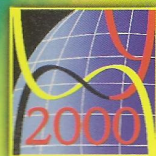


مارتین ایگنر . گوئتر تسیگلر

کتاب اثبات

ترجمه سیامک کاظمی



سال ۲۰۰۰، سال جهانی ریاضیات



پژوهشگاه دانشهای بنیادی

قهرمانان (ریاضی) این کتاب، «اثباتهای عالی» هستند، اثباتهایی حاوی ایده های درخشان، ارتباطات هوشمندانه بین مفاهیم، و مشاهدات و نکات عالی که بصیرتها و دیدگاههای تازه و چشم اندازهای شگفت انگیزی از تعدادی مسأله بنیادی و چالش برانگیز در نظریه اعداد، هندسه، آنالیز، ترکیبیات، و نظریه گراف در اختیار خواننده قرار می دهند. در اینجا سی نمونه زیبا از این مسائل و برهانهای مربوط به آنها آورده شده است. این اثباتها شایسته حضور در «کتاب»ی هستند که به نظر پال اردوشِ فقید (الهام بخش مولفان این کتاب) خداوند اثباتهای کامل را در آنجا ثبت کرده است. ماحصل کار، کتابی است جالب و خواندنی برای هرکس که علاقه ای به ریاضیات، و معلومات متوسطی در آن داشته باشد.

کتاب اثبات

مارتین ایگنر، گونتر تسیگلر

ترجمه سیامک کاظمی



پژوهشگاه دانشهای بنیادی

(مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات)

Aigner, Martin

آیگنر، مارتین، ۱۹۴۲-

کتاب اثبات / مارتین آیگنر، گونتر تسیگلر؛ ترجمه سیامک کاظمی. - تهران: پژوهشگاه دانشهای بنیادی (مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات)، واحد انتشارات، ۱۳۷۹.
هشت، ۲۷۴ ص - : مصور (رنگی)، جدول.

ISBN 964-90010-8-5

فهرست‌نویسی بر اساس اطلاعات فیبا.

Proofs from THE BOOK.

عنوان اصلی

کتابنامه.

۱. ریاضیات. الف. تسیگلر، گونتر Günter M. Ziegler ب. کاظمی، سیامک، ۱۳۳۳- مترجم. ج. پژوهشگاه دانشهای بنیادی (مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات)، واحد انتشارات. د. عنوان.

۵۱۰

۹۷۴۶/الف

۱۳۷۹

۱۹۴۹۵-۷۹م

کتابخانه ملی ایران



پژوهشگاه دانشهای بنیادی

(مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات)

تهران-ص.پ. ۵۷۴۶-۱۹۳۹۵

<http://www.ipm.ac.ir>

Proofs from THE BOOK

Martin Aigner, Günter M. Ziegler

Springer, Berlin, 1998

کتاب اثبات

مؤلفان	مارتین آیگنر، گونتر تسیگلر
مترجم	سیامک کاظمی
حروفچین و صفحه‌آرا	آناهیتا سمیع (TeX-پارسی)
نسخه‌پرداز	مسعود رزدام
ناشر	واحد انتشارات پژوهشگاه دانشهای بنیادی
چاپ اول	۱۳۷۹
تیراژ	۴۰۰۰ نسخه
چاپ و صحافی	خواجه

حق چاپ محفوظ و مخصوص ناشر است.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

یادداشت

در هنگام تدارک برنامه‌های سال جهانی ریاضیات (سال ۲۰۰۰) در ایران، پژوهشکده ریاضیات پژوهشگاه دانشهای بنیادی تصمیم گرفت علاوه بر سایر مشارکتهای، سهمی ولو کوچک نیز در انتشار آثار مفید ریاضی به زبان فارسی ادا کند، و به این منظور ترجمه و چاپ کتاب حاضر را به ستاد ملی سال جهانی ریاضیات پیشنهاد کرد و آن ستاد، حمایت از انتشار این کتاب را به عهده گرفت. ویژگیهای این کتاب با مطالعه پیشگفتار مؤلفان روشن می‌شود؛ امید است از نظر خوانندگان کتابی سودمند و خواندنی باشد.

پژوهشکده ریاضیات

پژوهشگاه دانشهای بنیادی

آذرماه ۱۳۷۹

فهرست

عنوان	صفحه
پیشگفتار.....	هفت
نظریهٔ اعداد	۱
۱. شش اثبات برای نامتناهی بودن مجموعهٔ عددهای اول	۳
۲. اصل برتران	۹
۳. ضربیهای دوجمله‌ای (تقریباً) هیچ‌گاه به صورت توان نیستند.....	۱۷
۴. نمایش عددها به صورت مجموع دو مربع.....	۲۳
۵. هر حلقهٔ تقسیم متناهی یک هیأت است.....	۳۱
۶. برخی عددهای گنگ.....	۳۷
هندسه	۴۷
۷. مسألهٔ سوم هیلبرت: تجزیهٔ چندوجهیها.....	۴۹
۸. آرایش خطها در صفحه و تجزیهٔ گرافها	۵۹
۹. مسألهٔ شیب	۶۷
۱۰. سه کاربرد از فرمول اویلر.....	۷۵
۱۱. قضیهٔ صلبیت کوشی.....	۸۵
۱۲. مسألهٔ سیزده کره.....	۹۱
۱۳. سادکهای مماس.....	۹۹
۱۴. هر مجموعهٔ بزرگی از نقطه‌ها زاویه‌ای منفرجه دارد.....	۱۰۵
۱۵. حدس بوسوک	۱۱۵
آنالیز.....	۱۲۳
۱۶. مجموعه، تابع، و فرض پیوستار.....	۱۲۵
۱۷. در ستایش نابرابریها.....	۱۳۹
۱۸. قضیه‌ای از پولیا دربارهٔ چندجمله‌ایها.....	۱۴۹
۱۹. دربرهٔ لمی از لیتل و آفرد.....	۱۶۱

ترکیبیات.....	۱۶۷
۲۰. لانه کبوتر و شمارش دوگانه.....	۱۶۹
۲۱. سه قضیه مشهور درباره مجموعه‌های متناهی.....	۱۸۵
۲۲. فرمول کیلی برای تعداد درختها.....	۱۹۳
۲۳. کامل کردن مربعهای لاتین.....	۲۰۳
۲۴. مسأله دینیتس.....	۲۱۱
نظریه گراف.....	۲۲۱
۲۵. رنگ کردن گرافهای مسطح با پنج رنگ.....	۲۲۳
۲۶. نگهبانی از موزه.....	۲۲۹
۲۷. قضیه گراف توران.....	۲۳۵
۲۸. مخایره بدون خطا.....	۲۴۱
۲۹. از دوستان و سیاستمداران.....	۲۵۵
۳۰. احتمال شمارش را (گاهی) آسان می‌سازد.....	۲۵۹
فهرست راهنما.....	۲۷۱

پال اردوش دوست داشت از «کتاب» یا «لوح»ی صحبت کند که خداوند اثباتهای زیبا و کامل قضایای ریاضی را در آنجا محفوظ نگه می‌دارد، و در این مورد گوشهٔ چشمی داشت به نظرگ. ه. هاردی، که ریاضیات زشت جایگاه ابدی و پایداری ندارد. اردوش همچنین می‌گفت که اعتقادات شما دربارهٔ ماوراءالطبیعه هرچه باشد، به عنوان ریاضیدان باید وجود این کتاب را باور داشته باشید. چند سال قبل به او پیشنهاد کردیم متنی که به تقریب شبیه آن کتاب باشد (ولو تقریبی اولیه و خام) بنویسد. وی با اشتیاق از این فکر استقبال کرد و چنانکه خصلتش بود بلافاصله دست به کار شد و صفحات متعددی را با پیشنهادهایش پر کرد. کتاب ما قرار بود در مارس ۱۹۹۸ به عنوان هدیه‌ای به مناسبت هشتاد و پنجمین زادروز اردوش انتشار یابد. با درگذشت اسف‌بار پال در تابستان ۱۹۹۷، نام او توانست جزء مؤلفان این کتاب بیاید. در عوض این کتاب را با گرامیداشت یاد او منتشر می‌کنیم.^۱



پال اردوش

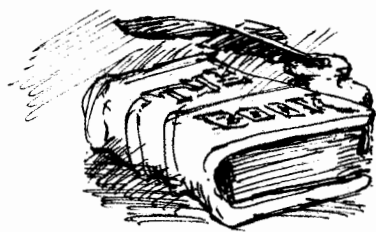
ما هیچ تعریف یا توصیفی از خصوصیات اثبات «کتابی» نداریم. چیزی که در این کتاب عرضه کرده‌ایم، نمونه‌هایی است که از میان اثباتها برگزیده‌ایم به این امید که خوانندگانمان در علاقه و تحسین ما نسبت به ایده‌های درخشان، دیدگاههای هوشمندانه، و نکات عالی [موجود در این اثباتها] سهیم شوند. همچنین امیدواریم خوانندگان ما از این متن علی‌رغم نقائص شرح و بیان ما لذت ببرند. انتخاب این نمونه‌ها تا حد زیادی تحت تأثیر پال اردوش صورت گرفته است. بسیاری از مباحث را او پیشنهاد کرد، و سابقهٔ خیلی از اثباتها مستقیماً به او می‌رسد و یا از بصیرت عالی او در طرح پرسش صحیح یا حدس صحیح نشأت گرفته است. بنابراین، این کتاب تا حد زیادی نشان دهندهٔ نظرات پال اردوش دربارهٔ اثباتهایی است که باید متعلق به «کتاب» محسوب شوند.

یک عامل محدودکننده در انتخاب مباحث این کتاب، آن بوده است که خواسته‌ایم

(۱) عنوان کتاب در زبان انگلیسی این است:

Proofs from THE BOOK

و منظور از *The Book* همان «کتاب» یا «لوح»ی است که در بالا از آن یاد شده است. اما چون ترجمهٔ مستقیم این عنوان مناسب به نظر نمی‌رسید، عنوان کتاب اثبات را برای ترجمهٔ فارسی برگزیدیم تا هم گویای محتوای کتاب — که مجموعه‌ای از اثباتهاست — باشد و هم متضمن اشاره‌ای به «کتاب» متعالی مورد نظر اردوش — مترجم.



«کتاب»

همه مطالبش برای خواندگانی که فقط معلومات متوسطی از تکنیکهای ریاضیات دوره کارشناسی دارند قابل استفاده باشد. دانستن اندکی جبر خطی، قدری آنالیز مقدماتی و نظریه اعداد، و مقداری متناسب از مفاهیم و استدلالهای مقدماتی ریاضیات گسسته، برای فهمیدن و لذت بردن از همه مطالب این کتاب کافی است.

از افراد بسیاری که ما را در این پروژه باری و حمایت کرده‌اند، فوق‌العاده سپاسگزاریم — از جمله، از دانشجویان سمیناری که متن اولیه کتاب را در آنجا به بحث گذاشتیم [و از ...]. اما بیش از همه مدیون خود پال اردوش کبیر هستیم.

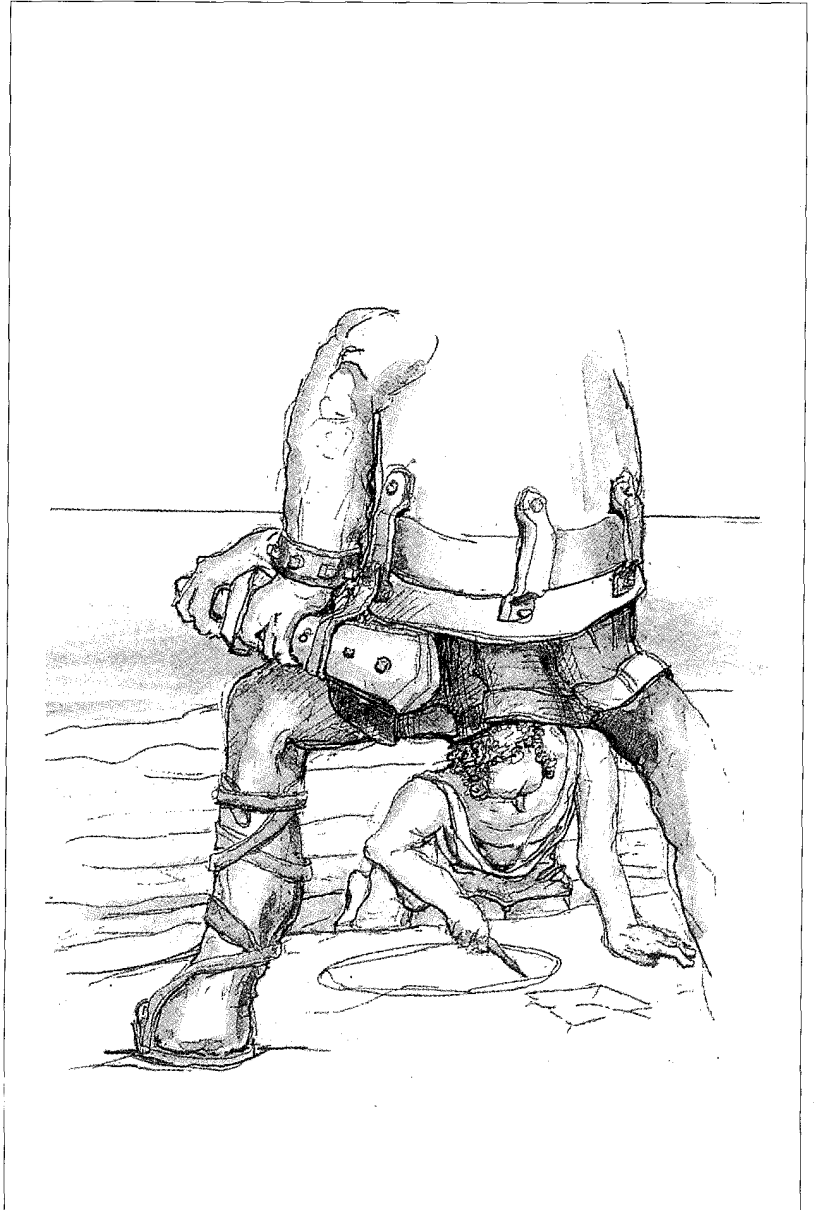
برلین، مارس ۱۹۹۸

مارتین ایگنر

گونتر تسیگلر

نظریهٔ اعداد

- ۱
شش اثبات برای نامتناهی بودن
مجموعهٔ عددهای اول ۳
- ۲
اصل برتران ۹
- ۳
ضریبهای دو جمله‌ای (تقریباً) هیچ‌گاه
به صورت توان نیستند ۱۷
- ۴
نمایش عددها به صورت مجموع دو
مربع ۲۳
- ۵
هر حلقهٔ تقسیم متناهی یک هیأت
است ۳۱
- ۶
برخی عددهای گنگ ۳۷



برای نامتناهی بودن مجموعه عددهای اول

خیلی طبیعی است که این یادداشتها را با اثباتی آغاز کنیم که احتمالاً قدیمیترین اثبات «کتابی» است و معمولاً آن را به اقلیدس نسبت می‌دهند. این برهان نشان می‌دهد که دنباله عددهای اول بی‌انتهاست.

■ اثبات اقلیدس. به ازای مجموعه متناهی دلخواه $\{p_1, \dots, p_r\}$ از عددهای اول، عدد $n = p_1 p_2 \dots p_r + 1$ را در نظر بگیرید. این عدد n مقسوم علیه اولی چون p دارد ولی یکی از p_i ها نیست: چون اگر چنین باشد، p هم مقسوم علیه n و هم مقسوم علیه حاصلضرب $p_1 p_2 \dots p_r$ و بنابراین مقسوم علیه تفاضل $n - p_1 p_2 \dots p_r = 1$ است که غیر ممکن است. پس هیچ مجموعه متناهی $\{p_1, \dots, p_r\}$ نمی‌تواند مجموعه همه عددهای اول باشد. □

پیش از اینکه اثباتهای دیگری بیاوریم، چند نماد را یادآوری می‌کنیم: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ مجموعه عددهای طبیعی، $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ مجموعه عددهای صحیح، و $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$ مجموعه عددهای اول است. در آنچه در پی می‌آید، چند اثبات دیگر (از میان اثباتهای فراوان) می‌آوریم که امیدواریم خواننده هم مانند ما از آنها خوشش بیاید. هرچند این برهانها مبتنی بر دیدگاههای متفاوتی هستند، این ایده اصلی در همه آنها مشترک است: عددهای طبیعی فراتر از هر کرانی رشد می‌کنند، و هر عدد طبیعی $n \geq 2$ یک مقسوم علیه اول دارد. این دو واقعیت همراه با هم باعث می‌شوند \mathbb{P} نامتناهی باشد. سه اثبات بعدی را همه می‌شناسند، اثبات پنجم را هری فورستبرگ^۱ عرضه کرد، و اثبات آخر از آن پال اردوش است.

در اثباتهای دوم و سوم از دنباله‌های عددی معروف خاصی استفاده می‌شود.

■ اثبات دوم. فرض کنید \mathbb{P} متناهی و p بزرگترین عدد اول باشد. عدد $2^p - 1$ موسوم به عدد مرسن را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که هر عامل اول q از $2^p - 1$ ،

قضیه لاگرانژ

اگر G یک گروه متناهی (ضربی) و U یک زیرگروه باشد، آنگاه $|U|$ ، $|G|$ را می‌شمارد.

■ اثبات. رابطه دوتایی

$$a \sim b : \iff ba^{-1} \in U$$

را در نظر می‌گیریم. از اصول موضوع گروه نتیجه می‌شود که \sim یک رابطه هم‌ارزی است. رده هم‌ارزی شامل یک عنصر a دقیقاً هم مجموعه

$$Ua = \{xa : x \in U\}$$

است. چون به وضوح داریم $|Ua| = |U|$ ، می‌بینیم که G به رده‌های هم‌ارزی، همه با اندازه $|U|$ ، تجزیه می‌شود، و بنابراین $|G|$ را می‌شمارد. □

در حالت خاصی که U یک زیرگروه دوری چون $\{a, a^2, \dots, a^{m^2}\}$ است، نتیجه می‌گیریم که m (کوچکترین عدد صحیح مثبت به طوری که $a^m = 1$ ، موسوم به مرتبه a) اندازه گروه یعنی $|G|$ را می‌شمارد.

بزرگتر از p است و از اینجا نتیجه مطلوب به دست می‌آید. فرض کنید q عدد اولی باشد که $2^p - 1$ را می‌شمارد، پس داریم (پیمانه q) $2^p \equiv 1 \pmod{q}$. چون p اول است، این بدان معنی است که عنصر 2 دارای مرتبه p در گروه ضربی $\mathbb{Z}_q \setminus \{0\}$ از هیأت \mathbb{Z}_q است. این گروه، $q - 1$ عنصر دارد. بنا به قضیه لاگرانژ (تابلو صفحه قبل را ببینید) می‌دانیم که مرتبه هر عنصر اندازه گروه را می‌شمارد، یعنی داریم $p \mid q - 1$ و از این رو $p < q$. \square

■ اثبات سوم. در اینجا عددهای فرمای $F_n = 2^{2^n} + 1$ را به ازای $n = 0, 1, 2, \dots$ در نظر می‌گیریم. نشان خواهیم داد که هر دو عدد فرما نسبت به هم اول‌اند؛ پس باید بینهایت عدد اول وجود داشته باشد. برای رسیدن به این نتیجه، رابطه بازگشتی

$$\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2 \quad (n \geq 1)$$

را ثابت می‌کنیم و ادعای ما بلافاصله از آن نتیجه می‌شود. در واقع اگر m مثلاً F_k و F_n ($k < n$) را بشمارد، آنگاه m عدد 2 را می‌شمارد و بنابراین $m = 1$ یا $m = 2$. ولی $m = 2$ غیرممکن است زیرا همه عددهای فرما فردند.

برای اثبات رابطه بازگشتی از استقرا بر n استفاده می‌کنیم. به ازای $n = 1$ داریم $F_0 = 3$ و $F_1 - 2 = 3$. با استقرا می‌توانیم نتیجه بگیریم

$$\prod_{k=0}^n F_k = \left(\prod_{k=0}^{n-1} F_k \right) F_n = (F_n - 2) F_n = (2^{2^n} - 1)(2^{2^n} + 1) = 2^{2^{n+1}} - 1 = F_{n+1} - 2$$

اکنون به اثباتی نگاه کنید که در آن از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی استفاده می‌شود.

■ اثبات چهارم. فرض کنید $\pi(x) := \#\{p \leq x : p \in \mathbb{P}\}$ تعداد عددهای اول نایبتر از عدد حقیقی x باشد. عددهای اول $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ را به ترتیب صعودی شماره‌گذاری می‌کنیم. لگاریتم طبیعی $\log x$ را که به صورت $\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ تعریف می‌شود در نظر می‌گیریم.

اکنون مساحت زیر نمودار $f(t) = 1/t$ را با یک تابع پله‌ای فوقانی مقایسه می‌کنیم. (همچنین پیوست را در صفحه ۱۳ در مورد این روش ببینید.) برای $n \leq x < n + 1$ داریم

$$F_0 = 3$$

$$F_1 = 5$$

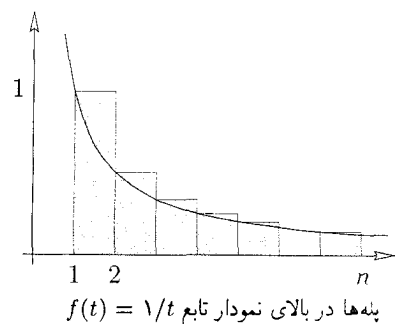
$$F_2 = 17$$

$$F_3 = 257$$

$$F_4 = 65537$$

$$F_5 = 641 \cdot 6700417$$

چند عدد فرمای نخست



$$\log x \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

(این مجموعیابی روی همه m های متعلق به \mathbb{N} که فقط دارای m عاملهای اول $p \leq x$ هستند انجام می شود)

چون هر چنین m ای را می توان به طور یکتا به صورت حاصلضربی چون $\prod_{p \leq x} p^{k_p}$ نوشت، مجموع اخیر برابر است با

$$\prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq x}} \left(\sum_{k \geq 0} \frac{1}{p^k} \right)$$

مجموع داخلی یک سری هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{p}$ است؛ پس

$$\log x \leq \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq x}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq x}} \frac{p}{p-1} = \prod_{k=1}^{\pi(x)} \frac{p_k}{p_k-1}$$

حال واضح است که $p_k \geq k+1$ و بنابراین

$$\frac{p_k}{p_k-1} = 1 + \frac{1}{p_k-1} \leq 1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$$

و از اینجا

$$\log x \leq \prod_{k=1}^{\pi(x)} \frac{k+1}{k} = \pi(x) + 1$$

همه می دانند که $\log x$ کراندار نیست، پس نتیجه می گیریم که $\pi(x)$ نیز بیکران است، و بنابراین بینهایت عدد اول وجود دارد. \square

■ اثبات پنجم. پس از آنالیز اکنون نوبت به توپولوژی می رسد! توپولوژی غریب زیر را روی مجموعه \mathbb{Z} از عددهای صحیح در نظر بگیرید. به ازای $a, b \in \mathbb{Z}$ ، $b > 0$ قرار می دهیم

$$N_{a,b} = \{a + nb : n \in \mathbb{Z}\}$$

هر مجموعه $N_{a,b}$ یک تصاعد حسابی از دو طرف نامتناهی است. حال مجموعه $O \subseteq \mathbb{Z}$ را باز می نامیم اگر یا تهی باشد و یا به ازای هر $a \in O$ ، b ی مثبتی وجود داشته باشد که $N_{a,b} \subseteq O$. واضح است که اجتماع مجموعه هایی باز، یک مجموعه باز است. اگر O_1 و O_2 باز باشند، و $a \in O_1 \cap O_2$ به طوری که $N_{a,b_1} \subseteq O_1$ و

متناهی از مجموعه های باز، خودش باز است. پس، این خانواده مجموعه های باز یک توپولوژی واقعی روی \mathbb{Z} القا می کند.

اکنون دو حکم را متذکر می شویم:

(الف) هر مجموعه باز ناتمامی، نامتناهی است.

(ب) هر مجموعه $N_{a,b}$ بسته است.

در واقع، حکم اول از تعریف نتیجه می شود. در مورد حکم دوم ملاحظه می کنیم

$$N_{a,b} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} N_{a+i,b}$$

و این ثابت می کند که $N_{a,b}$ متمم یک مجموعه باز است و بنابراین بسته است. تا اینجا عددهای اول هنوز وارد صحنه نشده اند، ولی در اینجا وارد می شوند. چون هر عدد $n \neq 1, -1$ یک عامل اول p دارد و بنابراین مشمول در $N_{0,p}$ است، نتیجه می گیریم

$$\mathbb{Z} \setminus \{1, -1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}$$

حال اگر \mathbb{P} متناهی می بود، آنگاه $\bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}$ اجتماعی متناهی از مجموعه های بسته (بنابه (ب)) و از این رو بسته بود. در نتیجه $\{1, -1\}$ یک مجموعه باز است، و این (الف) را نقض می کند.



پرتاب کردن سنگ صاف، بینهایت بار

■ اثبات ششم. آخرین اثبات ما گام بلندی فراتر می رود و نشان می دهد که نه تنها بینهایت عدد اول وجود دارد بلکه سری $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$ واگراست. نخستین اثبات این حکم مهم را اویلر عرضه کرد (و به نوبه خود جالب توجه است) ولی اثبات ما که از آن اردوش است، زیبایی مقاومت ناپذیری دارد.

فرض کنید p_1, p_2, p_3, \dots دنباله ای از عددهای اول به ترتیب صعودی باشد، و $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$ همگرا باشد. در این صورت عددی طبیعی چون k وجود دارد به قسمی که $\sum_{i \geq k+1} \frac{1}{p_i} < \frac{1}{p_k}$. عددهای p_1, \dots, p_k را عددهای اول کوچک، و p_{k+1}, p_{k+2}, \dots را عددهای اول بزرگ می نامیم. پس برای عدد طبیعی دلخواه N داریم

$$\sum_{i \geq k+1} \frac{N}{p_i} < \frac{N}{p_k} \quad (1)$$

فرض کنیم N_b تعداد عددهای صحیح مثبت m ای، $m \leq N$ باشد که بر دست کم یک عدد اول بزرگ بخش پذیرند، و N_s تعداد عددهای صحیح مثبت m ای، $m \leq N$

باشد که فقط مقسوم‌علیه‌های اول کوچک دارند. می‌خواهیم نشان دهیم که به ازای N مناسبی،

$$N_b + N_s < N$$

و این تناقض مطلوب ما خواهد بود زیرا بنا به تعریف، $N_b + N_s$ باید برابر با N باشد. برای برآورد کردن N_b ، ملاحظه می‌کنیم که $\lfloor \frac{N}{p_i} \rfloor$ تعداد عددهای صحیح مثبت n ، $n \leq N$ است که مضارب p_i هستند. پس بنا به (۱) به دست می‌آوریم

$$N_b \leq \sum_{i \geq k+1} \left\lfloor \frac{N}{p_i} \right\rfloor < \frac{N}{2} \quad (2)$$

حال به N_s می‌پردازیم. هر $n \leq N$ را که فقط مقسوم‌علیه‌های اول کوچک دارد به شکل $n = a_n b_n^2$ می‌نویسیم که در آن قسمت خالی از مربع است. پس هر a_n حاصلضرب عددهای اول کوچک متفاوتی است، و نتیجه می‌گیریم که دقیقاً 2^k قسمت خالی از مربع متفاوت وجود دارد. به علاوه، وقتی $b_n \leq \sqrt{n} \leq N$ در می‌یابیم که حداکثر \sqrt{N} قسمت مربعی متفاوت وجود دارد، و بنابراین

$$N_s \leq 2^k \sqrt{N}$$

چون (۲) به ازای هر N برقرار است، باقی می‌ماند که عدد N ای با ضابطه $2^k \sqrt{N} \leq \frac{N}{4}$ یا $2^{k+1} \leq \sqrt{N}$ پیدا کنیم و $N = 2^{2k+2}$ چنین عددی است. \square

مراجع

- [1] P. ERDÖS: *Über die Reihe $\sum \frac{1}{p}$* , *Mathematica*, Zutphen B 7 (1938), 1-2.
- [2] L. EULER: *Introductio in Analysin Infinitorum*, Tomus Primus, Lausanne 1748; Opera Omnia, Ser. 1, Vol.90.
- [3] H. FÜRSTENBERG: *On the infinitude of primes*, *Amer. Math. Monthly* 62 (1955), 353.



ژوزف برتران

دیده‌ایم که دنبالهٔ عددهای اول $۲, ۳, ۵, ۷, \dots$ نامتناهی است. برای ملاحظهٔ اینکه اندازهٔ فاصله‌های بین اعداد اول متوالی کراندار نیست، فرض کنید $N := ۲ \cdot ۳ \cdot ۵ \cdot \dots \cdot p$ نشان‌دهندهٔ حاصلضرب همهٔ عددهای اولی باشد که کوچکتر از $k + ۲$ هستند، و توجه کنید که هیچ‌یک از k عدد

$$N + ۲, N + ۳, N + ۴, \dots, N + k, N + (k + ۱)$$

اول نیست، زیرا می‌دانیم به‌ازای $۱ \leq i \leq k + ۱$ ، i عامل اولی دارد که کوچکتر از $k + ۲$ است، و این عامل همچنین N ، و در نتیجه $N + i$ ، را می‌شمارد. با این شیوه در می‌یابیم که مثلاً به‌ازای $k = ۱۰$ هیچ‌یک از ده عدد

$$۲۳۱۲, ۲۳۱۳, ۲۳۱۴, \dots, ۲۳۲۱$$

اول نیست.

ولی کرانه‌های بالایی برای فاصله‌های اعداد متوالی در دنبالهٔ عددهای اول وجود دارد. یک کران معروف چنین است: «فاصله تا عدد اول بعدی نمی‌تواند بزرگتر از عددی باشد که جستجویمان را از آن شروع می‌کنیم.» این حکم به اصل برتران معروف است، زیرا ژوزف برتران^۱ آن را حدس زد و درستیش را به‌طور تجربی به‌ازای $n < ۳۰۰۰۰۰۰$ تحقیق کرد. نخستین بار، پافوتی چیشف در ۱۸۵۰ آن را به‌ازای هر n ثابت کرد. اثبات بسیار ساده‌تری را نابغهٔ هندی رامانوجان عرضه کرد. اثبات «کتابی» ما از آن پال اردوش است که از نخستین مقالهٔ انتشار یافتهٔ اردوش، به‌تاریخ ۱۹۳۲، گرفته شده است. اردوش در زمان انتشار این مقاله ۱۹ ساله بود.

اصل برتران

به‌ازای هر $n \geq ۱$ ، عدد اولی چون p وجود دارد که $n < p \leq ۲n$.

■ اثبات. ما اندازهٔ ضریب دوجمله‌ای $\binom{۲n}{n}$ را با دقت کافی برآورد می‌کنیم تا ملاحظه شود که اگر هیچ عامل اولی در محدودهٔ $n < p \leq ۲n$ نمی‌داشت، «زیاده از حد کوچک» می‌بود. استدلال ما در پنج گام انجام می‌شود.

1. Joseph Bertrand

(۱) نخست اصل برتران را به ازای $n < 4000$ ثابت می‌کنیم. برای این کار نیازی به امتحان کردن 4000 حالت نیست: بلکه کافی است (این «شگرد لاتداو» است) تحقیق کنیم که

$$2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631, 1259, 2503, 4001$$

دنباله‌ای از عددهای اول است که هر یک از آنها کوچکتر از دو برابر عدد قبلی است. در این صورت هر بازه $\{y : n < y \leq 2n\}$ که $n \leq 4000$ ، شامل یکی از این ۱۴ عدد اول است.

(۲) سپس ثابت می‌کنیم

$$\prod_{p \leq x} p \leq 4^{x-1} \quad , \quad x \geq 2 \quad \text{به ازای هر عدد حقیقی} \quad (1)$$

که این نماد — در اینجا و در زیر — به این معنی است که حاصلضرب روی همه عددهای اول $p \leq x$ در نظر گرفته می‌شود. اثباتی که برای این حکم می‌آوریم از مقاله اولیه اردوش گرفته نشده است اما این هم از آن اردوش است و یک اثبات «کتابی» واقعی است. نخست توجه کنید که اگر q بزرگترین عدد اولی باشد که $q \leq x$ ، آنگاه

$$4^{q-1} \leq 4^{x-1} \quad \text{و} \quad \prod_{q \leq x} p = \prod_{p \leq q} p$$

پس کافی است (۱) را در حالتی که $x = q$ یک عدد اول است بررسی کنیم. به ازای $q = 2$ داریم « $2 \leq 4$ ». پس کار را با بررسی عددهای اول فرد $q = 2m + 1$ ادامه می‌دهیم. به ازای اینها حاصلضرب را تجزیه می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$\prod_{p \leq 2m+1} p = \prod_{p \leq m+1} p \cdot \prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \leq 4^m \binom{2m+1}{m} \leq 4^m 2^{2m} = 4^{2m}$$

همه قسمت‌های این «محاسبه یک سطری» به آسانی قابل تحقیق است. در واقع

$$\prod_{p \leq m+1} p \leq 4^m$$

بنا به استقرا برقرار است. اتحاد

$$\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \leq \binom{2m+1}{m}$$

Beweis eines Satzes von Tschebyscheff

Von P. LINDA in Budapest.

Für den zuerst von Tschebyscheff bewiesenen Satz, laut dessen es zwischen einer natürlichen Zahl und ihrer zweifachen stets wenigstens eine Primzahl gibt, liegen in der Literatur mehrere Beweise vor. Als einfachsten kann man ohne Zweifel den Beweis von RAMANUJAN¹⁾ bezeichnen. In seinem Werk *Vorlesungen über Zahlentheorie* (Leipzig, 1927), Band I, S. 66—68 gibt Herr LANDAU einen besonders einfachen Beweis für einen Satz über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze, aus welchem unmittelbar folgt, daß für ein geeignetes q zwischen einer natürlichen Zahl und ihrer q -fachen stets eine Primzahl liegt. Für die augenblicklichen Zwecke des Herrn LANDAU kammt es nicht auf die numerische Bestimmung der im Beweis auftretenden Konstanten an; man überzeugt sich aber durch eine numerische Verfolgung des Beweises leicht, daß q jedenfalls größer als 2 ausfällt.

In den folgenden Zeilen werde ich zeigen, daß man durch eine Verschärfung der dem LANDAUSCHEN Beweis zugrunde liegenden Ideen zu einem Beweis des oben erwähnten TSCHEBYSCHESCHEN Satzes gelangen kann, der — wie mir scheint — an Einfachheit nicht hinter dem RAMANUJANSCHEN Beweis steht. Griechische Buchstaben sollen im Folgenden durchwegs positive, lateinische Buchstaben natürliche Zahlen bezeichnen; die Bezeichnung p ist für Primzahlen vorbehalten.

1. Der Binomialkoeffizient

$$\binom{2a}{a} = \frac{(2a)!}{(a!)^2}$$

¹⁾ SR. RAMANUJAN, A Proof of Bertrand's Postulate, *Journal of the Indian Mathematical Society*, 11 (1919), S. 181—182. — *Collected Papers of SRINIVASA RAMANUJAN* (Cambridge, 1927), S. 238—239.

از این موضوع نتیجه می‌شود که $\binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}$ عددی صحیح است؛
 عددهای اول مورد نظر ما همگی عامل صورت، $(2m+1)!$ هستند ولی عامل
 مخرج، $m!(m+1)!$ نیستند. و بالاخره رابطه

$$\binom{2m+1}{m} < 2^{2m}$$

به این دلیل برقرار است که

$$\binom{2m+1}{m+1} \text{ و } \binom{2m+1}{m}$$

دو عامل (برابر!) از مجموع زیر هستند

$$\sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = 2^{2m+1}$$

(۳) از قضیه لژاندر (تابلو را ببینید) نتیجه می‌گیریم که $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$ عامل
 اول p را دقیقاً

$$\sum_{k \geq 1} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right)$$

بار در بر دارد. در اینجا هر عامل جمع حداکثر ۱ است زیرا در

$$\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor < \frac{2n}{p^k} - 2 \left(\frac{n}{p^k} - 1 \right) = 2$$

صدق می‌کند و یک عدد صحیح است. به علاوه اگر $p^k > 2n$ عوامل جمع صفر
 می‌شوند. پس $\binom{2n}{n}$ عامل p را دقیقاً

$$\sum_{k \geq 1} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right) \leq \max\{r : p^r \leq 2n\}$$

بار در بر دارد. پس بزرگترین توانی از p که $\binom{2n}{n}$ را می‌شمارد بزرگتر از $2n$ نیست.
 به خصوص عددهای اول p بزرگتر از $\sqrt{2n}$ حداکثر یک بار در $\binom{2n}{n}$ ظاهر می‌شوند.
 به علاوه — و این، طبق نظریه آردوش، نکته اساسی در این اثبات است — عددهای

اول p ای که در $n < p \leq 2n$ صدق می‌کنند، $\binom{2n}{n}$ را اصلاً نمی‌شمارند! در واقع
 از $3p > 2n$ (به ازای $n \geq 3$ و در نتیجه $p \geq 3$) نتیجه می‌شود p و $2p$ تنها
 مضربهایی از p هستند که به صورت عامل در صورت $\frac{(2n)!}{n!n!}$ ظاهر می‌شوند، درحالی
 که دو عامل p در مخرج به دست می‌آوریم.

قضیه لژاندر

عدد $n!$ عامل اول p را دقیقاً

$$\sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

بار در بر دارد.

■ اثبات. دقیقاً $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ تا از عاملهای
 $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ بر p بخش پذیرند
 و از اینجا $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ تا عامل اول p داریم. بعد
 $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$ تا از عاملهای $n!$ بر p^2 بخش پذیرند
 و این دلیل وجود $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$ عامل p^2 بعدی
 است، و به همین ترتیب. □

(۴) اکنون می‌توانیم $\binom{2n}{n}$ را برآورد کنیم. به‌ازای $n \geq 3$ ، با استفاده از برآوردی که در صفحه ۱۵ برای کران پایین به‌دست آمده است، داریم

$$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq \prod_{p \leq \sqrt{2n}} 2n \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n < p \leq 2n} p$$

و بنابراین، چون بیشتر از $\sqrt{2n}$ عدد اول p که نابیشتر از $\sqrt{2n}$ باشند وجود ندارد، داریم

$$(۲) \quad 4^n \leq (2n)^{1+\sqrt{2n}} \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n < p \leq 2n} p, \quad n \geq 3$$

(۵) حال فرض کنید هیچ عدد اول p ای با ضابطه $n < p \leq 2n$ وجود ندارد، پس حاصلضرب دوم در (۲) برابر ۱ است. با جانشانی (۱) در (۲) به‌دست می‌آوریم

$$4^n \leq (2n)^{1+\sqrt{2n}} 4^{\frac{2}{3}n}$$

یا

$$(۳) \quad 4^{n/2} \leq (2n)^{1+\sqrt{2n}}$$

که به‌ازای n های به‌قدر کافی بزرگ، غلط است! در واقع با استفاده از $a + 1 < 2^a$ (که بنا به استقرا به‌ازای هر $a \geq 2$ برقرار است) به‌دست می‌آوریم

$$(۴) \quad 2n = (\sqrt[6]{2n})^6 < ([\sqrt[6]{2n}] + 1)^6 < 2^{6[\sqrt[6]{2n}]} \leq 2^{6\sqrt[6]{2n}}$$

پس با استفاده از (۳) و (۴) به‌ازای $n \geq 50$ (و بنابراین $2\sqrt{2n} < 18$) به نتیجه زیر می‌رسیم

$$2^{2n} \leq (2n)^{2(1+\sqrt{2n})} < 2^{\sqrt{2n}(18+18\sqrt{2n})} < 2^{20\sqrt[6]{2n}\sqrt{2n}} = 2^{20(2n)^{2/3}}$$

□ دلتا دارد بر $20 < (2n)^{1/3}$ و بنابراین $n < 4000$.

از این اثبات می‌توان حتی مطلب بیشتری استخراج کرد: از (۲) و با همان نوع برآوردهایی که در بالا به کار بردیم، ثابت می‌شود که

$$\prod_{n < p \leq 2n} p \geq 2^{\frac{1}{3}n}, \quad n \geq 4000$$

و بنابراین دست کم تعداد

$$\log_{\sqrt{n}}(2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}) = \frac{1}{\sqrt{n} \log_{\sqrt{n}} n + 1} > \frac{1}{\sqrt{n} \log_{\sqrt{n}} n}$$

عدد اول در دامنه بین n و $2n$ وجود دارد.

این برآورد بدی نیست: تعداد «واقعی» عددهای اول در این دامنه تقریباً $n/\log n$ است. این موضوع از «قضیه عددهای اول» نتیجه گرفته می‌شود که حاکی است حد

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{p \leq n : p \text{ عددی اول است}\}}{n \log n}$$

وجود دارد و برابر ۱ است. این قضیه را نخست آدامار و دلاواله پوسن در ۱۸۹۶ ثابت کردند؛ سلبرگ و اردوش در ۱۹۴۸ اثباتی مقدماتی (بدون استفاده از آنالیز مختلط، ولی باز هم طولانی و پیچیده) برای آن یافتند.

در باره خود قضیه عددهای اول ظاهراً هنوز حرف نهایی زده نشده است: مثلاً، در صورت اثبات حدس ریمان (صفحه ۴۴)، که یکی از مسائل حل نشده مهم ریاضیات است، پیشرفت قابل ملاحظه‌ای در مورد برآوردهای مربوط به قضیه عددهای اول به دست خواهد آمد. ولی در مورد اصل برتران هم می‌توان انتظار پیشرفتهای چشمگیری را داشت. در این زمینه، پرسش زیر هنوز یک مسأله حل نشده است:

آیا همواره عدد اولی بین n^2 و $(n+1)^2$ هست؟

پیوست: برخی برآوردها

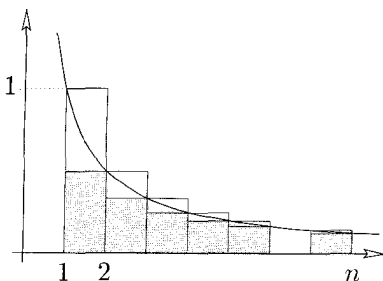
برآورد کردن با استفاده از انتگرال

روش بسیار ساده ولی کارآمدی برای برآورد کردن مجموع به وسیله انتگرال (که نمونه‌اش را در صفحه ۴ و ۵ دیدیم) وجود دارد. برای برآورد کردن عددهای همساز

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

شکل را در حاشیه رسم می‌کنیم و از مقایسه مساحت ناحیه زیر نمودار $f(t) = 1/t$ ، $1 \leq t \leq n$ با مساحت مستطیلهایی که هاشور پررنگ خورده‌اند به دست می‌آوریم

$$H_n - 1 = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} < \int_1^n \frac{1}{t} dt = \log n$$



و نیز از مقایسه با مساحت مستطیلهای بزرگ (شامل قسمتهای با هاشور کمرنگ) داریم

$$H_n - \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} > \int_1^n \frac{1}{t} dt = \log n$$

از این دو، روی هم، به دست می‌آوریم

$$\log n + \frac{1}{n} < H_n < \log n + 1$$

به خصوص، $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n \rightarrow \infty$ ، و مرتبهٔ رشد H_n برابر است با ۱ با $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_n}{\log n} = 1$. ولی برآوردهای بسیار بهتری شناخته شده‌اند ([۲] را ببینید) از قبیل

$$H_n = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + O\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

که در آن $\gamma \approx 0.5772$ «ثابت اویلر» است.

برآورد کردن فاکتوریلها — فرمول استرلینگ

از کاربرد همین روش در مورد

$$\log(n!) = \log 2 + \log 3 + \dots + \log n = \sum_{k=2}^n \log k$$

به دست می‌آید

$$\log((n-1)!) < \int_1^n \log t dt < \log(n!)$$

که در آن انتگرال به سادگی محاسبه می‌شود:

$$\int_1^n \log t dt = [t \log t - t]_1^n = n \log n - n + 1$$

پس یک برآورد نقصانی برای $n!$ به دست می‌آوریم:

$$n! > e^{n \log n - n + 1} = e \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

و در همین حال یک برآورد اضافی هم به دست می‌آید:

$$n! = n(n-1)! < n e^{n \log n - n + 1} = en \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

در اینجا تحلیل دقیقتری برای به دست آوردن مجانبهای $n!$ چنانکه با فرمول استرلینگ

در اینجا $O\left(\frac{1}{n^6}\right)$ نشان دهندهٔ تابعی چون $f(n)$ است به طوری که $f(n) \leq c \frac{1}{n^6}$ به ازای مقدار ثابت c ای برقرار است.

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

در اینجا $f(n) \sim g(n)$ به این معنی است

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$

داده می شود لازم است، و باز صورتهای دقیقتری در دست است مانند

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{514n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)$$

برآورد کردن ضریبهای دوجمله‌ای

از تعریف ضریبهای دوجمله‌ای $\binom{n}{k}$ به عنوان تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی از مجموعه‌ای n عضوی، می‌دانیم که دنباله $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ از ضریبهای دوجمله‌ای دو خاصیت زیر را دارد:

- مجموع عضوهایش برابر 2^n است.
- متقارن است: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

با توجه به رابطه $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k} \binom{n}{k-1}$ به سادگی می‌توان دریافت که به ازای هر n ، ضریبهای دوجمله‌ای $\binom{n}{k}$ دنباله‌ای تشکیل می‌دهند که متقارن و تکمندی^۱ است: به سمت وسط صعود می‌کند و بنابراین ضریبهای دوجمله‌ای میانی بزرگترین ضریبها در دنباله‌اند:

$$1 = \binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \dots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \dots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n} = 1$$

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & \\ & & & 1 & 2 & 1 & & & \\ & & 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & & \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & & \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & \end{array}$$

مثلث پاسکال [ختم]

در اینجا $[x]$ نشان‌دهنده عدد x است که به نزدیکترین عدد صحیح پایینی گرد شده و $\lceil x \rceil$ نشان‌دهنده عدد x است که به نزدیکترین عدد صحیح بالایی گرد شده است. از فرمولهای مجانبی فاکتوریلها که در بالا ذکر شد، می‌توان برآوردهای بسیار دقیقی از اندازه ضریبهای دوجمله‌ای به دست آورد. اما در این کتاب فقط به برآوردهای بسیار ضعیف و ساده‌ای نیاز داریم، از قبیل برآورد زیر: به ازای هر k ، $\binom{n}{k} \leq 2^n$ ، برای $n \geq 2$ داریم

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \geq \frac{2^n}{n}$$

که برابری فقط به ازای $n = 2$ برقرار است. به ازای $n \geq 1$ رابطه

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2n}$$

برقرار است زیرا $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ ، که یک ضریب دوجمله‌ای میانی است، بزرگترین درایه در دنباله $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n-1}$ است که مجموع جمله‌هایش 2^n و بنابراین میانگین آنها $\frac{2^n}{n}$ است.

از طرف دیگر، کران بالا را برای ضریبهای دوجمله‌ای ذکر می‌کنیم:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \leq \frac{n^k}{k!} \leq \frac{n^k}{2^{k-1}}$$

که برآورد بسیار خوبی است برای ضریبهای دوجمله‌ای «کوچک» در دُمهای دنباله، وقتی n بزرگ است (در مقایسه با k).

مراجع

- [1] P. ERDŐS: *Beweis eines Satzes von Tschebyschef*, Acta Sci. Math. (Szeged) **5** (1930-32), 194-198.
- [2] R.L. GRAHAM, D.E. KNUTH & O. PATASHNIK: *Concrete Mathematics. A Foundation for Computer Science*, Addison-Wesley, Reading MA 1989.
- [3] G.H. HARDY & E.M. WRIGHT: *An Introduction to the Theory of Numbers*, fifth edition, Oxford University Press 1979.

ضریبهای دوجمله‌ای (تقریباً) هیچ‌گاه به صورت توان نیستند

اصل برتران پیامدی دارد که به حکم زیبایی دربارهٔ ضریبهای دوجمله‌ای می‌انجامد. در سال ۱۸۹۲، سیلوستر اصل برتران را به صورت زیر تقویت کرد:

اگر $n \geq 2k$ ، آنگاه دست‌کم یکی از عددهای $n, n-1, \dots, n-k+1$ مقسوم علیه اول p ‌ای بزرگتر از k دارد.

توجه کنید که به‌ازای $n = 2k$ دقیقاً اصل برتران به دست می‌آید. در سال ۱۹۳۴ اردوش یک اثبات «کتابی» کوتاه و مقدماتی از حکم سیلوستر به دست داد که در همان حال و هوای اثباتش از اصل برتران بود. قضیهٔ سیلوستر به صورت دیگری نیز قابل بیان است:

ضریب دوجمله‌ای

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \quad (n \geq 2k)$$

همیشه عامل اول p ‌ای بزرگتر از k دارد.

با در نظر داشتن این حکم به یکی دیگر از دستاوردهای ارزشمند اردوش می‌پردازیم. چه وقتی $\binom{n}{k}$ برابر با توانی چون m^ℓ است؟ به‌آسانی می‌توان دید که بینهایت جواب به‌ازای $2 = \ell = k$ وجود دارد که جوابهای معادلهٔ $\binom{n}{2} = m^2$ هستند. در واقع اگر $\binom{n}{2}$ به صورت مربع باشد، $\binom{2n-1}{2}$ نیز چنین است. برای نشان دادن این مطلب قرار می‌دهیم $n(n-1) = 2m^2$. نتیجه می‌شود

$$(2n-1)^2((2n-1)^2-1) = (2n-1)^2 4n(n-1) = 2(2m(2n-1))^2$$

و بنابراین

$$\left(\binom{(2n-1)^2}{2}\right) = (2m(2n-1))^2$$

به این ترتیب، با شروع از $\binom{5}{2} = 6^2$ ، بینهایت جواب به دست می‌آوریم — جواب بعدی $\binom{289}{2} = 20^2$ است. خاطر نشان می‌کنیم که همهٔ جوابها از این طریق به دست نمی‌آیند.

مثلاً $\binom{50}{3} = 352$ سرآغاز رشته دیگری از جوابهاست، و همین طور $\binom{1682}{4} = 11892$.
 به ازای $k = 3$ می دانیم که $\binom{n}{3} = m^2$ جواب یکتای $n = 50$ ، $m = 140$ را دارد.
 ولی در اینجا به آخر خط می رسیم. به ازای $k \geq 4$ و هر $\ell \geq 2$ جوابی وجود ندارد، و
 این چیزی است که اردوش با استدلال مبتکرانه ای ثابت کرد.

$\binom{50}{3} = 140^2$ تنها جواب به ازای $k = 3$ ،
 $\ell = 2$ است.

قضیه. معادله $\binom{n}{k} = m^\ell$ جواب صحیحی به ازای $\ell \geq 2$ و $4 \leq k \leq n-4$ ندارد.

■ اثبات. نخست توجه کنید که می توانیم فرض کنیم $n \geq 2k$ زیرا $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
 حال فرض می کنیم قضیه غلط است، و $\binom{n}{k} = m^\ell$. اثبات، به روش برهان خلف، در
 چهارگام به صورت زیر انجام می شود.

(۱) بنا به قضیه سیلواستر، $\binom{n}{k}$ دارای عامل اول p ای بزرگتر از k است، پس p^ℓ
 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ را می شمارد. روشن است که فقط یکی از عاملهای
 $n-i$ می تواند مضرب p باشد (زیرا $p > k$)، و نتیجه می گیریم $i \equiv n \pmod{p}$ ، و بنابراین

$$n \geq p^\ell > k^\ell \geq k^2$$

(۲) عامل دلخواه $n-j$ از صورت را در نظر بگیرید و آن را به شکل
 $n-j = a_j m_j^\ell$ بنویسید که در آن a_j بر هیچ توان ℓ ام غیر بدیهی تقسیم پذیر نیست.
 بنا به (۱) ملاحظه می کنیم که a_j فقط عوامل اولی نایبتر از k دارد. حال می خواهیم
 نشان دهیم که به ازای $j \neq i$ ، $a_i \neq a_j$. فرض کنید که برخلاف آن، به ازای i ای کوچکتر
 از j ، $a_i = a_j$. در این صورت $m_i \geq m_j + 1$ و

$$\begin{aligned} k &> (n-i) - (n-j) = a_j(m_i^\ell - m_j^\ell) \geq a_j((m_j+1)^\ell - m_j^\ell) \\ &> a_j \ell m_j^{\ell-1} \geq \ell(a_j m_j^\ell)^{1/2} \geq \ell(n-k+1)^{1/2} \\ &\geq \ell\left(\frac{n}{4} + 1\right)^{1/2} \geq n^{1/2} \end{aligned}$$

که با $k^2 > n$ در بالا مغایر است.

(۳) اکنون ثابت می کنیم که a_i ها عددهای صحیح $1, 2, \dots, k$ ، به ترتیبی،
 هستند. (به نظر اردوش، این لب اثبات است.) چون از قبل می دانیم که آنها همه
 متمایزند، کافی است ثابت کنیم

$$a_0 a_1 \cdots a_{k-1} \text{ عدد } k! \text{ را می شمارد}$$

با جانشانی $a_j m_j^\ell = n - j$ در رابطه $\binom{n}{k} = m^\ell$ به دست می‌آوریم

$$a_0 a_1 \cdots a_{k-1} (m_0 m_1 \cdots m_{k-1})^\ell = k! m^\ell$$

با حذف عاملهای مشترک $m_0 \cdots m_{k-1}$ و m داریم

$$a_0 a_1 \cdots a_{k-1} u^\ell = k! v^\ell$$

که در آن $\gcd(u, v) = 1$ حال کافی است نشان دهیم $v = 1$. اگر چنین نباشد، v شامل مقسوم‌علیه اولی مانند p است. چون $\gcd(u, v) = 1$ باید مقسوم‌علیه اولی از $a_0 a_1 \cdots a_{k-1}$ و بنابراین نابیشتر از k باشد. بنا به قضیه لژاندر (صفحه ۱۱ را ببینید) می‌دانیم که $k!$ شامل p به توان $\sum_{i \geq 1} \lfloor \frac{k}{p^i} \rfloor$ است. اکنون نمای p را در $(n-k+1) \cdots (n-1)n$ برآورد می‌کنیم. فرض کنید i عدد صحیح مثبتی است و $b_1 < b_2 < \cdots < b_s$ مضربهای p^i در میان $n, n-1, \dots, n-k+1$ هستند. در این صورت $b_s \geq b_1 + (s-1)p^i$ و بنابراین

$$(s-1)p^i \leq b_s - b_1 \leq n - (n-k+1) = k-1$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$s \leq \left\lfloor \frac{k-1}{p^i} \right\rfloor + 1 \leq \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor + 1$$

بنابراین به ازای هر i ، تعداد مضربهای p^i در میان $n, n-1, \dots, n-k+1$ و بنابراین در میان a_j ها محدود به کران $\left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor + 1$ است. از اینجا نتیجه می‌شود که نمای p در $a_0 a_1 \cdots a_{k-1}$ حداکثر برابر است با

$$\sum_{i=1}^{\ell-1} \left(\left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor + 1 \right)$$

و استدلال همان است که در فصل ۲ برای قضیه لژاندر به کار بردیم. تنها تفاوت این است که این بار، مجموعیابی در $i = \ell - 1$ متوقف می‌شود زیرا a_j ها شامل هیچ توان ℓ ام نیستند.

پس با در نظر گرفتن حداکثر نمای p در این حاصلضرب و نیز نمای p در $k!$ ، نمای p در v^ℓ حداکثر برابر است با

$$\sum_{i=1}^{\ell-1} \left(\left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor + 1 \right) - \sum_{i \geq 1} \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor \leq \ell - 1$$

می‌بینیم که تحلیل ما تاکنون با $140^2 = \binom{50}{3}$ توافق دارد زیرا

$$50 = 2 \cdot 5^2$$

$$49 = 1 \cdot 7^2$$

$$48 = 3 \cdot 4^2$$

$$50704 = 140^2$$

و به تناقض مطلوب رسیده‌ایم زیرا v^ℓ یک توان ℓ ام است.

همین برای اثبات حالت $\ell = 2$ کفایت می‌کند. در واقع، چون $k \geq 4$ ، یکی از a_i ها باید برابر با ۴ باشد، ولی a_i ها شامل هیچ عدد مربع کاملی نیستند. پس اکنون فرض می‌کنیم $\ell \geq 3$.

(۴) چون $k \geq 4$ ، به‌ازای i_1, i_2, i_3 ی داریم $a_{i_1} = 1, a_{i_2} = 2, a_{i_3} = 4$

یعنی

$$n - i_1 = m_1^\ell, \quad n - i_2 = 2m_2^\ell, \quad n - i_3 = 4m_3^\ell$$

ادعا می‌کنیم که $(n - i_2)^2 \neq (n - i_1)(n - i_3)$. اگر چنین نباشد، قرار می‌دهیم $b = n - i_2$ و $b = n - i_3$ و $n - i_1 = b - x$ ، $n - i_2 = b + y$ که در آن $|x|, |y| < k$.

پس

$$(y - x)b = xy \quad \text{یا} \quad b^2 = (b - x)(b + y)$$

که در آن $x = y$ به‌وضوح غیر ممکن است. حال بنا به‌قسمت (۱) داریم

$$|xy| = b|y - x| \geq b > n - k > (k - 1)^2 \geq |xy|$$

که مهمل است.

پس داریم $m_1 m_3 \neq m_2^2$ که در آن فرض می‌کنیم $m_3 > m_1 m_2$ (حالت دیگر هم مشابه این است)، و به آخرین زنجیره‌های نابرابریهایمان می‌رسیم. داریم

$$\begin{aligned} 2(k - 1)n &> n^2 - (n - k + 1)^2 > (n - i_2)^2 - (n - i_1)(n - i_3) \\ &= 4[m_2^{2\ell} - (m_1 m_3)^\ell] \geq 4[(m_1 m_3 + 1)^\ell - (m_1 m_3)^\ell] \\ &\geq 4\ell m_1^{\ell-1} m_3^{\ell-1} \end{aligned}$$

چون $\ell \geq 3$ و $k > 6k$ و $k^2 \geq k^\ell > n$ ، از اینجا نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} 2(k - 1)n m_1 m_3 &> 4\ell m_1^\ell m_3^\ell = \ell(n - i_1)(n - i_3) \\ &> \ell(n - k + 1)^2 > 3 \left(n - \frac{n}{6}\right)^2 > 2n^2 \end{aligned}$$

حال چون $n^{1/2} \leq m_i \leq n^{1/\ell}$ ، بالاخره به‌دست می‌آوریم

$$kn^{2/3} \geq k m_1 m_3 > (k - 1) m_1 m_3 > n$$

□

یا $k^2 > n$. با این تناقض، اثبات به انجام می‌رسد.

مراجع

- [1] P. ERDŐS: *A theorem of Sylvester and Schur*, J. London Math. Soc. **9** (1934), 282-288.
- [2] P. ERDŐS: *On a diophantine equation*, J. London Math. Soc. **26** (1951), 176-178.
- [3] J.J. SYLVESTER: *On arithmetical series*, Messenger of Math. **21** (1892), 1-19, 87-120; Collected Mathematical Papers Vol. 4, 1912, 687-731.

نمایش عددها به صورت مجموع دو مربع

فصل ۴

چه اعدادی را می‌توان به صورت مجموع مربعات دو عدد نوشت؟

$$1 = 1^2 + 0^2$$

$$2 = 1^2 + 1^2$$

$$3 = ??$$

$$4 = 2^2 + 0^2$$

$$5 = 2^2 + 1^2$$

$$6 = ??$$

$$7 = ??$$

$$8 = 2^2 + 2^2$$

$$9 = 3^2 + 0^2$$

$$10 = 3^2 + 1^2$$

$$11 = ??$$



پولیندر

این مسأله به اندازه خود نظریهٔ اعداد قدمت دارد، و حل آن هم از دستاوردهای مهم این مبحث به شمار می‌رود. قسمت «دشوار» حل مسأله نشان دادن این موضوع است که هر عدد اول به صورت $4m + 1$ ، مجموع مربعات دو عدد است. هاردی می‌نویسد که این قضیهٔ دو مربع فرما «به حق یکی از زیباترین قضایای حساب به شمار می‌آید». ولی اثباتی «کتابی» که ما در اینجا می‌آوریم جدید و متعلق به سال ۱۹۹۰ است.

در آغاز به آماده‌سازی صحنه می‌پردازیم. ابتدا لازم است بین عدد اول $p = 2$ ، عددهای اول به صورت $p = 4m + 1$ ، و عددهای اول به صورت $p = 4m + 3$ تمایز قائل شویم. هر عدد اول دقیقاً به یکی از این سه رده تعلق دارد. در اینجا (با استفاده از روشی منسوب به اقلیدس) نشان می‌دهیم که بینهایت عدد اول به صورت $4m + 3$ وجود دارد. در واقع اگر فقط تعدادی متناهی از اینها وجود می‌داشت، می‌توانستیم p_k را بزرگترین عدد اولی که به این صورت است در نظر بگیریم. قرار می‌دهیم

$$N_k := 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p_k - 1$$

(که در آن $p_1 = 2$ ، $p_2 = 3$ ، $p_3 = 5$ ، ... نشان‌دهندهٔ دنبالهٔ همهٔ عددهای اول است). می‌بینیم که N_k همنهشت با ۳ (به پیمانهٔ ۴) است، پس باید عامل اولی به شکل $4m + 3$ داشته باشد، و این عامل اول بزرگتر از p_k است — بنابراین به تناقض رسیده‌ایم. در انتهای این فصل نشان خواهیم داد که تعداد عددهای اول به صورت $p = 4m + 1$ نیز نامتناهی است.

نخستین لم ما حالت خاصی از قانون معروف به «قانون تقابل» است و عددهای اولی را که به‌ازای آنها -1 در هیأت \mathbb{Z}_p مربع کامل است مشخص می‌کند (به تابلو صفحهٔ بعد نگاه کنید).

لم ۱. معادلهٔ (به پیمانهٔ p) $x^2 \equiv -1$ به‌ازای $p = 2$ و به‌ازای عددهای اول به‌صورت $p = 4m + 1$ جواب دارد، ولی به‌ازای عددهای اول به‌صورت $p = 4m + 3$ جواب ندارد.

■ اثبات. به ازای $p = 2$ ، x را برابر ۱ می‌گیریم. به ازای p های فرد، رابطه‌ای هم‌ارزی روی $\{1, 2, \dots, p-1\}$ به این طریق می‌سازیم که هر عضو این مجموعه را با وارون جمعی و ضربی آن در \mathbb{Z}_p یکی می‌گیریم. پس رده‌های هم‌ارزی «در حالت کلی» شامل چهار عضو به صورت زیرند

$$\{x, -x, \bar{x}, -\bar{x}\}$$

زیرا چنین مجموعه‌ی ۴ عضوی هر دو وارون همه اعضایش را در بر دارد. با این حال اگر بعضی از چهار عدد متمایز نباشند، رده هم‌ارزی کوچکتر خواهد بود:

$$\bullet \quad x \equiv -x \text{ برای } p \text{ های فرد غیر ممکن است.}$$

$$\bullet \quad x \equiv \bar{x} \text{ هم‌ارز با } x^2 \equiv 1 \text{ است. این معادله دو جواب دارد، یعنی } x = 1 \text{ و } x = p-1 \text{ که رده هم‌ارزی } \{1, p-1\} \text{ با اندازه } 2 \text{ را به دست می‌دهد.}$$

$$\bullet \quad x \equiv -\bar{x} \text{ هم‌ارز با } x^2 \equiv -1 \text{ است. این معادله ممکن است جواب نداشته باشد یا دو جواب متمایز، } x_0 \text{ و } p-x_0 \text{ داشته باشد؛ رده هم‌ارزی در این حالت، } \{x_0, p-x_0\} \text{ است.}$$

مجموعه $\{1, 2, \dots, p-1\}$ دارای $p-1$ عضو است، و ما آن را به چند چهارتایی (رده‌های هم‌ارزی با اندازه ۴) به اضافه یک یا دو دوتایی (رده‌های هم‌ارزی با اندازه ۲) افراز کرده‌ایم. به ازای $p = 4m + 2 = p-1$ در می‌یابیم که فقط یک دوتایی $\{1, p-1\}$ وجود دارد و بقیه چهارتایی‌اند و بنابراین

$$x^2 \equiv -1 \text{ (به پیمانه } p \text{)}$$

جواب ندارد. برای $p = 4m + 1 = p-1$ باید دوتایی دیگری وجود داشته باشد و این شامل دو جواب $x^2 \equiv -1$ است که در جستجوی آن هستیم. □

افراز به ازای $p = 11$ چنین است:
 $\{1, 10\}$ ، $\{2, 9, 6, 5\}$ ، $\{3, 8, 4, 7\}$ ؛ و
 به ازای $p = 13$ عبارت است از $\{1, 12\}$ ،
 $\{2, 11, 7, 6\}$ ، $\{3, 10, 9, 4\}$ ، $\{5, 8\}$ ؛
 جفت $\{5, 8\}$ دو جواب
 (به پیمانه ۱۳) $x^2 \equiv -1$ را به دست می‌دهد.

هیأت‌های اول

اگر p عددی اول باشد، آنگاه مجموعه $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$ با جمع و ضربی که «به پیمانه p » تعریف می‌شوند یک هیأت متناهی تشکیل می‌دهد. ما به ویژگی‌های ساده‌ی زیر نیاز خواهیم داشت.

+	۰	۱	۲	۳	۴
۰	۰	۱	۲	۳	۴
۱	۱	۲	۳	۴	۰
۲	۲	۳	۴	۰	۱
۳	۳	۴	۰	۱	۲
۴	۴	۰	۱	۲	۳
•	۰	۱	۲	۳	۴
۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۲	۳	۴
۲	۰	۲	۴	۱	۳
۳	۰	۳	۱	۴	۲
۴	۰	۴	۳	۲	۱

جمع و ضرب در \mathbb{Z}_5

• به ازای $x \in \mathbb{Z}_p$ ، $x \neq 0$ ، وارون جمعی (که معمولاً آن را با $-x$ نشان می‌دهیم) با $\{1, 2, \dots, p-1\}$ داده می‌شود. اگر $p > 2$ ، آنگاه x و $-x$ عضوهای متفاوتی از \mathbb{Z}_p هستند.

• هر $x \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ وارون ضربی یکتایی چون $\bar{x} \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ با ضابطه (به پیمانه p) $x\bar{x} \equiv 1$ دارد.

بنا به تعریف عددهای اول، نگاشت $\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$ ، $z \mapsto xz$ به ازای هر $x \neq 0$ یک به یک است. بنابراین روی مجموعه متناهی $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ باید پوشا نیز باشد، و در نتیجه به ازای هر x ، عنصر یکتای $\bar{x} \neq 0$ با ضابطه (به پیمانه p) $x\bar{x} \equiv 1$ وجود دارد.

• مربعهای $0^2, 1^2, 2^2, \dots, h^2$ عضوهای متفاوتی از \mathbb{Z}_p را به ازای $h = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ مشخص می‌کنند.

دلیلش این است که از $x^2 \equiv y^2$ یا $x^2 \equiv 0$ نتیجه $(x+y)(x-y) \equiv 0$ می‌شود یا $x \equiv y$ یا $x \equiv -y$. عناصر $0^2, 1^2, \dots, h^2$ که تعدادشان $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1$ تا است مربعها یا عددهای مربعی در \mathbb{Z}_p نامیده می‌شوند.

در اینجا به اجمال اشاره می‌کنیم که به ازای همه عددهای اول، جوابهایی برای (به پیمانه p) $x^2 + y^2 \equiv -1$ وجود دارد. در واقع، تعداد $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1$ عدد مربعی متمایز x^2 در \mathbb{Z}_p وجود دارد و نیز $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1$ عدد متمایز به صورت $-(1+y^2)$. این دو مجموعه از اعداد بزرگتر از آن‌اند که مجزا باشند چون \mathbb{Z}_p فقط p عضو دارد، و بنابراین باید x و y وجود داشته باشند که (به پیمانه p) $x^2 \equiv -(1+y^2)$.

لم ۲. هیچ عددی که به صورت $n = 4m + 3$ باشد مجموع دو مربع نیست.

■ اثبات. مربع هر عدد زوج به صورت (به پیمانه ۴) $(2k)^2 = 4k^2 \equiv 0$ است در حالی که مربعات عددهای فرد به صورت

$$(2k + 1)^2 = 4(k^2 + k) - 1 \equiv 1 \pmod{4} \text{ (به پیمانه ۴)}$$

هستند. پس مجموع هر دو مربع، همنهشت با ۱، ۴ یا ۲ (به پیمانه ۴) است. □

این لم کفایت می‌کند تا عددهای اول به صورت $p = 4m + 3$ در نظر ما «بد» باشند. پس به ویژگیهای «خوب» عددهای اولی که به صورت $p = 4m + 1$ هستند می‌پردازیم. گام اساسی در راه رسیدن به قضیه اصلی، گزاره زیر است که اثبات آن را تساهیل عرضه کرده است.

گزاره. هر عدد اول به صورت $p = 4m + 1$ مجموع دو مربع است، یعنی می‌توان آن را به ازای عددهایی طبیعی چون $x, y \in \mathbb{N}$ به صورت $p = x^2 + y^2$ نوشت.

■ اثبات. مجموعه

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 : x^2 + 4yz = p\}$$

را بررسی می‌کنیم. مجموعه S متناهی است زیرا مسلماً همه سه تاییهای آن در $\{1, 2, \dots, p\}$ صدق می‌کنند. این مجموعه S را می‌توان مجموعه‌ای متناهی از نقاط واقع در \mathbb{R}^3 دانست. اثبات تساهیل مبتنی بر این کشف شگفت‌انگیز است که صفحاتی که با $x = y - z$ و با $x = 2y$ مشخص می‌شوند با مجموعه S برخورد نمی‌کنند ولی آن را به سه بخش S_1, S_2 و S_3 تقسیم می‌کنند که S_1 و S_2 تحت یک نگاشت آفین هم‌ارزند (و بنابراین کاردینال آنها یکی است)، و سومی، S_3 ، دارای تقارنی با دقیقاً یک نقطه ثابت است (و بنابراین $|S_3|$ فرد است). افزاز

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

$$S_1 := \{(x, y, z) \in S : x < y - z\}$$

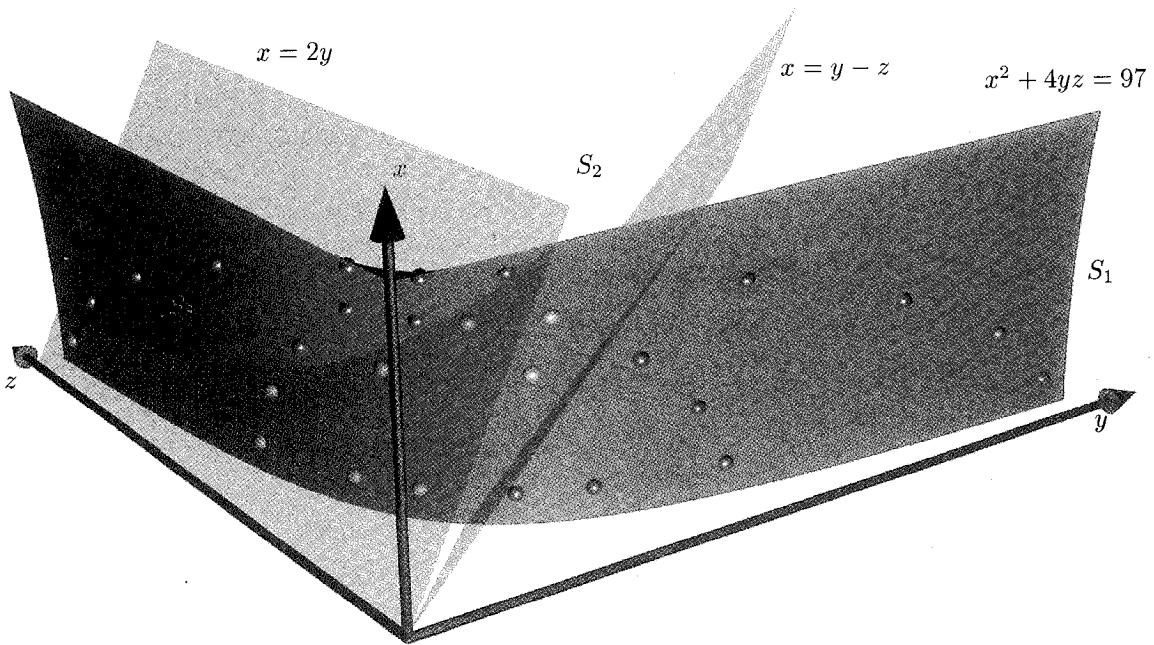
$$S_2 := \{(x, y, z) \in S : y - z < x < 2y\}$$

$$S_3 := \{(x, y, z) \in S : 2y < x\}$$

S_1	S_2	S_3
	(۱, ۱, ۱۰)	
(۱, ۵, ۲)	(۱, ۲, ۵)	(۵, ۲, ۲)
(۱, ۱۰, ۱)	(۳, ۲, ۴)	(۳, ۱, ۸)
(۳, ۸, ۱)	(۳, ۴, ۲)	(۵, ۱, ۴)
	(۵, ۴, ۱)	

افزاز به ازای $p = ۴۱$

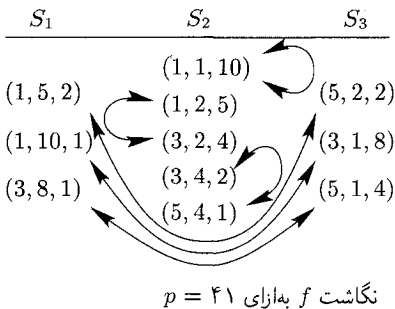
به دست می‌آوریم. این افزاز درست است زیرا از حالت مرزی $x = y - z$ نتیجه می‌شود $p = (y + z)^2$ در حالی که از $x = 2y$ نتیجه می‌شود $p = 4y(y + z)$ و هیچ‌یک از آنها نمی‌تواند برقرار باشد زیرا p اول است.



وضعیت هندسی به ازای $p = 97$ ، نقطه‌های واقع در S_1 و S_2 قرمزند و نقطه‌های واقع در S_3 آبی.

با این تقسیم‌بندی، نگاشتی به صورت

$$f : \begin{cases} S_1 \rightarrow S_2 : (x, y, z) \mapsto (x + 2z, z, y - x - z) \\ S_2 \rightarrow S_2 : (x, y, z) \mapsto (2y - x, y, x - y + z) \\ S_2 \rightarrow S_1 : (x, y, z) \mapsto (x - 2y, x - y + z, y) \end{cases}$$



تعریف می‌کنیم. تحقیق در اینکه f خوش‌تعریف و وارون خود است، آسان (و جالب!) است. به خصوص f دوسویی است.

چون f مجموعه‌های S_1 و S_2 را با هم تعویض می‌کند، همهٔ نقطه‌های ثابت f باید در S_2 باشند و از اینجا داریم

$$f(x, y, z) = (x, y, z) \iff x = y$$

چون p عددی اول است، تنها جواب صحیح مثبت $f(x, y, z) = (x, y, z)$ جواب $x(x + 4z) = p$ است، یعنی $x = 1$ ، $z = \frac{p-1}{4}$. پس f دقیقاً یک نقطهٔ ثابت $(1, 1, \frac{p-1}{4})$ را دارد، و تمام نقاط دیگر S را با تصویرهایشان تعویض می‌کند. از اینجا نتیجه می‌شود $|S_1| = |S_2|$ و $|S_3|$ فرد است. به خصوص $|S|$ فرد است.

اکنون نگاشت بسیار ساده‌تر

$$g : S \rightarrow S, \quad (x, y, z) \mapsto (x, z, y)$$

را در نظر می‌گیریم که باز وارون خودش است. چون $|S|$ فرد است، g نمی‌تواند فقط نقطه‌های متمایز S را با هم تعویض کند و باید دست‌کم یک نقطه ثابت برای g وجود داشته باشد. پس یک $(x, y, z) \in S$ وجود دارد یعنی جوابی برای

$$\square \quad p = x^2 + 4y^2 = x^2 + (2y)^2 \quad (x, y \in \mathbb{N})$$

توجه کنید که این اثبات چیز بیشتری به دست می‌دهد — برای همه عددهای اول به صورت $p = 4m + 1$ ، تعداد نمایشهای p به شکل $p = x^2 + (2y)^2$ فرد است. (این نمایش در واقع یکتاست، [۱] را ببینید.) همچنین توجه کنید این اثبات سازنده نیست؛ راههای کارامدی برای یافتن چنین نمایشهای عدد به صورت دو مربع در [۳] مورد بحث قرار گرفته است. قضیه زیر به پرسشی که در آغاز این فصل آمد، پاسخ کامل می‌دهد.

قضیه. عدد طبیعی n به صورت مجموع دو مربع قابل نمایش است اگر و تنها اگر در تجزیه n به عوامل اول، هر عامل اول به صورت $p = 4m + 3$ با نمای زوج ظاهر شود.

■ اثبات. عدد n را نمایش پذیر گوئیم اگر مجموع دو مربع باشد یعنی اگر به ازای x و y ای متعلق به \mathbb{N} ، $n = x^2 + y^2$. این قضیه پیامد پنج حقیقت است:

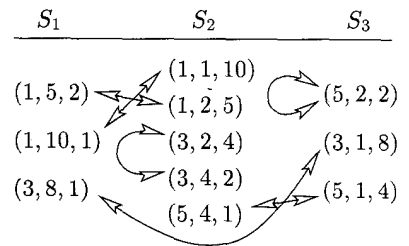
(۱) $2 = 1^2 + 1^2$ نمایش پذیر است. هر عدد اول به صورت $p = 4m + 1$ نمایش پذیر است.

(۲) حاصلضرب هر دو عدد نمایش پذیر $n_1 = x_1^2 + y_1^2$ و $n_2 = x_2^2 + y_2^2$ نمایش پذیر است:

$$n_1 n_2 = (x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2$$

(۳) اگر n نمایش پذیر باشد، $n = x^2 + y^2$ ، آنگاه nz^2 نیز به صورت $nz^2 = (xz)^2 + (yz)^2$ نمایش پذیر است.

حقایق (۱)، (۲)، و (۳)، همراه با هم، قسمت «اگر» قضیه را به دست می‌دهند. (۴) اگر $p = 4m + 3$ عدد اولی باشد که یک عدد نمایش پذیر $n = x^2 + y^2$ را بشمارد، آنگاه p هم x و هم y را می‌شمارد، و بنابراین p^2 ، n را می‌شمارد. در واقع اگر داشتیم (به پیمانه p) $x \not\equiv 0$ ، آنگاه می‌توانستیم \bar{x} را پیدا کنیم چنانکه (به پیمانه p) $x\bar{x} \equiv 1$. معادله $x^2 + y^2 \equiv 0$ را در \bar{x}^2 ضرب می‌کنیم و به دست



نگاشت g به ازای $p = 41$: (تنها) نقطه ثابت
جواب $(5, 2, 2)$

$$41 = 5^2 + 4 \times 2^2 = 5^2 + 4^2$$

را به دست می‌دهد.

می‌آوریم (به پیمانه p) $1 + y^2 x^2 = 1 + (\overline{xy})^2 \equiv 0$ که بنا به لم ۱ برای $p = 4m + 3$ غیرممکن است.

(۵) اگر n نمایش‌پذیر باشد و $p = 4m + 3$ عدد n را بشمارد، آنگاه p^2 عدد n را می‌شمارد و n/p^2 نمایش‌پذیر است. این از (۴) نتیجه می‌شود و اثبات را به انجام می‌رساند. □

به عنوان فرع این قضیه، نتیجه می‌گیریم که بینهایت عدد اول به صورت $p = 4m + 1$ وجود دارد. برای ملاحظه این مطلب، عدد

$$M_k = (3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots p_k)^2 + 2^2$$

را که همنهشت با ۱ (به پیمانه ۴) است در نظر می‌گیریم. همه عوامل اول آن بزرگتر از p_k هستند، و بنا به حقیقت (۴) در اثبات پیشین، عامل اولی به صورت $4m + 3$ ندارد. پس M_k عامل اولی به شکل $4m + 1$ دارد که بزرگتر از p_k است. این بحث را با ذکر دو نکته به پایان می‌آوریم:

- اگر a و b دو عدد طبیعی متباین باشند، آنگاه بینهایت عدد اول به صورت $am + b$ ($m \in \mathbb{N}$)، وجود دارند — این قضیه معروف (و دشواری از دیریکله است).

- ولی چنین نیست که به ازای a ی ثابت و b های مختلف، عددهای اول به یک میزان ظاهر شوند حتی به ازای $a = 4$ ؛ در واقع، عددهای اول به صورت $4m + 3$ «بسیار بیشتر» از اعداد اول به صورت $4m + 1$ هستند. این نتیجه به اریبی چیشف معروف است — مرجع [۲] را ببینید.

مراجع

- [1] I. NIVEN & H.S. ZUCKERMAN: *An Introduction to the Theory of Numbers*, third edition, Wiley 1972.
- [2] M. RUBINSTEIN & P.SARNAK: *Chebyshev's bias*, *Experimental Mathematics* **3** (1994), 173-197.
- [3] S. WAGON: *Editor's corner: The Euclidean algorithm strikes again*, *Amer. Math. Monthly* **77** (1990), 125-129.
- [4] D. ZAGIER: *A one-sentence proof that every prime $p \equiv 1 \pmod{4}$ is a sum of two squares*, *Amer. Math. Monthly* **77** (1990), 144.



ارنست ویت

حلقه ساختار مهمی در جبر نوین است. اگر حلقه R یک عضو یکه ضربی چون 1 و هر عضو ناصفر آن یک وارون ضربی داشته باشد، آنگاه R را حلقه تقسیم می‌نامند. پس آنچه R برای هیأت بودن کم دارد، تعویض‌پذیری ضرب است. مشهورترین نمونه حلقه تقسیم تعویض‌ناپذیر، حلقه کواترنیونهاست که همیلتن آن را کشف کرد. ولی همان‌طور که از عنوان این فصل بر می‌آید، چنین حلقه تقسیمی لزوماً باید نامتناهی باشد. اگر R متناهی باشد، آنگاه بنا به اصول موضوع، ضرب باید تعویض‌پذیر باشد. این حکم که امروز از احکام مشهور و قدیمی به‌شمار می‌آید، توجه و علاقه بسیاری از ریاضیدانان را برانگیخته بوده است زیرا چنانکه هرستاین می‌نویسد: «این قضیه به‌طرز بسیار نامنتظره‌ای دو چیز ظاهراً نامرتبط، تعداد اعضای یک دستگاه جبری معین و ضرب در آن دستگاه، را به هم مربوط می‌سازد.»

این قضیه زیبا که معمولاً به مک‌لاگان و دربرن^۱ نسبت داده می‌شود (و این انتساب قابل تردید است) به‌وسیله افراد زیادی با استفاده از ایده‌های متنوعی به اثبات رسیده است. خود دربرن سه اثبات در ۱۹۰۵ عرضه کرد و لئونور دیکسن هم در همان سال اثبات دیگری به‌دست داد. بعدها امیل آرتین، هانس تساسنهاوس^۲، نیکولاس بورباکی، و بسیاری ریاضیدانان دیگر اثباتهایی عرضه کردند. اثبات ما از لحاظ سادگی و زیبایی برتر از سایر اثباتهاست. این برهان را ارنست ویت^۳ در ۱۹۳۱ ارائه کرد و با ترکیب دو ایده مقدماتی به سرانجامی زیبا می‌رسد.

قضیه. هر حلقه تقسیم متناهی R تعویض‌پذیر است.

■ اثبات. اولین جزء اثبات ما به جبر خطی مربوط می‌شود. فرض کنید به‌ازای عضو دلخواه $s \in R$ ، مجموعه $C_s = \{x \in R : xs = sx\}$ مرکب از اعضای R باشد که با s تعویض می‌شوند؛ C_s مرکزساز s نامیده می‌شود. روشن است که C_s شامل 0 و 1 است و یک زیرحلقه تقسیم R است. مرکز، Z ، مجموعه اعضای R است که با همه اعضای R تعویض می‌شوند، پس $Z = \bigcap_{s \in R} C_s$. به‌خصوص همه عضوهای

Z تعویض می‌شوند، 0 و 1 در Z اند، و بنابراین Z یک هیأت [میدان] متناهی است. فرض می‌کنیم $|Z| = q$.

می‌توانیم R و C_s را فضاهایی برداری روی هیأت Z بپنداریم و نتیجه بگیریم $|R| = q^n$ که در آن n ، بعد فضای برداری R روی Z است و همین‌طور به‌ازای عددهای صحیح مناسب $1 \leq n_s$ داریم $|C_s| = q^{n_s}$.

حال فرض کنیم هیأت R نیست. این بدان معنی است که به‌ازای s ای متعلق به R ، مرکزساز C_s همه R نیست و یا به‌عبارت دیگر، $n_s < n$.

رابطه زیر را روی مجموعه $R^* := R \setminus \{0\}$ در نظر می‌گیریم

$$r' \sim r : \iff r' = x^{-1}rx \quad , \text{ به‌ازای } x \text{ ای متعلق به } R^*$$

به‌آسانی می‌توان دید که \sim رابطه‌ای هم‌ارزی است. فرض کنیم

$$A_s := \{x^{-1}sx : x \in R^*\}$$

رده هم‌ارزی شامل s باشد. ملاحظه می‌کنیم که دقیقاً وقتی s در مرکز (Z) است، $|A_s| = 1$. پس بنا به فرض ما، رده‌های A_s با ضابطه $|A_s| \geq 2$ وجود دارند. حال برای $s \in R^*$ نگاهت $f_s : x \mapsto x^{-1}sx$ از R^* به روی A_s را در نظر می‌گیریم. داریم

$$\begin{aligned} x^{-1}sx = y^{-1}sy &\iff (yx^{-1})s = s(yx^{-1}) \\ &\iff yx^{-1} \in C_s^* \iff y \in C_s^*x \end{aligned}$$

که در آن $C_s^*x = \{zx : z \in C_s^*\}$ دارای اندازه $|C_s^*|$ است. پس هر عضو $x^{-1}sx$ تصویر دقیقاً $1 - |C_s^*| = q^{n_s} - 1$ عضو R^* تحت نگاشت f_s است، و نتیجه می‌گیریم $|R^*| = |A_s||C_s^*|$. به‌خصوص خاطر نشان می‌کنیم که $|A_s| = \frac{|R^*|}{|C_s^*|} = \frac{q^n - 1}{q^{n_s} - 1}$ عددی صحیح به‌ازای هر s است.

می‌دانیم که رده‌های هم‌ارزی، R^* را افزایش می‌کنند. حال عضوهای مرکزی Z^* را در یک دسته قرار می‌دهیم و رده‌های هم‌ارزی شامل بیش از یک عضو را با A_1, \dots, A_t نشان می‌دهیم. بنا به فرض، می‌دانیم که $t \geq 1$ چون $|R^*| = |Z^*| + \sum_{i=1}^t |A_i|$. فرمول موسوم به فرمول رده‌ای:

$$q^n - 1 = q - 1 + \sum_{i=1}^t \frac{q^n - 1}{q^{n_i} - 1} \quad (1)$$

را ثابت کرده‌ایم. در این فرمول به‌ازای هر i داریم $1 < \frac{q^n - 1}{q^{n_i} - 1} \in \mathbb{N}$. با رابطه (۱)، جبر مجرد را ترک گفته‌ایم و به عددهای طبیعی برگشته‌ایم. اکنون ادعا می‌کنیم از $q^n - 1 \mid q^{n_i} - 1$ نتیجه می‌شود $n_i \mid n$. می‌نویسیم $n = an_i + r$ که $0 \leq r < n_i$ ، و از $q^{an_i+r} - 1 \mid q^{n_i} - 1$ نتیجه می‌گیریم

$$q^{n_i} - 1 \mid (q^{an_i+r} - 1) - (q^{n_i} - 1) = q^{n_i}(q^{(a-1)n_i+r} - 1)$$

و بنابراین $q^{n_i} - 1 \mid q^{(a-1)n_i+r} - 1$ ، چون $q^{n_i} - 1$ و q^{n_i} نسبت به هم اول‌اند. اگر به‌همین نحو ادامه دهیم به‌دست می‌آوریم $q^r - 1 \mid q^{n_i} - 1$ ، $0 \leq r < n_i$ ، که فقط به‌ازای $r = 0$ ممکن است، یعنی $n_i \mid n$. به‌طور خلاصه

$$(2) \quad n_i \mid n \quad \text{به‌ازای هر } i$$

حال به‌جزء دوم اثبات می‌رسیم که با عددهای مختلط \mathbb{C} سروکار دارد. چندجمله‌ای $x^n - 1$ را در نظر بگیرید. ریشه‌های آن در \mathbb{C} ، ریشه‌های n ام واحد نامیده می‌شوند. چون $\lambda^n = 1$ ، برای همهٔ این ریشه‌های λ داریم $|\lambda| = 1$ و این ریشه‌ها همگی روی دایرهٔ یکهٔ صفحهٔ مختلط‌اند. در واقع، این ریشه‌ها دقیقاً عددهای $\lambda_k = e^{2k\pi i/n} = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ هستند $0 \leq k \leq n-1$ (تابلو صفحهٔ بعد را ببینید). بعضی از ریشه‌های λ به‌ازای $d < n$ در $\lambda^d = 1$ صدق می‌کنند. مثلاً ریشهٔ $\lambda = -1$ در $\lambda^2 = 1$ صدق می‌کند. به‌ازای ریشهٔ λ فرض کنید d کوچکترین نمای مثبت باشد که $\lambda^d = 1$ ، یعنی d مرتبهٔ λ در گروه ریشه‌های واحد است. پس بنا به قضیهٔ لاگرانژ («مرتبهٔ هر عضو یک گروه، مرتبهٔ آن گروه را می‌شمارد») — تابلو فصل ۱ را ببینید) داریم $d \mid n$. توجه کنید که ریشه‌هایی با مرتبهٔ n وجود دارند از قبیل $\lambda = e^{2\pi i/n}$.

