



انتشارات دانشگاه تهران

۱۸۹۳

جبر

تألیف

ژاک دیکسمیه

ترجمه

محمد گودرزی

کاظم الهی

علینقی زند

بیژن شمس



انتشارات دانشگاه تهران

شماره ۱۸۹۳

شماره مسلسل ۲۵۷۲

ناشر: مؤسسه انتشارات و چاپ دانشگاه تهران

تاریخ انتشار: آبان ماه ۱۳۶۵

تیراژ چاپ: دوهزار نسخه

چاپ و صحافی: چاپخانه مؤسسه انتشارات و چاپ دانشگاه تهران

مسئولیت صحت مطالب کتاب با مترجمین است

اکلیه حقوق برای دانشگاه تهران محفوظ است

بها: ۶۰۰ ریال

جبر

تألیف

ژاک دیکسمیه

ترجمه

محمدگودرزی

کاظم الهیسی

علینقی زند

بیرن شمس

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار

از سال ۱۳۴۸ که اقدام به ترجمه و چاپ کتاب جبر و آنالیز، تألیف ژاک دیکسمیه گردیده تاکنون کتابهایی چند در این زمینه گردآوری، تألیف و یا از مآخذ مختلف ترجمه و به چاپ رسیده‌اند، که در بین آنها کتابهای خوب و با ارزشی دیده می‌شود. با وجود این، دقت ریاضی و به‌ویژه منطقی مطالب، که نتیجه تجربه آموزشی مؤلف این کتاب است، و در سرتاسر آن مشاهده می‌شود، همچنان آن را در ردیف بهترین و با ارزش‌ترین کتابهای موجود در جبر و آنالیز باقی گذاشته است. با توجه به این واقعیت بود که اقدام به تجدید چاپ ترجمه فارسی بخش جبر آن گردید، که به صورت کتاب حاضر در دسترس علاقمندان قرار می‌گیرد.

از این کتاب می‌توان در تدریس دروس جبر و جبر خطی استفاده کرد. از همکاران ارجمندی که به هر صورت این کتاب را از نظر می‌گذرانند و از دانشجویان عزیزی که از آن استفاده می‌کنند، خواهشمند است بایادآوری اشتباهها و کمبودها ما را سپاسگزار خود فرمایند.

از سازمان انتشارات و چاپ دانشگاه تهران که امکان چاپ این کتاب را فراهم آورده است، سپاس فراوان داریم.

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

پیش گفتار

دانش جبر در چند دهه گذشته، دستخوش تحولی شگرف بوده است، به گونه‌ای که چهره ریاضیات و دیگر رشته‌های وابسته به آن را دگرگون ساخته است. از اثر این تحول دو برنامه آموزشی ریاضی در ایران، چندسالی پیش نمی‌گذرد و گروه ریاضی دانشگاه تهران که یکی از پیشروان این تحول است، برای دروس جبر و آنالیز اثر ارزنده «ژاک دیکسمیه» * را پایه درسی سال‌های اول و دوم قرار داد.

«ژاک دیکسمیه» یکی از استادان با ارج دانشگاه پاریس است و نه تنها پژوهشهای وی در ریاضی بسیار پرمایه و با ارزش است بلکه از لحاظ آموزشی نیز استادی مجرب می‌باشد. شیوه تدریس او آنچنان است که دانشجویان را به اندیشیدن برمی‌انگیزد و او را برای درک مطالبی دیگر آماده می‌سازد. آنچه بایسته گفتن در این زمینه بوده، استادانه به رشته تحریر کشیده و از گزافه‌گویی به‌کنار مانده است. همین روش پسندیده او بارها بر آن داشت تا این اثر پراچ وی را به پاریس برگردانیم.

در برگرداندن این کتاب بر آن شدیم تا دوبخش جبر و آنالیز را از یکدیگر جدا سازیم. در چاپ نخست، بخش جبر در دو جلد و قسمتی از آنالیز در یک جلد انتشار یافت و اینک چاپ دوم بخش جبر را در یک جلد در دسترس دوستارانش می‌گذاریم.

چون در متن اصلی کتاب تمرین گنجانده نشده است، برای آنکه فهم مطالب آسان‌تر گردد در چاپ دوم بیش‌ازدیست مسأله گردآوری و به آن افزوده‌ایم. این مسائل با آنچه در کتاب آمده هماهنگی کامل دارد و بیش‌ازنیمی از آنها به عنوان نمونه حل شده است تا راهنمایی برای دانشجویان باشد.

امید است که با این کوشش خود، هرچند که بسیار ناچیز است، در راه گسترش ریاضی در ایران گامی برداشته باشیم.

* J. Dixmier:

- ۱) Cours de Math. de 1^{er} cycle, 1^{ère} année; Gauthier - Villars; 1969
- ۲) Cours de Math. de 1^{er} cycle, 2^{ème} année; Gauthier-Villars; 1969

فهرست

صفحه

موضوع

فصل اول

مجموعه‌ها

۱	۱.۱ - تعلق
۲	۲.۱ - شامل - مشمول
۲	۳.۱ - عملیات مقدماتی
۳	۴.۱ - ویژگی عملیات مقدماتی
۴	۵.۱ - حاصلضرب مجموعه‌ها
۶	۶.۱ - توابع
۷	۷.۱ - ترکیب گسترشها
۸	۸.۱ - گسترش‌های انژکتیو - سورژکتیو - بی‌ژکتیو
۱۱	۹.۱ - سایه مستقیم و سایه وارون
۱۲	۱۰.۱ - خانواده
۱۳	۱۱.۱ - بستگی هم‌ارزی
۱۶	۱۲.۱ - تجزیه کانونیک یک گسترش
۱۸	۱۳.۱ - بستگی ترتیبی
۲۰	۱۴.۱ - کناره بالا - بزرگترین عنصر - کران بالا
۲۳	۱۵.۱ - آنالیز ترکیبی

فصل دوم

قوانین ترکیب

۲۷	۱.۲ - تعریف
۲۹	۲.۲ - قانون انجمنی

صفحه	موضوع
۳۰	۳.۲ - قانون ترکیب جابجایی
۳۲	۴.۲ - عنصر بی اثر
۳۳	۵.۲ - عنصر وارون
۳۷	۶.۲ - همومرفیسم

فصل سوم

گروه‌ها

۳۹	۱.۳ - گروه
۴۰	۲.۳ - زیر گروه‌های یک گروه
۴۳	۳.۳ - کلاس‌ها نسبت به یک زیر گروه
۴۵	۴.۳ - گروه خارج قسمت یک گروه جابجایی
۴۷	۵.۳ - همومرفیسم گروه
۴۹	۶.۳ - تجزیه کانونیک یک همومرفیسم
۵۲	۷.۳ - گروه‌های عامل در یک مجموعه

فصل چهارم

حلقه‌ها

۵۳	۱.۴ - حلقه‌ها
۵۶	۲.۴ - زیرحلقه - ایدال
۵۷	۳.۴ - حلقه خارج قسمت یک حلقه جابجایی
۵۹	۴.۴ - همومرفیسم حلقه‌ها
۶۰	۵.۴ - هیأت
۶۳	۶.۴ - حلقه کامل
۶۷	۷.۴ - ساختمان حلقه \mathbb{Z}

فصل پنجم

چندجمله‌ای‌های یک متغیری

۶۹	۱.۰ - تعریف
۷۲	۲.۰ - درجه یک چندجمله‌ای
۷۳	۳.۰ - تقسیم چندجمله‌ای‌ها برحسب نماهای کاهش
۷۵	۴.۰ - بخش پذیری چندجمله‌ای‌ها
۷۸	۵.۰ - چندجمله‌ای‌هایی که نسبت به هم اولند
۸۰	۶.۰ - مضربهای مشترک دو چند جمله‌ای
۸۰	۷.۰ - چند جمله‌ای‌های ساده نشدنی
۸۳	۸.۰ - توابع چند جمله‌ای
۸۵	۹.۰ - ریشه‌های یک چند جمله‌ای
۸۹	۱۰.۰ - دستورانترپلاسیون لاگرانژ
۸۹	۱۱.۰ - حالت $K = G$
۹۲	۱۲.۰ - حالت $K = R$
۹۶	۱۳.۰ - مشتق یک چند جمله‌ای
۹۹	۱۴.۰ - تقسیم چندجمله‌ای‌ها برحسب نماهای افزایشی
۱۰۱	۱۵.۰ - شمارهای مختلط

فصل ششم

کسرهای گویای یک متغیری

۱۱۱	۱.۶ - تعریف
۱۱۳	۲.۶ - بخش درست یک کسر گویا
۱۱۴	۳.۶ - تجزیه کسر به کسرهای ساده
۱۱۹	۴.۶ - حالت هیأت G
۱۲۱	۵.۶ - حالت هیأت R

فصل هفتم

چند جمله‌ای‌های چند متغیری

۱۲۶	۱.۷ - تعریف
۱۲۷	۲.۷ - بستگی چند جمله‌ای‌های یک متغیری و چند متغیری
۱۲۹	۳.۷ - درجه چند جمله‌ای‌های چند متغیری
۱۳۰	۴.۷ - توابع چند جمله‌ای
۱۳۲	۵.۷ - تعریف دیگر چند جمله‌ای‌های همگن
۱۳۳	۶.۷ - مشتق چند جمله‌ای‌های چند متغیری

فصل هشتم

فضاهای برداری

۱۳۶	۱.۸ - تعریف
۱۳۹	۲.۸ - زیرفضاهای برداری
۱۴۲	۳.۸ - فضای برداری خارج قسمت
۱۴۳	۴.۸ - گسترش‌های خطی
۱۴۵	۵.۸ - زیرفضای برداری متمم
۱۵۰	۶.۸ - حاصلضرب فضاهای برداری
۱۵۲	۷.۸ - ناپستگی خطی
۱۵۵	۸.۸ - پایه یک فضای برداری
۱۶۵	۹.۸ - وجود پایه‌ها
۱۶۲	۱۰.۸ - بعد
۱۶۷	۱۱.۸ - رتبه یک گسترش خطی
۱۶۹	۱۲.۸ - فضای برداری $\mathcal{L}(F, F)$
۱۷۲	۱۳.۸ - دوآل یک فضای برداری
۱۷۷	۱۴.۸ - بیدوآل یک فضای برداری

صفحه

موضوع

۱۷۹	۱۵.۸ - تعامد
۱۸۵	۱۶.۸ - ترانسپوزیسیون
۱۸۹	۱۷.۸ - فرمهای دوخطی
۱۹۲	۱۸.۸ - فرمهای چندخطی روی فضای برداری E

فصل نهم

ماتریس‌ها

۱۹۳	۱.۹ - تعریف
۱۹۴	۲.۹ - ماتریس یک گسترش خطی
۱۹۷	۳.۹ - عملیات روی ماتریس‌ها
۲۰۰	۴.۹ - ماتریس‌های مربع
۲۰۲	۵.۹ - ماتریس‌های سطری و ستونی
۲۰۴	۶.۹ - ترانسپوزه یک ماتریس
۲۰۵	۷.۹ - ماتریس‌های وارون‌پذیر
۲۰۷	۸.۹ - تعویض پایه
۲۰۹	۹.۹ - ماتریس‌های هم‌ارز
۲۱۱	۱۰.۹ - ماتریس‌های همانند
۲۱۲	۱۱.۹ - ماتریس یک فرم دوخطی

فصل دهم

دترمینان‌ها

۲۱۴	۱.۱۰ - علامت یک تبدیل
۲۱۹	۲.۱۰ - فرم‌های چندخطی متناوب
۲۲۱	۳.۱۰ - فرم‌های n خطی متناوب روی فضای برداری n بعدی
۲۲۴	۴.۱۰ - دترمینان یک دستگاه بردار وابسته به یک پایه
۲۲۶	۵.۱۰ - دترمینان یک گسترش خطی E در E

صفحه

موضوع

۲۲۸	۶.۱۰ - دترمینان یک ماتریس مربع
۲۳۳	۷.۱۰ - محاسبه دترمینان با بلوک
۲۳۷	۸.۱۰ - بسط یک دترمینان نسبت به عنصرهای یک سطر یا یک ستون
۲۴۰	۹.۱۰ - شرط نابستگی خطی بردارها
۲۴۱	۱۰.۱۰ - محاسبه رتبه یک ماتریس
۲۴۲	۱۱.۱۰ - سوی فضاهاى بردارى حقیقی
۲۴۴	۱۲.۱۰ - حاصلضرب مختلط در فضای معمولی سودار
۲۴۷	۱۳.۱۰ - حاصلضرب برداری در فضای معمولی سودار

فصل یازدهم

دستگاه معادله‌های خطی

۲۵۲	۱.۱۱ - تعریف
۲۵۳	۲.۱۱ - دستگاه کرامر
۲۵۵	۳.۱۱ - دستگاه خطی دلخواه

فصل دوازدهم

فضاهای آفین

۲۵۸	۱.۱۲ - زیرفضاهای آفین
۲۶۰	۲.۱۲ - معادله‌های یک زیرفضای آفین
۲۶۲	۳.۱۲ - نمایش پارامتری یک زیرفضای آفین
۲۶۳	۴.۱۲ - گسترش‌های آفین
۲۶۸	۵.۱۲ - گرانیگاه
۲۷۲	۶.۱۲ - مجموعه‌های کوژ
۲۷۵	۷.۱۲ - فضاهای آفین

فصل سیزدهم

گروه‌ها (متمم فصل سوم)

۲۸۱	۱.۱۳ - زیرگروه‌های ممتاز
-----	--------------------------

- ۲۸۳ - ۲.۱۳ - تجزیه کانونیک یک همورفیسیم
- ۲۸۴ - ۳.۱۳ - اتورفیسیم های یک گروه

فصل چهاردهم

تحویل ماتریسها

- ۲۸۷ - ۱.۱۴ - مقادیر ویژه و بردارهای ویژه
- ۲۸۹ - ۲.۱۴ - چند جمله ای مفسر
- ۲۹۲ - ۳.۱۴ - بستگی های بین چند جمله ای مفسر و مقادیر ویژه
- ۲۹۳ - ۴.۱۴ - حالتی که هیأت پایه هیأت شمارهای مختلط است
- ۲۹۶ - ۵.۱۴ - قضیه کیلی - هاسیلتون و کاربردهای آن

فصل پانزدهم

فرم های چند خطی

- ۳۰۲ - ۱.۱۵ - فضای برداری فرم های p خطی
- ۳۰۴ - ۲.۱۵ - سایه وارون به وسیله یک گسترش خطی

فصل شانزدهم

فرم های دوخطی متقارن

- ۳۰۶ - ۱.۱۶ - فرم های دوخطی متقارن
- ۳۰۷ - ۲.۱۶ - فرم های درجه دوم یا فرم های کوادراتیک
- ۳۱۱ - ۳.۱۶ - تعامد
- ۳۱۲ - ۴.۱۶ - فرم های اصیل
- ۳۱۵ - ۵.۱۶ - بستگی های تعامد بالا با تعامد فصل هشتم
- ۳۱۶ - ۶.۱۶ - پایه های متعامد
- ۳۱۹ - ۷.۱۶ - حالتی که هیأت پایه هیأت شمارهای مختلط است
- ۳۲۰ - ۸.۱۶ - حالتی که هیأت پایه هیأت شمارهای حقیقی است
- ۳۲۶ - ۹.۱۶ - آدژوئن
- ۳۲۷ - ۱۰.۱۶ - گروه متعامد

صفحه	موضوع
۳۳۱	۱۱.۱۶ - ماتریس‌های متعامد
۳۳۲	۱۲.۱۶ - گسترش‌های خطی متقارن

فصل نهم

فرم‌های هرمیتی

۳۳۶	۱.۱۷ - فرم‌های هرمیتی
۳۴۰	۲.۱۷ - تعامد
۳۴۲	۳.۱۷ - پایه‌های متعامد
۳۴۳	۴.۱۷ - فضاهاى تقريباً هیلبرتی
۳۴۷	۵.۱۷ - آدژوئن
۳۴۹	۶.۱۷ - گروه یگانی

فصل هیجدهم

فرم‌های چند خطی متناوب

۳۵۸	۱.۱۸ - نامتقارن کردن
۳۶۰	۲.۱۸ - حاصلضرب خارجی فرم‌های متناوب
۳۷۱	۳.۱۸ - فرم‌های دوخطی متناوب
۳۷۳	۴.۱۸ - حالت فضای معمولی سودار
۳۷۷	تمرین
۴۲۳	حل چند مسأله نمونه
۵۳۷	فهرست نشانه‌ها
۵۴۱	فهرست الفبایی
۵۴۸	واژه‌ها

فصل اول

مجموعه‌ها

ممکن است خواننده با برخی از مفاهیم این فصل آشنا باشد. هدف ما یادآوری مطالب ویژه و تثبیت واژه‌هایی است که در این کتاب بکار خواهیم برد.

۱.۱ - تعلق

۱.۱.۱ - یک دسته از اشیاء داده شده را یک مجموعه و هر شیئی آنرا یک عنصر مجموعه و یا یک نقطهٔ مجموعه می‌نامند.

۱.۱.۱ - مثال :

۱ - **شماره‌های طبیعی** (یا شماره‌های درست و مثبت) یعنی $0, 1, 2, 3, \dots$ یک مجموعه تشکیل می‌دهند که آنرا با حرف **N** نمایش می‌دهند.

۲ - شماره‌های درست مثبت و منفی یعنی $0, 1, 2, 3, \dots, -1, -2, \dots$ یک مجموعه تشکیل می‌دهند که آنرا با حرف **Z** می‌نمایند.

۳ - **شماره‌های گویا** یک مجموعه تشکیل می‌دهند که آنرا با حرف **Q** نمایش می‌دهند.

۴ - **شماره‌های حقیقی** تشکیل یک مجموعه می‌دهند که آنرا با حرف **R** می‌نمایند.

۵ - **شماره‌های مختلط** تشکیل یک مجموعه می‌دهند که با حرف **C** نموده می‌شود.

۶ - نقاط واقع در یک صفحه تشکیل یک مجموعه می‌دهند.

۷ - خطوط فضای معمولی تشکیل یک مجموعه می‌دهند.

۱.۱.۳ - اگر E یک مجموعه و x عنصری از آن باشد، عبارت « x عنصری است از

E » را گاهی به صورت « x متعلق است به E » بیان می‌کنند و می‌نویسند $x \in E$. در این صورت نفی $x \in E$ را به صورت $x \notin E$ می‌نویسند.

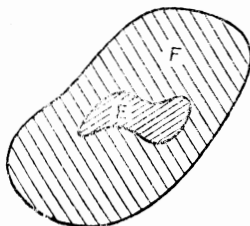
۱.۱.۴ - مجموعه‌ای را که دارای هیچ عنصری نیست مجموعهٔ تهی می‌نامند و آنرا

با \emptyset نمایش می‌دهند.

مجموعه‌ای را که تنها دارای یک‌عنصر x است با $\{x\}$ و مجموعه‌ای را که تنها دارای دو عنصر x و y است با $\{x, y\}$ نمایش می‌دهند. نمایش یک مجموعه سه‌عنصری، چهار عنصری و ... نیز به روشی مشابه صورت می‌گیرد.

۲.۱ - شامل - مضمول

۱.۲.۱ - فرض می‌کنیم E و F دو مجموعه باشند. گوئیم F شامل E است (یا E مضمول F است، یا E زیر مجموعه F است و یا E بخشی از F است) هرگاه هر عنصر E عنصری از F باشد در این صورت می‌نویسیم $E \subset F$ و یا $F \supset E$.



شکل ۱

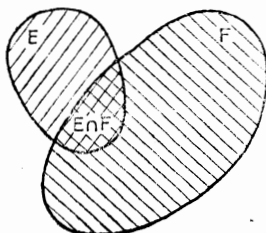
۱.۲.۱ - مثال: مجموعه شماره‌های مختلط شامل مجموعه شماره‌های حقیقی است:

$$R \subset C \text{ (و یا } C \supset R)$$

۱.۲.۳ - اگر $E \subset F$ و $F \subset G$ باشد داریم $E \subset G$.

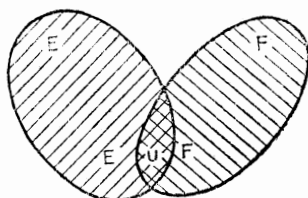
۳.۱ - عملیات مقدماتی

۱.۳.۱ - **مقطع دو مجموعه** - مقطع دو مجموعه E و F مجموعه همه x هایی است که هم متعلق به E و هم متعلق به F می‌باشند. این مجموعه را با $E \cap F$ نشان می‌دهند ($E \cap F$ را بخوانید E مقطع F). به همین ترتیب مقطع سه مجموعه E, F, G را با $E \cap F \cap G$ و مقطع چندمجموعه E, F, G, \dots, L را با $E \cap F \cap G \cap \dots \cap L$ نمایش می‌دهند. اگر $E \cap F = \emptyset$ باشد گوئیم که F و E جدا از هم می‌باشند.



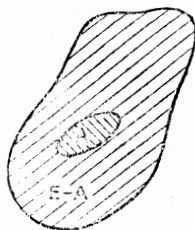
شکل ۲

۱. ۳. ۲- اجتماع دو مجموعه E و F عبارت است از مجموعه همه x هایی که یا متعلق به E و یا متعلق به F و یا متعلق به هر دوی آنها باشند. این مجموعه با $E \cup F$ نمایش داده می‌شود ($E \cup F$ را بخوانید اجتماع E و F). بهمین روش می‌توان اجتماع چند مجموعه E, F, \dots, L را تعریف کرد و به صورت $E \cup F \cup G \cup \dots \cup L$ نمایش داد.



شکل ۳

۱. ۳. ۳- مکمل - فرض می‌کنیم E یک مجموعه و A بخشی از E باشد. مجموعه همه نقطه‌هایی از E مانند x را که به A تعلق ندارند مکمل A نسبت به E و **یامانده** از A می‌نامیم و با $E - A$ و یا \bar{A} نشان می‌دهیم. چنانچه مجموعه E را بشناسیم بجای \bar{A} علامت \bar{A} را بکار خواهیم برد (\bar{A} را بخوانید مکمل A در E).



شکل ۴

۴. ۱- ویژگی‌های عملیات مقدماتی

۱. ۴. ۱- مقطع و اجتماع ویژگی جابجایی دارند، به عبارت دیگر:

$$E \cup F = F \cup E \quad , \quad E \cap F = F \cap E$$

۱. ۴. ۲- مقطع و اجتماع دارای ویژگی انجمنی هستند، به عبارت دیگر:

$$E \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap G \quad , \quad E \cup (F \cup G) = (E \cup F) \cup G$$

۱. ۴. ۳- مقطع نسبت به اجتماع دارای ویژگی پخشی است، به عبارت دیگر:

$$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$$

اثبات - فرض می‌کنیم x عنصری از $E \cap (F \cup G)$ باشد. پس $x \in E$ و $x \in F \cup G$. از $x \in F \cup G$ نتیجه می‌شود که $x \in F$ و یا $x \in G$. اگر $x \in F$ باشد $x \in E \cap F$ است و اگر $x \in G$ باشد داریم $x \in E \cap G$ ، بنابراین در هر دو صورت خواهیم داشت:

$$x \in (E \cap F) \cup (E \cap G)$$

به‌وارون فرض می‌کنیم x عنصری است از $(E \cap F) \cup (E \cap G)$. اگر $x \in E \cap F$ باشد خواهیم داشت $x \in E$ و $x \in F$ پس $x \in F \cup G$ و از آنجا $x \in E \cap (F \cup G)$. چنانچه $x \in E \cap G$ باشد خواهیم داشت $x \in E$ و $x \in G$ پس $x \in F \cup G$ و سرانجام داریم:

$$x \in E \cap (F \cup G)$$

۱.۴.۴- اجتماع نسبت به مقطع دارای ویژگی پخش است، به عبارت دیگر:

$$E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$$

اثبات این مطلب مانند قسمت پیش است و به خواننده واگذار می‌گردد.
 ۱.۴.۵- مکمل اجتماع چند مجموعه برابر است با مقطع مکمل‌های این مجموعه‌ها و مکمل مقطع چند مجموعه برابر با اجتماع مکمل‌های این مجموعه‌هاست (مکمل‌ها همیشه نسبت به یک مجموعه که همه مجموعه‌های مورد نظر را دربردارد گرفته می‌شوند).
 به عبارت دیگر برای هر دو بخش A و B از E داریم:

$$\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B) \quad , \quad \complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$$

اثبات - فرض می‌کنیم x عنصری از $\complement_E(A \cup B)$ باشد در این صورت داریم $x \in E$ و $x \notin A \cup B$. پس $x \notin A$ و $x \notin B$ ، بنابراین $x \in \complement_E A$ و $x \in \complement_E B$ و از آنجا:

$$x \in (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$$

به‌وارون اگر x عنصری از $\complement_E A \cap \complement_E B$ باشد خواهیم داشت $x \in \complement_E A$ و $x \in \complement_E B$. پس $x \in E$ ، $x \notin A$ ، $x \notin B$ ؛ بنابراین $x \in E$ و $x \notin A \cup B$ و در نتیجه $x \in \complement_E(A \cup B)$.
 به این ترتیب فرمول اول ثابت می‌شود. برای اثبات فرمول دوم در فرمول اول $\complement_E A$ و $\complement_E B$ را به ترتیب جایگزین A و B می‌کنیم در این صورت با توجه به اینکه مکمل مکمل یک مجموعه برابر با خود آن مجموعه است خواهیم داشت $\complement_E(\complement_E A \cup \complement_E B) = A \cap B$. به عبارت دیگر $\complement_E A \cup \complement_E B = \complement_E(A \cap B)$ و در نتیجه فرمول دوم اثبات می‌شود.

۱.۵- حاصل ضرب مجموعه‌ها

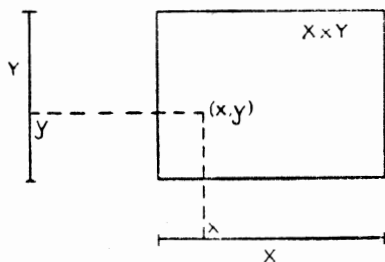
۱.۵.۱- اگر x و y دوشمی باشند، دنباله دو عنصری را (برای تعریف دنباله به شماره ۱.۱۰.۱ رجوع شود) که عنصر اول آن x و عنصر دوم آن y باشد **جفت** x و y می‌نامیم

و با (x, y) نشان می‌دهیم. بنابراین داریم $(x, y) \neq (y, x)$. مفهوم جفت (x, y) را نباید با مفهوم مجموعه $\{x, y\}$ که در شماره ۱.۱.۴ تعریف شد یکی گرفت زیرا در مورد مجموعه $\{x, y\}$ داریم $\{x, y\} = \{y, x\}$.

۱.۵.۰۲- فرض می‌کنیم X و Y دو مجموعه باشند. مجموعه همه جفت‌های (x, y) را به قسمی که $x \in X$ و $y \in Y$ باشد، مجموعه حاصل ضرب X و Y می‌نامند و آنرا با $X \times Y$ نمایش می‌دهند.

۱.۵.۰۳- مثال - مجموعه $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ را در نظر می‌گیریم. عنصرهای این مجموعه همه جفت‌های (x, y) تشکیل شده از دو شمار حقیقی x و y هستند. برای درک بهتر این موضوع در یک صفحه P یک دستگاه محورهای مختصات در نظر می‌گیریم و به هر جفت (x, y) از $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ نقطه‌ای به مختصات x و y در این صفحه وابسته می‌کنیم. بدین ترتیب $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ با صفحه P یکی گرفته می‌شود.

برای حاصل ضرب دو مجموعه دلخواه می‌توان مثال بالا را در نظر داشت.



شکل ۵

۱.۵.۰۴- تعمیم - با n شیئی x_1, x_2, \dots, x_n می‌توان یک دنباله مرتب (x_1, x_2, \dots, x_n) تعریف کرد. مجموعه‌های X_1, X_2, \dots, X_n را در نظر می‌گیریم. مجموعه همه دنباله‌های مرتب (x_1, x_2, \dots, x_n) را که برای آنها $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n$ باشد؛ حاصل ضرب مجموعه‌های X_1, X_2, \dots, X_n می‌نامند و با $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ نمایش می‌دهند.

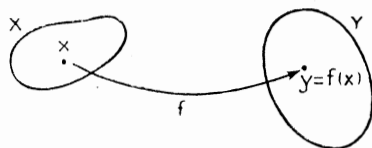
۱.۵.۰۵- اگر $X_1 = X_2 = \dots = X_n = X$ باشد، حاصل ضرب $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ را با X^n نمایش می‌دهند. مثلاً $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ با \mathbf{R}^2 نشان داده می‌شود.

۱.۵.۰۶- اگر x, y, z سه شیئی دلخواه باشند می‌توان $(x, y), z$ را با (x, y, z) یکی گرفت. در این صورت اگر X, Y, Z سه مجموعه باشند مجموعه $(X \times Y) \times Z$ را با $X \times Y \times Z$ یکی می‌گیرند. همچنین $((X \times Y) \times Z) \times T$

با $X \times Y \times Z \times T$ یکی گرفته می‌شود و... به عنوان مثال $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$ با \mathbf{R}^3 یکی است.

۶.۱- توابع

۶.۱.۱- دو مجموعه X و Y را در نظر می‌گیریم. هر قانونی که به هر عنصر از مجموعه X یک عنصر معین از Y را نسبت دهد یک **تابع** روی X با مقادیر واقع در Y نامیده می‌شود. مجموعه X را **مجموعه تعریف تابع** می‌نامیم. اگر f یک چنین تابع، x عنصری از X و y عنصر وابسته به x در Y باشد؛ گوئیم y **سایه** x به وسیله f است و می‌نویسیم $y = f(x)$. تابع f را گاهی یک **گسترش** X در Y نیز می‌نامیم و به صورت $x \rightarrow f(x)$ می‌نویسیم.



شکل ۶

۶.۱.۲- مثال :

۱- اگر $Y = \mathbf{R}$ باشد گوئیم f یک **تابع حقیقی** است. اگر $X = \mathbf{R}$ باشد و یا به بیان کلی‌تر، اگر X بخشی از \mathbf{R} باشد گوئیم f یک **تابع با متغیر حقیقی** است. ما در این درس بیشتر از توابع حقیقی با متغیر حقیقی گفتگو خواهیم کرد. خواننده با مثال‌های زیادی از این گونه توابع آشنائی دارد. مثلاً: $x \rightarrow x^2$ یک تابع حقیقی است که در \mathbf{R} تعریف شده است (یعنی مجموعه تعریف آن \mathbf{R} است)؛

$$x \rightarrow \frac{2x+1}{x-3} \quad \text{تابعی است حقیقی که در } \mathbf{R} - \{3\} \text{ تعریف شده است؛}$$

$$x \rightarrow \sqrt{x} \quad \text{تابعی است حقیقی که برای } x \geq 0 \text{ تعریف شده است.}$$

برای سادگی این توابع را به ترتیب با x^2 ، $\frac{2x+1}{x-3}$ و \sqrt{x} نشان می‌دهند گرچه

این طرز نمایش کاملاً درست نیست.

۲- برای هر جفت (x, y) از شمارهای حقیقی قرار می‌دهیم:

$$f(x, y) = x \sin(x^2 + y^2)$$

بدین ترتیب یک تابع f با مقادیر واقع در \mathbf{R} تعریف کرده‌ایم که مجموعه تعریف آن \mathbf{R}^2

می‌باشد. یک تابع تعریف شده در بخشی از R^2 را یک **تابع دومتغیری حقیقی** می‌نامند. به همین روش می‌توان توابع چند متغیری حقیقی را تعریف کرد.

۳- حرکت وهمسانی (یا تجانس) هر کدام یک گسترش صفحه (فضا) در صفحه (فضا) می‌باشند. در صفحه P یک انعکاس به مرکز O یک گسترش $P - \{O\}$ در $P - \{O\}$ است.

۴- مجموعه E را در نظر می‌گیریم. گسترش $x \rightarrow x$ مجموعه E در E را **گسترش همانی** می‌نامند و با id_E نمایش می‌دهند. بطور کلی اگر F بخشی از E باشد، $x \rightarrow x$ یک گسترش F در E است که **گسترش همانی** در F نامیده می‌شود.

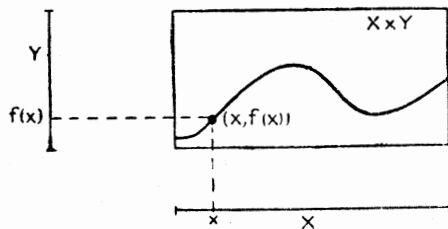
۵- فرض می‌کنیم f یک گسترش X در Y و X' بخشی از X باشد. اگر برای هر $x \in X'$ قراردادیم $f'(x) = f(x)$ در این صورت f' یک گسترش X' در Y معین می‌کند که آنرا **تجدید f** به X' می‌نامند.

۳.۶.۱- **علامت گذاری** - برای سادگی بجای عبارت « f یک گسترش X در Y »

است» می‌نویسیم $f: X \rightarrow Y$ یا $X \xrightarrow{f} Y$ (هیچگونه بستگی بین این پیکان و پیکانی که برای نمایش حد بکار می‌برند وجود ندارد). این علامت را با علامت $x \rightarrow f(x)$ که قبلاً تعریف کرده‌ایم نباید اشتباه نمود.

۴.۶.۱- **نمودار یک تابع** - فرض می‌کنیم f یک گسترش X در Y باشد. هنگامی

که X مجموعه X را می‌پیماید جفت‌های $(x, f(x))$ بخشی از مجموعه $X \times Y$ را تشکیل می‌دهند که آنرا **نمودار f** می‌نامند. اگر f یک تابع حقیقی با متغیر حقیقی باشد تعریف بالا همان تعریف معمولی نمودار تابع است.



شکل ۷

۷.۱- ترکیب گسترشها

۱.۷.۱- فرض می‌کنیم X و Y و Z سه مجموعه و $f: X \rightarrow Y$ ، $g: Y \rightarrow Z$

دو گسترش باشند. گسترش $x \rightarrow g(f(x))$ مجموعه X در Z را **ترکیب g و f** می‌نامند و با $g \circ f$ نشان می‌دهند (چنانچه با ضرب معمولی اشتباه نشود $g \circ f$ را به صورت gf نیز نشان می‌دهند).

۲.۷.۱ - **مثال** - فرض می‌کنیم $X=Y=Z=\mathbf{R}$ و $f(x)=\sin x$ و $g(x)=x'$ باشد. داریم $(g \circ f)(x) = (\sin x)' = \cos x$ و $(f \circ g)(x) = \sin(x')$ به طوری که دیده می‌شود در حالت کلی $g \circ f \neq f \circ g$ است.

۳.۷.۱ - **تعمیم** - اگر گسترش‌های:

$$f_1 : X_1 \rightarrow X_2, f_2 : X_2 \rightarrow X_3, \dots, f_n : X_n \rightarrow X_{n+1}$$

را داشته باشیم می‌توان ترکیب این گسترش‌ها را تشکیل داد:

$$f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1 : X_1 \rightarrow X_{n+1}$$

این ترکیب دارای ویژگی انجمنی است. یعنی:

$$f_1 \circ (f_2 \circ f_3) = (f_1 \circ f_2) \circ f_3 = f_1 \circ f_2 \circ f_3$$

۴.۷.۱ - اگر X یک مجموعه و f یک گسترش X در X باشد می‌توان $f \circ f$ و $f \circ f \circ f$ را تشکیل داد. چنانچه اشتباهی با ضرب معمولی رخ ندهد این گسترش‌ها را f^2 و f^3 و ... نشان می‌دهند.

۸.۱ - گسترش‌های انژکتیو - سورژکتیو - بی‌ژکتیو

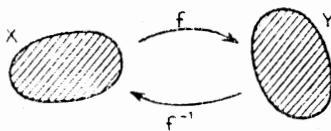
۱.۸.۱ - فرض می‌کنیم f یک گسترش X در Y باشد.

الف- **گوییم f انژکتیو** است، اگر هر دو عنصر متمایز از X دارای سایه‌های متمایز در Y باشند. به عبارت دیگر گسترش f انژکتیو است اگر از برابری $f(x) = f(x')$ (که در آن $x \in X$ و $x' \in X$) برابری $x = x'$ نتیجه شود.

ب- **گوییم f سورژکتیو** است و یا f یک گسترش X روی Y است اگر هر عنصر Y دست کم سایه یک عنصر X بوسیله f باشد.

پ- **گوییم f بی‌ژکتیو** (یا **دوسویی**) است اگر f هم انژکتیو و هم سورژکتیو باشد. یک گسترش دوسویی X در خودش را یک **تبدیل** X می‌نامند.

۲.۸.۱ - **گسترش وارون یک گسترش دوسویی** - فرض می‌کنیم $f : X \rightarrow Y$ یک گسترش دوسویی و y عنصری از Y باشد، چون f سورژکتیو است دست کم یک عنصر x از X وجود دارد به قسمی که داریم $y = f(x)$. به علاوه عنصر x یکتاست زیرا f انژکتیو نیز می‌باشد. اگر عنصر x که بدین ترتیب به y وابسته می‌گردد با $g(y)$ نمایش داده شود یک گسترش Y در X تعریف می‌گردد که آنرا g می‌نامیم. گسترش g را **گسترش وارون f** می‌نامند و با f^{-1} نشان می‌دهند.



شکل ۸

اگر x عنصری از X باشد، تنها عنصر X که سایه آن بوسیله f بر $f(x)$ منطبق می‌شود همان عنصر x است. بنابراین:

$$(۱) \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

به عبارت دیگر:

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_X$$

اگر $y \in Y$ باشد بر حسب تعریف $f^{-1}(y)$ داریم:

$$(۲) \quad f((f^{-1}(y))) = y$$

به عبارت دیگر:

$$f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$$

اگر $x \in X$ و $y \in Y$ باشد خواهیم داشت:

$$(۳) \quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

۳.۸.۱ - مثال - قرار می‌دهیم $X = Y = \mathbf{R}$ و $f(x) = x^2$. گسترش $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

انژکتیو است زیرا از $x^2 = x'^2$ نتیجه می‌شود $x = x'$. هم چنین f سورژکتیو است زیرا هر شمار حقیقی ریشه سوم یک شمار حقیقی می‌باشد. پس f دارای یک گسترش وارون g است. اگر y متعلق به \mathbf{R} باشد $g(y)$ شماری است حقیقی به قسمی که $(g(y))^2 = y$ ، به عبارت دیگر:

$$g(y) = \sqrt[2]{y}$$

(به طوری که دیده می‌شود این f^{-1} با $\frac{1}{f}$ کاملاً متفاوت است، بنابراین باید در به کار بردن

علامت f^{-1} رعایت احتیاط را نمود.)

۴.۸.۱ - قضیه - فرض می‌کنیم X و Y دو مجموعه و $f: X \rightarrow Y$

$g: Y \rightarrow X$ دو گسترش باشند به طوری که داشته باشیم $g \circ f = \text{id}_X$. در این صورت

f انژکتیو و g سورژکتیو است.

اثبات - فرض می‌کنیم x و x' متعلق به X باشند داشته باشیم $f(x) = f(x')$

بنابراین خواهیم داشت $g(f(x)) = g(f(x'))$ یعنی $x = x'$ ، پس f انژکتیو است. همچنین اگر u عنصری از X باشد داریم $u = g(f(u))$ پس u سایه عنصر $f(u)$ از Y بوسیله g است. بنابراین g سورژکتیو است.

۵.۸.۱ - قضیه - فرض می‌کنیم X و Y دو مجموعه و $f: X \rightarrow Y$ و

$g: Y \rightarrow X$ دو گسترش باشند به قسمی که داشته باشیم $f \circ g = \text{id}_Y$ و $g \circ f = \text{id}_X$.
در این صورت f و g دوسویی است و داریم $f = g^{-1}$ ، $g = f^{-1}$.

اثبات - با استفاده از ۴.۸.۱، f انژکتیو و g سورژکتیو و همچنین g انژکتیو و f سورژکتیو است. بنابراین f و g دوسویی هستند. از طرف دیگر اگر y عنصری از Y باشد از برابری $f(g(y)) = y$ برمی‌آید که $g(y) = f^{-1}(y)$. پس $g = f^{-1}$. به همین ترتیب ثابت می‌شود که $f = g^{-1}$.

۶.۸.۱ - تبصره - هرگاه $f: X \rightarrow Y$ یک گسترش دوسویی باشد f^{-1}

نیز دوسویی است و داریم $f^{-1} = (f^{-1})^{-1}$.

زیرا $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$ و $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$ و با استفاده از ۲.۸.۱ کافی است که قضیه

۵.۸.۱ را با در نظر گرفتن $g = f^{-1}$ به کار ببریم.

۸.۸.۱ - قضیه - فرض می‌کنیم X و Y دو مجموعه با n اربابان n عنصری

و f یک گسترش X در Y باشد، شرط‌های زیر هم‌ارزند:

(I) - f انژکتیو است

(II) - f سورژکتیو است

(III) - f دوسویی است

اثبات - (I) \Leftrightarrow (II) : برای اینکه f سورژکتیو باشد بایا و بسنده است که $f(X)$

نیز دارای n عنصر باشد، به عبارت دیگر شماره عنصرهای X برابر با شماره عنصرهای $f(X)$ باشد، پس بایا و بسنده است که f انژکتیو باشد.

چون شرط (III) مجموع دوشروط (I) و (II) است به آسانی دیده می‌شود که شرط (III)

هم‌ارز با هر یک از شرط‌های (I) و (II) است.

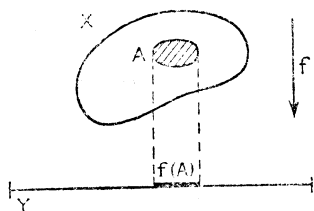
۱.۹ - سایه مستقیم و سایه وارون

فرض می‌کنیم $f: X \rightarrow Y$ یک گسترش باشد.

۱.۹.۱ - اگر $A \subset X$ باشد مجموعه تمام عنصرهای $f(x)$ از Y را هنگامیکه x

همه A را می‌پیماید، **سایه مستقیم** A به وسیله f و یا **سایه A به وسیله f** می‌نامند و آن را با $f(A)$ نمایش می‌دهند. مجموعه $f(X)$ را **مجموعه مقادیر f** و در برخی حالات برای

سادگی **سایه f** می‌نامند. عبارت « f سورژکتیو است» بیان می‌کند که $f(X) = Y$ است.



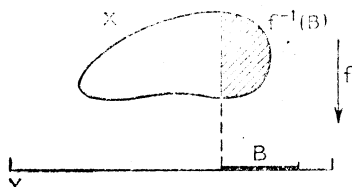
شکل ۹

۱.۹.۲ - اگر $B \subset Y$ باشد مجموعه تمام نقطه‌های x از X را به قسمی که $f(x) \in B$

باشد، **سایه وارون B به وسیله f** می‌نامند. سایه وارون B به وسیله f را با $f^{-1}(B)$

نمایش می‌دهند (هرچند که ممکن است f^{-1} همیشه معین نباشد). چنانچه B تنها دارای

یک عنصر b باشد بجای $f^{-1}(\{b\})$ به نوشتن $f^{-1}(b)$ اکتفا می‌کنیم.



شکل ۱۰

۱.۹.۳ - اگر f دوسویی باشد، علامت $f^{-1}(B)$ دو معنی دارد: اول آنکه $f^{-1}(B)$ سایه

وارون B به وسیله f است که آن را I می‌نامیم. دوم آنکه $f^{-1}(B)$ سایه B به وسیله گسترش f^{-1}

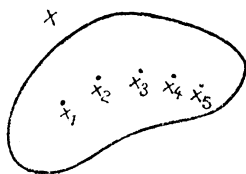
است که آن را با I' نمایش می‌دهیم. البته مجموعه‌های I و I' یکی هستند. زیرا اگر

$x \in I$ باشد، $y = f(x)$ عنصری از B است و چون $x = f^{-1}(y)$ است پس $x \in I'$.

به وارون اگر $x \in I'$ باشد خواهیم داشت $x = f^{-1}(y)$ که در آن y عنصری از B است و چون $f(x) = y$ است پس $x \in I$.

۱. ۱۰. خانواده

۱. ۱۰. ۱. مجموعه E داده شده است. یک دنباله n عنصری از X بدین ترتیب بدست میآید که به هر شماره i ($i = 1, 2, \dots, n$) یک عنصر x_i از X نسبت دهیم. بنابراین یک دنباله n عنصری یک گسترش $\{1, 2, \dots, n\}$ در X است. اگر x این گسترش را نشان دهد، باید مقادیر x را به صورت $x(1), x(2), \dots, x(n)$ نوشت؛ ولی معمولاً این مقادیر را به صورت x_1, x_2, \dots, x_n می‌نویسند (این طرز نوشتن را اندیس گذاری می‌نامند) و چنین دنباله‌ای را بصورت (x_1, x_2, \dots, x_n) و یا $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ نشان می‌دهند.



شکل ۱۱

۲. ۱۰. ۱. تعریف یک دنباله بی‌پایان به روشی مشابه است. بدین معنی که یک دنباله بی‌پایان از عنصرهای X یک گسترش $\{1, 2, 3, \dots\}$ در X می‌باشد. یک چنین دنباله‌ای با (x_1, x_2, \dots) و یا $(x_i)_{i \geq 1}$ نموده می‌شود. همچنین میتوان جمله‌های دنباله را از اندیس $0, 1, 2, \dots$ و یا n شروع کرد. اگر (p_1, p_2, p_3, \dots) یک دنباله کاملاً افزایشی از شماره‌های مثبت باشد و قرار دهیم:

$$x_{p_1} = y_1, \quad x_{p_2} = y_2, \quad x_{p_3} = y_3, \quad \dots$$

در این صورت دنباله (y_1, y_2, y_3, \dots) یک دنباله استخراج شده از دنباله (x_1, x_2, x_3, \dots) نامیده می‌شود.

۳. ۱۰. ۱. تعمیم - گیریم X یک مجموعه دلخواه و I مجموعه دیگری باشد که آنرا مجموعه اندیس‌ها می‌نامیم. یک گسترش I در X را برحسب تعریف یک خانواده از

عنصرهای X اندیس دار شده با I می نامند. چنین خانواده‌ای را با $(x_i)_{i \in I}$ و در صورتی که اشتباهی رخ ندهد تنها با (x_i) نمایش می‌دهند. دو مفهوم خانواده و گسترش تفاوتی ندارند و تنها از دو دید مختلف در نظر گرفته شده‌اند.

۱.۱۰.۱- **یک خانواده مجموعه** خانواده‌ای است که هر عنصر آن یک مجموعه باشد. برای چنین خانواده‌ای می‌توان مفاهیم اجتماع و مقطع را، که تا کنون برای شماره با پایانی از مجموعه‌ها تعریف شده است، تعمیم داد. اجتماع خانواده مجموعه $(X_i)_{i \in I}$ که آنرا با $\bigcup_{i \in I} X_i$ ویا بطور اختصار با $\bigcup X_i$ نشان می‌دهند، عبارت از مجموعه اشیایی است که هر یک از آنها دست کم به یکی از X_i ها تعلق داشته باشد و مقطع X_i ها که آن را با $\bigcap_{i \in I} X_i$ ویا با $\bigcap X_i$ نشان می‌دهند، مجموعه اشیایی است که هر یک از آن‌ها متعلق به همه X_i ها باشد.

۱۱.۱- بستگی هم‌ارزی

۱.۱۱.۱- فرض می‌کنیم E یک مجموعه باشد. هر ویژگی که مربوط به جفت‌های (x, y) از عنصرهای مجموعه E باشد یک **بستگی دوتایی** در E نامیده می‌شود.

۲.۱۱.۱- **مثال:**

۱- اگر E مجموعه خطوط واقع در یک صفحه D و D' متعلق به E باشد عبارت « D بر D' عمود است» یک بستگی دوتایی در E است.

۲- اگر مجموعه بردارهای فضا را با E نمایش دهیم عبارت «دو بردار \vec{V} و \vec{W} همسنگ هستند» یک بستگی دوتایی در E است.

۳- اگر E مجموعه نقاط یک صفحه و Δ خطی از این صفحه باشد عبارت «نقاط M و N دارای یک تصویر قائم روی Δ هستند» یک بستگی دوتایی در E می‌باشد.

۴- فرض می‌کنیم E مجموعه شماره‌های مثبت و منفی یعنی \mathbf{Z} و a عنصری از \mathbf{Z} باشد. اگر n و n' دو عنصر از \mathbf{Z} باشند، گوئیم که n و n' **بامقیاس a برابرند** و می‌نویسیم $n \equiv n' \pmod{a}$ هرگاه $n - n'$ بر a بخش پذیر باشد. در این صورت عبارت « n و n' بامقیاس a برابرند» یک بستگی دوتایی در \mathbf{Z} است.

۳.۱۱.۱- فرض می‌کنیم R یک بستگی دوتایی در مجموعه E باشد (برای سادگی، هنگامی که جفت (x, y) در بستگی R صدق کند می‌نویسیم xRy). گوییم که R یک بستگی هم‌ارزی است، هرگاه :

- ۱- بستگی R بازتابی باشد یعنی برای هر عنصر x از E داشته باشیم xRx .
- ۲- بستگی R متقارن باشد یعنی برای هر دو عنصر x و y از E داشته باشیم :

$$xRy \implies yRx$$

- ۳- بستگی R متعدی باشد یعنی برای هر x ، y و z متعلق به E داشته باشیم :

$$(xRy \text{ و } yRz) \implies xRz$$

هنگامی که R یک بستگی هم‌ارزی باشد، عبارت xRy را چنین می‌خوانند « x ر y نسبت به R هم‌ارزند».

۴.۱۱.۱- در مثال ۱ شماره ۲.۱۱.۱، بستگی متقارن است ولی بازتابی و متعدی نیست. همه بستگی‌هایی که در مثال‌های ۲ و ۳ و ۴ همین شماره دیده‌شد بستگی‌های هم‌ارزی اند. در مثال‌های ۲ و ۳ این مطلب آشکار است و برای مثال چهارم آنرا ثابت می‌کنیم. اگر $n \in \mathbb{Z}$ باشد داریم $n - n = 0 = a$ پس بستگی بازتابی است. اگر $n \in \mathbb{Z}$ و $n' \in \mathbb{Z}$ و $k \in \mathbb{Z}$ چنان باشند که داشته باشیم $n - n' = ka$ ، خواهیم داشت $n' - n = (-k)a$ پس بستگی متقارن است. اگر n, n', k, k' متعلق به \mathbb{Z} باشد بطوریکه داشته باشیم $n - n' = ka$ و $n' - n'' = k'a$ خواهیم داشت :

$$n - n'' = (n - n') + (n' - n'') = (k + k')a$$

پس بستگی متعدی است.

۵.۱۱.۱- مثال کلی بستگی هم‌ارزی - مجموعه E را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم (X_i) یک خانواده از بخش‌های E باشد به قسمی که اجتماع آن‌ها برابر با E و مقطع دو X_i متمایز تهی باشد. برای هر دو عنصر x و y از E که متعلق به یک X_i باشند می‌نویسیم xRy در این صورت R یک بستگی هم‌ارزی در E است.

۱- فرض می‌کنیم $x \in E$ باشد چون داریم $\bigcup X_i = E$ بنابراین یک اندیس i وجود دارد به قسمی که $x \in X_i$ باشد در این صورت خواهیم داشت xRx . یعنی R بازتابی است.

۲- روشن است که R متقارن می‌باشد .

۳- فرض می‌کنیم x ، y و z متعلق به E باشند و داشته باشیم xRy و yRz .
 در این صورت x و y هر دو متعلق به یک X_i و y و z هر دو متعلق به یک X_j می‌باشند .
 چون $X_i \cap X_j = \emptyset$ است و دو X_i متمایز جدا از هم اند ، پس داریم $X_i = X_j$ ، و از آنجا
 نتیجه می‌شود که x و z هر دو متعلق به X_i می‌باشند و بستگی xRz برقرار است . پس R
 متعدی است .

در شماره ۹.۱۱.۱ خواهیم دید که مثال بالا کلی‌ترین صورت بستگی هم‌ارزی است .

۶.۱۱.۱- **کلاسهای هم‌ارزی** - فرض می‌کنیم R یک بستگی هم‌ارزی روی
 مجموعه E باشد. اگر $x \in E$ باشد، مجموعهٔ عنصرهای $y \in E$ را که نسبت به R با x هم‌ارزند
 کلاس هم‌ارزی x می‌نامند .

۷.۱۱.۱- در مثال ۴ شمارهٔ ۲.۱۱.۱ کلاس هم‌ارزی یک شمار n عبارت است از

مجموعهٔ $\{ \dots, n-2a, n-a, n, n+a, n+2a, \dots \}$ که به **کلاس هم‌ارزی**
 n با **مقیاس** a موسوم است . یک کلاس هم‌ارزی n با مقیاس a را یک **شمار درست** با
 مقیاس a نیز می‌نامند .

۸.۱۱.۱- **قضیه** - فرض می‌کنیم R یک بستگی هم‌ارزی در E باشد. اگر کلاس

هم‌ارزی x نسبت به R را با C_x بنماییم داریم :

$$x \in C_x \quad \text{--- (I)}$$

$$xRy \iff C_x = C_y \iff C_x \cap C_y \neq \emptyset \quad \text{--- (II)}$$

اثبات - چون داریم xRx پس $x \in C_x$. بنابراین (I) برقرار است . برای اثبات

قسمت دوم به روش دوری عمل می‌کنیم .

۱- فرض می‌کنیم بستگی xRy برقرار باشد . اگر $z \in C_y$ باشد خواهیم داشت yRz
 و از آنجا xRz . بنابراین $z \in C_x$ و یا $C_y \subset C_x$. همچنین داریم yRx پس $C_x \subset C_y$
 و در نتیجه $C_x = C_y$.

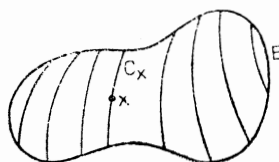
۲- فرض می‌کنیم $C_x = C_y$. در این صورت $C_x \cap C_y = C_x$ ، که با در نظر گرفتن

$$(I) \text{ داریم } C_x \neq \emptyset .$$

۳- فرض می‌کنیم $C_x \cap C_y \neq \emptyset$. بنابراین عنصری مانند z متعلق به $C_x \cap C_y$

وجود دارد به قسمی که داریم xRz و yRz و از آنجا خواهیم داشت zRy و در نتیجه xRy .

۹.۱۱.۱- به این ترتیب با استفاده از (I) ثابت می‌شود که اجتماع کلاسهای هم‌ارزی برابر با E است و بنابراین قسمت (II) دو کلاس هم‌ارزی متمایز، جدا از هم‌اند. بعلاوه تنها هنگامی بستگی xRy برقرار است که x و y هر دو متعلق به یک کلاس هم‌ارزی باشند. بنابراین به صورت دیگری از مثال ۹.۱۱.۱ می‌رسیم.



شکل ۱۲

۱۰.۱۱.۱- مجموعه خارج قسمت - با مفروضات پیش، کلاسهای هم‌ارزی نسبت به R یک مجموعه تشکیل می‌دهند که به مجموعه خارج قسمت E بر R موسوم است و با E/R نشان داده می‌شود.

۱۱.۱۱.۱- گسترش کانونیک E در E/R - بر حسب تعریف گسترش $C_x \rightarrow x$ مجموعه E در E/R گسترش کانونیک E در E/R نامیده می‌شود. این گسترش سورژکتیو است، زیرا هر عنصر E/R یک کلاس هم‌ارزی است.

اگر $u \in E/R$ باشد، هر عنصر دلخواه از E را که متعلق به u است یک نماینده u می‌نامند.

۱۲.۱- تجزیه کانونیک یک گسترش

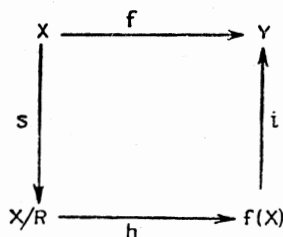
۱۰.۱۲.۱- فرض می‌کنیم $f: X \rightarrow Y$ یک گسترش باشد. اگر xRy را همان‌برابری بگیریم، روشن است که R یک بستگی هم‌ارزی در X است. اگر s گسترش کانونیک X در X/R باشد این گسترش سورژکتیو است (۱.۱۱.۱). چنانچه i گسترش همانی $f(X)$ در Y باشد به آسانی دیده می‌شود که این گسترش انژکتیو است.

قضیه :

(I) - تنها يك گسترش h از X/R در $f(X)$ وجود دارد به قسمی که $f=i \circ h \circ s$ باشد .

(II) - گسترش h دوسویی است .

(III) - اگر u عنصری از X/R باشد سایه آن بوسیله h برابر با سایه یک نماینده دلخواه u بوسیله f است .



شکل ۱۳

اثبات - فرض می کنیم u عنصری از X/R باشد ، یک نماینده x از u را انتخاب می کنیم . می خواهیم نشان دهیم که $f(x)$ بستگی به نماینده انتخاب شده نداشته و تنها بستگی به u دارد که در این صورت می توان قرارداد $f(x) = h(u)$. به این ترتیب گسترش h از X/R در $f(X)$ که دارای ویژگی (III) است معین می گردد .

اگر x' یک نماینده دیگری از u باشد، x و x' متعلق به یک کلاس هم ارزی هستند و بر حسب تعریف داریم $f(x) = f(x')$. یعنی $f(x)$ به نماینده انتخاب شده بستگی ندارد . چنانچه a متعلق به X باشد ، عنصر a یک نماینده $s(a)$ است و چون بنا به تعریف h داریم $h(s(a)) = f(a)$ درستی برابری $i(h(s(a))) = h(s(a))$ آشکار است . پس خواهیم داشت $f = i \circ h \circ s$.

فرض می کنیم h' یک گسترش دیگر X/R در $f(X)$ باشد به قسمی که داشته باشیم $f = i \circ h' \circ s$. می خواهیم نشان دهیم که برای هر عنصر u از X/R داریم :

$$h(u) = h'(u)$$

اگر x یک نماینده u باشد $u = s(x)$ است و بعلاوه :

$$h(u) = i(h(u)) = i(h(s(x))) = f(x)$$

$$h'(u) = i(h'(u)) = i(h'(s(x))) = f'(x)$$

پس (I) برقرار است .

برای اثبات درستی (II) به روش زیر عمل می کنیم :

فرض می کنیم y عنصری از $f(X)$ باشد . در این صورت عنصری مانند x در X وجود دارد به قسمی که داریم $y = f(x)$ و یا $y = i(h(s(x))) = h(s(x))$ پس h سورژکتیو است . گیریم u و u' متعلق به X/R باشند به طوری که داشته باشیم $h(u) = h(u')$. چنانچه x یک نماینده u و x' یک نماینده u' باشد ، خواهیم داشت :

$$h(u) = f(x) , h(u') = f(x')$$

پس $f(x) = f(x')$ یعنی x و x' در یک کلاس هم ارزی نسبت به R واقع اند . به عبارت دیگر $u = u'$ است . پس گسترش h انژکتیو است .

۲۰۱۲-۲. تجزیه $f = i \circ h \circ s$ را تجزیه کانونیک f می نامند . به طوری که دیده می شود هر گسترش f را می توان به سه گسترش s و h و i تجزیه کرد به قسمی که گسترشهای s و i از نوع ویژه ای می باشند و گسترش h دوسویی است .

۱۳.۱- بستگی ترتیبی

۱۰۱۳.۱- فرض می کنیم X یک مجموعه باشد . بستگی $x \leq y$ در X یک بستگی

ترتیبی نامیده می شود ، هر گاه :

۱- برای هر $x \in X$ داشته باشیم $x \leq x$

۲- برای هر سه عنصر x و y و z از X ، $(x \leq y , y \leq z) \implies x \leq z$ ،

۳- برای هر دو عنصر x و y از X ، $(x \leq y , y \leq x) \implies x = y$ ،

در این صورت X را یک مجموعه مرتب به وسیله بستگی \leq می نامند . اگر $x \leq y$ و

$y \neq x$ باشد می نویسند $y < x$ و یا $y > x$. بستگی $x \leq y$ را به صورت $y \geq x$ نیز می نویسند .

۲۰۱۳.۱- مثال :

۱- اگر $X = \mathbf{R}$ باشد بستگی معمولی \leq بستگی ترتیبی است .

۲- اگر X مجموعه بخش‌های یک مجموعه A باشد. بستگی $x \subset y$ بین عنصرهای X یک بستگی ترتیبی است.

۳- اگر $X = \{1, 2, 3, \dots\}$ باشد y بر x بخش پذیر است « یک بستگی ترتیبی بین عنصرهای X است.

۱۳.۱-۳. مجموعه تماماً مرتب - اگر X مجموعه مرتبی باشد، دو عنصر x و y را بایکدیگر سنجیدنی می‌نامند، چنانچه یکی از بستگی‌های $x \leq y$ و $y \leq x$ برقرار باشد. هرگاه هر دو عنصر دلخواه X بایکدیگر سنجیدنی باشند، می‌گویند X تماماً مرتب است. در مثال ۱ بالا مجموعه X تماماً مرتب است، اما مثال‌های ۲ و ۳ دارای این ویژگی نیستند.

۱۳.۱-۴. توابع افزایشی - فرض می‌کنیم X و Y دو مجموعه مرتب، f یک گسترش X در Y و x و y دو عنصر دلخواه از X باشند. گوئیم:

الف - f افزایشی است اگر $x < y \implies f(x) \leq f(y)$

ب - f کاملاً افزایشی است اگر $x < y \implies f(x) < f(y)$

پ - f کاهشی است اگر $x < y \implies f(x) \geq f(y)$

ت - f کاملاً کاهشی است اگر $x < y \implies f(x) > f(y)$

ث - f یک‌نوا است اگر f افزایشی و یا کاهشی باشد.

ج - f کاملاً یک‌نوا است اگر f کاملاً افزایشی و یا کاملاً کاهشی باشد.

۱۳.۱-۵. تعریف فاصله در \mathbf{R} - دو عنصر a و b از \mathbf{R} را به طوری که $a \leq b$

باشد در نظر می‌گیریم:

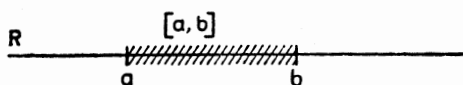
مجموعه شماره‌های حقیقی x را به طوری که $a \leq x \leq b$ باشد با $[a, b]$ ،

مجموعه شماره‌های حقیقی x را به طوری که $a < x < b$ باشد با $]a, b[$ ،

مجموعه شماره‌های حقیقی x را به طوری که $a \leq x < b$ باشد با $[a, b[$ ،

مجموعه شماره‌های حقیقی x را به طوری که $a < x \leq b$ باشد با $]a, b]$ ،

نشان می‌دهیم.



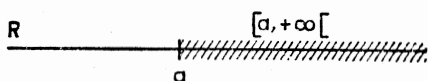
شکل ۱۴

این مجموعه‌ها را فاصله به آغاز a و انجام b (و گاهی به انجام‌های a و b) می‌نامند.

$[a, b]$ را فاصله بسته و $]a, b[$ را فاصله باز و $[a, b[$ و $]a, b]$ را فاصله های نیم باز می گویند.

مجموعه نقاط x متعلق به \mathbf{R} را وقتی که $x \geq a$ است با $[a, +\infty[$ نشان می دهند. به همین روش $]a, +\infty[$ و $] -\infty, a[$ و $] -\infty, a]$ را تعریف می کنند. اغلب مجموعه \mathbf{R} را با $] -\infty, +\infty[$ نشان می دهند. این مجموعه هائیز فاصله نامیده می شوند. مثلاً $]a, +\infty[$ فاصله به آغاز a وانجام $+\infty$ می باشد.

یک نقطه از یک فاصله را که متمایز از انجام های آن باشد، یک نقطه درون فاصله می نامند.



شکل ۱۰

۱۴.۱- کران بالا - بزرگترین عنصر - کناره بالا

فرض می کنیم X یک مجموعه مرتب و Y بخشی از X باشد.

۱۰.۱۴.۱- عنصر a از X را یک کران بالای بخش Y می نامند، اگر برای هر عنصر

$y \in Y$ داشته باشیم $y \leq a$. چنانچه برای هر عنصر $y \in Y$ نابرابری $a \leq y$ برقرار باشد، a را یک کران پایین Y خوانند.

مثال - $X = \mathbf{R}$ را با بستگی ترتیبی معمولی در نظر می گیریم. بخش :

$$Y = [0, +\infty[$$

دارای کران بالا نیست ولی تمام شمارهای منفی و صفر کران های پایین Y هستند.

اگر Y هم دارای کران بالا و هم دارای کران پایین باشد، آنرا **کراندار** می نامند.

۲.۱۴.۱- عنصر a از X را **بزرگترین عنصر** Y می گویند، اگر a متعلق به Y

و یک کران بالای Y باشد. اگر Y دارای بزرگترین عنصر باشد این عنصر یکتاست. زیرا

اگر a و a' هر دو بزرگترین عنصر Y باشند، چون a یک کران بالای Y است پس داریم

$a' \leq a$ و به همین دلیل خواهیم داشت $a' \leq a$ و از آنجا $a' = a$ است. به همین ترتیب

می توان **کوچکترین عنصر** Y را تعریف و یکتا بودن آنرا ثابت کرد.

مثال - اگر $X = \mathbf{R}$ و $Y = [0, 1[$ باشد، Y دارای کوچکترین عنصر (صفر)

است، ولی دارای بزرگترین عنصر نیست.

۳.۱۴.۱- مفهوم کنااره بالای Y که در زیر تعریف می‌شود، تعمیم مفهوم بزرگترین عنصر است و در نتیجه دارای ویژگی‌های کمتری است. ولی برتری مفهوم کنااره بالا بر بزرگترین عنصر این است که گاهی ممکن است کنااره بالا وجود داشته باشد، اما بزرگترین عنصر وجود نداشته باشد.

کوچکترین عنصر مجموعه کران‌های بالای Y را کنااره بالای Y می‌نامند. اگر کنااره بالا وجود داشته باشد یکناست (۲.۱۴.۱). به روش مشابه می‌توان کنااره پایین Y را تعریف کرد.

۴.۱۴.۱- قضیه- فرض می‌کنیم $a \in X$ باشد. چنانچه a بزرگترین عنصر Y باشد کنااره بالای Y و چنانچه a کنااره بالای Y باشد a یک کران بالای Y خواهد بود (وارون قضیه درست نیست).

اثبات- درستی قسمت دوم قضیه روشن است. زیرا اگر a کنااره بالای Y باشد a یک کران بالای Y است. برای اثبات قسمت اول گوئیم اگر a بزرگترین عنصر Y باشد a یک کران بالای Y است. فرض می‌کنیم b یک کران بالای دیگر Y باشد، چون $a \in Y$ است داریم $a \leq b$ بنابراین a کوچکترین کران بالای Y می‌باشد. به عبارت دیگر a کنااره بالای Y است.

۵.۱۴.۱- **مثال-** فرض می‌کنیم $X = \mathbf{R}$ و $Y = [0, 1]$ باشد. روشن است که شمارا کنااره بالای Y است (ولی بزرگترین عنصر Y نیست زیرا $1 \notin Y$).

۶.۱۴.۱- کنااره بالای Y را در صورتی که وجود داشته باشد، با $\sup Y$ و کنااره پایین Y را در صورتی که وجود داشته باشد، با $\inf Y$ می‌نمایند.

۷.۱۴.۱- برای اینکه Y دارای کنااره بالا باشد لازم است که Y دارای کران بالا باشد. در حالت کلی این شرط کافی نیست. با وجود این اگر یک بخش غیرتهی از \mathbf{R} دارای کران بالا باشد دارای کنااره بالاست. هم‌چنین اگر یک بخش غیرتهی از \mathbf{R} دارای کران پایین باشد، دارای کنااره پایین خواهد بود (رجوع شود به ۳.۲.۲ و ۴.۲.۲ کتاب آذالیز).

۸.۱۴.۱- فرض می‌کنیم که Y بخشی از \mathbf{R} باشد. اگر Y دارای کران بالا نباشد بر حسب قرارداد گوئیم که کنااره بالای آن $+\infty$ است و اگر Y دارای کران پایین نباشد بر حسب قرارداد گوئیم که $-\infty$ کنااره پایین آن است.

با این قرارداد هربخش (با پایان و یا بی پایان) از \mathbf{R} دارای کنارۀ بالا و کنارۀ پایین خواهد بود.

۹.۱۴.۱- قضیه - فرض می‌کنیم $Y \subset \mathbf{R}$ و a عنصری از \mathbf{R} و یا $+\infty$

باشد. برای اینکه a کنارۀ بالای Y باشد بایا و بسنده است که دو شرط زیر برای a برقرار باشد:

۱- برای هر $y \in Y$ داریم $a \geq y$.

۲- برای هر شمار b کوچکتر از a یک عنصر y متعلق به Y وجود

دارد به قسمی که $y > b$.

اثبات - وقتی که Y دارای کران بالانست قضیه روشن است. بنابراین فرض می‌کنیم که Y دارای کران بالا باشد. در این صورت $+\infty$ کنارۀ بالای Y نیست و بعلاوه $+\infty$ در شرط ۲ قضیه صدق نمی‌کند. پس فرض می‌کنیم که a عنصری از \mathbf{R} است. با توجه به اینکه b یک کران بالای Y نیست پس عنصری مانند y متعلق به Y وجود دارد به قسمی که داریم $b < y$ ، به این ترتیب شرط‌های ۱ و ۲ بیان می‌کنند که a کنارۀ بالای Y است.

۱۰.۱۴.۱- تعریف - فرض می‌کنیم E یک مجموعه دلخواه و $f: E \rightarrow \mathbf{R}$

یک تابع حقیقی در E باشد. کنارۀ بالای مجموعه مقادیر f یعنی $\sup f(E)$ را کنارۀ بالای f در E می‌نامند.

به همین ترتیب کنارۀ پایین f در E تعریف می‌شود. این کنارها همیشه وجود

دارند و ممکن است با پایان و یا بی پایان باشند و آنها را به ترتیب به صورت‌های زیر نشان می‌دهند:

$$\sup_{x \in E} f(x) \quad , \quad \inf_{x \in E} f(x)$$

اگر $f(E)$ دارای کران بالا (کران پایین) باشد، گوئیم که f در E دارای کران بالا (کران پایین) است. اگر f در E هم دارای کران بالا و هم دارای کران پایین باشد، گوئیم که f کراندار است.

۱۵.۱- آنالیز ترکیبی

۱.۱۰.۱- قضیه- فرض می‌کنیم مجموعه Y دارای p عنصر و مجموعه X دارای n عنصر باشد و داشته باشیم $n \geq p$. در این صورت مجموعه گسترش‌های انژکتیو Y در X دارای $n(n-1)(n-2) \cdots (n-p+1)$ عنصر است.

اثبات - اگر y_1, y_2, \dots, y_p عنصرهای Y باشند، برای تعیین یک گسترش انژکتیو Y در X بایا و پسندیده است که مقادیر متمایز $f(y_1), f(y_2), \dots, f(y_p)$ در X داده شده باشند. انتخاب $f(y_1)$ به n صورت ممکن است. بعد از انتخاب $f(y_1)$ می‌توان $f(y_2)$ را به $n-1$ روش برگزید. پس از انتخاب $f(y_1)$ و $f(y_2)$ برگزیدن $f(y_3)$ به $n-2$ صورت امکان دارد. اگر به همین ترتیب عمل را ادامه دهیم، به فرمول بالا می‌رسیم.

۲.۱۰.۱- مثال - فرض می‌کنیم $Y = \{1, 2, \dots, p\}$ باشد. یک گسترش Y در X عبارت است از یک دنباله p تایی از عنصرهای X . همچنین یک گسترش انژکتیو Y در X یک دنباله p تایی از عنصرهای X است به قسمی که p عنصر این دنباله متمایز باشند. چنین دنباله‌ای را یک ترتیب p تایی از عنصرهای X نیز می‌نامند.
مثلاً ترتیب‌های دو تایی عنصرهای a, b, c, d عبارتند از:

$$(a,b), (a,c), (a,d), (b,a), (b,c), (b,d), \\ (c,a), (c,b), (c,d), (d,a), (d,b), (d,c).$$

چنانکه دیده می‌شود، شماره این ترتیب‌ها برابر با $1 \cdot 2$ می‌باشد و با قضیه ۱.۱۰.۱ مطابقت دارد.

۳.۱۰.۱- قضیه - چنانچه X یک مجموعه n عنصری باشد، شماره تبدیل‌های مجموعه X برابر با $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 1$ است ($n!$ را بخوانید فاکتوریل n).

اثبات - در قضیه پیش فرض می‌کنیم که $X=Y$ باشد. در این صورت مجموعه گسترش‌های انژکتیو X در X دارای $n!$ عنصر خواهد بود. از طرف دیگر با استفاده از شماره ۷.۸.۱ نتیجه می‌شود که گسترش‌های انژکتیو X در X همان تبدیل‌های X می‌باشند.

۴.۱۰.۱- مثال - فرض می‌کنیم $X = \{1, 2, \dots, n\}$ باشد. یک تبدیل X

عبارت از شمارهای ۱، ۲، ...، n است که به ترتیب معینی مرتب شده‌اند. مثلاً تبدیل‌های شمارهای ۱ و ۲ و ۳ عبارتند از $(۱, ۲, ۳)$ ، $(۱, ۳, ۲)$ ، $(۲, ۱, ۳)$ ، $(۲, ۳, ۱)$ ، $(۳, ۱, ۲)$ و $(۳, ۲, ۱)$. به طوری که دیده می‌شود شماره این تبدیل‌ها برابر با $۶ = ۳!$ می‌باشد.

۱۰۵.۱- قضیه- مجموعه X را که دارای n عنصر است در نظر می‌گیریم.

چنانچه p شماری کوچکتر از n باشد، شماره بخش‌های p عنصری مجموعه X برابر با $\frac{n(n-1) \cdots (n-p+1)}{p!}$ است.

اثبات - A را مجموعه گسترش‌های انژکتیو $\{1, 2, \dots, p\}$ در X می‌گیریم و فرض می‌کنیم B مجموعه همه بخش‌های p عنصری مجموعه X باشد. برای هر $f \in A$ سایه $\{1, 2, \dots, p\}$ به وسیله f عنصری از B است. به این ترتیب یک گسترش A در B تعریف می‌شود که آنرا F می‌نامیم. برای هر عنصر Y از B (یعنی برای هر بخش p عنصری مجموعه X) شماره عنصرهای $f \in A$ که برای آنها داریم $F(f) = Y$ ، برابر است با شماره گسترش‌های دوسویی $\{1, 2, \dots, p\}$ روی Y . این شمار با توجه به ۱.۸.۱ و ۱.۱۰.۱ برابر با $p!$ است. پس اگر شماره عنصرهای B برابر با b باشد، شماره عنصرهای A برابر با $b \cdot p!$ خواهد شد. از طرف دیگر می‌دانیم که شماره عنصرهای A برابر با $(n-p+1) \cdots n$ است (۱.۱۰.۱). پس قضیه ثابت می‌شود.

۱۰۶.۱- بخش‌های p عنصری مجموعه X را ترکیب‌های p تایی عنصرهای

X نیز می‌نامیم. شماره این بخش‌ها، که در ۱.۱۰.۱ داده شده است، با C_p^n نموده می‌شود (در اینجا p را نباید با نما اشتباه کرد). مثلاً ترکیب‌های دوتایی عنصرهای a, b, c, d عبارتند از:

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$$

به طوری که دیده می‌شود شماره این ترکیب‌ها برابر است با $\frac{۴ \cdot ۳}{۲} = ۶$

۱۰۷.۱- چنانچه صورت و مخرج عبارت C_p^n را در:

$$(n-p)(n-p-1) \cdots 1 = (n-p)!$$

ضرب کنیم ، خواهیم داشت :

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

۸.۱۰.۱- داریم $C_n^n = C_n^0 = 1$ ، زیرا تنها بخش n عنصری X عبارت از خود X است و تنها بخش X که دارای هیچ عنصر نباشد مجموعه تهی می باشد . این شمار با استفاده از ۷.۱۰.۱ نیز بدست می آید (بشرط اینکه $0!$ را بنا به قرارداد برابر بایک بگیریم) .
 ۹.۱۰.۱- با استفاده از شماره ۷.۱۰.۱ چنین داریم :

$$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$$

$$C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

۱۰.۱۰.۱- قضیه - همواره دستور زیر برقرار است :

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

اثبات - مجموعه X را که دارای n عناصر است در نظر می گیریم . عنصر x_0 از X را انتخاب کرده و فرض می کنیم B مجموعه بخش های p عنصری مجموعه X و B' مجموعه بخش های p عنصری مجموعه X که x_0 را دربردارند و B'' مجموعه بخش های p عنصری مجموعه X که x_0 را دربرندارند باشند . اگر b و b' و b'' به ترتیب شماره عنصرهای B و B' و B'' باشند، داریم :

$$b = b' + b'' \quad , \quad b = C_n^p$$

اما از طرفی b'' برابر با شماره بخش های p عنصری مجموعه $\{x_0\} - X$ و یا به عبارت دیگر برابر با C_{n-1}^p است، و از طرف دیگر هر بخش p عنصری مجموعه X که x_0 را دربردارد یک بخش $p-1$ عنصری مجموعه $\{x_0\} - X$ را معین می کند و به وارون . بنابراین داریم :

$$b' = C_{n-1}^{p-1}$$

در نتیجه دستور بالا به دست می آید.

۱۱.۱۵.۱ C_n^p - هارا درجدول زیر به قسمی مرتب می کنیم که n نماینده سطرها

و p نماینده ستونها باشد :

$$C_0^0$$

$$C_1^0 \quad C_1^1$$

$$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$$

$$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$$

$$C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$$

$$C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5$$

با در نظر گرفتن برابری های $C_n^0 = C_n^n = 1$ و $C_n^p = C_n^{n-p} + C_n^{p-1}$ می توان هر سطر را با در دست داشتن سطرپیش حساب کرد .

	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۰	۱								
۱	۱	۱							
۲	۱	۲	۱						
۳	۱	۳	۳	۱					
۴	۱	۴	۶	۴	۱				
۵	۱	۵	۱۰	۱۰	۵	۱			
۶	۱	۶	۱۵	۲۰	۱۵	۶	۱		
۷	۱	۷	۲۱	۳۵	۳۵	۲۱	۷	۱	
۸	۱	۸	۲۸	۵۶	۷۰	۵۶	۲۸	۸	۱

این جدول را جدول پاسکال می نامند .

فصل دوم

قانونهای ترکیب

این فصل به تنهایی اهمیت چندانی ندارد. در اینجا هدف ما اثبات مطالبی ساده است که در موارد مختلف در فصل های سوم و چهارم و هشتم بکار خواهیم برد.

۱.۲- تعریف

۱.۱.۲- مجموعه E داده شده است. اگر به هر جفت از عنصرهای E بتوانیم یک عنصر از E را نسبت دهیم گوئیم که یک **قانون ترکیب** در E تعریف کرده ایم. درحقیقت هر قانون ترکیب یک گسترش $E \times E$ در E می باشد.

۲.۱.۲- مثال :

۱- چنانچه $E = \mathbf{R}$ باشد گسترش $xy \rightarrow (x, y)$ یک قانون ترکیب در \mathbf{R} است.

۲- چنانچه $E = \mathbf{R}$ باشد گسترش $x + y \rightarrow (x, y)$ یک قانون ترکیب است.

۳- اگر E مجموعه بخش های یک مجموعه A باشد، $x \cup y \rightarrow (x, y)$ یک قانون

ترکیب است.

۴- اگر E مجموعه گسترش های یک مجموعه A در خودش باشد، $f \circ g \rightarrow (f, g)$

یک قانون ترکیب می باشد.

۳.۱.۲- از نظر اهمیتی که مثال های ۱ و ۲ بالا دارند، هنگامیکه قانون ترکیب

مجردی را نیز بررسی می کنند، معمولاً ترکیب دو عنصر x و y را با $x \cdot y$ و یا xy نمایش می دهند

و حاصل ضرب دو عنصر x و y می نامند و چنین قانون ترکیبی را **ضربی** می گویند. گاهی

نیز ترکیب دو عنصر x و y را با $x + y$ نشان می دهند و حاصل جمع دو عنصر x و y

می نامند و در این صورت قانون ترکیب را **جمع** می گویند.

۱.۲.۴- حاصل ضرب یک دنباله عنصرها - فرض می کنیم E یک مجموعه

با قانون ترکیب $xy \rightarrow (x, x)$ باشد. چنانچه (x_1, x_2, \dots, x_n) یک دنباله از

عنصرهای E باشد، به روش بازگشت روی n حاصل ضرب این عنصرها را چنین تعریف می کنند:

$$x_1 x_2 \cdots x_n = x_1 (x_2 \cdots x_n)$$

این حاصل ضرب به صورت $\prod_{1 \leq i \leq n} x_i$ نشان داده می شود . اگر :

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$$

باشد، حاصل ضرب $x_1 x_2 \dots x_n$ را با x^n نمایش می دهند . هرگاه قانون ترکیب جمعی

باشد، به جای $x_1 x_2 \dots x_n$ و $\prod_{1 \leq i \leq n} x_i$ و x^n به ترتیب :

$$nx \quad \text{و} \quad \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{و} \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

بکاربرده می شود .

۵.۱.۲ - بخش پایدار - فرض می کنیم A بخشی از E باشد . بخش A را ،

نسبت به قانون ترکیب مجموعه E ، پایدار می گوئیم هرگاه داشته باشیم :

$$x \in A, y \in A \Rightarrow xy \in A$$

در این صورت گسترش $xy \rightarrow (x, y)$ مجموعه $A \times A$ در A یک قانون ترکیب در A است .

۶.۱.۲ - حاصل ضرب دو بخش E - فرض می کنیم A و B دو بخش از E باشند .

مجموعه همه عنصرهایی به صورت xy را که در آن $x \in A$ و $y \in B$ است ، با AB نشان

می دهند (هنگامیکه قانون ترکیب جمعی باشد $A+B$ را به جای AB قرار می دهند) .

چنانچه $A = \{x\}$ و $B = \{y\}$ باشد داریم $AB = \{xy\}$ ، که این همان

قانون ترکیب مجموعه E است . اگر $A = \{x\}$ و B یک بخش دلخواه E باشد به جای

$\{x\} B$ می نویسند $x.B$. همچنین Bx به جای $\{x\} B$ بکاربرده می شود .

۷.۱.۲ - مثلاً اگر \mathbf{R} را با قانون جمع در نظر بگیریم، داریم :

$$\{1, 2\} + \{4, 5\} = \{5, 6, 7\}$$

۸.۱.۲ - انتقال - اگر x_0 عنصری از مجموعه E باشد ، گسترش $x \rightarrow xx_0$

مجموعه E در E را انتقال راست به وسیله x_0 می نامند . همچنین گسترش $x \rightarrow x_0 x$

مجموعه E در E را انتقال چپ به وسیله x_0 می گویند .

۹.۱.۲ - مثلاً اگر مجموعه E یک صفحه و O نقطه ثابتی از صفحه باشد . حاصل ضرب

دو نقطه M و M' از E را نقطه‌ای مانند M'' از E می‌گیریم که برای آن داشته باشیم :

$$\vec{OM}'' = \vec{OM} + \vec{OM}'$$

در این صورت انتقالی (راست یا چپ) که به وسیله M_0 معین می‌گردد ، یعنی :

$$\vec{OM} \rightarrow \vec{OM}_0 + \vec{OM} \quad \text{یا} \quad \vec{OM} \rightarrow \vec{OM} + \vec{OM}_0$$

همان است که در هندسه مقدماتی انتقال به بردار \vec{OM}_0 نامیده می‌شود .

۲.۲- قانون انجمنی

۱.۲.۲- گویند که قانون ترکیب $xy \rightarrow (x,y)$ در E ، **انجمنی** است ، اگر برای هر سه عنصر x و y و z از E داشته باشیم $(xy)z = x(yz)$. مثلاً قانونهای ترکیبی که در شماره ۲.۱.۲ دیده شد ، انجمنی هستند .

۲.۲.۲- فرض می‌کنیم (x_1, x_2, \dots, x_m) یک دنباله از عنصرهای E باشد . این دنباله را به n دنباله جزئی زیر تقسیم می‌کنیم :

$$(x_1, x_2, \dots, x_p), (x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_q), \dots, (x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_m)$$

و قرار می‌دهیم :

$$y_1 = x_1 x_2 \dots x_p, \quad y_2 = x_{p+1} x_{p+2} \dots x_q, \quad \dots,$$

$$y_n = x_{s+1} x_{s+2} \dots x_m$$

قضیه - اگر قانون ترکیب E انجمنی باشد داریم :

$$x_1 x_2 \dots x_m = y_1 y_2 \dots y_n$$

اثبات - برای $m=1$ قضیه روشن است . فرض می‌کنیم که قضیه را برای $m-1$ عنصر ثابت کرده باشیم . چنانچه قرار دهیم $x_p = y'_1 = x_2 x_3 \dots x_p$ ، خواهیم داشت :

$$(۱) \quad x_2 x_3 \dots x_m = y'_1 y_2 \dots y_n$$

در این صورت :

$$x_1 x_2 \dots x_m = x_1 (x_2 x_3 \dots x_m) \quad (\text{با استفاده از تعریف حاصل ضرب})$$

$$\begin{aligned}
 &= x_1(y_1' y_2 \dots y_n) && \text{[بنابه فرمول (۱)]} \\
 &= x_1[y_1'(y_2 \dots y_n)] && \text{(بنابه تعریف حاصل ضرب)} \\
 &= (x_1 y_1')(y_2 \dots y_n) && \text{(با استفاده از ویژگی انجمنی)} \\
 &= y_1(y_2 \dots y_n) && \text{(بنابه تعریف حاصل ضرب)} \\
 &= y_1 y_2 \dots y_n && \text{(بنابه تعریف حاصل ضرب)}
 \end{aligned}$$

۳.۲.۲ - نتیجه - اگر قانون ترکیب انجمنی باشد داریم :

$$x_1 x_2 \dots x_n = (x_1 x_2 \dots x_{n-1}) x_n$$

که دستور دیگری برای محاسبه حاصل ضرب های متوالی است .

۴.۲.۲ - نتیجه - اگر قانون ترکیب انجمنی و m و n شمارهای درست

و مثبت باشند ، برای هر x متعلق به E داریم $x^m x^n = x^{m+n}$.

اثبات - از تعریف حاصل ضرب داریم $(xx \dots x)(xx \dots x) = x^m x^n$ که

پرانتهز سمت چپ شامل m پرانتهز دیگر شامل n سازه x می باشد . پس بنا بر شماره ۲.۲.۲

این حاصل ضرب شامل $m+n$ سازه x است .

۵.۲.۲ - نتیجه - اگر قانون ترکیب انجمنی و m و n دو شمار درست

و مثبت باشند ، برای هر x متعلق به E داریم $(x^m)^n = x^{mn}$.

اثبات - بنابه تعریف حاصل ضرب داریم :

$$(x^m)^n = (xx \dots x)(xx \dots x) \dots (xx \dots x)$$

که در آن n شماره پرانتهزها و هر پرانتهز شامل m سازه x است . با استفاده از شماره ۲.۲.۲

دیده می شود که این حاصل ضرب شامل mn سازه x می باشد .

۶.۲.۲ - هنگامیکه قانون ترکیب جمعی باشد دو نتیجه ۴.۲.۲ و ۵.۲.۲ به صورت

زیر نوشته می شوند :

$$mx + nx = (m+n)x , n(mx) = (mn)x$$

۳.۲ - قانون ترکیب جابجایی

۱.۳.۲ - چنانچه $xy \rightarrow (x,y)$ یک قانون ترکیب در E باشد ، دو عنصر x و y

متعلق به E را گردش پذیر می نامیم ، هر گاه داشته باشیم $xy = yx$. هنگامیکه هر دو

عنصر دلخواه E گردش پذیر باشند قانون ترکیب را جابجایی می گویند .

۲.۳.۲- در مثالهای ۱ و ۲ و ۳ شماره ۲.۱.۲ قانونهای ترکیب جابجایی هستند.

اما قانون ترکیب مثال ۴ شماره ۲.۱.۲ جابجایی نیست.

۳.۳.۲ - قضیه - اگر قانون ترکیب مجموعه E انجمنی و جابجایی

باشد، حاصل ضرب یک دنباله از عناصرهای E بستگی به ترتیب آنها ندارد.

