاضی (تألیف)
۲۱. بسط دو جمله‌ای (تألیف)
۲۲. ورودی به آنالیز ترکیبی (تألیف)
۲۳. ورودی به نظریهٔ احتمال (تألیف)
۲٤. تربیع دایره و غیرجبری بودن عدد پی
۲۵. هندسهٔ پرگار
۲٦. بخش‌پذیری عددها و مفهوم آلگوریتم
۲۷. نقطه‌های بی‌حرکت
۲۸. محاسبهٔ برداری (تألیف)

۲۹. همه چیز دربارهٔ سه جمله‌ای درجه دوم (تألیف)
۳۰. مسیر ریاضات جدید
۳۱. نظریه اعداد (با آقای قوام‌زاده)
۳۲. تقارن در جبر
۳۳. نظریهٔ ساختمان‌های هندسی
۳٤. آنالیز ریاضی (در سه جلد، با آقای امامی)
۳۵. ورودی به نظریهٔ مجموعه‌ها
۳٦. درباره حد
۳۷. منحنی‌ها در فضا
۳۸. ریاضیات محدود

II. **مساله‌ها**

۳۹. مسائل مسابقات ریاضی
٤۰. مسائل کنکورهای شوروی
٤۱. گزیده‌ای از مساله‌های دشوار ریاضی
٤۲. مسائل و تمرینات آنالیز ریاضی
٤۳. ۲۵۰ مسالهٔ حساب
٤٤. آمادگی برای المپیادهای ریاضی
٤۵. المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف
٤٦. المپیادهای بین‌المللی (با آقای عادل)
٤۷. المپیادهای ریاضی در مجارستان (با آقای عادل)
٤۸. المپیادهای ریاضی در شوروی
٤۹. ۱۷۵ مسالهٔ منطقی
۵۰. مسائل تاریخی ریاضیات
۵۱. تصاعدها و لگاریتم در مساله‌های عملی
۵۲. مساله‌های ریاضی، آسان ولی...
۵۳. المپیادهای ریاضی در آمریکا (با آقای عادل)
۵٤. گزیده‌ای از مساله‌ها و قضیه‌های ریاضیات مقدماتی (با آقای عادل)

III. **ریاضیات کاربردی**

۵۵. آنالیز برداری و نظریهٔ میدان‌ها
۵٦. ریاضیات کاربسته (تألیف و ترجمه)

IV. **ریاضیات به زبان ساده و سرگرمی‌های ریاضی**

۵۷. داستان مجموعه‌ها
۵۸. داستان‌های ریاضی
۵۹. بازی با بی‌نهایت
٦٠. سرگرمی‌های جبر
٦١. سرگرمی‌های هندسه
٦٢. سرگرمی‌های ریاضی
٦٣. در قلمرو ریاضیات
٦٤. اندیشهٔ ریاضی
٦٥. درپی فیثاغورث
٦٦. سرگرمی‌های توپولوژی

V. تاریخ ریاضیات، فلسفهٔ ریاضی و آموزش ریاضی

٦٧. ریاضیات، محتوی، روش و اهمیت آن (تاکنون دو جلد)
٦٨. اواریست گالوا، ریاضی‌دان و انقلابی فرانسوی
٦٩. من ریاضی‌دانم
٧٠. پویایی ریاضیات
٧١. لباچوسکی و هندسهٔ نااقلیدسی
٧٢. آفرینندگان ریاضیات عالی
٧٣. خلاقیت ریاضی
٧٤. هندسه در گذشته و حال
٧۵. تاریخ حساب
٧٦. آنالیز ریاضی
٧٧. ریاضیات در شرق
۸۷. لگاریتم (تاریخ استدلالی لگاریتم)

VI. برخی کتاب‌های دیگر

٧٩. سرگذشت حرکت
۸٠. نظریهٔ نسبیت در مساله‌ها و تمرین‌ها
۸۱. علم، جامعه و انسان (در سه جلد)
۸۲. ژان هوس و جنبش هوسیسم (تألیف)
۸۳. جنبش مزدک و مزدکیان (تألیف)
۸٤. یک روز زندگی پسرک قبطی
۸۵. داستان‌های علمی
۸٦. اخلاق و انسان

نشر توسعه منتشر کرده است:

۱ـ روش‌های مثلثات
تألیف: پرویز شهریاری ـ احمدفیروزنیا (با همکاری نشر فردوس)
۲ـ مسائل ریاضی المپیادهای اتحاد شوروی
ترجمهٔ: پرویز شهریاری
۳ـ تحول عصر (مسائل ایران و جهان معاصر)
تألیف: موسوی خوزستانی
٤ـ مکانی به وسعت هیچ (داستان بلند)
تألیف: فتح‌اله بی‌نیاز
۵ـ الگویی برای توسعه اقتصادی ایران
تألیف: دکترابراهیم رزاقی (استاد اقتصاد دانشگاه تهران)
٦ـ ره آورد سرمایه‌داری تجاری ایران
تألیف: موسوی خوزستانی
۷ـ حلقهٔ نفوذناپذیر گرگ‌های خاکستری (داستان بلند)
تألیف: فتح‌اله بی‌نیاز

کتاب‌های زیر چاپ:

۱ـ منشور توسعه (کتاب توسعه)
مجموعه مقالات و نظریات در حوزهٔ مسائل فرهنگی، اجتماعی و اقتصادیّ توسعه
توسط جمعی از نویسندگان
۲ـ دردناک‌ترین داستان عالم (مجموعه داستان‌های کوتاه)
تألیف: فتح‌اله بی‌نیاز
۳ـ اقتصاد توسعه
تألیف: دکتر ابراهیم رزاقی
٤ـ در انتهای دراز دره‌ای بی‌نام و نشان (داستان بلند)
تألیف: فتح‌اله بی‌نیاز