اکنون همهٔ ریشه‌های با مرتبهٔ d را در یک دسته قرار داده می‌نویسیم

$$\phi_d(x) := \prod_{\lambda \text{ با مرتبه } d} (x - \lambda)$$

توجه کنید که تعریف $\phi_d(x)$ مستقل از n است. چون هر ریشه مرتبهٔ d ای دارد، نتیجه می‌گیریم که

$$(3) \quad x^n - 1 = \prod_{d \mid n} \phi_d(x)$$

ریشه‌های واحد

هر عدد مختلط $z = x + iy$ را می‌توان به صورت «قطبی»

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

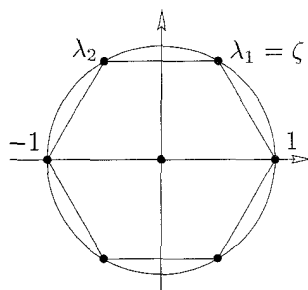
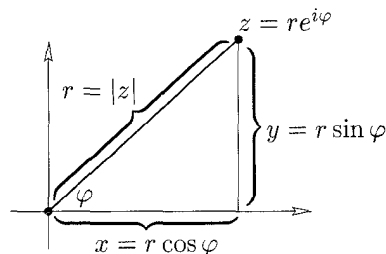
نوشت که در آن $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ فاصله z تا مبدأ و φ زاویه‌ای است که از قسمت مثبت محور x اندازه‌گیری می‌شود. پس ریشه‌های n ام واحد به صورت

$$\lambda_k = e^{2k\pi i/n} = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n), 0 \leq k \leq n-1$$

هستند زیرا به‌ازای هر k

$$\lambda_k^n = e^{2k\pi i} = \cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi) = 1$$

با محاط کردن یک n ضلعی منتظم در دایره یک، این ریشه‌ها را از راه هندسی به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که به‌ازای هر k ، داریم $\lambda_k = \zeta^k$ که در آن $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. پس ریشه‌های n ام واحد یک گروه دوری $\{\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n-1}, \zeta^n = 1\}$ با مرتبه n تشکیل می‌دهند.



ریشه‌های واحد به‌ازای $n = 6$.

در اینجا به‌نکته اساسی می‌رسیم: ضربهای چندجمله‌ایهای $\phi_n(x)$ عددی صحیح‌اند (یعنی به‌ازای هر n ، $\phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$) و به‌علاوه، ضریب ثابت یا ۱ یا -۱ است.

بیاید این ادعا را به دقت تحقیق کنیم. به‌ازای $n = 1$ ، تنها ریشه ۱ است و بنابراین $\phi_1(x) = x - 1$. حال به استقرا عمل کرده فرض می‌کنیم به‌ازای هر $d < n$ ، $\phi_d(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ، و اینکه ضریب ثابت $\phi_d(x)$ برابر ۱ یا -۱ است. بنا به (۳)

$$x^n - 1 = p(x)\phi_n(x) \quad (4)$$

که در آن $p(x) = \sum_{i=0}^{\ell} p_i x^i$ ، $\phi_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$ ، $p_0 = 1$ یا $p_0 = -1$ ، چون

$-1 = p_0 a_0$ ، می‌بینیم $\{1, -1\}$ ، $a_0 \in \{1, -1\}$. فرض کنید از قبل می‌دانیم که $a_0, a_1, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{Z}$. با محاسبه ضریب x^k در دو طرف (۴) به دست می‌آوریم

$$\sum_{i=0}^k p_i a_{k-i} = \sum_{i=1}^k p_i a_{k-i} + p_0 a_k \in \mathbb{Z}$$

چون، بنا به فرض، همه a_0, \dots, a_{k-1} (و همه p_i ها) در \mathbb{Z} هستند، $p \cdot a_k$ و در نتیجه a_k نیز باید در \mathbb{Z} باشند زیرا p برابر ۱ یا -۱ است.

اکنون آماده‌ایم که قدم نهایی را برداریم. فرض کنید $n_i | n$ یکی از عددهایی باشد که در (۱) ظاهر می‌شوند. بنابراین

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \phi_d(x) = (x^{n_i} - 1)\phi_n(x) \prod_{d|n, d \nmid n_i, d \neq n} \phi_d(x)$$

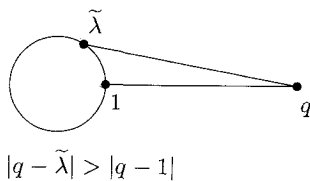
نتیجه می‌گیریم که روابط تقسیم‌پذیری

$$\phi_n(q) | \frac{q^n - 1}{q^{n_i} - 1} \quad \text{و} \quad \phi_n(q) | q^n - 1 \quad (5)$$

در \mathbb{Z} برقرارند، چون (۵) به‌ازای هر i برقرار است، از فرمول رده‌ای (۱) نتیجه می‌گیریم که

$$\phi_n(q) | q - 1$$

ولی این نمی‌تواند برقرار باشد. چرا؟ داریم $\phi_n(x) = \prod(x - \lambda)$ که در آن λ روی همه ریشه‌های $x^n - 1$ با مرتبه n تغییر می‌کند. فرض کنید $\tilde{\lambda} = a + ib$ یکی از آن ریشه‌ها باشد. چون $n > 1$ (زیرا $R \neq \mathbb{Z}$) داریم $\tilde{\lambda} \neq 1$ که بدین معنی است که قسمت حقیقی a کوچکتر از ۱ است. حال داریم $|\tilde{\lambda}|^2 = a^2 + b^2 = 1$ ، و بنابراین



$$\begin{aligned} |q - \tilde{\lambda}|^2 &= |q - a - ib|^2 = (q - a)^2 + b^2 \\ &= q^2 - 2aq + a^2 + b^2 = q^2 - 2aq + 1 \\ &> q^2 - 2q + 1 \quad (\text{به دلیل اینکه } a < 1) \\ &= (q - 1)^2 \end{aligned}$$

و لذا $|q - \tilde{\lambda}| > q - 1$ به‌ازای همه ریشه‌های با مرتبه n برقرار است. از اینجا نتیجه می‌شود

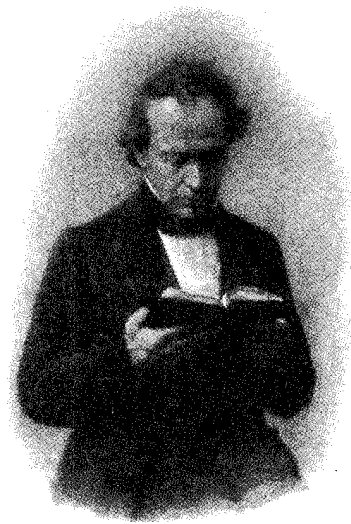
$$|\phi_n(q)| = \prod_{\lambda} |q - \lambda| > q - 1$$

که به این معنی است که $\phi_n(q)$ نمی‌تواند مقسوم‌علیه $q - 1$ باشد؛ پس به تناقض رسیده‌ایم و اثبات تمام است. \square

مراجع

Göttingen Math.-Phys. Klasse (1905), 1-36; Collected Mathematical Papers Vol.III, Chelsea Publ. Comp. The Bronx, NY 1975, 539-574.

- [2] J.H.M. WEDDERBURN: *A theorem on finite algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **6** (1905), 349-352.
- [3] E. WITT: *Über die Kommutativität endlicher Schiefkörper*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **8** (1931), 413.



شارل ارمیت

این موضوع را ارسطو، هنگامی که ادعا کرد قطر و محیط یک دایره متوافق نیستند، حدس زد. اولین اثبات این حکم بنیادی را یوهان هاینریش لامبرت در سال ۱۷۶۶ عرضه کرد. اثبات «کتابی» ما از آن ایوان نیون^۱ (۱۹۴۷) است: برهان یک صفحه‌ای فوق‌العاده زیبایی که فقط به حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی نیاز دارد. ایده آن برپاراست و مطالب بیشتری هم می‌توان از آن استخراج کرد، از جمله چنانکه ایواموتو^۲ و کوکسما^۳، به ترتیب، نشان دادند:

• π^2 گنگ است (این نتیجه قویتری است!) و

• e^r به‌ازای r ‌های گویای مخالف صفر، گنگ است.

ولی اثبات نیون نیز ریشه‌ها و زمینه‌هایی دارد: با ردیابی پیشینه آن می‌توان به مقاله برجسته شارل ارمیت به تاریخ ۱۸۷۳ رسید که برای نخستین بار در آن ثابت شد e متعالی است، یعنی ریشه یک چندجمله‌ای با ضرایب گویا نیست. به‌آسانی می‌توان دید که $e = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$. در واقع، از $e = \frac{b}{a}$ (برای عددهای صحیح $a, b > 0$) به این نتیجه می‌رسیم که

$$N := n! \left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)$$

به‌ازای $b \geq n$ عددی صحیح است زیرا در این صورت $n!e$ و $\frac{n!}{k!}$ (به‌ازای $0 \leq k \leq n$) عددهایی صحیح‌اند. اما با برآورد این عدد صحیح به‌دست می‌آوریم

$$N = \sum_{k \geq n+1} \frac{n!}{k!} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots$$

و بنابراین N را می‌توان با یک سری هندسی مقایسه کرد و در نتیجه به‌دست می‌آید

$$0 < N < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots = \frac{1}{n}$$

که مهمل است زیرا N عددی صحیح است.

ولی این شگرد برای اثبات گنگ بودن e^2 (که حکم قویتری است) کارساز نیست. برای این منظور از روش متفاوتی استفاده می‌کنیم که اساساً از آن شارل ارمیت، و کلید آن لم ساده زیر است.

لم. فرض کنید به ازای n ای ثابت و نا کمتر از ۱ داریم

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$$

(i) تابع $f(x)$ چندجمله‌ایی به صورت $f(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{2n} c_i x^i$ است که در آن ضریبهای c_i عددهایی صحیح‌اند.

(ii) به ازای $0 < x < 1$ داریم $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$

(iii) مشتقهای $f^{(k)}(0)$ و $f^{(k)}(1)$ به ازای هر $k \geq 0$ عددهایی صحیح‌اند.

■ اثبات. قسمت‌های (i) و (ii) واضح‌اند.

در مورد (iii) توجه کنید که بنا به (i)، مشتق k ام $f^{(k)}$ در $x = 0$ ، به ازای $n \leq k \leq 2n$ صفر است و در این محدوده، $f^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!} c_k$ عددی صحیح است. از $f(x) = f(1-x)$ به ازای هر x به دست می‌آید $f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(1-x)$ و بنابراین، به ازای هر k ، $f^{(k)}(1) = (-1)^k f^{(k)}(0)$.

قضیه ۱. e^r به ازای هر $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ گنگ است.

■ اثبات. کافی است نشان دهیم که e^p نمی‌تواند به ازای عدد صحیح مثبت p ای گویا باشد (اگر $e^{\frac{p}{q}}$ گویا می‌بود، آنگاه $e^p = (e^{\frac{p}{q}})^q = e^p$ نیز گویا بود). فرض می‌کنیم به ازای عددهای صحیح $a, b > 0$ ، $e^p = \frac{a}{b}$ و n را چنان بزرگ اختیار می‌کنیم که $ap^{2n+1} > n!$ قرار می‌دهیم

برآورد $e(\frac{2n}{e})^n > n!$ می‌صریح به دست می‌دهد که «به قدر کافی بزرگ» است.

$$F(x) := p^{2n} f(x) - p^{2n-1} f'(x) + p^{2n-2} f''(x) \mp \dots + f^{(2n)}(x)$$

که در آن همان تابع مذکور در لم است. $F(x)$ را همچنین می‌توان به صورت

$$F(x) = p^{2n} f(x) - p^{2n-1} f'(x) + p^{2n-2} f''(x) \mp \dots$$

نوشت زیرا مشتقات بالاتر $f^{(k)}(x)$ ، به ازای $k > 2n$ ، صفر است. از اینجا می بینیم که چندجمله‌ای $F(x)$ در اتحاد

$$F'(x) = -pF(x) + p^{2n+1}f(x)$$

صدق می کند. پس با مشتقگیری به دست می آید

$$\frac{d}{dx}[e^{px}F(x)] = pe^{px}F(x) + e^{px}F'(x) = p^{2n+1}e^{px}f(x)$$

و بنابراین

$$N := b \int_0^1 p^{2n+1}e^{px}f(x)dx = b[e^{px}F(x)]_0^1 = aF(1) - bF(0)$$

که عددی صحیح است، زیرا از قسمت (iii) لم نتیجه می شود که $F(1)$ و $F(0)$ عددهایی صحیح اند. اما قسمت (ii) لم، برآوردهایی برای حدود بالایی و پایینی N به دست می دهد:

$$0 < N = b \int_0^1 p^{2n+1}e^{px}f(x)dx < bp^{2n+1}e^p \frac{1}{n!} = \frac{ap^{2n+1}}{n!} < 1$$

که نشان می دهد N نمی تواند عددی صحیح باشد، و این تناقض است. \square

حال که این شگرد بسیار شربخش از آب در آمد، یک بار دیگر آن را به کار می بریم.

قضیه ۲. π^2 گنگ است.

■ اثبات. فرض کنیم به ازای عددهای صحیح $a, b > 0$ ، $\pi^2 = \frac{a}{b}$ ، حال از

چندجمله‌ای

$$F(x) := b^n(\pi^{2n}f(x) - \pi^{2n-2}f^{(2)}(x) + \pi^{2n-4}f^{(4)}(x) \mp \dots + (-1)^n f^{(2n)}(x))$$

استفاده می کنیم. بنا به قسمت (iii) لم بالا، $F(1)$ و $F(0)$ عدد صحیح اند. با مشتقگیری مقدماتی به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[F'(x) \sin(\pi x) - \pi F(x) \cos(\pi x)] &= (F''(x) + \pi^2 F(x)) \sin(\pi x) \\ &= b^n \pi^{2n+2} f(x) \sin(\pi x) \\ &= \pi^2 a^n f(x) \sin(\pi x) \end{aligned}$$

عدد π گویا نیست ولی مسلماً تقریبهای گویای خوبی دارد که بعضی از آنها از روزگار باستان شناخته شده بوده اند:

$$\begin{aligned} \frac{22}{7} &= 3,142857142857\dots \\ \frac{355}{113} &= 3,141592920353\dots \\ \frac{104348}{33215} &= 3,141592653921\dots \\ \pi &= 3,141592653589\dots \end{aligned}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} N &:= \pi \int_0^1 a^n f(x) \sin(\pi x) dx = \left[\frac{1}{\pi} F'(x) \sin(\pi x) - F(x) \cos(\pi x) \right]_0^1 \\ &= F(0) + F(1) \end{aligned}$$

که عددی صحیح است. به علاوه N مثبت است زیرا به عنوان انتگرال تابعی تعریف می شود که مثبت است (مگر روی مرز). ولی اگر n را آنقدر بزرگ انتخاب کنیم که $\frac{\pi a^n}{n!} < 1$ ، آنگاه از قسمت (ii) لم به دست می آوریم

$$0 < N = \pi \int_0^1 a^n f(x) \sin(\pi x) dx < \frac{\pi a^n}{n!} < 1$$

□ که تناقض است.

با این قضیه، همراه با قضیه مشهور زیر از اوایلر، ثابت می شود که مقدار

$$\zeta(2) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$$

از تابع زتای ریمان، گنگ است (پیوست را در صفحه ۴۴ ببینید).

$$\text{قضیه ۳.} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

■ اثبات. اثبات ما — که از آن تام آپوستل است — مرکب از دو محاسبه متفاوت انتگرال دوگانه

$$I := \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy$$

است. در اولین محاسبه، را به صورت یک سری هندسی بسط می دهیم، عوامل جمع را به حاصلضرب دو عامل تجزیه می کنیم و به آسانی انتگرال می گیریم

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n \geq 0} (xy)^n dx dy = \sum_{n \geq 0} \int_0^1 \int_0^1 x^n y^n dx dy \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\int_0^1 x^n dx \right) \left(\int_0^1 y^n dy \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) \end{aligned}$$

این محاسبه همچنین نشان می‌دهد که انتگرال دوگانه (روی یک تابع مثبت با قطبی در $x = y = 1$) متناهی است. و نیز توجه کنید که محاسبه ساده و سرراست است اگر آن را از آخر به اول در نظر بگیریم. به این ترتیب، محاسبه $I(2)$ ما را به انتگرال دوگانه I می‌رساند.

در دومین محاسبه I به تعویض مختصات دست می‌زنیم: با یک دوران 45°

مختصات

$$v = \frac{y-x}{\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad u = \frac{y+x}{\sqrt{2}}$$

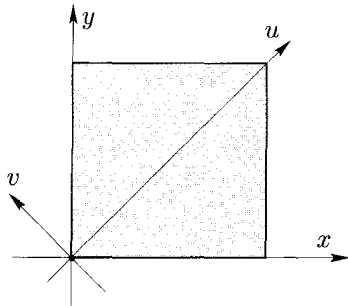
$$y = \frac{u+v}{\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad x = \frac{u-v}{\sqrt{2}}$$

به دست می‌آیند. با جانشانی مختصات جدید خواهیم داشت

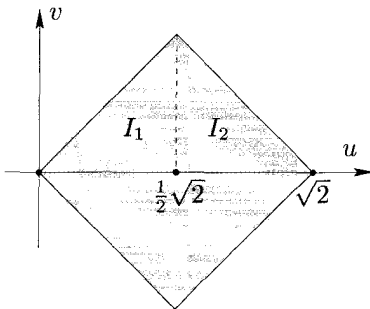
$$1 - xy = 1 - \frac{u^2 - v^2}{2}$$

و بنابراین

$$\frac{1}{1-xy} = \frac{2}{2 - u^2 + v^2}$$



دامنه جدید انتگرالگیری و تابعی که باید از آن انتگرال گرفت، نسبت به محور u متقارن هستند، و کافی است انتگرال را روی نیمه بالایی دامنه محاسبه کنیم، که آن را به طبیعتی شکل به دو بخش تجزیه می‌کنیم:



$$I = 4 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}} \left(\int_0^u \frac{dv}{2 - u^2 + v^2} \right) du + 4 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2}-u} \frac{dv}{2 - u^2 + v^2} \right) du$$

که با استفاده از $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$ به این صورت در می‌آید

$$I = 4 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} \arctan \left(\frac{u}{\sqrt{2-u^2}} \right) du$$

$$+ 4 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} \arctan \left(\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}} \right) du$$

اکنون کار را با دو جانشانی ساده مثلثاتی کامل می‌کنیم. برای نخستین انتگرال، قرار می‌دهیم $u = \sqrt{2} \sin \theta$ بازه $0 \leq u \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}$ متناظر است با $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$. می‌نویسیم

و لذا $\sqrt{2-u^2} = \sqrt{2}\sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{2}\cos\theta$ و $du = \sqrt{2}\cos\theta d\theta$

$$\begin{aligned} & 4 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{2-u^2}} du = \\ & 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{2}\cos\theta} \arctan \left(\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{\sqrt{2}\cos\theta} \right) \sqrt{2}\cos\theta d\theta = \\ & 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \theta d\theta = 4 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{6} \right)^2 = \frac{1}{3} \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

برای انتگرال دوم از $u = \sqrt{2}\cos 2\theta$ استفاده می‌کنیم. در اینجا $\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2} \leq u \leq \sqrt{2}$ متناظر با $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ است. به دست می‌آوریم $du = -2\sqrt{2}\sin 2\theta d\theta$ داریم

$$\begin{aligned} \sqrt{2-u^2} &= \sqrt{2}\sqrt{1-\cos^2 2\theta} = \sqrt{2}\sin 2\theta = 2\sqrt{2}\cos\theta\sin\theta \\ \sqrt{2}-u &= \sqrt{2}(1-\cos 2\theta) = 2\sqrt{2}\sin^2\theta \end{aligned}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} & 4 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} \arctan \frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}} du = \\ & 4 \int_{\frac{\pi}{6}}^0 \frac{1}{\sqrt{2}\sin 2\theta} \arctan \left(\frac{2\sqrt{2}\sin^2\theta}{2\sqrt{2}\cos\theta\sin\theta} \right) (-2\sqrt{2}) \sin 2\theta d\theta = \\ & 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\theta d\theta = 4 \left(\frac{\pi}{6} \right)^2 = \frac{2}{3} \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

با جمع کردن دو انتگرال به دست می‌آوریم

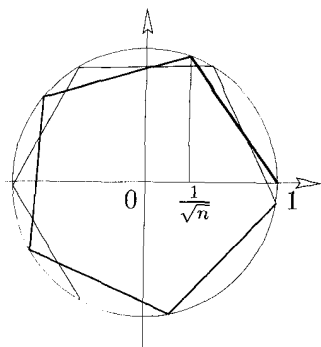
$$\square \quad I = \frac{1}{3} \frac{\pi^2}{6} + \frac{2}{3} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{6}$$

حالا به آخرین قضیه خود درباره اعداد گنگ می‌رسیم.

قضیه ۴. به ازای هر عدد صحیح فرد $n \geq 3$ ، عدد

$$A(n) := \frac{1}{\pi} \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

گنگ است.



به این قضیه در مسأله سوم هیلبرت (فصل ۷ را ببینید) در حالت‌های $n = 3$ و $n = 9$ نیاز خواهیم داشت. به ازای $n = 2$ و $n = 4$ داریم $A(2) = 1/4$ و $A(4) = 1/3$. پس محدود کردن قضیه به عددهای صحیح فرد ضروری است. این مقادیر با توسل به نمودار حاشیه به آسانی به دست می‌آیند؛ در این نمودار گزاره « $\frac{1}{\sqrt{n}} \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ گنگ است» معادل است با اینکه بگوییم کمان چندضلعی ساخته شده از $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ، که همه وترهایش یک طول دارند، هیچ‌گاه بسته نمی‌شود. به‌عنوان تمرین نشان دهید که $A(n)$ فقط وقتی گویاست که $n \in \{1, 2, 4\}$. به این منظور بین حالتی که $n = 2^r$ و حالتی که n توانی از ۲ نیست تمایز بگذارید.

■ اثبات. قضیه جمع

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

را که در مثلثات مقدماتی دیده‌اید به‌کار می‌گیریم، و از آن به‌ازای $\alpha = (k + 1)\varphi$ و $\beta = (k - 1)\varphi$ به دست می‌آوریم

$$\cos(k + 1)\varphi = 2 \cos \varphi \cos k\varphi - \cos(k - 1)\varphi \quad (1)$$

برای زاویه $\varphi_n = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ که با $\cos \varphi_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ و $0 \leq \varphi_n \leq \pi$ تعریف می‌شود، از اینجا نمایشهایی به صورت

$$\cos k\varphi_n = \frac{A_k}{\sqrt{n}^k}$$

حاصل می‌شود که A_k عددی صحیح است که به‌ازای هیچ $k \geq 0$ بر n تقسیم‌پذیر نیست. در واقع، به‌ازای $k = 0$ با $A_0 = A_1 = 1$ چنین نمایشی را داریم و به استقرا بر k با استفاده از (۱) به‌ازای هر $k \geq 1$ به دست می‌آوریم

$$\cos(k + 1)\varphi_n = 2 \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{A_k}{\sqrt{n}^k} - \frac{A_{k-1}}{\sqrt{n}^{k-1}} = \frac{2A_k - nA_{k-1}}{\sqrt{n}^{k+1}}$$

پس داریم $A_{k+1} = 2A_k - nA_{k-1}$. اگر $n \geq 3$ فرد باشد، و A_k بر n تقسیم‌پذیر نباشد، آنگاه در می‌یابیم که A_{k+1} نیز نمی‌تواند بر n تقسیم‌پذیر باشد. حال فرض کنید

$$A(n) = \frac{1}{\pi} \varphi_n = \frac{k}{\ell}$$

گویاست (با عددهای صحیح $k, l > 0$). در این صورت از $l\varphi_n = k\pi$ نتیجه می شود

$$\pm 1 = \cos k\pi = \frac{A_l}{\sqrt{n^l}}$$

پس $\sqrt{n^l} = \pm A_l$ عددی صحیح است (با $l \geq 2$) و بنابراین $n | \sqrt{n^l}$. با توجه به $\sqrt{n^l} | A_l$ می بینیم A_l, n را می شمارد و این تناقض است. \square

پیوست: تابع زتای ریمان

تابع زتای ریمان $\zeta(s)$ به ازای هر $s > 1$ به صورت

$$\zeta(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$$

تعریف می شود. برآوردهای ما از H_n (صفحه ۱۳ و ۱۴ را ببینید) دلالت به این دارند که سری مربوط به $\zeta(1)$ واگراست ولی به ازای هر s حقیقی بزرگتر از ۱ قطعاً همگراست. تابع زتا ادامه ای متعارف در کل صفحه مختلط دارد (با یک قطب ساده در $s = 1$) که می توان آن را با استفاده از بسط به سری توانی ساخت. تابع مختلط حاصل نهایت اهمیت را در نظریه اعداد اول دارد. در اینجا سه مورد مختلف را که نشانگر این اهمیت اند ذکر می کنیم:

(۱) اتحاد جالب توجه

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

که اوایلر آن را مطرح کرده است، پیامد ساده ای از سری هندسی زیر است

$$\frac{1}{1 - p^{-s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \dots$$

(۲) مکان ریشه های مختلط تابع زتا موضوع «حدس ریمان» است که یکی از

مشهورترین و مهمترین مسأله های حل شده ریاضیات به شمار می رود. در این حدس ادعا می شود که همه ریشه های غیر بدیهی $s \in \mathbb{C}$ از تابع زتا در

$$\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$$

صدق می‌کنند (تابع زتا به‌ازای همهٔ عددهای صحیح زوج منفی، که آنها را «ریشه‌های بدیهی» می‌خوانیم، صفر است).

(۳) مدتهاست که معلوم شده است $\zeta(s)$ مضرب گویایی از π^s است، و بنابراین گنگ است اگر $s \geq 2$. در اینجا ما یک اثبات از $\zeta(3) = \frac{\pi^3}{6}$ آوردیم که اتحاد مشهوری که اوپلر در ۱۷۳۴ عرضه کرده است. در جهت مقابل، گنگ بودن $\zeta(3)$ را روزه آپری^۱ در ۱۹۷۹ ثابت کرد (نقد عالی [۶] را در این مورد ببینید). معلوم نیست که $\zeta(s)$ به‌ازای سایر عددهای فرد s ، $s \geq 3$ ، گنگ است یا نه.

مراجع

- [1] T.M. APOSTOL: *A proof that Euler missed: Evaluating $\zeta(2)$ the easy way*, Math. Intelligencer **5** (1983), 59-60.
- [2] C. HERMITE: *Sur la fonction exponentielle*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences (Paris) **77** (1873), 18-24; (Euvres de Charles Hermite, Vol. III, Gauthier-Villars, Paris 1912, pp.150-181.
- [3] Y. IWAMOTO: *A proof that π^2 is irrational*, J. Osaka Institute of Science and Technology **1** (1949), 147-148.
- [4] J. F. KOKSMA: *On Niven's proof that π is irrational*, Nieuw Archiv Wiskunde (2) **23** (1949), 39.
- [5] I. NIVEN: *A simple proof that π is irrational*. Bulletin Amer. Math. Soc. **53** (1947), 509.
- [6] A. VAN DER PORTEN: *A proof that Euler missed ... Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$. An informal report*, Math. Intelligencer **1** (1979), 195-203.

۷

مسأله سوم هیلبرت:

تجزیه چندوجهیها ۴۹

۸

آرایش خطها در صفحه و تجزیه گرافها ۵۹

۹

مسأله شیب ۶۷

۱۰

سه کاربرد از فرمول اویلر ۷۵

۱۱

قضیه صلیبیت کوشی ۸۵

۱۲

مسأله سیزده کره ۹۱

۱۳

سادکهای مماس ۹۹

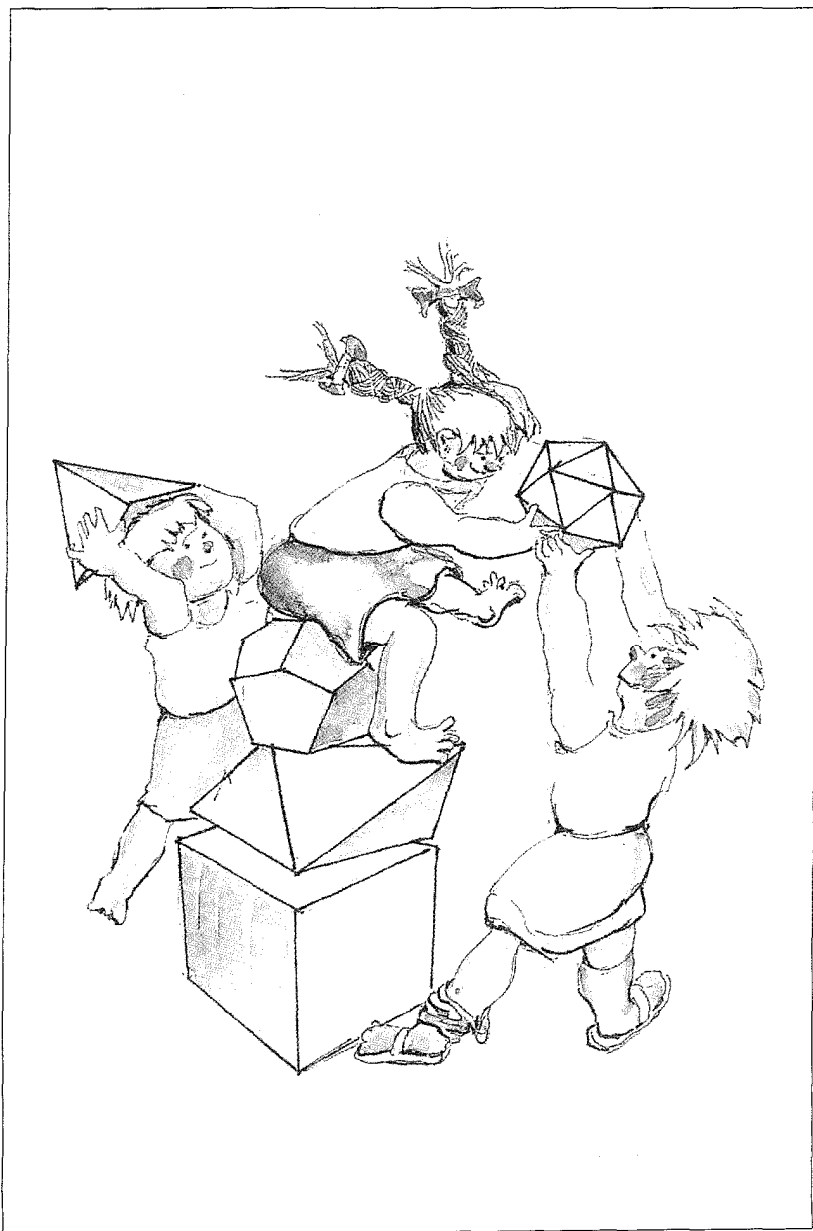
۱۴

هر مجموعه بزرگی از نقطهها زاویه‌ای

منفرجه دارد ۱۰۵

۱۵

حدس بورسوک ۱۱۵



مسأله سوم هیلبرت: تجزیه چندوجهیها

فصل ۷

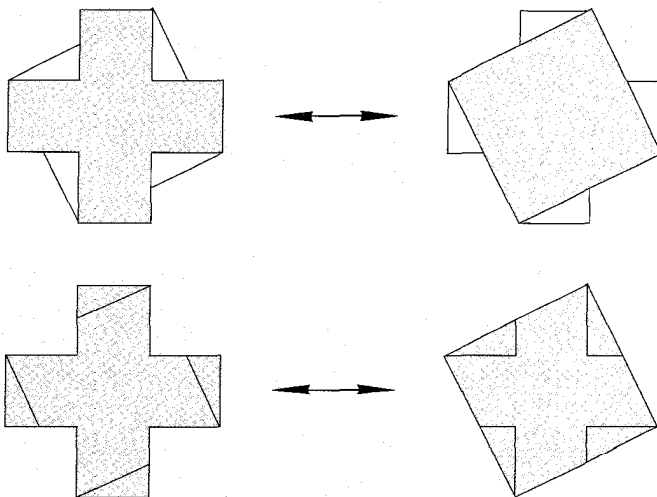


داوید هیلبرت

در سال ۱۹۰۰، داوید هیلبرت در سخنرانی تاریخی خود خطاب به گنجره بین‌المللی ریاضیدانان در پاریس — به‌عنوان سومین مسأله از مسائل بیست‌وسه‌گانه‌اش — خواستار تعیین چنین چیزی شد:

«دو چهار وجهی با قاعده‌های برابر و ارتفاعهای برابر که به‌هیچ طریق قابل تجزیه به چهار وجهیهای قابل انطباق [همنهشت] نباشند و نتوان از ترکیب آنها با چهاروجهیهای قابل انطباق، دو چندوجهی به‌دست آورد که خودشان قابل تجزیه به چهاروجهیهای قابل انطباق باشند».

سابقه این مسأله به دو نامه از کارل فریدریش گاوس به تاریخ ۱۸۴۴ می‌رسد (که در مجموعه آثار گاوس در ۱۹۰۰ به چاپ رسیده است). اگر چهار وجهی با حجم برابر قابل تجزیه به قطعات قابل انطباق می‌بودند، این امر اثباتی «مقدماتی» از قضیه XII.5 اقلیدس فراهم می‌ساخت که حاکی است هرمهایی که ارتفاع و قاعده برابر دارند، حجمشان هم برابر است. (چنین اثباتی مبتنی بر آنالیز و بنابراین استدلالهای مربوط به پیوستگی، نمی‌بود). حکم مشابهی در هندسه مسطحه برقرار است: قضیه بویویی — گروین^۱ [۱، بخش ۷.۲] می‌گوید که چندضلعیهای مسطحه هم یکسان



شکل صلیب و مربعی با همان مساحت، یکسان تکمیل پذیرند.

درواقع، این دو شکل حتی یکسان تجزیه پذیرند.

1. Bolyai-Gerwien

تجزیه‌پذیر هستند (قابل تجزیه به مثلثهای قابل انطباق‌اند) و هم یکسان‌تکمیل‌پذیر (می‌توان با افزودن مثلثهایی قابل انطباق، آنها را قابل انطباق ساخت) اگر و تنها اگر مساحت آنها برابر باشد.

هیلبرت — چنانکه از عبارت‌بندی مسأله پیداست — گمان می‌کرد قضیهٔ مشابهی در حالت سه‌بعدی وجود ندارد، و حق با او بود. در واقع، این مسأله را ماکس دن (شاگرد هیلبرت در دو مقاله کاملاً حل کرد: مقالهٔ اول، چهاروجهیهایی که یکسان‌تجزیه‌پذیر نیستند ولی قاعده و ارتفاع آنها برابر است، عرضه می‌کرد و قبلاً در سال ۱۹۰۰ منتشر شده بود، و مقالهٔ دوم که موضوع یکسان‌تکمیل‌پذیری را هم در برداشت در سال ۱۹۰۲ انتشار یافت. ولی فهم مقاله‌های دن آسان نیست، و بررسی اینکه دن در دام ظریفی که دیگران را گرفتار کرد نیفتاده باشد به تلاش نیاز دارد: بریکار^۲ (در ۱۸۹۶!) اثباتی بسیار زیبا — اما متأسفانه غلط — عرضه کرد؛ مشکوفسکی^۳ (در ۱۹۶۰)، و احتمالاً دیگران نیز مرتکب اشتباه مشابهی شدند. خوشبختانه اثبات دن ترمیم و اصلاح شد و با تلفیق کارهای کاگان^۴ (۱۹۰۳/۱۹۳۰)، هوگو هادویگر^۵ (۱۹۴۹/۵۴) و ولادیمیر بولتیانسکی^۶، اکنون یک اثبات «کتابی» — به شرح زیر — داریم (در پیوست این فصل، مقدماتی دربارهٔ چندوجهیها آمده است).

(۱) کمی جبر خطی

به ازای هر مجموعهٔ متناهی از عددهای حقیقی $M = \{m_1, \dots, m_k\} \subseteq \mathbb{R}$ مجموعهٔ $V(M)$ را به‌عنوان مجموعهٔ همهٔ ترکیبات خطی عددهای در M با ضریبهای گویا تعریف می‌کنیم، یعنی

$$V(M) := \left\{ \sum_{i=1}^k q_i m_i : q_i \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \mathbb{R}$$

نخستین نکتهٔ (بدیهی اما مهم) این است که $V(M)$ یک فضای برداری متناهی‌بعد روی هیأت \mathbb{Q} از عددهای گویاست. در واقع $V(M)$ تحت مجموعیابی و تحت ضرب در عددهای گویا به‌وضوح بسته است و برقراری اصول موضوع هیأت برای \mathbb{R} کفایت می‌کند تا $V(M)$ یک فضای برداری باشد. بعد $V(M)$ اندازهٔ هر مجموعهٔ مولد

1. Max Dehn 2. Bricard 3. Meschkowski 4. V.F. Kagan
5. Hugo Hadwiger 6. Boltianskii

مینیمال است. چون M بنا به تعریف، $V(M)$ را تولید می‌کند، می‌بینیم که شامل یک مجموعه مولد مینیمال است و بنابراین

$$\dim_{\mathbb{Q}} V(M) \leq k = |M|$$

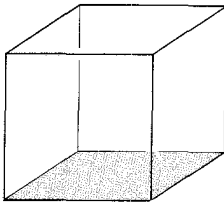
در ادامه بحث به تابعهای \mathbb{Q} -خطی

$$f : V(M) \rightarrow \mathbb{Q}$$

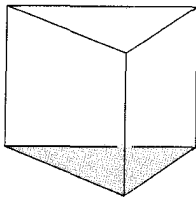
نیاز داریم که آنها را به صورت نگاشتهایی خطی از فضای \mathbb{Q} -برداری تعبیر می‌کنیم. ویژگی اصلی این است که به ازای هر وابستگی خطی گویای $\sum_{i=1}^k q_i m_i = 0$ با ضابطه $q_i \in \mathbb{Q}$ ، لازم است داشته باشیم $f(\sum_{i=1}^k q_i m_i) = f(0) = 0$. در اینجا لم ساده‌ای می‌آوریم که کار را راه می‌اندازد.

لم. به ازای هر زیرمجموعه متناهی $M \subseteq M'$ از \mathbb{R} ، فضای \mathbb{Q} -برداری $V(M)$ زیرفضایی از فضای \mathbb{Q} -برداری $V(M')$ است. پس اگر $f : V(M) \rightarrow \mathbb{Q}$ یک تابع \mathbb{Q} -خطی باشد، آنگاه f را می‌توان به تابع \mathbb{Q} -خطی $f' : V(M') \rightarrow \mathbb{Q}$ توسعه داد: $f'(m) = f(m)$ ، $m \in M$ بنابراین به ازای هر $m \in M$.

■ اثبات. هر تابع \mathbb{Q} -خطی $f : V(M) \rightarrow \mathbb{Q}$ به محض اینکه مقادیرش روی یک \mathbb{Q} -پایه $V(M)$ مشخص شوند، معین می‌گردد. چون هر پایه $V(M)$ را می‌توان به پایه‌ای از $V(M')$ توسعه داد، بقیه مطلب حاصل است. □



$$M_C = \left\{ \frac{\pi}{2}, \pi \right\}$$



$$M_Q = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi \right\}$$

(۲) ناورداهای دن

برای یک چندوجهی ۳ بعدی P ، فرض کنید M_P نشان‌دهنده مجموعه همه زاویه‌های بین وجوه مجاور (زاویه‌های دووجهی) همراه با عدد π است. پس برای مکعب C به دست می‌آوریم $M_C = \left\{ \frac{\pi}{2}, \pi \right\}$ ، در حالی که برای منشور قائم Q که قاعده‌اش یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشد داریم $M_Q = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi \right\}$. به ازای هر مجموعه متناهی مفروض $M \subseteq \mathbb{R}$ که شامل M_P باشد، و هر تابع \mathbb{Q} -خطی

$$f : V(M) \rightarrow \mathbb{Q}$$

که در $f(\pi) = 0$ صدق کند، ناوردای دن P (نسبت به f) را عدد حقیقی

$$D_f(P) := \sum_{e \in P} \ell(e) \cdot f(\alpha(e))$$

تعریف می‌کنیم که در آن مجموعیابی روی همهٔ یالهای (e) چندوجهی انجام می‌شود، $\ell(e)$ نشان‌دهندهٔ طول e است، و $\alpha(e)$ زاویهٔ بین دو وجهی است که در e تلاقی می‌کنند.

بعداً ناوردهای مختلف دن را محاسبه می‌کنیم. فعلاً فقط متذکر می‌شویم که $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}f(\pi) = 0$ باید به‌ازای هر تابع $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ خطی این چنینی f برقرار باشد، و بنابراین

$$D_f(C) = 0$$

ناوردای دن یک مکعب نسبت به هر f صفر است.

(۳) قضیهٔ دن-هادویگر

مانند بالا دو چندوجهی P, Q را یکسان تجزیه‌پذیر می‌نامیم، اگر قابل تجزیه به مجموعه‌هایی متناهی از چندوجهیهای P_1, \dots, P_n و Q_1, \dots, Q_n باشند به نحوی که به‌ازای هر i ($1 \leq i \leq n$)، P_i و Q_i قابل انطباق باشند. دو چندوجهی را یکسان تکمیل‌پذیر می‌نامیم اگر چندوجهیهای P_1, \dots, P_m و Q_1, \dots, Q_m وجود داشته باشند به طوری که نواحی درونی P_i ها از یکدیگر و از P مجزا باشند و همین‌طور در مورد Q_i ها و Q ، و به‌ازای هر i ، P_i قابل انطباق با Q_i باشد، و نیز $\tilde{Q} := Q \cup Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_m$ و $\tilde{P} := P \cup P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_m$ یکسان تجزیه‌پذیر باشند. از قضیه‌ای که گرلینگ^۱ در ۱۸۴۴ عرضه کرد نتیجه می‌شود که در بررسی قابلیت انطباق، مهم نیست تقارن‌ها را بپذیریم یا نپذیریم. روشن است که چندوجهیهای یکسان تجزیه‌پذیر، یکسان تکمیل‌پذیرند، ولی عکس موضوع معلوم نیست. قضیهٔ زیر از هادویگر (به روایت بولتیانسکی) ابزار لازم را در اختیار ما می‌گذارد تا — چنانکه هیلبرت پیشنهاد کرد — چهاروجهی‌هایی با حجم برابر بیابیم که یکسان تکمیل‌پذیر نیستند و در نتیجه یکسان تجزیه‌پذیر نمی‌باشند.

قضیه. فرض کنید چندوجهیهای P و Q به ترتیب دارای زاویه‌های دووجهی $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ و β_1, \dots, β_q باشند، و M مجموعه‌ای متناهی از عددهای حقیقی باشد که

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q, \pi\} \subseteq M$$

اگر $f: V(M) \rightarrow \mathbb{Q}$ تابعی \mathbb{Q} -خطی با ضابطه $f(\pi) = 0$ باشد. به نحوی که

$$D_f(P) \neq D_f(Q)$$

آنگاه P و Q یکسان تکمیل پذیر نیستند.

■ اثبات. استدلال در دو بخش انجام می شود.

(۱) اگر چندوجهی P تجزیه ای به تعداد متناهی قطعه چندوجهی چون P_1, \dots, P_n داشته باشد، و اگر همه زاویه های دووجهی قطعات P_1, \dots, P_n در مجموعه M باشند، آنگاه برای هر تابع \mathbb{Q} -خطی $f: V(M) \rightarrow \mathbb{Q}$ ، ناوردهای دن با هم جمع می شوند:

$$D_f(P) = D_f(P_1) + \dots + D_f(P_n)$$

به هر بخش از یال یک چندوجهی، یک جرم نسبت می دهیم: اگر $e' \subseteq e$ بخشی از یال e از چندوجهی P باشد، جرم آن برابر خواهد بود با

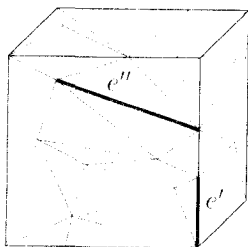
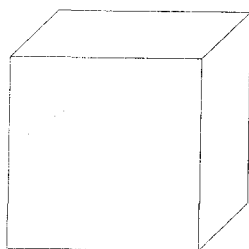
$$m_f(e') := \ell(e')f(\alpha(e'))$$

یعنی طول آن ضربدر مقدار f زاویه دووجهی اش.

حال اگر P به P_1, \dots, P_n تجزیه شود، اجتماع همه یالهای قطعات P_i را در نظر می گیریم. روی یالهای e' که بر یالهای P واقع اند، می بینیم که مجموع زاویه های دووجهی قطعات، زاویه دووجهی P در e' است، و بنابراین جرمها با هم جمع می شوند. در هر یال دیگر e'' از یکی از P_i ها که در درون وجهی از P یا در درون P است، مجموع زاویه ها π یا 2π است، پس مقادیر f زاویه ها در قطعات، مجموعشان، متناظراً، $f(\pi) = 0$ یا $f(2\pi) = 0$ است. پس برای مجموع جرمها همان مقداری را به دست می آوریم که به این یالهای P در وهله اول نسبت داده بودیم، یعنی 0 .

(۲) با فرض اینکه P و Q یکسان تکمیل پذیرند، می توانیم M را گسترش دهیم و فوق مجموعه ای از آن چون M' در نظر بگیریم که شامل همه زاویه های دووجهی در هر یک از قطعات نیز باشد. M' متناهی است زیرا ما فقط تجزیه های متناهی را در نظر داریم. در این صورت طبق لمی که قبلاً آوردیم می توانیم f را به $f: V(M') \rightarrow \mathbb{Q}$ توسیع دهیم و از اینجا بنا به بخش (۱) رابطه ای از نوع

$$D_f(P) + D_f(P_1) + \dots + D_f(P_m) = D_f(Q) + D_f(Q_1) + \dots + D_f(Q_m)$$



به دست می‌آید که در آن $D_f(P_i) = D_f(Q_i)$ زیرا P_i و Q_i قابل انطباق‌اند. پس نتیجه می‌گیریم $D_f(D) = D_f(Q)$ ، که تناقض است.

مثال ۱. برای چهار وجهی منتظم T ، که طول یالهای آن l است، زاویهٔ دوجوهی را از روی شکل محاسبه می‌کنیم. M ، نقطهٔ وسط مثلث قاعده، ارتفاع AE ی این مثلث را به نسبت ۱:۲ تقسیم می‌کند و چون $|AE| = |DE|$ ، به دست می‌آوریم $\cos \alpha = 1/3$ و بنابراین

$$\alpha = \arccos \frac{1}{3}$$

قرار می‌دهیم $M := \{\alpha, \pi\}$ ، و ملاحظه می‌کنیم که نسبت

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{3}$$

طبق قضیهٔ ۴ در فصل عددهای گنگ (به‌ازای $n = 9$)، عددی گنگ است. پس فضای \mathbb{Q} -برداری $V(M)$ دوبعدی با پایهٔ M است، و تابعی \mathbb{Q} -خطی چون $f: V(M) \rightarrow \mathbb{Q}$ با ضابطهٔ

$$f(\alpha) := 1, f(\pi) := 0$$

وجود دارد. برای این f داریم

$$D_f(T) = 6lf(\alpha) = 6l \neq 0$$

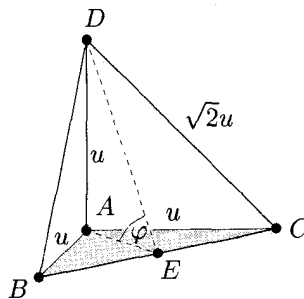
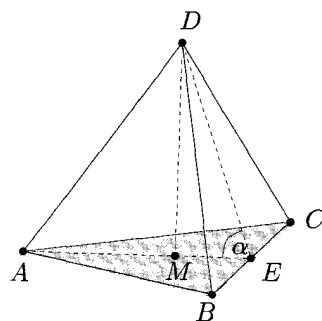
و بنابراین یک چهاروجهی منتظم نمی‌تواند یکسان تجزیه‌پذیر یا یکسان تکمیل‌پذیر با یک مکعب باشد، زیرا ناوردای دن یک مکعب به‌ازای هر f صفر می‌شود.

مثال ۲. فرض کنید T_1 یک چهاروجهی است که به‌وسیلهٔ سه یال متعامد AB ، AC و AD به طول u ایجاد شده است. این چهاروجهی سه زاویهٔ دوجوهی دارد که قائم‌الزاویه‌اند، و سه زاویهٔ دوجوهی دیگر با اندازهٔ φ ، که آن را از روی نمودار محاسبه می‌کنیم:

$$\cos \varphi = \frac{|AE|}{|DE|} = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{2}u}{\frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2}u} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$$



برای $M := \{\frac{\pi}{4}, \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}, \pi\}$ فضای برداری $V(M)$ دارای بعد ۲ است. در واقع، π و $\frac{\pi}{4}$ وابسته خطی اند، پس $V(M) = V(\{\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}, \pi\})$ ، اما هیچ رابطه گویایی بین $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ و π وجود ندارد — به عبارت دیگر $\frac{1}{\sqrt{3}} \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ گنگ است، که این را در فصل ۶ ثابت کردیم (در قضیه ۴، n را ۳ بگیرد). پس می‌توانیم با قراردادن

$$f\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}\right) := 1 \quad \text{و} \quad f(\pi) := 0$$

یک نگاشت \mathbb{Q} -خطی بسازیم که از آن به دست می‌آید و $f(\frac{\pi}{4}) = 0$ و لذا

$$D_f(T_1) = 3uf\left(\frac{\pi}{4}\right) + 3(\sqrt{2}u)f\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3\sqrt{2}u \neq 0$$

به این ترتیب ثابت می‌شود که T_1 یکسان تجزیه پذیر یا یکسان تکمیل پذیر با مکعب C است که همان حجم را داشته باشد زیرا $D_f(C) = 0$ به ازای هر f برقرار است.

مثال ۳. و بالاخره فرض می‌کنیم T_2 یک چهاروجهی باشد با سه یال متوالی AB ، BC و CD که دوه‌دو متعامدند و طول هر سه u است.

ما زاویه‌های یک چنین چهاروجهی را محاسبه نمی‌کنیم (اندازه آنها $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{4}$ است)، ولی در عوض استدلال می‌کنیم که — با استفاده از نقطه‌های وسط یالها و وجه‌ها، و مرکز — مکعبی با یالهای به طول u قابل تجزیه به ۶ چهاروجهی از این نوع است (۳ نسخه قابل انطباق، ۳ تصویر آینه‌ای).

همه این نسخه‌های قابل انطباق و تصویرهای آینه‌ای دارای یک ناوردای دن هستند و بنابراین به ازای هر تابع مناسب f به دست می‌آوریم

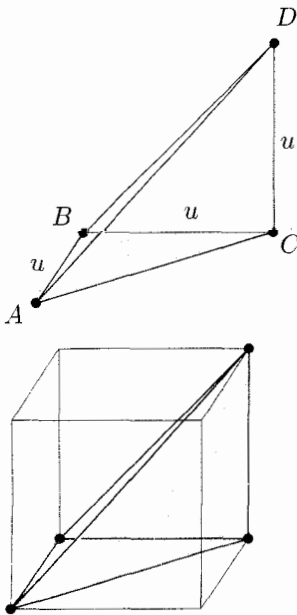
$$D_f(T_2) = \frac{1}{6}D_f(C) = 0$$

پس همه ناورداهای دن چنین چهاروجهی صفرند! و به این ترتیب مسئله سوم هیلبرت حل می‌شود زیرا ما قبلاً چهاروجهی متفاوت T_1 را با قاعده‌ای قابل انطباق و ارتفاعی برابر با این، و با $D_f(T_1) \neq 0$ ساخته‌ایم. بنا به قضیه دن-هادویگر، T_1 و T_2 یکسان تجزیه پذیر نیستند، و حتی یکسان تکمیل پذیر هم نیستند.

پیوست: بس‌وجهی و چندوجهی

بس‌وجهی^۱ محدب در \mathbb{R}^d عبارت است از غلاف محدب یک مجموعه متناهی

1. polytope



یعنی مجموعه‌ای است به صورت $S = \{s_1, \dots, s_n\}$

$$P = \text{conv}(S) := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

بس‌وجهیها مسلماً اشیای آشنایی هستند: نمونه‌های اصلی آنها چندضلعی محدب (بس‌وجهی محدب دوبعدی) و چندوجهی محدب (بس‌وجهی محدب سه‌بعدی) هستند.

انواع متعددی از چندوجهیها هستند که به‌طور طبیعی به‌ابعاد بالاتر تعمیم می‌یابند. مثلاً اگر مجموعه S به‌طور آفین مستقل از کاردینال $d+1$ باشد، آنگاه $\text{conv}(S)$ یک سادک d -بعدی (یا d -سادک) است. به‌ازای $d=2$ یک مثلث داریم، به‌ازای $d=3$ یک چهاروجهی به‌دست می‌آوریم. به‌همین نحو، مربعها و مکعبها حالت‌های خاصی از مکعبهای d -بعدی‌اند، از قبیل مکعب d -بعدی یکه که به‌صورت $C_d = [0, 1]^d \subseteq \mathbb{R}^d$ مشخص می‌شود.

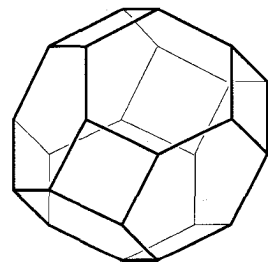
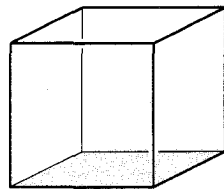
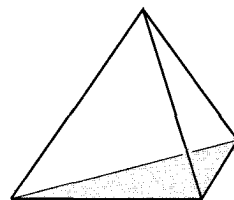
بس‌وجهی تعمیم‌یافته به‌صورت اجتماع تعدادی متناهی از بس‌وجهیهای محدب تعریف می‌شود. در این کتاب، چندوجهیهای نامحدب در ارتباط با قضیهٔ صلبیت کوشی در فصل ۱۱ مطرح خواهند شد، و با چندضلعیهای نامحدب در ارتباط با قضیهٔ بیک در فصل ۱۰، و دوباره هنگامی که قضیهٔ گالری هنری را در فصل ۲۶ مورد بحث قرار می‌دهیم، سروکار خواهیم داشت.

بس‌وجهیهای محدب را می‌توان، به‌طور معادل، به‌صورت مجموعهٔ کراندار جوابهای دستگاهی متناهی از نامعادله‌های خطی تعریف کرد. بنابراین هر بس‌وجهی محدب $P \subseteq \mathbb{R}^d$ نمایشی به‌صورت

$$P = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \leq b\}$$

به‌ازای ماتریسی چون $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ و برداری چون $b \in \mathbb{R}^m$ دارد. به‌عبارت دیگر، P مجموعه جواب دستگاهی از m نامعادلهٔ خطی $a_i^T x \leq b_i$ است که در آن a_i^T سطر i ام A است. به‌عکس، هرچنین مجموعهٔ کراندار از جوابها یک بس‌وجهی محدب است، و بنابراین می‌توان آن را به‌صورت غلاف محدب مجموعه‌ای متناهی از نقاط نمایش داد.

در مورد چندضلعیها و چندوجهیها، مفاهیم آشنای رأسها، یالها، و وجه‌های دوبعدی را داریم. برای بس‌وجهیهای محدب از ابعاد بالاتر، می‌توانیم وجوه را به‌این صورت تعریف کنیم: یک وجه P زیرمجموعه‌ای چون $F \subseteq P$ است به‌صورت



برخی بس‌وجهیهای آشنا: چهاروجهی، مکعب، هشت‌وجهی بریده

به ازای همه نقطه‌های $x \in P$ برقرار است. که در آن $a^T x \leq b$ نامعادله‌ای خطی است که

همه وجوه بس‌وجهی خودشان بس‌وجهی‌اند. مجموعه V مرکب از رأسها (وجوه \circ بعدی) یک بس‌وجهی، مجموعه‌ای مینیمال است به قسمی که $\text{conv}(V) = P$. با فرض اینکه $P \subseteq \mathbb{R}^d$ یک بس‌وجهی d -بعدی باشد، وجوه $(d-1)$ بعدی آن مجموعه مینیمالی از ابرصفحه‌ها، و لذا از نیمفضاها، را معین می‌کنند که شامل P است، و اشتراک آنها P است. به خصوص از اینجا نتیجه‌ای به دست می‌آید که بعداً به آن نیاز خواهیم داشت: فرض می‌کنیم F یک وجه $d-1$ بعدی از بس‌وجهی d بعدی P باشد، ابرصفحه‌ای را که F معین می‌کند با H_F نشان می‌دهیم، و دو نیمضای بسته محدود به H_F را با H_F^+ و H_F^- می‌نمایانیم. در این صورت یکی از این دو نیمضا شامل P است (و دیگری نیست).

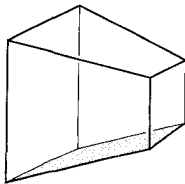
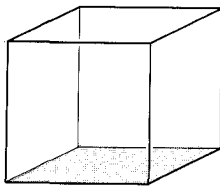
$G(P)$ ، گراف بس‌وجهی P ، با مجموعه رأسها، V ، و مجموعه یالها یا وجوه یک‌بعدی، E ، مشخص می‌شود. اگر P دارای سه بعد باشد، آنگاه این گراف هامنی است و به دستور مشهور به «فرمول چندوجهی اوپلر» می‌انجامد (فصل ۱۰ را ببینید).

دو بس‌وجهی $P, P' \subseteq \mathbb{R}^d$ همنهشت [قابل انطباق]‌اند اگر ننگاشت آفین حافظ طولی وجود داشته باشد که P را به P' ببرد. چنین ننگاشتی می‌تواند جهت فضا را برعکس کند، همان‌طور که با قرینه‌یابی P نسبت به یک ابرصفحه، که P را به یک تصویر آینه‌ای P می‌برد، این کار انجام می‌شود. آنها از لحاظ ترکیباتی هم‌ارز، [هم‌ارز ترکیباتی] هستند اگر ننگاشتی دوسویی از وجوه P به وجوه P' وجود داشته باشد که بعد و رابطه‌های شمول بین وجوه را حفظ کند. مفهوم هم‌ارزی ترکیباتی خیلی ضعیفتر از قابلیت انطباق است: مثلاً شکلی که در اینجا آمده یک مکعب یک‌ه و یک مکعب «چاوله» را نشان می‌دهد که از لحاظ ترکیباتی هم‌ارزند (و بنابراین هر یک از آنها را می‌توان «مکعب» نامید) ولی مسلماً قابل انطباق نیستند.

گفته می‌شود یک بس‌وجهی (یا زیرمجموعه کلیتری از \mathbb{R}^d) تقارن مرکزی دارد اگر نقطه‌ای چون $x_0 \in \mathbb{R}^d$ وجود داشته باشد که

$$x_0 + x \in P \iff x_0 - x \in P$$

در چنین حالتی، x_0 را مرکز P می‌نامیم.



بس‌وجهیهای هم‌ارز از لحاظ ترکیباتی

مراجع

- [1] V.G. BOLTIANSKII: *Hilbert's Third Problem*, V.H. Winston & Sons (Halsted Press, John Wiley & Sons), Washington DC 1978.
- [2] M. DEHN: *Ueber raumgleiche Polyeder*, Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften, Mathematisch-physikalische Klasse (1900), 345-354.
- [3] M. DEHN: *Ueber den Rauminhalt*, Mathematische Annalen **55** (1902), 465-478.
- [4] C.F. GAUSS: "*Congruenz und Symmetrie*": *Briefwechsel mit Gerling*, pp.240-249 in: *Werke*, Band VIII, Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen; B.G. Teubner, Leipzig 1900.
- [5] D. HILBERT: *Mathematical Problems*, Lecture delivered at the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900, Bulletin Amer. Math. Soc. **8** (1902), 437-479.
- [6] G.M. ZIEGLER: *Lectures on Polytopes*, Graduate Texts in Mathematics **152**, Springer-Verlag New York 1995.



جیمز جوزف سیلوستر

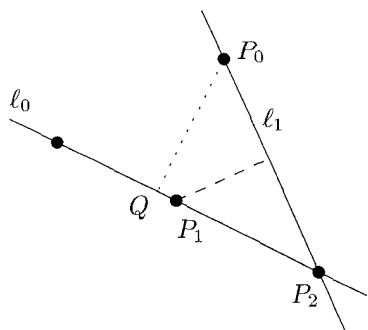
شاید معروفترین مسأله در بارهٔ آرایشهای خطوط در صفحه مسأله‌ای باشد که سیلوستر در ۱۸۹۳ در یک ستون مسائل ریاضی مطرح کرد.

مسأله برای حل

۱۱۸۵۱. (پروفسور سیلوستر) ثابت کنید که امکان ندارد تعدادی متناهی نقطهٔ حقیقی را طوری قرار دهیم که هر خط راستی که از دو تا از آنها می‌گذرد، از نقطهٔ سومی هم بگذرد مگر اینکه نقطه‌ها همگی بر یک خط راست واقع باشند.

اینکه خود سیلوستر اثباتی برای این حکم داشته بوده باشد، محل تردید است ولی حدود ۴۰ سال بعد، تیبور گالای^۱ [گرونوالد^۲] اثبات درستی از آن عرضه کرد. بنابراین، قضیهٔ زیر معمولاً به سیلوستر و گالای نسبت داده می‌شود. پس از اثبات گالای، اثباتهای متعدد دیگری عرضه شد، ولی استدلال زیر که از آن کلی^۳ است، ممکن است «بهترین اثبات» به معنی واقعی کلمه باشد.

قضیهٔ ۱. در هر آرایشی از n نقطهٔ واقع در صفحه، که همه روی یک خط نباشند، خطی وجود دارد که دقیقاً شامل دو تا از آن نقطه‌هاست.



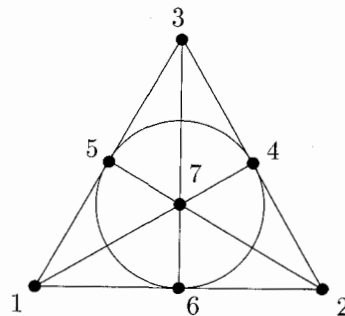
■ اثبات. فرض می‌کنیم P مجموعهٔ مفروض نقاط باشد و مجموعهٔ L مرکب از همهٔ خطهایی را که دست‌کم از دو نقطهٔ P می‌گذرند در نظر می‌گیریم. در میان همهٔ جفت‌های (P, l) که P روی l نیست، جفتی چون (P_0, l_0) انتخاب می‌کنیم که P_0 کوچکترین فاصله را تا l_0 داشته باشد، و Q را نزدیکترین نقطهٔ روی l_0 تا P_0 می‌گیریم (پای عمودی که از P_0 بر l_0 وارد شود).

ادعا. این خط l_0 خط مورد نظر است!

اگر چنین نباشد، آنگاه l_0 شامل دست‌کم سه نقطه از P است، و دست‌کم دو تا از آنها، مثلاً P_1 و P_2 ، در یک طرف Q واقع‌اند. فرض می‌کنیم P_1 بین Q و P_2

باشد که P_1 ممکن است بر Q منطبق باشد. شکل حاشیه این آرایش را نشان می‌دهد. نتیجه می‌گیریم که فاصله P_1 تا خط ℓ_1 ، که این خط به وسیله P و P_2 معین می‌شود، کوتاهتر از فاصله P تا ℓ است، و این متناقض با نحوه انتخاب ℓ و P است. \square

در این اثبات، از اصول موضوع متری (کوتاهترین فاصله) و ترتیب (اینکه P_1 بین Q و P_2 واقع است) در صفحه حقیقی استفاده کرده‌ایم. آیا واقعاً به این ویژگیها، علاوه بر اصول موضوع معمولی ملازمت^۱ [وقوع] نقطه و خط، نیاز داریم؟ خوب، همان طور که صفحه مشهور فانو^۲ که در حاشیه آمده است نشان می‌دهد، شرطی اضافی لازم است. در اینجا $\mathcal{P} = \{1, 2, \dots, 7\}$ و \mathcal{L} ، همان طور که در شکل دیده می‌شود مرکب از ۷ خط سه نقطه‌ای است از جمله «خط» $\{4, 5, 6\}$. هر دو نقطه یک خط یکتا را معین می‌کنند، بنابراین اصلهای موضوع ملازمت برقرارند ولی هیچ خط ۲ نقطه‌ای وجود ندارد. پس قضیه سیلوستر-گالای نشان می‌دهد که آرایش فانو را نمی‌توان در صفحه واقعی تشکیل داد به نحوی که هفت سه‌تایی همخط روی خطهای واقعی باشند: همیشه باید یک خط «خمیده» وجود داشته باشد.



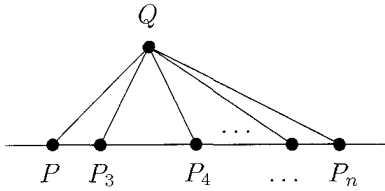
با این حال، کاکستر^۳ نشان داد که اصول موضوع ترتیب برای اثبات قضیه سیلوستر-گالای کفایت می‌کنند. پس می‌توان اثباتی طرح کرد که در آن از ویژگیهای متری استفاده نشود — اثباتی را نیز که در فصل ۱۰ با استفاده از فرمول اویلر می‌آوریم، ببینید.

از قضیه سیلوستر-گالای مستقیماً حکم معروف دیگری درباره نقطه‌ها و خطهای صفحه، که از آن پال اردوش و نیکولاس دو بروین^۴ است، به دست می‌آید. ولی این حکم، همان طور که اردوش و دو بروین دریافته بودند، در حالت کلیتری برای دستگاههای دلخواه نقطه-خط برقرار است. این حکم کلیتر را کمی بعد مورد بحث قرار خواهیم داد.

قضیه ۲. فرض کنید \mathcal{P} مجموعه $n \geq 3$ نقطه در صفحه است، که همگی روی یک خط نیستند. در این صورت، مجموعه \mathcal{L} مرکب از خطهای گذرنده از دست کم دو نقطه، شامل دست کم n خط است.

■ اثبات. به ازای $n = 3$ ، حکم واضح است. اکنون به استقرا بر n پیش می‌رویم.

۱. incidence. منظور از ملازمت یک نقطه و یک خط این است که یا آن نقطه بر آن خط واقع است یا آن خط از آن نقطه می‌گذرد.



فرض کنیم $|\mathcal{P}| = n + 1$. بنا به قضیه قبل، خطی چون $l \in \mathcal{L}$ وجود دارد که شامل دقیقاً دو نقطه P و Q از \mathcal{P} است. مجموعه $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \setminus \{Q\}$ و مجموعه \mathcal{L}' را که مرکب از خطهایی است که با \mathcal{P}' معین می‌شوند در نظر می‌گیریم. اگر نقطه‌های \mathcal{P}' روی یک خط واقع نباشند، آنگاه به استقرا، $|\mathcal{L}'| \geq n$ و از اینجا، به علت خط اضافی l در \mathcal{L} ، $|\mathcal{L}| \geq n + 1$. ولی اگر نقطه‌های متعلق به \mathcal{P}' همگی روی یک خط باشند، آنگاه «دسته خط»ی داریم که دقیقاً $n + 1$ خط را به دست می‌دهد. \square

اینک، همان‌طور که وعده دادیم، حکم کلی را می‌آوریم که در مورد «هندسه‌های ملازمت» بسیار کلیتری صادق است.

قضیه ۳. فرض کنید X مجموعه‌ای از $n \geq 3$ عضو باشد، و A_1, \dots, A_m زیرمجموعه‌های سره X باشند به‌طوری که هر جفت از عضوهای X دقیقاً به یک مجموعه A_i تعلق داشته باشد. در این صورت، $m \geq n$ برقرار است.

اثبات. اثبات زیر، که بعضیها آن را به موتسکین^۱ نسبت داده‌اند و بعضیها به کانوی^۲، بسیار کوتاه و واقعاً الهامبخش است. به ازای $x \in X$ ، فرض کنید r_x تعداد مجموعه‌های A_i باشد که شامل x اند. (توجه کنید که $r_x \leq 2$ ، و $r_x < m$ چون $n \geq 3$). حال اگر $x \notin A_i$ ، آنگاه $r_x \geq |A_i|$ زیرا مجموعه‌های $|A_i|$ شامل x اند و عضوی از A_i باید متمایز باشد. فرض کنیم $m < n$ ، در این صورت $m|A_i| < nr_x$ و بنابراین به ازای $x \notin A_i$ داریم $m(n - |A_i|) > n(m - r_x)$ ، و به دست می‌آوریم

$$1 = \sum_{x \in X} \frac{1}{n} = \sum_{x \in X} \sum_{A_i: x \notin A_i} \frac{1}{n(m - r_x)} > \sum_{A_i} \sum_{x: x \notin A_i} \frac{1}{m(n - |A_i|)} = \sum_{A_i} \frac{1}{m} = 1$$

\square که مهمل است.

اثبات بسیار کوتاه دیگری برای این قضیه هست که در آن از جبر خطی استفاده می‌شود. فرض کنیم B ماتریس ملازمت $\{X; A_1, \dots, A_m\}$ باشد یعنی سطرهای B به‌وسیله عضوهای X اندیسگذاری می‌شوند و ستونهای آن به‌وسیله A_1, \dots, A_m که در آن

$$B_{xA} := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

حاصلضرب BB^T را در نظر می‌گیریم. به‌ازای $x \neq x'$ داریم $(BB^T)_{xx'} = ۱$ چون x و x' دقیقاً به یک مجموعه A تعلق دارند، پس

$$BB^T = \begin{pmatrix} r_{x_1} - ۱ & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & r_{x_2} - ۱ & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & ۰ \\ ۰ & \dots & ۰ & r_{x_n} - ۱ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & \dots & ۱ \\ ۲ & ۱ & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & ۱ \\ ۱ & \dots & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

که در آن r_x به‌صورت بالا تعریف می‌شود. چون ماتریس اول معین مثبت است (فقط ویژه‌مقدارهای مثبت دارد) و ماتریس دوم نیمه معین مثبت است (دارای ویژه‌مقدارهای n و ۰ است)، نتیجه می‌گیریم که BB^T معین مثبت است و بنابراین، به‌خصوص، وارون‌پذیر است، و لذا رتبه BB^T برابر است با n . پس رتبه ماتریس B که $n \times m$ است، دست‌کم n است، و به‌این نتیجه می‌رسیم که واقعاً $m \leq n$ ، زیرا رتبه نمی‌تواند از تعداد ستونها بیشتر باشد.

کمی فراتر می‌رویم و به‌نظریهٔ گراف می‌پردازیم (در پیوست این فصل، مفاهیم بنیادی گراف مرور شده است). با اندکی تأمل در می‌یابیم که گزارهٔ زیر واقعاً با قضیهٔ ۳ یکی است:

اگر گراف کامل K_n را به m خوشهٔ متفاوت با K_n تجزیه کنیم به‌نحوی که هر یال در فقط یک خوشه باشد، آنگاه $m \geq n$.

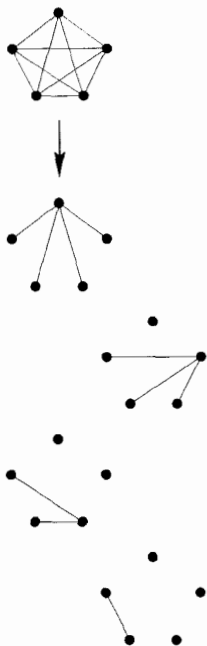
در واقع اگر X را متناظر با مجموعهٔ رأسهای K_n و مجموعه‌های A_i را متناظر با مجموعه‌های رأسهای خوشه‌ها بگیریم، آنگاه صورت دو قضیه یکی می‌شود.

کار بعدی ما تجزیهٔ K_n به گرافهای دو بخشی کامل است به‌نحوی که هر یال، باز دقیقاً در یکی از این گرافها باشد. راه ساده‌ای برای این کار هست. رأسها را به‌صورت $\{1, 2, \dots, n\}$ شماره‌گذاری می‌کنیم. نخست گراف دو بخشی کاملی را در نظر می‌گیریم که ۱ را به همهٔ رأسهای دیگر پیوند می‌دهد. به‌این ترتیب، گراف $K_{1, n-1}$ به‌دست می‌آید که ستاره نامیده می‌شود. سپس ۲ را به ۳، \dots ، n وصل می‌کنیم و ستارهٔ $K_{1, n-2}$ را به‌دست می‌آوریم. با ادامهٔ این کار، K_n به ستاره‌های $K_{1, n-1}$ ، $K_{1, n-2}$ ، $K_{1, n-3}$ ، \dots ، $K_{1, 1}$ تجزیه می‌شود. در این تجزیه، $n-1$ گراف دو بخشی کامل به‌کار می‌رود. آیا می‌توانیم بهتر عمل کنیم، یعنی گرافهای کمتری به‌کار ببریم؟ قضیهٔ زیر

که از آن ران گراهام^۱ و هنری ا. پولاک^۲ است، پاسخ منفی به این پرسش می‌دهد:

قضیه^۴. اگر K_n , $n \geq 2$, به زیرگرافهای دو بخشی کامل H_1, \dots, H_m تجزیه شود، آنگاه $m \geq n - 1$.

نکته جالب توجه این است که برخلاف قضیه اردوش - دو بروین، هیچ اثبات ترکیبیتی برای این حکم به دست نیامده است! در همه اثباتها از جبر خطی به این یا آن صورت استفاده می‌شود. از میان این اثباتهای کم و بیش معادل، نگاهی می‌افکنیم به اثباتی که متعلق به توربرگ^۳ است و شاید روشنتر از همه باشد.



■ اثبات. فرض می‌کنیم مجموعه رأسهای K_n , $\{1, \dots, n\}$ باشد، و L_j, R_j مجموعه‌های رأسهای معرف گراف دو بخشی کامل H_j , $j = 1, \dots, m$ باشند. به هر رأس i متغیری چون x_i نسبت می‌دهیم. چون H_1, \dots, H_m گراف K_n را تجزیه می‌کنند، داریم

$$\sum_{i < j} x_i x_j = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{a \in L_k} x_a \cdot \sum_{b \in R_k} x_b \right) \quad (1)$$

تجزیه K_5 به ۴ زیرگراف دو بخشی کامل

حال فرض کنید قضیه غلط است یعنی $m < n - 1$. در این صورت، در دستگاه معادلات خطی

$$\begin{aligned} x_1 + \dots + x_n &= 0 \\ \sum_{a \in L_k} x_a &= 0 \quad (k = 1, \dots, m) \end{aligned}$$

تعداد معادله‌ها کمتر از متغیرهاست، پس جوابی غیر بدیهی چون c_1, \dots, c_n وجود دارد. از (۱) نتیجه می‌گیریم

$$\sum_{i < j} c_i c_j = 0$$

ولی از اینجا به دست می‌آید

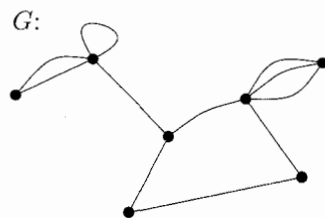
$$0 = (c_1 + \dots + c_n)^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2 + 2 \sum_{i < j} c_i c_j = \sum_{i=1}^n c_i^2 > 0$$

□ که تناقض است، و اثبات به انجام می‌رسد.

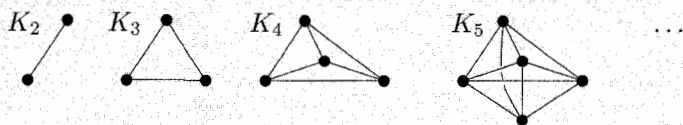
پیوست: مفاهیم بنیادی گراف

گراف از جمله بنیادترین ساختارهای ریاضی است. بنابراین گرافها انواع، نمایشها، و جسمهای متفاوت متعددی دارند. به زبان انتزاعی، گراف جفتی چون $G = (V, E)$ است که V مجموعه رأسها و E مجموعه یالهاست، و هر یال $e \in E$ دو رأس $v, w \in V$ را «به هم وصل می‌کند». ما فقط گرافهای متناهی را در نظر می‌گیریم که در آنها V و E متناهی‌اند. معمولاً با گرافهای ساده سروکار داریم: در این گرافها، طوقه^۱ یعنی یالی که دو انتهایش بر هم منطبق باشند، و یال چندگانه یعنی چند یال که مجموعه رأسهای آنها یکی باشد، وجود ندارد. دو رأس از یک گراف را مجاور می‌نامند اگر رأسهای دو سر یک یال باشند. یک رأس و یک یال ملازم هم^۲ نامیده می‌شوند اگر آن رأس، رأس یک سر آن یال باشد.

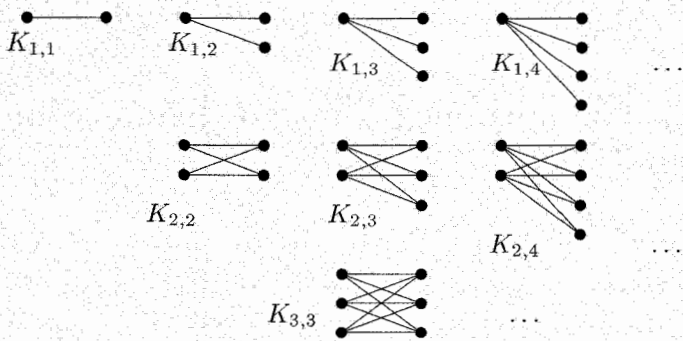
در اینجا چند گراف مهم (ساده) را می‌بینید:



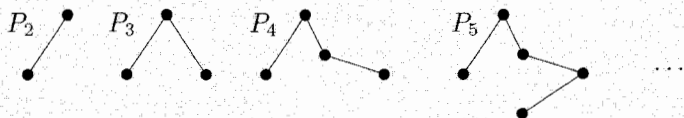
یک گراف G با ۷ رأس و ۱۱ یال، که یک طوقه، یک یال دوگانه و یک یال سه‌گانه دارد.



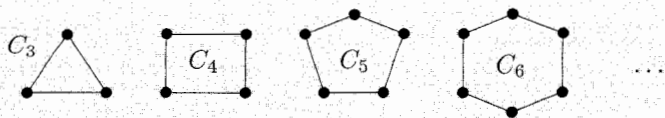
گرافهای کامل K_n با n رأس و $\binom{n}{2}$ یال



گرافهای دوبخشی کامل K_{m+n} با $m+n$ رأس و mn یال



مسیرهای P_n با n رأس

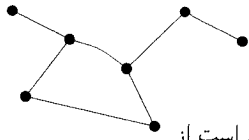


دورهای C_n با n رأس

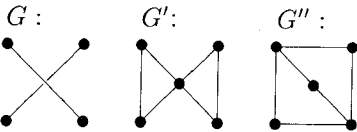
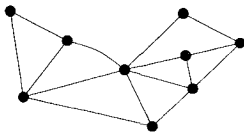
1. loop 2. incident

دو گراف $G = (V, E)$ و $G' = (V', E')$ یکریخت قلمداد می‌شوند اگر تناظرهای دوسویی $V \rightarrow V'$ و $E \rightarrow E'$ وجود داشته باشند که رابطه ملازمت را بین یالها و رأسهای آنها حفظ کنند. (مسأله وجود آزمون کارامدی برای تعیین یکریخت بودن دو گراف مفروض، مسأله حل‌نشده مهمی است.) این مفهوم یکریختی به ما امکان می‌دهد از گراف کامل K_5 با ۵ رأس، و نظایر آن، صحبت کنیم.

$G' = (V', E')$ یک زیرگراف $G = (V, E)$ است اگر $V' \subseteq V$ ، $E' \subseteq E$ و هر یال $e \in E'$ همان رأسهایی را در G' داشته باشد که در G دارد. G' یک زیرگراف القایی^۱ است اگر علاوه بر آن، همه یالهایی از G که رأسهای G' را به هم وصل می‌کنند، یالهایی از G' نیز باشند.



این زیرگرافی است از



G همبند نیست

G' همبند است ولی دوگانه همبند نیست

G'' دوگانه همبند است.

بسیاری از مفاهیم مربوط به گراف کاملاً جنبه شهودی دارند: مثلاً گراف G همبند است اگر هر دو رأس متمایز آن با مسیری در G به هم وصل شوند یا به عبارت دیگر، اگر نتوان G را به دو زیرگراف ناتهی تجزیه کرد که مجموعه‌های رأسهایشان مجزا باشند. گراف G دوگانه همبند است اگر هر دو رأس متمایز با دو مسیر در G به هم وصل شوند که از هم مجزا باشند و فقط انتهای آنها برهم منطبق باشد (و تشکیل یک چرخه یا دور^۲ در G بدهند) یا معادل آن، اگر G را نتوان به دو زیرگراف دست‌کم با دو رأس تجزیه کرد که مجزا باشند یا در حداکثر یک رأس تلاقی کنند (که آن را رأس برشی^۳ G می‌نامند).

مرور مفاهیم بنیادی گراف را با شرح چند اصطلاح دیگر به پایان می‌آوریم: هر خوشه^۴ در G یک زیرگراف کامل است. هر مجموعه مستقل در G ، زیرگرافی القایی بدون یال است، یعنی زیرمجموعه‌ای از مجموعه رأسها به‌گونه‌ای که هیچ دو رأسی به‌وسیله یک یال G به هم وصل نشوند. گراف را جنگل می‌نامند اگر شامل هیچ دوری نباشد. درخت، جنگلی همبند است. گراف $G = (V, E)$ دوبخشی است اگر یکریخت با زیرگرافی از یک گراف دوبخشی کامل باشد، یعنی اگر مجموعه رأسهایش را بتوان به صورت اجتماع دو مجموعه مستقل همچون $V = V_1 \cup V_2$ نوشت.

مراجع

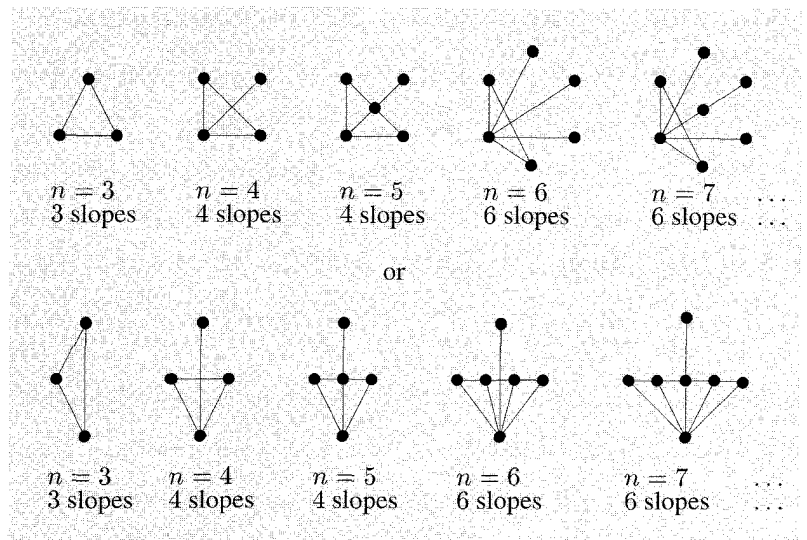
[1] N.G. DE BRUIJN & P. ERDŐS: *On a combinatorial problem*, Proc.

1. induced subgraph 2. cycle 3. cut vertex 4. cliqu

Kon. Ned. Akad. Wetensch. **51** (1948), 1277-1279.

- [2] H.S.M. COXETER: *A problem of collinear points*, Amer. Math. Monthly **55** (1948), 26-28 (contains Kelly's proof).
- [3] P. ERDŐS: *Problem 4065-Three point collinearity*, Amer. Math. Monthly **51** (1944), 169-171 (contains Gallai's proof).
- [4] R.L. GRAHAM & H.O. POLLAK: *On the addressing problem for loop switching*, Bell System Tech. J. **50** (1971), 2495-2519.
- [5] J.J. SYLVESTER: *Mathematical Question 11851*, The Educational Times **46** (1893), 156.
- [6] H. TVERBERG: *On the decomposition of K_n into complete bipartite graphs*, J. Graph Theory **6** (1982), 493-494.

پیش از خواندن این مطلب سعی کنید آرایشهایی از نقطه‌ها در صفحه ترتیب دهید که تعداد «نسبتاً کمی» شیب را معین کنند. به این منظور البته فرض می‌کنیم همه $n \geq 3$ نقطه روی یک خط واقع نیستند. قضیه اردوش دو بروین در فصل ۸، «آرایش خطها در صفحه»، حاکی از این بود که n نقطه دست‌کم n خط متفاوت را معین می‌کنند. ولی البته بسیاری از این خطها ممکن است موازی باشند و شیب یکسانی را مشخص کنند.



با کمی آزمایش به‌ازای مقدارهای کوچک n احتمالاً به‌دنباله‌ای از شکلهای نظیر دو دنباله‌ای که در اینجا دیده می‌شود، دست می‌یابید.

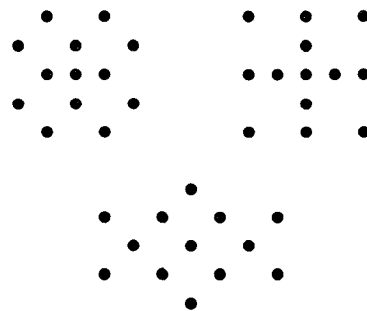
پس از قدری تلاش برای یافتن آرایشهایی با شیبهای کمتر، ممکن است قضیه زیر را حدس بزنید — همان‌طور که اسکات در سال ۱۹۷۰ حدس زد:

قضیه. اگر $n \geq 3$ نقطه در صفحه بر یک خط واقع نباشند، آنگاه دست‌کم $n - 1$ شیب متفاوت معین می‌کنند، و در صورتی ممکن است دقیقاً همین تعداد شیب را معین کنند که n فرد باشد و $n \geq 5$.

نمونه‌های بالا — که چند آرایش اولیه در دو دنباله نامتناهی از نمونه‌ها هستند —

نشان می‌دهند که قضیه بالا به صورتی که بیان شده است، حاکی از بهترین امکان است زیرا به ازای هر n فرد که $n \geq 5$ ، آرایشی با n نقطه وجود دارد که دقیقاً $n - 1$ شیب متفاوت را معین می‌کند، و به ازای هر n دیگر که $n \geq 3$ ، آرایشی با دقیقاً n شیب داریم.

ولی آرایشهایی که در بالا نشان دادیم تنها آرایشهای ممکن نیستند. مثلاً جمیسن^۱ و هیل^۲ چهار خانواده نامتناهی از آرایشها را معرفی کردند که هر یک مرکب از آرایشهایی با تعدادی فرد از نقاط است که فقط $n - 1$ شیب را معین می‌کنند (آرایشهای شیب-بحرانی). به علاوه، آنها 10^2 نمونه «پراکنده» عرضه کردند که به نظر نمی‌رسد متعلق به خانواده‌ای نامتناهی باشند، و بیشتر آنها با جستجوی گسترده کامپیوتری به دست آمدند.



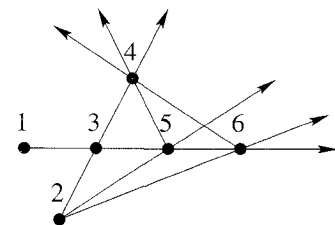
سه نمونه پراکنده از کاتالوگ جمیسن-هیل

فهم متعارف حکم می‌کند که اگر آرایشهای فرین (اکسترمال) این قدر پراکنده و نامنظم‌اند، حل دقیق مسأله‌های فرین باید بسیار دشوار باشد. در واقع، مطالب زیادی درباره ساختار آرایشهای شیب-بحرانی می‌توان گفت ([۲] را ببینید) ولی طبقه‌بندی آنها کاملاً خارج از دسترس به نظر می‌رسد. با این حال، قضیه بالا اثبات ساده‌ای دارد که دارای دو جزء اصلی است: تحویل به یک مدل ترکیباتی کارآمد که کارالی گودمن^۳ و ریکی پولاک^۴ است، و استدلال زیبایی در این مدل که پیترانگار^۵ اثبات را به کمک آن در ۱۹۸۲ به انجام رساند.

■ اثبات. (۱) نخست توجه می‌کنیم که کافی است نشان دهیم هر مجموعه «زوج» مرکب از $n = 2m$ نقطه در صفحه ($m \geq 2$) دست کم n شیب را معین می‌کند. حالت $n = 3$ بدیهی است، و برای هر مجموعه مرکب از $n = 2m + 1 \geq 5$ نقطه (که همگی بر یک خط نیستند) می‌توانیم زیرمجموعه‌ای مرکب از $n - 1 = 2m$ نقطه، که همگی بر یک خط نیستند، پیدا کنیم که $n - 1$ شیب را معین می‌کند.

پس در زیر، آرایشی مرکب از $n = 2m$ نقطه در صفحه در نظر می‌گیریم که $t \geq 2$ شیب متفاوت را مشخص می‌کند.

(۲) مدل ترکیباتی با ساختن دنباله‌ای تناوبی از جایگشتها به دست می‌آید. این کار را با جهتی در صفحه که متناظر یکی از شیبهای آرایش نیست آغاز می‌کنیم، و نقطه‌ها را به ترتیبی که در تصویر یک بعدی در این جهت ظاهر می‌شوند شماره‌گذاری



این آرایش که مرکب از $n = 6$ نقطه است، $t = 6$ شیب متفاوت را معین می‌کند.

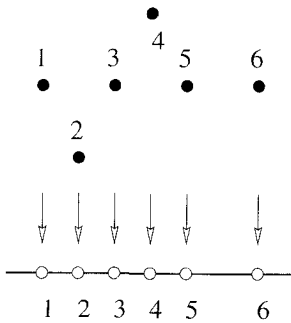
می‌کنیم: $1, \dots, n$. پس جایگشت $\pi_0 = 123\dots n$ نشان‌دهنده ترتیب نقطه‌ها برای جهت آغازین ماست.