اثبات- فرض می کنیم (i, j, k, \dots, m) یک تبدیل از $\{1, 2, \dots, n\}$

باشد، باید ثابت کنیم:

$$x_1 x_2 \dots x_n = x_i x_j x_k \dots x_m$$

بستگی بالا برای $n=1$ روشن است. فرض می کنیم که این بستگی برای یک دنباله $n-1$

عنصری نیز برقرار باشد، پس داریم:

$$(۲) \quad x_1 x_2 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n = x_j x_k \dots x_m$$

چنانچه قرار دهیم:

$$x_1 x_2 \dots x_{i-1} = y, \quad x_{i+1} x_{i+2} \dots x_n = z$$

با استفاده از دستور (۱) شماره ۲.۲.۲ خواهیم داشت:

$$(۲) \quad yz = x_j x_k \dots x_m$$

واز آنجا:

$$x_1 x_2 x_k \dots x_m = x_i (x_j x_k \dots x_m) \quad (\text{بنابه تعریف حاصل ضرب})$$

$$= x_i (yz) \quad [\text{بنابر دستور (۲)}]$$

$$= (x_i y) z \quad (\text{بنابر ویژگی انجمنی})$$

$$= (y x_i) z \quad (\text{بنابر ویژگی جابجایی})$$

$$= y x_i z \quad (\text{بنابر شماره ۲.۲.۲})$$

$$= (x_1 x_2 \dots x_{i-1}) x_i (x_{i+1} x_{i+2} \dots x_n) \quad (\text{بنابه تعریف } y \text{ و } z)$$

$$= x_1 x_2 \dots x_n \quad (\text{بنابر شماره ۲.۲.۲})$$

۴.۲- عنصر بی اثر

۱.۴.۲- چنانچه $xy \rightarrow (x,y)$ یک قانون ترکیب در E باشد، عنصر e متعلق به E را (برای قانون ترکیب داده شده) عنصر بی اثر می نامند، هرگاه برای هر x متعلق به E داشته باشیم $xe = ex = x$.

۲.۴.۲- مثال = در مثال ۱ شماره ۲.۱.۲ شمار ۱ عنصر بی اثر است.

در مثال ۲ شماره ۲.۱.۲ شمار ۰ عنصر بی اثر است.

در مثال ۳ شماره ۲.۱.۲ مجموعه \emptyset عنصر بی اثر است.

در مثال ۴ شماره ۲.۱.۲ گسترش id_A عنصر بی اثر است.

۳.۴.۲- قضیه - چنانچه عنصر بی اثر وجود داشته باشد این عنصر

یکتا است.

اثبات - فرض می کنیم که e و e' دو عنصر بی اثر باشند، داریم:

$$ee' = \begin{cases} e' & \text{زیرا } e \text{ عنصر بی اثر است} \\ e & \text{زیرا } e' \text{ عنصر بی اثر است} \end{cases}$$

و از آنجا خواهیم داشت $e = e'$.

۴.۴.۲- هنگامی که قانون ترکیب ضربی باشد اغلب به جای عنصر بی اثر (چنانچه این عنصر وجود داشته باشد) ۱ قرار می دهند و در حالتی که قانون ترکیب جمعی و عنصر بی اثر وجود داشته باشد، معمولا آنرا با ۰ نمایش می دهند.

۵.۴.۲- فرض می کنیم که عنصر بی اثر e وجود داشته باشد. برای هر x متعلق

به E قرار می دهیم $x^0 = e$.

قضیه - چنانچه قانون ترکیب انجمنی و x متعلق به E باشد، برای

هر دو شمار درست (بزرگتر و یا برابر با صفر) m و n داریم:

$$x^m x^n = x^{m+n}, \quad (x^m)^n = x^{mn}$$

اثبات - درستی این قضیه را برای $m > 0$ و $n > 0$ در شماره ۴.۲.۲ دیدیم.

اکنون آنرا برای $m = 0$ و $n = 0$ ثابت می کنیم:

۱- اگر $m=0$ و $n>0$ باشد داریم :

$$x^m x^n = x^0 x^n = e x^n = x^n = x^{m+n}$$

۲- اگر $m>0$ و $n=0$ باشد داریم :

$$x^m x^n = x^m x^0 = x^m e = x^m = x^{m+n}$$

۳- اگر $m=n=0$ باشد داریم :

$$x^m x^n = x^0 x^0 = e e = e = x^0 = x^{m+n}$$

برای اثبات $(x^m)^n = x^{mn}$ به روش مشابه عمل می‌کنیم .

۲.۵ - عنصر وارون

۲.۵.۱ - فرض می‌کنیم $xy \rightarrow (x,y)$ یک قانون ترکیب در E و e عنصر بی‌اثر

این قانون باشد و این فرض را تا پایان شماره ۲.۵ برقرار می‌گیریم .

تعریف- دو عنصر x و x' از E را وارون یکدیگر گوییم هرگاه داشته

باشیم:

$$xx' = x'x = e$$

(هنگامیکه قانون ترکیب جمعی باشد به جای واژه «وارون» کلمه «قرینه» را بکار

می‌برند) .

۲.۵.۲ - مثال:

۱- در مثال ۲.۱.۲، اگر $x \neq 0$ باشد دو شمار x و $x' = \frac{1}{x}$ وارون

یکدیگرند زیرا :

$$x'x = \frac{1}{x} \cdot x = 1$$

۲- در مثال ۲ شماره ۲.۱.۲ دو شمار x و $-x$ قرینه یکدیگرند زیرا داریم :

$$x + (-x) = 0$$

۳- در مثال ۳ شماره ۲.۱.۲، برای اینکه دو عنصر x و x' از E وارون یکدیگر باشند

باید داشته باشیم $x \cup x' = e$ (این برابری تنها برای $x = x' = e$ برقرار است) .

۴- در مثال ۴ شماره ۲.۱.۲، دو گسترش x و x' وارون یکدیگرند اگر داشته باشیم:

$$x \circ x' = x' \circ x = \text{id}_A$$

با استفاده از شماره ۱.۸.۱، این بستگی می‌رساند که x و x' دوسویی و $x^{-1} = x'$ است. ۳.۵.۲ - روشن است که وارون عنصر بی‌اثر e خود e است. زیرا داریم:

$$ee = ee = e$$

۴.۵.۲ - تعریف - عنصر x از E را وارون پذیر گویند اگر x دارای

یک عنصر وارون باشد.

۵.۵.۲ - مثال:

۱ - در مثال ۱ شماره ۲.۱.۲ تمام شمارهای مخالف با صفر وارون پذیرند.

۲ - در مثال ۲ شماره ۲.۱.۲ تمام شمارها دارای قرینه هستند.

۳ - در مثال ۳ شماره ۲.۱.۲ تنها مجموعه \emptyset وارون پذیر است.

۴ - در مثال ۴ شماره ۲.۱.۲ گسترش‌های دوسویی وارون پذیرند.

۶.۵.۲ - قضیه - فرض می‌کنیم قانون ترکیب انجمنی باشد. چنانچه

عنصر x وارون پذیر باشد وارون آن یکتاست.

اثبات - اگر x' و x'' وارونهای x باشند داریم:

$$x'xx'' = \begin{cases} x'(xx'') = x'e = x' \\ (x'x)x'' = ex'' = x'' \end{cases}$$

و از آنجا نتیجه می‌شود $x' = x''$.

(تا پایان شماره ۵.۲ فرض می‌کنیم که قانون E انجمنی است).

۷.۵.۲ - قرارداد - اگر عنصر x وارون پذیر باشد، در قانون ترکیب

ضربی، وارون x را با x^{-1} و در قانون ترکیب جمعی وارون x (یا به عبارت

دیگر قرینه x) را با $-x$ نشان می‌دهند.

۸.۵.۲ - قضیه - اگر x وارون پذیر باشد x^{-1} نیز وارون پذیر است

و داریم $(x^{-1})^{-1} = x$.

زیرا $xx^{-1} = x^{-1}x = e$.

۹.۰.۰.۲ - قضیه - اگر x و y وارون پذیر باشند xy نیز وارون پذیر

$$\text{است و داریم } (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}.$$

اثبات - زیرا می توان نوشت :

$$(xy)(y^{-1}x^{-1}) = x(yy^{-1})x^{-1} = xex^{-1} = xx^{-1} = e$$

$$(y^{-1}x^{-1})(xy) = y^{-1}(x^{-1}x)y = y^{-1}ey = y^{-1}y = e$$

۱۰.۰.۰.۲ - نتیجه - چنانچه x_1, x_2, \dots, x_n وارون پذیر باشند

نیز وارون پذیر است و داریم :

$$(x_1x_2 \cdots x_n)^{-1} = x_n^{-1}x_{n-1}^{-1} \cdots x_1^{-1}$$

این نتیجه با استفاده از روش بازگشت روی n و قضیه پیش بدست می آید.

۱۱.۰.۰.۲ - نتیجه - اگر x وارون پذیر و n شمار درست مثبت و یا

برابر با صفر باشد x^n وارون پذیر است و داریم $(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n$.

زیرا درحالت $n > 0$ این نتیجه از شماره ۱۰.۰.۰.۲، با قراردادن :

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$$

به دست می آید و چنانچه $n = 0$ باشد داریم :

$$x^n = (x^{-1})^n = e$$

۱۲.۰.۰.۲ - قرارداد - اگر n شمار درست مثبتی باشد برای هر عنصر

وارون پذیر x قرار می دهیم $x^{-n} = (x^{-1})^n$.

۱۳.۰.۰.۲ - قضیه - فرض می کنیم عنصر x وارون پذیر و m و n متعلق

به Z باشند. در این صورت داریم :

$$x^m x^n = x^{m+n}, \quad (x^m)^n = x^{mn}$$

اثبات - این قضیه را هنگامیکه $m \geq 0$ و $n \geq 0$ باشد ثابت کردیم. اگر

$m < 0$ و $n \geq 0$ باشد قرار می دهیم $m' = -m > 0$ پس خواهیم داشت :

$$x^m x^n = (x^{-1}x^{-1} \cdots x^{-1})(xx \cdots x)$$

که در آن پراتنز اول شامل m' سازه و پراتنز دوم شامل n سازه می باشد. چنانچه $n \geq m'$

باشد این حاصل ضرب برابر با $x^{n-m'} = x^{n+m}$ است و اگر n کوچکتر از m' باشد این حاصل ضرب برابر است با $(x^{-1})^{m'-n} = x^{-(m'-n)} = x^{m+n}$.

حالت $m \geq 0$ و $n < 0$ نیز به روش مشابه اثبات می شود. چنانچه m و n هر دو کوچکتر از صفر باشند، $x^m x^n$ برابر با حاصل ضرب $-(m+n)$ سازه x^{-1} می باشد، یعنی برابر با x^{m+n} است.

به روش مشابه می توان نشان داد که $(x^m)^n = x^{mn}$ است.

۱۴.۰.۲ - هنگامیکه قانون ترکیب جمعی باشد قضیه ۱۳.۰.۲ بصورت زیر درسیآید:

$$(m+n)x = mx + nx$$

$$m(nx) = (mn)x$$

که در آن m و n متعلق به Z می باشند.

۱۵.۰.۲ - قضیه - چنانچه x یک عنصر وارون پذیر E باشد انتقالهای

چپ که بوسیله x و x^{-1} در E تعریف می شوند دوسویی و وارون یکدیگرند.

اثبات - فرض می کنیم f و f' دو انتقال باشند. برای هر عنصر y در E داریم:

$$f'(f(y)) = f'(xy) = x^{-1}(xy) = ey = y$$

$$f(f'(y)) = f(x^{-1}y) = x(x^{-1}y) = ey = y$$

پس $f' \circ f = f \circ f' = \text{id}_E$ و با استفاده از شماره ۱.۸.۰.۵ قضیه ثابت می شود.

در مورد انتقال راست نیز می توان قضیه ای مشابه با قضیه بالا بیان نمود.

۱۶.۰.۲ - قضیه - فرض می کنیم x یک عنصر وارون پذیر E باشد

در این صورت:

۱- برابری های $xy = z$ و $y = x^{-1}z$ هم ارز می باشند.

۲- برابری های $yx = z$ و $y = zx^{-1}$ هم ارز می باشند.

۳- اگر $xx' = e$ باشد خواهیم داشت $x' = x^{-1}$.

۴- چنانچه $x'x = e$ باشد خواهیم داشت $x' = x^{-1}$.

اثبات - قسمت اول از قضیه شماره ۱۵.۰.۲ نتیجه می گردد. قسمت سوم حالت

ویژه ای از قسمت اول است و قسمتهای دوم و چهارم به روش مشابهی اثبات می شوند.

۱۷.۰.۲ - تبصره - فرض می‌کنیم قانون ترکیب جابجایی و جمعی باشد. چنانچه $x \in E$ و $x - x$ - قرینه آن وجود داشته باشد، برای هر عنصر $z \in E$ عنصر:

$$(-x) + z = z + (-x)$$

بصورت $z - x = z + (-x)$ نوشته می‌شود و بنابراین شماره ۱۶.۰.۲ خواهیم داشت $(z - x) + x = z$.

۶.۲ - همومرفیسم

۱.۶.۲ - تعریف - دو مجموعه E و E' که هر یک از آنها دارای یک قانون ترکیب است داده شده‌اند. قانون ترکیب E را با \top و قانون ترکیب E' را با \perp نمایش می‌دهیم. اگر f یک گسترش در E' باشد، گسترش f را یک همومرفیسم می‌نامند چنانچه برای هر دو عنصر x و y از E داشته باشیم:

$$f(x \top y) = f(x) \perp f(y)$$

۲.۶.۲ - قضیه - اگر $f: E \rightarrow E'$ یک همومرفیسم باشد $f(E)$ یک بخش پایدار E' است.

اثبات - فرض می‌کنیم x' و y' متعلق به $f(E)$ باشند. باید ثابت نمود که $x' \perp y'$ نیز متعلق به $f(E)$ است. چون x' و y' متعلق به $f(E)$ هستند پس عنصرهایی مانند x و y در E می‌توان یافت بطوریکه $x' = f(x)$ و $y' = f(y)$. بنابراین:

$$x' \perp y' = f(x) \perp f(y) = f(x \top y) \in f(E)$$

۳.۶.۲ - قضیه - اگر $f: E \rightarrow E'$ و $f': E' \rightarrow E''$ دو همومرفیسم باشند $f' \circ f$ نیز یک همومرفیسم است.

از اثبات این قضیه بجهت سادگی آن چشم می‌پوشیم.

۴.۶.۲ - قضیه - اگر $f: E \rightarrow E'$ یک همومرفیسم دوسویی باشد f^{-1} نیز یک همومرفیسم دوسویی است.

اثبات - بنابراین شماره ۵.۸.۱ می‌دانیم که f^{-1} دوسویی است. فرض می‌کنیم x' و y' متعلق به E' باشند و قرار می‌دهیم $f^{-1}(y') = y$ و $f^{-1}(x') = x$ ، در این صورت خواهیم داشت $f(y) = y'$ و $f(x) = x'$ و از آنجا:

$$x' \perp y' = f(x) \perp f(y) = f(x \top y)$$

$$f^{-1}(x' \perp y') = x \top y = f^{-1}(x') \top f^{-1}(y') \quad \text{یعنی}$$

۵.۶.۲ - یک همومرفیسم دوسویی E روی E' را **ایزومرفیسم** می‌نامند. اگر یک ایزومرفیسم E روی E' وجود داشته باشد گویند E و E' (نسبت به قوانین ترکیب داده شده) ایزومرف هستند.

۶.۶.۲ - قضیه - بستگی « E و E' ایزومرف هستند» یک بستگی هم‌ارزی است.

اثبات:

۱ - مجموعه E با خودش ایزومرف است زیرا گسترش همانی یک ایزومرفیسم E روی E می‌باشد.

۲ - اگر ایزومرفیسم $f: E \rightarrow E'$ وجود داشته باشد بطوریکه دیدیم $f^{-1}: E' \rightarrow E$ نیز یک ایزومرفیسم است.

۳ - اگر ایزومرفیسم‌های $f: E \rightarrow E'$ و $f': E' \rightarrow E''$ وجود داشته باشند $f' \circ f: E \rightarrow E''$ نیز یک ایزومرفیسم است.

۷.۶.۲ - یک همومرفیسم E در E را **یک آندومرفیسم** E می‌نامند. همچنین یک ایزومرفیسم E روی E را **یک اتومرفیسم** E می‌گویند.

از تعاریف بالا نتیجه می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} \text{ایزومرفیسم} & \implies & \text{اتومرفیسم} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{همومرفیسم} & \implies & \text{آندومرفیسم} \end{array}$$

فصل سوم

گروه‌ها

نظریه گروه بسیار وسیع است و به نتایج عمیق و موزون منتهی می‌گردد. در این فصل ما تنها به بیان تعاریف ابتدایی و نتایج ساده‌ای چنداکتفا می‌کنیم. در حقیقت اگر در این جا به گروه‌ها توجهی شده است تنها به این علت است که نظریه گروه زیر بنای نظریه حلقه‌ها و فضاهای برداری است.

۱.۳ - گروه

۱.۱.۳ - تعریف - مجموعه‌ای که دارای یک قانون ترکیب با ویژگی‌های زیر باشد گروه نامیده می‌شود:

۱ - قانون ترکیب انجمنی باشد.

۲ - یک عنصر بی‌اثر وجود داشته باشد.

۳ - هر عنصر از مجموعه وارون پذیر باشد.

به علاوه اگر قانون ترکیب دارای ویژگی جابجایی نیز باشد گروه را گروه آبدلی یا گروه جابجایی می‌نامند.

۲.۱.۳ - شماره عنصرهای یک گروه مرتبه آن نامیده می‌شود. مرتبه یک گروه ممکن است با پایان و یا بی‌پایان باشد.

۳.۱.۳ - مثال:

۱ - مجموعه R با قانون جمع یک گروه جابجایی است.

۲ - مجموعه R با قانون ضرب یک گروه نیست، زیرا عنصر e وارون پذیر نمی‌باشد. اما مجموعه‌های $Q^* = Q - \{0\}$ و $R^* = R - \{0\}$ و $C^* = C - \{0\}$ با قانون ضرب تشکیل گروه می‌دهند و به علاوه این گروه‌ها جابجایی هستند.

۳ - اگر A یک مجموعه و M مجموعه گسترش‌های A در A باشد، معمولاً M با قانون ترکیب گسترش‌ها یک گروه نیست. اما زیر مجموعه M که از تبدیل‌های A تشکیل می‌شود یک گروه است (در حالت کلی این گروه آبدلی نیست).

- ۴ - مجموعه همانندی‌های فضا (با قانون ضرب همانندی‌ها) یک گروه است .
 ۵ - مجموعه یک عنصری $\{e\}$ با قانون ترکیب $e \cdot e = e$ یک گروه است .
 ۶ - مجموعه $\{e, a\}$ با جدول ترکیب زیر یک گروه است:

	e	a
e	e	a
a	a	e

(بررسی این مطلب ساده است و انجام آنرا به عهده خواننده می‌گذاریم . درآینده به همین گروه و یا به گروه ایزومرف با آن یعنی $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ برخورد خواهیم کرد) .

۲.۳ - زیرگروه‌های یک گروه

۱.۲.۳ - فرض می‌کنیم G یک گروه، e عنصر بی‌اثر آن و H بخشی از G باشد .

تعریف - H را زیرگروه G می‌نامند، اگر دارای ویژگی‌های زیر باشد :

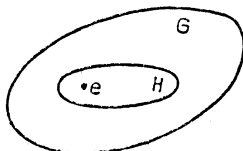
$$1 - e \in H \text{ باشد .}$$

$$2 - \forall x, y \in H \implies xy \in H$$

$$3 - \forall x \in H \implies x^{-1} \in H$$

مجموعه H با قانون ترکیب بالا که از قانون ترکیب G نتیجه شده است یک گروه

می‌باشد از اینجا دلیل نام گذاری « زیرگروه » روشن می‌گردد .



شکل ۱۶

۲.۲.۳ - مثال :

۱ - G یک زیرگروه G است .

۲ - $\{e\}$ یک زیرگروه G است .

۳ - گروه $G = R$ را با قانون جمع در نظر می‌گیریم. مجموعه‌های Z و Q و مجموعه‌های شمارهای دهنده‌ی زیرگروه‌های R هستند.

۴ - گروه $\{0\} = R - R^*$ را با قانون ضرب در نظر می‌گیریم. مجموعه‌های بزرگتر از صفر و مجموعه‌ی $\{1, -1\}$ از زیرگروه‌های R^* هستند.

۵ - فرض می‌کنیم G گروه همانندی‌های فضا باشد. مجموعه‌ی حرکت‌ها، مجموعه‌ی انتقال‌ها، مجموعه‌ی همسانی‌ها و انتقال‌ها، مجموعه‌ی چرخش‌ها به دور یک خط ثابت و مجموعه‌ی چرخش‌هایی که محورهای آنها از یک نقطه‌ی ثابت می‌گذرند مثالهایی از زیرگروه‌های G هستند.

۶ - گروه $G = Z$ را با قانون جمع در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم a یک عنصر ثابت از Z باشد. مجموعه‌ی همه‌ی مضربهای a (یعنی مجموعه‌ی همه‌ی عنصرهای an هنگامی که n مجموعه‌ی Z را می‌پیماید) یک زیرگروه از Z است. بنابراین تعریف کلی ۶.۱.۲ این زیرگروه را به صورت aZ می‌نویسند.

۲.۲.۳ - قضیه - اگر H یک زیرگروه از گروه Z باشد، یک شمار $a \geq 0$ و تنها یکی وجود دارد به طوری که داشته باشیم $H = aZ$.

اثبات - برای $H = \{0\}$ قضیه روشن است (a برابر با صفر است). بنابراین فرض می‌کنیم که زیرگروه H دارای عنصرهای دیگری به غیر از صفر باشد. اگر مجموعه‌ی شمارهای بزرگتر از صفر و متعلق به H را با H' نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$H = \{0\} \cup H' \cup (-H')$$

پس H' تهی نیست. چنانچه کوچکترین عنصر H' را a بنامیم شمارهای $a + a = 2a$ و $2a + a = 3a$ و ... متعلق به H' هستند. به‌عبارت دیگر اگر b متعلق به H' باشد شمارهای درست q و r وجود دارد به قسمی که داریم:

$$b = aq + r, \quad a > r \geq 0, \quad q \geq 0$$

چون b و aq متعلق به H هستند پس $r = b - aq$ نیز عنصری از H خواهد بود. اگر $r > 0$ باشد، شمار r متعلق به H' خواهد شد و این خلاف فرضی است که a کوچکترین عنصر H' است. پس داریم $r = 0$ و $b = aq$ و به این ترتیب:

$$H' = \{a, 2a, 3a, \dots\}$$

از آنجا :

$$H = \{\dots, -2a, -a, 0, a, 2a, 3a, \dots\} = a\mathbf{Z}$$

از استدلال بالا برمی آید که a کوچکترین شمار بزرگتر از صفر در H است، پس a یکتا

می باشد .

۴.۲.۳ - تبصره (برابری بز و) - چنانچه a و b دو شمار درست (مثبت

یا منفی) و d بزرگترین بخشیاب مشترك آنها باشد، شمارهای درست u و v

وجود دارند به طوری که $d = au + bv$. به ویژه اگر a و b نسبت به هم

اول باشند دو شمار درست u و v وجود دارند به قسمی که $au + bv = 1$.

اثبات - مجموعه شمارهای به صورت $au + bv$ را که در آن u و v متعلق به

\mathbf{Z} هستند با H نمایش می دهیم . به آسانی دیده می شود که H یک زیر گروه \mathbf{Z} است .

پس شماری مانند $0 \leq n$ وجود دارد به قسمی که $H = n\mathbf{Z}$ باشد . اگر شماری a و b

را بشمارد هر عنصر دلخواه از H به ویژه n را نیز خواهد شمرد . به وارون هر شماری که

n را بشمارد همه عنصرهای H به ویژه a و b را خواهد شمرد ، پس داریم $n = \pm d$

یعنی $d \in H$. بنابراین دو شمار درست u و v وجود دارند به قسمی که $d = au + bv$.

۵.۲.۳ - زیر گروه پدید آمده بوسیله یک عنصر - گروه G و عنصر x

متعلق به G مفروض اند . اگر x متعلق به یک زیر گروه G باشد ناگزیر تمام عنصرهای

x^2, x^3, \dots و همچنین x^{-1} و در نتیجه x^{-2}, x^{-3}, \dots و همچنین e متعلق به آن

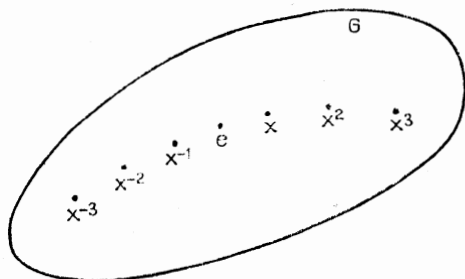
زیر گروه خواهند بود . به عبارت ساده تر هر زیر گروه G که عنصر x را در برداشته باشد شامل

مجموعه زیر است :

$$H = \{\dots, x^{-3}, x^{-2}, x^{-1}, e, x, x^2, x^3, \dots\}$$

به علاوه به روشنی دیده می شود که H یک زیر گروه G است . بنابراین H کوچکترین زیر

گروهی است از G که x را در بردارد و آنرا زیر گروه G پدید آمده به وسیله x می نامند .



شکل ۱۷

چون برای هر دو شمار درست m و n متعلق به \mathbb{Z} داریم $x^m x^n = x^n x^m$ پس زیر گروه H جابجایی است. مرتبه زیر گروه H را مرتبه x می‌نامند.

۳.۳ - کلاس نسبت به یک زیر گروه

۱.۲.۲ - قضیه - فرض می‌کنیم G یک گروه، H یک زیر گروه از G و R بستگی $x^{-1}y \in H$ بین عناصرهای x و y متعلق به G باشد.

(I) - R یک بستگی هم‌ارزی است.

(II) - کلاس x نسبت به R مجموعه xH است.

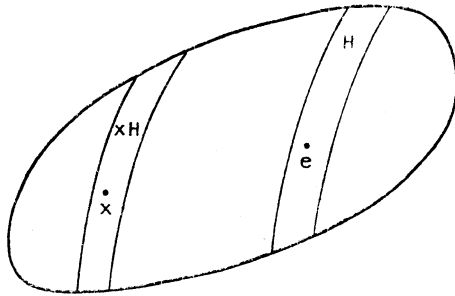
(III) - گسترش $xy \rightarrow y$ مجموعه H در xH یک گسترش دوسویی است.

اثبات - (I) - برای هر عنصر x متعلق به G داریم $xx^{-1} = e \in H$ پس بستگی R بازتابی است. اگر x و y متعلق به G و $x^{-1}y \in H$ باشند خواهیم داشت $y^{-1}x = (x^{-1}y)^{-1} \in H$ پس بستگی R متقارن است. اگر x و y و z متعلق به G و $x^{-1}y \in H$ و $y^{-1}z \in H$ باشند خواهیم داشت $x^{-1}z = (x^{-1}y)(y^{-1}z) \in H$ بنابراین بستگی R متعدی است و درستی (I) ثابت می‌شود.

(II) - اگر x متعلق به G و y نسبت به R هم‌ارز x باشد، داریم $x^{-1}y \in H$ پس $y = x(x^{-1}y) \in xH$ به وارون اگر y عنصری از xH باشد خواهیم داشت $y = xz$ که در آن $z = x^{-1}y$ متعلق به H می‌باشد و این درستی (II) را می‌رساند.

(III) - با استفاده از ۱.۵.۵.۲ گسترش $xy \rightarrow y$ گروه G در G دوسویی است

بنابراین تعیین این گسترش به H انژکتیو است. چون این گسترش H را به xH بدل می‌کند پس یک گسترش دوسویی H روی xH می‌باشد یعنی (III) برقرار است.



شکل ۱۸

۲.۳.۳ - اگر در قضیه بالا بستگی R را $xy^{-1} \in H$ بگیریم قضیه‌ای شبیه ۱.۳.۳

خواهیم داشت که در آن Hx جایگزین xH می‌گردد .

۲.۳.۳ - مجموعه‌هایی به صورت xH را **کلاس‌های چپ نسبت به H** و مجموعه‌هایی

به صورت Hx را **کلاس‌های راست نسبت به H** می‌نامند . در یک گروه جایجایی تفاوتی

بین کلاسهای چپ و کلاسهای راست نیست و تنها از کلاس‌ها نسبت به H صحبت می‌شود .

۴.۳.۳ - **مثال** - اگر $G = \mathbb{Z}$ و $H = a\mathbb{Z}$ گرفته شود (a عنصری از \mathbb{Z} است)

بستگی هم‌ارزی ۱.۳.۳ بصورت $y - x \in a\mathbb{Z}$ درسی آید . به عبارت دیگر $y \equiv x \pmod{a}$.

بنابراین کلاس هم‌ارزی شمار درست x عبارت است از مجموعه شمارهای درستی که با

مقیاس a با x برابرند (۷.۱۱.۱) ، یعنی :

$$\{\dots, x - 2a, x - a, x, x + a, x + 2a, \dots\}$$

۵.۳.۳ - **قضیه** - اگر G یک گروه با پایان و H یک زیرگروه G

باشد ، مرتبه G بر مرتبه H بخش پذیر است .

اثبات - فرض می‌کنیم C_1, C_2, \dots, C_n کلاسهای چپ نسبت به H و متمایز

باشند . بنابر ۹.۱۱.۱ این زیر مجموعه‌ها دو به دو از هم جدا و اجتماع آنها G است .

زیرا C_1, C_2, \dots, C_n کلاسهای هم‌ارزی نسبت به یک بستگی هم‌ارزی می‌باشند .

از قضیه ۱.۳.۳ برمی‌آید که شماره عنصرهای هر یک از این کلاسها برابر با مرتبه H است .

در نتیجه شماره عنصرهای کلاسها با هم برابر می‌باشند . پس شماره عنصرهای G برابر است

با حاصل ضرب n در مرتبه H .

۶.۳.۳ - تبصره - فرض می‌کنیم مرتبه گروه G یک‌شمار اول باشد. در این صورت G تنها شامل دوزیر گروه $\{e\}$ و G می‌باشد (چنین گروهی را گروه ساده می‌گویند).

۴.۳ - گروه خارج قسمت یک گروه جابجایی

۱.۴.۳ - فرض می‌کنیم G یک گروه جابجایی و H یک زیرگروه G و R بستگی هم‌ارزی $x^{-1}y \in H$ باشد (شماره ۱.۳.۳). مجموعه خارج قسمت G بر R را با $E = G/R$ نشان می‌دهیم.

می‌خواهیم قانون ترکیبی در مجموعه E تعریف کنیم. برای این منظور فرض می‌کنیم u و v از عناصر E باشند. یک نماینده x از u و یک نماینده y از v انتخاب می‌کنیم و نشان می‌دهیم که کلاس عنصر xy تنها بستگی به کلاسهای u و v دارد و بستگی به انتخاب نماینده‌ها ندارد. در این صورت اگر کلاس عنصر xy را ترکیب u و v بنامیم و با uv نشان دهیم یک قانون ترکیب در E تعریف کرده‌ایم.

اگر x_1 و y_1 به ترتیب دو نماینده دیگر u و v باشند داریم $x_1 = xs$ و $y_1 = yt$ که s و t متعلق به H هستند. پس $x_1 y_1 = xsyt = (xy)st$. یعنی کلاس عنصر xy بستگی به x و y (نماینده‌های u و v) ندارد زیرا $st \in H$.

۲.۴.۳ - قضیه:

(I) - با قانون ترکیب ۱.۴.۳ مجموعه E یک گروه جابجایی است.

(II) - گسترش کانونیک G در $E = G/R$ یک همومرفیسم است.

اثبات - گسترش کانونیک G روی G/R را φ می‌نامیم و فرض می‌کنیم x و y متعلق به G باشند. پس داریم $\varphi(x) \in E$ و $\varphi(y) \in E$. عنصر x را نماینده کلاس $\varphi(x)$ و عنصر y را نماینده $\varphi(y)$ می‌گیریم. بنابراین $\varphi(x)\varphi(y)$ کلاس عنصر xy و یا به گفته دیگر $\varphi(xy)$ را نشان می‌دهد و درستی (II) ثابت می‌شود.
فرض می‌کنیم x و y و z از عناصر G باشند. پس داریم:

$$\varphi(x)[\varphi(y)\varphi(z)] = \varphi(x)\varphi(yz) = \varphi(x(yz))$$

$$[\varphi(x)\varphi(y)]\varphi(z) = \varphi(xy)\varphi(z) = \varphi((xy)z) = \varphi(x(yz))$$

چون $\varphi(x)$ و $\varphi(y)$ و $\varphi(z)$ سه عنصر دلخواه از E هستند به آسانی دیده می شود که قانون ترکیب E دارای ویژگی انجمنی است .

روشن است که $\varphi(e)$ عنصر بی اثر E است . زیرا برای هر $x \in G$ خواهیم داشت:

$$\varphi(e)\varphi(x) = \varphi(ex) = \varphi(x)$$

$$\varphi(x)\varphi(e) = \varphi(xe) = \varphi(x)$$

هر عنصر $\varphi(x) \in E$ وارون پذیر است و وارون آن $\varphi(x^{-1})$ می باشد زیرا :

$$\varphi(x)\varphi(x^{-1}) = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(e) , \quad \varphi(x^{-1})\varphi(x) = \varphi(x^{-1}x) = \varphi(e)$$

سرانجام بستگی زیر قضیه را ثابت می کند .

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy) = \varphi(yx) = \varphi(y)\varphi(x)$$

۳.۴.۳ - گروه E که به ترتیب بالا تعریف شد گروه خارج قسمت G بر H

نامیده می شود و آنرا با G/H نشان می دهند .

هنگامیکه گروه G جابجایی نباشد می توان موضوع بالا را تعمیم داد (این مطلب در

فصل سیزدهم مورد بررسی قرار خواهد گرفت) .

۳.۴.۴ - مثال :

۱ - فرض می کنیم a شمار درستی باشد . در این صورت $\mathbf{Z}/a\mathbf{Z}$ یک گروه جابجایی

است (گروه شمارهای با مقیاس a) . بنابراین ترکیب کلاس شمار x و کلاس

شمار y همان کلاس شمار $x+y$ می باشد .

برای $a=0$ کلاس یک شمار درست x به خود x تبدیل می شود . در این حالت

$$\mathbf{Z}/a\mathbf{Z} = \mathbf{Z}$$

فرض می کنیم شمار درست a مخالف با صفر باشد . همواره می توان a را مثبت فرض

نمود (زیرا در صورت لزوم می توان a را به $-a$ تبدیل کرد و بدین ترتیب در مجموعه $a\mathbf{Z}$

تغییری داده نمی شود) . هر شمار درست با یکی و تنها با یکی از شمارهای $0, 1, 2, \dots,$

$1-a$ با مقیاس a برابر است . پس مرتبه گروه $\mathbf{Z}/a\mathbf{Z}$ همان شمار a است .

۲ - می دانیم که \mathbf{Z} (با قانون جمع) یک زیر گروه \mathbf{R} است . گروه خارج قسمت

\mathbf{R}/\mathbf{Z} را گروه شمارهای حقیقی با مقیاس یک می نامند . بنابراین کلاس هم ارزی یک شمار

حقیقی x عبارت است از مجموعه :

$$\{\dots, x-2, x-1, x, x+1, x+2, \dots\}$$

محاسبه در \mathbf{R}/\mathbf{Z} به محاسبه در \mathbf{R} که در آن از بخش‌های درست شماره‌ها چشم‌پوشی شده است برمی‌گردد. به گفته دیگر تنها بخش‌های کوچکتر از یک شماره در محاسبات دخالت دارند.

۳.۵ - همومرفیسم گروه

۳.۵.۱ - دو گروه G و G' مفروض‌اند. قانون ترکیب G را با \top و قانون ترکیب G' را با \perp نشان می‌دهیم. چنانچه در ۱.۶.۲ دیده شد، گسترش f گروه G در G' را همومرفیسم گویند، اگر برای هر دو عنصر دلخواه x و y متعلق به G داشته باشیم:

$$f(x \top y) = f(x) \perp f(y)$$

۳.۵.۲ - اگر f یک همومرفیسم گروه G در G' و e و e' به ترتیب عنصرهای بی‌اثر G و G' باشند، خواهیم داشت $f(e) = e'$. زیرا برای هر عنصر x از G داریم:

$$f(e) = f(x) \perp f(x)^{-1} = e' \quad \text{و یا} \quad f(x) = f(e \top x) = f(e) \perp f(x)$$

۳.۵.۳ - اگر f یک همومرفیسم G در G' باشد. برای هر عنصر دلخواه x متعلق به G خواهیم داشت $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$. بستگی‌های زیر درستی این مطلب را می‌رسانند:

$$f(x^{-1}) \perp f(x) = f(x^{-1} \top x) = f(e) = e'$$

$$f(x) \perp f(x^{-1}) = f(x \top x^{-1}) = f(e) = e'$$

از ۳.۵.۱ و ۳.۵.۲ و دو بستگی بالا نتیجه می‌شود که برای هر شمار n متعلق به \mathbf{Z} داریم:

$$f(x^n) = (f(x))^n$$

۳.۵.۴ - به هر همومرفیسم گروه دو زیرگروه مهم وابسته می‌شود:

قضیه - فرض می‌کنیم f یک همومرفیسم G در G' باشد.

(I) - مجموعه $f(G)$ یک زیرگروه از G' است.

(II) - مجموعه $f^{-1}(e')$ یک زیرگروه از G است.

[به طوریکه در ۲.۹.۱ دیده شد $f^{-1}(e')$ سایه وارون e' را به وسیله f نشان می دهد و بنابراین لازم نیست که f دوسویی باشد].
اثبات (I) به آسانی انجام پذیر است.

برای اثبات (II) قرار می دهیم $N = f^{-1}(e')$. چون داریم $f(e) = e'$ پس e متعلق به N می باشد. اگر x و y دو عنصر N باشند داریم $f(x) = f(y) = e'$ بنابراین بستگی $f(x \top y) = f(x) \perp f(y) = e' \perp e' = e'$ برقرار است. پس $x \top y$ متعلق به N می باشد. همچنین از بستگی $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1} = e'^{-1} = e'$ نتیجه می شود که x^{-1} متعلق به N است. بنابراین N یک زیر گروه G می باشد.

۳.۵.۵. - تعریف - زیر گروه $f^{-1}(e')$ را هسته همومرفیسم f می نامند.

۳.۵.۶. - مثال :

۱- اگر G گروه شمارهای حقیقی با قانون جمع و G' گروه شمارهای حقیقی بزرگتر از صفر با قانون ضرب باشد، گسترش $e^x \rightarrow x$ یک همومرفیسم G در G' است. زیرا داریم $e^{x+y} = e^x e^y$ و با در نظر گرفتن ویژگی های توابع نمایی معلوم می شود که این همومرفیسم دوسویی است، بنابراین یک ایزومرفیسم G روی G' است. گسترش $x \rightarrow \text{Log} x$ ایزومرفیسم وارون آن است.

۲- گروه G و عنصر x متعلق به آن مفروض است. گسترش f مجموعه Z در G که با $f(n) = x^n$ معین شده است یک همومرفیسم می باشد، زیرا داریم $x^{n+n'} = x^n \cdot x^{n'}$. بنابراین شماره ۲.۲.۵ مجموعه $f(Z) \subset G$ زیر گروه پدید آمده بوسیله x است. هسته این همومرفیسم مجموعه شمارهای n متعلق به Z است به قسمی که $x^n = e$. اگر این هسته را N بنامیم، N یک زیر گروه Z است که بنا بر ۳.۲.۳ به صورت aZ می باشد ($a \geq 0$). برای $a = 0$ داریم $N = \{0\}$. به گفته دیگر بستگی $x^n = e$ تنها برای $n = 0$ برقرار است. اگر a بزرگتر از صفر باشد همه عناصرهای :

$$\dots, x^{-2a}, x^{-a}, x^0, x^a, x^{2a}, \dots$$

برابر با e هستند.

۷.۵.۳ - قضیه - فرض می‌کنیم f یک همومرفیسم G در G' و N هسته f باشد. در این صورت :

(I) - برای هر دو عنصر x و y متعلق به G بستگی $f(x) = f(y)$ هم‌ارز با بستگی $y \in x \top N$ است.

(II) - برای اینکه f انژکتیو باشد بایاوبسندده است که داشته باشیم $N = \{e\}$.

اثبات - همواره بستگی‌های زیر را داریم :

$$f(x) = f(y) \iff f(x)^{-1} \perp f(y) = e'$$

$$\iff f(x^{-1} \top y) = e' \iff x^{-1} \top y \in N \iff y \in x \top N$$

بستگی‌های بالا درستی (I) را آشکار می‌سازند و به آسانی می‌توان (II) را از (I) نتیجه گرفت.

۶.۳ - تجزیه کانونیک یک همومرفیسم

۱.۶.۳ - دو گروه G و G' را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم f یک همومرفیسم G در G' و N هسته f باشد. بعلاوه گروه G را جابجایی می‌گیریم.

می‌خواهیم تجزیه کانونیک f را پیدا کنیم. بستگی هم‌ارزی‌ای که باید روی G در نظر گرفته شود بنا بر ۱.۱۲.۱ عبارت از $f(x) = f(y)$ و یا بنا بر ۷.۵.۳ عبارت از $x \in y \top N$ است. بنابراین کلاسهای هم‌ارزی همان کلاسهای G نسبت به N می‌باشند (بنا بر شماره ۳.۳.۳).

پس تجزیه کانونیک f به صورت زیر است :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & G' \\ s \downarrow & & \uparrow i \\ G/N & \xrightarrow{h} & f(G) \end{array}$$

که در آنجا s گسترش کانونیک G روی G/N و i گسترش همانی $f(G)$ در G' را نشان می‌دهد.

روشن است که i یک همومرفیسم و بنا بر (۲.۴.۳) گسترش s نیز یک همومرفیسم

می‌باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که h یک ایزومرفیسم است. شماره (۱.۱۲.۱) نشان می‌دهد که h دوسویی است.

پس کافی است ثابت کنیم که h یک همومرفیسم است. دو عنصر دلخواه $s(x)$ و $s(y)$ متعلق به G/N را در نظر می‌گیریم (x و y دو عنصر دلخواه از G هستند). داریم:

$$h(s(x)) = i(h(s(x))) = f(x)$$

و همچنین:

$$h(s(y)) = f(y), \quad h(s(x \top y)) = f(x \top y)$$

پس:

$$\begin{aligned} h(s(x) \top s(y)) &= h(s(x \top y)) = f(x \top y) = f(x) \perp f(y) \\ &= h(s(x)) \perp h(s(y)) \end{aligned}$$

یعنی h یک همومرفیسم و در نتیجه یک ایزومرفیسم است.

۲.۶.۲ - قضیه - فرض می‌کنیم G یک گروه و x عنصری از G و H زیرگروه G پدیدآمده به وسیله x باشد. در این صورت:

(I) - اگر مرتبه x بی‌پایان باشد، برای هر دو شمار متمایز n و n' متعلق به Z خواهیم داشت $x^n \neq x^{n'}$ و H با Z ایزومرف است.

(II) - اگر مرتبه x با پایان و برابر با شمار a باشد چنین داریم:

$$x^n = x^{n'} \iff n \equiv n' \pmod{a}$$

و H با Z/aZ ایزومرف است.

اثبات - برای هر عدد n متعلق به Z قرار می‌دهیم $f(n) = x^n$. بنابر ۶.۵.۳ یک همومرفیسم Z در G است. از ۵.۲.۳ نتیجه می‌شود که $f(Z) = H$. اگر N هسته f باشد، N یک زیرگروه Z خواهد بود. پس یک شمار درست $a \geq 0$ می‌توان یافت به طوری که $N = aZ$ باشد (۳.۲.۳).

برای $a = 0$ بنابر (۷.۵.۳)، f انژکتیو و بنابراین f یک ایزومرفیسم Z روی H

است. پس مرتبه x بی‌پایان و از آنجا (I) نتیجه می‌شود.

برای $a > 0$ ، با توجه به (۱.۶.۳)، H با Z/aZ ایزومرف است، پس a

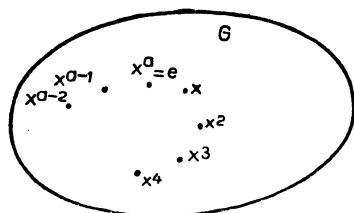
مرتبه x می‌باشد. اگر n و n' متعلق به Z باشند، با استفاده از ۷.۵.۳ خواهیم داشت:

$$x^n = x^{n'} \iff f(n) = f(n') \iff n' \in n + N \iff n' \equiv n \pmod{a}$$

و درستی (II) ثابت می‌شود .

۳.۶.۳ - نتیجه - اگر مرتبهٔ عنصر x از یک گروه برابر با a باشد،

$x^a = e$ باشد، a کوچکترین شمار درست بزرگتر از صفر است که در بستگی $x^a = e$ صدق می‌کند.



شکل ۱۹

۴.۶.۳ - نتیجه - چنانچه G یک گروه و دارای مرتبهٔ n باشد،

برای هر عنصر x متعلق به G داریم $x^n = e$.

زیرا مرتبهٔ عنصر x یعنی شمار a ، برابر با مرتبهٔ یک زیر گروه G می‌باشد. پس یک

شمار درست b وجود دارد به قسمی که $n = ab$ باشد (۳.۳.۵). بنابراین با در نظر گرفتن

۳.۶.۳ داریم :

$$x^n = (x^a)^b = e^b = e$$

۵.۶.۳ - نتیجه - گروه G که مرتبهٔ آن شمار اول p باشد با $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$

ایزومرف است.

زیرا اگر p مرتبهٔ گروه G و $x \neq e$ عنصری از G باشد، چنانچه H را زیر گروه

G پدید آمده به وسیلهٔ x بگیریم، با توجه به ۶.۳.۳ یاد داریم $H = G$ و یا $H = \{e\}$.

اما چون x متعلق به H است پس $H = G$. بنابراین G با یک گروه $\mathbf{Z}/a\mathbf{Z}$ ،

که در آن $a > 0$ می‌باشد، ایزومرف است (۲.۶.۳). چون G و $\mathbf{Z}/a\mathbf{Z}$ به ترتیب

دارای p و a عنصر می‌باشند بنابراین $p = a$ است.

۷.۳ - گروه‌های عامل در یک مجموعه

۱.۷.۳ - فرض می‌کنیم G یک گروه و X یک مجموعه باشد. اگر یک همومرفیسم G در گروه تبدیل‌های X داشته باشیم، گوئیم G در X عمل می‌کند. چنانچه همومرفیسم بالا را با Φ نشان دهیم (از نوشتن قانون ترکیب G خودداری می‌کنیم) خواهیم داشت:

- (۱) $\Phi(gg') = \Phi(g) \circ \Phi(g') \quad (g \in G, g' \in G)$
- (۲) $\Phi(g^{-1}) = \Phi(g)^{-1} \quad (g \in G)$
- (۳) $\Phi(e) = \text{id}_X$ (عنصر بی‌اثر گروه G است)

۲.۷.۳ - اگر $g \in G$ و $x \in X$ باشد معمولاً بجای $(\Phi(g))(x)$ می‌نویسند $g \cdot x$ و یا gx . این عنصر را که متعلق به X است همتای x به وسیله g می‌نامند. بنابراین بستگی $(\Phi(gg'))(x) = \Phi(g)[\Phi(g')(x)]$ که از (۱) نتیجه می‌گردد به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(gg')x = g(g'x)$$

۳.۷.۳ - هنگامی که x متعلق به X است، مجموعه همتای x که عنصرهایی به صورت gx هستند (g مجموعه G را می‌پیماید) مدار x نامیده می‌شود.

۴.۷.۳ - قضیه - فرض می‌کنیم x و y متعلق به X باشند و عنصری از G یافت شود به قسمی که $y = gx$ باشد. در این صورت می‌نویسیم $y \sim x$ و ثابت می‌کنیم که بستگی $y \sim x$ یک بستگی هم‌ارزی در X است.

اثبات - برای هر $x \in X$ داریم $x = \text{id}_X(x) = ex$ پس بستگی بالا بازتابی است. اگر $y = gx$ باشد خواهیم داشت:

$$g^{-1}y = g^{-1}(gx) = (g^{-1}g)x = ex = \text{id}_X(x) = x$$

و این تقارن بستگی بالا را می‌رساند. چنانچه $y = gx$ و $z = g'y$ باشد داریم:

$$z = g'(gx) = (g'g)x$$

پس بستگی \sim متعدی است.

۵.۷.۳ - برای بستگی هم‌ارزی ۴.۷.۳ کلاس هم‌ارزی عنصر x از X همان مدار x است.

۶.۷.۳ - گوئیم G در X متعدی است اگر هر دو عنصر دلخواه X همتای یکدیگر به وسیله یک عنصر G باشند، به گفته دیگر G در X متعدی است هرگاه X یک مدار باشد.

فصل چهارم

حلقه‌ها

در آینده مثالهای مهمی از حلقه‌ها را خواهیم دید (مثلاً حلقه‌های چند جمله‌ای‌ها، حلقه‌های ماتریسها). در اینجا برخی از نتایج ساده نظریه کلی حلقه‌ها را مطالعه خواهیم کرد. مهمترین حلقه‌ها هیأت‌ها هستند (مثلاً \mathbf{C} ، \mathbf{R} ، \mathbf{Q} و هیأت شماره‌های درست با مقیاس یک شماراوی). به کمک غوطه‌ور کردن یک حلقه انتگر در یک هیأت، \mathbf{Q} از روی \mathbf{Z} ساخته می‌شود (خواننده با این مثال آشنایی دارد) و در فصل ششم کسره‌های گویای یک متغیری تعریف می‌گردد.

۱.۴ - حلقه‌ها

۱.۴.۱ - تعریف - مجموعه A ، که دارای دو قانون ترکیب، یکی جمع $(x, y) \rightarrow x + y$ و دیگری ضرب $(x, y) \rightarrow xy$ با ویژگی‌های زیر است، حلقه نامیده می‌شود:

۱ - قانون جمع یک قانون ترکیب گروه جابجایی است. به عبارت دیگر:

- برای هر سه عنصر x ، y و z متعلق به A داریم:

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

$$x + y = y + x$$

- یک عنصر بی‌اثر \circ برای قانون جمع وجود دارد به طوری که برای هر عنصر x متعلق به A داریم:

$$\circ + x = x + \circ = x$$

- هر عنصر x دارای یک عنصر قرینه $-x$ است به قسمی که:

$$(-x) + x = x + (-x) = \circ$$

۲ - قانون ضرب انجمنی است یعنی برای هر سه عنصر x ، y و z متعلق

به A داریم:

$$x(yz) = (xy)z$$

۳- قانون ضرب نسبت به جمع دارای ویژگی پخش است یعنی برای هر سه عنصر x, y, z متعلق به A داریم:

$$(y+z)x = yx + zx, \quad x(y+z) = xy + xz$$

بعلاوه اگر قانون ضرب جابجایی باشد، A را حلقه جابجایی می‌نامند.

چنانچه A دارای یک عنصر بی‌اثر برای قانون ضرب باشد این عنصر را معمولاً با 1 نمایش می‌دهند و آن را عنصر **یکه** می‌گویند. در این صورت A حلقه **یکه‌دار** نامیده می‌شود.

۲.۱.۴- مثال:

۱- مجموعه‌های Z, Q, R, C با جمع و ضرب معمولی حلقه‌های جابجایی و یکه‌دار

هستند.

۲- مجموعه چند جمله‌ای‌های یک متغیری که ضرایب آنها متعلق به C باشد (بجای C می‌توان یکی از مجموعه‌های R یا Q یا Z را اختیار کرد) با جمع و ضرب معمولی یک حلقه جابجایی یکه‌دار درست می‌کنند.

۳- مجموعه $\{0\}$ که دارای تنها عنصر صفر است با دو قانون ترکیب $0+0=0$ و $0 \cdot 0=0$ یک حلقه جابجایی و یکه‌دار است که عنصر یکه آن همان 0 می‌باشد.

۳.۱.۴- چنانچه A یک حلقه باشد، برای هر سه عنصر x, y, z متعلق به A داریم:

$$x(y-z) = xy - xz$$

زیرا:

$$x(y-z) + xz = x[(y-z) + z] = xy$$

همچنین:

$$(y-z)x = yx - zx$$

۴.۱.۴- اگر در ۳.۱.۴ قرار دهیم $y=z$ خواهیم داشت:

$$\forall x \in A, \quad x \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot x = 0$$

۵.۱.۴- چنانچه در ۳.۱.۴ قرار دهیم $y=0$ ، با در نظر گرفتن ۴.۱.۴ خواهیم داشت:

$$x \cdot (-z) = -(xz), \quad (-z) \cdot x = -(zx)$$

و از آنجا نتیجه می‌شود:

$$(-x)(-z) = -[x(-z)] = -[-xz] = xz$$

۶.۱.۴- از ۵.۱.۴ با استفاده از روش بازگشت بدست می‌آید:

اگر شمار درست و مثبت n زوج باشد $(-x)^n = x^n$

اگر شمار درست و مثبت n فرد باشد $(-x)^n = -x^n$

۷.۱.۴ - چنانچه حلقه A دارای عنصر یکه 1 باشد، برای هر عنصر x متعلق به

$n \in \mathbb{Z}$ و $n \neq 0$ می‌توان (مانند ۴.۱.۲) حاصل ضرب nx را تشکیل داد. به‌ویژه می‌توان نوشت:

$$nx = (n \cdot 1)x$$

که طرف راست آن حاصل ضرب عنصرهای 1 و n از A می‌باشد. برای $n > 0$ ، بنا بر ویژگی

پخش، برابری بالا روشن است. اگر $n = 0$ باشد با توجه به ۵.۴.۲ داریم $nx = n \cdot 1 = 0$

و بنا بر ۴.۱.۴ خواهیم داشت $(n \cdot 1)x = 0$. برای $n < 0$ قرار می‌دهیم $n' = -n$ پس

داریم $nx = -(n'x) = -[(n' \cdot 1)x]$ که با استفاده از ۵.۱.۴ نتیجه می‌شود:

$$[-(n' \cdot 1)]x = (n \cdot 1)x$$

$$nx = x(n \cdot 1) \quad \text{همچنین داریم:}$$

۸.۱.۴ - در یک حلقه جابجایی می‌توان تمام دستورهای محاسبات معمولی در \mathbf{R} و

\mathbf{C} را که در آنها تنها عملیات جمع و تفریق و ضرب دخالت می‌کند برقرار کرد. به عنوان

مثال اگر A یک حلقه جابجایی و $x, y \in A$ باشند داریم:

$$(x+y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1}y + C_n^2 x^{n-2}y^2 + \dots$$

$$+ C_n^p x^{n-p}y^p + \dots + C_n^{n-1}xy^{n-1} + y^n$$

(این فرمول را بسط دو جمله‌ای می‌نامند).

اثبات - برای $n = 1$ فرمول بالا به صورت $x+y = x+y$ درمی‌آید. پس فرض

می‌کنیم که این فرمول برای n برقرار باشد و درستی آنرا برای $n+1$ ثابت می‌کنیم. داریم:

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n(x+y)$$

$$= (x^n + C_n^1 x^{n-1}y + \dots + C_n^p x^{n-p}y^p + \dots + y^n)(x+y)$$

$$= (x^{n+1} + C_n^1 x^n y + \dots + C_n^p x^{n-p+1}y^p + \dots + xy^n$$

$$+ x^n y + \dots + C_n^{p-1} x^{n-p+1}y^p + \dots + C_n^{n-1} xy^n + y^{n+1})$$

بنا بر ۱۰.۱۰.۱ ضرب $x^{n-p+1}y^p$ عبارت است از:

$$C_n^p + C_n^{p-1} = C_{n+1}^p$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$(x+y)^{n+1} = x^{n+1} + C_{n+1}^1 x^n y + \dots + C_{n+1}^p x^{n+1-p} y^p + \dots + y^{n+1}$$

و به این ترتیب بسط دوجمله‌ای به روش بازگشت اثبات می‌گردد.

۹.۱.۴ - اگر حلقه A جابجایی نباشد و تنها عنصرهای x و y را گردش پذیر بگیریم،

فرمول دوجمله‌ای همچنان برقرار و استدلال بالا درست است.

۴.۲ - زیر حلقه - ایدآل

۱.۲.۴ - فرض می‌کنیم A یک حلقه و B بخشی از A باشد.

تعریف - گویند B یک زیر حلقه A است، چنانچه دارای ویژگی‌های

زیر باشد:

الف - B یک زیر گروه از گروه A باشد.

ب - اگر x و y متعلق به B باشند، داشته باشیم $xy \in B$.

از شرط الف نتیجه می‌شود که $0 \in B$ است و برای عمل جمع پایدار می‌باشد.

به سادگی دیده می‌شود که مجموعه B با دو قانون ترکیب نتیجه شده از قانونهای A یک

حلقه است و از اینجا دلیل نام گذاری «زیر حلقه» روشن می‌گردد.

۲.۲.۴ - مثال - مجموعه Z یک زیر حلقه R و حلقه R یک زیر حلقه C است.

۳.۲.۴ - فرض می‌کنیم A یک حلقه جابجایی و B بخشی از A باشد.

تعریف - گویند B یک ایدآل حلقه A است چنانچه B دارای ویژگی‌های

زیر باشد:

الف - B یک زیر گروه از گروه A باشد.

ب - اگر $x \in B$ و $y \in A$ باشد داشته باشیم $xy \in B$.

بکاربردن کلمه «ایدآل» دلایل تاریخی دارد که از بیان آنها صرف نظر می‌کنیم. تنها

یادآوری می‌شویم که گومر در مطالعه برخی از مسائل حساب با شمارهایی که در حقیقت وجود

ندارند برخورد کرد و آنها را «شمارهای ایدآل» نامید. این نامگذاری رفته رفته به تعریف

کنونی ایدآل انجامید.

۴.۲.۴ - مثال:

۱ - چنانچه $a \in Z$ باشد، مجموعه aZ یک ایدآل Z است. به علاوه تنها ایدآلهای

Z همان aZ ها هستند زیرا بنا بر ۳.۲.۳ یک زیر گروه جمعی Z ناگزیر به صورت aZ است.

۲ - در یک حلقه جابجایی A ، عنصر a را مضرب عنصر b می‌نامند هرگاه یک عنصر c متعلق به A یافت شود به قسمی که برابری $a = bc$ برقرار گردد.

در این صورت نیز گویند که b عنصر a را می‌شمارد و یا b بخش‌یاب a است. به آسانی دیده می‌شود که 0 مضرب هر عنصر متعلق به A است اما تنها بخش‌یاب خودش می‌باشد. روشن است که مضربهای یک عنصر دلخواه از A تشکیل یک ایدآل از A را می‌دهند.

۳ - Z یک ایدآل R نیست.

۴. ۲. ۵ - فرض می‌کنیم A یک حلقه جابجایی یک‌دار و B یک بخش غیرتهی از A باشد به طوری که :

۱ - اگر $x \in B$ و $y \in B$ باشد داشته باشیم $x + y \in B$.

۲ - اگر $x \in B$ و $y \in A$ باشد داشته باشیم $xy \in B$.

در این صورت B یک ایدآل A است.

زیرا چنانچه $x \in B$ باشد $x(-1) = -x \in B$ است، پس $0 = x + (-x) \in B$ می‌باشد و با در نظر گرفتن شرط (۱) ثابت می‌شود که B یک زیرگروه از گروه جمعی A است.

۴. ۳ - حلقه خارج قسمت یک حلقه جابجایی

۴. ۳. ۱ - فرض می‌کنیم A یک حلقه جابجایی و B یک ایدآل A باشد. چون B یک زیرگروه از گروه جمعی A است، می‌توان گروه خارج قسمت A/B را تشکیل داد. یادآوری می‌شود که عنصرهای A/B کلاسهای هم‌ارزی نسبت به بستگی $x - y \in B$ می‌باشند. این کلاسها بخشهایی بشکل $x + B$ از A هستند. مجموع دو کلاس به وسیله مجموع نماینده‌های این دو کلاس معلوم می‌گردد.

در A/B نیز مانند A قانون جمع را با $+$ نشان می‌دهیم.

می‌خواهیم در A/B یک قانون ترکیب دوم معین کنیم که ضرب نامیده می‌شود.

فرض می‌کنیم u و v دو عنصر از A/B باشند. نماینده‌های x و y کلاسهای u و v را در A اختیار می‌کنیم. کلاس xy تنها به u و v بستگی دارد. زیرا اگر $y_1 = y + t$ و $x_1 = x + s$ باشد که در آنها $s \in B$ و $t \in B$ است، داریم :

$$x_1 y_1 = (x + s)(y + t) = xy + (xt + sy + st)$$

که در آنجا $xt + sy + st$ متعلق به B است زیرا B یک ایدآل است. ما کلاس xy را با uv نشان می‌دهیم.

۲.۳.۴ - قضیه :

(I) A/B با دو قانون جمع و ضرب یک حلقهٔ جابجایی است.

(II) - گسترش کانونیک Φ حلقهٔ A در A/B نسبت به جمع و ضرب یک

همومرفیسم است.

اثبات - این قضیه مانند ۲.۴.۳ ثابت می‌گردد. چنانچه x و y متعلق به A

باشند بنا به تعریف قانونهای ترکیب در A/B داریم :

$$\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y) \quad , \quad \Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$$

به این ترتیب قسمت (II) قضیه ثابت می‌شود.

از پیش می‌دانیم که A/B یک گروهٔ جمعی است، و چون در A ویژگیهای انجمنی و جابجایی قانون ضرب و پخش آن نسبت به قانون جمع برقرار است، به کمک همومرفیسم Φ نتیجه می‌شود که این ویژگیها در A/B نیز برقرارند.

۳.۳.۴ - حلقهٔ A/B حلقهٔ خارج قسمت A بر ایدآل B نامیده می‌شود. هنگامیکه

A جابجایی نباشد، می‌توان تعریف بالا را تعمیم داد که ما از بیان آن خودداری می‌کنیم.

۴.۳.۴ - تبصره - چنانچه حلقهٔ A دارای عنصر یکه 1 باشد به آسانی دیده می‌شود

که $\Phi(1)$ عنصر یکه A/B است. به علاوه $\Phi(0)$ عنصر 0 حلقهٔ A/B می‌باشد.

۵.۳.۴ - مثال - اگر $a \in \mathbb{Z}$ باشد چون $a\mathbb{Z}$ یک ایدآل \mathbb{Z} است می‌توان حلقهٔ

$\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ را تشکیل داد. این حلقه جابجایی و دارای عنصر یکه است و حلقهٔ شمارهای

درست با مقیاس a نامیده می‌شود (حلقهٔ شمارهای درست که با مقیاس a برابرند). این

حلقه درپیش به صورت یک گروهٔ جمعی بنام گروهٔ شمارهای درست با مقیاس a ، در نظر گرفته

شد. به عنوان مثال $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ را که یک حلقهٔ جابجایی است در نظر می‌گیریم. این حلقه

دارای ۳ عنصر است که کلاسهای شمارهای درست $0, 1, 2$ با مقیاس ۳ می‌باشند. برای

سادگی این کلاسها را نیز با $0, 1, 2$ نشان می‌دهیم. ساختمان $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ به وسیلهٔ جدولهای

جمع و ضرب زیر معین شده است :

جدول ضرب	
	۰ ۱ ۲
۰	۰ ۰ ۰
۱	۰ ۱ ۲
۲	۰ ۲ ۱

جدول جمع	
	۰ ۱ ۲
۰	۰ ۱ ۲
۱	۱ ۲ ۰
۲	۲ ۰ ۱

۴. ۴ - همومرفیسم حلقه‌ها

۴.۴.۱ - فرض می‌کنیم A و A' دو حلقه و f یک گسترش A در A' باشد. گسترش

f یک همومرفیسم حلقه A در A' نامیده می‌شود، هرگاه برای هر دو عنصر دلخواه x و y

$$\text{از } A \text{ برابری‌های: } f(xy) = f(x)f(y), \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

برقرار باشد (از این پس از نوشتن علامتهای قانونهای ترکیب خودداری و در صورت لزوم به نوشتن . اکتفا می‌شود) .

۴.۴.۲ - در اینجا نیز ویژگیهای همومرفیسم گروهها برقرار است و به ویژه داریم :

$$۱ - f(0) = 0$$

$$۲ - \forall x \in A, f(-x) = -f(x)$$

۳ - مجموعه $f(A)$ یک زیرگروه A' است .

۴ - هسته N گسترش f ، یعنی مجموعه x های متعلق به A به طوری که $f(x) = 0$

باشد، یک زیرگروه A است .

۴.۴.۳ - چنانکه به آسانی دیده می‌شود $f(A)$ یک زیر حلقه A' است .

۴.۴.۴ - اگر A جایجایی باشد هسته N گسترش f ، یک ایدال A است . زیرا

چنانچه $x \in N$ و $y \in A$ باشد خواهیم داشت $f(x) = 0$ پس :

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y) = 0 \cdot f(y) = 0$$

و از آنجا $xy \in N$.

۴.۴.۵ - حلقه خارج قسمت A/N و تجزیه کانونیک گسترش f را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A' \\ s \downarrow & & \uparrow i \\ A/N & \xrightarrow{h} & f(A) \end{array}$$

در این تجزیه بنابر ۲.۳.۴، گسترش s یک همومرفیسم حلقه است و به آسانی دیده می‌شود که i نیز یک همومرفیسم حلقه می‌باشد. اکنون می‌خواهیم ثابت کنیم که h یک ایزومرفیسم حلقه است. بنابر ۱.۶.۳، می‌دانیم که h دوسویی است و بعلاوه یک همومرفیسم گروه می‌باشد. از طرف دیگر چنانچه $s(x)$ و $s(y)$ دو عنصر دلخواه A/N باشند (که در آنها $x, y \in A$ است) داریم:

$$h(s(x))h(s(y)) = f(x)f(y) = f(xy)$$

و:

$$h(s(x)s(y)) = h(s(xy)) = f(xy)$$

پس h یک ایزومرفیسم است.

۶.۴.۴ - مثال - فرض می‌کنیم حلقه A دارای عنصر یکه ۱ باشد. گسترش f حلقه Z در A را که عنصر $n \in Z$ را به عنصر n از A تبدیل می‌کند، در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم ثابت کنیم که f یک همومرفیسم حلقه است. بنابر ۱.۴.۵.۲ می‌دانیم که f یک همومرفیسم گروه برای قانون جمع است. به علاوه با در نظر گرفتن ۷.۱.۴ و ۱.۴.۵.۲ داریم:

$$\begin{aligned} f(n)f(n') &= (n \ ۱)(n' \ ۱) = n(n' \ ۱) = (nn') \ ۱ \\ &= f(nn') \end{aligned}$$

۵.۴ - هیأت

۱.۵.۴ - تعریف - حلقه جابجایی A را یک هیأت می‌نامند اگر بخش $A - \{0\}$ با قانون ضرب یک گروه تشکیل دهد.
(در حقیقت چنین هیأتی را باید هیأت جابجایی نامید. اما چون از هیأت‌هایی که دارای ویژگی جابجایی نیستند گفتگو نخواهیم کرد؛ از تکرار کلمه جابجایی چشم می‌پوشیم).
۲.۵.۴ - مثال - حلقه‌های Q ، R و C هیأت هستند اما حلقه Z هیأت نیست.
۳.۵.۴ - چنانچه A یک هیأت باشد، حاصل ضرب دو عنصر مخالف با صفر از A یک عنصر مخالف با صفر از A است (زیرا $A - \{0\}$ باید برای قانون ضرب پایدار باشد).
۴.۵.۴ - چنانچه ۱ عنصر بی‌اثر گروه ضربی $A - \{0\}$ باشد ۱ عنصر یکه A است. زیرا از یک طرف برای $x \neq 0$ داریم $x \cdot ۱ = ۱ \cdot x = x$ و از طرف دیگر بنابر

۴.۱.۴ داریم $۱۰۰=۰ \cdot ۰ \cdot ۱=۰$ به این ترتیب هیأت یک حلقهٔ یک‌دار است و عنصر یکۀ آن متمایز از صفر است .

۴.۵.۵ - اگر x یک عنصر مخالف با صفر از A باشد، تنها یک عنصر مخالف با صفر x^{-1} از A وجود دارد به قسمی که $xx^{-1}=۱$ باشد .

اغلب $x^{-1}y=yx^{-1}$ را به صورت $\frac{y}{x}$ می‌نویسند. کلیهٔ قواعد محاسبات در \mathbf{R} و \mathbf{C} در یک هیأت جابجایی نیز برقرارند و بررسی‌درستی آنها را به عهده خواننده می‌گذاریم .
 ۴.۶.۵ - حلقهٔ جابجایی A را در نظر می‌گیریم . برای اینکه A یک هیأت باشد بایا و بسنده است که :

۱- A دارای یک عنصر یکۀ ۱ باشد .

۲- $A \neq \{0\}$ باشد .

۳- هر عنصر مخالف با صفر از A دارای یک وارون باشد .

بنابر ۴.۵.۵ و ۴.۶.۵ شرایط بالا لازم‌اند . به‌وارون فرض می‌کنیم این شرایط برقرار باشند . چون $A \neq \{0\}$ است داریم $۱ \in A - \{0\}$. اگر x و y به $A - \{0\}$ تعلق داشته باشند x^{-1} و y^{-1} وجود دارند و داریم $(xy)(y^{-1}x^{-1})=۱$ پس $xy \neq 0$ می‌باشد و $A - \{0\}$ نسبت به ضرب پایدار است . روشن است که در $A - \{0\}$ قانون ضرب دارای ویژگی انجمنی است و ۱ عنصر بی‌اثر $A - \{0\}$ می‌باشد ، هر عنصر x از $A - \{0\}$ دارای یک عنصر وارون x^{-1} در A است و $x^{-1} \neq 0$ می‌باشد (زیرا $x \cdot 0 = 0 \neq 1$) پس $A - \{0\}$ یک گروه ضربی است .

۴.۷.۵ - چنانچه K یک هیأت باشد ، بنابر ۴.۴.۶ گسترش $n \rightarrow n \cdot ۱$ حلقهٔ \mathbf{Z} در K یک همومرفیسم است . هستهٔ این گسترش بنابر ۳.۲.۳ به صورت $p\mathbf{Z}$ می‌باشد که در آن p یک شمار درست یکتاست ($p \geq 0$) .

قضیه- شمار p بالا یا برابر با صفر است و یا یک شمار اول می‌باشد .
 اثبات- فرض می‌کنیم $p > 0$ باشد . اگر شمارهای درست a و b به قسمی وجود داشته باشند که $0 < a < p$ ، $0 < b < p$ ، و $ab = p$ باشد ، خواهیم داشت :

$$(a \cdot 1)(b \cdot 1) = (ab) \cdot 1 = p \cdot 1 = 0$$

و $a \cdot 1 \neq 0$ و $b \cdot 1 \neq 0$ (زیرا $a \in \mathbb{Z}$ و $b \in \mathbb{Z}$) و این مخالف با ۳.۵.۴ است. پس یا p برابر با ۱ است و یا یک شمار اول می باشد. اما p از شمار ۱ متمایز است زیرا عنصر یکه K متمایز از صفر می باشد.

۸.۵.۴ - شمار درست p که در بالا دیدیم مشخص هیأت K نامیده می شود. بنابر تعریف p ، شمارهای درست n به طوریکه $n \cdot 1 = 0$ باشد مضربهای p هستند. هیأت های \mathbb{Q} و \mathbb{R} و \mathbb{C} دارای مشخص صفرند.

۹.۵.۴ - قضیه - چنانچه x و x' عنصرهایی از هیأت K و n عنصری از \mathbb{Z} باشد به طوریکه داشته باشیم $nx = nx'$ ، اگر n مضربی از مشخص هیأت K نباشد داریم $x = x'$.

اثبات - بنابر ۷.۱.۴ از برابری $nx = nx'$ نتیجه می شود $(n \cdot 1)x = (n \cdot 1)x'$ و از آنجا $(n \cdot 1)(x - x') = 0$. اما $n \cdot 1 \neq 0$ است. پس بنابر ۳.۵.۴ خواهیم داشت $x - x' = 0$ و یا $x = x'$.

۱۰.۵.۴ - قضیه - شمار درست $a > 0$ داده شده است. برای اینکه حلقه $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ یک هیأت باشد بایاویسند است که a اول باشد. در این صورت مشخص هیأت $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ همان شمار a است.

اثبات - قرار می دهیم $A = \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ و برای اینکه اشتباهی پیش نیاید، عنصر یکه A را به صورت $\bar{1}$ می نویسیم. چنانچه $n \in \mathbb{Z}$ باشد \bar{n} کلاس n با مقیاس a خواهد بود. پس تنها هنگامی \bar{n} برابر با کلاس 0 است که n مضربی از a باشد. بنابراین اگر A یک هیأت باشد از ۷.۵.۴ نتیجه می گردد که a یک شمار اول است و مشخص A می باشد. به وارون فرض می کنیم که a اول باشد. عنصر $\bar{1}$ متعلق به A مخالف با صفر است (زیرا شمار ۱ مضربی از a نیست). چنانچه x عنصری دیگر از A و مخالف با صفر باشد، x کلاس یک شمار درست u است که بر a بخش پذیر نیست. شمارهای درست u و a نسبت به یکدیگر اول هستند پس بنابر ۴.۲.۳ شمارهای درست t_1 و t_2 را می توان یافت به قسمی که $ut_1 + at_2 = 1$ باشد. از آنجا نتیجه می شود:

$$ut_1 \equiv 1 \pmod{a}$$

هرگاه x' کلاس t_1 در A باشد بستگی بالا در A چنین نوشته می‌شود:

$$xx' = 1$$

به این ترتیب x وارون پذیر است و بنابراین $4.6.4$ مجموعه A یک هیأت می‌باشد.

برای هر شمار اول دلخواه p می‌توان یک هیأت p عنصری ساخت (هیأت شمارهای

درست با مقیاس p و یا هیأت شمارهایی که با مقیاس p با یکدیگر برابرند).

$4.6.5$ - نتیجه (قضیه فرما) - چنانچه p یک شمار اول و a یک شمار

درست باشد که بر p بخش پذیر نیست، $1 - a^{p-1}$ بر p بخش پذیر است.

اثبات - اگر x کلاس a در $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ باشد داریم $x \neq 0$. چون گروه

$\{0\} - K$ دارای $(p-1)$ عنصر است پس بنابر $4.6.3$ خواهیم داشت $x^{p-1} = 1$.

اما x^{p-1} همان کلاس a^{p-1} با مقیاس p است به عبارت دیگر $1 - a^{p-1}$ بر p

بخش پذیر است.

4.6.6 - حلقه انتگر

$4.6.6.1$ - تعریف - حلقه جابجایی A را که دارای یک عنصر یکه متمایز

از صفر است در نظر می‌گیریم. چنانچه حاصل ضرب هر دو عنصر مخالف با 0

از A مخالف با 0 باشد حلقه را انتگر می‌نامند.

$4.6.6.2$ - دریک حلقه انتگر می‌توان برابری $ab = ab'$ را که در آن $a \neq 0$ است

«ساده» کرد و نوشت $b = b'$. زیرا داریم $a(b - b') = 0$ پس یا $a = 0$ و یا

$b - b' = 0$ است و چون داریم $a \neq 0$ پس $b - b' = 0$ می‌باشد.

$4.6.6.3$ - هر هیأت یک حلقه انتگر است. مثلاً \mathbb{Q} و \mathbb{R} و \mathbb{C} حلقه‌های انتگر

هستند.

$4.6.6.4$ - تبصره - بطور کلی هرگاه K یک هیأت باشد، هر زیر حلقه یکه دار K

یک حلقه انتگر است. مثلاً زیر حلقه \mathbb{Z} از هیأت \mathbb{Q} با اینکه یک هیأت نیست یک حلقه

انتگر می‌باشد.

$4.6.6.5$ - می‌خواهیم نشان دهیم که عملاً کلیه حلقه‌های انتگر با استفاده از تبصره

$4.6.6.4$ بدست می‌آیند. برای این کار یک حلقه انتگر در نظر می‌گیریم و آنرا، با بکاربردن

همان روشی که از حلقه انتگر \mathbb{Z} هیأت \mathbb{Q} را می‌سازد، دریک هیأت غوطه‌ور می‌کنیم.

پس فرض می‌کنیم A یک حلقهٔ انتگر و E مجموعهٔ جفتهای (p, q) باشد که در آنجا $p \in A$ و $q \in A$ و $q \neq 0$ است. چنانچه (p, q) و (p_1, q_1) متعلق به E باشند، هنگامیکه $pq_1 = qp_1$ است می‌نویسیم $(p, q) \sim (p_1, q_1) : R$. روشن است که بستگی R بازتابی و متقارن است. این بستگی متعدی نیز هست زیرا اگر $(p, q) \sim (p_1, q_1)$ و $(p_1, q_1) \sim (p_2, q_2)$ باشد داریم:

$$pq_1q_2 = qp_1q_2 = qq_1p_2, \quad p_1q_2 = q_1p_2, \quad pq_1 = qp_1$$

چون A یک حلقهٔ انتگر و $q_1 \neq 0$ می‌باشد از برابری اخیر نتیجه می‌شود $pq_2 = qp_2$ پس $(p, q) \sim (p_2, q_2)$ است. بنابراین R یک بستگی هم‌ارزی است.

مجموعهٔ E/R را با K نشان می‌دهیم و یک قانون ضرب در مجموعهٔ K چنین تعریف می‌کنیم: چنانچه x و y متعلق به K باشند نماینده‌های (p, q) و (r, s) کلاسهای x و y را انتخاب می‌نماییم و کلاسی را که یک نمایندهٔ آن (pr, qs) است با xy معین می‌کنیم [چون $q \neq 0$ و $s \neq 0$ است پس $qs \neq 0$ می‌باشد به‌طوریکه داریم $(pr, qs) \in E$]. می‌خواهیم ثابت کنیم که xy و یا به‌گفتهٔ دیگر کلاس (pr, qs) ، تنها به x و y بستگی دارد.

اگر (p_1, q_1) یک نمایندهٔ دیگر x و (r_1, s_1) یک نمایندهٔ دیگر y باشد داریم $pq_1 = qp_1$ و $rs_1 = sr_1$. پس $prq_1s_1 = qsp_1r_1$ است و در نتیجه:

$$(pr, qs) \sim (p_1r_1, q_1s_1)$$

می‌باشد یعنی xy بستگی به انتخاب نماینده‌های عنصرهای x و y ندارد. علاوه بر قانون ضرب بالا، در K یک قانون جمع نیز تعریف می‌شود. عنصرهای x و y بالا را اختیار می‌نماییم و کلاسی را که نمایندهٔ آن $(ps + qr, qs)$ است با $x + y$ نشان می‌دهیم. در اینجا نیز باید ثابت کرد که عنصر $x + y$ تنها به x و y بستگی دارد. چون داریم:

$$(ps + qr)q_1s_1 = (pq_1)(ss_1) + (qq_1)(rs_1) = (p_1q)(ss_1) + (qq_1)(r_1s) \\ = (p_1s_1 + q_1r_1)qs$$

پس $(ps + qr, qs) \sim (p_1s_1 + q_1r_1, q_1s_1)$ یعنی $x + y$ تنها بستگی به عنصرهای x و y دارد.

چنانچه $(p, q) \in E$ باشد کلاس هم‌ارزی آنرا که عنصری از K است با $\frac{p}{q}$ نشان

می‌دهیم. بنابراین عملیات ضرب و جمع در K بصورت زیر در می‌آیند:

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}, \quad \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps+qr}{qs}$$

و بستگی هم‌ارزی R بیان می‌کند که:

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \iff ps = qr$$

به کمک این فرمولها و چنده محاسبه ساده دیده می‌شود که:

الف - جمع و ضرب در K جابجایی و انجمنی هستند.

ب - ضرب نسبت به جمع دارای ویژگی پخششی است.

پ - $\frac{0}{1}$ عنصر بی‌اثر جمع و $\frac{1}{1}$ عنصر بی‌اثر ضرب است.

ت - هر عنصر $\frac{p}{q}$ دارای عنصر قرینه $-\frac{p}{q}$ است.

پس K یک حلقه جابجایی ویکه دار است.

برای اینکه عنصر $\frac{p}{q}$ متعلق به K برابر با $\frac{0}{1}$ باشد بایاویسمنده است که $p \cdot 1 = q \cdot 0$

یعنی $p = 0$ باشد. از اینجا نتیجه می‌شود که $\frac{1}{1} \neq \frac{0}{1}$ است. به علاوه اگر $\frac{p}{q} \neq \frac{0}{1}$

باشد با توجه به اینکه $p \neq 0$ است می‌توان عنصر $\frac{q}{p}$ را تشکیل داد، داریم:

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = \frac{pq}{pq} = \frac{1}{1}$$

پس هر عنصر K که مخالف با صفر باشد وارون پذیر است. بنابراین، با استفاده از ۶.۰.۴

نتیجه می‌شود که K یک هیأت می‌باشد.

هرگاه برای هر عنصر p از A عنصر $\frac{p}{1}$ از K را با $\Phi(p)$ نشان دهیم، برای

$p \in A$ و $q \in A$ خواهیم داشت:

$$\Phi(p) + \Phi(q) = \frac{p}{1} + \frac{q}{1} = \frac{p \cdot 1 + q \cdot 1}{1 \cdot 1} = \frac{p+q}{1} = \Phi(p+q)$$

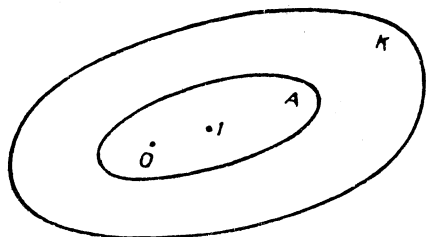
$$\Phi(p) \Phi(q) = \frac{p}{1} \cdot \frac{q}{1} = \frac{pq}{1 \cdot 1} = \frac{pq}{1} = \Phi(pq)$$

بنابراین Φ یک همومرفیسم حلقه A در هیأت K می‌باشد. این همومرفیسم انژکتیو

است زیرا اگر $\frac{p}{1} = \frac{q}{1}$ باشد داریم $p \cdot 1 = 1 \cdot q$ و یا $p = q$. به این ترتیب Φ یک ایزومرفیسم A روی یک زیر حلقه K است. به علت وجود این ایزومرفیسم دو عنصر p و $\frac{p}{1}$ را یکسان می‌گیرند.

۶.۶.۰۴ - تعریف - هیأت K ، که به روش بالا ساخته شد، هیأت

کسرهای حلقه انتگر A نامیده می‌شود.



شکل ۲۰

بنابراین آنچه که دیده شد A با یک زیر حلقه K یکی می‌گردد و هر عنصر p از A

با عنصر $\frac{p}{1}$ از K یکی گرفته می‌شود. به ویژه عنصر 0 از A با $\frac{0}{1}$ یعنی عنصر بی‌اثر K

برای جمع، و عنصر 1 از A با $\frac{1}{1}$ یعنی عنصر بی‌اثر K برای ضرب، یکی گرفته می‌شود.

چنانچه $p \in A$ و $q \in A$ و $q \neq 0$ باشد داریم:

$$\frac{p}{q} \cdot q = \frac{pq}{q} = \frac{p}{1} = p$$

پس $\frac{p}{q} = pq^{-1}$ است.

همان طوری که گفته شد، حلقه انتگرال A در یک هیأت (هیأت کسرهای A) غوطه‌ور گردید.

۷۰۶۰۴ - اگر ساختمان هیأت کسرها را برای حلقه Z بکار بریم هیأت Q بدست می‌آید.

۷۰۴ - ساختمان حلقه Z

۱۰۷۰۴ - در بخش اول شماره ۰۶۰۴ تنها یک قانون ترکیب در A معین گردید (ضرب). در حالت‌های دیگر نیز می‌توان به روش مشابه عمل نمود. به عنوان مثال می‌خواهیم نشان دهیم که چگونه می‌توان به‌طور دقیق، از روی N مجموعه Z را ساخت (ویژگی‌های معمولی N را دانسته فرض می‌کنیم).

مجموعه جفت‌های (m, n) را، که در آنجا m و n متعلق به N هستند، با E نشان می‌دهیم (در اینجا فرض $n \neq 0$ زاید است). چنانچه $m + n_1 = m_1 + n$ باشد قرار می‌دهیم $(m, n) \sim (m_1, n_1)$. به این ترتیب یک بستگی هم‌ارزی R بدست می‌آید. مجموعه E/R را با Z نشان می‌دهیم. برای تعیین قانون جمع در Z دو عنصر دلخواه x و y را در نظر می‌گیریم. اگر (m, n) یک نماینده x و (m', n') یک نماینده y باشد، $x + y$ کلاس عنصر $(m + m', n + n')$ خواهد شد. بدین ترتیب قانون جمع در مجموعه Z معین می‌گردد که دارای ویژگی‌های انجمنی و جابجایی می‌باشد و عنصر بی‌اثر آن کلاس عنصر $(0, 0)$ است. گسترش Φ که یک عنصر n از N را به کلاس عنصر $(n, 0)$ تبدیل می‌کند یک همومرفیسم انژکتیو N در Z است.

۲۰۷۰۴ - به علاوه هر عنصر Z دارای یک عنصر قرینه است. زیرا اگر $(m, n) \in E$ باشد حاصل جمع دو کلاس به نماینده‌های (m, n) و (n, m) کلاسی است به نماینده $(m + n, n + m)$ و در نتیجه $(0, 0)$ یک نماینده این کلاس است، زیرا $(0, 0)$ هم ارز $(m + n, m + n)$ می‌باشد. به این ترتیب Z یک گروه جابجایی برای قانون جمع است.

۳۰۷۰۴ - هر عنصر n از N را با عنصر $\Phi(n)$ از Z یکی می‌گیرند. به این ترتیب N در Z غوطه‌ور می‌گردد به طوری که جمع و تفریق در Z تعمیم جمع و تفریق N می‌شود (روشن است که در N تفریق همیشه ممکن نیست) و عنصر 0 از N با کلاس عنصر $(0, 0)$ یعنی با عنصر صفر Z یکی می‌گردد. چنانچه $(m, n) \in E$ باشد، حاصل جمع

کلاس عنصر (m, n) و کلاس عنصر $(n, 0)$ کلاس عنصر $(m+n, n)$ می‌باشد و کلاس هم‌ارزی $(m+n, n)$ برابر با کلاس عنصر $(m, 0)$ یعنی m است. پس کلاس عنصر (m, n) برابر با $m-n$ می‌گردد.

از اینجاست نتیجه می‌شود که $\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup (-\mathbf{N})$ است. اگر $p \in \mathbf{N} \cap (-\mathbf{N})$ باشد داریم $p \in \mathbf{N}$ و $p \in -\mathbf{N}$. پس عنصر q از \mathbf{N} وجود دارد به طوری که $p = -q$ و از آنجا $p+q=0$ است. پس $p=0$ می‌باشد، و داریم:

$$\mathbf{N} \cap (-\mathbf{N}) = \{0\}$$

۴۰۷۰۴ - در \mathbf{Z} قانون ضرب را به صورت زیر معین می‌کنیم:

$$(m-n)(m_1-n_1) = mm_1 + nn_1 - (mn_1 + nm_1)$$

این حاصل ضرب بستگی به انتخاب عنصرهای (m, n) و (m_1, n_1) ندارد و تنها بستگی به $m-n$ و m_1-n_1 دارد. می‌توان نشان داد که \mathbf{Z} یک حلقه جابجایی است که دارای عنصری که 1 می‌باشد. به علاوه \mathbf{Z} یک حلقه انتگر است.

۳۰۱۰۰ - جمع چند جمله‌ای‌ها - اگر $P = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$ و $Q = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots)$ دو چند جمله‌ای با ضرایب متعلق به K باشند، قراری دهیم:

$$P + Q = (\alpha_0 + \beta_0, \alpha_1 + \beta_1, \dots)$$

به طوری که دیده می‌شود $P + Q$ یک چند جمله‌ای با ضرایب متعلق به K است و مجموعه چند جمله‌ای‌ها با قانون ترکیب بالا (جمع) یک گروه جابجایی تشکیل می‌دهد. عنصریکه این گروه، چند جمله‌ای $(0, 0, 0, \dots)$ است که با ۰ نشان داده می‌شود. قرینه چند جمله‌ای $P = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$ چند جمله‌ای $(-\alpha_0, -\alpha_1, -\alpha_2, \dots)$ می‌باشد و آنرا با $-P$ می‌نمایند.

