مبانی ریاضیّات

(ریاضی محض و کاربردی)

دانشگاه تربیت معلم

$$\sum_{i=m\pm k}^{n\pm k} S_{up} A_{i\pm k}$$

مؤلفان:

حسین دوستی ـ غلامرضا جهانشاهلو

مبانی ریاضیّات

(رشته ریاضی محض، کاربردی و مهندسی کامپیوتر)

مؤلفان:

حسین دوستی ـ غلامرضا جهانشاهلو

۵۱۰

م ۷۶۶د دوستی، حسین

مبانی ریاضیات: رشته ریاضی محض، کاربردی و مهندسی کامپیوتر / حسین‌دوستی و غلامرضا جهانشاهلو. ـ تهران: دانشگاه تربیت معلم، ۱۳۸۰.

۲۴۹ ص.: جدول، نمودار.

واژه‌نامه.

کتابنامه: ص. ـ ۲۴۹

۱. ریاضیات. الف. جهانشاهلو، غلامرضا، نویسنده همکار. ب. عنوان.

شناسنامه کتاب

نام کتاب: مبانی ریاضیات

مؤلفان: دکتر حسین دوستی و دکتر غلامرضا جهانشاهلو

ناشر: دانشگاه تربیت معلم

ویراستاری علمی: دکتر اسماعیل بابلیان ـ دکتر جواد لالی

ویراستار ادبی: دکتر محمود عابدی

حروفچینی: معاونت پژوهشی دانشگاه تربیت معلم

نوبت چاپ: دوم ۱۳۷۶

تیراژ: ۳۰۰۰ نسخه

نوبت چاپ: سوم ۱۳۸۰

تیراژ ۱۵۰۰ نسخه

قیمت: ۱۰۰۰ ریال

شابک: ۸ـ۴۲ـ۶۷۰۶ـ۹۶۴ ISBN: 964-6706-42-8

آدرس: خیابان دکتر مفتح، شماره ۴۹، کد پستی: ۱۵۶۱۴

فهرست مطالب

پیشگفتار مؤلفان

مفاهیم دروس رشتهٔ ریاضی بدون درک مبانی ریاضیات تقریباً ناممکن است. چرا که مطالب آن مکمل ریاضیات دبیرستانی است و در تمام دروس دورهٔ کارشناسی مورد استناد و استفاده قرار می‌گیرد، و به همین دلیل درس «مبانی ریاضیات» به عنوان پیشنیاز اکثر درسها شناخته شده است.

کتابی که اکنون از نظر خوانندگان گرامی می‌گذرد براساس ارزیابی تأثیر مفاهیم این درس در دروس مختلف دورهٔ کارشناسی ریاضی تهیه و تنظیم گردیده است. امّا نظری اجمالی بر منطق ریاضی که دانشجویان در دورهٔ قبل از دانشگاه فراگرفته‌اند ما را در فصل اول به رعایت اختصار مجبور کرده است، از این رو مفاهیم منطق را در چهار بخش فصل نخست گنجانده‌ایم. فصل دوم با شرحی در باب نسبت و تابع آغاز می‌شود و با عرضهٔ مطالبی جدید در مجموعه‌ها نظیر همتوانی، شمارشپذیری، کاردینال و اصل انتخاب به پایان می‌رسد. تأکید خاصّ در مورد مطالب بخشهای ۳.۲ و ۴.۲ در این فصل به دلیل آن است که اولاً در درسهای جبر، آنالیز، توپولوژی و نظریهٔ اعداد کاربردهای فراوانی دارد، ثانیاً خواسته‌ایم که تنظیم کتاب حاضر براساس نظام جدید آموزشی انجام گیرد و ضمناً مطالعهٔ این فصل نقصان و کمبود درسی با عنوان «نظریهٔ مجموعه‌ها» را هم مرتفع سازد. شناخت اعداد از مفاهیم اصلی مورد بحث در فصل سوم است و مطالب وابسته به اصل موضوع تمامیّت، پایان‌بخش این فصل خواهد بود. مفاهیم دیگری از نظریهٔ مجموعه‌ها، یعنی لم زورن و اوردینالها، در فصل چهارم قرار داده شده است و شناخت عمیقی از مجموعه‌ها را به ارمغان خواهد آورد. مؤلفان مطالعهٔ این فصل را به دانشجویان علاقه‌مند پیشرفته توصیه می‌کنند و تأمل در آن با همهٔ اختصاری که دارد مفید و مؤثر خواهد بود.

حسین دوستی ـ غلامرضا جهانشاهلو

فصل ۱: مبانی منطق

۱.۱ مقدمه: آشنایی با ساختمان منطقی جمله‌هایی که مطالب ریاضی به وسیلهٔ آنها بیان می‌شوند مستلزم شناخت مفاهیم گزاره، گزاره‌نما و اسم‌نماست که در سه بخش آتیه مورد بررسی قرار خواهند گرفت. این مفاهیم که بخشی از منطق ریاضی مقدماتی محسوب می‌شوند می‌توانند مفاهیم و احکام ریاضی را قابل فهم و قابل توضیح نمایند. در عصر حاضر ایفای نقش منطق ریاضی در توجیه و قابل انتقال نمودن مفاهیم در پیشرفت و تکامل کامپیوتر بر هیچ کس پوشیده نیست و ایفای این نقش منطق بر پایه و اصولی است که مبانی آن را در سه بخش آتیه مورد بحث قرار خواهیم داد. قطعاً با مطالعهٔ مطالب پایه و مقدماتی این فصل، هر خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند به مطالب پیشرفتهٔ منطق در کتابهایی با عنوان «منطق ریاضی» دسترسی پیدا کند.

۲.۱ حساب گزاره‌ها

۱.۲.۱ تعریف: گزاره جمله‌ای خبری است که یا راست است یا دروغ. اگرچه راست یا دروغ بودن آن معلوم نباشد.

برای هر گزاره یک ارزش راستی یا دروغی یا مختصراً یک ارزش قائل می‌شویم. مثلاً

هر یک از جملات «عدد 3 فرد است»، «عدد 6 زوج است» و «$\pi^{\sqrt{2}}$ اصم است» گزاره هستند. هر یک از گزاره‌های اول و دوم راست هستند ولی راست یا دروغ بودن گزارهٔ سوم با مقدمات کنونی، برایمان معلوم نیست ولی در هر حال یا راست است و یا دروغ.

گزاره‌ها به طور کلی به سه دسته تقسیم می‌شوند، ***گزارهٔ شخصی***، ***گزارهٔ کلی*** و ***گزارهٔ جزئی*** (یا وجودی). نوع اول گزاره‌ای است که از شئ معینی خبر می‌دهد و در این بخش مورد بحث ماست. نوع دوم و سوم را در بخش آینده تعریف و بررسی خواهیم کرد.

از ترکیب گزاره‌ها گزاره‌های مرکب حاصل می‌شود این عمل با رابطهای گزاره‌ای امکان‌پذیر است.

۲.۲.۱ رابطهای گزاره‌ای: گزارها را با حروف p ، q ، v ، s و یا با حروف اندیس‌دار نظیر p_1 ، q_1 ، ... نشان می‌دهیم و هر نوع ترکیبی از آنها با الفاظ زیر که ***رابطهای گزاره‌ای*** نامیده می‌شوند امکان‌پذیر است:

«چنین نیست که» ، «و» ، «یا» ، «اگر» ، «اگر و فقط اگر»

علایم $\sim$ ، $\&$ ، $\vee$ ، $\supset$ (یا $\Rightarrow$) ، $\equiv$ (یا $\Leftrightarrow$) نیز به ترتیب برای این رابطها به کار خواهند رفت. اینک به توضیح آنها می‌پردازیم.

۳.۲.۱ نقیض: اگر p گزاره‌ای باشد «چنین نیست که p» را نقیض p می‌گوییم و با علامت $\sim p$ نشان می‌دهیم. علامت $\sim$ را ناقص و گزاره‌ای را که ناقض در آن عمل می‌کند ***دامنهٔ عمل ناقض*** می‌نامیم. پیداست که اگر گزاره‌ای راست (دروغ) باشد نقیض آن دروغ (راست) است.

به عنوان مثال نقیض گزارهٔ «6 عدد اول است» گزارهٔ «چنین نیست که 6 عدد اول است» و یا گزارهٔ «6 عدد اول نیست» خواهد بود.

۴.۲.۱ ترکیب عطفی: اگر p و q دو گزاره باشند گزارهٔ «p , q» را ترکیب عطفی p با q می‌گوییم و با علامت $p \,\&\, q$ نشان می‌دهیم. علامت $\&$ را عاطف و p و q را ***مؤلفه‌های***

عاطف می‌نامیم. ترکیب عطفی $p \,\&\, q$ فقط و فقط وقتی راست است که هر دو مؤلفه آن گزاره‌های راستی باشند.

از الفاظی که از نظر منطقی مترادف عاطف است لفظ «ولی = اما» است. مثلاً گزارهٔ «6 زوج است ولی اول نیست» به معنی «6 زوج است و 6 اول نیست» خواهد برد که البته گزاره‌ای راست است.

۵.۲.۱ ترکیب فصلی: اگر p و q دوگزاره باشند گزارهٔ «p یا q» را ترکیب فصلی p با q نامیده به علامت $p \vee q$ نشان می‌دهیم. این گزاره فقط و فقط وقتی دروغ است که هر دو مؤلفهٔ آن دروغ باشند. توجه کافی به تفاوت این «یا» که ***یاء منطقی*** نامیده می‌شود با لفظ عادی «یا» که در استعمال عادی برای ترکیب گزاره‌ها به‌کار می‌رود مبذول دارید. در استعمال عادی لفظ «یا» گزارهٔ ترکیب شده فقط و فقط وقتی راست است که یکی از مؤلفه‌ها راست و دیگری دروغ باشد. این نوع «یا» را ***یاء مانع جمع*** می‌نامیم.

در منطق لفظ «یا» همواره به معنی منطقی به کار می‌رود. و «یای» مانع جمع را با تکرار لفظ «یا» و نیز با لفظ «الا» مشخص می‌کنند. مثلاً گزاره‌های

«یا 5 فرد یا 5 زوج است»

«5 فرد است والا زوج است»

به یک معنی هستند که مشخص کنندهٔ یای مانع جمع است.

مثال: ارزش گزارهٔ «5 فرد است یا 5 اول است» را با یای منطقی و یای مانع جمع مشخص کنید.

جواب: با یای مانع جمع این گزاره دروغ خواهد بود ولی با یای منطقی ارزش آن راست است.

۶.۲.۱ ترکیب شرطی: اگر p و q دو گزاره باشند گزارهٔ «اگر p آنگاه q» را ترکیب شرطی p با q می‌نامیم و آن را به علامت $p \supset q$ (یا $p \Rightarrow q$) نشان می‌دهیم.

در اینجا مؤلفهٔ p مقدم و مؤلفهٔ q تالی گفته می‌شود. ترکیب شرطی $p \supset q$ فقط و فقط وقتی دروغ است که p گزارهٔ راست و q گزارهٔ دروغ باشد.

مثال: ارزش هر یک از گزاره‌های زیر را مشخص کنید:

(آ) ـ $p \supset q$ که در آن p به معنی «$5<1$» و q به معنی «$4=3$» است؛

(ب) ـ $p \supset q$ که در آن p به معنی «7 فرد است» و q به‌معنی «برف سیاه است»؛

(پ) ـ $q \supset p$ که در آن p و q گزاره‌های قسمت (ب) هستند.

جواب: در (آ) هر دو مؤلّفه دروغند پس $p \supset q$ راست است. در (ب) $p \supset q$ دروغ و در (پ)، $q \supset p$ راست است.

تذکر ۱ : ارزشهای گزارهٔ عطفی $p \& q$ و گزاره $p \vee q$ از ترتیب مؤلفه‌ها مستقل است ولی ارزش گزارهٔ شرطی چنین‌نیست، یعنی ممکن‌است $p \supset q$ راست‌ولی $q \supset p$ دروغ باشد و یا بالعکس $p \supset q$ دروغ و $q \supset p$ راست باشد (مثال بالا ملاحظه شود.)

تذکر ۲ : بیان ترکیب شرطی «اگر p آنگاه q» در ریاضیات و نیز در زبان عادی به صورتهای متنوعی امکان‌پذیر است که عبارتند از:

اگر p، q؛

هرگاه p آنگاه q؛

در حالتی که p، q؛

q اگر p،

q به شرطی که p؛

p و فقط وقتی که q؛

p شرط کافی برای q است؛

q شرط لازم برای p است؛

شرط کافی برای q آن است که p؛

شرط لازم برای p آن است که q ؛

p مستلزم q است ؛

q از p لازم می‌آید ؛

$q \supset p$.

مثال: چند بیان معادل برای گزارهٔ $p \supset q$ ارائه دهید که در آن p گزارهٔ «$a>1$» و q گزارهٔ «$a^2>1$» است.

جواب: چند صورت معادل از بیان گزاره چنین خواهد بود:

شرط لازم برای آنکه $a>1$ آن است که $a^2>1$.

اگر $a>1$ آنگاه $a^2>1$.

شرط کافی برای آنکه $a^2 > 1$ آن است که $a>1$.

۷.۲.۱ **ترکیب دوشرطی**: گزارهٔ

«اگر p آنگاه q و اگر q آنگاه p» (۱)

ترکیب عطفی دو گزارهٔ شرطی $p \supset q$ و $q \supset p$ است که می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت:

$$(p \supset q) \,\&\, (q \supset p) \qquad (۲)$$

این گزاره را ترکیب دوشرطی دوگزارهٔ p و q می‌نامیم و آن را به علامت

$$p \equiv q \qquad (۳)$$

نشان می‌دهیم. ارزش این گزاره فقط و فقط وقتی راست است که مؤلفه‌های p و q هم‌ارزش باشند. اگرچه $\equiv$ را به عنوان رابط گزاره‌ای تعریف کردیم ولی باید به مفهوم آن هم توجه داشت.

مثال: اگر p و q به ترتیب به معنی «5 فرد است» و «8 اول است» باشند ارزش گزاره‌های

$p \supset q$، $q \supset p$، و $p \supset\subset q$ را مشخص کنید.

جواب: p راست و q دروغ است، بنابراین $p \supset\subset q$ دروغ خواهد بود. ضمناً $p \supset q$ دروغ و $q \supset p$ راست است.

تذکر ۱ : مشابه ترکیب‌شرطی در مورد ترکیب دوشرطی نیز بیانهای مختلفی برای $p \supset\subset q$ وجود دارند که عبارتند از:

شرط لازم و کافی برای p آن است که q؛

p فقط و فقط وقتی که q؛

فقط و فقط وقتی p که q؛

اگر p آنگاه q و بالعکس؛

شرط لازم برای p آن است که q و شرط کافی برای p آن است که q.

تذکر ۲ : در ریاضیات موردی هست که استفاده از ترکیب شرطی به جای ترکیب دوشرطی متداول است و آن در «تعریف»های ریاضی است. مثلاً تعریف «مثلث ABC را متساوی‌الساقین می‌نامیم در صورتی‌که دارای دو ضلع مساوی باشد» در واقع بدین معنی است که «مثلث ABC فقط و فقط متساوی‌الساقین است که دارای دو ضلع مساوی باشد» و یا معادل است با «مثلث ABC را فقط و فقط متساوی‌الساقین خوانند که دارای دو ضلع متساوی باشد».

مثال: اگر p گزارهٔ $a < b$ و q گزارهٔ $2a<2b$ باشد، بیان ریاضی $p \supset\subset q$ چیست؟

جواب: هر یک از گزاره‌های زیر بیان گزارهٔ $p \supset\subset q$ اند.

«اگر $a < b$ آنگاه $2a < 2b$ و اگر $2a < 2b$ آنگاه $a < b$»

«$a < b$ اگر و فقط اگر $2a < 2b$»

شرط لازم و کافی برای آنکه $a < b$ آن است که $2a < 2b$»

مثال: گزارهٔ «شرط لازم و کافی برای آنکه نقطهٔ M بر روی عمودمنصف پاره‌خط AB

باشد آن است که «$MA = MB$» را با حروف گزاره‌ای بیان کنید.

جواب: فرض کنیم p گزارهٔ «نقطهٔ M بر عمودمنصف AB است» و q گزارهٔ «$MA = MB$» باشند، در این صورت گزارهٔ مفروض $q \sqsupset\sqsubset p$ خواهد بود.

۸.۲.۱ ترکیبات منطقی و فرمولهای حساب گزاره‌ای: رابطهای گزاره‌ای یعنی $\sim$ ، $\&$ ، $\vee$ ، $\supset$ و $\sqsupset\sqsubset$ را ملاحظه کردیم که اولی در یک گزاره و سایرین در دو گزاره عمل می‌کنند. ترکیبات گزاره‌ها را به وسیلهٔ آنها ترکیبات منطقی و عبارت حاصل از ترجمهٔ یک گزاره را به زبان منطق (یعنی نوشتن آن با رابطهای گزاره‌ای و حروف) یک فرمول حساب گزاره‌ها یا مختصراً یک فرمول می‌نامیم. گزاره‌های سازای یک ترکیب منطقی نیز گزاره‌هایی هستند که ترکیب منطقی از آنها ساخته می‌شود. (به وسیلهٔ رابطهای گزاره‌ای).

در نوشتن ترکیبات منطقی به صورت فرمولها اساساً باید دامنه یا دامنه‌های هر عمل را با پرانتز مشخص کرد. استفاده از پرانتز در منطق مشابه ریاضیات است.

در ترکیبات منطقی باید به رابط اصلی توجه کافی شود. مثلاً در گزارهٔ $\sim(p \ \& \ q)$ ، $\sim$ رابط اصلی است در حالی‌که در گزارهٔ $(\sim p) \ \& \ q$ ، $\&$ رابط اصلی است. به کاربردن پرانتزها بعضاً الزامی است مثلاً ترکیب منطقی $p \ \& \ q \ \& \ r$ معنی ندارد، ولی $(p \& q) \& r$ معنی‌دار است که رابط عطفی دوم (از چپ به راست) رابط اصلی شمرده می‌شود.

در به‌کارگیری پرانتزها قراردادهای زیر را نیز داریم که توجه به آنها موجب تسهیل در ساده‌نویسی می‌گردد.

۱.۸.۲.۱ قرارداد: دامنهٔ عمل ناقص (و سایر رابطهای یکطرفه که بعداً خواهیم دید) فقط و فقط وقتی در پرانتز قرار داده می‌شود که رابط اصلی این دامنه یک رابط دوطرفه باشد، بنابراین مثلاً نقیض $p \ \& \ q$ را به صورت $\sim(p\&q)$ و نقیض گزارهٔ $\sim p$ را به‌صورت

$\sim\sim p$ می‌نویسیم و نیز نقیض گزارهٔ $\sim(p \& q)$ به صورت سادهٔ $\sim\sim(p\&q)$ نوشته می‌شود، زیرا در گزارهٔ $\sim(p\&q)$ رابط اصلی «$\sim$» است.

۲.۸.۲.۱ قرارداد: اگر دامنهٔ عمل یک رابط دوطرفه در طرفی نقیض یک گزاره باشد این دامنه را در پرانتز محصور نمی‌کنیم. مثلاً در ترکیب فصلی $(\sim p) \vee (\sim q)$ گذاشتن پرانتزها ضرورتی ندارد و آنرا به صورت $\sim p \vee \sim q$ می‌نویسیم. همچنین ترکیب شرطی $\big(\sim(p \& q)\big) \supset \big((\sim r) \vee \ \big)$ با حذف پرانتزهایی که لازم است به صورت سادهٔ $\sim(p \& q) \supset (\sim r \vee s)$ نوشته می‌شود.

مثال: گزارهٔ «اگر $a < b$ و $b < c$ آنگاه $a < c$» را به زبان منطق ترجمه کنید.

جواب: اگر p، q و r به ترتیب گزاره‌های «$a < b$»، «$b < c$» و «$a < c$» باشند آنگاه ترجمهٔ گزاره چنین خواهد بود:

$$(p \& q) \supset r .$$

مثال: با اختیار حروف گزاره‌ای، گزارهٔ «چنین نیست که حسن دانشجو و مریض است، حسن دانشجو نیست یا حسن مریض نیست و بالعکس» را به زبان منطق ترجمه کنید.

جواب: گزاره‌های «حسن دانشجو است» و «حسن مریض است» را به ترتیب به p و q نشان می‌دهیم. در این صورت،

$$\sim (p \& q) \;\equiv\; \sim p \vee \sim q .$$

به حذف پرانتزهای زاید در این گزاره با توجه به دو قرارداد بالا توجه کنید.

۳.۸.۲.۱ قرارداد: گزاره‌های $p \& q \& r$ و $p \vee q \vee r$ به صورتهای $(p\&q)\&r$ و $(p \vee q) \vee r$ خواهند بود و تعمیم آن به هر تعداد متناهی با قراردادن پرانترها از چپ به راست، گزاره‌ها را با معنی خواهد کرد. همچنین گزارهٔ «p مگر آنکه q» را به معنی اگر $\sim q$ آنگاه p، و یا به‌صورت $\sim q \supset p$ در نظر می‌گیریم. مثلاً «او را نمی‌بخشم مگر آنکه عذرخواهی کند» که به معنی «اگر عذرخواهی نکند او را نمی‌بخشم» است.

تذکر: تشخیص ساختمان منطقی گزاره‌ها با بیان عادی آنها لاّزم و ضروری است. این امر بیشتر در گزاره‌های شرطی مورد توجه است. مثلاً در گزارهٔ «در مثلث ABC اگر $AB = AC$ آنگاه $<B = <C$ و بالعکس» مثلث بودن ABC مقدم یک ترکیب شرطی است که تالی این ترکیب شرطی گزارهٔ دوشرطی

«$AB = AC$ اگر و فقط اگر $<B = <C$»

می‌شود. در واقع گزارهٔ مذکور به‌صورت زیر قابل بیان است:

(مثلث است ABC) $\supset$ ($AB = AC \equiv <B = <C$).

۹.۲.۱ ارزش راستی فرمولها: اگر در فرمولی نظیر $\sim p$ یا $p \;\&\; q$ یا $r \supset (p \vee q)$ حروف گزاره‌ای سازای آن را نمایش گزاره‌های دلخواه بشماریم، هر فرمول نمایش گزاره‌ای بیشماری خواهد بود. برای تسهیل بیان، هر دستگاه از ارزشهای حروف گزاره‌های یک فرمول را یک ارزشدهی در آن فرمول می‌نامیم. (برای اختصار ارزش راست بودن را به T و دروغ بودن را به F نمایش می‌دهیم). مثلاً در گزارهٔ $p \;\&\; q$ اگر p راست و q دروغ باشد (T,F) یک ارزشدهی در $p \;\&\; q$ است.

تعداد ارزشدهی‌های یک گزاره به تعداد گزاره‌های سازای آن بستگی دارد مثلاً در گزارهٔ p (شامل یک گزارهٔسازا) فقط دو ارزشدهی وجود دارد ولی $p \;\&\; q$ دارای چهار ارزشدهی (T,T) ، (T,F) ، (F,T) و (F,F) است. بهمین ترتیب در گزاره‌ای باسه گزارهٔسازا هشت ارزشدهی خواهیم داشت. و به‌طور کلی در گزاره‌ای با n گزارهٔسازا دقیقاً 2^n ارزشدهی امکان‌پذیر است.

برای تعیین تمام حالات ممکن ارزشدهی یک فرمول کلیهٔ حالات گزاره‌های سازا را در جدولی تنظیم می‌کنیم و برای خود فرمول نیز یک یا چند ستون در نظر می‌گیریم و سپس براساس تعاریف ارزش گزاره‌ها، ارزشدهی فرمول را معین می‌کنیم و ستون حاصل را جدول ارزش راستی فرمول مورد نظر می‌نامیم.

مثال: جدول ارزش راستی هر یک از گزاره‌های $\sim p$ ، $p \,\&\, q$ و $p \vee q$ را معین کنید.

جواب:

p	$\sim p$
T	F
F	T

p	q	$p\&q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p\vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

مثال: جدول ارزش گزارهٔ $(p \,\&\, q) \supset \sim q$ را تنظیم کنید.

جواب:

p	q	$p\&q$	$\sim q$	$(p\&q)\supset\sim q$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	T
F	T	F	F	T
F	F	F	T	T

مثال: جدول ارزش راستی گزارهٔ $(p \vee q) \supset \sim r$ را تنظیم کنید.

جواب: در اینجا سه گزارهٔ p ، q و r هشت حالت ممکن را خواهند داشت:

p	q	r	$p\vee q$	$\sim r$	$(p\vee q)\supset\sim r$
T	T	T	T	F	F
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	T	F	F
F	T	F	T	T	T
F	F	T	F	F	T
F	F	F	F	T	T

تذکر: چنانکه از مثالهای فوق مشخص است ارزش یک فرمول صرفاً با ارزشهای حروف‌سازای آن (یا به عبارتی گزاره های آن) مشخص می‌شود و از هر امر دیگر نظیر معانی حروف مستقل است.

۱.۲.۱۰ راستگوها: فرمولی را که همواره (یعنی به ازای هر نوع ارزشدهی) راست (یا دروغ) باشد راستگو (یا دروغگو) می‌نامیم.

مثلاً فرمول $p \vee \sim p$ راستگو و $p \& \sim p$ دروغگوست.

فرمولهای راستگو از قوانین منطق و فرمولهای دروغگو از تناقضات منطق محسوب می‌شوند. با تنظیم جدول ارزش یک فرمول می‌توان راستگوها و دروغگوها را مشخص کرد. بدین ترتیب که اگر در ستون آخر جدول ارزشدهی فرمول T ظاهر شده باشد فرمول مورد نظر راستگو است و اگر همهٔ ارزشهای ظاهر شده F باشند فرمول مورد بحث دروغگو خواهد بود. برخی از دروغگوها نام خاصی نیر دارند مثلاً $p\&\sim p$ به اجتماع نقیضین معروف است. در جدول زیر چند راستگو را ملاحظه می‌کنیم که برخی

از آنها به نام خاصّی نیز معروفند. اثبات راستگو بودن آنها با استفاده از جدول ارزشدهی آن میسّر است. می‌توان از آنها در هر فرمول دیگری بهره جست و ارزش فرمول را به‌دست آورد.

(۱) $\sim\sim p \sqsupset\sqsubset p$;

(۲) $(p \vee \sim q) \sqsupset\sqsubset (\sim p \supset q)$;

(۳) $(p \supset q) \sqsupset\sqsubset (\sim p \vee q)$;

(۴) $\sim(p \supset q) \sqsupset\sqsubset (p \,\&\, \sim q)$;

(۵) $(p \sqsupset\sqsubset q) \sqsupset\sqsubset [(p \supset q) \,\&\, (q \supset p)]$;

(۶) $(p \sqsupset\sqsubset q) \sqsupset\sqsubset (\sim q \sqsupset\sqsubset \sim p)$;

(۷) $(p \supset q) \sqsupset\sqsubset (\sim q \supset \sim p)$ (قانون عکس نقیض) ;

(۸) $\sim(p \,\&\, q) \sqsupset\sqsubset (\sim p \vee \sim q)$ (قانون دمورگن) ;

(۹) $\sim(p \vee q) \sqsupset\sqsubset (\sim p \,\&\, \sim q)$;

(۱۰) $[p \supset (q \supset r)] \sqsupset\sqsubset [q \supset (p \supset r)]$;

(۱۱) $p \supset (q \supset r) \sqsupset\sqsubset (p \,\&\, q) \supset r$.

تذکر: چون ارزش راستی یک راستگو از ارزشهای راستی حروف‌سازای آن مستقل است، بدیهی است که اگر در یک راستگو حروف‌سازای آن را به‌طور یکنواخت به فرمولهای دلخواهی تبدیل کنیم فرمول جدید نیز راستگو خواهد بود. به وسیلهٔ این قاعده می‌توان از هر راستگو راستگوهای بیشماری را استخراج کرد.

مثلاً از (۲) می‌توان راستگوی $[(p\supset q) \vee (q \supset r)] \sqsupset\sqsubset [\sim(p \supset q) \supset (q \supset r)]$ را نیز استخراج کرد که بجای p و q به ترتیب و به‌طور یکنواخت قرار داده‌ایم $p \supset q$ و $q \supset r$.

۱۱.۲.۱ معادلات منطقی و خواص آنها: از مفاهیم مهم وابسته به‌مفهوم راستگو مفهوم

فرمولهای معادل است. فرمول u را با فرمول v معادل می‌نامیم اگر $u \Leftrightarrow v$ یک راستگو باشد. هر راستگوی دوشرطی یک **معادلهٔ منطقی** نامیده می‌شود. از تعریف فرمولهای معادل معلوم می‌شود که هر فرمولی که معادل یک راستگو (دروغگو) باشد خود راستگو (دروغگو) است. بالاخره برای تشخیص اینکه دوگزارهٔ فارسی با هم معادلند یا نه، ابتدا آنها را به‌صورت فرمول می‌نویسیم، اگر فرمولهای حاصل با هم معادل باشند آن گزاره‌ها با هم معادلند.

معادلات منطقی خواصی شبیه خواص تساوی دارند که عبارتند از:

(آ): هر فرمول با خود معادل است.

(ب): اگر فرمولی معادل فرمول دیگری باشد دومی نیز با اولی معادل است (می‌توان گفت که دو فرمول معادل یکدیگرند.)

(پ): اگر فرمول u معادل فرمول v و فرمول v معادل فرمول w باشد آنگاه فرمول u با فرمول w معادل است.

(ت): اگر در یک فرمول بجای فرمولی که جزئی از ساختمان آن است فرمولی معادل آن قرار دهیم، فرمول حاصل، معادل فرمول اولیه است. این خواص نتیجهٔ تعریف فرمولهای معادل است که دانشجو می‌تواند با آوردن مثالهایی هر یک را ثابت کند، و در اینجا ما وارد اثبات آن نمی‌شویم.

تذکر ۱: هر گزارهٔ دوشرطی به یک گزارهٔ دوشرطی معادل خود تبدیل می‌شود [(۶) از ۱۰.۲.۱ ملاحظه شود] و این نکته در استدلال اهمیت تمام دارد، زیرا از هر گزاره می‌توان معادل آن را نتیجه گرفت و برای اثبات یک گزاره (مثلاً یک قضیهٔ هندسه) کافی است معادل آن را ثابت کنیم. مثلاً گزارهٔ

«اگر M بر عمودمنصف AB واقع باشد، $MA = MB$ و بالعکس»

معادل است با گزارهٔ

«اگر $MA \neq MB$ آنگاه M بر عمودمنصف AB واقع نیست و بالعکس».

تذکر ۲: هر ترکیب منطقی را می‌توان به‌صورتی معادل آن ولی عاری از $\supset$ یا $\equiv$ بیان کرد [(۳) و (۵) از ۱۰.۲.۱ ملاحظه شود].

مثلاً $p \supset (q \supset r)$ معادل‌است با $p \supset (\sim q \vee r)$ و نیز با گزارهٔ $\sim p \vee (\sim q \vee r)$.

محاسبات با عاطف و فاصل بمراتب آسانتر از ترکیب شرطی است و ارزیابی گزاره‌هایی که شامل فاصل باشند با جداولی ساده‌تر امکان‌پذیرند.

۳.۱ حساب محمولات:

به‌طوری که در بخش ۲.۱ گفته شد گزاره‌ها سه نوع‌اند: شخصی، کلّی و جزئی. مثالهائی از گزاره‌های شخصی، که خبری در مورد شیی معینی می‌دهند، ملاحظه شد و اینک، به تعریف دو نوع دیگر از گزاره‌ها می‌پردازیم.

گزاره کلّی: گزاره‌ای است که خبری از هر شیء از دستهٔ معینی از اشیاء می‌دهد. مانند «هر چیز فناپذیر است»، «هر عدد صحیح فرد یا زوج است». ***گزارهٔ جزئی*** یا وجودی گزاره‌ای است که خبری از وجود لااقل یک شیء در دستهٔ معینی از اشیاء می‌دهد. مانند «چیزی هست که فناپذیر نیست»، «عددی هست که زوج است».

در زبان فارسی گزاره‌های جزئی با لفظ «بعض» یا «بعضی» و گزاره‌های کلی با لفظ «هر» یا به ازای هر بیان می‌شوند.

۱.۳.۱ اسمنما، گزاره‌نما و سورها:

اسمنما عبارتی است شامل یک یا چند متغیر که با تبدیل یکنواخت جمیع موارد متغیرها به اسم یا اسامی خاص، به یک اسم خاص تبدیل شود. مثلاً x^2-3 یک اسمنما است. که بازای $x=3$ به اسم خاص 6 تبدیل می‌شود.

گزاره‌نما عبارتی است شامل یک یا چند متغیر که با تبدیل جمیع موارد متغیرها به اسم یا اسامی خاص، به یک گزاره تبدیل شود. مثلاً «x زوج است» یک گزاره‌نما است که

به ازای $x=2$ یک گزارهٔ راست و به ازای $x=7$ یک گزارهٔ دروغ حاصل می‌شود.

گزاره‌نماها را باتوجه به متغیرهای آنها و با حروفی نظیر F ، G نشان می‌دهیم. مثلاً، «x زوج است» را با $F(x)$ و «عدد x عدد y را عاد می‌کند» را با $F(x,y)$ می‌توان نشان داد.

بدیهی است که هر رابطه بین دو اسمنما یک گزاره‌نما خواهد بود. مثلاً، $\sqrt{x^2+1}$ و $\mathrm{Sin}\,y$ اسمنما هستند، ولی $\sqrt{x^2+1} = \mathrm{Sin}\,y$ گزاره نماست و آن را می‌توان به‌صورت $G(x,y)$ نشان داد.

حال فرض کنیم $F(x)$ یک گزاره‌نما باشد. هر گزارهٔ کلی به شکل

«به ازای هر x، $F(x)$» یا «x هرچه باشد $F(x)$»,

و هر گزارهٔ جزئی به شکل

«x ای وجود دارد که $F(x)$» یا «به ازای بعضی از مقادیر x، $F(x)$»

خواهند بود. پیشوند «x هرچه باشد» و مترادفهای آن به علامت $\forall x$ و پیشوند «x ای وجود دارد» به علامت $\exists x$ نشان داده می‌شود. بنابراین گزارهٔ کلی به شکل $\forall xF(x)$ و گزارهٔ جزئی به شکل $\exists xF(x)$ بیان می‌شوند. این حکم در مورد گزاره‌نماهای دو یا چند متغیره نیز برقرار است و علائم $\forall$ و $\exists$ که به‌ترتیب **سور عمومی** و **سور وجودی** نامیده می‌شوند، در مورد گزاره‌نماهای چند متغیره تکرار خواهند شد.

در $\forall xF(x)$ و $\exists xF(x)$ ، $F(x)$ را به ترتیب ***دامنه عمل سور*** عمومی یا وجودی و متغیر x را در این گزاره‌های کلی و جزئی یک **متغیر پابند** می‌نامیم. در گزاره‌نمای $F(x)$ متغیر x را ***متغیر آزاد*** و x را نیز اصطلاحاً یک متغیر فردی می‌نامند. بنابر توضیحاتی که داده شد اگر یک عبارت خبری شامل متغیر فردی آزاد باشد یک گزاره‌نماست و اگر مستقل از متغیر آزاد باشد گزاره است (گزارهٔ شخصی، کلّی یا جزئی.)

در مورد تعاریف و علائمی که در این بخش ذکر شد به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال: اگر $F(x)$ به معنی «x فرد است» باشد هر یک از عبارات:

(آ) : به ازای هر x، x فرد است؛

(ب) : چنین نیست که به ازای هر x، x فرد است؛

(پ) : xای وجود دارد که x فرد است؛

را با علائم سورها بنویسید.

جواب: مورد (آ) عبارت است از: $\forall x F(x)$ و مورد (ب): $\sim\forall x F(x)$ و با تبدیل عبارت فارسی (ب) به زبان عادی چنین خواهد شد: «xای وجود دارد که x فرد نیست» و بنابراین، (ب) به‌صورت علامتی $\exists x\big(\sim F(x)\big)$ و (پ) به شکل $\exists x F(x)$ بیان می‌گردد.

مثال: x و y دو متغیر فردی و متعلق به مجموعهٔ اعداد صحیح‌اند. اگر $F(x)$ به معنی فرد بودن باشد، عبارت «اگر هر عدد صحیح، فرد باشد، y فرد است» را با علائم سورها بنویسید و متغیرهای آزاد و پابند آن را معین کنید.

جواب: عبارت چنین می‌شود:

$$\forall x F(x) \supset F(y) \text{ ,}$$

که x متغیر پابند و y یک متغیر آزاد است.

مثال: اگر $F(x)$ به معنی «x زوج است» باشد، عبارات $\sim\forall x F(x)$ و $\forall x\big(\sim F(x)\big)$ و $\sim\exists x\big(F(x)\big)$ را به زبان معمولی بیان کنید.

جواب: جملات به‌ترتیب چنین خواهند شد:

چنین نیست که هر x زوج است؛

به ازای هر x، x فرد است؛

چنین نیست که xای زوج وجود دارد.

معادل فارسی عبارت سوم به صورت «هر x فرد است» خواهد بود که صورت منطقی آن $\forall x\big(\sim F(x)\big)$ می‌شود.

تذکر ۱: با توجه به مثالهای گذشته در بارهٔ گزاره‌نماهای یک متغیری نتیجهٔ زیر حاصل

می‌شود:

$$\sim\forall x F(x) \text{ به معنی } \exists x\left(\sim F(x)\right)$$

$$\sim\exists x F(x) \text{ به معنی } \forall x\left(\sim F(x)\right)$$

تذکر ۲: تکرار سورها در مورد گزاره‌نماهای چندمتغیری که قبلاً به آنها اشاره کردیم با کنار هم قرار دادن آنها انجام می‌پذیرد؛ مثلاً اگر $F(x,y)$ یک گزاره‌نمای دومتغیری باشد، آنگاه صورتهای $\forall x\forall y F(x,y)$ ، $\exists x\exists y F(x,y)$ ، $\forall x\exists y F(x,y)$ و $\exists x\forall y F(x,y)$ با مفروض بودن $F(x,y)$ به زبان عادی قابل بیان خواهند بود.

مثال: اگر $F(x,y)$ به‌معنی «x شبیه y است» باشد، هر یک از عبارات

(آ) : $\sim F(x,y)$ ؛

(ب) : $\exists x\left(\sim F(x,y)\right)$ ؛

(پ) : $\forall y\exists x\left(\sim F(x,y)\right)$ ؛

(ت) : $\exists x\exists y F(x,y)$ ؛

(ث) : $\forall y\sim\exists x\left(\sim F(x,y)\right)$ ؛

(ج) : $\sim\exists u\left(\sim F(u,y)\right)$ ؛

را به زبان معمولی بیان کنید.

جواب: به‌ترتیب چنین خواهند شد:

x شبیه y نیست.

xای وجود دارد که شبیه y نیست.

به ازای هر y ، xای هست که شبیه y نیست.

xای و yای وجود دارد که x شبیه y است.

به‌ازای هر y و هر x ، x شبیه y است (زیرا عبارت معادل $\forall x\forall y\left(\sim\sim F(x,y)\right)$ است).

به ازای هر u ، u شبیه y است.

۱.۳.۲ تذکر: اصطلاح حدود منطقی وجه تمایزی با اسمنما دارد. و به تفاوت آنها با گزاره‌نما باید توجه داشت.

حاصل اعمال و مقادیر توابع از قبیل $3+2$ ، $2x$ ، x^2-y ، $\sqrt{x}(y+z)$ ، $\text{Log}\,x$ ، $\text{Sin}\,x$ همه از حدود منطقی هستند و البته حدودی نظیر x^2-y یا $2x$ اسمنماست که با قراردادن مثلاً 5 به‌جای x و 2 به‌جای y ، x^2-y به اسم شیئی معین تبدیل می‌شود. ولی گزاره‌نماها عبارتند از همهٔ روابط ریاضی مشتمل بر متغیرهای فردی، مانند $x^2 - y>2z(x + y)$.

گزاره‌نماها در ریاضیات در بیان خواص و نسبت اهمیت زیادی دارند. توضیح اینکه خواص و نسبتهای ریاضی جز عدهٔ بسیار معدودی فاقد اسم خاصّ هستند و برای تعریف آنها باید به گزاره‌نماهای مبیّن آنها توسل جست. مثلاً گزاره‌نمای «x فرد است» مبیّن خاصیّت فرد بودن و گزاره‌نمای $x + y = z$ مبیّن نسبت تساوی است.

۱.۳.۳ انواع گزاره‌های کلی و جزئی: بحث خود در ترجمهٔ گزاره‌های کلی و جزئی را با چهار گزارهٔ «کلّی موجب» ، «کلّی سالب» ، «جزئی موجب» و «جزئی سالب» آغاز می‌کنیم. تحلیل و ترجمهٔ این گزاره‌ها پایهٔ تحلیل و ترجمهٔ گزاره‌های پیچیده‌تر است و توجه کافی به مثال زیر در تعریف و ترجمهٔ چهار گزارهٔ فوق ضروری است.

کلمات موجب یا سالب به‌ترتیب داشتن یا نداشتن خاصیت را معنی می‌دهند و تعاریف کلی و جرئی همان است که در ابتدای این بخش آمده است.

(۱) هر انسان زنده حیوان است. (گزارهٔ کلی موجب)

(۲) هیچ انسان زنده جماد نیست. (گزارهٔ کلی سالب)

(۳) بعضی از انسانها شاعرند. (گزارهٔ جزئی موجب)

(۴) بعضی از انسانها شاعر نیستند. (گزارهٔ جزئی سالب)

صفات انسان زنده بودن، حیوان بودن، جماد بودن و شاعر بودن را به‌ترتیب با F ، G ، H و K نمایش می‌دهیم. تحلیل گزاره‌های مذکور بدین نحو خواهد بود که در هر یک از آنها سور را با حفظ ارتباطش با سایر اجزای گزاره، از این اجزا جدا می‌کنیم.

معنی گزارهٔ (۱) این است که هر چیزی اگر صفت انسان بودن را داشته باشد صفت حیوان بودن را دارد. پس این گزاره را چنین تحلیل می‌کنیم:

به ازای هر چیز اگر آن چیز انسان زنده است، آن چیز حیوان است.»

و یا

«به ازای هر x اگر x انسان زنده است، x حیوان است.»

در این گزاره دامنهٔ عمل پیشوند «به ازای هر x» ترکیب شرطی $F(x) \supset G(x)$ است.

پس گزارهٔ (۱) چنین ترجمه می‌شود:

$$\forall x\big(F(x) \supset G(x)\big)$$

ملاحظه می‌کنید که در این فرمول: اولاً دامنهٔ عمل سور عمومی گزاره‌نمای $F(x) \supset G(x)$ و رابط اصلی آن $\supset$ است که آن را با پرانتز مشخص کرده‌ایم (برای دقت بیشتر در تشخیص دامنهٔ سور)، ثانیاً هر سه مورد x یک متغیر پابند به سور عمومی است (مورد اول همراه سور عمومی و دو مورد دیگر در دامنهٔ آن قرار دارند.)

معنی گزارهٔ (۲) این است که هر چیزی اگر انسان زنده باشد جماد نیست، پس این گزاره را چنین تحلیل می‌کنیم:

«به ازای هر x اگر x انسان زنده باشد چنین نیست که x جماد است» و یا ترجمهٔ آن عبارت است از:

$$\forall x\big(F(x) \supset \sim H(x)\big)\ .$$

گزارهٔ (۳) حاکی از این است که لااقل یک چیز هست که در عین حال صفت انسان بودن و صفت شاعر بودن را دارد، پس گزاره را می‌توان چنین تحلیل کرد:

«چیزی هست که آن چیز انسان است و آن چیز شاعر است» و یا «xای هست که x انسان است و x شاعر است». ترجمهٔ گزاره عبارت است از:

$$\exists x\big(F(x)\ \&\ K(x)\big)\ .$$

در این فرمول نیز همهٔ موارد x، متغیر پابند به سور وجودی است.

ترجمهٔ گزارهٔ (۴) به قیاس آنچه که در مورد (۳) گذشت به صورت زیر خواهد بود:

$$\exists x\big(F(x)\ \&\ \sim K(x)\big)\ .$$

۱.۳.۳.۱ تذکر: در اینجا لازم است تفاوت مهم بین گزاره‌های کلی و جزئی را خاطرنشان سازیم. چنانکه گفتیم گزاره‌های جزئی جنبهٔ وجودی دارند و در گزاره‌ای به‌صورت $\exists x\big(F(x)\ \&\ G(x)\big)$، اگر چیزی موجود نباشد که در عین حال دارای خاصیت F و G باشد، گزارهٔ دروغ است و برخلاف گزاره‌های کلی که جنبهٔ وجودی ندارند. اگر هیچ‌چیزی واجد خاصیت F نباشد تابع‌گزاره‌ای $F(x)$ به‌ازای هر مقدار از x دروغ است،پس $F(x) \supset G(x)$ به‌ازای هر مقدار x راست‌و گزارهٔ $\forall x\big(F(x) \supset G(x)\big)$ نیز راست خواهد بود. خلاصه، گزاره‌ای به‌صورت $\forall x\big(F(x) \supset G(x)\big)$ در دو صورت راست است:

اول در صورت «انتفای مقدم»؛ یعنی در صورتی که $F(x)$ همواره دروغ باشد و به عبارتی، هیچ‌چیز خاصیت F نداشته باشد. دوم وقتی چیزی واجد خاصیت F باشد، و هرچیزی که خاصیت F داشته باشد، خاصیّت G هم داشته باشد.

۴.۳.۱ گزاره‌های مخلوط: تحلیل و ترجمهٔ گزاره‌های مخلوط از اجزای کلی و جزئی براساس مندرجات بخش ۳.۳.۱ است. به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال: گزارهٔ «بعضی از اعضای باشگاه A از همهٔ اعضای باشگاه B مسن‌ترند» را تحلیل و ترجمه کنید.

جواب: تحلیلهای مختلف چنین خواهند بود: «xای هست که عضو باشگاه A است و از همهٔ اعضای باشگاه B مسن‌تر است.» و یا «xای هست که عضو باشگاه A است و به ازای هز y اگر y عضو باشگاه B است، آنگاه x از y مسن‌تر است.»

برای ترجمهٔ گزاره، عضو باشگاه A بودن را با F و عضو باشگاه B بودن را با G و نسبت «مسن‌تر از» را با H نمایش می‌دهیم. در این صورت، ترجمهٔ گزاره عبارت است از:

$$\exists x\big(F(x)\big) \ \& \ \forall y\big((G(y) \supset H(x,y)\big) \ .$$

در این فرمول موارد x و y هر دو پابند به سورهای متناظر می‌باشند؛ ولی مثلاً در گزارهٔ $\forall y\big(G(y) \supset H(x,y)\big)$، y یک متغیر پابند و x متغیری آزاد محسوب می‌شود.

مثال: تحلیل و ترجمهٔ گزارهٔ «هیچ عدد طبیعی از همهٔ اعداد حقیقی بزرگتر نیست» را بیان کنید.

جواب: تحلیل گزاره چنین می‌شود: «به‌ازای هر x اگر x عدد طبیعی است، چنین نیست که x از همهٔ اعداد حقیقی بزرگتر است.»

صفات عدد طبیعی بودن و عدد حقیقی بودن را به ترتیب با F و G نشان می‌دهیم و از علامت معمول «>» به معنی نسبت بزرگتری استفاده می‌کنیم. ترجمهٔ گزاره چنین خواهد بود:

$$\forall x\big(F(x) \supset \sim\forall y(G(y) \supset x>y)\big) \ .$$

مثال: گزارهٔ «از هر دو عدد حقیقی یکی از دیگری نابیشتر است» را ترجمه کنید.

جواب: اگر F صفت عدد حقیقی بودن باشد، ترجمه چنین خواهد بود:

$$\forall x \forall y\big(\big(F(x) \ \& \ F(y)\big) \supset (x \leq y \ \vee \ y \leq x)\big) \ .$$

تعریف دقیق نسبت در مجموعه‌ها را در فصل دوم ملاحظه خواهیم کرد و نسبتهای مهم، نظیر نسبت منعکس، متقارن، متعدی، قناس، هم‌ارزی را مورد بررسی قرار خواهیم داد. در اینجا با زبانی ساده نسبت متعدی و نسبت منعکس را با خواص بیان می‌کنیم و فرمولهای منطقی آنها را می‌نویسیم:

$F(x,y)$ را به معنی «x نسبت F به y دارد» تعریف می‌کنیم و می‌گوییم F نسبتی متقارن است، در صورتی که به ازای هر x و y اگر $F(x,y)$ آنگاه $F(y,x)$ (فرض بر این است که x و y به مجموعه معینی تعلق دارند).

مثال: ترجمهٔ متقارن بودن نسبت F را بیان کنید.

جواب: ترجمه چنین است:

$$\forall x \forall y \big(F(x,y) \supset F(y,x)\big) .$$

مثال: ترجمهٔ منعکس بودن F و متعدی بودن آن را بیان کنید.

جواب: $\forall x\big(F(x,x)\big)$ به معنی F در مجموعهٔ معین که x در آن قرار دارد منعکس است، خواهد بود و به ازای هر x و y و z از مجموعهٔ معین مفروض ترجمهٔ متعدی بودن F چنین است:

$$\forall x \forall y \forall z \Big(\big(F(x,y)\ \&\ F(y,z)\big) \supset F(x,z)\Big) .$$

۵.۳.۱ سورهای مقید: در منطق الفاظ «چیز» و «شیء» با عام‌ترین معنی خود مورد استفاده قرار می‌گیرند و این نکته در معنی سورها ملحوظ است. مثلاً، $\forall x F(x)$ یعنی هر چیز به‌طور مطلق (مثلاً اشیاء هادی، اعداد یا آدمیان) خاصیت F دارد. این نه فقط غیرضروری است بلکه سبب طول کلام و مشکلات ناشی از آن می‌شود که ما را از هدف اصلی منحرف می‌کند. به همین جهت در استفاده از منطق در یک مبحث علمی، ثابتها و متغیرهای فردی را به *عالم سخن* آن مبحث مقید می‌کنند (عالم سخن یک مبحث یعنی

عناصر و یا اشیائی که در آن مبحث از خواص آنها و نسبت آنها به یکدیگر بحث می‌شود). مثلاً در جبر مقدماتی عالم سخن مجموعهٔ اعداد حقیقی است و $\forall x$ به معنی به‌ازاء هر عدد حقیقی x که از اشیاء مورد بحث است و $\exists x$ به معنی xای از اشیاء مورد بحث موجود است که، در نظر می‌گرفته می‌شوند. سورها را بدین معانی سورهای مقید می‌خوانیم.

استعمال سورهای مقید موجب اختصار می‌شود و در ریاضیات کاربرد زیادی دارد و معمولاً در آغاز یک مبحث ریاضی با وضع قراردادهایی در باب استعمال حروف، سورها را در آن مبحث مقید می‌سازند. مثلاً در مبحث اعداد حقیقی اگر حروف کوچک x، y، z را به معنی اعداد حقیقی دلخواه و حروف i، j، k، l، m، n را به معنی اعداد طبیعی در نظر بگیریم آنگاه $\forall x$ و $\exists n$ به معنی x هر عدد حقیقی باشد و n عددی است طبیعی، خواهد بود.

مثال: عالم سخن مجموعهٔ آدمیان است و متغیرهای فردی به معنی افراد دلخواه این عالم. می‌خواهیم تابع گزارهٔ «x پدر بزرگ مادری y است» را به وسیلهٔ نسبت پدری (F) و نسبت مادری (G) تعریف کنیم. معنی تابع مذکور چنین است که فردی از عالم سخن وجود دارد که x پدر او و وی مادر y است، یا zای وجود دارد که x پدر z و z مادر y است. بنابراین، ترجمه چنین خواهد شد:

$$\exists z\big(F(x,z)\big) \ \& \ G(x,y) \ .$$

مثال: در مبحث اعداد حقیقی x به معنی عدد حقیقی و m و n به معنی اعداد طبیعی هستند. گزارهٔ «هیچ عدد طبیعی از همهٔ اعداد حقیقی بزرگتر نیست» چنین ترجمه می‌شود.

$$\forall n \sim \forall x (n > x) \ .$$

۱.۵.۳.۱ توضیحاتی در بیان کلیّت: بیان کلیّت (سور عمومی) در زبان فارسی یکنواخت

نیست. گزاره‌های موجب کلی معمولاً با لفظ «هر» بیان می‌شوند اما صورتهای دیگری نیز مانند «کلاغها سیاه هستند» ، «ماهی در آب زندگی می‌کند» بیان کلیتهایی را مشخص می‌کنند، در عین آن که لفظ «هر» در آنها نیامده است و با «هر کلاغی سیاه است» و «هر ماهی در آب زندگی می‌کند» معادلند این امر در بیان گزاره‌های ریاضیات نیز صادق است مثلاً زوایای متقابل به‌رأس برابرند» که به معنی «هر دو زاویه متقابل به‌رأس برابرند» است. به‌طور کلی در ریاضیات در بیان قضایای کلی سورهای عمومی متوالی را که قضیه با آنها آغاز می‌شود و دامنهٔ عمل آنها تا آخر ادامه دارد حذف می‌کنند. مثلاً در جبر مقدماتی قضیهٔ $\forall x \forall y \forall z\big(x + (y + z) = (x + y) + z\big)$ به صورت

$$x + (y + z) = (x + y) + z \ \text{(همواره)}$$

بیان می‌شود. ولی ذکر سورهایی که با دامنهٔ عمل خود جزء ساختمان داخلی قضیّه هستند ضروری است و آنها را نمی‌توان حذف کرد. مثلاً در قضیهٔ زیر (از جبر مقدماتی)،

$$\forall x \forall y\big(\forall z\ (z < x) \supset z < y) \supset x \leq y\big)\ .$$

دو سور اول را حذف می‌کنیم، اما حذف سور مربوط به z جایز نیست، و آن را می‌توان چنین نوشت:

$$\forall z\ (z < x \supset z < y) \supset x \leq y\ .$$

که با $(z < x \supset z < y) \supset x \leq y$ مغایر است، زیرا گزارهٔ آخر به ازای $y=1$ و $x=2$ و $z=3$ دروغ است.

توضیح آخر در بیان سور عمومی این است که قبل از تجزیه و تحلیل و ترجمهٔ گزاره باید معنی آن را بدون ابهام مشخص کرد. گزاره‌هائی که «هر» و یک فعل منفی دارند مبهم‌اند و در ریاضیات از بیان آنها احتزاز می‌شود مانند «هر کسی را نتوان گفت که صاحب نظر است» یا «هر بی‌سر و پا محرم اسرار خدا نیست» در زبان یا منطق ریاضی از قبیل موارد مبهم شناخته می‌شود.

۱.۳.۶ بیان سورهای $\forall$ و $\exists$ بر حسب یکدیگر: بحث فرمولهای همیشه راست (و یا قوانین منطق) در اینجا از مجال مختصر ما بیرون است، ولی معادلات بیان سورها برحسب یکدیگر را توضیح می‌دهیم. این معادلات عبارتند از:

$$\forall x P(x) \supset\!\subset \sim\exists x \sim P(x) \;; \tag{۱}$$

$$\sim\forall x P(x) \supset\!\subset \exists x \sim P(x) \;; \tag{۲}$$

$$\exists x P(x) \supset\!\subset \sim\forall x \sim P(x) \;; \tag{۳}$$

$$\sim\exists x P(x) \supset\!\subset \forall x \sim P(x) \;; \tag{۴}$$

راست بودن همهٔ آنها با توجه به معانی هر یک بدیهی است. زیرا، در هر یک از آنها مؤلفه‌های دو گزاره مترادفند. این معادلات با هر فرمول دلخواه مانند $F(x)$ به جای $P(x)$ نیز برقرار است.

مثال: معادلهای فرمول $\forall x\big(F(x) \supset \sim G(x)\big)$ را به‌دست آورید:

$$\begin{aligned}\forall x\big(F(x) \supset \sim G(x)\big) &\supset\!\subset \sim\exists x \sim\big(F(x) \supset \sim G(x)\big)\\ &\supset\!\subset \sim\exists x\big(F(x) \;\&\; \sim\sim G(x)\big)\\ &\supset\!\subset \sim\exists x\big(F(x) \;\&\; G(x)\big) .\end{aligned}$$

مثال: نقیض گزارهٔ $\forall x\big(F(x) \supset G(x)\big)$ را به‌دست آورید.

$$\begin{aligned}\sim\exists x\big(F(x) \supset G(x)\big) &\supset\!\subset \exists x \sim\big(F(x) \supset G(x)\big)\\ &\supset\!\subset \exists x\big(F(x) \;\&\; \sim G(x)\big) .\end{aligned}$$

مثال: نقیض $\exists x\big(F(x) \;\&\; G(x)\big)$ را پیدا کنید.

$$\begin{aligned}\sim\exists x\big(F(x) \;\&\; G(x)\big) &\supset\!\subset \forall x \sim\big(F(x) \;\&\; G(x)\big)\\ &\supset\!\subset \forall x\big(F(x) \supset \sim G(x)\big) .\end{aligned}$$

۷.۳.۱ جفت یک فرمول: اگر در فرمول P که عاری‌از رابطهای $\supset$ و $\equiv$ است اعمال زیر را انجام دهیم فرمول حاصل جفت P نامیده می‌شود:

(آ) : تبدیل هر مورد & به $\vee$ و هر مورد $\vee$ به &؛

(ب) : تبدیل هر مورد $\forall$ به $\exists$ و هر مورد $\exists$ به $\forall$؛

(پ) : اسقاط هر مورد $\sim$ که بلافاصله در سمت چپ یک حرف گزاره‌ای (یا محمولی) قرار داشته باشد؛

(ت) : درج $\sim$ بلافاصله در سمت چپ هر یک از این حروف که $\sim$ بلافاصله بر آن مقدم نیست.

مثلاً جفت $\sim(p \vee \sim q) \,\&\, r$ عبارت است از $\sim(\sim p \,\&\, q) \vee \sim r$ و جفت فرمول $\forall x \sim \exists y \big(p \vee \sim F(x,y)\big)$ عبارت است از $\exists x \sim \forall y \big(\sim p \,\&\, F(x,y)\big)$.

۱.۷.۳.۱ خاصیت جفت یک فرمول: نقیض هر فرمول که عاری از $\supset$ و $\equiv$ باشد معادل جفت آن است.

اثبات این خاصیّت برای هر فرمول با شرایط مذکور، با توجه به قوانین (۱) تا (۴) مذکور در ۶.۳.۱ است. مثلاً نقیض $\forall x \sim \exists y \big(p \vee \sim F(x,y)\big)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\sim\Big(\forall x \sim \exists y \big(p \vee \sim F(x,y)\big)\Big) &\equiv \exists x \sim \Big(\sim \exists y \big(p \vee \sim F(x,y)\big)\Big)\\ &\equiv \exists x \sim \Big(\forall y \sim \big(p \vee \sim F(x,y)\big)\Big)\\ &\equiv \exists x \sim \forall y \Big(\sim p \,\&\, F(x,y)\Big)\,.\end{aligned}$$

تذکر: برای استفاده از اصل جفت (خاصیت بالا) در مورد فرمولهائی که شامل $\supset$ و $\equiv$ باشند. ابتدا آنها را به فرمولهای عاری از $\supset$ و $\equiv$ تبدیل می‌کنیم.

۴.۱ استنتاج: معمولاً گزاره‌ای را نتیجهٔ یک یا چند گزاره می‌نامیم که راست بودن

مقدمه (یا مقدمات) راست بودن آن گزاره را نتیجه دهد، و استنتاج عبارت است از به‌دست آوردن نتیجهٔ راست از یک یا چند گزاره که آنها را مقدمات می‌نامیم. نمایش یک استنتاج معمولاً بدین ترتیب است که مقدمات را در سطرهای زیر هم می‌نویسیم و نتیجه را نیز در سطری دیگر و با رسم خطی افقی مشخص می‌کنیم.

مثلاً
$$\begin{array}{l} p \supset q \\ p \\ \hline q \end{array} \qquad \text{و} \qquad \begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \hline q \end{array}$$

صورتهای منطقی استنتاج هستند. بیان استنتاج به روش فوق و با بیان معمولی نیز متداول است.

مثال: صورتهای منطقی هر یک از استنتاجهای زیر را بیان کنید.

(۱) :
سعدی متولد شیراز یا اصفهان است.
سعدی متولد شیراز نیست.
___
سعدی در اصفهان متولد نشده است.

(۲) :
سعدی نویسندهٔ گلستان یا بوستان است.
سعدی نویسندهٔ گلستان نیست.
___
سعدی نویسندهٔ بوستان است.

(۳) :
عدد 5 فرد یا اول است.
عدد 5 فرد نیست.
___
عدد 5 اول است.

(۴) :
اگر عدد طبیعی n فرد باشد، $n+1$ زوج است.
عدد طبیعی n فرد است.
―――――――――
عدد $n+1$ زوج است.

جواب: $\dfrac{\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \end{array}}{q}$ صورت‌نمایش استنتاجهای (۱) ، (۲) ، (۳) است و $\dfrac{\begin{array}{l} p \supset q \\ p \end{array}}{q}$ قالب استنتاج (۴).

با توجه به مثال بالا معلوم می‌شود که با قرار دادن گزاره‌هایی برای p و q، از هر یک از استنتاجهای مذکور تعداد بیشماری استنتاج به‌دست می‌آید.

۱.۴.۱ استنتاجهای علمی: بعضی از استنتاجها به‌وسیلهٔ مشاهده و تجربیه و تعمیم صورت می‌گیرد اعتبار این استنتاجها بر حسب درجهٔ احتمال دلالت راست بودن مقدمات بر راست بودن نتیجه، متفاوت است. این استنتاجها را استقرائی می‌نامیم و از آنها در منطق استقرائی بحث می‌شود. در مقابل این استنتاجها، استنتاجهای قیاسی نیز وجود دارند که راست بودن آنها (البته در صورت راست بودن مقدمات) صرفاً ناشی از صورت منطقی استنتاج است. معنی این نکتهٔ بسیار مهم این است که اگر استنتاج گزاره‌ای از مقدمات «درست باشد» (یعنی اگر مقدمات راست باشند گزاره هم چنین باشد) هر استنتاج دیگر که دارای همان صورت منطقی باشد نیز درست است. یعنی اگر مقدمات آن راست باشند نتیجه نیز راست است.

در بررسی استنتاجهای علمی (قیاسی) به دو مطلب زیر توجه می‌کنیم:

(آ) : راست بودن نتیجهٔ یک استنتاج حاکی از درستی آن نیست.

(ب) : دروغ بودن نتیجهٔ یک استنتاج حاکی از نادرستی آن نیست.