حال فرض می‌کنیم بردار جهت در خلاف جهت عقربه‌های ساعت به حرکت در آید و تغییرات تصویر و جایگشت آن را نظاره می‌کنیم. تغییرات در ترتیب نقاط تصویر شده دقیقاً وقتی رخ می‌دهند که بردار جهت از یکی از شیبهای آرایش می‌گذرد. اما تغییرات به هیچ وجه تصادفی یا دلخواه نیستند: اگر بردار جهت به اندازه 18° دوران کند، دنباله‌ای از جایگشتهای:

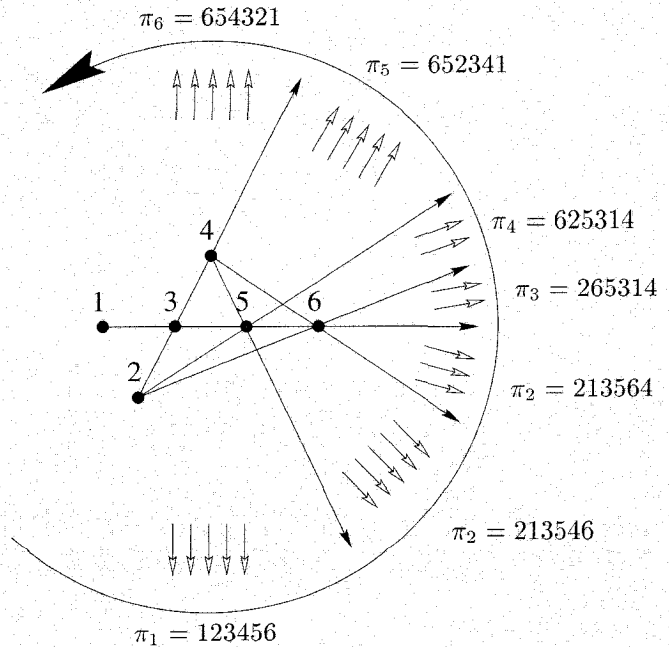
$$\pi_0 \rightarrow \pi_1 \rightarrow \pi_2 \rightarrow \dots \rightarrow \pi_{t-1} \rightarrow \pi_t$$

به دست می‌آوریم که ویژگیهای خاص زیر را دارد:

- دنباله با $\pi_0 = 123\dots n$ آغاز می‌شود و با $\pi_t = n\dots 321$ پایان می‌یابد.
- طول دنباله، t ، تعداد شیبهای آرایش نقاط است.
- در این دنباله، هر جفت $i < j$ دقیقاً یک‌بار تغییر می‌کند. این بدان معنی است که در مسیر از $\pi_0 = 123\dots n$ تا $\pi_t = n\dots 321$ فقط زیررشته‌های



در اینجا با انتخاب یک جهت آغازین قائم، $\pi_0 = 123456$ به دست می‌آید.



دنباله جایگشتهای را برای مثال کوچک خود به دست می‌آوریم.

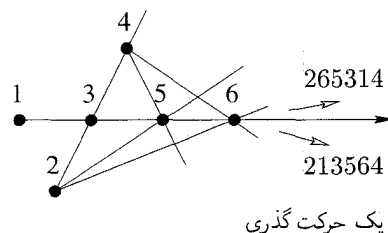
• هر حرکت متضمن معکوس شدن یک یا چند زیررشته صعودی مجزاست (متناظر با یک چندخطی که دارای جهتی هستند که در این نقطه از آن می‌گذریم).

با ادامه حرکت دایره‌ای به دور آرایش نقاط، می‌توان دید که این دنباله بخشی از دنباله تناوبی نامتناهی دوطرفه‌ای از جایگشتهاست:

$$\rightarrow \pi_{-1} \rightarrow \pi_0 \rightarrow \dots \rightarrow \pi_t \rightarrow \pi_{t+1} \rightarrow \dots \rightarrow \pi_{2t} \rightarrow \dots$$

که در آن π_{i+t} معکوس π_i به‌ازای هر i است، و بنابراین به‌ازای هر $i \in \mathbb{Z}$ ، $\pi_{i+2t} = \pi_i$. نشان خواهیم داد که هر دنباله با ویژگی‌های بالا (و $t \geq 2$) باید به‌طول n باشد. (۳) کلید اثبات تقسیم کردن هر جایگشت به یک «نیمه چپ» و یک «نیمه راست» با اندازه برابر $\frac{n}{2}$ ، و شمردن حروفی است که از مانع فرضی بین نیمه‌های چپ و راست می‌گذرند [بین دو طرف مانع جابه‌جا می‌شوند].

حرکت $\pi_i \rightarrow \pi_{i+1}$ یک حرکت‌گذاری نامیده می‌شود اگر یکی از زیررشته‌هایی که معکوس می‌کند شامل حروفی در دو طرف مانع باشد. حرکت‌گذاری مرتبه d است اگر d حرف را از مانع بگذراند یعنی اگر رشته گذرنده دقیقاً d حرف در یک طرف و دست‌کم d حرف در طرف دیگر داشته باشد. مثلاً در مثال ما



$$\pi_2 = \underline{213} : \underline{564} \rightarrow \overline{265} : \overline{314} = \pi_3$$

یک حرکت‌گذاری با مرتبه $d = 2$ است (۱، ۳، ۵، ۶ را از این سو به آن سوی مانع می‌برد؛ مانع را با «:» نشان داده‌ایم) و

$$\underline{652} : \underline{341} \rightarrow \overline{654} : \overline{321}$$

حرکتی‌گذاری با مرتبه $d_2 = 1$ است، حال آنکه

$$\underline{625} : \underline{314} \rightarrow \overline{652} : \overline{341}$$

حرکت‌گذاری نیست.

در دنباله جایگشتهای $\pi_0 \rightarrow \pi_1 \rightarrow \dots \rightarrow \pi_t$ ، هر یک از حرفهای (۱، ۲، \dots) باید دست‌کم یک بار از مانع بگذرد. از اینجا نتیجه می‌گیریم که اگر d_1, \dots, d_c نشان‌دهنده مرتبه‌های حرکت‌گذاری باشند، داریم

$$\sum_{i=1}^c 2d_i = \#\{\text{حروفی که از مانع می‌گذرند}\} \geq n$$

این نیز دلالت می‌کند که دست‌کم دو حرکت گذری داریم، زیرا یک حرکت گذری با $2d_i = n$ فقط وقتی روی می‌دهد که همه نقطه‌ها روی یک خط باشند، یعنی به‌ازای $t = 1$. از لحاظ هندسی، حرکت گذری متناظر با جهت خطی از آرایش است که کمتر از m نقطه در هر طرف داشته باشد.

(۴) حرکت مماسی حرکتی است که رشته‌ای را که مجاور مانع مرکزی است معکوس می‌کند ولی آن را از مانع عبور نمی‌دهد، مثلاً

$$\pi_4 = \underline{625314} : \underline{314} \rightarrow \overline{652341} : \overline{341} = \pi_5$$

حرکتی مماسی است. از لحاظ هندسی، حرکت مماسی متناظر با شیب خطی از آرایش است که دقیقاً m نقطه در یک طرف دارد، و بنابراین، حداکثر $2 - m$ نقطه در طرف دیگر.

حرکت‌هایی که نه مماسی‌اند و نه گذری، حرکت‌های معمولی نامیده می‌شوند، مانند

$$\pi_1 = \underline{213} : \underline{546} \rightarrow \underline{213} : \overline{564} = \pi_2$$

پس در مثال ما، هر حرکت یا مماسی است یا گذری و یا معمولی، و می‌توانیم به‌ترتیب از حروف T, C و O برای نشان دادن این سه نوع حرکت استفاده کنیم. ^۱ مثلاً $C(d)$ نشان‌دهنده حرکتی گذری با مرتبه d خواهد بود. پس برای مثال کوچکمان داریم

$$\pi_0 \xrightarrow{T} \pi_1 \xrightarrow{O} \pi_2 \xrightarrow{C(2)} \pi_3 \xrightarrow{O} \pi_4 \xrightarrow{T} \pi_5 \xrightarrow{C(1)} \pi_6$$

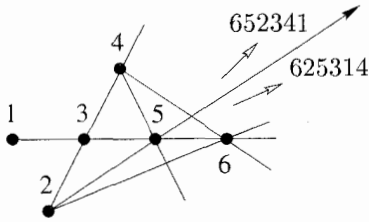
و این دنباله را می‌توانیم حتی به‌شکل خلاصه‌تر $O, T, C(2), O, T, C(1)$ نشان دهیم.

(۵) برای تکمیل اثبات، لازم است دو حکم را ثابت کنیم:

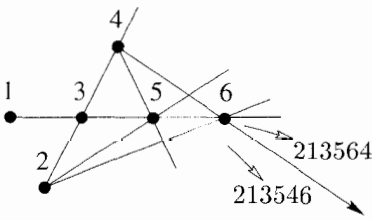
بین هر دو حرکت گذری، دست‌کم یک حرکت مماسی هست.

بین هر حرکت گذری با مرتبه d و حرکت مماسی بعدی، دست‌کم $1 - d$ حرکت معمولی هست.

در واقع پس از حرکتی گذری با مرتبه d ، مانع در زیررشته‌ای نزولی و متقارن به‌طول $2d$ قرار دارد که d حرف در هر طرف مانع واقع است. برای حرکت گذری بعدی، مانع مرکزی را باید به درون زیررشته‌ای صعودی با طول دست‌کم 2 آورد. ولی فقط $(1, T, C, O)$ ، به‌ترتیب حروف اول کلمات انگلیسی touching [مماسی]، crossing [گذری]، و ordinary [معمولی] است. م.



یک حرکت مماسی



یک حرکت معمولی

حرکت‌های مماسی می‌توانند در اینکه مانع در درون زیررشته‌ای صعودی قرار گیرد مؤثر باشند. از اینجا حکم اول به دست می‌آید. در مورد حکم دوم، توجه کنید که با هر حرکت معمولی (معکوس کردن زیررشته‌هایی صعودی)، رشته نزولی به طول $2d$ را می‌توان فقط به اندازه یک حرف در هر طرف کوتاه کرد و مادام که رشته نزولی دست‌کم ۴ حرف دارد، حصول رشته مماسی غیر ممکن است. پس حکم دوم ثابت می‌شود.

اگر دنباله‌ای از جایگشتها با شروع از همین تصویر اولیه ولی با دوران در جهت حرکت عقربه‌های ساعت بسازیم، دنباله معکوس جایگشتها را به دست می‌آوریم. پس دنباله حاصل نیز باید در حکمی مقابل با حکم دوم ما صدق کند یعنی

بین حرکتی مماسی و حرکت گذری بعدی با مرتبه d ، دست‌کم $d-1$ حرکت معمولی وجود دارد.

(۶) الگوی $T-O-C$ برای دنباله نامتناهی جایگشتها، که در (۲) برای دنباله متناهی به دست آمد، با بارها تکرار الگوی $T-O-C$ به طول t برای دنباله $\pi_0 \rightarrow \dots \rightarrow \pi_t$ حاصل می‌شود. پس با توجه به حکمهای (۵) می‌بینیم که در دنباله نامتناهی حرکتها، هر حرکت گذری با مرتبه d در یک الگوی $T-O-C$ از نوع

$$T, \underbrace{O, O, \dots, O}_{\geq d-1}, C(d), \underbrace{O, O, \dots, O}_{\geq d-1} \quad (*)$$

به طول $2d = 1 + (d-1) + 1 + (d-1)$ قرار می‌گیرد.

در دنباله نامتناهی، می‌توانیم قطعه‌ای متناهی به طول t در نظر بگیریم که با یک حرکت مماسی آغاز شود. این قطعه مرکب از زیررشته‌هایی از نوع (*) است، به اضافه احتمالاً T ‌های اضافی که به آن وارد شده باشد. از اینجا نتیجه می‌شود که طول t در

$$t \geq \sum_{i=1}^c 2d_i \geq n$$

صدق می‌کند و اثبات به انجام می‌رسد. \square

مراجع

- [1] J. E. GOODMAN & R. POLLACK: *A combinatorial perspective on some problems in geometry*, *Congressus Numerantium* **32** (1981), 383-394.

-
- [2] R.E. JAMISON & D. HILL: *A catalogue of slope-critical configurations*, *Congressus Numerantium* **40** (1983), 101-125.
- [3] P. R. SCOOT: *On the sets of directions determined by n points*, *Amer. Math. Monthly* **77** (1970), 502-505.
- [4] P. UNGAR: *$2N$ noncollinear points determine at least $2N$ directions*, *J. Combinatorial Theory Ser. A* **33** (1982), 343-347.



لئونهارت اویلر

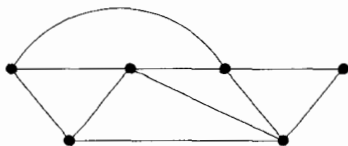
گراف را هامنی [یا مسطح شدنی] گوئیم اگر بتوان آن را بدون آنکه یالهای متقاطعی داشته باشد در صفحه \mathbb{R}^2 (یا به طور معادل، روی کرهٔ دوبعدی S^2) رسم کرد. همچنین گراف را مسطح می‌گوئیم اگر چنین ترسیمی از قبل داده شده و مشخص باشد. چنین ترسیمی صفحه یا کره را به تعدادی متناهی ناحیهٔ همبند، از جمله ناحیهٔ بیکران (خارجی، تجزیه می‌کند که وجوه نامیده می‌شوند. فرمول اویلر نشان‌دهندهٔ رابطهٔ زیبایی بین تعداد رأسها، یالها، و وجوه است که برای هر گراف مسطحی برقرار است. اویلر این حکم را اول بار در نامه‌ای به دوستش گولدباخ در سال ۱۷۵۰ ذکر کرد ولی در آن زمان برهان کاملی برای آن نداشت. در میان اثباتهای متعدد فرمول اویلر، اثباتی زیبا و «خود دوگان» را می‌آوریم که بدون استقرا انجام می‌شود.

فرمول اویلر. اگر G یک گراف مسطح همبند با n رأس، e یال، و f وجه باشد، آنگاه

$$n - e + f = 2$$

■ اثبات. فرض کنیم $T \subseteq E$ مجموعهٔ یالهای یک درخت فراگیر برای G باشد یعنی مجموعهٔ یالهای زیرگراف مینیمالی که همهٔ رأسهای G را به هم وصل کند. این گراف، با توجه به فرض مینیمال بودن، شامل دور نیست.

اکنون به گراف دوگان G ، که آن را G^* می‌نامیم، نیاز داریم: برای ساختن آن، رأسی در درون هر وجه G قرار می‌دهیم و دو تا از این‌گونه رأسهای G^* را به وسیلهٔ یالهایی متناظر با یالهای مرزی مشترک بین وجوه متناظر به هم وصل می‌کنیم. اگر چندین یال مرزی مشترک وجود داشته باشند، آنگاه چند یال وصل‌کننده در گراف دوگان رسم می‌کنیم. (پس G^* ممکن است یالهای دوگانه داشته باشد حتی اگر گراف اصلی G ساده باشد.)



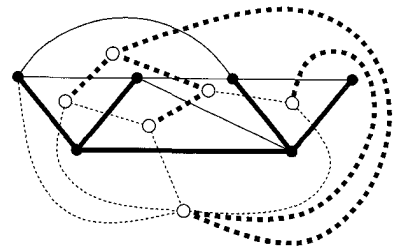
یک گراف مسطح G :

$$n = 6, e = 6, f = 6$$

حال مجموعهٔ $E^* \subseteq T^*$ را در نظر می‌گیریم که مرکب از یالهایی در گراف دوگان است که با یالهایی در $E \setminus T$ متناظرند. یالهای T^* همهٔ وجوه را به هم وصل می‌کنند زیرا T شامل دور نیست؛ ولی T^* نیز شامل دور نیست زیرا اگر باشد، رؤوسی از G در درون دور را از رؤوسی در بیرون آن جدا می‌کند (و این ممکن نیست چون T یک

زیرگراف فراگیر است و یالهای T و T^* متقاطع نیستند). پس T^* یک درخت فراگیر برای G^* است.

اکنون برای هر درخت، تعداد رأسها یکی بیشتر از تعداد یالهاست. برای نشان دادن این موضوع، یک رأس را به عنوان ریشه انتخاب می‌کنیم، و برای همه یالها جهتی از ریشه به سمت رأس دیگر انتخاب می‌کنیم. به این ترتیب، اگر هر یال را با رأسی که جهت آن یال به طرف آن است جفت کنیم، تناظری دوسویی بین رأسهای غیر ریشه و یالها برقرار می‌شود. اگر این را در مورد درخت T به کار ببریم، به دست می‌آید $n = e_T + 1$ که در مورد درخت T^* خواهیم داشت $f = e_{T^*} + 1$. با جمع کردن دو معادله داریم: $n + f = (e_T + 1) + (e_{T^*} + 1) = e + 2$. □



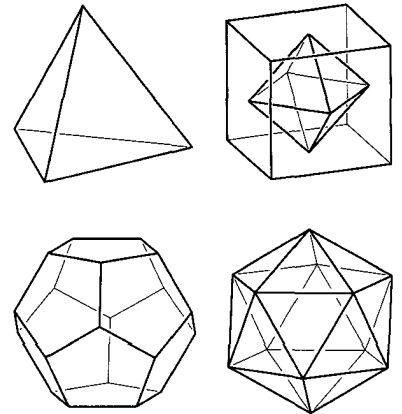
درختهای فراگیر دوگان G^* و G

پس با استفاده از فرمول اویلر، یک حکم عددی قوی از یک وضعیت هندسی-توپولوژیک به دست می‌آید: تعداد رأسها، یالها، و وجوه گراف متناهی G در رابطه $f = 2 - e + n$ صدق می‌کنند هرگاه این گراف، رسم شده یا قابل ترسیم در صفحه یا روی یک کره باشد.

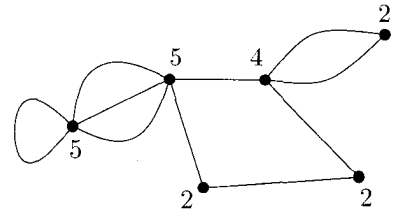
از فرمول اویلر، بسیاری از نتایج معروف و کلاسیک را می‌توان به دست آورد که از جمله، اینها هستند: رده‌بندی چندوجهیهای محدب منتظم (اجسام افلاطونی)، این واقعیت که K_5 و $K_{3,3}$ هامنی نیستند (در ادامه این بحث خواهیم دید)، و قضیه پنج رنگ مبنی بر اینکه هر نقشهٔ هامنی را می‌توان حداکثر با پنج رنگ، رنگ‌آمیزی کرد به نحوی که هیچ دو کشور مجاور، رنگ یکسانی نداشته باشند. ولی برای این حکم اثبات بسیار بهتری داریم که حتی به فرمول اویلر هم نیازی ندارد — فصل ۲۵ را ببینید. در این فصل سه اثبات زیبایی دیگر می‌آوریم که فرمول اویلر هستهٔ آنها را تشکیل می‌دهد. در دو اثبات اول — اثباتی از قضیهٔ سیلوستر — گالای و قضیه‌ای مربوط به آرایش دو رنگی نقاط — تلفیق هوشمندانه‌ای از فرمول اویلر با روابط حسابی دیگر بین پارامترهای بنیادی گراف به کار می‌رود. نخست نگاهی به این پارامترها می‌اندازیم. درجهٔ یک رأس، تعداد یالهایی است که به آن رأس ختم می‌شوند (طوقه دویار به حساب می‌آید). فرض کنید n_i نشان‌دهندهٔ تعداد رأسهای با درجهٔ i در G باشد. پس شمارش رأسها برحسب درجه‌هایشان چنین است

$$n = n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + \dots \quad (1)$$

از سوی دیگر، هر یال دو انتها دارد و بنابراین ۲ واحد در مجموع همهٔ درجه‌ها سهم



پنج جسم افلاطونی



در اینجا درجه در کنار هر رأس نوشته شده است. با شمارش رأسهای از درجهٔ مفروض به دست می‌آید

$$n_0 = 2, n_1 = 1, n_2 = 3, n_3 = 0, n_4 = 0, n_5 = 1$$

دارد، و لذا

$$2e = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + \dots \quad (2)$$

این رابطه را می‌توانید به‌عنوان شمارش رأسهای متصل به یالها (یعنی ملازمت‌های یال-رأس) به دو روش مختلف، تعبیر کنید. پس درجه میانگین رأسها، \bar{d} ، برابر است با

$$\bar{d} = \frac{2e}{n}$$

حال وجوه یک گراف مسطح را برحسب تعداد ضلعهایشان می‌شماریم. k -وجه، وجهی است که k یال آن را احاطه کرده‌اند (یالی که در هر دو طرف مجاور یک ناحیه واحد باشد دوبار به حساب می‌آید!) فرض کنید f_k تعداد k -وجه‌ها باشد. با شمارش همهٔ وجوه به‌دست می‌آوریم

$$f = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \dots \quad (3)$$

اگر یالها را برحسب وجوهی بشمریم که آن یالها اضلاعشان هستند، خواهیم داشت

$$2e = f_1 + 2f_2 + 3f_3 + 4f_4 + \dots \quad (4)$$

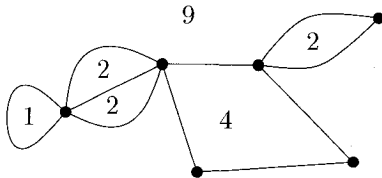
مانند قبل، می‌توان این را به‌صورت شمارش دوگانهٔ ملازمت‌های یال-رأس تعبیر کرد. با توجه به اینکه تعداد میانگین ضلعهای وجوه برابر

$$\bar{f} = \frac{2e}{f}$$

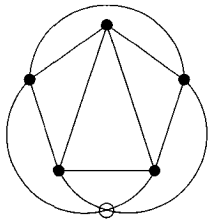
است می‌توانیم از اینجا — همراه با فرمول اویلر — به‌سرعت نتیجه بگیریم که گراف کامل K_5 و گراف دوبخشی کامل $K_{3,3}$ هامنی نیستند. برای یک ترسیم مسطح فرضی K_5 داریم $n = 5$ ، $e = \binom{5}{2} = 10$ ، پس $f = e + 2 - n = 7$ و $\bar{f} = \frac{2e}{f} = \frac{20}{7} < 3$ ولی اگر تعداد میانگین ضلعها کوچکتر از ۳ باشد، آنگاه وجهی با حداکثر دو ضلع در ترسیم فرضی خواهیم داشت که غیر ممکن است.

همین‌طور برای $K_{3,3}$ به‌دست می‌آوریم $n = 6$ ، $e = 9$ ، $f = e + 2 - n = 5$ و بنابراین $\bar{f} = \frac{2e}{f} = \frac{18}{5} < 4$ که ممکن نیست زیرا $K_{3,3}$ ساده و دوبخشی است و از این رو همهٔ دورهایش دست‌کم طولی برابر ۴ دارند.

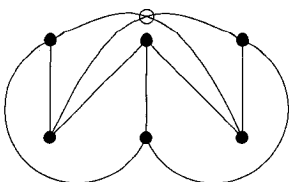
البته تصادفی نیست که رابطه‌های (۳) و (۴) برای f_i ها این قدر شبیه روابط (۱) و (۲) برای n_i ها به‌نظر می‌رسند. آنها با ساختار گراف دوگان $G^* \rightarrow G$ که در بالا تشریح شد، به‌هم تبدیل می‌شوند.



تعداد ضلعها در درون هر ناحیه نوشته شده است. اگر هر دسته از وجوهی را که تعداد مفروضی ضلع دارند بشمریم، به‌دست می‌آید $f_1 = 1$ ، $f_2 = 3$ ، $f_3 = 1$ ، $f_4 = 1$ ، و در غیر این موارد، $f_i = 0$.



K_5 با یک تقاطع رسم شده است.



$K_{3,3}$ با یک تقاطع رسم شده است.

نتایج «موضعی» مهم زیر از فرمول اویلر را از رابطه‌های شمارش دوگانه به دست می‌آوریم.

گزاره. فرض کنید G گراف مسطح ساده‌ناتهی دلخواهی باشد. در این صورت

(الف) G رأسی با درجه حداکثر ۵ دارد.

(ب) G حداکثر $3n - 6$ یال دارد.

(پ) اگر یالهای G دورنگی باشند [تعدادی از یک رنگ و دیگران از رنگ دیگر باشند]، آنگاه رأسی از G وجود دارد که یالهای مربوط به آن، در ترتیب دوری، حداکثر دوبار تغییر رنگ می‌دهند.

■ اثبات. برای هر یک از این سه گزاره می‌توانیم فرض کنیم که G همبند است.

(الف) هر وجه G دست‌کم ۳ ضلع دارد (زیرا G ساده است)؛ پس، از (۳) و (۴) به دست می‌آوریم

$$f = f_3 + f_4 + f_5 + \dots$$

$$2e = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots$$

و بنابراین $2e - 3f \geq 0$.

حال اگر هر رأس، درجه‌ای حداقل برابر با ۶ داشته باشد، آنگاه از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$n = n_6 + n_7 + n_8 + \dots$$

$$2e = 6n_6 + 7n_7 + 8n_8 + \dots$$

و بنابراین $2e - 6n \geq 0$.

اگر هر دو نابرابری را با هم در نظر بگیریم، به دست می‌آوریم

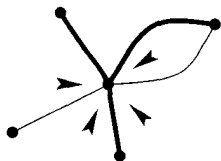
$$6(e - n - f) = (2e - 6n) + 2(2e - 3f) \geq 0$$

و بنابراین $e \geq n + f$ ، که با فرمول اویلر مغایرت دارد.

(ب) همانند گام اول قسمت (الف) به دست می‌آوریم $2e - 3f \geq 0$ ، و بنابراین، با استفاده از فرمول اویلر داریم

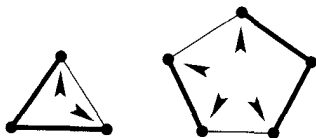
$$3n - 6 = 3e - 3f \geq e$$

(پ) فرض کنید c تعداد گوشه‌هایی باشد که در آنها تغییر رنگ رخ می‌دهد. تصور کنید حکم غلط باشد. در این صورت، $c \geq 4n$ تغییر رنگ داریم زیرا در هر رأس، تعداد زوجی تغییر رخ می‌دهد. حال هر وجه با $2k$ یا $2k+1$ ضلع حداکثر $2k$ تا از این‌گونه گوشه‌ها دارد، بنابراین نتیجه می‌گیریم که



$$\begin{aligned} 4n \leq c &\leq 2f_2 + 4f_3 + 6f_4 + 8f_5 + 10f_6 + \dots \\ &\leq 2f_2 + 4f_3 + 6f_4 + 8f_5 + 10f_6 + \dots \\ &= 2(3f_2 + 4f_3 + 5f_4 + 6f_5 + 7f_6 + \dots) \\ &\quad - 4(f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + \dots) \\ &= 4e - 4f \end{aligned}$$

بیکانها به گوشه‌هایی اشاره دارند که در آنجا تغییر رنگ رخ می‌دهد.



در اینجا باز از (۳) و (۴) استفاده کرده‌ایم. پس داریم $e \geq n + f$ که باز با فرمول اویلر مغایر است.

۱. بازنگری در قضیه سیلوستر-گالای

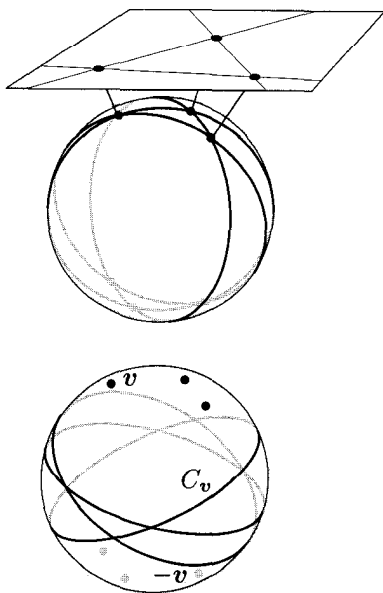
ظاهراً نورمن استینراد^۱ بود که برای نخستین بار خاطر نشان کرد که قسمت (الف) گزاره بالا، اثبات فوق‌العاده ساده‌ای از قضیه سیلوستر-گالای به دست می‌دهد (فصل ۸ را ببینید).

قضیه سیلوستر-گالای اگر مجموعه‌ای مرکب از $n \geq 3$ نقطه در صفحه داده شده باشد که همگی بر یک خط واقع نباشند، همواره خطی وجود دارد که شامل دقیقاً دو تا از این نقطه‌هاست.

■ اثبات. (سیلوستر-گالای از طریق اویلر)

اگر مطابق شکل، صفحه \mathbb{R}^2 را در \mathbb{R}^3 در نزدیکی کره واحد S^2 بنشانیم، آنگاه هر نقطه در \mathbb{R}^2 متناظر با یک جفت نقطه متقاطع روی S^2 است، و خطهای \mathbb{R}^2 متناظر با دایره‌های عظیمه روی S^2 هستند. پس قضیه سیلوستر-گالای به صورت زیر در می‌آید:

اگر مجموعه‌ای مرکب از $n \geq 3$ جفت نقطه متقاطع روی کره داده شده باشند که همگی روی یک دایره عظیمه نباشند، همواره دایره عظیمه‌ای وجود دارد که شامل دقیقاً دو تا از جفت‌های متقاطع است.



حال دوگان این صورت از قضیه را می‌نویسیم. به این منظور به جای هر جفت نقطه متقاطع، دایره عظیمه متناظر روی کره را قرار می‌دهیم، یعنی به جای نقطه‌های $\pm v \in S^2$

دایره‌های متعامد $C_v := \{x \in S^2 : \langle x, v \rangle = 0\}$ را در نظر می‌گیریم (این C_v خط استواست اگر v را قطب شمال کره بگیریم). در این صورت قضیه سیلوسترگالای از ما می‌خواهد که ثابت کنیم:

اگر مجموعه‌ای مرکب از $n \geq 3$ دایره عظیمه روی S^2 داده شده باشد که همه آنها از یک نقطه نگذرند، همواره نقطه‌ای وجود دارد که روی دقیقاً دو تا از دایره‌های عظیمه است.

اما آرایش دایره‌های عظیمه، گراف مسطح ساده‌ای روی S^2 به دست می‌دهد که رأسهایش نقاط تقاطع دو تا از دایره‌های عظیمه‌اند که دایره‌های عظیمه را به یالهایی تجزیه می‌کنند. همه درجه‌های رأسها زوج‌اند و بنا به طرز ساخت گراف، دست کم ۴ تا هستند. پس قسمت (الف) گزاره، وجود رأسی از درجه ۴ را نتیجه می‌دهد. \square

۲. خط تکرنگ

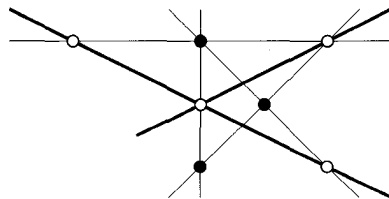
قضیه زیر که خویشاوند «رنگی» قضیه سیلوسترگالای است، از آن دان چاکرین^۱ است.

قضیه. اگر آرایشی متناهی از نقطه‌های «سیاه» و «سفید» در صفحه مفروض باشد که همگی روی یک خط نباشند، همواره یک خط «تکرنگ»^۲ وجود دارد، یعنی خطی که شامل دست کم دو نقطه از یک رنگ و هیچ نقطه از رنگ دیگر است.

■ اثبات. همان‌طور که در مورد مسئله سیلوسترگالای عمل کردیم، مسأله را به کره واحد منتقل می‌سازیم و در آنجا آن را به صورت دوگان در می‌آوریم. پس باید ثابت کنیم:

اگر مجموعه‌ای متناهی از دایره‌های عظیمه «سیاه» و «سفید» روی کره واحد مفروض باشد که همگی از یک نقطه نگذرند، همواره نقطه تقاطعی وجود دارد که یا فقط روی دایره عظیمه سفید است یا فقط روی دایره عظیمه سیاه.

حال اثبات این مطلب با توجه به قسمت (ب) گزاره روشن است زیرا در هر رأس که در آنجا دوایر عظیمه‌ای با رنگهای متفاوت یکدیگر را قطع می‌کنند، همواره دست کم ۴ گوشه با تغییر رنگ وجود دارد. \square



۳. قضیهٔ پیک

قضیهٔ پیک که در سال ۱۸۹۹ عرضه شد، به خودی خود قضیهٔ زیبا و شگفت‌انگیزی است ولی پیامدی «کلاسیک» از فرمول اویلر نیز هست. در آنچه در پی می‌آید، چندضلعی مشبکه‌ای محدب $P \subseteq \mathbb{R}^2$ را مقدماتی گوئیم اگر رأسهایش صحیح باشند ولی چندضلعی شامل نقطهٔ مشبکه‌ای دیگری نباشد.

لم. هر مثلث مقدماتی $\Delta = \text{conv}\{p_0, p_1, p_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ دارای مساحت $A(\Delta) = \frac{1}{2}$ است.

■ اثبات. هم متوازی‌الاضلاع P با گوشه‌های $p_0, p_1, p_2, p_1 + p_2 - p_0$ و هم شبکهٔ \mathbb{Z}^2 طبق نگاشت

$$\sigma : x \mapsto p_1 + p_2 - x$$

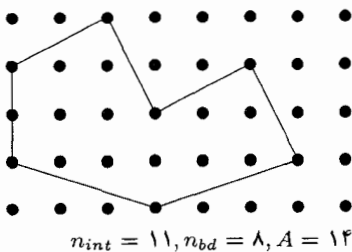
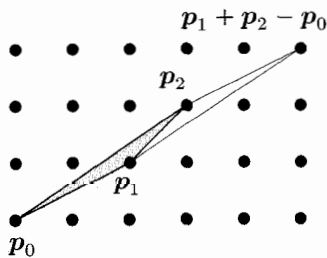
که قرینهٔ نقاط نسبت به مرکز پاره‌خط از p_1 تا p_2 را می‌دهد، متقارن هستند. پس متوازی‌الاضلاع $P = \Delta \cup \sigma(\Delta)$ هم مقدماتی است، و انتقالهای صحیح آن، صفحه را فرش می‌کنند. از این رو $\{p_1 - p_0, p_2 - p_0\}$ پایه‌ای برای مشبکهٔ \mathbb{Z}^2 است، دترمینان آن ۱ است، P دارای مساحت ۱ است، و مساحت Δ برابر $\frac{1}{2}$ است. (توضیح این اصطلاحات در تابلو صفحهٔ بعد آمده است.) □

قضیه. مساحت هر چندضلعی $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ (که لزوماً محدب نیست) با رأسهای صحیح، برابر است با

$$A(Q) = n_{int} + \frac{1}{4}n_{bd} - 1$$

که در آن n_{int} و n_{bd} به ترتیب تعداد نقطه‌های صحیح در درون و روی مرز Q هستند.

■ اثبات. هر چنین چندضلعی را می‌توان با استفاده از همهٔ n_{int} نقطهٔ مشبکه‌ای در درون و همهٔ n_{bd} نقطهٔ شبکه‌ای در روی مرز Q مثلث‌بندی کرد. (این موضوع کاملاً بدیهی نیست، به خصوص اگر Q لزوماً محدب نباشد، ولی با استدلالی که در فصل ۲۶ در مورد مسألهٔ گالری هنری عرضه می‌شود، به اثبات می‌رسد.)



پایه‌های شبکه

پایه‌ای از \mathbb{Z}^2 ، یک جفت بردار مستقل خطی e_1, e_2 است به نحوی که

$$\mathbb{Z}^2 = \{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}\}$$

فرض کنیم $e_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ و $e_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ ؛ در این صورت مساحت متوازی‌الاضلاع تولید شده به وسیله e_1 و e_2 برابر است با $A(e_1, e_2) = |\det(e_1, e_2)| = |\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}|$ اگر $f_1 = \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}$ و $f_2 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ پایه دیگری باشد، آنگاه یک ماتریس وارون پذیر Q با ضابطه $\begin{pmatrix} t & u \\ s & v \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ وجود دارد. چون $Q Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، و دترمینانها عددهای صحیحی هستند، نتیجه می‌گیریم $|\det Q| = 1$ ، و بنابراین $|\det(f_1, f_2)| = |\det(e_1, e_2)|$. پس مساحت همه متوازی‌الاضلاعهای پایه برابر یک است زیرا $A\left(\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = 1$

اکنون مثلث بندی را به عنوان یک گراف مسطح تعبیر می‌کنیم که صفحه را به یک وجه بیکران به اضافه $f - 1$ مثلث با مساحت $\frac{1}{4}$ تقسیم می‌کند، پس

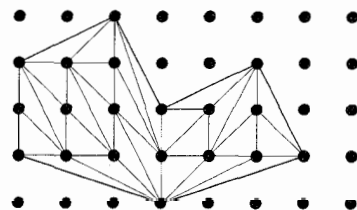
$$A(Q) = \frac{1}{4}(f - 1)$$

هر مثلث سه ضلع دارد، هر یک از e_{int} یال درونی در دو مثلث مشترک است حال آنکه هر یک از e_{bd} یال مرزی فقط در یک مثلث ظاهر می‌شود. بنابراین $3(f - 1) = 2e_{int} + e_{bd}$ و لذا $3 = 2(e - f) - e_{bd} + 3$. همچنین تعداد یالهای مرزی و رأسهای روی مرز یکی است: $e_{bd} = n_{bd}$. از این دو واقعیت همراه با فرمول اویلر نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} f &= 2(e - f) - e_{bd} + 3 \\ &= 2(n - 2) - n_{bd} + 3 = 2n_{int} + n_{bd} - 1 \end{aligned}$$

و بنابراین

$$\square \quad A(Q) = \frac{1}{4}(f - 1) = n_{int} + \frac{1}{4}n_{bd} - 1$$



مراجع

[1] G. D. CHAKERIAN: *Sylvester's problem on collinear points and a*

-
- relative*, Amer. Math. Monthly **77** (1970), 164-167.
- [2] G. PICK: *Geometrisches zur Zahlenlehre*, Sitzungsberichte Lotos (Prag), Natur-med. Verein für Böhmen **19**, 311-319.
- [3] N.E. STEENROD: *Solution 4065/Editorial Note*, Amer. Math. Monthly **51** (1944), 170-171.

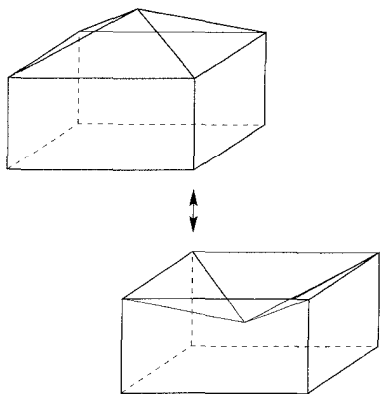


آگوستین کوشی

قضیه معروفی که مبتنی بر فرمول اویلر (به خصوص، بر قسمت (پ) از گزاره فصل قبل) است، قضیه صلبیت^۱ کوشی برای چندوجهیهای سه بعدی است. برای ملاحظه تعریف قابلیت انطباق [همنهستی] و هم‌ارزی ترکیباتی که در زیر مورد استفاده قرار می‌گیرند، خواننده را به پیوست راجع به بس‌وجهی و چندوجهی در فصل ۷، «مسئله سوم هیلبرت»، ارجاع می‌دهیم.

قضیه. اگر دو چندوجهی محدب P و P' از لحاظ ترکیباتی هم‌ارز، و وجوه متناظرشان قابل انطباق باشند، آنگاه زاویه‌های بین جفت‌های متناظر از وجوه مجاور نیز برابرند (و در نتیجه P با P' قابل انطباق است).

تصویر حاشیه صفحه، دو چندوجهی P و P' را نشان می‌دهد که از لحاظ ترکیباتی هم‌ارز، و وجوه متناظرشان قابل انطباق‌اند. ولی چندوجهیها قابل انطباق نیستند، و تنها یکی از آنها محدب است. پس فرض محدب بودن برای قضیه کوشی ضرورت دارد!



■ اثبات. برهانی که در اینجا می‌آید، در اساس، اثبات اصلی کوشی است. فرض کنید دو چندوجهی P و P' با وجوه متناظر مفروض باشند. یالهای P را به صورت زیر رنگ می‌زنیم: یال سیاه (یا «مثبت») است اگر زاویه درونی متناظر بین دو وجه مجاور، در P' بزرگتر باشد تا در P ، و سفید (یا «منفی») است اگر زاویه متناظر در P' کوچکتر باشد تا در P .

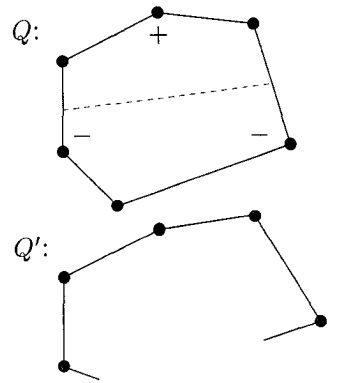
یالهای سیاه و سفید P همراه با هم یک گراف مسطح ۲ رنگی روی رویه P تشکیل می‌دهند که از طریق تصویر شعاعی، با این فرض که \circ در درون P است، می‌توانیم آن را به رویه S^2 منتقل سازیم. اگر زاویه‌های بین الوجوهی متناظر P و P' برابر باشند، گراف ناتهی است. با استفاده از بخش (پ) گزاره فصل قبل، در می‌یابیم که یک رأس p وجود دارد که مجاور دست‌کم یک یال سیاه یا سفید است، به نحوی که حداکثر دو تغییر بین یالهای سیاه و سفید (در ترتیب دوری) در آنجا رخ می‌دهد.

اکنون P را با کره کوچکی چون S_ε (به شعاع ε) به مرکز رأس p ، و P' را با کره کوچکی مثل S'_ε با همان شعاع ε و به مرکز رأس متناظر p' قطع می‌کنیم. در S و S'

1. rigidity

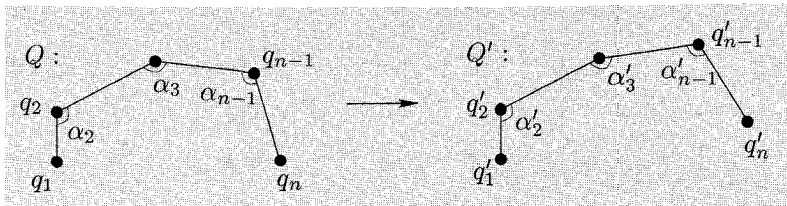
چند ضلعیهای کروی محدب Q و Q' را می‌یابیم که کمانهای متناظرشان دارای طولهای برابرند زیرا وجوه P و P' قابل انطباق‌اند، و نیز ما شعاع یکسان ε را انتخاب کرده‌ایم. اکنون زاویه‌هایی از Q را که به‌ازای آنها زاویه متناظر در Q' بزرگتر است با علامت $+$ و زاویه‌هایی را که زاویه متناظرشان در Q' کوچکتر است با علامت $-$ نشان می‌دهیم. یعنی وقتی از Q به Q' می‌رویم زاویه‌های $+$ «باز می‌شوند» و زاویه‌های $-$ بسته، درحالی‌که همه طولهای ضلعها و زاویه‌های بی‌علامت، ثابت می‌مانند.

بنابراین نحوه انتخاب p می‌دانیم که علامت به‌اضافه یا منهای ظاهر خواهد شد و در ترتیب دوری، حداکثر دو تغییر علامت رخ می‌دهد. اگر فقط یک نوع علامت ظاهر شود، لم زیر مستقیماً مثال ناقضی به‌دست می‌دهد حاکی از اینکه طول یک یال باید تغییر کند. اگر هر دو نوع علامت ظاهر شوند، آنگاه (چون فقط دو تغییر علامت رخ می‌دهد) یک «خط جدایی» وجود دارد که نقطه‌های وسط دو یال را به هم وصل می‌کند و همه علامتهای $+$ را از همه علامتهای $-$ جدا می‌سازد. و باز تناقضی از لم زیر به‌دست می‌آوریم زیرا خط جدایی در Q' نمی‌تواند نسبت به خط جدایی در Q هم بلندتر و هم کوتاه‌تر باشد.



لم دست کوشی

اگر Q و Q' ، دو n ضلعی محدب (مسطح یا کروی) باشند که طبق شکل زیر



نشانه‌گذاری شده باشند به‌نحوی که رابطه $\overline{q_i q_{i+1}} = \overline{q'_i q'_{i+1}}$ بین طولهای یالهای متناظر به‌ازای $1 \leq i \leq n-1$ ، و رابطه $\alpha_i \leq \alpha'_i$ بین اندازه‌های زاویه‌های متناظر به‌ازای $2 \leq i \leq n-1$ برقرار باشند، آنگاه طول ضلع «مفقود» در رابطه

$$\overline{q_1 q_n} \leq \overline{q'_1 q'_n}$$

صدق می‌کند که علامت برابری وقتی و تنها وقتی برقرار است که $\alpha_i = \alpha'_i$ به‌ازای هر i برقرار باشد.

جالب این است که اثبات اصلی کوشی از این لم غلط بود: حرکتی پیوسته که

زاویه‌ها را باز کند و طول ضلعها را ثابت نگه دارد، ممکن است تحذب را از میان ببرد — به شکل نگاه کنید! از سوی دیگر، هم لم و هم اثباتی که در اینجا برای آن می‌آید، و از نامه‌ای از شوئنبرگ^۱ به زارمبا^۲ گرفته شده است، هر دو هم برای چندضلعیهای کروی و هم برای چندضلعیهای مسطح برقرارند.

■ اثبات. به استقرا بر n عمل می‌کنیم. حالت $n = 3$ بدیهی است (مثلثات مربوط به حالت کروی در فصل آینده مرور خواهد شد). همچنین اگر به ازای هر $i \in \{2, \dots, n-1\}$ داشته باشیم $\alpha_i = \alpha'_i$ ، آنگاه رأس متناظر را با وارد کار کردن قطرها q_{i+1} تا q_{i-1} ، متناظراً قطراز q'_{i-1} تا q'_{n+1} ، با ضابطه $\overline{q_{i-1}q_{i+1}} = \overline{q'_{i-1}q'_{i+1}}$ می‌توان کنار گذاشت؛ و حکم به استقرا ثابت می‌شود. پس فرض می‌کنیم به ازای $2 \leq i \leq n-1$ ، $\alpha_i < \alpha'_i$.

حال چندضلعی جدید Q^* را از Q به دست می‌آوریم به این طریق که به جای α_{n-1} ، بزرگترین زاویه ممکن $\alpha'_{n-1} \leq \alpha_{n-1}$ را که Q^* را محدب نگه دارد قرار می‌دهیم. به این منظور q_n^* را به جای q_n قرار می‌دهیم، و همه q_i های دیگر، طولهای ضلعها، و زاویه‌های Q را بی‌تغییر می‌گذاریم. اگر واقعاً بتوانیم α_{n-1} را برابر α'_{n-1} انتخاب کنیم که Q^* را محدب نگه دارد، آنگاه با استفاده از حالت $n = 3$ برای گام نخست و استقرا مانند فوق برای گام دوم، خواهیم داشت $\overline{q_1 q_n} < \overline{q_1 q_n^*} \leq \overline{q'_1 q'_n}$. در غیر این صورت، پس از حرکتی نابدیهی که رابطه زیر را نتیجه می‌دهد

$$\overline{q_1 q_n^*} > \overline{q_1 q_n} \quad (۱)$$

در وضعیتی «گیر می‌افتیم» که q_1, q_2, q_n^* همخطاند و

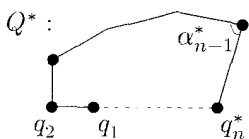
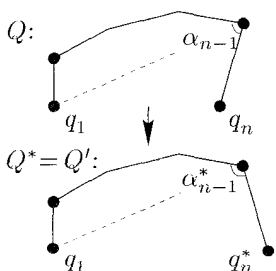
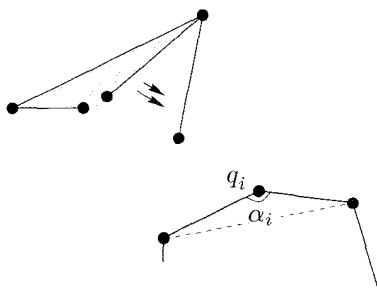
$$\overline{q_2 q_1} + \overline{q_1 q_n^*} = \overline{q_2 q_n^*} \quad (۲)$$

حال این Q^* را با Q' مقایسه می‌کنیم و به استقرا بر n (با نادیده گرفتن رأس q_1 و متناظراً q'_1) به دست می‌آوریم

$$\overline{q_2 q_n^*} \leq \overline{q'_2 q'_n} \quad (۳)$$

پس

$$\overline{q'_1 q'_n} \stackrel{(*)}{\geq} \overline{q'_2 q'_n} - \overline{q'_1 q'_2} \stackrel{(۲)}{\geq} \overline{q_2 q_n^*} - \overline{q_1 q_2} \stackrel{(۱)}{=} \overline{q_1 q_n^*} > \overline{q_1 q_n}$$

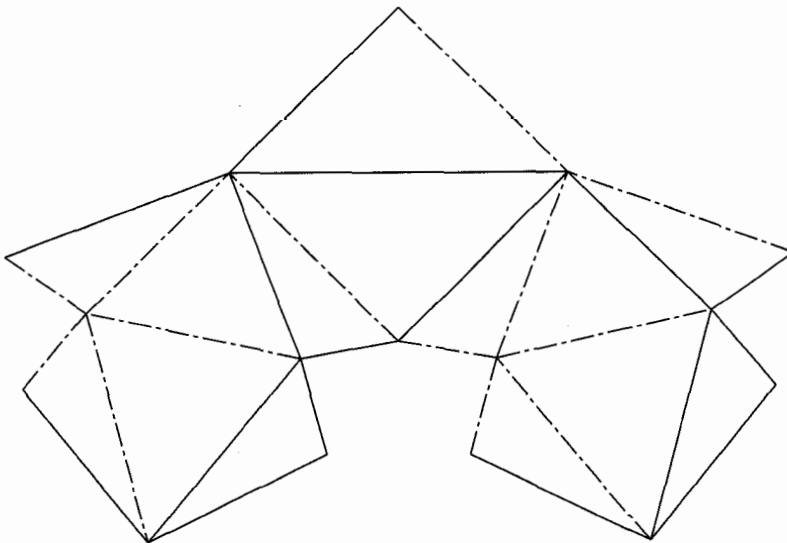


□ در آن، (*) نابرابری مثلثی است، و همهٔ رابطه‌های دیگر قبلاً استنتاج شده‌اند.

ما مثالی دیده‌ایم که نشان می‌دهد قضیهٔ کوشی برای چندوجهی نامحدب صادق نیست. ویژگی خاص این مثال، البته، این است که با یک «ضربه» ناپیوسته، یک چندوجهی به چندوجهی دیگر تبدیل می‌شود به طوری که وجوه، قابل انطباق باقی می‌مانند درحالی‌که زاویه‌های دووجهی «پرش می‌کنند». می‌توان پرسشی فراتر از این را مطرح کرد:

آیا ممکن است، برای چندوجهی نامحدبی، تغییر شکلی پیوسته وجود داشته باشد که وجه‌ها را تخت و قابل انطباق نگه دارد؟

حدس زده می‌شد که هیچ رویهٔ مثلث‌بندی شده‌ای، محدب یا نامحدب، چنین حرکتی را نمی‌پذیرد. بنابراین، مایهٔ شگفتی فراوان شد که در سال ۱۹۷۷ — بیش از ۱۶۰ سال پس از کار کوشی — رابرت کانلی^۱ مثالهای ناقصی عرضه کرد: کره‌هایی مثلث‌بندی شدهٔ بسته و نشانده شده در \mathbb{R}^3 (بدون تقاطع با خود) که انعطاف‌پذیرند، با حرکتی پیوسته که همهٔ طولهای یالها را ثابت، و وجوه مثلثی را قابل انطباق نگه می‌دارد.



نمونهٔ زیبایی از یک رویهٔ انعطاف‌پذیر که کلاوس اشتفن آن را ساخته است: خط‌چینها نشان‌دهندهٔ یالهای نامحدب در این مدل کاغذی هستند که با بریدن و سرهم کردن ساخته می‌شود. خطهای معمولی را به صورت «کوه» و خط‌چینها را به صورت «دره» تا کنید. طولهای یالها در این مدل، ۵، ۱۰، ۱۱، ۱۲، و ۱۷ واحد هستند.

قضیهٔ صلبیت رویه‌ها شگفتیهای بیشتری در انبان دارد: در همین اواخر، کانلی، سابتوف^۲، و والتس^۳ ثابت کردند که وقتی چنین رویهٔ انعطاف‌پذیری حرکت می‌کند، حجمی که احاطه می‌کند باید ثابت باشد. اثبات آنها از لحاظ نحوهٔ استفاده از ابزارهای

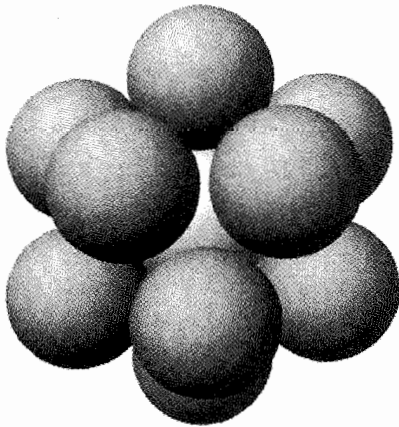
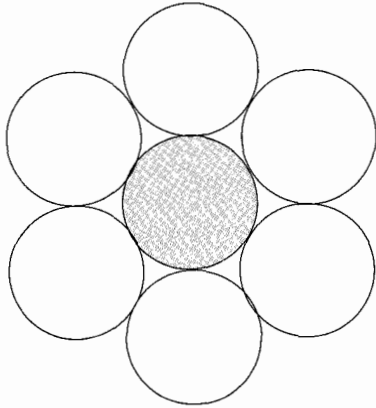
جبری نیز زیباست (ولی در خارج از محدودهٔ بحث این کتاب است).

مراجع

- [1] A. CAUCHY: *Sur les polygones et les polyédres, seconde mémoire*. J. École Polytechnique XVIe Cahier, Tome IX (1813), 87; Œuvres Complètes, IIe Série, Vol. 1, Paris 1905, 26-38.
- [2] R. CONNELLY: *A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra*, Inst. Haut. Etud. Sci., Publ. Math. **47** (1978), 333-338.
- [3] R. CONNELLY: *The rigidity of polyhedral surfaces*, Mathematics Magazine **52** (1979), 275-283.
- [4] R. CONNELLY, I. SABITOV & A. WALZ: *The bellows conjecture*, Beiträge zur Algebra und Geometrie/Contributions to Algebra and Geometry **38** (1997), 1-10.
- [5] J. SCHOENBERG & S.K. ZAREMBA: *On Cauchy's lemma concerning convex polygons*, Canadian J. Math. **19** (1967), 1062-1071.

منارعة معروف دیوید گرگوری^۱ و آیزک نیوتن در سال ۱۶۹۴ بر سر پرسش زیر بود:

چند کره [به شعاع] واحد می‌توانند همزمان بر کره‌ای با همین اندازه مماس باشند؟



به آسانی می‌توان ملاحظه کرد که در مسأله متناظر در حالت ۲ بعدی [دایره‌های مماس بر یک دایره] تعداد ماکسیمم شش تا است و این تعداد با توجه به تنها آرایش ممکن دایره‌های مماس که در این شکل دیده می‌شود به دست می‌آید. در فضای ۳ بعدی، آرایشی مرکب از دوازده کره مماس، ممکن است: کره‌های مماس می‌توانند، مثلاً، به صورت بخشی از بسته‌بندی شبکه‌ای «معمولی» قرار گیرند. در واقع، حدسی مشهور، و هنوز اثبات نشده، منسوب به کپلر حاکی است که این، چگالتزین بسته‌بندی کره‌های برابر در فضای ۳ بعدی است [۲]. همچنین می‌توان کره‌های مماس را در رأسهای یک بیست وجهی منتظم قرار داد. در آرایش حاصل، مقدار زیادی فضای خالی بین کره‌ها وجود دارد و این را می‌توان در شکل دوم دید.

در هر یک از دو حالت، آزمایشها و محاسبات تقریبی مساحت در مورد سطح کره نشان می‌دهند که در این آرایشها «مقدار زیادی فضای» خالی باقی می‌ماند و مسلماً نامعقول نیست که (مانند گرگوری) فکر کنیم با جایگذاری دوازده کره احاطه‌کننده به طرزی هوشمندانه، جای کافی برای کره سیزدهم باقی می‌ماند.

ولی واقعیت این است که آرایشی از سیزده کره مماس غیرممکن است. «راه‌حلهای» مختلفی برای این مسأله در سالهای ۱۸۷۴-۱۸۷۵ در متون فیزیک ارائه شد ([۱]، [۴])، ولی حل و فصل قطعی مسأله در سال ۱۹۵۳ به دست کورت شوته^۲ و بارتل ون در وردن^۳ انجام گرفت.

اثبات «کتابی» ما از آن جان لیچ^۴ است که سه سال بعد عرضه شد. این برهان، تنها اثباتی در این کتاب است که شامل قدری محاسبات صریح با اعداد است. ولی توجه

1. David Gregory 2. Kurt Schütte 3. Bartel L. van der Waerden
4. John Leech

کنید که هیچ یک از ثابتهای عددی که در این اثبات ظاهر می‌شوند دلخواه نیستند و «درست آن‌طور که باید» انتخاب شده‌اند.

قضیه. بیش از ۱۲ نقطه نمی‌توانند طوری روی سطح کره‌ای به شعاع ۱ قرار گیرند که همه فاصله‌های کروی دو به دو بین آنها دست‌کم $\pi/3$ باشد.

اگر این قضیه در مورد نقاط تماس کره‌های مماس به‌کار رود مسأله حل می‌شود. پیش از شروع اثبات بعضی حکمهای مفید از هندسه کروی را ذکر می‌کنیم. در آنچه در پی می‌آید، همه زاویه‌های α, β, γ و همه فاصله‌های a, b, c روی رویه کره‌ای به شعاع ۱ برحسب رادیان اندازه‌گیری می‌شوند، و بنابراین مقادیری در بازه $[0, \pi]$ دارند.

لم ۱. (حکمایی از هندسه کروی)

(i) مساحت مثلث برحسب زاویه‌هایش برابر است با $A = \alpha + \beta + \gamma - \pi$.

(ii) زاویه‌های یک مثلث کروی بدون زاویه قائمه، با استفاده از روابط زیر از طول

ضلعهایش به دست می‌آید

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

(iii) مساحت مثلث نسبت به طول ضلعهایش یکنواخت (یعنی اگر طول دو

ضلع ثابت بماند و طول ضلع سوم افزایش یابد، مساحت هم افزایش می‌یابد).

(iv) سه مثل:

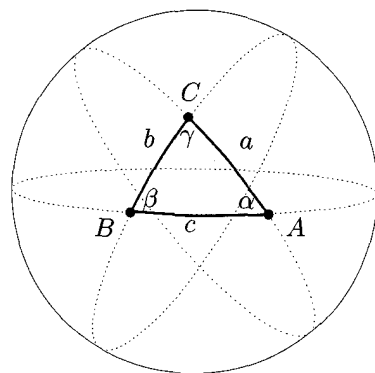
$$a = b = c = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$a = b = \frac{\pi}{4}, c = \arccos\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{\pi}{4}, \gamma = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$a = \frac{\pi}{4}, b = c = \arccos\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{3}{4}\right), \beta = \gamma = \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$$

(v) اگر در مثلثی کروی، طولهای ضلعها به صورت $\frac{\pi}{4} \leq a, b < \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$

و $\frac{\pi}{4} \leq c$ باشد، آنگاه $\gamma > \frac{\pi}{4}$.



■ اثبات. (i) دایره‌های عظیمه‌ای که به وسیله مثلث معین می‌شوند کره را به هشت ناحیه تقسیم می‌کنند. اگر کره را با شش ۲ ضلعی [کروی] که به وسیله زاویه‌های درونی و بیرونی مثلث معین می‌شوند بپوشانیم، مثلث و نسخه متقاطع آن سه بار پوشانده می‌شوند ولی هر ناحیه دیگر کره دقیقاً یک بار پوشانده می‌شود. پس با توجه به اینکه مساحت رویه کره 4π است و مساحت دوضلعی به زاویه α برابر 2α است، در می‌یابیم

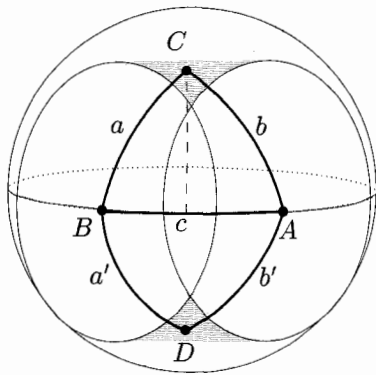
$$4A + 4\pi = 4\alpha + 4\beta + 4\gamma$$

(ii) این فرمول را در اینجا ثابت نمی‌کنیم: فقط خاطر نشان می‌کنیم که خیلی ساده می‌توان آن را به چارچوب هندسه اقلیدسی آورد؛ به این منظور کافی است چهار وجهی تشکیل شده از رأسهای مثلث و مرکز کره را در نظر بگیریم.

(iii) این حکم پیامد مستقیم (i) و (ii) است زیرا در دامنه $[0, \pi]$ ، تابع $\sin x$ نامنفی است، در حالی که $\cos x$ اکیداً نزولی است.

(iv) و (v): اینها با محاسبات ساده‌ای با استفاده از (ii) به دست می‌آیند. \square

لم ۲. هر چهار ضلعی کروی که طول ضلعهایش نا کمتر از $\pi/3$ باشد و قطرهایش متقاطع باشند (یعنی زاویه‌های درونیش حداکثر π باشند) قطری به طول نا کمتر از $\pi/2$ دارد.



■ اثبات. فرض کنیم طولهای اضلاع یک چهارضلعی، a, a', b, b' ، نا کمتر از $\pi/3$ باشند و طول یک قطر آن، c ، نایبتر از $\pi/2$ باشد. این قطر چهارضلعی را به دو مثلث ACB و BDA به ضلعهای، به ترتیب، a, b, c و a', b', c تقسیم می‌کند. نشان خواهیم داد که در این مثلثها، فاصله بین ضلع c و رأس مقابل C نا کمتر از $\pi/4$ و در نتیجه طول قطر دوم دست کم $\pi/4 + \pi/4$ است. در شکل ما ضلع AB به طول $c \leq \pi/2$ روی خط استوای کره است. دو ناحیه سایه دار همه مکانهای ممکن را برای رأس مقابل C که فاصله آن از A و B نا کمتر از $\pi/3$ ، و فاصله اش از ضلع AB نایبتر از $\pi/3$ باشد، نشان می‌دهند. می‌بینیم که این فاصله کمترین مقدارش را وقتی به دست می‌آورد که c بیشترین مقدار را داشته باشد، $c = \pi/2$ ، و در این صورت با محاسبه ساده‌ای معلوم می‌شود که کمترین مقدار فاصله C از AB برابر $\pi/4$ است. \square

■ اثبات قضیه. با در دست بودن هر آرایش دلخواهی از نقاط $V \subseteq S^2$ با فاصله مینیمم نا کمتر از $\pi/3$ ، گرافی معین می‌کنیم به این ترتیب که رأسهای $u, w \in V$ را به وسیله یالی چون $e \in E$ به هم وصل می‌کنیم اگر فاصله (کروی) آنها کوچکتر از $\arccos(1/7)$ باشد. گراف حاصل $G = (V, E)$ به وسیله نقطه‌ها و کمانهایی کروی روی کره دوبعدی نمایش داده می‌شود و ویژگیهای جالب توجه زیادی دارد که آنها را در دوازده گام توصیف می‌کنیم.

(۱) یالها متقاطع نیستند: اگر چنین بودند، چهارضلعی می‌داشتیم که طولهای

اضلاعش دستکم $\pi/3$ بودند و در آن هر دو قطر (مقاطع) طولهایی کوچکتر از $\arccos(1/7) < \pi/2$ می‌داشتند که این مغایر با لم ۲ است.

(۲) گراف G ساده است: بنا به طرز ساخت گراف، طوقه یا یالهای موازی وجود ندارد.

(۳) درجهٔ ماکسیمم حداکثر ۵ است. در واقع بنا به لم ۱، قسمت (v)، زاویهٔ بین کمانهای مجاور بزرگتر از $\pi/3$ است.

(۴) با حرکت دادن و دوران دادن بخشی از آرایش روی کره، در صورت لزوم، می‌توانیم فرض کنیم که گراف G همبند و حتی دوگانه‌همبند است (یعنی هیچ رأس برشی ندارد).

(۵) پس گراف G کره را به چند ضلعیهایی، مثلاً به f_3 مثلث، f_4 چهارضلعی، f_5 پنج‌ضلعی، و غیره تقسیم می‌کند. طول اضلاع همهٔ اینها ناکمتر از $\pi/3$ است. چهارضلعیها، پنج‌ضلعیها، و غیره را می‌توان با استفاده از بعضی از قطرهایشان، با طولهایی دستکم برابر با $\arccos(1/7)$ ، به مثلثهایی تجزیه کرد.

(۶) از اینجا و از قسمتهای (i)، (iii) و (iv) از لم ۱ نتیجه می‌گیریم که این مثلثها دستکم دارای مساحت

$$3 \arccos\left(\frac{1}{3}\right) - \pi > 0.5512$$

هستند. مساحت چهارضلعیها دستکم برابر است با $1.3338 > 2(2\frac{\pi}{3} + \arccos(-\frac{1}{3}) - \pi)$ مساحت هر پنج‌ضلعی دستکم برابر مساحت پنج‌ضلعی است که طول همهٔ ضلعهایش $\pi/3$ است و دو قطر نامتقاطع با طولهایی برابر $\arccos(1/7)$ دارد و این مساحت بزرگتر از

$$1.3338 + \left(2 \arccos\left(\frac{1}{12}\right) + \arccos\left(\frac{47}{96}\right) - \pi\right) > 2.2261$$

است.

(۷) به عبارت دیگر، هر مثلث در این تقسیم‌بندی مساحتی بزرگتر از $t = 0.5512$ دارد، هر چهارضلعی دارای مساحتی بزرگتر از $2.314 = 2t + 0.2338$ است، و به‌ازای $k \geq 5$ هر k ضلعی مساحتی بزرگتر از $0.5725 = (n-2)t + 2.2261 + (n-5)t$ دارد.

(۸) با استفاده از قضیهٔ اویلر، $e + 2 = n + f$ ، همراه با شمارش دوگانه به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} 2n - 4 &= 2e - 2f = (3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots) - 2(f_3 + f_4 + f_5 + \dots) \\ &= f_3 + 2f_4 + 3f_5 + \dots \end{aligned}$$

چون وجوه حاصل از تقسیم‌بندی کره به وسیله G ، مجموع مساحت‌هایشان برابر سطح کره، 4π ، است، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} 4\pi &> 0.5512f_2 + 1.3338f_4 + 2.2261f_5 + \dots \\ &\geq 0.5512(f_2 + 2f_4 + 3f_5 + \dots) + 0.2314f_2 \\ &\quad + 0.5725(f_5 + f_6 + \dots) \\ &= 0.5512(2n - 4) + 0.2314f_2 + 0.5725(f_5 + f_6 + \dots) \end{aligned}$$

(۹) از اینجا به دست می‌آید $22.79 < \frac{4\pi}{0.5512} < 22.79$ ، پس $2n - 4 \leq 22$ و $n \leq 13$ در حالت تساوی $n = 13$ به علاوه به دست می‌آوریم

$$0.2314f_2 + 0.5725(f_5 + f_6 + \dots) < 4\pi - 0.5512 \times 22 < 0.44$$

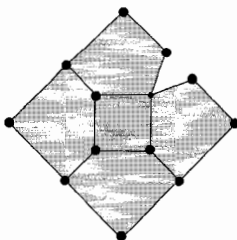
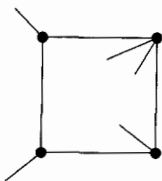
که از آن نتیجه می‌شود

$$f_5 = f_6 = \dots = 0 \quad \text{و} \quad f_2 \leq 1$$

(۱۰) به ازای $f_2 = 0$ ، گراف G کره را مثلث‌بندی می‌کند. ولی در این صورت از $3f_2 = 2e$ همراه با فرمول اولر، $13 + \frac{2}{3}e = e + 2$ ، نتیجه می‌شود $e = 33$ و بنابراین میانگین درجه رأسها، $\frac{2e}{n} = \frac{66}{13} > 5$ ، است که با (۳) مغایرت دارد.

(۱۱) پس باید داشته باشیم $f_2 = 1$. حال از فرمول اولر به دست می‌آید $e = 32$ و از شمارش درجه رأسها معلوم می‌شود که باید دقیقاً یک رأس از درجه ۴ وجود داشته باشد، در حالی که همه ۱۲ رأس دیگر درجه ۵ دارند.

(۱۲) از این رو به یک گراف دوگانه - همبند G رسیده‌ایم که یالهای متوازی ندارد و کره را به یک چهارضلعی و تعدادی مثلث تجزیه می‌کند و در آن همه رأسها درجه ۵ دارند به جز یکی که از درجه ۴ است. اگر لم زیر در مورد گراف دوگان G به کار رود، معلوم می‌شود که این امر غیر ممکن است و لذا اثبات به انجام می‌رسد.

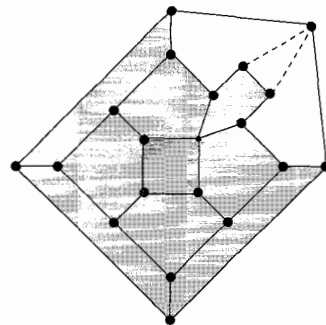


لم ۳. هیچ گراف هامنی دوگانه-همبند H وجود ندارد که کره را به پنج ضلعیها و یک مربع ($f_4 = 1$ ، $f_i = 0$ به ازای $i \in \{4, 5\}$) تجزیه کند و رأسهایش از درجه ۵ باشند به استثنای حداکثر یک رأس درجه ۴ (چهار $n_4 \leq 1$ ، $n_j = 0$ به ازای $j \in \{3, 4\}$)، و گراف دوگان آن $G = H^*$ ساده و دوگانه - همبند باشد.

■ اثبات. نخست توجه کنید که - بجز در مورد چهارضلعی - هر دور از H دست کم

دارای طول ۵ است. در واقع چون همهٔ درجه‌های رأسها ۳ هستند (به استثنای احتمالاً یک رأس درجه ۴)، در می‌یابیم که در یک k -دور C تعداد یالهایی که از دور به طرف خارج می‌روند، $\delta^+(C)$ ، و تعداد یالهایی که از دور به طرف داخل می‌روند، $\delta^-(C)$ ، در رابطهٔ $\delta^+(C) + \delta^-(C) \leq k + 1$ می‌توانیم بدون از دست رفتن کلیت موضوع، فرض کنیم که حداکثر ۲ یال وجود دارند که به «درون» می‌روند. بنابراین $G = H^*$ طوقه‌ای دارد (اگر تعداد این یالها یکی باشد)، یا دو یال موازی یا یک رأس برشی دارد (اگر دو یال از دور خارج شوند).

اکنون گراف H را با ارائهٔ طرحی در صفحه، که از چهار ضلعی و چهار پنج‌ضلعی مجاور آن آغاز می‌شود، می‌سازیم.

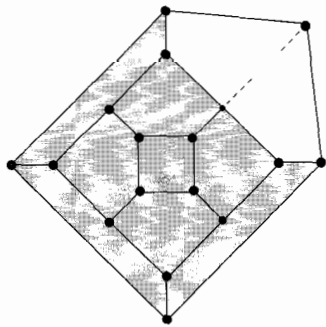


حالت ۱

حالت ۱: اگر رأس درجه ۴ روی چهار ضلعی باشد، آنگاه آرایشی از شکلها را که در حاشیه می‌بینید، داریم.

به علاوه، هیچ‌گونه یکسان‌گیری [رأسها] روی مرز نمی‌تواند انجام شود زیرا گراف شکل دارای قطر ۴ است، و با این کار دورهای کوتاه غیر مجازی ایجاد می‌شود. پس، با افزودن پنج ضلعیهای بعدی و ملاحظهٔ محدودیتهای درجه، شکل حاشیه، و بنابراین آرایشی که نمی‌توان آن را کامل کرد، به دست می‌آید (کامل کردنهای سر راست، با توجه به محدودیتهای، به یک مثلث می‌انجامد).

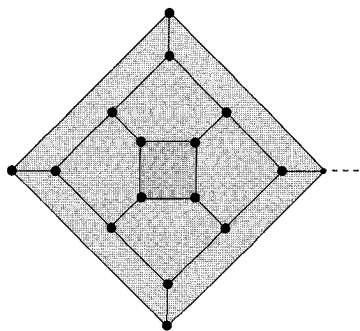
حالت ۲: فرض کنید رأس درجه ۲ به فاصله ۱ از چهار ضلعی قرار دارد. در این صورت، چهار پنج‌ضلعی که مجاور چهار ضلعی هستند به صورت حلقهٔ بسته‌ای از پنج ضلعیها در می‌آیند. هر یکسان‌گیری دیگری در روی مرز به دورهای کوتاه خواهد انجامید، و تنها راه برای ادامهٔ کار به وضعیتی می‌انجامد که در شکل دوم حاشیه نموده شده است و گراف دوگانی با یالهای متوازی به دست می‌دهد.



حالت ۲

حالت ۳: اگر رأس درجه ۴ فاصله‌ای ناکمتر از ۲ از چهار ضلعی داشته باشد، یا اگر هیچ رأسی از درجه ۴ وجود نداشته باشد، آنگاه لزوماً شکل حاشیه را خواهیم داشت، پس خود به خود، ۴-دور دیگری حاصل می‌شود. □

نکتهٔ آخر: مسألهٔ متناظر در حالت کلی d بعدی به «مسألهٔ تعداد بوسندگان^۱ [مماس شونده‌گان]» موسوم است. این مسأله در بعدهای پایین فقط به‌ازای



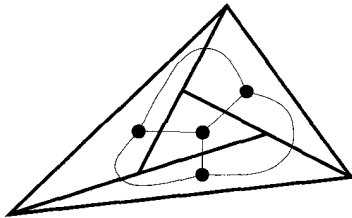
حالت ۳

$d \leq 3$ حل شده است که همان طور که دیدیم، $\kappa(1) = 2$ ، $\kappa(2) = 6$ ، $\kappa(3) = 12$ ولی همچنین، در نهایت تعجب، در بعدهای ۸ و ۲۴ نیز مقادیر بسیار بالا، مسئله تعداد مماس شوندهگان حتی در بعد ۴ نیز حل نشده است، که در این حالت می دانیم $24 \leq \kappa(4) \leq 25$. مراجعه کنید به [۳، بخش ۲.۱]. این را به عنوان «مسئله ۲۵ کره» در نظر بگیرید.

مراجع

- [1] C. BENDER: *Bestimmung der grössten Anzahl gleicher Kugeln, welche sich auf eine Kugel von demselben Radius, wie die übrigen, auflegen lassen*, Archiv Math. Physik (Grunert) **56** (1874), 302-306; R. HOPPE: *Bemerkung der Redaction*, loc. cit. 307-312.
- [2] K. BEZDEK: *Kepler's conjecture and the dodecahedral conjecture*, Mitteilungen der DMV **4/1996**, 52-54.
- [3] J.H. CONWAY & N.J. A. SLOANE: *Sphere Packings, Lattices and Groups*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Vol. 290, Springer-Verlag New York, Second ed. 1993.
- [4] S. GÜNTHER: *Ein stereometrisches Problem*, Archiv Math. Physik (Grunert) **57** (1875), 209-215.
- [5] J. LEECH: *The problem of the thirteen spheres*, The Mathematical Gazette **40** (1956), 22-23.
- [6] K. SCHÜTTE & B.L. VAN DER WAERDEN: *Das Problem der dreizehn Kugeln*, Math. Annalen **53** (1953), 325-334.

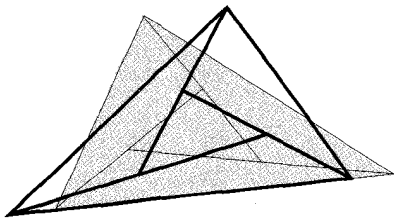
«چند سادک d بعدی را می‌توان در \mathbb{R}^d قرار داد به طوری که دوه‌دو مماس باشند یعنی همه تلاقیهای دوه‌دوری آنها $(d-1)$ بعدی باشند»



$$f(2) \geq 4$$

این پرسشی قدیمی و بسیار طبیعی است. جواب این مسأله را $f(d)$ می‌نامیم و می‌نویسیم $f(1) = 2$ ، که بدیهی است. به ازای $d = 2$ ، آرایش چهار مثلث در حاشیه این صفحه، نشان می‌دهد که $f(2) \geq 4$. هیچ آرایش مشابهی با پنج مثلث وجود ندارد زیرا در این صورت ساختن گراف دوگان، که در مثال چهار مثلثی ما ترسیمی هامنی از K_4 به دست می‌دهد، ترسیمی هامنی از K_5 به دست خواهد داد که غیر ممکن است (صفحه ۷۷ را ببینید). پس داریم

$$f(2) = 4$$



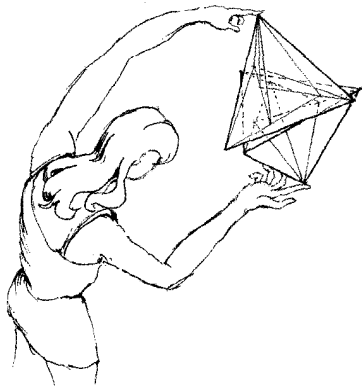
$$f(3) \geq 8$$

در حالت سه‌بعدی، به راحتی می‌توان دید که $f(3) \geq 8$. به این منظور، از آرایش هشت مثلث که تصویرش در حاشیه دیده می‌شود استفاده می‌کنیم. چهار مثلث هاشورخورده به نقطه x ای در زیر «صفحه ترسیم» وصل می‌شوند و چهار چهاروجهی به دست می‌آید که از زیر با صفحه تماس دارند. همین‌طور، چهار مثلث سفید به نقطه y ای در بالای صفحه ترسیم وصل می‌شوند. پس آرایشی از هشت چهاروجهی مماس در \mathbb{R}^3 به دست می‌آوریم، یعنی $f(3) \geq 8$.

باستن^۱ در ۱۹۶۵ کتابی در اثبات $f(3) \leq 9$ نوشت، و زاکس^۲ هم در ۱۹۹۱ کتاب دیگری نوشت تا ثابت کند

$$f(3) = 8$$

با توجه به $f(1) = 2$ ، $f(2) = 4$ ، $f(3) = 8$ ، تخیل زیادی نمی‌خواهد که حدس زیر را بزنیم. این حدس را اول بار باگه‌میل^۳ در سال ۱۹۶۵ مطرح کرد.



«سادهای مماس»

حدس. تعداد ماکسیمال سادهای d بعدی دوه‌دو مماس در آرایشی در \mathbb{R}^d برابر است با

$$f(d) = 2^d$$

اثبات کران پایین، $f(d) \geq 2^d$ ، آسان است «اگر این کار را از راه درستش انجام دهیم.»
و این مستلزم استفاده زیاد از تبدیلات آفین مختصات، و استقرا بر بعد است که نتیجه
قویتر زیر، متعلق به زاكس [۴]، را به اثبات می‌رساند.

قضیه ۱. به ازای هر $d \geq 2$ ، خانواده‌ای مرکب از 2^d سادک d بعدی دوه‌دو مماس در \mathbb{R}^d همراه با یک خط قاطع وجود دارد که ناحیه درونی هر یک از آنها را قطع می‌کند.

■ اثبات. به ازای $d = 2$ خانواده چهار مثلثی که در نظر گرفته بودیم مسلماً چنین خط قاطعی دارد. حال آرایش d بعدی دلخواهی از سادکهای مماس را در نظر بگیرید که دارای خط قاطع ℓ است. در این صورت هر خط ℓ' که موازی و نزدیک آن باشد نیز قاطع خواهد بود. اگر ℓ' و ℓ را موازی و به قدر کافی نزدیک به هم بگیریم، آنگاه هر یک از سادکها شامل یک (کوته‌ترین) پاره‌خط عمودی واصل بین دو خط است. تنها بخشی محدود از خطهای ℓ و ℓ' در سادکهای آرایش قرار دارد، و می‌توانیم دو پاره‌خط واصل در خارج از آرایش اضافه کنیم به طوری که مستطیل ایجاد شده به وسیله خطهای واصل خارجی (یعنی غلاف محدب آنها) همه پاره‌خطهای واصل دیگر را در بر داشته باشد. پس یک «نردبان» گذاشته‌ایم به طوری که هر یک از سادکهای آرایش یکی از پله‌های نردبان را در درونش داشته باشد درحالی‌که چهار انتهای نردبان در بیرون آرایش باشند.

حال گام اصلی این است که یک تبدیل (آفین) مختصات انجام دهیم که \mathbb{R}^d را به \mathbb{R}^d بنگارد، و مستطیل ایجاد شده به وسیله نردبان را به صورتی که در شکل زیر دیده می‌شود به مستطیل (نیم‌مربع) زیر ببرد

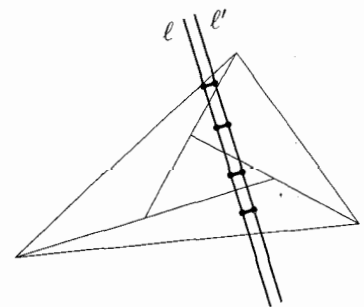
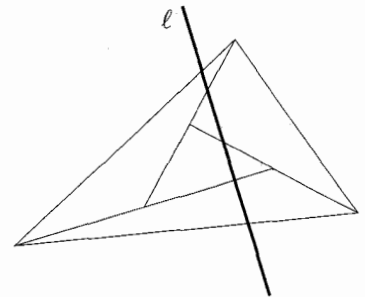
$$R^1 = \{(x_1, x_2, \circ, \dots, \circ)^T : -1 \leq x_1 \leq \circ; -1 \leq x_2 \leq 1\}$$

پس در مورد آرایشی از سادکهای مماس \sum^1 در \mathbb{R}^d که به دست می‌آوریم، محور x_1 یک خط قاطع است و طوری قرار می‌گیرد که هر یک از سادکها شامل یک پاره‌خط

$$S^1(\alpha) = \{(\alpha, x_2, \circ, \dots, \circ)^T : -1 \leq x_2 \leq 1\}$$

در درون خود است (به ازای α ای با ضابطه $-1 < \alpha < \circ$) درحالی‌که مبدأ \circ در بیرون همه سادکهاست.

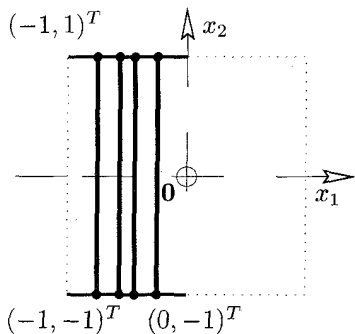
حال نسخه دیگری از این آرایش را با به دست آوردن قرینه آن نسبت به ابرصفحه $x_1 = x_2$ ایجاد می‌کنیم. محور x_2 یک خط قاطع این آرایش دوم است، و هر سادک



شامل پاره خط

$$S^r(\beta) = \{(x_1, \beta, \dots, \beta)^T : -1 \leq x_1 \leq 1\}$$

در درونش است (با ضابطه $-1 < \beta < 0$). ولی هر پاره خط $S^1(a)$ هر پاره خط $S^r(\beta)$ را قطع می‌کند، و بنابراین ناحیه درونی هر سادک Σ^1 ، هر سادک Σ^r را در درونش قطع می‌کند. پس اگر یک مختص جدید $(d+1)$ ام، x_{d+1} را اضافه کنیم و Σ را

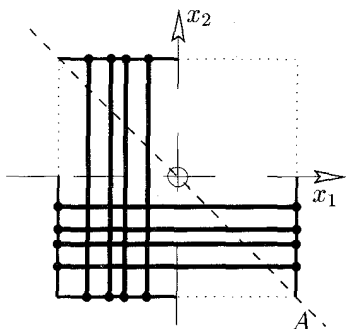


$$\{\text{conv}(P_i \cup \{-e_{d+1}\}) : P_i \in \Sigma^1\} \cup \{\text{conv}(P_j \cup \{e_{d+1}\}) : P_j \in \Sigma^r\}$$

بگیریم، آنگاه آرایشی از سادکهای $(d+1)$ بعدی مماس در \mathbb{R}^{d+1} به دست می‌آوریم. به علاوه، «پاد قطر»

$$A = \{(x, -x, \dots, \dots)^T : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^d$$

همه پاره خطهای $S^1(\alpha)$ و $S^r(\beta)$ را قطع می‌کند. می‌توانیم آن را کمی «کج کنیم»، و خطی چون



$$L_\varepsilon = \{(x, -x, \dots, \dots, \varepsilon x)^T : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$$

به دست آوریم که به ازای همه ε های مثبت به قدر کافی کوچک، همه سادکهای Σ را قطع می‌کند. به این ترتیب، مرحله استقرای ما به انجام می‌رسد. \square

برخلاف این کران پایین نمایی، به دست آوردن کرانهای بالای دقیق، دشوار است. با یک استدلال استقرایی خام و ساده (در نظر گرفتن همه ابرصفحه‌های مربوط به وجوه $(d-1)$ بعدی) در یک آرایش مماس به طور جداگانه) به دست می‌آید

$$f(d) \leq \frac{2}{3}(d+1)!$$

و این خیلی از کران پایین قضیه ۱ دور است. ولی می‌شما پرلس^۱ اثبات «سحرآمیز» زیر را برای کران بسیار بهتری به دست آورد.

قضیه ۲. به ازای هر $d \geq 1$ ، داریم $f(d) \leq 2^{d+1}$.

1. Micha Perles

■ اثبات. با مفروض بودن آرایشی از r سادک d بعدی مماس P_1, P_2, \dots, P_r در \mathbb{R}^d ، نخست ابرصفحه‌های متفاوت H_1, H_2, \dots, H_s را که به وسیلهٔ وجوه $(d-1)$ بعدی P_i تولید می‌شوند می‌شمریم، و برای هر یک از آنها یک طرف مثبت H_i^+ را به دلخواه انتخاب می‌کنیم و طرف دیگر را H_i^- می‌نامیم.

مثلاً برای آرایش ۲ بعدی مرکب از $r = 4$ مثلث که تصویرش در حاشیه آمده است، $s = 6$ ابرصفحه می‌یابیم (که به ازای $d = 2$ ، خطهایی هستند).

از روی این داده‌ها، B -ماتریس را می‌سازیم که ماتریسی است $(r \times s)$ و درایه‌هایش، به شرح زیر، در $\{+1, -1, 0\}$ هستند: قرار می‌دهیم

$$B_{ij} := \begin{cases} +1 & \text{اگر } P_i \text{ وجهی در } H_j \text{ داشته باشد و } P_i \subseteq H_j^+ \\ -1 & \text{اگر } P_i \text{ وجهی در } H_j \text{ داشته باشد و } P_i \subseteq H_j^- \\ 0 & \text{اگر } P_i \text{ وجهی در } H_j \text{ نداشته باشد} \end{cases}$$

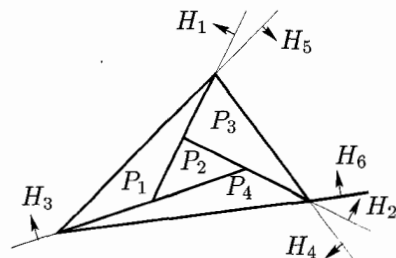
مثلاً آرایش ۲ بعدی در حاشیه به ماتریس زیر می‌انجامد

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

دو ویژگی B -ماتریس شایان ذکرند. نخست اینکه، چون هر سادک d بعدی $d+1$ وجه $(d-1)$ بعدی دارد، در می‌یابیم که هر سطر B دقیقاً $d+1$ درایهٔ ناصفر و بنابراین دقیقاً $s - (d+1)$ درایهٔ صفر دارد. دوم اینکه با آرایشی از سادکهای دوبه‌دو مماس سروکار داریم و از این رو برای هر جفت از سطرها یک ستون می‌یابیم که در آن یک سطر دارای درایهٔ $+1$ و دومی دارای درایهٔ -1 است. یعنی سطرها متفاوت‌اند حتی اگر درایه‌های صفر آنها را نادیده بگیریم.

حال از B ماتریس جدید C ای به دست می‌آوریم به این ترتیب که به جای هر سطر B ، همهٔ بردارهای سطری را که بتوان از آن سطر، با قرار دادن $+1$ یا -1 به جای صفرها، به دست آورد می‌گذاریم. چون هر سطر B دارای $s - d - 1$ صفر است، و B تعداد r سطر دارد، ماتریس C دارای $r \cdot 2^{s-d-1}$ سطر است.

در مثال ما این ماتریس C ماتریسی 32×6 خواهد بود که چنین شروع می‌شود



$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

که در آن ۸ سطر اول C از سطر نخست B به دست می‌آیند، ۸ سطر دوم از سطر دوم B ، و الی آخر.

اکنون موضوع این است که همه سطرهای C متفاوت‌اند: اگر دو سطر از یک سطر B به دست آمده باشند، متفاوت هستند زیرا به جای صفرهای آنها عددهای متفاوتی گذاشته شده است؛ و اگر از سطرهای متفاوتی از B به دست آمده باشند، متفاوت‌اند صرف‌نظر از اینکه به جای صفرهایشان چه چیزی گذاشته شده باشد.

ولی سطرهای C بردارهای شامل (± 1) به طول s ‌اند، و فقط 2^s بردار متفاوت از این‌گونه وجود دارد. پس، چون سطرهای C متمایزند، C حداکثر می‌تواند 2^s سطر داشته باشد یعنی

$$2^{s-d-1}r \leq 2^s$$

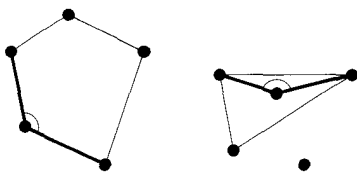
□ که $r \leq 2^{d+1}$ را به دست می‌دهد: آرایش شامل بیش از 2^{d+1} سادک نیست.

