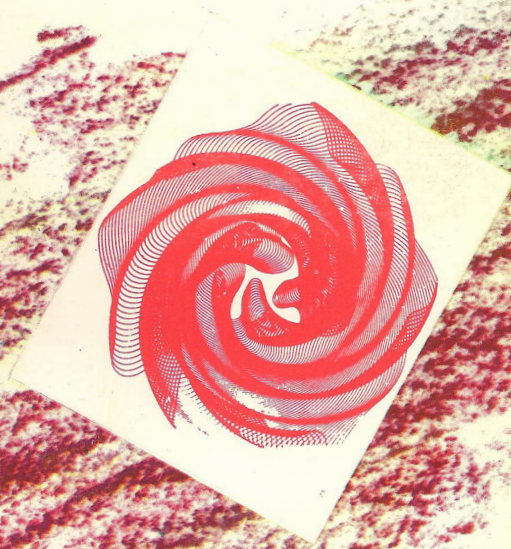


مسأله‌های المپیادهای ریاضی

در کشورهای مختلف

(با حل مسأله‌ها)

ترجمه پرویز شهریاری



مسأله‌های المپیادهای ریاضی (در کشورهای مختلف)

ترجمه: پرویز شهریاری



فهرست

حل	صورت مسأله	فصل اول. حساب
۱۰۵	۱۱	۱§. بخش پذیری عددهای اول و عددهای مرکب
۱۲۵	۱۵	۲§. ریشه‌های درست و گویا در معادله‌ها
۱۵۰	۲۹	۳§. فاکتوریل‌ها و ضرب‌های دوجمله‌ای
۱۶۶	۲۲	۴§. مجموعه‌های عددی
۱۹۲	۲۶	۵§. ویژگی‌های مختلف عددها
فصل دوم. معادله و نامعادله		
۲۱۳	۲۹	۶§. معادله‌ها و دستگاه‌ها
۲۲۷	۳۲	۷§. نابرابری‌ها
۲۴۵	۳۶	۸§. بخش درست عدد
فصل سوم. هندسه روی صفحه		
۲۶۱	۳۸	۹§. مثلث
۲۸۳	۴۳	۱۰§. دایره
۳۱۱	۴۷	۱۱§. چندضلعی
۳۲۹	۵۰	۱۲§. نقطه‌ها، پاره‌خط‌ها و خط‌های راست
۳۴۶	۵۴	۱۳§. نابرابری‌های هندسی
۳۷۰	۵۸	۱۴§. مسأله‌های هندسی مربوط به اکستریمم

فصل چهارم. هندسه فضایی

صورت مسأله حل

۱۵§. چهاروجهی‌ها

۳۸۶ ۶۰

۱۶§. چندوجهی، کره و مجموعه‌های دیگر

۴۰۴ ۶۴

فصل پنجم. آنالیز

۱۷§. دنباله‌ها

۴۳۳ ۶۹

۱۸§. اکستریم‌ها

۴۵۲ ۷۳

۱۹§. ویژگی‌های مختلف تابع

۴۶۲ ۷۵

۲۰§. معادله‌های تابعی

۴۷۲ ۷۸

فصل ششم. چندجمله‌ای‌ها

۲۱§. ریشه‌های چندجمله‌ای

۴۹۴ ۸۳

۲۲§. بخش‌پذیری و برابری چندجمله‌ای‌ها

۵۰۹ ۸۶

۲۳§. ویژگی‌های گوناگون چندجمله‌ای‌ها

۵۲۸ ۹۱

فصل هفتم. گوناگون

۲۴§. مجموعه‌ها و زیرمجموعه‌ها

۵۴۳ ۹۵

۲۵§. مسأله‌هایی با استفاده از گراف‌ها

۵۵۴ ۹۷

۲۶§. مسأله‌های مختلف

۵۶۲ ۹۹

ضمیمه‌ها

ضمیمه الف. توضیح‌هایی دربارهٔ برخی مسأله‌ها

۵۷۹

ضمیمه ب. مسأله‌های ریاضی در کشورهای مختلف

۵۸۴

ضمیمه ج. آگاهی‌های کمکی

۶۱۰

ضمیمه د. فهرست نمادها

۶۴۳

پیش‌گفتار

در بسیاری از کشورهای جهان، برای علاقه‌مند کردن دانش‌آموزان به ریاضیات، المپیادهای ریاضی به‌طور منظم برگزار می‌شود. تجربه نشان داده است که، برگزاری المپیادها، نقش جدی در تبلیغ دانش ریاضی در بین جوانان داشته است. به جز این، المپیادهای بین‌المللی ریاضی را، باید شکلی از همکاری دانشمندان کشورهای مختلف دانست. به همین مناسبت است که جنبش المپیادی، در تمامی جهان در زمان ما، روبه‌گسترش و تکامل است.

تعداد کشورهایی که المپیادهای ملی خود را تدارک می‌بینند، سال به سال رو به افزایش است و المپیادهای بین‌المللی ریاضی هم، از سال ۱۹۵۹ برگزار می‌شوند. تعداد کشورهایی که در المپیادهای بین‌المللی شرکت می‌کنند، مرتباً رو به افزایش است و از ۵ تا ۷ کشوری که در سال‌های نخست شرکت داشتند، به بیش از ۳۰ کشور رسیده است. در دههٔ اخیر، انجام مسابقه‌های ریاضی

منطقه‌ای هم، مورد توجه قرار گرفته است و مرتباً به تعداد آنها افزوده می‌شود. المپیادهای ریاضی، در برنامه‌های درسی بسیاری از کشورها هم اثر گذاشته است و موجب پیدایش نشریه‌های ریاضی در کشورهای مختلف شده است. در کشور شوروی، چه در زمینهٔ برگزاری المپیادهای ریاضی دبیرستانی و چه در زمینهٔ چاپ کتاب‌ها و نشریه‌های مناسب، سنتی دیرینه و پر بار وجود دارد و کشور شوروی، همیشه یکی از موفق‌ترین کشورها، در المپیادهای بین‌المللی بوده است.

در کتاب حاضر، جالب‌ترین (به عقیدهٔ نویسندگان) و یا نمونه‌ای‌ترین مسأله‌های المپیادهای کشورهای مختلف (به جز اتحاد شوروی) جمع‌آوری شده است. در این کتاب، از مسأله‌های المپیادهای ملی ۱۹ کشور و، همچنین، مسأله‌های پیشنهادی هیأت داوران المپیادهای بین‌المللی ریاضی در سال‌های ۱۹۷۶، ۱۹۷۷، ۱۹۷۹ و ۱۹۸۱ تا ۱۹۸۳ مسابقه‌های بین‌المللی ریاضی در لوکزامبورگ و فنلاند، المپیادهای کشورهای شبه جزیرهٔ بالکان در سال ۱۹۸۴ و المپیادهای سنتی «اطریش - لهستان» استفاده شده است. بیش از همه، به مسأله‌های المپیادهای انگلستان، امریکا، بلغارستان، چکوسلواکی، رومانی و یوگسلاوی توجه داشته‌ایم. در مورد المپیادهای مجارستان و لهستان، بیشتر به مسأله‌های سال‌های اخیر توجه داشته‌ایم، چرا که

مسئله‌های المپیادهای سال‌های قبل، قبلاً چاپ شده است؛ به‌طور کلی، در مورد همه کشورهای، بیشترین استفاده را از المپیادهای سال‌های اخیر آنها کرده‌ایم.

این کتاب بیشتر برای دانش آموزان کلاس‌های آخر دبیرستان تنظیم شده است و هدف آن، بالابردن سطح دانش و آگاهی ریاضی آنهاست. بسیاری از مسئله‌های این کتاب، چندان دشوار نیستند، ولی روی هم، همه اندیشه‌های مطرح شده در المپیادها را شامل می‌شوند. به همین مناسبت، امیدواریم، دانش آموزانی که در المپیادهای ریاضی تجربه‌ای ندارند، بتوانند بهره‌ زیادی از این کتاب ببرند. مسئله‌های دشوارتر را با علامت ستاره مشخص کرده‌ایم و دانش آموزان می‌توانند با پرداختن به آنها، نیروی خود را در حل مسئله‌ها بیازمایند. بیش از همه، باید مسئله‌هایی را مورد توجه قرار داد که موضوع آنها، در کتاب‌های درسی به صورتی گذرا مطرح شده است و یا اصولاً در کتاب‌های درسی دبیرستانی وجود ندارند.

همه مسئله‌ها را حل کرده‌ایم: حل بعضی از مسئله‌ها را از کتاب‌هایی برداشته‌ایم که در کشورهای دیگر چاپ شده‌اند و برخی دیگر (به‌خصوص حل مسئله‌های هندسی) را، خودمان حل کرده‌ایم. ولی توصیه ما به خواننده این است که، خود به‌طور مستقل و بدون مراجعه به راه‌حل‌های کتاب، تمامی تلاش را در حل مسئله‌ها به‌کار برد و تنها

برای مقایسهٔ راه حل خود با راه حل کتاب، به آن‌ها مراجعه کند. در ضمن، خواننده باید در برخی موردها، راه حل‌هایی را که به تفصیل داده نشده است، خود کامل کند.

در هر بند مسأله‌ها به ردیفی آمده است که، به تقریب، از ساده به دشوار باشد و، در ضمن، از اندیشه‌ای که برای يك مسألهٔ آهسته کار رفته است، بتوان برای برخی از مسأله‌های بعدی استفاده کرد.

ضمن انتخاب مسأله‌ها، نویسندگان به این جنبهٔ کار توجه داشته‌اند که خواننده را با روش‌های نامتعارف حل مسأله‌ها که اغلب با آن‌ها رو به رو می‌شوند، آشنا کنند، اندیشه‌ها و حقیقت‌های تازه‌ای را برای آن‌ها روشن کنند و قدرت تفکر آن‌ها را بالا ببرند. به همین مناسبت، در برخی جاها، از اندیشه‌هایی استفاده شده است که، تا حدی، از برنامهٔ ریاضی دبیرستانی خارج می‌شود. این اندیشه‌ها را، با تفصیل بیشتری، در ضمیمهٔ آخر کتاب آورده‌ایم.

ساختار کتاب

کتاب از سه بخش تشکیل شده است. در بخش اول، صورت مسأله‌ها داده شده است. این بخش شامل هفت فصل و، هر فصل، شامل چند بند است. فصل‌ها و بندها، بر حسب موضوع‌ها تنظیم شده‌اند. البته، این تقسیم‌بندی را باید مشروط دانست، زیرا بسیاری از

مسئله‌ها را می‌توان در بندها یا فصل‌های مختلفی جا داد.
در آغاز هر بند، به آگاهی‌هایی اشاره شده است که
در زمینه ج آمده و آشنائی با آنها، برای درک صورت
مسئله‌ها و یا حل آنها، ضروری است.

بعد از شماره هر مسئله، نام کشوری که مسئله در یکی
از المپیادهای آن طرح شده است (همراه با سال آن)
آمده است، در کنار شماره مسئله‌های دشوارتر، علامت
ستاره را گذاشته‌ایم. «پکن» به معنای المپیادی است که در
پکن جریان داشته و «نیویورک» به معنای مجله نیویورک
است که برای کالج‌های دو ساله منتشر می‌شود. مسئله‌های
مسابقه‌های بین‌المللی، با نام‌های «اتریش - لهستان»
(مسابقه‌های مشترک دانش‌آموزان لهستان و اتریش)،
«بالکان» (مسابقه‌های بین دانش‌آموزان کشورهای بالکان)،
«مسابقه بین‌المللی» (مسابقه بین‌المللی ریاضی سال ۱۹۸۰)
آمده است. سرانجام، مسئله‌هایی که به وسیله هیأت‌دوران
المپیادهای بین‌المللی ریاضیات طرح شده‌اند، با عنوان
«هیأت‌دوران» ذکر شده است؛ نام کشور طرح‌کننده و
سال طرح آن‌هم، به دنبال این عنوان یادآوری شده است.
با کمال تأسف، نویسندگان کتاب، از نام کشورهای که
مسئله‌هایی برای المپیاد بین‌المللی ریاضی سال ۱۹۸۱ طرح
کرده‌اند، اطلاعی ندارند.

در بخش دوم، مسئله‌های بخش اول حل شده است.

بخش سوم هم، شامل چند ضمیمه است.
صورت برخی از مسأله‌ها، با صورت اصلی آنها،
اندکی تفاوت دارد. این تغییرها را، در ضمیمه الف منعکس
کرده‌ایم.

در ضمیمه ب، به صورتی کوتاه، از مسابقه‌های ریاضی
مختلفی که در کشورهای گوناگون در جریان است،
گفت و گو کرده‌ایم؛ همچنین، صورت مسأله‌هایی از
المپیادهای سال ۱۹۸۵-۱۹۸۶ را که در اختیار مؤلفان
بوده است آورده‌ایم. حل این مسأله‌ها در این کتاب نیست
و از خواننده می‌خواهیم، خود به حل آنها بپردازد.

در ضمیمه ج، مفهوما و گزاره‌های اصلی را که
برای درك دو بخش اول و دوم لازم است، آورده‌ایم و،
سرانجام، در ضمیمه آخر، فهرستی از نمادهای مورد استفاده
کتاب، آمده است.

مسأله‌ها

فصل اول

حساب

۱۵. بخش‌پذیری. عددهای اول و عددهای مرکب

(ضمیمهٔ ج، تعریف‌های ۱۱ تا ۱۶ و ۱۹ و

قضیه‌های ۱، ۴، ۹ تا ۱۲، ۱۴، ۱۸، ۱۹،

۲۱، ۲۳ و ۲۵ را ببینید)

۰۱. (انگلستان، ۱۹۶۸). a_1, a_2, \dots, a_n عددهایی درست‌اند؛ $b_1,$

b_2, \dots, b_n هم همان عددها، منتهی به‌زدیف دیگری هستند. ثابت کنید، عدد

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_n - b_n)$$

عددی زوج است.

۰۲. (نیویورک، ۱۹۷۶). a, a_0, a_1, \dots, a_n را عددهای درست

دلیخواهی فرض کنید. آیا این حکم درست است که، عدد درست

$$\sum_{k=0}^n (a^2 + 1)^{2k} a_k$$

وقتی و تنها وقتی بر $a^2 + a + 1$ (یا بر $a^2 - a + 1$) بخش‌پذیر است که عدد

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$$

بر $a^2 + a + 1$ (و یا بر $a^2 - a + 1$) بخش پذیر باشد؟

۰۳. (چکوسلواکی، ۱۹۵۲؛ انگلستان، ۱۹۶۵). در جدول «مثلثی»

بی پایان

			$a_{1,0}$			
		$a_{2,-1}$	$a_{2,0}$	$a_{2,1}$		
	$a_{3,-2}$	$a_{3,-1}$	$a_{3,0}$	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	
	$a_{4,-3}$	$a_{4,-2}$	$a_{4,-1}$	$a_{4,0}$	$a_{4,1}$	$a_{4,2}$

$a_{1,0} = 1$ و هر عدد $a_{n,k}$ در n امین سطر ($n \in \mathbb{N}, n > 1$) و k امین جا ($|k| < n, k \in \mathbb{Z}$)، برابر است با مجموع

$$a_{n-1,k-1} + a_{n-1,k} + a_{n-1,k+1}$$

یعنی سه عدد از سطر قبل (اگر یکی از این عددها در جدول وجود ندارد، به جای آن، صفر به حساب می آوریم). ثابت کنید در هر سطر، با آغاز از سطر سوم، دست کم يك عدد زوج وجود دارد.

۰۴. (چکوسلواکی، ۱۹۷۱). ثابت کنید، برای هر عدد اول $p > 2$ ،

صورت m از کسر

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1} \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

بر p بخش پذیر است.

۰۵. (نیویورک، ۱۹۷۵). ثابت کنید، برای هر عدد درست $n > 1$ ، عدد

$$n^2 - n^2 + n - 1$$

۰۶. (بلغارستان، ۱۹۷۵). ثابت کنید، در بین عددهای طبیعی بزرگتر

از واحد تنها يك «سه تایی» می توان پیدا کرد که، حاصل ضرب هر دو عدد

از آن‌ها به اضافه ۱، بر سومی بخش پذیر باشد.

۰۷. (انگلستان، ۱۹۷۶). ثابت کنید، به ازای هر مقدار $n \in \mathbb{Z}^+$ ، عدد

$17 + 19 \times 8^n$ ، عددی مرکب (غیر اول) است.

۰۸. (کانادا، ۱۹۸۳). ثابت کنید، برای هر عدد اول p ، بی نهایت عدد

به صورت $n - 2^n$ وجود دارد ($n \in \mathbb{N}$) که بر p بخش پذیر است.

۰۹. (چکوسلوواکی، ۱۹۷۳). ثابت کنید، بی نهایت مقدار برای $n \in \mathbb{N}$

پیدا می شود، به نحوی که هر عدد به صورت $n + m^4$ ($m \in \mathbb{N}$)، عددی مرکب باشد.

۰۱۰. (چکوسلوواکی، ۱۹۷۹)، همه عددهای طبیعی $n > 2$ را پیدا

کنید که از عدد ۱۰۰۰۰۰۰۰۰ تجاوز نکنند و دارای ویژگی زیر باشند: هر

عدد m ، که نسبت به n اول است و درنا برابری $1 < m < n$ صدق می کند،

عددی اول است.

۰۱۱. (جمهوری فدرال آلمان، ۱۹۷۷). $a > 1$ ، عددی طبیعی است.

عددهایی را پیدا کنید که مقسوم علیه های دست کم یکی از عددهای زیر

باشند:

$$a_n = \sum_{k=0}^n a^k \quad (n \in \mathbb{N})$$

۰۱۲. (نیویورک، ۱۹۷۴). برای دو عدد طبیعی مفروض $m < n$ ، ثابت

کنید، هر مجموعه ای از n عدد درست متوالی، شامل دو عدد مختلف است،

به نحوی که حاصل ضرب آن‌ها بر mn بخش پذیر است.

۰۱۳. (نیویورک، ۱۹۷۶). فرض کنید $f(n) \in \mathbb{N}$ ، کوچکترین عددی

باشد که، برای آن، مجموع $\sum_{k=1}^{f(n)} k$ ، بر n بخش پذیر است. ثابت کنید، برای بری

$f(n) = 2n - 1$ ، برای عددهای به صورت $n = 2^m$ ($m \in \mathbb{Z}^+$)، و تنها برای

آن‌ها، برقرار است.

۰۱۴. (هیأت داوران، جمهوری فدرال آلمان ۱۹۷۹؛ بافارستان،

۱۹۸۱). ثابت کنید، اگر عدد $1 + 2^n + 4^n$ ، به ازای مقداری از $n \in \mathbb{N}$ ،

اول باشد، آن وقت $n = 3^k$ ($k \in \mathbb{Z}^+$).

۰۱۵ (رومانی، ۱۹۷۸). فرض کنید، عددهای طبیعی m و n چنانند

که، برای هر مقدار $k \in \mathbb{N}$ ، بزرگترین مقسوم علیه مشترك دو عدد $11k - 1$ و m ، با بزرگترین مقسوم علیه مشترك دو عدد $11k - 1$ و n ، برابر باشند. ثابت کنید، برای مقداری مثل $l \in \mathbb{Z}$ ، برابری $m = 11^l n$ برقرار است.

۰۱۶ (نیویورک، ۱۹۷۵). بزرگترین مقسوم علیه مشترك چهار عدد

درست a, b, c و d برابر است با ۱. آیا این حکم درست است که: هر مقسوم علیه اول عدد $ad - bc$ ، وقتی و تنها وقتی مقسوم علیهی از عددهای a و c است که، به ازای هر مقدار $n \in \mathbb{Z}$ ، عددهای $an + b$ و $cn + d$ ، نسبت به هم اول باشند؟

۰۱۷* (امریکا، ۱۹۸۲). ثابت کنید، می توان عدد $k \in \mathbb{N}$ را طوری

پیدا کرد که، به ازای هر مقادیر $n \in \mathbb{N}$ ، عدد $1 + 2^n \cdot k$ ، عددی مرکب باشد.

۰۱۸* (رومانی، ۱۹۷۸). ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی $a > 2$ ،

بی نهایت عدد $n \in \mathbb{N}$ می توان پیدا کرد، به نحوی $1 - a^n$ بر n بخش پذیر باشد. آیا همین گزاره در مورد $a = 2$ هم درست است؟

۰۱۹ (هیأت داوران، بلژیک، ۱۹۸۳). ثابت کنید، بی نهایت عدد $n \in \mathbb{N}$

وجود دارد، به نحوی که به ازای همه مقادیرهای $1 - n, 2, \dots, k = 1$ ، در نابرابری

$$\frac{\sigma(n)}{n} > \frac{\sigma(k)}{k}$$

صدق کنند، منظور از $\sigma(n)$ ، مجموع همه مقسوم علیه های عدد n است.

۰۲۰* (مجارستان، ۱۹۸۲). برای عدد طبیعی مفروض $k > 1$ ، کوچکترین

مضرب مشترك عددهای $1, n, n+1, \dots, n+k$ را $Q(n)$ ($n \in \mathbb{N}$) با نشان می دهیم.

ثابت کنید، بی نهایت عدد $n \in \mathbb{N}$ می توان پیدا کرد، به نحوی که نابرابری $Q(n) > Q(n+1)$ برقرار باشد.

۰۲۱* (اتریش، ۱۹۷۳). ثابت کنید، برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ ، این

نابرابری برقرار است:

$$0 < \sum_{k=1}^n \frac{g(k)}{k} - \frac{2n}{3} < \frac{2}{3}$$

که در آن، $g(k)$ ، عبارت است از بزرگترین مقسوم علیه فرد عدد k .
 ۲۳* (هیأت داوران، یوگسلاوی، ۱۹۷۹). $h(n)$ را بزرگترین مقسوم علیه اول عدد $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$) می‌گیریم. آیا مجموعه‌ای نامتناهی از مقادیرهای n وجود دارد که با شرط زیر سازگار باشند:

$$h(n) < h(n+1) < h(n+2)$$

۲۳* (هیأت داوران، یوگسلاوی، ۱۹۷۰) تعداد مقسوم علیه‌های اول عدد طبیعی $n > 1$ را با $w(n)$ نشان می‌دهیم. ثابت کنید، برای مجموعه‌ای نامتناهی از مقادیرهای n ، داریم:

$$w(n) < w(n+1) < w(n+2)$$

۲۳. ریشه‌های درست و گویا در معادله‌ها

(ضمیمه ج، تعریف‌های ۱۱، ۱۲، ۱۴ تا

۱۶ و قضیه‌های ۲، ۴، ۵، ۸، ۱۰، ۱۲،

۱۶، ۱۸، ۲۱ تا ۲۳، ۲۵، ۶۰، ۶۱ را

ببینید).

۲۴ (نیویورک، ۱۹۷۷). ریشه‌های طبیعی معادله $x^2 + 1 = y^2$ را

پیدا کنید.

۲۵ (انگلستان، ۱۹۷۲). ثابت کنید، برای عددهای درست a, b, c, d

$(a \neq b)d$ ، معادله

$$(x+ay+c)(x+by+d) = 2$$

بیش از چهار جواب، در مجموعه عددهای درست، ندارد. به‌ازای چه

مقادیرهایی از a, b, c, d ، چهار جواب مختلف دارد؟

۲۶ (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۳). جواب‌های درست این

معادله را پیدا کنید:

$$x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2$$

۲۷ (رومانی، ۱۹۸۱). جواب‌های درست این معادله را پیدا کنید:

$$x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$$

۰۲۸. (یوگسلاوی، ۱۹۷۴). معادله

$$x^2 + xy + y^2 = x^2 y^2$$

را، در مجموعه عددهای درست، حل کنید.

۰۲۹. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۴). این معادله را، در

مجموعه عددهای درست، حل کنید:

$$(x+2)^4 - x^4 = y^3$$

۰۳۰. (امریکا، ۱۹۷۹). جوابهای درست این معادله را پیدا کنید:

$$x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{14}^4 = 1599$$

۰۳۱. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۸۰؛ رومانی، ۱۹۸۰). ثابت

کنید، برای عددهای درست و فرد a ، b و c ، معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ، جوابهای گویا ندارد.

۰۳۲. (انگلستان، ۱۹۷۰). این معادله را، در مجموعه عددهای گویا،

حل کنید:

$$\sqrt{21} \sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{x} \sqrt{3} - \sqrt{y} \sqrt{3}$$

۰۳۳. (برزیل، ۱۹۸۳). ثابت کنید، معادله

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1983}$$

در مجموعه عددهای طبیعی، تعداد محدودی جواب دارد.

۰۳۴. (یوگسلاوی، ۱۹۸۱). ثابت کنید، برای عددهای درست a و b ،

که با شرط $5a \geq 7b \geq 0$ سازگار باشند، دستگاه

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 7u = a \\ y + 2z + 5u = b \end{cases}$$

در مجموعه عددهای درست غیرمنفی، دارای جواب است.

۰۳۵ (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۷). چند جفت عدد طبیعی p

و q می توان پیدا کرد که از ۱۰۰ تجاوز نکنند و، به ازای آن ها، معادله

$$x^5 + px + q = 0$$

در مجموعه عددهای گویا، دارای جواب باشد؟

۰۳۶ (چکوسلواکی، ۱۹۷۶). معادله $x^2 + y^2 = 3z^2$ را، در مجموعه

عددهای درست، حل کنید.

۰۳۷ (مجارستان، ۱۹۸۳). ثابت کنید معادله

$$x^2 + 3y^3 + 9z^3 - 9xyz = 0$$

در مجموعه عددهای گویا، تنها یک جواب دارد: $x = y = z = 0$.

۰۳۸ (امریکا، ۱۹۷۶). جواب های درست این معادله را پیدا کنید:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 y^2$$

۰۳۹ (انگلستان، ۱۹۷۰). برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ ، تعداد جواب های

طبیعی معادله

$$n^2 + x^2 = y^2$$

را، که بزرگتر از n باشد، با $a_n \in \mathbb{Z}^+$ نشان می دهیم.

الف) ثابت کنید، برای هر عدد M ، نابرابری $a_n > M$ ، دست کم

برای یک مقدار $n \in \mathbb{N}$ برقرار است.

ب) آیا درست است که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ حد؟

۰۴۰ (مجارستان، ۱۹۷۷). ثابت کنید، برای هر عدد اول $p > 5$ ،

معادله

$$x^4 + 3^x = p$$

در مجموعه عددهای درست، جواب ندارد.

۰۴۱ (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۸۰)، ثابت کنید معادله

$$(2x)^{2^x} - 1 = y^{2^x + 1}$$

در مجموعه عددهای طبیعی، جواب ندارد.

۴۲. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۸۱). ثابت کنید، برای هر

مقدار $n \in \mathbb{N}$ معادله

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = y^2$$

در مجموعه عددهای طبیعی، دارای جواب است.

۴۳. (هیأت داوران، رومانی، ۱۹۷۷). عددهای طبیعی

$a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ مفروض‌اند. در ضمن، به ازای هر مقدار

$n, \dots, 2, 1, i$ عددهای a_i و a_{i+1} نسبت به هم اول‌اند. ثابت کنید معادله

$$x_1^{a_1} + x_2^{a_2} + \dots + x_n^{a_n} = x_{n+1}^{a_{n+1}}$$

در مجموعه عددهای طبیعی، بی‌نهایت جواب دارد.

۴۴. (هیأت داوران، فرانسه، ۱۹۷۹). ثابت کنید، برای هر دو عدد

طبیعی a و b ، که نسبت به هم اول‌اند، و هر عدد طبیعی $c \geq (a-1)(b-1)$ ،

معادله $ax + by = c$ در مجموعه عددهای درست غیرمنفی، جواب دارد.

۴۵. (مجارستان، ۱۹۷۸). ثابت کنید، برای هر مقدار گویای a و b ،

معادله $ax^2 + by^2 = 1$ در مجموعه عددهای گویا، یا جواب ندارد و یا

بی‌نهایت جواب دارد.

۴۶. (هیأت داوران، رومانی، ۱۹۷۹). ثابت کنید، برای هر دو عدد

درست a و b ، که نسبت به هم اول باشند، معادله $ax^2 + by^2 = z^3$ در

مجموعه عددهای درست، دارای بی‌نهایت جواب است که در شرط

$$(x, y) = 1 \text{ صدق می‌کنند.}$$

۴۷. (انگلستان، ۱۹۸۵). ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی $n > 1$ ،

معادله $x^n + y^n = z^n$ در مجموعه عددهای طبیعی و به شرط $x \leq n$ و

$y \leq n$ ، جواب ندارد.

۴۸. (اتریش، ۱۹۷۲). ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی $n > 2$ ، معادله

$$x^n + (x+1)^n = (x+2)^n$$

در مجموعه عددهای طبیعی، جواب ندارد.

۴۹*. (نیویورک، ۱۹۸۱). معادله

$$x^{x+y} = (x+y)^y$$

را، در مجموعه عددهای گویای مثبت، حل کنید.

۵۰*. (مجارستان، ۱۹۸۰؛ بلغارستان، ۱۹۸۱). ثابت کنید، اگر

عدد $n \in \mathbb{N}$ ، فرد باشد، آن وقت معادله

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{n}$$

وقتی و تنها وقتی در مجموعه عددهای طبیعی جواب دارد که داشته باشیم:

$$n = m(4k - 1) \quad (m, k \in \mathbb{N})$$

۵۱*. (هیأت داوران، کانادا، ۱۹۸۲). ثابت کنید، مجموعه همه

مقدارهایی از $n \in \mathbb{N}$ را، که برای آنها، معادله

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{n}$$

در مجموعه عددهای طبیعی جواب ندارد، نمی توان به صورت اجتماع

مجموعه ای متناهی از تصاعدهای حسابی (متناهی یا نامتناهی) نشان داد.

۵۲*. (بلغارستان، ۱۹۷۹). ثابت کنید، معادله $x^2 + 5 = y^3$ ، در

مجموعه عددهای درست جواب ندارد.

۳۵. فاکتوریل ها و ضربهای دو جمله ای

(ضمیمه ج، تعریفهای ۱۱، ۱۲، ۱۳ تا ۱۸)

وقضیههای ۲، ۴، ۸، ۱۲، ۱۳، ۱۵ تا ۱۷،

۲۰، ۲۱، ۲۶ را ببینید)

۵۳. (هلند، ۱۹۸۲). کدام بزرگترند:

$$17091982 \quad \text{یا} \quad (17091982!)^2$$

۵۴. (یوگسلاوی، ۱۹۷۴). همه عددهای $n \in \mathbb{N}$ را طوری پیدا کنید

که، به ازای آنها، برای مقداری از

$$k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$$

برابری زیر برقرار باشد:

$$2C_n^k = C_n^{k-1} + C_n^{k+1}$$

۵۵. (کانادا، ۱۹۸۳). این معادله را، در مجموعهٔ عددهای طبیعی،

حل کنید:

$$x! + y! + z! = u!$$

۵۶. (هیأت داوران، امریکا، ۱۹۸۲). ثابت کنید، برای هر مقدار

$n \in \mathbb{N}$ ، برابری زیر برقرار است:

$$\sum_{k=0}^n \frac{(2n)!}{(k!)^2 [(n-k)!]^2} = (C_{2n}^n)^2$$

۵۷. (هیأت داوران، استرالیا، ۱۹۸۲). برای مقدار مفروض $n \in \mathbb{N}$

(الف) ثابت کنید، عدد C_{2m}^m بر $m+1$ ، عددی طبیعی است؛

(ب) کمترین مقدار $k \in \mathbb{N}$ را طوری پیدا کنید که، به ازای آن، عدد

$\frac{k}{n+m+1} C_{2n}^{n+m}$ ، برای هر مقدار طبیعی $n \geq m$ ، عددی طبیعی باشد.

۵۸. (نیویورک، ۱۹۷۴). ثابت کنید، برای هر مقدار طبیعی $n \geq k$

بزرگترین مقسوم علیه مشترک عددهای $C_n^k, C_{n+1}^k, \dots, C_{n+k}^k$ ، برابر است با واحد.

۵۹. (انگلستان، ۱۹۸۱). ثابت کنید، برای هر مقدار طبیعی m و n ، عدد

$$S_{m,n} = 1 + \sum_{k=1}^m (-1)^k \frac{(n+k+1)!}{n!(n+k)}$$

بر $m!$ بخش پذیر است، ولی به ازای بعضی از مقادیرهای طبیعی m و n ، بر

$m!(n+1)$ بخش پذیر نیست.

۶۰. (یوگسلاوی، ۱۹۷۰). ثابت کنید، اگر p عددی اول باشد، عدد

$C_{2p}^p - 2$ بر p^2 بخش پذیر است.

۶۱. (یوگسلاوی، ۱۹۷۵). این معادله را در مجموعه عددهای طبیعی،

حل کنید:

$$1! + 2! + \dots + (x+1)! = y^{x+1}$$

۶۲. (بلغارستان، ۱۹۸۲؛ استرالیا، ۱۹۸۳). این معادله را، در مجموعه

عددهای طبیعی، حل کنید:

$$(y+1)^x - 1 = y!$$

۶۳. (اتریش، ۱۹۷۳؛ یوگسلاوی، ۱۹۷۷؛ جمهوری دموکراتیک

آلمان، ۱۹۷۹). برای عدد طبیعی مفروض $n > 1$ ، فرض می‌کنیم:

$$m_k = n! + k \quad (k \in \mathbb{N})$$

ثابت کنید، برای هر مقدار $k \in \{1, \dots, n\}$ ، عدد اول p وجود دارد، به نحوی که عدد m_k بر آن بخش‌پذیر است و هیچ کدام از عددهای زیر، بر آن بخش‌پذیر نیستند:

$$m_1, \dots, m_{k-1}, m_{k+1}, \dots, m_n$$

۶۴* (بلغارستان، ۱۹۶۸). ثابت کنید، عدد C_n^k وقتی، و تنها وقتی،

فرد است که عددهای طبیعی n و k با این شرط سازگار باشند: اگر عددهای n و k را در دستگاه عددنویسی به مبنای ۲ بنویسیم، در هر مرتبه‌ای از عدد k که رقم ۱ قرار دارد، در همان مرتبه از عدد n هم، رقم ۱ وجود داشته باشد. ۶۵* (مسابقه بین‌المللی ریاضی، لوکزامبورگ، ۱۹۸۵). ثابت کنید،

برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ و عددی مثل p ، دو گزاره زیر هم‌ارزند:

الف) هیچ کدام از عددهای C_n^k ($k = 0, 1, \dots, n$) بر p بخش‌پذیر

نیستند.

ب) $n = p^s m - 1$ ، که در آن $m \in \mathbb{N}$ ، $s \in \mathbb{Z}^+$ و $m < p$.

۶۶* (هیأت داوران، اتحاد شوروی، ۱۹۸۳). آخرین رقم مخالف

صفر را در میان دهدهی عدد $n!$ ، با h_n نشان می‌دهیم. ثابت کنید کسر دهدهی

نامتناهی

عددی گنگ است.

۴۴. مجموعه‌های عددی

ضمیمه ج، تعریف‌های ۱، ۲، ۱۱، ۱۲ و
قضیه‌های ۱، ۲، ۱۰، ۱۳، ۱۸، ۲۳، ۵۵،
۹۵، ۹۶ را ببینید.

۶۷. (رومانی، ۱۹۷۸). ثابت کنید، برای هر تقسیمی از مجموعه

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

به دو زیرمجموعه، دست کم یکی از زیرمجموعه‌های حاصل، شامل ۳ عدد است که مجموع دو تا از آن‌ها، با دو برابر سومی برابر است.

۶۸. (بلژیک، ۱۹۷۹). مجموع هر ۷۱ عددی را پیدا کنید که از راه

همه تبدیل‌های ممکن در رقم‌های عدد ۱۲۳۴۵۶۷ به دست می‌آید.

۶۹. (انگلستان، ۱۸۶۶). ثابت کنید، از بین ۵۲ عدد درست دلخواه،

همیشه می‌توان دو عدد طوری انتخاب کرد که مجموع یا تفاضل آن‌ها، بر ۱۰۰ بخش پذیر باشد.

۷۰. (انگلستان، ۱۹۷۰). ثابت کنید، از هر مجموعه‌ای که شامل n عدد

طبیعی باشد، می‌توان زیرمجموعه‌ای (غیر تهی) چنان جدا کرد که مجموع عضوهای آن بر n بخش پذیر باشد.

۷۱. (لهستان، ۱۹۷۹). در تقسیم عددهای طبیعی a_1, a_2, \dots, a_n

بر عددی مثل $m \in \mathbb{N}$ ، باقی مانده‌های مختلفی به دست آمده است؛ در ضمن،

$$n > \frac{m}{2}. \text{ ثابت کنید، برای هر عدد } k \in \mathbb{Z}, \text{ چنان اندیس‌های}$$

$$i, j \in \{1, \dots, n\}$$

پیدا می‌شود (لزومی ندارد با هم فرق داشته باشند) که، عدد $a_i + a_j - k$ بر m بخش پذیر باشد.

۷۲. (یوگسلاوی، ۱۹۷۷). ۲۰ عدد طبیعی

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n.$$

که از ۷۰ تجاوز نمی کنند، داده شده است. ثابت کنید، در بین تفاضل های $a_j - a_k$ ($j > k$)، دست کم ۴ عدد برابر پیدا می شود.

۷۳. (یوگسلاوی، ۱۹۸۱). مجموعه عددهای ۱، ۲، ...، ۱۰۰ را،

به ۷ زیر مجموعه، افراز کرده ایم. ثابت کنید، دست کم در یکی از این زیر مجموعه ها، یا ۴ عدد a, b, c, d وجود دارد به نحوی که $a + b = c + d$ و یا ۳ عدد e, f, g وجود دارد به نحوی که $e + f = 2g$.

۷۴. (امریکا، ۱۹۸۳). روی محور عددی، بازه ای به طول $\frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$)

انتخاب کرده ایم. ثابت کنید، این بازه، شامل حداکثر $\frac{n+1}{2}$ کسر ساده-

نشدنی به صورت $\frac{p}{q}$ است که، در آن، $p, q \in \mathbb{Z}$ و $1 \leq q \leq n$.

۷۵. (یوگسلاوی، ۱۹۷۷). برای مقدار مفروض $n \in \mathbb{N}$ ، چند سه تایی

از عددهای طبیعی وجود دارد که، مجموع آن ها، برابر $6n$ باشد.

۷۶. (بلغارستان، ۱۹۸۰). ثابت کنید، تعداد روش های انتخاب شش

عدد مختلف از بین عددهای ۱، ۲، ...، ۴۹، به نحوی که دست کم دو تا از آن ها دو عدد متوالی باشند، برابر است با

$$C_{49}^6 - C_{44}^6$$

۷۷. (اتریش، لهستان، ۱۹۷۸). برای مقدار مثبت و گویای $c \neq 1$ ،

ثابت کنید مجموعه عددهای طبیعی را می توان به صورت اجتماع دو زیرمجموعه جدا از هم A و B نشان داد، به نحوی که، نسبت هر دو عدد از مجموعه A و، همچنین، نسبت هر دو عدد از مجموعه B ، برابر عدد c نباشد.

۷۸. (هیأت داوران، اسپانیا، ۱۹۷۷). مجموع عددهای درست

a_1, a_2, \dots, a_n برابر است با واحد. ثابت کنید، بین عددهای

$$b_i = a_i + 2a_{i+1} + 3a_{i+2} + \dots + (n-i+1)a_n + \\ + (n-i+2)a_1 + (n-i+3)a_2 + \dots + na_{i-1}$$

$(n, \dots, 2, 1, i)$ ، عددهای برابر وجود ندارد.

۷۹. (هیأت داوران، اتحاد شوروی، ۱۹۸۲). همه مقادیرهای $n \in \mathbb{N}$

را طوری پیدا کنید که، برای هر کدام از آنها، سطری شامل $2n$ عدد وجود داشته باشد که دارای این ویژگی باشد: برای هر مقدار $n, \dots, 1, k = 1$ ، دو عدد در سطر وجود داشته باشد که برابر k باشند و، بین آنها، درست k عدد قرار گرفته باشد.

۸۰. (اتریش، ۱۹۷۵). مجموعه غیر تهی $M \subset \mathbb{Q}$ ، با دو شرط

زیرسازگار است:

(۱) اگر $a \in M$ و $b \in M$ ، آن گاه $a + b \in M$ و $ab \in M$ ؛

(۲) اگر $r \in \mathbb{Q}$ ، آن گاه دقیقاً یکی از سه گزاره زیر درست است:

$$r = 0, -r \in M, r \in M$$

ثابت کنید، مجموعه M ، بر مجموعه همه عددهای مثبت گویا منطبق است.

۸۱. (نیویورک، ۱۹۷۳). مجموعه متناهی $B \subset \mathbb{R}$ را پایه مجموعه

$M \subset \mathbb{R}$ می نامیم، وقتی که، هر عدد از مجموعه M را بتوان، به صورت

منحصر به فردی، به صورت حاصل ضرب توان های درست عددهایی از مجموعه

B نشان داد. آیا این حکم درست است که، برای هر مجموعه متناهی از

عددهای مثبت، پایه ای وجود دارد؟

۸۲. (اتریش، لهستان، ۱۹۸۰). ثابت کنید که، برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ ،

این برابری برقرار است:

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \frac{1}{i_1 i_2 \dots i_k} = n$$

که در آن، مجموع به معنای همه انتخاب های ممکن عددهای

$$i_1 < i_2 < \dots < i_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ است.

۸۳. (بلغارستان، ۱۹۸۳). مطلوب است همه مقادیرهای $n \in \mathbb{N}$ ، به نحوی

که برای هر کدام از آنها، تبدیلی مثل

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

از عددهای ۰، ۱، ...، $n-1$ وجود داشته باشد که، در آن، همهٔ عددهای

$$a_1, a_1 a_2, a_1 a_2 a_3, \dots, a_1 a_2 \dots a_n$$

در تقسیم بر n ، به باقی مانده‌های مختلف برسند.

۰۸۴* (هیأت داوران، سوئد، ۱۹۸۳). ثابت کنید، اگر $n \in \mathbb{N}$ توان

درستی از یک عدد اول نباشد، آن وقت، تبدیل

$$(i_1, i_2, \dots, i_n)$$

از عددهای ۱، ۲، ...، n وجود دارد که، برای آن، این برابری برقرار است:

$$\sum_{k=1}^n k \cos \frac{2\pi i_k}{n} = 0$$

۰۸۵* (هیأت داوران، فنلاند، ۱۹۸۲). مجموع همهٔ آن عددهای طبیعی

را پیدا کنید که، رقم‌های هر کدام از آن‌ها، در عددنویسی دهدهی، تشکیل دنباله‌ای صعودی یا نزولی بدهند.

۰۸۶* (هیأت داوران فنلاند، ۱۹۷۹). گروه عددهای طبیعی

a_1, \dots, a_n در این برابری صدق می‌کنند:

$$a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = 1979$$

وقتی n زوج باشد، این گروه را زوج؛ و وقتی n فرد باشد، این گروه را فرد می‌نامیم. ثابت کنید، گروه‌های زوج به همان اندازه وجود دارند که گروه‌های فرد.

۰۸۷* ثابت کنید، برای عددهای طبیعی دلخواه a_1, \dots, a_m .

الف) (هیأت داوران، لهستان، ۱۹۷۹) چنان گروهی از $n < 2^m$ عدد وجود دارد، که در آن، همهٔ زیرمجموعه‌ها، مجموع‌های مختلفی داشته باشند و، در ضمن، بین این مجموع‌ها همهٔ عددهای a_1, \dots, a_m پیدا شود.

ب) چنان گروهی از $n \leq m$ عدد وجود دارد که، در آن، همهٔ زیرمجموعه‌ها، مجموع‌های مختلفی داشته باشند و، در ضمن، همهٔ عددهای a_1, \dots, a_m در بین این مجموع‌ها پیدا شود.

۰۸۸* (هیأت داوران، لهستان، ۱۹۸۳). آيا می‌توان مجموعهٔ $M \subset \mathbb{N}$

را طوری پیدا کرده که با دو شرط زیر سازگار باشد:

(۱) هر عدد $n \in \mathbb{N}$ و بزرگتر از واحد را بتوان به صورت $n = a + b$ نوشت که در آن، $a, b \in M$ ؛

(۲) اگر هر کدام از عددهای $a, b, c, d \in M$ ، بزرگتر از ۱۰ باشند،
برابری $a + b = c + d$ ، تنها در حالتی برقرار باشد که داشته باشیم: $a = c$
یا $a = d$ ؟

۵۵. ویژگی‌های مختلف عددها

(ضمیمهٔ ج، تعریف‌های ۱۱ تا ۱۹ و
قضیه‌های، ۱، ۲، ۴، ۱۰، ۱۳، ۱۸، ۲۳،
۵۵، ۵۹، ۹۶ را ببینید)

۸۹. (چکوسلاواکی، ۱۹۵۲). ثابت کنید، اگر عددهای مثبت و گویای

a, b و c ، در برابری $\sqrt{a} + \sqrt{b} = c$ صدق کنند، آن وقت، \sqrt{a} و \sqrt{b} هم،
عددهای گویائی خواهند بود.

۹۰. (رومانی، ۱۹۷۵). ثابت کنید، عددهای مثبت و گنگ a و b

وجود دارند که، به ازای آن‌ها، a^b عددی طبیعی باشد.

۹۱. (برزیل، ۱۹۸۳). ثابت کنید، مجموع

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

به ازای هیچ عدد طبیعی $n > 1$ ، عددی درست نیست.

۹۲. (امریکا، ۱۹۷۸). ثابت کنید، هر عدد طبیعی $n > 32$ را می‌توان

به صورت مجموع چند عدد طبیعی نوشت، به نحوی که مجموع عکس این
عددها، برابر واحد باشد.

راهنمایی: عددهای ۳۳، ۳۴، ۳۵، ...، ۷۳، با شرط‌های مسأله سازگارند.

۹۳. (انگلستان، ۱۹۸۲). عدد $n \in \mathbb{N}$ ، که مضربی است از ۱۷، در

دستگاه عددنویسی به مبنای ۲، درست شامل ۳ رقم ۱ می‌باشد. ثابت کنید، این

عدد در همین دستگاه عددنویسی، دست کم ۶ رقم برابر ۰ دارد و اگر تعداد این رقم‌ها برابر ۷ باشد، n عددی زوج است.

۰۹۴. (یوگسلاوی، ۱۹۸۳). همهٔ عددهای $n \in \mathbb{N}$ را طوری پیدا کنید که دارای این ویژگی باشند: اگر عددهای n^3 و n^4 را (در دستگاه دهدهی عددنویسی) در کنار هم بنویسیم، عدد حاصل از ده رقم ۰، ۱، ...، ۹، و از هر کدام تنها یکبار، تشکیل شده باشد.

۰۹۵. (یوگسلاوی، ۱۹۷۷). همهٔ عددهای طبیعی n را پیدا کنید که دارای این ویژگی باشند: توان پنجم مجموع رقم‌های عدد n (در دستگاه دهدهی عددنویسی)، برابر با n^2 باشد.

۰۹۶. (انگستان، ۱۹۷۸)، ثابت کنید، اگر مخرج يك كسر ساده نشدنی، از ۱۰۰ تجاوز نکند، در نمایش دهدهی آن نمی‌توان به سه رقم ۱، ۶ و ۷، برخورد، به نحوی که به‌همین ردیف پشت سرهم آمده باشند.

۰۹۷. (نیویورک، ۱۹۷۸). ثابت کنید، هر عدد اول به‌صورت

$$2^{2^n} + 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

را نمی‌توان به‌صورت تفاضل توان‌های پنج‌م دو عدد طبیعی نشان داد.

۰۹۸. (نیویورک، ۱۹۷۷). آیا عدد $n \in \mathbb{N}$ را می‌توان پیدا کرد به‌نحوی

که عددهای

$$2^{n+1} - 1 \quad \text{و} \quad 2^{n-1}(2^n - 1)$$

هر دو، مکعب عددهای درستی باشند؟

۰۹۹. (رومانی، ۱۹۷۸). ثابت کنید، اگر عددهای طبیعی m و n ، در

نایر ابری $\sqrt{y} - \frac{m}{n} > 0$ صدق کنند، آن وقت داریم:

$$\sqrt{y} - \frac{m}{n} > \frac{1}{mn}$$

۰۱۰۰. (مسابقهٔ بین‌المللی ریاضیات، فنلاند، ۱۹۸۰). در عدد نویسی

دهدهی عدد

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{1980}$$

رقم مرتبهٔ یکان و رقم مرتبهٔ دهگان را پیدا کنید.

۱۰۱. (رومانی، ۱۹۷۰). ثابت کنید، برای هر دو عدد طبیعی m و n ،

عدد $k \in \mathbb{N}$ وجود دارد، به نحوی که برابری زیر برقرار باشد:

$$\sqrt{m} + \sqrt{m-1} = \sqrt{k} + \sqrt{k-1}$$

۱۰۲. (هیأت داوران، لهستان، ۱۹۷۷). ثابت کنید، برای هر مقدار

$a, b \in \mathbb{R}$ و $\varepsilon > 0$ ، عددهای $m \in \mathbb{Z}$ و $k \in \mathbb{N}$ وجود دارند، که درنا برابری‌های زیر صدق کنند:

$$|na - k| < \varepsilon \quad \text{و} \quad |nb - m| < \varepsilon$$

۱۰۳. (هیأت داوران، ویتنام، ۱۹۷۶). ثابت کنید، بی‌نهایت عدد

به صورت $5^n (n \in \mathbb{N})$ وجود دارد، به نحوی که در شکل دهدهی هر کدام از آنها، بتوان دست کم ۱۹۷۶ رقم ۰ جدا کرد که پشت سرهم آمده باشند.

۱۰۴. (هیأت داوران، انگلستان، ۱۹۷۷). ثابت کنید، برای هر مقدار

$m \in \mathbb{N}$ ، بی‌نهایت عدد به صورت $5^n (n \in \mathbb{N})$ وجود دارد، به نحوی که، در هر کدام آنها، هر یک از m رقم متوالی در عددنویسی دهدهی، از نظر زوج و فرد بودن، با رقم‌های مجاور خود، فرق داشته باشند.

۱۰۵. (یوگسلاوی، ۱۹۷۳). ثابت کنید، اگر طول ضلع‌های یک

مستطیل، عددهایی فرد باشند، در درون مستطیل، نمی‌توان نقطه‌ای پیدا کرد که، فاصلهٔ آن تا هر یک از چهار رأس مستطیل، عددهایی درست باشد.

۱۰۶. (هیأت داوران، مجارستان، ۱۹۷۹). ثابت کنید، هرم منتظم با

قاعدهٔ مربع وجود ندارد که طول همهٔ یال‌ها، مساحت سطح کل و حجم آن را بتوان با عددهایی درست بیان کرد.

۱۰۷. (انگلستان، ۱۹۸۱). برای عددهای مختلف و طبیعی a_1, a_2, \dots, a_n ($n > 1$)، و هر یک از مقادیرهای $n, 2, 1, \dots, i$ ، قرار می‌گذاریم:

$$p_i = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (a_i - a_j)$$

ثابت کنید، برای هر مقدار $k \in \mathbb{N}$ ، عدد

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^k}{p_i}$$

عددی درست است.

فصل دوم

معادله و نامعادله

۶۹. معادله‌ها و دستگاه‌ها

(ضمیمه ج. تعریف‌های ۲ و ۱۹ و قضیه‌های

۶، ۷، ۱۸، ۵۵، ۵۶ را ببینید)

۱۰۸. (نیویورک، ۱۹۷۸). معادله $8^x(3x+1) = 4$ را حل کنید.

۱۰۹. (انگلستان، ۱۹۷۴). ثابت کنید، برای هر مقدار حقیقی a ، b

و c ، معادله

$$(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$$

دست کم یک جواب دارد.

۱۱۰. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۸۳). ثابت کنید، معادله

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 16 = 0$$

درست دو جواب دارد.

۱۱۱. (نیویورک، ۱۹۸۵). همه زوج‌های $a > 1$ و $b > 0$ را

پیدا کنید که، به ازای هر کدام از آنها، معادله $a^x = x^b$ ، درست یک جواب

مثبت داشته باشد. برای هر زوج مقدار a و b ، که پیدا کرده‌اید، جواب

معادله را مشخص کنید.

۰۱۱۲. (یوگسلاوی، ۱۹۷۲). برای هر مقدار $a \in \mathbb{R}$ ، این معادله را

حل کنید:

$$(a-1)\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x \cos x}\right) = 2$$

۰۱۱۳. (نیویورک، ۱۹۷۳). مطلوب است همه مقادیرهای

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \frac{97}{128} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

که در معادله صدق کنند.

۰۱۱۴. (نیویورک، ۱۹۷۸). همه زوج عددهای طبیعی $A \neq B$ را

طوری پیدا کنید که، برای آن‌ها، دستگاه زیر، دارای جواب باشد:

$$\begin{cases} \cos Ax + \cos Bx = 0 \\ A \sin Ax + B \sin Bx = 0 \end{cases}$$

۰۱۱۵. (چکوسلواکی، ۱۹۵۶). همه زوج عددهای $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

را که در دستگاه زیر صدق کنند، پیدا کنید:

$$\begin{cases} \frac{\cos x}{\cos y} = 2 \cos^2 y \\ \frac{\sin x}{\sin y} = 2 \sin^2 y \end{cases}$$

۰۱۱۶. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۶۶). این معادله را حل کنید:

$$[\sin(x-y) + 1][2 \cos(2x-y) + 1] = 6$$

۰۱۱۷. (رومانی، ۱۹۷۸). برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ ، این معادله را حل کنید:

$$\sin x \sin 2x \dots \sin nx + \cos x \cos 2x \dots \cos nx = 1$$

۰۱۱۸. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۶۶). برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$

این معادله را حل کنید:

$$(x+y)^n = x^n + y^n$$

۱۱۹. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۸). این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x + xy + y = 2 + 3\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 6 \end{cases}$$

۱۲۰. (انگلستان، ۱۹۷۵). ثابت کنید، برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ تنها

یک انتخاب برای عددهای x_1, \dots, x_n وجود دارد، به نحوی که در معادله زیر صدق کنند:

$$(1 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + \dots + (x_{n-1} - x_n)^2 + x_n^2 = \frac{1}{n+1}$$

۱۲۱. (بلغارستان، ۱۹۶۸). همه مقادیرهای $n \in \mathbb{N}$ را طوری پیدا

کنید که، برای هر کدام از آنها، انتخابی از عددهای مثبت x_1, \dots, x_n وجود داشته باشد که در دستگاه زیر صدق کنند:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 9 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = 1 \end{cases}$$

برای هر مقدار n که به دست می آورید، همه این گونه انتخابها را مشخص کنید.

۱۲۲. (چکوسلواکی، ۱۹۸۲). برای هر زوج از مقادیرهای طبیعی

n و k ، همه عددهای غیرمنفی x_1, \dots, x_n را پیدا کنید که با دستگاه زیر سازگار باشند:

$$\begin{cases} x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k = 1 \\ (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) = 2 \end{cases}$$

۱۲۳. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۸۰). این دستگاه را حل

کنید:

$$\begin{cases} 2x + x^2y = y \\ 2y + y^2z = z \\ 2z + z^2x = x \end{cases}$$

۰۱۲۴* (اتریش، لهستان، ۱۹۷۹). برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ و $a \in \mathbb{R}$ ، این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = a \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = a^2 \\ \dots \dots \dots \\ x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n = a^n \end{cases}$$

۷۵. نابرابری‌ها

(ضمیمه ج: تعریف‌های ۱۸، ۳۰، ۳۲ و قضیه‌های ۴، ۷ تا ۳۴، ۵۵، ۵۶ را ببینید)

۰۱۲۵ (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۴). کدام بزرگترند:

$$0 \quad \text{یا} \quad \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{2}$$

۰۱۲۶ (بلژیک، ۱۹۷۹)، اگر بدانیم $a < b < c < d$ ، عددهای زیر

را بدترتیب صعودی بنویسید:

$$x = (a+b)(c+d),$$

$$y = (a+c)(b+d),$$

$$z = (a+d)(b+c)$$

۰۱۲۷ (یوگسلاوی، ۱۹۷۶). ثابت کنید، اگر حاصل ضرب سه عدد

برابر واحد، و مجموع آن‌ها بزرگتر از مجموع عکس آن‌ها باشد، آن وقت درست یکی از این عددها، از واحد بزرگتر است.

۰۱۲۸ (نیویورک، ۱۹۷۵). ثابت کنید، برای واسطه حسابی

$A = \frac{a+b}{2}$ و واسطه هندسی $B = \sqrt{ab}$ از دو عدد مثبت $a \neq b$ داریم:

$$B < \frac{(a-b)^2}{A(B-A)} < A$$

۰۱۲۹. (یوگسلاوی، ۱۹۷۶). ثابت کنید، برای هر سه عدد a ، b و c

بزرگتر از واحد، این نابرابری برقرار است.

$$2 \left(\frac{\log_b a}{a+b} + \frac{\log_c b}{b+c} + \frac{\log_a c}{c+a} \right) \geq \frac{9}{a+b+c}$$

۰۱۳۰. (اتریش، ۱۹۷۱). ثابت کنید، برای عددهای مثبت a ، b و c ،

این نابرابری برقرار است:

$$a^2(b+c-a) + b^2(a+c-b) + a^2(a+b-c) \leq 3abc$$

۰۱۳۱. (امریکا، ۱۹۸۵). ثابت کنید، برای هر سه عدد a ، b و c ، از

بازه $[0, 1]$ ، این نابرابری برقرار است:

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1$$

۰۱۳۲. (چکوسلواکی، ۱۹۵۹). ثابت کنید، اگر عددهای حقیقی a ،

b و c ، در این نابرابری‌ها صدق کنند:

$$a+b+c > 0, \quad ab+bc+ca > 0, \quad abc > 0$$

آن وقت، این عددها، مثبت‌اند.

۰۱۳۳. (بلژیک، ۱۹۷۶). ثابت کنید، برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\sin(\cos \alpha) < \cos(\sin \alpha)$$

۰۱۳۴. (بالکان، ۱۹۸۴). ثابت کنید، برای عددهای مثبت $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

$(n \geq 2)$ ، که مجموعی برابر واحد دارند، این نابرابری برقرار است:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{2-\alpha_i} \geq \frac{n}{2n-1}$$

۰۱۳۵. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۶۷، انگلستان، ۱۹۷۶).

ثابت کنید برای عددهای مثبت a_1, \dots, a_n ($n \geq 2$)، داریم:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s - a_i} \geq \frac{n}{n-1} \left(s = \sum_{i=1}^n a_i \right)$$

۰۱۳۶ (نیویورک، ۱۹۷۵). آیا برای عددهای مثبت a_1, a_2, \dots, a_n و $a_{n+1} = a_1$ این نابرابری برقرار است:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{a_{i+1}} \right)^n \geq \sum_{i=1}^n \frac{a_{i+1}}{a_i}$$

۰۱۳۷ (هیأت داوران کانادا، ۱۹۸۲). ثابت کنید، برای عددهای مثبت $x \neq 1$ و $a < 1$ ، همیشه داریم:

$$\frac{1-x^a}{1-x} < (1+x)^{a-1}$$

۰۱۳۸ (هیأت داوران، اتحاد شوروی، ۱۸۸۲). ثابت کنید، برای هر مقدار $\alpha \leq 1$ و عددهای دلخواه x_1, \dots, x_n با شرط

$$1 \geq x_1 \geq x_2 > \dots \geq x_n > 0$$

نابرابری زیر درست است

$$(1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n)^\alpha \leq 1 + 1^{\alpha-1} x_1^\alpha + 2^{\alpha-1} x_2^\alpha + \dots + n^{\alpha-1} x_n^\alpha$$

۰۱۳۹ (بلغارستان، ۱۹۸۲). ثابت کنید، برای عددهای a_1, \dots, a_n ($n \geq 2$) از بازه $[0, 2]$ ، این نابرابری برقرار است:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_i - a_j| \leq n^2$$

برای چه مقدارهایی از a_1, \dots, a_n ، به برابری می‌رسیم؟

۰۱۴۰ (یوگسلاوی، ۱۹۷۲). ثابت کنید، اگر عدد M و گروه عددهای

$$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n},$$

$$a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}$$

در نابرابری زیر صدق کنند:

$$\sum_{j=1}^n |a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n| \leq M$$

که در آن، $x_1, \dots, x_n \in \{-1, 1\}$ ، آن وقت داریم:

$$|a_{11}| + |a_{22}| + \dots + |a_{nn}| \leq M$$

۰۱۴۱. (هیأت داوران، امریکا، ۱۹۸۲). ثابت کنید، برای هر گروهی

از عددهای حقیقی a_1, \dots, a_n ، می توان مقدار $k \in \{1, \dots, n\}$ را طوری انتخاب کرد که، عددهای غیر منفی $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ (که از واحد تجاوز نمی کنند)، در این نابرابری صدق کنند:

$$\left| \sum_{i=1}^n b_i a_i \right| \leq \left| \sum_{i=1}^k a_i \right|$$

۰۱۴۲* (بلغارستان، ۱۹۸۴). عددهای طبیعی دلخواه m و n ، و

عددهای دلخواه $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ از بازه $[0, 1]$ با شرط $x_i + y_i = 1$ ($i = 1, \dots, n$) مفروض اند. درستی این نابرابری را ثابت کنید:

$$(1 - x_1 \dots x_n)^m + (1 - y_1^m) \dots (1 - y_n^m) \geq 1$$

۰۱۴۳* (هیأت داوران، امریکا، ۱۹۷۷). ثابت کنید، برای عددهای

مثبت $a \leq b \leq c \leq d$ همیشه داریم:

$$a^b b^c c^d d^a \geq b^a c^b d^c a^d$$

۰۱۴۴* (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۸۵). ثابت کنید، برای

عددهای طبیعی و بزرگتر از واحد n و k ، این نابرابری برقرار است:

$$\sum_{j=2}^{n^k} \frac{1}{j} > k \sum_{j=2}^n \frac{1}{j}$$

۰۱۴۵* (هیأت داوران، فرانسه، ۱۹۸۲). ثابت کنید، برای عددهای

مثبت و دلخواه a_1, \dots, a_n ، این نابرابری برقرار است:

$$\sum_{k=1}^n \sqrt[k]{a_1 \dots a_k} \leq e \sum_{k=1}^n a_k$$

که در آن، e ، عدد نپیر (مبنای طبیعی لگاریتمها) است.

۰۱۴۶* (امریکا، ۱۹۷۷). p و q دو عدد مثبت و مفروض اند و $p < q$.

ثابت کنید، برای عددهای دلخواه $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ و از بازه $[p, q]$ ، این نابرابری همیشه برقرار است:

$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\varepsilon} \right) \leq \\ \leq 25 + 6 \left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}} \right)^2$$

به ازای چه مقدارهایی از $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ ، به برابری می‌رسیم؟

۰۱۴۷* (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۰). درستی نابرابری زیر

را، برای عددهای مثبت و دلخواه a, b, c, d ، ثابت کنید:

$$\sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}} \leq \sqrt{\frac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{6}}$$

به ازای چه مقدارهایی از a, b, c, d ، نابرابری به برابری تبدیل می‌شود؟

۰۸۵ بخش درست عدد

(ضمیمه ج، تعریف‌های ۱۱، ۱۵، ۱۸، ۱۹)

و قضیه‌های ۲، ۶، ۸، ۱۸، ۲۰ را ببینید)

۰۱۴۸ (اتریش، ۱۹۷۳). این معادله را حل کنید:

$$1 - |x + 1| = \frac{[x] - x}{|x - 1|}$$

۰۱۴۹ (انگلستان، ۱۹۷۵). این معادله را حل کنید:

$$[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + \dots + [\sqrt{x^3 - 1}] = 400$$

۰۱۵۰. (کانادا، ۱۹۸۱). ثابت کنید، معادله زیر جواب ندارد:

$$[x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] = 12345$$

۰۱۵۱. (سوئد، ۱۹۸۲). برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$. تعداد جواب‌های

معادله زیر را، در بازه $[1, n]$ ، پیدا کنید:

$$x^2 - [x^2] = \{x\}^2$$

۰۱۵۲. (اتریش، ۱۹۷۴). ثابت کنید، برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ ، این

برابری برقرار است:

$$[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] = [\sqrt{4n+2}]$$

۰۱۵۳. (هیأت داوران، بلژیک، ۱۹۷۹). کدام عددهای طبیعی را،

نمی‌توان به صورت $\left[n + \sqrt{n + \frac{1}{4}} \right]$ نشان داد ($n \in \mathbb{N}$)؟

۰۱۵۴. (یوگسلاوی، ۱۹۸۳). ثابت کنید، بین جمله‌های دنباله $\{a_n\}$ ،

با تعریف زیر

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \left[\frac{3}{4} a_n \right] \quad (n \in \mathbb{N})$$

بی‌نهایت عدد زوج و بی‌نهایت عدد فرد وجود دارد.

۰۱۵۵. (اتریش، لهستان، ۱۹۷۹). برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ ، بیشترین

مقدار $k \in \mathbb{Z}^+$ را پیدا کنید، به نحوی که عدد $[(3 + \sqrt{11})^{2n-1}]$ ، بر 2^k

بخش پذیر باشد.

۰۱۵۶. (هیأت داوران، رومانی، ۱۹۷۹). ثابت کنید، برای هر مقدار

$n \in \mathbb{N}$ ، داریم:

$$\{n\sqrt{2}\} > \frac{1}{2n\sqrt{2}}$$

در ضمن، برای هر $\varepsilon > 0$ ، عدد $n \in \mathbb{N}$ را می‌توان پیدا کرد، که نابرابری

زیر برقرار باشد:

$$\{n\sqrt{2}\} < \frac{1 + \varepsilon}{2n\sqrt{2}}$$

۰۱۵۷* (امریکا، ۱۹۷۵). الف) ثابت کنید، برای عددهای غیرمنفی و دلخواه x و y ، این نابرابری برقرار است:

$$[5x] + [5y] \geq [3x + y] + [3y + x]$$

ب) ثابت کنید، عدد زیر، برای همه مقادیر طبیعی m و n ، عددی درست است:

$$\frac{(5m)!(5n)!}{m!n!(3m+n)!(3n+m)!}$$

۰۱۵۸* (امریکا، ۱۹۸۱). ثابت کنید، برای عددهای دلخواه $x \geq 0$ و $n \in \mathbf{N}$ ، این نابرابری برقرار است:

$$[nx] \geq \frac{[x]}{1} + \frac{[2x]}{2} + \dots + \frac{[nx]}{n}$$

۰۱۵۹* (بلغارستان، ۱۹۸۳). ثابت کنید، اگر عددهای a و b و c ، به ازای هر مقدار $n \in \mathbf{N}$ ، در برابری

$$[na] + [nb] = [nc]$$

صدق کنند، آن وقت، دست کم یکی از دو عدد a و b ، عددی درست است.

فصل سوم

هندسه روی صفحه

۹۵. مثلث

ضمیمه ج، تعریف‌های ۳۶، ۴۰، ۴۱ و قضیه‌های ۶۴، ۶۷، ۷۴، ۷۵، ۷۷، ۸۲، ۸۳ را ببینید.

۰۱۶۰ (یوگسلاوی، ۱۹۸۱). در مثلثی با زاویه‌های حاده و ضلع‌های

نابرابر، از يك رأس ارتفاع، از رأس دوم میانه، و از رأس سوم نیمساز زاویه را گذرانده ایم. ثابت کنید، اگر این سه خط راست، ضمن برخورد باهم، مثلثی را تشکیل دهند، این مثلث، نمی تواند متساوی الاضلاع باشد.

۱۶۱. (بلژیک، ۱۹۷۷). ثابت کنید، اگر برای عددهای حقیقی a و b و c ، و برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ ، مثلثی به ضلع های a^n و b^n و c^n وجود داشته باشد، آن وقت، همه این مثلث ها، متساوی الساقین اند.

۱۶۲. (سوئد، ۱۹۸۲). همه مقادیرهای $n \in \mathbb{N}$ را پیدا کنید که، برای هر کدام از آن ها، عدد $m \in \mathbb{N}$ ، مثلث ABC با ضلع های $AB = 33$ ، $AC = 21$ ، $BC = n$ و نقطه های D و E ، به ترتیب، روی ضلع های AB و AC وجود داشته باشند، به نحوی که شرط زیر برقرار باشد:

$$AD = DE = EC = m$$

۱۶۳. (هیأت داوران، ویتنام، ۱۹۷۹). همه گروه های سه تایی از عددهای طبیعی a و b و c را پیدا کنید که بتوانند ضلع های مثلثی با دایره محیطی به قطر $6/25$ باشند.

۱۶۴. (نیویورک، ۱۹۷۸). مثلث های ABC و DEF ، در يك دایره محاط شده اند. ثابت کنید، برابری محیط های این دو مثلث، هم ارز با شرط زیر است:

$$\sin A + \sin B + \sin C = \sin D + \sin E + \sin F$$

۱۶۵. (یوگسلاوی، ۱۹۸۱). خط راستی، مثلث را به دو بخش تقسیم کرده است که هم مساحت ها و هم محیط های این دو بخش، باهم برابر شده اند، ثابت کنید، مرکز دایره محاطی مثلث، روی این خط راست است.

۱۶۶. (اتریش، ۱۹۸۳). روی ضلع های AB ، AC و BC از مثلث ABC ، نقطه های C' ، B' و A' را طوری انتخاب کرده ایم که، پاره خط های AA' ، BB' و CC' ، در يك نقطه به هم رسیده اند. نقطه های A'' ، B'' و C'' را، به ترتیب، قرینه نقطه های A ، B و C ، نسبت به نقطه های A' ، B' و C' می گیریم. ثابت کنید:

$$S_{A''B''C''} = 3S_{ABC} + 4S_{A'B'C'}$$

۰۱۶۷. (اتریش، ۱۹۷۱). میانسه‌های مثلث ABC ، در نقطه O بهم رسیده‌اند. ثابت کنید:

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(OA^2 + OB^2 + OC^2)$$

۰۱۶۸. (نیویورک، ۱۹۷۹). ثابت کنید، اگر مرکز ثقل مثلثی بر مرکز ثقل مرزهای آن منطبق باشد، این مثلث متساوی‌الاضلاع است.

۰۱۶۹. (انگلستان، ۱۹۸۳)، O را مرکز دایره محیطی مثلث ABC ، D را وسط‌ضلع AB ، و E را نقطه برخورد میانسه‌های مثلث ACD فرض می‌کنیم. ثابت کنید، اگر $AB = AC$ ، آن وقت $OE \perp CD$.

۰۱۷۰. (چکوسلوواکی، ۱۹۷۲). همه زوج عددهای مثبت a و b را پیدا کنید، که برای آن‌ها، مثلث قائم‌الزاویه CDE و نقطه‌های A و B واقع بر وتر آن DE وجود داشته باشند که در شرط‌های زیر صدق کنند:

$$\vec{DA} = \vec{AB} = \vec{BE} \quad \text{و} \quad AC = a, \quad BC = b$$

۰۱۷۱. (نیویورک، ۱۹۷۶). دست کم یک مثلث قائم‌الزاویه پیدا کنید، به نحوی که طول هر ضلع آن عددی درست باشد و، در ضمن، بتوان هر یک از زاویه‌های آن را به کمک پرگار و خط‌کش به سه بخش برابر تقسیم کرد.

۰۱۷۲. (فنلاند، ۱۹۸۰). عمودهایی که از وسط ضلع‌های AB و AC از مثلث ABC ، بر این ضلع‌ها رسم شده‌اند، خط راست BC را، به ترتیب، در نقطه‌های X و Y قطع کرده‌اند. ثابت کنید، برابری $BC = XY$.
(الف) وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C = 3$$

(ب) همچنین می‌تواند وقتی برقرار باشد که داشته باشیم:

$$\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C \neq 3$$

مجموعه MCR را طوری پیدا کنید که، برای آن، برابری مذکور هم ارض

شرط زیر باشد:

$$tg B \cdot tg C \in M$$

۱۷۳. (نیویورک، ۱۹۷۶). ارتفاع‌های مثلث ABC ، که زاویه‌هایی حاده دارد، در نقطه O بهم رسیده‌اند. روی پاره‌خط‌های راست OB و OC ، نقطه‌های B_1 و C_1 را طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم:

$$\widehat{AB_1C} = \widehat{AC_1B} = 90^\circ$$

ثابت کنید: $AB_1 = AC_1$.

۱۷۴. (انگلستان، ۱۹۸۱). ارتفاع‌های مثلث ABC در نقطه O بهم رسیده‌اند و A_1 ، B_1 ، C_1 ، به ترتیب، وسط ضلع‌های BC ، CA ، AB هستند. دایره به مرکز O ، خط راست B_1C_1 را در نقطه‌های D_1 و D_2 ، خط راست C_1A_1 را در نقطه‌های E_1 و E_2 ، و خط راست A_1B_1 را در نقطه‌های F_1 و F_2 قطع کرده است. ثابت کنید:

$$AD_1 = AD_2 = BE_1 = BE_2 = CF_1 = CF_2$$

۱۷۵. (یوگسلاوی، ۱۹۸۳). نقطه P را درون مثلث ABC و نقطه‌های M و L را، به ترتیب بر ضلع‌های AC و BC طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم:

$$\widehat{PAC} = \widehat{PBC}; \quad \widehat{PLC} = \widehat{PMC} = 90^\circ$$

ثابت کنید، اگر D وسط ضلع AB باشد، داریم: $DM = DL$.

۱۷۶. (رومانی، ۱۹۷۸). مطلوب است مکان هندسی نقطه M ، واقع در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و سازگار با شرط

$$\widehat{MAB} + \widehat{MBC} + \widehat{MCA} = 90^\circ$$

۱۷۷. (بلغارستان، ۱۹۸۲). B_{ij} ($i, j \in \{1, 2, 3\}$) را قرینه رأس A_j از مثلث غیر متساوی‌الساقین $A_1A_2A_3$ نسبت به نیمسازي که از رأس A_j گذاشته است، فرض می‌کنیم. ثابت کنید، خط‌های راست $B_{12}B_{21}$ ، $B_{13}B_{31}$ ،

و $B_{23}B_{32}$ موازی اند.

۰۱۷۸. (بلغارستان، ۱۹۸۱). نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه C

از مثلث ABC ، خط راست AB را، به ترتیب، در نقطه‌های L و M قطع کرده‌اند. ثابت کنید، به شرط $CL = CM$ ، داریم:

$$AB^2 + BC^2 = 4R^2$$

که در آن، R شعاع دایره محیطی مثلث است.

۰۱۷۹. (یوگسلاوی، ۱۹۸۳). در درون مثلث ABC ، نقطه M را در نظر

گرفته‌ایم و، برای آن، داریم: $\widehat{MBA} = 30^\circ$ و $\widehat{MAB} = 10^\circ$. به شرط

$\widehat{ACB} = 80^\circ$ و $AC = BC$ ، مقدار زاویه AMC را پیدا کنید.

۰۱۸۰. (انگلستان، ۱۹۷۵). نقطه‌های D و E را، به ترتیب، روی

ضلع‌های BC و AC از مثلث ABC ، طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته

باشیم: $\widehat{BAD} = 50^\circ$ و $\widehat{ABE} = 30^\circ$. به شرطی که هر یک از دو زاویه

ABC و ACB برابر 50° درجه باشند، مقدار زاویه BED را پیدا کنید.

۰۱۸۱. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۶۴). نقطه P را روی ضلع

BC از مثلث ABC ، طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم: $PC = 2BP$.

زاویه ACB را پیدا کنید، به شرطی که بدانیم

$$\widehat{ABC} = 45^\circ \text{ و } \widehat{APC} = 60^\circ$$

۰۱۸۲* (هیأت داوران، هلند، ۱۹۷۹). نقطه‌های K ، L و M را در

درون مثلث متساوی‌الاضلاع ABC انتخاب کرده‌ایم و می‌دانیم:

$$\widehat{KAB} = \widehat{LBA} = 15^\circ, \quad \widehat{MBC} = \widehat{KCB} = 20^\circ,$$

$$\widehat{LCA} = \widehat{MAC} = 25^\circ$$

زاویه‌های مثلث KLM را محاسبه کنید.

۱۰۵. دایره

(ضمیمه ج. تعریف‌های ۳۵ و ۳۶ و قضیه‌های

۶۶ تا ۷۵ و ۷۹ را ببینید)

۰۱۸۳. (برزیل، ۱۹۸۳). ثابت کنید، همهٔ نقطه‌های محیط دایره را، می‌توان به دو مجموعه چنان تقسیم کرد که، بین رأس‌های هر مثلث قائم‌الزاویه محاط در این دایره، نقطه‌های هر دو مجموعه وجود داشته باشد.

۰۱۸۴. (نیویورک، ۱۹۷۵). ثابت کنید، چهار فاصلهٔ هر نقطه از محیط دایره، تا چهار رأس مربع محاط در آن، نمی‌توانند، به طور هم زمان گویا باشند.

۰۱۸۵. (هیأت داوران، بلژیک، ۱۹۷۶). نیمسازهای AA_1 ، BB_1 و CC_1 از مثلث ABC ، در نقطهٔ M بهم رسیده‌اند. ثابت کنید، اگر شعاع‌های دایره‌های محاط در مثلث‌های MA_1C ، MA_1B ، MC_1B ، MC_1A ، MB_1A و MB_1C با هم برابر باشند، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

۰۱۸۶. (انگلستان، ۱۹۷۵). هفت نقطه در سطح دایرهٔ به شعاع واحد چنان قرار گرفته‌اند که، فاصلهٔ هیچ دو نقطه‌ای از آن‌ها، از واحد کوچکتر نیست. ثابت کنید، یکی از نقطه‌ها بر مرکز دایره واقع است.

۰۱۸۷. (پکن، ۱۹۶۲). شش دایره روی یک صفحه چنان رسم شده‌اند که، مرکز هر کدام، بیرون از سایر دایره‌ها قرار دارد. ثابت کنید، همهٔ این شش دایره، نقطهٔ مشترکی ندارند (یعنی نقطه‌ای وجود ندارد که در درون یا روی محیط هر شش دایره باشد).

۰۱۸۸. (اتریش، لهستان، ۱۹۷۸). روی یک صفحه، دایره‌های غیر-مقطعی قرار دارند، به نحوی که، هر یک از آن‌ها، دست کم، بر شش دایرهٔ دیگر مماس است. ثابت کنید، این دایره‌ها، مجموعه‌ای نامتناهی را تشکیل می‌دهند.

۰۱۸۹. (بلغارستان، ۱۹۸۴). ثابت کنید، برای هر مثلث ABC ، سه دایره با شعاع‌های برابر وجود دارد که، یکی از آن‌ها بر ضلع‌های AB و BC ، دومی بر ضلع‌های BC و AC و سومی بر ضلع‌های AC و AB مماس باشند و سه دایره، درست یک نقطهٔ مشترک داشته باشند.

۱۹۰. (مسابقه بین المللی ریاضیات، لوکزامبورگ، ۱۹۸۰). دو دایره، P ، برهم مماس اند، خط راستی، مماس بر یکی از دایره‌ها در نقطه A ، دایره دیگر را در دو نقطه B و C قطع کرده است. ثابت کنید، خط راست PA ، نیمساز زاویه BPC و یا زاویه مجانب آن است.

۱۹۱. (هیأت داوران، امریکا، ۱۹۷۹). دایره‌ای که مرکز آن روی ضلع BC از مثلث متساوی الساقین ABC قرار دارد، بر دو ضلع برابر AB و AC مماس است. ثابت کنید، پاره خط PQ که دو انتهای آن، به ترتیب، بر ضلع‌های AB و AC قرار دارد، وقتی و تنها وقتی بر دایره مماس است که داشته باشیم:

$$BP \cdot CQ = \frac{1}{4} BC^2$$

۱۹۲. (انگلستان، ۱۹۸۰). روی قطر AB از نیم دایره‌ای، نقطه‌های L و K و روی کمان نیم دایره، نقطه‌های M و N و C را طوری انتخاب کرده ایم که چهار ضلعی $KLMN$ مربعی بشود با مساحتی برابر مساحت مثلث ABC ثابت کنید، مرکز دایره محاطی مثلث ABC بر نقطه برخورد یکی از ضلع‌های مربع با یکی از خط‌های راستی که رأس N یا M را به رأس A یا B وصل می‌کند، منطبق است.

۱۹۳. (هیأت داوران ویتنام، ۱۸۷۹). نقطه M روی محیط دایره محیطی مثلث متساوی الاضلاع ABC قرار دارد. ثابت کنید، مقدار

$$MA^2 + MB^2 + MC^2$$

به جای نقطه M بستگی ندارد.

۱۹۴. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۳). چهار ضلعی محدب $ABCD$ داده شده است و می‌دانیم: $AB = AD$ و $CB = CD$. ثابت کنید:
 الف) می‌توان دایره‌ای در آن محاط کرد؛
 ب) وقتی، و تنها وقتی، می‌توان دایره‌ای بر آن محیط کرد که داشته باشیم: $AB \perp BC$.

ج) در حالت $AB \perp BC$ ، مجذور فاصله بین مرکز دایره محاطی

(به شعاع r) تا مرکز دایره محیطی (به شعاع R)، برابر است با

$$R^2 + r^2 - r\sqrt{r^2 + 4R^2}$$

۱۹۵. (رومانی، ۱۹۷۸). ثابت کنید، نمی توان مربعی رسم کرد که چهار رأس آن، به ترتیب، بر محیط چهار دایره هم مرکزی قرار داشته باشند که شعاع های آنها، به تصاعد حسابی هستند.

۱۹۶. (یوگسلاوی، ۱۹۸۳). روی کمان AB از دایره محیطی مستطیل $ABCD$ ، نقطه M را (به جز A یا B) در نظر گرفته ایم. تصویر نقطه M را، بر خط های راست AD ، AC ، BC و CD ، به ترتیب، P ، Q ، R و S می نامیم. ثابت کنید، خط های راست PQ و RS برهم عمودند و روی یکی از قطر های مستطیل، یکدیگر را قطع می کنند.

۱۹۷. (انگلستان، ۱۹۷۷). ضلع BC از مثلث ABC ، بر دایره محاطی آن، در نقطه D مماس است. ثابت کنید، مرکز دایره، بر خط راستی قرار دارد که از وسط پاره خط های راست AD و BC می گذرد.

۱۹۸. (اتریش، ۱۹۷۲). دو دایره برهم مماس اند. در دایره بزرگتر، مثلث متساوی الاضلاعی محاط کرده ایم و، سپس، از رأس های این مثلث، مماس هایی بر دایره کوچکتر کشیده ایم. ثابت کنید، از بین این سه مماس، طول یکی، برابر است با مجموع طول های دو مماس دیگر.

۱۹۹. (هیأت داوران، امریکا، ۱۹۷۹). از نقطه P واقع بر کمان BC از دایره محیطی مثلث ABC ، عمود های PK ، PL و PM را، به ترتیب، بر خط های راست BC ، AC و AB رسم کرده ایم. ثابت کنید:

$$\frac{BC}{PK} = \frac{AC}{PL} + \frac{AB}{PM}$$

۲۰۰. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۰). الف O را مرکز دایره محاطی مثلث ABC و D را نقطه برخورد AO با دایره محیطی مثلث ABC می گیریم ($D \neq A$). ثابت کنید:

$$DB = DC = DO$$

ب) ثابت کنید، اگر $ABCD$ ، یک چهارضلعی محاطی باشد، آن وقت، نقطه‌های A_1, B_1, C_1, D_1 ، به ترتیب، مرکزهای دایره‌های محاطی مثلث‌های ABC, DAB, CDA, BCD ، رأس‌های یک مستطیل اند.

۲۰۱* (بالکان، ۱۹۸۴). ثابت کنید، چهارضلعی محاطی $A_1A_2A_3A_4$ ، برابر است با چهارضلعی که رأس‌های آن H_1, H_2, H_3, H_4 ، عبارتند از نقطه‌های برخورد ارتفاع‌ها در مثلث‌های

$$A_2A_3A_4, A_1A_3A_4, A_1A_2A_4, A_1A_2A_3$$

۲۰۲* (الف) (هیأت داوران، امریکا، ۱۹۸۲). قطر یک چهارضلعی محاطی، آن را به دو مثلث تقسیم می‌کند. ثابت کنید، مجموع طول‌های دو شعاع دایره‌های محاطی این دو مثلث، بستگی به انتخاب قطر ندارد.

ب) (مجارستان، ۱۹۷۸). ثابت کنید، بزرگترین ارتفاع در مثلثی که زاویه منفرجه ندارد، کمتر از مجموع دو شعاع دایره‌های محاطی و محیطی مثلث نیست. در چه حالتی، این ارتفاع، برابر با مجموع دو شعاع می‌شود؟

۲۰۳* (یوگسلاوی، ۱۹۷۷). ۱۰۰ نقطه روی صفحه‌ای قرار دارند. ثابت کنید، مجموعه‌ای متناهی از دایره‌ها وجود دارد که با سه شرط زیر سازگار باشد: ۱) هر یک از نقطه‌های مفروض، در داخل یکی از دایره‌ها باشد؛ ۲) هر دو نقطه از سطح دایره‌های مختلف، فاصله‌ای بیش از واحد داشته باشند؛ ۳) مجموع قطرهای همه دایره‌ها، کمتر از ۱۰۰ باشد.

۲۰۴* (پکن، ۱۹۶۳). $2n+3$ نقطه روی صفحه‌ای قرار دارند؛ هیچ سه نقطه‌ای بزرگ خط راست و هیچ چهار نقطه‌ای بر محیط یک دایره واقع نیستند. آیا دایره‌ای وجود دارد که از سه نقطه از این نقطه‌ها بگذرد و درست نیمی از بقیه نقطه‌ها را در درون خود جا دهد؟

۲۰۵* (بلغارستان، ۱۹۷۸). ثابت کنید، برای هر چند ضلعی محدب، می‌توان سه رأس مجاور پیدا کرد، به نحوی که اگر دایره‌ای از آنها بگذرانیم، سطح دایره، تمامی چندضلعی را بپوشاند.

۲۰۶* (فنلاند، ۱۹۸۰). بین n زوج ضلع‌های رو به رو، در $2n$ ضلعی محاطی ($n > 1$)، $n-1$ زوج را با هم موازی گرفته‌ایم. مطلوب است

همه مقدارهای n ، که به ازای آن‌ها، زوج ضلع‌های باقی مانده، به ناچار، با هم موازی باشند.

۲۰۷* (بلغارستان، ۱۹۸۲). n دایرهٔ مختلف، و هر کدام به شعاع واحد، روی صفحه‌ای رسم شده‌اند. ثابت کنید، دست کم روی محیط یکی از دایره‌ها، می‌توان کمائی پیدا کرد که طولی کمتر از $\frac{2\pi}{n}$ نداشته باشد و، در ضمن، شامل هیچ نقطه‌ای از محیط دایره‌های دیگر نباشد.

۱۱۳. چندضلعی

ضمیمهٔ ج: تعریف‌های ۱، ۲، ۳۵، ۳۷ و
قضیه‌های ۲، ۶۵، ۷۰، ۷۳، ۷۴، ۸۰ را
ببینید).

۲۰۸ (یوگسلاوی، ۱۹۸۱؛ سوئد، ۱۹۸۲). ثابت کنید، اگر برای نقطهٔ O ، واقع در درون چهار ضلعی $ABCD$ ، مساحت مثلث‌های ABO ، BCO ، CDO و DAO ، با هم برابر باشند، آن گاه این نقطه، دست کم روی یکی از قطرهای AC و BD قرار دارد.

۲۰۹ (کانادا، ۱۹۸۲). مساحت چهار ضلعی‌های $ABCD$ و $A'B'C'D'$ ، به ترتیب، برابرند با S و S' . ثابت کنید، اگر در درون چهار ضلعی $ABCD$ ، نقطه‌ای مانند O وجود داشته باشد که برای آن داشته باشیم:

$$\vec{OA} = \vec{A'B'}, \vec{OB} = \vec{B'C'}, \vec{OC} = \vec{C'D'}, \vec{OD} = \vec{D'A'}$$

آن وقت $S = 2S'$.

۲۱۰ (یوگسلاوی، ۱۹۷۲). از هر رأس متوازی‌الاضلاع به وسط دو ضلع غیرمجاور خود رسم کرده‌ایم؛ این هشت خط راست، یک هشت ضلعی به وجود می‌آورند. ثابت کنید، مساحت این هشت ضلعی، $\frac{1}{6}$ مساحت

متوازی الاضلاع است.

۰۲۱۱. (یوگسلاوی، ۱۹۷۰). قطرهای پنج ضلعی محدب $ABCDE$ ، ضمن برخورد با هم، پنج ضلعی $A_1B_1C_1D_1E_1$ و یک پنج ضلعی ستاره‌ای را به وجود آورده‌اند:

الف) مجموع زاویه‌های پنج ضلعی ستاره‌ای A, B, C, D, E پیدا کنید.

ب) نسبت مساحت پنج ضلعی $A_1B_1C_1D_1E_1$ را به مساحت پنج ضلعی $ABCDE$ پیدا کنید، به شرطی که پنج ضلعی اخیر، منتظم باشد.

۰۲۱۲. (هیأت داوران، فرانسه، ۱۹۷۹). ضلع‌های متناظر در دو چهار ضلعی $ABCD$ و $A'B'C'D'$ برابرند. ثابت کنید، یکی از دو گزارهٔ زیر درست است:

الف) $BD \perp AC$ و $B'D' \perp A'C'$

ب) نقطه‌های M و M' که از برخورد خط‌های راست AC و $A'C'$ ، به ترتیب، با عمودهایی که از وسط پاره‌خط‌های BD و $B'D'$ می‌گذرند، در برابری

$$MA \cdot M'C' = MC \cdot M'A'$$

صدق می‌کنند و، در ضمن، یا با هم بر پاره‌خط‌های راست AC و $A'C'$ و یا با هم بر امتداد آن‌ها قرار دارند.

۰۲۱۳. (اتریش، ۱۹۷۳). در یک هشت ضلعی محدب، مسی‌دانیم، زاویه‌ها با هم برابرند و، در ضمن، نسبت طول‌های هر دو ضلع مجاور، عددی گویاست. ثابت کنید، در این هشت ضلعی، هر دو ضلع رو به رو، با هم برابرند.

۰۲۱۴. (یوگسلاوی، ۱۹۷۶). یک شش ضلعی منتظم به ضلع a ، در صفحه‌ای رسم کرده‌ایم. برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ ، بزرگتر از واحد، پاره‌خطی به طول $\frac{a}{n}$ را، تنها به کمک خط‌کش، بسازید.

۰۲۱۵. (هیأت داوران، ۱۹۸۱). ثابت کنید، اگر برای زاویه‌های یک

پنج ضلعی محدب $ABCDE$ با ضلع‌های برابر، داشته باشیم:

$$\widehat{A} \geq \widehat{B} \geq \widehat{C} \geq \widehat{D} \geq \widehat{E}$$

این پنج ضلعی، منتظم است.

۰۲۱۶. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۴ و ۱۹۷۹). الف) ثابت کنید، اگر رأس‌های یک n ضلعی محدب در n ضلعی محدب دیگری که با اولی برابر است، قرار گیرد، رأس‌های این دو n ضلعی برهم منطبق می‌شوند.

ب) آیا حکم الف) برای چند ضلعی‌های غیرمحدب هم درست است؟
ج) آیا برای همه چند ضلعی‌های غیرمحدب، حکم الف) نادرست است؟
۰۲۱۷. (هیأت داوران، بلژیک، ۱۹۷۹). آیا هر $2n$ ضلعی منتظم را، می‌توان به لوزی‌ها، تقسیم کرد؟

۰۲۱۸. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۶۴). نقطه O را در بیرون لوزی $ABCD$ به ضلع مفروض a ، طوری انتخاب کرده‌ایم که از دو رأس A و C ، به فاصله $b > a$ باشد. ثابت کنید، حاصل ضرب $OB \cdot OD$ ، به اندازه زاویه BAD بستگی ندارد.

۰۲۱۹. (مجارستان، ۱۹۷۶). نقطه P را در بیرون متوازی‌الاضلاع $ABCD$ طوری انتخاب کرده‌ایم که دو زاویه PAB و PCB با هم برابر باشند و، درضمن، رأس‌های A و C در دو نیم صفحه مختلف نسبت به خط راست PB قرار گیرند. ثابت کنید، دو زاویه APB و DPC باهم برابرند.
۰۲۲۰. (هیأت داوران، بلژیک، ۱۹۸۳). در شش ضلعی $ABCDEF$ ، زاویه‌های رأس‌های A ، C و E با هم برابرند و، هیچ کدام، از 180 درجه تجاوز نمی‌کنند. درضمن، می‌دانیم:

$$\widehat{ABF} = \widehat{CBD}, \widehat{AFB} = \widehat{EFD}$$

ثابت کنید، اگر A' قرینه A نسبت به قطر BF باشد و برخط راست CE قرار نگیرد، آن وقت، چهار ضلعی $A'CDE$ ، متوازی‌الاضلاع است.

۰۲۲۱. (بلغارستان، ۱۹۷۹). رأس‌های پنج ضلعی محدب $ABCDE$ ، طوری قرار دارند که، مثلث‌های ABC و CDE ، متساوی‌الاضلاع از آب

در آمده‌اند. ثابت کنید، اگر O مرکز مثلث ABC و نقطه‌های M و N ، به ترتیب، وسط پاره‌خط‌های راست BD و AE باشند، آن وقت، دو مثلث OME و OND متشابه‌اند.

۲۲۲. (هیأت داوران، اتحاد شوروی، ۱۹۸۲). در پنج ضلعی محدب $ABCDE$ می‌دانیم: زاویه‌های دو رأس B و E قائمه و، در ضمن، دو زاویه BAC و EAD با هم برابرند. ثابت کنید، اگر قطرهای BD و CE در نقطه O یکدیگر را قطع کرده باشند، خط‌های راست AO و BE بر هم عمودند.

۲۲۳. (انگلستان، ۱۹۶۶). مطلوب است، تعداد ضلع‌های چند ضلعی منتظمی که برای چهار رأس متوالی A, B, C, D از آن، داشته باشیم:

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$$

۲۲۴. (انگلستان، ۱۹۷۱). روی محیط دایرهٔ محاطی يك $2n$ ضلعی منتظم، دو نقطهٔ A و B را در نظر گرفته‌ایم. ثابت کنید، اگر قطرهایی از $2n$ ضلعی که رأس‌های رو به رو را به هم وصل می‌کنند، از نقطهٔ A به زاویه‌های $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ و از نقطهٔ B ، به زاویه‌های β_1, \dots, β_n دیده شوند، آن وقت

$$\operatorname{tg}^2 \alpha_1 + \dots + \operatorname{tg}^2 \alpha_n = \operatorname{tg}^2 \beta_1 + \dots + \operatorname{tg}^2 \beta_n$$

۲۲۵. (مجارستان، ۱۹۷۸). رأس‌های يك چند ضلعی محدب با تعداد ضلع‌های فرد را، به نحوی رنگ کرده‌ایم که، هیچ دو رأس مجاوری، هم‌رنگ نباشند. ثابت کنید، برای هر نوع رنگ آمیزی که با این شرط انجام شود، می‌توان چند ضلعی را، به وسیلهٔ قطرهای غیرمقاطع آن، طوری به مثلث‌ها تقسیم کرد که، دو انتهای هر قطر، رنگ‌های مختلفی داشته باشند.

۱۲۵. نقطه‌ها، پاره‌خط‌ها و خط‌های راست

(ضمیمهٔ ج؛ تعریف‌های ۱ تا ۳، ۱۸، ۳۴)

۳۷، ۳۵ و قضیه‌های ۱، ۲، ۶۵، ۹۶ را

ببینید).

۲۲۶. (نیویورک، ۱۹۸۵). وسط ضلع‌های مثلث متساوی‌الاضلاع

ABC ، آن را به چهار مثلث ADE ، BDF ، DEF و CEF تقسیم می کنند، وسط ضلع های مثلث های اخیر را K ، L ، M ، N ، O ، P ، Q ، R ، S می نامیم. هر يك از ۱۵ نقطه حاصل را با یکی از دو رنگ موجود، رنگ می کنیم. ثابت کنید، می توان ۳ نقطه از يك رنگ پیدا کرد، به نحوی که رأس های يك مثلث متساوی الاضلاع باشند.

۲۲۷. (امریکا، ۱۹۸۱). روی صفحه، زاویه ای به اندازه $\frac{180}{n}$ درجه

رسم کرده ایم، که در آن، $n \in \mathbb{N}$ ، بر ۳ بخش پذیر نیست. ثابت کنید، به کمک پرگار و خط کش، می توان این زاویه را به سه بخش برابر تقسیم کرد.

۲۲۸. (یوگسلاوی، ۱۹۷۲). ثابت کنید، هر دو قطر يك مجموعه محدب

در صفحه، دست کم يك نقطه مشترك دارند.

۲۲۹. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۸۲). آیا هر چهار ضلعی

محدب را، می توان با يك خط شکسته، به دو بخش چنان تقسیم کرد که، قطر هر کدام از آنها، کوچکتر از قطر چهار ضلعی اصلی باشد؟

۲۳۰. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۲). ثابت کنید، اگر n

نقطه بر صفحه، طوری قرار گرفته باشند که، هر خط راستی که از دو تا از آنها بگذرد، دست کم شامل یکی دیگر از نقطه ها باشد، آن وقت، همه نقطه ها روی يك خط راست واقع اند.

۲۳۱. (چکوسلواکی، ۱۹۶۸). پاره خط های راست AB و CD

برابرند، ولی موازی نیستند. مطلوب است، مکان هندسی نقطه O ، که دارای این ویژگی باشد: قرینه پاره خط AB نسبت به نقطه O ؛ در ضمن، قرینه پاره خط CD نسبت به يك خط راست باشد.

۲۳۲. (بلژیک، ۱۹۷۷). ثابت کنید، اگر مجموعه ای واقع بر صفحه،

بیش از يك مرکز تقارن داشته باشد، آن وقت، دارای بی نهایت مرکز تقارن است.

۲۳۳. (بلژیک، ۱۹۷۸). ثابت کنید، اجتماع L ، محورهای تقارن

مجموعه M در صفحه، زیر مجموعه ای از اجتماع محورهای تقارن مجموعه L است.

۰۲۳۴. (هیأت داوران، جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۹). مجموعه واقع بر صفحه، دارای دو محور تقارن است که تحت زاویه α یکدیگر را قطع کرده‌اند و، در ضمن، $\frac{\alpha}{\pi}$ ، عددی گنگ است. ثابت کنید، اگر این مجموعه

شامل بیش از یک نقطه باشد، شامل بی نهایت نقطه است.

۰۲۳۵. (یوگسلاوی، ۱۹۷۶). همه مقادیرهای طبیعی $n > 2$ را پیدا کنید که، برای آن‌ها، بتوان در صفحه، n نقطه را طوری انتخاب کرد که، هر دو نقطه از آن‌ها، رأس‌های مثلث متساوی‌الاضلاعی باشند که، رأس سوم آن‌هم، یکی از $(n-2)$ نقطه دیگر باشد.

۰۲۳۶. (چکوسلواکی، ۱۹۸۵). مجموعه M ، از یک صفحه، با کنار گذاشتن سه نقطه A, B و C از آن، به دست آمده است. کمترین تعداد مجموعه‌های محدب را پیدا کنید که، اجتماع آن‌ها، همان مجموعه M باشد.

۰۲۳۷. (هیأت داوران، رومانی، ۱۹۷۹). ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی $n_0 > n$ ، می‌توان تمامی صفحه را، با رسم چند خط راستی که در بین آن‌ها، خط‌های راست متقاطع هم حتماً وجود دارند، به n بخش تقسیم کرد. کمترین مقدار n_0 چقدر است؟

۰۲۳۸. (چکوسلواکی، ۱۹۸۲). روی صفحه محورهای مختصات، مجموعه محدب را پیدا کنید که شامل بی نهایت نقطه با مختصات درست باشد، ولی در برخورد با هر خط راست، مجموعه‌ای متناهی (یا تهی) از این نقطه‌ها پیدا شود.

۰۲۳۹. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۴). همه زوج بردارهای غیر صفر x و y را طوری پیدا کنید که، به‌ازای آن‌ها، دنباله عددهای

$$a_n = |x - ny| \quad (n \in \mathbb{N})$$

الف) صعودی؛ ب) نزولی باشد.

۰۲۴۰. (یوگسلاوی، ۱۹۷۳). چند نقطه روی صفحه طوری قرار گرفته‌اند که، فاصله بین هر دو تا از آن‌ها، از ۲ بزرگتر باشد. ثابت کنید،

هر مجموعه با مساحت کمتر از π را، می توان با انتقال موازی، به اندازه برداری کوچکتر از واحد، طوری جابه جا کرد که شامل هیچ کدام از این نقطه ها نباشد.

۲۴۱. (بلیزیک، ۱۹۷۷). در درون دایره به شعاع $n \in \mathbb{N}$ ، به تعداد $4n$ پاره خط، که طول هر کدام برابر واحد است، قرار داده ایم. ثابت کنید، اگر خط راستی مفروض باشد، خط راست دیگری را می توان پیدا کرد که یا موازی با آن و یا عمود بر آن است و، در ضمن، دست کم دو پاره خط را قطع می کند.

۲۴۲*. (چکوسلواکی، ۱۹۷۳). در مربعی به ضلع ۵۰، خط شکسته ای قرار دارد. ثابت کنید، اگر فاصله هر نقطه از مربع تسا، دست کم، یکی از نقطه های خط شکسته، بیشتر از واحد نباشد، آن وقت، طول خط شکسته، از ۱۲۴۸ بزرگتر است.

۲۴۳*. (هیأت داوران، چکوسلواکی، ۱۹۷۹). روی خط راستی، $n^2 + 1$ پاره خط قرار گرفته است ($n \in \mathbb{N}$). ثابت کنید، یا بین این پاره خطها می توان، $n + 1$ پاره خط غیرمتقاطع پیدا کرد و یا برای $n + 1$ پاره خط، يك نقطه مشترك وجود دارد.

۲۴۴*. (امریکا، ۱۹۸۳). روی خط راستی، چند مجموعه وجود دارد که، هر کدام از آنها، اجتماعی از دو پاره خط است. ثابت کنید، اگر هر سه مجموعه، از این مجموعه ها، نقطه مشتركی داشته باشند، آن وقت، نقطه ای پیدا می شود که، دست کم، متعلق به نیمی از همه مجموعه ها است.

۲۴۵*. (یوگسلاوی، ۱۹۷۵). $n + 4$ نقطه روی صفحه طوری قرار گرفته اند که، چهار نقطه از آنها، در چهار رأس يك مربع و بقیه نقطه ها در درون این مربع واقع اند. این نقطه ها را، با این شرط، به وسیله پاره خطهای راستی به هم وصل کرده ایم که، اولاً، هیچ پاره خطی، جز در دو انتهای خود، شامل این نقطه ها نباشد و ثانیاً، هیچ دو پاره خطی، به جز احتمالاً در یکی از دو انتهای خود، نقطه مشتركی نداشته باشند. حداکثر تعداد پاره خطهای راستی را که، به این ترتیب، می توان رسم کرد، پیدا کنید.

۱۳۵. نابرابری‌های هندسی

ضمیمهٔ ج: تعریف‌های ۱، ۳۵، ۳۸ و
قضیه‌های ۱، ۶، ۶۴، ۶۹، ۷۰، ۷۴، ۷۵
را ببینید.

۲۴۶. (انگلستان، ۱۹۶۷). دو ضلع به طول‌های a و b از مثلثی، در شرط $a > b$ صدق می‌کنند. اگر طول ارتفاع‌های وارد بر این دو ضلع، برابر h_a و h_b باشد، ثابت کنید:

$$a + h_a \geq b + h_b$$

در چه حالتی، علامت برابری برقرار است؟

۲۴۷. (چکوسلوواکی، ۱۹۷۶). ثابت کنید، اگر یک چند ضلعی محدب در داخل چند ضلعی محدب دیگری باشد، محیط چند ضلعی داخلی، از محیط چند ضلعی خارجی، کمتر است.

۲۴۸. (یوگسلاوی، ۱۹۷۵). ثابت کنید، اگر وسط ضلع‌های یک n ضلعی محدب را ($n \geq 4$)، پشت سرهم به یکدیگر وصل کنیم، مساحت چند ضلعی حاصل، کمتر از نصف مساحت چند ضلعی اصلی نیست.

۲۴۹. (اتریش، لهستان، ۱۹۷۸). در یک شش ضلعی منتظم، متوازی‌الاضلاعی محاط کرده‌ایم که، مرکز تقارن آن، بر مرکز تقارن شش ضلعی واقع است. ثابت کنید، مساحت متوازی‌الاضلاع، از $\frac{2}{3}$ مساحت شش ضلعی تجاوز نمی‌کند.

۲۵۰. (یوگسلاوی، ۱۹۷۷). ثابت کنید، مساحت هر مربعی که در داخل یک مثلث باشد، از نصف مساحت این مثلث تجاوز نمی‌کند.

۲۵۱. (پکن، ۱۹۶۴). در مثلث ABC ، که در آن، زاویهٔ رأس A حاده نیست، مربع DE را محاط کرده‌ایم (به نحوی که ضلع DE از آن، بر پاره‌خط BC و رأس‌های B_1 و C_1 ، به ترتیب، بر پاره‌خط‌های AB و AC قرار داشته باشند). سپس، به همین ترتیب، مربع $B_1C_1D_1E_1$ را در مثلث AB_1C_1 محاط کرده‌ایم و غیره. این ساختمان را، چند بار انجام داده‌ایم.

ثابت کنید، مجموع مساحت‌های همه مربع‌های محاطی، از نصف مساحت مثلث ABC کمتر است.

۰۲۵۲ (چکوسلواکی، ۱۹۷۵). ثابت کنید، هر مثلث با زاویه‌های حاده و به مساحت واحد را، می‌توان در مثلث قائم‌الزاویه‌ای جا داد که مساحتی بیش از $\sqrt{3}$ نداشته باشد.

۰۲۵۳ (هیأت داوران، ۱۹۸۱). ثابت کنید، اگر روی محیط نیم‌دایره به شعاع واحد، نقطه‌های A, B, C, D و E را، پشت سرهم قرار دهیم، این نابرابری برقرار است:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DE^2 + AB \cdot BC \cdot CD + BC \cdot CD \cdot DE < 4$$

۰۲۵۴ (چکوسلواکی، ۱۹۸۳). ثابت کنید، برای هر نقطه O واقع بر ضلع AB از مثلث ABC (و غیر واقع بر رأس‌های مثلث)، این نابرابری برقرار است:

$$OC \cdot AB < OA \cdot BC + OB \cdot AC$$

۰۲۵۵ (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۶۲). ثابت کنید، برای هر چهارضلعی محدب، نسبت بزرگترین فاصله بین دو رأس آن، به کوچکترین فاصله بین دو رأس، از $\sqrt{2}$ کمتر نیست.

۰۲۵۶ (اتریش، ۱۹۷۵). ۶ نقطه مختلف بر یک صفحه قرار دارند. ثابت کنید، نسبت بزرگترین فاصله بین این نقطه، بر کوچکترین فاصله بین آن‌ها، از $\sqrt{3}$ کمتر نیست.

۰۲۵۷ (نیویورک، ۱۹۷۷ تا ۱۹۷۹). a, b و c را طول ضلع‌ها، P را مقدار محیط و S را مساحت مثلث می‌گیریم. ثابت کنید:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{P} \quad (1)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3} P^2 \quad (2)$$

$$P^2 \geq 12\sqrt{3} S \quad (3)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} S \quad (4)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{1}{9} P^3 \quad (5)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{4\sqrt{3}}{3} SP \quad (6)$$

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq 16 S^2 \quad (7)$$

۰۲۵۸. (یوگسلاوی، ۱۹۷۵). ثابت کنید، اگر نقطه O در درون مثلث

ABC ، با نصف محیط p ، واقع باشد، این نابرابری برقرار است:

$$OA \cdot \cos \frac{\widehat{BAC}}{2} + OB \cdot \cos \frac{\widehat{ABC}}{2} + OC \cdot \cos \frac{\widehat{ACB}}{2} \geq p$$

در چه حالتی، به علامت برابری می‌رسیم؟

۰۲۵۹. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۶۵). ثابت کنید، برای

زاویه‌های α ، β و γ از هر مثلث، همیشه داریم:

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}$$

در چه حالتی، علامت برابری برقرار است؟

۰۲۶۰. (انگلستان، ۱۹۶۷). ثابت کنید، برای زاویه‌های α ، β و γ از

هر مثلث، این نابرابری برقرار است:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \geq \frac{3}{4}$$

چه موقع، به علامت برابری می‌رسیم؟ ثابت کنید، مقدار $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$ حداکثر مقدار ندارد.

۰۲۶۱. (یوگسلاوی، ۱۹۷۶). ثابت کنید، برای زاویه‌های α ، β و γ

از مثلثی که زاویهٔ منفرجه ندارد، داریم:

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma > \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$$

۰۲۶۲. (هیأت داوران، ویتنام، ۱۹۷۷). ثابت کنید، برای هر مثلث با

ضلع‌های a ، b و c و مساحت S این نابرابری برقرار است:

$$\frac{ab+ac+bc}{4S} \geq \sqrt{3}$$

۲۶۳. (چکوسلواکی، ۱۹۷۴). ثابت کنید، اگر ضلع‌های شش ضلعی

محاظی $ABCDEF$ در برابری

$$AB=BC, CD=DE, EF=FA$$

صدق کنید، آن وقت، مساحت مثلث ACE از مساحت مثلث BDF تجاوز نمی‌کند.

۲۶۴. (استرالیا، ۱۹۱۲). امتداد نیمسازهای زاویه‌های A ، B و C

از مثلث ABC ، دایرهٔ محیطی مثلث را، بدترتیب، در نقطه‌های A_1 ، B_1 و C_1 قطع کرده‌اند. ثابت کنید:

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 > AB + BC + AC$$

۲۶۵. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۸۱). ثابت کنید، اگر AD ،

CF و BE ، نیمسازهای مثلث ABC باشند، مساحت مثلث DEF از یک چهارم مساحت مثلث ABC تجاوز نمی‌کند.

۲۶۶. (امریکا، ۱۹۸۲). نقطهٔ A_1 را در درون مثلث متساوی‌الاضلاع

ABC ، و نقطهٔ A_2 را در درون مثلث A_1BC انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید:

$$S_1 : P_1^2 > S_2 : P_2^2$$

که در آن، S_1 ، S_2 ، P_1 و P_2 ، به ترتیب، مساحت‌ها و محیط‌های دو مثلث A_1BC و A_2BC هستند.

۲۶۷. (انگلستان، ۱۹۸۳). ثابت کنید، اگر ۱۰ نقطه را روی سطح

دایرهٔ به قطر ۵ انتخاب کنیم، فاصلهٔ بین دو نقطه (از این ۱۰ نقطه) از ۲ کمتر است.

۲۶۸. (هیأت داوران، لهستان، ۱۹۸۲) نقطه‌های A_1 ، A_2 ، ...، A_n

محیط دایرهٔ به مرکز O و شعاع واحد، چنان قرار گرفته‌اند که داریم:

$$\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \dots + \vec{OA_n} = \vec{0}$$

ثابت کنید، برای هر نقطه B داریم:

$$BA_1 + BA_2 + \dots + BA_n \geq n$$

۲۶۹*. (مجارستان، ۱۹۸۱). ثابت کنید، برای نقطه‌های دلخواه A ،

B ، C ، D و E واقع بر يك صفحه، همیشه داریم:

$$AB + CD + DE + EC \leq AC + AD + AE + BC + BD + BE$$

۱۴۳. مسأله‌های هندسی مربوط به اکستریمم

(ضمیمه ج: تعریف‌های ۳۷، ۳۵ و قضیه‌های

۱، ۶، ۶۴، ۷۵ را ببینید).

۲۷۰. (چکوسلوواکی، ۱۹۸۰). طول بزرگترین ضلع يك دوزنقه

متساوی‌الساقین برابر ۱۳ و محیط آن برابر ۲۸ می‌باشد.

الف) اگر مساحت دوزنقه برابر ۲۷ باشد، طول ضلع‌های آن را پیدا

کنید؛

ب) آیا مساحت این دوزنقه، می‌تواند برابر $27/001$ باشد؟

۲۷۱. (هیأت داوران، بلژیک، ۱۹۸۲). از بین همه مثلث‌های با محیط

برابر، آن را پیدا کنید که، در آن، شعاع دایره محاطی، حداکثر مقدار ممکن

باشد.

۲۷۲. (هیأت داوران، امریکا، ۱۹۷۷). از نقطه‌ای به فاصله $k < 1$ از

مرکز دایره به شعاع واحد، دو وتر عمود برهم گذرانده‌ایم. حداکثر و حداقل

مجموع طول‌های این دو وتر را پیدا کنید.

۲۷۳. (یوگسلاوی، ۱۹۷۳). ثابت کنید، مجموع فاصله‌های بین

وسط‌های ضلع‌های روبه‌رو در يك چهارضلعی، وقتی و تنها وقتی برابر نصف

محیط آن است که، چهارضلعی مفروض، متوازی‌الاضلاع باشد.

۲۷۴. (انگلستان، ۱۹۸۲). ثابت کنید، اگر برای نقطه O واقع در

درون چهارضلعی $ABCD$ ، مساحت S چهارضلعی، در برابری زیر صدق کند:

$$2S = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$$

آن وقت، چهارضلعی $ABCD$ يك مربع و، نقطه O ، مرکز آن است.
 ۰۴۷۵. (نیویورک، ۱۹۸۰). $A_i H_i$ ($i = 1, 2, 3$) را ارتفاع‌های
 مثلث $A_1 A_2 A_3$ ، که مساحتی برابر S دارد، می‌گیریم. ثابت کنید این مثلث،
 وقتی و تنها وقتی متساوی‌الاضلاع است که داشته باشیم:

$$S = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 A_i A_{i+1} \cdot A_i H_i \quad (A_4 = A_1)$$

۰۴۷۶. (بلغارستان، ۱۹۶۸). نسبت بین ضلع‌های مثلثی را پیدا کنید
 که، برای آن، داشته باشیم:

$$\frac{a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma}{a \sin \beta + b \sin \gamma + c \sin \alpha} = \frac{P}{9R}$$

که در آن، a و b و c ضلع‌ها، α و β و γ زاویه‌های مقابل به آن ضلع‌ها،
 محیط و R شعاع دایره محیطی مثلث‌اند.

۰۴۷۷. (نیویورک، ۱۹۷۹). n ضلعی منتظمی را در n ضلعی منتظم مفروضی
 محاط کرده‌ایم ($n > 3$). ثابت کنید، برای این کسه، مساحت n ضلعی محاطی
 کمترین مقدار ممکن باشد، باید رأس‌های آن را در وسط ضلع‌های n ضلعی
 محیطی انتخاب کرد.

۰۴۷۸. (یوگسلاوی، ۱۹۷۴). $n \geq 3$ نقطه دلخواه A_1, A_2, \dots, A_n
 را، روی صفحه‌ای در نظر می‌گیریم، به نحوی که، هیچ سه نقطه‌ای روی يك خط
 راست نباشند. زاویه $A_i A_j A_k$ را، که به وسیله سه نقطه مختلف A_i, A_j و A_k
 به وجود می‌آید، α می‌نامیم. برای هر مقدار n ، حداکثر مقدار α را پیدا کنید.
 نقطه‌ها، چگونه بر صفحه واقع باشند، تا به این مقدار برسیم؟

۰۴۷۹. (بلغارستان، ۱۹۸۳). مربعی با حداقل اندازه‌ها را پیدا کنید،
 به نحوی که بتوان 5 دایره به شعاع واحد در آن جا داد و، در ضمن، هیچ دو
 دایره‌ای، دارای نقطه‌های مشترک درونی نباشند.

۰۴۸۰. (هیأت داوران، جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۸۲). ثابت
 کنید، اگر شعاع دایره محاطی مثلثی، برابر نصف شعاع دایره محیطی آن
 باشد، این مثلث، متساوی‌الاضلاع است.

۲۸۱. (امریکا، ۱۹۷۹). زاویه‌ای را روی صفحه رسم و نقطه O را درون آن، علامت می‌گذاریم. از نقطه O ، پاره‌خط راست BC را طوری رسم کنید که، دو انتهای آن، بر ضلع‌های زاویه قرار گیرند و، در ضمن، مقدار

$$\frac{1}{BO} + \frac{1}{CO}$$

حداکثر مقدار ممکن باشد.

۲۸۲*. برای نقطه T از مثلث مفروض ABC ، $m(T)$ و $M(T)$ را، به ترتیب، کوچکترین و بزرگترین مقدار، از بین سه مقدار TA ، TB و TC فرض می‌کنیم.

الف) (چکوسلواکی، ۱۹۷۴). همه نقطه‌های T از مثلث ABC را طوری پیدا کنید که، برای آن‌ها، $m(T)$ حداکثر، مقدار ممکن باشد.
ب) (رومانی، ۱۹۸۲). ثابت کنید، اگر زاویه ABC ، حاده نباشد، برای هر نقطه T از مثلث ABC ، داریم:

$$m(T) \leq \frac{1}{3}BC \leq M(T)$$

فصل چهارم هندسه فضائی

۱۵۵. چهاروجهی‌ها

(ضمیمه ج؛ تعریف‌های ۱۰، ۴۲ و قضیه‌های

۶، ۶۴، ۸۴، ۸۶ تا ۸۹، ۹۱، ۹۲ را ببینید)

۲۸۳. (بلغارستان، ۱۹۶۶). ثابت کنید، برای هر چهاروجهی، می‌توان

مثلی ساخت که، ضلع‌های آن، سه یالی از چهاروجهی باشند که از يك رأس

می گذرند.

۲۸۴. (چکوسلواکی، ۱۹۶۷). ثابت کنید، اگر یال‌های یک چهاروجهی،

در برابری‌های

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$$

صدق کنند، دست کم یکی از وجه‌های آن، مثلثی است با زاویه‌های حاده.

۲۸۵. (کانادا، ۱۹۸۳). آیا درست است که، اگر مساحت چهاروجه یک

چهاروجهی، به ترتیب با مساحت وجه‌های چهاروجهی دیگری برابر باشد،

دو چهاروجهی حجمی برابر دارند؟

۲۸۶. (چکوسلواکی، ۱۹۷۱). ثابت کنید، چهاروجهی $ABCD$ وجود

دارد که همه وجه‌های آن، مثلث‌های قائم‌الزاویه متشابهی با زاویه‌های حاده

مجاور به رأس‌های A و B باشند. کدام یک از یال‌های این چهاروجهی بزرگترین

طول و کدام یک کوچکترین طول را دارد؟ اگر طول بزرگترین یال برابر

واحد باشد، طول کوچکترین یال چقدر است؟

۲۸۷. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۴). اگر شش صفحه را

طوری در نظر بگیریم که هر کدام از آن‌ها از یک یال چهاروجهی منتظم و

نقطه وسط یال مقابل آن گذشته باشد، چهاروجهی، به چند بخش تقسیم می‌شود؟

اگر حجم چهاروجهی منتظم برابر واحد باشد، حجم هر یک از این بخش‌ها

را پیدا کنید.

۲۸۸. (چکوسلواکی، ۱۹۷۶). چهار وجهی‌های $ABCD$ و

$A'B'C'D'$ طوری قرار گرفته‌اند که خط‌های راست AA' ، BB' ، CC' و

DD' باهم موازی‌اند. در ضمن، وجه‌های ABC و $A'B'C'$ ، نقطه مشترکی

ندارند و رأس‌های D و D' ، به ترتیب، بر صفحه‌های $A'B'C'$ و ABC واقع

شده‌اند، ثابت کنید، این دو چهاروجهی، حجمی برابر دارند.

۲۸۹. (بلغارستان، ۱۹۶۸). نقطه O در درون چهاروجهی $ABCD$

است؛ خط‌های راست AO ، BO ، CO ، DO ، وجه‌های ACD ، BCD ، ABD و

ABC را، به ترتیب، در نقطه‌های A_1 ، B_1 ، C_1 و D_1 قطع کرده‌اند. در

ضمن، نسبت‌های

$$\frac{AO}{A_1O}, \frac{BO}{B_1O}, \frac{CO}{C_1O}, \frac{DO}{D_1O}$$

همگی برابر با يك عددند. همهٔ مقدارهای ممکن، برای این عدد را، پیدا کنید.

۲۹۰. (بلغارستان، ۱۹۶۶). روی یال‌های AB ، AC و AD از چهاروجهی مفروض $ABCD$ ، برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ ، سه ترتیب، نقطه‌های K_n ، L_n و M_n را طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم:

$$AB = nAK_n, \quad AC = (n+1)AL_n, \quad AD = (n+2)AM_n$$

ثابت کنید، همهٔ صفحه‌های $K_nL_nM_n$ از يك خط راست می‌گذرند.
 ۲۹۱. (لهستان، ۱۹۷۹). ثابت کنید، همهٔ خط‌های راستی که رأس‌های يك چهاروجهی را به مرکز دایرهٔ محاطی و وجه‌های روبه‌رو وصل می‌کنند، تنها وقتی از يك نقطه می‌گذرند که، سه حاصل ضرب طول‌های یال‌های روبه‌رو، باهم برابر باشند.

۲۹۲. (بلغارستان، ۱۹۷۶). صفحه‌ای سه وجه يك چهاروجهی را، که از يك رأس گذشته‌اند، قطع کرده است. این صفحه، چهاروجهی را به دو بخش تقسیم می‌کند. ثابت کنید، این صفحه، وقتی و تنها وقتی، سطح چهاروجهی را به دو بخش متناسب با حجم‌های دو بخش متناظر تقسیم می‌کند که از مرکز کرهٔ محاطی چهاروجهی گذشته باشد.

۲۹۳. (چکوسلواکی، ۱۹۶۸). ثابت کنید، اگر چهاروجهی، دوجفت یال روبه‌روی عمودبرهم داشته باشد، آن وقت، وسط همهٔ یال‌های چهاروجهی، بر يك کره قرار دارند.

۲۹۴. (هیأت داوران، یونان، ۱۹۷۹). يك چهاروجهی منتظم به یال a در چهاروجهی منتظم دیگری به یال b ، طوری محاط کرده‌ایم که، هر رأس چهاروجهی محاطی، درست بر يك وجه چهاروجهی محیطی قرار گرفته است. ثابت کنید. $3a \geq b$.

۲۹۵. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۸۳). در چهاروجهی $ABCD$ ، یال‌های AD ، BD و CD ، دو به‌دو برهم عمودند و، به ترتیب، طول‌هایی

برابر a ، b و c دارند. ثابت کنید، برای هر نقطه M واقع بر یکی از ضلع‌های مثلث ABC ، مجموع S ، فاصله‌های رأس‌های A ، B و C تا خط راست DM ، در نابرابری زیر صدق می‌کند:

$$S \leq \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

در چه حالتی، به‌علامت برابری می‌رسیم؟

۲۹۶. (یوگسلاوی، ۱۹۷۳؛ اتریش و لهستان، ۱۹۸۵). ثابت کنید،

برای هر نقطه M واقع در درون چهاروجهی، مجموع زاویه‌هایی که یال‌های چهاروجهی، از این نقطه، تحت آن‌ها دیده می‌شوند، از ۵۴ درجه بیشتر است.

۲۹۷. (بلغارستان، ۱۹۷۶). ثابت کنید، همه فاصله‌های یک نقطه M در فضای

تا هر یک از چهار رأس چهاروجهی منتظم با یال برابر 2 ، تنها وقتی به‌وسیله عدد‌های درست بیان می‌شوند که، این نقطه، بر یکی از رأس‌های چهاروجهی منطبق باشد.

۲۹۸. (چکوسلواکی، ۱۹۷۳). ثابت کنید، برای ارتفاع‌های

h_i ($i = 1, 2, 3, 4$)، هر چهاروجهی و شعاع r_i ، کره‌های محاطی خارجی آن، همیشه داریم:

$$2 \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} \right) = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}$$

۲۹۹. (لهستان، ۱۹۷۸). ثابت کنید، برای ارتفاع‌های h_1, h_2, h_3, h_4

هر چهاروجهی و فاصله‌های d_1, d_2, d_3 ، بین هر دو یال روبه‌رو در آن، داریم:

$$\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2} + \frac{1}{h_4^2} = \frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_3^2}$$

۳۰۰. (هیأت داوران، بلغارستان، ۱۹۸۱). کره‌ای بر یال‌های AB ،

BC ، CD و DA از چهاروجهی $ABCD$ در چهار نقطه مماس است و، این چهار نقطه، رأس‌های یک مربع را تشکیل می‌دهند. ثابت کنید اگر این کره،

در ضمن، بر یال AC مماس باشد، در آن صورت، بر یال BD هم مماس خواهد بود.

۰۳۰۱* (بلغارستان، ۱۹۸۱). صفحه‌های α, β, γ و δ بر کره محیطی چهاروجهی $ABCD$ ، به ترتیب، در نقطه‌های A, B, C و D مماس‌اند. ثابت کنید، اگر خط راست فصل مشترك صفحه‌های α و β با خط راست CD در يك صفحه باشند، آن وقت، خط راست فصل مشترك صفحه‌های γ و δ هم با خط راست AB در يك صفحه قرار می‌گیرند.

۱۶۵. چندوجهی، کره و مجموعه‌های دیگر

(ضمیمه ج: تعریف‌های ۱۱، ۱۶ و قضیه‌های ۲، ۱۰، ۸۵، ۸۷ تا ۸۹ را ببینید).

۰۳۰۲ (چکوسلواکی، ۱۹۷۹). مکعب‌هایی را در نظر می‌گیریم که، مرکزهای آن‌ها، بر مرکز تقارن مکعب مستطیل مفروضی، با یال‌های $a < b < c$ واقع و وجه‌های آن‌ها با وجه‌های مکعب مستطیل موازی باشند. طول یال مکعبی را پیدا کنید که، برای آن، اجتماع حجم‌های مکعب و مکعب مستطیل، با اشتراك آن‌ها، حداقل تفاضل را داشته باشد.

۰۳۰۳ (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۸۳). ثابت کنید، در درون مکعب به یال a ، می‌توان دو چهاروجهی منتظم به یال a ، به نحوی جا داد که نقطه مشتركی نداشته باشند.

۰۳۰۴ (یوگسلاوی، ۱۹۷۳). ۵ نقطه، در فضا، طوری قرار گرفته‌اند که، هیچ چهارتایی از آن‌ها، بر يك صفحه واقع نیستند. ثابت کنید، خط راستی که از دو تا از این نقطه‌ها بگذرد، صفحه شامل سه نقطه دیگر را، در نقطه‌ای قطع می‌کند که در درون مثلث با رأس‌های ۳ نقطه اخیر، واقع است.

۰۳۰۵ (مجارستان، ۱۹۸۰). فضا، به وسیله ۵ مجموعه غیر تهی و جدا از هم، تقسیم شده است. ثابت کنید، صفحه‌ای وجود دارد که، دست کم، با ۴ مجموعه، دارای نقطه‌های مشترك باشد.

۰۳۰۶ (هیأت داوران، اتحاد شوروی، ۱۹۸۳). ثابت کنید. ضمن تقسیم دلخواه فضا به وسیله ۳ مجموعه، دست کم، یکی از مجموعه‌ها دارای این ویژگی است: برای هر مقدار $a > 0$ ، می‌توان دو نقطه در این مجموعه

پیدا کرد، به نحوی که فاصله بین آنها، برابر a باشد.
 ۳۰۷. (رومانی، ۱۹۸۰). ثابت کنید، برای هر سه بردار a_1, a_2, a_3 ،
 این برابری برقرار است:

$$\sum (\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \varepsilon_3 a_3)^2 = 8 \sum_{k=1}^3 a_k^2$$

که در آن، در مجموع سمت چپ، هر ۸ انتخاب ممکن برای عددهای

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{-1, +1\}$$

در نظر گرفته شده است. این گزاره را، برای هر تعداد $n \in \mathbb{N}$ بردار
 a_1, a_2, \dots, a_n تعمیم دهید.

۳۰۸. (چکوسلواکی، ۱۹۶۲). از دو انتهای A و B از پاره خط AB

به طول a ، خط‌های راستی عمود برهم و عمود بر پاره خط AB رسم کرده ایم.
 روی این خط‌های راست، به ترتیب، نقطه‌های C و D را طوری در نظر
 گرفته ایم که، نقطه برخورد پاره خط CD با صفحه‌ای که از نقطه O وسط
 AB عمود بر AB رسم شده است، به فاصله r از نقطه O باشد. ثابت کنید، طول
 پاره خط راست CD را می‌توان بر حسب a و r مجاسبه کرد. مکان هندسی
 نقطه C را پیدا کنید.

۳۰۹. (بلغارستان، ۱۹۸۲). کره S به شعاع r ، از مرکز کره S به شعاع

R گذشته است. ثابت کنید، اگر وتر AB از کره S ، بر کره S ، در نقطه C
 مماس باشد، آن گاه

$$AC^2 + BC^2 \leq 2R^2 + r^2$$

۳۱۰. (امریکا، ۱۹۸۲). دو کره به شعاع‌های r_1 و r_2 ، که برهم منطبق

نیستند، در درون کره S به شعاع R قرار دارند و بر آن مماس‌اند. هر یک از
 دو کره درونی از سه نقطه A, B و C می‌گذرند و می‌دانیم که، عمود بر صفحه
 ABC در نقطه A ، از مرکز کره S عبور می‌کند. ثابت کنید: $r_1 + r_2 = R$.

۳۱۱. (رومانی، ۱۹۵۸). مساحت سطح کل و حجم هرم منتظم با قاعده

n ضلعی را، به ترتیب، S و V می‌نامیم.

الف) برای مقادیرهای مفروض n و S ، حداکثر مقدار V را پیدا کنید.
 ب) طول ضلع قاعده و طول ارتفاع همه هرم‌هایی را پیدا کنید که،
 برای آن‌ها، داشته باشیم: $n=4$ ، $S=144$ و $V=64$.

۳۱۲. (بلغارستان، ۱۹۸۲). ثابت کنید، برای هر مقدار طبیعی $n > 1$ ،
 بین همه منشورهای منتظم با قاعده $2n$ ضلعی

$$A_1 A_2 \dots A_{2n} A'_1 A'_2 \dots A'_{2n}$$

به شرط ثابت بودن شعاع R از دایره محیطی قاعده، بزرگترین زاویه بین قطر
 $A_1 A'_{n+1}$ و صفحه $A_1 A_3 A'_{n+2}$ ، متعلق به منشوری است که، برای آن، داشته
 باشیم:

$$A_1 A'_1 = 2R \cos \frac{180^\circ}{2n}$$

۳۱۳. (مجارستان، ۱۹۷۹). ثابت کنید، اگر در هرمی که یال‌های
 جانبی برابر دارد، زاویه‌های دو وجهی بین هر دو وجه مجاور جانبی با هم
 برابر باشند و، در ضمن، تعداد ضلع‌های قاعده هرم، عددی فرد باشد، آن وقت،
 این هرم منتظم است.

۳۱۴. (بلغارستان، ۱۹۸۴). متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، قاعده هرم
 $SABCD$ را تشکیل داده است. صفحه α ، خط‌های راست SA ، AD و SC
 را، به ترتیب، در نقطه‌های P ، Q و R طوری قطع کرده است که داریم:

$$\frac{AP}{AD} = \frac{SQ}{SA} = \frac{RC}{SC}$$

در ضمن، نقطه‌های A ، S و C ، یا هر سه به ترتیب، متعلق به پاره‌خط‌های
 راست PD ، QA و SR هستند و یا هیچ کدام از آن‌ها متعلق به پاره‌خط متناظر
 نیستند. نقطه N وسط پاره‌خط CD است و نقطه M بر خط راست SB طوری
 قرار گرفته است که خط راست MN با صفحه α موازی شده است. ثابت
 کنید، مکان هندسی نقطه M ، برای هر وضع ممکن صفحه α ، عبارت است از

$$\frac{\sqrt{5}}{2} SB \text{ به طول راستی به طول}$$

۰۳۱۵. (بلغارستان، ۱۹۷۷). مساحت قاعده‌های یک هرم ناقص،

به ترتیب، برابر S_1 و S_2 و مساحت سطح جانبی آن، برابر S است. ثابت کنید، اگر صفحه‌ای موازی با قاعده، هرم ناقص را به دو هرم ناقص دیگر تقسیم کند که، در هر کدام از آنها، بتوان کره‌ای محاط کرد، آن وقت

$$S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})(\sqrt[4]{S_1} + \sqrt[4]{S_2})^2$$

۰۳۱۶. (انگلستان، ۱۹۶۸). حداکثر تعداد نقطه‌هایی را پیدا کنید که

بتوان روی کره به شعاع واحد قرار داد، به نحوی که فاصله بین هر دو تا از آن‌ها: الف) کمتر از $\sqrt{2}$ نباشد؛ ب) بیشتر از $\sqrt{2}$ باشد.

۰۳۱۷. (چکوسلوواکی، ۱۹۷۰). مطلوب است همه مقدارهای $n \in \mathbb{N}$

بزرگتر از واحد و $r_n > 0$ که، برای آن‌ها، بتوان روی سطح کره به شعاع واحد، دایره‌های غیر متقاطع C_0, C_1, \dots, C_n به شعاع r_n را طوری رسم کرد که، به ازای هر مقدار $n \dots 1$ ، دایره C_i بر دایره‌های C_0 و C_{i+1} مماس باشد ($C_{n+1} = C_0$).

۰۳۱۸. (امریکا، ۱۹۷۹). سه دایره، روی سطح کسره‌ای قرار دارند؛

مرکز این سه دایره همان نقطه O ، مرکز کره است و، در ضمن، هر سه دایره، از نقطه A می‌گذرند. روی محیط این دایره‌ها، به ترتیب، نقطه‌های B, C و D را، طوری انتخاب کرده‌ایم که زاویه AOB برابر 90° درجه و خط راست OB ، نیمساز زاویه COD شده است. ثابت کنید، اگر نیم خط‌های راست AB', AC', AD' ، به ترتیب، بر کمان‌های AB, AC, AD از دایره‌های مربوط، مماس باشند، آن گاه، نیم خط راست AB' نیمساز زاویه $C'AD'$ می‌شود.

۰۳۱۹. (هیأت داوران، اتحاد شوروی، ۱۹۸۲). دو انتهای یک قطر از

دایره مربوط به قاعده استوانه مستدیر قائم را A و B می‌نامیم و روی محیط دایره قاعده دوم، نقطه C را طوری انتخاب می‌کنیم که بر صفحه ABO منطبق نباشد (O ، وسط محور استوانه است). ثابت کنید، مجموع زاویه‌های دو وجهی از کنج به رأس O و یال‌های OA, OB, OC ، برابر 360° درجه است.

۳۲۵. (امریکا، ۱۹۸۱). در یک کنج محدب، مجموع زاویه‌های مسطحه، برابر با مجموع زاویه‌های دوجهی است. ثابت کنید، این کنج، یک کنج سه‌وجهی است.

۳۲۱. (هیأت داوران، بلژیک، ۱۹۷۹). آیامی توان فضا را، به ۱۹۷۹ زیرمجموعه‌ی جدا از هم و برابر تقسیم کرد؟

۳۲۲. (انگلستان، ۱۹۷۵). حداقل چند صفحه لازم است تا، به کمک آن‌ها، بتوان مکعب را دست کم، به ۳۰۵ بخش تقسیم کرد؟

۳۲۳. (رومانی، ۱۹۷۸). صفحه‌های α و α' روی خط راست l یکدیگر را قطع کرده‌اند. سه نقطه A, B, C را روی α و سه نقطه A', B', C' را روی α' انتخاب کرده‌ایم. صفحه α' دور خط راست l ، دوران می‌کند. ثابت کنید، اگر در موقعیتی از صفحه α' ، خط‌های راست AA', BB', CC' از یک نقطه بگذرند، آن وقت، در هر موقعیتی از صفحه α' (به جز وقتی که بر α منطبق باشد)، این سه خط راست، از یک نقطه می‌گذرند. مکان هندسی نقطه برخورد این سه خط راست را پیدا کنید.

۳۲۴. (چکوسلواکی، ۱۹۷۳). همه دوران‌هایی را که دور محورهای مختلف در فضا انجام می‌گیرند و رأس A از مکعب $ABCD A' B' C' D'$ را بر رأس B از آن منطبق می‌کنند، در نظر می‌گیریم. مطلوب است مکان هندسی نقطه‌ای از سطح این مکعب که، ضمن این دوران‌ها، از دوران نقطه C به دست می‌آید.

۳۲۵. (مجارستان، ۱۹۸۲). مکعبی، در دستگاه مختصات قائم فضائی چنان قرار گرفته است که، مختصات چهار رأسی از آن که بر یک صفحه واقع نیستند، عددهای درستی شده‌اند. ثابت کنید، در این صورت، مختصات همه رأس‌های این مکعب، عددهای درستی هستند.

۳۲۶. (هیأت داوران، یوگسلاوی، ۱۹۷۹). ثابت کنید، اگر بتوان مکعب مستطیلی را به مکعب مستطیل‌هایی تقسیم کرد که طول‌هایی از هر کدام از آن‌ها عدد درستی باشد، آن وقت، طول‌هایی از مکعب مستطیل اصلی هم، عدد درستی خواهد بود.

فصل پنجم

آنالیز

۱۷۵. دنباله‌ها

ضمیمه ج: تعریف‌های ۲، ۱۲، ۱۴، ۱۵،

۱۸، ۱۹ و قضیه‌های ۱، ۲، ۱۰، ۱۶، ۱۸،

۲۱ را ببینید)

۳۲۷. (یوگسلاوی، ۱۹۷۶) مطلوب است محاسبهٔ مجموع

$a_1 + a_2 + \dots + a_{99}$ ، به شرطی که داشته باشیم:

$$a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$$

۳۲۸. (چکوسلواکی، ۱۹۷۲). ثابت کنید، عددهای A و B وجود

دارند که، به ازای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ ، در برابری

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = Atgn + Bn$$

صدق کنند، با این شرط که

$$a_k = tg k \operatorname{tg}(k-1)$$

۳۲۹. (نیویورک، ۱۹۷۴). فرض کنید

$$a_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

مطلوب است: a_n حد.

$n \rightarrow \infty$

۳۳۰. (نیویورک، ۱۹۷۴). در دنبالهٔ عددهای مثبت

$$a_0, a_1, a_2, \dots$$

هر جمله a_n ($n \in \mathbb{N}$) یا برابر $\frac{1}{p} a_{n-1}$ و یا برابر $\sqrt{a_{n-1}}$ است. آیا ممکن

است، این دنباله، حدی در بازه $(1, \infty)$ داشته باشد؟

۳۳۱. (امریکا، ۱۹۸۵؛ یوگسلاوی ۱۹۸۱). برای عدد طبیعی و

مفروض $n \geq 3$ مطلوب است بیشترین تعداد ممکن تصاعد های حسابی صعودی، که از سه جمله تشکیل شده باشند و بتوان آن ها را، از بین n عدد مختلف دلخواه، انتخاب کرد.

۳۳۲. (یوگسلاوی، ۱۹۸۱). عددهای $1, 8, 9, 1$ ، به همین ردیف،

چهار جمله اول یک دنباله را تشکیل می دهند در این دنباله، از جمله پنجم به بعد، هر جمله برابر است با آخرین رقم مجموع چهار جمله قبل. آیا ممکن

است، در این دنباله، به عددهای $1, 2, 3, 4$ ، پشت سر هم، برخورد کنیم؟

۳۳۳. (اتریش، لهستان، ۱۹۸۵). دنباله عددهای طبیعی

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots$$

در شرط های $a_1 = 1$ و $a_n \leq 2n$ ، برای $n \in \mathbb{N}$ ، صدق می کنند. ثابت

کنید، برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ ، جمله های a_p و a_q از این دنباله وجود دارند که برای آن ها، برابری $a_q - a_p = n$ برقرار باشد.

۳۳۴. (لهستان، ۱۹۷۹). عددهای $A > 1$ و $B > 1$ مفروض اند.

دنباله $\{a_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$)، با عددهایی از بازه $[1, AB]$ ساخته شده است. ثابت

کنید، دنباله ای مثل $\{b_n\}$ وجود دارد که با عددهایی از بازه $[1, A]$ ساخته شده باشد و، برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، m داشته باشیم:

$$a_m : a_n \leq B b_m : b_n$$

۳۳۵. (هیأت داوران، فرانسه، ۱۹۸۲). همه جمله های دنباله های

$\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ از عددهای طبیعی انتخاب شده اند. ثابت کنید، زوج شماره های

$p < q$ وجود دارد، به نحوی که برای آن ها داشته باشیم: $a_p \leq a_q$ و

$$b_p \leq b_q$$

۳۳۶. (بکن، ۱۹۶۴). دنباله عددهای مثبت a_1, a_2, \dots مفروض است

و می دانیم: $a_n^2 \leq a_n - a_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$). ثابت کنید، برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، داریم:

$$.a_n < \frac{1}{n}$$

۳۳۷. (مسابقه بین المللی ریاضی، فنلاند، ۱۹۸۰). دنباله عددهای a_0, a_1, \dots, a_n به این صورت داده شده است:

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_k = a_{k-1} + \frac{1}{n} a_{k-1}^2 \quad (k = 1, \dots, n)$$

ثابت کنید: $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$.

۳۳۸. (اتریش، لهستان، ۱۹۸۰). برای دنباله عددی $\{a_n\}$ داریم:

$$|a_{k+m} - a_k - a_m| \leq 1 \quad (k, m \in \mathbb{N})$$

ثابت کنید، برای هر $p, q \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\left| \frac{a_p}{p} - \frac{a_q}{q} \right| < \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

۳۳۹. (لهستان، ۱۹۷۸). برای عدد مفروض $a_1 \in \mathbb{R}$ دنباله

a_1, a_2, \dots را به این ترتیب، تعریف می کنیم:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(a_n - \frac{1}{a_n} \right) & (a_n \neq 0) \\ 0 & (a_n = 0) \end{cases}$$

$(n \in \mathbb{N})$. ثابت کنید، در این دنباله، بی نهایت جمله غیر مثبت وجود دارد.

۳۴۰. (انگلستان، ۱۹۸۰). همه مقادیرهای $a_0 \in \mathbb{R}$ را طوری پیدا

کنید که، به ازای آن‌ها، دنباله a_0, a_1, \dots با تعریف

$$a_{n+1} = 2^n - 3a_n$$

$(n \in \mathbb{Z}^+)$ دنباله ای صعودی باشد.

۳۴۱. (اتریش، ۱۹۷۲؛ بلغارستان، ۱۹۷۸). دنباله عددهای غیر صفر

a_1, a_2, \dots ، برای عددی مثل a ، با این شرط‌ها سازگار است:

$$a_1, a_2 \in \mathbb{Z}; \frac{a_1^2 + a_2^2 + a}{a_1 a_2} \in \mathbb{Z}; a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + a}{a_n}$$

ثابت کنید، این دنباله، از عددهای درست ساخته شده است.

۳۴۲. (چکوسلواکی، ۱۹۶۸). ثابت کنید، هر جمله از دنباله

$$a_n = \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

عددی درست است. همه مقادیرهای $n \in \mathbb{Z}$ را طوری پیدا کنید که، به ازای هر کدام از آنها، عدد a_n بر ۳ بخش پذیر باشد.

۳۴۳. (چکوسلواکی، ۱۹۷۸). ثابت کنید، هر یک از جمله‌های دنباله

$$\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^n - 2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

عددی طبیعی به صورت m^2 یا $5m^2$ است ($m \in \mathbb{N}$)، بسته به این که n ، عددی زوج باشد یا فرد.

۳۴۴. (هیأت داوران، انگلستان، ۱۹۸۲). دنباله a_0, a_1, a_2, \dots ، برای

پارامتری مثل $a \in \mathbb{N}$ ، با این شرطها سازگار است:

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + (a-1)a_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

برای عدد اول و ثابت $p_0 > 2$ ، کوچکترین مقدار a را طوری پیدا کنید که، به ازای آن، این دو گزاره درست باشد:

الف) اگر p عددی اول و $p \leq p_0$ ، آن وقت a_p بر p بخش پذیر است؛

ب) اگر p عددی اول و $p > p_0$ ، آن وقت، عدد a_p بر p بخش پذیر

نیست.

۳۴۵. (انگلستان، ۱۹۷۸). ثابت کنید، تنها یک دنباله از عددهای

درست وجود دارد (a_1, a_2, \dots) که با شرطهای زیر سازگار است:

$$a_1 = 1, a_2 > 1, a_{n+1}^2 + 1 = a_n a_{n+2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

۳۴۶. (چکوسلواکی، ۱۹۷۵). برای عدد اول مفروض p ، تعداد

دنباله‌های متفاوت عددهای طبیعی a_0, a_1, \dots ، را پیدا کنید که، برای هر کدام

از آن‌ها، داشته باشیم:

$$\frac{a_0}{a_1} + \frac{a_0}{a_2} + \dots + \frac{a_0}{a_n} + \frac{p}{a_{n+1}} = 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

۳۴۷* (انگلستان، ۱۹۸۳). ثابت کنید، برای دنبالهٔ عددهای فیبوناچی) a_1, a_2, \dots ، که به این ترتیب تعریف شده است:

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

سه عدد منحصر به فرد و طبیعی a, b و c وجود دارد که با شرط‌های $b < a$ و $c < a$ سازگارند و، برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، عدد $a_n - nbc^n$ بر a بخش پذیر است.

۱۸۵. اکستره مهم‌ها

ضمیمهٔ ج: تعریف‌های ۹، ۱۵، ۱۶ و
قضیه‌های ۱۰، ۱۲، ۱۴، ۳۶ را ببینید

۳۴۸ (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۳). همهٔ زوج عددهای مثبت (x, y) را پیدا کنید که، به ازای آن‌ها، مقدار تابع

$$f(x, y) = \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

به حداقل خود برسد؛ این مقدار حداقل را پیدا کنید.

۳۴۹ (هیأت داوران، سوئد، ۱۹۷۹). حداکثر مقدار حاصل ضرب

$x^2 y^2 z^2 u$ را پیدا کنید، به شرطی که x, y, z و u عددهایی غیرمنفی باشند و، در ضمن، بدانیم

$$2x + xy + z + yzu = 1$$

۳۵۰ (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۸؛ چکوسلواکی، ۱۹۸۰).

برای عددهای مفروض $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ ، آیا نقطهٔ $x \in \mathbb{R}$ وجود دارد که، در آن‌جا، تابع

$$f(x) = \sum_{i=1}^n |x - a_i|$$

به حداقل مقدار خود برسد؟ اگر وجود دارد، همه این نقطه‌ها را پیدا کنید
و، در ضمن، مقدار حداقل تابع $f(x)$ را هم به دست آورید.

۳۵۱. (هیأت داوران، جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۹). برای

عدد مفروض $n \geq 2$ ، مطلوب است حداکثر و حداقل حاصل ضرب

$$x_1 x_2 \cdots x_n$$

به شرطی که بدانیم:

$$x_i \geq \frac{1}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

۳۵۲. (هیأت داوران، سوئد، ۱۹۷۹). برای عددهای مفروض

$n \geq 2$ و $a > 0$ ، حداکثر مقدار مجموع $\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$ را، با شرط‌های

$$x \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad \text{و} \quad x_1 + \dots + x_n = a$$
 پیدا کنید.

۳۵۳. (رومانی، ۱۹۷۹). $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ ، عددهای مثبت

مفروضی اند. برای کدام تبدیل (b_1, b_2, \dots, b_n) از این عددها، حاصل ضرب

$$\prod_{i=1}^n \left(a_i + \frac{1}{b_i} \right)$$

حداکثر مقدار ممکن است؟

۳۵۴. (چکوسلواکی، ۱۹۶۳). برای هر مقدار $k \in \mathbb{N}$ ، عدد $2k$ را

به صورت مجموع دو عدد نسبت به هم اول x و y در نظر بگیرید، به نحوی
که حاصل ضرب xy ، حداکثر مقدار ممکن باشد.

۳۵۵. (چکوسلواکی، ۱۹۸۳). برای عددهای مفروض $n \in \mathbb{N}$ و

$a \in [0, n]$ ، مطلوب است حداکثر مقدار $\left| \sum_{i=1}^n \sin 2x_i \right|$ ، با این شرط که

$$\sum_{i=1}^n \sin^2 x_i = a$$

۳۵۶. (یوگسلاوی، ۱۹۷۴). برای هر عدد $n \in \mathbf{N}$ ، حداکثر مقداری را پیدا کنید که، حاصل ضرب عددهای طبیعی با مجموع ثابت n ، قبول می‌کند.

۳۵۷*. (انگلستان، ۱۹۸۱). حداقل مقدار $|12^m - 5^n|$ را، با شرط طبیعی بودن عددهای m و n ، پیدا کنید.

§ ۱۹. ویژگی‌های مختلف تابع

ضمیمه ج، تعریف‌های ۲، ۳، ۶ و قضیه‌های

(۲۷، ۲۸، ۳۰، ۳۳، ۳۴ را ببینید)

۳۵۸. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۸۳). دو عدد مثبت x_1 و x_2 مفروض‌اند و، برای تابع $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ، این دستور داده شده است:

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c \quad (a, b, c \in \mathbf{R} \text{ و } a \neq 0)$$

می‌دانیم $f(0) = f(x_1) = 1$ و $f'(x_2) = 0$. مطلوب است محاسبه ضریب‌های a و b و c .

۳۵۹. (رومانی، ۱۹۸۱). آیا تابع $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ وجود دارد که، در مورد آن، برای همه مقدارهای $x \in \mathbf{R}$ داشته باشیم:

$$f(x^2) - (f(x))^2 \geq \frac{1}{4}$$

و در ضمن، در دو نقطه مختلف، مقدارهای برابر را قبول نکنند؟

۳۶۰. (مجارستان ۱۹۷۹؛ هیأت داوران، امریکا، ۱۹۷۹). ثابت

کنید، اگر تابع $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ، برای هر $x, y \in \mathbf{R}$ ، در نابرابری‌های

$$f(x) \leq x \text{ و } f(x+y) \leq f(x) + f(y)$$

صدق کند، آن وقت، اتحاد زیر برقرار است:

$$f(x) \equiv x \quad (x \in \mathbf{R})$$

۳۶۱. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۲). این تابع داده شده

است:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}) \\ \frac{1}{2 + \operatorname{tg}^2 x} & (\text{بقیه مقادیرهای } x) \end{cases}$$

ثابت کنید، تابع $g(x) = f(x) + f(ax)$ وقتی، و تنها وقتی، متناوب است که داشته باشیم: $a \in \mathbf{Q}$.

۳۶۲. (کانادا، ۱۹۸۱). تابع‌های پیوسته $f(x)$ و $g(x)$ در اتحاد

زیر صدق می‌کنند:

$$f(g(x)) = g(f(x)), x \in \mathbf{R}$$

ثابت کنید، اگر معادله $f(x) = g(x)$ دارای جواب‌های حقیقی نباشد، معادله $f(f(x)) = g(g(x))$ هم جواب حقیقی ندارد.

۳۶۳. (رومانی، ۱۹۸۱). تابع پیوسته زیر مفروض است:

$$f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$$

ثابت کنید:

الف) اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = +\infty$ حد، آن‌گاه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

ب) نتیجه بخش الف) برای تابع زیر درست نیست:

$$f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$$

۳۶۴. (رومانی، ۱۹۸۹). ثابت کنید، تابع پیوسته $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ وجود

ندارد که دارای این ویژگی باشد: عدد $f(x)$ تنها به ازای مقادیری از $x \in \mathbf{R}$ گویا باشد، که به ازای آن‌ها، عدد $f(x+1)$ گنگ است.

۳۶۵. (نیویورک، ۱۹۷۹). آیا تابع $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ وجود دارد تا،

به شرطی که متحد با مقدار ثابتی نباشد، به ازای همه مقادیرهای حقیقی x و y ، در این نابرابری صدق کند:

$$(f(x) - f(y))^2 \leq |x - y|^3$$

۰۳۶۶. (نیویورک، ۱۹۷۶). فرض کنید، تابع پیوسته

$$f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

در بازه $(0, 1)$ مشتق پذیر باشد؛ در ضمن $f(0) = 0$ و $f(1) = 1$. ثابت کنید، چنان عددهایی برای $a, b \in (0, 1)$ وجود دارد، به نحوی که

$$a \neq b \text{ و } f'(a) \cdot f'(b) = 1$$

۰۳۶۷*. (استرالیا، ۱۹۸۲). همه عددهای $d \in [0, 1]$ را طوری پیدا

کنید که دارای این ویژگی باشند: اگر $f(x)$ ، تابعی پیوسته و دلخواه با دامنه تعریف $[0, 1]$ و $a \in [0, 1]$ ، در ضمن $f(0) = f(1)$ ، عدد $x_0 \in [0, 1 - d]$ وجود دارد که به ازای آن

$$f(x_0) = f(x_0 + d)$$

۰۳۶۸*. (رومانی، ۱۹۷۸). تابع $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ به این ترتیب تعریف

شده است: اگر x عددی گنگ باشد، $f(x) = 0$ ؛ و اگر $p \in \mathbf{Z}$ و $q \in \mathbf{N}$ و

کسر $\frac{p}{q}$ ساده نشدنی باشد، $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q^3}$. ثابت کنید، این تابع، در هر نقطه

$x = \sqrt{k}$ مشتق پذیر است که، در آن، k عددی طبیعی است، ولسی مجذور کامل نیست.

۰۳۶۹*. (هیسات داوران، لهستان، ۱۹۷۶). $\mathbf{I} = (0, 1)$ می گیریم.

برای مقدار مفروض $a \in (0, 1)$ ، تابع $f: \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{I}$ را طوری پیدا می کنیم که داشته باشیم:

$$f(x) = \begin{cases} x + (1-a) & (0 < x \leq a) \\ x - a & (a < x \leq 1) \end{cases}$$

ثابت کنید، برای هر بازه $\mathbf{J} \subset \mathbf{I}$ ، عدد $n \in \mathbf{N}$ وجود دارد، به نحوی که

اشتراک $\mathbf{J} \cap f^n(\mathbf{J})$ ، مجموعه ای تهی نباشد.

۰۳۷۰*. (هیسات داوران، سوئیس، ۱۹۷۷). برای تابع صعودی و

مفروض $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ، تابع $g(x) = y$ را طوری پیدا کرده ایم که داریم:

$$g(x, y) = \frac{f(x+y) - f(x)}{f(x) - f(x-y)} \quad (x \in \mathbf{R}, y > 0)$$

فرض کنید، برای هر مقدار $y > 0$ به ازای $x = 0$ ، و برای هر مقدار $y \in (0, |x|]$ به ازای $x \neq 0$ ، این نابرابری برقرار باشد:

$$2^{-1} < g(x, y) < 2$$

ثابت کنید، در این صورت، به ازای هر $x \in \mathbf{R}$ و $y > 0$ ، داریم:

$$14^{-1} < g(x, y) < 14$$

۲۰§. معادله‌های تابعی

ضمیمه ج، تعریف‌های ۵، ۶، ۱۸، ۲۰ و

قضیه‌های (۳۰۱، ۷، ۱۶، ۲۷، ۲۸ را ببینید)

۳۷۱. (نیویورک، ۱۹۷۸). تابع $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ در این اتحاد صدق

می‌کند:

$$f(xy) = \frac{f(x) + f(y)}{x + y}, \quad (x, y \in \mathbf{R}, x + y \neq 0)$$

آیا می‌توان مقداری برای $x \in \mathbf{R}$ پیدا کرد که، برای آن، داشته باشیم:
 $f(x) \neq 0$?

۳۷۲. (بلغارستان، ۱۹۶۸). همه تابع‌های $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ را پیدا کنید

که، برای آن‌ها، این اتحاد برقرار باشد:

$$xf(y) + yf(y) \equiv (x+y)f(y)f(y)$$

۳۷۳. (هیأت داوران، جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۸۲). M

را مجموعه تابع‌های $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$ می‌گیریم که، برای آن‌ها، $f(0) \neq 0$ و در ضمن

$$f(n)f(m) \equiv f(n+m) + f(n-m) \quad (m, n \in \mathbf{Z})$$

مطلوب است: الف) همه تابع‌های $f(n) \in M$ که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$f(1) = \frac{5}{2}$ (ب) همه تابع‌های $f(n) \in M$ که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$f(1) = \sqrt{3}$$

۰۳۷۶. (اتریش، لهستان، ۱۹۷۹). همه تابع‌های $f: \mathbf{Z}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ را پیدا کنید که در این اتحاد صدق کنند:

$$f(n+m) + f(n-m) \equiv f(2n) \quad (n, m \in \mathbf{Z}, n \geq m)$$

۰۳۷۵. (نیویورک، ۱۹۷۶). تابع‌های $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ، f ، غیر ثابت اند و در دو اتحاد زیر صدق می‌کنند:

$$f(x+y) \equiv f(x)g(y) + g(x)f(y),$$

$$g(x+y) \equiv g(x)g(y) - f(x)f(y)$$

$(x, y \in \mathbf{R})$. همه مقادیرهای ممکن $f(0)$ و $g(0)$ را پیدا کنید.
 ۰۳۷۶. (مسابقه بین‌المللی ریاضی، لس‌آنجلس، ۱۹۸۰). همه تابع‌های $f: \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$ را پیدا کنید که، برای آن‌ها، $f(1) = 2$ باشد و، در ضمن، داشته باشیم:

$$f(xy) \equiv f(x)f(y) - f(x+y) + 1 \quad (x, y \in \mathbf{Q})$$

۰۳۷۷. (یوگسلاوی، ۱۹۸۳). برای تابع $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$ داریم:

$$f(x) = \begin{cases} n-10 & (n > 100) \\ f(f(n+11)) & (n \leq 100) \end{cases}$$

$(n \in \mathbf{Z})$. ثابت کنید، برای هر مقدار $n \leq 100$ ، داریم:

$$f(n) = 91$$

۰۳۷۸. (رومانی، ۱۹۷۹). تابع‌های $h: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ ، g ، f با سه شرط زیر سازگارند:

الف) تابع $f(n)$ ، هیچ مقداری را بیش از یک بار قبول نمی‌کند؛

ب) مجموعه مقادیرهای تابع $g(n)$ ، عبارت است از \mathbf{N} ؛

ج) $(n \in \mathbf{N}) \quad f(n) \equiv g(n) - h(n) + 1$

ثابت کنید، اتحاد $1 \equiv f(n) \equiv 1$ ($n \in \mathbf{N}$) برقرار است.

۳۷۹. (رومانی، ۱۹۷۸). تابع $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ را پیدا کنید که در

اتحاد زیر صدق کند:

$$f(f(n)) \equiv n^2 \quad (n \in \mathbf{N})$$

۳۸۰. (رومانی، ۱۹۷۸). تابع‌های غیر ثابت $f(n, m)$ ، که در

مجموعه همه زوج عددهای درست، تعریف شده‌اند، مقادارهای درست را می‌پذیرند و در اتحاد زیر صدق می‌کنند:

$$f(n, m) = \frac{1}{4} [f(n-1, m) + f(n+1, m) + f(n, m-1) + f(n, m+1)]$$

($n, m \in \mathbf{Z}$). ثابت کنید: الف) چنین تابع‌هایی وجود دارند؛ ب) برای هر مقدار $k \in \mathbf{Z}$ ، هر یک از این گونه تابع‌ها، هم مقادارهای بزرگتر از k و هم مقادارهای کوچکتر از k را قبول می‌کند.

۳۸۱. (اتریش، لهستان، ۱۹۷۸). برای زیرمجموعه مفروض S ، از

مجموعه زوج عددهای درست، تابع $f: S \rightarrow S$ را تابع عمومی می‌نامیم، وقتی که برای هر زوج $(n, m) \in S$ ، این شرط برقرار باشد:

$$f(n, m) \in \{(n-1, m), (n+1, m), (n, m-1), (n, m+1)\}$$

ثابت کنید، اگر دست کم یک تابع عمومی وجود داشته باشد، آن وقت، تابع عمومی $f(n, m)$ وجود دارد که، برای آن، داشته باشیم:

$$f(f(n, m)) = (n, m), \quad (n, m) \in S$$

۳۸۲. (امریکا، ۱۹۸۲). همه مقادارهای درست و غیر صفر $m \leq n$

را پیدا کنید که در نا برابری $m+n \neq 0$ و اتحاد زیر صدق کنند:

$$f_m(x, y) f_n(x, y) \equiv f_{m+n}(x, y), \quad x, y \in \mathbf{R}, xy(x+y) \neq 0$$

که در آن، فرض کرده‌ایم:

$$f_k(x, y) = \frac{x^k + y^k + (-1)^k(x+y)^k}{k}$$

داهنمایی: زوج عددهای $n=3, m=2$ و $n=5, m=2$ در شرط‌های مورد نظر صدق می‌کنند.

۳۸۳* (هیأت داوران، لهستان، ۱۹۷۷). ثابت کنید، اگر تابع $f(x, y)$ در مجموعه زوج عددهای گویا تعریف شده باشد و تنها مقادیرهای مثبت را قبول کند؛ در ضمن در سه اتحاد زیر صادق باشد:

$$f(x, y, z) \equiv f(x, z)f(y, z),$$

$$f(z, xy) \equiv f(z, x)f(z, y),$$

$$f(x, 1-x) \equiv 1; \quad x, y, z \in \mathbf{Q}$$

آن وقت، این اتحادها برقرارند $(x, y \in \mathbf{Q})$:

$$f(x, x) \equiv 1, \quad f(x, -x) \equiv 1, \quad f(x, y)f(y, x) \equiv 1$$

۳۸۴* (هیأت داوران، یوگسلاوی، ۱۹۷۹). ثابت کنید، هر تابع $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ، که با یکی از اتحادهای زیر سازگار باشد:

$$f(x+y) \equiv f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbf{R}$$

$$f(xy+x+y) \equiv f(xy) + f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbf{R}$$

آن وقت، با اتحاد دیگر هم سازگار است.

۳۸۵* (اتریش، ۱۹۷۵). همه تابع‌های پیوسته

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$$

را پیدا کنید که در اتحاد زیر صدق کنند:

$$f(xy) = xf(y) + yf(x) \quad (x, y > 1)$$

۳۸۶* (رومانی، ۱۹۸۲). الف ثابت کنید، اگر تابع پیوسته $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ در اتحاد زیر صدق کند:

$$f(f(f(x))) = x, \quad x \in \mathbf{R}$$

آن وقت، به ازای هر مقدار $x \in \mathbf{R}$ ، برابری $f(x) = x$ برقرار است.
 ب) نمونه‌ای از تابع (ناپیوسته) $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ را پیدا کنید که با این شرط‌ها سازگار باشد:

$$g(x) \equiv x, \quad g(g(g(x))) = x, \quad x \in \mathbf{R}$$

۳۸۷* (هیأت داوران، فرانسه، ۱۹۷۹). مطلوب است همه تابع‌های

یکنوای $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$f(x) + f^{-1}(x) = 2x$$

۳۸۸* (نیویورک، ۱۹۷۷). همه تابع‌های مشتق‌پذیر $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

را پیدا کنید که در اتحاد زیر صدق کنند:

$$f'\left(\frac{x+y}{2}\right) \equiv \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \quad (x, y \in \mathbf{R}, x \neq y)$$

۳۸۹* (بلژیک، ۱۹۷۷). همه تابع‌های $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ را پیدا کنید

که، به‌طور نامتناهی مشتق‌پذیر باشند و، در ضمن، در اتحاد زیر صدق کنند:

$$f(x+y) \equiv f(x) + f(y) + 2xy \quad (x, y \in \mathbf{R})$$

۳۹۰* (انگلستان، ۱۹۶۹). ثابت کنید، اگر تابع $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ متحد

با صفر نباشد، در اتحاد

$$f(x)f(y) \equiv f(x+y)$$

صدق کند و در نقطه $x = 0$ مشتق‌پذیر باشد، آن وقت، در هر نقطه $x \in \mathbf{R}$ ،

به‌طور نامتناهی مشتق‌پذیر خواهد بود.