۴۰۱۰۰ - ضرب چند جمله‌ای‌ها - اگر $P = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$ و $Q = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots)$ دو چند جمله‌ای با ضرایب متعلق به K باشند قراری دهیم $PQ = (\rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots)$ که در آن:

$$\rho_0 = \alpha_0 \beta_0,$$

$$\rho_1 = \alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0,$$

$$\rho_2 = \alpha_0 \beta_2 + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_0,$$

$$\dots$$

$$\rho_n = \alpha_0 \beta_n + \alpha_1 \beta_{n-1} + \dots + \alpha_p \beta_{n-p} + \dots + \alpha_n \beta_0 = \sum_{i+j=n} \alpha_i \beta_j$$

$$\dots$$

چنانچه α_i برای $i > N$ و β_j برای $j > M$ برابر با صفر باشند، ρ_n ها برای $n > N + M$ برابر با صفر خواهند بود. زیرا اگر $n > N + M$ باشد، دست کم یکی از دو بستگی $i > N$ و یا $j > M$ برقرار است و هر جمله $\alpha_i \beta_j$ از ρ_n برابر با صفر می‌باشد. چنانکه دیده می‌شود PQ یک چند جمله‌ای با ضرایب متعلق به K است.

۵۰۱۰۰ - چون حلقه K جابجایی است، به سادگی دیده می‌شود که ضرب چند جمله‌ای‌ها گردش پذیر است، و به علاوه نسبت به جمع دارای ویژگی پخش می‌باشد. برای اثبات ویژگی انجمنی ضرب چند جمله‌ای دیگر $R = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots)$ را در نظر می‌گیریم و قراری دهیم:

$$QR = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots), \quad P(QR) = (\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots),$$

$$(PQ)R = (\tau'_0, \tau'_1, \tau'_2, \dots)$$

داریم :

$$\tau_n = \sum_{i+s=n} \alpha_i \sigma_s = \sum_{i+s=n} \alpha_i \left(\sum_{j+k=s} \beta_j \gamma_k \right) = \sum_{i+j+k=n} \alpha_i (\beta_j \gamma_k)$$

$$\tau'_n = \sum_{r+k=n} \rho_r \gamma_k = \sum_{r+k=n} \left(\sum_{i+j=r} \alpha_i \beta_j \right) \gamma_k = \sum_{i+j+k=n} (\alpha_i \beta_j) \gamma_k$$

و از آنجا $\tau_n = \tau'_n$ پس $(PQ)R = P(QR)$ است .

بدین ترتیب مجموعه چند جمله‌ای‌ها ، با ضرایب متعلق به K ، تشکیل یک حلقه جابجایی می‌دهند .

۶۰۱۰۵ - اگر α عنصری از K باشد ، چند جمله‌ای $(\alpha, 0, 0, \dots)$ را با $\bar{\alpha}$ نشان می‌دهیم . به آسانی دیده می‌شود که گسترش $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$ یک همومرفیسم K در حلقه چند جمله‌ای‌ها است و یا به گفته دیگر داریم :

$$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta} , \quad \overline{\alpha \beta} = \bar{\alpha} \bar{\beta}$$

به روشنی دیده می‌شود که همومرفیسم بالا انژکتیو است . همچنین می‌توان $\bar{\alpha}$ را با α یکی گرفت [همان طوری که چند جمله‌ای $(0, 0, 0, \dots)$ را با 0 نشان دادیم] . بدین ترتیب دیده می‌شود که K یک زیر حلقه از حلقه چند جمله‌ای‌ها و عنصریکه آن همان عنصریکه حلقه چند جمله‌ای‌هاست .

اگر $\alpha \in K$ و $P = (\alpha_0, \alpha_1, \dots)$ یک چند جمله‌ای با ضرایب متعلق به K باشد ، به آسانی دیده می‌شود که $\alpha P = (\alpha \alpha_0, \alpha \alpha_1, \alpha \alpha_2, \dots)$ است .

۷۰۱۰۵ - نمایش معمولی یک چند جمله‌ای = چند جمله‌ای $(0, 0, 0, \dots)$ را اختیار می‌کنیم و آن را با X می‌نماییم . با استفاده از تعریف ضرب چند جمله‌ای‌ها داریم :

$$X^r = (0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$$

$$X^r = (0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$X^n = (0, 0, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$$

[که در آن ضریب $(n+1)$ ام برابر با ۱ یعنی عنصریکه K می‌باشد] .

پس خواهیم داشت :

$$\alpha_n X^n = (0, 0, 0, \dots, 0, \alpha_n, 0, 0, \dots)$$

و چنانچه α_i ها هنگامیکه $i > n$ است برابر با صفر باشند می توان نوشت :

$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \dots + \alpha_n X^n$$

از این پس یک چند جمله ای را به صورت :

$$\alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \dots + \alpha_n X^n$$

نشان می دهیم و آنرا چند جمله ای از X می خوانیم. در این عبارت X متغیر و یا مجهول گفته می شود. روشن است که بجای X می توان حرف دیگری به کاربرد.

۵.۱.۸ - حلقه چند جمله ای های X با ضرایب متعلق به K را با $K[X]$ نشان

می دهیم.

۲.۵ - درجه یک چند جمله ای

۵.۲.۱ - چند جمله ای $P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \dots \in K[X]$ مفروض است.

درجه P ، که با $\deg P$ نموده می شود، عبارت است از بزرگترین شمار درست n به طوری که $\alpha_n \neq 0$ باشد. این شمار بجز در مورد چند جمله ای همواره وجود دارد و تنها چند جمله ای دارای درجه نیست.

پس اگر P یک چند جمله ای درجه n باشد، داریم :

$$P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_n X^n$$

که در آن $\alpha_n \neq 0$ است. عنصر α_n را ضریب بزرگترین درجه چند جمله ای P می نامند. چند جمله ای P را **یکمائی** گویند اگر $\alpha_n = 1$ باشد.

۵.۲.۲ - نابرابری $\deg P \leq n$ بیان می کند که یا $\deg P = 0$ و یا

است. همچنین است هنگامیکه $\deg P < n$ باشد.

۵.۲.۳ - اگر P و Q دو چند جمله ای مخالف با صفر باشند، به آسانی دیده می شود

که :

$$\deg(P+Q) \leq \sup(\deg P, \deg Q)$$

است. هم‌چنین از فرمول (۱) شماره ۰۱۰۰۴ ناهراری :

$$\deg(PQ) \leq \deg P + \deg Q$$

نتیجه می‌شود.

۰۲۰۰۴ - قضیه - فرض می‌کنیم K یک حلقهٔ انتگر باشد، در این

صورت :

I - حلقهٔ $K[X]$ انتگر است.

II - اگر P و Q متعلق به $K[X]$ و مخالف با صفر باشند، داریم :

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$$

اثبات - چند جمله‌ای 1 مخالف با 0 و عنصریکه حلقهٔ $K[X]$ می‌باشد. فرض

می‌کنیم :

$$P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \dots + \alpha_n X^n, \quad (\alpha_n \neq 0)$$

$$Q = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \dots + \beta_p X^p, \quad (\beta_p \neq 0)$$

بنابراین داریم :

$$PQ = \alpha_0 \beta_0 + (\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0) X + \dots + \alpha_n \beta_p X^{n+p}$$

اما بنا به فرض حلقهٔ K انتگر است، پس $\alpha_n \beta_p \neq 0$ می‌باشد. این بستگی نشان می‌دهد

که $PQ \neq 0$ است یعنی $K[X]$ انتگر می‌باشد و به علاوه :

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$$

۳۰۵ - تقسیم چند جمله‌ای‌ها بر حسب نماهای کاهشی

فرض می‌کنیم K یک هیأت باشد (تا پایان شماره ۰۵۰۷ این فرض را

پایدار می‌گیریم).

۰۲۰۰۱ - قضیه - چنانچه A و B متعلق به $K[X]$ و $B \neq 0$ باشد،

دو چندجمله‌ای یکتای Q و R متعلق به $K[X]$ وجود دارند به طوری که :

$$A = BQ + R, \quad \deg R < \deg B$$

(چند جمله‌ای Q را خارج قسمت و R را ماندهٔ تقسیم A بر B می‌نامند).

اثبات :

۱ - یکتایی Q و R - فرض می‌کنیم :

$$A = BQ + R = BQ_1 + R_1, \quad \deg R < \deg B, \quad \deg R_1 < \deg B$$

باشد خواهیم داشت $R - R_1 = B(Q_1 - Q)$ برای $Q_1 = Q$ یکتایی Q و R روشن است. اگر $Q_1 - Q \neq 0$ باشد، بنا بر شماره ۴۰۲۰۰ باید داشته باشیم:

$$\deg(R - R_1) \geq \deg B \quad \text{و یا} \quad \deg(B(Q_1 - Q)) \geq \deg B$$

که ممکن نیست. پس $Q_1 = Q$ و در این صورت $R_1 = R$ است.
۲- وجود Q و R - فرض می‌کنیم:

$$A = \alpha_n X^n + \alpha_{n-1} X^{n-1} + \dots + \alpha_0$$

$$B = \beta_m X^m + \beta_{m-1} X^{m-1} + \dots + \beta_0, \quad (\beta_m \neq 0)$$

اگر درجه A کوچکتر از درجه B باشد می‌توان Q و R را به ترتیب برابر با 0 و A گرفت. چنانچه $\deg A \geq \deg B$ باشد (در این صورت $A \neq 0$ است و می‌توان فرض کرد که α_n مخالف صفر باشد) $n \geq m$ است. قرار می‌دهیم:

$$q_1 = \frac{\alpha_n}{\beta_n} X^{n-m}$$

پس جمله‌ای از Bq_1 که دارای بزرگترین درجه می‌باشد عبارت از $\alpha_n X^n$ است و خواهیم داشت:

$$(1) \quad A - Bq_1 = A_1, \quad \deg A_1 < \deg A$$

اگر $\deg A_1$ کوچکتر از $\deg B$ باشد قضیه ثابت است، وگرنه یک جمله‌ای q_2 به قسمی وجود دارد که:

$$(2) \quad A_1 - Bq_2 = A_2, \quad \deg A_2 < \deg A_1, \dots$$

این روش را ادامه می‌دهیم تا به بستگی زیر برسیم:

$$(n) \quad A_{n-1} - Bq_n = A_n, \quad \deg A_n < \deg B$$

چنانچه دوطرف برابری‌های (۱)، (۲)، ... و (n) را با هم جمع کنیم خواهیم داشت:

$$A - B(q_1 + q_2 + \dots + q_n) = A_n$$

که با اختیار $Q = q_1 + q_2 + \dots + q_n$ و $R = A_n$ وجود Q و R ثابت می‌گردد.

۴۰۲۰۰ - اثبات بالا یک روش عملی برای محاسبه Q و R بدست می‌دهد.

مثال زیر چگونگی روش بالا را درحالتی که $K = R$ است نشان می‌دهد:

$$\begin{array}{l}
 A : x^6 + 2x^4 - x^2 + 22x \\
 B_{q_1} : \frac{x^6 - 4x^4 + x^2}{1x^6 - 2x^4 + 22x} \\
 A_1 : \frac{x^6 - 4x^4 + x^2}{1x^6 - 2x^4 + 22x} \\
 B_{q_2} : \frac{1x^6 - 24x^4 + 1x^2}{22x^4 - 1x^2 + 22x} \\
 A_2 : \frac{22x^4 - 1x^2 + 22x}{22x^4 - 88x^2 + 22x} \\
 B_{q_3} : \frac{22x^4 - 88x^2 + 22x}{82x^2} \\
 A_3 : \frac{82x^2}{82x^2} \\
 B_{q_4} : \frac{82x^2 - 228x + 82}{228x - 82} \\
 A_4 : \frac{228x - 82}{228x - 82} \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_R
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l}
 x^2 - 4x + 1 : B \\
 \hline
 \underbrace{x^2}_{q_1} + \underbrace{1x^2}_{q_2} + \underbrace{22x}_{q_3} + \underbrace{1}_{q_4} \\
 \hline
 Q
 \end{array} \right.$$

(در عمل از نوشتن حروف A ، B ، A₁ ، . . . خودداری می‌کنند) .

۵ . ۴ - بخش پذیری چند جمله‌ای‌ها

۵ . ۴ . ۱ - فرض می‌کنیم $\lambda \neq 0$ متعلق به K باشد . هر چند جمله‌ای $A \in K[X]$

را بخش می‌کند . زیرا (بادر نظر گرفتن تعریف بخش پذیری (۴ . ۲ . ۴)) داریم :

$$A = \lambda \left(\frac{1}{\lambda} A \right)$$

۵ . ۴ . ۲ - فرض می‌کنیم A و B دو عنصر از $K[X]$ باشند . اگر B بر A بخش پذیر

و $B \neq 0$ باشد خواهیم داشت $\deg A \leq \deg B$. در حالتی که $\deg A = \deg B$

باشد داریم $B = \lambda A$ که در آنجا $\lambda \in K$ و $\lambda \neq 0$ است (زیرا از برابری $B = CA$

برابری $\deg C = \deg B - \deg A = 0$ نتیجه می‌شود) .

۵ . ۴ . ۳ - اگر A و B بخش‌یاب یکدیگر باشند، خواهیم داشت $B = \lambda A$ که در آنجا

$\lambda \in K$ و $\lambda \neq 0$ است (این مطلب برای $A \neq 0$ و $B \neq 0$ از شماره ۵ . ۴ . ۲ بدست می‌آید

و در حالتی که $A = 0$ و $B = 0$ باشد درستی آن روشن است) . وارون این مطلب نیز آشکار

است . هنگامی که A و B بخش‌یاب یکدیگرند ، گوئیم که A و B متناسب‌اند . به آسانی

می‌توان دید که عبارت « A و B متناسب‌اند » یک بستگی هم‌ارزی است . دو چند جمله‌ای

متناسب از نظر بخش پذیری درست دارای یک نقش هستند . هر چند جمله‌ای مخالف با صفر

تنها و تنها متناسب با یک چند جمله‌ای یگانی است .

۰ . ۴ . ۴ - لم - اگر I یک ایده آل $K[X]$ باشد :

I - یک چند جمله‌ای P متعلق به $K[X]$ به قسمتی وجود دارد که هر عنصر I بر آن بخش پذیر است .

II - چند جمله‌ای P که با ویژگی (I) معین می‌شود با تقریب یک ضرب مخالف با صفر ، یکتاست .

اثبات - برای $I = \{0\}$ لم روشن است . بنابراین فرض می‌کنیم $\{0\} \neq I$ باشد . عنصر P متعلق به I را که مخالف با صفر است و کوچکترین درجه ممکن را دارد در نظر می‌گیریم . می‌دانیم که همه مضرب‌های P متعلق به I است . به وارون بنابر ۰ . ۳ . ۱ برای هر چند جمله‌ای A متعلق به I ، چند جمله‌ای‌های Q و R متعلق به $K[X]$ وجود دارند به طوری که $A = PQ + R$ و $\deg R < \deg P$ باشد . چون A و P متعلق به I هستند داریم $R = A - PQ \in I$. اگر $R \neq 0$ باشد نا برابری $\deg R < \deg P$ با انتخاب P ناسازگار است . پس $R = 0$ و $A = PQ$ مضرب P می‌باشد . بدین ترتیب (I) ثابت می‌شود . روشن است که برای هر λ متعلق به K و مخالف با صفر ، I مجموعه مضرب‌های λP نیز هست . به وارون اگر I مجموعه مضرب‌های چند جمله‌ای P' باشد P' و P مضرب یکدیگرند . پس با استفاده از شماره ۰ . ۴ . ۳ داریم $P' = \lambda P$ ، $\lambda \in K$ ، $\lambda \neq 0$. بدین ترتیب (II) ثابت می‌گردد .

۰ . ۴ . ۵ - قضیه - فرض می‌کنیم A و B دو عنصر از $K[X]$ باشند .

(I) - عنصر D متعلق به $K[X]$ وجود دارد به طوری که بخش‌های مشترک A و B بخش‌های D باشند .

(II) - چند جمله‌ای D بالا با تقریب یک ضرب ثابت مخالف با صفر یکتاست .

(III) - اگر چند جمله‌ای‌های A و B هر دو برابر با صفر نباشند درجه D بزرگتر از درجه هر بخش‌های مشترک A و B است .

(IV) - دو چند جمله‌ای U و V متعلق به $K[X]$ وجود دارد به قسمتی که داریم :

$$(۱) \quad AU + BV = D$$

اثبات - مجموعه چند جمله‌ای‌هایی را که به صورت $AP + BQ$ هستند در آنها P و Q متعلق به $K[X]$ می‌باشند با I نشان می‌دهیم . به آسانی دیده می‌شود که I یک ایدال $K[X]$ است . پس بنابر ۰ . ۴ . ۴ یک چند جمله‌ای D متعلق به

$K[X]$ وجود دارد به طوری که هر عنصر I مضرب D باشد. بنابراین برای هر چند جمله‌ای H متعلق به $K[X]$ هم‌ارزی‌های زیر را داریم:

H بخش‌یاب مشترک A و B است.

$H \Leftrightarrow H$ بخش‌یاب هر چند جمله‌ای به صورت $AP + BQ$ است که در آن P و Q متعلق به $K[X]$ هستند.

$H \Leftrightarrow H$ بخش‌یاب عنصرهای I است.

$H \Leftrightarrow H$ بخش‌یاب چند جمله‌ای D می‌باشد.

پس D دارای ویژگی (I) است. چنانچه D' چند جمله‌ای دیگری با ویژگی (I)

باشد بنا بر ۵. ۴. ۳، D و D' بخش‌یاب یکدیگرند و داریم $D' = \lambda D$ ، $\lambda \in K$ ، $\lambda \neq 0$. اگر دست کم یکی از دو چند جمله‌ای A و B مخالف با صفر باشد، D مخالف با صفر است و با استفاده از (I) و شماره ۵. ۴. ۲ ویژگی (III) نتیجه می‌شود. ویژگی (IV) با توجه به اینکه $D \in I$ است بدست می‌آید.

۵. ۴. ۶ - تعریف = چند جمله‌ای D را بزرگترین بخش‌یاب مشترک

A و B می‌نامند. بستگی (۱) برابری بزوغفته می‌شود.

۵. ۴. ۷ - روش پیدا کردن بزرگترین بخش‌یاب مشترک دو چند جمله‌ای

A و B - هرگاه $B = 0$ باشد، بخش‌یاب‌های مشترک A و B بخش‌یاب‌های A هستند. پس بزرگترین بخش‌یاب مشترک A و B است.

فرض می‌کنیم $B \neq 0$ باشد. با استفاده از شماره ۵. ۳. ۱ داریم:

$$A = BQ + R_1, \quad \deg R_1 < \deg B$$

بنابراین بخش‌یاب‌های مشترک A و B بخش‌یاب‌های R_1 نیز هستند. پس بزرگترین بخش‌یاب مشترک A و B بزرگترین بخش‌یاب مشترک R_1 و B نیز می‌باشد.

اگر $R_1 = 0$ باشد چند جمله‌ای B بزرگترین بخش‌یاب مشترک A و B است.

فرض می‌کنیم R_1 مخالف با صفر باشد. می‌توان نوشت $B = R_1 Q_1 + R_2$ که $\deg R_2 < \deg R_1$. هر بخش‌یاب مشترک B و R_1 بخش‌یاب مشترک R_1 و R_2 نیز هست.

پس بزرگترین بخش‌یاب مشترک B و R_1 بزرگترین بخش‌یاب مشترک R_1 و R_2 است.

چون درجه چند جمله‌ای‌های B ، R_1 ، R_2 ، ... کاملاً کاهش می‌یابد و این

کاهش نمی‌تواند تا بی‌پایان ادامه یابد، سرانجام به بستگی $R_{n-1} = R_n Q_n + R_{n+1}$ خواهیم رسید به قسمی که $R_{n+1} = 0$ باشد. پس بزرگترین بخش‌یاب مشترک A و B بزرگترین بخش‌یاب مشترک R_n و R_{n+1} است، یعنی R_n است.

۸.۴.۵ - قضیه - چنانچه A و B و P متعلق به $K[X]$ و چند جمله‌ای

D بزرگترین بخش‌یاب مشترک A و B باشد، DP بزرگترین بخش‌یاب مشترک AP و BP است.

اثبات - چون AP و BP مضرب‌های DP هستند، پس هر بخش‌یاب DP بخش‌یاب AP و BP نیز هست. به وارون اگر Q یک بخش‌یاب مشترک AP و BP باشد، بنا بر شماره ۴.۴.۵ چند جمله‌ای Q بخش‌یاب چند جمله‌ای $APU + BPV = (AU + BV)P = DP$ می‌باشد.

۹.۴.۵ - قضیه - فرض می‌کنیم A و B بر چند جمله‌ای Q که مخالف با صفر است بخش پذیر بوده و A_1 و B_1 به ترتیب خارج قسمت‌های A و B بر Q باشند. در این صورت چند جمله‌ای D (بزرگترین بخش‌یاب مشترک A و B) بر Q بخش پذیر است و چند جمله‌ای D_1 (خارج قسمت D بر Q) بزرگترین بخش‌یاب مشترک A_1 و B_1 می‌باشد.

اثبات - اگر D_1 بزرگترین بخش‌یاب مشترک A_1 و B_1 باشد، $D_1 Q$ بزرگترین بخش‌یاب مشترک A و B خواهد شد (۸.۴.۵). پس $D_1 Q$ متناسب با D است. بنابراین دو چند جمله‌ای D_1 و $D_1 Q$ متناسب‌اند.

۱۰.۴.۵ - به آسانی می‌توان مطالب این پاراگراف را در مورد بیش از دو چند جمله‌ای تعمیم داد. مثلاً اگر A و B و C متعلق به $K[X]$ باشند، بزرگترین بخش‌یاب مشترک چند جمله‌ای‌های A و B و C به صورت $AU + BV + CW$ است.

۵.۵ - چند جمله‌ای‌هایی که نسبت به هم اول‌اند

۱.۵.۵ - تعریف - چنانچه A و B متعلق به $K[X]$ و بزرگترین بخش‌یاب مشترک آنها برابر با ۱ باشد، A و B را نسبت به هم اول گویند.

۲.۵.۵ - قضیه - فرض می‌کنیم A و B و C متعلق به $K[X]$ باشند.

اگر BC بر A بخش پذیر و A و B نسبت به هم اول باشند، چند جمله‌ای C بر A بخش پذیر است.

اثبات - چون چند جمله‌ای‌های BC و AC بر A بخش پذیرند بزرگترین بخش‌یاب مشترک آنها نیز بر A بخش پذیر می‌باشد. اما بنا بر $۸.۴.۵$ بزرگترین بخش‌یاب مشترک BC و AC عبارت است از $C = C \cdot ۱$ پس C بر A بخش پذیر است.

۳.۵.۵ - قضیه - فرض می‌کنیم A و B متعلق به $K[X]$ باشند. برای

اینکه A و B نسبت به هم اول باشند، با یاب‌بسنده است که دو عنصر U و V از $K[X]$ بتوان یافت به طوری که $AU + BV = ۱$ باشند.

اثبات - از برابری بزوی برمی‌آید که شرط بالا لازم است. به علاوه اگر U و V متعلق به $K[X]$ وجود داشته باشند به طوری که $AU + BV = ۱$ باشد، هر بخش‌یاب مشترک A و B بخش‌یاب ۱ نیز هست، پس عنصری است از K . بنابراین ۱ بزرگترین بخش‌یاب مشترک A و B می‌باشد.

۴.۵.۵ - قضیه - فرض می‌کنیم A و B متعلق به $K[X]$ و چند جمله‌ای

D یک بخش‌یاب مشترک مخالف با صفر A و B باشد. چنانچه A_1 و B_1 به ترتیب خارج قسمت‌های A و B بر D باشند، برای اینکه D بزرگترین بخش‌یاب مشترک A و B باشد با یاب‌بسنده است که A_1 و B_1 نسبت به هم اول باشند.

اثبات - اگر D' بزرگترین بخش‌یاب مشترک A و B باشد، بزرگترین بخش‌یاب مشترک A_1 و B_1 خارج قسمت D' بر D است ($۹.۴.۵$). بنابراین برای اینکه D و D' متناسب باشند، با یاب‌بسنده است که ۱ بزرگترین بخش‌یاب مشترک A_1 و B_1 باشد.

۵.۵.۵ - قضیه - اگر A نسبت به هر یک از چند جمله‌ای‌های B_1, B_2, \dots

B_n, \dots اول باشد، A و چند جمله‌ای $B_1 B_2 \dots B_n$ نسبت به هم اول اند.

اثبات - با استفاده از روش بازگشت کافی است که قضیه را برای $n = ۲$ ثابت کنیم.

بنابراین فرض چند جمله‌ای‌های U_1, V_1, U_2, V_2 متعلق به $K[X]$ به قسی وجود دارند

که $AU_1 + B_1V_1 = 1$ و $AU_2 + B_2V_2 = 1$ باشد. از ضرب این دو برابری خواهیم داشت:

$$A(U_1AU_2 + U_1B_2V_2 + B_1V_1U_2) + B_1B_2(V_1V_2) = 1$$

برابری بالا بیان می‌کند که A و B_1B_2 نسبت به هم اول اند (۳.۵.۵).

۶.۵.۵ - چند جمله‌ای‌های A, B, C, \dots متعلق به $K[X]$ را نسبت به هم اول می‌نامند اگر بزرگترین بخش‌یاب مشترکشان برابر با ۱ باشد. در این صورت می‌توان مانند شماره ۳.۵.۵ نشان داد که چندجمله‌ای‌های U, V, W, \dots متعلق به $K[X]$ وجود دارند به قسمی که $AU + BV + \dots + CW = 1$ باشد.

۶.۵ - مضربهای مشترک دو چندجمله‌ای

۱.۶.۵ - قضیه - فرض می‌کنیم A و B دو عنصر از $K[X]$ باشند.

(I) - یک چندجمله‌ای M متعلق به $K[X]$ با ویژگی زیر وجود دارد:

مضربهای مشترک A و B بر M بخش پذیرند.

(II) - چندجمله‌ای M که با ویژگی بالا معین شده است با تقریب

یک ضریب مخازی با ۰ یکتاست.

(III) - اگر $A \neq 0$ و $B \neq 0$ باشد، درجه چندجمله‌ای M از درجه

هر مضرب مشترک A و B کوچکتر است.

اثبات - روشن است که مجموعه مضربهای مشترک A و B یک ایدال از $K[X]$

می‌باشد. بنابر شماره ۴.۴.۵، یک چندجمله‌ای مانند M وجود دارد به قسمی که هر عنصر

I مضربی از M باشد و M با تقریب یک ضریب ثابت مخالف با صفر تنها عنصری است که

دارای این ویژگی می‌باشد. به این ترتیب (I) و (II) قضیه ثابت می‌شود. چنانچه A و B

مخالف با صفر باشند، چندجمله‌ای AB مخالف با صفر است، و چون $AB \in I$ است،

پس $I \neq \{0\}$ می‌باشد و از آنجا داریم $M \neq 0$. بنابراین درجه M معین است و

(III) از (I) و شماره ۴.۴.۵ نتیجه می‌گردد.

۲.۶.۵ - تعریف - چندجمله‌ای M کوچکترین مضرب مشترک A و B

نامیده می‌شود.

۷.۵- چند جمله‌ای‌های ساده نشدنی

۱.۷.۰- تعریف - چند جمله‌ای P متعلق به $K[X]$ را ساده نشدنی می‌گویند اگر :

$$1 - \deg P \geq 1 \text{ باشد.}$$

۲- هر بخش‌یاب P متناسب با یکی از دو چند جمله‌ای P یا 1 باشد. با استفاده از ۲.۴.۰ می‌توان شرط زیر را جایگزین (۲) کرد : چند جمله‌ای P دارای هیچ بخش‌یابی مانند Q نباشد که در نابرابری $0 < \deg Q < \deg P$ صدق کند. چند جمله‌ای‌های ساده نشدنی دارای همان نقش شمارهای اول در نظریه شمارهای درست می‌باشند.

۲.۷.۰- مثال - هر چند جمله‌ای درجه اول ساده نشدنی است.

۳.۷.۰- مثال - چند جمله‌ای $X^2 + 1$ متعلق به $R[X]$ ساده نشدنی است.

زیرا اگر $X^2 + 1$ دارای بخش‌یابهای درجه اول باشد خواهیم داشت :

$$X^2 + 1 = (X + a)(X + a')$$

که در آن a و a' متعلق به R می‌باشند. پس باید $a + a' = 0$ و $aa' = 1$ و یا $a^2 = -1$ باشد که غیر ممکن است.

بعداً خواهیم دید که $X^2 + 1$ در حلقه $C[X]$ که در آنجا C هیأت شمارهای مختلط

را نشان می‌دهد چند جمله‌ای ساده شدنی است. زیرا $(X + i)(X - i) = X^2 + 1$ می‌باشد.

۴.۷.۰- مثال - چند جمله‌ای $X^2 - 2$ در حلقه $Q[X]$ ساده نشدنی است (مانند

۳.۷.۰ کافی است نشان دهیم که در حلقه Q دو شمار a و a' یافت نمی‌شوند که در شرط‌های

$a + a' = 0$ و $aa' = -2$ صدق کنند، زیرا از این دو بستگی به $a^2 = 2$ می‌رسیم).

اما اگر $X^2 - 2$ را عنصری از $R[X]$ فرض کنیم، خواهیم داشت :

$$X^2 - 2 = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$$

که نشان می‌دهد $X^2 - 2$ در $R[X]$ ساده شدنی است.

۵.۷.۰- فرض می‌کنیم P و Q دو عنصر از $K[X]$ باشند و چند جمله‌ای Q ساده

نشدنی باشد. در این صورت یا P و Q نسبت به هم اولند و یا Q بخش‌یاب P است. زیرا

اگر P و Q نسبت به هم اول نباشند بخشیاب مشترکی خواهند داشت. اگر این بخشیاب مشترک را که عنصری از K نیست R بنامیم چون Q ساده نشدنی است، پس Q و R متناسب اند. بنابراین Q بخشیاب P است.

۶.۷.۵- فرض می‌کنیم P و Q دو عنصر ساده نشدنی از $K[X]$ باشند.

در این صورت چند جمله‌ای‌های P و Q یا نسبت به هم اولند و یا باهم متناسب اند. این مطلب به سادگی از ۵.۷.۵ نتیجه می‌شود. به ویژه دوچند جمله‌ای ساده نشدنی یگانی یا نسبت به هم اولند و یا باهم برابرند.

۷.۷.۵- فرض می‌کنیم $(P_i)_{i \in I}$ یک خانواده از عنصرهای ساده نشدنی و یگانی

$K[X]$ باشد که به دلخواه اندیس گذاری شده‌اند (به قسمی که برای $i \neq j$ داشته باشیم $P_i \nmid P_j$). عنصرهای این خانواده ممکن است به شماره بی‌پایان باشند. از ۶.۷.۵ نتیجه می‌شود که P_i ها دو به دو نسبت به هم اولند.

قضیه - چنانچه P عنصر مخالف صفری از $K[X]$ باشد، P را می‌توان تنها به یک روش به صورت:

$$(۱) \quad P = \lambda \prod_{i \in I} P_i^{\alpha_i}$$

نوشت که در آنجا $\lambda \in K$ و α_i ها ($\alpha_i \geq 0$) شماره‌های درستی هستند که به جز شماره با پایانی از آنها برابر با صفر می‌باشند.

[در حقیقت حاصل ضرب (۱) که به ظاهری بی‌پایان است یک حاصل ضرب با پایان می‌باشد.

زیرا تنها شماره با پایانی از α_i ها مخالف با صفر است].

اثبات - هر گاه $\deg P = 0$ باشد قضیه روشن است. فرض می‌کنیم $\deg P = n \geq 1$

و قضیه برای چند جمله‌ای‌هایی که درجه آنها کوچکتر از n است برقرار باشد.

مجموعه بخشیب‌های P را که درجه‌شان بزرگتر یا برابر با یک است با E

نشان می‌دهیم. چون P بخشیب خودش است داریم $P \in E$ و بنابراین $E \neq \emptyset$.

عنصر Q از E را که دارای کوچکترین درجه ممکن است انتخاب می‌کنیم. روشن است

که Q ساده نشدنی است. پس برای اندیسی مانند j چند جمله‌ای P_j بخش پذیر

است. قرار می‌دهیم $P = P_j R$ که در آن R عنصری از $K[X]$ می‌باشد، داریم

$\deg R < n$. بنابراین قضیه برای چند جمله‌ای R برقرار است. یعنی R به صورت (۱)

تجزیه می‌شود. پس چند جمله‌ای $P = P_j R$ نیز دارای تجزیه‌ای به صورت (۱) است.

اکنون فرض می‌کنیم که به جز برابری (۱) برابری دیگر $P = \mu \prod_{i \in I} P_i^{\beta_i}$ ، که

در آن $\mu \in K$ و β_i ها ($\beta_i \geq 0$) شماره‌های درستی هستند که تنها شماره‌ها پايانی از آنها مخالف با صفر می‌باشند، وجود داشته باشد. اگر برای اندیس j داشته باشیم $\alpha_j = 0$ ، با استفاده از $0 \cdot 0 \cdot 0$ چند جمله‌ای‌های P و P_j نسبت به هم اول خواهند شد، پس $\beta_j = 0$ است. بنابراین اگر برای اندیس j داشته باشیم $\beta_j > 0$ ، خواهیم داشت $\alpha_j > 0$. چنانچه

دو طرف برابری $\lambda \prod_{i \in I} P_i^{\alpha_i} = \mu \prod_{i \in I} P_i^{\beta_i}$ را به P_j بخش کنیم به یک برابری از همین

نوع که درجه آن کوچکتر از n است خواهیم رسید، و با استفاده از فرض بازگشت خواهیم داشت $\lambda = \mu$ ، $\alpha_i = \beta_i$ (برای $i \neq j$) و $\alpha_j - 1 = \beta_j - 1$. در نتیجه داریم $\alpha_j = \beta_j$ یعنی تجزیه P یکتاست.

۸.۷.۵ - قضیه - فرض می‌کنیم $P = \lambda \prod_{i \in I} P_i^{\alpha_i}$ و $Q = \mu \prod_{i \in I} P_i^{\beta_i}$ دو

چند جمله‌ای مخالف با صفر از $K[X]$ باشند. برای اینکه P بخش‌یاب Q باشد بایا و بسنده است که برای همه i های متعلق به I داشته باشیم $\alpha_i \leq \beta_i$. اثبات - اگر برای هر اندیس i نابرابری $\alpha_i \leq \beta_i$ برقرار باشد، روشن است که P

یک بخش‌یاب Q است. به وارون از برابری‌های $Q = PR$ و $R = \nu \prod_{i \in I} P_i^{\gamma_i}$ برابری

$$Q = \lambda \nu \prod_{i \in I} P_i^{\alpha_i + \gamma_i}$$

نتیجه می‌شود. بنابراین برای همه i ها داریم:

$$\beta_i = \alpha_i + \gamma_i \geq \alpha_i$$

۹.۷.۵ - نتیجه - چنانچه $P = \lambda \prod_{i \in I} P_i^{\alpha_i}$ و $Q = \mu \prod_{i \in I} P_i^{\beta_i}$ دو عنصر

مخالف با صفر از $K[X]$ و D و M به ترتیب بزرگترین بخش‌یاب مشترک و کوچکترین مضرب مشترک P و Q باشند خواهیم داشت:

$$M = \prod P_i^{\sup}(\alpha_i, \beta_i) \quad , \quad D = \prod P_i^{\inf}(\alpha_i, \beta_i)$$

(دو برابری بالا به آسانی از ۸.۷.۰ نتیجه می‌شوند).

۱۰.۷.۰- اگر P, Q, D, M چند جمله‌ای‌های داده شده در ۹.۷.۰ باشند،

چند جمله‌ای‌های PQ و DM متناسب‌اند. زیرا برای هر اندیس i داریم:

$$\inf(\alpha_i, \beta_i) + \sup(\alpha_i, \beta_i) = \alpha_i + \beta_i$$

$$DM = \left(\prod P_i^{\alpha_i} \right) \left(\prod P_i^{\beta_i} \right) \quad \text{پس :}$$

۸.۵- توابع چند جمله‌ای

۱۰.۸.۰- فرض می‌کنیم A یک حلقه با عنصر یکه ۱ و K یک زیر حلقهٔ جابجایی

از A که شامل عنصر یکه است باشد. عنصر x متعلق به A را که با همهٔ عناصر K گردش پذیر است در نظر می‌گیریم و گسترش Φ حلقهٔ $K[X]$ در A را به صورت زیر معین می‌کنیم:

$$\Phi(\alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \dots + \alpha_n X^n) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n$$

۲.۸.۰- قضیه - گسترش Φ یک همومرفیسم حلقهٔ $K[X]$ در حلقهٔ

A است.

اثبات - لازم است که درستی دو برابری $\Phi(P+P') = \Phi(P) + \Phi(P')$ و

$\Phi(PP') = \Phi(P)\Phi(P')$ ثابت شود. اگر:

$$P' = \sum \alpha'_i X^i \quad , \quad P = \sum \alpha_i X^i$$

باشد، داریم:

$$\begin{aligned} \Phi(P+P') &= \Phi\left(\sum (\alpha_i + \alpha'_i) X^i\right) = \sum (\alpha_i + \alpha'_i) x^i = \sum \alpha_i x^i + \sum \alpha'_i x^i \\ &= \Phi(P) + \Phi(P') \end{aligned}$$

چنانچه قرار دهیم $\beta_i = \sum_{j+k=i} \alpha_j \alpha'_k$ خواهیم داشت $PP' = \sum \beta_i X^i$ پس:

$$\Phi(PP') = \Phi\left(\sum \beta_i X^i\right) = \sum \beta_i x^i$$

و چون x با همه عناصرهای K گردش پذیر است داریم :

$$\begin{aligned}\Phi(P)\Phi(P') &= \left(\sum_j a_j x^j\right) \left(\sum_k a'_k x^k\right) = \sum_{j,k} a_j x^j a'_k x^k = \sum_{j,k} a_j a'_k x^{j+k} \\ &= \sum_i \left(\sum_{j+k=i} a_j a'_k\right) x^i = \sum_i \beta_i x^i\end{aligned}$$

$$\Phi(PP') = \Phi(P)\Phi(P') \quad \text{پس :}$$

$$P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_n X^n \quad \text{۲.۸.۵- باشد عنصر}$$

$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$ را که با قرار دادن x به جای X به دست می‌آید ، با $P(x)$ نمایش می‌دهیم . از قضیه ۲.۸.۵ دستوره‌ای محاسبه زیر نتیجه می‌شود :

$$(P+P')(x) = P(x) + P'(x) \quad , \quad PP'(x) = P(x)P'(x)$$

به آسانی دیده می‌شود که اگر λ متعلق به K و P متعلق به $K[X]$ باشد ، خواهیم

$$(\lambda P)(x) = \lambda P(x) \quad \text{داشت :}$$

۴.۸.۵- اگر $A = K[X]$ و $x = X$ باشد به آسانی دیده می‌شود که $P(X)$

همان P است . به این علت است که بین P و $P(X)$ تفاوتی نمی‌گذارند و آنها را به جای یکدیگر بکار می‌برند .

۵.۸.۵- به ویژه مطالب شماره‌های ۱.۸.۵ و ۲.۸.۵ و ۳.۸.۵ را هنگامی بکار

می‌بریم که $A = K$ باشد . به این معنی که برای هر x از K و هر چند جمله‌ای P از $K[X]$ ، عنصر $P(x)$ متعلق به K را با قرار دادن x به جای X در P معین می‌کنیم که در دستوره‌ای محاسبه بالا صدق می‌کند . بدین ترتیب تابع $P(x) \rightarrow x$ در K و با مقادیر متعلق به K تعریف می‌شود که آنرا تابع چند جمله‌ای معین شده به وسیله P می‌نامند . چنانچه $K = \mathbf{R}$ باشد به چند جمله‌ای‌های معمولی می‌رسیم .

۹.۵- ریشه‌های یک چند جمله‌ای

بار دیگر فرض می‌کنیم K یک هیأت باشد (تا پایان شماره ۱۲.۵ این فرض را برقرار

می‌گیریم) .

۱.۹.۵- تعریف - چنانچه P عنصری از $K[X]$ و $p \in K$ طوری باشد

که داشته باشیم $P(\rho) = 0$ ، گوئیم ρ يك ریشه یا جواب چند جمله‌ای P و یا ریشهٔ معادلهٔ $P(X) = 0$ است.

۲.۹.۰ - قضیه - برای اینکه $\rho \in K$ ریشهٔ چند جمله‌ای $P \in K[X]$ باشد بایاوبسنده است که P بر $X - \rho$ بخش پذیر باشد.

اثبات - چنانچه $P(X) = (X - \rho)Q(X)$ و $Q \in K[X]$ باشد، با استفاده از ۳.۸.۰ خواهیم داشت:

$$P(\rho) = (\rho - \rho)Q(\rho) = 0$$

به وارون فرض می‌کنیم $P(\rho) = 0$ باشد، اگر $P(X) = (X - \rho)Q(X) + R(X)$ بخش کنیم:

$$(1) \quad P(X) = (X - \rho)Q(X) + R(X)$$

که در آن داریم $\deg R(X) < \deg(X - \rho) = 1$. یعنی R عنصری مانند λ از K است و از برابری (۱) نتیجه می‌شود:

$$0 = P(\rho) = (\rho - \rho)Q(\rho) + \lambda = \lambda$$

پس $R = 0$ است و برابری (۱) نشان می‌دهد که P بر $X - \rho$ بخش پذیر می‌باشد.

۲.۹.۰ - قضیه - فرض می‌کنیم $P \in K[X]$ و $\rho \in K$ و h يك شمار درست بزرگتر از ۰ باشد. شرطهای زیرهم‌ارزند:

(I) - چند جمله‌ای P بر $(X - \rho)^{h+1}$ بخش پذیر نیست ولی بر $(X - \rho)^h$ بخش پذیر می‌باشد.

(II) - داریم $P = (X - \rho)^h Q$ که در آنجا ρ ریشهٔ چند جمله‌ای $Q \in K[X]$ نیست.

اثبات - با استفاده از ۲.۹.۰ به آسانی از (I) به (II) می‌رسیم.

فرض می‌کنیم (II) برقرار باشد. روشن است که P بر $(X - \rho)^h$ بخش پذیر است. چنانچه P بر $(X - \rho)^{h+1}$ نیز بخش پذیر باشد، چند جمله‌ای Q_1 وجود دارد به طوری که داشته باشیم $P = (X - \rho)^{h+1} Q_1$. پس با استفاده از ۴.۲.۰ خواهیم داشت $Q_1 = (X - \rho) Q$. بنابراین باید $Q(\rho) = 0$ باشد که برخلاف فرض است.

۴.۹.۰ - تعریف - اگر چند جمله‌ای P شرطهای قضیهٔ ۲.۹.۰ را دارا باشد ρ ریشهٔ مرتبهٔ h چند جمله‌ای P و h را مرتبهٔ چندگانگی ρ می‌نامند.

ریشه مرتبه یک را ریشه ساده و ریشه مرتبه دو را ریشه دوگانه می‌گویند.

۵.۹.۰- فرض می‌کنیم چند جمله‌ای $P \neq 0$ و ρ یک ریشه P باشد. از تعریف

مرتبه چندگانگی یک ریشه چنین برمی‌آید که برای هر شمار درست h چند جمله‌ای P بر

$(X - \rho)^h$ بخش پذیر نیست و تنها یک شمار درست h وجود دارد به قسمی که P بر

$(X - \rho)^h$ بخش پذیر است و بر $(X - \rho)^{h+1}$ بخش پذیر نیست. بنابراین هر ریشه P

دارای مرتبه چندگانگی معینی است.

۶.۹.۰- گاهی عنصر a متعلق به K را که ریشه چند جمله‌ای P نیست ریشه مرتبه

صفر P می‌نامند.

۷.۹.۰- قضیه- فرض می‌کنیم P یک عنصر از $K[X]$ و ρ_1, ρ_2, \dots

$\rho_p, \dots, \rho_2, \rho_1$ ریشه‌های متمایز چند جمله‌ای P باشند. اگر h_1, h_2, \dots, h_p را

به ترتیب مرتبه چندگانگی ریشه‌های $\rho_p, \dots, \rho_2, \rho_1$ بگیریم داریم:

$$(2) \quad P(X) = (X - \rho_1)^{h_1} (X - \rho_2)^{h_2} \dots (X - \rho_p)^{h_p} Q(X)$$

که در آنجا Q عنصری از $K[X]$ و $\rho_p, \dots, \rho_2, \rho_1$ ریشه‌های مرتبه صفر

Q هستند.

اثبات - چنانچه $p=1$ باشد قضیه همان تعریف ۹.۴.۰ است. فرض می‌کنیم

قضیه برای $p-1$ برقرار باشد و داشته باشیم:

$$P(X) = (X - \rho_1)^{h_1} (X - \rho_2)^{h_2} \dots (X - \rho_{p-1})^{h_{p-1}} R(X)$$

که در آن $R \in K[X]$ است. چون با هیچ یک از ریشه‌های $\rho_1, \dots, \rho_{p-1}$

برابر نیست، پس $X - \rho_p$ با $X - \rho_1, \dots, X - \rho_{p-1}$ اول است و از $0 \neq 0$ نتیجه

می‌شود که $(X - \rho_p)^{h_p}$ نسبت به $(X - \rho_{p-1})^{h_{p-1}} \dots (X - \rho_1)^{h_1}$ نیز اول

می‌باشد. اما $(X - \rho_p)^{h_p}$ بخش‌یاب چند جمله‌ای $P(X)$ است، پس چند جمله‌ای

$R(X)$ بر $(X - \rho_p)^{h_p}$ بخش پذیر می‌باشد (۲.۵.۰)، یعنی داریم:

$$R(X) = (X - \rho_p)^{h_p} Q(X)$$

که در آنجا Q متعلق به $K[X]$ است. بدین ترتیب برابری (۲) به دست می‌آید. اکنون

اگر ρ_i ریشه چند جمله‌ای Q باشد، Q بر $X - \rho_i$ بخش پذیر است و بنابراین P بر $(X - \rho_i)^{h_i + 1}$ بخش پذیر خواهد شد، و این برخلاف فرض است.

۸.۹.۰ - نتیجه - چنانچه P یک چند جمله‌ای درجه n از $K[X]$ باشد،

چند جمله‌ای P بیش از n ریشه متمایز ندارد.

زیرا اگر $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n+1}$ ریشه‌های متمایز چند جمله‌ای P باشند از ۷.۹.۰ نتیجه می‌شود که P بر چند جمله‌ای $(X - \rho_1)(X - \rho_2) \dots (X - \rho_{n+1})$ بخش پذیر است و این ممکن نیست زیرا درجه P برابر با n است.

۹.۹.۰ - نتیجه - چنانچه هیأت K بی‌پایان و P و Q دو عنصر از $K[X]$

باشند که یک تابع چند جمله‌ای را معین می‌کنند، خواهیم داشت $P=Q$.
زیرا اگر $P - Q \neq 0$ و $\deg(P - Q) = n$ باشد برای هر عنصر دلخواه $p \in K$ خواهیم داشت $(P - Q)(p) = 0$. پس این برابری برای بیش از n مقدار p برقرار است که با ۸.۹.۰ سازگار نیست.

۱۰.۹.۰ - اگر هیأت K بی‌پایان باشد (مثلاً هنگامیکه K برابر با \mathbf{Q} یا \mathbf{R} و یا \mathbf{C} است) می‌توان هر چند جمله‌ای را با تابع چند جمله‌ای آن یکی گرفت. اما به وارون اگر p یک شمار اول و $K = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ باشد، به طوری که در ۱۱.۰.۴ دیدیم برای هر $x \neq 0$ از K داریم $x^{p-1} - 1 = 0$. پس برای هر x متعلق به K برابری $x^p - x = 0$ برقرار است. بنابراین عنصر $X^p - X$ از $K[X]$ تابع 0 را روی K معین می‌کند، درحالی‌که این چندجمله‌ای صفر نیست. این مطلب درستی نمایش چند جمله‌ای‌ها را به وسیله عبارتهای صوری، که در آغاز این فصل اختیار کردیم، می‌رساند.

۱۱.۹.۰ - کار برد - قضیه ویلسون - برای اینکه شمار درست $p \geq 2$

اول باشد بیاو بسنده است که $(p-1)! + 1$ بر p بخش پذیر باشد.

اثبات - اگر p اول نباشد می‌توان نوشت $p = qr$ که $1 < q < p$ و $1 < r < p$ است. پس $(p-1)! + 1$ بر q بخش پذیر است. بنابراین شمار $(p-1)! + 1$ بر q و در نتیجه بر p بخش پذیر نیست.

چنانچه p اول و K هیأت $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ باشد از قضیه فرما معلوم می‌شود که $1, 2, \dots,$

$p-1$ ریشه‌های چند جمله‌ای $X^{p-1} - 1 \in K[X]$ هستند (اگر $k \in \mathbb{Z}$ باشد برای آسانی کلاس هم‌ارزی شماره‌هایی را که با مقیاس p با k برابرند با خود k نشان می‌دهیم). پس بنابراین $۷.۹.۵$ خواهیم داشت:

$$X^{p-1} - 1 = (X-1)(X-2) \cdots (X-(p-1))Q$$

که در آنجا $Q \in K[X]$ است. چون درجه چند جمله‌ای،

$$(X-1)(X-2) \cdots (X-(p-1))Q$$

برابر با $p-1$ است، پس Q از درجه صفر است. به عبارت دیگر Q عنصری مانند λ متعلق به K است و با در نظر گرفتن جمله X^{p-1} خواهیم داشت $\lambda = 1$. بنابراین داریم ثابت و طرف را اختیار کنیم بستگی $1 = (-1)^{p-1}(p-1)!$ در K به دست می‌آید. اگر p فرد باشد برابری $1 = (-1)^{p-1}(p-1)!$ را در K داریم، به عبارت دیگر شمار $1 + (p-1)!$ بر p بخش پذیر است. چنانچه $p=2$ باشد خواهیم داشت:

$$(p-1)! + 1 = 1 + 1 = 2$$

که باز هم بر 2 بخش پذیر می‌باشد.

۱۵.۵- دستور انترپلاسیون لاگرانژ

۱۰.۱۵.۵- فرض می‌کنیم $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ و $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ از عنصرهای K و $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ از یکدیگر متمایز باشند. می‌خواهیم چند جمله‌ای $P \in K[X]$ را به دست آوریم به طوری که $P(\rho_1) = \lambda_1, \dots, P(\rho_r) = \lambda_r, \dots, P(\rho_n) = \lambda_n$ باشد. $۲.۱۰.۵$ - قضیه - علاوه بر فرض‌های بالا اگر $\deg P \leq n-1$ باشد

چند جمله‌ای P وجود دارد و یکتاست.

اثبات - چنانچه دو چند جمله‌ای P و Q در شرط‌های قضیه صدق کنند داریم:

$$\deg(P-Q) \leq n-1$$

و $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ ریشه‌های چند جمله‌ای $P-Q$ می‌باشند. پس $P-Q=0$ است (۸.۹.۵). یعنی چند جمله‌ای P یکتاست. اکنون قرار می‌دهیم:

$$(۱) \quad P_i(X) = \frac{(X-\rho_1) \cdots (X-\rho_{i-1})(X-\rho_{i+1}) \cdots (X-\rho_n)}{(\rho_i-\rho_1) \cdots (\rho_i-\rho_{i-1})(\rho_i-\rho_{i+1}) \cdots (\rho_i-\rho_n)}$$

داریم:

$$P_i(\rho_i) = 1 \quad \text{و} \quad P_i(\rho_1) = P_i(\rho_2) = \dots = P_i(\rho_{i-1}) = P_i(\rho_{i+1}) = \dots = P_i(\rho_n) = 0$$

پس :

$$(۲) \quad P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_n P_n$$

چند جمله‌ای مورد نظر است. یعنی P وجود دارد.

دستور (۲) (که در آن P_i ها به وسیله برای (۱) داده شده‌اند) دستور انترپولاسیون

لاگرانژ نامیده می‌شود.

۱۱.۵ - حالت $K=C$

۱۰۱۱۰۰ - قضیه دالامبر - گوس - هر چند جمله‌ای از $C[X]$ که درجه

آن بزرگتر یا برابر با یک باشد، دست کم دارای یک ریشه است (این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم).

۲۰۱۱۰۰ - با استفاده از ۲۰۹۰۰ دیده می‌شود که هر چند جمله‌ای P از $C[X]$ که

درجه آن بزرگتر از صفر باشد دست کم دارای بخشهایی از درجه یک است. پس تنها عنصرهای ساده نشدنی $C[X]$ چند جمله‌ای‌های درجه یک آن هستند.

۳۰۱۱۰۰ - تبصره ۵ - قضیه دالامبر - گوس، برای چند جمله‌ای‌های درجه اول روشن

است. اکنون آنرا برای یک چند جمله‌ای درجه دوم ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم :

$$P(X) = aX^2 + bX + c$$

باشد که در آن a ، b و c متعلق به C هستند و $a \neq 0$ است. داریم :

$$P(X) = a \left[\left(X + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

اما هر شمار مختلط دست کم دارای یک ریشه دوم است. اگر یکی از ریشه‌های دوم

$b^2 - 4ac$ را با $\sqrt{b^2 - 4ac}$ نشان دهیم خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} P(X) &= a \left[\left(X + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^2 \right] \\ &= a \left(X + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(X + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \\ &= a \left(X - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(X - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \end{aligned}$$

دیده می‌شود که اگر $b^2 - 4ac \neq 0$ باشد، $P(X)$ دارای دو ریشه ساده:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

است. چنانچه $b^2 - 4ac = 0$ باشد $P(X)$ دارای یک ریشه دوگانه $-\frac{b}{2a}$ است.

۴.۱۱.۰ - قضیه - فرض می‌کنیم P یک چند جمله‌ای درجه n از

$C[X]$ و مخالف با صفر باشد. چنانچه $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$ تنها ریشه‌های

متمايز P و h_1, h_2, \dots, h_p به ترتیب مرتبه چندگانگی این ریشه‌ها باشند، داریم:

$$P(X) = \lambda(X - \rho_1)^{h_1}(X - \rho_2)^{h_2} \dots (X - \rho_p)^{h_p} \quad - (I)$$

که در آن λ ضریب جمله‌ای از P است که دارای بزرگترین درجه می‌باشد.

$$h_1 + h_2 + \dots + h_p = n \quad - (II)$$

اثبات - از ۷.۹.۰ نتیجه می‌شود:

$$P(X) = (X - \rho_1)^{h_1} \dots (X - \rho_p)^{h_p} Q(X)$$

که در آن هیچ یک از شماره‌های مختلط $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$ ریشه $Q(X)$ نیستند. اما ریشه‌های Q ریشه‌های P نیز می‌باشند، پس Q دارای هیچ ریشه‌ای نیست. بنابراین

Q عنصری مانند λ از C است (۴.۱۱.۰). چون جمله $\lambda X^{h_1} + \dots + h_p$ از

$(X - \rho_1)^{h_1} \dots (X - \rho_p)^{h_p} Q(X)$ دارای بزرگترین درجه است قضیه ثابت می‌شود.

۵.۱۱.۰ - فرمول (I) شماره ۴.۱۱.۰ تجزیه چند جمله‌ای P به سازه‌های یگانی

ساده نشدنی است. بنابر ۷.۷.۰ این تنها تجزیه P به حاصل ضرب سازه‌های یگانی درجه اول می‌باشد.

۶.۱۱.۰ - برابری (II) شماره ۴.۱۱.۰ نشان می‌دهد که هر چند جمله‌ای مخالف

با صفر و از درجه n با ضرایب متعلق به C درست دارای n ریشه است، که در آنجا هر ریشه

ساده یک بار و هر ریشه دوگانه دوبار و ... به حساب می‌آیند.

۷.۱۱.۰ - قضیه - (بستگی‌های بین ضرایب و ریشه‌ها) - فرض می‌کنیم:

$$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$$

یک چند جمله‌ای از درجه n و متعلق به $C[X]$ و r_1, r_2, \dots, r_n ریشه‌های P باشند، که در آنجا $n \geq 1$ و هر ریشه به شماره مرتبه چندگانگی همان ریشه تکرار شده است. چنانچه «توابع متقارن» $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ از ریشه‌های P را به ترتیب زیر معین کنیم:

$$\sigma_1 = \sum_i r_i = r_1 + r_2 + \dots + r_n$$

$$\sigma_2 = \sum_{i < j} r_i r_j = r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + r_{n-1} r_n$$

$$\sigma_3 = \sum_{i < j < k} r_i r_j r_k = r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \dots + r_{n-2} r_{n-1} r_n$$

.....

$$\sigma_n = r_1 r_2 \dots r_n$$

داریم:

$$\sigma_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad \sigma_2 = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\sigma_3 = -\frac{a_{n-3}}{a_n}, \quad \dots, \quad \sigma_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

اثبات - بنابر ۴.۱۱.۵ داریم:

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0 \equiv a_n (X - r_1)(X - r_2) \dots (X - r_n)$$

چنانچه دو طرف برابری را باهم مقایسه کنیم خواهیم داشت:

$$a_{n-p} = a_n \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} (-1)^p r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_p} = (-1)^p a_n \sigma_p$$

و قضیه ثابت می‌شود.

۱۲.۵- حالت $K = \mathbb{R}$

۱۰.۱۲.۵- اگر $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ یک عنصر از $C[X]$ باشد

چند جمله‌ای \bar{P} از $\bar{a}_0 + \bar{a}_1 X + \dots + \bar{a}_n X^n$ را مزدوج چند جمله‌ای P می‌نامند و با \bar{P} نمایش می‌دهند.

۲.۱۲.۵- برای دو چند جمله‌ای $P \in \mathbb{C}[X]$ ، $Q \in \mathbb{C}[X]$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ همواره داریم :

$$\overline{P+Q} = \bar{P} + \bar{Q}$$

$$\overline{\lambda P} = \bar{\lambda} \bar{P}$$

$$\overline{PQ} = \bar{P} \bar{Q}$$

$$\overline{\bar{P}} = P$$

اثبات همه دستوره‌های بالا مشابه یکدیگر است. برای نمونه دستور سوم را ثابت می‌کنیم. اگر $P = \sum \alpha_i X^i$ و $Q = \sum \beta_j X^j$ باشد داریم:

$$PQ = \sum \gamma_k X^k, \quad \gamma_k = \sum_{i+j=k} \alpha_i \beta_j$$

$$\bar{P} = \sum \bar{\alpha}_i X^i, \quad \bar{Q} = \sum \bar{\beta}_j X^j \quad \text{همچنین:}$$

و از آنجا خواهیم داشت:

$$\overline{PQ} = \sum \gamma'_k X^k, \quad \gamma'_k = \sum_{i+j=k} \bar{\alpha}_i \cdot \bar{\beta}_j = \sum_{i+j=k} \bar{\alpha}_i \bar{\beta}_j = \bar{\gamma}_k$$

پس $\overline{PQ} = \bar{P} \bar{Q}$ می‌باشد.

۳.۱۲.۵- اگر $P \in \mathbb{C}[X]$ باشد از ۲.۱۲.۵ نتیجه می‌شود که چند جمله‌ای‌های

$P + \bar{P}$ و $P \bar{P}$ با مزدوجشان برابرند، پس ضرایبشان متعلق به \mathbb{R} است.

۴.۱۲.۵- از بستگی $\overline{PQ} = \bar{P} \bar{Q}$ نتیجه می‌شود که اگر P بر P_1 بخش پذیر

باشد \bar{P} بر \bar{P}_1 بخش پذیر است. وارون این مطلب نیز درست است زیرا $\bar{\bar{P}} = P$ می‌باشد.

۵.۱۲.۵- اگر $x \in \mathbb{C}$ باشد داریم $\overline{P(x)} = \bar{P}(\bar{x})$ زیرا از $P = \sum \alpha_i X^i$

به دست می‌آید:

$$\overline{P(x)} = \sum \bar{\alpha}_i \bar{x}^i = \overline{\sum \alpha_i x^i} = \bar{P}(\bar{x})$$

۶.۱۲.۵- قضیه - فرض می‌کنیم P یک عنصر از $\mathbb{C}[X]$ و ρ متعلق

به C باشد. در این صورت هم‌ارزی‌های زیر را داریم:

(I) - ریشه مرتبه h چند جمله‌ای P است $\iff \bar{\rho}$ ریشه مرتبه

h چند جمله‌ای \bar{P} است.

(II) - اگر ضریب‌های P متعلق به R باشند:

ρ ریشه مرتبه h چند جمله‌ای P است $\iff \bar{\rho}$ ریشه مرتبه h چند

جمله‌ای P است.

اثبات - بنابر ۴.۱۲.۵ برای اینکه P بر $(X - \rho)^h$ بخش پذیر باشد و بر

$(X - \rho)^{h+1}$ بخش پذیر نباشد بایاوبسنده است که \bar{P} بر $(X - \rho)^h$ بخش پذیر باشد

و بر $(X - \rho)^{h+1}$ بخش پذیر نباشد. اما با استفاده از ۲.۱۲.۵ داریم:

$$\overline{(X - \rho)^h} = (X - \bar{\rho})^h$$

که از آن (I) نتیجه می‌شود و (II) به آسانی از (I) به دست می‌آید.

۷.۱۲.۵ - قضیه - فرض می‌کنیم P یک عنصر مخالف با صفرا از $R[X]$

باشد که ریشه‌های حقیقی و متمایز آنرا با r_1, r_2, \dots, r_p و ریشه‌های

مختلط و متمایز آنرا با $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q$ می‌نماییم. اگر

h_i مرتبه چندگانگی r_i و k_i مرتبه چندگانگی ρ_i باشد داریم:

$$P = \lambda (X - r_1)^{h_1} \dots (X - r_p)^{h_p} (X - \rho_1)^{k_1} (X - \bar{\rho}_1)^{k_1} \dots$$

$$(X - \rho_q)^{k_q} (X - \bar{\rho}_q)^{k_q}$$

که در آن λ ضریب جمله‌ای از P است که دارای بزرگترین درجه می‌باشد.

اثبات این قضیه از شماره ۴.۱۱.۵ نتیجه می‌شود.

۸.۱۲.۵ - تبصره - در تجزیه بالا (۷.۱۲.۵) ممکن است همه ریشه‌های P حقیقی

باشند که در این صورت سازه‌های $(X - \rho_i)^{k_i} (X - \bar{\rho}_i)^{k_i}$ در تجزیه پیدا نمی‌شوند.

همچنین ممکن است هیچ یک از ریشه‌های P حقیقی نباشند که در این حالت سازه‌های

$(X - r_j)^{h_j}$ در تجزیه وجود نخواهند داشت.

۹.۱۲.۵ - لم - اگر β و γ شماره‌های مختلط و $P = X^2 + \beta X + \gamma$

باشد، شرط‌های زیر هم‌ارزند:

(I) - سه جمله‌ای P متعلق به $\mathbf{R}[X]$ می‌باشد و دارای ریشه حقیقی

نیست .

(II) - شماره مختلط (غیر حقیقی) ρ وجود دارد به طوری که داریم :

$$P = (X - \rho)(X - \bar{\rho})$$

(III) - دو شماره حقیقی p و $q \neq 0$ وجود دارند به قسمی که داریم :

$$P = (X - p)^2 + q^2$$

اثبات - (III) \iff (II) : با فرض (III) داریم :

$$P = (X - p + iq)(X - p - iq) = (X - \rho)(X - \bar{\rho})$$

که در آنجا $\rho = p + iq$ شماره حقیقی نیست زیرا $q \neq 0$ است .

(I) \iff (II) : با فرض (II) سه جمله‌ای P دارای ضرایب حقیقی است (۳.۱۲.۰).

به علاوه ریشه‌های P عبارتند از ρ و $\bar{\rho}$ که حقیقی نیستند .

(I) \iff (III) : با فرض (I) شماره‌های β و γ حقیقی هستند و $\beta^2 - 4\gamma < 0$

است . به علاوه می‌توان نوشت :

$$P = \left(X + \frac{\beta}{2} \right)^2 + \frac{4\gamma - \beta^2}{4}$$

که با قرار دادن :

$$p = -\frac{\beta}{2}, \quad q = \frac{\sqrt{4\gamma - \beta^2}}{2}$$

خواهیم داشت $P = (X - p)^2 + q^2$, $p \in \mathbf{R}$, $q \in \mathbf{R}$, $q \neq 0$.

۱۰.۱۲.۰ - قضیه - عنصرهای ساده نشدنی $\mathbf{R}[X]$ عبارتند از :

(I) - چند جمله‌ای‌های درجه اول .

(II) - چند جمله‌ای‌های درجه دوم که مبین آنها منفی است .

اثبات :

روشن است که چند جمله‌ای‌های درجه اول ساده نشدنی هستند (۲.۷.۰) . همچنین

سه جمله‌ای‌های درجه دوم که دارای مبین منفی می‌باشند ، ریشه حقیقی ندارند . پس دارای

بخشیاب درجه اول نیستند ، به عبارت دیگر ساده نشدنی می‌باشند .

به وارون اگر P یک چند جمله‌ای ساده نشدنی از $R[X]$ باشد، بنا بر ۱.۱۱.۵، P دارای یک ریشه مختلط ρ است. چنانچه ρ متعلق به R باشد، در $R[X]$ چند جمله‌ای P بر $X - \rho$ بخش پذیر است (۲.۹.۵)، پس P متناسب با $X - \rho$ و در نتیجه از درجه اول است. اگر ρ متعلق به R نباشد با در نظر گرفتن (۷.۱۲.۵) چند جمله‌ای P به صورت:

$$P = (X - \rho)(X - \bar{\rho})Q$$

نوشته می‌شود که در آن Q متعلق به $C[X]$ است. چنانچه:

$$A = (X - \rho)(X - \bar{\rho})$$

باشد، بنا بر شماره ۳.۱۲.۵، چند جمله‌ای A متعلق به $R[X]$ است. پس Q که خارج قسمت P بر A می‌باشد یک عنصر از $R[X]$ است. چون P در $R[X]$ ساده نشدنی است، پس P متناسب با A است، و با استفاده از ۹.۱۲.۵ نتیجه می‌شود که مابین A منفی است.

۱۱.۱۲.۵ - قضیه - اگر P یک عنصر مخالف با صفر از $R[X]$ باشد، تجزیه P به صورت حاصل ضرب یک شمار حقیقی در چند جمله‌ای‌هایی می‌آید:

$$X - r, (X - p)^2 + q^2$$

نوشته می‌شود که در آنجا p, q, r متعلق به R و $q \neq 0$ است. به علاوه این تجزیه یکتاست.

اثبات این قضیه از ۷.۷.۵ و ۱۰.۱۲.۵ نتیجه می‌شود.

۱۲.۱۲.۵ - ممکن است پیدا کردن ریشه‌های یک چند جمله‌ای از $C[X]$ دشوار باشد و همواره نتوان یک چند جمله‌ای را به صورت‌های ۴.۱۱.۵ و ۱۱.۱۲.۵ تجزیه کرد.

۱۳.۵ - مشتق یک چند جمله‌ای

۱.۱۳.۰ - فرض می‌کنیم K یک حلقه جابجایی و یگانی و:

$$P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$$

عنصری از $K[X]$ باشد. چند جمله‌ای:

$$a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 + \dots + na_nX^{n-1}$$

را مشتق P می‌نامند و با P' نمایش می‌دهند (هنگامیکه $K = \mathbf{R}$ باشد تعریف بالا همان تعریف مشتق در آنالیز است).

۲۰۱۳۰ - قضیه - اگر چند جمله‌ای‌های P و Q متعلق به $K[X]$ و

$\lambda \in K$ و n یک شمار درست بزرگتر از صفر باشد داریم:

$$(1) \quad (P+Q)' = P' + Q'$$

$$(2) \quad (\lambda P)' = \lambda P'$$

$$(3) \quad (PQ)' = P'Q + PQ'$$

$$(4) \quad (P^n)' = nP^{n-1}P'$$

اثبات - درستی دستورهای (۱) و (۲) آشکار است.

فرض می‌کنیم دستور (۳) برای جفت‌های (P, Q) و (P_1, Q_1) برقرار و λ و λ_1 متعلق به K باشند. در این صورت این دستور برای $(\lambda P + \lambda_1 P_1, Q)$ نیز برقرار است. زیرا:

$$\begin{aligned} [(\lambda P + \lambda_1 P_1)Q]' &= (\lambda PQ + \lambda_1 P_1 Q)' = \lambda(PQ)' + \lambda_1(P_1 Q)' \\ &= \lambda(P'Q + PQ') + \lambda_1(P'_1 Q + P_1 Q'_1) \\ &= (\lambda P' + \lambda_1 P'_1)Q + (\lambda P + \lambda_1 P_1)Q' \\ &= (\lambda P + \lambda_1 P_1)'Q + (\lambda P + \lambda_1 P_1)Q' \end{aligned}$$

به این ترتیب اثبات (۳) به حالت $P = X^p$ و سپس به حالت $Q = X^q$ برمی‌گردد و در این صورت داریم:

$$(X^p X^q)' = (X^{p+q})' = (p+q)X^{p+q-1}$$

$$(X^p)' X^q + X^p (X^q)' = pX^{p-1} X^q + X^p qX^{q-1} = (p+q)X^{p+q-1}$$

بنابراین (۳) ثابت می‌شود. دستور (۴) با استفاده از روش بازگشت و دستور (۳) به دست می‌آید.

۲۰۱۳۰ - مشتق‌های پی‌درپی - مشتق‌های پی‌درپی $P', P'', \dots, P^{(n)}, \dots$

چند جمله‌ای P را به روش بازگشت و با قرار دادن $P^{(n)} = (P^{(n-1)})'$ تعریف می‌کنند.

۴.۱۳.۰- مثال - فرض می‌کنیم ρ عنصری متعلق به K و h یک شمار درست

بزرگتر از صفر باشد. مشتق‌های پی‌درپی $P = (X - \rho)^h$ ، بنابر ۴.۱۳.۰ (۴) عبارتند از:

$$P' = h(X - \rho)^{h-1}$$

$$P'' = h(h-1)(X - \rho)^{h-2}$$

.....

$$P^{(h)} = h!$$

$$P^{(h+1)} = P^{(h+r)} = \dots = 0$$

به طوری که دیده می‌شود $P^{(h)}(\rho) = h!$ است و برای $i \neq h$ داریم $P^{(i)}(\rho) = 0$.

۵.۱۳.۰- قضیه (دستور تیلر) - فرض می‌کنیم K یک هیأت بامشخص

صفر و $\rho \in K$ باشد. برای هر عنصر P از $K[X]$ داریم:

$$(5) \quad P(X) = P(\rho) + \frac{1}{1!} P'(\rho)(X - \rho) + \frac{1}{2!} P''(\rho)(X - \rho)^2 + \dots$$

$$= \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} P^{(i)}(\rho)(X - \rho)^i$$

(در حقیقت شماره جمله‌های مجموع طرف دوم با پایان است. زیرا اگر $\deg P = n$ باشد،

خواهیم داشت $P^{(n+1)} = P^{(n+r)} = \dots = 0$. هنگامی که $K = \mathbf{R}$ باشد دستور (۵)

از ۱.۱.۷ کتاب آنالیز نتیجه می‌شود).

اثبات - هر عنصر متعلق به $K[X]$ را می‌توان به صورت مجموع جمله‌هایی مانند

$\lambda(X - \rho)^h$ نوشت که در آنجا $\lambda \in K$ و h یک شمار درست بزرگتر و یا برابر با صفر

است. زیرا برای هر جمله مانند X^p داریم:

$$X^p = ((X - \rho) + \rho)^p = \sum_{q=0}^p C_p^q (X - \rho)^q \rho^{p-q}$$

به علاوه اگر دستور (۵) برای دو چند جمله‌ای P و Q برقرار باشد به آسانی دیده می‌شود

که این دستور برای $P + Q$ و λP نیز برقرار است ($\lambda \in K$). پس کافی است دستور

(۵) را برای $P = (X - \rho)^h$ ثابت کنیم. اما در این صورت، بنابر ۴.۱۳.۰، طرف

دوم برابری (۵) به شکل $h!(X-\rho)^h$ درمی‌آید و بدین ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

(دستور (۵) با فرض این که مشخص K برابر با صفر باشد دارای مفهوم است.

زیرا لازم است که بتوانیم عنصر $P^{(i)}(\rho)$ متعلق به K را بر $i!$ بخش کنیم).

۶.۱۳.۵- قضیه - فرض می‌کنیم K یک هیأت با مشخص صفر و چند

جمله‌ای P متعلق به $K[X]$ باشد. اگر عنصر ρ متعلق به K ریشه مرتبه

h چند جمله‌ای P باشد، ρ ریشه مرتبه $h-1$ چند جمله‌ای P' است.

اثبات - بنا بر تعریف ۴.۹.۵ داریم $P = (X-\rho)^h Q$ و $Q(\rho) \neq 0$. پس:

$$P' = (X-\rho)^h Q' + h(X-\rho)^{h-1} Q = (X-\rho)^{h-1} R$$

که در آن $R = (X-\rho)Q' + hQ$ و $R(\rho) = hQ(\rho)$ است. اما $Q(\rho) \neq 0$

می‌باشد و چون مشخص K برابر با صفر است، پس $h \neq 0$ و در نتیجه $R(\rho) \neq 0$ است.

۷.۱۳.۵- فرض می‌کنیم K یک هیأت با مشخص صفر باشد. اگر ρ

متعلق به K و چند جمله‌ای P متعلق به $K[X]$ باشد، شرط‌های زیر

هم‌ارزند:

(I) - ρ ریشه مرتبه h چند جمله‌ای P است.

(II) - ρ ریشه چند جمله‌ای‌های $P, P', \dots, P^{(h-1)}$ است اما ریشه $P^{(h)}$

نیست.

اثبات:

(I) \iff (II) - این مطلب از ۶.۱۳.۵ نتیجه می‌شود.

(II) \iff (I) - زیرا اگر شرط (II) برقرار باشد خواهیم داشت $n = \deg P \geq h$

و فرمول تیلر به صورت زیر درمی‌آید:

$$P(X) = \frac{1}{h!} P^{(h)}(\rho)(X-\rho)^h + \frac{1}{(h-1)!} P^{(h+1)}(\rho)(X-\rho)^{h+1} + \dots \\ + \frac{1}{n!} P^{(n)}(\rho)(X-\rho)^n = (X-\rho)^h Q(X)$$

که در آن $Q(\rho) = \frac{1}{h!} P^{(h)}(\rho) \neq 0$ است. پس ρ ریشه مرتبه h چند جمله‌ای

P می‌باشد.

۱۴.۵- تقسیم چند جمله‌ای‌ها بر حسب نماهای افزایشی

۱.۱۴.۰- کاربرد قضیه زیر در ۴.۴.۶ دیده خواهد شد.

قضیه - فرض می‌کنیم K یک هیأت و A و B دو چند جمله‌ای از $K[X]$ و مقدار ثابت چند جمله‌ای B مخالف با صفر باشد. اگر k یک شمار درست ≥ 0 باشد، تنها دو چند جمله‌ای Q و R متعلق به $K[X]$ یافت می‌شود به قسمی که:

$$A = BQ + X^{k+1}R, \quad \deg Q \leq k$$

باشد.

اثبات:

۱- چنانچه $A = BQ + X^{k+1}R = BQ_1 + X^{k+1}R_1$ و $\deg Q \leq k$ و $\deg Q_1 \leq k$ باشد خواهیم داشت $B(Q - Q_1) = X^{k+1}(R_1 - R)$. فرض می‌کنیم $Q - Q_1 \neq 0$ باشد. چون $\deg(Q_1 - Q) \leq k$ است، داریم:

$$Q - Q_1 = \alpha_p X^p + \alpha_{p+1} X^{p+1} + \dots, \quad \alpha_p \neq 0, \quad 0 \leq p \leq k$$

اما مقدار ثابت چند جمله‌ای B مخالف با صفر می‌باشد، پس ضریب X^p نیز در $B(Q - Q_1)$ مخالف با صفر است. بنابراین برابری $B(Q - Q_1) = X^{k+1}(R_1 - R)$ غیر ممکن است. پس $Q = Q_1$ و در نتیجه $R = R_1$ است، و این یکتایی Q و R را می‌رساند.

۲- چون مقدار ثابت چند جمله‌ای B مخالف با ۰ است، عنصر $\lambda_0 \in K$ وجود دارد به طوری که چند جمله‌ای‌های A و $\lambda_0 B$ دارای مقدار ثابت برابر باشند. در این صورت داریم:

$$A - \lambda_0 B = XR_1, \quad R_1 \in K[X]$$

به همین ترتیب عنصرهای $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ متعلق به K یافت می‌شوند به قسمی که داشته باشیم:

$$R_1 - \lambda_1 B = XR_2, \quad R_2 \in K[X]$$

.....

$$R_k - \lambda_k B = XR_{k+1}, \quad R_{k+1} \in K[X]$$

اگر برابری‌های بالا را به ترتیب در $X^k, \dots, X^2, X, 1$ ضرب کنیم و باهم جمع کنیم، خواهیم داشت :

$$A - \lambda_0 B - \lambda_1 B X - \dots - \lambda_k B X^k = X^{k+1} R_{k+1}$$

$$R = R_{k+1} \quad , \quad Q = \lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_k X^k \quad \text{که با قرار دادن}$$

$$A - BQ = X^{k+1} R \quad \text{به صورت}$$

در می‌آید. از اینجا وجود دو چند جمله‌ای R و Q نتیجه می‌شود.

۲۰۱۴۰۵ - چند جمله‌ای‌های Q و $X^{k+1}R$ شماره بالا، به ترتیب خارج قسمت

و مانده تقسیم A بر B بر حسب نماهای افزایشی، تا مرتبه k نامیده می‌شوند.

۳۰۱۴۰۵ - اثبات قضیه شماره ۱۰۱۴۰۵ یک روش عملی برای محاسبه R و Q

به دست می‌دهد. مثال زیر (که در آن $K=R$ است) چگونگی محاسبه Q و R را

آشکار می‌سازد :

$$\begin{array}{r}
 A : \quad 1 - x \\
 \lambda_0 B : \quad 1 \quad -x^2 \quad +x^4 \\
 \hline
 xR_1 : \quad -x + x^2 \quad -x^4 \\
 \lambda_1 xB : \quad -x \quad +x^2 \quad -x^6 \\
 \hline
 x^2 R_2 : \quad \quad x^2 - x^2 - x^4 + x^6 \\
 \lambda_2 x^2 B : \quad \quad x^2 \quad -x^4 \quad +x^6 \\
 \hline
 x^3 R_3 : \quad \quad \quad -x^2 \quad +x^6 - x^6
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \hline
 1 - x^2 + x^4 : B \\
 \hline
 \underbrace{1 - x + x^2}_{\lambda_0} \quad \underbrace{-x^2 + x^4}_{\lambda_1 x} \quad \underbrace{-x^6 + x^6}_{\lambda_2 x^2} \\
 \hline
 Q
 \end{array}$$

پس داریم :

$$(1-x) = (1-x^2+x^4)(1-x+x^2) + x^2(-1+x^2-x^2)$$

(در اینجا k را برابر با ۲ گرفته‌ایم. ممکن است عمل تقسیم را بهمان روش ادامه داد که

در آن صورت برای k مقادیر بزرگتری خواهیم داشت).

در عمل از نوشتن A, B, Q, \dots خودداری می‌شود.

۱۵.۵- شمارهای مختلط

۱.۱۰.۰- تا بحال شمارهای مختلط را شناخته شده فرص می‌کردیم و آنها را بکار می‌بردیم. اکنون می‌خواهیم با استفاده از چند جمله‌ای‌ها شمارهای مختلط را تعریف کنیم و ویژگیهای آنها را مورد مطالعه قرار دهیم. بدین منظور تنها از چند جمله‌ای‌های باضرایب حقیقی استفاده خواهیم کرد، که در این صورت تعریف و بررسی این شمارها عاری از هرگونه اشکال منطقی خواهد بود.

۲.۱۰.۰- حلقه $\mathbf{R}[X]$ را با A و ایدآل A را که از چند جمله‌ای‌های بخش پذیر بر $X^2 + 1$ تشکیل شده است با I نشان می‌دهیم. حلقه جابجایی A/I را با G می‌نمایند و عنصرهای آنرا شمارهای مختلط می‌نامند.

گسترش کانونیک Φ حلقه A روی G یک همومرفیسم حلقه است $[(II), 2.2.4]$ ، و چون $X^2 + 1$ متعلق به I است، داریم $\Phi(X^2 + 1) = 0$ یعنی:

$$(1) \quad \Phi(X)^2 = -\Phi(1)$$

۳.۱۰.۰- لم - اگر مجموعه عنصرهای متعلق به A را که درجه آنها

کوچکتر و یا برابر با یک است با A_1 و تحدید گسترش Φ به A_1 را با Φ_1 نشان دهیم، Φ_1 یک گسترش دوسویی A_1 روی G است.

اثبات:

۱- دو عنصر $\alpha_0 + \alpha_1 X$ و $\beta_0 + \beta_1 X$ متعلق به A_1 را در نظر می‌گیریم

($\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ متعلق به \mathbf{R} هستند). اگر سایدهای این دو عنصر به وسیله Φ_1 برابر باشند خواهیم داشت $(\alpha_0 + \alpha_1 X) - (\beta_0 + \beta_1 X) \in I$. پس باید:

$$(\alpha_0 - \beta_0) + (\alpha_1 - \beta_1)X$$

مضربی از $X^2 + 1$ باشد. یعنی داشته باشیم $\alpha_0 - \beta_0 = \alpha_1 - \beta_1 = 0$ که از آنجا نتیجه می‌شود $\alpha_0 + \beta_0 X = \alpha_1 + \beta_1 X$. این برابری نشان می‌دهد که Φ_1 انزکتیو است.

۲- هر عنصر متعلق به A را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\alpha_0 + \alpha_p X^2 + \alpha_e X^e + \dots + X(\alpha_1 + \alpha_p X^2 + \alpha_e X^e + \dots)$$

که در آن α_i ها شماره‌های حقیقی هستند. بنابراین هر شمار مختلط را می‌توان چنین نوشت :

$$\Phi(\alpha_0) + \Phi(\alpha_1)\Phi(X)^2 + \Phi(\alpha_2)\Phi(X)^4 + \dots$$

$$+ \Phi(X)[\Phi(\alpha_1) + \Phi(\alpha_2)\Phi(X)^2 + \Phi(\alpha_3)\Phi(X)^4 + \dots]$$

که با استفاده از برابری (۱) به صورت زیر درمی‌آید :

$$\Phi(\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \dots + (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \dots)X)$$

و این نشان می‌دهد که Φ_1 سورژکتیو است و قضیه ثابت می‌شود.

۴.۱۰.۰- به ویژه، تحدید Φ به \mathbf{R} (یک زیر حلقه A است) یک ایزومرفیسم

حلقه \mathbf{R} روی زیر حلقه $\Phi(\mathbf{R})$ از \mathbf{C} است. به وسیله این ایزومرفیسم حلقه \mathbf{R} را با $\Phi(\mathbf{R})$

یکی می‌گیرند. بنابراین اگر α یک شمار حقیقی باشد، شمار مختلط $\Phi(\alpha)$ را با خود

α نشان می‌دهند. پس شماره‌های حقیقی صورت ویژه‌ای از شماره‌های مختلط هستند. مثلاً

شمار ۱ را به جای $\Phi(1)$ ، که عنصر یگانه \mathbf{C} است (۴.۳.۴)، می‌نویسند و این نیز با

قرار داده‌های معمولی سازگار است.

۵.۱۰.۰- چنانچه قرار دهیم $\Phi(X) = i$ فرمول (۱) با در نظر گرفتن ۴.۱۰.۰

به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$i^2 = -1$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1, \dots$$

۶.۱۰.۰- قضیه - هر شمار مختلط تنها به یک روش به صورت $\alpha + \beta i$

که در آن α و β متعلق به \mathbf{R} هستند، نوشته می‌شود.

اثبات - این قضیه صورت دیگر لم ۳.۱۰.۰ است، زیرا داریم :

$$\alpha + \beta i = \Phi(\alpha + \beta X)$$

۷.۱۰.۰- پس از این شماره‌های مختلط را به صورت $\alpha + \beta i$ خواهیم نوشت که در آن

α و β متعلق به \mathbf{R} می‌باشند. شمار مختلط $\alpha + \beta i$ را با z نشان می‌دهیم. α بخش حقیقی

و β بخش انگاری z نامیده می‌شود. برای اینکه z حقیقی باشد باید $\beta = 0$ باشد و یا وابسته است که بخش

انگاری z صفر شود. شماره‌های مختلط که بخش حقیقی آنها صفر است، انگاری محض

نامیده می‌شوند. با استفاده از شماره ۰.۱۰.۰ و دستوره‌های محاسبه در حلقه‌های جابجایی داریم:

$$(\alpha + \beta i) + (\alpha' + \beta' i) = \alpha + \alpha' + (\beta + \beta')i$$

$$(\alpha + \beta i) - (\alpha' + \beta' i) = \alpha - \alpha' + (\beta - \beta')i$$

$$(\alpha + \beta i)(\alpha' + \beta' i) = \alpha\alpha' + \alpha\beta'i + \beta\alpha'i + \beta\beta'i^2 = \alpha\alpha' - \beta\beta' + (\alpha\beta' + \beta\alpha')i$$

۰.۱۰.۰-۸. چنانچه $z = \alpha + \beta i$ یک شمار مختلط باشد، شمار مختلط $\alpha - \beta i$ را

مزدوج z می‌نامند و با \bar{z} نشان می‌دهند. پس برای اینکه z حقیقی باشد بیاویسنده است که $\bar{z} = z$ باشد. اگر z و z' دو شمار مختلط دلخواه باشند داریم:

$$(۲) \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$(۳) \quad \overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z}'$$

$$(۴) \quad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$$

زیرا با قرار دادن $z = \alpha + \beta i$ و $z' = \alpha' + \beta' i$ خواهیم داشت:

$$\overline{zz'} = \overline{(\alpha + \beta i)(\alpha' + \beta' i)} = \overline{\alpha\alpha' - \beta\beta' + (\alpha\beta' + \beta\alpha')i}$$

$$= \alpha\alpha' - \beta\beta' - (\alpha\beta' + \beta\alpha')i = (\alpha - \beta i)(\alpha' - \beta' i) = \bar{z}\bar{z}'$$

و بدین ترتیب فرمول (۴) بدست می‌آید. فرمول‌های (۲) و (۳) به روش مشابه اثبات

می‌شوند. پس می‌توان گفت که گسترش $z \rightarrow \bar{z}$ حلقه \mathbf{C} در \mathbf{C} یک اتومرفیسم حلقه \mathbf{C} است. روشن است که داریم:

$$(۵) \quad \overline{\bar{z}} = z$$

۰.۱۰.۰-۹. فرض می‌کنیم $z = \alpha + \beta i$ یک شمار مختلط باشد. به آسانی دیده

می‌شود که داریم:

$$(۶) \quad z + \bar{z} = 2\alpha$$

$$(۷) \quad z\bar{z} = \alpha^2 + \beta^2$$

پس $z + \bar{z}$ و $z\bar{z}$ شمارهای حقیقی هستند و داریم $z\bar{z} \geq 0$. تنها هنگامی $z\bar{z}$

برابر با صفر است که $z = 0$ باشد.

۱۰.۱۰.۰ - قضیه - حلقه \mathbb{C} یک هیأت است .

اثبات - با در نظر گرفتن ۶.۰.۰.۴، کافی است ثابت کنیم که هر شمار مختلط $z \neq 0$ وارون پذیر است. بنابر ۹.۱۰.۰.۵، اگر $z \neq 0$ باشد شمار $\bar{z}z$ حقیقی و مخالف با ۰ است. پس می‌توان شمار حقیقی $\frac{1}{z\bar{z}}$ را تشکیل داد. چنانچه قرار دهیم $z' = \left(\frac{1}{z\bar{z}}\right)\bar{z}$ خواهیم داشت :

$$zz' = \left(\frac{1}{z\bar{z}}\right)z\bar{z} = 1$$

پس شمار z' وارون z می‌باشد و آنرا با z^{-1} نشان می‌دهند.

۱۱.۱۰.۰ - فرض می‌کنیم $z = \alpha + \beta i$ یک شمار مختلط مخالف با صفر باشد.