مراجع

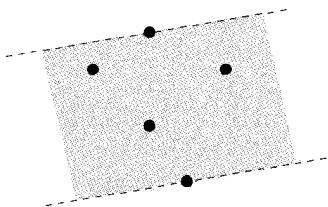
- [1] F. BAGEMIHL: *A conjecture concerning neighboring tetrahedra*, Amer. Math. Monthly **63** (1956) 328-329.
- [2] V.J.D. BASTON: *Some Properties of Polyhedra in Euclidean Space*, Pergamon Press, Oxford 1965.

-
- [3] M.A. PERLES: *At most 2^{d+1} neighborly simplices in E^d* , Annals of Discrete Math. **20** (1984), 253-254.
- [4] J. ZAKS: *Neighborly families of 2^d d -simplices in E^d* , Geometriae Dedicata **11** (1981), 279-296.
- [5] J. ZAKS: *No nine neighborly tetrahedra exist*, Memoirs Amer. Math. Soc. **447** (1991).

پال اردوش در حوالی ۱۹۵۰ حدس زد هر مجموعه‌ای از نقطه‌ها که بیش از 2^d نقطه در \mathbb{R}^d داشته باشد، دست‌کم یک زاویه منفرجه، یعنی زاویه‌ای که اکیداً بزرگتر از $\frac{\pi}{2}$ است، معین می‌کند. به عبارت دیگر، هر مجموعه‌ای از نقاط در \mathbb{R}^d که فقط زاویه‌های حاده (به‌انضمام قائمه) دارد، تعداد عضوهایش حداکثر 2^d است. انجمن ریاضی هلند برای حل این مسأله جایزه مقرر کرد ولی فقط راه‌حلهایی به‌ازای $d = 2$ و $d = 3$ دریافت داشت.



به‌ازای $d = 2$ مسأله آسان است: پنج نقطه ممکن است یک پنج‌ضلعی محدب را مشخص کنند که همیشه زاویه‌ای منفرجه دارد (در واقع، دست‌کم یک زاویه‌اش حداقل 108° است). در غیر این حالت، یک نقطه در غلاف محدب سه نقطه دیگر که مثلثی تشکیل می‌دهند قرار دارد. ولی این نقطه سه ضلع مثلث را تحت سه زاویه که مجموعشان 360° است «می‌بیند»، پس یکی از زاویه‌ها دست‌کم 120° است. (حالت دوم همچنین در برگرفته حالاتی است که سه نقطه روی یک خط، و بنابراین یک زاویه 180° داریم.)



بی‌ارتباط با این موضوع، ویکتور کلی^۱ این پرسش را چند سال بعد مطرح کرد — و اردوش آن را انتشار داد — که مجموعه‌ای از نقطه‌ها در \mathbb{R}^d چقدر می‌تواند بزرگ باشد و در عین حال دارای «ویژگی تقاطر^۲» زیر باشد: به‌ازای هر دو نقطه در این مجموعه یک نوار (محدود به دو ابرصفحه موازی) وجود دارد که شامل این مجموعه نقطه‌هاست، و دو نقطه انتخاب شده در دو طرف مرزند.

بعداً در ۱۹۶۲، لودویگ دانسر^۳ و برانکو گرونباوم^۴ هر دو مسأله را یکبارہ حل کردند: آنها ماکسیمم هر دو اندازه را در زنجیره‌ای از نابرابریها محصور کردند که با 2^d آغاز و به آن ختم می‌شوند. پس پاسخ هم برای مسأله اردوش و برای مسأله کلی، 2^d است.

در آنچه در پی می‌آید، مجموعه‌های (متناهی) $S \subseteq \mathbb{R}^d$ از نقطه‌ها، غلافهای محدب آنها $P(S)$ ، و بس‌وجهیهای محدب کلی $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ را در نظر می‌گیریم. (مطلب مربوط به بس‌وجهیها را در صفحه ۵۴ و ۵۵ ببینید و مفاهیم بنیادی را در

1. Victor Klee

2. antipodality

3. Ludwig Danzer

4. Branko Grünbaum

این زمینه ملاحظه کنید.) فرض می‌کنیم که این مجموعه‌ها دارای بعد کامل d هستند، یعنی در یک ابرصفحه قرار ندارند. این‌گونه مجموعه‌ها مماس‌اند اگر دست‌کم یک نقطهٔ مرزی مشترک داشته باشند ولی درونهای آنها با هم تقاطع نداشته باشند. به‌ازای هر مجموعهٔ $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ و هر بردار $s \in \mathbb{R}^d$ ، تصویر Q را تحت انتقالی که o را به s می‌برد با $Q + s$ نشان می‌دهیم [و آن را نگارهٔ انتقالی می‌نامیم]. همین‌طور، $Q - s$ نشان‌دهندهٔ نگارهٔ انتقالی حاصل از نگاشتی است که s را به مبدأ می‌برد.

نترسید: این فصل گشت و گذاری است در هندسهٔ d بعدی، ولی استدلالهایی که در زیر می‌آید نیازمند هیچ نوع «شهود در مورد ابعاد بالا» نیست، زیرا همهٔ آنها را می‌توان، در فضای سه‌بعدی یا حتی در صفحه تعقیب و تجسم کرد (و بنابراین فهمید). بنابراین شکل‌های ما اثبات را به‌ازای $d = 2$ (که در این بعد «ابرفصل» فقط یک خط است) نشان می‌دهند و شما می‌توانید تصاویر مربوط به $d = 3$ را (که «ابرفصل» یک صفحه است) تجسم و درک کنید.

قضیهٔ ۱. به‌ازای هر d ، زنجیرهٔ نابرابریهای زیر را داریم:

$$\nu^d \stackrel{(1)}{\leq} \max\#\{S \subseteq \mathbb{R}^d : \angle(s_i, s_j, s_k) \leq \frac{\pi}{4}, \{s_i, s_j, s_k\} \subseteq S, \text{ هر به‌ازای } S\}$$

$$\stackrel{(2)}{\leq} \max\#\left\{ \begin{array}{l} S \subseteq \mathbb{R}^d \\ \left. \begin{array}{l} \text{به‌ازای هر دو نقطهٔ } \{s_i, s_j\} \subseteq S \text{ نواری چون} \\ S(i, j) \text{ وجود دارد که شامل } S \text{ است به‌طوری} \\ \text{که } s_i \text{ و } s_j \text{ در ابرصفحه‌های مرزی } S(i, j) \\ \text{قرار دارند.} \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

$$\stackrel{(3)}{\leq} \max\#\left\{ \begin{array}{l} S \subseteq \mathbb{R}^d \\ \left. \begin{array}{l} \text{نگاره‌های انتقالی } P - s_i \text{ از } P = \text{conv}(S) \\ \text{در یک نقطهٔ مشترک هم را تلاقی می‌کنند ولی} \\ \text{فقط با هم تماس دارند.} \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

$$\stackrel{(4)}{\leq} \max\#\left\{ \begin{array}{l} S \subseteq \mathbb{R}^d \\ \left. \begin{array}{l} \text{نگاره‌های انتقالی } Q + s_i \text{ یک بس‌وجهی} \\ \text{محدب } d \text{ بعدی } Q \subseteq \mathbb{R}^d \text{ دوبه‌دو با هم تماس} \\ \text{دارند.} \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

$$\stackrel{(5)}{\leq} \max\#\left\{ \begin{array}{l} S \subseteq \mathbb{R}^d \\ \left. \begin{array}{l} \text{نگاره‌های انتقالی } Q^* + s_i \text{ یک بس‌وجهی} \\ \text{محدب } d \text{ بعدی } Q^* \subseteq \mathbb{R}^d \text{ که تقارن مرکزی} \\ \text{دارد، دوبه‌دو با هم تماس دارند.} \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

$$\stackrel{(6)}{\leq} \nu^d$$

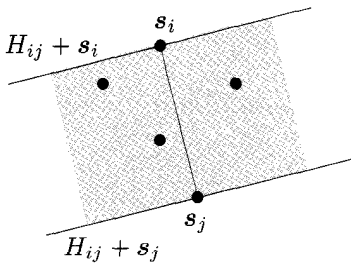
■ اثبات. شش ادعا (شامل برابری و نابرابری) را باید ثابت کنیم.

(۱) $S := \{0, 1\}^d$ را مجموعهٔ رأسهای مکعب واحد استاندارد در \mathbb{R}^d می‌گیریم و $s_i, s_j, s_k \in S$ را انتخاب می‌کنیم. بنابه تقارن می‌توانیم فرض کنیم که $s_j = 0$ یک بردار صفر است. پس زاویه را می‌توان از

$$\cos \angle(s_i, s_j, s_k) = \frac{\langle s_i, s_k \rangle}{|s_i| |s_k|}$$

محاسبه کرد که به‌وضوح نامنفی است. پس S مجموعه‌ای با ضابطهٔ $|S| = 2^d$ است که زاویهٔ منفرجه‌ای ندارد.

(۲) اگر S شامل هیچ زاویهٔ منفرجه نباشد، آنگاه به‌ازای $s_i, s_j \in S$ می‌توانیم $H_{ij} + s_i$ و $H_{ij} + s_j$ را ابرصفحه‌های موازی گذرنده از، به‌ترتیب، s_i و s_j ، که عمود بر یال $\{s_i, s_j\}$ اند تعریف کنیم. در اینجا $H_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, s_i - s_j \rangle = 0\}$ ابرصفحهٔ گذرنده از مبدأ است که عمود بر خط گذرنده از s_i و s_j است، و $H + s_j = \{x + s_j : x \in H\}$ نگاره‌ای انتقالی از H است که از s_j می‌گذرد، و غیره. پس نوار بین $H_{ij} + s_i$ و $H_{ij} + s_j$ ، علاوه بر s_i و s_j ، دقیقاً همهٔ نقاط $x \in \mathbb{R}^d$ را که به‌ازای آنها زاویه‌های $\angle(s_i, s_j, x)$ و $\angle(s_j, s_i, x)$ نامنفرجه‌اند دربردارد. لذا این نوار شامل همهٔ S است.



(۳) P در نیمفضایی از $H_{ij} + s_j$ که شامل s_i است قرار دارد اگر و تنها اگر $P - s_j$ در نیمفضایی از H_{ij} که شامل $s_i - s_j$ است قرار داشته باشد: خاصیت «بودن یک شیء در یک نیمفضا»، اگر هم شیء و هم نیمفضا را به یک اندازه (یعنی به‌اندازهٔ $-s_j$) انتقال دهیم، از بین نمی‌رود. همین‌طور، P در نیمفضایی از $H_{ij} + s_i$ که شامل s_j است قرار دارد اگر و فقط اگر $P - s_i$ در نیمفضایی از H_{ij} باشد که شامل $s_j - s_i$ است.

اگر دو حکم را با هم تلفیق کنیم، در می‌یابیم که بس‌وجهی P در نوار بین $H_{ij} + s_i$ و $H_{ij} + s_j$ قرار دارد اگر و تنها اگر $P - s_i$ و $P - s_j$ در نیمفضاهای متفاوتی نسبت به ابرصفحهٔ H_{ij} باشند.

این موضوع در شکل حاشیة صفحهٔ ۱۰۸ نشان داده شده است.

به‌علاوه، از $s_i \in P = \text{conv}(S)$ نتیجه می‌گیریم که مبدأ 0 در همهٔ نگاره‌های انتقالی $(s_i \in S)P - s_i$ قرار دارد، بنابراین می‌بینیم که مجموعه‌های $P - s_i$ همه 0 تلاقی می‌کنند، ولی فقط با هم تماس دارند: درونهای آنها دوبره‌دو مجزا هستند زیرا نسبت به ابرصفحه‌های متناظر H_{ij} ، در دو طرف مقابل هستند.

(۴) می‌بینیم که: «نگاره‌های انتقالی باید دوبه‌دو مماس باشند» شرط ضعیفتری از «آنها در نقطه مشترکی تلاقی می‌کنند ولی فقط تماس دارند» می‌باشد. همین‌طور می‌توان با فرض اینکه P یک بس‌وجهی d بعدی دلخواه در \mathbb{R}^d باشد، شرایط را ملایمتر کرد. به‌علاوه می‌توان به‌جای $S, -S$ را در نظر گرفت.

(۵) در اینجا « \geq » بدهی است ولی برای ما جالب نیست. ما باید از آرایشی مانند $S \subseteq \mathbb{R}^d$ و بس‌وجهی d بعدی دلخواهی چون $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ شروع کنیم به‌طوری‌که نگاره‌های انتقالی $Q + s_i$ (که $s_i \in S$) دوبه‌دو مماس باشند. ادعا این است که در این وضعیت می‌توانیم از

$$Q^* := \left\{ \frac{1}{2}(x - y) \in \mathbb{R}^d : x, y \in Q \right\}$$

به‌جای Q استفاده کنیم. ملاحظه این مطلب مشکل نیست. نخست، Q^* محدب و d بعدی است و تقارن مرکزی دارد. می‌توان بررسی کرد که Q^* یک بس‌وجهی است (رأسهای آن به‌صورت $\frac{1}{2}(q_i - q_j)$ ، به‌ازای رأسهای q_i, q_j از Q ، هستند)، ولی این برای ما مهم نیست.

اکنون نشان خواهیم داد که $Q + s_i$ و $Q + s_j$ با یکدیگر تماس دارند اگر و تنها اگر $Q^* + s_i$ و $Q^* + s_j$ با هم تماس داشته باشند. به‌این منظور، همچون مینکوفسکی، توجه می‌کنیم که

$$(Q^* + s_i) \cap (Q^* + s_j) \neq \emptyset$$

$$\iff \exists q'_i, q''_i, q'_j, q''_j \in Q : \frac{1}{2}(q'_i - q''_i) + s_i = \frac{1}{2}(q'_j - q''_j) + s_j$$

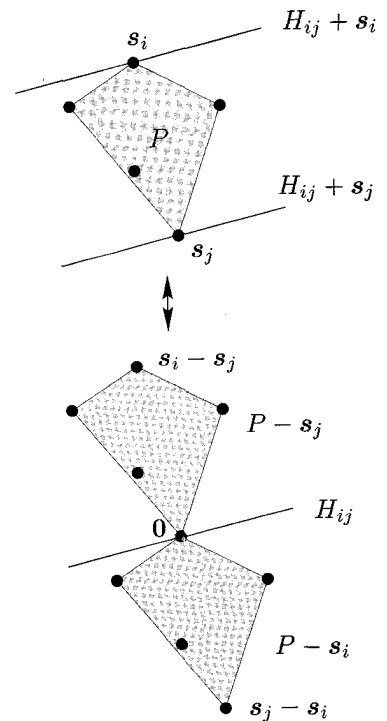
$$\iff \exists q'_i, q''_i, q'_j, q''_j \in Q : \frac{1}{2}(q'_i + q''_j) + s_i = \frac{1}{2}(q'_j + q''_i) + s_j$$

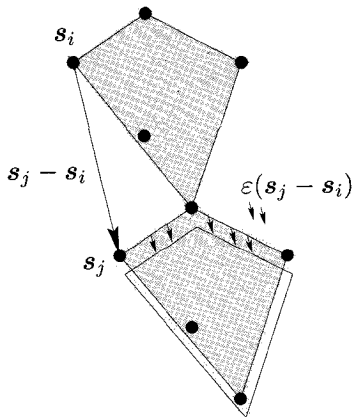
$$\iff \exists q_i, q_j \in Q : q_i + s_i = q_j + s_j$$

$$\iff (Q + s_i) \cap (Q + s_j) \neq \emptyset$$

در هم‌ارزی سوم « \iff » (که اهمیت حیاتی دارد)، با استفاده از این موضوع که هر $q \in Q$ را می‌توان به‌صورت $q = \frac{1}{2}(q + q)$ نوشت، به « \iff » رسیدیم و با توجه به اینکه Q محدب است و بنابراین $\frac{1}{2}(q'_i + q''_j), \frac{1}{2}(q'_j + q''_i) \in Q$ ، « \implies » را به‌دست آوردیم.

پس گذار از Q به Q^* (موسوم به متقارن‌سازی مینکوفسکی) ویژگی متلاقی بودن دو نگاره انتقالی $Q + s_i$ و $Q + s_j$ را حفظ می‌کند. یعنی نشان داده‌ایم که به‌ازای هر مجموعه محدب Q ، دو نگاره انتقالی $Q + s_i$ و $Q + s_j$ متلاقی‌اند اگر و تنها اگر نگاره‌های انتقالی $Q^* + s_i$ و $Q^* + s_j$ متلاقی باشند.





توصیف زیر نشان می‌دهد که متقارن‌سازی مینکوفسکی، خاصیت مماس بودن نگاره‌های انتقالی را هم حفظ می‌کند:

$Q + s_j$ و $Q + s_i$ مماس‌اند اگر و تنها اگر متلاقی باشند، در حالی که $Q + s_i$ و $Q + s_j + \epsilon(s_j - s_i)$ به‌ازای هیچ $\epsilon > 0$ با یکدیگر تلاقی نمی‌کنند.

(۶) فرض کنیم $Q^* + s_j$ و $Q^* + s_i$ با هم تماس داشته باشند. به‌ازای هر

نقطه تلاقی

$$x \in (Q^* + s_i) \cap (Q^* + s_j)$$

داریم

$$x - s_j \in Q^* \quad \text{و} \quad x - s_i \in Q^*$$

پس، چون Q^* دارای تقارن مرکزی است، داریم

$$s_i - x = -(x - s_i) \in Q^*$$

و از اینجا، چون Q^* محدب است،

$$\frac{1}{\lambda}(s_i - s_j) = \frac{1}{\lambda}((x - s_j) + (s_i - x)) \in Q^*$$

نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر i ، $\frac{1}{\lambda}(s_i + s_j)$ در $Q^* + s_j$ قرار دارد. پس به‌ازای $P := \text{conv}(S)$ به‌دست می‌آوریم

$$P_j := \frac{1}{\lambda}(P + s_j) = \text{conv}\left\{\frac{1}{\lambda}(s_i + s_j) : s_i \in S\right\} \subseteq Q^* + s_j$$

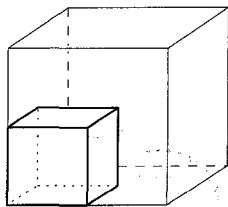
که از این نتیجه می‌شود مجموعه‌های $P_j = \frac{1}{\lambda}(P + s_j)$ فقط می‌توانند مماس باشند. و بالاخره مجموعه‌های P_j در P هستند، زیرا همه نقطه‌های s_i ، s_j و $\frac{1}{\lambda}(s_i + s_j)$ در P اند، چون P محدب است. اما P_j ها فقط نگاره‌های انتقالی تجدید مقیاس شده و کوچکتر P هستند که در P قرار دارند. ضریب مقیاس $\frac{1}{\lambda}$ است و بنابراین

$$\text{vol}(P_j) = \frac{1}{\lambda^d} \text{vol}(P)$$

چون با مجموعه‌های d بعدی سروکار داریم. این بدان معنی است که حداکثر 2^d مجموعه P_j در P جا می‌گیرند، و از این رو $|S| \leq 2^d$.

در اینجا اثبات به انجام می‌رسد: زنجیره نابرابریها بسته می‌شود. \square

... اما این پایان قضیه نیست. دانتسر و گرونباوم پرسش طبیعی زیر را مطرح کردند:



$$\text{vol}(P_j) = \frac{1}{\lambda^d} \text{vol}(P), \quad \text{ضریب مقیاس } \frac{1}{\lambda}$$

اگر شرط کنیم تمام زاویه‌ها به‌جای اینکه فقط نامنفرجه باشند، حاده باشند، یعنی اگر زاویه‌های قائمه را کنار بگذاریم، چه می‌شود؟

آنها آرایشهایی مرکب از $1 - 2d$ نقطه در \mathbb{R}^d با فقط زاویه‌های حاده، ساختند و حدس زدند که این شاید بهترین امکان باشد. گروناوم ثابت کرد که به‌ازای $d \leq 3$ واقعاً چنین است. ولی بیست و یک‌سال بعد، در ۱۹۸۳، پال اردوش و زولتان فوردی^۱ نشان دادند که این حدس — اگر بعد بالا باشد به‌طرز چشمگیری! — غلط است. این اثبات نمونه بسیار خوبی است از قدرت استدلالهای احتمالاتی؛ برای آشنایی با «روش احتمالاتی» به فصل ۳^۰ مراجعه کنید.

قضیه ۲. به‌ازای هر $d \geq 1$ ، مجموعه‌ای چون $S \subseteq \{0, 1\}^d$ مرکب از $\lfloor \frac{1}{\sqrt{d}} \rfloor \binom{d}{\frac{1}{\sqrt{d}}}^d$ نقطه در \mathbb{R}^d وجود دارد (رأسهای مکعب d بعدی واحد) که فقط زاویه‌های حاده معین می‌کنند. در حالت خاص $d = 35$ ، مجموعه‌ای مرکب از $1 - 35 \times 2 > 76$ نقطه وجود دارد که فقط زاویه‌های حاده معین می‌کنند.

■ اثبات. قرار می‌دهیم $m := \lfloor \frac{1}{\sqrt{d}} \rfloor \binom{d}{\frac{1}{\sqrt{d}}}^d$ و $2m$ بردار

$$x(1), x(2), \dots, x(2m) \in \{0, 1\}^d$$

را چنان برمی‌گزینیم که همه مختصاتشان مستقلاً و به تصادف مساوی ۰ یا ۱ انتخاب شوند، با احتمال $\frac{1}{2}$ برای هر حالت. (می‌توانید سکه سالمی را $2md$ بار پرتاب کنید؛ اما اگر d بزرگ باشد ممکن است از این‌کار به‌زودی خسته شوید.) حال سه‌بردار $x(i)$ ، $x(j)$ ، $x(k)$ زاویه قائمه‌ای به‌رأس $x(j)$ معین می‌کنند اگر و تنها اگر حاصلضرب اسکالر

$$\langle x(i) - x(j), x(k) - x(j) \rangle$$

صفر شود، یعنی اگر به‌ازای هر مختص ℓ داشته باشیم

$$x(k)_\ell - x(j)_\ell = 1 \quad \text{یا} \quad x(i)_\ell - x(j)_\ell = 0$$

سه‌تایی (i, j, k) را سه‌تایی بد می‌نامیم اگر این اتفاق بیفتد. (اگر $x(i) = x(j)$ یا $x(j) = x(k)$ ، آنگاه زاویه معین نمی‌شود، اما در آن حالت هم سه‌تایی (i, j, k) مسلماً بد است.)

احتمال اینکه یک سه‌تایی خاص بد باشد دقیقاً $\left(\frac{3}{4}\right)^d$ است: در واقع، سه‌تایی خوب خواهد بود اگر و تنها اگر به‌ازای یکی از d مختص ℓ به‌دست آوریم

$$\text{یا } x(j)_\ell = 1, \quad x(i)_\ell = x(k)_\ell = 0$$

$$\text{یا } x(j)_\ell = 0, \quad x(i)_\ell = x(k)_\ell = 1$$

به‌این ترتیب، شش امکان بد از میان هشت امکان هم‌احتمال باقی می‌ماند، و یک سه‌تایی بد خواهد بود اگر و تنها اگر یکی از امکانهای بد (با احتمال $\frac{3}{4}$) برای هر یک از d مختص رخ بدهد.

تعداد سه‌تاییهایی که باید در نظر بگیریم، $3 \binom{2m}{3}$ است، زیرا $\binom{2m}{3}$ مجموعه مرکب از سه بردار وجود دارد، و به‌ازای هر یک از آنها سه انتخاب برای رأس ممکن است. البته احتمالهای اینکه سه‌تاییهای گوناگون بد باشند، مستقل نیستند: ولی با توجه به خطی بودن امید ریاضی (که با میانگین‌گیری روی تمام انتخابهای ممکن به‌دست می‌آید؛ پیوست را ببینید) تعداد مورد انتظار سه‌تاییهای بد دقیقاً $\left(\frac{3}{4}\right)^d \binom{2m}{3}$ است. این بدان معناست که — و در همین جاست که روش احتمالاتی قدرت خودش را نشان می‌دهد — انتخابی از $2m$ بردار وجود دارد به‌نحوی که حداکثر $3 \binom{2m}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^d$ سه‌تایی بد موجود خواهد بود که بنابه نحوه انتخاب m داریم

$$3 \binom{2m}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^d < 3 \frac{\binom{2m}{3}}{6} \left(\frac{3}{4}\right)^d = m \binom{2m}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^d \leq m$$

اما اگر بیش از m انتخاب بد وجود نداشته باشد، می‌توانیم m تا از $2m$ بردار $x(i)$ را برداریم به‌نحوی که m بردار باقیمانده شامل سه‌تایی بد نباشند، یعنی فقط زاویه‌های حاده تعیین کنند. \square

پیوست: سه ابزار احتمالاتی

در اینجا سه مفهوم اساسی را که متعلق به نظریه احتمال گسسته است و بارها به آن بر خواهیم خورد تشریح می‌کنیم: متغیر تصادفی، خطی بودن امید ریاضی، و نابرابری مارکوف.

فرض کنیم (Ω, p) یک فضای احتمال متناهی باشد یعنی Ω مجموعه‌ای متناهی باشد و $p = \text{Prob}$ نگاشتی از Ω به بازه $[0, 1]$ با ضابطه $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ باشد. متغیر تصادفی X روی Ω نگاشتی چون $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ است. با قرار دادن

$X(\Omega)$ یک فضای احتمال روی مجموعه تصویر $p(X = x) : \sum_{X(\omega)=x} p(\omega)$ تعریف می‌کنیم. مثالی ساده در این زمینه، تاسی سالم است (که همواره $\frac{1}{6}$ $p(\omega) = \frac{1}{6}$) با این ضابطه: X مساوی است با «عددی که پس از پرتاب تاس روی وجه بالایی آن دیده می‌شود.»

EX ، امید ریاضی X ، میانگین مورد انتظار X است یعنی $EX = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \cdot X(\omega)$. حال فرض کنیم X و Y دو متغیر تصادفی روی Ω باشند. در این صورت $X + Y$ باز متغیری تصادفی است، و به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= \sum_{\omega} p(\omega)(X(\omega) + Y(\omega)) \\ &= \sum_{\omega} p(\omega)X(\omega) + \sum_{\omega} p(\omega)Y(\omega) = EX + EY \end{aligned}$$

روشن است که این را می‌توان به هر ترکیب خطی متناهی از متغیرهای تصادفی تعمیم داد — و این تعمیم است که خطی بودن امید ریاضی نامیده می‌شود. توجه کنید که در اینجا لازم نیست متغیر تصادفی به هیچ معنایی «مستقل» باشد.

سومین ابزار ما به متغیرهای تصادفی X ای مربوط می‌شود که فقط مقادیرهای نامنفی را اختیار می‌کنند و به اختصار، $X \geq 0$. فرض کنیم $\text{Prob}(X \geq a) = \sum_{\omega: X(\omega) \geq a} p(\omega)$ برابر با a مثبتی باشد. در این صورت

$$EX = \sum_{\omega: X(\omega) \geq a} p(\omega)X(\omega) + \sum_{\omega: X(\omega) < a} p(\omega)X(\omega) \geq a \sum_{\omega: X(\omega) \geq a} p(\omega)$$

و ما نابرابری مارکوف

$$\text{Prob}(X \geq a) \leq \frac{EX}{a}$$

را ثابت کرده‌ایم.

مراجع

- [1] L. DANZER & B. GRÜNBAUM: Über zwei Probleme bezüglich konvexer Körper von P. Erdős und von V.L. Klee, Math. Zeitschrift 79 (1962), 95-99.

- [2] P. ERDŐS & Z. FÜREDI: *The greatest angle among n points in the d -dimensional Euclidean space*, Annals of Discrete Mathematics **17** (1983), 275-283.
- [3] H. MINKOWSKI: *Dichteste gitterförmige Lagerung kongruenter Körper*, Nachrichten Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse 1904, 311-355.



کارول بورسوک

مقاله کارول بورسوک^۱ با عنوان «سه قضیه درباره فضای اقلیدسی n بعدی» به تاریخ ۱۹۳۳ به خاطر اشتغال بر حکم مهمی شهرت دارد که قبلاً استانیسلاو اولام^۲ آن را حدس زده بود و امروز به قضیه بورسوک-اولام موسوم است:

هر نگاشت پیوسته $f: S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ دو نقطه متقاطع [واقع بر دو انتهای یک قطر] از کره S^d را به نقطه واحدی در \mathbb{R}^d می نگارد.

این مقاله همچنین به خاطر مسأله‌ای که در انتهای آن مطرح شد و به حدس بورسوک معروف گشت، شهرت دارد:

«آیا هر مجموعه $S \subseteq \mathbb{R}^d$ با قطر کراندار $diam(S) > 0$ را می توان به حداکثر $d + 1$ مجموعه با قطر کوچکتر افراز کرد؟»

کران $d + 1$ بهترین امکان است: اگر S یک سادک d بعدی منتظم یا فقط مجموعه $d + 1$ رأس آن باشد، آنگاه هیچ بخشی از یک افراز کاهش دهنده قطر شامل بیش از یکی از رأسهای سادک نمی تواند باشد. اگر $f(d)$ نشان دهنده کوچکترین عددی باشد که هر مجموعه کراندار $S \subseteq \mathbb{R}^d$ را بتوان با یک افراز کاهنده قطر به $f(d)$ بخش تقسیم کرد، آنگاه مثال سادک منتظم، رابطه $f(d) \geq d + 1$ را ثابت می کند.

حدس بورسوک در حالتی که S کره است (به وسیله خود بورسوک)، برای اجسام هموار S (با استفاده از قضیه بورسوک-اولام)، به ازای $d \leq 3$ ، ثابت شد اما حدس کلی حل نشده باقی ماند. بهترین کران بالای قابل دسترس برای $f(d)$ را شرام^۳ به دست آورد که اساساً نشان داد به ازای هر d ای که به قدر کافی بزرگ باشد داریم

$$f(d) \leq (1.25)^d$$

این کران در مقایسه با حدس « $f(d) = d + 1$ » خیلی ضعیف به نظر می رسد، ولی وقتی جف کان^۴ و گیل کالای^۵ در ۱۹۹۳ حدس بورسوک را به طرز چشمگیری ابطال

1. Karol Borsuk 2. Stanislaw Ulam 3. Schramm 4. Jeff Kahn
5. Gil Kalai

کردند، ناگهان معقول به نظر آمد. شصت سال پس از انتشار مقاله بوسوک، کان و کالای ثابت کردند که به ازای d به قدر کافی بزرگ، $f(d) \geq (1.1)^{\sqrt{d}}$ برقرار است.

روایت «کتابی» اثبات کان-کالای را نیلی^۱ به دست داد: اثباتی کوتاه و خودکفا که حتی کرانی قویتر یعنی $f(d) \geq (1.2)^{\sqrt{d}}$ را عرضه می‌دارد و مثال ناقص صریحی برای حدس بوسوک در بعد $d = 946$ ارائه می‌کند. جرج و تعدیلی که به دست آندری رایگوردسکی^۲ و برنولف وایسباخ^۳ در این اثبات صورت گرفته آن را بهتر کرده است و بعد را به $d = 861$ و حتی به $d = 561$ کاهش داده است که «رکورد» فعلی محسوب می‌شود. ما این صورت تعدیل یافته را در اینجا می‌آوریم.

قضیه. فرض کنیم $p \geq 3$ عددی اول باشد، $n := 4p - 2$ و $d := \binom{n}{2} = (2p - 1)(4p - 3)$. در این صورت، مجموعه‌ای چون $S \subseteq \{+1, -1\}^d$ مرکب از 2^{n-2} نقطه در \mathbb{R}^d وجود دارد به نحوی که هر افزاز S ، که اجزای آن قطری کوچکتر از S دارند، بیش از

$$\frac{2^{n-2}}{\sum_{i=0}^{p-2} \binom{n}{i}}$$

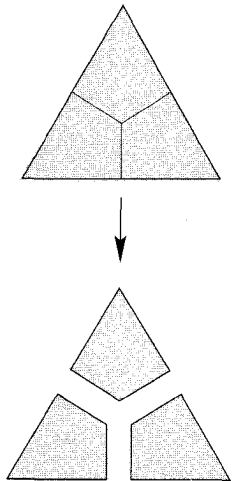
جزء دارد. به ازای $p = 11$ ، این بدان معنی است که حدس بوسوک در بعد $d = 861$ غلط است. به علاوه، به ازای همه d های به قدر کافی بزرگ، $f(d) > (1.2)^{\sqrt{d}}$ برقرار است.

■ اثبات. ساختن مجموعه S در چهارگام انجام می‌شود.

(۱) فرض می‌کنیم p عدد اول فردی باشد، قرار می‌دهیم $n = 4p - 2$ ، و فرض می‌کنیم

$$Q := \{x \in \{+1, -1\}^n : x_1 = 1, \text{ تعداد } \{i : x_i = -1\} \text{ زوج است}\}$$

این مجموعه‌ای است مرکب از 2^{n-2} بردار در \mathbb{R}^n . خواهیم دید که به ازای همه بردارهای $x, y \in Q$ ، $\langle x, y \rangle \equiv 2 \pmod{4}$ (بیمانه ۴) برقرار است. x و y را تقریباً متعامد گوئیم اگر $|\langle x, y \rangle| = 2$. ثابت خواهیم کرد که هر زیرمجموعه $Q' \subseteq Q$ که شامل بردارهای تقریباً متعامد نباشد، باید «کوچک» باشد: $|Q'| \leq \sum_{i=0}^{p-2} \binom{n}{i}$.



هر سادک d بعدی را می‌توان به $d+1$ قطعه، هر یک با قطر کوچکتر، تجزیه کرد.



نیلی

(۲) با استفاده از Q ، مجموعه

$$R := \{xx^T : x \in Q\}$$

مرکب از 2^{n-2} ماتریس متقارن $n \times n$ از رتبه ۱ را می‌سازیم؛ آنها را به‌عنوان بردارهایی با n^2 مؤلفه، $R \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ تعبیر می‌کنیم. نشان خواهیم داد که فقط زاویه‌های حاده بین این بردارها وجود دارد: آنها تقریباً متعامدند با حاصلضرب اسکالر $2 +$ «در بدترین حالت». پس اگر $R' \subseteq R$ اصلاً شامل بردارهای تقریباً متعامد نباشد، آنگاه $|R'|$ «کوچک» است: $|R'| \leq \sum_{i=0}^{p-2} \binom{n}{i}$.

بردارها، ماتریسها، و حاصلضربهای اسکالر

در سیستم نمادگذاری ما همه بردارهای x, y, \dots بردارهای ستونی‌اند؛ بنابراین بردارهای ترانزاده x^T, y^T, \dots بردارهای سطری‌اند. حاصلضرب ماتریسی xx^T ماتریسی از رتبه ۱ است با ضابطه $(xx^T)_{ij} = x_i x_j$. اگر x و y بردارهایی ستونی باشند، آنگاه حاصلضرب اسکالر آنها چنین است:

$$\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i = x^T y$$

ما همچنین به حاصلضرب اسکالر ماتریسهای $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ نیاز خواهیم داشت که آنها را به‌صورت بردارهایی به‌طول n^2 تعبیر می‌کنیم و بنابراین حاصلضرب اسکالر آنها چنین است:

$$\langle X, Y \rangle := \sum_{i,j} x_{ij} y_{ij}$$

(۳) از R ، مجموعه نقاطی در $\mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$ را به‌دست می‌آوریم که مختصاتشان درایه‌های

زیرقطری ماتریسهای متناظرند:

$$S := \{(xx^T)_{i>j} : xx^T \in R\}$$

باز S مرکب از 2^{n-2} نقطه است. حداکثر فاصله بین این نقاط دقیقاً به‌ازای بردارهای تقریباً متعامد $x, y \in Q$ به‌دست می‌آید. نتیجه می‌گیریم که زیرمجموعه‌ای چون $S' \subseteq S$ با قطر کوچکتر از S باید «کوچک» باشد: $|S'| \leq \sum_{i=0}^{p-2} \binom{n}{i}$.

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ x^T &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ xx^T &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(۴) برآوردها: با توجه به (۳) می بینیم که هر افراز کاهنده قطر S دست کم باید

$$g(p) := \frac{2^{4p-2}}{\sum_{i=0}^{p-2} \binom{4p-2}{i}}$$

بخش داشته باشد. پس

$$f(d) \geq \max\{g(p), d+1\}, \quad d = (2p-1)(4p-3)$$

بنابراین، هرگاه داشته باشیم $g(p) > (2p-1)(4p-3) + 1$ ، آنگاه مثال ناقصی برای حدس بورسوک در بعد $d = (2p-1)(4p-3)$ در دست داریم. در زیر با محاسبه خواهیم دید $g(11) > 862$ که مثال ناقص در بعد $d = 861$ را به دست می دهد، و نیز

$$g(p) > \frac{e}{46p^2} \left(\frac{27}{16}\right)^p$$

که کران مجانبی $f(d) > (1.2)^{\sqrt{d}}$ را برای d هایی که به قدر کافی بزرگ باشند به دست می دهد.

جزئیات مربوط به (۱): فرض کنیم $Q' \subseteq Q$ اصلاً شامل بردارهای تقریباً متعامد نباشد.

ادعای ۱. اگر $x, y \in Q'$ در (به پیمانه p) $\langle x, y \rangle \equiv +2$ صدق کند، آنگاه

$$x = y$$

با توجه به اینکه $x, y \in \{+1, -1\}^{4p-2}$ داریم

$$-(4p-2) \leq \langle x, y \rangle \leq 4p-2$$

در مورد کران پایین، علامت برابری هیچ گاه برقرار نیست زیرا $x \neq -y$ از $x_1 = y_1 = 1$ نتیجه می شود. کران بالا فقط در صورتی برقرار است که $x = y$. پس برای هر دو بردار متمایز چون $x, y \in Q$ داریم

$$-4p+2 < \langle x, y \rangle < 4p-2 \quad (1)$$

هم x و هم y تعداد زوجی مؤلفه (-1) دارند، پس تعداد مؤلفه هایی که x و y در آنها اختلاف دارند نیز زوج است. از این رو به ازای هر $x, y \in Q$

$$\langle x, y \rangle = (4p-2) - 2\#\{i : x_i \neq y_i\} \equiv 2(4 \text{ به پیمانه } 4)$$

حال اگر (به پیمانه p) $\langle x, y \rangle \equiv 2$ ، آنگاه $\langle x, y \rangle = -2$ هم بر 4 و هم بر p بخش پذیر است، پس مضربی از $4p$ است زیرا p فرد است. با توجه به (۱) از اینجا نتیجه می شود $\langle x, y \rangle = 2$. پس x, y نمی توانند بردارهای متمایزی از Q' باشند. بنا به تقارن، اگر $\langle x, y \rangle \equiv -2$ آنگاه $\langle x, y \rangle + 2$ مضربی از $4p$ است؛ بنابراین

از

(۱) نتیجه می شود $\langle x, y \rangle = -2$. لذا باز x, y نمی توانند بردارهای متمایزی

از Q' باشند.

ادعای ۲. به ازای هر $y \in Q'$ ، چند جمله ای درجه $2 - p$ بر حسب n متغیر x_1, \dots, x_n که با ضابطه

$$F_y(x) := \prod_{\substack{i \in \{0, 1, \dots, p-1\} \\ i \neq 2, p-2}} (\langle y, x \rangle - i)$$

مشخص می شود به ازای هر $x \in Q' \setminus \{y\}$ بر p بخش پذیر است ولی به ازای $x = y$ چنین نیست.

به ازای $x = y$ داریم (به پیمانه p) $\langle y, x \rangle = n \equiv -2$ ، پس $\langle y, x \rangle - i$ بر p بخش پذیر است اگر و تنها اگر (به پیمانه p) $i \equiv -2$ ، و بنابراین هیچ یک از عاملها در تعریف $F_y(y)$ بر p بخش پذیر نیست.

به ازای $x \neq y$ ، بر اساس ادعای ۱ برای $x, y \in Q'$ داریم $\langle y, x \rangle \not\equiv \pm 2$ ، و بنابراین به ازای i ای متعلق به $\{0, 1, 3, 4, \dots, p-3, p-1\}$ داریم $\langle y, x \rangle \equiv 0$ که از آن نتیجه می شود عاملی از $F_y(x)$ بر p بخش پذیر است.

ادعای ۳. همین موضوع در مورد چند جمله ایهای $\overline{F}_y(x)$ که به صورت زیر به دست می آیند صادق است: $F_y(x)$ را به تک جمله ایها بسط می دهیم و همه مربعات متغیرها را با جانشانی $x_i^2 = 1$ حذف می کنیم. درجه چند جمله ایهای $\overline{F}_y(x)$ حداکثر $2 - p$ است.

بردارهای x در $\{+1, -1\}^n$ قرار دارند، پس در $x_i^2 = 1$ صدق می کنند. بنابراین، جانشانیها مقدرهای چند جمله ایها را تغییر نمی دهند. همچنین درجه را افزایش نمی دهند و از این رو درجه $\overline{F}_y(x)$ حداکثر $2 - p$ است.

ادعای ۴. هیچ رابطه خطی (با ضرایب گویا) بین چندجمله‌ایهای $\overline{F}_y(x)$ وجود ندارد یعنی مجموعه $\{\overline{F}_y(x) : y \in Q'\}$ روی \mathbb{Q} مستقل خطی است.

فرض کنید رابطه‌ای به شکل $\sum_{y \in Q} \alpha_y \overline{F}_y(x) = 0$ وجود دارد به طوری که همه ضریبهای α_y صفر نیستند. پس از ضرب کردن در اسکالری مناسب می‌توانیم فرض کنیم همه ضریبها عددهای صحیحی هستند، ولی همه آنها بر p بخش پذیر نیستند. ولی در این صورت، به ازای هر $y \in Q$ ، محاسبه در $x = y$ نشان می‌دهد که $\alpha_y \overline{F}_y(y)$ بر p بخش پذیر است و از این رو α_y نیز چنین است زیرا $\overline{F}_y(y)$ بر p بخش پذیر نیست.

ادعای ۵. کران $|Q'|$ تعداد تک جمله‌ایهای خالی از مربع با درجه حداکثر $p-2$ برحسب n متغیر است که این تعداد برابر با $\sum_{i=0}^{p-2} \binom{n}{i}$ است.

چندجمله‌ایهای \overline{F}_y بنابه نحوه ساختشان خالی از مربع‌اند: هیچ یک از تک جمله‌ایهای آنها شامل متغیری با درجه بزرگتر از ۱ نیست. پس هر $\overline{F}_y(x)$ ترکیبی خطی از تک جمله‌ایهای خالی از مربع از درجه حداکثر $p-2$ است. چون چندجمله‌ایهای $\overline{F}_y(x)$ مستقل خطی‌اند، تعداد آنها (که $|Q'|$ است) نمی‌تواند بیشتر از تعداد تک جمله‌ایهای مورد نظر باشد.

جزئیات مربوط به (۲): نخستین ستون $x, x x^T$ است. پس برای x های متمایز متعلق به Q ، ماتریسهای متمایز $M(x) := x x^T$ را به دست می‌آوریم. این ماتریسها را به صورت بردارهایی به طول n^2 با مؤلفه‌های $x_i x_j$ تعبیر می‌کنیم. محاسبه‌ای ساده:

$$\begin{aligned} \langle M(x), M(y) \rangle &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i x_j)(y_i y_j) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j y_j \right) = \langle x, y \rangle^2 \geq 2 \end{aligned}$$

نشان می‌دهد که حاصلضرب اسکالر $M(x)$ و $M(y)$ مینیمم می‌شود، و لذا زاویه بین $M(x)$ و $M(y)$ ماکسیمم می‌گردد اگر و تنها اگر $x, y \in Q$ تقریباً متعامد باشند.

جزئیات مربوط به (۳): فرض کنیم به (۳): فرض کنیم $U(x) \in \{+1, -1\}^d$ نشان دهنده بردار مرکب

از همه درایه‌های زیر قطری $M(x)$ باشد. چون $M(x) = xx^T$ نسبت به مقادیر قطری $1 +$ متقارن است، می‌بینیم که $M(x) \neq M(y)$ دلالت بر $U(x) \neq U(y)$ دارد. به علاوه

$$2 \leq \langle M(x), M(y) \rangle = 2 \langle U(x), U(y) \rangle + n$$

یعنی

$$\langle U(x), U(y) \rangle \geq -\frac{n}{2} + 1$$

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & & & & U(x) \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ U(x) & & & & 1 \end{pmatrix}$$

علامت برابری برقرار است اگر و تنها اگر x و y تقریباً متعامد باشند. چون همه بردارهای $U(x) \in R$ طولشان $\sqrt{\langle U(x), U(x) \rangle} = \sqrt{\binom{n}{2}}$ است، این بدان معنی است که حداکثر فاصله بین نقطه‌های $U(x), U(y) \in R$ دقیقاً وقتی به دست می‌آید که x و y تقریباً متعامد باشند.

جزئیات مربوط به (۴): به ازای $p = 11$ داریم $g(11) \approx 184135$ که بزرگتر از $d + 1 = \binom{22}{2} + 1 = 862$ است.

به منظور به دست آوردن کرانی کلی برای d های بزرگ، از تکمندی بودن ضرایب دو جمله‌ای و برآوردهای $n! < en \left(\frac{n}{e}\right)^n$ و $n! > e \left(\frac{n}{e}\right)^n$ (پیوست فصل ۲ را ببینید) استفاده می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$\sum_{i=0}^{p-2} \binom{n}{i} < p \binom{2p}{p} = p \frac{(2p)!}{p!(p)!} < p \frac{e 2p \left(\frac{2p}{e}\right)^{2p}}{e \left(\frac{2p}{e}\right)^{2p}} = \frac{2p^2}{e} \left(\frac{256}{27}\right)^p$$

پس نتیجه می‌گیریم

$$f(d) \geq g(p) = \frac{2^{2p-2}}{\sum_{i=0}^{p-2} \binom{n}{i}} > \frac{e}{64p^2} \left(\frac{27}{16}\right)^p$$

از اینجا، با توجه به

$$d = (2p - 1)(4p - 3) = 8p^2 + (p - 3)(3p - 1) \geq 8p^2 \quad p \geq 3$$

$$p = \frac{5}{8} + \sqrt{\frac{d}{8} + \frac{1}{64}} > \sqrt{\frac{d}{8}} \quad \text{و} \quad \left(\frac{27}{16}\right)^{\sqrt{\frac{d}{8}}} > 1,2032$$

به ازای d های به قدر کافی بزرگ به دست می‌آوریم

$$\square \quad f(d) > \frac{e}{13d} (1,2032)^{\sqrt{d}} > (1,2)^{\sqrt{d}}$$

از همین نوع اثبات با فرض $p = 9$ مثال ناقضی در بعد $d = 561$ به دست می آید.
در اینجا چند جمله ایهای

$$F_y(x) := \frac{1}{9} \prod_{i \in \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 8\}} ((y, x) - i)$$

به کار می روند که متناسب با این واقعیت است که ۹، عدد اول نیست. سپس همه استدلالها را می توان مانند بالا، با استفاده از بخش پذیری بر ۳، انجام داد.
تاکنون فقط می دانیم که حدس بورسوک به ازای $d \leq 3$ ، و به ازای $d \leq 8$ در حالت خاص زیر مجموعه های d ، $S \subseteq \{1, -1\}^d$ به صورتی که در اینجا مورد نظر بودند، درست است. پس به هیچ وجه روشن نیست که کوچکترین بعد برای مثالهای ناقض واقعاً بزرگ باشد.

مراجع

- [1] K. BORSUK: *Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre*, Fundamenta Math. **20** (1933), 177-190.
- [2] J. KAHN & G. KALAI: *A counterexample to Borsuk's conjecture*, Bulletin Amer. Math. Soc. **29** (1993), 60-62.
- [3] A. NILLI: *On Borsuk's problem*, in: "Jerusalem Combinatorics '93" (H. Barcelo and G. Kalai, eds.), Contemporary Mathematics **178**, Amer. Math. Soc. 1994, 209-210.
- [4] A.M. RAIGORODSKII: *O razmernostiv probleme Borsuka (A counterexample for Borsuk's problem; in Russian)*, Uspekhi Mat. Nauk (6) **52** (1997), 181-182.
- [5] O. SCHRAMM: *Illuminating sets of constant width*, Mathematika **35** (1988), 180-199.

۱۶

مجموعه، تابع، و فرض پیوستار ۱۲۵

۱۷

درستایش نابرابریها ۱۳۹

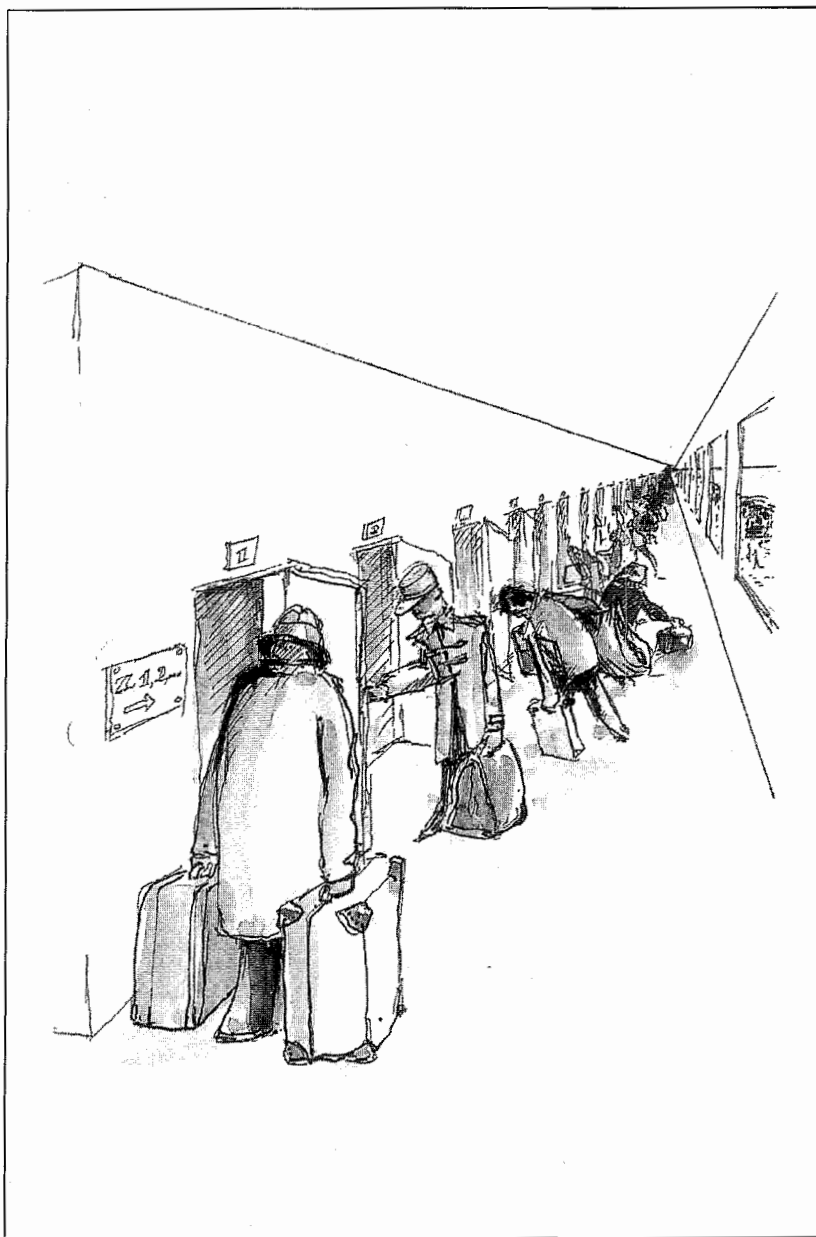
۱۸

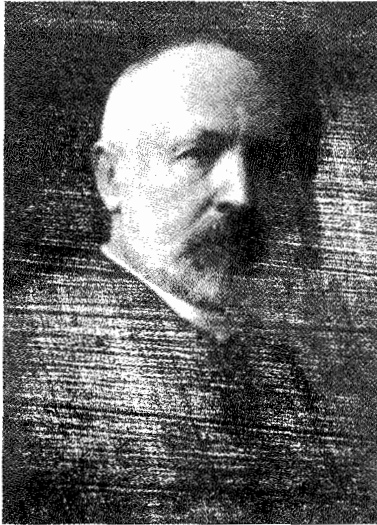
قضیه‌ای از پولیا درباره

چندجمله‌ایها ۱۴۹

۱۹

درباره لمی از لیتل‌وود و آفرد ۱۶۱





گئورگ کانتور

نظریه مجموعه‌ها، که در نیمه دوم قرن نوزدهم به دست گئورگ کانتور پایه‌گذاری شد، ریاضیات را عمیقاً دگرگون ساخته است. ریاضیات امروزی بدون مفهوم مجموعه قابل تصور نیست و، چنانکه هیلبرت گفته است: «هیچ کس ما را از بهشتی که کانتور برایمان آفریده (نظریه مجموعه‌ها) بیرون نخواهد راند.»

یکی از مفهومی‌های بنیادی کانتور، مفهوم اندازه یا کاردینال [تعداد اعضای] مجموعه‌ای چون M است که به $|M|$ نشان داده می‌شود. این مفهوم در مورد مجموعه‌های متناهی با اشکالی مواجه نمی‌شود: تعداد عضوها را می‌شمریم و می‌گوییم M یک مجموعه n عضوی است یا اندازه‌اش n است اگر M شامل دقیقاً n عضو باشد. پس دو مجموعه متناهی M و N اندازه برابر دارند، $|M| = |N|$ ، اگر تعداد اعضایشان یکی باشد.

برای تعمیم مفهوم برابری اندازه‌ها به مجموعه‌های نامتناهی، آزمایش ذهنی الهامبخش زیر را در مورد مجموعه‌های متناهی انجام می‌دهیم. فرض کنید عده‌ای سوار یک اتوبوس می‌شوند. چه وقتی می‌گوییم که تعداد مسافران با تعداد صندلیهای اتوبوس یکی است؟ پاسخ ساده است: می‌گذاریم همه مسافران بنشینند. اگر هرکسی صندلی برای نشستن یافت، و هیچ صندلی خالی نماند، در آن صورت و فقط در آن صورت، تعداد اعضای این دو مجموعه (مسافران و صندلیها) برابر است. به عبارت دیگر، این دو اندازه یکی هستند اگر یک نگاشت دوسویی از یک مجموعه به روی دیگری وجود داشته باشد.

پس تعریف ما چنین است: گوییم دو مجموعه دلخواه M و N (متناهی یا نامتناهی) دارای اندازه یا کاردینال برابرند اگر و تنها اگر نگاشتی دوسویی از M به روی N وجود داشته باشد. روشن است که این مفهوم برابری اندازه یک رابطه هم‌ارزی است، و بنابراین می‌توانیم به هر رده از مجموعه‌های هم‌اندازه یک عدد کاردینال نسبت دهیم. مثلاً برای مجموعه‌های متناهی، عددهای کاردینال $0, 1, 2, \dots, n, \dots$ را به دست می‌آوریم که n نماینده رده مجموعه‌های n عضوی است و به‌خصوص، 0 نماینده مجموعه تهی \emptyset است. به‌علاوه، این حقیقت آشکار را ملاحظه می‌کنیم که زیرمجموعه‌ای سره از یک مجموعه متناهی M همواره اندازه‌ای کوچکتر از M دارد. وقتی به سراغ مجموعه‌های نامتناهی می‌رویم، نظریه خیلی جالب (و بسیار دور

از ادراک شهودی) می‌شود. مجموعه $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ از عددهای طبیعی را در نظر بگیرید. مجموعه‌ای چون M را شمارا می‌نامیم، اگر بتوان آن را در تناظر یک به یک با \mathbb{N} قرار داد. به عبارت دیگر، M شماراست اگر بتوان عضوهای M را در فهرستی به صورت m_1, m_2, m_3, \dots قرار داد. ولی حال پدیده‌ی غریبی رخ می‌دهد. فرض کنید عضو جدید x را به \mathbb{N} بیفزاییم. در این صورت $\mathbb{N} \cup \{x\}$ باز هم شماراست، و بنابراین اندازه‌ای برابر با \mathbb{N} دارد!

«هتل هیلبرت» تمثیل دلچسبی از این وضعیت است. فرض کنید هتلی تعدادی شمارا اتاق دارد که شماره‌های آنها ۱، ۲، ۳، ... است و مهمان g_i در اتاق i اقامت دارد؛ بنابراین، هتل کاملاً پُر است. حال مسافر جدیدی از راه می‌رسد و تقاضای اتاق می‌کند. مدیر هتل می‌گوید: متأسفم، همه اتاقها پُر است. تازه‌وارد می‌گوید مسأله‌ای نیست، مهمان g_1 را به اتاق ۲ انتقال دهید، مهمان g_2 را به اتاق ۳، g_3 را به اتاق ۴، و به همین ترتیب. در این صورت من اتاق ۱ را می‌گیرم. در میان شگفتی مدیر هتل (هرچه باشد او ریاضیدان نیست) این تدبیر کارساز است؛ او باز هم می‌تواند به همه مهمانها به‌اضافه تازه‌وارد x جا بدهد!

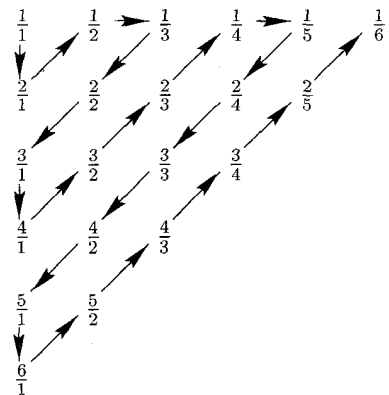
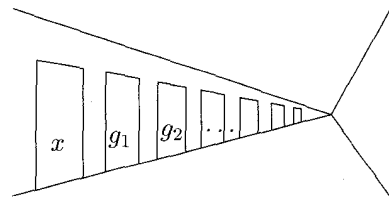
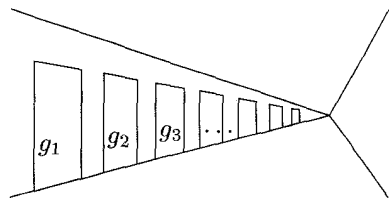
اکنون روشن است که او می‌تواند همین‌طور به مهمان دیگری چون y و مهمان دیگری مثل z ، و ... اتاق بدهد. به‌خصوص، ملاحظه می‌کنیم که، برخلاف مجموعه‌های متناهی، کاملاً ممکن است زیرمجموعه‌ای از یک مجموعه نامتناهی M هم‌اندازه با M باشد. در واقع، همان‌طور که خواهیم دید، مجموعه نامتناهی را می‌توان به این طریق توصیف کرد: یک مجموعه نامتناهی است اگر و تنها اگر هم‌اندازه با زیرمجموعه‌ای سره باشد.

بیاید از هتل هیلبرت بیرون بیاییم و نظری به مجموعه‌های عددی آشنای خود بیندازیم. مجموعه \mathbb{Z} از عددهای صحیح نیز شماراست زیرا می‌توان \mathbb{Z} را به صورت $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ مرتب کرد. شاید عجیب‌تر این باشد که مجموعه عددهای گویا، \mathbb{Q} ، نیز شماراست. با فهرست‌بندی مجموعه عددهای گویای مثبت، \mathbb{Q}^+ ، به‌صورتی که در شکل دیده می‌شود، می‌بینیم که \mathbb{Q}^+ شماراست، پس اگر 0 را در آغاز فهرست قرار دهیم و $-2/q$ را درست بعد از $2/q$ می‌بینیم \mathbb{Q} هم شماراست:

$$\mathbb{Q} = \{0, 1, -1, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 3, -3, 4, -4, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \dots\}$$

گزاره زیر، راه دیگری است برای تعبیر این شکل:

اجتماع تعدادی شمارا از مجموعه‌های شمارای M_n ، شماراست.



در واقع، قرار می‌دهیم $M_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots\}$ ، و فهرست زیر را دقیقاً مانند قبل تشکیل می‌دهیم

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = \{a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{14}, \dots\}$$

دربارهٔ عددهای حقیقی \mathbb{R} چه می‌توان گفت؟ آیا آنها هم شمارا هستند؟ نه، نیستند، و ابزاری که این موضوع را به‌وسیلهٔ آن نشان می‌دهند — روش قطری‌سازی کانتور — نه تنها اهمیت اساسی برای تمام نظریهٔ مجموعه‌ها دارد بلکه مسلماً به‌عنوان جرعهٔ نادر و بی‌نظیری از نبوغ به «کتاب» تعلق دارد.

قضیهٔ ۱. مجموعهٔ \mathbb{R} از اعداد حقیقی شمارا نیست.

■ اثبات. هر زیرمجموعه‌ای چون N از مجموعهٔ شمارای $M = \{m_1, m_2, m_3, \dots\}$ حداکثر شماراست (یعنی، متناهی یا شماراست). در واقع کافی است عضوهای N را به‌ترتیبی که در M ظاهر می‌شوند مرتب کنیم. بر این اساس، اگر بتوانیم زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R} پیدا کنیم که شمارا نباشد، \mathbb{R} هم به‌طریق اولی شمارا نیست. زیرمجموعهٔ M از \mathbb{R} که در جستجوی آنیم، بازهٔ $(0, 1)$ از همهٔ عددهای حقیقی مثبت r با ضابطهٔ $0 < r \leq 1$ است. فرض کنید M شمارا باشد و $M = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}$ فهرستی از اعضای M باشد. r_n را به‌صورت بسط اعشاری نامتناهی یکتای آن بدون دنبالهٔ نامتناهی صفرها در انتها، می‌نویسیم:

$$r_n = {}^0 a_{n1} a_{n2} a_{n3} \dots$$

که در آن $a_{ni} \in \{0, 1, \dots, 9\}$ به‌ازای هر n و i . مثلاً ${}^0 r_7 = {}^0 6999 \dots$ اکنون آرایهٔ از دو سو نامتناهی زیر را در نظر بگیرید

$$r_1 = {}^0 a_{11} a_{12} a_{13} \dots$$

$$r_2 = {}^0 a_{21} a_{22} a_{23} \dots$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$r_n = {}^0 a_{n1} a_{n2} a_{n3} \dots$$

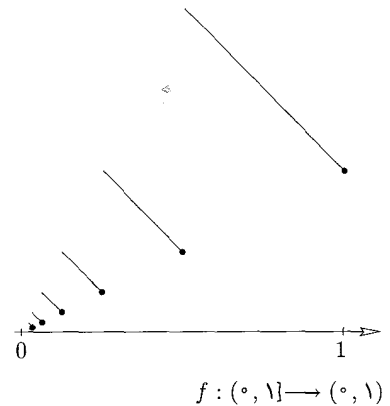
$$\vdots \quad \vdots$$

به‌ازای هر m ، $b_n \in \{1, \dots, 8\}$ را متفاوت با a_{nm} انتخاب می‌کنیم؛ روشن است که این کار انجام‌شدنی است. حال $b = {}^0 b_1 b_2 b_3 \dots b_n \dots$ عددی حقیقی در

مجموعه M مورد نظر است و بنابراین باید اندیسی داشته باشد مانند $b = r_k$. اما این امکان ندارد زیرا b_k متفاوت با a_{kk} است. و این تمام اثبات است! □

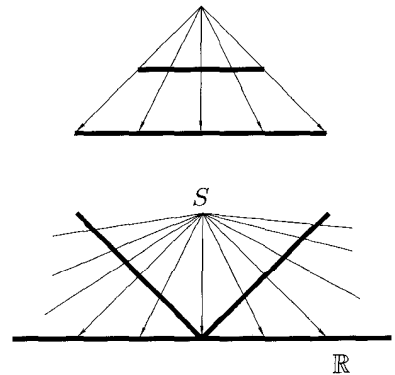
بیاید کمی به بحث عددهای حقیقی ادامه دهیم. خاطرنشان می‌کنیم که هر چهار نوع بازه $(\circ, 1)$ ، $(\circ, 1]$ ، $[\circ, 1)$ و $[\circ, 1]$ اندازه برابر دارند. به عنوان مثال، نشان می‌دهیم که $(\circ, 1)$ و $(\circ, 1]$ کاردینال برابر دارند، نگاشت $f: (\circ, 1) \rightarrow (\circ, 1]$ ، $x \mapsto y$ که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$y := \begin{cases} \frac{2}{3} - x & \frac{1}{3} < x \leq 1 \\ \frac{2}{3} - x & \frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{4} \\ \frac{2}{8} - x & \frac{1}{8} < x \leq \frac{1}{4} \\ \vdots \end{cases}$$



این کار را انجام می‌دهد. در واقع این نگاشت دوسویی است زیرا حوزه y در سطر اول، $\frac{1}{4} \leq y < 1$ است، در سطر دوم $\frac{1}{4} < y < \frac{1}{3}$ ، در سطر سوم $\frac{1}{8} \leq y < \frac{1}{4}$ و به همین ترتیب.

سپس با در نظر گرفتن تصویر مرکزی مانند شکل حاشیه، در می‌یابیم که هر دوبازه (با طول متناهی مثبت) اندازه برابر دارند. حتی حکمی فراتر از این هم صادق است: هر بازه (به طول مثبت) هم‌اندازه با تمام خط حقیقی \mathbb{R} است. برای ملاحظه این مطلب، بازه باز $(\circ, 1)$ را که در نقطه‌ای خم شده در نظر بگیرید و آن را از مرکز S به روی \mathbb{R} تصویر کنید.



در نتیجه، هر بازه باز، نیمباز، بسته (متناهی یا نامتناهی) به طول مثبت، اندازه یکسانی دارد و ما این اندازه را به c نشان می‌دهیم که c حرف اول *continuum* [پیوستار] است (نامی که گاه برای بازه $[\circ, 1]$ به کار می‌رود).

اینکه بازه‌های متناهی و نامتناهی اندازه برابر دارند می‌تواند با قدری تأمل قابل قبول باشد اما واقعیتی وجود دارد که با احساس شهودی ما کاملاً مغایر است.

قضیه ۲. مجموعه \mathbb{R}^2 مرکب از همه جفتهای مرتب عددهای حقیقی (یعنی صفحه واقعی) هم‌اندازه با \mathbb{R} است.

■ **اثبات.** کافی است ثابت کنیم که مجموعه همه جفتهای (x, y) ، $\circ < x, y \leq 1$ را می‌توان به طور دوسویی به روی $(\circ, 1)$ نگاشت. این اثبات نیز «کتابی» است. جفت

(x, y) را در نظر بگیرید و x و y را همان طور که در مثال زیر می بینید، به صورت بسط اعشاریشان بنویسید:

$$\begin{aligned} x &= \dots 08 \ 007 \ 2 \ 001 \ 3 \ 0 \\ y &= \dots 10008 \ 205 \ 009 \ 3 \ 0 \end{aligned}$$

توجه کنید که رقمهای x و y را به دسته های جداگانه تفکیک کرده ایم به این نحو که هر دسته از ارقام شامل یک رقم ناصفر و صفرهای قبل از آن است. حال به (x, y) عدد $z \in (0, 1]$ را نسبت می دهیم، به این طریق که اولین دسته از ارقام x و سپس اولین دسته از ارقام y ، آنگاه دومین دسته از ارقام x و ... را می نویسیم. پس در مثال بالا داریم

$$z = \dots 080008 \ 108 \ 007 \ 005 \ 22 \ 01 \ 3009 \ 3 \ 0 \dots$$

چون نه ارقام x و نه ارقام y به رشته ای از رقمهای صفر ختم نمی شوند، در می یابیم که بسط z نیز یک بسط اعشاری بی پایان است. به عکس، از روی بسط z می توانیم فوراً پیش تصویر آن (x, y) را بیابیم، و نگاشت دوسویی است — اثبات به پایان می رسد. \square

چون $(x, y) \mapsto x + iy$ نگاشتی دوسویی از \mathbb{R}^2 به روی عددهای مختلط \mathbb{C} است، نتیجه می گیریم که $|\mathbb{C}| = |\mathbb{R}| = c$. چرا حکم $|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$ این قدر غیر منتظره است؟ زیرا برخلاف ادراک شهودی ما از بعد است. این حکم حاکی است که صفحه دوبعدی \mathbb{R}^2 (و به طور کلی، به استقرا، فضای n بعدی \mathbb{R}^n) را می توان به طور دوسویی به روی خط یک بعدی \mathbb{R} نگاشت. پس بعد در حالت کلی به وسیله نگاشتهای دوسویی حفظ نمی شود. ولی اگر بخواهیم نگاشت و وارونش پیوسته باشند، آنگاه چنانکه براوتر برای نخستین بار نشان داد، بعد حفظ می شود.

حال کمی جلوتر می رویم. تا اینجا فقط از مفهوم برابری اندازه ها صحبت کرده ایم. چه وقتی می گوئیم اندازه M کوچکتر از اندازه N است؟ باز هم استفاده از نگاشت رهگشاست. می گوئیم عدد کاردینال m کوچکتر از n است اگر برای مجموعه های M و N با ضوابط $|M| = m$ ، $|N| = n$ ، نگاشتی دوسویی از M به روی زیرمجموعه ای از N وجود داشته باشد ولی هیچ نگاشت دوسویی از N به روی زیرمجموعه ای از M وجود نداشته باشد. واضح است که رابطه $m < n$ مستقل از مجموعه های M و N است که انتخاب شده اند. و این باز در مورد مجموعه های متناهی با ادراک شهودی ما همخوان است. مجموعه ای m عضوی کوچکتر از مجموعه ای n عضوی

است اگر و تنها اگر $m < n$. از دستگاه اصل موضوعی متعارف تسرملو-فرانکل در مورد مجموعه‌ها نتیجه می‌گیریم که رابطه $<$ برای کاردینالهای نامتناهی نیز معنی دارد. به‌ازای دو کاردینال دلخواه m و n دقیقاً یکی از سه حالت زیر ممکن است:

$$n < m \quad \text{یا} \quad m = n \quad \text{یا} \quad m < n$$

به‌علاوه، بنا به‌تعریف از طریق نگاشتها، رابطه $<$ متعدی است یعنی از $m < n$ و $n < p$ نتیجه می‌شود $m < p$. پس کاردینالها به‌ترتیب خطی و با شروع از کاردینالهای متناهی ۰، ۱، ۲، ۳، ... مرتب می‌شوند. با استفاده مجدد از اصول موضوع (به‌خصوص، اصل موضوع انتخاب) به‌آسانی در می‌یابیم که هر مجموعه نامتناهی M شامل زیرمجموعه‌ای شماراست. در واقع M شامل عضوی، مثلاً m_1 ، است. مجموعه $M \setminus \{m_1\}$ تهی نیست (زیرا نامتناهی است) و بنابراین شامل عنصری مانند m_2 است. با در نظر گرفتن $M \setminus \{m_1, m_2\}$ ، وجود m_3 را نتیجه می‌گیریم، و به‌همین ترتیب. پس، اندازه مجموعه‌ای شمارا، کوچکترین کاردینال نامتناهی است که معمولاً به \aleph_0 نشان داده می‌شود (و به‌صورت «الف صفر» تلفظ می‌شود).

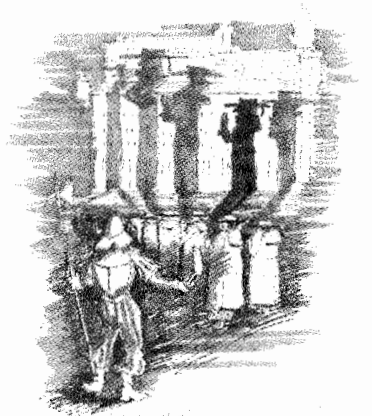
به‌عنوان پیامدی از رابطه $\aleph_0 \leq m$ به‌ازای هر کاردینال نامتناهی m ، می‌توانیم مستقیماً حکم مربوط به «هتل هیلبرت» را برای هر عدد کاردینال نامتناهی m ثابت کنیم یعنی این حکم را که به‌ازای هر مجموعه نامتناهی M داریم $|M \cup \{x\}| = |M|$. در واقع M شامل زیرمجموعه‌ای چون $N = \{m_1, m_2, m_3, \dots\}$ است. حال x را روی m_1 ، m_2 ، و به‌همین ترتیب، می‌نگاریم و در این جریان اعضای $M \setminus N$ را ثابت نگه می‌داریم. این نگاشت دوسویی مطلوب است.

تا اینجا عددهای کاردینال ۰، ۱، ۲، ...، \aleph_0 را می‌شناسیم و نیز می‌دانیم که c ، کاردینال \mathbb{R} ، بزرگتر از \aleph_0 است. گذار از \mathbb{Q} با ضابطه $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$ به \mathbb{R} با $c = |\mathbb{R}|$ ، پرسش زیر را فوراً به‌ذهن الهام می‌کند:

آیا $c = |\mathbb{R}|$ عدد کاردینال نامتناهی بلافاصله پس از \aleph_0 است؟

حالا البته با این مسأله روبه‌رویم که آیا عدد کاردینال بزرگتری که بلافاصله بعد از \aleph_0 باشد وجود دارد یعنی آیا \aleph_1 اصلاً معنی دارد یا نه. پاسخ مثبت است — رئوس اثبات آن در پیوست این فصل می‌آید.

گزاره $\aleph_1 = c$ به فرض پیوستار معروف شده است. مسأله درستی یا نادرستی این فرض موضوع بزرگترین چالشها در تمامی ریاضیات در طول چند دهه بوده است.



«کوچکترین کاردینال نامتناهی»

به این ترتیب، حکمی را نیز که قبلاً بیان کردیم ثابت کرده‌ایم:

هر مجموعه نامتناهی هم‌اندازه با زیرمجموعه‌ای سره است.

پاسخ آن که سرانجام به وسیله کورت گودل و پال کوهن عرضه شد، دستاورد نهایی تفکر منطقی در این زمینه است. آنها نشان دادند که گزاره $\aleph_1 = c$ مستقل از دستگاه اصول موضوع تسرملو-فرانکل است، همان طور که اصل موضوع توازی مستقل از دیگر اصول موضوع هندسه اقلیدسی است. مدلهایی از نظریه مجموعه‌ها هستند که در آنها $c = \aleph_1$ برقرار است، و مدلهای دیگری هم هستند که در آنها $c \neq \aleph_1$ درست است. در پرتو این واقعیت، پرسش بسیار جالبی مطرح می‌شود و آن این است که آیا نامزدهای دیگری (مثلاً از آنالیز) وجود دارند که معادل با فرض پیوستار باشند؟ در زیر می‌خواهیم چنین موردی را همراه با راه حل فوق‌العاده زیبا و ساده پال اردوش برای آن، ارائه کنیم. در سال ۱۹۶۲، تسل^۱ پرسش زیر را مطرح کرد:

فرض کنید $\{f_\alpha\}$ خانواده‌ای از تابعهای تحلیلی دوبه‌دو متمایز روی عدهای مختلط باشد به طوری که به ازای هر $z \in \mathbb{C}$ ، مجموعه مقادیر $\{f_\alpha(z)\}$ شمارا باشد؛ این ویژگی را (P_0) می‌نامیم:
در این صورت آیا نتیجه می‌شود که خود خانواده شماراست؟

مدت کوتاهی بعد، پال اردوش نشان داد که پاسخ، در نهایت تعجب، به فرض پیوستار وابسته است.

قضیه ۳. اگر $c > \aleph_1$ ، آنگاه هر خانواده $\{f_\alpha\}$ که در (P_0) صدق کند شماراست. اگر، از سوی دیگر $c = \aleph_1$ ، خانواده‌ای چون $\{f_\alpha\}$ با ویژگی (P_0) وجود دارد که اندازه‌اش c است.

برای اثبات قضیه به بعضی حکمهای بنیادی درباره عدهای کاردینال و آردینال نیاز داریم. برای خوانندگانی که با این مفهوما آشنا نیستند، پیوستی در انتهای فصل آمده است که تمام حکمهای ضروری در آن آورده شده‌اند.

■ اثبات قضیه ۳. نخست فرض می‌کنیم $c > \aleph_1$. نشان خواهیم داد که برای هر خانواده $\{f_\alpha\}$ با اندازه \aleph_1 از تابعهای تحلیلی، یک عدد مختلط z_0 وجود دارد به نحوی که همه \aleph_1 مقدار $f_\alpha(z_0)$ متمایزند. در نتیجه، اگر خانواده‌ای از تابعها در (P_0) صدق کند، آن خانواده شماراست.

برای ملاحظه این مطلب، از اطلاعات خود در مورد عدهای آردینال استفاده می‌کنیم. نخست خانواده $\{f_\alpha\}$ را برحسب عدد آردینال آغازی ω_1 از \aleph_1 خوش ترتیب

می‌کنیم. در نتیجه بنا به گزاره ۱ در پیوست، مجموعه اندیسها همه عددهای آردینال α را که کوچکتر از ω_1 هستند در بر می‌گیرد. سپس نشان می‌دهیم که مجموعه جفتهای (α, β) ، $\alpha < \beta < \omega_1$ دارای اندازه \aleph_1 است. چون هر $\beta < \omega_1$ یک آردینال شماراست، مجموعه جفتهای (α, β) ، $\alpha < \beta$ به‌ازای هر β ثابت شماراست. با در نظر گرفتن اجتماع روی همه \aleph_1 تا β ، از گزاره ۶ پیوست نتیجه می‌گیریم که مجموعه همه جفتهای (α, β) ، $\alpha < \beta$ ، دارای اندازه \aleph_1 است. اکنون برای هر جفت $\alpha < \beta$ ، مجموعه

$$S(\alpha, \beta) = \{z \in \mathbb{C} : f_\alpha(z) = f_\beta(z)\}$$

را در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم که هر مجموعه $S(\alpha, \beta)$ شماراست. برای نشان دادن این موضوع، دایره‌های C_k به‌شعاع $k = 1, 2, 3, \dots$ به‌مرکز مبدأ را در صفحه مختلط در نظر می‌گیریم. اگر f_α و f_β روی تعدادی نامتناهی نقطه در یک دایره C_k برابر باشند، آنگاه f_α و f_β بنا به قضیه معروفی در مورد توابع تحلیلی، یکسان هستند. پس f_α و f_β تنها در تعداد محدودی نقطه در هر C_k ، و بنابراین روی هم‌رفته در حداکثر تعداد شمارایی نقطه، تطابق دارند. حال قرار می‌دهیم $S = \bigcup_{\alpha < \beta} S(\alpha, \beta)$. باز بنا به گزاره ۶، می‌بینیم S دارای اندازه \aleph_1 است، زیرا هر مجموعه $S(\alpha, \beta)$ شماراست؛ و شاه‌بیت مطلب اینجاست: چون همان‌طور که می‌دانیم اندازه \mathbb{C} ، c است و c بنا به فرض بزرگتر از \aleph_1 است، عدد مختلط z ای وجود دارد که در S نیست، و به‌ازای این z همه \aleph_1 مقدار $f_\alpha(z_0)$ متمایزند.

اکنون فرض می‌کنیم $c = \aleph_1$. مجموعه $D \subseteq \mathbb{C}$ از عددهای مختلط را که دارای بخش حقیقی و بخش موهومی به‌صورت $p + iq$ هستند در نظر می‌گیریم. چون به‌ازای هر p مجموعه $\{p + iq : q \in \mathbb{Q}\}$ شماراست، پس D شماراست. به‌علاوه، D مجموعه‌ای چگال در \mathbb{C} است: هر قرص باز در صفحه مختلط شامل نقطه‌ای از D است. فرض کنیم $\{z_\alpha : 0 \leq \alpha < \omega_1\}$ مجموعه خوش‌ترتیبی از \mathbb{C} باشد. حال خانواده‌ای چون $\{f_\beta : 0 \leq \beta < \omega_1\}$ از \aleph_1 تابع تحلیلی متمایز می‌سازیم که

$$\alpha < \beta \quad f_\beta(z_\alpha) \in D \quad (۱)$$

هر چنین خانواده‌ای در شرط (P_0) صدق می‌کند. در واقع هر نقطه $z \in \mathbb{C}$ اندیسی، مثلاً $z = z_\alpha$ ، دارد. اکنون به‌ازای هر $\beta > \alpha$ ، مقادیر $\{f_\beta(z_\alpha)\}$ در مجموعه شمارای D قرار دارند. چون α یک عدد آردینال شماراست، تابعهای f_β با ضابطه $\beta \leq \alpha$ حداکثر تعداد شمارایی مقادیر $f_\beta(z_\alpha)$ دیگر تولید خواهند کرد، پس مجموعه همه

مقادیر $\{f_\beta(z)\}$ نیز حداکثر شماراست. بنابراین، اگر بتوانیم خانواده‌ای چون $\{f_\beta\}$ بسازیم که در (۱) صدق کند، آنگاه بخش دوم قضیه به اثبات می‌رسد.

ساختن $\{f_\beta\}$ با استقرای ترامتناهی به انجام می‌رسد. برای f_0 می‌توانیم تابع تحلیلی دلخواهی در نظر بگیریم، مثلاً ثابت $f_0 = f$. فرض کنید f_β قبلاً به ازای هر $\beta < \gamma$ ساخته شده است. چون γ اُردینالی شماراست، می‌توانیم $\{f_\beta : 0 \leq \beta < \gamma\}$ را به شکل دنباله‌ای چون g_1, g_2, g_3, \dots مرتب کنیم. با همین تجدید ترتیب در مورد $\{z_\alpha : 0 \leq \alpha < \gamma\}$ دنباله‌ای مانند w_1, w_2, w_3, \dots به دست می‌آید. حال تابعی چون f_γ می‌سازیم که به ازای هر n در شرطهای

$$f_\gamma(w_n) \neq g_n(w_n) \quad , \quad f_\gamma(w_n) \in D \quad (2)$$

صدق کند. شرط دوم تضمین می‌کند که همه تابعهای f_γ ($0 \leq \gamma < \omega_1$) متمایز باشند، و شرط اول همان (۱) است، در نتیجه (P_0) بنا به استدلال قبلی حاصل می‌شود. توجه کنید که شرط $f_\gamma(w_n) \neq g_n(w_n)$ باز استدلالی از نوع قطری‌سازی است.

برای ساختن f_γ می‌نویسیم

$$f_\gamma(z) := \varepsilon_0 + \varepsilon_1(z - w_1) + \varepsilon_2(z - w_1)(z - w_2) \\ + \varepsilon_3(z - w_1)(z - w_2)(z - w_3) + \dots$$

اگر γ اُردینالی متناهی باشد، آنگاه f_γ یک چندجمله‌ای و بنابراین تحلیلی است، و مسلماً می‌توانیم عددهای ε_i را چنان انتخاب کنیم که (۲) برقرار باشد. حال فرض کنید γ اُردینالی شماراست، در این صورت

$$f_\gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(z - w_1) \dots (z - w_n) \quad (3)$$

توجه کنید که مقادیر ε_m ($m \geq n$) هیچ تأثیری بر مقدار $f_\gamma(w_n)$ ندارند، بنابراین می‌توانیم ε_n را گام به گام انتخاب کنیم. اگر دنباله (ε_n) با سرعت کافی به 0 همگرا باشد، آنگاه (۳) تابعی تحلیلی تعریف می‌کند. و بالاخره، چون D مجموعه‌ای چگال است، می‌توانیم این دنباله (ε_n) را چنان انتخاب کنیم که f_γ شرطهای (۲) را برآورد، و اثبات به انجام می‌رسد. \square

پیوست: در بارهٔ عددهای کاردینال و اُردینال

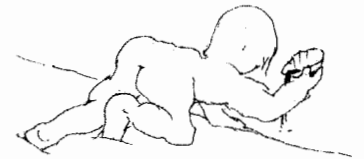
نخست به بحث دربارهٔ این پرسش می‌پردازیم که آیا به‌ازای هر عدد کاردینال یک کاردینال بزرگترِ بعدی وجود دارد یا نه. در آغاز نشان می‌دهیم که به‌ازای هر عدد کاردینال m همواره یک عدد کاردینال n بزرگتر از m وجود دارد. به‌این منظور باز از صورتی از روش قطری‌سازی کانتور استفاده می‌کنیم.

فرض می‌کنیم M یک مجموعه باشد، و ادعا می‌کنیم که مجموعهٔ $\mathcal{P}(M)$ مرکب از همهٔ زیرمجموعه‌های M اندازه‌ای بزرگتر از M دارد. با فرض اینکه $m \in M$ متناظر است با $\{m\} \in \mathcal{P}(M)$ ، می‌بینیم که M را می‌توان به‌طور دوسویی به‌روی زیرمجموعه‌ای از \mathcal{P} نگاشت، که از آن بنا به تعریف نتیجه می‌شود $|M| < |\mathcal{P}(M)|$. باقی می‌ماند که نشان دهیم $\mathcal{P}(M)$ نمی‌تواند به‌طور دوسویی به‌روی زیرمجموعه‌ای از M نگاشته شود. فرض کنید برخلاف این، $\varphi: N \rightarrow \mathcal{P}(M)$ نگاشتی دوسویی از $N \subseteq M$ به‌روی $\mathcal{P}(M)$ باشد. زیرمجموعهٔ $U \subseteq N$ مرکب از همهٔ عناصری از N را که مشمول در تصویرشان تحت φ نیستند در نظر می‌گیریم، یعنی $U = \{m \in N : m \notin \varphi(m)\}$. چون φ دوسویی است، u ای متعلق به N وجود دارد که $\varphi(u) = U$. حال یا $u \in U$ یا $u \notin U$ ، ولی هر دو حالت غیر ممکن است! در واقع اگر $u \in U$ آنگاه بنا به تعریف U داریم $u \notin U = \varphi(u)$ ، و به‌عکس اگر $u \notin U = \varphi(u)$ آنگاه $u \in U$ که تناقض است.

به احتمال زیاد، خواننده این استدلال را قبلاً دیده است. این همان معمای قدیمی آرایشگر است: «آرایشگر کسی است که سر همهٔ افرادی را که سر خود را نمی‌تراشند، می‌تراشد. آیا آرایشگر سر خود را می‌تراشد؟»

در ادامهٔ بحث دربارهٔ این نظریه، مفهوم مهم دیگری از کانتور یعنی مجموعه‌های مرتب و عددهای اُردینال را معرفی می‌کنیم. مجموعهٔ M با رابطهٔ $<$ مرتب می‌شود اگر رابطهٔ $<$ متعددی باشد، و اگر به‌ازای هر دو عضو متمایز a و b از M ، یا $a < b$ و یا $b < a$. مثلاً می‌توان \mathbb{N} را به‌طور معمول برحسب اندازهٔ عددها مرتب کرد: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ، ولی البته می‌توانیم \mathbb{N} را در جهت عکس مرتب کنیم: $\mathbb{N} = \{\dots, 4, 3, 2, 1\}$ یا به‌صورت $\mathbb{N} = \{1, 3, 5, \dots, 2, 4, 6, \dots\}$ که نخست عددهای فرد و سپس عددهای زوج را قرار دهیم.

در اینجا به مفهوم اساسی این مبحث می‌رسیم. مجموعهٔ مرتب M را خوش‌ترتیب می‌نامند اگر هر زیرمجموعهٔ ناتهی M دارای اولین عضو باشد. مثلاً ترتیب اول و سوم \mathbb{N} در بالا، مجموعه را خوش‌ترتیب می‌سازد ولی ترتیب دوم چنین نمی‌کند. حال حکم



«در افسانه‌ها آمده است که آگوستین قدیس، وقتی در ساحل دریا قدم می‌زد و دربارهٔ بینهایت می‌اندیشید، کودکی را دید که می‌خواست آب دریا را با صدفی کوچک خالی کند.»

اساسی موسوم به قضیه خوش‌ترتیبی که از اصول موضوع (از جمله اصل موضوع انتخاب) به دست می‌آید، چنین می‌گوید که هر مجموعه M پذیرای خوش‌ترتیبی است. از اینجا به بعد فقط مجموعه‌های خوش‌ترتیب مورد نظر ما هستند.

گوییم دو مجموعه خوش‌ترتیب M و N متشابه‌اند (یا دارای یک نوع ترتیب هستند) اگر نگاشتی دوسویی چون φ از M روی N وجود داشته باشد که ترتیب را محفوظ بدارد یعنی از $m <_M n$ نتیجه بشود $\varphi(m) <_N \varphi(n)$. توجه کنید که هر مجموعه مرتب که متشابه با مجموعه‌ای خوش‌ترتیب باشد، خودش خوش‌ترتیب است.

دو مجموعه خوش‌ترتیب $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

و $\mathbb{N} = \{1, 3, 5, \dots, 2, 4, 6, \dots\}$

متشابه نیستند: اولی فقط یک عضو با این

خاصیت دارد که عضوی قبل از آن وجود

ندارد، و دومی دو تا از این‌گونه اعضا دارد.

روشن است که تشابه، رابطه‌ای هم‌ارزی است و بنابراین می‌توانیم از یک عدد آردینال α متعلق به رده‌ای از مجموعه‌های متشابه صحبت کنیم. در مورد مجموعه‌های متناهی، هر دو ترتیب که بر مجموعه‌ای اعمال شوند، حاصل آن دو مجموعه خوش‌ترتیب متشابه است، و می‌توان از عدد آردینال n برای رده مجموعه‌های n عضوی سخن گفت. توجه کنید که بنا به تعریف، دو مجموعه متشابه دارای یک کاردینال هستند. پس صحبت از $|\alpha|$ ، کاردینال یک عدد آردینال α ، با معنی است. به علاوه توجه کنید که هر زیرمجموعه‌ای از یک مجموعه خوش‌ترتیب نیز با همان ترتیب، خوش‌ترتیب است.