فصل ششم

چند جمله‌ای‌ها

۲۱§. ریشه‌های چند جمله‌ای

ضمیمه ج، ۱۸، ۲۰، ۲۲ تا ۲۴، ۲۶، ۲۸، ۳۰
تا ۳۵، ۳۲ و قضیه‌های ۲، ۶، ۲۸، ۳۵،
۳۸، ۴۰، ۴۱ تا ۴۵، ۵۱، ۵۳، ۵۵ تا
۵۷، ۵۹ تا ۶۱، ۶۳ را ببینید)

۳۹۱. (بلغارستان، ۱۹۸۰). ثابت کنید، برای ریشه‌های x_1 و x_2

چند جمله‌ای

$$x^2 + px - \frac{1}{2p^2}, \quad (p \in \mathbf{R}, p \neq 0)$$

نا برابری $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$ برقرار است.

۳۹۲. (بلغارستان، ۱۹۵۱). همه زوج عددهای حقیقی p و q را پیدا

کنید که، به ازای آن‌ها، چند جمله‌ای $x^4 + px^2 + q$ دارای ۴ ریشه حقیقی باشد که تشکیل یک تصاعد حسابی بدهند.

۳۹۳. (انگلستان، ۱۹۶۷). ریشه‌های چند جمله‌ای $x^2 + px + 1$ را

α و β و ریشه‌های چند جمله‌ای $x^2 + qx + 1$ را γ و δ فرض می‌کنیم. درستی این برابری را ثابت کنید:

$$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha + \delta)(\beta + \delta) = q^2 - p^2$$

۳۹۴. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۰). ثابت کنید، برای هر

مقدار غیر صفر α و β ، ریشه‌های x_1 ، x_2 و x_3 چند جمله‌ای

$$\alpha x^3 - \alpha x^2 + \beta x + \beta$$

در این برابری صدق می‌کنند:

$$(x_1 + x_2 + x_3) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) = -1$$

۰۳۹۵. (اتریش، ۱۹۸۳). همهٔ مقادیرهای a را پیدا کنید که، به ازای

هر کدام از آن‌ها، ریشه‌های x_1, x_2, x_3 و x_3 چندجمله‌ای $x^3 - 6x^2 + ax + a$ در برابری زیر صدق کنند:

$$(x_1 - 3)^3 + (x_2 - 3)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0$$

۰۳۹۶. (هیأت داوران، کانادا، ۱۹۸۲). فرض کنید، یکی از ریشه‌های

چندجمله‌ای

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \in \mathbb{Z})$$

برابر حاصل ضرب دو ریشهٔ دیگر باشد. ثابت کنید، عدد $p(-1)$ ، 2 بر عدد

$$p(1) + p(-1) - 2(1 + p(0))$$

بخش پذیر است.

۰۳۹۷. (امریکا، ۱۹۷۷). دو ریشه از چهارریشهٔ چندجمله‌ای

$$x^4 + x^3 - 1$$

را a و b می‌نامیم. ثابت کنید، ab ، ریشهٔ چندجمله‌ای زیر است:

$$x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1$$

۰۳۹۸. (یوگسلاوی، ۱۹۸۱). دربارهٔ عددهای درست a و b و c ،

می‌دانیم $a > 0$ ، و چندجمله‌ای $ax^2 + bx + c$ دارای دو ریشهٔ مختلف، در

بازهٔ $(0, 1)$ است. ثابت کنید: $a \geq 5$. دست کم یک زوج عدد b و c را

به ازای $a = 5$ پیدا کنید.

۰۳۹۹. (چکوسلواکی، ۱۹۶۷). a و b و c را سه ریشه از چهارریشهٔ

چندجمله‌ای

$$x^4 - ax^3 - bx + c$$

می‌گیریم. همهٔ عددهای سه گانهٔ ممکن (a, b, c) را پیدا کنید.

۰۴۰۰. (چکوسلواکی، ۱۹۵۴). ثابت کنید، تنها وقتی عددهای مختلط

a و b با شرط $a^2 = 2b \neq 0$ سازگارند که، ریشه‌های چندجمله‌ای

$$x^2 + ax + b$$

در صفحه مختلط، در دو رأس مثلث قائم الزاویه متساوی الساقینی باشند که،
رأس زاویه قائمه آن، در مبداء مختصات است.
۴۰۱. (مجارستان، ۱۹۸۳). چند جمله‌ای

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + 1$$

با ضریب‌های غیر منفی a_1, a_2, \dots, a_{n-1} ، دارای n ریشه حقیقی است.
ثابت کنید:

$$P(2) \geq 3^n$$

۴۰۲. (بلغارستان، ۱۹۸۴). چند جمله‌ای

$$ax^n - ax^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_{n-2} x^2 - n^2 bx + b$$

دارای n ریشه مثبت است. ثابت کنید، همه این ریشه‌ها، باهم برابرند.
۴۰۳. (بلغارستان، ۱۹۸۳). آیا چند جمله‌ای‌های

$$x^5 - x - 1 \text{ و } x^2 + ax + b \quad (a, b \in \mathbb{Q})$$

می‌توانند ریشه‌های مختلط مشترك داشته باشند؟

۴۰۴. (سنگاپور، ۱۹۷۸). برای يك چند جمله‌ای $p(x)$ از درجه n

و عددهای $a < b$ ، این نابرابری‌ها برقرارند:

$$P(a) < 0, \quad -P'(a) \leq 0, \quad P''(a) \leq 0, \quad \dots, \quad (-1)^n P^{(n)}(a) \leq 0,$$

$$P(b) > 0, \quad P'(b) \geq 0, \quad P''(b) \geq 0, \quad \dots, \quad P^{(n)}(b) \geq 0$$

ثابت کنید، همه ریشه‌های حقیقی چند جمله‌ای $P(x)$ ، به بازه (a, b) تعلق دارند.

۴۰۵. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۰). ثابت کنید، برای هر

مقدار $n \in \mathbb{Z}^+$ ، چند جمله‌ای

$$f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

بیش از يك ریشه حقیقی ندارد.

۴۰۶* (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۶۹ و ۱۹۷۱). ثابت کنید، اگر چندجمله‌ای $P(x)$ از درجه n و با ضرایب‌های حقیقی، ریشه‌های حقیقی نداشته باشد، آن وقت، چندجمله‌ای

$$Q(x) = P(x) + aP'(x) + \dots + \alpha^n P^{(n)}(x)$$

هم، به ازای هر مقدار $\alpha \in \mathbb{R}$ ، ریشه حقیقی ندارد.

۴۰۷* (لهستان، ۱۹۷۹). ثابت کنید، برای هر چندجمله‌ای $P(x)$ از درجه $n > 1$ ، که دارای n ریشه حقیقی و مختلف x_1, x_2, \dots, x_n باشد، برابری زیر برقرار است:

$$\frac{1}{P'(x_1)} + \frac{1}{P'(x_2)} + \dots + \frac{1}{P'(x_n)} = 0$$

۴۰۸* (نیویورک، ۱۹۷۵). $P(x)$ را یک چندجمله‌ای با ضرایب‌های حقیقی می‌گیریم که، همه ریشه‌های آن، عددهای موهومی خالص باشند. ثابت کنید، همه ریشه‌های چندجمله‌ای $P'(x)$ ، به جز یکی، عددهای موهومی خالص اند.

۴۰۹* (رومانی، ۱۹۷۸). ثابت کنید، چندجمله‌ای‌های غیر صفر P و Q با ضرایب‌های مختلط، تنها وقتی دارای ریشه‌های یکسان هستند که تابع

$$f(z) = |P(z)| - |Q(z)|$$

در همه نقطه‌های $z \in \mathbb{C}$ ، به شرطی که مخالف صفر باشد، علامت ثابتی داشته باشد.

۲۲۵. بخش پذیری و برابری چندجمله‌ای‌ها

(ضمیمه ج، تعریف‌های ۱۱، ۲۲ تا ۳۳ و

قضیه‌های ۲، ۴، ۲۴، ۳۵ تا ۴۷، ۴۹ تا

۵۵، ۵۷، ۵۸ تا ۶۳ را ببینید)

۴۱۰* (نیویورک، ۱۹۷۳؛ بلژیک، ۱۹۸۱). ثابت کنید، برای هر مقدار

$n \in \mathbb{Z}^+$ ، چندجمله‌ای $x^{n+2} + (x+1)^{n+1} + 1$ بر چندجمله‌ای $x^2 + x + 1$

بخش پذیر است.

۴۱۱. (رومانی، ۱۹۶۲). ثابت کنید، به ازای هر مقدار $\alpha \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}$

با شرط $n \neq 1$ و $\sin \alpha \neq 0$ ، چندجمله‌ای

$$P(x) = x^n \sin \alpha - x \sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha$$

بر چندجمله‌ای زیر بخش پذیر است:

$$Q(x) = x^2 - 2x \cos \alpha + 1$$

۴۱۲. (رومانی، ۱۹۶۶). همه چند جمله‌ای‌های $R(x)$ با درجه کمتر

از ۴ را پیدا کنید که، برای هر کدام از آن‌ها، چندجمله‌ای $P(x)$ وجود داشته باشد، به نحوی که در اتحاد زیر صدق کند:

$$7 \sin^3 t + 8 \sin^2 t - 5 \sin^5 t \cos^4 t - 10 \sin^7 t + 5 \sin^5 t - 2 \equiv$$

$$\equiv P(\sin t)[\sin^4 t - (1 + \sin t)(\cos^2 t - 2)] + R(\sin t), (t \in \mathbb{R})$$

۴۱۳. (امریکا، ۱۹۷۷). همه زوج عددهای طبیعی m و n را پیدا

کنید که، برای آن‌ها، چندجمله‌ای

$$1 + x^n + x^{2n} + \dots + x^{mn}$$

بر چندجمله‌ای $1 + x + x^2 + \dots + x^m$ بخش پذیر باشد.

۴۱۴. (امریکا، ۱۹۷۶). چندجمله‌ای‌های $P(x)$ ، $Q(x)$ ، $R(x)$ و

$S(x)$ ، در اتحاد زیر صدق می‌کنند:

$$P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) \equiv (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)S(x)$$

ثابت کنید، چندجمله‌ای $P(x)$ ، بر $x-1$ بخش پذیر است.

۴۱۵. (نیویورک، ۱۹۷۵). همه چندجمله‌ای‌های $P(x)$ را پیدا کنید

که در شرط $P(0) = 0$ و اتحاد زیر صدق کنند:

$$P(x) \equiv \frac{1}{4}[P(x+1) + P(x-1)] \quad (x \in \mathbb{R})$$

۴۱۶. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۷). همه چندجمله‌ای‌های

$P(x)$ را پیدا کنید که، برای آن‌ها داشته باشیم:

$$xP(x-1) \equiv (x-2)P(x) \quad (x \in \mathbf{R})$$

۴۱۷. (نیویورک، ۱۹۷۶). همه چندجمله‌ای‌های $P(x)$ را پیدا کنید

که برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$(x-1)P(x+1) - (x+2)P(x) \equiv 0 \quad (x \in \mathbf{R})$$

۴۱۸. (رومانی، ۱۹۸۰). همه چندجمله‌ای‌های غیر صفر $P(x)$ را

پیدا کنید که در اتحاد زیر صدق کنند:

$$P(x^2) \equiv [P(x)]^2 \quad (x \in \mathbf{R})$$

۴۱۹. (بلغارستان، ۱۹۷۶). همه چندجمله‌ای‌های غیر صفری را پیدا

کنید که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$P(x^2 - 2x) \equiv [P(x-2)]^2 \quad (x \in \mathbf{R})$$

۴۲۰. (هیأت داوران، بلغارستان، ۱۹۷۹). همه چندجمله‌ای‌های غیر-

صفر با ضریب‌های حقیقی را پیدا کنید، که در این اتحاد صدق کنند:

$$P(x)P(2x^2) \equiv P(2x^3 + x) \quad (x \in \mathbf{R})$$

۴۲۱. (رومانی، ۱۹۷۸). ثابت کنید، برای - چندجمله‌ای

$P(x) \not\equiv x$ و هر عدد $n \in \mathbf{N}$ ، چندجمله‌ای

$$Q_n(x) = \underbrace{P(P(\dots P(x)))}_n - x$$

بر چندجمله‌ای $Q_1(x) = P(x) - x$ بخش پذیر است.

۴۲۲. (رومانی، ۱۹۷۸). ثابت کنید، اگر چندجمله‌ای‌های $P(x)$ ،

$Q(x)$ و $R(x)$ از درجه سوم و با ضریب‌های حقیقی، به ازای همه مقادیرهای

$x \in \mathbf{R}$ ، در نابرابری‌های

$$P(x) \leq Q(x) \leq R(x)$$

صدق کنند و، دست کم، در يك نقطه $x_0 \in \mathbf{R}$ داشته باشیم:

$$P(x_0) = R(x_0)$$

آن وقت، برای عددی مثل $k \in [0, 1]$ ، این اتحاد برقرار است:

$$Q(x) \equiv kP(x) + (1-k)R(x) \quad (x \in \mathbf{R})$$

آیا همین گزاره را دربارهٔ چندجمله‌ای‌های درجهٔ چهارم هم، می‌توان تنظیم کرد؟

۴۲۳. (هیأت داوران، مجارستان، ۱۹۷۹). این چندجمله‌ای، با شرط $a \neq 0$ داده شده است:

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

ثابت کنید، برای هر عدد $n \in \mathbf{N}$ ، نمی‌توان بیش از یک چندجمله‌ای $Q(x)$ از درجهٔ n پیدا کرد که در اتحاد زیر صدق کند:

$$Q(P(x)) \equiv P(Q(x)) \quad (x \in \mathbf{R})$$

۴۲۴. (رومانی، ۱۹۷۹). ثابت کنید، چندجمله‌ای $P(z)$ ، تنها وقتی تابعی زوج از $z \in \mathbf{C}$ است که چندجمله‌ای $Q(z)$ وجود داشته باشد، به نحوی که اتحاد زیر برقرار باشد:

$$P(z) \equiv Q(z)Q(-z) \quad (z \in \mathbf{C})$$

۴۲۵. (هیأت داوران، مجارستان، ۱۹۷۹). ثابت کنید، اگر چندجمله‌ای $P(x)$ با ضرایب‌های حقیقی، به ازای هر $x \in \mathbf{R}$ ، تنها مقادیرهای غیر منفی را بپذیرد، آن وقت، به صورت زیر است:

$$P(x) = Q_1^2(x) + \dots + Q_n^2(x)$$

که در آن، $Q_1(x), \dots, Q_n(x)$ ، چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب‌های حقیقی هستند. ۴۲۶* (مجارستان، ۱۹۷۶؛ هیأت داوران، سوئد، ۱۹۷۶). چندجمله‌ای $P(x)$ با ضرایب‌های حقیقی، به ازای همهٔ مقادیرهای $x > 0$ ، در نابرابری $P(x) > 0$ صدق می‌کند. ثابت کنید، چندجمله‌ای‌های $Q(x)$ و $R(x)$ با ضرایب‌های غیرمنفی وجود دارند که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$P(x) = Q(x)R(x)$$

۴۲۷* (هیأت داوران، جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۸۳). $A(n)$

را، مجموعه چندجمله‌ای‌های به صورت زیر می‌گیریم:

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

که در آن

$$0 \leq a_0 = a_n \leq a_1 = a_{n-1} \leq \dots \leq a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = a_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$$

ثابت کنید، اگر $P(x) \in A(n)$ و $Q(x) \in A(m)$ ، آن وقت، چندجمله‌ای $P(x)Q(x)$ به مجموعه $A(m+n)$ تعلق دارد.

۴۲۸* (هیأت داوران، مجارستان، ۱۹۷۷). برای چه مقدارهایی از

$n \in \mathbf{N}$ ، چندجمله‌ای‌های P و Q از n متغیر با ضرایب‌های درست وجود دارند که در اتحاد زیر صدق کنند:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)P(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv Q(x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2),$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}$$

۴۲۹* (هیأت داوران، ۱۹۸۱). برای چندجمله‌ای‌های $P(x)$ و

$Q(x)$ ، که درجه‌ای بالاتر از ۰ دارند، قرار می‌گذاریم:

$$P_c = \{z \in \mathbf{C} \mid P(z) = c\}, Q_c = \{z \in \mathbf{C} \mid Q(z) = c\}$$

ثابت کنید، اگر $P_0 = Q_0$ و $P_1 = Q_1$ ، آن وقت $(x \in \mathbf{R})P(x) \equiv Q(x)$.

۴۳۰* (لهستان، ۱۹۷۸). ثابت کنید، اگر چندجمله‌ای‌های $P(x, y)$ ،

$Q(x, y)$ و $R(x, y)$ با درجه کمتر از $m \in \mathbf{N}$ ، با اتحاد

$$x^m P(x, y) + y^m Q(x, y) \equiv (x+y)^m R(x, y)$$

$(x, y \in \mathbf{R})$ سازگار باشند، آن وقت

$$P(x, y) \equiv Q(x, y) \equiv R(x, y) \equiv 0$$

۲۳۳. ویژگی‌های گوناگون چندجمله‌ای‌ها

(ضمیمهٔ ج، تعریف‌های ۱۵، ۱۸ تا ۲۸، ۲۰)

تا ۳۲ و قضیه‌های ۲، ۴، ۱۷، ۱۸، ۲۷،

۴۵ تا ۵۲، ۵۵ و ۶۲ را ببینید)

۴۳۱. (رومانی، ۱۹۶۲). به‌ازای چه مقدارهایی از عددهای درست

q و p :

الف) چندجمله‌ای $P(x) = x^2 + px + q$ ، به‌ازای همهٔ مقدارهای $x \in \mathbb{Z}$ ، مقدارهای زوج (فرد) را قبول می‌کند؛

ب) چندجمله‌ای $Q(x) = x^3 + px + q$ ، به‌ازای همهٔ $x \in \mathbb{Z}$ ، مقدارهای بخش‌پذیر بر ۳ را قبول می‌کند؟

۴۳۲. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۸۳). ثابت کنید، چندجمله‌ای

$$P(x) = \frac{1}{630}x^9 - \frac{1}{21}x^7 + \frac{13}{30}x^5 - \frac{82}{63}x^3 + \frac{32}{35}x$$

به‌ازای همهٔ مقدارهای $x \in \mathbb{Z}$ ، مقدارهای درست را می‌پذیرد.

۴۳۳. (چکوسلوواکی، ۱۹۶۲). همهٔ مقدارهای $x \in \mathbb{Z}$ را پیدا کنید

که، به‌ازای هر کدام از آن‌ها، چندجمله‌ای

$$P(x) = 2x^2 - x - 36$$

مقدارهایی برابر با مجذور عددهای اول را بپذیرد.

۴۳۴. (رومانی، ۱۹۷۵). برای عددهای مفروض $p, q \in \mathbb{R}$ ، همهٔ

مقدارهایی را پیدا کنید که چندجمله‌ای

$$P(x) = x^2 + px + q$$

به‌ازای $x \in [-1, 1]$ قبول می‌کند.

۴۳۵. (بکن، ۱۹۶۳). چندجمله‌ای $P(x)$ با ضریب‌های درست،

به‌ازای ۴ مقدار مختلف $x \in \mathbb{Z}$ ، مقدار ۲ را قبول می‌کند. ثابت کنید، این

چندجمله‌ای، به‌ازای هیچ مقداری از $x \in \mathbb{Z}$ ، نمی‌تواند برابر ۱، ۳، ۵، ۷ یا

۹ شود.

۴۳۶. (انگلستان، ۱۹۸۰). دست کس یک مجموعه M ، شامل ۷ عدد

طبیعی متوالی، پیدا کنید که، برای آن، چندجمله‌ای $P(x)$ از درجه پنجم با ویژگی‌های زیر وجود داشته باشد:

الف) همه ضرایب‌های چندجمله‌ای $P(x)$ ، عددهایی درست باشند؛

ب) برای پنج عدد $k \in M$ ، که شامل بزرگترین و کوچکترین عددهاست،

برابری $P(k) = k$ برقرار باشد؛

ج) $P(k) = 0$ ، برای یکی از عددهای $k \in M$.

۴۳۷. (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۷۴). الف) ثابت کنید،

چندجمله‌ای $P(x)$ وجود ندارد که، برای آن، به ازای هر مقدار $x \in \mathbb{R}$ ، این

نابرابری‌ها برقرار باشند: (۱) $P'(x) > P''(x)$ و (۲) $P(x) > P''(x)$.

ب) آیا حکم الف) درست است، اگر نابرابری (۱) را به نابرابری

(۱') به صورت $P(x) > P'(x)$ تبدیل کنیم؟

۴۳۸. (رومانی، ۱۹۸۲). چندجمله‌ای‌های $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$

با ضرایب‌های حقیقی، و عددهای حقیقی a_1, \dots, a_n مفروض‌اند. ثابت کنید،

اگر تابع

$$f(x) = P_0(x) + \sum_{k=1}^n a_k |P_k(x)|$$

هیچ مقداری را، بیشتر از مقدار خود در یک نقطه $x \in \mathbb{R}$ نپوشد، آن وقت،

مجموعه همه مقادیر آن، \mathbb{R} است.

۴۳۹. (هیأت داوران، رومانی، ۱۹۸۳). $\{a_n\}$ را دنباله‌ای با تعریف

زیر فرض می‌کنیم (دنباله فیبوناچی):

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

ثابت کنید، اگر چندجمله‌ای $P(x)$ از درجه ۹۹۰، در شرط $P(k) = a_k$

به ازای

$$k = 1982, \dots, 992$$

صدق کند، آن وقت: $P(1983) = a_{1983} - 1$.

۴۴۰. (انگلستان، ۱۹۷۸). ثابت کنید:

الف) برای هر $n \in \mathbf{N}$ ، چندجمله‌ای $P_n(x)$ از درجه n و با ضرایب‌های درست وجود دارد که، برای آن، داشته باشیم:

$$2 \cos nt \equiv P_n(2 \cos t) \quad (t \in \mathbf{R})$$

ب) برای هر $\alpha \in \mathbf{Q}$ ، عدد $\cos \alpha \pi$ ، یا برابر یکی از عددهای $0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$ است و یا عددی گنگ است.

۴۴۱. (فنلاند، ۱۹۸۵). روی صفحه مختصات، یک منحنی داده شده است که نمودار یک چندجمله‌ای به صورت

$$P(x) = x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s \quad (p, q, r, s \in \mathbf{R})$$

است. خط راستی را، روی این صفحه، افقی می‌نامیم که موازی محور طول باشد و، در ضمن، منحنی را در چهار نقطه A, B, C, D (به همین ردیف، نقطه‌های روی خط راست را از چپ به راست مشخص می‌کنند)، قطع کرده باشد. اگر، به جز این‌ها، طول پاره‌خط‌های راست AB, AC و AD بتوانند ضلع‌های یک مثلث باشند، آن وقت، خط راست را، مثلثی می‌نامیم. ثابت کنید، تنها دو حالت ممکن است: یا همه خط‌های راست افقی، مثلثی‌اند، و یا هیچ کدام از آن‌ها مثلثی نیستند.

۴۴۲. (بلغارستان، ۱۹۷۷). $Q(x)$ را یک چندجمله‌ای غیر صفر می‌گیریم. ثابت کنید، برای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ ، چندجمله‌ای

$$P(x) = (x-1)^n Q(x)$$

دست کم، دارای $n+1$ ضریب غیر صفر است.
۴۴۳. (چکوسلواکی، ۱۹۷۴). M را مجموعه همه چندجمله‌ای‌های به صورت

$$P(x) = ax^2 + bx^2 + cx + d \quad (a, b, c, d \in \mathbf{R})$$

می‌گیریم که، برای $x \in [-1, 1]$ درناپرابری $|P(x)| \leq 1$ صدق می‌کنند. ثابت کنید، عددی مثل k وجود دارد که، به ازای آن، برای همه چندجمله‌ای‌های

$P(x) \in M$ داریم: $|a| \leq k$. حداقل مقدار k را پیدا کنید.

۴۴۴* (هیأت داوران، فنلاند، ۱۹۸۳). p و q را دو عدد طبیعی

دلخواه می‌گیریم. ثابت کنید، چندجمله‌ای $P(x)$ با ضریب‌های درست وجود دارد، به نحوی که، به ازای همهٔ مقادیرهای بازه‌ای مثل $I \subset \mathbf{R}$ ، نابرابری زیر برقرار است:

$$\left| P(x) - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

۴۴۵ (جمهوری دموکراتیک آلمان، ۱۹۸۰). همهٔ زوج چندجمله‌ای‌های

درجهٔ سوم $P(x)$ و $Q(x)$ با ضریب‌های حقیقی را پیدا کنید که با چهار شرط زیر سازگار باشند:

الف) هر دو چندجمله‌ای در هر یک از نقطه‌های $۱, ۲, ۳, ۴$ ، $x =$

یکی از دو مقدار ۰ یا ۱ را قبول کنند؛

ب) اگر $P(۱) = ۰$ یا $P(۲) = ۱$ ، آن‌گاه $Q(۱) = Q(۳) = ۱$ ؛

ج) اگر $P(۲) = ۰$ یا $P(۴) = ۰$ ، آن‌گاه $Q(۲) = Q(۴) = ۰$ ؛

د) اگر $P(۳) = ۱$ یا $P(۴) = ۱$ ، آن‌گاه $Q(۱) = ۰$.

۴۴۶ (امریکا، ۱۹۷۵). چندجمله‌ای $P(x)$ از درجهٔ n ، در برابری

$P(k) = \frac{k}{k+1}$ صدق می‌کند ($n, \dots, ۱, ۰, k$). مطلوب است $P(n+1)$.

۴۴۷ (هیأت داوران، ۱۹۸۱). چندجمله‌ای $P(x)$ از درجهٔ n ، در

برابری $P(k) = \frac{1}{C_{n+1}^k}$ صدق می‌کند ($n, \dots, ۱, ۰, k$). مطلوب است

$P(n+1)$.

۴۴۸* (هیأت داوران، ویتنام، ۱۹۷۷). این عددهای درست داده

شده‌اند:

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n$$

ثابت کنید، بین مقادیرهای چندجمله‌ای

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

در نقطه‌های x_0, x_1, \dots, x_n می‌توان عددی پیدا کرد که قدرمطلق آن، از $\frac{n!}{2^n}$ کمتر نباشد.

۴۴۹°. (هیأت داوران، مجارستان، ۱۹۷۹). درجهٔ چندجمله‌ای $P(x)$ از $2n$ تجاوز نمی‌کند. می‌دانیم، برای هر عدد درست $k \in [-n, n]$ ، نابرابری $|P(k)| \leq 1$ برقرار است. ثابت کنید، برای هر عدد حقیقی $x \in [-n, n]$ داریم: $|P(x)| \leq 2^{2n}$.

فصل هفتم

گوناگون

§ ۲۴. مجموعه‌ها و زیر مجموعه‌ها

(ضمیمهٔ ج، تعریف‌های ۱ تا ۴، ۱۱ و قضیه‌های

۱، ۹۷ را ببینید)

۴۵۰. (چکوسلواکی، ۱۹۷۳). مجموعه‌ای که دارای n عضو است،

چند جفت زیرمجموعهٔ غیر متقاطع دارد؟

۴۵۱. (لهستان، ۱۹۷۸). مجموعهٔ X ، شامل n عضو است. برای هر

دو زیرمجموعهٔ $A_1, A_2 \subset X$ ، تعداد عضوهای مجموعهٔ $A_1 \cap A_2$ را محاسبه کرده‌ایم. ثابت کنید، مجموع همهٔ عددهای حاصل، برابر $n \times 2^{n-1}$ است.

۴۵۲. (نیویورک، ۱۹۷۸). دربارهٔ عددهای $n > 4$ و

$k = \left\lfloor \frac{1}{6}n(n+1) \right\rfloor$ و مجموعهٔ X_n شامل $\frac{1}{6}n(n+1)$ عضو، می‌دانیم:

k عضو این مجموعه به رنگ آبی، k عضو به رنگ قرمز و بقیهٔ اعضا به رنگ سفیدند. ثابت کنید، مجموعهٔ X_n را می‌توان به n زیرمجموعهٔ دو به دو

جدا از هم A_1, \dots, A_n تقسیم کرد، به نحوی که، برای هر مقدار

$$m = 1, 2, \dots, n$$

زیر مجموعه A_m درست m عضو داشته باشد و، در ضمن، هم رنگ.

۰۴۵۳ (یوگسلاوی، ۱۹۷۲). برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ ، بزرگترین

عدد $k \in \mathbb{N}$ را پیدا کنید که دارای ویژگی زیر باشد: در مجموعه‌ای که دارای n عضو است، بتوان k زیرمجموعه مختلف انتخاب کرد، به نحوی که هر دو تا از آن‌ها، اشتراکی غیرتهی داشته باشند.

۰۴۵۴ (انگلستان، ۱۹۷۶). در مجموعه متناهی X ، به تعداد ۵۰

زیرمجموعه A_1, \dots, A_{50} انتخاب کرده‌ایم، به نحوی که هر کدام از آن‌ها، شامل بیش از نصف عضوهای مجموعه X باشد. ثابت کنید، می‌توان زیرمجموعه $BC \subset X$ را پیدا کرد که بیش از ۵ عضو نداشته باشد و با هر یک از زیرمجموعه‌های A_1, \dots, A_{50} ، دست کم، یک عضو مشترک داشته باشد.

۰۴۵۵ (اتریش، لهستان، ۱۹۷۸). ۱۹۷۸ مجموعه داریم که، هر کدام

از آن‌ها، ۴۰ عضو دارد. می‌دانیم، هر دو تا از این مجموعه‌ها، درست یک عضو مشترک دارند. ثابت کنید، عضوی وجود دارد که متعلق به هر ۱۹۷۸ مجموعه است.

۰۴۵۶ (پکن، ۱۹۶۳). مجموعه‌ای با 2^n عضو را به زیرمجموعه‌هایی

تقسیم کرده‌ایم که دو به دو غیر متقاطع‌اند. این عمل را در نظر می‌گیریم: چند عضو از یک زیرمجموعه را به زیرمجموعه دیگر منتقل می‌کنیم؛ در ضمن، تعداد عضوهای انتقالی باید برابر با تعداد عضوهای مجموعه دوم باشد (که البته، باید شامل عضوهایی باشد که، تعداد آن‌ها، از اولی بیشتر نیست). ثابت کنید، به کم‌تعداد محدودی از این عمل، می‌توان به زیرمجموعه‌ای رسید که بر مجموعه اصلی منطبق باشد.

۰۴۵۷ (هیأت داوران، چکوسلواکی، ۱۹۷۹). M را، زیرمجموعه‌ای

از مجموعه همه زوج عددهای طبیعی (i, k) می‌گیریم $(i < k)$ ؛ i و k ، از عدد مفروض طبیعی $n \geq 2$ تجاوز نمی‌کنند. در ضمن، اگر زوج عدد $i < k$ ، متعلق به مجموعه M باشد، آن وقت، هیچ زوج $k < m$ متعلق به آن نیست. در

مجموعه M ، حداکثر، چند عضو وجود دارد؟

۴۵۸* (هیأت داوران، بلژیک، ۱۹۷۹). مجموعه X ، دارای n عضو است. حداکثر، چند زیرمجموعه سه عضوی می توان از X جدا کرد، به نحوی که هر دو تا از آن ها، درست یک عضو مشترک داشته باشند.

۴۵۹* (امریکا، ۱۹۷۹). از مجموعه ای که شامل $n \geq 5$ عضو است، $n+1$ زیرمجموعه مختلف سه عضوی را جدا کرده ایم. ثابت کنید، بین این زیرمجموعه ها، دوزیرمجموعه پیدا می شود که درست یک عضو مشترک دارند.

۴۶۰* (رومانی، ۱۹۷۸). مجموعه X را به زیرمجموعه های جدا از هم (غیر متقاطع) A_1, \dots, A_n تقسیم کرده ایم؛ سپس همان مجموعه X را به زیرمجموعه های دو به دو جدا از هم B_1, \dots, B_n تقسیم کرده ایم. می دانیم، اجتماع $A_i \cup B_j$ هر دو زیرمجموعه جدا از هم A_i و B_j ($1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq n$)، دست کم، n عضو دارد. ثابت کنید، تعداد عضوهای مجموعه X ، از $\frac{1}{4}n^2$ کمتر نیست. آیا می تواند برابر $\frac{1}{4}n^2$ باشد؟

۲۵۵. مسأله هایی با استفاده از گرافها

(ضمیمه ج، تعریف ۴۳ و قضیه های ۱ و ۲)

را ببینید)

۴۶۱. (انگلستان، ۱۹۷۲). در مجموعه S ، رابطه \rightarrow را در نظر می گیریم که بین دو عضو مجموعه S وجود دارد و دارای ویژگی های زیر است:

(۱) برای هر دو عضو مختلف $a, b \in Z$ ، درست یکی از رابطه های $a \rightarrow b$ یا $b \rightarrow a$ برقرار است؛

(۲) برای هر سه عضو مختلف $a, b, c \in S$ ، برقرار بودن رابطه های $a \rightarrow b$ و $b \rightarrow c$ به معنای برقراری رابطه $a \rightarrow c$ است.

حداکثر تعداد عضوهای مجموعه S ، چقدر می تواند باشد؟

۴۶۲. (امریکا، ۱۹۸۲). در اجتماعی که از ۱۹۸۲ نفر تشکیل شده

است، در بین هر چهار نفر، می توان دست کم يك نفر را پیدا کرد که با سه نفر دیگر آشنا باشد. حداقل تعداد کسانی که با همه دیگران آشنا هستند، چند نفر است؟

۴۶۳. (بلغارستان، ۱۹۷۸). در گروهی که از پنج نفر تشکیل شده است، بین هر سه نفر، دو نفر پیدا می شوند که یکدیگر را می شناسند و دو نفر هم، ناآشنای با یکدیگر پیدا می شود. ثابت کنید، این پنج نفر را می توان دور يك میز طوری نشانید که در هر دو طرف هر نفر، آشناهای او نشسته باشند.

۴۶۴. (امریکا، ۱۹۷۸). سه ریاضی دان در کنفرانس بین المللی ریاضیات بهم رسیدند و معلوم شد که، بین هر سه تا از آن ها، دست کم دو نفر، به يك زبان صحبت می کنند. در ضمن، تعداد زبان هایی که هر ریاضی دان می تواند به آن ها صحبت کند، از سه بیشتر نیست. ثابت کنید، دست کم، سه نفر از ریاضی دانان، با يك زبان صحبت می کنند.

۴۶۵. الف) (انگلستان، ۱۹۸۰). در اطاقی ۱۰ نفر وجود دارند، در ضمن، بین هر سه نفر از آن ها، دو نفر باهم آشنا هستند. ثابت کنید، چهار نفر پیدا می شوند، که هر دو نفر آن ها باهم آشنا باشند.

ب) (هیأت داوران، لهستان، ۱۹۷۷). اگر در بخش الف)، به جای ۱۰ نفر، با ۹ نفر سروکار داشته باشیم، آیا باز هم گزاره الف درست است؟

۴۶۶. (بلغارستان، ۱۹۸۱؛ امریکا، ۱۹۸۱). در يك کشور، هر دو شهر، به طور مستقیم، با یکی از سه وسیله اتوبوس، قطار یا هواپیما، به هم مربوط اند. می دانیم، هیچ شهری، با هر سه وسیله تأمین نشده است و، در عین حال، سه شهر نمی توان پیدا کرد که تنها یکی از این سه وسیله، هر دو شهر دلخواه آن را به هم مربوط کند. این کشور، حداکثر، چند شهر می تواند داشته باشد؟

۴۶۷. (یوگسلاوی، ۱۹۷۵). در اجتماعی، هر دو نفری که باهم آشنا هستند، آشنای مشترك دیگری ندارند؛ ولی هر دو نفری که باهم آشنا نیستند، درست دو آشنای مشترك دارند. ثابت کنید، در این اجتماع، همه افراد، به تعداد مساوی آشنا دارند.

۴۶۸. (مجارستان، ۱۹۷۷). در هر يك از سه مدرسه، n دانش آموز تحصیل می کنند. هر دانش آموز، در مجموع، $1+n$ آشنا بین دانش آموزان

دو مدرسه دیگر دارد. ثابت کنید، می توان از هر مدرسه يك دانش آموز، به نحوی انتخاب کرد که، سه دانش آموز انتخابی، باهم آشنا باشند.

۴۶۹*. (اتریش، ۱۹۷۳). $2n$ نقطه مختلف $(A_1, A_2, \dots, A_{2n}, n > 1)$ در فضا داده شده است. هیچ سه تایی از آن‌ها بزرگ خط راست، واقع نیستند. M را مجموعه‌ای از $(n+1)$ پاره خط راست می گیریم که دو انتهای هر کدام از آن‌ها، در نقطه‌های مفروض باشند. ثابت کنید، دست کم يك مثلث با رأس‌های در نقطه‌های A_r, A_s, A_t وجود دارد، به نحوی که ضلع‌های آن به مجموعه M تعلق داشته باشد. ثابت کنید، اگر تعداد عضوهای مجموعه M از n^2 تجاوز نکند، ممکن است چنین مثلثی وجود نداشته باشد.

۴۷۰*. (رومانی، ۱۹۷۸). هنگام عصر، چند دختر و پسر باهم جمع شدند. در ضمن معلوم شد، اگر گروهی از پسرها را انتخاب کنیم، تعداد دخترهایی که دست کم با یکی از پسرهای گروه آشنا باشند، کمتر از تعداد پسرهای این گروه نیست. ثابت کنید، همه پسرها، می توانند به طور هم‌زمان، هر کدام با دختر آشنای خود، در رقص شرکت کنند.

۴۷۱*. (استرالیا، ۱۹۸۳). بعضی از شهرهای P_1, \dots, P_{1983} ، دو به دو با برخی از خط‌های هوایی شرکت‌های A_1, \dots, A_9 به هم مربوط اند. می دانیم، از هر شهر می توان به شهر دیگر، بدون عوض کردن هواپیما، پرواز کرد؛ در ضمن، هر خط هوایی در هر دو جهت مسیر، وجود دارد. ثابت کنید، دست کم يك شرکت وجود دارد که می تواند مسافرت به مقصد و مبدا را (به شرطی که مسافرت از يك شهر آغاز و سرانجام به همان شهر ختم شود)، با تعداد فردی خط هوایی تأمین کند.

§ ۲۶. مسأله‌های مختلف

(ضمیمه ج: تعریف‌های ۱۶، ۱۸، ۳۵، ۴۳)

۴۴ قضیه‌های ۱، ۲، ۶، ۱۰، ۹۳ تا ۹۷ را

(ببینید)

۴۷۲. (یوگسلاوی، ۱۹۷۵). روی محیط دایره‌ای، به دلخواه، چهار

واحد و پنج صفر را نوشته ایم. سپس، این عمل را روی آن‌ها انجام می‌دهیم؛ بین هر دو رقم مساوی، صفر می‌گذاریم و بین هر دو رقم مختلف، واحد را قرار می‌دهیم و، بعد از آن، رقم‌های نخستین را پاک می‌کنیم. دوباره، در مورد رقم‌های موجود همان عمل را ادامه می‌دهیم و غیره. ثابت کنید، بعد از انجام تعداد محدودی از این عمل، نمی‌توان به ۹ رقم صفر رسید.

۴۷۳. (هیأت داوران، بلغارستان، ۱۹۷۹). روی يك کاغذ شطرنجی،

n خانه را به تصادف علامت گذاشته ایم. ثابت کنید، دست کم $\frac{n}{4}$ خانه می‌توان از بین آن‌ها، طوری انتخاب کرد که، دو به دو، مماس بر یکدیگر نباشند (دو خانه را مماس برهم گوئیم، وقتی که، دست کم در يك رأس، مشترك باشند).

۴۷۴. (یوگسلاوی، ۱۹۸۱)، موش با دندان‌های خود، مکعب پنیر به یال ۳ را به ۲۷ مکعب به یال واحد تقسیم کرد. موش، بعد از خوردن یکی از مکعب‌های واحد، به سراغ مکعبی می‌رود که با قبلی يك وجه مشترك داشته باشد. آیا موش می‌تواند همه مکعب‌ها را، به جز مکعب وسطی بخورد؟

۴۷۵. (چکوسلواکی، ۱۹۷۷). روی خط راست، n نقطه مختلف A_1, A_2, \dots, A_n را علامت گذاشته ایم ($n \geq 4$). هر نقطه را، با یکی از ۴ رنگ موجود، رنگ کرده ایم؛ درضمن، از هر چهار رنگ هم استفاده شده است. ثابت کنید، پاره خط راستی وجود دارد که درست یکی از نقطه‌های آن، یکی از دو رنگ و، دست کم، یکی از نقطه‌های آن، از دو رنگ بقیه را دارد.

۴۷۶. (رومانی، ۱۹۷۸). مجموعه M ، شامل n نقطه روی صفحه داده شده است؛ در ضمن، هیچ سه نقطه‌ای روی يك خط راست نیستند. هر پاره خطی را، که دو انتهای آن در M است، یا متناظر با عدد ۱+ و یا متناظر با عدد ۱- قرار داده ایم؛ در ضمن، تعداد پاره خط‌های متناظر با ۱-، برابر m شده است. مثلی را، که رأس‌های آن در M باشد، وقتی «منفی» می‌نامیم که حاصل ضرب سه ضلع آن برابر ۱- شود. ثابت کنید، تعداد مثلث‌های منفی، وقتی زوج (فرد) است که حاصل ضرب nm زوج (فرد) باشد.

۴۷۷. (پکن، ۱۹۶۴). در يك جاده کمربندی، n مرکز بنزین وجود دارد و، در آن‌ها، روی هم، آن قدر بنزین ذخیره شده است که بتوان، با مصرف-

کردن آن‌ها، با يك اتومبیل، یکبار، جادهٔ کمربندی را دور زد. ثابت کنید، اتومبیل با يك خالی، می‌تواند حرکت خود را، با آغاز از يك مرکز ذخیرهٔ بنزین آغاز کند و تمامی جادهٔ کمربندی را دور ببرد.

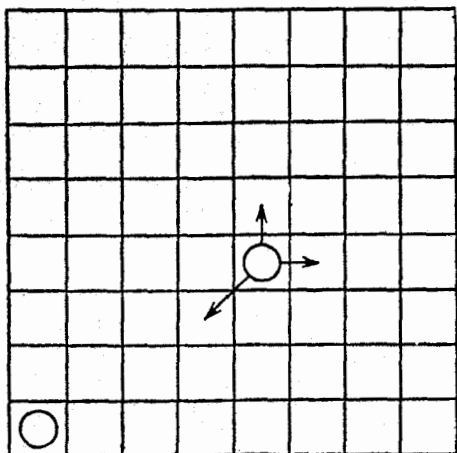
۴۷۸. (یوگسلاوی، ۱۹۷۴). روی صفحهٔ شطرنج 8×8 ، ۸ سرباز سفید روی ردیف اول افقی و ۸ سرباز سیاه روی ردیف هشتم افقی چیده شده‌اند. بازی را سفید آغاز می‌کند و، بازی‌کنان به نوبت، حرکت خود را انجام می‌دهند. هر حرکت عبارت است از جابه‌جا کردن سرباز روی ردیف قائم، به تعداد يك یا چند خانه به جلو یا به عقب. اگر سرباز حریف در خانهٔ روبه‌رو قرار گرفته باشد، نمی‌توان آن را از سر راه برداشت و یا از روی آن پرید. کسی بازی را باخته است که نتواند حرکت نوبتی خود را انجام دهد. ثابت کنید، سیاه می‌تواند طوری حرکت کند که بازی را ببرد.

۴۷۹. (یوگسلاوی، ۱۹۸۳). نوار مستطیل شکل $1 \times n$ داده شده است ($n \geq 4$) و n خانهٔ آن را، به ترتیب، از ۱ تا n ، شماره‌گذاری کرده‌ایم. در خانه‌های با شماره‌های $2 - n$ ، $1 - n$ ، در هر کدام يك مهره گذاشته‌ایم. دو نفر، به این ترتیب، با هم بازی می‌کنند؛ هر نفر، در نوبت خود، می‌تواند هر مهره را به هر خانه‌ای که آزاد باشد و شمارهٔ کمتری داشته باشد، منتقل کند. کسی بازی را می‌بازد که نتواند حرکت نوبتی خود را انجام دهد. ثابت کنید، کسی که بازی را آغاز کرده است، می‌تواند طوری حرکت کند که برد او حتمی باشد.

۴۸۰. (یوگسلاوی، ۱۹۸۳). مهره‌ای را می‌توان يك خانه به طرف بالا، يك خانه به طرف راست و یا يك خانه در جهت قطری به سمت چپ و پایین حرکت داد (شکل ۱). مهره را در پایین‌ترین خانهٔ گوشهٔ چپ صفحهٔ شطرنج (8×8) قرار داده‌ایم. آیا، این مهره، می‌تواند از تمام خانه‌های صفحهٔ شطرنج عبور کند، به نحوی که، در هر خانه، درست یکبار قرار گیرد؟

۴۸۱. (هیأت داوران، لهستان، ۱۹۸۲). در يك صفحهٔ کاغذ شطرنجی،

که از هر طرف تا بی‌نهایت ادامه دارد، همهٔ خانه‌های يك مستطیل $3k \times n$ را با مهره‌هایی پوشانده‌ایم. بازی را به این ترتیب، انجام می‌دهیم: هر مهره می‌تواند از روی هر مهرهٔ دیگر مجاور خود بجهت (در جهت قائم یا افقی)



شکل ۱

و در خانهٔ مجاور آن، به شرطی که آزاد باشد، بنشینند. بعد از چنین حرکتی، باید مهره‌ای را، که از روی آن پرش انجام گرفته است، از صفحه خارج کرد. ثابت کنید، هر گز به وضعی نمی‌رسیم که، در روی صفحه، تنها یک مهره باقی مانده باشد.

۴۸۲. (رومانی، ۱۹۷۸). چندوجهی محدبی با $n \geq 5$ وجه داده شده است و می‌دانیم، از هر رأس آن، درست سه یال می‌گذرد. دو نفر، به این ترتیب، باهم بازی می‌کنند: هر نفر، به نوبت، نام خود را روی یکی از وجه‌های آزاد چندوجهی می‌نویسد. برای بردن بازی، باید بازی‌کن نام خود را بر سه‌وجهی که رأس مشترک دارند، نوشته باشد. ثابت کنید، کسی که بازی را آغاز می‌کند، می‌تواند برنامه‌ای برای برد خود بریزد.

۴۸۳. (هیأت داوران، رومانی، ۱۹۷۷)، $A = (a_1, \dots, a_m)$ را انتخابی از $(n \in \mathbb{N}) m = 2^n$ عدد $a_i \in \{1, -1\}$ فرض می‌کنیم که، در آن، $m, \dots, 2, 1 = i$. عمل S را با دستور زیر تعریف می‌کنیم:

$$S(A) = (a_1 a_2, a_2 a_3, \dots, a_m a_1)$$

ثابت کنید، برای هر نوع انتخاب A ، در دنبالهٔ

انتخابی از m واحد وجود دارد.

۴۸۴. (نیویورک، ۱۹۷۶). صفحه‌های $n \times 2n$ را به خانه‌های مربعی به ضلع واحد تقسیم کرده‌ایم و می‌دانیم، n بر ۳ بخش پذیر نیست؛ سپس، یکی از خانه‌های صفحه را، به دلخواه، از صفحه جدا کرده‌ایم. ثابت کنید، می‌توان این صفحه را با «مربع‌های سه خانه‌ای» به طور کامل پوشاند (منظور از «مربع سه خانه‌ای»، مربعی 2×2 است که یکی از خانه‌ها را از آن جدا کرده باشیم).

۴۸۵. (امریکا، ۱۹۷۶). الف) فرض کنید، هر یک از خانه‌های صفحه مستطیلی 4×7 را، سفید یا سیاه، رنگ کرده باشیم. ثابت کنید، روی صفحه می‌توان مستطیلی پیدا کرد که خانه‌های هر چهار گوشه آن، یک رنگ داشته باشند.

ب) نمونه‌ای از رنگ آمیزی صفحه مستطیلی 4×6 را بیاورید که، برای آن، مستطیل مذکور در بخش الف، وجود نداشته باشد.

۴۸۶. (سوئد، ۱۹۸۲). روی صفحه دستگاه قائم مختصات، مجموعه M ، شامل نقطه‌های (x, y) را در نظر می‌گیریم که، در آن، $x, y \in \mathbb{N}$ و $x \leq 12$ و $y \leq 12$. هر یک از این ۱۴۴ نقطه را با یکی از رنگ‌های سفید، قرمز یا آبی رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید، مستطیلی (با ضلع‌های موازی محورهای مختصات) وجود دارد، به نحوی که رأس‌های آن متعلق به مجموعه M باشند و، در ضمن، هر چهار رأس از یک رنگ باشند.

۴۸۷. الف) (هیأت داوران ویتنام، ۱۹۷۷). روی صفحه دستگاه قائم مختصات، به تعداد $n \geq 3$ نقطه با مختصات درست طوری انتخاب کرده‌ایم که، هر سه نقطه از آن‌ها، تشکیل مثلثی می‌دهند که، محل برخورد میانه‌های آن، مختصات درست ندارد. حداکثر مقدار n را، برای شدنی بودن چنین عملی، پیدا کنید.

ب) (هیأت داوران، رومانی، ۱۹۷۷). ۳۷ نقطه مختلف، با مختصات درست، در فضا در نظر گرفته‌ایم، به نحوی که هیچ سه نقطه‌ای روی یک خط

راست نباشند. ثابت کنید، از بین این نقطه‌ها، می‌توان سه نقطه را طوری انتخاب کرد که مختصات محل برخورد میان‌ه‌های مثلثی که از آن‌ها تشکیل می‌شود، عددهای درستی باشند.

۴۸۸* (یوگسلاوی، ۱۹۷۵). حداکثر چند رخ می‌توان در صفحه شطرنج $3n \times 3n$ قرار داد که، هر کدام از آن‌ها، در معرض خطر بیش از یک رخ دیگر نباشد؟

۴۸۹* (مجارستان، ۱۹۸۱). خانه‌های صفحه شطرنج با اندازه‌های

$n \times n$ را (n, n) (عددی زوج و بزرگتر از ۲)، با $\frac{1}{4}n^2$ رنگ مختلف، به نحوی رنگ کرده‌ایم که، هر رنگ درست برای دو خانه به‌کار رفته است. ثابت کنید، می‌توان n رخ را طوری قرار داد که در خانه‌های با رنگ‌های مختلف قرار داشته باشند و، در ضمن، یکدیگر را تهدید نکنند.

۴۹۰* (مجارستان، ۱۹۷۹؛ استرالیا، ۱۹۸۲). در هر خانه از جدول $n \times n$ ($n \geq 2$)، حرفی قرار داده شده است. می‌دانیم، همه سطرهای جدول، با هم فرق دارند. ثابت کنید، ستونی وجود دارد که، بعد از پاک کردن آن، جدولی باقی می‌ماند که، باز هم، سطرهای یکسان، در آن پیدا نمی‌شود.

۴۹۱* (هیأت داوران، لوکزامبورگ، ۱۹۸۳). در فضا، با دستگاه مختصات قائم فضائی، مجموعه E شامل نقطه‌هایی با مختصات درست، که مقدارهای از ۰ تا ۱۹۸۲ را قبول می‌کنند، در نظر گرفته‌ایم. هر یک از این نقطه‌ها را یا با قرمز و یا با آبی رنگ کرده‌ایم. به چند طریق می‌توان این رنگ آمیزی را انجام داد تا ویژگی زیر به دست آید: تعداد رأس‌های قرمز در هر مکعب مستطیل (با رأس‌هایی از E و یال‌هایی موازی محورهای مختصات)، عددی بخش پذیر بر ۴ باشد؟

حل مسأله‌ها

فصل اول

حساب

۱§. بخش پذیری. عددهای اول و عددهای مرکب

۰۱. حاصل ضرب عددهای $c_i = a_i - b_i$ ($i = 1, 2, \dots, \nu$)، عددی زوج است، زیرا دست کم یکی از آن‌ها، عددی زوج است. در واقع، اگر همه عددهای c_i ، فرد باشند؛ آن وقت، مجموع آن‌ها هم، عددی فرد می‌شود؛ در حالی که داریم:

$$\begin{aligned}c_1 + c_2 + \dots + c_\nu &= (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_\nu - b_\nu) = \\ &= (a_1 + a_2 + \dots + a_\nu) - (b_1 + b_2 + \dots + b_\nu) = 0\end{aligned}$$

۰۲. فرض می‌کنیم $b_e = a^2 + \varepsilon a + 1$ که، در آن، $\varepsilon = 1$. در این صورت، از برابری‌های

$$(a^2 + 1)^2 = (b_e - \varepsilon a)^2 \equiv -\varepsilon a^3 \pmod{b_e},$$

$$-\varepsilon a^3 = -\varepsilon a b_e + a^2 + \varepsilon a = b_e(-\varepsilon a + 1) - 1 \equiv -1 \pmod{b_e}$$

به این رابطه می‌رسیم:

$$(a^2 + 1)^2 \equiv -1 \pmod{b_\varepsilon}$$

بنا بر این

$$\sum_{k=0}^n a_k (a^2 + 1)^{2k} \equiv \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k \pmod{(a^2 \pm a + 1)}$$

یعنی، باید به پرسش مسأله، پاسخ مثبت داد.

۳. تابعی را در نظر می‌گیریم که، در مجموعه عددهای درست، به این

ترتیب، تعریف شده باشد:

$$f(m) = \begin{cases} 0 & (m, \text{ عددی زوج}) \\ 1 & (m, \text{ عددی فرد}) \end{cases}$$

و جدولی از عددها می‌سازیم که با دستور $b_{n,k} = f(a_{n,k})$ عددهای آن مشخص شده باشند. در این صورت، برای $n > 1$ داریم:

$$\begin{aligned} b_{n,k} &= f(a_{n,k}) = f(a_{n-1,k-1} + a_{n-1,k} + a_{n-1,k+1}) = \\ &= f(f(a_{n-1,k-1}) + f(a_{n-1,k}) + f(a_{n-1,k+1})) = \\ &= f(b_{n-1,k-1} + b_{n-1,k} + b_{n-1,k+1}) \end{aligned}$$

در ضمن، جای خالی جدول، صفر به حساب می‌آید. محاسبه مستقیم نشان می‌دهد که، گروه چهار عدد نخستین $b_{n,1-m}, b_{n,2-m}, b_{n,3-m}, b_{n,4-m}$ از n امین سطر، به طوریک ارزشی، گروه چهار عدد نخستین را در $(n+1)$ امین سطر معین می‌کند؛ در ضمن، در سطرهای هشتم و چهارم، این گسروه‌ها برهم منطبق‌اند. بنا بر این، در سطرهای نهم و پنجم، همچنین در سطرهای دهم و ششم و غیره هم، این گروه‌ها، برهم منطبق‌اند. از آن جا که، با آغاز از سطر سوم، در هر سطر، این گروه‌ها شامل صفر هستند، بنا بر این، در همین سطرها از جدول مجهول، عددهای زوج وجود دارد؛ چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۴. توجه کنیم که، عدد $p-1$ ، زوج است. کسر $\frac{m}{n}$ را به این صورت می‌نویسیم،

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1} = \\ & = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{p-1}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p-2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{p-3}\right) + \dots + \\ & + \left(\frac{1}{\frac{p-1}{2}} + \frac{1}{\frac{p+1}{2}}\right) = \frac{p}{1(p-1)} + \frac{p}{2(p-2)} + \frac{p}{3(p-3)} + \dots + \\ & + \frac{p}{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2}} = p \left(\frac{1}{1(p-1)} + \frac{1}{2(p-2)} + \frac{1}{3(p-3)} + \right. \\ & \left. + \dots + \frac{1}{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2}} \right) \end{aligned}$$

مخرج مشترك کسرهای داخل پرانتز، چنین است:

$$1 \cdot (p-1) \cdot 2 \cdot (p-2) \cdot 3 \cdot (p-3) \dots \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2} = (p-1)!$$

به این ترتیب، به دست می آید:

$$\frac{m}{n} = p \cdot \frac{q}{(p-1)!} \quad (q \in \mathbb{N})$$

که از آن، به برابری $m(p-1)! = pqn$ می رسیم. چون، هیچ یک از اعدادهای $1, 2, 3, \dots, p-1$ ، بر عدد اول p بخش پذیر نیستند، بنابراین، برابری اخیر، تنها وقتی برقرار است که، m ، بر p بخش پذیر باشد. حکم مسأله، ثابت شد.

۵. به ازای $n=2$ ، بخش پذیری $n^n - n^2 + n - 1$ بر $(n-1)^2$ ،

روشن است. $n > 2$ می گیریم. داریم:

$$\begin{aligned} n^n - n^2 + n - 1 &= (n^{n-2} - 1)n^2 + (n-1) = \\ &= (n-1)(n^{n-3} + \dots + 1)n^2 + (n-1)n^0 = \\ &= (n-1)(n^{n-1} + n^{n-2} + \dots + n^2 + n^0) \end{aligned}$$

چون، باقی‌مانده تقسیم n بر $n-1$ برابر واحد است، یعنی

$$n \equiv 1 \pmod{(n-1)}$$

بنابراین، برای هر مقدار $n-1, \dots, 3, 2, 0$ داریم

$$n^k \equiv 1 \pmod{(n-1)}$$

یعنی

$$n^{n-1} + \dots + n^2 + n^0 \equiv 0 \pmod{(n-1)}$$

(تعداد جمله‌ها، درست چپ این برابری، برابر $n-1$ است). در نتیجه، عدد

$$(n-1)(n^{n-1} + \dots + n^2 + n^0)$$

بر $(n-1)^2$ بخش پذیر است.

۶. فرض کنید، برای سه عدد طبیعی a, b و c داشته باشیم:

$$(ab+1) : c, \quad (ac+1) : b, \quad (bc+1) : a$$

ابتدا توجه می‌کنیم که، عددهای a, b و c دو به دو نسبت به هم اول‌اند.

در واقع، اگر داشته باشیم: $(a, b) > 1$ ، آن وقت $(ac, b) = d > 1$ و، در

نتیجه، عدد $ac+1$ بر d و، به‌طور مسلم، بر b بخش پذیر نخواهد بود.

بنابراین، بین این سه عدد، عددهای برابر وجود ندارد. عدد

$$s = ab + ac + bc + 1 = (ab+1) + c(a+b)$$

بر c و، به‌همین ترتیب بر a و b بخش پذیر است و چون این سه عدد دو به دو نسبت

به هم اول‌اند، عدد s بر حاصل ضرب آن‌ها بخش پذیر است، یعنی $s \geq abc$.

بدون این که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد:

$$2 \leq a < b < c$$

ثابت می‌کنیم، b نمی‌تواند از ۳ بزرگتر باشد. $b \geq 4$ فرض می‌کنیم، در این

صورت،

$$abc \geq 2 \times 4 \times 5 = 40 \quad \text{و} \quad c \geq 5$$

$$s = ab + ac + bc + 1 \leq \frac{abc}{5} + \frac{abc}{4} + \frac{abc}{2} + 1 =$$

$$= abc - \frac{abc}{20} + 1 \leq abc - \frac{40}{20} + 1 < abc$$

تناقض حاصل به معنای آن است که $b < 4$. به این ترتیب، $a = 2$ و $b = 3$. چون $ab + 1 = 7$ باید بر c بخش پذیر باشد، بنابراین $c = 7$. شرط مسأله، تنها در مورد سه عدد ۲، ۳ و ۷ صدق می کند.

۰۷. اگر $n = 2k$ (همه جا $k \in \mathbb{Z}^+$)، آن وقت

$$19 \times 8^{2k} + 17 = 18 \times 8^{2k} + (1 + 6^3)^k + (18 - 1) \equiv 0 \pmod{3}$$

اگر $n = 4k + 1$ ، آن وقت

$$\begin{aligned} 19 \times 8^{4k+1} + 17 &= 13 \times 8^{4k+1} + 6 \times 8 \times 6^4^{2k} + 17 = \\ &= 13 \times 8^{4k+1} + 39 \times 6^4^{2k} + 9(1 - 6^5)^{2k} + \\ &+ (13 + 9) \equiv 0 \pmod{13} \end{aligned}$$

و سرانجام، اگر $n = 4k + 3$ ، آن وقت

$$\begin{aligned} 19 \times 8^{4k+3} + 17 &= 15 \times 8^{4k+3} + 4 \times 8^3 \times 6^4^{2k} + 17 = \\ &= 15 \times 8^{4k+3} + 4 \times 510 \times 6^4^{2k} + 4 \times 2(1 - 6^5)^{2k} + \\ &+ (25 - 8) \equiv 0 \pmod{5} \end{aligned}$$

به این ترتیب، عدد $19 \times 8^n + 17$ ، به ازای هر مقداری از $n \in \mathbb{Z}^+$ ، عددی است مرکب و بر یکی از عددهای ۳، ۱۳ یا ۵ بخش پذیر است.

۰۸. در حالت $p = 2$ ، هر عدد به صورت $2^{2k} - 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) بر p

بخش پذیر است. برای $p > 2$ ، با در نظر گرفتن قضیه کوچک فرما (قضیه ۲۵)، داریم:

$$2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}, \quad 2^{m(p-1)} \equiv 1 \pmod{p} \quad (m \in \mathbb{N})$$

و در حالتی که داشته باشیم: $m \equiv -1 \pmod{p}$ ، آن وقت خواهیم داشت:

$$2^{m(p-1)} - m(p-1) = 2^{m(p-1)} + m - mp \equiv 0 \pmod{p}$$

بنابراین با شرط $n = (kp - 1)(p - 1)$ ($k \in \mathbb{N}$)، هر یک از عددهای $2^n - n$ بر p بخش پذیر است ($p > 2$).

۰۹. اگر $n = 4k^4$ بگیریم ($k = 2, 3, \dots$)، برای هر $m \in \mathbb{N}$:

$$m^4 + n = m^4 + 4k^4 = (m^4 + 4m^2k^2 + 4k^4) - 4m^2k^2 =$$

$$= (m^2 + 2k^2)^2 - (2mk)^2 = (m^2 + 2mk +$$

$$+ 2k^2)(m^2 - 2mk + 2k^2) = [(m+k)^2 + k^2][(m-k)^2 + k^2]$$

و چون $k > 1$ ، بنا بر این هر يك از این عامل‌ها بزرگتر از واحد می‌شوند، یعنی $m^4 + n$ ، عددی مرکب است.

۱۰. فرض می‌کنیم، n ، دارای ویژگی مورد نظر باشد. اگر n بر ۲

بخش پذیر نباشد، باید داشته باشیم $n \leq 2^2$ (زیرا، در غیر این صورت، عدد

۴ نسبت به عدد n اول می‌شود، درحالی که خود عدد ۴، عددی اول نیست).

بنا بر این $n = 3$. اگر n بر ۲ بخش پذیر، ولی بر ۳ بخش ناپذیر باشد، با همان

استدلال، باید داشته باشیم: $n \leq 3^2$ ، یعنی $n \in \{4, 8\}$. اگر n بر ۲ و ۳

بخش پذیر باشد، آن وقت $n \leq 5^2$ ، یعنی

$$n \in \{6, 12, 18, 24\}$$

اگر n بر ۲، ۳ و ۵ بخش پذیر، ولی بر ۷ بخش ناپذیر باشد، آن وقت $n \leq 7^2$ ،

یعنی $n = 30$. اکنون، فرض کنید، برای مقداری از $k > 4$ ، عدد n ، بر هر يك

از عددهای p_1, p_2, \dots, p_k بخش پذیر، ولی بر p_{k+1} بخش ناپذیر باشد، که

در آن

$$2 = p_1 < p_2 < \dots < p_k < p_{k+1}$$

عددهای متوالی اولی هستند. در این صورت

$$n \leq p_{k+1}^2 \quad \text{و} \quad n : p_1 p_2 \dots p_k$$

از نابرابری‌های

$$p_1 p_2 \dots p_k \leq n \leq 10000000$$

به دست می‌آید: $k \leq 8$ ، از طرف دیگر، برای هر يك از مقدارهای $8 \leq k \leq 4$ ،

به سادگی به دست می‌آید:

$$p_1 p_2 \dots p_k > p_{k+1}^2$$

که با شرط $p_1 p_2 \dots p_k \leq n \leq p_{k+1}^2$ متناقض است. به این ترتیب، برای

$$k = 4, 5, 6, 7, 8$$

جوابی به دست نمی آید. همه مقادیرهای n ، که با شرط مسأله سازگار باشند، متعلق به مجموعه زیر هستند:

$$\{3, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 30\}$$

و آزمایش نشان می دهد که، هر عضو این مجموعه، دارای ویژگی مورد نظر است.

۱۱. ثابت می کنیم، مجموعه مجهول M ، شامل همه عددهای $m \in \mathbb{N}$ است که نسبت به a اول باشند. اگر عددی مثل $m \in \mathbb{N}$ و عدد a ، مقسوم علیه مشترک $d > 1$ را داشته باشد، آن وقت $m \notin M$. در واقع، برای هر عدد $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$(a_n, a) = \left(\sum_{k=0}^n a^k, a \right) = \left(1 + a \sum_{k=0}^{n-1} a^k, a \right) = (1, a) = 1$$

بنابراین، عدد a_n بر d بخش پذیر نیست، یعنی m هم بر d بخش پذیر نیست. اکنون، فرض می کنیم $m > 1$ و $(m, a) = 1$. بین عددهای

$$a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}$$

می توان دو عدد پیدا کرد که، در تقسیم بر m ، باقی مانده های برابر داشته باشند، زیرا تعداد این باقی مانده ها، بیشتر از m نیست. در این صورت، اگر این دو عدد را a_i و a_j ($i > j$) بنامیم، تفاضل آنها

$$a_i - a_j = \sum_{k=0}^i a^k - \sum_{k=0}^j a^k = \sum_{k=j+1}^i a^k = a^{j+1} \sum_{k=0}^{i-j-1} a^k$$

بر m بخش پذیر است. ولی عدد a^{j+1} نسبت به m اول است، بنابراین عدد

$$a_{i-j-1} = \sum_{k=0}^{i-j-1} a^k$$

بر m بخش پذیر خواهد بود (حالت $i - j - 1 = 0$ ممکن نیست، زیرا $m \neq 1$). به این ترتیب، $m \in M$. سرانجام، به این نکته هم توجه می کنیم که $1 \in M$.

۱۲. a_1, a_2, \dots, a_n را، n عدد درست متوالی می گیریم. در این صورت، از نابرابری

$$m_1 < n \leq a_n - (a_1 - 1)$$

نتیجه می شود که، در بین آن ها، عدد a_i به عنوان مضربی از n ، و عدد a_j به عنوان مضربی از m وجود دارد. اگر $i \neq j$ ، آن وقت، حاصل ضرب $a_i a_j$ بر عدد mn بخش پذیر است. به حالت $i = j$ می پردازیم. فرض می کنیم:

$$d = (m, n) \text{ و } q = [m, n]. \text{ در این صورت}$$

$$mn = dq; \quad a_i : d \quad \text{و} \quad a_j : q$$

ثابت می کنیم، دست کم، یکی از دو عدد $a_i + d$ یا $a_i - d$ ، که مضربی از d هستند، به مجموعه $\{a_1, \dots, a_n\}$ تعلق دارد. اگر این طور نباشد، باید داشته باشیم: $a_i + d > a_n$ و $a_i - d < a_1$ ، که از آن جا به دست می آید:

$$i + d \geq n + 1, \quad i - d < 1, \quad \text{و} \quad d > n$$

ولی n بر d بخش پذیر است، بنابراین $d = n > m$ که شرط بخش پذیری m بر d را نقض می کند. به این ترتیب، $a_i + d$ (یا $a_i - d$)، همان عددهای مجهول اند، زیرا حاصل ضرب

$$a_i(a_i + d) \quad \text{یا} \quad a_i(a_i - d)$$

بر $dq = mn$ بخش پذیر است.

۱۳. ابتدا ثابت می کنیم، اگر $n = 2^m$ ، که در آن $m \in \mathbb{Z}^+$ آن گاه داریم: $f(n) = 2n - 1$. در واقع، از یک طرف، مجموع

$$\sum_{k=1}^{2n-1} k = \frac{(2n-1) \cdot 2n}{2} = (2^{m+1} - 1) \cdot 2^m$$

بر $2^m = n$ بخش پذیر است. از طرف دیگر، با فرض $l \leq 2n - 2$ ، مجموع

$$\sum_{k=0}^l k = \frac{1}{2} l(l+1)$$

بر 2^m بخش پذیر نیست، زیرا یکی از دو عدد l یا $l+1$ ، فرد است و دیگری

از عدد $1 - 2^{m+1} = 2n - 1$ تجاوز نمی کنند، بنا بر این، بر 2^{m+1} بخش پذیر نیست. اکنون، فرض کنید، عدد n ، توانی از ۲ نباشد، یعنی $n = 2^m \cdot p$ ، که در آن $m \in \mathbb{Z}^+$ و $p > 1$ ، عددی است فرد. ثابت می کنیم، عدد طبیعی $l < 2n - 1$ وجود دارد که، برای آن، l بر 2^{m+1} و $(l+1)$ بر p بخش پذیر می شود (و در این صورت، مجموع

$$\sum_{k=1}^l k = \frac{1}{2} l(l+1)$$

بر $n = 2^m \cdot p$ بخش پذیر می شود و، از آن جا $f(n) < 2n - 1$.) چون دو عدد 2^{m+1} و p ، نسبت به هم اول اند، بنا بر این، بنا بر قضیه چینی در باره باقی مانده ها (قضیه ۲۳)، عدد l وجود دارد که با این شرط ها، سازگار باشد:

$$l \equiv 0 \pmod{2^{m+1}}; \quad l \equiv p - 1 \pmod{p}$$

$$(0 < l \leq 2^{m+1} \cdot p = 2n)$$

در واقع، این عدد، با شرط نیر و مندتر $l < 2n - 1$ هم سازگار است؛ زیرا اگر

$$l = 2n - 1 = 2^{m+1} \cdot p - 1$$

آن وقت، l ، بر 2^{m+1} بخش پذیر نیست، و اگر

$$l = 2n = 2^{m+1} \cdot p$$

آن وقت، $l+1$ ، بر $p > 1$ بخش پذیر نیست؛ در نتیجه $l < 2n - 1$ ، چیزی که می خواستیم ثابت کنیم.

در آن، $n = 3^k \cdot r \cdot 14$ می گیریم که، در آن، $k \in \mathbb{Z}^+$ و عدد $r \in \mathbb{N}$ بخش ناپذیر

بر ۳ می باشد. ثابت می کنیم، عدد

$$p = 1 + 2^n + 4^n$$

بر عدد زیر بخش پذیر است:

$$q = 1 + 2^{3k} + 4^{3k}$$

دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $r = 3s + 1$ ($s \in \mathbb{Z}^+$). با استفاده از قضیه ۱۱، داریم:

$$p - q = (2^n - 2^{3k}) + (4^n - 4^{3k}) = \\ = 2^{3k}(2^{3k \cdot 3s} - 1) + 4^{3k}(2^{3k \cdot 6s} - 1) \equiv 0 \pmod{(2^{3k \cdot 3} - 1)}$$

و چون

$$2^{3k \cdot 3} - 1 = (2^{3k} - 1)(1 + 2^{3k} + 4^{3k}) = (2^{3k} - 1)q$$

بنابراین، عدد $p - q$ بر q بخش پذیر و، از آنجا، p بر a بخش پذیر است.
حالت دوم: $r = 3s + 2$ ($s \in \mathbb{Z}^+$). با استفاده از همان قضیه ۱۱، داریم:

$$p - q = (4^n - 2^{3k}) + (2^n - 4^{3k}) = \\ = 2^{3k}(2^{3k \cdot 2(2s+1)} - 1) + 2^{2 \cdot 3k}(2^{3k \cdot 3s} - 1) \equiv 0 \pmod{(2^{3k \cdot 3} - 1)}$$

که از آنجا، مثل حالت اول، p بر q بخش پذیر می‌شود.

به این ترتیب، تنها $n = 3^k$ با شرط‌های مسأله سازگار است.

۱۵. فرض کنید: $p = 11^i \cdot q$ و $m = 11^j \cdot q$ که، در آن، $i, j \in \mathbb{Z}^+$

و عددهای $p, q \in \mathbb{N}$ ، بخش ناپذیر بر ۱۱ باشند. ثابت می‌کنیم $p = q$ (که در آن صورت، به دست می‌آید: $n = 11^{i-j} \cdot m$). $p \neq q$ می‌گیریم و، در ضمن، فرض می‌کنیم $p > q$ (حالت $p < q$ هم، شبیه این حالت مورد بررسی قرار می‌گیرد). چون، عددهای p و ۱۱ نسبت به هم اول‌اند، بنابراین، با توجه به قضیه چینی درباره باقی مانده‌ها (قضیه ۲۳)، عدد $a > 0$ وجود دارد که برای آن داشته باشیم:

$$a \equiv 0 \pmod{p}, \quad a \equiv -1 \pmod{11}$$

در این صورت، خواهیم داشت:

$$a = 11k - 1 \quad (k \in \mathbb{N}),$$

$$(11k - 1, m) = (a, 11^j p) = p,$$

$$(11k - 1, n) = (a, 11^j q) \leq q < p$$

$$(11k-1, m) = (11k-1, n)$$

متناقض است. اثبات تمام شد.

۰۱۶. ثابت می‌کنیم، حکم درست است. فرض می‌کنیم، هر مقسوم‌علیه اول عدد $ad - bc$ ، مقسوم‌علیهی از عددهای a و c باشد، ولی برخلاف حکم مسأله، برای مقداری از $n \in \mathbb{Z}$ ، عددهای $an + b$ و $cn + d$ ، بر عدد اول p بخش‌پذیر باشند. در این صورت، عدد

$$ad - bc = a(cn + d) - c(an + b)$$

و بنا براین، عددهای a و c هم، بر p بخش‌پذیرند. در نتیجه، دو عدد

$$b = (an + b) - an \quad \text{و} \quad d = (cn + d) - cn$$

هم بر p بخش‌پذیر می‌شوند و داریم:

$$(a, b, c, d) \geq p > 1$$

که با شرط مسأله متناقض است. اکنون فرض کنید، برای هر مقدار $n \in \mathbb{Z}$

$$(an + b, cn + d) = 1$$

ولی برخلاف حکم مسأله، برای عدد اولی مثل p داشته باشیم:

$$ad - bc \equiv 0 \pmod{p}, \quad a \not\equiv 0 \pmod{p}$$

(حالت $c \equiv 0 \pmod{p}$ را هم، به صورت مشابهی می‌توان بررسی کرد). در این صورت، با توجه به قضیهٔ چینی دربارهٔ باقی‌مانده‌ها (قضیهٔ ۲۳)، عدد $n \in \mathbb{Z}$ وجود دارد که برای آن داشته باشیم:

$$an \equiv -b \pmod{p}$$

که از آنجا، به دست می‌آید:

$$an + b \equiv 0 \pmod{p},$$

$$a(cn + d) = c(an + b) + (ad - bc) \equiv 0 \pmod{p}$$

و چون $(a, p) = 1$ ، بنا بر این

$$cn + d \equiv 0 \pmod{p} \text{ و } (an + b, cn + d) \geq p > 1$$

تناقض حاصل، اثبات حکم را کامل می کند.

۱۷. a_m را، به ازای $4, 3, 2, 1, 0 = m$ ، برابر $1 + 2^{2^m}$ می گیریم.

این، پنج عدد، عددهایی اول اند. از طرف دیگر، عدد

$$2^{2^2} + 1 = (2^{2^2} - 1) + 2 =$$

$$= (2^{1^6} + 1)(2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^2 + 1)(2 + 1)(2 - 1) + 2 =$$

$$= a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 + 2 \equiv 2 \pmod{a_m}$$

نسبت به هر يك از عددهای فرد a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 اول است؛ در ضمن، عدد $2^{2^2} + 1$ بر $a_5 = 641$ بخش پذیر است، ولی بر مجذور آن بخش پذیر

نیست؛ یعنی، عدد $\frac{2^{2^2} + 1}{641}$ بر a_5 بخش پذیر نیست. به این ترتیب، عددهای

$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ و a_6 دو به دو نسبت به هم اول اند. بنا بر قضیه چینی در مورد باقی مانده ها (قضیه ۲۳)، عدد درست

$$k > \max\{a_0, a_1, \dots, a_6\}$$

وجود دارد که برای آن داریم:

$$k \equiv 1 \pmod{a_m} \quad (m = 0, 1, \dots, 5)$$

$$k \equiv -1 \pmod{a_6}$$

اکنون، ثابت می کنیم، هر عدد به صورت $1 + 2^n \cdot k$ ($n \in \mathbb{N}$)، يك عدد

مرکب است. $n = 2^m \cdot p$ می گیریم که، در آن، p عددی فرد و

$$m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

داریم:

$$k \cdot 2^n + 1 \equiv 2^n + 1 \pmod{a_m}$$

$$2^n + 1 = 2^{2^m \cdot p} + 1 = (a_m - 1)^p + 1 \equiv (-1)^p + 1 \pmod{a_m}$$

$$k \cdot 2^n + 1 \equiv 0 \pmod{a_m}$$

$n = 2^5 \cdot p$ فرض کنید (p ، عددی است فرد)، در آن صورت

$$k \cdot 2^n + 1 \equiv 2^n = 1 \pmod{a_5},$$

$$2^n + 1 = (2^{2^2})^p + 1 \equiv (-1)^p + 1 \pmod{a_5},$$

$$k \cdot 2^n + 1 \equiv 0 \pmod{a_5}$$

بالاخره فرض کنید $n = 2^6 \cdot p$ که، در آن $p \in \mathbb{N}$ ، در آن صورت

$$k \cdot 2^n + 1 \equiv -2^n + 1 \pmod{a_6},$$

$$2^n - 1 = 2^{6 \cdot p} - 1 \equiv (-1)^{2^p} - 1 \pmod{a_6},$$

$$k \cdot 2^n + 1 \equiv 0 \pmod{a_6}$$

چون عدد $k \cdot 2^n + 1 > k$ ، از همهٔ عددهای اول a_0, a_1, \dots, a_6 بزرگتر و دست کم، بر یکی از آن‌ها بخش پذیر است، بنابراین، عددی است مرکب. ۱۸ عدد $a \geq 3$ را مفروض می گیریم، و دنبالهٔ $\{n_k\}$ را، با تعریف زیر، تشکیل می دهیم:

$$n_1 = 1, \quad n_{k+1} = a^{n_k} - 1, \quad k \in \mathbb{N}$$

با روش استقرای ریاضی، نسبت به $k \in \mathbb{N}$ ، ثابت می کنیم، عدد $a^{n_k} - 1$ ، بر n_k بخش پذیر است. برای $k = 1$ ، باید $a - 1$ بر ۱ بخش پذیر باشد که روشن است.

اکنون، فرض می کنیم، به ازای مقداری از $k \in \mathbb{N}$ ، عدد $a^{n_k} - 1$ بر n_k بخش پذیر باشد، یعنی

$$a^{n_k} - 1 = n_k q \quad (q \in \mathbb{N})$$

در این صورت، با توجه به قضیهٔ ۱۱، عدد

$$a^{n_k+1} - 1 = a^{n_k q} - 1$$

بر $1 = a^{n_k} - 1 = n_{k+1}$ بخش پذیر است. چون دنباله $\{a_n\}$ به طور یکنوا صعودی است، همه مقادیرهای $n = n_k$ ، متمایزند و، به این ترتیب، حکم مسأله ثابت می شود.

ثابت می کنیم، این حکم، برای $a = 2$ درست نیست؛ جدی تر از آن، ثابت می کنیم، به ازای هیچ عدد طبیعی $n > 1$ ، عدد $2^n - 1$ بر n بخش پذیر نیست. از برهان خلف استفاده می کنیم و فرض می کنیم، عدد $2^n - 1$ ، برای عددی مثل $n > 1$ ، بر n بخش پذیر باشد. n ، عددی است فرد (زیرا $2^n - 1$ فرد است) و کوچکترین مقسوم علیه اول n هم (که آن را p می نامیم)، باید عددی فرد باشد. بنابراین، با توجه به قضیه کوچک فرما، $2^{p-1} - 1$ بر p بخش پذیر است. $d \in \mathbb{N}$ را، کوچکترین عددی می گیریم که، به ازای آن، $2^d - 1$ بر p بخش پذیر است و ثابت می کنیم، برای هر $m \in \mathbb{N}$ از بخش پذیری $2^m - 1$ بر p به نتیجه بخش پذیر بودن m بر d می رسیم. در واقع، اگر فرض کنیم: $m = dq + r$ ، که، در آن $q, r \in \mathbb{Z}^+$ و $r < d$ ، آن وقت، با توجه به قضیه ۱۱، عدد

$$(2^m - 1) - (2^r - 1) = 2^r(2^{dq} - 1) \equiv 0 \pmod{(2^d - 1)}$$

بر p بخش پذیر است. بنابراین، از بخش پذیری $2^m - 1$ بر p ، بخش پذیری $2^r - 1$ بر p نتیجه می شود که، از آن جا، به دست می آید: $r = 0$ (با توجه به انتخاب d و نابرابری $d > r$). بنابراین، از شرطهای

$$(2^n - 1) : p \quad \text{و} \quad (2^{p-1} - 1) : p$$

به دست می آید: $d : n$ و $d : (p-1)$. ولی دو عدد n و $p-1$ ، نسبت به هم اول اند، زیرا عدد n ، مقسوم علیهی کوچکتر از p و مخالف واحد ندارد. به این ترتیب $d = 1$ که، از آن جا، نتیجه می شود، عدد $2^1 - 1 = 1$ بر $p > 2$ بخش پذیر است. تناقض حاصل، به این معناست که، به پرسش مسأله، باید پاسخ منفی داد.

می گیریم و فرض می کنیم، برخلاف حکم مسأله، $a_n = \frac{\sigma(n)}{n} \cdot 19$

تنها مجموعه‌ای منتهای از مقادیرهای $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که با نابرابری $a_n > a_k$ سازگار باشد ($k = 1, 2, \dots, n-1$). N را بزرگترین عدد، از این مقادیرهای n می‌گیریم. در این صورت، دنبالهٔ عددهای

$$A_n = \max_{1 \leq i \leq n} \{a_i\}$$

از بالا، به عدد A_N محدود است، زیرا

$$A_1 \leq A_2 \leq \dots \leq A_N$$

و برای هر عدد $n > N$ داریم:

$$A_n = \max\{A_{n-1}, a_n\} = A_{n-1}$$

(زیرا، برای عددی از $\{1, 2, \dots, n-1\}$ ، نابرابری $a_k \geq a_m$ برقرار است). از این جا نتیجه می‌شود:

$$A_N = A_{N+1} = A_{N+2} = \dots$$

بنابراین، دنبالهٔ $\{a_n\}$ هم، از بالا، به عدد A_N برابر عدد a_N محدود می‌شود، زیرا $a_i < a_N$ ($i = 1, \dots, N-1$). از طرف دیگر، بین مقسوم‌علیه‌های عدد $2N$ ، همهٔ عددهای به صورت $2d$ وجود دارند ($d: n$) و همچنین، عدد ۱؛ بنابراین

$$\sigma(2N) \geq 2\sigma(N) + 1$$

$$a_{2N} \geq \frac{2\sigma(N) + 1}{2N} = a_N + \frac{1}{2N} > a_N = A_N$$

تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۲۵. ثابت می‌کنیم، نابرابری $Q(n) > Q(n+1)$ ، برای هر عدد

به صورت

$$n = r.k! - 1 \quad (r \in \mathbb{N}, r \geq 3)$$

برقرار است. کوچکترین مضرب مشترك عددهای $n+1, \dots, n+k$ را m می‌نامیم:

$$m = [n+1, n+2, \dots, n+k]$$

برای $k = 1, \dots, j$ داریم: $n \equiv -1 \pmod{j}$ ، از آنجا

$$(n, j) = 1 \quad \text{و} \quad (n, n+j) = 1$$

بنا بر این

$$(n, m) = 1 \quad \text{و} \quad Q(n) = [n, n+1, \dots, n+k] = (n, m) = nm$$

از طرف دیگر، عدد

$$n+k+1 = r \cdot k! + k$$

بر k بخش پذیر است. عدد m بر $r \cdot k! = n+1$ و، بنا بر این، بر k بخش پذیر

است. به این ترتیب، عدد $\frac{m(n+k+1)}{k}$ هم بر m و هم بر $n+k+1$

بخش پذیر می شود. یعنی

$$Q(n+1) = [n+1, \dots, n+k, n+k+1] =$$

$$= [m, n+k+1] \leq \frac{m(n+k+1)}{k}$$

از این جا، و با توجه به شرط های $k \geq 2$ و $r \geq 3$ ، به دست می آید:

$$Q(n+1) \leq \frac{m(n+k+1)}{2} = \frac{mn}{2} \left(1 + \frac{k+1}{n}\right) \leq$$

$$\leq \frac{mn}{2} \left(1 + \frac{k+1}{2k-1}\right) < \frac{mn}{2} \times 2 = mn = Q(n)$$

و این، همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.

۱۰۲۱. اگر توان ۲ را در تجزیه عدد $k \in \mathbb{N}$ با $m(k)$ نشان می دهیم،

به برابری $k = 2^{m(k)} \cdot g(k)$ می رسم و

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{g(k)}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{m(k)}}$$

یادآوری می کنیم، در بین عددهای ۱، ۲، ...، n ، به تعداد $\left[\frac{n}{2}\right]$ عدد

زوج، $\left[\frac{n}{2^2} \right]$ عدد مضرب چهار، $\left[\frac{n}{2^3} \right]$ عدد مضرب هشت و، به طور کلی،

$\left[\frac{n}{2^m} \right]$ عدد مضرب 2^m وجود دارد. در ضمن، عدد m می تواند هر مقدار

درست غیر منفی باشد، ولی با آغاز از عدد M که در نابرابری $2^M > n$ صدق کند، خواهیم داشت:

$$\left[\frac{n}{2^M} \right] = \left[\frac{n}{2^{M+1}} \right] = \dots = 0$$

بنابراین، تعداد عددهای $\{1, 2, \dots, n\}$ که، برای آنها، مقدار $m(k)$

برابر مقدار m می شود، برابر است با $\left[\frac{n}{2^m} \right] - \left[\frac{n}{2^{m+1}} \right]$ ؛ به این

ترتیب، داریم:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{m=0}^M \frac{1}{2^m} \left(\left[\frac{n}{2^m} \right] - \left[\frac{n}{2^{m+1}} \right] \right) = \sum_{m=0}^M \frac{2}{2^m} \left[\frac{n}{2^m} \right] - \\ &- \sum_{m=1}^M \frac{1}{2^{m-1}} \left[\frac{n}{2^m} \right] = \left[\frac{n}{2^0} \right] + \sum_{m=1}^M \left(\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^{m-1}} \right) \left[\frac{n}{2^m} \right] = \\ &= n - \sum_{m=1}^M \frac{1}{2^m} \left[\frac{n}{2^m} \right] \end{aligned}$$

زیرا $\left[\frac{n}{2^{M+1}} \right] = 0$. از آن جا که، برای هر مقدار $x \in \mathbf{R}$ ، نابرابری

$[x] \leq x$ برقرار است، به نخستین ارزیابی می رسیم:

$$\begin{aligned} S &\geq n - \sum_{m=1}^M \frac{1}{2^m} \cdot \frac{n}{2^m} = n - n \sum_{m=1}^M \frac{1}{2^m} = \\ &= n - \frac{n}{2} \left(1 - \frac{1}{2^M} \right) = \frac{2}{3}n + \frac{n}{3 \times 2^M} > \frac{2}{3}n \end{aligned}$$

برای اثبات سمت دیگر نابرابری حکم، توجه می کنیم که، برای هر

مقدار $q, p \in \mathbf{N}$ ، همیشه داریم:

$$\left[\frac{p}{q} \right] \geq \frac{p+1}{q} - 1$$

درواقع، اگر فرض کنیم $\left[\frac{p}{q} \right] = r$ ، آن وقت

$$p = rq + s, \quad s \in \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$$

که از آنجا، به دست می آید:

$$\left[\frac{p}{q} \right] = r = \left[\frac{p-s}{q} \right] \geq \frac{p-(q-1)}{q} = \frac{p+1}{q} - 1$$

با استفاده از این نابرابری، که در بالا اثبات کردیم، به دست می آید:

$$\begin{aligned} S &= n - \sum_{m=1}^M \frac{1}{2^m} \left[\frac{n}{2^m} \right] \leq n - \sum_{m=1}^M \frac{1}{2^m} \left(\frac{n+1}{2^m} - 1 \right) = \\ &= n - (n+1) \sum_{m=1}^M \frac{1}{2^m} + \sum_{m=1}^M \frac{1}{2^m} = n - \frac{n+1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^M} \right) + \\ &+ \left(1 - \frac{1}{2^M} \right) = \frac{2}{3}n + \frac{2}{3} + \frac{n+1}{3 \times 2^M} - \frac{1}{2^M} \end{aligned}$$

و چون $2^m > n > \frac{n+1}{3}$ بنابراین

$$\frac{n+1}{3 \times 2^M} < \frac{1}{2^M}$$

که از آن، دومین ارزیابی موردنظر نتیجه می شود:

$$S < \frac{2}{3}n + \frac{2}{3}$$

۰۲۲ عدد اول فرد p را در نظر می گیریم. ثابت می کنیم، هر دو عدد

از دنباله صعودی عددهای زوج $a_m = p^{2^m} + 1$ ($m \in \mathbb{Z}^+$)، مقسوم علیه

مشترکی بزرگتر از ۲ ندارند. درواقع، اگر $m > l \geq 0$ ، آن وقت، عدد

$$p^{2^m} - 1 = (p^{2^{m-1}} + 1)(p^{2^{m-1}} - 1) = \dots = \\ = (p^{2^{m-1}} + 1)(p^{2^{m-2}} + 1) \dots (p^{2^1} + 1)(p^{2^1} - 1)$$

بر $p^{2^l} + 1$ بخش پذیر است و بنا بر این

$$(a_m, a_l) = (2 + (p^{2^m} - 1), p^{2^l} + 1) = (2, p^{2^l} - 1) = 2$$

مجموعه جمله‌هایی از دنباله را در نظر می‌گیریم که، دست کم، بر یک عدد اول بزرگتر از p ، بخش پذیر باشند. این مجموعه، تهی نیست، زیرا بر اساس ویژگی دنباله $\{a_m\}$ ، که در بالا ثابت کردیم، تنها مجموعه‌ای متناهی از جمله‌های آن، می‌توانند مقسوم‌علیهی بزرگتر از p نداشته باشند. a_m را، کوچکترین عدد در این مجموعه می‌گیریم. در این صورت داریم:

$$h(a_m) > p, h(a_m - 1) = h(p^{2^m}) = p,$$

$$h(a_m - 2) = h(p^{2^m} - 1) = \max\{h(p^{2^{m-1}} + 1), h(p^{2^{m-1}} - 1)\} =$$

$$= \dots = \max\{h(p^{2^{m-1}} + 1), h(p^{2^{m-2}} + 1), \dots, h(p + 1),$$

$$h(p - 1)\} = \max\{h(a_{m-1}), h(a_{m-2}), \dots, h(a_0),$$

$$h(p - 1) < p$$

از آن جا که $h(p - 1) < p$ و به ازای هر مقدار $(l = 0, 1, \dots, m - 1)$ ،

بنا بر انتخاب عدد $m: h(a_l) \leq p$ ، به جز آن، $a_l \equiv 1 \pmod{p}$ ، نتیجه می‌شود: $h(a_l) < p$. به این ترتیب، برای عدد اول فرد و مفروض p ، عددی

به صورت $n = p^{2^m} - 1$ وجود دارد که در نابرابری

$$h(n) < h(n + 1) < h(n + 2)$$

صدق می‌کند. چون، برای عددهای مختلف p ، مقدارهای مختلفی برای n به دست می‌آید، بنا بر این، مجموعه این گونه مقادیر، نامتناهی است.

۲۳. ابتدا ثابت می‌کنیم، بین عددهای به صورت $n = 2^k$ ($k \in \mathbb{N}$)،

بی‌نهایت عدد وجود دارد که در نابرابری $w(n) < w(n + 1)$ صدق می‌کنند.

فرض می‌کنیم، برای مقداری از n ، نابرابری مخالف $w(n) \geq w(n+1)$ برقرار باشد. در این صورت داریم:

$$1 = w(2^k) \geq w(2^k + 1) \geq 1$$

از آنجا

$$w(2^k + 1) = 1 \text{ و } 2^k + 1 = p^m \quad (m \in \mathbb{N})$$

(p ، عددی است اول). اگر $m = 2l$ ، آن وقت

$$2^k = p^{2l} - 1 = (p^l - 1)(p^l + 1)$$

یعنی، هر دو عدد $p^l + 1$ و $p^l - 1$ توانی از 2 هستند؛ که تنها در حالت $l = 1$ و $p^l + 1 = 4$ و $p^l - 1 = 2$ ممکن است، یعنی به ازای $p = 3$ ، $l = 1$ و $k = 3$. در حالت فرد بودن عدد m ، به دست می‌آید: $m = 1$ ، زیرا در حالت $m > 1$ ، با توجه به بسط

$$2^k = p^m - 1 = (p - 1)(p^{m-1} + \dots + p + 1)$$

باید عدد فرد

$$p^{m-1} + \dots + p + 1 > 1$$

توانی از 2 باشد که ممکن نیست. ولی برابری $2^k + 1 = p$ تنها وقتی ممکن است که داشته باشیم: $k = 2^q$ ($q \in \mathbb{Z}^+$). در واقع، اگر $k = 2^q \cdot r$ ، که در آن، $r > 1$ عددی فرد باشد، بنابر قضیهٔ ۱۱، باید عدد اول

$$p = 2^k + 1 = 2^{2^q \cdot r} + 1 \equiv 0 \pmod{(2^{2^q} + 1)}$$

بر عدد $p < 2^{2^q} + 1$ بخش پذیر باشد. به‌این ترتیب ثابت شد که، برای مجموعه‌ای نامتناهی از مقدارهای $k \in \mathbb{N}$ (مخالف با ۳ و توان‌های ۲)، این نابرابری برقرار است:

$$w(2^k) < w(2^k + 1)$$

اکنون فرض می‌کنیم، حکم مسأله درست نباشد، یعنی بین مقدارهایی

از k که در نابرابری

$$w(2^k) < w(2^k + 1)$$

صدق می‌کنند، تنها تعداد محدودی در نابرابری زیر هم صدق کنند:

$$w(2^k + 1) < w(2^k + 2)$$

بنابراین، باید عددی (به اندازه کافی بزرگ) مثل $5 < 2^{k_0} = k_0$ وجود داشته باشد که، به ازای همه مقادیرهای

$$k = k_0 + 1, k_0 + 2, \dots, 2k_0 - 1 < 2^{k_0} + 1$$

رابطه‌های زیر برقرار باشند:

$$w(2^k + 1) \geq w(2^k + 2) = w(2(2^{k-1} + 1)) = 1 + w(2^{k-1} + 1)$$

که از آن‌ها به دست می‌آید:

$$w(2^{2k_0-1} + 1) \geq 1 + w(2^{2k_0-2} + 1) \geq \dots \geq (k_0 - 1) + w(2^{k_0} + 1) \geq k_0.$$

بنابراین، اگر $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$ را دنباله عددهای اول بگیریم، خواهیم داشت:

$$2^{2k_0-1} + 1 \geq p_1 p_2 \dots p_{k_0} = (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11) (p_6 \dots p_{k_0}) > 45 \times 4^{k_0-5} = 2^{2k_0} > 2^{2k_0-1} + 1$$

و تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را تأیید می‌کند.

۲۳. ریشه‌های درست و گویا در معادله‌ها

۲۴. معادله را به این صورت می‌نویسیم:

$$2^x = (y-1)(y+1)$$

برای مقادیرهای $x, y \in \mathbb{N}$ ، باید عددهای درست و مثبت $y-1$ و $y+1$ ، مقسوم‌علیه‌هایی از 2^x باشند، یعنی

$$y-1=2^p, y+1=2^q \quad (p, q \in \mathbb{Z}^+, p < q)$$

از این جا داریم:

$$2^q - 2^p = (y+1) - (y-1) = 2 \Rightarrow 2^p(2^{q-p} - 1) = 2$$

و روشن است که باید داشته باشیم: $q-p=1$ (اگر $q-p > 1$ آن وقت عدد فرد $2^{q-p} - 1$ مقسوم علیهی از ۲ می شود). به این ترتیب، به دست می آید: $p=1$ و $q=2$.

معادله، تنها يك جواب طبیعی دارد: $x=3, y=3$.

۰۲۵ چون x, y, a, b, c, d ، عددهای درست اند. بنابراین معادله

$$(x+ay+c)(x+by+d) = 2$$

هم ارز است با مجموعه همه دستگاههای به صورت

$$\begin{cases} x+ay+c=p \\ x+by+d=q \end{cases}$$

که در آن، عددهای $p, q \in \mathbb{Z}$ ، در برابری $qp=2$ صدق کنند. هر يك از این دستگاهها، نمی توانند بیش از يك جواب داشته باشند. این جواب، به صورت زیر است (به یاد بیاوریم که $a \neq b$).

$$\begin{cases} y = \frac{p-q+d-c}{a-b} \\ x = p-c-ay \end{cases}$$

برای زوج عددهای درست (p, q) ، روی هم، چهار حالت وجود دارد:

$$(1, 2), (-1, -2), (2, 1), (-2, -1)$$

که هر زوج، متناظر با يك جواب برای (x, y) است. بنابراین، معادله مفروض، نمی تواند بیش از چهار جواب داشته باشد؛ در ضمن؛ تنها وقتی تعداد این جوابها، برابر چهار می شود که هر يك از عددهای به صورت

عددی درست باشد، یعنی وقتی که $\frac{p-q+d-c}{a-b}$

$$\frac{\pm 1 + d - c}{a - b} \in \mathbb{Z}$$

برای این منظور، باید تفاضل

$$\frac{1 + d - c}{a - b} - \frac{-1 + d - c}{a - d} = \frac{2}{a - b}$$

عددی درست، یعنی ۲ بر $(a - b)$ بخش پذیر باشد. اگر $a - b = \pm 1$

آن وقت، $\frac{\pm 1 + d - c}{a - b}$ ، عددی درست است. اگر $a - b = \pm 2$

کسر وقتی، و تنها وقتی، عددی درست است که $d - c$ ، عددی فرد باشد. به این ترتیب، معادله مفروض، در حالت های زیر، درست چهار جواب دارد: یا $|a - b| = 1$ و یا $|a - b| = 2$ و $c - d = 2k + 1$ که در آن

$k \in \mathbb{Z}$.

۲۶. فرض می کنیم $y \in \mathbb{Z}$ ، x در معادله صدق کنند، در این صورت

$$\begin{aligned} y^2 &= [x(x+8)][(x+1)(x+7)] = \\ &= (x^2 + 8x)(x^2 + 8x + 7) = z^2 + 7z \end{aligned}$$

$(z = x^2 + 8x)$. اگر $z > p$ ، آن وقت

$$(z+3)^2 = z^2 + 6z + 9 < z^2 + 7z = y^2 < z^2 + 8z + 16 = (z+4)^2$$

یعنی z ، باید بین دو عدد مجذور کامل متوالی واقع شود که ممکن نیست. بنابراین

$$x^2 + 8x = z \leq 9 \Rightarrow -9 \leq x \leq 1$$

با انتخاب متوالی مقدارهای

$$x = -9, -8, \dots, 1$$

معلوم می شود که، عدد $(x+1)(x+7)(x+8)$ ، تنها وقتی مجذور یک

عدد درست می شود که x برابر 9 ، 8 ، 4 ، 1 ، 0 یا 1 باشد. به این ترتیب، همه جواب های درست معادله، چنین اند:

$$(-9, 12); (-9, -12); (-8, 0); (-7, 0); (-4, 12);$$

$$(-4, -12); (-1, 0); (0, 0); (1, 12); (1, -12)$$

۰۲۷. فرض می کنیم $y \in \mathbb{Z}$ و x در معادله صدق کند. $x > 0$ می گیریم.

در این صورت داریم:

$$(x^3 + 1)^2 = x^6 + 2x^3 + 1 < x^6 + 3x^3 + 1 =$$

$$= y^4 < x^6 + 4x^3 + 4 = (x^3 + 2)^2$$

از این جا معلوم می شود که y^2 نمی تواند عددی درست باشد، زیرا

$$x^3 + 1 < y^2 < x^3 + 2$$

به ازای $x \leq -2$ هم، به همین نتیجه می رسیم. در واقع، در این حالت

داریم: $0 < x^3 + 3$ ، یعنی

$$(x^3 + 2)^2 = x^6 + 4x^3 + 4 < x^6 + 3x^3 + 1 =$$

$$= y^4 < x^6 + 2x^3 + 1 = (x^3 + 1)^2$$

که از این جا، به دست می آید:

$$-(x^3 + 2) = |x^3 + 2| < y^2 < |x^3 + 1| = -(x^3 + 1)$$

که برای هیچ مقدار درستی از y برقرار نیست.

به ازای $x = -1$ ، معادله مفروض، به صورت $y^4 = -1$ در می آید

که ممکن نیست. سرانجام، به ازای $x = 0$ به دست می آید: $y^4 = 1$. به این

ترتیب، جواب چنین است: $x = 0$ ، $y = \pm 1$.

۰۲۸. فرض می کنیم $y \in \mathbb{Z}$ و x ، در معادله صدق کند؛ در این صورت

$$x^2 + 2xy + y^2 = x^2 y^2 + xy \Rightarrow (x+y)^2 = xy(xy+1)$$

با شرط $x, y > 0$ داریم:

$$xy+1 > \sqrt{xy(xy+1)} > xy$$

$$|x+y| = \sqrt{xy(xy+1)}$$

بین دو عدد درست متوالی xy و $xy+1$ قرار می‌گیرد که، در نتیجه، نمی‌تواند عدد درستی باشد. به همین ترتیب، با شرط $xy < -1$ به دست می‌آید:

$$-xy - 1 < \sqrt{xy(xy+1)} < -xy$$

یعنی بازهم، عدد $|x+y|$ نمی‌تواند عددی درست باشد. به این ترتیب، یا $xy = 0$ و یا $xy = -1$. در هر دو حالت، به برابری $x+y = 0$ می‌رسیم، بنابراین $x = y = 0$ یا $x = -y = \pm 1$. معادله، سه جواب دارد:

$$(0, 0); (1, -1); (-1, 1)$$

۲۹. فرض می‌کنیم $y \in \mathbb{Z}$ در معادله صدق کند. $x \geq 0$ می‌گیریم،

در این صورت

$$y^2 = 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16 = 8(x^3 + 3x^2 + 4x + 2)$$

بنابراین $(z \in \mathbb{Z}) y = 2z$ و

$$z^3 = x^3 + 3x^2 + 4x + 2$$

توجه می‌کنیم که

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 < z^3 < x^3 + 6x^2 +$$

$$+ 12x + 8 = (x+2)^3$$

یعنی $x+1 < z < x+2$ ، که ممکن نیست. اکنون $x \leq -2$ ، می‌گیریم، در این صورت، زوج عددهای $x_1 = -x-2 \geq 0$ و $y_1 = -y$ هم، در معادله اصلی صدق می‌کنند، زیرا

$$(x_1+2)^4 - (x_1)^4 = x^4 - (x+2)^4 = -y^4 = (y_1)^4$$

ولی، همان طور که در بالا دیدیم، فرض $x_1 \geq 0$ ، به تناقض می‌انجامد.

بنابراین، باید داشته باشیم: $0 < x < 2$ ، که از آنجا، تنها یک جواب به دست می آید، $x = -1$ ، $y = 0$.

۳۰. یادآوری می کنیم، اگر n عددی زوج باشد، $n = 2k$ ، آن وقت

$$n^4 = 16k^4 \equiv 0 \pmod{16}$$

و اگر n عددی فرد باشد، آن وقت عدد

$$n^4 - 1 = (n-1)(n+1)(n^2+1)$$

بر ۱۶ بخش پذیر است (زیرا، عددهای $n-1$ ، $n+1$ و n^2+1 زوج اند و از بین دو عدد $n-1$ و $n+1$ ، یکی بر ۴ بخش پذیر است)، یعنی

$$n^4 \equiv 1 \pmod{16}$$

به این ترتیب، باقی مانده تقسیم سمت چپ معادله

$$x_{14}^4 + x_{13}^4 + \dots + x_{11}^4$$

بستگی به تعداد عددهای زوج، در گروه عددهای x_1, \dots, x_{14} دارد و، به هر حال، این باقی مانده از ۱۴ تجاوز نمی کند. از طرف دیگر، داریم:

$$1599 = 1600 - 1 \equiv 15 \pmod{16}$$

یعنی، برابری سمت چپ و سمت راست معادله، به ازای هیچ مقدار درستی از مجهول ها، نمی تواند برقرار باشد.

۳۱. فرض کنید، دست کم، یکی از جواب های ممکن

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

عددی گویا باشد. در این صورت $\sqrt{b^2 - 4ac}$ عددی گویا و، بنابراین (قضیه ۶۱ را ببینید). عدد $b^2 - 4ac$ مجذور عددی مثل $d \in \mathbb{Z}$ است. چون a ، b و c ، عددهایی فرد هستند، d هم عددی فرد می شود و به جز آن

$$ac \equiv 1 \pmod{2}, \quad -4ac \equiv 4 \pmod{8},$$

$$b^2 \equiv 1 \pmod{8}, \quad d^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

زیرا $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n+1) + 1$ به این ترتیب داریم:

$$b^2 - 4ac \equiv 5 \pmod{8}$$

یعنی، برای $d^2 = b^2 - 4ac$ ممکن نیست.

۰۳۲. فرض می‌کنیم $x, y \in \mathbb{Q}$ در معادله صدق کنند. در این صورت، این برابری‌ها برقرار است:

$$2\sqrt{3} - 3 = x\sqrt{3} + y\sqrt{3} - 2\sqrt{3xy}$$

$$\sqrt{3}(x+y-2) = 2\sqrt{3xy} - 3$$

از آن جا که

$$3(x+y-2)^2 = 9 + 12xy - 12\sqrt{3xy}$$

بنابراین، $\sqrt{3xy}$ ، عددی است گویا، یعنی باید داشته باشیم:

$$x+y-2=0$$

$$2\sqrt{3xy} - 3 = 0$$

(در غیر این صورت، باید عدد $\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3xy} - 3}{x+y-2}$ ، عددی گویا باشد.)

به این ترتیب، x و y در معادله‌های $x+y=2$ و $xy = \frac{3}{4}$ صدق می‌کنند،

یعنی ریشه‌های این معادله‌اند:

$$t^2 - 2t + \frac{3}{4} = 0$$

چون $x > y$ ، بنابراین معادله مفروض، تنها یک جواب دارد: $x = \frac{3}{4}$ ،

$y = \frac{1}{4}$ که در واقع هم، در معادله صدق می‌کند.

۳۳. توجه کنیم که این معادله، جواب دارد؛ به عنوان نمونه

$$x = y = z = 3 \times 1983$$

اکنون ثابت می کنیم، تعداد محدودی از گروه عددهای $z \in \mathbb{N}$ ، y ، x وجود دارد که در معادله اصلی و نابرابری های $x \leq y \leq z$ صدق می کنند. در واقع، برای هر یک از این گروه ها، باید داشته باشیم:

$$0 < \frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} \quad \frac{1}{x} < \frac{1}{1983} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{x}$$

که از آن جا به دست می آید. $1983 < x \leq 3 \times 1983$. بنا بر این، مقدار مجهول x ، نمی تواند بیش از 2×1983 عدد قبول کند. برای هر مقدار x به دست می آید:

$$\frac{1}{1983} - \frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{2}{y}$$

از آن جا $2^2 \times 1983^2 \leq 2 \times \frac{1983x}{x-1983} \leq y \leq 2 \times \frac{1983x}{x-1983}$ ، یعنی y نمی تواند بیش از $2^2 \times 1983^2$ مقدار قبول کند. بالاخره، اگر مقدارهای x و y معلوم باشند، مقدار z به طور یک ارزشی از معادله به دست می آید. بنا بر این، بیش از $2^3 \times 1983^3$ جواب، با شرط $x \leq y \leq z$ ، برای معادله وجود ندارد. از آن جا که، با تبدیل مجهول ها، می توان همه بقیه جواب ها را پیدا کرد، تعداد جواب های \bullet دله، از $6 \times 2^3 \times 1983^3$ تجاوز نمی کند.

۳۴. فرض می کنیم. عددهای $a, b \in \mathbb{Z}$ ، در نابرابری $5a \geq 7b \geq 0$

صدق کنند. $u = \left[\frac{c}{5} \right]$ می گیریم؛ در این صورت، مقدار $v = b - 5u$ ، تنها

یکی از مقدارهای زیر را می تواند قبول کند:

$$\{0, 1, 2, 3, 4\}$$

با استفاده از رابطه

$$7b = 7(\Delta u + v) = 3\Delta u + 7v$$

به این رابطه می‌رسیم:

$$a - \gamma u \geq \frac{\gamma b}{\delta} - \gamma u = \frac{\gamma v}{\delta}$$

در حالت $v = 0$ ، فرض می‌کنیم:

$$y = z = 0, \quad x = a - \gamma u$$

در این صورت $x \geq \frac{\gamma v}{\delta} = 0$ در حالت $v = 1$ فرض می‌کنیم:

$$y = 1, \quad z = 0, \quad x = a - \gamma v - 2$$

در این صورت $-1 < \frac{\gamma}{\delta} - 2 > x \geq 0$ ، یعنی $x \geq 0$ (زیرا $x \in \mathbb{Z}$). در حالت $v = 2$ فرض می‌کنیم:

$$y = 0, \quad z = 1, \quad x = a - \gamma u - 3$$

در این صورت $-1 < \frac{14}{\delta} - 3 > x \geq 0$ ، یعنی $x \geq 0$ در حالت $v = 3$ فرض می‌کنیم:

$$y = z = 1, \quad x = a - \gamma u - 5$$

در این صورت $-1 < \frac{21}{\delta} - 5 > x \geq 0$ ، یعنی $x \geq 0$ سرانجام، در حالت $v = 4$ فرض می‌کنیم:

$$y = 0, \quad z = 2, \quad x = a - \gamma u - 6$$

در این صورت $-1 < \frac{28}{\delta} - 6 > x \geq 0$ ، یعنی $x \geq 0$.

به این ترتیب، در هر یک از حالت‌ها، عددهای

$$x, y, z, u \in \mathbb{Z}^+$$

در برابری‌های

$$x = a - 7u - 3z - 2y, \quad \Delta u = b - v = b - 2z - y$$

و، بنا بر این، در دستگاه اصلی، صدق می کنند.

۳۵. فرض کنید، برای مقادارهایی از

$$p, q \in \{1, 2, \dots, 100\}$$

عدد $x \in \mathbb{Q}$ در این معادله صدق کند:

$$x^5 + px + q = 0$$

چون ضریب های چندجمله ای سمت چپ برابری، عددهایی درست اند، و چون ضریب جمله بزرگتر برابر واحد است، بنا بر این، بنا بر قضیه ۶۰، هر ریشه گویای این معادله، باید عددی درست باشد. ثابت می کنیم $0 < x < 3$. در واقع، برای $x \geq 0$ داریم:

$$x^5 + px + q \geq q \geq 1 > 0$$

و برای $x \leq -3$

$$x^5 + px + q \leq -3^5 - 3p + q \leq -3^5 - 3 + 100 < 0$$

به این ترتیب، تنها دو حالت ممکن است: $x = -1$ و $x = -2$.

اگر $x = -1$ را در معادله قرار دهیم، برای ضریب ها، به برابری $q = p + 1$ می رسیم که، درست، برای ۹۹ زوج از عددهای p و q (با توجه به محدودیت آن ها) برقرار است. به همین ترتیب، برای $x = -2$ ، به شرط $q = 2p + 32$ می رسیم که برای ۳۴ زوج از عددهای p و q برقرار است. از آن جا که شرط های $q = p + 1$ و $q = 2p + 32$ نمی توانند با هم برقرار باشند (زیرا $p > 0$)، همه زوج ها متمایزند و تعداد آن ها، برابر $99 + 34$ ، یعنی ۱۳۳ می شود.

۳۶. گروه عددهای $x = y = z = 0$ ، جوابی از معادله است. فرض

می کنیم، معادله جواب های دیگری هم داشته باشد. از بین آن ها، جواب هایی را در نظر می گیریم که، برای آن ها، مقدار

$$\alpha = |x| + |y| + |z|$$

حداقل مقدار (طبیعی) ممکن باشد. توجه می‌کنیم که، برای هر عدد $n \in \mathbb{Z}$ ،
برای $(k \in \mathbb{Z}) n = 2k$ داریم:

$$n^2 = 4k^2 \equiv 0 \pmod{4}$$

و برای $n = 2k + 1$:

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \equiv 1 \pmod{4}$$

بنابراین، باقی‌مانده تقسیم $x^2 + y^2$ بر 4 (که برابر 0، 1 یا 2 است)،
وقتی که بر باقی‌مانده تقسیم $3z^2$ بر 4 (که برابر 0 یا 3 است) منطبق می‌شود
که، هر سه عدد x و y و z ، زوج باشند، یعنی

$$x = 2x_1, \quad y = 2y_1, \quad z = 2z_1 \quad (x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{Z})$$

در ضمن از $x^2 + y^2 = 3z^2$ نتیجه می‌شود: $x_1^2 + y_1^2 = 3z_1^2$. اکنون اگر
فرض کنیم:

$$\alpha_1 = |x_1| + |y_1| + |z_1|$$

به شرط $0 < \alpha_1 = \frac{\alpha}{4} < \alpha$ می‌رسیم که با فرض حداقل بودن مقدار α متناقض

است. به این ترتیب، معادله مفروض، تنها یک جواب دارد:

$$x = y = z = 0$$

۳۷. یادآوری می‌کنیم که، اگر گروه عددهای x, y, z ، جوابی از
معادله باشد، هر گروه از عددهای tx, ty, tz ($t \in \mathbb{Q}$) هم، جواب معادله
خواهد بود. بنابراین، اگر معادله مفروض به جز $x = y = z = 0$ ، جواب
گویای دیگری مثل

$$x = \frac{m}{n}, \quad y = \frac{l}{k}, \quad z = \frac{p}{q}$$

داشته باشد ($n, k, q \in \mathbb{N}$ و $m, l, p \in \mathbb{Z}$)، گروه عددهای درست ($t_1 = mkq$)
را $x_1 = t_1 x, y_1 = t_1 y, z_1 = t_1 z$ هم در معادله صدق خواهند کرد. اگر d را
بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک عددهای x_1, y_1, z_1 فرض کنیم، آن وقت، گروه

عددهای درست $(t_2 = \frac{1}{d})$ $x_2 = t_2 x_1$, $y_2 = t_2 y_1$, $z_2 = t_2 z_1$ هم جوابی از معادله است و، در ضمن، بزرگترین مقسوم علیه مشترك این عددها، برابر

$$x_2^2 = 3(-y_2^2 - 3z_2^2 + 3x_2 y_2 z_2)$$

بر ۳ بخش پذیر است، بنا بر این $3x_3 = (x_3 \in \mathbb{Z})x_2$ سپس

$$y_2^2 + 3z_2^2 + 9x_3^2 - 9y_2 z_2 x_3 = 0$$

به این معناست که گروه عددهای $x = y_2$, $y = z_2$, $z = x_3$ هم، در معادله صدق می کند. بنا بر این $3y_3 = (y_3 \in \mathbb{Z})y_2$ و گروه عددهای $x = z_2$, $y = x_3$, $z = y_3$ در معادله صدق می کند. از آن جا $3z_3 = (z_3 \in \mathbb{Z})z_2$. به این ترتیب، هر يك از عددهای x_2 , y_2 , z_2 بر ۳ بخش پذیرند که با نوع انتخاب این عددها، متناقض است. حکم مسأله، ثابت شد.

۰۳۸ $x = y = z = 0$ ، جوابی از معادله است. فرض می کنیم. معادله،

جواب دیگر (z, y, x) را هم داشته باشد. در این صورت، باید $x^2 y^2$ بر ۴ بخش پذیر باشد، زیرا در غیر این صورت، x و y عددهای فردی می شوند و داریم:

$$x^2 \equiv 1 \pmod{4}, y^2 \equiv 1 \pmod{4}, x^2 y^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

در حالی که، اگر z زوج باشد

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2 \pmod{4}$$

و اگر z فرد باشد

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3 \pmod{4}$$

یعنی، برابری $x^2 + y^2 + z^2 = x^2 y^2$ ناممکن می شود.

به این ترتیب، x و y عددهایی زوج اند و در نتیجه با توجه به معادله

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 y^2$$

باید z هم عددی زوج باشد؛ یعنی $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$ ، در ضمن

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1^2 y_1^2$$

سمت راست این معادله، بر ۴ بخش پذیر است؛ بنا بر این، با استدلالی شبیه قبل به دست می آید: $x_1 = 2x_2, y_1 = 2y_2, z_1 = 2z_2$ و

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 16x_2 y_2 z_2$$

اگر این روند استدلال را ادامه دهیم، به این گروه عددی درست می رسیم:

$$x_k = \frac{x}{4^k}, y_k = \frac{y}{4^k}, z_k = \frac{z}{4^k} \quad (k \in \mathbb{N})$$

ولی، هیچ عدد درستی، به جز صفر، نمی تواند بر هر توان دلخواهی از ۲ بخش پذیر باشد، بنا بر این، هر يك از عددهای x, y و z برابر صفر است؛ و این، تنها جواب معادله مفروض است.

۰۳۹. هر زوج عددهای $x, y \in \mathbb{N}$ ، که در معادله $n^2 = y^2 - x^2$ صدق

کند، متناظر است با زوج عددهای $p = y + x$ و $q = y - x$ ، که حاصل ضرب آنها برابر n^2 باشد. بنا بر این، تعداد a_n این زوجها، نمی تواند از تعداد مقسوم علیه های طبیعی عدد n^2 تجاوز کند. به این ترتیب، برای هر عدد اول n ، داریم $a_n \leq 3$ ، زیرا وقتی n عدد اول باشد، n^2 تنها دارای ۳ مقسوم علیه طبیعی است. بنا بر این، به پرسش ب) باید پاسخ منفی داد.

سپس، اگر هر زوج از عددهای p و q ، از نظر زوج و فرد بودن، یکی باشند و در برابری $pq = n^2$ صدق کنند، متناظر با این دو عددند:

$$y = \frac{p+q}{2}, x = \frac{p-q}{2}$$

در ضمن، نابرابری $x > n$ ، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$2x = p - q = \frac{n^2}{q} - q > 2n \Rightarrow q < \frac{n}{1 + \sqrt{2}}$$

برای همه مقادیر $n = 3^l$ ($l \in \mathbb{N}$)، عدد q به صورت 3^i ($i \in \mathbb{Z}^+$) و عدد

$p = 3^{2l-i}$ ، هر دو فردند. در ضمن نابرابری $3^i < \frac{3^l}{1 + \sqrt{2}}$ ، برای مقادیرهای

$l-1, \dots, 1$ و $i=0$ برقرار است، بنا بر این، $a_n = l$ ، که از آنجا، درستی

حکم الف) ثابت می شود.

۴۰. ثابت می کنیم، اگر برای $x \in \mathbb{Z}$ ، عدد

$$f(x) = x^4 + 4^x$$

درست باشد، آن وقت، این عدد، یا از ۵ تجاوز نمی کند و یا عددی مرکب است. در واقع، به ازای $x < 0$ ، عدد $f(x)$ درست نیست. به ازای $x = 0$ و $x = 1$ داریم:

$$f(0) = 0^4 + 4^0 < 5, \quad f(1) = 1^4 + 4^1 = 5$$

برای $x = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$)، عدد

$$f(x) = 2^4 k^4 + 4^{2k} = 2^4 [k^4 + 4^{2(k-1)}]$$

مرکب است. سرانجام، برای $x = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$)، عدد

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 + 4 \times 4^{2k} = [x^4 + 4x^2(2^k)^2 + 4(2^k)^4] - \\ &\quad - 4x^2(2^k)^2 = [x^2 + 2(2^k)^2]^2 - (2x2^k)^2 = \\ &= [x^2 + 2x2^k + 2(2^k)^2][x^2 - 2x2^k + 2(2^k)^2] = \\ &= [(x + 2^k)^2 + 4^{2k}][(x - 2^k)^2 + 4^{2k}] \end{aligned}$$

باز هم عددی مرکب است، زیرا هر یک از عاملها از واحد بزرگترند ($4^{2k} > 2^k$ به ازای $k > 0$). به این ترتیب، اگر $p > 5$ عددی اول باشد، معادله مفروض به ازای هیچ مقداری از $x \in \mathbb{Z}$ برقرار نیست.

۴۱. فرض می کنیم، گروه عددهای $x, y, z \in \mathbb{N}$ در معادله مفروض صدق

کند، داریم:

$$[(2x)^x + 1][(2x)^x - 1] = y^{z+1}$$

در ضمن، عددهای

$$k = (2x)^x + 1, \quad m = (2x)^x - 1$$

نسبت به هم اول اند، زیرا عددهایی فرد هستند و

$$(k, m) = (k, k-m) = (k, 2) = 1$$

بنابراین، با توجه به قضیه ۲۲، عددهای $p, q \in \mathbb{N}$ وجود دارند که، برای آنها، داشته باشیم:

$$k = p^{2+1}, m = q^{2+1}$$

که از آنجا به دست می آید:

$$2 = p^{2+1} - q^{2+1} = (p-q)(p^2 + p^{2-1}q + \dots + q^2) \quad (p \geq q+1)$$

به این ترتیب

$$2 \geq p^2 + p^{2-1}q + \dots + q^2 \geq p^2 + q^2 \geq p+q > 2q \geq 2$$

و تناقض حاصل، حکم مسأله را ثابت می کند.

۰۴۲. با روش استقرای ریاضی، روی n ، قضیهٔ نیرومندتری را ثابت

می کنیم: برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ ، عددهای

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{N}$$

و عدد فرد $y_n > 1$ وجود دارند، به نحوی که داشته باشیم:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = y_n^2$$

درستی حکم به ازای $n=1$ روشن است (کافی است فرض کنیم

$x_1 = y_1 = 3$). فرض کنید، حکم برای مقداری از $n > 1$ درست باشد.

گروه عددهای x_1, x_2, \dots, x_n را در نظر می گیریم و فرض می کنیم:

$$x_{n+1} = \frac{y_n^2 - 1}{2}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n^2 + 1}{2}$$

چون $y_n > 1$ عددی فرد است، پس x_{n+1} و y_{n+1} عددهایی طبیعی اند و،

در ضمن $y_{n+1} > 1$. در این صورت، برای گروه عددهای

$$x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, y_{n+1}$$

داریم:

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = y_n^2 + x_{n+1}^2 = y_n^2 + \frac{y_n^2 - 2y_n^2 + 1}{4} + (y_{n+1})^2$$

$$y_{n+1} = \frac{y_n^2 + 1}{2} \equiv 1 \pmod{2}$$

زیرا $y_n^2 \equiv 1 \pmod{4}$ ، یعنی حکم، برای $n+1$ هم درست است.
۰۴۳ اگر $n=1$ ، آن وقت به ازای هر مقدار $z \in \mathbb{N}$ ، دو عدد

$$x_1 = z^{2^1}, \quad x_2 = z^{2^2}$$

در معادله صدق می کنند. اکنون $n > 1$ می گیریم. بنا بر قضیه چینی درباره باقی مانده‌ها (قضیه ۲۳)، بی نهایت عدد طبیعی z وجود دارد که با دو شرط زیر سازگار باشند:

$$z \equiv 0 \pmod{a_1 \dots a_n}, \quad z \equiv -1 \pmod{a_{n+1}}$$

هریک از این مقادیرهای z متناظر است با عددهای طبیعی

$$y_1 = \frac{z}{a_1}, \dots, y_n = \frac{z}{a_n}, y_{n+1} = \frac{z+1}{a_{n+1}}$$

که به نوبه خود، به وسیله آنها، گروه عددهای

$$x_i = n^{y_i} \in \mathbb{N}, \quad i = 1, 2, \dots, n, n+1$$

ساخته می شود و، هر یک از این گروه عددها، در معادله صدق می کند، زیرا

$$\begin{aligned} x_1^{a_1} + \dots + x_n^{a_n} &= (n^{y_1})^{a_1} + \dots + (n^{y_n})^{a_n} = n^z + \dots + n^z = \\ &= n \cdot n^z = n^{z+1} = (n^{y_{n+1}})^{a_{n+1}} = x_{n+1}^{a_{n+1}} \end{aligned}$$

چون، به ازای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ ، مقادیرهای برابر z متناظر با گروه‌های مختلف مجهول‌هاست، بنابراین، معادله مفروض، دارای بی نهایت جواب در مجموعه عددهای طبیعی است.

۰۴۴ با توجه به قضیه چینی درباره باقی مانده‌ها (قضیه ۲۳)، عدد

درست $n \in [0, ab)$ وجود دارد که، برای آن، داریم:

$$n \equiv 0 \pmod{b}, \quad n \equiv c \pmod{a}$$

بنابراین $n = by = c - ax$ که، در آن $y \in \mathbb{Z}$ ، x چون $0 \leq by < ab$ در نتیجه

$$0 \leq y \leq a-1 \quad \text{و} \quad n \leq (a-1)b$$

سرانجام، از نابرابری‌های

$$c - ax \leq (a-1)b, \quad c \geq (a-1)(b-1)$$

به دست می‌آید:

$$ax \geq (a-1)(b-1) - (a-1)b = 1 - a > -a$$

یعنی $x > -1$. به این ترتیب، زوج عددهای $y \in \mathbb{Z}^+$ ، x ، جواب معادله مفروض است.

۴۵. $x_0, y_0 \in \mathbb{Q}$ را جوابی از معادله و عدد $k \in \mathbb{Q}$ را، سازگار با

شرط $ak^2 + b \neq 0$ می‌گیریم (این گونه مقادارهای k ، بی‌نهایت زیادند، زیرا $a^2 + b^2 > 0$ ، یعنی برابری $ak^2 + b = 0$ ، برای بیش از دو مقدار از بی‌نهایت مقدار k ، برقرار نیست). در این صورت، عددهای

$$x_k = \frac{(b - ak^2)x_0 - 2bky_0}{ak^2 + b}, \quad y_k = \frac{(b - ak^2)y_0 + 2akx_0}{ak^2 + b}$$

هم، در معادله صدق می‌کنند، زیرا

$$\begin{aligned} ax_k^2 + by_k^2 &= \frac{(b - ak^2)^2(ax_0^2 + by_0^2) + 4abk^2(ax_0^2 + by_0^2)}{(ak^2 + b)^2} = \\ &= ax_0^2 + by_0^2 = 1 \end{aligned}$$

یادآوری می‌کنیم، اگر دو عدد x_k و y_k را بتوان از دستورهایی که آوردیم، به دست آورد، انجام آن، برای بیش از دو مقدار k ، که در دستگاه

$$\begin{cases} a(x_k + x_0)k^2 + 2by_0k + b(x_k - x_0) = 0 \\ a(y_k + y_0)k^2 - 2ax_0k + b(y_k - y_0) = 0 \end{cases}$$

صدق می کنند، ممکن نیست (زیرا $ax_0^2 + by_0^2 = 1$ و بنا براین، دست کم در یکی از این برابری ها، ضریب k مخالف صفر است و، در نتیجه، در مورد این برابری، بیش از دو مقدار k ، نمی تواند صدق کند). به این ترتیب، معادله اصلی، بی نهایت جواب دارد. در واقع، اگر تعداد همه جواب های معادله، برابر n باشد، آن وقت، مقدارهای مختلف $k \in \mathbb{Q}$ که با شرط $ak^2 + b \neq 0$ سازگارند، بیشتر از $2n$ نمی شود که، البته، درست نیست. حکم ثابت شد.

یادداشت. راه حلی که برای مسأله آوردیم، مفهوم هندسی مشخصی دارد: در صفحه دستگاه محورهای مختصات قائم، نقطه های (x_0, y_0) و (x_k, y_k) ، عبارتند از نقطه های برخورد خط راست $x - x_0 = k(y - y_0)$ با منحنی $ax^2 + by^2 = 1$. گویا بودن مقدارهای x_k و y_k را می توان بدون محاسبه مقدارهای آنها ثابت کرد. در واقع، عددهای y_0 و y_k ، با شرط $ak^2 + b \neq 0$ ، ریشه های معادله درجه دوم (نسبت به y)

$$a[x_0 + k(y - y_0)]^2 + by^2 = 1$$

هستند که، ضریب های گویا دارد. بنا بر قضیه ویت، $y_0 + y_k$ ، عددی است گویا، یعنی

$$y_k \in \mathbb{Q} \text{ و } x_k = x_0 + k(y_k - y_0) \in \mathbb{Q}$$

۴۶. برای عددهای دلخواه k, m, a, b ، این برابری برقرار است:

$$(ak^2 + bm^2)^3 = a(ak^3 - 3bkm^2)^2 + b(3ak^2m - bm^3)^2$$

بنا بر این، اگر فرض کنیم:

$$x = ak^3 - 3bkm^2, \quad y = 3ak^2m - bm^3, \quad z = ak^2 + bm^2$$

آن وقت، برابری زیر برقرار خواهد بود:

$$ax^2 + by^2 = z^3$$

ثابت می کنیم، بی نهایت زوج عدد $m \in \mathbb{Z}$ ، k وجود دارد که متناظر با گروه های مختلف سه عدد $z \in \mathbb{Z}$ ، y و x هستند که، در ضمن، با شرط

$(x, y) = 1$ ، سازگار باشند. توجه می‌کنیم که، اگر همهٔ عددهای a, m, k ، دو به دو نسبت به هم اول باشند (عددهای a و b ، بنا بر فرض، نسبت به هم اول اند)، در ضمن، تنها یکی از آن‌ها زوج باشد و هیچ کدام از دو عدد k و m بر ۳ بخش پذیر نباشند، آن وقت، عددهای x و y ، نسبت به هم اول اند. در واقع، به‌ازای این شرط‌ها، داریم:

$$(k, y) = (k, 3ak^2m - bm^3) = (k, bm^3) = 1$$

$$(m, x) = (m, ak^3 - 3bkm^2) = (m, ak^3) = 1$$

در ضمن، دست کم یکی از عددهای a یا b ، و مثلاً b ، بر ۳ بخش پذیر نیست (حالتی که a بر ۳ بخش پذیر نباشد، به‌صورت مشابهی مورد بررسی قرار می‌گیرد؛ حالتی که هر دو عدد a و b بر ۳ بخش پذیر باشند، ممکن نیست، زیرا $((a, b) = 1)$).

به این ترتیب، داریم:

$$(x, y) = (k(ak^2 - 3bm^2), m(3ak^2 - bm^2)) =$$

$$= (ak^2 - 3bm^2, 3ak^2 - bm^2) \leq (3ak^2 - 9bm^2, 3ak^2 - bm^2) =$$

$$= (3bm^2, 3ak^2 - bm^2) = (bm^2, 3ak^2 - bm^2) = (bm^2, 3ak^2) = 1$$

زیرا، عدد $3ak^2 - bm^2$ فرد است و عدد bm^2 بر ۳ بخش پذیر نیست. هر دو عدد a و b را غیرصفر می‌گیریم. فرض می‌کنیم:

$$k = 3|ab| + 1$$

آن وقت، هر مقدار

$$m = (6|ab| + 1)^l \quad (l \in \mathbb{N})$$

متناظر است با گروهی از عددهای x, y, z که با شرط مسأله سازگار است (زیرا، برای عددهای a, m, k, b ، شرط‌های بالا صادق‌اند). در ضمن، همهٔ گروه‌های حاصل، باهم فرق دارند، زیرا همهٔ مقدارهای

$$z = ak^2 + bm^2$$

مختلف اند. سرانجام، فرض کنید یکی از عددهای a یا b ، و مثلاً b ، برابر صفر باشد (حالت $a=0$ هم، مشابه آن مورد بررسی قرار می‌گیرد). در این صورت، اگر فرض کنیم $x=z=a$ ، و برای y عددهای مختلفی، که نسبت به a اول باشند، در نظر بگیریم، آن وقت، این برابری‌ها برقرار است:

$$ax^2 + by^2 = a \cdot a^2 + 0 \cdot y^2 = a^3 = z^2$$

۴۷. فرض می‌کنیم، گروه سه عدد $z \in \mathbb{N}$ ، y ، x ، به‌ازای $n > 1$ و $x \leq n$ و $y \leq n$ ، در معادله صدق کند. بدون این که به کلی بودن مسأله، لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد $x \leq y$. در این صورت، با استفاده از بسط دو جمله‌ای خواهیم داشت:

$$(y+1)^n = y^n + ny^{n-1} + \dots + 1 > y^n + xy^{n-1} \geq \\ \geq y^n + x^n = z^n > y^n$$

بنابراین $y > z > y+1$ که به‌ازای هیچ مقداری از $z, y \in \mathbb{Z}$ برقرار نیست. ۴۸. فرض کنید، به‌ازای مقدارهایی از $n \in \mathbb{N}$ و x و $n > 2$ ، معادله مفروض، به برابری درستی منجر شود. $y = x+1 \geq 2$ می‌گیریم، در این صورت، داریم:

$$(y-1)^n + y^n = (y+1)^n$$

که از آن، به‌دست می‌آید:

$$0 = (y+1)^n - y^n - (y-1)^n \equiv 1 - (-1)^n \pmod{y}$$

بنابراین، n عددی زوج است، زیرا اگر $n > 2$ فرد باشد، به دست می‌آید، $0 \equiv 2 \pmod{y}$ و از آنجا

$$y = 2 \text{ و } 0 = 3^n - 1 - 2^n > 0$$

که ممکن نیست. سپس، بنا بر بسط دو جمله‌ای، وقتی که n عددی زوج باشد، داریم:

$$(y \pm 1)^n \equiv \frac{n(n-1)}{2} y^2 \pm ny + 1 \pmod{y^3},$$

$$0 = (y+1)^n - y^n - (y-1)^n \equiv 2ny \pmod{y^3}$$

بنابراین، $2n \equiv 0 \pmod{y^2}$ ؛ از آن جا $2n \geq y^2$ با تقسیم برابری اصلی (برای y) بر y^n ، به دست می آید:

$$\left(1 + \frac{1}{y}\right)^n = 1 + \left(1 - \frac{1}{y}\right)^n < 2$$

از طرف دیگر، با توجه به نابرابری برنولی (قضیه ۵) داریم:

$$\left(1 + \frac{1}{y}\right)^n > 1 + \frac{n}{y} = 1 + \frac{2n}{2y} \geq 1 + \frac{y^2}{2y} = 1 + \frac{y}{2} \geq 2$$

تناقض حاصل، به این معناست که، معادله اصلی، جواب ندارد.
۴۹. فرض می کنیم، عددهای مثبت $x, y \in \mathbb{Q}$ در معادله مفروض، صادق کنند. ثابت می کنیم، در این صورت، عدد مثبت

$$z = \frac{y}{x} \in \mathbb{Q}$$

عددی طبیعی است. از معادله به دست می آید:

$$x^{x+xz} = (x+xz)^{xz} \Rightarrow x^{1+z} = x^z(1+z)^z$$

که از آن جا، به دست می آید: $x = (1+z)^z$. قرار می گذاریم:

$$z = \frac{p}{q}, x = \frac{m}{n}$$

که در آن $n \in \mathbb{N}$ ، m, p, q و $(p, q) = (m, n) = 1$. به این رابطه می رسیم:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^q = \left(\frac{p+q}{q}\right)^p \Rightarrow m^q q^p = n^q (p+q)^p$$

چون $(m^q, n^q) = 1$ ، بنا بر این باید q^p بر n^q بخش پذیر باشد. از طرف دیگر

$$((p+q)^p, q^p) = (p+q, q)^q = (p, q)^p = 1$$

بنابراین، باید n^q بر q^p بخش پذیر باشد. در نتیجه $q^p = n^q$ که از آن معلوم می شود که اگر $q > 1$ ، آن وقت، در تجزیه عدد q^p به عددهای اول، باید هر يك از مقسوم علیه های اول توانی را داشته باشد که هم مضرب p و هم مضرب q ، یعنی مضربی از حاصل ضرب آنها، pq ، باشد (زیرا p و q ، نسبت به هم، اول اند). به همین ترتیب، در تجزیه عدد q به عامل های اول، هر يك از مقسوم علیه های اول، توانی دارد که مضربی از q است و این، ممکن نیست (زیرا، به ازای هر $q \in \mathbb{N}$ ، داریم: $q < 2^q$). در نتیجه، ثابت شد که $q = 1$. بنابراین، بدست می آید:

$$x = (1+z)^z, \quad y = z(1+z)^z \quad (z \in \mathbb{N})$$

آزمایش ثابت می کند که، همه زوج مقادیر $x, y \in \mathbb{N}$ ، در معادله اصلی صدق می کنند.

۵۰. اگر داشته باشیم:

$$n = m(4k - 1) \quad (m, k \in \mathbb{N})$$

آن وقت، این برابری برقرار است:

$$\frac{1}{km} + \frac{1}{km(4k-1)} = \frac{1}{m(4k-1)} = \frac{4}{n}$$

یعنی، جواب معادله، چنین است:

$$x = km, \quad y = km(4k - 1)$$

اکنون، فرض می کنیم عددهای

$$x = 2^q x_1, \quad y = 2^r y_1 \quad (q, r \in \mathbb{Z}^+)$$

(x_1 و y_1 ، عددهایی درست اند)، در معادله صدق کنند، در این صورت، اگر $q < r$ ، آن وقت عدد

$$n = \frac{4xy}{x+y} = \frac{2^{q+r+2} x_1 y_1}{2^q (x_1 + 2^{r-q} y_1)}$$

تنها وقتی فرد است که داشته باشیم: $q+r+2=q$ که ممکن نیست، به همین ترتیب، ثابت می شود که حالت $q>r$ هم ممکن نیست. به این ترتیب، $q=r$ و عدد

$$n = \frac{2^{q+2} x_1 y_1}{x_1 + y_1}$$

عددی فرد است. بنابراین، مجموع عددهای فرد x_1 و y_1 بر ۴ بخش پذیر است، یعنی این دو عدد، در تقسیم بر ۴، به باقی مانده های مختلف می رسند. توجه کنیم، اگر در تجزیه عددهای x و y به عامل های اول به صورت $(k \in \mathbb{N}) 4k-1$ دارای توان یکسان باشند (که می تواند صفر هم بشود)، آن وقت، باید داشته باشیم:

$$x_1 \equiv y_1 \pmod{4}$$

که درست نیست. بنا بر این، عدد اول $(k \in \mathbb{N}) p = 4k-1$ وجود دارد، به نحوی که برای آن داشته باشیم:

$$x_1 = p^u x_2, y_1 = q^v y_2 \quad (u, v \in \mathbb{Z}^+, u \neq v)$$

که در آن ها، x_2 و y_2 بر p بخش پذیر نیستند. $u < v$ می گیریم (بررسی حالت $u > v$ هم به طریق مشابهی انجام می گیرد). در این صورت $u+v > u$ و عدد

$$n = \frac{2^{q+2} p^{u+v} x_2 y_2}{p^u (x_2 + p^{v-u} y_2)}$$

بر p بخش پذیر است، یعنی به صورت زیر درمی آید:

$$n = mp = m(4k-1)$$

۵۱. مجموعه عددهای مورد نظر مسأله را با M نشان می دهیم و فرض می کنیم، بتوان آن را به صورت اجتماع مجموعه ای متناهی از تصاعدهای حسابی نشان داد. ثابت می کنیم، حتی یکی از این تصاعدها، نامتناهی نیست. فرض کنید، به ازای مقدارهایی از $d \in \mathbb{N}$ ، مجموعه M شامل همه عددهای

به صورت $a + jd$ باشد ($j \in \mathbb{Z}^+$). توجه می‌کنیم که $3d - 1$ عضو M نیست، زیرا به ازای $n = 3d - 1$ و $x = d$ و $y = d(3d - 1)$ داریم:

$$\frac{3}{n} = \frac{3}{3d-1} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d(3d-1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

سپس، اگر $n \notin M$ ، آن وقت، برای هر مقدار $m \in \mathbb{N}$ داریم: $mn \notin M$ ، زیرا از برابری

$$\frac{3}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

نتیجه می‌شود:

$$\frac{3}{mn} = \frac{1}{mx} + \frac{1}{my}$$

m را طوری انتخاب می‌کنیم که در شرط‌های

$$m \equiv -a \pmod{d}, \quad m \geq \frac{1}{3d-1}$$

صدق کند، در این صورت عدد

$$m(3d-1) \equiv a \pmod{d}$$

از يك طرف، به صورت $a + jd$ ($j \in \mathbb{Z}^+$) است و، از طرف ديگر، در مجموعه M نیست. تناقض اخير نشان می‌دهد، مجموعه M ، اجتماع مجموعه‌ای متناهی از تصاعد‌های حسابی متناهی است. یعنی M ، مجموعه‌ای متناهی است. ثابت می‌کنیم که، این هتم، ممکن نیست. برای این منظور، توجه می‌کنیم که، هر عدد به صورت $n = 7^k$ ($k \in \mathbb{Z}^+$)، به مجموعه M تعلق دارد. فرض می‌کنیم، این طور نباشد، یعنی برابری

$$\frac{3}{7^k} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

برای بعضی از مقدارهای $x, y \in \mathbb{N}$ و $k \in \mathbb{Z}^+$ برقرار باشد. $q = (x, y)$ می‌گیریم، در این صورت داریم: $x = qx_1$ ، $y = qy_1$ ، $(x_1, y_1) = 1$

$$\frac{3}{7^k} = \frac{x+y}{xy} = \frac{x_1+y_1}{qx_1y_1}$$

یعنی $7^k(x_1+y_1) = 3qx_1y_1$

توجه کنیم که $(x_1+y_1, x_1y_1) = 1$ ، زیرا اگر x_1y_1 بر عدد اول p بخش پذیر باشد، باید یکی از عددهای x_1 یا y_1 بر p بخش پذیر باشد و دیگری بر آن بخش پذیر نباشد، یعنی مجموع x_1+y_1 هم بر p بخش پذیر نیست. ولسی عدد $7^k(x_1+y_1)$ باید بر x_1y_1 بخش پذیر باشد، بنابراین باید داشته باشیم:

$$x_1 = 7^u \text{ و } y_1 = 7^v \quad (u, v \in \mathbb{Z}^+)$$

$$x_1 = (2 \times 3 + 1)^u \equiv 1 \pmod{3}, y_1 = (2 \times 3 + 1)^v \equiv 1 \pmod{3},$$

$$x_1 + y_1 \equiv 2 \pmod{3}$$

یعنی $7^k(x_1+y_1)$ بر ۳ بخش پذیر نیست که با برابری

$$7^k(x_1+y_1) = 3qx_1y_1$$

متناقض است، و به این ترتیب، اثبات را کامل می کند.

۵۲. فرض می کنیم، برخلاف ادعای مسأله، عددهای $x, y \in \mathbb{Z}$ در

معادله صدق کنند. در این صورت، x باید عددی زوج باشد، زیرا در غیر-

این صورت

$$x^2 = (2k+1)^2 = 4k(k+1) + 1 \equiv 1 \pmod{4}$$

و از آنجا

$$y^2 = x^2 + 5 \equiv 2 \pmod{4}$$

که ممکن نیست (زیرا، با فرد بودن x ، مقدار y زوج و بر ۴ بخش پذیر

است). از زوج بودن عدد x ، نتیجه می شود:

$$y^2 = x^2 + 5 \equiv 1 \pmod{4}$$

$$y \equiv 1 \pmod{4}$$

و بنابراین

فرض می‌کنیم

$$x = 2n, y = 4m + 1 \quad (n, m \in \mathbb{Z})$$

در این صورت، از معادله به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} 4(n^2 + 1) = x^2 + 4 &= (y^2 - 1) = (y - 1)(y^2 + y + 1) = \\ &= 4m(16m^2 + 12m + 3) \end{aligned}$$

و از آنجا

$$n^2 + 1 = md \quad \text{و} \quad d = 16m^2 + 12m + 3 \equiv 3 \pmod{4}$$

توجه کنیم که، دست کم یکی از مقسوم‌علیه‌های اول عدد d ، باید به صورت $p = 4l + 3$ ($l \in \mathbb{Z}^+$) باشد. در واقع، چون d عددی فرد است، همه مقسوم‌علیه‌های اول آن، عددهایی فردند. ولی اگر همه آن‌ها، در تقسیم بر ۴، به باقی‌مانده واحد برسند، آن وقت، عدد d هم (که برابر حاصل ضرب توان‌هایی از این مقسوم‌علیه‌هاست)، در تقسیم بر ۴ به باقی‌مانده واحد می‌رسد. به این ترتیب، داریم:

$$n^2 + 1 = md \equiv 0 \pmod{p}$$

و بنا بر این

$$n^2 \equiv -1 \pmod{p} \quad \text{و} \quad n^{p-1} = n^{4l+2} = (n^2)^{2l+1} \equiv -1 \pmod{p}$$

که با قضیه کوچک فرما (قضیه ۲۵) متناقض است، زیرا بنا بر این قضیه

$$n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

حکم مسئله به طور کامل ثابت شد.

۳.۳. فاکتوریل‌ها و ضرب‌های دو جمله‌ای

۵۳. ثابت می‌کنیم، برای هر مقدار طبیعی $n > 2$ ، داریم:

$$(n!)^2 > n^n$$

درواقع، داریم:

$$n! \cdot n! = (1 \times 2 \times \dots \times n)[n(n-1)\dots 1] = (1 \times n)[2 \times (n-1)] \dots (n \times 1) > n^n$$

زیرا به ازای $k = 2, \dots, n-1$ داریم

$$1 \times n = n \times 1 = n, \quad k(n-k+1) = (n-k)(k-1) + n > n$$

اگر در نابرابری ثابت شده، فرض کنیم $n = 17091982$ ، به دست می آید:

$$(17091982!)^2 > 17091982^{17091982}$$

۵۴. چون، برای هر مقدار $k = 1, 2, \dots, n-1$ داریم:

$$C_n^{k-1} = C_n^k \cdot \frac{k}{n-k+1}, \quad C_n^{k+1} = C_n^k \cdot \frac{n-k}{k+1} \quad (C_n^k \neq 0)$$

بنابراین، برابری

$$2C_n^k = C_n^{k-1} + C_n^{k+1}$$

با برابری زیر هم ارز است:

$$2 = \frac{k}{n-k+1} + \frac{n-k}{k+1} \Rightarrow (n-2k)^2 = n+2 \quad (*)$$

بنابراین، مقدار مجهول $n \in \mathbb{N}$ باید به صورت $n = m^2 - 2$ باشد که، در آن، $m \geq 2$ عددی طبیعی است. ولی، برای $m = 2$ ، برابری (*) نمی تواند به ازای تنها مقدار ممکن $k = 1$ برقرار باشد. برای $m > 2$ ، این برابری

مثلاً به ازای $k = \frac{m(m-1)}{2} - 1$ برقرار است (این مقدار k ، عددی

درست است و در نابرابری $0 < k < n$ صدق می کند، زیرا یکی از عددهای m یا $m-1$ زوج است و، در ضمن، برای $m > 2$ ، نابرابری

$$0 < \frac{m(m-1)}{2} - 1 < m^2 - 2$$

برقرار است). به این ترتیب، مقدارهای مجهول n ، عبارتند از همه عددهای

به صورت $n = m^2 - 2$ به ازای $m = 3, 4, \dots$.

۰۵۵ $u \in \mathbb{N}$ ، x, y, z را عددهایی می‌گیریم که در معادله صدق کنند و

از بین x و y و z ، بزرگترین عدد را v می‌نامیم. در این صورت
 $1 \leq v < u$ و

$$uv! \leq u(u-1)! = u! = x! + y! + z! \leq 3v!$$

یعنی $uv! \leq 3v!$ و، بنابراین $u \leq 3$. برای $u = 3$ داریم:

$$3! = 3v! = x! + y! + z!$$

که تنها برای $x = y = z = v = 2$ برقرار است. به ازای $u = 2$ ، برای معادله، ریشه‌ای به دست نمی‌آید، زیرا در این حالت

$$u! = 2 < 3 \leq x! + y! + z!$$

به این ترتیب، معادله مفروض، تنها یک جواب دارد:

$$x = y = z = 2, u = 3$$

۰۵۶ از اتحاد

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n \cdot (1+x)^n$$

با استفاده از بسط دو جمله‌ای به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n} &= \\ = (C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^n x^n) (C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^n x^n) \end{aligned}$$

با برابر قرار دادن ضریب‌های x^k و به حساب آوردن برابری

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

به این رابطه می‌رسیم:

$$C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2$$

بنابراین

$$\sum_{k=0}^n \frac{(2n)!}{(k!)^2 [(n-k)!]^2} = \frac{(2n)!}{n!n!} \sum_{k=0}^n \frac{(n!)^2}{(k!)^2 [(n-k)!]^2} =$$

$$= C_{2n}^n [(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2] = (C_{2n}^n)^2$$

۵۷. الف) عدد مثبت

$$\frac{1}{m+1} C_{2m}^m = \left(1 - \frac{m}{m+1}\right) C_{2m}^m = C_{2m}^m - \frac{(2m)!}{(m-1)!(m+1)!} =$$

$$= C_{2m}^m - C_{2m}^{m-1}$$

عددی درست است، زیرا C_{2m}^m و C_{2m}^{m-1} برای $m \in \mathbb{N}$ ، عددهای طبیعی اند. (ب) عدد $m \in \mathbb{N}$ را مفروض می‌گیریم. چون بد از ای $n = 2m$ ، عدد

$$\frac{k}{n+m+1} C_{2n}^{n+m} = \frac{k}{2m+1}$$

باید عددی طبیعی باشد، بنا بر این، مقدار مجهول $k \in \mathbb{N}$ باید بر $2m+1$ بخش پذیر باشد و، بنا بر این $k \geq 2m+1$. اگر $k = 2m+1$ ، آن وقت، برای $n = m$ ، عدد مثبت

$$\frac{k}{n+m+1} C_{2n}^{n+m}$$

عددی طبیعی است و، برای $n > m$ ، برابر است با

$$\frac{2m+1}{n+m+1} C_{2n}^{n+m} = \left(1 - \frac{n-m}{n+m+1}\right) C_{2n}^{n+m} =$$

$$= C_{2n}^{n+m} - \frac{(2n)!}{(n+m+1)!(n-m-1)!} = C_{2n}^{n+m} - C_{2n}^{n+m+1}$$

یعنی، عددی درست؛ زیرا C_{2n}^{n+m} و C_{2n}^{n+m+1} عددهای طبیعی اند. بنا بر این، حداقل مقدار k ، برابر است با $2m+1$.

۵۸. بزرگترین مقسوم علیه مشترک عددهای C_n^k ، C_{n+1}^k ، \dots ، C_{n+k}^k را

$d \in \mathbb{N}$ می‌گیریم. در این صورت، عددهای

$$C_n^{k-1} = C_{n+1}^k - C_n^k, C_{n+1}^{k-1} = C_{n+2}^k - C_{n+1}^k, \dots$$

$$C_{n+k-1}^{k-1} = C_{n+k}^k - C_{n+k-1}^k$$

هم، همان مقسوم علیه مشترك d را دارند. به همین ترتیب، معلوم می شود که
عددهای

$$C_n^{k-2}, \dots, C_{n+k-2}^{k-2}$$

دارای مقسوم علیه مشترك d هستند. اگر استدلال را، به همین شیوه ادامه دهیم،
سرانجام به این نتیجه می رسیم که $C_n^0 = 1$ باید بر d بخش پذیر باشد.
بنابراین $d = 1$.

۵۹. با استقرای ریاضی روی $m \in \mathbb{N}$ ، ثابت می کنیم، به ازای هر مقدار

$n \in \mathbb{N}$ ، داریم:

$$S_{m,n} = (-1)^m \frac{(n+m)!}{n!}$$

برای $m = 1$ ، برابری برقرار است:

$$S_{1,n} = 1 - \frac{(n+2)!}{n!(n+1)} = 1 - (n+2) = -\frac{(n+1)!}{n!}$$

اکنون، فرض می کنیم، برابری، برای مقادری از $m \in \mathbb{N}$ برقرار باشد،

در این صورت داریم:

$$S_{m+1,n} = S_{m,n} + (-1)^{m+1} \frac{(n+m+2)!}{n!(n+m+1)!} =$$

$$= (-1)^m \frac{(n+m)!}{n!} + (-1)^{m+1} \frac{(n+m)!(n+m+2)}{n!} =$$

$$= (-1)^{m+1} \frac{(n+m)!}{n!} (-1 + n + m + 2) = (-1)^{m+1} \frac{(n+m+1)!}{n!}$$

یعنی، برابری، برای مقدار $m+1$ هم برقرار است. بنابراین، عدد

$$S_{m,n} = (-1)^m \frac{(n+m)!}{n!m!} \cdot m! = (-1)^m C_{n+m}^m \cdot m!$$

بر $m!$ بخش پذیر است، زیرا C_{n+m}^m عددی است طبیعی.

سرانجام، توجه می‌کنیم که $S_{m,n}$ به‌ازای $n=2$ ، $m=3$ برابر $60-$

می‌شود که بر $18 = (n+1)m!$ بخش پذیر نیست. مسأله حل شد.

60 عدد اول $p > 2$ را در نظر می‌گیریم (به‌ازای $p=2$ ، حکم

مسأله درست است، زیرا، عدد $2 - C_2^2$ یعنی 4 ، بر 2^2 بخش پذیر است)؛

قبل از همه، داریم:

$$C_{2p}^p = \frac{(2p)!}{(p!)^2} = \frac{2p(2p-1)!}{p(p-1)!p!} = {}_2C_{p-1}^{p-1}$$

اگر هم‌نهمتی

$$(2p-k)(p+k) \equiv k(p-k) \pmod{p^2}$$

را برای هر یک از مقدارهای $\frac{p-1}{2}, \dots, 2, 1$ k بنویسیم $\left(\frac{p-1}{2}\right)$

عددی درست است)، معلوم می‌شود که حاصل ضرب

$$(2p-1)(2p-2)\dots(p+1) =$$

$$= [(2p-1)(p+1)][(2p-2)(p+2)] \dots$$

$$\dots \left[\left(2p - \frac{p-1}{2}\right) \left(p + \frac{p-1}{2}\right) \right] \equiv [1(p-1)][2(p-2)] \dots$$

$$\left[\frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2} \right] \pmod{p^2}$$

نسبت به‌مدول p^2 با $(p-1)!$ هم‌نهمت است. بنابراین، برای عددی مثل

$m \in \mathbb{Z}$ ، داریم:

$$C_{2p-1}^{p-1} = \frac{(2p-1)(2p-2)\dots(p+1)}{(p-1)!} = \frac{mp^2 + (p-1)!}{(p-1)!} = \frac{mp^2}{(p-1)!} + 1$$

چون عدد $1 - C_{2p-1}^{p-1} = \frac{mp^2}{(p-1)!}$ ، عددی درست است و، درضمن، دو

عدد p^2 و $(p-1)!$ نسبت به هم اول اند، بنا بر این

$$m = l(p-1)! \quad (l \in \mathbf{Z})$$

به این ترتیب، داریم:

$$C_{2p-1}^{p-1} = \frac{l(p-1)!p^2}{(p-1)!} + 1 = lp^2 + 1 \equiv 1 \pmod{p^2},$$

$$C_{2p}^p = 2C_{2p-1}^{p-1} \equiv 2 \pmod{p^2}$$

که از آنجا، درستی حکم مسأله ثابت می شود.

۰۶۱. فرض می کنیم:

$$f(x) = 1! + 2! + \dots + (x+1)!$$

در این صورت

$$f(1) = 3, \quad f(2) = 9 = 3^{1+1}, \quad f(3) = 33 = 3 \times 11$$

به ازای $x > 3$ ، معلوم می شود که مقدار

$$f(x) = f(3) + 5! + \dots + (x+1)! \equiv 3 \pmod{5}$$

نمی تواند مجذور يك عدد درست باشد، زیرا به ازای هر $k \in \mathbf{Z}$ داریم:

$$(\Delta k)^2 = 2\Delta k^2 \equiv 0 \pmod{5},$$

$$(\Delta k \pm 1)^2 = 2\Delta k^2 \pm 2\Delta k + 1 \equiv 1 \pmod{5},$$

$$(\Delta k \pm 2)^2 = 2\Delta k^2 \pm 4\Delta k + 4 \equiv 4 \pmod{5}$$

بنابراین، $z = 1$ ، به ازای هیچ مقدار $x \neq 2$ و y ، در معادله صدق نمی کند،

ثابت می کنیم که به ازای بقیه مقدارهای $z \geq 2$ هم، این برابری برقرار نیست. آزمایش نشان می دهد که هر یک از عددهای $f(x)$ ، وقتی که x برابر $1, 2, 3, 4, 5, 7$ باشد، بر 3 بخش پذیر است، ولی بر 27 بخش پذیر نیست، یعنی نمی تواند به صورت

$$f(x) = y^{z+1}, \quad z \geq 2$$

باشد برای $x > 7$ هم به همین نتیجه می توان رسید، زیرا در این حالت

$$f(x) = f(7) + 9! + \dots + (x+1)! \equiv f(7) \pmod{27}$$

سرانجام، به ازای $x = 6$ به دست می آید که عدد

$$f(6) = 5913 = 3^4 \times 73$$

نمی تواند به صورت مورد نظر باشد. به این ترتیب، مسأله تنها یک جواب دارد.

$$x = 2, \quad y = 3, \quad z = 1$$

۶۴. فرض می کنیم $y \in \mathbb{N}$ در x در معادله صدق کند. عدد $p = y + 1$

باید عددی اول باشد. در واقع، اگر p بر عددی مثل $(1 < d < y + 1)$ بخش پذیر باشد، آن وقت $y!$ هم بر d بخش پذیر است و باید داشته باشیم:

$$1 = (y+1)^x - y! \equiv 0 \pmod{d}$$

که ممکن نیست. به این ترتیب، معادله مفروض به این صورت درمی آید:

$$p^x - 1 = (p-1)!$$

و از آن نتیجه می شود: $p < 7$. در واقع، اگر فرض کنیم $p \geq 7$ ، آن وقت، با ساده کردن دو طرف معادله بر $p-1$ ، به این برابری می رسیم:

$$p^{x-1} + p^{x-2} + \dots + 1 = (p-2)!$$

که در آن، سمت راست برابری، بر $\frac{p-1}{2} \times 2$ ، یعنی $p-1$ بخش پذیر

است (زیرا به ازای $p \geq 7$ داریم: $2 < \frac{p-1}{2} \leq p-2$ و $\frac{p-1}{2} \in \mathbb{Z}$).

درحالی که سمت چپ آن، عبارت است از مجموع x عدد به صورت

$$p^i \equiv 1^i \equiv 1 \pmod{(p-1)} \quad (i = 0, 1, \dots, x-1)$$

بنا بر این باید داشته باشیم: $x \equiv 0 \pmod{(p-1)}$ ، یعنی $x \geq p-1$ ولی این ممکن نیست، زیرا

$$p^{x-1} < p^{x-1} + \dots + 1 = (p-2)! < (p-2)^{p-2} < p^{p-2}$$

یعنی $x < p-1$. به این ترتیب، عدد اول $p < 7$ می تواند تنها یکی از عددهای ۲، ۳ یا ۵ باشد. اگر $p=2$ ، آن وقت

$$2^x - 1 = 1 \Rightarrow x = 1, y = 1$$

اگر $p=3$ ، آن وقت

$$3^x - 1 = 2 \Rightarrow x = 1, y = 2$$

اگر $p=5$ ، آن وقت

$$5^x - 1 = 24 \Rightarrow x = 2, y = 4$$

معادله، سه جواب برای (x, y) ، در مجموعه عددهای طبیعی دارد:

$$(1, 1); (1, 2); (2, 4)$$

۶۳. فرض کنید:

$$l_k = \frac{m_k}{k} = \frac{n!}{k} + 1 \quad (k = 1, \dots, n)$$

ثابت می کنیم، اگر p مقسوم علیه اولی از l_k باشد، آن وقت عدد p ، مقسوم علیه هیچ یک از عددهای m_j ($j \neq k$) نیست. اگر این اثبات انجام گیرد، به معنای آن است که $m_k = k \cdot l_k$ هم بر p بخش پذیر است و، بنا بر این، p همان عدد مجهول است.

فرض می کنیم l_k بر p بخش پذیر باشد و، در ضمن، m_j هم به ازای مقداری از $j \neq k$ ، بر p بخش پذیر شود. در این صورت، یا l_j بر p بخش پذیر است و یا j بر p . حالت $p: j$ ممکن نیست، زیرا عدد j ، یکی

از عامل‌ها در ضرب زیر است:

$$1 \times 2 \times \dots \times (k-1)(k+1) \dots n = l_k - 1$$

یعنی باید $(l_k - 1)$ بر j بخش پذیر باشد و

$$(j, l_k) = (j, 1) = 1$$

این باقی می‌ماند که حالت $p: l_k, p: l_j (k \neq j)$ را بررسی کنیم: $k \leq n$ می‌گیریم. آن وقت، اگر $p \neq k$ ، آن‌گاه دو عدد p و l_k نسبت به هم اول خواهند بود (اثبات این حقیقت، شبیه استدلالی است که در بالا برای j آوردیم)؛ و اگر $p = j$ ، آن‌گاه دو عدد p و l_j نسبت به هم اول اند (اثبات به همان ترتیب). به این ترتیب، در هر حالتی، عدد p ، نسبت به یکی از دو عدد l_k یا l_j اول است و، در نتیجه، نابرابری $p \leq n$ ممکن نیست. $p > n$ می‌گیریم، در این صورت داریم:

$$k - j = m_k - m_j = kl_k - jl_j \equiv 0 \pmod{p}$$

یعنی $(k - j)$ بر p بخش پذیر است، که ممکن نیست، زیرا

$$0 < |k - j| < n < p$$

حکم به طور کامل ثابت شد.

۶۴. توان عدد ۲، در تجزیه عدد $l!$ به عامل‌های اول، برابر است با

$$\left[\frac{l}{2} \right] + \left[\frac{l}{4} \right] + \left[\frac{l}{8} \right] + \dots$$

(قضیه ۲۵ را ببینید). بنابراین، عدد $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ تنها وقتی فرد

است که، در تجزیه عدد C_n^k به عددهای اول، بزرگترین توان ۲، یعنی

$$d = \left(\left[\frac{n}{2} \right] - \left[\frac{k}{2} \right] - \left[\frac{n-k}{2} \right] \right) + \left(\left[\frac{n}{4} \right] - \left[\frac{k}{4} \right] - \left[\frac{n-k}{4} \right] \right) - \left[\frac{n-k}{4} \right] + \left(\left[\frac{n}{8} \right] - \left[\frac{k}{8} \right] - \left[\frac{n-k}{8} \right] \right) + \dots$$

صفر باشد (وقتی که $m \in \mathbb{N}$ به اندازه کافی بزرگ باشد، عددهای

$$\left\lfloor \frac{n}{2^m} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{k}{2^m} \right\rfloor \text{ و } \left\lfloor \frac{n-k}{2^m} \right\rfloor, \text{ برابر صفر می شوند. از برابری}$$

$$\frac{n}{2^m} = \frac{k}{2^m} + \frac{n-k}{2^m} = \left\lfloor \frac{k}{2^m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-k}{2^m} \right\rfloor + \left\{ \frac{k}{2^m} \right\} + \left\{ \frac{n-k}{2^m} \right\}$$

نتیجه می شود که، هر یک از عددهای

$$\left\lfloor \frac{n}{2^m} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{2^m} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k}{2^m} \right\rfloor = \left\lfloor \left\{ \frac{k}{2^m} \right\} + \left\{ \frac{n-k}{2^m} \right\} \right\rfloor$$

برای $m \in \mathbb{N}$ ، غیر منفی اند. بنابراین، برابری $d = 0$ ، تنها وقتی ممکن است که، برای همه مقادیر $m \in \mathbb{N}$ ، داشته باشیم:

$$\left\{ \frac{k}{2^m} \right\} + \left\{ \frac{n-k}{2^m} \right\} < 1$$

ثابت می کنیم که، شرط اخیر، هم ارز شرطی است که در صورت مسأله، برای عددهای n و k در عددنویسی به مبنای ۲، آمده است. فرض می کنیم، در هر مرتبه عدد n ، در عددنویسی به مبنای ۲، با رقمی سروکار داشته باشیم، که از رقم همان مرتبه در عدد k ، کوچکتر نباشد. در این صورت، برای هر $m \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\left\{ \frac{n}{2^m} \right\} \geq \left\{ \frac{k}{2^m} \right\}$$

بنابراین

$$\left\{ \frac{m-k}{2^m} \right\} = \left\{ \frac{n}{2^m} \right\} - \left\{ \frac{k}{2^m} \right\} < 1 - \left\{ \frac{k}{2^m} \right\}$$

اکنون، فرض می کنیم، در مرتبه ای از عدد n ، با رقمی کوچکتر از رقم همان مرتبه در عدد k ، سروکار داشته باشیم (که تنها می تواند متناظر با رقم های ۰ و ۱ باشد). در این صورت، برای مقداری از $m \in \mathbb{N}$ ، داریم:

$$\left\{ \frac{n}{p^m} \right\} < \left\{ \frac{k}{p^m} \right\}$$

بنابراین

$$\left\{ \frac{n-k}{p^m} \right\} = \left\{ \frac{n}{p^m} \right\} - \left\{ \frac{k}{p^m} \right\} + 1 \geq 1 - \left\{ \frac{k}{p^m} \right\}$$

به این ترتیب، هم ارزی دو حکم مذکور و، در نتیجه، حکم مسأله، ثابت شد.