مثلاً در استنتاج (۱) با اندک تأملی متوجه می‌شویم که استنتاج درستی نیست زیرا

اگرچه مقدمات و نتیجهٔ آن راست هستند ولی راست بودن نتیجه ناشی از صورت منطقی استنتاج نیست. بنابراین (۱) اصلاً استنتاج نیست. اگرچه صورت کلی تعریف استنتاج را داراست. در مقایسه به استنتاج (۴) توجه می‌کنیم که دارای صورت منطقی

$$\begin{array}{l} p \supset q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

و یک استنتاج درست است.

مقایسهٔ فوق ما را مجبور به بیان دقیقی از استنتاج می‌کند که عبارت است از: «استنتاج منطقی صرفاً به‌وسیلهٔ صورت منطقی استنتاج به‌عمل می‌آید و هیچ امری خارج از صورت منطقی و بالاخص هیچ اطلاعی خارج از آنچه که در مقدمات آمده است در آن دخالت ندارد».

نتیجهٔ یک استنتاج درست ممکن است دروغ باشد، چنانکه نتیجهٔ یک استنتاج نادرست هم ممکن است راست باشد. شاید این سؤال به ذهن ما خطور کند که: چگونه استنتاج منطقی درست منجر به نتیجهٔ دروغ می‌شود؟ در پاسخ باید گفت که: در واقع علم منطق بندرت راست بودن یا دروغ بودن گزاره‌ای را تضمین می‌کند، یعنی علم منطق با مغایر بودن مقدمات یا نتایج با واقعیتهای خارجی مخالفتی ندارد بلکه هدف آن تعیین شرایط درست بودن استنتاجات است. البته اگر یک استنتاج درست باشد و مقدمات آن راست باشند نتیجه‌اش هم راست خواهد بود.

در اینجا بیانی از موضوع منطق در رابطه با استنتاج را که از دمورگن نقل شده است می‌آوریم و سپس به تعریف دقیق استنتاج می‌پردازیم. وی می‌گوید: موضوع منطق این نیست که نتیجهٔ استنتاج راست است یا دروغ، بلکه موضوع آن تشخیص این است که آنچه نتیجه قلمداد می‌شود فی‌الواقع نتیجه است یا نه.

۲.۴.۱ تعریف: فرمول Q را نتیجهٔ منطقی فرمولهای P_1 ، P_2 ، ... ، P_n می‌نامیم اگر به ازای هر ارزشدهی به متغیرهای گزاره‌ای جمیع این فرمولها که ارزشهای همهٔ Pها راست (T) باشد، ارزش Q نیز T گردد. وقتی که این شرط برقرار باشد می‌گوئیم استنتاج Q از P_1 ، ... ، P_n درست است والاّ آنرا نادرست می‌خوانیم. پس استنتاج نادرست در واقع استنتاج نیست و در عبارت «استنتاج درست» لفظ درست صرفاً برای تأکید است.

اگر Q نتیجه P_1 ، P_2 ، ... ، P_n باشد علامت

$$P_1 ، P_2 ، ... ، P_n \vdash Q$$

را به کار خواهیم برد. و این مفهوم بدین معنی است: در صورتی که در جدول مشترک ارزشهای فرمولهای Q و P_n ، ... ، P_2 ، P_1 در هر سطر که ارزشهای راستی همهٔ Pها T باشد، ارزش Q نیز T باشد یا در صورتی که در هر دستگاه از نمونه‌های متناظر فرمولهای فوق، اگر نمونه‌های Pها راست باشد نمونهٔ Q نیز راست باشد.

۳.۴.۱ تعریف گزاره‌ای استنتاج: گزارهٔ B را نتیجهٔ منطقی گزاره‌های A_1 ، ... ، A_n می‌خوانیم اگر این گزاره‌ها به ترتیب یک دستگاه از نمونه‌های متناظر فرمولهائی مانند فرمولهای مذکور در ۲.۴.۱ باشند که در آن B نمونهٔ Q است و A_1 ، ... ، A_n نمونه‌های P_1 ، ... ، P_n (به ترتیب) هستند و Q نتیجهٔ منطقی P_i هاست.

۴.۴.۱ قضیّه: اگر $P_1 ، ... ، P_n \vdash Q$ آنگاه $(P_n \supset Q)$ $P_1 ، ... ، P_{n-1} \vdash (P_n \supset Q)$.

برهان: اگر $n=1$، فرض قضیه به صورت $P_1 \vdash Q$ و حکم $P_1 \supset Q$ خواهد بود که چون Q نتیجهٔ منطقی P_1 است در هر سطر جدول ارزش اگر P_1 ارزش T داشته باشد Q نیز ارزش T خواهد داشت؛ یعنی حالتی اتّفاق نمی افتد که P_1 راست و Q دروغ باشد. بنابراین $P_1 \supset Q$ یک فرمول راستگوست.

برای اثبات فرمول در حالت کلی جدول زیر را در نظر می‌گیریم که در سطر دوم همهٔ Pها $(1 \leq i \leq n-1)$ ارزش T دارند:

P_1	P_2	...	P_{n-1}	P_n	Q	$P_n \supset Q$
T	T	...	T			T

ستون آخر نیز T قید شده است، زیرا اگر P_n ارزش F داشته باشد $P_n \supset Q$ راست است. ولی اگر P_n ارزش T داشته باشد با توجه به اینکه Q نتیجهٔ منطقی P_1، ... ، P_n است لزوماً Q راست است. پس $P_n \supset Q$ ارزش T دارد و در نتیجه، در ستون آخر غیر از T ارزش دیگری ظاهر نخواهد شد. □

۵.۴.۱ قضیّه: اگر $P_1 , P_2 , \ldots , P_{n-1} \vdash P_n \supset Q$ آنگاه $P_1 , P_2 , \ldots , P_n \vdash Q$.

برهان: فرض کنیم همهٔ P_iها $(1 \leq i \leq n)$ ارزش T داشته باشند، نشان می‌دهیم که Q نیز ارزش T دارد. با توجه به فرض اگر P_1، ... ، P_{n-1} ارزش T داشته باشد و P_n نیز ارزش T داشته باشد، برای Q ارزش دیگری غیر از T باقی نخواهد ماند.

۶.۴.۱ قضایا و قواعد استنتاج: علامت $\vdash$ دارای خواصی است که ظاهراً بسیار بدیهی هستند ولی در بررسی قضایای استنتاج اهمیت زیادی خواهند داشت. فرض کنیم Δ و Γ برای نمایش رشته‌ای از فرمولهای دلخواه بکار رود، مثلاً

$$\Gamma : S_1 , \ldots , S_n \quad \text{و} \quad \Delta : P_1 , \ldots , P_n$$

۱.۶.۴.۱ قضیّه: اگر $\Gamma \vdash Q$ و Δ همان Γ با تغییر ترتیب جمله‌های آن باشد، Δ نیز Q را نتیجه می‌دهد. به عبارت دیگر، اگر P_1، ... ، P_n، Q را نتیجه دهند آنگاه P_{i_1}، P_{i_2}، ... ، P_{i_n} نیز Q را نتیجه می‌دهند که در آن $(i_1 , i_2 , \ldots , i_n)$ تبدیلی از اعداد 1، 2، ... ، n است. این قضیّه بیان ساده‌تری نیز دارد که عبارت است از «درستی یک استنتاج از ترتیب مقدمات مستقل است.»

از برهان قضیّه می‌گذریم به ذکر مثالی اکتفا می‌کنیم.

مثال: می‌دانیم که $P , P \,\&\, q \vdash Q$. و براساس قضیهٔ بالا $P \,\&\, q , P \vdash Q$.

۲.۶.۴.۱ قضیّه: فرض کنیم $\Gamma \vdash Q$ و Δ رشتهٔ فرمولهای حاصل از Γ باشد با این تعریف

که اگر فرمولی مانند P_i بیش از یک بار در جمله‌های Γ آمده باشد همهٔ موارد این فرمول را جز یکی از آنها حذف کنیم. در این صورت $\Delta \vdash Q$. به عبارت دیگر، استنتاج

$$P_1 , P_2 , P_i , P_3 , \dots , P_{i-1} , P_i , P_{i+1} , \dots , P_n \vdash Q$$

استنتاج

$$P_1 , P_2 , \dots , P_i , \dots , P_n \vdash Q$$

را نتیجه می‌دهد.

۳.۶.۴.۱ قضیّه: اگر $\Gamma \vdash Q$ آنگاه $\Delta \vdash Q$ که Δ شامل فرمولهای Γ و تعدادی فرمول اضافی است به عبارت دیگر، افزودن مقدمات در صورتی که Q نتیجهٔ مقدمات قبلی باشد اثری در نتیجهٔ استنتاج ندارد. یعنی اگر $P_1 , \dots , P_n \vdash Q$ آنگاه

$$P_1 , \dots , P_n , R_1 , \dots , R_k \vdash Q .$$

۴.۶.۴.۱ قضیّه: اگر $\Gamma \vdash Q$ و نیز $\Delta , Q \vdash R$ آنگاه $\Gamma , \Delta \vdash R$.

برهان: فرض کنیم Γ شامل فرمولهای $P_1 , \dots , P_n$ و Δ شامل فرمولهای $R_1 , \dots , R_m$ باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که R نتیجهٔ منطقی

$$P_1 , \dots , P_n , R_1 , \dots , R_m$$

است. فرض کنیم همهٔ Pها و همهٔ R_iها ارزش T داشته باشند و با توجه به اینکه Q نتیجهٔ منطقی Pهاست، پس Q ارزش T دارد. چون فرض بر آن بود که همهٔ R_iها ارزش T دارند و نیر Q ارزش T دارد بنابراین R ارزش T دارد (زیرا R نتیجهٔ منطقی Δ و R است، یعنی اگر همهٔ P_iها و همهٔ R_iها ارزش T داشته باشند R نیز ارزش T دارد. □

۵.۶.۴.۱ تذکر: هر راستگوی شرطی یک قاعدهٔ استنتاجی به‌دست می هد، زیرا اگر فرمولی مانند $p \supset q$ راستگو باشد، یعنی $(\vdash p \supset q)$، در این صورت q نتیجهٔ منطقی p خواهد بود. مثلاً از چهار راستگوی

(۱) $p \supset p \vee q$ (۳) $q \supset q \vee p$

$(۲)\ p \,\&\, q \supset p \quad , \quad (۴)\ p \,\&\, q \supset q$

چهار قاعدهٔ استنتاج حاصل می‌شود:

$(۱)'\ p \vdash p \vee q \quad , \quad (۳)'\ q \vdash p \vee q$

$(۲)'\ p \,\&\, q \vdash p \quad , \quad (۴)'\ p \,\&\, q \vdash q\,.$

اینک به قواعد مهم استنتاج می‌پردازیم.

قبلاً ملاحظه کردیم که $p\,,\,q \vdash p \,\&\, q$ و تعمیم این قاعده چنین خواهد شد:

۱.۴.۶.۶ قاعدهٔ ادخال عاطف: اگر $\Gamma \vdash p$ و $\Gamma \vdash q$ آنگاه $\Gamma \vdash p \,\&\, q$.

برهان چنین خواهد بود که با توجه به فرض خواهیم داشت $\Gamma\,,\,q \vdash p \,\&\, q$ و در نتیجه،

$$\Gamma\,,\,q \vdash p \,\&\, q \quad , \quad \Gamma \vdash q\,.$$

و بنابر قضایای ۱.۴.۶.۱ـ۴ خواهیم داشت:

$$\Gamma\,,\,\Gamma \vdash p \,\&\, q$$

$$\Gamma \vdash p \,\&\, q.$$

مشابه قاعدهٔ فوق برای فاصل نیز وجود دارد.

راستگوی $(p \vee q) \supset r \;\Xi\; (p \supset r) \,\&\, (q \supset r)$ را در نظر می‌گیریم اگر p و q و r را به‌طور یکنواخت تبدیل کنیم نتیجه می‌شود:

$$p \supset r\,,\,q \supset r \vdash p \vee q \supset r$$

و خواهیم داشت:

۱.۴.۶.۷ قاعدهٔ ادخال فاصل: اگر $\Gamma\,,\,P \vdash R$ و $\Gamma\,,\,Q \vdash R$ آنگاه $\Gamma\,,\,P \vee Q \vdash R$ به عبارت معادل $\vdash P \vee Q \supset R$.

برهان براساس قضایای استنتاج (۱.۴.۶.۱ـ۴) است و چنین خواهد بود:

$\Gamma\,,\,P \vdash R\,;$

$\Gamma, Q \vdash R$;

$\Gamma \vdash P \supset R$;

$\Gamma \vdash Q \supset R$;

$\Gamma \vdash (P \supset R) \,\&\, (Q \supset R)$;

$\Gamma \vdash (P \vee Q) \supset R$.

۱.۴.۶.۸ قاعدهٔ تعدی: اگر $P \supset Q$ آنگاه $Q \supset R \vdash P \supset R$.

برهان آن آسان است و با توجه به راست بودن $P \supset Q$ و $Q \supset R$ و تشخیص حالات مختلف برای P و Q به انجام می‌رسد.

۱.۶.۶.۹ قاعدهٔ برهان خلف: این قاعده یکی از مهمترین قواعد استنتاجی است و کاربردهای فراوانی دارد. برهان خلف مبتنی بر راستگوی زیر به راستگوی برهان خلف معروف است:

$$(P \supset Q) \,\&\, (P \supset \sim Q) \;\supset\!\subset\; \sim P .$$

۱.۴.۶.۱۰ قضیّه: اگر $\Gamma, P \vdash Q$ و نیز $\Gamma, P \vdash \sim Q$ آنگاه $\Gamma \vdash \sim P$.

برهان براساس قضایای استنتاج، قاعدهٔ ادخال عاطف و راستگوی برهان خلف است. به قرار زیر:

$\Gamma, P \vdash Q$;

$\Gamma, P \vdash \sim Q$;

$\Gamma \vdash P \supset Q$;

$\Gamma \vdash P \supset \sim Q$;

$\Gamma \vdash (P \supset Q) \,\&\, (P \supset \sim Q)$ (قاعدهٔ ادخال عاطف) ;

$\Gamma \vdash \sim P$ (راستگوی برهان خلف) .

۱.۴.۷ تعریف: چند فرمول را ناسازگار می‌خوانیم اگر دو نتیجهٔ متناقض داشته باشند،

والاّ آنها را سازگار می‌گوئیم.

با داشتن چند فرمول، تشخیص سازگاری یا ناسازگاری آنها بدین ترتیب خواهد بود که اگر بتوانیم دو نتیجهٔ متناقص از این فرمولها به‌دست آوریم فرمولهای داده شده ناسازگارند. و البته ناتوانی ما در به‌دست آوردن دو نتیجهٔ متناقض دلیلی بر ناسازگاری آنها نیست. در این باره به قضایای زیر توجه می‌کنیم:

۱.۷.۴.۱ قضیّه: از چند فرمول ناسازگار هر فرمول دلخواهی را می‌توان نتیجه گرفت.

برهان: اگر Q فرمولی دلخواه و Γ یک دنباله از فرمولهای ناسازگار باشد آنگاه Γ فرمول Q را نتیجه می دهد، زیرا داریم:

$$\Gamma \vdash R \quad , \quad \Gamma \vdash \sim R \; ;$$

$\Gamma \vdash R \,\&\, \sim R$ (ادخال عاطف) ;

$R \,\&\, \sim R \supset Q$ (استنتاج اخیر راست است) ;

$R \,\&\, \sim R \vdash Q$.

و بنابر قاعدهٔ تعدی (۸.۶.۴.۱) نتیجه می‌شود: $\Gamma \vdash Q$. □

۲.۷.۴.۱ قضیّه: شرط لازم و کافی برای آن که فرمولهای

$$(۱) \quad P_1 , P_2 , \dots , p_n$$

ناسازگار باشند آن است که فرمول

$$(۲) \quad \sim(P_1 \,\&\, P_2 \,\&\, \dots \,\&\, P_n)$$

راستگو باشد.

برهان: با توجه به اینکه فرمولهای (۱) ناسازگارند، پس به ازای هر فرمول مانند Q،

$$(۳) \quad P_1 , P_2 , \dots , P_n \vdash Q \quad \text{و} \quad P_1 , P_2 , \dots , P_n \vdash \sim Q.$$

و از اینها خواهیم داشت:

$$(۴) \quad \begin{cases} P_1 \,\&\, P_2 \,\&\, \dots \,\&\, P_n \supset Q \; ; \\ P_1 \,\&\, P_2 \,\&\, \dots \,\&\, P_n \supset \sim Q \, . \end{cases}$$

$P_1 \,\&\, P_2 \,\&\, \dots \,\&\, P_n$ را به S نشان می‌دهیم و (۴) چنین خواهد شد

$$(5) \quad \begin{cases} s \supset Q \,; \\ s \supset \sim Q \,. \end{cases}$$

فرمولهای(۵) راستگو هستند و ترکیب‌عطفی آنها یعنی $(s \supset Q) \;\&\; (s \supset \sim Q)$ نیز یک فرمول راستگوست. با توجه به راستگوی برهان خلف یعنی

$$(s \supset Q) \;\&\; (s \supset \sim Q) \;\Rightarrow\; \sim s$$

نتیجه می‌شود که $\sim s$ راستگو است.

بالعکس فرض کنیم s دروغگو باشد، پس هر فرمولی را می‌توان از آن نتیجه گرفت:

$$s \vdash Q \qquad , \qquad s \vdash \sim Q \,.$$

و از این روابط می‌توان روابط زیر را نتیجه گرفت:

$$P_1 \;\&\; P_2 \;\&\; \dots \;\&\; P_n \supset Q \,;$$

$$P_1 \;\&\; P_2 \;\&\; \dots \;\&\; P_n \supset \sim Q \,.$$

یعنی فرمولهای $s \supset Q$ و $s \supset \sim Q$ راستگو هستند پس روابط زیر را خواهیم داشت:

$$P_1 \;\&\; P_2 \;\&\; \dots \;\&\; P_n \vdash Q \,;$$

$$P_1 \;\&\; P_2 \;\&\; \dots \;\&\; P_n \vdash \sim Q \,.$$

یعنی، P_1، P_2، ... ، P_n ناسازگارند. □

۸.۴.۱ عالم سخن و قوانین حساب محمولات: در این قسمت از بخش آخر فصل به بیان تفاوت موجود بین حساب گزاره‌ها و حساب محمولات می‌پردازیم. اگرچه همهٔ مباحث علمی به حساب گزاره‌ها نیاز دارند، ولی این حساب در استنتاج ناتوان است و حساب محمولات با تحلیل عمیقتری گزاره‌ها و قواعدی به‌دست می‌دهد که بسیاری از استنتاجهای عمیق ریاضی به‌وسیلهٔ آنها انجام می‌پذیرد به عنوان مثال استنتاج زیر را در نظر می‌گیریم:

هر انسان حیوان است.

جالینوس انسان است.

جالینوس حیوان است.

بدیهی است که این استنتاج در حساب گزاره‌ها نادرست است. در اینجاست که به مفاهیم فرمول همیشه برقرار و عالم سخن نیازمندیم. فرمولهای همیشه برقرار همان قوانین حساب محمولات هستند. در تعریف فرمول همیشه برقرار یعنی فرمولی که همیشه راست باشد لفظ «همیشه راست بودن» نیازمند تعریف عالم سخن است. Σ را یک عالم سخن می‌نامیم، اگر مجموعه‌ای از اشیا و خواص متعلق به این عالم است به طوری که آن خواص نسبتهائی هستند که ذکر آنها در مورد افراد این عالم با معنی باشد.

فرض کنیم Σ یک عالم سخن و P فرمول دلخواه باشد. اگر در فرمول P به جای هر متغیر فردی آزاد اسم فرد مشخصی از عالم Σ و به جای هر حرف محمولی که در P ظاهر شده است محمولی از عالم Σ که دارای همان عده موضع باشد، قرار دهیم گزاره‌ای حاصل می‌شود که آن را یک **نمونه** از فرمول P در عالم Σ می‌نامیم.

به عنوان مثال فرمول $\forall x\ F(x) \supset F(y)$ را اختیار می‌کنیم. x متغیر فردی پابند و y متغیر فردی آزاد است و معنی آن چنین است که:

«اگر هر چیز خاصیّت F دارد آنگاه y خاصیت F دارد»

اگر عالم سخن مجموعهٔ اعداد طبیعی و F خاصیت فرد بودن باشد یک نمونه از فرمول بالا در این عالم چنین خواهد بود:

«اگر هر عدد فرد باشد آنگاه y فرد است»

یک نمونهٔ دیگر از فرمول بالا را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم عالم سخن مجموعهٔ شهرهای ایران و F خاصیّت سردسیر بودن باشد. اگر y اراک باشد، نمونه‌ای از فرمول بالا چنین خواهد بود:

«اگر هر شهر ایران سردسیر باشد آنگاه اراک سردسیر است»

اینک به تعاریف دقیق زیر می‌پردازیم.

۱.۸.۴.۱ تعریف: اگر هر نمونهٔ یک فرمول در یک عالم سخن راست باشد می‌گوئیم آن فرمول در عالم مفروض برقرار است.

۲.۸.۴.۱ تعریف: اگر یک فرمول در هر عالم سخن راست باشد آنگاه یک فرمول همیشه برقرار و یا یک ***قانون منطق*** نامیده می‌شود.

مثال: نشان دهید $\forall x\ F(x) \supset F(y)$ یک قانون منطق است.

جواب: فرض کنیم Σ یک عالم سخن مفروضی باشد و F یک صفت دلخواهی از عالم فرض شود. بجای y عضو دلخواهی مانند a (از عالم Σ) قرار می‌دهیم و نمونهٔ

$$\forall x\ F(x) \supset F(a)$$

حاصل خواهد شد. در اینجا نشان می‌دهیم ارزش راستی یک نمونه راست است. دو حالت وجود دارد: اگر $F(a)$ راست باشد گزارهٔ شرطی راست خواهد بود. و اگر $F(a)$ دروغ باشد گزارهٔ «به ازای هر x ، $F(x)$» در Σ دروغ خواهد بود. پس $F(x) \supset F(a)$ راست است.

بنابراین، $\forall x\ F(x) \supset F(y)$ یک قانون منطق است (زیرا Σ دلخواه بود.)

قانون فوق به ***قانون تخصیص*** معروف است.

در شناخت دقیق قوانین منطق و نقش محمولات به عالم سخن متناهی توجه می‌کنیم. اگر Σ یک عالم سخن متناهی باشد سور عمومی به ترکیب عطفی و سور وجودی به ترکیب فصلی باز می‌گردد. فرض کنیم Σ مجموعهٔ اعضای a_1 ، a_2 ، ... ، a_n باشد و F خاصیتی مفروض در Σ. «به ازای هر x، $F(x)$» به معنی زیر خواهد بود:

$$F(a_1)\ \&\ F(a_2)\ \&\ \dots\ \&\ F(a_n)\,.$$

و نیز «xای وجود دارد که $F(x)$» به معنی زیر است:

$$F(a_1) \vee F(a_2) \vee \dots \vee F(a_n)\,.$$

مثال:اگر عالم‌سخن Σ مجموعهٔ‌دو عضوی $\{a,b\}$ باشد آیا $\exists y \forall x\big(F(y,y)\ \&\ \sim F(x,y)\big)$ یک قانون منطق در Σ است؟

جواب: با توجه به توضیحات بالا در مورد عالم سخن متناهی خواهیم داشت:

$$\forall x\big(F(a,a)\ \&\ \sim F(x,a)\big) \vee \forall x\big(F(b,b)\ \&\ \sim F(x,b)\big)$$

در هر مؤلفهٔ ترکیب فصلی x هر یک از مقادیر a و b را اختیار می‌کنیم و گزارهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$\Big(\big(F(a,a)\ \&\ \sim F(a,a)\big)\ \&\ \big(F(a,a)\ \&\ \sim F(b,a)\big)\Big) \vee$$
$$\Big(\big(F(b,b)\ \&\ \sim F(a,b)\big)\ \&\ \big(F(b,b)\ \&\ \sim F(b,b)\big)\Big)$$

که اگر قرار دهیم $p = F(a,a)$ ، $q = F(b,b)$ ، $r = F(b,a)$, $s = F(a,b)$ آنگاه گزارهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$\big((p\ \&\ \sim p)\ \&\ (p\ \&\ \sim r)\big) \vee \big((q\ \&\ \sim s)\ \&\ (q\ \&\ \sim q)\big)$$

که نادرست است. بنابراین گزارهٔ داده شده یک قانون در Σ نیست.

۵.۱ تمرینات:

۱ـ معنی «یا» را در این قضیهٔ هندسی بیان کنید: «اگر اضلاع زوایای $\angle AOB$ و $\angle A'O'B'$ نظیر به نظیر باهم متوازی باشند، دو زاویه مساوی یا مکمل یکدیگرند».

۲ـ سه گزارهٔ راست بنویسید که عکس هر یک دروغ باشد، و نیز سه گزارهٔ راست (یا دروغ) بنویسید که هر یک با عکس خود هم‌ارزش باشد.

۳ـ گزاره‌های p و q به ترتیب به معنی «حسین نوهٔ حسن است» و «پدر حسین پسر حسن است» هستند. ارزش هر یک از گزاره‌های $p \supset q$، $q \supset p$ را تعیین کنید.

۴ـ سه نفر به اسامی a، b، c به تقلب متهم شده‌اند و گزارشهای زیر به دادگاه بررسی و تشخیص جرم ارائه شده است:

(آ) : a مقصر و b بی‌تقصیر است.

(ب) : اگر c مقصر است، b هم مقصر است.

(پ) : b بی‌تقصیر است و لااقل یکی از افراد a و c مقصرند.

گزاره‌های a بی‌تقصیر است، b بی‌تقصیر است و c بی‌تقصیر است را به‌ترتیب به p، q و r نشان دهید و جدول ارزش مربوط به گزارشها را تنظیم کنید (برحسب جمیع حالات ممکنهٔ p، q و r).

۵ـ گزاره‌های زیر را به‌زبان منطق ترجمه کنید:

(آ) : اگر باران بیاید احمد نمی‌آید.

(ب) : a فرد نیست ولی b فرد است.

(پ) : اگر $a^2 > 1$ آنگاه $a > 1$ به شرط آنکه a مثبت باشد.

(ت) : در مثلث ABC اگر $AB > AC$ آنگاه زاویهٔ C بزرگتر از زاویهٔ B است.

(ث) : احمد خانه‌اش را نمی‌فروشد مگر آنکه اتومبیلش را بفروشد.

(ج) : اگر a عدد حقیقی باشد، $a=0$ یا $a<0$ یا $a>0$.

(چ) : دو زاویهٔ متقابل به‌راس با هم متساویند.

(ح) : باران بیاید یا نیاید عدد n اصم است، و بالعکس.

(خ) : اگر سه نقطهٔ A ، B ، C بر یک استقامت باشند و C بین A و B باشد آنگاه نه A بین B و C است و نه B بین A و C قرار دارد.

۶ـ ثابت کنید هر دو فرمول که با هم معادل باشند نقیض آنها نیز با هم معادلند.

۷ـ هر یک از گزاره‌های (ث) ، (ج) ، (چ) و (خ) را به صورتی معادل بنویسید که در آنها رابطهای گزاره‌ای ناقض، عاطف و فاصل استفاده شده باشد.

۸ـ بنابرآنکه متغیرهای فردی نمایش اعداد صحیح دلخواه و $F(x)$ به معنی «x فرد است» باشد،

(آ) : چه تفاوتی بین $\forall xF(x)$ و $\forall yF(y)$ وجود دارد؟

(ب) : چه تفاوتی بین $\exists xF(x)$ و $\exists yF(y)$ وجود دارد؟

(پ) : در فرمول $\forall xF(x) \supset F(x)$ موارد آزاد و پابند x را مشخص کنید. معنی فرمول چیست؟ با توجه به (آ) این فرمول را چگونه می‌توان نوشت که فهم آن آسان‌تر باشد؟

(ت) : معنی فرمولهای $\exists x\sim F(x)$ و $\sim\forall x\sim F(x)$ و $\sim\exists x\sim F(x)$ چیست؟

۹ـ اگر $F(x)$ به معنی «x فناپذیر است» باشد به چهار قسمت تمرین ۸ پاسخ دهید.

۱۰ـ اگر $F(x)$ به معنی «x منفی است» باشد به چهار قسمت تمرین ۸ پاسخ دهید.

۱۱ـ اگر متغیرهای فردی به معنی اعداد حقیقی و $F(x,y)$ به معنی $x<y$ باشد، معنی هر یک از فرمولهای زیر را بیان کنید:

$\sim F(x,y)$, $\forall y\exists x\sim F(x,y)$,

$\sim\exists x\sim F(x,y)$, $\forall y\sim\exists x\sim F(x,y)$,

$\exists x\exists yF(x,y)$, $\exists u\sim F(u,v)$,

$\forall u\sim\exists v\sim F(u,v)$, $\forall x\sim\exists y\sim F(y,x)$.

$\exists x\sim F(x,y)$,

۱۲ـ در هر یک از فرمولهای زیر متغیرهای فردی اعداد حقیقی می‌باشند، گزاره‌ها را از

گزاره‌نما تفکیک و هر یک را به زبان عادی ترجمه کنید:

$x + z = y$, $\forall y \forall x \exists z(x + z = y)$,

$\exists z(x + z = y)$, $\forall x \exists z \forall y(x + z = y)$,

$\forall y \exists z(x + z = y)$, $\forall z \forall x \forall y(x + z = y)$.

$\forall x \forall y \exists z(x + z = y)$,

۱۳ـ گزاره‌های زیر را تحلیل و به زبان منطق ترجمه کنید.

(آ) : بعضی از اعداد فردند،

(ب) : بعضی از اعداد اول زوجند،

(پ) : بعضی از اعداد اول زوج نیستند،

(پ) : هیچ عدد طبیعی کوچکتر از 1 نیست،

(ت) : هر عدد حقیقی که از 2 بزرگتر باشد از 5 نیز بزرگتر است،

(ث) : بین 2 و 3 هیچ عدد طبیعی وجود ندارد،

(ج) : هر عدد حقیقی در رابطهٔ $x^2-1=0$ صدق می‌کند،

(چ) : معادلهٔ $x^4-1=0$ حداقل یک ریشهٔ حقیقی دارد،

(ح) : معادلهٔ $x^2+1=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد،

(خ) : هر عدد که در $x+1=0$ صدق کند در $x^2-1=0$ نیز صدق می‌کند،

(د) : هر انسان حیوان است ولی هر حیوان انسان نیست.

۱۴ـ گزاره‌های زیر را با استفاده از سورها و به زبان منطق ترجمه کنید:

(آ) : هر فرد خانوادهٔ A از هر فرد خانوادهٔ B مسن‌تر است،

(ب) : خانوادهٔ A فردی مسن‌تر از همهٔ افراد خانوادهٔ B ندارد،

(پ) : بعضی از افراد خانوادهٔ A از بعضی از افراد خانوادهٔ B مسن‌تر نیست،

(ت) : هیچکس همهٔ کتابها را نخوانده است،

(ث) : هر خانه اطاقی دارد که همهٔ پنجره‌هایش بسته است،

(ج) : خانه‌ای وجود دارد که همهٔ پنجره‌های اطاقی در آن بازند.

۱۵ـ عالم سخن مجموعهٔ آدمیان، F نسبت پدر یا مادر بودن، G به‌معنی زن بودن و H به‌معنی مرد بودن است. گزاره‌های زیر را به وسیلهٔ این نسبتها و صفات بیان کنید:

(آ) : a پدر بزرگ b است،

(ب) : a نوهٔ ذکور b است،

(پ) : هر کس مادری دارد،

(ت) : هر کس پدر بزرگی دارد،

(ث) : هیچکس پدر بزرگ خود نیست.

۱۶ـ گزاره‌های زیر را به زبان منطق ترجمه کنید:

(آ) : از هر دو عدد حقیقی یکی از آنها نابیشتر از دیگری است،

(ب) : به ازای هر دو عدد حقیقی که اولی کوچکتر از دومی باشد، عددگویائی هست که از اولی بزرگتر و از دومی کوچکتر است،

(پ) : بین دو عدد حقیقی x و y حداقل یکی از روابط $x<y$ و $x>y$، $x=y$ برقرار است،

(ت) : هیچ عدد حقیقی از همهٔ اعداد حقیقی کوچکتر نیست،

(ث) : همهٔ اعداد اول به استثنای 2 فردند.

۱۷ـ نقیض هر یک از گزاره‌های تمرین ۱۳ را به زبان منطق بنویسید.

۱۸ـ نقیض هر یک از گزاره‌های تمرین ۱۴ را به زبان منطق بنویسید.

۱۹ـ اگر F ، G و H به ترتیب صفات عدد بودن، زوج بودن و فرد بودن باشند، نقیض گزارهٔ «هر عدد فرد یا زوج است» را بنویسید و با استفاده از اصل جفت آن را به گزاره‌ای عاری از ∨ تبدیل کنید.

۲۰ـ گزارهٔ «به ازای هر عدد گویا مانند a عدد اصمّی مانند b وجود دارد که به ازای هر عدد صحیح c نسبت F بین a ، b و c برقرار است» را به زبان منطق بنویسید و نقیض آن را به‌دست آورید.

فصل ۲: مجموعه، نسبت و تابع

مفهوم مجموعه دانسته فرض می‌شود و در دو بخش اول به معلومات اولیهٔ خواننده از اعداد حقیقی ($\Re$)، اعداد صحیح (Z)، اعداد طبیعی (N) و اعداد گویا (Q) اکتفا خواهیم کرد و اصول موضوعهٔ آنها را در فصل سوم به تفصیل خواهیم دید. بخش سوم و چهارم این فصل به خواص مجموعه‌های مجرد اختصاص دارد، در این بخشها از استقرا نیز به طور مختصر استفاده کرده‌ایم که معلومات دبیرستانی کافی بوده است.

۱.۲ نسبت، نسبت هم‌ارزی و انواع نسبتها: زوج مرتب (a,b) به زبان مجموعه‌ها عبارت است از مجموعهٔ $\{\{a\},\{a,b\}\}$. a را مختص اول و b را مختص دوم می‌نامیم. بدیهی است که ترتیب a و b در (a,b) ملحوظ است و هر زوج مرتب نمایش نقطه‌ای است که در صفحهٔ متشکل از دو محور مختصات واقع است. به ازای دو مجموعهٔ A و B مجموعهٔ $A \times B$ نیز متشکل از ازدواج مرتب (a,b) است که $a \in A$ و $b \in B$. به طور کلی هر زیر مجموعه از $A \times B$ را یک **نسبت** بین A و B می‌نامیم. اگر f نسبتی بین B و A باشد علامت afb را به معنی $(a,b) \in f$ به کار می‌بریم.

نمایش یک نسبت به وسیلهٔ مجموعهٔ ازواج مرتب آن و یا مجموعهٔ نقاطی در صفحهٔ مختصات امکان پذیر است. اگر f نسبتی بین A و B باشد مجموعهٔ مختصات اول اعضای f که زیر مجموعه‌ای از A است ***دامنه*** (یا حوزهٔ تعریف) f نامیده می‌شود و آن را

با نماد $\text{Dom } f$ نشان خواهیم داد. به همین ترتیب مجموعهٔ مختصات دوم اعضای f را **برد** (یا حوزهٔ عکس) f می‌نامیم و به علامت $\text{Im } f$ نشان می‌دهیم.

مثال: نمایش هر یک از نسبتهای زیر را در صفحهٔ مختصات مشخص کنید:

$$f_1 = \{(x,y) \in X\times Y \mid x+y \leq 3\},\ X = \{1,2\}\ ,\ y = \{1,3,5\}$$

$$f_2 = \{(x,y) \in \Re\times\Re \mid x^2+y^2 \leq 2\}$$

$$f_3 = \{(x,y) \in \Re\times\Re \mid -1 \leq x+y \leq 1\}$$

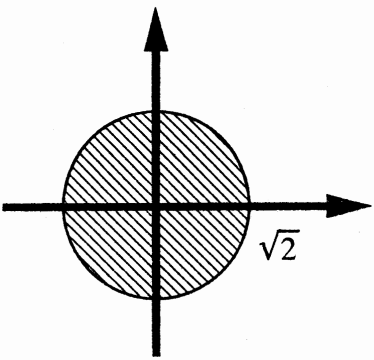
$$f_4 = \{(x,y) \in Z\times Z \mid x^2+y^2 = 1\}$$

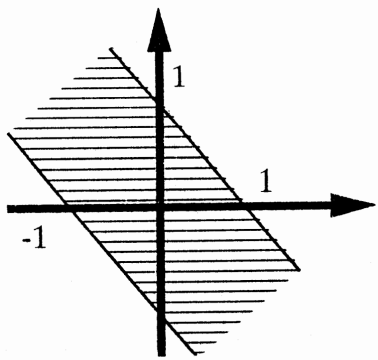
$$f_5 = \{(x,y) \mid x \in A\ ,\ y \in B\}\ ,\ A = \{a,b\}\ ,\ B = \{c,d\}$$

$$f_6 = \{(x,y) \mid x \in B\ ,\ y \in A\}\ ,\ A = \{1,3\}\ ,\ B = \{2,1\}$$

$$f_7 = \{(x,y) \mid x \in A\ ,\ y \in A\}\ ,\ A = \{1,5,7\}$$

جواب: بدیهی است که $f_1 = \{(1,1)\ و\ (2,1)\}$ و نمایش آن شامل دو نقطهٔ $(1,1)$ و $(2,1)$ در صفحهٔ مختصات خواهد بود. f_2 و f_3 دارای نمایشهای زیر خواهند بود:





در مورد نسبتهای f_4 ، f_5 ، f_6 ، f_7 نیز خواهیم داشت.

$$f_4 = \{(0,1)\ ,\ (0,-1)\ ,\ (-1,0)\ ,\ (1,0)\}$$

$$f_5 = \{(a,c)\ ,\ (a,d)\ ,\ (b,c)\ ,\ (b,d)\}$$

$$f_6 = \{(2,1)\ ,\ (2,3)\ ,\ (1,1)\ ,\ (1,3)\}$$

$$f_7 = \{(1,1)\ ,\ (1,5)\ ,\ (1,7)\ ,\ (5,1)\ ,\ (5,5)\ ,\ (5,7)\ ,\ (7,1)\ ,\ (7,5)\ ,\ (7,7)\}$$

نمایش نقاط هر یک از این نسبتها در صفحه نیز مشخص است.

نسبت f_5 به علامت اختصاری $A \times B$ و نسبت f_6 به علامت $A \times B$ و نسبت f_7 به علامت A^2 نشان داده می‌شود و این قرارداد در مورد هر مجموعهٔ A و هر مجموعهٔ B برقرار است.

نسبتی در مجموعهٔ A به نسبتی اطلاق می‌شود که دامنه و برد آن زیرمجموعه‌ای از A باشند.

۱.۱.۲ **تعریف**: نسبتی مانند f در مجموعهٔ مفروضی نظیر A را یک نسبت هم‌ارزی می‌نامیم اگر واجد سه خاصیت زیر باشد:

منعکس باشد (به ازای هر $a \in A$، afa)؛

متقارن باشد (به ازای هر $a,b \in A$ اگر afb آنگاه bfa)؛

متعدی باشد (به ازای هر $a,b,c \in A$ اگر afb و bfc آنگاه afc)

۲.۱.۲ **تعریف**: اگر f نسبتی هم‌ارزی در مجموعهٔ A باشد به ازای هر $x \in A$، ردهٔ هم‌ارزی x که با نماد $[x]_f$ نشان داده می‌شود عبارت است از:

$$[x]_f = \{y \in A \mid xfy\}.$$

مثال: n یک عدد طبیعی است. نسبت $\equiv_n$ در Z (مجموعهٔ اعداد صحیح) چنین تعریف می‌شود:

$$x \equiv_n y \Leftrightarrow (\exists k \in Z)\ x-y = kn\ .$$

ثابت کنید که $\equiv_n$ یک نسبت هم‌ارزی است و رده‌های هم‌ارزی را پیدا کنید.

جواب: به‌ازای هر $m \in Z$ رابطهٔ $m-m = 0 = 0.n$ بدیهی است، بنابراین $m \equiv_n m$.

اگر $m_1 \equiv_n m_2$ آنگاه $k \in Z$ای وجود دارد که $m_1-m_2 = kn$، و بنابراین $m_2 - m_1 = (-k)n$ و در نتیجه $m_2 \equiv_n m_1$.

اگر $m_1 \equiv_n m_2$ و $m_2 \equiv_n m_3$ آنگاه k_1 و k_2ای از Z یافت می‌شوند که

$$m_1 - m_2 = k_1 n \text{ و } m_2 - m_3 = k_2 n$$

و در نتیجه، $m_1 - m_3 = (k_1 + k_2)\, n$ پس، $m_1 \equiv_n m_3$.

رده‌های هم‌ارزی این نسبت نیز عبارتند از:

$$[t] = \{kn + t \mid k \in Z\}$$

$$t = 0, 1, \ldots, n\text{-}1$$

مثال: نسبت ~ در $\mathbb{R}$ (اعداد حقیقی) چنین تعریف می‌شود:

$$x \sim y \Leftrightarrow x\text{-}y \in Q .$$

نشان دهید ~ یک نسبت هم‌ارزی است.

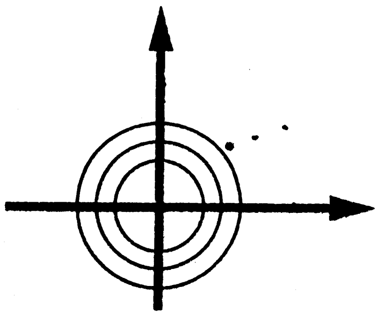
جواب: تحقیق بر عهدهٔ خواننده است.

مثال: نسبت ~ در $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ چنین تعریف می‌شود:

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

تحقیق کنید ~ یک نسبت هم‌ارزی است و رده‌های هم‌ارزی را بدست آورید.

جواب: منعکس بودن و متقارن بودن ~ بدیهی است. و اگر $(a,b) \sim (c,d)$ و $(c,d) \sim (e,f)$ آنگاه از روابط $a^2+b^2 = c^2+d^2$ و $c^2+d^2 = e^2+f^2$ رابطهٔ $a^2+b^2 = e^2+f^2$ نتیجه می‌شود. هر دایره به مرکز مبدأ مختصات یک ردهٔ هم‌ارزی خواهد بود.



۳.۱.۲ قضیه: اگر R یک نسبت هم‌ارزی در مجموعهٔ مفروض E باشد آنگاه xRy معادل است با $[x]_R = [y]_R$.

برهان: فرض کنیم xRy و $z \in [y]_R$ آنگاه yRz، پس xRz یعنی $z \in [x]_R$. به‌همین

ترتیب هر عضو $[x]_R$ به $[y]_R$ تعلق خواهد داشت.

بالعکس فرض کنیم $[x]_R = [y]_R$. از اینکه yRy پس $y \in [y]_R$ و بنابراین، $y \in [x]_R$. و yRx و یا xRy. □

۴.۱.۲ قضیه: اگر R یک نسبت هم‌ارزی در مجموعه‌ای نظیر E باشد آنگاه هر دو ردهٔ هم‌ارزی متمایز، جدا از هم هستند.

برهان: اگر $[x]_R$ و $[y]_R$ دو ردهٔ هم‌ارزی دلخواه ولی عضو مشترکی مانند z داشته باشند آنگاه zRx و zRy. بنابراین zRx و yRz. بنابراین yRx و بنابر ۳.۱.۲ لازم است $[x]_R = [y]_R$ که یک تناقض است. □

۵.۱.۲ تعریف: خانواده‌ای نظیر $\{A_i\}_{i\in I}$ از مجموعه‌های غیر تهی را افرازی از مجموعهٔ مفروض E می‌نامیم اگر $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = E$ و به ازای هر $i,j \in I$ که $i \neq j$، $A_i \cap A_j = \phi$ (I مجموعهٔ اندیس‌گذاری و در واقع زیر مجموعهٔ اعداد طبیعی است.)

۶.۱.۲ قضیه: اگر R یک نسبت هم‌ارزی در مجموعهٔ مفروض E باشد آنگاه رده‌های هم‌ارزی R افرازی از مجموعهٔ E است. بالعکس، هر افرازی از مجموعهٔ E یک نسبت هم‌ارزی در E تعریف می‌کند.

برهان: اگر $x \in E$ عضو دلخواهی باشد آنگاه $x \in [x]_R$. بنابراین E مساوی اجتماع رده‌های هم‌ارزی R است و با توجه به ۴.۱.۲، E به وسیلهٔ رده‌های هم‌ارزی افراز می‌شود.

بالعکس، فرض کنیم C خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های E باشد که E را افراز می‌کنند. نسبت R در E را چنین تعریف می‌کنیم که به ازای $x,y \in E$، xRy اگر و فقط اگر x و y به یک عضو از C متعلق باشند. بررسی خواص انعکاسی، تقارن و تعدی R بدیهی است. □

مثال: در مجموعهٔ $E = \{a,b,c\}$ چند نسبت هم‌ارزی تعریف می‌شود؟

جواب: E دقیقاً پنج افراز دارد که عبارتند از:

$\{a,b,c\}$

$\{\{a,b\}, \{c\}\}, \{\{a,c\}, \{b\}\}, \{\{b,c\}, \{a\}\}$

$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$

بنابراین پنج نسبت هم‌ارزی قابل تعریف است.

مثال: در Z نسبت هم‌ارزی $\sim$ چنین تعریف می‌شود:

$$m \sim n \Leftrightarrow |m| = |n|$$

افراز Z به رده‌های هم‌ارزی را پیدا کنید.

جواب: به ازای هر $k \in Z$ خواهیم داشت $[k]_\sim = \{k,-k\}$ بنابراین،

$$Z = \bigcup_{k\in Z} \{k,-k\}.$$

مثال: در $\Re$ نسبت هم‌ارزی $\sim$ چنین تعریف می‌شود:

$$x\sim y \Leftrightarrow [[x]] = [[y]]$$

که در آن $[[x]]$ به معنی جزء صحیح x است یعنی بزرگترین عدد صحیح نا بیشتر از x.

افراز $\Re$ به رده‌های هم‌ارزی را پیدا کنید.

جواب: اگر x عضو دلخواهی از $\Re$ باشد و $k = [[x]]$ آنگاه جزء صحیح هر عدد حقیقی و متعلق به بازهٔ $[k , k+1)$ نیز مساوی k خواهد بود بنابراین $[x]_\sim = [k , k+1)$ و خواهیم داشت:

$$\Re = \bigcup_{k\in Z} [k , k+1).$$

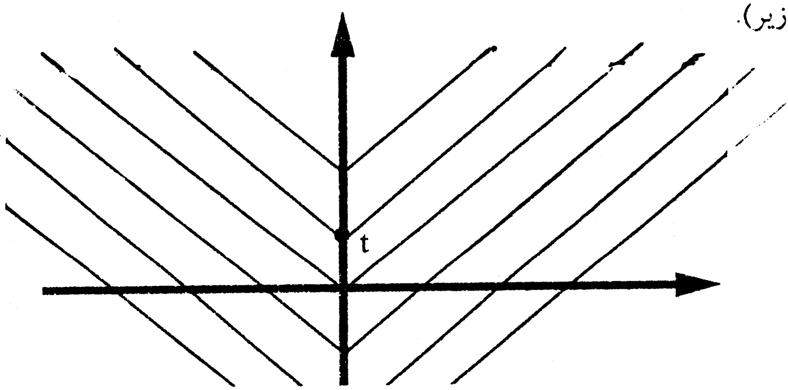
مثال: نسبت $\sim$ در $\Re\times\Re$ چنین تعریف می‌شود:

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow b-|a| = d-|c|$$

نشان دهید $\sim$ یک نسبت هم‌ارزی است و افراز $\Re\times\Re$ به رده‌های هم‌ارزی را پیدا کنید.

قدر مطلق x یا $|x|$ براساس معلومات قبلی دانشجو دانسته فرض می‌شود. با اینهمه در بخش ۲.۲ و فصل سوم آن را به طور کامل بررسی خواهیم کرد.

جواب: تحقیق خواص نسبت هم‌ارزی ساده‌است. فرض‌کنیم به‌ازای هر $(a,b) \in \Re\times\Re$، $t = |a| - b$. اگر (x,y) عضوی از $\Re\times\Re$ باشد و $(a,b) \sim (x,y)$ آنگاه x و y در رابطهٔ $y = |x| + t$ صدق خواهد کرد. پس (x,y) نقطه‌ای روی خط $y=x+t$، $(x>0)$ و یا روی خط $y = -x+t$، $(x<0)$ است، و هر ردهٔ هم‌ارزی از دو نیم خط فوق تشکیل می‌شود (شکل زیر).



مثال: در $E = \Re \times \Re \setminus \{(0,0)\}$ نسبت $\sim$ چنین تعریف می‌سرد.

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow \frac{ab}{a^2+b^2} = \frac{cd}{c^2+d^2} .$$

تحقیق کنید که $\sim$ یک نسبت هم‌ارزی است و به ازای هر $(a,b) \in E$، ردهٔ هم‌ارزی (a,b) را به دست آورید.

جواب: بررسی خواص بدیهی است (به آسانی ثابت می‌شود که b,a هر دو مخالف صفرند. چرا؟). برای پیدا کردن ردهٔ هم‌ارزی عضو دلخواه (a,b) ملاحظه می‌کنیم که $(a,b) \sim (1,\frac{b}{a})$. پس ردهٔ هم‌ارزی $(1,\frac{b}{a})$ را پیدا می‌کنیم. اگر (x,y) عضو دلخواهی باشد و $(x,y) \sim (1,\frac{b}{a})$ آنگاه

$$\frac{\frac{b}{a}}{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{xy}{x^2+y^2} .$$

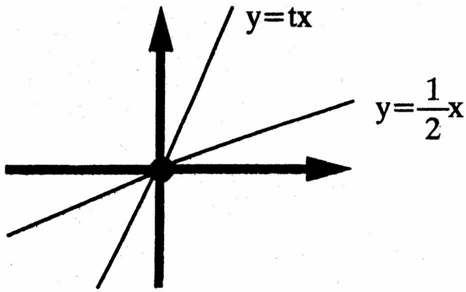
قرار می‌دهیم $t = \frac{b}{a}$. بنابراین:

$$tx^2 + ty^2 - xy - t^2xy = 0$$

$$tx(x-yt) - y(x-ty) = 0$$

$$(x-ty)(tx-y) = 0 .$$

پس، $y = tx$ یا $y = \frac{1}{t}x$. و ردهٔ هم‌ارزی $(1,t)$ متشکل از (x,y)های واقع بر روی دو خط مفروض خواهد بود (به استثنای مبدأ مختصات و محورهای مختصات)



۷.۱.۲ **انواع نسبتها**: تعریف نسبت هم‌ارزی را در ۱.۱.۲ ملاحظه کردیم که واجد سه خاصیّت انعکاسی، تقارنی و تعدی است. بنابراین اگر f نسبتی در مجموعهٔ مفروض باشد، تعاریف **نسبت منعکس**، **نسبت متقارن** و **نسبت متعدی** از متن همان تعریف قابل استنباط است. نسبت f را ***قناس*** می‌نامیم اگر به ازای هر a و b از A که a و b متمایز باشند حداقل یکی از روابط $(a,b) \notin f$ و $(b,a) \notin f$ برقرار باشد. نسبت f را ***مرتبط*** نامیم اگر به ازای هر a , b از A حداقل یکی از روابط $(a,b) \in f$ یا $(b,a) \in f$ برقرار باشد.

متذکر می‌شویم که به جای «قناس»، «نامتقارن» نیز به کار می‌رود و نسبت قناس معادل این است که: «اگر $(a,b) \in f$ و $(b,a) \in f$ آنگاه $a=b$»

با توجه به تعاریف فوق دو نوع نسبت مهم نیز که بعداً مورد استفاده قرار خواهند گرفت تعریف می‌شود که عبارتند از نسبت ***ترتیبی جزیی*** و ***نسبت ترتیبی*** کلی. نسبت f را یک نسبت ترتیبی جزیی می‌نامیم اگر منعکس، متعدی و قناس باشد، و f را یک نسبت

ترتیبی کلّی می‌نامیم اگر منعکس، متعدی، قناس و مرتبط باشد. $N \cup \{0\}$ را معمولاً با W نشان می‌دهند و آن را مجموعه اعداد حسابی (اعدادی که در حساب ابتدایی موجود است) می‌نامند.

مثال: Z مجموعهٔ اعداد صحیح است. نشان دهید نسبت عاد کردن $(afb \Leftrightarrow a \mid b)$ در W یک نسبت ترتیبی جزیی است ولی در Z نسبت ترتیبی جزیی نیست.

جواب: نسبت f در W منعکس، متعدی و قناس است ولی f در Z قناس نیست. مثلاً 3 و -3 را در نظر می‌گیریم (دو عضو متمایز)، می‌دانیم که 3، -3 را عاد می‌کند پس $(3,-3) \in f$ به همین ترتیب $(-3,3) \in f$. اگر f در Z قناس باشد لازم می‌آید که $-3 = 3$ و این یک تناقض است.

مثال: در W نسبت f را که به علامت $\leq$ نشان می‌دهیم چنین تعریف می‌شود:

$$\forall a,b \in W \ (a \leq b \Leftrightarrow b-a \in W) \ .$$

نشان دهید $\leq$ یک نسبت کلی در W است.

جواب: اولاً به ازای هر $a,b \ , \ c \in W$، $a-a = 0 \in W$. پس، $\leq$ منعکس است. ثانیاً اگر $a-b \in W$ و $b-c \in W$ آنگاه $a-c \in W$، بنابراین $\leq$ متعدی است. ثالثاً اگر $a-b \in W$ و $b-a \in W$ لزوماً $a-b = 0$. پس، $a=b$، یعنی $\leq$ قناس است.

در نتیجه، $\leq$ یک نسبت ترتیبی جزیی است. نسبت $\leq$ مرتبط نیز می‌باشد زیرا به ازای هر $a,b \in N$، یکی از اعداد $a-b$ یا $b-a$ نامنفی است پس $a \leq b$ یا $b \leq a$. بنابراین، $\leq$ یک نسبت ترتیبی کلی در W خواهد بود.

تذکر: نسبت تعریف شده در مثال بالا $W = N \cup \{0\}$ را به صورت

$$0 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \leq ...$$

مرتب کرده و آن را بعضاً نسبت طبیعی در N می‌نامند. این نسبت خاصیّت مهمّی در مورد N دارد که به «اصل خوشترتیبی» معروف است. این اصل عبارت است از: «هر زیر مجموعهٔ غیر تهی از N دارای عضو اقّل است»

در فصل سوم در بیان و اثبات اصل استقرا در N از این اصل استفاده خواهیم کرد.

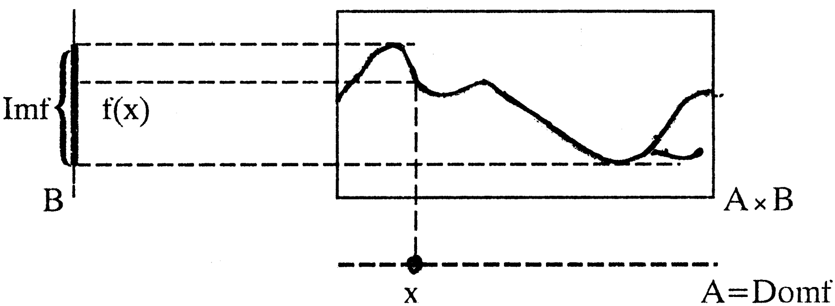
۲.۲. تابع و انواع آن: اگر f نسبتی از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B باشد، f یک تابع نامیده می‌شود اگر به ازای هر $x \in A$ و هر $y,z \in B$ از xfy و xfz رابطهٔ $y = z$ نتیجه شود. اصطلاح نگاشت نیز بجای تابع معمول است.

تابع f از A به B را به علامت $f:A \to B$ نشان می‌دهیم و به ازای هر $x \in A$، $f(x)$ را تصویر x به وسیلهٔ f می‌نامیم.

در تعریف f فرض ما بر این است که $\mathrm{Dom}f = A$. ولی بدیهی است که $\mathrm{Im}f$ زیرمجموعه‌ای از B خواهد بود. نمودار تابع f یا مجموعهٔ ازواج مرتب $\big(x , f(x)\big)$ در صفحه نیز مشابه آنچه که در حساب دیفرانسیل و انتگرال معمول است تعریف می‌شود که عبارت است از:

$$G = \{(x,y) \in A\times B \mid y = f(x)\}$$

و دارای تعبیر هندسی زیر خواهد بود. در واقع هر خطی به‌موازات محور yها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع خواهد کرد و این معیار تشخیص تابع است.



هر یک از علائم $x \mapsto f(x)$ و $x \to f(x)$ را نیز برای بیان اینکه $f:A \to B$ یک تابع است به‌کار خواهیم برد. به ازای هر عدد حقیقی x قدر مطلق x که به علامت $|x|$ نشان داده می‌شود مساوی x است اگر x نامنفی باشد و مساوی $-x$ است اگر x منفی باشد. تابع قدر مطلق را در فصل سوم به طور کامل بررسی خواهیم کرد.

مثال: نسبت f بر $\Re \times \Re$ چنین تعریف می‌شود:

$$(x,y) \in f \Leftrightarrow x+|x| = y+|y| \ ,$$

آیا f یک تابع است؟

جواب: به ازای مقادیر مختلف x، $x+|x|$ را محاسبه می‌کنیم:

$$x + |x| = \begin{cases} 2x \ , & x \geq 0 \\ 0 \ , & x < 0 \end{cases}$$

و بنابراین در چهار حالت موجود بین x , y خواهیم داشت:

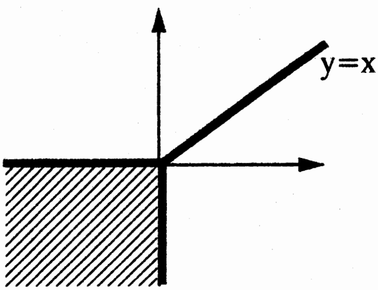
$$x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \Rightarrow xfy \Leftrightarrow y = x$$

$$x \geq 0 \ , \ y < 0 \Rightarrow xfy \Leftrightarrow x = 0$$

$$x < 0 \ , \ y < 0 \Rightarrow \left((x,y) \in f \ \text{همواره}\right)$$

$$x < 0 \ , \ y \geq 0 \Rightarrow y = 0$$

که نمودار f چنین می‌شود:



f تابع نیست مثلاً داریم $(-1,0) \in f$ و $(-1,-2) \in f$ در صورتی که $0 \neq -2$.

مثال: نسبت g در $\Re \times \Re$ با ضابطهٔ $(x,y) \in g \Leftrightarrow x + |x| = y$ تعریف می‌شود.

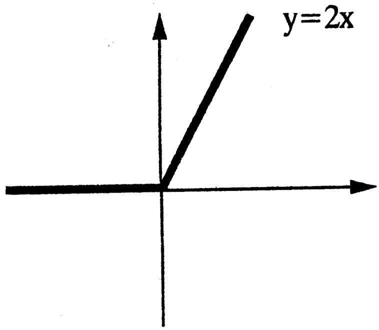
تحقیق کنید g یک تابع است و نمایش آن را رسم نمائید.

جواب: اگر $(x,y) \in g$ و $(x,z) \in g$ آنگاه

$$x + |x| = y \ \text{و}\ x + |x| = z.$$

بنابراین z=y. برای رسم نمایش g ملاحظه می‌شود که $x+|x| = \begin{cases} 2x \ , \ x \geq 0 \\ 0 \ , \ x < 0 \end{cases}$

و خواهیم داشت:



دامنهٔ f برابر $\mathfrak{R}$ است ولی $\operatorname{Im} f = \{y \in \mathfrak{R} \mid y \geq 0\}$.

مثال: نسبت f بر $R \setminus \{0,-1,1\}$ چنین تعریف می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & |x| < 1 \\ \dfrac{-1}{x}, & |x| > 1 \end{cases}$$

برد تابع را پیدا کرده و نمودار f را رسم کنید.

جواب: اگر $y = f(x)$ آنگاه $y \neq 1$، $y \neq 0$ و $y \neq -1$ پس $\operatorname{Im} f = R\setminus\{0,-1,1\}$ و نمودار این تابع چهار قطعه از دو هذلولی خواهد بود.

۱.۲.۲ تعریف: اگر $f : A \to B$ و $g : B \to C$ دو تابع باشند مرکبهٔ f و g که به علامت gof نشان داده می‌شود تابعی است از A به C به طوری که به ازای هر $x \in A$، $(gof)(x) = g\left(f(x)\right)$.

تذکر ۱: gof فقط وقتی تعریف می‌شود که Im f بر Dom g منطبق باشد.

تذکر ۲: اگر gof تعریف شده باشد fog فقط وقتی قابل تعریف است که به شرط $f : A \to B$، تابع g از B به A تعریف شود.

تذکر ۳: اگر fog و gof تعریف شده باشند آنگاه

$$\operatorname{Dom}(fog) = B\ ,\ \operatorname{Dom}(gof) = A$$

بنابراین، شرط لازم و کافی برای تساوی gof و fog آن است که $A = B$.

مثال: اگر توابع f و g با ضوابط زیر تعریف شوند، نمودار fog و gof را رسم کنید:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 , & x<0 \\ 1-x , & x\geq 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x) = \begin{cases} x-1 , & x<0 \\ x , & x\geq 0 \end{cases}$$

جواب: gof و fog را بر اساس تعریف محاسبه می‌کنیم. اولاً داریم:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & 0\leq x\leq 1 \\ x^2 , & x<0 \\ 1-x, & x>1 \end{cases}$$

که در دو حالت اول $f(x)$ نامنفی است و در حالت سوم $f(x)$ منفی است. همچنین

$$g(x) = \begin{cases} x , & x\geq 0 \\ x-1 , & x<0 \end{cases}$$

که در حالت اول $g(x)$ نامنفی و در حالت دوم $g(x)$ منفی خواهد بود. بنابراین،

$$\left(gof\right)(x) = g\left(f(x)\right) = \begin{cases} f(x) , & 0\leq x\leq 1 \\ f(x) , & x<0 \\ (1-x)-1 , & x>1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1-x, & 0\leq x\leq 1 \\ x^2 , & x<0 \\ -x , & x>1 . \end{cases}$$

به همین ترتیب،

$$\left(fog\right)(x) = f\left(g(x)\right) = \begin{cases} 1-g(x) , & 0\leq x\leq 1 \\ 1-g(x) , & x>1 \\ \left(g(x)\right)^2 , & x<0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1-x, & 0\leq x\leq 1 \\ 1-x, & x>1 \\ (1-x)^2, & x<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-x, & 0\leq x \\ (1-x)^2, & x<0 \end{cases}$$

و بدیهی است که $fog \neq gof$. رسم نمایش آنها آسان و بر عهدهٔ دانشجو است.

۲.۲.۲ قضیه: اگر $f : A \to B$، $g : B \to C$ و $h : C \to D$ تعریف شده باشند آنگاه $ho\,(gof) = (hog)\,of$، به شرط آنکه هر یک از مرکبه‌های موجود در طرفین تساوی با معنی باشند.