اثبات قضیه ۱۰.۱۰.۰ فرمول زیر را به دست می‌دهد:

$$z^{-1} = \frac{\alpha - \beta i}{\alpha^2 + \beta^2}$$

۱۲.۱۰.۰ - به آسانی از شماره ۱۱.۱۰.۰ نتیجه می‌شود که $(\bar{z}^{-1}) = (\bar{z})^{-1}$

است. پس اگر z و z' متعلق به \mathbb{C} و مخالف با صفر باشد، خواهیم داشت :

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

۱۳.۱۰.۰ - اگر $z = \alpha + \beta i$ یک شمار مختلط باشد و قرار دهیم :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

شمار $|z|$ را، که بزرگتر و یا برابر با ۰ است، مدول z می‌نامند. اگر z حقیقی باشد مدول z عبارت از قدر مطلق آن است. به علاوه داریم :

$$(۸) \quad |z| = 0 \iff z = 0$$

$$(۹) \quad |zz'| = |z| \cdot |z'|$$

$$(۱۰) \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad , \quad z' \neq 0$$

$$(۱۱) \quad |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

زیرا :

$$|z|=0 \iff \alpha^r + \beta^r = 0 \iff \alpha = \beta = 0 \iff z = 0$$

$$|zz'|^r = zz' \overline{zz'} = zz' \bar{z} \bar{z}' = z \bar{z} z' \bar{z}' = |z|^r |z'|^r ,$$

$$\left| \frac{z}{z'} \right|^r = \frac{z}{z'} \overline{\left(\frac{z}{z'} \right)} = \frac{z}{z'} \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} = \frac{z \bar{z}}{z' \bar{z}'} = \frac{|z|^r}{|z'|^r}$$

برای اثبات فرمول (۱۱) کافی است ثابت کنیم :

$$|z+z'|^r \leq (|z|+|z'|)^r$$

اگر قرار دهیم $z' = \alpha' + \beta'i$ خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} |z+z'|^r &= |\alpha + \alpha' + (\beta + \beta')i|^r = (\alpha + \alpha')^r + (\beta + \beta')^r \\ &= \alpha^r + \beta^r + \alpha'^r + \beta'^r + r(\alpha\alpha' + \beta\beta') \end{aligned}$$

همچنین :

$$\begin{aligned} (|z|+|z'|)^r &= (\sqrt{\alpha^r + \beta^r} + \sqrt{\alpha'^r + \beta'^r})^r \\ &= \alpha^r + \beta^r + \alpha'^r + \beta'^r + r\sqrt{\alpha^r + \beta^r} \sqrt{\alpha'^r + \beta'^r} \end{aligned}$$

بنابراین باید داشته باشیم :

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' \leq \sqrt{\alpha^r + \beta^r} \sqrt{\alpha'^r + \beta'^r}$$

اما داریم :

$$(\alpha\alpha' + \beta\beta')^r = \alpha^r \alpha'^r + \beta^r \beta'^r + r\alpha\beta\alpha'\beta'$$

و

$$\begin{aligned} (\sqrt{\alpha^r + \beta^r} \sqrt{\alpha'^r + \beta'^r})^r &= (\alpha^r + \beta^r)(\alpha'^r + \beta'^r) = \alpha^r \alpha'^r + \beta^r \beta'^r + \alpha^r \beta'^r \\ &\quad + \beta^r \alpha'^r \end{aligned}$$

در نتیجه خواهیم داشت :

$$\alpha^r \beta'^r + \beta^r \alpha'^r - r\alpha\beta\alpha'\beta' = (\alpha\beta' - \beta\alpha')^r \geq 0 .$$

۱۰۰.۱۴- در صفحه P دو محور عمود برهم Ox و Oy را در نظر می گیریم. اگر

$z = \alpha + \beta i$ یک شمار مختلط باشد ، نقطه M از صفحه P ، به آرایندهای (مختصات) α و β سایه z نامیده می شود و داریم $|z| = OM$. پس شمارهای حقیقی عنصرهایی از C هستند که سایه شان متعلق به Ox است . همچنین شمارهای انگاری محض عنصرهایی

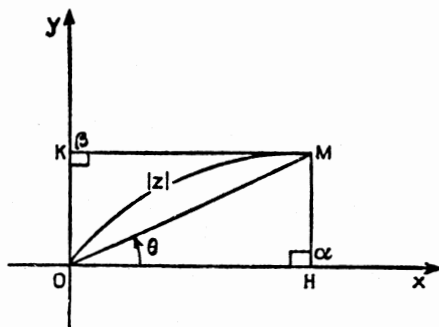
از C هستند که سایه‌شان متعلق به Oy است. محور Ox را محور حقیقی و محور Oy را محور انتگراری می‌نامند.

۱۰۰. ۱۰. اگر شمار مختلط $z \neq 0$ باشد (M بر O منطبق نباشد)، محور OM

که سوی آن از O به طرف M می‌باشد کاملاً معین است. پس می‌توان زاویه (Ox, OM) را در صفحه سودار P ، که سوی آن بستگی به سوی دستگاه محوره‌های Ox و Oy دارد، در نظر گرفت. اندازه این زاویه بر حسب رادیان آرگومان z نامیده می‌شود. اگر θ آرگومان z باشد، $\theta + 2k\pi$ نیز آرگومان z است که در آنجا $k \in \mathbb{Z}$ می‌باشد (شمار صفر دارای آرگومان نیست). با توجه به شکل (۲۱) داریم:

$$\cos\theta = \frac{\overline{OH}}{\overline{OM}} = \frac{\alpha}{|z|} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{\overline{OK}}{\overline{OM}} = \frac{\beta}{|z|} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$



شکل ۲۱

پس:

$$\alpha = |z| \cos\theta, \quad \beta = |z| \sin\theta$$

و از آنجا نتیجه می‌شود:

$$z = |z| (\cos\theta + i \sin\theta)$$

این عبارت صورت مثلثاتی z نامیده می‌شود.

به وارون فرض می‌کنیم شمار مختلط z به صورت $\rho(\cos\omega + i \sin\omega)$ باشد، که

در آنجا ω و ρ شماره‌های حقیقی هستند و $\rho \geq 0$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$|z|^2 = \rho^2 \cos^2 \omega + \rho^2 \sin^2 \omega = \rho^2$$

$$\rho = |z| \text{ پس}$$

اکنون فرض می‌کنیم $z \neq 0$ باشد (پس $\rho \neq 0$ است). چنانچه θ را یک آرگومان z بگیریم خواهیم داشت:

$$|z| (\cos \theta + i \sin \theta) = z = |z| (\cos \omega + i \sin \omega)$$

پس $\cos \theta = \cos \omega$ و $\sin \theta = \sin \omega$ یعنی ρ مدول z و ω یک آرگومان z است. ۱۶.۱۰.۰- اگر z و z' دو شمارمختلط مخالف با صفر و θ و θ' به ترتیب

آرگومان‌هایی از z و z' باشند، $\theta + \theta'$ یک آرگومان zz' است. زیرا داریم:

$$zz' = |z| (\cos \theta + i \sin \theta) |z'| (\cos \theta' + i \sin \theta')$$

$$= |z| \cdot |z'| (\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i(\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta'))$$

$$= |zz'| (\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta'))$$

که با توجه به ۱۰.۱۰.۰ مطلب آشکار می‌گردد.

۱۷.۱۰.۰- اگر z و z' دو شمارمختلط مخالف با صفر و θ و θ' به ترتیب آرگومان‌هایی

از z و z' باشند، $\theta - \theta'$ یک آرگومان $\frac{z}{z'}$ است.

فرض می‌کنیم θ'' یک آرگومان $\frac{z}{z'}$ باشد. داریم $z = \frac{z}{z'} z'$ پس $\theta'' + \theta' = \theta$

یک آرگومان z است (۱۶.۱۰.۰). یعنی $\theta'' + \theta' = \theta + 2k\pi$ می‌باشد که در آن k

متعلق به \mathbf{Z} است. بنابراین داریم $\theta'' = \theta - \theta' + 2k\pi$.

۱۸.۱۰.۰- بنا بر ۱۰.۱۰.۰ هر شمارمختلط z که مدول آن برابر با ۱ و آرگومان

آن θ باشد به صورت $\cos \theta + i \sin \theta$ نوشته می‌شود. به علاوه از ۱۶.۱۰.۰ و ۱۷.۱۰.۰

چنین برمی‌آید که توان n ام z یعنی z^n که در آنجا $n \in \mathbf{Z}$ می‌باشد، دارای مدول یک

و آرگومان $n\theta$ است. از اینجا فرمول موآور به دست می‌آید:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta, \quad (n \in \mathbf{Z})$$

۱۹.۱۰.۰- فرض می‌کنیم z متعلق به \mathbf{C} و n یک شمار درست بزرگتر از صفر

باشد. می‌خواهیم شمارهای مختلط z را پیدا کنیم به طوریکه داشته باشیم $z^n = z_0$.

قضیه :

(I) - چنانچه $z_0 = 0$ باشد، تنها شمار مختلطی که در معادله $z^n = z_0$ صدق می‌کند $z = 0$ است.

(II) - چنانچه $z_0 \neq 0$ و θ_0 یک آرگومان z_0 باشد، معادله $z^n = z_0$ دارای n جواب است که مدول آنها برابر $\sqrt[n]{|z_0|}$ و آرگومان‌ها نشان‌عبارتند از:

$$\frac{\theta_0}{n}, \frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi}{n}, \frac{\theta_0}{n} + \frac{4\pi}{n}, \frac{\theta_0}{n} + \frac{6\pi}{n}, \dots, \frac{\theta_0}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

اثبات - درستی (I) آشکار است زیرا \mathbf{C} یک حلقه کامل می‌باشد. پس فرض می‌کنیم $z_0 \neq 0$ باشد. بنابراین جوابهای $z^n = z_0$ شمارهای مختلط مخالف با صفرند. اگر $z \neq 0$ یک شمار مختلط و ρ مدول و θ یک آرگومان آن باشد، ρ^n مدول z^n و $n\theta$ یک آرگومان آن می‌باشد. پس داریم :

$$z^n = z_0 \iff \begin{cases} \rho^n = |z_0| \\ n\theta \in \theta_0 + 2\pi\mathbf{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{|z_0|} \\ \theta \in \frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi}{n}\mathbf{Z} \end{cases}$$

اکنون دو شمار مختلط که مدول هر دو برابر با $\sqrt[n]{|z_0|}$ و آرگومان یکی $\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}$

و آرگومان دیگری $\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k'\pi}{n}$ باشد در نظر می‌گیریم ($k, k' \in \mathbf{Z}$). برای اینکه

این دو شمار با یکدیگر برابر باشند بایاویسند است که $\frac{2k\pi}{n} - \frac{2k'\pi}{n} \in 2\pi\mathbf{Z}$ باشد،

به عبارت دیگر $k - k'$ مضرب n باشد. از اینجا اثبات (II) نتیجه می‌شود.

۱۵۰۰-۲۰. جوابهای معادله $z^n = z_0$ را ریشه‌های n ام z_0 می‌نامند. با استفاده

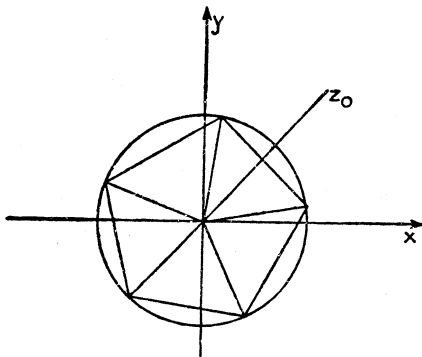
از شماره ۱۵۰۰-۱۹، دیده می‌شود که سایه‌های ریشه‌های n ام z_0 رأسهای یک n برنظم را تشکیل می‌دهند.

۱۵۰۰-۲۱. به ویژه شمار ۱ دارای n ریشه n ام می‌باشد. این ریشه‌ها شمارهای

مختلطی هستند که مدول آنها یک و آرگومانشان $(k=0, 1, 2, \dots, n-1)$ $\frac{2k\pi}{n}$ است. به گفته دیگر ریشه های n ام شمار ۱ عبارتند از:

$$\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$$

که در آن $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ است. برای $k=0$ شمار ۱ که ریشه n ام ۱ می باشد بدست می آید.



شکل ۲۲

فصل ششم

کسرهای گویای یک متغیری

از سالهای پیش خواننده با کسرهای گویایی از x یعنی با خارج قسمت دو چند جمله‌ای از x سروکار داشته است. در این فصل تجزیه کسرهای گویا را به کسرهای گویای ساده (عنصرهای ساده)، خواهیم دید. همچنین خواهیم دید حالتی که ضرایب کسرهای گویا شمارهای مختلط می‌باشند ساده‌تر از حالتی است که ضرایب این کسرها شمارهای حقیقی است.

۱.۶- تعریف

۱.۱.۶- فرض می‌کنیم K یک هیأت باشد. بنابر ۴.۲.۵، $K[X]$ یک حلقه انتگر است. هیأت کسرهای حلقه $K[X]$ را با $K(X)$ نمایش می‌دهیم (۶.۶.۴) و عنصرهای $K(X)$ را کسرهای گویا از X با ضرایب متعلق به K می‌نامیم.

۲.۱.۶- هر کسر گویا از $K(X)$ به صورت $\frac{A}{B}$ (و یا AB^{-1}) نوشته می‌شود که

در آن A و B چند جمله‌ای‌هایی از $K[X]$ هستند و $B \neq 0$ است. اگر $\frac{A}{B}$ و

$\frac{A_1}{B_1}$ متعلق به $K(X)$ باشند بنابر ۵.۶.۴ داریم:

$$\frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1} \iff AB_1 = A_1B$$

۳.۱.۶- قضیه - اگر R عنصری از $K(X)$ باشد:

(I) - دو عنصر A و B متعلق به $K[X]$ که نسبت به هم اول باشند

می‌توان یافت به طوری که داشته باشیم $R = AB^{-1}$.

(II) - چنانچه A_1 و B_1 متعلق به $K[X]$ و نسبت به هم اول باشند

و داشته باشیم $R = A_1B_1^{-1}$ ، عنصر $\lambda \neq 0$ متعلق به K وجود دارد

به قسمی که $A_1 = \lambda A$ و $B_1 = \lambda B$ باشد.

اثبات - کسر $R = PQ^{-1}$ را، که در آن P و Q متعلق به $K[X]$ و $Q \neq 0$

است، در نظر می گیریم. اگر D بزرگترین بخش‌یاب مشترک P و Q باشد $D \neq 0$ است و چند جمله‌ای‌های A و B متعلق به $K[X]$ وجود دارند به قسمی که داشته باشیم $P=AD$ ، $Q=BD$ ، $B \neq 0$. پس $R=AB^{-1}$ است (۲.۱.۶) و A و B نسبت به هم اول می‌باشند (۴.۵.۵). از اینجا درستی (I) نتیجه می‌شود.

چنانچه برای A_1 و B_1 متعلق به $K[X]$ داشته باشیم $R=A_1B_1^{-1}$ ، خواهیم داشت $A_1B=AB_1$ (۲.۱.۶). پس B یک بخش‌یاب AB_1 است و با A اول می‌باشد. بنابراین B_1 بر B بخش پذیر است (۲.۵.۵). به عبارت دیگر داریم $B_1=BC$ و $C \in K[X]$.

هم‌چنین از برابری $A_1B=AB_1$ که در نتیجه به صورت $A_1B=ABC$ نوشته می‌شود، به دست می‌آید $A_1=AC$. زیرا $K[X]$ یک حلقهٔ انتگر و $B \neq 0$ می‌باشد. اکنون اگر A_1 و B_1 نسبت به هم اول باشند خواهیم داشت $C=\lambda \in K$ و این درستی (II) را می‌رساند.

۴.۱.۶- تعریف - فرض می‌کنیم R عنصری از $K(X)$ و AB^{-1} که در آن A و B متعلق به $K[X]$ هستند یک نمایندهٔ R باشد. اگر A و B نسبت به هم اول باشند AB^{-1} را فرم ساده شدهٔ R می‌نامند. بنابر ۳.۱.۶ فرم ساده شدهٔ R همیشه وجود دارد و با تقریب یک ضریب مخالف با صفر و متعلق به K یکتاست.

۵.۱.۶- از اثبات قضیهٔ ۳.۱.۶ قضیهٔ زیر نتیجه می‌شود:
قضیه - اگر R عنصری از $K(X)$ و AB^{-1} فرم ساده شدهٔ R باشد، همهٔ فرم‌های دیگر R به صورت $(AC)(BC)^{-1}$ هستند که در آنجا C عنصر مخالف صفری از $K[X]$ است.

۶.۱.۶- تعریف - چنانچه R عنصری از $K(X)$ و AB^{-1} یک صورت ساده شدهٔ R باشد، ریشه‌های B را قطب‌های R می‌نامند. اگر p ریشهٔ مرتبهٔ h چند جمله‌ای B باشد p را قطب مرتبهٔ h کسر R می‌گویند.

از ۳.۱.۶ نتیجه می‌شود که قطب‌های R و مرتبهٔ آنها تنها بستگی به R دارد و به انتخاب فرم ساده شدهٔ آن بستگی ندارد.

۷.۱.۶- از ۸.۹.۵ نتیجه می‌شود که شمارهٔ قطب‌های یک کسر گویا با پایان است.

۸.۱.۶ - تابع معین شده به وسیلهٔ يك كسر گویا - فرض می کنیم R عنصری از $K(X)$ و AB^{-1} یک صورت ساده شدهٔ آن باشد. مجموعهٔ عنصرهای متعلق به K را که قطب R نیستند با E نشان می دهیم. برای هر عنصر x از E عنصر $A(x)(B(x))^{-1}$ متعلق به K کاملاً معین است، زیرا $B(x) \neq 0$ می باشد. عنصر $A(x)(B(x))^{-1}$ را که بنابر ۲.۱.۶ بستگی به صورت ساده شدهٔ R ندارد با $R(x)$ نشان می دهیم، و تابع $R(x) \rightarrow x$ ، $(x \in E)$ ، را تابع معین شده به وسیلهٔ R می نامیم. هنگامی که $K=R$ باشد به نظریهٔ معمولی کسرهای گویا می رسمیم.

۹.۱.۶ - اگر توان مجموعهٔ K بی پایان باشد و R و R_1 متعلق به $K(X)$ یک تابع را مشخص کنند، داریم $R=R_1$. زیرا اگر AB^{-1} و $A_1B_1^{-1}$ به ترتیب صورتهای ساده شدهٔ R و R_1 باشند، هنگامی که x قطب R و R_1 نباشد داریم:

$$A(x)(B(x))^{-1} = A_1(x)(B_1(x))^{-1}$$

پس بنابر ۷.۱.۶ این بستگی و در نتیجه بستگی $(AB_1 - BA_1)(x) = 0$ برای شمارهٔ بی پایانی از عنصرهای x متعلق به K برقرار است. بنابراین با توجه به ۹.۹.۵ داریم $AB_1 - BA_1 = 0$. پس با در نظر گرفتن ۲.۱.۶ خواهیم داشت $R=R_1$. به این علت یک کسر گویا و تابع وابسته به آنرا یکی می گیرند.

۲.۶ - بخش درست یک کسر گویا

۱۰.۲.۶ - فرض می کنیم عنصر R از $K(X)$ دارای نماینده ای به صورت AB^{-1} باشد که در آنجا داریم $\deg A < \deg B$. از شمارهٔ ۱.۶.۵ نتیجه می شود که برای هر نمایندهٔ دیگر $A_1B_1^{-1}$ از کسر R نابرابری $\deg A_1 < \deg B_1$ برقرار است. بنابراین می توان بدون ابهام از کسرهای گویا که درجهٔ صورت آنها کوچکتر از درجهٔ مخرجشان می باشد گفتگو کرد.

۲.۲.۶ - اگر درجهٔ صورت کسرهای R_1, R_2, \dots, R_p کوچکتر از درجهٔ مخرج آنها باشد، درجهٔ صورت کسر $R_1 + R_2 + \dots + R_p$ نیز از درجهٔ مخرج آن کوچکتر است. زیرا بنابر ۱.۲.۶ نماینده های کسرهای R_1, R_2, \dots, R_p را می توان طوری انتخاب کرد که دارای یک مخرج باشند. در این صورت درستی مطلب بالا آشکار می گردد.

۳.۲.۶ - قضیه - هر عنصر دلخواه R متعلق به $K(X)$ تنها به یک روش به صورت $P + R_1$ نوشته می شود که در آن $P \in K[X]$ و R_1 کسر گویایی است که درجه صورت آن کوچکتر از درجه مخرج آن می باشد .

اثبات - فرض می کنیم $A \in K[X]$ و $B \in K[X]$ و $B \neq 0$ و $R = AB^{-1}$ باشد . بنابر ۱.۳.۵ چند جمله ای های P و C متعلق به $K[X]$ وجود دارند به طوری که داریم $R_1 = CB^{-1}$ پس اگر قرار دهیم $A = PB + C$ خواهیم داشت $R = AB^{-1} = P + R_1$.

اکنون فرض می کنیم $R = P^* + R_1^*$ که در آن $P^* \in K[X]$ و R_1^* کسر گویایی است که درجه صورت آن کوچکتر از درجه مخرج آن می باشد . پس خواهیم داشت :

$$P - P^* = R_1^* - R_1$$

بنابراین درجه صورت کسر $\frac{P - P^*}{1}$ از درجه مخرج آن کوچکتر می باشد ، و این برای

$$P - P^* \neq 0 \text{ ممکن نیست. پس } P = P^* \text{ و از آنجا خواهیم داشت } R_1 = R_1^* .$$

۴.۲.۶ - چند جمله ای P را بخش درست کسر R می گویند . از اثبات بالا نتیجه می شود که بخش درست AB^{-1} از تقسیم چند جمله ای A بر B بر حسب توانهای کاهش یافته دست می آید .

۳.۶ - تجزیه کسر به کسرهای ساده

۱.۳.۶ - فرض می کنیم کسر A/B عنصری از $K(X)$ باشد . تجزیه این کسر که از قضیه زیر به دست می آید ، تجزیه A/B به کسرهای ساده نامیده می شود .

قضیه - چنانچه $B = \lambda P^\alpha Q^\beta \dots R^\gamma$ تجزیه B به چند جمله ای های ساده نشدنی باشد (۷.۷.۵) ، کسر A/B را ، تنها به یک روش ، به صورت :

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} = & E + \frac{C_\alpha}{P^\alpha} + \frac{C_{\alpha-1}}{P^{\alpha-1}} + \dots + \frac{C_1}{P} \\ & + \frac{D_\beta}{Q^\beta} + \frac{D_{\beta-1}}{Q^{\beta-1}} + \dots + \frac{D_1}{Q} \\ & + \dots \dots \dots \\ & + \frac{E_\gamma}{R^\gamma} + \frac{E_{\gamma-1}}{R^{\gamma-1}} + \dots + \frac{E_1}{R} \end{aligned}$$

می توان تجزیه کرد که در آن $E, C_\alpha, \dots, C_1, D_\beta, \dots, D_1, \dots$ ،
 E_1, \dots, E_r عنصرهای $K[X]$ هستند به طوری که برای هر مقدار i داریم:
 $\deg C_i < \deg P, \deg D_i < \deg Q, \dots, \deg E_i < \deg R$

به علاوه E بخش درست $\frac{A}{B}$ می باشد.

اثبات این قضیه از لم های ۴.۳.۶ و ۵.۳.۶، که در زیر بیان می کنیم، نتیجه می شود.

۲.۳.۶ - لم = کسر گویای $\frac{A}{B}$ را که در آن $\deg A < \deg B$ است در نظر

می گیریم. چنانچه $B = B_1 B_r$ باشد که در آن B_1 و B_r نسبت به هم اول اند،

تنها يك تجزیه $\frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1} + \frac{A_r}{B_r}$ وجود دارد به طوری که:

$$\deg A_1 < \deg B_1, \deg A_r < \deg B_r$$

باشد.

اثبات - بنابر ۳.۵.۵ دو چند جمله ای U_1 و U_r می توان یافت به طوری که داشته

باشیم $U_r B_1 + U_1 B_r = 1$. پس چند جمله ای های V_1 و V_r که در برابری:

$$V_r B_1 + V_1 B_r = A$$

صدق می کنند وجود دارند. همچنین چند جمله ای های Q و A_r یافت می شوند به طوری که

$V_r = B_r Q + A_r$ و $\deg A_r < \deg B_r$ باشد (۱.۳.۵). در این صورت داریم:

$$A = V_r B_1 + V_1 B_r = (B_r Q + A_r) B_1 + V_1 B_r = A_r B_1 + A_1 B_r$$

که در آن $A_1 = Q B_1 + V_1$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{A}{B} = \frac{A_r B_1 + A_1 B_r}{B_1 B_r} = \frac{A_r}{B_r} + \frac{A_1}{B_1}$$

چون $\deg A < \deg B$ و $\deg A_r < \deg B_r$ می باشد، پس از برابری:

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A}{B} - \frac{A_r}{B_r}$$

و شماره ۲.۲.۶ نابربری $\deg A_1 < \deg B_1$ نتیجه می شود. به این ترتیب وجود تجزیه

بالا ثابت می گردد. اکنون فرض می کنیم:

$$\frac{A}{B} = \frac{A_1^*}{B_1^*} + \frac{A_r^*}{B_r^*}, \deg A_1^* < \deg B_1^*, \deg A_r^* < \deg B_r^*$$

باشد. پس خواهیم داشت :

$$A_1^* B_r + A_r^* B_1 = A_1 B_r + A_r B_1$$

و یا :

$$(A_1^* - A_1) B_r = (A_r - A_r^*) B_1$$

بنابراین B_1 بخش‌یاب چند جمله‌ای $(A_1^* - A_1) B_r$ می‌باشد و با B_r اول است، پس $A_1^* - A_1$ بر B_1 بخش‌پذیر است. به علاوه $\deg(A_1^* - A_1) < \deg B_1$ می‌باشد، پس داریم $A_1^* - A_1 = 0$ و از آنجا $A_r - A_r^* = 0$. پس تجزیه بالا یکتاست.

۲.۳.۶ - لم - کسر $\frac{A}{B}$ را که در آن $\deg A < \deg B$ است در نظر

می‌گیریم. چنانچه $B = B_1 B_2 \cdots B_p$ و برای $i \neq j$ چند جمله‌ای‌های B_i و B_j نسبت بهم اول باشند، تنها یک تجزیه A/B به صورت :

$$\frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2} + \cdots + \frac{A_p}{B_p}$$

وجود دارد به طوری که :

$$\deg A_1 < \deg B_1, \deg A_2 < \deg B_2, \dots, \deg A_p < \deg B_p$$

باشد.

اثبات - این لم برای $p=1$ روشن است. فرض می‌کنیم هنگامیکه مخرج کسر

حاصل ضرب $p-1$ سازه است، لم بالا درست باشد و قرار می‌دهیم $B_0 = B_1 B_2 \cdots B_p$. در این صورت B_1 و B_0 نسبت به هم اول اند (۰.۰.۰). پس بنا بر ۲.۳.۶ تجزیه :

$$\frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1} + \frac{A_0}{B_0}$$

وجود دارد و داریم $\deg A_1 < \deg B_1$ و $\deg A_0 < \deg B_0$ ، که اگر روش بازگشت را در مورد کسر A_0/B_0 بکار ببریم، تجزیه A/B به صورتی که گفته شد بدست می‌آید.

اکنون فرض می‌کنیم $\frac{A}{B} = \frac{A_1^*}{B_1} + \cdots + \frac{A_p^*}{B_p}$ ، $\deg A_1^* < \deg B_1$ ، $\deg A_p^* < \deg B_p$ و \dots ،

چنانچه قرار دهیم $\frac{A}{B} = \frac{A_0^*}{B_0} + \frac{A_p^*}{B_p} + \cdots + \frac{A_r^*}{B_r}$ با توجه به شماره ۲.۲.۶

خواهیم داشت $\deg A_0^* < \deg B_0$ ، و بنا بر شماره ۲.۳.۶ از برابری :

$$\frac{A_1}{B_1} + \frac{A_0}{B_0} = \frac{A_1^*}{B_1} + \frac{A_0^*}{B_0}$$

نتیجه می‌شود $A_1^* = A_1$. به همین روش برای $A_i^* = A_i$ برای تمام مقادیر i ثابت می‌گردد.

۴.۲.۶ - لم - فرض می‌کنیم $\frac{A}{B}$ عنصری از $K(X)$ و:

$$B = \lambda P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_r^{\alpha_r}$$

تجزیه B به چند جمله‌ای‌های ساده نشدنی باشد. تنها یک تجزیه:

$$\frac{A}{B} = E + \frac{A_1}{P_1^{\alpha_1}} + \dots + \frac{A_r}{P_r^{\alpha_r}}$$

وجود دارد که در آنجا $E \in K[X]$ است و برای همه i ها داریم:

$$\deg A_i < \deg P_i^{\alpha_i}$$

به‌علاوه E بخش درست $\frac{A}{B}$ می‌باشد.

اثبات - وجود این تجزیه از ۳.۲.۶ و ۳.۳.۶ نتیجه می‌شود. برای اثبات یکتایی

آن فرض می‌کنیم:

$$\frac{A}{B} = E^* + \frac{A_1^*}{P_1^{\alpha_1}} + \dots + \frac{A_r^*}{P_r^{\alpha_r}}$$

باشد که در آنجا برای هر اندیس i داریم $\deg A_i^* < \deg P_i^{\alpha_i}$ و $E^* \in K[X]$. چنانچه قرار دهیم:

$$\sum \frac{A_i}{P_i^{\alpha_i}} = \frac{A'}{B}, \quad \sum \frac{A_i^*}{P_i^{\alpha_i}} = \frac{A'^*}{B}$$

خواهیم داشت $\deg A' < \deg B$ و $\deg A'^* < \deg B$ (۲.۲.۶). اما از برابری:

$$E + \frac{A'}{B} = E^* + \frac{A'^*}{B}$$

برابری $E = E^*$ نتیجه می‌شود (۲.۲.۶). پس خواهیم داشت :

$$\sum \frac{A_i}{P_i^{\alpha_i}} = \sum \frac{A_i^*}{P_i^{\alpha_i}}$$

و بنا بر ۲.۲.۶ برای همه i ها $A_i^* = A_i$ می‌باشد.

۵.۳.۶ - لم - چند جمله‌ای‌های A و P متعلق به $K[X]$ و شمار درست

$\alpha > 1$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\deg A < \deg P^\alpha$ باشد. در این صورت تنها يك تجزیه :

$$\frac{A}{P^\alpha} = \frac{A_\alpha}{P^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{P^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_1}{P}$$

وجود دارد به قسمی که برای همه i ها نابرابری $\deg A_i < \deg P$ برقرار است.

اثبات - این لم برای $\alpha = 1$ روشن است. فرض می‌کنیم برای $\alpha - 1$ نیز لم بالا

درست باشد. بنا بر ۱.۳.۵ دو چند جمله‌ای P و Q متعلق به $K[X]$ وجود دارد به قسمی که داریم $A = PQ + R$ و $\deg R < \deg P$. پس خواهیم داشت :

$$\frac{A}{P^\alpha} = \frac{R}{P^\alpha} + \frac{Q}{P^{\alpha-1}}$$

چون $\frac{Q}{P^{\alpha-1}} = \frac{A-R}{P^\alpha}$ می‌باشد، پس درجه صورت کسر $\frac{Q}{P^{\alpha-1}}$ کوچکتر از درجه

مخرج آن است (۲.۲.۶). بنابراین با توجه به فرض بازگشت در مورد $\frac{Q}{P^{\alpha-1}}$ وجود تجزیه بالا ثابت می‌شود.

اکنون فرض می‌کنیم $\frac{A}{P^\alpha} = \frac{A_\alpha^*}{P^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}^*}{P^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_1^*}{P}$ یک

تجزیه دیگر $\frac{A}{P^\alpha}$ باشد ($\deg A_i^* < \deg P$). از ضرب دوطرف برابری:

$$\sum_{i=1}^{\alpha} \frac{A_i}{P^i} = \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{A_i^*}{P^i}$$

در P^α خواهیم داشت :

$$A_\alpha + PS = A_\alpha^* + PS^*$$

که در آن S و S^* متعلق به $K[X]$ هستند. چون $\deg A_\alpha < \deg P$ و $\deg A_\alpha^* < \deg P$ می‌باشد، یکتایی تقسیم نشان می‌دهد که $A_\alpha = A_\alpha^*$ است. پس

داریم $\sum_{i=1}^{\alpha-1} \frac{A_i}{P_i} = \sum_{i=1}^{\alpha-1} \frac{A_i^*}{P_i}$ و با توجه به فرض بازگشت برابری $A_i = A_i^*$ برای همه i ها ثابت می‌گردد.

۶. ۴ - حالت هیأت C

۶. ۴. ۱ - قضیه - فرض می‌کنیم $\frac{A}{B}$ عنصری از $C(X)$ و :

$$B = \lambda(X - \rho)^h \cdots (X - \sigma)^k$$

باشد که در آن ρ, \dots, σ ریشه‌های متمایز چند جمله‌ای B هستند. تنها يك تجزیة :

$$(1) \quad \frac{A}{B} = E + \frac{\lambda_h}{(X - \rho)^h} + \frac{\lambda_{h-1}}{(X - \rho)^{h-1}} + \cdots + \frac{\lambda_1}{X - \rho} \\ + \dots \\ + \frac{\mu_k}{(X - \sigma)^k} + \frac{\mu_{k-1}}{(X - \sigma)^{k-1}} + \cdots + \frac{\mu_1}{X - \sigma}$$

وجود دارد که در آنجا $E \in C[X]$ و $\lambda_1, \dots, \lambda_h, \dots, \mu_1, \dots, \mu_k$ متعلق به C می‌باشند.

این قضیه حالت ویژه‌ای از ۶. ۳. ۱ است.

۶. ۴. ۲ - چنانچه عبارت $\frac{A}{B}$ صورت ساده شد یک کسر باشد، ضریب نخستین

جمله هریک از سطرهای فرمول (۱)، یعنی λ_h, \dots, μ_k ، مخالف با صفر است. زیرا اگر مثلاً $\lambda_h = 0$ باشد، چنانچه در طرف دوم برابری (۱) استخراج کسرها را یکی کنیم، برابری $\frac{A}{B} = \frac{A^*}{B^*} = (X - \rho)^{h-1} \cdots (X - \sigma)^k$ بدست می‌آید که در آنجا داریم

و این مطلب با قضیه ۱.۶.۱ سازگار نیست. باید دانست که شماره‌های $\lambda_{h-1}, \dots, \lambda_1$ می‌توانند برابر با صفر باشند.

روش عملی تجزیه

۲.۴.۶ - چنانکه در پیش دیدیم E از تقسیم A بر B بر حسب توانهای کاهشی بدست می‌آید (۴.۲.۶). اگر $\deg A < \deg B$ باشد خواهیم داشت $E=0$.

۴.۴.۶ - می‌خواهیم نشان دهیم که $\lambda_h, \lambda_{h-1}, \dots, \lambda_1$ را می‌توان از تقسیم A بر B بر حسب توانهای افزایشی بدست آورد. چون می‌توان با تعویض متغیر $X - \rho = X'$ بحالت $\rho=0$ رسید، پس فرض می‌کنیم $\rho=0$ باشد. در این صورت خواهیم داشت $B = X^h B_1$ که در آنجا B_1 بر X بخش پذیر نیست (به گفته دیگر مقدار ثابت چند جمله‌ای B_1 مخالف با صفر است). پس می‌توان تقسیم A بر B_1 را بر حسب توانهای افزایشی تا مرتبه $h-1$ انجام داد (۱.۱۴.۵):

$$A = B_1(v_0 + v_1 X + \dots + v_{h-1} X^{h-1}) + X^h R$$

که در آن v_0, v_1, \dots, v_{h-1} متعلق به C و R متعلق به $C[X]$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{A}{B} = \frac{v_0}{X^h} + \frac{v_1}{X^{h-1}} + \dots + \frac{v_{h-1}}{X} + \frac{R}{B_1}$$

با تجزیه $\frac{R}{B_1}$ به کسرهای ساده (درمخرج کسرهای این تجزیه X^i وجود نخواهد داشت)،

و افزودن آن به $\frac{v_0}{X^h} + \dots + \frac{v_{h-1}}{X}$ ، تجزیه $\frac{A}{B}$ به کسرهای ساده بدست می‌آید،

و با توجه به یکتایی تجزیه کسرها خواهیم داشت $v_0 = \lambda_h, v_1 = \lambda_{h-1}, \dots, v_{h-1} = \lambda_1$ (بهمین روش می‌توان μ_i ها را از تقسیم A بر B بدست آورد).

۴.۴.۶ - اگر دوطرف برابری (۱) را در $(X - \rho)^h$ ضرب کنیم و سپس X را برابر با ρ بگیریم، خواهیم داشت:

$$(۲) \quad \lambda_h = \frac{A(\rho)}{B_1(\rho)}$$

که در آنجا $B = (X - \rho)^h B_1$ است.

چنانچه همه قطب‌های $\frac{A}{B}$ ساده باشند، با این روش می‌توان همه ضرایب λ_i, \dots, μ_j را بدست آورد.

۶.۴.۶ - اگر p یک قطب ساده باشد، در برخی از موارد می‌توان فرمولی ساده‌تر از فرمول (۲) بدست آورد. چنانچه از برابری $B = (X - \rho)B_1$ مشتق بگیریم خواهیم داشت:

$$B' = B_1 + (X - \rho)B_1' \quad , \quad B'(\rho) = B_1(\rho)$$

بنابراین برای $h = 1$ چنین داریم :

$$(۳) \quad \lambda_1 = \frac{A(\rho)}{B'(\rho)}$$

۶.۴.۷ - اگر در برابری (۱) به X مقادیر ویژه‌ای نسبت دهیم بستگی‌هایی بین λ_i ها، \dots ، μ_j ها بدست می‌آید. به‌ویژه فرض می‌کنیم $\deg A < \deg B$ باشد ($E = 0$). چنانچه دوطرف (۱) را در X ضرب کنیم و سپس X را به سمت بی‌نهایت میل دهیم، خواهیم داشت :

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{XA(X)}{B(X)} = \lambda_1 + \dots + \mu_1$$

(در اینجا X یک متغیر مختلط را معین می‌کند. هنگامیکه می‌گوییم X به سمت بی‌نهایت می‌گراید به این معنی است که $|X|$ به سمت $+\infty$ میل می‌کند).

۶.۴.۸ - چنانچه دوطرف (۱) را در B ضرب کنیم، یک برابری بین چند جمله‌ای A و یک چندجمله‌ای دیگر بدست می‌آید، که اگر در آن ضرایب چند جمله‌ای‌های دوطرف را با یکدیگر برابر بگیریم بستگی‌هایی خطی بین λ_i ها و \dots و μ_j ها حاصل می‌شود. این بستگی‌ها λ_i ها و \dots و μ_j ها را به‌طور کامل و تنها به یک صورت معین می‌کنند (یکتابی λ_i ها و \dots و μ_j ها از ۶.۴.۱ نتیجه می‌شود).

۶.۵ - حالت هیأت \mathbb{R}

۶.۱.۵ - قضیه - چنانچه $\frac{A}{B}$ متعلق به $\mathbb{R}(X)$ و :

$$B = \lambda(X-r)^h \dots (X-s)^k (X^r + aX + b)^l \dots (X^r + cX + d)^m$$

$\tau_i, \sigma_i, \dots, \rho_i, \nu_i$ را بدست آورد. برای تجزیه یک کسر با ضرایب حقیقی بهتراست، با در نظر گرفتن نکات زیر، به حالت کسرهای مختلط برگردیم.

بستگی بین تجزیه‌های یک کسر در R و در C

۴.۵.۶ - قضیه - چنانچه $R = \frac{A}{B}$ عنصری از $C(X)$ باشد، کسر

$\frac{A}{B}$ تنها بستگی به R دارد و بستگی به نمایش آن به صورت $\frac{A}{B}$ ندارد.

اثبات - اگر $\frac{A_1}{B_1}$ صورت ساده شده R باشد، داریم $A = A_1 C$ و $B = B_1 C$

که C متعلق به $C[X]$ است (۵.۱.۶). پس خواهیم داشت:

$$\frac{\bar{A}}{\bar{B}} = \frac{\bar{A}_1 \bar{C}}{\bar{B}_1 \bar{C}} = \frac{\bar{A}_1}{\bar{B}_1}$$

و قضیه ثابت می‌شود.

۵.۵.۶ - قراری دهیم $\bar{R} = \frac{A}{B}$ و کسر گویای \bar{R} را مزدوج کسر گویای

$R = \frac{A}{B}$ می‌نامیم. درحالتی که R یک چند جمله‌ای باشد به تعریف مزدوج یک چند

جمله‌ای که در پیش بیان شد می‌رسیم. بدیهی است که $\bar{\bar{R}} = R$ و چنانچه $S \in C(X)$

باشد داریم $\overline{R+S} = \bar{R} + \bar{S}$ و $\overline{RS} = \bar{R} \bar{S}$ (۲.۱۲.۵). اگر ρ قطب مرتبه h

کسر R باشد، از ۲.۱۲.۵ نتیجه می‌شود که $\bar{\rho}$ قطب مرتبه h کسر \bar{R} می‌باشد. بنابراین

۵.۱۲.۵ برای هر x متعلق به C که قطب R نباشد داریم $\overline{R(x)} = \bar{R}(x)$.

۶.۵.۶ - فرض می‌کنیم $R = \frac{A}{B}$ عنصری از $C(X)$ و:

$$B = \lambda(X - \rho)^h \dots (X - \sigma)^k$$

باشد، که در آنجا ρ, \dots, σ ریشه‌های متمایز چند جمله‌ای B هستند. چنانچه تجزیه

کسر R را به صورت (۱) شماره ۱.۴.۶ بنویسیم، با استفاده از ۵.۵.۶ خواهیم داشت:

خود برابر است، عنصری از $\mathbf{R}[X]$ می باشد و بنا بر (۱) و ۲.۲.۶ داریم:

$$\deg T_i < \deg A^i$$

با در نظر گرفتن ۰.۳.۶ می توان نوشت:

$$\frac{T_i}{A^i} = \frac{\mu_i X + \nu_i}{A^i} + \frac{\mu_{i-1} X + \nu_{i-1}}{A^{i-1}} + \dots + \frac{\mu_1 X + \nu_1}{A}$$

تجزیه $\frac{T_i}{A_i}$ را می توان از تقسیم صورت به مخرج بدست آورد (بنا بر اثبات ۳.۰.۶).

به طور خلاصه می توان گفت کسرهای ساده نوع اول \mathbf{R} همان عنصرهای ساده Δ وابسته

به قطب های حقیقی هستند، و کسرهای ساده نوع دوم \mathbf{R} با دسته بندی کسرهای مزدوج Δ

وابسته به قطب های غیر حقیقی \mathbf{R} و انجام عمل تقسیم بدست می آیند.

فصل هفتم

چند جمله‌ای‌های چندمتغیری

خواننده از پیش با چند جمله‌ای‌هایی از x, y, z, \dots آشنایی دارد. در این فصل برخی از نتایج فصل پنجم را در مورد این چند جمله‌ای‌ها تعمیم می‌دهیم (همه نتایج فصل پنجم را نمی‌توان در مورد این چند جمله‌ای‌ها تعمیم داد). این فصل در مطالعه فصل‌های آینده اهمیت چندانی ندارد.

۱.۷ - تعریف

۱.۱.۷ - معمولاً، چند جمله‌ای‌های دو متغیری گسترش‌هایی به صورت:

$$(x, y) \rightarrow \sum a_{ij} x^i y^j$$

هستند، که در آن متغیرهای x و y و ضرایب a_{ij} متعلق به \mathbf{R} می‌باشند. در اینجا نیز مانند فصل پنجم، تعریف دیگری برای این چند جمله‌ای‌ها اختیار می‌کنیم.

۲.۱.۷ - فرض می‌کنیم K یک حلقه جابجایی و یگانی باشد. دنباله دوگانه

α_{ij} ، $i \geq 0, j \geq 0$ از عنصرهای K که در آن از ردیف معینی به بعد همه α_{ij} ها برابر با صفرند **چند جمله‌ای دو متغیری با ضرایب متعلق به K نامیده می‌شود.** α_{ij} ها را **ضرایب چند جمله‌ای** و α_{00} را **مقدار ثابت** آن می‌نامند.

۳.۱.۷ - جمع و ضرب چند جمله‌ای‌های دو متغیری به وسیله فرسول‌های زیر معین می‌شوند:

$$(\alpha_{ij}) + (\beta_{ij}) = (\alpha_{ij} + \beta_{ij}), \quad (\alpha_{ij})(\beta_{ij}) = (\gamma_{ij})$$

که در آنجا داریم:

$$\gamma_{ij} = \sum_{i'+i''=i, j'+j''=j} \alpha_{i'j'} \beta_{i''j''}$$

در این صورت می‌توان مانند ۱.۵ ثابت نمود که مجموعه چند جمله‌ای‌های دو متغیری با ضرایب متعلق به K یک حلقه جابجایی تشکیل می‌دهند. اگر α عنصری از K باشد چند جمله‌ای

(a_{ij}) را که همه ضرایب آن برابر با صفر است و داریم $a_{00} = a$ با a یکی می‌گیریم. بدین ترتیب K یک زیرحلقه از حلقه چند جمله‌ای‌های دو متغیری می‌شود. بنابراین عنصریکه K عنصریکه حلقه چند جمله‌ای‌های دو متغیری خواهد شد.

۴.۱.۷ - چند جمله‌ای (a_{ij}) را که در آن $a_{10} = 1$ و سایر a_{ij} ها برابر با صفر است با X نشان می‌دهیم. همچنین چند جمله‌ای (a_{ij}) را که در آن $a_{01} = 1$ و سایر a_{ij} ها برابر با صفرند، با Y می‌نماییم. در این صورت به آسانی دیده می‌شود که داریم:

$$(a_{ij}) = \sum_{i \geq 0, j \geq 0} a_{ij} X^i Y^j$$

از این پس هر چند جمله‌ای دو متغیری را به صورت $\sum_{i \geq 0, j \geq 0} a_{ij} X^i Y^j$ نشان می‌دهیم

(روشن است که بجای X و Y می‌توان حروف دیگری بکار برد) و X و Y را متغیر یا مجهول می‌نامیم. پس عبارت $\sum a_{ij} X^i Y^j$ یک چند جمله‌ای دو متغیری از X و Y را نشان می‌دهد. حلقه چند جمله‌ای‌های دو متغیری از X و Y با ضرایب متعلق به K را با $K[X, Y]$ نشان می‌دهند.

۵.۱.۷ - **تعمیم** - به روش مشابه حلقه چند جمله‌ای‌های n متغیری از X_1, X_2, \dots, X_n با ضرایب متعلق به K را تعریف می‌کنند و آنرا با $K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ نمایش می‌دهند. هر عنصر این حلقه به صورت:

$$\sum_{i_1 \geq 0, \dots, i_n \geq 0} a_{i_1 i_2 \dots i_n} X_1^{i_1} X_2^{i_2} \dots X_n^{i_n}$$

نوشته می‌شود که در آن از یک ردیف به بعد همه ضرایب برابر با صفرند.

۲.۷ - بستگی چند جمله‌ای‌های یک متغیری و چند متغیری

۱.۲.۷ - فرض می‌کنیم K یک حلقه جابجایی و یکدار $A = K[X]$ باشد. چنانکه در ۶.۱.۵ دیدیم A یک حلقه جابجایی و یکدار است.

اگر $P = P_0 + P_1 Y + P_2 Y^2 + \dots$ عنصری از $A[Y]$ باشد، P_j ها عنصرهایی از $A = K[X]$ هستند. قراری دهیم $P_j = \sum_i a_{ij} X^i$ ، که در آن a_{ij} متعلق به K

می باشد، و به چند جمله ای P چند جمله ای $Q = \sum_{i,j} a_{ij} X^i Y^j \in K[X, Y]$ را وابسته می کنیم.

قضیه - گسترش $P \rightarrow Q$ يك ایزومرفیسم حلقه $A[Y]$ در حلقه $K[X, Y]$ است.

اثبات:

۱ - به آسانی دیده می شود که این گسترش یک همومرفیسم حلقه است.

۲ - فرض می کنیم $P^* = \sum_j P_j^* Y^j$ یک عنصر از $A[Y]$ و $a_{ij}^* X^i$ $P_j^* = \sum_j a_{ij}^* X^i Y^j$ باشد.

سایه P^* به وسیله گسترش بالا برابر با $Q^* = \sum_{i,j} a_{ij}^* X^i Y^j$ است. اگر $Q^* = Q$ باشد.

برای همه اندیس های i و j خواهیم داشت $a_{ij}^* = a_{ij}$ و از آنجا $P^* = P$ ، پس گسترش بالا انژکتیو است.

۳ - فرض می کنیم $\sum_{i,j} b_{ij} X^i Y^j$ عنصر دلخواهی از $K[X, Y]$ باشد. قرار

می دهیم $P_j = \sum_i b_{ij} X^i$. چند جمله ای های P_j متعلق به A می باشد و شماره با پایانی

از آنها مخالف با صفر است. بنابراین چند جمله ای $\sum_j P_j Y^j$ عنصری از $A[Y]$ می باشد

و عنصر وابسته به آن در $K[X, Y]$ همان $\sum_{i,j} b_{ij} X^i Y^j$ است. پس گسترش بالا

سورژکتیو است.

۲۰۲۰۷ - به روش مشابه می توان ثابت کرد که یک ایزومرفیسم حلقه $K[X_1, \dots, X_n]$

روی حلقه $K[X_1, \dots, X_p][X_{p+1}, \dots, X_n]$ وجود دارد.

۲۰۲۰۷ - قضیه - اگر K يك حلقه انتگر باشد،

نیز يك حلقه انتگر است.

اثبات - این قضیه در مورد چند جمله ای های یک متغیری دیده شد (۴.۲.۵). اکنون

درستی آنرا برای چند جمله ای های $n-1$ متغیری می پذیریم و برای چند جمله ای های n

متغیری ثابت می کنیم. چون حلقه $K[X_1, \dots, X_{n-1}]$ انتگر است، بنا بر ۴.۲.۵، حلقه

$K[X_1, \dots, X_{n-1}][X_n]$ نیز یک حلقه انتگر می باشد. پس $K[X_1, \dots, X_n]$

یک حلقه انتگر است (۲۰۲۰۷).

۷. ۳ - درجه چند جمله‌ای‌های چند متغیری

۱.۳.۷ - فرض می‌کنیم $P = \sum a_{ij} X^i Y^j$ عنصری از $K[X, Y]$ باشد.

بزرگترین شمار درست i را به قسمی که $a_{ij} \neq 0$ باشد درجه چند جمله‌ای P نسبت به X می‌نامند. همچنین بزرگترین شمار j را به طوریکه $a_{ij} \neq 0$ باشد درجه P نسبت به Y می‌گویند.

درجه کل چند جمله‌ای P بزرگترین شمار درست $i+j$ است به قسمی که دست کم یکی از a_{ij} هایی که در آنها $i+j$ بزرگترین مقدار را دارد مخالف با صفر باشد. چند جمله‌ای 0 دارای درجه نیست. درجه کل چند جمله‌ای P را با $\deg P$ نشان می‌دهند.

۲.۳.۷ - اگر P و Q متعلق به $K[X, Y]$ باشند به آسانی دیده می‌شود که

داریم:

$$\deg(P+Q) \leq \sup(\deg P, \deg Q), \quad \deg(PQ) \leq \deg P + \deg Q$$

۳.۳.۷ - چند جمله‌ای $P = \sum a_{ij} X^i Y^j$ را همگن درجه d می‌نامند اگر برای

هر $d \neq i+j$ داشته باشیم $a_{ij} = 0$. به گفته دیگر اگر P از جمع یک جمله‌ای‌های

$a_{ij} X^i Y^j$ که دارای درجه کل d هستند تشکیل شده باشد. بنا به تعریف، چند جمله‌ای 0

همگن درجه دلخواه است (این مطلب با قراردادی که در مورد چند جمله‌ای 0 در حالت

چند جمله‌ای‌های ناهمگن کردیم اندکی تفاوت دارد). اگر P و Q چند جمله‌ای‌های

همگن درجه p باشند $P+Q$ همگن درجه p است و چنانچه P و Q به ترتیب همگن

درجه p و q باشند چند جمله‌ای PQ از درجه $p+q$ خواهد شد. چند جمله‌ای‌های

همگن درجه صفر عنصرهای K یعنی اسکالرها هستند. چند جمله‌ای‌های دو متغیری همگن

درجه یک به صورت $\alpha X + \beta Y$ و چند جمله‌ای‌های همگن دو متغیری درجه دو به صورت

$$\alpha X^2 + \beta XY + \gamma Y^2$$

۴.۳.۷ - هر چند جمله‌ای P متعلق به $K[X, Y]$ که درجه کل آن p باشد تنها

به یک روش به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_p$$

که در آنجا P_i ها همگن درجه i می باشند و داریم $P_p \neq 0$. چند جمله ای P_i را مؤلفه همگن درجه i چند جمله ای P می نامند.

۵.۳.۷ - اگر K یک حلقه انتگر و P و Q دو عنصر مخالف باصفر از $K[X, Y]$ باشند داریم $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$ زیرا اگر $\deg P = p$ و $\deg Q = q$ باشد بنا بر ۴.۳.۷ چند جمله ای های P و Q را می توان چنین نوشت $P = P^* + P_p$ و $Q = Q^* + Q_q$ که در آنجا $\deg P^* < p$ و $\deg Q^* < q$ است و چند جمله ای های P_p و Q_q مخالف با صفر و به ترتیب همگن درجه p و q می باشند. در این صورت خواهیم داشت

$$PQ = (P^*Q^* + P_pQ^* + P^*Q_q) + P_pQ_q$$

و $\deg(P^*Q^* + P_pQ^* + P^*Q_q) < p + q$ ، و چون P_pQ_q مخالف با صفر و از درجه $p + q$ است بنابراین داریم $\deg(PQ) = p + q$.

۶.۳.۷ - به آسانی می توان کلیه مطالب بالا را در مورد چند جمله ای های n متغیری تعمیم داد.

۴.۷ - توابع چند جمله ای

۱.۴.۷ - حلقه جابجایی ویکه دارای وزیر حلقه K از آنرا که شامل عنصرهای x, y می باشد در نظر می گیریم. به آسانی دیده می شود که گسترش:

$$\sum \alpha_{ij} X^i Y^j \rightarrow \sum \alpha_{ij} x^i y^j$$

حلقه $K[X, Y]$ در A یک همومرفیسم حلقه است. اگر $P = \sum \alpha_{ij} X^i Y^j$ باشد، قرار می دهیم $\sum \alpha_{ij} x^i y^j = P(x, y)$. در این صورت برای چند جمله ای های P و P' متعلق به $K[X, Y]$ و λ متعلق به K داریم:

$$(P + P')(x, y) = P(x, y) + P'(x, y)$$

$$(PP')(x, y) = P(x, y)P'(x, y)$$

$$(\lambda P)(x, y) = \lambda P(x, y)$$

۲.۴.۷ - اگر $A = K[X, Y]$ باشد، به آسانی دیده می شود که $P(X, Y)$ با خود P یکی است. به این جهت علامت $P(X, Y)$ را بجای P بکار می برند.

۲.۴.۷ - فرض می‌کنیم P یک چندجمله‌ای از $K[X, Y]$ باشد. گسترش

$P(x, y) \rightarrow P(x, y)$ حلقه K^2 در K ، تابع چندجمله‌ای معین شده به وسیله P نامیده می‌شود. چنانچه $K = \mathbf{R}$ باشد به مفهوم ساده چند جمله‌ای‌ها می‌رسیم.

۴.۴.۷ - به آسانی می‌توان کلیه مطالب بالا را در مورد چند جمله‌ای‌های n متغیری

تعمیم داد.

۵.۴.۷ - قضیه - فرض می‌کنیم K یک حلقه انتگر و بی پایان باشد.

اگر دو عنصر P و Q متعلق به $K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ یک تابع چند جمله‌ای را معین کنند، داریم $P = Q$.

اثبات :

الف - ابتدا فرض می‌کنیم $n = 1$ باشد. بنا بر ۶.۶.۴ حلقه انتگر A در هیات کسره‌های خود، که آنرا با \mathbf{C} می‌نماییم، غوطه‌ور می‌گردد. پس اگر $P \in \mathbf{C}[X_1]$ و $Q \in \mathbf{C}[X_1]$ باشد، همه عنصرهای K (به شماره بی پایان) ریشه‌های چند جمله‌ای $P - Q$ هستند. بنابراین با توجه به شماره ۹.۹.۵ خواهیم داشت $P - Q = 0$.

ب - اکنون فرض می‌کنیم قضیه بالا در مورد چند جمله‌ای‌های $n - 1$ متغیری درست باشد. چنانچه چند جمله‌ای $P - Q$ را در نظر بگیریم، برای اثبات قضیه کافی است نشان دهیم که اگر R یک عنصر مخالف با صفر حلقه $K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ باشد، یک تابع مخالف با صفر را معین می‌کند. اما اگر $R = \sum_j R_j X_n^j$ باشد که در آن R_j ها

متعلق به $K[X_1, \dots, X_{n-1}]$ هستند، چون R مخالف با صفر است دست کم یک اندیس i وجود دارد به طوری که داشته باشیم $R_i \neq 0$. همچنین بنا به فرض بازگشت عنصرهای x_1, x_2, \dots, x_{n-1} متعلق به K وجود دارند به طوری که :

$$R_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \neq 0$$

باشد. بنابراین چند جمله‌ای $\sum_j R_j(x_1, \dots, x_{n-1}) X_n^j$ ، که متعلق به $K[X_n]$

است، مخالف با صفر می‌باشد. پس بنا بر قسمت (الف) عنصر x_n متعلق به K وجود دارد به طوری که داریم $\sum_j R_j(x_1, \dots, x_{n-1}) x_n^j \neq 0$ ، به عبارت دیگر $R(x_1, \dots, x_n)$

مخالف با صفر می‌باشد و بدین ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

۶.۴.۷ - هنگامیکه K یک حلقهٔ انتگر و بی‌پایان باشد (مثلاً $K=Z$ ، یا R ، یا C)، هرچند جمله‌ای با تابعی که تعیین می‌کند یکی گرفته می‌شود. درستی این مطلب از قضیهٔ ۵.۴.۷ آشکار است.

۵.۷ - تعریف دیگر چندجمله‌ای‌های همگن

۱.۵.۷ - چند جمله‌ای n متغیری :

$$P(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n} X_1^{i_1} X_2^{i_2} \dots X_n^{i_n}$$

را در نظر می‌گیریم و P را به صورت $P = P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_p$ می‌نویسیم، که در آنجا P_i یک چندجمله‌ای همگن درجهٔ i می‌باشد و داریم $P_p \neq 0$ هرگاه $P \neq 0$ باشد. بنابراین شمارهٔ ۱.۴.۷ می‌توان عنصرهایی از حلقهٔ $K[X_1, \dots, X_n, T]$ را، که در آنجا T متغیر جدیدی را مشخص می‌کند، جایگزین متغیرهای X_1, X_2, \dots, X_n چند جمله‌ای P نمود. به ویژه می‌توان چندجمله‌ای $(P(X_1 T, X_2 T, \dots, X_n T))$ را تشکیل داد. چون داریم :

$$\begin{aligned} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n} (X_1 T)^{i_1} (X_2 T)^{i_2} \dots (X_n T)^{i_n} = \\ \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n} X_1^{i_1} X_2^{i_2} \dots X_n^{i_n} T^{i_1 + i_2 + \dots + i_n} \end{aligned}$$

به آسانی دیده می‌شود که خواهیم داشت :

$$P(X_1 T, X_2 T, \dots, X_n T) = P_0 + P_1 T + P_2 T^2 + \dots + P_p T^p$$

۲.۵.۷ - به ویژه اگر $P \neq 0$ باشد، $\deg P$ برابر با درجه چند جمله‌ای $(P(X_1 T, X_2 T, \dots, X_n T))$ نسبت به T می‌باشد.

۳.۵.۷ - قضیه - برای اینکه چند جمله‌ای P همگن درجهٔ p باشد یا

و بسنده است که داشته باشیم :

$$P(X_1 T, X_2 T, \dots, X_n T) = T^p P(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

اثبات - بنابر ۱.۵.۷ شرط بالا لازم است. به وارون اگر این شرط برقرار باشد

خواهیم داشت :

$$P_0 + P_1 T + P_2 T^2 + \dots + P_p T^p = P(X_1 T, X_2 T, \dots, X_n T) \\ = T^p P(X_1, X_2, \dots, X_n) = (P_0 + P_1 + \dots + P_p) T^p$$

پس برای $i < p$ داریم $P_i = 0$. بنابراین P همگن درجه p است.

۶.۷ - مشتق چند جمله‌ای‌های چند متغیری

۱.۶.۷ - فرض می‌کنیم $P = \sum \alpha_{ij} X^i Y^j$ باشد. مشتقهای نسبی P نسبت به X و Y به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$P'_x = \sum i \alpha_{ij} X^{i-1} Y^j, \quad P'_y = \sum j \alpha_{ij} X^i Y^{j-1}$$

(هرگاه $K = \mathbf{R}$ باشد، این مشتقهای نسبی همان مشتقهای نسبی تعریف شده در شماره ۲.۱.۱۱ کتاب آنالیز هستند).

۲.۶.۷ - دستورهای محاسبه مشتقهای نسبی شبیه دستورهای شماره ۲.۱۳.۵ می‌باشند. (به علاوه با توجه به ۱.۲.۷ می‌توان P را به صورت یک چند جمله‌ای یک متغیری از X و Y در نظر گرفت و به حالت چند جمله‌ای‌های یک متغیری برگشت).

۳.۶.۷ - داریم $P''_{xy} = P''_{yx}$. کفافی است درستی این برابری را در مورد $P = X^i Y^j$ بررسی کنیم که آن نیز آشکار است. زیرا:

$$P''_{xy} = (i X^{i-1} Y^j)'_y = j i X^{i-1} Y^{j-1}$$

$$P''_{yx} = (j X^i Y^{j-1})'_x = i j X^{i-1} Y^{j-1}$$

۴.۶.۷ - از این جانتیجه می‌شود که می‌توان مشتقهای نسبی ویی در پی یک چند جمله‌ای P را بدون رعایت ترتیب مشتق گیری محاسبه کرد. چنانچه m بار از چند جمله‌ای P نسبت به X و n بار نسبت به Y مشتق بگیریم یک چند جمله‌ای بدست می‌آید که آنرا با $P_{X^m Y^n}^{(m+n)}$ نشان می‌دهیم.

۵.۶.۷ - مثال - اگر ρ و σ متعلق به K و $P = (X - \rho)^i (Y - \sigma)^j$ باشد، مانند شماره ۴.۱۳.۵ می‌توان نشان داد که $(\rho, \sigma) = 0$ است مگر آنکه داشته باشیم $m = i$ و $n = j$ که در این صورت $(\rho, \sigma) = i! j!$ است. $P_{X^i Y^j}^{(i+j)}$ می‌باشد.

۶.۶.۷ - قضیه- (فرمول تیلر) . چنانچه K يك هیأت با مشخص صفر ρ و σ متعلق به K و P عنصری از $K[X, Y]$ باشد ، داریم :

$$P(X, Y) = \sum_{i \geq 0, j \geq 0} \frac{1}{i! j!} P_{X^i Y^j}^{(i+j)}(\rho, \sigma) (X - \rho)^i (Y - \sigma)^j$$

(جمله های مجموع بالا به شماره با پایان است ، زیرا هنگامیکه $i + j$ به اندازه کافی بزرگ باشد همه چند جمله ای های $P_{X^i Y^j}^{(i+j)}$ برابر با صفرند) .

اثبات - همانطوریکه در مورد چندجمله ای های یک متغیری دیده شد کافی است قضیه را برای چند جمله ای $P(X, Y) = (X - \rho)^i (Y - \sigma)^j$ ثابت کنیم ، که آن نیز با توجه به مثال ۵.۶.۷ آشکار است .

۷.۶.۷ - هرگاه $P(X_1, X_2, \dots, X_n)$ یک چند جمله ای n متغیری باشد ، ابتدا مشتقهای نسبی مرتبه اول $P'_{X_1}, P'_{X_2}, \dots, P'_{X_n}$ را مانند ۱.۶.۷ و سپس مشتقهای نسبی مرتبه های بالا یعنی به طور کلی :

$$P_{X_1^{i_1} X_2^{i_2} \dots X_n^{i_n}}^{(i_1 + i_2 + \dots + i_n)}$$

را تعریف می کنند. در این حالت نیز فرمول تیلر برقرار است که اثبات آن را به عهده خواننده می گذاریم .

۸.۶.۷ - قضیه (فرمول اولر) - فرض می کنیم K يك هیأت بامشخص σ و چند جمله ای P متعلق به $K[X, Y]$ باشد. برای اینکه P همگن درجه m باشد ، با Y و X بسنده است که داشته باشیم $mP = XP'_X + YP'_Y$.

اثبات :

۱ - فرض می کنیم P همگن درجه m باشد . برای اثبات قضیه کافی است درستی آنرا برای چند جمله ای $P = X^i Y^j$ ، که در آنجا $i + j = m$ است نشان دهیم . اما در این حالت داریم :

$$XP'_X + YP'_Y = X i X^{i-1} Y^j + Y j X^i Y^{j-1} = (i+j) X^i Y^j = mP$$

پس قضیه برقرار است .

۲ - فرض می‌کنیم برای $mP = XP'_x + YP'_y$ را داشته باشیم. بنابر ۴.۳.۷

می‌توان چنین نوشت :

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \dots$$

که در آنجا چند جمله‌ای P_i همگن درجه i است بنابراین داریم :

$$mP = mP_0 + mP_1 + mP_2 + \dots$$

به علاوه بنابر قسمت اول همین قضیه خواهیم داشت:

$$XP'_x + YP'_y = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + \dots$$

پس برای همه i ها $(m-i)P_i = 0$ و در نتیجه هنگامیکه $i \neq m$ است $P_i = 0$ می‌باشد، زیرا مشخص هیأت K برابر با صفر است. به این ترتیب قضیه ثابت می‌گردد.

۹.۶.۷ - تعمیم - برای اینکه چند جمله‌ای $P(X_1, X_2, \dots, X_n)$ همگن

درجه m باشد، با یا ویسنده است که داشته باشیم :

$$mP = X_1 P'_{X_1} + X_2 P'_{X_2} + \dots + X_n P'_{X_n}$$

(در این حالت نیز مشخص هیأت K برابر با صفر فرض می‌شود).

فصل هشتم

فضاهای برداری

این فصل یکی از مهم‌ترین فصل‌های درس جبر است. در این فصل فضاهای برداری به ویژه فضاهای برداری با بعد با پایان به طور دقیق مورد مطالعه قرار می‌گیرند. نظریه فضاهای برداری تعمیم محاسبات برداری معمولی است، و خواننده می‌تواند از تصور هندسی خود برای فهم بهتر مطالب کمک بگیرد. پایه، بعد و گسترش خطی از مفاهیم مهمتر این فصل می‌باشند. این مفاهیم عملاً در همه قسمت‌های ریاضی بکار برده می‌شوند.

۱.۸ - تعریف

۱.۱.۸ - فرض می‌کنیم K یک هیأت باشد. مجموعه E که در روی آن دو قانون زیر تعریف شده است یک **فضای برداری روی هیأت K** نامیده می‌شود:

- ۱ - قانون جمع که از مجموعه E یک گروه جابجایی درست می‌کند.
- ۲ - یک گسترش $K \times E$ در E که به هر جفت (λ, x) ، که در آن $\lambda \in K$ و $x \in E$ است، یک عنصر از E را که به صورت λx یا $\lambda \cdot x$ نمایش می‌دهند وابسته می‌کند و دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد:

$$\forall \lambda, x, y; \lambda \in K, x \in E, y \in E : \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$$

$$\forall \lambda, \mu, x; \lambda \in K, \mu \in K, x \in E : (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$

$$\forall \lambda, \mu, x; \lambda \in K, \mu \in K, x \in E : (\lambda \mu)x = \lambda(\mu x)$$

$$\forall x \in E : 1 \cdot x = x$$

(اگر به جای هیأت K حلقه جابجایی K را در نظر بگیریم E را، به جای فضای برداری، یک **مدول روی K** گویند.)

۲.۱.۸ - معمولاً عنصرهای K را اسکالر و عنصرهای E را برداری نامند. یک فضای برداری روی \mathbf{R} (روی \mathbf{C}) فضای برداری حقیقی (فضای برداری مختلط) گفته می‌شود. عنصر بی‌اثر e متعلق به E را مبدأ گویند.

مثال :

۳.۱.۸ - مجموعه E بردارهای آزاد فضای معمولی با عملیات جمع برداری :

$$(\vec{V}, \vec{V}') \rightarrow \vec{V} + \vec{V}'$$

و ضرب بردار در اسکالر $\lambda \vec{V} \rightarrow (\lambda, \vec{V})$ یک فضای برداری حقیقی تشکیل می‌دهد .
اگر در فضای معمولی یک مبدأ O انتخاب کرده و به نقطه M بردار \vec{OM} را وابسته کنیم فضای E همان فضای معمولی خواهد شد .

۴.۱.۸ - مجموعه $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R}$ را در نظر می‌گیریم . برای

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ و $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ قرار می‌دهیم :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) =$$

$$(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

به آسانی می‌توان تحقیق نمود که این جمع جابجایی و انجمنی و دارای عنصر بی‌اثر :

$$o = (0, 0, \dots, 0)$$

است و هر عنصر (x_1, x_2, \dots, x_n) دارای عنصر وارونه $(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ می‌باشد .

همچنین اگر $\lambda \in \mathbf{R}$ باشد قرار می‌دهیم :

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

روشن است که به این ترتیب \mathbf{R}^n یک فضای برداری روی \mathbf{R} خواهد بود . به روش مشابه \mathbf{C}^n را می‌توان به صورت یک فضای برداری روی \mathbf{C} در نظر گرفت . به طور کلی اگر K یک هیأت باشد ، K^n را می‌توان به عنوان یک فضای برداری روی هیأت K در نظر گرفت .

مثلاً \mathbf{R}^2 و \mathbf{R}^3 و همچنین خود \mathbf{R} فضاهای برداری حقیقی هستند و \mathbf{C}^2 و \mathbf{C}^3 و همین طور خود \mathbf{C} فضاهای برداری مختلط می‌باشند .

۵.۱.۸ - اگر K یک هیأت باشد ، $K[X]$ یک فضای برداری روی K برای

قانونهای $(P, Q) \rightarrow P + Q$ و $(\lambda, P) \rightarrow \lambda P$ ، (۳.۱.۵ و ۶.۱.۵) می‌باشد .

همین طور برای $K[X_1, X_2, \dots, X_n]$.

۶.۱.۸ - فرض می‌کنیم E مجموعه توابع حقیقی در فاصله I از \mathbf{R} باشد . اگر

$f, g \in E$ و $\lambda \in \mathbf{R}$ باشد $f + g$ و λf را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\forall x \in I, (f+g)(x) = f(x) + g(x), (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

در این صورت E یک فضای برداری تشکیل می‌دهد.

به جای توابع حقیقی دلخواه ممکن است توابع پیوسته و یا توابعی که دوبار مشتق پذیر باشند و غیره را اختیار کرد.

نتیجه :

۷.۱.۸ - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری روی هیات K باشد. اگر $x \in E$

، $y \in E$ و $\lambda \in K$ باشند داریم $\lambda(x-y) = \lambda x - \lambda y$ زیرا :

$$\lambda(x-y) + \lambda y = \lambda[(x-y) + y] = \lambda x$$

۸.۱.۸ - اگر درستگی بالا قراردسیم $x=y$ خواهیم داشت $\lambda \cdot 0 = 0$

۹.۱.۸ - اگر در ۷.۱.۸ قراردسیم $x=0$ خواهیم داشت $\lambda(-y) = -(\lambda y)$

۱۰.۱.۸ - اگر $x \in E$ و $\lambda \in K$ و $\mu \in K$ باشد خواهیم داشت :

$$(\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x$$

$$(\lambda - \mu)x + \mu x = [(\lambda - \mu) + \mu]x = \lambda x \quad \text{زیرا}$$

۱۱.۱.۸ - اگر در (۱۰.۱.۸) $\lambda = \mu$ باشد خواهیم داشت $0 \cdot x = 0$

۱۲.۱.۸ - اگر در ۱۰.۱.۸ اسکالر λ را برابر با صفر بگیریم بدست می‌آوریم

$$(\mu x) = -(-\mu)x. \text{ به ویژه خواهیم داشت } -x = (-1)x.$$

۱۳.۱.۸ - از ۹.۱.۸ و ۱۲.۱.۸ نتیجه می‌شود که $(-\lambda)(-x) = \lambda x$ است.

۱۴.۱.۸ - فرض می‌کنیم x متعلق به E و λ متعلق به K باشد. برای اینکه

داشته باشیم $\lambda x = 0$ با یا وبسنده است که یکی از برابری‌های $\lambda = 0$ و یا $x = 0$ برقرار باشد.

زیرا بنابر ۸.۱.۸ و ۱۱.۱.۸ شرط بالا کافی است. به‌عبارت دیگر اگر $\lambda x = 0$ و $\lambda \neq 0$ باشد،

λ^{-1} وجود دارد و خواهیم داشت :

$$x = 1 \cdot x = (\lambda^{-1}\lambda)x = \lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda^{-1} \cdot 0 = 0$$

۱۵.۱.۸ - اگر $x \in E$ و $n \in \mathbb{Z}$ باشد داریم $nx = (n1)x$ که در آن nx

در گروه جمعی E تعریف شده است و $n1$ عنصری از K می‌باشد. این نتیجه مانند ۷.۱.۴ ثابت می‌شود.

۱۶.۱.۸ - اگر $\lambda \in K$ باشد، گسترش h_λ را که به صورت $h_\lambda(x) = \lambda x$ معین

می‌شود همسانی به نسبت λ در E گویند. اگر $\lambda \neq 0$ باشد، λ^{-1} وجود دارد و به‌آسانی

می‌توان دید که داریم $h_\lambda \circ h_\lambda^{-1} = h_\lambda^{-1} \circ h_\lambda = \text{id}_E$ از اینجا به‌ویژه دوسویی بودن h_λ نتیجه می‌گردد.

۲.۱ - زیرفضاهای برداری

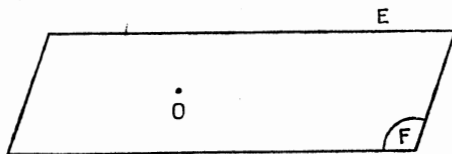
۱.۲.۰.۸ - فرض می‌کنیم K یک هیأت و E یک فضای برداری روی K باشد.

بخش F از E یک زیرفضای برداری از E گفته می‌شود هرگاه ویژگی‌های زیر را دارا باشد:

$$0 \in F \quad (\text{I})$$

$$\forall x, y; x \in F, y \in F \Rightarrow x + y \in F \quad (\text{II})$$

$$\forall x, \lambda; x \in F, \lambda \in K \Rightarrow \lambda x \in F \quad (\text{III})$$



شکل ۲۳

۲.۲.۰.۸ - از بستگی (III) نتیجه می‌شود که:

$$\forall x, x \in F \Rightarrow -x \in F$$

پس F یک زیرگروه E است.

۳.۲.۰.۸ - به‌آسانی مشاهده می‌گردد که مجموعه F با دو قانون نتیجه شده از قانونهای

$$(x, y) \rightarrow x + y, (\lambda, x) \rightarrow \lambda x$$

یک فضای برداری است. این مطلب انگیزه نام‌گذاری «زیرفضای برداری» را روشن می‌سازد.

۴.۲.۰.۸ - مثال - فضای E رافضای معمولی که دارای یک مبدأ O است می‌گیریم.

در این صورت $\{O\}$ ، خط‌های گذرنده بر O ، صفحه‌های گذرنده بر O و خود E زیرفضاهای برداری E هستند. درآینده خواهیم دید (۱۲.۱۰.۸) که در E زیرفضاهای برداری دیگری به‌جز زیرفضاهای ناسپرد، در بالا، وجود ندارد.

۵.۲.۸ - مثال - اگر E یک فضای برداری دلخواه باشد، $\{O\}$ و E زیرفضاهای برداری E هستند.

۶.۲.۸ - مثال - فرض می‌کنیم I یک فاصله از \mathbf{R} و E فضای برداری حقیقی توابع حقیقی باشد که در I تعریف شده‌اند. مجموعه توابع حقیقی پیوسته در فاصله I یک زیرفضای برداری از E می‌باشد.

۷.۲.۸ - قضیه - اگر E یک فضای برداری باشد، هر مقطع از زیر فضاهای برداری E یک زیرفضای برداری از E است.

اثبات - فرض می‌کنیم (F_i) یک خانواده از زیر فضاهای برداری E و F مقطع آنها باشد. در این صورت برای هر مقدار i داریم $0 \in F_i$ پس $0 \in F$. اگر x و y عنصرهایی از F باشند برای هر مقدار i ، x و y از عنصرهای F_i خواهند بود. پس $x+y \in F_i$ و در نتیجه $x+y \in F$ می‌باشد. همین‌طور دیده می‌شود که اگر $x \in F$ و λ یک اسکالر باشد $\lambda x \in F$ است و به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

۸.۲.۸ - به‌وارون همان‌طوریکه در مثال ۴.۲.۸ دیده می‌شود، در حالت کلی اجتماع دو زیر فضای برداری یک زیر فضای برداری نخواهد بود.

۹.۲.۸ - تعریف - اگر E یک فضای برداری روی هیأت K و A بخشی از E باشد، هر عنصر به صورت $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$ که در آن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ و $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ است یک ترکیب خطی از عنصرهای A می‌گویند.

مثلاً خود عنصرهای A ترکیب‌های خطی از عنصرهای A هستند.

۱۰.۲.۸ - قضیه - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری روی هیأت K و A یک بخش غیر تهی از E باشد. بین تمام زیرفضاهای برداری E که شامل A هستند یک زیرفضا وجود دارد که از همه کوچکتر است و آن عبارت است از مجموعه ترکیب‌های خطی عنصرهای A .

اثبات - فرض می‌کنیم F مجموعه ترکیب‌های خطی عنصرهای A باشد. برای اثبات قضیه کافی است ثابت کنیم که:

۱ - F یک زیر فضای برداری از E (و شامل A) می‌باشد.

۲. اگر F' یک زیر فضای دیگر E و شامل A باشد داریم $F \subset F'$.
 برای اثبات قسمت اول گوییم که اگر $z \in A$ باشد داریم $z = z - z \in F$.
 x و y از عنصرهای F باشند، عنصرهای x_1, \dots, x_n و y_1, \dots, y_p از A و اسکالرهایی $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p$ وجود دارند به طوری که داشته باشیم:

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n, \quad y = \mu_1 y_1 + \dots + \mu_p y_p$$

بنابراین:

$$x + y = (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) + (\mu_1 y_1 + \dots + \mu_p y_p)$$

و:

$$\lambda x = \lambda(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) = (\lambda \lambda_1) x_1 + \dots + (\lambda \lambda_n) x_n$$

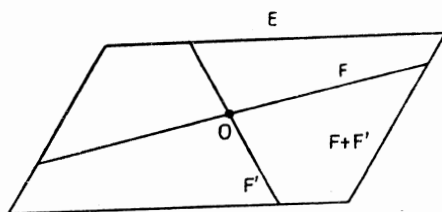
نیز ترکیب‌های خطی عنصرهای A می‌باشند و در نتیجه به F تعلق دارند.
 برای اثبات قسمت دوم با توجه به فرض‌های پیش‌گفته کافی است نشان دهیم که $x \in F'$ است. چون داریم $A \subset F'$ پس $x_1 \in F', \dots, x_n \in F'$ ، از آنجا حاصل می‌شود $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in F'$ زیرا F' یک زیر فضای برداری E می‌باشد.
 ۱۱.۲.۸ - زیر فضای برداری F که در ۱۰.۲.۸ مشخص گردید، زیر فضای برداری E پدید آمده به وسیله A نامیده می‌شود. همچنین گویند که A زیر فضای F را پدید می‌آورد.

۱۲.۲.۸ - نتیجه ۱ - چنانچه x_1, x_2, \dots, x_r ، عنصرهای E باشند، زیر فضای برداری E پدید آمده به وسیله x_1, x_2, \dots, x_r عبارت است از مجموعه ترکیب‌های خطی $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$ از x_i ها.
 زیرا هر ترکیب خطی از عنصرهای $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ را می‌توان به صورت $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ نوشت که در آن ممکن است برخی از λ_i ها صفر باشند.

۱۳.۲.۸ - نتیجه ۲ - اگر F و F' دو زیر فضای برداری E باشند، زیر فضای برداری G از E پدید آمده به وسیله F و F' عبارت است از $F + F'$ یعنی (۶.۱.۲) مجموعه عنصرهایی به صورت $x + x'$ که در آن‌ها x زیر فضای برداری F و x' زیر فضای برداری F' را می‌پیماید.

روشن است که $F + F' \subset G$. به علاوه چنانچه $x \in G$ باشد داریم $x = y + y'$ که در آن y یک ترکیب خطی عنصرهای F و y' یک ترکیب خطی عنصرهای F'

است. به این ترتیب $y \in F$ و $y' \in F'$ می‌باشد. پس $x \in F + F'$ و در نتیجه $G \subset F + F'$.



شکل ۲۴

۱۴.۲.۸ - مثال - فرض می‌کنیم E فضای معمولی دارای مبدأ O و F و F' دوخط گذرنده بر O باشند. اگر $F \neq F'$ باشد، صفحه گذرنده بر F و F' است و چنانچه $F = F'$ باشد خواهیم داشت $F + F' = F$.

۱۵.۲.۸ - نتیجه ۱۳.۲.۸ با استفاده از روش بازگشت در مورد ۳، ۴، و ... زیرفضای برداری E تعمیم داده می‌شود.

۳.۸ - فضای برداری خارج قسمت

۱.۳.۸ - فرض می‌کنیم K یک هیأت و E یک فضای برداری روی K و F یک زیرفضای برداری از E باشد. چون E یک گروه جابجایی و F یک زیرگروه E است، می‌توان گروه خارج قسمت E/F را تشکیل داد (۳.۴.۳). در این گروه نیز مانند گروه جمعی E قانون جمع را با علامت $+$ نشان می‌دهیم. اکنون می‌خواهیم از E/F یک فضای برداری روی هیأت K درست کنیم.

۲.۳.۸ - فرض می‌کنیم $y \in E/F$ و $\lambda \in K$ باشد. چنانچه x یک نماینده از کلاس y در E باشد، کلاسی را که نسبت به F دارای نماینده λx است با λy معین می‌کنیم. باید ثابت کنیم که این کلاس بستگی به نماینده انتخاب شده ندارد. اگر x' نماینده دیگری از کلاس y باشد، $x - x' \in F$ است (۱.۳.۳). پس $\lambda x - \lambda x' = \lambda(x - x') \in F$ می‌باشد و در نتیجه کلاسهای وابسته به λx و $\lambda x'$ نسبت به F یکی هستند و این درستی تعریف λy را آشکار می‌سازد.

اکنون باید نشان داد که گروه جابجایی E/F با قانون $(\lambda, y) \rightarrow \lambda y$ یک

فضای برداری روی هیأت K می‌باشد. چنانچه Φ گسترش کانونیک E روی E/F باشد، می‌دانیم که (۲.۴.۳) برای عنصرهای دلخواه x و y از E داریم:

$$(۱) \quad \Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y)$$

به‌علاوه اگر $x \in E$ و $\lambda \in K$ باشد، عنصر $\Phi(x)$ از E/F کلاس نماینده x خواهد بود. پس $\lambda\Phi(x)$ کلاس نماینده λx است. به عبارت دیگر داریم:

$$(۲) \quad \Phi(\lambda x) = \lambda\Phi(x)$$

بنابراین چنانچه x و y متعلق به E و λ متعلق به K باشد، خواهیم داشت:

$$\lambda(\Phi(x) + \Phi(y)) = \lambda\Phi(x+y) = \Phi(\lambda(x+y))$$

$$\lambda\Phi(x) + \lambda\Phi(y) = \Phi(\lambda x) + \Phi(\lambda y) = \Phi(\lambda x + \lambda y) = \Phi(\lambda(x+y))$$

پس $\lambda(\Phi(x) + \Phi(y)) = \lambda\Phi(x) + \lambda\Phi(y)$ است و این نخستین ویژگی قسمت دوم

۱.۱.۸ می‌باشد، زیرا $\Phi(x)$ و $\Phi(y)$ عنصرهای دلخواهی از E/F هستند.

سه ویژگی دیگر ۱.۱.۸ به روش مشابه اثبات می‌گردند.

فضای برداری E/F را فضای برداری خارج قسمت E بر F می‌گویند.

۸. ۴ - گسترش‌های خطی

۱.۴.۸ - فرض می‌کنیم E و F دو فضای برداری روی هیأت K و Φ یک گسترش

E در F باشد. گوئیم گسترش Φ خطی است هرگاه برای عنصرهای دلخواه x و y از E و λ از K داشته باشیم:

$$\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y), \quad \Phi(\lambda x) = \lambda\Phi(x)$$

چنین گسترشی را یک همومرفیسم گروه E در F نیز می‌گویند. باید دانست شرط:

$$\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y)$$

بیان می‌کند که Φ یک همومرفیسم گروه E در گروه F می‌باشد.

۲.۴.۸ - آشکار است که ترکیب دو گسترش خطی یک گسترش خطی است.

۳.۴.۸ - اگر گسترش خطی Φ فضای برداری E در F دوسویی باشد، به آسانی دیده

می‌شود که Φ^{-1} نیز یک گسترش خطی F در E است. در این صورت گوئیم که Φ یک

ایزومرفیسم E روی F می‌باشد.

یک ایزومرفیسم E روی E یک اتومرفیسم E گفته می‌شود. پس هر گسترش خطی و وارون پذیر، متعلق به مجموعه همه گسترشهای خطی E در E ، یک اتومرفیسم است. مجموعه اتومرفیسم‌های E تشکیل یک گروه می‌دهند که در آن قانون گروه، ترکیب گسترش‌هاست. این گروه را گروه خطی E می‌نامند و با $GL(E)$ نمایش می‌دهند.

۴.۴.۸ - فرض می‌کنیم E و F دوفضای برداری باشند. چنانچه ایزومرفیسمی از E روی F وجود داشته باشد، گویند E و F ایزومرفی هستند. در این صورت هر دوفضا دارای ویژگیهای یکسان می‌باشند.

۵.۴.۸ - مثال - چنانچه E فضای معمولی دارای مبدأ O باشد، همانندی‌های مرکز O گسترش‌های خطی E در E می‌باشند.

۶.۴.۸ - مثال - فرض می‌کنیم E فضای برداری توابع حقیقی، که تا مرتبه بی‌پایان مشتق پذیرند، روی \mathbf{R} باشد. گسترش $f' \rightarrow f$ فضای E در E خطی است (f' مشتق f است).

۷.۴.۸ - مثال - به آسانی می‌توان تحقیق نمود که در یک فضای برداری دلخواه، همسانی‌ها گسترش‌های خطی هستند.

۸.۴.۸ - مثال - اگر E یک فضای برداری و F یک زیر فضای برداری E باشد، گسترش همانی F در E خطی است.

۹.۴.۸ - مثال - همچنین در شماره ۸.۴.۸ گسترش کانونیک E روی E/F خطی است. این مطلب در ۲.۳.۸ به وسیله فرمولهای (۱) و (۲) ثابت شده است.

۱۰.۴.۸ - قضیه - چنانچه E و F دوفضای برداری روی هیأت K و Φ یک گسترش خطی E در F باشد، $\Phi(E)$ یک زیر فضای برداری F و هسته $N = \Phi^{-1}(0)$ گسترش Φ یک زیر فضای برداری از E خواهد بود.

اثبات - می‌دانیم که $\Phi(E)$ یک زیر گروه F و N یک زیر گروه E است (۴.۵.۳). چنانچه $y \in \Phi(E)$ و $\lambda \in K$ باشد، یک عنصر x در E وجود دارد به طوری که داشته باشیم $y = \Phi(x)$. در این صورت داریم $\lambda y = \lambda \Phi(x) = \Phi(\lambda x) \in \Phi(E)$. پس $\Phi(E)$ یک زیر فضای برداری از F می‌باشد. هرگاه $\lambda \in K$ و $z \in N$ باشد داریم $\Phi(z) = 0$.

پس $\lambda z \in N$ و $\Phi(\lambda z) = \lambda \Phi(z) = 0$. بنابراین N یک زیر فضای برداری از E خواهد بود.