۶۵. ثابت می کنیم، شرط ب)، با شرط زیر هم ارز است:

ج) $n = p^l + (p^s - 1)$ که در آن، $t \in \mathbb{Z}^+$ ، $l \in \mathbb{N}$ و $l < p$. در واقع،

از شرط ب) به دست می آید:

$$n = p^s m - 1 = p^s(m-1) + (p^s - 1)$$

که در آن $s \in \mathbb{Z}^+$ ، $m \in \mathbb{N}$ و $m < p$. اگر $m > 1$ ، فرض می کنیم:

$$t = s, \quad l = m - 1 > 0$$

اگر $m = 1$ ، آن وقت $s > 0$ ، زیرا در غیر این صورت

$$n = p^0 \cdot 1 - 1 = 0 \notin \mathbb{N}$$

بنابراین

$$n = p^{s-1} \cdot p - 1 = p^{s-1}(p-1) + (p^{s-1} - 1)$$

و می توان فرض کرد: $t = s - 1 \geq 0$ ، $l = p - 1 < p$. در هر دو حالت،

شرط ج) برقرار است. از طرف دیگر، از شرط ج) داریم:

$$n = p^l + (p^t - 1) = p^l(l+1) - 1$$

اگر $p < l+1$ ، آن گاه

$$m = l + 1, \quad s = t$$

و اگر $p = l+1$ ، آن گاه

$$m = 1, \quad s = t + 1$$

برای عدد مفروض $n \in \mathbb{N}$ ، عددی مثل $t \in \mathbb{Z}^+$ پیدا می شود، به نحوی که

$$p^t \leq n < p^{t+1}$$

از آن جا

$$n = p^t l + r \quad (0 \leq r < p^t, 1 \leq l < p)$$

از آن جا که، بزرگترین توان عدد اول p ، که $q!$ بر آن بخش پذیر

باشد، برابر است با

$$\left[\frac{q}{p} \right] + \left[\frac{q}{p^2} \right] + \left[\frac{q}{p^3} \right] + \dots$$

آن وقت، بزرگترین توان p ، که عدد

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

بر آن بخش پذیر باشد، برابر است با

$$d_k = \left(\left[\frac{n}{p} \right] - \left[\frac{k}{p} \right] - \left[\frac{n-k}{p} \right] \right) + \left(\left[\frac{n}{p^2} \right] - \left[\frac{k}{p^2} \right] - \right. \\ \left. - \left[\frac{n-k}{p^2} \right] \right) + \left(\left[\frac{n}{p^3} \right] - \left[\frac{k}{p^3} \right] - \left[\frac{n-k}{p^3} \right] \right) + \dots$$

(به ازای $t > i$ ، هر یک از عددهای $\left[\frac{n}{p^i} \right]$ ، $\left[\frac{k}{p^i} \right]$ و $\left[\frac{n-k}{p^i} \right]$)

برابر صفرند). از رابطه

$$\left[\frac{n}{p^i} \right] = \left[\frac{k}{p^i} + \frac{n-k}{p^i} \right] \geq \left[\left[\frac{k}{p^i} \right] + \left[\frac{n-k}{p^i} \right] \right] = \\ = \left[\frac{k}{p^i} \right] + \left[\frac{n-k}{p^i} \right]$$

معلوم می شود که، تنها وقتی $d_k = 0$ می شود که داشته باشیم:

$$\left[\frac{n}{p^i} \right] = \left[\frac{k}{p^i} \right] + \left[\frac{n-k}{p^i} \right] \quad (i = 0, 1, \dots, t)$$

ثابت می‌کنیم، این برابری، تنها وقتی ممکن است که داشته باشیم:

$$r = p^t - 1$$

یعنی همان شرط ج). در واقع، اگر $r \leq p^t - 2$ ، فرض می‌کنیم:
در این صورت داریم: $i = t, k = p^t - 1$

$$\left[\frac{k}{p^t} \right] = \left[\frac{p^t - 1}{p^t} \right] = 0, \left[\frac{n - k}{p^t} \right] \leq \left[\frac{p^t - 1}{p^t} \right] = l - 1,$$

$$\left[\frac{n}{p^t} \right] = \left[\frac{p^t l + r}{p^t} \right] = l, \quad l > 0 + (l - 1)$$

بنابراین، برابری بالا و، همراه با آن، شرط الف) برقرار نمی‌شود. اکنون فرض کنید شرط ج) برقرار باشد، آن وقت برای همه مقادیرهای

$$i = 0, 1, \dots, t; \quad k = 0, 1, \dots, n$$

به دست می‌آید:

$$n = p^i \left[\frac{n}{p^i} \right] + (p^i - 1),$$

$$k = p^i \left[\frac{k}{p^i} \right] + q, \quad 0 \leq q < p^i,$$

$$\left[\frac{n - k}{p^i} \right] = \left[\left[\frac{n}{p^i} \right] - \left[\frac{k}{p^i} \right] + \frac{p^i - (q + 1)}{p^i} \right] = \left[\frac{n}{p^i} \right] - \left[\frac{k}{p^i} \right]$$

زیرا $0 \leq p^i - (q + 1) < p^i$ ، به این ترتیب، به ازای $n = 0, 1, \dots$ داریم: $d_k = 0$ ، یعنی شرط الف) برقرار است. اثبات به پایان می‌رسد.

۶۶. فرض می‌کنیم، عدد

$$0 / h_1 h_2 h_3 \dots$$

گویا باشد. بنابراین باید عددهای $N, T \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشند که، برای آن‌ها، برابری $h_{n+T} = h_n$ به ازای همه مقادیرهای $n \geq N$ برقرار باشد.

ثابت می‌کنیم، عدد T_1 وجود دارد که بر T بخش پذیر و آخرین رقم غیر صفر آن برابر واحد است. در واقع، فرض کنید:

$$T = 2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot p \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+)$$

(عدد p ، بر ۲ یا ۵ بخش پذیر نیست). در این صورت، آخرین رقم غیر صفر عدد

$$T_0 = 2^\beta \cdot 5^\alpha \cdot T = 2^{\alpha+\beta} \cdot 5^{\alpha+\beta} \cdot p = 10^{\alpha+\beta} \cdot p$$

فرد و مخالف با ۵ است. اگر این رقم برابر واحد باشد، آن وقت $T_1 = T_0$ می‌گیریم؛ اگر برابر ۳ باشد، فرض می‌کنیم $T_1 = 7T_0$ ؛ اگر برابر ۷ باشد $T_1 = 3T_0$ می‌گیریم و، سرانجام، اگر برابر ۹ باشد، فرض می‌کنیم $T_1 = 9T_0$. در این حالت‌ها، آخرین رقم غیر صفر عدد T_1 ، به ترتیب، بر آخرین رقم غیر صفر عددهای ۲۱، ۲۱، ۲۱ و ۸۱ منطبق می‌شود. به این ترتیب، به عدد

$$T_1 = 10^m (10a + 1) \quad (m, a \in \mathbb{Z}^+)$$

می‌رسیم که در برابری $h_{n+T_1} = h_n$ صدق می‌کند ($n \geq N$). ثابت می‌کنیم، برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ ، داریم: $h_n \neq 5$. در واقع، توان عدد ۲، در تجزیه عدد $n!$ به عامل‌های اول، برابر است با

$$\gamma = \left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n}{2^2} \right] + \left[\frac{n}{2^3} \right] + \dots$$

و توان ۵ در این تجزیه:

$$\delta = \left[\frac{n}{5} \right] + \left[\frac{n}{5^2} \right] + \left[\frac{n}{5^3} \right] + \dots$$

(قضیه ۲۰ را ببینید). چون برای هر $i \in \mathbb{N}$ داریم: $\left[\frac{n}{2^i} \right] \geq \left[\frac{n}{5^i} \right]$

بنابراین

$$n! = 2^\gamma \cdot 5^\delta \cdot q = 10^\delta \cdot 2^{\gamma-\delta} \cdot q \quad \text{و} \quad \gamma \geq \delta$$

که در آن، عدد q بر ۲ و ۵ بخش پذیر نیست، یعنی آخرین رقم غیر صفر عدد $n!$ ، بر آخرین رقم عدد $q \cdot 2^{2-\delta}$ منطبق و در ضمن مخالف ۵ است. عدد $b \in \mathbb{N}$ را آن قدر بزرگ می گیریم که نابرابری

$$M = 10^m(10b+1) > N$$

برقرار باشد و h_{M-1} را h می نامیم. در این صورت

$$(M-1)! = 10^k(10c+h), \quad (h, c \in \mathbb{Z}^+)$$

و از آنجا، به این برابری می رسم:

$$\begin{aligned} M! &= (M-1)!M = 10^k(10c+h) \cdot 10^m(10b+1) = \\ &= 10^{k+m}[10(10bc+hb+c)+h] \end{aligned}$$

و بنابراین $h_M = h$. سپس $h_{M-1} = h$ ؛ از آنجا، به دست می آید:

$$(M-1+T_1)! = 10^l(10d+h), \quad (l, d \in \mathbb{Z}^+)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} (M+T_1)! &= (M-1+T_1)!(M+T_1) = \\ &= 10^l(10d+h)[10^m(10b+1) + 10^m(10a+1)] = \\ &= 10^{m+l}(10d+h)[10(a+b)+2] = \\ &= 10^{m+l}[10(10ad+10bd+ah+bh+2d)+2h] \end{aligned}$$

یعنی مقدار h_{M+T_1} منطبق بر آخرین رقم عدد $2h$ و مخالف صفر است (زیرا $h \neq 0$ و $h \neq 5$). از طرف دیگر، این رقم باید برابر $h_M = h$ باشد، که به ازای هیچ يك از مقدارهای

$$h = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9$$

ممکن نیست، تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می کند.

۴۳. مجموعه‌های عددی

۶۷. $X = A \cup B$ می‌گیریم و برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم $5 \in A$. فرض می‌کنیم در هیچ یک از دو مجموعه A و B ، نتوان سه عدد پیدا کرد، به نحوی که، مجموع دو تا از آنها، مساوی دو برابر دیگری باشد. اگر $3 \in A$ ، آن وقت $1 \in B$ و $4 \in B$ و $7 \in B$ که فرض ما را نقض می‌کند، زیرا $1 + 7$ دو برابر 4 است. به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که 7 هم نمی‌تواند عضو A باشد. پس $3 \in B$ و $7 \in B$. یکی از دو عدد 4 یا 6 باید به مجموعه B تعلق داشته باشد، زیرا 4 و 5 و 6 نمی‌توانند با هم متعلق به A باشند ($4 + 6$ دو برابر 5 است).

فرض کنید $4 \in B$ (حالت $6 \in B$ هم، به همین ترتیب مورد بررسی قرار می‌گیرد)، در این صورت

$$2 \in A \quad (\text{در غیر این صورت } \{2, 3, 4\} \subset B)$$

$$8 \in B \quad (\text{در غیر این صورت } \{2, 5, 8\} \subset A)$$

$$6 \in A \quad (\text{در غیر این صورت } \{4, 6, 8\} \subset B)$$

$$9 \in A \quad (\text{در غیر این صورت } \{7, 8, 9\} \subset B)$$

اگر $1 \in A$ ، آن وقت

$$\{1, 5, 9\} \subset A$$

و اگر $1 \in B$ ، آن وقت

$$\{1, 4, 7\} \subset B$$

و در هر حال، فرض ما نقض می‌شود.

۶۸. برای هر مقدار $z \in \{1, 2, \dots, 7\}$ ، تعداد عددهایی که، در

آنها، رقم z در n امین ردیف قرار گرفته باشد، برابر است با $6!$. در نتیجه، مجموع همه عددها، برابر است با

$$\begin{aligned}
 & (6! \times 1 + \dots + 6! \times 7) + (6! \times 1 + \dots + 6! \times 7) 10 + \\
 & + (6! \times 1 + \dots + 6! \times 7) 10^2 + \dots + (6! \times 1 + \dots + 6! \times \\
 & \times 7) 10^6 = 6! (1 + 2 + \dots + 7) (1 + 10 + \dots + 10^6) = 270 \times \\
 & \times 28 \times 1111111 = 22399997760
 \end{aligned}$$

۶۹. همه باقی مانده‌های ممکن تقسیم بر ۱۰۰ را، به این ترتیب، گروه‌بندی می‌کنیم:

$$\{0\}, \{1, 99\}, \{2, 98\}, \dots, \{49, 51\}, \{50\}$$

از آن‌جا که تعداد گروه‌ها برابر ۵۱ و تعداد عددهای مفروض برابر ۵۲ است، بنا بر اصل دیریکله (قضیه ۱)، دست کم دو عدد پیدا می‌شود که باقی مانده تقسیم آن‌ها بر ۱۰۰، با یکی از این گروه‌ها تطبیق می‌کند. همین دو عدد، عددهای مطلوب‌اند (اگر باقی مانده دو عدد بر ۱۰۰ یکی باشد، تفاضل آن‌ها و اگر باقی مانده دو عدد بر ۱۰۰ مختلف باشد، مجموع آن‌ها، بر ۱۰۰ بخش پذیر است).

۷۰. فرض کنید، برای مجموعه‌ای که شامل n عدد طبیعی a_1, a_2, \dots, a_n است، حکم مسأله درست نباشد. در این صورت، هیچ کدام از عددهای

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

بر n بخش پذیر نیستند. از آن‌جا که، در تقسیم بر عدد n ، به تعداد $(n-1)$ باقی مانده ممکن وجود دارد، بنابراین، طبق اصل دیریکله (قضیه ۱)، دو عدد S_i و S_j ($1 \leq i < j \leq n$) پیدا می‌شود که، در تقسیم بر n ، باقی مانده‌های برابر داشته باشند. بنابراین، تفاضل

$$S_j - S_i = a_{i+1} + \dots + a_j$$

بر n بخش پذیر است، چیزی که فرض ما را نقض، و درستی حکم را ثابت می‌کند.

۷۱. $2n$ عدد زیر را در نظر می‌گیریم:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, k - a_1, k - a_2, \dots, k - a_n$$

چون $m > 2n$ ، بنا براین، دست کم دو تا از آن‌ها، در تقسیم بر m ، به باقی مانده‌های برابر می‌رسند. با توجه به فرض مسأله، a_1, \dots, a_n ، در تقسیم بر m ، باقی مانده‌های مختلف دارند؛ از این‌جا نتیجه می‌شود که عددهای

$$k - a_1, k - a_2, \dots, k - a_n$$

هم، در تقسیم بر n ، به باقی مانده‌های مختلف می‌رسند. بنا براین، دو عددی که در تقسیم بر m ، دارای یک باقی مانده هستند، باید به صورت a_i و $k - a_j$ باشند (برای اندیس‌هایی مثل i و j)، در این صورت، تفاضل این دو عدد، یعنی $a_i + a_j - k$ ، باید بر m بخش پذیر باشد. حکم مسأله ثابت شد.

۷۲. از برهان خلف استفاده و فرض می‌کنیم، حکم مسأله، نادرست

باشد. در این صورت؛ بین ۱۹ عدد طبیعی

$$a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_{19} - a_{18}, a_{20} - a_{19}$$

چهار عدد برابر، پیدا نمی‌شود. بنا براین، در بین آن‌ها، از عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶، نمی‌توان بیش از سه بار پیدا کرد. در نتیجه، دست کم یکی از این عددها، از ۶ بزرگتر است (زیرا، تعداد عددهایی که از ۶ تجاوز نمی‌کنند)، حداکثر برابر ۱۸ است؛ دست کم سه تا از ۱۸ عدد بقیه، از ۵ بزرگترند، دست کم سه تا از ۱۵ عدد بقیه از ۴ بزرگترند و غیره. بنا براین، مجموع آن‌ها

$$(a_{20} - a_{19}) + (a_{19} - a_{18}) + \dots + (a_2 - a_1) \geq$$

$$\geq 7 + (6 + 6 + 6) + (5 + 5 + 5) + \dots + (1 + 1 + 1) = 70$$

در حالی که $a_{20} - a_1 \leq 70 - 1 = 69$. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۷۳. دست کم در یکی از این ۷ زیرمجموعه، تعداد اعضا کمتر از

۱۵ نیست (در غیر این صورت، در همه زیرمجموعه‌ها، نمی‌تواند بیش از

14×7 ، یعنی ۹۸ عضو وجود داشته باشد). هر دو عدد a و b ($a > b$) از

این زیر مجموعه را، با تفاضل $a - b$ متناظر می کنیم. در این صورت، دست کم به تعداد

$$C_{15}^2 = \frac{15 \times 14}{2} = 105$$

تفاضل به دست می آید که، در بین آن‌ها، به ناچار تفاضلهای برابر وجود دارد (زیرا، مقدار تفاضلهای، بیش از ۹۹ مقدار ۱، ۲، ...، ۹۹ را نمی توانند قبول کنند). فرض کنید، برای دو زوج عدد $a > b$ و $c > d$ داشته باشیم:

$$a - b = c - d \implies a + d = b + c$$

در حالتی هم که $a = d$ (یا $b = c$)؛ برابری دیگری ممکن نیست، آن وقت $b + c = 2a$ (یا $a + d = 2b$). حکم ثابت شد.

۷۴. فرض می کنیم، برخلاف ادعای مسأله، در بازه‌ای به طول

$\frac{1}{n}$ ، بیش از $\frac{n+1}{2}$ کسر ساده نشدنی $\frac{p}{q}$ وجود داشته باشد که، در آن، q

می تواند برابر ۱، ۲، ... یا n باشد. ثابت می کنیم، بین مخرج‌های این کسرها، دو مخرج وجود دارد که یکی از آن‌ها بر دیگری بخش پذیر است. هر يك از مخرج‌ها را، به صورت $2^r s$ در نظر می گیریم که، در آن، s عددی فرد و $r \in \mathbb{Z}^+$. تعداد عددهای فرد، بین عددهای ۱، ۲، ...، n برابر است با

$$\left[\frac{n+1}{2} \right] \quad (\text{یعنی، کمتر از تعداد مخرج‌ها}). \quad \text{بنابراین، دو مخرج}$$

$$q = 2^r \cdot s \quad \text{و} \quad q_1 = 2^{r_1} \cdot s_1$$

پیدا می شود که، برای آن‌ها، $s = s_1$ و $r \leq r_1$. در این صورت، یکی از آن‌ها، بر دیگری بخش پذیر است، یعنی $q_1 = kq$. به این ترتیب، بین کسرها، می توان دو کسر مختلف به صورت $\frac{m}{q}$ و $\frac{l}{kq}$ انتخاب کرد ($kq \leq n$).

در این صورت

$$\left| \frac{m}{q} - \frac{l}{kq} \right| < \frac{1}{n}$$

زیرا، هر دو عدد در بازه $\frac{1}{n}$ به طول قرار دارند. بنابراین $km - l = 0$ ،
 زیرا، اگر چنین نباشد، به دست می آید:

$$\left| \frac{m}{q} - \frac{l}{kq} \right| = \frac{|km - l|}{kq} \geq \frac{1}{kq} \geq \frac{1}{n}$$

به این ترتیب

$$km = l \quad \text{و} \quad \frac{l}{kq} = \frac{km}{kq} = \frac{m}{q}$$

یعنی، دو کسر انتخابی، بر هم منطبق اند. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می کند.

۷۵. تعداد سه تایی های $x \leq y \leq z$ را، از بین عددهای طبیعی، پیدا

می کنیم، به نحوی که مجموعی برابر $6n$ داشته باشند.

به ازای هر مقدار $n = 1, 2, \dots, k$ ، همه سه تایی هایی را می نویسیم

که، برای آنها $x = 2k - 1$ و، متناظر با آنها، $x = 2k$ باشد:

$$(2k - 1, 2k - 1, 6n - 2k + 2),$$

$$(2k - 1, 2k, 6n - 2k + 1),$$

.....

$$(2k - 1, 3n - k, 3n - k + 1),$$

و متناظر با آنها

$$(2k, 2k, 6n - 2k),$$

$$(2k, 2k + 1, 6n - 2k - 1),$$

.....

$$(2k, 3n - k, 3n - k)$$

بنابراین، تعداد همه این سه تایی ها، برابر است با

$$S_k = (3n - k) - (2k - 2) + (3n - k) - (2k - 1) = \\ = 6n - 6k + 3$$

و تعداد همه سه تایی های مورد نظر مسأله

$$\sum_{k=1}^n S_k = \sum_{k=1}^n (6n - 6k + 3) = \frac{(6n - 3) + 3}{2} \cdot n = 3n^2$$

۷۶. هر گروه از ۶ عدد طبیعی مختلف از ۱ تا ۴۹ (که بدون لطمه خوردن به کلیت مسأله، می توان آن ها را به صورت صعودی در نظر گرفت)

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$$

را، متناظر با گروه عددهای به صورت زیر قرار می دهیم:

$$a_1, a_2 - 1, a_3 - 2, a_4 - 3, a_5 - 4, a_6 - 5$$

در گروه اخیر، تنها وقتی عددهای مختلف وجود دارد که در گروه نخستین عددهای متوالی وجود نداشته باشند و به ردیف غیر نزولی نوشته شده باشند. به این ترتیب، توانستیم بین مجموعه ای شامل ۶ عدد مختلف از ۱ تا ۴۹ که بین آن ها عددهای متوالی وجود ندارد، با مجموعه شامل ۶ عدد مختلف از ۱ تا ۴۴، تناظر یک به یک برقرار کنیم. ۶ عدد مختلف را، از بین عددهای از ۱ تا ۴۴ به C_{44}^6 طریق ممکن می توان انتخاب کرد. بنا بر آن چه ثابت کردیم، این تعداد، برابر است با تعداد گروه های ۶ عددی ممکن از بین عددهای از ۱ تا ۴۹ که در بین آن ها عددهای متوالی وجود نداشته باشد. تعداد همه گروه های شامل ۶ عدد مختلف که از بین عددهای از ۱ تا ۴۹ انتخاب شوند، برابر C_{49}^6 است، بنا بر این، تعداد گروه هایی که، در آن ها، عددهای متوالی وجود داشته باشد، برابر $C_{49}^6 - C_{44}^6$ می شود.

۷۷. زیر مجموعه های A و B را، با استقرار روی $n \in \mathbb{N}$ می سازیم. $1 \in A$ می گیریم و فرض می کنیم توانسته باشیم عددهای از ۱ تا $n-1$ را به دو زیر مجموعه مطلوب A و B تقسیم کنیم. اکنون، عدد n را در نظر می گیریم. اگر عددی مثل

$$k_1 \in \{1, 2, \dots, n-1\}$$

پیدا شود که برای آن، داشته باشیم: $\frac{k_1}{n} = c$ ، آن وقت عدد n را در زیر مجموعه‌ای

قرار می‌دهیم که شامل عدد k_1 نیست. و اگر عددی مثل

$$k_2 \in \{1, 2, \dots, n-1\}$$

وجود داشته باشد که در برابری $\frac{n}{k_2} = c$ صدق کند، آن وقت n را در

زیر مجموعه‌ای که شامل k_2 نیست، قرار می‌دهیم. یادآوری می‌کنیم که،

برابری‌های $\frac{k_1}{n} = c$ و $\frac{n}{k_2} = c$ نمی‌توانند به طور هم‌زمان برقرار باشند،

زیرا در غیر این صورت، به برابری $k_1 k_2 = n^2$ می‌رسیم که ممکن نیست.

بالاخره، اگر عددهای k_1 و k_2 در هیچ کدام از دو زیر مجموعه نباشند،

فرض می‌کنیم $n \in A$.

به این ترتیب، سرانجام، مجموعه \mathbb{N} ، به دو زیر مجموعه تقسیم می‌شود

که با شرط مسأله سازگارند.

۷۸. چون به ازای هر مقدار $i = 1, \dots, n-1$ داریم:

$$b_i - b_{i+1} = (1-n)a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_n + \\ + a_1 + a_2 + \dots + a_{i-1} = 1 - na_i \equiv 1 \pmod{n}$$

بنابراین،

$$b_{n-1} \equiv b_n + 1 \pmod{n},$$

$$b_{n-2} \equiv b_{n-1} + 1 \pmod{n},$$

.....

$$b_1 \equiv b_2 + 1 \pmod{n}$$

در نتیجه، عددهای

$$b_{n-i} \equiv b_n + i \pmod{n}, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

در تقسیم بر n ، باقی مانده‌های مختلفی می‌دهند، یعنی با هم برابر نیستند.
 ۰۷۹ فرض می‌کنیم، برای مقداری از n ، سطری با ویژگی مورد نظر وجود داشته باشد، شماره ردیف نخستین عدد (از سمت چپ)، از دو عددی را که برابر k هستند، m_k می‌نامیم. در این صورت، شماره ردیف عدد دوم، از این دو عدد، برابر $k+1+m_k$ و مجموع شماره‌های همه $2n$ عدد در سطر، برابر

$$\sum_{k=1}^n [m_k + (m_k + k + 1)] = 2 \sum_{k=1}^n m_k + \frac{n(n+3)}{2}$$

می‌شود. از طرف دیگر، مجموع همین $2n$ شماره، برابر است با

$$\sum_{i=1}^{2n} i = n(2n+1)$$

بنابراین

$$2 \sum_{k=1}^n m_k = n(2n+1) - \frac{n(n+3)}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$$

در نتیجه، $\frac{n(3n-1)}{2}$ باید عددی درست باشد. از آن جاکه، تنها یکی از

دو عدد n یا $3n-1$ می‌تواند زوج باشد، بنابراین، همان عدد باید بر ۴ بخش پذیر باشد. به این ترتیب، تنها دو حالت ممکن است: یا $n=4l$ و یا $3n-1=4l'$ یعنی

$$n = 4 \times \frac{l'+1}{3} - 1 = 4l - 1 \quad \text{و} \quad (l, l' \in \mathbb{N})$$

ثابت می‌کنیم، هر عدد n که به صورت $4l-1$ یا $4l$ باشد، با شرط‌های مسأله سازگار است. برای $n=4l$ و $l \geq 2$ ، مثلاً سطر زیر دارای ویژگی مورد نظر است:

$$\begin{aligned} & (4l-4, \dots, 2l, 4l-2, 4l-3, \dots, 1, 4l-1, 1, \dots, 2l-3, \\ & 2l, \dots, 2l-2, 2l-2, 4l-2, 2l+1, 4l-3, \dots, 4l, 4l-4, \dots, 2l, \\ & 4l-1, 4l-1, 2, \dots, 2l-2, 2l+1, \dots, 4l-3, 2l-1, 4l) \end{aligned}$$

نقطه‌ها به معنای يك تصاعد حسابی است با قدر نسبت ۲ یا ۲ - کسه از جمله قبل از نقطه‌ها آغاز و به جمله بعد از نقطه‌ها ختم شده است. به همین ترتیب، برای $l = 2$ و $n = 4l - 1$ می‌توان مثلاً این سطر را نوشت:

$$\begin{aligned} & 2l - 3, \dots, 1, 4l - 1, \dots, 2l - 3, \dots, 2l - 2, 4l - 2, \dots, 2l - 3, \dots, 2l - 4, \dots, 4l - 4 \\ & 2, \dots, 2l - 2, 4l - 2, 2l + 1, \dots, 2l - 3, \dots, 2l - 1, 4l - 4, \dots, 2l \\ & 4l - 3, \dots, 2l + 1, \dots, 2l - 2, \dots, 2l - 1, 4l - 1, 2l - 1 \end{aligned}$$

سرانجام، برای $n = 4$ و $n = 3$ ، این سطرها را داریم:

$$2, 3, 4, 2, 1, 3, 1, 4;$$

$$2, 3, 1, 2, 1, 3$$

به این ترتیب، شرط مسأله، با عدددهای به صورت $n = 4l - 1$ و $n = 4l$ ($l \in \mathbb{N}$) و تنها با همین عدددها، سازگار است.

۸۵. از شرط ۲) نتیجه می‌شود که یا $1 \in M$ یا $(-1) \in M$ ولی -1

عضو M نیست، زیرا، اگر -1 عضو M باشد، بنا بر شرط ۱)

$$(-1)(-1) = 1 \in M$$

که آن وقت، با شرط ۲) متناقض می‌شود. بنابراین $1 \in M$ (از شرط ۲) نتیجه می‌شود:

$$1 + 1 \in M, 2 + 1 \in M, 3 + 1 \in M, \dots$$

یعنی $M \supset \mathbb{N}$. اکنون، اگر $(-\frac{1}{m}) \in M$ که در آن $m \in \mathbb{N}$ ، آن وقت، با

توجه به شرط ۱)

$$\left(-\frac{1}{m} \cdot m\right) = (-1) \in M$$

که درست نیست. بنابراین $(-\frac{1}{m}) \notin M$ و $(\frac{1}{m}) \in M$ (برای هر $m \in \mathbb{N}$). در

این جا، از شرط ۱) معلوم می‌شود:

$$n \times \frac{1}{m} = \frac{n}{m} \in M, \quad (n, m \in \mathbb{N})$$

در این صورت $\left(-\frac{n}{m}\right) \notin m$ ، برای $n, m \in \mathbb{N}$ ، به جز این‌ها، از شرط ۲) برمی‌آید که $0 \notin M$ حکم ثابت شد.

۸۱. ثابت می‌کنیم، برای مجموعه متناهی M از عددهای مثبت، پایه وجود دارد. مجموعه S از عددهای مثبت را، «روپایه» برای M می‌نامیم، وقتی که هر عدد از M ، به صورت حاصل ضرب

$$\alpha_1^{i_1} \dots \alpha_m^{i_m}, \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_m \in S, i_1, \dots, i_m \in \mathbb{Z})$$

نشان داده شود. مثلاً، خود مجموعه M ، يك «روپایه» برای M است. بین همه «روپایه‌ها» M ، مجموعه

$$S_0 = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$$

را انتخاب می‌کنیم که حداقل تعداد عضوها را داشته باشد. ثابت می‌کنیم، اگر $n \geq 2$ ، آن وقت S_0 «پایه» M است. فرض می‌کنیم، برای عضوی مثل $u \in M$ ، بتوانیم نمایش‌های مختلفی به صورت حاصل ضرب توان‌های درست عضوهایی از S_0 داشته باشیم:

$$u = \beta_1^{i_1} \dots \beta_n^{i_n} = \beta_1^{j_1} \dots \beta_n^{j_n}$$

یعنی $\beta_1^{k_1} \dots \beta_n^{k_n} = 1$ و عددهای درست $k_l = i_l - j_l$ ، برای همه مقادیرهای $n, \dots, 1, l$ ، باهم برابر صفر نیستند. بدون این که لطمه‌ای به کلی بودن مسأله وارد شود، می‌توان فرض کرد $k_n \neq 0$. فرض کنید:

$$S_1 = \{\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}\}, \quad (\gamma_l = \beta_l^{\frac{1}{k_n}}, l = 1, \dots, n-1)$$

در این صورت، هر عضو مجموعه S_0 ، به صورت حاصل ضربی از توان‌های درست عضوهای مجموعه S_1 قابل بیان است:

$$\beta_l = \gamma_l^{k_n} (l = 1, \dots, n-1); \quad \beta_n = \gamma_1^{-k_1} \dots \gamma_{n-1}^{-k_{n-1}}$$

به این ترتیب، مجموعه S_1 «روپایه» ای برای M است و، در ضمن، $n-1$ عضو دارد، که با نوع انتخاب S_0 متناقض است. یعنی S_0 پایه M است. اگر «روپایه» S_0 برای M ، شامل يك عضو $\beta \neq 1$ باشد، آن وقت S_0 پایه M خواهد بود، زیرا برابری $\beta^i = \beta^j$ برای $i \neq j$ ممکن نیست. سرانجام، اگر مجموعه $S_0 = \{1\}$ «روپایه» M باشد، آن وقت $M = \{1\}$ و مجموعه $S_1 = \{2\}$ پایه M است.

۰۸۴. راه حل اول. چند جمله‌ای

$$P(x) = \left(x + \frac{1}{1}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right) \dots \left(x + \frac{1}{n}\right)$$

را در نظر می‌گیریم که، با توجه به قضیهٔ ویت، به این صورت درمی‌آید:

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$$

که در آن داریم:

$$a_1 = \sum_{i_1=1}^n \frac{1}{i_1}, \quad a_2 = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \frac{1}{i_1 i_2}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{1}{1 \times 2 \times \dots \times n}$$

در این صورت، مجموع مورد نظر مسأله، چنین می‌شود:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = P(1) - 1 =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{1}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 = \frac{2 \times 3 \times \dots \times (n-1)}{1 \times 2 \times \dots \times n} - 1 =$$

$$= (n+1) - 1 = n$$

راه حل دوم. فرض می‌کنیم:

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{1}{i_1 \dots i_k} = S_n$$

و با استقرار روی n ، ثابت می‌کنیم: $S_n = n$.

به ازای $n=1$ ، برابری درست است: $S_1 = 1$ و $n \geq 2$.

$S_{n-1} = n-1$ می‌گیریم، در این صورت

$$S_n - S_{n-1} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k = n} \frac{1}{i_1 \dots i_k} =$$

$$= \frac{1}{n} + \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n-1} \frac{1}{i_1 \dots i_{k-1} \cdot n} = \frac{1}{n} + \frac{S_{n-1}}{n}$$

یعنی

$$S_n = S_{n-1} + \frac{S_{n-1}}{n} + \frac{1}{n} = (n-1) + \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = n$$

۰۸۳. به ازای $n=1$ ، تبدیل $(a_1) = (0)$ ، با شرط مسأله سازگار است. به ازای $n=4$ ، تبدیل زیر، دارای ویژگی موردنظر است:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 3, 2, 0)$$

n را عددی اول فرض می‌کنیم. بنا بر قضیهٔ چینی دربارهٔ باقی‌مانده‌ها (قضیهٔ ۲۳)، برای هر مقدار $n \dots 2, k$ ، عدد b_k وجود دارد که، برای آن، داشته باشیم:

$$b_k \equiv 0 \pmod{k-1}, \quad b_k \equiv k \pmod{n}$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $c_k = \frac{b_k}{k-1}$ بر n را با a_k نشان می‌دهیم، در این صورت

$$b_k = c_k(k-1) \equiv a_k(k-1) \pmod{n}$$

$a_1 = 1$ می‌گیریم و ثابت می‌کنیم، همهٔ عددهای a_1, a_2, \dots, a_n باهم فرق دارند. در واقع داریم: $a_n = 0$ و $a_k \neq a_n$ ($k=1, \dots, n-1$)، زیرا

$$a_n(n-1) \equiv 0 \pmod{n}, \quad a_1 = 1, \quad a_k(k-1) \equiv k \pmod{n}$$

($k=2, \dots, n-1$)، سپس، اگر برای $a_l = a_k = a$ برقرار باشد، که در آن، $1 < l < k < n$ ، آن وقت داریم:

$$a(kl-k) = a_l(l-1)k \equiv kl \pmod{n},$$

$$a(kl-l) = a_k(k-1)l \equiv kl \pmod{n}$$

$$a(k-1) = a(kl-1) - a(kl-k) \equiv 0 \pmod{n}$$

که ممکن نیست، زیرا

$$(a, n) = (k-1, n) = 1$$

سرانجام، در حالت $a_k = a_1$ ($1 < k < n$)، بازهم دچار تناقض می‌شویم:

$$k-1 = a_k(k-1) \equiv k \pmod{n}$$

به این ترتیب، مجموعه

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

از n عدد مختلف تشکیل شده است و در مجموعه

$$\{0, 1, \dots, n-1\}$$

واقع است و، بنابراین، بر آن منطبق است. ثابت می‌کنیم، تبدیل حاصل، یعنی

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

با شرط مسأله سازگار است. در واقع، داریم:

$$a_1 = 1, \quad a_1 a_2 \dots a_n = 0$$

و به ازای $k = 2, \dots, n-1$ ، عددهای

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_k, \quad 1 \times a_2 a_3 \dots a_k, \quad 2 a_3 \dots a_k, \quad (k-1) a_k, \quad k$$

در تقسیم بر n ، به یک باقی مانده، یعنی

$$a_1 a_2 \dots a_k \equiv k \pmod{n}$$

می‌رسند. بنابراین، مجموعه باقی مانده‌های حاصل از تقسیم عددهای

$a_1, a_2, a_1 a_2, a_1 a_2 a_3, \dots, a_1 a_2 \dots a_n$ بر n ، منطبق است بر مجموعه

$$\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

اکنون، ثابت می‌کنیم، هیچ کدام از عددهای مرکب $n > 4$ ، با شرط

مسأله سازگار نیستند. اگر داشته باشیم: $n = p^2$ ، فرض می‌کنیم $p < n < 2p = q$ ؛
 و در حالت $n \neq p^2$ ، می‌توان عدد n را به صورت pq ($1 < p < q < n$)
 نشان داد در هر دو حالت

$$pq \equiv 0 \pmod{n}$$

فرض می‌کنیم، تبدیل (a_1, a_2, \dots, a_n) وجود داشته باشد، به نحوی که با
 شرط مسأله سازگار باشد. در این صورت

$$a_k \neq 0, \quad (k = 1, \dots, n-1)$$

زیرا در غیر این صورت

$$a_1 \dots a_k \equiv 0 \pmod{n}$$

$$a_1 \dots a_k a_{k+1} \equiv 0 \pmod{n} \quad \text{و}$$

مقدارهای $k, l < n$ را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم: $a_k = p$ و $a_l = q$
 و فرض می‌کنیم:

$$m = \max(k, l)$$

در این صورت

$$a_1 a_2 \dots a_m : a_k a_l$$

و بنابراین

$$a_1 a_2 \dots a_m \equiv 0 \pmod{n}$$

$$a_1 a_2 \dots a_m a_{m+1} \equiv 0 \pmod{n} \quad \text{و}$$

که مخالف با فرض است. به این ترتیب، شرط مسأله، برای عددهای ۱، ۴،
 و، همچنین، همه عددهای اول، صادق است.

۸۴. عدد n به صورت حاصل ضرب $p \cdot q$ از دو عدد $p > 1$ و $q > 1$

است، که نسبت به هم اول اند. برای هر n در $1, 2, \dots, n$ ،

$$m \in \{0, 1, \dots, p-1\}, \quad l \in \{1, 2, \dots, q\}$$

را طوری انتخاب می‌کنیم که، برای آن‌ها، برابری $k = mq + l$ برقرار باشد و فرض می‌کنیم: $i_k = r + 1$ که در آن، r ، باقی‌مانده تقسیم عدد $(mq + lp - 1)$ بر n است. به این ترتیب، گروه عددهای

$$i_1, i_2, \dots, i_n \in \{1, \dots, n\}$$

به دست می‌آید. ثابت می‌کنیم، بین این عددها، عددهای یکسان وجود ندارد. فرض کنید، برعکس، دو اندیس مختلف

$$k_1 = m_1 q + l_1 \quad \text{و} \quad k_2 = m_2 q + l_2$$

وجود داشته باشد که، برای آن‌ها، برابری $i_{k_1} = i_{k_2}$ برقرار باشد. در این صورت، عدد

$$(m_1 q + l_1 p) - (m_2 q + l_2 p) = (m_1 - m_2)q + (l_1 - l_2)p$$

بر $n = pq$ بخش پذیر است؛ ولی عددهای p و q نسبت به هم اول اند. بنا بر این، عدد $(m_1 - m_2)$ بر p و عدد $(l_1 - l_2)$ بر q بخش پذیر است. چون

$$|m_1 - m_2| < p \quad \text{و} \quad |l_1 - l_2| < q$$

بنا بر این باید داشته باشیم: $m_1 - m_2 = l_1 - l_2 = 0$ ؛ از آن جا $k_1 = k_2$ ، که مخالف با فرض ماست. به این ترتیب، گروه

$$(i_1, i_2, \dots, i_n)$$

تبدیلی از عددهای $1, 2, \dots, n$ است. با توجه به متناوب بودن تابع‌های $\sin x$ و $\cos x$ ، اگر مجموع

$$S = \sum_{k=1}^n k \cos \frac{\gamma \pi i_k}{n}$$

را به ترتیب خاصی گروه بندی کنیم، به دست می‌آید:

$$S = \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{l=1}^q (mq + l) \cos \frac{\gamma \pi (mq + lp)}{pq} =$$

$$= \sum_{m=0}^{p-1} mq \sum_{l=1}^q \cos \left(\frac{\gamma \pi m}{p} + \frac{\gamma \pi l}{q} \right) + \sum_{l=1}^q l \sum_{m=0}^{p-1} \cos \left(\frac{\gamma \pi m}{p} + \frac{\gamma \pi l}{q} \right) =$$

$$= \sum_{m=0}^{p-1} m q \left(\cos \frac{\gamma \pi m}{p} \sum_{l=1}^q \cos \frac{\gamma \pi l}{q} - \sin \frac{\gamma \pi m}{p} \sum_{l=1}^q \sin \frac{\gamma \pi l}{q} \right) +$$

$$+ \sum_{l=1}^q l \left(\cos \frac{\gamma \pi l}{q} \sum_{m=0}^{p-1} \cos \frac{\gamma \pi m}{p} - \sin \frac{\gamma \pi l}{q} \sum_{m=0}^{p-1} \sin \frac{\gamma \pi m}{p} \right) = 0$$

زیرا داریم:

$$\sum_{l=1}^q \cos \frac{\gamma \pi l}{q} = \sum_{l=1}^q \sin \frac{\gamma \pi l}{q} = 0,$$

$$\sum_{m=0}^{p-1} \cos \frac{\gamma \pi m}{p} = \sum_{m=0}^{p-1} \sin \frac{\gamma \pi m}{p} = 0$$

[برای اثبات دوبرابری اخیر، کافی است توجه کنیم که، بنا بر قضیه ویت، مجموع عددهای مختلط

$$x_l = \cos \frac{\gamma \pi l}{q} + i \sin \frac{\gamma \pi l}{q} \quad (l = 1, \dots, q)$$

$$y_m = \cos \frac{\gamma \pi m}{p} + i \sin \frac{\gamma \pi m}{p}, \quad (m = 0, \dots, p-1)$$

که ریشه‌های دوچندجمله‌ای $x^q - 1$ و $x^p - 1$ هستند، برابر صفر است. این دوبرابری را با روش مقدماتی تری هم می‌توان ثابت کرد، اگر دستگاه مختصات را روی صفحه در نظر بگیریم، آن وقت نقطه‌های

$$\left(\cos \frac{\gamma \pi j}{N}, \sin \frac{\gamma \pi j}{N} \right), \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

$(N \geq 2)$ ، رأس‌های یک N ضلعی منتظم به مرکز مبدا مختصات را تشکیل می‌دهند. اگر N برداری را در نظر بگیریم که از مرکز N ضلعی منتظم به سمت رأس‌های آن آمده باشند، مجموعی برابر صفر پیدا می‌کنند.

به این ترتیب، ثابت شد: تبدیل

$$(i_1, i_2, \dots, i_n)$$

که در بالا پیدا کردیم، در برابری مطلوب، صدق می کند.

$0.85A$ و B را، به ترتیب، مجموعه‌هایی از عددهای طبیعی می‌گیریم که، رقم‌های آنها، اکیداً صعودی و اکیداً نزولی باشند. مجموع همه عددهای مجموعه‌ای مثل M را با $S(M)$ نشان می‌دهیم. مجموعه B را به دو زیرمجموعه جدا از هم B_0 و B_1 تقسیم می‌کنیم، به نحوی که عددهای زیرمجموعه B_0 به صفر ختم شده باشند و عددهای زیرمجموعه B_1 به صفر ختم نشده باشند. در ضمن

$$S(B) = S(B_0) + S(B_1)$$

اگر عددهای B_0 و B_1 را نظیر هم بگیریم، آن وقت، بین مجموعه‌های B_0 و B_1 ، تناظر یک به یک برقرار خواهد شد؛ در ضمن

$$S(B_0) = 10S(B_1)$$

یعنی

$$S(B) = 11S(B_1)$$

اکنون، اگر عددهای

$$a = \overline{a_1 \dots a_k} \in A, \quad b = \overline{(10 - a_1) \dots (10 - a_k)} \in B_1$$

را نظیر هم قرار دهیم که، در ضمن، داریم:

$$a + b = \frac{10}{9}(10^k - 1)$$

آن وقت، بین دو مجموعه A و B_1 ، تناظر یک به یک برقرار می‌شود. چون، هر عدد متعلق به مجموعه A ، از عدد 123456789 ، با حذف برخی از رقم‌های آن، به دست می‌آید؛ و برای هر مقدار $9, 8, \dots, 2, 1$ در مجموعه A ، درست به مقدار C_9^k عدد k رقمی داریم، بنابراین

$$\begin{aligned} l = S(A) + S(B_1) &= \sum_{k=1}^9 C_9^k \cdot \frac{10}{9}(10^k - 1) = \\ &= \frac{10}{9} \left(\sum_{k=0}^9 C_9^k 10^k - \sum_{k=0}^9 C_9^k \right) = \frac{10}{9} [(1+10)^9 - (1+1)^9] = \\ &= \frac{10}{9}(11^9 - 2^9) \end{aligned}$$

B_p را زیرمجموعه‌ای از مجموعه B می‌گیریم که، عددهای آن، با رقم ۹ آغاز شده باشند، و مجموعه همه بقیه عددهای مجموعه B را، همراه با عدد ۰، با B_p نشان می‌دهیم که، البته، خواهیم داشت:

$$S(B) = S(B_p) + S(B_r)$$

در این صورت، بین عددهای

$$a = \overline{a_1 \dots a_k} \in A \quad \text{و} \quad b = \overline{(9-a_1) \dots (9-a_k)} \in B_p$$

تناظر يك به يك برقرار می‌شود و، درضمن $a+b = 10^k - 1$. بنابراین

$$m = S(A) + S(B_p) = \sum_{k=1}^9 C_9^k (10^k - 1) = 11^9 - 2^9$$

سرانجام، اگر عدد

$$b = \overline{9b_1 \dots b_k} \in B_r$$

را متناظر با عدد

$$a = \overline{(9-b_1) \dots (9-b_k)} \in A$$

به‌ازای $k \geq 1$ و عدد ۰ به‌ازای $k=0$ قرار دهیم، آن وقت، بین مجموعه‌های B_p و $A \cup \{0\}$ ، تناظر يك به يك برقرار می‌شود و درضمن

$$a+b = 10^{k+1} - 1$$

بنابراین

$$n = S(A) + S(B_r) = \sum_{k=0}^9 C_9^k (10^{k+1} - 1) = 10 \times 11^9 - 2^9$$

و

$$m+n = S(A) + S(B_p) + S(A) + S(B_r) = 2S(A) + S(B)$$

به‌این ترتیب، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} S(A) + \frac{1}{11}S(B) = l = \frac{10}{9}(11^9 - 2^9), \\ 2S(A) + S(B) = m+n = 11^{10} - 2^{10} \end{cases}$$

که از آن، به دست می آید:

$$S(A) = \frac{1}{9}(111 - m - n), \quad S(B) = \frac{11}{9}(m + n - 21)$$

در بین مجموعه‌های A و B ، ۹ عضو مشترك وجود دارد که همان عددهای يك رقمی هستند و مجموعی برابر ۴۵ دارند. بنابراین، مجموع مطلوب، برابر است با

$$\begin{aligned} S(A) + S(B) - 45 &= \frac{10}{9}(m + n) - \frac{11}{9}l - 45 = \\ &= \frac{10}{9}(1110 - 210) - \frac{10}{81} \times 1110 + \frac{55}{81} \times 210 - 45 = \frac{80}{81} \times \\ &\quad \times 1110 - \frac{35}{81} \times 210 - 45 \end{aligned}$$

۰۸۶. هر گروه عددهای (a_1, \dots, a_n) ، متناظر است با گروه عددهای

$$b = (b_1, \dots, b_n)$$

از عددهای طبیعی که با برابری‌های زیر تعریف شده باشند:

$$b_i = a_i + a_{i+1} + \dots + a_n, \quad i = 1, \dots, n$$

بنابراین، بین مجموعه‌ی گروه‌های مطلوب و مجموعه‌ی B گروه‌های b با شرط

$$b_1 > b_2 > \dots > b_n$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n = 1979$$

متناظر يك به يك برقرار است. آخرین عدد b_n در گروه b را با $\pi(b)$ ، و بزرگترین عدد s را که برای آن داشته باشیم:

$$b_s = b_1 - s + 1 \quad (*)$$

بسا $\sigma(b)$ نشان می‌دهیم (توجه کنیم: $1 \leq s \leq n$)؛ برابری $(*)$ ، به معنای برابری‌های زیر است:

$$b_1 = b_1 - 1, b_2 = b_2 - 1, \dots, b_s = b_{s-1} - 1$$

α و β را عمل‌هایی، در مجموعه B ، تعریف می‌کنیم، که نتیجه‌های آنها بر گروه $b \in B$ ، گروه‌های تازۀ $\alpha(b)$ و $\beta(b)$ از مجموعه B باشند. فرض می‌کنیم: $\pi(b) \leq \sigma(b)$. در این صورت $b_n \leq n-1$ در غیر این صورت

$$n-1 < b_n \leq \sigma(b) \leq n \implies \sigma(b) = b_n = n$$

یعنی

$$\begin{aligned} 1979 &= b_n + b_{n-1} + \dots + b_1 = n + (n+1) + \dots + (2n-1) = \\ &= \frac{n(3n-1)}{2} \end{aligned}$$

که برای هیچ مقداری از $n \in \mathbb{N}$ برقرار نیست، بنابراین، عمل زیر ممکن است:

$$\alpha(b_1, \dots, b_n) = (b_1 + 1, b_2 + 1, \dots, b_{\pi(b)} + 1, b_{\pi(b)+1}, \dots, b_{n-1})$$

در ضمن

$$\pi(\alpha(b)) = b_{n-1} > b_n = \pi(b) = \sigma(\alpha(b))$$

$\pi(b) > \sigma(b)$ می‌گیریم. در این صورت، این عمل را داریم:

$$\beta(b_1, \dots, b_n) =$$

$$= (b_1 - 1, b_2 - 1, \dots, b_{\sigma(b)} - 1, b_{\sigma(b)+1}, \dots, b_n, \sigma(b))$$

یادآوری کنیم که در حالت $\sigma(b) = n$ ، باید نابرابری $b_n - 1 > \sigma(b)$ برقرار باشد [در غیر این صورت، داریم:

$$n = \sigma(b) < b_n \leq \sigma(b) + 1 = n + 1$$

یعنی

$$b_n = n + 1, b_{n-1} = n + 2, \dots, b_1 = 2n$$

و از آنجا

$$1979 = b_n + b_{n-1} + \dots + b_1 = \frac{n(3n+1)}{2}$$

که برای هیچ مقداری از $n \in \mathbb{N}$ ممکن نیست. درضمن

$$\pi(\beta(b)) = \sigma(b) \leq \sigma\beta(b)$$

مجموعه B را به زوج جمله‌ها تقسیم می‌کنیم: به هر گروه b ، گروه b' را مربوط می‌کنیم، به نحوی که، این گروه b' ، بسته به این که نابرابری $\pi(b) \leq \sigma(b)$ یا $\pi(b) > \sigma(b)$ برقرار باشد، برابر گروه $\alpha(b)$ یا $\beta(b)$ (درضمن، برقراری شرط

$$\beta(\alpha(b)) = b \text{ یا } \alpha(\beta(b)) = b$$

تضمین می‌کند که گروه b' ، همان زوج گروه‌های b ، b' را تشکیل می‌دهد). چون در هر زوج، یکی از گروه‌ها زوج و دیگری فرد است (در نتیجه هر یک از عمل‌های α یا β ، گروه زوج به گروه فرد و برعکس، تبدیل می‌شود)، بنابراین، در مجموعه B ، تعداد گروه‌های زوج، برابر است با تعداد گروه‌های فرد. در نتیجه، همین نتیجه را دربارهٔ مجموعهٔ گروه‌های اصلی

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

هم می‌توان به دست آورد.

۸۷. الف) عددهای a_1, \dots, a_m را در عدد نویسی به مبنای ۲ می‌نویسیم و برخی از آن‌ها را، با اضافه کردن رقم‌های صفر در سمت چپ، به نحوی تکمیل می‌کنیم که همهٔ آن‌ها، طولی برابر k داشته باشند. جدول مستطیلی $m \times k$ را، شامل صفرها و واحدها، طوری تنظیم می‌کنیم که، در آن، به ازای هر مقدار $m, \dots, 1 = i$ ، عدد a_i (در مبنای ۲) در سطر i ام واقع باشد. چون هرستون این جدول، شامل m رقم است. بنابراین تعداد n ، ستون‌های غیرصفر مختلف آن، از $1 - 2^m$ تجاوز نمی‌کند. هر یک از این n ستون را در تناظر با عددی قرار می‌دهیم که، بیان دودوئی آن، تنها در مرتبه‌هایی شامل رقم ۱ باشد که، در آن مرتبه‌ها، جدول شامل ستون‌هایی منطبق بر ستون مفروض باشد. گروه عددهای b_1, \dots, b_n به دست می‌آید که

با شرط مسأله سازگار است. در واقع، چون در هر يك از k مرتبه، رقم ۱ در بیش از يك عدد از گروه

$$(b_1, \dots, b_n)$$

وجود ندارد، هر زیر مجموعه عددهای این گروه، به صورت يك ارزشی، با بیان دودویی مجموع آنها معین می شود. بنابراین، زیر مجموعه های مختلف این گروه عددها، مجموع های مختلفی دارند. سرانجام، اگر برای هر مقدار

$$i \in \{1, \dots, m\}$$

عددهایی از گروه (b_1, \dots, b_n) را جمع کنیم که، در آنها، رقم ۱، تنها در مرتبه های i باشد که عدد a_i در آن مرتبه ها شامل رقم ۱ است، آن وقت، مجموع، برابر همین عدد a_i می شود (توجه کنیم، در همه مرتبه های i که در آنها، عددی از این گروه دارای رقم ۱ است، عدد a_i یا فقط رقم ۱ را دارد و یا فقط رقم ۰ را). چون $n < 2^m$ ، بنا بر این، اثبات حکم کامل می شود. (ب) اثبات را، با استقرا روی مجموع عددهای مفروض

$$N = a_1 + a_2 + \dots + a_m$$

می دهیم. اگر $N = 1$ ، آن وقت $m = 1$ ، $a_1 = 1$ و می توان فرض کرد $b_1 = 1$. اکنون فرض می کنیم، حکم مسأله برای همه گروه عددهایی که مجموعی کمتر از N دارند، درست باشد؛ و (a_1, \dots, a_m) را گروهی از عددها می گیریم که، برای آنها، داشته باشیم:

$$a_1 + \dots + a_m = N$$

گروه عددهای (b_1, \dots, b_n) را، برای گروه (a_1, \dots, a_m) «قابل قبول» می نامیم، به شرطی که $n \leq m$ ، و در ضمن، همه زیر مجموعه های مجموعه

$$\{b_1, \dots, b_n\}$$

مجموع های مختلفی داشته باشند و، در بین این مجموعه ها، همه عددهای a_1, \dots, a_m به دست آید. باید ثابت کنیم، دست کم، يك گروه «قابل قبول» وجود دارد. اگر همه عددهای a_1, \dots, a_m زوج باشند، گروه جدید

a'_1, \dots, a'_m را طوری در نظر می‌گیریم که داشته باشیم:

$$a'_i = \frac{1}{2} a_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

از آن‌جا که

$$a'_1 + \dots + a'_m = \frac{1}{2} N < N$$

بنابر فرض استقرا، گروه عددهای «قابل قبول»

$$(b'_1, \dots, b'_n)$$

برای گروه (a'_1, \dots, a'_m) وجود دارد. در این صورت، گروه

$$(2b'_1, \dots, 2b'_n)$$

برای گروه $(2a'_1, \dots, 2a'_m)$ «قابل قبول» خواهد بود.

اکنون فرض می‌کنیم، در گروه عددهای (a_1, \dots, a_m) دست کم یک عدد فرد وجود داشته باشد. بین عددهای فرد این گروه، کوچکترین عدد را در نظر می‌گیریم. روشن است که، اگر جمله‌های گروه (a_1, \dots, a_m) را شماره‌گذاری کنیم، تغییری در آن ایجاد نمی‌شود، می‌توان این عدد را a_m به حساب آورد. گروه عددهای a'_i را $(i = 1, \dots, m-1)$ به این ترتیب در نظر می‌گیریم که

$$a'_i = \begin{cases} \frac{1}{2} a_i & \text{(وقتی } a_i \text{ زوج باشد)} \\ \frac{1}{2} (a_i - a_m) & \text{(وقتی } a_i \text{ فرد باشد)} \end{cases}$$

گروه $\{a'_i\}$ بیش از $m-1$ عضو ندارد (تعداد عضوهای آن می‌تواند کمتر از $m-1$ هم باشد، وقتی که برای مقادیرهایی از $i \neq j$ داشته باشیم: $a'_i = a'_j$). یادآوری می‌کنیم که، همه عضوهای a'_i ، عددهایی طبیعی‌اند. برای مجموع عددهای گروه $\{a'_i\}$ داریم:

$$a'_1 + \dots + a'_{m-1} \leq \frac{1}{2} (a_1 + \dots + a_{m-1}) \leq a_1 + \dots + a_{m-1} < N$$

بنابراین، طبق فرض استقرا، گروه «قابل قبول» (b'_1, \dots, b'_k) برای گروه $\{a'_i\}$ وجود دارد. ثابت می‌کنیم، گروه

$$(b_1, \dots, b_{k+1})$$

که در آن $b'_i = 2b_i$ ($i = 1, \dots, k$) و $b_{k+1} = a_m$ ، برای گروه

$$(a_1, \dots, a_m)$$

«قابل قبول» است. برای تعداد عضوهای گروه (b_1, \dots, b_{k+1}) داریم:

$$k + 1 \leq m - 1 + 1 = m$$

سپس، توجه می‌کنیم که، تنها عدد فرد در گروه

$$(b_1, \dots, b_{k+1})$$

است؛ همه زیرمجموعه‌های این گروه، مجموع‌های مختلفی دارند. در واقع، فرض کنید، مجموع عددهای دو تا از زیرمجموعه‌ها برابر باشند. اگر هر دو مجموع زوج باشند، به معنای آن است که، هیچ کدام از دو زیرمجموعه، شامل عضو b_{k+1} نیستند، و اگر همه عضوهای این زیرمجموعه‌ها را بر ۲ بخش کنیم، به دو زیرمجموعه از مجموعه

$$\{b'_1, \dots, b'_k\}$$

می‌رسیم که مجموعی برابر دارند و این، مخالف با «قابل قبول» بودن گروه

$$(b'_1, \dots, b'_k)$$

است. اگر هم، مجموع عددهای دو زیرمجموعه از مجموعه

$$\{b_1, \dots, b_{k+1}\}$$

با هم برابر و، در ضمن، برابر عددی فرد باشند، آن وقت، هر دوی آن‌ها باید شامل عضو b_{k+1} باشند و اگر این عضو را از آن‌ها کنار بگذاریم، به دو زیرمجموعه از گروه

$$(b_1, \dots, b_k)$$

می‌رسیم که مجموعی برابر پیدا می‌کنند که بازم، فرض استقرا را نقض خواهد کرد.

این می‌ماند که تحقیق کنیم، هر عدد a_i ($1 \leq i \leq m$)، به صورت مجموعی از عضوهای مختلف گروه

$$(a_1, \dots, b_{k+1})$$

ظاهر می‌شود. عدد a_m ، خود یکی از عضوهای این گروه است. اگر $i < m$ و a_i عددی زوج باشد، آن وقت

$$\frac{1}{2} a_i = a'_i = b'_1 + \dots + b'_p$$

که در آن، عضوهای b'_1, \dots, b'_p از گروه

$$(b'_1, \dots, b'_k)$$

هستند. بنا بر این

$$a_i = 2b'_1 + \dots + 2b'_p = b_1 + \dots + b_p$$

در حالتی که $i < m$ و a_i عددی فرد باشد، داریم:

$$a_i = a_m + 2a'_i = b_{k+1} + 2(b'_1 + \dots + b'_p) = b_{k+1} + b_1 + \dots + b_p$$

و به این ترتیب، حکم مسأله، به طور کامل ثابت شد.

۸۸. فرض می‌کنیم، مجموعه M ، که در صورت مسأله از آن صحبت

شده است، وجود داشته باشد. تعداد عددهایی از مجموعه M را که از $k \in \mathbb{N}$

تجاوز نمی‌کنند، m_k می‌نامیم. در این صورت، تعداد عددهای $a \in M$ ، که در

نا برابری $10 < a \leq k$ صدق کنند، برابر $m_k - m_{10}$ و تعداد زوج عددهای

مختلف از این گونه، برابر

$$C_{m_k - m_{10}}^2 = \frac{1}{2} (m_k - m_{10})(m_k - m_{10} - 1)$$

است. اگر هر زوج از این گونه عددهای $a > b$ را، متناظر با تفاضل آن‌ها،

$a - b$ ، قرار دهیم، آن وقت، همه تفاضلهای حاصل، مختلف خواهند بود.

درواقع، اگر برای دو زوج $a > b$ و $c > d$ ، برابری

$$a - b = c - d$$

برقرار باشد، آن وقت $a + d = c + b$ و، بنا بر شرط ۲)، یا $a = b$ (که درست نیست، زیرا $a > b$)، یا $a = c$ (که از آن جا به دست می آید $b = d$)، یعنی دو زوج برهم منطبق اند). از آن جا که، همه تفاضل های حاصل، از k کوچکترند، باید داشته باشیم:

$$k > C_{m_k - m_{10}}^2 > \frac{1}{4} (m_k - m_{10} - 1)^2$$

ولی $m_{10} \leq 10$ ، بنا بر این

$$m_k < \sqrt{2k} + m_{10} + 1 \leq \sqrt{2k} + 11$$

(برای هر مقدار $\dots, 12, 11, k$). سپس، هر عدد

$$n \in \{2, 3, \dots, 2k\}$$

باید، بنا بر شرط ۱)، به صورت مجموع دو عدد از مجموعه M باشد، درضمن، یا هیچ کدام از این دو عدد از k تجاوز نمی کنند و یا درست یکی از آنها، بزرگتر از k ، ولسی کوچکتر از $2k$ است. بنا بر این، تعداد این گونه زوج عددها، از یک طرف، کمتر از $2k - 1$ نیست و، از طرف دیگر، از

$$\frac{m_k(m_k - 1)}{2} + m_k(m_{2k} - m_k) = \frac{1}{2} m_k(2m_{2k} - m_k - 1) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} m_k(2m_{2k} - m_k)$$

به این ترتیب، به ازای هر مقدار $k > 10$ داریم:

$$m_k(2m_{2k} - m_k) \geq 2k - 2$$

و اگر در نظر بگیریم که

$$m_{2k} < \sqrt{2k} + 11 = \alpha \quad \text{و} \quad m_k < \sqrt{2k} + 11 = \beta < \alpha$$

به دست می آید:

$$\begin{aligned} 4k - 2 &\leq m_k(2\alpha - m_k) = [\alpha - (\alpha - m_k)][\alpha + (\alpha - m_k)] = \\ &= \alpha^2 - (\alpha - m_k)^2 \leq 4k + 44\sqrt{k} + 121 - k(2 - \sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

بنابراین، به ازای هر مقدار $k > 10$ ، سه جمله‌ای درجه دوم

$$f(\sqrt{k}) = (2 - \sqrt{2})^2 k - 44\sqrt{k} - 123$$

باید تنها مقدارهای مثبت را قبول کند که، البته، درست نیست. تناقض حاصل، نشان می‌دهد که، مجموعه M ، با شرط‌هایی که داده شده است، وجود ندارد.

§۵. ویژگی‌های مختلف عددها

۸۹. چون $a, b, c \in \mathbb{Q}$ بنا بر این عدد

$$d = \frac{a-b}{c} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

هم، عددی گویاست، در نتیجه، عددهای

$$\sqrt{a} = \frac{1}{2}(c+d), \sqrt{b} = \frac{1}{2}(c-d)$$

هم، عددهایی گویا هستند.

۹۰. این دو عدد مثبت را در نظر می‌گیریم:

$$a = \sqrt{2} \text{ و } b = \log_{\sqrt{2}} 3$$

در این صورت، عدد

$$a^b = \sqrt{2}^{\log_{\sqrt{2}} 3} = 3$$

عددی طبیعی می‌شود. ثابت می‌کنیم، عدد b ، گنگ است. در واقع، اگر b

عددی گویا باشد، باید داشته باشیم: $b = \frac{p}{q}$ ، که در آن، $p, q \in \mathbb{N}$. از آنجا

$$\frac{p}{q} = 2 \log_2 3 \implies 2^p = 3^{2q}$$

که ممکن نیست.

۱۰۹۱. k را عددی طبیعی می‌گیریم که، برای آن، داشته باشیم:

$$2^k \leq n < 2^{k+1}$$

و سپس، M را حاصل ضرب همهٔ عددهای فردی فرض می‌کنیم که از n تجاوز نمی‌کنند. اکنون هر جمله از مجموع

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

را، در $M \cdot 2^{k-1}$ ضرب می‌کنیم. هر عدد $m \in \mathbb{N}$ را می‌توان به صورت $m = 2^p \cdot q$ نوشت که، در آن، $q \in \mathbb{Z}^+$ عددی فرد است. در ضمن، اگر

$m \leq n$ ، آن گاه $q \leq n$ (زیرا $q = \frac{m}{2^p} \leq n$)، علاوه بر این، اگر $m \neq 2^k$ ،

آن گاه $p < k$ ؛ در واقع، در حالت $p > k$ داریم:

$$m = 2^p \cdot q \geq 2^{k+1} > n$$

و در حالت $p = k$

$$q \neq 1, m = 2^p \cdot q \geq 2^k \times 3 > 2^{k+1} > n$$

به این ترتیب، عدد

$$a_m = \frac{1}{m} \cdot 2^{k-1} \cdot M$$

به ازای هر مقدار $n \dots 2, 1, m$ ، به جز یکی (که برابر 2^k است)، عددی درست است، بنابراین، عدد

$$S \cdot 2^{k-1} \cdot M = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

عددی درست نیست؛ یعنی، مجموع S هم نمی‌تواند برابر عددی درست باشد.

۱۰۹۲. اگر عدد n ، با شرط مسأله سازگار باشد، آن وقت، عددهای

$2n+2$ و $2n+9$ هم با آن شرط سازگار خواهند بود. در واقع، اگر

داشته باشیم:

$$n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$$

که در آن

$$a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{N} \text{ و } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} = 1$$

آن وقت داریم:

$$2n + 2 = 2a_1 + 2a_2 + \dots + 2a_k + 2$$

درضمن

$$\frac{1}{2a_1} + \dots + \frac{1}{2a_k} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_k} \right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

و به همین ترتیب

$$2n + 9 = 2a_1 + \dots + 2a_k + 3 + 6$$

و درضمن

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a_1} + \dots + \frac{1}{2a_k} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_k} \right) + \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

اکنون، با استقرای ریاضی، ثابت می‌کنیم که، هر عدد $n \geq 33$ ، رامی‌توان به صورتی نوشت که مسأله خواسته است. عددهای ۳۳، ...، ۷۳ دارای این ویژگی هستند. فرض می‌کنیم، همهٔ عددهای از ۳۳ تا $n-1$ دارای این ویژگی باشند که، در آن، $n > 73$. اگر n عددی زوج باشد، می‌توان آنرا به صورت $2m+2$ و اگر عددی فرد باشد، به صورت $2m+9$ نوشت که، در آن، $m \in \mathbb{N}$ و

$$n > m \geq \frac{74-9}{2} > 32$$

در هر دو حالت، با توجه به آن چه در ابتدا ثابت کردیم، عدد n با شرط مسأله سازگار است، زیرا عدد m با این شرط سازگار است. حکم، ثابت شد.

۹۳. چون عدد n ، که بر ۱۷ بخش پذیر است، در دستگاه عددنویسی به مبنای ۲، درست سه رقم برابر ۱ دارد (و بقیهٔ رقم‌ها، برابر صفرند)، بنابراین، می‌توان آن را به این صورت نوشت:

$$n = 2^k + 2^l + 2^m$$

که در آن، $k, l, m \in \mathbb{Z}^+$ ، در نابرابری $k < l < m$ صدق می‌کنند. فرض می‌کنیم، عدد n ، در مبنای ۲، کمتر از ۶ رقم برابر صفر داشته باشد. در این صورت $m \leq 7$ و هم‌نهمی

$$n \equiv 0 \pmod{17}$$

نمی‌تواند برقرار باشد، زیرا عدد به صورت 2^i در تقسیم بر ۱۷، وقتی که داشته باشیم: $0 \leq i \leq 7$ ، به ترتیب، به باقی‌مانده‌های ۱، ۲، ۴، ۸، ۱، -۱، -۲، -۴، -۸ می‌رسد و آزمایش نشان می‌دهد که، مجموع هر سه عدد مختلف از این باقی‌مانده‌ها، نمی‌تواند برابر صفر باشد و این، به معنای آن است که عدد n بر ۱۷ بخش پذیر نیست. به این ترتیب، عدد m ، در مبنای ۲، دست کم شش رقم برابر صفر دارد. اگر تعداد رقم‌های صفر، برابر ۷ باشد، آن وقت $m = 9$. در این صورت، عدد n ، نمی‌تواند فرد باشد، زیرا در غیر-این صورت $k = 0$ و

$$2^k + 2^m \equiv 3 \pmod{17}$$

در حالی که، هم‌نهمی

$$2^l \equiv -3 \pmod{17}$$

به ازای هیچ کدام از مقدارهای $l \in \{1, \dots, 8\}$ برقرار نیست. بنابراین، در این حالت، n ، عددی زوج است (چنین عددی، مثلاً برای $k = 1$ ، $l = 6$ ، $m = 9$ ، بر ۱۷ بخش پذیر است).

۹۴. تعداد رقم‌های عدد $m \in \mathbb{N}$ را، در عددنویسی به مبنای ده، با

$f(m)$ نشان می‌دهیم؛ در این صورت، برای عدد مجهول n ، باید داشته باشیم:

$$f(n^3) + f(n^4) = 10$$

علاوه بر این $f(n^3) \geq 4$ ، زیرا در غیر این صورت $n^3 < 1000$ ، $n < 10$ و از آنجا $n^4 < 10000$

$$f(n^3) + f(n^4) < 4 + 5 < 10$$

از طرف دیگر، اگر $f(n^3) > 4$ ، آن وقت $n > 10$ و $n^3 > 1000$ ، یعنی

$$f(n^3) \geq 5, f(n^4) \geq f(n^3) + 1;$$

$$f(n^3) + f(n^4) \geq 5 + 6 > 10$$

بنابراین $f(n^3) = 4$ و $f(n^4) = 6$.

سپس، از نابرابری $n^3 < 10000$ به دست می‌آید: $n < 22$ ، زیرا

$10000 > 22^3$. به همین ترتیب، از نابرابری $n^4 \geq 100000$ ، نتیجه

می‌شود $n > 17$ ، زیرا $17^4 < 100000$. به این ترتیب

$$18 \leq n \leq 21$$

چون باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۹، برابر است با باقی‌مانده تقسیم مجموع رقم‌های آن عدد بر ۹، بنابراین

$$n^4 + n^3 \equiv (0 + 1 + \dots + 9) \pmod{9}$$

بنابراین

$$n(n^3 + 1) \equiv 0 \pmod{9}$$

شرط اخیر، برای عددهای $n = 19$ و $n = 20$ برقرار نیست. عدد $n = 21$ ویژگی مورد نظر مسأله را ندارد، زیرا هر دو عدد 21^3 و 21^4 به رقم ۱ ختم می‌شوند. سرانجام، آزمایش نشان می‌دهد که تنها عدد $n = 18$ با شرط مسأله سازگار است:

$$18^3 = 5832,$$

$$18^4 = 104976$$

۰۹۵. n را عدد مجهول، s را مجموع رقم‌های آن و k را تعداد این رقم‌ها می‌گیریم. در این صورت، باید داشته باشیم:

$$s^5 = n^2, \quad s \leq 9k, \quad n \geq 10^{k-1}$$

که از آن‌ها، به دست می‌آید:

$$9^5 k^5 \geq s^5 = n^2 \geq 10^{2k-2}$$

قرار می‌گذاریم:

$$\frac{9^5 k^5}{10^{2k-2}} = a_k$$

در این صورت، از رابطه

$$\frac{9^5 (k+1)^5}{9^5 k^5} = \frac{(k+1)^5}{k^5} \leq 2^5 < 10^2 = \frac{10^{2(k+1)-2}}{10^{2k-2}}$$

که برای هر مقدار $k \in \mathbb{N}$ برقرار است، نتیجه می‌شود $a_{k+1} < a_k$ ، یعنی دنباله عددهای a_k نزولی است. چون $a_6 < 1$ ، بنابراین، به ازای $k \geq 6$ داریم:

$$9^5 k^5 < 10^{2k-2}$$

یعنی k ، نمی‌تواند مقادیر بزرگتر از ۵ را قبول کند. بنابراین

$$s \leq 9 \times 5 = 45$$

از برابری $s^5 = n^2$ نتیجه می‌شود که، عدد s ، باید برابر مجذور يك عدد طبیعی باشد، زیرا همه عوامل‌های اول در تجزیه s^5 (و بنابراین، در تجزیه s) باید توانی زوج داشته باشند، به این ترتیب، عدد s ، تنها یکی از عددهای ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵ یا ۳۶ می‌تواند باشد. آزمایش نشان می‌دهد که، تنها برای دو مقدار $s = 1$ و $s = 9$ ، مجموع رقم‌های عدد $n = \sqrt{s^5}$ برابر s می‌شود. عدد مجهول، یکی از دو عدد $n = 1$ یا $n = 243$ است.

۰۹۶. فرض می‌کنیم، کسر $\frac{m}{n}$ وجود داشته باشد که، در آن، $m, n \in \mathbb{Z}$ و

$100 < n \leq m$ و در ضمن، بیان دهمی آن، به این صورت باشد:

$$\frac{m}{n} = 0/a_1 a_2 \dots a_k 167 a_{k+1} \dots$$

که در آن، $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots$ رقم‌هایی دلخواهند. در این صورت،

برای عدد $p = 10^k \cdot \frac{m}{n}$ داریم:

$$p - [p] = 0/167 a_{k+1} \dots$$

و بنابراین

$$0/167 \leq \frac{10^k m - [p]n}{n} < 0/168$$

قرار می‌گذاریم:

$$q = 10^k m - [p]n \in \mathbf{Z}$$

در این صورت، به دست می‌آید:

$$1/002 \leq \frac{6q}{n} < 1/008$$

بنابراین، باید داشته باشیم:

$$0 < 0/1002 \leq \frac{6q}{n} - 1 = \frac{6q - n}{n} < 0/008 < \frac{1}{100}$$

که از آن‌جا، به دست می‌آید:

$$0 < 6q - n < \frac{n}{100} \leq 1$$

یعنی، عدد $6q - n$ نمی‌تواند عددی درست باشد. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۹۷. برخلاف حکم مسأله، فرض می‌کنیم، عددهای طبیعی n و m و k

وجود داشته باشند، به نحوی که داشته باشیم:

$$2^{2^n} + 1 = m^5 - k^5$$

و در ضمن، عدد

$$m^5 - k^5 = (m - k)(m^4 + m^3k + m^2k^2 + mk^3 + k^4)$$

عددی اول باشد. در این صورت $m - k = 1$ و

$$2^{2^n} + 1 = (k + 1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$$

به این ترتیب، باید عدد

$$2^{2^n} = 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)$$

بر 5 بخش پذیر باشد، که ممکن نیست. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را، ثابت می کند.

۹۸. فرض می کنیم، به ازای مقداری از $n \in \mathbb{Z}$ ، عدد

$$2^{n-1}(2^n - 1)$$

برابر مکعب يك عدد درست باشد. توجه می کنیم که، در این عدد، توان ۲، برابر است با $n - 1$ (زیرا عامل $(2^n - 1)$ بر ۲ بخش پذیر نیست). بنابراین، باید داشته باشیم:

$$n - 1 = 3k \Rightarrow n = 3k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

ولی، در این صورت، عدد

$$2^{n+1} - 1 = 2^{3k+2} - 1 = 4(2^k + 1)^k - 1 \equiv 3 \pmod{7}$$

نمی تواند برابر با مکعب يك عدد درست باشد، زیرا باقی مانده مکعب هر عدد درست بر ۷، تنها می تواند یکی از عددهای ۰، ۱ یا ۶ باشد. در واقع

$$(7m)^3 \equiv 0 \pmod{7}; \quad (7m \pm 1)^3 \equiv \pm 1 \pmod{7};$$

$$(7m \pm 2)^3 \equiv \pm 1 \pmod{7}; \quad (7m \pm 3)^3 \equiv \mp 1 \pmod{7}$$

به این ترتیب، نمی توان عدد $n \in \mathbb{Z}$ را طوری پیدا کرد که، به ازای آن، هر دو عدد $2^{n+1} - 1$ و $2^n - 1$ مکعب عددهایی درست باشند. ۰۹۹ باید ثابت کنیم، از نابرابری $n\sqrt{v} - m > 0$ می توان نابرابری

$$n\sqrt{v} - m > \frac{1}{m} \quad \text{اگر } (n, m \in \mathbb{N}).$$

$$n\sqrt{v} - m > 1$$

آن وقت، به طور مسلم، نابرابری $n\sqrt{v} - m > \frac{1}{m}$ برقرار خواهد بود. حالت

$$0 < n\sqrt{v} - m < 1$$

را در نظر می گیریم (برابری $n\sqrt{v} - m = 1$ ممکن نیست، زیرا، با برقراری این برابری، باید عدد $\sqrt{v} = \frac{1+m}{n}$ عددی گویا باشد). توجه می کنیم که، عدد طبیعی

$$vn^2 - m^2 = (n\sqrt{v} - m)(n\sqrt{v} + m)$$

نمی تواند برابر ۱ یا ۲ باشد، زیرا در تقسیم m^2 بر v ، نمی توان به باقی مانده ای برابر ۶ یا ۵ رسید؛ در واقع

$$(vk)^2 \equiv 0 \pmod{v}; \quad (vk \pm 1)^2 \equiv 1 \pmod{v};$$

$$(vk \pm 2)^2 \equiv 4 \pmod{v}; \quad (vk \pm 3)^2 \equiv 9 \pmod{v}$$

بنابراین $vn^2 - m^2 \geq 3$ و بنابراین

$$n\sqrt{v} - m \geq \frac{3}{n\sqrt{v} + m} > \frac{1}{m}$$

زیرا

$$3m \geq 2m + 1 > 2m + (n\sqrt{v} - m) = n\sqrt{v} + m$$

حکم مسأله، به طور کامل ثابت شد.

۰۱۰۰ ثابت می‌کنیم، عدد

$$m = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{1980} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{1980}$$

عددی است درست و رقم آخر آن (رقم یکان) را پیدامی‌کنیم. قرار می‌گذاریم:

$$a_n = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2n} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2n} = (5 + 2\sqrt{6})^n + (5 - 2\sqrt{6})^n$$

در این صورت، به ازای هر مقدار $n \in \mathbb{Z}^+$ داریم:

$$a_{n+2} = 10a_{n+1} - a_n$$

درواقع، اگر فرض کنیم:

$$(5 + 2\sqrt{6})^n = \alpha, \quad (5 - 2\sqrt{6})^n = \beta$$

آن وقت، به دست می‌آید:

$$a_n = \alpha + \beta, \quad a_{n+1} = (5 + 2\sqrt{6})\alpha + (5 - 2\sqrt{6})\beta,$$

$$a_{n+2} = (5 + 2\sqrt{6})^2\alpha + (5 - 2\sqrt{6})^2\beta = (49 + 20\sqrt{6})\alpha +$$

$$+ (49 - 20\sqrt{6})\beta = (50 + 20\sqrt{6})\alpha + (50 - 20\sqrt{6})\beta -$$

$$-(\alpha + \beta) = 10a_{n+1} - a_n$$

از آن جا که، عددهای $a_0 = 2$ و $a_1 = 10$ ، عددهایی درست‌اند، بنابراین

به ازای $n \in \mathbb{Z}^+$ داریم: $a_n \in \mathbb{Z}$ ، و به جز آن، هر یک از عددهای

$$a_n + a_{n+2} = 10a_{n+1}$$

بر ۱۰ بخش پذیر است. بنابراین، هر یک از عددهای

$$a_{n+4} - a_n = (a_{n+4} + a_{n+2}) - (a_{n+2} + a_n)$$

هم بر ۱۰ بخش پذیر است، یعنی عددهای

$$a_2, a_6, a_{10}, \dots, a_{1980}$$

در تقسیم بر ۱۰، به یک باقی مانده می‌رسند. چون $a_2 = 98$ ، بنابراین عدد

a_{1980} هم، در مبنای عددنویسی دهدهی، به رقم ۸ ختم می‌شود.

سرانجام، از بر آورد

$$m = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{1980} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{1980} > (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{1980} > \\ > m - (0/5)^{1980} > m - 0/1$$

معلوم می شود که رقم های یکان و دهگان عدد

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{1980}$$

در عدد نویسی دهدهی، به ترتیب، برابر ۷ و ۹ است.

۰۱۰۱. اگر از بسط دو جمله ای استفاده کنیم، داریم:

$$(\sqrt{m} \pm \sqrt{m-1})^n = \sum_{i=0}^n C_n^i (\sqrt{m})^{n-i} (\pm \sqrt{m-1})^i$$

در حالت $n = 2j$ ($j \in \mathbb{N}$) به دست می آید:

$$(\sqrt{m} \pm \sqrt{m-1})^n = \sum_{i=0}^j C_n^i (\sqrt{m})^{2j-2i} (\sqrt{m-1})^{2i} \pm$$

$$\pm \sum_{i=1}^j C_n^{2i-1} (\sqrt{m})^{2j-2i+1} (\sqrt{m-1})^{2i-1} =$$

$$= \sum_{i=0}^j C_n^{2i} m^{j-i} (m-1)^i \pm \sqrt{m(m-1)} \sum_{i=1}^j C_n^{2i-1} m^{j-i} (m-1)^{i-1}$$

$$= a \pm b \sqrt{m(m-1)}$$

که در آن $a, b \in \mathbb{Z}^+$ ، در حالت $n = 2j - 1$ ($j \in \mathbb{N}$)، داریم:

$$(\sqrt{m} \pm \sqrt{m-1})^n = \sum_{i=0}^{j-1} C_n^{2i} (\sqrt{m})^{2j-1-2i} (\sqrt{m-1})^{2i} \pm$$

$$\pm \sum_{i=1}^j C_n^{2i-1} (\sqrt{m})^{2j-2i} (\sqrt{m-1})^{2i-1} =$$

$$= \sqrt{m} \sum_{i=0}^{j-1} C_n^{2i} m^{j-i-1} (m-1)^i \pm$$

$$\pm \sqrt{m-1} \sum_{i=1}^j C_n^{2i-1} m^{j-i} (m-1)^{i-1} = c\sqrt{m} \pm d\sqrt{m-1}$$

که در آن $d, c \in \mathbb{Z}^+$ در هر دو حالت داریم:

$$(\sqrt{m} \pm \sqrt{m-1})^n = \sqrt{k} \pm \sqrt{l}$$

که در آن $l \in \mathbb{Z}^+$ و k در ضمن

$$\begin{aligned} k-l &= (\sqrt{k} + \sqrt{l})(\sqrt{k} - \sqrt{l}) = \\ &= (\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^n (\sqrt{m} - \sqrt{m-1})^n = \\ &= [(\sqrt{m})^2 - (\sqrt{m-1})^2]^n = 1 \end{aligned}$$

بنابراین

$$l = k - 1 \quad \text{و} \quad (\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^n = \sqrt{k} + \sqrt{k-1}$$

۱۰۴. عدد درست $\frac{1}{\varepsilon} > N$ را انتخاب می‌کنیم و هر زوج عدد

$$x, y \in [0, 1]$$

را، متناظر با زوج عدد u و v قرار می‌دهیم که با دستورهای زیر تعریف شده باشند:

$$u = [Nx], \quad v = [Ny]$$

در این صورت، اگر دو زوج (x_1, y_1) و (x_2, y_2) ، متناظر با یک زوج (u, v) باشند، آن وقت

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &= \left| \frac{1}{N}(u + \{Nx_1\}) - \frac{1}{N}(u + \{Nx_2\}) \right| = \\ &= \frac{1}{N} \left| \{Nx_1\} - \{Nx_2\} \right| < \frac{1}{N} < \varepsilon \end{aligned}$$

به همین ترتیب: $|y_1 - y_2| < \varepsilon$ چون

$$u, v \in \{0, \dots, N-1\}$$

بنابراین، تعداد همه زوج‌های (u, v) ، برابر است با N^2 . مجموعه $(N^2 + 1)$ زوج مقادیرهای

$$x = \{la\}, y = \{lb\}, (l = 0, 1, \dots, N^2)$$

را در نظر می‌گیریم. بنا بر اصل دیریکله (قضیه ۱)، دست کم دو زوج از این مجموعه (مثلاً، به ازای $l = j$ و $l = j$ و $i > j$)، متناظر با یک زوج (u, v) خواهند بود. بنا بر این، اگر فرض کنیم:

$$n = i - j, k = [ia] - [ja], m = [ib] - [jb]$$

آن وقت، به نابرابری‌های مورد نظر می‌رسیم:

$$|na - k| = |(ia - [ia]) - (ja - [ja])| = |\{ia\} - \{ja\}| < \varepsilon,$$

$$|nb - m| = |(ib - [ib]) - (jb - [jb])| = |\{ib\} - \{jb\}| < \varepsilon$$

یادداشت. جواب، تعبیر هندسی جالبی دارد. مربع

$$K = \{(x, y) | 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}$$

را در صفحه مختصات در نظر می‌گیریم و آن را، به N^2 مربع به ضلع $\frac{1}{N}$

تقسیم می‌کنیم، با توجه به راه حل، دو زوج مقادیرهای x_1, y_1 و x_2, y_2 وقتی با یک زوج عددهای درست u, v متناظرند که، نقطه‌های (x_1, y_1) و (x_2, y_2) در یکی از این مربع‌های جزئی قرار گیرند.

۱۰۳ ثابت می‌کنیم، برای هر مقدار $k \in \mathbb{N}$ ، بی‌نهایت عدد $m \in \mathbb{N}$ وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم:

$$5^m \equiv 1 \pmod{2^k}$$

درواقع، بین عددهای

$$5^0, 5^1, 5^2, \dots, 5^{2^k}$$

می‌توان دو عدد 5^p و 5^q ($p > q$) پیدا کرد، به نحوی که در تقسیم بر 2^k ، به یک باقی‌مانده برسند. در این صورت، تفاضل آن‌ها

$$5^p - 5^q = 5^q(5^{p-q} - 1)$$

بر 2^k بخش پذیر می‌شود، یعنی $5^{p-q} - 1$ و همه عددهای به صورت

$$5^{r(p-q)} - 1, (r \in \mathbb{N})$$

بر 2^k بخش پذیری دارند. به این ترتیب، برای هر مقدار $m = r(p-q)$ و $r \in \mathbb{N}$ داریم:

$$5^m \equiv 1 \pmod{2^k}$$

و از آنجا

$$5^{m+k} \equiv 5^k \pmod{10^k}$$

یعنی، k رقم آخر عدد 5^{m+k} ، در عدد نویسی دهدهی، عدد 5^k را تشکیل می‌دهند. فرض کنید، عدد k ، در نابرابری

$$2^k > 10^{1976}$$

صدق کند، در این صورت، عدد

$$5^k = \frac{10^k}{2^k} < 10^{k-1976}$$

شامل رقم‌هایی است که، تعداد آن‌ها، از $k - 1976$ بیشتر نیست. بنا بر این، بین k رقم آخر عدد 5^{m+k} ، تنها $k - 1976$ رقم آخر، می‌توانند غیر صفر باشند، و بقیه 1976 رقم (که در ردیف هم قرار دارند) برابر صفرند. حکم، ثابت شد.

۱۰۴. ابتدا، با استقرای روی $z \in \mathbb{Z}^+$ ، ثابت می‌کنیم، عدد $5^{2^z} - 1$ بر 2^{z+2} بخش پذیر، ولی بر 2^{z+3} بخش ناپذیر است. برای $z = 0$ داریم:

$$5^{2^0} - 1 = 5 - 1 = 4$$

یعنی، برای $z = 0$ ، حکم مطلوب درست است.

اکنون، فرض می‌کنیم، برای مقداری از $z \geq 0$ عدد $5^{2^z} - 1$ بر 2^{z+2} بخش پذیر و بر 2^{z+3} بخش ناپذیر باشد، در این صورت، عدد

$$5^{2^{z+1}} - 1 = (5^{2^z} - 1)(5^{2^z} + 1)$$

بر 2^{z+3} بخش پذیر و بر 2^{z+4} بخش ناپذیر است، زیرا

$$5^{2^z} + 1 = (4 + 1)^{2^z} + 1 \equiv 2 \pmod{4}$$

حالا، حکم مسأله را، با استقرا روی $m \in \mathbb{N}$ ، ثابت می‌کنیم. به ازای $m = 1$ ، حکم درست است، زیرا آخرین رقم فرد ۵، در عدد 5^n ، برای $n > 1$ ، همیشه متناظر است با رقم زوج ۲ که قبل از آن واقع است.

اکنون، فرض کنید، حکم مسأله، برای مقاداری از $m \geq 1$ درست باشد، یعنی بی‌نهایت عدد $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که، به ازای هر کدام از آن‌ها، عدد 5^n به $m+1$ رقم ختم شده باشد که یک‌درمیان فرد و زوج باشند. اگر رقم‌های $(m+2)$ امین و $(m+1)$ امین (از طرف راست)، در عدد 5^n ، یکی فرد و دیگری زوج باشد، آن وقت فرض می‌کنیم $k = n$. در غیر این صورت $k = n + 2^{m-1}$ می‌گیریم که، در این صورت، داریم:

$$5^k - 5^n = 5^{n-(m+2)}(5^{2^{m-1}} - 1) \equiv 2^{m+1} \pmod{2^{m+2}}$$

چون عدد $5^{2^{m-1}} - 1$ بر 2^{m+1} بخش پذیر و بر 2^{m+2} بخش ناپذیر است، بنابراین

$$5^k - 5^n \equiv 5 \times 10^{m+1} \pmod{10^{m+2}}$$

یعنی $(m+1)$ رقم آخر در دو عدد 5^k و 5^n برهم منطبق اند. ولی رقم $(m+2)$ ام آن‌ها، از نظر فرد و زوج بودن، باهم فرق دارند. به این ترتیب، عدد 5^k ساخته شد (و چون $5^k \geq 5^n$ ، تعداد این‌گونه عددها، بی‌نهایت است)، یعنی حکم، برای $m+1$ هم، درست است. مسأله حل شد.

۱۰۵. نقطه‌ای در درون مستطیل در نظر می‌گیریم، فاصله آن را تا دو ضلع روبه‌روی مستطیل، x_1 و x_2 و فاصله آن را تا دو ضلع دیگر روبه‌رو، y_1 و y_2 می‌نامیم. در این صورت، با توجه به فرض

$$A = x_1 + x_2 \quad \text{و} \quad B = y_1 + y_2$$

عددهایی فرد هستند. فرض می‌کنیم، عددهای

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{Z}$$

وجود داشته باشند، به نحوی که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$x_i^2 + y_j^2 = a_{ij}$$

(چه این جا و چه بعد از این: $i, j = 1, 2$). قرار می‌گذاریم:

$$u_i = x_i^1 A \cdot B, \quad v_j = y_j \cdot A \cdot B$$

در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &= (x_1 - x_2)AB = (x_1^2 - x_2^2)B = \\ &= [(x_1^2 + y_1^2) - (x_2^2 + y_2^2)]B = (a_{11}^2 - a_{21}^2)B = C, \\ u_1 + u_2 &= (x_1 + x_2)AB = A^2 B = D \end{aligned}$$

به همین ترتیب

$$v_1 - v_2 - (a_{11}^2 - a_{21}^2)A = E, \quad v_1 + v_2 = AB^2 = F$$

و سرانجام

$$u_i^2 + v_j^2 = (x_i^2 + y_j^2)A^2 B^2 = a_{ij}^2 A^2 B^2 = b_{ij}^2$$

در ضمن، عددهای C, E و b_{ij} درست و عددهای D و F فرد هستند. فرض می‌کنیم، همه عددهای u_i و v_j ، درست باشند. در این صورت، یکی از دو عدد u_1 و u_2 ، و همچنین، یکی از دو عدد v_1 و v_2 ، فرد است (زیرا، مجموع آنها، عددی است فرد). این دو عدد فرد را u و v و مجموع مجذورهای آنها را b^2 می‌نامیم. داریم:

$$u^2 \equiv 1 \pmod{4}, \quad v^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

در نتیجه، برابری

$$u^2 + v^2 = b^2$$

ممکن نیست، زیرا

$$b^2 \not\equiv 2 \pmod{4}$$

تناقض حاصل، نشان می‌دهد که، همه عددهای u_i و v_j نمی‌توانند عددهایی درست باشند. بنابراین، دست کم، یکی از عددهای درست

$$U_i = 2u_i, \quad V_j = 2v_j, \quad (2u_i = D \pm C, \quad 2v_j = F \pm E)$$

فرد است. مثلاً U_1 را عددی فرد می گیریم (حالاتی دیگر را هم، به همین ترتیب، می توان بررسی کرد). در این صورت، از برابری

$$u_1^2 + v_1^2 = b_1^2$$

به دست می آید:

$$U_1^2 + V_1^2 = 4b_1^2$$

که ممکن نیست، زیرا

$$U_1^2 \equiv 1 \pmod{4}, \quad 4b_1^2 \equiv 0 \pmod{4},$$

در حالی که $V_1^2 \not\equiv 3 \pmod{4}$.

اثبات کامل شد.

۱۰۶. فرض می کنیم، چنین هرمی وجود داشته باشد. ضلع مربع قاعده را g و ارتفاع هرم را h می گیریم. در این صورت، طول هر یک از یال ها، مقدار مساحت کل و اندازه حجم هرم، به ترتیب برابرند با

$$f = \sqrt{h^2 + 2\left(\frac{g}{2}\right)^2}, \quad s = g^2 + 2g\sqrt{h^2 + \left(\frac{g}{2}\right)^2}, \quad v = \frac{1}{3}g^2h$$

چون g ، f ، s و v ، عددهایی طبیعی هستند، بنابراین عددهای

$$x = g^2, \quad y = 6v, \quad z = g(s - g^2), \quad u = 2g^2f$$

هم باید طبیعی باشند و، درضمن، داشته باشیم:

$$x^2 + y^2 = g^6 + 36v^2 = 4g^4 \left[h^2 + \left(\frac{g}{2}\right)^2 \right] = g^2(s - g^2)^2 = z^2,$$

$$x^2 + z^2 = g^6 + 4g^4 \left[h^2 + \left(\frac{g}{2}\right)^2 \right] = 4g^4 \left[h^2 + 2\left(\frac{g}{2}\right)^2 \right] = u^2$$

بنابراین، باید دستگاه

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x^2 + z^2 = u^2 \end{cases}$$

در مجموعه عددهای طبیعی، جواب داشته باشد. (x_0, y_0, z_0, u_0) را، یکی از این جوابها فرض می‌کنیم، به نحوی که x_0 ، کمترین مقدار ممکن برای $x \in \mathbb{N}$ باشد. در این صورت، عددهای x_0, y_0, z_0, u_0 ، دو به دو نسبت به هم اول می‌شوند. در واقع، اگر دو تا از این عددها، بر عددی مثل p بخش پذیر باشند، آن وقت از برابری‌های

$$x_0^2 + y_0^2 = z_0^2, \quad x_0^2 + z_0^2 = u_0^2, \quad y_0^2 + u_0^2 = 2z_0^2$$

نتیجه می‌شود که دو عدد دیگر هم، باید بر p بخش پذیر باشند. و لسی در این صورت

$$\left(\frac{x_0}{p}, \frac{y_0}{p}, \frac{z_0}{p}, \frac{u_0}{p} \right)$$

هم، جوابی از دستگاه است و، در ضمن، $\frac{x_0}{p} < x_0$ ، که نوع انتخاب x_0 را نقض می‌کند. به جز اینها، عدد x_0 زوج و، بنابراین، عددهای y_0, z_0, u_0 فردند. در واقع، اگر x_0 فرد باشد؛ آن گاه

$$x_0^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

و عدد $u_0^2 = 2x_0^2 + y_0^2$ ، در تقسیم بر 4، به باقی‌مانده 2 یا 3 می‌رسد (با توجه به زوج بودن عدد y_0) که ممکن نیست. از برابری

$$x_0^2 = z_0^2 - y_0^2$$

به دست می‌آید:

$$\left(\frac{x_0}{2} \right)^2 = \frac{z_0 + y_0}{2} \cdot \frac{z_0 - y_0}{2}$$

در ضمن، عددهای طبیعی $\frac{1}{2}(z_0 + y_0)$ و $\frac{1}{2}(z_0 - y_0)$ نسبت به هم اول اند، زیرا در غیر این صورت، باید داشته باشیم:

$$(z_0, y_0) = (z_0, z_0 - y_0) \geq (z_0, \frac{z_0 - y_0}{2}) = \\ = (z_0 - \frac{z_0 - y_0}{2}, \frac{z_0 - y_0}{2}) = (\frac{z_0 + y_0}{2}, \frac{z_0 - y_0}{2}) > 1$$

یعنی، باید z_0 و y_0 نسبت به هم، اول نباشند. بنا بر این، عددهای $\frac{1}{2}(z_0 + y_0)$ و $\frac{1}{2}(z_0 - y_0)$ به ترتیب، مجذور دو عدد $k, l \in \mathbb{N}$ هستند که نسبت به هم اول اند، در نتیجه

$$x_0 = 2kl, \quad y_0 = k^2 - l^2, \quad z_0 = k^2 + l^2$$

به همین ترتیب، از برابری

$$x_0^2 = u_0^2 - z_0^2$$

به دست می آید:

$$x_0 = 2mn, \quad z_0 = m^2 - n^2, \quad u_0 = m^2 + n^2$$

برای عددهایی مثل $m, n \in \mathbb{N}$ به این ترتیب، به این دستگاه می رسیم:

$$\begin{cases} kl = mn \\ k^2 + l^2 = m^2 - n^2 \end{cases}$$

اگر فرض کنیم $(k, m) = a$ ، آن وقت

$$k = ab, \quad m = ac, \quad a, b, c \in \mathbb{N}, \quad (b, c) = 1$$

برابری $kl = mn$ به صورت $abl = acn$ درمی آید، از آنجا $bl = cn$

زیرا bl بر c بخش پذیر است، ولی $(b, c) = 1$. در نتیجه

$$bcd = cn, \quad \text{در ضمن، از شرط}$$

$$1 = (k, l) = (ab, cd)$$

به دست می آید: $(a, d) = 1$. سپس، داریم:

$$a^2 b^2 + c^2 d^2 = a^2 c^2 - b^2 d^2$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$(a^2 + d^2)(b^2 + c^2) = 2a^2 c^2$$

و چون

$$(a^2 + d^2, a^2) = (d^2, a^2) = 1; (b^2 + c^2, c^2) = (b^2, c^2) = 1$$

بنابراین، شرط اخیر، تنها در دو حالت زیر برقرار است:

$$\begin{cases} a^2 + d^2 = 2c^2 \\ b^2 + c^2 = a^2 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} a^2 + d^2 = c^2 \\ b^2 + c^2 = 2a^2 \end{cases}$$

در این حالت‌ها، به ترتیب، داریم:

$$\begin{cases} b^2 + d^2 = c^2 \\ b^2 + c^2 = a^2 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} d^2 + b^2 = a^2 \\ d^2 + a^2 = c^2 \end{cases}$$

از این جا معلوم می‌شود که، یکی از گروه‌های

$$(b, d, c, a) \quad \text{یا} \quad (d, b, a, c)$$

همراه با گروه

$$(x_0, y_0, z_0, u_0)$$

در دستگاه اصلی صدق می‌کند. چون $x_0 = 2mn = 2mbd$ بنا بر این $d < x_0$ و $b < x_0$ که با انتخاب x_0 متناقض است. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۱۰۷. ابتدا حکم مورد نظر را، برای مقادیرهای

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

ثابت می‌کنیم، یک چند جمله‌ای می‌سازیم که درجه آن، از $(n-1)$ تجاوز نکند و در هر نقطه a_i ($i = 1, 2, \dots, n$)، مقدار a_i^k را قبول کند. بنا بر دستور لاگرانژ (قضیه ۶۲ را ببینید)، این چند جمله‌ای، به این صورت است:

$$P(x) = \sum_{i=1}^n a_i^k \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{x - a_j}{a_i - a_j} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i^k}{p_i} \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (x - a_j)$$

که ضریب x^{n-1} در آن، برابر $\sum_{i=1}^n \frac{a_i^k}{p_i}$ است. از طرف دیگر، چند جمله‌ای

$P'(x)$ بس چند جمله‌ای x^k منطبق است، بنا بر این، برای $k < n-1$ ، این

ضریب برابر صفر و به ازای $k = n-1$ ، برابر واحد است. به این ترتیب،

ثابت شد که، عدد $\sum_{i=1}^n \frac{a_i^k}{p_i}$ ، برای هر یک از مقادیرهای $k = 0, 1, \dots, n-1$ ،

عددی درست است.

اکنون ثابت می‌کنیم، اگر برای عدد $k \geq n$ و عددهای درست

b_1, \dots, b_n داشته باشیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1^{k-1}}{p_1} + \frac{a_2^{k-1}}{p_2} + \dots + \frac{a_n^{k-1}}{p_n} = b_1 \\ \frac{a_1^{k-2}}{p_1} + \frac{a_2^{k-2}}{p_2} + \dots + \frac{a_n^{k-2}}{p_n} = b_2 \\ \dots \\ \frac{a_1^{k-n}}{p_1} + \frac{a_2^{k-n}}{p_2} + \dots + \frac{a_n^{k-n}}{p_n} = b_n \end{array} \right. \quad (1)$$

آن وقت، عدد

$$b_0 = \frac{a_1^k}{p_1} + \frac{a_2^k}{p_2} + \dots + \frac{a_n^k}{p_n}$$

عددی درست است. در این صورت، بنا بر نظام استقرای ریاضی، حکم مطلوب،

برای هر مقدار $k \in \mathbb{N}$ ثابت می‌شود. چند جمله‌ای

$$x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_n$$

را در نظر می‌گیریم که، ریشه‌های آن، عبارتند از عددهای a_1, a_2, \dots, a_n .

ضریب‌های c_1, \dots, c_n این چند جمله‌ای، بنا به قضیهٔ دیت، عدهایی درست هستند؛ در ضمن، برای هر $n \geq 1, 2, \dots$ داریم:

$$a_j^n = - \sum_{i=1}^n c_i a_j^{n-i}$$

اگر در دستگاه (۱)، برابری اول را در c_1 ، برابری دوم را، در c_2 ، ... و برابری آخر را در c_n ضرب و، سپس، برابری‌های حاصل را، با هم جمع کنیم، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c_i b_i &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i \frac{a_j^{k-i}}{p_j} = \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{k-n}}{p_j} \sum_{i=1}^n c_i a_j^{n-i} = \\ &= - \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{k-n}}{p_j} a_j^n = - \sum_{j=1}^n \frac{a_j^k}{p_j} = -b_0. \end{aligned}$$

یعنی، عدد

$$b_0 = - \sum_{i=1}^n c_i b_i$$

عددی درست است.

فصل دوم

معادله و نامعادله

§ ۶. معادله‌ها و دستگاه‌ها

۱۰۸. عدد $x = \frac{1}{3}$ ، جوابی از معادلهٔ مفروض است. ثابت می‌کنیم،

این معادله، جواب دیگری ندارد. تابع‌های

$$y_1(x) = x^2 \text{ و } y_2(x) = 3x + 1$$

به ازای $x > -\frac{1}{3}$ ، مقدارهای مثبت را می پذیرند و صعودی هستند، بنابراین، حاصل ضرب آن‌ها هم، تابعی صعودی است. به این ترتیب، معادله مفروض، در بازه $(-\frac{1}{3} + \infty)$ نمی تواند بیش از یک جواب داشته باشد. سپس، به ازای $x \leq -\frac{1}{3}$ داریم:

$$y_1(x) > 0 \text{ و } y_2(x) \leq 0$$

یعنی $y_1(x)y_2(x) \leq 0$. بنابراین، معادله مفروض، در بازه $(-\infty, -\frac{1}{3}]$ جواب ندارد. تنها جواب معادله، $x = \frac{1}{3}$ است.

۱۰۹. فرض می کنیم:

$$f(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$$

بدون این که به کلی بودن مطلب، لطمه ای وارد شود، می توان در نظر گرفت:

$$a \leq b \leq c$$

اگر $a = b$ یا $b = c$ ، آن وقت $f(b) = (b-a)(b-c) = 0$. اگر $a < b < c$ ، آن وقت

$$f(b) < 0 \text{ و } f(a) = (a-b)(a-c) > 0$$

چون $f(x)$ ، تابعی پیوسته است، بنابراین، عدد $x_0 \in (a, b)$ پیدا می شود که برای آن داشته باشیم: $f(x_0) = 0$.

۱۱۰. ثابت می کنیم، تابع

$$f(x) = x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 16$$

درست در دو نقطه، برابر صفر می شود. مشتق این تابع، چنین است:

$$f'(x) = 4x^3 + 15x^2 + 12x - 4 = (x+2)^2(4x-1)$$

این مشتق، به ازای $x < -2$ و $x < \frac{1}{4}$ و $-2 < x < \frac{1}{4}$ منفی، و به ازای $x > \frac{1}{4}$ مثبت است. بنابراین، تابع $f(x)$ در بازه $(-\infty, \frac{1}{4})$ نزولی و در بازه $(\frac{1}{4}, +\infty)$ صعودی است. چون

$$f(-10) > 0, \quad f(10) > 0, \quad f\left(\frac{1}{4}\right) < f(0) < 0$$

بنابراین، تابع $f(x)$ در هر یک از این بازه‌ها، یکبار برابر صفر می‌شود و معادله $f(x) = 0$ درست دو جواب دارد.

۱۱۱. اگر فرض کنیم $c = a^{\frac{1}{b}} > 1$ ، معادله مفروض، به صورت معادله

$$c^x = x \text{ در می‌آید. مشتق تابع } f(x) = c^x - x \text{، یعنی}$$

$$f'(x) = c^x \ln c - 1$$

به ازای $\log_e c > c^x$ مثبت و به ازای $c^x < \log_e c$ منفی است، بنابراین، تابع $f(x)$ در نقطه $x_0 > 0$ ، با شرط

$$c^{x_0} = \log_e c$$

دارای می‌نیم است. اگر $f(x_0) > 0$ ، آن وقت معادله مفروض جواب ندارد؛ اگر $f(x_0) = 0$ ، آن گاه معادله دارای تنها جواب مثبت $x = x_0$ است؛ اگر $f(x_0) < 0$ ، معادله دو جواب مثبت دارد [در هر یک از بازه‌های $(0, x_0)$ و $(x_0, +\infty)$ یک جواب، زیرا $f(0) > 0$ و $f(x) \rightarrow -\infty$].

به این ترتیب، معادله مفروض تنها وقتی با شرط‌های مورد نظر سازگار است که داشته باشیم:

$$x_0 = c^{x_0} = \log_e c = c^{\log_e c} = e \quad \text{و} \quad c = e^{\frac{1}{e}}$$

بنابراین، مقدارهایی از a و b که در برابری $a^e = e^b$ صدق کنند، با

شرط مسأله سازگارند که، در آن، $b > 0$ ؛ یعنی

$$a = t, b = e \ln t, t \in (1, \infty)$$

درضمن، تنها جواب مثبت معادله، عبارت است از $x = e$.

۱۱۲. سمت چپ معادله را تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & (a-1) \left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x \cos x} \right) = \\ & = (a-1) \left(\frac{\cos x + \sin x + 1}{\sin x \cos x} \right) = \\ & = (a-1) \cdot \frac{\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 1}{\sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2}}; \quad \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \neq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

بنا بر این

$$\frac{2(a-1)}{\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - 1} = 2 \implies \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{a}{\sqrt{2}} \neq \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

معادلهٔ اخیر، به‌ازای $|a| > \sqrt{2}$ و $|a| = 1$ جواب ندارد، ولی به‌ازای بقیهٔ مقادیرهای a ، دارای جواب است.

به‌این ترتیب، در حالت $|a| \in \{1\} \cup (\sqrt{2}, \infty)$ ، معادلهٔ مفروض،

جواب ندارد. در حالت $|a| \in [0, 1) \cup (1, \sqrt{2}]$ ، معادله دارای جواب است:

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} + n\pi$$

که در آن، برای $|a| \in [0, 1) \cup (1, \sqrt{2}]$ داریم $n \in \mathbb{Z}$ ، و برای $|a| = \sqrt{2}$

داریم: $\frac{n}{2} \in \mathbb{Z}$

۱۱۳. سمت چپ معادله را تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \cos^4 x + \sin^4 x &= \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{4} (2 + 12 \cos^2 2x + 2 \cos^4 2x) = \\ &= \frac{1}{4} (\cos^2 4x + 14 \cos^2 2x + 17) \end{aligned}$$

بنابراین، به معادله زیر که هم ارز معادله مفروض است، می‌رسیم:

$$\cos^2 4x + 14 \cos^2 2x = \frac{97}{4} - 17 = \frac{29}{4}$$

و از آنجا

$$\left(\cos^2 4x + \frac{29}{4} \right) \left(\cos^2 4x - \frac{1}{4} \right) = 0 \Rightarrow \cos^2 4x = \frac{1}{4}$$

با توجه به این که $4x \in [0, 2\pi]$ ، به دست می‌آید:

$$4x \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\} \Rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} \right\}$$

۱۱۴. فرض می‌کنیم، دستگاه مفروض، به ازای مقدارهایی از A و B ،

دارای جواب x باشد. از معادله اول دستگاه، به دست می‌آید:

$$\cos Bx = -\cos Ax \Rightarrow \sin Bx = \varepsilon \sin Ax$$

که در آن $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. در این صورت، با توجه به معادله دوم دستگاه:

$$(A + \varepsilon B) \sin Ax = 0$$

چون $A, B \in \mathbb{N}$ و $A \neq B$ ، بنابراین $A + \varepsilon B \neq 0$. در نتیجه

$$\sin Ax = 0 = \sin Bx \Rightarrow Ax = k\pi, Bx = n\pi$$

اگر این مقدارهای Ax و Bx را در معادله اول دستگاه قرار

دهیم، معلوم می‌شود که از دو عدد k و n ، بسایند یکی زوج و دیگری فرد

باشد. با حذف متغیر x ، به دست می‌آید: $Bk = An$. چون k و n ، یکی زوج

و دیگری فرد است، بنابراین، در تجزیه عددهای طبیعی A و B به عامل‌های اول، برای ۲ ، توان‌های مختلفی به دست می‌آید. برعکس، اگر $A = ۲^l p$ و $B = ۲^m q$ ، که در آن $l, m \in \mathbb{Z}^+$ ، $l \neq m$ ، $p, q \in \mathbb{N}$ و q و p عددهایی فردند؟ آن وقت، دستگاه مفروض، جواب $x = \frac{\pi}{۲^s}$ را دارد که در آن،

$$s = \min(l, m)$$

۰۱۱۵. از مجموع دو معادله دستگاه، به دست می‌آید:

$$\frac{\cos x \sin y + \sin x \cos y}{\cos y \sin y} = ۲ \Rightarrow \frac{\sin(x+y)}{\sin ۲y} = ۱$$

بنابراین

$$\sin \frac{x-y}{۲} \cos \frac{x+۳y}{۲} = ۰$$

چون $y < \frac{\pi}{۲}$ ، $x < \pi$ ، پس یا $x = y$ یا $x + ۳y = \pi$

سپس، از تفاضل دو معادله دستگاه، داریم:

$$\frac{\sin(y-x)}{\sin ۲y} = \cos ۲y \Rightarrow \sin(y-x) = \frac{1}{۲} \sin ۴y$$

اگر $x = y$ ، آن‌گاه $\sin ۴y = ۰$ و $y = \frac{\pi}{۴}$. از آن‌جا، نتیجه می‌شود:

$x = y = \frac{\pi}{۴}$ اگر $x = \pi - ۳y$ ، آن وقت

$$\sin(۴y - \pi) = \frac{1}{۲} \sin ۴y \Rightarrow \sin ۴y = ۰$$

بنابراین، دوباره به دست می‌آید: $y = \frac{\pi}{۴}$ و $x = \pi - \frac{۳\pi}{۴} = \frac{\pi}{۴}$. دستگاه تنها

یک جواب دارد: $x = y = \frac{\pi}{۴}$. آزمایش نشان می‌دهد که، این مقادیر x و

ی، در معادله‌های دستگاه صادق می‌کنند.

$$۰۹۱۶ \quad \text{با توجه به این که } -1 \leq \sin \alpha \leq 1 \text{ و } -1 \leq \cos \alpha \leq 1,$$

داریم:

$$[\sin(x-y)+1][2\cos(2x-y)+1] \leq 6$$

که در آن، حالت برابری، تنها وقتی پیش می‌آید که داشته باشیم:

$$\sin(x-y) = 1 \quad \text{و} \quad \cos(2x-y) = 1$$

بنابراین، معادله مفروض، با دستگاه زیر هم ارز است:

$$\begin{cases} \sin(x-y) = 1 \\ \cos(2x-y) = 1 \end{cases}$$

که از آن‌جا، به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x-y = 2m\pi + \frac{\pi}{2} & (m \in \mathbb{Z}) \\ 2x-y = 2n\pi & (n \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

بنابراین

$$x = 2(n-m)\pi - \frac{\pi}{2} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$y = [2(n-2m)-1]\pi = [2(k-m)-1]\pi = (2l+1)\pi \quad (l \in \mathbb{Z})$$

۰۹۱۷ در حالت $n=1$ داریم:

$$1 = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

یعنی

$$x = 2m\pi \quad \text{یا} \quad x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (m, k \in \mathbb{Z})$$

اگر $n=2$ آن‌گاه

$$1 = \sin x \sin 2x + \cos x \cos 2x = \cos(2x - x) = \cos x$$

یعنی

$$x = 2m\pi \quad (m \in \mathbb{Z})$$

اکنون $n > 2$ می‌گیریم. داریم:

$$\begin{aligned} 1 &= \sin x \sin 2x \dots \sin nx + \cos x \cos 2x \dots \cos nx \leq \\ &\leq |\sin x \sin 2x \dots \sin nx| + |\cos x \cos 2x \dots \cos nx| \leq \\ &\leq |\sin x \sin 2x| + |\cos x \cos 2x| = \\ &= \max(|\sin x \sin 2x + \cos x \cos 2x|, |\sin x \sin 2x - \cos x \cos 2x|) = \\ &= \max(|\cos x|, |\cos 3x|) \end{aligned}$$

بنابراین، اگر مقداری از x جواب معادله مفروض باشد، باید داشته باشیم:

$$\cos |3x| = 1 \quad \text{یا} \quad |\cos x| = 1$$

ولی در حالت $|\cos 3x| = 1$ ، به دست می‌آید $\sin 3x = 0$ و از آنجا

$$\cos x \cos 2x \dots \cos nx = 1 \quad \text{و} \quad |\cos x| = 1$$

بنابراین، کافی است حالت $|\cos x| = 1$ را بررسی کنیم. آزمایش نشان می‌دهد که، همه مقادیرهای $x = 2m\pi$ ، $(m \in \mathbb{Z})$ ، برای $n \geq 3$ ، در معادله مفروض صدق می‌کنند. اگر داشته باشیم: $(k \in \mathbb{Z}) x = (2k+1)\pi$ ، آن وقت

$$\sin r x = 0, \quad \cos r x = (-1)^r, \quad (r = 1, \dots, n)$$

بنابراین، مقادیرهای $(k \in \mathbb{Z}) x = (2k+1)\pi$ ، تنها وقتی در معادله مفروض صدق می‌کنند که داشته باشیم:

$$1 = \sin x \dots \sin nx + \cos x \dots \cos nx = (-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

یعنی، وقتی که $\frac{1}{2}n(n+1)$ ، عددی زوج باشد. ولی، عدد $\frac{1}{2}n(n+1)$ تنها وقتی زوج است که یکی از دو عدد n یا $n+1$ بر ۴ بخش پذیر باشد.

به این ترتیب، سرانجام، جواب، به این صورت درمی آید:

$$n=1: x=2m\pi \text{ یا } x=2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (m, k \in \mathbf{Z}),$$

$$n=4l-2 \text{ یا } n=4l+1 \quad (l \in \mathbf{N}): x=2m\pi \quad (m \in \mathbf{Z}),$$

$$n=4l \text{ یا } n=4l-1 \quad (l \in \mathbf{N}): x=m\pi \quad (m \in \mathbf{Z})$$

۰۱۱۸. برای $n=1$ ، x و y ، دو عدد دلخواهند. سپس، برای هر $n \in \mathbf{N}$ ، یا $x=0$ و y عددی دلخواه، یا $y=0$ و x عددی دلخواه، زوج (x, y) ، که برای آن‌ها $xy \neq 0$ و $x+y=0$ ، به ازای هر مقدار فرد n ، در معادله صدق می‌کند. ثابت می‌کنیم، برای $n \geq 2$ ، هیچ زوجی از (x, y) ، که برای آن‌ها داشته باشیم:

$$xy(x+y) \neq 0$$

در معادله، صدق نمی‌کند. برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم $|x| \geq |y|$ ؛ اگر $z = \frac{y}{x} \neq -1$ ، آن‌گاه $z \in (0, 1]$ و معادله به این صورت درمی آید:

$$(1+z)^n = 1+z^n$$

برای $z > 0$ داریم:

$$(1+z)^n = 1+nz+\dots+z^n > 1+z^n$$

و برای $z < 0$

$$(1+z)^n = (1-|z|)^n < 1-|z| < 1-|z|^n \leq 1+z^n$$

و در هر دو حالت

$$(1+z)^n \neq 1+z^n$$

به این ترتیب، این جواب‌ها را، برای معادله داریم:

$$n = 1 : (x, y) \in \mathbf{R};$$

$$n = 2k (k \in \mathbf{N}) :$$

$$(x, y) \in \{(0, t) | t \in \mathbf{R}\} \cup \{(t, 0) | t \in \mathbf{R}\};$$

$$n = 2k + 1 (k \in \mathbf{N}) :$$

$$(x, y) \in \{(0, t) | t \in \mathbf{R}\} \cup \{(t, 0) | t \in \mathbf{R}\} \cup \{|(t, -t) | t \in \mathbf{R}\}$$

۰۹۱۹ اگر دو طرف معادله اول را در ۲ ضرب و سپس، آن را با معادله دوم جمع کنیم، باید برای هر جواب دستگاه داشته باشیم:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2(x+y) = (x+y)^2 + 2(x+y) = 10 + 6\sqrt{2}$$

یعنی

$$(x+y+1)^2 = (3+\sqrt{2})^2 \Rightarrow x+y+1 = \pm(3+\sqrt{2})$$

اگر $x+y = -4 - \sqrt{2}$ ، آن وقت $xy = 6 + 4\sqrt{2}$ و

$$\begin{aligned} (x-y)^2 &= (x+y)^2 - 4xy = (4+\sqrt{2})^2 - 2(6+4\sqrt{2}) = \\ &= -6 - 8\sqrt{2} < 0 \end{aligned}$$

که ممکن نیست. بنابراین $x+y = 2 + \sqrt{2}$ و $xy = 2\sqrt{2}$ ، که از آنجا دو جواب به دست می آید:

$$(x_1 = 2, y_1 = \sqrt{2}) \text{ و } (x_2 = \sqrt{2}, y_2 = 2)$$

و آزمایش نشان می دهد که، این هر دو جواب، در دستگاه صدق می کنند.

۰۹۲۰ بنابر قضیه واسطه ها (قضیه ۶)، داریم:

$$\begin{aligned} (1-x_1)^2 + (x_1-x_2)^2 + \dots + (x_{n-1}-x_n)^2 + x_n^2 &\geq \\ \geq \frac{1}{n+1} [(1-x_1) + (x_1-x_2) + \dots + (x_{n-1}-x_n) + x_n]^2 &= \\ = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

درضمن، علامت برابری، تنها برای وقتی است که داشته باشیم:

$$1 - x_1 = x_1 - x_2 = \dots = x_{n-1} - x_n = x_n = \frac{1}{n+1}$$

یعنی، وقتی که داشته باشیم: $x_i = 1 - \frac{i}{n+1}$. بنابراین، تنها يك گروه از

عددهای x_1, \dots, x_n وجود دارد که در معادله مفروض صدق می کند.

۱۲۱. $R = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$ می گیریم و (x_1, \dots, x_n) را جوابی از دستگاه فرض می کنیم. اگر از قضیه واسطه‌ها استفاده کنیم، به دست می آید:

$$1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \geq \frac{n}{R}; \quad 9 = x_1 + \dots + x_n \geq nR$$

از آن جا $R \geq n$ و $R \leq \frac{9}{n}$. بنابراین $n^2 \leq 9$ و $n \leq 3$. در ضمن، به ازای

$n=3$ ، همه نابرابری‌های بالا، به برابری تبدیل می شوند و این، تنها وقتی ممکن است که داشته باشیم:

$$x_1 = x_2 = x_3 = R = 3$$

یعنی $n=3$ با شرط مسأله سازگار است و دستگاه، در مجموعه عددهای مثبت، تنها يك جواب دارد: $(3, 3, 3)$.

چون به ازای $n=1$ ، به دستگاهی ناسازگار می رسیم، به بررسی

حالت $n=2$ می پردازیم. در این حالت، داریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 9 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1 \end{cases}$$

که با توجه به برابری

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$$

با دستگاه زیر، هم ارز است:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 9 \\ x_1 x_2 = 9 \end{cases}$$

به این ترتیب، x_1 و x_2 ، ریشه‌های این معادله درجه دوم اند:

$$t^2 - 9t + 9 = 0$$

که از آنجا به دست می‌آید:

$$t_{1,2} = \frac{1}{2}(9 \pm 3\sqrt{5})$$

بنابراین، برای دستگاه، دو جواب (t_1, t_2) و (t_2, t_1) به دست می‌آید. چون t_1 و t_2 عددهایی مثبت اند، $n=2$ با شرط مسأله سازگار است.

۰۱۲۲ روشن است، برای هر اندیس $i \in \{1, \dots, n\}$ ، گروه عددهای

$$x_i = 1, x_1 = \dots = x_{i-1} = x_{i+1} = \dots = x_n = 0$$

در دستگاه مفروض صدق می‌کند. ثابت می‌کنیم، انتخاب دیگری از n عدد غیر منفی، که در دستگاه صدق کند، وجود ندارد.

اگر $x_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$)، در برابری

$$x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k = 1$$

صدق کند، باید $x_i \in [0, 1]$ باشد. بنا بر این، برای مقادیرهای مورد نظر مجهول‌ها، داریم:

$$2 = (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) =$$

$$= 1 + (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j + \dots + x_1 \dots x_n \geq$$

$$\geq 1 + (x_1^k + \dots + x_n^k) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = 2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$$

بنابراین $\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = 0$. از این‌جا نتیجه می‌شود که، همه مقادیرهای

مجهول‌ها، به استثنای احتمالاً یکی، باید برابر صفر باشند، زیرا اگر دو تا از مجهول‌ها، مثل x_p و x_q مخالف صفر باشند، آن وقت به دست می‌آید:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \geq x_p x_q > 0$$

سرانجام، اگر برای اندیسی از $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ همه متغیرهای $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ برابر صفر باشند، آن وقت، با توجه به دستگاه، باید داشته باشیم: $x_i = 1$.

۱۲۳. را جوابی از دستگاه می گیریم. اگر فرض کنیم:

$$x = \operatorname{tg} a, \quad -\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$$

آن وقت، از معادله اول دستگاه داریم:

$$y = \frac{2x}{1-x^2} = \operatorname{tg} 2a$$

و از معادله های دوم و سوم دستگاه، به ترتیب، به دست می آید:

$$z = \operatorname{tg} 4a, \quad x = \operatorname{tg} \lambda a$$

از این جا، به برابری $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} \lambda a$ می رسیم، یعنی $a = \frac{1}{\lambda} k\pi$ ؛ در ضمن

$$x = \operatorname{tg} \frac{k\pi}{\lambda}, \quad y = \operatorname{tg} \frac{2k\pi}{\lambda}, \quad z = \operatorname{tg} \frac{4k\pi}{\lambda}$$

آزمایش، روشن می کند که به ازای

$$k \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

۷ جواب حاصل، با هم فرق دارند و در دستگاه مفروض هم صدق می کنند. ۱۲۴. روشن است که، برای هر اندیس $i \in \{1, \dots, n\}$ گروه عددهای

$$x_i = a, \quad x_1 = \dots = x_{i-1} = x_{i+1} = \dots = x_n = 0$$

جوابی از دستگاه است. ثابت می کنیم، این دستگاه، جواب دیگری ندارد. (۱) به ازای $n = 1$ ، با تنها معادله $x_1 = a$ سروکار داریم.

(۲) به ازای $n=2$ داریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1^2 + x_2^2 = a^2 \end{cases}$$

که از آن، به این معادله می‌رسیم:

$$(x_1 + x_2)^2 - (x_1^2 + x_2^2) = 2x_1x_2 = 0$$

بنابراین، یا $x_1 = a$ ، $x_2 = 0$ و یا $x_1 = 0$ ، $x_2 = a$.

(۳) $n \geq 3$ می‌گیریم، در این صورت، برای هر جواب دستگاه، باید

دست کم، این دو شرط را داشته باشیم:

$$\begin{cases} x_1^2 + \dots + x_n^2 = a^2 \\ x_1^3 + \dots + x_n^3 = a^3 \end{cases}$$

اگر $a=0$ ، از معادله اول به دست می‌آید:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

اگر $a \neq 0$ ، آن وقت

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x_n}{a}\right)^2 = 1$$

بنابراین، برای هر $i \in \{1, \dots, n\}$ داریم: $\left|\frac{x_i}{a}\right| \leq 1$ ، یعنی

$$\left(\frac{x_i}{a}\right)^3 \leq \left(\frac{x_i}{a}\right)^2$$

$$1 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{a}\right)^3 \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{a}\right)^2 = 1$$

بنابراین، برای هر مقدار i ، باید داشته باشیم:

$$\left(\frac{x_i}{a}\right)^2 \left(\frac{x_i}{a} - 1\right) = 0$$

یعنی یا $x_i = 0$ و یا $x_i = a$. در ضمن روشن است که، اگر $x_i = a$ ، آن گاه با توجه به دستگاه، همه متغیرهای دیگر $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ برابر صفر می‌شوند، و برعکس. بنابراین، در هر سه حالت، همان گروه عددهایی که آوردیم، در دستگاه صدق می‌کنند و، دستگاه، به جز آن‌ها، جواب دیگری ندارد. [اثبات این مطلب جالب است که، در حالت $n \geq 3$ ، می‌توان از معادله‌های دوم و سوم دستگاه، همه بقیه معادله‌ها را به دست آورد.]

§۷. نابرابری‌ها

۱۲۵. با استفاده از قضیه ۴، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{2} = \\ & = \left(\sqrt{\frac{4+\sqrt{16-7}}{2}} + \sqrt{\frac{4-\sqrt{16-7}}{2}} \right) - \\ & - \left(\sqrt{\frac{4+\sqrt{16-7}}{2}} - \sqrt{\frac{4-\sqrt{16-7}}{2}} \right) - \sqrt{2} = \\ & = \sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{2} = 0 \end{aligned}$$

یعنی، این دو عدد، با هم برابرند.

۱۲۶. چون $a < b < c < d$ ، بنابراین

$$y - x = ab + cd - ac - bd = (a-d)(b-c) > 0$$

$$z - y = ac + bd - ad - bc = (a-b)(c-d) > 0$$

بنابراین $x < y < z$.

۱۲۷. فرض کنید، برای a و b و c داشته باشیم:

$$abc = 1 \text{ و } a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$\begin{aligned}(a-1)(b-1)(c-1) &= abc - ab - ac - bc + a + b + c - 1 = \\ &= (abc - 1) + (a + b + c) - abc \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \\ &= (a + b + c) - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) > 0\end{aligned}$$

به این ترتیب، حاصل ضرب سه عامل $a-1$ ، $b-1$ ، $c-1$ مقداری است مثبت، یعنی یا هر سه آنها مثبت اند و یا، تنها یکی از آنها مثبت است. ولی، هر سه آنها نمی‌توانند مثبت باشند، زیرا، اگر داشته باشیم: $a > 1$ ، $b > 1$ ، $c > 1$ ، آن وقت داریم: $abc > 1$ که شرط $abc = 1$ را نقض می‌کند.

۱۲۸. نابرابری‌های مورد نظر مسأله، هم‌ارز است با نابرابری‌های

$$B < \frac{A+B}{2} < A$$

(زیرا $B < A$). در واقع، داریم:

$$\frac{(a-b)^2}{\lambda(A-B)} = \frac{(\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2})^2}{\psi(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{\psi} = \frac{A+B}{2}$$

۱۲۹. اگر از قضیهٔ مربوط به واسطه‌ها استفاده کنیم و در نظر بگیریم

که عددهای $\log_b a$ ، $\log_c b$ و $\log_a c$ ، مقدارهایی مثبت اند و حاصل ضربی برابر واحد دارند، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\frac{\log_b a}{a+b} + \frac{\log_c b}{b+c} + \frac{\log_a c}{a+c} &\geq \sqrt[3]{\frac{\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_a c}{(a+b)(b+c)(c+a)}} = \\ &= \frac{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}{(a+b) + (b+c) + (a+c)} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{a+b+c}\end{aligned}$$

که از آنجا، درستی نابرابری مورد نظر ثابت می‌شود.
 ۰۱۳۵. بدون این که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد: $0 < c \leq b \leq a$. تفاضل بخش سمت راست نابرابری و سمت چپ آن را، به این ترتیب، تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & 3abc + a^2(a-b-c) + b^2(b-a-c) + c^2(c-a-b) = \\ & = 3abc + a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - b^2a - a^2c - b^2c - c^2a - c^2b = \\ & = a^2(a-b) + b^2(b-a) + c(2ab - a^2 - b^2) + \\ & \quad + c(c^2 - bc + ab - ac) = \\ & = (a-b)(a^2 - b^2) - c(a-b)^2 + c(c-a)(c-b) = \\ & = (a-b)^2(a+b-c) + c(b-c)(a-c) \end{aligned}$$

اکنون، برای اثبات درستی نابرابری، کافی است توجه کنیم که، این مقدار، غیرمنفی است، زیرا

$$a+b > c, \quad b \geq c, \quad a \geq c, \quad c > 0$$

۰۱۳۱. در حالت $a=b=c=0$ ، نابرابری برقرار است (به برابری

تبدیل می‌شود). فرض می‌کنیم $s = a+b+c > 0$. در این صورت

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) = \\ & = \frac{a}{s} - \frac{a(1-a)}{s(b+c+1)} + \frac{b}{s} - \frac{b(1-b)}{s(a+c+1)} + \frac{c}{s} - \frac{c(1-c)}{s(a+b+1)} + \\ & \quad + (1-a)(1-b)(1-c) \left(\frac{a}{s} + \frac{b}{s} + \frac{c}{s} \right) = \left(\frac{a}{s} + \frac{b}{s} + \frac{c}{s} \right) - \\ & \quad - \frac{a(1-a)}{s} \left(\frac{1}{b+c+1} - (1-b)(1-c) \right) - \end{aligned}$$

$$-\frac{b(1-b)}{s} \left(\frac{1}{a+c+1} - (1-a)(1-c) \right) -$$

$$-\frac{c(1-c)}{s} \left(\frac{1}{a+b+1} - (1-b)(1-a) \right) \leq 1$$

زیرا

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{s} + \frac{c}{s} = 1, \frac{a(1-a)}{s} \left(\frac{1}{b+c+1} - (1-b)(1-c) \right) \geq 0,$$

$$\frac{b(1-b)}{s} \left(\frac{1}{a+c+1} - (1-a)(1-c) \right) \geq 0,$$

$$\frac{c(1-c)}{s} \left(\frac{1}{a+b+1} - (1-b)(1-a) \right) \geq 0$$

برای اثبات نابرابری اول، از این سه نابرابری، کافی است توجه کنیم:

$$\frac{a(1-a)}{s} \geq 0,$$

$$\frac{1}{b+c+1} - (1-b)(1-c) = \frac{(b+c)^2 - (b+c+1)bc}{b+c+1} \geq$$

$$\geq \frac{(b+c)^2 - 3bc}{b+c+1} = \frac{(b-c)^2 + bc}{b+c+1} \geq 0$$

دو نابرابری دیگر هم، به همین ترتیب، ثابت می شوند.
۰۱۳۲ فرض می کنیم:

$$p = a+b+c > 0, \quad q = ab+bc+ac > 0, \quad r = abc > 0$$

عددهای a ، b و c ، ریشه‌های این معادله درجه سوم اند:

$$P(x) = x^3 - px^2 + qx - r$$

$P(x)$ ، به ازای مقدارهای $0 \leq x$ منفی است. بنابراین، ریشه‌های $P(x) = 0$ ، یعنی a ، b و c ، مقدارهایی مثبت اند.

۰۱۳۳ $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ فرض می‌کنیم. در این صورت، اگر $x = \cos \alpha$

را در نابرابری $\sin x < x$ (که برای $x > 0$ درست است) قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$\sin(\cos \alpha) < \cos \alpha$$

به همین ترتیب، از نابرابری $\alpha \geq \sin \alpha$ ، به دست می‌آید:

$$\cos \alpha \leq \cos(\sin \alpha)$$

زیرا تابع $\cos x$ ، در بازه $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ نزولی است. به این ترتیب، برای

$\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ به دست می‌آید:

$$\sin(\cos \alpha) < \cos \alpha \leq \cos(\sin \alpha)$$

سپس، در بازه $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ داریم:

$$\sin(\cos \alpha) \leq 0 < \cos(\sin \alpha)$$

یعنی نابرابری، برای $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ هم درست است. با توجه به زوج بودن

تابع‌های $\sin(\cos x)$ و $\cos(\sin x)$ ، به نابرابری مطلوب در بازه $[-\pi, \pi]$ می‌رسیم؛ و چون 2π دوره تناوب این تابع‌هاست، بنابراین، نابرابری مفروض، برای همه مقادیر $\alpha \in \mathbf{R}$ درست است.

۰۱۳۴ $\beta_i = 2 - \alpha_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$) در این صورت،

با در نظر گرفتن $\sum_{i=1}^n \beta_i = 2n - 1$ و قضیهٔ مربوط به واسطه‌ها، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\beta_i} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\alpha_i}{\beta_i} + 1 \right) - n = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i + \beta_i}{\beta_i} - n = 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta_i} - n \geq \\ &\geq 2 \frac{n}{\sqrt[n]{\beta_1 \dots \beta_n}} - n \geq \frac{2n^2}{\beta_1 + \dots + \beta_n} - n = \frac{2n^2}{2n-1} - n = \frac{n}{2n-1} \end{aligned}$$

۱۳۵. فرض می‌کنیم: $b_i = s - a_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$). در این

صورت، با توجه به برابری $\sum_{i=1}^n b_i = (n-1)s$ و قضیهٔ مربوط به واسطه‌ها،
به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s-a_i} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{b_i} + 1 \right) - n = \sum_{i=1}^n \frac{s}{b_i} - n = s \sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i} - n \geq \\ &\geq \frac{s \cdot n}{\sqrt[n]{b_1 \dots b_n}} - n \geq s \cdot \frac{n^2}{b_1 + \dots + b_n} - n = \frac{n^2}{n-1} - n = \frac{n}{n-1} \end{aligned}$$

۱۳۶. $\frac{a_i}{a_{i+1}} = b_i$ می‌گیریم ($i = 1, \dots, n$) و فرض می‌کنیم:

$b_{n+1} = 1$. در این صورت، داریم: $\prod_{i=1}^{n+1} b_i = 1$ ، و اگر به قضیهٔ مربوط به واسطه‌ها توجه داشته باشیم، به دست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{b_i} = \sum_{i=1}^{n+1} \prod_{j \neq i} b_j \leq \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{1}{n_{j \neq i}} \prod b_j^n \right) = \sum_{i=1}^{n+1} b_i^n$$

که از آن، درستی نابرابری $\sum_{i=1}^n b_i^n \geq \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{b_i} \right)$ نتیجه می‌شود. به این ترتیب،
به پرسش مسأله، باید پاسخ مثبت داد.

۱۳۷. $1 - a = b$ فرض می‌کنیم. ابتدا، حالت $0 < x < 1$ را در نظر

می‌گیریم. با توجه به نابرابری برنولی (قضیهٔ ۵) و در نظر گرفتن $0 < b < 1$
به دست می‌آید:

$$(1+x)^b \leq 1+bx \Rightarrow (1+x)^{-b} \geq \frac{1}{1+bx}$$

دوباره، از نابرابری برنولی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (1+b)x^b &= (1+b)[1-(1-x)]^b \leq (1+b)[1-b(1-x)] = \\ &= 1+bx+b^2(x-1) < 1+bx \end{aligned}$$

$$1+bx > (1+b)x^b \quad \text{یا} \quad x^a + bx^{a+1} > (1+b)x$$

اکنون داریم:

$$\begin{aligned} (1+x)^{-b} - \frac{1-x^a}{1-x} &\geq \frac{1}{1+bx} - \frac{1-x^a}{1-x} = \\ &= \frac{1-x+(x^a-1)(1+bx)}{(1+bx)(1-x)} = \frac{x^a+bx^{a+1}-(1+b)x}{(1+bx)(1-x)} > 0 \end{aligned}$$

زیرا $(1+bx)(1-x) > 0$ بنا بر این

$$(1-x)^{-b} > \frac{1-x^a}{1-x} \quad (0 < x < 1)$$

حالت $x > 1$ ، با قراردادن $x = \frac{1}{t}$ ، به حالت بالا منجر می شود. در این-

صورت، $0 < t < 1$ و

$$\begin{aligned} \frac{1-x^a}{1-x} &= \frac{1-\frac{1}{t^a}}{1-\frac{1}{t}} = t^b \cdot \frac{1-t^a}{1-t} < t^b (1+t)^{-b} = \left(\frac{1}{t}+1\right)^{-b} = \\ &= (1+x)^{-b} \end{aligned}$$

۱۳۸. اثبات را، با استقرای روی $n \in \mathbb{Z}^+$ می دهیم. برای $n=0$ ،

به رابطه درست $1^a \leq 1$ می رسمیم. فرض می کنیم، نابرابری، برای عددی مثل n برقرار باشد و ثابت می کنیم که، در این صورت، برای $n+1$ برقرار

است. داریم:

$$\begin{aligned} (1+x_1+\dots+x_n+x_{n+1})^\alpha - (1+x_1+\dots+x_n)^\alpha &= \\ &= (1+x_1+\dots+x_n)^\alpha \left[\left(1 + \frac{x_{n+1}}{1+x_1+\dots+x_n}\right)^\alpha - 1 \right] \leq \end{aligned}$$

$$\leq (1+x_1+\dots+x_n)^{\alpha-1} \cdot x_{n+1} \leq [(n+1)x_{n+1}]^{\alpha-1} \cdot x_{n+1} = \\ = (n+1)^{\alpha-1} \cdot x_{n+1}^{\alpha}$$

(درستی نابرابری)

$$(1+x_1+\dots+x_n)^{\alpha-1} \cdot x_{n+1} \leq [(n+1)x_{n+1}]^{\alpha-1} \cdot x_{n+1}$$

از شرطهای $\alpha-1 \leq 0$ و $1+x_1+\dots+x_n \geq (1+n)x_{n+1}$ نتیجه می‌شود.

از این نابرابری و فرض استقرا، به دست می‌آید:

$$(1+x_1+\dots+x_{n+1})^{\alpha} \leq (1+x_1+\dots+x_n)^{\alpha} + (n+1)^{\alpha-1} x_{n+1}^{\alpha} \leq \\ \leq 1 + 1^{\alpha-1} x_1^{\alpha} + 2^{\alpha-1} x_2^{\alpha} + \dots + n^{\alpha-1} x_n^{\alpha} + (n+1)^{\alpha-1} x_{n+1}^{\alpha}$$

۱۳۹. بدون این که به کلی بودن مسأله، لطمه‌ای وارد شود، می‌توان

فرض کرد

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$$

در این صورت، داریم:

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_i - a_j| = \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| + \sum_{1 \leq j < i \leq n} |a_i - a_j| = \\ = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| = 2 \sum_{1 \leq i < m \leq n} a_m - 2 \sum_{1 \leq m < j \leq n} a_m = \\ = 2 \sum_{m=1}^n (2m - n - 1) a_m$$

مقدار S ، تنها وقتی به حداکثر خود می‌رسد که، هر یک از عددهای

a_m ، به‌ازای $2m - n - 1 > 0$ برابر ۲، و به‌ازای $2m - n - 1 < 0$

برابر صفر شوند. به این ترتیب، به این نابرابری می‌رسیم:

$$S \leq 2 \sum_{\frac{n+1}{2} < m \leq n} (2m - n - 1)$$

به‌ازای $(k \in \mathbb{N}) n = 2k + 1$ داریم:

$$S \leq \sum_{m=k+1}^{2k+1} (2m - 2k - 2) = 2(1 + 2 + \dots + k) = 2k(k+1) = (2k+1)^2 - 1 < n^2$$

در ضمن، برابری $S = n^2$ ممکن نیست. در حالت $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) داریم:

$$S \leq \sum_{m=k+1}^{2k} (2m - 2k - 1) = 2[1 + 3 + \dots + (2k-1)] = 2k^2 = n^2$$

در ضمن، برابری $S = n^2$ تنها وقتی برقرار است که، بین عددهای a_1, a_2, \dots, a_{2k} درست k عدد برابر 2 و k عدد بقیه برابر صفر باشند.

۱۴۰. چون برای هر انتخابی از عددهای $\{1, -1\}$ $x_1, \dots, x_n \in \{1, -1\}$

داریم:

$$\sum_{j=1}^n |a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n| \leq M$$

بنابراین

$$\frac{1}{2^n} \sum_{(x_1, \dots, x_n)} \left(\sum_{j=1}^n |a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n| \right) \leq M$$

که می‌توان آن را، به صورت زیر نوشت:

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2^n} \sum_{(x_1, \dots, x_n)} |a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n| \right) \leq M$$

برای هر مقدار ثابتی از $\{1, \dots, n\}$ ، در مجموع

$$S_j = \sum_{(x_1, \dots, x_n)} |a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n|$$

همه 2^n جمله را، به 2^{n-1} زوج چنان تقسیم می‌کنیم که، در هر زوج، مقدارهای $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ برهم منطبق و با مقدار x_j متفاوت باشند. در این صورت، مجموع جمله‌ها در هر زوج، به صورت

$$|A + a_{jj}| + |A - a_{jj}|$$

درمی آید، که در آن

$$A = a_{j1}x_1 + \dots + a_{j(j-1)}x_{j-1} + a_{j(j+1)}x_{j+1} + \dots + a_{jn}x_n$$

ولی

$$|A + a_{jj}| + |A - a_{jj}| \geq |(A + a_{jj}) - (A - a_{jj})| = 2|a_{jj}|$$

بنابراین

$$S_j \geq 2^{n-1} \cdot 2|a_{jj}| = 2^n |a_{jj}|$$

به این ترتیب، به دست می آید:

$$|a_{11}| + \dots + |a_{nn}| = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2^n} \cdot 2^n |a_{jj}| \right) \leq \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2^n} S_j \right) \leq M$$

۱۴۱. مجموع $S = \sum_{i=1}^n b_i a_i$ را می توان به این صورت نوشت:

$$\begin{aligned} S &= b_1 a_1 + \sum_{i=2}^n b_i (a_1 + \dots + a_i) - \sum_{i=2}^n b_i (a_1 + \dots + a_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^n (a_1 + \dots + a_i) b_i - \sum_{i=1}^{n-1} (a_1 + \dots + a_i) b_{i+1} = \\ &= \sum_{i=1}^n (a_1 + \dots + a_i) (b_i - b_{i+1}) \end{aligned}$$

که در آن $b_{n+1} = 0$ به حساب می آوریم. سپس، بین عددهای

$$A_i = |a_1 + \dots + a_i|, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

بزرگترین عدد A_k را انتخاب می کنیم. در این صورت، برای این مقدار k داریم:

$$\begin{aligned} |S| &= \sum_{i=1}^n |a_1 + \dots + a_i| \cdot |b_i - b_{i+1}| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n A_k (b_i - b_{i+1}) = A_k \sum_{i=1}^n (b_i - b_{i+1}) = A_k (b_1 - b_{n+1}) \leq A_k \end{aligned}$$

۱۴۲. اثبات را، با استقرای روی $n \in \mathbb{N}$ می‌دهیم. چون

$$(1-x_1)^m + (1-y_1^m) = y_1^m + (1-y_1^m) = 1$$

بنابراین، به ازای $n=1$ ، حکم درست است. فرض می‌کنیم، حکم، برای $n-1$ برقرار باشد، در این صورت، داریم:

$$\begin{aligned} & (1-x_1 \dots x_n)^m + (1-y_1^m) \dots (1-y_n^m) = \\ & = [1-x_1 \dots x_{n-1}(1-y_1)]^m + (1-y_1^m) \dots (1-y_{n-1}^m)(1-y_n^m) \geq \\ & \geq (1-x_1 \dots x_{n-1} + x_1 \dots x_{n-1} y_n)^m + [1 - (1-x_1 \dots \\ & \dots x_{n-1})^m (1-y_n^m)] = [a + (1-a)y_n]^m + (1-a^m)(1-y_n^m) = \\ & = (a+b-ab)^m + (1-a^m)(1-b^m) \end{aligned}$$

که در آن: $a = 1 - x_1 \dots x_{n-1}$ و $b = y_n$. با استقرای روی $m \in \mathbb{N}$ ثابت می‌کنیم که، برای عددهای دلخواه $a, b \in [0, 1]$ ، نابرابری

$$(a+b-ab)^m \geq a^m + b^m - a^m b^m$$

برقرار است. نابرابری، برای $m=1$ ، به‌سراپری تبدیل می‌شود. فرض می‌کنیم، نابرابری، برای $m-1$ برقرار باشد، یعنی

$$(a+b-ab)^{m-1} \geq a^{m-1} + b^{m-1} - a^{m-1} b^{m-1}$$

در این صورت (با توجه به این که $a+b-ab \geq 0$)، نابرابری، برای m هم برقرار خواهد بود. درواقع

$$\begin{aligned} & (a+b-ab)^m - a^m - b^m - a^m b^m \geq \\ & \geq (a^{m-1} + b^{m-1} - a^{m-1} b^{m-1})(a+b-ab) - a^m - b^m + a^m b^m = \\ & = 2a^m b^m + ab^{m-1} + ba^{m-1} - a^m b^{m-1} - b^m a^{m-1} - a^m b - b^m a = \\ & = a^m (b^m - b^{m-1}) + a (b^{m-1} - b^m) + b^m (a^m - a^{m-1}) + \\ & + b (a^{m-1} - a^m) = (b^{m-1} - b^m)(a - a^m) + \\ & (a^{m-1} - a^m)(b - b^m) \geq 0 \end{aligned}$$

$$a \geq a^{m-1} \geq a^m \quad \text{و} \quad b \geq b^{m-1} \geq b^m$$

به این ترتیب، ثابت شد که، برای هر عدد $m \in \mathbb{N}$ ، نابرابری زیر برقرار است:

$$(a+b-ab)^m + (1-a^m)(1-b^m) \geq 1$$

که از آنجا، با توجه به مقادیرهای a و b ، نابرابری مطلوب، برای n ، به دست می آید. استقرا کامل و حکم ثابت شد.

۱۴۳. $d = az$ ، $c = ay$ ، $b = ax$ می گیریم که، در این صورت، باید داشته باشیم: $1 \leq x \leq y \leq z$ و نابرابری مطلوب، به صورت زیر درمی آید:

$$a^{ax}(ax)^{ay}(ay)^{az}(az)^a \geq (ax)^a(ay)^{ax}(az)^{ay}a^{az}$$

که اگر دو طرف آن (که مقادیر هایی مثبت اند) بر $a^a a^{ax} a^{ay} a^{az}$ تقسیم و سپس، دو طرف را به توان $\frac{1}{a}$ برسانیم، به نابرابری زیر، هم ارز با آن، می رسیم:

$$x^y y^z z \geq x y^x z^y$$

$y = xs$ و $z = xt$ می گیریم، در این صورت $1 \leq s \leq t$ و $y \geq s$ (زیرا $x \geq 1$) می رسیم و نابرابری چنین می شود:

$$x^{xs} y^{xt} xt \geq x y^x (xt)^{xs}$$

دو طرف را به $x^{xs} y^x xt$ ساده می کنیم و، سپس، دو طرف را به توان $\frac{1}{x}$ می رسانیم، به دست می آید:

$$y^{t-1} \geq t^{\frac{s-1}{x}}$$

در حالت $y = 1$ ، نابرابری برقرار است، زیرا در این حالت

$$x=1, s=\frac{y}{x}=1, y^{t-1}=1=t^{1-1}=1$$

در حالت $t=1$ هم، نابرابری برقرار است:

$$y^{t-1}=y^0=1=1^{s-\frac{1}{x}}=1$$

اکنون $y > 1$ و $t > 1$ فرض می‌کنیم. در این صورت، اگر دو طرف

نابرابری را به توان $\frac{1}{t-1} \cdot \frac{y}{y-1} > 0$ برسانیم، به نابرابری هم‌ارز آن

می‌رسیم:

$$y^{\frac{y}{y-1}} \geq t^{\frac{s}{t-1}}, \quad (1 \leq s \leq t, s \leq y)$$

و دو حالت در نظر می‌گیریم:

الف) $y \geq t$. ثابت می‌کنیم، تابع $f_1(\alpha) = \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ برای $\alpha > 1$ صعودی است. داریم:

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) &= \left(e^{\frac{\alpha}{\alpha-1} \ln \alpha} \right)' = e^{\frac{\alpha}{\alpha-1} \ln \alpha} \left(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{\ln \alpha}{(\alpha-1)^2} \right) = \\ &= \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \frac{1}{(\alpha-1)^2} (\alpha-1 - \ln \alpha) > 0 \end{aligned}$$

زیرا نابرابری $g_1(\alpha) = \alpha - 1 - \ln \alpha > 0$ برای $\alpha > 1$ برقرار است.

در واقع، $g_1'(1) = 0$ و $g_1'(\alpha) = 1 - \frac{1}{\alpha} > 0$. بنابراین، نابرابری مطلوب،

از رابطه‌های زیر نتیجه می‌شود:

$$y^{\frac{y}{y-1}} = f_1(y) \geq f_1(t) = t^{\frac{t}{t-1}} \geq t^{\frac{s}{t-1}}$$

ب) $y < t$. ثابت می‌کنیم، تابع $f_2(\alpha) = \alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}$ برای $\alpha > 1$

نزولی است. داریم:

$$f'_r(\alpha) = \left(e^{\frac{1}{\alpha-1} \ln \alpha} \right)' = e^{\frac{1}{\alpha-1} \ln \alpha} \left(\frac{1}{\alpha(\alpha-1)} - \frac{\ln \alpha}{(\alpha-1)^2} \right) =$$

$$= \alpha^{\frac{1}{\alpha-1}} \frac{1}{\alpha(\alpha-1)^2} (\alpha-1 - \alpha \ln \alpha) < 0$$

زیرا نابرابری $g_r(\alpha) = \alpha-1 - \alpha \ln \alpha < 0$ برای $\alpha > 1$ برقرار است. در واقع، $g'_r(\alpha) = 1 - \ln \alpha - 1 < 0$ و $g_r(1) = 0$. بنابراین، در این حالت هم، نابرابری برقرار است، زیرا

$$y^{\frac{y}{y-1}} = [f_r(y)]^y \geq [f_r(t)]^y = t^{\frac{y}{t-1}} \geq t^{\frac{s}{t-1}}$$

۱۴۴. سمت چپ نابرابری را تبدیل می‌کنیم:

$$\sum_{j=2}^{n^k} \frac{1}{j} = \left(\frac{1}{1+1} + \dots + \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) +$$

$$+ \dots + \left(\frac{1}{n^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{n^k} \right) = \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{n^{i-1}+1} + \dots + \frac{1}{n^i} \right)$$

و توجه می‌کنیم که، برای هر $i \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\frac{1}{n^{i-1}+1} + \dots + \frac{1}{n^i} = \left(\frac{1}{1 \cdot n^{i-1}+1} + \dots + \frac{1}{2 \cdot n^{i-1}} \right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{2 \cdot n^{i-1}+1} + \dots + \frac{1}{3 \cdot n^{i-1}} \right) + \dots +$$

$$+ \left(\frac{1}{(n-1) \cdot n^{i-1}+1} + \dots + \frac{1}{n \cdot n^{i-1}} \right) =$$

$$= \sum_{m=2}^n \left(\frac{1}{(m-1) \cdot n^{i-1}+1} + \dots + \frac{1}{m \cdot n^{i-1}} \right) >$$

$$> \sum_{m=2}^n \left(n^{i-1} \frac{1}{m \cdot n^{i-1}} \right) = \sum_{m=2}^n \frac{1}{m}$$

که از آنجا، به نابرابری مطلوب می‌رسیم:

$$\sum_{j=2}^{n^k} \frac{1}{j} > k \sum_{j=2}^n \frac{1}{j}$$

۱۴۵. قرار می‌گذاریم:

$$b_k = \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}} = k \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k, \quad (k = 1, \dots, n)$$

با توجه به نابرابری $b_k \leq ke$ (قضیه ۷ را ببینید) و

$$b_1 \dots b_k = (k+1)^k$$

و همچنین، قضیه مربوط به واسطه‌ها، داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt[k]{a_1 \dots a_k} &= \frac{1}{k+1} \sqrt[k]{(a_1 b_1) \dots (a_k b_k)} \leq \\ &\leq \frac{1}{k(k+1)} (a_1 b_1 + \dots + a_k b_k) = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \sum_{j=1}^k a_j b_j \end{aligned}$$

سپس

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sqrt[k]{a_1 \dots a_k} &\leq \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \sum_{j=1}^k a_j b_j \right] = \\ &= \sum_{j=1}^n \left[a_j b_j \sum_{k=j}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \right] = \\ &= \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{n+1}\right) \sum_{j=1}^n (a_j b_j) \leq \sum_{j=1}^n \frac{a_j b_j}{j} \leq e \sum_{j=1}^n a_j \end{aligned}$$

۱۴۶. فرض می‌کنیم، عددهای $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ (با تقریب ردیف

آن‌ها)، بر عددهای $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$ منطبق باشند. داریم:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} \right) &= \\ &= 5 + \sum_{i < j} \left(\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} \right) = 25 + \sum_{i < j} \left(\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} - 2 \right) \end{aligned}$$

که در آن، مجموع، برای همه $10 = C_5^2$ زوج اندیس $1 \leq i < j \leq 5$ در نظر گرفته شده است. سپس، داریم:

$$\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2 = \frac{p}{q} + \frac{q}{p} - 2$$

اگر فرض کنیم: $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2$ ، کافی است نابرابری زیر را ثابت کنیم:

$$\sum_{i < j} f(x_i, x_j) \leq 6f(p, q)$$

ثابت می‌کنیم، برای عددهای مثبت $x \leq y \leq z$ ، نابرابری

$$f(x, y) + f(y, z) \leq f(x, z)$$

یعنی نابرابری

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 2 \leq \frac{x}{z} + \frac{z}{x} - 2$$

برقرار است. توجه می‌کنیم که

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{x}{z} - 1 = \left(\frac{x}{y} - 1\right)\left(1 - \frac{y}{z}\right) \leq 0$$

زیرا $1 \leq \frac{y}{z}$ و $\frac{x}{y} \leq 1$. به همین ترتیب داریم:

$$\frac{z}{y} + \frac{y}{x} - \frac{z}{x} - 1 \leq 0$$

که اگر آن را با نابرابری قبلی جمع کنیم، نابرابری لازم را می‌دهد. به جز این، علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم: $y = z$ یا $x = y$. با استفاده از نابرابری که ثابت کردیم، رشته نابرابری‌های زیر را، به دست می‌آوریم:

$$f(p, x_1) + f(x_1, x_2) + f(x_2, x_3) + f(x_3, x_4) + \\ + f(x_4, x_5) + f(x_5, q) \leq f(p, q),$$

$$f(p, x_1) + f(x_1, x_3) + f(x_3, x_5) + f(x_5, q) \leq f(p, q),$$

$$f(p, x_1) + f(x_1, x_4) + f(x_4, q) \leq f(p, q),$$

$$f(p, x_2) + f(x_2, x_5) + f(x_5, q) \leq f(p, q),$$

$$f(p, x_2) + f(x_2, x_4) + f(x_4, q) \leq f(p, q),$$

$$f(p, x_1) + f(x_1, x_5) + f(x_5, q) \leq f(p, q)$$

که از مجموع آن‌ها و حذف جمله‌های مثبت به صورت $f(p, x_i)$ و $f(x_i, q)$ نابرابری مطلوب به دست می‌آید.

اکنون ببینیم، علامت برابری، در چه حالتی برقرار است. اگر $p < x_2$ یا $x_4 < q$ ، آن وقت، به علامت برابری نمی‌رسیم، زیرا در آن صورت، بین جمله‌های $f(p, x_2)$ یا $f(x_4, q)$ ، که حذف کردیم، جمله غیر صفر وجود دارد. بنابراین، برای برقراری برابری، باید داشته باشیم:

$$x_1 = x_2 = p \quad \text{و} \quad x_4 = x_5 = q$$

در این صورت از نابرابری دوم، در بین شش نابرابری فوق، به دست می‌آید:

$$f(p, x_3) + f(x_3, q) \leq f(p, q)$$

چون، این نابرابری هم، باید به برابری تبدیل شود، بنابراین یا $p = x_3$ یا $x_3 = q$. اگر به تنظیم اولیه نابرابری مراجعه کنیم، معلوم می‌شود که، تنها وقتی علامت برابری برقرار است که دو عدد از پنج عدد $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ بر یکی از دو انتهای بازه $[p, q]$ و سه عدد دیگر بر انتهای دیگر این بازه منطبق باشند.

۱۴۷. فرض می‌کنیم، چهار عدد a, b, c, d (با تقریب ردیف خود)

بر چهار عدد $x_1 \leq x_2 \leq x_3 < x_4$ منطبق باشند. مشتق چند جمله‌ای زیر را پیدا می‌کنیم:

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

از يك طرف، بنا بر قضيهٔ ديت

$$P'(x) = \left[x^4 - \left(\sum_{i=1}^4 x_i \right) x^3 + \left(\sum_{1 \leq i < j \leq 4} x_i x_j \right) x^2 + \right. \\ \left. + \left(\sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} x_i x_j x_k \right) x + (x_1 x_2 x_3 x_4) \right]' =$$

$$= 4x^3 - \left(3 \sum_{i=1}^4 x_i \right) x^2 + \left(2 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} x_i x_j \right) x - \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} x_i x_j x_k$$

از طرف ديگر، بنا بر قضيهٔ دول، اگر براي مقداري از $i \in \{1, 2, 3\}$ داشته باشيم $x_i < x_{i+1}$ ، آن وقت، مشتق $P'(x)$ ، در نقطه‌اي مثل $y \in (x_i, x_{i+1})$ ، برابر صفر مي‌شود. اگر هم، چندجمله‌اي $P(x)$ داراي ريشهٔ تکراري باشد، آن وقت چندجمله‌اي $P'(x)$ ، همان ريشهٔ را، با تکراري به اندازهٔ يك واحد کمتر، خواهد داشت. به ايسن ترتيب، چندجمله‌اي $P'(x)$ از درجهٔ سوم، داراي سه ريشهٔ y_1, y_2, y_3 است که، در نابرابري

$$x_1 \leq y_1 \leq x_2 \leq y_2 \leq x_3 \leq y_3 \leq x_4$$

صدق مي‌کنند و بنا بر اين

$$P'(x) = 4(x - y_1)(x - y_2)(x - y_3) = \\ = 4x^3 - 4(y_1 + y_2 + y_3)x^2 + 4(y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_1 y_3)x - \\ - 4y_1 y_2 y_3$$

بنا بر قضيهٔ مربوط به واسطه‌ها، داريم:

$$\sqrt{(y_1 y_2 y_3)^2} \leq \frac{y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_1 y_3}{3}$$

از آن جا $\sqrt{A} \leq \sqrt{B}$ که در آن

$$A = y_1 y_2 y_3 = \frac{1}{4} (x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4)$$

$$B = \frac{1}{3}(y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_1 y_3) = \frac{1}{6}(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4)$$

به این ترتیب، نابرابری مطلوب ثابت شد، در ضمن، علامت برابری تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$y_1 y_2 = y_2 y_3 = y_1 y_3 \Rightarrow y_1 = y_2 = y_3$$

و شرط اخیر، تنها وقتی برقرار است که

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4$$

یعنی وقتی که $a = b = c = d$.

§ ۸. بخش درست عدد

۱۴۸. معادله مفروض، با معادله زیر هم ارز است

$$|x-1|(|x+1|-1) = \{x\} \quad (x \neq 1)$$

این حالت‌ها را در نظر می‌گیریم: $x > 1$ ، $-1 \leq x < 1$ و $x < -1$. در حالت $x > 1$ ، معادله، به صورت

$$x(x-1) = \{x\}$$

درمی‌آید که جواب ندارد، زیرا $\{x\} < x-1 < x(x-1)$.

برای $-1 \leq x < 1$ ، به این معادله می‌رسیم:

$$x(1-x) = \{x\}$$

چون $\{x\} \geq 0$ و $1-x > 0$ ، پس $x \geq 0$ ولی برای $0 \leq x < 1$ داریم $\{x\} = x$ ، بنابراین، در این حالت داریم:

$$x(1-x) = x \Rightarrow x = 0$$

برای $x < -1$ ، داریم:

$$(2+x)(x-1) = \{x\}$$

چون $x-1 < 0$ و $\{x\} \geq 0$ ، بنابراین $2+x \leq 0$ ، یعنی $x \leq -2$. عدد $x = -2$ در معادله صدق می‌کند. اگر $-3 \leq x < -2$ ، آن وقت $\{x\} = x+3$ و معادله، به این صورت درمی‌آید:

$$(2+x)(x-1) = 3+x$$

که از آنجا، جواب $-\sqrt{5}$ در بازه $[-3, -2]$ به دست می‌آید. سرانجام، هیچ مقدار $x < -3$ در معادله صدق نمی‌کند، زیرا به ازای $x < -3$ داریم:

$$|(2+x)(1-x)| = |2+x| \cdot |1-x| > 1 \times 4 > |\{x\}|$$

به این ترتیب، معادله مفروض، سه جواب دارد: 0 ، -2 ، $-\sqrt{5}$.
 ۱۴۹. روشن است که برابری $[\sqrt{m}] = k$ که در آن، m و k عددهایی طبیعی باشند، با نابرابری زیر هم‌ارز است:

$$k^2 \leq m \leq (k+1)^2 - 1$$

تعداد عددهای طبیعی m (با ثابت بودن عدد k)، که در این نابرابری صدق کند، برابر است با

$$(k+1)^2 - k^2 = 3k^2 + 3k + 1$$

بنابراین، اگر فرض کنیم:

$$S_k = k(3k^2 + 3k + 1)$$

مجموع سمت چپ معادله، برابر $\sum_{k=1}^{x-1} S_k$ می‌شود.