برهان: به ازای هر $x \in A$ و براساس تعریف داریم:

$$(ho\,(gof))\,(x) = h\,\Big((gof)\,(x)\Big) = h\,\Big(g\,(f(x))\Big)$$

$$((hog)\,of)\,(x) = \Big(hog\Big)\,\Big(f(x)\Big) = h\,\Big(g\,(f(x))\Big)$$

پس به ازای هر $x \in A$ دو تابع $ho\,(gof)$, $(hog)of$ دارای مقادیر مساوی هستند.□

۳.۲.۲ تعریف: *تابع همانی* بر مجموعهٔ مفروض A که به علامت id_A نشان داده می‌شود عبارت است از تابع $id_A : A \to A$ به طوری که به ازای هر $x \in A$، $id_A\,(x) = x$.

۴.۲.۲ تعریف: اگر $f : A \to B$ تابع باشد، تابعی نظیر $g : B \to A$ که $gof = id_A$، یک معکوس چپ f نامیده می‌شود و f را تابع *انژکتیو یا* یکبیک می‌نامیم.

وجود چنین تابعی در حالت کلی الزامی نیست، مثلاً اگر تابع $f : N \to N$ با ضابطهٔ $f\,(0) = 1$ و $f\,(k) = k\ (k \geq 1)$ را در نظر بگیریم (N شامل صفر است) آنگاه $g : N \to N$ ای وجود ندارد که $gof = id_N$، زیرا در صورت وجود چنین تابعی لازم است داشته باشیم.

$$1 = id_N\,(1) = g\,\Big(f\,(1)\Big) = g(1)$$

$$0 = id_N\,(0) = g\,\Big(f\,(0)\Big) = g(1).$$

۵.۲.۲ تعریف: اگر $f : A \to B$ تابع باشد تابعی نظیر $g : B \to A$ که $fog = id_B$، یک *معکوس راست* f نامیده می‌شود و در این صورت f را تابع **سورژکتیو یا پوشا** می‌نامیم.

وجود تابع g در این تعریف نیز الزامی نیست، مثلاً تابع $f : N \to N$ با ضابطهٔ $f(n) = n+1$ را در نظر می‌گیریم اگر تابعی مانند $g : N \to N$ موجود باشد که $fog = id_N$ آنگاه

$$\left(fog\right)(0) = f\left(g(0)\right) = g(0) + 1 = 0 .$$

بنابراین $g(0) = -1$ که یک تناقض است.

تعریفهای معادلی برای تابع یکبیک و تابع پوشا وجود دارد که ضمن قضایای زیر ملاحظه می‌شوند.

تذکر: تابعی مانند $f : N \to \mathbb{R}$ را یک‌دنباله می‌نامیم و مقادیر تابع یعنی $f(1)$، $f(2)$، ...ها را به ترتیب به صورت f_1، f_2، ... نشان می‌دهیم.

۶.۲.۲ قضیه: تابع $f : A \to B$ مفروض است. در این صورت f یکبیک است اگر و فقط اگر به ازای هر $x,y \in A$ از $f(x) = f(y)$ رابطهٔ $x = y$ نتیجه شود.

برهان: فرض کنیم f یکبیک باشد پس $g : B \to A$ ای وجود دارد که $gof = id_A$. و به ازای x و y از A فرض کنیم $f(x) = f(y)$. در این صورت:

$$x = \left(gof\right)(x) = g\left(f(x)\right) = g\left(f(y)\right) = \left(gof\right)(y) = y$$

و یا $x = y$

بالعکس فرض کنیم

$$\forall x,y \in A \ \left(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y\right) .$$

نسبت $t : Imf \to A$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$t\left(f(x)\right) = x \, , \, (x \in A) .$$

t یک تابع است، زیرا اگر $f(x) = f(y)$ آنگاه بر اساس فرض، $x = y$.

t تابعی از B به A نیست ولی بر اساس آن تابع جدید $g : B \to A$ را چنین تعریف می‌کنیم که اگر $x_0 \in A$ عضو معینی باشد آنگاه

$$g(y) = \begin{cases} t(y) & , \quad y \in \operatorname{Im} f \\ x_0 & , \quad y \in B \setminus \operatorname{Im} f \end{cases}$$

در این صورت، به ازای هر $x \in A$ خواهیم داشت:

$$g\big(f(x)\big) = t\big(f(x)\big) = x$$

یعنی $g o f = id_A$. □

۷.۲.۲ قضیه: $f : A \to B$ تابعی مفروض است. در این صورت f پوشاست اگر و فقط اگر $\operatorname{Im} f = B$.

برهان: فرض کنیم f پوشا باشد بنابراین تابعی نظیر $g: B \to A$ وجود دارد که $f o g = id_B$ و اگر $y \in B$ عضو دلخواهی باشد آنگاه

$$y = id_B(y) = f\big(g(y)\big) \in \operatorname{Im} f .$$

بالعکس، اگر $\operatorname{Im} f = B$ آنگاه به ازای هر $y \in B$، عضوی از A مانند x_y یافت می‌شود که $f(x_y) = y$ (x_y عضو متناظر y است).

اکنون تعریف تابع $g: B \to A$ امکان‌پذیر است:

$$g(y) = x_y \, , \, (y \in B)$$

و بنابراین $f\big(g(y)\big) = f(x_y) = y$ و یا $f o g = id_B$. □

مثال: نشان دهید تابع $f: N \to N$ (N شامل 0 است) با ضابطهٔ

$$f(m) = \begin{cases} \dfrac{m}{2} & , \quad m = \text{زوج} \\ \dfrac{m-1}{2} & , \quad m = \text{فرد} \end{cases}$$

پوشاست ولی یکبیک نیست. همچنین نشان دهید که f دارای معکوسهای راست بیشماری است.

جواب: به ازای هر $n \in N$ بدیهی است که $f(2n) = n$. لذا f پوشاست ولی یکبیک

نیست. مثلاً $f(2n) = n$ و نیز $f(2n+1) = n$.

برای قسمت دوم ملاحظه می‌شود که به ازای هر $k \in N$ تابع g_k با ضابطهٔ

$$g_k(m) = \begin{cases} 2m+1 \, , & m \neq k \\ 2k \, , & m = k \end{cases}$$

در رابطهٔ $fog_k = id_N$ صدق می‌کند، زیرا اگر $m \in N$ و $m \neq k$ آنگاه

$$f\big(g_k(m)\big) = f(2m+1) = m \, ,$$

و اگر $m \in N$ و $m = k$ آنگاه $f\big(g_k(m)\big) = f(2k) = k = m$.

مثال: در پوشا بودن هر یک از توابع

$$f: Z \to Z \qquad\qquad g: N \to N$$
$$n \to n+1 \qquad\qquad n \to n+1$$

تحقیق کنید (N شامل 0 است).

جواب: f پوشاست، مثلاً به ازای هر $k \in Z$، $f(k-1) = k$، ولی g پوشا نیست زیرا عضوی از N نظیر m یافت نمی‌شود که $g(m) = 0$.

از مثالهای بالا معلوم می‌شود که تابعی ممکن است فقط یکی از خواص پوشا و یکبیک بودن را داشته باشد و در چنین حالتی معکوس راست یا معکوس چپ بیشماری خواهد داشت. بنابراین، سئوال منحصر بفرد بودن معکوس چپ و یا راست یک تابع مطرح می‌شود و این سئوال را با تعریف و قضیهٔ سادهٔ زیر جواب خواهیم داد.

۸.۲.۲ تعریف: تابعی مانند $f: A \to B$ را **بیژکتیو** یا **تناظر یکبیک** می‌نامیم اگر یکبیک و پوشا باشد.

۹.۲.۲ قضیه: اگر $f: A \to B$ یک تناظر یکبیک باشد معکوس راست و معکوس چپ f با هم برابرند و این تابع که «معکوس تابع f» نامیده می‌شود منحصر بفرد است.

برهان: از اینکه f یکبیک و پوشاست، توابعی نظیر $h,g : B \to A$ یافت می‌شوند که $gof = id_A$ و $foh = id_B$ (در واقع، g معکوس چپ f و h معکوس راست f است.)

عمل ترکیب توابع با توجه به تعریف آن شرکت‌پذیر خواهد بود، بنابراین

$$g = go\, id_B = go(foh) = (gof)oh = id_A\, oh = h\,.$$

و اگر g معکوس f باشد آنگاه $fog = id_B$ و $gof = id_A$.

برای تکمیل برهان فرض کنیم $h: B \to A$ نیز یک معکوس f باشد در این صورت:

$$h = ho\, id_B = ho(fog) = (hof)og = id_A\, og = g\,. \square$$

براساس قضیهٔ بالا، معکوس f را که منحصر بفرد است با نماد f^{-1} نشان می‌دهیم.

۱۰.۲.۲ قضیّه: توابع $f: A \to B$ و $g: B \to C$ مفروضند. در این صورت:

(آ) : اگر f و g یکبیک باشند gof نیز چنین است؛

(ب) : اگر f و g پوشا باشند gof نیز چنین است؛

(پ) : اگر f و g تناظر یکبیک باشند gof نیز تناظر یکبیک است و معکوس آن برابر است با $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$

برهان: (آ) و (ب) آسان است و به خواننده محوّل می‌شود. در مورد (پ) ملاحظه می‌شود که با توجه به (آ) و (ب)، gof تناظری یکبیک خواهد بود و خواهیم داشت:

$$(gof)o(f^{-1}og^{-1}) = go(fof^{-1})og^{-1} = go\, id_B og^{-1} = gog^{-1} = id_C$$

$$(f^{-1}og^{-1})o(gof) = f^{-1}o(g^{-1}og)of = f^{-1}o\, id_B\, of = f^{-1}of = id_A$$

لذا $f^{-1}og^{-1}$ معکوس gof است.$\square$

۱۱.۲.۲ تعریف: فرض کنیم $f: A \to B$ یک تابع و X زیرمجموعه‌ای از A باشد. تحدید f بر X که علامت $f|_X$ نشان داده می‌شود تابعی است از X به B به‌طوری که هر $x \in X$، $f|_X(x) = f(x)$.

۱۲.۲.۲ قضیه: اگر $f: A \to B$ یک تابع یکبیک باشد آنگاه تابعی یکبیک و پوشا وجود دارد که A دامنهٔ آن است.

برهان: تابعی مانند $g: B \to A$ وجود دارد که $gof = id_A$ و نیز تابع f^+ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$f^+: A \to \operatorname{Im} f$$

به طوری که به ازای هر $x \in A$، $f^+(x) = f(x)$. تابع $g^* = g \mid_{\operatorname{Im} f}$ را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که g^* معکوس f^+ است که در این صورت f^+ تابع مورد نظر در حکم قضیه خواهد بود. برای این منظور داریم:

$$g^*\big(f^+(x)\big) = g^*\big(f(x)\big) = g\big(f(x)\big) = x \qquad \text{(به ازای هر } x \text{ از } A)$$

یعنی، $g^* o f^+ = id_A$. همچنین، اگر $y \in \operatorname{Im} f$ آنگاه $x \in A$ ای وجود دارد که $y = f(x)$ و $g(y) = g\big(f(x)\big) = x$. بنابراین

$$f^+\big(g^*(y)\big) = f^+\big(g(y)\big) = f\big(g(y)\big) = f(x) = y\ ,$$

یعنی، $f^+ o g^* = id_{\operatorname{Im} f}$. □

۱۳.۲.۲ قضیه: اگر $f: A \to B$ تابعی پوشا باشد آنگاه تابعی یکبیک و پوشا وجود دارد که B برد آن است.

برهان: از پوشا بودن f نتیجه می‌شود که تابعی مانند $g: B \to A$ وجود دارد که $f o g = id_B$. توابع f^* و g^+ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$f^* = f \mid_{\operatorname{Im} g}\ ,\ g^+ : B \to \operatorname{Im} g\ .$$
$$y \to g(y)$$

نشان می‌دهیم f^* یکبیک و پوشاست و g^+ معکوس آن است. به ازای هر y از B داریم:

$$f^*\big(g^+(y)\big) = f^*\big(g(y)\big) = f\big(g(y)\big) = y$$

یعنی، $f^* o g^+ = id_B$. همچنین اگر $x = g(y) = g^+(y) \in \operatorname{Im} g^+$ عضو دلخواهی باشد آنگاه $f(x) = f\big(g(y)\big) = y$ و

$$g^+\ \big(f^*(x)\big) = g^+\ \big(f(x)\big) = g^+(y) = x\ .$$

یعنی، $g^+ o f^* = id_{\operatorname{Im} g}$. □

۳.۲ همتوانی مجموعه‌ها، مجموعه‌های شمارا و عدد اصلی: کاربرد مهمّی

از تناظر یکبیک که تعریف و خواص آن را در بخش قبل ملاحظه کردیم تعریف تعداد اعضای یک مجموعه و مفهوم همتوانی مجموعه‌هاست. در این بخش این مفهوم را تعریف می‌کنیم و به خواص مهم آن در تعریف مجموعه‌های متناهی، نامتناهی، شمارا و ناشمارا خواهیم پرداخت.

۱.۳.۲ تعریف: دو مجموعهٔ A و B را همتوان (همقوه) می‌نامیم اگر تناظری یکبیک مانند $f: A \to B$ موجود باشد.

مثال: نشان دهید به ازای هر دو مجموعهٔ A و B، $A \times B$ و $B \times A$ همتوان هستند.

جواب: $f: A \times B \to B \times A$ با ضابطهٔ $(a,b) \to (b,a)$ را ملاحظه کنید.

مثال: اگر $f: A \to B$ تابعی یکبیک باشد نشان دهید A و $\mathrm{Im}f$ همتوان هستند.

جواب: تابع f^+ تعریف شده در قضیّهٔ ۱۲.۲.۲ ملاحظه شود.

مثال: A یک مجموعه و $P(A)$ مجموعهٔ زیر مجموعه‌های آن است. نشان دهید $P(A)$ با مجموعهٔ متشکل از توابع $f: A \to \{0,1\}$ همتوان است.

جواب: به ازای هر زیر مجموعهٔ B از A تابع $\chi_B: A \to \{0,1\}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$$

مجموعهٔ توابع $f: A \to \{0,1\}$ را به علامت 2^A نشان می‌دهیم و تابع v را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} v : P(A) &\to 2^A \\ B &\to \chi_B \end{aligned}$$

v یکبیک و پوشاست زیرا می‌توان تابع

$$\mu : 2^A \to P(A)$$

را با ضابطهٔ $\mu(f) = \{x \in A \mid f(x) = 1\}$ به عنوان معکوس v در نظر گرفت.

در واقع، به ازای هر $f \in 2^A$ و هر $B \in P(A)$ به آسانی تحقیق می‌شود که

$(\nu o\mu)(f) = f$ و $(\mu o\nu)(B) = B$. بنابراین، ν یک تناظر یکبیک و $P(A)$ با 2^A همتوان است.

۲.۳.۲ قضیهٔ شرودر ـ برنشتاین: به ازای دو مجموعهٔ A و B اگر توابع یکبیکی نظیر $f: A \to B$ و $g: B \to A$ یافت شوند آنگاه A و B همتوان هستند.

برهان: اگر $X \subseteq A$ و $Y \subseteq B$ علامت $C_A(X)$ و $C_B(Y)$ را به ترتیب برای مجموعه‌های $A\backslash X$ و $B\backslash Y$ به کار می‌بریم. بدیهی است که اگر $X_1 \subseteq X_2$ آنگاه $C_A(X_2) \subseteq C_A(X_1)$ و همین رابطه برای C_B نیز برقرار خواهد بود و توابع $C_A:P(A) \to P(A)$ و $C_B:P(B) \to P(B)$ قابل تعریف خواهند بود.

بین مجموعه‌های $P(A)$ و $P(B)$ نیز توابع $f^{\to}$ و $f^{\leftarrow}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$f^{\to} : P(A) \to P(B) \ , \ f^{\to}(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

$$f^{\leftarrow} : P(B) \to P(A) \ , \ f^{\leftarrow}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$$

تعاریف $g^{\to}$ و $g^{\leftarrow}$ نیز مشابه خواهند بود. از ترکیب این توابع تابع $\zeta = P(A) \to P(A)$ را نیز چنین تعریف می‌کنیم:

$$\zeta = C_A o g^{\to} o C_B o f^{\to}$$

بآسانی تحقیق می‌شود که توابع $f^{\to}$، $g^{\to}$ و ζ حافظ رابطهٔ جزئیت (زیر مجموعه بودن) هستند، یعنی اگر $X_1 \subseteq X_2$ آنگاه $\zeta(X_1) \subseteq \zeta(X_2)$، $f^{\to}(X_1) \subseteq f^{\to}(X_2)$ و نیز $g^{\to}(X_1) \subseteq g^{\to}(X_2)$.

همچنین دو مجموعهٔ F و G را به قرار زیر تعریف می‌کنیم:

$$F = \{X \in P(A) \mid X \subseteq \zeta(X)$$

$$G = \bigcup_{X\in F} X$$

F غیر تهی است زیرا شامل زیرمجموعهٔ تهی خواهد بود. به ازای $X \in F$ داریم

$$X \subseteq G \ , \ X \subseteq \zeta(X)$$

و بنا بر خاصیت ξ ، $\xi(X) \subseteq \xi(G)$ ، $X \subseteq \xi(X)$. و از اینکه هر زیر مجموعهٔ G زیرمجموعهٔ $\xi(G)$ است نتیجه می شود

$$G \subseteq \xi(G). \tag{1}$$

از سوی دیگر، $\xi(G) \subseteq \xi\big(\xi(G)\big)$ که بنا بر تعریف F، رابطهٔ $\xi(G) \in F$ نتیجه شده و بر اساس تعریف G رابطهٔ

$$\xi(G) \subseteq G \tag{2}$$

به دست خواهد آمد. از (۱) و (۲) تساوی $\xi(G) = G$ حاصل می‌شود و خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} C_A(G) = C_A\big(\xi(G)\big) &= \big(C_A o\xi\big)(G) = \big(C_A oC_A og^{\to} oC_B of^{\to}\big)(G) \\ &= \big(g^{\to} oC_B of^{\to}\big)(G) \\ &= g^{\to}\big(C_B of^{\to}(G)\big) \end{aligned}$$

و اکنون تابع $h: A \to B$ را با ضابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم و ملاحظه می‌شود که h یک تناظر یکبیک است:

$$h(x) = \begin{cases} f(x)\,, & x \in G \\ g^{\leftarrow}\{x\}\,, & x \notin G \end{cases}$$

و $g^{\leftarrow}\{x\}$ عضو منحصر بفردی در نظر گرفته می‌شود.□

با استفاده از تعریف همتوانی مجموعه‌ها اکنون می‌توان به مفاهیم مجموعه‌های متناهی، نامتناهی، شمار را و ناشما را پرداخت. N مجموعهٔ اعداد طبیعی و فاقد صفر در نظر گرفته می‌شود و تا پایان این فصل این قرارداد حفظ خواهد شد، مگر آنکه به قیاس برخی از مثالهای دو بخش قبل صریحاً خلاف آن قید شود.

به ازای عدد طبیعی مفروض k ، قطعهٔ kام از N عبارت است از مجموعهٔ $I_k = \{1,2,...,k\}$.

۳.۳.۲ تعریف: مجموعهٔ A را متناهی می‌نامیم اگر $A = \phi$ و یا A با قطعه‌ای از N

همتوان باشد. در غیر این صورت A یک مجموعهٔ ***نامتناهی*** نامیده می‌شود.

۴.۳.۲ تعریف: مجموعهٔ A را ***شمارا*** می‌نامیم اگر متناهی و یا با N همتوان باشد.

با توجه به این تعاریف می‌خواهیم به نتایجی در رابطه با شمارا یا ناشمارا بودن مجموعه‌های $\Re$، Z و Q برسیم (براساس توضیحی که در ابتدای همین فصل آورده شد. احکام این بخش مبتنی بر معلومات مقدماتی خواننده از مجموعه‌های بالا است و اصول موضوعه و نیز خواص وسیعتر آنها را در فصل سوم خواهیم دید.)

۵.۳.۲ قضیّه: هر زیر مجموعهٔ یک مجموعهٔ شمارا مجموعه‌ای شماراست.

برهان: اگر A مجموعه‌ای شمارا و B زیرمجموعه‌ای از آن باشد در حالتی که B متناهی باشد حکم بدیهی است، بنابراین فرض کنیم B نامتناهی باشد پس A نیز نامتناهی است. از اینکه A شماراست با N همتوان بوده و می‌توان اعضای آن را به صورت $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ شماره‌گذاری کرد (تناظر یکبیک بین N و A).

اگر i_1 کوچکترین اندیسی باشد که $a_{i1} \in B$ آنگاه $B \setminus \{a_{i1}\}$ غیر خالی است. اگر i_2 کوچکترین اندیسی باشد که $a_{i2} \in B\setminus\{a_{i1}\}$ آنگاه $B\setminus\{a_{i1}, a_{i2}\}$ غیر خالی است و به‌همین ترتیب زیر مجموعه‌ای از B نظیر $\{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik}\}$ حاصل می‌شود به طوری که

$$B \setminus \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik}\} \neq \phi .$$

پس اگر i_{k+1} کوچکترین اندیسی باشد که $a_{i_{k+i}}$ به مجموعهٔ بالا تعلق داشته باشد نتیجه می‌شود که زیر مجموعهٔ غیر تهی $S = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots\}$ از B حاصل خواهد شد (زیرا B نامتناهی است) S شماراست و برای اتمام برهان کافی است نشان دهیم که $B \subseteq S$. فرض کنیم $x \in B$ عضو دلخواهی باشد. باتوجه به $B \subseteq A$ عددی طبیعی مانند n وجود دارد که $x = a_n$. پس در دنبالهٔ اعضای مجموعهٔ S، پس از n مرحله به a_n خواهیم رسید، یعنی اندیسی مانند j وجود دارد که $a_{i_j} = a_n$ یعنی $x \in S$ و B شماراست.□

۶.۳.۲ قضیّه: هر مجموعهٔ نامتناهی زیرمجموعه‌ای نامتناهی و شمارا دارد.

برهان: اگر A مجموعه‌ای نامتناهی باشد a_1ای از A وجود دارد و $A \setminus \{a_1\}$ غیر تهی و نامتناهی خواهد بود، بنابراین a_2ای متعلق به $A \setminus \{a_1\}$ وجود خواهد داشت و به روش قضیّهٔ قبل زیر مجموعهٔ نامتناهی و شمارائی از A نظیر $\{a_1 , a_2 , ...\}$ حاصل می‌شود.□

۷.۳.۲ قضیّه: A یک مجموعهٔ نامتناهی و B یک مجموعهٔ شماراست. در این صورت:

(آ)ـ اگر A شمارا باشد $A \cup B$ نیز شمار است؛

(ب)ـ اگر A ناشمار باشد $A \cup B$ نیز ناشمار است.

برهان (آ): اگر B تهی باشد حکم بدیهی است و اگر B غیر تهی باشد متناهی یا نامتناهی خواهد بود. فرض کنیم $A = \{a_1 , a_2 , ...\}$ و دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت ۱. اگر $B = \{b_1 ,b_2 , ... , b_n\}$ آنگاه $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ و تابع

$$f : A \cup B \to A$$

با ضابطهٔ

$$f(x) = \begin{cases} a_i , x = b_i \\ a_{n+j} , x = a_j \end{cases}$$

یکبیک و پوشا است. بنابراین $A \cup B$ با A همتوان است و شمارا خواهد بود.

حالت ۲: اگر $B = \{b_1 ,b_2 , ...\}$ تابع $f : A \to A \cup B$ با ضابطهٔ

$$f(a_i) = \begin{cases} a_{i/2} & \text{،}\quad i = \text{زوج} \\ b_{(i+1)/2} & \text{،}\quad i = \text{فرد} \end{cases}$$

لزوماً یکبیک و پوشا خواهد بود و در این حالت نیز $A \cup B$ با A همتوان بوده و شماراست.

(ب): اگر A ناشمارا باشد ولی $A \cup B$ شما را، در این صورت هر زیر مجموعهٔ $A \cup B$ نیز شماراست (قضیّهٔ ۵.۳.۲) یعنی A شمارا خواهد بود که خلاف فرض

است.□

۸.۳.۲ نتیجه: اجتماع هر تعداد متناهی از مجموعه‌های شمارا مجموعه‌ای شماراست.

برهان: اگر $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$، حکم به ازای $n = 2$ برقرار است و اتمام برهان به استقراء روی n خواهد بود.□

۹.۳.۲ قضیّه: حاصلضرب مستقیم دو مجموعهٔ شمارا مجموعه‌ای شماراست.

برهان: دو مجموعهٔ A و B را در نظر می‌گیریم و برای یکی از آنها مثلاً B دو حالت مورد ملاحظه قرار می‌دهیم: اگر $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ (متناهی)، آنگاه

$$A \times B = A \times \{b_1\} \cup A \times \{b_2\} \cup ... \cup A \times \{b_n\} .$$

هر مؤلفه از اجتماع فوق مجموعه‌ای شماراست و شمارا بودن $A \times B$ بر اساس ۸.۳.۲ نتیجه می‌شود. و اگر $B = \{b_1, b_2, ...\}$ (نامتناهی)، آنگاه اعضای (a_i , b_j) از $A \times B$ را در نظر می‌گیریم تابع

$$f : A \times B \to N$$

$$(a_i , b_j) \to 2^{i-1}(2j-1)$$

یکبیک و پوشا خواهد بود (برهان بدیهی است.) بنابراین $A \times B$ شماراست.□

۱۰.۳.۲ نتایج مهّم: از چند قضیهٔ اخیر نتایج زیر استخراج می‌شود:

(آ) : حاصلضرب مستقیم هر تعداد متناهی از مجموعه‌های شمارا، شماراست؛

(ب) : $N \times N$ شماراست؛

(پ) : Z و $Z \times N$ شمارا هستند؛

(ت) : Q شماراست؛

(ث) : اجتماع شمارائی از مجموعه‌های شمارا، شماراست.

برهان (آ): با استفاده از ۹.۳.۲ و استقرا.

(ب) : کافی است تابع $f : N \times N \to N$ را با ضابطهٔ

$$f(i,j) = \frac{(i+j-1)(i+j-2)}{2} + i$$

تعریف کنیم یکبیک و پوشا بودن f بدیهی است بنابراین $N \times N$ شماراست.

(پ) : Z به صورت $Z = \{0\} \cup N \cup \{-n \mid n \in N\}$ تعریف می‌شود و شمارا بودن آن به استناد ۸.۳.۲ بدیهی است. شمارا بودن $Z \times N$ نیز بر اساس ۹.۳.۲ نتیجه می‌شود.

(ت) : Q به صورت $Q = \{\frac{m}{n} \mid m \in Z, n \in N, (m,n) = 1\}$ تعریف می‌شود. تابع $f : Q \to Z \times N$ را با ضابطهٔ $f(\frac{m}{n}) = (m,n)$ در نظر می‌گیریم. f یکبیک است ولی پوشا نیست، ولی Imf (برد تابع f) زیر مجموعه‌ای از $Z \times N$ بوده و شمارا خواهد بود (بر اساس (پ)). از اینکه تناظری یکبیک بین Q و Imf برقرار است، Q شمارا خواهد بود.

(ث) : فرض کنیم $\{A_1 , A_2 , \dots\}$ مجموعهٔ شمارائی از مجموعه‌های شمارا باشد به ازای هر i ، مجموعهٔ B_i را چنین تعریف می‌کنیم:

$$B_i = A_i \setminus \bigcup_{j<i} A_j$$

B_i ها دو بدو جدا از هم هستند (برهان بدیهی است) و نیز $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$.

بنابراین کافی است شمارا بودن $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ ثابت شود زیرا هر B_i زیر مجموعهٔ A_i بوده و شماراست.

اعضای هر B_i را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$B_i = \{a_{i1} , a_{i2} , \dots\} , i = 1,2,..$$

و بنابراین اعضای $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ عبارتند از

$$a_{11} , a_{12} , a_{13} , \dots$$

$$a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots$$
$$\vdots$$

و تابع $f : \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \to N \times N$ با ضابطهٔ $f(a_{ij}) = (i,j)$ یکبیک و پوشا خواهد بود و بر اساس (ب)، $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ نیز شماراست.□

۱۱.۳.۲ تعریف: عدد حقیقی a را روی Q جبری می‌نامیم اگر a ریشهٔ یک چند جمله‌ای با ضرایب گویا باشد.

به عنوان مثال $\sqrt{5}$ روی Q جبری است زیرا ریشهٔ x^2-5 است و نیز اگر r یک عدد گویا باشد روی Q جبری است زیرا r ریشهٔ $x-r$ است. مجموعهٔ اعداد جبری روی Q یک مجموعهٔ شماراست و این حکم را در قضیّهٔ زیر ثابت می‌کنیم.

۱۲.۳.۲ قضیّه: مجموعهٔ اعداد جبری مجموعه‌ای شماراست.

برهان: $Q[x]$ را به ازای متغیری مانند x چنین تعریف می‌کنیم:

$$Q[x] = \{a_n x^n + \ldots + a_1 x_1 + a_0 \mid a_i \in Q , n \in N \cup \{0\}\}$$

اگر A_n مجموعهٔ اعضائی از $Q[x]$ باشد که از درجهٔ نا بیشتر از n هستند آنگاه

$$Q[x] = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$

و به علاوه A_n با $Q \times Q \times \ldots \times Q$ (n مرتبه) همتوان است و بنابراین شما را خواهد بود (اگر $n = 0$ آنگاه $A_n = Q$.) و بر اساس ۱۰.۳.۲ $Q[x]$ شمارا خواهد بود.

فرض کنیم $f(x) \in Q[x]$ عضو دلخواهی و S_f مجموعهٔ ریشه‌های $f(x)$ باشد. S_f متناهی و شمارا خواهد بود و $\bigcup_{f \in Q[x]} S_f$ نیز که مجموعهٔ اعداد جبری روی Q است شماراست زیرا $Q[x]$ شماراست.□

ادامهٔ بحث ما در این بخش مربوط به مجموعه‌های ناشمارا است و ضمن تعریف

عدد اصلی یک مجموعه به بررسی و اثبات احکامی دربارهٔ مجموعه‌های ناشمارائی نظیر $\mathbb{R}$، بازه‌ها و اعداد غیرجبری خواهیم پرداخت. با توجه به ۶.۳.۲ می‌دانیم که هر مجموعهٔ نامتناهی زیر مجموعه‌ای نامتناهی و شمارا دارد بنابراین «مجموعهٔ شما را کوچکترین مجموعهٔ نامتناهی خواهد بود» و هر مجموعهٔ شمارا نیز با $\mathbb{N}$ همتوان است پس $\mathbb{N}$ کوچکترین مجموعهٔ نامتناهی و شمارا می‌باشد.

۱۳.۳.۲ تعریف: تعداد اعضای یک مجموعه عدد اصلی آن نامیده می‌شود. عدد اصلی $\mathbb{N}$ را که کوچکترین مجموعهٔ نامتناهی و شماراست به $\aleph_0$ (بخوانید: الف صفر) نشان می‌دهیم.

به کار بردن کلمهٔ «تعداد اعضا» در مورد مجموعه‌های متناهی بر مبنای همتوان بودن دو مجموعهٔ متناهی است. به عبارت دیگر دو مجموعهٔ متناهی و همتوان دارای یک تعداد عضو خواهند بود. در مورد مجموعه‌های نامتناهی و شمارا به تعریف پیش گفته اکتفا می‌کنیم. عدد اصلی مجموعه‌های نامتناهی و ناشمارا نیز به‌زودی بیان خواهد شد و بدین منظور احکام زیر را بیان و ثابت می‌کنیم.

۱۴.۳.۲ قضیّه: مجموعهٔ نقاط بازهٔ $[0,1)$ ناشماراست.

برهان: فرض کنیم مجموعهٔ نقاط $[0,1)$ شمارا باشند و به صورت $\{x_1 , x_2 , ...\}$ در نظر گرفته شوند. هر عدد از این بازه به صورت عدد اعشاری نامختوم $0.a_1a_2a_3...$ نوشته می‌شود (مثلاً $0.9999 = 1$ ، $0.24999 = 0.243$)، بنابراین x_iها را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت

$$x_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}...$$
$$x_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}...$$
$$\vdots$$

که در آن $a_{ij} \in \{0 , 1 , 2 , ... , 9\}$. حال عدد y در $[0,1)$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$y = 0.b_1b_2\ldots \quad , \quad b_i = \begin{cases} a_{ii} + 1 , & a_{ii} < 9 \\ 2 , & a_{ii} = 9 \end{cases}$$

بدیهی است که $y \in [0,1)$ و به ازای هر i، $y \neq x_i$. با این تناقض نتیجه می‌شود که $[0,1)$ ناشماراست.□

۱۵.۳.۲ نتایج مهم:

(آ) : به ازای هر $k > 0$، $[0,k)$ ناشماراست؛

(ب) : $(0,1)$ ناشماراست؛

(پ) : $(-1,1)$ ناشماراست؛

(ت) : $\mathbb{R}$ ناشماراست.

برهان (آ): کافی است تابع $f : [0,1) \to [0,k)$ را با ضابطهٔ $f(x) = kx$ در نظر بگیریم. f یکبیک و پوشاست و بنابراین $[0,k)$ با $[0,1)$ همتوان بوده و $[0,k)$ ناشمارا است.

(ب): داریم $[0,1) = (0,1) \cup \{0\}$. اگر $(0,1)$ شمارا باشد بر اساس ۷.۳.۲ $[0,1)$ شمارا خواهد بود که یک تناقض است.

(پ): $(-1,1)$ با $(0,1)$ همتوان است. کافی است تابع $f : (0,1) \to (-1,1)$ را با ضابطهٔ $f(x) = 2x-1$ در نظر بگیریم.

(ت): $\mathbb{R}$ با $(-1,1)$ همتوان است، زیرا $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$ یکبیک و پوشا خواهد بود.□

از ۱۵.۳.۲ ناشمارا بودن $\mathbb{R}$ نتیجه می‌شود، پس عدد اصلی آن $\aleph_0$ نخواهد بود. بنا بر تعریف، عدد اصلی $\mathbb{R}$ را به $\aleph$ (الف) نشان می‌دهیم.

۱۶.۳.۲ تذکر: پس از تعریف عدد اصلی مجموعه‌ها خاصیّت همتوان بودن را با همعدد بودن یکسان خواهیم گرفت و علامت $\approx$ را به همین منظور بکار خواهیم برد.

۱۷.۳.۲ قضیّه: اگر عدد اصلی مجموعه‌های A_1، A_2، ...، A_n مساوی $\aleph$ باشد عدد اصلی $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ نیز مساوی $\aleph$ است.

برهان: به استقرا عمل می‌کنیم. اگر $n = 2$ به جای A_1 و A_2 مجموعه‌های $[0,1)$ و $(0,1]$ قرار می‌دهیم، زیرا $[0,1) \sim A_1$ و $(0,1] \sim A_2$ و بنابراین تناظرهای یکبیکی نظیر $f : A_1 \to [0,1)$ و $f : A_2 \to (0,1]$ وجود خواهد داشت. تابع g را در نظر می‌گیریم.

$$g = A_1 \times A_2 \to (0,1] \times (0,1] .$$
$$(a_1 , a_2) \to \big(f_1(a_1) , f_2(a_2)\big)$$

g تناظر یکبیک است. بنابراین کافی است ناشمارا بودن $[0,1) \times [0,1)$ را ثابت کنیم.

به ازای هر $x,y \in [0,1)$ فرض کنیم $x = 0.a_1a_2...$ و $y = 0.b_1b_2...$ و تابع $h : (0,1] \times (0,1] \to (0,1]$ را با ضابطهٔ $h(x,y) = 0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3...$ در نظر می‌گیریم. h نیز یکبیک و پوشاست و لذا $[0,1) \times [0,1) \approx [0,1)$. در نتیجه عدد اصلی $A_1 \times A_2$ مساوی $\aleph$ خواهد بود.

برای اتمام برهان قرار می‌دهیم $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = A_1 \times (A_2 \times ... \times A_n)$ و بر اساس برهان فوق عمل می‌کنیم.□

۱۸.۳.۲ قضیّه: عددی را که روی Q جبری نباشد **عدد متعالی** می‌نامیم. ثابت کنید مجموعهٔ اعداد متعالی ناشماراست.

برهان: اگر A و B به ترتیب مجموعهٔ اعداد حقیقی جبری و متعالی باشند آنگاه $\mathfrak{R} = A \cup B$. اگر B شمارا باشد $\mathfrak{R}$ نیز شمارا خواهد بود (۷.۳.۲). و این یک تناقض است.□

۱۹.۳.۲ تذکر: عدد اصلی مجموعه‌ای نظیر A به علامت $\mathrm{Card}(A)$ و یا $\overline{A}$ و یا $|A|$ نشان داده می‌شود که ما علامت $\mathrm{Card}(A)$ را به کار خواهیم برد. اعداد اصلی مجموعه‌های نامتناهی را ***اعداد ترانسفینی*** نیز می‌نامند.

۲۰.۳.۲ قضیّه: به ازای هر مجموعهٔ A، $\mathrm{Card}(A)$ و $\mathrm{Card}\,\big(P(A)\big)$ متمایزند.

برهان: فرض کنیم حکم برقرار نباشد و $A \approx P(A)$. بنابراین تابعی مانند

$f : A \to P(A)$ وجود دارد که یکبیک و پوشاست. به ازای هر $x \in A$، $f(x) \in P(A)$ و دو حالت داریم: $x \in f(x)$ یا $x \notin f(x)$. مجموعهٔ $X = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$ زیرمجموعه‌ای از A است و در نتیجه عضوی از $P(A)$ خواهد بود و

$$\exists\, y \in A \ \left(f(y) = X\right).$$

در مورد y دو حالت وجود دارد:

حالت ۱. اگر $y \in f(y) = X$ آنگاه $y \notin X$ و یک تناقض است.

حالت ۲. اگر $y \notin f(y)$ آنگاه $y \in X$ که باز هم یک تناقض خواهد بود.

و چنین تناظر یکبیکی بین A و $P(A)$ وجود ندارد و $\mathrm{Card}(A) \neq \mathrm{Card}\left(P(A)\right)$. □

۲۱.۳.۲ نتیجه: $\mathrm{Card}\left(P(N)\right)$ با $\mathrm{Card}(N)$ متمایز است و $\mathrm{Card}\left(P(N)\right) \neq \aleph_0$.

قضیهٔ زیر $\mathrm{Card}\left(P(N)\right)$ را که با $\aleph_0$ متمایز است، مشخص می‌کند.

۲۲.۳.۲ قضیّه: ثابت کنید $\mathrm{Card}\left(P(N)\right) = \aleph$.

برهان: کافی است نشان دهیم $P(N) \approx \mathfrak{R}$ و برای این منظور نشان می‌دهیم که $(0,1] \approx P(N)$. هر x از $(0,1]$ را به صورت $x = 0.x_1x_2$ و در مبنای 2 می‌نویسیم در واقع $x_i = 0$ یا $x_i = 1$ (این عمل امکان پذیر است، زیرا هر عدد با تعداد ارقام اعشار متناهی که رقم آخر آن 1 و بقیه ارقام بعد از آن 0 باشند می‌تواند بدین ترتیب به عددی با ارقام نامتناهی تبدیل شود که رقم 1 (در آخر) را به 0 و بعد از آن تمام 0هارا به 1 تبدیل کنیم. مثلاً 0.0101 به صورت ...0.0100111 به بسط نامتناهی نوشته می‌شود.)

اکنون تابع $g : (0,1] \to P(N)$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$g(x) = \{i \mid x_i = 1\}$$

و g یکبیک و پوشا خواهد بود.□

۲۳.۳.۲ قضیه: اگر A مجموعه‌ای باشد که $\mathrm{Card}(A)=m$ آنگاه $\mathrm{Card}\left(P(A)\right)=2^m$.

برهان: با توجه به مثالی که در ابتدای همین بخش مورد بحث قرار گرفت $P(A)$ با

مجموعهٔ توابع $f : A \to \{0,1\}$ همتوان است. و دقیقاً 2^m عدد از این توابع وجود دارد.□

۲۴.۳.۲ نتیجه: $\aleph = 2^{\aleph_0}$

برهان: می‌دانیم که $\text{Card}(\Re) = \aleph$ ، $\text{Card}(N) = \aleph_0$ و $P(N) \approx \Re$. بنابراین

$$\text{Card}\left(P(N)\right) = 2^{\aleph_0} = \text{Card}(\Re) = \aleph .\square$$

مجموعهٔ اعداد اصلی را در نظر می‌گیریم. در این مجموعه نسبتی مانند $\leq$ را چنین تعریف می‌کنیم که: اگر a , b دو عدد اصلی باشند و به ترتیب اعداد اصلی مجموعه‌های مفروض A , B فرض شوند، آنگاه

$$a \leq b \Leftrightarrow \text{با زیر مجموعه‌ای از } B \text{ همتوان باشد } A$$

همچنین نسبت $<$ چنین تعریف می‌شود:

$$a<b \Leftrightarrow \text{با زیرمجموعه‌ای از } B \text{ همتوان است و } B \text{ باهیچ زیرمجموعهٔ } A \text{ همتوان‌نیست } A$$

با توجه به تعریف عدد اصلی متناهی و تعریف $\aleph$ و $\aleph_0$ خواهیم داشت:

$$0 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \leq \dots \aleph_0 \leq \aleph$$

در مجموعهٔ اعداد اصلی سه عمل (سه نسبت که هر یک تابع است) جمع، ضرب و توان رسانی تعریف می‌شوند و دارای خواصی جالب هستند. تعریف اعمال چنین است که اگر a , b به ترتیب اعداد اصلی دو مجموعهٔ A , B باشند آنگاه $a + b$ به معنی اصلی $A \cup B$ ، ab به معنی عدد اصلی $A \times B$ و a^b به معنی عدد اصلی مجموعهٔ A^B خواهند بود که A^B عبارت است از مجموعهٔ همهٔ توابع $f : B \to A$.

برهان قضیّهٔ زیر در تعریف کردن تناظرهای یکبیک بین مجموعه‌های متناظر با اعداد اصلی تمرین مفیدی برای خواننده است و ما از ارائهٔ کامل آن اجتناب می‌کنیم.

۲۵.۳.۲ قضیّه: a , b , c اعداد اصلی متمایزی هستند. در این صورت:

$(a + b) + c = a + (b + c)$,

$a + b = b + a$,

$(ab)c = a(bc)$,

$ab = ba$,

$a(b + c) = ab + ac$,

$a^b a^c = a^{b + c}$,

$(a^b)^c = a^{bc}$,

$a^c b^c = (ab)^c$,

$1a = a$,

$0a = 0$,

برهان: فرض کنیم a , b , c به ترتیب اعداد اصلی مجموعه‌های A , B , C باشند و می‌دانیم که 0 عدد اصلی مجموعهٔ تهی و 1 عدد اصلی مجموعهٔ یک عضوی است. برخی از خواص موجود را با استفاده از همتوانی مجموعه‌های شناخته شده استخراج می‌کنیم:

از اینکه $A \times B \approx B \times A$ پس، $ab = ba$. با توجه به اینکه $\{\phi\} \times A \approx A$ (تابع $x \to (\phi , x)$) پس $1a = a$. همچنین

$$a(b + c) = \mathrm{Card}\,\big(A\times(B \cup C)\big) = \mathrm{Card}\,\big((A\times B) \cup (A\times C)\big)$$
$$= \mathrm{Card}\,(A\times B) + \mathrm{Card}\,(A\times C) = ab + ac .$$

زیرا رابطهٔ $(A\times B) \cap (A\times C) = A\times(B \cap C) = A\times\phi = \phi$ برقرار است (c , b , a متمایزند و لذا A , B , C دو بدو جدا از هم خواهند بود.) برهان بقیهٔ احکام بر عهدهٔ خواننده است.□

۲۶.۳.۲ قضیّه: m عدد اصلی نامتناهی و n یک عدد اصلی متناهی است. در این صورت،

(آ): $m + \aleph_0 = m$؛

(ب): $n\aleph_0 = \aleph_0$؛

(پ) : $\aleph_0^2 = \aleph_0$ ($\aleph_0^2$ به معنی $\aleph_0\aleph_0$ است) و $\aleph^2 = \aleph$؛

(ت) : $\aleph^{\aleph_0} = \aleph$.

برهان: برهان سه قسمت اول با توجه به تعریف تناظرهای یکبیک مناسب بین مجموعه‌های متناظر اعداد آسان است. برای اثبات قسمت (ت) از $2^{\aleph_0}=\aleph$ استفاده می‌کنیم.

$$\aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph \; \square.$$

۲۷.۳.۲ قضیّه: اگر a , b , c اعداد اصلی باشند و $a \leq b$ ثابت کنید $ac \leq bc$ و $a + c \leq b + c$.

برهان: فرض کنیم A , B , C مجموعه‌های متناظر با a , b , c باشند. از $a \leq b$ وجود تابعی نظیر $f : A \to B$ نتیجه می‌شود که یکبیک است ولی لزوماً پوشا نیست.

تابع $g : A \times C \to B \times C$ را با ضابطهٔ $g(a , c) = \big(f(a) , c\big)$ در نظر می‌گیریم، g نیز یکبیک خواهد بود. پس

$$ac = \text{Card}\,(A \times C) \leq \text{Card}\,(A \times B) = ab\,.$$

برای اثبات قسمت دوم می‌توان C را جدا از A در نظر گرفت و تابع h را چنین تعریف کرد:

$$h : A \cup C \to B \cup C \qquad , \qquad h(x) = \begin{cases} f(x)\,, & x \in A \\ x\,, & x \in C\,. \end{cases}$$

h نیز یکبیک خواهد بود، پس $a + c \leq b + c$. $\square$

خواص مهّم اعداد اصلی را بررسی کردیم. این بررسی در حد انتظار کتاب حاضر و بر اساس کمیّتی است که برای درس مبانی ریاضیات در نظر گرفته شده است. برخی از خوّاص را نیز ضمن مثالهای زیر مورد بحث قرار می‌دهیم قطعاً خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند با مراجعه به کتابهای مرجع و با عنوان «نظریهٔ مجموعه‌ها» بحث این بخش را ادامه دهد و معلومات جامعتری در زمینهٔ اعداد اصلی کسب نماید.

مثال: بین اعداد $\aleph_0$ و $\aleph$ روابط $\aleph = \aleph + \aleph_0 = \aleph_0\aleph$ برقرار است.

جواب: از $\aleph_0 \leq \aleph$ نتیجه می‌شود $\aleph_0\aleph \leq \aleph^2 = \aleph$ (۲۷.۳.۲ و ۲۶.۳.۲) و نیز از $1 \leq \aleph_0$ خواهیم داشت $\aleph = 1\aleph \leq \aleph_0\aleph$ بنابراین $\aleph = \aleph_0\aleph$.

همچنین از $0 \leq \aleph_0$ نتیجه می‌شود:

$$\aleph = \aleph + 0 \leq \aleph + \aleph_0$$
$$\leq \aleph + \aleph$$

ولی $\aleph + \aleph$ با $2 \,.\, \aleph$ همتوان است، زیرا:

$$\aleph + \aleph = \mathrm{Card}\left((\Re \times \{1\}) \cup (\Re \times \{2\})\right)$$
$$= \mathrm{Card}\left((\Re \times \{1 , 2\}\right) = 2 \,.\, \aleph$$

و نیز $2 \leq \aleph_0$ نتیجه می‌دهد $2\aleph \leq \aleph_0\aleph$. بنابراین:

$$\aleph \leq \aleph + \aleph \leq \aleph + \aleph_0 \leq 2\aleph \leq \aleph_0\aleph = \aleph$$ (بر اساس قسمت اول حکم)

پس $\aleph = \aleph^0 + \aleph$.

مثال: به ازای دو عدد اصلی a , b اگر $a \leq b$ آنگاه عددی اصلی مانند c وجود دارد که $b = a + c$، و بالعکس.

جواب: اگر $a \leq b$، تابعی یکبیک نظیر $f : A \to B$ وجود دارد (a , b اعداد اصلی مجموعه‌های A , B هستند.) تابع $f^+ : A \to \mathrm{Imf}$ نیز یکبیک است و نیز تابعی مانند $g : B \to A$ وجود دارد که $g\mathrm{o}f = id_A$. f^+ معکوس $g^* = g \mid_{\mathrm{Imf}}$ خواهد بود (قضیهٔ ۱۲.۲.۲) بنابراین $\mathrm{Card(Imf)} = \mathrm{Card}(A) = a$. اگر C متمم Imf در B در نظر گرفته شود، قرار می‌دهیم $c = \mathrm{Card}(C)$. پس،

$$b = \mathrm{Card(Imf)} + \mathrm{Card}(C) = a + c \,.$$

بالعکس، اگر عددی اصلی مانند c وجود داشته باشد که $b = a + c$ آنگاه B اجتماع دو مجموعه خواهد بود (C , A). تحدید تابع id_B را بر A در نظر می‌گیریم این تابع از A به توی B بوده و یکبیک است، یعنی $a \leq b$.

مثال: اگر a یک عدد اصلی باشد آنگاه $a \leq a + 1$.

جواب: اگر $a = 0$ آنگاه $0 \leq 1$ و بنابراین $0 \leq 0 + 1$. و اگر $a \neq 0$، فرض کنیم a عدد اصلی مجموعه‌ای مانند A باشد (بدیهی است که $A \neq \phi$). در این صورت $(A \times \{\phi\}) \cup \{\phi\}$ دارای عدد اصلی $a + 1$ بوده و تابع

$f : A \to (A \times \{\phi\}) \cup \{\phi\}$

با ضابطهٔ $f(x) = (x , \phi)$ یکبیک خواهد بود. بنابراین $a \leq a + 1$.

مثال: نشان دهید کاردینالی مانند $a \neq 0$ وجود دارد $a = a + 1$.

جواب: قبلاً نشان داده شد که $(0,1]$ با $(0,1)$ همعدد می‌باشد (هر دو ناشمارا و با $\Re$ همعدد می‌باشند) عدد اصلی هر یک از آنها نیز $\aleph$ می‌باشد، ولی داریم:

$$(0,1] = (0,1) \cup \{1\}$$

بنابراین $\aleph = \aleph + 1$.

۲۸.۳.۲ تعریف: عدد اصلی a را عدد متناهی نامیم اگر $a < a + 1$ و نامتناهی نامیده می‌شود اگر $a = a + 1$.

مثال: نشان دهید مجموعهٔ E نامتناهی است اگر و فقط اگر زیرمجموعه‌ای سره (زیرمجموعهٔ حقیقی) مانند F داشته باشد که $E \approx F$.

جواب: اگر E نامتناهی و a عدد اصلی آن باشد آنگاه $a = a + 1$. اگر α عضوی باشد که $\alpha \notin E$، تابع یکبیک و پوشائی مانند

$$f : E \cup \{\alpha\} \to E$$

وجود خواهد داشت. تحدید f بر E یعنی $g = f|_{\operatorname{Im} f}$ تابعی یکبیک است و

$$\operatorname{Im} g = E \setminus \{f(\alpha)\} .$$

قرار می‌دهیم $F = E \setminus \{f(\alpha)\}$ که زیر مجموعهٔ سره‌ای از E بوده و با E همتوان است.

بالعکس، فرض کنیم $F \subset E$ (زیر مجموعهٔ سره) و $\operatorname{Card}(E) = \operatorname{Card}(F)$. پس، $\propto$ ای از $E \setminus F$ وجود دارد به طوری که

$$F \subset F \cup \{\alpha\} \subseteq E.$$

تحدید id_E بر $F \cup \{\alpha\}$ را در نظر می‌گیریم، خواهیم داشت

$$Card(F) \le Card(F) + 1 \le Card(E)$$

و از اینکه $Card(F) = Card(E)$ پس $Card(E)+1= Card(E)$ یعنی E نامتناهی است.

از این مثال مثالهای زیر نتیجه می‌شود و اتمام برهان آنها بر عهدهٔ خواننده است.

مثال: اگر E متناهی باشد تنها زیرمجموعهٔ آن که با خود آن همتوان باشد E است.

جواب برعهدهٔ دانشجو است.

مثال: اگر E متناهی باشد نگاشتی نظیر $f : E \to E$ یکبیک است اگر و فقط اگر پوشا باشد.

جواب: از یکبیک بودن f نتیجه می‌شود $I_m f \approx E$ و چون E متناهی است از مثال قبل تساوی $I_m f = E$ نتیجه می‌شود و f پوشا خواهد بود. بالعکس اگر f پوشا باشد $g : E \to E$ ای وجود دارد که $fog = id_E$. g نیز یکبیک است (چرا؟) و بر اساس قسمت اول حکم g پوشا خواهد بود، یعنی g تناظر یکبیک و f معکوس آن است.

مثال: نشان دهید مجموعهٔ همهٔ اعداد اصلی متناهی مجموعه‌ای نامتناهی است.

جواب: فرض کنیم f مجموعهٔ اعداد اصلی متناهی باشد نگاشت

$$v : F \to F$$

با ضابطهٔ $v(a) = a + 1$ را در نظر می‌گیریم. v یکبیک است، زیرا اگر $a + 1 = b + 1$ آنگاه $a = b$. ولی v پوشا نیست. مثلاً به ازای هر عضو a از F داریم:

$$v(a) = a + 1 \ge 0 + 1 = 1 > 0$$

یعنی αای وجود ندارد که $v(a) = 0$. و بر اساس مثال قبل F نامتناهی خواهد بود.

تذکر: دانشجویان علاقه‌مند می‌توانند به مطالب تکمیلی در اعداد اصلی نظیر اصل

استقراء، ایزومورفیزم ترتیبی، مجموعهٔ پئانو و بازه‌ها در F در کتابهای مرجع دسترسی پیدا کنند و معلومات عمومی در زمینهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها را کاملتر نمایند. ما به اقتضای رعایت اصول این کتاب از قید مطالب بالا خودداری می‌کنیم، ولی در فصل ضمائم به مسئله اعداد اوردینال خواهیم پرداخت.

۴.۲ اصل انتخاب و معادلهای آن: به مفهوم نسبت و بالاخص نسبت ترتیبی جزئی برمی‌گردیم لم زورن کاربردی از این مفهوم است و کاربردهای مهّم این لم را در جبر ملاحظه خواهید کرد.

۱.۴.۲ اصل انتخاب: اگر A مجموعه‌ای غیر تهی متشکل از مجموعه‌های غیر تهی باشد آنگاه مجموعه‌ای نظیر C وجود دارد که از هر عضو A حداقل یک عضو را شامل می‌شود.

۲.۴.۲ تعریف: تابع انتخاب برای یک مجموعهٔ غیر تهی A تابعی مانند

$$f : P(A) \setminus \{\ \} \to A$$

است که به ازای هر $B \in P(A) \setminus \{\ \}$، $f(B) \in B$ ($\{\ \}$ به معنی مجموعهٔ تهی است.)

مثال: نشان دهید به ازای هر مجموعهٔ غیر تهی A حداقل یک تابع انتخاب وجود دارد.

جواب: قرار می‌دهیم $A_1 \in P(A) \setminus \{\ \}$. بنابر اصل انتخاب مجموعه‌ای مانند C وجود دارد که از هر عضو A_1 یک عضو را شامل است، بنابراین اگر $B \in A_1$ عضو دلخواهی باشد B عضوی نظیر x_B دارد که $x_B \in C$. پس تابع $f: A_1 \to A$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\forall B \in A_1 : f(B) = x_B .$$

مثال: برای مجموعهٔ $A = \{a , b , c\}$ یک تابع انتخاب تعریف کنید.

جواب: داریم:

$$A_1 = P(A)-\{\ \} = \Big\{A , \{a , b\} , \{a , c\} , \{b , c\} , \{a\} , \{b\} , \{c\}\Big\}$$

و $f: A_1 \to A$ را می‌توان چنین تعریف کرد:

$f(A) = a$

$f(\{a , b\}) = a$

$f(\{a , c\}) = c$

$f(\{b , c\}) = b$

$f(\{a\}) = a$

$f(\{b\}) = b$

$f(\{c\}) = c$.

«اصل انتخاب» بیان شده صورتهای معادل نیز دارد که آنها را به ترتیب اصل انتخاب ۱ و اصل انتخاب ۲ می‌نامیم و عبارتند از:

۳.۴.۲ اصل انتخاب ۱: اگر A مجموعه‌ای غیر تهی متشکل از مجموعه‌های غیر تهی و دو بدو مجزّا باشد آنگاه مجموعه‌ای مانند C وجود دارد که از هر $B \in A$ تنها یک عضو را شامل می‌شود.

۴.۴.۲ اصل انتخاب ۲: فرض کنیم I یک مجموعهٔ شمارا و $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد به طوری که I و هر A_i غیرتهی است. در این صورت، حاصلضرب مستقیم $\prod\limits_{i\in I} A_i$ غیر تهی است.

۵.۴.۲ قضیّه: اصل انتخاب با اصل انتخاب ۱ معادل است.

برهان: اصل انتخاب را مفروض می‌گیریم. فرض کنیم A مجموعه‌ای غیر تهی از ممجموعه‌های دو بدو مجزّا و غیر تهی باشد. مجموعه‌ای مانند C وجود دارد که از هر عضو A یک عضو را شامل می‌شود. از اینکه اعضای A دو بدو متمایزند پس از هر عضو A فقط یک عضو متعلق به C خواهد بود.

بالعکس، فرض کنیم اصل انتخاب ۱ برقرار و A مجموعه‌ای غیرتهی از مجموعه‌های غیر تهی باشد. مجموعهٔ $T = \bigcup_{X\in A} X$ و $T_1 = P(T) \setminus \{\ \}$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که $T_1 \supseteq A$. و به ازای هر $B \subseteq T_1$ (در واقع $B \subseteq T$) مجموعهٔ Q_B را چنین تعریف می‌کنیم:

$$Q_B = \{(B\ ,x) \mid x \in B\}\ .$$

و به آسانی ثابت می‌شود که اگر $B_1\ ,\ B_2 \in T_1$ و $B_1 \neq B_2$ آنگاه $Q_{B_1} \cap Q_{B_2} = \phi$. مجموعهٔ $\{Q_B \mid B \in T_1\}$ مجموعه‌ای غیر تهی از مجموعه‌های غیر تهی و دو بدو مجزّا می‌باشد و بنا بر اصل انتخاب ۱، مجموعه‌ای مانند C وجود دارد که از هر Q_B فقط یک عضو به C تعلق دارد. مجموعهٔ C_1 را چنین تعریف می‌کنیم

$$C_1 = \{b \mid \exists\ B \in T_1\ ,\ (B,b)\ \in C\}\ .$$

C_1 مجموعهٔ مطلوب است زیرا اگر $X \in A$ آنگاه $X \in T_1$، پس عضوی مانند Q_X در C وجود دارد و به طریق اولی عضوی مانند $x \in X$ در C_1 وجود خواهد داشت.□

در اینجا به عنوان کاربردی از اصل انتخاب برهان قضیّهٔ ۷.۲.۲ را ضمن مثال زیر و با استفاده از اصل انتخاب می‌آوریم.

مثال: A یک مجموعهٔ غیر تهی و $f\colon\ A \to B$ تابعی مفروض است. شرط لازم و کافی برای آنکه f پوشا باشد آن است که $\operatorname{Im}f = B$.

جواب: تعریف ۵.۲.۲ را در نظر می‌گیریم. اگر f پوشا باشد تابعی نظیر $g\colon\ B \to A$ وجود دارد که $fog\ =\ id_B$ پس، به ازای هر $y \in B$، $f\big(g(y)\big)\ =\ y$. قرار می‌دهیم $x\ =\ g(y)$، بنابراین $f(x)\ =\ y$ و $B \subseteq \operatorname{Im}f$. رابطهٔ $\operatorname{Im}f \subseteq B$ نیز بدیهی است، پس $\operatorname{Im}f\ =\ B$.

بالعکس فرض کنیم $\operatorname{Im}f\ =\ B$. به ازای هر $y \in B$ مجموعهٔ

$$T_y = \{x \in A \mid f(x) = y\}$$

غیرتهی است. بنابر اصل انتخاب در مورد مجموعهٔ A، این مجموعه تابع انتخابی مانند $\varphi : P(A)\backslash\{\ \} \to A$ خواهد داشت. حال، تابع $g : B \to A$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\forall\, y \in B \ \left(g(y) = \varphi\,(T_y)\right).$$

برای اتمام برهان کافی است رابطهٔ $f o g = id_B$ را تحقیق کنیم. به ازای هر $y \in B$ داریم:

$$(fog)(y) = f\left(g(y)\right) = f\left(\varphi(T_y)\right).$$

از سوی دیگر بنابر تعریف تابع انتخاب اگر $\varphi\,(T_y) = x$ آنگاه $x \in T_y$. پس،

$(fog)(y) = f(x) = y$ (بنابر تعریف T_y)

تذکر: در این فصل بحث اصلی ما در زمینهٔ نسبت و تابع و کاربردهای آنها بود. نسبت‌های ترتیبی کاربرد مهم دیگری بنام «لم زورن» دارند که به مفاهیم کران بالا، زنجیر، اصل ماکسیمال هاسدرف وابسته است. بدلیل نیاز مبرم به تعریف کران و سوپریمم یک مجموعه که در فصل سوم به آن خواهیم پرداخت از بیان و اثبات لم زرون خودداری می‌کنیم و خوانندگان علاقه‌مند را به فصل ضمیمه ارجاع می‌دهیم.

۵.۲ تمرینات:

۱ـ نسبت ρ در $\Re$ چنین تعریف می‌شود:

$$x\rho y \Leftrightarrow (y^2 \leq |x| < 1 , x^2 \leq |y| < 1)$$

نمودار این نسبت را رسم کنید.

۲ـ نسبت ρ بر $\Re \times \Re$ چنین تعریف می‌شود:

$$(a , b)\, \rho (c , d) \Leftrightarrow a(c^2 + d^2 + 3) = c(a^2 + b^2 + 3) .$$

ثابت کنید ρ یک نسبت هم‌ارزی است و ردهٔ هم‌ارزی عضو $(0 , b)$, (a , b) را که $a \neq 0$، بیابید.

۳ـ نمودار نسبت ρ را که در اعداد حقیقی به قرار زیر تعریف می‌شود، رسم کنید:

$$x\rho y \Leftrightarrow x|x| < y \leq |x|^2$$

۴ـ در $\Re \times \Re$ نسبتی هم‌ارزی تعریف کنید که رده‌های هم‌ارزی آن تمام خطوط موازی با خط $3x + 4y = 5$ باشند.

۵ـ نسبت ρ در $\Re$ با ضابطهٔ $x\rho y \Leftrightarrow x + |x| = y + |y|$ تعریف می‌شود. نمودار ρ را رسم کنید.

۶ـ X متشکل از همهٔ توابع $f : [0 , 1] \to R$ است و ρ نسبتی در X است که

$$f\rho g \Leftrightarrow f(\frac{1}{2}) = g(\frac{1}{2}) .$$

نشان دهید ρ یک نسبت هم‌ارزی است. چند عضو از ردهٔ هم‌ارزی تابع $h : t \to t^2$ را به دست آورید.