۱۱.۴.۸ - تجزیه کانونیک یک گسترش خطی - اگر E و F دو فضای

برداری روی هیأت K و φ یک گسترش خطی E در F و N هسته آن باشد تجزیه کانونیک φ عبارت است از :

$$\begin{array}{ccc} & \varphi & \\ E & \longrightarrow & F \\ s \downarrow & & \uparrow i \\ E/N & \xrightarrow{\psi} & \varphi(E) \\ & \psi & \end{array}$$

بنابر (۱۰.۴.۸) و (۲.۳.۸) مجموعه E/N یک فضای برداری است. همچنین

بنابر (۱۰.۴.۸) و (۳.۲.۸) مجموعه $\varphi(E)$ یک فضای برداری می باشد، و نیز می دانیم

که (۸.۴.۸) و (۹.۴.۸) گسترشهای s و i خطی هستند. اکنون می خواهیم ثابت کنیم

که گسترش ψ یک ایزومرفیسم فضاهای برداری است. می دانیم که ψ یک ایزومرفیسم

گروه هاست (۱.۶.۳). پس کافی است نشان دهیم که برای $y \in E/N$ و $\lambda \in K$

داریم $\psi(\lambda y) = \lambda \psi(y)$. اما در فضای E یک عنصر x وجود دارد به طوری که $y = s(x)$

باشد. بنابراین :

$$\psi(\lambda y) = \psi(\lambda s(x)) = \psi(s(\lambda x)) = \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x) = \lambda \psi(s(x)) = \lambda \psi(y)$$

۵.۸ - زیر فضای برداری متمم

۱.۵.۸ - قضیه - چنانچه E یک فضای برداری و F و F' دو زیر فضای

برداری E باشند، شرطهای زیر هم ارزند :

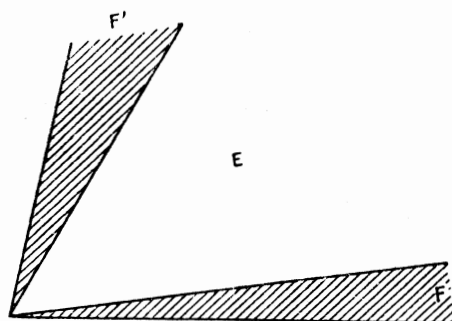
$$F \cap F' = \{0\} \text{ و } F + F' = E - (I)$$

(II) - هر بردار از E تنها به یک روش به صورت $x + x'$ نوشته می شود

که در آن $x \in F$ و $x' \in F'$ است .

(III) $F + F' = E$ - و از $x + x' = 0$ ، $(x' \in F'$ و $x \in F)$ ، نتیجه می شود

$$x = x' = 0$$



شکل ۲۰

اثبات :

(I) \Leftarrow (II) : فرض می‌کنیم شرط (I) برقرار و $y \in E$ باشد. پس y به صورت $y = x + x'$ نوشته می‌شود که در آن $x \in F$ و $x' \in F'$ ، زیرا داریم $F + F' = E$. چنانچه $y = x_1 + x'_1$ یک تجزیه دیگر y باشد که در آن $x_1 \in F$ و $x'_1 \in F'$ است، خواهیم داشت $x + x' = x_1 + x'_1$ پس $x - x_1 = x'_1 - x'$ اما $x - x_1 \in F$ و $x'_1 - x' \in F'$ می‌باشد پس :

$$x - x_1 = x'_1 - x' \in F \cap F'$$

و چون $F \cap F' = \{0\}$ ، خواهیم داشت $x = x_1$ و $x' = x'_1$. یعنی شرط (II) برقرار است.

(II) \Leftarrow (III) : اکنون فرض می‌کنیم شرط (II) برقرار باشد. اولاً آشکار است که داریم $F + F' = E$. اگر x عنصری از F و x' عنصری از F' باشد به طوری که داشته باشیم $x + x' = 0$ ، از برابری $x + x' = 0 + 0$ و فرض یکتایی وابسته به شرط (II) نتیجه می‌شود که $x = 0$ و $x' = 0$ است و درستی شرط (III) ثابت می‌گردد.

(III) \Leftarrow (I) : چنانچه شرط (III) برقرار و $z \in F \cap F'$ باشد، خواهیم داشت $z \in F'$ و $-z \in F'$ و $z + (-z) = 0$ و از آنجا $z = -z = 0$ یعنی $F \cap F' = \{0\}$ ، و این درستی شرط (I) را می‌رساند.

۲۰۰۸ - تعریف - هنگامی که یکی از شرط‌های (I)، (II) یا (III)

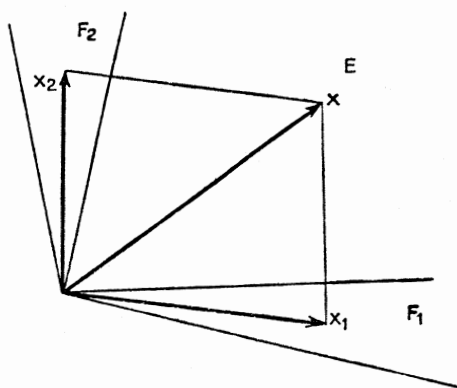
شماره ۱۰۰۸ برقرار باشد، زیرفضاهای برداری F و F' زیر فضاهای برداری متمم در E نامیده می‌شوند.

۳.۰.۸ - مثال - فرض می‌کنیم E فضای معمولی به‌سبب O باشد. صفحه P و خط Δ را که بر O می‌گذرند در نظر می‌گیریم. اگر Δ در P واقع نباشد، Δ و P زیر فضاهای برداری متمم در E هستند.

۴.۰.۸ - قضیه - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری و F_1 و F_2 دو زیر فضای برداری متمم در E باشند.

(I) - به هر عنصر $x = x_1 + x_2$ از E (که در آن $x_1 \in F_1$ و $x_2 \in F_2$) است) عنصر x_1 از F_1 را وابسته می‌کنیم. گسترش F_1 در E که به این ترتیب معین می‌شود، خطی، سوزوکتیو و دارای هسته F_2 می‌باشد.

(II) - فضاهای برداری E/F_2 و F_1 ایزومرف هستند.



شکل ۲۶

اثبات - چنانچه $x = x_1 + x_2$ و $y = y_1 + y_2$ دو عنصر از E باشند ($x_1 \in F_1$ ، $x_2 \in F_2$ ، $y_1 \in F_1$ ، $y_2 \in F_2$) داریم $(x + y) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$ پس اگر گسترشی را که در (I) در نظر گرفتیم با Φ نشان دهیم خواهیم داشت $\Phi(x + y) = x_1 + y_1 = \Phi(x) + \Phi(y)$. همچنین داریم $\Phi(\lambda x) = \lambda x_1 = \lambda \Phi(x)$ پس $\lambda x_1 \in F_1$ و $\lambda x_2 \in F_2$ ، $\lambda x = \lambda x_1 + \lambda x_2$ یعنی گسترش Φ خطی است. برای اینکه x به هسته Φ متعلق باشد با یابونده است که $x_1 = 0$ یعنی $x \in F_2$ باشد. بنابراین F_2 هسته Φ است. اگر $x \in F_1$ باشد خواهیم

داشت $\Phi(x) = x$ ، پس گسترش Φ سورژکتیو است و قسمت (I) قضیه ثابت می گردد .
 بنا بر ۱۱.۴.۸ ، تجزیه کانونیک Φ یک ایزومرفیسم E/F_7 روی F_1 $\Phi(E) = F_1$ به دست می دهد و از آن قسمت (II) قضیه نتیجه می شود .

۵.۵.۸ - گسترش E روی F_1 ، که در ۴.۵.۸ در نظر گرفتیم ، « تصویر E روی F_1 در راستای F_7 » نامیده می شود . بهمین ترتیب تصویر E روی F_7 در راستای F_1 تعریف می گردد . با توجه به مثال ۳.۵.۸ دلیل این نام گذاری آشکار می شود .

تعمیم در حالت چند زیر فضای برداری

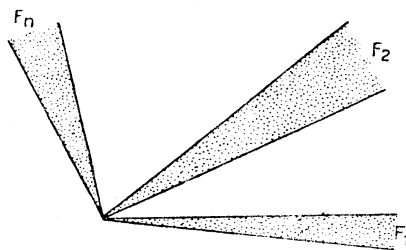
۶.۵.۸ - تعمیم قضیه ۱.۵.۸ - چنانچه E یک فضای برداری و F_1, F_2, \dots, F_n زیر فضاهای برداری E باشند ، شرط های زیر هم ارزند :

$$(\forall i=1, 2, \dots, n), F_i \cap \left(\sum_{j \neq i} F_j \right) = \{0\} \quad \text{-(I)}$$

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = E \quad \text{و}$$

(II) - هر بردار از E تنها به یک روش به صورت $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ نوشته می شود که در آن $x_1 \in F_1, x_2 \in F_2, \dots, x_n \in F_n$.

(III) - $F_1 + F_2 + \dots + F_n = E$ و از $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ نتیجه می شود $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.



شکل ۲۷

اثبات - (I) \iff (II) : فرض می کنیم شرط (I) برقرار و $x \in E$ باشد . پس x به صورت $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ نوشته می شود که در آن $x_1 \in F_1, x_2 \in F_2, \dots, x_n \in F_n$.

است، زیرا داریم $F_1 + F_2 + \dots + F_n = E$. چنانچه $x = x'_1 + x'_2 + \dots + x'_n$. یک تجزیه دیگر x باشد که در آن $x'_1 \in F_1, \dots, x'_n \in F_n$ است، خواهیم داشت:

$$x_1 - x'_1 = (x'_2 - x_2) + \dots + (x'_n - x_n)$$

اما:

$$(x'_2 - x_2) + \dots + (x'_n - x_n) \in F_2 + \dots + F_n \text{ و } x_1 - x'_1 \in F_1$$

می باشد و چون $F_1 \cap (F_2 + \dots + F_n) = \{0\}$ خواهیم داشت $x_1 - x'_1 = 0$ و یا $x_1 = x'_1$. اگر بجای اندیس ۱ اندیسهای ۲، ۳، ...، n را اختیار کنیم، بایکار بردن روش بالا برابری های $x_2 = x'_2, \dots, x_n = x'_n$ نتیجه می شود. یعنی شرط (II) برقرار است.

(II) \iff (III): اکنون فرض می کنیم شرط (II) برقرار باشد. آشکار است

که داریم $F_1 + F_2 + \dots + F_n = E$. چنانچه $x_1 \in F_1, \dots, x_n \in F_n$ و $x_1 + \dots + x_n = 0 + \dots + 0$ از برابری $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ فرض یکنابی وابسته به شرط (II) نتیجه می شود که $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$ و درستی شرط (III) ثابت می گردد.

(III) \iff (I): چنانچه شرط (III) برقرار و $z \in F_1 \cap (F_2 + \dots + F_n)$

باشد، چون $z \in F_2 + \dots + F_n$ است می توان نوشت $z = x_2 + \dots + x_n$ ، که در آن $x_2 \in F_2, \dots, x_n \in F_n$. پس داریم $(-z) + x_2 + \dots + x_n = 0$

که در آن $(-z) \in F_1$ می باشد، و از فرض شرط (III) نتیجه می شود که $-z = 0$ یعنی برابری $F_1 \cap (F_2 + \dots + F_n) = \{0\}$ برقرار است. به همین روش ثابت

می شود که برای هر اندیس i داریم $F_i \cap (\sum_{j \neq i} F_j) = \{0\}$ و این درستی شرط (I)

را می رساند.

۷.۵.۸ - تعریف - هنگامیکه یکی از شرطهای (I)، (II) یا (III)

شماره ۶.۵.۸ برقرار باشد، فضای برداری E مجموع مستقیم زیر فضاهای برداری F_1, F_2, \dots, F_n نامیده می شود.

به ویژه عبارتهای: « E مجموع مستقیم F_1 و F_2 است » و « F_1 و F_2 در E متمم

هستند » هم ارزند.

۸. ۵. ۸ - مثال - چنانچه E را فضای معمولی به مبدا O بگیریم Δ_1 ، Δ_2 و Δ_3 سه خط ناهم‌صفتحه و گذرنده بر O باشند، فضای E مجموع مستقیم Δ_1 ، Δ_2 و Δ_3 است.

۸. ۶ - حاصل ضرب فضاهای برداری

۱. ۶. ۸ - فرض می‌کنیم E_1 و E_2 دو فضای برداری روی هیأت K باشند. می‌خواهیم از مجموعه $E_1 \times E_2$ یک فضای برداری روی K درست کنیم. چنانچه (x_1, x_2) و (y_1, y_2) دو عنصر از $E_1 \times E_2$ و $\lambda \in K$ باشد قرار می‌دهیم:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

به آسانی می‌توان درستی ویژگی‌های فضای برداری را بررسی نمود. فضای برداری $E_1 \times E_2$ را فضای برداری حاصل ضرب E_1 و E_2 می‌نامند که مبدا آن عنصر $(0, 0)$ می‌باشد. ۲. ۶. ۸ - چنانچه E'_1 مجموعه عنصرهای $E_1 \times E_2$ باشد که به صورت $(x_1, 0)$ هستند، به آسانی می‌توان دید که E'_1 یک زیرفضای برداری $E_1 \times E_2$ و گسترش $(x_1, 0) \rightarrow x_1$ یک ایزومرفیسم E_1 روی E'_1 می‌باشد. به علت وجود این ایزومرفیسم معمولاً E_1 و E'_1 را یکی می‌گیرند و E_1 را مانند یک زیرفضای برداری $E_1 \times E_2$ تصور می‌کنند. همچنین به علت وجود ایزومرفیسم $(0, x_2) \rightarrow x_2$ فضای برداری E_2 مانند یک زیرفضای برداری $E_1 \times E_2$ در نظر گرفته می‌شود.

۳. ۶. ۸ - با توجه به مطالب بالا، هر عنصر (x_1, x_2) از $E_1 \times E_2$ را می‌توان به صورت $(x_1, 0) + (0, x_2) = x_1 + x_2$ نوشت. به علاوه اگر $(x_1, x_2) = y_1 + y_2$ باشد، که در آن $y_1 \in E_1$ و $y_2 \in E_2$ است، خواهیم داشت:

$$(x_1, x_2) = (y_1, 0) + (0, y_2) = (y_1, y_2)$$

پس $x_1 = y_1$ و $x_2 = y_2$ می‌باشد. به این ترتیب هر عنصر از $E_1 \times E_2$ تنها به یک روش به صورت مجموع یک عنصر از E_1 و یک عنصر از E_2 نوشته می‌شود. به عبارت دیگر E_1 و E_2 دو زیرفضای برداری متمم در $E_1 \times E_2$ هستند. به علاوه برابری $(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ نشان می‌دهد که اگر (x_1, x_2) را در روی E_1 در راستای E_2 تصویر کنیم x_1 به دست می‌آید (۵. ۵. ۸).

بنابرسامره (۴.۵.۸) فضای برداری $(E_1 \times E_2)/E_2$ با E_1 ایزومرف است.
 ۴.۶.۸ - می‌خواهیم نشان‌دهیم که کلی‌ترین مثال زیرفضاهای برداری متمم ازسامره
 ۳.۶.۸ به‌دست می‌آید.

قضیه - چنانچه E يك فضای برداری و F_1 و F_2 دو زیر فضای برداری متمم در E باشند، گسترش Φ فضای $F_1 \times F_2$ در E که عنصر $x_1 + x_2$ را به (x_1, x_2) وابسته می‌کند، يك ایزومرفیسم $F_1 \times F_2$ روی E است که در روی F_1 و F_2 به‌گسترش همانی بدل می‌گردد.

اثبات :

۱- اگر $(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$ و $(x'_1, x'_2) \in F_1 \times F_2$ باشد داریم :

$$\begin{aligned}\Phi((x_1, x_2) + (x'_1, x'_2)) &= \Phi((x_1 + x'_1), (x_2 + x'_2)) \\ &= (x_1 + x'_1) + (x_2 + x'_2) \\ &= (x_1 + x_2) + (x'_1 + x'_2) \\ &= \Phi((x_1, x_2)) + \Phi((x'_1, x'_2))\end{aligned}$$

همچنین اگر $\lambda \in K$ باشد داریم :

$$\Phi(\lambda(x_1, x_2)) = \Phi((\lambda x_1, \lambda x_2)) = \lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda \Phi((x_1, x_2))$$

پس گسترش Φ خطی است .

۲- گسترش Φ انژکتیو است. زیرا اگر (x_1, x_2) و (x'_1, x'_2) دو عنصر از $F_1 \times F_2$ باشند به‌طوری‌که داشته باشیم $\Phi((x_1, x_2)) = \Phi((x'_1, x'_2))$ خواهیم‌داشت $x_1 + x_2 = x'_1 + x'_2$ و چون F_1 و F_2 متمم هستند پس $x_1 = x'_1$ و $x_2 = x'_2$ و از آنجا $(x_1, x_2) = (x'_1, x'_2)$.

۳- گسترش Φ سوژکتیو است. زیرا، چون F_1 و F_2 متمم هستند هر عنصر E به‌صورت $(x_1, x_2) = \Phi((x_1, x_2)) = x_1 + x_2$ نوشته می‌شود که در آن $x_1 \in F_1$ و $x_2 \in F_2$ می‌باشد.

۴- پس گسترش Φ یک ایزومرفیسم $F_1 \times F_2$ روی E است.

۵- اگر $x_1 \in F_1$ و $x_2 \in F_2$ باشد داریم:

$$\Phi(x_1) = \Phi((x_1, 0)) = x_1 + 0 = x_1$$

$$\Phi(x_r) = \Phi((0, x_r)) = 0 + x_r = x_r$$

پس Φ گسترش همانی روی F_1 و F_r می باشد.

۵.۶.۸ - تعمیم - اگر E_1, E_r, \dots, E_n فضاهای برداری روی K باشند،

فضای برداری $E_1 \times E_r \times \dots \times E_n$ را می توان مانند شماره (۱.۶.۸) تعریف کرد.

در اینجا نیز هر E_i با یک زیرفضای برداری از $E_1 \times E_r \times \dots \times E_n$ یکی می گردد و

به طوریکه دیده می شود $E_1 \times E_r \times \dots \times E_n$ مجموع مستقیم E_1, E_r, \dots, E_n

می باشد (مشابه شماره ۳.۶.۸).

در حالت ویژه فضای برداری K^n که در شماره ۴.۱.۸ در نظر گرفته شد به دست می آید.

۶.۶.۸ - قضیه - فرض می کنیم E یک فضای برداری و F_1, F_r, \dots, F_n

زیر فضاهای برداری E باشند. چنانچه E مجموع مستقیم F_i ها باشد،

گسترش فضای $F_1 \times F_r \times \dots \times F_n$ در E که عنصر $x_1 + x_r + \dots + x_n$ را

به (x_1, x_r, \dots, x_n) وابسته می کند یک ایزومرفیسم $F_1 \times F_r \times \dots \times F_n$

روی E است که در روی F_1, F_r, \dots, F_n به گسترش همانی بدل می گردد.

اثبات این قضیه مانند ۴.۶.۸ است.

۷.۸ - نایستگی خطی

۱.۷.۸ - قضیه - چنانچه E یک فضای برداری روی هیأت K و x_1, \dots, x_r

متعلق به E باشند، شرطهای زیرهم ارزند:

(I) - یک بستگی به صورت $\lambda_1 x_1 + \lambda_r x_r + \dots + \lambda_n x_n = 0$ وجود

دارد که در آن $\lambda_1, \lambda_r, \dots, \lambda_n$ عنصرهایی از K هستند که همه آنها با هم

صفر نمی باشند.

(II) - یکی از x_i ها ترکیب خطی از سایرین است.

اثبات:

(I) \iff (II): فرض می کنیم مثلاً x_1 به صورت $\mu_r x_r + \dots + \mu_n x_n$ باشد

که در آن μ_r, \dots, μ_n متعلق به K هستند. داریم:

$$1 \cdot x_1 + (-\mu_r)x_r + \dots + (-\mu_n)x_n = 0$$

و چون $1 \neq 0$ می باشد پس شرط (I) برقرار است.

(I) \iff (II) : فرض می کنیم بستگی $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ را

داشته باشیم که در آن مثلاً $\lambda_1 \neq 0$ است. در این صورت داریم :

$$x_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} x_n$$

پس x_1 یک ترکیب خطی از x_2, \dots, x_n است و شرط (II) برقرار می باشد.

۲.۷.۸ - تعریف - اگر شرط های ۱.۷.۸ برقرار باشد، گوییم که x_1, x_2, \dots, x_n

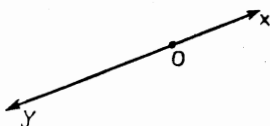
که x_1, x_2, \dots, x_n وابستگی خطی دارند، و چنانچه این شرطها برقرار نباشد گوییم

که x_1, x_2, \dots, x_n نوابستگی خطی دارند و یا اینکه دنباله (x_1, x_2, \dots, x_n) آزاد است.

۳.۷.۸ - مثال - هنگامیکه می گوییم دو بردار x و y از E بستگی خطی دارند

به این معنی است که یا x به صورت μy است و یا y به شکل λx می باشد، که در آنجا λ و μ

متعلق به K هستند. در این صورت x و y را متناسب می نامند.



شکل ۲۸

فرض می کنیم x و y متناسب باشند. چهار حالت پیش می آید :

۱ - $x \neq 0$ و $y \neq 0$: چنانچه مثلاً $y = \lambda x$ باشد داریم $\lambda \neq 0$ و می توان

نوشت $x = \lambda^{-1} y$. به علاوه λ یکتاست، زیرا اگر $y = \lambda' x$ باشد خواهیم داشت

$0 = (\lambda - \lambda') x$ ، که چون $x \neq 0$ می باشد (۱.۴.۱.۸) پس $\lambda - \lambda' = 0$. در این حالت

$$\text{گاهی می نویسند } \lambda = \frac{y}{x}.$$

۲ - $x \neq 0$ و $y = 0$: در این صورت داریم $y = 0 \cdot x$ اما هیچ عنصری از K مانند

μ وجود ندارد به طوری که داشته باشیم $x = \mu \cdot y$.

۳ - $x = 0$ و $y \neq 0$: در این صورت داریم $x = 0 \cdot y$ اما هیچ عنصری از K مانند

λ وجود ندارد به طوری که داشته باشیم $y = \lambda \cdot x$.

۴ - $x=y=0$: در این صورت برای عنصرهای دلخواه λ و μ از K داریم:

$$y = \lambda x, \quad x = \mu y$$

۴.۷.۸ - مثال - فضای E را فضای معمولی دارای مبدا O فرض می‌کنیم و

بردارهای $\vec{OM}_1, \vec{OM}_2, \vec{OM}_3$ را در نظر می‌گیریم. اگر این بردارها بستگی خطی داشته باشند هم صفحه خواهند بود. زیرا مثلاً داریم:

$$\vec{OM}_3 = \lambda_1 \vec{OM}_1 + \lambda_2 \vec{OM}_2$$

و یک صفحه P وجود دارد (ممکن است بیش از یک صفحه وجود داشته باشد) که شامل

\vec{OM}_1 و \vec{OM}_2 باشد. آشکار است که این صفحه شامل \vec{OM}_3 خواهد بود. به‌واریون

فرض می‌کنیم سه بردار $\vec{OM}_1, \vec{OM}_2, \vec{OM}_3$ در یک صفحه P واقع باشند و نشان

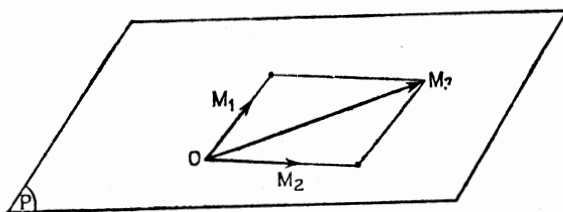
می‌دهیم که بستگی خطی دارند. اگر سه بردار صفر باشند مطلب روشن است و چنانچه

مثلاً $\vec{OM}_1 \neq 0$ و \vec{OM}_2 و \vec{OM}_3 متناسب با \vec{OM}_1 باشند باز هم درستی آن آشکار

است. درحالتیکه مثلاً $\vec{OM}_2 \neq 0$ با \vec{OM}_3 متناسب نباشد، دو بردار \vec{OM}_1 و

\vec{OM}_2 تنها یک صفحه درست می‌کنند که همان صفحه P است، و چون \vec{OM}_3 در

صفحه P واقع است پس باید به‌صورت $\lambda_1 \vec{OM}_1 + \lambda_2 \vec{OM}_2$ نوشته شود.



شکل ۲۹

۵.۷.۸ - مثال - هنگامی که می‌گوییم بردار x آزاد می‌باشد به این معنی است که

$x \neq 0$ است. درحقیقت اگر $x = 0$ باشد داریم $1 \cdot x = 0$ و بردار x آزاد نخواهد

بود. به‌واریون چنانچه بردار x آزاد نباشد برای یک شماره λ مخالف با صفر خواهیم داشت

$\lambda x = 0$ پس $x = 0$ است.

۶.۷.۸ - اگر x_1, x_2, \dots, x_n نوابستگی خطی داشته باشند همه آنها از یکدیگر

متمايز خواهند بود. زيرا چنانچه براي $i \neq j$ داشته باشيم $x_i = x_j$ ، x_i به صورت يك تركيب خطي از x_k ها درمي آيد ($k \neq i$) .

۷.۷.۸ - اگر دنباله (x_1, x_2, \dots, x_n) آزاد باشد، آشكار است كه هردنباله

كه از دنباله (x_1, x_2, \dots, x_n) استخراج شود آزاد خواهد بود. به ويژه بنا بر ۰.۷.۸ هيچيك از x_i ها صفر نخواهد بود.

۸.۷.۸ - قضيه - اگر بردارهاي x_1, x_2, \dots, x_n نوابستگي خطي داشته

باشند و بردار x تركيبی خطی از بردارهای x_1, x_2, \dots, x_n نباشد، بردارهای x, x_1, x_2, \dots, x_n نوابستگی خطی دارند.

اثبات - بستگی $\lambda x + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ را در نظر می گیریم. باید ثابت

کرد كه $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ صفر هستند. اگر $\lambda \neq 0$ باشد داریم:

$$x = -\frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda} x_n$$

واين مخالف است با فرض اين كه x ترکیبی خطی از x_1, \dots, x_n نباشد. پس باید داشته باشيم $\lambda = 0$ و در اين صورت خواهيم داشت:

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$$

و چون x_1, \dots, x_n نوابستگی خطی دارند نتیجه خواهد شد $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

۸.۸ - پایه يك فضای برداری

۱.۸.۸ - تعريف - اگر E يك فضای برداری و x_1, \dots, x_n عنصرهاي

از E باشند، گوييم كه (x_1, x_2, \dots, x_n) يك پایه E است اگر x_1, x_2, \dots, x_n نوابستگی خطی داشته باشند و فضای E را پديد آورند.

هنگامي كه می گوييم x_1, \dots, x_n فضای E را پديد می آورند به اين معنی است

كه تركيبهای خطی x_1, \dots, x_n تمام E را درست می کنند (۱۲.۲.۸)، به عبارت ديگر هر بردار از E ترکیبی خطی از x_1, \dots, x_n می باشد.

۲.۸.۸ - مثال - چنانچه E فضای معمولی دارای مبدا O باشد، سه بردار

ناهم صفحه $\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}$ و $\overrightarrow{OM_3}$ يك پایه E را پديد می آورند.

۳.۸.۸ - مثال - فرض می‌کنیم $E = \mathbf{R}^n$. بردارهای زیر را که متعلق به \mathbf{R}^n هستند در نظر می‌گیریم:

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

این بردارها یک پایه \mathbf{R}^n را تشکیل می‌دهند (این پایه را پایه کانونیک \mathbf{R}^n می‌گویند). زیرا هر بستگی $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$ را می‌توان به صورت $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0$ نوشت که از آن $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ نتیجه می‌شود. بنابراین بردارهای e_1, \dots, e_n ناپستگی خطی دارند. به علاوه هر بردار (μ_1, \dots, μ_n) از \mathbf{R}^n به صورت $\mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n$ نوشته می‌شود. پس e_1, \dots, e_n فضای E را پدید می‌آورند.

اگر بجای \mathbf{R}^n فضای K^n را در نظر بگیریم (K یک هیأت دلخواه است) باز هم مطالب بالا برقرار است.

۴.۸.۸ - قضیه - چنانچه E یک فضای برداری و (e_1, \dots, e_n) یک

پایه E باشد، هر بردار x از فضای E تنها به یک روش به صورت:

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$$

نوشته می‌شود که در آن $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ اسکالر هستند.

اثبات - چون e_1, \dots, e_n فضای E را پدید می‌آورند، بردار x دست کم به یک

روش به صورت $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ نوشته می‌شود. همچنین فرض می‌کنیم $x = \lambda'_1 e_1 + \dots + \lambda'_n e_n$ باشد. در این صورت داریم:

$$(\lambda_1 - \lambda'_1) e_1 + \dots + (\lambda_n - \lambda'_n) e_n = 0$$

و با توجه به اینکه e_1, \dots, e_n ناپستگی خطی دارند خواهیم داشت:

$$\lambda_1 - \lambda'_1 = \dots = \lambda_n - \lambda'_n = 0 \quad \text{یا} \quad \lambda_1 = \lambda'_1, \dots, \lambda_n = \lambda'_n$$

۵.۸.۸ - اسکالرهای $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ که در شمارهٔ پیش به کار بردیم، آرایندها

(مختصات) یا مؤلفه‌های x نسبت به پایه (e_1, \dots, e_n) نامیده می‌شوند. با این

نامگذاری، در مثال ۳.۸.۸، به تعریف کلاسیک مختصات می‌رسیم. در مثال ۳.۸.۸

بردار (μ_1, \dots, μ_n) از K^n دارای مؤلفه‌های μ_1, \dots, μ_n نسبت به پایهٔ کانونیک می‌باشد.

۶.۸.۸ - قضیه - فرض می‌کنیم F و E دو فضای برداری روی یک هیأت و (e_1, e_2, \dots, e_n) یک پایهٔ E و (f_1, f_2, \dots, f_n) یک دنبالهٔ دلخواه n برداری از F باشد.

(I) - تنها یک گسترش خطی u فضای برداری E در F وجود دارد به طوری که $u(e_1) = f_1, \dots, u(e_n) = f_n$ باشد.

(II) - برای اینکه گسترش u انژکتیو باشد، با یا وابسته است که f_1, \dots, f_n نوابستگی خطی داشته باشند.

(III) - برای اینکه گسترش u سورژکتیو باشد، با یا وابسته است که f_1, \dots, f_n فضای F را پدید آورند.

(IV) - برای اینکه u یک ایزومرفیسم E روی F باشد، با یا وابسته است که f_1, \dots, f_n یک پایهٔ F باشد.

اثبات :

۱ - گسترش u وجود دارد : هر بردار x از E تنها به یک روش به صورت $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ که در آن λ_i ها اسکالر هستند، نوشته می‌شود (۶.۸.۸). چنانچه قرار دهیم $u(x) = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n$ یک گسترش u فضای E در F معین می‌گردد و روشن است که داریم $u(e_1) = f_1, \dots, u(e_n) = f_n$. می‌خواهیم نشان دهیم که u خطی است. اگر $x' = \lambda'_1 e_1 + \dots + \lambda'_n e_n$ بردار دیگری از E باشد، داریم :

$$x + x' = (\lambda_1 + \lambda'_1)e_1 + \dots + (\lambda_n + \lambda'_n)e_n$$

اما بنا بر تعریف u می‌توان نوشت :

$$u(x + x') = (\lambda_1 + \lambda'_1)f_1 + \dots + (\lambda_n + \lambda'_n)f_n$$

$$u(x) = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n$$

$$u(x') = \lambda'_1 f_1 + \dots + \lambda'_n f_n$$

که از روی آنها بستگی $u(x + x') = u(x) + u(x')$ نتیجه می‌شود. به همین ترتیب دیده می‌شود که برای هر اسکالر λ داریم $u(\lambda x) = \lambda u(x)$ پس u خطی است.

۲- گسترش u یکتاست: اگر u' یک گسترش دیگر E در F باشد به طوریکه داشته باشیم $u'(e_1) = f_1, \dots, u'(e_n) = f_n$ ، برای هر بردار $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ از E خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} u'(x) &= u'(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) \\ &= \lambda_1 u'(e_1) + \dots + \lambda_n u'(e_n) = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = u(x) \end{aligned}$$

پس $u = u'$ و اثبات قسمت (I) کامل می شود.

۳- فرض می کنیم u انژکتیو باشد. بستگی $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0$ را در نظر می گیریم و ثابت می کنیم که λ_i ها صفر هستند. بستگی بالا چنین نوشته می شود

$$u(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = 0 \quad \text{یا} \quad \lambda_1 u(e_1) + \dots + \lambda_n u(e_n) = 0$$

چون u انژکتیو است از بستگی بالا نتیجه می شود $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$ و با توجه به اینکه e_1, \dots, e_n نایستگی خطی دارند خواهیم داشت $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. پس f_1, \dots, f_n نایستگی خطی دارند.

به وارون فرض می کنیم f_1, \dots, f_n نایستگی خطی داشته باشند و ثابت می کنیم که گسترش u انژکتیو است. بنا بر ۷.۵.۳ کافی است نشان دهیم که هسته N گسترش u برابر با $\{0\}$ است. چنانچه $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ عنصری از N باشد داریم $u(x) = 0$. یعنی $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0$. چون f_i ها نایستگی خطی دارند، از بستگی بالا نتیجه می شود $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ پس $x = 0$ است و به این ترتیب قسمت (II) ثابت می گردد.

۴- چون E مجموعه ترکیب های خطی e_i هاست، $u(E)$ مجموعه ترکیب های خطی f_i ها خواهد بود. پس هنگامی که می گوئیم u سوزکتیو است به این معنی است که هر عنصر F ترکیبی خطی از f_i هاست و یا اینکه f_i ها F را پدید می آورند و این قسمت (III) را ثابت می کند.

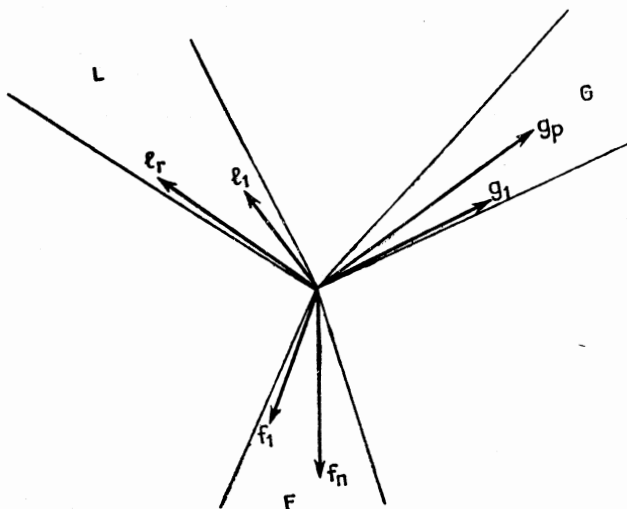
۵- قسمت (IV) قضیه نتیجه آنی قسمتهای (II) و (III) می باشد.

۷.۸.۸ - قضیه - فرض می کنیم E یک فضای برداری و F, G, \dots, L

زیرفضاهای برداری E باشند. چنانچه E مجموع مستقیم F, G, \dots, L

و (f_1, \dots, f_n) یک پایه F و (g_1, \dots, g_p) یک پایه G و (l_1, \dots, l_r)

يك پایه L باشد $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p, \dots, l_1, \dots, l_r)$ يك پایه E خواهد بود.



شکل ۳۰

اثبات - بستگی :

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n + \mu_1 g_1 + \dots + \mu_p g_p + \dots + \rho_1 l_1 + \dots + \rho_r l_r = 0$$

را در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم :

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = f, \quad \mu_1 g_1 + \dots + \mu_p g_p = g, \dots,$$

$$\rho_1 l_1 + \dots + \rho_r l_r = 1$$

داریم $f + g + \dots + 1 = 0$ که در آن $f \in F, g \in G, l \in L$. پس خواهیم داشت $f = g = \dots = 1 = 0$ زیرا E مجموع مستقیم F, G, L است. اما از بستگی $f = 0$ نتیجه می‌شود $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ زیرا f_1, f_2, \dots, f_n نایبستگی خطی دارند. به همین ترتیب دیده می‌شود که μ_j ها و ρ_j ها صفر هستند و از اینجا نایبستگی خطی $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p, l_1, \dots, l_r$ ثابت می‌گردد. به علاوه زیر فضای برداری E' از E ، پدید آمده به وسیله $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p, l_1, \dots, l_r$ شامل F, G, L است پس شامل :

$$F + G + \dots + L = E$$

نیز خواهد بود، در نتیجه خواهیم داشت $E' = E$ و به این ترتیب ثابت می‌شود که بردارهای $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p, l_1, \dots, l_r$ فضای E را پدید می‌آورند.

۸.۸.۸ - قضیه - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری باشد. یک پایه

E را که از اجتماع دنباله‌های متمایز (f_1, \dots, f_n) و (g_1, \dots, g_p) و (l_1, \dots, l_r) تشکیل شده است، در نظر می‌گیریم. چنانچه F زیر فضای پدید آمده به وسیله f_1, \dots, f_n و G زیر فضای پدید آمده به وسیله g_1, \dots, g_p و L زیر فضای پدید آمده به وسیله l_1, \dots, l_r باشد فضای E مجموع مستقیم F, G, L است.

اثبات - زیر فضای برداری $F + G + \dots + L$ شامل همه ترکیبهای خطی

$f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p, l_1, \dots, l_r$ می‌باشد، پس داریم:

$$F + G + \dots + L = E$$

به علاوه اگر یک عنصر x از E به دوروش متمایز به صورت $f + g + \dots + l$ ، که در آن $f \in F, g \in G, l \in L$ است، نوشته شود، به دو روش مختلف به صورت ترکیبی خطی از $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p, l_1, \dots, l_r$ نوشته خواهد شد و این ممکن نیست.

۹.۸ - وجود پایه‌ها

۱.۹.۸ - قضیه - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری A و A' دو بخش

با پایان E باشند به طوریکه داشته باشیم $A \subset A'$. چنانچه بردارهای A نابتگی خطی داشته و بردارهای A' فضای E را پدید آورند، یک پایه B از فضای E وجود دارد به طوریکه $A \subset B \subset A'$ باشد.

اثبات - بخشهایی مانند B از فضای برداری E را به طوریکه $A \subset B \subset A'$ باشد

در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم بردارهای B دارای نابتگی خطی باشند. روشن است که چنین بخشهایی وجود دارد (مثلاً A) و شماره آنها با پایان است (زیرا A' با پایان است). بخش B را طوری انتخاب می‌کنیم که شماره عنصرهای آن بزرگترین مقدار ممکن را دارا باشد. اگر x عنصری از A' باشد که به B متعلق نباشد بردارهای $\{x\} \cup B$ دارای نابتگی خطی

نیستند (وگرنه شمارهٔ عنصرهای B دارای بزرگترین مقدار ممکن نخواهد بود)، پس x یک ترکیب خطی عنصرهای B است (۸.۷.۸). به این ترتیب هر عنصر A' یک ترکیب خطی از عنصرهای B می‌باشد و در نتیجه هر عنصر E یک ترکیب خطی از عنصرهای B خواهد بود. چون بردارهای B نابستگی خطی دارند B یک پایهٔ E است.

۲.۹.۸- نتیجه - چنانچه E یک فضای برداری و $x_1, x_2, \dots, x_n, i_1, \dots, i_p$ بردارهایی از E باشند که E را پدید می‌آورند، اندیسه‌های i_1, i_2, \dots, i_p وجود دارد به طوری که $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p})$ یک پایهٔ E باشد. کافی است قضیهٔ شمارهٔ ۱.۹.۸ را، که در آن $A = \emptyset$ و:

$$A' = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

باشد، به کار ببریم.

۳.۹.۸- تعریف - یک فضای برداری را دارای بعد با پایان گویند هرگاه شمارهٔ با پایانی از عنصرها بتواند آن فضا را پدید آورد. درستی این نام گذاری در شمارهٔ ۳.۱۰.۸ آشکار خواهد شد.

۴.۹.۸- باید یادآور شد که فضای معمولی دارای بعد با پایان است (زیرا ممکن است به وسیلهٔ سه بردار پدید آید). فضای برداری K^n دارای بعد با پایان می‌باشد (در شمارهٔ ۳.۸.۸ دیدیم که این فضا به وسیلهٔ n بردار پدید می‌آید). فضاهای برداری وجود دارند که بعد آنها با پایان نیست (گویند این فضاها دارای بعد بی پایان می‌باشد). مثلاً فضای برداری $K[X]$ دارای بعد بی پایان است. زیرا برای هر شمارد درست و با پایان q درجهٔ چند جمله‌ایهای P_1, P_2, \dots, P_q از شمارد درست مانند N کوچکتر است و هر ترکیب خطی از P_1 ها دارای درجهٔ کوچکتر از N خواهد بود به طوری که P_i ها نمی‌توانند $K[X]$ را پدید آورند.

۵.۹.۸- نتیجه - هر فضای برداری که دارای بعد با پایان باشد، دارای یک پایه خواهد بود.

این مطلب به آسانی از شمارهٔ ۲.۹.۸ نتیجه می‌شود.

۶.۹.۸- نتیجه - چنانچه E یک فضای برداری دارای بعد با پایان و y_1, y_2, \dots, y_p بردارهایی از E باشند که نابستگی خطی دارند،

برابری‌های (۱) را در نظر بگیریم دیده می‌شود که y_2, y_3, \dots, y_{p+1} به صورت ترکیب‌هایی خطی از x_1, x_2, \dots, x_p درمی‌آیند:

$$y_2 = \beta_2 y_1 + \gamma_{22} x_2 + \dots + \gamma_{2p} x_p$$

$$y_3 = \beta_3 y_1 + \gamma_{32} x_2 + \dots + \gamma_{3p} x_p$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_{p+1} = \beta_{p+1} y_1 + \gamma_{p+1,2} x_2 + \dots + \gamma_{p+1,p} x_p$$

پس $y_2 - \beta_2 y_1, y_3 - \beta_3 y_1, \dots, y_{p+1} - \beta_{p+1} y_1$ ترکیب‌هایی خطی از x_2, x_3, \dots, x_p هستند و بنا به فرض اسکالرهایی مانند $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{p+1}$ که همه باهم صفر نیستند وجود دارد به طوری که داشته باشیم:

$$\lambda_2 (y_2 - \beta_2 y_1) + \lambda_3 (y_3 - \beta_3 y_1) + \dots + \lambda_{p+1} (y_{p+1} - \beta_{p+1} y_1) = 0$$

برابری بالا را می‌توان چنین نوشت:

$$\lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 + \dots + \lambda_{p+1} y_{p+1} + \lambda y_1 = 0$$

و چون $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{p+1}$ همه باهم صفر نیستند، دیده می‌شود که y_1, y_2, \dots, y_{p+1} بستگی خطی دارند.

۲۰۱۰۸- قضیه - چنانچه فضای برداری E دارای بعد باپایان باشد،

شمارهٔ عنصرهای تمام پایه‌های آن باهم برابر است.

اثبات - اگر (x_1, \dots, x_p) و (y_1, \dots, y_q) دوپایه از E باشند، y_j ها

ترکیب‌هایی خطی از x_i ها خواهند بود. چنانچه $q \geq p+1$ باشد، بنا بر لم ۱۰۱۰۸ y_j ها بستگی خطی خواهند داشت و این ممکن نیست. پس باید داشته باشیم $q \leq p$.

به همین ترتیب دیده می‌شود که $p \leq q$ می‌باشد. پس داریم $p=q$.

۳۰۱۰۸- چنانچه فضای برداری E دارای بعد باپایان باشد، شمارهٔ عنصرهای

هرپایه از E بعد E نامیده می‌شود که آنرا به صورت $\dim E$ نشان می‌دهند. گاهی برای

آنکه هیأت اسکالرها را نیز مشخص کنند، بعد فضای E را به صورت $\dim_K E$ نمایش

می‌دهند. (این تعریف درستی عبارت «بعد باپایان» را که در شمارهٔ ۳۰۹۰۸ بکار برده

شد، آشکار می‌نماید).

۸. ۱۰. ۴- مثال - بنابر شماره ۲. ۸. ۸ بعد فضای معمولی به مبدأ O برابر با ۳ است.

۸. ۱۰. ۵- مثال - فرض می‌کنیم K یک هیأت باشد. در شماره ۳. ۸. ۸ دیدیم

که پایه کانونیک فضای برداری K^n دارای n عنصر است. پس داریم $\dim K^n = n$.

۸. ۱۰. ۶- اگر فضای برداری E دارای بعد با پایان و $E \neq \{0\}$ باشد، فضای E

شامل یک بردار غیر صفر مانند y_1 خواهد بود و بنابر شماره ۶. ۹. ۸ دارای پایه‌ای به صورت

(y_1, y_2, \dots, y_q) می‌باشد. پس $\dim E \geq 1$ است. از اینجا نتیجه می‌شود

که شرط $\dim E \neq 0$ هم‌ارز با شرط $E \neq \{0\}$ می‌باشد.

۸. ۱۰. ۷- قضیه - هر فضای برداری n بعدی روی هیأت K با K^n

ایزومرف است.

اثبات - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری و (e_1, e_2, \dots, e_n) یک پایه E

باشد. اگر (f_1, f_2, \dots, f_n) پایه کانونیک K^n باشد بنابر شماره ۶. ۸. ۸ (IV) یک

ایزومرفیسم روی K^n وجود دارد که e_1 را به f_1 و \dots و e_n را به f_n بدل می‌کند.

(پس با تقریب یک ایزومرفیسم، تنها یک فضای برداری n بعدی روی هیأت K وجود

دارد).

۸. ۱۰. ۸- قضیه - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری n بعدی باشد.

(I) - چنانچه بردارهای x_1, x_2, \dots, x_p فضای E را پدید آورند

$p \geq n$ است، و اگر $p = n$ باشد (x_1, x_2, \dots, x_p) یک پایه E را

تشکیل می‌دهد.

(II) - چنانچه بردارهای y_1, y_2, \dots, y_q وابستگی خطی داشته

باشند $q \leq n$ است، و اگر $q = n$ باشد (y_1, y_2, \dots, y_q) یک پایه E

را تشکیل می‌دهد.

اثبات - بنابر شماره ۲. ۹. ۸ مجموعه $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ شامل یک پایه B

است و این پایه دارای n عنصر می‌باشد. پس داریم $p \geq n$. اگر $p = n$ باشد

ناگزیر خواهیم داشت $B = \{x_1, \dots, x_p\}$. بنابراین (I) ثابت می‌شود.

بنابر شماره ۶.۹.۸ یک پایه B' وجود دارد که شامل مجموعه $\{y_1, y_2, \dots, y_q\}$ است و این پایه دارای n عنصر می باشد. پس داریم $q \leq n$. چنانچه $q = n$ باشد ناگزیر خواهیم داشت $\{y_1, y_2, \dots, y_q\} = B'$ و این اثبات (II) را می رساند.

۸.۱۰.۹- اگر E یک فضای برداری n بعدی پدید آمده به وسیله بردارهای x_1, x_2, \dots, x_p باشد، بنابر شماره ۲.۹.۸ از دنباله (x_1, x_2, \dots, x_p) می توان n بردار انتخاب کرد که نابستگی خطی داشته باشند. همچنین بنابر شماره ۸.۱۰.۸ (II) از دنباله (x_1, x_2, \dots, x_p) نمی توان بیش از n بردار که دارای نابستگی خطی باشند برگزید. پس n شماره ماکزیمم بردارهایی است که می توان از (x_1, x_2, \dots, x_p) انتخاب کرد به طوریکه نابستگی خطی داشته باشند.

۸.۱۰.۱۰- قضیه - فرض می کنیم E یک فضای برداری دارای بعد

با پایان و F یک زیر فضای برداری از E باشد.

(I) — F دارای بعد با پایان است.

(II) — $\dim F \leq \dim E$ است.

(III) — اگر $\dim F = \dim E$ باشد، $F = E$ است.

اثبات - فرض می کنیم $\dim E = n$ باشد. بنابر شماره ۸.۱۰.۸ (II)، مجموعه بردارهایی که در E نابستگی خطی داشته باشند (در F نیز نابستگی خواهند داشت) حداکثر دارای n عنصر است. پس اگر بردارهای x_1, x_2, \dots, x_p از F را، که نابستگی خطی دارند و شماره آنها ماکزیمم است، در نظر بگیریم، بنابر آنچه که گفته شد داریم $p \leq n$. می خواهیم ثابت کنیم که (x_1, x_2, \dots, x_p) یک پایه F را تشکیل می دهد. چون x_1, x_2, \dots, x_p نابستگی خطی دارند کافی است نشان دهیم که زیر فضای برداری F' از F ، پدید آمده به وسیله بردارهای x_1, x_2, \dots, x_p ، برابر با F می باشد. اگر $F' \neq F$ باشد، عنصری مانند x از F وجود دارد که ترکیبی خطی از x_1, x_2, \dots, x_p نیست و بنابر شماره (۸.۷.۸) بردارهای x, x_1, x_2, \dots, x_p دارای نابستگی خطی خواهند بود. پس شماره بردارهای دستگاه $(x, x_1, x_2, \dots, x_p)$ از F که نابستگی خطی دارند برابر با $p+1$ می باشد و این ممکن نیست. بنابراین (x_1, x_2, \dots, x_p)

یک پایه F است. به این ترتیب قسمت (I) ثابت می‌گردد. به علاوه معلوم می‌شود که $\dim F = p \leq n$ است.

چنانچه $n=p$ باشد، بنا بر ۸.۱۰.۸ (II) دستگاه (x_1, x_2, \dots, x_p) یک پایه E است. پس هر بردار E ترکیبی خطی از x_i ها می‌باشد و در نتیجه به F تعلق دارد. بنابراین $F=E$ خواهد بود.

۸.۱۰.۱۱- اگر E یک فضای برداری n بعدی باشد، هر زیر فضای برداری یک بعدی از E یک خط نامیده می‌شود. همچنین هر زیر فضای برداری دو بعدی را صفحه می‌گویند (هنگامی که E فضای معمولی به مبدأ معین O باشد، نام گذاری بالا با تعریف خط و صفحه معمولی، با تقریب خطها و صفحه‌های گذرنده بر مبدأ O ، سازگار است). زیر فضاهای برداری $n-1$ بعدی را هیپرپلان می‌نامند.

۸.۱۰.۱۲- در فضای معمولی E به مبدأ O ، بعد زیر فضاهای برداری ممکن است $0, 1, 2$ یا 3 باشد. $\{0\}$ تنها زیر فضایی است که دارای بعد 0 می‌باشد. زیر فضاهای یک بعدی خط‌های گذرنده بر O و زیر فضاهای دو بعدی صفحه‌های گذرنده بر O می‌باشند. تنها زیر فضای 3 بعدی E خود فضای E است.

۸.۱۰.۱۳- قضیه - چنانچه فضای برداری E مجموع مستقیم زیر فضاهای برداری E_1, E_2, \dots, E_p و این زیر فضاهای دارای بعد با پایان باشند، فضای E دارای بعد با پایان است و داریم:

$$\dim E = \dim E_1 + \dim E_2 + \dots + \dim E_p$$

زیرا بنا بر شماره ۸.۱۰.۷ اجتماع یک پایه E_1 ، یک پایه E_2 ، ...، یک پایه E_p تشکیل یک پایه E را می‌دهد.

۸.۱۰.۱۴- قضیه - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری n بعدی و F یک زیر فضای برداری p بعدی E باشد.

(I) - F دست کم دارای یک زیر فضای برداری متمم در E است.

(II) - هر زیر فضای برداری متمم F در E دارای بعد $n-p$ است.

(III) - فضای E/F دارای بعد با پایان است و داریم $\dim E/F = n-p$.

اثبات - فرض می‌کنیم (x_1, x_2, \dots, x_p) یک پایه F باشد. بنا بر شماره

۶.۹.۸ بردارهای x_n, \dots, x_{p+1} از E وجود دارد به طوری که (x_1, x_2, \dots, x_n) یک پایه E باشد. همچنین بنا بر شماره ۸.۸.۸ زیرفضای برداری E که به وسیله بردارهای x_n, \dots, x_{p+1} پدید آید متمم F در E است و به این ترتیب قسمت (I) قضیه ثابت می شود. اثبات قسمت (II) از شماره ۱۳.۱۰.۸ و اثبات قسمت (III) از قسمت (II) و از شماره ۴.۵.۸ (II) نتیجه می شود.

۱۱.۸- رتبه یک گسترش خطی

۱.۱۱.۸- قضیه - فرض می کنیم E_1 و E_2 دو فضای برداری با بعدهای با پایان روی هیأت K باشند. چنانچه u یک گسترش خطی E_1 در E_2 و N هسته u باشد داریم:

$$\dim u(E_1) = \dim(E_1/N) = \dim E_1 - \dim N$$

اثبات - هنگام بررسی تجزیه کانونیک u ، دیدیم که E_1/N و $u(E_1)$ ایزومرف هستند (۱۱.۴.۸)، بنابراین دارای یک بعد می باشند. به علاوه می دانیم که:

$$\dim(E_1/N) = \dim E_1 - \dim N$$

[شماره ۱۴.۱۰۰۸ (III)].

۲.۱۱.۸- مقدار مشترك $\dim u(E_1)$ و $\dim(E_1/N)$ و $\dim E_1 - \dim N$ رتبه u نامیده می شود.

۳.۱۱.۸- قضیه - فرض می کنیم E_1 و E_2 دو فضای برداری با بعدهای با پایان، u یک گسترش خطی E_1 در E_2 و ρ رتبه u باشد.

$$(I) - \text{داریم } \rho \leq \dim E_1 \text{ و } \rho \leq \dim E_2$$

(II) - برای اینکه داشته باشیم $\rho = \dim E_1$ بایا وابسته است که u انژکتیو باشد.

(III) - برای اینکه داشته باشیم $\rho = \dim E_2$ بایا وابسته است که u

سورژکتیو باشد.

اثبات - فرض می کنیم N هسته u باشد، داریم:

$$\rho = \dim E_1 - \dim N \leq \dim E_1$$

$$\rho = \dim u(E_1) \leq \dim E_r \quad (\text{بنابر شماره } ۱۰.۱۰.۸)$$

چون $\rho = \dim E_1 - \dim N$ است، شرط $\rho = \dim E_1$ هم‌ارز با $\dim N = 0$ و یا (بنابر شماره ۶.۱۰.۸) هم‌ارز با $N = \{0\}$ می‌باشد. اما بنابر ۷.۵.۳ شرط اخیر بیان می‌کند که u انژکتیو است.

همچنین شرط $\rho = \dim E_r$ هم‌ارز با $\dim u(E_1) = \dim E_r$ و یا بنابر ۱۰.۱۰.۸ هم‌ارز با $u(E_1) = E_r$ می‌باشد. پس u سورژکتیو است.

۴.۱۱.۸- نتیجه - چنانچه E یک فضای برداری n بعدی و u یک

گسترش خطی E در E باشد، ویژگیهای زیر هم‌ارزند:

(I) - u یک اتومرفیسم E است.

(II) - u انژکتیو است.

(III) - u سورژکتیو است.

(IV) - رتبه u برابر با n است.

(V) - یک گسترش خطی E در E که آن را v می‌نامیم، وجود دارد

بطوریکه:

$$uv = id_E$$

(VI) - یک گسترش خطی E در E که آن را w می‌نامیم، وجود دارد

بطوریکه:

$$wu = id_E$$

به‌علاوه اگر این شرطها برقرار باشند، داریم $v = w = u^{-1}$

اثبات - بنابر ۳.۱۱.۸ داریم $(II) \iff (IV)$ و $(III) \iff (IV)$

پس $(II) \iff (III) \iff (IV)$. به‌علاوه روشن است که $(II) \iff (I)$ ،

و چون (I) از (II) و (III) نتیجه می‌شود، هم‌ارزی (I) ، (II) ، (III) و (IV)

ثابت می‌گردد. همچنین بنابر شماره ۴.۸.۱ داریم $(I) \iff (V)$ و $(III) \iff (V)$

و نیز بنابر همین شماره $(I) \iff (VI)$ و $(II) \iff (VI)$ پس (V) و (VI) هم‌ارز

با هریک از چهار شرط اول هستند. اکنون با توجه به ۱۶.۵.۲ دیده می‌شود که اگر این

شرطها برقرار باشند داریم $v = w = u^{-1}$.

۵.۱۱.۸- فرض می‌کنیم E_1 و E_2 فضاهای برداری و دارای بعد با پایان باشند. یک گسترش خطی E_1 در E_2 و یک پایه (e_1, e_2, \dots, e_n) از E_1 را در نظر می‌گیریم، و این گسترش خطی را با u نشان می‌دهیم.

رتبه u برابر است با بعد زیر فضای برداری V از E_2 که به وسیله $u(e_1), \dots, u(e_n)$ پدید می‌آید. زیرا بنا بر ۱۲.۲.۸، زیر فضای V عبارت است از مجموعه بردارهای

$$\lambda_1 u(e_1) + \dots + \lambda_n u(e_n) = u(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n)$$

یعنی $u(E_1)$ (شماره ۱.۸.۸). اسکالرهایی $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ متعلق به هیأت K وابسته به فضاهای E_1 و E_2 می‌باشند. همچنین می‌توان گفت که رتبه u برابر است با شماره ماکزیم بردارهایی که می‌توان از بین بردارهای $u(e_1), \dots, u(e_n)$ انتخاب کرد به طوریکه نابستگی خطی داشته باشند. بنا بر شماره ۹.۱۰.۸ این مطلب با آنچه که در بالا بیان کردیم هم‌ارزی می‌باشد.

۱۲.۸- فضای برداری $\mathcal{L}(E, F)$

۱.۱۲.۸- فرض می‌کنیم E و F دو فضای برداری روی هیأت K باشند. پس از این، مجموعه گسترشهای خطی E در F را با $\mathcal{L}(E, F)$ نشان می‌دهیم. می‌خواهیم از مجموعه $\mathcal{L}(E, F)$ یک فضای برداری بسازیم.

۲.۱۲.۸- قانون جمع در $\mathcal{L}(E, F)$ - عنصرهای u و v متعلق به $\mathcal{L}(E, F)$ را در نظر می‌گیریم و گسترش E در F را، که با $u+v$ می‌نماییم، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall x \in E, (u+v)(x) = u(x) + v(x)$$

به آسانی دیده می‌شود که $u+v \in \mathcal{L}(E, F)$. زیرا اگر x و y متعلق به E باشند داریم:

$$(u+v)(x+y) = u(x+y) + v(x+y) = u(x) + u(y) + v(x) + v(y)$$

$$(u+v)(x) = u(x) + v(x)$$

$$(u+v)(y) = u(y) + v(y)$$

$$(u+v)(x+y) = (u+v)(x) + (u+v)(y)$$

پس:

همچنین می‌توان درستی برابری $(u+v)(\lambda x) = \lambda(u+v)(x)$ را برای هر اسکالر λ ثابت نمود.

۳.۱۲.۸- این قانون جمع از مجموعه $\mathcal{L}(E, F)$ یک گروه جابجایی می‌سازد. زیرا اگر u, v, w و متعلق به $\mathcal{L}(E, F)$ و $x \in E$ باشد داریم:

$$[(u+v)+w](x) = (u+v)(x) + w(x) = (u(x) + v(x)) + w(x)$$

$$[u+(v+w)](x) = u(x) + (v+w)(x) = u(x) + (v(x) + w(x))$$

پس:

$$[(u+v)+w](x) = [u+(v+w)](x)$$

در نتیجه خواهیم داشت $(u+v)+w = u+(v+w)$. به علاوه دیده می‌شود که داریم $u+v = v+u$. گسترش (خطی) E در F را، که هر عنصر E را به بردار صفر F بدل می‌کند، با 0 نشان می‌دهیم. در این صورت برای هر عنصر u از $\mathcal{L}(E, F)$ داریم $u+0 = 0+u = u$ ، همچنین گسترش (خطی) E در F را، که هر بردار x از E را به $(-u(x))$ بدل می‌کند، با $-u$ نشان می‌دهیم. در این صورت:

$$u + (-u) = (-u) + u = 0$$

۴.۱۲.۸- بار دیگر فرض می‌کنیم که گسترش‌های u و v متعلق به $\mathcal{L}(E, F)$

باشند. چنانچه w یک گسترش خطی F در یک فضای برداری دیگر باشد داریم:

$$w(u+v) = wu + wv$$

زیرا برای هر بردار x از E می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} [w(u+v)](x) &= w[(u+v)(x)] = w[u(x) + v(x)] \\ &= w(u(x)) + w(v(x)) = (wu)(x) + (wv)(x) \\ &= (wu + wv)(x) \end{aligned}$$

۵.۱۲.۸- چنانچه u و v متعلق به $\mathcal{L}(E, F)$ و w یک گسترش خطی یک

فضای برداری دیگر G در E باشد، داریم $(u+v)(w) = uw + vw$.

زیرا برای هر بردار x از G می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} [(u+v)w](x) &= (u+v)(w(x)) = u(w(x)) + v(w(x)) \\ &= (uw)(x) + (vw)(x) = (uw+vw)(x) \end{aligned}$$

۶.۱۲.۸- ضرب $\mathcal{L}(E, F)$ در اسکالرها - فرض می‌کنیم u متعلق به $\mathcal{L}(E, F)$ و λ متعلق به K باشد. گسترش λu در F را، که با λu نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall x \in E, (\lambda u)(x) = \lambda(u(x))$$

می‌خواهیم ثابت کنیم که $\lambda u \in \mathcal{L}(E, F)$ است. اگر x و y متعلق به E باشند داریم:

$$\begin{aligned} (\lambda u)(x+y) &= \lambda(u(x+y)) = \lambda(u(x) + u(y)) \\ &= \lambda(u(x)) + \lambda(u(y)) = (\lambda u)(x) + (\lambda u)(y) \end{aligned}$$

همچنین دیده می‌شود که برای هر اسکالر μ از K داریم $(\lambda u)(\mu x) = \mu((\lambda u)(x))$.
۷.۱۲.۸- آزمون برقراری اصول فضای برداری $\mathcal{L}(E, F)$ را به خواننده واگذار می‌کنیم.

۸.۱۲.۸- حالت $E = F$ - بنابر آنچه که گذشت، مجموعه $\mathcal{L}(E, E)$ دارای یک ساختمان فضای برداری است. به علاوه این مجموعه دارای حاصل ضرب $uv \rightarrow (uv)$ است (ترکیب گسترشها). اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که مجموعه $\mathcal{L}(E, E)$ با قانون جمع و ضرب تعریف شده تشکیل یک حلقه می‌دهد. از طرفی بنابر شماره ۳.۱۲.۸ می‌دانیم که این مجموعه با قانون جمع یک گروه جابجایی است. از طرف دیگر بنابر شماره ۳.۷.۱ قانون ضرب دارای ویژگی انجمنی است. همچنین بنابر شماره‌های ۴.۱۲.۸ و ۵.۱۲.۸، در $\mathcal{L}(E, E)$ داریم:

$$u(v+w) = uv + uw, \quad (v+w)u = vu + wu$$

در حالت کلی حلقه $\mathcal{L}(E, E)$ جابجایی نیست.

۹.۱۲.۸- حلقه $\mathcal{L}(E, E)$ دارای یک عنصر یکه است: چنانچه گسترش همانی

E را (که خطی است) با 1 مشخص کنیم، آشکار است که برای هر گسترش u از $\mathcal{L}(E, E)$ داریم $1 \cdot u = u \cdot 1 = u$.

۱۰.۱۲.۸- اگر $\lambda \in K$ باشد، گسترش خطی $\lambda \cdot 1$ عبارت از گسترش $x \rightarrow \lambda x$

یعنی همسانی به نسبت λ می‌باشد. به آسانی می‌توان دید که برای هر گسترش u در $\mathcal{L}(E, E)$ داریم $(\lambda \cdot 1) \cdot u = u(\lambda \cdot 1) = \lambda u$ به علاوه:

$$(\lambda + \lambda') \cdot 1 = \lambda \cdot 1 + \lambda' \cdot 1, (\lambda \lambda') \cdot 1 = (\lambda \cdot 1) \cdot (\lambda' \cdot 1)$$

به این دلیل است که برای سادگی اغلب λ را به جای $\lambda \cdot 1$ می‌نویسند.

۱۳.۸- دوآل یک فضای برداری

۱.۱۳.۸- تعریف - چنانچه E یک فضای برداری روی هیأت K باشد،

هر گسترش خطی E در K ، یعنی هر گسترش f فضای E در K که دارای ویژگیهای زیر باشد، یک فرم خطی روی E نامیده می‌شود:

$$(۱) \quad \forall x, y \in E, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$(۲) \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in K, f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

۲.۱۳.۸- از تعریف بالا نتیجه می‌شود که مجموعه فرم‌های خطی روی E عبارت است

از مجموعه $\mathcal{L}(E, K)$. بنابر شماره ۷.۱۲.۸ این مجموعه دارای یک ساختمان فضای برداری است. این فضای برداری دوآل فضای E گفته می‌شود و آنرا با E^* نشان می‌دهند. یادآوری می‌شود (۲.۱۲.۸ و ۶.۱۲.۸) که اگر $f \in E^*$ و $g \in E^*$ و $\lambda \in K$ باشد $f+g$ و λf به وسیله فرمولهای زیر معین می‌شوند:

$$(۳) \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(۴) \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

۳.۱۳.۸- تعریف دیگر فضای دوآل یک فضای برداری - اگر $x \in E$ و

$f \in E^*$ باشد، اسکالر $f(x)$ را به صورت $\langle f, x \rangle$ نیز نشان می‌دهند. بدین ترتیب فرمولهای (۱)، (۲)، (۳) و (۴) را می‌توان چنین نوشت:

$$\langle f, x+y \rangle = \langle f, x \rangle + \langle f, y \rangle$$

$$\langle f, \lambda x \rangle = \lambda \langle f, x \rangle$$

$$\langle f+g, x \rangle = \langle f, x \rangle + \langle g, x \rangle$$

$$\langle \lambda f, x \rangle = \lambda \langle f, x \rangle$$

پس برای اینکه دو عنصر f و f' از E^* با یکدیگر برابر باشند بایاوبسته است که برای هر بردار x از E داشته باشیم $\langle f, x \rangle = \langle f', x \rangle$.

۴.۱۳.۸- یک پایه ثابت (e_1, e_2, \dots, e_n) از فضای E در نظر می گیریم. می خواهیم کلیه فرمهای خطی را روی فضای E بنا کنیم.

n اسکالر $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ اختیار می کنیم و برای هر بردار x از E به مؤلفه های $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ قرار می دهیم:

$$f(x) = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n$$

روشن است که f یک فرم خطی روی E می باشد و داریم:

$$f(e_1) = \alpha_1, \dots, f(e_n) = \alpha_n$$

به این ترتیب به هر عنصر $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ از K^n یک عنصر f از E^* وابسته می شود. می خواهیم نشان دهیم که هر فرم خطی روی E به روش بالا بدست می آید. به بیان دقیقتر:

۴.۱۳.۸- قضیه - گسترش K^n در E^* (که در بالا معین گردید) یک ایزومرفیسم فضای برداری K^n روی فضای برداری E^* می باشد.

اثبات:

۱- گسترش نامبرده انژکتیو است: فرض می کنیم دو عنصر $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ و $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ از K^n یک فرم خطی f را معین کنند. بنا بر ۴.۱۳.۸ داریم $f(e_1) = \alpha_1$ و همچنین $f(e_1) = \alpha'_1$ پس باید $\alpha_1 = \alpha'_1$ باشد. به همین ترتیب این برابری را می توان برای اندیسه های دیگر ثابت کرد.

۲- گسترش نامبرده سورژکتیو است: فرض می کنیم $f \in E^*$ و قرار می دهیم $\alpha_1 = f(e_1), \dots, \alpha_n = f(e_n)$ اگر f' فرم خطی وابسته به $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ باشد داریم $f'(e_1) = \alpha_1 = f(e_1), \dots, f'(e_n) = \alpha_n = f(e_n)$ پس $f' = f$ (بنابر شماره ۶.۸.۸ (I)).

۳- گسترش نامبرده خطی است: چنانچه فرمهای f, g و h را که به ترتیب به وسیله $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ، $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ و:

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$$

معین شده‌اند در نظر بگیریم، برای هر اندیس i داریم:

$$h(e_i) = \alpha_i + \beta_i = f(e_i) + g(e_i) = (f+g)(e_i)$$

پس بنابر شماره ۶.۸.۸ (I) خواهیم داشت $h = f + g$. همچنین به آسانی دیده می‌شود که به دستگاه $(\lambda\alpha_1, \dots, \lambda\alpha_n)$ فرم λf وابسته می‌گردد.

۶.۱۳.۸ - نتیجه - اگر بعد فضای برداری E برابر با n باشد، بعد

فضای برداری E^* نیز n خواهد بود.

اثبات این مطلب از شماره‌های ۵.۱۰.۷ و ۵.۱۳.۸ نتیجه می‌شود.

۷.۱۳.۸ - قضیه - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری روی K و

(e_1, \dots, e_n) یک پایه E باشد. تنها یک پایه (f_1, \dots, f_n) از E^* وجود

دارد به طوری که برای هر یک از اندیسهای i و j داریم $\langle f_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & (\text{برای } i \neq j) \\ 1, & (\text{برای } i = j) \end{cases} \quad \text{که در آن}$$

δ_{ij} را «نشان کرونگر» گویند).

اثبات:

۱- وجود پایه (f_1, \dots, f_n) : بار دیگر ایزومرفیسم K^n روی E^* را که

در شماره‌های ۴.۱۳.۸ و ۵.۱۳.۸ بررسی کردیم در نظر می‌گیریم. این ایزومرفیسم پایه

کانونیک (e_1, \dots, e_n) از K^n را به یک پایه (f_1, \dots, f_n) از E^* بدل می‌کند.

چون e_1 همان عنصر $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ از K^n می‌باشد، بنابر شماره ۴.۱۳.۸ برای

عنصر وابسته به آن یعنی f_1 از E^* داریم:

$$f_1(e_1) = 1, f_1(e_2) = 0, f_1(e_3) = 0, \dots, f_1(e_n) = 0$$

به همین ترتیب خواهیم داشت $f_i(e_j) = \delta_{ij}$.

۲- یکتایی پایه (f_1, \dots, f_n) : بنابر شماره ۶.۸.۸ (I) برای یک اندیس

ثابت i فرمولهای:

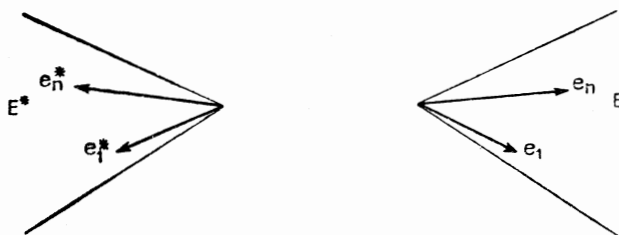
$$\langle f_i, e_1 \rangle = \delta_{i1}, \langle f_i, e_2 \rangle = \delta_{i2}, \dots, \langle f_i, e_n \rangle = \delta_{in}$$

تنها یک f_i را مشخص می کنند.

۸.۱۳.۸- پایه (f_1, f_2, \dots, f_n) که در شماره ۷.۱۳.۸ معین گردید پایه

دوآل پایه (e_1, e_2, \dots, e_n) نامیده می شود و آنرا به صورت $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ نشان می دهند. بنابراین داریم:

$$(o) \quad \langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{ij}$$



شکل ۳۱

۹.۱۳.۸- از فرمول (o) و فرمولهای شماره ۳.۱۳.۸ فرمول زیر بدست می آید، که

در آن اسکالرهایی $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ و μ_1, \dots, μ_n دلخواه هستند:

$$(1) \quad \begin{aligned} & \langle \mu_1 e_1^* + \mu_2 e_2^* + \dots + \mu_n e_n^*, \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n \rangle \\ &= \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \dots + \lambda_n \mu_n \end{aligned}$$

۱۰.۱۳.۸- قضیه - فرض می کنیم (e_1, e_2, \dots, e_n) یک پایه E و

$(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ پایه دوآل آن از E^* باشد.

(I) - اگر $f \in E^*$ باشد، مؤلفه های f نسبت به (e_1^*, \dots, e_n^*)

عبارتند از:

$$\langle f, e_1 \rangle, \dots, \langle f, e_n \rangle$$

(II) - اگر $x \in E$ باشد، مؤلفه های x نسبت به (e_1, \dots, e_n)

عبارتند از:

$$\langle e_1^*, x \rangle, \dots, \langle e_n^*, x \rangle$$

اثبات - چنانچه قراردادیم $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ و $f = \mu_1 e_1^* + \dots + \mu_n e_n^*$

داریم:

$$\langle f, e_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n \mu_j e_j^*, e_i \right\rangle = \sum_{j=1}^n \mu_j \delta_{ij} = \mu_i$$

$$\langle e_j^*, x \rangle = \left\langle e_j^*, \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j$$

۱۱.۱۳.۸- دوآل K^n -فضای برداری K^n دارای یک پایه کانونیک (e_1, \dots, e_n)

است. قضیه ۱۳.۸.۵ یک ایزومرفیسم کانونیک بین K^n و $(K^n)^*$ برقرار می‌کند که بنا بر اثبات قضیه ۱۳.۸.۷، این ایزومرفیسم پایه (e_1, \dots, e_n) را به پایه دوآل آن یعنی (e_1^*, \dots, e_n^*) بدل می‌کند. به واسطه این ایزومرفیسم معمولاً K^n و $(K^n)^*$ را یکی می‌گیرند. بنابراین پایه (e_1, \dots, e_n) با پایه دوآل آن یکی می‌شود. بنا بر شماره ۱۳.۸.۴ فرم خطی ای که به وسیله عنصر $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in K^n$ روی K^n معین می‌شود عبارت است از فرم $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \rightarrow \lambda_1 \mu_1 + \dots + \lambda_n \mu_n$. پس بنا بر یکسانی $(K^n)^*$ و K^n داریم:

$$\langle (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n), (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \rangle = \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \dots + \lambda_n \mu_n$$

باید توجه داشت که برای یک فضای برداری n بعدی دلخواه E یک چنین ایزومرفیسم E^* روی E وجود ندارد (باینکه E و E^* بنا بر ۱۳.۸.۶ ایزومرف هستند). ساختمان این ایزومرفیسم، برای $E = K^n$ ، تنها به واسطه وجود پایه کانونیک K^n امکان پذیر است.

۱۲.۱۳.۸- فرض می‌کنیم E فضای برداری بردارهای آزاد فضای معمولی باشد.

چنانچه \vec{V} و \vec{V}' دو بردار از E باشند تعریف حاصل ضرب اسکالر $\vec{V} \cdot \vec{V}'$ را می‌شناسیم و می‌دانیم که اگر \vec{V}_0 یک بردار ثابت از E باشد، گسترش $\vec{V} \rightarrow \vec{V}_0 \cdot \vec{V}$ یک فرم خطی روی E است. یادآور می‌شویم که اگر مؤلفه‌های \vec{V} و \vec{V}' نسبت به یک پایه متعامد به ترتیب (ξ, η, ζ) و (ξ', η', ζ') باشد، برای حاصل ضرب اسکالر $\vec{V}' \cdot \vec{V}$ داریم

$\vec{V} \cdot \vec{V}' = \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta'$ با توجه به مطالب بالا و بنا بر ۸ . ۱۳ . ۵ نتیجه می شود که اگر f یک فرم خطی روی E باشد تنها یک بردار $\vec{V}_0 \in E$ وجود دارد به طوری که برای هر بردار \vec{V} از E داشته باشیم $f(\vec{V}) = \vec{V}_0 \cdot \vec{V}$.

۸ . ۱۴ - بیدوآل یک فضای برداری

۸ . ۱۴ . ۱ - دوآل فضای برداری E^* را **بیدوآل** فضای برداری E می نامند و با E^{**} نشان می دهند.

۸ . ۱۴ . ۲ - می خواهیم یک گسترش E در E^{**} ، که دارای اهمیت ویژه ای است، تعریف کنیم. اگر $x_0 \in E$ باشد، گسترش $f \rightarrow f(x_0)$ فضای E^* در K را در نظر می گیریم. چنانچه این گسترش را که به x_0 بستگی دارد با x_0 نشان دهیم، بنا به تعریف برای هر عنصر f از E^* داریم:

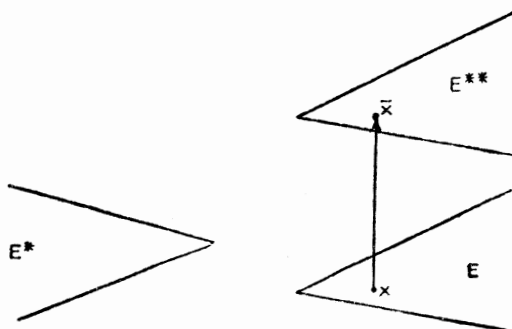
$$(۱) \quad \overline{x_0}(f) = f(x_0)$$

اگر $f_1 \in E^*$ ، $f_2 \in E^*$ و $\lambda \in K$ باشد بنا بر (۱) و شماره ۸ . ۱۳ . ۲ می توان چنین نوشت:

$$\overline{x_0}(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) = \overline{x_0}(f_1) + \overline{x_0}(f_2),$$

$$\overline{x_0}(\lambda f_1) = (\lambda f_1)(x_0) = \lambda(f_1(x_0)) = \lambda(\overline{x_0}(f_1))$$

بنابراین $\overline{x_0}$ یک فرم خطی روی E^* یعنی یک عنصر از E^{**} می باشد. به این ترتیب به هر عنصر x از E عنصر \overline{x} از E^{**} وابسته می شود.



۸. ۱۴. ۳ - می‌خواهیم نشان دهیم که گسترش $\bar{x} \rightarrow x$ خطی است. چنانچه x_1 و x_2 متعلق به E باشند بنا بر (۱) و شماره‌های ۸. ۱۳. ۱ و ۸. ۱۳. ۲ برای هر گسترش f متعلق به E^* داریم:

$$\begin{aligned} \overline{(x_1 + x_2)}(f) &= f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = \overline{x_1}(f) + \overline{x_2}(f) \\ &= \overline{(x_1 + x_2)}(f) \end{aligned}$$

پس $\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$. همچنین می‌توان ثابت کرد که برای هر بردار $x \in E$ و هر اسکالر $\lambda \in K$ داریم $\overline{\lambda x} = \lambda \overline{x}$ بنا بر این خطی بودن گسترش $\bar{x} \rightarrow x$ اثبات می‌گردد. ۸. ۱۴. ۴ - قضیه - اگر فضای برداری E دارای بعد n پایان باشد، گسترش $\bar{x} \rightarrow x$ یک ایزومرفیسم روی E است.

اثبات - می‌دانیم که گسترش $\bar{x} \rightarrow x$ خطی است، ثابت می‌کنیم که این گسترش انژکتیو است. به این منظور نشان می‌دهیم که هسته N آن برابر با $\{0\}$ است. چنانچه $x_1 \in N$ و $x_1 \neq 0$ باشد، یک پایه (x_1, x_2, \dots, x_n) در E وجود دارد که با x_1 شروع می‌شود (۸. ۹. ۶). اگر $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ پایه دوآل این پایه در E^* باشد بنا به تعریف x_1 داریم $x_1^*(x_1) = x_1^*(x_1^*) = 1$ پس بنا بر شماره ۸. ۱۳. ۱۰، $x_1^*(x_1^*) = 1$ و در نتیجه $x_1^* \neq 0$ خواهد شد و این ممکن نیست زیرا $x_1 \in N$. پس $x_1 = 0$ می‌باشد و از آنجا $N = \{0\}$ یعنی گسترش انژکتیو است. بنا بر این گسترش $\bar{x} \rightarrow x$ یک ایزومرفیسم روی E است. هر فضای برداری E' از E^* می‌باشد. از اینجا نتیجه می‌شود که $\dim E' = \dim E$. اما بنا بر ۸. ۱۳. ۶ داریم $\dim E = \dim E^*$ و نیز $\dim E^* = \dim E^{**}$. پس $\dim E' = \dim E^{**}$ و با توجه به شماره ۸. ۱۰. ۱۰ (III) خواهیم داشت $E' = E^{**}$ یعنی گسترش سورژکتیو است.

۸. ۱۴. ۵ - به طور کلی اگر بعد فضای E با پایان باشد، E و E^{**} را به وسیله ایزومرفیسم $\bar{x} \rightarrow x$ یکی می‌گیرند. به این ترتیب با در نظر گرفتن فرمول (I) شماره ۸. ۱۴. ۲، هر عنصر x از E به وسیله فرمول $x(f) = f(x)$ به صورت یک فرم خطی روی E^* درمی‌آید. بنا بر این $\langle x, f \rangle$ با $\langle f, x \rangle$ یکی خواهد بود و می‌توان نوشت:

$$f(x) = x(f) = \langle f, x \rangle = \langle x, f \rangle$$

دو آل فضای E ، فضای E^* ، و دو آل E^* فضای E می باشد. به این ترتیب در فضاهای برداری که بعد با پایان دارند فضا و دو آل آن دارای نقشهای کاملاً قرینه می باشند. پس از این از فضای بیدوآل یک فضا گفتگو نخواهیم کرد.

برای این که ثابت کنیم دو عنصر x و x' از E برابر هستند کافی است نشان دهیم که برای هر عنصر f از E^* داریم $\langle f, x \rangle = \langle f, x' \rangle$. این مطلب نیز از شماره ۸. ۱۳. ۳ با تعویض نقشهای E و E^* نتیجه می گردد.

۶. ۱۴. ۸ - قضیه - اگر E یک فضای برداری با بعد n پایان (e_1, \dots, e_n) ، یک پایه E و (e_1^*, \dots, e_n^*) پایه دو آل آن در E^* باشد، پایه دو آل پایه (e_1^*, \dots, e_n^*) همان پایه (e_1, \dots, e_n) است.

اثبات - بردارهای پایه (e_1^*, \dots, e_n^*) ، دوآل (e_1, \dots, e_n) ، بردارهایی از $E = E^{**}$ می باشند که بنا بر ۸. ۱۳. ۸ به وسیله برابری های $\delta_{ij} = \langle e_i^*, e_j \rangle$ مشخص می شوند. چون داریم $\delta_{ij} = \langle e_i^*, e_j \rangle$ پس خواهیم داشت $e_i^* = e_i$.

۱۵. ۸ - متعامد

۱. ۱۵. ۸ - تعریف - چنانچه E یک فضای برداری، x یک عنصر از E و x' یک عنصر از E^* باشد، x و x' را متعامد (یا عمود بر یکدیگر) می گویند هر گاه $\langle x, x' \rangle = 0$ باشد.

اگر M یک بخش از E و M' یک بخش از E^* باشد، گویند که M و M' متعامدند چنانچه هر بردار از M به هر بردار از M' عمود باشد.

۲. ۱۵. ۸ - مثال - فرض می کنیم $E = K^n$ باشد (در این حالت E^* با K^n یکی می گردد). دو عنصر $x = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ و $x' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n)$ از K^n بر یکدیگر عمودند هر گاه داشته باشیم $\lambda_1 \lambda'_1 + \lambda_2 \lambda'_2 + \dots + \lambda_n \lambda'_n = 0$ (شماره ۱۱. ۱۳. ۸)

۳. ۱۵. ۸ - مثال - فرض می کنیم E فضای معمولی به مبداء O باشد. سه بردار

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ را، که درازای هریک از آنها برابر با یک بوده و دو بدو برهم عمودند، یک پایه از E می گیریم. یک بردار \vec{OM} از E به وسیله سه مؤلفه اش معین می شود به طوری که E با R^3 یکی می شود. همچنین E^* بر R^3 منطبق می گردد. بنا به تعریف

پیش، دو عنصر $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ و $(\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3)$ از $E = \mathbf{R}^3$ متعامدند اگر:

$$\lambda_1 \lambda'_1 + \lambda_2 \lambda'_2 + \lambda_3 \lambda'_3 = 0$$

باشد (۲. ۱۵. ۸). اما بستگی بالا همان شرط عمود بودن دو بردار به مؤلفه‌های $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ و $(\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3)$ در هندسه معمولی است. از اینجا انگیزه کار برد کلمه «متعامد» در تعریف شماره ۱. ۱۵. ۸ روشن می‌گردد.

۱۵. ۸. ۴ - قضیه - چنانچه $M \subseteq E$ و $M' \subseteq E^*$ دو بخش متعامد باشد،

هر ترکیب خطی از عنصرهای M به هر ترکیب خطی از عنصرهای M' عمود است.

اثبات - اگر عنصرهای x_1, x_2, \dots, x_n متعلق به M ، عنصرهای x'_1, x'_2, \dots, x'_p متعلق به M' و $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_p$ اسکالر باشند، داریم:

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^p \lambda'_j x'_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \lambda_i \lambda'_j \langle x_i, x'_j \rangle = 0$$

زیرا اندیسه‌های i و j هر چه باشند داریم $\langle x_i, x'_j \rangle = 0$.

۱۵. ۸. ۵ - نتیجه - چنانچه $M \subseteq E$ باشد، مجموعه بردارهایی

از E^* که بر M عمودند یک زیر فضای برداری N از E^* تشکیل می‌دهند.

زیرا اگر دو عنصر $x' \in E^*$ و $y' \in E^*$ بر M عمود باشند و λ یک اسکالر دلخواه

باشد، بنا بر شماره ۱۵. ۸. ۴ عنصرهای $\lambda x' + y'$ و $\lambda x'$ بر M عمودند.

۱۵. ۸. ۶ - مجموعه N شماره ۱۵. ۸. ۵ را زیر فضای برداری عمود بر

M در E^* می‌نامند و با M^\perp نمایش می‌دهند.

مثلاً فضای برداری E^1 تنها عنصر $\{0\}$ و فضای برداری E^\perp خود فضای

E^* است.

۱۵. ۸. ۷ - بنا بر شماره ۱۵. ۸. ۴ اگر بجای M زیر فضای برداری پدید آمده

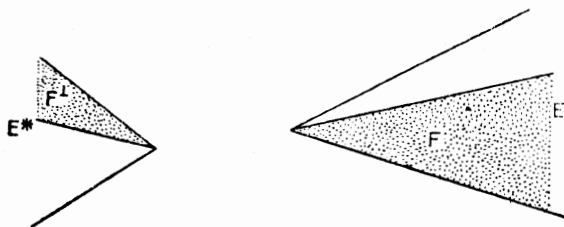
به وسیله M را قرار دهیم M^\perp تغییر نمی‌کند.

۱۵. ۸. ۸ - اگر M' بخشی از E^* باشد، زیر فضای برداری M'^\perp از E نیز که

بر M' عمود است به روش بالا تعریف می‌گردد، و چنانچه بجای M' زیر فضای برداری پدید آمده بوسیله M' را قرار دهیم، زیر فضای برداری M'^{\perp} تغییر نمی‌کند.

۹.۱۰.۸ - قضیه - اگر E یک فضای برداری n بعدی و F یک زیر

فضای برداری p بعدی از E باشد، بعد F^{\perp} برابر است با $n-p$.



شکل ۳۳

اثبات - چنانچه (e_1, \dots, e_p) یک پایه F باشد بنابر شماره ۶.۹.۸

بردارهای e_n, \dots, e_{p+1} از E وجود دارند به طوری که (e_1, e_2, \dots, e_n) یک پایه E باشد. اگر پایه $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ از فضای دوال E^* را در نظر بگیریم، برای این که بردار $\mu_1 e_1^* + \dots + \mu_n e_n^*$ از E^* بر F عمود باشد (بنابر شماره ۴.۱۰.۸) بایاویسند است که این بردار بر e_1, e_2, \dots, e_p عمود باشد؛ به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$\langle \mu_1 e_1^* + \dots + \mu_n e_n^*, e_j \rangle = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p$$

چون بنابر شماره ۹.۱۳.۸ داریم $\langle \mu_1 e_1^* + \dots + \mu_n e_n^*, e_j \rangle = \mu_j$ پس

E^{\perp} مجموعه ترکیب‌های خطی e_n^*, \dots, e_{p+1}^* است. بنابر این $(e_{p+1}^*, \dots, e_n^*)$ یک پایه F^{\perp} می‌باشد و قضیه برقرار است.

۱۰.۱۰.۸ - اگر E یک فضای برداری n بعدی و G یک فضای برداری p بعدی

از E^* باشد، بعد زیر فضای برداری G^{\perp} از E برابر است با $n-p$. این مطلب از شماره ۹.۱۰.۸ (با تعویض نقش‌های E و E^*) نتیجه می‌شود.