روشن است که، برای $k \in \mathbb{N}$ ، داریم $S_k > 0$ و

$$S_1 = 1 \times 7 = 7, S_2 = 2 \times 19 = 38, S_3 = 3 \times 37 = 111,$$

$$S_4 = 4 \times 61 = 244, S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 400$$

بنا بر این، معادله مفروض در مجموعه عددهای طبیعی، تنها يك جواب دارد:
 $x = 5$.

۱۵۰. ثابت می‌کنیم، برای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم:

$$k[x] \leq [kx] \leq k[x] + k - 1$$

$[x] = m$ و $\{x\} = \alpha$ می‌گیریم، در این صورت، داریم:

$$x = m + \alpha, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq \alpha < 1;$$

$$km = [km] \leq [kx] = [km + k\alpha] \leq km + k\alpha < km + k$$

به این ترتیب، به دست می‌آید:

$$S = [x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] \leq$$

$$\leq 63[x] + (1 + 3 + 7 + 15 + 31) = 63[x] + 57$$

و $S \geq 63[x]$ ، یعنی برای هر $m \in \mathbb{Z}$ داریم:

$$63m \leq S \leq 63m + 57$$

از طرف دیگر، بنا بر این، $12345 = 63 \times 195 + 60$ ، بنا بر این، $S = 12345$ ، برای هیچ مقداری از x ممکن نیست.

۱۵۱. فرض می‌کنیم: $m = [x]$ و $\alpha = \{x\}$. در این صورت

$x = m + \alpha$ و معادله مفروض، چنین می‌شود:

$$(m + \alpha)^2 - [m^2 + 2m\alpha + \alpha^2] = \alpha^2$$

از آنجا

$$m^2 + 2m\alpha = [m^2 + 2m\alpha + \alpha^2]$$

چون $0 \leq \alpha < 1$ ، بنا بر این معادله اخیر، وقتی جواب دارد که داشته باشیم:
 $2m\alpha \in \mathbb{Z}$ و برعکس. در نتیجه

$$\alpha = \frac{k}{2m} \quad k \in \{0, 1, \dots, 2m-1\}$$

به این ترتیب، برای هر يك از مقدارهای $1, \dots, n-1$ ، $m = 1, \dots, n$ ، درست

$2m$ مقدار پیدا می‌شود (به‌ازای $n = 1$ ، چنین مقدارهایی برای m وجود ندارد) و به‌ازای $m = n$ ، داریم $\alpha = 0$ (زیرا $n \leq x$)، یعنی تعداد جواب‌ها برابر است با

$$2 + 4 + \dots + 2(n-1) + 1 = n(n-1) + 1 = n^2 - n + 1$$

۱۵۲. ثابت می‌کنیم، برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ ، داریم:

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2}$$

درواقع، از نابرابری روشن $(2n+1)^2 < 4n(n+1)$ ، نتیجه می‌شود

$$2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1$$

و بنابراین

$$(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 = 2n+1 + 2\sqrt{n(n+1)} < 4n+2$$

که از آن‌جا، نابرابری موردنظر ما، به‌دست می‌آید که، بلافاصله ما را به نابرابری زیر می‌رساند:

$$[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] \leq [\sqrt{4n+2}]$$

اکنون، فرض می‌کنیم، برای مقداری از $n \in \mathbb{N}$ ، نابرابری اکید

$$[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] < [\sqrt{4n+2}]$$

برقرار باشد. در این صورت، عددی مثل $m \in \mathbb{N}$ وجود دارد، به‌نحوی که

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < m \leq \sqrt{4n+2}$$

که از آن‌جا، به‌دست می‌آید:

$$2\sqrt{n(n+1)} < m^2 - (2n+1) \leq 2n+1$$

یعنی

$$4n(n+1) < (m^2 - (2n+1))^2 \leq 4n(n+1) + 1$$

چون عدد $(m^2 - (2n+1))^2$ طبیعی است، بنابراین

$$m^2 - (2n+1) = 2n+1$$

و $m^2 = 2(2n+1)$ بر ۲ بخش پذیر و بر ۴ بخش ناپذیر است، که ممکن نیست. تناقض حاصل، درستی برابری حکم را ثابت می کند.
۰۱۵۳. فرض می کنیم:

$$f(n) = \left[n + \sqrt{n + \frac{1}{4}} \right], n \in \mathbb{N}$$

در این صورت، تفاضل

$$\begin{aligned} f(n+1) - f(n) &= \left[n+1 + \sqrt{n+1 + \frac{1}{4}} \right] - \\ &- \left[n + \sqrt{n + \frac{1}{4}} \right] = 1 + \left[\sqrt{n+1 + \frac{1}{4}} \right] - \left[\sqrt{n + \frac{1}{4}} \right] \end{aligned}$$

تنها وقتی بزرگتر از واحد است که داشته باشیم:

$$\left[\sqrt{n+1 + \frac{1}{4}} \right] < \left[\sqrt{n + \frac{1}{4}} \right]$$

یعنی وقتی که، برای عددی مثل $m \in \mathbb{N}$ ، داشته باشیم:

$$\sqrt{n + \frac{1}{4}} < m \leq \sqrt{n+1 + \frac{1}{4}}$$

که با نابرابری زیر هم ارز است:

$$n < m^2 - m + \frac{1}{4} \leq n+1$$

یعنی داشته باشیم: $n = m^2 - m$

از طرف دیگر، برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\begin{aligned} f(n+1) &= n+2 + \\ &+ \left[\sqrt{n+1 + \frac{1}{4}} \right] \leq n + \left[\sqrt{n + \frac{1}{4}} \right] + 2 = f(n) + 2 \end{aligned}$$

زیرا $\sqrt{n+1} - \frac{1}{4} < \sqrt{n} + \frac{1}{4}$. به این ترتیب، به دست می آید:

$$f(n+1) - f(n) = \begin{cases} 2 & (n = m^2 - m, m = 2, 3, \dots) \\ 1 & (n \in \mathbb{N} \text{ بقیه مقادارهای}) \end{cases}$$

بنابراین، $f(n)$ می تواند همه مقادارهای طبیعی را قبول کند، به جز مقادارهای به صورت

$$f(m^2 - m) + 1 = m^2 + \left[\sqrt{m^2 - m} + \frac{1}{4} \right] - m + 1 = m^2$$

(برابری آخر از این جا نتیجه می شود که نابرابری

$$m - 1 < \sqrt{m^2 - m} + \frac{1}{4} < m$$

برای هر $m \geq 2$ برقرار است) و عددهای کوچکتر از $f(1) = 2$. به این ترتیب، روشن شد که، تنها وقتی نمی توان عدد طبیعی را به

صورت $\left[n + \sqrt{n} + \frac{1}{4} \right]$ برای $n \in \mathbb{N}$ ، نشان داد که، این عدد طبیعی،

مجذور يك عدد طبیعی باشد.

۱۵۴. فرض می کنیم، در بین جمله های دنباله $\{a_n\}$ ، تعداد محدودی عددهای فرد وجود داشته باشد. در این صورت، اگر عدد فرد a_m را، با بزرگترین اندیس m در نظر بگیریم، باید همه عددهای a_{m+n} ، $n \in \mathbb{N}$ ، عددهایی زوج باشند.

$a_{m+1} = 2^p q$ می گیریم که، در آن، q عددی فرد و $p \in \mathbb{N}$ (عدد a_{m+1} مخالف صفر است، زیرا $a_1 > 0$ و در ضمن، دنباله مفروض، صعودی است). در این صورت

$$a_{m+2} = \left[\frac{3}{4} a_{m+1} \right] = 2^{p-1} \times 3q$$

به همین ترتیب، به دست می آید: $a_{m+3} = 2^{p-2} \times 3^2 q$ و سرانجام

$$a_{m+p+1} = 3^p q$$

که عددی فرد است. این نتیجه، فرض ما را که a_m آخرین عدد فرد بود، نقض می‌کند.

اکنون، فرض می‌کنیم، بین جمله‌های دنباله، مجموعه‌ای متناهی از عددهای زوج وجود داشته باشد. a_m را عددی زوج، با بزرگترین اندیس m می‌گیریم؛ در این صورت، a_{m+1} عددی فرد و $2^p q = a_{m+1} - 1$ که، در آن، q عددی فرد و $p \in \mathbb{N}$ داریم:

$$a_{m+2} = \left[\frac{3}{2} a_{m+1} \right] = \left[\frac{3}{2} (a_{m+1} - 1) + \frac{3}{2} \right] = 2^{p-1} \times 3q + 1$$

یعنی

$$a_{m+2} - 1 = 2^{p-1} \times 3q$$

به همین ترتیب، به دست می‌آید: $2^{p-2} \times 3^2 q = a_{m+3} - 1$ و غیره؛ سرانجام

$$a_{m+p+1} - 1 = 3^p q \Rightarrow a_{m+p+1} = 3^p q + 1$$

که عددی زوج است. در این جا هم، فرض ما، مبنی بر این که a_m عددی زوج با بزرگترین اندیس m است، نقض می‌شود. حکم، ثابت شد.
۱۵۵. فرض می‌کنیم:

$$a_n = (3 + \sqrt{11})^n + (3 - \sqrt{11})^n$$

در این صورت، داریم:

$$a_{n+2} = 6a_{n+1} + 2a_n, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

در واقع، اگر فرض کنیم: $\alpha = (3 + \sqrt{11})^n$ و $\beta = (3 - \sqrt{11})^n$ ، آن وقت، به دست می‌آید:

$$a_n = \alpha + \beta,$$

$$a_{n+1} = (3 + \sqrt{11})\alpha + (3 - \sqrt{11})\beta,$$

$$a_{n+2} = (3 + \sqrt{11})^2 \alpha + (3 - \sqrt{11})^2 \beta = (20 + 6\sqrt{11})\alpha + \\ + (20 - 6\sqrt{11})\beta = (18 + 6\sqrt{11})\alpha + (18 - 6\sqrt{11})\beta + \\ + (2\alpha + 2\beta) = 6a_{n+1} + 2a_n$$

از این جا، و از برای های $a_0 = 2$ ، $a_1 = 6$ ، نتیجه می شود که، عدد a_n برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ عددی درست است. چون $0 < 3 - \sqrt{11} < 1$ ، به ازای $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$a_{2n-1} = (3 + \sqrt{11})^{2n-1} + (3 - \sqrt{11})^{2n-1} < (3 + \sqrt{11})^{2n-1} < \\ < a_{2n-1} + 1, \quad a_{2n-1} = [(3 + \sqrt{11})^{2n-1}]$$

اکنون، با استقرای روی $n \in \mathbb{N}$ ، ثابت می کنیم: عدد a_{2n-2} بر 2^n بخش پذیر است، ولی عدد a_{2n-1} بر 2^n بخش پذیر، ولی بر 2^{n+1} بخش ناپذیر است. حکم، برای $n = 1$ درست است، زیرا $a_0 = 2$ و $a_1 = 6$. فرض می کنیم، حکم، برای $n \in \mathbb{N}$ درست باشد. در این صورت عدد

$$a_{2n} = 6a_{2n-1} + 2a_{2n-2}$$

بر 2^{n+1} بخش پذیر است، زیرا هر دو عدد a_{2n-1} و a_{2n-2} بر 2^n بخش پذیرند. سپس، عدد

$$a_{2n+1} = 6a_{2n} + 2a_{2n-1}$$

بر 2^{n+1} بخش پذیر است (زیرا هر دو عدد a_{2n} و a_{2n-1} بر 2^n بخش پذیرند)، ولی بر 2^{n+2} بخش پذیر نیست (زیرا عدد a_{2n} بر 2^{n+1} بخش پذیر و عدد a_{2n-1} بر آن بخش ناپذیر است). حکم ثابت شد.

به این ترتیب، بزرگترین توان 2 ، که مقسوم علیهی از a_{2n-1} باشد، برابر است با 2^n ، یعنی $k = n$.

۰۱۵۶. برای مقدار مفروض $n \in \mathbb{N}$ ، فرض می کنیم:

$$m = [n\sqrt{2}]$$

چون $m \neq n\sqrt{2}$ (زیرا $\sqrt{2}$ عددی است گنگ)، بنابراین $m < n\sqrt{2}$ و

$$2n^2 < m^2 \text{ بنا بر این}$$

$$1 \leq 2n^2 - m^2 = (n\sqrt{2} - m)(n\sqrt{2} + m) = \\ = \{n\sqrt{2}\}(n\sqrt{2} + m) < \{n\sqrt{2}\} 2n\sqrt{2}$$

که از آنجا، نابرابری مطلوب به دست می آید.

اکنون $\varepsilon > 0$ را مفروض می گیریم. دنباله‌های $\{n_i\}$ و $\{m_i\}$ را، با

تعریف زیر در نظر می گیریم: $n_i = m_i = 1$ و

$$n_{i+1} = 2n_i + m_i, \quad m_{i+1} = 2m_i + n_i, \quad i \in \mathbb{N}$$

در آن صورت، برای هر $i \in \mathbb{N}$: $2n_i^2 - m_i^2 = 1$ در واقع، برای $i = 1$ ،

به برابری درست $2n^2 - m^2 = 1$ می رسیم. اگر برابری برای مقداری مثل

$i \in \mathbb{N}$ برقرار باشد، آن وقت

$$2n_{i+1}^2 - m_{i+1}^2 = 2(4n_i^2 + 4n_i m_i + m_i^2) - \\ - (4m_i^2 + 4n_i m_i + n_i^2) = 2n_i^2 - m_i^2 = 1$$

یعنی، برابری برای $i+1$ هم درست است. چون دنباله $\{n_i\}$ صعودی است،

بنابراین مقدار $n = n_{i_0}$ را می توان طوری انتخاب کرد که، برای آن، داشته

باشیم:

$$n > \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

در این صورت، خواهیم داشت:

$$\varepsilon(2n\sqrt{2} - 1) > 1, \quad (1 + \varepsilon)(2n\sqrt{2} - 1) > 2n\sqrt{2}$$

که از آن، برای $m = m_{i_0}$ ، نتیجه می شود:

$$\frac{1 + \varepsilon}{2n\sqrt{2}} > \frac{1}{2n\sqrt{2} - 1} > \frac{1}{n\sqrt{2} + m} = n\sqrt{2} - m = \{n\sqrt{2}\}$$

زیرا $0 < n\sqrt{2} - m = \frac{1}{n\sqrt{2} + m} < 1$ شد. مسأله حل شد.

۱۵۷. الف) این تابع را در نظر می‌گیریم:

$f(x, y) = [\Delta x] + [\Delta y] - [3x + y] - [3y + x] - [x] - [y]$
 و ثابت می‌کنیم، برای هر $x, y \in \mathbf{R}$ داریم: $f(x, y) \geq 0$. فرض کنید،
 برای مقدارهایی از $x, y \in [0, 1)$ داشته باشیم:

$$f(x, y) = [\Delta x] + [\Delta y] - [3x + y] - [3y + x] < 0$$

درضمن، بدون این که به کلی بودن مسأله، لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض
 کرد: $x \leq y$. در این صورت $f(x, y) \leq -1$ (زیرا $f(x, y) \in \mathbf{Z}$) و

$$f(x, y) > (\Delta x - 1) + (\Delta y - 1) - \\
 - (3x + y) - (3y + x) = x + y - 2$$

یعنی $-1 < x + y - 2$ یا $x + y < 1$. چون

$$[\Delta y] - [3y + x] \geq [\Delta y] - [4y] \geq 0$$

بنابراین

$$[\Delta x] - [3x + y] = f(x, y) - ([\Delta y] - [3y + x]) \leq -1$$

از طرف دیگر

$$[\Delta x] - [3x + y] \geq [\Delta x] - [3x + 1 - x] = [\Delta x] - [2x + 1]$$

یعنی $[\Delta x] < [2x + 1]$ که از آن جا $\Delta x < 2x + 1$ یا $x < \frac{1}{3}$ به دست

می‌آید. ولی در این صورت

$$[2x + 1] \leq \left[2 \times \frac{1}{3} + 1 \right] = 1$$

یعنی $[2x + 1] < 1$ یا $x < \frac{1}{5}$. چون

$$[3x + y] \geq 1 + [\Delta x] = 1$$

بنابراین $y \geq 1 - 3x > \frac{2}{5}$ و $[5y] \geq 2$. توجه می‌کنیم که:

$$[3x+y] \leq \left[3 \times \frac{1}{5} + 1 \right] = 1$$

اگر $y < \frac{3}{5}$ ، آن وقت $3y+x < 3 \times \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = 2$ و $[3y+x] \leq 1$

$$f(x, y) = [\Delta x] + [\Delta y] - [3x+y] - [3y+x] \geq 0 + 2 - 1 - 1 = 0$$

و اگر $y \geq \frac{3}{5}$ ، آن وقت $[\Delta y] \geq 3$

$$[3y+x] = [y+x+2y] \leq [y+x] + 2 \leq 2$$

$$f(x, y) \geq 0 + 3 - 1 - 2 = 0 \quad \text{و}$$

به این ترتیب، نابرابری $f(x, y) \geq 0$ برای $y \in [0, 1]$ و x ثابت شد. ولی از آن جا که، عدد ۱، دوره تناوب تابع $f(x, y)$ برای هر يك از آوندهای x و y است، بنابراین، این نابرابری، برای هر مقدار $x, y \in \mathbb{R}$ برقرار است. سرانجام، برای $y \geq 0$ و x داریم:

$$[\Delta x] + [\Delta y] = f(x, y) + [3x+y] + [3y+x] + [x] + [y] \geq [3x+y] + [3y+x]$$

و این، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.
 ب) ثابت می‌کنیم، توان عدد اول و دلخواه p که در تجزیه مخرج کسر، یعنی

$$m!n!(3n+m)!(n+3m)!$$

به دست می‌آید، از توان همین عدد در تجزیه صورت کسر، تجاوز نمی‌کند. می‌دانیم، اگر عدد q را به عامل‌های اول تجزیه کنیم، توان عدد اول p ، در این تجزیه، برابر است با

$$\left[\frac{q}{p} \right] + \left[\frac{q}{p^2} \right] + \left[\frac{q}{p^3} \right] + \dots$$

بنابراین، توان عدد اول p ، در تجزیه صورت کسر، چنین می شود:

$$\left[\frac{\Delta m}{p} \right] + \left[\frac{\Delta m}{p^2} \right] + \dots + \left[\frac{\Delta n}{p} \right] + \left[\frac{\Delta n}{p^2} \right] + \dots$$

و در مخرج کسر

$$\left[\frac{m}{p} \right] + \left[\frac{m}{p^2} \right] + \dots + \left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \dots + \left[\frac{3m+n}{p} \right] +$$

$$+ \left[\frac{3m+n}{p^2} \right] + \dots + \left[\frac{3n+m}{p} \right] + \left[\frac{3n+m}{p^2} \right] + \dots$$

اگر فرض کنیم: $\frac{m}{p^k} = x_k$ و $\frac{n}{p^k} = y_k$ ($k \in \mathbb{N}$)، با توجه به بخش الف)

مسأله داریم:

$$[\Delta x_k] + [\Delta y_k] \geq [x_k] + [y_k] + [3x_k + y_k] + [x_k + 3y_k]$$

که اگر آن‌ها را، به‌ازای همه مقادیرهای $k \in \mathbb{N}$ ، باهم جمع کنیم (وقتی k به اندازه کافی بزرگ شود، هر دو طرف نابرابری، برابر صفر می شوند)، به نابرابری مطلوب می‌رسیم.

۱۵۸. $x = m + \alpha$ می‌گیریم که، در آن، $m = [x]$ و $\alpha = \{x\}$.

در این صورت، برای هر $k \in \mathbb{N}$ می‌توان نوشت:

$$[kx] = [km + k\alpha] = km + [k\alpha]$$

بنابراین، نابرابری مفروض، به این صورت درمی‌آید:

$$[n\alpha] \geq \frac{[\alpha]}{1} + \frac{[2\alpha]}{2} + \dots + \frac{[n\alpha]}{n}$$

در نتیجه، کافی است حالت $0 \leq x < 1$ را مورد بررسی قرار دهیم. سمت چپ و سمت راست نابرابری، به‌ازای $x \in (0, 1)$ ، تابع‌هایی هستند، قطعه به قطعه ثابت و غیر نزولی و مقدار خود را، تنها در نقطه‌هایی به صورت

$x = \frac{p}{q}$ تغییر می‌دهند که، در آن، عددهای $p, q \in \mathbb{N}$ نسبت به هم اول اند،

یعنی $1 = (p, q)$ ، $2 \leq q \leq n$ ، $1 \leq p \leq q-1$. بنا براین، کافی است،
درستی نابرابری را، تنها در چنین نقطه‌هایی ثابت کنیم (نابرابری، در نقطه
 $x=0$ ، به روشنی برقرار است). درضمن، اگر فرض کنیم:

$$\left[k \cdot \frac{p}{q} \right] = a_k, \quad q \left\{ k \cdot \frac{p}{q} \right\} = b_k \quad (k = 1, \dots, n)$$

آن وقت

$$0 \leq b_k < q, \quad kp = a_k q + b_k$$

و نابرابری مورد بررسی، به این صورت درمی آید:

$$a_n \geq \frac{a_1}{1} + \dots + \frac{a_n}{n}$$

یادآوری می‌کنیم که، عددهای b_1, \dots, b_{q-1} مخالف صفر و دو به دو باهم
متفاوت‌اند (اگر برای $i > j$ داشته باشیم $b_i = b_j$ ، آن وقت

$$ip - a_i q = jp - a_j q$$

و از آن‌جا

$$(i-j)p = (a_i - a_j)q, \quad 0 < i-j < q$$

که ممکن نیست، زیرا p و q نسبت به هم اول‌اند). به این ترتیب

$$\{b_1, \dots, b_{q-1}\} = \{1, \dots, q-1\}$$

و از قضیهٔ مربوط به واسطه‌ها، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{b_1}{1} + \frac{b_2}{2} + \dots + \frac{b_{q-1}}{q-1} &\geq \sqrt[q-1]{\frac{b_1 b_2 \dots b_{q-1}}{1 \times 2 \times \dots \times (q-1)}} = \\ &= \sqrt[q-1]{\frac{(q-1)!}{(q-1)!}} = 1 \end{aligned}$$

و از آن‌جا

$$\frac{b_1}{1} + \frac{b_2}{2} + \dots + \frac{b_n}{n} \geq \frac{b_1}{1} + \dots + \frac{b_{q-1}}{q-1} \geq q-1$$

بنابراین

$$\begin{aligned} a_n + \frac{q-1}{q} &\geq a_n + \frac{b_n}{q} = \frac{np}{q} = \frac{p}{q} + \frac{2p}{2q} + \dots + \frac{np}{nq} = \\ &= \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_n}{n} + \frac{1}{q} \left(\frac{b_1}{1} + \dots + \frac{b_n}{n} \right) \geq a_1 + \frac{a_2}{2} + \\ &\quad + \dots + \frac{a_n}{n} + \frac{q-1}{q} \end{aligned}$$

و این، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۰۱۵۹. از شرط مسأله، نتیجه می‌شود: $c = a + b$ ، زیرا در غیر این

صورت، به‌ازای مقادیرهای به‌قدر کافی بزرگ $n \in \mathbb{N}$ ، برابری

$$[an] + [bn] = [cn]$$

برقرار نمی‌شود. در واقع، اگر $c > a + b$ و $n \geq \frac{1}{c - a - b}$ ، آن وقت

$$[nc] > nc - 1 \geq na + nb \geq [na] + [nb]$$

و اگر $c < a + b$ و $n \geq \frac{2}{a + b - c}$ ، آن وقت

$$[nc] \leq nc \leq na - 1 + nb - 1 < [na] + [nb]$$

علاوه بر این، به‌ازای $n = 1$ ، به‌دست می‌آید: $[a] + [b] = [c]$.

می‌توان، بدون این که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، فرض کرد:

$$0 \leq a < 1, \quad 0 \leq b < 1, \quad c = a + b < 1$$

در واقع، اگر $a = [a] + \alpha$ ، $b = [b] + \beta$ ، $c = [c] + \gamma$ فرض کنیم،

آن وقت، برای عددهای $(\alpha, \beta, \gamma) \in [0, 1)$ ، از برابری

$$\begin{aligned} [an] + [bn] &= ([a]n + [\alpha n]) + ([b]n + [\beta n]) = \\ &= ([a] + [b])n + [\alpha n] + [\beta n] = [c]n + [\gamma n] \end{aligned}$$

$$[\alpha n] + [\beta n] = [\gamma n]$$

$a \neq 0$ و $b \neq 0$ فرض می کنیم و دو حالت در نظر می گیریم:

الف) a و b عددهایی گویا هستند، یعنی $a = \frac{k}{m}$ ، $b = \frac{l}{m}$ ، $c = \frac{k+l}{m}$

که، در آن‌ها، $k, l, m \in \mathbb{N}$ و $k+l < m$. در این صورت، اگر $n = m-1$ ، آن وقت

$$[an] = \left[k \cdot \frac{m-1}{m} \right] = \left[k - \frac{k}{m} \right] = [k-a] = k-1$$

و به همین ترتیب

$$[bn] = l-1, [cn] = k+l-1$$

بنابراین، برابری $[an] + [bn] = [cn]$ ، به ازای این n برقرار نیست.
ب) فرض کنیم، دست کم یکی از عددهای a و b ، و مثلاً عدد a ، گنگ باشد. عدد $p \in \mathbb{N}$ را طوری انتخاب می کنیم که، برای آن، داشته باشیم:

$$a + pb < 1 \leq a + (p+1)b$$

و ثابت می کنیم که، برای عددی مثل $n \in \mathbb{N}$ ، داریم:

$$a + pb < \{na\}$$

در واقع، اگر فرض کنیم $\varepsilon = 1 - (a + pb)$ و عددهای $\{a\}$ ، $\{2a\}$ ،

$\{3a\}$ ، ...، $\{ta\}$ را در نظر بگیریم $\left(t > \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right)$ ، از آن جا که همه این

عددها به بازه $(0, 1)$ تعلق دارند، بنابراین، بین آن‌ها، دست کم دو عدد

$\{ra\}$ و $\{qa\}$ پیدا می شود ($r < q$) که اختلافی کمتر از ε دارند (در غیر

این صورت، اختلاف کوچکترین و بزرگترین این عددها، از

$$\varepsilon(t-1) > \varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) = 1$$

کمتر نمی شود). بنا بر این، دو امکان وجود دارد:

$$\{(q-r)a\} > 1 - \varepsilon \quad \text{یا} \quad \{(q-r)a\} < \varepsilon$$

در حالت اول، فرض می کنیم $n = q - r$ که در نتیجه

$$a + pb = 1 - \varepsilon < \{na\}$$

در حالت دوم $\delta = \{(q-r)a\} < \varepsilon$ می گیریم و عدد $s \in \mathbb{N}$ را طوری انتخاب می کنیم که، برای آن، داشته باشیم:

$$\delta s < 1 \leq \delta(s+1)$$

در این صورت، با فرض $n = s(q-r)$ به دست می آید:

$$\{na\} = s\{(q-r)a\} = \delta s > 1 - \varepsilon$$

بنا بر این، در این حالت هم داریم: $a + pb < \{na\}$. برای این مقدار n ، باید داشته باشیم:

$$[na] + [nb] = [nc],$$

$$\{na\} + \{nb\} = n(a+b) - ([na] + [nb]) = \{nc\}$$

که در نتیجه به دست می آید:

$$\{na\} > a,$$

$$\{nc\} = \{na\} + \{nb\} \geq \{na\} > a + pb > a + b = c$$

$$\{nb\} = \{nc\} - \{na\} < 1 - (a + pb) = 1 -$$

$$-(a + (p+1)b - b) \leq 1 - (1 - b) = b$$

که از آن‌ها به دست می آید: $n > 1$ و

$$[(n-1)a] = [na], \quad [(n-1)c] = [nc],$$

$$[(n-1)b] = [nb] - 1$$

یعنی، برابری

$$[(n-1)a] + [(n-1)b] = [(n-1)c]$$

برقرار نیست. به این ترتیب، ثابت شد که، دست کم یکی از عددهای a یا b باید برابر صفر باشند. تناقض حاصل، اثبات حکم مسأله را کامل می‌کند.

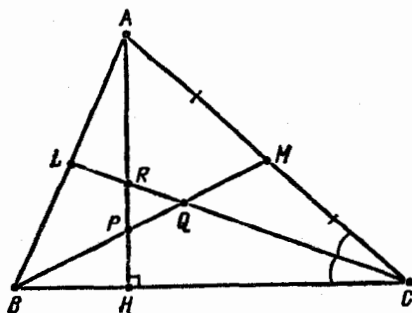
فصل سوم

هندسه روی صفحه

§۹. مثلث

۱۶۰. از برهان خلف استفاده می‌کنیم، یعنی فرض می‌کنیم در مثلث BBC ، که زاویه‌هایی حاده و ضلع‌هایی نابرابر دارد، ارتفاع AH ، میانه BM و نیمساز CL ، ضمن برخورد باهم، مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته باشند. نقطه‌های برخورد پاره‌خط‌های راست AH و BM ، CL و BM ، CL و AH را، به ترتیب، P ، Q ، R می‌نامیم (شکل ۲). در مثلث CRH داریم:

$$\widehat{CHR} = 90^\circ, \widehat{CRH} = 60^\circ$$



شکل ۲

از آن جا $\widehat{RCH} = 30^\circ$ سپس، در مثلث CMQ داریم:

$$\widehat{QCM} = \widehat{RCM} = 30^\circ, \quad \widehat{MQC} = 60^\circ$$

(برابری $\widehat{BQC} = 60^\circ$ ممکن نیست، زیرا در غیر این صورت باید داشته باشیم:

$$\widehat{ABC} > \widehat{QBC} = 180^\circ - \widehat{BQC} - \widehat{QCB} = 90^\circ$$

یعنی مثلث ABC ، زاویه‌ای منفرجه دارد)، از آن جا $BM \perp AC$. به این ترتیب، میانه BM ، در عین حال، بر قاعده عمود می‌شود و از آن جا

$$\widehat{BAC} = \widehat{BCA} = \widehat{ACL} + \widehat{BCL} = 60^\circ$$

یعنی، مثلث مفروض، باید متساوی‌الاضلاع باشد که فرض مسأله را نقض می‌کند.

۱۶۱. بدون این که به کلی بودن مسأله، لطمه‌ای وارد شود، می‌توان

فرض کرد: $a \leq b \leq c$. اگر $c > b$ ، آن وقت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^n}{c^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{c^n} = 0$$

و برای مقادیرهای به قدر کافی بزرگ $n \in \mathbb{N}$ ، نابرابری $a^n + b^n > c^n$ نمی‌تواند برقرار باشد. بنابراین $b = c$ و همه مثلث‌ها، متساوی‌الساقین‌اند.

۱۶۲. فرض می‌کنیم، عددهای طبیعی m و n با شرط مسأله سازگار

باشند. در این صورت

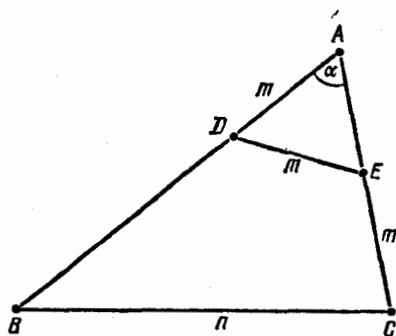
$$m = CE < AC = 21$$

و از مثلث ADE (شکل ۳)، داریم:

$$21 - m = AE < AD + DE = 2m$$

یعنی $7 < m < 21$.

چون $AD = DE$ ، برای زاویه $\alpha = \widehat{BAC}$ داریم:



شکل ۳

$$\cos \alpha = \frac{AE}{AD} = \frac{21 - m}{2m}$$

سرانجام، بنا بر قضیه کسینوس‌ها، در مثلث ABC به دست می‌آید:

$$n^2 = BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \alpha = 33^2 + 21^2 - 2 \times 33 \times 21 \cdot \frac{21 - m}{2m} = 2223 - \frac{27 \times 49 \times 11}{m}$$

از این جا نتیجه می‌شود که m باید مقسوم‌علیه‌ی از عدد $27 \times 49 \times 11$ باشد، از دو جواب ممکن $m = 9$ و $m = 11$ (با توجه به شرط $7 < m < 21$)، جواب اول مناسب نیست (زیرا $n^2 = 606$ مجذور کامل نمی‌شود). برای $m = 11$ به دست می‌آید: $n^2 = 900$ ، یعنی $n = 30$. آزمایش نشان می‌دهد که، به ازای این مقدار n ، همه شرط‌های مسأله برقرارند. ۱۶۳ عددهای طبیعی a و b و c را طول ضلع‌های مثلثی می‌گیریم که قطر دایره محیطی آن $2R = 6/25$ ، مساحت آن S و نصف محیط آن p باشد. چون طول هر ضلع مثلث نمی‌تواند از طول قطر دایره محیطی آن، تجاوز کند، بنا بر این

$$a > b > c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

سپس، داریم:

$$(abc)^2 = (2SR)^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)(2R)^2$$

که از آن جا به دست می آید:

$$64a^2b^2c^2 = 625(a+b+c)(c+b-a)(a+c-b)(a+b-c)$$

بنابراین، باید عدد $64a^2b^2c^2$ بر 625 بخش پذیر باشد، یعنی دست کم، دو عدد از سه عدد a و b و c برابر 5 باشند. فرض کنیم، مثلاً $a=b=5$ آن وقت

$$64c^2 = (10+c)c^2(10-c)$$

یعنی $c^2 = 100 - 64 = 36$ و $c = 6$. بنابراین، ضلع های مثلث، تنها می توانند 5 و 6 باشند و آزمایش هم نشان می دهد که با شرط های مسأله سازگارند.

164 R را شعاع دایره ای می گیریم که دو مثلث ABC و DEF

در آن محاط شده اند. بنا بر قضیه سینوس ها در مثلث ABC داریم:

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{BC + AC + AB}{2R} = \frac{p_1}{2R}$$

(p_1 ، محیط مثلث ABC است). و در مثلث DEF :

$$\sin E + \sin D + \sin F = \frac{p_2}{2R}$$

(p_2 ، محیط مثلث DEF است). بنابراین، دو برابری زیر هم ارزند:

$$\sin A + \sin B + \sin C = \sin E + \sin D + \sin F$$

$$p_1 = p_2$$

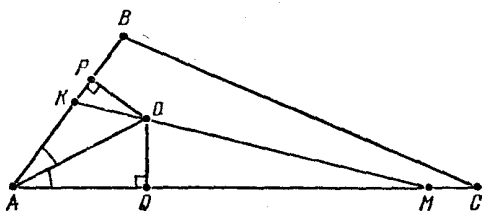
165 . فرض کنید، خط راست ضلع های مثلث ABC را در K و M

قطع کرده باشد که، برای مشخص بودن وضع، آن ها را به ترتیب، روی ضلع های AB و AC می گیریم (شکل ۴).

ثابت می کنیم، برابری

$$\frac{S_{AKM}}{S_{ABC}} = \frac{AK + AM}{AB + AC + BC} \quad (1)$$

تنها وقتی برقرار است که، خط راست KM ، از مرکز دایره محاطی مثلث



شکل ۴

بگذرد. آنچه مسأله خواسته است، حالت خاصی از حکم بالاست، با این شرط اضافی که

$$S_{AKM} = \frac{1}{4} S_{ABC}$$

[زیرا، شرط اخیر، به معنای برابری $S_{AKM} = S_{KBCM}$ است، و شرط

$$AK + AM = \frac{1}{4} (AB + AC + BC)$$

به معنای درستی برابری

$$AK + AM + KM = KB + MC + BC - KM)$$

است.]

شعاع دایره محاطی مثلث ABC را، r می گیریم. در این صورت

$$2S_{ABC} = r(AB + AC + BC)$$

از طرف دیگر، اگر ρ شعاع دایره ای باشد که مرکز آن بر خط راست KM و خود دایره بر ضلع های AK و AM مماس است، داریم:

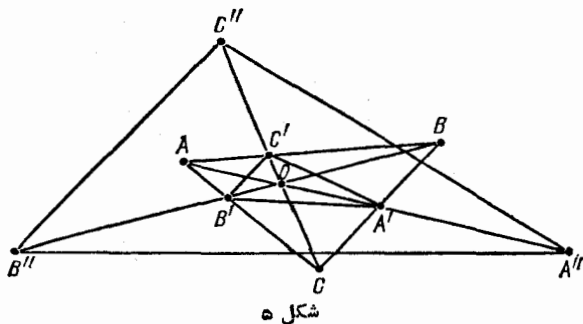
$$2S_{AKM} = \rho(AK + AM)$$

بنابراین، برابری (۱)، با برابری $r = \rho$ هم ارز است و، برابری اخیر، تنها وقتی برقرار است که، مرکزهای دو دایره، برهم منطبق باشند.

۱۹۶۶. نقطه برخورد پاره خط های راست AA' ، BB' و CC' را O ،

و زاویه AOB را برابر φ می گیریم (شکل ۵).

این برابری ها روشن است:



$$2S_{AOB} = AO \cdot BO \sin \varphi,$$

$$2S_{AOB'} = AO \cdot B'O \sin \varphi,$$

$$2S_{BOA'} = BO \cdot A'O \sin \varphi,$$

$$2S_{A'OB'} = A'O \cdot B'O \sin \varphi$$

از آن جا

$$\begin{aligned} S_{A''OB''} &= \frac{1}{4} A''O \cdot B''O \sin \varphi = \frac{1}{4} (AO + 2A'O)(BO + 2B'O) \sin \varphi = \\ &= S_{AOB} + 2S_{AOB'} + 2S_{BOA'} + 4S_{A'OB'} \end{aligned}$$

به همین ترتیب، می توان به دست آورد:

$$S_{A''OC''} = S_{AOC} + 2S_{AOC'} + 2S_{COA'} + 4S_{A'OC'}$$

$$S_{B''OC''} = S_{BOC} + 2S_{BOC'} + 2S_{COB'} + 4S_{B'OC'}$$

به این ترتیب، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} S_{A''B''C''} &= S_{A''OB''} = S_{A''OC''} + S_{B''OC''} = \\ &= S_{ABC} + 2(S_{AOB'} + S_{B'OC} + S_{COA'} + S_{A'OB} + S_{BOC'} + \\ &\quad + S_{C'OA}) + 4S_{A'B'C'} = 3S_{ABC} + 4S_{A'B'C'} \end{aligned}$$

۰۱۶۷ فرض می کنیم: $\vec{CA} = \mathbf{b}$, $\vec{BC} = \mathbf{a}$, $\vec{AB} = \mathbf{c}$. داریم:

$$\vec{AO} = \frac{1}{3}(\vec{c} - \vec{b}), \vec{BO} = \frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{c}), \vec{CO} = \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a})$$

و

$$(\vec{AB}^2 + \vec{BC}^2 + \vec{CA}^2) - 3(\vec{OA}^2 + \vec{OB}^2 + \vec{OC}^2) =$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - \frac{1}{3}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] =$$

$$= \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac) = \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = 0$$

۱۶۸. فرض کنید، مرکز ثقل مرزهای مثلث ABC ، بر مرکز ثقل خود مثلث، یعنی بر نقطه O محل برخورد میانه‌های آن، منطبق باشد. طول ضلع‌های BC ، CA ، AB را به ترتیب a ، b ، c و وسط این ضلع‌ها را A_1 ، B_1 ، C_1 می‌نامیم (مرکزهای ثقل ضلع‌های متناظرند). در این صورت داریم:

$$a \cdot \vec{OA}_1 + b \cdot \vec{OB}_1 + c \cdot \vec{OC}_1 = 0$$

از آن جا که

$$\vec{OC}_1 = \frac{1}{3}\vec{CC}_1 = \frac{1}{6}(\vec{CA} + \vec{CB}) = -\frac{1}{6}(\vec{AB} + \vec{AC}) -$$

$$-\frac{1}{6}(\vec{BA} + \vec{BC}) = -\frac{1}{3}\vec{AA}_1 - \frac{1}{3}\vec{BB}_1 = -\vec{OA}_1 - \vec{OB}_1$$

به دست می‌آید:

$$(a-c)\vec{OA} + (b-c)\vec{OB} = a\vec{OA}_1 + b\vec{OB}_1 + c\vec{OC}_1 = 0$$

و چون بردارهای \vec{OA}_1 و \vec{OB}_1 هم راستا نیستند، باید داشته باشیم:

$$a = b = c$$

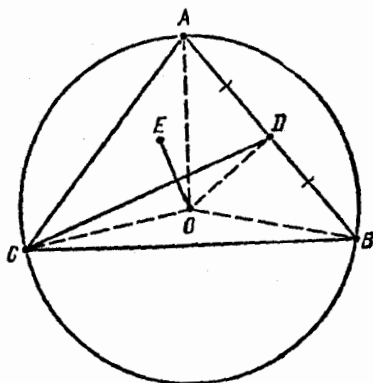
یعنی، مثلث، متساوی الاضلاع است.

۰۱۶۹ داریم (شکل ۶):

$$\vec{OE} = \frac{1}{3}(\vec{OC} + \vec{OA} + \vec{OD}) = \frac{1}{3}(\vec{OC} + \frac{2}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB}),$$

$$\vec{CD} = \frac{1}{4}(\vec{CA} + \vec{CB}) = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} - 2\vec{OC}),$$

$$AB = AC, \vec{AO} \perp \vec{BC}$$



شکل ۶

بنابراین، به دست می آید:

$$12 \vec{OE} \cdot \vec{CD} = (2\vec{OC} + 2\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} - 2\vec{OC}) =$$

$$= 2\vec{OA}^2 + \vec{OB}^2 - 4\vec{OC}^2 + 4\vec{OA} \cdot \vec{OB} - 4\vec{OC} \cdot \vec{OA} =$$

$$= 3R^2 + R^2 - 4R^2 + 4\vec{OA} \cdot (\vec{OB} - \vec{OC}) = 4\vec{OA} \cdot \vec{CB} = 0$$

که در آن، شعاع دایره محیطی مثلث ABC است؛ $R = OA = OB = OC$

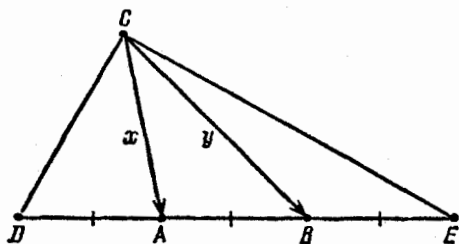
از این جا نتیجه می شود: $OE \perp CD$.

۱۷۰. $\vec{CA} = x$ و $\vec{CB} = y$ می گیریم، در این صورت (شکل ۷):

$$\vec{DA} = \vec{BE} = \vec{AB} = y - x, \quad \vec{CE} = 2y - x, \quad \vec{CD} = 2x - y$$

و شرط $CD \perp CE$ ، با برابری زیر هم ارز است:

$$(2x - y)(2y - x) = 0 \quad \text{یا} \quad \Delta(x - y)^2 = x^2 + y^2$$



شکل ۷

شرط اخیر به این معناست که، برای ضلع های $AC = b$ ، $BC = a$ و $AB = c$ از مثلث ABC ، باید داشته باشیم:

$$\Delta c^2 = a^2 + b^2$$

در این صورت، مثلث تنها به ازای مقادارهایی از a و b وجود دارد که، برای آنها، داشته باشیم:

$$|a - b| < \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{\Delta}} < a + b$$

یعنی

$$\Delta(a - b)^2 < a^2 + b^2 < \Delta(a + b)^2$$

نا برابری سمت راست، برای همه مقادارهای مثبت a و b برقرار است و برای برقراری نابرابری سمت چپ، باید داشته باشیم:

$$(2a - b)(2b - a) > 0$$

که از آنجا، جواب به دست می آید: $\frac{1}{4} < \frac{a}{b} < 2$.

۱۷۱. زاویه α را طوری انتخاب می کنیم که، برای آن، داشته باشیم:

$60^\circ < \alpha < 90^\circ$ و $tg \alpha \in \mathbb{Q}$ (مثلاً، مناسب است $tg \alpha = \frac{1}{4}$ بگیریم). در این

صورت، هر يك از عددهای

$$tg 2\alpha = \frac{2 tg \alpha}{1 - tg^2 \alpha}, \quad tg 3\alpha = \frac{tg 2\alpha + tg \alpha}{1 - tg 2\alpha tg \alpha},$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - tg^2 \alpha}{1 + tg^2 \alpha}, \quad \sin 2\alpha = \frac{2 tg \alpha}{1 + tg^2 \alpha},$$

$$\cos 6\alpha = \frac{1 - tg^2 3\alpha}{1 + tg^2 3\alpha}, \quad \sin 6\alpha = \frac{2 tg 3\alpha}{1 + tg^2 3\alpha}$$

عددهایی گویا هستند. بنابراین، اگر مثلث قائم الزاویه $A_1 B_1 C_1$ را با فرض های

$$\hat{C}_1 = 90^\circ, \hat{A}_1 = 6\alpha, A_1 B_1 = 1, A_1 C_1 = \cos 6\alpha, B_1 C_1 = \sin 6\alpha$$

بسازیم، طول ضلع های آن، عددهایی گویا می شود و، در نتیجه، مثلث ABC ،
متشابه با $A_1 B_1 C_1$ وجود دارد که طول ضلع های آن، عددهایی درست باشند

(مثلاً، برای $tg \alpha = \frac{1}{4}$ ، ضلع های مثلث ABC را می توان $AB = 4913$ ،

$A_2 B_2 C_2$ در مثلث ABC گرفت). از طرف دیگر، در مثلث $A_2 B_2 C_2$ $BC = 4888$ ، $AC = 495$

هم که، برای آن، داشته باشیم:

$$\hat{C}_2 = 90^\circ, \hat{A}_2 = 2\alpha, A_2 B_2 = 1, A_2 C_2 = \cos 2\alpha, B_2 C_2 = \sin 2\alpha$$

طول همه ضلع ها، عددهایی گویا هستند. بنابراین، می توان به کمک پرگار و

خط کش، زاویه $\hat{A}_1 = \frac{1}{3} \hat{A}_2 = 2\alpha$ را ساخت، یعنی زاویه A از مثلث ABC را

به سه بخش برابر تقسیم کرد. از آنجا که، زاویه 30° درجه را، می توان

ساخت، در نتیجه

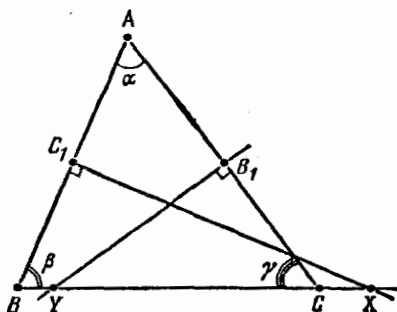
$$\frac{1}{3}\hat{B} = \frac{1}{3}(\hat{C} - \hat{A}) = 30^\circ - 2\alpha$$

را هم می توان به کمک پرگار و خط کش رسم کرد. به این ترتیب، هر یک از زاویه های مثلث قائم الزاویه ABC را می توان، به کمک پرگار و خط کش، به سه بخش برابر تقسیم کرد. مثلث ABC ، جوابی برای مسأله است.

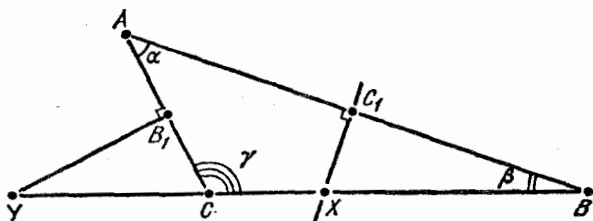
۰۱۷۲ در مثلث ABC فرض می کنیم:

$$\alpha = \hat{A}, \beta = \hat{B}, \gamma = \hat{C}, a = BC, b = AC, c = AB$$

و R را شعاع دایره محیطی مثلث می گیریم.



شکل ۸



شکل ۹

برابری $BC = XY$ ، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$\vec{BC} = \vec{YX} \quad \text{یا} \quad \vec{BC} = \vec{XY}$$

که با توجه به برابری های

$$\begin{aligned} |\vec{XY} \pm \vec{BC}| &= |\vec{XB} + \vec{BC} + \vec{CY} \pm \vec{BC}| = \\ &= \left| -\frac{c}{2\cos\beta} + a - \frac{b}{2\cos\gamma} \pm a \right| = R \left| -\frac{\sin\gamma}{\cos\beta} - \frac{\sin\beta}{\cos\gamma} + 2(1 \pm 1)\sin\alpha \right| \end{aligned}$$

هم‌ارز با شرط زیر است:

$$2(1 \pm 1)\sin\alpha = \frac{\sin\gamma}{\cos\beta} + \frac{\sin\beta}{\cos\gamma}$$

(علامت «+» متناظر با حالتی است که در شکل ۸ نشان داده شده است، و علامت «-» متناظر با حالت شکل ۹). اگر به حساب بیاوریم که

$$\begin{aligned} \frac{\sin\gamma}{\cos\beta} + \frac{\sin\beta}{\cos\gamma} &= \frac{\sin\gamma\cos\gamma + \sin\beta\cos\beta}{\cos\beta\cos\gamma} = \frac{\sin 2\gamma + \sin 2\beta}{2\cos\beta\cos\gamma} = \\ &= \frac{\sin(\gamma + \beta)\cos(\gamma - \beta)}{\cos\beta\cos\gamma} = \frac{\sin\alpha(\cos\gamma\cos\beta + \sin\gamma\sin\beta)}{\cos\beta\cos\gamma} = \\ &= \sin\alpha(1 + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\beta) \end{aligned}$$

به این ترتیب، برای برابری طول‌های XY و BC ، به دست می‌آید:

$$2(1 \pm 1) = 1 + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\beta$$

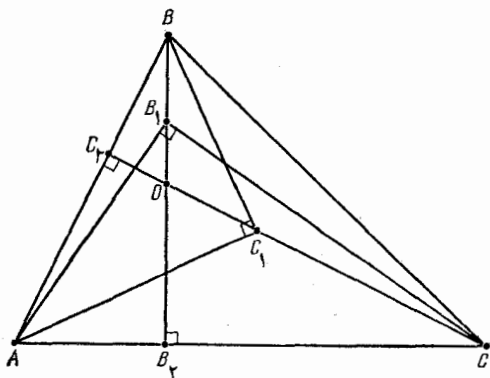
و تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\beta = 3 \quad \text{یا} \quad \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\beta = -1$$

به این ترتیب $M = \{-1, 3\}$ و حکم الف ثابت شد. برای اثبات حکم ب) کافی است توجه کنیم که حالت $\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma = -1$ ، مثلاً، برای $\alpha = \beta = 30^\circ$ و $\gamma = 120^\circ$ صدق می‌کند.

۱۷۳. پای ارتفاع‌های وارد بر AC و AB را، به ترتیب، B_1 و C_1 می‌نامیم. (شکل ۱۵).

مثلث‌های AB_1C_1 و AB_1B_1 ؛ ABB_1 و ACC_1 ؛ ACC_1 و AC_1B_1 ؛ و AC_1C_1 متشابه‌اند (در هر مورد از دو مثلث قائم‌الزاویه، یک زاویه حاده مشترک وجود دارد). بنابراین



شکل ۱۰

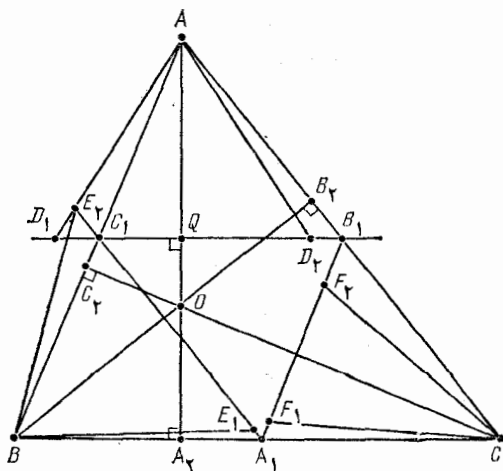
$$AB_1^2 = AB_1 \cdot AC = AC_1 \cdot AB = AC_1^2$$

که از آنجا، برابری $AB_1 = AC_1$ ، به دست می آید.

۱۷۴. پای ارتفاع‌های وارد بر ضلع‌های AB ، CA ، BC را، به ترتیب،

A_1 ، B_1 ، C_1 می‌گیریم. (شکل ۱۱). در این صورت داریم:

$$AO \cdot A_1O = BO \cdot B_1O = CO \cdot C_1O$$



(برابری اول، از تشابه دو مثلث قائم الزاویه $AOB_۲$ و $BOA_۲$ ، و برابری دوم، از تشابه دو مثلث قائم الزاویه $COB_۲$ و $BOC_۲$ به دست می آید.) چون $B_۱C_۱$ وسط دو ضلع از مثلث ABC را به هم وصل کرده است، بنابراین، نقطه Q ، محل برخورد آن با ارتفاع $AA_۲$ ، این ارتفاع را نصف می کند و، در ضمن $OQ \perp D_۱D_۲$ و، بنا بر قضیه فیثاغورث داریم:

$$AD_i^2 = AQ^2 + (R^2 - OQ^2) = R^2 + (AQ - OQ)(AQ + OQ), (i = ۱, ۲)$$

که در آن، R را شعاع دایره گرفته ایم. اگر حالت های مختلف جای نقطه O را بر خط راست $AA_۲$ در نظر بگیریم، به برابری زیر می رسیم:

$$AD_i^2 = R^2 \pm AO \cdot A_۲O$$

در ضمن، اگر نقطه O در درون مثلث ABC باشد، باید علامت «+» و در حالتی که در بیرون مثلث ABC باشد، باید علامت «-» را در نظر گرفت؛ مثلاً، در حالتی که روی شکل ۱۱ نشان داده شده است، داریم:

$$AQ - OQ = A_۲Q - OQ = A_۲O; \quad AQ + OQ = AO$$

به همین ترتیب، ثابت می شود:

$$BE_i^2 = R^2 \pm BO \cdot B_۲O; \quad CF_i^2 = R^2 \pm CO \cdot C_۲O$$

که از آن ها، می توان حکم مسأله را نتیجه گرفت.

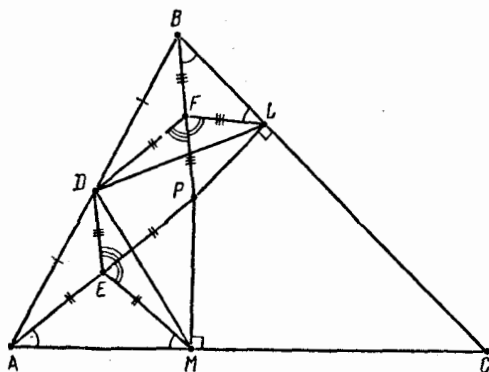
۱۷۵. وسط پاره خط های راست AP و BP را، به ترتیب، E و F

می نامیم. چون DE و DF وسط ضلع های مثلث APB را به هم وصل کرده اند، چهارضلعی $DFPE$ متوازی الاضلاع می شود و از دو مثلث قائم الزاویه APM و BPL به دست می آید:

$$ME = \frac{1}{۲}AP = DF; \quad LF = \frac{1}{۲}BP = DE$$

سپس

$$\widehat{PEM} = \sphericalangle \widehat{EAM} = \sphericalangle \widehat{FBL} = \widehat{PFL}; \quad \widehat{PED} = \widehat{PFD}$$



شکل ۱۲

به این ترتیب، مثلث‌های DFL و DEM ، در دو ضلع و زاویه بین آن‌ها، با یکدیگر برابر می‌شوند. در واقع، اگر $\alpha < 180^\circ$ ، آن‌طور که در شکل ۱۲ می‌بینیم، داریم:

$$\alpha = \widehat{PEM} + \widehat{PED} = \widehat{PFL} + \widehat{PFD}$$

و اگر $\alpha > 180^\circ$ ، آن وقت به جای α باید $360^\circ - \alpha$ گرفت؛ در حالت $\alpha = 180^\circ$ ، به طور مستقیم به دست می‌آید:

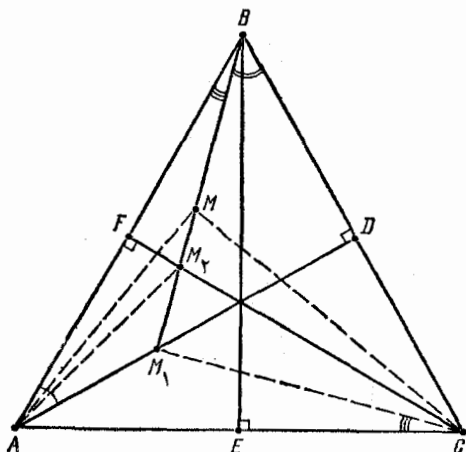
$$DM = ME + DE = DF + LF = DL$$

و به هر حال، برابری $DM = DL$ به دست می‌آید.

۱۷۶. همه نقطه‌های واقع بر ارتفاع‌های مثلث متساوی‌الاضلاع، دارای ویژگی مورد نظر مسئله هستند. مثلاً، اگر M_1 ، نقطه‌ای واقع بر ارتفاع وارد بر ضلع BC باشد (شکل ۱۳)، داریم:

$$\begin{aligned} M_1 \widehat{AB} + M_1 \widehat{BC} + M_1 \widehat{CA} &= M_1 \widehat{AB} + M_1 \widehat{BC} + M_1 \widehat{BA} = \\ &= M_1 \widehat{AB} + \widehat{ABC} = 90^\circ \end{aligned}$$

ثابت می‌کنیم، در درون مثلث، نقطه‌های دیگری با این ویژگی پیدا نمی‌شود. برعکس، فرض می‌کنیم، نقطه M ، که روی هیچ کدام از ارتفاع‌های



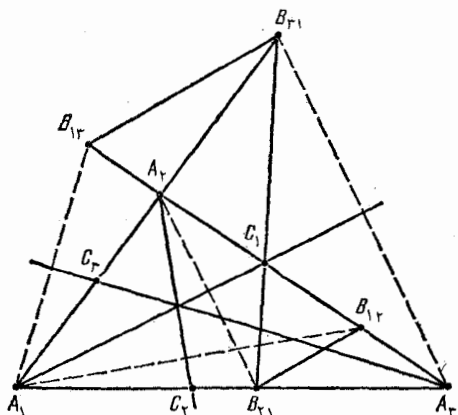
شکل ۱۳

مثلث نیست، این ویژگی را داشته باشد. BM را وصل می‌کنیم و محل برخورد آن را، با ارتفاع‌های وارد بر ضلع‌های AB و BC ، به ترتیب، M_1 و M_2 می‌نامیم. اگر برای هر سه نقطه M ، M_1 و M_2 (که قطعاً متمایزند)، شرط مسأله برقرار باشد، باید داشته باشیم:

$$\widehat{MAM_1} = \widehat{MCM_1}, \quad \widehat{MAM_2} = \widehat{MCM_2}$$

ولی در این صورت، نقطه C' ، قرینه نقطه C نسبت به خط راست BM ، باید هم روی محیط دایره محیطی مثلث AMM_1 و هم روی محیط دایره محیطی مثلث AMM_2 واقع شود. بنابراین، دو دایره‌ای که هر دو از نقطه‌های A ، M و C' می‌گذرند ($C' \neq A$)، زیرا خط راست BM بر ضلع AC عمود نیست، باید منطبق باشند. و این، ممکن نیست، زیرا نقطه‌های M ، M_1 و M_2 نمی‌توانند روی یک دایره باشند.

۱۷۷. A_1C_1 را نیمساز مثلث $A_1A_2A_3$ می‌گیریم (شکل ۱۴). چون از قرینه پاره‌خط راست A_2A_3 نسبت به خط راست A_1C_1 ، پاره‌خط راست B_2B_3 به دست می‌آید، بنابراین دو خط راست A_2A_3 و B_2B_3 در نقطه C_1 به هم می‌رسند. بنا بر ویژگی نیمساز داریم:



شکل ۱۴

$$\frac{A_1A_2}{A_1A_3} = \frac{C_1A_2}{C_1A_3}$$

که از آنجا به دست می آید:

$$\frac{B_{12}C_1}{B_{13}C_1} = \frac{B_{12}A_2 - C_1A_2}{B_{13}A_3 - C_1A_3} = \frac{A_1A_2 - C_1A_2}{A_1A_3 - C_1A_3} = \frac{A_1A_2}{A_1A_3}$$

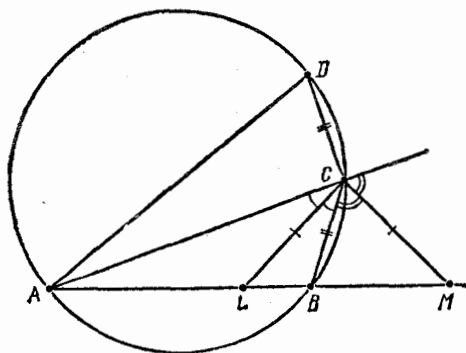
زیرا $B_{12}A_2 = A_1A_2$ و $B_{13}A_3 = A_1A_3$ به همین ترتیب، به دست می آید:

$$\frac{B_{21}C_1}{B_{31}C_1} = \frac{A_1A_2}{A_1A_3}$$

یعنی مثلث های $B_{12}C_1B_{21}$ و $B_{13}C_1B_{31}$ متجانس و دو خط راست $B_{12}B_{21}$ و $B_{13}B_{31}$ با هم موازی اند. به همین ترتیب، موازی بودن دو خط راست $B_{22}B_{23}$ و $B_{13}B_{31}$ هم ثابت می شود.

یادداشت. می توان ثابت کرد که، سه خط راست $B_{12}B_{21}$ ، $B_{13}B_{31}$ و $B_{22}B_{23}$ بر خط راستی که از مرکزهای دو دایره محاطی و محیطی مثلث $A_1A_2A_3$ می گذرد، عمودند.

۱۷۸. فرض می کنیم، نقطه های A, B, L, M ، به همین ردیف، روی خط راست AB واقع باشند (شکل ۱۵)؛ حالتی که نقطه ها به ردیف A, M ،



شکل ۱۵

B, L واقع باشند، به صورتی مشابه، مورد بررسی قرار می گیرد).
داریم:

$$\widehat{LCM} = \frac{1}{4} \times 180^\circ = 45^\circ, \widehat{CLM} = 45^\circ$$

(زیرا $CL = CM$). بنابراین

$$2\widehat{BAC} + \widehat{BCA} = 2(\widehat{LAC} + \widehat{LCA}) = 2\widehat{CLM} = 90^\circ,$$

$$\widehat{BAC} + \widehat{BCA} = 180^\circ - \widehat{ABC}$$

از آنجا

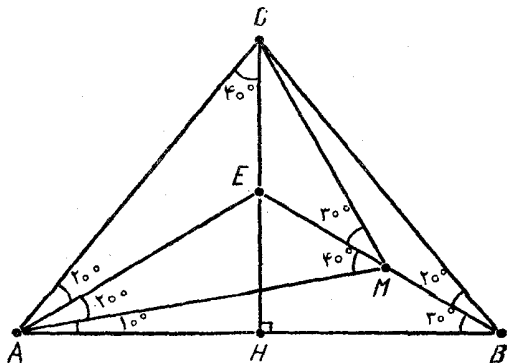
$$\widehat{BAC} = \widehat{ABC} - 90^\circ$$

چون زاویه ABC منفرجه است. قطر AD از دایرهٔ محیطی مثلث ABC ، در بیرون این مثلث قرار می گیرد، یعنی

$$\widehat{DAC} = (180^\circ - \widehat{ADC}) - \widehat{ACD} = \widehat{ABC} - 90^\circ = \widehat{BAC}$$

(زیرا زاویه‌های ABC و ADC ، زاویه‌های روبه‌رو، در چهارضلعی محاطی $ABCD$ هستند). بنابراین $DC = BC$ و

$$2R^2 = AD^2 = AC^2 + CD^2 = AC^2 + BC^2$$



شکل ۱۶

۱۷۹. محل برخورد ارتفاع CH از مثلث ABC را با خط راست BM ، نقطه E فرض می‌کنیم (شکل ۱۶).
به دلیل متساوی الساقین بودن مثلث ABC ، داریم: $AE = BE$ و

$$\widehat{EAM} = \widehat{EAB} - \widehat{MAB} = 30^\circ - 10^\circ = 20^\circ,$$

$$\widehat{ACE} = \frac{1}{4} \widehat{ACB} = 40^\circ,$$

$$\widehat{EAC} = \widehat{CAH} - \widehat{EAB} = (90^\circ - 40^\circ) - 30^\circ = 20^\circ,$$

$$\widehat{AME} = \widehat{MAB} + \widehat{MBA} = 10^\circ + 30^\circ = 40^\circ$$

یعنی مثلث‌های ACE و AME برابرند (یک ضلع مشترک و دو زاویه برابر).
در نتیجه

$$AM = AC, \widehat{AMC} = \widehat{ACM} = \frac{1}{4} (180^\circ - \widehat{CAM}) = 70^\circ$$

۱۸۰. O را محل برخورد خط‌های راست BE و AD فرض می‌کنیم
(شکل ۱۷). در این صورت

$$\widehat{AOB} = 180^\circ - 30^\circ - 50^\circ = 100^\circ,$$

$$\widehat{BDA} = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ = 80^\circ,$$

$$\widehat{CBE} = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ,$$

$$\widehat{AEB} = \widehat{CBE} + \widehat{ECB} = 70^\circ$$

$$\widehat{CAD} = 180^\circ - \widehat{ACB} - \widehat{ABC} - \widehat{BAD} = 30^\circ$$

بنابر قضیه سینوس‌ها داریم:

$$\frac{OD}{OB} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ}, \quad \frac{OB}{OA} = \frac{\sin 50^\circ}{\sin 30^\circ},$$

$$\frac{OA}{OE} = \frac{\sin 70^\circ}{\sin 30^\circ}$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$\frac{OD}{OE} = \frac{OD \cdot OB \cdot OA}{OB \cdot OA \cdot OE} =$$

$$= \frac{\sin 20^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ}{\sin 80^\circ \cdot \sin 30^\circ} =$$

$$= \frac{2 \sin 20^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{2 \sin 20^\circ \cos 40^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{\sin 80^\circ}{\sin 80^\circ} = 1$$

یعنی $OD = OE$ و

$$\widehat{BED} = \widehat{ODE} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{EOD}) = \frac{1}{2}(180^\circ - 100^\circ) = 40^\circ$$

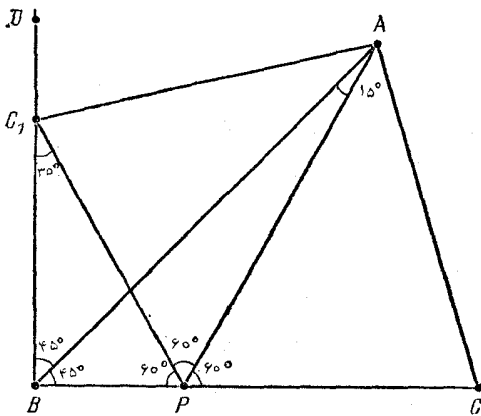
۱۸۱. نقطه C_1 را، قرینه نقطه C نسبت به خط راست AP می‌گیریم

(شکل ۱۸).

داریم: $C_1P = CP = 2BP$ و

$$\widehat{C_1PB} = 180^\circ - \widehat{APC} - \widehat{APC_1} = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

بنابراین $\widehat{C_1BP} = 90^\circ$ (زیرا مثلث C_1PB ، متشابه با مثلث قائم‌الزاویه



شکل ۱۸

به وتر ۲ و ضلع مجاور به زاویه قائمه ۱ است)، یعنی BA ، نیمساز زاویه C_1BP است. به این ترتیب، نقطه A ، که از خطهای راست PC ، C_1P و C_1B به یک فاصله است، بر نیمساز زاویه PC_1D قرار دارد (D)، بر امتداد پاره خط راست BC_1 و بعد از C_1 قرار گرفته است). بنابراین

$$\widehat{ACB} = \widehat{AC_1P} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{BC_1P}) = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$$

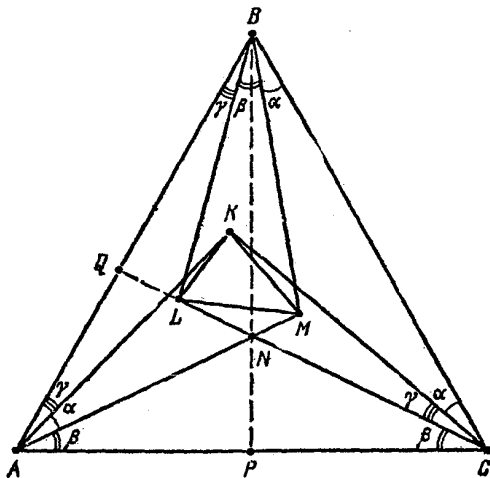
۱۸۲. قرار می‌گذاریم: $\alpha = 20^\circ$ ، $\beta = 25^\circ$ ، $\gamma = 15^\circ$ (شکل ۱۹).

در این صورت $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$ ، $\alpha, \beta, \gamma < 30^\circ$

$$\widehat{KAM} = 60^\circ - \widehat{MAC} - \widehat{KAB} = \alpha$$

و به همین ترتیب: $\widehat{LBM} = \beta$ و $\widehat{KCL} = \gamma$

فرض می‌کنیم، پاره خطهای راست AM و CL ، در نقطه N ؛ خطهای راست BN و AC در نقطه P و خطهای راست AB و CL در نقطه Q ، یکدیگر را قطع کرده باشند. چون $AN = NC$ و $AB = BC$ (زیرا هر یک از زاویه‌های NCA و NAC برابر β هستند)، بنابراین BP ، نیمساز زاویه ANC و، در نتیجه، نیمساز زاویه $LNМ$ است. نقطه B' را داخل زاویه $LNМ$ بیرون مثلث LMN و به یک فاصله از سه خط راست LM ، LN و MN انتخاب می‌کنیم. این نقطه، روی خط راست NB و نیمسازهای



شکل ۱۹

خارجی زاویه‌های L و M از مثلث LMN قرار دارد، بنابراین

$$\begin{aligned} \widehat{LB'M} &= 180^\circ - \widehat{B'LM} - \widehat{B'ML} = \\ &= 180^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{MLN}}{2} - \frac{180^\circ - \widehat{NML}}{2} = \frac{\widehat{NLM} + \widehat{NML}}{2} = \\ &= \frac{180^\circ - \widehat{LNM}}{2} = \frac{\widehat{NAC} + \widehat{NCA}}{2} = \beta = \widehat{LBM} \end{aligned}$$

یعنی B' بر B ، منطبق است و

$$\begin{aligned} \widehat{BLM} = \widehat{BLQ} &= 180^\circ - \widehat{CQB} - \widehat{ABL} = \\ &= \widehat{ABC} + \widehat{BCQ} - \widehat{ABL} = 60^\circ + \alpha + \gamma - \gamma = 60^\circ + \alpha \end{aligned}$$

چون

$$\begin{aligned} \widehat{BLC} &= 180^\circ - \widehat{LBC} - \widehat{LCB} = 180^\circ - (\beta + \alpha) - (\alpha + \gamma) = \\ &= 120^\circ - \alpha \end{aligned}$$

بنابراین

$$\widehat{MLC} = \widehat{BLC} - \widehat{BLM} = 120^\circ - \alpha - (60^\circ + \alpha) = 60^\circ - 2\alpha$$

(به یاد بیاوریم که $\alpha < 30^\circ$). به همین ترتیب، ثابت می‌شود:

$$\widehat{KLB} = 60^\circ - 2\alpha$$

به این ترتیب، داریم:

$$\widehat{KLM} = \widehat{BLC} - \widehat{KLB} - \widehat{MLC} =$$

$$= (120^\circ - \alpha) - (60^\circ - 2\alpha) - (60^\circ - 2\alpha) = 3\alpha$$

$$\widehat{KLM} = 3\alpha = 60^\circ \text{ یعنی}$$

به همین ترتیب، می‌توان به دست آورد:

$$\widehat{LKM} = 3\beta = 75^\circ, \widehat{KML} = 3\gamma = 45^\circ$$

§ ۱۰. دایره

۱۸۳. همهٔ نقطه‌های محیط دایره را به زوج نقطه‌هایی تقسیم می‌کنیم، به نحوی که هر زوج، دو سر یک قطر دایره را تشکیل دهند. در هر زوج، یکی از نقطه‌ها را (به دلخواه) در مجموعهٔ اول و نقطهٔ دیگر را در مجموعهٔ دوم، قرار می‌دهیم. از آنجا، که وتر هر مثلث قائم‌الزاویهٔ محاط در دایره، قطری از این دایره است، بنابراین، رأس‌های زاویه‌های حادهٔ این مثلث، متعلق به دو مجموعهٔ مختلف خواهند بود.

۱۸۴. مربع $ABCD$ را محاط در دایرهٔ به قطر d ، و نقطهٔ P را واقع بر کمان AD در نظر می‌گیریم (شکل ۲۵). زاویهٔ ACP را α می‌نامیم. در این صورت، اگر عددهای

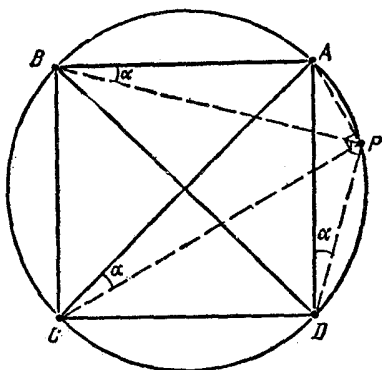
$$AP = d \sin \alpha, \quad CP = d \cos \alpha$$

گویا باشند، آن وقت عدد

$$BP = d \sin(\widehat{PDB}) = d \sin(\widehat{ADB} + \widehat{ADP}) =$$

$$= d \sin(45^\circ + \alpha) = d(\sin\alpha + \cos\alpha) \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(AP + CP)$$

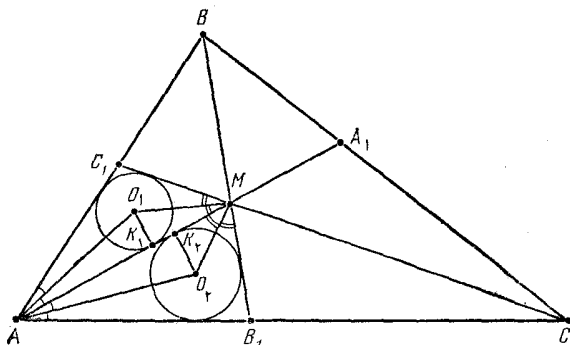
عددی گنگ می شود.



شکل ۲۰

۰۱۸۵ دایره‌های برابر به
مرکزهای O_1 و O_2 ، محاط در مثلث‌های
 AB_1M و AC_1M را در نظر می‌گیریم.
نقطه‌های تماس این دایره‌ها را با
پاره‌خط راست AM ، با K_1 و K_2
نشان می‌دهیم (شکل ۲۱).

مثلث‌های قائم‌الزاویه AO_1K_1
و AO_2K_2 با هم برابرند. زیرا



شکل ۲۱

$$O_1K_1 = O_2K_2 \text{ و } \widehat{O_1AK_1} = \frac{1}{2}\widehat{C_1AM} = \frac{1}{2}\widehat{B_1AM} = \widehat{O_2AK_2}$$

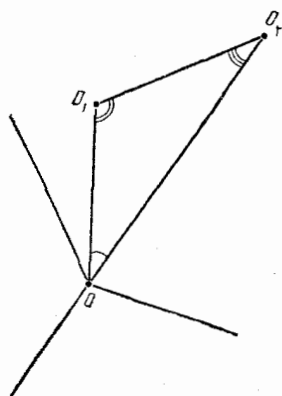
پس $K_1 = K_2$ و مثلث‌های قائم‌الزاویه O_1K_1M و O_2K_2M هم، با
یکدیگر برابر می‌شوند (در دو ضلع مجاور به زاویه مجاور به زاویه قائمه)،

$$\widehat{O_1MK_1} = \widehat{O_2MK_2} \text{ و } \widehat{C_1MA} = \widehat{B_1MA}$$

بنابراین، با توجه به دو مثلث AB_1M و AC_1M (که دو زاویه متناظر برابر دارند)، به دست می آید: $\widehat{AC_1C} = \widehat{AB_1B}$ ؛ و با توجه به مثلث های ABB_1 و ACC_1 : $\widehat{ABB_1} = \widehat{ACC_1}$ ، که از آن ها نتیجه می شود $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

به همین ترتیب، می توان برابری دو زاویه BAC و ACB را هم،

ثابت کرد.



شکل ۲۲

۱۸۶. برخلاف حکم مسأله، فرض

می کنیم، هیچ کدام از نقطه های O_1, \dots, O_p که به همین ردیف و در جهت حرکت عقربه های ساعت، دور مرکز O از دایره مفروض قرار گرفته اند، بر O واقع نباشد. چون مجموع زاویه های O_1O_2, \dots, O_pO_1 است، بنا براین، دست کم یکی از آن ها، از 60° درجه کوچکتر است. مثلاً فرض کنید، زاویه O_1O_2 از 60° درجه کمتر

باشد؛ از دو زاویه باقی مانده در مثلث O_1O_2O ، زاویه O_1O_2O را بزرگتر می گیریم (اگر زاویه O_1O_2O برابر صفر باشد، به معنای آن است که فاصله O_1O_2 از واحد کوچکتر است). در این صورت داریم:

$$\widehat{O_1O_2O} > 60^\circ > \widehat{O_1O_2O_1}$$

که از آن جا، نتیجه می شود: $0 < \widehat{O_1O_2O} < 1$ ، که با فرض مسأله متناقض است.

۱۸۷. فرض کنید، برخلاف حکم مسأله، نقطه ای مانند O ، متعلق به هر

شش دایره وجود داشته باشد، مرکز دایره‌ها را، به ترتیب و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت به دور نقطه O ، با O_1, \dots, O_6 نشان می‌دهیم (شکل ۲۲ را ببینید؛ بنا بر شرط مسأله، نقطه O نمی‌تواند مرکز هیچ کدام از دایره‌ها باشد). چون مجموع زاویه‌های $O_1O_2, O_2O_3, \dots, O_6O_1$ برابر با 360 درجه است، دست کم یکی از آن‌ها، از 60 درجه تجاوز نمی‌کند. مثلاً، فرض می‌کنیم: $\widehat{O_1O_2} \leq 60^\circ$ ؛ و از بسین دو زاویه باقی‌مانده در مثلث $O_1O_2O_3$ ، زاویه $O_2O_3O_1$ بزرگتر باشد (اگر زاویه $O_1O_2O_3$ برابر صفر باشد، بلافاصله نتیجه می‌شود: $O_2O_3 \geq O_2O_1$). در این صورت، داریم:

$$\widehat{O_2O_3} \geq 60^\circ \geq \widehat{O_1O_2}$$

از آن جا $O_2O_3 \geq O_2O_1$. به این ترتیب، دایره به مرکز O_2 ، که شامل نقطه O است، شامل نقطه O_1 ، مرکز دایره دیگر هم می‌شود، که شرط مسأله را نقض می‌کند.

۱۸۸. مجموعه دایره‌ها را منتهای فرض می‌کنیم. در این صورت، دایره به مرکز O با کمترین شعاع r ، بر شش دایره به مرکزهای O_1, \dots, O_6 (که دور نقطه O ، به همین ردیف و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت قرار دارند؛ شکل ۲۲ را ببینید) و شعاع‌های r_1, \dots, r_6 مماس است. در مثلث $O_1O_2O_3$ ، ضلع $O_1O_2 = r_1 + r_2$ بزرگترین ضلع است، از آن جا زاویه $O_1O_2O_3$ از 60 درجه کمتر نیست. به همین ترتیب، به دست می‌آید:

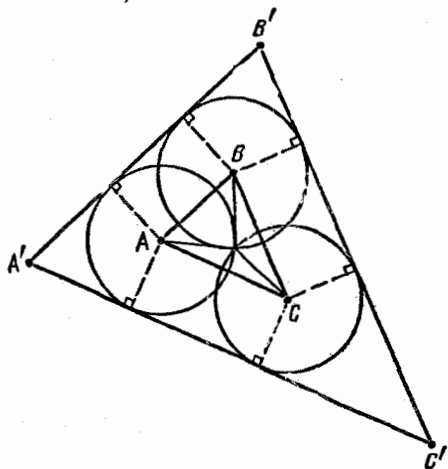
$$\widehat{O_2O_3} \geq 60^\circ, \dots, \widehat{O_6O_1} \geq 60^\circ$$

ولی مجموع این شش زاویه غیر متقاطع، برابر 360 درجه است، بنا بر این، هر يك از آن‌ها برابر 60 درجه و هر يك از زاویه‌های دیگر مثلث‌های $O_1O_2O_3, O_2O_3O_4, \dots, O_6O_1O_2$ (که از 60 درجه تجاوز نمی‌کنند)، برابر 60 درجه می‌شود، یعنی همه این مثلث‌ها متساوی‌الاضلاع اند و

$$r = r_1 = \dots = r_6$$

چون دایره به مرکز O_1 ؛ مثلاً، کوچکترین شعاع را دارد، اگر همین استدلال را در مورد آن به کار ببریم، نتیجه می شود که بر دایره ای به همین شعاع و مرکز $O_1 \neq O_2$ مماس است، که بر خط راست OO_1 قرار دارد. به همین ترتیب، دایره اخیر هم، بر دایره ای به همین شعاع و به مرکز $O_1 \neq O_2$ مماس می شود که بر همان خط راست قرار دارد و غیره. بنابراین، مجموعه دایره ها، نامتناهی، و حکم مسأله درست است.

۱۸۹. مثلث ABC را مفروض می گیریم.



شکل ۲۳

مثلث $A'B'C'$ را، مشابه با مثلث ABC ، جست و جوی کنیم که، برای آن، دایره های مورد نظر مسأله، وجود داشته باشد (که در این صورت، وجود چنین دایره هایی، برای مثلث ABC هم، ثابت خواهد شد).
برای این منظور، به مرکز نقطه های A ، B و C ، سه دایره با شعاع های برابر، و برابر با شعاع دایره محیطی مثلث ABC ، رسم می کنیم. این دایره ها، تنها یک نقطه مشترک دارند (که از سه رأس A ، B و C ، به یک فاصله است). اگر سه مماس مشترک دو به دوی دایره ها را رسم کنیم، از برخورد آن ها، مثلث مورد نظر $A'B'C'$ به دست می آید که با مثلث ABC مشابه است (زیرا $A'B' \parallel AB$ ، $B'C' \parallel BC$ ، $A'C' \parallel AC$)؛ (شکل ۲۳ را ببینید).

۱۹۰. تجانس به مرکز P را در نظر می‌گیریم که، به ازای آن، دایره شامل نقطه‌های B و C ، به دایره دیگر تبدیل شود. در این تجانس، نقطه‌های B و C ، به نقطه‌های B' و C' ، به ترتیب، روی خط‌های راست BP و CP ، و خط راست BC به خط راست موازی آن $B'C'$ تبدیل می‌شود. بنابراین، دو کمان $B'A$ و $C'A$ برابرند، در نتیجه، دو زاویه $B'PA$ و $C'PA$ ، یا برابرند (در حالتی که دودایره، مماس داخل باشند؛ شکل ۲۴) و یا مجموعی برابر ۱۸۰ درجه دارند (در حالتی که دو دایره مماس خارج باشند؛ شکل ۲۵). بنابراین، دو زاویه BPA و $C'PA$ برابر می‌شوند. در هر دو حالت، خط راست PA ، نیمساز یکی از دو زاویه BPC یا BPC' است.

۱۹۱. پاره خط راست PQ را مماس بر دایره مورد نظر مسأله می‌گیریم. نقطه O ، مرکز این دایره، در وسط قاعده BC ، از مثلث متساوی‌الساقین ABC قرار دارد. قرار می‌گذاریم:

$$\widehat{PBO} = \widehat{QOC} = \alpha, \quad \widehat{BPO} = \widehat{QPO} = \beta, \quad \widehat{CQO} = \widehat{PQO} = \gamma$$

(شکل ۲۶). در این صورت، با توجه به چهار ضلعی $CBPQ$ ، داریم:

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360^\circ \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

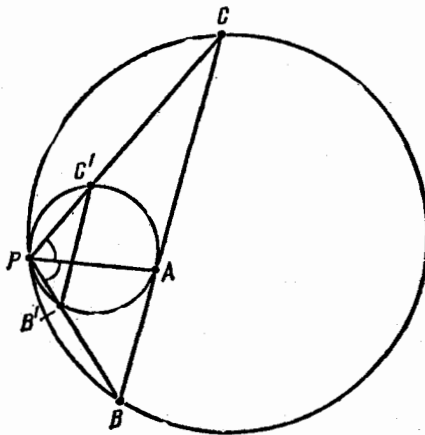
بنابراین، مثلث‌های BPO و COQ متشابه‌اند و داریم:

$$BP \cdot CQ = BO \cdot OC = \frac{1}{4} BC^2$$

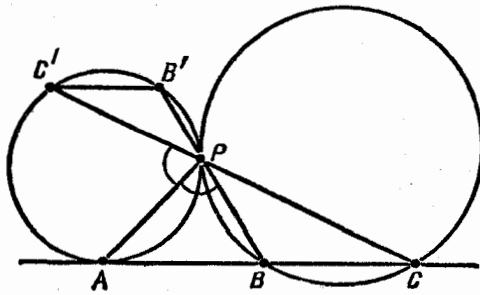
اکنون، پاره خط راست $P'Q'$ را در نظر می‌گیریم که، بر دایره به مرکز O ، مماس نباشد. پاره خط PQ را موازی $P'Q'$ و مماس بر دایره طوری رسم می‌کنیم که P روی AB و Q روی AC باشد. در این صورت، بنا بر آن چه ثابت کردیم، داریم:

$$\frac{1}{4} BC^2 = BP \cdot CQ \neq BP' \cdot CQ'$$

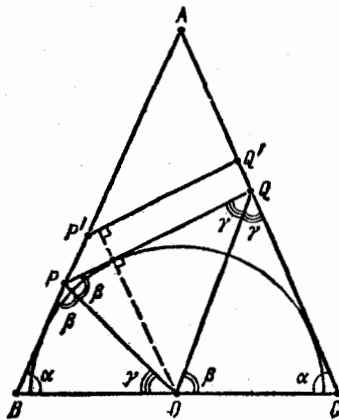
حکم مسأله، به طور کامل، ثابت شد.



شکل ۲۴



شکل ۲۵



شکل ۲۶

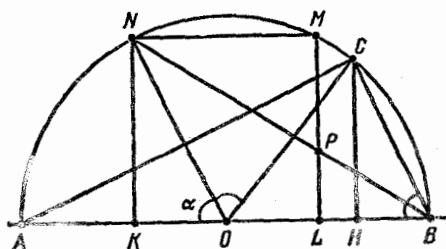
۱۹۴. a را ضلع مربع، R را شعاع نیم‌دایره به مرکز O و 3 را شعاع دایره محاطی مثلث ABC می‌گیریم؛ همچنین فرض می‌کنیم:

$$\alpha = \widehat{AON} < 90^\circ \text{ و } \widehat{COB} \leq 90^\circ$$

(شکل ۲۷). در این صورت، داریم:

$$a^2 = NK^2 = ON^2 - KO^2 = R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

که از آن جا، به دست می‌آید: $a = \frac{2R}{\sqrt{5}}$



شکل ۲۷

از برابری مساحت مربع با مساحت مثلث ABC و با توجه به مقدار a ، که به دست آوردیم، معلوم می‌شود که ارتفاع CH در مثلث ABC ، باید برابر $\frac{2R}{5}$ باشد. ثابت می‌کنیم که، ON ، نیمساز زاویه AOC است. در واقع،

چون $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ (یعنی $\alpha > 45^\circ$)، داریم:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5} = \sin(\widehat{COB}) = \sin(\widehat{AOC})$$

که در آن، $2\alpha > 90^\circ$ و $\widehat{AOC} > 90^\circ$. بنابراین

$$\widehat{AOC} = 2\alpha, \widehat{AON} = \widehat{CON}$$

چون، زاویه‌های محاطی ABN و CBN ، رو به روی به کمان‌های برابرند، بنابراین BN ، نیمساز زاویه ABC (برابر α) است و مرکز دایره محاطی مثلث ABC روی آن قرار دارد؛ شعاع این دایره محاطی برابر است با

$$r = \frac{1}{2}(AC + BC - AB) = \frac{1}{2} \cdot 2R(\sin\alpha + \cos\alpha - 1) = R\left(\frac{3}{\sqrt{5}} - 1\right)$$

ولی، در این صورت، نقطه P ، محل برخورد خط‌های راست BN و LM ، مرکز این دایره محاطی است، زیرا از تشابه دو مثلث PLB و NKB ، به دست می‌آید:

$$PL = \frac{NK \cdot LB}{KB} = R \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{1 + \frac{1}{\sqrt{5}}} = R \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{4} = R\left(\frac{3}{\sqrt{5}} - 1\right) = r$$

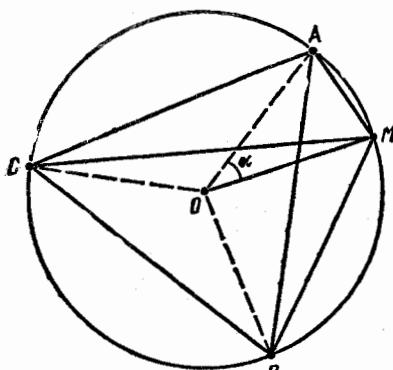
۱۹۳. دایره محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را بسته مرکز O و شعاع R می‌گیریم و، بدون این که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، نقطه M را روی کمان AB از این دایره، انتخاب می‌کنیم. (شکل ۲۸).

اگر قرار بگذاریم: $\widehat{AOM} = \alpha$ ،

$$MA = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$MB = 2R \sin \frac{1}{2}(\widehat{AOB} - \widehat{AOM}) = 2R \sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$MC = 2R \sin \frac{1}{2}(\widehat{AOC} + \widehat{AOM}) = 2R \sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)$$



شکل ۲۸

$$\frac{MA^2 + MB^2 + MC^2}{R^2} = 16 \left[\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \left(60^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) + \sin^2 \left(60^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \right] =$$

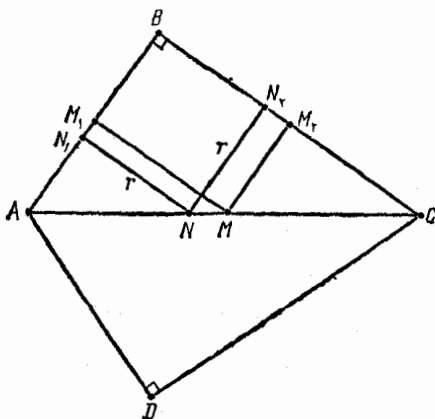
$$\begin{aligned} &= 4[(1 - \cos \alpha)^2 + (1 - \cos(120^\circ - \alpha))^2 + (1 + \cos(120^\circ + \alpha))^2] = \\ &= 12 - 8[\cos \alpha + \cos(120^\circ - \alpha) + \cos(120^\circ + \alpha)] + \\ &+ 4[\cos^2 \alpha + \cos^2(120^\circ - \alpha) + \cos^2(120^\circ + \alpha)] = 12 - 8\cos \alpha - \\ &- 16\cos \alpha \cos 120^\circ + 4[(1 - \cos 2\alpha) + (1 - \cos(240^\circ - 2\alpha)) + \\ &+ (1 - \cos(240^\circ + 2\alpha))] = 12 - 8\cos \alpha + 8\cos \alpha + 6 - 2\cos 2\alpha - \\ &- 4\cos 2\alpha \cos 240^\circ = 18 - 2\cos 2\alpha + 2\cos 2\alpha = 18 \end{aligned}$$

بستگی به جای نقطه M ندارد.

۱۹۴۰ الف) بنا بر شرط مسأله داریم:

$$AB + CD = AD + BC$$

بنابراین، در چهارضلعی $ABCD$ ، می توان دایره ای محاط کرد.



ب) از برابری مثلث‌های ABC و ADC نتیجه می‌شود که دو زاویه B و D باهم برابرند. بنابراین، تنها وقتی می‌توان دایره‌ای بر چهارضلعی $ABCD$ محیط کرد که داشته باشیم:

$$\hat{B} = \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{D}) = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

یعنی $AB \perp BC$.

ج) فرض می‌کنیم، دایرهٔ محاطی به مرکز N ، در نقطه‌های N_1 و N_2 بر ضلع‌های AB و BC مماس باشد؛ در ضمن، تصویرهای نقطهٔ M ، مرکز دایرهٔ محیطی، بر ضلع‌های AB و BC ، در وسط این ضلع‌ها قرار می‌گیرند (شکل ۲۹؛ یادآوری می‌کنیم که نقطه‌های M و N ، روی AC ، محوردنقارن چهارضلعی $ABCD$ قرار دارند). $AB = x$ و $BC = y$ می‌گیریم، در این صورت، از تشابه مثلث‌های AN_1N و ABC به دست می‌آید:

$$\frac{x}{y} = \frac{AB}{BC} = \frac{AN_1}{N_1N} = \frac{x-r}{r} \Rightarrow xy = r(x+y)$$

سپس، اگر به حساب آوریم که

$$x^2 + y^2 = AB^2 + BC^2 = AC^2 = 4R^2$$

خواهیم داشت:

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 4R^2 + 2r(x+y)$$

از آن جا

$$x+y = r + \sqrt{r^2 + 4R^2}$$

سرانجام، با توجه به ویژگی تصویرها، داریم:

$$\begin{aligned} NM^2 &= N_1M_1^2 + N_2M_2^2 = \left(BN_1 - \frac{AB}{2}\right)^2 + \left(BN_2 - \frac{BC}{2}\right)^2 = \\ &= \left(r - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(r - \frac{y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(x^2 + y^2) - r(x+y) + 2r^2 = \\ &= R^2 - r(r + \sqrt{r^2 + 4R^2}) + 2r^2 = R^2 + r^2 - r\sqrt{r^2 + 4R^2} \end{aligned}$$

یادداشت. برابری بخش ج)، برای هر چهارضلعی، که در عین حال، هم محیطی و هم محاطی باشد، درست است.

۱۹۵. اگر رأس‌های مربعی بر محیط‌های چهار دایره هم مرکز به شعاع‌های $a, a+d, a+2d, a+3d$ قرار داشته باشند، آن وقت، بنا به قضیه ۷۹، باید یکی از برابری‌های زیر برقرار باشد:

$$a^2 + (a+d)^2 = (a+2d)^2 + (a+3d)^2,$$

$$a^2 + (a+2d)^2 = (a+d)^2 + (a+3d)^2,$$

$$(a+d)^2 + (a+2d)^2 = a^2 + (a+3d)^2$$

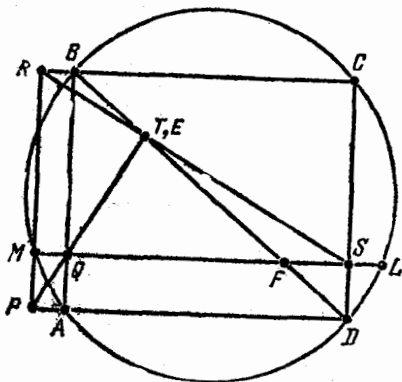
در حالی که، در هر سه حالت، بخش سمت چپ برابری، به ازای $a, d > 0$ ، از بخش سمت راست آن کوچکتر است.

۱۹۶. خط راست QS ، دایره را، به جز M ، در نقطه دیگری هم قطع می‌کند، که آن را L می‌نامیم (شکل ۳۰)، داریم:

$$\vec{RS} = \vec{MS} - \vec{MR} = \vec{QL} - \vec{QB}, \quad \vec{PQ} = \vec{AQ} + \vec{MQ}$$

از آن جا، با استفاده از قضیه ۷۱، داریم:

$$\begin{aligned} \vec{PQ} \cdot \vec{RS} &= \vec{AQ} \cdot \vec{QL} - \vec{MQ} \cdot \vec{QB} + \vec{MQ} \cdot \vec{QL} - \vec{AQ} \cdot \vec{QB} = \\ &= ab - cd = 0 \end{aligned}$$



شکل ۳۰

که در آن، $QB = d$ ، $AQ = c$ ، $QL = b$ ، $MQ = a$ فرض کرده‌ایم. به این ترتیب، ثابت شد که RS بر PQ عمود است.

اکنون، فرض می‌کنیم، خط راست RS ، خط‌های راست BD ، PQ را، به ترتیب، در نقطه‌های T و E قطع کند، و F را نقطه برخورد خط‌های راست BD و QS می‌گیریم. در این صورت، از تشابه مثلث‌های متفاوت، به دست می‌آید:

$$QF = \frac{BQ \cdot AD}{BA} = \frac{d(b-a)}{c+d},$$

$$FS = QS - QF = (b-a) - \frac{d(b-a)}{c+d} = \frac{c(b-a)}{c+d},$$

$$\frac{RE}{ES} = \frac{RB}{FS} = \frac{a(c+d)}{c(b-a)}$$

از طرف دیگر، داریم:

$$RT \cdot RS = RM \cdot RP,$$

$$TS \cdot RS = QS \cdot MS$$

و از آن جا

$$\frac{RT}{TS} = \frac{RM \cdot RP}{MS \cdot QS} = \frac{d(c+d)}{b(b-a)} = \frac{a(c+d)}{c(b-a)} = \frac{RE}{ES}$$

(زیرا $d:b = a:c$). به این ترتیب، نقطه‌های T و E ، پاره‌خط راست RS را به نسبت‌های برابر تقسیم می‌کنند، یعنی این دو نقطه، برهم منطبق‌اند. ثابت شد که خط‌های راست BD ، RS ، PQ ، در یک نقطه به هم می‌رسند.

۱۹۷. فرض می‌کنیم، دایره محاطی، بر ضلع‌های AB و AC ، به ترتیب، در نقطه‌های E و F ، و دایره محاطی خارجی بر ضلع BC در نقطه L و بر امتداد ضلع‌های AB و AC ، به ترتیب، در نقطه‌های M و N مماس باشند (شکل ۳۱). داریم:

$$\sphericalangle DB = DB + BE = CB - CD + AB -$$

$$- AE = CB + AB - CF - AF = CB + AB - AC,$$

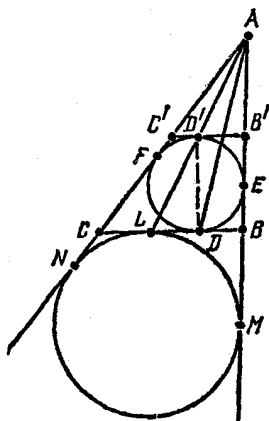
$$\sphericalangle CL = CL + CN = CB - LB + AN - AC = CB -$$

$$- BM + AM - AC = CB + AB - AC$$

از آن جا

$$DB = \frac{1}{2}(CB + AB - AC) = CL$$

یعنی وسط پاره خط BC بر وسط پاره خط LD منطبق است.



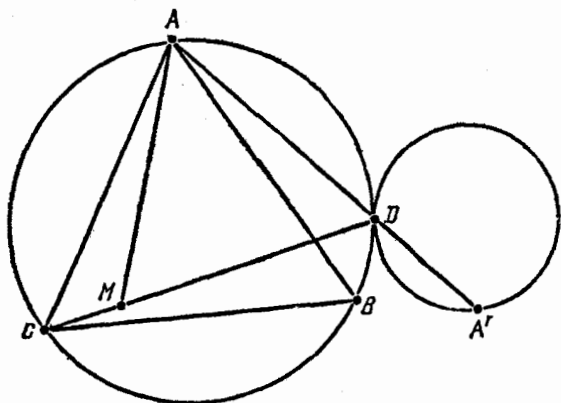
شکل ۳۱

D' را سر دیگر قطری از دایره محاطی می گیریم که از D گذشته است و $C'B'$ را مماس بر این دایره در نقطه D' فرض می کنیم. تجانس به مرکز A را، طوری در نظر می گیریم که، دایره محاطی خارجی را، به دایره محاطی داخلی تبدیل کند. در این تجانس، نقطه L به نقطه D' تبدیل می شود. بنا براین، نقطه های A و D' روی یک خط راست اند، در نتیجه، وسط پاره خط های راست LD ، $D'D$ و AD هم، روی یک خط راست اند (خط راستی که وسط دو ضلع از

مثلث ADL را به هم وصل می کند)، و این، همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.

۱۹۸. D را نقطه تماس دو دایره و ABC را مثلث متساوی الاضلاع محاط در دایره بزرگتر فرض می کنیم. بدون این که به کلی بودن مسأله لطمه ای بخورد، می توان نقطه D را روی کمان AB در نظر گرفت (شکل ۳۲). ثابت می کنیم $DC = DA + DB$.

نقطه M را روی پاره خط راست DC طوری انتخاب می کنیم که



شکل ۲۲

داشته باشیم: $DA = DM$; یادآوری می‌کنیم که

$$DC \geq BC = AB \geq AD$$

مثلث ADM ، متساوی‌الاضلاع است، زیرا متساوی‌الساقین است و، درضمن، زاویه ADM ، که با زاویه ABC برابر است، 60° درجه می‌شود. بنابراین، ضمن دوران به اندازه 60° درجه، دور نقطه A ، نقطه D بر M ، و نقطه B بر C منطبق می‌شود، یعنی $BD = MC$

$$DC = DM + MC = AD + DB$$

R و r را، به ترتیب، شعاع‌های دو دایره بزرگتر و کوچکتر و I_B, I_A را، به ترتیب، طول مماس‌هایی می‌گیریم که از نقطه‌های A, B, C ، بر دایره کوچکتر رسم شده‌اند؛ در ضمن، نقطه برخورد دیگر خط راست AD را با دایره کوچکتر، A' می‌نامیم (در حالتی که D بر A منطبق باشد، A' هم بر D منطبق می‌شود). نقطه A' از نقطه A ، در تجانس به مرکز D و ضریب

$\pm \frac{r}{R}$ به دست می‌آید (اگر دایره مماس خارج باشند، باید علامت «-»

و در حالت مماس داخل، علامت «+» را در نظر گرفت). به این ترتیب

$$AA' = AD \pm DA' = AD \left(1 \pm \frac{r}{R} \right)$$

و بنا بر قضیه مماس و قاطع، داریم:

$$l_A = \sqrt{AD \cdot AA'} = AD \sqrt{1 \pm \frac{r}{R}}$$

به همین ترتیب، می توان ثابت کرد:

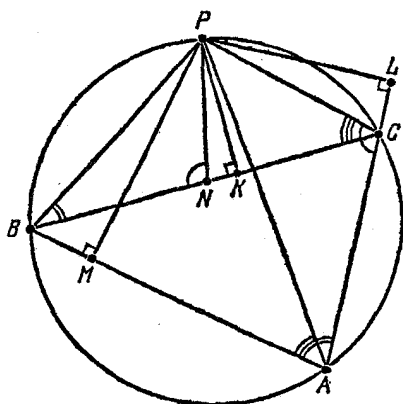
$$l_B = BD \sqrt{1 \pm \frac{r}{R}}, \quad l_C = CD \sqrt{1 \pm \frac{r}{R}}$$

که از آن جا، برابری مورد نظر $l_C = l_A + l_B$ به دست می آید.

۱۹۹. روی پاره خط راست BC ، می توان نقطه N را طوری پیدا

کرد که، برای آن، داشته باشیم: $\widehat{PNB} = \widehat{PCA}$ ، زیرا

$$\widehat{PCB} < \widehat{PCA} = 180^\circ - \widehat{PBA} < 180^\circ - \widehat{PBC}$$



(شکل ۳۳). در این صورت، دو

مثلث BPN و APC و، همچنین،

دو مثلث CPN و APB با هم

متشابه اند، زیرا

$$\widehat{PBC} = \widehat{PAC}, \quad \widehat{PCB} = \widehat{PAB},$$

$$\widehat{PNC} = 180^\circ - \widehat{PNB} = \widehat{PBA}$$

اگر توجه کنیم که PK ارتفاع

مثلث های CPN و BPN ؛ و PL

و PM ، به ترتیب، ارتفاع های شکل ۳۳

مثلث های متشابه با آنها، یعنی APB و APC هستند، به دست می آید:

$$\frac{AC}{PL} = \frac{BN}{PK}, \quad \frac{AB}{PM} = \frac{CN}{PK}$$

از آن جا

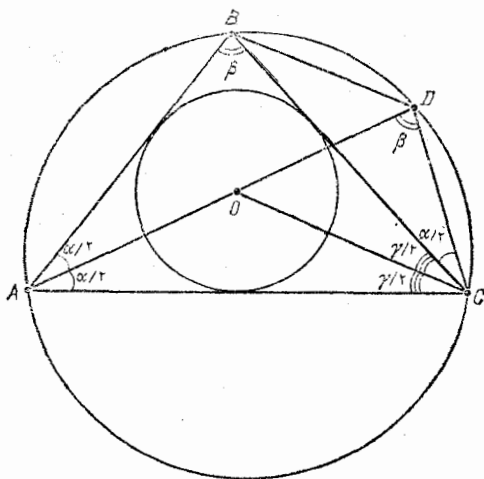
$$\frac{AC}{PL} + \frac{AB}{PM} = \frac{BN + CN}{PK} = \frac{BC}{PK}$$

همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۲۰۰ الف) $\widehat{BCA} = \gamma$ و $\widehat{ABC} = \beta$ ، $\widehat{BAC} = \alpha$ می‌نامیم (شکل

۳۴)، در این صورت، داریم: $\widehat{DAB} = \widehat{DAC} = \frac{\alpha}{2}$ که از آن جا، به دست

می‌آید $BD = DC$.



چون

$$\widehat{ODC} = \widehat{ABC} = \beta,$$

$$\widehat{COD} = \widehat{OCB} + \widehat{BCD} = \frac{1}{2} \widehat{ACB} + \widehat{BAD} = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

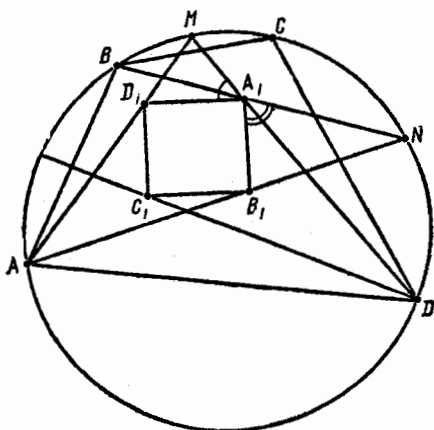
بنابراین

$$\widehat{COD} = 180^\circ - \beta - \frac{\alpha + \gamma}{2} = \alpha + \gamma - \frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{\alpha + \gamma}{2} = \widehat{OCD}$$

به نحوی که $DO = DC$.

ب) $\widehat{CD} = 2\delta$ و $\widehat{BC} = 2\gamma$ ، $\widehat{AB} = 2\beta$ ، $\widehat{AD} = 2\alpha$ می‌نامیم و

وسط کمان‌های BC و CD را، به ترتیب، M و N می‌گذاریم (شکل ۳۵).
 در این صورت، نقطه‌های D_1 و B_1 ، به ترتیب، بر پاره‌خط‌های راست AM و AN ، و در نقطه برخورد پاره‌خط‌های DM و BN واقع می‌شوند.



شکل ۳۵

با توجه به بخش الف) داریم:

$$MD_1 = MB = MC = MA_1$$

بنابراین، مثلث D_1MA_1 متساوی‌الساقین است و

$$\widehat{D_1A_1M} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{AMD}) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

به همین ترتیب، به دست می‌آید:

$$\widehat{B_1A_1N} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$$

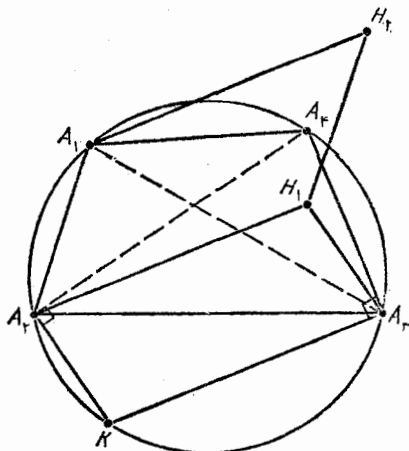
از آن جا که

$$\widehat{DA_1N} = \widehat{BA_1M} = \frac{\gamma + \delta}{2}$$

$$\begin{aligned} \widehat{D_1 A_1 B_1} &= 180^\circ - \widehat{D_1 A_1 M} - (\widehat{B_1 A_1 N} - \widehat{D A_1 N}) = \\ &= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) + \frac{\gamma + \delta}{2} = \\ &= \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2} = 90^\circ \end{aligned}$$

به همین ترتیب، می توان ثابت کرد که، سه زاویه دیگر چهارضلعی $A_1 B_1 C_1 D_1$ هم، قائمه اند.

۳۰۱. ابتدا ثابت می کنیم، وسط پاره خط های راست $A_1 H_1$ و $A_2 H_2$ بر هم منطبق اند. برای این منظور، از نقطه A_3 ، خط راستی عبور می دهیم که بر پاره خط راست $A_2 A_4$ عمود باشد و محل برخورد دوم این عمود را با



شکل ۳۶

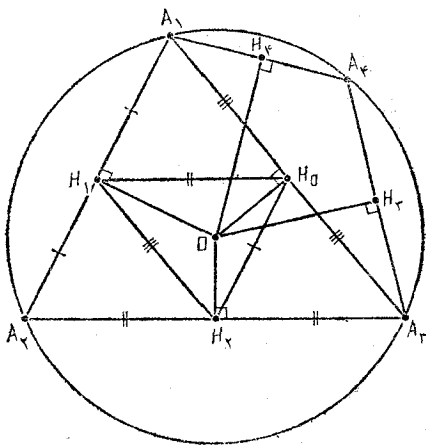
دایره محیطی چهارضلعی $A_1 A_2 A_3 A_4$ ، با K نشان می دهیم (شکل ۳۶). در این صورت، $A_2 H_1$ با $K A_3$ موازی می شود، زیرا

$$A_2 H_1 \perp A_2 A_4 \text{ و } \widehat{K A_2 A_4} = 90^\circ$$

($K A_3$ قطر دایره است). بنا بر این، چهارضلعی $K A_2 H_1 A_3$ متوازی الاضلاع

است؛ از آن جا $\vec{A_2H_1} = \vec{KA_3}$. به همین ترتیب، ثابت می شود که چهارضلعی $A_1H_2A_3K$ متوازی الاضلاع است و $\vec{H_1H_2} = \vec{KA_3}$. به این ترتیب، $\vec{A_2H_1} = \vec{A_1H_2}$ و پاره خط های راست A_2H_2 و A_1H_1 قطر های متوازی الاضلاع $A_1H_2H_1A_2$ هستند، یعنی یکدیگر را نصف می کنند. با روشی مشابه ثابت می شود که وسط پاره خط A_2H_2 بر وسط پاره خط A_3H_3 منطبق است، که به نوبه خود، بر وسط پاره خط A_4H_4 منطبق می شود. بنابراین، اگر با توجه به تقارن، این بحث را برای موردهای لازم دیگر ادامه دهیم، چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ بر چهارضلعی $H_1H_2H_3H_4$ منتقل می شود و این، همان، چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.

۲۰۲. الف) چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ را محاط در دایره به مرکز O و شعاع R در نظر می گیریم و تصویر نقطه O بر وترهای A_1A_2 ، A_1A_3 ، A_2A_3 ، A_2A_4 ، A_3A_4 و A_4A_1 ، به ترتیب، H_0 ، H_1 ، H_2 ، H_3 ، H_4 می نامیم. h_i را طول OH_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$)، S_i ، p_i را مساحت ها و نصف محیط های مثلث های $A_1A_2A_3$ ، $A_1A_2A_4$ و $A_3A_4A_1$ ، r_2 ، r_1 را شعاع های دایره های محاطی این دو مثلث فرض می کنیم.



مثلثی را در نظر می‌گیریم کسه شامل نقطه O باشد (اگر چنین مثلثی وجود داشته باشد، یعنی اگر نقطه O در درون چهارضلعی اصلی باشد). برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم، نقطه O ، در مثلث $A_1 A_2 A_3$ واقع باشد (شکل ۳۷). با استفاده از قضیه بطلمیوس (قضیه ۶۹)، برای چهارضلعی‌های محاطی $A_2 H_2 O H_1$ ، $A_1 H_1 O H_0$ ، $A_3 H_0 O H_2$ و با توجه به این که $H_1 H_2$ ، $H_0 H_1$ ، $H_0 H_2$ وسط ضلع‌های مثلث $A_1 A_2 A_3$ را به هم وصل کرده‌اند، به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} (R+r_1)p_1 &= R \cdot H_0 H_2 + R \cdot H_0 H_1 + R \cdot H_1 H_2 + S_1 = \\ &= (h_0 \cdot H_2 A_3 + h_2 \cdot H_0 H_3) + (h_0 \cdot H_1 A_1 + h_1 \cdot H_0 A_1) + (h_2 \cdot H_1 A_2 + \\ &+ h_1 \cdot H_2 A_2) + \frac{1}{2}(h_1 \cdot A_1 A_2 + h_2 \cdot A_2 A_3 + h_0 \cdot A_3 A_1) = \\ &= (h_1 + h_2 + h_0)p_1 \end{aligned}$$

و از آنجا

$$R+r_1 = h_1 + h_2 + h_0$$

اکنون به حالتی می‌پردازیم که، نقطه O ، مرکز دایره محیطی، در بیرون مثلث باشد. در این حالت، درست یکی از رأس‌های مثلث با نقطه O ، در دو نیم صفحه مختلف نسبت به ضلع مقابل به این رأس، قرار گرفته‌اند. برای مشخص بودن وضع، ایسن رأس را A_4 در مثلث $A_3 A_4 A_1$ می‌گیریم (شکل ۳۷ را ببینید). در این صورت، چهارضلعی‌های $A_1 H_4 H_0 O$ ،

$A_4 H_4 H_0 O$ ، محاطی‌اند و بنا بر این

$$\begin{aligned} (R+r_2)p_2 &= R \cdot H_0 H_4 + R \cdot H_0 H_3 + R \cdot H_3 H_4 + S_2 = \\ &= (h_4 \cdot H_0 A_1 - h_0 \cdot H_4 A_1) + (h_3 \cdot H_0 A_3 - h_0 \cdot H_3 A_3) + \\ &+ (h_4 \cdot H_3 A_4 + h_3 \cdot H_4 A_4) + \frac{1}{2}(h_3 \cdot A_3 A_4 + h_4 \cdot A_4 A_1 - h_0 \cdot A_1 A_3) = \\ &= (h_3 + h_4 - h_0)p_2 \end{aligned}$$

$$R + r_2 = h_3 + h_4 - h_0.$$

به این ترتیب، در حالتی که روی شکل ۳۷ نشان دادیم، داریم:

$$r_1 + r_2 = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 - 2R$$

در حالت کلی هم، مجموع $r_1 + r_2$ ، مجموعی از مقادیرهای h_1, h_2, h_3, h_4 و $2R$ خواهد بود که، علامت‌های بین آن‌ها، تنها بستگی به جای نقطه O نسبت به چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ دارد. بنا براین، مجموع شعاع‌های دایره‌های محاطی، بستگی به این ندارد که کدام قطر را رسم کرده‌ایم.

ب) $A_1A_2A_3$ را مثلثی می‌گیریم که زاویه منفرجه ندارد و k_1, k_2, k_3 ، طول ارتفاع‌های مثلث، که به ترتیب از رأس‌های A_1, A_2, A_3 رسم شده‌اند، باشند. برای بقیه عناصرها و پارامترهای مثلث $A_1A_2A_3$ ، همان نام‌گذاری‌های بخش الف) را حفظ می‌کنیم. بدون این که لطمه‌ای به کلی بودن وضع وارد شود، فرض می‌کنیم: $k_1 \leq k_2 \leq k_3$. چون

$$k_1 \cdot A_2A_3 + k_2 \cdot A_1A_3 = k_3 \cdot A_1A_2 = 2S_1$$

بنابراین $A_2A_3 \geq A_1A_3 \geq A_1A_2$. به این ترتیب داریم:

$$k_3 = \frac{2S_1}{A_1A_2} = \frac{h_2 \cdot A_2A_3 + h_0 \cdot A_1A_3 + h_1 \cdot A_1A_2}{A_1A_2} \geq$$

$$\geq \frac{h_2 \cdot A_1A_2 + h_0 \cdot A_1A_2 + h_1 \cdot A_1A_2}{A_1A_2} = h_1 + h_2 + h_0 = R + r_1$$

[برابری آخر را، در بخش الف) ثابت کردیم]. بنا براین، نابرابری مورد-نظر ثابت شد. در ضمن، اگر هر سه زاویه مثلث حاده باشند، نقطه O در درون آن واقع می‌شود و $h_2 > 0$ ؛ و علامت برابری وقتی برقرار خواهد بود که داشته باشیم: $h_1 = h_3$ ، یعنی مثلث متساوی‌الاضلاع باشد. در حالت مثلث قائم‌الزاویه، داریم: $h_1 = 90^\circ, h_2 = 0, h_3 > 0$ و برابری به شرط $h_2 = h_3$ پیش می‌آید، یعنی برای مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین.

۲۰۳. فرایند زیر را، که شامل

چند گام است، در نظر می‌گیریم. در گام اول، هر یک از نقطه‌های مفروض

را با دایره‌ای به قطر $\frac{1}{۲۰۰}$ می‌پوشانیم.

فرض کنید، بعد از k امین گام ($k \in \mathbb{N}$)،

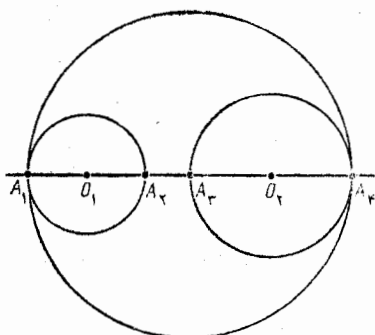
دو دایره وجود داشته باشد که، فاصله

بین آن‌ها، بیشتر از واحد نباشد. O_1

و O_2 را مرکزهای این دو دایره و

A_1, A_2, A_3, A_4 را، نقطه‌های برخورد

خط راست O_1O_2 با محیط این دایره‌ها



شکل ۳۸

می‌گیریم (نقطه‌های A_2 و A_3 ، بین دو نقطه A_1 و A_4 قرار دارند و، در ضمن،

$A_2A_3 \leq 1$ ؛ شکل ۳۸). در این صورت، گام $(k+1)$ را به این ترتیب

برمی‌داریم که، به جای دو دایره مفروض، دایره به قطر A_1A_4 را در نظر

می‌گیریم. این روند را تا آن جا که ممکن است، یعنی تا آن جا که شرط

(۲) کاملاً برقرار شود، ادامه می‌دهیم. چون بعد از نخستین گام، تعداد

دایره‌ها برابر ۱۰۰ بود و، در هر گام، از تعداد دایره‌ها، یکی کم می‌شود،

بنابراین، تعداد گام‌ها، از ۱۰۰ تجاوز نمی‌کند. بنابراین، روند کار در جایی

به پایان می‌رسد و، شرط (۱)، که در هر گام برقرار شده است، در پایان

روند هم برقرار خواهد بود. از طرف دیگر، با برداشتن گام نخست،

مجموع قطر دایره‌ها برابر $\frac{۱۰۰}{۲۰۰}$ ، یعنی $\frac{1}{۲}$ می‌شود و، با برداشتن هر گام

بعدی، این مجموع به اندازه‌ای که بیشتر از واحد نیست، بزرگ می‌شود،

بنابراین، مجموع قطر‌ها، در پایان همه گام‌ها، از $\frac{1}{۲} + ۹۹$ تجاوز نمی‌کند،

یعنی از ۱۰۰ کوچکتر است؛ به این ترتیب، شرط (۳) هم، برقرار است.

۲۰۴. خط راستی در نظر می‌گیریم که، همه نقطه‌ها، نسبت به آن، در

یک نیم صفحه قرار گیرند؛ سپس، این خط راست را به موازات خود، آن قدر

جا به جا می کنیم تا از اولین نقطه A_1 بگذرد. بعد، همین خط راست را، دور نقطه A_1 ، آن قدر دوران می دهیم، تا برای نخستین بار، بر نقطه دیگر A_2 بگذرد. در این صورت، همه بقیه نقطه ها، در یک نیم صفحه، نسبت به خط راست $A_1 A_2$ واقع می شوند. این نقطه ها را، به صورت A_3, \dots, A_{2n+3} طوری شماره گذاری می کنیم که، برای آن ها، داشته باشیم:

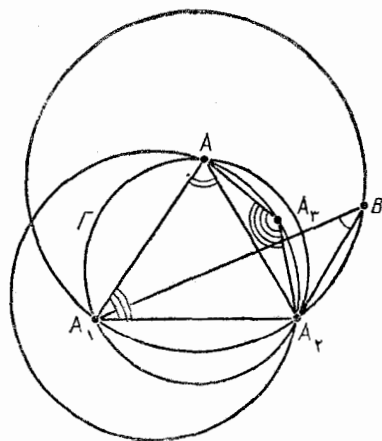
$$\widehat{A_1 A_i A_2} \leq \widehat{A_1 A_{i+1} A_2} \quad (i = 3, \dots, 2n+2)$$

در ضمن، برابری دو زاویه $\widehat{A_1 A_i A_2}$ و $\widehat{A_1 A_{i+1} A_2}$ ، برای هیچ مقداری از i ، ممکن نیست. (زیرا، نقطه های A_1, A_2, A_i, A_{i+1} ، بر محیط یک دایره واقع نیستند). بنا بر این، نابرابری

$$\widehat{A_1 A_{n+3} A_2} < \widehat{A_1 A_i A_2}$$

درست برای n نقطه A_{n+4}, \dots, A_{2n+3} برقرار است و همین نقطه ها (و تنها همین نقطه ها) هستند که در درون دایره ای قرار گرفته اند که از A_1, A_2, A_{n+3} می گذرد.

۴۵۵. مجموعه ای را در نظر می گیریم که هر عضو آن، شامل سه رأس دلخواه از چند ضلعی مفروض باشد، به نحوی که دو تا از این رأس ها در مجاور هم باشند و، در ضمن، ضلع بین این دو رأس، از رأس سوم با زاویه ای که از ۹۰ درجه تجاوز نمی کند دیده شود (ایسن مجموعه، تهی نیست، زیرا هر سه رأس مجاور چند ضلعی هم، یک عضو آن است). از بین دایره هایی که از سه رأس با این فرض ها می گذرند، دایره Γ را انتخاب می کنیم که بزرگترین شعاع R را داشته باشد.



شکل ۳۹

برای مشخص بودن وضع، فرض می کنیم، ایسن دایره، از رأس های مجاور A_1 و A_2 باشد.

دیگری از چند ضلعی مثل A گذشته باشد؛ در ضمن زاویه A_1AA_2 از 90° درجه تجاوز نمی کند (شکل ۳۹). ثابت می کنیم، این دایره، همه رأس های چند ضلعی مفروض را محصور می کند، فرض کنید، رأسی مثل B در بیرون دایره Γ واقع باشد. چون نقطه B ، نسبت به خط راست A_1A_2 ، در همان نیم صفحه ای قرار دارد که نقطه A واقع است، بنا بر این

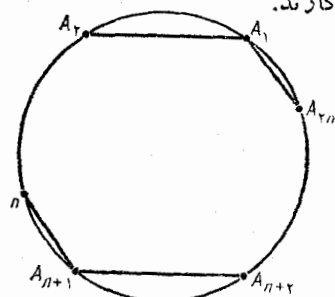
$$\widehat{A_1BA_2} < \widehat{A_1AA_2} \leq 90^\circ$$

و (بنا بر قضیه سینوس ها)، شعاع دایره محیط بر مثلث A_1A_2B ، از R بزرگتر می شود که مخالف با فرض ما، مبنی بر نوع انتخاب دایره Γ است. بنا بر این، دایره Γ ، تمامی چند ضلعی را می پوشاند.

ثابت می کنیم که، رأس A_3 ، مجاور رأس A_2 (و غیر از رأس A_1)، بر محیط همین دایره Γ قرار دارد. فرض کنیم، چنین نباشد. یعنی نقطه $A_3 \neq A$ در داخل قطعه ای از دایره Γ باشد که متناظر با وتر A_2A_1 است (شکل ۳۹). در این صورت داریم:

$$\widehat{A_2A_3A_1} > 180^\circ - \widehat{A_2A_1A_3} \geq 90^\circ$$

و (بنا بر قضیه سینوس ها)، دوباره شعاع دایره محیطی مثلث $A_2A_3A_1$ از R بزرگتر می شود، که نوع انتخاب دایره Γ را نقض می کند. به این ترتیب، سه رأس A_1, A_2, A_3 با شرط مسأله سازگارند.



شکل ۴۰

۲۰۶. ثابت می کنیم. مقدار مجهول

n ، عبارت است از همه عددهای فرد $n > 1$ را عددی فرد می گیریم و فرض می کنیم، در $2n$ ضلعی $A_1 \dots A_{2n}$ ، همه زوج ضلع های روبه رو، به جز احتمالاً، A_1A_{2n} و A_nA_{n+1} ، پاره خط های راستی، موازی هم باشند. اگر داشته باشیم (شکل ۴۰):

$$\widehat{A_1 A_2 A_{n+1}} = 180^\circ + \alpha$$

آن وقت

$$\widehat{A_2 A_{n+1} A_{n+2}} = \widehat{A_2 A_n A_{n+1}} + \widehat{A_{n+1} A_{n+2}} = \widehat{A_1 A_2 A_{n+2}} + \widehat{A_{n+2} A_{n+1}}$$

$$= 360^\circ - \widehat{A_1 A_2 A_{n+1}} = 180^\circ - \alpha$$

(زیرا $(A_1 A_2 \parallel A_{n+1} A_{n+2})$ به همین ترتیب، می توان تحقیق کرد که:

$$\widehat{A_2 A_{n+2} A_{n+3}} = 180^\circ + \alpha, \dots, \widehat{A_n A_{n+1} A_{2n}} =$$

$$= 180^\circ + (-1)^{n+1} \alpha = 180^\circ + \alpha$$

بنابراین

$$\widehat{A_1 A_2 A_n} = 180^\circ + \alpha - \widehat{A_n A_{n+1}} = \widehat{A_{n+1} A_{n+2} A_{2n}}$$

که از آن جا $(A_n A_{n+1} \parallel A_1 A_{2n})$.

اکنون ثابت می کنیم که برای همین مقادیرهای n (یعنی وقتی n ، عددی فرد باشد)، $2(n-1)$ ضلعی وجود دارد، به نحوی که با شرط مسأله ن سازد. $2n$ ضلعی $A_1 \dots A_{2n}$ را طوری در نظر می گیریم که، در آن، ضلع های روبه رو با هم موازی باشند، ولی داشته باشیم:

$$\widehat{A_1 A_2 A_{n+1}} \neq 180^\circ$$

برای این منظور، کافی است کمان $\widehat{A_1 A_{n+1}} < 180^\circ$ را به وسیله نقطه های A_2, \dots, A_n ، به n کمان برابر تقسیم و، پشت سر هم، این وترها را رسم کنیم:

$$A_{n+1} A_{n+2} \parallel A_1 A_2, \dots, A_{2n-1} A_{2n} \parallel A_{n-1} A_n$$

که در این صورت، بنا بر آن چه ثابت کردیم، شرط $A_{2n} A_1 \parallel A_n A_{n+1}$ برقرار خواهد بود و در ضمن

$$\widehat{A_2 A_{n+1} A_{n+2}} = \widehat{A_1 A_2 A_{n+1}} = \widehat{A_{2n} A_1 A_n} \neq 180^\circ$$

بنابراین

$$\widehat{A_2 A_2 A_n} - \widehat{A_{2n} A_{2n-1} A_{n+2}} = \widehat{A_2 A_{n+1} A_{n+2}} -$$

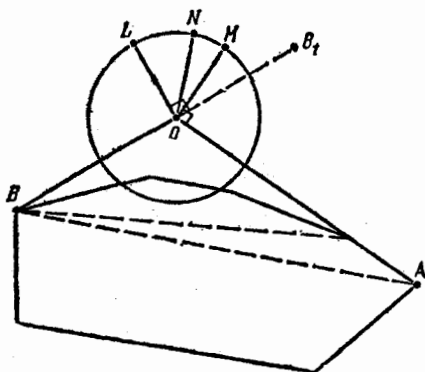
$$- \widehat{A_{2n} A_{n+1} A_n} = \widehat{A_2 A_{n+1} A_{n+2}} - (360^\circ - \widehat{A_{2n} A_1 A_n}) \neq 0$$

یعنی پاره‌خط‌های راست A_2A_{2n} و A_nA_{n+2} موازی نیستند و $2(n-1)$ ضلعی $A_2 \dots A_n A_{n+2} \dots A_{2n}$ درست دارای $n-2$ ضلع زویه‌روست که باهم موازی‌اند.

۲۰۷. به ازای $n=1$ ، محیط دایره به شعاع واحد، طولی برابر

$n \geq 2$ ، اکنون است. $n=1$ ، درست است. $n \geq \frac{2\pi}{n}$ دارد، یعنی حکم مسأله، برای $n=1$ ، درست است.

می‌گیریم. ابتدا فرض می‌کنیم، مرکزهای همه دایره‌ها، روی یک خط راست باشند. مرکزی را در نظر می‌گیریم که، همه مرکزهای دیگر، نسبت به آن، روی یک خط راست واقع باشند. در این صورت، عمودی که از این مرکز انتخابی، بر خط راست مفروض رسم کنیم، کمانی از دایره متناظر را جدا می‌کند که، برای طول آن، داریم: $n \geq \frac{2\pi}{n}$ و روشن است که، این کمان، با هیچ کدام از دایره‌های دیگر، برخوردی ندارد.



شکل ۴۱

اکنون، به حالتی می‌پردازیم که، مرکزهای دایره‌ها، روی یک خط راست نباشند. از بین همه چند ضلعی‌های محدبسی که رأس‌های آن بر مرکزهای دایره‌ها منطبق باشند (مجموعه این گونه چند ضلعی‌ها، تهی نیست، زیرا دست کم می‌توان یک مثلث پیدا کرد)، آن را در نظر می‌گیریم که، در

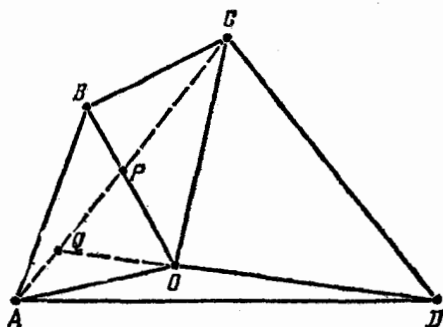
خارج آن، حداقل تعداد این نقطه‌ها، واقع باشند. ثابت می‌کنیم که، در بیرون این چند ضلعی، هیچ نقطه‌ای وجود ندارد. در واقع، اگر نقطه‌ای مثل D ، در خارج این چند ضلعی باشد، از این نقطه، خط راستی می‌گذرانیم که چند ضلعی را قطع نکند و آن را، دور نقطه O دوران می‌دهیم تا ابتدا، از رأس اول A و سپس، از رأس آخر B (از چند ضلعی) بگذرد (شکل ۴۱). سرانجام، همه رأس‌هایی از چند ضلعی را که در مثلث AOB قرار دارند، تنها با سه رأس A ، O ، B عوض می‌کنیم، در این صورت، یک چند ضلعی جدید به دست می‌آید که، در بیرون آن، تعداد کمتری نقطه، نسبت به چند ضلعی انتخابی، واقع شده‌اند. تناقض حاصل، نشان می‌دهد که، می‌توان k ضلعی محدب پیدا کرد ($k \leq n$)، که رأس‌های آن بر مرکزها منطبق باشد و، در ضمن، همه مرکزها را در بر گرفته باشد. چون، مجموع زاویه‌های خارجی k ضلعی، برابر 360° درجه است، بنابراین، دست کم یکی از زاویه‌های خارجی، اندازه‌ای دارد که از $\frac{360^\circ}{n} \geq \frac{360^\circ}{k}$ کمتر نیست. این زاویه را،

زاویه BOA از زاویه O مربوط به k ضلعی فرض می‌کنیم (شکل ۴۱ را ببینید). در این صورت، اگر عمودهای OL و OM را، به ترتیب، بر ضلع‌های OB و OA رسم کنیم، کمان LM را از دایره به مرکز O جدا می‌کنند که طول آن، کمتر از $\frac{2\pi}{n}$ نیست، زیرا زاویه LOM با زاویه BOA برابر است. ثابت می‌کنیم، این کمان، با دایره‌های دیگر، برخوردی ندارد. N را نقطه دلخواهی از کمان LM می‌گیریم: چون

$$\widehat{NOA} > 90^\circ \quad \text{و} \quad \widehat{NOB} > 90^\circ$$

بنابراین، دایره به مرکز N و شعاع واحد، با k ضلعی، تنها در نقطه O مشترك است. و این، به معنای آن است که، مرکز هر دایره‌ای که از نقطه N گذشته باشد، باید بر نقطه O منطبق باشد. حکم ثابت شد.

۲۵۸. فرض می‌کنیم، قطر AC ، خط‌های راست OB و OD را، به ترتیب، در نقطه‌های P و Q قطع کرده باشد (شکل ۴۲).



شکل ۴۲

چون مساحت مثلث‌های AOB و COB با هم برابرند، بنا بر این، ارتفاع‌های وارد بر ضلع مشترک آن‌ها، یعنی OB ، با هم برابر می‌شوند، یعنی $AP = PC$. به همین ترتیب، به دست می‌آید: $AQ = QC$ ؛ از آن جا $P = Q$ ، به این ترتیب، اگر داشته باشیم: $O \neq P$ ، آن وقت، نقطه‌های B ، D ، O ، P روی یک خط راست قرار می‌گیرند، یعنی نقطه O بر قطر BD واقع می‌شود؛ و اگر $O = P$ ، آن وقت، نقطه O بر قطر AC قرار دارد.

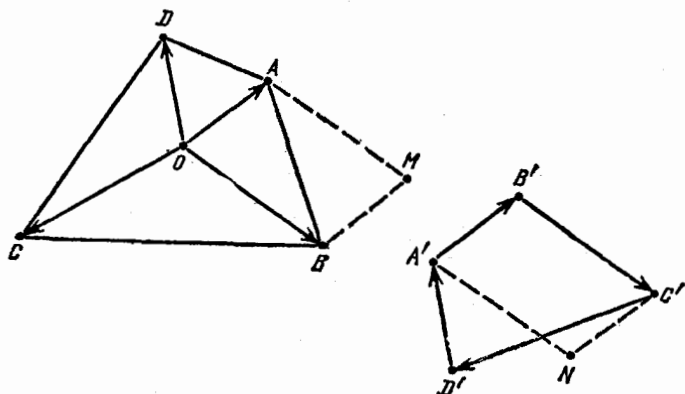
۲۵۹. متوازی‌الاضلاع‌های $OAMB$ و $A'B'C'N$ ، که روی بردارهای \vec{OA} ، \vec{OB} و $\vec{A'B'}$ ، ساخته شده‌اند، برابرند (شکل ۴۳)، بنا بر این داریم:

$$S_{AOB} = \frac{1}{4} S_{OAMB} = \frac{1}{4} S_{A'B'C'N} = S_{A'B'C'}$$

به همین ترتیب، به دست می‌آید:

$$S_{BOC} = S_{B'C'D'}, S_{COD} = S_{C'D'A'}, S_{DOA} = S_{D'A'B'}$$

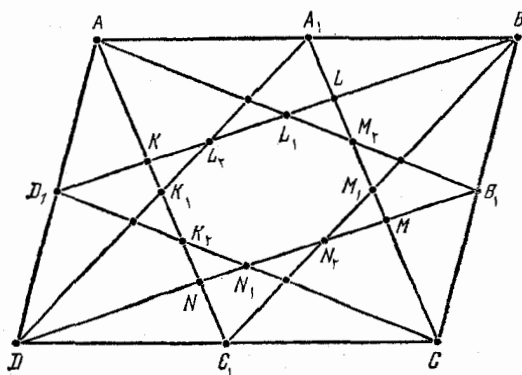
از آن جا



شکل ۴۳

$$S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA} = (S_{A'B'C'} + S_{A'D'C'}) + (S_{B'C'D'} + S_{B'A'D'}) = 2S'$$

۲۱۰. وسط ضلع‌های AB ، BC ، CD ، DA را، به ترتیب، A_1 ، B_1 ، C_1 ، D_1 می‌نامیم؛ مساحت متوازی‌الاضلاع $A_1B_1C_1D_1$ را S ، و نقطه‌های برخورد خط راست AC_1 را به خط‌های راست BD_1 ، A_1D ، CD_1 به ترتیب، K_1 و K_2 می‌گیریم. به همین ترتیب، نقطه‌های L ، L_1 ، L_2 ، M ، M_1 ، M_2 ، N ، N_1 ، N_2 را به دست می‌آوریم (شکل ۴۴).



شکل ۴۴

چون متوازی الاضلاع AA_1CC_1 و $AA_1 \parallel CC_1$ و $AA_1 = CC_1$ ، ارتفاعی برابر ارتفاع متوازی الاضلاع $ABCD$ و قاعده‌ای برابر نصف قاعده آن دارد $(AA_1 = \frac{1}{2}AB)$ ، بنابراین مساحت آن برابر $\frac{1}{4}S$ است. سپس، متوازی الاضلاع $KLMN$ ($LM \parallel KN$ و $KL \parallel MN$) ارتفاعی برابر ارتفاع متوازی الاضلاع AA_1CC_1 و قاعده $KN = \frac{2}{5}AC_1$ دارد (زیرا از تشابه دو مثلث AKD_1 و AND داریم: $AK = KN$ ، در ضمن: $KN = LM = MC = \frac{2}{5}NC_1$ ؛ بنابراین

$$S_{KLMN} = \frac{2}{5}S_{AA_1CC_1} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}S = \frac{1}{5}S$$

K_1 نقطه برخورد قطرهای AC_1 و DA_1 از متوازی الاضلاع AA_1C_1D است، بنابراین $AK_1 = K_1C_1$ ؛ K_2 نقطه برخورد میانه‌های AC_1 و CD_1 از مثلث ACD است، پس $AK_2 = 2K_2C_1$. بنابراین داریم:

$$KK_1 = AK_1 - AK = \frac{1}{2}AC_1 - \frac{2}{5}AC_1 = \frac{1}{10}AC_1 = \frac{1}{3}KN,$$

$$NK_2 = C_1K_2 - C_1N = \frac{1}{3}AC_1 - \frac{1}{5}AC_1 = \frac{2}{15}AC_1 = \frac{1}{3}KN$$

به همین ترتیب، به دست می‌آید:

$$KL_2 = \frac{1}{3}KL$$

از آنجا

$$S_{KK_1L_2} = \frac{1}{2}KK_1 \cdot KL_2 \cdot \sin(K_1KL_2) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}KN \cdot \frac{1}{3}KL \cdot \sin(NKL) =$$

$$= \frac{1}{12} S_{NKL} = \frac{1}{24} S_{KLMN} = \frac{1}{120} S$$

و با روشی مشابه ثابت می شود که:

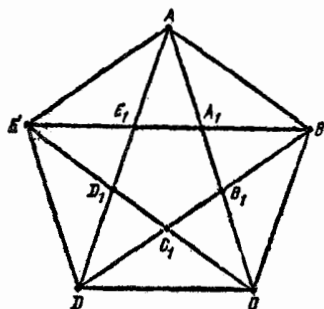
$$S_{LL_1M_1} = S_{MM_1N_1} = S_{NN_1K_1} = \frac{1}{120} S$$

بنابراین

$$S_{K_1L_1L_1M_1M_1N_1N_1K_1} = \frac{1}{5} S - 4 \times \frac{1}{120} S = \frac{1}{6} S$$

۲۱۱. الف) مجموع زاویه های داخلی پنج ضلعی $A_1B_1C_1D_1E_1$ و ده ضلعی $AA_1BB_1CC_1DD_1EE_1$ به ترتیب، برابر $3 \times 180^\circ$ و $8 \times 180^\circ$ است. علاوه بر این، اگر هر زاویه این پنج ضلعی را با زاویه ده ضلعی در همان رأس، جمع کنیم، 360° درجه به دست می آید. بنابراین داریم:

$$\widehat{A_1BB_1} + \widehat{B_1CC_1} + \widehat{C_1DD_1} + \widehat{D_1EE_1} + \widehat{E_1AA_1} = \\ = 8 \times 180^\circ + 3 \times 180^\circ - 5 \times 360^\circ = 180^\circ$$



شکل ۴۵

ب) اگر $ABCDE$ یک پنج ضلعی منتظم باشد، با توجه تقارن (نسبت به نیمساز هر یک از زاویه های آن) داریم:

$$AA_1 = AE_1 = EE_1, AC \parallel ED$$

از آن جا

$$\widehat{AA_1E} = \widehat{A_1ED} = \widehat{CEA} = \widehat{EAA_1}$$

یعنی، مثلث AEA_1 متساوی الساقین است. $a = AE$ و $x = A_1E_1$ می گیریم.

در این صورت، از تشابه مثلث‌های متساوی الساقین A_1EA, A_1AE_1 (که در زاویه مجاور به قاعده، مشترک‌اند)، به دست می‌آید:

$$\frac{AA_1}{A_1E_1} = \frac{A_1E}{AA_1} \Rightarrow \frac{a-x}{x} = \frac{a}{a-x}$$

از آنجا

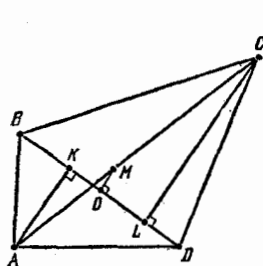
$$x^2 - 3ax + a^2 = 0$$

بنابراین

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) \quad (x < a \text{ زیرا})$$

و در نتیجه

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1E_1}}{S_{ABCDE}} = \left(\frac{x}{a}\right)^2 = \left[\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})\right]^2 = \frac{1}{4}(7 - 3\sqrt{5})$$



شکل ۴۶

از O وسط پاره خط راست BD از چهارضلعی $ABCD$ ، و نقطه‌های L و K را، به ترتیب، تصویر رأس‌های A و C بر خط راست BD می‌گیریم؛ در ضمن $\vec{OK} = x\vec{BD}$ و $\vec{OL} = y\vec{BD}$ (همین‌ها را در چهارضلعی $A'B'C'D'$ با علامت «پریم» در نظر می‌گیریم). در این صورت داریم (شکل ۴۶):

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \vec{AK} + \vec{KB}, \quad \vec{AD} = \vec{AK} + \vec{KD}, \\ \vec{AB}^2 - \vec{AD}^2 &= \vec{AK}^2 + \vec{KB}^2 - \vec{AK}^2 - \vec{KD}^2 = \\ &= (\vec{KB} + \vec{KD})(\vec{KB} - \vec{KD}) = \\ &= [(\vec{KB} + \vec{BO}) + (\vec{KD} + \vec{DO})](\vec{DK} + \vec{KB}) = \\ &= 2\vec{KO} \cdot \vec{DB} = 2x\vec{BD}^2 \end{aligned}$$

$$CB^2 - CD^2 = 2yBD^2,$$

$$2x'B'D'^2 = A'B'^2 - A'D'^2 = 2xBD^2,$$

$$2y'B'D'^2 = C'B'^2 - C'D'^2 = 2yBD^2$$

اگر $x = y$ ، آن وقت $x' = y'$ و $K = L$ ، $K' = L'$ ، یعنی گزاره الف درست است. اگر $x \neq y$ ، آن وقت، یکی از عددهای x و y ، و مثلاً x ، برابر صفر نیست و بنا بر این

$$\vec{MC} = \left(\frac{y}{x}\right) \vec{AM} \quad \text{و} \quad \vec{M'C'} = \left(\frac{y'}{x'}\right) \vec{A'M'} = \left(\frac{y}{x}\right) \vec{A'M'}$$

که از آن جا، گزاره ب) نتیجه می شود.

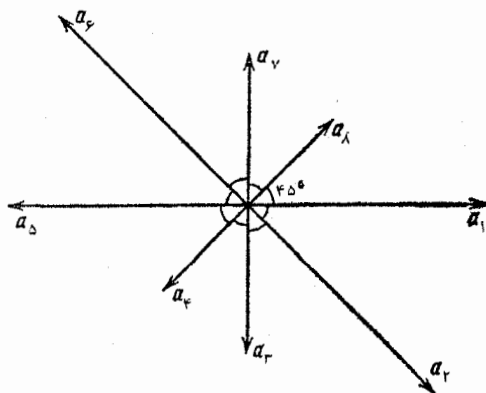
۲۱۳. بدون این که به کلی بودن مسأله لطمه ای بخورد، می توان فرض کرد که طول ضلع های هشت ضلعی A_1, A_2, \dots, A_8 ، عددهایی گویا هستند (اگر چنین نباشد، قضیه را برای هشت ضلعی متشابه A'_1, A'_2, \dots, A'_8 با ضلع $A'_1 = A'_2 = 1$ ثابت می کنیم که همه ضلع های آن، عددهایی گویا هستند؛ در نتیجه، حکم قضیه اصلی هم ثابت خواهد شد). بردارهای

$$\vec{a}_i = A_i A_{i+1} \quad (i = 1, \dots, 8, A_9 = A_1)$$

را در نظر می گیریم که، مجموع آن ها، برابر صفر است. چون همه زاویه های هشت ضلعی برابر، و در مجموع برابر 6×180 درجه اند، بنا بر این، هر زاویه هشت ضلعی برابر $\frac{3}{4} \times 180$ درجه و زاویه بین دو بردار \vec{a}_i و \vec{a}_{i+1}

$(\vec{a}_8 = \vec{a}_1)$ ، برابر $\frac{1}{4} \times 180$ ، یعنی ۴۵ درجه می شود (شکل ۴۷).

همه بردارها را روی محوری، مثلاً موازی \vec{a}_1 تصور می کنیم و طول تصویر مجموع $\vec{a}_1 + \vec{a}_5$ را x ، و طول تصویر مجموع $\vec{a}_2 + \vec{a}_6 + \vec{a}_7 + \vec{a}_8$ را y می نامیم. چون تصویر مجموع $\vec{a}_2 + \vec{a}_6$ برابر صفر است (زیرا \vec{a}_2 و



شکل ۴۷

\mathbf{a}_1 بر \mathbf{a}_2 عمودند)، بنا براین $x - y = 0$ ، از طرف دیگر، طول تصویر هر یک از بردارهای $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_7, \mathbf{a}_8$ برابر با حاصل ضرب عددی گویا در $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ است. بنا بر این، داریم:

$$x = y = z\sqrt{2}$$

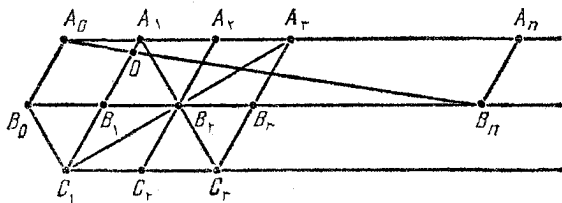
که در آن $z \in \mathbb{Q}$ و $x = 0$ از آن جا $\mathbf{a}_5 = -\mathbf{a}_1$ به همین ترتیب ثابت می شود:

$$\mathbf{a}_6 = -\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_7 = -\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_8 = -\mathbf{a}_4$$

بنابراین به دست می آید:

$$A_1 A_2 = A_5 A_6, A_2 A_3 = A_6 A_7, A_3 A_4 = A_7 A_8, A_4 A_5 = A_8 A_1$$

۲۱۴. به کمک شش ضلعی منتظم مفروض $A_0 A_1 B_1 C_1 B_0$ و به کمک خط کش، این نقطه‌ها را پیدا می کنیم: نقطه‌های A_2 و A_3 ، از برخورد خط راست $A_0 A_1$ ، به ترتیب، با خط‌های راست $C_1 B_1$ و $C_2 B_2$ ؛ نقطه C_3 از برخورد خط راست $C_1 C_2$ با خط راست $A_1 B_1$ ؛ نقطه‌های B_2 و B_3 از برخورد خط راست $B_0 B_1$ ، به ترتیب، با خط‌های راست $A_2 C_2$ و $A_1 C_1$ (شکل ۴۸). در این صورت، خواهیم داشت:



شکل ۴۸

$$A_1 A_2 = C_1 C_2 = a$$

(زیرا $A_1 A_2 C_2 C_1$ متوازی الاضلاع است)،

$$A_2 A_3 = C_2 C_3 = a$$

(زیرا دو مثلث $A_2 A_3 B_3$ و $C_2 C_3 B_2$ برابرند)،

$$C_2 C_3 = A_1 A_2 = a$$

(از برابری دو مثلث $A_2 A_1 B_2$ و $C_2 C_3 B_2$)، و سرانجام

$$B_1 B_2 = B_2 B_3 = a$$

(زیرا، چهار ضلعی های $A_2 A_3 C_3 C_2$ و $A_1 A_2 C_2 C_1$ متوازی الاضلاع اند و $B_0 B_1 \parallel A_0 A_1$).

اکنون، همین ساختمان را در موردشش ضلعی منتظم $A_1 A_2 B_3 C_3 C_2 B_1$

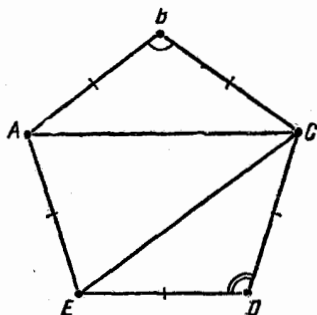
که نتیجه ای از انتقال شش ضلعی اصلی به اندازه بردار $A_1 A_2$ است، انجام می دهیم و به اندیس هر کدام از حرف ها، یک واحد اضافه می کنیم؛ به نقطه های A_2, B_3, C_4 می رسم، سپس به همین ترتیب، نقطه های A_3, B_4, C_5 را به دست می آوریم و غیره. وقتی به نقطه B_n رسیدیم، نقطه O محل برخورد خط های راست $A_0 B_n$ و $A_1 B_1$ را پیدا می کنیم. از تشابه دو مثلث $A_0 A_1 O$ و $A_0 A_n B_n$ داریم:

$$A_1 O = \frac{A_n B_n \cdot A_0 A_1}{A_0 A_n} = \frac{a \cdot a}{na} = \frac{a}{n}$$

و این، همان پاره خط راستی است که می خواستیم بسازیم.

یادداشت. این حکم کلی درست است: اگر یک پاره‌خط راست و یک خط راست موازی با آن داده شده باشد، آن وقت می‌توان، تنها به کمک یک خط‌کش، این پاره‌خط راست را، به n بخش برابر تقسیم کرد.

۰۲۱۵. چون



شکل ۴۹

$$AC = 2AB \sin \frac{B}{2} \geq 2CD \sin \frac{D}{2} = CE$$

(شکل ۴۹)، بنابراین در مثلث ACE ، دو زاویه EAC و AEC برابر می‌شوند. از طرف دیگر، داریم:

$$\widehat{EAC} = \widehat{A} - \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{B}) = \widehat{A} + \frac{\widehat{B}}{2} - 90^\circ \geq \widehat{E} + \frac{\widehat{D}}{2} - 90^\circ = \widehat{E} - \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{D}) = \widehat{AEC}$$

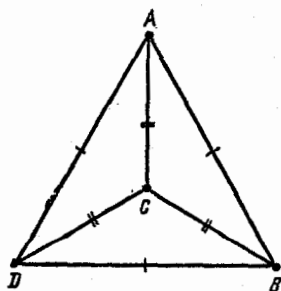
بنابراین، باید برابری $\widehat{EAC} = \widehat{AEC}$ برقرار باشد که تنها وقتی ممکن است که داشته باشیم:

$$\widehat{A} = \widehat{E}, \quad \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{D}}{2}$$

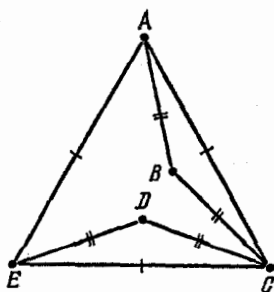
یعنی

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = \widehat{E}$$

و بنابراین، پنج ضلعی $ABCDE$ ، منتظم است. (۰۲۱۶ الف) اگر رأس‌های چند ضلعی اول، در چند ضلعی محدب دوم که برابر با آن است، قرار گیرد، آن وقت چند ضلعی اول، به طور کامل در دومی قرار می‌گیرد و از برابری مساحت‌های آن‌ها نتیجه می‌شود که دو چندضلعی برهم منطبق‌اند.



شکل ۵۱



شکل ۵۰

(ب) درست نیست (شکل ۵۰ را ببینید که، در آن، چهار ضلعی های غیرمحدب $ABCE$ و $ACDE$ نشان داده شده است).

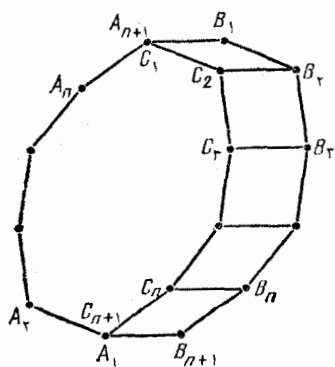
(ج) چهار ضلعی مقعر $ABCD$ را در نظر می گیریم که، در آن، رأس C ، مرکز مثلث متساوی الاضلاع ABD است (شکل ۵۱). در این صورت، اگر رأس های چهار ضلعی برابر با آن، $A'B'C'D'$ ، در چهار ضلعی $ABCD$ قرار گیرد، آن وقت، رأس های مثلث متساوی الاضلاع $A'B'D'$ در مثلث ABD قرار می گیرد و، بنا بر حکم بخش الف)، رأس های این دو مثلث برهم منطبق می شوند که، در نتیجه، رأس های C و C' هم روی هم قرار می گیرند. بنا بر این، پاسخ به پرسش ج)، منفی است.

۴۱۷. حکم کلی تری را ثابت

می کنیم: هر $2n$ ضلعی را که ضلع هایی برابر داشته باشد و، در ضمن، هر دو ضلع روبه رو در آن، با هم موازی باشند، می توان به لوزی ها تقسیم کرد.

برای $n=2$ ، درستی حکم روشن است، زیرا چهار ضلعی با ضلع های برابر، خود يك لوزی است.

اکنون فرض می کنیم، حکم برای $n \geq 2$ درست باشد، و $2(n+1)$ ضلعی



شکل ۵۲

را با همان ویژگی در نظر می‌گیریم:

$$A_1 A_2 \dots A_{n+1} B_1 \dots B_n B_{n+1}$$

فرض می‌کنیم، نقطه‌های

$$C_1 = A_{n+1}, C_2, \dots, C_n, C_{n+1} = A_1$$

نتیجه انتقال موازی نقطه‌های B_1, \dots, B_n و B_{n+1} به اندازه بردار $\vec{A_1 B_{n+1}}$ باشند (شکل ۵۲). در این صورت داریم:

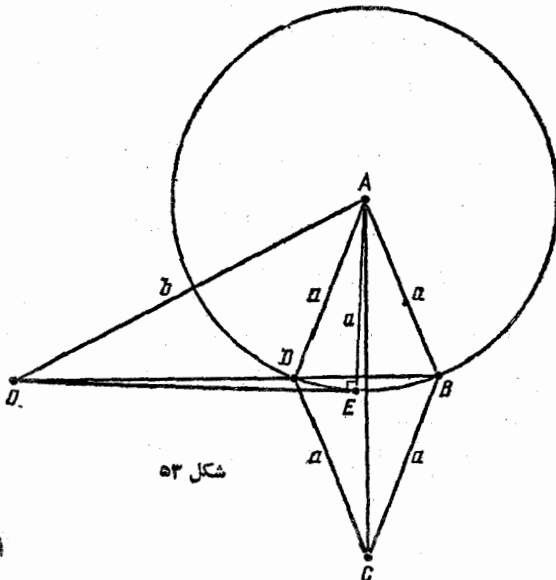
$$B_i C_i = B_{n+1} A_1 = B_i B_{i+1}, \quad (i = 1, \dots, n)$$

که از آن جا، با توجه به این که همه خط‌های راست $B_i C_i$ باهم موازی‌اند، نتیجه می‌شود که همه چهارضلعی‌های $C_i B_i B_{i+1} C_{i+1}$ لوزی‌اند؛ در ضمن

$$A_n C_1 = C_1 C_2 = \dots = C_n A_1 \text{ و } C_i C_{i+1} \parallel B_i B_{i+1} \parallel A_i A_{i+1}$$

بنابراین، $2n$ ضلعی $A_1 \dots A_n C_1 \dots C_n$ هم، به همان شکل مورد نظر است و بنا بر فرض استقرا، می‌توان آن را به لوزی‌هایی تقسیم کرد. حکم ثابت شد. بنا بر این به پرسش مسأله، باید پاسخ مثبت داد.

۲۱۸. چون، هر یک از نقطه‌های O و D و B ، از رأس‌های A و C



شکل ۵۲

به يك فاصله اند، بنابراین، این سه نقطه، روی يك خط راست اند.
 دایره به مرکز A و به شعاع a را در نظر می گیریم (شکل ۵۳). بنا بر
 قضیه ۷۳، حاصل ضرب $OB \cdot OD$ ، برابر است با مجذور طول مماس OE ،
 که از نقطه O بر این دایره رسم شده است. طول این مماس، برابر است با
 $a^2 - b^2$ ، که به مقدار زاویه BAD بستگی ندارد.

۲۱۹. نقطه Q را طوری انتخاب می کنیم که، چهار ضلعی $QPAB$ ،
 متوازی الاضلاع باشد (شکل ۵۴). در این صورت $QPDC$ هم متوازی الاضلاع
 است، زیرا

$$CD = BA = QP, \quad CD \parallel BA \parallel QP$$

چون رأس های دو زاویه برابر PQB و PCB در يك طرف خط راست
 PB قرار گرفته اند، نقطه های Q, P, B, C ، روی محیط يك دایره اند و داریم:

$$\widehat{APB} = \widehat{PBQ} = \widehat{PCQ} = \widehat{DPC}$$

که از آن جا، درستی حکم مسأله ثابت می شود.

۲۲۰. توجه می کنیم که، دو مثلث BDF و $A'EF$ متشابه اند. در واقع،
 داریم (شکل ۵۵):

$$\widehat{EFD} = \widehat{BFA} = \widehat{BFA'}, \quad \widehat{FED} = \widehat{FAB} = \widehat{FA'B}$$

بنابراین

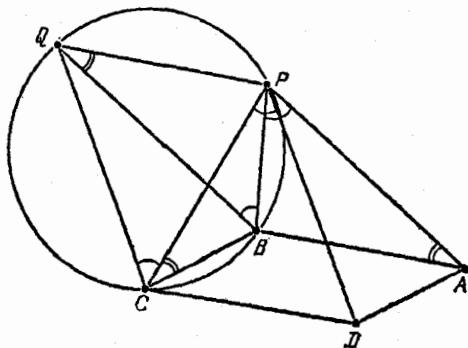
$$\widehat{A'FE} = |\widehat{EFB} - \widehat{A'FB}| = |\widehat{EFB} - \widehat{EFD}| = \widehat{DFB}$$

و از تشابه مثلث های EDF و $A'BF$ به دست می آید:

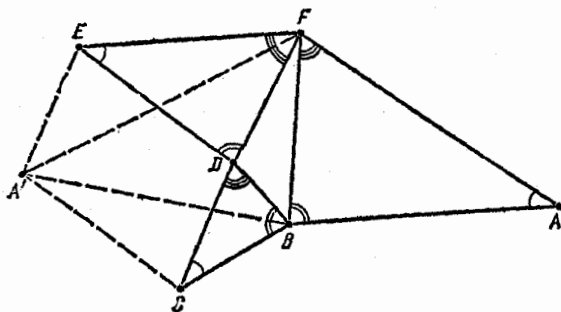
$$EF : FD = A'F : BF$$

به همین ترتیب، می توان تشابه مثلث های $A'CB$ و BDF را ثابت کرد. در
 نتیجه، دو مثلث $A'EF$ و BCA' هم، با یکدیگر متشابه می شوند و

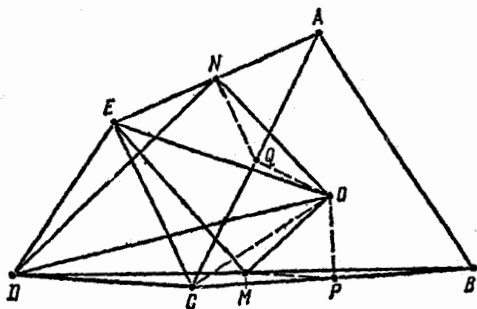
$$\frac{A'C}{EF} = \frac{A'B}{A'F} = \frac{DE}{EF} \Rightarrow A'C = DE$$



شکل ۵۴



شکل ۵۵



شکل ۵۶

به همین ترتیب $A'E = CD$ یعنی $A'CDE$ ، متوازی الاضلاع است.

۲۲۱. وسط پاره‌های راست AC و BC را، به ترتیب، P و Q

می‌نامیم. اگر مثلث OPM را دور نقطه O و به اندازه ۶۰° درجه دوران دهیم (در جهت حرکت عقربه‌های ساعت؛ شکل ۵۶) و، سپس، از تجانس به مرکز O و ضریب ۲، درمورد آن استفاده کنیم، آن وقت، بر مثلث OCE منطبق می‌شود. در واقع، از آن جا که

$$\widehat{COP} = ۶۰^\circ \text{ و } CO = ۲OP$$

(زیرا، نقطه O ، مرکز مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است)، آن وقت، نقطه P ، در اثر این تبدیل‌ها، بر نقطه C منطبق می‌شود. سپس، چون

$$PM \parallel DC; \widehat{DCE} = ۶۰^\circ \text{ و } EC = DC = ۲PM$$

(زیرا PM ، وسط دو ضلع از مثلث BCD را به هم وصل کرده است)، بنابراین، در این تبدیل‌ها، پاره‌خط راست PM به پاره‌خط راست CE ، و مثلث OPM به مثلث OCE منجر می‌شود. به این ترتیب، داریم:

$$\widehat{EOM} = ۶۰^\circ \text{ و } EO = ۲MO$$

به همین ترتیب، ثابت می‌شود که، در نتیجه دوران دور نقطه O به اندازه ۶۰° درجه (و در جهت مثلثاتی)، و تجانس به مرکز O و ضریب ۲، مثلث OQN منجر به مثلث OCD می‌شود. از آن جا

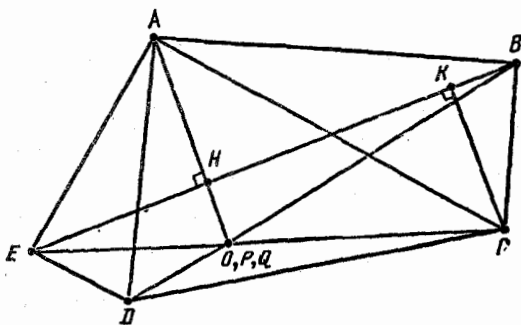
$$\widehat{NOD} = ۶۰^\circ \text{ و } DO = ۲NO$$

بنابراین دو مثلث MOD و MOE متشابه‌اند.

۲۲۲. AH را بر خط راست BE عمود می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا

خط‌های راست CE و BD را، به ترتیب، در نقطه‌های P و Q قطع کند. ثابت می‌کنیم $AP = AQ$ که، از آن‌جا، روشن می‌شود که سه نقطه P ، Q و P برهم منطبق‌اند.