۷ـ نمودار نسبت $f = \{(x , y) \mid 2x^2 + 3xy - 2y^2 \leq 0\}$ را رسم کنید.

۸ـ نسبت ρ در N چنین تعریف می‌شود:

$$m\rho n \Leftrightarrow 7 \mid m^2 - n^2$$

ثابت کنید ρ یک نسبت هم‌ارزی است و رده‌های هم‌ارزی آن را پیدا کنید.

۹ـ اگر $\Re^* = \Re - \{0\}$ و نسبت ρ در $\Re^* \times \Re^*$ با ضابطهٔ

$$(a , b)\rho(x , y) \Leftrightarrow (ay)^2 = (bx)^2$$

تعریف شود، ثابت کنید ρ یک نسبت هم‌ارزی است و نمایش رده‌های هم‌ارزی اعضای $(1 , 2)$ و $(2 , 1)$ را رسم کنید.

۱۰ـ تابع $f : R \to R$ چنین تعریف می‌شود

$$f(x) = \frac{x + 1}{x + 2} , x \neq -2$$
$$f(-2) = 1 .$$

ثابت کنید f یکبیک و پوشاست و معکوس آن را بیابید.

۱۱ـ $f : A \to B$ تابعی مفروض و $C \subseteq B$. زیر مجموعهٔ C_f را به صورت $C_f = \{x \in A \mid f(x) \in C\}$ در نظر بگیرید و ثابت کنید که اگر $S , T \subseteq B$ آنگاه

$$(S \cap T)_f = S_f \cap T_f .$$

۱۲ـ توابع $f , g : \Re \to \Re$ چنین تعریف می‌شوند

$$f(x) = x^2 , g(x) = x(x - 4) .$$

نمودارهای fog و gof را رسم کنید. در یکبیک و پوشا بودن توابع حاصل تحقیق کنید.

۱۳ـ به ازای تابع مفروض $f : A \to B$ نسبت R_f در A با ضابطهٔ

$$xR_fy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

تعریف می‌شود. آیا R_f یک نسبت هم‌ارزی است؟

۱۴ـ در یکبیک و پوشا بودن تابع

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x & , \quad x \geq 0 \\ (1 - x)^2 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

تحقیق کنید و اگر g تناظر یکبیک باشد نمایش g^{-1} را رسم کنید.

۱۵ـ تابع f بر مجموعهٔ $A = \{1 , 2 , \ldots , n\}$ تعریف می‌شود. ثابت کنید تحدید f بر Imf یک تابع همانی است اگر و فقط اگر $fof = f$.

۱۶ـ توابع $f , g : \Re \to \Re$ چنین تعریف می‌شوند:

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 1 , & x \geq 0 \\ x , & x < 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2x , & x \geq 0 \\ x + 3 , & x < 0 . \end{cases}$$

با محاسبهٔ fog و gof در یکبیک و پوشا بودن هر یک از آنها تحقیق کنید. معکوس هر یک را (در صورت وجود) به دست آورید.

۱۷ـ تابع $f : N \to Z$ (N شامل ۰ نیست) با ضابطهٔ $f(n) = (-1)^n [[\frac{n}{2}]]$ تعریف می‌شود. تحقیق کنید f تناظری یکبیک است و f^{-1} را بیابید.

۱۸ـ نشان دهید هر دو بازهٔ بسته در $\Re$ همتوان هستند (مثلاً می‌توانید از تابع $f : [a , b] \to [c , d]$ با ضابطهٔ $f(x) = \frac{(b - x)c + (x - a)d}{b - a}$ استفاده کنید.)

۱۹ـ نشان دهید $[-1 , 1]$ و $(-1 , 1)$ همتوان هستند (مثلاً می‌توانید از تابع

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} , & x = \frac{\pm 1}{2^n} \\ x , & x \neq \frac{\pm 1}{2^n} \end{cases}$$

۲۰ـ نشان دهید $(\frac{-\pi}{2} , \frac{\pi}{2})$ با $\Re$ همتوان است.

۲۱ـ نشان دهید $(a , b) , [a , b] , (a , b] , [a , b)$ همتوان هستند.

۲۲ـ نشان دهید $\Re$ با $\Re \times \Re$ همتوان است.

۲۳ـ ثابت کنید $\aleph = \aleph_0 \aleph$.

۲۴ـ a , b اعداد اصلی‌اند و $a \leq b$ نشان دهید به ازای هر عدد اصلی c، $a^c \leq b^c$ و $c^a \leq c^b$.

۲۵ـ اگر a , b اعداد اصلی باشند و $a + 1 = b + 1$ نشان دهید $a = b$.

فصل ۳: ساختمان اعداد

۱.۳ ساختمان جبری: با مطالب فصل ۲ می‌توان ساختمان اعداد را بیان کرد و برای این منظور دستگاه جبری (یا ساختمان جبری) را تعریف می‌کنیم. عملی بر یک مجموعه مانند E تابعی از $E \times E$ به E است. بسته بودن یک عمل بر زیرمجموعه‌ای مانند A از E بدین معنی است که حاصل عمل بر هر زوج مرتب از $A \times A$ متعلق به A باشد. مثلاً عمل تفریق در مجموعهٔ اعداد صحیح تعریف می‌شود و N زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ اعداد صحیح است ولی عمل تفریق در N بسته نیست ($3 , 2 \in N$ ولی $3 - 2 \notin N$) .

علاوه بر تعریف عمل در یک مجموعه، تعریف انواع نسبتها نیز در آن امکان پذیر است، و بدین ترتیب یک مجموعهٔ غیر تهی A را بر حسب طرحهای مختلف می‌توان به ساختمانی تبدیل کرد.

۱.۱.۳ تعریف: مجموعه‌ای غیر تهی به انضمام تعدادی متناهی عمل و نسبت تعریف شده در آن یک ***ساختمان جبری*** (دستگاه جبری) نامیده می‌شود.

عملها و نسبتها را با علائمی مشخص می‌کنیم و با ذکر نام مجموعه آنها را در پرانتزی قرار می‌دهیم. مانند $(N , +)$ و $(Z , + , 0 , \leq)$ که به ترتیب دستگاه اعداد طبیعی با عمل جمع و دستگاه اعداد صحیح با اعمال جمع، ضرب و نسبت نابیشتری است. خواننده با این دو دستگاه آشنائی دارد و برای اعمال و نسبتهای تعریف شده در آن معانی معینی در ذهن خود قائل است. با در نظر گرفتن معانی خاص دیگری برای اعمال

تعریف شده در یک مجموعه می‌توان دستگاههای مجرد زیادی ساخت. اعمال تعریف شده در یک دستگاه مجرد معمولاً با علائم o ، * ، . نشان داده می‌شود و حاصل عمل بر دو عضو a و b به صورت aob ، a*b ، a.b و یا اگر بیم ابهام نرود به صورت ab نوشته می‌شود. یک دستگاه ریاضی با اعمالی که در آن تعریف می‌شود خواص و مشخصاتی خواهد داشت.

۲.۱.۳ خواص دستگاه جبری مجرد: در دستگاه $(A , *)$، عضوی مانند e از A را عضو همانی می‌نامیم اگر به ازای هر a از A داشته باشیم $a * e = e * a = a$. لازم به تذکر است که این عضو همانی در واقع عضو همانی دو طرفه است به عبارت دیگر، در صورتی که یکی از خواص $a * e = a$ یا $e * a = a$ به ازای هر a از A برقرار باشد e را به ترتیب عضو همانی راست و یا چپ می‌نامیم.

اگر عمل تعریف شدهٔ دستگاه عمل جمع (ضرب) باشد، اصطلاح «صفر دستگاه» (واحد دستگاه) بجای عضو همانی معمول است.

وجود عضو همانی برای یک دستگاه الزامی نیست ولی اگر دستگاه $(A , *)$ دارای عضو همانی e باشد و اگر به ازای عضو a از A، عضوی مانند a' از A یافت شود که $a * a' = a' * a = e$ ، آنگاه a' را **معکوس** a (یا به اصطلاح معکوس دو طرفه) نامیده می‌شود. به قیاس توضیحی که در مورد وجود عضو همانی بیان شد، وجود معکوس یک عضو نیز برای هر عضو از A الزامی نیست.

عمل * را در A **شرکتپذیر** می‌نامیم اگر همواره $a * (b * c) = (a * b) * c$. حال اگر در A دو عمل * و o تعریف شده باشد در دستگاه $(A , * , o)$ عمل * را نسبت به o **پخشی** می‌نامیم اگر همواره

$$a * (boc) = (a * b)o(a * c) .$$

خواص مذکور در دستگاه جبری مجرد را در مورد مجموعه‌های N، Z و Q و اعمال جمع، ضرب و تفریق را با ساختن چند دستگاه بررسی می‌کنیم:

هر یک از دستگاههای $(Z\ ,\ +)$ ، $(N\ ,\ \times)$ ، $(Q\ ,\ +)$ به ترتیب دارای عضو همانی 0 ، 1 و 0 می‌باشند ولی دستگاههای $(Z\ ,\ -)$ ، $(N\ ,\ +)$ و $(Z\ ,\ -)$ عضو همانی ندارد.

مثال: در مجموعهٔ $X = \{2\ ,\ 3\ ,\ 4\}$ عملی تعریف کنید که 4 عضو همانی دستگاه بوده هر یک از اعضای $2\ ,\ 3$ دو معکوس داشته باشند.

جواب: عمل دستگاه را به * نشان می‌دهیم. پس با توجه به تعریف عمل در X لزوماً عمل * در X بسته خواهد بود و نیز باید داشته باشیم:

$$2 * 4 = 4 * 2 = 2\ ,$$

$$3 * 4 = 4 * 3 = 3\ .$$

عضو 2 دو عدد معکوس دارد و لزوماً $4 = 2 * 2$ و $4 = 3 * 2$. به همین ترتیب $4 = 3 * 3$ و $4 = 2 * 3$. بدیهی است $4 = 4 * 4$ و جدول زیر را داریم:

*	2	3	4
2	4	4	2
3	4	4	3
4	2	3	4

مثال: در مجموعهٔ $X = \{0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\}$ اعمال $\oplus$ و $\odot$ چنین تعریف می‌شوند:

$$\forall\ a\ ,\ b \in X \qquad a \oplus b = (\text{باقیماندهٔ تقسیم } a + b \text{ بر } 5)$$

$$a \odot b = (\text{باقیماندهٔ تقسیم } ab \text{ بر } 5)$$

اعضای همانی دستگاه $(X\ ,\ \odot\ ,\ \oplus)$ را در صورت وجود بیابید. در وجود معکوس برای اعضای X تحقیق کنید.

جواب: جدول ضرب هر یک از اعمال $\oplus$ و $\odot$ را تشکیل می‌دهیم.

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	1	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\odot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

$e_1 = 0$ عضو همانی عمل $\oplus$ است و هر عضوی دارای معکوس است، زیرا

$$1 \oplus 4 = 4 \oplus 1 = 0 ,$$
$$2 \oplus 3 = 3 \oplus 2 = 0 .$$

$e_2 = 1$ نیز عضو همانی عمل $\odot$ است، ولی عضو صفر نسبت به این عمل دارای معکوس نیست و بقیهٔ اعضای X دارای معکوس می‌باشند.

$$1 \odot 1 = 1 ,$$
$$2 \odot 3 = 3 \odot 2 = 1 ,$$
$$4 \odot 4 = 1 .$$

مثال: در مجموعهٔ $X = \{x , y\}$ $(x \neq y)$ اعمال $*$ و o چنین تعریف می‌شود:

o	x	y
x	y	x
y	y	x

*	x	y
x	x	y
y	y	y

در شرکتپذیری $*$ و o و نیز پخشی بودن $*$ نسبت به o تحقیق کنید.

جواب: داریم:

$$x * (x * x) = x * (x) = x ,$$
$$x * (x * y) = x * (y) = y , \ (x * x) * y = (x) * y = y ,$$
$$x * (y * x) = x * (y) = y , \ (x * y) * x = (y) * y = y ,$$

$x * (y * y) = x * (y) = y\ ,\ (x * y) * y = y * y = y\ ,$

$y * (y * y) = y * (y) = y\ ,\ (y * y) * y = (y) * y = y\ ,$

$y * (y * x) = y * (y) = y\ ,\ (y * y) * x = y * x = y\ ,$

$y * (x * y) = y * (y) = y\ ,\ (y * x) * y = y * y = y\ ,$

$y * (x * x) = y * x = y\ ,\ (y * x) * x = y * x = y\ ,$

$y * (y * y) = y * y = y\ .$

پس + شرکتپذیر است. عمل o شرکتپذیر نیست، مثلاً داریم:

$$yo(yox) = yo(y) = x\ ,\ (yoy)ox = xox = y\ ,$$

بنابراین،

$$yo(yox) \neq (yoy)ox\ .$$

در شرکتپذیری * نسبت به o تحقیق می‌کنیم:

$x * (xox) = x * (y) = y\ ,\ (x * x)o(x * x) = xox = y$

$x * (xoy) = x * x = x\ ,\ (x * x)o(x * y) = xoy = x$

$x * (yox) = x * y = y\ ,\ (x * y)o(x * x) = yox = y$

$x * (yoy) = x * x = x\ ,\ (x * y)o(x * y) = yoy = x$

$y * (yoy) = y * x = y\ ,\ (y * y)o(y * y) = yoy = x$

و آخرین رابطه نشان می‌دهد که

$$y * (yoy) \neq (y * y)o(y * y)\ .$$

پس * نسبت به o پخشی نیست.

علاوه بر خواصی که از تعریف اعمال در یک مجموعه در مثالهای بالا بررسی شد **خاصیّت جابجائی** عمل نیز در یک دستگاه جبری تعریف می‌شود. بدین ترتیب که اگر $(A\ ,\ *)$ یک دستگاه جبری باشد، گوئیم: عمل * در A جابجائی است اگر به ازای هر a و b از A، $a * b = b * a$.

به عنوان مثال $(Z \,,\, +)$ یک دستگاه جابجائی است ولی $(Z \,,\, -)$ خاصیّت جابجائی ندارد، زیرا مثلاً $2 - 3 \neq 3 - 2$.

به طوری که ملاحظه شد در یک دستگاه جبری برخی از خواص برقرار نیستند. اینک دستگاههای جبری مجرد را بر حسب دارا بودن برخی از خوّاص دسته‌بندی می‌کنیم. این طبقه‌بندی صرفاً برای چند مورد خواهد بود که از آنها در بررسی دستگاه اعداد بهره خواهیم برد.

۳.۱.۳ تعریف: دستگاه جبری $(A \,,\, *)$ را یک **نیمگروه** می‌نامیم اگر $*$ شرکتپذیر باشد.

۴.۱.۳ تعریف: دستگاه جبری $(A \,,\, *)$ را یک **گروه** می‌نامیم اگر $*$ شرکتپذیر بوده و A دارای عضو همانی باشد، بعلاوه هر عضو A دارای معکوس باشد. A را یک ***گروه آبلی*** می‌نامیم اگر $*$ خاصّیت جابجائی نیز داشته باشد.

برخی از خواص گروهها را نیز مورد بررسی قرار می‌دهیم که مورد نیاز ما خواهند بود. بدیهی است که بررسی گروهها و دستگاههای جبری مربوط به درس جبر دانشگاهی است و دانشجوی رشتهٔ ریاضی آنها را در درسهای جداگانه‌ای به تفصیل مطالعه خواهد کرد.

۵.۱.۳ قضیّه: اگر $(G \,,\, *)$ یک گروه باشد در این صورت:

(آ) : عضو همانی G منحصر بفرد است،

(ب) : معکوس هر عضو G منحصر بفرد است،

(پ) : به ازای هر $a \,,\, b \in G$ معادلهٔ $a * x = b$ یک و فقط یک جواب در G دارد،

(ت) : معکوس معکوس یک عضو خود آن عضو است،

(ث) : به ازای هر $a \,,\, b \in G$، $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ (a^{-1} معکوس a فرض می‌شود.)

(ج) : قواعد اسقاط از چپ و راست در G برقرار است. به عبارت دیگر، از هر یک از

تساویهای $x * a = x * b$ و $a * x = b * x$ نتیجه می‌شود $a = b$.

(چ) : اگر در گروه G به ازای هر a رابطهٔ $a * a = a^2 = e$ برقرار باشد، G گروه آبلی است.

برهان (آ) : اگر e_1 , e_2 دو عضو همانی G باشند. بر اساس تعریف $e_1 * e_2 = e_1 = e_2 * e_1$ و نیز $e_2 * e_1 = e_2 = e_1 * e_2$، پس $e_1 = e_2$.

(ب) : اگر b , c معکوسهای عضو $x \in G$ باشند آنگاه

$$a * b = b * a = e$$

$$a * c = c * a = e .$$

بنابراین، $b = b * e = b * (a * c) = (b * a) * c = e * c = c$.

(پ): اولاً $x = a^{-1} * b$ در معادلهٔ $a * x = b$ صدق می‌کند. ثانیاً اگر y نیز جوابی از معادله باشد، $a * y = b$. بنابراین

$$y = e * y = a^{-1} * (a * y) = a^{-1} * (b) = a^{-1} * (a * x)$$
$$= (a^{-1} * a) * x = e * x = x .$$

(ت) : برای اثبات $(a^{-1})^{-1} = a$ کافی است ملاحظه کنیم که $(a^{-1}) * a = e$، و این رابطه برقرار است.

(ث) : کافی است ثابت کنیم که $(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = e$. داریم:

$$(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = a * (b * b^{-1}) * a^{-1} = a * (e) * a^{-1} = e .$$

(ج) : با ضرب طرفین $a * x = b * x$ در a^{-1} نتیجه می‌شود:

$$a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * b * x$$

و یا $x = a^{-1} * b * x$ که با ضرب طرفین در x^{-1} نیز نتیجه می‌شود $e = a^{-1} * b$ و یا $a = b$.

رابطهٔ دوم نیز به همین ترتیب ثابت می‌شود.

(چ) : فرض کنیم a , b دو عضو دلخواه از گروه G باشند. بنا به فرض خواهیم داشت

$(a * b)^2 = e$, $a^2 = e$, $b^2 = e$. بنابراین $a * b * a * b = e$ و با ضرب طرفین آن در a , b (به ترتیب زیر) خواهیم داشت:

$a * (a * b * a * b) * b = a * e * b$

$a^2 * (b * a) * b^2 = a * b$

$e * (b * a) * e = a * b$

$b * a = a * b$. □

مثال: کدام یک از دستگاههای جبری زیر گروه نیستند؟

$(N , +)$، $(N , \times)$، $(Z , \times)$، $(Z , +)$، $(Q , +)$، $(Q , \times)$، $(Q \setminus \{0\} , \times)$، $(Z\setminus\{0\} , +)$، $(Q\setminus\{0\} , \times)$.

جواب: $(N , +)$ گروه نیست (عضو همانی ندارد)،

$(N , \times)$ گروه نیست (به غیر از 1 بقیهٔ اعضا معکوس ندارند)،

$(Z , \times)$ گروه نیست (معکوس اعضا وجود ندارد)،

$(Q , \times)$ گروه نیست (عضو 0 معکوس ندارد)،

$(Z \setminus \{0\} , +)$ گروه نیست (عضو همانی وجود ندارد)،

و بقیهٔ دستگاهها گروهند و بررسی خواص گروه آسان است.

۲.۳ ساختمان اعداد حقیقی: اگر چه خواننده اطلاعاتی از اعداد طبیعی، اعداد صحیح و اعداد گویا دارد ولی با مقدماتی که در بخش ۱.۳ ملاحظه کردیم دستگاه اعداد حقیقی را به طور دقیق تعریف می‌کنیم.

فرض کنید $\mathbb{R}$ مجموعه‌ای با حداقل دو عضو باشد (آنها را به 0 و 1 نشان می‌دهیم) و دو عمل + و × در آن تعریف شده و واجد شرایط زیر باشند، آنگاه دستگاه جبری $(\mathbb{R} , + , \times)$ را یک *میدان* می‌نامیم. این تعریف به معانی $\mathbb{R}$، عمل + و عمل × بستگی ندارد. شرایط عبارتند از:

(آ) : $(\Re \,,\, +)$ یک گروه آبلی است،

(ب) : $(\Re \setminus \{0\} \,,\, \times)$ یک گروه آبلی است،

(پ) : عمل $\times$ نسبت به $+$ پخشی است،

حال اگر نسبتی مانند $<$ نیز در $\Re$ تعریف شود که واجد شرایط

(ت) : $<$ یک نسبت متعدی بوده و به ازای هر $x \,,\, y \in \Re$ یک و فقط یکی از روابط $x < y$، $x = y$، $y < x$ برقرار باشد،

(ث) : اگر $a < b$ آنگاه به ازای هر $c \in \Re$، $a + c < b + c$،

(ج) : اگر $a < b$ و $0 < c$ آنگاه $ac < bc$

نیز باشد، دستگاه $(\Re \,,\, + \,,\, \times \,,\, <)$ را یک ***میدان مرتب*** می‌نامیم.

اکنون با استفاده از مفهوم میدان مرتب می‌توان دستگاه اعداد حقیقی را به روش اصل موضوعی بنا نهاد. روش اصل موضوعی در تمام مباحث ریاضی نظیر هندسهٔ اقلیدسی اگر چه نواقصی هم داشته باشد در اثبات احکام بسیار مفید و ارزشمند است. در واقع، با وضع اصولی که آنها را اصول موضوعهٔ مبحث مورد نظر می‌نامیم در اثباتها و بیان احکام مستقیماً به آنها استناد می‌شود. با شناختی مقدماتی که خواننده از مجموعه‌های اعداد گویای نامنفی و اعداد اصمّ نامنفی دارد، می‌داند که هیچکدام از آنها با عمل جمع گروه نیستند. حال مجموعهٔ همهٔ این اعداد را مجموعهٔ اعداد مثبت می‌نامیم و به ازای هر a از این مجموعه عددی متناظر با آن که متقابل a نامیده می‌شود و به صورت a- نشان داده خواهد شد، به مجموعه ***اعداد*** مثبت ***اضافه کرده*** و مجموعهٔ حاصل را مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌نامیم. (علامت $\Re$ برای این مجموعه اختصاص داده می‌شود.)

اکنون تعریف میدان را بخاطر می‌آوریم. یک میدان مرتب، $\Re$ را مشخصی نمی‌کند، زیرا، دستگاه $(Q \,,\, + \,,\, \times \,,\, <)$ نیز یک میدان مرتب است. دستگاه اعداد حقیقی میدان مرتبی است که شرط دیگر هم داشته باشد. این شرط که به اصول موضوعهٔ میدان مرتب افزوده می‌شود اصل تمامیّت نام دارد. اصل موضوع تمامیّت در واقع، میدان مرتب اعداد

حقیقی را از هر میدان مرتب دیگر متمایز می‌سازد و یادگیری دقیق آن موجب تسهیل درک مفاهیم ریاضی است. بیان اصل موضوع تمامیّت به دو تعریف **مجموعه‌های کراندار**، و **سوپریمم** یک مجموعه وابسته است. در دو بخش دیگر این کتاب با خواص آنها آشنا خواهیم شد و در این بخش این اصل را فقط بیان می‌کنیم که «هر زیرمجموعهٔ غیرخالی از $\mathbb{R}$ که کران بالا داشته باشد سوپریمم دارد» و البته از خواننده انتظار نداریم که تا رسیدن به بخش ۳.۳ به بررسی آن بپردازد. تا رسیدن به بخش مذکور با توضیحات فوق تعریف زیر را می‌پذیریم.

۱.۲.۳ تعریف: مجموعه‌ای مانند $\mathbb{R}$ را که شامل حداقل دو عضو 0 , 1 باشد و دو عمل $+$ و $\times$ و نسبتی مانند $>$ در آن تعریف شده باشد ***دستگاه اعداد حقیقی*** می‌نامیم اگر $(\mathbb{R}\,,\times\,,+\,,<)$ یک میدان مرتب و واجد اصل موضوع تمامیّت باشد. هر عضو $\mathbb{R}$ را یک عدد حقیقی می‌نامیم.

با تعریف بالا فعلاً دو عدد مشخص داریم که عبارتند از 0 , 1، با خواص اعمال $+$ و $\times$ در $\mathbb{R}$، اسامی خاص اعداد دیگر نیز مشخص می‌شوند. مثلاً

2 یعنی $1+1$

3 یعنی $2+1$

4 یعنی $3+1$

بدین ترتیب اثبات روابطی مانند $2\times 3=6$ امکان پذیر است:

$$\begin{aligned}2\times 3 &= (1+1)\times 3 = 1\times 3 + 1\times 3\\ &= 3 + 1\times(1+2)\\ &= 3 + 1\times 1 + 1\times 2\\ &= 3 + 1 + 1\times(1+1)\\ &= 4 + 1\times 1 + 1\times 1\\ &= 4 + 1 + 1 = 5 + 1 = 6\,.\end{aligned}$$

هدف ما از این مثال و مثال زیر یادآوری خواص موجود در دستگاه اعداد حقیقی است و بیان نقش مهّم اصول موضوعه است.

مثال: اگر a , b , c اعداد حقیقی باشند و $c \neq 0$، ثابت کنید:

(آ) : $a.0 = 0$ و $a.1 = 1$،

(ب) : $ab = 0$ اگر و فقط اگر حداقل یکی از a یا b صفر باشد،

(پ) : $a(b - c) = ab - ac$،

(ت) : $(-a)b = -(ab)$ و $(-a)(-b) = ab$،

(ث) : اگر $ac = bc$ آنگاه $a = b$.

جواب (آ) : داریم:

$$a.a + a.0 = a.(a + 0) = a.a = a.a + 0$$

$\Rightarrow a.0 = 0$ (بنابر قاعدهٔ اسقاط).

در مورد $a.1 = 1$ بدیهی است که $R - \{0\}$ غیر تهی و با عمل ضرب گروه آبلی می‌باشد. عضو همانی این گروه 1 است، پس $a.1 = a$ (این رابطه به ازای $a = 0$ نیز برقرار است.)

(ب): اگر $ab = 0$ ولی $a \neq 0$ و $b \neq 0$ آنگاه $a,b \in \Re\backslash\{0\}$. پس $ab \in \Re\backslash\{0\}$ که یک تناقض است. بالعکس اگر $a = 0$ یا $b = 0$ آنگاه بر اساس (آ)، $ab = 0$.

(پ): کافی است ثابت کنیم $a(b - c) + ac = ab$. داریم

$$a(b-c) + ac = a\big((b-c) + c\big) = a\big(c + (b-c)\big) = a\big((c + b + (-c)\big) = ab$$

(ت):

$$(-a).b = (0 - a)b = b(0 - a) = b.0 - ba = 0 - ba = -(ba) = -(ab)$$

$$(-a)(-b) = -[a.(-b)] = -[(-b).a] = -[-(ba)] = ba = ab .$$

(ث): اگر $ac = bc$ آنگاه $ca - cb = 0$ و یا $c(a - b) = 0$ و بر اساس (ب) لازم است $(a - b) = 0$. و از اینجا $b + (a - b) = b$ و یا $a = b$.

به طوری که ملاحظه می‌شود نسبت $<$ و اعمال جمع و ضرب در دستگاه اعداد حقیقی تعریف شده‌اند ولی نسبت $>$ (بزرگتری)، نسبت $\leq$ (نابیشتری) و نیز عمل تقسیم که دانشجو با آنها آشنائی قبلی دارد با اصول موضوعهٔ دستگاه اعداد حقیقی قابل تعریفند که به ترتیب به بیان آنها می‌پردازم.

چنانچه دیدیم دستگاه $(\mathfrak{R} \setminus \{0\} , \times)$ یک گروه آبلی است و 1 عضو همانی آن است و $a \in R \setminus \{0\}$ به معنی $a \neq 0$ در نظر گرفته می‌شود. می‌دانیم که به ازای هر $a \neq 0$ یک و فقط یک عدد مخالف صفر وجود دارد که حاصلضرب آن در a مساوی 1 است این عدد را به a^{-1} نشان می‌دهیم. پس

$$\forall\, a \neq 0 \ (aa^{-1} = 1) .$$

براساس خواص عضو عکس در یک‌گروه، $(a^{-1})^{-1} = a$ ؛ اگر $a^{-1} = b^{-1}$ $(b \neq 0, a \neq 0)$ آنگاه $a = b$ ؛ معکوس 1 مساوی 1 است و بالاخره $(a\ b)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. این احکام نتایج مستقیم قضایائی هستند که در گروهها به بیان آنها پرداختیم.

۲.۲.۳ تعریف: به ازای دو عدد حقیقی a و b اگر $b \neq 0$، عدد ab^{-1} را به علامت $\dfrac{a}{b}$ و یا a/b نشان می‌دهیم و خارج قسمت a بر b می‌نامیم.

علامت قید شده در تعریف بالا را با شرط $b \neq 0$ تعریف کردیم پس $a/0$ بی‌معنی است و a/b $(b \neq 0)$ یک کسر نامیده می‌شود. خواصی نیز در کسرها وجود دارد که قطعاً خواننده با معلومات ریاضیات مقدماتی با آنها آشناست، ولی به دلیل تشریح هر چه کاملتر دستگاه اعداد حقیقی به ذکر آنها می‌پردازیم. اثبات این احکام صرفاً از خواص مذکور در دستگاه حقیقی نتیجه می‌شوند و برهان آنها را به خواننده محول می‌کنیم.

مثال: (آ)- اگر $b \neq 0$ آنگاه $a.(b/a) = b$ ؛

(ب) : اگر $b \neq 0$ و x عدد حقیقی باشد که $bx = a$ آنگاه $x = a/b$ ؛

(پ) : کسر a/b مساوی صفر است اگر و فقط اگر $a = 0$ ؛

(ت) : $a/1 = a$، و اگر $a \neq 0$، $a/a = 1$ ؛

(ث) : اگر $b \neq 0$ آنگاه $(-a)/b = -(a/b) = a/(-b)$ ؛

(ج) : اگر $ab \neq 0$ آنگاه $(ac)/(ab) = c/b$ ؛

(چ) : اگر $ab \neq 0$ ، $1/(a/b) = b/a$ ؛

(ح) : اگر a ، b و c مخالف صفر باشند، $(d/a)/(c/b) = (db)/(ac)$ ؛

(خ) : اگر $a \neq 0$ آنگاه $(b/a) + (c/a) = (b + c)/a$ ؛

(د) : اگر $ab \neq 0$ آنگاه $(c/a) + (d/b) = (cb + ad)/(ad)$ ؛

(ذ) : اگر $ab \neq 0$ آنگاه $(c/a) - (d/b) = (cb - ad)/(ab)$ ؛

۳.۲.۳ تعریف: اگر $x , y \in \Re$ آنگاه $x \leq y$ به معنی $(x < y \vee x = y)$ است. و $x > y$ به معنی $y < x$ و نیز $x \geq y$ به معنی $(x > y \vee x = y)$ خواهد بود. با توجه به اینکه $\Re$ یک میدان مرتب است بنا بر خواص مذکور برای میدان مرتب، $\Re$ تابع اصل تثلیث است [شرط (ت) ذکر شده در ۲.۳ ملاحظه شود] و بنابراین اگر $a \in \Re$ آنگاه $a = 0$ یا $a < 0$ یا $a > 0$ و بر این اساس تعریف زیر محرز خواهد بود.

۴.۲.۳ تعریف: عدد $a \in \Re$ را مثبت می‌نامیم. اگر $a > 0$ و منفی است اگر $a < 0$ و بنابراین 0 نه مثبت است و نه منفی. مجموعه‌های $\Re^+$ و $\Re^-$ نیز بترتیب مجموعهٔ اعداد مثبت و مجموعهٔ اعداد منفی هستند. دو عدد $a , b \in \Re$ را متحدالعلامه (مختلف العلامه) می‌نامیم اگر $ab > 0$ $(ab < 0)$.

با توجه به تعاریف نسبتهای $\leq$ ، $<$ و $\geq$ بررسی خواص القائی آنها بر $\Re$ بسیار جالب است و موجب پیدایش خواصی بین اعداد حقیقی می‌شوند که اصطلاح نامساویها بر این خواص اطلاق می‌گردد. برخی از خواص مقدماتی را بدون برهان می‌آوریم که نتیجهٔ تعاریف نسبتهای یاد شده هستند. از این خواص می‌توان به جمع، تفریق، ضرب و تقسیم نامساویها و نیز به ضرب و تقسیم یک عدد حقیقی در یک نامساوی اشاره کرد که ضمن قضیّهٔ ۵.۲.۳ خواهد آمد. برخی از خواص استنتاج شده نظیر «اگر a مثبت (یا منفی) باشد a- منفی (یا مثبت) است» و « $1 > 0$ » ، «مربع هر عدد حقیقی نا صفر مثبت است»

و «به ازای هر a که نا صفر باشد، a و a^{-1} هر دو مثبت یا هر دو منفی‌اند» را نیز به دلیل پرهیز از اطالهٔ کلام بدون اثبات می‌پذیریم.

۵.۲.۳ قضیّه: (آ) : اگر $a < b$ و $c < d$ آنگاه $a + c < b + d$ و این حکم با تبدیل $<$ به $\leq$ نیز برقرار است.

(ب) : اگر $a \leq b$ و $c < d$ آنگاه $a + c < b + d$؛

(پ) : اگر a , b هم‌علامت باشند (هر دو مثبت یا هر دو منفی) آنگاه ab مثبت است و اگر a , b مختلف العلامه باشند ab منفی است؛

(ت) : اگر $c > 0$ آنگاه $a < b \Leftrightarrow ac < bc$ و $a \leq b \Leftrightarrow ac \leq bc$؛

(ث) : اگر $c < 0$ آنگاه $a < b \Leftrightarrow bc < ac$ و $a \leq b \Leftrightarrow bc \leq ac$؛

(ج) : اگر $a < b$، $c < d$ و b و c مثبت باشند آنگاه $ac < bd$؛

(چ) : اگر $0 \leq a < b$ و $0 \leq c \leq d$ آنگاه $ac < bd$؛

(ح) : اگر $c > 0$ آنگاه $a < bc \Leftrightarrow a/c < b$؛

(خ) : اگر $c > 0$ آنگاه $ac < b \Leftrightarrow a < b/c$.

۶.۲.۳ تعریف: عدد c را بین‌دو عدد a و b می‌نامیم اگر $a<c<b$ یا $b<c<a$.

مثال: به ازای هر دو عدد حقیقی a و b نشان دهید $(a + b) /2$ بین a و b قرار دارد.

جواب: اگر $a \neq b$ آنگاه $a < b$ یا $b < a$. در حالت اول خواهیم داشت:

$$2a = a + a < a + b$$

$$a + b < b + b = 2b$$

و یا $2a < a + b < 2b$ که با تقسیم طرفین بر عدد مثبت $\frac{1}{2}$ حکم نتیجه می‌شود. در حالتی هم که $b < a$ برهان مشابه خواهد بود.

مثال: اگر a و b متحدالعلامه باشند آنگاه $a/b + b/a \geq 2$

جواب: براساس ۵.۲.۳، $ab>0$ و نیز $(a - b)^2 \geq 0$ پس،

$$a^2 + b^2 \geq 2ab .$$

با ضرب طرفین در $(ab) / 1$ نامساوی $(a^2 + b^2) / ab \geq 2$ و یا $a/b+b/a \geq 2$ حاصل می‌شود. تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $(a - b)^2 = 0$ و یا $a=b$.

مثال: اگر $a^2 > b^2$ و $ab > 0$ آنگاه یا $a > b > 0$ یا $a < b < 0$.

جواب: $a^2 > b^2$ معادل است با $a^2 - b^2 > 0$ و یا $(a - b)(a + b) > 0$. اکنون دو حالت تشخیص داده می‌شود: اگر a و b هر دو مثبت باشند، $a + b > 0$. در نتیجه، لازم است $a - b > 0$ پس $a > b > 0$. و اگر a و b هر دو منفی باشند، $a + b < 0$. پس، از رابطهٔ $(a - b)(a + b) > 0$ لزوماً $a - b < 0$ نتیجه خواهد شد یعنی، $0<a<b$.

مثال: اگر $b > 0$، $d > 0$ و $a/b < c/d$ آنگاه $a/b < (a+c)/(b+d) < c/d$.

جواب: با توجه به شرایط b , d خواهیم داشت $ad < bc$. با اضافه کردن dc به طرفین نامساوی اخیر خواهیم داشت $ad + dc < bc + dc$ و یا $(a+c)\,d < (b+d)\,c$ ویا $(a+c)/(b+d) < c/d$ (زیرا $d>0$ و $b+d > 0$).

به همین ترتیب با اضافه کردن ab به طرفین $ad < bc$ رابطهٔ $a/b < (a+c)/(b+d)$ حاصل می‌شود.

مثال: به ازای هر x ، y ، z و t از R، $(x^2 - y^2)(z^2 - t^2) \leq (xz - yt)^2$.

جواب:

$$
\begin{aligned}
(xz - yt)^2 &= (xz - yt)(xz - yt)\\
&= x^2z^2 - xyzt - xyzt + y^2t^2\\
&= x^2z^2 - xyzt - xyzt + y^2t^2 - x^2t^2 - y^2z^2 + x^2t^2 + y^2z^2\\
&= (x^2z^2 + y^2t^2 - x^2t^2 + y^2z^2) + (x^2t^2 + y^2z^2 - 2xyzt)\\
&= x^2(z^2 - t^2) - y^2(z^2 - t^2) + (xt - yz)(xt - yz)\\
&= (x^2 - y^2)(z^2 - t^2) + (xt - yz)^2 .
\end{aligned}
$$

از اینکه $(xt - yz)^2 \geq 0$ پس، $(xz - yt)^2 \geq (x^2 - y^2)(z^2 - t^2)$.

مثال: اگر $1 + a > 0$ آنگاه $(1 + a)^3 \geq 1 + 3a$.

جواب: با توجه به اینکه $a^2 \geq 0$ و $1 + a > 0$ پس می‌توان نامساویهای $a^2 \geq 0$ و $a^2(a + 1) \geq 0$ را جمع نمود:

$$a^2 + a^2(a + 1) \geq 0 .$$

با اضافه کردن $1 + 3a$ به طرفین نامساوی فوق خواهیم داشت

$$a^2 + a^2(a + 1) + 1 + 3a \geq 1 + 3a$$

و یا $(1 + a)^3 \geq 1 + 3a$. و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $a^2 = 0$ و یا $a = 0$

مثال: به ازای اعداد حقیقی a_1، a_2، a_3، b_1، b_2 و b_3 نامساویهای

(۱) $(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2)^2$

(۲) $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3^2)$

را ثابت کنید و شرایط برقراری تساویها را بیابید.

جواب: هر دو رابطه روش اثبات مشابهی دارند و از این رو فقط (۱) را ثابت می‌کنیم.

عبارت $A = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
A &= a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 - a_1^2b_1^2 - a_2^2b_2^2 - a_1a_2b_1b_2 - a_1a_2b_1b_2 \\
&= a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - a_1a_2b_1b_2 - a_1a_2b_1b_2 \\
&= a_1b_2(a_1b_2 - a_2b_1) - a_2b_1(-a_2b_1 + a_1b_2) \\
&= (a_1b_2 - a_2b_1)(a_1b_2 - a_2b_1) = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \geq 0 .
\end{aligned}$$

پس $A \geq 0$. تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

برای اثبات (۲) قرار می‌دهیم

$B = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$ و به تساوی زیر می‌رسیم:

$$B = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2$$

و تساوی $B = 0$ فقط و فقط وقتی برقرار است که در عین حال

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

$$a_2b_3 - a_3b_2 = 0$$

$$a_3b_1 - a_1b_3 = 0 .$$

نامساویهای مثال بالا حالات خاصّی از نامساوی معروف کُشی هستند که حالت کلی آن را پس از بیان تعمیم اعمال جمع و ضرب در قسمتهای دیگر این بخش ملاحظه خواهیم کرد.

از خوّاص نامساویها نتایجی عمومی حاصل می‌شود که در اکثر موارد از آنها استفاده خواهیم نمود.

۷.۲.۳ قضیّه: a و b دو عدد حقیقی‌اند به طوری‌که به ازای هر عدد حقیقی x، اگر $b<x$ آنگاه $a \leq x$. در این صورت، $a \leq b$.

برهان: فرض کنیم $b < a$ پس، $(a - b)/2 > 0$ و با اضافه کردن b به طرفین خواهیم داشت

$$b < b + (a - b)/2 .$$

با توجه به فرض قضیّه، $a \leq b + (a - b)/2$، و یا $a \leq (a + b)/2$. پس، $a \leq b$ که یک تناقض است. بنابراین $a \leq b$.□

۸.۲.۳ نتیجه: a و b دو عدد حقیقی‌اند و به‌ازای هرعدد حقیقی و مثبت h، $a \leq b+h$، در این صورت $a \leq b$.

برهان: قرار می‌دهیم $x = b + h$. پس $b < x$ رابطهٔ $a \leq x$ را نتیجه می‌دهد و بر اساس ۷.۲.۳ خواهیم داشت $a \leq b$.□

تعاریف ماکسیمم و مینیمم یک زیر مجموعهٔ متناهی از اعداد حقیقی نتیجهٔ دیگری از نامساویها هستند. با بیان این تعاریف به نتیجهٔ مهّمی در $\mathfrak{R}$ خواهیم رسید. این تعاریف

را با تعاریف سوپریمم و اینفمم مجموعه‌ها که در رابطه با اصل موضوع تمامیّت اعداد حقیقی هستند خلط نکنید.

۹.۲.۳ تعریف: A زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی است. عضوی مانند a از A را **ماکسیمم** A می‌نامیم اگر به ازای هر $x \in A$، $x \le a$. و عضوی مانند b از A **مینیمم** A نامیده می‌شود اگر به ازای هر $x \in A$، $b \le x$. نمادهای $\text{Max } A$ و $\min A$ به ترتیب برای ماکسیمم و مینیمم مجموعهٔ A به کار می‌روند.

در مورد مجموعه‌های متناهی تشخیص ماکسیمم و مینیمم آسان است. بالاخص اگر $A = \{a\}$ یک مجموعهٔ منفرد باشد، $\text{Max } A = \min A = a$. و اگر $A = \{a , b\}$ و $a \neq b$ آنگاه بر اساس اصل تثلیث، $a < b$ یا $b < a$. که در حالت اول $\min A = a$ و $\text{Max } A = b$ و در حالت دوم $\min A = b$ و $\text{Max } A = a$.

۱۰.۲.۳ قضیّه: $\Re$ ماکسیمم و مینیمم ندارد.

برهان: اگر a ماکسیمم $\Re$ باشد، از اینکه $a + 1 \in \Re$ پس $a + 1 \le a$. ولی می‌دانیم که $a < a + 1$ پس $a < a$ که یک تناقض است. اثبات عدم وجود مینیمم به همین ترتیب خواهد بود.□

مثال: نشان دهید $\text{Max } \{a , b , c\}$ موجود است و

$$\text{Max } \{a,b,c\} \geq \text{Max } \{b,c\} .$$

جواب: فرض بر این است که a ، b و c اعداد متمایزی هستند و حالات زیر را خواهیم داشت:

$$a < b < c$$
$$a < c < b$$
$$b < a < c$$
$$b < c < a$$
$$c < a < b$$
$$c < b < a .$$

اگر قرار دهیم $\alpha = \mathrm{Max}\ \{a,b,c\}$ و $\beta = \mathrm{Max}\ \{b,c\}$ آنگاه وجود α در هر حالت محرز است و به ترتیب نتیجه می‌شود:

$$\alpha = c\ , \beta = c$$

$$\alpha = b\ , \beta = b$$

$$\alpha = c\ , \beta = c$$

$$\alpha = a\ , \beta = c$$

$$\alpha = b\ , \beta = b$$

$$\alpha = a\ , \beta = b\ .$$

پس، همواره $\alpha > \beta$ یا $\alpha = \beta$.

مثال: نشان دهید $\mathrm{Max}\ \{a,b,c\} \leq \min\{b,c\}$.

جواب: برهان مشابه مثال قبلی است.

مثال: نشان دهید مجموعهٔ $A = \{x \mid 0 < x < 1\}$ نه مینیمم دارد و نه ماکسیمم.

جواب: اگر $a = \mathrm{Max}\ A$ آنگاه $a < 1$ پس $(a + 1)/2$ بین a و 1 قرار دارد و به A تعلق خواهد داشت. از طرفی بنا بر خاصیّت ماکزیمم $a > \frac{a+1}{2}$ که یک تناقض است.

عدم وجود $\min\ A$ نیز به همین ترتیب خواهد بود.

مثال: در وجود ماکسیمم و مینیمم مجموعه‌های $\{0\} \cup \Re^{+}$ و $\{0\} \cup \Re^{-}$ تحقیق کنید.

جواب: مجموعهٔ اول مینیمم دارد (عدد 0) ولی ماکسیمم ندارد و مجموعهٔ دوم ماکسیمم دارد (0) ولی مینیمم ندارد.

۱۱.۲.۳ نمایش اعداد حقیقی و بازه‌ها: هر عدد حقیقی معمولاً به صورت نقطه‌ای بر یک خط (به نام خط حقیقی یا محور اعداد حقیقی) نشان داده می‌شود. این نمایش هندسی از مقدمات تعریف دستگاه اعداد حقیقی است و با نشان دادن اعداد 0 و 1 با یک فاصلهٔ انتخابی صورت می‌گیرد. این انتخاب مقیاس را نشان می‌دهد و بر اساس نسبت تعریف شده در $\Re$ که رابطهٔ $0<1$ را نتیجه می‌دهد جهتی برای محور اختیار

می‌گردد و سپس هر عدد حقیقی دیگر به‌وسیله یک و فقط یک نقطه مشخص می‌شود. اگر نقطه‌ای مشخص کنندهٔ عدد x باشد به جای اصطلاح «عدد x»، اصطلاح مرسوم «نقطهٔ x» را به کار خواهیم برد. در این نمایش هندسی اعداد منفی در سمت چپ عدد 0 قرار می‌گیرند، زیرا به ازای هر x اگر منفی باشد آنگاه $0 > -x$.

مفهوم بازه (یا فاصله) برای زیر مجموعه‌های خاصّی از $\Re$ به‌کار می‌رود و اگر a , b اعداد حقیقی باشند و $a < b$ آنگاه مجموعه‌های

$$(a , b) = \{x \mid a < x < b\}$$

$$[a , b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

به ترتیب بازهٔ باز و بازهٔ بسته نامیده می‌شوند. همچنین هر یک از مجموعه‌های زیر را، بازهٔ نیم باز (یا نیم بسته) می‌گوییم:

$$(a , b] = \{x \mid a < x \leq b\} , [a , b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

خواص مشخصه و مهّم بازه‌های اعداد حقیقی را پس از بررسی اعداد صحیح، گویا، اصم، اصل موضوع تمامیّت و دستگاه اعداد حقیقی گسترش یافته ($\Re$ به همراه علائم ∞ و $-\infty$) مورد بحث قرار خواهیم داد.

در فصل گذشته با تعریف نسبت و تابع آشنا شدیم و تاکنون در دستگاه ساخته شدهٔ $\Re$ نسبتهای $>$ و $\leq$ ، $<$ و $\geq$ را مورد بحث قرار دادیم و برخی از خواص آنها را (نظیر ماکسیمم و مینیمم، نمایش اعداد و بازه‌ها) بررسی کردیم. اکنون تابع قدر مطلق و تابع علامت راکه در دستگاه اعداد حقیقی کاربرد وسیعی دارند مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱۲.۲.۳ تابع قدر مطلق و تابع علامت: تابع قدر مطلق که با نماد « $| \ |$ » نشان داده می‌شود بر $\Re$ تعریف شده و ضابطهٔ تعریف آن عبارت است از:

$$\forall x \in \Re , \ | x | = \begin{cases} x , x \geq 0 \\ -x , x < 0 . \end{cases}$$

خواص مهّم این تابع را ضمن قضایای زیر ملاحظه خواهیم کرد. ابتدا به خوّاص مقدماتی آن که ناشی از تعریف است می‌پردازیم و اثبات خوّاص مقدماتی آن را به خواننده واگذار می‌کنیم.

۱.۱۲.۲.۳ خوّاص مقدماتی تابع قدر مطلق:

(آ): همواره $|x| \geq 0$ و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $x = 0$؛

(ب): $|-x| = |x|$ و $(-x)^2 = x^2 = |x|^2$؛

(پ): $|y| = |x|$ اگر و فقط اگر ($x = y$ یا $x = -y$)؛

(ت): $|b|\ |a| = |ab|$.

از این خوّاص در حل معادلات و دستگاههای معادلات که شامل قدر مطلق است استفاده می‌شود (هر گزاره‌نما که شامل قدر مطلق باشد.)

مثال: معادلهٔ $|2x - 5| = 3$ را حل کنید.

جواب: بر اساس (پ) از ۱.۱۲.۲.۳ گزاره نمای مفروض معادل است با

$$2x - 5 = 3 \ \vee\ 2x - 5 = -3 .$$

و یا $x = 1 \ \vee\ x = 4$. یعنی معادله دو جواب دارد.

مثال: معادلهٔ $|x - 1| = x$ را حل کنید.

جواب: از اینکه همواره $|a| \geq 0$ پس $x \geq 0$. بنابراین

$$x - 1 = x \ \vee\ -(x-1) = x$$

پس $x = \frac{1}{2}$ تنها جواب معادله خواهد بود.

مثال: به ازای هر x و y اگر $y \neq 0$، نشان دهید $|x/y| = |x|/|y|$.

جواب: قرار می‌دهیم $t = x/y$ پس $x = ty$، و بر اساس ۱.۱۲.۲.۳ نتیجه می‌شود:

$|x| = |t|\ |y|$ و یا $|t| = |x|/|y|$ (زیر $y \neq 0$ و $|y| \neq 0$).

مثال: با فرض $-1 < x < 0$ عبارت

$$A = 2\ |x + 1| + |x| + |x - 1| - 3$$

را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

جواب: از $0 > x > -1$ روابط زیر حاصل می‌شود:

$$0 < x + 1 < 1 , -2 < x - 1 < -1 .$$

بنابراین $A = 2(x + 1) - x - (x - 1) - 3 = 0$.

مثال: دستگاه معادلات $\begin{cases} |x| = 2 \\ |2x - \frac{1}{2}| = 1 \end{cases}$ را حل کنید.

جواب: از معادلهٔ اول نتیجه می‌شود $x = 2$ یا $x = -2$ و از معادلهٔ دوم نتیجه می‌شود $2x - \frac{1}{2} = 1$ یا $2x - \frac{1}{2} = -1$ (به عبارت دیگر $x = \frac{3}{4}$ یا $x = \frac{-1}{4}$). پس دستگاه جواب ندارد.

مثال: دستگاه $\begin{cases} | x + 1 | + | x - 1 | = 20 \\ | x - 7 | = 3 \end{cases}$ را حل کنید.

جواب: از معادلهٔ دوم نتیجه می‌شود $x-7=3$ یا $x-7 = -3$. پس، $x=10$ یا $x=4$. $x=10$ در معادلهٔ اول صدق می‌کند ولی $x = 4$ در آن صدق نمی‌کند، بنابراین تنها جواب دستگاه $x = 10$ است.

مثال: دستگاه $\begin{cases} | x^2 - 4 | = 3 \\ | 2x - 1 | \, | 3x - 4 | = 1 \end{cases}$ را با شرط $0 < x \leq 1$ حل کنید.

جواب: معادلهٔ اول دستگاه با شرط فوق به صورت $(x + 2) (-x + 2) = 3$ است. بنابراین، $x^2 = 1$ پس $x = 1$ یا $x = -1$. و تنها جواب قابل قبول برای معادلهٔ اول $x = 1$ خواهد بود. $x = 1$ در معدلهٔ دوم نیز صدق می‌کند پس $x = 1$ جواب دستگاه است.

۳.۲.۱۲.۲. قضیّه:

(آ): اگر $a < c < b$ آنگاه $|c| < \operatorname{Max}\{|a|, |b|\}$؛

(ب): اگر b عدد مثبتی باشد،

$(|a| < b \Leftrightarrow -b<a<b)$ و $(|a| < b \Leftrightarrow a^2<b^2)$،

و این احکام با تبدیل < به ≤ نیز بر قرارند؛

(پ): اگر b عدد نامنفی باشد $\big(|a| > b \Leftrightarrow (a>b \quad \vee \quad a<-b)\big)$ و $(|a| > b \Leftrightarrow a^2 > b^2)$، و احکام با تبدیل > به ≤ و نیز < به ≥ برقرار است؛

(ت): همواره $|a + b| \le |a| + |b|$ و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $ab \ge 0$؛

(ث): همواره $||a| - |b|| \le |a \pm b|$؛

(ج): همواره $|a + b| + |a - b| \ge |a| + |b|$.

برهان (آ): در رابطهٔ $a<c<b$ برای a ، b و c چند حالت ممکن وجود دارد که عبارتند از:

حالت ۱. $0 \le a < c < b$؛

حالت ۲. $a < c < b \le 0$؛

حالت ۳. $a < c < 0 < b$؛

حالت ۴. $a < 0 \le c < b$.

و در هر حالت با توجه به تعریف قدر مطلق، $|c| < \operatorname{Max}\{|a|, |b|\}$ نتیجه می‌شود. مثلاً در حالت ۱ داریم $|c| = c < b = \operatorname{Max}\{a, b\}$. در سایر حالات اثبات رابطه به طور مشابه خواهد بود.

(ب): از اینکه $b > 0$ پس $-b < 0$. برای a دو حالت تشخیص می‌دهیم:

اگر $a \ge 0$ آنگاه $|a| = a$ و لذا $a < b$ و $-b < 0 \le a$ و یا $-b < a < b$. و اگر $a<0$ آنگاه $a<0<b$ و یا $a<b$. از سوی دیگر فرض $|a| < b$ در این حالت به

صورت $b < a$- و یا $a < b$- تبدیل می‌شود و نتیجهٔ $-b<a<b$ را خواهیم داشت.

بالعکس، فرض کنیم $-b < a < b$. با توجه به حکم قسمت (آ)،

$$|a| < \mathrm{Max}\{ |-b| , |b| \} = |b| = b .$$

و یا $|a| < b$.

برای اثبات معادل بودن $|a| < b$ و $a^2 < b^2$ فرض کنیم $|a| < b$، پس $|a| . |a| < |a| .b$ و $|a| . b < b.b$ (زیرا $b>0$ و $|a| \geq 0$). بنابراین $a^2 < b^2$. بالعکس، اگر $a^2 < b^2$. ولی اگر $|a| \geq b$ آنگاه $|a| .b \geq b^2$ و $|a| . |a| \geq b . |a|$ و یا $a^2 \geq b^2$ که یک تناقض است.

برای اتمام برهان (ب) کافی است احکام زیر را ثابت کنیم

$$(*)\left\{\begin{array}{l} |a| \leq b \supset -b \leq a \leq b \\ -b \leq a \leq b \supset |a| \leq b \\ |a| \leq b \supset a^2 \leq b^2 \\ a^2 \leq b^2 \supset |a| \leq b . \end{array}\right.$$

اگر $|a| < b$ آنگاه بنابر برهان بالا $a < b$ و $-b < a$. پس به انتفاع مقدم $a \leq b$ و $-b \leq a$ و یا $-b \leq a \leq b$. و اگر $|a| = b$ آنگاه $a = b$ یا $a = -b$ (بنابر ۱.۱۲.۲.۳). بنابراین $-b \leq b \leq b$ یا $-b \leq -b \leq b$ که به انتفاع مقدم برقرارند.

اثبات سه حکم (*) نیز با تشخیص حالات و مشابه برهان فوق صورت می‌گیرد.

(پ): از $b \geq 0$ نتیجه می‌شود $b = 0$ یا $b > 0$. در حالت اول معادل بودن احکام $|a| > b$ و $(a > b \vee a < -b)$ و نیز معادل بودن احکام $|a| > b$ و $a^2 > b^2$ بدیهی است. و در حالت دوم بنابر (ب)،

$$|a| \leq b \equiv -b \leq a \leq b$$

و یا $|a| \leq b \equiv (-b \leq a \;\&\; a \leq b)$. نقیض طرفین $\equiv$ نیز معادل خواهند بود پس

$$|a| > b \equiv (-b > a \vee a > b)$$

که اولین حکم مورد نظر در (پ) است. همچنین، از (ب) داریم:

$$|a| \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$$

و یا،

$$\sim (|a| \leq b) \Leftrightarrow \sim (a^2 \leq b^2)$$

و یا

$$|a| > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$$

که همان حکم دوم در (پ) خواهد بود.

برای اتمام برهان قسمت (پ) یعنی احکام

$$(**) \quad \begin{cases} |a| \leq b \Leftrightarrow a \geq b \vee a \leq -b \\ |a| \geq b \Leftrightarrow (a^2 \geq b^2) \end{cases}$$

از احکام ثابت شده در قسمت (ب) استفاده می‌کنیم. بر اساس (ب) داریم

$\sim (|a| < b) \Leftrightarrow \sim (a^2 < b^2)$ و $\sim (|a| < b) \Leftrightarrow \sim (-b<a<b)$.

و یا

$|a| \geq b \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$ و $|a| \geq b \Leftrightarrow (-b \geq a \vee a \geq b)$.

(ت): اگرحداقل یکی از a و b مساوی صفر باشد آنگاه $|a + b| = |a| + |b|$ و اگر a و b هر دو مثبت باشند، $|a+b| = a+b = |a| + |b|$. اگر a و b هردو منفی باشند، $|a+b| = -(a+b) = (-a) + (-b) = |a| + |b|$

و بالاخره فرض کنیم a مثبت و b منفی باشد در این صورت

$$b < a+b$$

$$a+b < a$$

و بر اساس (آ)، $|a+b| \leq \text{Max}\{|a|, |b|\}$. از اینکه $|a| > 0$ و $|b| > 0$ پس $\text{Max}\{|a|$ و $|b|\} < |a| + |b|$. بنابراین،

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

پس $|a| + |b| \leq |a| + |b|$ و به طوری که ملاحظه شد تساوی در حالتی برقرار خواهد بود که $ab = 0$ یا $ab > 0$.

(ث): داریم:

$$a = (a + b) - b$$

پس $|a| \leq |a+b| + |-b|$ و یا $|a|-|b| \leq |a+b|$. به همین ترتیب از $b = (a+b) - a$ نتیجه می‌شود

$$-|a|+|b| \leq |a+b|$$

و یا $-|a+b| \leq |a| - |b| \leq |a+b|$ که بر اساس (ب) رابطهٔ

$$||a| - |b|| \leq |a+b|$$

حاصل می‌شود. اثبات رابطهٔ $||a| - |b|| \leq |a - b|$ نیز از روابط $a = (a - b) + b$ و $b = -(a - b) + a$ و به روش بالا امکان پذیر است.

(ج): چهار حالت وجود دارد:

حالت ۱: $ab = 0$؛

حالت ۲: $ab > 0$؛

حالت ۳: $a < 0 < b$؛

حالت ۴: $b < 0 < a$.

در حالت ۱، $|a+b| + |a-b| > |a| + |b|$ برقرار است. در حالت ۲ اگر b و a، هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند از $|a-b| \geq 0$ استفاده می‌کنیم و خواهیم داشت.

$$a+b+ |a-b| \geq a + b \text{ (}a\text{ و }b\text{ هر دو مثبت)}$$

$$-(a+b) + |a-b| \geq -a - b \text{ (}a\text{ و }b\text{ هر دو منفی)}$$

و حکم بدیهی است. در حالات ۳ و ۴ از $|a+b| \geq 0$ استفاده می‌کنیم:

$$|a+b| + (-a+b) \geq -a+b = |a| + |b|$$

و نیز

$$|a+b| + (a-b) \geq a-b = |a| + |b|$$

و تساوی $|a+b| + |a-b| = |a| + |b|$ فقط و فقط وقتی برقرار است که $a = b$.□

مثال: نشان دهید، همواره $|x+y+z| \leq |x| + |y| + |z|$.

جواب: بر اساس إحکام قضیّهٔ قبل خواهیم داشت:

$$|x+y+z| = |(x+y)+z| \leq |x+y| + |z| \leq |x| + |y| + |z|$$

مثال: اگر $|x| \neq |y|$ آنگاه

$$\left|\frac{a+b}{x+y}\right| \leq \frac{|a| + |b|}{\big||x| - |y|\big|}.$$

جواب: بنابر فرض، $x + y \neq 0$. بنابراین،

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$|x+y| \geq \Big||x| - |y|\Big|$$

و یا $\frac{1}{|x+y|} \leq \frac{1}{\big||x| - |y|\big|}$. در نتیجه:

$$\frac{|a+b|}{|x+y|} \leq \frac{|a| + |b|}{\big||x| - |y|\big|}$$

مثال: برقراری نامساویهای زیر را به ازای هر x تحقیق کنید:

$$|x-1| + |x-2| \geq 1,$$

$$|x-1| + |x-2| + |x-3| \geq 2.$$

جواب: رابطهٔ $1 = (x-1) + (-x+2)$ برقرار است. بنابر این

$$1 = |1| \leq |x-1| + |-x+2| = |x-1| + |x-2|.$$

برای اثبات رابطهٔ دوم از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$1 = (x-1) + (-x+2),$$

$$1 = (x-2) + (-x+3),$$

$$2 = (x-1) + (-x+3),$$

بنابراین،

$$|x-1| + |x-2| \geq 1,$$
$$|x-2| + |x-3| \geq 1,$$
$$|x-1| + |x-3| \geq 2.$$

که از حاصلجمع طرفین نامساویها رابطهٔ $|x-1| + |x-2| + |x-3| \geq 2$ حاصل می‌شود.

مثال: اگر $a<b<c$ نشان دهید رابطهٔ $|x-a| + |x-b| + |x-c| \geq c-a$ به ازای هر x برقرار است.

جواب: روابط زیر را برقرارند:

$$(x-a) + (-x+b) = b-a,$$
$$(x-b) + (-x+c) = c-b,$$
$$(x-c) + (-x+a) = a-c.$$

و بنابراین:

$$|x-a| + |-x+b| \geq |b-a| = b-a,$$
$$|x-b| + |-x+c| \geq |c-b| = c-b,$$
$$|x-c| + |-x+a| \geq |a-c| = -(a-c).$$

و از حاصلجمع طرفین نامساویها حکم نتیجه می‌شود.

تابع علامت که با نماد Sgn نمایش داده می‌شود چنین تعریف می‌شود که به ازای هر $x \in \Re$،

$$\operatorname{Sgn} x = \begin{cases} -1, & x<0 \\ 1, & x>0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

این تابع با تابع قدر مطلق رابطهٔ نزدیکی دارد. مثال زیر روابطی بین آنها را نشان می‌دهد.

مثال: نشان دهید $|a| = a \,.\, \operatorname{Sgn} a$ ، $a = |a| \,.\, \operatorname{Sgn} a$.