۱۱.۱۰.۸ - قضیه - چنانچه E یک فضای برداری با بعد p پایان F

یک زیر فضای برداری از E باشد، داریم $(F^{\perp})^{\perp} = F$

اثبات - هر بردار از F بر F^{\perp} عمود است، پس به $(F^{\perp})^{\perp}$ تعلق دارد یعنی $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$.

اگر قراردادیم $\dim E = n$ و $\dim F = p$ ، بنابر شماره ۹.۱۰.۸ خواهیم داشت

$\dim F^{\perp} = n-p$. که با توجه به شماره ۱۰.۱۰.۸ نتیجه می‌شود:

$$\dim (F^\perp)^\perp = \dim F \quad \text{و یا} \quad \dim (F^\perp)^\perp = n - (n - p)$$

اکنون چنانچه قسمت (III) قضیه ۱۰.۱۰.۸ را در مورد F و $(F^\perp)^\perp$ بکاربریم خواهیم داشت :

$$F = (F^\perp)^\perp$$

۱۰.۱۰.۸ - اگر E یک فضای برداری با بعد p و F' یک زیر فضای برداری

از E^* باشد داریم $(F')^\perp = F'$. زیرا کافی است که در شماره ۱۰.۱۰.۸ نقش فضاهای E و E^* را با یکدیگر عوض کنیم.

۱۰.۱۰.۸ - فرض می کنیم E یک فضای برداری با بعد p و S مجموعه زیر

فضاهای برداری E و S' مجموعه زیر فضاهای برداری E^* باشد. گسترش $F \rightarrow F^\perp$ یک گسترش دوسویی S روی S' است. زیرا اگر برای هر F از S و برای هر F' از S' قرار

دهیم $\Phi(F) = F^\perp$ و $\Phi'(F') = F'^\perp$ ، بنا بر شماره های ۱۰.۱۰.۸ و ۱۰.۱۰.۸ به ترتیب خواهیم داشت $\Phi \circ \Phi' = \text{id}_{S'}$ و $\Phi' \circ \Phi = \text{id}_S$.

اکنون برای اثبات دوسویی بودن گسترش بالا کافی است قضیه ۱۰.۱۰.۸ را بکاربریم.

۱۰.۱۰.۸ - قضیه - فضای برداری n بعدی E را در نظر می گیریم:

(I) - چنانچه f_1, f_2, \dots, f_p فرمهایی خطی روی E و F' زیر فضای

برداری E^* پدید آمده به وسیله آنها باشد، مجموعه بردارهای x از E که در برابری های $f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, \dots, f_p(x) = 0$ صدق می کنند یک

زیر فضای برداری F از E است و داریم $F = F'^\perp$.

(II) - چنانچه g_1, g_2, \dots, g_q فرمهای خطی روی E و G مجموعه

بردارهای x از E باشد که در برابری های $g_1(x) = 0, g_2(x) = 0, \dots,$

$g_q(x) = 0$ صدق می کنند، برای این که داشته باشیم $F = G$ با یا و بسنده است که هر g_i یک ترکیب خطی f_1, f_2, \dots, f_p و هر f_i یک ترکیب خطی g_1, g_2, \dots, g_q باشد.

(III) - اگر f_1, f_2, \dots, f_p ناستگی خطی داشته باشند داریم :

$$\dim F = n - p$$

اثبات - برای $x \in E$ داریم :

$f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_p(x) = 0 \iff$ (بر x بر f_1, f_2, \dots, f_p عمود است) \iff
 x بر F' عمود است (بنابر شماره ۸. ۱۵. ۴)

بنابراین مجموعهٔ عنصرهای x که در معادله‌های $f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_p(x) = 0$

صدق می‌کنند همان F'^{\perp} است. به این ترتیب (I) ثابت می‌گردد.

اگر G' زیر فضای برداری E^* پدید آمده بوسیله g_1, g_2, \dots, g_q باشد،

مجموعهٔ G که در (II) معین گردید همان G'^{\perp} است. بنا بر شماره ۸. ۱۵. ۱۳، برای این که داشته باشیم $F = G$ با یا وابسته است که $F' = G'$ باشد، یعنی مجموعهٔ ترکیبهای خطی f_i بر مجموعهٔ ترکیبهای خطی g_i منطبق گردد و این اثبات (II) را میسرماند.

چنانچه f_1, f_2, \dots, f_p نایستگی خطی داشته باشند، (f_1, f_2, \dots, f_p) یک

پایهٔ F' است. پس داریم $\dim F' = p$ و بنا بر شماره ۸. ۱۵. ۱۰، $\dim E'^{\perp} = n - p$.

۸. ۱۵. ۱۵ - به ویژه هرگاه f یک فرم خطی مخالف با صفر روی E باشد مجموعهٔ

x های E که در معادلهٔ $f(x) = 0$ صدق می‌کنند یک هیپرپلان H از E است (شمارهٔ

۸. ۱۵. ۱۱). چنانچه g یک فرم خطی دیگر مخالف با صفر روی E باشد، هیپرپلان به

معادلهٔ $g(x) = 0$ با H یکی است اگر و تنها اگر f و g متناسب باشند.

۸. ۱۵. ۱۶ - مثلاً مجموعهٔ نقاط (ξ, η, ζ) از \mathbf{R}^3 که در معادلهٔ:

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0$$

صدق می‌کنند (که در آن هر سه شمار حقیقی ثابت α و β و γ با یکدیگر صفر نیستند)، یک

صفحهٔ P گذرنده بر مبدأ می‌باشد. چنانچه α', β' و γ' سه شمار حقیقی ثابت دیگر باشند که

با هم صفر نیستند، برای اینکه صفحهٔ P' بمعادلهٔ $\alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta = 0$ بر صفحهٔ P منطبق

گردد با یا وابسته است که (α, β, γ) و $(\alpha', \beta', \gamma')$ متناسب باشند، به عبارت

دیگر یک شمار حقیقی λ بتوان یافت به طوری که داشته باشیم $\alpha' = \lambda\alpha$ و $\beta' = \lambda\beta$ و

$\gamma' = \lambda\gamma$ (برای روشن شدن بیشتر این مطلب به درس هندسه رجوع شود).

اگر سه شمار α و β و γ با هم صفر باشند، معادلهٔ $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0$ معادلهٔ

یک صفحه نیست، زیرا هر نقطهٔ (ξ, η, ζ) از \mathbf{R}^3 در آن صدق می‌کند.

۸. ۱۵. ۱۷ - هنگامی که سه شمار حقیقی و ثابت α_1 و β_1 و γ_1 و همچنین سه شمار

حقیقی و ثابت α_r و β_r و γ_r با یکدیگر صفر نباشند، مجموعه نقاط (ξ, η, ζ) از \mathbf{R}^3 (این مجموعه را با D نشان می‌دهیم) که در معادله‌های:

$$(1) \quad \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta = 0$$

$$(2) \quad \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta + \gamma_2 \zeta = 0$$

صدق می‌کنند، برشگاه دو صفحه P_1 و P_2 است که به ترتیب با معادله‌های (۱) و (۲)

معین شده‌اند. اگر $P_1 \neq P_2$ باشد، یعنی چنانچه $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ و $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ متناسب نباشد، D یک خط گذرنده بر مبدأ است. هرگاه $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ و $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ متناسب باشند داریم $P_1 = P_2 = D$.

صورت‌های دیگری برای نمایش D به وسیله دو معادله خطی وجود دارد. مثلاً

معادله‌های:

$$(\alpha_1 + \alpha_2)\xi + (\beta_1 + \beta_2)\eta + (\gamma_1 + \gamma_2)\zeta = 0$$

$$\alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta = 0$$

نیز مجموعه D را معین می‌کنند.

این مثال حالت ویژه‌ای از شماره ۸، ۱۰، ۱۴ می‌باشد که در آن $n=3$ و $p=2$.

است.

۸، ۱۰، ۱۸ - اکنون قضیه زیر را که وارون قضیه شماره ۸، ۱۰، ۱۴ است ثابت

می‌کنیم.

قضیه - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری n بعدی و F یک زیر

فضای برداری از E باشد.

(I) - چنانچه f_1, f_2, \dots, f_p عنصرهایی از E^* باشند که زیر فضای

برداری F^\perp از E^* را پدیدمی‌آورند، F مجموعه بردارهای x متعلق به E

است که در معادله‌های $f_1(x) = 0, \dots, f_p(x) = 0$ صدق می‌کنند.

(II) - اگر $\dim F = q$ باشد، f_1, f_2, \dots, f_{n-q} که در آن $n - q = p$

است، نایستگی خطی دارند.

اثبات - بنا بر ۷، ۱۰، ۱۴ مجموعه x های E که در معادله‌های $f_1(x) = 0$

$f_2(x) = 0, \dots, f_p(x) = 0$ صدق می‌کنند همان $(F^\perp)^\perp$ است. اما بنا بر ۸، ۱۰، ۱۱

داریم $(F^\perp)^\perp = F$.

بنابر ۸. ۱۰. ۱۰. اگر $\dim F = q$ باشد $\dim F^\perp = n - q$ است. چنانچه یک پایه F^\perp را (f_1, f_2, \dots, f_p) بگیریم خواهیم داشت $p = n - q$ و روشن است که f_1, f_2, \dots, f_p نابتستگی خطی دارند.

۸. ۱۰. ۱۹. به ویژه هر گاه F یک هیپرپلان از E باشد، یک فرم خطی f (مخالف با صفر) روی E یافت می شود به طوری که F مجموعه x های E باشد که در معادله $f(x) = 0$ صدق می کنند. بنابر ۸. ۱۰. ۱۵. این فرم خطی با تقریب یک ضریب ثابت مخالف با صفر کاملاً معین است. گویند که $f(x) = 0$ معادله F است (بهرت است گفته شود $f(x) = 0$ یک معادله F است).

۸. ۱۰. ۲۰. مثلاً هر صفحه از \mathbf{R}^3 که بر مبدأ می گذرد به وسیله معادله:

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0$$

که در آن سه شمار حقیقی و ثابت α و β و γ بایکدیگر صفر نیستند، نشان داده می شود (به درس هندسه رجوع شود).

۱۶.۰۸ - ترانسپوزیسیون

۸. ۱۶. ۱. فرض می کنیم E و F دو فضای برداری روی هیات K و $u \in \mathcal{L}(E, F)$ باشد. می خواهیم یک گسترش خطی F^* در E^* که ترانسپوز u گفته می شود به u وابسته نماییم. این گسترش را با ${}^t u$ نمایش خواهیم داد.

۸. ۱۶. ۲. نخست ${}^t u$ را به صورت گسترش F^* در E^* در نظر می گیریم (خطی بودن این گسترش در شماره ۴. ۱۶. ۸ دیده خواهد شد). پس بهر عنصر $y' \in F^*$ یک عنصر از E^* را باید وابسته کرد. بنابراین $u \circ y'$ یک گسترش خطی E در K یعنی یک عنصر از E^* است. این عنصر را با ${}^t u(y')$ می نماییم.

۸. ۱۶. ۳. مفهوم ${}^t u(y')$ این است که برای هر عنصر $x \in E$ داریم:

$$[{}^t u(y')](x) = (y' \circ u)(x) = y'(u(x))$$

به گفته دیگر ${}^t u(y')$ به وسیله فرمول زیر معین می شود:

$$(1) \quad \langle {}^t u(y'), x \rangle = \langle y', u(x) \rangle \quad (x \in E, y' \in F^*)$$

$$x \in E \xrightarrow{u} F \ni u(x)$$

$${}^t u(y') \in E^* \xleftarrow{{}^t u} F^* \ni y'$$

بهرتر است بجای تعریف ${}^t u(y') = y' \circ u$ فرمول (۱) را بخاطر سپرد.

۸. ۱۶. ۴ - اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که گسترش ${}^t u$ خطی است. هرگاه y'_i

و y'_r متعلق به F^* باشند، برای هر عنصر x از E داریم:

$$\langle {}^t u(y'_i + y'_r), x \rangle = \langle y'_i + y'_r, u(x) \rangle, \quad (\text{بنابر (۱)})$$

$$= \langle y'_i, u(x) \rangle + \langle y'_r, u(x) \rangle, \quad (\text{بنابر ۲.۱۳.۸})$$

$$= \langle {}^t u(y'_i), x \rangle + \langle {}^t u(y'_r), x \rangle, \quad (\text{بنابر (۱)})$$

$$= \langle {}^t u(y'_i) + {}^t u(y'_r), x \rangle, \quad (\text{بنابر ۳.۱۳.۸})$$

چون بستگی‌های بالا برای هر عنصر $x \in E$ برقرارند پس می‌توان نوشت:

$${}^t u(y'_i + y'_r) = {}^t u(y'_i) + {}^t u(y'_r)$$

به همین ترتیب دیده می‌شود که برای هر عنصر $y' \in F^*$ و هر اسکالر λ داریم:

$${}^t u(\lambda y') = \lambda {}^t u(y')$$

۸. ۱۶. ۵ - قضیه - چنانچه u و v متعلق به $\mathcal{L}(E, F)$ و λ اسکالری

دلخواه باشد داریم:

$${}^t(u + v) = {}^t u + {}^t v, \quad {}^t(\lambda u) = \lambda({}^t u)$$

اثبات - یکی از دو فرمول بالا مثلاً فرمول سمت چپ را ثابت می‌کنیم (فرمول سمت

راست نیز به روش مشابه اثبات می‌شود). برای هر عنصر $y' \in F^*$ و هر عنصر $x \in E$ داریم:

$$\langle {}^t(u + v)(y'), x \rangle = \langle y', (u + v)(x) \rangle, \quad (\text{بنابر (۱)})$$

$$= \langle y', u(x) + v(x) \rangle, \quad (\text{بنابر ۲.۱۲.۸})$$

$$= \langle y', u(x) \rangle + \langle y', v(x) \rangle, \quad (\text{بنابر ۳.۱۳.۸})$$

$$= \langle {}^t u(y'), x \rangle + \langle {}^t v(y'), x \rangle, \quad (\text{بنابر (۱)})$$

$$= \langle {}^t u(y') + {}^t v(y'), x \rangle \quad , \quad (۳.۱۳.۸ \text{ بنابر})$$

$$= \langle ({}^t u + {}^t v)(y'), x \rangle \quad , \quad (۲.۱۲.۸ \text{ بنابر})$$

از اینجا نتیجه می شود که ${}^t(u+v)(y') = ({}^t u + {}^t v)(y')$ یعنی فرمول سمت چپ برقرار است.

۶.۱۶.۸ - قضیه - فرض می کنیم E و F و G سه فضای برداری روی

هیأت K باشند. چنانچه $u \in \mathcal{L}(E, F)$ و $v \in \mathcal{L}(F, G)$ باشد داریم

$${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$$

اثبات - داده های قضیه را می توان به صورت زیر نمایش داد :

$$E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$$

$$E^* \xleftarrow{{}^t u} F^* \xleftarrow{{}^t v} G^*$$

گسترش های ${}^t u \circ {}^t v$ و ${}^t(v \circ u)$ دو گسترش G^* در E^* می باشند. فرض می کنیم $x \in E$ و $z' \in G^*$ چنانچه فرمول (۱) را به ترتیب در مورد (E, G) و (F, G) و (E, F) بکار بریم نتیجه می شود :

$$\begin{aligned} \langle {}^t(v \circ u)(z'), x \rangle &= \langle z', v(u(x)) \rangle \\ &= \langle {}^t v(z'), u(x) \rangle = \langle {}^t u({}^t v(z')), x \rangle \end{aligned}$$

و از آنجا چنین داریم ${}^t(v \circ u)(z') = {}^t u({}^t v(z'))$ که همان برابری خواسته شده است. برای انجام این محاسبات می توانستیم از شمای زیر استفاده کنیم :

$$\begin{array}{ccccc} x & u(x) & v(u(x)) & & \\ \cap & \cap & \cap & & \\ E & \longrightarrow & F & \longrightarrow & G \\ E^* & \longleftarrow & F^* & \longleftarrow & G^* \\ \cup & & \cup & & \cup \\ {}^t u({}^t v(z')) & & {}^t v(z') & & z' \end{array}$$

۷.۱۶.۸ - قضیه - چنانچه گسترش u متعلق به $\mathcal{L}(E, F)$ دوسویی

باشد، ${}^t u$ دوسویی است و داریم $({}^t u)^{-1} = {}^t(u^{-1})$.

اثبات - می دانیم $u \circ u^{-1} = id_F$ و $u^{-1} \circ u = id_E$ است. پس بنابر

۶.۱۶.۸ خواهیم داشت :

$${}^t(u^{-1}) \circ {}^t u = {}^t(id_F) \quad , \quad {}^t u \circ {}^t(u^{-1}) = {}^t(id_E)$$

اما به آسانی از ۲.۱۶.۸ نتیجه می شود :

$${}^t(\text{id}_E) = \text{id}_{E^*} \quad , \quad {}^t(\text{id}_F) = \text{id}_{F^*}$$

که با در نظر گرفتن ۵.۸.۱ قضیه ثابت می گردد.

۸.۱۶.۸ - اگر $u \in \mathcal{L}(E, F)$ باشد ${}^t u \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ است. پس

${}^t({}^t u)$ متعلق به $\mathcal{L}(E^{**}, F^{**})$ خواهد بود. فرض می کنیم بعد فضاهای برداری E و F با پایان باشد. در این صورت بنا بر شماره ۵.۱۴.۸ داریم $F^{**} = F$ و $E^{**} = E$

پس ${}^t({}^t u) \in \mathcal{L}(E, F)$ است و قضیه زیر را خواهیم داشت:

۹.۱۶.۸ - قضیه - چنانچه E و F دارای بعدهای با پایان و $u \in \mathcal{L}(E, F)$

باشد داریم ${}^t({}^t u) = u$.

اثبات - فرض می کنیم x عنصری از E و y' عنصری از F^* باشد. اگر فرمول (۱)

را دوبار بکار ببریم چنین خواهیم داشت :

$$\langle {}^t({}^t u)(x), y' \rangle = \langle x, {}^t u(y') \rangle = \langle u(x), y' \rangle$$

پس بنا بر ۵.۱۴.۸ برای هر عنصر x داریم ${}^t({}^t u)(x) = u(x)$ و قضیه برقرار است.

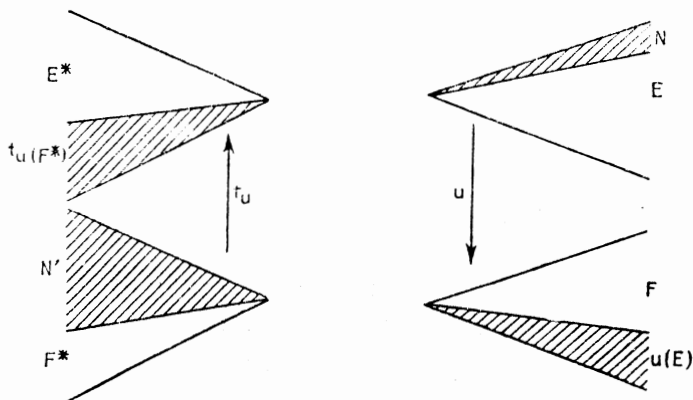
به بیان دیگر اگر v ترانسپوز u باشد، u ترانسپوز v است. از این جا چنین برمی آید

که یک فضای برداری و دو آل آن دارای نقش های کاملاً قرینه می باشند (درحالتی که بعد فضای برداری با پایان باشد).

۱۰.۱۶.۸ - قضیه - فرض می کنیم فضاهای برداری E و F دارای

بعد های با پایان و $u \in \mathcal{L}(E, F)$ باشد. چنانچه N و N' به ترتیب

هسته های u و ${}^t u$ باشند داریم $N = N({}^t u(F^*))^\perp$ و $N' = (u(E))^\perp$



اثبات - اگر نقش‌های u و ${}^t u$ را با یکدیگر عوض کنیم برابری دوم از برابری اول نتیجه می‌شود. بنابراین تنها برابری اول را ثابت می‌کنیم. چنانچه $y' \in F^*$ باشد داریم:

$$y' \in (u(E))^\perp \iff \langle y', u(x) \rangle = 0, \forall x \in E, \quad (u(E)^\perp \text{ بنا بر تعریف (۱)})$$

$$\iff \langle {}^t u(y'), x \rangle = 0, \forall x \in E, \quad (\text{بنا بر (۱)})$$

$$\iff {}^t u(y') = 0$$

$$\iff y' \in N', \quad (N' \text{ بنا بر تعریف (۱)})$$

$$N' = (u(E))^\perp \quad \text{و از آنجا}$$

۱۱.۱۶.۸ - نتیجه - رتبه u برابر است با رتبه ${}^t u$.

زیرا اگر ρ رتبه u و ρ' رتبه ${}^t u$ باشد داریم:

$$\rho' = \dim F^* - \dim N'$$

$$= \dim F - \dim N' \quad , \quad (\text{بنا بر (۶.۱۳.۸)})$$

$$= \dim F - \dim u(E)^\perp \quad , \quad (\text{بنا بر (۱۰.۱۶.۸)})$$

$$= \dim u(E) \quad , \quad (\text{بنا بر (۹.۱۵.۸)})$$

$$= \rho$$

۱۷.۰۸ - فرمهای دوخطی

۱.۱۷.۸ - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری روی هیأت K باشد. فرمهای خطی

روی E را به صورت توابعی از یک بردار متعلق به E که مجموعه مقادیر آنها هیأت K می‌باشد، تعریف کردیم. اکنون می‌خواهیم فرمهای دوخطی، سه خطی و به طور کلی p خطی را روی E که توابعی از دو بردار، سه بردار و به طور کلی p بردار متعلق به E هستند و مجموعه مقادیر آنها K می‌باشد، تعریف کنیم. ابتدا به تعریف فرمهای دوخطی روی E می‌پردازیم.

۲.۱۷.۸ - تعریف - فضای برداری E را روی هیأت K در نظر می‌گیریم.

گسترش f فضای برداری $E \times E$ در K یک فرم دوخطی روی E نامیده می‌شود

هرگاه گسترش f نسبت به هر يك از متغیرها خطی باشد. به گفته دیگر اگر
 x_2, x_1, x و y_2, y_1, y متعلق به E و λ و μ دو عنصر از K باشند داشته
 باشیم:

$$(۱) \quad f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$$

$$(۲) \quad f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$$

$$(۳) \quad f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$$

$$(۴) \quad f(x, \mu y) = \mu f(x, y)$$

۳.۱۷.۸ - با استفاده از (۱) و (۲) و (۳) و (۴) نتیجه می شود که برای بردارهای

دلخواه x_1, \dots, x_n و y_1, \dots, y_p و اسکالرهایی $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ و μ_1, \dots, μ_p
 داریم:

$$(۵) \quad f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^p \mu_j y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \lambda_i \mu_j f(x_i, y_j)$$

۴.۱۷.۸ - مثال - در فضای برداری بردارهای آزاد فضای معمولی، حاصل ضرب

داخلی $\vec{V} \cdot \vec{V}' \rightarrow (\vec{V}, \vec{V}')$ یک فرم دوخطی است.

۵. ۱۷.۸ - فضای برداری E را در نظر می گیریم و فرض می کنیم (e_1, e_2, \dots, e_n)

یک پایه E باشد. می خواهیم با یکار بردن روش شماره های ۴.۱۳.۸ و ۵.۱۳.۸ کلیه

فرم های دوخطی را روی E بنا کنیم.

n^2 اسکالر a_{ij} ($1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq n$) را اختیار می کنیم و برای بردارهای

دلخواه $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ و $y = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n$ از E قرار می دهیم:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \lambda_i \mu_j$$

روشن است که f یک فرم دوخطی روی E می باشد و داریم $f(e_i, e_j) = a_{ij}$.

به این ترتیب به هر عنصر (a_{ij}) از K^{n^2} یک فرم دو خطی وابسته می شود. می خواهیم

نشان دهیم که هر فرم دوخطی روی E به روش بالا بدست می آید. به بیان دقیق تر

۶.۱۷.۸ - قضیه - گسترش $K^{n \times r}$ در مجموعه فرم های دو خطی روی E یعنی گسترش $f \rightarrow (a_{ij})$ دوسویی است.

اثبات - فرض می کنیم دو عنصر (a_{ij}) و (a'_{ij}) از $K^{n \times r}$ یک فرم دوخطی را معین کنند. بنا بر ۶.۱۷.۸. برای همه اندیسهای i و j چنین داریم:

$$a_{ij} = (e_i, e_j) = a'_{ij}$$

پس $(a_{ij}) = (a'_{ij})$ بنا بر این گسترش بالا انژکتیو است.

فرض می کنیم f یک فرم دوخطی روی E باشد و قرار می دهیم $f(e_i, e_j) = a_{ij}$. چنانچه فرم وابسته به (a_{ij}) را با f' نشان دهیم، برای هر دو عنصر دلخواه:

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n, \quad y = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n$$

خواهیم داشت:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j f(e_i, e_j), \quad (\text{بنا بر } (6))$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j a_{ij}$$

$$= f'(x, y)$$

پس $f = f'$ است، یعنی گسترش بالا سورژکتیو می باشد.

۷.۱۷.۸ - مثال - در فضای برداری \mathbf{R}^3 فرم های دوخطی عبارتند از گسترش های:

$$\begin{aligned} ((\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), (\mu_1, \mu_2, \mu_3)) \rightarrow & a_{11}\lambda_1\mu_1 + a_{12}\lambda_1\mu_2 + a_{13}\lambda_1\mu_3 \\ & + a_{21}\lambda_2\mu_1 + a_{22}\lambda_2\mu_2 + a_{23}\lambda_2\mu_3 + a_{31}\lambda_3\mu_1 + a_{32}\lambda_3\mu_2 \\ & + a_{33}\lambda_3\mu_3 \end{aligned}$$

که در آنها $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$ شمارهای حقیقی و ثابت می باشند.

۱۸.۰.۸ - فرم‌های چند خطی روی فضای برداری E

۱۰.۱۸.۸ - تعریف - فضای برداری E روی هیأت K و شمار درست

$p \geq 1$ در نظر می‌گیریم. گسترش $f(x_1, \dots, x_p) \rightarrow (x_1, \dots, x_p)$ فضای برداری E^p در K فرم p خطی روی E نامیده می‌شود هرگاه این گسترش نسبت به هر يك از x_i ها خطی باشد.

هنگامی که نیازی به نام بردن از شمار درست p نباشد f را فرم چند خطی می‌نامند.

۲.۱۸.۸ - مثلاً اگر f یک فرم ۳ خطی روی E و x_i, y_j, z_k بردارهای دلخواهی

از E و λ_i, μ_j, ν_k اسکالرهایی باشند چنین داریم :

$$f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^n \mu_j y_j, \sum_{k=1}^p \nu_k z_k\right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p \lambda_i \mu_j \nu_k f(x_i, y_j, z_k)$$

۳.۱۸.۸ - به ویژه اگر (e_1, e_2, \dots, e_q) یک پایه E باشد، فرم ۳ خطی f

با درست داشتن اسکالرهایی $f(e_i, e_j, e_k) = \alpha_{ijk}$ کاملاً معین است. زیرا :

$$f\left(\sum_{i=1}^q \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^q \mu_j e_j, \sum_{k=1}^q \nu_k e_k\right) = \sum_{i, j, k=1}^q \lambda_i \mu_j \nu_k \alpha_{ijk}$$

به وارون برای اسکالرهایی دلخواه α_{ijk} فرمول بالا یک فرم ۳ خطی روی E معین می‌کند.

به این ترتیب می‌توان همه فرم‌های ۳ خطی را روی E بنا کرد.

۴.۱۸.۸ - به روش مشابه می‌توان فرم‌های p خطی را تشکیل داد. نوشتن این

فرم‌ها دشوارتر است زیرا برای آنها باید از اندیسهای p گانه استفاده کرد.

فصل نهم

ماتریس‌ها

مطالب این فصل دنباله مستقیم مطالب فصل پیش است. اما در این فصل به جای بررسی جنبه‌های هندسی و مجرد مطالب آن، به بررسی جنبه محاسبه‌ای آنها پرداخته شده است. همان‌طور که در مطالعه یک بردار گاهی استفاده از مؤلفه‌های آن بردار کار را ساده‌تر می‌کند، در مطالعه یک گسترش خطی نیز استفاده از «ماتریس» آن گسترش کار را آسان‌تر می‌سازد. به علاوه نظریه ماتریس‌ها کار بردهای دیگری نیز دارد.

۱.۹- تعریف

۱.۱.۹- هیأت K را در نظر می‌گیریم. یک جدول مستطیلی شکل از عنصرهای K

به صورت:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nm} \end{bmatrix}$$

یک ماتریس با عنصرهای واقع در K نامیده می‌شود. ردیف‌های افقی را سطر، ردیف‌های قائم را ستون و $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{nm}$ را عنصرهای ماتریس می‌نامند (α_{ij} عبارت است از عنصر متعلق به سطر i ام و ستون j ام). ماتریس بالا، و هر ماتریسی که دارای n سطر و m ستون باشد، یک ماتریس از رسته (n, m) گفته می‌شود. گاهی ماتریس بالا را به طور اختصار به صورت $[\alpha_{ij}]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ و یا اگر اشتباهی رخ ندهد به شکل ساده $[\alpha_{ij}]$ می‌نویسند. همچنین ممکن است در نمایش یک ماتریس اندیس ستون را به صورت نما نوشت، به این ترتیب $[\alpha_i^j]$ نیز ماتریس بالا را نشان می‌دهد.

۲.۱.۹- اگر $K = R$ باشد ماتریس را **حقیقی** و چنانچه $K = C$ باشد ماتریس را **مختلط** می گویند.

۳.۱.۹- هرگاه دریک ماتریس $n = m$ باشد یعنی شماره سطرها برابر باشماره ستونها باشد، ماتریس را **مربع** می نامند. در ماتریس مربع $[a_{ij}]$ عنصرهای $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ **قطر اصلی** ماتریس گفته می شوند (این عنصرها در روی قطری از مربع که قطر اصلی نامیده می شود قرار دارند).

۴.۱.۹- چنانچه در ماتریس مربع $[a_{ij}]$ همه عنصرهای واقع در خارج قطر اصلی برابر با صفر باشند $[a_{ij}]$ را **ماتریس قطری** می نامند، به گفته دیگر ماتریس $[a_{ij}]$ قطری است اگر برای $i \neq j$ داشته باشیم $a_{ij} = 0$.

۵.۱.۹- هرگاه در ماتریس مربع $[a_{ij}]$ همه عنصرهای واقع در بالای قطر اصلی برابر با صفر باشند $[a_{ij}]$ **ماتریس سه بری زیرین** نامیده می شود، به گفته دیگر $[a_{ij}]$ یک ماتریس سه بری زیرین است اگر برای $i < j$ برابری $a_{ij} = 0$ برقرار باشد. به همین ترتیب **ماتریس سه بری زیرین** تعریف می گردد.

۶.۱.۹- اگر در ماتریس مربع $[a_{ij}]$ برای همه جفت های (i, j) برابری $a_{ij} = a_{ji}$ برقرار باشد $[a_{ij}]$ را **ماتریس متقارن** می نامند.

۲.۹- ماتریس یک گسترش خطی

۱.۲.۹- فضاها برداری E و F را، که بعد آنها با پایان است، روی هیات K در نظری می گیریم و فرض می کنیم (e_1, e_2, \dots, e_m) یک پایه E ، (f_1, f_2, \dots, f_n) یک پایه F و u عنصری از $\mathcal{L}(E, F)$ باشد.

تعریف - ماتریس رسته (n, m) را، که عنصرهای ستون j ام آن $(j = 1, \dots, m)$ از مؤلفه های $u(e_j)$ نسبت به پایه (f_1, \dots, f_n) تشکیل شده است، **ماتریس گسترش خطی** u نسبت به پایه های (e_1, \dots, e_m) و (f_1, \dots, f_n) می نامند.

پس اگر این ماتریس را با $[a_{ij}]$ نشان دهیم داریم:

$$(1) \quad u(e_j) = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \dots + a_{nj}f_n$$

۲.۲.۹- چنانچه $E = F$ و برای همه i ها $e_i = f_i$ باشد، ماتریس $[a_{ij}]$ ماتریس

گسترش خطی u نسبت به پایه (e_1, \dots, e_n) نامیده می‌شود.

۳.۲.۹- مثال = در صفحه معمولی مبدأ O و دوبرداریکه‌ای و متعامد e_1 و e_2 را

در نظر می‌گیریم و سوی صفحه را به وسیله پایه (e_1, e_2) معین می‌کنیم (۴.۱۱.۱۵).

چنانچه u چرخش به مرکز O و به زاویه φ باشد، $\sin\varphi \cos\varphi$ مؤلفه‌های بردار $u(e_1)$ و

$$\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\varphi \quad , \quad \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\varphi$$

$u(e_2)$ خواهند بود. پس ماتریس چرخش u نسبت به پایه (e_1, e_2) چنین است :

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

۴.۲.۹- بار دیگر مطالب شماره ۱.۲.۹ را در نظر می‌گیریم و به اثبات قضیه زیر

می‌پردازیم.

قضیه - چنانچه u يك گسترش خطی متعلق به $\mathcal{L}(E, F)$ و $M(u)$

ماتریس آن باشد، گسترش $u \rightarrow M(u)$ يك گسترش دوسویی $\mathcal{L}(E, F)$ روی مجموعه ماتریس‌های رسته (n, m) با عنصرهای واقع در K می‌باشد.

اثبات - اگر برای گسترشهای u و u' متعلق به $\mathcal{L}(E, F)$ داشته باشیم

$M(u) = M(u')$ ، برای هر اندیس j خواهیم داشت $u(e_j) = u'(e_j)$. پس بنابر

(۶.۸.۸) ، $u = u'$ یعنی گسترش $u \rightarrow M(u)$ انژکتیو است. چنانچه $[a_{ij}]$

يك ماتریس رسته (n, m) با عنصرهای واقع در K باشد، بنابر شماره (۶.۸.۸) (I)

يك عنصر u از $\mathcal{L}(E, F)$ وجود دارد به طوری‌که برای آن فرمولهای (۱) برقرارند.

پس خواهیم داشت $M(u) = [a_{ij}]$ یعنی گسترش $u \rightarrow M(u)$ سورژکتیو است.

۵.۲.۹- با توجه به مطالب بالا می‌توان گفت که گسترشهای خطی به وسیله ماتریسهای

خود کاملاً مشخص می‌شوند (همانطوریکه بردارها به وسیله مؤلفه‌های خود معین می‌گردند).

۶.۲.۹- قضیه - فرض می‌کنیم u عنصری از $\mathcal{L}(E, F)$ و $[a_{ij}]$

ماتریس u نسبت به پایه‌های (e_1, e_2, \dots, e_m) و (f_1, f_2, \dots, f_n)

باشد. بردار x متعلق به E را در نظر می‌گیریم و مؤلفه‌های آن را نسبت

به پایه (e_1, e_2, \dots, e_m) به ترتیب $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ می‌نامیم. اگر

(f_1, f_2, \dots, f_n) μ_1, \dots, μ_n مؤلفه‌های بردار $u(x)$ نسبت به پایه (e_1, e_2, \dots, e_n) باشد، داریم:

$$\mu_1 = \alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{12}\lambda_2 + \dots + \alpha_{1m}\lambda_m$$

$$\mu_2 = \alpha_{21}\lambda_1 + \alpha_{22}\lambda_2 + \dots + \alpha_{2m}\lambda_m$$

$$\dots$$

$$\mu_n = \alpha_{n1}\lambda_1 + \alpha_{n2}\lambda_2 + \dots + \alpha_{nm}\lambda_m$$

اثبات - داریم:

$$u(x) = u\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j e_j\right) = \sum_{j=1}^m \lambda_j u(e_j)$$

با توجه به فرمولهای (۱) شماره ۱.۲.۹ برابری بالا را می‌توان چنین نوشت:

$$u(x) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} f_i \right)$$

که در آن ضریب f_i برابر است با $\sum_{j=1}^m \lambda_j \alpha_{ij}$. این ضریب همان مؤلفه i ام بردار $u(x)$ یعنی μ_i می‌باشد.

۷.۲.۹ - چنانچه در مثال ۳.۲.۹ آراینده‌های یک نقطه M از صفحه را x و y و

آراینده‌های نقطه $u(M)$ را x' و y' بگیریم، بنابر ۶.۲.۹ خواهیم داشت:

$$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi$$

$$y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

۸.۲.۹ - گسترش خطی وابسته به يك ماتریس - در شماره ۱.۲.۹ گسترش

خطی u را در نظر گرفتیم و به آن ماتریس $M(u)$ را وابسته کردیم. اکنون ماتریس n

سطری و m ستونی $M = [\alpha_{ij}]$ با عنصرهای متعلق به K را در نظر می‌گیریم. بنابر

۴.۲.۹ ماتریس M عبارتست از ماتریس یک گسترش خطی معین v فضای برداری

K^m در K^n ، نسبت به پایه‌های کانونیک K^m و K^n . گسترش v را گسترش خطی

وابسته به ماتریس M می‌نامند.

۹.۲.۹- بر حسب تعریف، رتبه گسترش خطی v (شماره ۲.۱۱.۸) را رتبه ماتریس M می‌نامیم. پس رتبه M شمار درستی است مانند r به طوریکه داریم $0 \leq r \leq n$ و $r \leq m$ (شماره ۳.۱۱.۸). بنا بر شماره‌های ۵.۱۱.۸ و ۱.۲.۹ شمار r عبارت است از شماره ساکزیم ستون‌هایی از M ، که نایستگی خطی دارند (هرستون ماتریس M به عنوان برداری از K^n در نظر گرفته می‌شود). در شماره ۱۰.۱۰ یک روش عملی برای محاسبه r خواهیم دید.

۱۰.۲.۹- قضیه - فضاهای برداری E و F را روی هیأت K در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم (e_1, e_2, \dots, e_m) یک پایه E و (f_1, f_2, \dots, f_n) یک پایه F و u عنصری از $\mathcal{L}(E, F)$ باشد. چنانچه M ماتریس u نسبت به پایه‌های (e_1, e_2, \dots, e_m) و (f_1, f_2, \dots, f_n) باشد رتبه u برابر با رتبه M است.

اثبات - فرض می‌کنیم $(e'_1, e'_2, \dots, e'_m)$ پایه کانونیک K^m و $(f'_1, f'_2, \dots, f'_n)$ پایه کانونیک K^n و v گسترش خطی K^m در K^n ، وابسته به M باشد. چنانچه ω ایزومرفیسم F روی K^n باشد که f_1, f_2, \dots, f_n را به ترتیب به f'_1, f'_2, \dots, f'_n بدل می‌کند خواهیم داشت:

$$\omega(u(e_j)) = \omega(a_{1j}f_1 + \dots + a_{nj}f_n) = a_{1j}f'_1 + \dots + a_{nj}f'_n = v(e_j)$$

پس تعیین گسترش ω به $u(E)$ یک گسترش خطی انژکتیو $u(E)$ [زیر فضای برداری پدید آمده به وسیله $u(e_j)$ ها (۵.۱۱.۸)] روی $v(K^m)$ [زیر فضای برداری پدید آمده به وسیله $v(e'_j)$ ها (۵.۱۱.۸)] می‌باشد. بنابراین فضاهای برداری $u(E)$ و $v(K^m)$ ایزومرف هستند و در نتیجه بعدهای آنها با یکدیگر برابر است. اما بنا بر ۲.۱۱.۸ بعد $u(E)$ برابر با رتبه u و بنا بر ۹.۲.۹ بعد $v(K^m)$ برابر با رتبه ماتریس M است.

۳.۹- عملیات روی ماتریس‌ها

به طوریکه در زیر خواهیم دید عملیات روی ماتریس‌ها از عملیات روی گسترش‌های خطی نتیجه می‌شوند.

جمع ماتریس‌ها

۱.۳.۹- فضاهای برداری E و F را روی هیأت K در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم

یک پایه E و (e_1, \dots, e_m) یک پایه F و u و v متعلق به $\mathcal{L}(E, F)$ باشند. چنانچه $M(u) = [\alpha_{ij}]$ و $M(v) = [\beta_{ij}]$ و $M(u+v) = [\gamma_{ij}]$ به ترتیب ماتریس های u و v و $u+v$ نسبت به پایه های (e_1, \dots, e_m) و (f_1, \dots, f_n) باشند، با توجه به شماره های ۲.۱۲.۸ و ۱.۲.۹ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}(u+v)(e_j) &= u(e_j) + v(e_j) = \alpha_{1j}f_1 + \dots + \alpha_{nj}f_n + \beta_{1j}f_1 + \dots + \beta_{nj}f_n \\ &= (\alpha_{1j} + \beta_{1j})f_1 + \dots + (\alpha_{nj} + \beta_{nj})f_n\end{aligned}$$

و از آنجا برابری های $\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$ بدست می آید.

۲.۳.۹- دو ماتریس $M = [\lambda_{ij}]$ و $M' = [\lambda'_{ij}]$ را که هر دو از رسته (n, m) می باشند در نظر می گیریم. ماتریس $[\lambda_{ij} + \lambda'_{ij}]$ را که از رسته (n, m) می باشد مجموع دو ماتریس M و M' می نامند و با $M + M'$ نشان می دهند.

۳.۳.۹- با استفاده از تعریف بالا نتیجه شماره ۱.۳.۹ به صورت زیر نوشته می شود:

$$M(u+v) = M(u) + M(v)$$

ضرب یک ماتریس در یک اسکالر

۴.۳.۹- فرض می کنیم λ عنصری از K ، E و F دو فضای برداری روی هیأت K ، $u \in \mathcal{L}(E, F)$ و $M(\lambda u) = [\alpha'_{ij}]$ ماتریس گسترش خطی λu نسبت به پایه های (e_1, \dots, e_m) و (f_1, \dots, f_n) باشد. بنابر شماره های ۶.۱۲.۸ و ۱.۲.۹ خواهیم داشت:

$$(\lambda u)(e_j) = \lambda(u(e_j)) = \lambda \alpha_{1j}f_1 + \dots + \lambda \alpha_{nj}f_n$$

و از آنجا برابری های $\alpha'_{ij} = \lambda \alpha_{ij}$ به دست می آید.

۵.۳.۹- چنانچه $M = [\lambda_{ij}]$ باشد، ماتریس $[\lambda \lambda_{ij}]$ را، که از ضرب همه عنصرهای ماتریس M در λ به دست می آید، با λM نشان می دهند.

۶.۳.۹- با استفاده از شماره بالا، نتیجه شماره ۴.۳.۹ به صورت زیر نوشته می شود:

$$M(\lambda u) = \lambda M(u)$$

ضرب دو ماتریس

۷.۳.۹- فضاهای برداری E ، F و G را روی هیأت K در نظر می گیریم و فرض

می‌کنیم (e_1, \dots, e_m) ، (f_1, \dots, f_n) و (g_1, \dots, g_p) به ترتیب، پایه‌هایی از E ، F و G باشند. چنانچه v عنصری از $\mathcal{L}(E, F)$ و u عنصری از $\mathcal{L}(F, G)$ باشد، ماتریس‌های u و v و uv را نسبت به پایه‌های داده شده به ترتیب $[\alpha_{ij}]$ ، $[\beta_{ij}]$ و $[\gamma_{ij}]$ می‌نامیم. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} (uv)(e_j) &= u(v(e_j)) = u\left(\sum_{k=1}^n \beta_{kj} f_k\right) = \sum_{k=1}^n \beta_{kj} u(f_k) = \sum_{k=1}^n \beta_{kj} \left(\sum_{i=1}^p \alpha_{ik} g_i\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^p \beta_{kj} \alpha_{ik} g_i = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \beta_{kj}\right) g_i \end{aligned}$$

$$\text{و از آنجا } \gamma_{ij} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \beta_{kj}$$

۸.۳.۹- چنانچه $M = [\lambda_{ij}]$ یک ماتریس رسته (r, s) و $M' = [\lambda'_{ij}]$ یک

ماتریس رسته (s, t) باشد، حاصل ضرب M و M' را، که ماتریسی از رسته (r, t) است و با $MM' = [\lambda''_{ij}]$ نشان داده می‌شود، به وسیله فرمولهای زیر تعریف می‌کنیم:

$$\lambda''_{ij} = \sum_{k=1}^s \lambda_{ik} \lambda'_{kj}$$

درستی فرمولهای بالا با توجه به اینکه شماره ستونهای M برابر با شماره سطرهای M' می‌باشد آشکار است. به طوریکه دیده می‌شود λ''_{ij} عبارت است از مجموع حاصل ضربهای عنصرهای سطر i ام M در عنصرهای هم ردیف ستون j ام M' . بنابراین حاصل ضرب MM' از ضرب سطرهای M در ستونهای M' به دست می‌آید.

باید دانست که اگر ماتریس M از رسته (r, s) و ماتریس M' از رسته (s, t) و $s \neq s_1$ باشد حاصل ضرب MM' دارای معنی نیست.

۹.۳.۹- با استفاده از شماره بالا، نتیجه شماره ۷.۳.۹ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$M(uv) = M(u)M(v)$$

۱۰.۳.۹- از ویژگی‌های قانون‌های ترکیب گسترش‌های خطی، ویژگی‌هایی برای

قانون‌های ترکیب ماتریس‌ها به دست می‌آید که در زیر به بیان چند نمونه از آن‌ها می‌پردازیم.

الف - ماتریس‌های n سطری و m ستونی با عنصرهای واقع در K یک فضای برداری

روی K است. این فضا را T می‌نامیم و فرض می‌کنیم E و F دو فضای برداری روی K باشند که بعدها آنها به ترتیب m و n است و در هر کدام یک پایه در نظر گرفته شده است. گسترش $M(u) \rightarrow u$ یک ایزومرفیسم $\mathcal{L}(E, F)$ روی فضای برداری T است. مبدأ فضای برداری T ماتریس گسترش خطی صفر است، یعنی ماتریسی که همهٔ عنصرهای آن برابر با صفر می‌باشند (این ماتریس را با 0 نشان می‌دهند). اگر ماتریس $M = [\alpha_{ij}]$ یک ماتریس n سطری و m ستونی باشد، ماتریس $[-\alpha_{ij}]$ را با $-M$ نشان می‌دهند. در این صورت داریم $M + [-M] = [-M] + M = 0$. ماتریس $-M$ را قرینهٔ M می‌نامند. برای هر گسترش خطی u از $\mathcal{L}(E, F)$ برابری $M(-u) = -M(u)$ برقرار است.

ب - می‌دانیم که حاصل ضرب گسترش‌های خطی انجمنی است، پس اگر M و M' و M'' ماتریس‌هایی با عنصرهای متعلق به K و حاصل ضرب‌های MM' و $M'M''$ معین باشند خواهیم داشت:

$$M(M'M'') = (MM')M''$$

پ - با توجه به شماره‌های ۴.۱۲.۸ و ۵.۱۲.۸ چنین داریم:

$$M(M' + M'') = MM' + MM'', \quad (M' + M'')M = M'M + M''M$$

(به شرط آنکه حاصل ضرب‌های بالا معین باشند).

۴.۹- ماتریس‌های مربع

۱.۴.۹- فضای برداری E را روی هیأت K در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم (e_1, e_2, \dots, e_n) یک پایهٔ E و $M(u)$ ماتریس گسترش خطی u متعلق به $\mathcal{L}(E, E)$ ، نسبت به پایهٔ (e_1, e_2, \dots, e_n) باشد (۲.۲.۹). چون $\mathcal{L}(E, E)$ نسبت به دو قانون جمع و ضرب یک حلقه است (۸.۱۲.۸)، از فرمولهای ۳.۳.۹ و ۹.۳.۹ نتیجه می‌شود که مجموعهٔ ماتریس‌های n سطری و n ستونی با عنصرهای متعلق به K یک حلقهٔ A می‌باشد. به علاوه گسترش $M(u) \rightarrow u$ یک ایزومرفیسم حلقهٔ $\mathcal{L}(E, E)$ روی A است. باید دانست که حلقهٔ A در حالت کلی جابجایی نیست.

۲.۴.۹- از ۹.۱۲.۸ نتیجه می‌شود که حلقهٔ A دارای عنصریکه است، و این عنصریکه همان ماتریس گسترش همانی E یعنی:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

می‌باشد که آنرا ماتریس یک‌به‌یک می‌گویند و با I نشان می‌دهند (هنگامی که بخواهند شماره سطرها و ستونها را نیز نشان دهند این ماتریس را با I_n می‌نمایند).

۳.۴.۹- برای هر اندومرفیسم u از E شرط بایاویسندگی برای اینکه $M(u)$ ماتریسی قطری باشد این است که گسترش u به هر بردار e_i از پایه داده شده (e_1, \dots, e_n) برداری متناسب با e_i وابسته کند. به گفته دیگر قطری بودن $M(u)$ هم‌ارز این است که داشته باشیم $u(e_1) = \alpha_1 e_1, u(e_2) = \alpha_2 e_2, \dots, u(e_n) = \alpha_n e_n$ و در این صورت :

$$M(u) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_n \end{bmatrix}$$

به آسانی دیده می‌شود که مجموع و حاصل ضرب دو ماتریس قطری یک ماتریس قطری است.

۴.۴.۹- درین ماتریس‌های قطری ماتریس قطری :

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

را که برابر با αI است اسکالر می‌نامند. گسترش خطی این ماتریس یک همسانی به نسبت α در فضای E است. بنابر شماره ۱۰.۱۲.۸ برای هر ماتریس M از A داریم

$(\lambda\lambda')I = (\lambda I)(\lambda'I)$ و $(\lambda + \lambda')I = \lambda I + \lambda'I$ همچنین $(\lambda I)M = M(\lambda I) = \lambda M$ بدین جهت اغلب بجای λI تنها λ را می نویسند.

۴.۹-۵. هنگامیکه می گوئیم ماتریس $M(u)$ سه بری زیرین می باشد، به این معنی است که u هر بردار e_i را به یک ترکیب خطی از بردارهای e_j که در آن $i \geq j$ است بدل می کند. چنانچه زیر فضای برداری پدید آمده به وسیله e_i, e_{i+1}, \dots, e_n را با E_i نشان دهیم مطلب بالا بیان می کند که برای هر $i, (i = 1, 2, \dots, n)$ داریم $u(E_i) \subset E_i$ از این جا نتیجه می شود که مجموع و حاصل ضرب دو ماتریس سه بری زیرین یک ماتریس سه بری زیرین است. این مطلب به آسانی از روی محاسبه نیز به دست می آید. در مورد ماتریس های سه بری زیرین نیز ویژگی هایی شبیه آنچه که گذشت برقرار است.

۵.۹- ماتریس های سطری و ستونی

۱.۵.۹- ماتریسی که تنها دارای یک سطر باشد ماتریس سطری و ماتریسی که تنها شامل یک ستون باشد ماتریس ستونی نامیده می شود.

۲.۵.۹- فرض می کنیم E یک فضای برداری روی هیأت K و (e_1, e_2, \dots, e_m) یک پایه E باشد. هر فرم خطی f روی E یک گسترش خطی در K است. چنانچه K را با پایه کانونیک آن در نظر بگیریم (می دانیم که پایه کانونیک K تنها دارای عنصر ۱ است)، بنا بر شماره ۱.۲.۹ گسترش f نسبت به پایه های (e_1, e_2, \dots, e_m) و (1) دارای ماتریسی است که آنرا با $M(f)$ نشان می دهیم. ماتریس $M(f)$ عبارت است از ماتریس سطری:

$$[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m]$$

که در آن $a_i = f(e_i)$ است. به طوریکه دیدیم (۵.۱۳.۸) هنگامیکه a_i ها داده شده باشند گسترش f کاملاً معین است. در این جا این مطلب به صورت حالت ویژه ای از شماره ۴.۲.۹ درمی آید.

۳.۵.۹- بردار x متعلق به E را در نظر می گیریم. گسترش $\lambda x \rightarrow \lambda$ هیأت K در E به وسیله بردار x کاملاً معین می شود. چنانچه ماتریس این گسترش نسبت به پایه های (1) و (e_1, e_2, \dots, e_m) باشد، با توجه به ۱.۲.۹ ماتریس $M(x)$ عبارت است از ماتریس ستونی:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix}$$

که در آن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ مؤلفه‌های بردار x نسبت به پایه (e_1, e_2, \dots, e_m) می‌باشند. $M(x)$ را ماتریس x نسبت به پایه (e_1, e_2, \dots, e_m) می‌نامند.

۴.۵.۹- فرض می‌کنیم F فضای برداری دیگری روی هیأت K و (f_1, f_2, \dots, f_n)

یک پایه F باشد. چنانچه u یک گسترش خطی در E و F ماتریس $M(u)$ نسبت به پایه‌های (e_1, e_2, \dots, e_m) و (f_1, f_2, \dots, f_n) باشد و مؤلفه‌های بردار $u(x)$ را در پایه (f_1, f_2, \dots, f_n) با $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ نشان دهیم بردار $u(x)$ ماتریس ستونی $M(u(x))$ را معین خواهد کرد و فرمول‌های ۶.۲.۹ چنین نوشته می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix}$$

عبارت بالا را می‌توان به صورت ساده زیر نوشت:

$$(۱) \quad M(u(x)) = M(u)M(x)$$

این فرمول از دستور کلی $M(uv) = M(u)M(v)$ نیز به دست می‌آید. زیرا گسترش خطی $\lambda \rightarrow \lambda u(x)$ در K در F از ترکیب گسترشهای خطی $\lambda \rightarrow \lambda x$ هیأت K در E و گسترش خطی u فضای برداری E در F نتیجه می‌شود.

۵.۵.۹- با در نظر گرفتن فرض‌های ۲.۵.۹ و ۳.۵.۹ خواهیم داشت:

$$(۲) \quad M(f)M(x) = [a_1 a_2 \cdots a_m] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} = a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + \cdots + a_m \lambda_m = \langle f, x \rangle$$

که در آن ماتریس $[a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + \cdots + a_m \lambda_m]$ را که از رسته $(1, 1)$ می باشد با اسکالر $a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + \cdots + a_m \lambda_m$ یکی گرفته ایم.

۶.۹- ترانسپوزۀ یک ماتریس

۱.۶.۹- فرض می کنیم $X = [a_{ij}]$ یک ماتریس از رسته (n, m) باشد. ماتریس $[b_{ij}]$ از رسته (m, n) را به قسمی که $b_{ij} = a_{ji}$ باشد، ترانسپوزۀ ماتریس X می نامند و با ${}^t X$ نشان می دهند.

۲.۶.۹- قضیه- فرض می کنیم E و F دو فضای برداری، (e_1, \dots, e_m) یک پایه E و (f_1, \dots, f_n) یک پایه F باشد. چنانچه پایه های دو آل این دو پایه را به ترتیب (e_1^*, \dots, e_m^*) و (f_1^*, \dots, f_n^*) بگیریم و u عنصری از $\mathcal{L}(E, F)$ باشد ${}^t u$ متعلق به $\mathcal{L}(F^*, E^*)$ است و داریم:

$$M({}^t u) = {}^t(M(u))$$

[روشن است که $M(u)$ ماتریس گسترش خطی u نسبت به پایه های (e_1, \dots, e_m) و (f_1, \dots, f_n) و $M({}^t u)$ ماتریس گسترش ${}^t u$ نسبت به پایه های (f_1^*, \dots, f_n^*) و (e_1^*, \dots, e_m^*) می باشد].

اثبات - قرار می دهیم $M(u) = [a_{ij}]$ و $M({}^t u) = [b_{ij}]$. بنا بر ۱.۲.۹ داریم:

$$u(e_j) = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \cdots + a_{nj}f_n$$

با استفاده از ۱۰.۱۳.۸ (II) خواهیم داشت:

$$a_{ij} = \langle u(e_j), f_i^* \rangle$$

همچنین در مورد ${}^t u$ داریم ${}^t u(f_j^*) = \beta_{1j}e_1^* + \beta_{2j}e_2^* + \cdots + \beta_{mj}e_m^*$ پس:

$$\beta_{ij} = \langle {}^t u(f_j^*), e_i^* \rangle$$

اما بنابر ۳.۱۶.۸ داریم :

$$\langle u(e_j), f_i^* \rangle = \langle e_j, {}^t u(f_i^*) \rangle$$

پس خواهیم داشت $\beta_{ji} = \alpha_{ij}$ و قضیه ثابت می‌گردد.

بنابراین به هر ویژگی ترانسپوز یک گسترش خطی، یک ویژگی ترانسپوز یک ماتریس

وابسته می‌شود.

۳.۶.۹- چنانچه دو ماتریس X و Y از یک رسته باشند، بنابر ۵.۱۶.۸

خواهیم داشت :

$${}^t(X+Y) = {}^tX + {}^tY$$

۴.۶.۹- اگر X یک ماتریس و λ یک اسکالر باشد، بنابر ۵.۱۶.۸ خواهیم داشت :

$${}^t(\lambda X) = \lambda {}^tX$$

۵.۶.۹- چنانچه X یک ماتریس باشد، بنابر ۹.۱۶.۸ خواهیم داشت :

$${}^t({}^tX) = X$$

ویژگیهای بالا را می‌توان به آسانی از روی تعریف ترانسپوز یک ماتریس نتیجه گرفت.

۶.۶.۹- هرگاه X یک ماتریس رسته (m, n) و Y یک ماتریس رسته (n, p)

باشد، با توجه به قضیه ۶.۱۶.۸ خواهیم داشت :

$${}^t(XY) = {}^tY {}^tX$$

۷.۶.۹- بنابر نتیجه ۱۱.۱۶.۸ ماتریس‌های X و X دارای یک رتبه هستند.

۸.۶.۹- بنابر ۷.۶.۹ و ۹.۲.۹ رتبه ماتریس X عبارت است از ماکزیم شماره

سطرهای ماتریس X که نایستگی خطی دارند.

۷.۹- ماتریس‌های وارون‌پذیر

۱۰.۷.۹- بنابر ۱.۴.۹ ماتریس‌های مربع n سطری و n ستونی با عنصرهای متعلق

به K ، تشکیل یک حلقه A را می‌دهند. این حلقه دارای عنصریکه I_n می‌باشد

(شماره ۲.۴.۹). پس می‌توان از ماتریس‌های مربع وارون‌پذیر گفتگو کرد :

ماتریس M از حلقه A وارون‌پذیر گفته می‌شود هرگاه ماتریس M' متعلق به A

یافت شود به قسمی که داشته باشیم $M'M = MM' = I_n$. ماتریس M' را وارون

ماتریس M می‌نامند و آن را با M^{-1} نشان می‌دهند.

۲۰۷.۹ - قضیه - چنانچه M يك ماتریس مربع رسته (n, n) با عنصرهای متعلق به K باشد شرطهای زیرهم ارزند :

(I) - ماتریس M وارون پذیر است .

(II) - ماتریس tM وارون پذیر است .

(III) - يك ماتریس M' از رسته (n, n) وجود دارد به طوریکه

$$. MM' = I_n$$

(IV) - يك ماتریس M'' از رسته (n, n) وجود دارد به قسمی که

$$. M''M = I_n$$

(V) - سطرهای M (هر سطر به صورت عنصری از K^n در نظر گرفته

می شود) نوابستگی خطی دارند .

(VI) - ستونهای M (هر ستون به صورت عنصری از K^n در نظر گرفته

می شود) نوابستگی خطی دارند .

(VII) - رتبه M برابر با n است .

به علاوه چنانچه شرطهای بالا برقرار باشند داریم :

$$M' = M'' = M^{-1}$$

اثبات - بنابر ۷.۱۶.۸، (I) \iff (II) . همچنین با تعویض نقش های M و tM

(II) \iff (I) . با توجه به شماره ۴.۱۱.۸ :

$$(I) \iff (III) \iff (IV) \iff (VII)$$

و از شماره ۸.۶.۹ نتیجه می شود که (V) و (VII) هم ارزند . سرانجام از ۹.۲.۹

هم ارزی (VI) و (VII) به دست می آید . چنانچه شرطهای بالا برقرار باشند ، با توجه

به ۱۶.۵.۲ چنین داریم $M' = M'' = M^{-1}$.

۲۰۷.۹ - قضیه - اگر M يك ماتریس وارون پذیر باشد داریم :

$${}^t(M^{-1}) = ({}^tM)^{-1}$$

اثبات این قضیه از شماره ۶.۸ ، ۷.۰ نتیجه می شود .

۱.۷.۹- به علت وجود برابری ${}^t(M^{-1}) = ({}^tM)^{-1}$ ، در نوشتن ${}^t(M^{-1})$ و $({}^tM)^{-1}$ از بکار بردن پرانتز خودداری می‌کنند و به‌طور ساده می‌نویسند ${}^tM^{-1}$.

۸.۹- تعویض پایه

۱.۸.۹- فضای برداری E و دو پایه (e_1, e_2, \dots, e_n) و $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ از E را در نظر می‌گیریم.

تعریف - ماتریس M از رسته (n, n) ، که عنصرهای ستون j ام آن $(j=1, 2, \dots, n)$ مؤلفه‌های بردار e'_j نسبت به پایه (e_1, e_2, \dots, e_n) می‌باشد، ماتریس تعویض پایه (e_1, e_2, \dots, e_n) به پایه $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ نامیده می‌شود.

۲.۸.۹- بنا بر ۱.۲.۹ ماتریس M نسبت به پایه (e_1, e_2, \dots, e_n) عبارت است از ماتریس گسترش خطی ای که بردار e_i را به e'_i بدل می‌کند $(i=1, 2, \dots, n)$.

۳.۸.۹- با توجه به ۱.۲.۹ ماتریس M ماتریس گسترش خطی id_E نسبت به پایه‌های (e_1, \dots, e_n) و (e'_1, \dots, e'_n) ، (با رعایت ترتیب پایه‌ها) می‌باشد.

۴.۸.۹- فرض می‌کنیم N ماتریس تعویض پایه (e_1, e_2, \dots, e_n) به پایه $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ باشد. از ۳.۸.۹ نتیجه می‌شود که N ماتریس گسترش خطی

id_E نسبت به پایه‌های (e_1, \dots, e_n) و (e'_1, \dots, e'_n) است. اما با در نظر گرفتن

۹.۳.۹ ماتریس NM ماتریس گسترش خطی $\text{id}_E \cdot \text{id}_E = \text{id}_E$ نسبت به پایه‌های (e'_1, \dots, e'_n) و (e'_1, \dots, e'_n) می‌باشد، بنابراین $NM = I_n$.

در نتیجه ماتریس M وارون پذیر است و داریم $N = M^{-1}$.

۵.۸.۹- اثر تعویض پایه روی مؤلفه‌های یک بردار - بار دیگر فرض‌های

شمارهٔ پیش را در نظر می‌گیریم. چنانچه x برداری از E و مؤلفه‌های آن نسبت به پایه‌های (e_1, \dots, e_n) و (e'_1, \dots, e'_n) به ترتیب $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ و (μ_1, \dots, μ_n)

باشد، داریم:

$$(1) \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

زیرا اگر فرمول (۱) شماره ۴.۵.۹ را با فرض $u = \text{id}_E$ و $E = F$ و (e'_1, \dots, e'_n) و پایه اول و (e_1, e_2, \dots, e_n) پایه دوم به کار ببریم، با توجه به ۳.۸.۹ فرمول اول (۱) به دست می آید. فرمول دوم را می توان مانند فرمول اول اثبات کرد، و یا آن را از ضرب دو طرف فرمول اول (۱) (از چپ) در ماتریس M^{-1} نتیجه گرفت.

۶.۸.۹- اثر تعویض پایه روی ماتریس یک گسترش خطی - فضاهای

برداری E و F روی هیات K داده شده اند. گسترش خطی u متعلق به $\mathcal{L}(E, F)$ و دوپایه (e_1, \dots, e_m) و (e'_1, \dots, e'_m) از E و همچنین دوپایه (f_1, \dots, f_n) و (f'_1, \dots, f'_n) از F را در نظر می گیریم. چنانچه R ماتریس تعویض پایه (e_1, \dots, e_m) به (e'_1, \dots, e'_m) و S ماتریس تعویض پایه (f_1, \dots, f_n) به (f'_1, \dots, f'_n) و U ماتریس گسترش خطی u نسبت به پایه های (e_1, \dots, e_m) و (f_1, \dots, f_n) باشد، ماتریس گسترش خطی u نسبت به پایه های (e'_1, \dots, e'_m) و (f'_1, \dots, f'_n) باشد، که آنرا با U' نشان می دهیم به وسیله فرمول زیر داده می شود:

$$(2) \quad U' = S^{-1}UR$$

برای آشکار شدن این مطلب شمای زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{array}{ccccc} \text{id}_E & u & \text{id}_F & & \\ E & \longrightarrow & E & \longrightarrow & F \longrightarrow F \\ (e'_i) & & (e_i) & & (f_i) \quad (f'_i) \end{array}$$

چون ماتریس گسترش id_E نسبت به پایه های (e'_1, \dots, e'_m) و (e_1, \dots, e_m) و برابر با R و ماتریس گسترش u نسبت به پایه های (e_1, \dots, e_m) و (f_1, \dots, f_n) و

برابر با U و ماتریس گسترش id_F نسبت به پایه‌های (f_1, \dots, f_n) و (f'_1, \dots, f'_n) برابر با S^{-1} می‌باشد (۴.۸.۹)، پس بنابراین شماره ۹.۳.۹ ماتریس گسترش:

$$\text{id}_F \circ u \circ \text{id}_E = u$$

نسبت به پایه‌های (e'_1, \dots, e'_m) و (f'_1, \dots, f'_n) ، یعنی ماتریس U' ، برابر با $S^{-1}UR$ است.

۷.۸.۹- در شماره ۴.۸.۹ دیدیم که ماتریس تعویض پایه وارون پذیر است. به وارون فرض می‌کنیم (e_1, \dots, e_n) یک پایه فضای برداری E و M یک ماتریس وارون پذیر از رسته (n, n) باشد. برداری از E را که مؤلفه‌های آن نسبت به پایه (e_1, \dots, e_n) عنصرهای ستون j ام ماتریس M باشند e'_j می‌نامیم. گسترش خطی E در E را که e_1 را به e'_1 ، e_2 را به e'_2 ، \dots ، e_n را به e'_n بدل می‌کند، در نظر می‌گیریم. ماتریس این گسترش نسبت به پایه (e_1, \dots, e_n) همان M می‌باشد و در نتیجه وارون پذیر است. بنابراین (e'_1, \dots, e'_n) یک پایه فضای برداری E می‌باشد [(IV) . ۶.۸.۸] و روشن است که M ماتریس تعویض پایه (e_1, \dots, e_n) به (e'_1, \dots, e'_n) است.

۹.۹- ماتریس‌های هم‌ارز

۱.۹.۹- تعریف - دو ماتریس M و M' از رسته (n, m) را هم‌ارز می‌نامند هرگاه یک ماتریس وارون پذیر P از رسته (n, n) و یک ماتریس وارون پذیر Q از رسته (m, m) یافت شود به طوری که $M' = PMQ$ باشد.

۲.۹.۹- ماتریس گسترش خطی u (متعلق به $\mathcal{L}(E, F)$) نسبت به پایه‌های (e_1, \dots, e_m) و (f_1, \dots, f_n) را M می‌نامیم. برای اینکه M' با M هم‌ارز باشد بایاویسند است که M' ماتریس گسترش خطی u نسبت به پایه‌های (e'_1, \dots, e'_m) و (f'_1, \dots, f'_n) باشد.

زیرا اگر شرط بالا برقرار و R ماتریس تعویض پایه (e_1, \dots, e_m) به (e'_1, \dots, e'_m) و S ماتریس تعویض پایه (f_1, \dots, f_n) به (f'_1, \dots, f'_n) باشد، با توجه به ۶.۸.۹ خواهیم داشت $M' = S^{-1}MR$. و چون R و S^{-1} وارون پذیرند M و M' هم‌ارز می‌باشند.

به وارون فرض می‌کنیم M و M' هم‌ارز و P و Q ماتریس‌های نام‌برده در تعریف ۱.۹.۹ باشند. بنابراین شماره ۷.۸.۹ یک پایه (e'_1, \dots, e'_m) از فضای برداری E وجود دارد به طوری که Q ماتریس تعویض پایه (e_1, \dots, e_m) به (e'_1, \dots, e'_m) باشد. همچنین یک پایه (f'_1, \dots, f'_n) از فضای برداری F وجود دارد به قسمی که P^{-1} ماتریس تعویض پایه (f_1, \dots, f_n) به (f'_1, \dots, f'_n) باشد. بنابراین با توجه به ۶.۸.۹ ماتریس گسترش خطی u نسبت به پایه‌های (e'_1, \dots, e'_m) و (f'_1, \dots, f'_n) عبارت است از $(P^{-1})^{-1}MQ = PMQ = M'$.

۳.۹.۹ - از آنچه که در شماره ۲.۹.۹ بیان گردید نتیجه می‌شود که هم‌ارزی ماتریس‌ها یک بستگی هم‌ارزی است (این مطلب درستی نام‌گذاری بالا را می‌رساند).

۴.۹.۹ - همچنین از شماره‌های ۱۰.۲.۹ و ۲.۹.۹ نتیجه می‌شود که دو ماتریس هم‌ارز دارای یک رتبه می‌باشند. به وارون می‌خواهیم ثابت کنیم که دو ماتریس n سطری و m ستونی که رتبه آنها برابر باشد هم‌ارزند. به بیان دقیق‌تر:

قضیه - چنانچه ماتریس U از رسته (n, m) و رتبه آن r باشد، U هم‌ارز ماتریس زیر است:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 \xrightarrow{\quad r \quad} & \xrightarrow{\quad m-r \quad} \\
 \hline
 \begin{array}{cccccc|cccc}
 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

اثبات:

۱ - با توجه به شماره ۲.۹.۹، کافی است ثابت کنیم که اگر F و E دو فضای برداری با بعدهای m و n و u یک گسترش خطی در E و F رتبه r باشد، یک پایه

از E و یک پایه از F وجود دارد به طوری که ماتریس گسترش u نسبت به این پایه‌ها همان ماتریس بالا باشد.

۲ - چنانچه N هسته گسترش خطی u باشد، N دارای یک زیر فضای متمم در E است (۱۰.۸، ۴) که آنرا M می‌نامیم. اگر تعدید گسترش u به M را با v نشان دهیم هسته v برابر با $\{0\} = M \cap N$ می‌باشد (۲.۰.۸)؛ پس v انژکتیو است (۷.۰.۳). و چون $u(N) = \{0\}$ می‌باشد بنابراین $۲.۰.۸$ داریم:

$$v(M) = u(M) = u(M) + u(N) = u(M + N) = u(E)$$

بنابراین v یک ایزومرفیسم M روی $u(E)$ است و در نتیجه با توجه به ۲.۱۱.۸ داریم:

$$\dim M = \dim u(E) = r$$

۳ - فرض می‌کنیم (e_1, \dots, e_r) یک پایه M باشد. گسترش v این پایه را به یک پایه (f_1, \dots, f_r) از زیر فضای برداری $u(E)$ بدل می‌کند. از افزودن پایه (e_{r+1}, \dots, e_m) از زیر فضای N ، به پایه (e_1, \dots, e_r) از M یک پایه از فضای E به دست می‌آید (۷.۸.۸). همچنین با افزودن بردارهایی به پایه (f_1, \dots, f_r) یک پایه F را تشکیل می‌دهیم. در این صورت ماتریس گسترش u نسبت به پایه‌های بدست آمده برای E و F همان ماتریس مورد نظر است (ماتریس صفحه ۲۱۰). زیرا داریم:

$$u(e_1) = f_1, \dots, u(e_r) = f_r, u(e_{r+1}) = 0, \dots, u(e_m) = 0$$

۱۰.۹ - ماتریس‌های همانند

۱۰.۹.۱ - تعریف - دو ماتریس مربع M و M' از رسته (n, n) را همانند می‌گویند چنانچه یک ماتریس وارون پذیر P از رسته (n, n) یافت شود به طوری که $M' = PMP^{-1}$ باشد.

۱۰.۹.۲ - فرض می‌کنیم M ماتریس یک گسترش خطی E در E نسبت به یک پایه داده شده از E باشد (۲.۲.۹). هنگامی که می‌گوییم ماتریس M' همانند M است به این معنی است که M' ماتریس همین گسترش خطی نسبت به یک پایه دیگر E می‌باشد (این مطالب مانند ۲.۹.۹ اثبات می‌گردد). از اینجا نتیجه می‌شود که همانندی ماتریس‌ها یک بستگی هم‌ارزی است.

۳.۱۵.۹ - روشن است که دو ماتریس همانند هم ارزند، اما در حالت کلی دو ماتریس هم ارز همانند نیستند (حتی اگر ماتریس ها مربع باشند).

۴.۱۵.۹ - چنانچه M یک ماتریس مربع باشد، ساده ترین ماتریس M' همانند M را می توان به دست آورد.

بدین منظور اگر E را یک فضای برداری با بعد با پایان و u را عنصری از $\mathcal{L}(E, E)$ بگیریم، به جای پیدا کردن M' می توان یک پایه E را یافت به طوری که ماتریس گسترش u نسبت به این پایه ساده ترین صورت ممکن را داشته باشد. این مطلب را در آینده بررسی خواهیم کرد.

۱۱.۹ - ماتریس یک فرم دوخطی

۱.۱۱.۹ - فضای برداری E روی هیأت K داده شده است. پایه (e_1, \dots, e_n) از E و فرم دوخطی f را روی E در نظر می گیریم. ماتریس $[a_{ij}]$ از رسته (n, n) را به قسمی که $a_{ij} = f(e_i, e_j)$ باشد، ماتریس فرم دوخطی f نسبت به پایه (e_1, \dots, e_n) می نامند.

۲.۱۱.۹ - اگر مجموعه فرم های دوخطی روی E را با \mathcal{L} و مجموعه ماتریس های از رسته (n, n) با عنصرهای واقع در K را با M نشان دهیم، بنا بر شماره های ۱۷.۸ و ۶.۱۷.۸ گسترش $f \rightarrow [a_{ij}]$ در مجموعه \mathcal{L} در مجموعه M دوسویی است.

۳.۱۱.۹ - فرض می کنیم $M = [a_{ij}]$ ماتریس گسترش f نسبت به پایه (e_1, \dots, e_n) باشد. چنانچه (e'_1, \dots, e'_n) یک پایه دیگر E و $M' = [a'_{ij}]$ ماتریس گسترش f نسبت به پایه (e'_1, \dots, e'_n) باشد، برای ماتریس تعویض پایه (e_i) به (e'_i) که آنرا با P می نمایم چنین داریم:

$$M' = {}^t P M P$$

زیرا اگر قرار دهیم $P = [\lambda_{ij}]$ خواهیم داشت:

$$e'_i = \sum_{k=1}^n \lambda_{ki} e_k$$

پس :

$$\begin{aligned} \alpha'_{ij} &= f(e'_i, e'_j) = f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_{ki} e_k, \sum_{l=1}^n \lambda_{lj} e_l\right) = \sum_{k,l=1}^n \lambda_{ki} \lambda_{lj} f(e_k, e_l) \\ &= \sum_{k,l=1}^n \lambda_{ki} \lambda_{lj} \alpha_{kl} \end{aligned}$$

اکنون اگر قراردادیم ${}^tP = [\mu_{ij}]$ که در آن $\mu_{ij} = \lambda_{ji}$ است، دیده می‌شود که عنصر سطر i ام و ستون j ام ماتریس tPMP عبارت است از :

$$\sum_{k=1}^n \mu_{ik} \left(\sum_{l=1}^n \alpha_{kl} \lambda_{lj} \right) = \sum_{k,l=1}^n \lambda_{ki} \alpha_{kl} \lambda_{lj} = \alpha'_{ij}$$

از اینجا برای $M' = {}^tPMP$ به دست می‌آید .

فصل دهم

دترمینان‌ها

در این فصل وسیله‌هایی برای محاسبات عملی در حل برخی از مسائل هندسی مانند شناخت اینکه آیا یک گسترش خطی وارون پذیر است؟ آیا یک دستگاه از بردارها وابستگی خطی دارند؟ ... داده می‌شود. این وسیله‌های عملی محاسبه بر روی مفهوم دترمینان پایه گذاری شده‌است. تا پایان شماره ۳.۱۰ از این فصل، تنها مقدمه‌های لازم برای بیان این مطالب گفته شده و این مقدمه‌ها تا حدی نیز مشکل است. در پایان فصل به بررسی درهندسه معمولی پرداخته‌ایم.

۱.۱۰ - نشان یک تبدیل

۱.۱.۱۰ - گروه تبدیل‌های مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ را در نظر می‌گیریم و آن را با G_n نشان می‌دهیم. به هر عنصر π از G_n دو شمار زیر را وابسته می‌کنیم:

۱° - شماره وارونی (یا انورسیون) های π که آنرا با v_π می‌نماییم ($v_\pi \geq 0$).

۲° - نشان π که آنرا با ε_π نمایش می‌دهیم ($\varepsilon_\pi = \pm 1$).

۲.۱.۱۰ - شماره وارونی‌های π - مجموعه بخش‌های دو عنصری $\{1, 2, \dots, n\}$ را با A و مجموعه عنصرهایی مانند $\{i, j\}$ از مجموعه A را به قسمی که تحدید π به $\{i, j\}$ کاهش یافته باشد با B نشان می‌دهیم. پس عبارت است از مجموعه عنصرهایی به صورت $\{i, j\}$ متعلق به A به طوریکه اگر $i > j$ باشد داشته باشیم $\pi(i) < \pi(j)$ و چنانچه $i < j$ باشد داشته باشیم $\pi(i) > \pi(j)$. هر عنصر B را یک وارونی تبدیل می‌نامند. پس شماره وارونی‌های π ، یعنی v_π ، همان شماره عنصرهای B می‌باشد.

۳.۱.۱۰ - مثال - چنانچه $n=5$ و $\pi=(5, 3, 2, 1, 4)$ باشد، عنصرهای A عبارتند از $\{1, 2\}$ ، $\{1, 3\}$ ، $\{1, 4\}$ ، $\{1, 5\}$ ، $\{2, 3\}$ ، $\{2, 4\}$ ، $\{2, 5\}$ ، $\{3, 4\}$ ، $\{3, 5\}$ و $\{4, 5\}$ و عنصرهای B مجموعه‌های دو عنصری

می‌باشند. بنابراین $v_{\pi} = v$ است.

$\{1, 2\}$ ، $\{1, 3\}$ ، $\{1, 4\}$ ، $\{1, 5\}$ ، $\{1, 6\}$ ، $\{2, 3\}$ ، $\{2, 4\}$ و $\{3, 4\}$

۴.۱.۱۰ - نشان π - شمار درست $\varepsilon_{\pi} = (-1)^{v_{\pi}}$ نشان π نامیده می‌شود.

۵.۱.۱۰ - هرگاه شمار درست v_{π} زوج باشد خواهیم داشت $\varepsilon_{\pi} = 1$. در این صورت

تبدیل π را زوج می‌نامند. چنانچه v_{π} فرد باشد یعنی $\varepsilon_{\pi} = -1$ ، تبدیل را فرد می‌گویند.

۶.۱.۱۰ - قضیه - برای هر دو عنصر دلخواه π و π' متعلق به G_n برابری

$$\varepsilon_{\pi' \circ \pi} = \varepsilon_{\pi} \varepsilon_{\pi'}$$

برقرار است.

اثبات - مجموعه عنصرهایی مانند $\{i, j\}$ از A را به قسمی که تحدید π (تحدید

π') به $\{i, j\}$ کاهش می‌باشد با B (با B') نشان می‌دهیم. پس داریم:

$$(1) \quad v_{\pi} = B \quad \text{شماره عنصرهای}$$

$$(2) \quad v_{\pi'} = B' \quad \text{شماره عنصرهای}$$

همچنین مجموعه عنصرهای $\{i, j\}$ متعلق به A را به طوری که $\{\pi(i), \pi(j)\}$ متعلق

به B' باشد با C می‌نماییم. گسترش $\{\pi(i), \pi(j)\} \rightarrow \{i, j\}$ یک گسترش

دوسویی A روی A است، زیرا π یک گسترش دوسویی $\{1, 2, \dots, n\}$ روی

$\{1, 2, \dots, n\}$ می‌باشد. پس شماره عنصرهای B' برابر با شماره عنصرهای C است

و از آنجا:

$$(3) \quad v_{\pi'} = C \quad \text{شماره عنصرهای}$$

اکنون فرض می‌کنیم $\{i, j\}$ متعلق به A و مثلاً $i < j$ باشد. چهار حالت زیر پیش

می‌آید:

$$1 - \{i, j\} \in B \cap C \quad \text{در این صورت:}$$

$$\pi(i) > \pi(j) \quad , \quad \{\pi(i), \pi(j)\} \in B'$$

پس خواهیم داشت $\pi'(\pi(i)) < \pi'(\pi(j))$.

۲- $\{i, j\} \in B \cap C$ ، در این صورت :

$$\pi(i) > \pi(j) \quad , \quad \{\pi(i) , \pi(j)\} \notin B'$$

پس خواهیم داشت $\pi'(\pi(i)) > \pi'(\pi(j))$.

۳- $\{i, j\} \in B \cap C$ ، در این صورت :

$$\pi(i) < \pi(j) \quad , \quad \{\pi(i) , \pi(j)\} \in B'$$

پس خواهیم داشت $\pi'(\pi(i)) > \pi'(\pi(j))$.

۴- $\{i, j\} \in B \cap C$ ، در این صورت :

$$\pi(i) < \pi(j) \quad , \quad \{\pi(i) , \pi(j)\} \notin B'$$

پس خواهیم داشت $\pi'(\pi(i)) < \pi'(\pi(j))$.

چنانچه n_1, n_2, n_3, n_4 به ترتیب شمارهٔ عنصرهای $B \cap C, B \cap C, B \cap C$ و $B \cap C$ باشند، از مطالب بالا نتیجه می‌شود :

$$(۴) \quad v_{\pi' \circ \pi} = n_2 + n_3$$

به علاوه بنابر (۱) داریم :

$$(۵) \quad v_{\pi} = B \text{ شمارهٔ عنصرهای} = n_1 + n_2$$

همچنین بنابر (۳) داریم :

$$(۶) \quad v_{\pi'} = C \text{ شمارهٔ عنصرهای} = n_1 + n_3$$

از مقایسهٔ (۴) و (۵) و (۶) خواهیم داشت :

$$v_{\pi' \circ \pi} = v_{\pi'} + v_{\pi} - 2n_1$$

$$\varepsilon_{\pi' \circ \pi} = \varepsilon_{\pi} \varepsilon_{\pi'}$$

پس

۷۰۱۰۱۰ - قضیهٔ ۶۰۱۰۱۰ را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد :

گسترش $\pi \rightarrow \varepsilon_{\pi}$ یک همومرفیسم گروه G_n در گروه ضربی $\{1, -1\}$ است .

از اینجا نتیجه می‌شود که نشان تبدیل همانی $+1$ می‌باشد (این مطلب آشکار است) و داریم $\varepsilon_{\pi^{-1}} = (\varepsilon_{\pi})^{-1}$ و چون در گروه $\{1, -1\}$ هر عنصر با وارون خود برابر است پس خواهیم داشت :

$$\varepsilon_{\pi^{-1}} = \varepsilon_{\pi}$$

۸.۱.۱۰- تعریف- عنصر π از G_n را یک جایگشت (یا یک ترانسپو-زیسیون) می‌گویند هرگاه دو شمار متمایز i و j از $\{1, 2, \dots, n\}$ وجود داشته باشد به طوری که $\pi(i) = j$ ، $\pi(j) = i$ ، و $\pi(k) = k$ باشد ($k \neq i, j$).

۹.۱.۱۰- روشن است که هر جایگشت با وارون خود برابر می‌باشد.

۱۰.۱.۱۰- قضیه- هر جایگشت تبدیلی است فرد.

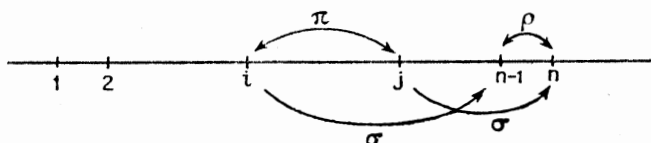
اثبات- دو عنصر متمایز i و j از $\{1, 2, \dots, n\}$ و جایگشت π متعلق به G_n را، که i و j را بهم بدل می‌کند، در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم ρ جایگشتی از G_n باشد که n و $n-1$ را به هم بدل می‌کند. چنانچه σ عنصری از G_n باشد که i را به $n-1$ و j را به n بدل کند، قرار می‌دهیم $\pi' = \sigma^{-1} \rho \sigma$. اگر p عنصری از $\{1, 2, \dots, n\}$ و متمایز از i و j باشد $\sigma(p)$ متمایز از $n-1$ و n است، پس $\rho(\sigma(p)) = \sigma(p)$ و از آنجا $\pi'(p) = p$. به علاوه چنین داریم :

$$\pi'(i) = \sigma^{-1} \rho(n-1) = \sigma^{-1}(n) = j, \quad \pi'(j) = \sigma^{-1} \rho(n) = \sigma^{-1}(n-1) = i$$

پس $\pi' = \pi$ و بنابر ۶.۱.۱۰ از برابری $\pi = \sigma^{-1} \rho \sigma$ نتیجه می‌شود :

$$\varepsilon_{\pi} = \varepsilon_{\sigma^{-1}} \varepsilon_{\rho} \varepsilon_{\sigma} = \varepsilon_{\rho}$$

اما برابری $\varepsilon_{\rho} = 1$ آشکار است. پس خواهیم داشت $\varepsilon_{\rho} = -1$ و $\varepsilon_{\pi} = -1$.



شکل ۲۰

۱۱.۱.۱۰- قضیه- هر عنصر G_n ترکیبی از جایگشت‌هاست.

اثبات- شمار درست p را که در نابرابری های $0 \leq p \leq n$ صدق می کند در نظر می گیریم . مجموعه تبدیل های σ متعلق به G_n را به قسمی که $\sigma(p+1) = p+1$ ، $\sigma(p+2) = p+2$ ، \dots ، $\sigma(n) = n$ باشد با E_p و حکم زیر را با (A_p) نشان می دهیم :

هر عنصر E_p ترکیبی از جایگشت ها می باشد .

چون E_0 تنها از تبدیل همانی (توان دوم هر جایگشت) تشکیل می گردد پس حکم (A_0) برقرار است . اکنون می خواهیم ثابت کنیم که از حکم (A_p) حکم (A_{p+1}) نتیجه می شود . در این صورت (A_n) برقرار و چون $E_n = G_n$ است قضیه ثابت می گردد . پس فرض می کنیم (A_p) برقرار و σ عنصری از E_{p+1} باشد ، باید ثابت کنیم که σ از ترکیب جایگشت ها بدست می آید . داریم :

$$\sigma(p+2) = p+2 , \sigma(p+3) = p+3 , \dots , \sigma(n) = n$$

پس $\sigma(p+1) = q$ شمار درست مثبتی است که کوچکتر یا برابر با $p+1$ می باشد . اگر $q = p+1$ باشد σ عنصری از E_p خواهد شد و بنابراین از ترکیب جایگشت ها بدست می آید . چنانچه $q \neq p+1$ و τ جایگشتی باشد که q و $p+1$ را به هم بدل می کند ، قرار می دهیم $\rho = \tau\sigma$ ، در نتیجه خواهیم داشت :

$$\rho(p+2) = \tau(p+2) = p+2 , \rho(p+3) = \tau(p+3) = p+3 , \dots , \rho(n) = n$$

و :

$$\rho(p+1) = \tau(q) = p+1$$

از اینجا نتیجه می شود که ρ متعلق به E_p است و بنا به فرض از حاصل ضرب جایگشت ها به دست می آید . به عبارت دیگر داریم $\rho = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_r$ ، پس خواهیم داشت :

$$\sigma = \tau^{-1} \rho = \tau_r \tau_{r-1} \dots \tau_1 \tau_r$$

۲.۱۰ - فرم‌های چند خطی متناوب

۱.۲.۱۰ - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری و :

$$(x_1, x_2, \dots, x_p) \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

یک فرم چند خطی روی E باشد. فرم f را متناوب می‌نامند اگر هنگامی که دو تا از بردارهای x_i برابر باشند، $f(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$ باشد.