عمود CK را بر خط راست BE رسم می‌کنیم (شکل ۵۷)، آن وقت،



شکل ۵۷

از تشابه مثلث‌های قائم‌الزاویه BHA و CKB (که در آن‌ها، ضلع‌های AB و CK ، به ترتیب، بر ضلع‌های BC و BH عمودند) داریم:

$$\frac{CK}{BH} = \frac{BK}{AH} = \frac{BC}{AB} = \operatorname{tg}(\widehat{BAC})$$

و از تشابه مثلث‌های قائم‌الزاویه EKC و EHP به دست می‌آید:

$$PH = \frac{EH \cdot CK}{EK} = \frac{EH \cdot BH \cdot \operatorname{tg}(BAC)}{EB - BK} = \frac{EH \cdot BH \cdot \operatorname{tg}(BAC)}{EB - AH \cdot \operatorname{tg}(BAC)}$$

به همین ترتیب، ثابت می‌شود:

$$QH = \frac{BH \cdot EH \cdot \operatorname{tg}(EAD)}{EB - AH \cdot \operatorname{tg}(EAD)}$$

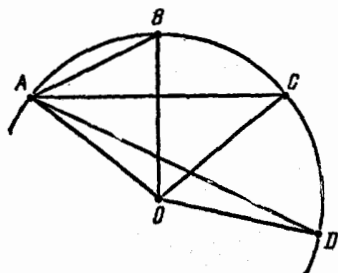
از آن جا، و با توجه به برابری دو زاویه BAC و EAD ، نتیجه می‌شود: $PH = QH$. حکم ثابت شد.

۲۲۳. دایرهٔ محیطی چند ضلعی را، به مرکز O و به شعاع R ، در نظر

می‌گیریم (شکل ۵۸). $\widehat{AOB} = \alpha$. فرض می‌کنیم: $0 < \alpha < 120^\circ$ و

$$AB = 2R \sin \frac{\alpha}{2}, \quad AC = 2R \sin \alpha, \quad AD = 2R \sin \frac{3\alpha}{2}$$

از آن جا، به دست می‌آید:



شکل ۵۸

$$\frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \frac{3\alpha}{2}}$$

بنابراین، به دست می‌آید:

$$0 = \sin \alpha \sin \frac{3\alpha}{2} - \left(\sin \alpha + \sin \frac{3\alpha}{2} \right) \times$$

$$\times \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{5\alpha}{2} \right) -$$

$$-\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{3\alpha}{2} \right) - \frac{1}{2} (\cos \alpha - \cos 2\alpha) = \frac{1}{2} \left[\left(\cos \frac{3\alpha}{2} + \cos 2\alpha \right) - \right. \\ \left. - \left(\cos \alpha + \cos \frac{5\alpha}{2} \right) \right] = \cos \frac{\gamma\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{3\alpha}{2} \right) = 2 \cos \frac{\gamma\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}$$

از آن جا

$$\frac{\gamma\alpha}{2} = 90^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{360^\circ}{\gamma}$$

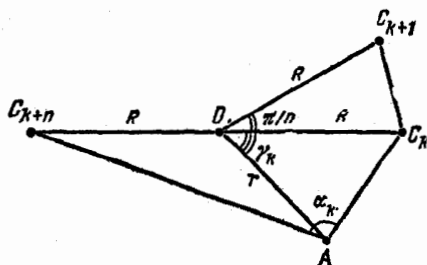
یعنی، چندضلعی منتظم مجهول دارای γ ضلع است.

۲۲۴. O را مرکز $2n$ ضلعی منتظم $C_0, C_1, \dots, C_{2n-1}$ و R را شعاع

دایره محیطی آن می‌گیریم. نقطه دلخواه A را به فاصله $r \neq R$ از نقطه O

انتخاب می‌کنیم و قرار می‌گذاریم:

$$\alpha_k = \widehat{C_k A C_{k+n}}, \quad \gamma_k = \widehat{A O C_k}$$



شکل ۵۹

(برای $n-1, \dots, 1, 0, k$) در این صورت، بنا به قضیه کسینوس‌ها، داریم (شکل ۵۹):

$$AC_k^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \gamma_k,$$

$$AC_{k+n}^2 = R^2 + r^2 + 2Rr \cos \gamma_k,$$

$$\cos \alpha_k = \frac{AC_k^2 + AC_{k+n}^2 - C_k C_{k+n}^2}{2 AC_k \cdot AC_{k+n}} = \frac{r^2 - R^2}{\sqrt{(R+r)^2 - 4R^2 r^2 \cos^2 \gamma_k}}$$

که از آن جا، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \alpha_k &= \frac{1}{\cos^2 \alpha_k} - 1 = \\ &= \frac{1}{(R^2 - r^2)^2} [(R^2 + r^2)^2 - (R^2 - r^2)^2 - 4R^2 r^2 \cos^2 \gamma_k] = \\ &= \frac{4R^2 r^2}{(R^2 - r^2)^2} \sin^2 \gamma_k \end{aligned}$$

بدون این که لطمه‌ای به کلی بودن مسئله وارد شود، می‌توان فرض کرد:

$$\gamma_k = \gamma_0 + \frac{k\pi}{n}$$

(در ضمن، تنها ممکن است لازم شود که رأس‌های $2n$ ضلعی مفروض را، به ردیف دیگری شماره گذاری کنیم). بنا بر این داریم:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{tg}^2 \alpha_k = \frac{4R^2 r^2}{(R^2 - r^2)^2} \sum_{k=0}^{n-1} (1 - \cos 2\gamma_k) = \frac{4R^2 r^2 n}{(R^2 - r^2)^2}$$

زیرا، $\sum_{k=0}^{n-1} \cos 2\gamma_k = 0$ برای اثبات برابری آخر، بردارهای واحد \mathbf{d}_k را با مختصات

$$(\sin 2\gamma_k, \cos 2\gamma_k) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

در نظر می‌گیریم و توجه می‌کنیم که زاویه بین بردارهای \mathbf{d}_k و \mathbf{d}_{k+1} ($\mathbf{d}_n = \mathbf{d}_0$)

برابر $\frac{2\pi}{n}$ است. بنا براین، n ضلعی منتظم D_0, D_1, \dots, D_{n-1} وجود دارد که،
برای آن

$$\vec{D_k D_{k+1}} = \mathbf{d}_k \quad (D_n = D_0)$$

یعنی، مجموع بردارهای $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k$ که برابر مجموع تصویرهای آن‌ها بر محور دلخواهی است، برابر صفر است. به این ترتیب، ثابت شد، برای هر دو نقطه A و B که از نقطه O به فاصله‌ای غیر از R باشند، مجموع موردنظر، یکی است و، از این جا، درستی حکم مسأله ثابت می‌شود (زیرا، شعاع‌های دو دایره محاطی و محیطی، برابر نیستند).

۲۲۵. اثبات را، با استقرای روی n ، تعداد ضلع‌های چند ضلعی،

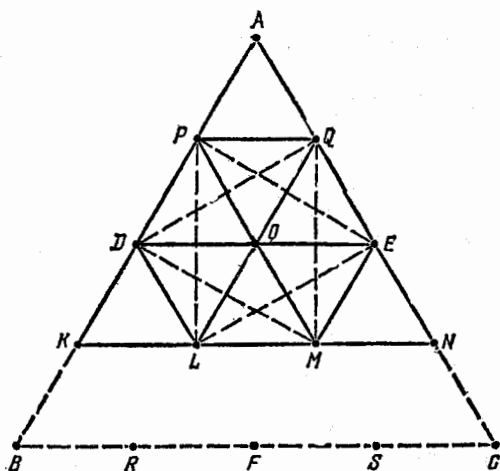
می‌دهیم.

حکم، برای $n = 3$ ، درست است، زیرا سه ضلعی قطر ندارد. اکنون، فرض می‌کنیم حکم، برای عدد $n \geq 3$ درست باشد، و $(n+2)$ ضلعی محدبی را در نظر می‌گیریم که، رأس‌های آن، با روشی که در مسأله گفته شده است، رنگ شده باشند. در این صورت، چنان رأسی مثل A وجود دارد که، دو رأس مجاور آن، دارای رنگ‌های مختلف هستند. در واقع، در غیر این صورت، باید هر دو رأسی که يك درمیان قرار گرفته‌اند، رنگ‌های یکسانی داشته باشند و، به خاطر فرد بودن تعداد $n+2$ ، همه رأس‌ها هم رنگ می‌شوند که شرط مسأله را نقض می‌کند. در این صورت، قطری که دو رأس مجاور رأس A را به هم وصل می‌کند، $(n+2)$ ضلعی را به يك مثلث و يك $(n+1)$ ضلعی تقسیم می‌کند. اگر در این $(n+1)$ ضلعی، باز هم رأسی پیدا شود که در همسایگی خود، دو رأس با رنگ‌های مختلف داشته باشد، آن وقت با وصل این دو رأس نا هم رنگ، $(n+1)$ ضلعی، به يك مثلث و يك n ضلعی تبدیل می‌شود و برای n ضلعی حاصل، بنا بر فرض استقرای تقسیم مطلوب وجود دارد. ولی اگر چنین رأسی در $(n+1)$ ضلعی وجود نداشته باشد، آن وقت، هر دو رأس دلخواه آن که، تنها يك رأس در بین خود داشته باشند، هم رنگ‌اند، یعنی تمامی رأس‌ها با دو رنگ و به صورت

يك درمیان، رنگ شده‌اند. چون رنگ رأس A با رنگ هر يك از دو رأس مجاور خود فرق دارد، بنابراین، باید با رنگ همه رأس‌های دیگر $(n+2)$ ضلعی اصلی فرق داشته باشد. بنابراین، اگر از همان ابتدا، همه قطرهایی از $(n+2)$ ضلعی را، که از A گذشته‌اند، رسم کنیم، به تقسیم مطلوب می‌رسیم به این ترتیب، درستی حکم برای $(n+2)$ ضلعی هم ثابت شد.

۱۲۵. نقطه‌ها، پاره‌خط‌ها و خط‌های راست

۲۲۶. حکم نیرومندتری را، ثابت می‌کنیم: بین ۱۰ نقطه $E, D, A, K, L, M, N, O, P, Q$ ، به نحوی که در شکل ۶۰ نشان داده شده است، می‌توان سه نقطه از يك رنگ پیدا کرد که رأس‌های يك مثلث متساوی‌الاضلاع باشند.



شکل ۶۰

فرض می‌کنیم، این طور نباشد. بدون این‌که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان O را به رنگ سیاه گرفت؛ در ضمن، دست کم یکی از سه نقطه P, E, L ، و مثلاً P ، باید سیاه باشد (این سه نقطه نمی‌توانند هم رنگ باشند، زیرا رأس‌های يك مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند). همین طور،

از بین سه نقطه Q, D, M ، دست کم یکی سیاه است، ولی نقطه‌های Q و D به ناچار باید سفید باشند (تا رأس‌های مثلث‌های متساوی‌الاضلاع OPQ و OPD هم رنگ نشوند). به این ترتیب، M سیاه و Q و D سفیدند. به همین ترتیب، معلوم می‌شود که، نقطه‌های E و L هم باید سفید باشند (به ترتیب، از مثلث‌های OME و OML). اکنون، اگر مثلث‌های DEA, QLN و DLK را در نظر بگیریم، به این جا می‌رسیم که رأس‌های مثلث متساوی‌الاضلاع AKN سیاه‌اند. تناقض حاصل، درستی حکم مورد نظر را ثابت می‌کند.

۲۲۷. اگر $n = 3k + 1$ ، $(k \in \mathbb{Z}^+)$ ، آن وقت به کمک پرگار و خط‌کش،

زاویه

$$60^\circ - k \times \frac{180^\circ}{n} = \frac{(3k+1) \times 180^\circ - 3k \times 180^\circ}{3n} = \frac{1}{3} \times \frac{180^\circ}{n}$$

را می‌سازیم و اگر $n = 3k - 1$ ، $(k \in \mathbb{N})$ ، این زاویه را

$$k \times \frac{180^\circ}{n} - 60^\circ = \frac{3k \times 180^\circ - (3k-1) \times 180^\circ}{3n} = \frac{1}{3} \times \frac{180^\circ}{n}$$

در هر دو حالت، یک سوم زاویه مفروض ساخته می‌شود.

۲۲۸. از برهان خلف استفاده می‌کنیم و دو پاره‌خط غیر متقاطع را

در نظر می‌گیریم که قطرهای یک مجموعه محدب باشند. دو حالت ممکن

است: (۱) هیچ کدام از پاره‌خطها با امتداد دیگری نقطه مشترک ندارد؛

(۲) یکی از پاره‌خطها، امتداد دیگری را قطع می‌کند.

در حالت اول، چهار ضلعی محدب $ABCD$ را در نظر می‌گیریم که،

ضلع‌های AB و CD آن، قطر باشند (شکل ۶۱). از آن جا که، دست کم

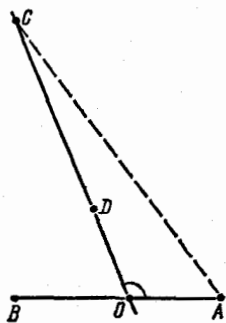
یکی از زاویه‌های چهارضلعی، و مثلاً زاویه D ، از 90° درجه کمتر نیست،

بنابراین $AC > CD$ ، یعنی CD قطر نیست. در حالت دوم، نقطه O محل

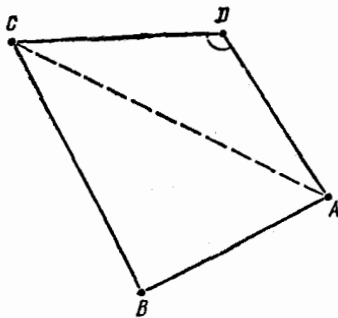
برخورد قطر AB با امتداد قطر CD (از طرف D) را در نظر می‌گیریم

(شکل ۶۲). چون دست کم یکی از دو زاویه AOC یا BOC ؛ و مثلاً اولی،

کمتر از 90° درجه نیست، بنابراین



شکل ۶۲



شکل ۶۱

$$AC > OC > CD$$

یعنی CD قطر نیست. به این ترتیب، در هر دو حالت، مواجهه با تناقض می‌شویم.

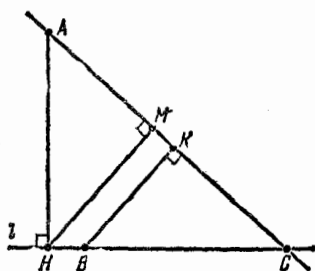
۲۲۹. پاسخ به پرسش مسأله، منفی است. چهارضلعی محدب $ABCD$ را در نظر می‌گیریم که، در آن، داشته باشیم:

$$AB = AC = BC = d \text{ و } BD < d$$

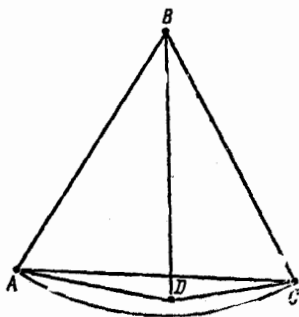
(شکل ۶۳). قطر آن، برابر d است. از طرف دیگر، دست کم دو رأس از سه رأس A, B, C در یکی از دو بخشی قرار می‌گیرند که از تقسیم چهارضلعی به وسیله خط شکسته به دست آمده است. در این صورت، قطر این بخش، برابر d می‌شود.

یادداشت. می‌توان ثابت کرد، اگر بین رأس‌های چهارضلعی محدب مفروض، نتوان سه رأس را طوری انتخاب کرد که، فاصله دو به دوی آنها، برابر قطر آن باشند، آن وقت، تقسیم مورد نظر مسأله را می‌توان انجام داد؛ در ضمن، به جای خط شکسته می‌توان از خط راست استفاده کرد.

۲۳۰. فرض می‌کنیم، همه نقطه‌ها، روی یک خط راست نباشند. همه خط‌های راست ممکن را، از دو به دوی نقطه‌ها می‌گذرانیم و همه فاصله‌های غیر صفر بین نقطه‌ها و خط‌های راست را در نظر می‌گیریم. چون تعداد این فاصله‌ها، محدود است، می‌توان نقطه A و خط l را طوری پیدا کرد که،



شکل ۶۴



شکل ۶۳

فاصلهٔ بین آن‌ها، کمترین مقدار باشد. عمود AH را بر خط راست l فرود می‌آوریم (شکل ۶۴). چون خط راست l ، دست‌کسب شامل سه نقطه، از نقطه‌های مفروض است، بنابراین، دست‌کم دو تا از آن‌ها، در یک طرف نقطهٔ H قرار دارند. آن‌ها را B و C می‌گیریم و، در ضمن، B را بین H و C فرض می‌کنیم. در این صورت، اگر BM و BK را بر خط راست AC عمود کنیم، از تشابه دو مثلث HMC و BKC به دست می‌آید:

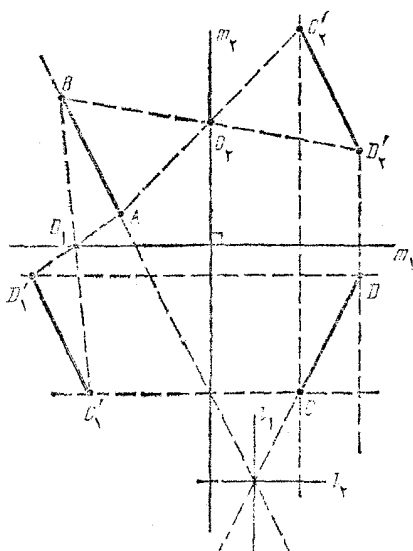
$$BK = \frac{HM \cdot BC}{HC} \leq HM < HA$$

(اگر $A = M$ ، آن وقت $AC \parallel HC$ ، که درست نیست)؛ یعنی فاصلهٔ نقطهٔ A تا خط راست l ، کمترین مقدار نیست. تناقض حاصل، نشان می‌دهد که همهٔ نقطه‌ها، روی یک خط راست‌اند.

۴۳۱. قرینهٔ پاره‌خط راست AB ، نسبت به نقطهٔ مجهول O را $A'B'$ می‌نامیم. خط راست دلخواه l را طوری در نظر می‌گیریم که $C'D'$ ، قرینهٔ پاره‌خط راست CD نسبت به l ، موازی $A'B'$ باشد. چون

$$C'D' \parallel A'B' \parallel AB$$

بنابراین، خط راست l موازی یکی از نیم‌سازهای (عمود برهم) I_1 و I_2 بین خط‌های راست AB و CD می‌باشد (شکل ۶۵). قرینهٔ پاره‌خط راست CD نسبت به خط راست l را، در حالت $l \parallel I_1$ با $C'D'_1$ و در حالت $l \parallel I_2$ با



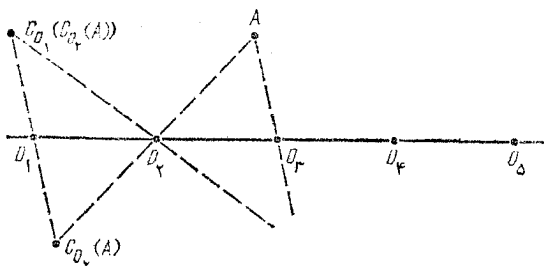
شکل ۶۵

$C'D'$ نشان می‌دهیم.

چون $\vec{C'D'} = -\vec{C'D'}$ ، بنابراین یکی از دو بردار $\vec{C'D'}$ یا $\vec{C'D'}$ ،
 و مثلاً اولی، برابر بردار \vec{AB} است. در این حالت، دو پاره‌خط راست $A'B'$
 و $C'D'$ تنها وقتی برهم منطبق‌اند (با انتخاب متناظر خط راست $l_1 \parallel l_1$) که
 نقطه $O = O_1$ روی خط راست $m_1 \perp l_1$ ، به یک فاصله از نقطه‌های A و D ،
 باشد. به همین ترتیب، پاره‌خط‌های راست $A'B'$ و $C'D'$ (با انتخاب
 متناظر $l_1 \parallel l_1$) وقتی، و تنها وقتی، برهم منطبق‌اند که $O = O_2$ بر خط راست
 $m_2 \perp l_2$ ، به یک فاصله از نقطه‌های A و C ، باشد. به این ترتیب، مکان
 مطلوب نقطه O ، عبارت است از اجتماع این دو خط راست m_1 و m_2 .

۲۳۲. فرض می‌کنیم، مجموعه M ، دارای دو مرکز تقارن مختلف Q_1
 و O_2 باشد. در این صورت نقطه O_3 ، قرینه نقطه O_1 نسبت به نقطه O_2 هم،
 مرکز تقارن مجموعه M است.

در واقع اگر $C_0(A)$ را قرینه نقطه A نسبت به نقطه O بگیریم،



شکل ۶۶

آن وقت، از این حقیقت که هم دو نقطه A و $C_{O_2}(A)$ و هم دو نقطه O_3 و O_1 نسبت به نقطه O_2 قرینه یکدیگرند، نتیجه می‌شود که دو نقطه $C_{O_2}(A)$ و $C_{O_1}(C_{O_2}(A))$ هم نسبت به همان نقطه O_2 قرینه یکدیگرند (شکل ۶۶). بنابراین، برای هر نقطه A ، داریم:

$$C_{O_2}(A) = C_{O_2}(C_{O_1}(C_{O_2}(A)))$$

و از آن جا

$$C_{O_2}(M) = C_{O_2}(C_{O_1}(C_{O_2}(M))) = C_{O_2}(C_{O_1}(M)) = C_{O_2}(M) = M$$

و به همین ترتیب، نقطه‌های

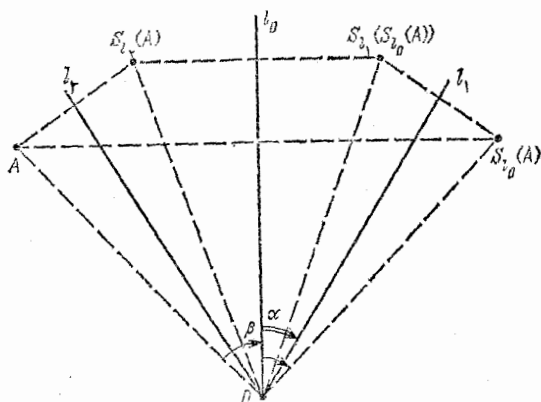
$$O_4 = C_{O_2}(O_2), O_5 = C_{O_4}(O_2), \dots$$

مرکزهای تقارن مجموعه M هستند. از آن جا که

$$\vec{O_1 O_2} = \vec{O_2 O_3} = \vec{O_3 O_4} = \dots$$

بنابراین، همه این مرکزهای تقارن متمایزند، یعنی تعداد آن‌ها، بی‌نهایت است.

۲۳۳. فرض کنیم، مجموعه M ، دارای محورهای تقارن l_1 و l_2 باشد (الزامی ندارد که متمایز باشند). در این صورت، خط راست l_1 ، قرینه l_2 نسبت به l_1 هم، محور تقارن مجموعه M است. در واقع، اگر قرینه نقطه A نسبت به خط راست l_1 را، $S_{l_1}(A)$ بنامیم، آن وقت، از قرینه بودن نقطه‌های A و $S_{l_1}(A)$ ، همچنین l_1 و l_2 نسبت به خط راست l_1 ، نتیجه می‌شود که، دو نقطه $S_{l_1}(A)$ و $S_{l_2}(S_{l_1}(A))$ هم، نسبت به همان خط راست l_2 ، قرینه



شکل ۶۷

یکدیگرند. (شکل ۶۷). بنا بر این برای هر نقطه A داریم:

$$S_{l_2}(A) = S_{l_1}(S_{l_2}(A))$$

که از آن جا به دست می آید:

$$S_{l_2}(M) = S_{l_1}(S_{l_2}(S_{l_1}(M))) = S_{l_1}(S_{l_2}(M)) = S_{l_1}(M) = M$$

به این ترتیب، هر محور تقارن l_1 مجموعه M ، محور تقارن مجموعه L هم می باشد که، از آن جا، درستی حکم مسأله روشن می شود.

۲۳۴. فرض می کنیم l_1 و l_2 ، محورهای تقارن مجموعه M ، در نقطه O به هم رسیده باشند و، در ضمن، اگر محور l_2 را به اندازه زاویه α ، در جهت حرکت عقربه های ساعت، دوران دهیم، بر محور l_1 منطبق شود. در این صورت، اگر قرینه نقطه A را، نسبت به خط راست l_2 ، با $S_{l_2}(A)$ نشان دهیم، آن وقت، هر نقطه A ، ضمن دوران دور نقطه O به اندازه زاویه 2α و در جهت حرکت عقربه های ساعت، به نقطه

$$R(A) = S_{l_1}(S_{l_2}(A))$$

می رسد. در واقع، فاصله نقطه O تا هر یک از نقطه های A ، $S_{l_2}(A)$ ، $S_{l_1}(S_{l_2}(A))$ یکی است (شکل ۶۷ را ببینید) و اگر زاویه β ، بین خط های

راست OA و $(O \neq A)l$ را، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت بگیریم، آن وقت، زاویه بین خط‌های راست OA و $OS_{l_1}(S_{l_0}(A))$ برابر

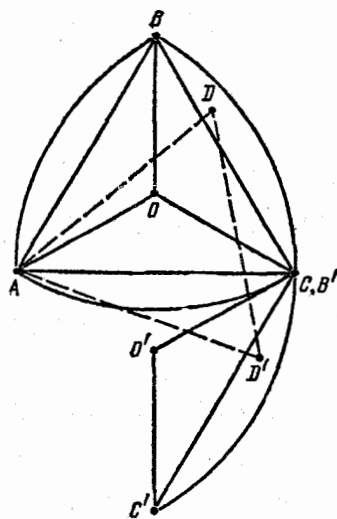
$$2\beta - 2(\beta - \alpha) = 2\alpha$$

می‌شود. چون مجموعه M شامل بیش از یک نقطه است، بنا براین، شامل نقطه $A_0 \neq O$ است. به این ترتیب، داریم:

$$R(M) = S_{l_1}(S_{l_0}(M)) = S_{l_1}(M) = M$$

به این ترتیب، هر یک از نقطه‌های

$$A_0, A_1 = R(A_0), A_2 = R(A_1), A_3 = R(A_2), \dots$$



شکل ۶۸

عضوی از مجموعه M هستند. در ضمن، همه این نقطه‌ها متمایزند، زیرا اگر به ازای مقدارهای $i > j$ ، نقطه‌های A_j و A_i برهم منطبق باشند، آن وقت، باید داشته

$$2\alpha(i - j) = 2k\pi, (k \in \mathbb{N})$$

یعنی، عدد $\frac{\alpha}{\pi}$ عددی گویاست. بنا براین،

مجموعه M نامتناهی است.

۲۳۵. ثابت می‌کنیم، شرط مسأله،

تنها برای $n = 3$ برقرار است (کسه در مورد آن کافی است، این نقطه‌ها، رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع را تشکیل داده باشند).

فرض کنید، مجموعه مورد نظر مسأله، دارای $n \geq 4$ نقطه باشد. دو نقطه A و B را طوری انتخاب می‌کنیم که، فاصله بین آن‌ها، حداکثر باشد و سپس، نقطه C را در نظر می‌گیریم که با دو نقطه A و B ، رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع را تشکیل داده‌اند. در این صورت، همه نقطه‌های دیگر، در

داخل شکل M قرار می گیرند که از اشتراك سطح سه دایره به شعاع AB و به مرکزهای A ، B و C (شکل ۶۸) به دست آمده است. اگر نقطه O ، مرکز مثلث ABC باشد؛ پاره خطهای راست AO ، BO ، CO مجموعه M را به سه بخش برابر تقسیم می کنند که، در هیچ کدام از آنها نمی تواند نقطه ای از n نقطه، به جز آن چه نام برده ایم، واقع باشد. در واقع، اگر مثلاً در بخش M_{BC} که از مثلث BOC و قطعه دایره به مرکز A و کمان BC تشکیل شده است، نقطه ای مثل D وجود داشته باشد، آن وقت، نقطه D' هم وجود دارد که، برای آن، مثلث ADD' متساوی الاضلاع است، بنابراین، اگر نقطه D را دور نقطه A به اندازه ۶۰ درجه (در جهت معینی) دوران دهیم، باید تبدیل آن، نقطه D' در عین حال، هم در بخش M'_{BC} ، تبدیل M_{BC} ، قرار گیرد و هم در مجموعه M . ولی چون زاویه BAC برابر ۶۰ درجه است، یا $C' = B$ یا $B' = C$ برای مشخص بودن وضع، فرض می کنیم $B' = C$. در این صورت، مجموعه های M و M'_{BC} ، نسبت به خط راست $B'O'$ ، در دو نیم صفحه مختلف قرار می گیرند، زیرا

$$\widehat{BB'O'} = \widehat{BCA} + \widehat{AB'O'} = ۶۰^\circ + ۳۰^\circ = ۹۰^\circ$$

یعنی، خط راست $B'O'$ بر کمان AC مماس است. در نتیجه، M و M'_{BC} تنها در نقطه B' مشترک اند، از آن جا $D' = B'$ و $D = B$ ، که با نوع انتخاب نقطه D متناقض است.

۲۳۶. ابتدا فرض می کنیم، نقطه های A و B و C ، روی يك خط راست باشند. در این صورت، این نقطه ها، خط راست را به ۴ بازه تقسیم می کنند که، در ضمن، هیچ دو نقطه ای از دو بازه مختلف، نمی توانند متعلق به يك مجموعه محدب باشند. بنابراین، تعداد مجموعه های مطلوب، نمی تواند از ۴ کمتر باشد. اگر مجموعه M را، آن طور که در شکل ۶۹ نشان داده شده است، تقسیم کنیم، همان تعداد ۴ به دست می آید.



شکل ۶۹

اکنون، فرض می‌کنیم، نقطه‌های A و B و C روی يك خط راست نباشند، در این صورت، نقطه‌های B و C ، خط راست BC را به سه بازه تقسیم می‌کنند و، در ضمن، بازه‌های جداگانه باید در دو مجموعه محدب جداگانه قرار گیرند. بنابراین، تعداد مجموعه‌های مطلوب، نمی‌تواند از ۳ کمتر باشد. و ۳ مجموعه را می‌توان به صورتی که در شکل ۷۰ نشان داده شده است، انتخاب کرد.

۲۳۷. بین خط‌های راستی که رسم می‌کنیم، بنا بر شرط، حتماً دو خط راست متقاطع وجود دارد که صفحه را به ۴ بخش تقسیم می‌کنند. اگر يك خط راست دیگر هم رسم کنیم، به سادگی و با آزمایش در حالت‌های مختلف، معلوم می‌شود که، دست کم، به تعداد بخش‌ها، ۲ واحد اضافه می‌شود. بنابراین، هرگز نمی‌توان، درست به ۵ بخش رسید، پس $n_0 \geq 5$. از طرف دیگر، هر تعداد $n > 5$ بخش را، می‌توان با روش موردنظر به دست آورد: اگر $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$)، آن وقت تقسیم صفحه را می‌توان به صورتی که در شکل ۷۱ نشان داده شده است، انجام داد؛ اگر $n = 4k + 3$ ، شبیه شکل ۷۲ و در حالت $n = 4k + 5$ ، شبیه شکل ۷۳، تقسیم صفحه انجام می‌گیرد. به این ترتیب، کمترین مقدار n_0 ، برابر ۵ است.

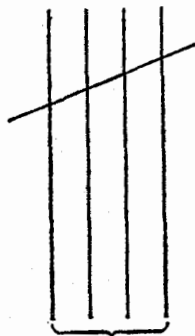
۲۳۸. مجموعه مورد نظر، مثلاً، عبارت است از نوار

$$M = \{(x, y) \mid x\sqrt{2} - 1 \leq y \leq x\sqrt{2}\}$$

در واقع، این مجموعه، شامل بی‌نهایت نقطه با مختصات درست به صورت $(x, [\sqrt{2}x])$ است ($x \in \mathbb{Z}$). از طرف دیگر، هر خط راست $y = kx + b$ در حالت $k = \sqrt{2}$ ، شامل بیش از يك نقطه با مختصات درست نیست (زیرا، در غیر این صورت، عدد

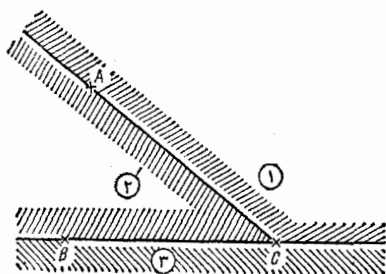
$$|(\sqrt{2}x_1 + b) - (\sqrt{2}x_2 + b)| = \sqrt{2}|x_1 - x_2|$$

باید به ازای $|x_1 - x_2| \in \mathbb{N}$ ، عددی درست باشد، که با گنگ بودن عدد $\sqrt{2}$ متناقض است). و در حالت $k \neq \sqrt{2}$ ، مجموعه M را در پاره‌خط راستی قطع می‌کند که نمی‌تواند شامل بی‌نهایت نقطه با مختصات درست باشد.

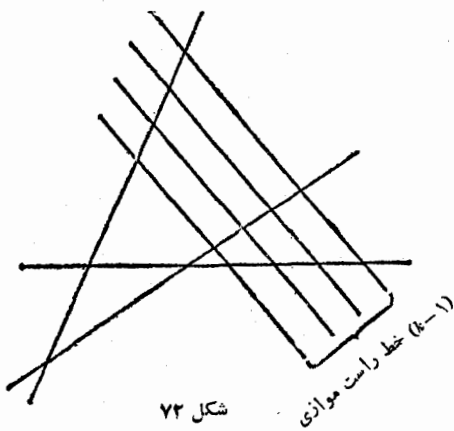


خط راست موازی $(k-1)$

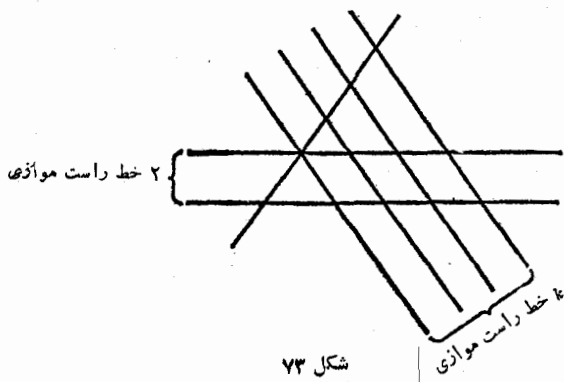
شکل ۷۱



شکل ۷۰



شکل ۷۲



شکل ۷۳

یادداشت. می توان ثابت کرد که، هر نوار واقع بین دو خط راست موازی $y = kx + b_1$ و $y = kx + b_2$ ، به شرط گنگ بودن مقدار k ، همیشه شامل بی نهایت نقطه با مختصات درست است (هرچقدر که تفاضل $|b_1 - b_2|$ کوچک باشد). بنابراین، هر نواری از این گونه، با شرط مسأله سازگار است.

۲۳۹. چون $a_n \geq 0$ (برای هر مقدار n)، بنا بر این صعودی یا نزولی بودن دنباله $\{a_n\}$ ، هم ارز است با صعودی یا نزولی بودن دنباله عددهای

$$a_n^2 = (x - ny)^2 = x^2 - 2nxy + n^2y^2$$

که عبارت است از دنباله مقادیرهای سه جمله ای درجه دوم با ضریب بزرگترین درجه مثبت، در نقطه های $n \in \mathbb{N}$. با توجه به ویژگی سه جمله ای های درجه دوم، روشن می شود که، این دنباله، نمی تواند نزولی باشد و تنها وقتی صعودی است که داشته باشیم: $a_1^2 < a_2^2$ ، یا

$$x^2 - 2xy + y^2 < x^2 - 4xy + 4y^2$$

بنابراین، شرط الف) هم ارز است با شرط

$$3y^2 > 2xy \quad \text{یا} \quad 3|y| > 2|x| \cos \varphi$$

که در آن، φ ، زاویه بین بردارهای x و y است. شرط ب) هم، هرگز برقرار نیست.

۲۴۰. M را مجموعه به مساحت کوچکتر از π ، و U_1, \dots, U_n را دایره های به شعاع واحد و به مرکز نقطه های مفروض A_1, \dots, A_n و

$$V_i = U_i \cap M, \quad (i = 1, \dots, n)$$

فرض می کنیم. چون فاصله بین مرکزهای دایره ها، از ۲ بیشتر است، دایره ها یکدیگر را قطع نمی کنند، یعنی مجموعه های V_1, \dots, V_n را هم قطع نمی کنند. از طرف دیگر داریم: $V_i \subset M$ ، بنابراین، مساحت مجموعه

$$V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n \subset M$$

از π کمتر است. بنابراین، اگر در ذهن خود، به کمک انتقال موازی، همه

دایره‌های U_i را (همراه با مجموعه‌های V_i که جزئی از آن‌ها هستند) بر یک دایره به مرکز O منطبق کنیم، آن وقت در درون آن، می‌توان نقطه B را طوری پیدا کرد که متعلق به هیچ یک از تبدیل‌های مجموعه‌های V_i نباشد. در این صورت، بعد از انتقال موازی مجموعه M به اندازه بردار \overrightarrow{BO} ، با طول کوچکتر از واحد، مرکزهای A_i همه دایره‌های U_i هم، متعلق بداین مجموعه نخواهند بود.

۲۴۱. توجه می‌کنیم که، مجموع طول‌های دو تصویر یک پاره‌خط، بر خط راست مفروض l و خط راست l' عمود بر آن، کمتر از واحد نیست. در واقع، اگر بردار a به طول واحد، با یکی از پاره‌خط‌ها موازی باشد، و بردارهای x و y ، تصویرهای بردار a بر خط‌های راست l و l' باشند، آن وقت

$$a = x + y \Rightarrow |x| + |y| \geq |a| = 1$$

ولی طول تصویرهای پاره‌خط، برابر $|x|$ و $|y|$ است، بنابراین مجموع آن‌ها هم، از واحد کوچکتر نیست. به این ترتیب، مجموع طول تصویرهای همه پاره‌خط‌ها، از $2n$ کمتر نیست. یعنی، از بین دو خط راست l و l' می‌توان خط راستی را انتخاب کرد که، مجموع طول تصویرهای پاره‌خط‌ها بر آن، از $2n$ کمتر نباشد. در نتیجه، روی خط راست انتخابی، نقطه‌ای پیدا می‌شود که، دست کم، متعلق به تصویر دو تا از پاره‌خط‌هاست. اگر از این نقطه، خط راستی عمود بر خط راست انتخابی رسم کنیم، دست کم، این دو پاره‌خط را قطع می‌کند. چون این خط راست، یا موازی خط راست l و یا عمود بر آن است، همان خط راستی است که مسأله می‌خواهد.

۲۴۲. اجتماع همه دایره‌های به شعاع واحد را، که مرکزهای آن‌ها متعلق به مجموعه M واقع بر صفحه باشند، با $U(M)$ نشان می‌دهیم. با استقرای روی $n \in \mathbb{N}$ ، ثابت می‌کنیم، برای هر خط شکسته $A_0 A_1 \dots A_n$ ، این نابرابری برقرار است:

$$S_{U(A_0 \dots A_n)} \leq 2 \sum_{i=1}^n A_{i-1} A_i + \pi$$

به ازای $n=1$ ، مجموعه $U(A_0 A_1)$ ، به دو نیم دایره به شعاع واحد و یک مستطیل به بعدهای $A_0 A_1$ و π تقسیم می شود، بنابراین

$$S_{U(A_0 A_1)} = 2A_0 A_1 + \pi$$

یعنی حکم، برای $n=1$ درست است.

اکنون، فرض می کنیم، حکم، برای $(n-1) \in \mathbb{N}$ درست باشد. قرار می گذاریم:

$$X = U(A_0 \dots A_{n-1}), Y = U(A_{n-1} A_n), Z = X \cap Y$$

در این صورت $S_Z \geq \pi$ (زیرا $Z \supset U(A_{n-1})$) و، با در نظر گرفتن فرض استقراء داریم:

$$\begin{aligned} S_{U(A_0 \dots A_{n-1} A_n)} &= S_{X \cup Y} = S_{X \setminus Z} + S_{Y \setminus Z} + S_Z = \\ &= (S_{X \setminus Z} + S_Z) + (S_{Y \setminus Z} + S_Z) - S_Z = S_X + S_Y - S_Z \leq \\ &\leq \left(2 \sum_{i=1}^{n-1} A_{i-1} A_i + \pi \right) + (2A_{n-1} A_n + \pi) - \pi = 2 \sum_{i=1}^n A_{i-1} A_i + \pi \end{aligned}$$

که اثبات نابرابری را به پایان می رساند.

برای خط شکسته ای که در صورت مسأله داده شده است، مجموعه $U(A_0 \dots A_n)$ شامل تمامی مربع به ضلع ۵۰ است، بنابراین، طول آن از

$$\frac{1}{4} S_{U(A_0 \dots A_n)} - \frac{\pi}{4} > \frac{1}{4} (50^2 - 4) = 1248$$

کمتر نیست؛ و این، همان چیزی است که باید ثابت می کردیم.

۲۴۳. سمت چپ را روی خط راست مشخص می کنیم و یک پاره خط را وقتی در سمت چپ دیگری به حساب می آوریم که، انتهای چپ اولی در سمت چپ انتهای چپ دومی باشد (دقیق تر: و انتهای چپ پاره خط اول، در سمت راست انتهای چپ پاره خط دوم نباشد). هر پاره خط را متناظر با یکی از n شماره ۱، ۲، ...، n ، به ترتیب زیر، قرار می دهیم. در گام اول، در بین همه پاره خطها، چپ ترین آنها را، شماره ۱ می نامیم (اگر از این-

گونه پاره‌خطها، چند تا وجود داشته باشد، یکی را به دلخواه انتخاب می‌کنیم). سپس، در هر گام بعدی، چپ‌ترین پاره‌خطی را که شماره‌گذاری نشده است، متناظر با شماره خود (که با شماره‌های قبلی فرق دارد) قرار می‌دهیم (در هر مورد، اگر چند پاره‌خط قابل انتخاب باشند، یکی را به دلخواه در نظر می‌گیریم). اگر در مرحله‌ای، به پاره‌خطی برسیم که، برای آن، شماره نوبتی نگذاریم، به معنای آن است که، این پاره‌خط، با n پاره‌خط قبلی که در سمت چپ آن قرار گرفته‌اند و شماره‌های مختلفی دارند، متقاطع است. در این حالت، انتهای چپ این پاره‌خط، متعلق به $(n+1)$ پاره‌خط است. ولی اگر، در مرحله‌ای، پاره‌خط آخر را شماره‌گذاری کنیم، آن وقت بنا به اصل دیریکله (قضیه ۱)، دست کم یکی از n شماره متناظر با بیشتر از n پاره‌خط است که، بنا بر نوع شماره‌گذاری ما، غیر متقاطع‌اند. اثبات به پایان رسید.

۲۴۴. هر مجموعه A_i ($i = 1, \dots, n$)، اجتماعی از دو پاره‌خط راست است (که با توجه به «چپ» و «راست» بودن آنها، از هم جدا شده‌اند). مجموعه A_i را در تناظر با پاره‌خط B_i قرار می‌دهیم که انتهای چپ آن، بر نقطه سمت چپ مجموعه A_i و انتهای راست آن بر نقطه سمت راست مجموعه A_i منطبق باشد. چون $B_i \supset A_i$ ، بنا بر این هر دو پاره‌خط (و حتی هر سه پاره‌خط) از پاره‌خط‌های B_1, \dots, B_n ، نقطه مشترکی دارند. ثابت می‌کنیم، پاره‌خط‌های B_k و B_m وجود دارند (که ممکن است $k = m$)، به نحوی که، اشتراك آنها، متعلق به هر یک از پاره‌خط‌های B_i است. در واقع، فرض کنید، انتهای چپ پاره‌خط B_k ، سمت راست‌ترین نقطه از بین انتهای چپ پاره‌خط‌های B_i و، انتهای راست پاره‌خط B_m ، سمت چپ‌ترین نقطه از بین انتهای راست پاره‌خط‌های B_i باشد. در این صورت، اشتراك

$$C = B_k \cap B_m$$

نه در «چپ‌ترین» انتهای چپ هر یک از پاره‌خط‌های B_i قرار دارد و نه در «راست‌ترین» انتهای راست آن، یعنی $C \subset B_i$. توجه می‌کنیم که

$$C \cap A_i = B_k \cap B_m \cap A_i \supset A_k \cap A_m \cap A_i \neq \emptyset$$

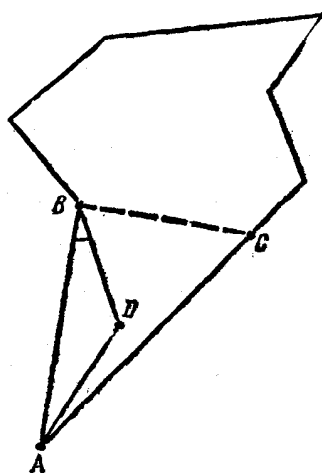
بنابراین، هر مجموعه A_i ، یا شامل «چپ‌ترین» نقطه a از مجموعه C است و یا شامل «راست‌ترین» نقطه b آن (ممکن است $a=b$). در واقع، در غیر-این صورت، داریم:

$$a, b \in B_i \setminus A_i \text{ و } C \subset B_i \setminus A_i$$

و از آن جا

$$C \cap A_i = \emptyset$$

که درست نیست. بنابر اصل دیردیکله (قضیه ۱)، دست کم یکی از دو نقطه a یا b ، حداقل متعلق به نیمی از مجموعه A_i است، چیزی که باید ثابت می‌کردیم.



شکل ۷۴

۲۴۵. فرض می‌کنیم، با $n+4$ نقطه مفروض، شبکه‌ای از پاره‌خط‌ها را ساخته باشیم که با شرط مسأله سازگار باشند (چنین شبکه‌هائی، که آن‌ها را شبکه‌های ماکزیمال می‌نامیم، وجود دارند، زیرا تعداد همه پاره‌خط‌های راست ممکن، محدود به عدد C_{n+4}^2 است). چندضلعی را که، رأس‌های آن بر نقطه‌های مفروض واقع‌اند و، هر ضلع آن، یا پاره‌خطی از شبکه است و یا اجتماعی از چند پاره‌خط شبکه که روی یک خط راست قرار دارند، چندضلعی شبکه‌ای می‌نامیم. مربع K با رأس‌های در چهار نقطه مفروض، که n نقطه

بقیه در درون آن قرار دارند، همیشه متعلق به شبکه ماکزیمال است، به نحوی که این مربع، یک چندضلعی شبکه‌ای است. ثابت می‌کنیم، شبکه ماکزیمال، مربع K را به چنان مثلث‌های شبکه‌ای تقسیم می‌کند که، هر یک از آن‌ها، درست شامل سه نقطه مفروض است که در رأس‌های آن قرار گرفته‌اند.

نقطه دلخواه O از مربع را در نظر می‌گیریم. از بین همه چندضلعی‌های شبکه‌ای که شامل این نقطه هستند (مجموعه این چندضلعی‌ها، تهی نیست،

زیرا شامل مربع K است)، m ضلعی M را انتخاب می‌کنیم که حداقل مساحت را داشته باشد. چون مجموع زاویه‌های چندضلعی M ، برابر است با

$$180^\circ(m-2)$$

بنابراین، بین رأس‌های آن، می‌توان رأس A را پیدا کرد که زاویه متناظر آن، از 180 درجه کمتر باشد. روی هر یک از دو ضلع این زاویه، نزدیک‌ترین نقطه (از نقطه‌های مفروض) به رأس A را انتخاب می‌کنیم، به نقطه‌های B و C می‌رسیم (شکل ۷۴). مثلث ABC ، به جز دو نقطه A و B ، شامل نقطه‌های مفروض دیگری است، مثلاً نقطه C . از بین آن‌ها، نقطه D را انتخاب می‌کنیم که، برای آن، زاویه ABD ، کمترین مقدار باشد (اگر چند نقطه از این گونه وجود داشته باشد، آن‌را در نظر می‌گیریم که به B نزدیک‌تر است). در این صورت، در مثلث ABD ، به جز رأس‌های A و B و D ، نقطه دیگری از نقطه‌های مفروض وجود ندارد، یعنی هیچ کدام از پاره‌خط‌های شبکه، نقطه مشترکی با ضلع‌های AD و BD (به جز احتمالاً خود این رأس‌ها) ندارد، ولی پاره‌خط‌های AD و BD متعلق به شبکه ما کزیمال هستند. به این ترتیب، مثلث ABD ، یک چندضلعی شبکه‌ای است. اگر این مثلث بر چندضلعی M منطبق نباشد، آن وقت، چندضلعی M ، به دو بخش تقسیم می‌شود که، هر کدام از آن‌ها، خود یک چندضلعی شبکه‌ای است و این، نوع انتخاب چندضلعی M را نقض می‌کند. در نتیجه، مثلث ABD ، همان چندضلعی M است. به این ترتیب، نقطه O ، که جزو نقطه‌های مفروض نیست، در داخل مثلث ABD قرار می‌گیرد و با رأس‌های آن فرق دارد. اکنون، به محاسبه K ، تعداد پاره‌خط‌های شبکه ما کزیمال می‌پردازیم. برای این منظور، مجموع زاویه‌های همه مثلث‌هایی را محاسبه می‌کنیم که، مربع K ، به آن‌ها تقسیم شده است. این مجموع، از یک طرف، برابر است با $180l$ درجه که، در آن، l معرف تعداد مثلث‌هاست؛ از طرف دیگر، از مجموع زاویه‌های رأس‌های مربع وهمه زاویه‌های کاملی که به رأس نقطه‌های مفروض داخل مربع به وجود آمده‌اند، تشکیل شده است، یعنی برابر است با $360(n+1)$ درجه. بنا بر این

$$180l = 360(n+1)$$

از آن جا $l = 2(n+1)$. سرانجام، هر ضلع مربع K ، یکی از ضلع های این مثلث هاست، و هر ضلع شبکه، که غیر از ضلع این مربع باشد، ضلع مشترکی برای دو مثلث است. بنابراین، به برابری

$$4 + 2(k-4) = 3l$$

می رسیم، که از آن جا به دست می آید:

$$k = \frac{3}{2}l + 2 = 3n + 5$$

§ ۱۳. نابرابری های هندسی

۲۴۶. داریم:

$$2S = ab \sin \gamma \leq ab$$

که در آن، S مساحت مثلث، و γ ، زاویه بین دو ضلع مفروض است. بنابراین با شرط $a > b$ به دست می آید:

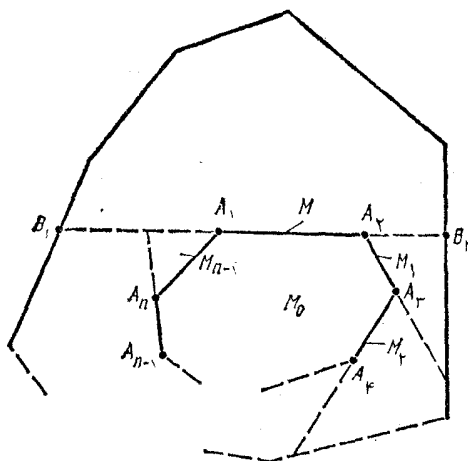
$$\begin{aligned} (a+h_a) - (b+h_b) &= \left(a + \frac{2S}{a}\right) - \left(b + \frac{2S}{b}\right) = \\ &= (a-b) \left(2 - \frac{2S}{ab}\right) \geq 0 \end{aligned}$$

در ضمن، تنها وقتی به علامت برابری می رسیم که داشته باشیم $S = ab$ ، یعنی وقتی که، زاویه بین ضلع های مفروض، قائمه باشد.

۲۴۷. فرض می کنیم، چندضلعی محدب

$$M_0 = A_1 A_2 \dots A_n$$

در درون چندضلعی محدب M واقع باشد. خط راست $A_1 A_2$ ، چندضلعی M را به دو بخش تقسیم می کند که، یکی از آن ها، چند ضلعی محدب M_1 را تشکیل می دهد که شامل چندضلعی M_0 است (شکل ۷۵)؛ در ضمن، ضلع



شکل ۷۵

از چندضلعی M_1 ، که پاره‌خط راست A_1A_2 را دربر می‌گیرد، ضلع چندضلعی M نیست؛ بنابراین $P_{M_1} < P_M$ (زیرا پاره‌خط راست B_1B_2 ، از هر خط شکسته‌ای که دو انتهای آن را به هم وصل کند، کوچکتر است). خط راست A_2A_3 از چندضلعی M_1 ، چندضلعی محدب M_2 ، را جدا می‌کند که شامل چند ضلعی M_0 است و، در ضمن، $P_{M_2} \leq P_{M_1}$. اگر استدلال را، به همین ترتیب، ادامه دهیم، به دنباله‌ی این چندضلعی‌ها می‌رسیم:

$$M \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_n$$

که آخرین آن‌ها، بر چند ضلعی M_0 منطبق است و، در ضمن، این نابرابری‌ها برقرار است:

$$P_M > P_{M_1} \geq P_{M_2} \geq \dots \geq P_{M_n} = P_{M_0}$$

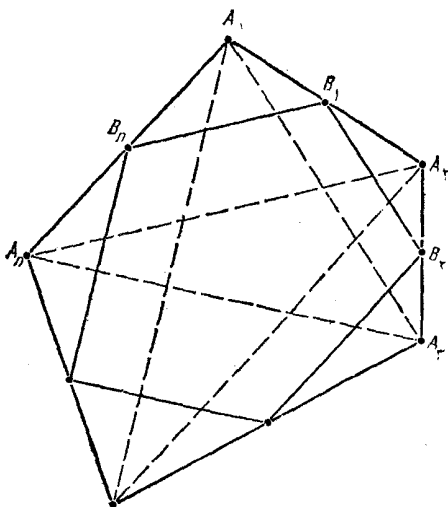
که از آن جا، نابرابری مورد نظر، به دست می‌آید.

۰۲۴۸. مساحت n ضلعی محدب $A_1A_2 \dots A_n$ را S ، و وسط ضلع‌های

$A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ آن را، به ترتیب، B_1, B_2, \dots, B_n می‌نامیم.

اگر فرض کنیم $A_{n+1} = A_1$ و $A_{n+2} = A_2$ ، آن وقت، هر مثلث

$$A_iA_{i+1}A_{i+2} \quad (i = 1, \dots, n)$$



شکل ۷۶

هیچ نقطهٔ مشترک درونی با یکی دیگر از مثلث‌ها ندارد، مگر دو مثلثی که در رأس A_{i+1} مشترک‌اند (شکل ۷۶). بنابراین، هر نقطهٔ n ضلعی، نقطهٔ درونی بیش از دو تا از این مثلث‌ها نیست. از آن جا

$$2S \geq \sum_{i=1}^n S_{A_i A_{i+1} A_{i+2}}$$

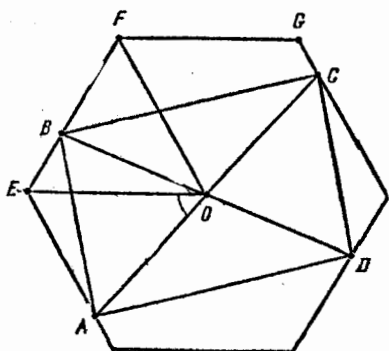
هر پاره خط راست $(B_{n+1} = B_1)B_i B_{i+1}$ ، وسط دو ضلع از مثلث $A_i A_{i+1} A_{i+2}$ را به هم وصل کرده است، بنابراین

$$S_{B_i A_{i+1} B_{i+1}} = \frac{1}{4} S_{A_i A_{i+1} A_{i+2}}$$

یعنی، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} S_{B_1 B_2 \dots B_n} &= S - \sum_{i=1}^n S_{B_i A_{i+1} B_{i+1}} = \\ &= S - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n S_{A_i A_{i+1} A_{i+2}} \geq S - \frac{1}{4} S = \frac{3}{4} S \end{aligned}$$

که از آن جا، نابرابری مطلوب، به دست می‌آید.



شکل ۷۷

۰۲۴۹. فرض می‌کنیم،

متوازی الاضلاع $ABCD$ ، درشش-ضلعی منتظم M محاط شده باشد و، درضمن، نقطه O ، مرکز شش ضلعی، بر محل برخورد قطرهای متوازی الاضلاع منطبق باشد. رأس‌های F و E از شش ضلعی را طوری انتخاب می‌کنیم که، همراه با نقطه B ، نسبت به خط راست OA ، در یک نیم صفحه باشند و، درضمن، داشته باشیم:

$$\widehat{AOE} < 60^\circ, \widehat{AOF} < 120^\circ$$

(شکل ۷۷) [یادآوری می‌کنیم که، با این شرط‌ها، رأس‌های E و F ، به صورت یک ارزشی معین می‌شوند]. در این صورت، داریم:

$$60^\circ \leq \widehat{AOF} < 120^\circ$$

به نحوی که، رأس‌های E و G از شش ضلعی (و همراه با آن‌ها، نقطه B)، که در یک نیم صفحه قرار دارند، از خط راست AO ، فاصله‌ای بیشتر از فاصله رأس F از این خط راست، ندارند. بنابراین

$$S_{AOB} \leq S_{AOF} = S_{EOF}$$

چون نقطه‌های A و E بر یک ضلع شش ضلعی، که موازی OF است، قرار دارند، از خط راست OF به یک فاصله‌اند. با توجه به ویژگی‌های متوازی الاضلاع و شش ضلعی منتظم، دادیم:

$$S_{AOB} = S_{BOS} = S_{COD} = S_{DOA} = \frac{1}{4} S_{ABCD};$$

$$S_{EOF} = \frac{1}{6} S_M$$

بنا بر این، به دست می آید:

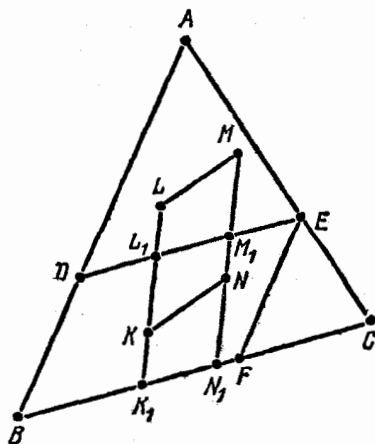
$$\frac{1}{4} S_{ABCD} \leq \frac{1}{6} S_M$$

و از آن جا

$$S_{ABCD} \leq \frac{2}{3} S_M$$

۰۲۵۰ این حکم کلی تر را ثابت

می کنیم: مساحت هر متوازی الاضلاع $KLMN$ که در مثلث ABC واقع باشد، از نصف مساحت این مثلث تجاوز نمی کند. هر یک از خطهای راست MN و KL ، دو ضلع مثلث ABC را قطع می کنند (و ممکن است، در رأسها)، یعنی دست کم دو نقطه از چهار نقطه برخورد، بنا به اصل دیریکله (قضیه ۱)، روی یک ضلع قرار می گیرند. مثلاً فرض کنید، خطهای راست KL و MN ، ضلع BC را، به ترتیب، در نقطه های K_1 و N_1 قطع کنند. روی



شکل ۷۸

ضلع های AB ، AC و BC ، به ترتیب، نقطه های D ، E و F را طوری انتخاب می کنیم که، برای نقطه های L_1 و M_1 ، برخورد خطهای راست KL و LM با پاره خط DE ، داشته باشیم:

$$K_1 L_1 = KL \text{ و } L_1 M_1 \parallel K_1 N_1$$

در ضمن $EF \parallel BD$ (شکل ۷۸). در این صورت، متوازی الاضلاع های $KLMN$ و $K_1 L_1 M_1 N_1$ ، ارتفاعها و قاعدههایی برابر دارند، ولی در متوازی الاضلاع های $BDEF$ و $K_1 L_1 M_1 N_1$ ، قاعده DE کمتر از قاعده

L, M, N نیست، در حالی که ارتفاع‌های برابر دارند؛ بنا بر این

$$S_{KLMN} = S_{K, L, M, N} \leq S_{BDEF}$$

$AE = x \cdot AC$ می‌گیریم؛ پس $EC = (1-x)AC$ ، و از تشابه مثلث‌های ABC ، ADE و EFC به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} S_{BDEF} &= S_{ABC} - S_{ADE} - S_{FEC} = S_{ABC} - x^2 S_{ABC} - (1-x)^2 S_{ABC} = \\ &= 2x(1-x)S_{ABC} \leq \frac{1}{4} S_{ABC} \end{aligned}$$

زیرا، برای هر مقدار x ، داریم: $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$. در نتیجه

$$S_{KLMN} \leq \frac{1}{4} S_{ABC}$$

۲۵۱. چون $A \geq 90^\circ$ ، پس نقطه A در دایره به قطر BC و یا روی محیط آن قرار می‌گیرد؛ مرکز این دایره را O می‌نامیم. اگر ارتفاع مثلث ABC را AH بگیریم، داریم:

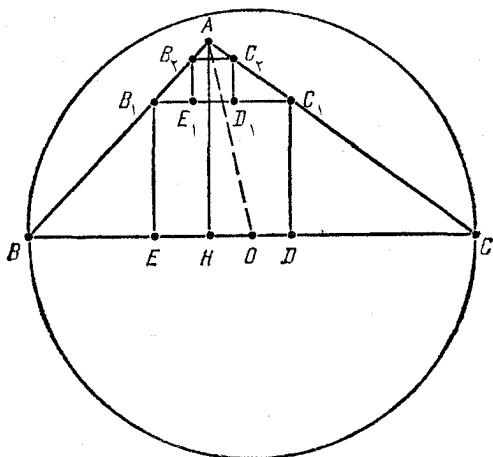
$$AH \leq AO \leq BO = \frac{1}{2} BC$$

(شکل ۷۹)، یعنی $BC \geq 2AH$. از این جا و از تشابه مثلث‌های BB_1E و BAH ، همچنین، دو مثلث CC_1D و CAH ، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{S_{BB_1C_1C}}{S_{B_1C_1DE}} &= \frac{S_{B_1C_1DE}}{S_{B_1C_1DE}} + \frac{S_{BB_1E}}{S_{B_1C_1DE}} + \frac{S_{CC_1D}}{S_{B_1C_1DE}} = \\ &= 1 + \frac{BE}{2B_1E} + \frac{CD}{2C_1D} = 1 + \frac{BH}{2AH} + \frac{CH}{2AH} = 1 + \frac{BC}{2AH} \geq 2 \end{aligned}$$

یعنی $S_{B_1C_1DE} \leq \frac{1}{4} S_{BB_1C_1C}$ به همین ترتیب، داریم:

$$S_{B_2C_2D_2E_2} \leq \frac{1}{4} S_{B_1B_1C_1C_1}, \dots, S_{B_nC_nD_nE_n} \leq \frac{1}{4} S_{B_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}C_{n-1}}$$

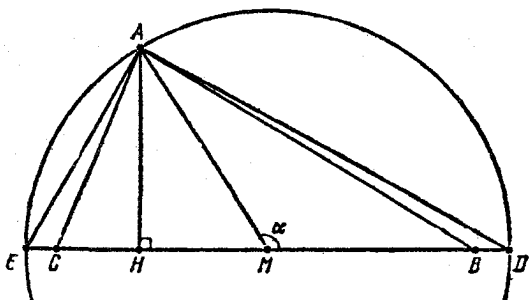


شکل ۷۹

که در آن، n ، عبارت است از تعداد مربع‌هایی که ساخته‌ایم. از مجموع این نابرابری‌ها، معلوم می‌شود که، مجموع مساحت مربع‌ها، از نصف مساحت چهار ضلعی BB_nC_nC تجاوز نمی‌کند، یعنی از نصف مساحت مثلث ABC کمتر است.

۲۵۲. مثلث ABC را با زاویه‌های حاده در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم، A ، بزرگترین زاویه مثلث باشد.

دایره‌ای به مرکز نقطه M ، وسط BC ، و به شعاع $R = MA$ رسم می‌کنیم. این دایره، امتداد ضلع BC را در نقطه‌های D و E قطع می‌کند



شکل ۸۰

(شکل ۸۰). در این صورت، زاویه DAE قائمه است و

$$a = MB = MC < R$$

(اگر غیر از این باشد، باید داشته باشیم $MB \geq MD$ و $MC \geq ME$ و از آن جا

$$\widehat{BAC} \geq \widehat{DAE} = 90^\circ$$

که با فرض ما مبنی بر حاده بودن زاویه‌های مثلث ABC متناقض است). دست کم، یکی از دو زاویه AMC یا AMB حاده نیست، مثلاً

$$\widehat{AMB} = \alpha \geq 90^\circ$$

چون $AB \leq BC = 2a$ (زیرا $\widehat{BAC} \geq \widehat{ACB}$)، بنابراین، طبق قضیه کسینوس‌ها داریم:

$$R^2 + a^2 = MA^2 + MB^2 \leq MA^2 + MB^2 - 2MA \cdot MB \cos \alpha = AB^2 \leq 4a^2$$

از آن جا $R \leq \sqrt{3}a$ و

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} DE \cdot AH = R \cdot AH \leq \sqrt{3}a \cdot AH =$$

$$= \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH = \sqrt{3}$$

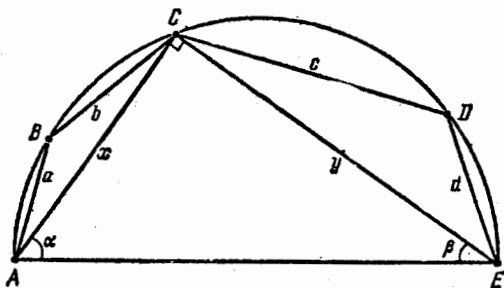
(که در آن، AH ، بر BC عمود است). حکم ثابت شد.

۲۵۳. قرار می‌گذاریم:

$$AB = a, BC = b, CD = c, DE = d, AC = x, CE = y,$$

$$\widehat{CAE} = \alpha, \widehat{AEC} = \beta$$

بدون این که به کلی بودن مسأله، لطمه‌ای وارد آید، می‌توان A و E را دوسر قطر نیم‌دایره به حساب آورد (شکل ۸۱)، زیرا وقتی که این دو نقطه را، دو



شکل ۸۱

سر قطر نیم دایره به حساب آوریم، تنها ممکن است عبارت

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + abc + bcd$$

را بزرگتر کرده باشیم. چون $\widehat{ACE} = 90^\circ$ پس $x^2 + y^2 = 4$. سپس

$$\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{AEC} = 180^\circ - \beta,$$

$$\widehat{CDE} = 180^\circ - \widehat{CAE} = 180^\circ - \alpha$$

در نتیجه، بنا بر قضیه کسینوسها

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\widehat{ABC}) = a^2 + b^2 + 2ab \cos \beta,$$

$$y^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos(\widehat{CDE}) = c^2 + d^2 + 2cd \cos \alpha$$

و سرانجام، از رابطه‌های

$$2 \cos \alpha = x > b, \quad 2 \cos \beta = y > c$$

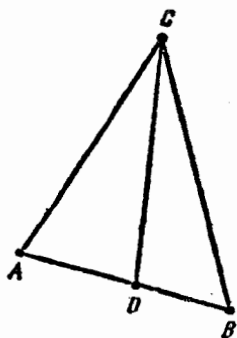
به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} 4 &= x^2 + y^2 = a^2 + b^2 + aby + c^2 + d^2 + \\ &+ cdx > a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + abc + bcd \end{aligned}$$

۲۵۴. چون

$$\vec{AO} = x \cdot \vec{AB}, \quad \vec{OB} = (1-x) \cdot \vec{AB}$$

که در آن $x \in (0, 1)$ ، بنا بر این داریم (شکل ۸۲):



شکل ۸۲

$$OC = |\vec{CA} + \vec{AO}| = |\vec{CA} + x(\vec{CB} - \vec{CA})| = \\ = |(1-x)\vec{CA} + x\vec{CB}| < CA(1-x) + CBx$$

(زیرا، بردارهای \vec{CA} و \vec{CB} موازی نیستند)، از آن جا به دست می آید:

$$OC \cdot AB < CA(1-x)AB + CBxAB = CA \cdot OB + CB \cdot OA$$

۲۵۵. بزرگترین فاصله بین رأس‌های چهارضلعی را M و کوچکترین این فاصله‌ها را m می‌نامیم. از آن جا که، دست کم یکی از زاویه‌های چهارضلعی، و مثلاً زاویه ABC ، زاویه‌ای حاده نیست، بنابراین قضیه کسینوس‌ها، داریم:

$$M^2 \geq AC^2 \geq AB^2 + BC^2 \geq m^2 + m^2 = 2m^2$$

و از آن جا

$$M \geq \sqrt{2}m \Rightarrow \frac{M}{m} \geq \sqrt{2}$$

۲۵۶. یادآوری می‌کنیم که، اگر بین نقطه‌های مفروض، بتوان سه

نقطه A ، B و C را طوری پیدا کرد که، برای آن‌ها، $\widehat{ABC} \geq 120^\circ$ ، آن وقت، حکم مسئله درست است. در واقع، اگر M را بزرگترین و m را کوچکترین فاصله بین نقطه‌ها بگیریم، بنابراین قضیه کسینوس‌ها (که برای حالت

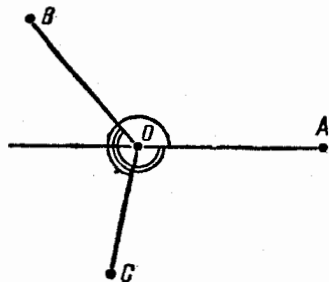
$\widehat{ABC} = 180^\circ$ هم درست است)، داریم:

$$M^2 \geq AC^2 = AB^2 + BC^2 - \\ - 2AB \cdot BC \cos(\widehat{ABC}) \geq \\ \geq m^2 + m^2 + 2m^2 \times \frac{1}{4} = 3m^2$$

که از آن جا به دست می‌آید: $M \geq \sqrt{3}m$.

اگر ۶ نقطه، در رأس‌های یک

شش ضلعی محدب قرار گرفته باشند،



شکل ۸۲

آن وقت، دست کم یکی از زاویه‌های داخلی آن از 120° درجه کمتر نیست (زیرا، مجموع زاویه‌های داخلی يك شش ضلعی محدب، برابر $6 \times 120^\circ$ درجه است). اگر هم، این طور نباشد، دست کم يك نقطه O ، دارای این ویژگی است: نسبت به هر خط راستی که، از نقطه O و یکی دیگر از نقطه‌ها بگذرد، همه بقیه نقطه‌ها، در يك نیم صفحه قرار نمی گیرند. در این صورت، با در نظر گرفتن نقطه A و هر يك از دو نیم صفحه حاصل نسبت به خط راست OA ، نقطه‌های B و C را، در دو نیم صفحه مختلف، طوری انتخاب می کنیم که زاویه‌های AOB و AOC ، حداکثر باشند (شکل ۸۳). آن وقت

$$\widehat{AOB} + \widehat{AOC} \geq 180^\circ$$

(در غیر این صورت، همه نقطه‌ها، نسبت به خط راست OB ، در يك نیم صفحه واقع می شوند)؛ بنابراین، سه حالت ممکن است:

$$\widehat{AOB} \geq 120^\circ \quad \text{یا} \quad \widehat{AOC} \geq 120^\circ \quad \text{یا} \quad \widehat{BOC} = 360^\circ -$$

$$-\widehat{AOB} - \widehat{AOC} > 120^\circ$$

یعنی، در هر سه حالت، می توان سه نقطه را طوری پیدا کرد که زاویه‌ای بزرگتر یا برابر 120° درجه بسازند. بنابراین، حکم مسأله درست است.

۱۰۲۵۷) بنا بر قضیهٔ مربوط به واسطه‌ها، داریم:

$$(ab+bc+ca)(a+b+c) =$$

$$= a^2b + b^2a + c^2a + a^2c + b^2c +$$

$$+ c^2b + 3abc \geq 6abc + 3abc = 9abc$$

که از آن جا به دست می آید:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

(۲) نابرابری

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}P^2$$

از زنجیرهٔ این رابطه‌ها به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} P^2 &= (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \leq \\ &\leq a^2 + b^2 + c^2 + (a^2 + b^2) + (a^2 + c^2) + (b^2 + c^2) = \\ &= 3(a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

(۳) بنا بر قضیهٔ هرون و قضیهٔ مربوط به واسطه‌ها، داریم:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3}S^2 &= 2\sqrt{3} \cdot \frac{P}{2} \left(\frac{P}{2} - a \right) \left(\frac{P}{2} - b \right) \left(\frac{P}{2} - c \right) \leq \\ &\leq 2\sqrt{3} \cdot \frac{P}{2} \left[\frac{\left(\frac{P}{2} - a \right) + \left(\frac{P}{2} - b \right) + \left(\frac{P}{2} - c \right)}{3} \right]^3 = \frac{1}{16} P^4 \end{aligned}$$

یعنی $P^2 \geq 12\sqrt{3}S$

(۴) با توجه به (۲) و (۳) داریم:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3} P^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

(۵) نابرابری

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{1}{9} P^3$$

از زنجیرهٔ رابطه‌های زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} P^3 &= (a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3ab(a+b) + \\ &+ 3bc(b+c) + 3ca(c+a) \leq a^3 + b^3 + c^3 + \\ &+ 2(a^2 + b^2 + c^2) + 3(a^2 - ab + b^2)(a+b) + \\ &+ 3(a^2 - ac + c^2)(a+c) + 3(b^2 - bc + c^2)(b+c) = \\ &= 9(a^3 + b^3 + c^3) \end{aligned}$$

(۶) بنا بر نابرابری‌های (۳) و (۵) داریم:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{1}{9} P^3 \geq 12\sqrt{3} \times \frac{1}{9} SP = \frac{4\sqrt{3}}{3} SP$$

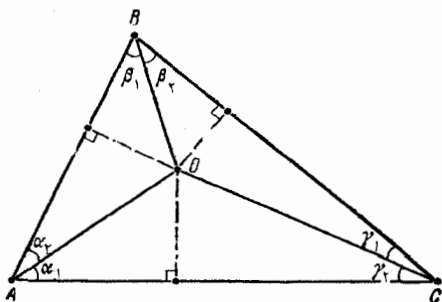
(۷) از نابرابری (۴) به دست می‌آید:

$$16S^2 \leq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{3} = \frac{a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}{3} \leq a^4 + b^4 + c^4$$

۲۵۸. فرض می‌کنیم:

$$\widehat{OAC} = \alpha_1, \widehat{OAB} = \alpha_2, \widehat{OBA} = \beta_1, \widehat{OBC} = \beta_2,$$

$$\widehat{OCB} = \gamma_1, \widehat{OCA} = \gamma_2, \alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \beta = \beta_1 + \beta_2, \gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$



شکل ۸۴

(شکل ۸۴). در این صورت، نابرابری مطلوب، از زنجیرهٔ رابطه‌های زیر، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} p = \frac{a+b+c}{2} &= \frac{1}{2} (OC \cos \gamma_1 + OC \cos \gamma_2 + OB \cos \beta_1 + OB \cos \beta_2 + \\ &+ OA \cos \alpha_1 + OA \cos \alpha_2) = OC \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} + \\ &+ OB \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} + OA \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \leq \\ &\leq OA \cos \frac{\alpha}{2} + OB \cos \frac{\beta}{2} + OC \cos \frac{\gamma}{2} \end{aligned}$$

در ضمن، علامت برابری، وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2, \gamma_1 = \gamma_2$$

یعنی، وقتی که نقطه O ، نقطه برخورد نیمسازهای مثلث ABC باشد.

۰۴۵۹. روشن است که، به ازای $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$ ، نابرابری

مطلوب، به برابری تبدیل می‌شود. اکنون فرض می‌کنیم، دست کم دو زاویه

α و β از مثلث، برابر نباشند، در این صورت

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= \cos \alpha + \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) = \\ &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos(\alpha + \beta) < 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} - 2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + 1 = \\ &= -\frac{1}{2} \left(2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} - 1 \right)^2 + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

یعنی، نابرابری، به صورت اکید خود، برقرار است. بنابراین، علامت

برابری، تنها در مثلث متساوی‌الاضلاع برقرار است.

۰۴۶۰. قرار می‌گذاریم:

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$$

که در آن، α و β و γ ، زاویه‌های مثلث‌اند. با توجه به این که مجموع

زاویه‌های هر مثلث برابر 180° درجه است، داریم:

$$\begin{aligned} 4 \left[f(\alpha, \beta, \gamma) - \frac{3}{4} \right] &= \\ &= 4 \left(\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 + \cos 2\beta}{2} + \frac{1 + \cos 2\gamma}{2} - \frac{3}{4} \right) = \end{aligned}$$

$$= 2 \cos^2 \alpha + 2 \cos^2 \beta + 2 \cos^2 \gamma + 3 = 2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) +$$

$$+ 2 \cos^2(\alpha + \beta) + 1 = [2 \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]^2 +$$

$$+ 1 - \cos^2(\alpha - \beta) \geq 0$$

که از آن جا، نابرابری موردنظر به دست می‌آید:

$$f(\alpha, \beta, \gamma) \geq \frac{3}{4}$$

در ضمن، علامت برابری، تنها وقتی پیش می آید که داشته باشیم:

$$\cos(\alpha - \beta) = 1, \cos(\alpha + \beta) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$$

مقدار $f(\alpha, \beta, \gamma)$ حداکثر ندارد، زیرا برای هر انتخابی از زاویه های α, β و γ ، به ازای هر مقدار مثبت و به دلخواه کوچک ε ، داریم:

$$\varepsilon < \alpha, \beta, \gamma < 180^\circ - 2\varepsilon$$

که از آنها به دست می آید:

$$|\cos \alpha| < \cos \varepsilon, |\cos \beta| < \cos \varepsilon, |\cos \gamma| < \cos \varepsilon$$

و در نتیجه

$$f(\alpha, \beta, \gamma) < f(\varepsilon, \varepsilon, 180^\circ - 2\varepsilon)$$

۰۲۶۱. برای $\alpha, \beta, \gamma \leq 90^\circ$ در مثلث، داریم:

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \gamma}{2} + \\ &+ \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2} < 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \\ &+ 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \cos \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \end{aligned}$$

که در آنها، از این نابرابری ها استفاده کرده ایم:

$$\cos \frac{\alpha - \beta}{2} < 2 \cos \frac{\gamma}{2},$$

$$\cos \frac{\alpha - \gamma}{2} < 2 \cos \frac{\beta}{2},$$

$$\cos \frac{\beta - \gamma}{2} < 2 \cos \frac{\alpha}{2}$$

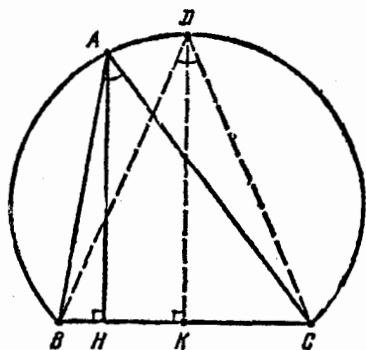
مثلاً، برای اثبات نابرابری اول از این نابرابری‌ها، کافی است توجه کنیم

$$\frac{\gamma}{4} < 60^\circ \text{ از آن جا}$$

$$\cos \frac{\alpha - \beta}{2} \leq 1 = 2 \cos 60^\circ < 2 \cos \frac{\gamma}{4}$$

دو نابرابری دیگر هم، به همین ترتیب، ثابت می‌شوند.
۴۴۲. قرار می‌گذاریم:

$$AB = c, AC = b, BC = a, \widehat{BAC} = \alpha$$



شکل ۸۵

کمان BAC از دایره محیطی مثلث ABC را در نظر می‌گیریم (شکل ۸۵). چون نقطه D وسط این کمان، نسبت به همه نقطه‌های دیگر آن، فاصله بیشتری از وتر BC دارد، بنابراین، برای $AH = h$ ، ارتفاع مثلث ABC ، DK و ارتفاع مثلث DBC ، داریم:

$$h \leq DK = BK \cdot \cotg \left(\frac{BDC}{2} \right) = \frac{a}{2} \cotg \frac{\alpha}{2}$$

بنابراین قضیه واسطه‌ها، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{ab + ac + bc}{4S} &\geq \frac{3}{4S} \sqrt{a^2 b^2 c^2} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{a^2 b^2 c^2}{\left(\frac{1}{4} b c \sin \alpha\right)^2 \cdot \frac{1}{4} a h}} \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{\frac{a}{h \sin^2 \alpha}} \geq \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{\sin^2 \alpha \cotg \frac{\alpha}{2}}} \end{aligned}$$

دوباره از قضیه واسطه‌ها استفاده می‌کنیم؛ اگر $\cos \alpha = x$ بنامیم، داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \cot \frac{\alpha}{2} &= \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sin \alpha (1 + \cos \alpha) = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} (1+x) = \frac{1}{2} \sqrt{(1+x)^2 (1-x)} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{27 \left(\frac{1+x}{3}\right)^2 (1-x)} \leq \frac{1}{2} \sqrt{27 \left[\frac{1}{4} \left(3 \times \frac{1+x}{3} + (1-x)\right)\right]^2} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{27 \left(\frac{2}{4}\right)^2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

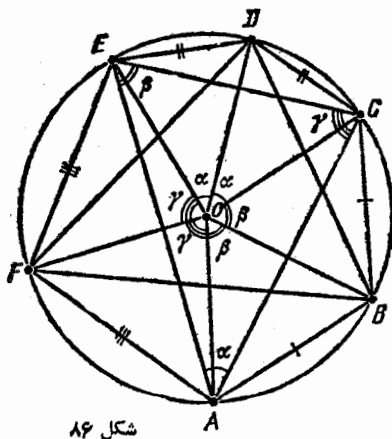
به نحوی که

$$\frac{ab+ac+bc}{4S} \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

۲۶۳. O را مرکز دایره محیطی شش ضلعی $ABCDEF$ و R را

شعاع آن می‌گیریم (شکل ۸۶) و فرض می‌کنیم:

$$\alpha = \widehat{CAE}, \beta = \widehat{AEC}, \gamma = \widehat{ACE}$$



شکل ۸۶

با توجه به برابری ضلع‌هایی

که در مسأله آمده است، داریم:

$$\begin{aligned} \widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \beta, \widehat{COD} = \\ = \widehat{DOE} = \alpha, \widehat{EOF} = \widehat{FOA} = \gamma \end{aligned}$$

مساحت‌های مثلث‌های ACE و

BDF را به دست می‌آوریم:

$$S_{ACE} = \frac{EC \cdot CA \cdot AE}{4R} =$$

$$= \frac{2R \sin \alpha \cdot 2R \sin \beta \cdot 2R \sin \gamma}{4R} = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

$$S_{BDF} = 2R^2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

از طرف دیگر، برای مقادیر مثبت α ، β و γ ، که مجموعی برابر ۱۸۰ درجه داشته باشند، داریم:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma &= (\sin \alpha \sin \beta)(\sin \alpha \sin \gamma)(\sin \beta \sin \gamma) = \\ &= \frac{1}{4} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \cdot \frac{1}{4} [\cos(\alpha - \gamma) - \cos(\alpha + \gamma)] \times \\ &\quad \times \frac{1}{4} [\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma)] \leq \\ &\leq \frac{1}{4} [1 - \cos(\alpha + \beta)] \cdot \frac{1}{4} [1 - \cos(\alpha + \gamma)] \cdot \frac{1}{4} [1 - \cos(\beta + \gamma)] = \\ &= \sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2} \sin^2 \frac{\beta + \gamma}{2} \sin^2 \frac{\alpha + \gamma}{2} \end{aligned}$$

یعنی

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma < \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

که از آنجا، نابرابری مطلوب، نتیجه می‌شود.

۲۶۴. ثابت می‌کنیم: $AA_1 > \frac{1}{2}(AB + AC)$ در واقع، بنا بر قضیه

بطلمیوس (قضیه ۶۹)، داریم:

$$AA_1 \cdot BC = AB \cdot A_1C + AC \cdot A_1B$$

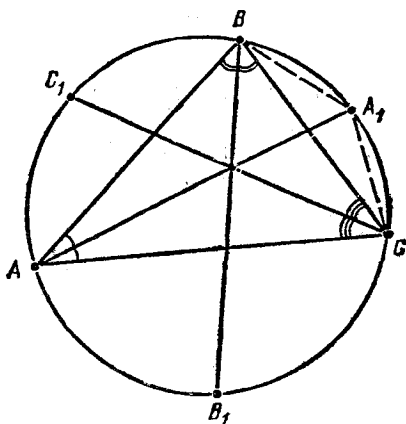
(شکل ۸۷) و، بادر نظر گرفتن برابری

$C A A_1$ و $B A A_1$ (دو زاویه محاطی)

به دست می‌آید: $A_1B = A_1C = x$ و

$$2AA_1 = 2 \times \frac{AB \cdot x + AC \cdot x}{BC} =$$

$$= (AB + AC) \cdot \frac{2x}{BC} > AB + AC$$



شکل ۸۷

زیرا $2x = A_1B + A_1C > BC$ به همین ترتیب، ثابت می‌شود:

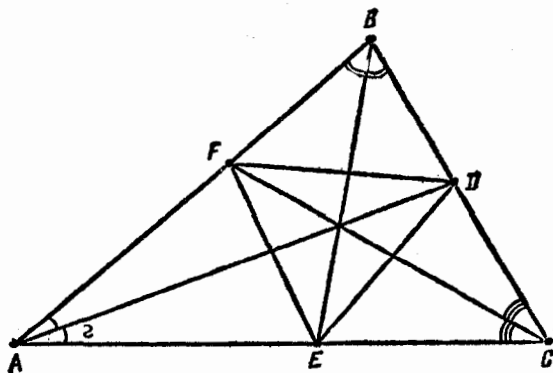
$$BB_1 > \frac{1}{2}(BA + BC), \quad CC_1 > \frac{1}{2}(CA + CB)$$

که از مجموع آنها، به نابرابری مورد نظر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} AA_1 + BB_1 + CC_1 &> \frac{1}{2}(AB + AC + AB + BC + AC + BC) = \\ &= AB + BC + AC \end{aligned}$$

۲۶۵. قرار می‌گذاریم:

$$a = BC, \quad b = AC, \quad c = AB, \quad S = S_{ABC}, \quad S_o = S_{DEF}$$



شکل ۸۸

با توجه به ویژگی نیمسازهای مثلث (شکل ۸۸) داریم:

$$\frac{AF}{b} = \frac{BF}{a} = \frac{AF + BF}{a + b} = \frac{c}{a + b}$$

از آن جا

$$AF = \frac{bc}{a + b}$$

$$AE = \frac{bc}{a+c}$$

بنابراین

$$S_{ABF} = \frac{1}{2} AF \cdot AE \sin(BAC) =$$

$$= \frac{bc \sin(BAC)}{2} \cdot \frac{bc}{(a+b)(a+c)} = \frac{bc}{(a+b)(a+c)} \cdot S$$

به همین ترتیب، می‌توان به دست آورد:

$$S_{BDF} = \frac{ac}{(a+b)(b+c)} \cdot S, \quad S_{CDE} = \frac{ab}{(a+c)(b+c)} \cdot S$$

و ضمن استفاده از قضیهٔ مربوط به واسطه‌ها، نتیجه می‌شود:

$$S - S_0 = S_{ABF} + S_{BDF} + S_{CDE} =$$

$$= \left(\frac{bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{ac}{(b+a)(b+c)} + \frac{ab}{(c+a)(c+b)} \right) \cdot S =$$

$$= \frac{a^2b + b^2c + a^2c + c^2a + b^2a + a^2b}{(a+b)(b+c)(c+a)} \cdot S \geq \frac{6abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \cdot S =$$

$$= 3 \left(1 - \frac{bc}{(a+b)(a+c)} - \frac{ac}{(a+b)(c+b)} - \frac{ab}{(c+a)(c+b)} \right) \cdot S =$$

$$= 3(S - S_{AEF} - S_{BDF} - S_{CDE}) = 3S_0.$$

به این ترتیب

$$S - S_0 \geq 3S_0 \Rightarrow S_0 \leq \frac{1}{4}S$$

۲۶۶. در هر مثلث به ضلع‌های a ، b و c ، با زاویه‌های رو به رو بهآن‌ها α ، β و γ ، محیط P ، مساحت S و شعاع دایره محاطی r داریم:

$$a = r \left(\cotg \frac{\beta}{\varphi} + \cotg \frac{\gamma}{\varphi} \right), \quad b = r \left(\cotg \frac{\alpha}{\varphi} + \cotg \frac{\gamma}{\varphi} \right),$$

$$c = r \left(\cotg \frac{\alpha}{\varphi} + \cotg \frac{\beta}{\varphi} \right).$$

$$\frac{P^2}{S} = \frac{2P^2}{Pr} = \frac{2(a+b+c)}{r} = 2 \left(\cotg \frac{\alpha}{\varphi} + \cotg \frac{\beta}{\varphi} + \cotg \frac{\gamma}{\varphi} \right)$$

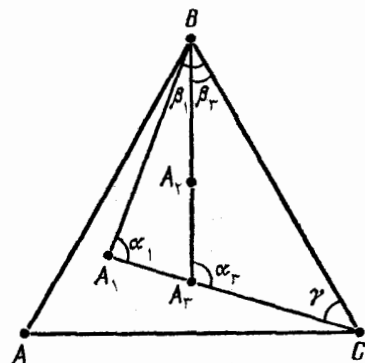
بنابراین، برای حل مسأله، کافی است ثابت کنیم:

$$\cotg \frac{\alpha_1}{\varphi} + \cotg \frac{\beta_1}{\varphi} + \cotg \frac{\gamma}{\varphi} <$$

$$< \cotg \frac{\alpha_2}{\varphi} + \cotg \frac{\beta_2}{\varphi} + \cotg \frac{\gamma_2}{\varphi}$$

که در آن، فرض کرده ایم:

$$\alpha_j = \widehat{BA_jC}, \quad \beta_j = \widehat{A_jBC}, \quad \gamma_j = \widehat{A_jCB}$$



شکل ۸۹

نقطه A_2 را روی یکی از ضلع‌های مثلث A_1BC و مثلاً در برخورد خط راست BA_2 با ضلع A_1C ، در نظر می‌گیریم (شکل ۸۹). در این صورت $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ ، و، نابرابری متناظر، برای مثلث‌های A_2BC و A_1BC ، به این صورت درمی‌آید:

$$\cotg \frac{\alpha_1}{\varphi} + \cotg \frac{\beta_1}{\varphi} < \cotg \frac{\alpha_2}{\varphi} + \cotg \frac{\beta_2}{\varphi}$$

برای اثبات آن، توجه می‌کنیم که

$$\cotg \frac{\alpha_j}{\varphi} + \cotg \frac{\beta_j}{\varphi} = \frac{\sin \left(\frac{\alpha_j}{\varphi} + \frac{\beta_j}{\varphi} \right)}{\sin \frac{\alpha_j}{\varphi} \sin \frac{\beta_j}{\varphi}} = \frac{2 \cos \frac{\gamma}{\varphi}}{\cos \left(\frac{\alpha_j}{\varphi} - \frac{\beta_j}{\varphi} \right) - \sin \frac{\gamma}{\varphi}}$$

بنابراین، از نابرابری

$$\cos \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2} > \cos \frac{\alpha_3 - \beta_3}{2}$$

که نتیجه‌ای است از نابرابری‌های

$$\alpha_3 > \alpha_1 > \frac{\pi}{3} > \beta_1 > \beta_3, \quad 0 < \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2} < \frac{\alpha_3 - \beta_3}{2} < \frac{\pi}{2}$$

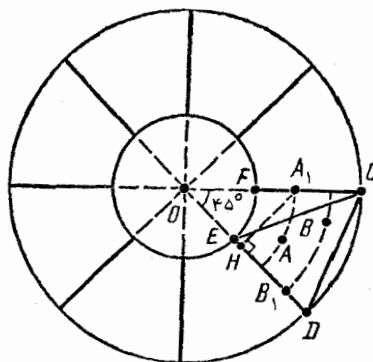
به دست می‌آید:

$$S_1 : P_1^2 > S_3 : P_3^2$$

که در آن، S_j و P_j ، مساحت و محیط مثلث A_jBC است. اگر از همین استدلال، در مورد مثلث‌های A_2BC و A_3BC استفاده کنیم (یادآوری می‌کنیم که، نقطه A_2 ، روی ضلع A_1B از مثلث A_1BC قرار دارد)، به دست خواهیم آورد:

$$S_3 : P_3^2 > S_2 : P_2^2$$

که از آن‌ها، نابرابری مطلوب، به دست می‌آید.



شکل ۹۰

۲۶۷. دایره‌ای به مرکز O

(مرکز دایره مفروض) و به شعاع ۲ رسم می‌کنیم. در این صورت، اگر دو نقطه از نقطه‌های مفروض، در درون این دایره واقع باشد، آن وقت، فاصله بین آن‌ها، از ۲ کمتر می‌شود و حکم مسأله درست است. اگر نتوان دو نقطه از نقطه‌های مفروض در این دایره پیدا کرد، دست کم ۹ نقطه در داخل حلقه

بین دو دایره وجود دارد. با رسم شعاع‌های دایره بزرگتر، این حلقه را به ۸ بخش برابر تقسیم می‌کنیم (زاویه بین هر دو شعاع مجاور، برابر ۴۵ درجه است؛ شکل ۹۰). در این صورت، دست کم، دو نقطه A و B ، از نقطه‌های

مفروض در درون یکی از این بخش‌ها، و مثلاً در درون بخش $CDEF$ قرار دارند. روی شعاع‌های OC و OD ، نقطه‌های A_1 و B_1 را، به ترتیب، انتخاب می‌کنیم، به نحوی که داشته باشیم:

$$OA_1 = OA, \quad OB_1 = OB$$

یعنی $AB \leq A_1B_1$ (بنابر قضیه کسینوس‌ها، زیرا زاویه AOB از زاویه A_1OB_1 تجاوز نمی‌کند). توجه می‌کنیم که

$$A_1B_1 \leq \max(A_1D, A_1E)$$

درواقع، نقطه B_1 روی خط راست DE و بین نقطه H (تصویر A_1 بر DE) و یکی از دو نقطه D یا E ، و مثلاً D ، قرار دارد. بنابراین HD ، تصویر A_1D ، از A_1B_1 ، تصویر HB_1 ، کوچکتر نیست، یعنی

$$A_1B_1 \leq A_1D$$

به همین علت، داریم:

$$DA_1 \leq \max(DF, DC);$$

$$EA_1 \leq \max\{EF, EC\}$$

از نابرابری‌های

$$\begin{aligned} EF^2 &< CD^2 = OC^2 + OD^2 - 2OC \cdot OD \cos 45^\circ = \\ &= 2 \times \frac{25}{4} - \frac{25\sqrt{2}}{4} < \frac{25}{2} - \frac{25 \times 1/4}{2} = 3/75 < 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EC^2 = FD^2 &= OF^2 + OD^2 - 2OF \cdot OD \cos 45^\circ = \\ &= 1 + \frac{25}{4} - \frac{5\sqrt{2}}{2} < 7/25 - \frac{5 \times 1/4}{2} = 3/75 < 4 \end{aligned}$$

به دست می‌آید:

$$AB \leq A_1B_1 \leq \max\{DF, DC, EF, EC\} < 2$$

۰۳۶۸. قرار می‌گذاریم:

$$\vec{OA}_i = \mathbf{a}_i, \vec{OB} = \mathbf{b} \quad (i = 1, \dots, n)$$

در این صورت، داریم:

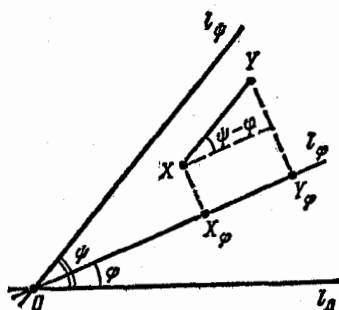
$$|\mathbf{a}_i| = 1, \vec{BA}_i = \vec{OA}_i - \vec{OB} = \mathbf{a}_i - \mathbf{b}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \vec{BA}_i &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{a}_i - \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i - n\mathbf{b} \\ &\geq \sum_{i=1}^n (\mathbf{a}_i - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i^2 - \mathbf{b} \cdot \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i = n - \mathbf{b} \cdot \mathbf{0} = n \end{aligned}$$

۰۴۶۹. در حالتی که نقطه‌های A, B, C, D, E روی یک خط راست باشند، نابرابری برقرار است. در واقع، اگر برای مشخص بودن وضع، نقطه E را بین نقطه‌های C و D بگیریم، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} (AC + AD) + (BC + BD + AE + BE) &\geq CD + CD + AB = \\ &= (CE + ED) + CD + AB \end{aligned}$$



شکل ۹۱

خط راستی مثل l_0 واقع بر صفحه و نقطه O را بر l_0 تثبیت می‌کنیم. l_φ را نتیجه دوران l_0 دور نقطه O ، به اندازه زاویه φ و در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت، و X_φ را تصویر نقطه دلخواه X بر l_φ می‌گیریم. در این صورت، برای هر پاره‌خط راست XY که با خط راستی مثل l_φ موازی باشد، داریم:

$$X_\varphi Y_\varphi = XY \cdot |\cos(\psi - \varphi)|$$

(شکل ۹۱). از این رابطه به دست می‌آید:

$$\int_0^{\pi} X_{\varphi} Y_{\varphi} d\varphi = XY \int_0^{\pi} |\cos(\varphi - \psi)| d\varphi = XY \int_{-\psi}^{\pi - \psi} |\cos \chi| d\chi =$$

$$= XY \int_0^{\pi} |\cos \chi| d\chi = 2XY \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \chi d\chi = 2XY$$

(زیرا انتگرال تابع $|\cos \chi|$ ، با دوره تناوب π ، روی پاره خط راست به طول π ، بستگی به وضع استقرار این پاره خط روی محور عددی ندارد). بنا بر این، اگر از هر دو طرف نابرابری مورد نظر، نسبت به φ و در فاصله از ۰ تا π ، برای تصویرهای A_{φ} ، B_{φ} ، C_{φ} ، D_{φ} ، E_{φ} نقطه‌های مفروض بر خط راست l_{φ} یعنی از

$$A_{\varphi} B_{\varphi} + C_{\varphi} D_{\varphi} + D_{\varphi} E_{\varphi} + E_{\varphi} C_{\varphi} \leq A_{\varphi} C_{\varphi} + A_{\varphi} D_{\varphi} +$$

$$+ A_{\varphi} E_{\varphi} + B_{\varphi} C_{\varphi} + B_{\varphi} D_{\varphi} + B_{\varphi} E_{\varphi}$$

انتگرال بگیریم، به دست می‌آید:

$$2AB + 2CD + 2DE + 2EC \leq 2AC + 2AD + 2AE + 2BC +$$

$$+ 2BD + 2BE$$

که با نابرابری مطلوب، هم‌ارز است.

۱۴۳. مسأله‌های هندسی مربوط به اکستره‌م

۲۷۰. AD را قاعده بزرگتر و BH را ارتفاع دوزنقه مفروض

$ABCD$ فرض می‌کنیم (شکل ۹۲). در این صورت

$$AD = 13$$

(اگر یکی از ساق‌ها را بزرگترین ضلع دوزنقه بگیریم، یعنی

$$AB = CD = 13، آن وقت $AD + BC = 28 - 2 \times 13 = 2$ و مساحت$$

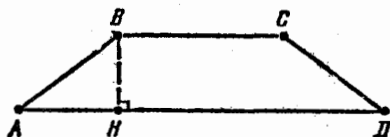
دوزنقه

$$S_{ABCD} = AH(AD + BC) \times \frac{1}{2} \leq 13 < 27$$

می‌شود که با فرض مسأله سازگار نیست،

$$AB = x,$$

$$BC = 28 - 13 - 2x = 15 - 2x, \quad AH = \frac{13 - (15 - 2x)}{2} = x - 1,$$



شکل ۹۲

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{2x - 1}$$

ضمن استفاده از قضیهٔ مربوط به

واسطه‌ها به دست می‌آید:

$$S_{ABCD} = \sqrt{2x - 1} \times \frac{28 - 2x}{2} = \sqrt{(2x - 1)(14 - x)^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{\left(\frac{(2x - 1) + (14 - x) + (14 - x)}{3}\right)^3} = \sqrt{\left(\frac{27}{3}\right)^3} = 27$$

در ضمن، علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$2x - 1 = 14 - x \Rightarrow x = 5$$

و $AB = BC = CD = 5$ برابری

$$S_{ABCD} = 27/001$$

ممکن نیست.

$a, 271$ ، b و c را ضلع‌ها، p را نصف محیط، S را مساحت و r را

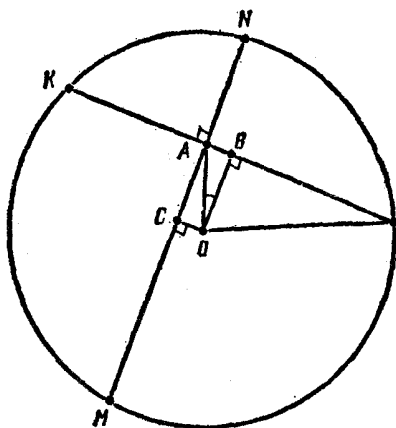
شعاع دایرهٔ محاطی مثلث می‌گیریم. در این صورت، با توجه به قضیهٔ مربوط

به واسطه‌ها، داریم:

$$(rp)^2 = S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \leq$$

$$\leq p \left(\frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{3} \right)^3 = \frac{p^4}{27}$$

از آن جا $r \leq \frac{p}{\sqrt{27}}$ درضمن، r وقتی به حداکثر مقدار خود می‌رسد که داشته باشد.



شکل ۹۳

$p-a = p-b = p-c$
یعنی، وقتی که مثلث متساوی الاضلاع باشد.

۲۷۲. فرض می‌کنیم از نقطه A ، به فاصله k از نقطه O مرکز دایره، دو وتر عمود بر هم KL و MN را رسم کرده باشیم. عمودهای OB و OC را، به ترتیب، بر وترهای KL و MN رسم می‌کنیم و زاویه AOB را α می‌گیریم (شکل ۹۳). در این صورت

$$KL = 2BL = 2\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \alpha}$$

$$MN = 2MC = 2\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}$$

و از آن جا

$$\begin{aligned} (KL + MN)^2 &= 4 - 4k^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \\ &+ 4\sqrt{1 - k^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + k^4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} = \\ &= 4 - 4k^2 + 4\sqrt{4 - 4k^2 + k^4 \sin^2 2\alpha} \end{aligned}$$

عبارت اخیر، به ازای $\sin 2\alpha = 1$ یعنی به ازای $\alpha = 45^\circ$ به حداکثر مقدار خود؛ و به ازای $\sin 2\alpha = 0$ یعنی $\alpha = 0^\circ$ ، به حداقل مقدار خود می‌رسد. بنابراین، حداکثر مقدار $KL + MN$ برابر است با

$$\sqrt{4 - 4k^2 + 4(2 - k^2)} = 2\sqrt{4 - 2k^2}$$

$$\sqrt{8-4k^2} + 8\sqrt{1-k^2} = 2(1+\sqrt{1-k^2})$$

۲۷۳. K, L, M, N را، به ترتیب، وسط‌ضلع‌های AB, AC, CE ، DA از چهار ضلعی $ABCD$ می‌گیریم (شکل ۹۴). در این صورت، داریم:

$$\begin{aligned}\vec{KM} &= \frac{1}{4}(\vec{KA} + \vec{AD} + \vec{DM}) + \\ &+ \frac{1}{4}(\vec{KB} + \vec{BC} + \vec{CM}) = \frac{1}{4}(\vec{AD} + \vec{BC})\end{aligned}$$

و به همین ترتیب

$$\vec{ML} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{DC})$$

بنابراین

$$KM = \frac{1}{4}|\vec{AD} + \vec{BC}| \leq \frac{1}{4}(AD + BC),$$

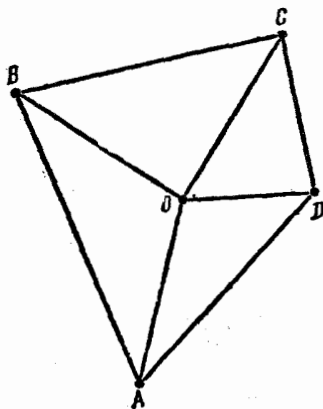
$$ML = \frac{1}{4}|\vec{AB} + \vec{DC}| \leq \frac{1}{4}(AB + DC)$$

و نابرابری زیر درست است:

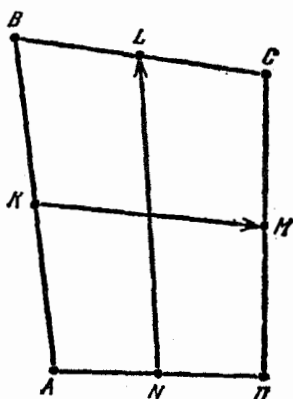
$$KM + LN \leq \frac{1}{4}(AB + BC + CD + DA)$$

که در آن، علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که بردارهای \vec{AD} و \vec{BC} و همچنین بردارهای \vec{AB} و \vec{DC} هم راستا باشند، یعنی وقتی که $ABCD$ متوازی‌الاضلاع باشد.

۲۷۴. چون داریم (شکل ۹۵):



شکل ۹۵



شکل ۹۶

$$\begin{aligned}
 & OA^2 + OB^2 + DC^2 + OD^2 = \\
 & = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2) + \frac{1}{2}(OB^2 + OC^2) + \frac{1}{2}(OC^2 + OD^2) + \\
 & + \frac{1}{2}(OD^2 + OA^2) \geq OA \cdot OB + OB \cdot OC + OC \cdot OD + OD \cdot OA \geq \\
 & \geq 2S_{AOB} + 2S_{BOC} + 2S_{COD} + 2S_{DOA} = 2S
 \end{aligned}$$

و در ضمن، علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$OA = OB = OC = OD, \widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOA}$$

بنابراین، قطرهای AC و BD از چهارضلعی مفروض $ABCD$ برهم عمودند و در نقطه O یکدیگر را نصف می‌کنند، یعنی $ABCD$ ، مربعی است به مرکز O .

۰۲۷۵. فرض می‌کنیم:

$$a_1 = A_2A_3, a_2 = A_1A_3, a_3 = A_1A_2,$$

$$h_1 = A_1H_1, h_2 = A_2H_2, h_3 = A_3H_3$$

در این صورت، خواهیم داشت:

$$a_3h_1 + a_1h_2 + a_2h_3 =$$

$$= a_1 h_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} + a_2 h_2 \cdot \frac{a_1}{a_2} + a_3 h_3 \cdot \frac{a_2}{a_3} = 2S \left(\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} \right)$$

از طرف دیگر، با توجه به قضیه واسطه‌ها، داریم:

$$\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} \geq 3$$

که در آن، علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3$$

بنابراین، شرط

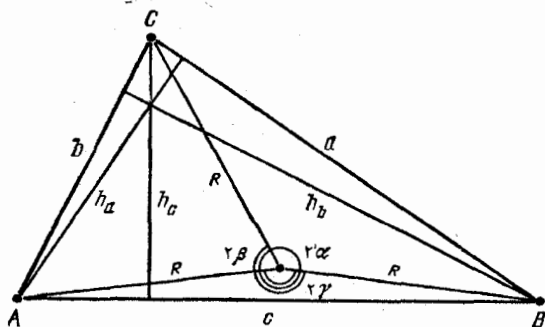
$$a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 = 6S$$

با شرط $a_1 = a_2 = a_3$ هم‌ارز است.

۲۷۶. h_a, h_b و h_c را ارتفاع‌های مثلث S را با مساحت آن می‌گیریم؛

در این صورت (شکل ۹۶):

$$a \sin \beta = h_c, \quad b \sin \gamma = h_a, \quad c \sin \alpha = h_b$$



بنابراین، برابری فرض، هم‌ارز برابری زیر است:

$$P(h_a + h_b + h_c) = 9R(a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma)$$

از طرف دیگر، بنا بر قضیه ۷۵، داریم:

$$\begin{aligned} & 9R(a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma) = \\ & = 9R(\sqrt{R}\sin\alpha\cos\alpha + \sqrt{R}\sin\beta\cos\beta + \sqrt{R}\sin\gamma\cos\gamma) = \\ & = 9R^{\frac{3}{2}}(\sin\sqrt{2}\alpha + \sin\sqrt{2}\beta + \sin\sqrt{2}\gamma) \end{aligned}$$

و با توجه به قضیه مربوط به واسطه‌ها:

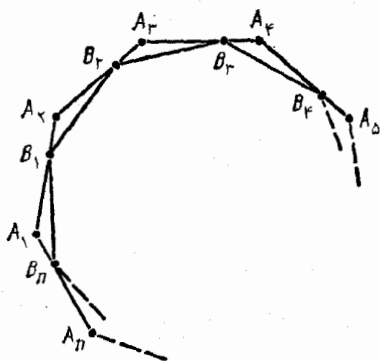
$$\begin{aligned} P(h_a + h_b + h_c) &= (a + b + c)(h_a + h_b + h_c) \geq \\ &\geq 9\sqrt{abc} \cdot \sqrt{h_a h_b h_c} = 9\sqrt{ah_a \cdot bh_b \cdot ch_c} = 9\sqrt{(\sqrt{2}S)^3} = 18S \end{aligned}$$

در ضمن، علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$a = b = c, \quad h_a = h_b = h_c$$

یعنی، وقتی که مثلث متساوی‌الاضلاع باشد.

۲۷۷. فرض کنید، n ضلعی منتظم $B_1 \dots B_n$ به مساحت S_B را در n ضلعی منتظم $A_1 \dots A_n$ به مساحت S_A محاط کرده باشیم. در این صورت، اگر دو n ضلعی برهم منطبق نباشند، روی هر ضلع $A_i A_{i+1}$ (برای $i = 1, \dots, n$) درست یک رأس، درست یک رأس، و مثلاً B_i قرار دارد. در واقع، در غیر این صورت، بنا بر اصل دیریکله (قضیه ۱)، دست کم روی یک ضلع، مثلاً $A_1 A_2$ ، دو نقطه B_1 و B_2 قرار می‌گیرد (برای درستی در این صورت رأس B_3 (که در مثلث $A_1 A_2 A_3$ ، مشابه



شکل ۹۲

با مثلث $P_1B_2B_3$ ، قرار دارد) و رأس B_n (در مثلث $A_1A_2A_n$) تنها می‌توانند، به ترتیب، روی ضلع‌های A_1A_n و A_2A_3 قرار گیرند (با توجه به $n > 3$)، پاره خط‌های راست A_2A_n و A_1A_3 ، قطرهای n ضلعی $A_1 \dots A_n$ هستند و نه ضلع‌های آن)، یعنی $B_1 = A_1$ و $B_2 = A_2$. ثابت می‌کنیم:

$$A_1B_1 = A_2B_2 = \dots = A_nB_n$$

درواقع، مثلث‌های $B_1A_2B_2$ و $B_2A_3B_3$ برابرنند (شکل ۹۷)، زیرا

$$\widehat{B_1A_2B_2} = \widehat{B_2A_3B_3} = \widehat{B_1B_2B_3} = 180^\circ \times \frac{n-2}{n},$$

$$\widehat{A_2B_1B_2} = 180^\circ - \widehat{B_1A_2B_2} - \widehat{A_2B_2B_1} =$$

$$= 180^\circ - \widehat{B_1B_2B_3} - \widehat{A_2B_2B_3} = \widehat{A_2B_2B_3}, \quad B_1B_2 = B_2B_3$$

بنابراین $A_2B_2 = A_3B_3$ ؛ به همین ترتیب، بقیهٔ برابری‌ها هم ثابت می‌شوند. مقدار

$$S_B = S_A - S_{B_1A_2B_2} - S_{B_2A_3B_3} - \dots - S_{B_nA_1B_1} = S_A - nS_{B_1A_2B_2}$$

وقتی به حداقل مقدار سرد می‌رسد که، مساحت مثلث $B_1A_2B_2$ ، حداکثر مقدار ممکن باشد. فرض کنید

$$A_1A_2 = a, \quad A_1B_1 = x$$

در این صورت، مقدار

$$S_{B_1A_2B_2} = \frac{1}{2} B_1A_2 \cdot A_2B_2 \cdot \sin(B_1A_2B_2) =$$

$$= \frac{1}{2} (a-x)x \sin(B_1A_2B_2) = \frac{1}{2} \left[\frac{a^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \right] \sin(B_1A_2B_2)$$

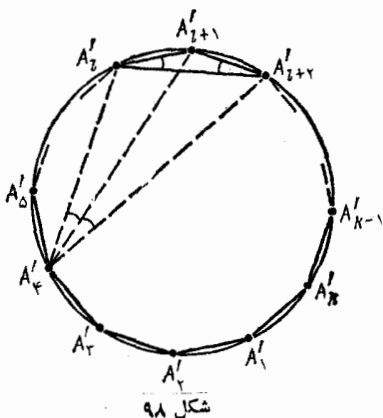
به ازای $x = \frac{a}{2}$ به حداکثر خود می‌رسد، یعنی وقتی که داشته باشیم:

$$A_1B_1 = B_1A_2$$

۲۷۸. ثابت می‌کنیم،

حداکثر مقدار α ، برابر $\frac{180^\circ}{n}$ است.

فرض کنید، وضعی از نقطه‌ها در صفحه، متناظر با مقدار α باشد. خط راستی را، و مثلاً $A'_1 A'_2$ ، طوری در نظر می‌گیریم که همه نقطه‌ها، نسبت به آن، در یک نیم‌صفحه واقع باشند و نقطه A'_1 را به نحوی انتخاب می‌کنیم که، برای آن، زاویه



$A'_1 A'_2 A'_3$ ، ماکزیمم باشد (شکل ۹۸). در این صورت، همه نقطه‌های دیگر، در درون این زاویه قرار می‌گیرند و

$$\widehat{A'_1 A'_2 A'_3} \geq \alpha(n-2)$$

زیرا، هر یک از $(n-2)$ زاویه بین نیم خط‌های راست مجاور $A'_1 A'_2 A'_3$ ، ($A'_i \neq A'_2$) از α کمتر نیستند. سپس، نقطه A'_4 را انتخاب می‌کنیم که، برای آن، زاویه $A'_1 A'_2 A'_4$ ماکزیمم باشد. در این صورت همه نقطه‌های

$$A_i \in \{A'_2, A'_3, A'_4\}$$

در داخل این زاویه‌اند و

$$\widehat{A'_1 A'_2 A'_4} \geq \alpha(n-2)$$

اگر $A'_4 \neq A'_2$ و $A'_4 \neq A'_3$ ، آن وقت، به همین ترتیب، نقطه A'_5 را انتخاب می‌کنیم و غیره. چون تعداد نقطه‌ها برابر n است، بنابراین، یکی از نقطه‌های A'_1, A'_2, A'_3, \dots ، به ناچار، برای نخستین بار تکرار می‌شود. فرض کنید، این وضع، بعد از انتخاب نقطه A'_k اتفاق بیفتد، یعنی زاویه $A'_1 A'_2 A'_k$ ، برای نقطه‌ای مثل

$$A_j = A'_i \in \{A'_1, \dots, A'_{k-2}\}$$

به حداکثر خود می‌رسد. در این صورت، اگر $i \neq 1$ ، آن وقت نقطه A'_i در درون زاویه $A'_{k-1}A'_kA'_i$ ، یعنی در درون چند ضلعی محاسب $A'_iA'_{i+1}\dots A'_{k-1}A'_k$ قرار می‌گیرد که، نوع انتخاب آن را نقض می‌کند. در نتیجه $i = 1$ و k ضلعی محاسب $A'_1A'_2\dots A'_k$ ، زاویه‌هایی به مجموع زیر دارد:

$$180^\circ(k-2) \geq k \cdot \alpha(n-2)$$

از آن جا

$$\alpha \leq \frac{180^\circ(k-2)}{(n-2)k} = \frac{180^\circ}{n-2} \left(1 - \frac{2}{k}\right) \leq \frac{180^\circ}{n-2} \left(1 - \frac{2}{n}\right) = \frac{180^\circ}{n}$$

در ضمن، علامت برای، تنها وقتی برقرار است که $k = n$ و

$$\widehat{A'_1A'_2A'_3} = \widehat{A'_2A'_3A'_4} = \dots = \widehat{A'_kA'_{k+1}A'_{k+2}} = \alpha(n-2)$$

و همه قطرهایی که از یک رأس دلخواه n ضلعی $A'_1\dots A'_n$ رسم می‌شوند، این زاویه را به زاویه‌های برابر α تقسیم کنند. چنین n ضلعی، تنها می‌تواند منتظم باشد، زیرا برای هر مقدار $n \dots 1$ داریم:

$$\widehat{A'_iA'_{i+2}A'_{i+1}} = \widehat{A'_{i+2}A'_{i+1}A'_{i+3}} \Rightarrow A'_iA'_{i+1} = A'_{i+1}A'_{i+2}$$

(شکل ۹۸)، بنابراین، $A'_{n+1} = A'_1$ و $A'_{n+2} = A'_2$ به حساب آورده‌ایم. بلکه ضلع‌های برابر هم داشته باشد.

سرانجام، رأس‌های n ضلعی منتظم، در شرط $\alpha = \frac{180^\circ}{n}$ صدق می‌کنند.

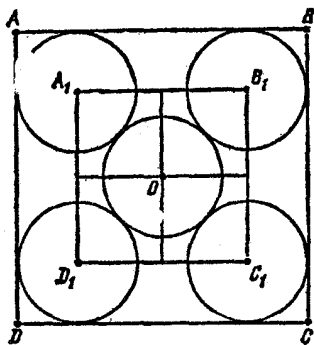
این مطلب، وقتی روشن می‌شود که دایره محیطی n ضلعی را رسم کنیم و به این نکته توجه کنیم که، زاویه بین قطرهای مجاور که از یک رأس رسم شوند،

$$\frac{360^\circ}{n}$$

یعنی برابر $\frac{180^\circ}{n}$ اند.

۰۲۷۹ مربع $ABCD$ را به مرکز O و به ضلع a در نظر می‌گیریم که

شامل ۵ دایره غیر متقاطع و به شعاع واحد باشد. در این صورت، مرکز دایره‌ها، در مربع درونی $A_1B_1C_1D_1$ به مرکز O و به ضلع $a-2$ قرار می‌گیرند.



شکل ۹۹

$(A_1B_1 \parallel AB)$ ؛ شکل ۹۹). اگر وسط ضلع‌های روبه‌رو را، در مربع $A_1B_1C_1D_1$ به هم وصل کنیم، آن را به چهار مربع کوچکتر تقسیم می‌کند که، بنا بر اصل دیریکله، در یکی از آن‌ها، دست کم دو تا از مرکزها قرار دارد. در این صورت، فاصلهٔ بین آن‌ها، از یک طرف، از قطر مربع کوچک تجاوز نمی‌کند و، از طرف دیگر، کمتر از

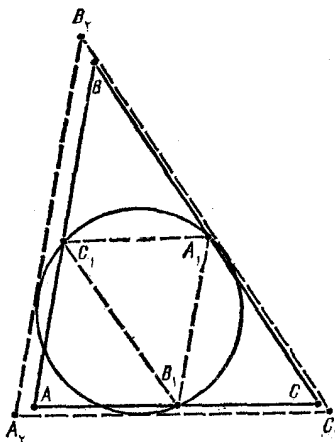
$$2 \leq OA_1 = \frac{A_1B_1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{a-2}{2} \sqrt{2} \quad \text{چون } 2$$

بنا بر این

$$a \geq 2\sqrt{2} + 2$$

در ضمن، اگر $a = 2\sqrt{2} + 2$ و مرکز دایره‌ها بر نقطه‌های O, A_1, B_1, C_1, D_1 منطبق باشند، آن گاه همهٔ شرط‌های مورد نظر برقرارند. به این ترتیب، مربع مجهول، ضلعی برابر $2\sqrt{2} + 2$ دارد.

0.280 A_1, B_1, C_1 را وسط ضلع‌های BC, AC, AB از مثلث مفروض ABC می‌گیریم. شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC را r و شعاع دایرهٔ محیطی آن را R می‌نامیم و فرض می‌کنیم $R = 2r$ روشن است که ρ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث $A_1B_1C_1$ برابر نصف شعاع دایرهٔ



شکل ۱۰۰

محیطی مثلث ABC است (زیرا $A_1B_1C_1$ با ABC متشابه و نسبت تشابه برابر

$\frac{1}{2}$ است). اگر این دایره بر ضلع‌های مثلث ABC مماس نباشد، مماس‌هایی

موازی با ضلع‌های مثلث ABC بر کمان‌های متناظر این دایره رسم می‌کنیم (شکل ۱۰۰). به این ترتیب، دایره‌ای به شعاع ρ به دست می‌آید که در مثلث $A_1B_1C_1$ ، که با ABC متشابه است و مساحتی بیشتر از مساحت مثلث ABC دارد، محاط است. بنا بر این داریم:

$$r < \rho = \frac{R}{2}$$

که فرض ما را نقض می‌کند. پس باید دایرهٔ محیطی مثلث $A_1B_1C_1$ بر ضلع‌های AB ، BC و AC مماس باشد و، بنا به ویژگی خط‌های راست مماس بر دایره داشته باشیم:

$$AB_1 = AC_1, \quad BC_1 = BA_1,$$

یعنی $AC = BC = AB$ و مثلث ABC ، متساوی‌الاضلاع است.
 ۲۸۱. شماره خط‌های راست B_1C_1 و B_2C_2 را از نقطهٔ O طوری می‌گذرانیم که، در آن‌ها، دو انتهای B_1 و B_2 روی ضلع AB و دو انتهای C_1 و C_2 روی ضلع AC از زاویهٔ مفروض BAC باشند. ثابت می‌کنیم، اگر داشته باشیم:

$$\widehat{AOB_2} > \widehat{AOB_1} \geq 90^\circ$$

(شکل ۱۰۱)، آن وقت داریم:

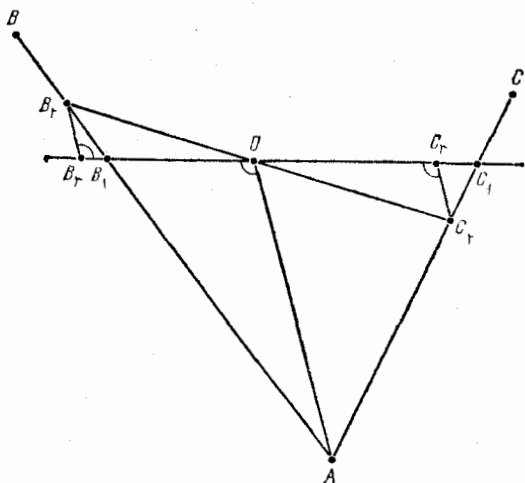
$$\frac{1}{B_1O} + \frac{1}{C_1O} > \frac{1}{B_2O} + \frac{1}{C_2O}$$

از نقطه‌های B_2 و C_2 ، خط‌های راستی موازی AO رسم می‌کنیم تا، به ترتیب، B_1C_1 را در نقطه‌های B_3 و C_3 قطع کنند. چون

$$\widehat{B_2B_3O} = \widehat{AOB_2} \geq 90^\circ$$

بنا بر این $OB_2 > OB_3$ و

$$\frac{1}{B_1O} - \frac{1}{B_2O} = \frac{B_2O - B_1O}{B_1O \cdot B_2O} > \frac{B_2O - B_3O}{B_1O \cdot B_2O} = \frac{B_1B_3}{B_1O \cdot B_2O} = \frac{B_2B_3}{AO \cdot B_2O}$$



شکل ۱۰۱

زیرا، دو مثلث B_1OA و $B_1B_2B_3$ متشابه‌اند). به همین ترتیب

$$\frac{1}{C_1O} - \frac{1}{C_2O} > -\frac{C_2C_3}{AO \cdot C_2O}$$

اگر این دو نابرابری را باهم جمع کنیم، با توجه به تشابه مثلث‌های $B_1B_2B_3O$ و C_2C_3O ، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{1}{B_1O} + \frac{1}{C_1O} - \left(\frac{1}{B_2O} + \frac{1}{C_2O} \right) &> \frac{B_2B_3}{AO \cdot B_2O} - \frac{C_2C_3}{AO \cdot C_2O} = \\ &= \frac{1}{AO} \left(\frac{B_2B_3}{B_2O} - \frac{C_2C_3}{C_2O} \right) = 0 \end{aligned}$$

اگر خط راستی که از O می‌گذرد، بر خط راست AO عمود باشد و نیم‌خط‌های راست AB و AC را، به ترتیب، در نقطه‌های B_1 و C_1 قطع کند، آن وقت، همان پاره‌خط مجهول است. در واقع، برای هر پاره‌خط راست دیگر B_2C_2 ، که از نقطه O گذشته است، یکی از دو نابرابری زیر را داریم:

$$\widehat{AOB_2} > 90^\circ \quad \text{یا} \quad \widehat{AOC_2} > 90^\circ$$

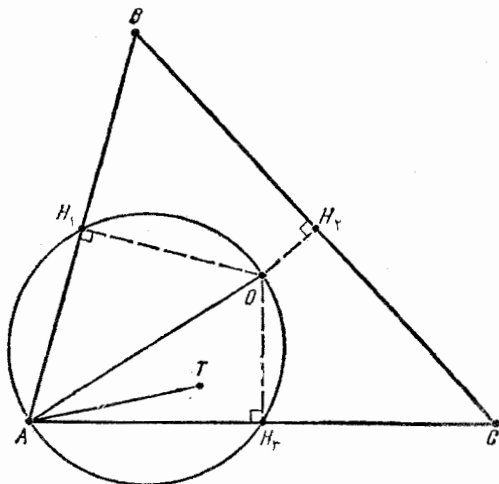
برای مشخص بودن وضع، می‌توان نقطه‌های $B_۲$ و $C_۲$ را، به ترتیب، بر نیم خط‌های راست AB و AC گرفت و، مثلاً، نابرابری اول را در نظر گرفت). در این صورت، نابرابری که در بالا ثابت کردیم، برقرار می‌شود. اگر خط راست عمود بر AO در نقطه O ، یکی از ضلع‌های زاویه BAC ، و مثلاً AC را قطع نکند، آن وقت پاره‌خط مجهول را نمی‌توان ساخت. فرض می‌کنیم، پاره‌خط راست مجهول، $B_۲C_۲$ باشد که دو انتهای $B_۲$ و $C_۲$ آن، به ترتیب، بر نیم خط‌های AB و AC قرار گرفته باشند. در این صورت

$$\widehat{AOB_۲} > ۹۰^\circ$$

یعنی، اگر نقطه $C_۱$ را در امتداد پاره‌خط $AC_۲$ ، از طرف نقطه $C_۲$ در نظر بگیریم و خط راست $C_۱B_۱$ را از نقطه O بگذرانیم، دوباره

$$۹۰^\circ < \widehat{AOB_۱} < \widehat{AOB_۲}$$

و با توجه به نابرابری که در بالا ثابت کردیم، با $B_۲C_۲$ با شرط مسأله نمی‌سازد. (۲۸۲ الف) فرض می‌کنیم، مثلث ABC ، زاویه منفرجه نداشته باشد.



شکل ۱۰۲

در این صورت، نقطه مجهول T ، بر نقطه O ، مرکز دایره محیطی مثلث (به شعاع R) منطبق است.

اگر از نقطه O ، عمودهای OH_1 ، OH_2 ، OH_3 را، به ترتیب، بر ضلع‌های AB ، BC ، AC رسم کنیم، مثلث ABC ، به سه چهارضلعی

$$OH_1AH_3, OH_1BH_2, OH_2CH_3$$

تقسیم می‌شود (شکل ۱۰۲). اگر نقطه $T \neq O$ مثلاً در چهارضلعی اول واقع باشد، آن وقت

$$m(T) \leq AT < AO = R = m(O)$$

زیرا نقطه T در سطح دایره به قطر AO قرار دارد (این دایره، از چهار رأس چهارضلعی OH_1AH_3 می‌گذرد، زیرا به دلیل قائمه بودن دو زاویه OH_1A و OH_3A ، یک چهارضلعی محاطی است).

اکنون، فرض می‌کنیم، زاویه رأس A از مثلث ABC منفرجه باشد و، در ضمن، داشته باشیم: $\hat{C} \leq \hat{B}$. از نقطه‌های D و E ، وسط ضلع‌های AB و AC ، عمودهایی بر این ضلع‌ها رسم می‌کنیم تا ضلع BC را، به ترتیب، در نقطه‌های F و G قطع کنند و $BF = b$ و $CG = c$ می‌نامیم. توجه می‌کنیم که $b \leq c$ ؛ در ضمن، برابری $b = c$ تنها وقتی برقرار است که دو زاویه B و C برابر باشند. در واقع، از مثلث‌های BDF ، CEG ، ABC (بنابر قضیه سینوس‌ها) داریم:

$$\frac{b}{c} = \frac{BD}{\cos B} \cdot \frac{\cos C}{CE} = \frac{AB \cos C}{AC \cos B} = \frac{\sin C \cos C}{\sin B \cos B} = \frac{\sin 2C}{\sin 2B} \leq 1$$

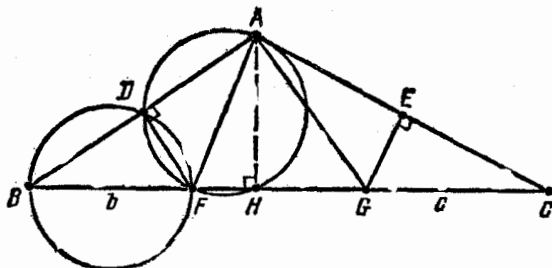
زیرا $0 < 2C \leq 2B < 180^\circ - 2C$.

سپس، توجه می‌کنیم که $BG > c$ (و همچنین $FC > b$)، چون

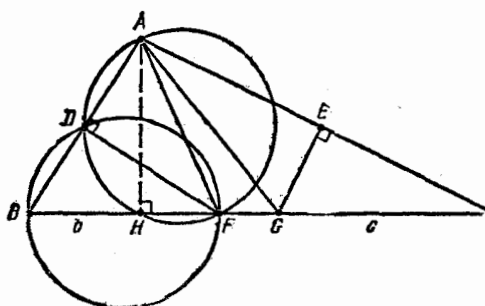
$$\hat{B} + \hat{C} < 90^\circ < \widehat{BAC}$$

یعنی

$$\hat{B} < \widehat{BAC} - \hat{C} = \widehat{BAG} \text{ و } BG > AG = GC = c$$



شکل ۱۰۳



شکل ۱۰۴

سرانجام، ارتفاع AH از مثلث ABC ، آن را به دو مثلث ABH و ACH تقسیم می‌کند. اگر $T \neq F$ ، در مثلث ABH باشد، آن وقت

$$m(T) < m(F) = b$$

زیرا، یا در دایره به قطر BF و یا در دایره به قطر AF قرار دارد (شکل‌های ۱۰۳ و ۱۰۴ که، در آن‌ها، به ترتیب، حالت‌های $\hat{B} < 45^\circ$ و $\hat{B} > 45^\circ$ نشان داده شده است). به همین ترتیب، اگر نقطه $T \neq G$ ، در مثلث AGH باشد، آن وقت

$$m(T) < m(G) = c$$

به این ترتیب، اگر مثلث ABC ، متساوی‌الساقین باشد، هر دو نقطه F و G ، جواب مسأله‌اند، ولی اگر متساوی‌الساقین نباشد، آن وقت

$$m(F) < m(G)$$

و نقطه مجهول، بر نقطه G منطبق است.

ب) برای هر نقطه T از مثلث ABC داریم:

$$M(T) \geq TB, \quad M(T) \geq TC$$

از آن جا

$$2M(T) \geq TB + TC \geq BC \Rightarrow \frac{1}{2}BC \leq M(T)$$

سرانجام، بنا بر استدلالی که در بخش الف) داشتیم، مقدار $m(T)$ در حالت $A \geq 90^\circ$ ، در نقطه‌ای مانند G از پاره خط BC ، به حداکثر خود می‌رسد. در نتیجه، برای هر نقطه T از مثلث ABC ، داریم:

$$m(T) \leq m(G) \leq \min\{GB, GC\} \leq \frac{1}{2}BC$$

فصل چهارم

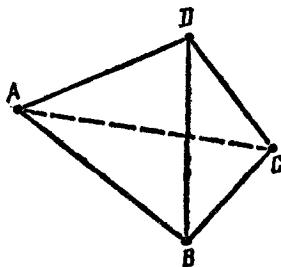
هندسه فضائی

۱۵۵. چهاروجهی‌ها

$AB \cdot 283$ را بزرگترین یال چهاروجهی

$ABCD$ می‌گیریم. در این صورت داریم (شکل ۱۰۵):

$$\begin{aligned} (AC + AD - AB) + (BC + BD - BA) &= \\ &= (AC + CB - AB) + \\ &+ (AD + DB - AB) > 0 \end{aligned}$$



شکل ۱۰۵

بنابراین، دست کم، یکی از دو نابرابری

$$AC + AD > AB \quad \text{یا} \quad BC + BD > BA$$

برقرار است و این، به معنای آن است که با یال‌های AB ، AD ، AC ، و یا با یال‌های BA ، BD ، BC می‌توان یک مثلث ساخت (بقیه نابرابری‌های لازم، را، می‌توان، از نوع انتخاب AB ، نتیجه گرفت).

۲۸۴. برای چهاروجهی مفروض $ABCD$ ، بنا بر قضیه کسینوس‌ها، داریم (شکل ۱۰۵ را ببینید):

$$2AB \cdot AC \cos(BAC) = AB^2 + AC^2 - BC^2 =$$

$$AB^2 + AD^2 - BD^2 = 2AB \cdot AD \cos(BAD)$$

که از آن جا، نتیجه می‌شود:

$$\text{sign } \cos(BAC) = \text{sign } \cos(BAD)$$

یعنی، زاویه‌های BAC و BAD ، یا هر دو حاده و یا هر دو غیر حاده‌اند. همین نتیجه را، می‌توان، برای هر دو زاویه مسطحه این چهاروجهی، که رأسی مشترک داشته باشند، به دست آورد. اگر همه زاویه‌های مسطحه چهار-وجهی $ABCD$ حاده باشند، آن وقت، هر وجه آن، مثلثی با زاویه‌های حاده است. اگر هم، یکی از زاویه‌های مسطحه، مثلاً در رأس A ، حاده نباشد، آن وقت، هر سه زاویه مسطحه این رأس غیر حاده‌اند، یعنی همه بقیه زاویه‌های مسطحه چهاروجهی، حاده می‌شوند (زیرا، هر وجه، دست کم دو زاویه حاده دارد). در این حالت، مثلث BCD ، با زاویه‌های حاده خواهد بود.

۲۸۵. از دو انتهای پاره‌خط راست AB به طول d ، خط‌های راستی عمود برهم و عمود بر AB رسم می‌کنیم. روی این خط‌های راست، پاره‌خط‌هایی به طول a به نحوی جدا می‌کنیم که، نقطه‌های A و B ، وسط این پاره‌خط‌ها باشند. دو انتهای این پاره‌خط‌ها، رأس‌های یک چهاروجهی هستند که مساحت هر وجه آن، برابر است با

$$\frac{1}{2}a\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + d^2} = \frac{1}{4}a\sqrt{a^2 + 4d^2}$$

و حجمی برابر $\frac{1}{6}a_1^2 d_1$ دارد. به این ترتیب، اگر دو چهاروجهی، به ترتیب، متناظر با $a_1 = 3$ ، $d_1 = 2$ و $a_2 = 1$ ، $d_2 = \sqrt{56}$ در نظر بگیریم، دارای وجه‌هایی با مساحت برابرند، زیرا

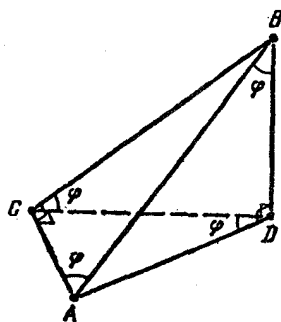
$$a_1 \sqrt{a_1^2 + 4d_1^2} = 15 = a_2 \sqrt{a_2^2 + 4d_2^2}$$

در حالی که حجم‌های متفاوت دارند، زیرا

$$a_1^2 d_1 = 18 \neq \sqrt{56} = a_2^2 d_2$$

به این ترتیب، باید به پرسش مسأله، پاسخ منفی داد.

۲۸۶. فرض می‌کنیم، چهاروجهی $ABCD$ ، به صورتی که در مسأله آمده است، وجود داشته باشد و ثابت می‌کنیم، AB بزرگترین و CD کوچکترین یال است. در شرط مسأله روشن می‌شود که هر یک از زاویه‌های



شکل ۱۰۶

ACB و ADB همچنین، یکی از دوزاویه ACD یا ADC - و مثلاً ACD - قائمه‌اند (شکل ۱۰۶). زاویه BAC را برابر φ می‌گیریم. در این صورت، زاویه ABD هم برابر φ می‌شود، زیرا در غیر این صورت، باید زاویه BAD برابر φ باشد، یعنی $AC = AD$ ، که ممکن نیست، (زیرا AD وتر مثلث ACD است). به همین ترتیب $\widehat{CDA} = \varphi$ (در غیر این صورت، زاویه CAD برابر

φ می‌شود، یعنی $AB = AD$ ، که ممکن نیست). به این ترتیب، داریم:

$$BD = AC = AB \cos \varphi, \quad BC = AD = AB \sin \varphi,$$

$$CD = AD \cos \varphi = AB \sin \varphi \cos \varphi, \quad AC = AD \sin \varphi = AB \sin^2 \varphi$$

از آن جا به دست می‌آید:

$$\cos \varphi = \sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$$

$$\varphi = \arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

بنا بر این، اگر یال بزرگتر AB طولی برابر واحد داشته باشد، طول کوچکتر یال CD برابر

$$\sin \varphi \cos \varphi = \sqrt{\cos \varphi} \cdot \cos \varphi = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

می شود. برای اثبات وجود چنین چهاروجهی، کافی است توجه کنیم که، اگر چهاروجهی $ABCD$ را با یال‌های

$$CA = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad CB = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad CD = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

در نظر بگیریم و، برای زاویه‌ها، فرض کنیم:

$$\widehat{BCA} = \widehat{DCA} = 90^\circ, \quad \widehat{BCD} = \arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

آن وقت، خواهیم داشت:

$$AB = 1, \quad AD = CB, \quad BD = AC, \quad \widehat{CAB} = \widehat{BCD}$$

که از آن جا، برابری مثلث‌های

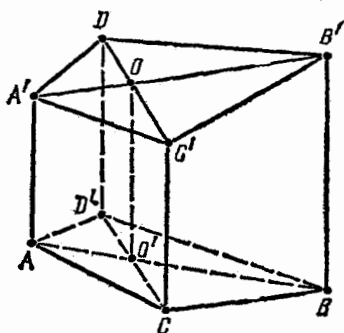
$$\triangle BAD = \triangle BAC, \quad \triangle CBD = \triangle DAC$$

و تشابه همه وجه‌های چهاروجهی نتیجه می شود.

۲۸۷. از آن جا که هر یک از صفحه‌های رسم شده، شامل یکی از پاره-

خط‌هایی است که وسط دو یال مقابل چهاروجهی را به هم وصل می کنند، بنا بر این همه صفحه‌ها، از نقطه برخورد این پاره‌خط‌های راست، کنه در درون چهاروجهی واقع است، می گذرند. (قضیه ۹۲ را ببینید). بنا بر این، شش صفحه‌ای که رسم کرده‌ایم، تمامی فضا را به کنج‌هایی تقسیم می کنند که در رأس

خود مشترك اند، یعنی هر يك از بخش های چهار وجهی، دست کم يك وجه دارد که متعلق به وجه چهار وجهی است. از طرف دیگر، هیچ دو وجهی از چهار وجهی، نمی توانند وجه های یکی از بخش ها باشند، زیرا هر دو وجه چهار وجهی، به وسیله صفحه ای که از یال مشترك آنها گذشته است، از هم جدا شده اند. بنابراین، تعداد بخش های چند وجهی، برابر است با تعداد بخش های سطح آن (که به وسیله صفحه ها تقسیم شده است)، و چون هر وجه چهار وجهی، به شش بخش تقسیم می شود (برابر تعداد بخش های يك مثلث که به وسیله میانه های آن تقسیم شده باشد)، تعداد همه بخش ها، برابر 4×6 ، یعنی ۲۴ می شود. با توجه به تقارن (نسبت به شش صفحه ای که رسم کرده ایم)، همه بخش های چهار وجهی با هم برابرند و حجم هر کدام از آنها، برابر $\frac{1}{24}$ است.



شکل ۱۰۷

۲۸۸. نقطه D و صفحه مثلث

$A'B'C'$ به هر ترتیبی قرار گرفته باشند، دست کم یکی از ضلع های این مثلث، با خط راستی که از رأس مقابل به این ضلع و نقطه D می گذرد، یکدیگر را قطع می کنند. برای مشخص بودن وضع، فرض کنید، نقطه O ، محل برخورد ضلع $A'B'$ با خط راست $C'D$ باشد؛

خط راستی که از نقطه O موازی خط راست DD' رسم کنیم، صفحه ABC را در نقطه O' قطع می کند (شکل ۱۰۷). در این صورت، از موازی بودن خط های راست AA' ، BB' ، CC' ، DD' ، نتیجه می شود که، پاره خط راست AB ، خط راست DD' را در نقطه O' قطع می کند.

زاویه بین خط راست OO' و صفحه ABC را φ می نامیم، آن وقت داریم:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DD' \cdot \sin \varphi = \frac{DD'}{OO'} \cdot \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot OO' \cdot \sin \varphi =$$

$$= \frac{DD'}{OO'} V_{ABCO}$$

به همین ترتیب

$$V_{A'B'C'D'} = \frac{DD'}{OO'} V_{A'B'C'O'}$$

اکنون، اگر فاصله بین خطهای راست AA' و BB' را a بگیریم،

داریم:

$$S_{ABO} = \frac{1}{2} AB \cdot OO' \sin(\angle OO'B) = \frac{1}{2} a \cdot OO'$$

و به همین ترتیب

$$S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} a \cdot OO'$$

اگر فاصله بین صفحه ABB' و خط راست CC' را b فرض کنیم، به دست می‌آید:

$$V_{ABCO} = \frac{1}{3} S_{ABO} \cdot b = \frac{1}{3} S_{A'B'O'} \cdot b = V_{A'B'C'O'}$$

و از آن جا

$$V_{ABCD} = \frac{DD'}{OO'} V_{ABCO} = \frac{DD'}{OO'} V_{A'B'C'O'} = V_{A'B'C'D'}$$

۲۸۹. V را حجم چهاروجهی مفروض و k را عدد مجهول می‌گیریم.

$$\frac{V}{V_{OBCD}} = \frac{AA_1}{OA_1} = \frac{AO}{A_1O} + \frac{OA_1}{OA_1} = k + 1$$

به همین ترتیب

$$\frac{V}{V_{OACD}} = \frac{V}{V_{OABD}} = \frac{V}{V_{OABC}} = k + 1$$

$$k+1 = \frac{4V}{V_{OBCD} + V_{OACD} + V_{OABD} + V_{OABC}} = \frac{4V}{V} = 4$$

یعنی $k=3$.

۲۹۰. ثابت می‌کنیم، همهٔ خط‌های راست $K_n L_n$ ، برای $n \in \mathbb{N}$ ، از نقطهٔ ثابت O می‌گذرند؛ و این نقطهٔ O ، بر خط راستی واقع است که از رأس A موازی خط راست BC رسم شده باشد. در واقع، اگر خط راست $K_n L_n$ ، خط راست BC را در نقطهٔ P (واقع بر نیم خط CB ؛ شکل ۱۰۸) قطع کند، از تشابه مثلث‌های متناظر به دست می‌آید:

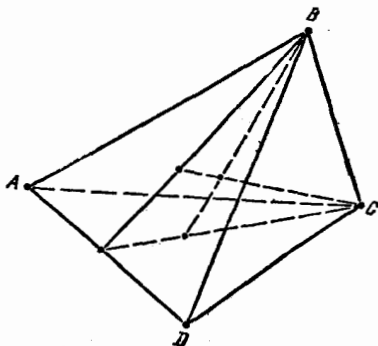
$$\frac{PB}{OA} = \frac{BK_n}{AK_n} = n-1, \quad \frac{PC}{OA} = \frac{CL_n}{AL_n} = n$$

که از آن جا به دست می‌آید:

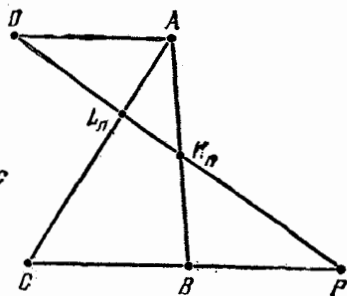
$$OA = nOA - (n-1)OA = PC - PB = BC$$

به همین ترتیب، ثابت می‌شود که همهٔ خط‌های راست $(n \in \mathbb{N})L_n M_n$ ، از نقطهٔ ثابت Q واقع بر خط راستی که از رأس A موازی CD رسم شده باشد، می‌گذرد. بنا بر این، همهٔ صفحه‌های $K_n L_n M_n$ ، برای $n \in \mathbb{N}$ ، از خط راست OQ می‌گذرند.

۲۹۱. اگر بخواهیم دو خط راستی که نقطه‌های B و C را به مرکز



شکل ۱۰۹



شکل ۱۰۸

دایرهٔ محاطی مثلث‌های ACD و ABD وصل می‌کنند، یکدیگر را قطع کنند، لازم و کافی است که بر یک صفحه واقع باشند. و این، به نوبهٔ خود، هم‌ارز با آن است که نیمسازهای دو زاویهٔ ABD و ACD ، یال AD را در یک نقطه قطع کنند (شکل ۱۵۹). و شرط اخیر، بنا بر ویژگی نیمسازهای مثلث، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow AB \cdot CD = AC \cdot BD$$

بنابراین، اگر چهار خط راستی که در صورت مسأله از آن‌ها صحبت شده است، در یک نقطه یکدیگر را قطع کنند، آن وقت، حاصل ضرب طول‌های یال‌های روبه‌رو برابر می‌شوند.

برعکس، اگر این سه حاصل ضرب برابر باشند، هر دو تا از چهار خط راست، یکدیگر را قطع می‌کنند و، در ضمن، هیچ سه‌تایی از آن‌ها بر یک صفحه واقع نیستند، یعنی همهٔ آن‌ها، در یک نقطه به هم می‌رسند.

۷۰۴۹۲، S و r را، به ترتیب، حجم، سطح کل و شعاع کرهٔ محاطی چهاروجهی می‌گیریم، یکی از بخش‌های چهاروجهی، که به وسیلهٔ صفحهٔ قاطع پدید می‌آید، هرمی است که قاعدهٔ آن روی این صفحه است. S_1 ، V_1 و r_1 را، به ترتیب، حجم، مساحت سطح جانبی هرم و شعاع کره‌ای می‌گیریم که بر وجه‌های جانبی هرم مماس و مرکز آن بر قاعدهٔ هرم واقع باشد. قاعدهٔ هرم، تنها وقتی از مرکز کرهٔ محاطی چهاروجهی می‌گذرد که داشته باشیم:

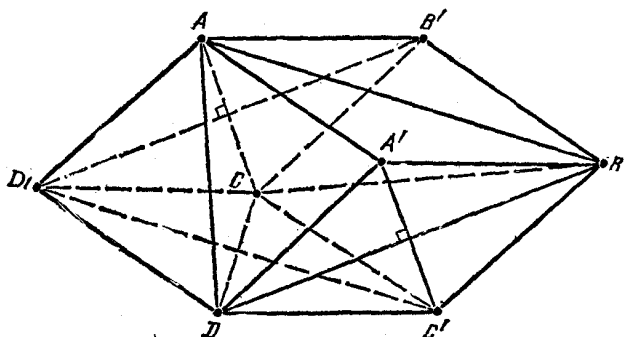
$$r = r_1 \text{ برابری اخیر، با توجه به دستورهای}$$

$$V = \frac{1}{3} S r, V_1 = \frac{1}{3} S_1 r_1$$

با برابری زیر هم‌ارز است:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{S}{S_1} \Rightarrow \frac{V - V_1}{V_1} = \frac{S - S_1}{S_1}$$

که درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.



شکل ۱۱۰

۲۹۳. فرض می‌کنیم، در چهاروجهی $ABCD$ ، دو یال BD و AC برهم، و دو یال AD و BC برهم عمود باشند. از هر یال چهار وجهی، صفحه‌ای موازی با یال روبه‌رو رسم می‌کنیم، سه زوج صفحه موازی حاصل، متوازی‌السطوح $AB'CD'$ و $A'BC'D$ را می‌سازند. (شکل ۱۱۰). متوازی‌الاضلاع‌های $AB'CD'$ و $A'BC'D$ ، لوزی هستند، زیرا قطرهای آنها، با خط‌های راست عمود برهم BD و AC ، موازی‌اند. به همین ترتیب، $AA'DD'$ و $BC'CB'$ هم، لوزی‌اند، بنابراین، همهٔ یال‌های متوازی‌السطوح باهم برابرند. سرانجام، نقطهٔ O ، مرکز تقارن متوازی‌السطوح تا وسط هر یک از یال‌های چهار وجهی، برابر است با نصف یال متوازی‌السطوح (مثلاً، فاصلهٔ نقطهٔ O تا وسط یال AB ، برابر است با فاصلهٔ مرکز تقارن متوازی‌الاضلاع $ABC'D'$ تا وسط ضلع AB از آن، یعنی نصف یال AD' از متوازی‌السطوح). از همین جا، درستی حکم مسأله ثابت می‌شود.

۲۹۴. فرض می‌کنیم، چهاروجهی منتظم T_1 ، در چهاروجهی منتظم T_2 محاط شده باشد. در این صورت، شعاع R_1 کسرهٔ محیطی چهاروجهی T_1 (که آن را کسرهٔ S می‌نامیم)، از شعاع r_2 کسرهٔ محیطی چهاروجهی T_2 کمتر نیست. در واقع، اگر بر کسرهٔ S ، صفحه‌های مماسی، موازی وجه‌های چهاروجهی T_2 رسم کنیم، چهاروجهی T_3 (متشابه با چهاروجهی T_2)، یعنی یک چهاروجهی منتظم) به دست می‌آید که محیط بر کسرهٔ S است و چهاروجهی

T_4 را در بر می گیرد. بنابراین، شعاع $r_3 = R_1$ از کره محاطی چهاروجهی T_3 ، کمتر از r_4 نیست. چون شعاع r_1 از کره محاط در چهار وجهی منظم T_1 ، دو بار کوچکتر از R_1 است، در نتیجه

$$3r_1 = R_1 \geq r_4$$

که از آن جا، درستی نابرابری مورد نظر، ثابت می شود.

۲۹۵. برای مشخص بودن وضع، نقطه M را بر ضلع AB از مثلث ABC می گیریم و فرض می کنیم $\widehat{MDB} = \varphi$ (شکل ۱۱۱). در این صورت

$$S = c + a \cos \varphi + b \sin \varphi$$

قرار می گذاریم:

$$d = a \cos \varphi + b \sin \varphi$$

$$\psi = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

به دست می آید:

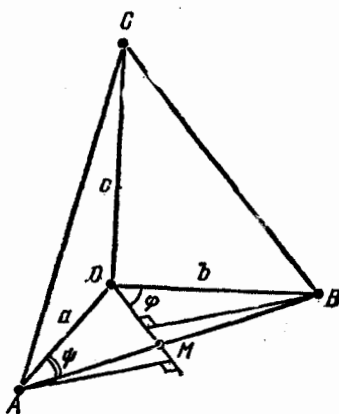
$$\begin{aligned} d &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi) = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\varphi - \psi) \leq \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

در ضمن، علامت برابری، تنها وقتی پیش می آید که داشته باشیم: $\varphi = \psi$ ، یعنی

$$\cos \varphi = \frac{AD}{AB} = \cos(\angle DAB) \quad \text{یا} \quad DM \perp AB$$

سپس، با استفاده از قضیه واسطهها (قضیه ۶)، داریم:

$$S = c + d \leq \sqrt{2(c^2 + d^2)}$$



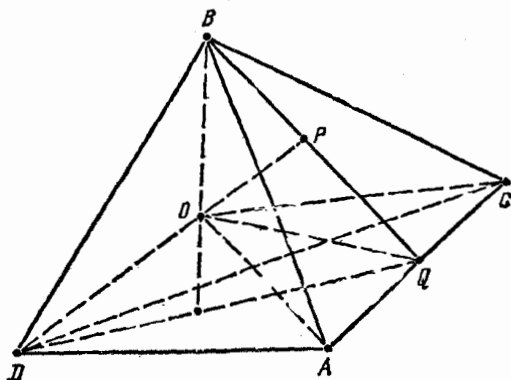
شکل ۱۱۱

که در آن، علامت برابری، تنها برای وقتی است که داشته باشیم: $c = d$.
به این ترتیب، نابرابری مورد نظر

$$S \leq \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

ثابت شد. علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که، یال‌های BD و AD و CD را بتوان سه ضلع یک مثلث قائم‌الزاویه دانست، و DM ارتفاع وارد بر کوچکترین ضلع مثلث ABC باشد.

۲۹۶. نقطه O را در درون چهاروجهی $ABCD$ در نظر می‌گیریم. نقطه برخورد خط راست DO با صفحه ABC را P و نقطه برخورد خط راست BP ، با یال AC را Q می‌نامیم (شکل ۱۱۲).



شکل ۱۱۲

بنابر قضیه ۸۴ داریم:

$$\begin{aligned} \widehat{AOB} + \widehat{AOC} &= \widehat{AOB} + \widehat{AOQ} + \widehat{QOC} > \widehat{BOQ} + \widehat{QOC} = \\ &= \widehat{BOP} + \widehat{POQ} + \widehat{QOC} > \widehat{BOP} + \widehat{POC} = \\ &= 180^\circ - \widehat{BOD} + 180^\circ - \widehat{COD} \end{aligned}$$

و از آن جا

$$\widehat{AOB} + \widehat{AOC} + \widehat{BOD} + \widehat{COD} > 360^\circ$$

به همین ترتیب، به دست می آید:

$$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{AOD} + \widehat{COD} > 360^\circ,$$

$$\widehat{AOC} + \widehat{BOC} + \widehat{AOD} + \widehat{BOD} > 360^\circ$$

اکنون، اگر این سه نابرابری را جمع و دو طرف نابرابری حاصل را نصف کنیم، به نابرابری مجهول می‌رسیم.

۰۲۹۷. ثابت می‌کنیم، اگر فاصله از نقطه M تا رأس‌های چهاروجهی منتظم $ABCD$ به ضلع ۲ ، عددهایی درست باشند، آن وقت، دست کم یکی از این فاصله‌ها، برابر صفر است (عکس حکم، تردیدی به وجود نمی‌آورد). اگر نقطه M ، روی خط راستی باشد که شامل یالی از چهار وجهی، و مثلاً یال AB است، و اگر H ، وسط یال AB باشد، آن وقت، با فرض $MH = x$ و $MC = y$ داریم:

$$y > x \geq 0 \text{ و } x^2 + (\sqrt{3})^2 = y^2$$

از آن جا

$$(y-x)(y+x) = 3 \text{ و } y-x = 1, y+x = 3$$

بنابراین $x = 1$ ؛ و این، به معنای آن است که نقطه M ، بر یکی از دو رأس A یا B منطبق است.

اکنون، حالتی را در نظر می‌گیریم که، نقطه M ، بر هیچ یک از این-گونه خط‌های راست قرار نگیرد. در این حالت، کوتاه‌ترین فاصله از M تا رأس‌های چهاروجهی (که آن را $x > 0$ می‌گیریم)؛ نسبت به بقیه فاصله‌ها، کمتر از ۲ واحد اختلاف دارد، یعنی هر کدام از این فاصله‌ها، یا x است و یا $۱+x$. چهار مورد را بررسی می‌کنیم.

(۱) هر چهار فاصله، برابر x اند. در این صورت، M باید بر مرکز

کره محیطی چهاروجهی، که شعاعی برابر $\frac{1}{\sqrt{6}}$ دارد، منطبق باشد که ممکن

نیست، زیرا $x \in \mathbb{N}$.

(۲) سه تا از فاصله‌ها برابری x و یکی برابر $x+1$ است. برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم:

$$MA = MB = MC = x, MD = x + 1$$

اگر مرکز مثلث ABC را O بگیریم، نقطه M باید روی نیم‌خط راست DO

باشد و، در ضمن، داشته باشیم: $x \geq AO = \frac{2}{\sqrt{3}} > 1$ ، یعنی

$$\begin{aligned} DM = x + 1 &> 2 > 2\sqrt{\frac{2}{3}} = \\ &= DO = DM - MO = x + 1 - \sqrt{x^2 - \frac{4}{3}} \end{aligned}$$

از آن جا

$$\begin{aligned} x + 1 &= 2\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{x^2 - \frac{4}{3}} - \left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + x - \frac{19}{12}}\right) \\ &> \frac{3}{2} + x - \frac{1}{2} = x + 1 \end{aligned}$$

که ممکن نیست.

(۳) سه تا از فاصله‌ها برابر $x+1$ و یکی برابر x است. مثل مورد (۲) فرض می‌کنیم:

$$MD = x \geq 1, MA + MB + MC = x + 1 \geq 2$$

در این صورت، نقطه M ، روی خط راست OD قرار دارد و، در ضمن، نقطه O نمی‌تواند بین نقطه‌های M و D واقع باشد، زیرا در غیر این صورت

$$x = 2\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{(x+1)^2 - \frac{4}{3}} > 1 + x$$

بنابراین، نقطه M ، روی نیم‌خط راست OD است و

$$2\sqrt{\frac{2}{3}} = OD = OM - MD = \sqrt{(x+1)^2 - \frac{4}{3}} - x < x+1 - x = 1 < 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

که باز هم ممکن نیست.

(۴) دو تا از فاصله‌ها برابر x و دو تای دیگر برابر $x+1$ هستند. برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم:

$$MA = MB = x \geq 1, \quad MC = MD = x+1 \geq 2$$

توجه کنیم که $x \neq 1$ ، زیرا بنا بر آن چه در بالا ثابت کردیم، نقطه M نمی‌تواند روی خط راست AB باشد؛ بنا بر این $x \geq 2$. وسط پاره‌های راست AB و CD را، به ترتیب، E و F می‌نامیم. در این صورت، نقطه M روی نیم خط راست FE است و در ضمن

$$MF = \sqrt{(x+1)^2 - 1} \geq \sqrt{3} > \sqrt{2} = EF$$

از آن جا، باید داشته باشیم:

$$\sqrt{(x+1)^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1} = MF - ME = EF = \sqrt{2}$$

که ممکن نیست، زیرا به ازای $x \in \mathbf{N}$ داریم:

$$\sqrt{(x+1)^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1} > \sqrt{2}$$

به این ترتیب، حکم مسأله، به طور کامل ثابت شد.

۰۲۹۸. حجم و مساحت سطح چهاروجهی را V و S و مساحت سطح

وجهی از چهاروجهی را که متناظر با ارتفاع h_i است و برکرة به شعاع r_i مماس است، S_i می‌نامیم. در این صورت، داریم:

$$3V = h_1 S_1 = r_1 (S_2 + S_3 + S_4 - S_1) = r_1 (S - 2S_1)$$

به همین ترتیب

$$3V = h_i S_i = r_i (S - 2S_i)$$

(برای بقیه مقادیرهای i). بنا بر این، به دست می آید:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} &= \frac{1}{3V} (S - 2S_1 + S - 2S_2 + S - 2S_3 + \\ &+ S - 2S_4) = \frac{2S}{3V} = \frac{2}{3V} (S_1 + S_2 + S_3 + S_4) = \\ &= 2 \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} \right) \end{aligned}$$

۰۴۹۹. در چهار وجهی $A_1A_2A_3A_4$ ، فرض می کنیم: h_i ارتفاعی که از رأس A_i گذشته است؛ S_i مساحت سطح وجه متناظر با آن؛ d_1, d_2, d_3 فاصله بین یال های A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 از یال های متناظر روبه رو به آن ها در چهار وجهی: Q_1, Q_2, Q_3 مساحت متوازی الاضلاع های با قطر های موازی و مساوی هر دو یال روبه رو در چهار وجهی؛ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ زاویه های دو وجهی مربوط به یال های A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 باشند. حجم چهار وجهی، چنین است:

$$V = \frac{1}{3} h_i S_i = \frac{1}{3} d_k a_k$$

(قضیه ۸۷ را ببینید؛ در این جا $i = 1, 2, 3$ و $k = 1, 2, 3$). سپس، داریم:

$$S_4 = S_1 \cos \varphi_1 + S_2 \cos \varphi_2 + S_3 \cos \varphi_3$$

(قضیه ۹۰ را ببینید)، و سرانجام

$$S_4^2 + S_k^2 - 2S_4 S_k \cos \varphi_k = Q_k^2 \quad (*)$$

برابری اخیر را می توان ثابت کرد، اگر صفحه ای، مثلاً عمود بر یال A_2A_3 رسم کنیم و توجه کنیم که، برای طول تصویر های a, b, c ، به ترتیب، مربوط به یال های A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 بر این صفحه، بنا بر قضیه کسینوس ها، داریم:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi_1 = c^2$$

اگر دو طرف این برابری را در عدد $\left(\frac{A_1 A_2}{4}\right)^2$ ضرب کنیم، برابری (*) به ازای $k=1$ به دست می آید. به همین ترتیب، می توان برابری (*) را، برای $k=2, 3$ به دست آورد. از آن جا

$$Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = 3S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 -$$

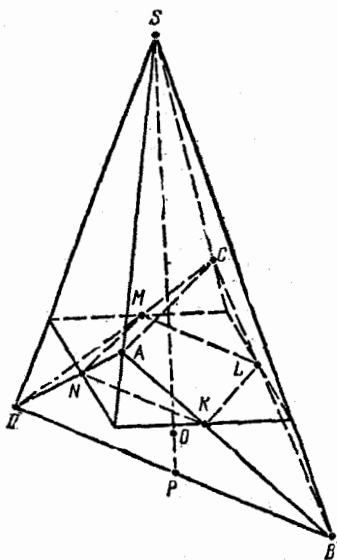
$$- 2S_1(S_1 \cos \varphi_1 + S_2 \cos \varphi_2 + S_3 \cos \varphi_3) = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2$$

که در نتیجه

$$\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_3^2} = \frac{Q_1^2}{9V^2} + \frac{Q_2^2}{9V^2} + \frac{Q_3^2}{9V^2} =$$

$$= \frac{S_1^2}{9V^2} + \frac{S_2^2}{9V^2} + \frac{S_3^2}{9V^2} + \frac{S_4^2}{9V^2} = \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2} + \frac{1}{h_4^2}$$

۳۰۰. نقطه های تماس کوره را بر یال های AB, BC, CD و DA ،



شکل ۱۱۳

به ترتیب K, L, M و N می گیریم (شکل ۱۱۳). از نقطه O ، مرکز کوره، خط راست AO عمود بر صفحه مربع $KLMN$ رسم می کنیم. چهار صفحه مماس بر کوره، در نقطه های K, L, M و N ، زاویه های دو وجهی برابری، با صفحه مربع می سازند؛ یعنی یا باهم موازی اند و یا در نقطه ای مثل S روی خط راست AO یکدیگر را قطع می کنند. در حالت اخیر، این صفحه ها، هرم منتظمی را به رأس S و قاعده مربعی $KLMN$ تشکیل می دهند که SK, SL, SM

و SN سهم‌های آن هستند. چون یال‌های AB ، BC ، CD و DA ، به ترتیب، بر وجه‌های این هرم قرار دارند، بنابراین، نقطه‌های A ، B ، C و D روی یال‌های آن قرار می‌گیرند. از برابری نیمسازهای SK ، SL ، SM و SN ، از زاویه‌های برابر ASB ، BSC ، CSD و DSA ، برابری مثلث‌های ASB ، BSC ، CSD و DSA نتیجه می‌شود و، از آن جا، به دست می‌آید:

$$SA = SC, SB = SD, AK = CL = CM = AN$$

و اگر یال AC هم، بر کره مماس باشد، باید داشته باشیم:

$$AC = AK + CL = 2AK$$

از تشابه مثلث‌های متساوی‌الساقین ASC و BSD ، با توجه به ویژگی نیمسازهای مثلث، داریم:

$$\frac{BD}{AC} = \frac{SB}{SA} = \frac{KB}{AK}$$

و از آن جا

$$BD = \frac{AC}{AK} \cdot KB = 2KB$$

به این ترتیب، برای نقطه P ، وسط یال BD ، که بر خط راست l واقع است، برابری $OP = OK$ برقرار است (زیرا مثلث‌های قائم‌الزاویه BOK و BOP ، با وتر مشترک BO ، دارای ضلع‌های مجاور به زاویه قائمه برابر BK و BP هستند)، یعنی یال BD در نقطه P ، بر کره مماس است.

سرانجام، در حالتی که چهار صفحه مماس، موازی با خط راست l باشند، آن وقت، صفحه مربع $KLMN$ را در ضلع‌های یک مربع قطع می‌کنند که، در ضمن، وسط ضلع‌های آن، همان نقطه‌های K ، L ، M و N هستند. در این حالت

$$AK = KB = BL = LC = CM = MD = DN = AN$$

و مرکز O ، که بر مرکز مربع $KLMN$ منطبق است، از یال‌های AC و BD

به يك فاصله است؛ يعنى كره تنها مى تواند به طور هم زمان بر اين يالها مماس باشد. درستي حكم، به طور كامل، ثابت شد.