جواب: اگر $a > 0$ آنگاه $|a| = a$ و $\mathrm{Sgn}\, a = 1$ و روابط برقرارند.
و اگر $a<0$ آنگاه $|a| = -a$ و $\mathrm{Sgn}\, a = -1$. بالاخره اگر $a = 0$ آنگاه $|a| = 0$ و $\mathrm{Sgn}\, a = 0$.

مثال: نشان دهید که اگر $|b| \geq 1$ و $f(x) = a - bx$ آنگاه $f(-|a| . \mathrm{Sgn} b) \geq 0$.

جواب:

$$f(-|a|\ \mathrm{Sgn}\ b) = a + b . |a| . \mathrm{Sgn}\ b$$
$$= a + |a| . |b| \geq a + |a| \geq 0 .$$

۱۳.۲.۳ اعداد طبیعی و اعداد صحیح: با اصول دستگاه اعداد حقیقی مجموعهٔ اعداد

$$1 , 1 + 1 , (1 + 1) + 1 , ...$$

را که به صورت

$$1 , 2 , 3 , ...$$

نشان داده می‌شوند ساختیم. این مجموعه را مجموعهٔ اعداد طبیعی می‌نامیم. اگر n یک عدد طبیعی باشد $n + 1$ نیز چنین است و بین n و $n + 1$ هیچ عدد طبیعی وجود ندارد بدین دلیل $n + 1$ را تالی بلافصل n می‌نامیم. از خوّاص مهّم اعداد طبیعی که از تعریف فوق استنباط می‌شود اصل استقرا و خوشترتیبی است.

۱.۱۳.۲.۳ اصل استقرا: فرض کنید F خاصیّتی در اعداد طبیعی باشد و واجد دو شرط زیر

(آ): عدد 1 خاصیّت F دارد،

(ب): به ازای هر عدد طبیعی n اگر n خاصیّت F داشته باشد $n + 1$ نیز خاصیّت F دارد.

در این صورت هر عدد طبیعی خاصیّت F دارد.

قبل از برهان اصل استقرا لازم است مجموعهٔ اعداد طبیعی را به‌طور دقیق و ریاضی تعریف کنیم. ابتدا. مجموعهٔ استقرایی را تعریف می‌کنیم: مجموعهٔ A از اعداد حقیقی یک مجموعهٔ *استقرایی* نامیده‌می‌شود اگر شامل 1 باشد و همواره از $x\in A$، $x+1\in A$

نتیجه شود. حال اشتراک همهٔ مجموعه‌های استقرایی را به N نشان می‌دهیم و آن را **مجموعهٔ اعداد طبیعی** می‌نامیم.

برهان اصل استقرا: فرض کنیم A مجموعهٔ همهٔ اعداد طبیعی باشد که واجد خاصیّت F هستند. بر اساس فرضهای (آ) و (ب) A یک مجموعهٔ استقرایی است. و بر اساس تعریف N لازم است $N \subseteq A$. ولی $A \subseteq N$. پس $A = N$. $\square$

اصل استقرا از ابزار توانایی بشمار می‌آید که ضمن مثالهای آینده نمونه‌هائی از آن را ملاحظه خواهیم کرد. اگر F خاصیتی باشد $F(n)$ به معنی این است که «n خاصیت F دارد» . اصل استقرا صورتهای مختلفی دارد که به‌زودی به بیان آنها خواهیم پرداخت. از مطالب دیگر در مورد N می‌توان به توابع تعریف شده بر N اشاره کرد. اگر چه هدف ما در این کتاب بحث کلی در این توابع نیست با وجود این برخی از این توابع به اصل استقرا مربوط می‌شوند که با عنوان تعریف استقرایی یا تعریف بازگشتی (تراجعی) مورد بحث قرار خواهند گرفت. به طور کلی تابعی مانند $f: N \to \mathfrak{R}$ یک دنباله نامیده می‌شود و بررسی خواص آنها را دانشجویان در درس ریاضیات عمومی به تفصیل خواهند دید. در اینجا یه توابعی می‌پردازیم که با معلوم بودن یک یا چند مقدار اولیهٔ f (به ازای 1، 2، ...) مقدار $f(n)$ محاسبه شود. در چنین حالتی می‌گوئیم تابع f تعریف استقرایی دارد و یا تعریف آن تراجعی است. مثلاً تابع $f: N \to \mathfrak{R}$ چنین تعریف می‌شود:

$$f(1) = 5$$
$$f(n) = 3f(n-1) + \frac{1}{2}, n \geq 2$$

و می‌گوئیم این یک تعریف تراجعی برای f است. و مقادیر آن برای چند مقدار اولیه از n عبارت است از:

$$f(1) = 5 , f(2) = \frac{31}{2} , f(3) = 47 , f(4) = \frac{283}{2} .$$

همچنین تابع $g: N \to \mathfrak{R}$ با ضابطهٔ زیر یک تعریف تراجعی دارد:

$$a , g(n + 1) = a.g(n) , n \geq 1$$

که a عدد حقیقی ثابتی است و جملات تابع مقادیر زیر را خواهند داشت.

$g(1) = a\ ,\ g(2) = a^2\ ,\ g(3) = a^3\ ,\ \ldots\ .$

در درس ریاضیات عمومی ملاحظه خواهید کرد که نماد اندیس (یا شاخص) برای تعریف تراجعی به کار می‌رود و در دو مثال بالا توابع f و g به ترتیب به صورتهای

$$f_1 = 5\ ,\ f_2 = \frac{31}{2}\ ,\ \ldots$$
$$g_1 = a\ ,\ g_2 = a^2\ ,\ \ldots$$

نشان داده خواهند شد.

در بخش ۱۵.۲.۳ نیز اشارهٔ دیگری به دنباله خواهیم داشت و با تعریف اعداد صحیح کاربردی از آنها را خواهیم دید.

۲.۱۳.۲.۳ تعریف: اگر $n \in \mathbb{N}\ ,\ a \in \mathfrak{R}$ آنگاه توان nام a که به علامت a^n نشان داده می‌شود به استقرا چنین تعریف خواهد شد:

$$a^1 = a$$
$$a^{n+1} = a^n . a\ .$$

۳.۱۳.۲.۳ قضیهٔ (قواعد محاسبه با توان طبیعی): m و n اعداد طبیعی دلخواهند. در این صورت، به ازای اعداد حقیقی a و b،

(آ): $a^m . a^n = a^{m+n}$؛

(ب): $a^m / a^n = \begin{cases} a^{m-n}\ , & m > n \\ 1/a^{n-m}\ , & m < n \end{cases}$ ، $(a \neq 0)$؛

(پ): $(a^m)^n = a^{mn}$؛

(ت): $a^m . b^m = (ab)^m$؛

(ث): $a^m / b^m = (a/b)^m$ $(b \neq 0)$؛

برهان: اثبات کلیهٔ احکام با استفاده از اصل استقرا است و فقط برهان (آ) را می‌آوریم.

فرض کنیم m عدد طبیعی دلخواه و ثابتی باشد و $a^m . a^n = a^{m+n}$ را به ازای هر n ثابت

می‌کنیم. اولاً: بر اساس ۲.۱۳..۲.۳ داریم

$$a^m.a^1 = a^m.a = a^{m+1}$$

ثانیاً: اگر $a^m.a^n = a^{m+n}$ آنگاه

$$a^m.a^{n+1} = a^m.(a^n.a) = (a^m.a^n)a = (a^{m+n})a$$
$$= a^{m+n}.a^1 = a^{m+n+1}$$

پس، (آ) به ازای هر n و هر m برقرار است. اثبات احکام دیگر به همین ترتیب خواهد بود.□

۴.۱۳.۲.۳ تعریف: A زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی است. مجموعهٔ مرتب $(A , <)$ را **خوشترتیب** می‌نامیم اگر هر زیرمجموعهٔ غیر تهی آن ابتدا (مینیمم) داشته باشد.

بدیهی است که $\Re , \Re^+ \cup \{0\}$ خوشترتیب نیستند، ولی مثلاً مجموعهٔ $\{1 , 0 , 2 , 3\}$ خوشترتیب است. همچنین با توجه به تعریف بالا نتیجه می‌شود که اگر A خوشترتیب باشد هر زیرمجموعهٔ آن نیز خوشترتیب است. خوشترتیبی مجموعهٔ N از خواص مهم آن است که به بیان و اثبات آن می‌پردازیم.

۵.۱۳.۲.۳ قضیه: N بر حسب نسبت $<$ خوشترتیب است.

برهان: فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای غیر تهی از N باشد و

$$B = \{ k \mid \forall x \in A (k \leq x) , k \in N\} .$$

بدیهی است که $1 \in B$ و $B \subset N$ (زیرمجموعهٔ سره) و اگر x عضو دلخواهی از A باشد آنگاه $x + 1 \notin B$.

می‌گوئیم B عضوی دارد که تالی آن در B نیست، زیرا اگر چنین نباشد با توجه به شرط $1 \in B$ لازم می‌آید $B = N$ (اصل استقرا) که با شرط $B \subset N$ متناقض خواهد بود. پس عضوی مانند m از B وجود دارد که $m + 1 \notin B$. نشان می‌دهیم m ابتدای (مینیمم) A است. از اینکه $m \in B$ پس m از هر عضو A نابیشتر است. همچنین $m \in A$ ، زیرا اگر

$m \notin A$ آنگاه به ازای هر $x \in A$ لازم است $m \leq x$ و چون $m \notin A$ پس لازم است $m < x$، یعنی $m + 1 \leq x$. از اینکه $x \in A$ دلخواه بود، بر اساس تعریف B لازم می‌آید $m + 1 \in B$. که یک تناقض است. بنابراین $m \in A$ و در نتیجه m ابتدای A است.□

از خاصیّت خوشترتیبی N در بیان و اثبات صورتهای دیگری از اصل استقرا استفاده شده و این صور مختلف از اصل استقرا ابزارهای توانایی در اثبات احکام اکثر شاخه‌های ریاضیات محسوب می‌شوند.

۶.۱۳.۲.۳ قضیه (استقرا با ابتدای m): m عدد طبیعی مفروضی است و F خاصیتی در اعداد طبیعی و واجد دو خاصیت زیر:

(آ): $F(m)$،

(ب): به ازای هر n اگر $n \geq m$ و $F(n)$ آنگاه $F(n+1)$،

در این صورت، هر عدد طبیعی ناکمتر از m خاصیت F دارد.

برهان: فرض کنیم $B = \{ k \in N \mid k \geq m \}$ و برخی از اعضای B خاصیت F نداشته باشند (برهان خلف). اگر A زیرمجموعه‌ای از B باشد که هر عضو آن فاقد خاصیت F است، در این صورت A دارای ابتدا خواهد بود (زیرا B خوشترتیب و هر زیرمجموعهٔ آن نیز خوشترتیب است.) اگر t ابتدای A باشد بنابر (آ)، $t \neq m$ و بر اساس تعریف B، $t > m$ یعنی $t > 1$. بنابراین $n = t - 1$ یک عدد طبیعی است. از $m < t = n + 1$ نتیجه می‌شود $m \leq n < t$. t ابتدای A است، پس $t - 1$ خاصیت F دارد، یعنی $F(n)$. و بر اساس فرض (ب)، $F(n + 1)$، یعنی t خاصیت F دارد که یک تناقض است. پس هر عضو B خاصیت F دارد.□

۷.۱۳.۲.۳ قضیه (استقرا با دو مقدمه): F خاصیتی در N و واجد دو شرط زیر است:

(آ): $F(1)$ و $F(2)$،

(ب): به ازای هر $n \in N$ $(n \geq 2)$ اگر، $F(n)$ و $F(n - 1)$ آنگاه $F(n + 1)$، در

این صورت، هر عدد طبیعی خاصیت F دارد.

برهان: گزاره نمای $F(n) \& F(n-1)$ $(n \geq 2)$ را به $G(n)$ نشان می‌دهیم.

و ثابت می‌کنیم که هر عدد طبیعی ناکمتر از 2 خاصیت G دارد.

بنابر (آ)، $G(2)$ برقرار است. حال اگر $G(n)$، یعنی $F(n) \& F(n-1)$ آنگاه بر اساس (ب)، $F(n+1)$. پس $F(n+1) \& F(n)$ برقرار است. پس $G(n+1)$ برقرار خواهد بود.

اکنون اگر $n = 1$ بنابر (آ) $F(1)$ برقرار است و اگر $n \geq 2$، $F(n)$ بر اساس برهان بالا برقرار خواهد بود.□

۸.۱۳.۲.۳ قضیه (استقرای قوی): m عدد طبیعی مفروضی و F خاصیتی در N و واجد دو شرایط زیر است:

(آ): $F(m)$،

(ب): به ازای هر عدد طبیعی n که $m \leq n$ و به ازای هر k که $m \leq k \leq n$، اگر $F(k)$ آنگاه، $F(n+1)$.

در این صورت هر عدد طبیعی ناکمتر از m خاصیت F دارد.

برهان: مشابه روش قضیهٔ قبل عمل می‌کنیم. اگر $G(n)$ $(n \geq m)$ گزاره‌نمای

$$F(m) \& F(m+1) \& \ldots \& F(n)$$

باشد آنگاه بر اساس (آ) $G(m)$ برقرار است و اگر $G(n)$ برقرار باشد آنگاه $F(n+1)$ بر اساس (ب) برقرار خواهد بود. پس $G(n+1)$ برقرار است. و اگر n عدد طبیعی دلخواهی ناکمتر از m باشد آنگاه $F(n)$ برقرار خواهد بود.□

مثال: نشان دهید هر زیرمجموعهٔ غیرتهی و متناهی از $\mathfrak{R}$ ابتدا و انتها دارد (مینیمم و ماکسیمم.)

جواب: اگر A مجموعه‌ای با n عضو باشد به استقرا روی n عمل می‌کنیم. برهان وجود ابتدا را مـی‌آوریم و برهان وجود انتها را به عنوان تمرین باقی مـی‌گذاریم. اگر

$1 = n$ یا $2 = n$ آنگاه A ابتدا دارد. فرض کنیم حکم به ازای مجموعه‌ای از اعداد که دارای n عضو باشد برقرار است و A مجموعه‌ای با $n + 1$ عضو است. عضوی مانند $a \in A$ را اختیار کرده و ملاحظه می‌شود که $A - \{a\}$ دارای n عضو است. بر اساس فرض استقرا $A - \{a\}$ دارای ابتدائی مانند b است. اکنون مجموعهٔ $\{a, b\}$ دارای ابتدا است اگر $c = \min\{a, b\}$ آنگاه $c \in A$ و c از هر عضو A نابیشتر است. پس c ابتدای A است.

مثال: نشان‌دهید به ازای هر عددطبیعی n عدد $m = \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$ عددی‌طبیعی است.

جواب: به استقرا روی n عمل می‌کنیم. $F(m)$ به معنی «m عدد طبیعی است» در نظر گرفته می‌شود. $F(1)$ برقرار است، زیرا $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$. فرض کنیم $F(n)$ برقرار و $\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$ عدد طبیعی باشد. در این صورت،

$$\frac{(n+1)^3}{6} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{(n+1)}{3} = \frac{n^3 + 6n^2 + 11n + 6}{6}$$

$$= \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} + \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$$

$$= \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} + \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$$

$$= \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3} + (n + 1)(n + 2)/2 \quad (*)$$

جملهٔ اول در طرف راست بنا بر فرض استقرا، عددی طبیعی است و کافی است نشان دهیم که $(n + 1)(n + 2)/2$ نیز عدد طبیعی است.

فرض کنیم $H(n)$ بمعنی «$(n + 1)(n + 2)/2$ عدد طبیعی است» باشد. $H(1)$ برقرار است و اگر $H(n)$ برقرار باشد آنگاه

$$\frac{(n + 2)(n + 3)}{2} = \frac{n^2 + 5n + 6}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2} + (n + 2)$$

پس $H(n + 1)$ برقرار است.

و با توجه به (*)، $\frac{(n+1)^3}{6} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{(n+1)}{3}$ عددی طبیعی است.

مثال: به ازای هر عدد حقیقی a $(a \geq 2)$ نشان دهید $a^n > n$ همواره برقرار است.

جواب: اگر $n = 1$، $a \geq 2 > 1$ پس $a > 1$. فرض کنیم $a^n > n$ و لذا،

$$a^{n+1} = a^n.a > n.a \geq 2n = n + n \geq n + 1 .$$

مثال: ثابت کنید Nای موجود است که به ازای هر $n \geq N$، $n^3 < 3^n$.

جواب: اگر چه رابطهٔ بالا به ازای $n = 1$ و $n = 2$ برقرار است ولی به ازای $n = 3$ برقرار نیست. به ازای $n = 4$ نیز نامساوی برقرار است. حال فرض کنیم به ازای هر عدد طبیعی ناکمتر از 4 نامساوی برقرار باشد و برقراری آن را به ازای $n + 1$ ثابت می‌کنیم:

$$(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

$$< n^3 + 3n^2 + 3n^2 + n^2 = n^3 + 7n^2 < n^3 + 8n^2$$

از اینکه $n \leq 4$ پس،

$$(n + 1)^3 < n^3 + 2.n.n^2 = 3n^3 < 3.3^n = 3^{n+1}$$

مثال: اگر $n \geq 2$ و $m \geq 3$ آنگاه $mn > m + n$.

جواب: فرض کنیم $m \geq 3$ عدد طبیعی مفروض و ثابتی باشد. اگر $n = 2$ آنگاه

$$mn = 2m = m + m \geq m + 3 > m + 2$$

و اگر $mn > m + n$ به ازای عدد طبیعی $n(n \geq 2)$ برقرار باشد آنگاه

$$m(n + 1) = mn + m > m + n + m \geq m + n + 3 > m + n + 1 .$$

مثال: نشان دهید هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱۵ را می‌توان به صورت $3k + 5l$ نوشت (k و l اعداد طبیعی‌اند.)

جواب: اولاً حکم به ازای $n = 16$ برقرار است. زیرا،

$$16 = 3 \times 2 + 5 \times 2$$

و اگر $n \geq 16$ و k و lای یافت شود که $n = 3k + 5l$ آنگاه

$$n + 1 = 3k + 5l + 1$$

$$= 3k + 5l + 6 - 5$$

$$= 3(k + 2) + 5(l - 1)$$

و با توجه به شرط $n \geq 16$ لازم است $l \gneq 2$. پس $l - 1$ عددی است طبیعی.

مثال: تابع $f: N \to N$ چنین تعریف می شود:

$$f(1) = 1 , f(2) = 2 , f(n) = 4f(n - 1) - 4f(n - 2) , n \geq 3 .$$

نشان دهید به ازای هر $n \geq 2$، $f(n) = 2^n$.

جواب: به ازای $n = 2$ حکم برقرار است. اگر $f(n) = 2^n$ ، $f(n - 1) = 2^{n-1}$ آنگاه

$$f(n + 1) = 4f(n) - 4f(n - 1)$$
$$= 4 \times 2^n - 4 \times 2^{n-1} = 2^{n+2} - 2^{n+1}$$
$$= 2^{n+1} \ (2 - 1) = 2^{n+1} .$$

پس، به ازای هر عدد طبیعی ناکمتر از 2 مانند m، $f(m) = 2^m$.

مثال: تابع $f: N \to N$ چنین تعریف می شود:

$$f(1) = 0 , \ f(2) = 1 , \ f(n) = 2f(n - 1) - f(n - 2) , \ n \geq 3 .$$

نشان دهید به ازای هر $n \geq 1$ ، $f(n) = n - 1$.

جواب: مجموعهٔ $A = \{n \in N \mid f(n) = n - 1\}$ را در نظر می گیریم. بدیهی است که $1 \in A$. فرض کنیم n عدد طبیعی مفروضی است. قضیهٔ استقرای قوی را به کار می بریم. همچنین فرض کنیم به‌ازای هر t $(1 \leq t \leq n)$ ، $t \in A$. پس $f(n - 1) = n - 2$ و $f(n) = n - 1$ و لذا، $f(n + 1) = 2(n - 1) - (n - 2) = n$ به عبارت دیگر $n + 1 \in A$. پس $A = N$.

۹.۱۳.۲.۳ تعریف: مجموعهٔ اعداد صحیح که به علامت Z نشان داده می شود عبارت است از:

$$Z = N \cup \{-n \mid n \in N\} \cup \{0\} .$$

زیرمجموعه های خاصّ Z عبارتند از Z^+ (اعداد صحیح مثبت)، Z^- (اعداد صحیح منفی) و Z_m (مجموعهٔ اعداد صحیح ناکمتر از عدد صحیح m).

مهمترین قاعده محاسبه با اعداد صحیح توان رسانی اعداد حقیقی به عدد صحیح

است. در این رابطه تعریف و قضایای زیر را داریم.

۱۰.۱۳.۲.۳ تعریف: اگر a عدد حقیقی و ناصفری باشد، به ازای عدد صحیح n توان nام عدد a که به علامت a^n نشان داده می شود عبارت است از:

(آ) : اگر $0 < n$ آنگاه a^n به استقرا و براساس ۲.۱۳.۲.۳ تعریف می شود؛

(ب) : اگر $0 = n$ آنگاه $a^n = 1$؛

(پ) : اگر $0 > n$ آنگاه $a^n = 1/a^{-n}$.

توجه کنید که در تعریف توان نامنفی یک عدد حقیقی شرط $a \neq 0$ ضروزی است.

۱۱.۱۳.۲.۳ قضیّه: به ازای اعداد صحیح m و n و اعداد حقیقی و ناصفر a و b همواره،

(آ) : $a^m . a^n = a^{m+n}$؛

(ب) : $a^m / a^n = a^{m-n}$؛

(پ) : $(a^m)^n = a^{mn}$؛

(ت) : $a^m . b^m = (ab)^m$؛

(ث) : $a^m / b^m = (a/b)^m$؛

(ج) : $1^m = 1$؛

برهان: برهان همهٔ قسمتها با تمیز دادن حالات مختلف برای اعداد صحیح و با توجه به تعریفهای ۲.۱۳.۲.۳ و ۱۰.۱۳.۲.۳ امکان پذیر است. مثلاً (پ) را ثابت می کنیم و برهان بقیهٔ احکام به خواننده محول می شود.

اگر $m = n = 0$ آنگاه $(a^m)^n = (a^0)^0 = 1^0 = 1$ و $a^{mn} = a^0 = 1$.

اگر $m,n > 0$ آنگاه حکم براساس ۳.۱۳.۲.۳ (قسمت (پ)) برقرار است.

اگر $m,n < 0$ آنگاه $-m > 0$ و $-n > 0$ و لذا،

$$(a^{-m})^{-n} = a^{(-m)(-n)} = a^{mn}$$

و براساس تعریف ۱۰.۱۳.۲.۳،

$$(a^m)^n = (1/a^{-m})^n = 1/(1/(a^{-m})^{-n}) = (a^{-m})^{-n} = a^{mn}.$$

اگر یکی از m و n مثبت و دیگری منفی باشد، مثلاً فرض کنیم $m>0$ و $n<0$ آنگاه، $-n>0$ و خواهیم داشت $(a^m)^{-n} = a^{m(-n)}$. و براساس تعریف،

$$(a^m)^n = 1/(a^m)^{-n} = 1/(a^{-mn}) = a^{mn}.$$

در حالتی که $m<0$ و $n>0$، برهان مشابه است.□

در مورد نامساویهای شامل توانهای صحیح اعداد حقیقی نیز احکام زیر را داریم که توجه به شرایط هر یک از آنها لازم و ضروری است. برهان همهٔ آنها را در اینجا نخواهیم آورد زیرا براهین مشابه است و به استناد تعریفهای توان صحیح و توان طبیعی اعداد خواهند بود.

۱۲.۱۳.۲.۳ قضیه: a و b اعداد حقیقی و n عددی صحیح است. در این صورت،

(آ): اگر $a>1$، $(n > 0 \Leftrightarrow a^n > 1)$ و $(n < 0 \Leftrightarrow a^n < 1)$؛

(ب): اگر $0 < a < 1$، $(n < 0 \Leftrightarrow a^n > 1)$ و $(n > 0 \Leftrightarrow a^n < 1)$؛

(پ): اگر a و b مثبت بوده و $n>0$ آنگاه $a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$؛

(ت): اگر a و b مثبت بوده و $n<0$ آنگاه $a < b \Leftrightarrow a^n > b^n$؛

(ث): اگر a و b مثبت بوده و $n\neq 0$ آنگاه $a = b \Leftrightarrow a^n = b^n$؛

(ج): اگر $a > 1$ آنگاه $m < n \Leftrightarrow a^m < a^n$؛

(چ): اگر $0 < a < 1$ آنگاه $m < n \Leftrightarrow a^n < a^m$.

برهان (آ): اگر $n > 0$ رابطهٔ $a^n>1$ به استقرا ثابت شود و اگر $n < 0$ آنگاه $-n > 0$ و $a^{-n}>1$. بنابراین $a^n<1$. اکنون فرض کنیم $a^n>1$ ولی $n > 0$ برقرار نباشد پس، $n \leq 0$. اگر $n=0$ آنگاه $a^n=1$ که یک تناقض است و اگر $n<0$ براساس برهان بالا، $a^n < 1$ که باز هم یک تناقض خواهد بود یعنی فرض خلف باطل است و از $a^n>1$ رابطهٔ $n>0$ نتیجه می‌شود.

به همین ترتیب اگر $a^n<1$ آنگاه رابطهٔ $n<0$ به برهان خلف ثابت می شود.

(ب): اگر $0<a<1$ آنگاه $1/a>1$ و حکم (آ) را به‌کار می بریم.

(پ): از اینکه a و b مثبت هستند پس اگر $a<b$ آنگاه $b/a>1$ و براساس (آ) $(b/a)^n>1$ (زیرا n مثبت است) که با استفاده از تعریف ۱۱.۱۳.۲.۳، $b^n>a^n$ نتیجه می‌شود.

بالعکس، از $b^n>a^n$ رابطهٔ $b^n/a^n>1$ و یا $(b/a)^n > 1$ نتیجه می شود و با توجه به حکم (آ) $b/a>1$ را به دست می آوریم که خود معادل است با $b > a$. برهان قسمتهای دیگر به همین ترتیب خواهد بود.□

پس از بررسی خواص اعداد صحیح در توان رسانی آنها به بررسی خواص نسبت $<$ (کوچکتری) می پردازیم. قضیهٔ ۵.۱۳.۲.۳ را یادآوری می کنیم که «مجموعهٔ N خوشترتیب است». بدیهی است که Z ابتدا (مینیمم) ندارد، ولی برخی از زیر مجموعه های آن ابتدا و یا انتها دارند. در این مورد به قضیهٔ زیر توجه کنید.

۱۳.۱۳.۲.۳ قضیه: A زیرمجموعه‌ای غیرتهی از اعداد صحیح است. در این صورت،

(آ): اگر همهٔ اعضای A از عدد صحیح معینی نابیشتر باشند، A انتها (ماکسیمم) دارد.

(ب): اگر همهٔ اعضای A از عدد صحیح معینی ناکمتر باشند، A ابتدا (مینیمم) دارد.

برهان (آ): فرض کنیم هر عضو A از عدد صحیح معین k نابیشتر باشد. اگر A حداقّل یک عضو مثبت داشته باشد آنگاه $A \cap N$ غیرتهی است و هر عضو $A \cap N$ از k نابیشتر است و بنابر خاصیت خوشترتیبی اعداد طبیعی، $A \cap N$ دارای انتها خواهد بود و انتهای آن انتهای A است.

اگر A عضو مثبت نداشته باشد ولی $0 \in A$ آنگاه $k = 0$ و بالبداهه، 0 انتهای A خواهد بود.

و بالاخره اگر همهٔ اعضای A منفی باشند آنگاه $B = \{x \mid -x \in A\}$ دارای ابتدا خواهد بود (خوشترتیبی اعداد طبیعی.) فرض کنیم m ابتدای B باشد. بدیهی است که $-m \in A$. می‌گوئیم $-m$ انتهای A است، زیرا اگر $y \in A$ عضو دلخواهی باشد،

$-y \in B$ و $-y \geq m$ پس، $y \leq -m$.

برهان قسمت (ب) با استفاده از مجموعهٔ متشکل از اعضای متقابل A و با استفاده از حکم (آ) به‌دست می‌آید. □

در مورد اصل استقرا که در اعداد طبیعی بیان و ثابت شد ملاحظه کردیم که ابتدای استقرا عددی طبیعی است. این اصل می‌تواند در اعداد صحیح و با ابتدای عددی صحیح بیان شود. به عبارت دیگر فرض کنیم m یک عدد صحیح و F خاصیّتی تابع دو شرط زیر باشد:

(آ): $F(m)$،

(ب): به ازای هر عدد صحیح n $(m \leq n)$ اگر $F(n)$ آنگاه $F(n+1)$.

در این صورت هر عدد صحیح ناکمتر از m خاصیّت F دارد.

از برهان آن در اعداد صحیح صرفنظر می‌کنیم و یادآور می‌شویم که به روال معمول در برهانهای مربوط به اعداد صحیح، سه حالت برای m تشخیص داده و برهان را به استقرا در اعداد صحیح برمی‌گردانیم.

آخرین مطلب مورد بحث در اعداد صحیح قضیهٔ تقسیم اعداد صحیح است. در اینجا، اگر m و n دو عدد صحیح باشند و عددی مانند k یافت شود که $m = kn$ آنگاه می‌گوئیم n عدد m را عاد می‌کند و علامت $n \mid m$ را به‌کار می‌بریم.

۱۴.۱۳.۲.۳ قضیهٔ (تقسیم اقلیدسی): اگر m و n اعداد صحیح باشند و $m \neq 0$ آنگاه اعداد صحیح منحصر بفردی مانند q و r یافت می‌شوند که

$$n = mq + r \quad , \quad 0 \leq r < |m| .$$

برهان: از اصل خوشترتیبی اعداد طبیعی استفاده می‌کنیم. مجموعهٔ S را چنین تعریف

می‌کنیم:

$$S = \{n\text{-}mx \mid x \in Z\}\ .$$

S شامل اعضای نامنفی خواهد بود (مثال صفحهٔ ۱۱۹) پس دارای عضو اقّل نامنفی مانند $n - qm$ است. قرار می‌دهیم $r = n - qm$. براساس مثال مذکور $q = -|n|\ \mathrm{Sgn}\ m$ پس $r - |m| < r$ و $r - |m| = n - mq - |m| = n - m(q + \mathrm{Sgn}\ m) \in S$ و چون r کوچکترین عضو مثبت است پس $r - |m| < 0$ و یا $r < |m|$.

برای اثبات یکتائی q و r فرض کنیم

$$n = mq_1 + r_1 = mq_2 + r_2$$

که در آن $0 \le r_1 < |m|$، $0 \le r_2 < |m|$. اگر $q_1 \neq q_2$، آنگاه $|m(q_1 - q_2)| > |m|$. ولی $|m(q_1 - q_2)| = |r_1 - r_2| < |m|$. که یک تناقض است. پس، $q_1 = q_2$ و از آنجا $r_1 = r_2$ حاصل می‌شود.□

مفاهیم بزرگترین مقسوم علیه مشترک اعداد صحیح و کوچکترین مضرب مشترک اعداد صحیح و سایر خواص ناشی از قضیهٔ فوق را در درس نظریهٔ اعداد ملاحظه خواهید کرد که البته نمی‌تواند موضوع بحث ما در این کتاب قرار گیرد. بحث مربوط به اعداد صحیح را با ذکر مثالی به پایان می‌بریم. البته پس از تعریف و بررسی اعداد گویا و تعریف دنبالهٔ اعداد حقیقی کاربرد دیگری از اعداد صحیح در تعمیم جمع و ضرب را ملاحظه خواهیم کرد.

مثال: نشان دهید مربع هر عدد صحیح به صورت 4k یا 4k+1 است.

جواب: اگر n عدد صحیح دلخواهی باشد از تقسیم آن بر عدد صحیح m=2 نتیجه می‌شود که $n = 2q+r$ که $0 \le r<1$ پس، $n = 2q$ یا $n = 2q+1$. n^2 را محاسبه

می‌کنیم:

$n^2 = (2q)^2 = 4q^2 = 4k$ یا $n^2 = (2q+1)^2 = 4q^2 + 4q+1 = 4k' + 1$.

۱۴.۲.۳ اعداد گویا و اصمّ: عددی را گویا می‌نامیم اگر مساوی خارج قسمت یک عدد صحیح بر یک عدد طبیعی باشد. مجموعهٔ اعداد گویا را به Q نشان می‌دهیم. بدین ترتیب هر عدد صحیح یک عدد گویا خواهد بود (مخرج کسر مساوی 1 است.) مجموعهٔ اعداد گویا نسبت به عمل جمع، تفریق و ضرب بسته است و اگر a و b دو عدد گویا باشند و $b \neq 0$ آنگاه a/b نیز عددی گویا است.

به طوری که قبلاً ملاحظه کردیم نصف مجموع دو عدد حقیقی بین آن دو عدد قرار دارد پس نصف مجموع دو عدد گویا عددی است گویا و در بین آنها قرار دارد. این خاصیّت را با کمی تعمیم و با عنوان زیر تعریف می‌کنیم:

۱.۱۴.۲.۳ تعریف: مجموعهٔ A متشکل از اعداد حقیقی را ***چگال*** می‌نامیم اگر بین هر دو عضو متمایز A عضوی از A موجود باشد.

با تعریف فوق در می‌یابیم که N و Z چگال نیستند ولی Q چگال است.

عددی حقیقی مانند a را اصمّ می نامیم اگر گویا نباشد. آیا عدد اصمّ وجود دارد؟

این سؤال و نیز خواص محاسباتی اعداد گویا و اعداد اصمّ را در دو بخش آینده و پس از بیان خواصّ ناشی از اصل موضوع تمامیّت به‌طور کامل بررسی خواهیم کرد.

۱۵.۲.۳ تعمیم اعمال جمع و ضرب $(\sum , \prod)$: در مجموعهٔ N توابعی تعریف می‌شوند و به طوری که قبلاً نیز به آن اشاره کردیم در تابع $f: N \to \Re$ به‌جای $f(n)$ علامت f_n را می‌توان به‌کار برد. برای سهولت این توابع را به علامت $\{f_n\}_{n\in N}$ نشان می‌دهیم و آن را یک دنباله می‌نامیم. اگر دامنهٔ تعریف تابع f را Z_m در نظر بگیریم نمایش $\{f_n\}_{n\in Z_m}$ و یا $\{f_n\}_{n=m}$ به‌کار برده خواهد شد. مقدار تابع به‌ازای هر n را جملهٔ nام دنباله می‌نامیم. ضابطهٔ تعریف دنباله را جملهٔ عمومی می‌نامیم. دنباله‌ها می‌توانند با

روابط تراجعی تعریف شوند. در این صورت بیان جملهٔ عمومی برحسب n ممکن است مقدور نباشد.

مثال: جملات هر یک از دنباله‌ها را مشخص کنید.

(آ): $\{1 + \operatorname{Sgn} m\}_{m=-3}^{2}$؛

(ب): $\{\frac{1}{n}\}_{n=2}^{7}$.

جواب: قرار می‌دهیم $f_m = 1 + \operatorname{Sgn} m$ و $g_n = \frac{1}{n}$. بنابراین،

$$\{f_m\}_{-3}^{2} = \{0, 0, 0, 1, 2, 2\},$$

$$\{g_n\}_{2}^{7} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}\}.$$

مثال: دنبالهٔ $\{f_n\}_{n=1}$ با روابط زیر تعریف می‌شود:

$$f_1 = f_2 = 1 \quad , \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad , \quad n \geq 3$$

($\{f_n\}$ دنبالهٔ فیبوناتچی نامیده می‌شود.) به استقرا ثابت کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی k، f_{3k} عدد طبیعی زوج است.

جواب: به استقرا روی k عمل می‌کنیم. اگر $k = 1$ آنگاه $f_3 = 2$. فرض کنیم f_{3k} زوج باشد و ثابت می‌کنیم که $f_{3(k+1)}$ نیز زوج است. داریم:

$$\begin{aligned} f_{3(k+1)} &= f_{3k+3} = f_{3k+2} + f_{3k+1} \\ &= f_{3k+1} + f_{3k} + f_{3k+1} \\ &= f_{3k} + 2f_{3k+1}. \end{aligned}$$

پس $f_{3(k+1)}$ زوج است. بنابراین، همواره f_{3k} زوج است.

مثال: $\{a_n\}_0$ با رابطهٔ تراجعی $a_{n+1} = a_n + 2 \, , \, n \geq 0$ و $a_0 = 0$ تعریف می‌شود. جمله nام دنباله را محاسبه کنید (a_n را بر حسب n بدست آورید.)

جواب: چند جمله را محاسبه می‌کنیم

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 2 + 2 = 4$$

$$a_3 = 4 + 2 = 6$$

$$a_4 = 6 + 2 = 8 \, .$$

و حدس می‌زنیم که $a_n = 2n$ ، $n \geq 1$. این حدس را به استقرا ثابت می‌کنیم. به ازای $n = 1$ حکم برقرار است و اگر $a_n = 2n$ آنگاه

$$a_{n+1} = a_n + 2 = 2n + 2 = 2(n + 1) \, .$$

با توجه به توضیحات بالا و آشنائی با دنبالهٔ از اعداد می‌خواهیم حاصلجمع و حاصلضرب تعداد متناهی از اعضای یک دنباله را به‌زبان ریاضی بیان و تعریف کنیم.

علامت Σ (سیگما) و علام $\prod$ (پی) را به ترتیب برای حاصلجمع و حاصلضرب تعداد متناهی از اعضای یک دنباله به کار می‌بریم. فرض کنیم $\{a_i\}_{i=m}^n$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد که m و n اعداد صحیح و $n \geq m$ است.

۱.۱۵.۲.۳ تعریف: اگر $n \geq m$ ، $\sum_{i=m}^{n} a_i$ به استقرا چنین تعریف می‌شود:

$$\sum_{i=m}^{m} a_i = a_m \quad , \quad \sum_{i=m}^{n+1} a_i = (\sum_{i=m}^{n} a_i) + a_{n+1} \, .$$

$\sum_{i=m}^{n} a_i$ به صورت $a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$ نیز نوشته می‌شود.

۲.۱۵.۲.۳ تعریف: اگر $n \geq m$، $\prod_{i=m}^{n} a_i$ به استقرا چنین تعریف می‌شود:

$$\prod_{i=m}^{m} a_i = a_m \quad , \quad \prod_{i=m}^{n+1} a_i = (\prod_{i=m}^{n} a_i) + a_{n+1} \; .$$

$\prod_{i=m}^{n} a_i$ به صورت $a_m a_{m+1} \ldots a_n$ نیز نوشته می‌شود.

مثال: مطلوب است محاسبهٔ $\prod_{i=1}^{5} \frac{i}{i+1}$ و $\sum_{i=1}^{5} \frac{i}{i+1}$.

جواب: به‌ترتیب خواهیم داشت:

$$\prod_{i=1}^{5} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6} ,$$

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} = \frac{71}{20} .$$

مثال: k عددی است طبیعی و ثابت. حاصلجمع $\sum_{i=-3}^{1} a_i^k$ را محاسبه کنید.

جواب: اندیس i مربوط به سیگما را نباید با حروف ثابت خلط کرد. در این حاصلجمع k مستقل از اندیس i و ثابت است و حاصل سیگما برابر است با:

$$a_{-3}^k + a_{-2}^k + a_{-1}^k + a_0^k + a_1^k .$$

مثال: مطلوب است محاسبهٔ $\sum_{k=1}^{3} a_i^k$.

جواب: در این حاصلجمع برخلاف مثال بالا سیگما با k تغییر می‌کند و i عددی است

ثابت و حاصل آن $a_i^1 + a_i^2 + a_i^3$ خواهد بود.

مثال: اگر $\{a_k\}_m^n$ $(n \geq m)$ دنبالهٔ مفروضی باشد نشان دهید $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m}^{n} a_j$.

به‌عبارت‌دیگر سیگما مستقل‌از اندیس‌است. به‌همین‌ترتیب، نشان‌دهید $\prod_{j=m}^{n} a_j = \prod_{i=m}^{n} a_i$.

جواب: به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. اگر $m = n$ آنگاه

$$\sum_{i=m}^{m} a_i = a_m \quad , \quad \sum_{j=m}^{m} a_j = a_m$$

که برقراری حکم به ازای $m = n$ را نشان می‌دهد. سپس با استفاده از فرض استقرا خواهیم داشت:

$$\sum_{i=m}^{n+1} a_i = \left(\sum_{i=m}^{n} a_i\right) + a_{n+1}$$

$$= \left(\sum_{j=m}^{n} a_j\right) + a_{n+1}$$

$$= \sum_{j=m}^{n+1} a_j \, .$$

تساوی دیگر برای $\prod$ به‌طور مشابه ثابت می‌شود.

مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} x/|x| & , x \neq 0 \\ 2 & , x = 0 \end{cases}$ مطلوب است محاسبهٔ

$$\sum_{i=-4}^{5} [f(i) + f(i+1)] \, .$$

جواب: مقادیر $f(i) + f(i+1)$ را به‌ترتیب به‌ازای $i = -4$، $i = -3$، ... و $i = 5$

محاسبه می‌کنیم. می‌دانیم که اگر $x<0$، $f(x) = -1$ و اگر $x>0$ آنگاه $f(x) = 1$، پس:

$$\sum_{i=-4}^{5}[f(i) + f(i+1)] = (-1-1) + (-1-1) + (-1-1) + (-1+2) +$$

$$(2+1) + (1+1) + (1+1) + (1+1) + (1+1) + 1 + 1) = 8 .$$

مثال: هر یک از عبارات زیر را به‌صورت Σ یا $\prod$ بنویسید:

(آ): $(3 + a_1)(4 + a_2) \dots (14 + a_{12})$؛

(ب): $(-2 + b_1)(-2 + b_2) \dots (-2 + b_{100})$؛

(پ): $(2 + a_1)(2 - a_2)(2 + a_3) \dots (2 - a_{98})$؛

(ت): $|a_1| - 2 \times |a_2| + 3 \times |a_3| - \dots - 20 \times |a_{20}|$؛

(ث): $\frac{2}{1\times 3} + \frac{3}{2\times 4} + \frac{4}{3\times 5} + \dots + \frac{18}{17\times 19}$؛

(ج): $1^4 + 2^5 + 3^6 + \dots + 97^{100}$؛

(چ): $3 - 6^2 + 9^3 - \dots + 27^9$.

جواب: عبارات ساده شده به ترتیب چنین خواهند شد:

$$\prod_{i=1}^{12}(i + 2 + a_i) ,$$

$$\prod_{i=1}^{100}(-2 + b_i) ,$$

$$\prod_{i=1}^{98}\left(2+(-1)^{i-1}a_i\right),$$

$$\sum_{i=1}^{20} i(-1)^{i-1}a_i\ ,$$

$$\sum_{i=1}^{17}\frac{i+1}{i\times(i+2)}\ ,$$

$$\sum_{k=1}^{97} k^{k+3}\ ,$$

$$\sum_{k=1}^{9}(-1)^{k-1}(3k)^{k}\ .$$

دنباله ثابت به دنباله‌ای گفته می‌شود که هر یک از جملات آن مساوی مقدار ثابت معینی باشد، مثلاً $\{2\}_{i=1}^{5}$ به معنی 2,2,2,2,2 خواهد بود. می‌توان از علائم Σ و $\prod$ در تعریف چنین دنباله‌هائی نتایج ساده‌ای را در تعریف توان طبیعی و مضرب طبیعی اعداد حقیقی به‌دست آورد، در واقع به‌ازای هر عدد حقیقی a و هر عدد طبیعی n داریم:

$$\prod_{i=1}^{n} a = a^{n}\quad ,\quad \sum_{i=1}^{n} a = na\ .$$

۳.۱۵.۲.۳ قواعد محاسبه با $\prod$ و Σ: در این قسمت چند قضیهٔ محاسباتی را بیان و ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ اوّل:

(آ): به‌ازای هر عدد حقیقی و ثابت c، $\sum_{i=m}^{n} ca_i = c\sum_{i=m}^{n} a_i$ و $\prod_{i=m}^{n} ca_i = c^{n-m+1}\prod_{i=m}^{n} a_i$؛

(ب)۶ به ازای هر سه عدد صحیح m، n و k اگر $m \leq k < n$ آنگاه

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i \;;$$

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = \left(\prod_{i=m}^{k} a_i\right) . \left(\prod_{i=k+1}^{n} a_i\right) \;;$$

(پ): به ازای هر دو عدد صحیح m و n اگر $m < n$ آنگاه

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + \sum_{i=m+1}^{n} a_i \quad \text{و} \quad \prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \prod_{i=m+1}^{n} a_i \,.$$

برهان: (آ) به استقرا روی n نتیجه می‌شود و بدیهی است. برای (ب) دنبالهٔ اعداد $a_m , \dots , a_k , a_{k+1} , \dots , a_n$ را به دو دنباله افراز می‌کنیم و حکم هر دو قسمت به دست می‌آید:

$$a_m + a_{m+1} +\dots+ a_k + a_{k+1} +\dots+ a_n = (a_m +\dots+ a_k)+(a_{k+1} +\dots+ a_n)$$

$$a_m.a_{m+1} \dots a_k.a_{k+1} \dots a_n = (a_m.a_{m+1} \dots a_k).(a_{k+1} \dots a_n) \,.$$

ولی این عملیات یک برهان ریاضی نیست بلکه رهنمودی برای آن است. و باید روابط را به استقرا ثابت کنیم.

از $m<n$ نتیجه می‌شود $m + 1 \leq n$. به استقرا روی n و با ابتدای $n = m + 1$ شروع می‌کنیم. در این حالت حکم چنین می‌شود:

$$\sum_{i=m}^{m+1} a_i = \sum_{i=m}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{m+1} a_i = a_m + a_{m+1} .$$

و مشابه آن برای $\prod$ نیز برقرار است.

حال فرض کنیم حکم به ازای هر n که $n \geq m+1$ و هر k که $m \leq k < n$ برقرار باشد. پس اگر k عدد صحیحی باشد که $m \leq k < n+1$ آنگاه اگر $k < n$ داریم:

$$\sum_{i=m}^{n+1} a_i = \sum_{i=m}^{n} a_i = a_{n+1} \qquad (\text{تعریف } \Sigma)$$

$$= \left(\sum_{i=m}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i\right) + a_{n+1} \qquad (\text{فرض استقرا})$$

$$= \sum_{i=m}^{k} a_i + \left(\sum_{i=k+1}^{n} a_i + a_{n+1}\right)$$

$$= \sum_{i=m}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n+1} a_i .$$

و اگر $m \leq k < n+1$ و $k = n$ آنگاه:

$$\sum_{i=m}^{n+1} a_i = \sum_{i=m}^{n} a_i + a_{n+1}$$

$$= \sum_{i=m}^{k} a_i + a_{k+1}$$

$$= \sum_{i=m}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{k+1} a_i = \sum_{i=m}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n+1} a_i .$$

حکم مشابهی برای $\prod$ نیز درست است.

بالاخره در اثبات (پ) از شرط $m<n$ رابطهٔ $m+1\leq n$ نتیجه می‌شود و هر دو رابطه به استقرا روی n و ابتدا از $n=m+1$ به اثبات می‌رسد. برهان حکم را در مورد $\prod$ کامل می‌کنیم:

$$n = m + 1 \Rightarrow \prod_{i=m}^{m+1} a_i = (\prod_{i=m}^{m} a_i) \times a_{m+1} \qquad (\text{تعریف } \prod)$$

$$= a_m \times a_{m+1} = a_m \times \prod_{i=m+1}^{m+1} a_i$$

$$= a_m \times (\prod_{i=m+1}^{n} a_i) \; .$$

$$\prod_{i=m}^{n+1} a_i = (\prod_{i=m}^{n} a_m) \times a_{n+1}$$

$$= (a_m \times \prod_{i=m+1}^{n} a_i) \times a_{n+1} \; . \qquad (\text{فرض استقرا})$$

$$= a_m \times (\prod_{i=m+1}^{n} a_i \times a_{n+1})$$

$$= a_m \times \prod_{i=m+1}^{n+1} a_i$$

برهان حکم (پ) در مورد Σ به همین ترتیب است. □

قضیهٔ دوم (لغزاندن حدود): به ازای هر سه عدد صحیح m، n و k که $m \leq n$،

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m+k}^{n+k} a_{i-k} \text{ و } \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m-k}^{n-k} = a_{i+k} \ .$$

و روابط مشابه برای $\prod$ نیز برقرار است.

برهان: k عدد صحیح ثابتی است. اگر $n = m$،

$$\sum_{i=m+k}^{n+k} a_{i-k} = \sum_{i=m+k}^{m+k} a_{i-k} = a_{m+k-k} = a_m \ ,$$

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{m} a_i = a_m \ .$$

پس حکم‌به‌ازای $n = m$ برقرار است. اگر به‌ازای هر n که $n \geq m$ حکم‌برقرارباشد آنگاه

$$\sum_{i=m+k}^{n+1+k} a_{i-k} = \sum_{i=m+k}^{n+k} a_{i-k} + a_{n+k+1-k}$$

$$= \sum_{i=m}^{n} a_i + a_{n+1} = \sum_{i=m}^{n+1} a_i \ .$$

رابطهٔ $\sum_{i=m-k}^{n-k} a_{i+k} = \sum_{i=m}^{k} a_i$ نیز به همین ترتیب ثابت می‌شود. □

قضیّه سوم **(قواعد ادغام)**: به ازای هر m و n اگر $n \geq m$،

$$\sum_{i=m}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_m \ ,$$

$$\prod_{i=m}^{n} \frac{a_i + 1}{a_i} = \frac{a_{n+1}}{a_m} \ ، \ (a_i \neq 0) \ .$$

برهان: رابطهٔ دوم را ثابت می‌کنیم و رابطهٔ اول به طور مشابه به اثبات می‌رسد.

اگر $n=m$ آنگاه

$$\prod_{i=m}^{m}\frac{a_{i+1}}{a_i}=\frac{a_{m+1}}{a_m}=\frac{a_{n+1}}{a_m}.$$

و اگر حکم به‌ازای هر n $(n > m)$ برقرار باشد آنگاه

$$\prod_{i=m}^{n+1}\frac{a_{i+1}}{a_i}=\Big(\prod_{i=m}^{n}\frac{a_{i+1}}{a_i}\Big)\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} . \quad (\text{تعریف } \prod)$$

$$=\frac{a_{n+1}}{a_m}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$$

$$=\frac{a_{n+2}}{a_m} .\square$$

قضیّهٔ چهارم (تغییر ترتیب): اگر $\{a_i\}_m^n$ دنباله‌ای مفروض و دنبالهٔ $\{b_i\}_{-n}^{-m}$ با ضابطهٔ $b_i = a_{-i}$ تعریف شود $(-n \le i \le -m)$ آنگاه

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=-n}^{-m} b_i \quad \text{و} \quad \prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{i=-n}^{-m} b_i .$$

برهان: استقرا روی n و ابتدا از m است و اثبات آن را به خواننده محول می‌کنیم. □

قضیّهٔ پنجم: به ازای عدد حقیقی a و دنباله‌های مفروض $\{a_i\}_m^n$ و $\{b_i\}_m^n$ (با ذکر شرایط m و n) احکام زیر برقرارند:

(آ): $\sum_{i=m}^{n} a = (n - m + 1)a$ ، $(m \le n)$ ؛

(ب): $\prod_{i=m}^{n} a = a^{n-m+1}$ ، $(m \le n)$ ؛

(پ): $\sum_{i=m}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i \pm \sum_{i=m}^{n} b_i$ ، $(m \le n)$ ؛

(ت): $\prod_{i=m}^{n} (a_i b_i) = (\prod_{i=m}^{n} a_i)(\prod_{i=m}^{n} b_i)$ ، $(m \le n)$ ؛

(ث): $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{n} a_{n+m-i}$ ، $\prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{i=m}^{n} a_{n+m-i}$ ، $(m \le n)$.

برهان: اثبات به استقرا روی n است و به خواننده محول می‌شود.□

مثال: با استفاده از قواعد ۳.۱۵.۲.۳ ثابت کنید.

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{r=1}^{n} x^{n-r} y^{r-1} \quad , n \in N .$$

جواب: قرار می‌دهیم $t = (x - y) \sum_{r=1}^{n} x^{n-r} y^{r-1}$ و بر اساس قضیهٔ اول (از ۳.۱۵.۲.۳)

خواهیم داشت:

$$t = x \sum_{r=1}^{n} x^{n-1} y^{r-1} - y \sum_{r=1}^{n} x^{n-r} y^{r-1}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} x^{n+1-r} y^{r-1} - \sum_{r=1}^{n} x^{n-r} y^{r}$$

$$= (x^n + \sum_{r=2}^{n} x^{n+1-r} y^{r-1}) - (\sum_{r=1}^{n-1} x^{n-r} y^{r} + y^n) ,$$

و سپس از قضیه دوم استفاده می‌کنیم:

$$t= (x^n - y^n) + \sum_{r=2}^{n} x^{n+1-r} y^{r-1}) - \sum_{r=2}^{n-1+1} x^{n-r+1} y^{r-1},$$

و یا، $t = x^n - y^n$.

مثال: $S_1(n) = \sum_{i=1}^{n} i$ را به‌دست آورید و با استفاده از قواعد ۳.۱۵.۲.۳ هر یک از حاصلجمع‌های $S_2(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2$ و $S_3(n) = \sum_{i=1}^{n} i^3$ را محاسبه کنید.

جواب: حدس می‌زنیم که $S_1(n) = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$. این حدس را به استقرا ثابت می‌کنیم:

$$n = 1 \Rightarrow S_1(n) = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$S_1(n + 1) = \sum_{i=1}^{n+1} i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

پس، $S_1(n) = \frac{n(n + 1)}{2}$.

برای محاسبهٔ $S_2(n)$، از اتحاد $(i + 1)^3 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1$ استفاده می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^{n} [(i + 1)^3 - i^3] = \sum_{i=1}^{n} 3(i^2 + 3i + 1)$$

$$= 3S_2(n) + 3S_1(n) + \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= 3S_2(n) + \frac{3n(n + 1)}{2} + (n - 1+1)$$

$$= 3S_2(n) + \frac{3n(n+1) + 2n}{2n}$$

$$= 3S_2(n) + \frac{n(3n+5)}{2}$$

برای ساده کردن طرف چپ تساوی می‌توان از قضیهٔ سوم استفاده کرد:

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3S_2(n) + \frac{n(3n+5)}{2}$$

$$S_2(n) = \frac{1}{3}\left(n^3 + 3n_2 + 3n - \frac{n(3n+5)}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

بالاخره، برای محاسبهٔ $S_3(n)$ از اتحاد

$$(i+1)^4 - i^4 = 4i^3 + 6i^2 + 4i + 1$$

استفاده می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^{n}[(i+1)^4 - i^4] = 4\,S_3(n) + 6\,S_2(n) + 4S_1(n) + n$$

$$(n+1)^4 - 1 = 4S_3(n) + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n$$

$$S_3(n) = \frac{1}{4}\left(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - n(n+1)(2n+3) - n\right)$$

$$= \frac{1}{4}n(n^3 + 2n^2 + n).$$

مثال: هر یک از حاصلجمع‌های $A = \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+1)}$ و $B = \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+2)}$ را

محاسبه کنید.

جواب: با تجزیهٔ $\frac{1}{n(n+1)}$ به حاصلجمع کسرها از قضیهٔ ادغام استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$A = \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{m} [\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}] = -\sum_{n=1}^{m} [\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}]$$

$$= -(\frac{1}{m+1} - 1) = 1 - \frac{1}{m+1}.$$

در محاسبهٔ B نیز کسر $\frac{1}{n(n+2)}$ را به قرار زیر تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2})$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2})$$

$$B = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2})$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{m+1}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2})$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2}(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2}) = \frac{3m^2 + 5m + 4}{4(m+1)(m+2)}$$

مثال: تساوی $\frac{n}{3n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$ را ثابت کنید.

جواب:

$$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{A}{3k-2} + \frac{B}{3k+1}$$

$$= \frac{(3A+3B)k + A - 2B}{(3k-2)(3k+1)}$$

و از آنجا $\begin{cases} 3A + 3B = 0 \\ A - 2B = 1 \end{cases}$ نتیجه می‌شود. پس، $A = \frac{1}{3}$ و $B = \frac{-1}{3}$. یعنی،

$$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right).$$

که اگر قرار دهیم $a_k = \frac{1}{3k-2}$ آنگاه، $a_{k+1} = \frac{1}{3k+1}$ و خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1})$$

$$= \frac{1}{3}(a_1 - a_{n+1})$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3n+1}\right)$$

$$= \frac{3n+1-1}{3(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

مثال: اگر $a \neq 1$ عددی مفروض باشد با استفاده از قواعد ۲.۱۵.۲.۳ دستورهایی برای محاسبهٔ $A = \sum_{r=1}^{n} ra^{r-1}$ و $B = \sum_{r=1}^{n} r^2a^{r-1}$ به‌دست آورید.

جواب: ابتدا فرمولی برای محاسبهٔ حاصلجمع k جملهٔ اول تصاعد هندسی به‌دست می‌آوریم. تصاعد هندسی با قدر نسبت $q \neq 1$ و جملهٔ اول a به شکل دنبالهٔ نامتناهی

$$a, aq, aq^2, \ldots$$

است. اگر S_n مجموع n جملهٔ اول تصاعد در نظر گرفته شود آنگاه:

$$S_1 = a$$

$$S_2 = a + aq = a(1+q) = a\frac{q^2-1}{q-1}$$

$$S_3 = a + aq + aq^2 = a(1 + q + q^2) = a\,\frac{q^3 - 1}{q - 1}$$

و حدس زده می‌شود که $S_n = a\,\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$. اثبات این حدس به استقرا روی n و آسان است.

سپس برای محاسبهٔ A و B به‌ترتیب عبارات $(a - 1)A$ و $(1 - a)^2B$ را تشکیل می‌دهیم و از قواعد محاسباتی $\sum$ و نیز از فرمول محاسبه شدهٔ S_n استفاده می‌کنیم:

$$(a - 1)\,A = aA - A = \sum_{1}^{n} ra^r - \sum_{1}^{n} ra^{r-1}$$

$$= (na^n + \sum_{r=1}^{n-1} ra^r) - \sum_{r=0}^{n-1} (r + 1)a^r$$

$$= na^n + \sum_{r=1}^{n-1} ra^r - \sum_{r=1}^{n-1} (r + 1)a^r - 1$$

$$= (na^n + 1) + \sum_{r=1}^{n-1} (r - r - 1)\,a^r$$

$$= (na^n - 1) + \sum_{r=1}^{n-1} a^r = (na^n - 1) - a\,\frac{a^{n-1} - 1}{a - 1}$$

$$A = \frac{na^n - 1}{a - 1} - \frac{a^n - a}{(a-1)^2} = \frac{na^{n+1} - na^n + 1 - a - a^n + a}{(a - 1)^2}$$

$$A = \frac{na^{n+1} - (n + 1)a^n + 1}{(a - 1)^2}.$$

$$(a - 1)^2B = (a^2 - 2a + 1)B$$

$$= \sum_{1}^{n} r^2a^{r+1} - 2\sum_{1}^{n} r^2a^r + \sum_{1}^{n} r^2a^{r-1}$$

$$= \sum_{2}^{n+1} (r-1)^2a^r - 2\sum_{1}^{n} r^2a^r + \sum_{0}^{n-1} (r+1)^2a^r$$

$$= \left(n^2a^{n+1} + (n-1)^2a^n + \sum_{2}^{n-1} (r-1)^2a^r\right) - 2\left(a + \sum_{2}^{n-1} r^2a^r + \right.$$

$$\left. n^2a^n\right) + \left(1 + 4a + \sum_{2}^{n-1} (r+1)^2a^r\right)$$

$$= \left(n^2a^{n+1} + (n-1)^2a^n - 2a - 2n^2a^n + 1 + 4a\right) +$$

$$+ \sum_{2}^{n-1} [(r-1)^2 - 2r^2 + (r+1)^2]a^r$$

$$= \left(1 + 2a + n^2a^{n+1} - n^2a^n - 2na^n + a^n\right) + 2\sum_{2}^{n-1} a^r$$

$$= \left(1 + 2a + n^2a^{n+1} - n^2a^n - 2na^n + a^n\right) + 2\left(a\,\frac{a^{n-1} - 1}{a-1} - a\right).$$

$$= \left(1 + 2a + n^2a^{n+1} - (n^2 + 2n - 1)a^n\right) + \frac{2}{a-1}(a^n - a^2).$$

$$B = \frac{1}{(a-1)^2}\left(1 + 2a + n^2a^{n+1} - (n^2 + 2n - 1)a^n\right) + \frac{2}{(a-1)^3}(a^n - a^2).$$

مثال: اگر n عدد طبیعی فرد و a و b دو عدد حقیقی باشند نشان دهید

$$a^n + b^n = (a+b)\sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1}a^{n-r}b^{r-1}.$$

جواب: مشابه محاسبهٔ $a^n - b^n$ است که با بسط عبارت طرف راست و با استفاده از قواعد Σ خواهد بود.

مثال: دنباله‌های $\{a_n\}_0$ و $\{b_n\}_0$ که $a_0 = a$ و $b_0 = b$ مفروضند و در شرایط.

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad , \quad b_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_n}{2} , (n \geq 0)$$

صدق می‌کنند. ثابت کنید به ازای هر $n \geq 0$،

$$a_n = a + \frac{2}{3}(b - a)(1 - \frac{1}{2^{2n}}) \quad \text{و} \quad b_n = a + \frac{2}{3}(b - a)(1 + \frac{1}{2^{2n+1}}) .$$

جواب: هر دو رابطه را با هم و به استقرا روی n ثابت می‌کنیم.

اگر $n=0$ آنگاه $(a_n = a , b_n = b)$. اگر به ازای هر $n>0$، حکم برقرار باشد آنگاه

$$\begin{aligned}
a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) &= \frac{1}{2}\left[a + \frac{2}{3}(b - a)(1 - \frac{1}{2^{2n}})\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[a + \frac{2}{3}(b - a)(1 + \frac{1}{2^{2n+1}})\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2a + \frac{2}{3}(b - a)(2 + \frac{1}{2^{2n+1}} - \frac{1}{2^{2n}})\right] \\
&= a + \frac{1}{3}(b - a)\left(2 + \frac{1}{2^{2n+1}} \times (1 - 2)\right) \\
&= a + \frac{2}{3}(b - a)(1 - \frac{1}{2^{2n+2}}) .
\end{aligned}$$

به روش مشابه ثابت می‌شود که $b_{n+1} = a + \frac{2}{3}(b - a)(1 + \frac{1}{2^{2n+3}})$.

مثال (نامساوی کُشی): اگر n عدد طبیعی و $\{a_i\}_1^n$ و $\{b_i\}_1^n$ دنباله‌هایی از اعداد حقیقی باشند نشان دهید:

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2)$$

و شرط برقراری تساوی را به دست آورید.