۲.۲.۱۰ - قضیه - چنانچه فرم چند خطی f متناوب باشد، برای

هر تبدیل σ از $\{1, 2, \dots, p\}$ داریم :

$$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon_{\sigma} f(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

اثبات :

۱ - فرض می‌کنیم $p=2$ باشد. باید ثابت کنیم $f(y, x) = -f(x, y)$

چون f یک فرم دوخطی و متناوب است داریم :

$$\begin{aligned} 0 = f(x+y, x+y) &= f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y) = \\ &= f(x, y) + f(y, x) \end{aligned}$$

$$f(x, y) = -f(y, x) \quad \text{پس}$$

۲ - فرض می‌کنیم شمار درست p دلخواه و σ جایگشتی باشد که دواندیس i و j

را به یکدیگر بدل می‌کند. با در نظر گرفتن ۱.۰.۱.۱۰ باید ثابت کنیم :

$$\begin{aligned} &f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_p) \\ &= -f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_p) \end{aligned}$$

چنانچه عنصرهای x و y متعلق به E باشند قرار می‌دهیم :

$$g(x, y) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \dots, x_p)$$

به‌طوریکه دیده می‌شود $g(x, y)$ یک فرم دوخطی است، و چون f متناوب است پس

$g(x, x) = 0$ می‌باشد؛ یعنی g نیز متناوب است. با استفاده از قسمت اول اثبات قضیه

داریم $g(x_i, x_j) = -g(x_j, x_i)$ که با توجه به تعریف g درستی برابری مورد نظر آشکار می‌گردد.

۳- اکنون به اثبات حالت کلی می‌پردازیم. می‌دانیم که هر تبدیل مجموعه $\{1, 2, \dots, p\}$ از حاصل ضرب جایگشت‌ها تشکیل شده است. فرض می‌کنیم قضیه برای یک تبدیل ρ که حاصل ضرب r جایگشت است برقرار باشد و آن را برای تبدیل $\sigma = \tau\rho$ ثابت می‌کنیم (τ یک جایگشت است). چنانچه قرار دهیم:

$$x_{\tau(1)} = y_1, \dots, x_{\tau(p)} = y_p$$

خواهیم داشت:

$$x_{\sigma(i)} = x_{\tau(\rho(i))} = y_{\rho(i)}$$

و در نتیجه:

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = f(y_{\rho(1)}, \dots, y_{\rho(p)})$$

با توجه به فرض بازگشت برابری بالا چنین نوشته می‌شود:

$$f(y_{\rho(1)}, \dots, y_{\rho(p)}) = \varepsilon_\rho f(y_1, \dots, y_p) = \varepsilon_\rho f(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(p)})$$

که با استفاده از بخش دوم اثبات قضیه به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) &= \varepsilon_\tau \varepsilon_\rho f(x_1, \dots, x_p) = \varepsilon_{\tau\rho} f(x_1, \dots, x_p) \\ &= \varepsilon_\sigma f(x_1, \dots, x_p) \end{aligned}$$

بدین ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

۳.۲.۱۰- قضیه- چنانچه فرم چندخطی f متناوب و بردارهای x_2, x_1

x_p, \dots, x_1 بستگی خطی داشته باشند داریم $f(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$.

اثبات- اگر x_1, \dots, x_p بستگی خطی داشته باشند یکی از بردارها مثلاً x_i

به صورت:

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{i-1} x_{i-1} + \lambda_{i+1} x_{i+1} + \dots + \lambda_p x_p$$

نوشته می‌شود که در آن λ_i ها اسکارلرند. پس خواهیم داشت:

$$f(x_1, \dots, x_p) = \sum_{j \neq i} \lambda_j f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_p)$$

وهرجمله $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_p)$ از مجموع بالا برابر با صفر است زیرا x_j با یکی از بردارهای $x_1, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{i+1}, \dots, x_p$ برابر است.

۴.۲.۱۰ - نتیجه - فرض می‌کنیم f یک فرم چند خطی متناوب باشد.

اگر به یکی از x_i ها ترکیبی خطی از x_j ها را ($j \neq i$) بیفزاییم مقدار $f(x_1, \dots, x_p)$ تغییر نمی‌کند.

زیرا اگر y یک ترکیب خطی از x_j ها باشد ($j \neq i$) با توجه به ۳.۲.۱۰ خواهیم داشت $f(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_p) = 0$ و از آنجا:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + y, x_{i+1}, \dots, x_p) \\ &= f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_p) \\ &\quad + f(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_p) \\ &= f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_p) \end{aligned}$$

۳.۱۰ - فرم‌های n خطی متناوب روی فضای برداری n بعدی

۱.۳.۱۰ - محاسبه‌های مقدماتی - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری،

(e_1, e_2, \dots, e_n) یک پایه E و g یک فرم n خطی متناوب روی E باشد. n بردار x_1, x_2, \dots, x_n متعلق به E را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

x_1 به مؤلفه‌های $\lambda_1^1, \lambda_2^1, \dots, \lambda_n^1$

x_2 به مؤلفه‌های $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$

.....

x_n به مؤلفه‌های $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_n^n$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_n) &= g(\lambda_1^1 e_1 + \lambda_2^1 e_2 + \dots + \lambda_n^1 e_n, \dots, \lambda_1^n e_1 + \lambda_2^n e_2 \\ &\quad + \dots + \lambda_n^n e_n) \end{aligned}$$

چنانچه طرف دوم برابری بالا را با توجه به اینکه g یک فرم n خطی است بسط دهیم، یک مجموع n^n جمله‌ای به دست می‌آید که هر جمله آن به صورت:

$$\lambda_{i_1}^1 \lambda_{i_2}^2 \cdots \lambda_{i_n}^n g(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})$$

است که در آن i_1, i_2, \dots, i_n عنصرهای دلخواهی از $\{1, 2, \dots, n\}$ می‌باشند. چون g متناوب است جمله‌های بالا برابر با صفرند مگر اینکه همه اندیس‌های i_1, i_2, \dots, i_n متمایز باشند، به عبارت دیگر جمله‌های بالا صفرند مگر اینکه $i_1 = \sigma(1), i_2 = \sigma(2), \dots, i_n = \sigma(n)$ باشد، که در آن σ متعلق به گروه تبدیل‌های $\{1, 2, \dots, n\}$ یعنی G_n ، می‌باشد. پس می‌توان نوشت:

$$g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in G_n} \lambda_{\sigma(1)}^1 \lambda_{\sigma(2)}^2 \cdots \lambda_{\sigma(n)}^n g(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)})$$

که با استفاده از قضیه ۲.۲.۱۰ خواهیم داشت:

$$(1) \quad g(x_1, \dots, x_n) = \left[\sum_{\sigma \in G_n} \varepsilon_{\sigma} \lambda_{\sigma(1)}^1 \lambda_{\sigma(2)}^2 \cdots \lambda_{\sigma(n)}^n \right] g(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

۲.۲.۱۰-قضیه- فرض می‌کنیم E یک فضای برداری و (e_1, e_2, \dots, e_n)

یک پایه E باشد.

(I) - برای هر دستگاه n برداری:

$$x_1 = \lambda_1^1 e_1 + \lambda_1^2 e_2 + \cdots + \lambda_1^n e_n, \dots, x_n = \lambda_n^1 e_1 + \lambda_n^2 e_2 + \cdots + \lambda_n^n e_n$$

از بردارهای E قرار می‌دهیم:

$$(2) \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in G_n} \varepsilon_{\sigma} \lambda_{\sigma(1)}^1 \lambda_{\sigma(2)}^2 \cdots \lambda_{\sigma(n)}^n$$

در این صورت f تنها فرم n خطی متناوب روی E است که برای آن داریم:

$$f(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$$

(II) - اگر g یک فرم n خطی متناوب روی E باشد و قرار دهیم:

$$g(e_1, e_2, \dots, e_n) = \mu$$

برای هر دستگاه x_1, \dots, x_r, x_n از بردارهای E ، داریم:

$$g(x_1, \dots, x_n) = \mu f(x_1, \dots, x_n)$$

اثبات:

الف - هر جملهٔ مجموع (۲) یک تابع خطی از هر یک از بردارهای x_1, \dots, x_r, x_n است. پس f یک فرم n خطی روی E می‌باشد. اکنون نشان می‌دهیم که f متناوب است. بدین منظور فرض می‌کنیم i و j دو شماره متمایز متعلق به $\{1, 2, \dots, n\}$ باشند به قسمی که داشته باشیم $x_i = x_j$. باید ثابت کنیم که $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ است.

چنانچه τ جایگشتی باشد که i و j را به یکدیگر بدل می‌کند، زیرگروه H از G_n که به وسیلهٔ τ پدید می‌آید تنها از $\{e, \tau\}$ تشکیل می‌شود زیرا $\tau^2 = e$ است (شمارهٔ ۵.۲.۳). در G_n هر کلاس چپ نسبت به H ، یک مجموعهٔ دو عنصری است و می‌دانیم که این کلاس‌ها دوبه‌دو از هم جدا هستند و اجتماع آنها برابر با G_n می‌باشد (۱.۳.۳). در هر کلاس چپ C نسبت به H ، عنصر σ_C را انتخاب می‌کنیم (باتوجه به ۱.۳.۳ عنصر دیگر C عبارت است از $\sigma_C \tau$) و مجموعهٔ σ_C ‌ها را با A نشان می‌دهیم. در این صورت G_n اجتماع دو مجموعهٔ جدا از هم A و $A\tau$ می‌باشد و خواهیم داشت:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in A} \varepsilon_\sigma \lambda_{\sigma(1)}^1 \lambda_{\sigma(r)}^r \cdots \lambda_{\sigma(n)}^n + \sum_{\sigma \in A\tau} \varepsilon_\sigma \lambda_{\sigma(1)}^1 \lambda_{\sigma(r)}^r \cdots \lambda_{\sigma(n)}^n$$

چون $\varepsilon_\sigma = \varepsilon_\sigma \varepsilon_\tau = -\varepsilon_\sigma$ است عبارت طرف راست برابری بالا چنین نوشته می‌شود:

$$(۳) \quad \sum_{\sigma \in A} \varepsilon_\sigma [\lambda_{\sigma(1)}^1 \lambda_{\sigma(r)}^r \cdots \lambda_{\sigma(n)}^n - \lambda_{\sigma\tau(1)}^1 \lambda_{\sigma\tau(r)}^r \cdots \lambda_{\sigma\tau(n)}^n]$$

اکنون به بررسی $\lambda_{\sigma\tau(k)}^k$ می‌پردازیم. سه حالت پیش می‌آید:

$$\cdot \lambda_{\sigma\tau(k)}^k = \lambda_{\sigma(k)}^k \quad \text{در این صورت } k \neq j \text{ و } k \neq i - 1$$

۲ - $k=i$: چون در این حالت $x_i = x_j$ می باشد پس :

$$\lambda_{\sigma\tau(i)}^i = \lambda_{\sigma(j)}^i = \lambda_{\sigma(j)}^j$$

۳ - $k=j$: چون در این حالت $x_i = x_j$ می باشد پس :

$$\lambda_{\sigma\tau(j)}^j = \lambda_{\sigma(i)}^j = \lambda_{\sigma(i)}^i$$

بنابراین :

$$\lambda_{\sigma(1)}^1 \lambda_{\sigma(2)}^2 \cdots \lambda_{\sigma(n)}^n = \lambda_{\sigma\tau(1)}^1 \lambda_{\sigma\tau(2)}^2 \cdots \lambda_{\sigma\tau(n)}^n$$

پس هر یک از گروه های مجموع (۳) برابر با صفر است و این متناوب بودن f را می رساند.

ب - اگر $x_1 = e_1, \dots, x_n = e_n$ باشد برای $i \neq j$ خواهیم داشت $\lambda_i^i = 0$.

پس هر یک از جمله های مجموع (۲) برابر با صفر می باشند مگر تنها جمله ای که برای آن

$\sigma(1) = 1, \sigma(2) = 2, \dots, \sigma(n) = n$. بنابراین خواهیم داشت :

$$f(e_1, \dots, e_n) = 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1$$

پ - قسمت دوم قضیه از فرمول (۱) شماره ۱۰.۳.۱۰ نتیجه می شود .

ت - به ویژه اگر g یک فرم n خطی متناوب روی E باشد به قسمی که داشته باشیم

$$g(e_1, \dots, e_n) = 1 \quad g = f \text{ داشت} . \text{ از اینجا یکتایی } f \text{ و در نتیجه قسمت (I)}$$

قضیه ثابت می شود .

۱۰.۴ - در مینان یک دستگاه بردار نسبت به یک پایه

۱۰.۴.۱۰ - فضای برداری E را روی هیأت K در نظر می گیریم و فرض می کنیم :

$$B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$$

یک پایه E باشد . بنابر ۲.۳.۱۰ یک فرم n خطی متناوب f روی E و تنها یکی وجود

دارد به طوری که داریم :

$$f(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$$

تعریف - اگر n بردار x_1, x_2, \dots, x_n متعلق به E باشند، اسکالر

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ را **دترمینان بردارهای** x_1, x_2, \dots, x_n نسبت به پایه

B می نامند و آنرا چنین می نویسند :

$$\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

۲۰۴۱۰- چنانچه مؤلفه‌های x_i را نسبت به B با $\lambda_1^i, \lambda_2^i, \dots, \lambda_n^i$ نشان دهیم
با استفاده از قسمت (I) قضیه ۲۰۳۱۰ نتیجه می‌شود:

$$\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in G_n} \varepsilon_\sigma \lambda_{\sigma(1)}^1 \lambda_{\sigma(2)}^2 \cdots \lambda_{\sigma(n)}^n$$

۳۰۴۱۰- از تعریف ۱۰۴۱۰ به آسانی برای زیر بدست می‌آید:

$$\det_B(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$$

۴۰۴۱۰- قضیه:

(I) $\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ نسبت به هر یک از x_i ها تابعی خطی

است.

(II) - هرگاه دو تا از x_i ها برابر باشند داریم:

$$\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

(III) - اگر σ عنصری از G_n باشد داریم:

$$\det_B(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon_\sigma \det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

(IV) - چنانچه به یکی از بردارهای x_i یک ترکیب خطی از $n-1$

بردار دیگر بیفزاییم $\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ تغییر نمی‌کند.

(V) - برای اینکه $\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ برابر با صفر شود

بیاو بسنده است که x_1, x_2, \dots, x_n بستگی خطی داشته باشند.

اثبات - ویژگی‌های (I) تا (IV) همان ویژگی‌های کلی فرم‌های چند خطی

متناوب می‌باشند (شماره‌های ۱۰۲۰۱۰، ۲۰۲۰۱۰ و ۴۰۲۰۱۰).

بنابر ۳۰۲۰۱۰ اگر x_1, x_2, \dots, x_n بستگی خطی داشته باشند:

$$\det_B(x_1, \dots, x_n) = 0$$

است. اکنون فرض می‌کنیم $\det_B(x_1, \dots, x_n) = 0$ باشد. در این صورت با توجه

به بخش (II) قضیه ۲۰۳۱۰ هر فرم n خطی متناوب روی E در نقطه (x_1, \dots, x_n) از

E^n برابر با صفر خواهد شد. اما اگر x_1, \dots, x_n نوابستگی خطی داشته باشند یک

پایه E را تشکیل خواهند داد (۸۰۱۰۸) و با در نظر گرفتن بخش (I) قضیه ۲۰۳۱۰ (که

در آن x_1, x_2, \dots, x_n نقش e_1, e_2, \dots, e_n را دارند) یک فرم n خطی متناوب روی E وجود خواهد داشت که در نقطه (x_1, \dots, x_n) مخالف با صفر باشد و این با آنچه که در بالا بیان گردید ناسازگار است. پس نتیجه می‌شود که x_1, \dots, x_n بستگی خطی دارند.

۵.۴.۱۰- قضیه - چنانچه (e_1, \dots, e_n) و (e'_1, \dots, e'_n) دو پایه از فضای برداری E و x_1, \dots, x_n بردارهایی از E باشند داریم:

$$(1) \quad \det_{(e'_1, \dots, e'_n)}(x_1, \dots, x_n) = \det_{(e_1, \dots, e_n)}(x_1, \dots, x_n) \det_{(e'_1, \dots, e'_n)}(e_1, \dots, e_n)$$

اثبات- بنا بر بخش (II) قضیه ۲.۳.۱۰ یک اسکالر μ که بستگی به x_1, \dots, x_n نداشته باشد می‌توان یافت به طوری که:

$$(2) \quad \det_{(e'_1, \dots, e'_n)}(x_1, \dots, x_n) = \mu \det_{(e_1, \dots, e_n)}(x_1, \dots, x_n)$$

چنانچه قرار دهیم $x_1 = e_1, \dots, x_n = e_n$ با توجه به ۳.۴.۱۰ خواهیم داشت:

$$\det_{(e'_1, \dots, e'_n)}(e_1, \dots, e_n) = \mu \det_{(e_1, \dots, e_n)}(e_1, \dots, e_n) = \mu$$

و در نتیجه برابری (۱) از برابری (۲) به دست می‌آید.

۵.۱۰- دترمینان یک گسترش خطی E در E

۱.۰.۱۰- قضیه - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری n بعدی و u یک گسترش خطی E در E باشد. یک اسکالر λ و تنها یکی وجود دارد به طوری که برای بردارهای دلخواه x_1, \dots, x_n و پایه دلخواه B از فضای E داریم:

$$(1) \quad \det_B(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \lambda \det_B(x_1, \dots, x_n)$$

اثبات - پایه B از فضای E را در نظر می‌گیریم. از بخش‌های (I) و (II) قضیه ۴.۴.۱۰ و خطی بودن u نتیجه می‌شود که گسترش:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \det_B(u(x_1), \dots, u(x_n))$$

یک فرم n خطی متناوب روی E می‌باشد. بنا بر بخش (II) قضیه ۲.۳.۱۰ یک اسکالر λ

که بستگی به x_1, \dots, x_n ندارد، می‌توان یافت که برابری (۱) را برقرار کند. اکنون اگر B' یک پایه دیگر در E باشد داریم:

$$\begin{aligned} \det_{B'}(u(x_1), \dots, u(x_n)) &= \det_B(u(x_1), \dots, u(x_n)) \det_{B'}(B) \\ &= \lambda \det_B(x_1, \dots, x_n) \det_{B'}(B) \\ &= \lambda \det_{B'}(x_1, \dots, x_n) \quad , \quad (\text{بنابر } 0.4.10) \end{aligned}$$

پس برابری (۱) برای اسکالر λ که بستگی به x_1, \dots, x_n و پایه B ندارد برقرار است. به علاوه یکتایی λ آشکار است زیرا اگر (e_1, e_2, \dots, e_n) پایه‌ای از E باشد داریم:

$$\begin{aligned} (2) \quad \det_{(e_1, \dots, e_n)}(u(e_1), \dots, u(e_n)) &= \\ \lambda \det_{(e_1, \dots, e_n)}(e_1, \dots, e_n) &= \lambda \end{aligned}$$

۲.۰.۱۰ - تعریف - اسکالر λ که در قضیه ۱.۰.۱۰ معین گردید دترمینان u نامیده می‌شود و آنرا با $\det u$ نشان می‌دهند.

۳.۰.۱۰ - بنابر آنچه که دیده شد، برای هر پایه دلخواه B و برای هر دستگاه بردار x_1, \dots, x_n داریم:

$$(3) \quad \det_B(u(x_1), \dots, u(x_n)) = (\det u)(\det_B(x_1, \dots, x_n))$$

به ویژه چنانچه (e_1, \dots, e_n) یک پایه E باشد خواهیم داشت:

$$(4) \quad \det_{(e_1, \dots, e_n)}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \det u$$

۴.۰.۱۰ - چنانکه دیده می‌شود اگر u گسترش همانی E باشد $\det u = 1$ است. به طور کلی هرگاه u همسانی به نسبت λ باشد داریم $\det u = \lambda^n$. این مطلب را می‌توان مثلاً از فرمول (۴) و شماره ۴.۴.۱۰ (I) نتیجه گرفت.

۵.۰.۱۰ - قضیه - عنصر u از $\mathcal{L}(E, E)$ را در نظر می‌گیریم. برای اینکه u وارون پذیر باشد بایا و بسنده است که داشته باشیم $\det u \neq 0$.

اثبات - فرض می‌کنیم (e_1, \dots, e_n) یک پایه E باشد. بنابر ۴.۱.۱.۸

برای اینکه u وارون پذیر باشد بایاویسند است که u انژکتیو باشد یعنی بردارهای $u(e_1), \dots, u(e_n)$ نایستگی خطی داشته باشند (۶.۸.۸)، و این بدان معنی است که $\det_B(u(e_1), \dots, u(e_n))$ مخالف با صفر باشد (بخش (V) قضیه ۴.۴.۱۰) و در این صورت با توجه به فرمول (۴) خواهیم داشت $\det u \neq 0$.

۶.۵.۱۰- قضیه - برای هر دو عنصر u و v از $\mathcal{L}(E, E)$ داریم:

$$\det(uv) = (\det u)(\det v)$$

اثبات - عنصرهای دلخواه x_1, x_2, \dots, x_n از E و یک پایه B از آن را در نظر می گیریم. چنانچه فرمول (۳) را دوبار بکار ببریم نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} \det_B(u(v(x_1)), \dots, u(v(x_n))) &= (\det u)(\det_B(v(x_1), \dots, v(x_n))) \\ &= (\det u)(\det v)\det_B(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

به طوریکه دیده می شود برای گسترش uv ، اسکالر λ که در قضیه ۱.۵.۱۰ معین شد برابر با $(\det u)(\det v)$ است و بدین ترتیب قضیه ثابت می شود.

۷.۵.۱۰- نتیجه - اگر u وارون پذیر باشد داریم:

$$\det(u^{-1}) = (\det u)^{-1}$$

زیرا بنابر شماره های ۴.۵.۱۰ و ۶.۵.۱۰ از برابری $uu^{-1} = \text{id}_E$ نتیجه می شود:

$$(\det u)(\det u^{-1}) = 1$$

۸.۵.۱۰- در مورد $\det(u+v)$ فرمول ساده ای وجود ندارد.

۶.۱۰- دترمینان یک ماتریس مربع

۱.۶.۱۰- ماتریس n سطری و n ستونی:

$$M = \begin{bmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^n \\ \lambda_2^1 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n^1 & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^n \end{bmatrix}$$

با عنصرهای متعلق به K را در نظر می‌گیریم. ستونهای ماتریس مربع M بردارهایی از K^n هستند که آنها را به ترتیب x_1, x_2, \dots, x_n می‌نامیم. فرض می‌کنیم B پایه کانونیک K^n باشد:

تعریف - اسکالر $\det M$ نشان می‌دهند.

۲.۶.۱۰- بنا بر شماره ۲.۴.۱۰ برای $\det M$ چنین داریم:

$$\det M = \sum_{\sigma \in G_n} \varepsilon_{\sigma} \lambda_{\sigma(1)}^1 \lambda_{\sigma(2)}^2 \cdots \lambda_{\sigma(n)}^n$$

۳.۶.۱۰- دترمینان بالا را به صورت زیر نشان می‌دهند:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^n \\ \lambda_2^1 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_n^1 & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^n \end{vmatrix}$$

۴.۶.۱۰- **مثال - گروه G_2 از دو تبدیل $(1, 2)$ و $(2, 1)$ تشکیل می‌شود.**

پس بنا بر ۲.۶.۱۰ داریم:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_1^2 \\ \lambda_2^1 & \lambda_2^2 \end{vmatrix} = \lambda_1^1 \lambda_2^2 - \lambda_1^2 \lambda_2^1$$

این فرمول را می‌توان به صورت زیر نوشت که به خاطر سپردن آن آسان تر است:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

۵.۶.۱۰- **مثال -** چنانچه ماتریس M دارای یک سطر و یک ستون باشد، M

یک اسکالر λ است و به آسانی دیده می‌شود که $\det M = \lambda$ می‌باشد. در این حالت باید از بکار بردن علامت $|\lambda|$ برای دترمینان M خودداری کرد. زیرا اگر $\lambda \in \mathbb{C}$ باشد $|\lambda|$ مدول شمار مختلط λ را نشان می‌دهد.

۶.۶.۱۰- قضیه :

(I) - دترمینان ماتریس M نسبت به هر یک از ستونهای M يك گسترش خطی است .

(II) - هرگاه M دارای دو ستون برابر باشد دترمینان آن صفر است .

(III) - اگر تبدیل σ روی ستونهای M عمل کند ، $\det M$ در ε_σ ضرب می شود .

(IV) - چنانچه به یکی از ستونهای M يك ترکیب خطی از سایر ستونها بیفزاییم $\det M$ تغییر نمی کند .

اثبات این قضیه به آسانی از شماره های ۱.۶.۱۰ و ۴.۴.۱۰ نتیجه می شود .

مثال - بنابر (I) ، (II) ، (III) ، (IV) برابری های زیر را به ترتیب می توان

نوشت :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} -$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 7 \\ 5 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{و}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{و}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2-2 & 1 \\ 4 & 7-2 & 1 \\ 5 & -1-4 & 2 \end{vmatrix}$$

۷.۶.۱۰- قضیه - اگر در یک ماتریس مربع M جای سطرها و ستونهای هم ردیف را با یکدیگر عوض کنیم دترمینان ماتریس تغییر نمی کند.

به عبارت دیگر داریم $\det M = \det({}^t M)$.

اثبات - مانند بالا قرار می دهیم $M = [\lambda_{ij}^1]$. چنانچه ${}^t M = [\mu_{ij}^1]$ باشد خواهیم

داشت $\mu_{ij}^1 = \lambda_{ji}^1$. در بسط $\det M$ (شماره ۷.۶.۱۰) جمله $\lambda_{\sigma(1)}^1 \lambda_{\sigma(2)}^2 \dots \lambda_{\sigma(n)}^n$ را در نظر می گیریم. اگر τ یک عنصر دلخواه G_n باشد، روشن است که جمله بالا برابر با:

$$\lambda_{\sigma(\tau(1))}^{\tau(1)} \lambda_{\sigma(\tau(2))}^{\tau(2)} \dots \lambda_{\sigma(\tau(n))}^{\tau(n)}$$

می باشد (زیرا تنها سازه‌های حاصل ضرب جایجا شده است). به ویژه اگر $\tau = \sigma^{-1}$ باشد خواهیم داشت:

$$\lambda_{\sigma^{-1}(1)}^{\sigma^{-1}(1)} \lambda_{\sigma^{-1}(2)}^{\sigma^{-1}(2)} \dots \lambda_{\sigma^{-1}(n)}^{\sigma^{-1}(n)}$$

و چون داریم $\varepsilon_{\sigma} = \varepsilon_{\sigma^{-1}}$ برابری زیر بدست می آید:

$$\det M = \sum_{\sigma \in G_n} \varepsilon_{\sigma^{-1}} \lambda_{\sigma^{-1}(1)}^{\sigma^{-1}(1)} \lambda_{\sigma^{-1}(2)}^{\sigma^{-1}(2)} \dots \lambda_{\sigma^{-1}(n)}^{\sigma^{-1}(n)}$$

به عبارت دیگر چون $\sigma \rightarrow \sigma^{-1}$ یک گسترش دوسویی G_n روی G_n است، خواهیم داشت:

$$\det M = \sum_{\sigma \in G_n} \varepsilon_{\sigma} \lambda_{\sigma(1)}^{\sigma(1)} \lambda_{\sigma(2)}^{\sigma(2)} \dots \lambda_{\sigma(n)}^{\sigma(n)} =$$

$$\sum_{\sigma \in G_n} \varepsilon_{\sigma} \mu_{\sigma(1)}^1 \mu_{\sigma(2)}^2 \dots \mu_{\sigma(n)}^n = \det({}^t M)$$

۸.۶.۱۰- نتیجه - در قضیه ۷.۶.۱۰ می توان همه جا به جای کلمه «ستون»

کلمه «سطر» را قرار داد.

۹.۶.۱۰- تعریف‌های ۱.۴.۱۰، ۲.۵.۱۰ و ۱.۶.۱۰ به وسیله شماره‌های ۱.۶.۱۰ و ۳.۵.۱۰ به یکدیگر وابسته شده‌اند، اکنون بستگی‌های دیگری بین آنها بیان می‌کنیم:

قضیه - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری و $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ یک پایه E باشد.

(I) - چنانچه بردارهای x_1, x_2, \dots, x_n متعلق به E و مؤلفه‌های x_i نسبت به پایه B باشد، داریم:

$$\det_B(x_1, \dots, x_n) = \det[\lambda_i^j]$$

(II) - اگر u یک گسترش خطی در E و $M(u)$ ماتریس گسترش u وابسته به B باشد، داریم $\det u = \det M(u)$.
(از اینجا یک روش عملی برای محاسبه دترمینان یک گسترش خطی E در E به دست می‌آید).

اثبات - بخش (I) از شماره‌های ۲.۴.۱۰ و ۲.۶.۱۰ نتیجه می‌شود. برای اثبات (II) قرار می‌دهیم $u(e_j) = \mu_1^j e_1 + \dots + \mu_n^j e_n$ بنابر ۳.۵.۱۰ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \det u &= \det(e_1, \dots, e_n)(u(e_1), \dots, u(e_n)) \\ &= \det[\mu_i^j] \quad , \quad (\text{بنابر (I)}) \end{aligned}$$

به علاوه بنابر ۱.۲.۹ داریم $[\mu_i^j] = M(u)$ و بدین ترتیب بخش (II) نیز ثابت می‌شود.
۱۰.۶.۱۰- نتیجه-دو ماتریس همانند دارای یک دترمینان می‌باشند.
زیرا اگر دو ماتریس M_1 و M_2 همانند باشند، یک فضای برداری E و یک گسترش خطی u فضای E در E و پایه‌های B_1 و B_2 از E وجود دارند به طوری که M_2 و M_1 به ترتیب ماتریس‌های گسترش u نسبت به پایه‌های B_2 و B_1 باشند (۲.۱۰.۹). در این صورت با در نظر گرفتن ۹.۶.۱۰ خواهیم داشت $\det M_1 = \det u = \det M_2$.

۱۱.۶.۱۰- قضیه - چنانچه M یک ماتریس از رسته (n, n) باشد، هفت شرط هم ارز شماره ۲.۷.۹ (به ویژه شرط (I)) هم ارز با شرط $\det M \neq 0$ نیز می‌باشند.

این قضیه از شماره‌های ۹.۶.۱۰ و ۵.۵.۱۰ نتیجه می‌شود.

۱۲.۶.۱۰ - قضیه :

(I) - هرگاه M و M' دو ماتریس از رسته (n, n) باشند، داریم :

$$\det(MM') = (\det M)(\det M')$$

(II) - چنانچه ماتریس M وارون‌پذیر باشد داریم :

$$\det(M^{-1}) = (\det M)^{-1}$$

این قضیه از شماره‌های ۹.۶.۱۰، ۶.۵.۱۰ و ۷.۵.۱۰ نتیجه می‌شود.

۱۳.۶.۱۰ - قضیه - چنانچه E یک فضای برداری با بعد n و پایان u

یک گسترش خطی E در E باشد داریم :

$$\det(u) = \det u$$

این قضیه از شماره‌های ۹.۶.۱۰ و ۷.۶.۱۰، ۲.۶.۹ نتیجه می‌شود.

۷.۱۰ - محاسبه دترمینان با بلوک

۱.۷.۱۰ - ماتریس رسته $(n' + n'', n' + n'')$ زیر را در نظر می‌گیریم :

$$X = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} \xleftrightarrow{n'} \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \uparrow \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} \xleftrightarrow{n''} \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \uparrow \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} M' \\ \hline \circ \end{array} & \begin{array}{c} N \\ \hline M'' \end{array} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

که در آن M' یک ماتریس از رسته (n', n') و M'' یک ماتریس از رسته (n'', n'') و N

یک ماتریس رسته (n', n'') و \circ ماتریس صفر از رسته (n'', n') می‌باشند. در این صورت :

$$\det X = (\det M') (\det M'') \quad \text{قضیه - داریم}$$

اثبات :

۱- فرض می‌کنیم E یک فضای برداری و E' و E'' دو زیر فضای برداری متمم

E و $B' = (e_1, \dots, e_{n'})$ یک پایه E' و $B'' = (f_1, \dots, f_{n''})$ یک پایه E'' باشد.

با توجه به ۷.۸.۸، $B = (e_1, \dots, e_{n'}, f_1, \dots, f_{n''})$ یک پایه E خواهد بود.

۲- بردارهای متغیر $x_1, \dots, x_{n'}$ از E' را در نظر می‌گیریم. بنا بر ۱.۴.۱۰ گسترش

$$(x_1, \dots, x_{n'}) \rightarrow \det_B(x_1, \dots, x_{n'}, f_1, \dots, f_{n'})$$

یک فرم n' خطی متناوب روی E' است که مقدار آن هنگامی که $(x_1, \dots, x_{n'}) = B'$ باشد، برابر با ۱ است. پس با توجه به ۱.۴.۱۰ خواهیم داشت:

$$(1) \quad \det_B(x_1, \dots, x_{n'}, f_1, \dots, f_{n'}) = \det_{B'}(x_1, \dots, x_{n'})$$

۳- اکنون بردارهای $x_1, \dots, x_{n'}$ از E' را ثابت فرض می‌کنیم و بردارهای

متغیر $y_1, \dots, y_{n''}$ از E'' را در نظر می‌گیریم. گسترش:

$$(y_1, \dots, y_{n''}) \rightarrow \det_B(x_1, \dots, x_{n'}, y_1, \dots, y_{n''})$$

یک فرم n'' خطی متناوب روی E'' است و بنا بر (۱) هنگامی که $(y_1, \dots, y_{n''}) = B''$ باشد، مقدار آن برابر است با:

$$\mu = \det_B(x_1, \dots, x_{n'}, f_1, \dots, f_{n''}) = \det_{B'}(x_1, \dots, x_{n'})$$

پس با استفاده از ۲.۳.۱۰ و ۱.۴.۱۰ خواهیم داشت:

$$(2) \quad \det_B(x_1, \dots, x_{n'}, y_1, \dots, y_{n''}) = \mu \det_{B''}(y_1, \dots, y_{n''}) \\ = \det_{B'}(x_1, \dots, x_{n'}) \det_{B''}(y_1, \dots, y_{n''})$$

۴- به علاوه چنانچه بردارهای $z_1, \dots, z_{n''}$ متعلق به E' باشند با توجه به بخش

(I) قضیه ۴.۴.۱۰ اسکالر:

$$\det_B(x_1, \dots, x_{n'}, y_1 + z_1, \dots, y_{n''} + z_{n''})$$

برابر است با:

$$(3) \quad \sum \det_B(x_1, \dots, x_{n'}, t_1, \dots, t_{n''})$$

که در آن هر t_i برابر با y_i یا برابر با z_i می‌باشد. اگر یکی از t_i ها، مثلاً t_{i_0} ، برابر با z_{i_0} باشد $(n'' + 1)$ بردار $(x_1, \dots, x_{n'}, t_{i_0})$ متعلق به E' است و بستگی خطی دارند (بخش II) قضیه ۸.۱۰.۸). پس با توجه به بخش (V) قضیه ۴.۴.۱۰ اسکالر:

$$\det_B(x_1, \dots, x_{n'}, t_1, \dots, t_{n''})$$

برابر با صفر است. بنابراین تنها جمله‌ای از مجموع (۳) که ممکن است مخالف با صفر نباشد عبارت است از:

$$\det_B(x_1, \dots, x_{n'}, y_1, \dots, y_{n''})$$

و با در نظر گرفتن برابری (۲) خواهیم داشت:

$$(4) \quad \det_B(x_1, \dots, x_{n'}, y_1 + z_1, \dots, y_{n''} + z_{n''}) \\ = \det_{B'}(x_1, \dots, x_{n'}) \det_{B''}(y_1, \dots, y_{n''})$$

۰- مؤلفه‌های بردارهای x_i, y_i, z_i نسبت به پایه B به صورت زیر می‌باشد:

$$x_i: \lambda_1^i, \lambda_2^i, \dots, \lambda_{n'}^i, 0, 0, \dots, 0$$

$$y_i: 0, 0, \dots, 0, \mu_1^i, \mu_2^i, \dots, \mu_{n''}^i$$

$$z_i: v_1^i, v_2^i, \dots, v_{n''}^i, 0, 0, \dots, 0$$

پس بنا بر بخش (I) شماره ۹.۶.۱۰ فرمول (۴) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \dots & \lambda_{n'}^1 & v_1^1 & v_2^1 & \dots & v_{n''}^1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_{n'}^2 & v_1^2 & v_2^2 & \dots & v_{n''}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n'} & \lambda_2^{n'} & \dots & \lambda_{n'}^{n'} & v_1^{n'} & v_2^{n'} & \dots & v_{n''}^{n'} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_1^1 & \mu_2^1 & \dots & \mu_{n''}^1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_1^2 & \mu_2^2 & \dots & \mu_{n''}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_1^{n'} & \mu_2^{n'} & \dots & \mu_{n''}^{n'} \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \dots & \lambda_{n'}^1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_{n'}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n'} & \lambda_2^{n'} & \dots & \lambda_{n'}^{n'} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mu_1^1 & \mu_2^1 & \dots & \mu_{n''}^1 \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \dots & \mu_{n''}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_1^{n'} & \mu_2^{n'} & \dots & \mu_{n''}^{n'} \end{vmatrix}$$

و بدین ترتیب قضیه ثابت می‌گردد.

۱۰.۷.۲۰ - نتیجه = چنانچه $p_1, p_2, \dots, p_r, p_n$ شماره‌های درست و بزرگتر از صفر باشند و جدول ماتریس‌های زیر را

$$\mathbf{X} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} \xrightarrow{p_1} & \xrightarrow{p_2} & \xrightarrow{p_3} & & \xrightarrow{p_n} \\ \hline X_{11} & X_{12} & X_{13} & \dots & X_{1n} \\ \hline \circ & X_{22} & X_{23} & \dots & X_{2n} \\ \hline \circ & \circ & X_{33} & \dots & X_{3n} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \circ & \circ & \circ & \dots & X_{nn} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{l} \updownarrow p_1 \\ \updownarrow p_2 \\ \updownarrow p_3 \\ \updownarrow p_n \end{array} \end{array}$$

که در آن X_{ij} ماتریسی از رسته (p_i, p_j) می‌باشد، در نظر بگیریم، داریم:

$$\det \mathbf{X} = (\det X_{11}) (\det X_{22}) \dots (\det X_{nn})$$

زیرا برای $n=1$ مطلب بالا روشن است، و در حالت کلی با استفاده از روش بازگشت روی n و قراردادن:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} X_{22} & X_{23} & \dots & X_{2n} \\ \circ & X_{33} & \dots & X_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \circ & \circ & \dots & X_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{Z} = [X_{12} \ X_{13} \ \dots \ X_{1n}]$$

خواهیم داشت:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & \mathbf{Z} \\ \circ & \mathbf{Y} \end{bmatrix}$$

با توجه به ۱۰.۷.۱۰ برای $\det \mathbf{X} = (\det X_{11}) (\det \mathbf{Y})$ به دست می‌آید. اما بنابه فرض بازگشت $\det \mathbf{Y} = (\det X_{22}) (\det X_{33}) \dots (\det X_{nn})$ می‌باشد. پس نتیجه بالا برقرار است.

۲۰۷.۱۰ - نتیجه - چنانچه M یک ماتریس سه‌بری زیرین باشد، $\det M$ برابر با حاصل ضرب عنصرهای واقع در روی قطر اصلی ماتریس M است.

این نتیجه با توجه به ۵.۶.۱۰ حالت ویژه شماره ۲۰۷.۱۰ می‌باشد.

۴۰۷.۱۰ - در مورد ماتریس‌های سه‌بری زیرین و همچنین برای جدول ماتریس‌های سه‌بری زیرین نتایج مشابهی وجود دارد.

۸۰۱۰ - بسط یک دترمینان نسبت به عنصرهای یک سطر یا یک ستون

۱۰۸۰.۱۰ - فرض می‌کنیم $M = [a_{ij}]$ یک ماتریس از رسته (n, n) باشد. ماتریسی را که از حذف سطر i ام و ستون j ام M به دست می‌آید با M_{ij} نشان می‌دهیم. اسکالر $(-1)^{i+j} \det M_{ij}$ را کوفاکتور اندیس‌های i و j در M می‌نامند.

۲۰۸.۱۰ - قضیه - فرض می‌کنیم A_{ij} کوفاکتور اندیس‌های i و j در M باشد. برای هر شماره درست i ($1 \leq i \leq n$) داریم:

$$\det M = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \dots + a_{ni}A_{ni}$$

$$\det M = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

[فرمول اول بسط $\det M$ نسبت به عنصرهای ستون i ام و فرمول دوم بسط $\det M$ نسبت به عنصرهای سطر i ام نامیده می‌شود. این فرمول‌ها محاسبه یک دترمینان n سطری و n ستونی را به محاسبه دترمینان‌های $(n-1)$ سطری و $(n-1)$ ستونی بدل می‌کنند].

اثبات - در اینجا تنها به اثبات فرمول دوم می‌پردازیم، فرمول اول مانند دوم ثابت می‌شود.

الف - چنانچه $\alpha_{nn} = 1$ و سایر عنصرهای سطر n ام برابر با صفر باشند، بنا بر شماره

$$\det M = (\det M_{nn}) \cdot 1 = \det M_{nn} \quad ۱۰۷.۱۰$$

ب - هرگاه $\alpha_{nj} = 1$ و سایر عنصرهای سطر n ام برابر با صفر باشند، خواهیم داشت

$$\det M = (-1)^{n-j} \det M_{nj}$$

زیرا اگر M' ماتریسی باشد که از ماتریس M با قرار دادن ستون j ام آن به جای

ستون n ام به دست آید، چون ماتریس M' از تعویض پی در پی ستون j ام با ستون $(j+1)$ ام و ستون $(j+1)$ ام با ستون $(j+2)$ ام و ... و ستون $(n-1)$ ام با ستون n ام ماتریس M بدست می آید (پس به وسیله $n-j$ جایگشت در روی ستونهای M)، بنابراین شماره های $۱۰.۱.۱۰$ ، $۶.۱.۱۰$ و $۱۰.۱.۱۰$ خواهیم داشت :

$$\det M = (-1)^{n-j} \det M'$$

به علاوه با توجه به بخش (الف) داریم $\det M' = \det M'_{nn}$. اما M'_{nn} که از حذف سطر n ام و ستون n ام M' نتیجه می شود همان ماتریسی است که از حذف سطر n ام و ستون j ام M بدست می آید. پس داریم $M'_{nn} = M_{nj}$ و از آنجا :

$$\det M = (-1)^{n-j} \det M'_{nn} = (-1)^{n-j} \det M_{nj}$$

پ. اگر $\alpha_{jj} = 1$ باشد و سایر عناصر سطر i ام برابر با صفر باشند، خواهیم داشت $\det M = A_{ij}$. زیرا چنانچه M' ماتریسی باشد که از ماتریس M با قرار دادن سطر i ام به جای سطر n ام بدست آید، با استدلالی مشابه با حالت (ب) دیده می شود که :

$$\det M = (-1)^{n-i} \det M'$$

می باشد. به علاوه بنابر (ب) داریم $\det M' = (-1)^{n-j} \det M'_{nj}$. اما M'_{nj} که از حذف سطر n ام و ستون j ام ماتریس M نتیجه می شود همان ماتریسی است که از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس M بدست می آید. پس داریم $M'_{nj} = M_{ij}$ و از آنجا :

$$\det M = (-1)^{n-i} \det M' = (-1)^{n-i} (-1)^{n-j} \det M_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij} = A_{ij}$$

ت. در فضای برداری K^n داریم :

$$(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in}) = \alpha_{i1}(1, 0, \dots, 0) + \alpha_{i2}(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + \alpha_{in}(0, 0, \dots, 0, 1)$$

پس قضیه از شماره های $۶.۶.۱۰$ (I) و $۸.۶.۱۰$ و حالت (پ) بالانتيجه می شود.

$۳.۸.۱۰$ - مثال - با استفاده از قضیه $۲.۸.۱۰$ برابری زیر به دست می آید :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$$

$$= a(b'c'' - c'b'') - b(a'c'' - c'a'') + c(a'b'' - b'a'')$$

۴.۸.۱۰- نتیجه - برای شماره‌های درست و متمایز i و i' واقع بین

۱ و n داریم :

$$\alpha_{i'i'} A_{i1} + \alpha_{i'1} A_{i2} + \dots + \alpha_{i'n} A_{in} = 0$$

$$\alpha_{i'1} A_{i1} + \alpha_{i'2} A_{i2} + \dots + \alpha_{i'n} A_{in} = 0$$

زیرا کوفاکتورهای $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}$ بستگی به عنصرهای ستون i ام M ندارند و با استفاده از ۲.۸.۱۰ داریم $\alpha_{i'i'} A_{i1} + \dots + \alpha_{i'n} A_{in} = \det N$ که در آن N از ماتریس M با قرار دادن $(\alpha_{i'i'}, \alpha_{i'2}, \dots, \alpha_{i'n})$ به جای ستون i ام ماتریس M بدست آمده است. چون N دارای دو ستون برابری باشد پس با توجه به ۶.۶.۱۰ خواهیم داشت $\det N = 0$. از اینجا فرمول اول نتیجه می‌شود. فرمول دوم به روش مشابه بدست می‌آید.

۵.۸.۱۰- نتیجه - چنانچه $L = [A_{ij}]$ ماتریس کوفاکتورهای M باشد

$$M \cdot ({}^t L) = ({}^t L) \cdot M = (\det M) \cdot I_n \quad \text{داریم}$$

زیرا بنا بر شماره ۸.۳.۹ عنصر ماتریس $M \cdot ({}^t L)$ که در سطر i ام و ستون j ام واقع است برابر با $\alpha_{i1} A_{j1} + \alpha_{i2} A_{j2} + \dots + \alpha_{in} A_{jn}$ می‌باشد، و با توجه به ۴.۸.۱۰ هنگامیکه $j \neq i$ است این مجموع برابر با صفر و بنا بر ۲.۸.۱۰ برای $i = j$ این مجموع برابر با $\det M$ است. از اینجا برابری $M \cdot ({}^t L) = (\det M) \cdot I_n$ نتیجه می‌شود. برابری $({}^t L) \cdot M = (\det M) \cdot I_n$ به روش مشابه بدست می‌آید.

۶.۸.۱۰- نتیجه - چنانچه M وارون پذیر باشد داریم :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} ({}^t L)$$

به عبارت دیگر عنصر سطر i ام و ستون j ام ماتریس M^{-1} برابر با $\frac{A_{ji}}{\det M}$

می باشد (از این جا روش محاسبه ماتریس وارون یک ماتریس به دست می آید).
این مطلب از شماره ۸.۵.۱۰ نتیجه می شود. باید توجه داشت که $\det M \neq 0$ است (۱۱.۶.۱۰).

۹.۱۰- شرط نابستگی خطی بردارها

۱-۹.۱۰- فرض می کنیم E یک فضای برداری ، (e_1, e_2, \dots, e_n) یک پایه E و بردارهای x_1, x_2, \dots, x_p متعلق به E باشند. می دانیم که برای $p > n$ این بردارها بستگی خطی دارند (۸.۱۰.۸). پس فرض می کنیم $p \leq n$ باشد. چنانچه $\lambda_{1j}, \lambda_{2j}, \dots, \lambda_{nj}$ مؤلفه های بردار x_j باشند، می خواهیم بینیم λ_{ij} ها درجه شرطی (بایاویسند) باید صدق کنند تا اینکه بردارهای x_j نابستگی خطی داشته باشند.

۲-۹.۱۰- بدین منظور ابتدا به بیان یک تعریف می پردازیم. چنانچه M ماتریس دلخواهی باشد، هر ماتریسی را که از حذف شماره ای از سطرها و ستونهای M به دست آید ماتریس استخراج شده از M می نامند.

۳-۹.۱۰- بار دیگر فرض های شماره ۱-۹.۱۰ را در نظر می گیریم و ماتریس $[\lambda_{ij}]$ را با M نشان می دهیم :

قضیه - برای اینکه بردارهای x_1, x_2, \dots, x_p نابستگی خطی داشته باشند بایاویسند است که یک ماتریس M' از رسته (p, p) استخراج شده از M وجود داشته باشد به طوری که داشته باشیم $\det M' \neq 0$

اثبات :

۱- فرض می کنیم $\det M' \neq 0$ باشد. با تعویض روش شماره گذاری e_i ها می توان ماتریس M' را ماتریس تشکیل شده از p سطر اول و p ستون اول ماتریس M گرفت. اکنون بردارهای $x_1, x_2, \dots, x_p, e_{p+1}, \dots, e_n$ را در نظر می گیریم. چنانچه X ماتریس n سطری و n ستونی باشد که ستونهای آن از مؤلفه های بردارهای $x_1, x_2, \dots, x_p, e_{p+1}, \dots, e_n$ نسبت به پایه (e_1, \dots, e_n) تشکیل شده است، خواهیم داشت :

$$X = \begin{bmatrix} M' & \circ \\ M'' & I_{n-p} \end{bmatrix}$$

پس بنا بر شماره ۴.۷.۱۰ داریم:

$$\det X = (\det M')(\det I_{n-p}) = \det M' \neq 0$$

و با توجه به ۹.۶.۱۰ داریم:

$$\det X = \det(e_1, \dots, e_n)(x_1, \dots, x_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$$

بنابراین بردارهای $e_n, \dots, e_{p+1}, x_p, \dots, x_1$ وابستگی خطی دارند [شماره ۴.۴.۱۰ (V)]، و در نتیجه x_p, \dots, x_1 وابستگی خطی خواهند داشت.

۲- فرض می‌کنیم x_p, \dots, x_1 وابستگی خطی داشته باشند. با توجه به ۱.۹.۸

می‌توان با افزودن شماره‌ای از بردارهای e_i به بردارهای x_p, \dots, x_1 یک پایه از E به دست آورد. چنانچه با تعویض روش شماره گذاری e_i ها، $(x_1, \dots, x_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ را پایه به دست آمده بگیریم و مانند بالا ماتریس X را دخالت دهیم بنا بر شماره ۴.۴.۱۰ (V) خواهیم داشت $\det X \neq 0$ و چون $\det X = \det M'$ می‌باشد (۴.۷.۱۰) پس $\det M' \neq 0$ است و بدین ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

۴.۹.۱۰ - تبصره ۵- می‌توان قضیه ۳.۹.۱۰ را برای $p > n$ نیز به کار برد زیرا

در این حالت از طرفی بنا بر ۸.۱۰.۸ بردارهای x_p, \dots, x_1 بستگی خطی دارند و از طرف دیگر نمی‌توان از M یک ماتریس رسته (p, p) استخراج کرد چون M بیش از n سطر ندارد.

۱۰.۱۰ - محاسبه رتبه یک ماتریس

قضیه - رتبه هر ماتریس دلخواه M از رسته (n, m) برابر است با بزرگترین شمار درستی مانند s به طوری که بتوان از M یک ماتریس s سطری و s ستونی استخراج کرد که دترمینان آن مخالف با صفر باشد.

اثبات - اگر رتبه M برابر با r باشد بنا بر شماره ۹.۲.۹ می‌توان r ستون از ماتریس

M انتخاب کرد به طوری که این ستونها نابستگی خطی داشته باشند. فرض می‌کنیم M' ماتریس تشکیل شده از این ستونها باشد (ماتریس M' از M استخراج شده است). با توجه به ۳.۹.۱۰ می‌توان از M' یک ماتریس M'' از رسته (r, r) استخراج کرد به قسمی که درمینان M'' مخالف با صفر باشد. چون M'' از M استخراج شده است پس $r \leq s$. به علاوه می‌توان از M یک ماتریس N از رسته (s, s) استخراج کرد به قسمی که درمینان N مخالف با صفر باشد. ستونهای N را در نظر می‌گیریم؛ این ستونها از ستونهای M استخراج شده‌اند، و بنابر ۳.۹.۱۰ این ستونها نابستگی خطی دارند پس با توجه به ۹.۲.۹ داریم $r \geq s$ ، و از آنجا $r = s$.

۱۱.۱۰ - سوی فضاهای برداری حقیقی

۱.۱۱.۱۰ - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری روی \mathbf{R} با بعد $r > 0$ و B و B' دو پایه از E باشند. بنابر شماره ۴.۴.۱۰. (V) داریم $\det_B(B') \neq 0$. بنابراین یا $\det_B(B') < 0$ یا $\det_B(B') > 0$ است. چنانچه $\det_B(B') > 0$ باشد B و B' را هم‌سو و اگر $\det_B(B') < 0$ باشد B و B' را ناهم‌سو یا با سوهای مخالف می‌نامند.

۲.۱۱.۱۰ - مجموعه پایه‌های E را با \mathcal{B} نشان می‌دهیم:

قضیه:

(I) - بستگی « B و B' هم‌سو هستند» یک بستگی هم‌ارزی R روی

\mathcal{B} است.

(II) - تنها دو کلاس هم‌ارزی نسبت به R وجود دارد.

اثبات- اگر B عنصری از \mathcal{B} باشد بنابر ۳.۴.۱۰ داریم $\det_B(B) = 1$ پس بستگی R بازتابی است. چنانچه B و B' و B'' متعلق به \mathcal{B} باشند بنابر ۵.۴.۱۰ داریم:

$$\det_B(B'') = \det_{B'}(B'') \det_B(B')$$

پس بستگی R متعدی است. همچنین با توجه به شماره‌های ۳.۴.۱۰ و ۵.۴.۱۰ خواهیم داشت $\det_B(B') \det_{B'}(B) = \det_B(B) = 1$. پس $\det_{B'}(B)$ و $\det_B(B')$ دارای یک علامت‌اند، یعنی بستگی R متقارن است. بنابراین R یک بستگی هم‌ارزی است.

چنانچه $B = (e_1, \dots, e_n)$ یک پایه E باشد و قرار دهیم :

$$B_1 = (e_1, \dots, e_{n-1}, -e_n)$$

بنابر شماره ۴.۴.۱۰ (I) خواهیم داشت $\det_B(B_1) = -\det_B(B)$ یعنی :

$$\det_B(B_1) = -1$$

چنانچه B' عنصر دلخواهی از \mathcal{B} باشد خواهیم داشت $\det_B(B') = -\det_{B_1}(B')$

(بنابر ۵.۴.۱۰)، پس B' یا B هم‌سویی باشد یا با B_1 ، بدین ترتیب قسمت (II)

قضیه نیز اثبات می‌شود.

۲.۱۱.۱۰ - قضیه - چنانچه (e_1, \dots, e_n) یک پایه فضای برداری E

و σ یک تبديل $\{1, 2, \dots, n\}$ باشد، پایه‌های (e_1, \dots, e_n) و

$(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$ هم‌سوی هستند هرگاه σ زوج، و با سوهای مخالفند

هرگاه σ فرد باشد.

اثبات این قضیه از شماره ۴.۴.۱۰ (III) نتیجه می‌شود.

۴.۱۱.۱۰ - هنگامی که یکی از دو کلاس هم‌ارزی بالا در \mathcal{B} انتخاب شده باشد،

فضای برداری E سوار نامیده می‌شود. در این صورت پایه‌های متعلق به این کلاس

هم‌ارزی را با سویی مثبت و پایه‌های متعلق به کلاس دیگر را با سویی منفی می‌نامند.

فضای \mathbf{R}^3 معمولاً سویی معین شده به وسیله آدمک آمپر را سویی مثبت می‌گیرند.

در \mathbf{R}^n معمولاً سویی پایه کانونیک \mathbf{R}^n را سویی مثبت اختیار می‌کنند.

۵.۱۱.۱۰ - قضیه - فرض می‌کنیم u یک اتومر فیسیم فضای برداری E

باشد. چنانچه $\det u > 0$ باشد u هر پایه دلخواه E را به یک پایه هم‌سو

با آن بدل می‌کند و هرگاه $\det u < 0$ باشد u هر پایه دلخواه E را به یک

پایه باسویی مخالف با آن بدل میکند.

اثبات این قضیه از فرمول (۴) شماره ۳.۵.۱۰ نتیجه می‌شود زیرا داریم :

$$\det_B(u(B)) = \det u$$

۶.۱۱.۱۰ - درحالتی که $\det u > 0$ باشد گویند که u سویی فضا را تغییر

نمی‌دهد و درحالتی که $\det u < 0$ باشد گویند که u سویی فضا را تغییر می‌دهد.

مجموعهٔ اتومرفیسم های E که سوی فضا را تغییر نمی دهند یک زیرگروه از $GL(E)$ تشکیل می دهند .

۷.۱۱.۱۰ - فرض می کنیم بعد E برابر با ۱ یعنی E یک خط باشد . یک پایهٔ E عبارت است از یک بردار مخالف با صفر . چنانچه B و B' دو پایهٔ فضای E باشند که به ترتیب از بردارهای e و e' تشکیل شده اند ، داریم $e' = \lambda e$ که در آن λ یک شمار حقیقی مخالف با صفر است . در این صورت :

$$\det_B(B') = \lambda \det_{(e)}(e) = \lambda$$

پس اگر $\lambda > 0$ باشد B و B' هم سو هستند و چنانچه $\lambda < 0$ باشد B و B' دارای سوهای مخالفند . یکی از کلاسهای هم‌ارزی \mathcal{B} شامل همهٔ بردارهایی است که از بردار e به وسیلهٔ همسانی‌هایی که نسبت آنها بزرگتر از صفر است به دست می‌آیند ، کلاس دیگر شامل همهٔ بردارهایی است که از بردار e به وسیلهٔ همسانی‌هایی که نسبت آنها کوچکتر از صفر است نتیجه می‌شوند . در اینجا انتخاب یکی از این دو کلاس همان مفهوم سادهٔ سوی یک خط را به دست می‌دهد .

۸.۱۱.۱۰ - فرض می‌کنیم بعد E برابر با ۲ ، یعنی E یک صفحه باشد . چنانچه :

$$B = (e_1, e_2) \quad , \quad B' = (e_1, e'_2)$$

دو پایه از E باشند که بردارهای اول آنها یکی است و (ξ, η) را مؤلفه‌های e'_2 نسبت به پایهٔ B بگیریم خواهیم داشت :

$$\det_B(B') = \begin{vmatrix} 1 & \xi \\ 0 & \eta \end{vmatrix} = \eta$$

پس برای اینکه B و B' هم سو باشند بایاوبسنده است که $\eta > 0$ باشد ، به عبارت دیگر e_2 و e'_2 در یک طرف خطی که بردار e_1 در روی آن قرار دارد واقع باشند .

۱۲.۱۰ - حاصل ضرب مختلط در فضای معمولی سودار

۱۰.۱۲.۱۰ - فضای برداری E را که از بردارهای آزاد فضای معمولی تشکیل شده است ، در نظر می‌گیریم . E یک فضای برداری حقیقی سه بعدی است . فرض می‌کنیم که این فضا سودار باشد .

پایهٔ یک‌ه‌ای متعامد $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ را در فضای E اختیار می‌کنیم و سوی آن را مثبت می‌گیریم [چنین پایه‌ای وجود دارد. زیرا اگر پایهٔ یک‌ه‌ای متعامد $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ دارای سوی منفی باشد کافی است که بجای بردار \vec{e}_1 بردار $-\vec{e}_1$ را قرار دهیم].

فرض می‌کنیم $\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}''$ سه بردار از E باشند. می‌خواهیم نشان دهیم که:

$$\det_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} (\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'')$$

بستگی به انتخاب پایهٔ $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ندارد. پس اگر $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ یک پایهٔ یک‌ه‌ای متعامد دیگر E و با سوی مثبت باشد باید ثابت کنیم که:

$$\det_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} (\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'') = \det_{(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)} (\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'')$$

و یا بنا بر شمارهٔ ۵.۴.۱۰ کافی است نشان دهیم که:

$$\det_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3) = 1$$

اما از طرفی این دترمینان بزرگتر از صفر است [زیرا پایه‌های $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ و $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ دارای یک سو هستند]، و از طرف دیگر اگر $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ را مؤلفه‌های بردار \vec{e}'_i نسبت به پایهٔ $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ بگیریم، توان دوم این دترمینان برابر است با یک. زیرا داریم:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 & \alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 \\ \alpha_2\alpha_1 + \beta_2\beta_1 + \gamma_2\gamma_1 & \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 & \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 \\ \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 & \alpha_3\alpha_2 + \beta_3\beta_2 + \gamma_3\gamma_2 & \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

۲۰۱۲.۱۰ - اکنون می‌توان تعریف زیر را بیان داشت :

تعریف-اسکالر $\det \rightarrow \rightarrow \rightarrow (\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'')$ را حاصل ضرب مختلط
(e_1, e_2, e_3)

بردارهای \vec{V} ، \vec{V}' و \vec{V}'' می‌نامند.

حاصل ضرب مختلط سه بردار \vec{V} ، \vec{V}' و \vec{V}'' را معمولاً با $(\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'')$ نشان می‌دهند که نباید آنها را دنباله سه برداری \vec{V} ، \vec{V}' و \vec{V}'' اشتباه کرد.

۳۰۱۲.۱۰ - بنا بر شماره ۴.۴.۱۰ حاصل ضرب مختلط $(\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'')$ تابعی خطی

از هر یک از بردارهای \vec{V} ، \vec{V}' و \vec{V}'' است.

۴۰۱۲.۱۰ - با استفاده از شماره ۴.۴.۱۰ (III) داریم :

$$\begin{aligned} (\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'') &= (\vec{V}', \vec{V}'', \vec{V}) = (\vec{V}'', \vec{V}', \vec{V}) \\ &= -(\vec{V}', \vec{V}, \vec{V}'') = -(\vec{V}, \vec{V}'', \vec{V}') = -(\vec{V}'', \vec{V}', \vec{V}) \end{aligned}$$

۵۰۱۲.۱۰ - با توجه به شماره ۴.۴.۱۰ $(\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'') \neq 0$ داریم اگر

و تنها اگر بردارهای \vec{V} ، \vec{V}' و \vec{V}'' ناپستگی خطی داشته باشند.

به علاوه $(\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'') > 0$ است هرگاه سوی پایه $(\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'')$ مثبت و

$(\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'') < 0$ است هرگاه سوی پایه $(\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'')$ منفی باشد (۱.۱۱.۱۰).

۶۰۱۲.۱۰ - چنانچه (ξ, η, ζ) ، (ξ', η', ζ') و (ξ'', η'', ζ'')

به ترتیب مؤلفه‌های \vec{V} ، \vec{V}' و \vec{V}'' نسبت به یک پایهٔ یکه‌ای متعامد باسوی مثبت باشند، بنا بر شمارهٔ ۹.۶.۱۰ داریم :

$$(\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'') = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{vmatrix}$$

۱۰.۱۳ - حاصل ضرب برداری در فضای معمولی سودار

۱۰.۱۳.۱۰ - فضای برداری بردارهای آزاد فضای معمولی را با E نشان می‌دهیم و

آن را سودار فرض می‌کنیم. بردارهای \vec{V} و \vec{V}' متعلق به E را اختیار می‌کنیم و آنها را ثابت می‌گیریم. چنانچه \vec{W} یک بردار دلخواه از E باشد، گسترش:

$$\vec{W} \rightarrow (\vec{V}, \vec{V}', \vec{W})$$

یک فرم خطی روی E است (۳.۱۲.۱۰). پس بنا بر شمارهٔ ۱۲.۱۳.۸ تنها یک بردار \vec{U} متعلق به E وجود دارد به طوری که :

$$(\vec{V}, \vec{V}', \vec{W}) = \vec{U} \cdot \vec{W}$$

باشد. بردار \vec{U} را که بستگی به \vec{V} و \vec{V}' دارد حاصل ضرب برداری \vec{V} و \vec{V}' می‌نامند و با $\vec{V} \wedge \vec{V}'$ نشان می‌دهند.

۲۰.۱۳.۱۰ - برحسب تعریف برای هر سه بردار \vec{V} ، \vec{V}' و \vec{V}'' متعلق به E داریم:

$$(\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'') = (\vec{V} \wedge \vec{V}') \cdot \vec{V}''$$

۳۰.۱۳.۱۰ - برای اینکه \vec{V} و \vec{V}' ناپستگی خطی داشته باشند بایاوبسنده است که

$$\vec{V} \wedge \vec{V}' = \vec{0} \text{ باشد.}$$

زیرا اگر \vec{V} و \vec{V}' بستگی خطی داشته باشند بنا بر شمارهٔ ۵.۱۲.۱۰ برای هر بردار

\vec{V}'' از E خواهیم داشت $(\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'') = 0$. پس با استفاده از ۱.۱۳.۱۰ داریم
 $\vec{V} \wedge \vec{V}' = 0$ همچنین اگر \vec{V} و \vec{V}' نایستگی خطی داشته باشند بنابر ۶.۹.۸ بردار
 \vec{V}'' به قسمی یافت می‌شود که \vec{V} ، \vec{V}' و \vec{V}'' نایستگی خطی داشته باشند. پس باتوجه
 به ۵.۱۲.۱۰ خواهیم داشت $(\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'') \neq 0$ ، و از شماره ۱.۱۳.۱۰ نتیجه
 می‌شود $V \wedge V' \neq 0$.

۴.۱۳.۱۰ - به‌ویژه برای هر بردار \vec{V} چنین داریم $\vec{V} \wedge \vec{V} = 0$.

۵.۱۳.۱۰ - حاصل ضرب برداری $\vec{V} \wedge \vec{V}'$ تابعی خطی از V و V' است. زیرا
 داریم:

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 \vec{V}_1 + \lambda_2 \vec{V}_2, \vec{V}', \vec{W}) \\ &= \lambda_1 (\vec{V}_1, \vec{V}', \vec{W}) + \lambda_2 (\vec{V}_2, \vec{V}', \vec{W}) \quad \text{، (بنابر ۳.۱۲.۱۰)} \\ &= \lambda_1 (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}') \cdot \vec{W} + \lambda_2 (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}') \cdot \vec{W} \quad \text{، (بنابر ۲.۱۳.۱۰)} \\ &= [\lambda_1 (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}') + \lambda_2 (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}')] \cdot \vec{W} \end{aligned}$$

پس با توجه به تعریف ضرب برداری خواهیم داشت:

$$(\lambda_1 \vec{V}_1 + \lambda_2 \vec{V}_2) \wedge \vec{V}' = \lambda_1 (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}') + \lambda_2 (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}')$$

به همین روش دیده می‌شود که $\vec{V} \wedge \vec{V}'$ تابعی خطی از \vec{V}' است.
 ۶.۱۳.۱۰ - داریم:

$$\vec{V} \wedge \vec{V}' = -\vec{V}' \wedge \vec{V}$$

زیرا با توجه به شماره‌های ۴.۱۳.۱۰ و ۵.۱۳.۱۰ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{V} + \vec{V}') \wedge (\vec{V} + \vec{V}') = \vec{V} \wedge \vec{V} + \vec{V} \wedge \vec{V}' + \vec{V}' \wedge \vec{V} + \\ & \vec{V}' \wedge \vec{V}' = \vec{V} \wedge \vec{V}' + \vec{V}' \wedge \vec{V} \end{aligned}$$

۷.۱۳.۱۰ - بردار $\vec{V} \wedge \vec{V}'$ به بردارهای \vec{V} و \vec{V}' عمود است .
 زیرا بنابر شماره‌های ۲.۱۳.۱۰ و ۵.۱۲.۱۰ داریم :

$$(\vec{V} \wedge \vec{V}') \cdot \vec{V} = (\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}) = 0$$

و

$$(\vec{V} \wedge \vec{V}') \cdot \vec{V}' = (\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}') = 0$$

۸.۱۳.۱۰ - چنانچه بردارهای \vec{V} و \vec{V}' نایستگی خطی داشته باشند ، دستگاه
 $(\vec{V}, \vec{V}', \vec{V} \wedge \vec{V}')$ یک پایه با سوی مثبت است .

زیرا با توجه به ۲.۱۳.۱۰ ، حاصل ضرب مختلط $(\vec{V}, \vec{V}', \vec{V} \wedge \vec{V}')$ برابر
 است با :

$$(\vec{V} \wedge \vec{V}') \cdot (\vec{V} \wedge \vec{V}')$$

و این مقدار بنابر شماره ۳.۱۳.۱۰ بزرگتر از صفر می‌باشد . پس با استفاده از ۵.۱۲.۱۰
 مطلب ثابت می‌شود .

۹.۱۳.۱۰ - مؤلفه‌های حاصل ضرب برداری نسبت به پایهٔ یک‌ای متعامد
 و باسوی مثبت $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

فرض می‌کنیم (ξ, η, ζ) ، (ξ', η', ζ') و (α, β, γ) به ترتیب مؤلفه‌های
 سه بردار \vec{V} ، \vec{V}' و $\vec{V} \wedge \vec{V}'$ باشند . برای هر بردار \vec{V}'' به مؤلفه‌های (ξ'', η'', ζ'')
 داریم :

$$\alpha\xi'' + \beta\eta'' + \gamma\zeta''$$

$$= (\vec{V} \wedge \vec{V}') \cdot \vec{V}'' = (\vec{V}, \vec{V}', \vec{V}'') \quad (\text{بنابر ۲.۱۳.۱۰})$$

$$= \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{vmatrix} \quad (\text{بنابر ۶.۱۲.۱۰})$$

$$= (\eta\zeta'' - \zeta\eta'')\xi + (\zeta\xi' - \xi\zeta')\eta'' + (\xi\eta' - \eta\xi')\zeta'' \quad (\text{بنابر ۳.۸.۱۰})$$

چون این برابری برای تمام مقادیر ξ' ، η' و ζ' برقرار است پس خواهیم داشت :

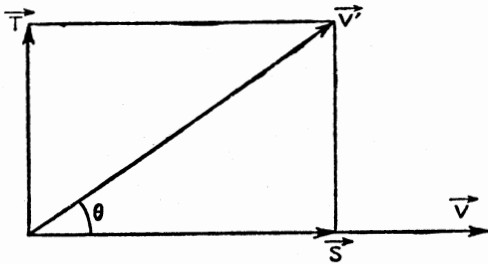
$$\alpha = \eta\zeta' - \zeta\eta' \quad , \quad \beta = \zeta\xi' - \xi\zeta' \quad , \quad \gamma = \xi\eta' - \eta\xi'$$

۱۰.۱۳.۱۰ - به ویژه داریم :

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \quad , \quad \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \quad , \quad \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

۱۱.۱۳.۱۰ - فرض می‌کنیم $\vec{V} \neq 0$ و $\vec{V}' \neq 0$ باشند. بنابراین می‌توان θ زاویه

بین دو بردار \vec{V} و \vec{V}' را در نظر گرفت و داریم $0 \leq \theta \leq \pi$.



شکل ۳۶

بردار \vec{V}' را به بردارهای \vec{T} و \vec{S} تجزیه می‌کنیم به طوری که بردار \vec{S} هم راستا با \vec{V} و بردار \vec{T} عمود بر \vec{V} باشد. داریم :

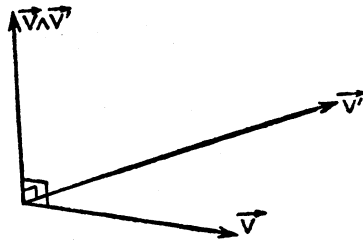
$$\begin{aligned} \vec{V} \wedge \vec{V}' &= \vec{V} \wedge (\vec{S} + \vec{T}) \\ &= \vec{V} \wedge \vec{S} + \vec{V} \wedge \vec{T} \quad , \quad (\text{بنابر } ۱۰.۱۳.۱۰) \\ &= \vec{V} \wedge \vec{T} \quad , \quad (\text{بنابر } ۱۰.۱۳.۱۰) \end{aligned}$$

چنانچه درازای بردار دلخواه \vec{W} را با $|\vec{W}|$ نشان دهیم، با توجه به شماره‌های ۱۰.۱۳.۱۰ و ۱۰.۱۳.۱۰ درازای بردار $\vec{V} \wedge \vec{T}$ برابر با $|\vec{V}| \cdot |\vec{T}|$ خواهد شد. اما :

$$|\vec{V}| \cdot |\vec{T}| = |\vec{V}| \cdot |\vec{V}'| \cdot \sin \theta$$

پس مساحت متوازی‌الاضلاعی که روی دو بردار \vec{V} و \vec{V}' ساخته می‌شود برابر است با :

$$|\vec{V} \wedge \vec{V}'| = |\vec{V}| \cdot |\vec{V}'| \sin \theta$$



شکل ۳۷

از این مطلب و شماره‌های ۷.۱۳.۱۰ و ۸.۱۳.۱۰ ساختمان هندسی $\vec{V} \wedge \vec{V}'$ به دست می‌آید.

که در آن y برداری از K^n و x برداری از K^m است. با توجه به ۶.۲.۹ دستگاه (۱) هم‌ارز با معادله:

$$(۲) \quad u(x) = y$$

است، که در آن گسترش u و بردار y معین می‌باشند و بردار x مجهول است.

۳.۱.۱۱ - چنانچه $y = 0$ یعنی دستگاه (۱) همگن باشد، جوابهای معادله (۲) عنصرهای N (هسته گسترش u) می‌باشند. پس اگر (x_1, \dots, x_r) یک پایه N باشد جوابهای (۲) ترکیب‌های خطی x_1, \dots, x_r خواهند بود.

۴.۱.۱۱ - اکنون حالت کلی را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم x_0 یک جواب ویژه دستگاه (۲) باشد. در این صورت معادله (۲) هم‌ارز با $u(x) = u(x_0)$ و یا $u(x - x_0) = 0$ است، یعنی $x - x_0 \in N$ و یا $x \in x_0 + N$ می‌باشد. پس جواب عمومی دستگاه (۱) با افزودن یک جواب ویژه دستگاه (۱) به جواب عمومی دستگاه همگن وابسته به آن به دست می‌آید.

۵.۱.۱۱ - همواره می‌توان در مورد یک بستگی به صورت $y = u(x)$ ، که در آن u یک گسترش خطی از یک فضای برداری E در یک فضای برداری F و y یک عنصر معین از F و x یک مجهول متعلق به E است، استدلال ۴.۱.۱۱ را به کار برد.

۲.۱۱ - دستگاه کرامر

۱.۲.۱۱ - با فرض‌های ۱.۱۱ داریم:

قضیه - چنانچه $m = n$ یعنی شماره معادله‌های دستگاه (۱) برابر با شماره مجهول‌ها باشد شرط‌های زیر هم‌ارزند:

(I) - ماتریس $[a_{ij}]$ وارون پذیر است.

(II) - عنصرهای طرف دوم دستگاه (۱) هر چه باشند، دستگاه دست

کم دارای یک جواب است.

(III) - عنصرهای طرف دوم دستگاه (۱) هر چه باشند، دستگاه بیش

از یک جواب ندارد.

(IV) — عنصرهای طرف دوم دستگاه (۱) هر چه باشند، دستگاه تنها دارای یک جواب است.

(V) — $\det [\alpha_{ij}] \neq 0$ است.

(VI) — جواب صفر تنها جواب دستگاه همگن وابسته به (۱) می باشد.

اثبات — شرطهای بالا به ترتیب به صورت زیر نوشته می شوند:

(I) — u وارون پذیر است.

(II) — u سورژکتیو است.

(III) — u انژکتیو می باشد.

(IV) — u دوسویی است.

(V) — $\det u \neq 0$ است.

(VI) — هسته گسترش u برابر با $\{0\}$ است.

و بنابراین شماره های ۷.۵.۳ و ۴.۱۱.۸ و ۵.۵.۱۵ این شرطها هم ارزند.

۲۰۲.۱۱ - تعریف - چنانچه $\det [\alpha_{ij}] \neq 0$ باشد، دستگاه (۱) را یک

دستگاه کرامر می نامند.

۳۰۲.۱۱ - پس عنصرهای طرف دوم دستگاه (۱) هر چه باشند، دستگاه کرامر تنها

دارای یک جواب است. در این صورت جواب معادله (۲) عبارت است از $x = u^{-1}(y)$. فرض

می کنیم A_{ij} کوفاکتور α_{ij} باشد. با توجه به ۶.۸.۱۵ ماتریس گسترش خطی u^{-1}

وابسته به پایه کانونیک K^n برابر است با $[A_{ij}]^t$. پس با در نظر گرفتن ۵.۲.۹

خواهیم داشت:

$$(۳) \quad \xi_i = \frac{1}{\det [\alpha_{ij}]} [A_{i1}\beta_1 + A_{i2}\beta_2 + \dots + A_{in}\beta_n]$$

چنانچه N ماتریسی باشد که از $[\alpha_{ij}]$ با قرار دادن $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ به جای ستون

i ام آن به دست آید، گروه (۳) عبارت خواهد بود از بسط دترمینان ماتریس N نسبت

به عنصرهای ستون i ام آن، پس خواهیم داشت:

$$\xi_1 = \left| \begin{array}{cccc} \beta_1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \beta_2 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_n & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{array} \right| \quad \xi_2 = \left| \begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \beta_1 & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \beta_2 & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \beta_n & \cdots & \alpha_{nn} \end{array} \right|, \dots,$$

$$\left| \begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{array} \right|$$

$$\xi_n = \left| \begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \beta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \beta_n \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{array} \right|$$

این فرمول‌ها را فرمول‌های کرامر می‌نامند.

۴.۲.۱۱ - در عمل بهتر است که مجهولها را پی‌درپی بین معادله‌ها حذف کرد (مثلاً

ξ_1 را از معادله اول به دست آورده در معادله‌های دیگر قرارداد تا $n-1$ معادله $n-1$ مجهولی به دست آید و این عمل را پی‌درپی تکرار کرد).

۳.۱۱ - دستگاه خطی دلخواه

۱.۳.۱۱ - رتبه ماتریس $[a_{ij}]$ ، که در شماره ۱.۱۱ معین گردید، رتبه دستگاه

(۱) نامیده می‌شود. پس اگر این رتبه را r بنامیم دترمینان هر ماتریس مربع که از ماتریس

$[a_{ij}]$ استخراج شده و شماره سطرهاى آن بزرگتر از r باشد برابر با صفر خواهد بود. اما

بنابر شماره ۱۰.۱۰ یک ماتریس مربع r سطری و r متونی استخراج شده از $[a_{ij}]$ وجود دارد که دترمینان آن مخالف با صفر است.

با تعویض شماره گذاری معادله ها و مجهول ها می توان فرض کرد که این ماتریس عبارت از ماتریس :

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{bmatrix}$$

باشد. در این صورت r معادله اول را **معادله های اصلی** و r مجهول ξ_1, \dots, ξ_r را **مجهول های اصلی** می نامند. معمولاً انتخاب معادله ها و مجهول های اصلی به صورت های مختلف امکان پذیر است.

۲.۳.۱۱ - چون $\det P \neq 0$ است r سطر اول ماتریس $[a_{ij}]$ نوابستگی خطی دارند (۳.۹.۱۰ و ۷.۶.۱۰)، اما $r+1$ سطر دلخواه $[a_{ij}]$ بستگی خطی دارند (۸.۶.۹). پس بنابر شماره ۸.۷.۸ سطرهای $r+1, r+2, \dots, n$ ماتریس $[a_{ij}]$ ترکیب های خطی r سطر اول ماتریس $[a_{ij}]$ می باشند. در نتیجه اگر طرف اول دستگاه (۱) را با $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ مشخص کنیم، اسکالرهای λ_{ij} وجود دارند به قسمی که برای همه عنصرهای x متعلق به K^m داشته باشیم :

$$\begin{aligned} f_{r+1}(x) &= \lambda_{11} f_1(x) + \lambda_{12} f_2(x) + \dots + \lambda_{1r} f_r(x) \\ f_{r+2}(x) &= \lambda_{21} f_1(x) + \lambda_{22} f_2(x) + \dots + \lambda_{2r} f_r(x) \\ &\dots \end{aligned}$$

در این صورت دو حالت زیر پیش می آید :

۱ - همه برابری های :

$$\beta_{r+1} = \lambda_{11} \beta_1 + \lambda_{12} \beta_2 + \dots + \lambda_{1r} \beta_r$$

$$\beta_{r+2} = \lambda_{21} \beta_1 + \lambda_{22} \beta_2 + \dots + \lambda_{2r} \beta_r$$

$$\dots$$

برقرار نیستند . در این حالت دستگاه دارای جواب نیست .

۲ - همه برابری‌های بالا برقرارند . در این حالت $(n - r)$ معادله آخر دستگاه از r معادله اول آن نتیجه می‌شوند . پس دستگاه (۱) هم‌ارز با r معادله اصلی است . می‌توان $m - r$ مجهول غیراصلی را (در صورتی که وجود داشته باشند . به عبارت دیگر اگر $m > r$ باشد) به دلخواه انتخاب کرد و با توجه به اینکه $\det P \neq 0$ است مجهول‌های اصلی را با استفاده از دستور کرامرا به دست آورد . بنابراین چنانچه $m > r$ باشد دستگاه نامعین است .

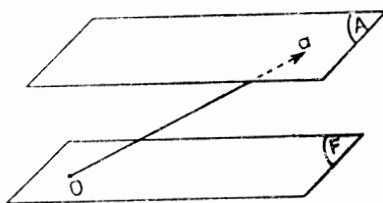
فصل دوازدهم

فضاهای آفین

فضای معمولی هندسه دارای مبدأ نیست، پس این فضا تشکیل یک فضای برداری نمی‌دهد. در اینجا مفاهیم گوناگونی که به انتخاب مبدأ بستگی ندارند مطالعه می‌شود. این فصل (و به ویژه پاراگراف ۷.۱۲ که شاید برای خواننده بسیار مجرد باشد) دارای اهمیت چندانی نیست.

۱.۱۲ - زیر فضاهای آفین

۱.۱.۱۲ - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری روی هیأت K باشد. هر بخش فضای E را که از یک زیر فضای برداری E به وسیله یک انتقال به دست آید یک زیر فضای آفین از E می‌نامند. به عبارت دیگر یک زیر فضای آفین از E عبارت است از مجموعه‌ای به صورت $A = F + a$ که در آن a عنصری از E و F یک زیر فضای برداری E می‌باشد. بر حسب قرارداد بخش تهی E را نیز یک زیر فضای آفین می‌گیرند.



شکل ۲۸

۲.۱.۱۲ - دو زیر فضای برداری F و F' از E و بردارهای a و a' متعلق به E را در نظری می‌گیریم و فرض می‌کنیم $F + a = F' + a'$ باشد، در این صورت داریم $F = F' + a' - a$. زیرا a متعلق به $F + a$ و در نتیجه متعلق به $F' + a'$ است. پس می‌توان a را به صورت $x + a'$ نوشت که در آن x عنصری از F' است، بنابراین خواهیم داشت:

$$F = F' + a' - a = F' - x$$

که چون $x \in F'$ است برابری $F = F' - x = F'$ به دست می‌آید (۱۰.۵.۲).
۳.۱.۱۲ - بدین ترتیب هنگامی که زیر فضای آفین A داده شده باشد تنها یک

زیر فضای برداری F وجود دارد به طوری که داشته باشیم $A = F + a$ ، به عبارت دیگر با در دست داشتن A زیر فضای F کاملاً معین است. زیر فضای برداری F را راستای A و بعد F را بعد A می‌نامند. دو زیر فضای آفین را که راستای آنها یکی است هم‌راستا (متوازی) می‌گویند. چنانچه F یک خط (یک صفحه، یک هیپرپلان) باشد A را یک خط (یک صفحه، یک هیپرپلان) آفین می‌نامند. زیر فضاهای آفینی که بعد آنها صفر است نقطه‌های E می‌باشند.

۴.۱.۱۲ - به وارون، در حالت کلی بردار a به وسیله A تنها به یک روش معین نمی‌شود. به بیان دیگر اگر b نقطه دلخواهی از A باشد خواهیم داشت $A = F + b$. زیرا می‌توان b را به صورت $y + a$ نوشت که در آن y عنصری از F است. پس:

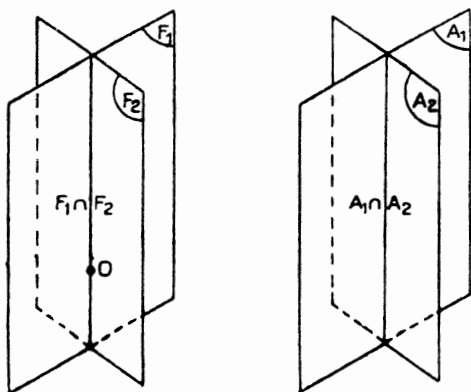
$$F + b = F + (y + a) = (F + y) + a = F + a$$

۵.۱.۱۲ - از شماره ۴.۱.۱۲ نتیجه می‌شود که هر زیر فضای آفین از E که شامل مبدأ باشد یک زیر فضای برداری از E است. به وارون هر زیر فضای برداری از E یک زیر فضای آفین از E است که از مبدأ می‌گذرد.

۶.۱.۱۲ - قضیه - فرض می‌کنیم زیر فضاهای آفین A_1, A_2, \dots, A_n به ترتیب دارای راستاهای F_1, F_2, \dots, F_n باشند. در این صورت بخش:

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = A$$

یک زیر فضای آفین است. چنانچه $A \neq \emptyset$ باشد راستای A عبارت است از $F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n$.



$$f_1(a) = \beta_1, \quad f_r(a) = \beta_r, \quad \dots, \quad f_{n-p}(a) = \beta_{n-p}$$

بنابراین دستگاه (۱) هم ارز با :

$$(۲) \quad f_1(x-a) = f_r(x-a) = \dots = f_{n-p}(x-a) = 0$$

می شود .

اگر F یک زیر فضای برداری از E و عمود بفرمهای خطی f_1, f_r, \dots, f_{n-p} باشد، خواهیم داشت $\dim F = p$. پس دستگاه (۲) هم ارز با $x-a \in F$ یعنی $A = F + a$ است. بدین ترتیب جوابهای دستگاه (۱) زیر فضای آفین p بعدی $A = F + a$ را تشکیل می دهند.

۲۰۲.۱۲ - جوابهای دستگاه همگن وابسته به دستگاه (۱) یعنی دستگاه :

$$(۱') \quad f_1(x) = f_r(x) = \dots = f_{n-p}(x) = 0$$

عبارتند از بردارهای F . به عبارت دیگر دستگاه (۱') راستای A را معین می کند. بنابراین شماره های ۱۰۲.۱۲ و ۱۸.۱۵.۸ طرف اول دستگاه (۱) تشکیل یک پایه از F^\perp را می دهد.

۳۰۲.۱۲ - بدین ترتیب به هر دستگاه مانند دستگاه (۱) یک زیر فضای آفین p بعدی از E وابسته می شود. به واورن هر زیر فضای آفین p بعدی A از E را می توان به روش بالا به دست آورد. زیرا اگر F راستای A و a متعلق به A باشد و فرمهای f_1, f_r, \dots, f_{n-p} را یک پایه فضای F^\perp بگیریم و قرار دهیم $\beta_i = f_i(a)$ ، با توجه به اثبات شماره ۱۰۲.۱۲ جوابهای دستگاه :

$$f_1(x) = \beta_1, \quad f_r(x) = \beta_r, \quad \dots, \quad f_{n-p}(x) = \beta_{n-p}$$

عنصرهای زیر فضای آفین $(F^\perp)^\perp + a = F + a = A$ می باشند.

۴۰۲.۱۲ - دو دستگاه مختلف از نوع دستگاه (۱) ممکن است یک زیر فضای آفین A از E را معین کنند. این مطلب در شماره ۱۴.۱۵.۸ در مورد زیر فضاهای برداری دیده شد.

۵۰۲.۱۲ - حالت ویژه: چنانچه همه اسکالرهایی $\alpha_1, \alpha_r, \dots, \alpha_n$ برابر با صفر

نباشند معادله :

$$(۳) \quad \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \dots + \alpha_n \xi_n = \beta$$

یک هیپرپلان آفین را معین می‌کند (۱.۲.۱۲).

به‌وارون، هر هیپرپلان آفین را می‌توان به‌وسیلهٔ معادله‌ای به صورت (۳) نشان داد (شمارهٔ ۳.۲.۱۲).

۱.۲.۲ - فرض می‌کنیم A یک هیپرپلان به معادلهٔ (۳) و A' هیپرپلان دیگری به معادلهٔ:

$$(۴) \quad \alpha'_1 \xi_1 + \alpha'_2 \xi_2 + \dots + \alpha'_n \xi_n = \beta'$$

باشد. برای اینکه $A = A'$ باشد، بایاویسند است که یک اسکالر λ مخالف با صفر بتوان یافت به قسمی که داشته باشیم:

$$\alpha'_1 = \lambda \alpha_1, \alpha'_2 = \lambda \alpha_2, \dots, \alpha'_n = \lambda \alpha_n, \beta' = \lambda \beta$$

زیرا در این صورت برابری $A = A'$ آشکار است. به‌وارون چنانچه $A = A'$ باشد، طرف اول فرم‌های (۳) و (۴) یعنی فرم‌های خطی f و f' متناسب‌اند (زیرا بنابر ۲.۲.۱۲، چنانچه F راستای A را معین کند داریم $\dim F = 1$ ، $f \in F^\perp$ ، $f' \in F^\perp$). پس اگر $f' = \lambda f$ ، $\lambda \in K$ ، $\lambda \neq 0$ و $a \in A$ باشد خواهیم داشت $\beta = f(a)$ و در نتیجه $\beta' = \lambda \beta$.