۳۵۱. فرض كنيم، كره به مركز O و شعاع R ، بر چهاروجهی $ABCD$

محيط باشد. قرار مى گذاريم:

$$\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}, \vec{c} = \vec{OC}, \vec{d} = \vec{OD}$$

و به طور كلي، برای هر نقطه X از فضا: $\vec{x} = \vec{OX}$. در این صورت

$$a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = R^2$$

چون $\alpha \perp OA$ ، پس برای نقطه X از صفحه α داریم:

$$\vec{a}(\vec{x} - \vec{a}) = 0 \Rightarrow \vec{a}\vec{x} = R^2$$

به همین ترتیب، اگر نقطه X متعلق به صفحه‌های β ، γ یا δ باشد، به دست مى آید:

$$\vec{b}\vec{x} = R^2, \vec{c}\vec{x} = R^2, \vec{d}\vec{x} = R^2$$

توجه مى كنيم كه، معادله

$$(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b})\vec{x} = (\lambda + \mu)R^2$$

برای هر مقدار λ و μ (به شرطی كه باهم، برابر صفر نباشند)، صفحه‌ای را مى دهد كه از خط راست l ، فصل مشترك صفحه‌های α و β ، گذشته است (زیرا $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \neq 0$ و برای هر نقطه $x \in l$ داریم: $\vec{a}\vec{x} = \vec{b}\vec{x} = R^2$). به جز این، برای هر نقطه X فضا، مى توان عددهای λ و μ را طوری پیدا كرد كه به طور هم زمان صفر نباشند و، برای آنها، داشته باشیم:

$$\lambda(\vec{a}\vec{x} - R^2) + \mu(\vec{b}\vec{x} - R^2) = 0$$

يعنى از هر نقطه X ، صفحه‌ای با مقاديرهای متناظر λ و μ مى گذرد. بنا بر این، خط راست CD با خط راست l ، تنها وقتی در يك صفحه قرار مى گیرند كه دستگاه

$$\begin{cases} \lambda(\vec{a}\vec{c} - R^2) + \mu(\vec{b}\vec{c} - R^2) = 0 \\ \lambda(\vec{a}\vec{d} - R^2) + \mu(\vec{b}\vec{d} - R^2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda(\vec{a}\vec{b} - R^2) + \mu(\vec{b}\vec{d} - R^2) = 0 \end{cases}$$

جسوابی مخالف صفر داشته باشد (نسبت به دو مجهول λ و μ)، یعنی وقتی که

$$(ac - R^2)(bd - R^2) = (ad - R^2)(bc - R^2)$$

به همین ترتیب، ثابت می‌شود که، فصل مشترك صفحه‌های γ و δ ، تنها وقتی با خط راست AB در يك صفحه قرار می‌گیرند که داشته باشیم:

$$(ac - R^2)(db - R^2) = (eb - R^2)(da - R^2)$$

از آن جا که، دو شرط به دست آمده، هم ارزند، بنا بر این حکم مسأله درست است.

§ ۱۶. چند وجهی، کره و مجموعه‌های دیگر

۰۳۰۲. اگر طول ضلع مکعب را x بگیریم، آن وقت تفاضل حجم‌های مورد نظر مسأله، چنین است:

$$f(x) = \begin{cases} abc - x^3 & (0 < x \leq a) \\ abc + (x-a)x^2 - ax^2 & (a < x \leq b) \\ x^3 + ab(c-x) - abx & (b < x \leq c) \\ x^3 - abc & (c < x) \end{cases}$$

تابع $f(x)$ ، برای $x > 0$ پیوسته و مشتق آن برابر است با

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 & (0 < x < a) \\ 3x^2 - 4ax & (a < x < b) \\ 3x^2 - 2ab & (b < x < c) \\ 3x^2 & (c < x) \end{cases}$$

بنا بر این، تابع $f(x)$ ، برای $0 < x < a$ ، نزولی؛ برای $b < x$ صعودی (زیرا $3x^2 - 2ab > 3b^2 - 2ab > 0$)؛ و در بازه (a, b) نزولی است،

اگر داشته باشیم $b \leq \frac{4}{3}a$ (زیرا $3x^2 - 4ax$ از $3b^2 - 4ab$ ، که مقداری

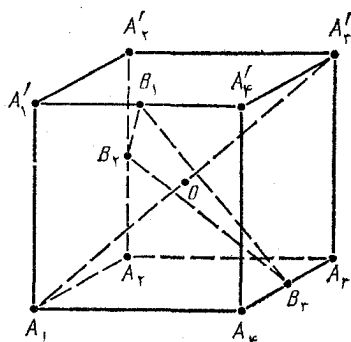
غیر مثبت است، کوچکتر است) و یا در نقطه $x = \frac{4}{3}a$ می نیم دارد، وقتی

که داشته باشیم: $b > \frac{4}{3}a$. به این ترتیب، حداقل مقدار تابع $f(x)$ ، یا

به ازای $x = b$ به دست می آید (اگر $b \leq \frac{4}{3}a$) و یا به ازای: $x = \frac{4}{3}a$

(اگر $b > \frac{4}{3}a$)، و مقدار مجهول x برابر است با

$$\min\left\{b, \frac{4}{3}a\right\}$$



شکل ۱۱۴

۰۳۰۳. از نقطه O مرکز مکعب

عمود بر قطر $A_1A_3A_4A_1'$ صفحه ای

(شکل ۱۱۴) این صفحه، از

نقطه های B_1 ، B_2 و B_3 ، وسط

یال های A_1A_4' ، A_2A_3' و A_3A_4

می گذرد، زیرا هر یک از نقطه های

B_1 ، B_2 و B_3 از رأس های A_1 و A_3'

به یک فاصله اند (برابر $\frac{a}{4}\sqrt{5}$). چون داریم:

$$B_1O = B_2O = B_3O,$$

$$B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_1 = a\sqrt{\frac{3}{4}} > \frac{a}{4}\sqrt{5}$$

بنابراین، هر یک از دو هرم منتظم $A_1B_1B_2B_3$ و $A_3'B_1B_2B_3$ (که نقطه مشترک درونی ندارند) شامل چهار وجهی منتظمی با ارتفاع های

$$\frac{a}{4}\sqrt{3} = A_1O = A_3'O$$

و قاعده $B'_1 B'_2 B'_3$ ، متجانس با مثلث $B_1 B_2 B_3$ نسبت به مرکز O هستند. بالاخره، در درون این چهاروجهی های

$$A_1 B'_1 B'_2 B'_3 \text{ و } A'_1 B'_1 B'_2 B'_3$$

چهاروجهی های منتظم مجهول قرار گرفته اند که متجانس با آن ها نسبت به مرکزند،

با ضریب تجانس $1 < \sqrt{\frac{2}{3}} < \frac{2}{3}$ ، با ارتفاعی برابر $a\sqrt{\frac{2}{3}}$ ، یعنی با یالی

برابر a .

۳۰۴. چهاروجهی با رأس های نقطه های مفروض A_1, A_2, A_3 و A_4

را در نظر می گیریم. به این ترتیب، فضا، به وسیله صفحه های وجه های این

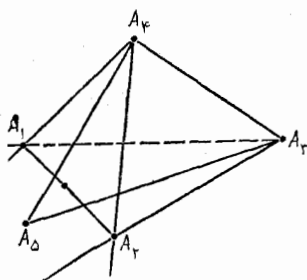
چهاروجهی، به دو مجموعه تقسیم می شود. مجموعه اول اجتماعی از ۴ حوزه

شبه هم است که، هر یک از آن ها، شامل یک کنج سه وجهی در یک رأس

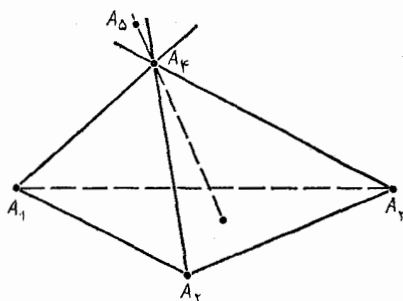
چهاروجهی و قرینه این کنج نسبت به رأس آن است. اگر نقطه A_5 ، مثلاً،

در حوزه ای باشد که شامل رأس A_4 است، آن وقت، خط راست $A_5 A_4$

مثلث $A_1 A_2 A_3$ را قطع می کند (شکل ۱۱۵).



شکل ۱۱۶



شکل ۱۱۵

مجموعه دوم، اجتماعی از ۶ حوزه شبه هم است که، هر کدام از

آن ها، عبارت است از اشتراك زاویه دووجهی مربوط به یالی از چهاروجهی،

با زاویه ای که قرینه زاویه دو وجهی مربوط به یال روبه رو نسبت به این یال

است. اگر A_5 ، مثلاً، در حوزه شامل یال $A_3 A_4$ باشد، آن وقت، خط راست

$A_1 A_2$ ، مثلث $A_3 A_4 A_5$ را قطع می کند (شکل ۱۱۶).

۳۵۵. برخلاف ادعای مسأله، فرض می‌کنیم، هر صفحه‌ای، بیش از ۳ مجموعه را قطع نکند. نقطه‌های A, B, C, D و E را از مجموعه‌های مختلف در نظر می‌گیریم. در این صورت، از این ۵ نقطه، هیچ ۴ نقطه‌ای بر يك صفحه و هیچ سه نقطه‌ای بر يك خط راست واقع نیستند. از ۳ نقطه آن‌ها، صفحه‌ای می‌گذرانیم که، دو نقطه دیگر، نسبت به آن، در دو نیم فضای مختلف قرار گیرند (دست کم، یکی از صفحه‌های ABC, ABD یا ABE ، دارای این ویژگی هستند). فرض کنید، این صفحه، از نقطه‌های A, B و C گذشته باشد. نقطه F ، که خط راست DE با آن برخورد می‌کند، به یکی از مجموعه‌های شامل نقطه‌های A, B یا C ، و مثلاً به مجموعه شامل نقطه A ، تعلق دارد. بنابراین، صفحه‌ای که از نقطه‌های D, E, F و B می‌گذرد، دست کم، ۴ مجموعه را قطع می‌کند. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۳۵۶. برخلاف ادعای مسأله، فرض می‌کنیم فضا را به ۳ مجموعه M_1, M_2 و M_3 طوری تقسیم کرده باشیم که بتوان، عددهای مثبت $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ را پیدا کرد، به نحوی که به ازای هر مقدار $i = 1, 2, 3$ ، بین نقطه‌های دلخواه مجموعه‌های M_i ، فاصله a_i تحقق نپذیرد. چهاروجهی $ABCD$ را، با این یال‌ها در نظر می‌گیریم:

$$AB = a_1, AC = BC = a_2, AD = BD = CD = a_3$$

(این چهاروجهی وجود دارد، زیرا مرکز O از دایره محیطی مثلث متساوی‌الساقین ABC ، که زاویه‌هایی حاده دارد، در درون آن واقع است، یعنی

$$OA = OB = OC < a_2 \leq a_3$$

و روی خط راستی که از O گذشته و بر صفحه ABC عمود باشد، می‌توان نقطه D را پیدا کرد). این چهاروجهی را در فضا طوری قرار می‌دهیم که

$$A \in B \in C \notin M_3 \text{ و } A \in B \notin M_2$$

برای این منظور، کافی است رأس D را در نقطه‌ای از مجموعه M_3 قرار

دهیم (اگر $M_3 = \emptyset$ ، آن وقت به خودی خود $M_3 \in M_3$)، سپس رأس C را در نقطه‌ای از مجموعه M_3 ، که از رأس D به فاصله a_3 باشد (اگر چنین نقطه‌ای وجود نداشته باشد، به خودی خود $M_3 \in M_3$)، در این صورت به دست می‌آید: $A, B \in M_1$ و $AB = a_1$ که فرض را نقض و درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۳۰۷. A_n را مجموعه 2^n گروه ممکن

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$$

می‌گیریم که از عددهای $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ ($i = 1, \dots, n$) تشکیل شده‌اند. همچنین قرار می‌گذاریم:

$$\mathbf{a}_\varepsilon = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \mathbf{a}_k$$

که در آن $\varepsilon \in A_n$ و $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ بردارهایی دلخواه‌اند. با استقرای روی n ثابت می‌کنیم:

$$\sum_{\varepsilon \in A_n} \mathbf{a}_\varepsilon^2 = 2^n \sum_{k=1}^n \mathbf{a}_k^2$$

برابری به ازای $n=1$ درست است، زیرا

$$\sum_{\varepsilon \in A_1} \mathbf{a}_\varepsilon^2 = \mathbf{a}_1^2 + (-\mathbf{a}_1)^2 = 2\mathbf{a}_1^2 = 2^1 \sum_{k=1}^1 \mathbf{a}_k^2$$

اکنون فرض می‌کنیم، برابری برای $(n-1) \in \mathbf{N}$ برقرار باشد. اگر در گروه

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$$

گروه زیر را جدا کنیم:

$$\varepsilon' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$$

و قرار بگذاریم:

$$\mathbf{a}_{\varepsilon'} = \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k \mathbf{a}_k$$

آن وقت، با استفاده از برابری

$$(b+c)^2 + (b-c)^2 = 2b^2 + 2c^2$$

که برای هر دو بردار دلخواه b و c درست است (با برابری متوازی الاضلاع مقایسه کنید)، می توان برابری مطلوب را، برای مقدار n ، به دست آورد:

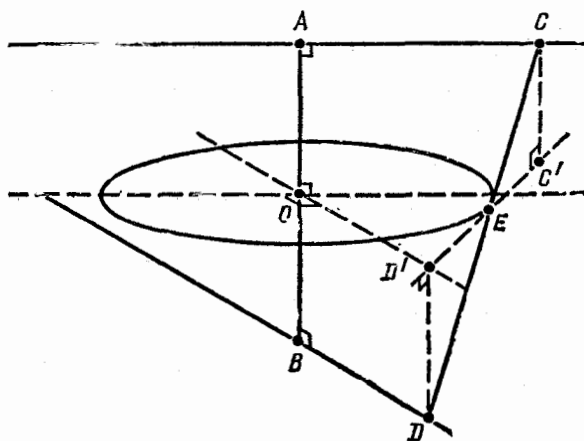
$$\begin{aligned} \sum_{\varepsilon \in A_n} a_\varepsilon^2 &= \sum_{\varepsilon' \in A_{n-1}} [(a_{\varepsilon'} + a_n)^2 + (a_{\varepsilon'} - a_n)^2] = \\ &= \sum_{\varepsilon' \in A_{n-1}} 2(a_{\varepsilon'}^2 + a_n^2) = 2 \times 2^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + 2 \times 2^{n-1} a_n^2 = 2^n \sum_{k=1}^n a_k^2 \end{aligned}$$

حکم مسأله، در حالت کلی، ثابت شد.

۳۰۸. E را نقطه برخورد پاره خط CD با صفحه ای که در صورت مسأله آمده است، و C' و D' را، تصویرهای دو نقطه C و D بر این صفحه می گیریم. (شکل ۱۱۷).

از برابری مثلث های قائم الزاویه $CC'E$ و $DD'E$ (که در آنها،

داریم: $CC' = DD' = \frac{1}{2}a$ و $\widehat{CEC'} = \widehat{DED'}$)، نتیجه می شود که OE



شکل ۱۱۷

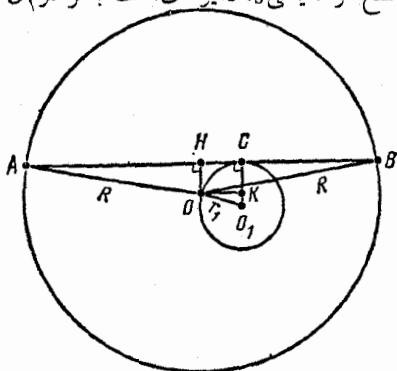
میانۀ مثلث قائم الزاویۀ $C'OD'$ است و از آن جا

$$C'D' = 2OE = 2r$$

بنابراین

$$CD = 2\sqrt{C'C^2 + C'E^2} = \sqrt{4r^2 + a^2}$$

و نقطۀ C ، پاره خط راست به طول $2r$ و به مرکز نقطۀ A را می بینیم.
 ۰۳۵۹ از نقطه های A و B و نقطۀ O ، مرکز کروی S ، صفحه ای
 می گذرانیم. مقطع کره، یعنی S ، دایره ای است به مرکز O_1 و شعاع $r_1 \leq r$ ، که



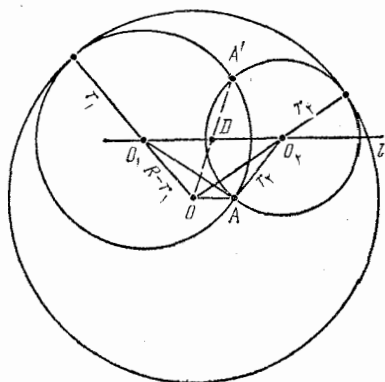
شکل ۱۱۸

بر خط راست AB مماس است. OH و OK را، به ترتیب، عمود بر
 خط های راست O_1C و AB فرض می کنیم (شکل ۱۱۸)، در این صورت
 با فرض

$$AB = 2a, \quad OH = h$$

به دست می آید:

$$\begin{aligned} AC^2 + BC^2 &= (a + HC)^2 + (a - HC)^2 = 2a^2 + 2HC^2 = \\ &= 2(R^2 - OH^2) + 2(OO_1^2 - O_1K^2) = \\ &= 2(R^2 - h^2) + 2[r_1^2 - (r_1 - h)^2] = \\ &= 2R^2 - 4h^2 + 4hr_1 = 2R^2 + r_1^2 - (2h - r_1)^2 \leq 2R^2 + r^2 \end{aligned}$$



شکل ۱۱۹

۳۱۰. خط راست d را از

نقطه A ، عمود بر صفحه ABC رسم می کنیم. در این صورت، مرکزهای O_1 و O_2 کره های مماس بر کره S ، روی خط راست l قرار دارد که نقطه های آن از سه نقطه A ، B و C به یک فاصله اند، یعنی با خط راست d موازی است. A' را قرینه نقطه A نسبت به خط راست l ، و D را نقطه برخورد خط های راست OA' و l

می گیریم (شکل ۱۱۹). نقطه A (و همچنین، نقطه A') متعلق به هر دو کره است، بنابراین $O_1A = r_1$ و $O_2A = r_2$. از شرط مماس بودن کره ها، به دست می آید:

$$O_1O = R - r_1, \quad O_2O = R - r_2$$

در نتیجه

$$O_1O + O_1A = R = O_2O + O_2A$$

ثابت می کنیم، نقطه های O_1 و O_2 ، نسبت به نقطه D ، قرینه یکدیگرند. در واقع، اگر نقطه O_1 را، که برای آن داریم:

$$O_1O + O_1A = R$$

تثبیت کنیم، برای نقطه O_2 ، قرینه O_1 نسبت به نقطه D ، داریم:

$$O_2O + O_2A = O_1A + O_1O = R$$

سپس، برای هر نقطه O'_1 ، واقع بر خط راست l بین نقطه های D و O_2 ، داریم:

$$O'_1O + O'_1A = O'_1O + O'_1A' < O_2O + O_2A' = O_2O + O_2A = R$$

(زیرا، محیط مثلث درونی از محیط بیرونی، کمتر است)؛ و برای هر نقطه

O''_1 واقع بر امتداد پاره خط راست DO_1 (از طرف نقطه O_1)، به همان ترتیب، به دست می آید:

$$O''_1 O + O''_1 A > R$$

نقطه های نیم خط راست DO_1 را هم، به همین ترتیب، می توان مورد بررسی قرار داد، به این ترتیب، به دست می آید:

$$R - r_1 = O_1 O = O_1 A = r_1$$

و از آن جا

$$R = r_1 + r_1$$

۳۱۱. این نمادهای تکمیلی را می پذیریم: Q ، مساحت قاعده و h ، ارتفاع هرم؛ x ، کسینوس زاویه دوجهی بین قاعده و وجه جانبی؛ a ، ضلع قاعده؛ r ، شعاع دایره محاطی قاعده. در این صورت، این برابری ها را داریم:

$$a = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}, \quad Q = n \cdot \frac{1}{2} \cdot ra = nr^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$$

$$h = r \operatorname{tg}(\operatorname{arc} \cos x) = \frac{r\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad S = Q + \frac{1}{x}Q$$

از آن جا

$$Q = \frac{xS}{x+1}, \quad r = \sqrt{\frac{Q}{n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}} = \sqrt{\frac{S}{n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}} \cdot \frac{x}{x+1}}$$

$$V = \frac{1}{3}hQ = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \cdot \sqrt{\frac{S}{n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}} \cdot \frac{x}{x+1}} \cdot \frac{xS}{x+1} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{S^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}} \cdot f(x)$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x(1-x)}}{1+x}$$

الف) داریم:

$$f'(x) = \frac{1-3x}{2(1+x)^2\sqrt{x(1-x)}}$$

بنابراین، حداکثر مقدار تابع $f(x)$ ، برای $x \in (0, 1)$ ، برابر است با

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

(زیرا برای $x < \frac{1}{3}$ داریم $f'(x) > 0$ و برای $x > \frac{1}{3}$ داریم $f'(x) < 0$)؛ و

مقدار مجهول حجم V ، چنین می‌شود:

$$\frac{\sqrt{2} \cdot S^{\frac{2}{3}}}{12 \sqrt{n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}}$$

ب) اگر در رابطه‌ای که بین مقادیرهای V ، S ، n و x به دست

آورده‌ایم، مقادیرهای مفروض n ، S و V را قرار دهیم، به این معادله برای

x می‌رسیم:

$$\frac{\sqrt{x(1-x)}}{1+x} = \frac{2}{9}$$

که دو ریشه دارد: $x_1 = \frac{1}{17}$ و $x_2 = \frac{4}{5}$. بنابراین $Q_1 = 8$ و $Q_2 = 64$ ؛ از

آن جا $r_1 = \sqrt{2}$ و $r_2 = 4$. بنابراین

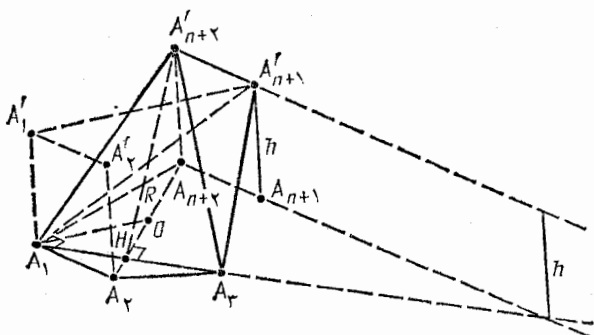
$$a_1 = 2\sqrt{2}, h_1 = 24; a_2 = 8, h_2 = 3$$

۳۱۲. ارتفاع منشور را h می‌نامیم. در این صورت، در چهاروجهی

$$A_1 A_2 A'_{n+1} A'_{n+2}$$

(شکل ۱۲۰)، زاویه بین یال‌های روبه‌روی $A_1 A_2$ و $A'_{n+1} A'_{n+2}$ برابر است با

$$\widehat{A_2 A_1 A_2} = \frac{1}{2} \widehat{A_2 O A_2} = \frac{180^\circ}{2n}$$



شکل ۱۲۰

(که در آن، O ، مرکز چند ضلعی $A_1 \dots A_{2n}$ است؛ توجه کنیم که خط‌های راست $A_1 A_2$ و $A'_{n+1} A'_{n+2}$ باهم موازی‌اند). فاصله بین یال‌های $A_1 A_2$ و $A'_{n+1} A'_{n+2}$ برابر h و طول آن‌ها، چنین است:

$$A_1 A_2 = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}, \quad A'_{n+1} A'_{n+2} = 2R \sin \frac{180^\circ}{2n}$$

بنابراین، حجم چهاروجهی ما، برابر است با

$$\frac{1}{6} A_1 A_2 \cdot A'_{n+1} A'_{n+2} \cdot h \cdot \sin \frac{180^\circ}{2n} = \frac{2}{3} R^2 h \sin \frac{180^\circ}{n} \sin^2 \frac{180^\circ}{2n}$$

از طرف دیگر، اگر زاویه بین خط راست $A_1 A'_{n+1}$ و صفحه

$A_1 A_2 A'_{n+2}$ را، φ بگیریم، آن وقت، همین حجم، چنین می‌شود:

$$\frac{1}{\psi} S_{A_1 A_2 A'_{n+2}} \cdot A_1 A'_{n+1} \cdot \sin \varphi$$

که در آن

$$A_1 A'_{n+1} = \sqrt{(A_1 A_1')^2 + (A_1' A'_{n+1})^2} = \sqrt{h^2 + \psi R^2},$$

$$S_{A_1 A_2 A'_{n+2}} = \frac{1}{\psi} A_1 A_2 \cdot A'_{n+2} H =$$

$$= \frac{1}{\psi} \cdot \psi R \cdot \sin \frac{180^\circ}{n} \cdot \sqrt{h^2 + \left(\psi R \cos^2 \frac{180^\circ}{2n} \right)^2}$$

$(A'_{n+2} H)$ ارتفاع مثلث $A_1 A_2 A'_{n+2}$ است). بنابراین به دست می آید:

$$\frac{\psi}{\psi} R^2 h \sin \frac{180^\circ}{n} \sin^2 \frac{180^\circ}{2n} =$$

$$= \frac{1}{\psi} R \sin \frac{180^\circ}{n} \cdot \sqrt{h^2 + \psi R^2 \cos^2 \frac{180^\circ}{2n}} \cdot \sqrt{h^2 + \psi R^2} \cdot \sin \varphi$$

به این ترتیب، مقدار

$$\sin \varphi = \psi R \sin^2 \frac{180^\circ}{2n} \left(h^2 + \frac{16 R^2 \cos^4 \frac{180^\circ}{2n}}{h^2} + \right. \\ \left. + \psi R^2 \cos^4 \frac{180^\circ}{2n} + \psi R^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

وقتی ماکزیمم می شود که نابرابری

$$h^2 + \frac{16 R^2 \cos^4 \frac{180^\circ}{2n}}{h^2} \geq \psi \sqrt{16 R^2 \cos^4 \frac{180^\circ}{2n}}$$

به برابری تبدیل شود، یعنی وقتی که داشته باشیم:

$$h^2 = \frac{16R^2 \cos^2 18^\circ}{2n} \Rightarrow h = 2R \cos \frac{18^\circ}{2n}$$

۳۱۳. از برابری یال‌های جانبی هرم $SA_1 \dots A_n$ نتیجه می‌شود که نقطه O ، تصویر رأس S بر قاعدهٔ هرم، از رأس‌های A_1, \dots, A_n به یک فاصله است، یعنی، نقطهٔ O ، مرکز دایرهٔ محیطی چندضلعی $A_1 \dots A_n$ می‌باشد. چون به ازای هر مقدار $n \dots 1, k$ ، هرم $SOA_k A_{k+1}$ ($A_{n+1} = A_1$) نسبت به صفحهٔ نیمساز زاویهٔ دو وجهی مربوط به یال SO ، متقارن است، بنابراین، زاویه‌های دو وجهی این هرم، که مربوط به یال‌های SA_k و SA_{k+1} هستند، باهم برابر می‌شوند که مقدار هر کدام از آن‌ها را φ_k می‌نامیم. بنا بر فرض مسأله

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_2 + \varphi_3 = \dots = \varphi_{n-1} + \varphi_n = \varphi_n + \varphi_1$$

و در ضمن، n ، عددی است فرد، بنا بر این

$$\varphi_1 = \varphi_3 = \dots = \varphi_n = \varphi_2 = \dots = \varphi_{n-1}$$

از این جا معلوم می‌شود که همهٔ هرم‌های $SOA_k A_{k+1}$ باهم برابرند (زیرا، هر دو هرم مجاور، نسبت به وجه مشترکشان، قرینهٔ یکدیگرند)؛ یعنی همهٔ زاویه‌های $A_k O A_{k+1}$ باهم برابرند. به این ترتیب، چندضلعی $A_1 \dots A_n$ منتظم است.

۳۱۴. فرض می‌کنیم:

$$\vec{SA} = \mathbf{a}, \quad \vec{SB} = \mathbf{b}, \quad \vec{SC} = \mathbf{c}$$

(شکل ۱۲۱)، در این صورت

$$\vec{AD} = \vec{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}, \quad \vec{SD} = \vec{SA} + \vec{AD} = \mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b}$$

و اگر، در ضمن، فرض کنیم:

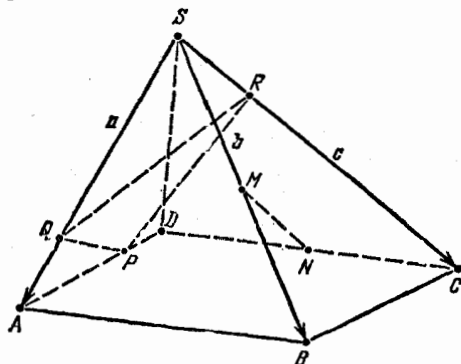
$$\vec{SQ} = x\mathbf{a}$$

آن وقت، خواهیم داشت:

$$\vec{SR} = (1-x)\mathbf{c}, \quad \vec{SP} = \vec{SA} + x\vec{AD} = \mathbf{a} + x(\mathbf{c} - \mathbf{b}),$$

$$\vec{QR} = \vec{SR} - \vec{SQ} = (1-x)\mathbf{c} - x\mathbf{a},$$

$$\vec{QP} = \vec{SP} - \vec{SQ} = (1-x)\mathbf{a} + x(\mathbf{c} - \mathbf{b})$$



شکل ۱۳۱

در ضمن، بردارهای \vec{QR} و \vec{QP} ، به ازای هیچ مقداری از x ، موازی نیستند (که نتیجه‌ای است از تجزیه آنها به سه بردار \mathbf{a} ، \mathbf{b} و \mathbf{c} که در یک صفحه واقع نیستند). چون نقطه M ، در صفحه‌ای قرار دارد که از نقطه N موازی صفحه α رسم شده است، بنابراین، برای مقدارهایی از λ و μ داریم:

$$\vec{SM} = \vec{SN} + \lambda\vec{QR} + \mu\vec{QP} =$$

$$= \frac{1}{\gamma}(\vec{SC} + \vec{SD}) + \lambda[(1-x)\mathbf{c} - x\mathbf{a}] + \mu[(1-x)\mathbf{a} + x(\mathbf{c} - \mathbf{b})] =$$

$$= \left[\frac{1}{\gamma} - \lambda x + \mu(1-x) \right] \mathbf{a} +$$

$$+ \left(-\frac{1}{\gamma} - \mu x \right) \mathbf{b} + [1 + \lambda(1-x) + \mu x] \mathbf{c}$$

بنابراین، نقطه M ، تنها وقتی بر خط راست SB قرار می‌گیرد که
 $\vec{SM} = y\vec{b}$ ، یعنی

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \lambda x + \mu(1-x) = 0 \\ 1 + \lambda(1-x) + \mu x = 0 \end{cases}$$

از این دستگاه، به دست می‌آید:

$$\mu = -\frac{x+1}{2(2x^2-2x+1)}, \lambda = \frac{3x-2}{2(2x^2-2x+1)}$$

[توجه کنیم که: $0 < (2x-1)^2 + 1 = 4x^2 - 4x + 2$]. بنابراین،
 مقادیرهای مجهول y ، و تنها آن‌ها، در برابری

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{x(x+1)}{2(2x^2-2x+1)}$$

دست کم به ازای یک مقدار x ، صدق می‌کنند. به زبان دیگر، معادله

$$(4y+1)x^2 - (4y+3)x + (2y+1) = 0$$

نسبت به x ، به ازای مقادیرهای مجهول y ، یعنی به ازای

$$(4y+3)^2 - 4(4y+1)(2y+1) = -16y^2 + 5 \geq 0$$

قابل حل است (از آن جمله به ازای $4y-1=0$ ، $4y+3 \neq 0$). به این

ترتیب، مقادیرهای مجهول y ، بازه $\left[-\frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{\sqrt{5}}{4}\right]$ را پر می‌کنند.

۳۱۵. قاعدهٔ بزرگ M_1 از هرم اصلی را به مساحت S_1 و قاعدهٔ

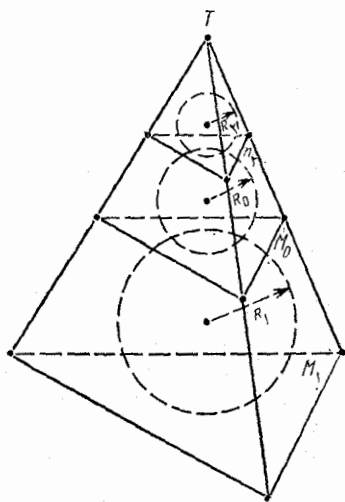
کوچک M_2 آن را به مساحت S_2 و قاعدهٔ مشترک M_0 دو هرمی که از هرم

اصلی به وجود آمده‌اند، به مساحت S_0 می‌گیریم. یال‌های هرم ناقص را

ادامه می‌دهیم تا در نقطهٔ T به هم برسند و هرم‌های به رأس T و قاعده‌های

M_1 ، M_2 و M_0 را، به ترتیب، P_1 ، P_2 و P_0 می‌نامیم (شکل ۱۲۲).

تجانس نسبت به نقطهٔ T ، که قاعدهٔ M_1 را به قاعدهٔ M_0 تبدیل کند، کرهٔ



شکل ۱۳۲

محاط در هرم P_1 را به کره محاط در هرم P_0 تبدیل می کند و، بنابراین در این تجانس، قاعده M_0 به قاعده M_2 و کره محاط در هرم P_0 به کره محاط در هرم P_2 تبدیل می شود. به این ترتیب، برای شعاع های R_2, R_1 و R_0 از کره های محاطی، و مساحت های Q_2, Q_1, Q_0 ، سطح جانبی هرم های P_0, P_2, P_1 ، خواهیم داشت:

$$\frac{R_0}{R_1} = \frac{R_2}{R_0}, \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{R_2^2}{R_1^2}$$

حجم هرم P_2 ، از يك طرف، برابر است با $\frac{1}{3}R_2(Q_2 + S_2)$ و، از

طرف دیگر $\frac{1}{3}R_0(Q_2 - S_2)$ (زیرا، کره به شعاع R_0 ، نسبت به هرم R_2 ، محاطی بیرونی است)، بنابراین

$$R_2(Q_2 + S_2) = R_0(Q_2 - S_2)$$

از آن جا

$$\frac{Q_2 - S_2}{Q_2 + S_2} = \frac{R_2}{R_0} = \frac{R_2}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{\sqrt{R_2}}{\sqrt{R_1}} = \frac{\sqrt[4]{S_2}}{\sqrt[4]{S_1}}$$

در نتیجه

$$(Q_2 - S_2)\sqrt[4]{S_1} = (Q_2 + S_2)\sqrt[4]{S_2}$$

بنابراین، به دست می آید:

$$\frac{Q_2}{S_2} = \frac{\sqrt[4]{S_1} + \sqrt[4]{S_2}}{\sqrt[4]{S_1} - \sqrt[4]{S_2}}$$

$$S = Q_1 - Q_2 = \frac{Q_2}{S_2}(S_1 - S_2) = \frac{\sqrt[4]{S_1} + \sqrt[4]{S_2}}{\sqrt[4]{S_1} - \sqrt[4]{S_2}}(S_1 - S_2) =$$

$$= (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})(\sqrt[4]{S_1} + \sqrt[4]{S_2})^2$$

۳۱۶ الف) ثابت می‌کنیم، اگر نقطه‌های A_1, A_2, \dots, A_n روی سطح کره به مرکز O و شعاع واحد، طوری قرار گرفته باشند که، فاصله بین دو نقطه دلخواه A_i و A_j ($i \neq j$)، کمتر از $\sqrt{2}$ نباشد، آن وقت $n \leq 6$. فرض می‌کنیم $n > 6$. بنا به قضیه کسینوس‌ها داریم:

$$A_i A_j^2 = 2 - 2 \cos(A_i O A_j) \geq 2$$

از آن جا $\widehat{A_i O A_j} \geq 90^\circ$ و $\vec{OA_i} \cdot \vec{OA_j} \leq 0$. دستگاه محورهای مختصات فضائی را به مبدا O ، به این طریق، انتخاب می‌کنیم. قبل از همه، یادآوری می‌کنیم که، بین بردارهای $\vec{OA_i}$ ، حتماً سه بردار پیدا می‌شود که هم صفحه نیستند (در غیر این صورت، همه $n > 4$ بردار، روی یک صفحه قرار می‌گیرند و، بنا بر این، زاویه بین هر دو بردار دلخواه، حاده می‌شود). بدون این که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض را بر این گرفت که، بردارهای $\vec{OA_1}, \vec{OA_2}, \vec{OA_3}$ ، روی یک صفحه نیستند. محور OX را در طول خط راست OA_1 طوری در نظر می‌گیریم که، طول نقطه A_1 ، برابر واحد شود. سپس، محور OY را طوری انتخاب می‌کنیم که، نقطه A_2 در صفحه XOY قرار گیرد و عرضی مثبت داشته باشد. سرانجام، جهت محور OZ را طوری در نظر می‌گیریم که ارتفاع نقطه A_3 ، مقداری مثبت باشد. مختصات نقطه A_i را (x_i, y_i, z_i) فرض می‌کنیم. در این صورت

$$\vec{OA_1} = (1, 0, 0) \text{ و } \vec{OA_2} = (x_2, y_2, 0) \text{ و } \vec{OA_3} = (x_3, y_3, z_3)$$

که در آن‌ها $y_2 > 0$ و $z_3 > 0$ ؛ بنا بر این، برای هر مقدار $i > 1$ داریم:

$$\vec{OA}_i \cdot \vec{OA}_1 = x_i \leq 0$$

سپس. برای هر مقدار $i > 2$ داریم:

$$\vec{OA}_i \cdot \vec{OA}_2 = x_i x_2 + y_i y_2 \leq 0$$

از آن جا $y_i \leq 0$ (زیرا $x_2 \leq 0, x_i \leq 0, y_2 > 0$)؛ سرانجام، برای همه مقادیر $i > 3$ داریم:

$$\vec{OA}_i \cdot \vec{OA}_3 = x_i x_3 + y_i y_3 + z_i z_3 \leq 0$$

از آن جا $z_i \leq 0$ (زیرا $x_3 \leq 0, x_i \leq 0, y_3 \leq 0, y_i \leq 0, z_3 > 0$).

بین چهار بردار $\vec{OA}_4, \vec{OA}_5, \vec{OA}_6, \vec{OA}_7$ دست کسم دو بردار، دارای مختص هم نام منفی هستند، یعنی، حاصل ضرب اسکالر آنها، مثبت است. تناقض حاصل، ثابت می کند $n \leq 6$. چون شش نقطه با مختصات

$$(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)$$

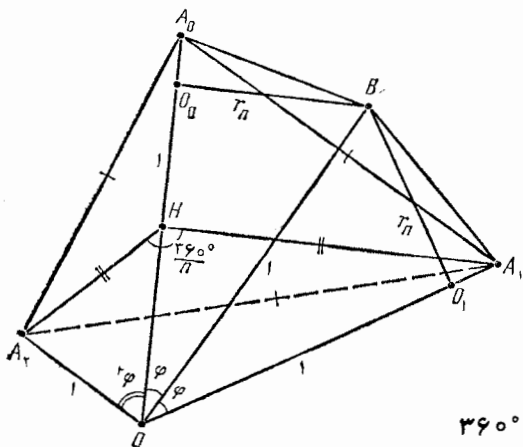
با شرط بخش الف) سازگارند، بنا براین، حداکثر تعداد نقطه‌ها، برابر است با ۶.

ب) ثابت می کنیم، اگر نقطه‌های A_1, A_2, \dots, A_n ، روی همان کره، طوری قرار گرفته باشند که فاصله بین هر دو نقطه A_i و A_j ($i \neq j$)، بزرگتر از $\sqrt{2}$ باشد، آن وقت $n \leq 4$. فرض می کنیم $n > 4$. در این صورت

$\vec{OA}_i \cdot \vec{OA}_j < 0$ ، اگر همان دستگاه مختصات فضائی بخش الف) را در نظر بگیریم، شبیه همان جا، برای $i > 3$ خواهیم داشت: $x_i < 0, y_i < 0, z_i < 0$.

بنا براین، حاصل ضرب اسکالر بردارهای \vec{OA}_5 و \vec{OA}_4 ، مثبت، می شود. به این ترتیب، ثابت شد $n \leq 4$. چون ۴ رأس چهاروجهی منتظم محاط در کره، با شرط بخش ب) سازگارند، بنا براین، حداکثر تعداد نقطه‌ها برابر است با ۴.

۳۱۷. مرکز کسره را O ، مرکز دایره‌های C_i ($i = 0, 1, \dots, n$) را



شکل ۱۲۳

O_i ، نقطه برخورد نیم خط راست OO_i با کره را A_i و نقطه تماس دایره‌های C_0 و C_1 را B می‌نامیم.

در این صورت $\widehat{A_0OB} = \varphi$ می‌گیریم،

$$\sin \varphi = r_n, \quad A_0A_i = 2r_n$$

زیرا

$$OB = OA_0 = OA_1 = 1, \quad O_0B = O_1B = r_n,$$

$$\widehat{OO_0B} = \widehat{OO_1B} = 90^\circ$$

(شکل ۱۲۳). در هرم منتظم $OA_0A_1A_2$ ، زاویه‌های مسطحه رأس O برابر

2φ و زاویه دو وجهی مربوط به یال OA_0 برابر $\frac{360^\circ}{n}$ است. اگر A_1H ،

بر یال OA_0 عمود باشد، آن وقت

$$A_1H = A_2H = \sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi = 2r_n \sqrt{1 - r_n^2}$$

سپس، داریم:

$$2r_n = A_0A_1 = A_1A_2 = 2A_1H \sin \frac{180^\circ}{n} = 2r_n \sqrt{1 - r_n^2} \sin \frac{180^\circ}{n}$$

از آنجا

$$2\sqrt{1 - r_n^2} \sin \frac{180^\circ}{n} = 1$$

بنابراین

$$\sin \frac{180^\circ}{n} = \frac{1}{2\sqrt{1 - r_n^2}} > \frac{1}{2} \text{ و } n < 6$$

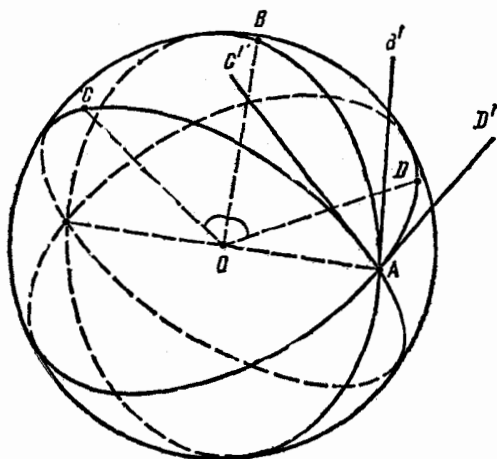
(نابرابری اخیر را، از این جا هم می توان به دست آورد که، زاویه دووجهی

$A_1HA_2 = \frac{360^\circ}{n}$ مربوط به یال جانبی OA_0 ، از زاویه مسطحه

$A_0A_1A_2 = 60^\circ$ در قاعده هرم، بزرگتر است)؛ و برای بقیه مقادیرهای

$n = 2, 3, 4, 5$ داریم:

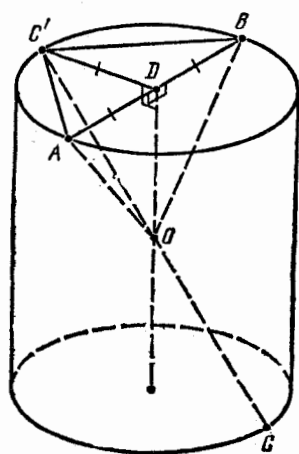
$$r_n = \sqrt{1 - \frac{1}{4 \sin^2 \frac{180^\circ}{n}}}$$



شکل ۱۴۴

۳۱۸. زاویه بین $C'AB'$ ، برابر با زاویه دو وجهی مربوط به یال OA و وجههایی است که از نقطه‌های B و C می‌گذرند، زیرا نیم خط‌های راست AB' و AC' بر شعاع مشترک OA عمودند (شکل ۱۲۴). به همین ترتیب، زاویه $D'AB'$ برابر است با زاویه دو وجهی مربوط به یال OA و وجههایی که از نقطه‌های B و D می‌گذرند. از آنجا که این زاویه‌های دووجهی، نسبت به خط راست OB قرینه یکدیگرند (خط راست OA قرینه خودش، و نقطه C قرینه نقطه D است)، بنا بر این، باهم برابرند، یعنی زاویه‌های خطی آنها هم، با یکدیگر برابرند:

$$\widehat{C'AB'} = \widehat{D'AB'}$$



شکل ۱۲۵

۳۱۹. C' را قرینه نقطه C نسبت به O ، مرکز تقارن استوانه، می‌گیریم (شکل ۱۲۵). اگر در کنج سه وجهی $OABC$ ، زاویه‌های دووجهی مربوط به یال‌های OA ، OB و OC برابر α ، β و γ فرض کنیم، آن وقت، زاویه‌های دووجهی کنج $OABC'$ مربوط به یال‌های OA ، OB و OC' ، به ترتیب، برابر $180^\circ - \alpha$ ، $180^\circ - \beta$ و γ می‌شوند. اگر D را مرکز دایره به قطر AB فرض کنیم، در هرم $OADC'$ ، زاویه‌های دو وجهی مربوط به یال‌های OA و OC' برابرند (زیرا، این هرم، نسبت به صفحه

نیمساز زاویه دو وجهی مربوط به یال OD ، متقارن است)؛ همچنین، در هرم $OBDC'$ ، زاویه‌های دو وجهی مربوط به یال‌های OB و OC' برابرند (به همان علت). از آنجا

$$(180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) = \gamma \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$$

چیزی که باید ثابت می‌کردیم.

۰۳۲۰. یادآوری می‌کنیم که، مجموع زاویه‌های مسطحه در کنج مفروض، به رأس S و یال‌های SA_1, \dots, SA_n ، از 360° درجه کمتر است. نقطه O را در درون این کنج n وجهی انتخاب می‌کنیم و، از آنجا، عمودهای OH_i را بر صفحه‌های $SA_i A_{i+1}$ رسم می‌کنیم ($A_{n+1} = A_1$; $i = 1, \dots, n$). کنج n وجهی حاصل، به رأس O و یال‌های OH_i ، کنجی محدب است، زیرا همه یال‌های آن، نسبت به هر یک از وجه‌هایش، در همان نیم فضای واقع اند که نقطه S قرار دارد. هر یک از زاویه‌های مسطحه $H_i O H_{i-1}$ آن $(H_0 = H_n)$ در مجموع با زاویه خطی زاویه دو وجهی مربوط به یال SA_i (که بر صفحه $H_i O H_{i-1}$ عمود است)، برابر 180° درجه می‌شود. از آنجا که، مجموع زاویه‌های مسطحه کنج n وجهی ساخته شده، کمتر از 360° درجه است، بنابراین، مجموع زاویه‌های دو وجهی کنج n وجهی اولیه، از $360^\circ - 180^\circ \times n$ بیشتر است و نمی‌تواند، برای مقدارهای $n \geq 2$ ، از 360° درجه کمتر شود. بنابراین، شرط مسأله، تنها در یک کنج سه وجهی صدق می‌کند.

۰۳۲۱. دستگاه مختصات فضائی را در نظر می‌گیریم و برای هر مقدار

$$i = 1, 2, \dots, 1979$$

مجموعه Z_i را شامل همه نقطه‌هایی انتخاب می‌کنیم که، طول‌های آن‌ها، در برابری زیر صدق کنند:

$$[x] \equiv i \pmod{1979}$$

این نمونه، نشان می‌دهد که به پرسش مسأله، باید پاسخ مثبت داد.

۰۳۲۲. با استقرای روی n ، ثابت می‌کنیم که n خط راست، نمی‌توانند

صفحه را، به بیش از

$$p(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

بخش، تقسیم کنند؛ در ضمن، وقتی می‌توان درست به $p(n)$ بخش رسید که، هیچ دو خط راستی موازی نباشند و هیچ سه خط راستی از یک نقطه نگذرند.

درواقع $p(0) = 1$ و، به ازای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ ، داریم:

$$p(n) \leq p(n-1) + n = \frac{(n-1)n}{2} + 1 + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

در ضمن، برابری هم، می تواند برقرار باشد (خط راست n ام، ضمن برخورد با بقیه خط های راست، خودش به بیش از n بخش تقسیم نمی شود و، هر یک از این بخش ها، بخش تازه ای را در صفحه پدید می آورد).
به همین ترتیب، می توان ثابت کرد که، n صفحه، فضا را به بیش از

$$q(n) = \frac{n^3 + 5n + 6}{6}$$

بخش، تقسیم نمی کنند؛ در ضمن، $q(n)$ بخش وقتی به دست می آید که هیچ دو صفحه ای موازی نباشند، هیچ سه صفحه ای از یک خط راست نگذردند و هیچ چهار صفحه ای از یک نقطه عبور نکنند. در واقع $q(0) = 1$ و، به ازای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ ، داریم:

$$\begin{aligned} q(n) &\leq q(n-1) + p(n-1) = \\ &= \frac{(n-1)^3 + 5(n-1) + 6}{6} + \frac{(n-1)n}{2} + 1 = \frac{n^3 + 5n + 6}{6} \end{aligned}$$

در ضمن، برابری هم ممکن است (صفحه n ام، ضمن برخورد با صفحه های دیگر، به بیش از $p(n-1)$ بخش تقسیم نمی شود و، هر یک از این بخش ها، بخش تازه ای از فضا را معین می کند).

تعداد صفحه های لازم، برای تقسیم فضا، دست کم به ۳۰۰ بخش،

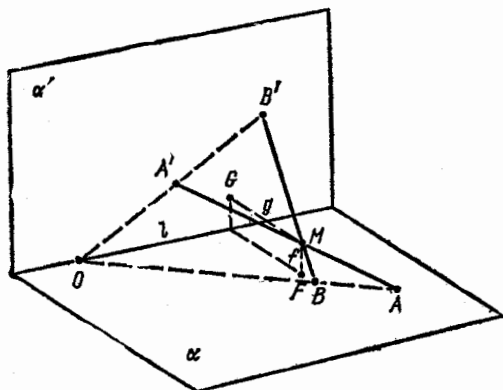
برابر است با ۱۳، زیرا

$$q(12) = 299 < 300 < 378 = q(13)$$

درواقع، ۱۲ صفحه کافی نیست و با ۱۳ صفحه، می توان فضا را به $q(13)$ بخش تقسیم کرد؛ سپس، در داخل هر بخش فضا، نقطه ای در نظر می گیریم و مکعبی را انتخاب می کنیم که شامل همه این $q(13)$ نقطه باشد. اکنون، تنها این می ماند که تمامی ساختمان را، به ساختمانی متشابه خود، با انتخاب

ضریب مناسب، تبدیل کرد.

۳۲۳. ثابت می‌کنیم، با توجه به شرط‌های مسأله، خط‌های راست AA' و BB' ، در هر موقعیتی از صفحه α' ، یکدیگر را قطع می‌کنند. چون در موقعیت اولیه، این خط‌های راست، متقاطع‌اند، بنابراین نقطه‌های A, A' ، یا B, B' روی یک صفحه‌اند. بنابراین، خط‌های راست AB و $A'B'$ ، یا یکدیگر را قطع می‌کنند و یا با هم موازی‌اند. در حالت اول (شکل ۱۲۶)،



شکل ۱۲۶

نقطه برخورد آن‌ها، O ، روی خط راست l است و در ضمن

$$OA \cdot OB' \neq OB \cdot OA'$$

(زیرا، در این حالت، خط‌های راست AA' و BB' موازی نیستند). از آن‌جا که، همین شرط‌ها، برای موقعیت‌های دیگر α' هم، برقرار است، بنابراین، خط‌های راست AA' و BB' ، مثل قبل، یکدیگر را قطع می‌کنند. در حالت دوم، خط‌های راست $AA'B'$ با خط راست l موازی‌اند،

در ضمن $\vec{AB} \neq \vec{A'B'}$ که، ضمن دوران صفحه α' ، به قوت خود باقی می‌ماند. بنابراین، در این حالت هم، خط‌های راست AA' و BB' ، در هر وصفی از صفحه α' ، یکدیگر را قطع می‌کنند.

اگر در لحظه نخستین، خط‌های راست AA' ، BB' و CC' ، روی یک

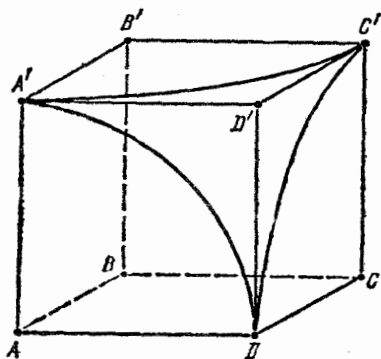
صفحه نباشند و در يك نقطه به هم برسند، آن وقت، برای هر موقعیتی از صفحه α' ، به جز وقتی که بر α منطبق است، باز هم بر يك صفحه قرار نمی گیرند و، بنا بر آن چه ثابت کردیم، دو به دو یکدیگر را قطع می کنند، یعنی دارای نقطه برخورد مشترکی هستند. سرانجام، اگر خطهای راست AA' ، BB' و CC' ، در موقعیت نخستین صفحه α' ، روی یک صفحه واقع باشند، آن وقت، خط راست چهارم DD' را در نظر می گیریم که از نقطه برخورد آنها بگذرد، ولی بر صفحه آنها واقع نباشد. در این صورت، خطهای راست AA' ، BB' و DD' در يك نقطه، و خطهای راست AA' ، CC' و DD' هم، در يك نقطه به هم رسیده اند و، در ضمن، این نقطه ها، بر نقطه برخورد خطهای راست AA' و DD' منطبق اند. بنابراین، خطهای راست AA' ، BB' و CC' ، در هر موقعیتی از صفحه α' (به جز وقتی که بر α منطبق باشد)، در يك نقطه به هم می رسند.

از نقطه $M = M_0$ ، نقطه برخورد خطهای راست مفروض در وضع نخستین، صفحه β را عمود بر خط راست l رسم می کنیم و توجه می کنیم که، نقطه M ، ضمن دوران صفحه α' ، از صفحه β جدا نمی شود. در صفحه β ، خط راست f را از نقطه M موازی صفحه α' رسم می کنیم و ثابت می کنیم، نقطه F ، محل برخورد f با صفحه α ، بستگی به موقعیت صفحه α' ندارد.

اگر این نقطه، در موقعیت نخستین، F_0 و در موقعیت دیگری F_1 باشد، آن وقت، در موقعیت اخیر صفحه α' ، خط راست MF_0 (که $M \neq F_0$)، در غیر این صورت $(F_0 = M = F_1)$ ، صفحه α' را در نقطه ای مثل F' قطع می کند. در نتیجه، بنا بر آن چه قبلاً ثابت کردیم، در موقعیت نخستین هم، خط راست F_0F_1 از نقطه M می گذرد، یعنی بر خط راست f منطبق است، در حالی که با صفحه α' موازی نیست. به همین ترتیب، ثابت می شود که، نقطه G ، محل برخورد صفحه α' با خط راست g (که از نقطه M موازی صفحه α رسم شده است)، جای ثابتی را در صفحه α اشغال می کند. به این ترتیب، ضمن دوران صفحه α' ، نقطه M دور نقطه F دوران می کند و به فاصله ثابتی از آن باقی می ماند (برابر با فاصله نقطه G تا خط راست l) و با صفحه α ،

همان زاویه‌ای را می‌سازد که صفحه α' با آن ساخته است. به این ترتیب، مکان مجهول، عبارت است از محیط دایره‌ای در صفحه β ، به مرکز F و شعاع FM_0 (که ممکن است برابر صفر باشد)، که از آن، دو انتهای قطری که متعلق به صفحه α هستند، جدا شده است.

۳۲۴. خط راست l ، تنها وقتی می‌تواند، به عنوان محور دوران، نقطه A را به نقطه B تبدیل کند که، دو نقطه A و B ، بر این خط راست،



شکل ۱۲۷

تصویر مشترک O را داشته باشند و در ضمن، از آن به یک فاصله باشند، یعنی وقتی که، خط راست l ، بر صفحه α_1 ، صفحه عمود منصف پاره خط راست AB واقع باشد. دوران دور این خط راست l به اندازه زاویه φ ، هم ارز است با نتیجه استفاده متوالی از تقارن نسبت به صفحه α_1 و، سپس، نسبت به صفحه α_2 ، مبدل صفحه α_1 ضمن دوران دور خط راست l به اندازه

زاویه $\frac{\varphi}{2}$ (در همان جهت). برای اثبات این حقیقت، کافی است یادآوری

کنیم که، مثلاً، در صفحه ABO (که بر محور l عمود است)، دوران دور نقطه O به اندازه زاویه φ ، بر نتیجه دو قرینه منطبق است: قرینه نسبت به خط‌های راست l_1 و l_2 ، فصل مشترک‌های صفحه ABO با صفحه‌های α_1 و α_2 . چون تقارن نسبت به صفحه α_2 ، نقطه A را به نقطه B تبدیل می‌کند، بنا بر این، صفحه α_2 ، برای دوران‌های مورد نظر مسأله (و تنها برای آن‌ها)، از نقطه B می‌گذرد. به این ترتیب، همه تبدیل‌های نقطه C را، در دوران‌های مورد نظر، می‌توان به ترتیب زیر به دست آورد: ابتدا قرینه رأس C را نسبت به صفحه α_1 به دست می‌آوریم (که منجر به رأس D می‌شود) و، سپس، قرینه نتیجه را نسبت به صفحه دلخواه α_2 ، که از B گذشته باشد و موازی صفحه

α_1 نباشد، پیدا می‌کنیم. بنا بر این، تبدیل‌های نقطه C ، کره به مرکز B و شعاع BD را پر می‌کنند، به استثنای نقطه‌هایی که قرینه نقطه D نسبت به صفحه BCC' باشند، یعنی نقطه‌هایی که روی سطح مکعب نیستند. به این ترتیب، مجموعه مجهول، عبارت است از محل برخورد این کره با وجه‌های مکعب و تشکیل شده است از سه کمان DA' ، $A'C'$ و $C'D$ از محیط دایره‌های، به ترتیب، به مرکزهای A ، B' و C و شعاع‌هایی برابر طول یال مکعب (شکل ۱۲۷).

۰۳۲۵. ابتدا فرض می‌کنیم، سه رأس از چهار رأس مفروض مکعب

$$A_1 A_2 A_3 A_4 A'_1 A'_2 A'_3 A'_4$$

(شکل ۱۱۴ را ببینید) بر یک وجه واقع باشند. برای مشخص بودن وضع، این رأس‌ها را A_1 ، A_2 و A_3 می‌گیریم، در این صورت، رأس A_4 هم دارای مختصات درست است، زیرا مختصات بردار $\vec{A_4 A_1} = \vec{A_2 A_1}$ ، $\vec{A_4 A_2} = \vec{A_3 A_2}$ یا $\vec{A_4 A_3} = \vec{A_1 A_3}$ باشد. مختصات بقیه رأس‌های مکعب، عده‌هایی درست‌اند، زیرا

$$\vec{A_1 A'_1} = \vec{A_2 A'_2} = \vec{A_3 A'_3} = \vec{A_4 A'_4}$$

اکنون فرض می‌کنیم، هیچ سه رأسی از چهار رأس مفروض، واقع بر یک وجه نباشند. چون، بنا بر فرض، این رأس‌ها روی یک صفحه نیستند، رأس‌های چهاروجهی منتظمی را تشکیل می‌دهند که، یال‌های آن، قطرهای وجه‌های مکعب است. برای مشخص بودن وضع، این رأس‌ها را A_1 ، A'_1 ، A_2 و A'_2 می‌گیریم. ثابت می‌کنیم، بردار $\vec{A_1 A'_1}$ ، مختصات درستی دارد. بردار

$$2\vec{A_1 A'_1} = \vec{A_1 A'_2} + \vec{A_1 A_3} + \vec{A_1 A'_4}$$

را در نظر می‌گیریم که، دارای مختصات درست x ، y و z است. قرار می‌گذاریم:

$$(\overrightarrow{A_1 A'_1})^2 = (\overrightarrow{A_1 A_2})^2 = (\overrightarrow{A_1 A'_2})^2 = a,$$

$$\overrightarrow{A_1 A'_1} \cdot \overrightarrow{A_1 A_2} = \overrightarrow{A_1 A'_1} \cdot \overrightarrow{A_1 A'_2} = \overrightarrow{A_1 A_2} \cdot \overrightarrow{A_1 A'_2} = a \cos 60^\circ = \frac{a}{2} = b$$

در این صورت $a, b \in \mathbb{Z}$ و

$$x^2 + y^2 + z^2 = (\overrightarrow{2A_1 A_2})^2 = 4a + 3 \times 2b = 12b \equiv 0 \pmod{4}$$

از آن جا که مجذور يك عدد زوج، در تقسیم بر 4، به باقی مانده صفر، و مجذور يك عدد فرد، در تقسیم بر 4، به باقی مانده واحد می رسد، بنابراین، باقی مانده تقسیم $x^2 + y^2 + z^2$ بر 4، برابر است با تعداد عددهای فرد در بین عددهای x ، y و z . به این ترتیب، همه مختصات x ، y و z از بردار

$\overrightarrow{2A_1 A_2}$ ، عددهایی زوج اند، و مختصات بردار $\overrightarrow{A_1 A'_1}$ ، عددهایی درست اند. می بینیم، نقطه A'_1 ، که با نقطه های A'_2 و A_2 بريك وجه واقع است، مختصات درستی دارد و، بنابراین چه در ابتدای بحث ثابت کردیم، مختصات همه رأس های مکعب، عددهایی درست اند.

۳۲۶. در ذهن خود، فضایی را که مکعب مستطیل در آن قرار دارد،

به مکعب هایی با یال به طول $\frac{1}{4}$ تقسیم می کنیم و آنها را با دو رنگ سفید

و سیاه، به ردیف «شطر نجی» رنگ می کنیم (یعنی به نحوی که، هر دو مکعب با وجه مشترك، با رنگ های متفاوت باشند). ثابت می کنیم، اگر مکعب مستطیلی

یالی با طول عدد درست داشته باشد و همه وجه های آن موازی با وجه های مکعب ها باشد، آن وقت، حجم بخش سفید آن، با حجم بخش سیاه آن برابر است. در واقع، به كمك صفحه هایی که عمود بر یال به طول عدد درست

است، تمامی مکعب مستطیل را به قشرهایی با عرض $\frac{1}{4}$ تقسیم و توجه می کنیم،

اگر با انتقال موازی، قشر مرزی را تا قشر مجاور آن انتقال دهیم تا بر آن قرار گیرد، بخش های سفید اولی، بر بخش های سیاه دومی قرار می گیرند و برعکس. همین وضع، برای دو قشر مجاور بعدی پیش می آید و غیره.

بنا بر این، حجم بخش‌های سفید در هر قشر، با حجم بخش‌های سیاه آن قشر، برابر می‌شود (تعداد این قشرها، عددی زوج است)، یعنی در کل مکعب مستطیل، حجم دو بخش سیاه و سفید، با هم برابرند. فرض کنید، وجه‌های مکعب مستطیل اصلی، با وجه‌های مکعب‌ها موازی باشند، در ضمن، رأس A از آن، بر رأس یکی از مکعب‌ها منطبق باشد و، بین یال‌های آن، یالی به طول عدد درست وجود نداشته باشد. آن وقت، همهٔ مستطیل‌هایی که، طبق فرض مسأله، از تقسیم آن به دست آمده‌اند، یالی به طول عدد درست دارند (و روشن است که وجه‌های این مکعب مستطیل‌ها، موازی با وجه‌های مکعب‌هاست، زیرا مجموعهٔ این مکعب مستطیل‌ها، مجموعه‌ای متناهی است و می‌توان آن‌ها را، به ترتیب زیر، پشت سر هم در نظر گرفت: ابتدا مکعب مستطیلی را کنار می‌گذاریم که در گوشهٔ مکعب مستطیل اصلی قرار گرفته است، سپس مکعب مستطیلی را که در گوشهٔ شکل باقی‌مانده قرار دارد و غیره) در نتیجه، بنا بر آنچه ثابت کردیم، حجم بخش سفید هر کدام از آن‌ها (و بنا بر این، بخش سفید مکعب مستطیل اصلی، به طور کلی) برابر با حجم بخش سیاه آن است. در مکعب مستطیل اصلی، می‌توان به کمک سه صفحهٔ موازی با وجه‌های آن، مکعب مستطیلی به رأس A و یال‌های به طول‌های درست، با حجم حداکثر ممکن، جدا کرد. در بین هفت مکعب مستطیل باقی‌مانده، که بعد از این برش باقی می‌ماند، شش مکعب مستطیل دارای یالی به طول عدد درست هستند و یکی از آن‌ها، یال‌هایی کوچکتر از واحد و رأس B ، منطبق بر رأس یکی از مکعب‌ها دارد. این مکعب مستطیل را تا مکعبی به یال واحد و رأس B ادامه می‌دهیم. سه صفحه‌ای که، از این مکعب، مکعب مستطیل درونی را جدا می‌کنند، مکعب را به هشت مکعب مستطیل تقسیم می‌نمایند که، در بین آن‌ها، دست کم یکی، یال‌هایی دارد که طول آن‌ها از $\frac{1}{4}$ تجاوز نمی‌کنند و، بنا بر این، حجم بخش‌های سیاه و سفید آن، با هم برابر نیستند (زیرا، یکی از این حجم‌ها، برابر صفر است). همین وضع، دربارهٔ سه مکعب مستطیلی هم، که با آن وجه مشترک دارند (و هر یک از آن‌ها، با

آن، مکعب مستطیلی به یال واحد می سازند، صدق می کند؛ همچنین، در بارهٔ بقیهٔ مکعب مستطیل‌ها، و از آن جمله، آن که به رأس B است. به این ترتیب، مکعب مستطیل اصلی، به هشت مکعب مستطیل تقسیم شده است که در هفت‌تای آن‌ها، حجم بخش سفید با حجم بخش سیاه برابر است، ولی در هشتمی، این دو بخش، حجمی برابر ندارند. تناقض حاصل، ثابت می کند که، مکعب مستطیل اصلی، نمی تواند یالی به طول عدد درست نداشته باشد.

فصل پنجم

آنالیز

۱۷۵. دنباله‌ها

۳۲۷. برای هر مقدار $n = ۱, ۲, \dots, ۹۹$ داریم:

$$a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2 n - n^2(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

و برای مجموع مجهول، به دست می آید:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{99} = \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{1}{\sqrt{99}} - \frac{1}{\sqrt{100}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{9}{10}$$

۳۲۸. با استفاده از دستور

$$tg \ 1 = \frac{tg \ k - tg(k-1)}{1 + tg \ k tg(k-1)}$$

(توجه کنیم که، به دلیل گنگت بودن عدد π ، $tg \ k$ به ازای هر $k \in \mathbb{N}$ معین است)، برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_n &= \sum_{k=1}^n tg \ k tg(k-1) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{tg \ k - tg(k-1)}{tg \ 1} - 1 \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{tg \ k}{tg \ 1} - \sum_{k=1}^n \frac{tg \ k}{tg \ 1} - n = \frac{tg \ n}{tg \ 1} - n \end{aligned}$$

بنابراین، عددهای $A = \frac{1}{tg \ 1}$ و $B = -1$ با شرط مسأله سازگارند.

۰۳۲۹. برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\begin{aligned} a_n^x &= \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots (2n-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \dots (2n)^2} = \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)(2n+1)}{2^2 \cdot 4^2 \dots (2n)^2} \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

بنابراین

$$0 < a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

۰۳۳۰. فرض می‌کنیم $A \in (0, 1)$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ در این صورت،

عدد طبیعی N پیدا می‌شود که، برای هر اندیس $n \geq N$ داشته باشیم:

$$\frac{2A}{3} < a_n < \frac{4A}{3}$$

اگر برای هر $n > N$ ، برابری $a_n = \sqrt{a_{n-1}}$ برقرار باشد، آن وقت، ضمن عبور به حد به ازای $n \rightarrow \infty$ ، به دست می‌آید:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_{n-1}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1}} = \sqrt{A}$$

بنابراین $\{1, 0\} \in A$ ، که شرط $a \in (0, 1)$ را نقض می‌کند. اگر هم، به‌ازای اندیسی از $n > N$ ، برابری $a_n = \sqrt{a_{n-1}}$ برقرار نباشد، آن وقت

$$a_n = \frac{1}{2} a_{n-1} < \frac{1}{2} \times \frac{2A}{3} = \frac{2A}{3}$$

و نابرابری $A < \frac{2A}{3}$ ، شرط انتخاب عدد N را نقض می‌کند. بنابراین، دنباله $\{a_n\}$ نمی‌تواند حدی در بازه $(0, 1)$ داشته باشد.

۳۳۱. عدد a_i را از گروه عددهای $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ در نظر می‌گیریم. تعداد تصاعدهای سه جمله‌ای که، در آن‌ها، این عدد، جمله وسط تصاعد باشد، نه از $i-1$ تجاوز می‌کند و نه از $n-i$ ، زیرا جمله اول تصاعد، تنها می‌تواند یکی از عددهای a_1, \dots, a_{i-1} ؛ و جمله سوم تصاعد، یکی از عددهای $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n$ باشد. بنابراین، تعداد تصاعدها، نمی‌تواند از مجموع

$$\sum_{i=1}^n \min\{i-1, n-i\} = S$$

تجاوزه کند. اگر $n = 2l$ ($l \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$)، آن وقت

$$S = \sum_{i=1}^l (i-1) + \sum_{i=l+1}^n (n-i) = l(l-1)$$

و اگر $n = 2l+1$ ($l \in \mathbb{N}$)، آن وقت

$$S = \sum_{i=1}^l (i-1) + \sum_{i=l+1}^n (n-i) = l^2$$

سرانجام، یادآوری می‌کنیم که، این حداکثر تعداد تصاعدها، در حالت دنباله $a_i = i$ (برای $n, \dots, 1, i$) به‌دست می‌آید.

۳۳۲. a_1, a_2, a_3, \dots را جمله‌های دنباله مفروض می‌گیریم. تابع زیر را، که در مجموعه عددهای درست تعریف شده است، در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x, \text{ عددی زوج}) \\ 1 & (x, \text{ عددی فرد}) \end{cases}$$

و دنباله $\{b_n\}$ را، با دستور $b_n = f(a_n)$ ، $n \in \mathbb{N}$ می‌دهیم. در این صورت، برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\begin{aligned} b_{n+4} &= f(a_{n+4}) = f(a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}) = \\ &= f(f(a_n) + f(a_{n+1}) + f(a_{n+2}) + f(a_{n+3})) = \\ &= f(b_n + b_{n+1} + b_{n+2} + b_{n+3}) \end{aligned}$$

زیرا عدد b_{n+4} ، تنها در حالتی زوج است که مجموع

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}$$

عددی زوج باشد. جمله اول دنباله $\{b_n\}$ ، چنین است:

$$1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1$$

بنابراین $b_6 = b_1$ ، $b_7 = b_2$ ، $b_8 = b_3$ ، $b_9 = b_4$ و به طور کلی $b_{n+5} = b_n$. به این ترتیب، در این دنباله، عدد صفر، در ردیف‌های به صورت $n = 3 + 5k$ ($k \in \mathbb{Z}^+$) قرار دارد. در نتیجه، در دنباله $\{a_n\}$ ، اختلاف شماره‌های هر دو عدد زوج، برابر است با ۵. یعنی نمی‌توان، در این دنباله، پشت سرهم به عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ برخورد کرد.

۳۳۳. از شرط مسأله معلوم است که، برای عدد مفروض $n \in \mathbb{N}$ هر یک از عددهای a_1, a_2, \dots, a_{n+1} ، از $2n$ تجاوز نمی‌کنند. مجموعه عددهای ۱، ۲، \dots ، $2n$ را به n زوج تقسیم می‌کنیم:

$$(1, 2n), (2, 2n-1), \dots, (n, n+1)$$

چون بین عددهای ۱، ۲، \dots ، $2n$ ، دست کم، $(n+1)$ جمله از دنباله وجود دارد، بنا براین، دو عدد مختلف a_p و a_q پیدا می‌شود که متعلق به یکی از زوج‌ها هستند. برای پایان اثبات، کافی است توجه کنیم که، تفاوت بین عددهای هر زوج، برابر است با n .

۳۳۴. دنباله $\{b_n\}$ را به این ترتیب می‌سازیم:

$$b_n = \begin{cases} a_n & (a_n \leq A) \\ A & (a_n > A) \end{cases}$$

و نسبت $\frac{a_n}{b_n}$ را c_n می‌نامیم. در این صورت، داریم:

$$1 \leq c_n \leq B$$

(برای هر $n \in \mathbb{N}$). بنابراین، برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\frac{c_m}{c_n} \leq B \implies \frac{a_m}{a_n} \leq \frac{B b_m}{b_n}$$

۳۳۵. دنباله صعودی اندیس‌های $\{i_n\}$ را، به ترتیب زیر، می‌سازیم.

فرض کنید a_{i_1} ، کوچکترین عدد در بین عددهای a_1, a_2, \dots باشد (چنین عددی وجود دارد، زیرا همه جمله‌های دنباله $\{a_n\}$ ، عددهای طبیعی‌اند)؛ a_{i_2} را کوچکترین عدد از عددهای $a_{i_1+1}, a_{i_1+2}, \dots$ ؛ a_{i_3} را، کوچکترین عدد از عددهای $a_{i_2+1}, a_{i_2+2}, \dots$ می‌گیریم و غیره. در این صورت، دنباله نامتناهی $\{a_{i_n}\}$ ، غیرنزولی است. فرض کنید b_{i_k} ، کوچکترین عدد از عددهای $b_{i_k}, b_{i_k+1}, \dots$ باشد. در این صورت

$$i_k < i_{k+1}, a_{i_k} \leq a_{i_{k+1}}, b_{i_k} \leq b_{i_{k+1}}$$

یعنی به عنوان اندیس‌های p و q ، می‌توان عددهای i_k و i_{k+1} را در نظر گرفت.

۳۳۶. حکم مسأله را، با استقرای روی n ثابت می‌کنیم. برای

$n = 1$ داریم:

$$a_1^2 \leq a_1 - a_2 < a_1 \implies a_1 < 1$$

علاوه بر آن

$$a_2 \leq a_1 - a_1^2 = \frac{1}{4} - \left(a_1 - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$$

یعنی $a_n < \frac{1}{n}$ به ازای $n = 2$. اکنون، فرض می‌کنیم، حکم برای عدد $n \geq 2$ درست باشد. ثابت می‌کنیم، در این صورت، برای $n+1$ هم درست است. چون تابع $f(x) = x - x^2$ در بازه $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ صعودی است و

در ضمن $a_n < \frac{1}{n}$ ، بنابراین

$$a_{n+1} \leq f(a_n) < f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n^2(n+1)} < \frac{1}{n+1}$$

و درستی حکم ثابت می‌شود.

۳۳۷. برابری $a_k = a_{k-1} + \frac{1}{n} a_{k-1}^2$ ، هم‌ارز است با برابری

$$\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{1}{n + a_{k-1}}$$

چون $\frac{1}{n} = a_0 < a_1 < \dots < a_n$ ، بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} < \frac{1}{n}, \quad (k = 1, \dots, n)$$

که اگر آن‌ها را باهم جمع کنیم، به دست می‌آید:

$$\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} < 1 \Rightarrow \frac{1}{a_n} > 2 - 1 = 1$$

یعنی $a_n < 1$. بنابراین، این نابرابری‌ها برقرار است:

$$\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} > \frac{1}{n+1}, \quad (k = 1, \dots, n)$$

که از مجموع آن‌ها، به دست می‌آید:

$$\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} > \frac{n}{n+1}$$

بنا بر این

$$\frac{1}{a_n} < 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

یعنی

$$a_n > \frac{n+1}{n+2} > \frac{n-1}{n}$$

۳۳۸. از شرط به دست می آید:

$$a_{k+m} - 1 \leq a_k + a_m \leq a_{k+m} + 1, \quad (k, m \in \mathbb{N})$$

با استقرای روی $q \in \mathbb{N}$ ، ثابت می کنیم:

$$a_{pq} - (q-1) \leq qa_p \leq a_{pq} + (q-1)$$

به ازای $q=1$ ، به نابرایی‌های درستی می‌رسیم. فرض می‌کنیم، نابرایی‌ها، برای عدد q برقرار باشند. ثابت می‌کنیم، در این صورت، برای $q+1$ هم برقرارند. در واقع، برای هر مقدار $p \in \mathbb{N}$ ، داریم:

$$\begin{aligned} (q+1)a_p &= qa_p + a_p \leq a_p + a_{pq} + (q-1) \leq a_{p+pq} + q = \\ &= a_{p(q+1)} + q \end{aligned}$$

به همین ترتیب، ثابت می‌شود که

$$(q+1)a_p \geq a_{p(q+1)} - q$$

اگر جای p و q را باهم عوض کنیم، به دست می‌آید:

$$a_{pq} - (p-1) \leq pa_q \leq a_{pq} + (p-1)$$

به این ترتیب:

$$|pa_q - qa_p| \leq \leq \max\{|a_{pq} + (p-1) - (a_{pq} - (q-1))|, |a_{pq} + (q-1) - (a_{pq} - (p-1))|\} = p+q-2 < p+q$$

یعنی

$$\left| \frac{a_q}{q} - \frac{a_p}{p} \right| < \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$$

۳۳۹. فرض می‌کنیم، مجموعهٔ جمله‌های غیر مثبت، متناهی باشد. در این صورت، می‌توان عدد طبیعی N را طوری پیدا کرد که، برای هر $n \geq N$ داشته باشیم: $a_n > 0$ ، ولی، در چنین حالتی، برای هر $n \geq N$ باید داشته باشیم $a_n > 1$ (اگر $a_n \leq 1$ ، آن وقت، نابرابری

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n - \frac{1}{a_n} \right) \leq 0$$

برقرار می‌شود). از طرف دیگر

$$a_{N+1} = \frac{1}{2} \left(a_N - \frac{1}{a_N} \right) < \frac{1}{2} a_N,$$

$$a_{N+2} = \frac{1}{2} \left(a_{N+1} + \frac{1}{a_{N+1}} \right) < \frac{1}{2} a_{N+1} < \frac{1}{4} a_N$$

و به طور کلی

$$a_{N+k} < \frac{1}{2^k} a_N, \quad (k \in \mathbb{N})$$

بنابراین، اگر فرض کنیم $a_N > 2^k$ ، آن وقت $a_{N+k} < 1$. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۳۴۰. برای $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$a_n = 2^{n-1} - 3a_{n-1} = 2^{n-1} - 3 \times 2^{n-2} + 9a_{n-2} = \dots$$

$$\dots = 2^{n-1} - 3^1 \times 2^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} 3^{n-1} + (-1)^n 3^n a_0.$$

که از آن جا به دست می آید:

$$a_n = \frac{2^n + (-1)^{n+1} 3^n}{5} + (-1)^n 3^n a_0$$

که برای $n=0$ هم برقرار است. اکنون، این تفاضل را پیدا می کنیم:

$$\begin{aligned} d_n = a_n - a_{n-1} &= \frac{2^n + (-1)^{n+1} 3^n}{5} + (-1)^n 3^n a_0 - \\ &\quad - \frac{2^{n-1} + (-1)^n 3^{n-1}}{5} - (-1)^{n-1} 3^{n-1} a_0 = \\ &= \frac{2^{n-1}}{5} + \frac{(-1)^{n+1} \times 4 \times 3^{n-1}}{5} + (-1)^n \times 4 \times 3^{n-1} a_0 = \\ &= \frac{2^{n-1}}{5} + (-1)^{n+1} \times 4 \times 3^{n-1} \left(\frac{1}{5} - a_0 \right) = \\ &= \frac{2^{n-1}}{5} \left[1 + 4(-1)^{n+1} \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} (1 - 5a_0) \right] \end{aligned}$$

اگر داشته باشیم $0 < 1 - 5a_0$ ، آن وقت، به ازای مقادیر زوج و به اندازه کافی بزرگ n ، داریم $d_n < 0$ ؛ و اگر داشته باشیم $0 < 1 - 5a_0$ ، آن وقت، به ازای مقادیر فرد و به اندازه کافی بزرگ n ، داریم $d_n < 0$.

بنابراین، به ازای $a_0 \neq \frac{1}{5}$ دنباله $\{a_n\}$ نمی تواند صعودی باشد. ولی برای

$$a_0 = \frac{1}{5} \text{ داریم:}$$

$$d_n = \frac{2^{n-1}}{5} > 0, (n \in \mathbb{N})$$

یعنی، دنباله $\{a_n\}$ ، تنها وقتی صعودی است که داشته باشیم $a_0 = \frac{1}{5}$.

۳۴۱. برای دنباله ای که در مسأله داده شده است، داریم:

$$a_{n+1} a_{n+2} + a_{n+1}^2 = a_{n+2}^2 + a + a_{n+1}^2 = a_{n+2}^2 + a_n a_{n+2}$$

$(n \in \mathbb{N})$ ، که از آن به دست می آید:

$$\frac{a_{n+3} + a_{n+1}}{a_{n+2}} = \frac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+1}}$$

بنابراین، اگر فرض کنیم: $b_n = \frac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+1}}$ ، خواهیم داشت:

$$b_1 = b_2 = b_3 = \dots = b$$

که از آن جا به دست می آید:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+1}} = b_n = b_1 &= \frac{a_2 + a_1}{a_2} = \frac{1}{a_2} \cdot \left(\frac{a_2^2 + a}{a_1} + a_1 \right) = \\ &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + a}{a_1 a_2} \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

یعنی $a_{n+2} = ba_{n+1} - a_n$ که در آن $b \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$. از آن جا که $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ ، بنابراین، هر یک از عددهای

$$a_3 = ba_2 - a_1, \quad a_4 = ba_3 - a_2, \dots$$

عددی درست است.

۳۴۲. روشن است که $a_0 = 0$ و $a_1 = 1$. اکنون، برابری زیر را، برای هر مقدار $n \in \mathbb{Z}^+$ ثابت می کنیم:

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$$

که در این صورت، پشت سرهم معلوم می شود که هر یک از عددهای a_2, a_3, a_4, \dots ، عددی درست است. فرض می کنیم:

$$\alpha = \frac{(2 + \sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}, \quad \beta = \frac{(2 - \sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$$

در این صورت، به دست می آید:

$$a_n = \alpha - \beta,$$

$$a_{n+1} = (2 + \sqrt{3})\alpha - (2 - \sqrt{3})\beta,$$

$$\alpha_{n+2} = (2 + \sqrt{3})^2 \alpha - (2 - \sqrt{3})^2 \beta = (7 + 4\sqrt{3})\alpha - (7 - 4\sqrt{3})\beta = \\ = (8 + 4\sqrt{3})\alpha - (8 - 4\sqrt{3})\beta - (\alpha - \beta) = 4a_{n+1} - a_n$$

بنابراین

$$a_{n+2} \equiv a_{n+1} - a_n \pmod{3}$$

و باقی مانده تقسیم ۸ جمله اول دنباله $\{a_n\}$ بر ۳، به ترتیب، چنین است:

$$0, 1, 1, 0, 2, 2, 0, 1$$

یعنی

$$a_0 \equiv a_3 \pmod{3}, \quad a_1 \equiv a_4 \pmod{3}$$

و به طور کلی

$$a_{n+6} \equiv a_n \pmod{3}$$

در این دنباله، جمله‌های به صورت $(k \in \mathbb{Z}^+) a_{3k}$ ، در تقسیم بر ۳، به باقی مانده صفر می‌رسند (و تنها همین جمله‌ها). چون

$$(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$$

بنابراین، داریم:

$$a_n = \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} = \frac{(2 - \sqrt{3})^{-n} - (2 + \sqrt{3})^{-n}}{2\sqrt{3}} = \\ = -a_{-n}$$

که از آن نتیجه می‌شود: عدد a_n ، به ازای مقادیر منفی n هم، عددی درست است و، در ضمن، تنها وقتی $a_n \equiv 0 \pmod{3}$ ، که داشته باشیم:

$$n \equiv 0 \pmod{3}$$

۳۴۳. قرار می‌گذاریم:

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^n - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^n$$

در این صورت، برای $n \in \mathbb{N}$ داریم، $a_n > 0$ و

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \left(\frac{\sqrt{\delta}+1}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{\sqrt{\delta}-1}{2}\right)^{n+2} = \\ &= \left[\left(\frac{\sqrt{\delta}+1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{\sqrt{\delta}-1}{2}\right)^{n+1} \right] \left(\frac{\sqrt{\delta}+1}{2} + \frac{\sqrt{\delta}-1}{2}\right) - \\ &- \left[\left(\frac{\sqrt{\delta}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{\delta}-1}{2}\right)^n \right] \frac{\sqrt{\delta}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\delta}-1}{2} = \sqrt{\delta} a_{n+1} - a_n \end{aligned}$$

با استقرای روی $k \in \mathbb{N}$ ثابت می‌کنیم که، عدد a_{2k-1} ، عددی درست و عدد a_{2k} ، به صورت $m\sqrt{\delta}$ است ($m \in \mathbb{Z}$). در واقع، به ازای $k=1$ داریم:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \sqrt{\delta}$$

اکنون فرض می‌کنیم، حکم، برای $k \in \mathbb{N}$ درست باشد. در این صورت

$$a_{2k+1} = \sqrt{\delta} a_{2k} - a_{2k-1} = \delta m - a_{2k-1},$$

$$a_{2k+2} = \sqrt{\delta} a_{2k+1} - a_{2k} = \sqrt{\delta} (a_{2k+1} - m)$$

یعنی، حکم، برای $k+1$ هم درست است. بنابراین، عددی که در صورت مسأله داده شده است:

$$\begin{aligned} -2 + \left(\frac{3+\sqrt{\delta}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{\delta}}{2}\right)^n &= \left(\frac{\sqrt{\delta}+1}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{\sqrt{\delta}-1}{2}\right)^{2n} - \\ -2 \left(\frac{\sqrt{\delta}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\delta}-1}{2}\right)^n &= \left[\left(\frac{\sqrt{\delta}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{\delta}-1}{2}\right)^n \right]^2 = a_n^2 \end{aligned}$$

به ازای مقدارهای فرد n ، عبارت است از مجذور عدد $a_n \in \mathbb{N}$ ؛ و به ازای مقدارهای زوج n ، به صورت

$$(m\sqrt{\delta})^2 = \delta m^2 \quad (m \in \mathbb{N})$$

درمی‌آید.

۰۳۴۴ هر کدام از دو دنباله

$$a_n = (1 + \sqrt{a})^n \text{ و } a_n = (1 - \sqrt{a})^n$$

در شرط زیر صدق می کنند:

$$a_{n+1} = 2a_n + (a-1)a_{n-1}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

درواقع، داریم:

$$a_{n+1} - 2a_n + (1-a)a_{n-1} = (1 \pm \sqrt{a})^2 a_{n-1} -$$

$$- 2(1 \pm \sqrt{a})a_{n-1} + (1-a)a_{n-1} = 0$$

(برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$). بنا براین، برای هر دنباله به صورت

$$a_n = A(1 + \sqrt{a})^n + B(1 - \sqrt{a})^n$$

هم همان شرط برقرار است. در حالت خاص، و به ازای

$$A = -B = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

به این دنباله می رسمیم:

$$a_n = \frac{(1 + \sqrt{a})^n - (1 - \sqrt{a})^n}{2\sqrt{a}}$$

که با شرطهای صورت مسأله سازگار است، زیرا $a_0 = 0$ و $a_1 = 1$. با استفاده از بسط دوجمله‌ای، برای هر عدد اول $p \neq 2$ (و بنا براین

عددی فرد)، به دست می آید:

$$\begin{aligned} a_p &= \frac{1}{2\sqrt{a}} [(1 + \sqrt{a})^p - (1 - \sqrt{a})^p] = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a}} \left[\sum_{i=0}^p C_p^i (\sqrt{a})^i - \sum_{i=0}^p C_p^i (-\sqrt{a})^i \right] = \\ &= \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(p-1)} C_p^{2i+1} a^i \equiv a^{\frac{1}{2}(p-1)} \pmod{p} \end{aligned}$$

در مجموع آخر، همه جمله‌های به صورت $a^i C_p^{i+1}$ ، به ازای

$$i = 0, 1, \dots, \frac{p-1}{2} - 1$$

بر p بخش پذیرند، زیرا برای $k = 1, 2, \dots, p-1$ داریم:

$$C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!} \equiv 0 \pmod{p}$$

و به ازای $i = \frac{1}{2}(p-1)$ ، جمله باقی مانده برابر $a^{\frac{1}{2}(p-1)} C_p^p a^i$ است.

به ازای $p=2$ به دست می آید:

$$a_p = \frac{(1+\sqrt{a})^2 - (1-\sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}} = 2 \equiv 0 \pmod{p}$$

به این ترتیب، برای این کسه شرط‌های الف) و ب) برقرار باشند، لازم و کافی است که، عدد a بر هر عدد اول p ، که در نابرابری $2 < p \leq p_0$ صدق می کند، بخش پذیر باشد، ولی بر هیچ کدام از عددهای اول $p > p_0$ بخش پذیر نباشد. کوچکترین عدد $a \in \mathbb{N}$ ، که دارای این ویژگی باشد، برابر است با حاصل ضرب همه عددهای اول p ، که در نابرابری $3 \leq p \leq p_0$ صدق می کنند.

۳۴۵. فرض می کنیم. دنباله $\{a_n\}$ ، با شرط‌های مسأله سازگار باشد.

چون

$$a_1 > 0, a_2 > 0 \text{ و } a_2 + 1 = a_1 a_2$$

بنابراین: $a_3 > 0$. به همین ترتیب، معلوم می شود که، به طور کلی، $a_n > 0$.

در نتیجه

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + 1}{a_n}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

یعنی

$$a_3 = \frac{a_2^r + 1}{a_1} = a_2^r + 1,$$

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{a_3^r + 1}{a_2} = \frac{1}{a_2} [(a_2^r + 1)^r + 1] = \frac{1}{a_2} (a_2^r + 3a_2^{r-1} + 3a_2^{r-2} + 2) = \\ &= a_2^r + 3a_2^{r-1} + 3a_2^{r-2} + \frac{2}{a_2} \end{aligned}$$

چون $a_4 \in \mathbf{Z}$ ، بنابراین عدد $a_2 > 1$ ، باید مقسوم‌علیهی از ۲ باشد، یعنی $a_2 = 2$. از آنجا که، همهٔ بقیهٔ جمله‌های دنباله، به‌صورتی یک‌ارزشی، به کمک دو جملهٔ اول آن معین می‌شوند، در نتیجه، دنبالهٔ مفروض، منحصر به فرد است.

با استقرای روی $n \in \mathbf{N}$ ثابت می‌کنیم، همهٔ جمله‌های این دنباله، عددهایی درست‌اند (یعنی به واقع، در شرط‌های مسأله صدق می‌کنند). دیدیم، عددهای a_1, a_2, a_3, a_4 ، عددهایی درست‌اند. اکنون فرض می‌کنیم، برای مقداری از $n \geq 5$ بدانیم

$$a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in \mathbf{Z}$$

در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{a_{n-1}^r + 1}{a_{n-2}} = \frac{\left(\frac{a_{n-2}^r + 1}{a_{n-3}}\right)^r + 1}{a_{n-2}} = \\ &= \frac{a_{n-2}^r + 3a_{n-2}^{r-1} + 3a_{n-2}^{r-2} + 1 + a_{n-3}^r}{a_{n-2} \cdot a_{n-3}} \end{aligned}$$

درضمن، صورت این کسر، بر a_{n-3}^r بخش‌پذیر است، زیرا عدد

$$\frac{a_{n-2}^r + 3a_{n-2}^{r-1} + 3a_{n-2}^{r-2} + 1 + a_{n-3}^r}{a_{n-3}^r} = a_{n-1}^r + 1$$

عددی است درست. این صورت کسر، بر a_{n-2} هم بخش‌پذیر است، زیرا

$$\frac{a_{n-2}^4 + 3a_{n-2}^3 + 3a_{n-2}^2 + 1 + a_{n-2}^2}{a_{n-2}} =$$

$$= a_{n-2}^4 + 3a_{n-2}^3 + 3a_{n-2}^2 + a_{n-2}$$

ثابت می‌کنیم، دو عدد a_{n-2} و a_{n-3}^2 نسبت به هم اول اند (که در این صورت، ثابت می‌شود، صورت کسر مزبور، بر حاصل ضرب این دو عدد بخش‌پذیر است). در واقع، این حقیقت، نتیجه‌ای است از رابطه

$$\begin{aligned} (a_{n-2}, a_{n-3}) &= \left(\frac{a_{n-2}^2 + 1}{a_{n-2}}, a_{n-3} \right) \leq (a_{n-2}^2 + 1, a_{n-3}) = \\ &= (1, a_{n-3}) = 1 \end{aligned}$$

به این ترتیب، a_n عددی درست است. حکم ثابت شد.

۳۴۶. قرار می‌گذاریم:

$$S_n = \frac{a_0}{a_1} + \frac{a_0}{a_2} + \dots + \frac{a_0}{a_n} + \frac{p}{a_{n+1}}$$

در این صورت، دنباله S_1, S_2, \dots تنها در حالتی شامل جمله‌های یکسان است که، برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، تفاضل

$$S_{n+1} - S_n = \frac{a_0}{a_{n+1}} + \frac{p}{a_{n+2}} - \frac{p}{a_{n+1}} = \frac{p}{a_{n+2}} - \frac{p - a_0}{a_{n+1}}$$

برابر صفر باشد، یعنی $a_{n+2} = \frac{p}{p - a_0} a_{n+1}$. فرض می‌کنیم، دنباله

a_0, a_1, \dots با شرط مسأله سازگار باشد، در این صورت، برای هر مقدار $n \geq 3$ داریم:

$$a_n = \frac{p}{p - a_0} a_{n-1} = \frac{p^2}{(p - a_0)^2} a_{n-2} = \dots = \frac{p^{n-2}}{(p - a_0)^{n-2}} a_2$$

چون $a_n \in \mathbb{N}$ و دو عدد p و $p - a_0$ نسبت به هم اول اند (زیرا $p - a_0$ مقداری است مثبت و کوچکتر از p)، بنابراین، a_2 باید بر هر توان طبیعی

عدد $p - a_0$ بخش پذیر باشد، از آن جا $p - a_0 = 1$. به این ترتیب، داریم:

$$a_0 = p - 1, \quad \frac{p-1}{a_1} + \frac{p}{a_2} = 1, \quad a_n = p^{n-2} a_2$$

$a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ و $n = 3, 4, \dots$. برقراری این برابری‌ها، سازگار بودن دنباله را با شرط مسأله، تضمین می‌کند، زیرا در این حالت داریم:

$$S_1 = 1, \quad S_{n+1} = S_n, \quad (n \in \mathbb{N})$$

به این ترتیب، مسأله به این جا منجر می‌شود که: با مفروض بودن عدد اول p ، تعداد ریشه‌های معادله

$$\frac{p-1}{a_1} + \frac{p}{a_2} = 1$$

را، در مجموعه عددهای طبیعی، پیدا کنیم. معادله را، به این صورت می‌نویسیم:

$$pa_1 = a_2[a_1 - (p-1)]$$

و توجه می‌کنیم که، سمت چپ این معادله، بر p بخش پذیر است. بنابراین، معادله تنها وقتی جواب دارد که یکی از دو شرط

$$a_2 = kp \quad \text{یا} \quad a_1 - (p-1) = mp, \quad (k, m \in \mathbb{N})$$

برقرار باشد، زیرا $a_2 > 0$ و $a_1 - (p-1) > 0$. درضمن، این دو شرط، نمی‌توانند با هم برقرار باشند، زیرا اگر داشته باشیم:

$$a_1 - (p-1) \equiv 0 \pmod{p}$$

آن وقت $a_1 \equiv -1 \pmod{p}$ ؛ یعنی، سمت چپ معادله بر p^2 بخش پذیر نیست و، بنابراین، عدد a_2 نمی‌تواند بر p بخش پذیر باشد.

اکنون، فرض می‌کنیم $a_2 = kp$ ، در این صورت، معادله به این صورت

درمی‌آید:

$$a_1 = k[a_1 - (p-1)] \implies p-1 = (k-1)(a_1 - p + 1)$$

بنابراین، در این حالت، جواب‌ها، به این ترتیب به دست می‌آیند: به‌عنوان مقدار $a_1 - p + 1$ ، باید هر یک از مقسوم‌علیه‌های عدد $p - 1$ را انتخاب کرد و، سپس، فرض کرد $a_1 = kp$ ، که در آن

$$k = \frac{p-1}{a_1 - p + 1} + 1$$

به حالت $a_1 - (p - 1) = mp$ می‌پردازیم. در این حالت، معادله‌ما، تنها وقتی جواب دارد که داشته باشیم:

$$mp + p - 1 = a_1 m \Rightarrow p - 1 = (a_1 - p)m$$

در این حالت، جواب‌ها، به‌ترتیب زیر به دست می‌آیند: باید به‌عنوان m ، هر یک از مقسوم‌علیه‌های عدد $p - 1$ را انتخاب کرد و، سپس، فرض کرد:

$$a_1 = \frac{p-1}{m+p}, a_1 = mp + p - 1$$

هیچ کدام از جواب‌ها، نمی‌تواند به‌هر دو رشته جواب (مربوط به دو حالت مختلف) تعلق داشته باشد، زیرا در غیر این صورت، باید در دو شرط متناقض با یکدیگر، صدق کند. بنابراین، تعداد جواب‌های معادله، که برابر است با تعداد دنباله‌های مورد نظر، به اندازه دو برابر تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد $p - 1$ می‌شود.

۳۴۷. ثابت می‌کنیم، سه عدد $a, b, c \in \mathbb{N}$ ، با شرط $a < b$ و $b < a$ ،

تنها وقتی با شرط مسأله سازگارند که داشته باشیم:

$$bc \equiv 1 \pmod{a} \quad (1)$$

$$nbc^n + (n-1)bc^{n-1} \equiv (n+1)bc^{n+1} \pmod{a} \quad (2)$$

فرض می‌کنیم، عددهای a و b و c ، با شرط مسأله سازگار باشند.

در این صورت، شرط (۱) نتیجه‌ای است از رابطه

$$bc \equiv a_1 \pmod{a}, a_1 = 1$$

شرط (۲) هم، برای $n = 1$ ، با توجه به رابطه‌های

$$2bc^x \equiv a^x \pmod{a}, \quad a_x = a_1$$

به دست می آید که، در این حالت، چنین می شود:

$$bc \equiv 2bc^x \pmod{a} \quad (3)$$

شرط (2)، برای بقیه مقادیرهای $n > 1$ هم برقرار است، زیرا

$$a_n \equiv nbc^n \pmod{a},$$

$$a_{n-1} \equiv (n-1)bc^{n-1} \pmod{a}, \quad a_{n+1} \equiv (n+1)bc^{n+1} \pmod{a}$$

$$a_n + a_{n-1} = a_{n+1} \quad (4)$$

اکنون فرض کنید، عددهای a و b و c ، با شرطهای (1) و (2) سازگار باشند. با استقرای روی $n \in \mathbb{N}$ ، ثابت می کنیم، هر يك از عددهای $a_n - nbc^n$ بر a بخش پذیرند. درستی حکم، به ازای $n=1$ و $n=2$ ، نتیجه ای است از شرطهای (1) و (3) [شرط (3)، همان شرط (2)، برای $n=1$ است]، زیرا $a_1 = a_2 = 1$. فرض می کنیم، برای مقادیر $n > 1$ ، عددهای

$$a_n - nbc^n \quad \text{و} \quad a_{n-1} - (n-1)bc^{n-1}$$

بر a بخش پذیر باشند. در این صورت، با توجه به شرطهای (2) و (4)، معلوم می شود که عدد

$$a_{n+1} - (n+1)bc^{n+1} \equiv [(a_n - nbc^n) + (a_{n-1} - (n-1)bc^{n-1})] \pmod{a}$$

هم بر a بخش پذیر است. توجه کنیم که، از شرط (1)، نتیجه می شود:

$$(b, a) = (c, a) = 1$$

درضمن، شرط (2)، هم ارز با این است که، هر يك از عددهای

$$d_n = (n+1)c^x - nc - (n-1) = (n+1)(c^x - c - 1) + (c+2)$$

$(n \in \mathbb{N})$ ، بر a بخش پذیرند که (به نوبه خود)، به معنای آن است که هر يك

از دو عدد

$$c^2 - c - 1 = d_2 - d_1 \text{ و } c + 2 = d_1 - 2(c^2 - c - 1)$$

بر a بخش پذیرند. بنا بر این، عدد

$$(c^2 - c - 1) - (c + 2)(c - 3) = 5$$

باید بر a بخش پذیر باشد. چون $a > 1$ ، پس $a = 5$ و از رابطه‌های

$$c + 2 \equiv 0 \pmod{5}, 1 \leq c < 5, bc \equiv 1 \pmod{5}, 1 \leq b < 5$$

به دست می‌آید: $c = 3$ و $b = 2$.

برای کامل شدن اثبات، کافی است توجه کنیم که، این مقادیرهای a و

b و c ، با شرط (۱) سازگارند، و عددهای $c + 2$ و $c^2 - c - 1$ بر a بخش پذیرند.

§ ۱۸۱. اکتروهمها

۳۴۸. حداقل مقدار تابع $f(x, y)$ ، برای x و y مثبت، برابر است

با ۲، زیرا داریم:

$$f(x, y) - 2 = \left(\frac{x^2}{y^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{x}{y} - 2 + \frac{y}{x}\right) \geq \frac{(x-y)^2}{xy} \geq 0$$

و برابری $f(x, y) = 2$ ، تنها وقتی به دست می‌آید که داشته باشیم: $x = y$.

۳۴۹. با استفاده از قضیهٔ مربوط به واسطه‌ها، داریم:

$$\sqrt[4]{2x^2y^2z^2u} = \sqrt[4]{2x \cdot xy \cdot z \cdot yzu} \leq \frac{2x + xy + z + yzu}{4} = \frac{1}{4}$$

یعنی $2x^2y^2z^2u \leq \frac{1}{512}$ و برابری، وقتی به دست می‌آید که داشته باشیم:

$$2x = xy = z = yzu = \frac{1}{4}$$

یعنی به ازای $x = \frac{1}{8}$ ، $y = 2$ ، $z = \frac{1}{4}$ و $u = \frac{1}{2}$ به این ترتیب، حداکثر مقدار

$$u^2 y^2 z^2 x^2$$

با $\frac{1}{512}$ برابر است.

۳۵۰. ابتدا $n = 2k$ می‌گیریم ($k \in \mathbb{N}$). با توجه به نابرابری

مثلثی داریم:

$$\begin{cases} |x - a_1| + |x - a_n| \geq a_n - a_1, \\ |x - a_2| + |x - a_{n-1}| \geq a_{n-1} - a_2, \\ \dots \dots \dots \\ |x - a_k| + |x - a_{k+1}| \geq a_{k+1} - a_k \end{cases}$$

از آنجا

$$f(x) = \sum_{i=1}^n |x - a_i| \geq \sum_{j=1}^k (a_{n-j+1} - a_j)$$

درضمن، اگر $x \in [a_k, a_{k+1}]$ آن وقت

$$f(x) = \sum_{j=1}^k (a_{n-j+1} - a_j)$$

از طرف دیگر، اگر $x \notin [a_k, a_{k+1}]$ آن وقت

$$|x - a_k| + |x - a_{k+1}| > a_{k+1} - a_k$$

و

$$f(x) > \sum_{j=1}^k (a_{n-j+1} - a_j)$$

بنابراین، حداقل مقدار تابع $f(x)$ برابر است با

$$\sum_{j=1}^k (a_{n-j+1} - a_j)$$

که به ازای هر مقدار $x \in [a_k, a_{k+1}]$ به دست می‌آید.

اکنون، فرض کنید $n = 2k - 1$ ($k \in \mathbf{N}$) داریم:

$$|x - a_1| + |x - a_n| \geq a_n - a_1,$$

$$|x - a_2| + |x - a_{n-1}| \geq a_{n-1} - a_2,$$

.....

$$|x - a_{k-1}| + |x - a_{k+1}| \geq a_{k+1} - a_{k-1},$$

$$|x - a_k| \geq 0$$

و از آنجا

$$f(x) = \sum_{i=1}^n |x - a_i| \geq \sum_{j=1}^{k-1} (a_{n-j+1} - a_j)$$

درضمن، اگر $x = a_k$ ، آن وقت

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k-1} (a_{n-j+1} - a_j)$$

و اگر $x \neq a_k$ ، آن وقت

$$f(x) \geq \sum_{j=1}^{k-1} (a_{n-j+1} - a_j) + |x - a_k| > \sum_{j=1}^{k-1} (a_{n-j+1} - a_j)$$

به این ترتیب، حداقل تابع $f(x)$ برابر است با

$$\sum_{j=1}^{k-1} (a_{n-j+1} - a_j)$$

که به ازای $x = a_k$ به دست می آید.

۳۵۱ الف) حداقل مقدار حاصل ضرب $x_1 x_2 \dots x_n$ را پیدا می کنیم.

فرض می کنیم، گروه عددهای (x_1, \dots, x_n) با شرطهای مسأله سازگار باشد. گروه جدید عددهای

$$(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$$

را در نظر می گیریم که در آن

$$x_1^{(1)} = x_1, x_2^{(1)} = x_2, \dots, x_{n-2}^{(1)} = x_{n-2},$$

$$x_{n-1}^{(1)} = \sqrt{x_{n-1}^2 + x_n^2 - \frac{1}{n^2}}, \quad x_n^{(1)} = \frac{1}{n}$$

این گروه عددها هم، با شرطهای

$$x_i^{(1)} \geq \frac{1}{n} \quad (i = 1, \dots, n) \quad \text{و} \quad \sum_{i=1}^n (x_i^{(1)})^2 = 1$$

سازگار است. ثابت می‌کنیم:

$$x_1 x_2 \dots x_n \geq x_1^{(1)} x_2^{(1)} \dots x_n^{(1)}$$

در واقع، داریم:

$$\begin{aligned} & x_{n-1}^2 x_n^2 - (x_{n-1}^{(1)} x_n^{(1)})^2 = \\ & = x_{n-1}^2 x_n^2 - \left(x_{n-1}^2 + x_n^2 - \frac{1}{n^2}\right) \frac{1}{n^2} = \left(x_{n-1}^2 - \frac{1}{n^2}\right) \left(x_n^2 - \frac{1}{n^2}\right) \geq 0 \end{aligned}$$

سپس، فرض می‌کنیم:

$$x_1^{(2)} = x_1^{(1)}, \dots, x_{n-2}^{(2)} = x_{n-2}^{(1)},$$

$$x_{n-2}^{(2)} = \sqrt{(x_{n-2}^{(1)})^2 + (x_{n-1}^{(1)})^2 - \frac{1}{n^2}}, \quad x_{n-1}^{(2)} = x_n^{(2)} = \frac{1}{n}$$

و دوباره به دست می‌آوریم:

$$x_i^{(2)} \geq \frac{1}{n}, \quad \sum_{i=1}^n (x_i^{(2)})^2 = 1,$$

$$x_1^{(1)} x_2^{(1)} \dots x_n^{(1)} \geq x_1^{(2)} x_2^{(2)} \dots x_n^{(2)}$$

اگر این روند را $(n-1)$ بار ادامه دهیم، به گروه عددهای

$$(x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}, \dots, x_n^{(n-1)})$$

می‌رسیم که، برای آنها، داریم:

$$x_1^{(n-1)} = \frac{\sqrt{n^2 - n + 1}}{n}, \quad x_2^{(n-1)} = \dots = x_n^{(n-1)} = \frac{1}{n}$$

$$x_i^{(n-1)} \geq \frac{1}{n}, \sum_{i=1}^n (x_i^{(n-1)})^2 = 1,$$

$$x_1 x_2 \dots x_n \geq x_1^{(n-1)} x_2^{(n-1)} \dots x_n^{(n-1)} = \frac{\sqrt{n^2 - n + 1}}{n^n}$$

یعنی، برای هر انتخابی از عددهای (x_1, \dots, x_n) ، که در شرط مسأله صدق کند، این نابرابری برقرار است:

$$x_1 x_2 \dots x_n \geq \frac{\sqrt{n^2 - n + 1}}{n^n}$$

که به ازای

$$x_1 = \frac{\sqrt{n^2 - n + 1}}{n}, x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$$

به علامت برابری می‌رسد. به این ترتیب، حداقل مقدار حاصل ضرب، برابر است با

$$\frac{1}{n^n} \sqrt{n^2 - n + 1}$$

ب) حداکثر مقدار حاصل ضرب $x_1 x_2 \dots x_n$ را پیدا می‌کنیم. با استفاده از قضیهٔ مربوط به واسطه‌ها، به دست می‌آید:

$$x_1^2 \dots x_n^2 \leq \left(\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n} \right)^n = \frac{1}{n^n}$$

یعنی

$$x_1 \dots x_n \leq n^{-\frac{1}{2}n}$$

برابری وقتی به دست می‌آید که داشته باشیم:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

به این ترتیب، حداکثر مقدار این حاصل ضرب، برابر $\frac{1}{\sqrt{n^n}}$ است.

۳۵۲. فرض می‌کنیم:

$$\max(x_1, \dots, x_n) = x_k$$

در این صورت، داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} &= \sum_{i=1}^{k-1} x_i x_{i+1} + \sum_{i=k}^{n-1} x_i x_{i+1} \leq \\ &\leq x_k \sum_{i=1}^{k-1} x_i + x_k \sum_{i=k+1}^n x_i = x_k (a - x_k) \leq \left(\frac{x_k + a - x_k}{2} \right)^2 = \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

و علامت برابری، مثلاً برای $x_1 = x_2 = \frac{a}{2}$ و $x_3 = \dots = x_n = 0$ برقرار

است. بنابراین، حداکثر مقدار مورد نظر، برابر $\frac{1}{4}a^2$ است.

۳۵۳. برای عددهای $0 < a_1 < \dots < a_n$ ، فرض می‌کنیم:

$$A = \prod_{i=1}^n a_i$$

در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n \left(a_i + \frac{1}{b_i} \right) &= \prod_{i=1}^n \frac{a_i b_i + 1}{b_i} = \frac{1}{A} \prod_{i=1}^n (a_i b_i + 1) \leq \\ &\leq \frac{1}{A} \prod_{i=1}^n (a_i^2 + 1) \end{aligned}$$

برای اثبات نابرابری اخیر، کافی است توجه کنیم که

$$\begin{aligned} (a_i b_i + 1)^2 &= a_i^2 b_i^2 + 2a_i b_i + 1 \leq a_i^2 + b_i^2 + a_i^2 + b_i^2 + 1 = \\ &= (a_i^2 + 1)(b_i^2 + 1) \end{aligned}$$

و از آنجا

$$\prod_{i=1}^n (a_i b_i + 1)^2 \leq \prod_{i=1}^n (a_i^2 + 1)(b_i^2 + 1) = \prod_{i=1}^n (a_i^2 + 1)^2$$

علامت برابری، تنها وقتی است که، برای $n, \dots, 1, i$ داشته باشیم:

$$2a_i b_i = a_i^2 + b_i^2$$

به این ترتیب، حاصل ضرب مورد نظر مسأله، تنها وقتی به حداکثر مقدار خود می‌رسد که داشته باشیم:

$$(b_1, \dots, b_n) = (a_1, \dots, a_n)$$

۳۵۴. بدون این که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان

$x \geq y$ گرفت. $p = x - k$ می‌نامیم، در این صورت

$$x = k + p, y = 2k - x = k - p, p \geq 0$$

و حاصل ضرب

$$xy = (k + p)(k - p) = k^2 - p^2$$

وقتی به حداکثر مقدار خود می‌رسد که، p ، حداقل مقدار ممکن باشد. $p = 0$ می‌گیریم، در این صورت $x = y = k$ و دو عدد x و y تنها وقتی نسبت به هم اول می‌شوند که داشته باشیم: $k = 1$. اگر فرض کنیم $p = 1$ ، آن وقت $x = k + 1$ و $y = k - 1$ و برای این که x و y نسبت به هم اول باشند، باید k عددی زوج باشد (در غیر این صورت، هر دو عدد x و y بر ۲ بخش پذیر می‌شوند). زوج بودن k برای این که x و y نسبت به هم اول باشند، کافی است، زیرا هر مقسوم‌علیه‌ی از x و y باید مقسوم‌علیه‌ی از $x - y$ هم باشد و

$$x - y = (k + 1) - (k - 1) = 2$$

و با زوج بودن k ، x یا y بر ۲ بخش پذیر نیستند.

به ازای $p = 2$ به دست می‌آید:

$$x = k + 2, y = k - 2$$

که برای مقدارهای فرد k ، نسبت به هم اول اند، زیرا در این حالت x و y

عددهایی فردند و، در ضمن، نمی‌توانند مقسوم علیه مشترکی به جز یکی از مقسوم علیه‌های

$$x - y = (k + 2) - (k - 2) = 4$$

داشته باشند. به این ترتیب، عددهای مجهول x و y را باید این‌طور انتخاب کرد:

اگر $k = 1$ ، آن وقت $x = 1$ ، $y = 1$ ؛

اگر $k = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$)، آن وقت $x = k \pm 1$ ، $y = k \mp 1$ ؛

اگر $k = 2m + 1$ ($m \in \mathbb{N}$)، آن وقت $x = k \pm 2$ ، $y = k \mp 2$.

۰۳۵۵ داریم:

$$a = \sum_{i=1}^n \sin^2 x_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (1 - \cos 2x_i)$$

یعنی

$$\sum_{i=1}^n \cos 2x_i = n - 2a$$

اکنون، بردارهای

$$(\cos 2x_i, \sin 2x_i)$$

به طول واحد را، در صفحه، در نظر می‌گیریم. طول مجموع این بردارها، از n تجاوز نمی‌کند، یعنی داریم:

$$\left| \sum_{i=1}^n \sin 2x_i \right| \leq \sqrt{n^2 - \left(\sum_{i=1}^n \cos 2x_i \right)^2} = \\ = \sqrt{n^2 - (n - 2a)^2} = 2\sqrt{a(n-a)}$$

که در آن وقتی به علامت برابری می‌رسیم که داشته باشیم:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \arcsin \sqrt{\frac{a}{n}}$$

بنابراین، حداکثر مقدار مجهول، برابر $2\sqrt{a(n-a)}$ است.

۳۵۶. هر عدد ثابت $n \in \mathbb{N}$ را، تنها به چند طریق محدود، می توان به صورت مجموع عددهای طبیعی نوشت (یعنی، تعداد این روش ها، نامتناهی نیست). بین این حالت ها، نمونه ای وجود دارد (که ممکن است، منحصر به فرد هم نباشد) که، برای آن، داشته باشیم:

$$n = m_1 + m_2 + \dots + m_k, \quad m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_k$$

و در ضمن، حاصل ضرب $m_1 m_2 \dots m_k$ ، حداکثر مقدار $f(n)$ را قبول کند؛ می توان فرض کرد که هیچ کدام از عددهای m_i ($i = 1, \dots, k$)، برابر ۴ نیستند، زیرا ۴ را می توان به صورت $2 + 2$ نوشت که هم مجموع و هم حاصل ضرب آن ها، ثابت می ماند. هر عدد m_i از ۴ هم تجاوز نمی کند، زیرا با فرض $m_k > 4$ ، حاصل ضرب عددهای $m_1, m_2, \dots, m_k - 2$ و ۲، از حاصل ضرب قبلی بیشتر می شود، زیرا

$$(m_k - 2)2 > m_k$$

برای $n = 1$ ، تنها يك امکان وجود دارد، یعنی $f(1) = 1$. برای $n > 1$ ، هر عدد m_i برابر واحد نیست، زیرا، اگر مثلاً $m_1 = 1$ ، آن وقت حاصل ضرب عددهای

$$m_1 + m_2, m_3, \dots, m_k$$

که همان مجموع n را دارند، از حاصل ضرب قبلی بیشتر می شود، چرا که

$$m_1 + m_2 > m_1 m_2$$

بالاخره، در بین عددهای m_i ، سه عدد (یا بیشتر) نمی توانند برابر ۲ باشند، زیرا اگر مثلاً داشته باشیم:

$$m_1 = m_2 = m_3 = 2$$

آن وقت، حاصل ضرب عددهای ۳، ۳، m_4, \dots, m_k ، از حاصل ضرب قبلی بیشتر می شود (زیرا $3^2 > 2^3$). به این ترتیب، برای $n > 1$ ، هر يك از عددهای m_i برابر ۳ هستند، به جز احتمالاً يك یا دو عدد برابر ۲. این نوع انتخاب عددهای m_i ، برای هر عدد $n > 1$ ، به صورتی منحصر به فرد

به دست می آید. بنا بر این، برای مقدار $f(n)$ داریم:

$$f(1) = 1, f(3l) = 3^l, f(3l-1) = 2 \times 3^{l-1}$$

$$f(3l+1) = 4 \times 3^{l-1} \quad (l \in \mathbb{N})$$

۳۵۷. ثابت می کنیم، حداقل قدر مطلق عبارت

$$f(m, n) = 12^m - 5^n, \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

برابر است با ۷. قبل از همه داریم: $f(1, 1) = 7$. اکنون، فرض می کنیم،

برای عددهایی از $m, n \in \mathbb{N}$ ، داشته باشیم:

$$f(m, n) < 7$$

عدد $f(m, n)$ بر هیچ کدام از عددهای ۲، ۳، ۵ بخش پذیر نیست، بنا بر این

تنها برابری $|f(m, n)| = 1$ ممکن است برقرار باشد. در نتیجه، باقی مانده

تقسیم عدد $f(m, n)$ بر ۱۳، باید برابر ۱ یا ۱۲ باشد. چون

$$12^m \equiv (-1)^m \pmod{13}$$

بنا بر این، باقی مانده تقسیم عدد 12^m بر ۱۳، در حالت زوج بودن m برابر

۱ و در حالت فرد بودن m برابر ۱۲ می شود.

$n = 4k + r$ می گیریم که، در آن، $k \in \mathbb{Z}^+$ و $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. در این

صورت

$$5^n = 625 \times 5^r \equiv 5^r \pmod{13}$$

از این جا نتیجه می گیریم که، اگر r برابر ۰، ۱، ۴ یا ۳ باشد، باقی مانده

تقسیم 5^r بر ۱۳، برابر ۱، ۵، ۱۲ یا ۸ می شود: به این ترتیب، باقی مانده

تقسیم عدد $12^m - 5^n$ بر ۱۳، نمی تواند برابر ۱ یا ۱۲ باشد؛ یعنی

نا برابری

$$|f(m, n)| < 7$$

برای هیچ مقداری از $m, n \in \mathbb{N}$ برقرار نیست.

۱۹۰. ویژگی‌های مختلف تابع

۳۵۸. بنا بر فرض مسأله داریم:

$$f(0) = c = 1,$$

$$f(x_1) = ax_1^4 + bx_1^2 + 1 = 1,$$

$$f'(x_2) = 4ax_2^3 + 2bx_2 = 0$$

که از آن‌ها، به دست می‌آید:

$$b = -2ax_2^2 \text{ و } ax_1^4 - 2ax_2^2x_1^2 = ax_1^2(x_1^2 - 2x_2^2) = 0$$

یعنی $x_1 = x_2\sqrt{2}$ (زیرا عددهای a و x_1 مخالف صفرند). آزمایش نشان می‌دهد که، اگر $x_1 = x_2\sqrt{2}$ ، آن وقت تابع

$$f(x) = ax^4 - 2ax_2^2x^2 + 1$$

با شرط‌های مسأله سازگار است. بنابراین، اگر $x_1 \neq x_2\sqrt{2}$ ، آن وقت، تابع مطلوب وجود ندارد و اگر $x_1 = x_2\sqrt{2}$ ، آن وقت، سه عدد (a, b, c) به صورت

$$(a, -2ax_2^2, 1)$$

درمی‌آیند که، در آن‌ها، a عددی دلخواه و مخالف صفر است.

۳۵۹. ثابت می‌کنیم، چنین تابعی وجود ندارد. اگر چنین تابعی وجود

داشته باشد، در ضمن، باید داشته باشیم:

$$f(0) - (f(0))^2 \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \left(f(0) - \frac{1}{4}\right)^2 \leq 0$$

یعنی $f(0) = \frac{1}{4}$. به همین ترتیب، به دست می‌آید: $f(1) = \frac{1}{4}$ ، یعنی

$$f(0) = f(1)$$

که مخالف فرض مسأله است.

۳۶۰. اگر در نابرابری

$$f(x+y) < f(x) + f(y)$$

قرار دهیم $x = y = 0$ ، به دست می آید:

$$f(0) \leq 2f(0) \Rightarrow f(0) \geq 0$$

از این جا، با توجه به نابرابری مفروض $f(0) \leq 0$ ، نتیجه می شود $f(0) = 0$ ، سپس، برای هر مقدار $x \in \mathbf{R}$ داریم:

$$f(x) \geq f(x + (-x)) - f(-x) = -f(-x) \geq x$$

که از آن جا، با توجه به نابرابری مفروض $f(x) \leq x$ ، به دست می آید:

$$f(x) \equiv x, \quad (x \in \mathbf{R})$$

۰۳۶۱ این تابع را در نظر می گیریم:

$$g(x) = f(x) + f(ax)$$

اگر $a = \frac{p}{q}$ ($q \in \mathbf{N}$ و $p \in \mathbf{Z}$)، آن وقت $T = q\pi$ ، دوره تناوب $g(x)$

است، زیرا

$$g(x + q\pi) \equiv f(x + q\pi) + f(ax + p\pi)$$

و π ، دوره تناوب $f(x)$ است. ثابت می کنیم، اگر a عددی گنگ باشد، تابع $g(x)$ ، متناوب نیست. داریم:

$$g(0) = f(0) + f(0) = 1$$

اگر برای مقداری مثل $x_0 \neq 0$ داشته باشیم $g(x_0) = 1$ ، آن وقت

$$\operatorname{tg}^2 x_0 = 0 \quad \text{و} \quad \operatorname{tg}^2(ax_0) = 0$$

یعنی

$$x_0 = k\pi \quad \text{و} \quad ax_0 = l\pi, \quad (k, l \in \mathbf{Z})$$

و چون $x_0 \neq 0$ ، بنابراین $a = \frac{l}{k}$ که با گنگ بودن عدد a متناقض است.

بنابراین، تابع $g(x)$ ، تنها در نقطه $x = 0$ ، برابر واحد می شود، یعنی دوره

تناوب ندارد.

۳۶۲. از آنجا که معادله $f(x) = g(x)$ ریشه حقیقی ندارد،

بنابراین تابع

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

به ازای همه مقادارهای $x \in \mathbf{R}$ ، یا فقط مقادارهای مثبت را می پذیرد و یا فقط مقادارهای منفی را. بنابراین، تابع

$$\begin{aligned} f(f(x)) - g(g(x)) &= f(f(x)) - g(f(x)) + \\ &+ f(g(x)) - g(g(x)) = h(f(x)) + h(g(x)) \end{aligned}$$

نمی تواند، به ازای هیچ مقداری از $x \in \mathbf{R}$ ، برابر صفر شود.

۳۶۳. الف) تابع $[0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ را پیوسته

می گیریم و فرض می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = +\infty$$

به برهان خلف متوسل می شویم و فرض می کنیم، حکم مسأله درست نباشد. در این صورت، مقدار $N > 0$ وجود دارد که، برای هر $n \in \mathbf{N}$ ، بتوان عدد $x_n > n$ را پیدا کرد، به نحوی که داشته باشیم:

$$f(x_n) \in [0, N]$$

چون تابع $f(x)$ پیوسته است، بنابراین، مقدار آن در بازه $[0, N]$ محدود می ماند و، در نتیجه، می توان مقدار M را طوری پیدا کرد که از نابرابری $f(x) \leq N$ بتوان نابرابری $f(f(x)) \leq M$ را نتیجه گرفت. به این ترتیب، برای هر $n \in \mathbf{N}$ ، عدد $x_n > n$ وجود دارد که، برای آن، داریم:

$$f(f(x_n)) \leq M$$

که شرط مسأله، یعنی

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = +\infty$$

را نقض می کند، پس

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

ب) $f(x) \equiv \frac{1}{x}$ می گیریم، در این صورت

$$f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty),$$

$$f(f(x)) \equiv x, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = +\infty$$

در حالی که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

۳۶۴. فرض کنیم، این تابع $f(x)$ وجود داشته باشد. تابع های پیوسته زیر را در نظر می گیریم:

$$g(x) = f(x+1) - f(x), \quad h(x) = f(x+1) + f(x)$$

این دو تابع، نمی توانند به طور هم زمان، مقداری ثابت باشند، زیرا تابع

$$f(x) \equiv \frac{1}{4} [h(x) - g(x)]$$

مقدار ثابتی نیست. مثلاً، فرض می کنیم، $h(x)$ ، مقدار ثابتی نباشد، یعنی بتوان دو مقدار x_1 و x_2 را طوری پیدا کرد که، برای آن ها، داشته باشیم:

$$h(x_1) < h(x_2)$$

در این صورت، عدد گویای $r \in [h(x_1), h(x_2)]$ وجود دارد، و با توجه به پیوستگی تابع $h(x)$ ، عددی مثل x_0 پیدا می شود که، برای آن، داشته باشیم: $h(x_0) = r$. به این ترتیب $f(x_0) + f(x_0+1) = r$ و این، به معنای آن است که دو عدد $f(x_0)$ و $f(x_0+1)$ یا هر دو گویا و یا هر دو گنگ اند. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می کند.

۳۶۵. از نابرابری $|x - y|^3 \leq [f(x) - f(y)]^2$ ، به ازای

$x \neq y$ ، نتیجه می شود:

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq |x - y|^{\frac{1}{r}}$$

و از آنجا

$$\lim_{x \rightarrow y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = 0$$

زیرا: $\lim_{x \rightarrow y} |x - y|^{\frac{1}{r}} = 0$ یعنی تابع $f(x)$ ، در هر نقطه، مشتق پذیر است و، در ضمن، $f'(x) \equiv 0$ ($x \in \mathbb{R}$)، بنابراین، تابع $f(x)$ ، تنها می تواند برابر مقداری ثابت باشد.

۳۶۶. $f(x)$ را تابع مورد نظر مسأله در نظر می گیریم و فرض

می کنیم:

$$g(x) = f(x) + x - 1$$

که در بازه $[0, 1]$ معین است. $g(x)$ تابعی است پیوسته (چون $f(x)$ پیوسته است) و در ضمن $g(0) = -1$ و $g(1) = 1$ ؛ بنابراین عدد $c \in (0, 1)$ وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم: $g(c) = 0$ ، یعنی $f(c) = 1 - c$. بنا بر قضیه لاگرانژ، عددهای $a \in (0, c)$ و $b \in (c, 1)$ وجود دارند که، برای آنها، داشته باشیم:

$$f'(a) = \frac{f(c) - f(0)}{c}, \quad f'(b) = \frac{f(1) - f(c)}{1 - c}$$

بنابراین

$$f'(a) \cdot f'(b) = \frac{1 - c}{c} \cdot \frac{c}{1 - c} = 1$$

۳۶۷. ثابت می کنیم، هر عدد $d = \frac{1}{k}$ ($k \in \mathbb{N}$)، با شرط مسأله سازگار

است. تابع پیوسته و دلخواه $f(x)$ و عدد $k > 1$ را در نظر می‌گیریم
 (عدد $d = 1$ ، با شرط مسأله سازگار است، زیرا $f(0) = f(1)$). تابع

$$g(x) = f\left(x + \frac{1}{k}\right) - f(x)$$

در بازه $\left[0, \frac{k-1}{k}\right]$ معین است. از آنجا که مجموع عددهای

$$g(0) = f\left(\frac{1}{k}\right) - f(0); \quad g\left(\frac{1}{k}\right) = f\left(\frac{2}{k}\right) - f\left(\frac{1}{k}\right); \quad \dots$$

$$g\left(\frac{k-1}{k}\right) = f(1) - f\left(\frac{k-1}{k}\right)$$

برابر صفر است، بنابراین، در بین آن‌ها، هم عددهای غیر مثبت و هم عددهای
 غیر منفی وجود دارند. در نتیجه، با توجه به پیوستگی تابع $g(x)$ ، عدد x_0
 وجود دارد که، برای آن داشته باشیم: $g(x_0) = 0$ ، یعنی

$$f\left(x_0 + \frac{1}{k}\right) = f(x_0)$$

اکنون فرض کنید، عدد مفروض $d \in (0, 1]$ ، به ازای هیچ مقدار

$k \in \mathbb{N}$ ، برابر $\frac{1}{k}$ نباشد. برای این عدد d ، عدد $k \in \mathbb{N}$ را طوری انتخاب

می‌کنیم که داشته باشیم:

$$kd < 1 < (k+1)d$$

و تابع پیوسته دلخواه $f(x)$ را در نظر می‌گیریم که در بازه $[0, d]$ معین
 باشد و در برابری‌های زیر صدق کند:

$$f(0) = 0, \quad f(1 - kd) = -k, \quad f(d) = 1$$

فرض می‌کنیم، این تابع، در بازه $[0, 1]$ ، به نحوی باشد که به ازای هر
 $x \in [d, 1]$ داشته باشیم:

$$f(x) = f(x-d) + 1$$

تابع حاصل، پیوسته است و درضمن

$$\begin{aligned} f(1) &= f(1-d) + 1 = f(1-2d) + 2 = \dots = \\ &= f(1-kd) + k = 0 = f(0) \end{aligned}$$

و برای هر مقدار $x \in [0, 1-d]$ داریم:

$$f(x+d) = f(x) + 1 \neq f(x)$$

۳۶۸ $k \in \mathbb{N}$ را عدد درستی می‌گیریم که مجذور کامل نباشد. ثابت

می‌کنیم $f'(\sqrt{k}) = 0$. چون $\sqrt{k} \notin \mathbb{Q}$ ، پس $f(\sqrt{k}) = 0$ و کافی است ثابت کنیم، حد

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{k}} \frac{f(x)}{x - \sqrt{k}}$$

وجود دارد و برابر صفر است. عدد دلخواه $\varepsilon > 0$ را در نظر می‌گیریم.

تنها تعداد محدودی عدد به صورت $\frac{p}{q}$ ($q \in \mathbb{N}$ و $p \in \mathbb{Z}$) وجود دارد که،

برای آن، داشته باشیم:

$$0 < q < \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{و} \quad \left| \frac{p}{q} - \sqrt{k} \right| < 1$$

بنابراین، $\delta \in (0, 1)$ وجود دارد که، به ازای آن، در بازه

$$I_\delta = (\sqrt{k} - \delta, \sqrt{k} + \delta)$$

از این کسرها وجود نداشته باشد. اگر $x = \frac{p}{q} \in I_\delta$ و $\frac{p}{q}$ ، کسری ساده‌نشده‌ی

باشد، آن وقت

$$q \geq \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{و} \quad \left| \sqrt{k} + \frac{p}{q} \right| < \sqrt{k} + (\sqrt{k} + \delta) < 2\sqrt{k} + 1$$

درضمن، $|kq^2 - p^2| \geq 1$ ، زیرا

$$kq^2 - p^2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{x - \sqrt{k}} \right| &= \left| \frac{f\left(\frac{p}{q}\right)}{\frac{p}{q} - \sqrt{k}} \right| = \frac{1}{q^2} \cdot \frac{\left| \sqrt{k} + \frac{p}{q} \right|}{\left| k - \frac{p^2}{q^2} \right|} = \\ &= \frac{1}{q} \cdot \frac{\left| \sqrt{k} + \frac{p}{q} \right|}{|q^2 k - p^2|} < \varepsilon (2\sqrt{k} + 1) \end{aligned}$$

درحالی هم که $x \in I_\delta \setminus \{\sqrt{k}\}$ ، عددی گنگ باشد، داریم:

$$f(x) = 0, \quad \left| \frac{f(x)}{x - \sqrt{k}} \right| = 0$$

حکم ثابت شد.

۳۶۹. فرض می‌کنیم، بازه $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ به طول d وجود داشته باشد که،

برای آن، به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم:

$$f^n(\mathbb{Z}) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$$

در این صورت، برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$f^{m+n}(\mathbb{Z}) \cap f^m(\mathbb{Z}) = f^m(f^n(\mathbb{Z}) \cap \mathbb{Z}) = f^m(\emptyset) = \emptyset$$

بنابراین، مجموعه‌های $f(\mathbb{Z}), f^2(\mathbb{Z}), \dots, f^n(\mathbb{Z}), \dots$ دو به دو، دارای اشتراکی نیستند. از طرف دیگر، هر مجموعه $f^n(\mathbb{Z})$ ، برای $n \in \mathbb{N}$ ، اجتماعی از چند مجموعه به طول d است که در \mathbb{Z} واقع‌اند. بنابراین، همه آن‌ها، نمی‌توانند بدون اشتراک باشند. تناقض حاصل، درستی حکم را ثابت می‌کند.

۳۷۰. اگر فرض کنیم $h(x, y) = f(y) - f(x)$ ، آن وقت تابع

$h(x, y)$ ، نسبت به متغیر y صعودی و نسبت به متغیر x نزولی است؛ درضمن،

برای همه مقادیرهای $x > y > 0$ داریم: $h(x, y) > 0$ و

$$g(x, y) \equiv \frac{h(x, x+y)}{h(x-y, x)}$$

ثابت می‌کنیم، برای هر $x \in \mathbf{R}$ و $y > 0$ ، نابرابری $g(x, y) < 14$ برقرار است. اگر $x - y \geq 0$ یا $x + y \leq 0$ ، آن وقت، بنا بر شرط مسأله داریم:

$$h(x, x+y) < 2h(x-y, x)$$

و به‌جز آن، برای هر $y > 0$ ، این نابرابری برقرار است:

$$h(0, y) < 2h(-y, 0)$$

به این ترتیب، برای بررسی، دو حالت باقی می‌ماند:

$$(1) \quad x - y < 0 < x \quad (2) \quad x < 0 < x + y$$

توجه کنیم که، برای هر $x \geq 0$ و $y > 0$ داریم:

$$h(x+y, x+3y) < 6h(x, x+y) \quad (1)$$

در واقع داریم:

$$h(x+y, x+2y) < 2h(x, x+y),$$

$$h(x+2y, x+3y) < 2h(x+y, x+2y) < 4h(x, x+y)$$

و از آنجا

$$h(x+y, x+3y) = h(x+y, x+2y) +$$

$$+ h(x+2y, x+3y) < 6h(x, x+y)$$

به حالت (1) می‌پردازیم. اگر $x - \frac{y}{2} \leq x - y < 0$ ، آن وقت، با استفاده

از نابرابری (1)، به دست می‌آید:

$$h(x, x+y) < 6h\left(x - \frac{y}{2}, x\right) < 6h(x-y, x) <$$

$$\langle 14h(x-y, x) \rangle$$

و اگر $x < 0 < x - \frac{y}{2}$ آن وقت

$$x < y - x < x + y < 3(y - x)$$

و با استفاده از نابرابری (۱)، به دست می‌آید:

$$h(y-x, x+y) < h(y-x, 3(y-x)) < 6h(0, y-x)$$

چون $h(x, y-x) < h(0, y-x)$ پس دوباره به دست می‌آید:

$$h(x, x+y) = h(x, y-x) + h(y-x, x+y) <$$

$$\langle 7h(0, y-x) \rangle < 14h(x-y, 0) < 14h(x-y, x)$$

در حالت (۲) داریم:

$$h(x, 0) < 2h(2x, x) < 2h(x-y, x),$$

$$h(0, x+y) < 2h(-x-y, 0) < 2h(x-y, 0) =$$

$$= 2h(x-y, x) + 2h(x, 0) < 6h(x-y, x)$$

بنابراین

$$h(x, x+y) < 8h(x-y, x)$$

به این ترتیب، در همه حالت‌ها ثابت شد:

$$h(x, x+y) < 14h(x-y, x)$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود: $g(x, y) < 14$.

اکنون ثابت می‌کنیم: $g(x, y) > \frac{1}{14}$ (به ازای همه مقادیرهای

$x \in \mathbb{R}$ و $y > 0$).

تابع صعودی $f_1(x) = -f(-x)$ را در نظر می‌گیریم و فرض

می‌کنیم:

$$g_1(x, y) = \frac{f_1(x+y) - f_1(x)}{f_1(x) - f_1(x-y)}$$

چون $g_1(x, y) = [g(-x, y)]^{-1}$ ، بنابراین

$$\frac{1}{2} < g_1(x, y) < 2$$

برای هر $y > 0$ به ازای $x = 0$ ، و برای هر $x \in (0, |x|]$ به ازای $y \neq 0$ ،
در این صورت، بنا بر آنچه در بالا ثابت کردیم، برای تابع $g_1(x, y)$ داریم:
 $1 < g_1(x, y) < 14$ ($x \in \mathbf{R}$ و $y > 0$)، که از آنجا نتیجه می‌شود:

$$g(x, y) = \frac{1}{g_1(-x, y)} > \frac{1}{14}$$

۲۰۵. معادله‌های تابعی

۳۷۱. اگر در اتحاد مفروض، $y = 1$ بگیریم، به دست می‌آید:

$$f(x) \equiv \frac{f(x) + f(1)}{x+1}, \quad (x \neq -1)$$

یعنی $f(x) \equiv f(1)$. به ازای $x = 0$ به دست می‌آید: $f(1) = 0$ ، یعنی
برای $x \in \{0, -1\}$ داریم: $f(x) = 0$.

اکنون، اگر در اتحاد اصلی، قرار دهیم $y = 0$ و $x = 2$ ، به دست

می‌آید:

$$f(0) = \frac{f(2) + f(0)}{2} \Rightarrow f(0) = f(2) = 0$$

بالاتر، اگر $y = 0$ و $x = -1$ بگیریم، به دست می‌آید:

$$f(0) = -f(-1) - f(0) \Rightarrow f(-1) = -2f(0) = 0$$

به این ترتیب، ثابت شد که: $f(x) \equiv 0$ ($x \in \mathbf{R}$).

۳۷۲. در اتحاد مفروض، $x = y = 1$ می‌گیریم، در این صورت

به دست می‌آید:

$$2f(1) = 2[f(1)]^2 \Rightarrow f(1) = 0 \text{ یا } f(1) = 1$$

هریک از این دو حالت را، بررسی می‌کنیم:

الف) $f(1) = 0$. اگر در اتحاد $y = 1$ بگیریم، به دست می‌آید:

$$f(x) \equiv 0$$

ب) $f(1) = 1$. دوباره $y = 1$ می‌گیریم، به این اتحاد می‌رسیم:

$$f(x) + x \equiv (x+1)f(x) \Rightarrow x[f(x) - 1] \equiv 0$$

از این‌جا، برای هر $x \neq 0$ داریم: $f(x) = 1$

برای تابع $f(x)$ ، دو امکان وجود دارد: یا $f(x) \equiv 0$ و یا

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \neq 0) \\ a & (x = 0, a \in \mathbf{R}) \end{cases}$$

آزمایش نشان می‌دهد که، هر یک از این دو تابع، با شرط مسأله سازگار است.

۳۷۳. در اتحاد مفروض، قرار می‌دهیم: $n = m = 0$ ، به دست می‌آید:

$$[f(0)]^2 = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 2$$

(زیرا $f(0) \neq 0$). سپس، $m = 1$ را در اتحاد قرار می‌دهیم:

$$f(n)f(1) \equiv f(n+1) + f(n-1), \quad (n \in \mathbf{Z})$$

اگر مقدار تابع $f(n)$ در نقطه‌های $n = 0$ و $n = 1$ داده شده باشد، به کمک این اتحاد، می‌توان مقادیرهای $f(2)$ و $f(-1)$ و، سپس، $f(3)$ و $f(-2)$ و غیره را، به صورت یک ارزشی، پیدا کرد؛ یعنی همه مقادیرهای $f(n)$ ، برای $n \in \mathbf{Z}$ ، به دست می‌آید. به این ترتیب، تابع $f(n)$ ، به صورتی منحصر به فرد،

با توجه به شرط‌های مسأله، معین می‌شود، زیرا $f(0) = 2$ و $f(1) = \frac{5}{4}$

(در حالت الف) یا $f(0) = 2$ و $f(1) = \sqrt{3}$ (در حالت ب). از این جا، قانع می شویم که تابع های

$$f(n) = 2^n + 2^{-n} \quad \text{و} \quad f(n) = 2 \cos \frac{n\pi}{6}$$

به ترتیب، با شرط های دو حالت الف) و ب) سازگارند. در واقع، داریم:

$$f(1) = 2^1 + 2^{-1} = \frac{5}{2}, \quad f(0) = 2^0 + 2^0 \neq 0 \quad (\text{الف})$$

$$f(n)f(m) = (2^n + 2^{-n})(2^m + 2^{-m}) = (2^{n+m} + 2^{-n-m}) + (2^{n-m} + 2^{m-n}) = f(n+m) + f(n-m), \quad (n, m \in \mathbb{Z})$$

$$f(1) = 2 \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}, \quad f(0) = 2 \cos 0 \neq 0 \quad (\text{ب})$$

$$f(n)f(m) = 2 \cos \frac{n\pi}{6} \cdot 2 \cos \frac{m\pi}{6} = 2 \cos \frac{(n+m)\pi}{6} + 2 \cos \frac{(n-m)\pi}{6} = f(n+m) + f(n-m), \quad (n, m \in \mathbb{Z})$$

۰۳۷۴. اگر در اتحاد مفروض، $m = 0$ قرار دهیم، برای تابع $f(n)$ ،

به دست می آید:

$$2f(n) \equiv f(3n), \quad (n \in \mathbb{Z}^+)$$

و به ازای $n = m = 0$ ، داریم: $f(0) = 0$. سپس، $n = m$ می گیریم:

$$f(2n) + f(0) \equiv f(3n) \implies f(2n) \equiv f(3n)$$

از این جا، از یک طرف، برای هر مقدار $m \in \mathbb{Z}^+$ ، داریم:

$$f(4m) = f(6m) = f(9m)$$

و از طرف دیگر، از اتحاد مفروض، به ازای $n = 3m$ به دست می آید:

$$f(4m) + f(2m) \equiv f(9m)$$

که تنها در حالت $f(m) \equiv 0$ ممکن است. بنابراین، برای هر مقدار $n \in \mathbb{Z}^+$ داریم:

$$f(n) = \frac{1}{4}f(2n) = \frac{1}{4}f(4n) = 0$$

یعنی، اتحاد مفروض، تنها برای تابع $f(n) \equiv 0$ برقرار است.

۳۷۵. در هر دو اتحاد مفروض، $x = y = 0$ قرار می‌دهیم، به دست

می‌آید:

$$f(0) = 2f(0)g(0) \quad \text{و} \quad g(0) = [g(0)]^2 - [f(0)]^2$$

$g(0) \neq \frac{1}{4}$ ، زیرا، در غیر این صورت، از برابری دوم، نتیجه می‌شود:

$$[f(0)]^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} < 0$$

بنابراین، از برابری اول، به دست می‌آید: $f(0) = 0$ و از برابری دوم،

نتیجه می‌شود: یا $g(0) = 1$ و یا $g(0) = 0$ ولی $g(0) = 0$ ممکن نیست،

زیرا، در غیر این صورت، از اتحاد اول، به ازای $y = 0$ ، تابع

$$f(x) = f(x)g(0) + g(x)f(0) \equiv 0$$

برابر مقداری ثابت می‌شود. به این ترتیب، به جواب منحصر به فرد

$$f(0) = 0, \quad g(0) = 1$$

می‌رسیم که، مثلاً، در تابع‌های زیر صدق می‌کنند:

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \cos x$$

۳۷۶. در اتحاد مفروض $y = 1$ قرار می‌دهیم، به دست می‌آید:

$$f(x) \equiv f(x)f(1) - f(x+1) + 1, \quad (x \in \mathbb{Q})$$

یعنی

$$f(x+1) \equiv f(x) + 1$$

از این جا، برای هر $x \in \mathbf{Q}$ و $n \in \mathbf{Z}$ داریم:

$$f(x+n) = f(x) + n$$

که اگر در آن $x=1$ بگیریم و n را به $n-1$ تبدیل کنیم، به دست می‌آید:

$$f(n) = f(1) + n - 1 = n + 1$$

اکنون، در اتحاد مفروض، $x = \frac{1}{n}$ و $y = n$ قرار می‌دهیم ($n \in \mathbf{Z}$)، به دست می‌آید:

$$f\left(\frac{1}{n} \cdot n\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) f(n) - f\left(\frac{1}{n} + n\right) + 1$$

از آن جا

$$2 = (n+1)f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) - n + 1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n}$$

سرانجام، در اتحاد مفروض، قرار می‌دهیم: $x = p$ و $y = \frac{1}{q}$ ، که در آن‌ها، $p \in \mathbf{Z}$ و $q \in \mathbf{N}$ داریم:

$$f\left(p \cdot \frac{1}{q}\right) = f(p) \cdot f\left(\frac{1}{q}\right) - f\left(p + \frac{1}{q}\right) + 1$$

و از آن‌جا

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = (p+1)\left(\frac{1}{q} + 1\right) - \frac{1}{q} - p = \frac{p}{q} + 1$$

به این ترتیب، همه‌جا به تابع $f(x) = x + 1$ می‌رسیم که با همه شرط‌های مسأله سازگار است.

۳۷۷. ابتدا فرض می‌کنیم $n \leq 100$ و $n + 11 > 100$ ، یعنی

$$90 \leq n \leq 100 \text{ در این صورت}$$

$$f(n) = f(f(n+11)) = f(n+11-10) = f(n+1)$$

بنابراین

$$f(90) = f(91) = \dots = f(100) = f(101) = 91$$

اکنون، فرض می‌کنیم $n < 90$. عدد $m \in \mathbf{N}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که، برای آن، داشته باشیم:

$$90 \leq n+11m \leq 100$$

در این صورت، داریم:

$$\begin{aligned} f(n) &= f^2(n+11) = \dots = f^{m+1}(n+11m) = \\ &= f^m(f(n+11m)) = f^m(91) = 91 \end{aligned}$$

به این ترتیب، برابری $f(n) = 91$ ، به ازای همه مقادیرهای $n \leq 100$ ثابت شد.

۳۷۸. ثابت می‌کنیم $(n \in \mathbf{N}) g(n) \equiv h(n)$ ، که در این صورت، با توجه به شرط ج) نتیجه می‌شود:

$$f(n) \equiv g(n) - h(n) + 1 \equiv 1, \quad (n \in \mathbf{N})$$

به ازای هر $n \in \mathbf{N}$ داریم:

$$h(n) = g(n) + 1 - f(n) \leq g(n)$$

(زیرا $f(n) \geq 1$). فرض می‌کنیم، برای مقداری از $n \in \mathbf{N}$ ، برابری $g(n) = h(n)$ برقرار نباشد. در این صورت $h(n) < g(n) = k$. با توجه به شرط ب) عددهای طبیعی n_1, \dots, n_{k-1} پیدا می‌شوند که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$g(n_i) = i, \quad (i = 1, \dots, k-1)$$

بنابراین، هر يك از k عدد $h(n_1), \dots, h(n_{k-1}), h(n)$ ، متعلق به مجموعه $\{1, \dots, k-1\}$ است، در نتیجه، بنا بر اصل دیریکله (قضیه ۱)، تابع $h(n)$ عددی را بیش از يك بار قبول می‌کند، که با شرط الف) متناقض است.

حکم ثابت شد.

۳۷۹. دنباله زیر را در نظر می گیریم:

$$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 5, \dots$$

که ردیفی صعودی است از همه عددهای طبیعی، به جز عددهایی که مجذور کامل یک عدد درست باشند. فرض می کنیم:

$$n_{k,m} = (n_k)^{2^m} \text{ و } (k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}^+)$$

در این صورت $n_{k,m+1} = (n_{k,m})^2$ ، و هر مقدار $n > 1$ متناظر است با یک زوج عددهای k و m ، که برای آنها $n = n_{k,m}$. تابع $f(n)$ را، به این ترتیب، تعریف می کنیم:

$$f(1) = 1, f(n_{k,m}) = \begin{cases} n_{k+1,m} & (\text{وقتی } k \text{ فرد است}) \\ n_{k+1,m+1} & (\text{وقتی } k \text{ زوج است}) \end{cases}$$

(برای $k \in \mathbb{N}$ و $m \in \mathbb{Z}^+$). در این صورت، خواهیم داشت:

$$f(f(n)) \equiv n^2, (n \in \mathbb{N})$$

۳۸۰ الف) مثلاً، تابع

$$f(n, m) = n, (n, m \in \mathbb{Z})$$

در همه شرطهای مسأله صدق می کند.

ب) فرض می کنیم، حکم درست نباشد، یعنی برای عددی مثل $k \in \mathbb{Z}$ ، همه مقادیرهای تابع $f(n, m)$ ، که با شرطهای مسأله سازگار است، مثلاً، از k تجاوز نکنند. در این صورت، بین مقادیرهای $f(n, m)$ ($n, m \in \mathbb{Z}$)، بزرگترین مقدار پیدا می شود که آن را $l = f(n_0, m_0)$ می نامیم. این مقدار، با همه عددهای

$$f(n_0 \pm 1, m_0), f(n_0, m_0 \pm 1)$$

برابر است، زیرا در غیر این صورت، باید داشته باشیم:

$$f(n_0, m_0) = \frac{1}{4} [f(n_0 - 1, m_0) + f(n_0 + 1, m_0) + f(n_0, m_0 - 1) + f(n_0, m_0 + 1)] < 1$$

اگر به همین ترتیب استدلال کنیم، می توان نوشت:

$$l = f(n_0, m_0) = f(n_0 \pm 1, m_0) = f(n_0 \pm 2, m_0) = \dots = \\ = f(n_0 \pm n, m_0) = f(n_0 \pm n, m_0 \pm 1) = f(n_0 \pm n, m_0 \pm 2) = \\ = \dots = f(n_0 \pm n, m_0 \pm m)$$

برای هر مقدار $n, m \in \mathbb{N}$ بنابراین $f(n, m) = l$ ، که با شرط مسأله ناسازگار است.

۳۸۱. اگر $n + m$ زوج باشد، نقطه $(n, m) \in S$ را زوج و اگر

$n + m$ فرد باشد، این نقطه را فرد می نامیم. فرض می کنیم، تابع عمومی $g(n, m)$ وجود داشته باشد، در این صورت، تابع $g^{-1}(n, m)$ هم، یک تابع عمومی است. تابعی را در نظر می گیریم که به صورت زیر داده شده باشد:

$$f(n, m) = \begin{cases} g(n, m) & \text{دقتی نقطه } (n, m) \text{ زوج باشد} \\ g^{-1}(n, m) & \text{دقتی نقطه } (n, m) \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

برای $(n, m) \in S$ ، در این صورت، $g(n, m)$ و $g^{-1}(n, m)$ از نظر زوج و فرد بودن، مخالف (n, m) خواهند بود. بنابراین، برای هر نقطه $(n, m) \in S$ ، به دست می آید:

$$f^2(n, m) = \begin{cases} g^{-1}(g(n, m)) = (n, m) & \text{زوج } (n, m) \\ g(g^{-1}(n, m)) = (n, m) & \text{فرد } (n, m) \end{cases}$$

بنابراین، ثابت شد که

$$f^2(n, m) \equiv (n, m), \quad (n, m) \in S$$

برای اثبات عمومی بودن این تابع، کافی است به یاد بیاوریم که $g(n, m)$ و $g^{-1}(n, m)$ تابع هایی عمومی بودند.

۳۸۲. ثابت می کنیم، به جز دو زوج عددی که در راهنمایی صورت

مسأله داده شده است، هیچ زوج دیگری از مقدارهای n, m ، با شرط مورد- نظر نمی سازد.

فرض می‌کنیم، زوج عددی درست (m, n) ، به‌جز $(2, 3)$ و $(2, 5)$ ،
در نابرابری‌های $m \leq n$ ، $mn(m+n) \neq 0$ و اتحاد

$$f_m(x, y)f_n(x, y) \equiv f_{m+n}(x, y), \quad (x, y \in \mathbf{R}, xy(x+y) \neq 0)$$

صدق کند و بدانیم

$$f_k(x, y) = \frac{x^k + y^k + (-1)^k(x+y)^k}{k}, \quad (k \in \mathbf{Z}, k \neq 0)$$

برای هر مقدار ثابت $y = y_0 \neq 0$ ، این حکم درست است. اگر
 $k < 0$ ، آن وقت

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^k = \lim_{x \rightarrow \infty} (x + y_0)^k = 0$$

از آن جا

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x, y_0) = \frac{1}{k} y_0^k$$

اگر عدد $k \in \mathbf{N}$ زوج باشد، آن وقت

$$f_k(x, y) \equiv \frac{1}{k} \left(2x^k + 2y^k + \sum_{i=1}^{k-1} C_k^i x^i y^{k-i} \right)$$

از آن جا

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_k(x, y_0)}{x^k} = \frac{2}{k}$$

بلاخره، $f_1(x, y) \equiv 0$ ، و اگر $k \in \mathbf{N}$ فرد و $k \neq 1$ ، آن وقت

$$f_k(x, y) \equiv -\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} C_k^i x^i y^{k-i}$$

و از آن جا

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_k(x, y_0)}{x^{k-1}} = -\frac{y_0}{k} C_k^{k-1} = -y_0.$$

چند حالت را در نظر می‌گیریم.

الف) عددهای $m, n \in \mathbb{N}$ را زوج می‌گیریم. در این صورت، اگر اتحاد مفروض در صورت مسأله را در نظر بگیریم، به دست می‌آید:

$$\frac{2}{m+n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{m+n}(x, y_0)}{x^{m+n}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_m(x, y_0)}{x^m} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_n(x, y_0)}{x^n} = \frac{4}{mn}$$

از آن جا $\frac{m+n}{2} = \frac{mn}{4}$ ، یعنی $(\frac{m}{2}-1)(\frac{n}{2}-1) = 1$ و این شرط، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$\frac{n}{2} = \frac{m}{2} = 2 \Rightarrow m = n = 4$$

که ممکن نیست، زیرا

$$f_4(1, 1) f_4(1, 1) = \frac{(2+2^4)^2}{4^2} = \frac{81}{4} \neq \frac{1290}{4} = \frac{2+2^8}{8} = f_8(1, 1)$$

ب) عددهای $m, n \in \mathbb{N}$ را فرد می‌گیریم. در این صورت، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_m(x, y_0) f_n(x, y_0)}{x^{m+n}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \frac{f_m(x, y_0)}{x^{m-1}} \frac{f_n(x, y_0)}{x^{n-1}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{m+n}(x, y_0)}{x^{m+n}} = \frac{2}{m+n}$$

که با اتحاد اصلی مسأله، متناقض است.

ج) فرض می‌کنیم، یکی از عددهای $m, n \in \mathbb{N}$ (که آن را p می‌نامیم) زوج، و دیگری (که آن را q می‌نامیم) فرد باشد. در این صورت $q > 1$ ، زیرا اگر $q = 1$ ، آن‌گاه $f_q(1, 1) = 0$ و با توجه به اتحاد داریم:

$$f_{p+q}(1, 1) = \frac{2 - 2^{p+q}}{p+q} = 0$$

که ممکن نیست، زیرا $p+q > 1$. بنابراین، به دست می‌آید:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_p(x, y_0) f_q(x, y_0)}{x^{p+q-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_p(x, y_0)}{x^p} \frac{f_q(x, y_0)}{x^{q-1}} =$$

$$= -\frac{2y_0}{p}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{p+q}(x, y_0)}{x^{p+q-1}} = -y_0$$

از آن جا $p=2$. از اتحاد داریم:

$$\frac{3(2-2^q)}{q} = f_2(1, 1) f_q(1, 1) = f_{2+q}(1, 1) = \frac{2-2^{2+q}}{2+q}$$

یعنی

$$3(2+q)(1-2^{q-1}) = q(1-2^{q+1}) \quad \text{یا} \quad 3+q = (q-2)2^{q-2}$$

بنابراین $q < 6$ و چون q عددی فرد و بزرگتر از واحد است، پس $q \in \{3, 5\}$ که با فرض ما متناقض است.

(د) $m < 0$ و $n \in \mathbb{N}$ را زوج می‌گیریم. چون $n > m+n$ ، پس بدون

توجه به علامت، یا زوج و فرد بودن $m+n$ ، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{m+n}(x, y_0)}{x^n} = 0$$

و در عین حال

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_m(x, y_0) f_n(x, y_0)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} f_m(x, y_0) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_n(x, y_0)}{x^n} =$$

$$= \frac{2y_0^m}{mn} \neq 0$$

(ه) $m < 0$ و $n \in \mathbb{N}$ را فرد می‌گیریم. در این صورت $n \neq 1$ ، زیرا

برای $n=1$ داریم $f_n(1, 1) = 0$ و با توجه به اتحاد

$$f_{m+n}(1, 1) = \frac{2 + (-1)^{m+n} 2^{m+n}}{m+n} = 0$$

که ممکن نیست، زیرا $m+n < 0$. بنابراین، از یک طرف، به دست می آید.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_m(x, y_0) f_n(x, y_0)}{x^{n-1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} f_m(x, y_0) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_n(x, y_0)}{x^{n-1}} = \\ &= -\frac{y_0^{m+1}}{m} \neq 0 \end{aligned}$$

از طرف دیگر، اگر $m < -1$ ، آن وقت $m+n > n-1$ و، بدون توجه به علامت و زوج یا فرد بودن $m+n$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{m+n}(x, y_0)}{x^{n-1}} = 0$$

بنابراین، عدد m ، تنها می تواند برابر -1 باشد. در این صورت، عدد

$$m+n = n-1$$

عددی زوج می شود و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{m+n}(x, y_0)}{x^{n-1}} = \frac{2}{n-1}$$

به این ترتیب، به ازای هر مقدار $y_0 \neq 0$ ، برابری $\frac{1}{y_0} = \frac{2}{n-1}$ برقرار است، که ممکن نیست.

(و $m < 0$ و $n < 0$ می گیریم. در این صورت

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_m(x, y_0) f_n(x, y_0) = \frac{y_0^{m+n}}{mn},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_{m+n}(x, y_0) = \frac{y_0^{m+n}}{m+n}$$

ولی برابری $\frac{y_0^{m+n}}{mn} = \frac{y_0^{m+n}}{m+n}$ ممکن نیست، زیرا $mn > 0$ ، در حالی که $m+n < 0$.

به این ترتیب، شرط مسأله، تنها برای دو زوج زیر صدق می کند:

$$(m, n): (2, 3) \text{ و } (2, 5)$$

۳۸۳. اگر در نخستین اتحاد، از اتحادهای مفروض، برای تابع $f(x, y)$ مقادیرهای $x=y=0$ و $x=y=1$ را قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$f(0, z) = 1, f(1, z) = 1$$

سپس $x=y=-1$ قرار می‌دهیم، به دست می‌آید:

$$1 = f(1, z) = f(-1, z)f(-1, z) = [f(-1, z)]^2$$

بنابراین $f(-1, z) = 1$. به همین ترتیب، از اتحاد دوم فرض، به دست می‌آید:

$$f(z, 0) = f(z, 1) = f(z, -1) = 1$$

که از آنجا نتیجه می‌شود:

$$f(0, 0) = 1 \text{ و } f(0, z)f(z, 0) = 1$$

این می‌ماند که اتحاد مورد نظر را، برای مقادیرهای غیر صفر x و y ثابت کنیم. به ازای $x \neq 0$ داریم:

$$1 = f(1, z) = f(x, z)f\left(\frac{1}{x}, z\right)$$

بنابراین

$$f(x, z) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{x}, z\right)}$$

سپس، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{f(x, 1-x)} = f\left(\frac{1}{x}, 1-x\right) = f\left(\frac{1}{x}, \frac{1-x}{x}x\right) = \\ &= f\left(\frac{1}{x}, \frac{1-x}{x}\right) = f\left(\frac{1}{x}, x\right) \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{1}{x}, \frac{1-x}{x}\right) = f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{x} - 1\right) \times 1 = f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{x} - 1\right) f\left(\frac{1}{x} - 1\right) =$$

$$= f\left(\frac{1}{x}, 1 - \frac{1}{x}\right) = 1$$

بنابراین $f\left(\frac{1}{x}, x\right) = 1$ به این ترتیب داریم:

$$1 = f(x, 1) = f\left(x, \frac{1}{x}\right) = f(x, x) = f(x, x) f(x, -1) =$$

$$= f(x, -x)$$

یعنی $f(x, x) = f(x, -x) = 1$ سرانجام، برای $x \neq 0$ و $y \neq 0$ داریم:

$$f(x, y) = f(x, y) \cdot f\left(\frac{1}{y}, y\right) = f\left(\frac{x}{y}, y\right) = f\left(\frac{x}{y}, y\right) \cdot f\left(\frac{x}{y}, \frac{x}{y}\right) =$$

$$= f\left(\frac{x}{y}, x\right) = f\left(\frac{x}{y}, x\right) \cdot f\left(\frac{1}{x}, x\right) = f\left(\frac{1}{y}, x\right) = \frac{1}{f(y, x)}$$

بنابراین $f(x, y) f(y, x) = 1$

۰۳۸۴ اگر تابع $f(x)$ ، در اتحاد اول صدق کند، آن وقت

$$f(xy + x + y) \equiv f(xy) + f(x + y) \equiv$$

$$\equiv f(xy) + f(x) + f(y)$$

$(x, y \in \mathbb{R})$ ، یعنی در اتحاد دوم هم صدق می کند.

اکنون فرض کنید، تابع $f(x)$ ، در اتحاد دوم صدق کند. در این تابع

$$y = u + v + uv$$

می گیریم، به دست می آید:

$$f(x + u + v + xu + xv + uv + xuv) \equiv$$

$$\equiv f(x) + f(u + v + uv) + f(xu + xv + xuv)$$

که می توان آن را به این صورت نوشت:

$$\begin{aligned} & f(x+u+v+xu+xv+uv+xuv) \equiv \\ & \equiv f(x)+f(u)+f(v)+f(uv)+f(xu+xv+xuv) \quad (1) \end{aligned}$$

اگر در اتحاد (۱)، نقش x و u را باهم عوض کنیم، به دست می آید:

$$\begin{aligned} & f(x+u+v+xu+xv+xuv) \equiv \\ & \equiv f(x)+f(u)+f(v)+f(xv)+f(xu+uv+xuv) \quad (2) \end{aligned}$$

با توجه به اتحادهای (۱) و (۲) به دست می آید:

$$f(uv)+f(xu+xv+xuv) \equiv f(xv)+f(xu+uv+xuv) \quad (3)$$

در اتحاد (۳)، $x=1$ می گیریم، داریم:

$$f(uv)+f(u+v+uv) \equiv f(v)+f(u+2uv)$$

و یا

$$f(uv)+f(u)+f(v)+f(uv) \equiv f(v)+f(u+2uv)$$

از آن جا

$$f(u)+2f(uv) \equiv f(u+2uv) \quad (4)$$

در اتحاد (۴) فرض می کنیم $u=0$ ، به دست می آید:

$$f(0) = 3f(0) \Rightarrow f(0) = 0 \quad (5)$$

اکنون، اگر در اتحاد (۴)، فرض کنیم $v=-1$ ، به دست می آید:

$$f(-u) \equiv f(u)+2f(-u)$$

بنابراین

$$f(-u) = -f(u) \quad (6)$$

در اتحاد (۴)، $v = -\frac{1}{4}$ می گیریم:

$$f(0) \equiv f(u) + 2f\left(-\frac{u}{2}\right)$$

که با استفاده از (۵) و (۶) به دست می‌آید:

$$f(u) = 2f\left(\frac{u}{2}\right) \Rightarrow f(2u) = 2f(u) \quad (۷)$$

با توجه به اتحادهای (۷) و (۴) داریم:

$$f(u + 2uv) \equiv f(u) + f(2uv)$$

که اگر در آن، $2v = t$ بگیریم، به دست می‌آید:

$$f(u + ut) = f(u) + f(ut) \quad (۸)$$

به این ترتیب، به اتحاد $f(x+y) \equiv f(x) + f(y)$ می‌رسیم، زیرا،
به ازای $x=0$ ، این اتحاد منجر به برابری (۵) می‌شود و، به ازای $x \neq 0$ ،
از اتحاد (۸) به دست می‌آید:

$$f(x+y) \equiv f\left(x + x \cdot \frac{y}{x}\right) = f(x) + f\left(x \cdot \frac{y}{x}\right) = f(x) + f(y)$$

۳۸۵. ثابت می‌کنیم، برای هر مقدار $k > 0$ ، داریم:

$$f(x^k) = kx^{k-1}f(x) \quad (x > 1)$$

اثبات را، در سه مرحله، می‌آوریم.