جواب: قرار می‌دهیم $A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$ ، $B = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ و $C = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$. اگر x عدد حقیقی دلخواهی باشد براساس خواص $\sum$ ،

$$0 \leq \sum (a_i x + b_i)^2 = Ax^2 + 2Bx + C .$$

رابطهٔ $0 \leq Ax^2 + 2Bx + C$ به ازای هر x برقرار است و از اینکه $A \geq 0$ پس،

$$0 \leq A(Ax^2 + 2Bx + C) = (Ax + B)^2 + AC - B^2 .$$

و لزوماً $0 \leq AC - B^2$ ، که همان نامساوی کُشی است.

برقراری تساوی $AC - B^2 = 0$ معادل است با برقراری تساوی در حکم مسأله. از اینکه $A > 0$ ، $C > 0$ و $B \neq 0$ (در سایر حالات حکم بدیهی و یا به تناقض بدیهی می‌رسیم) پس اعدادی حقیقی مانند u و v را نوعی اختیار می‌کنیم که $uB = vC$ و بنابراین $A = \frac{v}{u} B$. به ازای این اعداد $\sum_{i=1}^{n} (ua_i - vb_i)^2$ را در نـــظر مـــی‌گیریم و ملاحظه می‌شود که:

$$\sum_{i=1}^{n} (ua_i - vb_i)^2 = u^2 A - 2uvB + v^2 C = 0$$

و لازم است به ازای هر i ، $ua_i - vb_i = 0$. به عبارت دیگر، تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که به ازای هر i ، $\frac{a_i}{b_i} = \frac{v}{u}$. (به شرط $u \neq 0$ که البته می‌دانیم که حداقل یکی از u یا v مخالف صفر است.)

۴.۱۵.۲.۳ حاصلجمع مضاعف: دنباله‌های دو اندیسی یا دنباله‌های مضاعف نیز مشابه دنباله‌های معمولی تعریف می‌شوند و در واقع تابعی نظیر $f : N \times N \to \Re$ که مقدار تابع، یعنی $f(i, j)$ به صورت f_{ij} نشان داده می‌شود یک دنبالهٔ دو اندیسی است. تعمیم

عمل جمع برای دنباله‌های دو اندیسی متناهی نیز امکان‌پذیر است.

فرض کنیم $\{a_{ij}\}_{i=m,\, j=p}^{i=n,\, j=q}$ دنباله‌ای از اعداد باشد در این صورت عبارت $\sum_{i=m}^{n} (\sum_{j=p}^{q} a_{ij})$ را که با $\sum_{i=m}^{n} \sum_{j=p}^{q} a_{ij}$ نشان داده می‌شود یک حاصلجمع مضاعف می‌نامند. ترتیب علامت $\sum$ و اندیسهای i و j حائز اهمیّت است. بالاخص، حاصلجمع بیرونی حدود ثابتی دارد ولی سیگمای درونی ممکن است به اندیس حاصلجمع بیرون وابسته باشد. در این مورد به مثالهای زیر توجه می‌کنیم.

مثال: $A = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} a_{ij}$ و $B = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{i} a_{ij}$ را محاسبه کنید.

جواب:

$$A = \sum_{i=1}^{3} (\sum_{j=1}^{5} a_{ij}) = \sum_{i=1}^{3} (a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + a_{i4} + a_{i5})$$

$$= (a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15}) + (a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} + a_{25})$$

$$+ (a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34} + a_{35}) .$$

$$B = \sum_{i=1}^{3} (\sum_{j=1}^{i} a_{ij}) = \sum_{j=1}^{1} a_{1j} + \sum_{j=1}^{2} a_{2j} + \sum_{j=1}^{3} a_{3j}$$

$$= a_{11} + (a_{21} + a_{22}) + (a_{31} + a_{32} + a_{33}).$$

مثال: اگر $a_{ij} = \dfrac{i}{(j + 4)(i + 2)}$ مطلوب است محاسبهٔ $\sum_{i=-1}^{1} \sum_{j=-3}^{1} a_{ij}$ و $\sum_{j=-3}^{1} \sum_{i=-1}^{1} a_{ij}$.

جواب:

$$A=\sum_{i=-1}^{1}\left(\sum_{j=-3}^{1}a_{ij}\right)=\sum_{i=-1}^{1}\left(\frac{i}{i+2}+\frac{i}{2(i+2)}+\frac{i}{3(i+2)}+\frac{i}{4(i+2)}+\frac{i}{5(i+2)}\right)$$

$$=\left(\frac{-1}{1}+0+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{-1}{2}+0+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{-1}{3}+0+\frac{1}{9}\right)+$$

$$\left(\frac{-1}{4}+0+\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{-1}{5}+0+\frac{1}{15}\right)$$

$$=-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$$

$$=\frac{-2}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right).$$

محاسبهٔ B نیز به همین نتیجه منجر می‌شود و در واقع، قضیهٔ زیر را در حالت کلی داریم.

۵.۱۵.۲.۳ قضیّه (آ): همواره $\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q}a_{ij}=\sum_{j=p}^{q}\sum_{i=m}^{n}a_{ij}$، ($m\le n$ و $p\le q$)؛

(ب): همواره $\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=m}^{i}a_{ij}=\sum_{j=m}^{n}\sum_{i=j}^{n}a_{ij}$؛

(پ): اگر k عددی صحیح و $k<m$ آنگاه

$$\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=k}^{i}a_{ij}=\sum_{j=m}^{n}\sum_{i=j}^{n}a_{ij}+\sum_{j=k}^{m-1}\sum_{i=m}^{n}a_{ij};$$

(ت): همواره $\sum_{i=m}^{n}a_i\cdot\sum_{j=p}^{q}b_j=\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q}a_ib_j$

برهان: به استقرا روی n است با فرض اینکه p و q با شرایط داده شده، اعداد صحیح مفروضی باشند.

مثال: به ازای هر $n \geq 0$ ثابت کنید $\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} 2^i = 2^{n+2} - n - 3$.

جواب: اگر $n = 0$ حکم بدیهی است و اگر تساوی به ازای $n > 0$ ای برقرار باشد آنگاه

$$\sum_{j=0}^{n+1} \sum_{i=0}^{j} 2^i = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} 2^i + \sum_{i=0}^{n+1} 2^i$$
$$= 2^{n+2} - n - 3 + \sum_{i=0}^{n+1} 2^i .$$

حاصلجمع آخر یک تصاعد هندسی است که قدر نسبت آن 2 و جملهٔ اول آن مساوی 1 است. پس براساس یکی از مثالهای قبل حاصلجمع آن چنین خواهد شد:

$$\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = \frac{2^{n+2} - 1}{2 - 1} = 2^{n+2} - 1 .$$

بنابراین،

$$\sum_{j=0}^{n+1} \sum_{i=0}^{j} 2^i = 2^{n+2} - n - 3 + 2^{n+2} - 1$$
$$= 2.2^{n+2} - (n + 1) - 3$$
$$= 2^{n+3} - (n + 1) - 3 .$$

۱۶.۲.۳ چند کاربرد مهمّ از اعداد صحیح و گویا: در این قسمت سه موضوع تابع فاکتوریل، ضریب دو جمله‌ای و حل معادلات صحیح را مورد بحث قرار خواهیم داد. از موضوع اول در تعریف ضریب دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم و سپس بسط دو جمله‌ای را بیان خواهیم کرد و از آنجا به نامساوی مهمی بنام نامساوی برنویی خواهیم رسید. در حل معادلات جبری با ضرایب صحیح از مسئله عاد کردن در اعداد صحیح و قضیهٔ تقسیم استفاده می‌کنیم و به بیان قضیّهٔ مهم گاوس خواهیم پرداخت. در موضوع حل معادلات توضیح مبسوطی نخواهیم داشت زیرا مسئلهٔ عاد کردن و ضمائم آن مربوط به درس

نظریهٔ اعداد است که ما از وارد شدن به جزئیات آن خودداری می‌کنیم و قسمتی که از نظر خوانندگان گرامی خواهد گذشت هدف ما را در آموزش مبانی ریاضیات برآورده خواهد کرد.

۱.۱۶.۲.۳ تعریف: تابع $f : N \cup \{0\} \rightarrow N$ که با ضابطهٔ

$$f(0) = 1 , f(n+1) = (n+1) f(n) , n \geq 0$$

تعریف می‌شود ***تابع فاکتوریل*** نام دارد و ما مقدار تابع یعنی $f(n)$ را با نماد $n!$ (بخوانید n فاکتوریل یا فاکتوریل n) نشان می‌دهیم.

بدیهی است که به ازای هر عدد طبیعی n، $n! = 1.2....n$ زیرا به استقرا خواهیم داشت $1! = 1$، و اگر $n! = 1.2....n$ آنگاه

$$(n+1)! = (n+1). n! = (n+1). (1.2....n)$$
$$= 1.2....n. (n+1) .$$

مثال: اگر m و n اعداد طبیعی باشند و $m \leq n$ نشان دهید:

$$\frac{n(n-1) ... (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m! (n-m)!}$$

جواب: کافی است تعریف فاکتوریل را در طرف راست به کار ببریم و عوامل مشترک را ساده کنیم.

مثال: اگر m و n اعداد صحیح باشند و $0 \leq m < n$ نشان دهید:

$$\frac{n!}{m! (n-m)!} + \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} = \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m)!}$$

جواب: عبارت طرف چپ را A می‌نامیم

$$A = \frac{(m+1).n! + (n-m).n!}{(m+1)!(n-m)!} = \frac{(n-m+m+1).n!}{(m+1)!(n-m)!} = \frac{(n+1)!}{(m+1!(n-m)!} .$$

۲.۱۶.۲.۳ تعریف: اگر a عددی حقیقی و m یک عددصحیح نامنفی باشد عبارت $\binom{a}{m}$ چنین تعریف می‌شود:

$$\binom{a}{0} = 1 , \binom{a}{m} = \frac{1}{m!} (a-0)(a-1) ... (a-m+1) , m \geq 1 .$$

عبارت $\binom{a}{m}$ ضریب دوجمله‌ای نامیده‌می‌شود و اگر $a = n$ عدد طبیعی‌باشد علامت C_m^n نیز برای نشان دادن $\binom{n}{m}$ به‌کار می‌رود.

لازم به توضیح است که علائم قراردادی دیگری نیز برای $\binom{n}{m}$ معمول است و ضروری است در هر مطالعه خواننده با قرارداد کتاب آشنا شود. قرارداد ما در این کتاب $\binom{n}{m}$ یا C_m^n است.

از تعریف نتیجه می‌شود که $\binom{0}{0} = 1$، و به ازای هر عدد حقیقی a، $\binom{a}{1} = a$ و نیز به ازای هر عدد صحیح نامنفی n، $\binom{n}{n} = 1$.

مثال: نشان دهید، $\binom{n}{m} = \dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$ $(0 \leq m < n)$.

جواب: تعریف $\binom{n}{m}$ را به کار می‌بریم:

$$\binom{n}{m} = \frac{1}{m!}(n-0)(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$$

$$= \frac{[1.2.3\ldots(n-m)].[(n-m+1)\ldots(n-1)n]}{m!\,[1.2.3\ldots(n-m)]}$$

$$= \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

مثال: مطلوب است محاسبهٔ $\binom{-2/3}{4}$، $\binom{1/3}{3}$ و $\binom{5}{2}$.

جواب: براساس تعریف عمل می‌کنیم:

$$\binom{-2/3}{4} = \frac{1}{4!}\left(\frac{-2}{3}-0\right)\left(\frac{-2}{3}-1\right)\left(\frac{-2}{3}-2\right)\left(\frac{-2}{3}-3\right) = \frac{2.5.8.11}{81\times 24} = \frac{110}{243}$$

$$\binom{1/3}{3} = \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{3}-0\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right) = \frac{2\times 5}{6\times 27} = \frac{5}{81}$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{4\times 5}{2} = 10.$$

مثال: اگر m و n اعداد صحیح نامنفی و $m \leq n$، مطلوب است محاسبهٔ $\binom{n}{m}$ به ازای

جمیع مقایر m و n.

جواب: مقادیر m و n عبارتند از 0، 1، 2، ... و مقادیر محاسبه شدهٔ $\binom{n}{m}$ را در جدول زیر مشاهده می‌کنیم. این جدول به مثلث خیام یا مثلث پاسکال معروف است و روش ساده‌ای است برای محاسبهٔ هر ضریب دو جمله‌ای از جملات به دست آمده از جدول:

	0	1	2	3	4	5 ...
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1
⋮						

مثال: اگر m عدد صحیح نامنفی و a یک عدد حقیقی باشد، $\binom{-a}{m} = (-1)^m \binom{a+m-1}{m}$.

جواب: برحسب تعریف عمل می‌کنیم:

$$\binom{-a}{m} = \frac{1}{m!}(-a-0)(-a-1)(-a-2)(-a-3)\ldots(-a-m+1)$$

$$= \frac{(-1)^m}{m!}(a+0)(a+1)(a+2)\ldots(a+m-1)$$

$$= \frac{(-1)^m}{m!}(a+m-1-0)(a+m-1-1)\ldots(a+m-1-(m-2))(a+m-1-(m-1))$$

$$= (-1)^m \binom{a+m-1}{m}.$$

۳.۱۶.۲.۳ قضیه (خواص ضریب دو جمله‌ای): m و n اعداد صحیح‌اند و

(آ): اگر $m \le n$ آنگاه $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$؛

(ب): اگر $m < n$ آنگاه $\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$.

برهان: اثبات هر دو رابطه با استفاده از تعریف ضریب دو جمله‌ای است. با استفاده از

اولین مثال ذکر شده پس از تعریف ۲.۱۶.۲.۳ خواهیم داشت:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m)!} = \binom{n}{n-m} .$$

$$\binom{n}{m}+\binom{n}{m+1}=n!\left(\frac{1}{m!(n-m)!}+\frac{1}{(m+1)!(n-m-1)!}\right) = n!\frac{m+1+n-m}{(m+1)!(n-m)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n+1-(m+1))!} = \binom{n+1}{m+1} .$$

مثال: به ازای هر عدد طبیعی n و هر دو عدد حقیقی a و b نشان دهید:

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

جواب: این رابطه به دستور بسط دو جمله‌ای نیوتن معروف است و اثبات آن به استقرا و با استفاده از قضیهٔ قبل خواهد بود. اگر $n = 1$ آنگاه

$$(a + b)^1 = a + b \quad \text{و} \quad \sum_{r=0}^{1} \binom{1}{r} a^{1-r} b^r = a + b .$$

اگر حکم به ازای عدد طبیعی و مفروض n برقرار باشد آنگاه،

$$(a + b)^{n+1} = (a + b)(a + b)^n$$

$$= a\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + b\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n+1-r} b^r + \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^{r+1}$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n+1-r} b^r + \sum_{r=1}^{n+1} \binom{n}{r-1} a^{n+1-r} b^r$$

$$= a^{n+1} + \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} a^{n+1-r} b^r + \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r-1} a^{n+1-r} b^r + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{r=1}^{n} [\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}] a^{n+1-r} b^r + b^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{r=1}^{n} \binom{n+1}{r} a^{n+1-r} b^r + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}$$

$$= \sum_{r=0}^{n+1} \binom{n+1}{r} a^{n+1-r} b^r$$

مثال: اگر x یک عدد حقیقی مثبت و n یک عدد طبیعی باشد نشان دهید $(1 + x)^n > 1 + nx$, $(n>1)$ و $(1+x)^n > 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2$, $(n>2)$.

جواب: بسط $(1 + x)^n$ را در نظر می‌گیریم

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + ... + x^n$$

که هر دو رابطهٔ حکم را با توجه به شرط $x > 0$ نتیجه می‌دهد.

۴.۱۶.۲.۳ قضیه (نامساوی برنولی): x **یک عدد حقیقی است که** $1 + x \geq 0$. در این صورت به ازای هر عدد طبیعی n، $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $x = 0$ یا $n = 1$.

برهان: در مثال قبل حالت خاصّی را مورد بحث قرار دادیم $(x > 0)$. و در حالت کلی اثبات حکم به استقرا روی n است.

اگر $n = 1$ حکم برقرار است (زیرا تساوی را داریم) و اگر حکم به ازای n ای برقرار باشد آنگاه

$$(1 + x)^{n+1}=(1 + x)(1 + x)^n \geq (1 + x)(1 + nx) = 1 + nx^2 + x + nx$$

و یا، با توجه به $nx^2 \geq 0$،

$$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1) x + nx^2 \geq 1 + (n + 1) x .$$

پس حکم برقرار است.

در بررسی شرط لازم و کافی برای تساوی، اولاً اگر $n = 1$ یا $x = 0$ تساوی برقرار

است و ثانیاً اگر تساوی برقرار باشد ولی $n \neq 1$ آنگاه بنابر حکم، خواهیم داشت:

$$(1 + x)^{n-1} \geq 1 + (n-1)\, x \,.$$

با ضرب طرفین نامساوی در $x + 1$ خواهیم داشت:

$$(1 + x)^n \geq (1 + x)(1 + (n-1)\, x) = 1 + nx + (n-1)\, x^2 \,.$$

و با فرض برقراری تساوی در حکم قضیه، نتیجه می‌شود:

$$1 + nx \geq 1 + nx + (n-1)\, x^2 \,.$$

پس، $x = 0$.

مثال: اگر n یک عدد طبیعی و $0 < a < 1$ عددی حقیقی باشد نشان دهید

$$(1 - a)^n \geq 1 - na \,.$$

جواب: با توجه به نامساوی $0 < a < 1$ نتیجه می‌شود $0 < (-a) + 1$، و می‌توان از نامساوی برنویی استفاده کرد:

$$(1 + (-a))^n \geq 1 + n\,(-a) = 1 - na \,.$$

مثال: اگر n یک عدد طبیعی و بزرگتر از 1 باشد نشان دهید:

$$(1 - \frac{1}{n^2})^n > 1 - \frac{1}{n} \,.$$

جواب: از اینکه $1 < n$ پس $0 < \frac{1}{n} < 1$ و از اینجا $0 < \frac{1}{n^2} < 1$ بنابراین $0 < (\frac{-1}{n^2}) + 1$ و از تساوی برنویی خواهیم داشت،

$$(1 + (\frac{-1}{n^2}))^n \geq 1 + n\,(\frac{-1}{n^2}) = 1 - \frac{1}{n}$$

تساوی نمی‌تواند برقرار باشد، زیرا $1 < n$ پس $n \neq 1$ و نیز $\frac{-1}{n^2} \neq 0$. پس،

$$(1 - \frac{1}{n^2})^n > 1 - \frac{1}{n} \,.$$

مثال: n عددی طبیعی و بزرگتر از 1 است نشان دهید:

$$(1 + \frac{1}{n-1})^{n-1} < (1 + \frac{1}{n})^n \,.$$

جواب: برای اثبات این حکم مستقیماً نمی‌توان از نامساوی برنویی استفاده کرد. پس

ابتدا محاسباتی را انجام می‌دهیم:

$$\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} = \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^n . (1+\frac{1}{n-1})$$

$$= (\frac{n^2-1}{n^2})^n . (\frac{n}{n-1})$$

$$= (1-\frac{1}{n^2})^n . (\frac{n}{n-1})$$

و از نامساوی برنویی (و یا مثال قبل) استفاده می‌کنیم:

$$\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} > (1-\frac{1}{n})(\frac{n}{n-1}) = 1\ .$$

مثال: n عددی طبیعی و a عددی است حقیقی که $0 < a < 1$. نشان دهید:

$$(1-a)^n < \frac{1}{1+na}\ .$$

جواب: به استقرا روی n عمل می‌کنیم. اگر $n = 1$ آنگاه $1 - a < 1 / (1 + a)$ برقرار است، زیرا $a^2 > 0$ پس $-a^2 < 0$ و یا $1 - a^2 < 1$. اگر حکم به ازای $n > 1$ ای برقرار باشد آنگاه

$$(1-a)^{n+1} = (1-a)(1-a)^n < (1-a) \times \frac{1}{1+na}\ ,$$

و برقراری $\frac{1-a}{1+na} < \frac{1}{1+(n+1)a}$ به آسانی تحقیق می‌شود. پس حکم به ازای $n+1$ برقرار است.

مثال: به ازای هر عدد طبیعی n و هر عدد حقیقی a که $0 < a < \frac{1}{n}$ نشان دهید:

$$(1+a)^n < \frac{1}{1-na}\ .$$

جواب: اگر $n = 1$ و $0 < a < 1$ آنگاه $1 + a < \frac{1}{1-a}$ برقرار است. فرض کنیم به ازای $n > 1$ و $0 < a < \frac{1}{n}$ حکم برقرار باشد حکم را به ازای $n + 1$ ثابت می‌کنیم.

اگر a عددی حقیقی و $0 < a < \frac{1}{n+1}$ بدیهی است که $0 < a < \frac{1}{n}$، بنابراین،

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)(1+a)^n < (1+a)\frac{1}{1-na}$$

و نامساوی $\frac{1}{1-(n+1)a} > \frac{1+a}{1-na}$ به آسانی ثابت می‌شود. پس حکم به ازای $n+1$ نیز برقرار است.

مثال: نشان دهید به ازای هر عدد طبیعی n، $(1+\frac{1}{6n})^{-n} > \frac{5}{6}$.

جواب: این نامساوی نتیجه‌ای از مثال قبل است زیرا به ازای هر n، $0 < a = \frac{1}{6n} < \frac{1}{n}$

پس، $(1+\frac{1}{6n})^n < \frac{1}{1-\frac{n}{6n}} = \frac{6}{5}$ و یا $(1+\frac{1}{6n})^{-n} > \frac{5}{6}$.

مثال: نشان دهید به ازای هر n، $(1+\frac{1}{n})^n < 3$.

جواب: از بسط دو جمله‌ای $(1+\frac{1}{n})^n$ استفاده می‌کنیم:

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + 1 + \sum_{r=2}^{n} \binom{n}{r}\left(\frac{1}{n}\right)^r$$

$$= 2 + \sum_{r=2}^{n} \frac{1}{r!}\left(\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{n^r}\right)$$

$$= 2 + \sum_{r=2}^{n} \frac{1}{r!}\left[\left(\frac{n}{n}\right)\frac{n-1}{n}\ldots\left(\frac{n-r+1}{n}\right)\right]$$

مقدار عبارت داخل کروشه همواره کوچکتر از 1 است و نیز به ازای هر $r \geq 2$، $r! > 2^{r-1}$ برقرار است (تحقیق کنید). بنابراین،

$$(1+\frac{1}{n})^n < 2 + \sum_{r=2}^{n} \frac{1}{2^{r-1}} = 2 + \frac{\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = 2 + (1 - \frac{1}{2^{n-1}})$$

و یا، $(1+\frac{1}{n})^n < 3$.

مثال: $n \geq 2$ عددی است طبیعی و a و b اعداد حقیقی نامنفی هستند. ثابت کنید

$$(a+b)^n - a^n - b^n \leq n\,ab\,(a+b)^{n-2} .$$

جواب: به ازای هر $n \geq 2$،

$$(a+b)^n - a^n - b^n = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

$$= \sum_{r=0}^{n-2} \binom{n}{r+1} a^{n-1-r} b^{r+1}$$

$$= abn \sum_{r=0}^{n-2} \frac{1}{n} \binom{n}{r+1} a^{n-2-r} b^r$$

پس، کافی است ثابت کنیم که به ازای هر r $(0 \leq r \leq n-2)$ همواره

$$\frac{1}{n} \binom{n}{r+1} \leq \binom{n-2}{r} .$$

و یا $\frac{n-1}{r+1} \leq n-r-1$ که معادل با $r(-r+n-2) \geq 0$ است و برقراری آن نیز بدیهی است.

مثال: اگر $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} c_r x^r$ ثابت کنید:

$$\sum_{r=1}^{n} r\, c_r x^{r-1} = n(1+x)^{n-1} .$$

جواب: می‌دانیم که $c_r = \binom{n}{r}$ $(0 \leq r \leq n)$، و

$$n(1+x)^{n-1} = n \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} x^r = n \sum_{r=1}^{n} \binom{n-1}{r-1} x^{r-1} = \sum_{r=1}^{n} n\binom{n-1}{r-1} x^{r-1}$$

و نیز،

$$n\binom{n-1}{r-1} = \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!} = r\frac{n!}{r!(n-r)!} = r\binom{n}{r} = rc_r\,.$$

پس، $n(1+x)^{n-1} = \sum_{r=1}^{n} rc_r x^r$.

مثال: اگر n عددی طبیعی و $x > 1$ عددی حقیقی باشد ثابت کنید $x^n > n(x-1)$.

جواب: نامساوی برنویی را برای $h = x - 1 > 0$ به کار می‌بریم:

$$x^n = (1 + (x-1))^n = (1+h)^n \geq 1 + nh = 1 + n(x-1) > n(x-1)$$

زیرا $n(x-1) > 0$.

مثال: به ازای هر x و y، نشان دهید نامساوی $\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leq \frac{x^n + y^n}{2}$ به ازای $n = 2, 4, 8$ برقرار است.

جواب:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{2xy - x^2 - y^2}{4}$$

$$= \frac{x^2+y^2}{2} - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \leq \frac{x^2+y^2}{2}\,.$$

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^4 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{4}\left[\binom{4}{k} + (-1)^k\binom{4}{k}\right] x^{4-k} y^k$$

$$= \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{4}\left[\binom{4}{k}(1 + (-1)^k\right) x^{4-k} y^k$$

$$= \frac{1}{16}\left[2\binom{4}{0}x^4 + 2\binom{4}{2}x^2y^2 + 2\binom{4}{4}y^4\right]$$

$$= \frac{1}{8}(x^4 + 6x^2y^2 + y^4)$$

$$= \frac{x^4+y^4}{2} - \frac{3}{8}(x^2-y^2)^2\,.$$

بنابراین،

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^4 = \frac{x^4+y^4}{2} - \frac{3}{8}(x^2-y^2)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2\,.$$

و یا، $\frac{x^4+y^4}{2} \le (\frac{x+y}{2})^4$.

و بالاخره،

$$(\frac{x+y}{2})^8 + (\frac{x-y}{2})^8 = \frac{1}{256}\sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k}(1+(-1)^k)\, x^{8-k}y^k$$

$$= \frac{2}{256}[\binom{8}{0}x^8+\binom{8}{2}\, x^6y^2+\binom{8}{4}\, x^4y^4$$

$$+ \binom{8}{6}\, x^2y^6+\binom{8}{8}y^8]$$

$$= \frac{1}{128}\,(x^8 + 28x^6y^2 + 70x^4y^4 + 28x^2y^6 + y^8)$$

$$= \frac{x^8+y^8}{2} + \frac{1}{128}\,(x^8 + 28x^6y^2 + 70x^4y^4 + 28x^2y^6$$

$$+ y^8 - 64x^8 - 64y^8)$$

$$= \frac{x^8+y^8}{2} + \frac{7}{128}\,(-9x^8 - 9y^8 + 4x^6y^2 + 10x^4y^4 + 4x^2y^6)$$

$$(\frac{x+y}{2})^8 = \frac{x^8+y^8}{2} - (\frac{x-y}{2})^8 - \frac{7}{128}\,(9x^8 + 9y^8 - 4x^6y^2 - 10x^4y^4 - 4x^2y^6)$$

$$= \frac{x^8+y^8}{2} - (\frac{x-y}{2})^8 - \frac{7}{128}\,[(3x^4 - 3y^4)^2 - 4(xy^3 - yx^3)^2]$$

$$= \frac{x^8+y^8}{2} - (\frac{x-y}{2})^8 - \frac{7}{128}\,[9(x^2-y^2)^2(x^2+y^2)^2 - 4x^2y^2\,(y^2-x^2)^2]$$

$$= \frac{x^8+y^8}{2} - (\frac{x-y}{2})^8 - \frac{7}{128}\,(x^2-y^2)^2(9x^2 + 9y^2 - 4x^2y^2)$$

$$= \frac{x^8+y^8}{2} - (\frac{x-y}{2})^8 - \frac{7}{128}\,(x^2-y^2)^2[(3x-3y)^2 + 12x^2y^2]$$

بنابراین، $\dfrac{x^8+y^8}{2} \le (\dfrac{x+y}{2})^8$.

مثال: به ازای هر دو عدد حقیقی x و y اگر $x + y \ge 0$ آنگاه

$$(\frac{x+y}{2})^n \le \frac{x^n+y^n}{2} \quad , \quad n \ge 1 .$$

جواب: به استقرا عمل می‌کنیم. به ازای $n = 1$ حکم برقرار است. و اگر به ازای $n \ge 2$ حکم برقرار باشد،

$$(\frac{x+y}{2})^{n+1} = \frac{x+y}{2}(\frac{x+y}{2})^n \le \frac{x+y}{2} . \frac{x^n+y^n}{2}$$

$$(\frac{x+y}{2})^{n+1} \le \frac{x^{n+1}+y^{n+1}}{2} + \frac{x^{n+1}+xy^n+yx^n+y^{n+1}}{4} - \frac{x^{n+1}+y^{n+1}}{2}$$

$$= \frac{x^{n+1}+y^{n+1}}{2} + \frac{-x^{n+1}-y^{n+1}+xy^n+yx^n}{4}$$

$$= \frac{x^{n+1}+y^{n+1}}{2} - \frac{1}{4}(x^{n+1}+y^{n+1}-xy^n-yx^n)$$

$$= \frac{x^{n+1}+y^{n+1}}{2} - \frac{1}{4}(x-y)(x^n-y^n) .$$

از اینکه $x + y \ge 0$ پس x و y هر دو منفی نخواهند بود و سه حالت وجود دارد:

اگر x و y هر دو مثبت باشند $(x-y)(x^n-y^n)$ همواره مثبت است. و اگر $x > 0$ و $y < 0$ آنگاه $x \ge -y > y$ و به ازای هر n، $x^n > (-y)^n$ (زیرا $-y > 0$)، یعنی $(x-y)(x^n-y^n)$ مثبت است.

بالاخره، فرض کنیم $x < 0$ و $y > 0$. با توجه به فرض $x + y \ge 0$ لازم است، $|x| \le |y|$ و یا $|x|^n < y^n$. و از اینکه $x < 0 < y$ پس، $x - y$ و $x^n - y^n$ منفی بوده و عبارت $(x-y)(x^n-y^n)$ مثبت است.

با توجه به استدلال بالا نتیجه می‌شود که

$$(\frac{x+y}{2})^{n+1} \le \frac{x^{n+1}+y^{n+1}}{2} .$$

۵.۱۶.۲.۳ معادلات جبری با ضرایب صحیح:

در این بخش به مفاهیمی از نظریهٔ اعداد که ناشی از اصول محاسباتی اعداد صحیح‌اند اشاره می‌کنیم. قبلاً ملاحظه کردیم که علامت $a \mid b$ به ازای اعداد صحیح a و b به این معنی است که: «a، b را عاد می‌کند» به عبارت معادل گوئیم a یک مقسوم‌علیه b است. مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح a و b عددی صحیح مانند c است که $c \mid a$ و $c \mid b$. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b عدد صحیح مثبتی است که هر مقسوم‌علیه مشترک a و b آن را عاد می‌کند.

مضرب مشترک دو عدد صحیح a و b نیز به عددی گفته می‌شود که هر یک از a و b آن را عاد کند و کوچکترین مضرب مشترک دو عدد عدد صحیح مثبتی است که یک مضرب مشترک a و b باشد و هر مضرب مشترک دو عدد را عاد کند.

عدد طبیعی بزرگتر از 1 را عدد اول می‌نامیم اگر غیر از 1 و خود عدد مقسوم‌علیه مثبتی نداشته باشد، و دو عدد را نسبت به هم متباین می‌نامیم اگر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک آنها مساوی 1 باشد.

از قضیهٔ تقسیم که قبلاً ثابت کردیم نتایجی در اعداد تعریف شدهٔ بالا به دست می‌آید. همچنین قضیهٔاصلی علم حساب که تجزیهٔ اعداد طبیعی به عوامل اول را بیان می‌کند از مهمترین مطالبی است که به عنوان نتایج اصلی دستگاه اعداد صحیح از آن یاد می‌کنیم.

هدف ما بررسی این مطالب نیست و می‌خواهیم از تعاریف مذکور در معادلات جبری و قضیهٔ مهم گاوس استفاده کنیم.

۶.۱۶.۲.۳ تعریف: معادله‌ای به صورت

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (*)$$

را که $n \in \mathbb{N}$ و $a_n \neq 0$ و $a_i \in \Re$، یک **معادلهٔ جبری درجهٔ** n نامیده می‌شود.

بالاخص اگر $a_i \in \mathbb{Z}$ $(0 \leq i \leq n)$، $(*)$ را معادلهٔ جبری صحیح می‌خوانیم. و

می‌توان در وجود ریشه‌های آن در Z و Q بحث کرد.

معادلهٔ (*) را تکین می‌نامیم اگر $a_n = 1$.

۷.۱۶.۲.۳ قضیّه (گاوس): یک معادلهٔ جبری صحیح و تکین جواب گویای غیرصحیح ندارد. به عبارت دیگر، اگر معادله جبری صحیح و تکین جواب گویا داشته باشد این جواب یک عدد صحیح است.

برهان: فرض کنیم معادلهٔ جبری صحیح و تکین

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

دارای جوابی گویا باشد. می‌توان فرض کرد که $a_0 \neq 0$، زیرا اگر $a_0 = 0$ آنگاه 0 جواب معادله و 0 یک عدد صحیح است. اگر $x_0 = \frac{p}{q}$ یک جواب گویای معادله باشد می‌توان کسر را به ساده‌ترین صورت ممکن فرض کرد، یعنی p و q نسبت به هم اوّل باشند. بنابراین،

$$p^n + a_{n-1} qp^{n-1} + \dots + a_1q^{n-1}p + a_0q^n = 0 .$$

q تمام جملات به استثنای جملهٔ اول را عاد می‌کند پس $q \mid p^n$. از اینکه p و q نسبت بهم اولند لازم است $q = \pm 1$ (در غیر این صورت مقسوم‌علیه مشترکی غیر از 1 خواهند داشت). پس x_0 یک عدد صحیح است. □

۸.۱۶.۲.۳ نتیجه: جوابهای یک معادلهٔ جبری صحیح و تکین در صورت وجود مقسوم‌علیه‌های جملهٔ ثابت معادله (یعنی a_0) خواهند بود.

برهان: از برهان قضیه نتیجه می‌شود که $p \mid a_0$. □

۹.۱۶.۲.۳ نتیجه: هر جواب گویای تحویل‌ناپذیر مانند $x_0 = \frac{p}{q}$ از معادلهٔ جبری صحیح

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0 .$$

(در صورت وجود) در شرایط $p \mid a_0$ و $q \mid a_n$ صدق می‌کند.

برهان: اگر $x_0 = \frac{p}{q}$ جوابی از معادله و p و q نسبت به هم متباین باشند آنگاه

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \dots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0$$

و بدیهی است که $p \mid a_0q^n$ و $q \mid a_np^n$ پس $p \mid a_0$ و $q \mid a_n$.

مثال: جوابهای گویای معادله $x^7 - 3x^6 + x^3 - 2x + 3 = 0$ را بیابید.

جواب: در صورت وجود چنین جوابی مقسوم‌علیه 3 خواهد بود پس $x_0 = \pm 1$ یا $x_0 = \pm 3$. و ملاحظه می‌شود که $x_0 = 1$ و $x_0 = -1$ تنها جوابهای گویای معادله هستند.

مثال: جوابهای گویای معادلهٔ $10x^3 - 17x^2 + 8x - 1 = 0$ را پیدا کنید.

جواب: اگر p/q جوابی از معادله باشد که p و q نسبت به هم اولند، لازم است $p \mid -1$ و $q \mid 10$. پس، جوابها در صورت وجود به مجموعهٔ

$$\{\pm 1 , \pm\frac{1}{2} , \pm\frac{1}{5} , \pm\frac{1}{10}\}$$

تعلق دارد و ملاحظه می‌شود که $+1$، $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{5}$ در معادله صدق می‌کنند.

۳.۳ اصل موضوع تمامیّت. در ابتدای بخش ۲.۳. توضیح داده شد که دستگاه اعداد حقیقی یک میدان مرتّب است ولی میدانهای مرتب دیگری نظیر $(Q , + , .)$ نیز وجود دارند و متذکر شدیم که وجه تمایز میدان مرتب اعداد حقیقی با سایر میدانهای مرتّب وجود اصل موضوعی به نام اصل موضوع تمامیّت است. در بخش ۲.۳ به خواص میدان مرتب $\mathfrak{R}$ پرداختیم ولی به ذکر خواص ناشی از اصل موضوع تمامیّت نیازی ندیدیم در این بخش با مقدماتی دقیق این اصل را بیان می‌کنیم و به بررسی خواصّ مهم آن در شناخت دقیقتر $\mathfrak{R}$ خواهیم پرداخت. خواص دیگر ناشی از این اصل را در بخش آینده هم بررسی خواهیم نمود.

۱.۳.۳ تعریف: اگر A مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد عددی حقیقی مانند a را یک ***کران بالا (کران پائین)*** A می‌نامیم اگر به ازای هر x از A رابطهٔ $x \le a$ ($x \ge a$) برقرار باشد. مجموعهٔ A را ***از بالا کراندار*** می‌نامیم اگر دارای کران بالایی باشد و از بالا بی‌کران می‌نامیم اگر کران بالایی نداشته باشد. به همین ترتیب، A از ***پائین کراندار*** است اگر

دارای کران پایینی باشد، و از پایین بی‌کران است اگر کران پایینی نداشته باشد. مجموعه‌ای را *کراندار* می‌نامیم که از بالا و پایین کراندار باشد.

اصطلاحات بند بالا و بندپایین به ترتیب برای کران بالا و کران پایین نیز معمول و متداول است. همچنین اصطلاحات مجموعهٔ محدود و مجموعهٔ نامحدود به ترتیب برای مجموعهٔ کراندار و مجموعهٔ بی‌کران به کار می‌رود.

مثال: ثابت کنید مجموعه A کراندار است اگر و فقط اگر عددی مثبت مانند a یافت شود که به ازای هر $x \in A$، $|x| \leq a$.

جواب: اگر A کراندار باشد اعدادی مانند α و β یافت می‌شوند که

$$\forall x \in A \ (\beta \leq x \leq \alpha) .$$

کافی است قرار دهیم $a = \mathrm{Max}\,\{|\alpha| , |\beta|\}$. با توجه به قضیهٔ ۲.۱۲.۲.۳، $|x| \leq a$ نتیجه می‌شود.

بالعکس، اگر a ای مثبت یافت شود که $|x| < a$ همواره برقرار باشد آنگاه $-a \leq x \leq a$ و یا $x \leq a$ و $-a \leq x$، یعنی A از بالا و پایین کراندار است.

مثال: ثابت کنید مجموعه‌های $A = \{x \in \Re \mid x \geq 0 , x^2 < 3\}$ و $B = \{x \in \Re \mid x^2 < 5\}$ غیرتهی و کراندارند.

جواب: اولاً $0 \in A$ و $0 \in B$ پس A و B غیرتهی‌اند. ثانیاً به ازای هر $x \in A$، $0 \leq x \leq 2$، زیرا اگر x ای از A موجود باشد که $x > 2$ آنگاه $3 > x^2 > 4$ که یک تناقض خواهد بود. یعنی A کراندار است. هر عضو B نیز در شرط $-3 < x < 3$ صدق می‌کند، زیر اگر چنین نباشد و $x \in B$ ای موجود باشد که $x \geq 3$ یا $x \leq -3$ آنگاه، $x^2 \geq 9$، که با توجه به فرض $x^2 < 5$ به تناقض $9 < 5$ خواهیم رسید. یعنی، B نیز کراندار است.

مثال: نشان دهید که اگر مجموعهٔ A کران بالایی متعلق به خود مجموعه داشته باشد این کران بالا عضو ماکسیمم A است. حکم مشابه برای کران پایین و مینیمم نیز برقرار است.

جواب: فرض کنیم α یک کران بالای A باشد و $\alpha \in A$. براساس تعریف،

$$\forall x \in A \quad (x \le \alpha)$$

پس، α عضو ماکزیمم A خواهد بود. در مورد کران پائین نیز برهان مشابه است.

مثال: اگر $A = \{x \in Z \mid x < 20 , 3 \mid x\}$، آیا A کراندار است؟ آیا A ماکسیمم دارد؟

جواب: A فقط از بالا کراندار است و 18 کران بالای آن و ماکسیمم آن است.

تذکر: مجموعه تهی ϕ کراندار است زیرا گزارهٔ

$$\exists \alpha\ \exists \beta\ \forall x\ (x \in \phi \ \supset\ \alpha < x < \beta)$$

راست است. و در واقع هر عدد یک کران بالای آن و نیز یک کران پایین خواهد بود.

۲.۳.۳ تعریف: A مجموعه‌ای از اعداد حقیقی است. عددی حقیقی مانند α را **سوپریمم** A می‌نامیم اگر α یک کران بالای A بوده و از هر کران بالای A نابیشتر باشد. به همین ترتیب عددی مانند β را **اینفیمم** A می‌نامیم اگر یک کران پایین A بوده و از هر کران پایین A ناکمتر باشد. سوپریمم A و اینفیمم A را به ترتیب به علائم Sup A و inf A نشان می‌دهیم.

تذکر: با توجه به تعریف و تذکر بالا معلوم است که ϕ در $\Re$ سوپریمم و اینفیمم ندارد و اگر مجموعه‌ای دارای سوپریمم و یا اینفیمم باشد مجموعه‌ای غیرتهی است.

۳.۳.۳ قضیّه: A مجموعه‌ای از اعداد حقیقی است. در این صورت Sup A و inf A در صورت وجود منحصر بفرد است، بعلاوه $\inf A \le \operatorname{Sup} A$.

برهان: اگر α_1 و α_2 سوپریممهای A باشند هر یک از آنها یک کران بالای A است و براساس تعریف سوپریمم $\alpha_1 \le \alpha_2$ و $\alpha_2 \le \alpha_1$. پس، $\alpha_1 = \alpha_2$.

برهان در مورد اینفیمم مشابه است.

برای اثبات قسمت دوم اگر Sup A و inf A موجود باشند A غیرتهی است (تذکر اخیر). در نتیجه، A عضوی مانند a دارد که

$$a \le \sup A \quad \text{و} \quad \inf A \le a$$

یعنی $\inf A \leq \operatorname{Sup} A$. □

مثال: اگر A مجموعه‌ای از اعداد حقیقی و B مجموعهٔ متشکل از متقابلهای اعضای A باشد نشان دهید $\inf B = -\operatorname{Sup} A$ و $\operatorname{Sup} B = -\inf A$ (به ترتیب، به شرط وجود $\operatorname{Sup} A$ و $\inf A$).

جواب: غیرتهی بودن A با توجه به وجود $\operatorname{Sup} A$ بدیهی است و بنابراین B غیرتهی است. اگر $\alpha = \operatorname{Sup} A$، به ازای هر $x \in A$، $x \leq \alpha$. بنابراین $-x \in B$ و $-\alpha \leq -x$. یعنی، $-\alpha$ یک کران پائین B است.

حال اگر β یک کران بالای A باشد برحسب تعریف α لازم است $\alpha \leq \beta$. از اینجا نتیجه می‌شود که اولاً $-\beta$ یک کران پائین B است و ثانیاً $-\beta \leq -\alpha$. پس $-\alpha$ بزرگترین کران پائین B است، یعنی $-\alpha = \inf B$ و یا $-\operatorname{Sup} A = \inf B$.

رابطهٔ $\operatorname{Sup} B = -\inf A$ به همین ترتیب ثابت می‌شود که با فرض وجود $\inf A$ غیرتهی بودن A نتیجه شود و به روال بالا عمل می‌کنیم.

مثال: نشان دهید که اگر ماکسیمم (مینیمم) مجموعه‌ای از اعداد موجود باشد آنگاه سوپریمم (اینفیمم) آن نیز موجود و با آن مساوی است. بالعکس، اگر سوپریمم (اینفیمم) مجموعه‌ای از اعداد موجود و متعلق به مجموعه باشد ماکسیمم (مینیمم) آن نیز موجود و با آن مساوی است.

جواب: A مجموعه‌ای از اعداد حقیقی فرض می‌شود.

اگر $\alpha = \operatorname{Max} A$، براساس تعریف، $\alpha \in A$ و

$$\forall x \in A\ (x \leq \alpha)\,. \tag{۱}$$

به عبارت دیگر α یک کران بالای A خواهد بود. از سوی دیگر فرض کنیم α_1 نیز یک کران بالای A باشد یعنی

$$\forall x \in A\ (x \leq \alpha_1)\,. \tag{۲}$$

بالاخص $\alpha \leq \alpha_1$ (زیرا $\alpha \in A$). از اینکه α_1 یک کران بالای دلخواهی بود پس

$\text{Sup } A = \alpha$.

به همین ترتیب فرض کنیم $\beta = \min A$ موجود باشد پس $\beta \in A$ و

$$\forall x \in A \; (\beta \leq x) .$$

و ادامهٔ برهان و اثبات $\beta = \inf A$ مشابه روش بالاست.

بالعکس، فرض کنیم $a = \text{Sup } A$ موجود بوده و $a \in A$. پس

$$\forall x \in A \; (x \leq a) .$$

یعنی a ماکسیمم مجموعهٔ A است.

به همین ترتیب اگر $b = \inf A$ موجود باشد و $b \in A$ آنگاه

$$\forall x \in A \; (b \leq x) .$$

که براساس تعریف مینیمم، $b = \min A$.

با استفاده از تعاریف سوپریمم و اینفیمم همواره می‌توان در وجود این اعداد (برای مجموعه‌های اعداد حقیقی) تحقیق کرد، ولی دو قضیهٔ زیر که به نام خواصّ مشخصهٔ سوپریمم و اینفیمم معروفند کارایی زیادی در محاسبات مربوط به سوپریمم و اینفیمم دارند و ارزیابی نامساویها را آسان‌تر می‌کنند. علامت ε (اپسیلون) به معنی عدد حقیقی مثبت است.

۴.۳.۳ قضیّه: عدد حقیقی α سوپریمم مجموعهٔ غیرتهی A است اگر و فقط اگر در عین حال:

(آ): $\forall x \in A \; (x \leq \alpha)$؛

(ب): $\forall \varepsilon \; \exists x \in A \; (\alpha - \varepsilon < x)$.

برهان: (لزوم شرط): اگر $\alpha = \text{Sup } A$ آنگاه شرط (آ) از تعریف سوپریمم نتیجه می‌شود. فرض کنیم (ب) برقرار نباشد. در این صورت،

$$\exists \varepsilon \; \forall x \in A \; (\alpha - \varepsilon \geq x)$$

یعنی $\alpha - \varepsilon$ یک کران بالای A است و از اینجا نتیجه می‌شود که

$$\alpha \le \alpha - \varepsilon .$$

که به تناقض $0 \le \varepsilon$ منجر می‌شود. با این تناقض شرط (ب) ثابت می‌گردد و برهان لزوم شرط به پایان می‌رسد.

(کفایت شرط): از برقراری (آ) نتیجه می‌شود که α یک کران بالای A است. می‌گوییم α کوچکترین کران بالاست، زیرا اگر α_1 یک کران بالای دلخواهی از A باشد آنگاه به ازای هر $x \in A$، $x \le \alpha_1$. و براساس (ب)، به ازای ε ای دلخواه x_0ای وجود دارد که $\alpha - \varepsilon < x_0$. بنابراین $\alpha - \varepsilon < x_0 \le \alpha_1$ و یا $\alpha - \varepsilon < \alpha_1$. این رابطه به ازای هر ε برقرار است و براساس ۸.۲.۳ نتیجه می‌شود که $\alpha \le \alpha_1$. بنابراین $\operatorname{Sup} A = \alpha$. □

۵.۳.۳ قضیّه: عدد حقیقی β اینفیمم مجموعهٔ غیرتهی A است اگر و فقط اگر در عین حال:

(آ): $\forall x \in A\ (x \ge \beta)$؛

(ب): $\forall \varepsilon\ \exists x \in A\ (\beta + \varepsilon > x)$.

برهان: (لزوم شرط): اگر $\beta = \inf A$، شرط (آ) براساس تعریف برقرار است. فرض کنیم (ب) برقرار نباشد. پس،

$$\exists \varepsilon\ \forall x \in A\ (\beta + \varepsilon \le x) .$$

یعنی $\beta + \varepsilon$ یک کران پایین A بوده و لازم است $\beta + \varepsilon \le \beta$. پس، $0 \le \varepsilon$ که یک تناقض است. با این تناقض (ب) ثابت می‌شود.

(کفایت شرط): از برقراری (آ) نتیجه می‌شود که β یک کران پایین A است. می‌گوئیم β بزرگترین کران پائین A است، زیرا اگر β_1 یک کران پایین دلخواه A باشد ولی $\beta_1 \le \beta$ برقرار نباشد آنگاه $\beta_1 > \beta$. با قرار دادن $\varepsilon = \beta_1 - \beta$ از (ب) در می‌یابیم که $x_0 \in A$ای وجود دارد به طوری که

$$\beta + (\beta_1 - \beta) > x_0 \text{ و } x_0 \ge \beta_1$$

پس $\beta_1 > \beta_1$. با این تناقض نتیجه می‌شود که $\beta_1 \le \beta$ و $\beta = \inf A$.

مثال: در مورد مجموعهٔ $A = \{x \mid 1 < x < \frac{3}{2}\}$ اگر دارای سوپریمم و یا اینفیمم است خواص مشخصه را به ازای $\varepsilon = \frac{1}{10}$ تحقیق کنید.

جواب: ادعا می‌کنیم $\mathrm{Sup}\, A = \frac{3}{2}$. اولاً به ازای هر $x \in A$، $x < \frac{3}{2}$ پس $x \le \frac{3}{2}$. ثانیاً اگر $\frac{3}{2} - \frac{1}{10} < x_0$ آنگاه $\frac{7}{5} < x_0$ و هر مقدار برای x_0 که $\frac{7}{5} < x_0 < \frac{3}{2}$ قابل قبول است و شرط دوم قضیهٔ ۴.۳.۳ را برقرار می‌کند.

به همین ترتیب ادّعا می‌کنیم $\inf A = 1$. برای اثبات می‌گوئیم: شرط $1 < x$ همواره در A برقرار است، پس $1 \le x$. و اگر $x_0 < 1 + \frac{1}{10}$ آنگاه $x_0 < \frac{11}{10}$ بنابراین هر x_0 که $1 < x_0 < \frac{11}{10}$، شرط دوم قضیهٔ ۵.۳.۳ را برقرار می‌کند.

مثال: در وجود سوپریمم، اینفیمم، ماکسیمم و مینیمم مجموعهٔ

$$\{x \mid 1 \le |x| < 3\}$$

تحقیق کنید.

جواب: از تعریف قدر مطلق نتیجه می‌شود که

$$A = \{x \mid (1 \le x < 3) \vee (-3 < x \le -1)\}.$$

$\mathrm{Sup}\, A = 3$ و $\inf A = -3$ زیرا به ازای هر $x \in A$ اگر $1 \le x < 3$ آنگاه $x \le 3$ و اگر $-3 < x \le -1$ آنگاه $x \le -1 < 3$ و یا $x < 3$. پس $x \le 3$. یعنی 3 یک کران بالای A است.

به ازای εای دلخواه و ثابت x_0ای از A وجود دارد که $3 - \varepsilon < x_0 < 3$ (با تشخیص حالات مختلف برای ε). بنابراین $\mathrm{Sup}\, A = 3$.

به همین ترتیب ثابت می‌شود که $\inf A = -3$. از اینکه $3 \notin A$ و $-3 \notin A$ پس، A ماکسیمم و مینیمم ندارد.

مثال: A یک مجموعه از اعداد حقیقی و $\mathrm{Sup}\, A$ و $\inf A$ موجود است. همچنین c عددی ثابت است و مجموعهٔ B چنین تعریف می‌شود

$$B = \{x + c \mid x \in A\}.$$

نشان دهید، $\operatorname{Sup} B$ و $\inf B$ موجود است، بعلاوه $\operatorname{Sup} B = c + \operatorname{Sup} A$ و $\inf B = c + \inf A$.

جواب: از اینکه $\operatorname{Sup} A$ و $\inf A$ موجود است، A غیرتهی و کراندار است (از بالا و پایین). پس اعداد ثابتی مانند a و b وجود دارد که

$$\forall x \in A \, (a < x < b)$$

و یا، $a + c < x + c < b + c$. بنابراین B کراندار است.

قرار می‌دهیم $\alpha = \operatorname{Sup} A$ و $\beta = \inf A$.

اولاً: به ازای هر $x \in A$، $x + c \leq \alpha + c$ و $\beta + c \leq x + c$. پس $\alpha + c$ یک کران بالای B و $\beta + c$ یک کران پایین آن خواهد بود.

ثانیاً: به ازای هر ε اعضایی مانند x_0 و y_0 از A یافت می‌شوند که

$$\alpha - \varepsilon < x_0 \text{ و } \beta + \varepsilon > y_0 .$$

بنابراین $y_0 + c \in B$، $x_0 + c \in B$ و

$$(\alpha + c) - \varepsilon < x_0 + c \text{ و } (\beta + c) + \varepsilon < y_0 + c .$$

یعنی خواص مشخصهٔ سوپریمم و اینفیمم برقرار است و

$$\alpha + c = \operatorname{Sup} B \text{ و } \beta + c = \inf B.$$

تذکر: در مجموعهٔ اعداد حقیقی زیر مجموعه‌های مهم آن، یعنی N ، Z و Q، را شناختیم و گفتیم که اگر عددی گویا نباشد آن را اصمّ می‌نامیم. اینک به این سؤال مهم که «آیا عدد اصمّ وجود دارد» پاسخ می‌دهیم. مفاهیم سوپریمم و اینفیمم را نیز به عنوان ابزارهای مهمّ به کار خواهیم برد و براساس نتیجهٔ مهمّی که همانا جواب مثبت به سؤال مذکور است خواهیم توانست اصل موضوع تمامیت را در $\mathfrak{R}$ بیان کنیم.

۶.۳.۳ قضیّه:

(آ): هیچ عددگویایی وجود ندارد که جواب معادلهٔ $x^2 - 2 = 0$ باشد؛

(ب): اگر a عدد گویا و مثبتی باشد و $a^2 < 2$ آنگاه عدد گویایی مانند b وجود دارد که $a < b$ و $b^2 < 2$؛

(پ): اگر a عدد گویا و مثبتی باشد و $a^2 > 2$ آنگاه عدد گویایی مانند b وجود دارد که $b < a$ و $b^2 > 2$؛

(ت): زیرمجموعه‌ای غیرتهی از اعداد گویا وجود دارد که از بالا کراندار است ولی سوپریممی در Q ندارد.

برهان (آ): معادلهٔ $x^2 - 2 = 0$ یک معادلهٔ تکین است که ضرایب آن اعداد صحیح هستند. و بنابر قضیهٔ گاوس هر جواب گویای آن یک جواب صحیح و از مقسوم‌علیه‌های 2- (جملهٔ ثابت) خواهدبود. پس جوابهای گویای $x^2 - 2 = 0$ در صورت وجود ± 1 یا ± 2 خواهند بود و به طوری که ملاحظه می‌شود هیچکدام از اینها جواب معادله نیست.

(ب): $2-a^2$ مثبت است. قرار می‌دهیم $b = a + h$ که $h \in Q$ و $0 < h < \min\{1, \frac{2-a^2}{2a+1}\}$. چنین h ای وجود دارد، زیرا $\frac{2-a^2}{2a+1}$ و 1 اعداد گویای مثبت هستند و بین مینیمم آنها و صفر اعداد گویایی وجود دارد. بنابراین

$$b^2 = (a+h)^2 = a^2+(2a+h)h < a^2+(2a+1)h < a^2+(2a+1)\frac{2-a^2}{2a+1}$$

و یا

$$b^2 < a^2 + 2 - a^2 = 2 .$$

(پ): $a^2 - 2$ منفی است. قرار می‌دهیم $b = a - k$ که در آن

$$k = \frac{a^2 - 2}{2a} \text{ و } k \in Q$$

و خواهیم داشت:

$$b^2 = (a - k)^2 = a^2 + (k - 2a)k > a^2 + (0 - 2a)k = a^2 - 2a\,\frac{a^2 - 2}{2a}$$

و یا $b^2 > 2$.

(ت): با توجه به (ب) مجموعهٔ

$$A = \{x \in Q \mid x > 0 \text{ و } x^2 < 2\}$$

را در نظر می‌گیریم. اولاً: $1 \in A$ و ثانیاً: A از بالا به عدد 3 کراندار است. می‌گوییم A سوپریممی در Q ندارد. به فرض خلف اگر $r = \text{Sup } A$ و r عدد گویایی باشد، از اینکه $1 \in A$ پس $r \geq 1$ پس $r > 0$. براساس حکم (آ)، $r^2 - 2 \neq 0$ و بنابر اصل موضوع ترتیب در اعداد حقیقی دو حالت زیر اتّفاق می‌افتد:

حالت اول: $r^2 < 2$،

حالت دوم: $r^2 > 2$.

در حالت اول بنابر (ب) عددگویائی مانند r_1 وجود دارد که $r < r_1$ و $r_1^2 < 2$. یعنی $r_1 \in A$. و این با تعریف r $(r = \text{Sup } A)$ متناقض است.

در حالت دوم بنابر (پ) عدد گویائی مانند r_2 وجود دارد که $r_2 < r$ و $r_2^2 > 2$.

اکنون با استفاده از خواص مشخصهٔ سوپریمم و توجه به $r = \text{Sup } A$ نتیجه می‌شود که به ازای $\varepsilon = r - r_2$ (که عددی مثبت است) عضوی از A مانند r_3 وجود دارد که:

$$r - \varepsilon < r_3$$

و یا $r - (r - r_2) < r_3$ و یا $r_2 < r_3$. از اینجا رابطهٔ $r_3^2 > r_2^2 > 2$ و یا رابطهٔ

$$r_3^2 > 2$$

را خواهیم داشت و این رابطه با $r_3 \in A$ تناقض دارد. □

تذکر: قسمت آخر قضیهٔ بالا نقصی در میدان مرتب Q را مشخص می‌کند، زیرا براساس تعریف سوپریمم لازم است مجموعهٔ A [مذکور در برهان قسمت (ت)] دارای سوپریممی باشد که ملاحظه کردیم در Q قرار نخواهد گرفت و با بیان اصل موضوع تمامیّت در $\mathfrak{R}$ می‌توان به این نقیصه پایان داد و نیز جوابی برای معادلهٔ $x^2 - 2 = 0$ ارائه کرد.

۷.۳.۳ اصل موضوع تمامیّت: هر مجموعهٔ غیرتهی از اعداد حقیقی که کران بالا داشته باشد دارای سوپریمم است.

از این اصل هم در اثبات احکام مربوط به وجود جواب برای معادلات صحیح $x^2 - 2 = 0$ و $x^n - a = 0$ $(a > 0)$ استفاده می‌شود و هم در اثبات این حکم که «هر مجموعهٔ غیرتهی از اعداد حقیقی که کران پایین داشته باشد دارای اینفیمم است»

اثبات وجود جواب برای آن معادلات به موجب تعریف رادیکال و یا توانهای گویای اعداد شده و در بخش آینده به بررسی آنها خواهیم پرداخت. این بخش را با چند مثال و کاربرد از اصل موضوع تمامیّت به پایان می‌بریم.

مثال: ثابت کنید یک و فقط یک عدد حقیقی و مثبت وجود دارد که در معادلهٔ $x^2 - 2 = 0$ صدق می‌کند.

این عدد را به علامت $\sqrt{2}$ نشان می‌دهیم. حکم این مثال را با قسمت (آ) از قضیّهٔ ۶.۳.۳ مقایسه کنید.

جواب: (اثبات وجود): مجموعهٔ $X = \{x \in \Re \mid x > 0 \text{ و } x^2 < 2\}$ غیرتهی و کراندار است، زیرا $1 \in X$ و مثلاً 3 یک کران بالای آن است. بنابر اصل موضوع تمامیّت $\alpha \in \Re$ ای وجود دارد که $\alpha = \operatorname{Sup} X$. از اینکه $1 \in X$ پس $\alpha \geq 1 > 0$ یعنی α مثبت است. ادعا می‌کنیم $\alpha^2 = 2$. زیرا اگر چنین نباشد $\alpha^2 < 2$ یا $\alpha^2 > 2$.

حالت اول $(\alpha^2 < 2)$: در این حالت به روش قسمت (ب) قضیهٔ ۶.۳.۳ (فقط با قید عدد حقیقی) عددی مانند β بزرگتر از α وجود دارد که $\beta^2 < 2$. و این نتیجه با سوپریمم بودن α متناقض است. یعنی $\alpha^2 < 2$ برقرار نیست.

حالت دوم $(\alpha^2 > 2)$: در این حالت نیز به روش قسمت (پ) قضیهٔ ۶.۳.۳ و با قید عدد حقیقی نتیجه می‌شود که: عددی کوچکتر از α مانند γ وجود دارد که $\gamma^2 > 2$. شرط $\gamma < \alpha$ در این حالت نشان می‌دهد که γ یک کران بالای A است، یعنی به ازای هر $x \in A$، $x \leq \gamma$. زیرا اگر چنین نباشد آنگاه $x_0 \in A$ ای وجود دارد که $x_0 > \gamma$. پس $x_0^2 > \gamma^2$ و یا $2 > \gamma^2$ (زیرا $x_0 \in A$) و $\gamma^2 > 2$ با شرط بدست آمدهٔ γ (یعنی $\gamma^2 > 2$) متناقض است. در نتیجه، γ یک کران بالای A است و لازم است $\alpha \leq \gamma$ که با شرط

$\alpha > \gamma$ متناقض است. پس شرط $\alpha^2 > 2$ نیز برقرار نخواهد بود.

(یکتائی جواب): اگر x و y اعداد حقیقی مثبت و جواب معادله باشند آنگاه $x^2 = y^2$ و بنابراین $x = y$ (براساس قضایای مربوط به محاسبهٔ توان اعداد حقیقی مثبت).

تذکر: عدد به دست آمده در مثال بالا اولین عدد غیرگویایی است که به علامت $\sqrt{2}$ نشان داده‌ایم. پس «عدد اصم» وجود دارد.

مثال: هر زیرمجموعهٔ غیرتهی از هر مجموعهٔ غیرتهی و از بالاکراندار دارای سوپریممی است که از سوپریمم مجموعهٔ اصلی نابیشتر است.

جواب: فرض کنیم A غیرتهی و از بالاکراندار و B زیرمجموعه‌ای غیرتهی از A باشد. براساس اصل موضوع تمامیّت A دارای سوپریممی مانند α است. α یک کران بالای B خواهد بود (زیر $B \subseteq A$)، پس B غیرتهی و از بالاکراندار است و براساس اصل موضوع تمامیّت دارای سوپریمم است. اگر $\beta = \text{Sup B}$ آنگاه $\beta \leq \alpha$ (زیرا α یک کران بالای B بود.)