اکنون همان‌طور که در مورد عددهای کاردینال عمل کردیم، عددهای آردینال را با هم مقایسه می‌کنیم. فرض کنید M مجموعه‌ای خوش‌ترتیب باشد، $m \in M$ در این صورت $M_m = \{x \in M : x < m\}$ قطعه‌ای (آغازی) از M که با m معین می‌شود، نام دارد؛ N قطعه‌ای از M است اگر به ازای m ای، $N = M_m$ پس، به خصوص، وقتی m نخستین عضو M است، M_m مجموعه تهی است. حال فرض می‌کنیم μ و ν عددهای آردینالی مجموعه‌های خوش‌ترتیب M و N باشند. گوییم μ کوچکتر از ν است، $\mu < \nu$ ، اگر M متشابه با قطعه‌ای از N باشد. و باز این قانون تعدی را داریم که از $\mu < \nu$ ، $\nu < \pi$ نتیجه می‌شود $\mu < \pi$ ، چون تحت یک نگاشت تشابه، یک قطعه به روی یک قطعه نگاشته می‌شود.

روشن است که $m < n$ برای مجموعه‌های متناهی همان معنای معمول را دارد. عدد آردینال $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ را که برحسب اندازه اعداد مرتب شده است با ω نشان می‌دهیم. با در نظر گرفتن قطعه \mathbb{N}_{n+1} در می‌یابیم که برای هر n متناهی، $n < \omega$ سپس می‌بینیم که $\omega \leq \alpha$ برای هر عدد آردینال نامتناهی α برقرار است. در واقع، اگر مجموعه خوش‌ترتیب نامتناهی M عدد آردینال α را داشته باشد، آنگاه M شامل نخستین عضوی چون m_1 است، مجموعه $M \setminus m_1$ شامل نخستین عضوی

عدد آردینال $\{1, 2, 3, \dots\}$ کوچکتر از

عدد آردینال $\{1, 3, 5, \dots, 2, 4, 6, \dots\}$

است.

چون m_2 است، $M \setminus \{m_1, m_2\}$ شامل نخستین عضوی چون m_3 است. اگر به همین طریق ادامه دهیم، دنباله $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$ در M حاصل می‌شود. اگر $M = \{m_1, m_2, m_3, \dots\}$ ، آنگاه M متشابه با \mathbb{N} است، و بنابراین $\alpha = \omega$. اگر، از سوی دیگر، $M \setminus \{m_1, m_2, \dots\}$ ناتهی باشد، آنگاه شامل نخستین عضوی چون m است، و نتیجه می‌گیریم که \mathbb{N} متشابه با قطعه M_m است، یعنی بنا به تعریف، $\omega < \alpha$. اکنون سه حکم اساسی را دربارهٔ عددهای اُردینال (بدون آوردن اثباتها، که دشوار هم نیستند) ذکر می‌کنیم. اولین حکم حاکی است که به‌ازای هر عدد اُردینال μ یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب W_μ هست که معرف «استاندارد» آن است.

گزارهٔ ۱. فرض می‌کنیم μ عددی اُردینال باشد و مجموعهٔ عددهای اُردینال کوچکتر از μ را به W_μ نشان می‌دهیم. در این صورت

(i) عضوهای W_μ دوبه‌دو قابل مقایسه‌اند.

(ii) اگر W_μ را برحسب اندازهٔ اعضا مرتب کنیم، آنگاه W_μ خوش‌ترتیب است و عدد اُردینال آن μ است.

گزارهٔ ۲. هر دو عدد اُردینال μ و ν در دقیقاً یکی از رابطه‌های $\mu < \nu$ ، $\mu = \nu$ ، یا $\mu > \nu$ صدق می‌کنند.

گزارهٔ ۳. هر مجموعه از عددهای اُردینال (که طبق اندازه‌شان مرتب شده باشند) خوش‌ترتیب است.

پس از این گشت و گذار در میان عددهای اُردینال، به عددهای کاردینال بر می‌گردیم. فرض می‌کنیم \mathfrak{m} یک عدد کاردینال است، و مجموعهٔ همهٔ عددهای اُردینال μ با ضابطهٔ $|\mu| = \mathfrak{m}$ را به $O_{\mathfrak{m}}$ نشان می‌دهیم. بنا به گزارهٔ ۳، یک کوچکترین عدد اُردینال $\omega_{\mathfrak{m}}$ در $O_{\mathfrak{m}}$ وجود دارد که آن را عدد اُردینال آغازی $O_{\mathfrak{m}}$ می‌نامیم. به‌عنوان مثال، ω را عدد اُردینال آغازی \aleph_0 می‌نامیم.

با این مقدمات، اکنون می‌توانیم حکم اساسی این فصل را ثابت کنیم.

گزارهٔ ۴. به‌ازای هر عدد کاردینال \mathfrak{m} ، عدد کاردینالی بزرگتر مشخصی بلافاصله پس از آن وجود دارد.

■ اثبات. از قبل می‌دانیم که عدد کاردینال بزرگتری چون \mathfrak{n} وجود دارد. حال مجموعهٔ K از همهٔ عددهای کاردینال بزرگتر از \mathfrak{m} و حداکثر برابر \mathfrak{n} را در نظر بگیرد. به‌هر

$p \in \mathcal{K}$ عدد اُردینال آغازیش ω_p را نسبت می‌دهیم. در میان این عددهای آغازی، یک کوچکترین عدد (گذرارهٔ ۳) وجود دارد و عدد کاردینال متناظر کوچکترین عدد در \mathcal{K} است، و بنابراین همان عدد کاردینال بزرگتر بلافاصله پس از \mathbf{m} است. \square

گذرارهٔ ۵. فرض کنید مجموعه نامتناهی M دارای کاردینال \mathbf{m} است، و M بر حسب عدد اُردینال آغازی $\omega_{\mathbf{m}}$ خوش‌ترتیب است. در این صورت M دارای آخرین عضو نیست.

■ اثبات. در واقع اگر m آخرین عضو M باشد، آنگاه قطعهٔ M_m یک عدد اُردینال $\omega_{\mathbf{m}} < \mu$ با ضابطهٔ $\mathbf{m} = |\mu|$ دارد که با تعریف $\omega_{\mathbf{m}}$ مغایر است. \square

چیزی که بالاخره به آن نیاز داریم، قویتر کردن این حکم است که اجتماع تعدادی شمارا از مجموعه‌های شمارا، خودش شماراست. در گذرارهٔ زیر، خانواده‌های دلخواه از مجموعه‌های شمارا را در نظر می‌گیریم.

گذرارهٔ ۶. فرض کنید $\{A_\alpha\}$ خانواده‌ای با اندازهٔ \mathbf{m} از مجموعه‌های شمارای A_α است که در آن \mathbf{m} کاردینالی نامتناهی است. در این صورت اندازهٔ اجتماع $\bigcup_{\alpha} A_\alpha$ حداکثر \mathbf{m} است.

■ اثبات. می‌توانیم فرض کنیم که مجموعه‌های A_α دوه‌دو مجزا هستند، زیرا این فقط می‌تواند اندازهٔ اجتماع را افزایش دهد. همچنین فرض می‌کنیم M با ضابطهٔ $\mathbf{m} = |M|$ مجموعهٔ اندیسه‌است، و آن را بر حسب عدد اُردینال آغازی $\omega_{\mathbf{m}}$ خوش‌ترتیب می‌کنیم. حال به جای هر $\alpha \in M$ مجموعهٔ شمارایی چون $B_\alpha = \{b_{\alpha 1} = \alpha, b_{\alpha 2}, b_{\alpha 3}, \dots\}$ قرار می‌دهیم که بر حسب ω مرتب شده است، و مجموعهٔ جدید را \tilde{M} می‌نامیم. در این صورت، \tilde{M} نیز با قراردادن $b_{\alpha i} < b_{\beta j}$ به ازای $\alpha < \beta$ و $b_{\alpha i} < b_{\alpha j}$ به ازای $i < j$ خوش‌ترتیب می‌شود. فرض کنیم $\tilde{\mu}$ عدد اُردینال \tilde{M} باشد. چون M زیرمجموعه‌ای از \tilde{M} است، بنا به یک استدلالی قبلی داریم $\mu \leq \tilde{\mu}$. اگر $\mu = \tilde{\mu}$ ، آنگاه M با \tilde{M} متشابه است، و اگر $\mu < \tilde{\mu}$ ، آنگاه M با قطعهٔ \tilde{M} متشابه است. حال، چون ترتیب $\omega_{\mathbf{m}}$ از M دارای آخرین عضو نیست (گذرارهٔ ۵)، می‌بینیم که M در هر دو حالت متشابه با اجتماع مجموعه‌های شمارای B_β است، و بنابراین همان کاردینال را دارد.

بقیهٔ کار آسان است. فرض کنیم $\varphi: \bigcup B_\beta \rightarrow M$ نگاشتی دوسویی باشد و $\varphi(B_\beta) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots\}$ هر α_i را با A_{α_i} تعویض می‌کنیم و اجتماع UA_{α_i}

را در نظر می‌گیریم. چون $\cup A_{\alpha_i}$ اجتماع تعداد شمارایی مجموعه شماراست (و بنابراین خود شماراست)، می‌بینیم که B_{β} با $\cup A_{\alpha_i}$ هم‌اندازه است. به عبارت دیگر، به ازای هر β نگاشتی دوسویی از B_{β} به $\cup A_{\alpha_i}$ و بنابراین نگاشتی دوسویی چون ψ از $\cup B_{\beta}$ به $\cup A_{\alpha}$ وجود دارد. اما اکنون $\psi\varphi^{-1}$ نگاشت دوسویی مطلوب از M به $\cup A_{\alpha}$ را به دست می‌دهد و از این رو $|\cup A_{\alpha}| = \mathfrak{m}$. \square

مراجع

- [1] L.E.J. BROUWER: *Beweis der Invarianz der Dimensionszahl*, Math. Annalen **70** (1911), 161-165.
- [2] P. ERDŐS: *An interpolation problem associated with the continuum hypothesis*, Michigan Math. J. **11** (1964), 9-10.
- [3] E. KAMKE: *Theory of Sets*, Dover Books 1950.

آنالیز مملو از نابرابریهاست؛ کتاب مشهور «نابرابریها» ی هاردی، لیتلود و پولیا، به عنوان مثال، شاهدی بر این مدعاست. در اینجا دو تا از بنیادترین نابرابریها را با دو کاربرد برای هر یک انتخاب و مطرح می‌کنیم، و می‌بینیم نظر جورج پولیا، که خودش یکی از چهره‌های شاخص «کتاب اثبات» است، دربارهٔ مناسبترین اثبات چیست. نخستین نابرابری ما منسوب به کوشی، شوارتس و / یا بونیاکوفسکی است.

قضیهٔ ۱ (نابرابری کوشی-شوارتس)

فرض کنید $\langle a, b \rangle$ یک حاصلضرب داخلی روی فضای برداری حقیقی V (با نرم $\langle a, a \rangle := |a|^2$) باشد. در این صورت، به‌ازای همهٔ بردارهای $a, b \in V$ رابطهٔ

$$\langle a, b \rangle^2 \leq |a|^2 |b|^2$$

برقرار است، و برابری وقتی و فقط وقتی برقرار است که a و b وابستهٔ خطی باشند.

■ اثبات. اثبات (متداول) زیر احتمالاً کوتاهترین اثبات این قضیه است. تابع درجهٔ

دوم

$$|xa + b|^2 = x^2 |a|^2 + 2x \langle a, b \rangle + |b|^2$$

از متغیر x را در نظر می‌گیریم. می‌توانیم فرض کنیم $a \neq 0$ ، روشن است که اگر $b = \lambda a$ آنگاه برابری برقرار است. اما اگر a و b مستقل خطی باشند، آنگاه به‌ازای هر x ، $|xa + b|^2 > 0$ ، و بنابراین مین $|a|^2 |b|^2 - \langle a, b \rangle^2$ کوچکتر از ۰ است. □

مثال دوم ما، نابرابریهای بین میانگین همساز، حسابی و هندسی است:

قضیهٔ ۲ (میانگین همساز، حسابی و هندسی)

فرض کنید a_1, \dots, a_n عددهایی حقیقی و مثبت باشند. در این صورت

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

برابری در هر دو مورد وقتی و فقط وقتی برقرار است که همهٔ a_i ها برابر باشند.

■ اثبات. اثبات استقرایی زیبا و نامتعارف زیر منسوب به کوشی است. ([۷] را ببینید). فرض کنید $P(n)$ گزاره‌ای باشد که نابرابری دوم را بیان می‌کند. این نابرابری را به شکل

$$a_1 a_2 \dots a_n \leq \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^n$$

می‌نویسیم.

به‌ازای $n = 2$ داریم $(a_1 - a_2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a_1 + a_2)^2 \geq 4a_1 a_2$ ، که درست است. حال دو مرحله‌ی زیر را طی می‌کنیم:

$$P(n) \Rightarrow P(n-1) \text{ (الف)}$$

$$P(n), P(2) \Rightarrow P(2n) \text{ (ب)}$$

که کل حکم به‌وضوح از آنها نتیجه می‌شود.

برای اثبات (الف)، قرار می‌دهیم $A := \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{n-1}$ ؛ در این صورت

$$\left(\prod_{k=1}^{n-1} a_k \right) A \stackrel{P(n)}{\leq} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n-1} a_k + A}{n} \right)^n = \left(\frac{(n-1)A + A}{n} \right)^n = A^n$$

$$\prod_{k=1}^{n-1} a_k \leq A^{n-1} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n-1} a_k}{n-1} \right)^{n-1} \quad \text{و بنابراین}$$

در مورد (ب) می‌بینیم

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{2n} a_k &= \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) \left(\prod_{k=n+1}^{2n} a_k \right) \stackrel{P(n)}{\leq} \left(\frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} \right)^n \left(\frac{\sum_{k=n+1}^{2n} a_k}{n} \right)^n \\ &\stackrel{P(n)}{\leq} \left(\frac{\sum_{k=1}^{2n} a_k}{2n} \right)^{2n} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{2n} a_k}{2n} \right)^{2n} \end{aligned}$$

شرط مربوط به برابری به‌همین سادگی استنتاج می‌شود. اکنون نابرابری طرف چپ بین میانگین همساز و هندسی، با در نظر گرفتن $\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}$ نتیجه می‌شود.

■ اثبات دیگر. از میان بسیاری اثباتهای دیگر از نابرابری میانگین حسابی-هندسی

فهرست بیش از 50° تا از این اثباتها در تکنگاشت [۲] آمده است) اثبات بسیار جالب و جدید آلتسر^۱ را بر می‌گزینیم. از این اثبات، در واقع، نابرابری قویتر

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_n^{p_n} \leq p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n$$

به‌ازای عددهای مثبت دلخواه $a_1, \dots, a_n, p_1, \dots, p_n$ با ضابطه $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ استنتاج می‌شود. عبارت سمت چپ را با G و عبارت سمت راست را با A نشان می‌دهیم. می‌توانیم فرض کنیم $a_1 \leq \dots \leq a_n$. واضح است که باید k ای وجود داشته باشد که: $a_k \leq G \leq a_{k+1}$. نتیجه می‌گیریم

$$\sum_{i=1}^k p_i \int_{a_i}^G \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{G} \right) dt + \sum_{i=k+1}^n p_i \int_G^{a_i} \left(\frac{1}{G} - \frac{1}{t} \right) dt \geq 0 \quad (1)$$

چون در هر انتگرال، عبارت زیر انتگرال نامنفی است. رابطه (۱) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\sum_{i=1}^n p_i \int_G^{a_i} \frac{1}{G} dt \geq \sum_{i=1}^n p_i \int_G^{a_i} \frac{1}{t} dt$$

که طرف چپ آن برابر است با

$$\sum_{i=1}^n p_i \frac{a_i - G}{G} = \frac{A}{G} - 1$$

و طرف راست آن چنین است

$$\sum_{i=1}^n p_i (\log a_i - \log G) = \log \prod_{i=1}^n a_i^{p_i} - \log G = 0$$

نتیجه می‌گیریم $0 \leq \frac{A}{G} - 1 \leq 0$ پس $A \geq G$. در حالت برابری، همه انتگرالها در (۱) باید صفر باشند که از آن نتیجه می‌شود. $a_1 = \dots = a_n = G$. \square

نخستین کاربرد ما حکم زیبایی است از لاگر ([۷] را ببینید) درباره مکان ریشه‌های چندجمله‌ایها.

قضیه ۱. فرض کنید همه ریشه‌های چندجمله‌ای $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$

حقیقی اند. در این صورت ریشه‌ها در بازه‌ای با نقاط انتهایی

$$-\frac{a_{n-1}}{n} \pm \frac{n-1}{n} \sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1} a_{n-2}}$$

هستند.

■ اثبات. فرض می‌کنیم y یکی از ریشه‌ها باشد و ریشه‌های دیگر، y_1, \dots, y_{n-1} باشند. در این صورت

$$\begin{aligned} -a_{n-1} &= y + y_1 + \dots + y_{n-1} \\ a_{n-2} &= y(y_1 + \dots + y_{n-1}) + \sum_{i < j} y_i y_j \end{aligned}$$

و بنابراین

$$a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} - y^2 = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2$$

اگر نابرابری کوشی را در مورد (y_1, \dots, y_{n-1}) و $(1, \dots, 1)$ به‌کار ببریم، داریم

$$\begin{aligned} (a_{n-1} + y)^2 &= (y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + y)^2 \\ &\leq (n-1) \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 = (n-1)(a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} - y^2) \end{aligned}$$

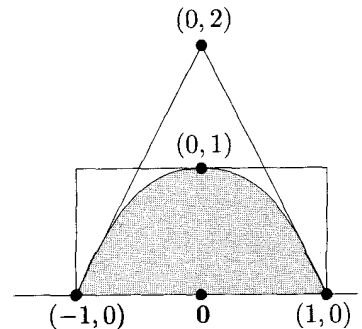
یا

$$y^2 + \frac{2a_{n-1}}{n}y + \frac{2(n-1)}{n}a_{n-2} - \frac{n-2}{n}a_{n-1}^2 \leq 0$$

پس y (و بنابراین هر y_i) بین دو ریشهٔ تابع درجه دوم قرار دارد و این ریشه‌ها کرانه‌های ما هستند. □

برای تشریح کاربرد دوم، از یک ویژگی مقدماتی معروف سهمی شروع استفاده می‌کنیم. سهمی به معادلهٔ $f(x) = 1 - x^2$ بین $x = -1$ و $x = 1$ را در نظر می‌گیریم. برای $f(x)$ یک مثلث مماسی و یک مستطیل مماسی طبق شکل رسم می‌کنیم.

می‌بینیم که مساحت ناحیهٔ هاشورخورده، $A = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx$ برابر $\frac{4}{3}$ است و مساحت‌های مثلث و مستطیل، T و R ، هر دو برابر ۲ هستند. پس $\frac{T}{A} = \frac{2}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2}$ و $\frac{R}{A} = \frac{2}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2}$. پال اردوش و تیور گالای در مقالهٔ زیبایی این پرسش را مطرح کردند که وقتی $f(x)$ یک چندجمله‌ای حقیقی درجهٔ n م دلخواه با ضابطهٔ $f(x) > 0$ به‌ازای



$-1 < x < 1$ و $f(-1) = f(1) = 0$ باشد چه پیش می‌آید. در این صورت، مساحت A برابر $\int_{-1}^1 f(x) dx$ خواهد بود. فرض کنید $f(x)$ در $(-1, 1)$ مقدار ماکسیم خود را به‌ازای b اختیار می‌کند، پس $R = 2f(b)$. با محاسبه معادلات مماسها به‌ترتیب در -1 و 1 به‌سادگی دیده می‌شود (تابلو را ببینید) که

$$T = \frac{2f'(1)f'(-1)}{f'(1) - f'(-1)} \quad (2)$$

و به‌ازای $f'(1) = f'(-1) = 0$ داریم $T = 0$.

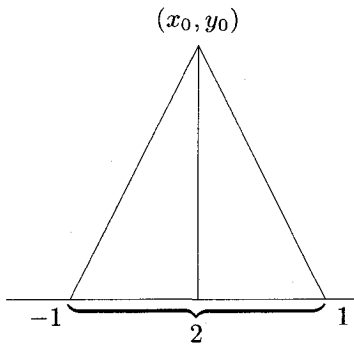
مثلت مماسی

مساحت مثلث مماسی، T ، دقیقاً y_0 است که در آن (x_0, y_0) نقطه تقاطع دو مماس است. معادله‌های این مماسها عبارت‌اند از $y = f'(-1)(x + 1)$ و $y = f'(1)(x - 1)$ پس

$$x_0 = \frac{f'(1) + f'(-1)}{f'(1) - f'(-1)}$$

و بنابراین

$$y_0 = f'(1) \left(\frac{f'(1) + f'(-1)}{f'(1) - f'(-1)} - 1 \right) = 2 \frac{f'(1)f'(-1)}{f'(1) - f'(-1)}$$



در حالت کلی، کرانهایی نابديهی برای $\frac{R}{A}$ و $\frac{T}{A}$ وجود ندارند. برای ملاحظه این مطلب، فرض می‌کنیم $f(x) = 1 - x^{2n}$. در این صورت $T = 2n$ ، $A = \frac{2n}{2n+1}$ ، و بنابراین $\frac{T}{A} > n$. به همین نحو $R = 2$ و لذا $\frac{R}{A} = \frac{2n+1}{2n}$ ، که وقتی n به بینهایت می‌گراید، این نسبت به ۱ میل کند.

ولی همان‌طور که اردوش و گلای نشان دادند، برای چندجمله‌ایهایی که فقط ریشه‌های حقیقی دارند، چنین کرانهایی وجود دارند.

قضیه ۲. فرض کنید $f(x)$ یک چندجمله‌ای حقیقی از درجه $2 \leq n$ باشد که فقط ریشه‌های حقیقی داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای $-1 < x < 1$ ، $f(x) > 0$ ، و $f(-1) = f(1) = 0$ پس

$$\frac{2}{3}T \leq A \leq \frac{2}{3}R$$

و برابری در هر دو حالت فقط به‌ازای $n = 2$ برقرار است.

Erdős, P. and Grünwald, T. On polynomials with only real roots. Ann. of Math. 40, 537-548 (1939). [MF 93]
Es sei $f(x)$ ein Polynom mit nur reellen Wurzeln.

$$f(-1) = f(1) = 0, \quad 0 < f(x) \leq f(\mu) \quad \text{für } -1 < x < 1,$$

wobei $-1 < \mu < 1$, so dass μ die Stelle des Maximums von $f(x)$ im Intervall $(-1, 1)$ bedeutet. Dann ist

$$\frac{2f'(1)f'(-1)}{f(1)-f(-1)} \leq \int_{-1}^1 f(x) dx \leq \frac{2}{3} \cdot 2f(\mu).$$

اردوش و گلاوی این حکم را با استدلال استقرایی پیچیده‌ای ثابت کردند. جورج بولیا در نقدی که بر مقاله آنها نوشت و در صفحه اول شماره اول مجله متمیکال ریویوز در سال ۱۹۴۰ به چاپ رسید، توضیح داد که چگونه نابرابری اول را با استفاده از نابرابری میانگین حسابی و هندسی نیز می‌توان ثابت کرد — این نوشته، نمونه زیبایی از نقد دقیق، و در عین حال حاوی اثباتی «کتابی» است.

■ اثبات $T \leq A$. چون $f(x)$ فقط ریشه‌های حقیقی دارد و هیچ یک از آنها درباره باز $(-1, 1)$ نیستند، می‌توان آن را — صرفنظر از یک ضریب ثابت مثبت که در آخر حذف می‌شود — به صورت زیر نوشت. $f(x)$

$$f(x) = (1-x^r) \prod_i (\alpha_i - x) \prod_j (\beta_j + x) \quad (3)$$

که در آن $\alpha_i \geq 1, \beta_j \geq 1$ پس

$$A = \int_{-1}^1 (1-x^r) \prod_i (\alpha_i - x) \prod_j (\beta_j + x) dx$$

با جانشانی $x \rightarrow -x$ همچنین در می‌یابیم که

$$A = \int_{-1}^1 (1-x^r) \prod_i (\alpha_i + x) \prod_j (\beta_j - x) dx$$

و از این رو بنابه نابرابری میانگین حسابی و هندسی (توجه کنید که همه عواملها نامنفی‌اند) داریم

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \left[(1-x^r) \prod_i (\alpha_i - x) \prod_j (\beta_j + x) + \right. \\ &\quad \left. (1-x^r) \prod_i (\alpha_i + x) \prod_j (\beta_j - x) \right] dx \\ &\geq \int_{-1}^1 (1-x^r) \left(\prod_i (\alpha_i^r - x^r) \prod_j (\beta_j^r - x^r) \right)^{1/2} dx \\ &\leq \int_{-1}^1 (1-x^r) \left(\prod_i (\alpha_i^r - 1) \prod_j (\beta_j^r - 1) \right)^{1/2} dx \\ &= \frac{2}{3} \left(\prod_i (\alpha_i^r - 1) \prod_j (\beta_j^r - 1) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

حال $f'(1)$ و $f'(-1)$ را محاسبه می‌کنیم. (می‌توانیم فرض کنیم $f'(-1) \neq 0$ و $f'(1) \neq 0$ ، چون در غیر این صورت $T = 0$ و نابری $T \leq A$ بدیهی می‌شود.)
بنابه (۲)

$$f'(1) = -2 \prod_i (\alpha_i - 1) \prod_j (\beta_j + 1)$$

و به همین نحو

$$f'(-1) = 2 \prod_i (\alpha_i + 1) \prod_j (\beta_j - 1)$$

پس نتیجه می‌گیریم

$$A \geq \frac{2}{3} (-f'(1)f'(-1))^{1/2}$$

حال با اعمال نابری میانگین همساز و هندسی بر $-f'(1)$ و $f'(1)$ ، بنابه (۲)،
به نتیجه زیر می‌رسیم

$$A \geq \frac{2}{3} \frac{2}{\frac{1}{-f'(1)} + \frac{1}{f'(-1)}} = \frac{4}{3} \frac{f'(1)f'(-1)}{f'(1) - f'(-1)} = \frac{2}{3} T$$

و این همان است که می‌خواستیم نشان دهیم. خواننده به راحتی می‌تواند با تحلیل حالت برابری در همه نابریهای ما حکم دوم قضیه را نتیجه بگیرد. \square

از خواننده دعوت می‌کنیم در جستجوی اثباتی از نابری دوم قضیه ۲ برآید که به همین اندازه متکرانه باشد.

خوب، نابریها در آنالیز بیش از هر جای دیگر مطرح می‌شوند ولی در اینجا مثالی از نظریه گراف می‌آوریم که در آن، استفاده از نابریها به طور نامنتظره مطرح می‌شود. در فصل ۲۷ درباره قضیه توران بحث خواهیم کرد. این قضیه در ساده‌ترین حالت خود به شکل زیر است:

قضیه ۳. فرض کنید G گرافی باشد با n رأس و بدون مثلث. در این صورت G حداکثر $\frac{2n}{3}$ یال دارد، و فقط وقتی دقیقاً این تعداد یال دارد که n زوج باشد و G گراف دو بخشی کامل $K_{n/2, n/2}$.

■ اثبات اول. این اثبات، که در آن از نابری کوشی استفاده می‌شود، متعلق به مانتل^۱

است. فرض کنیم $V = \{1, \dots, n\}$ مجموعه رأسها و E مجموعه یالهای G باشد. درجه i را با d_i نشان می‌دهیم، پس $\sum_{i \in V} d_i = 2|E|$ (صفحه ۱۷۴ را در فصل مربوط به شمارش دوگانه ببینید). گیریم ij یالی باشد. چون G مثلثی ندارد، داریم $d_i + d_j \leq n$ زیرا هیچ رأسی مجاور هر دوی i و j نیست.

نتیجه می‌گیریم

$$\sum_{ij \in E} (d_i + d_j) \leq n|E|$$

توجه کنید که d_i دقیقاً d_i بار در مجموع ظاهر می‌شود. پس داریم

$$n|E| \geq \sum_{ij \in E} (d_i + d_j) = \sum_{i \in V} d_i^2$$

و بنابراین با به‌کاربردن نابرابری کوشی در مورد بردارهای $(d_1, \dots, d_n)^T$ و $(1, \dots, 1)^T$ خواهیم داشت

$$n|E| \geq \sum_{i \in V} d_i^2 \geq \frac{(\sum d_i)^2}{n} = \frac{4|E|^2}{n}$$

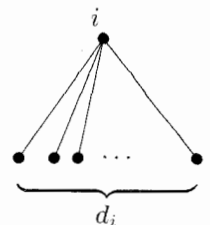
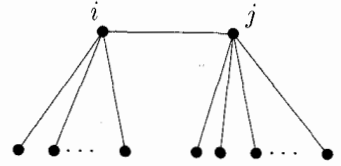
و حکم حاصل می‌شود. در حالت برابری به‌ازای هر i و j ، $d_i = d_j$ ، و در نتیجه $d_i = \frac{n}{2}$ (زیرا $d_i + d_j = n$). چون G عاری از مثلث است، $G = K_{n/2, n/2}$ است، \square فوراً نتیجه می‌شود.

■ اثبات دوم. اثبات زیر از قضیه ۳، که در آن از نابرابری میانگین حسابی و هندسی استفاده می‌شود، یک اثبات «کتابی» معروف است. فرض می‌کنیم α اندازه بزرگترین مجموعه مستقل A باشد، و قرار می‌دهیم $\beta = n - \alpha$. چون G عاری از مثلث است، رأسهای مجاور رأس i مجموعه مستقلی تشکیل می‌دهند و نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر i ، $d_i < \alpha$.

مجموعه $B = V \setminus A$ با اندازه β با هر یال G تلاقی دارد [رأسی از هر یال در B است] پس رابطه $|E| \leq \sum_{i \in B} d_i$ را به‌دست می‌آوریم. اکنون از نابرابری میانگین حسابی و هندسی نتیجه می‌گیریم

$$|E| \leq \sum_{i \in B} d_i \leq \alpha\beta \leq \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4}$$

و باز حالت برابری به‌سادگی حل و فصل می‌شود. \square



مراجع

- [1] H. ALZER: *A proof of the arithmetic mean-geometric mean inequality*, Amer. Math. Monthly **103** (1996), 585.
- [2] P.S. BULLEN, D.S. MITRINOVICS & P.M. VASIĆ: *Means and their Inequalities*, Reidel, Dordrecht 1988.
- [3] P. ERDŐS & T. GRÜNWARD: *On polynomials with only real roots*, Annals Math. **40** (1939), 537-548.
- [4] G.H. HARDY, J.E. LITTLEWOOD & G. PÓLYA: *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge 1952.
- [5] W. MANTEL: *Problem 28*, Wiskundige Opgaven **10** (1906), 60-61.
- [6] G. PÓLYA: *Review of [3]*, Mathematical Reviews **1** (1940), 1.
- [7] G. PÓLYA & G. SZEGÖ: *Problems and Theorems in Analysis, Vol. I*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1972/78; Reprint 1998.



جورج پولیا

از میان کارهای بسیار پولیا در آنالیز، دستاورد زیر همواره مورد علاقهٔ اردوش بوده است، هم به علت شگفت‌انگیز بودن حکم و هم به علت زیبایی اثبات. فرض کنید

$$f(z) = z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b.$$

چند جمله‌ای مختلطی با درجهٔ $n \geq 1$ ، و با ضریب پیشرو ۱ باشد. مجموعهٔ

$$C := \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq 2\}$$

را به $f(z)$ منسوب می‌سازیم یعنی مجموعهٔ نقاطی است که تحت f به دایره‌ای به شعاع ۲ و مرکز مبدأ در صفحهٔ مختلط نگاشته می‌شوند. پس به ازای $n = 1$ ، قلمرو C قرص مستدیری به قطر ۴ است.

پولیا با استدلالی که به طرز شگفت‌انگیزی ساده است، آشکار ساخت که مجموعهٔ C ویژگی زیبایی زیر را دارد:

خط دلخواه L در صفحهٔ مختلط و تصویر عمودی مجموعهٔ C بر L ، C_L ، را در نظر بگیرید. طول کل هر چنین تصویری هرگز از ۴ بیشتر نیست، و این موضوع برای هر چند جمله‌ای با ضریب پیشرو ۱ صادق است.

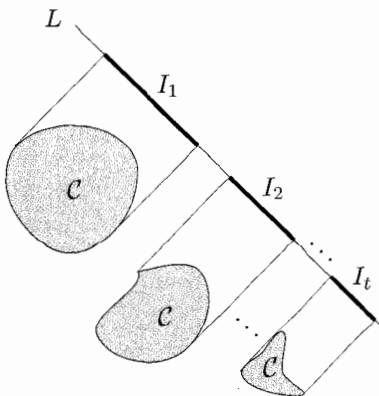
منظور ما از اینکه طول کل تصویر C_L حداکثر ۴ است، چیست؟ خواهیم دید که C_L اجتماعی متناهی از بازه‌های مجزای I_1, \dots, I_t است، و این شرط بدان معنی است که $\ell(I_1) + \dots + \ell(I_t) \leq 4$ در آن طول معمولی بازه است.

با دوران دادن صفحه، می‌بینیم کافی است حالتی را در نظر بگیریم که L محور حقیقی صفحهٔ مختلط است. حال با در نظر داشتن این نکته‌ها قضیهٔ پولیا را بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۱. فرض کنید $f(z)$ چند جمله‌ای مختلطی با درجهٔ حداقل ۱ و ضریب پیشرو ۱ باشد. قرار دهید. $C = \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq 2\}$ ، و فرض کنید \mathcal{R} تصویر عمودی C به روی محور حقیقی باشد. در این صورت بازه‌های I_1, \dots, I_t روی محور حقیقی وجود دارند که همراه با هم \mathcal{R} را می‌پوشانند و در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند

$$\ell(I_1) + \dots + \ell(I_t) \leq 4$$

1. leading coefficient



واضح است که کران ۴ در این قضیه به ازای $n = 1$ حاصل می‌شود. برای اینکه شناخت بیشتری از مسأله به دست آورید، نگاهی به چندجمله‌ای $f(z) = z^2 - 2$ بیندازید که آن هم کران ۴ را دارد. اگر $z = x + iy$ عددی مختلط باشد، آنگاه x تصویر عمودی آن بر محور حقیقی است. پس

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R} : x + iy \in C, \text{ به ازای } iy\}$$

خواننده به راحتی می‌تواند ثابت کند که برای $f(z) = z^2 - 2$ داریم $x + iy \in C$ اگر و تنها اگر

$$(x^2 + y^2)^2 \leq 4(x^2 - y^2)$$

نتیجه می‌گیریم که $x^4 \leq (x^2 + y^2)^2 \leq 4x^2$ و بنابراین $x^2 \leq 4$ یعنی $|x| \leq 2$. از سوی دیگر، هر $z = x \in \mathbb{R}$ با ضابطه $|x| \leq 2$ در $|z^2 - 2| \leq 2$ صدق می‌کند، و در می‌یابیم که \mathcal{R} دقیقاً بازه $[-2, 2]$ به طول ۴ است.

به عنوان نخستین گام به سوی اثبات، می‌نویسیم $f(z) = (z - c_1) \cdots (z - c_n)$ که در آن $c_k = a_k + ib_k$ و چندجمله‌ای حقیقی $p(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_n)$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید $z = x + iy \in C$. در این صورت بنابه قضیه فیثاغورس

$$|x - a_k|^2 + |y - b_k|^2 = |z - c_k|^2$$

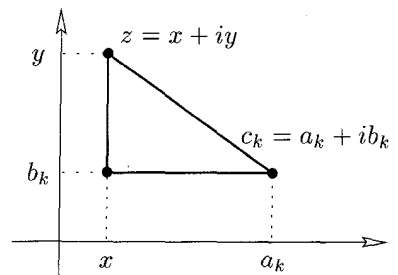
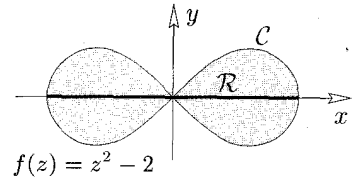
و بنابراین به ازای هر k ، $|x - a_k| \leq |z - c_k|$ ، یعنی

$$|p(x)| = |x - a_1| \cdots |x - a_n| \leq |z - c_1| \cdots |z - c_n| = |f(z)| \leq 2$$

پس نتیجه می‌گیریم که \mathcal{R} در مجموعه $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R} : |p(x)| \leq 2\}$ قرار دارد، و اگر بتوانیم نشان دهیم که مجموعه اخیر را بازه‌هایی با طول کل حداکثر ۴ می‌پوشانند، به هدف رسیده‌ایم. پس قضیه اصلی ما، قضیه ۱، پیامدی از قضیه زیر خواهد بود.

قضیه ۲. فرض کنید $p(x)$ یک چندجمله‌ای حقیقی از درجه $n \geq 1$ با ضریب پیشرو ۱ باشد، و همه ریشه‌های حقیقی باشند. در این صورت، مجموعه $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R} : |p(x)| \leq 2\}$ را می‌توان با بازه‌هایی که طول کل آنها حداکثر ۴ باشد، پوشاند.

همان‌طور که بولیا در مقاله‌اش [۲] نشان می‌دهد، قضیه ۲ نیز پیامدی از قضیه مشهور زیر است که متعلق به چیشف است. برای اینکه این فصل خودکفا باشد،



اثباتی در پیوست آورده‌ایم (مطابق شرح زیبای پولیا و سگو).

قضیهٔ چیشف

فرض کنید $p(x)$ یک چندجمله‌ای حقیقی از درجهٔ $1 \leq n$ با ضریب پیشرو ۱ باشد.

در این صورت

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |p(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$$

ابتدا به‌یامد مستقیم زیر توجه کنید.

فرض کنید $p(x)$ یک چندجمله‌ای حقیقی از درجهٔ $1 \leq n$ با ضریب پیشرو ۱

باشد، و به‌ازای هر x در بازهٔ $[a, b]$ ، $|p(x)| \leq 2$. در این صورت $b - a \leq 4$.

■ اثبات. جانشانی $y = \frac{x-a}{b-a}(x-a) - 1$ را در نظر می‌گیریم. این جانشانی، بازهٔ x ها یعنی $[a, b]$ را به‌روی بازهٔ y ها یعنی $[-1, 1]$ می‌نگارد. چندجمله‌ای متناظر

$$q(y) = p\left(\frac{b-a}{2}(y+1) + a\right)$$

دارای ضریب پیشرو $\left(\frac{b-a}{2}\right)^n$ است و در

$$\max_{-1 \leq y \leq 1} |q(y)| = \max_{a \leq x \leq b} |p(x)|$$

صدق می‌کند. بنابه قضیهٔ چیشف داریم

$$2 \geq \max_{a \leq x \leq b} |p(x)| \geq \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \frac{1}{2^{n-1}} = 2 \left(\frac{b-a}{4}\right)^n$$

و بنابراین، $b - a \leq 4$ ، که مطلوب ماست. □

این فرع ما را به قضیهٔ ۲ بسیار نزدیک می‌کند. اگر مجموعهٔ $\mathcal{P} = \{x : |p(x)| \leq 2\}$

یک بازه باشد، طول \mathcal{P} حداکثر ۴ است. ولی مجموعهٔ \mathcal{P} ممکن است بازه نباشد،

مانند مثالی که در حاشیه نشان داده شده است و در آن \mathcal{P} مرکب از دو بازه است.

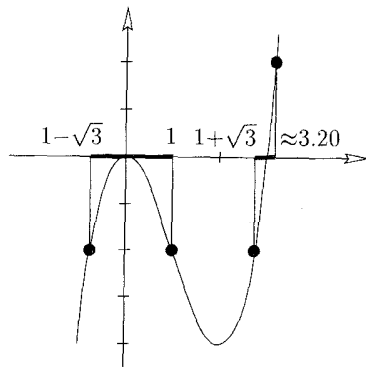
دربارهٔ \mathcal{P} چه می‌توان گفت؟ چون $p(x)$ تابعی پیوسته است، در هر حال می‌دانیم

که \mathcal{P} اجتماع بازه‌های بستهٔ مجزای I_1, I_2, \dots است و $p(x)$ مقدار ۲ یا -2 را در

هر نقطهٔ انتهایی یک بازهٔ I_j اختیار می‌کند. از اینجا نتیجه می‌شود که فقط تعدادی

متناهی بازهٔ I_1, \dots, I_t وجود دارد زیرا $p(x)$ هر مقدار را فقط به تعداد متناهی از

دفعات می‌تواند اختیار کند.



برای چندجمله‌ای $p(x) = x^3(x-3)$ به‌دست می‌آوریم

$$\mathcal{P} = \{-1-\sqrt{3}, 1\} \cup \{1+\sqrt{3}, \approx 3.2\}$$

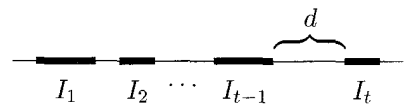
ایدهٔ عالی پولیا، ساختن چندجمله‌ای دیگر چون $\tilde{p}(x)$ از درجهٔ n ، بازهم با ضریب پیشرو ۱، بود به طوری که $\tilde{\mathcal{P}} = \{x : |\tilde{p}(x)| \leq 2\}$ بازه‌ای به طول دستکم $\ell(I_1) + \dots + \ell(I_t)$ باشد. در این صورت بنابه فرع بالا ثابت می‌شود $\ell(I_1) + \dots + \ell(I_t) \leq \ell(\tilde{\mathcal{P}}) \leq 4$ و اثبات به انجام می‌رسد.

■ اثبات قضیهٔ ۲. $p(x) = (x - a_1) \dots (x - a_n)$ را با

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R} : |p(x)| \leq 2\} = I_1 \cup \dots \cup I_t$$

در نظر می‌گیریم؛ در اینجا بازه‌های I_j را چنان مرتب می‌کنیم که I_1 در منتهی‌الیه چپ و I_t در منتهی‌الیه راست قرار گیرد. نخست ادعا می‌کنیم که هر بازهٔ I_j شامل ریشه‌ای از $p(x)$ است. می‌دانیم که $p(x)$ مقادیر ۲ یا -۲ را در نقطه‌های انتهایی I_j می‌گیرد. اگر یکی از این دو مقدار ۲ و دیگری -۲ باشد، آنگاه مسلماً ریشه‌ای در I_j وجود دارد. پس فرض کنیم در هر دو انتها $p(x) = 2$ (حالت -۲ نیز شبیه همین حالت است). گیریم $b \in I_j$ نقطه‌ای باشد که $p(x)$ در آنجا منبسط خود در I_j را اختیار می‌کند. در این صورت $p'(b) = 0$ و $p''(b) \geq 0$. اگر $p''(b) = 0$ ، آنگاه b ریشهٔ چندگانه‌ای از $p'(x)$ است، و لذا بنابه حکم ۱ در تابلو صفحهٔ بعد، ریشه‌ای از $p(x)$ است. ولی اگر $p''(b) > 0$ ، از حکم ۲ در همان تابلو نتیجه می‌گیریم $p(b) \leq 0$. پس یا $p(b) = 0$ ، و ما ریشهٔ خود را داریم، یا $p(b) < 0$ ، و ما ریشه‌ای در بازهٔ از b تا یک نقطهٔ انتهایی I_j به دست می‌آوریم.

حال می‌رسیم به ایدهٔ نهایی اثبات. فرض می‌کنیم بازه‌های I_1, \dots, I_t مانند قبل باشند و I_1 بازهٔ منتهی‌الیه راست، شامل m ریشه از $p(x)$ (با احتساب چندگانگی آنها) باشد. اگر $m = n$ ، آنگاه I_t (بنابه آنچه هم‌اکنون ثابت کردیم) تنها بازه است، و کار ما به پایان می‌رسد. پس فرض می‌کنیم $m < n$ و d مطابق شکل، فاصلهٔ بین I_{t-1} و I_t باشد. گیریم b_1, \dots, b_m ریشه‌هایی از $p(x)$ باشند که در I_1 قرار دارند و c_1, \dots, c_{n-m} بقیهٔ ریشه‌ها باشند. اکنون می‌نویسیم $p(x) = q(x)r(x)$ که در آن $q(x) = (x - b_1) \dots (x - b_m)$ و $r(x) = (x - c_1) \dots (x - c_{n-m})$ و قرار می‌دهیم $p_1(x) = q(x + d)r(x)$. چندجمله‌ای $p_1(x)$ باز از درجهٔ n و دارای ضریب پیشرو ۱ است. برای $x \in I_1 \cup \dots \cup I_{t-1}$ ، به‌ازای هر i داریم $|x - b_i| < |x + d - b_i|$ و بنابراین $|q(x + d)| < |q(x)|$. نتیجه می‌گیریم



$$|p_1(x)| \leq |p(x)| \leq 2 \quad \text{برای } x \in I_1 \cup \dots \cup I_{t-1}$$

حال اگر $x \in I_t$ داریم $|r(x)| \leq |r(x-d)|$ و بنابراین

$$|p_1(x-d)| = |q(x)||r(x-d)| \leq |p(x)| \leq 2$$

که بدان معنی است که $\{x : |p_1(x)| \leq 2\}$ شامل $I_t - d$ است.

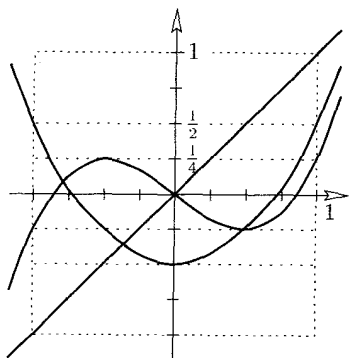
به‌طور خلاصه، می‌بینیم که \mathcal{P}_1 شامل $I_1 \cup \dots \cup I_{t-1} \cup (I_t - d)$ است و بنابراین طول کل آن دست‌کم به اندازه \mathcal{P} است. حال توجه کنید که با گذار از $p(x)$ به $p_1(x)$ بازه‌های I_{t-1} و $I_t - d$ ادغام شده به‌صورت یک بازه در می‌آیند. نتیجه می‌گیریم طول کل بازه‌های J_1, \dots, J_s از $p_1(x)$ که \mathcal{P}_1 را می‌سازند، دست‌کم $\ell(I_1) + \dots + \ell(I_t)$ است و J_s یعنی بازهٔ منتهی‌الیه راست شامل بیش از m ریشه از $p_1(x)$ است. با حداکثر $t-1$ بار تکرار این فرایند، سرانجام به یک چندجمله‌ای چون $\tilde{p}(x)$ با $|\tilde{p}(x)| \leq 2$ می‌رسیم که بازه‌ای است به طول $\ell(\tilde{\mathcal{P}}) \geq \ell(I_1) + \dots + \ell(I_t)$ و اثبات به‌انجام می‌رسد. \square

پیوست: قضیهٔ چیشف

قضیه. فرض کنید $p(x)$ یک چندجمله‌ای حقیقی از درجهٔ $n \geq 1$ با ضریب پیشرو ۱ باشد. در این صورت

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |p(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$$

پیش از شروع اثبات، بیایید به چند نمونه که در مورد آنها حالت برابری در این رابطه برقرار است نگاهی بیندازیم. در تصویر حاشیه، نمودار چندجمله‌ایهایی از درجهٔ ۱، ۲، و ۳ دیده می‌شود که در آنها برابری برقرار است. در واقع خواهیم دید که به‌ازای هر درجه، دقیقاً یک چندجمله‌ای وجود دارد که برای آن، رابطهٔ قضیهٔ چیشف به‌صورت برابری است.



به‌ازای چندجمله‌ایهای $p_1(x) = x$
 $p_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ و $p_3(x) = x^3 - \frac{1}{4}$
 حالت برابری در قضیهٔ چیشف برقرار است.

■ اثبات. چندجمله‌ای حقیقی $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ با ضریب پیشرو ۱ را در نظر می‌گیریم. چون دامنهٔ $-1 \leq x \leq 1$ مورد نظر ماست، قرار می‌دهیم $x = \cos \vartheta$ و چندجمله‌ای حاصل برحسب $\cos \vartheta$ را با $g(\vartheta) := p(\cos \vartheta)$ نشان می‌دهیم

$$g(\vartheta) = (\cos \vartheta)^n + a_{n-1}(\cos \vartheta)^{n-1} + \dots + a_0. \quad (1)$$

دو حکم دربارهٔ چندجمله‌ای‌های با ریشه‌های حقیقی

فرض کنید $p(x)$ یک چندجمله‌ای غیرثابت باشد که فقط ریشه‌های حقیقی دارد.

حکم ۱. اگر b ریشهٔ چندجمله‌ای از $p'(x)$ باشد، آنگاه b ریشه‌ای از $p(x)$ نیز هست.

■ اثبات. فرض کنیم b_1, \dots, b_r ریشه‌های $p(x)$ با چندگانگی‌های s_1, \dots, s_r

باشد. از $\sum_{j=1}^r s_j = n$ نتیجه می‌گیریم که b_j ریشه‌ای از $p(x) = (x - b_j)^{s_j} h(x)$

است اگر $s_j \geq 2$ ، و چندگانگی b_j در $p'(x)$ برابر $s_j - 1$ است. به علاوه،

ریشه‌ای از $p'(x)$ بین b_1 و b_2 ، ریشهٔ دیگری بین b_2 و b_3 ، ... و یک ریشه بین b_{r-1} و b_r

وجود دارد، و همهٔ این ریشه‌ها باید یگانه (ساده) باشند زیرا $(s_j - 1) + (r - 1)$

برابر با درجهٔ $p'(x)$ یعنی $n - 1$ است. در نتیجه، ریشه‌های چندجمله‌ای $p'(x)$ فقط

می‌توانند در میان ریشه‌های $p(x)$ باشند. □

حکم ۲. به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $p'(x)^2 \geq p(x)p''(x)$

■ اثبات. اگر $x = a_i$ ریشه‌ای از $p(x)$ باشد، آنگاه چیزی برای اثبات نمی‌ماند.

پس فرض می‌کنیم x ریشه نباشد. طبق قاعدهٔ مشتق‌گیری از حاصلضرب داریم

$$p'(x) = \sum_{k=1}^n \frac{p(x)}{x - a_k}$$

$$p''(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^n \frac{p(x)}{(x - a_k)(x - a_\ell)} = 2p(x) \sum_{\{k, \ell\}} \frac{1}{(x - a_k)(x - a_\ell)}$$

که در آن $\{k, \ell\}$ همهٔ جفتهای $\{1, \dots, n\}$ را اختیار می‌کند. پس

$$p'(x)^2 = p(x)^2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x - a_k} \right)^2$$

$$> 2p(x)^2 \sum_{\{k, \ell\}} \frac{1}{(x - a_k)(x - a_\ell)} = p(x)p''(x)$$

و اثبات به انجام می‌رسد. □

حال اثبات با طی کردن سه مرحلهٔ زیر انجام می‌شود که همه نتایج معروفی هستند و هر یک به‌خودی خود نیز جالب توجه است.

(الف) $g(\vartheta)$ را به‌صورت یک چندجمله‌ای کسینوسی یعنی یک چندجمله‌ای به‌شکل

$$g(\vartheta) = b_n \cos n\vartheta + b_{n-1} \cos(n-1)\vartheta + \dots + b_1 \cos \vartheta + b_0. \quad (2)$$

می‌نویسیم که در آن $b_k \in \mathbb{R}$ ، و نشان می‌دهیم که ضریب پیشرو آن عبارت است از $b_n = \frac{1}{r^{n-1}}$.

(ب) با مفروض بودن چندجمله‌ای کسینوسی دلخواه $h(\vartheta)$ از مرتبهٔ n (یعنی λ_n بالاترین ضریب ناصفر است):

$$h(\vartheta) = \lambda_n \cos n\vartheta + \lambda_{n-1} \cos(n-1)\vartheta + \dots + \lambda_0. \quad (3)$$

نشان می‌دهیم $|\lambda_n| \leq \max |h(\vartheta)|$ که اگر بر $g(\vartheta)$ اعمال شود، قضیه ثابت می‌گردد.

(پ) در مسیر اثبات (ب) حکم جالب توجه زیر را ثابت می‌کنیم: اگر $h(\vartheta) = \lambda_n \cos n\vartheta + \dots + \lambda_0$ یک چندجمله‌ای کسینوسی نامنفی از مرتبهٔ n باشد، آنگاه $|\lambda_n| \leq \lambda_0$.

اثبات (الف). برای اینکه از (۱) به‌نمایش (۲) برسیم، باید همهٔ توانهای $(\cos \vartheta)^k$ را به‌صورت چندجمله‌ایهای کسینوسی بیان کنیم. مثلاً از قضیهٔ جمع کسینوسها نتیجه می‌شود

$$\cos 2\vartheta = \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta = 2 \cos^2 \vartheta - 1$$

پس $\cos^2 \vartheta = \frac{1}{2} \cos 2\vartheta + \frac{1}{2}$. به‌منظور انجام این کار برای توان دلخواه $(\cos \vartheta)^k$ ، از طریق رابطهٔ $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ به‌سراغ عددهای مختلط می‌رویم. عددهای e^{ix} عددهای مختلطی با قدرمطلق ۱ هستند (تابلو مربوط به‌ریشه‌های واحد را در صفحهٔ ۳۴ ببینید). در حالت خاص داریم

$$e^{in\vartheta} = \cos n\vartheta + i \sin n\vartheta \quad (4)$$

از سوی دیگر

$$e^{in\vartheta} = (e^{i\vartheta})^n = (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)^n \quad (5)$$

با مساوی قرار دادن قسمتهای حقیقی (۴) و (۵) به دست می آوریم $i^{2\ell+2} = -1$ و $i^{2\ell} = 1$ و $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$

$$\begin{aligned} \cos n\vartheta &= \sum_{\ell \geq 0} \binom{n}{2\ell} (\cos \vartheta)^{n-2\ell} (1 - \cos^2 \vartheta)^{\ell} \\ &\quad - \sum_{\ell \geq 0} \binom{n}{2\ell+2} (\cos \vartheta)^{n-2\ell-2} (1 - \cos^2 \vartheta)^{\ell+1} \end{aligned} \quad (۶)$$

نتیجه می گیریم که $\cos n\vartheta$ یک چندجمله‌ای بر حسب $\cos \vartheta$ است

$$\cos n\vartheta = c_n (\cos \vartheta)^n + c_{n-1} (\cos \vartheta)^{n-1} + \dots + c. \quad (۷)$$

از (۶)، ضریب بزرگترین توان را به دست می آوریم

$$c_n = \sum_{\ell \geq 0} \binom{n}{2\ell} + \sum_{\ell \geq 0} \binom{n}{2\ell+2} = 2^{n-1}$$

اکنون در جهت عکس استدلال می کنیم. به استقرا فرض می کنیم که $(\cos \vartheta)^k$ به ازای $k < n$ به صورت یک چندجمله‌ای کسینوسی از مرتبه k قابل بیان است، و از (۷) نتیجه می گیریم که $(\cos \vartheta)^n$ را می توان به صورت یک چندجمله‌ای کسینوسی از مرتبه n با ضریب پیشرو $b_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ نوشت.

اثبات (پ). فرض کنیم $h(\vartheta)$ یک چندجمله‌ای کسینوسی از مرتبه n همچون (۳) باشد. چون $\cos(-\vartheta) = \cos \vartheta$ و $\sin(-\vartheta) = -\sin \vartheta$ از (۴) به دست می آید

$$\cos k\vartheta = \frac{e^{ik\vartheta} + e^{-ik\vartheta}}{2}$$

اگر قرار دهیم $z = e^{i\vartheta}$ ، می توانیم $h(\vartheta)$ را به شکل زیر بنویسیم

$$\begin{aligned} h(\vartheta) &= \lambda_n \frac{z^n + z^{-n}}{2} + \dots + \lambda_k \frac{z^k + z^{-k}}{2} + \dots + \lambda_0 \\ &= z^{-n} (\lambda_n \frac{z^{2n} + z^0}{2} + \dots + \lambda_k \frac{z^{n+k} + z^{n-k}}{2} + \dots + \lambda_0 z^n) \\ &= z^{-n} H(z) \end{aligned} \quad (۸)$$

حال $H(z)$ را به عنوان چندجمله‌ای مختلطی بر حسب متغیر z بررسی می کنیم. $H(z)$ از درجه $2n$ است و در $z = 0$ صفر نمی شود زیرا $\lambda_n \neq 0$. به علاوه داریم

$$H(z) = z^{2n} H\left(\frac{1}{z}\right)$$

پس اگر α ریشه‌ای از $H(z)$ باشد، آنگاه $\frac{1}{\alpha}$ نیز هست. علاوه بر آن، چون $H(z)$ دارای ضریبهای حقیقی است، می‌بینیم که عدد مختلط مزدوج $\bar{\alpha}$ و وارونش $1/\bar{\alpha}$ نیز از جمله ریشه‌های آن هستند. $2n$ ریشهٔ $H(z)$ را به صورت زیر طبقه‌بندی می‌کنیم. در گروه اول، همهٔ ریشه‌های α با $|\alpha| = 1$ را قرار می‌دهیم، یعنی $\alpha = 1/\bar{\alpha}$. در گروه دوم، داریم $1/\bar{\alpha} \neq \alpha$ ، پس یا α یا $1/\bar{\alpha}$ قدر مطلقاً کوچکتر از ۱ دارد. لذا $H(z)$ را می‌توان به صورت

$$H(z) = \frac{\lambda_n}{2} \prod_{|\alpha|=1} (z - \alpha) \prod_{0 < |\beta| < 1} (z - \beta)(z - \frac{1}{\bar{\beta}}) \quad (9)$$

نوشت. در اینجا است که فرض $h(\vartheta) \geq 0$ به‌ازای هر ϑ را به‌کار می‌بریم. چون $z = e^{i\vartheta}$ داریم $|z| = 1$ ، و بنابراین

$$h(\vartheta) = |h(\vartheta)| = |H(z)|$$

اکنون نگاهی به ریشه‌های $H(z)$ در (۹) می‌افکنیم. اگر α ریشه‌ای از گروه اول باشد، $|\alpha| = 1$ ، آنگاه متناظر با ریشه‌ای حقیقی چون $\tilde{\vartheta}$ از $h(\vartheta)$ داریم $\alpha = e^{i\tilde{\vartheta}}$ ، که $0 \leq \tilde{\vartheta} \leq 2\pi$. با مشتق‌گیری از معادلهٔ $h(\vartheta) = e^{-in\vartheta} H(e^{i\vartheta})$ به راحتی دیده می‌شود که چندگانگی ریشهٔ $\tilde{\vartheta}$ در $h(\vartheta)$ با چندگانگی $e^{i\tilde{\vartheta}}$ به‌عنوان ریشه‌ای از $H(z)$ برابر است. ولی چون $h(\vartheta)$ نامنفی است، در می‌یابیم که $\tilde{\vartheta}$ مینیمی از $h(\vartheta)$ است و لذا دارای چندگانگی زوج است. حال به‌گروه دوم می‌پردازیم و حاصلضربی چون $|z - \beta| |z - 1/\bar{\beta}|$ را در نظر می‌گیریم. چون $z\bar{z} = 1$ داریم

$$\begin{aligned} |z - \frac{1}{\bar{\beta}}|^2 &= (z - \frac{1}{\bar{\beta}})(\bar{z} - \frac{1}{\beta}) = \frac{(z\bar{\beta} - 1)(\bar{z}\beta - 1)}{\beta\bar{\beta}} \\ &= \frac{\beta\bar{\beta} - z\bar{\beta} - \bar{z}\beta + 1}{\beta\bar{\beta}} = \frac{(z - \beta)(\bar{z} - \bar{\beta})}{\beta\bar{\beta}} = \frac{|z - \beta|^2}{|\beta|^2} \end{aligned}$$

و بنابراین

$$|z - \beta| |z - \frac{1}{\bar{\beta}}| = \frac{|z - \beta|^2}{|\beta|}$$

به‌طور خلاصه به‌ازای c مخالف صفر و متعلق به \mathbb{C} ،
 $h(\vartheta) = |H(z)| = |c| \prod_{|\alpha|=1} |z - \alpha|^2 \prod_{0 < |\beta| < 1} |z - \beta|^2$
 قضیهٔ معروف ریس ([۳] را ببینید) را ثابت کرده‌ایم:

اگر $h(\vartheta)$ یک چندجمله‌ای کسینوسی نامنفی از مرتبه n باشد، آنگاه

$$h(\vartheta) = |u(z)|^2 \quad z = e^{i\vartheta} \quad \text{به‌ازای}$$

که در آن $u(z) = u_n z^n + u_{n-1} z^{n-1} + \dots + u_0$ یک چندجمله‌ای از درجه n است.

علاوه بر آن، چون $H(z)$ ضرایب حقیقی دارد، ریشه‌های α و β از $u(z)$ به صورت جفتهای مزدوج هستند، و این بدان معنی است که $u(z)$ یک چندجمله‌ای با ضریبهای حقیقی u_i است. پس به دست می‌آید: $z = e^{i\vartheta}$ ، $\bar{z} = e^{-i\vartheta}$.

$$\begin{aligned} h(\vartheta) &= (u_n z^n + \dots + u_0)(u_n z^{-n} + \dots + u_0) \\ &= z^{-n}(u_n z^n + \dots + u_0)(u_n + \dots + u_0 z^n) \end{aligned}$$

از مقایسه این رابطه با عبارت (۸) به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2 \\ \frac{\lambda_k}{2} &= u_n u_{n-k} + u_{n-1} u_{n-1-k} + \dots + u_k u_0. \quad (0 < k \leq n) \end{aligned} \quad (۱۰)$$

و به خصوص

$$\lambda_n = 2u_n u_0. \quad (۱۱)$$

پس اگر (۱۰) و (۱۱) را با هم در نظر بگیریم، خواهیم داشت

$$|\lambda_n| = 2|u_n||u_0| \leq u_0^2 + u_n^2 \leq u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2 = \lambda_0. \quad (۱۲)$$

اثبات (ب). نخست یک چندجمله‌ای کسینوسی چون

$$h(\vartheta) = \lambda_n \cos n\vartheta + \dots + \lambda_1 \cos \vartheta$$

از مرتبه $n \geq 1$ با ضریب ثابت $\lambda_0 = 0$ در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم که $h(\vartheta)$ مقادیر مثبت و منفی را می‌پذیرد. فرض کنید که برخلاف آن، $h(\vartheta) \geq 0$ در این صورت، بنابه (۱۲)، $|\lambda_n| \leq 0$ ، و بنابراین $\lambda_n = 0$ ، که تناقض است. در حالتی که $h(\vartheta) \leq 0$ همین استدلال را در مورد $-h(\vartheta)$ به کار می‌بریم.

بالاخره به چندجمله‌ایهای کسینوسی کلی $h(\vartheta)$ به شکل (۳) می‌پردازیم و قرار می‌دهیم $M = \max h(\vartheta)$ ، $m = \min h(\vartheta)$. توجه کنید که بنابه آنچه هم‌اکنون

ثابت کردیم، $M > \lambda_0 > m$. با در نظر گرفتن چندجمله‌ایهای کسینوسی نامنفی $M - h(\vartheta)$ و $h(\vartheta) - m$ ، به ترتیب، بنابه (۱۲) نتیجه می‌گیریم

$$|\lambda_n| \leq \lambda_0 - m \quad \text{و} \quad |\lambda_n| \leq M - \lambda_0. \quad (۱۳)$$

و بنابراین

$$|\lambda_n| \leq \frac{M - m}{2} \leq \max(M, -m) = \max|h(\vartheta)| \quad (۱۴)$$

اثبات (ب) و بنابراین اثبات قضیهٔ چیشف به انجام می‌رسد. \square

با استفاده از فرمولهای (۱۰)–(۱۴)، خواننده به راحتی می‌تواند با نشان دادن اینکه $g(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \cos n\vartheta$ تنها چندجمله‌ای کسینوسی از مرتبهٔ n است که برابری $\max|g(\vartheta)| = \frac{1}{\sqrt{n-1}}$ برای آن حاصل می‌شود، تحلیل را کامل کند. چندجمله‌ایهای $T_n(x) = \cos n\vartheta$ ، $x = \cos \vartheta$ چندجمله‌ایهای چیشف (از نوع اول) نامیده می‌شوند و بنابراین $\frac{1}{\sqrt{n-1}} T_n(x)$ تنها چندجمله‌ای از درجهٔ n است که برای آن برابری در رابطهٔ قضیهٔ چیشف برقرار است.

مراجع

- [1] P.L. CEBYCEV: *Œuvres*, Vol. I, Acad. Imperiale des Sciences, St. Petersburg 1899, pp. 387-469.
- [2] G. PÓLYA: *Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängenden Gebieten*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1928), 228-232; Collected Papers Vol. I, MIT Press 1974, 347-351.
- [3] G. PÓLYA & G. SZEGÖ: *Problems and Theorems in Analysis, Vol. II*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1976; Reprint 1998.



جان لیتلوود

لیتلوود و آفرد^۱ در سال ۱۹۴۳ در مقاله‌ای دربارهٔ توزیع ریشه‌های معادلات جبری، قضیهٔ زیر ثابت کردند:

فرض کنید a_1, a_2, \dots, a_n عددهای مختلطی با ضابطهٔ $|a_i| \geq 1$ به‌ازای هر i باشند و 2^n ترکیب خطی $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i$ با $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$ را در نظر بگیرید. در این صورت تعداد مجموعهای $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i$ که در درون هر دایرهٔ به شعاع ۱ قرار دارند، بزرگتر از

$$c \frac{2^n}{\sqrt{n}} \log n \quad (\text{به‌ازای } c \text{ ثابت و مثبت})$$

نیست.

چند سال بعد، پال اردوش این کران را با حذف جملهٔ $\log n$ بهتر کرد ولی جالبتر اینکه، او نشان داد این حکم پیامد ساده‌ای از قضیهٔ اسپنسر (صفحهٔ ۱۸۵ را ببینید) است.

برای درک استدلال او، حالتی را در نظر می‌گیریم که همهٔ a_i ها حقیقی باشند. می‌توانیم (با تبدیل a_i به $-a_i$ و ε_i به $-\varepsilon_i$ هرگاه $a_i < 0$) فرض کنیم همهٔ a_i ها مثبت‌اند. اکنون فرض کنید مجموعه‌ای از ترکیبات $\sum \varepsilon_i a_i$ در درون بازه‌ای به طول ۲ قرار دارد، و همچنین، $N = \{1, 2, \dots, n\}$ مجموعهٔ اندیسهاست. به‌ازای هر $\sum \varepsilon_i a_i$ قرار می‌دهیم $I := \{i \in N : \varepsilon_i = 1\}$. حال اگر $I \not\subseteq I'$ برای دو تا از این‌گونه مجموعه‌ها برقرار باشد، نتیجه می‌گیریم که

$$\sum_{i \in I' \setminus I} a_i \geq 2$$

که تناقض است. پس مجموعه‌های I یک پادزنجیر^۲ تشکیل می‌دهند، و از قضیهٔ اسپنسر نتیجه می‌گیریم که حداکثر $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ تا از این‌گونه ترکیبات وجود دارد. بنا به فرمول استرلینگ (صفحهٔ ۱۴ را ببینید) داریم

قضیهٔ اسپنسر، هر پادزنجیر از زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی دارای اندازه‌ای حداکثر برابر با $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ است.

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \leq c \frac{2^n}{\sqrt{n}}, \text{ به ازای } c \text{ ای مثبت،}$$

به ازای n زوج و هر $a_i = 1$ ، تعداد $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ ترکیب $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i$ به دست می آوریم که مجموعشان 0 است. پس با نگاهی به بازه $(-1, 1)$ می بینیم که عدد دوجمله ای کران دقیق را به دست می دهد.

اردوش در همین مقاله این حدس را مطرح کرد که $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ کران صحیح برای عددهای مختلط نیز هست (او فقط توانست اعتبار کران $c 2^n n^{-1/2}$ را به ازای c ثابت کند) و در واقع همین کران برای بردارهای a_1, \dots, a_n با $|a_i| \geq 1$ در یک فضای حقیقی هیلبرت، اگر به جای دایره به شعاع 1 گوی بازی به شعاع 1 در نظر بگیریم، برقرار است.

حق با اردوش بود، ولی بیست سال طول کشید تا گیولا کاتونا^۱ و دانیل کلایتمن^۲، مستقل از هم، به اثباتی در مورد عددهای مختلط (یا معادلس، در مورد صفحه \mathbb{R}^2) دست یافتند. در اثباتهای آنها از 2 بعدی بودن صفحه به صراحت استفاده شده بود، و ابداً روشن نبود که چگونه می توان آنها را تعمیم داد تا فضاهای برداری حقیقی متناهی بعد را شامل شوند.

ولی کلایتمن بعداً در 1970 ، با استدلالی که به طرز شگفت انگیزی ساده است، حدس را به طور کامل در مورد فضاهای هیلبرت ثابت کرد. در واقع چیزی که او ثابت کرد حتی بیش از این بود. استدلال او نمونه بسیار خوبی است که نشان می دهد وقتی فرض صحیح استقرا را می یابید، چه کارهایی می توانید انجام دهید.

برای آسودگی خیال خوانندگانی که با مفهوم فضای هیلبرت آشنا نیستند خاطر نشان می کنیم که ما واقعاً نیازی به فضاهای هیلبرت در حالت کلی نداریم. چون فقط با تعدادی متناهی بردار a_i سروکار داریم، کافی است فضای حقیقی \mathbb{R}^d را با حاصل ضرب اسکالر معمولی در نظر بگیریم. قضیه کلایتمن این است.

قضیه. فرض کنید a_1, \dots, a_n بردارهایی در \mathbb{R}^d باشند که طول هر یک دست کم ۱ است، و نیز فرض کنید R_1, \dots, R_k ناحیهٔ باز از \mathbb{R}^d باشند که در آنها به ازای هر x, y که در یک ناحیهٔ R_i واقع اند داریم $|x - y| < 2$. در این صورت، تعداد ترکیبات خطی $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i$ ، $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$ که می‌توانند در اجتماع $\bigcup_i R_i$ تا از این ناحیه‌ها واقع باشند حداکثر برابر با مجموع k تا از بزرگترین ضریبهای دوجمله‌ای $\binom{n}{j}$ است. به خصوص کران $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ را به ازای $k = 1$ به دست می‌آوریم.

بیش از پرداختن به اثبات خاطرنشان می‌کنیم که این کران برای

$$a_1 = \dots = a_n = a = (1, 0, \dots, 0)^T$$

دقیق است. در واقع، به ازای n زوج، $\binom{n}{n/2}$ مجموع برابر با 0 ، $\binom{n}{n/2-1}$ مجموع برابر با $a(-2)$ ، $\binom{n}{n/2+1}$ مجموع برابر $2a$ ، و به همین ترتیب، به دست می‌آوریم. با انتخاب گویهایی به شعاع او به مرکز

$$-2 \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor a, \dots, (-2)a, 0, 2a, \dots, 2 \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor a$$

تعداد

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n-k+1}{2} \rfloor} + \dots + \binom{n}{\frac{n-2}{2}} + \binom{n}{\frac{n}{2}} + \binom{n}{\frac{n+2}{2}} + \dots + \binom{n}{\lfloor \frac{n+k-1}{2} \rfloor}$$

مجموع به دست می‌آوریم که در این k گوی قرار دارند، و این همان عبارت مورد نظر ماست زیرا بزرگترین ضریبهای دوجمله‌ای حول وسط متمرکزند (صفحهٔ ۱۵ را ببینید). استدلال مشابهی برای حالتی که n فرد است می‌توان آورد.

■ اثبات. نخست توجه کنید که بدون از دست رفتن کلیت موضوع، می‌توانیم فرض کنیم که ناحیه‌های R_i مجزا هستند، و از این پس چنین خواهیم کرد. کلید اثبات، رابطهٔ بازگشتی بین ضریبهای دوجمله‌ای است که به ما می‌گوید بزرگترین ضریبهای دوجمله‌ای n و $n-1$ چگونه به هم مربوط می‌شوند. قرار می‌دهیم $r = \lfloor \frac{n-k+1}{2} \rfloor$ ، $s = \lfloor \frac{n+k-1}{2} \rfloor$ ، در این صورت $\binom{n}{r}$ ، \dots ، $\binom{n}{r+1}$ ، $\binom{n}{s}$ عبارت‌اند از k تا بزرگترین ضریبهای دوجمله‌ای برای n . از رابطهٔ بازگشتی $\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}$ نتیجه

می شود

$$\begin{aligned} \sum_{i=r}^s \binom{n}{i} &= \sum_{i=r}^s \binom{n-1}{i} + \sum_{i=r}^s \binom{n-1}{i-1} \\ &= \sum_{i=r}^s \binom{n-1}{i} + \sum_{i=r-1}^{s-1} \binom{n-1}{i} \\ &= \sum_{i=r-1}^s \binom{n-1}{i} + \sum_{i=r}^{s-1} \binom{n-1}{i} \end{aligned} \quad (1)$$

و با محاسبه ساده‌ای معلوم می‌شود که در مجموع اول، $k+1$ تا بزرگترین ضریبهای دو جمله‌ای $\binom{n-1}{i}$ و در مجموع دوم $k-1$ تا از آنها جمع می‌شود.

اثبات با استفاده از استقرا بر n انجام می‌شود؛ حالت $n=1$ بدیهی است. با توجه به (۱) فقط لازم است برای مرحله استقرا نشان دهیم که ترکیباتی خطی از a_1, \dots, a_n را که در k ناحیه مجزا قرار دارند می‌توان به‌طور دوسویی به‌روی ترکیباتی از a_1, \dots, a_{n-1} که در $k+1$ یا $k-1$ ناحیه قرار دارند نگاشت.

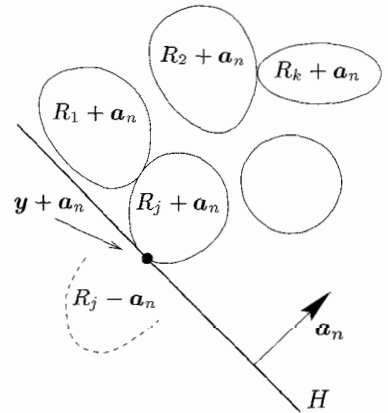
ادعا. دست‌کم یکی از ناحیه‌های انتقال یافته $R_j - a_n$ مجزا از همه ناحیه‌های انتقال یافته $R_1 + a_n, \dots, R_k + a_n$ است.

برای اثبات این ادعا، ابرصفحه $H = \{x : \langle a_n, x \rangle = c\}$ متعامد با a_n را در نظر می‌گیریم که شامل همه ناحیه‌های انتقال یافته $R_i + a_n$ در طرفی است که با $\langle a_n, x \rangle \geq c$ معین می‌شود، و با بستر ناحیه‌ای، مثلاً $R_j + a_n$ ، تماس دارد. چنین ابرصفحه‌ای وجود دارد زیرا ناحیه‌ها کراندارند. حال $|x - y| < 2$ به‌ازای هر $x, y \in R_j$ واقع در بستر R_j برقرار است زیرا R_j باز است. می‌خواهیم نشان دهیم که $R_j - a_n$ در طرف دیگر H قرار دارد. فرض کنید چنین نباشد و داشته باشیم $\langle a_n, x - a_n \rangle \geq c$ به‌ازای x متعلق به R_j ، یعنی $|a_n|^2 + c \geq \langle a_n, -x \rangle$. همچنین فرض کنید $y + a_n$ نقطه‌ای باشد که در آنجا H با $R_j + a_n$ تماس دارد، در این صورت y در بستر R_j است، و $\langle a_n, y + a_n \rangle = c$ یعنی پس $\langle a_n, -y \rangle = |a_n|^2 - c$

$$\langle a_n, x - y \rangle \geq 2|a_n|^2$$

و از نابرابری کوشی-شوارتس نتیجه می‌گیریم

$$2|a_n|^2 \leq \langle a_n, x - y \rangle \leq |a_n||x - y|$$



و بنابراین (با $|a_n| \geq 1$) به دست می‌آوریم $2 \leq 2|a_n| \leq |x - y|$ که تناقض است. بقیه کار آسان است. ترکیبات $\sum \varepsilon_i a_i$ را که در $R_1 \cup \dots \cup R_k$ قرار می‌گیرند به صورت زیر رده‌بندی می‌کنیم. در ردهٔ ۱ همهٔ $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i$ ها با ضابطهٔ $\varepsilon_n = -1$ و همهٔ $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i$ ها با ضابطهٔ $\varepsilon_n = 1$ در R_j واقع‌اند قرار می‌دهیم و در ردهٔ ۲، ترکیبات باقیماندهٔ $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i$ با ضابطهٔ $\varepsilon_n = 1$ را که در R_j نیستند می‌گذاریم. در نتیجه، ترکیبات $\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i a_i$ متناظر با ردهٔ ۱ در $k+1$ ناحیهٔ مجزای $R_1 + a_{-n}, \dots, R_k + a_{-n}$ قرار دارند، و ترکیبات $\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i a_i$ متناظر با ردهٔ ۲ در $k-1$ ناحیهٔ مجزای $R_1 - a_n, \dots, R_k - a_n$ بدون $R_j - a_n$ قرار دارند. بنا به استقر، ردهٔ ۱ شامل حداکثر $\sum_{i=r-1}^s \binom{n-1}{i}$ ترکیب است. ردهٔ ۲ حداکثر $\sum_{i=r}^{s-1} \binom{n-1}{i}$ ترکیب را در بردارد — و این [بنا به (۱)] اثبات را کامل می‌کند، اثباتی که مستقیماً از «کتاب» گرفته شده است. \square

مراجع

- [1] P. ERDŐS: *On a lemma of Littlewood and Offord*, Bull. Amer. Math. Soc. **5** (1945), 898-902.
- [2] G. KATONA: *On a conjecture of Erdős and a stronger form of Sperner's theorem*, Studia Sci. Math. Hungar. **1** (1966), 59-63.
- [3] D. KLEITMAN: *On a lemma of Littlewood and Offord on the distribution of certain sums*, Math. Zeitschrift **90** (1965), 251-259.
- [4] D. KLEITMAN: *On a lemma of Littlewood and Offord on the distributions of linear combinations of vectors*, Advances Math. **5** (1970), 155-157.
- [5] J.E. LITTLEWOOD & A.C. OFFORD: *On the number of real roots of a random algebraic equation III*, Mat. USSR Sb. **12** (1943), 277-285.

۲۰

لانه کبوتر و شمارش دوگانه ۱۶۹

۲۱

سه قضیه مشهور درباره مجموعه‌های
متناهی ۱۸۵

۲۲

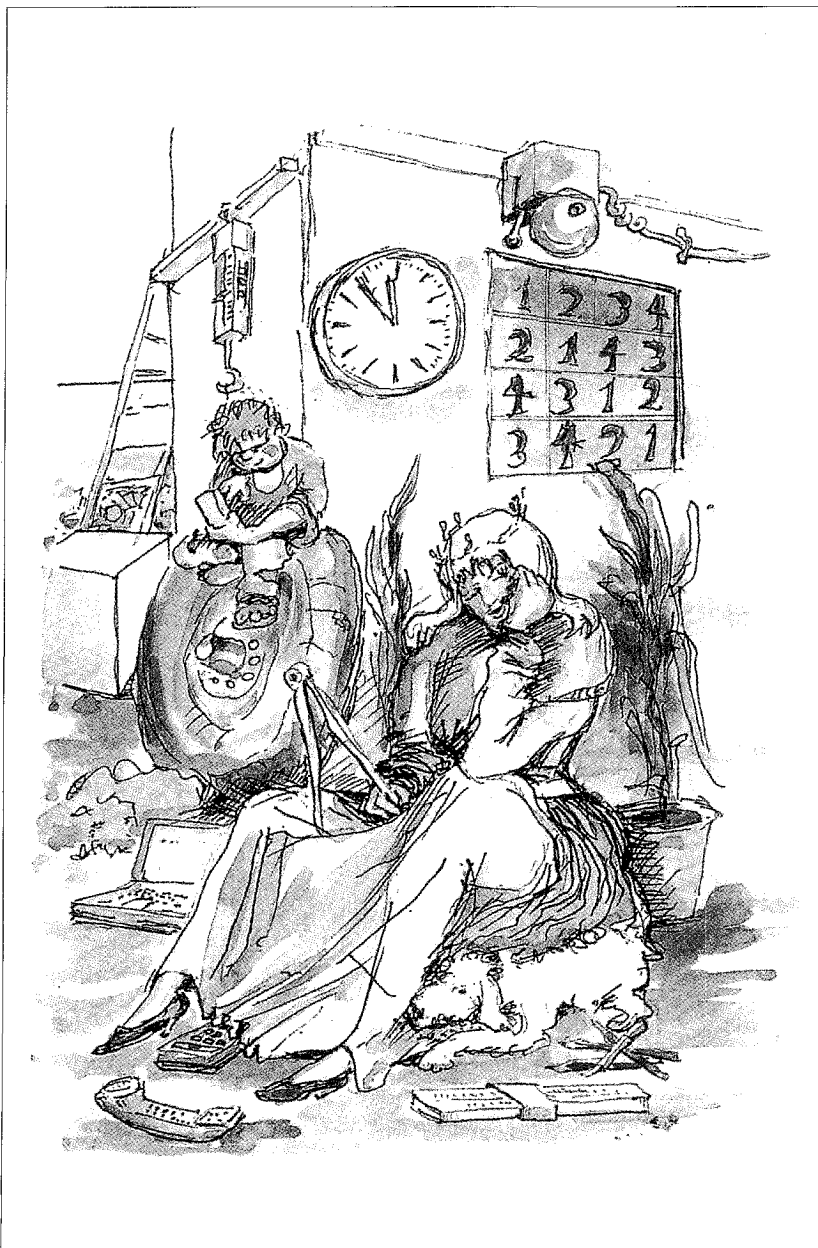
فرمول کیلی برای تعداد درختها ۱۹۳

۲۳

کامل کردن مربعهای لاتین ۲۰۳

۲۴

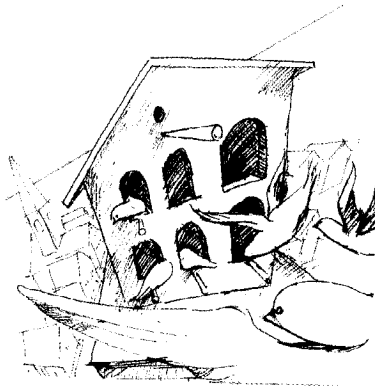
مسأله دینیتس ۲۱۱



بعضی از اصول ریاضی، از قبیل دو اصلی که در عنوان این فصل نام برده شده‌اند، آن قدر بدیهی‌اند که ممکن است گمان کنید فقط نتایجی به همان اندازه بدیهی به دست می‌دهند. برای اینکه متقاعد شوید که «لزوماً چنین نیست» مثالهایی از آنها می‌آوریم که پال اردوش مطرح کرده است. در فصلهای بعد نیز نمونه‌هایی از آنها را خواهید دید.

اصل لانه کبوتر

اگر n شیء در r جعبه قرار داده شوند که $r < n$ ، آنگاه دست‌کم یکی از جعبه‌ها حاوی بیش از یک شیء است.



«لانه‌های کبوتر از دید یک پرنده»

این اصل واقعاً ساده است و نیازی به اثبات ندارد. بیان آن به زبان نگاشتها چنین است: فرض کنید N و R دو مجموعه متناهی باشند که

$$|N| = n > r = |R|$$

و $f: N \rightarrow R$ یک نگاشت باشد. در این صورت a ای متعلق به R وجود دارد که $|f^{-1}(a)| \geq 2$. حتی می‌توانیم نابرابری قویتری را ذکر کنیم: α ای متعلق به R وجود دارد که

$$|f^{-1}(a)| \geq \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil \quad (1)$$

در واقع، در غیر این صورت به ازای هر a می‌داشتیم $|f^{-1}(a)| < \frac{n}{r}$ ، و بنابراین $n = \sum_{a \in R} |f^{-1}(a)| < r \frac{n}{r} = n$ ، که نمی‌تواند برقرار باشد.

۱. عددها

ادعا. عددهای ۱، ۲، ۳، ...، $2n$ را در نظر بگیرید، و $n+1$ تا از آنها را به دلخواه اختیار کنید. در این صورت، دو عدد در میان این $n+1$ عدد وجود دارند که نسبت به هم اول‌اند.

این ادعا هم واضح است. در اینجا، دو عدد وجود دارند که فقط ۱ واحد اختلاف دارند و بنابراین نسبت به هم اول‌اند.

حال به ادعای دیگری می‌پردازیم:

ادعا. باز فرض کنید $A \subseteq \{1, 2, \dots, 2n\}$ و $|A| = n+1$. در این صورت همواره دو عدد در A وجود دارند به طوری که یکی از آنها دیگری را می‌شمارد.

این ادعا آن قدر واضح نیست. پال اردوش به ما می‌گفت شبی ضمن شام این مسأله را برای لایوش پوسای جوان مطرح کرده و وقتی شام به پایان رسیده، لایوش پاسخ را یافته بوده است. این مسأله در نظر اردوش همواره یکی از مسائل مناسبی بود که برای «تشریف» افراد جدید به ریاضیات می‌توان با آنها در میان گذاشت. جواب (مثبت) این مسأله از اصل لانه کبوتر به دست می‌آید. هر عدد $a \in A$ را به شکل $a = 2^k m$ می‌نویسیم که در آن m عددی فرد بین 1 و $2n-1$ است. چون $n+1$ عدد در A وجود دارند ولی فقط n عامل متفاوت فرد موجود است، باید دو عدد در A باشند که بخش فرد آنها یکی باشد. در این صورت یکی از آنها مضرب دیگری است. \square

اگر n به جای $n+1$ قرار گیرد، هیچ‌یک از دو حکم دیگر برقرار نیستند. به این منظور، به ترتیب، مجموعه‌های $\{2, 4, 6, \dots, 2n\}$ و $\{n+1, n+2, \dots, 2n\}$ را در نظر بگیرید.

۲. دنباله‌ها

در اینجا یکی دیگر از مسأله‌های مورد علاقه اردوش را که در مقاله‌ای دربارهٔ مسائل رمزی^۲ به قلم او و سکرش^۳ آمده است، می‌آوریم.

ادعا. در هر دنبالهٔ $a_1, a_2, \dots, a_{mn+1}$ از $mn+1$ عدد حقیقی مجزا، زیردنباله‌ای صعودی چون

$$a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_{m+1}} \quad (i_1 < i_2 < \dots < i_{m+1})$$

به طول $m+1$ ، یا زیردنباله‌ای نزولی چون

$$a_{j_1} > a_{j_2} > \dots > a_{j_{m+1}} \quad (j_1 < j_2 < \dots < j_{m+1})$$

به طول $n+1$ ، یا هر دو، وجود دارد.

این بار کاربرد اصل لانه کبوتر به طرز مستقیم انجام نمی‌شود. به هر a_i عدد t_i را که طول بزرگترین زیردنبالهٔ صعودی آغازشونده از a_i است منسوب می‌سازیم. اگر به ازای i ، $t_i \geq m+1$ ، آنگاه زیردنباله‌ای صعودی به طول $m+1$ داریم. فرض کنید به ازای هر i ، $t_i \leq m$. تابع $f: a_i \rightarrow t_i$ که $\{a_1, \dots, a_{mn+1}\}$ را به $\{1, \dots, m\}$ می‌نگارد بنابه (۱) حکایت از آن دارد که s ‌ای متعلق به $\{1, \dots, m\}$ وجود دارد به قسمی که به ازای $n+1 = \frac{mn}{m} + 1$ عدد a_i داریم $f(a_i) = s$. فرض

کنید $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_{n+1}}$ این عددها باشند. حال دو عدد متوالی $a_{j_i}, a_{j_{i+1}}$ را در نظر بگیرید. اگر $a_{j_i} < a_{j_{i+1}}$ ، آنگاه زیر دنباله‌ای صعودی به طول s که در $a_{j_{i+1}}$ آغاز می‌شود، و در نتیجه زیر دنباله‌ای صعودی به طول $s + 1$ با آغاز a_{j_i} ، به دست می‌آوریم، که ممکن نیست زیرا $f(a_{j_i}) = s$ ، پس زیر دنباله‌ای نزولی چون $a_{j_1} > a_{j_2} > \dots > a_{j_{n+1}}$ به طول $n + 1$ به دست می‌آوریم. \square

شاید اثبات این موضوع برای خواننده جالب باشد که این حکم برای mn عدد در حالت کلی برقرار نیست.

این حکم ساده‌نما دربارهٔ زیر دنباله‌های یکنوا پیامدی در مورد بعد گرافها دارد که به هیچ وجه واضح و ساده نیست. در اینجا نیازی به مفهوم بعد برای گرافهای کلی نداریم بلکه فقط با بعد گرافهای کامل K_n سروکار داریم. این حکم به این صورت بیان می‌شود. فرض کنید $\{1, \dots, n\}$ ، $n \geq 3$ ، $N = \{1, \dots, n\}$ و جایگشت π_1, \dots, π_m از N را در نظر بگیرید. می‌گوییم جایگشت‌های π_i نمایشگر K_n هستند اگر برای هر سه عدد متمایز i, j, k جایگشت π ای وجود داشته باشد که در آن k بعد از هر دوی i و j بیاید. در این صورت، بعد K_n کوچکترین m ای است که یک جایگشت π_1, \dots, π_m به ازای آن وجود دارد.

به عنوان مثال داریم $\dim(K_3) = 3$ چون هریک از سه عدد باید در آخر بیاید، همان طور که در $\pi_1 = (1, 2, 3)$ ، $\pi_2 = (2, 3, 1)$ ، $\pi_3 = (3, 1, 2)$ دیده می‌شود. دربارهٔ K_4 چه می‌توان گفت؟ نخست توجه کنید که $\dim(K_n) \leq \dim(K_{n+1})$. کافی است $n + 1$ را در نمایش K_{n+1} حذف کنید. پس $\dim(K_4) \geq 3$ و در واقع با در نظر گرفتن

$$\pi_1 = (1, 2, 3, 4), \quad \pi_2 = (2, 4, 3, 1), \quad \pi_3 = (1, 4, 3, 2)$$

می‌بینیم $\dim(K_4) = 3$. اثبات $\dim(K_5) = 5$ این قدر ساده نیست. ولی پس از آن با تعجب می‌بینیم که تا $n = 12$ ، بعد در 4 ثابت می‌ماند. اما $\dim(K_{13}) = 5$. بنابراین $\dim(K_n)$ تابعی نسبتاً سرکش به نظر می‌رسد، حال آنکه چنین نیست! وقتی n به سمت بینهایت می‌رود، $\dim(K_n)$ در واقع تابعی بسیار خوش رفتار است — و کلید یافتن کرانی پایین برای آن، اصل لانه کبوتر است. ادعا می‌کنیم

$$\dim(K_n) \geq \log_2 \log_2 n \tag{2}$$

چون، همان طور که دیده‌ایم، $\dim(K_n)$ تابعی یکنوا از n است، کافی است (2) را

π_1 :	۱	۲	۳	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۴
π_2 :	۲	۳	۴	۸	۷	۶	۵	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۱
π_3 :	۳	۴	۱	۱۱	۱۲	۹	۱۰	۶	۵	۸	۷	۲
π_4 :	۴	۱	۲	۱۰	۹	۱۲	۱۱	۷	۸	۵	۶	۳

این چهار جایگشت نمایشگر K_{12} هستند.