(۱) فرض کنید $k \in \mathbb{N}$. برای $k=1$ داریم:

$$f(x) \equiv 1 \times x^0 \cdot f(x)$$

و اگر اتحاد، برای مقداری از $k \in \mathbb{N}$ برقرار باشد، آن وقت برای $k+1$ هم برقرار است، زیرا

$$f(x^{k+1}) = f(x^k \cdot x) \equiv x^k f(x) + x f(x^k) \equiv$$

$$\equiv x^k f(x) + x^k x^{k-1} f(x) \equiv (k+1)x^k f(x)$$

بنابراین، پنا بر اصل استقرای ریاضی، اتحاد برای هر مقدار $k \in \mathbf{N}$ برقرار است.

(۲) $k \in \mathbf{Q}$ و $k > 0$ می‌گیریم، یعنی $k = \frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbf{N}$). بنا بر اثباتی

که در (۱) داشتیم، این دو اتحاد را داریم:

$$f(x^p) \equiv p x^{p-1} f(x),$$

$$f((x^q)^{\frac{p}{q}}) \equiv \frac{p}{q} (x^q)^{\frac{p}{q}-1} f(x^q)$$

اگر سمت راست این دو اتحاد را، برابر قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$f(x^{\frac{p}{q}}) \equiv \frac{p}{q} x x^{\frac{p}{q}-1} f(x)$$

یعنی اتحاد، برای هر عدد گویای $k > 0$ برقرار است.

(۳) $k \in \mathbf{R}$ و $k > 0$ می‌گیریم. دنبالهٔ عددهای مثبت و گویای

k_1, k_2, \dots را طوری انتخاب می‌کنیم که، برای آن، داشته باشیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = k$$

چون تابع $f(x)$ ، پیوسته است، بنابراین، برای هر مقدار $x > 1$ داریم:

$$f(x^k) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{k_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} k_n x^{k_n-1} f(x) = k x^{k-1} f(x)$$

به کمک اتحادی که ثابت کردیم، می‌توان به سادگی صورت صریح

تابع $f(x)$ را پیدا کرد. در واقع، اگر $t = \ln x$ بگیریم، یعنی $x = e^t$

به دست می‌آید:

$$f(x) = f(e^t) = t e^{t-1} f(e) = (\ln x) \cdot \frac{x}{e} f(e)$$

از طرف دیگر، به ازای هر مقدار $c \in \mathbf{R}$ ، تابع

$$f(x) = c x \ln x$$

با شرط مسأله سازگار است.

۳۸۶. الف) از شرط مسأله نتیجه می‌شود که، تابع $f(x)$ ، به ازای مقادیرهای مختلف $x \in \mathbf{R}$ ، مقادیرهای مختلفی را می‌پذیرد. در واقع، اگر داشته باشیم:

$$u = f(x) = f(y), \quad (x, y \in \mathbf{R})$$

آن وقت

$$x = f^2(x) = f^2(u) = f^2(y) = y$$

از این جا، و از پیوستگی تابع $f(x)$ نتیجه می‌شود که، این تابع، اکیداً یکنواست. در غیر این صورت، عددهای $x_1 < x_2 < x_3$ پیدا می‌شوند که در نابرابری‌های

$$f(x_1) < f(x_2), \quad f(x_2) > f(x_3)$$

یا

$$f(x_1) > f(x_2), \quad f(x_2) < f(x_3)$$

صدق کنند و این به معنای آن است که، مقداری مثل u ، هم بین عددهای $f(x_1)$ و $f(x_2)$ و هم بین عددهای $f(x_2)$ و $f(x_3)$ قرار دارد و، بنا به قضیهٔ مربوط به مقادیرهای بینابینی برای تابع‌های پیوسته، مقدار تابع $f(x)$ ، در دو نقطهٔ مختلف $x_4 \in (x_1, x_2)$ و $x_5 \in (x_2, x_3)$ ، برابر مقدار u می‌شود که ممکن نیست. به این ترتیب، تابع $f(x)$ ، در تمامی محور عددی، یا نزولی است و یا صعودی. در حالت اول، تابع $f^2(x)$ صعودی و تابع $f^3(x)$ نزولی است، بنابراین، اتحاد $f^3(x) \equiv x$ نمی‌تواند برقرار باشد.

$f(x)$ را صعودی می‌گیریم و فرض می‌کنیم، به ازای مقداری مثل $x_0 \in \mathbf{R}$ ، داشته باشیم: $f(x_0) \neq x_0$. در این صورت، اگر $f(x_0) > x_0$ آن‌گاه

$$f^2(x_0) > f(x_0), \quad f^2(x_0) > f^2(x_0) \text{ و } f^2(x_0) > x_0$$

و اگر $f(x_0) < x_0$ آن‌گاه

$$f^2(x_0) < f(x_0), \quad f^2(x_0) < f^2(x_0) \quad \text{و} \quad f^3(x_0) < x_0$$

هر دو حالت، برای $f^3(x_0) = x_0$ را نقض می‌کند. به این ترتیب، ثابت شد، $x \in \mathbf{R}, f(x_0) \equiv x$.

(ب) تابع

$$g(x) = \begin{cases} x & (x \notin \{1, 2, 3\}) \\ 2 & (x = 1) \\ 3 & (x = 2) \\ 1 & (x = 3) \end{cases}$$

با همه شرط‌های مسأله سازگار است.

۳۸۷. تابع $g(x) = f(x) - x$ را در نظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم، برای هر مقدار $k \in \mathbf{Z}$ ، داریم:

$$f(x + kg(x)) \equiv x + (k+1)g(x), \quad (x \in \mathbf{R})$$

به‌ازای $k = 0$ ، به اتحاد درست $f(x) \equiv x + g(x)$ می‌رسیم. فرض می‌کنیم، برای مقداری از $k \in \mathbf{N}$ ، داشته باشیم:

$$f(x + (k-1)g(x)) \equiv x + kg(x),$$

$$f(x - (k-1)g(x)) \equiv x - kg(x)$$

در این صورت، با استفاده از اتحادی که برای تابع $f(x)$ در صورت مسأله داده شده است، به دست می‌آید:

$$f(x \pm kg(x)) \equiv 2(x \pm kg(x)) - f^{-1}(x \pm kg(x)) \equiv$$

$$\equiv 2(x \pm kg(x)) - (x \pm (k-1)g(x)) \equiv x \pm (k+1)g(x)$$

به کمک اتحادی که ثابت کردیم، ثابت می‌کنیم، تابع $g(x)$ ، مقداری ثابت است. فرض کنید چنین نباشد و برای $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ داشته باشیم:

$$g(x_1) < g(x_2) \quad \text{در این صورت، عددی مثل } k \in \mathbf{N} \text{ پیدا می‌شود که}$$

$$x_1 - kg(x_1) > x_2 - kg(x_2)$$

توجه می‌کنیم که، تابع $f(x)$ ، غیر نزولی است، زیرا در غیر این صورت، تابع $f^{-1}(x)$ و همراه با آن، تابع $f(x) + f^{-1}(x) = 2x$ ، غیر صعودی می‌شود که درست نیست. بنابراین، به ازای هر مقدار $n \in \mathbf{N}$ ، تابع $f^n(x)$ هم، غیر نزولی است، در نتیجه داریم:

$$f^n(x_1 - kg(x_1)) \geq f^n(x_2 - kg(x_2))$$

که از آنجا، با توجه به برابری‌های

$$\begin{aligned} f^n(x_i - kg(x_i)) &= f^{n-1}(x_i + (1-k)g(x_i)) = \\ &= \dots = x_i + (n-k)g(x_i) \end{aligned}$$

$(i = 1, 2)$ به دست می‌آید:

$$x_1 + (n-k)g(x_1) \geq x_2 + (n-k)g(x_2)$$

ولی، به ازای مقدارهای بزرگ n ، نابرابری اخیر برقرار نیست، زیرا

$$g(x_1) < g(x_2)$$

به این ترتیب، تابع $g(x) \equiv c$ ، مقدار ثابتی است، یعنی

$$f(x) \equiv x + c$$

و این تابع، به ازای هر مقدار $c \in \mathbf{R}$ با همه شرط‌های مسأله سازگار است. ۳۸۸ چون، با توجه به شرط مسأله، برای هر مقدار $y \neq 0$ ، داریم:

$$f'(x) \equiv \frac{f(x+y) - f(x-y)}{2y}, \quad (x \in \mathbf{R})$$

سمت راست این اتحاد، نسبت به x مشتق‌پذیر است، بنابراین

$$\begin{aligned} f''(x) &\equiv \frac{f'(x+y) - f'(x-y)}{2y} \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2y} \left[\frac{f(x+2y) - f(x)}{2y} - \frac{f(x-2y) - f(x)}{(-2y)} \right] \equiv \\ &\equiv \frac{f(x+2y) + f(x-2y) - 2f(x)}{4y^2} \end{aligned}$$

عبارت اخیر هم، نسبت به x مشتق پذیر است؛ بنا بر این

$$f'''(x) \equiv \frac{f'(x+2y) + f'(x-2y) - 2f'(x)}{4y^2} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{4y^2} \left[\frac{f(x+4y) - f(x)}{4y} + \frac{f(x-4y) - f(x)}{(-4y)} - \frac{f(x+4y) - f(x-4y)}{4y} \right] \equiv 0$$

به این ترتیب، برای تابع مفروض، اتحاد $f'''(x) \equiv 0$ برقرار است، یعنی

$$f''(x) \equiv f''(0), \quad f'(x) \equiv f''(0)x + f'(0)$$

$$f(x) \equiv f''(0) \frac{x^2}{2} + f'(0)x + f(0)$$

یادآوری می‌کنیم، هر تابع به صورت

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad (a, b, c \in \mathbf{R})$$

دارای همه ویژگی‌های مورد نظر می‌باشد.

۰۳۸۹ در اتحاد مفروض $x = y = 0$ قرار می‌دهیم، به دست می‌آید:

$$f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

برای هر $x \in \mathbf{R}$ از اتحاد

$$f(x+y) - f(x) \equiv f(y) + 2xy, \quad (y \in \mathbf{R})$$

داریم:

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y) + 2xy}{y} =$$

$$= 2x + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y) - f(0)}{y} = 2x + f'(0)$$

بنابراین، تابع اصلی، باید با این شرط سازگار باشد:

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(y) dy = x^2 + f'(0)x$$

و در واقع به ازای هر مقدار $a \in \mathbf{R}$ ، تابع $f(x) = x^2 + ax$ ، با اتحاد مورد نظر مسأله، سازگار است.

۰۳۹۰. در اتحاد مفروض، قرار می‌دهیم: $x = y = 0$ ، به دست می‌آید:

$$f(0)(f(0) - 1) = 0 \implies f(0) = 0 \text{ یا } f(0) = 1$$

ولی، اگر $f(0) = 0$ ، آن وقت، از اتحاد

$$f(0)f(x) \equiv f(x), \quad (x \in \mathbf{R})$$

به اتحاد $f(x) \equiv 0$ می‌رسیم که با شرط مسأله متناقض است؛ $f(0) = 1$ ثابت می‌کنیم، تابع $f(x)$ ، روی تمامی محور عددی، مشتق‌پذیر است. در واقع، برای هر $x \in \mathbf{R}$ داریم:

$$f(x+y) \equiv f(x)f(y), \quad (y \in \mathbf{R})$$

از آنجا

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} \equiv f(x) \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y) - f(0)}{y}$$

یعنی، در اتحاد اخیر؛ حد بخش سمت چپ وجود دارد و برابر است با

$$f'(x) = f(x)f'(0)$$

$f'(0) = a$ می‌گیریم، در این صورت $f'(x) = af(x)$ ، تابع $f(x)$ ، تا هر مرتبه‌ای، مشتق‌پذیر است. در واقع

$$f''(x) = af'(x) = a^2 f(x), \quad f'''(x) = a^2 f'(x) = a^3 f(x)$$

و غیره به این ترتیب، برای هر مقدار $n \in \mathbf{N}$ داریم:

$$f^{(n)}(x) = a^n f(x)$$

چند جمله‌ای‌ها

۲۱۵. ریشه‌های چند جمله‌ای‌ها

۰۳۹۱. با استفاده از قضیهٔ ویت دربارهٔ رابطه بین ریشه‌ها و ضریب‌ها،

یعنی

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = -\frac{1}{2p^2}$$

و نابرابری مربوط به واسطه‌های حسابی و هندسی دو عدد، داریم:

$$\begin{aligned} x_1^4 + x_2^4 &= (x_1 + x_2)^4 - 2x_1 x_2 [2(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2] = \\ &= p^4 + \frac{1}{p^2} \left(2p^2 + \frac{1}{2p^2} \right) = p^4 + 2 + \frac{1}{2p^4} \geq 2\sqrt{p^4 \cdot \frac{1}{2p^4}} = \\ &= 2 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

۰۳۹۲. چند جمله‌ای $x^4 + px^2 + q$ ، تنها وقتی چهار ریشه حقیقی

دارد که سه جمله‌ای درجهٔ دوم $y^2 + py + q$ (نسبت به y) دارای دو ریشهٔ غیرمنفی باشد، یعنی وقتی که داشته باشیم:

$$p^2 \geq 4q, \quad q \geq 0, \quad p \leq 0$$

فرض می‌کنیم، معادلهٔ اصلی، دارای چهار ریشهٔ حقیقی

$-x_1, -x_2, x_1$ و x_2 باشد و، بدون این که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای

وارد شود، می‌توان $x_1 \geq x_2 \geq 0$ گرفت. در این صورت، اگر این ریشه‌ها

به تصاعد حسابی باشند، باید داشته باشیم:

$$-3x_2 = -x_1 + x_2, \quad x_1^2 + x_2^2 = -p, \quad x_1^2 x_2^2 = q$$

یعنی وقتی که $q = 0/09 p^2$. بنابراین همه زوج عددهای مجهول p و q ، با شرطهای زیر معین می‌شوند:

$$p \leq 0, \quad q = 0/09 p^2$$

(نا برابری‌های $p^2 \geq 4q$ و $q \geq 0$ ، نتیجه‌ای از برابری اخیر است).

۳۹۳. بنا بر قضیه ویت داریم:

$$\alpha + \beta = -p, \quad \alpha\beta = 1, \quad \gamma + \delta = -q, \quad \gamma\delta = 1$$

که از آنها نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} & (\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha + \delta)(\beta + \delta) = \\ & = [\alpha\beta - (\alpha + \beta)\gamma + \gamma^2][\alpha\beta + (\alpha + \beta)\delta + \delta^2] = \\ & = (1 + p\gamma + \gamma^2)(1 - p\delta + \delta^2) = (\gamma^2 + 1 + \gamma^2\delta^2 + \delta^2) + \\ & \quad + p(\gamma - \delta - \delta\gamma^2 + \gamma\delta^2) - p^2\gamma\delta = (\gamma + \delta)^2 + \\ & \quad + p(\gamma - \delta)(1 - \delta\gamma) - p^2 = q^2 - p^2 \end{aligned}$$

۳۹۴. برای x_1, x_2 و x_3 ، ریشه‌های چندجمله‌ای مفروض، بنا بر قضیه

ویت داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{\beta}{\alpha}, \quad x_1x_2x_3 = -\frac{\beta}{\alpha}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & (x_1 + x_2 + x_3) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) = \\ & = (x_1 + x_2 + x_3) \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3} = \\ & = 1 \times \frac{\beta}{\alpha} \left(-\frac{\beta}{\alpha} \right)^{-1} = -1 \end{aligned}$$

۳۹۵. $y = x - 3$ می‌گیریم. در این صورت، عددهای

ریشه‌های چند جمله‌ای $y_1 = x_1 - 3$ ، $y_2 = x_2 - 3$ و $y_3 = x_3 - 3$ ،

$$(y+3)^3 - 6(y+3)^2 + a(y+3) + a =$$

$$= y^3 + 3y^2 + (a-9)y + 4a - 27$$

هستند. بنابراین قضیه ویت داریم:

$$y_1 + y_2 + y_3 = -3,$$

$$y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 = a - 9,$$

$$y_1 y_2 y_3 = 27 - 4a$$

از طرف دیگر، داریم:

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = (y_1 + y_2 + y_3)^2 -$$

$$- 3(y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3)(y_1 + y_2 + y_3) + 3y_1 y_2 y_3 =$$

$$= (-3)^2 - 3(a-9)(-3) + 3(27-4a) = -27 - 3a$$

که با توجه به شرط مسأله به دست می‌آید:

$$-27 - 3a = 0 \Rightarrow a = -9$$

۳۹۶. اگر ریشه‌های چند جمله‌ای مفروض را u ، v و w بگیریم،

بنابراین قضیه ویت داریم:

$$u + v + w = -a,$$

$$uv(1+u+v) = b,$$

$$u^2 v^2 = -c$$

که از آن‌ها، درحالت $a \neq 1$ به دست می‌آید:

$$b - c = uv(1+u+v+uv) = uv(1-a)$$

یعنی $uv = \frac{b-c}{1-a}$ ، عددی گویاست. چون $u^2 v^2 = -c$ ، عددی درست است،

بنابراین، uv هم عددی درست خواهد بود (قضیه ۶۱ را ببینید). بنابراین،

$$\begin{aligned}
& P(1) + P(-1) - 2(1 + P(0)) = \\
& = (1 + a + b + c) + (-1 + a - b + c) - 2(1 + c) = \\
& = 2(a - 1) = -2(u + v + uv + 1) = \\
& = -2(1 + u)(1 + v) \neq 0, \\
& 2P(-1) = 2(-1 - u)(-1 - v)(-1 - uv) = \\
& = -2(1 + uv)(1 + u)(1 + v)
\end{aligned}$$

نتیجه می‌شود که عدد

$$\frac{2P(-1)}{P(1) + P(-1) - 2(1 + P(0))} = 1 + uv$$

عددی است درست.

در حالت $a = 1$ داریم:

$$0 = u + v + uv + 1 = (u + 1)(v + 1)$$

بنابراین، یکی از ریشه‌های معادله برابر -1 است، یعنی عدد $2P(-1) = 0$ ، بر هر عدد درستی بخش پذیر است.
۳۹۷. a, b, c, d را ریشه‌های چندجمله‌ای

$$P(x) = x^4 + x^2 - 1 = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$$

می‌گیریم و ثابت می‌کنیم:

$$(ab)^3 + (cd)^3 + ab + cd + 1 = 0 \quad (*)$$

اگر این برابری ثابت شود، مسأله حل شده است، زیرا

$$\begin{aligned}
& (ab)^6 + (ab)^4 + (ab)^2 - (ab)^2 - 1 = \\
& = (ab)^2 \left[(ab)^2 - \left(\frac{1}{ab}\right)^2 + ab - \frac{1}{ab} + 1 \right] = 0
\end{aligned}$$

(درواقع، با توجه به قضیه ویت $abcd = -1$ گرفته ایم).
 به اثبات برابری (*) می‌پردازیم. از برابری‌های
 $P(a) = P(b) = 0$ داریم:

$$a^3 = \frac{1}{a+1} \quad \text{و} \quad b^3 = \frac{1}{b+1}$$

که از آنجا به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} (ab)^3 &= \frac{1}{(1+a)(1+b)} = \frac{(1+c)(1+d)}{P(-1)} = \\ &= -(1+c)(1+d) \end{aligned}$$

به همین ترتیب، به دست می‌آید: $(cd)^3 = -(1+a)(1+b)$. بنابراین،

$$\begin{aligned} (ab)^3 + (cd)^3 + ab + cd + 1 &= \\ = -(1+c)(1+d) - (1+a)(1+b) + ab + cd + 1 &= \\ = -1 - a - b - c - d = 0 \end{aligned}$$

زیرا، بنا بر قضیه ویت

$$a + b + c + d = -1$$

۳۹۸. چون چند جمله‌ای $P(x) = ax^2 + bx + c$ ، $(a > 0)$ دارای
 دو ریشهٔ مختلف $0 < x_1 < x_2 < 1$ می‌باشد، بنابراین:

$$b^2 > 4ac, \quad 0 < \frac{c}{a} < 1, \quad \frac{b}{a} < 0$$

یعنی

$$a > c > 0, \quad b < 0$$

سپس $P(1) = a + b + c > 0$ ، از آنجا $a + c > -b$. اگر دو طرف
 نابرابری اخیر را (که مقدارهایی مثبت اند) مجذور کنیم، به دست می‌آید:

$$a^2 + 2ac + c^2 > b^2$$

$$(a-c)^2 > b^2 - 4ac > 0$$

که از آن نتیجه می‌شود: $a-c \geq 2$. اگر فرض کنیم $a \leq 4$ ، برای انتخاب ضریب‌های a و c ، تنها سه حالت ممکن است:

$$a_1 = 4, c_1 = 2; \quad a_2 = 3, c_2 = 1; \quad a_3 = 4, c_3 = 1$$

و ضریب b باید، به ترتیب، با این سه شرط سازگار باشد:

$$4 > b_1^2 - 32 > 0; \quad 4 > b_2^2 - 12 > 0; \quad 9 > b_3^2 - 16 > 0$$

ولی، در هیچ کدام از این شرط‌ها، عدد درستی برای b به دست نمی‌آید. بنابراین $a \geq 5$.

سرانجام، معادله $5x^2 - 5x + 1 = 0$ دارای دو ریشه است:

$$\frac{5 + \sqrt{5}}{10} \quad \text{و} \quad \frac{5 - \sqrt{5}}{10}$$

که به بازه $(0, 1)$ تعلق دارند.

$c = 0.399$ می‌گیریم. در این صورت، عدد c ریشه‌ای از معادله

$$x^4 - ax^3 - bx = 0$$

خواهد بود. بنابراین، باید a و b را طوری پیدا کنیم که، به‌ازای آن‌ها، چندجمله‌ای

$$x^3 - ax^2 - b$$

دارای دو ریشه برابر a و b باشد. ریشه سوم این چندجمله‌ای را d می‌گیریم، در این صورت، باید داشته باشیم:

$$a + b + d = a \implies d = -b,$$

$$ab + ad + bd = ab - b(a + b) = -b^2 = 0 \implies b = 0$$

و به‌روشنی معلوم است که سه عدد $(0, 0, 0)$ با شرط مسأله سازگارند. اکنون $c \neq 0$ می‌گیریم. در این صورت، هیچ‌یک از چهار ریشه a ،

c, b و d از چند جمله‌ای $x^4 - ax^3 - bx + c$ برابر صفر نیستند. بنا بر
قضیه ویت داریم:

$$a + b + c + d = a \implies d = -(b + c)$$

سپس

$$\begin{aligned} & ab + ac + bc + ad + bd + cd = \\ & = ab + ac + bc - (a + b + c)(b + c) = \\ & = -b^2 - bc - c^2 = 0; \quad abc + abd + acd + bcd = \\ & = abc - (ab + ac + bc)(b + c) = \\ & = -a(b^2 + bc + c^2) - b^2c - bc^2 = -bc(b + c) = b^3 \end{aligned}$$

یعنی

$$b^3 = -c(b + c) = 1, \quad c^2 + bc + 1 = 0$$

و سرانجام

$$abcd = -abc(b + c) = ab = c$$

یعنی $a = \frac{c}{b}$. بنا بر این، تنها چهار انتخاب برای عددهای a, b, c وجود دارد:

$$b_{1,2} = 1, \quad c_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \quad a_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2};$$

$$b_{3,4} = -1, \quad c_{3,4} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \quad a_{3,4} = \frac{-1 \mp i\sqrt{3}}{2}$$

که هر کدام از آن‌ها، در شرط مسأله صدق می‌کند. به این ترتیب، سه عدد (a, b, c) یا به صورت $(0, 0, 0)$ هستند که، در آن، عدد مختلط دلخواهی است، و یا بر یکی از نقطه‌های زیر منطبق‌اند:

$$\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right); \quad \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

۴۰۰. x_1 و x_2 را ریشه‌های چند جمله‌ای x^2+ax+b می‌گیریم. در این صورت، x_1 ، x_2 و ۰، تنها وقتی رأس‌های مثلث قائم‌الزاویه مورد نظر مسأله را تشکیل می‌دهند که $x_1 \neq 0$ باشد و عدد $\frac{x_2}{x_1}$ برابر i یا $-i$ شود (زیرا، مدول عددهای x_1 و x_2 بر هم منطبق‌اند و اختلاف آرگومان‌های آن‌ها برابر $\frac{\pi}{2} + n\pi$ است که در آن، $n \in \mathbb{Z}$). و این به معنای آن است که $x_2 = ix_1$ یا $x_2 = -ix_1$ ، یعنی ریشه‌های چند جمله‌ای مفروض، به صورت x_0 و ix_0 درمی‌آیند (در ضمن $x_0 \neq 0$). از آن‌جا، بنا بر قضیهٔ ویت، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} (1+i)x_0 = -a \\ ix_0^2 = b \\ x_0 \neq 0 \end{cases}$$

و این دستگاه، تنها وقتی متوافق است که $a^2 = 2b \neq 0$ ، زیرا $2(ix_0^2) = [(1+i)x_0]^2$

۴۰۱. از آن‌جا که همهٔ ضریب‌های چند جمله‌ای $P(x)$ غیر منفی هستند، هیچ کدام از ریشه‌های $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ آن، نمی‌توانند مثبت باشند. بنابراین، چندجمله‌ای را می‌توان به این صورت نوشت:

$$P(x) = (x + \beta_1) \dots (x + \beta_n)$$

که در آن $\beta_i = -\alpha_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). با استفاده از قضیهٔ مربوط به واسطه‌ها (قضیهٔ ۶)، داریم:

$$2 + \beta_i = 1 + 1 + \beta_i \geq \sqrt[3]{1 \times 1 \times \beta_i} = \sqrt[3]{\beta_i}, \quad (i = 1, \dots, n)$$

و با توجه به این که $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n = 1$ ، به دست می‌آید:

$$P(y) = (y + \beta_1) \dots (y + \beta_n) \geq \sqrt[n]{\beta_1 \dots \beta_n} = \sqrt[n]{3^n} = 3$$

۴۰۲. چون چند جمله‌ای مفروض، n ریشه مثبت دارد، درجه آن از n کمتر نیست؛ یعنی $a \neq 0$ و، اگر x_1, \dots, x_n را ریشه‌های آن بگیریم، داریم:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$$

$$(-1)^n \sum_{i=1}^n x_1 x_2 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n = n \frac{b}{a}$$

$$(-1)^n x_1 x_2 \dots x_n = \frac{b}{a}$$

از آن جا $b \neq 0$. با توجه به قضیه مربوط و واسطه‌ها، به دست می‌آید:

$$n^2 = 1 \times \frac{(-1)^n n^2 \frac{b}{a}}{(-1)^n \frac{b}{a}} = (x_1 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq$$

$$\geq (n \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}) \left(n \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \dots \frac{1}{x_n}} \right) = n^2$$

و تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$$

۴۰۳. فرض می‌کنیم، عدد α ، ریشه هر دو معادله مفروض باشد، یعنی

$$\alpha^5 = \alpha + 1 \quad \text{و} \quad \alpha^2 = -a\alpha - b$$

در این صورت

$$\begin{aligned} \alpha + 1 = \alpha^5 &= \alpha(\alpha^2)^2 = \alpha(-a\alpha - b)^2 = \alpha[a^2(-a\alpha - b) + 2ab\alpha + \\ &+ b^2] = (2ab - a^3)(-a\alpha - b) + (b^2 - a^2b)\alpha = \\ &= (a^3 - 3a^2b + b^2)\alpha + (a^2b - 2ab^2) \end{aligned}$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$(a^4 - 3a^2b + b^2 - 1)\alpha = -a^3b + 2ab^2 + 1$$

که از آن، به دست می‌آید:

$$a^4 - 3a^2b + b^2 - 1 = 0$$

$$-a^3b + 2ab^2 + 1 = 0$$

(زیرا، در غیر این صورت، α باید ریشه گویایی از چندجمله‌ای $1 - x - x^5$ باشد که، بنابر قضیه ۵۹، ممکن نیست). اگر بین دو برابری اخیر، عدد

$$b = \frac{2a^5 - 2a - 1}{5a^3}$$

را حذف کنیم، به دست می‌آید:

$$a^{10} + 3a^6 - 11a^5 - 4a^2 - 4a - 1 = 0$$

که با گویا بودن عدد a متناقض است (زیرا، چندجمله‌ای

$$x^{10} + 3x^6 - 11x^5 - 4x^2 - 4x - 1$$

با توجه به قضیه ۵۹، ریشه گویا ندارد). بنابراین، چندجمله‌ای‌های

$$x^5 - x - 1 \quad \text{و} \quad x^2 + ax + b$$

با فرض $a, b \in \mathbb{Q}$ ، ریشه مشترکی ندارند.

۰۴۰۴ این چندجمله‌ای را در نظر می‌گیریم:

$$Q(x) = P(a-x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

در این صورت، داریم:

$$a_0 = Q(0) = P(a) < 0,$$

$$a_1 = Q'(0) = -P'(a) \leq 0,$$

$$a_2 = \frac{Q''(0)}{2!} = \frac{(-1)^2 P''(a)}{2!} \leq 0$$

.....

$$a_n = \frac{Q^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^n P^{(n)}(a)}{n!} \leq 0$$

بنابراین، برای همه مقادیرهای $x \geq 0$ ، داریم: $Q(0) < 0$ ، یعنی چندجمله‌ای $P(x)$ ، ریشه‌ای در بازه $[-\infty, a]$ ندارد. به همین ترتیب، برای چندجمله‌ای

$$R(x) = P(b+x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0.$$

داریم:

$$b_0 = R(0) = P(b) > 0,$$

$$b_1 = R'(0) = P'(b) \geq 0,$$

$$b_2 = \frac{R''(0)}{2!} = \frac{P''(b)}{2!} \geq 0,$$

.....

$$b_n = \frac{R^{(n)}(0)}{n!} = \frac{P^{(n)}(b)}{n!} \geq 0$$

از آن جا، برای $x \geq 0$ ، داریم: $R(x) > 0$. بنابراین، چندجمله‌ای $P(x)$ ریشه‌ای در بازه $[b, +\infty)$ ندارد. به این ترتیب، ثابت شد که، همه ریشه‌های حقیقی چندجمله‌ای $P(x)$ ، در بازه (a, b) واقع‌اند.

۴۰۵. ثابت می‌کنیم، در حالت زوج بودن n ، چندجمله‌ای $f_n(x)$ ، به ازای همه مقادیرهای $x \in \mathbb{R}$ ، مقادیرهای مثبت را می‌پذیرد (و در نتیجه، ریشه حقیقی ندارد)؛ و در حالت فرد بودن n ، چندجمله‌ای $f_n(x)$ ، تنها یک ریشه حقیقی دارد. اثبات را، با روش استقرای ریاضی می‌دهیم.

برای $n=0$ داریم: $f_0(x) = 1 > 0$ (برای همه مقادیرهای x). فرض می‌کنیم، حکم، برای همه مقادیرهای کوچکتر از $n \in \mathbb{N}$ درست باشد. ثابت می‌کنیم که، در این صورت، برای n هم درست است.

الف) n را عددی فرد می‌گیریم. بنا بر فرض استقرا، برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$f'_n(x) = f_{n-1}(x) > 0$$

بنابراین، تابع $f_n(x)$ صعودی است و، بیش از یک بار، نمی تواند برابر صفر شود. چون $0 < f_n(0) = 1$ و $f_n(x) = -\infty$ (یعنی، تابع $f_n(x)$ دست کم در یک نقطه x ، مقداری منفی را می پذیرد)، بنابراین، تابع پیوسته $f_n(x)$ دست کم در یک نقطه، برابر صفر می شود (قضیه ۲۸ را ببینید).

(ب) n را زوج می گیریم. در این صورت، چندجمله ای

$$f'_n(x) = f_{n-1}(x)$$

درست یک ریشه حقیقی $x_0 \neq 0$ را دارد. از آن جا که، برای هر $x \in \mathbf{R}$ داریم:

$$f''_n(x) = f_{n-2}(x) > 0$$

بنابراین، برای $x > x_0$ ، $f'_n(x) > 0$ و برای $x < x_0$ ، $f'_n(x) < 0$. در نتیجه، به ازای هر $x \in \mathbf{R}$ داریم:

$$f_n(x) \geq f_n(x_0) = f_{n-1}(x_0) + \frac{x_0^n}{n!} = \frac{x_0^n}{n!} > 0$$

حکم مسأله، به طور کامل، ثابت شد.

۴۰۶ داریم:

$$Q'(x) = P'(x) + \alpha P''(x) + \dots + \alpha^{n-1} P^{(n)}(x)$$

(زیرا $0 = (P^{(n+1)})(x)$). بنابراین

$$Q(x) - \alpha Q'(x) = P(x)$$

بدون این که به کلی بودن مسأله، لطمه ای وارد شود، می توان ضریب بزرگترین درجه چندجمله ای $P(x)$ را مثبت گرفت. از آن جا که، این چندجمله ای ریشه مثبت ندارد، درجه آن، یعنی n ، عددی زوج است، و برای هر $x \in \mathbf{R}$ داریم: $P(x) > 0$.

فرض می کنیم، چندجمله ای $Q(x)$ دارای این ریشه های حقیقی باشد:

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k$$

$\alpha \geq 0$ می گیریم. چون ضریب بزرگترین درجه $Q(x)$ ، که با ضریب بزرگترین درجه $P(x)$ برابر است؛ عددی است مثبت، بنا بر این

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Q(x) = +\infty$$

از آن جا، برای $x > x_k$ داریم: $Q(x) > 0$. بنا بر این $Q'(x_k) \geq 0$ و

$$P(x_k) = Q(x_k) - \alpha Q'(x_k) \leq 0$$

و اگر $\alpha < 0$ بگیریم، به ازای $x < x_1$ داریم: $Q(x) > 0$ زیرا $Q(x)$ از درجه n است که عددی است زوج). بنا بر این $Q'(x_1) \leq 0$ و

$$P(x_1) = Q(x_1) - \alpha Q'(x_1) \leq 0$$

در هر دو حالت، نابرابری $P(x) > 0$ نقض می شود؛ بنا بر این، چندجمله ای $Q(x)$ ، ریشه حقیقی ندارد.

۴۰۷. با تجزیه چندجمله ای به عامل ها، به دست می آید:

$$p(x) = a(x - x_1) \dots (x - x_n), \quad (a \neq 0)$$

در این صورت

$$P'(x) = P_1'(x) + \dots + P_n'(x)$$

که در آن، $P_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$)، چندجمله ای است از درجه $n - 1$ با شرط

$$(x - x_k)P_k(x) \equiv P(x)$$

توجه می کنیم که، به شرط $k \neq i$ ، داریم: $P_k(x_i) = 0$ ، یعنی

$$P'(x_i) = P_i'(x_i) \neq 0$$

اکنون، این چندجمله ای را در نظر می گیریم:

$$F(x) = -1 + \frac{P_1(x)}{P'(x_1)} + \dots + \frac{P_n(x)}{P'(x_n)}$$

که درجه آن (اگر $F(x) \not\equiv 0$) از $n - 1$ تجاوز نمی کند. برای هر مقدار

$n, \dots, 2, 1$ داریم:

$$F(x_i) = \sum_{j=1}^n \frac{P_j(x_i)}{P'(x_j)} - 1 = \frac{P_i(x_i)}{P'(x_i)} - 1 = 0$$

یعنی چند جمله‌ای $F(x)$ دارای n ریشهٔ مختلف است. بنابراین

$$F(x) \equiv 0$$

چون ضریب بزرگترین درجه، در هر یک از چند جمله‌ای‌های $P_k(x)$ برابر است با a ، بنا بر این ضریب x^{n-1} در چند جمله‌ای $F(x)$ برابر می‌شود با

$$\frac{a}{P'(x_1)} + \dots + \frac{a}{P'(x_n)}$$

ولی، این ضریب، برابر صفر است و، از آن جا، درستی حکم مسأله تأیید می‌شود.

۴۰۸. بنا بر قضیهٔ ۵۷، وقتی یک چند جمله‌ای ضریب‌های حقیقی داشته باشد، تنها می‌تواند، به تعداد زوج، دارای ریشه‌های موهومی خالص باشد که، در ضمن، دو به دو، مزدوج یکدیگرند. بنا بر این، چند جمله‌ای مفروض $P(x)$ را می‌توان به این صورت نوشت:

$$P(x) = a(x - ia_1) \dots (x - ia_{r_n}) = a(x^2 + a_1^2) \dots (x^2 + a_{r_n}^2)$$

که در آن، a, a_1, \dots, a_{r_n} ، عددهای حقیقی غیر صفرند و، در ضمن، $a_{n+k} = -a_k$ ($k = 1, \dots, n$). چون در چند جمله‌ای $P(x)$ ، ضریب x^2 مخالف صفر، و ضریب x^1 برابر صفر است، بنا بر این، چند جمله‌ای $P'(x)$ ، درست یک ریشهٔ $x = 0$ دارد. ثابت می‌کنیم، بقیهٔ $n-2$ ریشهٔ آن، موهومی خالص‌اند.

فرض کنید $P'(b+ic) = 0$ ، در ضمن $b^2 + c^2 \neq 0$. اگر در عین حال $P(b+ic) = 0$ ، آن وقت $b+ic$ ، ریشهٔ چند جمله‌ای اصلی است، یعنی موهومی خالص است، ولی اگر $P(b+ic) \neq 0$ ، آن وقت

$$0 = \frac{P'(b+ic)}{P(b+ic)} = \sum_{k=1}^{r_n} \frac{1}{b+i(c-a_k)} = \sum_{k=1}^{r_n} \frac{b-i(c-a_k)}{b^2 + (c-a_k)^2}$$

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^{\sum n} \frac{1}{x - ia_k}$$

بنابراین، بخش حقیقی عبارت $\frac{P'(b+ic)}{P(b+ic)}$ برابر است با

$$b \sum_{k=1}^{\sum n} \frac{1}{b^2 + (c - a_k)^2} = 0$$

یعنی $b = 0$ ، همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۴۰۹. فرض می‌کنیم، چند جمله‌ای‌های P و Q ، ریشه‌هایی منطبق برهم داشته باشند، در این صورت داریم:

$$P(x) = a(z - z_1)^{n_1} (z - z_2)^{n_2} \dots (z - z_k)^{n_k}$$

$$Q(x) = b(z - z_1)^{n_1} (z - z_2)^{n_2} \dots (z - z_k)^{n_k}$$

که در آن‌ها، a و b ، عددهای مختلط غیر صفر و $n_1, \dots, n_k \in \mathbf{N}$. در نتیجه، تابع

$$f(z) = |P(z)| - |Q(z)| = (|a| - |b|) \cdot |(z - z_1)^{n_1} \dots (z - z_k)^{n_k}|$$

نمی‌تواند مقادارهایی با علامت‌های مختلف را بپذیرد. برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم تابع $f(z)$ ، مقادارهای منفی را قبول نکند. در این صورت، $\deg P \geq \deg Q$ ، زیرا در غیر این صورت، برای مقادارهایی از z که مدولی به قدر کافی بزرگ دارند، باید داشته باشیم

$$|P(z)| < |Q(z)| \Rightarrow f(z) < 0$$

سپس، فرض می‌کنیم:

$$P(z) = (z - z_0)^{n_0} P_0(z)$$

که در آن $z_0 \in \mathbf{C}$ ، $n_0 \in \mathbf{N}$ ، $P_0(z)$ یک چند جمله‌ای و $P_0(z_0) \neq 0$. فرض کنید:

$$Q(z) = (z - z_0)^{m_0} Q_0(z)$$

که در آن $m_0 \in \mathbb{Z}^+$ ، $Q_0(z)$ يك چند جمله‌ای و $Q_0(z_0) \neq 0$. ثابت می‌کنیم
 $m_0 \geq n_0$ در واقع اگر $0 \leq m_0 < n_0$ ، آن وقت عدد

$$f(z) = |z - z_0|^{m_0} [|(z - z_0)^{n_0 - m_0} \cdot P_0(z) | - |Q_0(z)|]$$

برای بعضی از مقادیرهای z ، که به قدر کافی به z_0 نزدیک باشند، منفی می‌شود.
 به این ترتیب، اگر چند جمله‌ای P دارای ریشه‌های z_1, \dots, z_k ، به ترتیب،
 با تکرارهای n_1, \dots, n_k باشد، آن وقت چند جمله‌ای Q هم، همین ریشه‌ها
 را با تکراری که، به ترتیب، کمتر از m_1, \dots, m_k نیست، خواهد داشت.
 سرانجام، از نابرابری‌های

$$n_1 \leq m_1, \dots, n_k \leq m_k, n_1 + \dots + n_k \geq m_1 + \dots + m_k$$

نتیجه می‌شود:

$$n_1 = m_1, \dots, n_k = m_k, \deg P = \deg Q$$

و چند جمله‌ای Q ، ریشه‌های دیگری به جز z_1, \dots, z_k ندارد؛ بنابراین، ریشه‌های
 چند جمله‌ای‌های P و Q ، برهم منطبق‌اند.

۲۲۳. بخش پذیری و برابری چند جمله‌ای‌ها

۴۱۰. اثبات را، با استقرای روی $n \in \mathbb{Z}^+$ می‌دهیم. به ازای $n = 0$

حکم درست است، زیرا در این حالت

$$(x+1)^{2n+1} + x^{n+2} \equiv x^2 + x + 1$$

فرض می‌کنیم، حکم، برای $n-1$ برقرار باشد، در این صورت

چند جمله‌ای

$$(x+1)^{2n+1} + x^{n+2} \equiv (x+1)^2 (x-1)^{2n-1} + x \cdot x^{n+1} \equiv$$

$$\equiv (x^2 + 2x + 1)(x+1)^{2n-1} + x \cdot x^{n+1} \equiv$$

$$\equiv (x^2 + x + 1)(x+1)^{2n-1} + x[(x+1)^{2n-1} + x^{n+1}]$$

نیز بر $x^2 + x + 1$ بخش پذیر است، یعنی، حکم، برای n هم درست است.

۴۱۱. فرض می‌کنیم: $x_\varepsilon = \cos\alpha + i\varepsilon\sin\alpha$ ، که در آن، ε برابر ۱ -

یا ۱ + است. در این صورت، چند جمله‌ای $Q(x)$ را می‌توان این‌طور نوشت:

$$Q(x) = (x - \cos\alpha - i\sin\alpha)(x - \cos\alpha + i\sin\alpha) = (x - x_1)(x - x_{-1})$$

بنا به دستور هوارد داریم:

$$\begin{aligned} x_\varepsilon^n &= (\cos\varepsilon\alpha + i\varepsilon\sin\varepsilon\alpha)^n = \cos\varepsilon n\alpha + i\varepsilon\sin\varepsilon n\alpha = \\ &= \cos n\alpha + \varepsilon i\sin n\alpha \end{aligned}$$

بنا بر این

$$\begin{aligned} P(x_\varepsilon) &= (\cos n\alpha + \varepsilon i\sin n\alpha)^n \sin\alpha - (\cos\alpha + \varepsilon i\sin\alpha) \sin n\alpha + \\ &+ \sin(n-1)\alpha = \cos n\alpha \sin\alpha - \cos\alpha \sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha = \\ &= \sin(1-n)\alpha + \sin(n-1)\alpha = 0 \end{aligned}$$

در نتیجه، بنا بر قضیه به‌زود، چندجمله‌ای $P(x)$ بر هر یک از چندجمله‌ای‌های

$$x - x_1 \quad \text{و} \quad x - x_{-1}$$

(که با هم برابر نیستند، زیرا $\sin\alpha \neq 0$)، بخش پذیر است و، بنا بر این، بر حاصل ضرب آن‌ها، یعنی $Q(x)$ هم، بخش پذیر می‌شود.

۴۱۲. $\cos^2 t$ را به $1 - \sin^2 t$ تبدیل می‌کنیم و $\sin t = x$ می‌گیریم.

معلوم می‌شود که چند جمله‌ای مجهول $R(x)$ با درجه‌ای کمتر از ۴، عبارت است از باقی مانده تقسیم عبارت

$$S(x) = 7x^{21} + 8x^{13} - 5x^9 - 2$$

بر چندجمله‌ای

$$Q(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

زیرا، برای همه مقادیرهای $x \in [-1, 1]$ اتحاد

$$S(x) \equiv P(x)Q(x) + R(x)$$

برقرار است، که در نتیجه، برای همه مقادیرهای $x \in \mathbb{C}$ هم برقرار خواهد بود (قضیه ۵۲ را ببینید). چون

$$(x-1)Q(x) = x^5 - 1$$

بنابراین، ۴ مقدار مختلف برای متغیر x وجود دارد که با شرط $Q(x) = 0$ سازگار است. برای هر یک از این مقادیر داریم $x^5 = 1$ و

$$R(x) = S(x) = 7x^3 + 8x^{13} - 5x^9 - 2 =$$

$$= 7x + 8x^3 - 5x^4 - 2 + 5Q(x) = 13x^3 + 5x^2 + 12x + 3$$

به این ترتیب، چند جمله‌ای‌های $R(x)$ و $13x^3 + 5x^2 + 12x + 3$ که درجه آن از ۳ تجاوز نمی‌کند، در چهار نقطه مختلف، مقادیرهای برابر را قبول می‌کنند و، بنابراین، برهم منطبق‌اند.

۴۱۳ چندجمله‌ای‌های

$$P(x) = 1 + x + \dots + x^m, \quad Q(x) = 1 + x^n + \dots + x^{mn}$$

دارای ریشه‌های تکراری نیستند، زیرا، چندجمله‌ای‌های زیر، ریشه تکراری ندارند:

$$x^{m+1} - 1 = (x-1)P(x), \quad x^{n(m+1)} - 1 = (x^n - 1)Q(x)$$

بنابراین، با توجه به قضیه ۵۴، تنها وقتی چند جمله‌ای $Q(x)$ بر $P(x)$ بخش پذیر است که هر کدام از ریشه‌های چند جمله‌ای $P(x)$ ، ریشه‌ای از چند جمله‌ای $Q(x)$ باشد و یا، هم ارز آن، هر یک ریشه مخالف واحد در معادله $x^{m+1} = 1$ (که به خودی خود، ریشه‌ای از معادله $x^{n(m+1)} = 1$ نیز می‌باشد)، ریشه‌ای از معادله $x^n = 1$ نباشد. به این ترتیب، همه زوج‌های مجهول m و n (و نه تنها آن‌ها)، باید طوری انتخاب شوند که، به ازای آن‌ها، دستگاه

$$\begin{cases} x^{m+1} = 1 \\ x^n = 1 \end{cases}$$

تنها یک جواب منحصر $x = 1$ را داشته باشد. اگر داشته باشیم:

$$(m+1, n) = d > 1$$

آن وقت، این دستگاه، به عنوان یکی از جواب‌ها، عدد

$$x = \cos \frac{2\pi}{d} + i \sin \frac{2\pi}{d} \neq 1$$

را قبول می‌کند. و اگر $(m+1, n) = 1$ ، آن وقت، با توجه به قضیه ۲۴،
عددهای درست k و l را می‌توان پیدا کرد، به نحوی که داشته باشیم:

$$k(m+1) + l \cdot n = 1$$

یعنی، برای هر جواب این دستگاه داریم:

$$x = x^{k(m+1) + l \cdot n} = (x^{m+1})^k (x^n)^l = 1$$

بنابراین، زوج عددهای طبیعی m و n ، تنها وقتی با شرط مسأله سازگارند
که، عددهای $m+1$ و n ، نسبت به هم اول باشند.
۰۴۱۴ این چندجمله‌ای را در نظر می‌گیریم:

$$S(x) = s_0 + s_1(x) + \dots + s_n x^n$$

اگر دو طرف اتحاد مفروض را، در $x-1$ ضرب کنیم، به دست می‌آید:

$$(x-1)[P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5)] \equiv (x^5-1)S(x)$$

یا

$$P(x^5) + (x^5-1)S_1(x) \equiv -(x^5-1)S_2(x) + \\ + xP(x^5) + (x^2-x)Q(x^5) + (x^3-x^2)R(x^5)$$

که در آن، فرض کرده‌ایم:

$$S_1(x) = s_0 + s_5 x^5 + s_{10} x^{10} + \dots + s_{5m} x^{5m},$$

$$S_2(x) = S(x) - S_1(x), \quad m = \left[\frac{n}{5} \right]$$

چون در سمت چپ اتحاد اخیر، متغیر x ، توان‌هایی مضرب ۵ دارد و، در

سمت راست، تنها با توان‌های مخالف مضرب ۵، بنابراین، هر دو طرف، باید برابر صفر باشند از آن جا به دست می‌آید:

$$P(x^5) \equiv -(x^5 - 1)S_1(x)$$

اگر در این اتحاد $x = 1$ قرار دهیم، به دست می‌آید $P(1) = 0$ ، بنابراین، طبق قضیهٔ به‌ذو، $P(x)$ بر $x - 1$ بخش پذیر است.

۰۴۱۵ هر چند جمله‌ای به صورت $P(x) = ax$ ، که در آن a عددی ثابت است، در شرط مسأله صدق می‌کند.

با استقرای روی $n \in \mathbb{Z}^+$ ، ثابت می‌کنیم؛ برای هر چند جمله‌ای مطلوب $P(x)$ ، برابری $P(n) = nP(1)$ برقرار است. برای $n = 0$ و $n = 1$ ، این برابری درست است. فرض می‌کنیم، درستی برابری را، برای $n - 1$ و n ثابت کرده باشیم ($n \in \mathbb{N}$). در این صورت داریم:

$$P(n+1) = 2P(n) - P(n-1) = (n+1)P(1)$$

یعنی برابری، برای $n+1$ هم برقرار است. چون چند جمله‌ای $P(x) - P(1)x$ دارای بی‌نهایت جواب

$$x = 0, 1, 2, \dots$$

است، بنابراین برابر صفر است. به این ترتیب، چند جمله‌ای مجهول، عبارت است از $P(x) = ax$.

۰۴۱۶ اگر در اتحاد مفروض $x = 0$ و $x = 2$ قرار دهیم، معلوم می‌شود که چند جمله‌ای مفروض، دارای ریشه‌های 0 و 1 می‌باشد، یعنی بر $x - x^2$ بخش پذیر است:

$$P(x) = (x^2 - x)Q(x) \quad (*)$$

در اتحاد مفروض، به جای $P(x)$ ، مقدارش را از برابری (*) قرار می‌دهیم، به دست می‌آید:

$$Q(x) = Q(x-1)$$

که از آن جا نتیجه می‌شود:

$$\dots = Q(2) = Q(1) = Q(0) = Q(-1) = \dots$$

بنابراین، $Q(x)$ ، مقداری ثابت است: $Q(x) \equiv a$ و داریم:

$$P(x) = a(x^2 - x)$$

آزمایش نشان می‌دهد که، همهٔ تابع‌های به این صورت، با شرط مسأله سازگارند.

۴۱۷. اگر در اتحاد مفروض، به ترتیب $x = 1$ ، $x = -2$ و $x = 0$

قرار دهیم، معلوم می‌شود که، چند جمله‌ای مفروض، دارای ریشه‌های 0 و ± 1 است. در نتیجه، $P(x)$ را می‌توان به این صورت نوشت:

$$P(x) = (x^3 - x)Q(x)$$

اگر از این برابری، در اتحاد مفروض استفاده کنیم، به دست می‌آید:

$$Q(x+1) \equiv Q(x)$$

و از آن جا

$$Q(0) = Q(1) = Q(2) = \dots$$

بنابراین $Q(x) \equiv a$ و برای چندجمله‌ای مجهول $P(x)$ داریم:

$$P(x) = a(x^2 - x)$$

و آزمایش نشان می‌دهد که، این چندجمله‌ای، با شرط مسأله سازگار است.

۴۱۸. چندجمله‌ای مجهول را به این صورت در نظر می‌گیریم:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (a_n \neq 0)$$

فرض می‌کنیم، دست کم یکی از ضرایب‌های a_0, a_1, \dots, a_{n-1} مخالف صفر باشد. بزرگترین مقدار $k < n$ را انتخاب می‌کنیم که، برای آن، داشته باشیم:

$a_k \neq 0$. در این صورت داریم:

$$P(x^2) \equiv a_n x^{2n} + a_k x^{2k} + \dots + a_1 x^2 + a_0 \equiv$$

$$\equiv (a_n x^n + a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0)^2 \equiv (P(x))^2$$

اگر ضریب x^{n+k} را در دو طرف اتحاد مقایسه کنیم، به دست می‌آید:

$$\forall a_n a_k = 0$$

که با شرط‌های $a_n \neq 0$ و $a_k \neq 0$ متناقض است. بنا بر این

$$a_{n-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0 \quad \text{و} \quad P(x) = a_n x^n$$

سرانجام، از شرط

$$a_n x^{2n} \equiv P(x^2) \equiv (P(x))^2 \equiv a_n^2 x^{2n}$$

به دست می‌آید $a_n = 1$ ، یعنی $P(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}^+$)

۴۱۹. $y = x - 1$ و $P(y - 1) = Q(y)$ می‌گیریم. در این صورت

داریم:

$$(P(x - 2))^2 = (P(y - 1))^2 = (Q(y))^2;$$

$$(P(x^2 - 2x) = P(y^2 - 1) = Q(y^2))$$

و در نتیجه، اتحاد مفروض را می‌توان این‌طور نوشت:

$$Q(y^2) = (Q(y))^2, \quad y \in \mathbb{R}$$

که همان مسأله ۴۱۸ است. بنا بر این $Q(y) = y^n$ و

$$P(y) = (y + 1)^n, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

۴۲۰. چند جمله‌ای مجهول را، به این صورت می‌گیریم:

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

که اگر در اتحاد مفروض قرار دهیم و، سپس، ضریب‌های x^{3n} و x^0 را در دو طرف مقایسه کنیم، به دست می‌آید:

$$a_n^3 = a_n \quad \text{و} \quad a_0^3 = a_0 \implies a_n = 1 \quad \text{و} \quad a_0 = 1$$

درواقع نمی‌توان $a_0 = 0$ گرفت، زیرا برای $a_0 = 0$ به دست می‌آید:

$$P(x) = x^l P_1(x)$$

که در آن $P_1(0) \neq 0$ و $l \in \mathbb{N}$ ؛ و از اتحاد

$$x^l P_1(x) \cdot (2x^2)^l P_1(2x^2) \equiv (2x^2 + x)^l P_1(2x^2 + x)$$

به این اتحاد می‌رسیم:

$$2^l x^{2^l} P_1(x) P_1(2x^2) \equiv (2x^2 + 1)^l P_1(2x^2 + x)$$

از آن جا $P_1(0) = 0$ که فرض ما را نقض می‌کند.

فرض $P(x)$ چند جمله‌ای $\alpha = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ریشه‌ای از چند جمله‌ای $P(x)$ فرض

می‌کنیم، در این صورت، عدد $2\alpha^2 + \alpha$ هم ریشه دیگری از آن خواهد بود، زیرا

$$P(2\alpha^2 + \alpha) = P(\alpha)P(2\alpha^2)$$

سپس، داریم:

$$|2\alpha^2 + \alpha| = |\alpha| \cdot |2\alpha + 1| \geq |\alpha| \cdot (2|\alpha| - 1)$$

بنابراین، اگر $|\alpha| = \rho > 1$ ، آن وقت $|2\alpha^2 + \alpha| > |\alpha|$ و چند جمله‌ای $P(x)$ ، که متحد با صفر نیست، بی‌نهایت ریشه مختلف پیدا می‌کند:

$$\beta_1 = \alpha, \beta_{j+1} = 2\beta_j^2 + \beta_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

که ممکن نیست. بنابراین، هر ریشه چند جمله‌ای $P(x)$ نمی‌تواند، از نظر قدر مطلق، از واحد تجاوز کند، ولی چون حاصل ضرب همه ریشه‌های این چند جمله‌ای (بنابر قضیهٔ ویت) برابر واحد است، ممکن نیست که همه ریشه‌های آن، از لحاظ قدر مطلق، کمتر از واحد باشند. به این ترتیب $\rho = 1$ و از زنجیرهٔ برابری‌های

$$1 = |2\alpha^2 + \alpha|^2 = |2\alpha^2 + 1|^2 = 4 \cos 2\varphi + 5$$

به دست می‌آید: $\alpha = \pm i$ و $m \in \mathbb{Z}, \varphi = m\pi + \frac{\pi}{4}$. چون چند جمله‌ای

$P(x)$ ، دارای ضرب‌های حقیقی است، بنابراین

$$P(x) = (x^2 + 1)^k, \quad k \in \mathbb{Z}^+$$

و آزمایش نشان می‌دهد که، همه چند جمله‌ای‌های به این صورت، با شرط مسأله سازگارند.

۴۲۱. اثبات را، با استقرای روی $n \in \mathbb{N}$ می‌دهیم. چون چند جمله‌ای

$Q_1(x)$ بر خودش بخش پذیر است، بنا بر این حکم مسأله، برای $n=1$ درست است.

اکنون، فرض می کنیم، برای مقداری از $n \in \mathbf{N}$ ، داشته باشیم:

$$Q_n(x) \equiv R_n(x) \cdot Q_1(x)$$

که در آن، $R_n(x)$ ، یک چند جمله ای است. در این صورت، داریم:

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(x) &\equiv P(Q_n(x) + x) - x \equiv P(R_n(x)Q_1(x) + x) - x \equiv \\ &\equiv [P(R_n(x)Q_1(x) + x) - P(x)] + [P(x) - x] \end{aligned}$$

فرض می کنیم: $P(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ ، در این صورت

$$Q_{n+1}(x) \equiv \sum_{k=0}^m a_k [(R_n(x)Q_1(x) + x)^k - x^k] + Q_1(x) \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=0}^m a_k R_n(x) Q_1(x) S_k(x) + Q_1(x) \equiv$$

$$\equiv Q_1(x) \left[1 + \sum_{k=0}^m a_k R_n(x) S_k(x) \right]$$

که در آن فرض کرده ایم:

$$S_k(x) = \sum_{j=0}^{k-1} [R_n(x)Q_1(x) + x]^j x^{k-j-1}$$

در واقع، از برابری

$$a^k - b^k = (a-b) \sum_{j=0}^{k-1} a^j b^{k-j-1}$$

استفاده کرده ایم که در آن $a = Q_n(x)Q_1(x) + x$ و $b = x$. به این ترتیب، حکم، برای $n+1$ هم ثابت شد.

۴۲۲. یادآوری می کنیم، اگر چند جمله ای $S(x)$ از درجه سوم

تجاوز نکند و، در ضمن، برای همه مقادیرهای $x \in \mathbf{R}$ داشته باشیم $S(x) \geq 0$ و $S(x_0) = 0$ ، آن وقت، این چند جمله ای به صورت زیر است:

$$S(x) = a(x - x_0)^2, a \geq 0$$

بنا بر این

$$R(x) \equiv P(x) + a(x - x_0)^2,$$

$$Q(x) \equiv P(x) + b(x - x_0)^2 \equiv$$

$$\equiv \frac{a-b}{a} P(x) + \frac{b}{a} [P(x) + a(x - x_0)^2] \equiv$$

$$\equiv kP(x) + (1-k)R(x)$$

که در آن $a \geq b \geq 0$ و $k = 1 - \frac{b}{a} \in [0, 1]$ در حالت $a = 0$ ، به دست می‌آید: $R(x) \equiv Q(x) \equiv P(x)$ ، بنا بر این اتحاد مطلوب، مثلاً، برای $k = 1$ برقرار است.

این حکم، برای چند جمله‌ای درجه چهارم هم، درست نیست. مثلاً، چند جمله‌ای‌های

$$P(x) = x^4, Q(x) = x^4 + x^2, R(x) = 2x^4 + x^2$$

با نابرابری‌های $P(x) \leq Q(x) \leq R(x)$ برای $x \in \mathbf{R}$ سازگارند و، در ضمن، $P(0) = R(0)$ ، ولی اتحاد

$$x^4 + x^2 \equiv kx^4 + (1-k)(2x^4 + x^2)$$

برای هیچ مقداری از k برقرار نیست، زیرا برای ثابت k ، به برابری‌های متناقض $1 = k + 2(1-k)$ و $1 = 1 - k$ می‌رسیم.

۴۲۳. فرض می‌کنیم، چند جمله‌ای

$$Q(x) = q_n x^n + \dots + q_0.$$

با شرط $q_n \neq 0$ ، در اتحاد $Q(P(x)) \equiv P(Q(x))$ صدق کند، آن وقت، اگر در این اتحاد، ضریب بزرگترین درجه (یعنی ضریب x^{2n}) را در دو طرف، برابر قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$q_n a^n = a q_n^{\lambda} \Rightarrow q_n = a^{n-1}$$

بنابراین، اگر برخلاف حکم مسأله، برای مقداری از n ، دو چند جمله‌ای مختلف $Q_1(x)$ و $Q_2(x)$ از درجه n وجود داشته باشد که در اتحاد مفروض صدق کنند، آن وقت، چند جمله‌ای $R(x) = Q_1(x) - Q_2(x)$ هم که با درجه $k < n$ است (زیرا، ضریب بزرگترین درجه چند جمله‌ای‌های $Q_1(x)$ و $Q_2(x)$ با هم برابر و مساوی a^{n-1} است)، باید در اتحاد مفروض صدق کند:

$$R(P(x)) \equiv Q_1(P(x)) - Q_2(P(x)) \equiv P(Q_1(x)) - P(Q_2(x)) \equiv \\ \equiv a(Q_1^{\lambda}(x) - Q_2^{\lambda}(x)) + b(Q_1(x) - Q_2(x)) \equiv$$

$$\equiv (Q_1(x) - Q_2(x))(a(Q_1(x) + Q_2(x)) + b) \equiv R(x)T(x)$$

که در آن $T(x) = aQ_1(x) + aQ_2(x) + b$ بنا بر این

$$2k = \deg R(P(x)) = \deg (R(x)T(x)) = k + n$$

که نابرابری $k < n$ را نقض می‌کند. حکم مسأله ثابت شد.

$$۰۴۲۴ \text{ اگر } P(z) \equiv Q(z)Q(-z), \text{ آن وقت}$$

$$P(-z) \equiv Q(-z)Q(z) \equiv P(z)$$

یعنی $P(z)$ تابع زوج است.

اکنون، فرض کنید، چند جمله‌ای غیرصفر $P(z)$ ، تابعی زوج باشد (در حالت $P(z) \equiv 0$ ، می‌توان فرض کرد $Q(z) \equiv 0$). با استقرای روی m ، تعداد ریشه‌های غیرصفر چندجمله‌ای $P(z)$ ، ثابت می‌کنیم، چندجمله‌ای $Q(z)$ وجود دارد که در اتحاد

$$P(z) \equiv Q(z)Q(-z)$$

صدق می‌کند. $m = 0$ می‌گیریم؛ چندجمله‌ای $P(z)$ به صورت $P(z) = az^n$ درمی‌آید ($a \neq 0$)، و از زوج بودن تابع $P(z)$ نتیجه می‌شود: $n = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}^+$). در این صورت، چندجمله‌ای

$$Q(z) = bz^k, \quad b^2 = (-1)^k a$$

با اتحاد مفروض سازگار است، زیرا

$$az^n \equiv bz^k b(-z)^k$$

فرض می‌کنیم، حکم، برای همه مقادیرهای کوچکتر از $m \in \mathbf{N}$ ثابت شده باشد. ثابت می‌کنیم که، در این صورت، برای m هم درست است. در واقع، اگر α ، ریشه غیر صفر چند جمله‌ای $P(z)$ باشد، آن وقت $P(-\alpha) = P(\alpha) = 0$ در نتیجه

$$P(z) \equiv (z - \alpha)(z + \alpha)R(z)$$

که در آن $R(z)$ ، تابعی زوج است، زیرا

$$R(-z)((-z)^2 - \alpha^2) \equiv P(-z) \equiv P(z) \equiv R(z)(z^2 - \alpha^2)$$

با توجه به فرض استقرای، چند جمله‌ای $S(z)$ وجود دارد که در اتحاد

$$R(z) \equiv S(z)S(-z)$$

صدق می‌کند. $Q(z) = i(z - \alpha)S(z)$ می‌گیریم، در این صورت

$$P(z) \equiv i(z - \alpha)S(z)i(-z - \alpha)S(-z) \equiv Q(z)Q(-z)$$

حکم ثابت شد.

۴۲۵. اثبات را، با استقرای روی m ، تعداد ریشه‌های غیر صفر و غیر حقیقی چند جمله‌ای $P(x)$ ، می‌آوریم (در حالت $P(x) \equiv 0$ ، می‌توان فرض کرد $n = 1$ و $Q_1(x) = 0$).

به ازای $m = 0$ ، چند جمله‌ای $P(x)$ با شرط مسأله سازگار است؛ زیرا در این حالت، هر ریشه چند جمله‌ای، حقیقی و به تعداد زوج تکرار شده است. در واقع، اگر داشته باشیم:

$$P(x) = (x - \alpha)^l R(x), \quad \alpha \in \mathbf{R}$$

و l ، عددی فرد باشد، آن وقت به ازای $x > \alpha$ داریم $R(x) \geq 0$ ، و به ازای $x < \alpha$: $R(x) \leq 0$ ، و از آن جا، α ، ریشه‌ای از چند جمله‌ای $R(x)$ است. بنابراین، به اتحاد زیر می‌رسیم:

$$P(x) \equiv a(x - \alpha_1)^{l_1}(x - \alpha_2)^{l_2} \dots (x - \alpha_k)^{l_k}$$

که در آن $a > 0$ ، $\alpha_k \in \mathbf{R}$ ، $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ و $l_k \in \mathbf{Z}^+$ ، $n = l_1 + \dots + l_k$ می‌گیریم و

$$Q_1(x) = \sqrt{a(x - \alpha_1)^{l_1}(x - \alpha_2)^{l_2} \dots (x - \alpha_k)^{l_k}}$$

در این صورت $P(x) \equiv Q_1^2(x)$.

اکنون، فرض می‌کنیم، حکم، برای همه مقادیرهای کمتر از $m \in \mathbf{N}$ درست باشد. ثابت می‌کنیم که، در این صورت، برای m هم درست است. در واقع، اگر چند جمله‌ای $P(x)$ ، که با شرط مسأله سازگار است، دارای m ریشه غیر حقیقی باشد، آن وقت، به این صورت است:

$$P(x) = (x^2 + 2px + q)R(x), \quad p^2 < q$$

یعنی $(x \in \mathbf{R}$ برای هر $x^2 + 2px + q = (x + p)^2 + (q - p^2) > 0$) و چند جمله‌ای $R(x)$ ، با توجه به فرض استقرا، برای چند جمله‌ای‌هایی مثل $Q_1(x), \dots, Q_n(x)$ ، در اتحاد زیر صدق می‌کند:

$$R(x) \equiv Q_1^2(x) + \dots + Q_n^2(x)$$

در این صورت، از اتحاد

$$P(x) \equiv ((x + p)^2 + c^2)(Q_1^2(x) + \dots + Q_n^2(x))$$

که در آن $c = \sqrt{q - p^2}$ ، نتیجه می‌شود که، چند جمله‌ای $P(x)$ ، به صورت مجموع مجذورهای چند جمله‌ای‌هایی با ضرایب‌های حقیقی درمی‌آید. ۴۲۶ چند جمله‌ای $P(x)$ را می‌توان به این صورت نوشت (قضیه ۵۸ را ببینید):

$$P(x) = aF_1(x) \dots F_m(x)G_1(x) \dots G_k(x)$$

که در آن، چندجمله‌ای‌های $F_i(x)$ و $G_j(x)$ به این صورت اند:

$$F_i(x) = x - \alpha_i, \quad \alpha_i \in \mathbf{R}, \quad i = 1, \dots, m;$$

$$G_j(x) = (x - \beta_j)(x - \bar{\beta}_j), \quad \beta_j \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}, \quad j = 1, \dots, k$$

و $a > 0$. توجه کنیم که، حاصل ضرب چندجمله‌ای‌های با ضرایب‌های غیرمنفی، باز هم یک چندجمله‌ای با ضرایب‌های غیر منفی است. بنابراین، کافی است ثابت کنیم، هر یک از چندجمله‌ای‌های $F_i(x)$ و $G_j(x)$ را می‌توان به صورت

نسبت $\frac{Q(x)}{R(x)}$ از چند جمله‌ای‌های با ضرایب‌های غیرمنفی نشان داد. برای چندجمله‌ای

$$F(x) = x - \alpha, \quad \alpha \leq 0$$

فرض می‌کنیم:

$$Q(x) = F(x) = x + |\alpha| \quad \text{و} \quad R(x) = 1$$

سپس، اگر بخش حقیقی عدد β غیرمثبت باشد، برای چندجمله‌ای

$$G(x) = (x - \beta)(x - \bar{\beta})$$

فرض می‌کنیم:

$$Q(x) = G(x) = x^2 + 2|\operatorname{Re} \beta|x + |\beta|^2 \quad \text{و} \quad R(x) = 1$$

و اگر $\operatorname{Re} \beta > 0$ ، آن وقت، بدون لطمه خوردن به کلیت مسأله، در نظر

می‌گیریم: $\arg \beta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ، $n \in \mathbb{N}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته

باشیم:

$$r^s \arg \beta \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right) \quad \text{و} \quad r^s \arg \beta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right), \quad s = 0, 1, \dots, n-1$$

از آن جا که داریم:

$$\arg(\beta^{r^s}) = r^s \arg \beta, \quad (0 \leq r \leq n)$$

آن وقت

$$\operatorname{Re}(\beta^{r^n}) \leq 0 \quad \text{و} \quad \operatorname{Re}(\beta^{r^s}) > 0, \quad s = 0, 1, \dots, n-1$$

به این ترتیب، داریم:

$$G(x) \equiv (x - \beta)(x - \bar{\beta}) \equiv \frac{(x^2 - \beta^r)(x^2 - \bar{\beta}^r)}{(x + \beta)(x + \bar{\beta})} \equiv$$

$$\begin{aligned} & \equiv \frac{(x^\nu - \beta^\nu)(x^\nu - \bar{\beta}^\nu)}{(x + \beta)(x + \bar{\beta})(x + \beta^\nu)(x + \bar{\beta}^\nu)} \equiv \dots \equiv \\ & \equiv \frac{(x^{\nu^n} - \beta^{\nu^n})(x^{\nu^n} - \bar{\beta}^{\nu^n})}{(x + \beta)(x + \bar{\beta}) \dots (x^{\nu^{n-1}} + \beta^{\nu^{n-1}})(x^{\nu^{n-1}} + \bar{\beta}^{\nu^{n-1}})} = \frac{Q(x)}{R(x)} \end{aligned}$$

که در آن، چند جمله‌ای‌های

$$Q(x) = (x^{\nu^n} - \beta^{\nu^n})(x^{\nu^n} - \bar{\beta}^{\nu^n})$$

$$R(x) = (x + \beta)(x + \bar{\beta}) \dots (x^{\nu^{n-1}} + \beta^{\nu^{n-1}})(x^{\nu^{n-1}} + \bar{\beta}^{\nu^{n-1}})$$

دارای ضریب‌های غیرمنفی هستند. زیرا هر یک از چند جمله‌ای‌های به صورت

$$(x^l + \gamma)(x^l + \bar{\gamma}) \equiv x^{2l} + (2R_e \gamma)x^l + |\gamma|^2, \quad l \in \mathbb{N}$$

($R_e \gamma > 0$) ضریب‌هایی غیرمنفی دارند.

۴۲۷. قرار می‌گذاریم:

$$R_{n,i}(x) = x^i + x^{i+1} + \dots + x^{n-1}, \quad i = 0, 1, \dots, \left[\frac{n}{2} \right]$$

در این صورت، هر چند جمله‌ای $P(x)$ را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 R_{n,0}(x) + (a_1 - a_0) R_{n,0}(x) + \dots + \\ &+ \left(a_{\left[\frac{n}{2} \right]} - a_{\left[\frac{n}{2} \right] - 1} \right) R_{n, \left[\frac{n}{2} \right]}(x) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2} \right]} b_i R_{n,i}(x) \end{aligned}$$

که در آن

$$b_0 = a_0, \quad b_i = a_i - a_{i-1}, \quad i = 1, \dots, \left[\frac{n}{2} \right]$$

عددهایی غیرمنفی اند. به همین ترتیب، اگر $Q(x) \in A(m)$ ، آن‌گاه

$$Q(x) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2} \right]} c_j R_{m,j}(x)$$

که در آن $c_j \geq 0$ ، $\left[\frac{m}{2} \right]$ ، $j = 0, 1, \dots$ سرانجام، اگر $P(x) \in A(n)$ و $Q(x) \in A(m)$ آن وقت، چند جمله‌ای

$$P(x)Q(x) = \sum_{i,j} b_i c_j R_{n,i}(x) R_{m,j}(x)$$

متعلق به مجموعه $A(m+n)$ خواهد بود. برای اثبات، کافی است آزمایش

کنیم که، برای هر مقدار $i \leq \frac{n}{2}$ و $j \leq \frac{m}{2}$ داریم:

$$R_{n,i}(x) R_{m,j}(x) \in A(m+n)$$

در واقع، اگر فرض کنیم $p = n - 2i$ و $q = m - 2j$ و، برای مشخص بودن وضع، $p \leq q$ بگیریم، آن وقت، چند جمله‌ای

$$\begin{aligned} R_{n,i}(x) \cdot R_{m,j}(x) &\equiv x^i (1 + x + \dots + x^p) x^j (1 + x + \\ &+ \dots + x^q) \equiv x^{i+j} (R_{p+q,0}(x) + R_{p+q,1}(x) + \dots + \\ &+ R_{p+q,p}(x)) \equiv R_{m+n,j+i}(x) + R_{m+n,j+i+1}(x) + \\ &+ \dots + R_{m+n,j+n-1}(x) \end{aligned}$$

متعلق به مجموعه $A(m+n)$ است. حکم ثابت شد.

۰۴۲۸. مجموعه 2^n انتخاب ممکن از

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$$

را A_n می‌نامیم که، در آن، ε_i برابر یا ۱ و یا -۱ است. فرض می‌کنیم:

$$x_\varepsilon = \varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_n x_n$$

و ثابت می‌کنیم حاصل ضرب $\prod_{\varepsilon \in A_n} x_\varepsilon$ ، برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، به صورت

$$Q_n(x_1^2, \dots, x_n^2)$$

است که، در آن، Q_n یک چند جمله‌ای با ضرایب‌های درست است. برای

$n=1$ ، حکم درست است، زیرا

$$\prod_{\varepsilon \in A_1} x_\varepsilon = x_1(-x_1) = Q_1(x_1^2)$$

اکنون $n > 1$ و $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ می‌گیریم؛ اگر فرض کنیم

$$\varepsilon' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_n)$$

آن وقت، خواهیم داشت:

$$\prod_{\varepsilon \in A_n} x_\varepsilon \equiv \prod_{\varepsilon' \in A_{n-1}} [(x_{\varepsilon'} + x_k)(x_{\varepsilon'} - x_k)] \equiv \prod_{\varepsilon' \in A_{n-1}} (x_{\varepsilon'}^2 - x_k^2)$$

اگر در حاصل ضرب اخیر، همهٔ پرانتزها را باز کنیم و جمله‌های متشابه را جمع نمائیم، به یک چند جمله‌ای (با ضریب‌های درست) از متغیرهای x_1, x_2, \dots, x_n می‌رسیم که، در ضمن، متغیر x_k در هر جمله، توانی زوج دارد. چون اندیس k دلخواه است، این حکم، برای هر یک از متغیرهای x_1, \dots, x_n درست است. به این ترتیب، ثابت شد

$$\prod_{\varepsilon \in A_n} x_\varepsilon = Q_n(x_1^2, \dots, x_n^2)$$

یادآوری می‌کنیم که، چندجمله‌ای Q_n غیر صفر است، زیرا

$$|Q_n(1, 0, \dots, 0)| = 1$$

اگر در حاصل ضرب

$$\prod_{\varepsilon \in A_n} (\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_n x_n)$$

عامل $x_1 + \dots + x_n$ را، که به‌ازای $(1, \dots, 1) = \varepsilon$ به‌دست می‌آید، جدا کنیم و چندجمله‌ای (با ضریب‌های درست از n متغیر) را، که از حاصل ضرب همهٔ بقیهٔ عامل‌ها به‌دست می‌آید، P_n بنامیم، به اتحاد مطلوب می‌رسیم:

$$(x_1 + \dots + x_n) P_n(x_1, \dots, x_n) \equiv Q_n(x_1^2, \dots, x_n^2)$$

برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$.

۴۲۹. اگر چند جمله‌ای $P(x)$ دارای ریشه‌های $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

به ترتیب، بسا تکرار k_1, \dots, k_s باشد، آن وقت چند جمله‌ای $Q(x)$ هم، همان ریشه‌ها را دارد (که البته، ممکن است با تکراری دیگر)، زیرا $P_0 = Q_0$. به همین ترتیب، اگر چند جمله‌ای $1 - P(x)$ دارای ریشه‌های β_1, \dots, β_r ، بسا تکرارهای l_1, \dots, l_r باشد، آن وقت چند جمله‌ای $1 - Q(x)$ نیز، دارای همان ریشه‌هاست، زیرا $P_1 = Q_1$. بنابراین، هر يك از عددهای دو به دو مختلف $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_r$ ، ریشه‌ای از چند جمله‌ای $P(x) - Q(x)$ است. فرض می‌کنیم $P(x) - Q(x) \equiv 0$ ، در این صورت

$$\deg(P(x) - Q(x)) \geq s + r$$

بدون این که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان در نظر گرفت:

$$\deg P(x) \geq \deg Q(x) \geq 1$$

بنابراین

$$\deg P(x) = \deg(P(x) - 1) \geq \deg(P(x) - Q(x))$$

سپس، اگر ریشه γ از چند جمله‌ای $P(x) - c$ ، به اندازه $m > 1$ بار تکرار شده باشد، آن وقت در چند جمله‌ای $P'(x)$ ، این ریشه γ ، به اندازه $m - 1$ بار تکرار می‌شود. در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} \deg P'(x) &\geq (k_1 - 1) + \dots + (k_s - 1) + (l_1 - 1) + \dots + \\ &+ (l_r - 1) = (k_1 + \dots + k_s) + (l_1 + \dots + l_r) - (s + r) \geq \\ &\geq \deg P(x) + \deg(P(x) - 1) - \deg(P(x) - Q(x)) \geq \\ &\geq \deg P(x) \end{aligned}$$

که با نابرابری $\deg P' < \deg P(x)$ متناقض است. بنابراین

$$P(x) \equiv Q(x)$$

۴۳۰. چند جمله‌ای P و Q و R را سازگار با شرط مسأله می‌گیریم و فرض می‌کنیم، دست کم یکی از آن‌ها، متحد با صفر نباشد. در این صورت، عددهای x_0 و $y_0 \neq 0$ را می‌توان طوری پیدا کرد که، دست کم، یکی از

عدهای $P(x_0, y_0)$ ، $Q(x_0, y_0)$ ، $R(x_0, y_0)$ مخالف صفر باشد. چند جمله‌ای‌های با یک متغیر

$$P_1(x) = P(x, y_0), Q_1(x) = y_0^{2m} Q(x, y_0), R_1(x) = R(x, y_0)$$

را در نظر می‌گیریم. بنا بر شرط مسأله داریم:

$$x^{2m} P_1(x) + Q_1(x) \equiv (x + y_0)^{2m} R_1(x)$$

در ضمن، چند جمله‌ای‌های $P_1(x)$ ، $Q_1(x)$ و $R_1(x)$ ، از درجه‌ای کوچکتر از m هستند. قرار می‌گذاریم:

$$U(x) = x^{2m} P_1(x), T(x) = U(x) + Q_1(x) \equiv (x + y_0)^{2m} R_1(x)$$

$$S(x) = T^{(m)}(x)$$

چون چند جمله‌ای $U(x)$ بر x^{2m} بخش پذیر است، بنا بر این، عدد 0 ، ریشه تکراری آن، دست کم از مرتبه $2m$ است. بنا بر این

$$U^{(m)}(0) = U^{(m+1)}(0) = \dots = U^{(2m-1)}(0) = 0$$

چون $\deg Q_1(x) < m$ ، در نتیجه

$$Q_1^{(m)}(0) = Q_1^{(m+1)}(0) = \dots = 0$$

و از آنجا

$$T^{(m)}(0) = T^{(m+1)}(0) = \dots = T^{(2m-1)}(0) = 0$$

یعنی

$$S(0) = S'(0) = \dots = S^{(m-1)}(0) = 0$$

چون عدد $-y_0$ ، ریشه چند جمله‌ای

$$T(x) = (y + y_0)^{2m} R_1(x)$$

با تکراری، دست کم، برابر $2m$ است، پس

$$T^{(m)}(-y_0) = T^{(m+1)}(-y_0) = \dots = T^{(2m-1)}(-y_0) = 0$$

$$S(-y_0) = S'(-y_0) = \dots = S^{(m-1)}(-y_0) = 0$$

بنابراین، عددهای 0 و $-y_0 \neq 0$ ، عبارتند از ریشه‌های چندجمله‌ای $S(x)$ ، با تکراری که از m کمتر نیست. به این ترتیب، $S(x)$ بر $x^m(x+y_0)^m$ (که از درجه $2m$ است) بخش پذیر است. ولی درجه $T(x)$ از $3m$ و، بنابراین، درجه $S(x)$ از $2m$ کوچکتر است؛ یعنی $S(x) \equiv 0$. از این جا نتیجه می‌شود که، چند جمله‌ای $T(x)$ ، که درجه‌ای کمتر از m دارد، بر چند جمله‌ای $(x+y_0)^{2m}$ بخش پذیر است، یعنی $T(x) \equiv 0$ و از آن جا $R_1(x) \equiv 0$ از اتحاد

$$x^{2m}P_1(x) + Q_1(x) \equiv T(x) \equiv 0$$

و نابرابری $\deg Q_1(x) < m$ ، به دست می‌آید:

$$P_1(x) \equiv Q_1(x) \equiv 0$$

بنابراین

$$P_1(x_0) = Q_1(x_0) = R_1(x_0) = 0$$

که با نوع انتخاب عددهای x_0 و y_0 متناقض است. این تناقض، درستی حکم مسأله را، ثابت می‌کند.

۲۳۳. ویژگی‌های گوناگون چندجمله‌ای‌ها

۴۳۱ الف) مقدارهای $P(x)$ ، به ازای همه مقدارهای $x \in \mathbb{Z}$ ، تنها وقتی از نظر زوج و فرد بودن یکسان هستند که، هر یک از عددهای

$$P(x+1) - P(x) = [(x+1)^2 + P(x+1) + q] - \\ -(x^2 + px + q) = 2x + 1 + p$$

بر 2 بخش پذیر باشد، یعنی وقتی که p ، عددی فرد باشد. در ضمن، همه

مقدارهای $P(x)$ ، با زوج بودن $q = P(0)$ ، زوج و با فرد بودن q ، فردند. به این ترتیب، اگر p و q هر دو فرد باشند، همهٔ مقدارهای $P(x)$ فرد. و اگر p فرد و q زوج باشد، همهٔ مقدارهای $P(x)$ زوج می‌شود. (ب) چون $Q(x) = x(x^2 + p) + q$ ، بنابراین مقدارهای

$$Q(3x) = 3x(9x^2 + p) + q$$

به ازای هر $x \in \mathbb{Z}$ ، تنها وقتی بر ۳ بخش پذیرند که q ، مضربی از ۳ باشد. درضمن، هر يك از مقدارهای

$$\begin{aligned} Q(3x \pm 1) &= (3x \pm 1)(9x^2 \pm 6x + 1 + p) + q \equiv \\ &\equiv \pm(1 + p) \pmod{3} \end{aligned}$$

تنها وقتی بر ۳ بخش پذیرند که $1 + p$ بر ۳ بخش پذیر باشد. بنابراین، وقتی همهٔ مقدارهای $Q(x)$ بر ۳ بخش پذیرند که داشته باشیم:

$$q \equiv 0 \pmod{3}, \quad p \equiv 2 \pmod{3}$$

۴۳۲. چندجمله‌ای مفروض را، می‌توان این طور نوشت:

$$P(x) = \frac{1}{2 \times 5 \times 7 \times 9} \times$$

$$\times (x-4)(x-3)(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

بین ۹ عدد متوالی، عددهایی پیدا می‌شوند که بر ۲، ۵، ۷ و ۹ بخش پذیر باشند، بنابراین حاصل ضرب ۹ عدد متوالی، بر حاصل ضرب این عددها بخش پذیر است (این عددها، دو به دو نسبت به هم اول اند)؛ یعنی $P(x)$ ، عددی است درست.

۴۳۳. $p^2 = 2x^2 - x - 36$ و p را عددی اول می‌گیریم. داریم:

$$p^2 = (x+4)(2x-9) = ab; \quad a = x+4, \quad b = 2x-9$$

درضمن $a, b \in \mathbb{Z}$ و $2a - b = 17$. چون a عددی درست و p^2 بر آن بخش پذیر است، تنها ۶ حالت زیر ممکن است:

$$p=3 \text{ و } 2p^2-1=17 \text{ در این صورت؛ } b=1, a=p^2 \text{ (۱)}$$

بنا بر این

$$x=a-4=p^2-4=5$$

$$p=17 \text{ و } 2p-p=17 \text{ در این صورت؛ } b=p, a=p \text{ (۲)}$$

بنا بر این

$$x=a-4=p-4=13$$

$$p^2=-15 \text{ و } 2-p^2=17 \text{ در این صورت؛ } b=p^2, a=1 \text{ (۳)}$$

که ممکن نیست؛

$$p^2=-8 \text{ و } -2p^2+1=17 \text{ یعنی؛ } b=-1, a=-p^2 \text{ (۴)}$$

که ممکن نیست؛

$$p=-17 \text{ و } -2p+p=17 \text{ یعنی؛ } b=-p, a=-p \text{ (۵)}$$

که ممکن نیست؛

$$-2+p^2=17 \text{ در این صورت؛ } b=-p^2, a=-1 \text{ (۶)}$$

$p^2=19$ ، که ممکن نیست.

به این ترتیب، مقدارهای مجهول، عبارتند از $x=5$ و $x=13$.

۴۳۴. تابع $P(x)$ ، به ازای $x_0 = -\frac{p}{2}$ می نیمم است. این تابع، برای

$x < x_0$ نزولی و برای $x > x_0$ صعودی است. بنا بر این، برای مجموعه A ،

مقدارهای تابع $P(x)$ در بازه $[-1, 1]$ ، داریم:

اگر $p < -2$ ، آن وقت $x_0 > 1$ و

$$A = [P(1), P(-1)] = [1+p+q, 1-p+q];$$

اگر $-2 \leq p \leq 2$ ، آن وقت $-1 \leq x_0 \leq 1$ و

$$A = [P(x_0), \max\{P(-1), P(1)\}]$$

یعنی برای $-2 \leq p \leq 0$

$$A = \left[q - \frac{1}{4} p^2, 1 - p + q \right]$$

و برای $2 \leq p \leq 0$

$$A = \left[q - \frac{1}{4} p^2, 1 + p + q \right]$$

اگر $p > 2$ ، آن وقت $x_0 < -1$ و

$$A = [P(-1), P(1)] = [1 - p + q, 1 + p + q]$$

۰۴۳۵ می‌گیریم و ثابت می‌کنیم: اگر

چند جمله‌ای $Q(x)$ با ضریب‌های درست، چهار ریشهٔ درست متفاوت داشته باشد، آن وقت، به‌ازای هر مقدار $x \in \mathbb{Z}$ ، عدد درست $|Q(x)|$ یا برابر صفر است و یا عدد مرکب (و به‌خصوص نمی‌تواند برابر واحد باشد)، a, b, c و d را، ریشه‌های درست و متفاوت چند جمله‌ای $Q(x)$ فرض می‌کنیم. در این صورت، بنا بر قضیهٔ به‌زود داریم:

$$Q(x) = S(x) \cdot R(x)$$

که در آن

$$S(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

و $R(x)$ ، یک چند جمله‌ای است. چون ضریب بزرگترین درجه در $S(x)$ برابر واحد است، بنابراین چند جمله‌ای $R(x)$ ، بنا بر قضیهٔ ۰۴۸، دارای ضریب‌های درست است. x_0 را عدد درستی، غیر از a, b, c و d می‌گیریم. در این صورت، $R(x_0)$ عددی درست، و عدد $Q(x_0)$ بر حاصل ضرب چهار عدد درست و مختلف

$$(x_0 - a)(x_0 - b)(x_0 - c)(x_0 - d)$$

بخش پذیر است (از این چهار عدد، دست‌کم دو تا، غیر از ۱ و -۱ هستند). بنابراین، یا $|Q(x_0)|$ برابر صفر و یا برابر عددی مرکب است. به‌خصوص، عدد $Q(x_0)$ ، به‌ازای هیچ مقداری از $x_0 \in \mathbb{Z}$ نمی‌تواند برابر یکی از عدد‌های ۱، -۱، ۳، ۵، ۷ یا ۹ باشد.

۰۴۳۶ مجموعهٔ $M = \{25, 26, 27, 28, 29, 30, 31\}$ و چند جمله‌ای

$$P(x) = x + (x - 25)(x - 27)(x - 28)(x - 29)(x - 31)$$

با شرط‌های مسأله سازگارند، زیرا شروط ب) برای

$$k = 25, 27, 28, 29, 31$$

و شرط ج) برای $k = 30$ برقرارند.

۰۴۳۷ الف) اگر $P(x)$ مقدار ثابتی باشد، آن وقت

$$P'(x) = P''(x) = 0$$

و نسا برابری ۱) برقرار نیست. فرض می‌کنیم؛ درجه $P(x)$ برابر $n \geq 1$ باشد. اگر n را عددی فرد بگیریم، آن وقت

$$\deg(P(x) - P''(x)) = n$$

عددی فرد می‌شود و، در این صورت، دست کم در يك نقطه $x \in \mathbf{R}$ داریم:

$$P(x) - P''(x) \leq 0$$

اگر n را عددی زوج بگیریم، آن وقت

$$\deg(P'(x) - P''(x)) = n - 1$$

عددی فرد می‌شود و از آن جا، دست کم در يك نقطه $x \in \mathbf{R}$

$$P'(x) - P''(x) \leq 0$$

به این ترتیب، برای هر تابع $P(x)$ ، یا نسا برابری ۲) برقرار نیست و یا نسا برابری ۱). حکم الف) ثابت شد.

ب) $P(x) = x^2 + 3$ می‌گیریم. در این صورت، برای هر $x \in \mathbf{R}$

داریم:

$$P(x) - P'(x) \equiv x^2 - 2x + 3 > 0 \quad \text{و} \quad P(x) - P''(x) \equiv x^2 + 1 > 0$$

بنابراین، می‌توان $P(x)$ را طوری پیدا کرد که برای آن، برای هر مقدار $x \in \mathbf{R}$ داشته باشیم:

$$P(x) > P'(x) \quad \text{و} \quad P(x) > P''(x)$$

۴۳۸. می توان فرض کرد که، هیچ کدام از چند جمله ای های

$P_1(x), \dots, P_n(x)$ متحد با صفر نیستند. عدد x^+ را بزرگتر از همه ریشه های حقیقی هر يك از این چند جمله ای ها می گیریم. در این صورت، به ازای هر $x \geq x^+$ ، تابع $f(x)$ ، بر چند جمله ای زیر منطبق است:

$$P^+(x) = P_0(x) + \sum_{k=1}^n a_k (\text{sign } P_k(x^+)) P_k(x)$$

زیرا هر يك از چند جمله ای های $P_1(x), \dots, P_n(x)$ ، در بازه $[x^+, +\infty)$ ، علامت ثابتی دارند. به همین ترتیب، عدد x^- را طوری انتخاب می کنیم که، به ازای هر $x \leq x^-$ ، تابع $f(x)$ ، بر تابعی مثل $P^-(x)$ منطبق باشد. چون تابع $f(x)$ ، هیچ مقداری را دو بار قبول نمی کند، بنابراین، چند جمله ای های $P^+(x)$ و $P^-(x)$ ، ثابت نیستند، در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow -\infty} |f(x)| = \infty$$

از ویژگی های تابع $f(x)$ نتیجه می شود که، تنها دو امکان وجود دارد: یا

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

و یا

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

در هر دو حالت، تابع $f(x)$ ، هر مقدار به دلخواه بزرگ (از نظر قدر مطلق) را، چه مثبت و چه منفی، قبول می کند. ثابت می کنیم، تابع $f(x)$ ، می تواند هر مقدار $c \in \mathbf{R}$ را بپذیرد. در واقع، می توان نقطه های x_1 و x_2 را طوری پیدا کرد که، برای آن ها، داشته باشیم:

$$f(x_1) > c, \quad f(x_2) < c$$

چون $f(x)$ ، تابعی پیوسته است، بنا بر قضیه مربوط به مقادیرهای بینابینی، نقطه x وجود دارد، که بین x_1 و x_2 واقع است و، برای آن، داریم:

$$f(x) = c$$

۰۴۳۹. با استقرای روی $n \in \mathbb{N}$ ، حکم کلی تری را ثابت می‌کنیم: اگر

چند جمله‌ای $P(x)$ از درجه n ، به ازای

$$k = n+2, n+3, \dots, 2n+2$$

در شرط $P(k) = a_k$ صدق کند، آن وقت، داریم:

$$P(2n+3) = a_{2n+3} - 1$$

به ازای $n=1$ داریم: $P(3) = 2$ ، $P(4) = 3$ ، از آن جا $P(x) = x - 1$ و $P(5) = 4 = a_5 - 1$ اکنون، فرض می‌کنیم، حکم، برای $n-1$ درست باشد. ثابت می‌کنیم، در این صورت، برای n هم درست است. چند جمله‌ای $P(x)$ را از درجه n می‌گیریم و فرض می‌کنیم، به ازای

$$k = n+2, \dots, 2n+2$$

داشته باشیم: $P(k) = a_k$. چند جمله‌ای

$$Q(x) = P(x+2) - P(x+1)$$

را با درجه‌ای که از $n-1$ تجاوز نمی‌کند، در نظر می‌گیریم. این چند جمله‌ای، با شرط $Q(k) = a_k$ ، به ازای $k = n+1, \dots, 2n$ سازگار است، زیرا

$$Q(k) = P(k+2) - P(k+1) = a_{k+2} - a_{k+1} = a_k$$

یعنی، با توجه به فرض استقرا، $Q(2n+1) = a_{2n+1} - 1$ ولی

$$P(2n+1) = P(2n+3) - P(2n+2)$$

و بنابراین

$$P(2n+3) = P(2n+2) + Q(2n+1) =$$

$$= a_{2n+2} + a_{2n+1} - 1 = a_{2n+3} - 1$$

حکم به طور کامل ثابت شد.

۰۴۴۰ الف) $x \equiv 2 \cos t$ و $t \in \mathbb{R}$ می‌گیریم. در این صورت

$$2 \cos(0 \cdot t) \equiv 2 \equiv P_0(x), \quad 2 \cos(1 \cdot t) \equiv 2 \cos t \equiv x \equiv P_1(x)$$

در تابع

$$\begin{aligned} 2 \cos nt &\equiv -2 \cos(n-2)t + 2(\cos t)2 \cos(n-1)t \equiv \\ &\equiv P_{n-2}(x) + xP_{n-1}(x) \end{aligned}$$

مقدار n را، ابتدا برابر ۲، سپس ۳ و غیره می‌گیریم، در نتیجه، ابتدا به چند جمله‌ای $P_2(x)$ ، سپس $P_3(x)$ و غیره می‌رسیم. توجه کنیم، ضریب بزرگترین درجه، در هر یک از چند جمله‌ای‌های $(n \in \mathbf{N})P_n(x)$ ، برابر واحد است.

ب) $\alpha = \frac{m}{n}$ می‌گیریم که در آن، $m \in \mathbf{Z}$ ، $n \in \mathbf{N}$ و کسر $\frac{m}{n}$ ساده‌نشده‌ای

است. در این صورت، مقدار

$$2 \cos(n\alpha\pi) = 2 \cos(m\pi)$$

یا برابر ۲ و یا برابر -۲ است. با توجه به آن چه در الف) ثابت کردیم، مقدار $2 \cos(nt)$ می‌تواند به صورت چند جمله‌ای $P_n(x)$ با ضریب‌های درست از متغیر $x = 2 \cos t$ نوشته شود. در این صورت، عدد

$$x_0 = 2 \cos \alpha \pi$$

ریشه‌ای از چند جمله‌ای $Q(x) = P_n(x) - 2 \cos(m\pi)$ است، که ضریب‌هایی درست دارد و ضریب بزرگترین درجه آن واحد است. بنابراین (قضیه ۶۰ را ببینید)، عدد $2 \cos(\alpha\pi)$ ، یا عددی درست است و یا عددی گنگ. چون کنیم $2 \cos(\alpha\pi)$ عددی درست باشد. چون

$$|2 \cos(\alpha\pi)| \leq 2$$

بنابراین، برابر یکی از عددهای ۰، ± 1 و ± 2 است؛ یعنی، اگر عدد

$\cos(\alpha\pi)$ ($\alpha \in \mathbf{Q}$) گویا باشد، با یکی از عددهای ۰، $\pm \frac{1}{2}$ ، ± 1 برابر

است.

۴۴۱. $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ را طول‌های نقطه‌های A ، B ، C و D ،

محل برخورد خط راست افقی $y = y_0$ با منحنی $y = P(x)$ می‌گیریم. این خط راست، تنها وقتی مثلثی است که داشته باشیم:

$$|AB| + |AC| > |AD|$$

یعنی وقتی که

$$(x_2 - x_1) + (x_3 - x_1) > (x_4 - x_1)$$

و یا هم ارزان

$$x_2 - x_1 > x_4 - x_3$$

یا $|AB| > |CD|$. فرض می‌کنیم، برخلاف ادعای مسأله، دو خط راست افقی وجود داشته باشند که منحنی را در نقطه‌های A_1, B_1, C_1, D_1 و A_2, B_2, C_2, D_2 قطع کنند و، در ضمن داشته باشیم:

$$|A_1B_1| > |C_1D_1| \quad \text{و} \quad |A_2B_2| \leq |C_2D_2|$$

با توجه به ویژگی چند جمله‌ای‌های درجه چهارم، روشن می‌شود، هر خط راستی که موازی با این دو خط راست و واقع در بین آن‌ها باشد، باز هم منحنی را در چهار نقطه قطع می‌کند؛ در ضمن، دست کم یکی از این خط‌های راست، منحنی را در چهار نقطه A, B, C, D طوری قطع می‌کند که، برای آن‌ها، داریم:

$$|AB| = |CD|$$

نقطه E وسط پاره خط راست BC را (که در عین حال، وسط پاره خط راست AD هم هست)، با مختصات (x_0, y_0) می‌گیریم. در این صورت، چند جمله‌ای $Q(u)$ ، که نمودار آن، در دستگاه مختصات $u = x - x_0$ و $v = y - y_0$ ، همان منحنی مفروض است، دارای چهار ریشه u_1, u_2, u_3, u_4 می‌شود که، به ترتیب، طول‌های نقطه‌های A, B, C, D هستند و، در ضمن، $u_1 = -u_4$ و $u_2 = -u_3$ ؛ و معادله منحنی، به این صورت درمی‌آید:

$$v = (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)(u - u_4) = (u^2 - u_1^2)(u^2 - u_2^2)$$

بنابراین $Q(u) = Q(-u)$ ، یعنی منحنی، نسبت به محور عرض، متقارن است. در این صورت، هر خط راست افقی که منحنی را در چهار نقطه A, B, C, D قطع کند، ما را به برابری $|AB| = |CD|$ می‌رساند. تناقض حاصل،

درستی حکم مسأله را ثابت می کند.

۴۴۲. اثبات را با استقرای روی $n \in \mathbb{Z}^+$ می دهیم. برای $n = 0$ ، چند جمله ای $P(x) = Q(x)$ ، دست کم یک ضریب غیر صفر دارد، زیرا $Q(x) \not\equiv 0$.

اکنون فرض کنید، برای $n \geq 1$ ، ثابت شده باشد که، اگر چندجمله ای $R(x)$ غیر صفر باشد، آن وقت چند جمله ای $(x-1)^{n-1}R(x)$ ، دارای دست کم n ضریب غیر صفر باشد. فرض می کنیم، برای چندجمله ای غیر صفر

$$Q(x) = x^r Q_0(x)$$

و $r \in \mathbb{Z}^+$ و $Q_0(0) \neq 0$ ، چندجمله ای

$$P(x) = (x-1)^n Q(x) = x^r (x-1)^n Q_0(x)$$

برخلاف ادعای مسأله، بیش از n ضریب غیر صفر نداشته باشد. در این صورت، چند جمله ای $P_0(x) = (x-1)^n Q_0(x)$ هم، بیش از n ضریب غیر صفر نخواهد داشت و، در نتیجه: مشتق آن، $P'_0(x)$ ، حداکثر $n-1$ ضریب غیر صفر خواهد داشت. ولی

$$P'_0(x) \equiv (x-1)^n Q'_0(x) + n(x-1)^{n-1} Q_0(x) \equiv (x-1)^{n-1} R(x)$$

که در آن $R(x) \not\equiv 0$ (زیرا $P_0(x)$ مقدار ثابتی نیست)؛ و این، فرض استقرا را نقض می کند.

۴۴۳. چند جمله ای $P_0(x) = 4x^3 - 3x$ ، به مجموعه M تعلق دارد،

زیرا

$$P_0(-1) = -1, P_0(1) = 1$$

و در نقطه های اکستریم آن، داریم:

$$P_0\left(-\frac{1}{2}\right) = 1, P_0\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

ثابت می کنیم، برای هر چندجمله ای $P(x) \in M$ داریم: $|a| \leq 4$. فرض کنید، برعکس، چندجمله ای

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

وجود داشته باشد که، برای آن، به ازای $|x| \leq 1$ ، داشته باشیم:

$$|a| > 4, |P(x)| \leq 1,$$

چند جمله‌ای غیر صفر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$Q(x) = P_0(x) - \frac{4}{a}P(x)$$

به نحوی که، درجه آن، از ۲ تجاوز نکند. چون به ازای $|x| \leq 1$ ،

$$\left| \frac{4}{a}P(x) \right| < 1$$

بنابراین

$$Q(-1) < 0, Q\left(-\frac{1}{2}\right) > 0, Q\left(\frac{1}{2}\right) < 0, Q(1) > 0$$

یعنی، چند جمله‌ای $Q(x)$ دست کم، سه ریشه دارد. تناقض حاصل، ثابت می‌کند که، مقدار مجهول k ، برابر است با ۴.

۴۴۴. برای $q = 1$ ، فرض می‌کنیم $P(x) \equiv p$ و بازه به طول

$\frac{1}{q}$ را به صورت $I = \left(\frac{1}{2q}, \frac{3}{2q}\right)$ در نظر می‌گیریم. چون داریم: $\frac{3}{2q} < 1$ ،

بنابراین عددی مثل $m \in \mathbb{N}$ وجود دارد که، برای آن، داشته باشیم:

$x \in I$ هر $a = 1 - \left(\frac{1}{2q}\right)^m; \left(\frac{3}{2q}\right)^m < \frac{1}{q}$ می‌گیریم، در این صورت، برای هر $x \in I$ داریم:

$$0 < 1 - qx^m < a < 1$$

عدد $n \in \mathbb{N}$ را آن قدر بزرگ انتخاب می‌کنیم که، برای آن، داشته باشیم:

$$a^n < \frac{1}{pq}$$

و فرض می‌کنیم:

$$P(x) = \frac{p}{q} [1 - (1 - q^m)^n]$$

چندجمله‌ای $P(x)$ ، ضریب‌هایی درست دارد، زیرا

$$P(x) \equiv \frac{p}{q} [1 - (1 - qx^m)] Q(x) \equiv px^m Q(x)$$

و ضریب‌های چندجمله‌ای $Q(x)$ ، عددهایی درست اند. به ازای $x \in I$ داریم:

$$\left| P(x) - \frac{p}{q} \right| = \frac{p}{q} |(1 - q^m)^n| < \frac{p}{q} a^n < \frac{1}{q^2}$$

چیزی که اثبات آن را لازم داشتیم.

۰۴۴۵ برای $k = ۱, ۲, ۳, ۴$ فرض می‌کنیم

$$\alpha_k = P(k), \quad \beta_k = Q(k)$$

و چندجمله‌ای‌های $P(x)$ و $Q(x)$ را، سازگار با شرط‌های مسأله می‌گیریم. در این صورت، عددهای چهار رقمی $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ و $\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4$ برابر با هیچ‌کدام از عددهای

۰۰۰۰۰، ۰۱۱۰، ۱۰۰۱، ۱۱۱۱

نیستند، زیرا چندجمله‌ای‌های $P(x)$ و $Q(x)$ از درجه سوم اند.

از طرف دیگر، عدد $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ نمی‌تواند به یکی از صورت‌های

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4, \quad \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 ۱, \quad \alpha_1 ۱ \alpha_3 \alpha_4, \quad \alpha_1 ۱ \alpha_3 ۱$$

باشد، زیرا در غیر این صورت، با شرط‌های (ب) و (د) متناقض می‌شوند (به تناقض $\beta_1 = ۰$ و $\beta_1 = ۱$ می‌رسیم). از این‌جا، با توجه به شرط (ج)، شرط‌های مسأله، برای زوج عدد $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4$ ، تنها با زوج عددهای زیر سازگار است:

(۰۱۰۰، ۱۰۱۰); (۱۰۰۰، ۰۰۱۰); (۱۰۰۰، ۱۰۰۰); (۱۰۰۰، ۱۰۱۰);

(۱۰۱۰، ۰۰۱۰); (۱۰۱۱، ۰۰۱۰); (۱۱۰۰، ۱۰۱۰)

توجه کنیم که هر شش عدد «چهار رقمی» مختلف، یعنی ۰۰۱۰۰، ۰۱۰۰۰، ۱۰۰۰۰، ۱۰۱۰۰، ۱۰۱۰۱ و ۱۱۰۰۰ مورد استفاده قرار گرفته است. بنا دنبال کردن دستور درون یابی لاگرانژ، برای هر عدد $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$ چندجمله‌ای $R(x)$ را در تناظر با برابری $R(k) = \gamma_k$ ، به ازای $k = 1, 2, 3, 4$ قرار می‌دهیم. در این صورت، به ترتیب، به این شش چندجمله‌ای می‌رسیم:

$$R_1(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 7x + 4,$$

$$R_2(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + \frac{19}{2}x - 6,$$

$$R_3(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{3}x + 4,$$

$$R_4(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - \frac{43}{3}x + 8,$$

$$R_5(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 4x^2 - \frac{19}{2}x + 7,$$

$$R_6(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{31}{6}x - 2$$

به این ترتیب، زوج چند جمله‌ای‌های $(P(x), Q(x))$ ، با یکی از این زوج چندجمله‌ای‌ها، مطابق‌اند:

$$(R_2, R_4); (R_3, R_1); (R_3, R_3); (R_3, R_4);$$

$$(R_4, R_1); (R_5, R_1); (R_6, R_4)$$

۴۴۴. تنها یک چند جمله‌ای برای $P(x)$ پیدا می‌شود که با شرط مسأله سازگار باشد، زیرا اگر چند جمله‌ای $Q(x) \neq P(x)$ هم، با همان ویژگی‌ها وجود داشته باشد، آن وقت، چند جمله‌ای $P(x) - Q(x)$ ، که درجه‌ای بیش از n ندارد، باید دست کم، $n+1$ ریشه داشته باشد. چون، برای چندجمله‌ای

$$R(x) = x + \frac{1}{(n+1)!} (0-x)(1-x)\dots(n-x)$$

شرط $R(-1) = 0$ وجود دارد، در نتیجه، بنا بر قضیه به‌زود، این چندجمله‌ای بر $x+1$ بخش پذیر است، یعنی

$$R(x) \equiv (x+1)S(x)$$

که در آن، $S(x)$ ، چندجمله‌ای از درجه n است. چون

$$R(k) = k, \quad S(k) = \frac{k}{k+1}, \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

بنابراین $S(x)$ با شرط‌های مسئله سازگار است، یعنی $P(x) \equiv S(x)$ و

$$P(n+1) = \frac{R(n+1)}{n+2} = \frac{n+1 + (-1)^{n+1}}{n+2}$$

۴۴۷. با استفاده از دستور درون یابی لاگرانژ، به دست می‌آید
 (در این جا به حساب آورده‌ایم $1 \leq i \leq n$):

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{C_{n+1}^k} \prod_{i \neq k} \frac{x-i}{k-i} =$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{\prod_{i \neq k} (x-i)}{C_{n+1}^k (-1)^{n-k} (n-k)! k!} =$$

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{n+1-k}{(n+1)!} \prod_{i \neq k} (x-i);$$

$$P(n+1) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{n+1-k}{(n+1)!} \prod_{i \neq k} (n+1-i) =$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (n+1-i) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k}$$

بنابراین، اگر n عددی فرد باشد $P(n+1) = 0$ ؛ و اگر n ، عددی زوج باشد، $P(n+1) = 1$.

۴۴۸. با توجه به دستور درون یابی لاگرانژ، چندجمله‌ای

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

را می‌توان به صورت زیر نشان داد ($0 \leq i \leq n$):

$$P(x) = \sum_{j=0}^n \left(\prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right) P(x_j)$$

فرض می‌کنیم، حکم مسأله درست نباشد و داشته باشیم:

$$P(x_j) < \frac{n!}{2^n} \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

در این صورت، ضریب بزرگترین درجه، در چندجمله‌ای $P(x)$ ، برابر است با مجموع ضریب‌های بزرگترین درجه، در حاصل ضرب

$$\prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

و از نظر قدرمطلق، از عدد

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=0}^n P(x_j) \prod_{i \neq j} \frac{1}{x_j - x_i} \right| &< \sum_{j=0}^n \frac{n!}{2^n} \prod_{i \neq j} \frac{1}{|x_j - x_i|} \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^n \frac{n!}{2^n} \cdot \frac{1}{\prod_{i < j} (j - i)} \cdot \frac{1}{\prod_{i > j} (i - j)} = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} = \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^n C_n^j = 1 \end{aligned}$$

تجاوز نمی‌کند. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۴۴۹. با توجه به دستور درون یابی لاگرانژ داریم ($-n \leq i \leq n$):

$$P(x) = \sum_{k=-n}^n P(k) \prod_{i \neq k} \frac{x - i}{k - i}$$

چون برای $n, \dots, 1, -n+1, \dots, -n, k = -n$ داریم $|P(k)| \leq 1$ ، بنابراین

$$|P(x)| \leq \sum_{k=-n}^n |P(k)| \prod_{i \neq k} \left| \frac{x-i}{k-i} \right| \leq \sum_{k=-n}^n \prod_{i \neq k} \left| \frac{x-i}{k-i} \right|$$

برای هر عدد حقیقی $x \in [-n, n]$ ، این نابرابری برقرار است:

$$\prod_{i \neq k} |x-i| \leq (2n)!$$

در واقع، در حالت $x \geq k$ داریم:

$$\begin{aligned} \prod_{i \neq k} |x-i| &= [|x-(k+1)| \dots |x-n|][|x-(k-1)| \dots |x+n|] \leq \\ &\leq (n-k)! \cdot [(n-k+1) \dots (2n)] = (2n)! \end{aligned}$$

به همین ترتیب، می‌توان حالت $x < k$ را بررسی کرد. به این ترتیب،

به دست می‌آید:

$$\prod_{i \neq k} \left| \frac{x-i}{k-i} \right| \leq (2n)! \prod_{i \neq k} \frac{1}{|k-i|} \leq (2n)! \frac{1}{(k+n)!(n-k)!}$$

$$\begin{aligned} |P(x)| &\leq \sum_{k=-n}^n \frac{(2n)!}{(k+n)!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!} = \\ &= \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k = 2^{2n} \end{aligned}$$

فصل هفتم

گوناگون

۲۴۳. مجموعه‌ها و زیرمجموعه‌ها

۴۵۰. در هر جفت زیرمجموعه، یکی را زیرمجموعه اول و دیگری

را زیر مجموعهٔ دوم می‌نامیم، و تعداد جفت زیر مجموعه‌های غیر متقاطع را پیدا می‌کنیم. برای هر يك از n عضو، ۳ امکان وجود دارد: یا عضوی از زیر مجموعهٔ اول است، یا عضوی از زیر مجموعهٔ دوم است و یا هیچ کدام از دو زیر مجموعهٔ اول و دوم، شامل آن نمی‌شود. بنا بر این، تعداد جفت‌های مذکور، برابر است با 3^n . در بین آن‌ها، يك جفت وجود دارد که، در آن، هر دو زیر مجموعه، تهی هستند. $(1 - 3^n)$ جفت باقی مانده، به نوبهٔ خود، به دو گروه جفت‌های یکسان تقسیم می‌شوند (اگر در یکی از جفت زیر مجموعه‌ها، جای زیر مجموعهٔ اول را با دومی عوض کنیم، به جفتی منطبق بر خود، تبدیل می‌شود). به این ترتیب، به تعداد $\frac{1}{2}(3^n - 1)$ زوج زیر مجموعهٔ (نامرتب) به دست می‌آید که، در آن‌ها، دست کم یکی از زیر مجموعه‌ها، تهی نیست. روی هم به تعداد

$$\frac{1}{2}(3^n - 1) + 1 = \frac{1}{2}(3^n + 1)$$

جفت زیر مجموعهٔ مختلف وجود دارد که با شرط مسأله سازگارند.

۴۵۱. از آن جا که تعداد همهٔ زیر مجموعه‌های مختلف مجموعهٔ X

برابر است با 2^n ، بنا بر این، تعداد زوج زیر مجموعه‌های مرتب برابر است با $(2^n)^2$ ، یعنی 4^n . همهٔ این زوج‌ها را، به 4^{n-1} چهارتایی تقسیم می‌کنیم، به نحوی که هر زوج (A_1, A_2) با زوج‌های (\bar{A}_1, A_2) ، (A_1, \bar{A}_2) و (\bar{A}_1, \bar{A}_2) در يك چهارتایی قرار گیرد (در این جا، \bar{A} به معنای مکمل $A \setminus X$ نسبت به زیر مجموعهٔ $A \subset X$ است). در نتیجه، تقسیم مجموعهٔ همهٔ زوج‌ها، به چهارتایی‌ها به دست می‌آید. در واقع، مثلاً، زوج (\bar{A}_1, A_2) این چهارتایی را تشکیل می‌دهد:

$$(\bar{A}_1, A_2); (\bar{A}_1, \bar{A}_2); (A_1, \bar{A}_2); (\bar{A}_1, \bar{A}_2)$$

که با چهارتایی تشکیل شده از زوج (A_1, A_2) یکی است، زیرا $\bar{\bar{A}} = A$ به همین ترتیب، می‌توان تحقیق کرد که، دو زوج (A_1, \bar{A}_2) و (\bar{A}_1, \bar{A}_2) هم، يك نوع چهارتایی تشکیل می‌دهند. چون هر عضو مجموعهٔ X ، یا به

زیرمجموعه A تعلق دارد و یا به مکمل آن \bar{A} ، بنابراین دقیقاً در یکی از مجموعه‌های چهارگانه

$$A_1 \cap A_2, \bar{A}_1 \cap A_2, A_1 \cap \bar{A}_2, \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$$

وارد شده است. در نتیجه، تعداد کل عضوها در هر چهارتایی برابر n است. چون روی هم 4^{n-1} چهارتایی داریم، بنابراین مجموع تعداد عضوهای همه مجموعه‌های به صورت $A_1 \cap A_2$ ، برابر است با $n \cdot 4^{n-1}$.

۴۵۲. اثبات را با استقرای روی $n > 3$ می‌دهیم. برای

$$n = 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

تقسیم‌های ممکن مجموعه X_n ، به زیرمجموعه‌های A_1, \dots, A_n ، در جدول ۱ نشان داده شده است که، در آن، برای هر مقدار n و هر یک از سه رنگ، اندیس m ، برای مجموعه‌هایی از A_m است که باید از عضوهای رنگ

جدول ۱

n	$\frac{n(n+1)}{2}$	k	قرمز	آبی	سفید
۴	۱۰	۳	۱, ۲	۳	۴
۵	۱۵	۵	۱, ۴	۲, ۳	۵
۶	۲۱	۷	۱, ۶	۲, ۵	۳, ۴
۷	۲۸	۹	۴, ۵	۳, ۶	۱, ۲, ۷
۸	۳۶	۱۲	۶, ۷	۴, ۸	۱, ۲, ۳, ۶
۹	۴۵	۱۵	۶, ۹	۷, ۸	۱, ۲, ۳, ۴, ۵

متناظر تشکیل شوند (مثلاً، برای $n=6$ ، عضوهای مجموعه‌های A_5 و A_4 باید به رنگ قرمز باشند).

اکنون فرض کنید $n \geq 10$ ، و حکم برای عددهای کوچکتر n به‌خصوص، برای $n-6$ ثابت شده باشد. تقسیم مجموعه X_n را به این ترتیب، انجام می‌دهیم: مجموعه‌های A_1, \dots, A_{n-1} از عضوهایی و با همان رنگ‌هایی می‌سازیم که در تقسیم مجموعه X_{n-6} وجود دارند. مجموعه‌های A_n و A_{n-5} را با عضوهای به رنگ قرمز و مجموعه‌های A_{n-4} و A_{n-3} را با عضوهای به رنگ سفید می‌سازیم. این تقسیم، با شرط مسأله سازگار است، زیرا تعداد عضوهای آبی، قرمز و سفید (هر کدام به طور جداگانه) در مجموعه X_n نسبت به عضوهای متناظر در مجموعه X_{n-6} ، به یک اندازه، یعنی به تعداد $2n-5$ زیادتر شده‌اند.

۴۵۳. در مجموعه $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ، عضو a_1 را ثابت نگه می‌داریم و زیرمجموعه‌هایی را در نظر می‌گیریم که شامل a_1 باشند. تعداد این زیرمجموعه‌ها، برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه

$$\{a_2, \dots, a_n\}$$

یعنی 2^{n-1} . بنابراین $k \geq 2^{n-1}$. از طرف دیگر، فرض کنید، بیش از 2^{n-1} زیرمجموعه از مجموعه X را، انتخاب کرده باشیم. همه زیرمجموعه‌های ممکن را، در مجموعه X ، به 2^{n-1} زوج تقسیم می‌کنیم، به نحوی که در هر زوج، یک زیرمجموعه و مکمل آن وجود داشته باشد. با توجه به اصل دیریکله (قضیه ۱)، دست کم، دو تا از زیرمجموعه‌های انتخابی، تشکیل یک زوج می‌دهند که، البته، جدا از هم اند و اشتراکی ندارند. بنابراین $k = 2^{n-1}$.

۴۵۴. تعداد عضوهای مجموعه X را، برابر n می‌گیریم. هر یک از

زیرمجموعه‌های A_1, \dots, A_5 ، بیش از $\frac{n}{4}$ عضو دارد، یعنی مجموع

عضوهای این مجموعه‌ها، از $50 \times \frac{n}{4}$ ، یعنی $25n$ تجاوز می‌کند. بنابراین اصل

دیپیکله، عضوی از مجموعه X وجود دارد که، دست کم، به ۲۶ تا از این زیرمجموعه‌های انتخابی متعلق است. به همین ترتیب، ثابت می‌شود که، به ازای هر مقدار $k < ۵۰$ ، بین مجموعه‌های A_1, \dots, A_{i_k} می‌توان دست کم، به تعداد $1 + \left\lfloor \frac{k}{۲} \right\rfloor$ مجموعه پیدا کرد، که شامل عضوی مشترک باشند.

عضوی از مجموعه X را در نظر می‌گیریم که، دست کم، به ۲۶ مجموعه تعلق داشته باشد (این عضو، یکی از عضوهای مجموعه B است). این ۲۶ مجموعه را کنار می‌گذاریم. در این صورت، عضوی پیدا می‌شود که، دست کم، به ۱۳ تا از ۲۴ مجموعه باقی‌مانده تعلق دارد. این ۱۳ مجموعه را هم کنار می‌گذاریم. برای ۱۱ مجموعه باقی‌مانده، عضوی وجود دارد که، دست کم، منطبق به شش تا از آن‌ها باشد. برای پنج مجموعه باقی‌مانده، می‌توان عضوی را پیدا کرد که، دست کم، منطبق به سه تا از آن‌ها باشد. و سرانجام، عضوی وجود دارد که به دو مجموعه باقی‌مانده تعلق داشته باشد. به این ترتیب، حداکثر، پنج عضو از مجموعه X وجود دارد (و ممکن است، کمتر از پنج عضو، چرا که احتمالاً بعضی از این اعضا برهم منطبق باشند) که مجموعه B را تشکیل می‌دهند. در ضمن، هر یک از مجموعه‌های $A_1, \dots, A_{۵۰}$ شامل دست کم یکی از این اعضا است.

۴۵۵. مجموعه A ، یکی از ۱۹۷۸ مجموعه مفروض را در نظر می‌گیریم. این مجموعه، با هر یک از ۱۹۷۷ مجموعه دیگر، یک عضو مشترک دارد، بنابراین عضو $a \in A$ وجود دارد که، دست کم، متعلق به ۵۰ تا از این مجموعه‌هاست. در واقع، اگر هر یک از ۴۰ عضو مجموعه A ، به بیش از ۴۹ مجموعه، تعلق نداشته باشد، آن وقت، روی هم، حداکثر ۴۰×۴۹ ، یعنی ۱۹۶۰ مجموعه، غیر از A ، می‌تواند وجود داشته باشد که درست نیست. فرض کنید، عضو a ، مثلاً به مجموعه‌های $A, A_1, A_2, \dots, A_{۵۰}$ متعلق باشد. ثابت می‌کنیم که، در این صورت، این عضو، به هر مجموعه B ، از ۱۹۷۸ مجموعه مفروض تعلق دارد. در واقع، هر دو مجموعه‌ای از مجموعه‌های $A, A_1, A_2, \dots, A_{۵۰}$ ، هیچ عضو مشترک دیگری به جز a ندارند (زیرا

بنا بر فرض مسأله، هر دو مجموعه، تنها يك عضو مشترك دارند). فرض کنید:
 $a \notin B$. در این صورت، مجموعه B ، با هر يك از مجموعه‌های
 A_1, A_2, \dots, A_{50} ، عضو مشتركی دارد که غیر از a است، بنابراین، با هم
 فرق دارند. بنابراین، مجموعه B ، باید دست کم شامل ۵۱ عضو باشد که
 ممکن نیست. به این ترتیب، عضو a ، به همه مجموعه‌ها تعلق دارد.

۴۵۶. زیر مجموعه‌هایی را در نظر می‌گیریم (اگر چنین زیر مجموعه‌هایی
 وجود داشته باشند) که شامل تعدادی فرد عضو باشند. از آن جا که تعداد
 کل عضوها، عددی زوج است، بنا بر این تعداد مجموعه‌های با تعداد عضوهای
 فرد هم، عددی است زوج. این مجموعه‌ها را، به زوج مجموعه‌ها (به صورتی
 دلخواه) تقسیم می‌کنیم. با مجموعه‌های هر زوج، عملی را که در صورت
 مسأله گفته شده است، انجام می‌دهیم، یعنی از مجموعه بزرگتر، عضوهایی به
 تعداد عضوهای مجموعه کوچکتر، به مجموعه کوچکتر منتقل می‌کنیم. بعد
 از این عمل، همه مجموعه‌ها، شامل تعداد زوجی عضو خواهند بود.
 مجموعه‌هایی را در نظر می‌گیریم که، تعداد عضوهای آنها، بر ۴ بخش پذیر
 نباشد (به ازای $n \geq 2$ ؛ اگر هم داشته باشیم: $n=1$ ، آن وقت روی هم دو
 عضو داریم و هر دوی آنها، متعلق به يك زیر مجموعه خواهند بود). چون
 تعداد کل عضوها، بر ۴ بخش پذیر است، بنا بر این، تعداد این گونه
 زیر مجموعه‌ها، عددی زوج است. دوباره، این مجموعه‌ها را، به زوج‌هایی
 (به صورت دلخواه) تقسیم می‌کنیم و روی هر زوج، عمل مورد نظر مسأله
 را، انجام می‌دهیم. بعد از آن، تعداد عضوها در هر يك از مجموعه‌ها، بر ۴
 بخش پذیر می‌شود. اگر چه همین ترتیب، جلو برویم به آن جا می‌رسیم که در
 هر مجموعه، تعداد عضوها (به ترتیب) بر ۸، ۱۶، ... بخش پذیر است.
 وقتی که تعداد عضوهای هر يك از مجموعه‌ها، بر 2^n بخش پذیر شود، به معنای
 آن است که، همه عضوها، در يك مجموعه جمع شده‌اند.

۴۵۷. A و B را، به ترتیب، مجموعه همه عددهای کوچکتر، و مجموعه
 همه عددهای بزرگتر زوج عددها، در مجموعه A ، فرض می‌کنیم. بنا بر شرط
 مسأله، هیچ عضوی از B متعلق به مجموعه A نیست، یعنی

$$A \cap B = \phi$$

تعداد عضوهای مجموعه‌های A و B را، به ترتیب a و b می‌گیریم. در این صورت $a + b \leq n$ ، در هر زوج از M ، عضو کوچکتر می‌تواند حداکثر a مقدار، و عضو بزرگتر حداکثر b مقدار را قبول کند. بنابراین، تعداد عضوهای M از عدد

$$ab \leq a(n-a) \leq \left(\frac{a+n-a}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4}$$

تجاوز نمی‌کند. چون $ab \in \mathbb{Z}$ ، پس $ab \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$. اگر n زوج باشد، به حداکثر تعداد عضوها در مجموعه M ، در حالت

$$M = \left\{ (j, l) \mid j \leq \frac{n}{2}; l > \frac{n}{2} \right\}$$

می‌رسیم که، در این صورت، مجموعه M ، شامل $\frac{n^2}{4}$ عضو است. اگر n فردی فرد باشد، آن وقت کافی است فرض کنیم:

$$M = \left\{ (j, l) \mid j < \frac{n}{2}; l > \frac{n}{2} \right\}$$

که در این صورت، مجموعه M ، از

$$\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{n^2}{4} - \frac{1}{4} = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$$

عضو، تشکیل شده است. به این ترتیب، در هر حالت (n زوج یا فرد)،

$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$$

۰۴۵۸. تعداد مجهول را k_n می‌نامیم؛ در مجموعه X ، k_n زیر مجموعه

سه عضوی وجود دارد، به نحوی که هر دو زیر مجموعه، درست يك عضو مشترك دارند. سه حالت ممکن است:

الف) هر عضو مجموعه X ، تنها در دو مجموعه سه عضوی وارد شده است. یکی از این مجموعه‌ها را $\{a, b, c\}$ می‌گیریم. هر يك از مجموعه‌های دیگر؛ در يك عضو (و تنها در يك عضو) با مجموعه $\{a, b, c\}$ اشتراك دارند؛ در ضمن، در بین این مجموعه‌های دیگر، حداکثر یکی از مجموعه‌ها شامل a ، حداکثر یکی شامل b و حداکثر یکی شامل c است. بنابراین، تعداد کل این مجموعه‌های سه عضوی، از $1 + 3 \times 1$ ، یعنی ۴ تجاوز نمی‌کند: $k_n \leq 4$.

ب) عضوی از مجموعه X وجود دارد که در سه تا از مجموعه‌های سه عضوی وارد شده است، ولی هیچ عضوی از مجموعه X در بیش از سه مجموعه سه عضوی وارد نشده است. $\{a, b, c\}$ را، یکی از این مجموعه‌ها می‌گیریم؛ بنا بر این، هر يك از مجموعه‌های دیگر، در يك عضو با این مجموعه اشتراك دارند و، در ضمن، حداکثر دو تا از این مجموعه‌های دیگر شامل a و حداکثر دو تا شامل b و حداکثر دو تا شامل c هستند. به این ترتیب، تعداد همه مجموعه‌های سه عضوی، نمی‌تواند از $1 + 3 \times 2$ ، یعنی ۷ تجاوز کند: $k_n \leq 7$.

ج) عضو a از مجموعه X وجود دارد که، دست کم، متعلق به چهار مجموعه سه عضوی است. در این صورت، بقیه عضوهای این چهار مجموعه، مختلف اند (زیرا، هیچ دو مجموعه‌ای نباید بیش از يك عضو مشترك داشته باشند)، و هر يك از مجموعه‌های دیگر هم، باید شامل a باشند (زیرا، اگر یکی از این مجموعه‌های سه عضوی باقی مانده را در نظر بگیریم، باید هر يك از چهار مجموعه ما، عضو مشتركی داشته باشد و، اگر این عضو مشترك همان a نباشد، بناچار باید دست کم شامل ۴ عضو باشد). به این ترتیب، در این حالت، داریم:

$$1 + 2k_n \leq n \Rightarrow k_n \leq \left[\frac{n-1}{2} \right]$$

برای $n = 1, 2, 3, 4, 5$ داریم:

$$k_1 = k_2 = 0, \quad k_3 = k_4 = 1, \quad k_5 = 2$$

اکنون، $n = 6$ می‌گیریم. در این صورت، هیچ عضوی نمی‌تواند متعلق به سه مجموعه باشد، زیرا در غیر این صورت، اجتماع این مجموعه‌ها، شامل

۷ عضو می شود. بنا براین، با حالت الف) سروکار داریم و $k_6 \leq 4$ ؛ درضمن، می توان نمونه ای برای $k_6 = 4$ درست کرد. فرض کنید.

$$X = \{a, b, c, d, e, f\}$$

در این صورت، زیرمجموعه های سه عضوی، می توانند چنین باشند:

$$\{a, b, c\}; \{c, d, e\}; \{e, f, a\}; \{b, d, f\}$$

بنا براین $k_6 = 4$. اکنون فرض کنید:

$$n \in \{7, 8, \dots, 16\}$$

اگر با حالت ج) سروکار داشته باشیم، آن وقت تعداد زیرمجموعه ها از

$$\left[\frac{1}{2}(16-1) \right] = 7$$

تجاوز نمی کند؛ اگر هم با یکی از حالت های الف) و ب) سروکار داشته باشیم، باز هم این تعداد از ۷ تجاوز نمی کند. از طرف دیگر، اگر مجموعه X ، در بین عضوهای خود، شامل ۷ عضو a, b, c, d, e, f, g باشد، آن وقت، نمونه ای برای هفت زیرمجموعه سه عضوی وجود دارد:

$$\{a, b, c\}; \{c, d, e\}; \{e, f, a\};$$

$$\{b, d, f\}; \{a, g, d\}; \{b, g, e\}; \{e, g, f\}$$

بنا براین، برای $k = 7, 8, \dots, 16$ داریم: $k_n = 7$.

بالاخره، اگر $n \geq 17$ ، برای هر يك از حالت های الف)، ب) و ج)،

داریم:

$$k_n \leq \left[\frac{n-1}{2} \right]$$

در ضمن، با روش زیر (برای انتخاب مجموعه های سه عضوی) می توان به خود عدد $\left[\frac{1}{2}(n-1) \right]$ رسید: یکی از عضوها را، برای همه مجموعه ها مشترك می گیریم و بقیه عضوها را (احتمالاً به جز یکی، درحالت زوج-

بودن n)، به گروه‌های دو تایی تقسیم می‌کنیم و هر گروه را با عضو مشترك، در يك مجموعه سه عضوی قرار می‌دهیم. به این ترتیب، برای $n \geq 17$ داریم:

$$k_n = \left[\frac{1}{2} (n-1) \right]$$

۰۴۵۹ از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم، هر دو زیرمجموعه، یا اشتراکی ندارند و یا درست در دو عضو مشترك‌اند. حالتی را که مجموعه‌های A و D ، درست در دو عضو مشترك باشند، به صورت $A \sim B$ نشان می‌دهیم.

A ، B و C را سه زیرمجموعه می‌گیریم. ثابت می‌کنیم، اگر $A \sim B$ و $B \sim C$ ، آن وقت $A \sim C$. فرض می‌کنیم:

$$A = \{a, b, c\}; B = \{a, b, d\}$$

چون مجموعه C ، با مجموعه B ، در دو عضو مشترك است، به ناچار a یا b باید بین این عضوهای مشترك باشد. در نتیجه C با A اشتراک پیدا می‌کند، و چون فرض ما بر این بود که هر دو زیرمجموعه، یا اشتراکی نداشته باشند و یا در دو عضو مشترك باشند، بنا بر این $A \sim C$. به این ترتیب، زیرمجموعه‌های انتخابی، به دسته‌هایی تقسیم می‌شود که، در هر کدام از آنها، هر دو مجموعه مختلف، درست در دو عضو مشترك دارند و مجموعه‌های دو دسته متفاوت، اشتراکی ندارند. برای هر دسته از مجموعه‌ها، سه حالت ممکن است:

(۱) دسته، درست ۳ عضو را در بر می‌گیرد؛

(۲) دسته، درست ۴ عضو را در بر می‌گیرد؛

(۳) دسته، شامل بیش از ۴ عضو است.

در حالت اول، دسته، از يك مجموعه (و تنها يك مجموعه) تشکیل شده است؛ در حالت دوم، دسته، شامل حداکثر چهار مجموعه است (زیرا، يك مجموعه ۴ عضوی، روی هم دارای ۴ زیرمجموعه سه‌عضوی است). به حالت سوم می‌پردازیم. دو مجموعه از این دسته را در نظر می‌گیریم:

$$A = \{a, b, c\}; B = \{a, b, d\}$$

عضو e وجود دارد که غیر از a, b, c, d است و متعلق به مجموعه C از این دسته است. با توجه به شرطهای $A \sim C$ و $B \sim C$ ، به دست می آید:

$$C = \{a, b, e\}$$

بنابراین، هر مجموعه D از این دسته، با توجه به شرطهای $A \sim D, B \sim D$ و $C \sim D$ ، شامل عضوهای a و b می شود. در نتیجه، تعداد مجموعه های این دسته، درست ۲ واحد کمتر از تعداد عضوهای موجود این دسته است (هر عضوی که غیر از a و b باشد، متناظر با يك مجموعه از این دسته است). بنا بر این، در هر دسته، تعداد مجموعه ها، از تعداد اعضا تجاوز نمی کند. ولی تعداد کل مجموعه ها، بیشتر از تعداد کل اعضا است. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می کند.

۰۴۶۰ k را تعداد عضوهای مجموعه ای از مجموعه های A_1, \dots, A_n ، B_1, \dots, B_n می گیریم که، در آن، این تعداد کمترین مقدار باشد. برای مشخص بودن وضع، فرض می کنیم، مجموعه A_1 شامل k عضو باشد. مجموعه های B_1, \dots, B_n با هم، اشتراکی ندارند. بنا بر این، شرط

$$A_1 \cap B_j \neq \emptyset$$

حداکثر، برای k مجموعه، از مجموعه های B_1, \dots, B_n برقرار است. مثلاً، فرض کنید، این شرط، برای مجموعه های B_1, \dots, B_m برقرار باشد، که در آن، $m \leq k$. تعداد اعضا، در هر يك از مجموعه های B_1, \dots, B_m ، از k کمتر نیست، بنا بر این، اجتماع آنها، دست کم، شامل mk عضو است. تعداد اعضا، در هر يك از مجموعه های B_{m+1}, \dots, B_n هم، از $n - k$ کمتر نیست (بنا بر شرط، زیرا $A_1 \cap B_j \neq \emptyset$ ، برای مقادیر j ، از $m+1$ تا n)، و تعداد چنین مجموعه هایی برابر $n - m$ است. در نتیجه، روی هم در مجموعه

$$X = B_1 \cup \dots \cup B_n$$

حداقل به تعداد $l = km + (n - k)(n - m)$ عضو وجود دارد.

اگر $k \geq \frac{n}{2}$ ، آن وقت، هر يك از مجموعه‌های A_1, \dots, A_n ، حداقل

شامل $\frac{n}{2}$ عضو است و تعداد همهٔ اعضوها، حداقل برابر است با

$$n \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2}$$

و اگر $k < \frac{n}{2}$ (به یاد داشته باشیم که $m \leq k$)، آن وقت

$$\begin{aligned} l &= n(n-k) - m(n-2k) \geq n(n-k) - k(n-2k) = \\ &= 2\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{n}{2} - k\right)^2 \geq \frac{n^2}{2} \end{aligned}$$

اکنون، نمونه‌ای می‌آوریم که، مجموعه X ، درست شامل $\frac{n^2}{2}$ عضو

باشد. n را عددی زوج و $X = A_1 \cup \dots \cup A_n$ را تقسیم مجموعه X به n زیرمجموعه (که دو به دو اشتراکی ندارند) می‌گیریم، به نحوی که هر کدام از آن‌ها، درست شامل $\frac{n}{2}$ عضو باشد. فرض می‌کنیم:

$$B_1 = A_1, \dots, B_n = A_n$$

در این صورت، همهٔ شرط‌های مسأله، برقرارند.

۲۵۵. مسأله‌هایی با استفاده از گراف‌ها

۴۴۱. فرض کنید، در مجموعه S ، سه عضو a ، b و c وجود داشته باشد که در شرط‌های $a \rightarrow b$ ، $a \rightarrow c$ ، $a \rightarrow c$ صدق کنند. اگر $b \rightarrow c$ ، آن وقت از $a \rightarrow b$ و $b \rightarrow c$ نتیجه می‌شود $a \rightarrow c$ که شرط $a \rightarrow c$ را نقض می‌کند. و اگر $b \rightarrow c$ ، آن وقت، از $a \rightarrow c$ و $a \rightarrow b$ نتیجه می‌شود $b \rightarrow a$ که متناقض با شرط $a \rightarrow b$ است. به همین ترتیب، در S ، عضوهای a ، d ، e

وجود ندارد، به نحوی که، برای آن‌ها داشته باشیم: $e \rightarrow a$ و $d \rightarrow a$.
 اگر در مجموعه، ۴ عضو یا بیشتر وجود داشته باشد (که یکی از آن‌ها را a می‌نامیم)، آن وقت، از شرط اول مسأله نتیجه می‌شود که در S ، یا عضوهای b و c پیدا می‌شود که $a \rightarrow b$ ، $a \rightarrow c$ ؛ یا عضوهای d و e وجود دارد که $e \rightarrow a$ ، $d \rightarrow a$. در هر دو حالت، مواجهه با تناقض می‌شویم. بنابراین، در مجموعه S ، بیش از ۳ عضو نمی‌تواند وجود داشته باشد. مثلاً، مجموعه S ، با عضوهای a ، b ، c ، می‌تواند به صورت

$$a \rightarrow b, b \rightarrow c, c \rightarrow a$$

با شرط‌های مسأله سازگار باشد.

۴۶۲. اگر در این اجتماع، همه با هم آشنا باشند، آن وقت، تعداد کسانی که با همه آشنا هستند، برابر ۱۹۸۲ می‌شود. اکنون، فرض کنید، A و B با هم آشنا نباشند. در این صورت، همه دیگران با هم آشنا هستند (اگر مثلاً C و D با هم آشنا نباشند، آن وقت، در گروه چهار نفری A ، B ، C ، D ، هیچ کس با همه بقیه سه نفر آشنا نیست). اگر A و B ، با همه بقیه آشنا باشند، به معنای آن است که ۱۹۸۵ نفر با همه افراد آشنا هستند. اگر A ، مثلاً با C آشنا نباشد ($C \neq B$)، آن وقت، A و B و C با همه ۱۹۷۹ نفر دیگر آشنا هستند (زیرا در هر گروه شامل A ، B ، C و D ، تنها D می‌تواند با سه نفر دیگر آشنا باشد)، که در عین حال با خودشان هم آشنا هستند. به این ترتیب، حداقل تعداد کسانی که با همه بقیه آشنا هستند، برابر است با ۱۹۷۹.

۴۶۳. توجه می‌کنیم که، هر نفر، درست دو نفر از بقیه را می‌شناسد. در واقع، فرض می‌کنیم، A ، با سه نفر B ، C و D آشنا باشد. در این صورت، اگر B و C با هم آشنا باشند، آن وقت بین A و B و C ، ناآشنا وجود ندارد. بنابراین، B و C (و به همین ترتیب B و D ، C و D) ناآشنا نیستند و آن وقت، بین B ، C و D آشنائی پیدا نمی‌شود. به همین ترتیب، می‌توان حالتی را بررسی کرد که A ، با سه نفر ناآشنا باشد.

اکنون، فرض کنید B و C ، آشناهای A باشند. در این صورت B و C

با هم آشنا نیستند و B ، مثلاً، با D آشناست ($D \neq C$ و $D \neq A$). اگر D با C آشنا باشد، درین چهار نفر A, B, C, D ، هر نفر با دو نفر دیگر آشناست، یعنی نفر پنجم E نمی تواند با هیچ کدام از آنها آشنا باشد. به این ترتیب D با C آشنا نیست و چون با A هم آشنا نیست، و همچنین C با B آشنا نیست، بنابراین C و D آشنای E هستند.

بنابراین، این پنج نفر را می توان، مثلاً، به این ردیف نشانید

$$E, D, B, A, C$$

۴۶۴. فرض کنیم، نتوان سه ریاضی دان پیدا کرد که به يك زبان صحبت کنند. ریاضی دان دلخواه A را در نظر می گیریم. او به بیش از سه زبان صحبت نمی کند، در ضمن، با هر يك از این زبان ها، حداکثر با يك ریاضی دان، می تواند حرف بزند (چرا که فرض کرده ایم، هیچ سه ریاضی دانی، با يك زبان حرف نمی زنند). به این ترتیب، پنج ریاضی دان وجود دارند که، با A ، زبان مشترکی ندارند. یکی از این پنج نفر را B می نامیم. شبیه استدلالی که برای A داشتیم، ریاضی دان B هم نمی تواند با بیش از سه ریاضی دان، زبان مشترکی داشته باشد. بنابراین، بین بقیه چهار ریاضی دان، که با A زبان مشترك ندارند، ریاضی دان C پیدا می شود که با B هم زبان مشترکی ندارد. به این ترتیب، بین سه نفر A و B و C ، نمی توان دو نفر پیدا کرد که بتوانند به يك زبان، با هم صحبت کنند؛ چیزی که شرط مسأله را نقض می کند.

۴۶۵. الف) فرض می کنیم، در هر گروه چهار نفری، بتوان دو نفر نا آشنا پیدا کرد. در این صورت، مثلاً A ، نمی تواند بیش از سه نا آشنا داشته باشد: اگر A با چهار نفر نا آشنا باشد، با توجه به فرض، بین آنها، دو نفر نا آشنای با هم می توان پیدا کرد که با A ، يك گروه سه نفری تشکیل دهند و در بین آنها، نتوان دو نفر را آشنای با هم پیدا کرد. به این ترتیب، A ، حداکثر با سه نفر نا آشناست، یعنی حداقل شش آشنا دارد. فرض کنید، A ، با B_1, B_2, \dots, B_p آشنا باشد. در این صورت، بین B_1, B_2, \dots, B_p ،

نمی‌توان سه نفر را پیدا کرد که، دو به دو با هم آشنا باشند (در غیر این صورت، این سه نفر، همراه با A ، يك گروه چهار نفری تشکیل می‌دهند که، افسراد آن، دو به دو با هم آشنا هستند، و این مخالف فرض است). یعنی بین هر سه نفر از B_1, B_2, \dots, B_6 ، دو ناآشنا وجود دارد. در نتیجه، B_1 نمی‌تواند در بین B_2, \dots, B_6 بیش از دو ناآشنا داشته باشد (اگر B_1 ، مثلاً، با B_2, B_3, B_4 ناآشنا باشد، آن وقت، B_2, B_3, B_4 ، دو به دو با هم آشنا می‌شود). بنابراین B_1 ، در بین B_2, \dots, B_6 ، دست کم، سه آشنا دارد. در این صورت، در این گروه سه نفری، دو نفر آشنا پیدا می‌شوند که، همراه با B_1 و A ، يك گروه چهار نفری تشکیل می‌دهند که دو به دو یکدیگر را می‌شناسند، چیزی که فرض ما را نقض می‌کند.

(ب) ثابت می‌کنیم، در این حالت هم، گزاره الف) درست است. اگر يك نفر بسا شش نفر دیگر آشنا باشد، استدلال به همان شیوه بخش الف) انجام می‌گیرد. اگر، هر نفر، درست با ۵ نفر دیگر آشنا باشد، آن وقت، تعداد کل زوج‌های آشنا، برابر $9 \times \frac{5}{2}$ می‌شود که، چون عدد درستی نیست، نمی‌تواند قابل قبول باشد. سرانجام، اگر بتوان کسی را پیدا کرد که، دست کم، با چهار نفر ناآشنا باشد، این چهار نفر دو به دو با هم آشنا هستند (در غیر این صورت، با گروه سه نفری سروکار پیدا می‌کنیم که، دو به دو، با هم ناآشنایند)؛ یعنی این چهار نفر، گروه مورد نظر مسأله را تشکیل می‌دهند. حکم ثابت شد.

۴۶۶. فرض می‌کنیم، پنج شهر وجود داشته باشد که به ترتیب مورد- نظر مسأله، به هم مربوط شده باشند. ابتدا ثابت می‌کنیم، به هیچ شهری، سه خط از يك نوع ارتباط وارد نمی‌شود. فرض کنید، مثلاً شهر A ، با سه شهر B, C و D با هواپیما ارتباط داشته باشد. بنابراین، با توجه به شرط مسأله، از بین سه شهر B, C و D ، هیچ دو شهری نمی‌توانند با هواپیما به هم مربوط شده باشند. فرض کنید، مثلاً، B و C ، بسا قطار به هم مربوط باشند. شهرهای C و D نمی‌توانند بسا خط اتوبوس ارتباط داشته باشند،

زیرا در غیر این صورت، شهر C با هر سه نوع وسیله ارتباطی مجهز می شود. بنابراین، بین دو شهر C و D هم، باید خط قطار وجود داشته باشد. به همان دلیل، شهرهای B و D هم، با قطار به هم مربوط شده اند. به این ترتیب، سه شهر B ، C و D ، دو به دو، با قطار ارتباط دارند، که متناقض با فرض مسأله است.

بنابراین، از هر شهر، دو وسیله از یک نوع، و دو وسیله از نوع دیگر خارج می شود (هر شهر، با چهار شهر دیگر رابطه دارد). به این ترتیب، هر شهر، درست با دو نوع وسیله تأمین می شود. از آن جا، دست کم یک وسیله ارتباطی وجود دارد که بیش از سه شهر را تأمین نمی کند (در غیر این-

صورت، تعداد همه شهرها، نمی تواند از $\frac{3}{4} \times 4$ ، یعنی ۶ کمتر باشد). اگر این وسیله، درست دو شهر را تأمین کند، آن وقت از هر یک از این دو شهر، تنها یک خط ارتباطی از این نوع خارج می شود، که ممکن نیست. اگر این وسیله، درست سه شهر را تأمین کند، آن وقت، این سه شهر، دو به دو، با این وسیله به هم مربوط شده اند، که باز هم ممکن نیست.

در نتیجه، ثابت شد که، شرطهای مسأله، نمی توانند برای پنج شهر، برقرار باشند. علاوه بر این، روشن است که، اگر تعداد شهرها، بیش از پنج باشد، باز هم شرطهای مسأله برقرار نمی شوند.

اکنون، اگر تعداد شهرها را چهار بگیریم (A ، B ، C و D) و به این ترتیب، به هم مربوط شده باشند: A و B با قطار، C و D با اتوبوس و همه بقیه شهرها با هواپیما، آن وقت، همه شرطهای مسأله رعایت شده اند. حداکثر تعداد شهرها، برابر است با ۴.

۴۶۷. ابتدا ثابت می کنیم، هر دو نفر آشنا، تعداد آشنایان برابر دارند. فرض کنید، A و B با هم آشنا باشند، در ضمن، A ، به جز B ، با A_1, A_2, \dots, A_n هم آشنا باشد و، به جز اینها، آشنای دیگری نداشته باشد. در این صورت، بنا بر شرط مسأله، بین A_1, A_2, \dots, A_n ، هیچ دوفری با هم آشنا نیستند. A_1 را در نظر می گیریم. چون A_1 با B آشنا نیست، بنابراین دو آشنای مشترک با B دارد: A و مثلاً B_1 . چون A و B_1 با هم آشنا نیستند، به جز B

A_1 ، آشنای مشترک دیگری ندارند، یعنی B_1 با A_2, \dots, A_n آشنا نیست. به همین ترتیب، معلوم می‌شود که B_2 ، آشنای مشترک A_1 و B است (B_2 غیر از B_1 است، زیرا B_1 ، با A_2 آشنا نیست) و غیره. به این ترتیب، آشنای A ، (به جز B) در تناظر با آشنای مختلف B (به جز A) قرار می‌گیرند، یعنی تعداد آشنای A ، از تعداد آشنای B ، تجاوز نمی‌کند. به همین ترتیب، ثابت می‌شود که، تعداد آشنای B هم، از تعداد آشنای A تجاوز نمی‌کند. بنابراین، A و B ، تعداد آشنایان برابر دارند.

اکنون، فرض می‌کنیم، C و D با هم آشنا نباشند. در این صورت، هر دوی آن‌ها، مثلاً با E آشنا هستند. بنابراین چه ثابت کردیم، تعداد آشنایان C و E ، همچنین، تعداد آشنایان D و E ، یکی است. بنابراین، تعداد آشنایان C و D هم، یکی است (که همان تعداد آشنایان E است).

۴۶۸. از بین تمامی $3n$ دانش‌آموز، دانش‌آموزی را انتخاب می‌کنیم، که حداکثر تعداد آشنا را در یکی از دو مدرسه دیگر داشته باشد؛ این تعداد را، k می‌گیریم (ممکن است، چند دانش‌آموز از این گونه وجود داشته باشد که، در این صورت، یکی از آن‌ها را انتخاب می‌کنیم). برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم، دانش‌آموز A از مدرسه اول، با k دانش‌آموز مدرسه دوم آشنا باشد. در این صورت، A ، به تعداد $n+1-k$ دانش‌آموز مدرسه سوم را می‌شناسد و، در ضمن، $n+1-k \geq 1$ ، زیرا $n \leq k$. دانش‌آموزی از مدرسه سوم را انتخاب می‌کنیم که با A آشنا باشد (دانش‌آموز B). اگر B با هیچ کدام از k آشنای A در مدرسه دوم آشنا نباشد آن وقت، B باید در این مدرسه، با تعدادی که از $n-k$ تجاوز نمی‌کند، آشنا باشد، یعنی در مدرسه اول، دست کم، با

$$n+1-(n-k) = k+1$$

دانش‌آموز آشناست، که با نوع انتخاب k متناقض است؛ حکم ثابت شد. ۴۶۹. با استقرای روی $n \in \mathbb{N}$ ثابت می‌کنیم، اگر در گرافی که $2n$ رأس دارد، هیچ سه یالی تشکیل مثلث ندهند، آن وقت، تعداد یال‌ها، از n^2 تجاوز نمی‌کند. برای $n=1$ ، تعداد یال از $n^2=1$ تجاوز نمی‌کند. فرض

می‌کنیم، حکم، برای n ثابت شده باشد. ثابت می‌کنیم که، در این صورت، برای $n+1$ هم درست است.

گرافی با $(n+1)$ رأس در نظر می‌گیریم که، هیچ سه یالی از آن‌ها، تشکیل مثلث ندهند. دورأسی را انتخاب می‌کنیم که، از وصل آن‌ها به یکدیگر، یالی درست شده باشد (اگر در گراف، حتی يك یال وجود نداشته باشد، آن وقت، همه چیز ثابت شده است). در این صورت، هر يك از $2n$ رأس باقی مانده، به یالی مربوط می‌شود که حداکثر، از یکی از دو رأس انتخابی گذشته است. بنابراین فرض استقرا، این $2n$ رأس در بین خود، بیش از n^2 یال تشکیل نمی‌دهند. در نتیجه، تعداد کل یال‌ها، از

$$n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

تجاوز نمی‌کند. حکم ثابت شد.

سرانجام، اگر $2n$ رأس را، به دو مجموعه، و در هر کدام n رأس، تقسیم کنیم و، سپس، هر دو رأس واقع در دو مجموعه مختلف را، با یالی به هم وصل کنیم، گرافی با n^2 یال به دست می‌آید که، در آن، هیچ مثلثی پیدا نمی‌شود.

۴۷۰. مسأله را، با استقرای روی n - تعداد پسرها - حل می‌کنیم. برای $n=1$ ، درستی حکم از این‌جا ناشی می‌شود که، برای هر پسر، به ناچار يك دختر آشنا وجود دارد. فرض می‌کنیم، حکم، برای همهٔ عددهای کمتر از n درست باشد. ثابت می‌کنیم، در این صورت، برای n هم درست است. دو حالت در نظر می‌گیریم.

(۱) گروه A شامل $n < k$ پسر پیدا می‌شود، به نحوی که تعداد کل همهٔ دخترهای آشنا با آن‌ها، برابر k باشد. فرض کنید، هر يك از پسرهای این گروه، با دختر آشنای خود در رقص شرکت کند (که بسا توجه به فرض استقرا، این امر ممکن است). در این صورت، برای پسرها و دخترهای باقی مانده، شرط مسأله برقرار است. در واقع، اگر گروه B را شامل i پسری که در گروه A نیستند، فرض کنیم، آن وقت، برای پسرهایی که، از اجتماع مجموعه‌های A و B به دست می‌آیند، دست کم، به تعداد $k+i$ دختر آشنا

وجود دارد. پسرهای گروه A ، در مجموع، حداکثر بسا k دختر آشنا هستند، یعنی i پسر از گروه B ، دست کم با i دختر بقیه آشنایند. بنابراین، با توجه به فرض استقرا، هر يك از پسرهایی هم که در A نیستند، می توانند در رقص با دختر آشنای خود شرکت کنند.

(۲) در هر گروه پسرها، از هر تعداد $n < k$ ، تعداد دخترهای آشنا، از k تجاوز می کند. در این صورت، اگر يك پسر با دختر آشنای خود مشغول به رقص شود، آن وقت، مجموعه پسرها و دخترهای باقی مانده، مثل حالت قبل، بسا شرط مسأله سازگار می شوند. در واقع، هر گروه از $n-1 \leq k$ پسر باقی مانده دست کم با $k+1$ دختر آشنا است (که ممکن است، یکی از آنها، قبلاً مشغول به رقص شده باشد). یعنی، بنابر فرض استقرا، هر يك از پسرهای باقی مانده هم، می توانند دختر آشنای خود را پیدا کنند.

۴۷۱. با استقرای روی $n \in \mathbb{N}$ ثابت می کنیم، اگر n شرکت A_1, \dots, A_n و N شهر P_1, \dots, P_N وجود داشته باشد و، در ضمن $N > 2^n$ و هر دوشهر بسا خط هوایی به هم مربوط باشند، آن وقت، دست کم يك شرکت هوایی می تواند، يك مسافرت رفت و برگشت را، با تعداد فردی خط هوایی تأمین کند. از آنجا که

$$1983 > 1024 = 2^{10}$$

بنابراین، آن چه در مسأله خواسته شده است، به عنوان حالتی خاص، ثابت خواهد شد.

به ازای $n=1$ ، داریم $N \geq 3$ و $P_1 P_2 P_3 P_1$ ، مسافرت مطلوب است. فرض می کنیم. حکم، برای $n-1$ درست باشد؛ ثابت می کنیم، برای n هم درست است. فرض کنید، تمامی مسافرت کمربندی شرکت A_n ، از تعداد زوجی خط هوایی تشکیل شده باشد (درغیر این صورت، چیزی برای اثبات باقی نمی ماند). شهرها را به دو گروه

$$R = \{R_1, \dots, R_k\} \quad \text{و} \quad Q = \{Q_1, \dots, Q_m\}$$

به ترتیب زیر تقسیم می کنیم. $P_1 \in R$ می گیریم. سپس، همه شهرهایی را که

می‌توان، از P_1 به آن‌ها، با هواپیماهای شرکت A_n ، بدون عوض کردن هواپیما پرواز کرد، در گروه Q می‌گذاریم. همه شهرهایی را که می‌توان از شهرهای Q ، با هواپیماهای شرکت A_n ، بدون عوض کردن، به آن‌ها پرواز کرد، در R قرار می‌دهیم و غیره. به این ترتیب، این وضع پیش نمی‌آید که، دو شهر از یک گروه (R یا Q) با خط هوایی شرکت A_n به هم مربوط باشند (در غیر این صورت، مسافرت کمربندی، با تعداد فرد خط‌های هوایی ممکن می‌شود). اگر همه شهرهایی را که، با آغاز از P_1 و با هواپیماهای شرکت A_n می‌توانیم پرواز کنیم، به پایان برسانیم، آن وقت، به R و در یکی از شهرهای باقی مانده داخل می‌شویم و همان روند قبلی را ادامه می‌دهیم. دست کم در یکی از گروه‌های R یا Q ، بیش از 2^{n-1} شهر وجود دارد، زیرا

$$k + m = N > 2^n$$

و در داخل هر یک از این گروه‌ها، همه پروازها، با شرکت‌های A_1, A_2, \dots, A_{n-1} انجام می‌گیرد (زیرا شرکت A_n ، تنها شهری از R را به شهرهایی از Q مربوط می‌کند). اکنون، تنها این می‌ماند که از فرض استقرا استفاده کنیم.

۲۶۵. مسأله‌های مختلف

۴۷۲. فرض کنیم، بعد از انجام چند بار عمل مورد نظر مسأله، تنها گروهی از صفرها باقی مانده باشد. فرض کنید، این وضع، برای نخستین بار، بعد از انجام عمل k ام پیش آمده باشد. در این صورت، بعد از عمل $(k-1)$ ام، همه رقم‌های روی دایره یکسان و، در ضمن، غیر از صفر بوده‌اند، بنابراین، همه آن‌ها، واحد بوده‌اند. یعنی، بعد از عمل $(k-2)$ ام، هر دو رقم متوالی در روی دایره، با هم اختلاف داشته‌اند؛ بنابراین، تعداد صفرها و واحدها، در این مرحله، برابر و تعداد کل آن‌ها زوج است، که شرط را نقض می‌کند.

۴۷۳. تمامی صفحه را به مربع‌های برابر، طوری تقسیم می‌کنیم که، هر یک از مربع‌ها، شامل چهارخانه باشد. سپس، در هر یک از این مربع‌ها،

خانه «چپ بالا» را سیاه، خانه «راست بالا» را سفید، خانه «چپ پایین» را قرمز و خانه «راست پایین» را آبی می‌نامیم. در این صورت، از یک طرف، هر دو خانه هم رنگ، مماس نیستند و، از طرف دیگر، در بین خانه‌های علامت‌گذاری شده، می‌توان، دست کم، یک چهارم آن‌ها را طوری انتخاب کرد که هم رنگ باشند (در غیر این صورت، تعداد کل خانه‌های علامت‌دار، از $\frac{n}{4} \times 4$ ، یعنی n ، کمتر می‌شود).

۴۷۴. هر یک از ۲۶ مکعب واحد را، به جز مکعب وسط، به ردیف شطرنجی یا سیاه و یا سفید می‌گیریم: ۱۲ مکعب کوچک را که درست، دارای دو وجه در سطح مکعب بزرگ هستند، سفید، و بقیه ۱۴ مکعب کوچک را، سیاه می‌نامیم. به این ترتیب، هر دو مکعب کوچکی که وجه مشترکی داشته باشند، رنگ‌های مختلف پیدا می‌کنند (یکی سیاه و دیگری سفید). موش نمی‌تواند این ۲۶ مکعب کوچک را بخورد، زیرا در غیر این صورت، می‌شد مکعب‌های کوچک را به ۱۳ زوج تقسیم کرد، به نحوی که، در هر زوج، یکی سیاه و دیگری سفید باشد، یعنی تعداد مکعب‌های کوچک سیاه و سفید برابر می‌شد.

۴۷۵. بدون این که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد:

$$A_1 < A_2 < \dots < A_n$$

i را کوچکترین اندیسی می‌گیریم که، برای آن، بین نقطه‌های A_1, \dots, A_i ، از هر چهار رنگ وجود داشته باشد. در این صورت، رنگ A_i ، با رنگ‌های A_1, \dots, A_{i-1} فرق دارد. اکنون، بزرگترین اندیس $i < j$ را در نظر می‌گیریم که، برای آن، بین نقطه‌های A_j, \dots, A_i ، نقطه‌های از هر چهار رنگ پیدا شود. در این صورت، رنگ A_j ، با رنگ‌های A_i, \dots, A_{j+1} فرق دارد؛ و پاره خط راست $[A_j, A_i]$ ، پاره خط مطلوب است.

۴۷۶. تعداد مثلث‌های منفی را k می‌گیریم برای هر مثلث، عددهای

متناظر با ضلع‌های آن را در هم ضرب و، سپس، همه حاصل ضرب‌های حاصل را دوباره در هم ضرب می‌کنیم. در نتیجه، به عدد k^{n-1} می‌رسیم. توجه کنیم که، عدد متناظر با هر پاره خط راست، در این حاصل ضرب، $n-2$ بار وارد شده است، زیرا هر پاره خط راست، به $n-2$ مثلث متعلق است. بنابراین، حاصل ضرب مذکور برابر $(n-2)^m$ است، یعنی، عدد k ، از نظر زوج یا فرد بودن خود، با عدد

$$(n-2)m \equiv nm \pmod{2}$$

یکی است.

۴۷۷. فرض کنید، اتومبیل دارای ذخیره‌ای از بنزین باشد که بتواند با آن، بدون بنزین‌گیری مجدد، تمامی جاده کمربندی را دور بزند. همچنین، فرض کنید، این اتومبیل، از ایستگاهی آغاز به حرکت کند و، در جاده، همه بنزین‌سای ایستگاه‌ها را جمع کند و، حرکت خود را، در همان نقطه و با همان مقدار بنزین به پایان برساند. A را ایستگاهی می‌گیریم که، وقتی اتومبیل به آن جا می‌رسد، کمتر از نقطه دیگری، در حرکت خود، بنزین داشته باشد. فرض کنید، مقدار بنزین داخل باک اتومبیل، در این لحظه، برابر x باشد. اگر اتومبیل، با مقدار ذخیره بنزین x ، حرکت خود را از ایستگاه A آغاز کند، آن وقت، همیشه، در باک آن، مقدار بنزینی خواهد بود که از x کمتر نیست. به این ترتیب، اگر اتومبیل، با باک خالی در ایستگاه A باشد، می‌تواند با ریختن بنزین موجود در این ایستگاه در بساک خود و حرکت از آن جا، تمامی جاده کمربندی را دور بزند (زیرا، این مقدار x بنزین را می‌توان در نظر نگرفت و حرکت را بدون آن به پایان رسانید).

۴۷۸. صفحه شطرنج را به چهار بخش تقسیم می‌کنیم، به نحوی که در هر بخش، دو ردیف قائم وجود داشته باشد. فرض کنید، سیاه، در پاسخ به حرکت سفید در هر بخش، حرکت خود را در همان بخش انجام دهد. در این صورت، اگر سیاه، سفید را از امکان حرکت در هر بخش محروم کند، آن وقت، سفید نمی‌تواند حرکتی انجام دهد. بنابراین، کافی است، برنامه‌ریزی برد سیاه را، برای حالتی پیدا کنیم که، بسازی، در مرزهای دو ردیف قائم

انجام می‌گیرد. اگر سفید، سرباز خود را k خانه جلو ببرد، آن وقت سیاه، سرباز خود را در ردیف قائم دیگر، k خانه جلو می‌برد. ولی اگر سفید، سرباز خود را k خانه به عقب برد، سیاه، سرباز خود را در همان ردیف، k خانه جلو می‌برد. در این صورت، بعد از هر حرکت سیاه، فاصله بین سربازهای یک ردیف قائم، و سربازهایی که در ردیف قائم دیگرند، یکسان می‌ماند. بنابراین، در هر حرکت سفید، سیاه می‌تواند پاسخ بدهد، یعنی سیاه نمی‌تواند بازنده شود. از طرف دیگر، سیاه فقط به جلو می‌رود و، در نتیجه، بازی به ناچار، بعد از تعدادی حرکت به پایان می‌رسد و، بنابراین، سیاه برنده می‌شود.