مثال: $c > 0$ یک عدد حقیقی مفروض و A مجموعه‌ای غیرتهی و از بالاکراندار است. نشان دهید مجموعهٔ $B = \{cx \mid x \in A\}$ دارای سوپریمم است و $\text{Sup B} = c.\text{Sup A}$.

جواب: اولاً B از بالاکراندار است، زیرا اگر k یک کران بالای A باشد آنگاه به ازای هر $x \in A$، $x \leq k$ و بنابراین، $cx \leq ck$ $(c > 0)$. و براساس اصل موضوع تمامیّت Sup B موجود خواهد بود.

قرار می‌دهیم $\alpha = \text{Sup A}$ و $\beta = \text{Sup B}$. به ازای هر $x \in A$، $cx \leq c\alpha$ پس $c\alpha$ یک کران بالای B بوده و در نتیجه $\beta \leq c\alpha$. همچنین، به ازای هر ε دلخواه $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{c}$ نیز عدد مثبت دلخواهی است و $x_0 \in A$ ای وجود دارد که $\alpha - \varepsilon_1 < x_0$. بنابراین

$$c\,\alpha - c\varepsilon_1 < cx_0$$

و یا $c\alpha - \varepsilon < cx_0$ (که $cx_0 \in B$). از رابطهٔ اخیر، $c\alpha - \varepsilon < cx_0 \leq \beta$ نتیجه می‌شود و

$\varepsilon + \beta > c\alpha$ به ازای هر ε برقرار است. پس $c\alpha \le \beta$. و در نتیجه، $\beta = c\alpha$.

مثال: اگر X و Y دو مجموعهٔ غیرتهی و کراندار از اعداد حقیقی باشند و مجموعهٔ T چنین تعریف شود:

$$T = \{x + y \mid x \in X , y \in Y\}$$

ثابت کنید Sup T موجود است و $\text{Sup T} = \text{Sup X} + \text{Sup Y}$.

جواب: از غیرتهی بودن X و Y غیرتهی بودن T نتیجه می‌شود، همچنین بنابر اصل موضوع تمامیّت $\alpha = \text{Sup X}$ و $\beta = \text{Sup Y}$ موجود است. و نیز X و Y کراندارند پس از بالا کراندار بوده و اثبات کراندار بودن T از بالا به آسانی امکان‌پذیر است یعنی SupT موجود خواهد بود. قرار می‌دهیم $\gamma = \text{Sup T}$. برای اثبات تساوی $\gamma = \alpha + \beta$ چنین عمل می‌کنیم:

به ازای هر $x \in X$ و $y \in Y$، $x + y$ عضو دلخواهی از T است و $y \le \beta$ و $x \le \alpha$ پس، $x + y \le \alpha + \beta$. یعنی $\alpha + \beta$ یک کران بالای T است. بنابراین

$$\gamma \le \alpha + \beta . \tag{۱}$$

همچنین به ازای هر ε، $x_0 \in X$ ای و $y_0 \in Y$ ای وجود دارند که

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < x_0 \quad \text{و} \quad \beta - \frac{\varepsilon}{2} < y_0 .$$

و یا،

$$\alpha + \beta - \varepsilon < x_0 + y_0 \le \gamma$$

و یا $\alpha + \beta - \varepsilon < \gamma$. که بنابر دلخواه بودن ε خواهیم داشت:

$$\alpha + \beta \le \gamma . \tag{۲}$$

(۱) و (۲) تساوی موردنظر را نتیجه می‌دهند.

مثال: نشان دهید هر مجموعهٔ غیرتهی از اعداد حقیقی که کران پایین داشته باشد دارای اینفیمم است.

جواب: مجموعهٔ $B = \{-x \mid x \in A\}$ غیرتهی است و از بالا کراندار خواهد بود.

بنابراین $\text{Sup } B$ موجود است و بنابر مثالی که بعد از قضیهٔ ۳.۳.۳ بیان شد، $\inf A$ وجود دارد و $\text{Sup } B = -\inf A$.

مثال: اگر $0 > c$ عددی حقیقی و ثابت و A مجموعه‌ای غیرتهی و کراندار از اعداد حقیقی باشد و $B = \{cx \mid x \in A\}$، نشان دهید

$$\inf B = c \text{ Sup } A \text{ و } \text{Sup } B = c \inf A$$

جواب: B کراندار است (با توجه به کراندار بودن A). قرار می‌دهیم:

$$\alpha = \text{Sup } A \text{ و } \beta = \inf A .$$

با توجه به وجود $\text{Sup } A$ و $\inf A$ شرایط زیر برقرار است:

$$\forall x \in A \ (x \leq \alpha) \text{ و } \forall \varepsilon \ \exists x_0 \in A \ (\alpha - \varepsilon < x_0) ,$$

$$\forall x \in A \ (\beta \leq x) \text{ و } \forall \varepsilon \ \exists x_1 \in A \ (\beta + \varepsilon > x_1) .$$

از اینکه c منفی است پس، $cx \geq c\alpha$ و $c\beta \geq cx$ به ازای هر $x \in A$ برقرارند. بنابراین،

$$\inf B \geq c\alpha \text{ و } \text{Sup } B \leq c\beta . \quad (۱)$$

از سوی دیگر،

$$c\alpha - c\varepsilon > cx_0 \text{ و } c\beta + c\varepsilon < cx_1 .$$

پس،

$$c\alpha - c\varepsilon > cx_0 \geq \inf B \text{ و } c\beta + c\varepsilon < cx_1 \leq \text{Sup } B .$$

یعنی، به ازای هر ε، روابط

$$\inf B < c\alpha - c\varepsilon \text{ و } c\beta < \text{Sup } B - c\varepsilon$$

برقرار خواهند بود که با توجه به منفی بودن c نتیجه می‌شود:

$$\inf B \leq c\alpha \ , \ c\beta \leq \text{Sup } B . \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) تساویهای موردنظر به دست می‌آیند.

مثال: به ازای دو مجموعهٔ کراندار و غیرتهی ازاعداد حقیقی نشان دهید

(آ): $\text{Sup } (A \cup B) = \text{Max } \{\text{Sup } A , \text{Sup } B\}$؛

(ب): $\inf (A \cup B) = \min \{\inf A , \inf B\}$.

جواب: با توجه به کراندار بودن A و Bکراندار بودن $(A \cup B)$ نتیجه می‌شود و بنابراین $\operatorname{Sup} (A \cup B)$ و $\inf (A \cup B)$ وجود دارند. قرار می‌دهیم:

$$\alpha_1 = \operatorname{Sup} A \text{ و } \beta_1 = \inf A$$

$$\alpha_2 = \operatorname{Sup} B \text{ و } \beta_2 = \inf B .$$

برهان (آ): از اینکه $A \subseteq A \cup B$ و $B \subseteq A \cup B$ پس

$$\alpha_1 \leq \operatorname{Sup} (A \cup B) \text{ و } \alpha_2 \leq \operatorname{Sup} (A \cup B) .$$

که اگر $\alpha_1 < \alpha_2$ یا $\alpha_2 < \alpha_1$ در هر حالت نتیجه می‌شود

$$\operatorname{Max} \{\alpha_1 , \alpha_2\} \leq \operatorname{Sup} (A \cup B) . \qquad (۱)$$

از سوی دیگر فرض کنیم $x \in (A \cup B)$ عضو دلخواهی باشد، اگر $x \in A$ آنگاه

$$x \leq \alpha_1 \leq \operatorname{Max} \{\alpha_1 , \alpha_2\} .$$

و اگر $x \in B$ آنگاه

$$x \leq \alpha_2 \leq \operatorname{Max} \{\alpha_1 , \alpha_2\} .$$

یعنی، $\operatorname{Max} \{\alpha_1 , \alpha_2\}$ یک کران بالای $A \cup B$ است و در نتیجه،

$$\operatorname{Sup} (A \cup B) \leq \operatorname{Max} \{\alpha_1 , \alpha_2\} \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) تساوی (آ) بدست می‌آید.

(ب): به روش مشابه با (آ) خواهیم داشت:

$$\beta_1 \geq \inf (A \cup B) \text{ و } \beta_2 \geq \inf (A \cup B) .$$

و همواره

$$\min \{\beta_1 , \beta_2\} \geq \inf (A \cup B) . \qquad (۳)$$

به ازای هر $x \in A \cup B$ نیز نتیجه می‌شود

$$x \geq \beta_1 \geq \min \{\beta_1 , \beta_2\} ,$$

$$x \geq \beta_2 \geq \min\{\beta_1 , \beta_2\} .$$

بنابراین $\min\{\beta_1 , \beta_2\}$ یک کران پایین $A \cup B$ است و داریم:

$$\min\{\beta_1 , \beta_2\} \leq \inf (A \cup B) . \qquad (۴)$$

از (۳) و (۴) تساوی (ب) حاصل می‌شود.

مثال: A مجموعه‌ای کراندار و غیرتهی است و $B = \{|x| \mid x \in A\}$. نشان دهید B کراندار است و $\operatorname{Sup} B = \operatorname{Max}\{|\operatorname{Sup} A| , |\inf A|\}$.

جواب: اعداد ثابتی مانند ξ و η یافت می‌شوند که

$$\forall x \in A \ (\eta \leq x \leq \xi) .$$

بنابراین $|x| \leq \operatorname{Max}\{|\xi| , |\eta|\}$. یعنی B کراندار بوده و $\operatorname{Sup} B$ موجوداست.

برای اثبات تساوی فرض کنیم $|x| \in B$ عضو دلخواهی باشد. دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت ۱: اگر $x > 0$ آنگاه

$$|x| = x \leq \operatorname{Sup} A \leq |\operatorname{Sup} A| \leq \operatorname{Max}\{|\operatorname{Sup} A| , |\inf A|\} .$$

حالت ۲: اگر $x < 0$ آنگاه $\inf A$ منفی خواهد بود و از $\inf A \leq x$ خواهیم داشت:

$$|x| = -x \leq -\inf A = |\inf A| \leq \operatorname{Max}\{|\operatorname{Sup} A| , |\inf A|\} .$$

یعنی همواره

$$|x| \leq \operatorname{Max}\{|\operatorname{Sup} A| , |\inf A|\} .$$

و با توجه به تعریف $\operatorname{Sup} B$،

$$\operatorname{Sup} B \leq \operatorname{Max}\{|\operatorname{Sup} A| , |\inf A|\} \qquad (۱)$$

برای اثبات رابطهٔ عکس، کافی است ثابت کنیم که

$$|\operatorname{Sup} A| \leq \operatorname{Sup} B \ \text{ و } \ |\inf A| \leq \operatorname{Sup} B . \qquad (۲)$$

و یا به عبارت معادل کافی است ثابت کنیم:

$$-\operatorname{Sup} B \leq \operatorname{Sup} A \leq \operatorname{Sup} B \ \text{ و } \ -\operatorname{Sup} B \leq \inf A \leq \operatorname{Sup} B . \qquad (۳)$$

و در این صورت، از (۲) نتیجه خواهد شد:

$$\text{Max}\,\{|\text{Sup } A|\,,\,|\inf A|\} \le \text{Sup } B\,. \tag{۴}$$

برای اثبات روابط (۳) فرض کنیم $x \in A$ عضو دلخواهی باشد، پس

$$-\text{Sup } B \le -|x| \le x \le |x| \le \text{Sup } B$$

از $x \le \text{Sup } B$ خواهیم داشت $\text{Sup } A \le \text{Sup } B$ و از $-\text{Sup } B \le x \le \text{Sup } A$ نتیجه می‌شود $-\text{Sup } B \le \text{Sup } A$. بنابراین:

$$-\text{Sup } B \le \text{Sup } A \le \text{Sup } B\,.$$

به همین ترتیب از $-\text{Sup } B \le x$ نتیجه می‌شود $-\text{Sup } B \le \inf A$ و از $\inf A \le x \le \text{Sup } B$ نتیجه می‌شود $\inf A \le \text{Sup } B$. پس،

$$-\text{Sup } B \le \inf A \le \text{Sup } B\,.$$

بدین ترتیب هر دو رابطهٔ (۳) به اثبات می‌رسند و از (۱) و (۴) تساوی

$$\text{Sup } B = \text{Max}\,\{|\text{Sup } A|\,,\,|\inf A|\}$$

را خواهیم داشت.

مثال: با مفروضات مثال قبل نشان دهید

$$0 \le \inf B \le \min\,\{|\text{Sup } A|\,,\,|\inf A|\}\,.$$

جواب: از اینکه به ازای هر $y \in B$، $y \ge 0$ پس، 0 یک کران پایین B است و $0 \le \inf B$.

اثبات نامساوی $\inf B \le \min\,\{|\text{Sup } A|\,,\,|\inf A|\}$ به روش مشابه با برهان قسمت اول مثال قبل است و به خواننده محوّل می‌شود.

۴.۳ قواعد محاسبه با اعداد گویا، اصم و قضیهٔ ددکیند: در بخش قبل ثابت کردیم که عدد اصمّ وجود دارد، به بررسی اعداد اصمّ و خاصیّت مهمی که این اعداد در Q بجا می‌گذارند (ایجاد شکاف و رخنه) می‌پردازیم. برای این منظور به قواعد محاسبه در اعداد گویا نیاز داریم و بیان این قواعد بر مبنای خواصّ مهمی است که از اعداد

صحیح استخراج می‌گردند. مهمترین خاصیّت مقدماتی خاصیّت ارشمیدسی اعداد است.

۱.۴.۳ قضیّه (خاصیّت ارشمیدسی اعداد حقیقی): به ازای هر دو عدد حقیقی a و b که a مثبت باشد عددی طبیعی مانند n وجود دارد که $b < an$.

برهان: برای b دو حالت وجود دارد: اگر $b \leq 0$ آنگاه حکم به ازای $n = 1$ برقرار است، زیرا $an = a > b$. و اگر $b > 0$ آنگاه به برهان خلف عمل می‌کنیم. فرض کنیم حکم برقرار نباشد، یعنی

$$\forall n \in N(b \geq an)$$

مجموعهٔ $B = \{an \mid n \in N\}$ غیرتهی است، زیرا $a \in B$، و از بالا کراندار است، زیرا همواره $an \leq b$. بنابراین B دارای سوپریمم است. اگر $\alpha = \operatorname{Sup} B$ آنگاه براساس تعریف، و به ازای $\varepsilon = a$ عضوی از B مانند ak وجود دارد که

$$\alpha - a < ak .$$

و یا $\alpha < (k + ۱)a$. و این یک تناقض است زیرا $(k + ۱)a \in B$. با این تناقض حکم ثابت می‌شود. □

۲.۴.۳ قضیهٔ:

(آ): به ازای هر عدد حقیقی b عددی طبیعی وجود دارد که از آن بزرگتر است؛

(ب): به ازای هر ε، عددی طبیعی مانند n وجود دارد که $\varepsilon > \frac{۱}{n}$؛

(پ): هر عدد حقیقی بین دو عدد صحیح قرار دارد؛

(ت): به ازای هر عدد حقیقی a یک و فقط یک عدد صحیح مانند n وجود دارد که $n \leq a < n + 1$.

برهان:

(آ): قضیهٔ ۱.۴.۳ را برای $a = ۱ > ۰$ و عدد حقیقی b به‌کار می‌بریم، پس nای وجود دارد (عدد طبیعی) به طوری که $b < 1.n = n$.

(ب): قضیهٔ ۱.۴.۳ را به ازای $b=1$ و $a=\varepsilon$ به‌کار می‌بریم.

(پ): اگر a یک عدد حقیقی باشد $-a$ را نیز در نظر می‌گیریم و حکم قسمت (آ) را به‌کار می‌بریم پس اعدادی طبیعی مانند m و n وجود دارند که $a<m$ و $n>-a$ و یا $-n<a<m$.

(ت): عدد حقیقی a را در نظر می‌گیریم. براساس حکم قسمت (پ)، دو عدد صحیح مانند k_1 و k_2 وجود دارند که $k_1<a<k_2$. مجموعهٔ اعداد صحیح بزرگتر از k_1 و بزرگتر از a را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. مجموعهٔ

$$A = \{k_1 + m \mid m \in N \ , \ k_1 + m > a\}$$

غیرتهی است، زیرا $a<k_2 = k_1 + (k_2-k_1)$ یعنی $a<k_1+m$ $(m=k_2-k_1)$ از اینکه A مجموعه‌ای از اعداد صحیح و از پایین کراندار است بنابراین دارای ابتدا است. اگر $k_1 + m_0$ ابتدای آن باشد آنگاه

$$k_1 + m_o > a \quad \text{و} \quad k_1 + m_o - 1 \leq a \,.$$

بنابراین ،

$$-1 + k_1 + m_o \leq a < k_1 + m_o \,.$$

که با قرار دادن $n = k_1 + m_o - 1$ رابطهٔ $n \leq a < n + 1$ حاصل می‌شود.

برای اتمام برهان قضیه کافی است یکتایی n را در برقراری $n \leq a < n + 1$ ثابت کنیم. اگر n_1ای نیز وجود داشته باشد که

$$n \leq a < n + 1 \ , \ n_1 \leq a < n_1 + 1$$

و $n \neq n_1$ آنگاه دو حالت وجود دارد:

اگر $n<n_1$ رابطهٔ: $n < n_1 \leq a < n_1 + 1$، و اگر $n_1<n$، رابطهٔ

$$n_1 < n \leq a < n_1 + 1$$

حاصل می‌شود. و به طوری که مشاهده می‌شود در هر حالت به تناقضهای $n<n_1<n+1$ و $n_1<n<n_1+1$ می‌رسیم. پس، $n = n_1$. □

مثال: براساس قسمت آخر قضیهٔ ۲.۴.۳ که به ازای هر عدد حقیقی x وجود ویکتایی عدد صحیحی مانند n ثابت می‌شود که $n \leq x < n + 1$، n را جزء صحیح x می‌نامیم و به علامت x می‌نامیم و به علامت $[[x]] = n$ نشان می‌دهیم. احکام زیر را ثابت کنید:

(آ): همواره $x - 1 < [[x]] \leq x$؛

(ب): همواره $0 \leq x - [[x]] < 1$؛

(پ): به ازای هر عدد صحیح k، اگر $k \leq x$ آنگاه $k \leq [[x]]$؛

(ت): به ازای هر عدد صحیح k، اگر $x<k$ آنگاه $[[x]] < k$؛

(ث): اگر $n \in z$ و $a \in \Re$ آنگاه $[[a + n]] = [[a]] + n$؛

(ج): همواره $[[a]] + [[b]] \leq [[a + b]]$؛

(چ) ـ همواره $[[x]] + [[-x]] = \begin{cases} 0, & x\in z \\ -1, & x\notin z \end{cases}$.

جواب: اگر $[[x]] = n$ آنگاه $n \leq x < n + 1$ و (آ) و (ب) به آسانی نتیجه می‌شوند.

(پ): فرض کنیم $[[x]] = n$ و k عدد صحیح دلخواهی باشد که $k \leq x$. بنابراین

$$k \leq x < n + 1 .$$

و یا $k < n + 1$ و از اینجا $k \leq n$.

(ت): اگر $x < k$ آنگاه $[[x]] \leq x < k$ پس $[[x]] < k$.

(ث): داریم $[[a]] \leq a < [[a]] + 1$ و از آنجا

$$[[a]] + n \leq a + n < [[a]] + n + 1$$

و براساس تعریف جزء صحیح، $[[a]] + n = [[a + n]]$

(ج): به ازای اعداد حقیقی a و b داریم:

$$[[a]] \leq a < [[a]] + 1$$

$$[[b]] \leq b < [[b]] + 1$$

و یا،

$$[[a]] + [[b]] \leq a + b < [[a]] + [[b]] + 2 .$$

و دو حالت خواهیم داشت:

$$[[a]] + [[b]] \leq a + b < [[a]] + [[b]] + 1 ,$$

و یا،

$$[[a]] + [[b]] + 1 \leq a + b < [[a]] + [[b]] + 2 .$$

در حالت اول نتیجه می‌شود:

$$[[a]] + [[b]] = [[a + b]]$$

و در حالت دوم نتیجه می‌شود:

$$[[a]] + [[b]] < [[a]] + [[b]] + 1 = [[a + b]]$$

بنابراین،

$$[[a]] + [[b]] \leq [[a + b]] .$$

(چ): اگر x عدد صحیح باشد براساس (ث) ،

$$[[x]] + [[-x]] = x - x = 0$$

و اگر x عدد صحیح نباشد و $n = [[x]]$ آنگاه

$$n < x < n + 1 \quad \text{و} \quad -n - 1 < -x < -n$$

و از آنجا $[-x] = -n - 1$. یعنی،

$$[[x]] + [[-x]] = n - n - 1 = -1 .$$

تذکر: در فصل دوم از تابع جزء صحیح سخن گفتیم و به معلومات مقدماتی خواننده اشاره کردیم و مثالی که در اینجا به آن اشاره شد صرفاً کاربردی از قضیهٔ ۲.۴.۳ بود که وجود تابع جزء صحیح را محرز می‌ساخت. قطعاً در دروس حساب دیفرانسیل و انتگرال به این تابع بیشتر پرداخته خواهد شد و خواصّ بهتری را مطالعه خواهید کرد که از آنجمله می‌توان به تابع **جزء کسری** x که به صورت $\{x\} = x - [[x]]$ نشان داده می‌شود

اشاره کرد.

۳.۴.۳ تعریف: به ازای عدد حقیقی نامنفی a و عدد طبیعی n عدد نامنفی b را که در معادلهٔ $x^n = a$ صدق کند **ریشهٔ nام عدد** a می‌نامیم و به علامت $\sqrt[n]{a}$ نشان می‌دهیم.

در این تعریف وجود b دانسته فرض شده است و نیز از یکتایی آن بحثی نکرده‌ایم. البته وجود b و یکتایی آن نتیجهٔ احکام زیر است که از برهان آنها خودداری می‌کنیم و پس از بیان آنها به خواص ریشه‌های اعداد حقیقی خواهیم پرداخت. خواننده علاقه‌مند می‌تواند برهانها را در کتابهای مرجع بیابد.

۴.۴.۳. قضایای وجود و یکتایی ریشهٔ اعداد:

قضیهٔ اول: a عدد حقیقی مثبت و n یک عدد طبیعی است. در این صورت یک و فقط یک عدد صحیح نامنفی مانند m وجود دارد که $m^n \le a < (m+1)^n$.

قضیهٔ دوم: اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و نیز $a>0$ و $b>1$ آنگاه یک و فقط یک عدد صحیح مانند n وجود دارد که $b^{n-1} \le a < b^n$ بعلاوه

(آ): اگر $a > 1$ آنگاه $n \ge 1$، و

(ب): اگر $0 < a < 1$ آنگاه $n \le 0$.

قضیهٔ سوم: a یک عدد حقیقی و $n\ge2$ عددی است طبیعی. در این صورت به ازای هر عدد صحیح k عدد صحیحی مانند m وجود دارد که

$$mn^k \le a < (m+1)\, n^k.$$

قضیهٔ چهارم: به ازای هر عدد حقیقی a که $a > 1$ و هر عدد طبیعی $n(n \ge 2)$، عددی حقیقی مانند b بین 1 و a وجود دارد که $b^n < a$.

قضیهٔ پنجم: به ازای هر عدد نامنفی a و هر عدد طبیعی n یک و فقط یک عدد نامنفی مانند b وجود دارد که $b^n = a$، به علاوه اگر a مثبت باشد b نیز مثبت است.

این قضیه وجود و یکتایی ریشهٔ nام یک عدد نامنفی را که در تعریف ۳.۴.۳ بیان

کردیم ثابت می‌کند، و قواعد محاسبه با ریشه‌های nام را در قضیهٔ زیر ملاحظه می‌کنیم.

۵.۴.۳ قضیهٔ (خواص ریشهٔ nام): a یک عدد حقیقی نامنفی و n عددی است طبیعی، در این صورت:

(آ): $(\sqrt[n]{a})^n = a$ ، $\sqrt[n]{a^n} = a$ ، $\sqrt[n]{a} = a'$ $\quad$ $\sqrt[n]{1} = 1$ ، $\sqrt[n]{0} = 0$؛

(ب): اگر $x \geq 0$ آنگاه $\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a$؛

(پ): اگر $a > 1$ آنگاه $\sqrt[n]{a} > 1$

(ت): اگر $0 < a < 1$ آنگاه $0 < \sqrt[n]{a} < 1$.

برهان (آ) :

قرار می‌دهیم: $b = \sqrt[n]{a}$ و براساس تعریف ۳.۴.۳، $b^n = a$. همچنین قرار می‌دهیم: $a_1 = a^n$ پس، براساس ۳.۴.۳، $\sqrt[n]{a_1} = a$ (زیرا $a_1 > 0$) و سپس خواهیم داشت $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{a_1} = a$. سه قسمت دیگر مربوط به حکم (آ) نتیجهٔ مستقیم از دو قسمت اول حکم است.

(ب): با تشخیص دو حالت $x=0$ یا $x>0$ و از تعریف ۳.۴.۳ به‌دست می‌آید.

(پ): اگر $a>1$ قرار می‌دهیم $b = \sqrt[n]{a}$. پس، $a^n = b$. از اینکه $a>1$ و n عددی است طبیعی پس $a^n>1$ یعنی $b>1$.

(ت): مشابه (پ) است. □

تذکر مهم: در تعریف $\sqrt[n]{a}$ فرض ما بر این است که $a \geq 0$. ولی معادلهٔ $x^n=a$ به ازای اعدادطبیعی و زوج n جواب‌دیگری نیز دارد که عبارت‌است از $\sqrt[n]{-a}$. پس‌رابطهٔ $\sqrt[n]{a^n}=a$ به ازای هر عدد حقیقی a برقرار نیست و اگر a یک عدد حقیقی (مثبت یا منفی یا صفر) باشد رابطهٔ $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ را خواهیم داشت.

همچنین، اگر $a < 0$ آنگاه به ازای هر عدد طبیعی زوج، مانند n، $\sqrt[n]{a}$ تعریف نمی‌شود، ولی به‌ازای هر عدد طبیعی فرد، مانند n، $\sqrt[n]{a}$ تعریف خواهد شد:

$$\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$$

که در واقع $-\sqrt[n]{|a|}$ ریشهٔ معادلهٔ $x^n = a$ است.

۶.۴.۳ تعریف: فرض کنیم a یک عدد حقیقی و مثبت، و r عددی گویا باشد. اگر $r = \frac{m}{n}$ آنگاه a^r چنین تعریف می‌شود:

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} .$$

مثال: اگر $a > 0$ و $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ آنگاه $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m'}{n'}}$.

جواب: داریم $mn' = m'n$ اگر یکی از m و m' صفر باشد دیگری نیز صفر خواهد بود و تساوی برقرار خواهد شد. و اگر $m \neq 0$ و $m' \neq 0$ آنگاه $a^m > 0$ و $a^{m'} > 0$ و بنابراین $\sqrt[n]{a^m}$ و $\sqrt[n']{a^{m'}}$ با معنی هستند، و اگر قرار دهیم $b = \sqrt[n]{a^m}$ و $b' = \sqrt[n']{a^{m'}}$ آنگاه $b>0$ و $b'>0$ و نیز $a^m = b^n$ و $a^{m'} = (b')^{n'}$. اکنون براساس قواعد محاسبه با توانهای صحیح خواهیم داشت:

$$b^{m'n} = (b^n)^{m'} = (a^m)^{m'} = a^{mm'} = (a^{m'})^m = ((b')^{n'})^m = (b')^{n'm}$$

که با توجه به تساوی $mn' = m'n$ خواهیم داشت $b = b'$.

مثال: به ازای هر عدد حقیقی a و هر عدد گویای r، $a^r > 0$. و اگر $r = \frac{m}{n}$ آنگاه $(a^r)^n = a^m$. و نیز $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

جواب: همهٔ احکام نتایجی از تعریف ۶.۴.۳ هستند و به روش مثال قبل و با خواص توانهای صحیح اعداد حقیقی به اثبات می‌رسند.

۷.۴.۳ قضیّه (قواعد محاسبه با توانهای گویا): r و s اعداد گویا و a و b اعداد حقیقی‌اند

در این صورت با قید شرایط لازم در مورد a و b احکام زیر برقرارند:

(آ): $a^r.a^s = a^{r+s}$، $(a \geq 0)$؛

(ب): $a^r/a^s = a^{r-s}$، $(a > 0)$؛

(پ): $(a^r)^s = a^{rs}$، $(a \geq 0)$؛

(ت): $a^r b^r = (ab)^r$، $(b \geq 0\ ,\ a \geq 0)$؛

(ث): $a^r/b^r = (a/b)^r$، $(b > 0\ ,\ a \geq 0)$؛

(ج): $1^r = 1$

برهان (آ): فرض کنیم $r = \frac{t_1}{t_2}$ و $s = \frac{t_3}{t_4}$. می‌توان قرارداد:

$$r = \frac{t_1 t_4}{t_2 t_4} = \frac{m}{n} \quad و \quad s = \frac{t_3 t_2}{t_2 t_4} = \frac{m'}{n}.$$

فرض کنیم $x = a^r = a^{\frac{m}{n}}$ و $y = a^s = a^{\frac{m}{n}}$ و بنابر مثال قبل

$$x^n = a^m \quad و \quad y^n = a^{m'}.$$

و بنابر قواعد محاسبه با توانهای صحیح

$$(xy)^n = a^m a^{m'} = a^{m+m'}.$$

یعنی، xy ریشهٔ nام $a^{m+m'}$ است و یا

$$xy = a^{\frac{m+m'}{n}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{m'}{n}} = a^{r+s}$$

یعنی،

$$a^r\,.\,a^s = a^{r+s}.$$

(ب): از (آ) استفاده می‌کنیم:

$$a^{r-s}.\,a^s = a^{r-s+s} = a^r$$

که با تقسیم طرفین بر عدد a^r (که مثبت است) خواهیم داشت:

$$a^{r-s} = a^r/a^s .$$

(پ): $r = \dfrac{m}{n}$ و $s = \dfrac{m'}{n'}$. قرار دهیم $x = a^r$، $y = (a^r)^s$ و $t = a^{rs}$. و از اینجا روابط زیر را خواهیم داشت:

$$x^n = a^m \ , \ y^{n'} = x^{m'} \ , \ t^{nn'} = a^{mm'} = (a^m)^{m'} = (x^n)^{m'} = (x^{m'})^n = y^{n'n}$$

و یا $y^{n'n} = t^{n'n}$ که به نتیجهٔ $y = t$ می‌رسیم.

(ت): اگر $r = \dfrac{m}{n}$، $x = a^r$ و $y = b^r$ آنگاه $x^n = a^m$ و $y^n = b^m$. و از آنجا،

$$(xy)^n = x^n y^n = a^m b^m = (ab)^m .$$

یعنی xy ریشهٔ nام عدد مثبت $(ab)^m$ است. به عبارت دیگر،

$$xy = \sqrt[n]{(ab)^m} = (ab)^{\frac{m}{n}} = (ab)^r .$$

و یا

$$a^r b^r = (ab)^r.$$

(ث) ـ از (ت) استفاده می‌کنیم:

$$(a/b)^r . b^r = ((a/b).b)^r = a^r$$

که با تقسیم طرفین بر b^r $(b^r > 0)$ نتیجه حاصل می‌شود.

(ج): قرار می‌دهیم $r = \dfrac{m}{n}$ و $x = 1^r$ پس $x^n = 1^m = 1$ و یا $x = \sqrt[n]{1}$ بنابراین $x = \sqrt[n]{1^m} = 1^{\frac{m}{n}}$. □

خواصّ توانهای گویای اعداد حقیقی مثبت در نامساویهای اعدا نیز مشهود است. قضیهٔ زیر را که نتیجه‌ای از تعریف توان گویای اعداد و خواص توان صحیح اعداد حقیقی است بدون برهان بیان می‌کنیم و برهان آن مشابه قضیهٔ قبل خواهد بود و از این قضیهٔ در اثبات نامساویهایی در اعداد استفاده خواهیم کرد و مثالهایی را بلافاصله پس از بیان آن خواهیم آورد.

۸.۴.۳ قضیهٔ (خواص توانهای گویای اعداد): a و b اعدادی حقیقی و r و s اعدادی گویا

هستند،

(آ): اگر $a>1$ آنگاه $(r > 0 \iff a^r > 1)$

(ب): اگر $a>1$ آنگاه $(r < 0 \iff a^r < 1)$

(پ): اگر $0<a<1$ آنگاه $(r > 0 \iff a^r < 1)$

(ت): اگر $0<a<1$ آنگاه $(r < 0 \iff a^r > 1)$

(ث): اگر a،b و r مثبت باشند آنگاه $(a < b \iff a^r < b^r)$؛

(ج): اگر a و b مثبت و $r<0$ باشند آنگاه $(a < b \iff a^r > b^r)$؛

(چ): اگر a و b مثبت باشد، $r\neq 0$ و $a^r = b^r$ آنگاه $a = b$؛

(ح): اگر $a>1$ آنگاه $a^r < a^s \iff r < s$؛

(خ): اگر $0<a<1$ آنگاه $a^s < a^r \iff r < s$.

مثال: به ازای هر عدد حقیقی h که $1 + h \geq 0$ و به ازای هر عدد طبیعی n نشان دهید:

$$\sqrt[n]{1 + h} \leq 1 + \frac{h}{n}.$$

و شرط برقراری تساوی را بیابید.

جواب: اگر $h = -1$ حکم بدیهی است، زیر $n \geq 1$. و اگر $1 + h > 0$ قرار می‌دهیم $h' = \frac{h}{n}$. بنابراین

$$1 + h' > 1 - (1/n) \geq 0.$$

اکنون از نامساوی برنویی (۴.۱۶.۲.۳ ملاحظه شود) استفاده می‌کنیم:

$$0 < 1 + nh' \leq (1 + h')^n.$$

از اینکه $1 + h' > 1$، می‌توان از حکم (ح) ـ قضیهٔ ۸.۴.۳ استفاده نمود:

$$(1 + nh')^{\frac{1}{n}} \leq (1 + h')^{\frac{n}{n}} = 1 + h'$$

و یا

$$\sqrt[n]{1 + h} \leq 1 + \frac{h}{n}.$$

شرط لازم و کافی برای تساوی $h=0$ یا $n=1$ است، زیرا اگر $h=0$ یا $n=1$ تساوی برقرار است و بالعکس با داشتن تساوی حکم به تساوی $(1+nh')=(1+h')^n$ خواهیم رسید که با توجه به شرط تساوی در نامساوی برنویی، $h=0$ یا $n=1$.

مثال: اگر n یک عدد طبیعی و $\{a_i\}_1^n$ و $\{b_i\}_1^n$ دنباله‌هایی از اعداد حقیقی باشند آنگاه

$$\text{(آ):}\quad \left|\sum_{i=1}^n a_ib_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

$$\text{(ب):}\quad \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \ge \left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

جواب: بنابر نامساوی کُشی (مثالی در بخش ۳.۱۵.۲.۳) داریم:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^n a_i^2\ \sum_{i=1}^n b_i^2$$

و با توجه به تعریف ریشهٔ دوم اعداد

$$\left|\sum_{i=1}^n a_ib_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}\ .$$

برای اثبات قسمت (ب) از (آ) استفاده می‌کنیم. ابتدا $\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^2$ را بسط می‌دهیم:

$$\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2\sum_{i=1}^n a_ib_i$$

$$\le \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right|\ .$$

و یا

$$\sum_{i=1}^{n'}(a_i + b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}a_i^2 + \sum_{i=1}^{n}b_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$$

$$= (\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2})^2 .$$

پس،

$$(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$$

مثال: با استفاده از نامساویهای مثال قبل نشان دهید $\sqrt{17} < \sqrt{2} + \sqrt{10}$.

جواب: دنباله‌های $\{a_i\}$ و $\{b_i\}$ را مشخص می‌کنیم:

$$\sqrt{10} + \sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 3^2} + \sqrt{1^2 + 1^2} \geq \sqrt{(1 + 1)^2 + (3 + 1)^2} = \sqrt{20}$$

و بدیهی است که $\sqrt{20} > \sqrt{17}$ (قسمت (ث) قضیهٔ ۸.۴.۳).

مثال: به ازای اعداد حقیقی و مثبت a و b نشان دهید

(آ): $\dfrac{a}{\sqrt{b}} + \dfrac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

(ب): $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

جواب: از قسمت (ث) قضیهٔ ۸.۴.۳ استفاده می‌کنیم. بدین ترتیب که چون طرفین هر یک از نامساویها مثبت است پس هر نامساوی معادل با نامساوی حاصل از مجذور کردن آنها خواهد بود. به عبارت دیگر، (آ) و (ب) به‌ترتیب معادلند با:

(آ)′ $(\dfrac{a}{\sqrt{b}} + \dfrac{b}{\sqrt{a}})^2 \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 ,$

(ب)′ $a + b \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 .$

و به طریق اولیٰ این نامساویها معادلند با

(آ)″ $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{a} + 2\sqrt{ab} \geq a + b + 2\sqrt{ab} ,$

(ب)″ $a + b \leq a + b + 2\sqrt{ab} .$

و یا معادلند با

$$(\text{آ})''' \quad a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2 ,$$

$$(\text{ب})''' \quad 0 \leq 2\sqrt{ab} .$$

رابطهٔ دوم بدیهی است زیرا a و b مثبت هستند و رابطهٔ اول معادل است با

$$(a + b)(a^2 + b^2 - ab) \geq ab(a + b)$$

و یا معادل است با $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$ (زیرا $a + b > 0$). که این رابطه نیز معادل با نامساوی بدیهی $(a - b)^2 \geq 0$ است.

مثال: اگر $x > 0$ آنگاه

(آ): $\frac{x}{2 + x} < \sqrt{1 + x} - 1 < \frac{x}{2}$ ؛

(ب): $\frac{x}{3 + x} < \sqrt[3]{1 + x} - 1 < \frac{x}{3}$.

جواب: می‌دانیم که اگر $1 + h \geq 0$ و $n \in N$ آنگاه $\sqrt[n]{1 + h} \leq 1 + \frac{h}{n}$ (اولین مثال بعد از قضیهٔ ۸.۴.۳ ملاحظه شود.) بنابراین

$$\sqrt{1 + x} < 1 + \frac{x}{2} ,$$

$$\sqrt[3]{1 + x} < 1 + \frac{x}{3} .$$

که طرفهای راست نامساویهای (آ) و (ب) را نتیجه می‌دهند.

از سوی دیگر با توجه به شرط $x>0$، $\frac{x}{2+x} + 1 > 0$ و نیز $\frac{x}{3+x} + 1 > 0$. پس نامساویهای

$$\frac{x}{2+x} + 1 < \sqrt{1 + x} ,$$

$$\frac{x}{3+x} + 1 < \sqrt[3]{1 + x} ,$$

به ترتیب معادلند با:

$$\frac{2(x+1)}{2+x} < \sqrt{1+x} \ ,$$

$$\frac{3+2x}{3+x} < \sqrt[3]{1+x} \ .$$

و یا معادلند با:

$$\frac{2\sqrt{x+1}}{2+x} < 1 \ ,$$

$$\left(\frac{3+2x}{3+x}\right)^3 < 1+x \ .$$

و یا معادلند با:

$$4(x+1) < 4 + x^2 + 4x$$

$$27 + 8x^3 + 54x + 36x^2 < (27 + 27x + 9x^2 + x^3)(x+1)$$

که خود معادل خواهند بود با روابط؛

$$0 < x^2 ,$$

$$8x^3 < 10x^3 \ .$$

که نامساویهای همیشه برقرارند (زیرا $x>0$).

مثال: a و b اعداد مثبت‌اند و $a - \sqrt{a} \le b - \frac{1}{4} \le a + \sqrt{a}$. نشان دهید

$$b - \sqrt{b} \le a - \frac{1}{4} \le b + \sqrt{b} \ .$$

جواب: از فرض نتیجه می شود:

$$-\sqrt{a} \le b - a - \frac{1}{4} \le \sqrt{a}$$

و یا

$$\left|b - a - \frac{1}{4}\right| \le \sqrt{a} \ .$$

که با توجه به مثبت بودن طرفین معادل است با:

$$\left|b - a - \frac{1}{4}\right|^2 \le a \ ,$$

$$b^2 + a^2 + \frac{1}{16} - 2ab + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \leq a \,,$$

و یا

$$b^2 + a^2 + \frac{1}{16} - 2ab - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \leq 0 \,,$$

و یا

$$b^2 + a^2 + \frac{1}{16} - 2ab - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - b \leq 0 \,,$$

و یا

$$(a - b - \frac{1}{4})^2 \leq b \,.$$

که از آنجا رابطهٔ

$$|a - b - \frac{1}{4}| \leq \sqrt{b}$$

حاصل می شود و به نتیجهٔ

$$-\sqrt{b} \leq a - b - \frac{1}{4} \leq \sqrt{b}$$

منجر خواهد شد و بالاخره نامساوی

$$b - \sqrt{b} \leq a - \frac{1}{4} \leq b + \sqrt{b}$$

حاصل می‌شود.

اینک به خواص و قواعد محاسبه با اعداد اصم می‌پردازیم.

۹.۴.۳ قضیّه (خواص اعداد اصمّ): اگر α عدد اصمّ و r عدد گویا باشد آنگاه

(آ): $\alpha \pm r$، $-\alpha$ و $\frac{1}{\alpha}$ اصم هستند؛

(ب): اگر $r \neq 0$، α/r و $\frac{r}{\alpha}$ اصم‌اند.

برهان: می‌دانیم که مجموعهٔ اعداد گویا نسبت به عمل جمع، تفریق و ضرب بسته است و خارج قسمت دو عدد گویا (به شرط ناصفر بودن مخرج) عددی است گویا. بنابراین، اگر $\alpha + r$ اصم نباشد گویاست و $\alpha = (-r) + r + \alpha$ عدد گویا خواهد بود که خلاف

فرض است.

اثبات احکام دیگر نیز به همین ترتیب و با خواص ذکر شده از اعداد گویاست. □

تذکر: ممکن است حاصل جمع، تفاضل، حاصلضرب و خارج قسمت دو عدد اصم، اصم نباشد به عبارت دیگر مجموعهٔ اعداد اصم نسبت به اعمال فوق بسته نیست، مثلاً $\alpha = \sqrt{2}$ و $\beta = \sqrt{8}$ اصمند، ولی $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2}$ عددی گویاست. و نیز اعداد $a = r + \sqrt{3}$ و $b = r - \sqrt{3}$ که r عدد گویائی است اصم هستند در صورتی که $a + b = 2r$ گویا خواهد بود.

تذکر: به ازای هر عدد حقیقی و مثبت، عدد اصمّی کوچکتر از آن وجود دارد، زیرا اگر α عدد حقیقی مثبتی باشد عددی طبیعی مانند n وجود دارد که $\sqrt{2} < n\alpha$ (خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی به‌ازای α و $\sqrt{2}$). پس $\frac{\sqrt{2}}{n} < \alpha$ و چون n عددی گویا است، $\frac{\sqrt{2}}{n}$ اصم است.

با این تذکرات ملاحظه می‌شود که می‌توان اعداد اصم بیشماری پیدا کرد، و اکنون بررسی رابطهٔ موجود بین اعداد اصم و گویا مورد نظر خواهد بود که موضوع قضایای زیر است.

۳.۴.۱۰ قضیه: بین هر دو عدد حقیقی متمایز عدد گویایی وجود دارد.

برهان: فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی و $a<b$. پس $\frac{1}{b-a} > 0$ و عددی طبیعی مانند n وجود دارد که $\frac{1}{b-a} < n$ و یا

$$\frac{1}{n} < b - a . \qquad (۱)$$

عدد na را در نظر می‌گیریم که جزء صحیح آن عدد صحیح منحصر بفردی مانند m باشد و $m \le na < m + 1$. در نتیجه

$$a < \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \quad \text{و} \quad \frac{m}{n} \le a . \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) نیز خواهیم داشت:

$$a < \frac{m}{n} + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b .$$

پس $r = \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$ عدد گویایی بین a و b است.

در حالتی که $b < a$ برهان مشابه خواهد بود. □

۱۱.۴.۳ قضیّه: مجموعهٔ اعداد گویا بین دو عدد حقیقی نامتناهی است.

برهان: فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی و $a < b$. اگر مجموعهٔ اعداد گویایی که بین a و b قرار دارند متناهی باشد دارای عضو مینیمم خواهد بود. فرض کنیم c مینیمم این مجموعه باشد پس $a < c < b$. براساس ۱۰.۴.۳ بین a و c عدد گویایی مانند r وجود خواهد داشت، یعنی $a < r < c$ و این خلاف تعریف r است. با شرط $b < a$ نیز به همین ترتیب عمل می‌کنیم. □

۱۲.۴.۳ قضیّه: بین هر دو عدد حقیقی متمایز عدد اصمّی وجود دارد.

برهان: فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی متمایز و $a < b$. براساس ۱۰.۴.۳ عدد گویایی مانند r بین a و b وجود دارد، بنابراین $a < r < b$ و b-r عدد مثبتی است. و به استناد تذکر دوم (قبل از قضیهٔ ۱۰.۴.۳) عدد اصمّی مانند α وجود دارد که $0 < \alpha < b - r$.

قرار می‌دهیم: $d = \alpha + r$. پس، $a < d < b$ و d اصمّ است (قضیهٔ ۹.۴.۳). □

۱۳.۴.۳ قضیّه: مجموعهٔ اعداد اصمّ واقع بین دو عدد حقیقی متمایز نامتناهی است.

برهان: فرض کنیم ، a و b دو عدد حقیقی متمایز باشند و $a < b$. اگر A مجموعهٔ اعداد اصمّ واقع بین a و b بوده و متناهی باشد دارای عضو مینیمم خواهد بود. فرض کنیم $\alpha = \min A$ پس $a < \alpha < b$. α یک عدد حقیقی است، پس عدد اصمّی بین a و α وجود خواهد داشت (۱۲.۴.۳) یعنی عدد اصمّی مانند β وجود دارد که $a < \beta < \alpha$ که بر خلاف تعریف $\alpha = \min A$ است. با فرض $a > b$ برهان مشابه خواهد بود. □

تذکر: براساس قضیهٔ گاوس هر معادلهٔ جبری صحیح و تکین که جوابی گویا داشته باشد، این جواب عدد صحیح خواهد بود. بنابراین، حکم معادلی خواهیم داشت که:

«اگر یک معادلهٔ جبری صحیح و تکین جوابی غیرصحیح داشته باشد، این جواب اصمّ است»

از این مطلب در اثبات اصمّ بودن بسیاری از اعداد استفاده می‌شود. در این مورد به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال: نشان دهید $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ اصم است.

جواب:

$$\alpha^2 = 2 + \sqrt{3}$$
$$\alpha^2 - 2 = \sqrt{3}$$
$$\alpha^4 + 4 - 4\alpha^2 = 3$$
$$\alpha^4 - 4\alpha^2 + 1 = 0\ .$$

جوابهای گویای این معادله منحصر به مقسوم‌علیه‌های 1 هستند، ولی ± 1 در معادله صدق نمی‌کنند. پس α که در آن صدق می‌کند لزوماً اصمّ است.

مثال: آیا $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ اصمّ است؟

جواب:

$$\alpha^2 = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} + 2\sqrt{2}$$
$$\alpha^2 = 4 + 2\sqrt{2}$$
$$\alpha^2 - 4 = 2\sqrt{2}$$
$$\alpha^4 + 16 - 8\alpha^2 = 8$$
$$\alpha^4 - 8\alpha^2 + 8 = 0\ .$$

مقسوم‌علیه‌های 8 عبارتند از: ± 1 ، ± 2 ، ± 4 و ± 8 و هیچ‌کدام از آنها جواب معادله نیست. پس α که در معادله صدق می‌کند اصمّ است.

مثال: اگر $\sqrt{b}$ عدد اصمی باشد و $b \in Q$ و a، عدد اصم $\alpha = a + \sqrt{b}$ را یک عدد اصم مربعی و $\acute{\alpha} = a - \sqrt{b}$ را مزدوج a می‌نامیم. نشان دهید اگر α در یک معادلهٔ جبری گویا (معادلهٔ جبری با ضرایب گویا) صدق کند $\acute{\alpha}$ نیز ریشهٔ آن معادله است.

جواب: فرض کنیم a_0 ، a_1 ، ... ، a_n اعداد گویا باشند و α در معادلهٔ

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0 \tag{1}$$

صدق کند. ابتدا می‌گوئیم که اگر α و β دو عدد اصم مربعی باشند آنگاه

$$(\alpha \pm \beta)' = \alpha' \pm \beta'.$$

(تحقیق آسان است). همچنین به ازای هر عدد طبیعی n ، α^n نیز اعداد اصم مربعی است. قرار می‌دهیم: $\alpha = a + \sqrt{b}$. پس،

$$\alpha^2 = (a^2 + b) + \sqrt{4a^2b} = c + \sqrt{d} .$$

و از اینکه $\sqrt{b}$ اصم است پس $\sqrt{d}$ نیز اصم خواهد بود. بدین ترتیب، حکم به ازای $n = 2$ برقرار است و در حالت کلی از بسط دو جمله‌ای نیوتن استفاده می‌کنیم:

$$\alpha^n = (\sqrt{b} + a)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b^{i/2}a^{n-i}$$

$$= \sum_{j=0}^{[[\frac{n}{2}]]} \binom{n}{2j} b^ja^{n-2j} + \sum_{j=0}^{[[\frac{n}{2}]]} \binom{n}{2j+1} b^{j+1/2}. a^{n-2j-1}$$

$$= C' + d'\sqrt{b} = C' + \sqrt{bd'^2}$$

که در آن $C' = \sum_{j=0}^{[[\frac{n}{2}]]} \binom{n}{2j} b^ja^{n-2j}$ و $d' = \sum_{j=0}^{[[\frac{n}{2}]]} \binom{n}{2j+1} b^ja^{n-2j-1}$ اعداد گویا هستند.

ثانیاً: اگر r یک عدد گویا و α یک عدد اصمّ مربعی باشد $r\alpha$ عدد اصم مربعی است و مزدوج آن $r\alpha'$ خواهد شد.

ثالثاً: مزدوج α^n به صورت $(\alpha')^n$ است. با این مقدمات مزدوج طرفین تساوی $a_0\alpha^n + \dots + a_0 = 0$ را به دست می‌آوریم:

$$a_0(\alpha')^n + \dots + a_1(\alpha') + a_0 = 0 .$$

یعنی $\acute{\alpha}$ نیز در (۱) صدق می‌کند.

۱۴.۴.۳ تعریف: X مجموعه‌ای از اعداد حقیقی است و A و B زیرمجموعه‌های غیرتهی از X هستند که $X = A \cup B$ و به ازای هر $x \in A$ و هر $y \in B$، $x < y$. در این صورت گوئیم (A , B) یک **برش** در X است. A و B را مؤلفه‌های برش و A را مؤلفهٔ پایین و B را مؤلفهٔ بالای برش می‌خوانیم.

۱۵.۴.۳ تعریف: اگر (A , B) برشی در X و A فاقد ماکسیمم و B فاقد مینیمم باشد، (A , B) را یک رخنه در X می‌نامیم.

مثال: چند برش برای مجموعهٔ $X = \{-3 , 2 , 1 , \frac{1}{2} , 0\}$ بسازید.

جواب: هر یک از زوجهای (A , B) که

$A = \{-3 , -\frac{1}{2} , 0\}$ و $B = \{\frac{1}{2} , 1 , 2\}$

$A = \{-3 , -\frac{1}{2}\}$ و $B = \{0 , \frac{1}{2} , 1 , 2\}$

$A = \{-3 , -\frac{1}{2} , 0 , \frac{1}{2}\}$ و $B = \{1 , 2\}$

برشی در X است ولی هیچ‌کدام رخنه نیست، زیرا در همهٔ آنها A عضو ماکسیمم و B عضو مینیمم دارد.

۱۶.۴.۳ قضیه: Q رخنه دارد.

برهان: دو مجموعهٔ

$$A = \{x \in Q \mid x < 0 \text{ یا } x^2 < 2\}$$

$$B = \{x \in Q \mid x > 0 \text{ و } x^2 > 2\}$$

را در نظر می‌گیریم. بآسانی تحقیق می‌شود که (A , B) یک رخنه در Q است (تمرینات ۳۹ و ۴۰ فصل سوم.) □

با بیان قضیهٔ زیر توضیحات ما در زمینهٔ شناخت تفاوتهای $\Re$ و Q کامل می‌شود. تفاوت عمدهٔ این دو مجموعه از وجود اعداد اصمّ و خواصّ ناشی از آنهاست که ضمن

قضایای قبل ملاحظه کرده‌ایم. ضمناً تفاوتهای $\Re$ و Q را از نظر تعداد اعضا در فصل دوم به طور کامل بررسی کردیم و با بیان قضیهٔ زیر دستگاه اعداد حقیقی کاملاً شناخته شده و مورد بررسی قرار گرفته است. خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند برهان آن را در کتابهای مرجع ملاحظه کند.

۱۷.۴.۳ قضیهٔ (ددکیند): $\Re$ رخنه ندارد.

۵.۳ تمرینات.

۱ـ در شرکتپذیری و وجود عضو معکوس برای اعضای هر یک از دستگاههای $(Z,+)$، $(N,\times)$ ، $(Q,\times)$ ، $(Z,-)$ و $(Z,\times)$ تحقیق کنید.

۲ـ دستگاه $(N,*,o)$ را در نظر می‌گیریم که در آن به ازای هر a و b از N اعمال * و o چنین تعریف می‌شوند:

$$a * b = ab^2 \quad و \quad a \, o \, b = a + b^2 .$$

در شرکتپذیری این اعمال و پخشی بودن * نسبت به o و o نسبت به * تحقیق کنید.

۳ـ فقط با استفاده از اصول دستگاه اعداد حقیقی احکام زیر را ثابت کنید:

(آ): $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$؛

(ب): $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$؛

(پ): $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3)$؛

(ت): $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

۴ـ فقط با استفاده از اصول دستگاه اعداد حقیقی و خواص ناشی از آنها در مورد نامساویها احکام زیر را ثابت کنید:

(آ): همواره $x < y \iff a - y < a - x$؛

(ب): اگر $a < b$، $a' < b'$ و $a'' < b''$ آنگاه $a + a' + a'' < b + b' + b''$؛

(پ): اگر $a \leq b$ و $c \leq d$ آنگاه $a - d \leq b - c$. شرط برقراری تساوی چیست؟

(ت): اگر $x + x + x = 0$ آنگاه $x = 0$.

۵ـ اگر $a < b < c$ آنگاه $(a + b) / 2 < (a + b + c) / 3$.

۶ـ نامساویهای زیر را ثابت کنید و شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی در آنها را به دست آورید:

(آ): $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xyz(x + y + z)$؛

(ب): $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \geq 0$؛

(پ): $x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2 \geq 6xyz$ (x،y وz نامنفی‌اند)؛

(ت): $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq 0$.

۷ـ اگر $a_1 > a_2 > a_3$ و $b_1 > b_2 > b_3$ آنگاه

$$(a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3) \leq 3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) .$$

۸ـ همواره . $(a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2)^4 \leq (a_1^4 + a_2^4)(b_1^2 + b_2^2)^2(c_1^4 + c_2^4)$

۹ـ احکام زیر را ثابت کنید:

(آ): $\min \{a , b , c\} = -\mathrm{Max} \{-a , -b , -c\}$؛

(ب): $\mathrm{Max} \{a , b , c\} = -\min \{-a , -b , -c\}$؛

(پ): $\min\{a,b\} \leq a \leq \mathrm{Max}\{a,b\}$ و $\min\{a,b\} \leq b \leq \mathrm{Max}\{a,b\}$.

۱۰ـ عبارت $A = 3 |x - 5| + |2x - 3| + 4$ را با هر یک از شرایط زیر به ساده‌ترین صورت تبدیل کنید.

(آ): $-\frac{3}{2} < x < 0$؛

(ب): $0 \leq x < 2$.

۱۱ـ معادلات زیر را حلّ کنید:

(آ): $|2x - 3| + |x - 5| + |x + 2| = 10$؛

(ب): $|x| + |x + 1| + |x + 2| = 4$؛

(پ): $|x + 3| = 2x - 4$.

۱۲ـ دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

(آ):
$$\begin{cases} |x - 5| + |x + 5| = 20 \\ |x - 25| = 15 \end{cases}$$

(ب):
$$\begin{cases} |x^2 - 1| \, . \, |x + 3| = 1 \\ |x + 7| = 8 \end{cases}$$

۱۳- ثابت کنید به ازای هر x، $4 \geq |x - \frac{13}{3}| + |x - \frac{7}{3}| + |x - \frac{1}{3}|$.

۱۴- ثابت کنید به ازای هر x، $\frac{1}{7} \geq |x - \frac{1}{7}| + |x - \frac{1}{5}| + |x - \frac{1}{3}|$.

۱۵- ثابت کنید به ازای هر x، $\frac{7}{16} \geq |x - \frac{1}{16}| + |x - \frac{1}{8}| + |x - \frac{1}{4}| + |x - \frac{1}{2}|$.

۱۶- به ازای هر a و b نشان دهید:

$$\text{Max}\,\{a\,,\,b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$$

و

$$\min\,\{a\,,\,b\} = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}$$

۱۷- ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n، $n^2/2 + n/2$ عددی طبیعی است.

۱۸- ثابت کنید از مرتبه‌ای ببعد $n^2 < 2^{n+1}$, $n^2 < 2^n$ برقرارند.

۱۹- تابع $f : N \to N$ چنین تعریف می‌شود:

$$f(1) = 2\,,\; f(n+1) = n\,f(n) + 2 - n^2$$

مطلوب است محاسبهٔ $f(3)$، $f(4)$، $f(5)$ و $f(6)$.

۲۰- a عددی است حقیقی. ثابت کنید اگر $1 < a$ آنگاه همواره $1 < a^n$؛ و اگر $1 > a > 0$ آنگاه همواره $a^n < 1$.

۲۱- تابع $f : N \to N$ چنین تعریف می‌شود:

$$f(n) = 3^{2n+2} - 2^{2n-2} \text{ و } n \geq 1$$

نشان دهید $f(n)$ همواره مضرب 5 است.

۲۲- به استقرا روی اعداد صحیح نامنفی نشان دهید $9(9^n-1)-8n$ بر 64 و $5^{2n}+3n-1$ بر 9 بخشپذیر است.

۲۳- آیا به ازای هر عدد طبیعی n عدد $3^{2n} - 8n + 1$ بر 64 بخشپذیر است؟

۲۴- ده جملهٔ اول از دنباله‌های زیر را بنویسید:

(آ): $n \geq 1$ و $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ و $a_1 = 1$؛

(ب): $n \geq 1$ و $a_n = a_{n-1} + 2$ و $a_0 = 0$.

۲۵ـ تساویهای زیر را به دو روش استقرا و استفاده از قواعد Σ ثابت کنید:

(آ): $$\sum_{1}^{n} i(i+1) = \frac{1}{3} n (n+1)(n+2)$$ ؛

(ب): $$\sum_{1}^{n} \frac{1}{4m^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}$$ ؛

(پ): $$\sum_{1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$ ؛

(ت): $$\sum_{1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$$.

۲۶ـ مقدار هر یک از عبارات زیر را محاسبه کنید:

(آ): $$\sum_{1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$ ؛

(ب): $$\sum_{1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+4)}$$ ؛

(پ): $$\prod_{2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right), \quad \prod_{2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$$.

۲۷ـ مطلوب است محاسبهٔ حاصلجمعهای مضاعف زیر:

(آ): $$\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{i} (i + j + i^j)$$ ؛

(ب): $$\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{2} (i + j + i^j)$$ ؛

۲۸ـ ترتیب سیگماها را در حاصلجمع $\sum_{i=2}^{6}\sum_{j=-1}^{i} a_{ij}$ چنان تغییر دهید که مقدار آن تغییر نکند.

۲۹ـ در بسط دو جمله‌ای $(a+b)^n$ ، $(n \in N)$ جملهٔ r ام بسط را T_r می‌نامیم ثابت کنید:

$$T_{r+1} = T_r\left(\frac{n-r+1}{r}\right)a^{-1}b\ ,\ 0 \le r \le n\ .$$

۳۰ـ با استفاده از بسط دو جمله‌ای تساویهای زیر را ثابت کنید:

(آ): $\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r} = 2^n$ ؛

(ب): $\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r} = 0$.

۳۱ـ n و r اعدادی طبیعی و $S_k = \sum_{r=1}^{n} r^k$ ثابت کنید:

$$(n+1)^k - (n+1) = \sum_{r=1}^{k-1}\binom{k}{k-r}S_r\ .$$

۳۲ـ اگر $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} c_r x^r$ ثابت کنید:

$$\sum_{r=0}^{n} rc_r\, x^{r-1} = n(1+x)^{n-1} \quad \text{و} \quad \sum_{r=0}^{n}\frac{c_r}{r+1}x^{r+1} = \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\ .$$

۳۳ـ با استفاده از بسط دو جمله‌ای و یا به روش استقرا تساویهای زیر را ثابت کنید:

(آ): $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ ، $(n \ge 0)$ ؛

(ب): $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{-1}{n+1}$ ، $(n \geq 0)$ ؛

(پ): $\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n.2^{n-1}$ ، $(n \geq 1)$ ؛

(ت): $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k \binom{n}{k} = 0$ ، $(n \geq 2)$ ؛

(ث): $\sum_{r=1}^{n} [r \binom{n}{r} / \binom{n}{r-1}] = \frac{n(n+1)}{2}$ ، $(n \geq 1)$ ؛

(ج): $\prod_{r=1}^{n} [\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}] = \frac{(n+1)^n}{n!} \prod_{r=1}^{n} \binom{n}{r}$ ، $(n \geq 1)$.

۳۴ـ همواره $\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} \geq (\frac{a+b+c+d}{4})^2$ $(a, b, c, d \in \Re)$.

۳۵ـ به ازای اعداد نامنفی a ، b و c نشان دهید:

$$(\frac{a+b}{2})^3 \leq \frac{a^3+b^3}{2} ,$$

$$(\frac{a+b+c}{3})^3 \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{3} .$$

۳۶ـ جوابهای گویای معادلهٔ $4x^4 + 16x^3 + 11x^2 - 4x - 3 = 0$ را بیابید.

۳۷ـ نشان دهید که معادلهٔ $120x^4 - 154x^3 + 71x^2 - 14x + 1 = 0$ جواب اصمّ ندارد.

۳۸ـ A و B دو مجموعهٔ غیرتهی از اعداد حقیقی هستند و

$$C = \{x + y \mid x \in A , y \in B\} .$$

نشان دهید inf C وجود دارد و $\inf C = \inf A + \inf B$.