به‌ازای $n = 2^{2^p} + 1$ ثابت کنیم، یعنی باید نشان دهیم

$$\dim(K_n) \geq p + 1 \quad n = 2^{2^p} + 1 \quad \text{به‌ازای}$$

فرض کنید که برخلاف این داشته باشیم $\dim(K_n) \leq p$ ، و نیز فرض کنید π_1, \dots, π_p جایگشتهای نمایشگر $\{1, 2, \dots, 2^{2^p} + 1\}$ باشند. اکنون حکم خود دربارهٔ زیر دنباله‌های یکتوا را p بار به‌کار می‌بریم. در π_1 زیر دنبالهٔ یکتوایی چون A_1 به‌طول $2^{2^{p-1}} + 1$ وجود دارد (مهم نیست صعودی باشد یا نزولی). به‌این مجموعهٔ A_1 در π_2 نظری می‌افکنیم. با استفادهٔ دوباره از حکم، زیردنبالهٔ یکتوایی A_2 را از A_1 در π_2 می‌یابیم که طول این زیر دنباله $2^{2^{p-2}} + 1$ است و A_2 البته در π_1 نیز یکتواست. با ادامهٔ این کار، سرانجام زیر دنبالهٔ A_p ای با اندازهٔ $3 = 2^{2^0} + 1$ می‌یابیم که نسبت به همهٔ جایگشتهای π_i یکتواست. فرض کنید $A_p = (a, b, c)$. در این صورت در هر π_i یا $a < b < c$ یا $a > b > c$ ولی این ممکن نیست زیرا باید جایگشتی وجود داشته باشد که در آن b پس از a و c بیاید. \square

رشد مجانبی صحیح را جوئل اسپنسر (کران بالا) و اردوش، سمردی^۱، و تروتتر^۲ (کران پایین) مشخص کردند:

$$\dim(K_n) \sim \log_2 \log_2 n + \left(\frac{1}{2} + o(1) \right) \log_2 \log_2 \log_2 n$$

ولی این پایان ماجرا نیست: در همین اواخر، موریس^۳ و هوشتن^۴ روشی یافتند که، علی‌الاصول، مقدار دقیق $\dim(K_n)$ را مشخص می‌کند. با استفاده از نتیجه‌ای که آنها به‌دست آوردند و به‌کمک کامپیوتر، می‌توان مقدارهای ذکر شده در حاشیه را به‌دست آورد. واقعاً حیرت‌انگیز است! کافی است در نظر بگیرید که چه تعداد جایگشت با اندازهٔ 1422564 وجود دارد. چگونه می‌توان تعیین کرد که 7 یا 8 تا از آنها برای نمایش $K_{1422564}$ لازم است؟

$$\begin{aligned} \dim(K_n) \leq 4 &\iff n \leq 12 \\ \dim(K_n) \leq 5 &\iff n \leq 81 \\ \dim(K_n) \leq 6 &\iff n \leq 2646 \\ \dim(K_n) \leq 7 &\iff n \leq 1422564 \end{aligned}$$

۳. مجموعه‌ها

بال اردوش کاربرد زیبایی زیر از اصل لانهٔ کبوتر را به اندرو وازونی^۵ و مارتا سود^۶ نسبت

1. Szemerédi 2. Trotter 3. Morris 4. Hoşten 5. Andrew Vázsonyi
6. Marta Sved

می داد:

ادعا. فرض کنید n عدد صحیح a_1, \dots, a_n به ما داده شده است که لزوماً از هم متمایز نیستند. در این صورت، همواره مجموعه‌ای از عددهای متوالی $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_\ell$ وجود دارد که مجموعشان $\sum_{i=k+1}^{\ell} a_i$ مضربی از n است.

برای اثبات قرار می‌دهیم $N = \{0, a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_n\}$ و $R = \{0, 1, \dots, n-1\}$. نگاشت $f: N \rightarrow R$ را در نظر می‌گیریم که در آن $f(m)$ باقیمانده تقسیم m بر n است. چون $|R| = n > n+1 = |N|$ ، نتیجه می‌گیریم که دو مجموع $a_1 + \dots + a_k, a_1 + \dots + a_\ell$ ($k < \ell$)، با یک باقیمانده وجود دارند که مجموع اول می‌تواند مجموع «تهی» باشد و در این صورت با 0 نمایانده می‌شود. پس

$$\sum_{i=k+1}^{\ell} a_i = \sum_{i=1}^{\ell} a_i - \sum_{i=1}^k a_i$$

دارای باقیمانده 0 است — پایان اثبات. \square

حال می‌پردازیم به اصل دوم: شمارش از دو طریق. منظورمان این است:

شمارش دوگانه

فرض کنید دو مجموعه متناهی R و C و یک زیرمجموعه $S \subseteq R \times C$ به ما داده شده باشند. هرگاه $(p, q) \in S$ ، آنگاه می‌گوییم p با q هم ملازم‌اند. اگر r_p نشان‌دهنده تعداد عضوهایی باشد که ملازم با $p \in R$ اند، و c_q نشان‌دهنده تعداد عضوهایی باشد که ملازم با $q \in C$ اند، آنگاه

$$\sum_{p \in R} r_p = |S| = \sum_{q \in C} c_q \quad (3)$$

و باز، چیزی برای اثبات وجود ندارد. مجموع اول، جفتهای اعضای S را برحسب درایه اول رده‌بندی می‌کند و مجموع دوم همان جفتهای را برحسب درایه دوم.

راه مفیدی برای توصیف مجموعه S در دست است. ماتریس $A = (a_{pq})$ ، ماتریس ملازمت S ، را در نظر بگیرید که در آن، اندیس سطری و ستونی هر درایه A ،

به ترتیب، به R و C تعلق دارند:

$$a_{pq} = \begin{cases} 1 & (p, q) \in S \\ 0 & (p, q) \notin S \end{cases}$$

بنابراین r_p مجموع سطر p ام A و c_q مجموع ستون q ام آن است. پس نخستین مجموع در (۳)، تعداد عضوهای S (یعنی تعداد ۱های A) را با جمع زدن سطرها به دست می‌دهد و مجموع دوم، با جمع ستونها.

مثال زیر این تناظر را روشن می‌سازد. فرض کنید $R = C = \{1, 2, \dots, 8\}$ و $\{i, j$ را می‌شمارد: $S = \{(i, j) \}$ در این صورت ماتریسی که در حاشیه دیده می‌شود، به دست می‌آید که در آن فقط ۱ها نمایش داده شده‌اند.

R/C	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۲		۱		۱		۱		۱
۳			۱		۱			
۴				۱				۱
۵					۱			
۶						۱		
۷							۱	
۸								۱

۴. بازهم عددها

به جدول حاشیه نگاه کنید. تعداد ۱ها در ستون j دقیقاً تعداد مقسوم‌علیه‌های j است؛ این تعداد را با $t(j)$ نشان می‌دهیم. اکنون این سؤال را مطرح می‌کنیم که وقتی j از ۱ تا n تغییر می‌کند این عدد به طور متوسط چقدر بزرگ است. پس در جستجوی کمیت

$$\bar{t}(n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n t(j)$$

هستیم. برای n دلخواه، $\bar{t}(n)$ چقدر است؟ در نخستین نگاه، امیدی به یافتن پاسخ این پرسش نمی‌رود. به ازای عددهای اول p داریم $t(p) = 2$. در حالی که به ازای 2^k عدد بزرگی چون $t(2^k) = k + 1$ به دست می‌آوریم. پس $t(n)$ تابعی است که به طرز لگام گسیخته جهش می‌کند و حدس می‌زنیم $\bar{t}(n)$ نیز چنین تابع سرکشی باشد. اما این حدس غلط است و عکس آن درست است! با شمارش از دو طریق، پاسخ غیر منتظره و ساده‌ای به دست می‌آید.

ماتریس A را (مانند بالا) برای عددهای صحیح ۱ تا n در نظر می‌گیریم. با شمارش برحسب ستونها به دست می‌آوریم $\sum_{j=1}^n t(j)$. چه تعداد ۱ در سطر i هست؟ به آسانی دیده می‌شود که ۱ها با مضربهای i متناظرند: $i, 2i, 3i, \dots$ و آخرین مضربی که از n تجاوز نمی‌کند، برابر $i \lfloor \frac{n}{i} \rfloor$ است. پس به دست می‌آوریم

$$\bar{t}(n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n t(j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lfloor \frac{n}{i} \rfloor \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{n}{i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

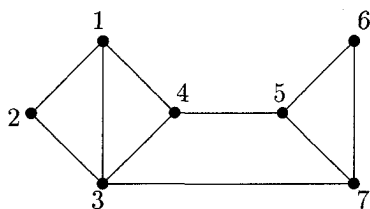
که در آن خطا در هر عامل جمع، وقتی از $\lfloor \frac{n}{i} \rfloor$ به $\frac{n}{i}$ گذر می‌کنیم، کوچکتر از ۱ است. پس خطای کلی برای میانگین نیز کوچکتر از ۱ است. حال مجموع آخر، عدد همساز

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
$\bar{t}(n)$	۱	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{16}{7}$	$\frac{5}{3}$

چند مقدار اولیه $\bar{t}(n)$

n ام است که (صفحه ۱۳ را ببینید) تقریباً برابر $\log n$ است، با خطایی کوچکتر از ۱. به طور خلاصه، این حکم قابل توجه را ثابت کرده‌ایم: در حالی که $t(n)$ کلاً خطا آمیز است، میانگین $\bar{t}(n)$ خوب رفتار می‌کند: $\bar{t}(n) \sim \log n$ با خطایی کمتر از ۲ برقرار است.

۵. گرافها



گیریم G گراف متناهی ساده‌ای با مجموعه رئوس V و مجموعه یالهای E باشد. طبق معمول فرض می‌کنیم G هیچ طوقه و یال چندگانه‌ای نداشته باشد. در فصل ۱۰، $d(v)$ یعنی درجه هر رأس v را به عنوان تعداد یالهایی که v یک رأس آنهاست تعریف کردیم. در مثال شکل مقابل، رأسهای ۱، ۲، ...، ۷ به ترتیب دارای درجه‌های ۳، ۲، ۳، ۳، ۴، ۲، ۳ هستند.

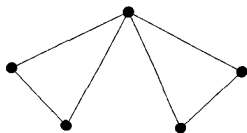
تقریباً هر کتابی در نظریه گراف با حکم زیر شروع می‌شود (که قبلاً آن را در فصلهای ۱۰ و ۱۷ دیده‌ایم):

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E| \quad (4)$$

برای اثبات، $S \subseteq V \times E$ را در نظر می‌گیریم که S مجموعه جفت‌هایی چون (v, e) است چنانکه $v \in V$ یک رأس $e \in E$ است. با شمارش عضوهای S از دو طریق، از یک طرف به دست می‌آید $\sum_{v \in V} d(v)$ ، زیرا هر رأسی به اندازه $d(v)$ در این شمارش سهم دارد و از سوی دیگر، $|2E|$ زیرا هر یال دو انتها دارد. \square

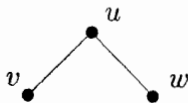
نتیجه (۴) هر چند ساده به نظر می‌رسد، پیامدهای مهم زیادی دارد که بعضی از آنها را در ادامه بحث خواهیم دید. در این بخش کاربرد زیبایی از آن در مسأله فرین [اکسترمال] درباره گرافها را انتخاب و مطرح می‌کنیم. مسأله این است:

فرض کنید $G = (V, E)$ دارای n رأس است و شامل هیچ دوری به طول ۴ (که با C_4 نشان داده می‌شود) یعنی هیچ زیرگراف \square نیست. G حداکثر چند یال می‌تواند داشته باشد؟



به عنوان مثال، گراف ۵ رأسی در حاشیه، شامل هیچ دوری به طول ۴ نیست و ۶ یال دارد. خواننده به راحتی می‌تواند نشان دهد که با ۵ رأس، حداکثر تعداد یالها ۶ است، و این گراف در واقع تنها گراف ۵ رأسی با ۶ یال است که دوری به طول ۴ ندارد.

حالا به مسئله کلی می پردازیم. فرض کنید G گرافی با n رأس و بدون ۴-دور (دوری به طول ۴) است. همچون بالا، درجه u را با $d(u)$ نشان می دهیم. اکنون عضوهای مجموعه S زیر را به دو طریق می شماریم: S مجموعه جفت‌هایی چون $(u, \{v, w\})$ است که در آن u مجاور به v و به w است، $v \neq w$. به عبارت دیگر، همه دفعات رخداد



را به ازای u های مختلف می شماریم و به دست می آوریم $|S| = \sum_{u \in V} \binom{d(u)}{2}$. از سوی دیگر، هر جفت $\{u, w\}$ حداکثر یک رأس همسایه مشترک دارد (بنابه شرط مربوط به ۴-دور). پس $|S| \leq \binom{n}{2}$ ، و نتیجه می گیریم

$$\sum_{u \in V} \binom{d(u)}{2} \leq \binom{n}{2}$$

یا

$$\sum_{u \in V} d(u)^2 \leq n(n-1) + \sum_{u \in V} d(u) \quad (5)$$

حال (چنانکه در این نوع مسائل فرین بسیار معمول است) نابرابری کوشی-شوارتس را در مورد بردارهای $(d(u_1), \dots, d(u_n))^T$ و $(1, 1, \dots, 1)^T$ به کار برده به دست می آوریم

$$\left(\sum_{u \in V} d(u) \right)^2 \leq n \sum_{u \in V} d(u)^2$$

و لذا طبق (۵)

$$\left(\sum_{u \in V} d(u) \right)^2 \leq n^2(n-1) + n \sum_{u \in V} d(u)$$

با توسل به برابری (۴) داریم

$$4|E|^2 \leq n^2(n-1) + 2n|E|$$

یا

$$|E|^2 - \frac{n}{4}|E| - \frac{n^2(n-1)}{4} \leq 0$$

با حل این معادله درجه دوم، قضیه زیر که متعلق به ایشتون رایمن^۱ است به دست می آید.

قضیه. اگر گراف G با n رأس شامل هیچ ۴-دوری نباشد، آنگاه

$$|E| \leq \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n - 3}) \quad (۶)$$

به ازای $n = 5$ ، از این فرمول به دست می آید $|E| \leq 6$ ، و گراف بالا نشان می دهد که برابری می تواند برقرار باشد.

پس با شمارش از دو طریق، به راحتی کرانی بالا برای تعداد یالها به دست می آید. ولی کران (۶) در حالت کلی چقدر خوب است؟ مثال زیبایی زیر ([۲]، [۳]، [۶]) نشان می دهد که این کران تقریباً دقیق است. همانند بسیاری از این گونه مسائل، هندسه متناهی در اینجا هم راه را می نمایاند.

در ارائه این مثال، فرض ما این است که خواننده با هیأت متناهی \mathbb{Z}_p از اعداد صحیح به پیمانه عدد اولی چون p آشناست (صفحه ۲۵ را ببینید). فضای برداری X بعدی روی \mathbb{Z}_p را در نظر می گیریم. گراف G_p ی زیر را با استفاده از X می سازیم. رأسهای G_p زیر فضاهای یک بعدی $[v] := \text{span}_{\mathbb{Z}_p}\{v\}$ هستند که $v \in X$ ، $v \neq 0$ ، و دو تا از این گونه زیر فضاها، $[v]$ و $[w]$ را با یالی به هم وصل می کنیم اگر

$$\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0$$

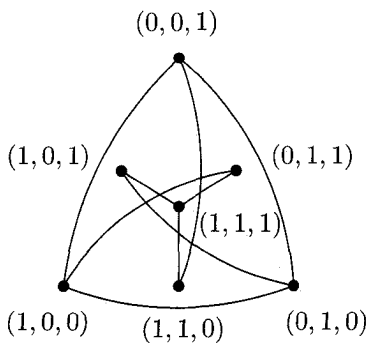
توجه کنید که فرقی نمی کند کدام بردار مخالف 0 را از زیر فضا در نظر گرفته باشیم. به زبان هندسه، این رأسها نقطه های صفحه تصویری روی \mathbb{Z}_p هستند و $[w]$ مجاور به $[v]$ است اگر w روی خط قطبی v باشد.

به عنوان مثال، گراف G_2 هیچ ۴-دوری ندارد و شامل ۹ یال است، که تقریباً به کران ۱۰ که از (۶) به دست می آید، نزدیک است. می خواهیم نشان دهیم که این موضوع به ازای هر عدد اول p صادق است.

نخست ثابت می کنیم که G_p در شرط ۴-دور صدق می کند. اگر $[u]$ هم مجاور $[v]$ و هم مجاور $[w]$ باشد، آنگاه u جوابی از معادله های خطی

$$v_1 x + v_2 y + v_3 z = 0$$

$$w_1 x + w_2 y + w_3 z = 0$$



گراف G_2 : رأسهای هفت سه تایی مخالف صفر (x, y, z) هستند.

است. چون v و w مستقل خطی‌اند، نتیجه می‌گیریم که فضای جواب دارای بعد ۱ است، و بنابراین همسایهٔ مشترک $[u]$ یکتاست.

حال می‌پرسیم که G_p چند رأس دارد. باز هم شمارش دوگانه درکار می‌آید. فضای X شامل $p^2 - 1$ بردار مخالف صفر است. چون هر زیر فضای یک بعدی شامل $p - 1$ بردار مخالف 0 است، نتیجه می‌گیریم که X دارای $p^2 + p + 1 = \frac{p^3 - 1}{p - 1}$ زیرفضای یک بعدی است یعنی G_p دارای $n = p^2 + p + 1$ رأس است. همین‌طور، هر زیر فضای دوبعدی شامل $p^2 - 1$ بردار مخالف 0 و لذا $p + 1 = \frac{p^3 - 1}{p - 1}$ زیرفضای یک بعدی است.

باقی می‌ماند که تعداد یالها در G_p را، که بنابه (۴) با مجموع درجه‌ها یکی است، تعیین کنیم. با توجه به نحوهٔ ساخت G_p رؤس مجاور به $[u]$ جوابهای معادلهٔ

$$u_1x + u_2y + u_3z = 0 \quad (۷)$$

هستند. فضای جواب (۷) یک زیرفضای دو بعدی است و بنابراین، $p + 1$ رأس مجاور به u وجود دارد. ولی باید احتیاط کرد، ممکن است $[u]$ خودش جوابی از (۷) باشد. در این حالت فقط p رأس مجاور به $[u]$ وجود دارد.

خلاصه اینکه، نتیجهٔ زیر را به دست می‌آوریم: اگر u بر مقطعی مخروطی به معادلهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ واقع باشد، آنگاه $d([u]) = p$ و اگر چنین نباشد، آنگاه $d([u]) = p + 1$. پس باقی می‌ماند که تعداد زیرفضاهای یک بعدی بر مقطع مخروطی

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

را تعیین کنیم. در اینجا گزاره‌ای را که به زودی ثابت خواهیم کرد ذکر می‌کنیم.

ادعا. معادلهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ دقیقاً p^2 جواب (x, y, z) دارد، و بنابراین (با مستثنا کردن جواب صفر) دقیقاً $p + 1 = \frac{p^3 - 1}{p - 1}$ رأس در G_p از درجهٔ p وجود دارد.

با این گزاره، تحلیل خود از G_p را کامل می‌کنیم. $p + 1$ رأس از درجهٔ p ، و از این رو $p^2 = (p + 1) - (p^2 + p + 1)$ رأس از درجهٔ $p + 1$ وجود دارد. با استفاده از (۴) به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} |E| &= \frac{(p+1)p}{2} + \frac{p^2(p+1)}{2} = \frac{(p+1)^2 p}{2} \\ &= \frac{(p+1)p}{4} (1 + (2p+1)) = \frac{p^2+p}{4} (1 + \sqrt{4p^2 + 4p + 1}) \end{aligned}$$

اگر قرار دهیم $n = p^2 + p + 1$ ، رابطه بالا چنین می شود

$$|E| = \frac{n-1}{4}(1 + \sqrt{4n-3})$$

و می بینیم که این تقریباً با (۶) مطابقت دارد.

اکنون ادعای بالا را ثابت می کنیم. استدلال زیر کاربرد زیبایی از جبر خطی شامل ماتریسهای متقارن و ویژه مقدارهای آنهاست. همین روش را در فصل ۲۹ خواهیم دید که تصادفی هم نیست: هر دو اثبات از یک مقاله به قلم اردوش، رنی، و سوش گرفته شده اند.

زیرفضاهای یک بعدی X را مانند قبل با بردارهای $v_1, v_2, \dots, v_{p^2+p+1}$ نشان می دهیم که هر دو تا از آنها مستقل خطی اند. به همین نحو، می توانیم زیرفضاهای دوبعدی را با یک مجموعه از بردارها نشان دهیم چنانکه زیرفضای متناظر با $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ مانند (۷)، مجموعه جوابهای معادله $u_1x + u_2y + u_3z = 0$ باشد. (البته این چیزی نیست جز اصل دوگانی در جبر خطی.) پس، بنابه (۷)، یک زیرفضای یک بعدی که با v_i نشان داده می شود در زیر فضای دوبعدی که با v_j نمایانده می شود قرار دارد اگر و تنها اگر $\langle v_i, v_j \rangle = 0$.

حال ماتریس $A = (a_{ij})$ با اندازه $(p^2 + p + 1) \times (p^2 + p + 1)$ را در نظر بگیرید که به صورت زیر تعریف می شود: سطرها و ستونهای A متناظرند با $v_1, v_2, \dots, v_{p^2+p+1}$ (سطرها و ستونها را به یک صورت شماره گذاری می کنیم) با ضابطه

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \langle v_i, v_j \rangle = 0 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ماتریس G_2

پس A یک ماتریس متقارن حقیقی است، و داریم $a_{ii} = 1$ اگر $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ یعنی دقیقاً وقتی v_i بر مقطع مخروطی $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ واقع است. پس تنها کاری که باید انجام دهیم این است که نشان دهیم

$$\text{trace } A = p + 1$$

از جبر خطی به یاد داریم که اثر 2 برابر است با مجموع ویژه مقدارها. در اینجا شگردی به کار می بریم: هر چند A پیچیده به نظر می رسد، تحلیل ماتریس A^2 آسان است. دو حقیقت را در اینجا ذکر می کنیم:

• هر سطر A شامل دقیقاً $p + 1$ تا 1 است. از این نتیجه می‌شود که $p + 1$ ویژه‌مقداری از A است زیرا $A \mathbf{1} = (p + 1) \mathbf{1}$ که در آن $\mathbf{1}$ بردار مرکب از 1 هاست.

• به‌ازای هر دو بردار متمایز v_i و v_j دقیقاً یک ستون با یک 1 در هر دو سطر وجود دارد (ستون متناظر با زیرفضای یکتای تولیدشده به‌وسیله v_i و v_j).

با استفاده از این دو نکته داریم

$$A^2 = \begin{pmatrix} p+1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & p+1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & \dots & & p+1 \end{pmatrix} = pI + J$$

که در آن I ماتریس همانی و J ماتریسی است که همه درایه‌هایش یک هستند. حال J دارای ویژه‌مقدار $p + 1$ و $p^2 + p + 1$ (با چندگانگی 1) و 0 (با چندگانگی $p^2 + p$) است. پس A^2 ویژه‌مقدارهای $(p + 1)^2 = p^2 + 2p + 1$ با چندگانگی 1 و p با چندگانگی $p^2 + p$ را دارد. چون A حقیقی و متقارن است و بنابراین قطری شدنی است، در می‌یابیم که A دارای ویژه‌مقدارهای $p + 1$ یا $-p(p + 1)$ و $p^2 + p$ ویژه‌مقدار $\pm\sqrt{p}$ است. طبق نکته اول در بالا، نخستین ویژه‌مقدار باید $p + 1$ باشد. فرض کنید که چندگانگی \sqrt{p} برابر r است، و چندگانگی $-\sqrt{p}$ برابر s ؛ در این صورت

$$\text{trace } A = (p + 1) + r\sqrt{p} - s\sqrt{p}$$

و اکنون به مقصد رسیده‌ایم: چون اثر یک عدد صحیح است، باید داشته باشیم $r = s$

□ پس $\text{trace } A = p + 1$.

۶. لم اسپینسر

در سال ۱۹۱۱، لویتنس براوتر^۱ قضیه مشهور نقطه ثابت خود را انتشار داد:

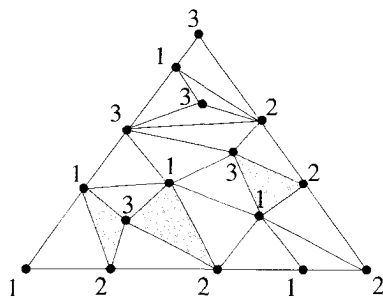
هر تابع پیوسته $f: B^n \rightarrow B^n$ از یک گوی n بعدی به خودش، نقطه ثابتی

(نقطه‌ای چون $x \in B^n$ با ضابطه $f(x) = x$) دارد.

1. Luitzen Brouwer

در حالت ۱ بعدی، یعنی در مورد بازه، این قضیه به سادگی از قضیه مقدار میانی به دست می آید، اما در ابعاد بالاتر، اثبات قضیه براوتر به ابزارهای پیچیده‌ای نیاز داشت. بنابراین، مایه شگفتی فراوان شد وقتی که در سال ۱۹۲۸، امانوئل اسپنسر جوان (که در آن موقع ۲۳ ساله بود) حکم ترکیباتی ساده‌ای به دست آورد که هم قضیه براوتر درباره نقطه ثابت و هم نوردایی بعد تحت نگاشتهای پیوسته را می‌توان از آن استنتاج کرد. علاوه بر آن، لم بسیار مبتکرانه اسپنسر اثباتی بسیار زیبا دارد که مبتنی بر شمارش دوگانه است.

ما درباره لم اسپنسر، و قضیه براوتر به عنوان نتیجه‌ای از آن، در حالت جالب $n = 2$ بعدی بحث می‌کنیم. خواننده در تعمیم اثباتها به ابعاد بالاتر (با استفاده از استقرا بر بعد) مشکلی نخواهد داشت.



مثلثهایی که با رنگهای مختلف رنگ آمیزی شده‌اند، با هاشور نشان داده شده‌اند.

لم اسپنسر

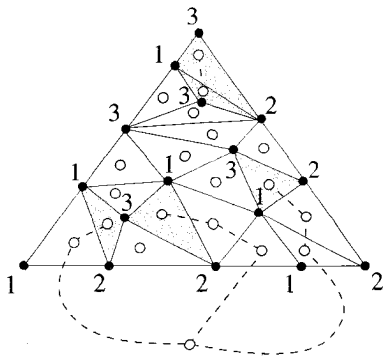
تصور کنید که مثلثی «بزرگ» با رأسهای V_1, V_2, V_3 مثلث بندی شده است (یعنی به تعدادی متناهی مثلث «کوچک» نامتداخل تجزیه شده است که دوبه دو در یک ضلع مشترک‌اند.)

فرض کنید رأسها در شکل مثلث بندی شده با سه رنگ با شماره‌های $\{1, 2, 3\}$ رنگ آمیزی می‌شوند به طوری که به V_i رنگ i (به ازای هر i) زده می‌شود، و فقط رنگهای i و j برای رأسهای روی ضلع از V_i تا V_j به کار می‌روند ($i \neq j$). در حالی که رأسهای درونی به دلخواه با یکی از رنگهای $1, 2, 3$ رنگ آمیزی می‌شوند.

در این صورت یک مثلث کوچک «سه رنگی» باید در مثلث بندی وجود داشته باشد که هر سه رنگ متفاوت را در رأسهایش دارد.

■ اثبات. ما حکم قویتری را اثبات خواهیم کرد: تعداد مثلثهای سه رنگی نه تنها غیر صفر است، بلکه همواره فرد است.

گراف دوگان مثلث بندی را در نظر می‌گیریم ولی همه یالهای آن را اختیار نمی‌کنیم بلکه فقط یالهایی را در نظر می‌گیریم که یالی را قطع می‌کنند که رئوسش رنگهای متفاوت ۱ و ۲ را دارند. پس یک «گراف دوگان جزئی» به دست می‌آوریم که درجه آن در همه رأسهایی که متناظر با مثلثهای سه رنگی اند ۱ است، برای همه مثلثهایی که در آنها دو رنگ ۱ و ۲ ظاهر می‌شوند ۲ است، و برای همه مثلثهایی که هر دو رنگ ۱ و ۲ را ندارند ۰ است. پس فقط مثلثهای سه رنگی متناظر با رأسهای از درجه فرد (درجه ۱) هستند.



ولی رأسی از گراف دوگان که متناظر با بیرون مثلث بندی است دارای درجه فرد است. در واقع در طول ضلع بزرگ از V_1 تا V_2 ، تعداد فردی تغییر بین رنگهای ۱ و ۲ رخ می دهد. پس تعداد فردی از یالهای گراف دوگان جزئی، این ضلع بزرگ را قطع می کنند، درحالی که ضلعهای بزرگ دیگر نمی توانند هر دو رنگ ۱ و ۲ را داشته باشند. حال چون تعداد رأسهای فرد در هر گراف متناهی زوج است [بنابه رابطه (۴)]، تعداد مثلثهای کوچک با سه رنگ متفاوت (متناظر با رأسهای درونی فرد در گراف دوگان) فرد است. □

به آسانی می توان قضیه برآوثر را از این لم استنتاج کرد.

■ اثبات قضیه نقطه ثابت برآوثر (برای $d = 2$). فرض کنیم Δ مثلثی در \mathbb{R}^2 به رؤوس $e_1 = (1, 0, 0)$ ، $e_2 = (0, 1, 0)$ و $e_3 = (0, 0, 1)$ باشد. کافی است ثابت کنیم هر نگاشت پیوسته $f: \Delta \rightarrow \Delta$ یک نقطه ثابت دارد، زیرا Δ با گوی دوبعدی B_2 همسانریخت^۱ است.

حداکثر طول ضلع در یک مثلث بندی T را با $\delta(T)$ نشان می دهیم. به راحتی می توان دنباله ای نامتناهی از مثلث بندیهای T_n از Δ ساخت به قسمی که دنباله قطره ای ماکسیمال $\delta(T_n)$ به 0 میل کند. چنین دنباله ای را می توان صریحاً ساخت یا آنکه به طور استقرایی به دست آورد مثلاً به این طریق که T_{n+1} را تقسیم گرانگاهی^۲ T_n بگیریم.

برای هر یک از این مثلث بندیها، رنگ آمیزی رأسها (v ها) با سه رنگ [۳-رنگ آمیزی] را به این صورت تعریف می کنیم: قرار می دهیم $\lambda(v) := \min\{i : f(v)_i < v_i\}$ ، یعنی $\lambda(v)$ کوچکترین اندیس i است به طوری که مختص λ از $f(v) - v$ منفی است. با فرض اینکه f نقطه ثابتی ندارد، این رنگ آمیزی خوش تعریف است. برای ملاحظه این مطلب، توجه کنید که هر $v \in \Delta$ در صفحه $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ قرار دارد، پس $\sum_i v_i = 1$ ، بنابراین اگر $f(v) \neq v$ ، آنگاه دست کم یکی از مختصات $f(v) - v$ باید منفی (و دست کم یکی مثبت باشد).

حال صادق بودن این رنگ آمیزی در فرضهای لم اسپنسر را بررسی می کنیم. نخست، به رأس e_i باید رنگ i زده شود زیرا تنها مؤلفه منفی ممکن $f(e_i) - e_i$ مؤلفه λ نام است. به علاوه، اگر v برضلع مقابل e_i واقع باشد، آنگاه $v_i = 0$ ، پس مؤلفه

ام $v - f(x)$ نمی تواند منفی باشد و از این رو v نمی تواند رنگ i را دریافت کند. اکنون لم اسپنسر به ما می گوید که در هر مثلث بندی T_n یک مثلث سه رنگی $\{v^{n:1}, v^{n:2}, v^{n:3}\}$ با $i = \lambda(v^{n:i})$ وجود دارد. دنباله نقاط $(v^{n:1})_{n \geq 1}$ لزوماً همگرا نیست ولی چون سادک Δ فشرده است زیر دنباله ای از آن یک نقطه حدی دارد. اگر به جای دنباله مثلث بندیهای T_n زیر دنباله متناظر را قرار دهیم (که آنها را هم برای سادگی با T_n می نمایانیم) می توانیم فرض کنیم که $(v^{n:1})_n$ به نقطه ای چون $v \in \Delta$ می گراید. حال فاصله $v^{n:2}$ و $v^{n:3}$ از $v^{n:1}$ حداکثر برابر طول شبکه $\delta(T_n)$ است که به \circ میل می کند. پس دنباله های $(v^{n:2})$ و $(v^{n:3})$ به یک نقطه v میل می کنند.

اما $f(v)$ کجاست؟ می دانیم که به ازای هر n ، نخستین مختص $f(v^{n:1})$ کوچکتر از نخستین مختص $v^{n:1}$ است. حال چون f پیوسته است، نتیجه می گیریم که نخستین مختص $f(v)$ کوچکتر یا مساوی نخستین مختص v است. همین استدلال برای مختصات دوم و سوم صادق است. پس هیچ یک از مختصات $f(v) - v$ مثبت نیست — و قبلاً دیدیم که این متناقض با فرض $f(v) \neq v$ است. \square

مراجع

- [1] L.E.J. BROUWER: *Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*, Math. Annalen **71** (1911), 97-115.
- [2] W. C. BROWN: *On graphs that do not contain a Thomsen graph*, Canadian Math. Bull. **9** (1966), 281-285.
- [3] P. ERDŐS, A. RÉNYI & V. SÓS: *On a problem of graph theory*, Studia Sci. Math. Hungar. **1** (1966), 215-235.
- [4] P. ERDŐS & G. SZEKERES: *A combinatorial problem in geometry*, Compositio Math. (1935), 463-470.
- [5] S. HOŞTEN & W.D. MORRIS: *The order dimension of the complete graph*, Preprint 1998; Discrete Math., to appear.
- [6] I. REIMAN: *Über ein Problem von K. Zarankiewicz*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **9** (1958), 269-273.
- [7] J. SPENCER: *Minimal scrambling sets of simple orders*, Acta Math. Hungar. **22** (1971), 349-353.

-
- [8] E. SPERNER: *Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes*, Abh. Math. Sem. Hamburg **6** (1928), 265-272.
- [9] W.T. TROTTER: *Combinatorics and Partially Ordered Sets: Dimension Theory*, John Hopkins University Press, Baltimore and London 1992.



امانوئل اسپنسر

در این فصل به یکی از موضوعات بنیادی ترکیبیات می‌پردازیم: ویژگیها و اندازه‌های خانواده‌های خاصی چون \mathcal{F} از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای متناهی مثل $N = \{1, 2, \dots, n\}$. بحث را با دو قضیه مهم و مشهور این می‌بحث آغاز می‌کنیم که عبارت‌اند از قضایای اسپنسر و اردوش-کو-رادو^۱. هر دو قضیه بارها اثبات شده‌اند و هریک آغازگر شاخه جدیدی از نظریه ترکیبیاتی مجموعه‌ها بوده است. به نظر می‌رسد راه طبیعی اثبات هر دو قضیه استفاده از استقرا باشد ولی استدلالهایی که ما می‌آوریم کاملاً متفاوت و واقعاً مبتکرانه‌اند.

امانوئل اسپنسر در سال ۱۹۲۸ پرسش زیر را مطرح کرد و به آن پاسخ داد: فرض کنید مجموعه $N = \{1, 2, \dots, n\}$ به ما داده شده است. خانواده‌ای چون \mathcal{F} از زیرمجموعه‌های N را پادزنجیر می‌نامیم اگر هیچ یک از مجموعه‌های عضو \mathcal{F} شامل مجموعه دیگری از خانواده \mathcal{F} نباشد. اندازه بزرگترین پادزنجیر چقدر است؟ واضح است که \mathcal{F}_k ، خانواده مرکب از همه مجموعه‌های K عضوی، در ویژگی پادزنجیر صدق می‌کند و $|\mathcal{F}_k| = \binom{n}{k}$. با توجه به ماکسیم ضریبهای دوجمله‌ای (صفحه ۱۵) نتیجه می‌گیریم که پادزنجیری با اندازه $\max \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ وجود دارد. حال قضیه اسپنسر حاکی است که پادزنجیر بزرگتری وجود ندارد.

قضیه ۱. اندازه یک بزرگترین پادزنجیر یک مجموعه n عضوی برابر است با $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

■ اثبات. اثبات زیر که لوبل^۲ آن را عرضه کرده است شاید کوتاهترین و زیباترین برهان در میان اثباتهای بسیار باشد. فرض کنید \mathcal{F} پادزنجیری دلخواه است. در این صورت باید نشان دهیم $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. کلید اثبات این است که زنجیرهایی از زیرمجموعه‌ها چون $\emptyset = C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \dots \subset C_n = N$ به ازای $i = 0, \dots, n$ داریم $|C_i| = i$. چند زنجیر وجود دارد؟ واضح است که می‌توانیم عضوهای N را یکی یکی کنار هم بگذاریم و [هر بار یک زیرمجموعه و در نهایت] زنجیری به دست آوریم، پس دقیقاً به تعداد جایگشتهای N یعنی $n!$ زنجیر خواهیم داشت. حال این پرسش را برای مجموعه‌ای چون $A \in \mathcal{F}$ مطرح می‌کنیم که

چندتا از این زنجیرها شامل A هستند. این هم موضوع ساده‌ای است. برای رسیدن به A از \emptyset باید عضوهای A را یکی یکی کنار هم بگذاریم و سپس برای گذار از A به N باید عضوهای باقیمانده را بیفزاییم. از به هم پیوستن این دو زنجیر، زنجیری شامل A به دست می‌آید. پس اگر A شامل k عضو باشد، آنگاه با در نظر گرفتن همهٔ این جفت زنجیرها می‌بینیم که دقیقاً $k!(n-k)!$ تا زنجیر شامل A وجود دارد. توجه کنید که هیچ زنجیری نمی‌تواند شامل دو مجموعهٔ متفاوت A و B از \mathcal{F} باشد زیرا \mathcal{F} پادزنجیر است.

برای تکمیل اثبات، فرض کنید m_k تعداد مجموعه‌های k عضوی در \mathcal{F} باشد. پس $|\mathcal{F}| = \sum_{k=0}^n m_k$. در این صورت از بحث ما نتیجه می‌شود که تعداد زنجیرهای شامل عضوی از \mathcal{F} برابر است با

$$\sum_{k=0}^n m_k k!(n-k)!$$

و مقدار این عبارت نمی‌تواند از $n!$ یعنی تعداد همهٔ زنجیرها بیشتر باشد. پس نتیجه می‌گیریم

$$\sum_{k=0}^n \frac{m_k}{\binom{n}{k}} \leq 1 \quad \text{یا} \quad \sum_{k=0}^n m_k \frac{k!(n-k)!}{n!} \leq 1$$

اگر به جای مخرجها بزرگترین ضریب دوجمله‌ای را قرار دهیم به دست می‌آوریم

$$|\mathcal{F}| = \sum_{k=0}^n m_k \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \quad \text{یعنی که} \quad \frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} \sum_{k=0}^n m_k \leq 1$$

□ و اثبات به‌انجام می‌رسد.

تحقیق کنید که خانوادهٔ همهٔ مجموعه‌های $\frac{n}{2}$ عضوی به‌ازای n زوج، و نیز دو خانوادهٔ مرکب از همهٔ مجموعه‌های $\frac{n-1}{2}$ عضوی و همهٔ مجموعه‌های $\frac{n+1}{2}$ عضوی به‌ازای n فرد، واقعاً تنها پادزنجیرهایی هستند که اندازهٔ ماکسیمم را به دست می‌آورند.

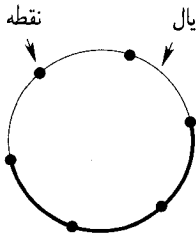
قضیهٔ دوم ما ماهیت کاملاً متفاوتی دارد. باز مجموعهٔ $N = \{1, \dots, n\}$ را در نظر می‌گیریم. خانوادهٔ \mathcal{F} از زیرمجموعه‌های آن را خانوادهٔ متقاطع می‌نامیم اگر هر دو مجموعه در \mathcal{F} دست‌کم یک عضو مشترک داشته باشند. تقریباً به‌طور مستقیم معلوم می‌شود که بزرگترین اندازه‌ای که یک خانوادهٔ متقاطع می‌تواند داشته باشد 2^{n-1} است. اگر $A \in \mathcal{F}$ ، آنگاه اشتراک متمم آن یعنی $A^c = N \setminus A$ با A تهی است و بنابراین نمی‌تواند در \mathcal{F} باشد. پس نتیجه می‌گیریم هر خانوادهٔ متقاطع حداکثر نیمی از تعداد کل زیرمجموعه‌ها (2^n) را شامل است یعنی $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$. اما اگر خانوادهٔ همهٔ مجموعه‌هایی را در نظر بگیریم که شامل یک عضو مشخص‌اند، مثلاً خانوادهٔ

\mathcal{F}_1 مرکب از همه مجموعه‌های شامل ۱، آنگاه روشن است که $|\mathcal{F}_1| = 2^{n-1}$ و مسأله حل و فصل می‌شود.

اما اکنون به پرسش زیر توجه کنید: اگر همه مجموعه‌های عضو خانواده متقاطع \mathcal{F} هم‌اندازه، مثلاً دارای اندازه k ، باشند، \mathcal{F} چقدر می‌تواند بزرگ باشد؟ این‌گونه خانواده‌ها را k -خانواده‌های متقاطع می‌نامیم. برای کنار گذاشتن حالات پیش یا افتاده، فرض می‌کنیم $n \geq 2k$ زیرا در غیر این صورت هر دو مجموعه k عضوی اشتراک دارند و چیزی نمی‌ماند که اثبات کنیم. با استفاده از ایده بالا، مسلماً می‌توانیم چنین خانواده \mathcal{F}_1 ‌ای را با در نظر گرفتن همه مجموعه‌های k عضوی که شامل یک عضو مشخص، مثلاً ۱، هستند، به دست آوریم. واضح است که همه مجموعه‌های عضو \mathcal{F}_1 را با افزودن همه زیرمجموعه‌های $(k-1)$ عضوی $\{2, 3, \dots, n\}$ به ۱ می‌توان به دست آورد، پس $|\mathcal{F}_1| = \binom{n-1}{k-1}$ آیا می‌توان نتیجه بهتری به دست آورد؟ خیر — و این مضمون قضیه اردوش-کو-رادو است.

قضیه ۲. بزرگترین اندازه یک k -خانواده متقاطع در یک مجموعه n عضوی، وقتی $n \geq 2k$ ، برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$.

پال اردوش، چاو کو^۱ و ریچارد رادو این قضیه را در سال ۱۹۳۸ یافتند ولی تا ۲۳ سال بعد انتشار ندادند. از آن زمان به بعد، اثباتهای متعدد و صورتهای مختلفی از آن عرضه شده است، ولی استدلال زیر که از آن گیولا کاتونا است، زیبایی و ظرافت خاصی دارد.



دایره‌ای با $n = 6$ نقطه تقسیم. یالهایی که پررنگ رسم شده‌اند، کماتی به طول ۳ را نشان می‌دهند.

■ اثبات. کلید اثبات، لم ساده زیر است که در نخستین نگاه، کلاً بی‌ارتباط با مسأله ما به نظر می‌رسد. دایره‌ای چون C در نظر بگیرید که به وسیله n نقطه به n بخش [که آنها را «یال» می‌نامیم] تقسیم شده است. فرض کنید کماتی به طول k مرکب از $k+1$ نقطه متوالی و k یال بین آنها باشد.

لم. فرض کنید $n \geq 2k$ ، و کماتهای متمایز A_1, \dots, A_t به طول k به ما داده شده است چنانکه هر دو کمان یک یال مشترک دارند. در این صورت $t \leq k$.

برای اثبات این لم، نخست خاطر نشان می‌کنیم که هر نقطه از C نقطه انتهایی حداکثر یک کمان است. در واقع اگر A_i و A_j نقطه انتهایی مشترکی چون v می‌داشتند باید نقطه آغاز آنها در دو طرف نقطه آغازی می‌بود (زیرا این دو کمان متمایزند). ولی

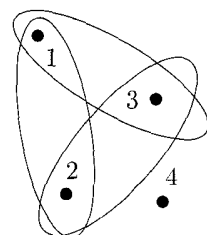
در این صورت، وقتی $n \geq 2k$ آنها نمی‌توانند یال مشترکی داشته باشند. A_1 را تثبیت می‌کنیم. چون هر A_i ($i \geq 2$) یالی مشترک با A_1 دارد، یکی از نقاط انتهایی A_i یک نقطه داخلی A_1 است. همان‌طور که دیدیم این نقطه‌های انتهایی باید متمایز باشند، و نیز A_1 شامل $k-1$ نقطه داخلی است، پس حداکثر $k-1$ کمان دیگر می‌تواند وجود داشته باشد و بنابراین، روی هم رفته، حداکثر k کمان وجود دارد. \square

اکنون می‌پردازیم به اثبات قضیه اردوش-کوبرادو. فرض کنیم \mathcal{F} یک k -خانواده متقاطع باشد. دایره C را با n نقطه و n یال مانند فوق، در نظر می‌گیریم. جایگشت دوری دلخواه $\pi = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ را اختیار می‌کنیم و عددهای a_i را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت کنار یالهای C می‌نویسیم. حال به شمارش تعداد مجموعه‌های $A \in \mathcal{F}$ که به صورت k عدد متوالی روی C ظاهر می‌شوند می‌پردازیم. چون \mathcal{F} خانواده‌ای متقاطع است، بنابه لم ما، حداکثر k تا از این‌گونه مجموعه‌ها به دست می‌آوریم. چون این موضوع برای هر جایگشت دوری صادق است، و چون $(n-1)!$ جایگشت دوری وجود دارد، به این طریق حداکثر $k(n-1)!$

مجموعه از \mathcal{F} تولید می‌شود که به صورت عناصر متوالی جایگشتی دوری ظاهر می‌گردند. یک مجموعه مشخص $A \in \mathcal{F}$ چند بار شمرده می‌شود؟ جواب آسان است: در A ظاهر می‌شود اگر k عضو A متوالیاً به ترتیبی ظاهر شوند. پس $k!$ امکان برای نوشتن A به‌طور متوالی وجود دارد و $(n-k)!$ راه برای مرتب کردن عضوهای باقیمانده. پس نتیجه می‌گیریم که یک مجموعه مشخص A دقیقاً در $k!(n-k)!$ جایگشت دوری ظاهر می‌شود و از این رو

$$\square \quad |\mathcal{F}| \leq \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \binom{n-1}{k-1}$$

و باز می‌توانیم این پرسش را مطرح کنیم که آیا خانواده‌های شامل یک عضو مشخص تنها k -خانواده‌های متقاطع‌اند یا نه. مسلماً به‌ازای $n = 2k$ چنین نیست. مثلاً به‌ازای $n = 4$ و $k = 2$ ، خانواده $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ نیز دارای اندازه $\binom{3}{1} = 3$ است. به‌طور کلی، به‌ازای $n = 2k$ ، k -خانواده‌های متقاطع ماکسیمال با اندازه $\frac{1}{k} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$ را به دست می‌آوریم، به این طریق که از هر جفت مجموعه‌ای یکی مجموعه‌ای k عضوی چون A و دیگری متمم آن N/A است، یکی را به دلخواه بر می‌گزینیم. ولی به‌ازای $n > 2k$ خانواده‌های خاص شامل یک عضو مشخص واقعاً تنها خانواده‌های متقاطع‌اند. از خواننده می‌خواهیم مهارت خود را با اثبات این



خانواده‌ای متقاطع به‌ازای $n = 4$ ، $k = 2$.

موضوع بیازماید.

و بالاخره می‌پردازیم به سومین قضیه که احتمالاً مهم‌ترین قضیه بنیادی در نظریه مجموعه‌های متناهی است، یعنی قضیه «ازدواج» از فیلیپ هال^۱ که در سال ۱۹۳۵ به اثبات رسید. این قضیه درهای مبحثی را که امروز نظریه جورسازی^۲ نامیده می‌شود گشود و دارای کاربردهای متنوعی است که بعضی از آنها را در ادامه بحث خواهیم دید. مجموعه متناهی X و گرد آورده‌ای چون A_1, \dots, A_n از زیرمجموعه‌های X را (که لزوماً متمایز نیستند) در نظر بگیرید. مجموعه‌ای مثل $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ را یک دستگاه نماینده‌های متمایز^۳ $\{A_1, \dots, A_n\}$ می‌نامیم اگر x_i ها متمایز باشند و به ازای هر i ، $x_i \in A_i$. البته چنین دستگاهی که به اختصار SDR نامیده می‌شود لزوماً وجود ندارد، مثلاً وقتی یکی از مجموعه‌های A_i تهی است. مضمون قضیه هال، تعریف دقیق شرط وجود SDR است.

قبل از بیان قضیه، تعبیر آن در جامعه انسانی را ذکر می‌کنیم که توجیه کننده نام قضیه ازدواج است. مجموعه‌ای از دختران چون $\{1, \dots, n\}$ و مجموعه‌ای مثل X از پسران را در نظر بگیرید. هرگاه $x \in A_i$ ، آنگاه دختر i و پسر x مایل به ازدواج با یکدیگرند. پس A_i مجموعه همسران احتمالی دختر i است. در این صورت SDR نشان‌دهنده مجموعه‌ای از پسران است که هر یک از آنها فرد دلخواه یکی از دختران $\{1, 2, \dots, n\}$ است.

بیان قضیه به زبان مجموعه‌ها چنین است.

قضیه^۳. فرض کنید A_1, \dots, A_n گردآورده‌ای از زیرمجموعه‌های مجموعه متناهی X باشد. در این صورت دستگاهی از نماینده‌های متمایز وجود دارد اگر و تنها اگر اجتماع هر m مجموعه A_i شامل دست‌کم m عضو باشد که $1 \leq m \leq n$.

شرط به‌وضوح لازم است: اگر اجتماع m مجموعه A_i کمتر از m عضو داشته باشد، آنگاه این مجموعه را مسلماً نمی‌توان با عضوهای متمایز نشان داد. حقیقت شگفت‌انگیز (که حاصلش کاربردپذیری عام است) این است که این شرط بدیهی، کافی نیز هست. اثبات اولیه هال نسبتاً پیچیده بود، و متعاقباً اثباتهای متفاوت بسیاری عرضه شد که از میان آنها اثبات زیر (مبتنی بر ایده‌های هالموس و وان^۴) شاید طبیعیترین برهان باشد.



«انتخاب همسری از میان جمع»

■ اثبات. از استقرا روی n استفاده می‌کنیم. به‌ازای $m = 1$ چیزی برای اثبات وجود ندارد. گیریم $m > 1$ و فرض کنیم $\{A_1, \dots, A_n\}$ در شرط قضیه که آن را به اختصار با (H) نشان می‌دهیم صادق است. گردآورده‌ای از ℓ مجموعه A_i با ضابطه $1 \leq \ell < n$ را خانواده بحرانی می‌نامیم اگر اجتماع آن دارای کاردینال ℓ باشد. حال دو حالت را از هم متمایز می‌کنیم.

حالت ۱: هیچ خانواده بحرانی وجود ندارد.

عضوی چون $x \in A_n$ انتخاب می‌کنیم. x را از X حذف می‌کنیم و گردآورده A'_1, \dots, A'_{n-1} با ضابطه $A'_i = A_i \setminus x$ را در نظر می‌گیریم. چون هیچ خانواده بحرانی وجود ندارد، اجتماع هر m مجموعه A'_i شامل دست‌کم m عضو است. پس بنابه استقرا روی m یک SDR وابسته به $\{A'_1, \dots, A'_{n-1}\}$ به صورت x_1, \dots, x_{n-1} وجود دارد، و همراه با $x_n = x$ SDR ای برای گردآورده اولیه به دست می‌دهد.

حالت ۲: خانواده‌ای بحرانی وجود دارد.

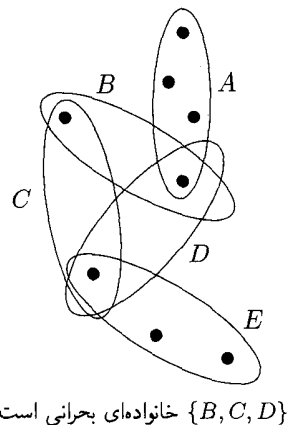
می‌توانیم با شماره‌گذاری مجدد مجموعه‌ها فرض کنیم $\{A_1, \dots, A_\ell\}$ یک خانواده بحرانی است. در این صورت $\bigcup_{i=1}^{\ell} A_i = \bar{X}$ که $|\bar{X}| = \ell$. چون $\ell < n$ به استقرا، وجود یک SDR را برای A_1, \dots, A_ℓ استنتاج می‌کنیم یعنی یک شماره‌گذاری x_1, \dots, x_ℓ از \bar{X} وجود دارد به طوری که به‌ازای هر $i \leq \ell$ $x_i \in A_i$.

حال گردآورده باقیمانده $A_{\ell+1}, \dots, A_n$ را در نظر می‌گیریم، و m تا از این مجموعه‌ها را به دلخواه اختیار می‌کنیم. چون اجتماع A_1, \dots, A_ℓ و این m مجموعه بنابه شرط (H) دست‌کم شامل $\ell + m$ عضو است، نتیجه می‌گیریم که m مجموعه شامل دست‌کم m عضو در بیرون \bar{X} است. به عبارت دیگر، شرط (H) برای خانواده

$$A_{\ell+1} \setminus \bar{X}, \dots, A_n \setminus \bar{X}$$

صادق است. حال با استفاده از استقرا، SDR ای برای $A_{\ell+1}, \dots, A_n$ به دست می‌آید که در آن از \bar{X} اجتناب می‌شود. با ترکیب آن با x_1, \dots, x_ℓ SDR ای برای همه مجموعه‌های A_i به دست می‌آوریم. به این ترتیب، اثبات به انجام می‌رسد. □

همان‌طور که گفتیم، قضیه هال سرآغاز نظریه جور سازی [۵] بوده است که امروز مبحث بسیار گسترده‌ای است. از میان صورتها و نتایج بسیار آن، یک حکم بسیار جذاب را



ذکر می‌کنیم که از خواننده دعوت می‌شود خودش به اثبات آن بپردازد:

فرض کنید مجموعه‌های A_1, \dots, A_n دارای اندازه $k \geq 1$ هستند و به علاوه هیچ عضوی در بیش از k مجموعه نیست. در این صورت k تا SDR وجود دارد به قسمی که به ازای هر i, k نماینده A_i متمایزند و بنابراین روی هم مجموعه A_i را تشکیل می‌دهند.

این قضیه زیبا افقهای جدیدی را در مورد امکانات ازدواج نشان می‌دهد.

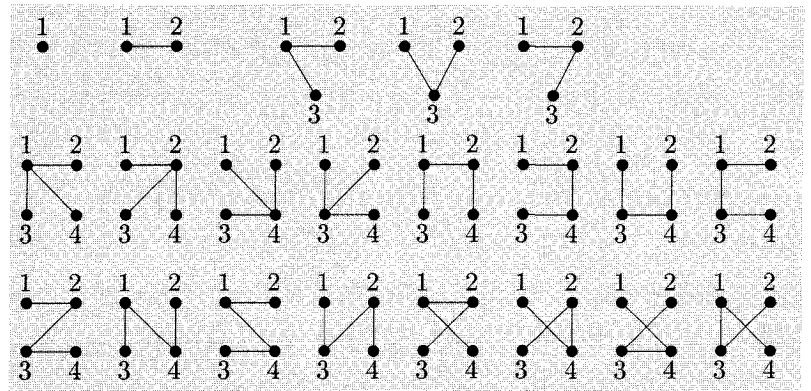
مراجع

- [1] P. ERDŐS, C. KO & R. RADO: *Intersection theorems for systems of finite sets*, Quart. J. Math. (Oxford), Ser. (2) **12** (1961), 313-320.
- [2] P. HALL: *On representatives of subsets*, Quart. J. Math. (Oxford) **10** (1935), 26-30.
- [3] P.R. HALMOS & H. E. VAUGHAN: *The marriage problem*, Amer. J. Math. **72** (1950), 214-215.
- [4] G. KATONA: *A simple proof of the Erdős-Ko-Rado theorem*, J. Combinatorial Theory, Ser. B **13** (1972), 183-184.
- [5] L. LOVÁSZ & M. D. PLUMMER: *Matching Theory*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1986.
- [6] D. LUBELL: *A short proof of Sperner's theorem* J. Combinatorial Theory **1** (1966), 299.
- [7] E. SPERNER: *Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge*, Math. Zeitschrift **27** (1928), 544-548.

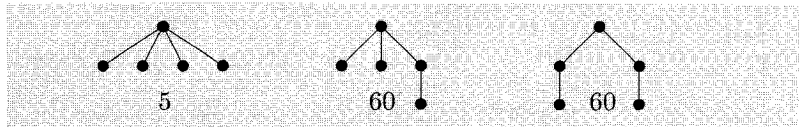


آرت کیلی

یکی از زیباترین فرمولهای ترکیبیات شمارشی به تعداد درختهای نشاندار^۱ مربوط می‌شود. مجموعه $N = \{1, 2, \dots, n\}$ را در نظر بگیرید. با این مجموعه رؤوس چند درخت متفاوت می‌شود ساخت؟ این تعداد را با T_n نمایش می‌دهیم. با شمارش «با دست»، مقادیر $T_1 = 1, T_2 = 1, T_3 = 3, T_4 = 16$ برای درختهای نشان داده شده در زیر به دست می‌آید:



توجه کنید که ما درختهای نشاندار را در نظر داریم؛ هرچند اگر گرافهای یکریخت را یکی بگیریم فقط یک درخت از مرتبه ۳ وجود دارد، اما اگر بین درختها برحسب اینکه رأس درویشان کدام است تمایز بگذاریم، سه درخت نشاندار متفاوت وجود دارد. به ازای $n = 5$ ، سه درخت ناپکریخت داریم:



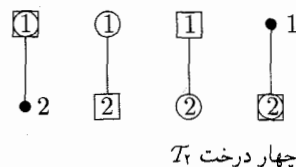
برای درخت اول به‌وضوح ۵ نشانگذاری متفاوت میسر است، و برای دومی و سومی $\frac{5!}{4} = 60$ نشانگذاری، و به دست می‌آوریم $T_5 = 125$. این شواهد کافی است که حدس بزنیم $T_n = n^{n-2}$ ، و قضیه کیلی دقیقاً همین است.

1. labeled

قضیه. n^{n-2} درخت نشاندار متفاوت با n رأس وجود دارند.

این قضیه زیبا تن به اثباتهایی به همان اندازه زیبا می‌دهد که مبتنی بر فنون جبری و ترکیبیاتی متعددی هستند. ما رئوس سه‌تا از این اثباتها را ذکر می‌کنیم و سپس اثباتی می‌آوریم که تا به امروز در میان اثباتهای این قضیه از همه زیباتر است.

■ اثبات اول (تناظر دوسویی). روش سنتی و مستقیمترین روش، یافتن تناظری دوسویی از مجموعه همه درختهای با n رأس به روی مجموعه دیگری است با کاردینال معلوم n^{n-2} . طبعاً مجموعه همه دنباله‌های مرتب (a_1, \dots, a_{n-2}) با $1 \leq a_i \leq n$ به ذهن می‌آید. پس می‌خواهیم هر درخت T را با یک دنباله (a_1, \dots, a_{n-2}) به طور یکتا کدگذاری کنیم. چنین کدی را پروفر^۱ یافت و در بیشتر کتابهای نظریه گرافها می‌آید.

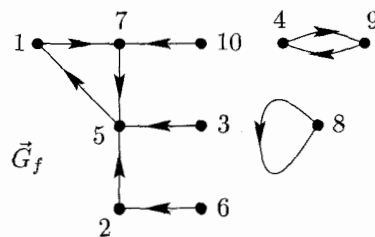


در اینجا می‌خواهیم درباره اثبات دیگری مبتنی بر تناظر دوسویی صحبت کنیم که از آن جوپال^۲ است و هرچند شهرت کمتری دارد ولی همان قدر زیبا و ساده است. به این منظور نه فقط درختهای t روی $N = \{1, \dots, n\}$ بلکه درختهایی همراه با دو رأس متمایز، انتهای چپ o و انتهای راست \square که ممکن است برهم منطبق باشند در نظر می‌گیریم. فرض کنید $\mathcal{T}_n = \{(t; o; \square)\}$ این مجموعه جدید باشد؛ در این صورت واضح است که $|\mathcal{T}_n| = n^2 T_n$.

پس هدف ما اثبات $|\mathcal{T}_n| = n^n$ است. حال مجموعه‌ای هست که می‌دانیم اندازه‌اش n^n است، یعنی مجموعه N^N مرکب از همه نگاشتهای از N به N . پس اگر بتوانیم یک تناظر دوسویی از N^N به روی \mathcal{T}_n بیابیم، فرمولمان ثابت می‌شود. فرض کنید $f: N \rightarrow N$ نگاشتی دلخواه باشد. با ترسیم پیکانهایی از i به $f(i)$ ، f را به صورت گراف جهتدار \vec{G}_f نمایش می‌دهیم.

مثلاً نگاشت

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 5 & 5 & 9 & 1 & 2 & 5 & 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$



با گراف جهتداری که در حاشیه آمده، نشان داده شده است.

یک مؤلفه \vec{G}_f را در نظر بگیرید. چون دقیقاً یک پال از هر رأس صادر می‌شود،

این مؤلفه شامل تعداد یکسانی رأس و یال، و بنابراین دقیقاً یک دور جهتدار است. فرض کنید $M \subseteq N$ اجتماع مجموعه‌های رأسهای این دورهاست. اندکی تأمل نشان می‌دهد که M زیرمجموعهٔ ماکسیمال یکنای N است به طوری که تحدید f به روی M همچون یک نگاشت دوسویی روی M عمل می‌کند. می‌نویسیم

$$f|_M = \begin{pmatrix} a & b & \dots & z \\ f(a) & f(b) & \dots & f(z) \end{pmatrix}$$

که در آن عددهای a, b, \dots, z در ردیف اول در ترتیب طبیعی ظاهر می‌شوند. از اینجا یک ترتیب $f(a), f(b), \dots, f(z)$ از M مطابق ردیف دوم به دست می‌آید. حال $f(a)$ انتهای چپ و $f(z)$ انتهای راست است.

اکنون درخت t متناظر با نگاشت f به صورت زیر ساخته می‌شود: $f(a), \dots, f(z)$ را به این ترتیب به صورت مسیری از $f(a)$ به $f(z)$ رسم می‌کنیم و رأسهای باقیمانده را مطابق \bar{G}_f (با حذف پیکانها) اضافه می‌کنیم.

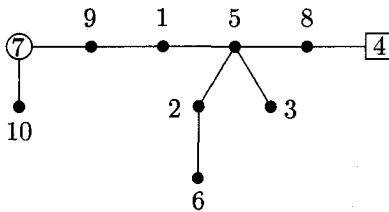
در مثال بالا به دست می‌آوریم $M = \{1, 4, 5, 7, 8, 9\}$

$$f_M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 1 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

و بنابراین درخت t را داریم که تصویرش درحاشیه آمده است.

بلافاصله ملاحظه می‌شود که چگونه این فرایند را معکوس کنیم: با مفروض بودن درخت t ، به مسیر یکنای P از انتهای چپ تا انتهای راست نظر می‌افکنیم. از اینجا مجموعهٔ M و نگاشت $f|_M$ به دست می‌آید. سپس تناظرهای باقیماندهٔ $f(i) \rightarrow i$ مطابق مسیرهای یکنای از i به P ، افزوده می‌شوند. \square

■ اثبات دوم (جبرخطی). می‌توان T_n را تعداد درختهای فراگیر درگراف کامل K_n در نظر گرفت. حال به یک گراف سادهٔ همبند دلخواه G روی $V = \{1, 2, \dots, n\}$ توجه کنید؛ تعداد درختهای فراگیر را با $t(G)$ نشان می‌دهیم؛ پس $T_n = t(K_n)$. قضیهٔ مشهور زیر قضیهٔ ماتریس-درخت کیرشوف ([۱] را ببینید) است. ماتریس ملازمت G یعنی $B = (b_{ie})$ را که سطرهایش با عضوهای V و ستونهایش با عضوهای E نشانگذاری می‌شوند در نظر بگیرید؛ درایه‌های این ماتریس برابر ۱ یا ۰ هستند برحسب آنکه $i \in e$ یا $i \notin e$. توجه کنید که $|E| \geq n - 1$ چون G همبند است. در هر ستون به جای یکی از ۱ها به طور دلخواه -1 را قرار می‌دهیم (این کار معادل است



با نوعی جهت‌دهی به G ، و ماتریس جدید را $C \cdot M = CC^T$ می‌نامیم که یک ماتریس متقارن $n \times n$ با درجه‌های d_1, \dots, d_n در قطر اصلی می‌نامیم.

گزاره. به‌ازای هر $i = 1, \dots, n$ داریم $t(G) = \det M_{ii}$ که در آن M_{ii} از M با حذف سطر i ام و ستون i ام حاصل می‌شود.

■ اثبات. کلید اثبات، قضیهٔ بینهٔ اکوسی در جبر خطی است: فرض کنید P ماتریسی $(r \times r)$ و Q ماتریسی $(s \times r)$ باشد که $r \leq s$. در این صورت $\det(PQ)$ برابر با مجموع حاصلضربهای دترمینانهای زیرماتریسهای $(r \times r)$ متناظر است که در اینجا «متناظر» به‌این معناست که اندیسهای یکسانی برای r ستون P و r سطر Q در نظر می‌گیریم. پس به‌ازای M_{ii} داریم

$$\det M_{ii} = \sum_N \det N \cdot \det N^T = \sum_N (\det N)^2$$

که در آن N روی تمام زیرماتریسهای $(n-1) \times (n-1)$ از $C \setminus \{i\}$ سطر i تغییر می‌کند. $n-1$ ستون N متناظر است با زیرگرافی از G با $n-1$ یال و n رأس، و فقط می‌ماند که نشان دهیم

$$\det N = \begin{cases} \pm 1 & \text{اگر این یالها درختی پدید آورند} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

فرض کنید $n-1$ یال درختی پدید نیاورند. در این صورت مؤلفه‌ای وجود دارد که شامل i نیست. چون مجموع سطرهای متناظر این مؤلفه 0 است، نتیجه می‌گیریم که این سطرها وابستهٔ خطی‌اند، و بنابراین $\det N = 0$.

حال فرض کنید که ستونهای N درختی پدید می‌آورند. در این صورت، رأسی چون $i \neq j_1$ از درجهٔ 1 وجود دارد؛ فرض کنید e_1 یال ملازم با آن باشد. با حذف j_1, e_1 درختی با $n-2$ یال به‌دست می‌آوریم. و باز رأسی چون $i \neq j_2$ از درجهٔ 1 با یال ملازم e_2 وجود دارد. به‌همین طریق ادامه می‌دهیم تا $j_2, e_2, \dots, j_{n-1}, e_{n-1}$ را به‌دست می‌آوریم. حال سطرها و ستونها را جابه‌جا می‌کنیم تا e_2, \dots, e_{n-1} با $j_i \in e_i$ معین شوند. حال سطرها و ستونها را جابه‌جا می‌کنیم تا j_k به‌سطر k ام و e_k به‌ستون k ام تبدیل شود. چون بنابه نحوهٔ ساخت، به‌ازای $k < l$ ، $j_k \notin e_l$ می‌بینیم که ماتریس جدید N' ماتریس پایین مثلثی است که همهٔ عناصر روی قطر اصلی آن برابر با ± 1 هستند. پس $\det N = \pm \det N' = \pm 1$ ، و کار به انجام می‌رسد.



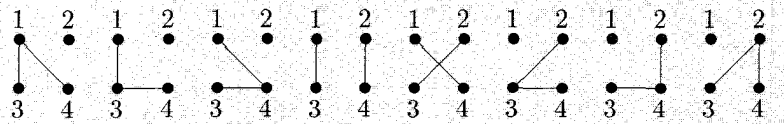
«روش نامتعارف برای شمارش درختها: گره‌های روی هر درخت قرار دهید، سگی را پای درختها راه ببرید، و دفعاتی را که سگ پارس می‌کند، بشمرید.»

برای حالت خاص $G = K_n$ به وضوح به دست می آوریم

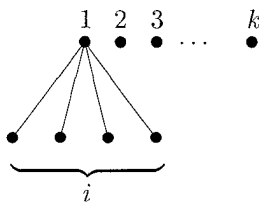
$$M_{ii} = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

□ و با محاسبه ساده ای معلوم می شود $M_{ii} = n^{n-2}$.

اثبات سوم (بازگشت). روش سنتی دیگر در ترکیبیات شمارشی، تشکیل یک رابطه بازگشتی و اثبات این رابطه با استفاده از استقراست. ایده زیر اساساً متعلق به ریوردن^۱ و رنی است. برای یافتن رابطه بازگشتی مناسب، مسأله کلیتری را (که قبلاً در مقاله کیلی آمده است) بررسی می کنیم. فرض کنید A یک مجموعه k عضوی دلخواه از رأسها باشد. تعداد جنگلهای (نشاندان) روی $\{1, \dots, n\}$ را با $T_{n,k}$ نشان می دهیم که هر یک از آنها مرکب از k درخت است و رأسهای A در درختهای متفاوتی ظاهر می شوند. روشن است که مجموعه A مهم نیست، فقط اندازه k مطرح است. توجه کنید که $T_{n,1} = T_n$.



مثلاً به ازای $A = \{1, 2\}$ داریم $T_{4,2} = 8$



چنین جنگل F ای را با $A = \{1, 2, \dots, k\}$ در نظر می گیریم و فرض می کنیم همان طور که در شکل حاشیه نشان داده شده، ۱ مجاور به i رأس باشد. با حذف ۱ می بینیم که این i رأس همراه با $2, \dots, k$ تعداد $T_{n-1, k-1+i}$ جنگل به دست می دهند. چون می توانیم i رأس را به دلخواه از میان $n-k$ رأس متفاوت با $1, \dots, k$ انتخاب کنیم، نتیجه می گیریم که به ازای $n \geq k \geq 1$

$$T_{n,k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} T_{n-1, k-1+i} \quad (1)$$

که در آن قرار می دهیم $T_{n,0} = 1, T_{n,0} = 0$ به ازای $n > 0$. توجه کنید که $T_{0,0} = 1$ برای تضمین $T_{n,n} = 1$ لازم است.

گزاره. داریم

$$T_{n,k} = kn^{n-k-1} \quad (۲)$$

و بنابراین درحالت خاص

$$T_{n,1} = T_n = n^{n-2}$$

■ اثبات. بنابه (۱)، و با استفاده از استقرا

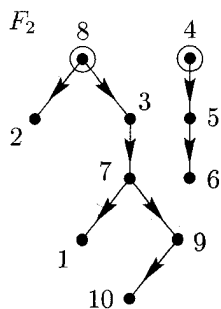
$$\begin{aligned} T_{n,k} &= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (k-1+i)(n-1)^{n-1-k-i} \quad (i \rightarrow n-k-i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (n-1-i)(n-1)^{i-1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (n-1)^i - \sum_{i=1}^{n-k} \binom{n-k}{i} i(n-1)^{i-1} \\ &= n^{n-k} - (n-k) \sum_{i=1}^{n-k} \binom{n-1-k}{i-1} (n-1)^{i-1} \\ &= n^{n-k} - (n-k) \sum_{i=0}^{n-1-k} \binom{n-1-k}{i} (n-1)^i \\ &= n^{n-k} - (n-k)n^{n-1-k} = kn^{n-1-k} \end{aligned}$$

□ و اثبات به انجام می‌رسد.

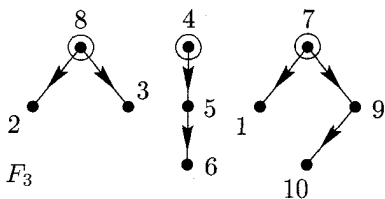
■ اثبات چهارم (شمارش دوگانه). ایده عالی زیرکه از آن جیم پیتمن^۱ است، فرمول کیلی و تعمیم آن (۲) را بدون استفاده از استقرا یا تناظر دوسویی به دست می‌دهد — این ایده صرفاً مبتنی بر شمارش هوشمندانه از دو طریق است.

جنگل ریشه‌دار روی $\{1, \dots, n\}$ جنگلی است همراه با یک ریشه انتخاب شده در هر مؤلفه درختی. فرض کنید $\mathcal{F}_{n,k}$ مجموعه همه جنگلهای ریشه‌دار مرکب از k درخت ریشه‌دار است. پس $\mathcal{F}_{n,1}$ مجموعه همه درختهای ریشه‌دار است.

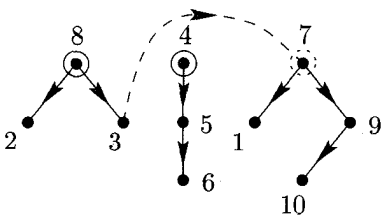
توجه کنید که $|\mathcal{F}_{n,1}| = nT_n$ زیرا در هر درخت، n انتخاب برای ریشه ممکن است. حال $F_{n,k} \in \mathcal{F}_{n,k}$ را یک گراف جهتدار در نظر می‌گیریم که جهت همه یالهایش از ریشه به سمت راسی دیگر است. گوئیم جنگل F شامل جنگل دیگر F' است اگر F شامل F' به عنوان گراف جهتدار باشد. واضح است که اگر F به طور سره



F_2 شامل F_2 است



F_3



$F_3 \rightarrow F_2$

شامل F' باشد، آنگاه F مؤلفه‌های کمتری از F' دارد. شکل روبه‌رو دوتا از این‌گونه جنگلها را نشان می‌دهد که ریشه‌هایشان در بالاست.

در اینجا می‌رسیم به‌ایده‌ی اساسی و بسیار مهم در اثبات. دنباله‌ای چون F_1, \dots, F_k از جنگلها را یک دنباله‌ی ظریف‌شونده می‌نامیم اگر به‌ازای هر i ، $F_i \in \mathcal{F}_{n,i}$ و F_i شامل F_{i+1} باشد. فرض می‌کنیم F_k جنگل مشخصی در $\mathcal{F}_{n,k}$ باشد و

• تعداد درختهای ریشه‌دار شامل F_k را با $N(F_k)$ ، و

• تعداد دنباله‌های ظریف‌شونده‌ی منتهی به آن را با $N^*(F_k)$

نشان می‌دهیم. $N^*(F_k)$ را به‌دو طریق می‌شمریم، نخست با شروع کردن از یک درخت و سپس با شروع کردن از F_k . فرض کنید $F_1 \in \mathcal{F}_{n,1}$ شامل F_k است. چون می‌توانیم $k-1$ یال $F_1 \setminus F_k$ را در هر ترتیب ممکن حذف کنیم تا دنباله‌ی ظریف‌شونده‌ای از F_1 تا F_k به‌دست آوریم، پس

$$N^*(F_k) = N(F_k)(k-1)! \tag{3}$$

حال بیاید از انتهای دیگر شروع کنیم. برای اینکه F_{k-1} ای از F_k حاصل شود باید یک یال جهتدار، از هر رأس a به‌هر یک از $k-1$ ریشه‌ی درختهایی که شامل a نیستند، اضافه کنیم (شکل بالا را ببینید که در آن با افزودن یال ۷ به ۳ از F_2 به F_3 می‌رویم). پس $n(k-1)$ انتخاب داریم. به‌همین نحو برای F_{k-1} می‌توانیم یال جهتداری از هر رأس a تا هر یک از $k-2$ ریشه‌ی درختهایی که شامل a نیستند ایجاد کنیم. برای این کار، $n(k-2)$ انتخاب داریم. با ادامه‌ی این کار به

$$N^*(F_k) = n^{k-1}(k-1)! \tag{4}$$

می‌رسیم و در نتیجه، با توجه به (۳)، رابطه‌ی

$$N(F_k) = n^{k-1}, \quad F_k \in \mathcal{F}_{n,k} \text{ هر به‌ازای}$$

به‌دست می‌آید که سادگی غیر منتظره‌ای دارد. به‌ازای $k = n$ ، فقط مرکب از n رأس تک افتاده و منزوی است. پس $N(F_n)$ تعداد همه‌ی درختهای ریشه‌دار را می‌دهد، و ما رابطه‌ی $|\mathcal{F}_{n,n}| = n^{n-1}$ و بنابراین فرمول کیلی را به‌دست می‌آوریم. \square

ولی از این اثبات می‌توان مطالب بیشتری استخراج کرد. از فرمول (۴) به‌ازای $k = n$ داریم

$$\#\{(F_1, F_2, \dots, F_n) \text{ دنباله‌های ظریف شونده}\} = n^{n-1}(n-1)! \quad (5)$$

به‌ازای $F_k \in \mathcal{F}_{n,k}$ فرض کنید $N^{**}(F_k)$ نشان‌دهنده تعداد آن دنباله‌های ظریف شونده F_1, \dots, F_n باشد که جمله k ام آنها F_k است. روشن است که این تعداد برابر است با $N^*(F_k)$ ضربدر تعداد راههای انتخاب (F_{k+1}, \dots, F_n) . ولی تعداد اخیر برابر است با $(n-k)!$ چون می‌توانیم $n-k$ یال F_k را به هر طریق ممکن حذف کنیم و بنابراین

$$N^{**}(F_k) = N^*(F_k)(n-k)! = n^{k-1}(k-1)!(n-k)! \quad (6)$$

چون این عدد به انتخاب F_k بستگی ندارد با تقسیم (۵) بر (۶) تعداد جنگلهای ریشه‌دار با k درخت معلوم می‌شود

$$|\mathcal{F}_{n,k}| = \frac{n^{n-1}(n-1)!}{n^{k-1}(k-1)!(n-k)!} = \binom{n}{k} k n^{n-1-k}$$

چون می‌توانیم k ریشه را به $\binom{n}{k}$ طریق انتخاب کنیم، فرمول $T_{n,k} = k n^{n-k-1}$ را بدون استفاده از استقرا ثابت کرده‌ایم.

مراجع

- [1] M. AIGNER: *Combinatorial Theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1979; Reprint 1997.
- [2] A. CAYLEY: *A theorem on trees*, Quart. J. Pure Appl. Math. **23** (1889), 376-378; Collected Mathematical Papers Vol. 13, Cambridge University Press 1897, 26-28.
- [3] A. JOYAL: *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Advances in Math. **42** (1981), 1-82.
- [4] J. PITMAN: *Coalescent random forests*, Technical Report 457, Dept. Statistics, UC Berkeley 1996.

-
- [5] H. PRÜFER: *Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen*, Archiv der Math. u. Physik (3) **27** (1918), 142-144.
- [6] A. RÉNYI: *Some remarks on the theory of trees*. MTA Mat. Kut. Inst. Kozl. (Publ. math. Inst. Hungar. Acad. Sci) **4** (1959), 73-85; Selected Papers Vol. 2, Akadémiai Kiadó, Budapest 1976, 363-374.
- [7] J. RIORDAN: *Forests of labeled trees*, J. Combinatorial Theory **5** (1968), 90-103.

1	2	3	4
2	1	4	3
4	3	1	2
3	4	2	1

یک مربع لاتین از مرتبه ۴

از جمله قدیمیترین اشیای ترکیباتی، که مطالعه آنها ظاهراً از اعصار باستان متداول بوده است، مربعهای لاتین هستند. برای به دست آوردن یک مربع لاتین باید n^2 خانه یک آرایه مربعی $(n \times n)$ را طوری با عددهای ۱، ۲، ...، n پر کرد که هر عدد دقیقاً یک بار در هر سطر و هر ستون ظاهر شود، به عبارت دیگر، هر یک از سطرها و ستونها جایگشتی از مجموعه $\{1, \dots, n\}$ باشند. n را مرتبه مربع لاتین می‌نامیم. مسأله‌ای که می‌خواهیم درباره آن بحث کنیم این است. فرض کنید کسی شروع به پر کردن خانه‌ها با عددهای $\{1, 2, \dots, n\}$ کرده است. این شخص در مرحله‌ای کار را متوقف می‌کند و از ما می‌خواهد خانه‌های باقیمانده را پر کنیم تا یک مربع لاتین تشکیل شود. چه وقتی این کار ممکن است؟ البته برای اینکه اصلاً شانس برای توفیق در این کار داشته باشیم باید فرض کنیم در آغاز کار ما هر درایه حداکثر یک بار در هر سطر و هر ستون ظاهر شده است. به این وضعیت نامی می‌دهیم. وقتی از مربع لاتین ناقص مرتبه n صحبت می‌کنیم که بعضی از خانه‌های آرایه $(n \times n)$ با اعدادی از مجموعه $\{1, \dots, n\}$ پر شده باشند به طوری که هر عدد حداکثر یک بار در هر سطر و ستون ظاهر شده باشد. پس مسأله این است:

چه وقتی یک مربع لاتین ناقص را می‌توان کامل کرد تا به یک مربع لاتین با همان مرتبه تبدیل شود؟

نخست چند مثال می‌آوریم. فرض کنید $n - 1$ سطر اول پر شده‌اند و سطر آخر خالی است. در این صورت به راحتی می‌توانیم سطر آخر را پر کنیم. کافی است توجه کنید که هر درایه $n - 1$ بار در این مربع لاتین ناقص ظاهر شده است و بنابراین دقیقاً در یک ستون نیامده است. پس با نوشتن هر درایه در زیر ستونی که شامل آن نیست مربع را به درستی کامل کرده‌ایم.

1	4	2	5	3
4	2	5	3	1
2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5

یک مربع لاتین دوری

حال در جهت مقابل، فرض کنید فقط یک سطر پر شده است. در این حالت هم می‌توانیم مربع را به آسانی کامل کنیم، به این طریق که درایه‌ها را یک گام در هر یک از سطرها، بعدی به طور دوری بچرخانیم.

بنابراین، در حالی که در نخستین مثال بیش از یک راه برای کامل کردن مربع لاتین وجود نداشت، در مثال دوم امکانات زیادی برای انتخاب وجود دارد. به طور کلی هر چه تعداد خانه‌های قبلاً پر شده کمتر باشد، آزادی بیشتری در تکمیل مربع داریم.

ولی در شکل حاشیه نمونه‌ای از مربع ناقص دیده می‌شود که فقط n خانه آن پر شده است و به‌وضوح قابل کامل کردن نیست زیرا هیچ راهی برای پر کردن گوشه سمت راست بالا بدون نقض شرط سطر یا ستون وجود ندارد.

اگر در یک آرایه $n \times n$ کمتر از n خانه پر شده باشد، آیا همواره می‌توان آن آرایه را کامل کرد تا به‌صورت مربع لاتین درآید؟

1	2	...	$n-1$	
				n

یک مربع لاتین ناقص که نمی‌توان آن را کامل کرد.

این پرسش را ترور اونس^۱ در سال ۱۹۶۰ مطرح کرد، و این ادعا که کامل کردن همواره ممکن است به‌سرعت به‌حدس اونس معروف شد. برای اثبات آن طبیعی بود استقرا را بیازمایند و همین روش بود که بالاخره به موفقیت انجامید. ولی اثبات بوهدن اسمتانیوک^۲ که در سال ۱۹۸۱ عرضه شد نمونه زیبایی است که نشان می‌دهد چه اثبات استقرایی ظریفی برای چنین امری لازم است؛ و علاوه بر آن، این اثبات سازنده است و به ما امکان می‌دهد مربع لاتین را، با هر آرایش ناقص اولیه، کامل کنیم.

پیش از پرداختن به اثبات، نگاه دقیقتری به مربعهای لاتین در حالت کلی می‌افکنیم، مربع لاتین را به صورت آرایه‌ای $(n^2 \times 3)$ هم می‌توان در نظر گرفت که این را آرایه خطی مربع لاتین می‌نامند. شکل مقابل در حاشیه یک مربع لاتین مرتبه ۳ و آرایه خطی مربوط به آن را نشان می‌دهد که در آن R ، C ، و E نماینده سطرها، ستونها، و درایه‌ها هستند.

1	3	2
2	1	3
3	2	1

R : 1 1 1 2 2 2 3 3 3

C : 1 2 3 1 2 3 1 2 3

E : 1 3 2 2 1 3 3 2 1

شرطی که روی مربع لاتین گذاشته‌اند معادل است با اینکه بگوییم در هر دو سطر از آرایه خطی همه n^2 جفت مرتب ظاهر می‌شوند (و بنابراین هر جفت دقیقاً یک بار ظاهر می‌شود). واضح است که می‌توانیم نمادهای هر سطر را به‌دلخواه جابه‌جا کنیم (متناظر با جایگشتهای سطرها، ستونها، یا درایه‌ها) و باز هم یک مربع لاتین به‌دست آوریم. ولی شرط روی آرایه $(n^2 \times 3)$ چیزی بیش از این می‌گوید: درایه‌ها هیچ نقش خاصی ندارند. همچنین می‌توانیم سطرهای (کل) آرایه را جابه‌جا کنیم بدون آنکه شرطهای روی آرایه خطی نقض شوند، و بنابراین یک مربع لاتین به‌دست آوریم. مربعهای لاتینی که با چنین جایگشتی به‌هم مربوط‌اند مزدوج هم نامیده می‌شوند. در اینجا نکته‌ای شایان ذکر است که اثبات را روشن می‌سازد: هر مربع لاتین ناقص به‌وضوح متناظر با یک آرایه خطی ناقص است (هر جفت حداکثر یک بار در هر دو سطر ظاهر می‌شود)، و هر مزدوج یک مربع لاتین ناقص باز یک مربع لاتین ناقص

اگر سطرهای مثال بالا را به طور دوری جابه‌جا کنیم

$$R \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow R$$

آرایه خطی و مربع لاتین زیر را به دست می‌آوریم

1	2	3
3	1	2
2	3	1

$$R: 132213321$$

$$C: 111222333$$

$$E: 123123123$$

است. به خصوص، یک مربع لاتین ناقص را می‌توان کامل کرد اگر و تنها اگر مزدوج آن را بتوان کامل کرد (کافی است مزدوج را کامل کنیم و سپس جایگشت سه‌سطر را معکوس نماییم).

ما به دو قضیه، از آن رایسرا^۱ و لیندنر^۲، نیاز داریم که قبل از قضیه اسمتانیوک به دست آمده بودند. اگر یک مربع لاتین ناقص به صورتی باشد که r سطر اول آن کاملاً پر شده باشند و خانه‌های باقیمانده خالی باشند، آن را مستطیل لاتین $(r \times n)$ می‌نامیم.

لم ۱. هر مستطیل لاتین $(r \times n)$ ، $r < n$ ، را می‌توان چنان گسترش داد که به یک مستطیل لاتین $(r+1) \times n$ تبدیل شود و در نتیجه می‌توان آن را چنان کامل کرد که به مربع لاتین تبدیل شود.

■ اثبات. قضیه هال را به کار می‌بریم (فصل ۲۱ را ببینید). فرض کنید A_j مجموعه عددهایی باشد که در ستون j ظاهر نشده‌اند. در این صورت هر سطر پذیرفتنی $(r+1)$ م دقیقاً متناظر با دستگاهی از نماینده‌های متمایز برای گردآورده A_1, \dots, A_n است. بنابراین برای اثبات لم باید برقراری شرط هال (H) را نشان دهیم. اندازه هر مجموعه A_j برابر با $n-r$ است، و هر درایه در دقیقاً $n-r$ مجموعه A_j قرار دارد (چون r بار در مستطیل ظاهر می‌شود). هر m تا از مجموعه‌های A_j روی هم شامل $m(n-1)$ درایه، و لذا دست‌کم m درایه متفاوت، هستند. که این همان شرط (H) است. □

لم ۲. فرض کنید P یک مربع لاتین ناقص از مرتبه n با حداکثر $n-1$ خانه پر شده و حداکثر $\frac{n}{2}$ درایه متمایز باشد. در این صورت P را می‌توان کامل کرد تا به صورت مربعی لاتین از مرتبه n درآید.

■ اثبات. نخست مسأله را به صورت مناسبتری در می‌آوریم. با توجه به اصل مزدوج بودن که در بالا از آن بحث شد، می‌توانیم به جای شرط «حداکثر $\frac{n}{2}$ درایه متمایز» این شرط را قرار دهیم که درایه‌ها در حداکثر $\frac{n}{2}$ سطر ظاهر شده باشند، و نیز می‌توانیم فرض کنیم که این سطرها، سطرهای بالایی باشند. پس فرض می‌کنیم سطرهای با خانه‌های پر شده، سطرهای ۱، ۲، ...، r باشند با f_i خانه پر شده در سطر i که در

آن $r \leq \frac{n}{2}$ و $\sum_{i=1}^r f_i \leq n - 1$ با جابه‌جا کردن سطرها می‌توانیم فرض کنیم $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_r$. حال سطرهاى $1, \dots, r$ را گام‌به‌گام پر می‌کنیم تا وقتی به یک مستطیل $(r \times n)$ برسیم که بنا به لم ۱، می‌توانیم آن را گسترش داده به صورت مربعی لاتین در آوریم.