۴۷۹. همه عددهای درست از ۲ به بعد را به زوج‌های غیر متقاطعی به صورت $(2k, 2k+1)$ تقسیم می‌کنیم ($k \in \mathbb{N}$). در این صورت، دو عدد از بین سه عدد n ، $n-1$ و $n-2$ ، به طور حتم، یک زوج را تشکیل می‌دهند. کسی که بازی را آغاز می‌کند، باید مهره‌ای را بردارد که جزء این زوج نیست و آن را در خانه با شماره ۱ بگذارد. این مهره، بعد از حرکت اول، دیگر قابل جا به جا کردن نیست. فرض کنید، نفر دوم، در حرکت خود، یکی از مهره‌ها را به خانه m ببرد. در این صورت، نفر اول، باید مهره باقی مانده را، در خانه $m-1$ یا $m+1$ ، بسته به این که کدام یک از آن‌ها با m تشکیل زوج داده‌اند، قرار دهد. این عمل را همیشه می‌توان انجام داد، زیرا زوج‌ها، نه با هم و نه با ۱، متقاطع نیستند. اگر بازی به همین ترتیب، ادامه پیدا کند، اولی نمی‌تواند بازنده باشد؛ و چون بازی، به هر حال، بعد از چند حرکت به پایان می‌رسد، بنابراین، دومی به طور حتم بازی را خواهد باخت.

۴۸۰. ردیف‌های افقی را، از پایین به بالا، با عددهای ۱، ۵، ۹، ...، ۷ و ردیف‌های قائم را، از چپ به راست، با همین عددها، شماره گذاری می‌کنیم. هر خانه صفحه شطرنج را متناظر با مجموع عددهای افقی و قائمی می‌گیریم که، این خانه، در محل برخورد آن‌ها واقع باشد. مهره، مسیر حرکت خود را، از خانه متناظر با شماره ۰ آغاز می‌کند. در هر حرکت مهره، عدد x ،

مختلف، معرف خانه‌های متعلق به مجموعه‌های مختلف‌اند). در هر حرکت، از تعداد مهره‌های دو مجموعه، هر کدام يك واحد کم، و به مهره‌های یکی از مجموعه‌ها، يك واحد اضافه می‌شود. درضمن، بعد از هر حرکت، زوج یا فرد بودن تعداد مهره‌های هر مجموعه، تغییر می‌کند. اگر مهره‌ها، در ابتدا، يك مستطیل $n \times (3k)$ را اشغال کرده باشند، به معنای آن است که، تعداد آن‌ها در هر مجموعه، برابر با تعداد آن‌ها در هر مجموعه دیگر است. بنا براین، بعد از هر حرکت، باید تعداد مهره‌ها، در هر سه مجموعه، از لحاظ زوج یا فرد بودن یکی باشد. اگر بعد از حرکتی، روی صفحه تنها يك مهره باقی مانده باشد، به معنای این است که تعداد مهره‌های یکی از مجموعه‌ها فرد، و تعداد مهره‌های هر يك از دو مجموعه دیگر زوج است. بنا براین، چنین موقعیتی پیش نمی‌آید.

۴۸۲. ثابت می‌کنیم، دست کم یکی از وجه‌های این چند وجهی، مثلث نیست. برعکس، فرض کنید، همهٔ وجه‌ها، مثلث باشند. در این صورت، در این چندوجهی، تعداد یال‌ها برابر $\frac{3n}{2}$ (زیرا، هر يك از سه یال هر وجه، متعلق به دو وجه است) و تعداد رأس‌ها برابر n است (زیرا، هر يك از سه رأس هر وجه، متعلق به سه وجه است). بنا بر دستور اولر (قضیهٔ ۳۹) داریم:

$$n + n - \frac{3n}{2} = 2 \Rightarrow n = 4$$

که شرط مسأله را نقض می‌کند.

اکنون، نشان می‌دهیم، کسی که بازی را آغاز می‌کند، چگونه می‌تواند بازی را ببرد. حرکت اول را باید روی وجه A_1 انجام دهد که مثلث نیست. با حرکت دوم خود، باید وجه آزاد A_2 را که مجاور وجه A_1 است و با دو وجه مجاور A_3 و A_4 (که باز هم مجاور A_1 هستند) یال‌های مشترکی دارد، اشغال کند (این حرکت، برای بازی‌کن اول ممکن است، زیرا بازی‌کن دوم، تنهایی می‌تواند یکی از وجه‌های مجاور A_1 را اشغال کند). سرانجام، در حرکت سوم، بازی‌کن اول می‌تواند یکی از دو وجه A_3 یا

A_p را، که به وسیلهٔ دومی اشغال نشده است، پر کنند. بازی کن اول، در حرکت سوم، برنده می شود.

۴۸۴. با استقرای روی $n \in \mathbb{Z}^+$ ثابت می کنیم که اگر پشت سر هم، 2^n عمل S را انجام دهیم، به گروهی از $m = 2^n$ واحد می رسیم. برای $n = 0$ داریم:

$$S(A) = (a_1 a_1) = 1$$

اکنون، فرض کنیم حکم، برای $n-1$ درست باشد؛ ثابت می کنیم که، در این صورت، برای n هم درست است. در انتخاب

$$\begin{aligned} T(A) &= S(S(A)) = S(a_1 a_2, a_2 a_3, \dots, a_m a_1) = \\ &= (a_1 a_3, a_2 a_4, \dots, a_{m-1} a_1, a_m a_2) \end{aligned}$$

عددهایی که در ردیف های زوج قرار دارند، به ترتیب، بر عددهایی منطبق اند که از انتخاب

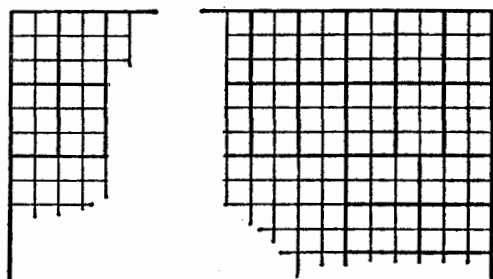
$$(a_2, a_4, \dots, a_m)$$

ضمن انجام عمل S به دست می آیند. به همین ترتیب، عددهای انتخاب $T(A)$ ، در ردیف های فرد خود، با انتخاب زیر منطبق اند:

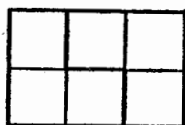
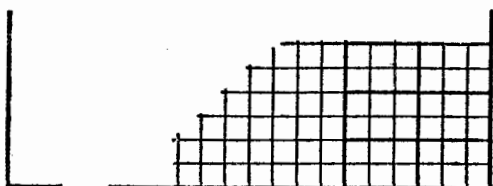
$$S(a_1, a_3, \dots, a_{m-1})$$

بنابر فرض استقرا، بعد از $\frac{m}{2} = 2^{n-1}$ عمل T ، چه در ردیف های زوج و چه در ردیف های فرد، تنها واحدها قرار دارند. بنابراین، بعد از m عمل S ، تمامی انتخاب، از واحدها تشکیل شده است.

۴۸۵. مستطیل 3×2 را می توان با «مربع های سه خانه ای» پوشاند (شکل ۱۳۵). شکلی را در نظر می گیریم که از اجتماع نوارهایی به عرض شش خانه و متصل به دو ضلع مجاور مربع، به دست آمده باشد. اگر خانه ای که از صفحه جدا کرده ایم، متعلق به این شکل نباشد، می توان این شکل را، با مستطیل های 3×2 پوشاند (شکل ۱۳۱) و، سپس، به مربع



شکل ۱۳۱



شکل ۱۳۰

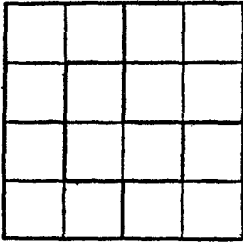
باقی مانده $2(n-3) \times 2(n-3)$ ، که خانه‌ای از آن جدا شده است، پرداخت. چون این عمل را، برای $n \geq 7$ ، همیشه می‌توان انجام داد، بنابراین، بدون این که به کلی بودن مسئله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد $n \leq 5$. همه حالت‌های ممکن را بررسی می‌کنیم.

(۱) $n=1$. مربع 2×2 را، که یک خانه آن جدا شده باشد، می‌توان با یک «مربع سه خانه‌ای» پوشاند (تعریف «مربع سه خانه‌ای» را، در صورت مسئله، ببینید).

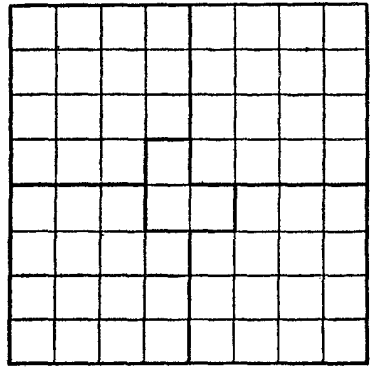
(۲) $n=2$. خانه جدا شده، در یکی از چهار مربع 2×2 قرار دارد، که سه خانه باقی مانده آن را می‌توان با یک «مربع سه خانه‌ای» پوشاند (شکل ۱۳۲).

(۳) $n=4$. به حالت ۲) برمی‌گردد، زیرا در آن جا دیدیم. هر مربع 4×4 را که یک خانه آن جدا شده باشد، می‌توان با «مربع‌های سه خانه‌ای» پوشاند (شکل ۱۳۳).

(۴) $n=5$. هر مربع 10×10 را، که یک خانه آن جدا شده باشد،

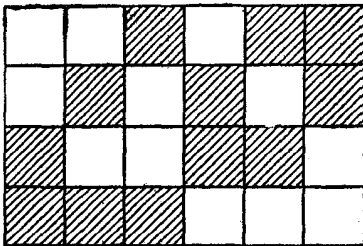


شکل ۱۳۳



شکل ۱۳۲

همیشه می توان به دو مستطیل 3×10 و یک مستطیل 4×10 طوری تقسیم کرد که، خانه جدا شده، در مستطیل 4×10 قرار گیرد. مستطیل 3×10 را می توان با «مربع های سه خانه ای» پوشاند. مستطیل 4×10 را می توان به دو مستطیل 3×4 و یک مربع 4×4 طوری تقسیم کرد که خانه جدا شده، در مربع 4×4 قرار گیرد. هم مستطیل 3×4 و هم مربع 4×4 ، بدون یک خانه، را می توان با «مربع های سه خانه ای» پر کرد.



شکل ۱۳۴

۴۸۵ الف) همه زوج خانه های

هم رنگی را در نظر می گیریم که ممکن است در یک ستون واقع باشند (فرض می کنیم، هرستون به ارتفاع ۴، و هرسطر به طول ۷ باشد). در هرستون، دست کم، دو زوج از این گونه پیدا می شود، یعنی در تمامی صفحه مستطیلی، دست کم، ۱۴ تا. بنا بر این، رنگی وجود

دارد که، برای آن، دست کم ۷ تا از این زوج ها پیدا می شود. از آن جا که، انواع این گونه زوج خانه ها، در هرستون برابر است با ۶، بنا بر این، دوستون وجود دارد که، در آن ها، این گونه زوج ها، به یک رنگ و به یک ردیف

قرار گرفته‌اند. و این، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

(ب) شکل ۱۳۴ را ببینید.

۴۸۶. همهٔ نقطه‌های مجموعهٔ M را به ۱۲ سطر (نسبت به مختص

اول) و ۱۲ ستون (نسبت به مختص دوم) تقسیم می‌کنیم. رنگی وجود دارد

که، دست کم به تعداد $\frac{144}{3}$ ، یعنی ۴۸ نقطه، با آن رنگ شده‌اند. از بین

آنها، درست ۴۸ نقطه را انتخاب می‌کنیم. تعداد این نقطه‌ها را درستون‌های از ۱ تا ۱۲ (نسبت به مختص دوم)، به ترتیب، a_1, a_2, \dots, a_{12} می‌نامیم:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{12} = 48$$

در این صورت، تعداد نقطه‌های انتخابی، درستون i ام، برابر $\frac{1}{2} a_i (a_i - 1)$

و تعداد کل زوج نقطه‌هایی که، مختص دوم آنها برهم منطبق است، برابر با

$$A = \frac{a_1(a_1-1)}{2} + \frac{a_2(a_2-1)}{2} + \dots + \frac{a_{12}(a_{12}-1)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} (a_1^2 + \dots + a_{12}^2) - \frac{1}{2} (a_1 + \dots + a_{12})$$

می‌شود. با استفاده از قضیهٔ مربوط به واسطه‌ها (قضیهٔ ۶)، به دست می‌آید:

$$A \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{(a_1 + \dots + a_{12})^2}{12} - \frac{1}{2} (a_1 + \dots + a_{12}) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{48^2}{12} - \frac{1}{2} \cdot 48 = 72$$

هر دو نقطهٔ انتخابی که در یک ستون واقع باشند، متناظر با دو سطری هستند

که، این دو نقطه، در آنها قرار دارند. چون تعداد زوج نقطه‌های مختلف،

برابر $C_{12}^2 = 66$ ، از A کمتر است، بنابراین، دو زوج از نقطه‌های انتخابی

پیدا می‌شوند که، متناظر با یک زوج سطرند. و این چهار نقطه، رأس‌های

مستطیل مورد نظر ما را تشکیل می‌دهند.

۴۸۷. الف) اگر مختصات سه رأس مثلثی را (x_1, y_1) ، (x_2, y_2)

و (x_3, y_3) بگیریم، مختصات محل برخورد میان‌های آن چنین است:

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

نقطه (x, y) را از نوع (r_1, r_2) می‌نامیم، وقتی که، در آن، r_1 و r_2 ، به ترتیب، عبارتند از باقی‌مانده تقسیم عددهای x و y بر ۳. می‌توان هشت نقطه پیدا کرد که با شرط مسأله سازگار باشند. کافی است، این هشت نقطه را، به این ترتیب، در نظر بگیریم: دو نقطه از نوع $(0, 0)$ ، دو نقطه از نوع $(1, 1)$ ، دو نقطه از نوع $(1, 0)$ ، و، سرانجام، دو نقطه از نوع $(0, 1)$. علاوه بر این، هیچ سه نقطه‌ای، از این هشت نقطه، نباید بر یک خط راست واقع باشند. مثلاً، این شرط‌ها، در مورد نقطه‌های زیر صدق می‌کنند:

$(7, 4)$; $(1, 1)$; $(4, 3)$; $(1, 0)$; $(3, 4)$; $(3, 1)$; $(0, 3)$; $(0, 0)$ اکنون، فرض می‌کنیم، ۹ نقطه وجود داشته باشد، به نحوی که در شرط مسأله صدق کنند. این ۹ نقطه را، به گروه‌های از یک نوع، تقسیم می‌کنیم. در این صورت، در هیچ یک از گروه‌ها، نباید ۳ نقطه وجود داشته باشد (زیرا، در غیر این صورت، این سه نقطه، تشکیل مثلثی را می‌دهند که، محل برخورد میان‌های آن، دارای مختصات درست می‌شود). بنا بر این، به سادگی روشن می‌شود که تعداد گروه‌ها نمی‌تواند از ۵ کمتر باشد، یعنی از بین ۹ نقطه مفروض، می‌توان ۵ نقطه پیدا کرد که متعلق به گروه‌های مختلف باشند. این ۵ نقطه را به سه دسته، بسته به باقی‌مانده مختص اول آن‌ها بر ۳، تقسیم می‌کنیم. در هیچ کدام از این دسته‌ها، نمی‌تواند ۳ نقطه وجود داشته باشد (در واقع، اگر چنین سه نقطه‌ای وجود داشته باشند، از نوع‌های $(2, 0)$ ، $(1, 1)$ و $(2, 2)$ ، به ازای مقداری از r ، خواهند بود و، در نتیجه، مثلثی را تشکیل می‌دهند، که مختصات محل برخورد میان‌های آن، با عددهای درست بیان می‌شود). بنا بر این، در دو دسته، هر کدام دو نقطه، و در دسته سوم، یک نقطه وجود دارد. بدون این که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد که، این یک نقطه، از نوع $(0, 0)$ است. در این صورت، بین ۵ نقطه مفروض، نقطه‌های از نوع $(0, 1)$ و $(0, 2)$ وجود ندارد.

علاوه بر آن، در بین آن‌ها، نمی‌تواند دو نقطه از نوع (۱، ۱) و (۲، ۲) به طور هم‌زمان وجود داشته باشد (در غیر این صورت، این دو نقطه، همراه با نقطه (۰، ۰)، مثلثی را تشکیل می‌دهند که، در آن، میانها در نقطه‌ای با مختصات درست یکدیگر را قطع می‌کنند). به همین علت، دو نقطه از نوع (۱، ۲) و (۲، ۱) و یا از نوع (۱، ۰) و (۲، ۰) هم، به طور هم‌زمان، نمی‌تواند در بین آن‌ها وجود داشته باشد. به این ترتیب، بیش از ۴ نقطه برای ما، باقی نمی‌ماند. تناقض.

ب) هر نقطه (x, y, z) با مختصات درست را، متناظر با عددهای $g(x)$ ، $g(y)$ ، $g(z)$ قرار می‌دهیم که، به ترتیب، معرف باقی‌مانده عددهای x ، y و z بر ۳ هستند. چون $g(x)$ بیش از ۳ مقدار را قبول نمی‌کند، بنابراین، دست کم ۱۳ نقطه از بین ۳۷ نقطه مفروض، دارای مقدار $g(x)$ برابر هستند (در غیر این صورت، تعداد کل عددها، از 3×12 ، یعنی ۳۶ تجاوز نمی‌کند). به همین ترتیب، در بین این ۱۳ نقطه، دست کم ۵ نقطه، دارای $g(y)$ برابر هستند در این صورت، اگر مثلثی را با رأس‌های

$$(x_1, y_1, z_1); (x_2, y_2, z_2); (x_3, y_3, z_3)$$

در نظر بگیریم، مختصات نقطه برخورد میانهای آن، چنین می‌شود:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

در ضمن، اگر داشته باشیم:

$$g(x_1) = g(x_2) = g(x_3) \quad \text{و} \quad g(y_1) = g(y_2) = g(y_3)$$

آن وقت، x_0 و y_0 ، عددهایی درست‌اند، و z_0 تنها وقتی عددی درست است که داشته باشیم:

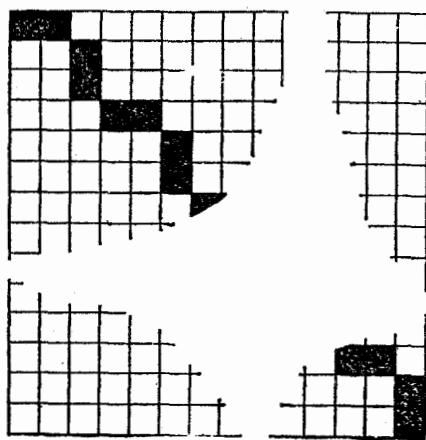
$$z_1 + z_2 + z_3 \equiv 0 \pmod{3}$$

ما، پنج نقطه داریم که، برای آن‌ها، همه عددهای $g(x)$ و همه عددهای $g(y)$ برابرند. اگر در این پنج نقطه، ۳ نقطه وجود داشته باشد که، برای آن‌ها، $g(z)$ ، مقدارهای ۰، ۱ و ۲ را بپذیرد، آن وقت، برای این نقطه‌ها

$$z_1 + z_2 + z_3 \equiv g(z_1) + g(z_2) + g(z_3) \equiv 0 + 1 + 2 \equiv 0 \pmod{3}$$

و اگر چنین نقطه‌هائی وجود نداشته باشد، آن وقت، عدد $g(z)$ در مورد ۵ نقطهٔ ما، بیش از دو مقدار را قبول نمی‌کند، در نتیجه، ۳ نقطه پیدا می‌شود که، در آن‌ها، $g(z)$ مقدارهایی برابر یکدیگر را قبول می‌کند که، از آن‌جا، عدد z متناظر با آن‌ها، عددی درست از آب درمی‌آید.

۰۴۸۸. فرض کنید، هر رخ، در روی صفحهٔ شطرنجی، در معرض خطر بیش از یک رخ دیگر نباشد. در این صورت، می‌توان چند زوج رخ را به نحوی جدا کرد که رخ‌های هر زوج یکدیگر را تهدید نکنند، ولی هیچ کدام از رخ‌های دیگر را در معرض تهدید قرار ندهند و، در ضمن، رخ‌هایی که در زوج‌ها جمع نشده‌اند، اصلاً مورد تهدید یکدیگر نباشند. تعداد این زوج رخ‌ها را A ، و تعداد رخ‌های تنها را B می‌گیریم. تعداد کل ردیف‌های افقی و ردیف‌های قائم، در صفحهٔ $3n \times 3n$ ، برابر است با $6n$. از بین آن‌ها، هر دو رخ که یکدیگر را تهدید کنند، سه خط را اشغال می‌کنند (دو ردیف افقی و یک ردیف قائم، و دو ردیف قائم و یک ردیف افقی) که، روی آن‌ها، هیچ رخ دیگری نمی‌تواند قرار گیرد؛ و هر رخ تنها، دو خط را اشغال می‌کند (یک ردیف افقی و یک ردیف قائم) که، در آن‌ها، رخ دیگری وجود



شکل ۱۳۵

ندارد. از این جا، باید داشته باشیم: $3A + 2B \leq 6n$. به این ترتیب، برای تعداد رخ‌ها، داریم:

$$2A + B \leq \frac{2}{3}(3A + 2B) \leq \frac{2}{3} \cdot 6n = 4n$$

از طرف دیگر، می‌توان $4n$ رخ را روی صفحه، با توجه به شرط‌های مسأله قرار داد، مثلاً، به ترتیبی که روی شکل ۱۳۵ نشان داده شده است (خانه‌هایی را سیاه کرده‌ایم که می‌توان، رخ‌ها را، در آن‌ها قرار داد). بنابراین، حداکثر تعداد رخ‌ها، برابر است با $4n$.

۴۸۹. در یک صفحه شطرنجی $m \times m$ ، با $m!$ روش می‌توان m رخ را طوری قرار داد که یکدیگر را تهدید نکنند، زیرا رخ را به m طریق در ردیف افقی اول، $m-1$ طریق در ردیف افقی دوم، ...، و یک طریق در ردیف افقی آخر می‌توان قرار داد. فرض کنید، حکم مسأله درست نباشد. در این صورت، اگر صفحه شطرنجی را، به همان طریقی که در مسأله آمده است، رنگ کنیم، در این صورت، در هر ترتیبی از رخ‌ها، باید دو تا از آن‌ها که یکدیگر را تهدید می‌کنند، در دو خانه هم رنگ قرار گیرند. بنابراین، تعداد همه گونه‌های استقرار رخ‌ها (یعنی $n!$)، از $(n-2)!$ تجاوز $\frac{n^2}{2}$ نمی‌کند، زیرا هر دو رخ را به $\frac{n^2}{2}$ طریق می‌توان در خانه‌های هم رنگ قرار داد و، سپس، بقیه $n-2$ رخ را به $(n-2)!$ طریق مستقر کرد. به این ترتیب، به دست می‌آید:

$$n! \leq \frac{n^2}{2} (n-2)! \implies n-1 \leq \frac{n}{2} \implies n \leq 2$$

که با شرط مسأله متناقض است.

۴۹۰. فرض می‌کنیم، حکم مسأله درست نباشد. در این صورت، برای هر مقدار $n \dots 2, 1, i$ ، دو سطر پیدا می‌شود که، در آن‌ها، تنها عنصر i ام با هم فرق می‌کند. برای هر i ، چنین زوجی را تثبیت می‌کنیم و گراف زیر

$(0, 0, x)$ ، $(0, y, 0)$ ، $(z, 0, 0)$ داده شده باشد که، در آنها، x و y و z ، همهٔ عددهای درست از ۱ تا ۱۹۸۲ را قبول می‌کنند. ثابت می‌کنیم، تنها یک رنگ آمیزی منحصر برای بقیهٔ نقطه‌های مجموعهٔ E وجود دارد که با شرطهای مسأله سازگار باشد. برای اثبات، این تابع را در نظر می‌گیریم:

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{نقطهٔ } (x, y, z) \text{ قرمز} \\ 1 & \text{نقطهٔ } (x, y, z) \text{ آبی} \end{cases}$$

که مقدار $f(x, y, z)$ ، به صورت یک ارزشی، رنگ نقطهٔ (x, y, z) را تعیین می‌کند. عمل $a \oplus b$ (جمع نسبت به مدول ۲) را، به صورت زیر می‌دهیم:

$$a \oplus b = \begin{cases} 0 & (a+b) \text{ زوج} \\ 1 & (a+b) \text{ فرد} \end{cases}$$

و فرض می‌کنیم:

$$f(x, y, z) = f(x, 0, 0) \oplus f(0, y, 0) \oplus f(0, 0, z)$$

آزمایش نشان می‌دهد که، برای نقطه‌های مفروض قبلی، این دستور هم درست است و هر مستطیل با یال‌های موازی محورها، دارای تعداد زوجی رأس‌های قرمز است. مثلاً

$$f(x_1, y_1, z) \oplus f(x_2, y_1, z) \oplus f(x_1, y_2, z) \oplus f(x_2, y_2, z) = 0$$

یعنی، بنا بر حکمی که در بالا ثابت کردیم، رنگ آمیزی حاصل، با شرطهای مسأله، سازگار است. با توجه به همان حکم، این رنگ آمیزی منحصر به فرد است، زیرا برای آن، باید شرطهای زیر برقرار باشد:

$$f(x, y, 0) = f(0, 0, 0) \oplus f(x, 0, 0) \oplus f(0, y, 0),$$

$$f(x, 0, z) = f(0, 0, 0) \oplus f(x, 0, 0) \oplus f(0, 0, z),$$

$$f(0, y, z) = f(0, 0, 0) \oplus f(0, y, 0) \oplus f(0, 0, z),$$

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &= f(0, 0, z) \oplus f(x, 0, z) \oplus f(0, y, z) = \\
 &= f(0, 0, z) \oplus f(0, 0, 0) \oplus f(x, 0, 0) \oplus f(0, 0, z) \oplus \\
 &\quad \oplus f(0, 0, 0) \oplus f(0, y, 0) \oplus f(0, 0, z) = \\
 &= f(x, 0, 0) \oplus f(0, y, 0) \oplus f(0, 0, z)
 \end{aligned}$$

به این ترتیب، تعداد رنگ آمیزی‌های ممکن، برابر است با

$$2^1 + 2 \times 1982 = 25947$$

ضمیمه‌ها

ضمیمه الف

توضیح‌هایی درباره برخی مسأله‌ها

۰۳. در مسأله اصلی مربوط به المپیاد چکوسلواکی، فرض شده است: در سطر اول ۳ عدد فرد وجود دارد و اثبات این مطلب خواسته شده است که، در هر سطر، با آغاز از سطر دوم، عددی زوج وجود دارد.
۰۶. در مسأله اصلی، این سه عدد، تنها جواب مسأله، داده شده است.
۰۹. در مسأله اصلی، خواسته شده است که ۵ عدد برای $n \in \mathbb{N}$ ، با توجه شرط، پیدا کنند.

۰۲۵. مسأله، به صورت هندسی تنظیم شده است: ثابت کنید، روی

منحنی

$$(x+ay+c)(x+by+d)=2$$

- بیش از چهار نقطه مختلف وجود ندارد که دارای مختصات درست باشند.
۰۳۰. در مسأله اصلی، جواب‌های درست و غیر منفی معادله خواسته شده است. در ضمن، اگر دو جواب، از تبدیل ردیف‌های x_1, \dots, x_{14} به دست آید، يك جواب به حساب آمده است.

۰۳۲. در مسأله اصلی خواسته شده است که، عددهای گویای X و Y را طوری پیدا کنیم که در برابری زیر صدق کنند:

$$\sqrt{2\sqrt{3}-3} = X^{\frac{1}{4}} - Y^{\frac{1}{4}}$$

یادآوری می‌کنیم که، حل مسأله که در کتاب داده شده است، پاسخی به این پرسش را می‌دهد، زیرا، به ازای $X = 3x^2$ و $Y = 3y^2$ داریم:

$$\sqrt{x\sqrt{3}} = X^{\frac{1}{4}} \quad \text{و} \quad \sqrt{y\sqrt{3}} = Y^{\frac{1}{4}}$$

۰۳۹. مسأله، در اصل، به صورت هندسی تنظیم شده است: تعداد مثلث‌های قائم‌الزاویه با ضلع‌های درست و حداقل ضلع مجاور به زاویه قائمه (برابر n) پیدا کنید (ما، این تعداد را a_n نامیده‌ایم). در بخش الف) دستوری برای a_n خواسته شده است. مسأله، دارای دو پرسش ب) و ج) است که ما آن‌ها را در بخش‌های الف) و ب) جمع کرده‌ایم.

۰۶۶. در مسأله اصلی، اثبات این مطلب خواسته شده است که: دنباله h_1, h_2, \dots نامتناوب است.

۰۸۷. بخش ب) که، در واقع، نیرومندتر از حکم بخش الف) است، به وسیله ل.آ. ایوانوف، شرکت‌کننده المپیاد بین‌المللی سال ۱۹۸۵ حل شده است.

۰۱۰۲. مسأله، در اصل، به این صورت، تنظیم شده است: K را دایره‌ای به مرکز مبدا مختصات می‌گیریم. ثابت کنید، برای هر بردار \mathbf{u} ، عدد طبیعی n وجود دارد؛ به نحوی که تبدیل دایره K ، ضمن انتقال به اندازه بردار $n\mathbf{u}$ ، شامل نقطه‌ای با مختصات درست باشد. در واقع، این تنظیم، با آنچه در کتاب آمده، هم‌ارز است.

۰۱۲۷. در اصل، عددها را مثبت فرض کرده‌اند.

۰۱۲۹. خواسته شده است که حکم مسأله را در حالت

$$0 < a < 1, \quad 0 < b < 1, \quad 0 < c < 1$$

هم ثابت کنند.

۱۳۷. فرض شده است $0 < x \leq 1$ و $0 < a < \infty$ ، و اثبات نابرابری خواسته شده است.
۱۳۸. در مورد α ، شرط اضافی و غیر لازم $\alpha \geq 0$ هم داده شده است.
۱۴۱. اثبات حکم، برای عددهای مختلط و دلخواه a_1, \dots, a_n خواسته شده است.
۱۶۸. در اصل خواسته شده است: شرطی برای ضلع‌های مثلث پیدا کنید که، به ازای آن، مرکز ثقل مثلث بر مرکز ثقل مرزهای آن منطبق باشد.
۲۰۰. در المپیاد جمهوری دموکراتیک آلمان، تنها بخش الف) و با تنظیم زیر داده شده است: دو دایره مختلف K و K' ، از رأس‌های A و B از مثلث ABC عبور کرده‌اند، که نقطه‌های M و M' ، مرکزهای آن‌ها، روی محیط دایره محیطی مثلث ABC واقع‌اند. ثابت کنید، مرکز دایره محیطی مثلث ABC روی K یا K' قرار دارد.
۲۲۰. بلژیک، مسأله را به صورت زیر تنظیم کرده است: روی ضلع‌های مثلث KLM ، مثلث‌های متساوی‌الساقین و متشابه $(KR=RM)KRM$ و $(LQ=QM)LQM$ ، $(KP=PL)KPL$ ساخته شده‌اند. در ضمن، مثلث‌های KLM و KPL در دو سمت متفاوت خط راست KL ، و مثلث‌های LQM و KLM ، و مثلث KRM در همان سمت مثلث KLM نسبت به خط راست KM قرار دارند. ثابت کنید، $LPRQ$ ، متوازی‌الاضلاع است. در این جا، شرط متساوی‌الساقین بودن مثلث‌های KPL ، LQM و KRM ، در واقع، اضافی است.
۲۲۶. ۱۵ نقطه‌ای را که در مسأله داده شده است، می‌توان به عنوان مرکز توپ‌های بیلیارد در نظر گرفت.
۲۳۰. این مسأله، به مسأله سیلوستر معروف است.
۲۳۲. در اصل، به این صورت تنظیم شده است: در باره مجموعه مرکزهای تقارن، به شرطی که بیش از یکی باشند، چه می‌توان گفت؟ به جز این، خواسته شده است، نمونه‌ای از یک مجموعه آورده شود که بیش از یک مرکز تقارن داشته باشد.

۰۲۳۳. علاوه بر این، خواسته شده است، L را در حالت‌هایی که M ، مربع یا مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، پیدا کنند.
۰۲۴۲. در اصل، اثبات این مطلب خواسته شده است که، طول خط شکسته، از ۱۲۴۸ کمتر نیست.
۰۲۷۶. در اصل مسأله، شکل مثلث خواسته شده است.
۰۲۷۷. در اصل مسأله، شرط شده است که، هر رأس چندضلعی کوچکتر، روی هر ضلع از چندضلعی بزرگتر قرار دارد. در ضمن، شرط $n > 3$ هم لازم نیست.
۰۲۸۷. در اصل، چهاروجهی منتظمی به ضلع a داده شده است.
۰۳۰۱. در اصل، گفته شده است که، فصل مشترک صفحه‌های α و β ، خط راست CD را قطع می‌کند.
۰۳۰۹. برای R و r ، شرط $R > 2r$ داده شده است.
۰۳۱۵. هرم ناقص، با قاعده‌های مثلثی شکل در نظر گرفته شده است.
۰۳۵۰. در المپیاد چکوسلواکی، تنها می‌نیمم تابع f خواسته شده است.
۰۳۵۸. در اصل، مسأله شامل دو بخش است؛ تفاوت بخش ب) با آنچه در کتاب آمده، در این است که به جای شرط $f'(x_2) = 0$ ، گفته شده است: تابع f در نقطه x_2 دارای اکستریمم است و، در ضمن $x_2 < x_1$. بخش الف) حالت خاصی از بخش ب) (متناظر با مقادارهای $x_2 = 1$ و $x_1 = \sqrt{2}$ است.
۰۳۶۲. در اصل، $f(x)$ و $g(x)$ ، چندجمله‌ای فرض شده‌اند.
۰۳۶۶. در اصل خواسته شده است، مقادارهای متناظر a و b از بازه [۰، ۱] پیدا شود.
۰۳۷۸. در اصل، روی تابع‌های g و h ، محدودیت‌های غیر لازمی قایل شده‌اند. گفته شده است که، هر دوی این تابع‌ها، برای مقادارهای $n \in \mathbb{N}$ ، هر مقدار را بیش از یک بار قبول نمی‌کنند و مجموعه این مقادارها، بر \mathbb{N} منطبق است.
۰۳۹۰. در ضمن، اثبات این برابری هم خواسته شده است:

$$\sum_{l=0}^{\infty} f(l) = \frac{1}{1-f(1)} \quad (f(1) < 1 \text{ با شرط})$$

علاوه بر این، مسأله، بخش دومی هم دارد که، در آن، حل معادله تابعی زیر خواسته شده است:

$$f(x)f(y) \equiv f(x-y) \quad x, y \in \mathbb{R}$$

۳۹۴. برای α و β ، شرط غیر لازم $\alpha \neq \beta$ داده شده است.

۴۱۱. در اصل، خواسته شده است، خارج قسمت $R(x)$ ، در تقسیم

$P(x)$ بر $Q(x)$ پیدا شود و بخش‌های زیر هم حل شود:

ب) فرض کنید $E(t)$ به معنای عبارتی باشد که از $R(x)$ ، با تبدیل

x^k به $\cos kt$ به دست آمده است ($k = 1, \dots, n-2$). معادله $E(t) = 0$ را حل کنید.

ج) مجموع مجذورهای ضریب‌های $R(x)$ را به دست آورید.

۴۴۹. در اصل، اثبات این نابرابری خواسته شده است:

$$|P(x)| \leq (2n+1)C_{2n}^n$$

آنچه در کتاب آورده‌ایم، قوی‌تر از این حکم است، زیرا

$$C_{2n}^k = C_{2n}^n \frac{n}{n+1} \dots \frac{(k+1)}{2n-k} < C_{2n}^n, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

$$C_{2n}^k = C_{2n}^{2n-k} < C_{2n}^n \quad (k = n+1, \dots, 2n)$$

یعنی

$$(2n+1)C_{2n}^n > C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \dots + C_{2n}^n + \dots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = 2^{2n}$$

ضمیمه ب

مسابقه‌های ریاضی در کشورهای مختلف

I

المپیادهای ریاضی دانش‌آموزان در کشورهای مختلف

۱. آرژانتین

در آرژانتین، المپیادهای ریاضی را برگزار نمی‌کنند، ولی در سال ۱۹۶۵، دانشگاه کوردوب، مسابقه‌ای زیر نام «جشن دانش» ترتیب داد. دانش‌آموزان دبیرستان‌های سراسر کشور، هر سال، کارهای علمی بکر و تازه خود را، به این دانشگاه می‌فرستند. این کارها می‌توانند کار انفرادی و یا کار دسته‌جمعی دانش‌آموزان باشند. در کشور، مجله «بولتن ریاضی»، که از سال ۱۹۲۸ پایه‌گذاری شده، منتشر می‌شود.

۲. اسپانیا

از سال ۱۹۶۴، در اسپانیا، به‌طور منظم، المپیادهای ریاضی دبیرستانی در دو نوبت، انجام می‌گیرد. در هر نوبت، به شرکت‌کنندگان، ۸ مسأله، در جریان ۲ روز داده می‌شود. مسأله‌ها، بین ساده‌ترین تا دشوارترین نوع وجود دارد که شامل برخی عنصرهای آنالیز هم می‌شوند.

۳. استرالیا

نخستین مسابقه ریاضی در استرالیا، در سال ۱۹۷۶، در چارچوب پایتخت کشور انجام شد. این مسابقه، ۳۳ مدرسه و ۱۳۰۰ دانش‌آموز را دربر گرفت. مسابقه به صورت آزمایش کتبی در زمینه ریاضیات دبیرستانی برگزار شد. از سال ۱۹۷۸، به مسابقه شکل عمومی داده شد و به نام مسابقه ریاضی استرالیا، سراسر کشور را دربر گرفت. در سال ۱۹۸۱، نخستین المپیاد ریاضی استرالیا سازمان داده شد.

۴. اطریش

المپیادهای ریاضی دبیرستانی، در اطریش، از سال ۱۹۷۰ آغاز شد.

این المپیادها، به صورت خاصی برگزار می‌شود: تنها دانش آموزانی (حتی برای يك نوبت) حق شرکت در المپیاد را دارند که دوره‌های آمادگی خاصی را گذرانده باشند. این دوره‌ها، در دو سطح مختلف‌اند:

۱) دورهٔ مقدماتی، که هر دانش آموزی حق دارد، يك سال در آن شرکت کند. این دوره را، همهٔ دانش آموزان سال‌های نهم تا یازدهم، در صورت تمایل آن‌ها، می‌توانند ببینند (دورهٔ دبیرستانی، در اطریش، در سال دوازدهم تحصیل تمام می‌شود)؛ گاهی، دانش آموزان کوچکتر هم، استثنائاً، حق ورود پیدا می‌کنند؛

۲) در دورهٔ بعدی، که در سطح بالاتری است، تنها کسانی می‌توانند وارد شوند، که توانسته باشند، دورهٔ اول را با موفقیت پشت سر بگذارند. در دورهٔ دوم، بعد از مصاحبهٔ ورودی، بقیهٔ دانش آموزان کلاس‌های ۱۱ و ۱۲ هم پذیرفته می‌شوند.

از سال ۱۹۷۵، المپیادهای اطریش، برای دانش آموزان دورهٔ اول در ۲ نوبت و برای دانش آموزان سطح بالا (دورهٔ دوم) در ۳ نوبت انجام می‌شود. نوبت اول، آزمایشی مسابقه‌ای است که همهٔ دانش آموزان در دوره‌های آمادگی می‌توانند در آن شرکت کنند. کسانی که در این دوره موفق شوند، به دور دوم المپیاد راه می‌یابند. در این مرحلهٔ دوم، قریب ۳۵ نفر از بهترین‌ها انتخاب می‌شوند که حق شرکت در المپیاد نهائی را دارند در اطریش، مجله‌ای منتشر می‌شود که به موضوع‌ها و مسأله‌های رشتهٔ فیزیک-ریاضی دبیرستانی می‌پردازد.

نمونه‌ای از مسأله‌های المپیاد اطریش (سال ۱۹۸۶)

دو اول

۰۱. ثابت کنید، برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ بزرگتر از ۲، می‌توان در n ضلعی منتظم، يك دایره محاط کرد.

۰۲. در صفحهٔ مختصات، برای مقادیرهای مفروض $k, l \in \mathbb{N}$ ، مطلوب است تعداد لوزی‌هایی که، رأس‌های آن‌ها، مختصات $x \in \mathbb{N}$ ، $y \in \mathbb{N}$ را، با شرط $x \leq k$ و $y \leq l$ داشته باشند و قطرهای آن‌ها، موازی محورهای مختصات باشد.

۳. همه مقادیرهای $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$ را پیدا کنید که، برای آن‌ها، دنباله $\{a_n\}$ ، که در برابری زیر صدق می‌کند:

$$a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1}}{3a_{n-1} - 2a_n}, \quad (n \in \mathbf{N})$$

شامل بی‌نهایت جمله از عددهای درست باشد.

دو دو

۴. بزرگترین مقدار $n \in \mathbf{N}$ را پیدا کنید که، برای آن، عدد n رقمی (در دستگاه دهدهی) $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ وجود داشته باشد، به نحوی که همه رقم‌های آن با هم فرق داشته باشند و، در ضمن، به ازای هر $i = 1, \dots, n$ ، عدد $\overline{a_1 a_2 \dots a_i}$ بر $i!$ بخش پذیر باشد. برای این مقدار n ، همه عددهای n رقمی را معین کنید.

۵. ثابت کنید، برای هر مقدار طبیعی $n > 3$ ، واسطه حسابی طول‌های همه ضلع‌های یک n ضلعی محدب، از واسطه حسابی طول‌های همه قطرهای آن، کوچکتر است.

۶. همه تابع‌های $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ را پیدا کنید که، برای مقدار مفروض $n \in \mathbf{N}$ ، در اتحاد زیر صدق کنند:

$$f(m+k) \equiv f(mk-n), \quad m, k \in \mathbf{N}, \quad mk > n$$

۵. امریکا

در امریکا، هر سال، مسابقه‌های ریاضی متعددی، باخصلت‌ها و هدف‌های متفاوت، بین دانش‌آموزان دبیرستانی برگزار می‌شود. مثلاً در سال ۱۹۵۵، دست کم، ۶۰ مسابقه جریان داشت.

بسیاری از این مسابقه‌ها را دانشگاه‌ها ترتیب می‌دهند تا بچه‌های با استعداد را، به‌عنوان دانشجویان آینده، کشف کنند. بیشترین تعداد این گونه مسابقه‌ها، مربوط به کنکورهای ریاضی دانشگاه استانفورد است که از سال ۱۹۴۶ به بعد، هر ساله، انجام می‌گیرد. این کنکورها، به ابتکار جورج پولیا، استاد دانشگاه استانفورد، برنامه‌ریزی شد. این کنکورها، خیلی شبیه مسابقه‌های

مجارستانی آتووش است که، جرج پولیا، زمانی خود در آن شرکت کرده و موفق شده بود.

مسابقه‌های دیگر را، انجمن ریاضی آمریکا و گروه ریاضی آمریکا سازمان‌دهی می‌کنند.

از سال ۱۹۵۸، به کمک MAA و یک شرکت امریکایی، هر سال، مسابقه‌های ملی انجام می‌شود که دانش‌آموزان کانادایی هم در آن شرکت می‌کنند. در این مسابقه‌ها، ۵۰ مسأله با ۸۰ دقیقه وقت به دانش‌آموزان داده می‌شود که بیشتر آن‌ها، خصلت پرش‌های کوتاه را دارند.

نمی‌توان از مسابقه بزرگی که در سال ۱۹۵۰ در نیویورک انجام گرفت یاد نکرد. در این مسابقه، که بزرگترین مسابقه آن سال بود و به وسیله بخش نیویورک MAA سازمان داده شده بود، علاوه بر ایالت نیویورک، دانش‌آموزان بسیاری از ایالت‌های دیگر هم، شرکت کرده بودند.

از سال ۱۹۷۲، المپیادهای ریاضی ملی در آمریکا برگزار می‌شود که به وسیله AMS ترتیب داده شده است. برای شرکت در المپیاد، به کسانی اجازه داده می‌شود که از عهده آزمایش در سال گذشته تحصیلی برآمده و یا در المپیادهای ریاضی دبیرستانی به موفقیت رسیده باشند. تعداد شرکت‌کنندگان، از ۱۰۰ تجاوز نمی‌کند. هر شرکت‌کننده، ورقه المپیاد را در مدرسه خودش می‌نویسد. در المپیاد ۵ مسأله داده می‌شود که باید در ۳ ساعت آن‌ها را حل کنند. تصحیح ورقه‌ها، در یک مرکز انجام می‌گیرد. هیأت نمایندگی آمریکا، در المپیاد بین‌المللی ریاضی، از بین کسانی انتخاب می‌شوند که در المپیاد ملی موفق شده‌اند.

در ایالت‌های جداگانه آمریکا هم، مسابقه‌های ریاضی عام‌تری وجود دارد. مثلاً، مسابقه‌های ریاضی ایالت ویسکانسین، از سال ۱۹۶۵ به بعد جریان دارد. در این مسابقه‌ها، بیش از همه، به سرعت حل مسأله‌ها، توجه می‌شود. در سال‌های اخیر، کنکورهای کالج دو ساله، شهرت زیادی در آمریکا

1. The American Mathematical Society – AMS.

2. The Mathematical Association of America – MAA.

به دست آورده است. مسأله‌های مسابقه‌های ریاضی آمریکا، در مجله‌های زیر منعکس می‌شوند:

«The Mathematics, Teacher», «American Mathematical Monthly», «Mathematics Magazine»

۶. انگلستان

در آغاز سال‌های ۶۰، تقریباً در ۳۰۰ مدرسه انگلستان، تست‌های ریاضی داده می‌شد که، اقتباسی بود از مسابقه‌های ملی آمریکا (که به وسیله MAA برگزار می‌شد). در سال ۱۹۶۵، نخستین المپیاد ریاضی بریتانیا برگزار شد که مسأله‌های آن را، ک. هیمن، استاد دانشگاه لندن طرح کرده بود. برای حل مسأله‌ها، ۳ ساعت وقت به دانش‌آموزان داده شد. از آن سال به بعد، المپیادهای ریاضی بریتانیا، به طور منظم برگزار می‌شود. مجله‌های زیر در انگلستان، به موضوع‌های مربوط به آموزش ریاضی می‌پردازند.

«The Mathematical Gazette», «Mathematics in School», «Mathematical Teacher»

نمونه‌ای از مسأله‌های المپیادهای انگلستان (سال ۱۹۸۶)

۱. کسر $\frac{m}{n}$ را، به کسری ساده نشدنی تبدیل کنید، به شرطی که

$$m = 2244851485148514627$$

$$n = 8118811881188118000$$

۲. دو خط راست موازی l_1 و l_2 را بردایره S مماس کرده‌ایم. دایره S_1 به شعاع r_1 بردایره S و خط راست l_1 مماس است. دایره S_2 به شعاع r_2 بر دایره‌های S و S_1 و خط راست l_2 مماس است. همه دایره‌ها، نسبت به هم، مماس بیرونی‌اند. شعاع دایره S را پیدا کنید.

۳. ثابت کنید، اگر عددهای طبیعی m و n و k ، در این برابری

صدق کنند:

$$1 + m + n\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^{2k-1}$$

آن وقت، عدد m ، مجذور يك عدد درست است.

۰۴ a و b و c ، ضلع‌های مثلثی با يك زاویه منفرجه‌اند. حداكثر مقدار

D را پیدا کنید، به شرطی که داشته باشیم:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2} > D$$

۰۵. مطلوب است تعداد تبدیل‌های (a_1, a_2, \dots, a_n) ، از گروه عددهای

$(1, 2, \dots, n)$ ، که در این شرط‌ها صدق کنند:

$$a_i < a_{i+2} \quad (1 \leq i \leq n-2)$$

$$a_i < a_{i+3} \quad (1 \leq i \leq n-3)$$

۰۶ AB ، AC و AD را، سه یال يك مکعب می‌گیریم. نقطه E را

روی نیم خط راست AC طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم:

$AE = 2AC$ ؛ همچنین نقطه F را روی نیم خط راست AD ، طوری در نظر

گرفته‌ایم که $AF = 3AD$. ثابت کنید، مساحت مقطع مکعب با هر صفحه

موازی صفحه BCD ، برابر است با مساحت مقطع چهاروجهی $ABEF$ با

همان صفحه.

۰۷. ایتالیا

انجمن ریاضی ایتالیا، در سال‌های ۱۹۶۲-۱۹۶۸، مسابقه‌های محلی

(در محدوده يك شهر) و در سال‌های ۱۹۶۳-۱۹۶۷، مسابقه‌های ملی

دیبرستان‌ها را سازمان داد. مسأله‌هایی که در این مسابقه‌ها داده می‌شد، از

مسأله‌های محدود برنامه دیبرستانی تا مسأله‌هایی در سطح المپیادها، نوسان

داشت. مسأله‌های ریاضی مسابقه‌ها، در مجله «Archimedes» (ارشمیدس)

چاپ شده است.

۰۸. بلژیک

در آغاز سال‌های ۶۰، در بلژیک، برای مسابقه‌های ریاضی، از

مسأله‌هایی استفاده می‌کردند که در امریکا، در مسابقه‌هایی که به وسیله MAA

سازمان یافته بود، مطرح شده بود. از سال ۱۹۶۵، مسأله‌های مجله «L'enseignement» هم، استفاده می‌کردند. از سال ۱۹۷۶ بود که، بلژیک، المپیادهای ریاضی خاص خود را، آغاز کرد. از سال ۱۹۸۲، المپیاد در ۳ دور (دور دبیرستانی، دور نیمه نهائی، دور نهائی)، به طور جداگانه، برای دو گروه سنی انجام می‌گیرد. دور المپیاد دبیرستانی به صورت کنترل کارهاست، به این معنا که، برای هر مسأله، چند جواب داده می‌شود که دانش‌آموز باید جواب درست را از بین آن‌ها پیدا کند. در بلژیک، دو مجله برای دانش‌آموزان و معلمان وجود دارد: «Mathesis» و «Nico» (از نام «نیکلا بودباکی»). مجله‌ای هم وجود دارد که به آموزش ریاضی می‌پردازد: «Les mathématiques et la pédagogie»

۹. بلغارستان

المپیادهای ریاضی، از سال ۱۹۵۰ به‌طور مرتب هر سال در بلغارستان برگزار می‌شود. در حال حاضر، المپیاد، برای دانش‌آموزان کلاس‌های ۸ تا ۱۱ دبیرستان‌های عمومی در ۳ دور و برای مدرسه‌های حرفه‌ای ۳ تا ۵ دور؛ و برای دانش‌آموزان کلاس‌های ۵ تا ۷ دبیرستان‌ها ۲ دور و برای مدرسه‌های حرفه‌ای ۱-۲ دور انجام می‌شود. برای انتخاب هیأت نمایندگی المپیاد بین‌المللی ریاضی، یک دور دیگر مسابقه، بین دانش‌آموزان کلاس ۱۱ و سال آخر مدرسه‌های حرفه‌ای ترتیب داده می‌شود. دو مجله زیر، در آماده‌کردن دانش‌آموزان نقش عمده‌ای دارند: «آموزش ریاضی» (از سال ۱۹۵۸) و «ریاضیات» (از سال ۱۹۶۲).

نمونه‌ای از مسأله‌های المپیاد بلغارستان (سال ۱۹۸۶)

۰۱. کمترین مقدار $n \in \mathbb{N}$ را پیدا کنید که، به ازای آن، عدد $n^2 - n + 11$ به صورت ضرب چهار عدد اول در آید (لزومی ندارد، این عددها، مختلف باشند).

۰۲. ثابت کنید، اگر ریشه‌های چند جمله‌ای درجه دوم $P(x)$ ، به بازه $[-1, 1]$ تعلق داشته باشند، و در ضمن $\max_{|x| \leq 1} |P(x)| = 1$ ، آن وقت، این نابرابری برقرار است:

$$\max |P'(x)| \geq 1, (|x| \leq 1)$$

۳. حداکثر مقدار حجم مکعبی را پیدا کنید که بتوان آن را در یک چهار وجهی منتظم به یال واحد جا داد، به نحوی که یکی از قطرهای مکعب، بر ارتفاع چهاروجهی واقع باشد.

۴. کمترین مقدار عدد طبیعی $n > 2$ را پیدا کنید که، به ازای آن، چنان n ضلعی با نقطه A در درون آن وجود داشته باشد، به نحوی که بتوان روی هر ضلع n ضلعی نقطه‌ای انتخاب کرد که از نقطه A دیده نشود. ثابت کنید، این مقدار n ، دارای ویژگی زیر است: درون هر n ضلعی، می‌توان دو نقطه B و C را طوری پیدا کرد که هر نقطه n ضلعی، از نقطه B یا نقطه C دیده شود.

۵. برای مقدارهای مفروض $a > 0$ ، $\varphi \in (0, 180^\circ)$ و نقطه A غیر واقع بر محیط دایره مفروض، مکان هندسی نقطه M را پیدا کنید که، برای آن، بتوان روی محیط دایره نقطه B را طوری انتخاب کرد که داشته باشیم:

$$\frac{AM}{AB} = a, \quad \widehat{BAM} = \varphi$$

۶. ثابت کنید، در دنباله عددهای a_1, a_2, \dots که به ازای مقداری از $b \in (0, 1)$ در نابرابری

$$a_{n+1} \leq \left(1 + \frac{b}{n}\right) a_n - 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

صدق می‌کند، دست کم، یک عدد منفی وجود دارد.

۱۰. جمهوری دموکراتیک آلمان

از سال ۱۹۵۶، مسابقه‌های ریاضی جداگانه‌ای، بین دانش‌آموزان هر شهر، در جمهوری دموکراتیک آلمان برگزار می‌شد. در سال ۱۹۶۰، نخستین المپیاد در لایپزیگ و در سال ۱۹۶۱، نخستین المپیاد عمومی‌تر در برلن سازمان داده شد. نخستین المپیاد سراسری کشور، در سال ۱۹۶۲ برگزار

شد. از این زمان، المپیادهای ریاضی دانش آموزان کلاس‌های ۱۱ و ۱۲، در جمهوری دموکراتیک آلمان، در ۴ دور جریان دارد (دبیرستانی، ناحیه‌ای، نیمه نهائی و نهائی)؛ برای دانش آموزان کلاس‌های ۷ تا ۱۰ در ۳ دور و برای کلاس‌های ۵ و ۶ در ۲ دور انجام می‌شود. در المپیادهای محلی ۴ مسأله و در المپیادهای ناحیه‌ای، شش مسأله به دانش آموزان داده می‌شود. مسأله‌های المپیادهای داخلی و المپیادهای بین‌المللی، و راه‌حل‌های آن‌ها، در مجله «Alpha» (با آغاز از سال ۱۹۶۷) به طور منظم چاپ می‌شود. در جمهوری دموکراتیک آلمان، مجله «ریاضیات در دبیرستان» هم برای دبیران دبیرستان‌ها، وجود دارد.

۱۱. جمهوری فدرال آلمان

نخستین کنکور ریاضی را «انجمن علمی آلمان» در سال ۱۹۷۰، در جمهوری فدرال آلمان سازمان داد. همه دانش آموزان کلاس‌های ۱۱ تا ۱۳، حق شرکت در کنکور را داشتند. کنکور از ۳ دور تشکیل می‌شد. در دو دور اول ۴ مسأله داده می‌شد که به صورت کتبی بود، و دور سوم به صورت شفاهی انجام می‌گرفت، در جمهوری فدرال آلمان، مجله‌های زیر به بحث‌های مربوط به ریاضیات و آموزش ریاضی می‌پردازند.

«Praxis der Mathematik»، «Arximedes»، «Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht»

۱۲. چکوسلواکی

المپیادهای ریاضی، از سال ۱۹۵۱، سالیانه در چکوسلواکی برگزار می‌شود. در حال حاضر، شرکت کنندگان در المپیاد به ۴ گروه سنی، به نام گروه‌های A ، B ، C و D تقسیم می‌شوند (به ترتیب، دانش آموزان ۱۸ ساله، ۱۷ ساله، ۱۶ ساله و ۱۴ یا ۱۵ ساله). المپیاد، برای گروه A در ۳ مرحله و برای گروه‌های دیگر در دو مرحله انجام می‌گیرد. مرحله اول به صورت غیایی است و شرکت کنندگان باید مسأله‌هایی را که، به طور متناوب چاپ می‌شود، در منزل حل کنند. مرحله دوم و مرحله سوم (برای گروه A)

حضور است.

مجله «Matematika ve škole» از سال ۱۹۵۱ در چکوسلواکی منتشر می‌شود که مخصوص دبیران ریاضی دبیرستان است. علاوه بر آن، مجله زیر هم، در چکوسلواکی، برای دانش آموزان چاپ می‌شود:

«Rozledy matematicko – fysikolni»

نمونه‌ای از مسأله‌های المپیادهای چکوسلواکی (سال ۱۹۸۶)

۰۱ برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ ، مطلوب است حداکثر تعداد ممکن برای جمله‌های مجموعه A ، که از زیر مجموعه‌های مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ تشکیل شده و ویژگی زیر را دارد: برای هر دو مجموعه BEA و CEA ، مجموعه

$$(B \cup C) \setminus (B \cap C)$$

دارای تعداد زوجی عضو باشد.

۰۲ ثابت کنید، اگر چند جمله‌ای $P(x)$ با ضرایب‌های درست و درجه $n \geq 3$ ، به ازای بعضی مقادیرهای $m \geq 3$ ، برای عددهای درست و مختلف x_1, \dots, x_m در برابری‌های زیر صدق کنند:

$$P(x_1) = P(x_2) = \dots = P(x_m) = 1$$

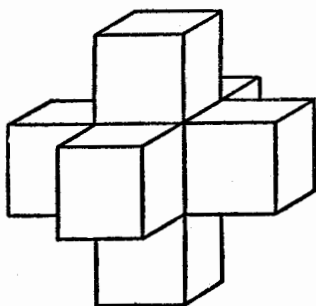
در آن صورت، $P(x)$ ، ریشه درست ندارد.

۰۳ ثابت کنید، تمامی فضا را می‌توان به «صلیب‌هایی» که هر کدام از آن‌ها شامل ۷ مربع واحد باشد، تقسیم کرد. نمونه‌ای از این «صلیب‌ها»، در شکل ۱۳۶ نشان داده شده است.

۰۴ روی مجموعه محدب و محدود M

واقع بر صفحه، سه نقطه C_1, C_2, C_3 واقع بر صفحه، سه نقطه C_1, C_2, C_3 را

انتخاب کرده‌ایم. نیم‌خط‌های غیرمتقاطع l_1, l_2, l_3 ، به ترتیب، با رأس‌های C_1, C_2, C_3 ، مکمل مجموعه $M \cup l_1 \cup l_2 \cup l_3$ را، به سه حوزه D_1, D_2, D_3 تقسیم می‌کنند. ثابت کنید، اگر مجموعه‌های محدب A و B با شرط‌های



شکل ۱۳۶

$$A \cap I_j = \emptyset = B \cap I_j, A \cap D_j \neq \emptyset \neq B \cap D_j, (j = 1, 2, 3)$$

سازگار باشند، آن وقت $A \cap B \neq \emptyset$.

۵. برای دنباله عددهای طبیعی a_1, a_2, \dots ، به ازای $n \in \mathbb{N}$ ، داریم:

$$a_1 = 1, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$$

ثابت کنید، برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ ، می توان عدد $m \in \mathbb{N}$ را پیدا کرد، به نحوی که داشته باشیم:

$$a_n a_{n+1} = a_m$$

۶. برای هر m و n از مجموعه $M \subset \mathbb{N}$ ، داریم:

$$|m - n| \geq \frac{1}{25} mn$$

ثابت کنید، مجموعه M ، شامل بیش از ۹ عضو نیست. آیا این مجموعه می تواند شامل ۹ عضو باشد؟

۱۳. چین

مسابقه های ریاضی، برای نخستین بار در چین، در سال ۱۹۵۶، در ۴ شهر انجام گرفت. در سال بعد، مسابقه ها را، به بسیاری شهرهای دیگر گسترش دادند. نمونه مشخص این مسابقه ها، المپیادهای سال های ۱۹۵۶ و ۱۹۵۷ در شانگهای بود. این مسابقه ها، در دو گروه سنی انجام گرفت: برای سال ماقبل آخر، و سال آخر دبیرستان (سال های دبیرستانی در چین، با ۱۲ سال تحصیل تمام می شود). هر کدام از این مسابقه ها، سه مرحله داشت. در سال های اخیر، المپیادهای ریاضی سراسری ترتیب داده شده است. مجله ای جالب، در زمینه ریاضیات دبیرستانی، برای معلمان و علاقه مندان به ریاضیات، به طور منظم، در چین منتشر می شود که، به طور مرتب، مسابقه هایی را برای حل مساله ها ترتیب می دهد.

۱۴. رومانی

نخستین مسابقه های ریاضی، برای سال های آخر دبیرستان، در رومانی،

در سال ۱۸۸۹، ترتیب داده شد. از سال ۱۹۰۲، این مسابقه‌ها، به طور منظم و به وسیلهٔ مجلهٔ «Gazeta Matematică» برگزار می‌شد (چاپ این مجله، از سال ۱۸۹۵ آغاز شده است). شکل مسابقه‌ها، در جریان زمان تغییر می‌کرد. تا سال ۱۹۴۸، به طور معمول، در دو مرحله انجام می‌گرفت. از سال ۱۹۵۰، دورهٔ دوم برگزاری المپیادهای ریاضی آغاز شد. از سال ۱۹۶۱، کار برگزاری المپیادها را، وزارت آموزش رومانی به عهده گرفت. در حال حاضر، المپیادهای رومانی در ۳ مرحلهٔ انجام می‌گیرد، که تنها دانش آموزان کلاس ۱۱ می‌توانند در آن شرکت کنند. مسأله‌های المپیادها، به طور منظم، در مجله‌ای که نام بردیم، چاپ می‌شود.

۰۱۵ سوئد

از سال ۱۹۶۱، «انجمن ریاضی سوئد» و مجلهٔ

«Svenska Dagbladet»

هر سال، مسابقه‌های ریاضی را، برای دانش آموزان دبیرستانی، سازمان می‌دهند. این مسابقه‌ها، در دو مرحله انجام می‌گیرد. مرحلهٔ اول برای ۳۰۰ دانش آموز، و مرحلهٔ دوم، برای ۱۲ تا ۱۵ نفر از بهترین‌ها.

نمونه‌ای از مسأله‌های المپیادهای سوئد (نوامبر سال ۱۹۸۵)

۰۱ ثابت کنید، برای هر مقدار $a > b > 0$ ، نابرابری زیر برقرار است:

$$\frac{(a-b)^2}{8a} < \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8b}$$

۰۲ کوچکترین عدد طبیعی را پیدا کنید که دارای ویژگی زیر باشد:

اگر رقم اول آن را، در عدد نویسی دهدهی، به آخر ببریم، عساده مفروض

$\frac{7}{3}$ برابر شود.

۰۳ نقطه‌های A و B و C روی محیط دایرهٔ به شعاع r ، و نقطهٔ D در

درون این دایره طوری قرار گرفته‌اند که $AB = BC$ و مثلث BCD

متساوی‌الاضلاع شده است. نیم‌خط راست AD ، محیط دایره را در E قطع

می‌کند. ثابت کنید $DE = r$.

۴. چند جمله‌ای $P(x)$ با ضرایب‌های حقیقی، با شرط $P(x) \geq 0$ به ازای همه مقادیرهای $x \in \mathbf{R}$ سازگار است. درستی نابرابری زیر را ثابت کنید:

$$P(x) + P'(x) + P''(x) + \dots + P^{(n)}(x) \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}$$

۵. $(a, 0)$ ، $(0, b)$ و (c, d) را، مختصات رأس‌های مثلث ABC می‌گیریم که، در آن، a, b, c و d عددهای مثبتی هستند. اگر O ، مبدأ مختصات باشد، درستی نابرابری زیر را ثابت کنید:

$$AB + BC + CA \geq 2CO$$

۶. در شهر چند انجمن وجود دارد که، در هر کدام از آن‌ها، دست کم ۳ نفر جمع شده‌اند. برای هر دو نفر از ساکنان شهر، درست يك انجمن وجود دارد که، این دو نفر، در آن شرکت دارند. برای هر دو انجمن، درست یکی از ساکنان شهر وجود دارد که در هر يك از آن‌ها شرکت می‌کند. دست کم یکی از انجمن‌ها، درست شامل ۱۷ نفر است. در این شهر چند نفر زندگی می‌کنند؟

۱۶. فرانسه

در فرانسه، المپیادهای ریاضی برگزار نمی‌شود. با وجود این، نزدیک به يك سده است که در فرانسه، مسابقه‌های غیابی «کنکور عمومی» برگزار می‌شود. فرانسه، در سال‌های اخیر، در المپیادهای بین‌المللی ریاضیات هم شرکت می‌کند. مجله

«Bulletin association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public»

در زمینه روش‌های آموزش ریاضی بحث می‌کند. مجله‌های

«Journal de mathématiques élémentaires»،

«Revue de mathématiques spéciales»،

«L'éducation mathématique»

به ترتیب، از سال‌های ۱۸۷۵، ۱۸۸۷ و ۱۸۹۰ در فرانسه منتشر می‌شوند.

نمونه‌ای از مسأله‌های «کنکود عمومی» در فرانسه (سال ۱۹۸۶)

۰۱. چهاروجهی $ABCD$ داده شده است.

الف) ثابت کنید وسط‌یال‌های AB ، AC ، BD و CD ، روی یک صفحه قرار دارند؛

ب) در این صفحه، نقطه‌ای پیدا کنید که، مجموع فاصله‌های آن تا خط‌های راست AD و BC ، حداقل مقدار ممکن باشد.

۰۲. نقطه‌های A ، B ، C و M روی یک صفحه‌اند.

الف) D را نقطه‌ای از صفحه می‌گیریم که، برای آن، داشته باشیم:
 $DA \leq CA$ و $DB \leq CB$. ثابت کنید، نقطه N وجود دارد که در نابرابری‌های زیر صدق می‌کند:

$$NA \leq MA, \quad NB \leq MB, \quad ND \leq MC$$

ب) A' ، B' و C' را نقطه‌هایی از صفحه می‌گیریم که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$A'B' \leq AB, \quad A'C' \leq AC, \quad B'C' \leq BC$$

آیا نقطه M' وجود دارد که در نابرابری‌های زیر صدق کند:

$$M'A' \leq MA, \quad M'B' \leq MB, \quad M'C' \leq MC$$

۰۳. الف) آیا برای هر $w \in \mathbb{C}$ ، z ، این نابرابری درست است:

$$|z| + |w| \leq |z+w| + |z-w|$$

ب) ثابت کنید، برای مقادیرهای $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ ، این نابرابری برقرار است:

$$\sum_{k=1}^4 |z_k| \leq \sum_{1 \leq i < j \leq 4} |z_i + z_j|$$

مسأله‌هایی که نیاز به بحث و بررسی دارند

۰۱. برای هر دنباله $\{a_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$)، دنباله‌های $\{\Delta a_n\}$ و $\{\Delta^2 a_n\}$ را،

به این ترتیب تعریف می‌کنیم:

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n,$$

$$\Delta^2 a_n = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n$$

به جز این، برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ ، که برای آن داشته باشیم $\Delta^2 a_n \neq 0$ ، فرض می‌کنیم:

$$a'_n = a_n - \frac{(\Delta a_n)^2}{\Delta^2 a_n}$$

(۱) به ازای کدام دنباله $\{a_n\}$ ، دنباله $\{\Delta^2 a_n\}$ ، ثابت است؟

(۲) همه دنباله‌های $\{a_n\}$ را پیدا کنید که، برای آن‌ها، عدد a'_n ، به ازای همه مقادیرهای $n \in \mathbb{N}$ معین، و دنباله $\{a'_n\}$ ثابت باشد (به طور جداگانه، حالت $a'_n \equiv 0$ را بررسی کنید).

(۳) فرض کنید، دنباله $\{a_n\}$ ، به سمت $a = 0$ متقارب باشد و، در ضمن،

برابر هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم: $a_n \neq a$ و دنباله $\left\{ \frac{a_{n+1} - a}{a_n - a} \right\}$ به سمت $\lambda \neq 1$

متقارب باشد:

(الف) ثابت کنید $\lambda \in [-1, 1)$;

(ب) ثابت کنید برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ ، با آغاز از اندیسی مثل n_0 ،

داریم: $\Delta^2 a_n \neq 0$;

(ج) $\lambda \neq 0$ می‌گیریم. برای هر مقدار $k \in \mathbb{Z}^+$ ، درباره تقارب دنباله

$\left\{ \frac{a'_n}{a_{n+k}} \right\}$ بحث کنید (حالت $k = 0$ را، به طور جداگانه، مورد بررسی

قرار دهید).

(د) $\lambda = 0$ می‌گیریم. ثابت کنید، دنباله‌های $\left\{ \frac{a'_n}{a_n} \right\}$ و $\left\{ \frac{a'_n}{a_{n+1}} \right\}$ به سمت

صفر متقارب‌بند. نمونه‌ای برای دنباله $\{a_n\}$ پیدا کنید که، به ازای آن، دنباله

$\left\{ \frac{a'_n}{a_{n+2}} \right\}$ ، حدی مخالف صفر داشته باشد.

(ه) اگر شرط $a = 0$ را در (۳) حذف کنیم، نتیجه‌ها، چه تغییری می‌کنند؟

۰۲. تابع‌های $\mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$: g و f ، با این ضابطه‌ها داده شده‌اند:

$$f(x) = \sqrt[4]{1-x}, \quad g(x) = f(f(x))$$

و c را ریشه‌ای از معادله $x = f(x)$ می‌گیریم.

(۱) الف) تابع $f(x)$ را بررسی و نمودار آن را رسم کنید. ثابت کنید، معادله $x = f(x)$ ، ریشه‌ای منحصر به فرد دارد، در ضمن، مقدار c ، در بازه $[0/72, 0/73]$ واقع است؛

(ب) تابع $f'(x)$ را بررسی کنید. نقطه‌های M_1 و M_2 را روی نمودار تابع $f(x)$ طوری انتخاب کرده‌ایم که طول‌های برابر داشته باشند. کمان M_1M_2 از این نمودار، نسبت به پاره خط راست M_1M_2 چگونه قرار گرفته است؟

(ج) تابع $g(x)$ را بررسی و نمودار آن را رسم کنید. این نمودار نسبت به خط راست $y = x$ چه وضعی دارد؟ مماس‌های بر نمودار را در نقطه‌های به طول 0 و 1 پیدا کنید.

(د) ثابت کنید، هر دنباله $\{a_n\}$ ، با شرط‌های $a_1 \in (0, 1)$ و $a_{n+1} = f(a_n)$ ، $(n \in \mathbf{N})$ ، متقارب است. دنباله‌های $\{a_{2n-1}\}$ ، $\{a_{2n}\}$ ($n \in \mathbf{N}$) و تابع $g(x)$ را در نظر بگیرید و درباره توضیح نموداری فکر کنید).

(۲) روی نمودار تابع $f(x)$ ، نقطه‌های M و M' را به طول‌های x و $f(x)$ در نظر می‌گیریم که در آن $x \neq c$.

الف) ثابت کنید، خط راست MM' ، خط راست $y = x$ را، در نقطه‌ای به طول

$$h(x) = x - \frac{(f(x) - x)^2}{g(x) + x - 2f(x)}$$

قطع می‌کند؟

(ب) ثابت کنید، اگر $x \in (0, c)$ ، آن‌گاه $h(x) \in (x, c)$ ؛

(ج) دنباله $\{a_n\}$ را، از نظر تقارب، مورد بررسی قرار دهید، به شرطی که

$$a_1 \in (0, c), \quad a_{n+1} = h(a_n), \quad (n \in \mathbb{N})$$

ثابت کنید، دنباله $\left\{ \frac{a_{n+1} - c}{a_n - c} \right\}$ متقارب است و حد آن را پیدا کنید.

۳) فرض کنید، هر عدد $b \in [-2, 2]$ را به صورت مقدار \tilde{b} ، با p رقم بعد از ممیز، گرد کرده باشیم. در این صورت و با این شیوه گرد کردن، مقدارهای تقریبی زیر را پیدا کنید:

الف) فرض کنید $a = 0.72$ ؛

ب) مقدار $\delta(a) = \widetilde{f(a)} - a$ را محاسبه کنید؛

ج) اگر $|\delta(a)| > 0.15 \times 10^{-p}$ ، آن وقت $\widetilde{h(a)}$ را محاسبه کنید و، با توجه به تعریف ب)، با مفروض بودن a ، $\widetilde{h(a)}$ را به دست آورید.

د) اگر $|\delta(a)| \leq 0.15 \times 10^{-p}$ ، آن وقت محاسبه را تمام کنید. \bar{c} را آخرین مقدار $\widetilde{h(a)}$ در محاسبه‌ها می‌گیریم. با استفاده از این که برای هر مقدار $x \in [0.72, 0.73]$ داریم:

$$|\widetilde{f(x)} - f(x)| < \varepsilon$$

بر حسب مقدار $\delta(\bar{c})$ معین کنید، با چه دقتی (نسبت به ε) عدد c به وسیله \bar{c} پیدا می‌شود؟

۴) فرض کنید، برای دنباله $\{a_n\}$ داشته باشیم:

$$a_1 = 0.72, \quad a_{n+1} = f(a_n), \quad (n \in \mathbb{N})$$

مطلوب است، حداقل اندیس $n_0 \in \mathbb{N}$ که، با آغاز آن، برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم:

$$|a_n - c| < 10^{-6}$$

۱۷. کانادا

دانش‌آموزان کانادائی در مسابقه‌های ملی امریکا، که به وسیله MAA برنامه‌ریزی می‌شود، از سال ۱۹۵۸ به این طرف، شرکت می‌کنند. المپیادهای ریاضی داخلی کانادا، از سال ۱۹۶۹ آغاز شده است. مسأله‌های المپیادها،

«CruX Mathematicorum»

نمونه‌ای از مسأله‌های المپیادهای کانادا (سال ۱۹۸۶)

۰۱. نقطه D را روی ضلع AC از مثلث ABC طوری در نظر گرفته‌ایم

که داریم:

$$CD = AB = 1, \quad \widehat{ABD} = 90^\circ, \quad \widehat{CBD} = 30^\circ$$

مطلوب است طول AD .

۰۲. مسابقه قهرمانی، بین ۳ شرکت‌کننده A و B و C ، شامل n مسابقه

است. در هر مسابقه، به نفر اول m_1 ، به نفر دوم m_2 و به نفر سوم m_3 امتیاز داده می‌شود که، در آن‌ها، $m_1 > m_2 > m_3$ در انتهای مسابقه‌ها، A به تعداد ۲۲ امتیاز و B و C هر یک ۹ امتیاز آوردند. شرکت‌کننده B ، در مسابقه دو ۱۰۰ متر برنده بود. مقدار n را پیدا کنید و معلوم کنید چه کسی در پرش ارتفاع دوم شده است.

۰۳. وتر CD از نیم دایره به قطر AB ، طول مفروضی دارد. M را

وسط وتر CD و H را پای عمود وارد از نقطه C بر قطر AB گرفته‌ایم. ثابت کنید، مقدار زاویه CHM ، به جای وتر CD بستگی ندارد.

۰۴. برای عددهای طبیعی m و n فرض می‌کنیم:

$$f(m, n) = \sum_{k=1}^m k^{2n-1}$$

ثابت کنید، برای هر مقدار $m, n \in \mathbb{N}$ ، عدد $f(m, n)$ ، بر عدد $f(m, 1)$ بخش پذیر است.

۰۵. ثابت کنید، اگر برای دنباله عددهای درست a_1, a_2, \dots

داشته باشیم:

$$a_1 = 39, \quad a_2 = 45, \quad a_{n+2} = a_{n+1}^2 - a_n, \quad (n \in \mathbb{N})$$

آن وقت، بی نهایت جمله در این دنباله وجود دارد که بر ۱۹۸۶ بخش پذیرند.

از سال ۱۹۶۲، مسابقه‌های جداگانه‌ای برای دانش‌آموزان برگزار شد. نخستین المپیاد ریاضی سراسری در سال ۱۹۷۰ سازمان داده شد. المپیادها در سه مرحله انجام می‌گیرند. در هر مرحله، ۴ ساعت وقت داده می‌شود، در دو مرحله اول و دوم ۳ مسأله، و در مرحله سوم ۴ مسأله برای حل به دانش‌آموزان پیشنهاد می‌شود.

۰۱۹. لوکزامبورگ

در لوکزامبورگ، المپیادهای داخلی ریاضی وجود ندارد. از سال ۱۹۶۳، هر سال، قریب ۸۵ دانش‌آموز کلاس‌های ۱۱ تا ۱۳، در مسابقه‌ای شرکت می‌کنند که، مسأله‌های آن، از مسأله‌های مسابقه ملی امریکا، که به وسیله MAA برگزار می‌شود، اقتباس شده است.

۰۲۰. لهستان

از سال ۱۹۴۹ به این طرف، هر سال، المپیاد ریاضی، به وسیله انجمن ریاضی لهستان، برگزار می‌شود. هر المپیاد ۳ مرحله دارد. مرحله اول سه ماه طول می‌کشد و خصلت غیابی دارد: در ابتدای هر ماه، ۴ مسأله به دانش‌آموزان داده می‌شود که باید آن‌ها در خانه، در طول یک ماه، حل کنند. مرحله دوم (که حضوری است) ۲ روز طول می‌کشد: هر روز سه مسأله و چهار ساعت وقت به دانش‌آموزان داده می‌شود. مرحله سوم، که در ورشو برگزار می‌شود، کاملاً شبیه مرحله دوم است. به این ترتیب، در مرحله اول ۱۲ مسأله با سه ماه وقت و در هر یک از دو مرحله بعدی، ۶ مسأله با ۱۰ ساعت وقت به دانش‌آموزان عرضه می‌شود. مسأله‌های المپیادها و راه‌حل‌های آن‌ها، در مجله «Matematyka» چاپ می‌شود که از سال ۱۹۴۸، آغاز به انتشار کرده است.

نمونه‌ای از مسأله‌های مرحله سوم المپیادهای لهستان (سال ۱۹۸۶)

۰۱. مطلوب است همه مقادیرهای $n \in \mathbb{N}$ که، برای هر کدام آن‌ها، چند جمله‌ای درجه n با ضرایب‌های حقیقی وجود داشته باشد، به نحوی که

نا برابری $f(x) \geq f'(x)$ ، برای هر مقدار $x \in \mathbf{R}$ برقرار باشد.

۲n.۰۲ نفر ($n > 1$)، در مسابقه شطرنج شرکت کرده‌اند؛ در ضمن، هر دو نفر از آن‌ها، بیش از یک دور با هم بازی نمی‌کنند. ثابت کنید، با این شرط‌ها، تمامی مسابقه، در حالتی که هیچ سه بازی‌کنی سه بار بین خود بازی نکرده باشند، تنها وقتی ممکن است که، تعداد همه دورهای بازی مسابقه، از n^2 تجاوز نکند.

۰۳. AK ، BL و CM را ارتفاع‌های مثلث ABC و نقطه N را وسط ضلع AC می‌گیریم؛ ثابت کنید، چهار نقطه K ، L ، M و N روی محیط یک دایره واقع‌اند.

۲۱. مجارستان

تاریخ-برگزاری المپیادهای ریاضی در مجارستان، به سده قبل برمی‌گردد، و وقتی که، انجمن ریاضی فیزیک مجارستان، در سال ۱۸۹۴، تصمیم گرفت، المپیادها را، برای فارغ‌التحصیلان دبیرستان‌ها برگزار کند. این المپیادها، نام آتووش را (از نام رئیس انجمن فیزیک: لودننس آتووش) به خود گرفت که هر ساله تا سال ۱۹۴۳ انجام می‌شد (با سه سال وقفه در وسط). از سال ۱۹۴۷، به ابتکار انجمن ریاضی مجارستان، المپیادها تجدید شد. در سال ۱۹۴۹، نام ژوزف کوردشاک، استاد دانشگاه بوداپست را به خود گرفت. المپیادهای کوردشاک، تا به امروز ادامه دارد. به شرکت‌کنندگان مسابقه کوردشاک، ۳ مسأله و ۴ ساعت وقت داده می‌شود. در المپیادهای زمان حاضر، علاوه بر فارغ‌التحصیلان دبیرستان‌ها، دانش‌آموزان کلاس‌های پایین‌تر هم شرکت می‌کنند. به جز مسابقه کوردشاک، ۱۳ المپیاد دیگر هم در مجارستان، هر سال انجام می‌شود که، در بین آن‌ها، می‌توان از مسابقه ملی به نام د.آدانی، مؤسس مجله ریاضی

«Közepiskolai Matematikai Lapok»

که از سال ۱۸۹۴ چاپ می‌شود، نام برد. این مسابقه، برای نخستین بار، در سال ۱۹۲۳ سازمان داده شد. در حال حاضر، این مسابقه، در ۲ مرحله

برای کلاس‌های ۹ و ۱۰ و در ۴ مرحله برای کلاس‌های ۷ و ۸ برگزار می‌شود.

مسأله‌های المپیادهای ریاضی، به‌طور منظم، در مجله‌ای که در بالا نام بردیم، چاپ می‌شوند.

۲۲. مغولستان

المپیاد ریاضی دبیرستان‌های مغولستان، از سال ۱۹۶۳، در ۴ مرحله برای کلاس‌های ۱۰، در ۳ مرحله برای کلاس‌های ۷ تا ۹ و در دو مرحله برای کلاس‌های ۱ تا ۶ انجام می‌شود. از بین ۱۴ نفر کلاس دهم، که در مرحله چهارم موفق شده‌اند، تعدادی که برای شرکت در المپیاد بین‌المللی ریاضی لازم است، انتخاب می‌شوند.

۲۳. ویتنام

نخستین المپیاد ریاضی در ویتنام، در سال ۱۹۶۲ برگزار شد و از آن زمان، هر سال، جریان دارد و از سال ۱۹۷۵، که کشور متحد شد، المپیاد سراسری انجام می‌گیرد. در ویتنام، دوران تحصیلی تا پایان دبیرستان، سه مرحله دارد: کلاس‌های ۱ تا ۵؛ کلاس‌های ۶ تا ۹ و کلاس‌های ۱۰ تا ۱۲. در سال‌های اخیر، المپیاد ریاضی ویتنام، در ۴ مرحله انجام می‌گیرد و مسابقه نهایی ۲ روز طول می‌کشد. هر روز ۳ تا ۴ مسأله با ۴ ساعت وقت داده می‌شود. بین حدود ۲۰ نفر که در مرحله نهایی المپیادهای کلاس‌های ۱۱ و ۱۲ موفق شده‌اند، یک مسابقه انتخابی برگزار می‌شود و، از میان آن‌ها، هیأت شرکت‌کننده در المپیاد بین‌المللی ریاضیات، برگزیده می‌شود.

۲۴. هلند

المپیادهای ریاضی، از سال ۱۹۶۲، در هلند سازمان داده شده است، که در دو مرحله انجام می‌شوند. قریب ۶۰ نفر از کسانی که در مرحله اول موفق شده‌اند، به مرحله دوم راه می‌یابند. مجله «Pythagoras» (فیثاغورث) هم مسابقه‌های ریاضی خاص خود را در هلند ترتیب می‌دهد.

مجله «Euclid» (اقلیدس)، از سال ۱۹۲۵ در هلند منتشر می‌شود. بخش مسأله‌های مربوط به ریاضیات مقدماتی و آنالیز ریاضی، در مجله زیر چاپ می‌شود که از سال ۱۹۱۳ پایه‌گذاری شده است:

«Nieuw tijdschrift voor Wiskunde»

۰۲۵. هندوستان

در هندوستان، هر سال، المپیادهای غیابی، بین فارغ‌التحصیلان رشته‌های ریاضی دانشگاه‌ها برگزار می‌شود. در یک رشته از ایالت‌ها هم، المپیادهایی برای دانش‌آموزان دبیرستانی وجود دارد (نخستین بار، از این گونه المپیادها، در سال ۱۹۵۸، در بنگال انجام گرفت) مجله

«The mathematical student»

هم در هندوستان منتشر می‌شود که مسأله‌هایی برای حل مسأله‌ها برگزار می‌کند.

۰۲۶. یوگسلاوی

از سال ۱۹۵۰، المپیادهای ریاضی یوگسلاوی، در چارچوب یک شهر، یک منطقه یا یک جمهوری انجام می‌شد. از سال ۱۹۶۰، مسأله‌های ریاضی سراسر یوگسلاوی سازمان داده شد که در چهار مرحله (مدرسه‌ای، منطقه‌ای، جمهوری و سراسر یوگسلاوی) در هر سال انجام می‌گیرد. از سال ۱۹۶۳ برای تعیین هیأت نمایندگان یوگسلاوی در المپیاد بین‌المللی ریاضی، یک مرحله دیگر به مرحله‌های قبلی اضافه شده است. مسأله‌های المپیادهای ریاضی یوگسلاوی، مرتباً در مجله زیر که برای دانش‌آموزان و دبیران دبیرستان منتشر می‌شود چاپ و راه‌حل‌های آن‌ها ارائه می‌شود:

«Matematicko ftzički list»

نمونه‌ای از مسأله‌های المپیادهای ریاضی یوگسلاوی (سال ۱۹۸۶)

(دانش‌آموزان، بسته به این که متعلق به کدام کلاس باشند، می‌توانند یکی از سه مسأله را از هر گروه مسأله‌ها (از ۱ تا ۴، از ۵ تا ۹ و از ۱۰ تا ۱۲) انتخاب کنند).

۰۱. ثابت کنید، می‌توان بی‌نهایت مقدار برای $n \in \mathbb{N}$ پیدا کرد که،

به ازای هر کدام از آنها، هر يك از عددهای n ، $n+1$ و $n+2$ به صورت مجموع مجذورهای دو عدد درست باشند.

۲. ثابت کنید، اگر برای چهارضلعی محدب $ABCD$ داشته باشیم:

$$AB+BD \leq AC+CD$$

آن وقت $AB \leq AC$.

۳. هر يك از زاویه‌های دو رأس B و C از مثلث ABC برابر 40° درجه است. نقطه D را روی امتداد ضلع AB (از طرف A) طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم: $AD=BC$. زاویه‌های مثلث ADC را پیدا کنید.

۴. در هرخانه‌ای از صفحه شطرنجی 5×5 ، يك سکه گذاشته‌ایم. می‌خواهیم چند بار، عمل زیر را انجام دهیم: دو سکه دلخواه را انتخاب و هر کدام را درخانه مجاور خود (که با آن ضلعی مشترك دارد) منتقل می‌کنیم. آیا می‌توان با چندبار انجام این عمل، همه 25 سکه را درخانه‌ای که از قبل معین شده است، جمع کرد؟

۵. ثابت کنید، اگر برای عددهای طبیعی m و n داشته باشیم:

$$2m^2 + m = 3n^2 + n$$

آن وقت، عددهای $m-n$ ، $2m+2n+1$ و $3m+3n+1$ ، مجذورهای عددهای درستی هستند.

۶. ثابت کنید، برای عددهای حقیقی و دلخواه a و b و c ، همیشه

داریم:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \leq \frac{1}{3}(a+b+c)$$

۷. روی محیط دایره به قطر AD ، نقطه B ، و روی قطر AD ، نقطه C

را طوری انتخاب کرده ایم که داشته باشیم: $AB = CD$. ثابت کنید، در مثلث ABC ، نیمساز رأس A ، میانه رأس B و ارتفاع رأس C ، از یک نقطه می گذرند.

۸. ثابت کنید، از بین ۵ عدد مثبت دلخواه، ولسی مختلف، می توان دو عدد طوری انتخاب کرد که، نه مجموع و نه تفاضل آنها، برابر هیچ کدام از ۳ عدد دیگر نباشند.

۹. همه تابع های صعودی $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ را طوری پیدا کنید که در اتحاد زیر صدق کنند:

$$f(x+f(y)) \equiv f(x+y) + 1, \quad (x, y \in \mathbf{R})$$

۱۰. ثابت کنید، اگر عددهای حقیقی x_1, x_2, \dots, x_n در برابری

$$(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$$

صدق کنند، آن وقت، یا همه آنها غیر منفی و یا همه آنها غیر مثبت اند.

۱۱. از وسط هر ضلع یک چهارضلعی محاطی، عمودی بر ضلع روبه رو

رسم کرده ایم. ثابت کنید، همه این عمودها از یک نقطه می گذرند.

۱۲. بزرگترین عدد $n \in \mathbf{N}$ را طوری پیدا کنید که ویژگی زیر را

داشته باشد: برای هر گونه شماره گذاری خانه های صفحه شطرنج با عددهای

۱، ۲، ...، ۶۴، دو خانه مجاور وجود داشته باشد که تفاضل شماره های

آنها، از n کمتر نباشد (دو خانه را مجاور گوئیم که در یک ضلع مشترك

باشند).

II

المپیادهای ریاضی منطقه ای

۱. المپیاد اطریش - لهستان

المپیادهای ریاضی اطریش - لهستان، از سال ۱۹۸۲ برگزار می شود.

از هر کشور، ۶ شرکت کننده دانش آموز به المپیاد می فرستند. مسابقه ۳ روز

ادامه پیدا می‌کند. در دو روز اول برندگان انفرادی و در روز سوم تیم برنده تعیین می‌شود.

۴. المپیاد بالکان

نخستین المپیاد ریاضی بالکان در سال ۱۹۸۴ برگزار شد. در این المپیادها، کشورهای بلغارستان، یونان و رومانی شرکت می‌کنند. المپیادها را، انجمن ریاضی یونان و وزارت ورزش یونان سازمان داده‌اند. از هر کشور، ۶ دانش‌آموز کلاس‌های ۱۱ و ۱۲ در المپیاد شرکت می‌کنند. در المپیاد ۴ مسأله به دانش‌آموزان داده می‌شود.

مسأله‌های سومین المپیاد ریاضی بالکان (بخارست، سال ۱۹۸۶)

۰۱ (یونان). خط راستی که از نقطه O ، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC گذشته، محیط این دایره را در نقطه‌های D و E و محیط دایرهٔ محیطی مثلث ABC را در نقطه‌های F و G قطع کرده است؛ در ضمن، نقطهٔ D بین دو نقطهٔ F و O قرار دارد. ثابت کنید $DF \cdot FG \geq r^2$. چه موقع، به علامت برابری می‌رسیم؟

۰۲ (بلغارستان). روی یال‌های AB ، BC ، AC ، AD ، BD و CD از چهاروجهی $ABCD$ ، به ترتیب، نقطه‌های E ، F ، G ، H ، K و L را انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید، اگر داشته باشیم:

$$AE \cdot BE = BF \cdot CF = AG \cdot CG = AH \cdot DH = \\ = BK \cdot DK = CL \cdot DL$$

آن وقت، نقطه‌های E ، F ، G ، H ، K و L ، روی سطح یک کره‌اند.

۰۳ (بلغارستان). جمله‌های دنبالهٔ a_1, a_2, \dots برای مقدارهای حقیقی a و b و c ، $ab \neq 0$ و $c > 0$ ، در برابرهای

$$a_1 = a, \quad a_2 = b, \quad a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + c}{a_n}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

صدق می‌کنند. ثابت کنید، همهٔ جمله‌های این دنباله وقتی، و تنها وقتی،

درست اند که عددهای a ، b و $\frac{a^2+b^2+c}{ab}$ ، درست باشند.

۰۴ (رومانی). نقطه M و صفحه مثلث ABC طوری قرار گرفته اند که مثلث های MAB ، MBC و MAC ، محیط هایی برابر و مساحت هایی برابر دارند. ثابت کنید، اگر نقطه M در درون مثلث ABC باشد، آن وقت این مثلث متساوی الاضلاع است، در غیر این صورت، مثلث ABC قائم الزویه می شود.

۰۳ المپیاد کشورهای اسکاندیناوی

در سال های اخیر، مسابقه غیایی، در بین کشورهای اسکاندیناوی برگزار می شود. در این مسابقه، دانش آموزان کشورهای دانمارک، ایسلند، نروژ، فنلاند و سوئد شرکت می کنند.

۰۴ المپیاد کشورهای مغرب

مغرب به قلمروی از افریقا گفته می شود که در غرب اروپا قرار دارد (و در زمان ما، شامل کشورهای لیبی، تونس، الجزایر و مراکش می شود). این کشورهای شمالی افریقا، در ابتدای سال های ۸۰، نخستین المپیاد ریاضی خود را، برای دانش آموزان، برگزار کردند.

مسئله های المپیاد مغرب (سال ۱۹۸۶)

۰۱ رقم های x و y و z را طوری پیدا کنید که، برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ ، داشته باشیم:

$$\sqrt{\underbrace{xx \dots x}_{\text{رقم } 2n} - \underbrace{yy \dots y}_{\text{رقم } n}} = \underbrace{zz \dots z}_{\text{رقم } n}$$

۰۲ خط راست موازی قطر AC از چهارضلعی محدب $ABCD$ ، از وسط قطر BD گذشته و خط راستی را که از وسط AC موازی BD رسم شده، در نقطه O قطع کرده است. ثابت کنید، چهار ضلعی های $OABC$ ، $OBCD$ ، $OCDA$ و $ODAB$ ، مساحت هایی برابر دارند.

۰۳ ثابت کنید دنباله ای، و در ضمن تنها يك دنباله از عددهای

a_1, a_2, \dots وجود دارد که با شرط‌های زیر سازگار است:

$$-2 < a_n < -1, \quad n \ln\left(1 + \frac{a_n}{n+1}\right) = a_n, \quad (n \in \mathbb{N})$$

۴. ثابت کنید، برای عددهای مثبت و دلخواه a_1, a_2, a_3 ، همیشه

داریم:

$$3\left(\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_1}\right) \geq 4\left(\frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_2 + a_3} + \frac{1}{a_3 + a_1}\right)^2$$

۵. دو دایره در مرکز O مشترک‌اند. دو خط راستی که از O گذشته‌اند،

دایره بزرگتر را در نقطه‌های A و B و دایره کوچکتر را در نقطه‌های C و

D قطع می‌کند؛ در ضمن، O بین نقطه‌های A و C ، و D بین نقطه‌های B و

O قرار دارند. ثابت کنید دایره محیطی مثلث AOB ، دایره محیطی مثلث COD ،

دایره به قطر AC و دایره به قطر BD یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

۶. جواب‌های درست این معادله را پیدا کنید:

$$5^{2^x} - 3 \times 2^{2^x} + 5^x \times 2^{2^x - 1} - 2^{2^x - 1} - 2 \times 5^x + 1 = 0$$

ضمیمه ج

آگاهی‌های کمکی

در این ضمیمه، از مفهوما و حقیقت‌هایی یاد می‌کنیم که برای حل

مسأله‌ها مفیدند (و گاهی هم، از چارچوب برنامه دبیرستانی خارج می‌شوند).

در این جا، برای این که گرفتار تفصیل نشویم، از اثبات قضیه‌ها صرف نظر

کرده‌ایم. خواننده می‌تواند، خود به‌عنوان تمرین به آن‌ها پردازد و یا اثبات

آن‌ها را در کتاب‌های مربوط پیدا کند.

*

تعریف ۱. مجموعه A را، زیر مجموعه مجموعه B گویند (و می نویسند $A \subset B$)، وقتی که هر عضو مجموعه A ، متعلق به مجموعه B باشد.

تعریف ۲. اجتماع $A \cup B$ از مجموعه‌های A و B ، به مجموعه‌ای گفته می‌شود که شامل عضوهایی باشد که دست کم متعلق به یکی از دو مجموعه A و B باشند. اشتراك یا تقاطع $A \cap B$ از مجموعه‌های A و B به مجموعه‌ای گفته می‌شود که، هر عضو آن، هم متعلق به A و هم متعلق به B باشد.

اجتماع و اشتراك چند مجموعه هم، به همین ترتیب تعریف می‌شوند. تعریف ۳. تفاضل $A \setminus B$ از مجموعه‌های A و B ، به زیر مجموعه‌ای از مجموعه A گفته می‌شود که شامل همه عضوهایی از آن باشد که به مجموعه B تعلق ندارند.

سرانجام، مجموعه‌هایی که از عضوهای یکسان، ولی با ردیف‌های مختلف تشکیل شده باشند، يك مجموعه به حساب می‌آیند، مثلاً

$$\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$$

در حالت‌هایی که، ردیف جمله‌های يك مجموعه، مورد نیاز باشد، به آن مجموعه مرتب گویند.

تعریف ۴. حاصل ضرب دکارتی $A \times B$ از مجموعه‌های A و B ، به مجموعه همه زوج‌های مرتب (x, y) گفته می‌شود که، در آن، $x \in A$ و $y \in B$. به همین ترتیب، حاصل ضرب دکارتی چند مجموعه هم تعریف می‌شود. قضیه ۱. (اصل دیریکله)، اگر مجموعه‌ای را که شامل n عضو است، به صورت اجتماع k زیر مجموعه نشان دهیم، آن وقت، دست کم یکی از این زیر مجموعه‌ها، شامل حداقل $\frac{n}{k}$ عضو است.

این قضیه، معمولاً در موقعیتی مورد استفاده قرار می‌گیرد که $k < n$ و، زیر مجموعه‌ها، دو به دو غیر متقاطع باشند.

قضیه ۲. (اصل استقرای ریاضی). فرض کنید، برای گزاره $U(n)$ ، که به پارامتر n بستگی دارد، بدانیم:
الف) گزاره $U(1)$ درست است؛

ب) اگر برای مقداری از n ، گزاره‌های $U(1), \dots, U(n)$ درست باشند، گزاره $U(n+1)$ هم درست باشد؛

در این صورت، گزاره $U(n)$ برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ درست است.
 $f: A \rightarrow A$ به معنای تابعی است با دامنه A و برد B .

تعریف ۵. تابع $f: A \rightarrow B$ مفروض است. تابع $g: B \rightarrow A$ را معکوس تابع f گویند (و به صورت $g = f^{-1}$ نشان می‌دهند)، وقتی که، این اتحادها برقرار باشند:

$$g(f(x)) \equiv x, \quad f(g(y)) \equiv y \quad (x \in A, y \in B)$$

قضیه ۳. تابع $f: A \rightarrow B$ ، تنها وقتی معکوس دارد که برای هر $x \in A, y \in B$ مقدار $x \in A$ سازگار با شرط $f(x) = y$ وجود داشته باشد، و برای هر دو مقدار مختلف $x_1, x_2 \in A$ ، مقدارهای $f(x_1)$ و $f(x_2)$ هم مختلف باشند.
 تعریف ۶. انطباق دو تابع $f: A \rightarrow B$ و $g: B \rightarrow C$ ، به تابع $h: A \rightarrow C$ گفته می‌شود که با اتحاد زیر تعریف شده باشد:

$$h(x) \equiv g(f(x)), \quad x \in A$$

به همین ترتیب، انطباق چند تابع

$$f_1: A_1 \rightarrow A_2, \quad f_2: A_2 \rightarrow A_3, \quad \dots, \quad f_n: A_n \rightarrow A_{n+1}$$

تعریف می‌شود. انطباق n تابع یکسان $f: A \rightarrow A$ را با نماد f^n نشان می‌دهند. اگر تابع $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ مفروض باشد، انطباق

$$f^n(x) = f(f(f(\dots(x)\dots)))$$

یا تابع معکوس $f^{-1}(x)$ را نباید با تابعی که، در هر نقطه x ، برابر $(f(x))^n$ یا $(f(x))^{-1}$ است، اشتباه کرد. تابع‌های لگاریتمی و مثلثاتی استثنا هستند (مثلاً $\sin^2 x$ برابر $\sin x \cdot \sin x$ است و نه $\sin(\sin(x))$).

*

تعریف ۷. تابع $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ را

— از بالا کران‌دار (یا محدود) گویند، وقتی که عدد $M \in \mathbf{R}$ وجود داشته

باشد، به نحوی که برای هر $x \in A$ داشته باشیم: $f(x) < M$

— از پایین کران دار (یا محدود) گویند، وقتی که عدد $m \in \mathbf{R}$ وجود

داشته باشد، به نحوی که، برای هر $x \in A$ داشته باشیم $f(x) > m$.

تابع $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ را که هم از بالا و هم از پایین کران دار باشد، تابع محدود گویند.

تعریف ۸. $A \subset \mathbf{R}$ می گیریم. تابع $f: A \rightarrow \mathbf{R}$.

صعودی است، اگر $f(x_1) > f(x_2)$ ؛

نزولی است، اگر $f(x_1) < f(x_2)$ ؛

غیرصعودی است، اگر $f(x_1) \geq f(x_2)$ ؛

غیرنزولی است، اگر $f(x_1) \leq f(x_2)$.

هر کدام از این شرطها، برای عددهای دلخواه $x_1, x_2 \in A$ و $x_1 < x_2$ برقرارند. اگر تابع $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ ، تنها یکی از این چهار ویژگی را داشته باشد، یکنوا (مونوتون) نامیده می شود. به تابعی که همیشه صعودی یا همیشه نزولی باشد، اکیداً یکنوا گویند.

به حالت خاصی از تابع $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ که دامنه تعریف آن زیرمجموعه ای از \mathbf{R} باشد، یعنی نگاشت $a: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ یا $a: \mathbf{Z}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ را دنباله عددی گویند و مقادیرهای آن را با a_n نشان می دهند.

با توجه به تعریف های ۷ و ۸، مفهوم های دنباله کران دار از بالا یا پایین، دنباله محدود، دنباله صعودی یا نزولی، غیرصعودی یا غیرنزولی، یکنوا و اکیداً یکنوا هم روشن می شود.

*

قضیه ۴. برای عددهای دلخواه $a, b \in \mathbf{R}$ و $n \in \mathbf{N}$ ، همیشه داریم:

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1} + b^n),$$

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \dots - ab^{2n-1} + b^{2n}),$$

$$a^{2n} - b^{2n} = (a+b)(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + \dots + ab^{2n-2} - b^{2n-1}),$$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}, \quad (a \geq \sqrt{b}, b > 0)$$

*

قضیه ۵. (نابرابری برنولی). برای مقادیرهای دلخواه $a, b \in \mathbf{R}$ با شرطهای $a > -1, a \neq 0, b \neq 0, b \neq 1$ همیشه داریم:

$$(1+a)^b < 1+ab \quad (0 < b < 1)$$

$$(1+a)^b > 1+ab \quad (b \notin [0, 1])$$

تعریف ۹. واسطه حسابی عددهای حقیقی a_1, \dots, a_n به عدد

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n},$$

واسطه هندسی عددهای غیرمنفی a_1, \dots, a_n به عدد

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n},$$

واسطه توافقی عددهای مثبت a_1, \dots, a_n به عدد

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

و بالاخره، واسطه مربعی عددهای حقیقی a_1, \dots, a_n به عدد

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

گفته می‌شود.

قضیه ۶. (قضیه مربوط به واسطه‌ها). برای عددهای مثبت a_1, \dots, a_n همیشه داریم:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

در ضمن، اگر بین این عددها، دست کم دو عدد مختلف وجود داشته باشد، همه نابرابری‌ها اکید خواهند بود.

بیش از همه، نابرابری بین واسطه‌های حسابی و هندسی کاربرد دارد

که برای عددهای غیر منفی هم درست است.

قضیه ۷. دنباله $(1 + \frac{1}{n})^n$ ($n \in \mathbb{N}$)، صعودی و دارای حد است. حد

این دنباله را با e نشان می‌دهند و، برای هر مقدار $n \in \mathbb{N}$ ، همیشه داریم:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$$

لگاریتم درمبنای e را لگاریتم طبیعی گویند و با نماد \ln نشان می‌دهند

$$(x > 0, \log_e x = \ln x)$$

تعریف ۱۰. تابع

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$

را تابع علامت گویند.

تعریف ۱۱. بخش درست $[x]$ از عدد $x \in \mathbb{R}$ ، بزرگترین عدد

درستی گفته می‌شود که از x تجاوز نکند. بخش کسری عدد $x \in \mathbb{R}$ را با نماد

$$\{x\} = x - [x]$$

قضیه ۸. بخش درست، تابعی غیر نزولی است؛ ولی بخش کسری،

تابعی متناوب است با دوره تناوب ۱.

*

تعریف ۱۲. عددهای $a, b \in \mathbb{Z}$ ($b \neq 0$) را مفروض می‌گیریم. در این

صورت، عددهای

$$q \in \mathbb{Z} \text{ و } r \in \{0, 1, \dots, |b| - 1\}$$

را، به ترتیب، خارج قسمت و باقی مانده، در تقسیم a بر b گویند، وقتی که

داشته باشیم:

$$a = qb + r$$

در حالتی که r برابر صفر باشد، گویند: a بر b بخش پذیر است، یا a

مضربی است از b ، یا b مقسوم علیهی از a است (و به این صورت نشان می‌دهند: $(a : b)$).

تعریف ۱۳. کوچکترین مضرب مشترك عددهای غیر صفر

$$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$$

به کوچکترین عدد طبیعی گفته می‌شود که بر هر يك از این عددها بخش پذیر باشد و به صورت $[a_1, \dots, a_n]$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱۴. بزرگترین مقسوم علیه مشترك عددهای

$$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$$

که در بین آنها، دست کم یکی مخالف صفر است، به بزرگترین عدد طبیعی گفته می‌شود که بر هر يك از این عددها بخش پذیر باشد و به این صورت نشان می‌دهند.

$$(a_1, \dots, a_n)$$

قضیه ۹. برای هر دو عدد طبیعی a و b ، همیشه داریم:

$$(a, b) \cdot [a, b] = ab$$

تعریف ۱۵. عددهای $a, b \in \mathbb{Z}$ را نسبت به هم اول گویند، وقتی که

$$(a, b) = 1$$

تعریف ۱۶. عددهای $a, b, c \in \mathbb{Z}$ را در نظر می‌گیریم؛ در ضمن

$c \neq 0$. گویند عدد a نسبت به مدول c با عدد b هم نهشت است، وقتی که

$(a - b)$ بر c بخش پذیر باشد و این طور می‌نویسند:

$$a \equiv b \pmod{c}$$

در غیر این صورت، گویند عدد a نسبت به مدول c با b هم نهشت نیست و می‌نویسند:

$$a \not\equiv b \pmod{c}$$

قضیه ۱۰. عددهای درست a, b, c, d, m, k را، با شرط $m \neq 0$

و $k \neq 0$ در نظر می‌گیریم. در این صورت، گزاره‌های زیر درست است:
 الف) اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و $b \equiv c \pmod{m}$ ، آن‌گاه $a \equiv c \pmod{m}$;

ب) اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و $c \equiv d \pmod{m}$ ، آن وقت
 $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ ، $ac \equiv bd \pmod{m}$;

ج) اگر $a \equiv b \pmod{m}$ ، آن وقت برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:
 $a^n \equiv b^n \pmod{m}$;

د) اگر $a \equiv b \pmod{m}$ ، آن‌گاه $ak \equiv bk \pmod{mk}$ ؛
 ه) اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و $a : k$ ، $b : k$ ، $m : k$ ، آن وقت

$$\frac{a}{k} \equiv \frac{b}{k} \pmod{\frac{m}{k}}$$

قضیه ۱۱. برای هر $a, b \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$ ، این گزاره‌ها درست است:

الف). اگر $a \neq b$ ، آن‌گاه $(a - b) : (a^n - b^n)$ ؛

ب) اگر $a \neq -b$ ، آن‌گاه $(a + b) : (a^{2n} - 1 + b^{2n} - 1)$ ؛

ج) اگر $a \neq -b$ ، آن‌گاه $(a + b) : (a^{2n} - b^{2n})$.

این قضیه نتیجه‌ای از قضیه ۴، یا قضیه ۱۰، ج) است.

m را عددی طبیعی و بزرگتر از ۲ می‌گیریم. در تقسیم عددهای
 درست مختلف به عدد m ، می‌توان به هر یک از باقی‌مانده‌های $۱, ۰, \dots, ۱ - m$
 رسید. با وجود این، توان n ام عددهای درست، با تثبیت $n > ۱$ ، ممکن است
 همه این باقی‌مانده‌ها را نداشته باشند.

قضیه ۱۲. اگر توان n ام عددها را $(۲ \leq n \leq ۵)$ ، بر m تقسیم کنیم
 $(۳ \leq m \leq ۱۰)$ ، تنها می‌توان به یکی از باقی‌مانده‌هایی رسید که در جدول
 ۲ (صفحه ۶۱۸) داده شده‌اند.

معمولاً عدد را در دستگاه عددنویسی دهدهی در نظر می‌گیرند که
 می‌توان، به ترتیب زیر، آن را تعمیم داد.

تعریف ۱۷. گویند، عدد $n \in \mathbb{N}$ در عددنویسی به‌مبنای k ($k > ۱$ ، $k \in \mathbb{N}$)

به صورت

$m \backslash n$	r	s	t	Δ
r	r			
s	$0, 1$	$0, 1, r$	$0, 1$	$0, 1, r$
t	$0, 1$	$0, 1, s$	$0, 1$	$0, 1, s$
Δ	$0, 1, r$	$0, 1, r, s, t$	$0, 1$	$0, 1, r, s, t$
r	$0, 1, r, s$	$0, 1, r, s, t, \Delta$	$0, 1, r, s$	$0, 1, r, s, t, \Delta$
s	$0, 1, r, s$	$0, 1, r, s, t, \Delta$	$0, 1, r, s$	$0, 1, r, s, t, \Delta$
t	$0, 1, r, s$	$0, 1, s$	$0, 1, r, s$	$0, 1, r, s, t, \Delta$
Δ	$0, 1, r$	$0, 1, r, s, t, \Delta$	$0, 1$	$0, 1, r, s, t, \Delta$
r	$0, 1, r, s, t$	$0, 1, r, \Delta$	$0, 1, r, s, t$	$0, 1, r, s, t, \Delta$
s	$0, 1, r, s, t$	$0, 1, r, \Delta$	$0, 1, r, s, t$	$0, 1, r, s, t, \Delta$
t	$0, 1, r, s, t, \Delta$	$0, 1, r, s, t, \Delta$	$0, 1, r, s, t, \Delta$	$0, 1, r, s, t, \Delta$
Δ	$0, 1, r, s, t, \Delta$	$0, 1, r, s, t, \Delta$	$0, 1, r, s, t, \Delta$	$0, 1, r, s, t, \Delta$

$$\overline{a_1 \dots a_m}$$

نوشته می شود، به شرطی که داشته باشیم:

$$n = a_1 k^{m-1} + \dots + a_{m-1} k^1 + a_m k^0$$

که در آن، a_1, \dots, a_m ، اعدادی درست غیر منفی کوچکتر از k و، در ضمن $a_i > 0$.

قضیه ۱۳. برای هر عدد طبیعی و مفروض $k > 1$ ، می توان عدد $n \in \mathbf{N}$ را در عددنویسی به مبنای k نوشت و، در ضمن، تنها به يك صورت.

قضیه ۱۴. هر عدد طبیعی، نسبت به جدول ۹، با مجموع رقم های خودش در دستگاه دهدهی، هم نهشت است.

تعریف ۱۸. $m, n \in \mathbf{Z}$ و $n \geq m \geq 0$ می گیریم. ضریب دوجمله ای C_n^m به عدد

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

گفته می شود که، در آن، فرض شده است:

$$n! = \begin{cases} 1 \times 2 \times \dots \times n & (n \in \mathbf{N}) \\ 1 & (n = 0) \end{cases}$$

($n!$) را «فاکتوریل n » یا « n فاکتوریل» می خوانند).

قضیه ۱۵. برای هر $m, n \in \mathbf{Z}^+$ ، رابطه های زیر برقرارند:

$$C_n^0 = C_n^n = 1 \quad (\text{الف})$$

$$C_n^m = C_n^{n-m} \quad (\text{ب}) \quad \text{با شرط } n \geq m \geq 0$$

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1} \quad (\text{ج}) \quad \text{با شرط } n > m > 0$$

قضیه ۱۶. (دوجمله ای نیوتون). برای هر $a, b \in \mathbf{R}$ و $n \in \mathbf{N}$ داریم:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^{n-m} a^{n-m} b^m + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

از این قضیه ها، گزاره زیر نتیجه می شود:

قضیه ۱۷. همه ضریب‌های بسط دو جمله‌ای، عددهای طبیعی هستند و، در ضمن، این برابری‌ها برقرارند:

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n \text{ (الف)}$$

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0 \text{ (ب)}$$

برابری‌های (الف) و (ب)، به ترتیب، از اتحاد قضیه ۱۶ و با قرار دادن $a = b = 1$ و $a = -b = 1$ به دست می‌آیند.

تعریف ۱۹. هر عدد طبیعی بزرگتر از واحد، که به جز واحد و خودش، مقسوم‌علیه دیگری نداشته باشد، عدد اول نامیده می‌شود. عدد ۱، نه اول است و نه مرکب.

قضیه ۱۸. (قضیه اصلی حساب). هر عدد مرکب را می‌توان به صورت ضرب چند عدد اول (که لزومی ندارد مختلف باشند) تجزیه کرد؛ در ضمن، اگر به ردیف عامل‌ها توجه نداشته باشیم، این تجزیه منحصر به فرد است. قضیه ۱۹. دنباله عددهای اول، نامتناهی است.

قضیه ۲۰. (قضیه لژاندر). اگر عدد $n!$ را به عامل‌های اول تجزیه کنیم، توان عدد اول p در این تجزیه، برابر است با

$$\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \left[\frac{n}{p^3} \right] + \dots$$

(برای مقادیر n به قدر کافی بزرگ k داریم: $\left[\frac{n}{p^k} \right] = 0$.)

سه قضیه زیر، مربوط به ویژگی‌های عددهایی است که نسبت به هم اول‌اند.

قضیه ۲۱. $a, b, c \in \mathbb{Z}$ و $c \neq 0$ می‌گیریم. اگر ab بر c بخش پذیر و b و c نسبت به هم اول باشند، آن وقت a بر c بخش پذیر است.

قضیه ۲۲. a, b, c, m را عددهایی طبیعی می‌گیریم. اگر داشته باشیم:

$$ab = c^m \text{ و } (a, b) = 1$$

آن وقت $a = a_1^m$ و $b = b_1^m$ ، که در آن $a_1, b_1 \in \mathbf{N}$ ، در ضمن $(a_1, b_1) = 1$ و $a_1 b_1 = c$.

قضیه ۲۳. (قضیه چینی دربارهٔ باقی مانده‌ها). اگر عددهای درست و غیر صفر m_1, \dots, m_k ، دو به دو نسبت به هم اول باشند، آن وقت، برای عددهای درست و دلخواه a_1, \dots, a_k ، عدد درست x وجود دارد که، به ازای $k, \dots, 1 = i$ ، با شرط زیر سازگار است:

$$x \equiv a_i \pmod{m_i}$$

در ضمن، عدد x می‌تواند متعلق به هر نیم بازهٔ به طول $m_1 m_2 \dots m_k$ باشد. قضیه ۲۴. برای هر دو عدد $a, b \in \mathbf{Z}$ ، که دست کم یکی از آن‌ها مخالف صفر باشد، عددهای $p, q \in \mathbf{Z}$ وجود دارند، به نحوی که در برابری زیر صدق کنند:

$$pa + qb = (a, b)$$

قضیه ۲۵. (قضیه کوچک فرما). اگر $a \in \mathbf{Z}$ بر عدد اول p بخش پذیر نباشد، آن وقت عدد $1 - a^{p-1}$ بر p بخش پذیر است. از قضیه کوچک فرما، به سادگی قضیه زیر نتیجه می‌شود. قضیه ۲۶. p را عددی اول می‌گیریم. در این صورت، برای هر مقدار $a \in \mathbf{Z}$ داریم:

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

*

قضیه ۲۷. (دربارهٔ مقادارهای بینابینی تابع‌های پیوسته). تابع $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ را در بازهٔ $[a, b]$ پیوسته می‌گیریم. در ضمن، $A = f(a) < f(b) = B$. در این صورت، برای هر عدد $C \in (A, B)$ ، می‌توان عدد $c \in (a, b)$ را طوری پیدا کرد که، برای آن، داشته باشیم: $f(c) = C$.

گزارهٔ زیر، حالت خاصی از قضیه ۲۷ است.

قضیه ۲۸. (دربارهٔ میل به سمت صفر). اگر تابع $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ در بازهٔ $[a, b]$ پیوسته باشد، و در دو انتهای این بازه، مقادارهای غیرصفری

را، با علامت‌های مختلف، قبول کند، آن وقت، نقطه $c \in (a, b)$ وجود دارد که برای آن داشته باشیم: $f(c) = 0$.

قضیه ۲۹. اگر تابع $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ در بازه $[a, b]$ پیوسته باشد، نقطه‌های $d \in [a, b]$ و c وجود دارند که برای آن‌ها و برای هر مقدار $x \in [a, b]$ داشته باشیم:

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d)$$

از قضیه ۲۹، گزاره زیر نتیجه می‌شود:

قضیه ۳۰. هر تابع پیوسته در یک بازه بسته، تابعی محدود است.

در زیر، I را به معنای بازه‌ای از محور عددی \mathbf{R} گرفته‌ایم.

تابع $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم، این تابع، در هر نقطه $x \in I$ مشتق‌پذیر باشد، یعنی مشتق $f'(x)$ وجود داشته باشد. در این صورت، تابع جدید $f': I \rightarrow \mathbf{R}$ به دست می‌آید که، مقادیرهای آن در هر نقطه $x \in I$ عدد $f'(x)$ است. این تابع را، مشتق اول f گویند که می‌تواند، به نوبه خود، در هر نقطه بازه I ، مشتق‌پذیر باشد. در این صورت، مشتق آن را، مشتق دوم تابع اصلی f گویند. به همین ترتیب، می‌توان مشتق n م تابع f را، که به صورت $f^{(n)}(x)$ نشان می‌دهند، تعریف کرد ($n = 3, 4, \dots$). معمولاً مشتق‌های اول و دوم و سوم را، به ترتیب، به صورت f' ، f'' و f''' و گاهی مشتق‌های مرتبه بالاتر را به صورت f^{IV} ، f^V ، ... نشان می‌دهند.

تعریف ۲۰. تابع $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ را

n بار مشتق‌پذیر گویند، وقتی که n عددی طبیعی باشد و تابع f ، در هر نقطه از بازه I ، دارای مشتق مرتبه n ام باشد؛

n بار به طور پیوسته مشتق‌پذیر گویند، وقتی بتوان n بار متوالی از آن مشتق گرفت و، در ضمن، $f^{(n)}$ در بازه I پیوسته باشد؛

به طور نامتناهی مشتق‌پذیر گویند، وقتی که بتوان n امین مشتق آن را، به ازای هر $n \in \mathbf{N}$ ، به دست آورد.

قضیه ۳۱. (معیار یکنوا بودن). تابع $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ را در بازه I ،

مشتق پذیر می گیریم. در این صورت، تابع f ، تنها وقتی غیر نزولی (غیر صعودی) است که، در هر نقطه $x \in I$ داشته باشیم $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$). اگر در هر نقطه $x \in I$ ، نابرابری $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) برقرار باشد، آن وقت، تابع f را صعودی (نزولی) گویند.

تعریف ۲۱. تابع $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ را محدب به طرف پایین در بازه I گویند، وقتی که برای هر $x, y \in I$ و $\alpha \in [0, 1]$ داشته باشیم:

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

تابع $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ را، در بازه I ، محدب به طرف بالا گویند، وقتی که تابع $g(x) = -f(x)$ ، در همین بازه، محدب به طرف پایین باشد.

قضیه ۳۲ (معیار تحدب). تابع $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ را در بازه $[a, b]$ ، دوبار مشتق پذیر می گیریم. در این صورت، تابع f ، در این بازه، تنها وقتی تحدیبی به طرف پایین (بالا) دارد که در هر نقطه $x \in I$ داشته باشیم $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$). قضیه ۳۳ (قضیه لاگرانژ). تابع $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ را، در بازه $[a, b]$ پیوسته و در بازه (a, b) مشتق پذیر فرض می کنیم. در این صورت، عدد $c \in (a, b)$ وجود دارد، به نحوی که برای آن داشته باشیم:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

گزاره زیر، حالت خاصی از قضیه لاگرانژ است.

قضیه ۳۴ (قضیه دول). تابع $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ را در بازه $[a, b]$ پیوسته و در بازه (a, b) مشتق پذیر می گیریم؛ در ضمن $f(a) = f(b)$. در این صورت، عدد $c \in (a, b)$ وجود دارد که برای آن داشته باشیم:

$$f'(c) = 0$$

*

تعریف ۲۲. مجموعه \mathbf{C} از عددهای مختلط، به مجموعه زوج های مرتبی از عددهای حقیقی گفته می شود که بتوان، درباره آنها، عمل های جمع و ضرب را، به ترتیب زیر، انجام داد:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

که در آن‌ها، a, b, c و d ، عددهایی حقیقی اند. یادآوری می‌کنیم که

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \quad \text{و} \quad (a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$$

به همین مناسبت، عدد مختلط $(a, 0)$ را، معمولاً، با عدد حقیقی a ، یکی می‌دانند. عدد مختلط $(0, 1)$ را، واحد موهومی می‌نامند و با i نشان می‌دهند. برای واحد موهومی، داریم:

$$i^2 = -1$$

هر عدد مختلط (a, b) را می‌توان به این صورت نوشت:

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1)$$

به همین دلیل، عدد مختلط (a, b) را به صورت $a + bi$ می‌نویسند.

تعریف ۲۳. $a \in \mathbb{R}$ را بخش حقیقی عدد مختلط $z = a + bi$ می‌نامند (و با نماد $a = \operatorname{Re} z$ نشان می‌دهند)؛ همچنین $b \in \mathbb{R}$ را بخش موهومی آن می‌نامند (و با نماد $b = \operatorname{Im} z$ نشان می‌دهند). عدد مختلطی را که بخش حقیقی آن صفر باشد (یعنی عدد bi)، موهومی خالص می‌گویند.

عمل‌های روی عددهای مختلط، از همان قانون‌های عمل‌های روی عددهای حقیقی پیروی می‌کنند: جابه‌جایی و شرکت‌پذیری برای جمع و ضرب، و همچنین قانون بخشی برای ضرب نسبت به جمع.

عددهای مختلط را می‌توان به وسیلهٔ نقطه‌های واقع بر صفحه نشان داد، به این ترتیب که، محور طول را برای بخش حقیقی و محور عرض را برای بخش موهومی عدد مختلط در نظر بگیریم.

تعریف ۲۴. به $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ، مدول (یا قدر مطلق) عدد مختلط

$$z = a + bi$$

قضیهٔ ۳۵. برای هر عدد $z \in \mathbb{C}$ ، نابرابری $|z| \geq 0$ برقرار است، درضمن، برابری $|z| = 0$ تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم: $z = 0$. برای هر $w \in \mathbb{C}$ ، همیشه داریم:

$$|zw| = |z| \cdot |w|$$

قضیه ۳۶. (نا برابری مثلثی). برای هر دو عدد $z, w \in \mathbb{C}$ همیشه داریم:

$$|z+w| \leq |z| + |w|$$

در ضمن، علامت برابری تنها برای وقتی است که $z = 0$ یا $w = kz$ (یا $k \geq 0$).

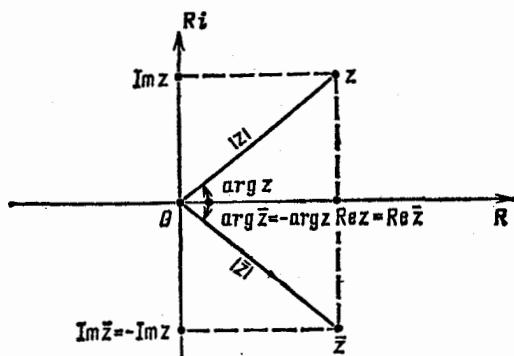
تعریف ۲۵. وقتی که عدد مختلط $z = a + bi$ ، برابر صفر نباشد، به زاویه φ را، که با رابطه‌های

$$\cos \varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{r}, \quad (r = |z|)$$

تعریف می‌شود، آرگومان (یا آوند) عدد مختلط z گویند که با دقت تاجمله $2\pi n$ معین می‌شود. مقدار زاویه φ ، در بازه $[-\pi, \pi)$ به طور یگ ارزشی معین می‌شود و، در این صورت، به آن، مقدار اصلی آرگومان گویند (و می‌نویسند: $\varphi = \arg z$).

مدول و آرگومان عدد مختلط را، در دستگاه محورهای مختصات، روی شکل ۱۳۷ نشان داده‌ایم.

قضیه ۳۷ (شکل مثلثاتی عدد مختلط). هر عدد غیر صفر $z \in \mathbb{C}$ را



شکل ۱۳۷

می‌توان به این صورت نوشت:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (r = |z|, \varphi = \arg z)$$

تعریف ۲۶. عدد مختلط $\bar{z} = a - bi$ را مزدوج عدد مختلط $z = a + bi$ گویند.

قضیه ۳۸. برای هر عدد $z \in \mathbb{C}$ داریم:

$$\operatorname{Re} \bar{z} = \operatorname{Re} z, \quad \operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z, \quad \overline{(\bar{z})} = z$$

عدد z

(الف) تنها وقتی حقیقی است که $\bar{z} = z$ ؛

(ب) تنها وقتی موهومی است که $\bar{z} = -z$.

روی صفحه مختلط، دو عدد مختلط مزدوج، نسبت به محور حقیقی، قرینه یکدیگرند (شکل ۱۳۷ را ببینید).

قضیه ۳۹. برای هر $w \in \mathbb{Z}$ ، z داریم:

$$|\bar{z}| = |z|, \quad z\bar{z} = |z|^2, \quad \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z\bar{w}} = z\bar{w}$$

و اگر $z \neq 0$ ، آن وقت $\arg \bar{z} = -\arg z$ ، یا اگر $z < 0$ ، آن وقت $\arg \bar{z} = \arg z = \pi$.

عمل‌های تفریق و تقسیم، به ترتیب، به عنوان عکس عمل‌های جمع و ضرب تعریف می‌شوند.

قضیه ۴۰. اگر $z = a + bi$ و $w = c + di$ دو عدد مختلط دلخواه باشند، آن وقت، معادله $z + x = w$ ، در مجموعه عددهای مختلط، یک جواب منحصر دارد (که آن را تفاضل عددهای w و z گویند):

$$x = c - a + (d - b)i$$

قضیه ۴۱. اگر $z = a + bi$ و $w = c + di$ را دو عدد مختلط می‌گیریم و، در ضمن $z \neq 0$ ، در این صورت، معادله $zx = w$ ، در مجموعه عددهای مختلط، یک جواب منحصر دارد (که آن را خارج قسمت w بر z گویند):

$$x = \frac{w \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2} i$$

قضیه ۴۲. اگر عددهای مختلط به صورت مثلثاتی داده شده باشند، ضرب و تقسیم آنها، به صورت زیر درمی آید:

$$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

$$\frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

از این قضیه، می توان دو گزاره زیر را نتیجه گرفت.

قضیه ۴۳ (دستور هوارد). توان n ام ($n \in \mathbb{N}$) یک عدد مختلط، با دستور زیر بیان می شود:

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

قضیه ۴۴. برای هر عدد غیر صفر $z \in \mathbb{C}$ و هر عدد طبیعی n ، معادله $x^n = z$ ، در مجموعه عددهای مختلط، درست n ریشه مختلف دارد، که آنها را، ریشه های n ام عدد z گویند.

$$x_k = \cos \frac{\sqrt[k]{k}\pi}{n} + i \sin \frac{\sqrt[k]{k}\pi}{n}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

تعریف ۲۷. تابع عددی f ، از آوند حقیقی یا مختلط x ، وقتی زوج (فرد) است که با اتحاد $f(-x) \equiv f(x)$ (و برای تابع فرد $f(-x) \equiv -f(x)$) سازگار باشد، $x \in \mathbb{R}$ یا $x \in \mathbb{C}$.

*

تعریف ۲۸. چند جمله ای (از یک متغیر) به تابعی از آوند حقیقی یا مختلط x گفته می شود که بتوان آن را به این صورت نشان داد:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

که در آن $n \in \mathbb{Z}^+$ و $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ ، در ضمن $a_n \neq 0$ (به شرط $n \geq 1$).
قضیه ۴۵. دو چند جمله ای

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0,$$

$$Q(x) = b_n x^m + \dots + b_1 x + b_0.$$

با هم برابرند (یعنی، مثل دو تابع منطبق بر هم اند)، تنها وقتی که داشته باشیم:

$$n = m, \quad a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \dots, \quad a_n = b_n$$

تعریف ۲۹. عددهای a_0, a_1, \dots, a_n را، ضریب‌های چندجمله‌ای

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0.$$

گویند. a_0 را جمله آزاد یا مقدار ثابت چندجمله‌ای و a_n را ضریب جمله بزرگترین درجه چندجمله‌ای می‌نامند. در حالت $n \geq 1$ ، عدد n را درجه چندجمله‌ای گویند (و با $\deg P$ نشان می‌دهند). درجه چندجمله‌ای $P(x) = a_0$ برابر صفر است اگر $a_0 \neq 0$ ؛ و برابر -1 است، اگر $a_0 = 0$.

قضیه ۴۴. $P(x)$ و $Q(x)$ را، دو چندجمله‌ای می‌گیریم. در این صورت الف) تابع $T(x) = P(x) + Q(x)$ هم یک چندجمله‌ای است، در ضمن

$$\deg T \leq \max(\deg P, \deg Q)$$

و اگر $\deg P \neq \deg Q$ ، آن وقت

$$\deg T = \max(\deg P, \deg Q)$$

ب) تابع $W(x) = P(x)Q(x)$ هم یک چندجمله‌ای است، در ضمن

اگر $P(x) \neq 0$ و $Q(x) \neq 0$ ، آن وقت $W(x) \neq 0$ و

$$\deg W = \deg P + \deg Q$$

تعریف ۳۰. ریشه چندجمله‌ای $P(x)$ ، به جواب معادله $P(x) = 0$ گفته می‌شود.

چندجمله‌ای‌ها را هم، مثل عددهای درست، می‌توان برهم تقسیم کرد

(تقسیم با باقی مانده).

قضیه ۴۷. چندجمله‌ای‌های $P(x)$ و $Q(x)$ را مفروض می‌گیریم،

در ضمن $Q(x) \neq 0$. در این صورت، چندجمله‌ای‌های منحصر به فرد $S(x)$ و $R(x)$ وجود دارند که با این دو شرط سازگار باشند:

$$P(x) = S(x)Q(x) + R(x) \quad \text{الف)}$$

ب) $\deg R < \deg Q$

تعریف ۳۱. با توجه به شرط‌های قضیه ۴۷، چند جمله‌ای $R(x)$ را، باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر چند جمله‌ای $Q(x)$ گویند. اگر $R(x) \equiv 0$ ، آن وقت، گویند چند جمله‌ای $P(x)$ بر چند جمله‌ای $Q(x)$ بخش پذیر است. قضیه ۴۸. اگر ضریب‌های چند جمله‌ای‌های P و Q ، با توجه به شرط‌های قضیه ۴۷، حقیقی باشند، آن وقت، ضریب‌های چند جمله‌ای‌های R و S هم حقیقی خواهند بود؛ اگر ضریب‌های P و Q گویا باشند، ضریب‌های S و R هم گویا هستند و، سرانجام، اگر ضریب‌های P و Q عددهایی درست باشند و، در ضمن، ضریب بزرگترین درجه چند جمله‌ای Q برابر ۱ یا -1 باشد، آن وقت ضریب‌های S و R هم، عددهایی درست خواهند بود.

قضیه ۴۹ (قضیه به‌زو). باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x - x_0$ ، برابر است با $P(x_0)$.

گزاره زیر، نتیجه‌ای از قضیه به‌زو است.

قضیه ۵۰. چند جمله‌ای $P(x)$ ، تنها وقتی بر $x - x_0$ بخش پذیر است که، x_0 ، یکی از ریشه‌های آن باشد.

تعریف ۳۲. عدد x_0 را، ریشه تکراری از مرتبه k ($k \in \mathbf{N}$) برای چند جمله‌ای $P(x)$ گویند، وقتی که $P(x)$ بر $(x - x_0)^k$ بخش پذیر و بر $(x - x_0)^{k+1}$ بخش ناپذیر باشد.

قضیه ۵۱ (قضیه اصلی جبر). هر چند جمله‌ای از درجه $n \geq 1$ ، درست n ریشه مختلط دارد.

به عنوان نتیجه قضیه‌های ۵۲ تا ۵۴ به دست می‌آیند.

قضیه ۵۲. اگر مقادیر دو چند جمله‌ای، که درجه هیچ کدام از آن‌ها از n تجاوز نمی‌کند، در $n + 1$ نقطه مختلف بر هم منطبق باشند، آن وقت، این دو چند جمله‌ای، با هم برابرند.

قضیه ۵۳. هر چند جمله‌ای $P(x)$ با درجه $n \geq 0$ را، به صورتی منحصر به فرد می‌توان این‌طور نوشت:

$$P(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n)$$

که در آن a_n ضریب بزرگترین درجه، و x_1, \dots, x_n ریشه‌های چندجمله‌ای هستند.

قضیه ۵۴. چند جمله‌ای $P(x)$ تنها وقتی بر چند جمله‌ای $Q(x) \equiv 0$ بخش پذیر است که، هر ریشه $Q(x)$ ریشه‌ای از $P(x)$ باشد و، در ضمن، اگر ریشه‌ای تکراری است، تکرار آن در $P(x)$ کمتر از تکرار آن در $Q(x)$ نباشد.

قضیه ۵۵ (قضیه ویت). x_1, \dots, x_n را ریشه‌های چندجمله‌ای

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

می‌گیریم. در این صورت، برابری‌های زیر برقرارند:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

.....

$$x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

قضیه عکس هم درست است.

قضیه ۵۶. عددهای مختلط x_1, \dots, x_n در دستگاه برابری‌های قضیه ۵۷ صدق می‌کنند، در این صورت، این عددها، ریشه‌های چندجمله‌ای زیر هستند:

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

قضیه ۵۷. اگر چندجمله‌ای $P(x)$ ، ضریب‌هایی حقیقی داشته باشد،

و عدد مختلط z ، با بخش موهومی غیر صفر، ریشه آن باشد، آن وقت، مزدوج این عدد، یعنی عدد مختلط \bar{z} هم، ریشه‌ای از آن خواهد بود. و، در ضمن، با همان مرتبه تکرار. در حالت خاص، چندجمله‌ای $P(x)$ ، بر چندجمله‌ای

$$(x-g)^k \cdot (x-\bar{z})^k = (x^2 - 2x \cdot \operatorname{Re} z + |z|^2)^k$$

بخش پذیر است که، در آن، k عبارت است از مرتبه تکرار ریشه‌های z و \bar{z} . به عنوان نتیجه، می‌توان مشابه قضیه ۵۳ را، برای چندجمله‌ای‌های با ضریب‌های حقیقی، به دست آورد.

قضیه ۵۸. هر چندجمله‌ای $P(x)$ با ضریب‌های حقیقی و از درجه n را، تنها به یک صورت منحصر، می‌توان تجزیه کرد:

$$P(x) = (x-x_1) \dots (x-x_m) \times$$

$$\times (x^2 + 2b_1x + c_1) \dots (x^2 + 2b_lx + c_l)$$

که در آن، $m+l=n$ ، $m, l \geq 0$ ، a_n ضریب بزرگترین درجه $P(x)$ ، x_1, \dots, x_m ریشه‌های حقیقی $P(x)$ و b_1, \dots, b_l و c_1, \dots, c_l عددهایی حقیقی اند؛ در ضمن، چندجمله‌ای‌های درجه دوم

$$x^2 + 2b_1x + c_1, \dots, x^2 + 2b_lx + c_l$$

دارای ریشه‌های حقیقی نیستند (یعنی $b_i^2 < c_i$).

قضیه ۵۹. اگر عدد گویای $\frac{p}{q}$ ، با شرط $(p, q) = 1$ ، ریشه‌ای از

چندجمله‌ای با ضریب‌های درست

$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

باشد، آن وقت a_0 بر p و a_n بر q بخش پذیرند. دو گزاره زیر، نتیجه‌ای از این قضیه است.

قضیه ۶۰. هر ریشه چندجمله‌ای با ضریب‌های درست

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

یا عددی است درست و یا عددی گنگ.

قضیه ۶۱. اگر $a, n \in \mathbb{N}$ ، آن وقت عدد $\sqrt[n]{a}$ ، یا درست است و یا گنگ.

قضیه ۶۲ (دستور درون‌یابی لاگرانژ). عده‌های مختلف و مختلط b_0, \dots, b_n و عده‌های دلخواه و مختلط c_0, c_1, \dots, c_n ($n \in \mathbb{Z}^+$) را در نظر می‌گیریم. یک چند جمله‌ای منحصر به فرد $P(x)$ ، با درجه‌ای که از n تجاوز نمی‌کند، وجود دارد که در برابری‌های زیر صدق می‌کند.

$$P(b_0) = c_0, P(b_1) = c_1, \dots, P(b_n) = c_n$$

این چند جمله‌ای، به این صورت است:

$$P(x) = \sum_{i=0}^n c_i \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{x - b_j}{b_i - b_j}$$

بستگی بین ضریب‌های چند جمله‌ای و مشتق‌های آن را مشخص می‌کنیم.

قضیه ۶۳. این چند جمله‌ای را در نظر می‌گیریم:

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

در این صورت

$$P(0) = a_0, P'(0) = a_1, P''(0) = 2a_2, \dots, P^{(n)}(0) = n!a_n$$

و چند جمله‌ای اصلی را می‌توان به این صورت نوشت:

$$P(x) = \frac{P(0)}{0!} + \frac{P'(0)}{1!} x + \frac{P''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

تعریف ۳۳. $n \in \mathbb{N}$ فرض می‌کنیم. چند جمله‌ای با n متغیر، به مجموع

محدودی از تابع‌های با آوندهای حقیقی یا موهومی x_0, \dots, x_n گفته می‌شود که، هر کدام از آنها، به این صورت باشند:

$$ax_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}, a \in \mathbb{C}, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}^+$$

*

قضیه ۶۴ (نا برابری مثلث). برای هر سه نقطه A ، B و C ، این نابرابری درست است:

$$AB \leq AC + BC$$

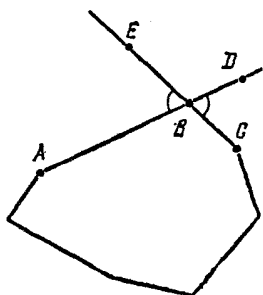
در ضمن، علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که نقطه C روی پاره خط راست AB و یا سه نقطه بر هم منطبق باشند. در دو تعریف زیر، مجموعه را به معنای مجموعه‌ای دلخواه از نقطه‌ها به کار برده‌ایم.

تعریف ۳۴. قطر مجموعه، به پاره‌خط راستی گفته می‌شود که بیشترین طول را داشته باشد و دو انتهای آن متعلق به این مجموعه باشد. یادآوری می‌کنیم که، یک مجموعه، ممکن است بیش از یک قطر داشته باشد و یا اصلاً قطری نداشته باشد.

تعریف ۳۵. یک مجموعه را وقتی محدب می‌گوییم که، علاوه بر نقطه‌های خود، شامل همهٔ پاره خط‌های راستی باشد که دو انتهای هر یک از آن‌ها، متعلق به این مجموعه است.

در این کتاب، هر جا از چندضلعی نام برده شده است، منظور یک چندضلعی دلخواه است (که لزومی ندارد محدب باشد). هر وقت با چندضلعی محدب سروکار داشته‌ایم، واژه «محدب» را ذکر کرده‌ایم.

قضیه ۶۵. مجموع زاویه‌های هر n ضلعی ($n \geq 3$)، برابر است با $(n-2) \cdot 180^\circ$.



شکل ۱۳۸

تعریف ۳۶. A ، B و C را سه رأس متوالی یک چند ضلعی محدب، و D و E را نقطه‌های دلخواهی، به ترتیب واقع بر امتداد ضلع‌های AB و BC (از طرف B) می‌گیریم. در این صورت، زاویه‌های ABE و CBD (شکل ۱۳۸) را، زاویه‌های خارجی این چند ضلعی در رأس B می‌گویند (که با زاویهٔ ABC - زاویهٔ داخلی چند ضلعی - فرق دارند).

قضیه ۶۶. مجموع زاویه‌های خارجی چندضلعی، به شرطی که در هر رأس یکی از آن‌ها را در نظر بگیریم، برابر ۳۶۰ درجه است.

تعریف ۳۷. می‌گویند چندضلعی M ، به چندضلعی‌های M_1, \dots, M_n تقسیم شده‌است، وقتی که داشته باشیم:

$$M = M_1 \cup \dots \cup M_n$$

در ضمن، چند ضلعی‌های M_i و M_j ، برای $i \neq j$ ، نقطه‌های مشترک درونی نداشته باشند.

تعریف ۳۸. چند ضلعی m را محاط در چند ضلعی M گویند، وقتی که رأس‌های چند ضلعی m بر ضلع‌های چند ضلعی M واقع باشند.

قضیه ۶۷. چهار ضلعی محدب $ABCD$ را، تنها وقتی می‌توان در یک دایره محاط کرد که داشته باشیم:

$$\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = \widehat{BAD} + \widehat{DCB} = 180^\circ$$

قضیه ۶۸. تنها وقتی در چهار ضلعی محدب $ABCD$ می‌توان دایره‌ای محاط کرد که داشته باشیم:

$$AB + CD = BC + AD$$

قضیه ۶۹. (قضیه بطلمیوس). اگر $ABCD$ یک چهار ضلعی محاطی باشد، آن وقت

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$$

A و B را دو رأس مجاور یک چند ضلعی محاط در دایره فرض می‌کنیم. در این صورت، وقتی از کمان AB صحبت می‌کنیم، به معنای کمانی است که دو انتهای آن A و B باشند و، در ضمن، شامل هیچ رأس دیگری از چندضلعی نباشد (مگر این‌که، برخلاف آن تأکید شده باشد).

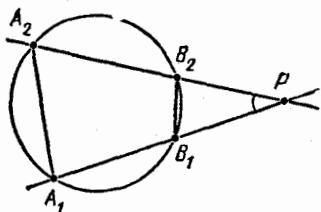
قضیه ۷۰ (قضیه مربوط به زاویه‌های محاطی). برای هر مثلث ABC که در دایره‌ای محاط باشد، داریم:

$$\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{AC}$$

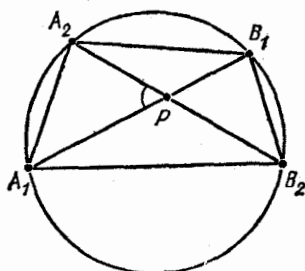
قضیه ۷۱. محل برخورد قطرهای چهار ضلعی محاطی $A_1A_2B_1B_2$ را P می‌گیریم. در این صورت (شکل ۱۳۹) داریم:

$$\angle A_1P \cdot B_1P = \angle A_2P \cdot B_2P \quad (\text{الف})$$

$$\widehat{A_1PA_2} = \frac{1}{2} (\widehat{A_1A_2} + \widehat{B_1B_2}) \quad (\text{ب})$$



شکل ۱۴۰



شکل ۱۳۹

قضیه ۷۲. یک چهارضلعی محاطی می‌گیریم. در این صورت

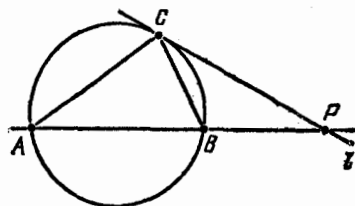
(۱) خط‌های راست A_1B_1 و A_2B_2 ، تنها وقتی با هم موازی‌اند که داشته باشیم: $\angle A_1A_2 = \angle B_1B_2$

(۲) پاره خط‌های راست A_1B_2 و A_2B_1 ، تنها وقتی در نقطه P واقع در نیم صفحه‌ای که B_1B_2 نسبت به خط راست A_1A_2 قرار دارد، یکدیگر را قطع می‌کنند که داشته باشیم: $\widehat{A_1A_2} > \widehat{B_1B_2}$. در ضمن (شکل ۱۴۰)، این برابری‌ها را داریم:

$$\angle A_1P \cdot B_1P = \angle A_2P \cdot B_2P \quad (\text{الف})$$

$$\widehat{A_1PA_2} = \frac{1}{2} (\widehat{A_1A_2} - \widehat{B_1B_2}) \quad (\text{ب})$$

وقتی از طول مماس مرسوم از نقطه P بر دایره صحبت می‌کنیم، منظورمان، فاصله نقطه P تا نقطه تماس است. اگر در قضیه ۷۲ مماس را



شکل ۱۴۱

به عنوان قاطعی در نظر بگیریم که دو نقطه برخورد آن با دایره، بر هم منطبق اند، آن وقت، به قضیه زیر می‌رسیم.

قضیه ۷۳. ABC را مثلثی

محاط در دایره و خط راست l را

مماس بر دایره در نقطه C می‌گیریم. در این صورت

(۱) خط‌های راست AB و l ، تنها وقتی باهم موازی اند که داشته باشیم:

$$\widehat{AC} = \widehat{BC}$$

(۲) خط‌های راست AB و l ، تنها وقتی در نقطه P ، واقع در همان

نیم صفحه‌ای که نقطه B نسبت به خط راست AC واقع است، یکدیگر را قطع می‌کنند که داشته باشیم: $\widehat{AC} > \widehat{BC}$. در ضمن (شکل ۱۴۱)، این برابری‌ها برقرارند:

$$\text{الف) } AP \cdot BP = CP^2$$

$$\text{ب) } \widehat{APC} = \frac{1}{2}(\widehat{AC} - \widehat{BC})$$

از قضیه‌های (۷۵؛ ۷۱، ب)؛ (۷۲، ۲، ب)؛ (۷۳، ۲، ب)، گزاره زیر نتیجه می‌شود:

قضیه ۷۴. AB را یک پاره خط راست، و α را یکی از دو نیم صفحه،

نسبت به خط راست AB ، فرض می‌کنیم. در این صورت، اگر φ ، مقداری از بازه $(0^\circ, 180^\circ)$ باشد، آن وقت، مجموعه نقطه‌های M از نیم صفحه α که،

برای آن‌ها، داشته باشیم: $\widehat{AMB} = \varphi$ ، عبارت است از کمان دایره‌ای با دو

انتهای A و B . اگر نقطه $N \in \alpha$ در درون این دایره باشد، آن وقت $\widehat{ANB} > \varphi$ و

در حالتی که در بیرون دایره باشد، آن وقت $\widehat{ANB} < \varphi$.

قضیه ۷۵. در مثلث ABC ، طول ضلع‌ها را

$$a = BC, \quad b = AC, \quad c = AB$$

$$\alpha = \widehat{BAC}, \quad \beta = \widehat{ABC}, \quad \gamma = \widehat{ACB}$$

نصف محیط را $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ شعاع دایره محاطی را r شعاع دایره محیطی را R طول ارتفاع وارد بر ضلع BC را h_a شعاع دایره مماس بر ضلع BC و امتدادهای دو ضلع AB و AC را r_a فرض می‌کنیم. در این صورت، مساحت S از مثلث ABC را، با هر یک از دستورهای زیر، می‌توان بیان کرد:

$$S = \frac{1}{2} ah_a \quad (\text{الف})$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha \quad (\text{ب})$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{ج}) \quad (\text{دستور هرډون})$$

$$S = \frac{abc}{4R} \quad (\text{د})$$

$$S = rp \quad (\text{ه})$$

$$S = \frac{1}{2} r_a (b+c-a) \quad (\text{و})$$

$$S = \frac{1}{2} R^2 (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) \quad (\text{ز})$$

دستور (ه)، برای مساحت S از هر چند ضلعی با نیم محیط p و شعاع دایره محاطی r درست است.

قضیه ۷۶. اگر a و b ضلع‌های مجاور به زاویه قائمه، c وتر، r شعاع دایره محاطی و R شعاع دایره محیطی یک مثلث قائم‌الزاویه باشند، آن وقت

$$r = \frac{1}{2}(a+b-c), \quad R = \frac{1}{2}c$$

قضیه ۷۷. اگر AL نیمساز مثلث ABC باشد، آن وقت

$$\frac{BL}{CL} = \frac{AB}{AC}$$

قضیه ۷۸ (برابری متوازی الاضلاع). برای هر متوازی الاضلاع

$ABCD$ داریم:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$$

قضیه ۷۹. برای هر نقطه P و هر مستطیل $ABCD$ داریم:

$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$$

همه تصاویرهای برخط راست، در این کتاب، به معنای تصویرهای

قائم اند.

قضیه ۸۰. اگر A_1B_1 را تصویر پاره خط راست AB ، برخط راستی

که با AB زاویدای (غیر صفر) برابر φ می سازد، فرض کنیم، آن وقت داریم:

$$A_1B_1 = AB \cdot \cos \varphi$$

قضیه ۸۱. \mathbf{a} را برداری غیر صفر واقع بر صفحه، و O را نقطه‌ای از

همین صفحه می گیریم، در این صورت، برای هر مقدار $k \in \mathbf{R}$ ، مجموعه

نقطه‌های X از صفحه، که در برابری $\overrightarrow{OX} = k \cdot \mathbf{a}$ صدق کنند، عبارت است از

یک خط راست.

قضیه ۸۲. برای هر گروه نقطه‌های A_1, \dots, A_n و هر گروه عددهای

حقیقی k_1, \dots, k_n ، که مجموع آن‌ها برابر صفر نباشد، نقطه منحصر به فرد

O وجود دارد که، برای آن، داشته باشیم:

$$\sum_{i=1}^n k_i \overrightarrow{OA_i} = \mathbf{0}$$

درضمن، برای هر نقطه دلخواه P داریم:

$$\left(\sum_{i=1}^n k_i \right) \cdot \overrightarrow{PO} = \sum_{i=1}^n (k_i \overrightarrow{PA_i})$$

سه تعریف، زیر، براساس همین قضیه تنظیم شده‌اند:

تعریف ۳۹. مرکز ثقل دستگاه نقطه‌های A_1, \dots, A_n ، به نقطه O گفته می‌شود که، برای آن، داشته باشیم:

$$\sum_{i=1}^n \vec{OA}_i = 0$$

تعریف ۴۰. مرکز ثقل دستگاه پاره‌خط‌های راست A_1B_1, \dots, A_nB_n ، به نقطه O گفته می‌شود که، برای آن، داشته باشیم:

$$\sum_{i=1}^n l_i \vec{OM}_i = 0$$

که در آن l_i ($i = 1, \dots, n$)، طول پاره‌خط راست A_iB_i و M_i ، نقطه وسط آن است.

تعریف ۴۱. مرکز ثقل دستگاه مثلث‌های $A_1B_1C_1, \dots, A_nB_nC_n$ ، به نقطه O گفته می‌شود که، برای آن، داشته باشیم:

$$\sum_{i=1}^n S_i \vec{OM}_i = 0$$

که در آن S_i ($i = 1, \dots, n$)، مساحت مثلث $A_iB_iC_i$ و M_i ، نقطه برخورد میانه‌های آن است.

قضیه ۸۳. اگر M ، نقطه برخورد میانه‌های مثلث ABC باشد، آن وقت برای هر نقطه P (که لازم نیست حتماً در صفحه مثلث باشد)، داریم:

$$\vec{PM} = \frac{1}{3} (\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC})$$

برای زاویه‌های مسطحه یک کنج سه وجهی، نابرابری مثلثی زیر برقرار است.

قضیه ۸۴. زاویه‌های مسطحه φ, ψ, χ در هر کنج سه وجهی، در نابرابری $\varphi < \psi + \chi$ صدق می‌کنند.

قضیه ۸۵. مجموع زاویه‌های مسطحه، در هر کنج محدب، از 360° درجه کمتر است.

تعریف ۴۲. چندوجهی m را محاط در چندوجهی M گویند، وقتی که هر رأس m بر وجهی از M واقع باشد.

قضیه ۸۶. فرض کنید، سه خط راست که بزرگ صفحه واقع نیستند، از نقطه A گذشته باشند. روی این سه خط راست، سه جز نقطه A ، به ترتیب، روی اولی نقطه‌های B_1 و B_2 ، روی دومی نقطه‌های C_1 و C_2 و روی سومی نقطه‌های D_1 و D_2 را در نظر می‌گیریم. در این صورت، برای نسبت V_1 به V_2 ، حجم‌های چهاروجهی‌های $AB_1C_1D_1$ و $AB_2C_2D_2$ داریم:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{AB_1 \cdot AC_1 \cdot AD_1}{AB_2 \cdot AC_2 \cdot AD_2}$$

قضیه ۸۷. S_1 و S_2 را مساحت‌های دو وجه یک چهار وجهی، φ زاویه دو وجهی بین آنها، a را طول یال مشترک آنها، b را طول یال متقابل آن، d را فاصله بین این دو یال و ψ را زاویه بین آنها فرض می‌کنیم. در این صورت، برای V ، حجم چهاروجهی داریم:

$$V = \frac{2S_1 S_2 \sin \varphi}{3a} = \frac{1}{6} abd \sin \psi$$

اگر در چهار وجهی $ABCD$ ، نقطه‌های E, F, G, H را وسط یال‌های AB, BC, CD, DA و S را مساحت متوازی الاضلاع $EFGH$ و d را فاصله بین یال‌های AC و BD فرض کنیم، آن وقت، برای حجم این چهاروجهی داریم:

$$V = \frac{2}{3} Sd$$

قضیه ۸۸. حجم V هرم برابر است با

$$V = \frac{1}{3} hS_0$$

که در آن، S_0 مساحت قاعده هرم و h ارتفاع آن است. اگر کره‌ای وجود داشته باشد که بر قاعده هرم و امتداد وجه‌های آن مماس باشد، آن وقت،

حجم هرم برابر است با

$$V = \frac{1}{3} r_0 (Q - S_0)$$

که در آن r_0 ، مساحت این کره و Q ، مساحت سطح جانبی هرم است.
قضیه ۸۹. حجم یک چند وجهی محیط بر کره به شعاع r ، برابر است با

$$V = \frac{1}{3} r S$$

که در آن، S ، مساحت سطح این چند وجهی است.
در حالت خاص، دو دستور قضیه‌های ۸۸ و ۸۹، برای چهاروجهی هم درست است.

در این کتاب، هر جا از تصویر بزرگ صفحه صحبت شده باشد، منظور تصویر قائم است.

قضیه ۹۰. فرض کنید، دو صفحه α و β ، یکدیگر را تحت زاویه φ قطع کرده باشند و در صفحه α ، شکلی به مساحت S واقع باشد. در این صورت، مساحت تصویر این شکل بر صفحه β ، برابر است با $S \cos \varphi$.

قضیه ۹۱. a را برداری غیر صفر در فضا و O را نقطه‌ای دلخواه می‌گیریم. در این صورت، برای هر مقدار $k \in \mathbb{R}$ ، مجموعه نقطه‌های X از فضا، که در برابری $\vec{a} \cdot \vec{OX} = k$ صدق کنند، عبارت است از یک صفحه.

قضیه ۹۲. سه پاره خط راستی که نقطه‌های وسط یال‌های رو به رو را در یک چهار وجهی $ABCD$ به هم وصل کنند، در یک نقطه M به هم می‌رسند و M ، وسط هر یک از این پاره‌خط‌های راست است؛ در ضمن، برای هر نقطه P داریم:

$$\vec{PM} = \frac{1}{4} (\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD})$$

قضیه ۹۳ (دستور اولر). I را تعداد رأس‌های یک چندوجهی محدب،

m را تعداد یال‌ها و n را تعداد وجه‌های آن فرض می‌کنیم. در این صورت، این برابری همیشه برقرار است:

$$l - m + n = 2$$

*

تعریف ۴۳. می‌گویند یک گراف مفروض است، وقتی که: اولاً مجموعه‌ای مثل $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ تثبیت شده باشد، که هر عضو آن را یک رأس می‌نامند؛ ثانیاً مجموعه‌ی زوج‌هایی که از عضوهای مجموعه A تشکیل شده است، مشخص شده باشد، که هر عضو آن را یک یال می‌نامند. گراف را توجیه شده (یا جهت‌دار) گویند، وقتی که، یال‌های آن، زوج‌های مرتبی از رأس‌ها باشند.

به عنوان نمونه‌ای از گراف توجیه نشده، می‌توان از گرافی نام برد که مجموعه‌ی رأس‌های آن، گروهی از آدم‌ها، و یال‌های آن، زوج آدم‌های آشنای با هم باشند. رابطه‌ی آشنایی را متقارن به حساب می‌آورند، یعنی وقتی a با b آشنا باشد، به معنای آن است که b هم با a آشناست. برای کار با گراف، بهتر است از مدل هندسی آن استفاده شود که به این ترتیب ساخته می‌شود: هر رأس گراف را متناظر با نقطه‌ای از صفحه یا فضا، و هر یال آن را متناظر با پاره‌خط راست یا یک منحنی می‌گیریم که دو انتهای آن بر دو رأس مربوط منطبق باشد (در حالتی که گراف توجیه شده باشد، باید جهت را روی یال‌ها مشخص کنیم).

تعریف ۴۴. دور (یا سیکل) به طول $k \geq 2$ در گراف با رأس‌های a_1, \dots, a_n ، به دنباله‌ی یال‌های مختلف به صورت زیر گفته می‌شود:

$$(a_{i_1}, a_{i_2}), (a_{i_2}, a_{i_3}), \dots, (a_{i_{k-1}}, a_{i_k}), (a_{i_k}, a_{i_1})$$

قضیه ۹۴. در گرافی که درست n رأس و n یال داشته باشد، دست کم یک دور وجود دارد.

*

تعریف ۴۵. اگر دو گروه عنصرهای

$$(a_1, \dots, a_n) \text{ و } (b_1, \dots, b_n)$$

از عنصرهایی یکسان تشکیل شده باشند و، اختلاف آنها، تنها در ردیف عنصرها باشد، آن وقت، یکی از آنها را تبدیل (یا جای گشت) دیگری گویند.

قضیه ۹۵. تعداد تبدیل‌های گروهی که شامل n عنصر مختلف باشد، برابر است با $n!$.

قضیه ۹۶. تعداد زیرمجموعه‌های m عضوی از یک مجموعه n عضوی $(0 \leq m \leq n)$ برابر است با C_n^m .

عدد C_n^m را، تعداد ترکیب‌های m به m از n عنصر هم می‌نامند.

از قضیه ۱۷، الف) و قضیه ۹۶، گزاره زیر نتیجه می‌شود.

قضیه ۹۷. تعداد همه زیرمجموعه‌ها، در یک مجموعه n عضوی، برابر است با 2^n .

ضمیمه د

فهرست نمادها

- \emptyset - مجموعه تهی
- N - مجموعه عددهای طبیعی
- Z - مجموعه عددهای درست
- Z^+ - مجموعه عددهای درست غیر منفی
- Q - مجموعه عددهای گویا
- R - مجموعه عددهای حقیقی

C - مجموعه عددهای مختلط

∞ - نماد بی نهایت

$a \in A$ - عضو a متعلق به مجموعه A است

$a \notin A$ - عضو a متعلق به مجموعه A نیست

$\{a_1, \dots, a_n\}$ - مجموعه‌ای شامل عضوهای a_1, \dots, a_n

(a_1, \dots, a_n) - گروه مرتبی از عنصرهای a_1, \dots, a_n

$\{a_n\}$ - دنباله عددهای a_n بدازای $n \in \mathbb{N}$ یا $n \in \mathbb{Z}^+$

$\{a|\alpha\}$ - مجموعه همه عضوهای a ، که دارای ویژگی α هستند

$B \subset A$ - B زیرمجموعه‌ای از مجموعه A است

$A \cup B$ - اجتماع مجموعه‌های A و B

$\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$ - اجتماع همه مجموعه‌های B_α بدازای $\alpha \in A$

$A \cap B$ - اشتراك مجموعه‌های A و B

$\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha$ - اشتراك همه مجموعه‌های B_α بدازای $\alpha \in A$

$A \setminus B$ - تفاضل مجموعه‌های A و B

$A \times B$ - حاصل ضرب (دکارتی) مجموعه‌های A و B

$[a, b]$ - بازه بسته عددی با دو انتهای a و b

(a, b) - بازه باز عددی با دو انتهای a و b

$(a, b]$ - بازه عددی $\{x | a < x \leq b\}$

$[a, b)$ - بازه عددی $\{x | a \leq x < b\}$

$f: A \rightarrow B$ - تابع f با دامنه تعریف A و برد B

f^{-1} - معکوس تابع f

f^n - انطباق مرتبه n تابع f : $f^n(x) = \underbrace{f(f \dots f(x))}_n$

f' - مشتق اول تابع f

f'' - مشتق دوم تابع f

f''' - مشتق سوم تابع f

$\deg P$ - درجه چندجمله‌ای P

i - واحد موهومی (فقط در فصل ششم)

π - طول نیم دایره به شعاع واحد

e - مبنای لگاریتم طبیعی

\ln - لگاریتم طبیعی

sign - تابع علامت (تعریف ۱۵)

$[x]$ - بخش درست عدد x

$\{x\}$ - بخش کسری عدد x

$\text{Re } z$ - بخش حقیقی عدد z

$\text{Im } z$ - بخش موهومی عدد z

$|z|$ - قدر مطلق (مدول) عدد z

$\arg z$ - آرگومان (عدد z)

\bar{z} - مزدوج عدد مختلط z

$\max\{x_1, \dots, x_n\}$ - بزرگترین عدد از بین عددهای x_1, \dots, x_n

$\max_{\alpha \in A} x_\alpha$ - بزرگترین عدد از بین عددهای x_α برای $\alpha \in A$

$\sum_{i=1}^n x_i$ - مجموع عددهای x_1, \dots, x_n

$\sum_{\alpha \in A} x_\alpha$ - مجموع همه عددهای x_α برای $\alpha \in A$

$\prod_{i=1}^n x_i$ - حاصل ضرب عددهای x_1, \dots, x_n

$\prod_{\alpha \in A} x_\alpha$ - حاصل ضرب همه عددهای x_α برای $\alpha \in A$

$n!$ - فاکتوریل n (تعریف ۱۸)

C_n^m - ضریب دوجمله‌ای (تعریف ۱۸)

$a_1 \dots a_n$ - عدد n رقمی

$a : b$ - a بر b بخش پذیر است

$a \equiv b \pmod{c}$ - عدد a ، نسبت به مدول c ، با b هم نهشت است

(تعریف ۱۶)

- $a \not\equiv b \pmod{c}$ - عدد a نسبت به مدول c ، با b هم نهشت نیست
 $[a_1, \dots, a_n]$ - کوچکترین مضرب مشترك عددهای a_1, \dots, a_n
 (a_1, \dots, a_n) - بزرگترین مقسوم علیه مشترك عددهای a_1, \dots, a_n
 AB - پاره خط راست با دو انتهای A و B ، و یا طول آن
 \overline{AB} - خط راستی که از دو نقطه A و B می گذرد
 \widehat{AB} - نیم خط راست به مبدأ A که از B گذشته است
 \widehat{ABC} - کمان با دو انتهای A و B و یا طول آن
 ABC - صفحه ای که از سه نقطه A و B و C گذشته است
 \widehat{ABC} - کمان با دو انتهای A و C و شامل نقطه B
 \hat{A} - زاویه به رأس A و یا اندازه آن
 \widehat{ABC} - زاویه به رأس B و ضلع های BA و BC ، یا اندازه آن
 ΔABC - مثلث با رأس های A و B و C
 A_1, \dots, A_n - چندضلعی با رأس های A_1, \dots, A_n
 P_M - محیط چندضلعی M
 S_M - مساحت چندضلعی M
 V_M - حجم چندوجهی M
 $M_1 = M_2$ - چندوجهی های M_1 و M_2 برابرند
 $M_1 \sim M_2$ - چندوجهی های M_1 و M_2 متشابه اند
 \overrightarrow{AB} - بردار با ابتدای A و انتهای B
 $|a|$ - طول بردار a
 $ab = a \cdot b$ - حاصل ضرب اسکالر بردارهای a و b