۳۹ـ مجموعه‌های A و B چنین تعریف می‌شوند:

$$A = \{x \in Q \mid (x < 0 \text{ یا } x^2 < 2)\} \quad ,$$
$$B = \{x \in Q \mid (x > 0 \text{ و } x^2 > 2)\} .$$

نشان دهید $A \cap B = \phi$ و $A \cup B = Q$.

۴۰- با علائم تمرین قبل نشان دهید به ازای هر $x \in A$ و هر $y \in B$، $x < y$. و نیز ثابت کنید که A عضو ماکسیمم ندارد و B عضو مینیمم ندارد.

۴۱- A مجموعه‌ای غیرتهی و از پایین کراندار، $B \subseteq A$ و B غیرتهی است. نشان دهید $\inf B$ موجود است و $\inf A \leq \inf B$.

۴۲- با اصول قضیهٔ ۸.۴.۳ نامساویهای زیر را ثابت کنید:

(آ): اگر a و b نامنفی بوده و $n \geq 3$ عدد طبیعی باشد آنگاه $\sqrt[n]{a+b} \leq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$؛

(ب): a و b نامنفی بوده و $n \geq 2$ عددطبیعی باشد آنگاه اگر $\left|\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}\right| \leq \sqrt[n]{|a-b|}$

۴۳- A مجموعه‌ای غیرتهی از اعداد حقیقی نامنفی و B چنین تعریف می‌شود.

$$B = \{x \geq 0 \mid x^2 \in A\}$$

نشان دهید $\text{Sup}\, B = \sqrt{\text{Sup}\, A}$ و $\inf B = \sqrt{\inf A}$.

۴۴- $m,n \in N$ و $\sqrt{m}$ اصم است. نشان دهید $\sqrt[3]{m} + \sqrt{n}$ اصم است.

۴۵- اگر $n \in N$ آنگاه $\sqrt{n(n+1)}$ و $\sqrt{n/(n+2)}$ اصم‌اند.

۴۶- اگر $|x| \leq 1$ و $|y| \leq 1$ آنگاه $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} \leq 2\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}$ و شرط لازم و کافی برای تساوی چیست؟

۴۷- A و B مجموعه‌های غیرتهی و از بالاکراندارند و $C = \{xy \mid x \in A , y \in B\}$.

ثابت کنید (آ): ممکن است C از بالاکراندار نباشد.

(ب): اگر A و B از پائین هم کراندار باشند، C از بالاکراندار است و

$$\text{Sup}\, C = \text{Max}\{\text{Sup}\, A \,.\, \text{Sup}\, B, \text{Sup}\, A \,.\, \inf B, \inf A \,.\, \text{Sup}\, B, \inf A \,.\, \inf B\}.$$

۴۸- A مجموعه‌ای غیرتهی و کراندار از اعداد حقیقی است و k عدد صحیح است و

$$A_k = \{a^k \mid a \in A\}$$

(آ): ثابت کنید $\quad \operatorname{Sup} A_2 = \operatorname{Max}\{(\operatorname{Sup} A)^2 , (\inf A)^2$

$$0 \leq \inf A_2 \leq \min \{(\operatorname{Sup} A)^2 , (\inf A)^2\}$$

(ب): $\quad \operatorname{Sup} A_3 = (\operatorname{Sup} A)^3$

$$\inf A_3 = (\inf A)^3$$

(پ): اگر $0 < \inf A$ آنگاه

$$\operatorname{Sup} A_{-1} = \frac{1}{\inf A}$$

$$\inf A_{-1} = \frac{1}{\operatorname{Sup} A}$$

فصل ۴: ضمائم

در اینجا و در ادامهٔ فصلهای ۱، ۲ و ۳ برخی از مطالب پیشرفته را مورد بررسی قرار خواهیم داد. اگرچه برخی از آنچه می‌آید در دروس دورهٔ کارشناسی ریاضی به طور مفصل مورد مطالعه قرار خواهند گرفت، از آنجا که کسب معلومات مختصری در تکمیل مطالب مبانی ریاضیات برای هر دانشجو لازم است مطالب این فصل تنظیم شده‌اند.

۱.۴ لم زُورن و اصل ماکسیمال هاسدرُف:

فرض کنیم A یک مجموعهٔ مرتب با نسبت ترتیبی جزئی باشد (منعکس، متعدی و قناس). ***زنجیری*** در A زیرمجموعه‌ای مانند C است که به ازای هر دو عضو a و b از C، $b < a$ یا $a = b$ یا $a < b$. به عبارت دیگر هر دو عضو C مقایسه‌پذیر باشند.

عضو $u \in A$ را یک ***کران بالای*** زنجیر C می‌نامیم. اگر به ازای هر $a \in C$ داشته باشیم $a \leq u$. همچنین عضوی مانند $m \in A$ یک ***عضو ماکسیمال*** A نامیده می‌شود اگر از $m \leq a$ $(a \in A)$ نتیجه شود $m = a$.

عضو $p \in A$ را ***عضو اقل*** می‌نامیم اگر به ازای هر $x \in A$، $p \leq x$. و در مجموعهٔ A (مرتب جزئی) عضو a' را ***تالی بلافصل*** a می‌نامیم اگر اولاً $a < a'$ و ثانیاً به ازای هر $x \in A$ اگر $a \leq x \leq a'$ آنگاه $x = a$ یا $x = a'$. حال فرض کنیم «A مجموعهٔ مرتب جزئی بوده و دارای عضو اقلّی مانند p باشد و بعلاوه هر زنجیر A دارای سوپریممی

متعلق به A باشد». در تعریف زیر A دارای این شرایط خواهد بود و هر جای دیگری که مجموعهٔ A دارای این شرایط باشد خواهیم گفت «A در شرایط * صدق می‌کند».

قبل از بیان و اثبات لم زورن لازم است قضیّهٔ مهمی را در مورد مجموعه‌ای مانند A که در شرایط * صدق می‌کند مورد بررسی قرار دهیم. اثبات این قضیّه نیز به مقدماتی چند نیازمند است که به ترتیب بررسی می‌کنیم.

۱.۱.۴ لم: مجموعهٔ A در شرایط * صدق می‌کند. اگر عضوی مانند $x \in A$ دارای تالی بلافصل باشد آنگاه تالی بلافصل آن برحسب تابع انتخاب مجموعهٔ A به دست می‌آید.

برهان: فرض کنیم $\{y$ | تالی بلافصل x است $T_x = \{y$. اگر $A_1 = P(A)\backslash\{\ \}$ آنگاه تابع انتخابی نظیر $g : A_1 \to A$ وجود دارد که $g(T_x) \in T_x$ یعنی $g(T_x)$ یک تالی بلافصل x است. تابع $f : A \to A$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = g(T_x)$$

پس $f(x)$ تالی بلافصل x است. □

۲.۱.۴ تعریف: A در شرایط * صدق می‌کند. زیرمجموعه‌ای مانند B از A را یک p-رشته می‌نامیم اگر $p \in B$، هر زنجیر C در B دارای شرط $\operatorname{Sup} C \in B$ باشد و بعلاوه به ازای هر $x \in B$، $f(x) \in B$ (f تابعی است که در ۱.۱.۴ ساخته شد.)

۳.۱.۴ لم: هر اشتراکی از p-رشته‌ها یک p-رشته است.

برهان: اگر Y اشتراکی از p-رشته‌ها و B یکی از p-رشته‌ها باشد بدیهی است که $p \in B$ پس p به Y تعلق دارد (شرط اول در تعریف p-رشته).

اگر C زنجیری دلخواه در Y باشد زنجیری در هر B خواهد بود. زیرا Y اشتراک p-رشته‌هائی مانند B است بنابراین، $\operatorname{Sup} C \in B$ پس $\operatorname{Sup} C \in Y$ (شرط دوم در تعریف p- رشته).

و بالاخره اگر $x \in Y$ دلخواه باشد به ازای هر B، $x \in B$. بنابراین $f(x) \in B$ و در نتیجه $f(x) \in Y$ (شرط سوم در تعریف p-رشته). □

براساس لم فوق اشتراک کلیهٔ p- رشته‌ها را به P نشان می‌دهیم و بدیهی است که $p \in P$.

۴.۱.۴ تعریف: عضوی نظیر x از P را یک **عضو منتخب** می‌نامیم، اگر x با هر عضو P مقایسه‌پذیر باشد. به عبارت دیگر به ازای هر $y \in P$، $x < y$ یا $y = x$ یا $x > y$.

۵.۱.۴ لم: اگر x یک عضو منتخب و $y \in P$ عضوی باشد که $y < x$ آنگاه $f(y) \le x$.

برهان: اگر حکم برقرار نباشد، $x < f(y)$. پس $f(y) > x > y$ ولی با توجه به تعریف f، $f(y)$ یک تالی بلافصل y است. پس $f(y) > y$ یک تناقض خواهد بود. با این تناقض نتیجه می‌شود که $f(y) \le x$. □

۶.۱.۴ لم: اگر x یک عضو منتخب باشد و $B_x = \{y \mid y \le x \text{ یا } y \ge f(x)\}$، در این صورت B_x یک p-رشته است.

برهان: p عضو اقلّ A است یعنی به ازای هر $a \in A$ ، $p \le a$. پس $p \le x$ و در نتیجه $p \in B_x$ (شرط اول در تعریف p- رشته).

از $y \in B_x$ نتیجه می‌شود $y < x$ یا $y = x$ یا $y \ge f(x)$. و برهان را در سه حالت ادامه می‌دهیم:

حالت ۱ $(y = x)$: پس $f(y) = f(x)$ و لذا $f(y) \ge f(x)$ یعنی $f(y) \in B_x$.

حالت ۲ $(y \ge f(x))$: از اینکه $f(y) > y$ (تالی بلافصل) پس $f(y) > f(x)$ و در نتیجه $f(y) \ge f(x)$ یعنی $f(y) \in B_x$.

حالت ۳ $(y < x)$: در این حالت با توجه به ۵.۱.۴ ، $f(y) \le x$ و در نتیجه $f(y) \in B_x$.

بدین ترتیب شرط دوم در تعریف p- رشته برقرار است. برای اثبات شرط سوم در تعریف p- رشته فرض کنیم C زنجیری از B_x باشد و $\text{Sup } C = m$. نشان می‌دهیم $m \in B_x$. دو حالت متمایز وجود دارد:

حالت اول: y ای وجود دارد که $y \ge f(x)$ پس براساس تعریف سوپریمم، $m \ge y$.

بنابراین، $m \geq f(x)$ و یا $m \in B_x$.

حالت دوم: به ازای هر $y \in C$، $y < f(x)$. پس $y \leq x$ (زیرا در غیر این صورت $y > x$ بوده و خواهیم داشت $y \geq f(x)$ که یک تناقض است.) در نتیجه x یک کران بالا برای C بوده و $x \geq m$. یعنی $m \in B_x$. □

۷.۱.۴ لم: اگر x یک عضو منتخب باشد آنگاه

$$\forall y \in P \ (y \leq x \ \text{یا}\ y \geq f(x))$$

برهان: کافی است ثابت کنیم $P = B_x$. بنابر تعریف، $B_x \subseteq P$ و از سوی دیگر B_x یک p-رشته است پس $P \subseteq B_x$. □

۸.۱.۴ لم: اگر S مجموعهٔ اعضای منتخب باشد، S یک p- رشته است.

برهان: p با هر عضو P قابل مقایسه است، پس با هر عضو S قابل قیاس خواهد بود یعنی $p \in S$ (شرط اول تعریف.)

اگر $x \in S$ و $y \in P$ نیز عضو دلخواهی باشد، $f(x)$ با y قابل مقایسه است (یعنی $f(x)$ نیز عضو منتخب است)، زیرا از تعریف x چنین بر می‌آید که $x<y$ یا $y=x$ یا $x<y$.

اگر $y < x$ آنگاه $y < x \leq f(x)$). پس، $y < f(x)$.

و اگر $y = x$ آنگاه $y = x < f(x)$.

و نیز اگر $x < y$ آنگاه $y \geq f(x)$ (زیرا $P = B_x$). بنابراین، $f(x)$ یک عضو منتخب است (شرط دوم تعریف).

فرض کنیم C زنجیری از S است و $m = \text{Sup}\ C$. نشان می‌دهیم $m \in S$.

اگر $y \in P$ عضو دلخواهی باشد دو حالت وجود دارد:

حالت ۱: $x \in C$ ای وجود دارد که $y \leq x$ پس $x \leq m$ یعنی $y \leq m$.

حالت ۲: x ای از C وجود ندارد که $y \leq x$. به عبارت دیگر به ازای هر $x \in C$، $x < y$. پس y یک کران بالای C است و $m \leq y$. یعنی m با هر عضو P قابل مقایسه است و لذا $m \in S$. □

۹.۱.۴ لم: P یک مجموعهٔ مرتب کلی است.

برهان: کافی است ثابت کنیم $P = S$. اولاً: S یک p- رشته است پس $P \subseteq S$ ثانیاً: با توجه به ۴.۱.۴ $P \subseteq S$. □

۱۰.۱.۴ قضیّه: A مجموعه‌ای است با عضو اقلّی مانند p و هر زنجیر در آن دارای سوپریمم است که به A تعلق دارد. در این صورت، A عضوی مانند a دارد که تالی بلافصل ندارد.

برهان: فرض کنیم حکم برقرار نباشد و هر عضو A دارای حداقّل یک تالی بلافصل باشد. با توجه به ۱.۱.۴، $f(x)$ تالی بلافصل x خواهد بود. از سوی دیگر با توجه به ۲.۱.۴ الی ۹.۱.۴، P یک زنجیر است و اعضای آن دو بدو مقایسه پذیرند و اگر $m = \text{Sup } P$ آنگاه $m \in P$. با توجه به خاصیت دوم p- رشته خواهیم داشت:

$$f(m) \in P\ .$$

بنابراین $f(m) \leq m$ که با توجه به تعریف f این رابطه یک تناقض است، زیرا $m \leq f(m)$ برقرار است. پس فرض خلف باطل است و $a \in A$ ای وجود دارد که تالی بلافصل ندارد. □

از این قضیّه در برهان احکام آینده استفاده خواهیم کرد.

۱۱.۱.۴ اصل ماکسیمال هاسدرُف: هر مجموعهٔ مرتب (با نسبت ترتیبی جزیی) دارای حداقّل یک زنجیر ماکسیمال است.

برهان: فرض کنیم S مجموعهٔ همهٔ زنجیرهای A باشد نشان می‌دهیم که S در شرایط قضیّهٔ ۱۰.۱.۴ صدق می‌کند و بنابراین عضوی خواهد داشت که تالی بلافصل ندارد.

اولاً: S غیرتهی است، زیرا $\phi \in S$ و ϕ عضو اقلّ S خواهد بود.

ثانیاً: اگر C زنجیری در S باشد آنگاه $\text{Sup } C \in S$. زیرا اگر قرار دهیم

$$K = \bigcup_{D \in C} D$$

کافی است ثابت کنیم:

(آ) : $K \in S$؛

(ب) : $K = \operatorname{Sup} C$.

K یک زنجیر A است، زیرا اگر $x , y \in k$ آنگاه D_1 و D_2 ای از C یافت می‌شوند که $x \in D_1$ و $y \in D_2$. D_1 و D_2 زنجیر هستند پس $D_1 \subseteq D_2$ یا $D_2 \subseteq D_1$. در حالتی که $D_1 \subseteq D_2$ نتیجه می‌شود $x , y \in D_2$. پس D_2 زنجیری از C و در نتیجه عضوی از S خواهد بود که به طریق اولی زنجیری از A است، یعنی x و y قابل مقایسه‌اند. پس (آ) ثابت می‌شود.

همچنین از تعریف K نتیجه می‌شود که به ازای هر $D \in C$، $D \subseteq K$. یعنی K یک کران بالای C است. از سوی دیگر، اگر L یک کران بالای C باشد آنگاه:

$$\forall D \in C \, (D \subseteq L) .$$

در نتیجه، $\bigcup_{D \in C} D \subseteq L$ و $K \subseteq L$. یعنی $K \in \operatorname{Sup} C$.

با برهان فوق نتیجه می‌شود که S در شرایط قضیهٔ ۱۰.۱.۴ صدق می‌کند و زنجیری مانند C_0 دارد که تالی بلافصل ندارد یعنی C_0 یک زنجیر ماکسیمال است. □

۱۲.۱.۴ لم زُورن (Zorn): در مجموعهٔ مرتب A (با نسبت ترتیبی جزیی) اگر هر زنجیر C از A دارای کران بالا باشد آنگاه A دارای عضو ماکسیمال است.

برهان: بنابر اصل ماکسیمال هاسدرُف A زنجیری مانند C دارد که ماکسیمال است. C دارای کران بالایی مانند m خواهد بود و نشان می‌دهیم که m عضو ماکسیمال A است.

اگر $x \in A$ عضوی باشد که $x > m$ و $x \neq m$، آنگاه $x \notin C$ (در غیر این صورت لزوماً $x \leq m$ برقرار خواهد بود). مجموعهٔ $C_1 = C \cup \{x\}$ را در نظر می‌گیریم. C_1 نیز یک زنجیر از A است (زیرا اگر $y \in C_1$ و $y \neq x$ آنگاه $y \in C$ و در نتیجه $y \leq m$ و $x > m$ و $y < x$، و به عبارت دیگر هر دو عضو C_1 قابل مقایسه‌اند.) وجود C_1 یک

تناقض است زیرا C زنجیر ماکسیمال A فرض شده بود. پس، m عضو ماکسیمال A می‌باشد. □

لم زورن و اصل ماکسیمال هاسدرُف معادل‌هایی نیز دارند که در اینجا از ذکر آنها خودداری می‌کنیم. در مورد کاربردهای لم زورن نیز خواننده را به درس جبر دانشگاهی ارجاع می‌دهیم که بالاخص در مبحث «حلقه‌ها» در اثبات وجود زیرمجموعه‌های خاصّی به نام ایدآلهای ماکسیمال از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. نظر به اینکه دانشجوی این درس هیچگونه آشنایی با ساختمان جبری حلقه‌ها ندارد از ذکر مثال نیز اجتناب می‌کنیم.

۲.۴. اوردینالها و تعریف دقیق اعداد حسابی: در این بخش از مجموعه‌هایی بحث می‌کنیم که یک نسبت خوشترتیبی در آنها تعریف شده باشد. بنابر تعریف هر چنین مجموعه‌ای یک ***عدد اوردینال*** نامیده می‌شود. هر یک از مجموعه‌های

ϕ و $\{\phi\}$ و $\{\phi$ و $\{\phi\}\}$ و $\{\phi$ و $\{\phi\}$ و $\{\phi$ و $\{\phi\}\}\}$ و ...

با نسبت،

$$x \leq y \Leftrightarrow (x = y \text{ یا } x \in y)$$

خوشترتیب است. پس هر یک از آنها یک عدد اوردینال خواهد بود.

مجموعه‌های فوق را که به ترتیب به علائم

$$0 , 1 , 2 , 3 , \ldots$$

مشخص می‌شوند، اعداد حسابی می‌نامیم و به W نشان می‌دهیم. این تعریف اساسی برای W مغایرتی با تعریف معمولی ندارد و مزیّت آن در ذکر نسبت خوشترتیبی موجود در هر یک از اعداد حسابی است. بدین ترتیب نسبت تعریف شده چنین خواهد شد که اگر $n \in W$ آنگاه،

$$\forall x , y \in n \ (x \leq y \Leftrightarrow (x = y \text{ یا } x \in y)) \qquad (۱)$$

این نسبت به صورت زیر نیز قابل بیان است:

$$\forall x , y \in n \, (x \leq y \Leftrightarrow x \subseteq y) \qquad (۲)$$

۱.۲.۴ تعریف: اگر n یک عدد حسابی باشد و $v \in n$ آنگاه قطعهٔ اولیهٔ v که به علامت I (v) نشان داده می‌شود عبارت است از:

$$I(v) = \{x \in n \mid x < v\}$$

مثلاً اگر $n = \{\phi$ و $\{\phi\}$ و $\{\phi$ و $\{\phi\}\}$ و $\{\phi$ و $\{\phi\}$ و $\{\phi$ و $\{\phi\}\}\}\}$ آنگاه به ازای $v_1 = \{\phi\}$، $V_2 = \{\phi$ و $\{\phi\}\}$ و $v_3 = \{\phi$ و $\{\phi\}$ و $\{\phi$ و $\{\phi\}\}\}$ خواهیم داشت:

$I(v_1) = \{\phi\}$,

$I(v_2) = \{\phi,\{\phi\}\}$,

$I(v_3) = \{\phi$ و $\{\phi\}$ و $\{\phi,\{\phi\}\}\}$

و با علائم مرسوم 0 ، 1 ، 2 ، ... نتیجه می‌شود:

$I(v_1) = \{0\} = 1$,

$I(v_2) = \{0 , 1\} = 2$,

$I(v_3) = \{0 , 1 , 2\} = 3$.

با توجه به مثال بالا می‌توان تعریف ساده‌ای برای عدد اوردینال بیان کرد:

۲.۲.۴ تعریف: مجموعهٔ w را یک عدد اوردینال می‌نامیم اگر خوشترتیب باشد و به ازای هر $v \in w$، $I(v) = v$.

مثال: می‌دانیم که W یک اوردینال است (با نسبت خوشترتیبی طبیعی). نشان دهید هر یک از مجموعه‌های زیر نیز اوردینال هستند:

$$W \cup \{W\} \text{ و } W \cup \{W\} \cup \{W \text{ و } \{W\}\} \text{ و } \ldots$$

جواب: براساس نسبت (۱) یا (۲) هر یک از مجموعه‌ها مرتب شده‌اند و خوشترتیب خواهند بود (تحقیق آسان است.)

قضیهٔ زیر قدم اصلی در شناخت اوردینالهاست که در اینجا به آن می‌پردازیم و

قضایای بعد از آن را بدون اثبات خواهیم آورد. خوانندهٔ پیشرفته می‌تواند به روش معمول به اثبات آنها اقدام کند.

۳.۲.۴ قضیّه: مجموعه‌ای مانند w یک اوردینال است اگر و فقط اگر

(آ): هر عضو w زیرمجموعهٔ آن باشد؛

(ب): w با نسبت $\subseteq$ (جزئیت) مرتب شده باشد؛

(پ): هیچ عضو w عضو خود نباشد.

برهان: فرض کنیم w یک عدد اوردینال و با نسبت (۲) خوشترتیب شده باشد. به ازای هر $x \in w$ و براساس تعریف ۲.۲.۴ نتیجه می‌شود $I(x) = x$. از اینکه $I(x) \subseteq w$ پس، $x \subseteq w$.

برای تحقیق (ب) می‌دانیم که اگر $x , y \in w$ آنگاه

$$x \leq y \Leftrightarrow I(x) \subseteq I(y) .$$

(تعریف $I(x)$ و $I(y)$ ملاحظه شود). و رابطهٔ $I(x) \subseteq I(y)$ رابطهٔ $x \subseteq y$ را نتیجه خواهد داد.

در مورد برهان (پ) فرض کنیم $x \in w$ عضو دلخواهی باشد، پس $I(x) = x$ و براساس تعریف $I(x)$ نتیجه می‌شود $x \notin x$.

بالعکس، فرض کنیم (آ)، (ب) و (پ) برقرار باشند. اگر $x \in w$ عضو دلخواهی در نظر گرفته شود کافی است نشان دهیم $I(x) = x$.

اولاً: $I(x) \subseteq x$. زیرا اگر $y \in x$ آنگاه براساس (آ) $x \subseteq w$ و بنابراین $y \in w$، و براساس (ب)، $x \subseteq y$ یا $y \subseteq x$. ولی رابطهٔ $x \subseteq y$ بر قرار نیست، زیرا از $y \in x$ نتیجه می‌شود، $y \in y$ که بر خلاف (پ) است. پس،

«اگر $y \in x$ آنگاه $y \subseteq x$ و $y \neq x$»

براساس تعریف $I(x)$ در می‌یابیم که $y \in I(x)$، در نتیجه $x \subseteq I(x)$.

ثانیاً $I(x) \subseteq x$ زیرا اگر $I(x) \not\subset x$، با توجه به (ب) فرض کنیم a اولین عضو از w باشد که $I(a) \not\subset a$. با توجه به برهان بالا $a \subseteq I(a)$. پس $I(a) \not\subset a$ نتیجه می‌دهد:

$$\exists\, b \in w\ (b \in I(a)\ ,\ b \notin a)\ .$$

و با توجه به اینکه a اولین عضو در w با شرط $I(a) \not\subset a$ بود و با در نظر گرفتن $I(b) \subseteq b$ به تناقض می‌رسیم. □

۴.۲.۴ قضیّه: مجموعهٔ w یک اوردینال است اگر و فقط اگر

(آ): هر عضو از w، عضوی از w باشد،

(ب): w نسبت به ($\in$ یا $=$) مرتب شده باشد،

(پ): هیچ عضو w عضو خود نباشد.

۵.۲.۴ قضیّه: هیچ عدد اوردینالی عضو خود نیست و اگر w یک اوردینال باشد $w \cup \{w\}$ نیز اوردینالی متمایز با w است.

برهان: براساس ۳.۲.۴، $w \notin w$. پس، $w \neq w \cup \{w\}$. از سوی دیگر $w \cup \{w\}$ در خواص (آ)، (ب) و (پ) (قضیّه ۳.۲.۴) صدق می‌کند. □

۶.۲.۴ قضیّه:

(آ): مجموعهٔ تهی یک عدد اوردینال است و اولین عضو هر عدد اوردینال غیرتهی است؛

(ب): قطعهٔ اولیهٔ هر عدد اوردینال یک عدد اوردینال است و هر عدد اوردینال قطعهٔ اولیهٔ یک عدد اوردینال دیگر است؛

(پ): هر عضو یک عدد اوردینال یک عدد اوردینال است و نیز هر عدد اوردینال عضو یک عدد اوردینال دیگر است.

البته مطالب دیگری نیز در حساب اوردینالها وجود دارد. از آنجمله، تعریف تساوی دو اوردینال است که با تعریف «یکریختی ترتیبی» در اوردینالها امکان‌پذیر می‌شود. بحث کلی را خوانندهٔ پیشرفته می‌تواند در کتابهای مرجع پیدا کند.

۳.۴. دستگاه اعداد مختلط: در ادامهٔ مطالب فصل سوم و بررسی دستگاههای جبری و پس از مطالعهٔ میدانهای $\mathfrak{R}$، Q و مجموعهٔ اعداد اصمّ که ترتیب در آنها تعریف شده بود بررسی و تعریف دستگاه جبری دیگری بنام دستگاه اعداد مختلط جایز است.

فرض کنیم a و b اعداد حقیقی باشند. مجموعهٔ ازواج مرتب (b و a) را به C نشان می‌دهیم و آن را مجموعهٔ اعداد مختلط می‌نامیم. در این مجموعه دو عمل جمع و ضرب را چنین تعریف می‌کنیم که اگر $Z_1 = (a \text{ و } b)$ و $Z_2 = (c \text{ و } d)$ دو عضو C باشند،

$$Z_1 + Z_2 = (a + c \text{ و } b + d)\,,$$

$$Z_1 \,.\, Z_2 = (ac - bd\,,\, ad + bc)\,.$$

تساوی دو عدد مختلط فقط و فقط وقتی تعریف می‌شود که مؤلفه‌های متناظر دو عدد مختلط مساوی باشند. معمولاً در $z = (a \text{ و } b)$، a را قسمت حقیقی z و b را قسمت موهومی آن می‌نامیم و به ترتیب به علائم $R_e z$ و $I_m z$ نشان می‌دهیم.

اکنون دو عضو (0 و 0) و (0 و 1) را در نظر می‌گیریم. بررسی خواص مربوط به میدان بودن $(C\,,\,+\,,\,.)$ بسیار آسان است که $(0\,,\,0)$ عضو همانی جمع و $(1\,,\,0)$ عضو همانی ضرب است و معکوس هر $(a\,,\,b) \neq (0\,,\,0)$ عبارت است از:

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}\,,\,\frac{-b}{a^2 + b^2}\right).$$

برحسب قرارداد عدد مختلط $z = (a\,,\,0)$ را به a نشان می‌دهیم. همچنین اگر λ عدد حقیقی مفروضی باشد $(\lambda a\,,\,\lambda b) = \lambda(a\,,\,b)$، زیرا

$$\lambda\,(a\,,\,b) = (\lambda\,,\,0)\,(a\,,\,b) = (\lambda a - 0\,,\,\lambda b + 0) = (\lambda a\,,\,\lambda b)\,.$$

با توجه به این قرارداد و با در نظر گرفتن عضو $i = (0\,,\,1)$ داریم:

$$i^2 = (0\,,\,1)\,(0\,,\,1) = (-1\,,\,0) = -1$$

و نیز هر عدد مختلط $z = (a\,,\,b)$ به صورت زیر نشان داده می‌شود.

$$z = (a\,,\,0) + (0\,,\,b) = (a\,,\,0) + b\,(0\,,\,1) = (a\,,\,0) + (b\,,\,0)\,(0\,,\,1)$$
$$= a + bi\,,$$

که نمایشی مرسوم برای عدد مختلط و برحسب i است.

تعبیر و نمایش هندسی نیز برای عدد مختلط $z = (a , b)$ وجود دارد که در صفحهٔ محورهای مختصات (هندسهٔ اقلیدسی) می‌توان نقطه‌ای به طول a و به عرض b را به عنوان z در نظر گرفت. این نمایش هندسی موجب ارزیابی پارامترهایی از z می‌شود که **آرگومان** و **هنگ** عدد z نام دارند و به تعریف و خواصّ آنها می‌پردازیم.

ملاحظه کردیم که $(C , + , .)$ یک میدان است ولی یک میدان مرتب نیست. برای روشن شدن موضوع تعریف معادلی برای میدان مرتب می‌آوریم تعریفی که در میدان اعداد حقیقی برای نسبت ترتیبی آوردیم چنین است که

«$<$ یک نسبت ترتیبی است اگر متعدی باشدو به ازای هر $x , y \in R$ یک و فقط یکی از روابط $x < y$ ، $x = y$ و $y < x$ برقرار باشد» این تعریف با تعریف کلی زیر معادل است.

۱.۳.۴ تعریف: میدان $(F , + , .)$ را یک میدان مرتب می‌نامیم اگر زیرمجموعه‌ای مانند H داشته باشد به طوری که:

(آ)ـ به ازای هر $a \in F$ یک و فقط یکی از روابط $a \in H$ ، $-a \in H$ ، $a = 0$ برقرار باشد (0 عضو همانی F نسبت به عمل جمع است.)

(ب)ـ به ازای هر a و $b \in H$ ، $a + b \in H$ و $ab \in H$.

۲.۳.۴ قضیّه: اگر $(F , + , .)$ میدان مرتبی برحسب تعریف ۱.۳.۴ باشد آنگاه نسبتی مانند $<$ در F وجود دارد که در شرایط (ت) ، (ث) و (ج) (مربوط به نسبت ترتیبی اعداد حقیقی بخش ۲.۳) صدق می‌کند، و بالعکس.

برهان: نسبت $<$ را در F چنین تعریف می‌کنیم:

$$< = \{(a , b) \mid b - a \in H\} \text{ و } a , b \in F .$$

که در آن، H زیرمجموعه‌ای از F است که براساس تعریف مرتب بودن F از ۱.۳.۴ حاصل شده باشد.

اولاً: $>$ متعدی است، زیرا اگر $a < b$ و $b < c$ آنگاه $b - a \in H$ و $c - b \in H$ و براساس خاصیت (ب)، $c - a = (c - b) + (b - a) \in H$. یعنی $a < c$.

ثانیاً: به ازای هر $a , b \in F$، $b - a \in F$ و براساس تعریف H و مرتب بودن F براساس ۱.۳.۴، یک و فقط یکی از روابط $b - a \in H$، $-(b - a) \in H$ و $b - a = 0$ برقرار است. به عبارت دیگر، یک و فقط یکی از روابط $a < b$، $b < a$ یا $a = b$ برقرار خواهد بود.

ثالثاً: فرض کنیم $c \in F$ و $a < b$، بدیهی است که $b + c \in F$ و $a + c \in F$ و در نتیجه $b + c - (a + c) \in H$، پس $b + c < a + c$.

رابعاً: با فرض $c \in F$ و $a < b$، $ac < bc$ برقرار است.

بنابراین، تعریف ۱.۳.۴ تعریف ترتیب در اعداد حقیقی را نتیجه می‌دهد.

بالعکس، فرض کنیم $>$ نسبتی ترتیبی در F و واجد خواص (ت) ، (ث) و (ج) در بخش ۲.۳ باشد. زیرمجموعهٔ $H = \{x \mid 0 < x\}$ را در نظر می‌گیریم. به آسانی تحقیق می‌شود که H در خواص (آ) و (ب) از تعریف ۱.۳.۴ صدق می‌کند. □

۳.۳.۴ قضیّه: میدان $(C , + , \cdot)$ میدان مرتب نیست.

برهان: فرض کنیم C میدان مرتبی باشد و زیرمجموعه‌ای مانند H از آن واجد خواص (آ) و (ب) از ۱.۳.۴ باشد. عضو $x = (1 , 0)$ را در نظر می‌گیریم. از اینکه $x \neq (0,0)$ پس یک و تنها یکی از اعضای $x , -x$ به H تعلق خواهد داشت. نشان می‌دهیم $-x \notin H$.

زیرا اگر $-x = (-1 , 0) \in H$ آنگاه $x = (1 , 0) \notin H$

از سوی دیگر $(-x)(-x) \in H$ ولی

$$(-x)(-x) = (-1 , 0)(-1 , 0) = (1 , 0) \notin H .$$

(خاصیّت (ب) از ۱.۳.۴). که یک تناقض است

بنابراین

$$-x \notin H . \tag{1}$$

از سوی دیگر عضو $y = (0 , 1)$ را در نظر می‌گیریم. از اینکه $y \neq 0$ پس یک و فقط یکی از روابط $y \in H$ یا $-y \in H$ برقرار است. امّا

$y.y = (0 , 1)(0 , 1) = (-1 , 0)$ و $(-y)(-y) = (0 , -1)(0 , -1) = (-1 , 0)$

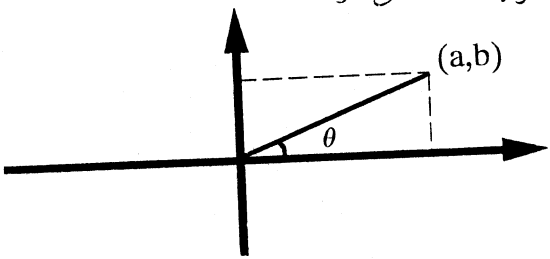
که اگر $y \in H$ یا $-y \in H$ در هر حالت، $(-1 , 0) \in H$ را نتیجه می‌گیریم. و این با (۱) تناقض دارد. پس، C میدان مرتب نیست. □

۴.۳.۴ تعریف (آ): به ازای هر عدد صحیح نامنفی n و هر عدد مختلط z، ***توان*** n ام z چنین تعریف می‌شود:

$$z^0 = 1 \text{ و } z^{n+1} = z^n.z \ .$$

و اگر n عدد صحیح منفی باشد و $z \neq 0$، $z^n = 1 / z^{-n}$

(ب): **هنگ** عدد مختلط $z = (a , b)$ به صورت $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ و آرگومان آن زاویهٔ $\theta = \text{arctg } (b / a)$ است که زاویهٔ خط واصل از مبدأ به نقطهٔ (a , b) در صفحه است و با جهت مثبت محور طولها ساخته می‌شود.



با استفاده از تعریف اخیر می‌توان شکل مثلثاتی عدد مختلط $z = (a , b)$ را به صورت

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

نمایش داد که در آن $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

اگرچه در تکمیل مفاهیم مربوط به میدان اعداد هدف ما برآورده شده است و آنچه را که در اعداد مختلط ضروری می‌دانستیم بیان کرده‌ایم با وجود این برخی از مطالب محاسباتی در اعداد مختلط را نیز بیان خواهیم کرد. محاسبات آینده بسیار مختصر

است، زیرا دانشجو با کاربرد مطالب مختلف اعداد مختلط در دروس حساب دیفرانسیل و انتگرال به اندازهٔ کافی آشنا خواهد شد.

۵.۳.۴ تعریف: $z = (a , b)$ یک عدد مختلط و n عددی طبیعی است. ریشهٔ nام z که به علامت $\sqrt[n]{z}$ یا $z^{\frac{1}{n}}$ نشان داده می‌شود عددی مختلط مانند ξ است که $\xi^n = z$.

با استفاده از شکل مثلثاتی z می‌توان تمام ξهایی را پیدا کرد که $\xi^n = z$.

فرض کنیم $z = r_0 (\cos \theta_0 + i \sin \theta_0)$ و $\xi = r (\cos \theta + i \sin \theta)$. به استقرا ثابت می‌شود که $\xi^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$ و سپس از تساوی دو عدد مختلط z و ξ^n خواهیم داشت:

$$r = \sqrt[n]{r_0} \text{ و } \cos n\theta = \cos \theta_0 \text{ و } \sin n\theta = \sin \theta_0 .$$

که با محاسبه‌ای ساده و استفاده از ریاضیات مقدّماتی n مقدار متمایز برای θ به دست می‌آید:

$$\theta = \frac{2k\pi + \theta_0}{n} \text{ و } k = 0 , 1 , 2 , \dots , n - 1$$

یعنی z دارای n ریشهٔ nام خواهد بود.

۶.۳.۴ تعریف: مزدوج عدد مختلط $z = (a , b)$ که به علامت $\bar{z}$ نشان داده می‌شود عدد مختلط $(a , -b)$ است.

علامت قدر مطلق را برای هنگ عدد مختلط به کار بردیم. و با توجه به تعاریف موجود، نمایش هندسی اعداد مختلط به وسیلهٔ هنگ اعداد مختلط فوایدی را دربر دارد. برخی از این موارد را در مثالهای زیر ملاحظه می‌کنیم.

مثال: z را چنان تعیین کنید که به ازای هر عدد صحیح n، $(n+\frac{1}{2}+z)/(n+\frac{1}{2}-\bar{z})$ عددی حقیقی و مثبت باشد.

جواب: عدد مفروض را به A نشان می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$A = \frac{(n + ½ + z)(n + ½ - z)}{(n + ½ - \bar{z})(n + ½ - z)} = \frac{(n + ½)^2 - z^2}{(n+ ½)^2 - (z + \bar{z})(n+ ½) + |z|^2}$$

زیرا $|z|^2 = z\bar{z}$. عدد $z + \bar{z}$ حقیقی است، و مخرج کسر حقیقی خواهد بود.

اگر $z = (\alpha, \beta)$ آنگاه $z^2 = (\alpha^2 - \beta^2) + 2i\alpha\beta$. برای آنکه A حقیقی باشد لازم است $\alpha\beta = 0$. پس $\alpha = 0$ یا $\beta = 0$.

اگر $\alpha = 0$ آنگاه

$$A = \frac{(n + ½)^2 + \beta^2}{(n + ½)^2 - 0 + |\beta|} > 0 .$$

بنابراین $z = i\beta$ $(\beta \in \Re)$ قابل قبول است.

و اگر $\beta = 0$ آنگاه،

$$A = \frac{(n + ½)^2 - \alpha^2}{(n + ½)^2 - 2\alpha(n + ½) + \alpha^2} = \frac{(n + ½)^2 - \alpha^2}{(n + ½ - \alpha)^2} .$$

$$= \frac{n + ½ + \alpha}{n + ½ - \alpha} \qquad (\text{به شرط آنکه } n + ½ - \alpha \neq 0) .$$

و شرط لازم و کافی برای آنکه A مثبت باشد آن است که

$$\begin{cases} -(n + ½) < \alpha < (n + ½) \quad , & \text{اگر } n \geq 0 \\ n + ½ < \alpha < -(n + ½) \quad , & \text{اگر } n < 0 \end{cases}$$

و یا به طور خلاصه، اگر $|\alpha| < |n + ½|$ آنگاه $A > 0$. و چون این رابطه به ازای هر n برقرار است پس $-½ < \alpha < ½$ و $z = \alpha$ جوابی دیگر است.

مثال: z هائی را بیابید که در گزاره‌نمای $|z - 2| + |z + 2| = 5$ صدق کند.

جواب: اگر $z = a + ib$ آنگاه،

$$\sqrt{(a - 2)^2 + b^2} + \sqrt{(a + 2)^2 + b^2} = 5 ,$$

$$(a-2)^2 + b^2 + (a+2)^2 + b^2 + 2\sqrt{[(a-2)^2 + b^2][(a+2)^2 + b^2]} = 25 ,$$

$$a^2 + b^2 + \sqrt{(a^2 + b^2 + 4)^2 - 16a^2} = \frac{17}{2} ,$$

$$(a^2 + b^2 + 4)^2 - 16\, a^2 = (\frac{17}{2} - a^2 - b^2)^2 ,$$

$$a^4+b^4+16+2a^2b^2+8a^2+8b^2-16a^2 = \frac{289}{4} +a^4+b^4-17a^2-17b^2+2a^2b^2 ,$$

$$9a^2 + 25b^2 = \frac{289 - 64}{4} = \frac{225}{4} ,$$

که نقاط روی یک بیضی هستند.

مثال: اعداد حقیقی x و y را چنان تعیین کنید که $1 + i$ جواب معادلهٔ $z^5 + xz^3 + y = 0$ باشد.

جواب: از شکل مثلثاتی $1+i$ و توانهای سوم و پنجم آن استفاده می‌کنیم:

$$1 + i = \sqrt{2}\,(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)$$

$$(1 + i)^3 = \sqrt{2}\,(\cos 3\pi/4 + i \sin 3\pi/4) = \sqrt{2}\,(-\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)$$

$$(1 + i)^5 = \sqrt{2}\,(\cos 5\pi/4 + i \sin 5\pi/4) = \sqrt{2}\,(-\cos \pi/4 - i \sin \pi/4)$$

$$\sqrt{2}\,(-\cos \pi/4 - i \sin \pi/4) + \sqrt{2x}\,(-\cos \pi/4 + i \sin \pi/4) + y = 0$$

که از تساوی قسمتهای حقیقی و موهومی طرفین تساوی دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} -1 - x + y = 0 \\ -1 + x = 0 . \end{cases}$$

پس، $x = 1$ و $y = 2$.

مثال: اعداد مختلط z و w دارای شرایط $|z| < 1$ و $0 \le |w| \le 1$ هستند نشان‌دهید:

$$\frac{||z| - |w||}{1 - |z|\ |w|} \le \frac{|z - w|}{|1 - \bar{z}w|} \le \frac{|z| + |w|}{1 + |z||w|} \le 1 .$$

جواب: اولاً $|z|\ |w| < |w| \le 1$ پس $1 - |z|\ |w| > 0$. ثانیاً: با قراردادن $z = x + iy$ و $w = a + ib$ هر یک از روابط زیر ثابت شده و نامساویها را خواهیم داشت.

$$|\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{a^2+b^2}| \le \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \le \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{a^2+b^2}$$

$$1+\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)} \le \sqrt{(1-ax-by)^2+(bx-ay)^2} \le 1-\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$$

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{a^2+b^2} \le 1+\sqrt{(x^2+y^2)(a^2+b^2)}\ .$$

مثال: اگر $zz' = u^2$ که z و z' اعداد مختلطی هستند آنگاه

$$|z| + |z'| = |\frac{z+z'}{2}+u| + |\frac{z+z'}{2}-u|\ .$$

جواب: به جای z' قرار می‌دهیم: $z' = \frac{1}{z}u^2$ پس حکم معادل است با

$$|z| + |z'| = |\frac{z^2+u^2}{2z}+u| + |\frac{z^2+u^2}{2z}-u|$$

$$= \frac{|z+u|^2+|z-u|^2}{2|z|},$$

$$2|z|^2 + 2|u|^2 = |z+u|^2 + |z-u|^2\ .$$

و برای اثبات آن قرار می‌دهیم: $z = x + iy$ و $u = a + ib$،

$$|z+u|^2 + |z-u|^2 = (x+a)^2 + (y+b)^2 + (x-a)^2 + (y-b)^2$$

$$= x^2 + a^2 + y^2 + b^2 + x^2 + a^2 + y^2 + b^2$$

$$|z+u|^2 + |z-u|^2 = 2(x^2+y^2+a^2+b^2)$$

$$= 2|z|^2 + 2|u|^2\ .$$

به قیاس اعداد حقیقی در میدان اعداد مختلط نیز می‌توان توابعی تعریف نمود و همچنین از توابع خاص می‌توان به دنباله‌های اعداد مختلط که دامنهٔ تعریف آنها N است اشاره کرد. تمرینات این فصل اکثراً روابط و قضایای مهمّ در اعداد مختلط است و خواننده می‌تواند آنها را با تعاریف و مقدماتی که گفته شد بررسی و اثبات نماید. در حل

مثالهای گذشته به هیچ‌وجه از قضیه‌ای استفاده نکردیم و بدیهی است که با حل تمرینات آینده برخی از آنها بسادگی حل خواهند شد و امیدواریم که قدرت استنباط و اثبات تمرینها را در دانشجو بارورتر نماید.

۴.۴ تمرینات:

۱ـ به ازای هر دو عدد مختلط z و w احکام زیر را ثابت کنید:

(آ): $|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2R_e(\bar{z}w)$؛

(ب): $|z + w| \leq |z| + |w|$؛

(پ): $|z \pm w| \geq \big||z| - |w|\big|$.

۲ـ اگر z عدد مختلطی باشد، $|z| \geq (|R_e z| + |I_m z|) / \sqrt{2}$.

۳ـ اگر z و w اعداد مختلطی باشند ثابت کنید:

$$|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2R_e(z\bar{w}).$$

۴ـ ثابت کنید مجموعهٔ اعداد مختلط به هنگ 1 با عمل ضرب یک گروه تشکیل می‌دهد. و اگر هنگ عدد z مساوی 1 باشد ثابت کنید حداقّل یکی از نامساویهای $|1 + z^2| \geq 1$ و $|1 + z| \geq 1$ برقرار است.

۵ـ اگر $|1+z| \geq 1$ و a عدد حقیقی و کمتر از 1 باشد نشان دهید $|1+az| \geq 1$.

۵.۴ فهرست مفاهیم.

انگلیسی ـ فارسی

A

abelian آبلی
absolute مطلق
-value قدر-
abstract مجرد
addition جمع
additive جمعی
-group گروه-
aleph الف(א)
algebra جبر
algebraic جبری
-system دستگاه-
antecedent مقدم (در ترکیب شرطی)
antisymetric نامتقارن
arbitrary دلخواه
archimedian ارشمیدسی
-property خاصیّت ارشمیدسی
associative شرکتپذیر
associativity شرکتپذیری
axiom اصل موضوع
axiomatic اصل موضوعی
axis محور
axes of coordinates محورهای مختصات

B

biconditional دو شرطی
bijection بیژکسیون (یکبیک و پوشا)
binary دوتایی (ثنایی)
binomial دو جمله‌ای
bound بند ـ کران
bounded کراندار
bounded variable متغیر پابند
-above از بالا-
-below از پائین-

C

calculus حساب دیفرانسیل و انتگرال
cancelation اسقاط
-law قاعدهٔ-
cap علامت ∩ (طاق)

ترکیب تابع و نسبت composition
حکم، قضیّه، نتیجه conclusion
شرط condition
ـلازم necessary-
necessary and sufficient-
ـلازم و کافی
ـکافی sufficient-
شرطی conditional
رابطـ -connective
گزارهٔـ -sentence
مزدوج conjugate
عطفی conjunction
تناقض contradiction
متناقض contradictory
عکس نقیض contrapositive
عکس (گزاره و نسبت) converse
حوزهٔ عکس -domain
مختص coordinate
دستگاه مختصات -system
تناظر correspondence
ـیکبیک one-to-one-
شمارا countable
مثال نقض counter example
تصویر عکس counterimage
برش cut
ـدِدِکیند dedekind-

عدد اصلی cardinal number
ـمتناهی finite-
ـنامتناهی infinite-
ـترانسفینی transfinite-
cartesian product
حاصلضرب دکارتی (کارتزین)
زنجیر chain
بسته closed
بست closure
ضریب coefficient
ـدوجمله‌ای binomial-
ـچندجمله‌ای multinomial-
common divisor
مقسوم‌علیه مشترک
بزرگترین- highest-
مضرب مشترک common multiple
کوچکترین- least-
تعویضپذیر commutative
commutativity
تعویضپذیری (جابجایی)
تمامیّت completeness
اصل موضوعـ -axiom
مختلط ـ مخلوط complex
عدد مختلط -number
مرکبهٔ تابع و نسبت composite
گزارهٔ مرکّب composite sentence

D

decimal	اعشاری
-point	ممیّز
decreasing	نزولی
deduction	استنتاج
definite	معین (مشخص)
dense	چگال
dependent	وابسته
-variable	متغیر ـ (تابع)
diagram	نمودار، تصویر
difference	تفاضل
symmetric-	ـ متقارن
direct product	حاصلضرب مستقیم
discriminant	مبین
disjoint sets	مجموعه‌های جدا از هم
disjunction	ترکیب فصلی
distributive	توزیعی، پخشی
distributivity	توزیعپذیری، پخشی
divide	عاد کردن
divisiblity	قابلیت قسمت
division	تقسیم
divisor	مقسوم‌علیه
dual	دوگان، جفت

E

element	عضو
empty set	مجموعهٔ تهی
equality	تساوی
equation	معادله
equipotential	همعدد
equivalence	هم‌ارزی
-class	ردهٔ ـ
equivalent	معادل (در منطق)
Euclidean	اقلیدسی
even	زوج
existential quantifier	سور وجودی
expansion	بسط
exponent	توان، نما، قوه
expression	عبارت
extension	توسیع (نسبت و تابع)

F

factor	عامل
factorial	فاکتوریل
field	میدان
finite	متناهی
formula	فرمول
recurrence-	ـ تراجعی
fraction	کسر

fractional	کسری
function	تابع
composite-	ـ مرکب
identity-	ـ همانی
inverse-	ـ معکوس
propositional-	تابع گزاره‌نما

G - H - I - J

gap	رخنه
group	گروه
abelian-	ـ آبلی
hypothesis	فرض
identity	همانی، اتّحاد
-element	عضو همانی
-relation	نسبت همانی
imaginary	موهومی
-number	عدد موهومی
-unit	واحدموهومی (i)
immediate successor	تالی بلافصل
implication	استلزام
imply	مستلزم بودن
inclusion	جزئیت
inclusive "or"	یاء به معنی منطقی
increasing	صعودی
indefinite	نامعین (نامشخص)
independent	مستقل
-variable	متغیر مستقل
index	اندیس
induced	القائی
-operation	عمل القائی
-order	ترتیب القائی
induction	استقراء
inequality	نامساوی
infimum	اینفیمم
infinite	نامتناهی
infinity	بینهایت کوچک
injection	انژکسیون (یکبیک)
integer	عدد صحیح
integral	صحیح
-part	جزء صحیح
interpretation	تعبیر
geometric-	تعبیر هندسی
intersection	اشتراک، مقطع
interval	بازه، فاصله
nested-	بازه‌های تودرتو
irrational	اصمّ
-number	عدد اصمّ
judgment	حکم

L - M

least member	عضو اقلّ
least upper bound	سوپریمم

maximal	ماکسیمال
maximum	ماکسیمم
mean	واسطه
arithmetic-	واسطهٔ عددی
geometric-	واسطهٔ هندسی
minimal	مینیمال
minimum	مینیمم
modulus	هنگ
multiplication	ضرب
multiplicative	ضربی

N - O - P

number theory	نظریهٔ اعداد
odd	فرد
open	باز
order	ترتیب
ordered set	مجموعهٔ مرتب
partially-	ـ مرتب جزیی
strong-	ـ مرتب قوی(کلی)
ordinate	عرض
ordinal	اوردینال
partition	افراز
plane	صفحه
point	نقطه
positive	مثبت
postutale	اصل موضوع
power	توان، قوه، نما
power set	مجموعهٔ توان
predicate	محمول
-calculus	حساب محمولات
prefix	پیشوند
premiss	مقدمه (در استنتاج)
prime	اول
-number	عدد-
principle	اصل
product	حاصلضرب
proportion	تناسب
proposition	گزاره
propositional calculus	حساب گزاره‌ها

Q

quantifier	سور
existential-	ـ وجودی
universal	ـ عمومی
quotient	خارج قسمت

R

ratio	نسبت
rational	گویا
-number	عدد-
real number	عدد حقیقی

reductio ad absurdum	برهان خلف
relation	نسبت

S

semi-group	نیمگروه
sequence	دنباله
series	سری
sign	علامت
singular proposition	گزارهٔ شخصی
sum	حاصلجمع
double-	حاصلجمع مضاعف
partial-	حاصلجمع جریی، جمعک
supremum	سوپریمم

T

tautology	راستگو
telescope	ادغام
term	جمله
ternary	سه‌تائی مرتب
transcendental number	عدد متعالی
transformation	تبدیل
transitivity	تعدّی
trichotomy	تثلیث
truth set	مجموعهٔ صدق
truth table	جدول ارزش
truth value	ارزش راستی

U

unbounded	بی‌کران، نامحدود
uncountable	ناشمارا
union	اجتماع، اتحادیه
universally valid	همیشه برقرار
upper bound	کران بالا ـ بندبالا

V - W - X - Y - Z

valid	درست (در استنتاج)
validity	درستی (در استنتاج)
value	مقدار
variable	متغیر
dummy-	ـ ظاهری
well-ordered	خوشترتیب
well-ordering	خوشترتیبی
Zorn	زُورن

فارسی ـ انگلیسی

ا ـ آ ـ ب ـ پ ـ ت

آبلی abelian

اتّحاد identity

اجتماع، اتحادیه union

ادغام telescope

ارزش راستی truth value

استقرا induction

استلزام implication

استنتاج deduction

اسقاط cancellation

اشتراک intersection

اصل principle

اصل شهودی تجرید intuitive-of abstraction

اصل موضوع axiom , postulate

اصل موضوعی axiomatic

اصلی cardinal

عدد- -number

اصمّ irrational

اعشاری decimal

افراز partition

اقلیدسی Euclidian

القایی induced

اندیس index

انعکاسی reflexive

اینفیمم infimum

به ازای بعضی for some

به ازای هر for all

بازه interval

باقیمانده remainder

بدیهی obvious

برش cut

برهان خلف reductio ad absurdum

بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک gredatest common divisor

بست closure

بسته closed

بسط expansion

بینهایت infinity

پابند (متغیر) bounded

پخشی distributive

پیشوند prefix

تابع function

ـ ثابت constant-

ـ همانی identity-

ـ معکوس inverse-

تالی (در ترکیب شرطی) consequent

تالی بلافصل	immediate successor
تثلیث	trichotomy
تجرید	abstraction
تحدید (نسبت و تابع)	restriction
تراجعی ـ بازگشتی	recursive
ترکیب (نسبت و تابع)	composition
ـ دو شرطی	biconditional
ـ شرطی	conditional
ـ عطفی	conjunction
ـ فصلی	disjunction
تساوی	equality
تصاعد	progression
تعدّی	transitivity
تعریف	definition
ـ استقرایی	inductive
تعمیم	generalization
تعویضپذیر (جابجا)	commutative
تعویضپذیری (جابجایی)	commutativity
تفاضل	difference
تفریق	substraction
تقسیم	division
تمام	complete
تمامیّت	completeness
تناسب	proportion
تناظر	correspondence
ـ یکبیک	one-to-one-
تناقض	contradiction
توزیعپذیر (پخشی)	distributive
توسیع	extension

ث ـ ج ـ چ

ثابت	constant
ثنایی (در مبنای اعداد)	binary
جبر	algebra
جدول ارزش	truth table
جذر	square root
جزء حقیقی	real part
جزء موهومی	imaginary part
جزء صحیح	integral part
جزئیت	inclusion
جفت (دوگان)	dual
جمع	addition
جمع (حاصلجمع)	summation
جمعی	additive
جمله	term
چگال	dense

ح ـ خ

حاصلجمع	sum
ـ مضاعف	double sum
حاصلضرب	product

ـ کارتزین	cartesian-
ـ مستقیم	direct-
حذف	elimination
حساب گزاره‌ها	sentential calculus
حساب محمولات	predicate calculus
حکم	conclusion
حوزه (نسبت و تابع)	domain
حوزهٔ عکس ـ حوزهٔ مقادیر	range
خارج قسمت	quotiont
خاصیّت ـ ویژگی	property
ـ ارشمیدسی	Archimedian-
خوشترتیبی	well-ordering

د ـ ر ـ ز

درست (استنتاج)	valid
دروغ	false
دستگاه	system
دلخواه	arbitrary
دنباله	sequence
دوتایی	binary
دو جمله‌ای	binomial
دوگان ـ جفت	dual
رابط (منطق)	connective
ـ ترکیب شرطی	conditional-
ـ گزاره‌ای	sentential-
راستگو	tautology
رخنه	gap
ردهٔ هم‌ارزی	equivalence class
رقم	digit, figure
ریشه	root
زنجیر	chain
زوج (عدد)	even
ـ زوج	pair
ـ زوج مرتب	ordered-

س ـ ش ـ ص ـ ض

سری	series
سوپریمم	supremum
سور	quantifier
ـ عمومی	universal-
ـ وجودی	existential-
سه‌تایی (نسبت)	ternary
شرط	condition
ـ کافی	sufficient-
ـ لازم	necessary-
شرکتپذیری	associativity
شمارا	countable
صعودی	increasing
صفحه	plane
صفر	zero
صورت منطقی	logical form

صوری	formal
ضابطه	principle
-کلی	general-
ضرب	umltiplication
ضریب	coefficient

ط ـ ع

طرف (تساوی، نامساوی)	member
طرفین (تناسب)	extremes
طول (مختص)	abscissa
عاد کردن	divide
عالم سخن	universe of discourse
عامل	factor
عدد اصلی	cardinal number
عدد اول	prime number
عدد صحیح	integer
عدد طبیعی	natural number
عدد متعالی	transcendental number
عدد واقع در فرجهٔ رادیکال	index of a radical
عرض (مختص)	ordinate
عضو	member , element
عضو اقلّ	least element
عکس (عدد)	reciprocal
عکس (نسبت، گزاره)	converse
عکس نقیض	contrapositive
علامت	sign, symbol
علامت (یک عدد)	sign
عمل	operation
عمومی	universal

ف ـ ق

فاصله	distance
فاکتوریل	factorial
فرد (عدد)	odd
فرض	hypothesis
فضا	space
قدرمطلق	absolute value
قطر	diagonal
قطعه خط	segement

ک ـ گ ـ ل

کثیرالجمله	polynomial
کسر	fraction
کران	bound
-بالا	upper-
-پائین	lower-
گروه	group
گزاره	sentence, statement, proposition

گزارهٔ دو شرطی	biconditional proposition
گزاره نما	propositional function
گویا	rational
لم	lemma

م

ماکسیمال	maximal
ماکسیمم	maximum
متعدی	transitive
متغیر	variable
ـ آزاد	free-
ـ پابند	bound-
مثال نقض	counter example
مثلث	triangle
مجرد	abstract
مجموع	sum
مجموعه	set
ـ متناهی	finite-
ـ نامتناهی	infinite-
ـ مرتب	ordered-
مجهول	unknown
محض	pure
محمول	predicate
محور	axis
مختلط ـ مخلوط	complex
مربعی	quadratic
مربع (شکل هندسی)	square
مرتبه	order
مزدوج	conjugate
مستلزم بودن	imply
معادل (گزاره)	equivalent
معادله	equation
مقدار	value
ـ موهومی	imaginary-
ـ حقیقی	real-
مکعب	cube
منطق	logic
منعکس	reflexive
منفی	negative
مؤلفه	component
میدان	field
مینیمال	minimal
مینیمم	minimum

ن ـ و ـ هـ ـ ی

ناصفر	non-zero
نامتناهی	infinite
نامساوی	inequality
نامنفی	non-negative
نتیجه	consequence
نزولی	decreasing

نسبت	relation
ـ هم‌ارزی	equivalence-
ـ ترتیبی	ordering-
ـ القایی	induced-
نفی (علامت منفی)	negative
نقطه	point
نگاشت (تابع)	mapping, map
نماد	symbol
نمودار	diagram
واحد (دستگاه)	unit
وجود	existence
هنگ	modulus
یاء منطقی	inclusive "or"

۶.۴ علائم ریاضی

N	مجموعهٔ اعداد طبیعی
W	مجموعهٔ اعداد حسابی
Z	مجموعهٔ اعداد صحیح
Q	مجموعهٔ اعدادگویا
$\Re$	مجموعهٔ اعداد حقیقی
$\subseteq$	زیرمجموعه
$\subset$	زیرمجموعهٔ سره
$\not\subset$	زیرمجموعه نبودن
$\in$	عضویت
$\aleph$	اَلِف (عدد اصلی N)
Max	ماکسیمم
min	مینیمم
Sup	سوپریمم
inf	اینفیمم
$\setminus$	تفاضل دو مجموعه
&	و
$\vee$	یاء منطقی
$\Rightarrow, \supset$	آنگاه
$\Leftrightarrow$	اگر و فقط اگر
$\sim$	نقیض ـ علامت نسبت
$\forall$	سور عمومی

$\exists$	سور وجودی
$\vdash$	استنتاج
$\{a_n\}$	دنباله
$\lvert x \rvert$	قدر مطلق عددحقیقی x
$[[x]]$	جزء صحیح x
$[x]_R$	ردهٔ هم‌ارزی x
fog	مرکبهٔ g,f
id_x	تابع همانی
Dom f	دامنهٔ تابع f
Im f	برد تابع f
R_eZ	قسمت حقیقی عدد مختلط
I_mZ	قسمت موهومی عدد مختلط
$\bar{z}$	مزدوج عدد مختلط
i	واحد موهومی
Σ_1^n	سیگما (حاصلجمع‌متناهی)
Π	پی (حاصلضرب‌متناهی)
$C_m^n, \binom{n}{m}$	ضریب دو جمله‌ای
n!	فاکتوریل n
$\mid$	عاد کردن
$\approx$	همدد بودن

۷.۴ مراجع.

1- A.Abian, "The Theory of Sets and Transfinite numbers". Saunders Company, London, (1965).

2- T.M.Apostol, "Mathematical Analysis", Addison-wesley publishing Co., Inc, (1972).

3- T.S.Blyth and E.F.Robertson, "Sets and Mappings", Chapman & Hall Ltd, (1986).

4- A.G.Hamilton, "Numbers, Sets and Axioms", Cambridge University Press, (1982).

5- J.G. Kemeny, J.L.Snell and G.L.Thompson, "Introduction to finite mathematics", Prentice Hall, Inc., (1966).

6- G.H.Mossaheb, "Mathematical Analysis", Vol. 1, Franklin book Programs, Inc., (1970).

FOUNDATIONS OF MATHEMATICS: AN INTRODUCTION

H. Doostie, Ph.D.

Associated Prof.

G.R. Jahanshahlou, Ph.D.

Prof.

MATHEMATICS DEPARTMENT

TEACHER TRAINING UNIVERSITY

TEHRAN-IRAN

2002