تصور کنید قبلاً سطرهاى $1, 2, \dots, \ell - 1$ را پر کرده‌ایم. در سطر ℓ تعداد f_ℓ خانه پر شده وجود دارد که می‌توانیم فرض کنیم در انتها هستند. وضعیت جاری در شکل مقابل نموده شده است که در آن، بخش سایه‌دار نشان‌دهنده خانه‌های پر شده است.

کامل کردن سطر ℓ با کاربرد دیگری از قضیه هال انجام می‌شود اما این بار، کار ظریف و پیچیده‌ای است. فرض کنید X مجموعه درایه‌هایی باشد که در سطر ℓ ظاهر نشده‌اند، بنابراین $|X| = n - f_\ell$ ، و به‌ازای $j = 1, \dots, n - f_\ell$ فرض کنید A_j مجموعه درایه‌هایی از X را نشان دهد که در ستون j ظاهر نمی‌شوند (نه در بالا و نه در زیر سطر ℓ). پس برای کامل کردن سطر ℓ باید برقراری شرط (H) را برای گردآورده A_1, \dots, A_{n-f_ℓ} ثابت کنیم. نخست ادعا می‌کنیم

$$n - f_\ell - \ell + 1 > \ell - 1 + f_{\ell+1} + \dots + f_r \quad (1)$$

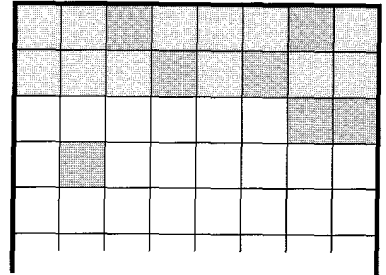
حالت $\ell = 1$ واضح است. در غیر این صورت $\sum_{i=1}^r f_i < n$ و $f_1 \geq \dots \geq f_r$ و $1 \leq \ell \leq r$ باهم نتیجه می‌دهند

$$n > \sum_{i=1}^r f_i \geq (\ell - 1)f_{\ell-1} + f_\ell + \dots + f_r$$

اکنون یا $f_{\ell-1} \geq 2$ (که در این حالت (۱) برقرار است) یا $f_{\ell-1} = 1$. در حالت اخیر، (۱) به $n > 2(\ell - 1) + r - \ell + 1 = r + \ell - 1$ تقلیل می‌یابد که برقرار است زیرا $\frac{n}{2} \leq r \leq \frac{n}{2}$.

اکنون m مجموعه $A_j, A_j, \dots, A_{n-f_\ell}$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم اجتماع آنها B باشد. باید نشان دهیم $|B| \geq m$. تعداد خانه‌ها (c) در m ستون متناظر با A_j ‌ها را که شامل درایه‌های X اند در نظر بگیرد. حداکثر $(\ell - 1)m$ تا از این‌گونه خانه‌ها در بالای سطر ℓ و حداکثر $f_{\ell+1} + \dots + f_r$ تا از آنها در زیر سطر ℓ قرار دارد، و بنابراین

$$c \leq (\ell - 1)m + f_{\ell+1} + \dots + f_r$$



وضعیت به‌ازای $n = 8, \ell = 3$ ، $f_1 = f_2 = 2, f_3 = 1$ مربعهای پررنگ نشان‌دهنده خانه‌های از قبل پر شده‌اند و مربعهای کم‌رنگ آنهایی هستند که در جریان کامل شدن پر می‌شوند

از سوی دیگر، هر درایه $x \in X \setminus B$ در هر یک از m ستون ظاهر می‌شود، پس
 $(|X| = n - f_\ell)$ و بنابراین $c \geq m(|X| - |B|)$

$$|B| \geq |X| - \frac{1}{m}c \geq n - f_\ell - (l - 1) - \frac{1}{m}(f_{\ell+1} + \dots + f_r)$$

نتیجه می‌گیریم که $|B| \geq m$ اگر

$$n - f_\ell - (l - 1) - \frac{1}{m}(f_{\ell+1} + \dots + f_r) > m - 1$$

یعنی اگر

$$m(n - f_\ell - l + 2 - m) > f_{\ell+1} + \dots + f_r \quad (۲)$$

نابرابری (۲) بنابه (۱) به‌ازای $m = 1$ و $m = n - f_\ell - l + 1$ برقرار است و بنابراین به‌ازای همه مقادیر m بین 1 و $n - f_\ell - l + 1$ برقرار است زیرا طرف چپ آن یک تابع درجه دوم بر حسب m با ضریب پیشرو -1 است. حالت باقیمانده $m > n - f_\ell - l + 1$ است. چون هر عضو x از X در حداکثر $l - 1 + f_{\ell+1} + \dots + f_r$ سطر است، می‌تواند در حداکثر همان تعداد ستون هم ظاهر شود. اگر یک بار دیگر از (۱) استفاده کنیم، در می‌یابیم که x در یکی از مجموعه‌های A_j است، و در این حالت نتیجه می‌گیریم $B = X$ ، $|B| = n - f_\ell \geq m$ ، و اثبات کامل است. \square

و بالاخره می‌پردازیم به قضیه اسمتانوک.

قضیه. هر مربع لاتین ناقص از مرتبه n با حداکثر $n - 1$ خانه پر شده را می‌توان کامل کرد تا به مربعی لاتین با همان مرتبه تبدیل شود.

■ اثبات. از استقرا بر n استفاده می‌کنیم؛ حالت‌های $n \leq 2$ بدیهی است. فرض کنید P یک مربع لاتین ناقص از مرتبه $n + 1$ با حداکثر n خانه پر شده باشد. بنابه لم ۲ می‌توانیم فرض کنیم که بیش از $\frac{n+1}{2}$ درایه متمایز وجود دارد، پس درایه‌ای هست که فقط یک بار ظاهر می‌شود: آن را $n + 1$ می‌نامیم. مانند قبل فرض می‌کنیم r سطر جزئاً پر شده s_1, \dots, s_r با f_1, \dots, f_r خانه پر شده وجود دارد، $\sum_{i=1}^r f_i \leq n$. به‌علاوه فرض می‌کنیم که خانه پر شده با $n + 1$ در سطر s_1 است.

s_1	2			7		
s_2		4		5		
s_3			5			
s_4	4					



s_4	4					•
s_3			5		•	
s_2	5	4		•		
			•			
		•				
s_1	2	7				
	•					

در نخستین گام تمام خانه‌های پر شده بالای قطر دوم [قطر از شمال شرقی تا جنوب غربی] به استثنای خانه پر شده با $n+1$ را، که عاقبت روی قطر دوم خواهد بود، انتقال می‌دهیم. (قطر دوم مرکب از همه خانه‌های (i, j) با ضابطه $i+j = n+2$ است). این کار به صورت زیر انجام می‌شود: s_1 را به مکان سطری $f_1 - n + 2$ انتقال می‌دهیم. با جابه‌جا کردن ستونها، خانه‌های پر شده را به سمت چپ انتقال می‌دهیم به نحوی که $n+1$ آخرین درایه در سطر خودش، و بنابراین روی قطر دوم، باشد. سپس سطر s_2 را به مکان $f_2 - n + 1 - f_1$ و خانه‌های پر شده را تا حد امکان به چپ انتقال می‌دهیم. به طور کلی، سطر s_i را به مکان $f_i - n + 1 - f_1 - f_2 - \dots - f_{i-1}$ و خانه‌های پر شده را تا حد امکان به سمت چپ انتقال می‌دهیم. روشن است که آرایش مطلوب به این ترتیب به دست می‌آید. شکل‌های صفحه قبل نشان‌دهنده مثالی به‌ازای $n+1 = 7$ است.

$$L$$

4	1	2	6	3	5
3	6	1	5	4	2
1	5	4	3	2	6
5	3	6	2	1	4
6	2	3	4	5	1
2	4	5	1	6	3

اکنون می‌رسیم به‌ایده اصلی اثبات. درایه $n+1$ و سطر و ستون آخر را حذف می‌کنیم. به استقرا، مربع لاتین ناقص باقیمانده را که از مرتبه n است می‌توان کامل کرد تا به صورت یک مربع لاتین L از مرتبه n در آید. در شکل روبه‌رو، یک صورت کامل شده مربع لاتین ناقص بالا، از میان صورتهای بسیار را می‌بینید.

$$L'$$

4	1	2	6	3	5	•
3	6	1	5	4		•
1	5	4	3	•		
5	3	6	•			
6	2	•				
2	•					
•						

سپس قسمت بالای مربع لاتین L را به‌انضمام قطر دوم نگه می‌داریم و قسمت پایین را خالی می‌کنیم و آن را یک گام به پایین انتقال می‌دهیم. بنابراین یک مستطیل نیمه پر چون L' به دست می‌آوریم که برای مثال ما در حاشیه نشان داده شده است. توجه کنید که همه خانه‌های از پیش پر شده L' (به استثنای مورد درایه $n+1$) در «نیمه بالایی» یعنی بالای قطر دوم هستند. پس اگر بتوانیم نیمه پایینی L' را با عددهای $1, \dots, n$ پر کنیم چنانکه یک مربع لاتین ناقص (حال از مرتبه $n+1$) به دست آوریم آنگاه می‌توانیم قطر دوم را با $n+1$ پر کنیم، ستون یکتای آخر را بیفزاییم (حالت پیش پا افتاده‌ای برای لم ۱)، و اثبات به اتمام می‌رسد. اکنون برای برداشتن این گام نهایی، نیمه پایینی را سطر به سطر، با استفاده از اطلاعات مربوط به مربع لاتین L برای راهنمایی، پر می‌کنیم.

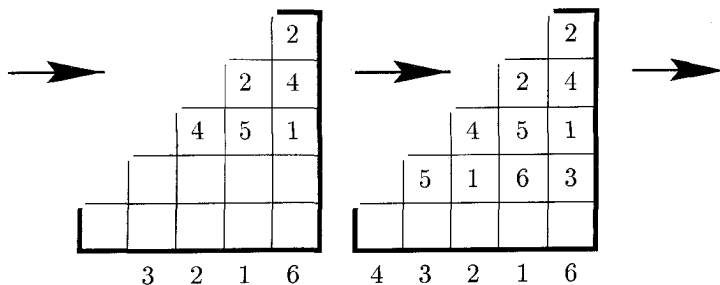
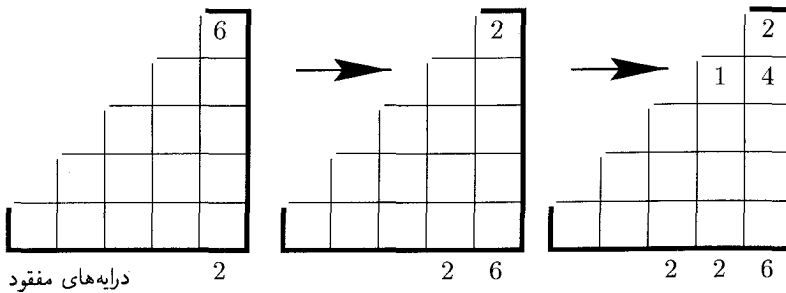
فرض کنید $k \geq 3$ ، و نیز به استقرا فرض کنید که سطرهای $3, \dots, k-1$ را تحت شرایط زیر پر کرده‌ایم:

- درایه $k-2$ ستون z از L' که مخالف با $n+1$ هستند در میان $k-1$ درایه ستون z مربع لاتین اصلی یعنی L می‌باشند زیرا $n-k+3 \leq z \leq n$.
- پس دقیقاً یک «درایه مفقود» در هر ستون داریم.

• درایه‌های مفقود ستونهای L' متمایزند.

اکنون می‌پردازیم به سطر k ، فرض کنید y_n, \dots, y_{n-k+2} درایه‌های سطر k در سمت راست (و روی) قطر دوم مربع لاتین L باشند. پس y_{n-k+2} درایه مفقود جدید در ستون $n - k + 2$ است. در نخستین اقدام، سطر k را با درایه‌های y_n, \dots, y_{n-k+2} پر می‌کنیم. توجه کنید که کل سطر k پذیرفتنی است و به‌ازای هر j ، $x_j \neq y_j$ چون هر دو متعلق به یک ستون j در L هستند. پس این کار شریخش است مگر وقتی به‌ازای j از $n - k + 3$ تا $n - k + 2$ ، $y_{n-k+2} = x_j$ زیرا در این صورت شرط مربوط به درایه‌های مفقود نقض می‌شود. در این حالت x_j و y_j را با هم تعویض می‌کنیم. سطر جدید k باز هم پذیرفتنی است (زیرا $x_j = y_{n-k+2}$ و y_{n-k+2} قبلاً در سطر k بود). پس کار به‌پایان رسیده است مگر آنکه به‌ازای l ی مخالف j ، $y_j = x_l$. در این صورت x_l و y_l را با هم تعویض می‌کنیم، و به‌همین ترتیب واضح است که این فرایند حداکثر تا وقتی که همه x_k ها به سطر k انتقال یابند، با رسیدن به نتیجه مطلوب متوقف می‌شود. به این طریق همه سطرها را تا سطر n پر می‌کنیم. سطر آخری $n + 1$ را می‌توان با درایه‌های مفقود پر کرد، و اثبات به‌انجام می‌رسد. \square

شکلهای زیر این فرایند را برای مثال ما نشان می‌دهند.

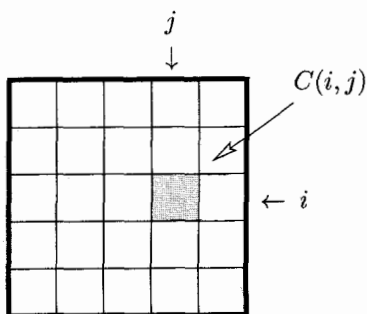


4	1	2	6	3	5	7
3	6	1	5	4	7	2
1	5	4	3	7	2	6
5	3	6	7	2	4	1
6	2	7	4	5	1	3
2	7	5	1	6	3	4
7	4	3	2	1	6	5

مراجع

- [1] T. EVANS: *Embedding incomplete Latin squares*, Amer. Math. Monthly **67** (1960), 958-961.
- [2] C. C. LINDNER: *On completing Latin rectangles*, Canadian Math. Bull **13** (1970), 65-68.
- [3] H. J. RYSER: *A combinatorial theorem with an application to Latin rectangles*, Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), 550-552.
- [4] B. SMETANIUK: *A new construction on Latin squares I: A proof of the Evans conjecture*, Ars Combinatoria **11** (1981), 155-172.

مسأله چهار رنگ یکی از عمده‌ترین مسائلی بود که موجب پیدایش نظریه کنونی گراف شدند. و مبحث رنگ‌آمیزی هنوز هم مورد علاقه بسیاری از دست‌اندرکاران نظریه گراف است. در اینجا یک مسأله رنگ‌آمیزی به ظاهر ساده می‌آوریم که جف دینیتس^۱ در سال ۱۹۷۸ آن را مطرح کرد. تمام تلاشها برای حل این مسأله در طی پانزده سال بعد ناکام ماند تا آنکه فرد گالوین^۲ راه حلی برای آن به دست داد که به طرز شگفت‌انگیزی ساده است.



n^2 خانه را در یک مربع $(n \times n)$ در نظر بگیرید و فرض کنید (i, j) خانه واقع در سطر i و ستون j باشد. تصور کنید برای هر خانه (i, j) ، مجموعه $C(i, j)$ مرکب از n رنگ به ما داده شده است.

آیا در این صورت همواره می‌توان کل آرایه را به این طریق رنگ‌آمیزی کرد که برای هر خانه (i, j) رنگی از مجموعه رنگهایش $C(i, j)$ انتخاب کرد به قسمی که رنگها در هر سطر و هر ستون متمایز باشند؟

نخست حالتی را در نظر می‌گیریم که همه رنگ-مجموعه‌های $C(i, j)$ یکسان باشند، مثلاً عبارت باشند از $\{1, 2, \dots, n\}$. در این صورت مسأله دینیتس به صورت زیر در می‌آید: مربع $(n \times n)$ را با عددهای $1, 2, \dots, n$ به قسمی پر کنید که عددها در هر سطر و ستون متمایز باشند. به عبارت دیگر، هر چنین رنگ‌آمیزی متناظر است با یک مربع لاتین که در فصل قبل مورد بحث قرار گرفت. پس در این حالت پاسخ پرسش مثبت است.

وقتی این حالت خاص این قدر ساده است، چرا باید حالت کلی یعنی حالتی که مجموعه $C := \bigcup_{i,j} C(i, j)$ شامل حتی بیش از n رنگ است، فوق‌العاده مشکلتر باشد؟ این دشواری ناشی از آن است که هر رنگ از C در هر خانه قابل دسترس نیست. مثلاً در حالی که در مورد مربع لاتین به وضوح می‌توانیم جایگشتی دلخواه از رنگها برای سطر اول اختیار کنیم، در مورد مسأله کلی چنین نیست. حالت $n = 2$ این دشواری را نشان می‌دهد.

{1, 2}	{2, 3}
{1, 3}	{2, 3}

فرض کنید رنگ-مجموعه‌هایی که در شکل نشان داده شده است در اختیار ما

قرار دارد. اگر رنگهای ۱ و ۲ را برای سطر اول انتخاب کنیم، به در دسر خواهیم افتاد زیرا در این صورت مجبوریم رنگ ۳ را برای هر دو خانه سطر دوم انتخاب کنیم. پیش از آنکه به حل مسأله دینیتس بپردازیم، وضعیت را به زبان نظریه گراف بیان می‌کنیم. طبق معمول، فقط گرافهای $G = (V, E)$ را که شامل طوقه یا یال چندگانه نیستند در نظر می‌گیریم. فرض کنید $\chi(G)$ نشان‌دهنده عدد فامی گراف باشد یعنی کمترین تعداد رنگهایی که بتوان به رأسها تخصیص داد به طوری که رأسهای مجاور، رنگهای متفاوتی داشته باشند.

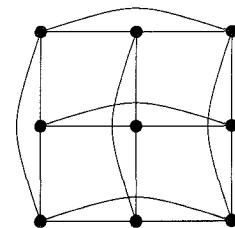
به عبارت دیگر، هر رنگ‌آمیزی مستلزم افزایش V به رده‌هایی است (که هر کدام با یک رنگ، رنگ‌آمیزی می‌شود) به طوری که هیچ یالی در درون یک رده نباشد. مجموعه $A \subseteq V$ را مستقل نامیم اگر هیچ یالی در درون A نباشد. پس عدد فامی کمترین تعداد مجموعه‌های مستقلی است که مجموعه رئوس V را افزایش می‌کنند.

در سال ۱۹۷۶، ویترینگ^۱ و سه سال بعد اردوش، روبین و تیلر، مسأله رنگ‌آمیزی زیر را بررسی کردند که مستقیماً ما را به مسأله دینیتس می‌رساند. فرض کنید در گراف $G = (V, E)$ مجموعه $C(v)$ از رنگها برای هر رأس v در اختیار ما قرار داده شده است. رنگ‌آمیزی فهرستی، رنگ‌آمیزی چون $c: V \rightarrow \bigcup_{v \in V} C(v)$ است که در آن به ازای هر $v \in V$ ، $c(v) \in C(v)$. تعریف عدد فامی فهرستی $\chi_{el}(G)$ واضح است: کوچکترین عدد k به قسمی که برای هر فهرست از رنگ-مجموعه‌های $C(v)$ با ضابطه $|C(v)| = k$ به ازای هر $v \in V$ ، همواره یک رنگ‌آمیزی فهرستی وجود داشته باشد. البته، داریم $\chi_{el}(G) \leq |V|$ (چون در غیراین صورت، تعدادی از رنگها مازاد بر احتیاج خواهند بود). چون رنگ‌آمیزی معمولی صرفاً حالت خاصی از رنگ‌آمیزی فهرستی در حالتی است که همه مجموعه‌های $C(v)$ برابرند، برای هر گراف G داریم

$$\chi(G) \leq \chi_{el}(G)$$

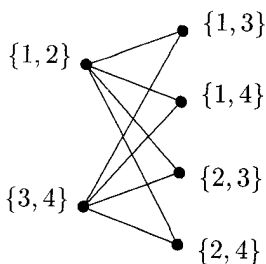
با بازگشت به مسأله دینیتس، گراف S_n را در نظر می‌گیریم که n^2 خانه آرایه $(n \times n)$ ما مجموعه رأسهای آن است به طوری که دو خانه مجاورند اگر و تنها اگر در یک سطر یا ستون باشند.

چون هر n خانه در یک سطر دوه‌دو مجاورند، دست‌کم به n رنگ نیاز داریم. به علاوه، هر رنگ‌آمیزی با n رنگ متناظر است با یک مربع لاتین، که در آن خانه‌هایی که با یک عدد اشغال شده‌اند تشکیل رده‌ای از رنگها می‌دهند. چون مربعهای لاتین،

گراف S_n

چنانکه دیده‌ایم، وجود دارند، نتیجه می‌گیریم که $\chi(S_n) = n$ ، و اکنون مسأله دینیتس را می‌توان به‌طور موجز چنین بیان کرد

$$\chi_\ell(S_n) = n?$$



ممکن است کسی گمان کند که شاید رابطه $\chi(G) = \chi_\ell(G)$ برای هر گراف G برقرار است ولی این گمان خیلی از حقیقت دور است. گراف $G = K_{2,4}$ را در نظر بگیرید. عدد فامی آن ۲ است زیرا می‌توانیم یک رنگ را برای دو رأس سمت چپی و رنگ دوم را برای رأسهای سمت راست به‌کار ببریم. ولی اکنون تصور کنید که رنگ‌مجموعه‌هایی که در شکل مشخص شده‌اند به ما داده شده است.

برای رنگ‌آمیزی رأسهای سمت چپ چهار امکان $۱|۳, ۱|۴, ۲|۳, ۲|۴$ را داریم، ولی هر یک از این جفتها به‌صورت رنگ‌مجموعه در سمت راست ظاهر می‌شود، پس رنگ‌آمیزی فهرستی ممکن نیست. از این رو $\chi_\ell(G) \geq 3$ ، و برای خواننده جالب خواهد بود که ثابت کند $\chi_\ell(G) = 3$ (لازم نیست همه حالتها را بیازمایید!) با تعمیم این مثال یافتن گرافهایی G ای که $\chi(G) = 2$ دشوار نیست ولی $\chi_\ell(G)$ به‌دلخواه بزرگ است! پس مسأله رنگ‌آمیزی فهرستی به آن سادگی که در نخستین نگاه می‌نماید، نیست.

برگردیم به مسأله دینیتس. گام مهمی به‌سوی حل مسأله به‌وسیله یانسن^۱ در سال ۱۹۹۲ برداشته شد که ثابت کرد $\chi_\ell(S_n) \leq n + 1$ ، و ضربه نهایی را فرد گالوین با ترکیب استادانه دو قضیه که از مدتها قبل معلوم بودند وارد ساخت. می‌خواهیم درباره این دو حکم بحث کنیم و سپس نشان دهیم که چگونه $\chi_\ell(S_n) = n$ از آنها نتیجه می‌شود.

نخست چند نماد را ذکر می‌کنیم. فرض کنید v رأسی از گراف G باشد؛ در این صورت مانند قبل، درجه v را با $d(v)$ نشان می‌دهیم. در گراف مربعی S_n ما هر رأس با در نظر گرفتن $n - 1$ رأس دیگر در همان سطر و در همان ستون، دارای درجه $2n - 2$ است. در مورد زیرمجموعه‌ای چون $A \subseteq V$ ، زیرگرافی را که A مجموعه رأسهای آن است و شامل همه یالهای G بین رأسهای A است با G_A نشان می‌دهیم؛ G_A را زیرگراف القا شده به‌وسیله A می‌نامیم و می‌گوییم H زیرگرافی القایی از G است اگر به‌ازای A ، $H = G_A$.

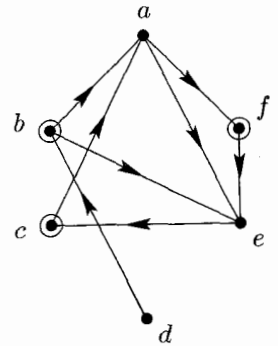
برای بیان اولین حکم خود به گرافهای جهتدار $\vec{G} = (V, E)$ نیاز داریم یعنی گرافهایی که در آنها هر یال e جهتی دارد. نماد $e = (u, v)$ به این معنی است که کمان

ای وجود دارد، که رأس آغازیش u و رأس انتهایش v است (این کمان با $u \rightarrow v$ هم نشان داده می‌شود). در این صورت صحبت از درجهٔ خروجی $d^+(v)$ و درجهٔ ورودی $d^-(v)$ معنی دارد؛ $d^+(v)$ تعداد یالهایی است که v رأس آغازی آنهاست و $d^-(v)$ تعداد یالهایی که v رأس انتهایی آنهاست؛ به علاوه، $d^+(v) + d^-(v) = d(v)$. وقتی می‌نویسیم G ، منظورمان گراف \vec{G} بدون در نظر گرفتن جهت است. مفهوم زیر از تحلیل بازیها سرچشمه گرفته است و در بحث ما نقش حیاتی خواهد داشت.

تعریف ۱. فرض کنید $\vec{G} = (V, E)$ گرافی جهتدار باشد. هر هستهٔ $K \subseteq V$ زیرمجموعه‌ای از رأسهاست به طوری که

(i) K مستقل است.

(ii) به ازای هر $u \notin K$ رأسی چون $v \in K$ با یک یال $u \rightarrow v$ وجود دارد. بیاید نگاهی به مثال شکل بیندازیم. مجموعهٔ $\{b, c, f\}$ یک هسته تشکیل می‌دهد، ولی زیرگراف القا شده به وسیلهٔ $\{a, c, e\}$ هسته‌ای ندارد زیرا این سه یال تشکیل یک دور می‌دهند.



با این مقدمات آمادهٔ بیان اولین حکم هستیم.

لم ۱. فرض کنید $\vec{G} = (V, E)$ گرافی جهتدار باشد، و نیز فرض کنید که به ازای هر رأس $v \in V$ یک رنگ-مجموعه چون $C(v)$ داریم که اندازه‌اش بزرگتر از درجهٔ خروجی است، $|C(v)| \geq d^+(v) + 1$. اگر هر زیرگراف القایی \vec{G} هسته‌ای داشته باشد، آنگاه یک رنگ‌آمیزی فهرستی برای G با رنگی از $C(v)$ برای هر v وجود دارد.

■ اثبات. به استقرا بر $|V|$ عمل می‌کنیم. برای $|V| = 1$ چیزی برای اثبات وجود ندارد. رنگی چون $c \in C = \bigcup_{u \in V} C(u)$ انتخاب کرده قرار می‌دهیم

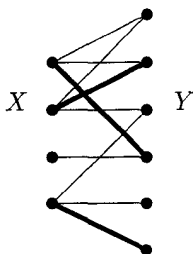
$$A(c) := \{v \in V : c \in C(v)\}$$

بنابه فرض، زیرگراف القایی $G_{A(c)}$ هسته‌ای چون $K(c)$ دارد. حال هر $v \in K(c)$ را با رنگ c رنگ‌آمیزی می‌کنیم (این کار امکان‌پذیر است زیرا $K(c)$ مستقل است)، و $K(c)$ را از G و c را از C حذف می‌کنیم. گیریم G' زیرگراف القایی G روی $V \setminus K(c)$ باشد با $C'(v) = C(v) \setminus c$ به عنوان فهرست جدید رنگ-مجموعه‌ها. توجه کنید که به ازای هر $v \in A(c) \setminus K(c)$ ، درجهٔ خروجی $d^+(v)$ دست‌کم یک واحد کاهش

می‌یابد (به‌خاطر شرط (ii) هسته). پس $(|C'(v)| + 1) \leq d^+(v)$ باز هم در G' برقرار است. همین شرط برای رأسهای بیرون $A(c)$ نیز برقرار است زیرا در این حالت رنگ-مجموعه‌های $C(v)$ بی‌تغییر می‌مانند. گراف جدید G' شامل رأسهای کمتری از G است، و بنابه استقرا، اثبات به‌انجام می‌رسد. \square

اکنون روش حل مسأله دینیتس روشن است: باید شیوه‌ای برای جهت‌دار کردن S_n پیدا کنیم که در مورد درجه‌های خروجی به‌ازای هر v داشته باشیم $d^+(v) \leq n - 1$ و از وجود هسته‌ای برای همه زیرگرافهای القایی مطمئن شویم. این کار به‌وسیله حکم دوم ما انجام می‌شود.

و باز نیاز به مقدمات تازه‌ای داریم. از فصل ۸ به یاد آورید که گراف دو بخشی $G = (X \cup Y, E)$ گرافی است با ویژگی زیر: مجموعه رئوس V به دو بخش X و Y تقسیم می‌شود به طوری که یک رأس هر یال در X و رأس دیگرش در Y است. به عبارت دیگر، گرافهای دو بخشی دقیقاً گرافهایی هستند که با دو رنگ (یکی برای X و دیگری برای Y) قابل رنگ‌آمیزی‌اند.



یک گراف دو بخشی با یک جورسازی

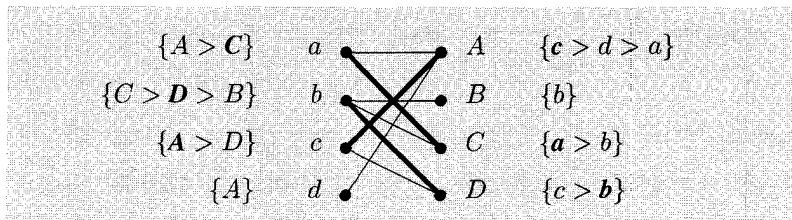
حال می‌پردازیم به مفهوم مهم «جورسازیهای پایدار» با تعبیری در زندگی واقعی. [حاصل] جورسازی M در یک گراف دو بخشی $G = (X \cup Y, E)$ مجموعه‌ای از یالهاست به‌قسمی که هیچ دو یال در M ، رأس مشترکی نداشته باشند. در گراف نشان داده شده در حاشیه، یالهایی که با خط ضخیم رسم شده‌اند یک جورسازی تشکیل می‌دهند.

تصور کنید که X مجموعه‌ای از مردان و Y مجموعه‌ای از زنان باشد و $uv \in E$ را به این صورت تعبیر کنید که u و v ممکن است با هم ازدواج کنند. در این صورت، جورسازی عبارت است از ازدواج اعضای این دو مجموعه به طوری که هیچ شخصی بیش از یک همسر نداشته باشد. قضیه معروف ازدواج (فصل ۲۱ راجع به مجموعه‌های متناهی را ببینید) اندازه دقیق بزرگترین جورسازی ممکن را با فرض معلوم بودن ساختار گراف دو بخشی به‌دست می‌دهد. ما برای مقاصد خود نیاز به صورت پالایش یافته‌تر (و واقعگرایانه‌تر؟)ی از جورسازی داریم که گیل^۱ و شیلی^۲ آن را مطرح کرده‌اند. واضح است که در زندگی واقعی، هر شخصی ترجیحاتی دارد، و این چیزی است که ما در وضعیت ملحوظ می‌کنیم. در $G = (X \cup Y, E)$ فرض می‌کنیم که برای هر $v \in X \cup Y$ ، مجموعه $N(v)$ مرکب از رأسهای مجاور به v دارای یک رتبه‌بندی

است: $N(v) = \{z_1 > z_2 > \dots > z_{d(v)}\}$. پس z_1 انتخاب اول در نظر v است، پس از آن z_2 و به همین ترتیب.

تعریف ۲. جورسازی M از $G = (X \cup Y, E)$ پایدار خوانده می‌شود اگر شرط زیر برقرار باشد: هرگاه $uv \in E \setminus M$ ، $u \in X$ ، $v \in Y$ ، آنگاه یا $uy \in M$ با $y > v$ در $N(u)$ ، یا $xv \in M$ با $x > u$ در $N(v)$ ، یا هر دو.

در تعبیر این مفهوم در زندگی واقعی، مجموعه‌ای از ازدواجها پایدار است اگر هرگز اتفاق نیفتد که u و v با هم ازدواج نکرده باشند ولی u ، v را بر همسر خود ترجیح دهد (اگر همسری داشته باشد) و v نیز u را بر جفت خود ترجیح دهد (اگر همسری داشته باشد)، که چنین اتفاقی به‌وضوح وضعیتی ناپایدار پدید می‌آورد. پیش از اثبات دومین حکم خود نگاهی به مثال زیر می‌افکنیم:



یالهای پررنگ یک ازدواج پایدار تشکیل می‌دهند. در هر فهرست ترجیحات، انتخابی که به ازدواجی پایدار می‌انجامد با حرف سیاه نشان داده شده است.

توجه کنید که در این مثال، یک بزرگترین جورسازی M وجود دارد که یکتاست و چهار یال دارد: $M = \{aC, bB, cD, dA\}$ ولی M پایدار نیست (cA را در نظر بگیرید).

لم ۲. همیشه یک جورسازی پایدار وجود دارد.

■ اثبات. الگوریتم زیر را در نظر بگیرید. در مرحله اول همه مردان $u \in X$ به دختری که انتخاب اول آنهاست پیشنهاد ازدواج می‌دهند. اگر دختری بیشتر از یک پیشنهاد دریافت کند، آن را که بیشتر دوست دارد برمی‌گزیند و در یک فهرست موقت قرار می‌دهد و اگر فقط یک پیشنهاد دریافت کند همان را در فهرست موقت قرار می‌دهد. بقیه مردان رد می‌شوند و گروه ذخیره R را تشکیل می‌دهند. در مرحله دوم همه مردان موجود در R به انتخاب دوم خود پیشنهاد ازدواج می‌دهند. دختران پیشنهادها (از جمله پیشنهاد موجود در فهرست موقت، اگر چنین پیشنهادی دریافت کرده باشند) را با هم مقایسه می‌کنند، آن را که دوست دارند برمی‌گزینند و در فهرست موقت

می‌گذارند. بقیه مردود می‌شوند و گروه ذخیره جدید R را تشکیل می‌دهند. حال مردان موجود در R به انتخاب بعدی خود پیشنهاد ازدواج می‌دهند، و به همین ترتیب. مردی که به آخرین انتخاب خود پیشنهاد ازدواج دهد و باز هم رد شود، از حیطة بررسی (واز گروه ذخیره) کنار گذاشته می‌شود. واضح است که پس از مدتی، گروه ذخیره R خالی می‌شود و الگوریتم در این مرحله متوقف می‌شود.

ادعا. وقتی الگوریتم توقف می‌کند، مردان موجود در فهرستهای موقت همراه با دختران متناظر، یک جورسازی پایدار تشکیل می‌دهند.

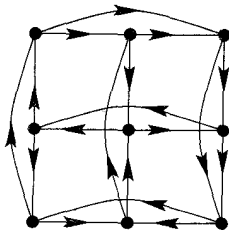
نخست توجه کنید که [در این فرایند] مردان موجود در فهرست موقت هر دختر خاص، به ترتیب صعودی ترجیحات او تغییر می‌یابند زیرا در هر مرحله، آن دختر پیشنهادهایی تازه را با کاندیدای موجود مقایسه می‌کند و فرد دلخواه جدید را برمی‌گزیند. پس اگر $uv \in E$ ولی $uv \notin M$ آنگاه یا u هرگز به v پیشنهاد ازدواج نداده است که در این صورت قبل از آنکه به طرف v برود همسر بهتری یافته است و در نتیجه $xy \in M$ با ضابطه $y > v$ در $N(u)$ ، یا u به v پیشنهاد داده ولی پذیرفته نشده است که در نتیجه $xv \in M$ با $x > u$ در $N(v)$. ولی این دقیقاً همان شرط جورسازی پایدار است. \square

حال اگر لمهای ۱ و ۲ را کنار هم بگذاریم، راه حل گالوین برای مسأله دینیتس به دست می‌آید.

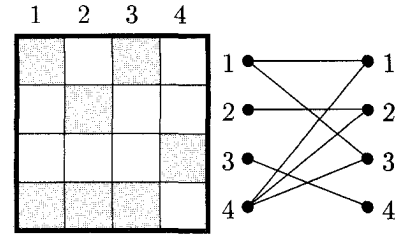
قضیه. به ازای هر n ، $\chi_e(S_n) = n$.

■ اثبات. رأسهای S_n را مانند قبل با (i, j) ، $1 \leq i, j \leq n$ ، نشان می‌دهیم. پس (i, j) و (r, s) مجاورند اگر و تنها اگر $i = r$ یا $i = s$ یا $j = r$ یا $j = s$. مربع لاتین دلخواهی چون L را که درایه‌هایش متعلق به $\{1, 2, \dots, n\}$ هستند در نظر گرفته درایه موجود در خانه (i, j) را با $L(i, j)$ نشان می‌دهیم. سپس S_n را به گراف جهتدار \vec{S}_n تبدیل می‌کنیم به این ترتیب که به یالهای افقی جهت $(i, j) \rightarrow (i, j')$ را می‌دهیم اگر $L(i, j) < L(i, j')$ ، و به یالهای عمودی جهت $(i, j) \rightarrow (i', j)$ را می‌دهیم اگر $L(i, j) > L(i', j)$. پس جهت را در امتداد افقی از درایه کوچکتر به بزرگتر می‌گیریم و در امتداد عمودی برعکس. (در حاشیه مثالی به ازای $n = 3$ آورده‌ایم.) توجه کنید که به ازای هر (i, j) به دست می‌آوریم $d^+(i, j) = n - 1$. در واقع، اگر $L(i, j) = k$ ، آنگاه $n - k$ خانه در سطر i شامل درایه‌ای بزرگتر از k هستند، و $k - 1$ خانه در ستون j درایه‌ای کوچکتر از k دارند.

1	2	3
3	1	2
2	3	1



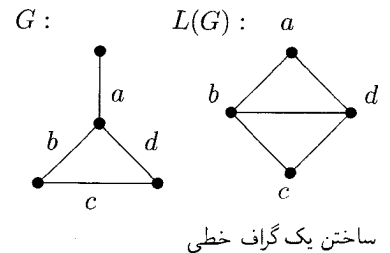
بنابه لم ۱، باقی می‌ماند که نشان دهیم هر زیرگراف القایی S_n هسته‌ای دارد. زیرمجموعه‌ای چون $A \subseteq V$ در نظر بگیرید، و فرض کنید X مجموعه سطرهای L باشد، و Y مجموعه ستونهای آن. گراف دوبخشی $G = (X \cup Y, A)$ را به نسبت می‌دهیم که در آن هر $(i, j) \in A$ به وسیله یال ij که $i \in X$ و $j \in Y$ نشان داده می‌شود. در مثال حاشیه، خانه‌های A سایه‌دارند.



جهت‌دار کردن یالهای S_n طبیعتاً رأسهای همسایه را در $G = (X \cup Y, A)$ رتبه‌بندی می‌کند به این ترتیب که $j' > j$ در $N(i)$ اگر $(i, j) \rightarrow (i, j')$ در S_n ، و $i' > i$ در $N(j)$ اگر $(i, j) \rightarrow (i', j)$. بنابه لم ۲، $G = (X \cup Y, A)$ یک جورسازی پایدار چون M دارد. این M ، اگر آن را زیرمجموعه‌ای از A در نظر بگیریم، هسته مطلوب ماست! برای ملاحظه دلیل آن، نخست توجه کنید که M در A مستقل است زیرا اعضای آن به‌عنوان یالهایی در $G = (X \cup Y, A)$ در یک رأس i یا j مشترک نیستند. دوم اینکه اگر $(i, j) \in A \setminus M$ ، آنگاه بنابه‌تعریف جورسازی پایدار یا $(i, j') \in M$ با ضابطه $j' > j$ وجود دارد یا $(i', j) \in M$ با ضابطه $i' > i$ که برای S_n به معنی $(i, j) \rightarrow (i, j') \in M$ یا $(i, j) \rightarrow (i', j) \in M$ است، و اثبات تمام است. \square

برای اختتام ماجرا کمی فراتر می‌رویم. خواننده ممکن است توجه کرده باشد که گراف S_n از یک گراف دوبخشی با ساختمان ساده‌ای به‌دست می‌آید. گراف دوبخشی کامل را که به‌صورت $K_{n,n}$ نشان داده می‌شود با ضابطه $|X| = |Y| = n$ و همه یالهای بین X و Y در نظر می‌گیریم. اگر یالهای $K_{n,n}$ را رأسهای گراف جدیدی بگیریم که دوتا از این‌گونه رأسها را بهم وصل می‌کنند اگر و تنها اگر به‌عنوان یالهایی در $K_{n,n}$ رأس مشترکی داشته باشند، آنگاه به‌وضوح گراف مربعی S_n را به‌دست می‌آوریم. می‌گوییم S_n گراف خطی $K_{n,n}$ است. همین شیوه ساخت را در مورد هر گراف G می‌توان اجرا کرد و گراف حاصل، گراف خطی $L(G)$ از G نامیده می‌شود.

به‌طورکلی، H را یک گراف خطی می‌نامیم اگر به‌ازای گراف G ای $H = L(G)$. البته هر گرافی یک گراف خطی نیست، و نمونه‌اش گراف $K_{2,4}$ است که قبلاً آن را بررسی کردیم و برای این گراف دیده‌ایم که $\chi_\ell(K_{2,4}) < \chi(K_{2,4})$. ولی اگر H گراف خطی باشد چه؟ با جرح و تعدیل اثبات قضیه ما می‌توان به‌راحتی نشان داد که هرگاه H گراف خطی یک گراف دوبخشی باشد، $\chi(H) = \chi_\ell(H)$ برقرار است، و این روش ممکن است به‌طریقی برای تحقیق در عالیترین حدس این مبحث به‌کار آید:



آیا رابطه $\chi(H) = \chi_\ell(H)$ به ازای هر گراف خطی H برقرار است؟

این حدس مشکل به نظر می‌رسد و اطلاعات چندانی درباره آن در دسترس نیست، ولی به هر حال مسأله دینیتس هم ۲۰ سال پیش در چنین وضعیتی بود.

مراجع

- [1] P. ERDŐS, A.L. RUBIN & H. TAYLOR: *Choosability in graphs*, Proc. West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Congressus Numerantium **26** (1979), 125-157.
- [2] D. GALE & L.S. SHAPLEY: *College admissions and the stability of marriage*, Amer. Math. Monthly **69** (1962), 9-15.
- [3] F. GALVIN: *The list chromatic index of a bipartite multigraph*, J. Combinatorial Theory, Ser. B **63** (1995), 153-158.
- [4] J.C.M. JANSSEN: *The Dinitz problem solved for rectangles*, Bull. Amer. Math. Soc. **29** (1993), 243-249.
- [5] V. G. VIZING: *Coloring the vertices of a graph in prescribed colours (in Russian)*, Metody Diskret. Analiz. **101** (1976), 3-10.

۲۵

رنگ کردن گرافهای مسطح با

پنج رنگ ۲۲۳

۲۶

نگهبانی از موزه ۲۲۹

۲۷

قضیهٔ گراف توران ۲۳۵

۲۸

مخابرهٔ بدون خطا ۲۴۱

۲۹

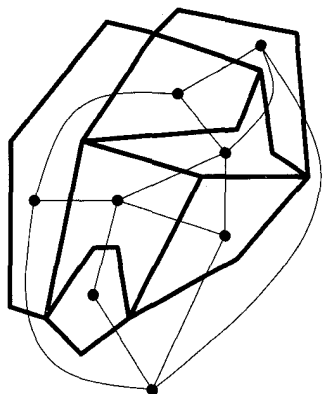
از دوستان و سیاستمداران ۲۵۵

۳۰

احتمال شمارش را (گاهی) آسان

می‌سازد ۲۵۹





گراف دوگان یک نقشه

از آغاز پیدایش نظریهٔ گراف، گرافهای مسطح و رنگ‌آمیزی آنها به علت ارتباطشان با مسألهٔ چهاررنگ موضوع پژوهشهای گسترده‌ای بوده است. مسألهٔ چهاررنگ، به صورتی که در اصل بیان شده است. این است که آیا همواره می‌توان ناحیه‌های یک نقشهٔ مسطح را با چهار رنگ، رنگ‌آمیزی کرد به نحوی که ناحیه‌هایی که مرز مشترک (نه فقط نقطهٔ مشترک) دارند رنگهای متفاوتی داشته باشند. شکل مقابل نشان می‌دهد که رنگ‌آمیزی ناحیه‌های یک نقشه واقعاً با رنگ‌آمیزی نقطه‌های یک گراف مسطح معادل است. همان‌طور که در فصل ۱۰ عمل کردیم، نقطه‌ای در درون هر ناحیه (از جمله ناحیهٔ بیرونی) قرار می‌دهیم و هر دو تا از این نقطه‌ها را که به نواحی مجاور تعلق دارند به وسیلهٔ خطی که مرز مشترکشان را قطع می‌کند به هم وصل می‌کنیم.

در این صورت گراف G حاصل، گراف دوگان نقشهٔ M ، یک گراف مسطح است و رنگ کردن رأسهای G به مفهوم معمولی، با رنگ کردن نواحی M یکی است. پس می‌توانیم توجه خود را به رنگ کردن رأسهای گرافهای مسطح معطوف کنیم و از این پس چنین خواهیم کرد. توجه کنید که می‌توانیم فرض کنیم G طوقه یا یال چندگانه ندارد چون اینها در رنگ‌آمیزی مطرح نیستند.

در تاریخ طولانی تلاشهای طاقت‌فرسا برای اثبات قضیهٔ چهاررنگ، بسیاری از اقدامات به نزدیکی هدف رسیدند، ولی چیزی که بالاخره به اثبات موفقیت‌آمیز ایل-هاکن در سال ۱۹۷۶ و نیز اثبات جدید رابرتسن، ساندرز، سیمورا و توماس در ۱۹۹۷ انجامید، ترکیبی از ایده‌های بسیار قدیمی (که از قرن نوزدهم سابقه دارد) و امکانات محاسباتی بسیار جدید از جمله کامپیوترهای امروزی بوده است. بنابراین، بیست سال پس از اثبات اولیه، وضعیت اساساً تغییری نکرده و هیچ اثبات «کتابی» از این قضیه در دیدرس قرار ندارد.

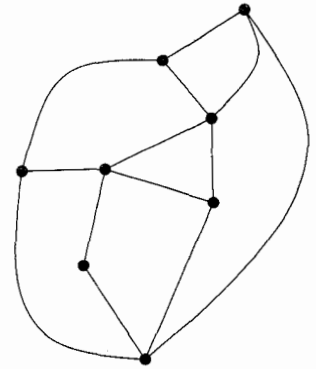
پس توقع خود را کمتر می‌کنیم و این پرسش را پیش می‌کشیم که آیا اثبات شسته رفته‌ای برای این حکم وجود دارد که هر گراف مسطح ۵-رنگ‌پذیر است [با پنج رنگ قابل رنگ‌آمیزی است] یا نه. اثباتی از این قضیهٔ پنج رنگ قبلاً به وسیلهٔ هیوود در اوائل قرن بیستم عرضه شده بود. ابزار اصلی در اثبات او (و در واقع، در اثبات قضیهٔ چهاررنگ نیز) فرمول اوایلر بود (فصل ۱۰ را ببینید). واضح است که در

رنگ آمیزی هر گراف G می‌توانیم فرض کنیم G همبند است زیرا می‌توان قطعه‌های همبند را به‌طور جداگانه رنگ کرد. هر گراف مسطح صفحه را به مجموعه‌ای چون R از نواحی (از جمله، ناحیهٔ بیرونی) تقسیم می‌کند. فرمول اویلر حاکی است که برای گرافهای همبند مسطح $G = (V, E)$ همواره داریم

$$|V| - |E| + |R| = 2$$

برای دستگرمی در آغاز کار، ببینیم که چگونه می‌توان فرمول اویلر را برای اثبات اینکه هر گراف مسطح G قابل رنگ آمیزی با ۶ رنگ است به‌کار برد. به‌استقرا بر تعداد رأسها (n) عمل می‌کنیم. به‌ازای مقادیرهای کوچک n (به‌خصوص، به‌ازای $n \leq 6$) این موضوع بدیهی است. بنابه قسمت (الف) از گزارهٔ صفحهٔ ۷۸ می‌دانیم که G رأسی چون v با درجهٔ حداکثر ۵ دارد. رأس v و همهٔ یالهای ملازم با v را حذف می‌کنیم. گراف حاصل، $G' = G \setminus v$ ، گرافی مسطح با $n - 1$ رأس است. بنابه استقرا، این گراف می‌تواند ۶ رنگی باشد. چون v حداکثر ۵ رأس مجاور در G دارد، در رنگ آمیزی G' حداکثر ۵ رنگ برای این همسایه‌ها به‌کار می‌رود. پس می‌توانیم هر ۶-رنگ آمیزی G' را به یک ۶-رنگ آمیزی G گسترش دهیم به این طریق که رنگی به v تخصیص دهیم که در هنگام رنگ آمیزی G برای هیچ یک از رأسهای مجاور v به‌کار نرود. پس G واقعاً قابل رنگ آمیزی با ۶ رنگ است.

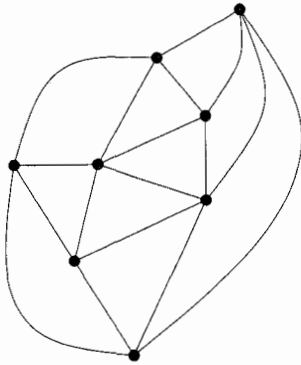
اکنون عدد فامی فهرستی گرافهای مسطح را، چنانکه در فصل پیشین مورد بحث قرار گرفت، در نظر می‌گیریم. واضح است که روش ۶-رنگ آمیزی ما برای فهرستهای رنگها نیز می‌تواند به‌کار رود (در اینجا نیز هرگز با کمبود رنگ روبه‌رو نخواهیم شد)، پس $\chi_{el}(G) \leq 6$ برای هر گراف مسطح G برقرار است. اردوش، روبین، و تیلر در سال ۱۹۷۹ حدس زدند که عدد فامی فهرستی هر گراف مسطح حداکثر ۵ است، و به‌علاوه، گرافهای مسطح G ای با $\chi_{el}(G) > 4$ وجود دارند. حدس آنها در هر دو مورد درست بود. مارگیت فوکت^۱ نخستین کسی بود که مثالی از یک گراف مسطح G با $\chi_{el}(G) = 5$ ساخت (مثال او ۲۳۸ رأس داشت) و اندکی بعد کارستن توماسن^۲ اثباتی واقعاً عالی از حدس ۵-رنگ آمیزی فهرستی [رنگ آمیزی با رنگ-مجموعه‌های ۵ عضوی] عرضه کرد. اثبات او مثال گویایی است از اینکه وقتی فرض صحیح استقرا را یافته باشید چه کارهایی می‌توانید انجام دهید. وی اصلاً از فرمول اویلر استفاده نمی‌کند!



این گراف مسطح ۸ رأس، ۱۳ یال و ۷ ناحیه دارد.

قضیه. هر گراف هامنی G قابل ۵-رنگ‌آمیزی فهرستی است:

$$\chi_e(G) \leq 5$$



یک گراف مسطح تقریباً مثلثی.

■ اثبات. نخست توجه کنید که افزودن بر یالها فقط می‌تواند عدد فامی را افزایش دهد. به عبارت دیگر، وقتی H زیرگرافی از G باشد، آنگاه $\chi_e(H) \leq \chi_e(G)$ مسلماً برقرار است. پس می‌توانیم فرض کنیم که G همبند است و همهٔ وجوه کراندار صورت نشانده شدهٔ آن در صفحه، مرزی به شکل مثلث دارند. چنین گرافی را تقریباً مثلث‌بندی شده می‌نامیم. درستی قضیه برای گرافهای تقریباً مثلث‌بندی شده به درستی آن برای همهٔ گرافهای مسطح دلالت خواهد داشت. شگرد اثبات این است که حکم قویتر زیر را (که امکان به‌کارگیری استقرا را به ما می‌دهد) ثابت کنیم:

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف تقریباً مثلث‌بندی شده و B مرز ناحیهٔ بیرونی باشد. حال فرضهای زیر را دربارهٔ رنگ-مجموعه‌های $C(v)$ ، $v \in V$ اتخاذ می‌کنیم.

(۱) دو رأس مجاور x و y از B از قبل با دو رنگ (متفاوت) α و β رنگ شده‌اند.

(۲) برای سایر رأسهای v متعلق به B ، $|C(v)| \geq 3$.

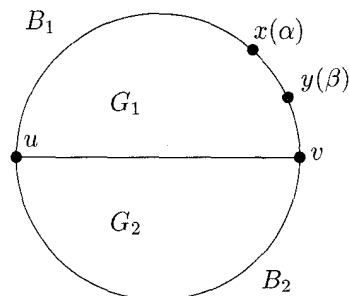
(۳) برای سایر رأسهای v در درون، $|C(v)| \geq 5$.

در این صورت، رنگ‌آمیزی x و y را می‌توان به رنگ‌آمیزی صحیحی برای G با انتخاب رنگها از فهرستها گسترش داد. به‌خصوص $\chi_e(G) \leq 5$.

این حکم به‌ازای $|V| = 3$ واضح است زیرا برای تنها رأس رنگ نشدهٔ v داریم $|C(v)| \geq 3$ ، پس رنگی در دسترس است. حال به‌استقرا پیش می‌رویم.

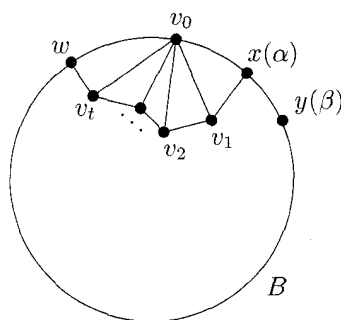
حالت ۱: فرض کنید B وتری دارد یعنی یالی که در B نیست و دو رأس $u, v \in B$ را به هم وصل می‌کند. زیرگراف G_1 که محدود به $\{uv\} \cup B_1$ و شامل x, y, u, v است، تقریباً مثلث‌بندی شده است و لذا بنا به استقرا یک ۵-رنگ‌آمیزی فهرستی برای آن وجود دارد. فرض کنید در این رنگ‌آمیزی، رأسهای u و v رنگهای γ و δ را می‌گیرند. حال به قسمت پایین یعنی G_2 که محدود به B_2 و uv است توجه می‌کنیم. اگر فرض کنیم u و v قبلاً رنگ شده‌اند، می‌بینیم که فرضهای استقرا برای G_2 نیز صادق‌اند.

پس G_2 قابل ۵-رنگ آمیزی فهرستی با رنگهای موجود است، بنابراین همین موضوع برای G صادق است.



حالت ۲. فرض کنید B وتری ندارد، و v رأس واقع در طرف دیگر رأس α -رنگ x بر B است، و x, v_1, \dots, v_t, w رأسهای مجاور v هستند. چون G تقریباً مثلث بندی شده است، با وضعیتی که در شکل نشان داده شده روبه رو هستیم.

گراف تقریباً مثلث بندی شده $G' = G \setminus v$ را با حذف رأس v و همهٔ یالهای صادره از v از G رسم می‌کنیم. G' دارای مرز بیرونی $\{v_1, \dots, v_t\} \cup (B \setminus v)$ است. چون بنا به فرض (۲) داریم $|C(v_0)| \geq 3$ ، دو رنگ γ و δ در $C(v_0)$ متفاوت با α وجود دارند. حال به جای هر رنگ-مجموعهٔ $C(v_i)$ قرار می‌دهیم $\{\gamma, \delta\} \setminus C(v_i)$ ، و رنگ-مجموعه‌های اولیه را برای سایر رأسهای G' نگه می‌داریم. در این صورت G' به وضوح در همهٔ فرضها صدق می‌کند و بنا به استقرا، با رنگ-مجموعه‌های ۵ عضوی قابل رنگ آمیزی است. با انتخاب γ یا δ برای v ، می‌توانیم رنگ آمیزی فهرستی G' را به همهٔ G گسترش دهیم، و اثبات به انجام می‌رسد. \square



خوب، قضیهٔ ۵-رنگ آمیزی فهرستی اثبات شد اما داستان کاملاً به پایان نرسیده است. حدس قویتری مدعی است که عدد فامی فهرستی یک گراف مسطح G حداکثر یک واحد بیشتر از عدد فامی معمولی است:

$$? \quad \chi_{el}(G) \leq \chi(G) + 1, \quad \text{آیا برای هر گراف مسطح } G,$$

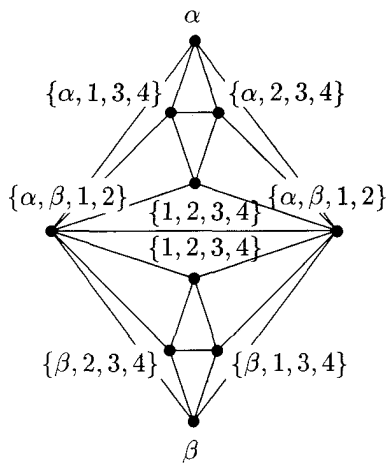
چون بنا به قضیهٔ چهاررنگ داریم $\chi(G) \leq 4$ ، سه حالت وجود دارد:

$$\text{حالت I: } \chi(G) = 2 \Rightarrow \chi_{el}(G) \leq 3$$

$$\text{حالت II: } \chi(G) = 3 \Rightarrow \chi_{el}(G) \leq 4$$

$$\text{حالت III: } \chi(G) = 4 \Rightarrow \chi_{el}(G) \leq 5$$

قضیهٔ توماسن تکلیف حالت III را روشن می‌کند، و حالت I با استدلال هوشمندانه (و بسیار پیچیده‌تر) آلون^۱ و تارسی^۲ اثبات شد. به علاوه گرافهای مسطح G ای وجود دارند چنانکه $\chi(G) = 2$ و $\chi_{el}(G) = 3$ ، مانند گراف $K_{2,4}$ که در فصل پیش مورد بحث بود.



ولی دربارهٔ حالت II چه می‌توان گفت؟ در این حالت حدس غلط از آب در می‌آید. این را مارگیت فوکت برای نخستین بار در مورد گرافی که شی گاتنر^۱ قبلاً ساخته بود نشان داد. گراف 13^0 رأسی او را می‌توان به صورت زیر به دست آورد. نخست به «هشت وجهی مضاعف» (شکل حاشیه را ببینید) نگاهی بیفکنید که به وضوح ۳-رنگ‌پذیر است. فرض کنید $\alpha \in \{5, 6, 7, 8\}$ و $\beta \in \{9, 10, 11, 12\}$ ، و فهرستهایی را که در شکل داده شده‌اند در نظر بگیرید. از شما دعوت می‌کنیم که بررسی کنید رنگ‌آمیزی با این فهرستها ممکن نیست. حال ۱۶ نسخهٔ این گراف را در نظر بگیرید و همهٔ رأسهای بالایی و رأسهای پایینی را مشخص کنید. به این ترتیب گرافی با $13^0 = 16 \times 8 + 2 = 130$ رأس به دست می‌آید که باز هم مسطح و ۳-رنگ‌پذیر است. ما $\{5, 6, 7, 8\}$ را به رأس بالایی و $\{9, 10, 11, 12\}$ را به رأس پایینی تخصیص می‌دهیم و فهرستهایی میانی نیز متناظر با همهٔ ۱۶ جفت (α, β) که $\alpha \in \{5, 6, 7, 8\}$ ، $\beta \in \{9, 10, 11, 12\}$ ، خواهند بود. پس به ازای هر α و β انتخاب شده زیرگرافی طبق شکل به دست می‌آوریم، و بنابراین رنگ‌آمیزی گراف بزرگ ممکن نیست.

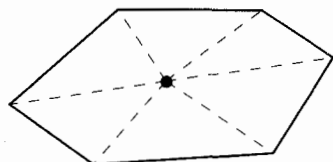
فوکت و ورث^۲ با جرح و تعدیل یکی دیگر از مثالهای گاتنر گراف حتی کوچکتری با ۷۵ رأس و $\chi_e = 5$ ، $\chi = 3$ به دست آوردند که به علاوه، فقط از تعداد مینیمم ۵ رنگ در فهرستهایی ترکیبی بهره می‌گیرد. رکورد فعلی، ۶۳ رأس است.

مراجع

- [1] N. ALON & M. TARSİ: *Colorings and orientations of graphs*, *Combinatorica* **12** (1992), 125-134.
- [2] P. ERDŐS A.L. RUBIN & H. TAYLOR: *Choosability in graphs*, *Proc. West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Congressus Numerantium* **26** (1979), 125-157.
- [3] S. GUTNER: *The complexity of planar graph choosability*, *Discrete Math.* **159** (1996), 119-130.
- [4] N. ROBERTSON, D.P. SANDERS, P. SEYMOUR & R. THOMAS: *The four-color theorem*, *J. Combinatorial Theory, Ser. B* **70** (1997), 2-44.
- [5] C. THOMASSEN: *Every planar graph is 5-choosable*, *J. Combinatorial Theory, Ser. B* **62** (1994), 180-181.

-
- [6] M. VOIGT: *List colorings of planar graphs*, Discrete Math. **120** (1993), 215-219.
- [7] M. VOIGT & B. WIRTH: *On 3-colorable non-4-choosable planar graphs*. J. Graph Theory **24** (1997), 233-235.

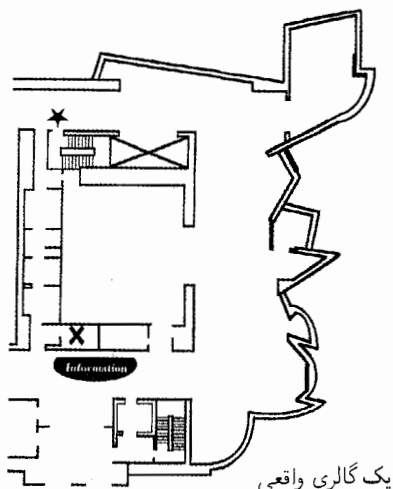
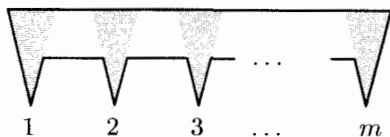
در اینجا مسأله جذابی را ذکر می‌کنیم که ویکتور کلی^۱ آن را در سال ۱۹۷۳ عرضه کرد. فرض کنید مدیر موزه‌ای می‌خواهد مطمئن شود که هر نقطه از موزه در همه اوقات تحت نظارت یک نگهبان قرار دارد. نگهبانان در محل‌های ثابتی مستقرند ولی می‌توانند گشتی هم در اطراف بزنند. چند نگهبان لازم است؟



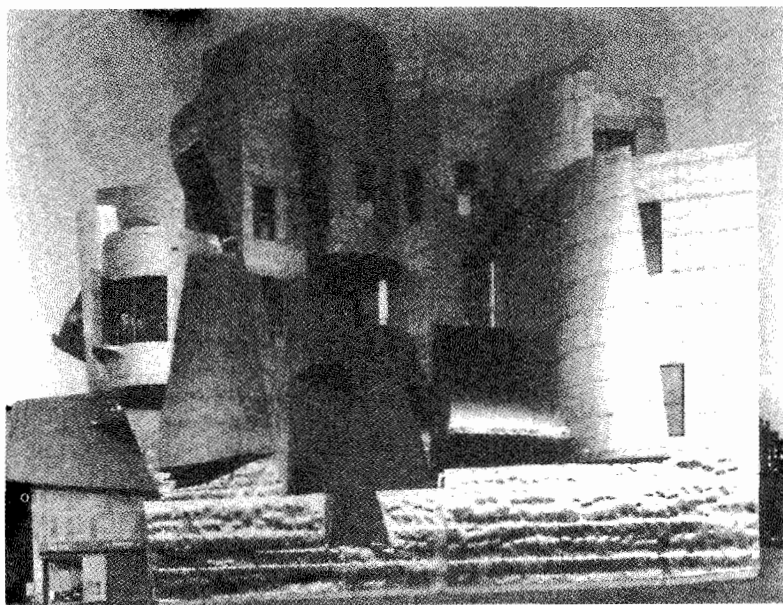
تالار محدب در موزه

موزه را به شکل یک n ضلعی نشان می‌دهیم. البته اگر این n ضلعی محدب باشد، یک نگهبان کافی است. در واقع نگهبان می‌تواند در هر نقطه موزه استقرار داشته باشد. اما در حالت کلی، دیوارهای موزه می‌توانند به شکل هر چندضلعی بسته‌ای باشند.

موزه‌ای به شکل شانه با $n = 3m$ دیوار در نظر بگیرید که در تصویر مقابل نشان داده شده است. به راحتی می‌توان ملاحظه کرد که این موزه به حداقل $m = \frac{n}{3}$ نگهبان



یک گالری واقعی



1. Victor Klee

نیاز دارد. در واقع n دیوار وجود دارد. حال توجه کنید که نقطهٔ ۱ را فقط نگهبانی می‌تواند مشاهده کند که در مثلث هاشورخوردهٔ شامل ۱ مستقر باشد، و همین طور است در مورد سایر نقطه‌های ۲، ۳، ...، m . چون همهٔ این مثلثها مجزا هستند، نتیجه می‌گیریم که m نگهبان لازم است. ولی همین m نگهبان کافی هم هست، چون می‌توان آنها را در قاعده‌های مثلثها مستقر کرد. با حذف یک یا دو دیوار در آنها، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر m ، موزه‌ای با n دیوار وجود دارد که به تعداد $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ نگهبان نیازمند است.

قضیهٔ زیر حاکی است که این بدترین حالت است.

قضیه. برای هر موزه با n دیوار، $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ نگهبان کافی است.

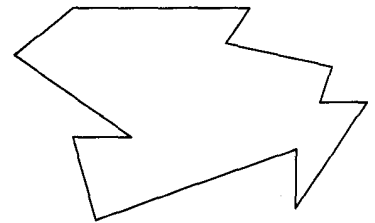
این «قضیهٔ گالری هنری» را اول بار وازک چواتال^۱ با استدلال هوشمندانه‌ای ثابت کرد، ولی استیو فیسک^۲ هم اثباتی عرضه کرده که واقعاً زیباست.

■ اثبات. نخست $3 - n$ قطر نامتقاطع بین گوشه‌های دیوارها رسم می‌کنیم تا سطح داخل مثلث‌بندی شود. مثلاً می‌توانیم ۹ قطر در موزه‌ای که ۱۲ دیوار دارد رسم کنیم تا یک مثلث‌بندی انجام شود. مهم نیست چه مثلث‌بندی را انتخاب کنیم، هر کدام به‌کار ما می‌آید. حال شکل جدید را به‌صورت گراف مسطحی که گوشه‌ها رأسهای آنها و دیوارها و قطرهای آنها یالهایشان هستند در نظر می‌گیریم.

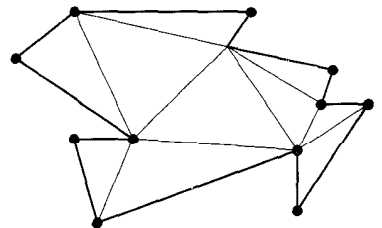
ادعا. این گراف قابل رنگ‌آمیزی با ۳ رنگ است.

به‌ازای $n = 3$ چیزی برای اثبات وجود ندارد. حال به‌ازای $n > 3$ دو رأس دلخواه u و v را که با قطری به هم وصل می‌شوند انتخاب می‌کنیم. این قطر گراف را به دو گراف مثلث‌بندی شدهٔ کوچکتر تقسیم خواهد کرد که هر دو شامل یال uv هستند. به استقرا می‌توانیم هر بخش را با ۳ رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم و در هر رنگ‌آمیزی می‌توانیم رنگ ۱ را برای u و رنگ ۲ را برای v انتخاب کنیم. حال اگر گراف را دوباره یکپارچه در نظر بگیریم، کل گراف قابل رنگ‌آمیزی با ۳ رنگ است.

بقیهٔ کار آسان است. چون n رأس وجود دارد، دست‌کم یکی از رده‌های رنگ، مثلاً همهٔ رأسهای به رنگ ۱، شامل حداکثر $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ رأس است، و در همین جاست که



موزه‌ای با $n = 12$ دیوار



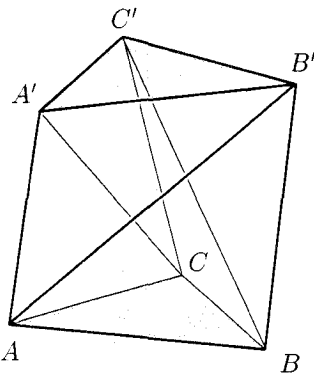
نگهبانان را مستقر می‌کنیم چون هر مثلث شامل رأسی به رنگ ۱ است، نتیجه می‌گیریم که هر مثلث و در نتیجه، کل موزه، نگهبانی می‌شود. □

خواننده تیز هوش ممکن است متوجه نکته ظریفی در استدلال ما شده باشد. آیا همواره یک مثلث‌بندی وجود دارد؟ احتمالاً نخستین پاسخ هر کسی این است: بدیهی است بله! البته مثلث‌بندی همواره وجود دارد ولی این موضوع کاملاً بدیهی نیست، و در واقع تعمیم طبیعی مسأله به حالت سه‌بعدی (افراز به چهار وجهیها) غلط است! این را با توجه به چندوجهی شونهارت^۱ که تصویرش در حاشیه آمده است، می‌توان ملاحظه کرد. این چندوجهی از یک منشور مثلثی با دوران دادن مثلث بالایی، به طوری که هر یک از وجوه چهار ضلعی به دو مثلث با ضلعی نامحذب تجزیه شود، به دست می‌آید. سعی کنید این چندوجهی را مثلث‌بندی کنید! خواهید دید که هر چهار وجهی که شامل مثلث پایینی باشد، باید یکی از سه رأس بالایی را در بر داشته باشد؛ اما چهار وجهی حاصل مشمول در چندوجهی شونهارت نخواهد بود. پس مثلث‌بندی بدون یک رأس اضافی وجود ندارد. برای اثبات اینکه در حالت چندضلعی نامحذب مسطح، یک مثلث‌بندی وجود دارد، به استقرا بر تعداد رأسها (n) عمل می‌کنیم. به ازای $n = 3$ ، چندضلعی مثلث است، و چیزی برای اثبات وجود ندارد. فرض کنید $n \geq 4$. برای استفاده از استقرا، کافی است یک قطر ایجاد کنیم که چندضلعی P را به دو بخش کوچکتر تقسیم کند که بعد بتوان، مانند بالا، دو بخش را به هم الحاق کرد.

رأس A را محذب می‌نامیم اگر زاویه درونی با این رأس کوچکتر از 180° باشد. چون مجموع زاویه‌های درونی P برابر $(n-2)180^\circ$ است، باید رأس محذب A وجود داشته باشد. در واقع دست‌کم باید سه تا از این رأسها وجود داشته باشد؛ این موضوع در اساس یکی از کاربردهای اصل لانه کبوتر است! یا می‌توانید غلاف محذب چندضلعی را در نظر بگیرید و توجه کنید که همه رأسهای آن برای چندضلعی اولیه نیز محذب‌اند.

حال به دو رأس همسایه A یعنی B و C توجه می‌کنیم. اگر پاره خط BC کاملاً در P قرار داشته باشد، قطر مورد نظر ماست. اگر چنین نباشد، مثلث ABC شامل رأسهای دیگری است. BC را به سوی A می‌لغزانیم تا وقتی به رأس آخر Z در ABC برخورد کند؛ حال AZ در درون P است، و یک قطر داریم.

قضیه گالری هنری گونه‌های بسیار دارد. مثلاً ممکن است خواهیم فقط از دیوارها حفاظت کنیم (به هر حال تابلوهای نقاشی به دیوارها آویخته‌اند) یا همه نگهبانان را در



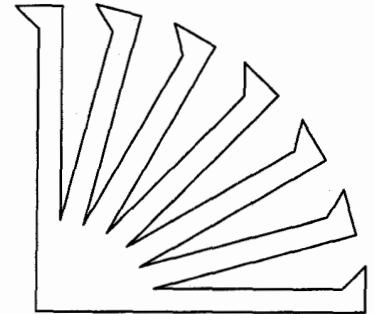
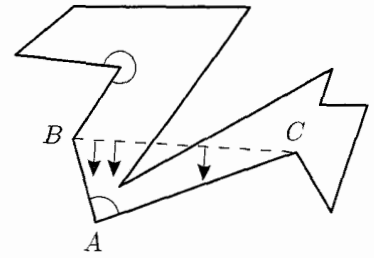
چندوجهی شونهارت: زاویه‌های دووجهی درونی که با یالهای AB' ، BC' و CA' مشخص می‌شوند بزرگتر از 180° هستند.

گوشه‌ها مستقر کنیم. گونه‌ای بسیار زیبا (و حل نشده) از مسأله چنین است:

فرض کنید هر نگهبان بتواند از یک دیوار موزه مراقبت کند، پس او در کنار آن دیوار قدم می‌زند و هر چیزی را که بتوان از هر نقطه در امتداد کنار دیوار دید، می‌بیند. در این صورت، چند «نگهبان دیوار» برای مراقبت از موزه لازم است؟

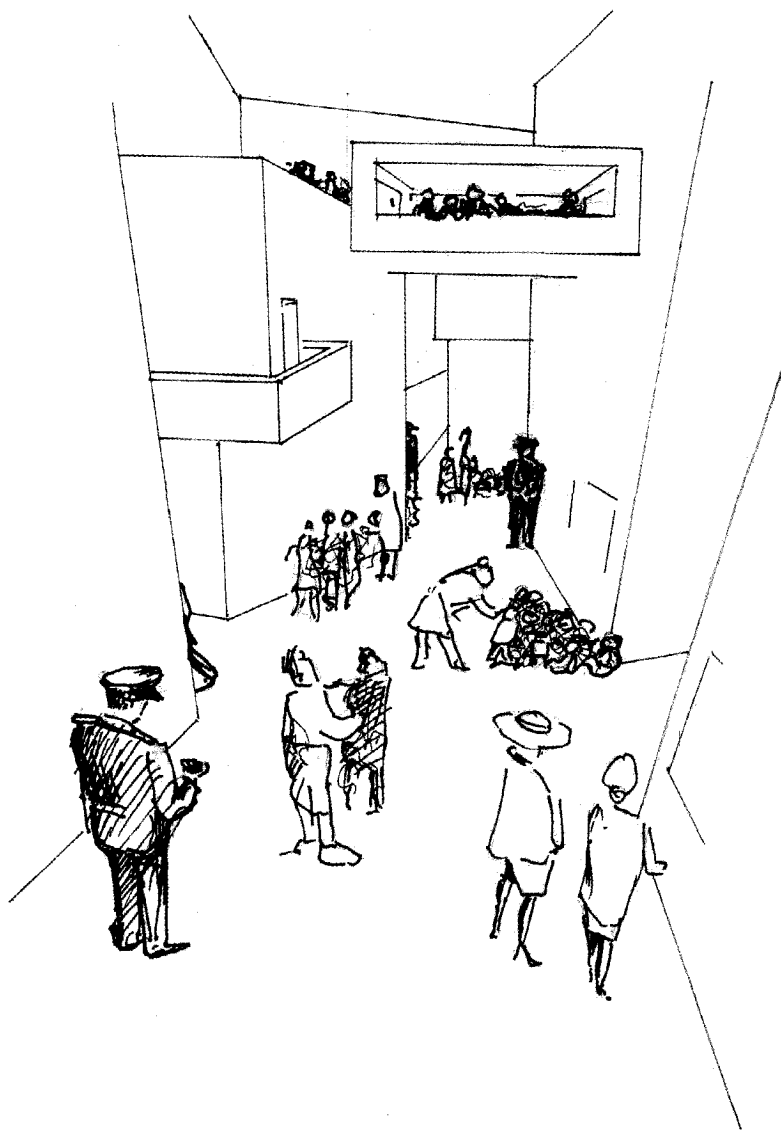
گوتفرد توساین^۱ نمونه‌ای از موزه را که در حاشیه می‌بینید ساخت. این نمونه نشان می‌دهد که ممکن است $\lfloor \frac{7n}{3} \rfloor$ نگهبان لازم باشد.

این چندضلعی ۲۸ ضلع (و در حالت کلی، $4m$ ضلع) دارد، و از خواننده دعوت می‌شود که تحقیق کند m نگهبان ضلع مورد نیاز است. حدس زده می‌شود که، بجز برای بعضی مقادیر کوچک n ، این تعداد کافی نیز هست. ولی هنوز اثباتی برای آن در دیدرس نیست، چه برسد به اثبات «کتابی».



مراجع

- [1] V. CHVÁTAL: *A combinatorial theorem in plane geometry*, J. Combinatorial Theory, Ser. B **18** (1975), 39-41.
- [2] S. FISK: *A short proof of Chvátal's watchman theorem*, J. Combinatorial Theory, Ser. B **24** (1978), 374.
- [3] J. O'ROURKE: *Art Gallery Theorems and Algorithms*, Oxford University Press 1987.
- [4] E. SCHÖNHARDT: *Über die Zerlegung von Dreieckspolyedern in Tetraeder*, Math. Annalen **98** (1928), 309-312.



«نگهبانان موزه»

(مسأله گالری هنری در حالت ۳ بعدی)



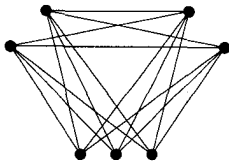
پال توران

یکی از قضیه‌های بنیادی نظریهٔ گراف، قضیهٔ توران است که در سال ۱۹۴۱ عرضه شد و سرآغاز نظریهٔ فرینال گراف^۱ بوده است. قضیهٔ توران بارها تجدید کشف شد و اثباتهای متفاوت متعددی برای آن ارائه گردید. ما چهار تا از این اثباتها را مطرح می‌کنیم و قضاوت در این باره که کدام یک از آنها متعلق به «کتاب» است بر عهدهٔ خواننده خواهد بود.

ابتدا نمادهایی قرار داد می‌کنیم. گرافهای سادهٔ G با مجموعهٔ رئوس $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ و مجموعهٔ یالهای E را در نظر می‌گیریم. اگر v_i و v_j مجاور باشند، می‌نویسیم $v_i v_j \in E$. هر p -خوشه در G زیرگراف کاملی از G با p رأس است که با K_p نشان داده می‌شود. پال توران^۲ پرسش زیر را مطرح کرد،

فرض کنید G گراف ساده‌ای است که شامل p -خوشه نیست. در این صورت G حداکثر چند یال می‌تواند داشته باشد؟

به آسانی می‌توان مثلهایی از این‌گونه گرافها به دست آورد؛ به این منظور V را به $p-1$ زیرمجموعه دو به دو مجزای $V = V_1 \cup \dots \cup V_{p-1}$ تقسیم می‌کنیم که $|V_i| = n_i$ ، $n = n_1 + \dots + n_{p-1}$ ؛ دو رأس را به هم وصل می‌کنیم اگر و تنها اگر در مجموعه‌های مجزای V_i, V_j قرار داشته باشند. گراف حاصل را با n_1, \dots, n_{p-1} نشان می‌دهیم؛ این گراف $\sum_{i \neq j} n_i n_j$ یال دارد. به ازای n مفروض اگر عددهای n_i را چنان انتخاب کنیم که تا حد امکان نزدیک به هم باشند یعنی به ازای هر i و j ، $|n_i - n_j| \leq 1$ ، می‌توانیم تعداد ماکسیمال یالها را در میان این گرافها به دست آوریم. در واقع فرض کنید $n_1 \geq n_2 + 2$. با انتقال یک رأس از V_1 به V_2 ، گراف $K_{n_1-1, n_2+1, \dots, n_{p-1}}$ را که شامل $K_{n_1, n_2, \dots, n_{p-1}}$ یال بیش از $(n_1 - 1)(n_2 + 1) - n_1 n_2 = n_1 - n_2 - 1 \geq 1$ است به دست می‌آوریم. گرافهای $K_{n_1, \dots, n_{p-1}}$ با ضابطهٔ $|n_i - n_j| \leq 1$ را گرافهای توران می‌نامیم. به خصوص اگر $p-1$ را بشمارد، آنگاه می‌توانیم به ازای i ، $n_i = \frac{n}{p-1}$



گراف $K_{r,r,r}$

را انتخاب کنیم و در نتیجه

$$\binom{p-1}{2} \left(\frac{n}{p-1}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \frac{n^2}{2}$$

یال به دست می‌آید. حال قضیهٔ توران حاکی است که این عدد یک کران بالا برای تعداد یالهای هر گراف با n رأس و بدون p -خوشه است.

قضیه. اگر گراف $G = (V, E)$ با n رأس هیچ p -خوشه ($p \geq 2$) نداشته باشد، آنگاه

$$|E| \leq \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \frac{n^2}{2} \quad (1)$$

به‌ازای $p = 2$ ، قضیه بدیهی است. در اولین حالت جالب، $p = 3$ ، قضیه حاکی است که گرافی عاری از مثلث با n رأس شامل حداکثر $\frac{n^2}{3}$ یال است. اثباتهایی از این حالت خاص قبل از مطرح شدن قضیهٔ توران در دست بود. در فصل ۱۷ دو اثبات زیبا که در آنها از نابرابریها استفاده می‌شود آمده است.

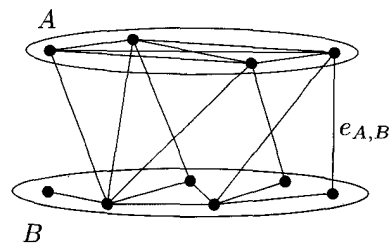
حال به حالت کلی می‌پردازیم. دو اثبات نخست مبتنی بر استقرا و به‌ترتیب متعلق به توران و اردوش هستند.

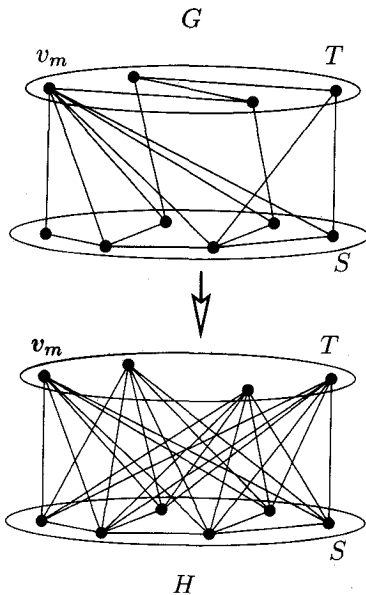
■ اثبات اول. از استقرا بر n استفاده می‌کنیم. رابطهٔ (۱) به‌ازای $n = 1$ بدیهی است. فرض می‌کنیم G گرافی روی $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ باشد که بدون p -خوشه و دارای بیشترین تعداد یال است. G مسلماً شامل $(p-1)$ -خوشه هست زیرا در غیر این صورت می‌توانستیم یالهایی به آن بیفزاییم. گیریم A یک $(p-1)$ خوشه باشد، و قرار می‌دهیم $B : V \setminus A$

A شامل $\binom{p-1}{2}$ یال است و ما اکنون تعداد یالهای B (یعنی e_B) و تعداد یالهای بین A و B (یعنی $e_{A,B}$) را برآورد می‌کنیم. به استقرا داریم $e_B \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) (n-p+1)^2$. چون G هیچ p -خوشه‌ای ندارد، هر $v_j \in B$ مجاور به حداکثر $p-2$ رأس در A است، و به دست می‌آوریم $e_{A,B} \leq (p-2)(n-p+1)$. پس روی هم رفته داریم

$$|E| \leq \binom{p-1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) (n-p+1)^2 + (p-2)(n-p+1)$$

□ که دقیقاً $\frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)$.





■ اثبات دوم. در این اثبات از ساختار گرافهای توران استفاده می‌شود. فرض کنیم $v_m \in V$ رأسی با درجهٔ ماکسیمال $d_m = \max_{1 \leq j \leq n} d_j$ باشد. مجموعهٔ رأسهای مجاور به v_m را با S نشان می‌دهیم، و $|S| = d_m$ ، و قرار می‌دهیم $T = V \setminus S$. چون G شامل هیچ p -خوشه‌ای نیست و v_m مجاور به همهٔ رأسهای S است، پس S شامل هیچ $(p-1)$ خوشه‌ای نیست.

حال گراف H زیر را روی V می‌سازیم (شکل را ببینید). H متناظر است با روی G روی S و شامل همهٔ یالهای بین T و S است، ولی هیچ یالی در درون T ندارد. به عبارت دیگر، T مجموعه‌ای مستقل در H است، و نتیجه می‌گیریم که H باز p -خوشه ندارد. فرض می‌کنیم d'_j درجهٔ v_j در H باشد. اگر $v_j \in S$ ، آنگاه مسلماً بنا به نحوهٔ ساخت H داریم $d'_j \geq d_j$ ، و به ازای $v_j \in T$ بنا به نحوهٔ انتخاب v_m می‌بینیم $d'_j = |S| = d_m \geq d_j$. پس $|E(H)| \geq |E|$ ، و نتیجه می‌گیریم که در میان همهٔ گرافهای $K_{n_1, \dots, n_{p-1}}$ با تعداد ماکسیمال یالها، باید یکی به شکل H باشد. بنا به استقرا، گراف القا شده به وسیلهٔ S حداکثر همان تعداد یال دارد که گراف مناسبی چون $K_{n_1, \dots, n_{p-2}}$ روی S دارد. پس $|E| \leq |E(H)| \leq E(K_{n_1, \dots, n_{p-1}})$ که در آن $|T| = n_{p-1}$ ، رابطهٔ (۱) از اینجا نتیجه می‌شود. □

دو اثبات آخر ما ماهیتی کاملاً متفاوت دارند و در آنها از استدلالی بر اساس ماکسیم‌سازی و مفاهیمی از نظریهٔ احتمال استفاده می‌شود. این اثباتها، به ترتیب، متعلق به موتسکین-اشتراوس و آلون-اسپنسر هستند.

■ اثبات سوم. توزیع احتمال $w = (w_1, \dots, w_n)$ را برای رأسها در نظر می‌گیریم یعنی مقادیر $w_i \geq 0$ را با ضابطهٔ $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ به رأسها نسبت می‌دهیم. هدف ما ماکسیم کردن تابع

$$f(w) = \sum_{v_i, v_j \in E} w_i w_j$$

است. فرض می‌کنیم w توزیعی دلخواه باشد و v_i و v_j جفتی از رأسهای غیر مجاور با وزنها w_i, w_j باشند. بگیریم s_i مجموع وزنها w_j همهٔ رأسهای مجاور به v_i باشد، و s_j همین حالت را برای v_j داشته باشد که می‌توانیم فرض کنیم $s_i \geq s_j$. حال وزن را از v_j به v_i انتقال می‌دهیم یعنی وزن جدید v_i ، $w_i + w_j$ است در حالی که وزن v_j به 0 تقلیل می‌یابد. برای توزیع جدید w' داریم

$$f(w') = f(w) + w_j s_i - w_j s_j \geq f(w)$$



«وزنهای متحرک»

با تکرار این گام (به دست آوردن رأسهای کمتر با وزنهای مثبت در هر گام) نتیجه می‌گیریم که توزیع بهینه‌ای وجود دارد که در آن وزنهای ناصفر روی یک خوشه، مثلاً روی یک k -خوشه، متمرکزند. حال اگر مثلاً $w_1 > w_2 > 0$ ، آنگاه ε ای انتخاب می‌کنیم که $0 < \varepsilon < w_1 - w_2$ ، و w_1 را به $w_1 - \varepsilon$ و w_2 را به $w_2 + \varepsilon$ تغییر می‌دهیم. توزیع جدید w' در $f(w') = f(w) + \varepsilon(w_1 - w_2) - \varepsilon^2 > f(w)$ صدق می‌کند و نتیجه می‌گیریم که مقدار ماکسیمال f به ازای $w_i = \frac{1}{k}$ روی یک k -خوشه و $w_i = 0$ در غیر این صورت، به دست می‌آید. چون هر k -خوشه شامل $\frac{k(k-1)}{2}$ یال است، به دست می‌آوریم

$$f = \frac{k(k-1)}{2} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

چون این عبارت بر حسب k صعودی است، بهترین کاری که می‌توانیم بکنیم این است که قرار دهیم $k = p - 1$ (چون G هیچ p -خوشه‌ای ندارد). پس نتیجه می‌شود که به ازای هر توزیع w

$$f(w) \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)$$

به خصوص این نابرابری برای توزیع یکنواختی که با $w_i = \frac{1}{n}$ به ازای هر i مشخص می‌شود، برقرار است. پس

$$\frac{|E|}{n^2} = f(w_i = \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)$$

□ که دقیقاً همان (۱) است.

■ اثبات چهارم. این بار مفاهیمی از نظریه احتمال را به کار می‌گیریم. فرض کنید G گراف دلخواهی با مجموعه رئوس $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ باشد. درجه v_i را با d_i نشان می‌دهیم، و تعداد رأسها در بزرگترین خوشه را با $\omega(G)$ ، و این تعداد را عدد خوشه‌ای G می‌نامیم.

$$\text{ادعا. داریم } \omega(G) \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n - d_i}$$

جایگشت تصادفی $\pi_1 \pi_2 \dots \pi_n$ از V را با احتمال $\frac{1}{n!}$ (یکسان برای همه جایگشتها) انتخاب می‌کنیم و مجموعه C_π را به شرح زیر می‌سازیم. π_i را در C_π قرار می‌دهیم اگر و تنها اگر π_i مجاور به هر π_j ($j < i$) قبل از π_i باشد. بنا به تعریف، C_π

خوشه‌ای در G است. فرض کنید $X = |C_\pi|$ متغیر تصادفی متناظر باشد. داریم
 $X = \sum_{i=1}^n X_i$ که در آن X_i متغیر تصادفی نشانگر رأس v_i است یعنی $X_i = 1$ یا $X_i = 0$.
 $X_i = 0$ برحسب اینکه $v_i \in C_\pi$ یا $v_i \notin C_\pi$. توجه کنید که v_i نسبت به جایگشت
 C_π به $\pi_1 \pi_2 \dots \pi_n$ تعلق دارد اگر و تنها اگر v_i قبل از $d_i - 1 - n$ رأسی که مجاور
به v_i نیستند قرار داشته باشد یا به عبارت دیگر، اگر v_i در میان v_i و $n - 1 - d_i$ رأس
غیر مجاورش اولین رأس باشد. احتمال این رویداد $\frac{1}{n-d_i}$ است، پس $EX_i = \frac{1}{n-d_i}$.
پس بنابه خطی بودن امید ریاضی (صفحه ۱۱۲ را ببینید) به دست می‌آوریم

$$E(|C_\pi|) = EX = \sum_{i=1}^n EX_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n-d_i}$$

در نتیجه، باید خوشه‌ای دستکم با این اندازه وجود داشته باشد، و این ادعای ما بود.
برای استنتاج قضیه توران از این ادعا، از نابرابری کوشی-شوارتس استفاده می‌کنیم:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

قرار می‌دهیم $a_i = \sqrt{n-d_i}$ ، $b_i = \frac{1}{\sqrt{n-d_i}}$ ، پس $a_i b_i = 1$ ، و خواهیم داشت

$$n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n (n-d_i) \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n-d_i} \right) \leq \omega(G) \sum_{i=1}^n (n-d_i) \quad (2)$$

در این مرحله از فرض $\omega(G) \leq p-1$ در قضیه توران استفاده می‌کنیم. همچنین با
به‌کارگیری رابطه $|E| = \sum_{i=1}^n d_i$ که در فصل مربوط به شمارش دوگانه آمد، نابرابری
(۲) را به صورت زیر ساده می‌کنیم

$$n^2 \leq (p-1)(n^2 - 2|E|)$$

و این معادل است با نابرابری توران. \square

حال به صورت قوی زیر از قضیه توران توجه کنید:

فرض کنید $t(n, p)$ تعداد یالها در گراف توران، $K_{n_1, \dots, n_{p-1}}$ ، با
 $n = n_1 + \dots + n_{p-1}$ رأس باشد.

در این صورت به‌ازای هر گراف H با n رأس بدون p -خوشه داریم
 $|E(H)| \leq t(n, p)$ ، که علامت برابری فقط برای گراف توران برقرار است.

از هر دو اثبات ۱ و ۲، این حکم قویتر نتیجه گرفته می‌شود.

مراجع

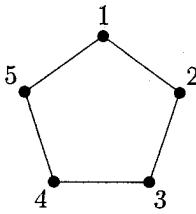
- [1] M. AIGNER: *Turán's graph theorem*, Amer. Math. Monthly **102** (1995), 808-816.
- [2] N. ALON & J. SPENCER: *The Probabilistic Method*, Wiley Interscience 1992.
- [3] P. ERDŐS: *On the graph theorem of Turán (in Hungarian)*, Math. Fiz. Lapok **21** (1970), 249-251.
- [4] T. S. MOTZKIN & E. G. STRAUSS: *Maxima for graphs and a new proof of a theorem of Turán*, Canad. J. Math. **17** (1965), 533-540.
- [5] P. TURÁN: *On an extremal problem in graph theory*, Math. Fiz. Lapok **48** (1941), 436-452.

کلود شانن^۱ بنیانگذار نظریه اطلاعات در سال ۱۹۵۶ پرسش بسیار جالب زیر را مطرح کرد:

فرض کنید می‌خواهیم پیامهایی را از طریق یک کانال (که در آن بعضی از نمادها ممکن است تحریف شوند) برای گیرنده‌ای بفرستیم. آهنگ ماکسیمال انتقال پیام به نحوی که گیرنده بتواند پیام اصلی را بدون خطا دریافت کند چیست؟

اول ببینیم منظور شانن از «کانال» و «آهنگ انتقال» چیست. مجموعه‌ای چون V از نمادها به ما داده شده است، و هر پیام صرفاً رشته‌ای از نمادهای متعلق به V است. گرافی چون $G = (V, E)$ را به عنوان مدل کانال در نظر می‌گیریم که در آن V مجموعه نمادهاست، و E مجموعه یالهای بین جفتهای غیر قابل اعتماد از نمادها، یعنی نمادهایی که در خلال انتقال ممکن است با هم اشتباه شوند. مثلاً در مکالمه با تلفن [به زبان انگلیسی] نمادهای P و B را به وسیله یالی به هم وصل می‌کنیم زیرا گیرنده ممکن است این دو حرف را از هم تشخیص ندهد. G را گراف اشتباه می‌نامیم.

۵-دور [دور به طول ۵] C_5 نقش برجسته‌ای در بحث ما خواهد داشت. در این مثال، ۱ و ۲ ممکن است با هم اشتباه شوند، ولی ۱ و ۳ با هم اشتباه نمی‌شود. کمال مطلوب این است که بتوانیم هر ۵ نماد را برای انتقال به کار ببریم، اما چون می‌خواهیم پیام‌رسانی ما عاری از خطا باشد — اگر فقط نمادهای سیگنالی را ارسال کنیم — از هر جفت نمادی که ممکن است با هم اشتباه شوند فقط یکی را به کار می‌گیریم. پس برای ۵-دور می‌توانیم فقط از دو نماد (هر دو نمادی که به وسیله یالی به هم وصل نیستند) استفاده کنیم. این به زبان نظریه اطلاعات بدان معنی است که برای ۵-دور، آهنگ اطلاع برابر $\log_2 2 = 1$ (به جای مقدار ماکسیمال $\log_2 5 \approx 2.32$) است. روشن است که در این مدل، برای گراف دلخواه $G = (V, E)$ ، بهترین کاری که می‌توانیم انجام دهیم انتقال نمادهای متعلق به یک مجموعه مستقل با بزرگترین اندازه است، پس آهنگ اطلاع، وقتی نمادهای سیگنالی می‌فرستیم، $\log_2 \alpha(G)$ است که در آن $\alpha(G)$ عدد استقلال G است.



1. Claude Shannon

حال ببینیم که آیا می‌شود آهنگ اطلاع را با استفاده از رشته‌های بزرگتر به جای تک نمادها افزایش داد یا خیر. فرض کنید می‌خواهیم رشته‌هایی به طول ۲ را انتقال دهیم. رشته‌های $u_1 u_2$ و $v_1 v_2$ فقط در صورتی ممکن است با هم اشتباه شوند که از یکی از حالت‌های زیر برقرار باشد:

$$\bullet u_1 = v_1 \text{ و } v_2 \text{ قابل اشتباه با } v_2 \text{ باشد.}$$

$$\bullet u_2 = v_2 \text{ و } u_1 \text{ قابل اشتباه با } v_1 \text{ باشد.}$$

$$\bullet u_1 \neq v_1 \text{ قابل اشتباه با هم و } u_2 \neq v_2 \text{ نیز قابل اشتباه با هم باشند.}$$

به زبان نظریهٔ گراف، این معادل است با در نظر گرفتن $G_1 \times G_2$ ، حاصلضرب دو گراف $G_1 = (V_1, E_1)$ و $G_2 = (V_2, E_2)$. گراف $G_1 \times G_2$ دارای مجموعهٔ رئوس $V_1 \times V_2 = \{(u_1, u_2) : u_1 \in V_1, u_2 \in V_2\}$ است که $(v_1, v_2) \neq (u_1, u_2)$ با یالی به هم وصل می‌شوند اگر و تنها اگر به ازای $i = 1, 2$ یا $u_i = v_i$ یا $u_i v_i \in E_i$. پس گراف اشتباه برای رشته‌هایی به طول ۲ عبارت است از $G^2 = G \times G$ ، حاصلضرب گراف در خودش. لذا آهنگ اطلاع رشته‌های به طول ۲ در هر نماد برابر است با

$$\frac{\log_2 \alpha(G^2)}{2} = \log_2 \sqrt{\alpha(G^2)}$$

حال، البته، می‌توانیم رشته‌هایی با هر طول دلخواه n را به کار گیریم. گراف اشتباه n ام $G^n = G \times G \times \dots \times G$ دارای مجموعهٔ رئوس

$$V^n = \{(u_1, \dots, u_n) : u_i \in V\}$$

است که $(u_1, \dots, u_n) \neq (v_1, \dots, v_n)$ با یالی به هم وصل می‌شوند اگر به ازای هر i ، $u_i = v_i$ یا $u_i v_i \in E$ باشد. پس آهنگ اطلاع در نماد برای رشته‌های به طول n چنین است

$$\frac{\log_2 \alpha(G^n)}{n} = \log_2 \sqrt[n]{\alpha(G^n)}$$

در بارهٔ $\alpha(G^n)$ چه می‌توان گفت؟ یک نکتهٔ مقدماتی این است. فرض کنید $U \subseteq V$ یک مجموعهٔ مستقل در G با بزرگترین اندازه باشد، $|U| = \alpha$. α^n رأس در G^n به شکل (u_1, \dots, u_n) که به ازای هر i ، $u_i \in U$ ، به وضوح مجموعهٔ مستقلی در G^n تشکیل می‌دهند. پس

$$\alpha(G^n) \geq \alpha(G)^n$$

بنابراین

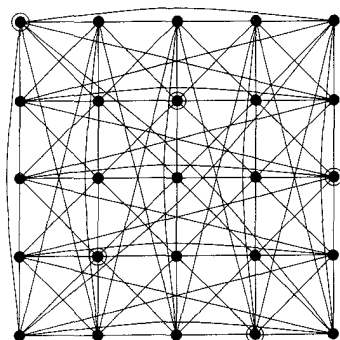
$$\sqrt[n]{\alpha(G^n)} \geq \alpha(G)$$

یعنی با استفاده از رشته‌های طولیتر به جای تک نمادها، آهنگ اطلاع هرگز کاهش نمی‌یابد. این موضوع، در ضمن یکی از مفاهیم اصلی نظریه کدگذاری است: با کدگذاری نمادها به صورت رشته‌های طولیتر می‌توانیم مخبرات عاری از خطا را کاراتر سازیم. پس با صرفنظر از لگاریتم می‌توانیم به تعریف بنیادی شانن برسیم: ظرفیت خطا-صفر گراف G با رابطه

$$\Theta(G) : \sup_{n \geq 1} \sqrt[n]{\alpha(G^n)}$$

مشخص می‌شود و مسأله شانن محاسبه $\Theta(G)$ و به خصوص $\Theta(C_5)$ بود.

بیاید نگاهی به C_5 بیندازیم. تا اینجا می‌دانیم $\alpha(C_5) = 2 \leq \Theta(C_5)$. با توجه به ۵-دوره که قبلاً نشان داده شد، یا به حاصلضرب $C_5 \times C_5$ که نمودارش در حاشیه مقابل رسم شده است، می‌بینیم که مجموعه $\{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 2), (5, 4)\}$ در C_5^2 مستقل است. پس داریم $\alpha(C_5^2) \geq 5$. چون یک مجموعه مستقل می‌تواند فقط شامل دو رأس از هر دو سطر متوالی باشد، می‌بینیم که $\alpha(C_5^2) = 5$. پس، با استفاده از رشته‌های به طول ۲، کران پایین ظرفیت را به $\Theta(C_5) \geq \sqrt{5}$ افزایش داده‌ایم.

گراف $C_5 \times C_5$

تا اینجا کران بالایی برای ظرفیت نداریم. برای به دست آوردن چنین کرانهایی باز از ایده‌های اصلی شائن پیروی می‌کنیم. نخست به تعریف دوگان مجموعه مستقل نیاز داریم. به یادآورید که زیرمجموعه‌ای چون $C \subseteq V$ یک خوشه است اگر هر دو رأس C با یالی به هم وصل شوند. پس رأسها خوشه‌های پیش پا افتاده با اندازه ۱ تشکیل می‌دهند، یا لها خوشه‌های با اندازه ۲ هستند، مثلثها خوشه‌های با اندازه ۳ هستند، و به همین ترتیب. فرض کنید C مجموعه خوشه‌های موجود در G باشد. یک توزیع احتمال دلخواه $x = (x_v : v \in V)$ برای مجموعه رئوس در نظر بگیرید، یعنی $x_v \geq 0$ و $\sum_{v \in V} x_v = 1$. به هر توزیع x «مقدار ماکسیمال یک خوشه»

$$\lambda(x) = \max_{C \in \mathcal{C}} \sum_{v \in C} x_v$$

را نسبت می‌دهیم، و بالاخره قرار می‌دهیم

$$\lambda(G) = \min_{\mathbb{P}} \lambda(x) = \min_{\mathbb{P}} \max_{C \in \mathcal{C}} \sum_{v \in C} x_v$$

اگر بخواهیم دقیق باشیم، باید از \inf به جای \min استفاده کنیم، ولی مینیمم وجود دارد زیرا $\lambda(x)$ روی مجموعه فشرده همه توزیعا پیوسته است.

حال مجموعه مستقلی چون $U \subseteq V$ با اندازه ماکسیمال $|U| = \alpha(G)$ در نظر بگیرید. توزیع $x_U = (x_v : v \in U)$ را وابسته به U تعریف می‌کنیم به این ترتیب که قرار می‌دهیم $x_v = \frac{1}{\alpha}$ اگر $v \in U$ و $x_v = 0$ در غیر این صورت. چون هر خوشه‌ای شامل حداکثر یک رأس از U است، نتیجه می‌گیریم $\lambda(x_U) = \frac{1}{\alpha}$ ، و بنابراین، طبق تعریف $\lambda(G)$

$$\alpha(G) \leq \lambda(G)^{-1} \quad \text{یا} \quad \lambda(G) \leq \frac{1}{\alpha(G)}$$

چیزی که شائن به آن پی برد این است که $\lambda(G)^{-1}$ در واقع یک کران بالا برای هر $\sqrt[n]{\alpha(G^n)}$ و در نتیجه برای $\Theta(G)$ است. برای اثبات این موضوع کافی است نشان دهیم که به ازای گرافهای G و H رابطه

$$\lambda(G \times H) = \lambda(G)\lambda(H) \quad (۱)$$

برقرار است چون از اینجا نتیجه می‌شود $\lambda(G^n) = \lambda(G)^n$ و بنابراین

$$\begin{aligned} \alpha(G^n) &\leq \lambda(G^n)^{-1} = \lambda(G)^{-n} \\ \sqrt[n]{\alpha(G^n)} &\leq \lambda(G)^{-1} \end{aligned}$$

برای اثبات (۱) از قضیه دوگانی برنامه‌سازی خطی ([۱] را ببینید) استفاده کرده به دست می‌آوریم

$$\lambda(G) = \min_x \max_{C \in \mathcal{C}} \sum_{v \in C} x_v = \max_y \min_{v \in V} \sum_{C \ni v} y_C \quad (۲)$$

که در آن طرف راست همه توزیعیهای احتمال $y = (y_C : C \in \mathcal{C})$ بر \mathcal{C} را در بر می‌گیرد.

$G \times H$ را در نظر بگیرید و فرض کنید x و x' توزیعیهایی باشند که مینیمهای $\lambda(x) = \lambda(G)$ ، $\lambda(x') = \lambda(H)$ را به دست می‌دهند. در مجموعه رئوس $G \times H$ مقدار $z_{(u,v)} = x_u x'_v$ را به رأس (u,v) منسوب می‌کنیم. چون $\sum_{(u,v)} z_{(u,v)} = \sum_u x_u \sum_v x'_v = 1$ ملاحظه می‌کنیم که خوشه‌های ماکسیمال در $G \times H$ به شکل

در G و H اند. پس با استفاده از تعریف $\lambda(G \times H)$ داریم

$$\begin{aligned}\lambda(G \times H) &\leq \lambda(z) \max_{C \times D} \sum_{(u,v) \in C \times D} z_{(u,v)} \\ &= \max_{C \times D} \sum_{u \in C} x_u \sum_{v \in D} x'_v = \lambda(G)\lambda(H)\end{aligned}$$

به همین طریق، نابرابری معکوس یعنی $\lambda(G \times H) \geq \lambda(G)\lambda(H)$ با استفاده از عبارت دوگان برای $\lambda(G)$ در (۲) ثابت می‌شود. به طور خلاصه، می‌توانیم بگوییم که به ازای هر گراف G

$$\Theta(G) \leq \lambda(G)^{-1}$$

اکنون یافته‌های خود را در مورد ۵-دور، و به طور کلی، در مورد m -دور C_m به کار می‌بریم. با استفاده از توزیع یکنواخت $(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m})$ برای رأسها، رابطه $\lambda(C_m) \leq \frac{2}{m}$ را به دست می‌آوریم چون هر خوشه شامل حداکثر دو رأس است. به همین نحو، با انتخاب $\frac{1}{m}$ برای یالها و 0 برای رأسها، بنابه عبارت دوگان در (۲) داریم $\lambda(C_m) = \frac{2}{m}$ ، و از این رو به ازای هر m

$$\Theta(C_m) \leq \frac{m}{2}$$

حال اگر m زوج باشد، به وضوح $\alpha(C_m) = \frac{m}{2}$ و لذا $\Theta(C_m) = \frac{m}{2}$ ولی به ازای m های فرد داریم $\alpha(C_m) = \frac{m-1}{2}$. به ازای $m = 3$ ، C_3 یک خوشه است، و هر حاصلضرب C_3^n نیز چنین است که در نتیجه $\Theta(C_3) = \alpha(C_3) = 1$. پس نخستین حالت جالب توجه، ۵-دور است که در مورد آن تا اینجا می‌دانیم که

$$\sqrt{5} \leq \Theta(C_5) \leq \frac{5}{2} \quad (3)$$

شانن با استفاده از رویکرد مبتنی بر برنامه‌سازی خطی (و بعضی ایده‌های دیگر) توانست ظرفیت بسیاری گرافها، و به خصوص همه گرافهای با پنج رأس یا کمتر، را محاسبه کند — به استثنای C_5 که در این مورد نتوانست از کرانهای مذکور در (۳) فراتر رود. وضع در همین حالت متوقف ماند تا آنکه ۲۰ سال لاسلو لوواس^۱ با استدلالی که به طرز شگفت‌آوری ساده است نشان داد که واقعاً $\Theta(C_5) = \sqrt{5}$. مسأله‌ای ترکیبیاتی که به ظاهر بسیار دشوار بود راه‌حلی غیر منتظره و زیبا یافت.

ایده اصلی لوواس، نشان دادن رأسهای v ی گراف به وسیله بردارهای حقیقی به طول ۱ بود به نحوی که هر دو برداری که به رأسهای غیر مجاور در G تعلق دارند بر یکدیگر

1. László Lovász

عمود باشند. چنین مجموعه‌ای از بردارها را نمایش یکمعامد G می‌نامیم. روشن است که چنین نمایشی همواره وجود دارد: کافی است بردارهای واحد $(1, 0, \dots, 0)^T, (0, 1, 0, \dots, 0)^T, \dots, (0, 0, \dots, 1)^T$ با بعد $m = |V|$ را در نظر بگیریم.

به منظور اینکه نمایش یکمعامدی برای C_5 در \mathbb{R}^3 به دست آوریم، «چتر»ی با پنج «سیم‌پره» v_1, \dots, v_5 به طول واحد در نظر می‌گیریم. سپس چتر را (که رأس آن در مبدأ است) تا جایی باز می‌کنیم که زاویه‌های بین سیم‌پرده‌های یک در میان 90° درجه باشد.

لوواس سپس نشان داد که h ، ارتفاع چتر، یعنی فاصله بین S و 0 ، کران

$$\Theta(C_5) \leq \frac{1}{n^2} \quad (4)$$

را به دست می‌دهد. محاسبه ساده‌ای نشان می‌دهد که $h^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ؛ تابلو صفحه بعد را ببینید. از اینجا نتیجه می‌شود $\Theta(C_5) \leq \sqrt{5}$ ، و بنابراین $\Theta(C_5) = \sqrt{5}$.

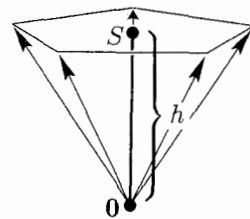
ببینیم که لوواس چگونه به اثبات نابرابری (۴) پرداخت. نتایج او در واقع خیلی کلیتر بود. حاصلضرب داخلی معمولی دو بردار $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s)$ و $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_s)$ در \mathbb{R}^s یعنی

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_s y_s$$

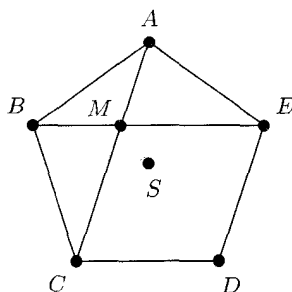
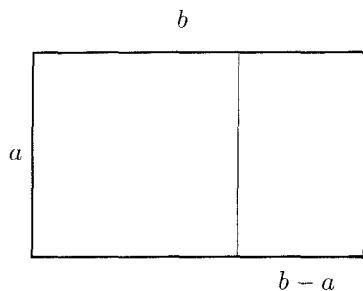
را در نظر بگیرید. در این صورت $|\mathbf{x}|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x_1^2 + \dots + x_s^2$ مربع $|\mathbf{x}|$ یعنی طول \mathbf{x} است و زاویه γ بین \mathbf{x} و \mathbf{y} با

$$\cos \gamma = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{|\mathbf{x}| |\mathbf{y}|}$$

مشخص می‌شود. پس $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ اگر و تنها اگر \mathbf{x} و \mathbf{y} متعامد باشند.



چتر لوواس



پنج ضلعی و نسبت طلایی

از روزگار باستان، مستطیلی را از لحاظ زیبایی شناختی مطلوب می‌دانستند که در صورت جدا کردن مربعی به طول ضلع a از آن، مستطیل باقیمانده متشابه با مستطیل اولیه باشد. عرض و طول چنین مستطیلی، a و b ، باید در $\frac{b}{a} = \frac{a}{b-a}$ صدق کنند. با فرض $\frac{b}{a} = \tau$ به دست می‌آوریم $\tau = \frac{1}{\tau-1}$ یا $\tau^2 - \tau - 1 = 0$. با حل این معادله درجه دوم، نسبت طلایی $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ به دست می‌آید.

حال یک پنج ضلعی منتظم به طول ضلع a در نظر بگیرید و فرض کنید d طول قطره‌هایش باشد. بر اقلیدس معلوم بود (مقاله پنج، قضیه ۲) که $\frac{d}{a} = \tau$ و نقطه تقاطع دو قطر، قطرها را به نسبت طلایی تقسیم می‌کند.

و این است اثبات «کتابی» اقلیدس برای آن. چون مجموع زاویه‌های پنج ضلعی 3π است، زاویه هر رأس برابر $\frac{2\pi}{5}$ است. بنابراین $\angle ABE = \frac{\pi}{5}$ ، چون ABE مثلثی متساوی الساقین است. و از اینجا پی می‌بریم $\angle AMB = \frac{2\pi}{5}$ ، و در نتیجه مثلثهای AMB و ABC متشابه‌اند. چهار ضلعی $CMED$ لوزی است زیرا ضلعهای مقابل آن موازی‌اند (به زاویه‌ها نگاه کنید)، و بنابراین $|MC| = a$ و از این رو $|AM| = d - a$. از تشابه AMB و ABC نتیجه می‌گیریم

$$\frac{d}{a} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|AM|} = \frac{a}{d-a} = \frac{|MC|}{|MA|} = \tau$$

اما نتایج دیگری هم می‌توان به دست آورد. از خواننده می‌خواهیم که نشان دهد s ، فاصله یک رأس تا گرانگه پنج ضلعی (S) ، در رابطه $s^2 = \frac{d^2}{\tau+2}$ صدق می‌کند (توجه کنید که BS قطر AC را به زاویه قائمه قطع می‌کند و آن قطر را نصف می‌کند). حال برای اختتام این گشت و گذار در هندسه، چتری در نظر بگیرید که این پنج ضلعی منتظم در بالای آن است؛ چون سیم‌پره‌های یک در میان (به طول ۱) زاویه قائمه تشکیل می‌دهند، از قضیه فیثاغورس نتیجه می‌شود $d = \sqrt{2}$ ، و بنابراین $s^2 = \frac{2}{\tau+2} = \frac{2}{\sqrt{5}+5}$. پس، باز به کمک قضیه فیثاغورس، نتیجه‌ای را که در مورد $|OS| = h$ وعده کرده بودیم، می‌یابیم

$$h^2 = 1 - s^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5} + 5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

اکنون می‌پردازیم به کران بالای " $\Theta(G) \leq \sigma_T$ " برای ظرفیت شانن گراف دلخواه G که نمایش متعامد بسیار «خوب»ی دارد. به این منظور فرض می‌کنیم $T = \{v^{(1)}, \dots, v^{(m)}\}$ نمایش متعامدی از G در \mathbb{R}^s باشد که در آن $v^{(i)}$ متناظر است با رأس v_i . به علاوه فرض می‌کنیم که هر $v^{(i)}$ زاویه‌ای یکسان (مخالف 90°) با بردار $u = \frac{1}{m}(v^{(1)} + \dots + v^{(m)})$ دارد یا به عبارت دیگر، حاصلضرب داخلی

$$\langle v^{(i)}, u \rangle = \sigma_T$$

به ازای هر i مقدار یکسان $\sigma_T \neq 0$ را دارد. این مقدار σ_T را ثابت نمایش T می‌نامیم. برای آن چتر لوواس که نمایش دهنده C_θ است، شرط $\langle v^{(i)}, u \rangle = \sigma_T$ مسلماً برقرار است زیرا $u := \vec{OS}$.

(الف) یک توزیع احتمال $x = (x_1, \dots, x_m)$ بر V در نظر بگیرید و قرار دهید

$$\mu(x) := |x_1 v^{(1)} + \dots + x_m v^{(m)}|^2$$

و

$$\mu_T(G) = \inf_{\mu} \mu(x)$$

فرض می‌کنیم U مجموعه مستقلی با بزرگترین اندازه در G باشد که $|U| = \alpha$ ، و $x_U = (x_1, \dots, x_m)$ را به این صورت تعریف می‌کنیم: $x_i = \frac{1}{\alpha}$ اگر $v_i \in U$ و $x_i = 0$ در غیر این صورت. چون همه بردارهای $v^{(i)}$ دارای طول واحدند و به ازای هر دو رأس غیر مجاور داریم $\langle v^{(i)}, v^{(j)} \rangle = 0$ نتیجه می‌گیریم

$$\mu_T(G) \leq \mu(x_U) = \left| \sum_{i=1}^m x_i v^{(i)} \right|^2 = \sum_{i=1}^m x_i^2 = \alpha \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}$$

پس داریم $\mu_T(G) \leq \alpha^{-1}$ و بنابراین

$$\alpha(G) \leq \frac{1}{\mu_T(G)}$$

(ب) حال $\mu_T(G)$ را محاسبه می‌کنیم. در این کار به نابرابری کوشی-شوارتس نیاز

داریم که این است: به ازای بردارهای $a, b \in \mathbb{R}^s$

$$\langle a, b \rangle^2 \leq |a|^2 |b|^2$$

اگر این نابرابری را بر $a = x_1 v^{(1)} + \dots + x_m v^{(m)}$ و $b = u$ اعمال کنیم، به دست می‌آوریم

$$\langle x_1 v^{(1)} + \dots + x_m v^{(m)}, u \rangle^2 \leq \mu(x) |u|^2 \quad (5)$$

بنابه این فرض که به ازای هر i ، $\langle v^{(i)}, u \rangle = \sigma_T$ ، برای هر توزیع x داریم

$$\langle x_1 v^{(1)} + \dots + x_m v^{(m)}, u \rangle = (x_1 + \dots + x_m) \sigma_T = \sigma_T$$

پس، به خصوص این رابطه باید برای توزیع یکنواخت $(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m})$ برقرار باشد که در نتیجه $|u|^2 = \sigma_T$. بنابراین (5) به صورت

$$\mu_T(G) \geq \sigma_T \quad \text{یا} \quad \sigma_T^2 \leq \mu(x) \sigma_T$$

در می‌آید.

از سوی دیگر، به ازای $x = (\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m})$ به دست می‌آوریم

$$\mu_T(G) \leq \mu(x) = \left| \frac{1}{m} (v^{(1)} + \dots + v^{(m)}) \right|^2 |u|^2 = \sigma_T$$

و بنابراین ثابت کرده‌ایم

$$\mu_T(G) = \sigma_T \quad (6)$$

خلاصه اینکه، نابرابری

$$\alpha(G) \leq \frac{1}{\sigma_T} \quad (7)$$

را به ازای هر نمایش یکامتعاد T با σ_T ثابت، اثبات کرده‌ایم.

(پ) برای تعمیم این نابرابری به $\Theta(G)$ مانند قبل عمل می‌کنیم. دوباره حاصلضرب دوگراف، $G \times H$ ، را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم G و H به ترتیب نمایشهای یکامتعاد R و S ، به ترتیب، در \mathbb{R}^r و \mathbb{R}^s با ثابتهای σ_R و σ_S باشند. بگیریم $v = (v_1, \dots, v_r)$ برداری در R و $w = (w_1, \dots, w_s)$ برداری در S باشد. به رأسی در $G \times H$ که متناظر با جفت (v, w) است، بردار

$$vw^T := (v_1 w_1, \dots, v_1 w_s, v_2 w_1, \dots, v_2 w_s, \dots, v_r w_1, \dots, v_r w_s) \in \mathbb{R}^{rs}$$

را نسبت می‌دهیم. فوراً می‌توان دید که $R \times S := \{vw^T : v \in R, w \in S\}$ نمایشی یکامتعامد از $G \times H$ با ثابت $\sigma_{R \times S}$ است. پس بنا به (۶) به دست می‌آوریم.

$$\mu_{R \times S}(G \times H) = \mu_R(G)\mu_S(H)$$

این رابطه به ازای $G^n = G \times \dots \times G$ و نمایش T با ثابت σ_T به این معنی است که

$$\mu_{T^n}(G^n) = \mu_T(G)^n = \sigma_T^n$$

و بنا به (۷) به دست می‌آوریم

$$\alpha(G^n) \leq \sigma_T^{-n}, \quad \sqrt[n]{\alpha(G^n)} \leq \alpha_T^{-1}$$

به این ترتیب، با کنار هم گذاشتن همهٔ این مطالب، استدلال لوواس را کامل کرده‌ایم:

قضیه. هرگاه $T = \{v^{(1)}, \dots, v^{(m)}\}$ نمایشی یکامتعامد از G با ثابت σ_T باشد، آنگاه

$$\Theta(G) \leq \frac{1}{\sigma_T} \quad (\Lambda)$$

با نظری به چتر لوواس داریم $u = (0, 0, h = \frac{1}{\sqrt{8}})^T$ و بنابراین $\sigma = \langle v^{(i)}, u \rangle = h^2 = \frac{1}{\sqrt{8}}$ که به دست می‌آید $\Theta(C_8) \leq \sqrt{8}$. پس مسألهٔ شانن حل شده است.

بحث را اندکی ادامه می‌دهیم. با توجه به (Λ) می‌بینیم که هر قدر σ_T برای یک نمایش G بزرگتر باشد، کران بهتری برای $\Theta(G)$ به دست می‌آوریم. در اینجا روشی ذکر می‌کنیم که نمایشی یکامتعامد برای هر گراف G به دست می‌دهد. به $G = (V, E)$ ماتریس مجاورت $A = (a_{ij})$ را منسوب می‌کنیم که به صورت زیر تعریف می‌شود: فرض می‌کنیم $V = \{v_1, \dots, v_m\}$ ، آنگاه قرار می‌دهیم

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{اگر } v_i v_j \in E \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

A یک ماتریس متقارن حقیقی است که عناصر قطر اصلیش ۰ اند.

اکنون به دو مطلب از جبر خطی نیاز داریم. نخست، A به عنوان ماتریس متقارن دارای m ویژه مقدار $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$ است (که بعضی از آنها می‌توانند



«چترهایی با پنج سیم‌پره»

برابر باشند)، و مجموع ویژه مقدارها برابر مجموع درایه‌های قطری A ، یعنی \circ ، است. پس کوچکترین ویژه مقدار باید منفی باشد (بجز در حالت پیش پا افتاده‌ای که G یالی نداشته باشد). فرض کنید $p = |\lambda_m| = -\lambda_m$ قدرمطلق کوچکترین ویژه مقدار باشد، و ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M := I + \frac{1}{p}A$$

ماتریس مجاورت برای ۵-دور C_5

را در نظر بگیرید که در آن I نشان‌دهنده ماتریس همانی $(m \times m)$ است. این M دارای ویژه مقدارهای

$$1 + \frac{\lambda_1}{p} \geq 1 + \frac{\lambda_2}{p} \geq \dots \geq 1 + \frac{\lambda_m}{p} = \circ$$

است. حال مطلب دوم را نقل می‌کنیم (قضیه محور اصلی در جبر خطی): اگر $M = (m_{ij})$ یک ماتریس متقارن حقیقی باشد که همه ویژه مقدارها نامنفی باشد، آنگاه بردارهای

$$s = (M \text{ رتبه } ^{(1)}), \dots, v^{(m)} \in \mathbb{R}^s$$

وجود دارند به نحوی که

$$m_{ij} = \langle v^{(i)}, v^{(j)} \rangle \quad (1 \leq i, j \leq m)$$

در حالت خاص $M = I + \frac{1}{p}A$ داریم

$$\langle v^{(i)}, v^{(i)} \rangle = m_{ii} = 1 \quad \text{به‌ازای هر } i$$

و

$$\langle v^{(i)}, v^{(j)} \rangle = \frac{1}{p}a_{ij} \quad \text{به‌ازای هر } i \neq j$$

چون هرگاه $v_i v_j \notin E$ ، $a_{ij} = \circ$ ، می‌بینیم که بردارهای $v^{(1)}, \dots, v^{(m)}$ واقعاً نمایشی یکامتعاد از G تشکیل می‌دهند.

و بالاخره، این شیوه ساخت را در مورد m -دورهای C_m به‌ازای m های فرد ناکمتر از ۵ به‌کار می‌بریم. در اینجا به‌راحتی $p = |\lambda_{\min}| = 2 \cos \frac{\pi}{m}$ را محاسبه می‌کنیم (تابلو صفحه ۲۵۳ را ببینید). هر سطر از ماتریس مجاورت شامل دو تا ۱ است و در نتیجه مجموع هر سطر از ماتریس M برابر $1 + \frac{1}{p}$ است. این برای نمایش $\{v^{(1)}, \dots, v^{(m)}\}$ بدین معنی است که

$$\langle v^{(i)}, v^{(1)} + \dots + v^{(m)} \rangle = 1 + \frac{2}{p} = 1 + \frac{1}{\cos \frac{\pi}{m}}$$

و از اینجا، به‌ازای هر i

$$\langle v^{(i)}, u \rangle = \frac{1}{m} (1 + (\cos \frac{\pi}{m})^{-1}) = \sigma$$

پس می‌توانیم حکم اصلی بحث (۸) را به‌کار ببریم و نتیجه بگیریم

$$\Theta(C_m) \leq \frac{m}{1 + (\cos \frac{\pi}{m})^{-1}} \quad (\text{به‌ازای } m \geq 5 \text{ فرد}) \quad (9)$$

توجه کنید که چون $\cos \frac{\pi}{m} < 1$ ، کران (۹) بهتر از کران $\Theta(C_m) \leq \frac{m}{4}$ است که قبلاً یافتیم. به‌علاوه، $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\tau}{4}$ که $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ نسبت طلایی است. در اینجا برای $m = 5$ باز رابطه

$$\Theta(C_5) \leq \frac{5}{1 + \frac{4}{\sqrt{5}+1}} = \frac{5(\sqrt{5}+1)}{5 + \sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

را به‌دست می‌آوریم. البته نمایش یک‌معامدی که با این ساختمان مشخص می‌شود دقیقاً همان «چتر لوواس» است.

و درباره C_7 ، C_9 ، و سایر دوره‌های فرد چه می‌توان گفت؟ با در نظر گرفتن $\alpha(C_m^2)$ و سایر توانهای کوچک مسلماً می‌توان کران پایین $\Theta(C_m) \leq \frac{m-1}{4}$ را افزایش داد اما به‌ازای هیچ $m \geq 7$ فرد، کرانهای پایین معروف با کران بالای مشخص شده در (۸) توافق ندارند. پس بیست سال پس از اثبات شگفت‌انگیز لوواس از $\Theta(C_5) = \sqrt{5}$ این مسأله‌ها حل نشده مانده‌اند و بسیار دشوار قلمداد می‌شوند — ولی به‌هرحال، قبل از آن هم با این وضعیت روبه‌رو بودیم.

ویژه مقدارهای C_m

به A ، ماتریس مجاورت دور C_m ، توجه کنید. برای یافتن ویژه مقدارها (و ویژه بردارها)، ریشه‌های m ام یک را در نظر می‌گیریم. اینها به‌ازای $\zeta = e^{\frac{2k\pi i}{m}}$ به‌صورت $1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{m-1}$ هستند — تابلو صفحه ۳۴ را ببینید. فرض کنید $\lambda = \zeta^k$ یکی از این ریشه‌ها باشد. ادعا می‌کنیم که $(1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{m-1})^T$ ویژه برداری از A متناظر با ویژه مقدار $\lambda + \lambda^{-1}$ است. در واقع با تشکیل ماتریس A داریم

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \lambda^{m-1} \\ \lambda^2 + 1 \\ \lambda^3 + \lambda \\ \vdots \\ 1 + \lambda^{m-2} \end{pmatrix} = (\lambda + \lambda^{-1}) \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{m-1} \end{pmatrix}$$

چون بردارهای $(1, \lambda, \dots, \lambda^{m-1})$ مستقل‌اند (آنها یک ماتریس واندرموند تشکیل می‌دهند) نتیجه می‌گیریم که به‌ازای m های فرد

$$\begin{aligned} \zeta^k + \zeta^{-k} &= [(\cos(2k\pi/m) + i \sin(2k\pi/m))] \\ &\quad + [\cos(2k\pi/m) - i \sin(2k\pi/m)] \\ &= 2 \cos(2k\pi/m) \quad (0 \leq k \leq \frac{m-1}{2}) \end{aligned}$$

همگی ویژه مقدارهای A هستند. اما کسینوس تابعی نزولی است و بنابراین

$$2 \cos\left(\frac{(m-1)\pi}{m}\right) = -2 \cos\frac{\pi}{m}$$

کوچکترین ویژه مقدار A است.

مراجع

- [1] V. CHVÁTAL: *Linear Programming*, Freeman, New York 1983.
- [2] W. HAEMERS: *Eigenvalue methods*, in: "Packing and Covering in Combinatorics" (A. Schrijver, ed.), Math. Centre Tracts 106 (1979), 15-38.

-
- [3] L. LOVÁSZ: *On the Shannon capacity of a graph*, IEEE Trans. Information Theory **25** (1979), 1-7.
- [4] C. E. SHANNON: *The zero-error capacity of a noisy channel*, IRE Trans. Information Theory **3** (1956), 3-15.



«لبخند سیاستمدار»

معلوم نیست چه کسی برای اولین بار مسألهٔ زیر را مطرح کرده یا چه کسی آن را برحسب گروههای انسانی بیان کرده است.

فرض کنید در گروهی مرکب از دست‌کم سه نفر، هر دو نفر دقیقاً یک دوست مشترک دارند. در این صورت همواره یک نفر («سیاستمدار») هست که با همه دوست است.

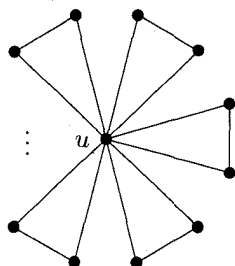
این مسأله را در زبان اهل ریاضیات، قضیهٔ دوستی می‌نامند.

پیش از پرداختن به اثبات، مسأله را به زبان نظریهٔ گراف بیان می‌کنیم. افراد گروه را مجموعهٔ رئوس V با $|V| = n \geq 3$ در نظر می‌گیریم و دو رأس را با یالی به هم وصل می‌کنیم اگر افراد متناظر با آن رأسها با هم دوست باشند. ضمناً فرض می‌کنیم دوستی همیشه دوطرفه است، یعنی اگر u دوست v باشد، v نیز دوست u است، و به‌علاوه هیچ کس دوست خودش نیست. پس قضیه به شکل زیر در می‌آید:

قضیه. فرض کنید G گرافی با $n \geq 3$ رأس باشد که در آن هر دو رأس دقیقاً یک رأس همسایهٔ مشترک داشته باشند. در این صورت رأسی وجود دارد که مجاور به همهٔ رأسهاست.

خاطر نشان می‌کنیم که گرافهایی با این ویژگی، مانند شکل حاشیه، وجود دارند که در آنها u سیاستمدار است: در واقع نشان خواهیم داد که این «گرافهای به شکل آسیاب بادی» تنها گرافهایی هستند که این ویژگی را دارند.

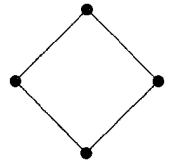
روشن است که در صورت وجود یک سیاستمدار، گرافهای مورد نظر فقط به شکل آسیاب بادی می‌توانند باشند. اثباتهای متعددی برای قضیهٔ دوستی وجود دارد، ولی اولین اثبات، که اردوش، آلفرد رنی و ورا شوش^۱ آن را عرضه کردند هنوز هم استادانه‌تر از همه است.



گرافی به شکل آسیاب بادی

■ اثبات. فرض کنید حکم غلط باشد، و G مثال ناقضی برای آن باشد، یعنی هیچ رأسی از G مجاور به همهٔ رأسهای دیگر نباشد. برای به‌دست آوردن تناقض در دو مرحله

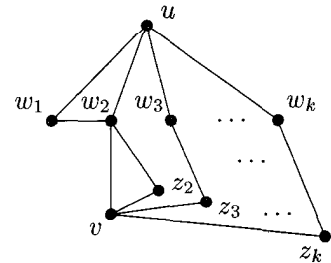
1. Vera Sós



اقدام می‌کنیم. اولین قسمت به ترکیبیات و قسمت دوم به جبر خطی تعلق دارد.
 (۱) ادعا می‌کنیم که G گرافی منتظم است یعنی به ازای هر $u, v \in V$
 $d(u) = d(v)$. نخست توجه کنید که بنابه شرط قضیه، هیچ دوری به طول ۴ مانند
 شکل در G وجود ندارد. این را شرط C_4 می‌نامیم.

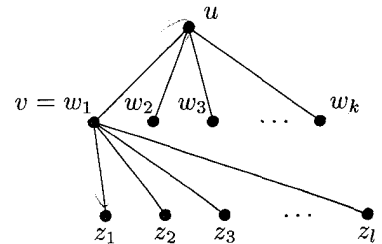
ابتدا اثبات می‌کنیم که هر دور رأس غیرمجاور u و v درجهٔ برابر دارند: $d(u) = d(v)$.
 فرض کنید $d(u) = k$ که در آن w_1, \dots, w_k رأسهای مجاور به u هستند.
 دقیقاً یکی از w_i ها، مثلاً w_2 ، مجاور به v است، و w_2 مجاور به دقیقاً یکی
 از w_i های دیگر مثلاً w_1 است، پس با وضعیتی روبه‌رو هستیم که در شکل جاشیه
 می‌بینید. رأس v با رأس w_1 همسایهٔ مشترک w_2 را دارد و با w_i ($i \geq 2$) همسایهٔ
 مشترک z_i ($i \geq 2$) را. بنابه شرط C_4 ، همهٔ این z_i ها باید متمایز باشند. نتیجه
 می‌گیریم $d(v) \geq k = d(u)$ ، و لذا بنابه تقارن، $d(u) = d(v)$.

باقی می‌ماند که نشان دهیم $d(u) = d(v)$ برای رأسهای مجاور u و v نیز
 برقرار است. فرض کنید $v = w_1, w_2, \dots, w_k$ رأسهای مجاور به u هستند.
 اگر هر یک از رأسهای z غیرمجاور به u (دست‌کم یکی از این رأسها بنابه فرض
 وجود دارد) غیرمجاور به v نیز باشد، آنگاه بنابه آنچه هم‌اکنون ثابت کردیم نتیجه
 می‌گیریم $d(u) = d(z) = d(v)$. پس می‌توانیم فرض کنیم که v مجاور به هر
 $z \notin \{w_2, \dots, w_k\}$ است. پس شکل دوم جاشیه همهٔ $1 + k + l$ رأس گراف را
 نشان می‌دهد.



بنابه فرض $1 + k + l < n - 1$ ، باید $d(v) < n - 1$ ، مثلاً w_2 ، وجود داشته باشد که مجاور به
 v نباشد. ولی z_1 و w_2 باید همسایهٔ مشترکی داشته باشند. این همسایه نمی‌تواند u
 باشد زیرا u و z_1 مجاور نیستند، و نیز نمی‌تواند $v = w_1$ باشد زیرا v و w_2 مجاور
 نیستند. همچنین بنابه شرط C_4 نمی‌تواند هیچ یک از w_j های دیگر باشد. ولی یکی
 از z_j ها ($j \geq 2$) هم بنا به شرط C_4 نیست، و به این ترتیب همهٔ امکانات مختلف
 برای همسایهٔ مشترک z_1 و w_2 رد می‌شود.

در نتیجه، به ازای هر u و به ازای k ای بین ۲ و $n - 2$ ، $d(u) = k$. با نگاهی
 دوباره به شکل برای بررسی حالت رأسهای مجاور، پی می‌بریم که $n = k^2 - k + 1$.
 در واقع، هر یک از w_i ها دقیقاً $k - 2$ همسایه در بیرون $\{w_1, \dots, w_k\}$ دارد، و
 این رأسها همه (بنابه شرط C_4) متمایزند. اینها همهٔ رأسهای باقیمانده هستند، زیرا هر
 رأس z در بیرون $\{u, w_1, \dots, w_k\}$ با u یک همسایهٔ مشترک دارد. پس



$$n = 1 + k + k(k - 2) = k^2 - k + 1 \quad (۱)$$

(۲) بقیه اثبات، کاربرد زیبایی از بعضی قضیه‌های متعارف جبر خطی است. نخست دقت کنید که k باید بزرگتر از ۲ باشد زیرا به ازای $k = ۲$ ، بنابه (۱) فقط $G = K_2$ ممکن است، که گرافی به شکل آسیاب بادی است. ماتریس مجاورت $A = (a_{ij})$ را که در فصل قبل تعریف شد در نظر بگیرید. بنابه قسمت (۱)، هر سطر دقیقاً k تا ۱ دارد، و بنابه شرط قضیه، هر دو سطر دقیقاً یک ۱ در یک ستون دارند. به علاوه، قطر اصلی مرکب از ۰ هاست. پس داریم

$$A^2 = \begin{pmatrix} k & 1 & \dots & 1 \\ 1 & k & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & k \end{pmatrix} = (k-1)I + J$$

که در آن I ماتریس همانی است، و J ماتریس همه ۱ هاست. فوراً می‌توان دید که J دارای ویژه مقدارهای n (با چندگانگی ۱) و ۰ (با چندگانگی $n-1$) است. نتیجه گرفته می‌شود که A^2 دارای ویژه مقدارهای k^2 (با چندگانگی ۱) و $k-1+n$ (با چندگانگی ۱) و $k-1$ (با چندگانگی $n-1$) است.

چون A متقارن است و بنابراین قطری شدنی است، نتیجه می‌گیریم که A دارای ویژه مقدارهای k (با چندگانگی ۱) و $\pm\sqrt{k-1}$ است. فرض کنید r تا از ویژه مقدارها برابر $\sqrt{k-1}$ و s تا از آنها برابر $-\sqrt{k-1}$ هستند که $r+s = n-1$ حال تقریباً به مقصد رسیده‌ایم. چون مجموع ویژه مقدارهای A برابر است با اثر (که ۰ است)، داریم

$$k + r\sqrt{k-1} - s\sqrt{k-1} = 0$$

و به خصوص، $r \neq s$ و

$$\sqrt{k-1} = \frac{k}{s-r}$$

نتیجه می‌شود که $\sqrt{k-1}$ عددی صحیح چون h است (اگر \sqrt{m} گویا باشد، عددی صحیح است!)، و به دست می‌آوریم

$$h(s-r) = k = h^2 + 1$$

چون h ، $h^2 + 1$ و h^2 را می‌شمارد، در می‌یابیم که h باید برابر ۱ باشد، و بنابراین $k = ۲$ ، که قبلاً آن را کنار گذاشته‌ایم. پس به تناقض رسیده‌ایم و اثبات تمام است. \square

ولی داستان کاملاً به پایان نرسیده است. بیایید قضیه را به صورت زیر بیان کنیم: فرض کنید G گرافی است با این ویژگی که بین هر دو رأس آن دقیقاً یک مسیر به طول ۲ وجود دارد. روشن است که این بیان دیگری از شرط دوستی است. پس قضیه ما حاکی است که تنها گرافهای از این نوع، گرافهایی به شکل آسیاب بادی هستند ولی اگر مسیرهایی به طول بیش از ۲ را در نظر بگیریم چه می شود؟ طبق حدسی از آنتون کوتزیگ^۱، وضعیت مشابه ناممکن است.

حدس کوتزیگ. فرض کنید $l > 2$. در این صورت گرافی با این ویژگی وجود ندارد که بین هر دو رأس آن دقیقاً یک مسیر به طول l موجود باشد. حدس کوتزیگ به ازای برخی l ها محقق شده است، ولی در حالت کلی هنوز حل نشده است.

مراجع

- [1] P. ERDŐS, A. RÉNYI & V. SÓS: *On a problem of graph theory*, *Studia Sci. Math.* **1** (1966), 215-235.
- [2] A. KOTZIG: *Regularly k -path connected graphs*, *Congressus Numerantium* **40** (1983), 137-141.

احتمال شمارش را (گاهی) آسان می سازد

فصل ۳۰

همان طور که این کتاب را با اولین مقاله های پال اردوش در نظریه اعداد آغاز کردیم، آن را با بحث درباره موضوعی به پایان می آوریم که شاید پر دوام ترین میراث اردوش باشد، یعنی معرفی روش احتمالاتی با همکاری آلفرد رنی. این روش به ساده ترین صورت چنین بیان می شود:

اگر در مجموعه مفروضی از اشیا احتمال اینکه شیئی یک ویژگی معین P را نداشته باشد کوچکتر از $\frac{1}{2}$ باشد، باید شیئی با این ویژگی وجود داشته باشد.

پس ما یک قضیه وجودی داریم. یافتن این شیء ممکن است بسیار دشوار باشد (و اغلب هم هست) ولی می دانیم که وجود دارد. در اینجا سه مثال (که به ترتیب پیچیده تر می شوند) از روش احتمالاتی اردوش می آوریم، و در پایان کاربرد بسیار نو و زیبایی را شرح می دهیم.

برای آماده سازی صحنه، خانواده ای چون \mathcal{F} مرکب از زیرمجموعه های A_i از یک مجموعه مبنایی متناهی X را که اندازه همگی $d \geq 2$ است در نظر می گیریم. گوئیم \mathcal{F} ، ۲-رنگ پذیر است اگر یک رنگ آمیزی X با دو رنگ وجود داشته باشد به نحوی که در هر مجموعه A_i هر دو رنگ ظاهر شوند. روشن است که هر خانواده ای به این طریق قابل رنگ آمیزی نیست. به عنوان مثال، همه زیرمجموعه های با اندازه d از مجموعه $(1 - 2d)$ عضوی X را در نظر می گیریم. در این صورت، صرف نظر از اینکه چگونه X را با ۲ رنگ، رنگ آمیزی می کنیم، باید d عضو وجود داشته باشند که رنگشان همانند باشد. از سوی دیگر به همین اندازه روشن است که هر زیرخانواده از خانواده ای ۲-رنگ پذیر از مجموعه های d عضوی خودش ۲-رنگ پذیر است. پس ما به کوچکترین عدد $m = m(d)$ توجه داریم که به ازای آن خانواده ای با m مجموعه وجود دارد که ۲-رنگ پذیر نیست. به بیان دیگر، $m(d)$ کوچکترین عددی است که تضمین می کند هر خانواده که کمتر از $m(d)$ مجموعه عضو آن باشند، ۲-رنگ پذیر است.

قضیه ۱. هر خانواده مرکب از حداکثر 2^{d-1} مجموعه d عضوی، ۲-رنگ پذیر است، یعنی $m(d) > 2^{d-1}$.

■ اثبات. فرض کنید \mathcal{F} خانواده ای از مجموعه های d عضوی با حداکثر 2^{d-1}

مجموعه باشد. X را با دو رنگ به طور تصادفی رنگ می‌کنیم چنانکه همهٔ رنگ‌آمیزیها هم‌احتمال باشند. به‌ازای هر مجموعهٔ $A \in \mathcal{F}$ ، فرض کنید E_A این پیشامد باشد که همهٔ عضوهای A رنگ مشابه داشته باشند. چون دقیقاً دوتا از این‌گونه رنگ‌آمیزیها وجود دارد، داریم

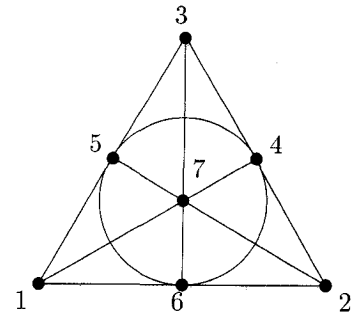
$$\text{Prob}(E_A) = \left(\frac{1}{2}\right)^{d-1}$$

و بنابراین با $m = |\mathcal{F}|$ (توجه کنید که پیشامدهای E_A مجزا نیستند):

$$\text{Prob}\left(\bigcup_{A \in \mathcal{F}} E_A\right) < \sum_{A \in \mathcal{F}} \text{Prob}(E_A) = m \left(\frac{1}{2}\right)^{d-1} \leq 1$$

نتیجه می‌گیریم رنگ‌آمیزی از X با دو رنگ بدون مجموعه‌ای تکرنگ وجود دارد و این درست شرط ۲-رنگ‌پذیری ماست. \square

همچنین اردوش، باز با استفاده از روش احتمالاتی و این بار با به‌کارگیری مجموعه‌های تصادفی و یک رنگ‌آمیزی ثابت، کران بالایی برای $m(d)$ یافت که تقریباً برابر $d^2 2^d$ است. اما در مورد مقادیر دقیق $m(d)$ فقط دو مقدار اول $m(2) = 3$ و $m(3) = 7$ معلومند. البته $m(2) = 3$ به‌وسیلهٔ گراف K_2 تحقق می‌یابد، حال آنکه از آرایش فانو به‌دست می‌آید $m(3) \leq 7$. در اینجا \mathcal{F} مرکب از هفت مجموعهٔ ۳ عضوی (از جمله، مجموعهٔ دایره‌ای $\{4, 5, 6\}$) است که در شکل مقابل دیده می‌شود. ممکن است برای خواننده جالب باشد که نشان دهد \mathcal{F} نیاز به ۳ رنگ دارد. اثبات اینکه همهٔ خانواده‌های مرکب از ۶ مجموعهٔ سه‌عضوی، ۲-رنگ‌پذیر هستند و بنابراین $m(3) = 7$ ، به‌دقت بیشتری نیاز دارد.

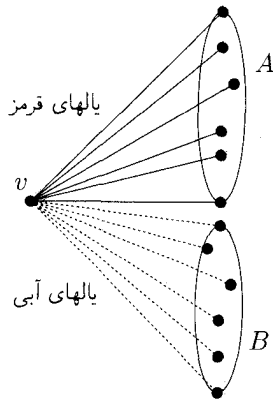


آخرین مثال ما موضوعی مهم و معروف در این مبحث — اعداد رمزی — است. گراف کامل K_N با N رأس را در نظر بگیرید. گوئیم K_N دارای ویژگی (m, n) است اگر، صرف‌نظر از اینکه یالهای K_N را چگونه با رنگهای آبی و قرمز رنگ کنیم، همواره زیرگراف کاملی با m رأس که همهٔ یالهایش رنگ قرمز خورده باشند یا زیرگراف کاملی با n رأس که همهٔ یالهایش آبی رنگ باشند، وجود داشته باشد. روشن است که اگر K_N ویژگی (m, n) را داشته باشد، آنگاه هر K_s با $s \geq N$ نیز این ویژگی را خواهد داشت. پس همان‌طور که در مثال اول عمل کردیم، در جستجوی کوچکترین عدد N ای (در صورت وجود) که دارای این ویژگی باشد بر می‌آییم و این عدد، عدد رمزی $R(m, n)$ است.

در آغاز توجه کنید که مسلماً داریم $R(m, 2) = m$ زیرا یا همهٔ یالهای K_m قرمزند یا یالی آبی‌رنگ وجود دارد که در نتیجه K_2 آبی است. با استدلالی بر اساس تقارن داریم $R(2, n) = n$. اکنون تصور کنید $R(m-1, n)$ و $R(m, n-1)$ وجود دارند. سپس فرض کنید $R(m, n)$ وجود دارد و

$$R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1) \quad (۱)$$

حال فرض کنید $N = R(m-1, n) + R(m, n-1)$ ، و یک رنگ‌آمیزی دلخواه قرمز-آبی K_N را در نظر بگیرید. به‌ازای هر رأس v ، تصور کنید A مجموعهٔ رأسهایی باشد که با یال قرمز به v وصل شده‌اند و B مجموعهٔ رأسهای وصل شده با یال آبی باشد.



چون $|A| + |B| = N - 1$ ، در می‌یابیم که یا $|A| \geq R(m-1, n)$ یا $|B| \geq R(m, n-1)$. فرض کنید $|A| \geq R(m-1, n)$ ، حالت دیگر مشابه همین حالت است. در این صورت، بنا به تعریف $R(m-1, n)$ زیرمجموعه‌ای از A چون A_R با اندازهٔ $m-1$ وجود دارد که همهٔ یالهای قرمز رنگ‌اند و همراه با v یک K_m قرمز به‌دست می‌دهد، و یا زیرمجموعه‌ای چون A_B با اندازهٔ n که همهٔ یالهای آبی‌رنگ هستند. نتیجه می‌گیریم که K_N در ویژگی (m, n) صدق می‌کند، و ادعای (۱) ثابت می‌شود.

از ترکیب (۱) با مقادیر آغازی $R(m, 2) = m$ و $R(2, n) = n$ ، با توجه رابطهٔ بازگشتی آشنای ضرایب دوجمله‌ای، به‌دست می‌آوریم

$$R(m, n) \leq \binom{m+n-2}{m-1}$$

و به‌خصوص

$$R(k, k) \leq \binom{2k-2}{k-1} = \binom{2k-3}{k-1} + \binom{2k-3}{k-2} \leq 2^{2k-3} \quad (۲)$$

اکنون چیزی که واقعاً مورد علاقهٔ ماست، کرانی پایین برای $R(k, k)$ است. در این مورد باید ثابت کنیم که به‌ازای هر $N < R(k, k)$ ، رنگ‌آمیزی از یالها وجود دارد به‌نحوی که هیچ K_k قرمز یا آبی از آن نتیجه نشود. و در اینجا است که روش احتمالاتی وارد کار می‌شود.

قضیهٔ ۲. به ازای هر $k \geq 2$ ، کران پایین زیر برای عددهای رمزی برقرار است:

$$R(k, k) \geq 2^{k/2}$$

■ اثبات. داریم $R(2, 2) = 2$. از (۲) می‌دانیم $R(3, 3) \leq 6$ ، و پنج ضلعی رنگ شده طبق شکل نشان می‌دهد که $R(3, 3) = 6$.

حال فرض می‌کنیم $k \geq 4$ ، و $N < 2^{k/2}$ ؛ همهٔ رنگ‌آمیزیهای قرمز-آبی را در نظر می‌گیریم که در آنها هر یال را مستقلاً با احتمال $\frac{1}{2}$ رنگ آبی یا قرمز می‌زنیم. پس همهٔ رنگ‌آمیزیها احتمال یکسان $2^{-\binom{N}{k}}$ را دارند. فرض کنیم A مجموعه‌ای از رأسها با اندازهٔ k باشد. در این صورت احتمال پیشامد A_R یعنی این پیشامد که به همهٔ یالها در A رنگ قرمز زده می‌شود، برابر $2^{-\binom{k}{2}}$ است. پس نتیجه می‌گیریم که احتمال p_R برای اینکه همهٔ یالها در مجموعه‌ای k عضوی قرمز رنگ شوند محدود است به

$$p_R = \text{Prob} \left(\bigcup_{|A|=k} A_R \right) \leq \sum_{|A|=k} \text{Prob}(A_R) = \binom{N}{k} 2^{-\binom{k}{2}}$$

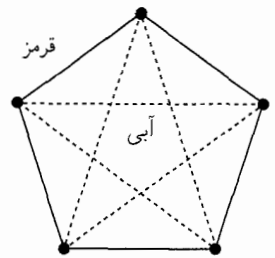
حال به ازای $N < 2^{k/2}$ و $k \geq 4$ ، با استفاده از $\binom{N}{k} \leq \frac{N^k}{k!}$ برای $k \geq 2$ (صفحهٔ ۱۶ را ببینید)، داریم

$$\binom{N}{k} 2^{-\binom{k}{2}} \leq \frac{N^k}{k!} 2^{-\binom{k}{2}} < 2^{\frac{k}{2} - \binom{k}{2} - k + 1} = 2^{-k/2 + 1} \leq \frac{1}{2}$$

پس $p_R < \frac{1}{2}$ ، و بنابه تقارن، که نابرابری اخیر مربوط است به احتمال اینکه به همهٔ یالهای بین k رأس رنگ آبی زده شود. نتیجه می‌گیریم که به ازای $N < 2^{k/2}$ ، $p_R + p_B < 1$ ، پس باید رنگ‌آمیزی وجود داشته باشد بدون K_k قرمز یا آبی، و این بدان معنی است که K_N ویژگی (k, k) را ندارد. □

البته اختلاف زیادی بین کران پایین و بالای $R(k, k)$ وجود دارد. با این حال، هرچند این اثبات «کتابی» بسیار ساده است، در طی بیش از ۵۰ سال پس از ارائه قضیهٔ اردوش، هیچ کران بهتری در نما برای k در حالت کلی پیدا نشده است. در واقع هیچ کس نتوانسته است کرانی پایین به شکل $R(k, k) > 2^{(\frac{1}{2} + \epsilon)k}$ یا کرانی بالا به شکل $R(k, k) < 2^{(2 - \epsilon)k}$ را به ازای ϵ مثبت مشخصی ثابت کند.

سومین قضیهٔ ما نمونهٔ زیبایی دیگری است از کاربرد روش احتمالاتی. گراف G ای با n رأس و عدد فامی آن $\chi(G)$ را در نظر بگیرید. اگر $\chi(G)$ بزرگ باشد یعنی اگر نیاز



به رنگهای زیادی داشته باشیم، ممکن است انتظار داشته باشیم که G شامل زیرگراف کامل بزرگی باشد. ولی در واقعیت چنین نیست. قبلاً در دههٔ چهل میلادی، بلانش دکارت^۱ گرافهایی با عدد فامی به دلخواه بزرگ و بدون مثلث ساخت یعنی گرافهایی که در آنها طول هر دور دست‌کم ۴ است، و بسیاری دیگر نیز چنین کردند (تابلو را ببینید).

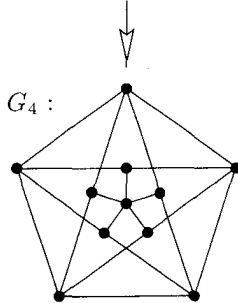
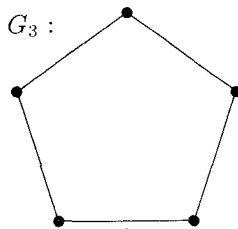
گرافهای عاری از مثلث با عدد فامی بزرگ

دنباله‌ای از گرافهای عاری از مثلث G_2, G_3, \dots با

$$\chi(G_n) = n$$

را در نظر می‌گیریم. از $G_2 = C_5$ یعنی ۵-دور شروع می‌کنیم. بنابراین $\chi(G_2) = 3$. فرض کنید قبلاً G_n را با مجموعهٔ رأسهای V ساخته‌ایم. گراف جدید G_{n+1} دارای مجموعهٔ رأسهای $V \cup V' \cup \{z\}$ است که در آن رأسهای $v' \in V'$ تناظر دو سویی با $v \in V$ دارند، و z تک رأسی دیگر است. یالهای G_{n+1} به ۳ رده تقسیم می‌شوند: نخست همهٔ یالهای G_n را می‌گیریم؛ دوم، هر رأس $v' \in V'$ دقیقاً به رأسهای مجاور v در G_n وصل می‌شود؛ سوم، z به هر $v' \in V'$ وصل می‌شود. پس، از $G_2 = C_5$ گراف موسوم به میسیلسکی^۲ را به‌عنوان G_2 به‌دست می‌آوریم.

روشن است که G_{n+1} باز عاری از مثلث است. برای اثبات $\chi(G_{n+1}) \geq n+1$ از استقرا بر n استفاده می‌کنیم. n -رنگ آمیزی دلخواه G_n را در نظر می‌گیریم و به یک ردهٔ رنگی c توجه می‌کنیم. باید رأسی چون $v \in C$ وجود داشته باشد که دست‌کم مجاور به یک رأس از هر ردهٔ رنگی دیگر است؛ در غیر این صورت می‌توانستیم رأسهای C را در $n-1$ ردهٔ رنگی دیگر توزیع کنیم که در نتیجه $\chi(G_n) \leq n-1$ ولی اکنون روشن است که v' (رأسی در V' که متناظر با v است) باید در این n -رنگ آمیزی با v هم‌رنگ باشد. بنابراین همهٔ n رنگ در V' ظاهر می‌شوند، و ما به‌رنگ جدیدی برای z نیاز داریم.



ساختن گراف میسیلسکی

ولی در این مثالها دوره‌های بسیاری به طول ۴ وجود داشتند. آیا ما می‌توانیم کار بهتری بکنیم؟ آیا می‌توانیم قید کنیم که هیچ دوری با طول کوچک وجود نداشته باشد و در عین حال، عدد فامی به دلخواه بزرگ باشد؟ بله، می‌توانیم! برای دقت بخشیدن به بحث،

طول کوتاهترین دور در G را k کمرا G ، $\gamma(G)$ ، می‌نامیم. حال قضیهٔ زیر را داریم که برای اولین بار به‌وسیلهٔ پال اردوش ثابت شد:

قضیهٔ ۳. به‌ازای هر $k \geq 2$ ، گرافی چون G با عدد فامی $\chi(G) \geq k$ و کمرا $\gamma(G) > k$ وجود دارد.

استراتژی اثبات مانند اثباتهای پیشین است: یک فضای احتمال معین روی گرافها در نظر می‌گیریم و سپس نشان می‌دهیم که احتمال $\chi(G) \leq k$ کوچکتر از $\frac{1}{p}$ است، و همین‌طور احتمال $\gamma(G) \leq k$ کوچکتر از $\frac{1}{p}$ است. در نتیجه باید گرافی با ویژگیهای مطلوب وجود داشته باشد.

■ اثبات. فرض می‌کنیم $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعهٔ رأسها باشد و p عددی مشخص بین ۰ و ۱، که بعداً به دقت انتخاب می‌شود. فضای احتمال ما، $\mathcal{G}(n, p)$ ، مرکب از همهٔ گرافهایی روی V است که در آنها هر یک از یالها با احتمال p ، مستقل از دیگران، ظاهر می‌شود. به‌عبارت دیگر، با یک آزمایش برنولی سروکار داریم که در آن یالها را با احتمال p انتخاب می‌کنیم. به‌عنوان مثال، احتمال $\text{Prob}(K_n)$ برای گراف کامل چنین است: $\text{Prob}(K_n) = p^{\binom{n}{2}}$. در حالت کلی داریم $\text{Prob}(H) = p^m (1-p)^{\binom{n}{2}-m}$ اگر گراف H روی V دقیقاً m یال داشته باشد.

نخست نگاهی به‌عدد فامی $\chi(G)$ می‌افکنیم. عدد استقلال یعنی بزرگترین اندازه برای مجموعه‌های مستقل در G را با $\alpha = \alpha(G)$ نشان می‌دهیم. چون در یک رنگ‌آمیزی با $\chi = \chi(G)$ رنگ، همهٔ رده‌های رنگی مستقل‌اند (و بنابراین اندازهٔ آنها نایبتر از α است) نتیجه می‌گیریم $\chi \alpha \geq n$. بنابراین اگر α در مقایسه با n کوچک باشد، آنگاه χ باید بزرگ باشد، که مطلوب ما هم همین است.

گیریم $2 \leq r \leq n$. احتمال اینکه یک مجموعهٔ r عضوی مشخص در V مستقل باشد، $(1-p)^{\binom{r}{2}}$ است، و با همان استدلالی که برای قضیهٔ ۲ آوردیم، نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} \text{Prob}(a \geq r) &\leq \binom{n}{r} (1-p)^{\binom{r}{2}} \\ &\leq n^r (1-p)^{\binom{r}{2}} = (n(1-p)^{\frac{r-1}{2}})^r \leq (ne^{-p(r-1)/2})^r \end{aligned}$$

چون به‌ازای هر p ، $1-p \leq e^{-p}$.

حال با مفروض بودن k می مثبت مشخصی، انتخاب می‌کنیم $p = n^{-\frac{k}{k+1}}$ و می‌خواهیم نشان دهیم که به‌ازای n ‌هایی که به‌قدرکافی بزرگ باشند، داریم

$$\text{Prob}(\alpha \geq \frac{n}{2k}) < \frac{1}{2} \quad (۳)$$

در واقع چون $n^{\frac{k}{k+1}}$ سریعتر از $\log n$ رشد می‌کند، به‌ازای n به‌قدرکافی بزرگ داریم $n^{\frac{k}{k+1}} \geq 6k \log n$ و بنابراین $p \geq 6k \frac{\log n}{n}$. از اینجا به‌ازای $r = \lceil \frac{n}{2k} \rceil$ به‌دست می‌آید $pr \geq 3 \log n$ و از این رو

$$ne^{-p(r-1)/2} = ne^{-pr/2} e^{p/2} \leq ne^{-\frac{3}{2} \log n} e^{\frac{1}{2}} = n^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{e}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

که این کمیت با گرایش n به‌بینهایت، به‌صفر میل می‌کند. پس (۳) به‌ازای هر n_1 برقرار است.

اکنون پارامتر دوم، $\gamma(G)$ ، را بررسی می‌کنیم. به‌ازای k مفروض، می‌خواهیم نشان دهیم که دوره‌های خیلی زیادی با طول نایبتر از k وجود ندارند. فرض کنیم i بین ۳ و k باشد، و $A \subseteq V$ یک مجموعه i عضوی مشخص باشد. تعداد i -دوره‌های ممکن بر A به‌وضوح تعداد جایگشتهای دوری A تقسیم بر ۲ است. (چون می‌توانیم دور را در هر جهت طی کنیم)، و بنابراین برابر با $\frac{(i-1)!}{2}$ است. پس تعداد کل i -دوره‌های ممکن برابر با $\binom{n}{i} \frac{(i-1)!}{2}$ است، و هر چنین دور C ای با احتمال p^i ظاهر می‌شود. فرض کنید X متغیری تصادفی باشد که تعداد دوره‌های به‌طول نایبتر از k را می‌دهد. برای برآورد کردن X دو ابزار ساده ولی زیبا را به‌کار می‌بریم. اولی، خطی بودن امید ریاضی است و دومی، نابرابری مارکوف برای متغیرهای تصادفی نامنفی که حاکی است

$$\text{Prob}(X \geq a) \leq \frac{EX}{a}$$

که در آن EX مقدار امید ریاضی X است. پیوست فصل ۱۴ را در این زمینه ببینید. فرض کنید X_C متغیر تصادفی نشانگر دور C به‌طول، مثلاً i ، باشد. یعنی قرار می‌دهیم $X_C = 1$ یا $X_C = 0$ برحسب اینکه C درگراف ظاهر شود یا نشود؛ پس $EX_C = p^i$. چون X تعداد همهٔ دوره‌های به‌طول نایبتر از k را می‌دهد، داریم $X = \sum X_C$ و لذا بنابه خطی بودن

$$EX = \sum_{i=3}^k \binom{n}{i} \frac{(i-1)!}{2} p^i \leq \frac{1}{2} \sum_{i=3}^k n^i p^i \leq \frac{1}{2} (k-2) n^k p^k$$

که در آن، نابرابری اخیر به این دلیل برقرار است که $np = n^{\frac{1}{k+1}} \geq 1$ ، حال با به کار بردن نابرابری مارکوف با $a = \frac{n}{\gamma}$ به دست می آوریم

$$\text{Prob}(X \geq \frac{n}{\gamma}) \leq \frac{EX}{n/\gamma} \leq (k-2) \frac{(np)^k}{n} = (k-2)n^{-\frac{1}{k+1}}$$

چون طرف راست، با گرایش n به بینهایت، به 0 میل می کند، نتیجه می گیریم که به ازای $p(X \geq \frac{n}{\gamma}) < \frac{1}{\gamma}$ ، $n \geq n_\gamma$

حال تقریباً به مقصد رسیده ایم. تحلیل ما حاکی است که به ازای $n \geq \max(n_1, n_2)$ ، گرافی چون H با n رأس با ضابطه $\alpha(H) < \frac{n}{\gamma k}$ و با کمتر از $\frac{n}{\gamma}$ دور به طول نایبتر از k ، وجود دارد. یک رأس را از هر یک از این دورها حذف می کنیم و فرض می کنیم G گراف حاصل باشد. در این صورت $\gamma(G) > k$ در هر حال برقرار است. چون G شامل بیش از $\frac{n}{\gamma}$ رأس است و در $\frac{n}{\gamma k}$ است $\alpha(G) \leq \alpha(H) < \frac{n}{\gamma k}$ صدق می کند، در می یابیم که

$$\chi(G) \geq \frac{n/\gamma}{\alpha(G)} \geq \frac{n}{\gamma \alpha(H)} > \frac{n}{n/k} = k$$

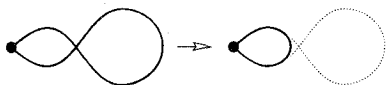
و اثبات به انجام می رسد. \square

نحوه ساخت صریح گرافهایی با کم و عدد فامی بزرگ (با اندازه گول آسا) معلوم است. (در مقابل، کسی نمی داند که چگونه می توان ۲-رنگ آمیزیهای خوبی بدون خوشه های تک رنگ بزرگ، ترتیب داد). نکته ای که هنوز شگفتی ما را در مورد اثبات اردوش بر می انگیزد این است که این اثبات، وجود گرافهای نسبتاً کوچک با عدد فامی و کم بزرگ را به ثبوت می رساند.

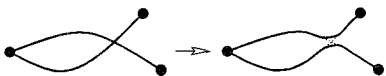
گشت و گذار خود در دنیای احتمالات را با بحث درباره قضیه مهمی در نظریه هندسی گراف به پایان می آوریم (که این هم به پال اردوش بر می گردد) که اثبات «کتابی» فوق العاده جالب آن خیلی نواست.

گراف ساده ای چون $G(V, E)$ با n رأس و m یال در نظر می گیریم. می خواهیم G را در صفحه بنشانیم درست همان طور که در مورد گرافهای هامنی عمل می کردیم. حال از فصل ۱۰ این مطلب را — به عنوان نتیجه ای از فرمول اویلر — می دانیم که یک گراف هامنی ساده G حداکثر $3n - 6$ یال دارد. پس اگر m بزرگتر از $3n - 6$ باشد، باید تقاطعهایی بین یالها وجود داشته باشد. پس عدد تقاطع $\text{cr}(G)$ به طور طبیعی تعریف می شود: این عدد کمترین تعداد تقاطعها در میان همه صورتهای نشانده شده G است. لذا $\text{cr}(G) = 0$ اگر و تنها اگر G هامنی باشد.

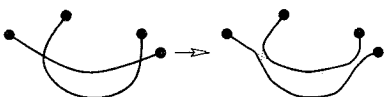
در چنین صورت نشانه شده مینیمالی، قواعد زیر برقرار است:



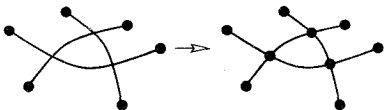
• هیچ یالی نمی‌تواند خودش را قطع کند.



• یالهایی که رأس مشترک دارند نمی‌توانند هم را قطع کنند.



• هیچ دو یالی یکدیگر را دوبار قطع نمی‌کنند.



دلیل این قواعد این است که اگر برقرار نباشند، می‌توانیم با اعمالی که در شکل‌های حاشیه نشان داده شده‌اند، ترسیم متفاوتی از گراف مورد نظر به دست دهیم که تقاطع‌های کمتری داشته باشد. پس، از این به بعد فرض می‌کنیم هر نشاندنی از این قاعده‌ها تبعیت می‌کند.

فرض کنید G در \mathbb{R}^2 نشانه شده و $cr(G)$ تقاطع دارد. بلافاصله می‌توانیم کران پایینی برای تعداد تقاطعها به دست آوریم. گراف H زیر را در نظر بگیرید: رأس‌های H همان رأس‌های G همراه با همه نقطه‌های تقاطع هستند، و یالها همگی قطعاتی از یالهای اولیه‌اند وقتی از نقطه تقاطع به نقطه تقاطع می‌رویم.

حال گراف جدید H مسطح و ساده است (این موضوع از سه فرض ما نتیجه می‌شود!). تعداد رأسها در H برابر با $n + cr(G)$ و تعداد یالها برابر با $m + 2cr(G)$ است، چون هر رأس جدید دارای درجه ۴ است. پس با استفاده از کران تعداد یالها برای گرافهای مسطح داریم

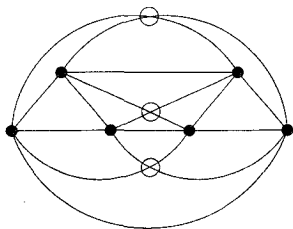
$$m + 2 \cdot cr(G) \leq 3(n + cr(G)) - 6$$

یعنی

$$cr(G) \geq m - 3n + 6 \quad (4)$$

به‌عنوان مثال، برای گراف کامل K_6 داریم

$$cr(K_6) \geq 15 - 18 + 6 = 3$$



و در واقع، صورت نشانه شده‌ای با فقط ۳ تقاطع وجود دارد.

وقتی m نسبت به n خطی باشد، کران (۴) به قدر کافی خوب است، ولی وقتی در مقایسه با n بزرگتر باشد، آنگاه تصویر تغییر می‌کند، و این قضیه ماست.

قضیه ۴. فرض کنید G گراف ساده‌ای با n رأس و m یال باشد که در آن $m \geq 4n$.

در این صورت

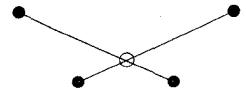
$$\text{cr}(G) \geq \frac{1}{64} \frac{m^2}{n^2}$$

این قضیه که به لم تقاطع معروف است تاریخچهٔ بسیار جالبی دارد. اردوش و گای آن را در سال ۱۹۷۳ حدس زدند (با ثابت c ای به جای $\frac{1}{64}$). نخستین اثباتها را لایتون^۱ در ۱۹۸۲ (با $\frac{1}{32}$ به جای $\frac{1}{64}$) و مستقل از او، آبتای^۲، چواتال، نیبورن^۳، و سمردی عرضه کردند. لم تقاطع چندان شناخته نبود (در واقع مدتها پس از اثباتهای اولیه، خیلیها آن را یک حدس می‌دانستند) تا آنکه لاسلو سکلی^۴ سودمندی آن را در مقالهٔ زیبایی نشان داد به این طریق که آن را در مورد انواعی از مسائل هندسی فرین دشوار به‌کار برد. اثباتی که در اینجا می‌آوریم، از مکاتبات بین برنار شازل^۵، میشا شریر^۶، و امو ولتسل^۷ با پست الکترونیک گرفته شده است و این اثبات بدون شک به «کتاب» تعلق دارد.

■ اثبات. نشاندن مینیمالی از G را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم p عددی بین 0 و 1 است (که بعداً انتخاب می‌شود). هر رأس را مستقلاً با احتمال p انتخاب می‌کنیم و گراف القا شده به وسیلهٔ رأسهایی را که در G_p هستند با G_p نمایش می‌دهیم. فرض کنیم n_p, m_p, X_p متغیرهایی تصادفی باشند که نمایندهٔ تعداد رأسها، یالها و تقاطعها در G_p هستند. چون $0 \leq \text{cr}(G) - m + 3n$ بنا به (۴) به‌ازای هر گراف برقرار است، مسلماً برای امید ریاضی داریم

$$E(X_p - m_p + 3n_p) \geq 0$$

اکنون می‌پردازیم به محاسبهٔ هر یک از امیدهای $E(n_p), E(m_p)$ و $E(X_p)$. روشن است که $E(n_p) = pn$ و $E(m_p) = p^2 m$ چون یک یال در G_p ظاهر می‌شود اگر و تنها اگر هر دو رأس آن چنین کنند. و بالاخره، چون تقاطعی در G_p وجود دارد اگر و تنها اگر هر چهار رأس (متفاوت!) مربوطه در آنجا باشند. پس بنا به خطی بودن امید ریاضی داریم



$$0 \leq E(X_p) - E(m_p) + 3E(n_p) = p^4 \text{cr}(G) - p^2 m + 3pn$$

1. Leighton
2. Ajtai
3. Newborn
4. László Székely
5. Bernard Chazelle
6. Micha Sharir
7. Emo Welzl

که از آن نتیجه می‌شود

$$\text{cr}(G) \geq \frac{p^2 m - 3pn}{p^2} = \frac{m}{p^2} - \frac{3n}{p^2} \quad (5)$$

در اینجا می‌رسیم به شاه‌بیت اثبات: قرار می‌دهیم $p = \frac{3n}{m}$ (که بنا به فرض ما حداکثر ۱ است)، پس (۵) به این صورت در می‌آید

$$\text{cr}(G) \geq \frac{1}{64} \left[\frac{4m}{(n/m)^2} - \frac{3n}{(n/m)^2} \right] = \frac{1}{64} \frac{m^2}{n^2}$$

□

و این همان است که می‌خواستیم.

بال اردوش طبعاً دوست می‌داشت این اثبات را ببیند.

مراجع

- [1] M. AJTAI, V. CHVÁTAL, M. NEWBORN & E. SZEMERÉDI: *Crossing-free subgraphs*, Annals of Discrete Mathematics **12** (1982), 9-12.
- [2] N. ALON & J. SPENCER: *The Probabilistic Method*, Wiley-Interscience 1992.
- [3] P. ERDŐS: *Some remarks on the theory of graphs*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 292-294.
- [4] P. ERDŐS: *Graph theory and probability*, Canadian J. Math **11** (1959), 34-38.
- [5] P. ERDŐS: *On a combinatorial problem I*, Nordisk Math. Tidskrift **11** (1963), 5-10.
- [6] P. ERDŐS & R. K. GUY: *Crossing number problems*, Amer. Math. Monthly **80** (1973), 52-58.
- [7] P. ERDŐS & A. RÉNYI: *On the evolution of random graphs*, Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int Közl. **5** (1960), 17-61.
- [8] T. LEIGHTON: *Complexity Issues in VLSI*, MIT Press, Cambridge MA 1983.
- [9] L. A. SZÉKELY: *Crossing numbers and hard Erdős problems in discrete geometry*, Combinatorics, Probability, and Computing **6** (1997), 353-358.



فهرست راهنما

جورسازی ۲۱۵	آرایش نقطه‌ها ۶۷
~ پایدار ۲۱۵	آهنگ انتقال ۲۴۱
چتر لوواس ۲۴۶	اصل
چند جمله‌ای	~ برتران ۹
~ کسینوسی ۱۵۵	~ لانه کبوتر ۱۶۹
~ مختلط ۱۴۹	اعداد رمزی ۲۶۰
~ های با ریشه‌های حقیقی ۱۵۴	امید ریاضی ۱۱۲
~ های چبیشف ۱۵۹	اندازه [کاردینال] مجموعه ۱۲۵
چندضلعی مقدماتی ۸۱	برابری ~ ها ۱۲۵
چندوجهی	بسط اعشاری ۱۲۷
رأس ~ ۵۶	بس‌وجهی ۵۷، ۵۶، ۵۵
وجه ~ ۵۶	بعد ۱۷۱، ۱۲۹
یال ~ ۵۶	پادزنجیر ۱۸۵
~ یکسان تجزیه پذیر ۵۲	پیوستار ۱۲۸
~ یکسان تکمیل پذیر ۵۲	تابع زتای ریمان ۴۴
حاصلضرب گرافها ۲۴۲	تابع ζ -خطی ۵۱
حدس	تصویر آینه‌ای ۵۷
~ بورسوک ۱۱۵	تقارن مرکزی ۵۷
~ [فرض] ریمان ۴۴	تکمیدی ۱۵
~ کیپلر ۹۱	توزیع احتمال ۲۳۷
خانواده	ثابت اویلر ۱۴
~ بحرانی ۱۹۰	جنگل ۶۵
~ متقاطع ۱۸۶	~ ریشه دار ۱۹۸

- سیاستمدار ۲۵۵
 خوشه ۲۴۳، ۲۳۵، ۶۵
 عدد ~ ای ۲۳۸
 شرط C_f ۲۵۶
 شماره‌ش دوگانه ۱۷۳
 درجه
 ~ خروجی ۲۱۴
 صفحه‌تصویری ۱۷۷
 ~ رأس ۲۱۳، ۱۷۵، ۷۶
 ضریب دو جمله‌ای ۱۷
 ~ میانگین ۷۷
 ظرفیت خطا-صفر
 ~ ورودی ۲۱۴
 درخت ۶۵
 ~ نشاندار ۱۹۳
 عدد
 ~ آردینال ۱۳۵
 دستگاه نماینده‌های متمایز ۱۸۹
 ~ آردینال آغازی ۱۳۶
 دنباله‌ظریف‌شونده ۱۹۹
 ~ استقلال ۲۶۴، ۲۴۱
 دور [چرخه] ۶۵
 ~ اول ۹، ۳
 رأس
 ~ تقاطع ۲۶۶
 ~ برشی ۶۵
 ~ فامی ۲۶۲، ۲۱۲
 ~ محدب ۲۳۱
 ~ فامی فهرستی ۲۲۴، ۲۱۲
 ~ های مجاور ۶۴
 ~ کاردینال ۱۳۳، ۱۲۵
 رنگ‌آمیزی فهرستی ۲۲۴، ۲۱۲
 ~ مرسن ۳
 رنگ‌کردن گراف ۲۲۳
 ~ های فرما ۴
 روش احتمالاتی ۲۵۹، ۱۱۰
 ~ های گنگ ۳۷
 ریشه‌های واحد ۳۴
 ~ های همساز ۱۳
 زاویه‌دووجهی ۵۲
 فرمول
 زنجیری از مجموعه‌ها ۱۸۵
 ~ استرلینگ ۱۴
 زیردنباله‌های یکتوا ۱۷۰
 ~ اویلر ۷۵
 زیرگراف ۶۵
 ~ کیلی ۱۹۳
 فضای احتمال ۱۱۲
 ~ القایی ۲۱۳، ۶۵
 سادکهای مماس ۹۹
 ستاره ۶۳
 قابلیت انطباق ← همنهشتی
 قضیه

- ~ اردوش-کو-رادو ۱۸۵
 ~ ازدواج ۱۸۹
 ~ اسپنسر ۱۸۵
 ~ چیشف ۱۵۳، ۱۵۱
 ~ چهاررنگ ۲۲۳
 ~ خوش‌ترتیبی ۱۳۴
 ~ دن-هادویگر ۵۲
 ~ دوستی ۲۵۵
 ~ دو مربع ۲۳
 ~ سیلوستر ۱۷
 ~ سیلوستر-گالای ۷۹، ۵۹
 ~ صلبیت کوشی ۸۵
 ~ عددهای اول ۱۳
 ~ گالری هنری ۲۳۰
 ~ گراف توران ۲۳۶
 ~ لاگراتز ۳
 ~ لژاندر ۱۱
 ~ لوواس ۲۵۰
 ~ ماتریس-درخت ۱۹۵
 ~ نقطه ثابت براوتر ۱۸۰
- لم
- ~ اسپنسر ۱۸۱، ۱۸۰
 ~ تقاطع ۲۶۷
 ~ دست کوشی ۸۶
- ماتریس
- ~ مجاورت ۲۵۰
 ~ ملازمت ۱۷۳، ۶۱
 ~ متغیر تصادفی ۱۱۲، ۱۱۱
 ~ مثلث مماسی ۱۴۳
 ~ مجموع دو مربع ۳۳
 ~ مجموعه
- ~ چگال ۱۳۲
 ~ خوش‌ترتیب ۱۳۴
 ~ شمارا ۱۲۶
 ~ مستقل ۲۴۱، ۲۱۲، ۶۵
- ~ کانال مخاربه ۲۴۱
 ~ گراف ۶۴
 ~ اشتباه ۲۴۱
 ~ بس‌وجهی ۵۷
 ~ بعد ۱۷۱
 ~ تقریباً مثلث‌بندی‌شده ۲۲۵
 ~ توران ۲۳۵
 ~ جهتدار ۲۱۳
 ~ خطی ۲۱۸

- مربع لاتین ۲۰۳
 ~ ناقص ۲۰۳
 مربعهای کامل به پیمانه p ۲۴
 مرتبه عضوگروه ۳
 مرکز ۳۱
 مرکزساز ۳۱
 مسأله
 ~ دینیتس ۲۱۱
 ~ سوم هیلبرت ۴۹
 ~ شیب ۶۷
 ~ لیتلود-آفرد ۱۶۱
 مستطیل لاتین ۲۰۵
 مسیر ۶۵
 ملازمت رأس و یال ۶۴
 میانگین
 ~ تعداد مقسوم علیه‌ها ۱۷۴
 ~ حسابی ۱۳۹
 ~ همساز ۱۳۹
 ~ هندسی ۱۳۹
 نابرابری کوشی-شوارتس ۱۳۹
 نابرابریها ۱۳۹
 ناوردهای دن ۵۱
 نسبت طلایی ۲۴۷
 نگاشت دوسویی ۱۲۶
 نگهداری از موزه ۲۲۹
 نمایش یکامتعامد ۲۴۶
 وجه ۵۶
 هسته ۲۱۴
 هم‌ارز ترکیبیاتی ۵۷
 همبندی ۶۵
 دوگانه ~ ۶۵
 همنهشتی [قابلیت انطباق] ۵۷
 هیات ۳۱، ۲۵
 یال
 ~ چندگانه ۶۴
 ~ چندوجهی ۵۶
 ~ گراف ۶۴
 یکرختی گرافها ۶۵