۳.۱۲ - نمایش پارامتری یک زیرفضای آفین

۱.۳.۱۲ - فرض می‌کنیم A یک زیرفضای آفین p بعدی از E و F راستای A و متعلق به A باشد. چنانچه (x_1, x_2, \dots, x_p) را یک پایهٔ F بگیریم، زیرفضای آفین A مجموعهٔ بردارهایی از E به صورت:

$$a + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p$$

است که در آن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ اسکالرهایی دلخواه‌اند. چنانچه یک پایه از فضای E را انتخاب نماییم و $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ را مؤلفه‌های a و $(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \dots, \alpha_{ni})$ را مؤلفه‌های بردار x_i نسبت به این پایه بگیریم، زیرفضای آفین A از مجموعهٔ بردارهایی از E تشکیل می‌شود که مؤلفه‌های آنها به صورت:

۱۲. ۴. ۲- اگر t انتقال $y \rightarrow y+a$ به بردار a باشد، برای هر بردار x از

E خواهیم داشت $u(x) = v(x) + a$ و به علاوه $u(o) = a$.

۱۲. ۴. ۳- قضیه- تجزیه گسترش آفین u به یک انتقال t در F و یک

گسترش خطی v فضای برداری E در F یعنی $u = t \circ v$ ، یکتاست.

اثبات- فرض می‌کنیم برای همه x های متعلق به E داشته باشیم:

$$u(x) = v(x) + a \quad \text{و} \quad u(x) = v'(x) + a'$$

که در آنها v و v' گسترش‌های خطی E در F و a و a' عنصرهایی از F می‌باشند.

چنانچه قراردسیم $x = o$ خواهیم داشت $u(o) = a$ و $u(o) = a'$ و از آنجا $a = a'$.

در نتیجه برای همه x های متعلق به E برابری $v(x) = v'(x)$ به دست می‌آید یعنی

$$v = v' \text{ می‌باشد.}$$

۱۲. ۴. ۴- از قضیه ۱۲. ۴. ۳ درستی تعریف زیر آشکار می‌گردد.

تعریف- گسترش v گسترش خطی وابسته به گسترش آفین u نامیده

می‌شود.

مثلاً اگر $E = F$ و u یک انتقال در E باشد خواهیم داشت $v = \text{id}_E$.

۱۲. ۴. ۵- قضیه- فرض می‌کنیم E, F, G سه فضای برداری روی

هیأت K و $u: E \rightarrow F$ و $u_1: F \rightarrow G$ گسترش‌های آفین باشند.

الف- $u_1 \circ u$ یک گسترش آفین است.

ب- چنانچه v و v_1 به ترتیب گسترش‌های خطی وابسته به u و u_1 باشند

گسترش $v_1 \circ v$ گسترش خطی وابسته به $u_1 \circ u$ می‌باشد.

اثبات- بردارهای a و a_1 ، ($a \in F$ و $a_1 \in G$) وجود دارند به طوری که برای هر بردار

x از E و هر بردار y از F داریم:

$$u(x) = v(x) + a, \quad u_1(y) = v_1(y) + a_1$$

از آنجا:

$$(u_1 \circ u)(x) = u_1(v(x) + a) = v_1(v(x) + a) + a_1 = (v_1 \circ v)(x) +$$

$$v_1(a) + a_1$$

چون $v_1(a) + a_1$ بردار ثابتی از G و $v_1 \circ v$ یک گسترش خطی E در G است، پس $u_1 \circ u$ گسترش آفینی است که $v_1 \circ v$ گسترش خطی وابسته به آن می باشد.

۶.۴.۱۲ - قضیه - فرض می کنیم E و F دو فضای برداری روی K و u یک گسترش آفین E در F و v گسترش خطی وابسته به u باشد. چنانچه A یک زیر فضای آفین از E و D راستای A باشد، $u(A)$ یک زیر فضای آفین از F و $v(D)$ راستای آن است.

اثبات - یک عنصر a در E وجود دارد به طوری که $A = D + a$ باشد. پس داریم $v(A) = v(D) + v(a)$ و $v(D)$ یک زیر فضای برداری از F است. بنابراین $v(A)$ یک زیر فضای آفین با راستای $v(D)$ می باشد، و چون $u(A)$ از $v(A)$ به وسیله یک انتقال بدست می آید، پس $u(A)$ نیز یک زیر فضای آفین از F است که $V(D)$ راستای آن می باشد.

۷.۴.۱۲ - قضیه - دو فضای برداری E و F روی K و گسترش آفین u فضای E در F را در نظر می گیریم و فرض می کنیم v گسترش خطی وابسته به u باشد. برای اینکه u انژکتیو (سورژکتیو، دوسویی) باشد، بیاور بسنده است که v انژکتیو (سورژکتیو، دوسویی) باشد.

اثبات - یک انتقال t در F وجود دارد به قسمی که داریم $u \stackrel{!}{=} t \circ v$ و از آنجا $v = t^{-1} \circ u$. اکنون با توجه به اینکه t و t^{-1} گسترش های دوسویی F روی F می باشند، اثبات قضیه به آسانی نتیجه می شود.

۸.۴.۱۲ - قضیه - چنانچه E یک فضای برداری باشد، گسترش های آفین دوسویی E روی E ، با قانون ترکیب گسترش ها، تشکیل یک گروه می دهند.

اثبات - فرض می کنیم G مجموعه گسترش های آفین دوسویی E روی E باشد. چنانچه u و u' متعلق به G باشند، بنا بر ۵.۴.۱۲، $u \circ u'$ متعلق به G است. به علاوه id_E عنصری از G می باشد. همچنین اگر u متعلق به G باشد، u^{-1} نیز متعلق به G است. زیرا می دانیم که u^{-1} دوسویی است و یک گسترش خطی v فضای E در E و بردار $a \in E$ وجود دارد به قسمی که برای هر بردار x از E داریم $u(x) = v(x) + a$. اما بنا بر

را معین می کنند که گسترش خطی وابسته به آن دارای ماتریس $[a_{ij}]$ می باشد. بدین ترتیب می توان تمام گسترش های آفین E در F را به دست آورد.

۱۲.۴.۱۲- معمولاً هر گسترش آفین E در K را یک **تابع آفین** روی E می نامند.

پس توابع آفین به صورت $g = f + \alpha$ می باشند که در آنجا $f \in E^*$ اسکالری برابر با $g(0)$ است. چنانچه x نقطه متغیری از E به آرایندهای $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ نسبت به یک پایه داده شده باشد، خواهیم داشت :

$$g(x) = \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \dots + \lambda_n \xi_n + \alpha$$

که در آن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ اسکالرهایی ثابتی می باشند (۵.۱۳.۸).

۱۲.۴.۱۳- فرض می کنیم E یک فضای برداری دارای بعد با پایان u یک گسترش

آفین E در E باشد. دترمینان گسترش خطی وابسته به u را **دترمینان** u می نامند و با $\det u$ نشان می دهند.

۱۲.۴.۱۴- با توجه به فرض های قضیه ۱۲.۴.۱۳ و شماره ۹.۶.۱۰ داریم :

$$\det u = \det[a_{ij}]$$

۱۲.۴.۱۵- قضیه - فرض می کنیم E یک فضای برداری با بعد با پایان

باشد.

(I) - اگر u_1 و u_2 دو گسترش آفین E در E باشند، داریم :

$$\det(u_1 u_2) = (\det u_1)(\det u_2)$$

(II) - برای اینکه گسترش آفین u وارون پذیر باشد بایا وابسته است

که $\det u$ مخالف با صفر باشد.

(III) - چنانچه u وارون پذیر باشد خواهیم داشت :

$$\det(u^{-1}) = (\det u)^{-1}$$

اثبات - قسمت (I) از شماره های ۱۲.۴.۱۳ و ۶.۵.۱۰ و قسمت (II) از شماره های

۱۲.۴.۱۳ و ۷.۵.۱۰ و (III) از شماره های ۱۲.۴.۱۳ و ۷.۵.۱۰ نتیجه می شود.

۵.۱۲- گرانیکاه

۱.۵.۱۲- تعریف - فضای برداری E را روی هیأت K در نظر می گیریم

و فرض می کنیم x_n, \dots, x_r, x_1 متعلق به E و $\lambda_1, \lambda_r, \dots, \lambda_n$

اسکالرهایی از K باشند به قسمی که $\lambda_1 + \lambda_r + \dots + \lambda_n \neq 0$ باشد. عنصر

$x = (\lambda_1 + \lambda_r + \dots + \lambda_n)^{-1} (\lambda_1 x_1 + \lambda_r x_r + \dots + \lambda_n x_n)$ از E را گرانیکاه

x_n, \dots, x_r, x_1 باضریبهای (جرمهای) $\lambda_1, \lambda_r, \dots, \lambda_n$ می نامند.

۲.۵.۱۲- در فضای معمولی تعریف بالا همان تعریف کلاسیک گرانیکاه می باشد.

۳.۵.۱۲- از تعریف ۱.۵.۱۲ نتیجه می شود که اگر اسکالرهایی $\lambda_1, \lambda_r, \dots, \lambda_n$

را در اسکالر $\lambda \neq 0$ ضرب کنیم، گرانیکاه x_n, \dots, x_r, x_1 تغییر نمی کند. پس

با انتخاب $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_r + \dots + \lambda_n)^{-1}$ می توان قرارداد $\lambda_1 + \lambda_r + \dots + \lambda_n = 1$.

۴.۵.۱۲- تعریف ۱.۵.۱۲ را می توان به وسیله برابری زیر نیز نشان داد:

$$(\lambda_1 + \lambda_r + \dots + \lambda_n)x = \lambda_1 x_1 + \lambda_r x_r + \dots + \lambda_n x_n$$

۵.۵.۱۲- قضیه - با در نظر گرفتن مطالب پیش فرض می کنیم مجموعه

$\{1, 2, \dots, n\}$ اجتماع زیر مجموعه های جدا از هم I_1, I_r, \dots, I_p

باشد و برای همه مقادیر $k = 1, 2, \dots, p$ داشته باشیم $\sum_{i \in I_k} \lambda_i \neq 0$

$i \in I_k$

چنانچه y_k گرانیکاه عنصرهای $(x_i)_{i \in I_k}$ باضریبهای $(\lambda_i)_{i \in I_k}$ باشد،

x عبارت است از گرانیکاه y_p, \dots, y_r, y_1 باضریبهای:

$$\sum_{i \in I_1} \lambda_i, \quad \sum_{i \in I_r} \lambda_i, \quad \dots, \quad \sum_{i \in I_p} \lambda_i$$

(مجموع این ضریبها صفر نیست).

اثبات - بنابر شماره ۴.۵.۱۲ به ترتیب چنین داریم:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i \in I_1} \lambda_i + \dots + \sum_{i \in I_p} \lambda_i \right) x = (\lambda_1 + \lambda_r + \dots + \lambda_n) x = \\ & \lambda_1 x_1 + \lambda_r x_r + \dots + \lambda_n x_n = \sum_{i \in I_1} \lambda_i x_i + \sum_{i \in I_r} \lambda_i x_i + \dots \\ & + \sum_{i \in I_p} \lambda_i x_i = \left(\sum_{i \in I_1} \lambda_i \right) y_1 + \left(\sum_{i \in I_r} \lambda_i \right) y_r + \dots + \left(\sum_{i \in I_p} \lambda_i \right) y_p \end{aligned}$$

یعنی قضیه برقرار است.

۶.۵.۱۲- قضیه - فرض می‌کنیم E و F دو فضای برداری روی هبات u و K یک گسترش آفین در F باشد. چنانچه x_1, \dots, x_n عنصرهایی از E و x گرانیگاه x_1, \dots, x_n با ضریب‌های $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ باشد (که در آنجا $u(x), \dots, u(x_1)$ گرانیگاه $u(x)$ مخالف با صفر است)، $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ با ضریب‌های $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ است.

اثبات - قضیه برای حالتی که u یک گسترش خطی در E باشد آشکار است. پس کافی است که آن را برای حالتی که $E = F$ و u انتقال $x \rightarrow x + a$ در E می‌باشد ثابت کنیم. اما در این صورت گرانیگاه $u(x_1), \dots, u(x_n)$ عبارت است از:

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)^{-1} (\lambda_1(x_1 + a) + \dots + \lambda_n(x_n + a)) = \\ & (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)^{-1} (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) + \\ & (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)^{-1} (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) a = x + a = u(x) \end{aligned}$$

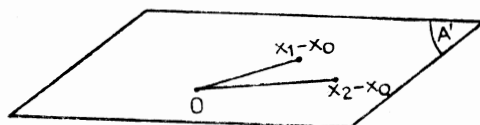
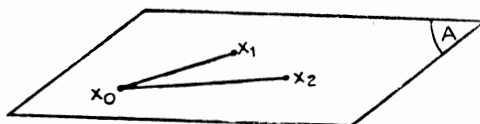
و قضیه برقرار است.

۷.۵.۱۲- قضیه - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری و A بخشی از E باشد. برای اینکه A یک زیر فضای آفین E باشد بایا بوسنده است که هر گرانیگاه نقاطی از A متعلق به A باشد.

اثبات - اگر A یک زیر فضای برداری E باشد، روشن است که هر گرانیگاه نقاطی از A متعلق به A است. چنانچه قضیه ۶.۵.۱۲ را در مورد انتقالها بکاربریم دیده می‌شود

که مطلب بالا درحالتی که A یک زیر فضای آفین باشد نیز درست است. به وارون چنانچه هر گرانیکه نقطای از A متعلق به A باشد A یک زیر فضای آفین از E است. زیرا با انجام یک انتقال (که بنا بر شماره ۶.۵.۱۲ امکان پذیر است) می توان فرض کرد که $O \in A$ باشد. در این صورت اگر x و y متعلق به A و λ و μ دو اسکالر باشند، $\lambda x + \mu y$ گرانیکه سه عنصر x و y و 0 با ضریب های λ و μ و $(1 - \lambda - \mu)$ است. پس $\lambda x + \mu y \in A$ و در نتیجه A یک زیر فضای برداری E می باشد.

۸.۵.۱۲ - قضیه - فرض می کنیم E یک فضای برداری و B بخشی از E باشد. چنانچه A مجموعه گرانیکه های نقاط B باشد، A کوچکترین زیر فضای آفینی از E است که شامل B می باشد. به علاوه اگر x_0 متعلق به B باشد راستای A عبارت است از زیر فضای برداری پدید آمده به وسیله بردارهای $x - x_0$ که در آنجا $x \in B$ می باشد.



شکل ۴۰

اثبات - فرض می کنیم x_0 متعلق به B و $B' = B - x_0$ و $A' = A - x_0$ باشد. در این صورت $0 \in B'$ است و با توجه به ۶.۵.۱۲ دیده می شود که A' مجموعه عنصرهایی به صورت $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{p-1} x_{p-1} + \lambda_p \cdot 0$ می باشد که در آنجا بردارهای x_1, \dots, x_{p-1} به B' تعلق دارند و برای اسکالرهایی $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ داریم $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p = 1$. (شماره ۳.۵.۱۲). به گفته دیگر A' عبارت است از مجموعه $\{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{p-1} x_{p-1}\}$ که در آن x_1, \dots, x_{p-1} متعلق به B' و

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p-1}$ اسکالرهای دلخواهی هستند. بدین ترتیب A' کوچکترین زیر فضای برداری و شامل B' می‌باشد (۱۰.۲.۸) یعنی کوچکترین زیر فضای آفینی است که شامل B' است، زیرا داریم $0 \in B'$ (شماره ۱۰.۱.۲). پس A کوچکترین زیر فضای آفینی است که شامل B است و راستای A عبارت است از A' یعنی زیر فضای برداری پدید آمده به وسیله $B - x_0$.

۹.۵.۱۲- زیر فضای آفین A که در شماره ۸.۵.۱۲ معین گردید، زیر فضای آفین پدید آمده به وسیله B نامیده می‌شود.
 ۱۰.۵.۱۲- مثلاً زیر فضای آفین پدید آمده به وسیله دو عنصر متمایز x_1 و x_2 یک خط است که راستای آن $K(x_2 - x_1)$ می‌باشد.

۱۱.۵.۱۲- کاربرد: نمایش پارامتری دیگر یک زیر فضای آفین

فرض می‌کنیم A زیر فضای آفین پدید آمده به وسیله x_1, x_2, \dots, x_p باشد (۸.۵.۱۲ و ۹.۵.۱۲). چنانچه یک پایه از E اختیار کرده و آراینده‌های x_i را نسبت به این پایه $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in}$ بگیریم، آراینده‌های یک نقطه دلخواه از A با قرار دادن:

$$\xi_1 = \frac{\lambda_1 \alpha_{11} + \lambda_2 \alpha_{21} + \dots + \lambda_p \alpha_{p1}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p}$$

$$\xi_2 = \frac{\lambda_1 \alpha_{12} + \lambda_2 \alpha_{22} + \dots + \lambda_p \alpha_{p2}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p}$$

.....

$$\xi_n = \frac{\lambda_1 \alpha_{1n} + \lambda_2 \alpha_{2n} + \dots + \lambda_p \alpha_{pn}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p}$$

بندست می‌آید که در آنها $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ اسکالرهای دلخواهی هستند به قسمی که:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p \neq 0$$

است (بنابر شماره ۳.۵.۱۲ می‌توان فرض کرد که مجموع λ_i ها برابر با ۱ باشد، در این صورت نیازی به نوشتن مخرج کسرهای بالا نیست).

۶.۱۲- مجموعه‌های کوژ

چون در این قسمت ناگزیر از نوشتن نابرابریهایی بین عنصرهای K هستیم، تنها حالت $K=R$ را در نظر می‌گیریم.

۱-۶.۱۲- فرض می‌کنیم E یک فضای برداری حقیقی و x و y دو عنصر از E باشند. مجموعه‌ی عنصرهایی به صورت $\frac{\lambda x + \mu y}{\lambda + \mu}$ را **پاره خط بسته** به انجام‌های x و y می‌نامند که در آنجا $\lambda \geq 0$ ، $\mu \geq 0$ و $\lambda + \mu \neq 0$ است. به عبارت دیگر پاره خط بسته به انجام‌های x و y عبارت است از مجموعه‌ی عنصرهایی به صورت $\alpha x + \beta y$ که در آن

$$\alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta = 1$$

باشد، یعنی مجموعه‌ی گرانیگاه‌های x و y با ضریب‌های مثبت. در فضای معمولی که در آن یک نقطه به عنوان مبدأ انتخاب شده باشد تعریف بالا همان تعریف معمولی پاره خط است.

۲-۶.۱۲- **تعریف - بخش A از مجموعه‌ی E را کوژ گویند هر گاه، برای هر دو نقطه‌ی x و y متعلق به A ، بخش A شامل پاره خط بسته به انجام‌های x و y باشد.**

۳-۶.۱۲- **مثال -** هر زیر فضای آفین مجموعه‌ای کوژ است (۷.۵.۱۲).

۴-۶.۱۲- **مثال -** فرض می‌کنیم f یک فرم خطی روی E و λ یک اسکالر باشد. مجموعه‌ی عنصرهای x متعلق به E به قسمی که $f(x) \geq \lambda$ باشد یک مجموعه‌ی کوژ است (این مجموعه را می‌توان **نیم فضای بسته** نام نهاد). زیرا اگر x و y متعلق به E و α و β متعلق به R باشند به طوری که $f(x) \geq \lambda$ ، $f(y) \geq \lambda$ ، $\alpha \geq 0$ ، $\beta \geq 0$ و $\alpha + \beta = 1$ باشد داریم:

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \geq \alpha \lambda + \beta \lambda = \lambda$$

همچنین **نیم فضای بازی** که با نابرابری $f(x) > \lambda$ معین می‌شود یک مجموعه‌ی کوژ است.

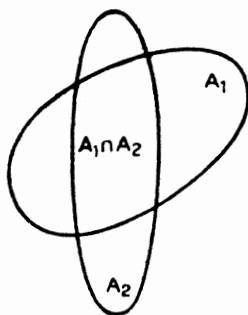
۵-۶.۱۲- **مثال -** در صفحه‌ی معمولی مجموعه‌ی نقاط داخل یک بیضی مجموعه‌ای کوژ است.

۶.۶.۱۲- قضیه - فرض می‌کنیم A بخشی کوژ از فضای برداری E و x_1, \dots, x_n نقاطی از A باشند. چنانچه $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ اسکالرهای مثبتی باشند که مجموع آنها صفر نباشد، گرانیگاه x_1, \dots, x_n با ضرایبهای $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ، که آن را با x می‌نماییم، متعلق به A می‌باشد.

اثبات - درستی قضیه برای حالت $n=1$ آشکار است. فرض می‌کنیم برای حالت $(n-1)$ نقطه نیز قضیه برقرار باشد. چنانچه $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$ باشد، باز هم درستی قضیه روشن است؛ در غیر این صورت $\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1} > 0$ است و می‌توان y یعنی گرانیگاه x_1, \dots, x_{n-1} با ضرایبهای $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ را به دست آورد. اما از طرفی بنا به فرض بازگشت y متعلق به A می‌باشد، و از طرف دیگر بنا بر ۶.۵.۱۲ نقطه x عبارت است از گرانیگاه y و x_n با ضرایبهای $(\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1})$ و λ_n . پس داریم $x \in A$ زیرا A مجموعه‌ای کوژ است.

۷.۶.۱۲- قضیه - اگر A یک بخش کوژ از E و u یک گسترش آفین E در یک فضای برداری حقیقی دیگر F باشد $u(A)$ مجموعه‌ای کوژ است. اثبات این قضیه از شماره ۶.۵.۱۲ نتیجه می‌شود.

۸.۶.۱۲- قضیه - اگر $(A_i)_{i \in I}$ خانواده‌ای از بخش‌های کوژ E باشد، مجموعه $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ نیز کوژ است.



شکل ۴۱

اثبات - فرض می‌کنیم x و y عنصرهایی از A و S پاره خط بسته به انجام‌های

x و y باشد. برای هر اندیس i متعلق به I داریم $S \subset A_i$. بنابراین $S \subset A$ و در نتیجه A مجموعه‌ای کوژ است.

۹.۶.۱۲- به ویژه اگر f_1, \dots, f_n فرمهای خطی‌ای روی E باشند، مجموعه‌ای که با نابرابری‌های $f_1(x) \geq \lambda_1, \dots, f_n(x) \geq \lambda_n$ معین شده باشد مجموعه‌ای کوژ است (بنابر شماره‌های ۴.۶.۱۲ و ۸.۶.۱۲).

۱۰.۶.۱۲- اجتماع دو مجموعه کوژ در حالت کلی کوژ نیست.

۱۱.۶.۱۲- قضیه - فرض می‌کنیم B بخشی از E باشد. چنانچه مجموعه

گرانیه‌های نقاط B با ضریب‌های مثبت را با A نشان دهیم، A کوچکترین بخش کوژ E است که شامل B می‌باشد.

اثبات - روشن است که A بخش B را دربر دارد. ثابت می‌کنیم که A کوژ است. برای این کار فرض می‌کنیم x و y دو نقطه از A و α و β شمارهای حقیقی باشند به قسمی که داشته باشیم $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$. در این صورت خواهیم داشت:

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n, \quad y = \mu_1 y_1 + \dots + \mu_p y_p$$

که در آن x_1, \dots, x_n و y_1, \dots, y_p متعلق به B می‌باشند و داریم:

$$\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0, \quad \mu_1 \geq 0, \dots, \mu_p \geq 0,$$

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = \mu_1 + \dots + \mu_p = 1 \quad (\text{شماره } ۳.۵.۱۲)$$

پس:

$$\alpha x + \beta y = \sum_{i=1}^n (\alpha \lambda_i) x_i + \sum_{j=1}^p (\beta \mu_j) y_j,$$

$$\sum_{i=1}^n (\alpha \lambda_i) + \sum_{j=1}^p (\beta \mu_j) = \alpha + \beta = 1$$

بنابراین $\alpha x + \beta y$ به صورت گرانیه‌های از نقاط B با ضریب‌های مثبت درمی‌آید و در نتیجه $\alpha x + \beta y \in A$ است. این مطلب ثابت می‌کند که A کوژ است. از طرف دیگر بنابر

شماره ۶.۶.۱۲ هر بخش کوژ E که B را در برداشته باشد A را نیز دربر دارد. پس A کوچکترین بخش کوژی است از E که شامل B می باشد.

۱۲.۶.۱۲- تعریف - مجموعه A که در شماره ۱۱.۶.۱۲ تعریف شد پوش کوژ B نامیده می شود.

۱۳.۶.۱۲- مثال - چنانچه x, x_1, x_2, x_3, x_4 چهار نقطه نام صفحه از فضای معمولی باشند، پوش کوژ $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ چهار وجهی ای است که رأس های آن x_1, x_2, x_3, x_4 می باشند (یعنی مجموعه نقاط داخل چهار وجهی، وجه ها، یالها و رأس های چهار وجهی).

۷.۱۲- فضاهای آفین

۱.۷.۱۲- فرض می کنیم E یک فضای برداری روی هیأت K باشد. مجموعه A را فضای آفین وابسته به E می نامیم هرگاه یک گسترش $P+x \rightarrow (P, x)$ مجموعه $A \times E$ در $A \times E$ باویژگیهای زیر وجود داشته باشد:

۱- برای هر دو عنصر x و y متعلق به E و هر عنصر P متعلق به A داشته باشیم:

$$P+(x+y) = (P+x)+y$$

۲- برای هر دو عنصر P و Q متعلق به A تنها یک عنصر x از E یافت شود به قسمی که $P+x=Q$ باشد.

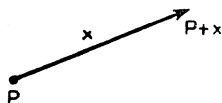
۲.۷.۱۲- عنصرهای A را نقاط A و عنصرهای E را بردارهای A می نامند. همچنین بعد E را بعد A می گویند.

۳.۷.۱۲- برای هر نقطه P متعلق به A داریم $P+0=P$. زیرا اگر x تنها عنصری از E باشد به قسمی که داشته باشیم $P+x=P$ (ویژگی ۲ از ۱.۷.۱۲)، خواهیم داشت:

$$P+0 = (P+x)+0 = P+(x+0) = P+x = P$$

۴.۷.۱۲- مثال - فرض می کنیم A فضای معمولی و E فضای برداری تشکیل شده از بردارهای آزاد A باشد. برای هر نقطه P متعلق به A و هر بردار آزاد x از A نقطه ای را که از P به وسیله انتقالی به بردار x بدست می آید با $P+x$ نمایش می دهیم. در این صورت

ویژگی‌های ۱ و ۲ شماره ۱.۷.۱۲ برقرارند و در نتیجه A یک فضای آفین وابسته به E می‌باشد.



شکل ۴۲

۱۲.۷.۵- مثال - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری روی K باشد. قرار می‌دهیم $A = E$ و گسترش $(u, x) \rightarrow u + x$ فضای حاصل ضرب $E \times E$ در E را در نظر می‌گیریم. در این صورت ویژگی‌های ۱ و ۲ شماره ۱.۷.۱۲ برقرارند و در نتیجه E یک فضای آفین وابسته به E می‌باشد.

۱۲.۷.۶- به وارون در صورتی که یک فضای آفین A وابسته به E داشته باشیم نمی‌توانیم به‌طور ذاتی از A یک فضای برداری بسازیم (مثلاً در فضای معمولی نمی‌توان مجموع دو نقطه را به‌طور ذاتی تعریف کرد). با وجود این چنانچه نقطه P را متعلق به A بگیریم و Φ_P گسترش $x \rightarrow P + x$ فضای E در A باشد، Φ_P دوسویی است (ویژگی ۲ شماره ۱.۷.۱۲). به کمک Φ_P می‌توان ساختمان فضای برداری E را به A منتقل کرد. بدین ترتیب یک فضای برداری بدست می‌آید که آنرا با A_P نشان می‌دهیم. مبداء A_P عبارت است از $\Phi_P(0) = P + 0 = P$. در این صورت P را مبداء A گویند (مبداء انتخاب شده را اغلب با O نمایش می‌دهند هرچند که احتمال اشتباه آن با مبداء E نیز هست). بدین ترتیب با انتخاب یک مبداء در A یک فضای برداری ایزومرف با E بدست می‌آید. این ساختمان فضای برداری روی A به مبداء انتخاب شده بستگی دارد (به این علت، تاکنون فضای معمولی را اغلب با انتخاب یک مبداء در آن، به صورت یک فضای برداری در نظر گرفته‌ایم).

۱۲.۷.۷- فرض می‌کنیم O و O' دو مبداء در A باشند. می‌خواهیم گسترشهای $\Phi_{O'}$ و Φ_O را با یکدیگر مقایسه کنیم. اگر a عنصری از E باشد به‌طوری‌که داشته باشیم $O' = O + a$ برای هر x متعلق به E خواهیم داشت:

$$\Phi_{O'}(x) = O' + x = (O + a) + x = O + (a + x)$$

پس :

$$(۱) \quad \Phi_{O'}(x) = \Phi_O(x + a)$$

اگر y نقطه‌ای از A باشد قرار می‌دهیم $\Phi_O^{-1}(y) = x$. در این صورت داریم :

$$y = \Phi_{O'}(x) = \Phi_O(x + a)$$

بنابراین :

$$\Phi_O^{-1}(y) = x + a$$

و از آنجا :

$$(۲) \quad \Phi_O^{-1}(y) = \Phi_O^{-1}(y) + a$$

۸.۷.۱۲- اکنون برخی از تعاریف و ویژگیهای فضای برداری E را در نظر گرفته

و به کمک گسترش دوسویی Φ_O آنها را از E به A منتقل می‌نماییم. برای اینکه مفهوم بدست آمده در A دارای معنی ذاتی باشد لازم است که بستگی به انتخاب مبداء O نداشته باشد. بررسی این مطلب با استفاده از فرمولهای (۱) و (۲) بالا به آسانی امکان پذیر است.

۹.۷.۱۲- فرض می‌کنیم A_1 بخشی از A و E_1 یک زیر فضای برداری از E باشد.

A_1 را یک زیر فضای آفین A با راستای E_1 گویند هرگاه $\Phi_O^{-1}(A_1)$ یک زیر فضای آفین E با راستای E_1 باشد. چون $\Phi_O^{-1}(A_1)$ از $\Phi_O^{-1}(A_1)$ بوسیله یک انتقال بدست می‌آید و به علاوه هر انتقال در E یک زیر فضای آفین از E را به زیر فضای آفینی از E با همان راستا بدل می‌کند، پس این تعریف به انتخاب O بستگی ندارد.

۱۰.۷.۱۲- فرض می‌کنیم A_1 و A_2 به ترتیب دو فضای آفین وابسته به فضاهای

برداری E_1 و E_2 روی هیأت K باشند. مبداءهای O_1 و O_2 را در A_1 و A_2 انتخاب می‌کنیم. چنانچه u یک گسترش A_1 در A_2 و v یک گسترش خطی E_1 در E_2 باشد، گسترش u یک گسترش آفین A_1 در A_2 و گسترش v گسترش خطی وابسته به u گفته می‌شود هرگاه گسترش $\Phi_{O_1}^{-1}(u(P)) \rightarrow \Phi_{O_2}^{-1}(v(P))$ فضای E_1 در E_2 (یعنی گسترش $\Phi_{O_2}^{-1} \circ u \circ \Phi_{O_1}^{-1}$) یک گسترش آفین و v گسترش خطی وابسته به آن باشد. هنگامی که یک گسترش آفین E_1 در E_2 را با انتقالهایی در E_1 و در E_2 ترکیب کنیم باز هم یک گسترش آفین بدست می‌آید و گسترش خطی وابسته به آن تغییر نمی‌کند (۴.۴.۱۲) و

۱۲.۴.۵). پس این مفاهیم نیز بستگی به انتخاب مبدا ندارند. در حالت ویژه به مفهوم تابع آفین روی A می‌رسیم.

۱۲.۷.۱۱- فرض می‌کنیم P_1, \dots, P_n نقاطی از فضای آفین A و $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ اسکالرهایی باشند به قسمی که داشته باشیم $\lambda_1 + \dots + \lambda_n \neq 0$. اگر نقطه O را به عنوان مبدا در A انتخاب کنیم، نقطه $P = (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)^{-1}(\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n)$ فضای برداری A_{O_0} گرانیگاه P_1, \dots, P_n با ضرایب های $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ناسیده می‌شود. به عبارت دیگر چنانچه قرار دهیم $x_i = \Phi_0^{-1}(P_i)$ و در فضای E عنصر x را گرانیگاه عنصرهای x_1, \dots, x_n با ضرایب $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ بگیریم داریم $P = \Phi_0(x)$. اگر به جای مبدا O مبدا $O' = O + a$ را قرار دهیم x_i ها به $x'_i = x_i - a$ بدل می‌شوند (فرمول (۲) شماره ۱۲.۷.۷) و در نتیجه x به $x' = x - a$ بدل می‌گردد (۱۲.۵.۶). پس بنابر فرمول (۱) شماره ۱۲.۷.۷ داریم:

$$\Phi_0(x') = \Phi_0(x' + a) = \Phi_0(x) = P$$

بنابراین مفهوم گرانیگاه در A بستگی به انتخاب مبدا ندارد این گرانیگاه را به صورت:

$$(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)^{-1}(\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n)$$

نشان می‌دهیم (بدون انتخاب مبدا).

۱۲.۷.۱۲- اگر $K = \mathbf{R}$ باشد، یک زیر مجموعه A را که به وسیله Φ_0 از یک بخش کوژ E بدست آید **بخش کوژ A** می‌نامند. این تعریف بستگی به انتخاب مبدا ندارد. زیرا انتقال یک بخش کوژ از E را به یک بخش کوژ از E بدل می‌کند (۱۲.۶.۷).

۱۳.۷.۱- تعاریف و قضیه‌های شماره‌های ۱.۱۲، ۲.۱۲، ۳.۱۲ و ۶.۱۲ را می‌توان بدون اشکال برای فضاهای آفین نیز بیان و برقرار نمود. ما انجام آنرا به عهده خواننده می‌گذاریم.

۱۴.۷.۱- فرض می‌کنیم b بردار ثابتی از E باشد. گسترش $P \rightarrow P + b$ فضای آفین A در A را در نظر می‌گیریم و در A مبدا O را انتخاب می‌کنیم. چنانچه قرار دهیم $\Phi_0^{-1}(P) = x$ خواهیم داشت $P = O + x$ ، پس:

$$P + b = (O + x) + b = O + (x + b) = \Phi_0(x + b)$$

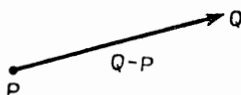
یعنی:

$$\Phi_0^{-1}(P + b) = x + b$$

به عبارت دیگر اگر به کمک Φ_0 فضاهای A و E را یکی بگیریم، گسترش $P \rightarrow P+b$ به انتقال $x \rightarrow x+b$ بدل می‌گردد. به این علت گسترش $P \rightarrow P+b$ را در A انتقال به بردار b می‌نامند. هنگامی که A فضای معمولی باشد، این مطلب با مفهوم عادی انتقال سازگار است.

۱۰.۷.۱۲- چنانچه P و Q دو نقطه از A باشند تنها بردار x ، متعلق به E ، را که در برابری $P+x=Q$ صدق می‌کند با $Q-P$ نمایش می‌دهند. بنابراین شماره ۱۴.۷.۱۲ اگر مبدا O را در A انتخاب کنیم و A_0 را با E یکی بگیریم، $Q-P$ همان کاهش P از Q در فضای برداری A_0 است. از اینجا دستورهای محاسبه زیر بدست می‌آید:

$$Q-P = -(P-Q) \quad , \quad R-P = (R-Q) + (Q-P)$$



شکل ۴۳

۱۶.۷.۱۲- آراینده‌ها - هنگامی که در A یک مبدا O انتخاب شده باشد هر پایه E را پایه A نیز می‌نامند. فرض می‌کنیم (e_1, e_2, \dots, e_n) چنین پایه‌ای باشد (بعد A را با پایان می‌گیریم). در این صورت برای هر نقطه P متعلق به A تنها یک دستگاه اسکالر (ξ_1, \dots, ξ_n) وجود دارد به قسمی که:

$$P = O + \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$$

ξ_1, \dots, ξ_n را آراینده‌های نقطه P نسبت به مبدا O و پایه (e_1, \dots, e_n) می‌نامند. اگر O' مبدا دیگری باشد و قرار دهیم $O - O' = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} P &= O' + (O - O') + \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n \\ &= O' + (\alpha_1 + \xi_1) e_1 + \dots + (\alpha_n + \xi_n) e_n \end{aligned}$$

بنابراین آراینده‌های P نسبت به مبدا O' و پایه (e_1, \dots, e_n) عبارتند از:

$$\eta_1 = \alpha_1 + \xi_1, \dots, \eta_n = \alpha_n + \xi_n$$

با استفاده از فرمولهای تغییر پایه (شماره ۵.۸.۹) دیده می‌شود که آراینده‌های P نسبت به O' و یک پایه دیگر (e'_1, \dots, e'_n) توابع آفینی از e_1, \dots, e_n می‌باشند.

۱۷.۷.۱۲- فرض می‌کنیم A و A' دو فضای آفین و u یک گسترش A در A' باشد. چنانچه در هر یک از فضاها A و A' یک مبدأ و یک پایه انتخاب کنیم و M را نقطه‌ای از A بگیریم می‌توان آراینده‌های نقطه $u(M)$ از A' را به صورت توابعی از آراینده‌های M نوشت. برای اینکه گسترش u آفین باشد بایا وابسته است که این توابع آفین باشند (شماره‌های ۱۰.۴.۱۲ و ۱۱.۴.۱۲). بدین ترتیب به آسانی می‌توان دید که در صفحه یا فضای معمولی، انتقال‌ها، همسانی‌ها و آفینیت‌ها (تبدیلهای خطی) گسترش‌هایی آفین می‌باشند.

فصل سیزدهم

گروه‌ها (متهم فصل سوم)

در فصل سوم برخی از مفاهیم گروه، تنها برای گروه‌های جابجایی مطالعه شد. در این فصل این مفاهیم را به گروه‌های دلخواه تعمیم می‌دهیم.

۱.۱۳- زیرگروه‌های ممتاز

۱.۱.۱۳- قضیه - فرض می‌کنیم G یک گروه و H زیرگروهی از G باشد. شرط‌های زیر هم‌ارزند:

$$(I) - \text{ برای هر } x \text{ متعلق به } G, \quad x^{-1}Hx \subseteq H$$

$$(II) - \text{ برای هر } x \text{ متعلق به } G, \quad x^{-1}Hx = H$$

$$(III) - \text{ برای هر } x \text{ متعلق به } G, \quad Hx = xH$$

اثبات - روشن است که شرایط (II) و (III) هم‌ارزند و از هر یک از آنها شرط (I) نتیجه می‌شود. فرض می‌کنیم شرط (I) برقرار باشد. برای هر x متعلق به G داریم $xHx^{-1} \subseteq H$. بنابراین:

$$H = (x^{-1}x)H(x^{-1}x) = x^{-1}(xHx^{-1})x \subseteq x^{-1}Hx$$

از بستگی بالا و $x^{-1}Hx \subseteq H$ نتیجه می‌شود $H = x^{-1}Hx$.

۲.۱.۱۳- هرگاه شرایط قضیه ۱.۱.۱۳ برقرار باشد H را یک زیرگروه ممتاز یا **نرمال** G می‌نامند.

اگر H یک زیرگروه ممتاز G باشد کلاس‌های چپ‌و راست نسبت به H یکی می‌شوند. پس می‌توان تنها از کلاس نسبت به H نام برد.

۳.۱.۱۳- از شرط (III) شماره ۱.۱.۱۳ نتیجه می‌شود که اگر G جابجایی باشد، هر زیرگروه G ممتاز است.

در شماره‌های ۳.۲.۱۳ و ۴.۲.۱۳ و ۵.۲.۱۳ مثالهای دیگری از زیر گروه‌های متمتاز دیده خواهد شد.

۴.۱.۱۳ - گروه G وزیر گروه متمتاز H از آن داده شده است. در G بستگی هم‌ارزی R را که با $xy^{-1} \in H$ معین شده است در نظر می‌گیریم. چنانچه $E = G/R$ مجموعه خارج قسمت G بر R باشد، می‌خواهیم با تعمیم شماره ۱.۴.۳، قانون ترکیبی در E تعریف کنیم.

فرض می‌کنیم u و v دو عنصر دلخواه از E باشند. یک نماینده x برای u و یک نماینده y برای v برمی‌گزینیم و ثابت می‌کنیم که کلاس عنصر xy به نماینده‌های برگزیده شده در u و v بستگی ندارد و تنها به u و v وابسته است. در این صورت اگر کلاس عنصر xy را با uv نشان دهیم، قانون ترکیبی روی E به دست می‌آید.

فرض می‌کنیم x_1 و y_1 به ترتیب نماینده‌های دیگری از u و v باشند. داریم $x_1 = xs$ و $y_1 = yt$ که در آن s و t متعلق به H می‌باشند. در این صورت بستگی $(xy)^{-1}(x_1y_1) \in H$ برقرار است، زیرا داریم:

$$(xy)^{-1}(x_1y_1) = y^{-1}x^{-1}x_1y_1 = y^{-1}sy$$

و چون $y^{-1}sy \in H$ (زیرا H یک زیر گروه متمتاز G است) و $t \in H$ است پس:

$$y^{-1}sy \in H$$

۵.۱.۱۳ - قضیه:

(I) - E با قانون ترکیب بالا یک گروه است.

(II) - گسترش کانونیک G در $E = G/R$ یک همومورفیسم است.

اثبات این قضیه مانند اثبات قضیه ۲.۴.۳ می‌باشد.

۶.۱.۱۳ - گروه E را که به روش بالا تعریف شد گروه خارج قسمت G بر

H می‌نامند و آنرا به صورت G/H نمایش می‌دهند. به این ترتیب دیده می‌شود که وقتی

G جابجایی است همان تعریف شماره ۳.۴.۳ به دست می‌آید.

۲.۱۳- تجزیه کانونیک یک همومرفیسم

۱.۲.۱۳- قضیه- فرض می‌کنیم G و G' دو گروه و f یک همومرفیسم در G و G' هسته f باشد. در این صورت N یک زیرگروه ممتاز G است. اثبات- می‌دانیم که N یک زیرگروه G است (۴.۰.۳). فرض می‌کنیم x متعلق به N و y متعلق به G باشد و ثابت می‌کنیم که $y^{-1}xy \in N$. اگر e' عنصر بی‌اثر G' باشد داریم:

$$f(y^{-1}xy) = f(y)^{-1} f(x) f(y) = f(y)^{-1} e' f(y) = e'$$

بنابراین $y^{-1}xy \in N$.

۲.۲.۱۳- با توجه به فرض‌های شماره ۱.۲.۱۳ می‌خواهیم تجزیه کانونیک f را بیابیم. بستگی هم‌ارزی که در G باید در نظر گرفت بستگی $f(x) = f(y)$ یعنی بستگی $x \in yN$ می‌باشد (شماره‌های ۱.۱۲.۱ و ۷.۰.۳). بنابراین کلاسهای هم‌ارزی همان کلاسهای G نسبت به N هستند (۲.۱.۱۳). در نتیجه تجزیه کانونیک f به صورت زیر است:

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ G & \longrightarrow & G' \\ s \downarrow & & \uparrow i \\ G/N & \xrightarrow{h} & f(G) \end{array}$$

که در آن s گسترش کانونیک G روی گروه خارج قسمت G/N (شماره ۶.۱.۱۳)، i گسترش همانی گروه $f(G)$ در G' و h یک ایزومرفیسم گروه G/N روی گروه $f(G)$ می‌باشد. ایزومرفیسم بودن h مانند شماره ۱.۶.۳ به آسانی ثابت می‌شود.

۳.۲.۱۳- مثال - فضای برداری E را که دارای بعد باپایان و مخالف باصفر است روی هیات K در نظر می‌گیریم، و فرض می‌کنیم G گروه خطی E باشد (۳.۴.۸). اگر K^* مجموعه عنصرهای غیرصفر K باشد، K^* برای قانون ضرب یک گروه است. برای هر u متعلق به G قرار می‌دهیم $f(u) = \det u$. بنابراین شماره ۵.۵.۱۰ عنصر $f(u)$ متعلق به K^* است و از ۶.۰.۱۰ نتیجه می‌شود که f یک همومرفیسم G در K^* می‌باشد.

به علاوه داریم $f(G) = K^*$. زیرا اگر عنصر λ متعلق به K^* و پایه (e_1, e_2, \dots, e_n) از E را انتخاب کنیم، چنانچه عنصر u متعلق به $\mathcal{L}(E, E)$ باشد به طوری که داشته باشیم:

$$u(e_1) = e_1, \quad u(e_2) = e_2, \quad \dots, \quad u(e_{n-1}) = e_{n-1}, \quad u(e_n) = \lambda e_n$$

بنابه فرمول ۴ شماره ۳.۵.۱۰ خواهیم داشت $\det u = \lambda$ پس $u \in G$ و

$$\lambda \in f(G).$$

چنانچه هسته f را G' بناسیم، G' مجموعه عنصرهایی است از $\mathcal{L}(E, E)$ که در ترمینانشان برابر با یک است. پس بنا بر شماره ۱.۲.۱۳ G' یک زیر گروه ممتاز G می باشد. این زیر گروه ممتاز را **گروه خاص خطی** E می نامند و با $SL(E)$ نشان می دهند. از ۲.۲.۱۳ نتیجه می شود که گروه خارج قسمت G/G' با گروه K^* ایزومرف است.

۴.۲.۱۳ - مثال - فرض می کنیم E یک فضای برداری، G گروه آفین E (شماره ۹.۴.۱۲) و G' گروه خطی E باشد. اگر برای هر u متعلق به G گسترش خطی وابسته به u (۴.۴.۱۲) را با $f(u)$ نشان دهیم گسترش f یک همومرفیسم G در G' است (۹.۴.۱۲). روشن است که اگر $u \in G'$ باشد $f(u) = u$ و بنابراین $f(G) = G'$ است. از تعریف ۴.۴.۱۲ به آسانی نتیجه می شود که N (هسته f) مجموعه انتقالهای E می باشد. N یک زیر گروه ممتاز G است (۱.۲.۱۳) و بنا بر ۲.۲.۱۳ گروه خارج قسمت G/N با G' (گروه خطی E) ایزومرف می باشد.

۳.۱۳- اتومرفیسمهای یک گروه

۱.۳.۱۳ - فرض می کنیم G یک گروه باشد. یادآوری می کنیم که هر ایزومرفیسم G روی G را یک اتومرفیسم G می نامند (۷.۶.۲): آشکار است که ترکیب دو اتومرفیسم G اتومرفیسمی از G می باشد و گسترش وارون یک اتومرفیسم نیز یک اتومرفیسم است. چون گسترش همانی G نیز اتومرفیسمی از G می باشد پس مجموعه اتومرفیسمهای G زیر گروهی است از گروه تبدیلیهای G ، که آنرا **گروه اتومرفیسمهای G** می نامیم.

۲.۲.۱۲- قضیه- فرض می‌کنیم G یک گروه و A گروه اتومورفیسمهای آن باشد. برای هر x متعلق به G گسترش $y \rightarrow xyx^{-1}$ گروه G در G را با α_x نشان می‌دهیم.

(I) - برای هر x متعلق به G گسترش α_x یک اتومورفیسم G است.

(II) - گسترش $x \rightarrow \alpha_x$ یک همومورفیسم G در A است.

اثبات: الف- اگر x متعلق به G باشد α_x یک همومورفیسم G در G می‌باشد. زیرا برای هر y و هر y' در G داریم:

$$\alpha_x(yy') = xyy'x^{-1} = xyx^{-1}xy'x^{-1} = \alpha_x(y)\alpha_x(y')$$

ب- اگر x و x' عنصرهایی از G باشند داریم $\alpha_{xx'} = \alpha_x \circ \alpha_{x'}$. زیرا به ازای هر y متعلق به G می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} (\alpha_x \circ \alpha_{x'})(y) &= \alpha_x(\alpha_{x'}(y)) = x(x'yx'^{-1})x^{-1} \\ &= (xx')y(x'^{-1}x^{-1}) = (xx')y(xx')^{-1} = \alpha_{xx'}(y) \end{aligned}$$

پ- به ویژه چنانچه عنصر بی‌اثر e را بنامیم داریم:

$$\alpha_x \circ \alpha_{x^{-1}} = \alpha_{x^{-1}x} = \alpha_e = \text{id}_G$$

بنابراین α_x یک گسترش دوسویی G روی G می‌باشد (۱.۸.۵). با استفاده از این مطلب حکم (I) را از (الف) و حکم (II) را از (ب) نتیجه می‌گیریم.

۳.۳.۱۲- هر اتومورفیسم G را که به صورت α_x ($x \in G$) باشد یک اتومورفیسم

درونی G می‌نامند. بنابر ۲.۳.۱۲ و ۴.۵.۳ مجموعه اتومورفیسمهای درونی G زیرگروهی است از A .

۴.۳.۱۳- فرض می‌کنیم G جابجایی باشد. در این صورت اگر x و y متعلق به

G باشند داریم $xyx^{-1} = y$. بنابراین دیده می‌شود که گسترش همانی تنها اتومورفیسم

درونی یک گروه جابجایی است. با وجود این یک گروه جابجایی می‌تواند دارای اتومورفیسمهای

دیگری متمایز از گسترش همانی باشد (مثلاً گسترش $x \rightarrow -x$ یک اتومورفیسم گروه

جمعی \mathbf{R} است).

این مطلب ثابت می‌کند که معمولاً گروه اتومرفیسمهای درونی یک گروه G از گروه اتومرفیسمهای G متمایز است.

۵.۳.۱۳- فرض‌های ۲.۳.۱۳ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم N ، هسته همومرفیسم $\alpha_x \rightarrow x$ را بیابیم. اگر x متعلق به G باشد داریم:

$$\begin{aligned} x \in N &\iff \alpha_x = \text{id}_G \\ &\iff \forall x \in G, xyx^{-1} = y \\ &\iff \forall x \in G, xy = yx \end{aligned}$$

پس N مجموعه عنصرهایی است از G که با همه عنصرهای G گردش پذیرند. N را مرکز G می‌نامند. بنا بر شماره ۱.۲.۱۳، N یک زیرگروه متماز G است و بنا بر شماره ۲.۲.۱۳، گروه خارج قسمت G/N با گروه اتومرفیسمهای درونی G ایزومرف می‌باشد.

۶.۳.۱۳- قضیه - فرض می‌کنیم G یک گروه و H زیرگروهی از آن باشد. برای اینکه H متماز باشد باید و بسند است که H بوسیله هر اتومرفیسم درونی G پایا (تغییر ناپذیر) باشد.

اثبات - داریم:

$$\begin{aligned} H \text{ متماز است} &\iff (xHx^{-1} = H, \forall x \in G) \\ &\iff (\alpha_x(H) = H, \forall x \in G) \end{aligned}$$

۷.۳.۱۳- به علت وجود قضیه ۶.۳.۱۳، گاهی زیرگروه‌های متماز G را زیر گروه‌های پایای G نیز می‌نامند.

فصل چهاردهم

تحویل ماتریسها

فرض می‌کنیم E یک فضای برداری با بعد با پایان و u یک گسترش خطی E در E باشد. هدف ما در این فصل بررسی ساختمان u است. همانطوریکه خواهیم دید در حالت‌های بسیاری u ترکیبی ساده از همسانی‌ها می‌باشد. علاوه بر اینکه نتایج این فصل کاربرد هندسی دارد، برای مطالعه معادلات دیفرانسیل نیز مفید است.

۱.۱۴- مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

فرض می‌کنیم E یک فضای برداری روی K و u یک گسترش خطی E در E باشد.

۱.۱.۱۴- بردار x متعلق به E را بردار ویژه گسترش u می‌نامیم هرگاه اسکالری مانند λ وجود داشته باشد به قسمی که داشته باشیم $u(x) = \lambda x$.

۲.۱.۱۴- بردار 0 بردار ویژه u است. در این حالت اسکالر λ را می‌توان به‌طور دلخواه برگزید. ولی اگر x یک بردار ویژه غیر صفر باشد اسکالر λ به روش یکتا بوسیله x معین می‌شود. زیرا اگر داشته باشیم $u(x) = \lambda x$ و $u(x) = \lambda' x$ خواهیم داشت $0 = (\lambda - \lambda')x$. چون بردار x صفر نیست بنا بر ۱.۴.۱.۸ داریم $\lambda - \lambda' = 0$.

۳.۱.۱۴- اسکالر λ را مقدار ویژه گسترش u می‌گوییم هرگاه برداری غیر صفر مانند x یافت شود به‌طوری که داشته باشیم $u(x) = \lambda x$ (اگر فرض x مخالف با صفر را منظور نکنیم هر اسکالری مقدار ویژه خواهد بود).

۴.۱.۱۴- بردار ویژه دلخواه و غیر صفر x را در نظر می‌گیریم. همانطوری که در بالا دیده شد اسکالر λ به قسمی که $u(x) = \lambda x$ باشد، به وسیله x به روش یکتا معین می‌شود. البته λ یک مقدار ویژه است. λ را مقدار ویژه وابسته به x می‌گویند.

۵.۱.۱۴- اسکالر دلخواه λ را در نظر می‌گیریم. مجموعه E_λ از بردارهای

x متعلق به E به قسمی که $u(x) = \lambda x$ باشد یک زیرفضای برداری از E است (زیرا E_λ هسته گسترش $u - \lambda$ است). E_λ را زیرفضای ویژه u وابسته به λ و هر عنصر E_λ را یک بردار ویژه وابسته به λ می گویند. هنگامی که می گوییم λ یک مقدار ویژه است به این معنی است که $E_\lambda \neq \{0\}$ می باشد .

۶.۱.۱۴ - قضیه - فرض می کنیم $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ اسکالرهایی دو به دو متمایز و F برابر با $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \dots + E_{\lambda_p}$ باشد. در این صورت F حاصل جمع مستقیم $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \dots, E_{\lambda_p}$ است.

اثبات - قضیه برای $p=1$ آشکار است. فرض می کنیم که آنرا در حالت $p-1$ اسکالر ثابت کرده باشیم. اگر x متعلق به $(E_{\lambda_2} + \dots + E_{\lambda_p}) \cap E_{\lambda_1}$ باشد باید ثابت کنیم که $x=0$ است. اگر این مطلب را برای اندیسه‌های $2, 3, \dots, p$ ثابت کنیم (شرط (I) شماره ۶.۵.۸)، قضیه ثابت شده است.

از $x \in E_{\lambda_2} + \dots + E_{\lambda_p}$ نتیجه می شود $x = x_2 + \dots + x_p$ که در آن $x_2 \in E_{\lambda_2}, \dots, x_p \in E_{\lambda_p}$. بنابراین:

$$u(x) = \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p$$

و چون $x \in E_{\lambda_1}$ پس:

$$u(x) = \lambda_1 x = \lambda_1 (x_2 + \dots + x_p)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p - \lambda_1 (x_2 + \dots + x_p) \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1) x_2 + \dots + (\lambda_p - \lambda_1) x_p \end{aligned}$$

بنا به فرض بازگشت $E_{\lambda_2} + \dots + E_{\lambda_p}$ حاصل جمع مستقیم $E_{\lambda_2}, \dots, E_{\lambda_p}$ است. پس بنا بر شرط (III) شماره ۶.۵.۸ از برابری اخیر نتیجه می شود:

$$(\lambda_2 - \lambda_1) x_2 = \dots = (\lambda_p - \lambda_1) x_p = 0$$

چون λ_1 متمایز از $\lambda_2, \dots, \lambda_p$ می باشد، از برابری های بالا و ۱۴.۱.۸ خواهیم داشت:

$$x_2 = \dots = x_p = 0$$

بنابراین $x=0$ است.

۷.۱.۱۴ - مثال - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری، (e_1, e_2, \dots, e_n) یک پایه E و $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ اسکالرهای دلخواه باشند. عنصر u متعلق به $\mathcal{L}(E, E)$ را به قسمی که $u(e_1) = \mu_1 e_1, \dots, u(e_n) = \mu_n e_n$ باشد در نظر می‌گیریم (۶.۸.۸). چنانچه λ یک اسکالر باشد، می‌خواهیم زیر فضای E_λ را پیدا کنیم. E_λ مجموعه x هایی است که دربرابری $u(x) = \lambda x$ صدق می‌کنند. پس اگر $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$ باشد داریم:

$$\xi_1 \mu_1 e_1 + \dots + \xi_n \mu_n e_n = \lambda \xi_1 e_1 + \dots + \lambda \xi_n e_n$$

$$(\lambda - \mu_1) \xi_1 = \dots = (\lambda - \mu_n) \xi_n = 0 \quad \text{و از آنجا}$$

می‌بینیم که اگر λ متمایز از μ_1, \dots, μ_n باشد، تنها برداری که در این شرایط صدق می‌کند بردار صفر است. بنابراین در این حالت داریم $E_\lambda = \{0\}$. اگر $\lambda = \mu_i$ باشد، دیده می‌شود که E_λ مجموعه ترکیبهای خطی e_j هایی است که برای آنها $\mu_j = \mu_i$. پس مقادیر ویژه u همان μ_i ها هستند. به علاوه می‌بینیم که E حاصل جمع E_{μ_i} ها می‌باشد و با توجه به ۶.۱.۱۴ به سادگی می‌توان دریافت که E حاصل جمع مستقیم E_{μ_i} های متمایز است (۸.۸.۸).

گسترشهای خطی ای که در این مثال در نظر گرفتیم به طور حسی قابل درک اند. در عمل خواهیم دید (شماره ۳.۴.۱۴) که بسیاری از گسترشهای خطی از این نوعند.

۸.۱.۱۴ - حالت ماتریسها - فرض می‌کنیم M یک ماتریس n سطری و n ستونی با عنصرهای متعلق به K باشد. مقدار ویژه، زیر فضای ویژه و بردار ویژه گسترش خطی وابسته به M (شماره ۸.۲.۹) را به ترتیب مقدار ویژه، زیر فضای ویژه و بردار ویژه ماتریس M می‌نامند. پس مقادیر ویژه M اسکالر، بردارهای ویژه M عنصرهایی از K^n و زیر فضاهای ویژه M زیر فضاهای برداری ای از K^n می‌باشند.

۲.۱۴ - چند جمله‌ای مفسر

۱.۲.۱۴ - ماتریس $M = [a_{ij}]$ از رسته (n, n) با عنصرهای متعلق به K داده شده است. مجهول X را اختیاری کنیم و هیات K را به صورت هیاتی غوطه‌ور در $K(X)$ در نظر می‌گیریم، و ماتریس $M - X \cdot I_n$ را تشکیل می‌دهیم:

$$M - X \cdot I_n = \begin{bmatrix} a_{11} - X & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - X & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - X \end{bmatrix}$$

(عنصرهای این ماتریس به $\mathbf{K}(X)$ و به ویژه به $\mathbf{K}[X]$ متعلق اند). عنصر واقع

در سطر i ام و ستون j ام برابر با $a_{ij} - \delta_{ij}X$ می باشد که در آن δ_{ij} نشان کرونکر است.

۲۰۲۰۱۴- اگر G_n گروه تبدیلهای مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ باشد داریم:

$$(1) \det(M - X \cdot I_n) = \sum_{\sigma \in G_n} \varepsilon_{\sigma} (a_{\sigma(1),1} - \delta_{\sigma(1),1}X) \cdots$$

$$(a_{\sigma(n),n} - \delta_{\sigma(n),n}X)$$

دیده می شود که $\det(M - X \cdot I_n)$ عنصری است از $\mathbf{K}[X]$. تعریف زیر را که

کاربرد آن در شماره ۱۰۳۰۱۴ آشکار خواهد شد بیان می کنیم:

۲۰۲۰۱۴- تعریف - $\det(M - X \cdot I_n)$ را چند جمله ای مفسر ماتریس

M می نامند.

اگر $P(X)$ این چند جمله ای و λ عنصری از \mathbf{K} باشد خواهیم داشت:

$$P(\lambda) = \det(M - \lambda \cdot I_n)$$

۴۰۲۰۱۴- قضیه - داریم:

$$(2) \det(M - X \cdot I_n) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) X^{n-1} + \cdots + \det M$$

اثبات = در حاصل جمع (۱)، جمله وابسته به $\sigma = e$ برابر است با:

$$(a_{11} - X)(a_{22} - X) \cdots (a_{nn} - X) = (-1)^n X^n +$$

$$(-1)^{n-1} (a_{11} + \cdots + a_{nn}) X^{n-1} + \cdots$$

در این برابری جمله هائیکه نوشته نشده اند درجه شان از $n-2$ کمتر است. اکنون جمله ای

از مجموع (۱)، وابسته به یک عنصر σ از G_n را در نظر میگیریم. فرض می کنیم σ

تمایز از e باشد. پس دست کم برای یک اندیس i داریم $i \neq \sigma(i)$ ، و چون σ دوسوی است این نابرابری عملاً برای دواندیس i برقرار است. از طرف دیگر برای $i \neq j$ داریم $\delta_{ij} = 0$. در نتیجه دو سازه حاصل ضرب $(\alpha_{\sigma(n),n} - \delta_{\sigma(n),n} X) \cdots (\alpha_{\sigma(1),1} - \delta_{\sigma(1),1} X)$ دارای X نیست یعنی این حاصل ضرب یک چند جمله‌ای است که درجه‌اش از $n-2$ کمتر و یا برابر با $n-2$ است.

این عمل درستی دو جمله اول بسط (2) را ثابت می‌کند. جمله ثابت چند جمله‌ای مفسر را می‌توان مانند هر چند جمله‌ای دیگر، با قراردادن صفر به جای مجهول X به دست آورد. بنابراین جمله ثابت برابر است با $\det M$.

۵.۲.۱۴ - قضیه - چند جمله‌ای‌های مفسر دو ماتریس همانند با هم برابرند.

اثبات - فرض می‌کنیم M ماتریسی دلخواه از رسته (n, n) و S ماتریسی وارون پذیر

از رسته (n, n) باشد. داریم :

$$SMS^{-1} - X \cdot I_n = S(M - X \cdot I_n)S^{-1}$$

بنابراین: $\det(SMS^{-1} - X \cdot I_n) = \det(M - X \cdot I_n)$ زیرا دترمینان‌های دو ماتریس همانند با هم برابرند (۱۰.۶.۱۰).

۶.۲.۱۴ - تبصره - فرض می‌کنیم $M = [a_{ij}]$ ماتریسی از رسته (n, n)

باشد. اسکالر $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ را اثر ماتریس M می‌نامند و به صورت $\text{tr} M$ نشان می‌دهند. با تقریب یک علامت اثر یک ماتریس همان ضریب X^{n-1} در چند جمله‌ای مفسر M است. بنابراین از قضیه ۵.۲.۱۴ نتیجه می‌شود که اثر دو ماتریس همانند یکی است.

۷.۲.۱۴ - قضیه - فرض می‌کنیم $M = [a_{ij}]$ یک ماتریس سه بری از

رسته (n, n) باشد. چند جمله‌ای مفسر M برابر است با :

$$(a_{11} - X)(a_{22} - X) \cdots (a_{nn} - X)$$

اثبات این قضیه از شماره‌های ۳.۷.۱۰ و ۴.۷.۱۰ نتیجه می‌شود.

۸.۲.۱۴ - حالت گسترشهای خطی - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری n

بعدی ($n > 0$) روی هیات K و u یک عنصر از $\mathcal{L}(E, E)$ باشد. ماتریسهای u

نسبت به پایه‌های مختلف E همانندند (شماره ۲.۱۰.۹)، و بنابراین همگی دارای یک چند جمله‌ای مفسر و یک اثر می‌باشند. این چند جمله‌ای و این اسکالر را چند جمله‌ای مفسر u و اثر u می‌نامند. اثر u را بصورت tru می‌نویسند. پس چند جمله‌ای مفسر u به صورت:

$$(۳) \quad P(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \text{tru} X^{n-1} + \dots + \det u$$

نوشته می‌شود.

۹.۲.۱۴- اگر λ متعلق به K و I گسترش همانی E باشد داریم:

$$P(\lambda) = \det(u - \lambda I)$$

این مطلب از شماره ۳.۲.۱۴ نتیجه می‌شود.

۳.۱۴- بستگی‌های بین چند جمله‌ای مفسر و مقادیر ویژه

۱.۳.۱۴ قضیه - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری با بعد پایایان روی

u, K یک گسترش خطی E در E و $P(X)$ چند جمله‌ای مفسر u باشد. برای اینکه عنصر λ متعلق به K یک مقدار ویژه باشد بایا و بسنده است که داشته باشیم $P(\lambda) = 0$.

اثبات قضیه از هم‌ارزی‌های پی‌درپی زیر نتیجه می‌شود:

$$\lambda \text{ مقدار ویژه } u \text{ است} \iff \text{هسته } u - \lambda \cdot I \text{ مخالف با صفر است (۵.۱.۱۴).}$$

$$\iff u - \lambda \cdot I \text{ وارون پذیر نیست (۴.۱۱.۸).}$$

$$\iff \det(u - \lambda \cdot I) = 0 \text{ (شماره ۵.۵.۱۰),}$$

$$\iff P(\lambda) = 0 \text{ (۹.۲.۱۴).}$$

۲.۳.۱۴- نتیجه - اگر M ماتریسی از رسته (n, n) باشد، مقادیر

و ویژه M ریشه‌های چند جمله‌ای مفسر آن هستند.

این نتیجه بیان ماتریسی ۱.۳.۱۴ است.

۳.۳.۱۴- نتیجه - چنانچه $M = [a_{ij}]$ یک ماتریس سه بری باشد مقادیر

و ویژه M عنصرهای قطر اصلی آن هستند.

این مطلب از ۲.۳.۱۴ و ۷.۲.۱۴ نتیجه می‌شود.

۴.۱۴- حالتی که هیأت پایه هیأت شمارهای مختلط است

۴.۱۴.۱- قضیه - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری n بعدی روی

C ($n > 0$) و u یک گسترش خطی E در E باشد.

(I) - u دست کم دارای یک مقدار ویژه است.

(II) - چنانچه $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ریشه‌های چند جمله‌ای مفسر u

باشند (هر ریشه به شماره مرتبه چندگانگی‌اش نوشته شده است)، داریم:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \text{tr } u, \quad \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = \det u$$

اثبات - فرض می‌کنیم $P(X)$ چند جمله‌ای مفسر u باشد. $P(X)$ یک چند جمله‌ای

درجه n است (۴.۲.۱۴). بنابراین قضیه دالامبر - گوس (شماره ۱.۱۱.۵)، $P(X)$ دست کم

دارای یک ریشه λ است، و بنابر ۱.۳.۱۴ اسکالر λ یک مقدار ویژه u می‌باشد. پس

حکم (I) ثابت است. حکم (II) را از فرمول (۳) شماره ۸.۲.۱۴ و از بستگی‌های بین

ضرایب و ریشه‌های یک عنصر $C[X]$ نتیجه می‌گیریم (شماره ۷.۱۱.۵).

۴.۱۴.۲- نتیجه - ماتریس مختلط M از رسته (n, n) داده شده است:

(I) - M دست کم دارای یک مقدار ویژه است.

(II) - چنانچه $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ریشه‌های چند جمله‌ای مفسر M

باشند (هر ریشه به شماره مرتبه چندگانگی‌اش نوشته شده است)، داریم:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \text{tr } M, \quad \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = \det M$$

این نتیجه بیان ماتریسی ۴.۱۴.۱ است.

۴.۱۴.۳- قضیه - فضای برداری n بعدی E ($n > 0$) روی C داده شده

است. فرض می‌کنیم u یک گسترش خطی E در E ، $P(X)$ چند جمله‌ای

مفسر آن و $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ریشه‌های $P(X)$ باشند که بترتیب دلخواهی

نوشته شده‌اند. اگر تمام این ریشه‌ها ساده باشند پایه‌ای مانند (e_1, e_2, \dots, e_n)

از E وجود دارد به قسمی که:

$$u(e_1) = \lambda_1 e_1, \quad u(e_2) = \lambda_2 e_2, \dots, \quad u(e_n) = \lambda_n e_n$$

اثبات - هریک از λ_i ها یک مقدار ویژه است (۱.۳.۱۴). فرض می‌کنیم e_i یک بردار ویژه غیر صفر وابسته به λ_i باشد. بنابر ۶.۱.۱۴ بردار e_1 متعلق به $Ce_1 + Ce_2 + \dots + Ce_n$ نیست. به بیان دیگر e_1 ترکیب خطی e_2, e_3, \dots, e_n نمی‌باشد. با استدلالی مشابه برای هریک از e_i ها دیده می‌شود که e_1, \dots, e_n نایستگی خطی دارند و بنابراین پایه‌ای از E را تشکیل می‌دهند (شماره ۸.۱۰.۸ شرط (II)).

۴.۴.۱۴ - چندجمله‌ای مفسر یک عنصر u متعلق به $\mathcal{L}(E, E)$ «معمولاً» دارای ریشه چندگانه نیست. بنابراین قضیه ۳.۴.۱۴ نشان می‌دهد که اگر هیات پایه G باشد یک گسترش خطی E در E معمولاً از نوع بسیار ساده‌ای است که در مثال ۷.۱.۱۴ دیده شد.

۵.۴.۱۴ - اگر چندجمله‌ای مفسر u دارای ریشه‌های چندگانه هم باشد ممکن است که پایه‌ای از E مرکب از بردارهای ویژه u وجود داشته باشد [مثلاً چنانچه u گسترش همانی E باشد هر پایه E از بردارهای ویژه تشکیل شده است ولی چند جمله‌ای مفسر u برابر با $(1-X)^n$ است که در نتیجه تنها ریشه آن یک است که از مرتبه n می‌باشد]. با وجود این عنصرهایی از $\mathcal{L}(E, E)$ وجود دارند که برای آنها نمی‌توان پایه‌ای در E تشکیل شده از بردارهای ویژه بدست آورد. برای اینگونه عنصرها می‌توان قضیه شماره ۷.۴.۱۴ را به کار برد.

۶.۴.۱۴ - نتیجه - فرض می‌کنیم M ماتریسی مختلط از رسته (n, n) باشد. اگر چندجمله‌ای مفسر M تنها دارای ریشه‌های ساده $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ باشد، M با ماتریس قطری زیر همانند است:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

زیرا این مطلب با توجه به شماره ۲.۱۰.۹ بیان دیگری از قضیه ۳.۴.۱۴ می‌باشد.

۷.۴.۱۴ - قضیه - فضای برداری n بعدی E ، $(n > 0)$ روی C و u یک

گسترش خطی E در E داده شده است. فرض می‌کنیم $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ریشه‌های چند جمله‌ای مفسر u باشند که به ترتیب دلخواهی نوشته شده‌اند و هر ریشه به شماره مرتبه چندگانگی آن نوشته شده است. در این صورت پایه‌ای از E مانند (e_1, e_2, \dots, e_n) می‌توان یافت به قسمی که M ، ماتریس u نسبت به این پایه، از ویژگیهای زیر برخوردار است:

(I) - M یک ماتریس سه‌بری زیرین است.

(II) - عنصر واقع در سطر i ام و ستون i ام M برابر است با λ_i .

اثبات: ۱- برای $n=1$ قضیه بدیهی است. فرض می‌کنیم که آنرا برای یک فضای برداری $n-1$ بعدی ثابت کرده باشیم.

۲- چون هسته گسترش خطی $u - \lambda_1$ صفر نیست پس این گسترش سورژکتیو نیست

(۴.۱۱.۸). بنابراین $(E) (u - \lambda_1)$ مشمول یک هیپرپلان F می‌باشد (۱۵.۱۵.۸)

و (۱۸.۱۵.۸). اگر $x \in F$ باشد خواهیم داشت:

$$u(x) = (u - \lambda_1)(x) + \lambda_1 x \in (u - \lambda_1)(E) + F \subset F + F \subset F$$

بنابراین F بوسیله u پایدار است.

۳- فرض می‌کنیم v تحدید u به F و N ماتریس آن نسبت به پایه دلخواه

$(e'_1, e'_2, \dots, e'_r)$ باشد. اگر برداری از E باشد که به F تعلق نداشته باشد

e_1, e_2, \dots, e_m نایستگی خطی دارند (۸.۷.۸). بنابراین (e_1, e_2, \dots, e_m)

پایه‌ای است از E . به علاوه داریم:

$$u(e_1) = \lambda_1 e_1 + (u - \lambda_1)(e_1) \in \lambda_1 e_1 + F$$

بدین ترتیب ثابت می‌شود که ماتریس u نسبت به پایه (e_1, e_2, \dots, e_m) به صورت زیر

می‌باشد:

$$M = \left[\begin{array}{c|cccc} \lambda_1 & & & & \\ \hline & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array} \right]$$

که در آن N' یک ماتریس ستونی $n-1$ سطری است. بنابر ۱۵.۷.۱۵ چند جمله‌ای مفسر

M برابر است با $(\lambda_1 - X)P(X)$ که در آن $P(X)$ چند جمله‌ای مفسر N است. از اینجا ثابت می‌شود که ریشه‌های $P(X)$ عبارتند از:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

(هریک از ریشه‌ها به شماره مرتبه چندگانگی‌اش نوشته شده است).

۴- فرض بازگشت را برای F و v بکار می‌بریم. پایه‌ای مانند (e_1, e_2, \dots, e_n)

از F می‌توان یافت به طوری که ماتریس v نسبت به این پایه سه بری زیرین و عنصرهای قطر اصلی آن به ترتیب $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ باشند.

در این صورت ماتریس u نسبت به پایه (e_1, e_2, \dots, e_n) از نوع مورد نظر در قضیه

خواهد بود.

۸.۴.۱۴ - تبصره ۵ - با توجه به قرارداد های ۷.۴.۱۴ ماتریس u نسبت به پایه

$(e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n)$ سه بری زیرین است.

۹.۴.۱۴ - نتیجه - فرض می‌کنیم M ماتریسی مختلط از رسته (n, n)

باشد. M بایک ماتریس سه بری زیرین و همچنین بایک ماتریس سه بری زیرین همانند است.

اثبات - با توجه به ۲.۱۰.۹ این مطلب از ۷.۴.۱۴ و ۸.۴.۱۴ نتیجه می‌شود.

۵.۱۴ - قضیه کیلی - هامیلتون و کاربردهای آن

۱۰.۵.۱۴ - قضیه (کیلی - هامیلتون) - فرض می‌کنیم E یک فضای

برداری با بعد باپایان روی C, u یک گسترش خطی E در E و P چند جمله‌ای مفسر آن باشد. در این صورت داریم $P(u) = 0$.

اثبات - بنا بر ۷.۴.۱۴ پایه‌ای مانند (e_1, \dots, e_n) در E می‌توان یافت که

نسبت به آن ماتریس u بصورت زیر باشد:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \lambda_{n3} & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

پس داریم :

$$P(X) = (\lambda_n - X)(\lambda_{n-1} - X) \dots (\lambda_1 - X)$$

بنابراین باید ثابت کنیم که :

$$(\lambda_n - u)(\lambda_{n-1} - u) \dots (\lambda_1 - u) = 0$$

با روش بازگشت کاهشی روی i ثابت می‌کنیم که گسترش خطی :

$$(\lambda_n - u)(\lambda_{n-1} - u) \dots (\lambda_i - u)$$

بردارهای e_i, e_{i+1}, \dots, e_n را به صفر بدل میکند. در اینصورت با قراردادن $i=1$ اثبات قضیه به دست می‌آید.

روشن است که برای $i=n$ گسترش $\lambda_n - u$ بردار e_n را صفر می‌کند. زیرا در ستون n ماتریس $\lambda_n - u$ عنصری جز صفر یافت نمی‌شود.

فرض می‌کنیم $(\lambda_n - u)(\lambda_{n-1} - u) \dots (\lambda_i - u)$ بردارهای e_i, e_{i+1}, \dots, e_n را به صفر بدل کند و ثابت می‌کنیم که در اینصورت :

$$(\lambda_n - u)(\lambda_{n-1} - u) \dots (\lambda_i - u)(\lambda_{i-1} - u)$$

بردارهای $e_{i-1}, e_i, e_{i+1}, \dots, e_n$ را به صفر بدل می‌کند. در ماتریس $\lambda_{i-1} - u$ ستونهای $i-1, i, \dots, n$ ام دست کم با $i-1$ صفر شروع می‌شوند. به گفته دیگر برای $j=i-1, i, \dots, n$ بردار $(\lambda_{i-1} - u)(e_j)$ ترکیبی خطی از e_i, e_{i+1}, \dots, e_n است. بنا به فرض بازگشت این ترکیب خطی بوسیله $(\lambda_n - u)(\lambda_{n-1} - u) \dots (\lambda_i - u)$ صفر می‌شود. پس :

$$(\lambda_n - u)(\lambda_{n-1} - u) \dots (\lambda_i - u)(\lambda_{i-1} - u)e_j = 0$$

۲۰۰۱۴- فرض می‌کنیم M ماتریسی مختلط از رسته (n, n) و P چندجمله‌ای مفسر آن باشد. در این صورت $P(M) = 0$ (این همان بیان ماتریسی ۱۰۰۱۴ است). البته این نتیجه برای ماتریسهای حقیقی که حالت ویژه ماتریسهای مختلط می‌باشند نیز درست است. پس با برگشت به حالت گسترشهای خطی می‌بینیم که ۱۰۰۱۴ درباره فضاهاى برداری با بعد با پایان روی هیأت R نیز برقرار است.

۳۰۰۱۴- لم - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری با بعد با پایان روی هیأت C و u یک گسترش خطی E در E باشد. چندجمله‌ای مفسر u و P می‌نامیم. فرض می‌کنیم P به صورت حاصلضرب دو چندجمله‌ای P_1 و P_2 که نسبت به هم اول اند نوشته شود یعنی $P = P_1 P_2$. چنانچه $u_1 = P_1(u)$ و $u_2 = P_2(u)$ باشد، و هسته گسترش u_1 را با N_1 و هسته گسترش u_2 را با N_2 نشان دهیم:

(I) - N_1 و N_2 دوزیر فضای برداری E هستند که به وسیله u پایدار می‌باشند و به علاوه در E متمم یکدیگرند.

(II) - با تقریب یک ضرب ثابت، P_1 و P_2 به ترتیب چندجمله‌ایهای مفسر تحدید u به N_1 و تحدید u به N_2 می‌باشند.
اثبات- الف- فرض می‌کنیم $x \in N_1$ باشد. داریم:

$$u_1(ux) = P_1(u)ux = uP_1(u)x = u(u_1x) = u(0) = 0$$

بنابراین $ux \in N_1$ پس N_1 بوسیله u پایدار است. بهمین ترتیب دیده می‌شود که N_2 هم بوسیله u پایدار است.

ب- هر عنصر $u_1(E)$ به صورت $u_1(x)$ است که در آن $x \in E$ می‌باشد. بنابراین قضیه کیلی - هامیلتون داریم:

$$u_2 u_1 x = P_2(u)P_1(u)x = P(u)x = 0$$

یعنی $u_1 x \in N_2$. بدین روش ثابت می‌شود که $u_1(E) \subset N_2$ و به روشی مشابه می‌توان دید که $u_2(E) \subset N_1$.

پ- اکنون ثابت می‌کنیم که $N_1 + N_2 = E$. چون P_1 و P_2 نسبت به یکدیگر

اولند، بنابر ۳.۵.۵ چند جمله‌ایهایی مانند Q_1 و Q_2 متعلق به $C[X]$ می‌توان یافت به قسمی که:

$$P_1 Q_1 + P_2 Q_2 = 1$$

پس اگر $x \in E$ باشد داریم:

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= (P_1(u)Q_1(u) + P_2(u)Q_2(u))x \\ &= u_1 Q_1(u)x + u_2 Q_2(u)x \end{aligned}$$

و چون بنابر (ب) داریم $u_1 Q_1(u)x \in N_2$ و $u_2 Q_2(u)x \in N_1$ پس خواهیم داشت $x \in N_2 + N_1$.

ت. برای اثبات این که $N_1 \cap N_2 = \{0\}$ فرض می‌کنیم x متعلق به $N_1 \cap N_2$

باشد (پس $u_1 x = 0$ و $u_2 x = 0$). اما بنابر (۱) داریم:

$$\begin{aligned} x &= Q_1(u)P_1(u)x + Q_2(u)P_2(u)x \\ &= Q_1(u)u_1 x + Q_2(u)u_2 x = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

ث. قسمت (I) لم از (الف)، (پ) و (ت) نتیجه می‌شود.

ج. فرض می‌کنیم v_1 و v_2 به ترتیب تحدید u به N_1 و تحدید u به N_2 و P_1^* و P_2^* به ترتیب چندجمله‌ای‌های مفسر v_1 و v_2 باشند. ثابت می‌کنیم که $P = P_1^* P_2^*$. اگر B_1 پایه‌ای از N_1 و B_2 پایه‌ای از N_2 باشد، $B = B_1 \cup B_2$ پایه‌ای از E است و اگر M_1 و M_2 به ترتیب ماتریسهای v_1 و v_2 نسبت به پایه‌های B_1 و B_2 باشند

$$\text{ماتریس } u \text{ نسبت به } B \text{ بصورت } M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \text{ می‌باشد.}$$

در این صورت برابری $P_1^* P_2^* = P$ را می‌توان از ۱.۷.۱۵ نتیجه گرفت.

ج. چنانچه λ ریشه‌ای از P_1^* باشد می‌خواهیم ثابت کنیم که $P_1(\lambda) = 0$. بنابر

۱.۳.۱۴ بردار غیر صفری مانند x متعلق به N_1 وجود دارد به طوری که $v_1 x = \lambda x$

یعنی $u x = \lambda x$. در نتیجه داریم:

$$u^r x = \lambda^r x, \quad u^r(x) = \lambda^r x, \dots$$

بنابراین :

$$P_1(u)x = P_1(\lambda)x$$

چون $x \in N_1$ داریم : $P_1(u)x = u_1x = 0$ پس $P_1(\lambda)x = 0$. چون x صفر نیست از اینجا نتیجه می شود که $P_1(\lambda) = 0$ و چون P_1 و P_2 نسبت بهم اولند λ ریشه ای از P_2 نیست .

بنابراین هیچیک از ریشه های P_1^* ریشه P_2 نیست یعنی P_1^* و P_2 نسبت بهم اولند . به علاوه بنا بر (ج) چند جمله ای P_1^* حاصل ضرب $P = P_1 P_2$ راسی شمرد، پس P_1^* بخش یابی از P_1 است (۲.۵.۵) . به روشی مشابه ثابت می شود که P_2^* نیز بخش یابی از P_2 است . چون $P_1 P_2 = P_1^* P_2^*$ پس :

$$\deg P_2^* = \deg P_2 \quad , \quad \deg P_1^* = \deg P_1$$

یعنی P_1^* متناسب با P_1 و P_2^* متناسب با P_2 است .

۴.۵.۱۴ - لم - فرض می کنیم E یک فضای برداری با بعد با پایان روی

C و u یک گسترش خطی E در E باشد. چند جمله ای مفسر u را P می نامیم. فرض می کنیم که P برابر با حاصل ضرب m چند جمله ای P_1, P_2, \dots, P_m که نسبت بهم اولند باشد، یعنی $P = P_1 P_2 P_3 \dots P_m$. چنانچه $P_1(u) = u_1, \dots, P_m(u) = u_m$ باشد و هسته u_1 را N_1 و هسته u_2 را N_2, \dots و هسته u_m را N_m نشان دهیم :

(I) - N_i ها بوسیله u پایدارند و E حاصل جمع مستقیم N_1, \dots, N_m است .

(II) - با تقریب یک ضریب ثابت ، P_i چند جمله ای مفسر تحدید u

به N_i است .

باتوجه به اینکه $(P_1 P_2 \dots P_{m-1})$ و P_m نسبت بهم اولند (۵.۵.۵) ، این لم را می توان به روش بازگشت از لم ۳.۵.۱۴ نتیجه گرفت .

۵.۵.۱۴ - قضیه - E فضایی برداری با بعد با پایان روی هیات C و

u یک گسترش خطی E در E است. فرض می کنیم P چند جمله ای مفسر u و $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ریشه های متمایز P باشند به طوری که داشته باشیم:

$$P(X) = (\lambda_1 - X)^{h_1} (\lambda_2 - X)^{h_2} \dots (\lambda_m - X)^{h_m}$$

اگر هسته $(\lambda_i - u)^{h_i}$ را N_i بنامیم داریم:

$$N_i - (I) \quad N_i \text{ها بوسیله } u \text{ پدیدارند و } E \text{ حاصل جمع مستقیم } N_1, \dots, N_m$$

است.

$$(II) \quad (\lambda_i - X)^{h_i} \text{ چند جمله‌ای مفسر } u \text{ به } N_i \text{ است.}$$

این قضیه حالت ویژه‌ای از ۴.۵.۱۴ می‌باشد.

۶.۵.۱۴ - نتیجه = فرض می‌کنیم M ماتریسی مختلط از رسته (n, n) ،

P چند جمله‌ای مفسر آن و $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ریشه‌های متمایز P باشند

به طوری که داشته باشیم:

$$P(X) = (\lambda_1 - X)^{h_1} (\lambda_2 - X)^{h_2} \dots (\lambda_m - X)^{h_m}$$

در این صورت M همانند ماتریسی است به صورت:

$$\begin{bmatrix} M_1 & \circ & \dots & \circ \\ \circ & M_2 & \dots & \circ \\ \circ & \dots & \dots & \circ \\ \circ & \circ & \dots & M_m \end{bmatrix}$$

که در آن M_i ماتریسی است مربع که چند جمله‌ای مفسرش برابر با

$$(\lambda_i - X)^{h_i} \text{ می‌باشد.}$$

این نتیجه همان بیان ماتریسی شماره ۵.۵.۱۴ است.

۷.۵.۱۴ - تبصره - با در نظر گرفتن فرض‌های شماره ۶.۵.۱۴ می‌بینیم که هر یک

از ماتریسهای M_i خود همانند یک ماتریس سه بری زیرین است که عنصرهای قطر اصلی

آن همگی برابر با اسکالر λ_i می‌باشند (۷.۴.۱۴).

۸.۵.۱۴ - شماره‌های ۳.۴.۱۴ و ۶.۴.۱۴. حالت‌های ویژه ۵.۵.۱۴ و ۶.۵.۱۴

می‌باشند.

فصل پانزدهم

فرم‌های چند خطی

در این فصل به بیان مطالب کلی و ساده اکتفا می‌کنیم. از بین فرم‌های چند خطی تنها فرم‌های دوخطی متقارن (در فصل شانزدهم) و فرم‌های چند خطی متناوب (در فصل هیجدهم) مورد مطالعه قرار خواهند گرفت.

۱.۱۵- فضای برداری فرم‌های P خطی

۱.۱.۱۵- فرض می‌کنیم E یک فضای برداری روی \mathbb{K} باشد. در شماره ۲.۱۷.۸ فرم‌های دوخطی روی E را تعریف کردیم، و دیدیم که یک فرم دوخطی f روی E یک گسترش E^2 در \mathbb{K} است به قسمی که $f(x, y)$ به طور خطی به x و y بستگی داشته باشد. اگر f و g دو فرم دوخطی روی E و λ یک اسکالر باشد فرم‌های $f+g$ و λf را به روش زیر تعریف می‌کنیم:

به ازای هر x و هر y متعلق به E قرار می‌دهیم:

$$(f+g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$$

$$(\lambda f)(x, y) = \lambda f(x, y)$$

با این تعاریف $f+g$ و λf فرم‌هایی دوخطی روی E می‌باشند. به این ترتیب مجموعه فرم‌های دوخطی روی E یک فضای برداری روی \mathbb{K} تشکیل می‌دهد. بررسی درستی این مطلب را بخواننده واگذار می‌کنیم.

۲.۱.۱۵- بطور کلی در شماره ۱.۱۸.۸ فرم‌های p خطی روی E تعریف شد. هرگاه f و g دو فرم p خطی روی E و λ یک اسکالر باشد، $f+g$ و λf را به روش زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f+g)(x_1, x_2, \dots, x_p) = f(x_1, x_2, \dots, x_p) + g(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

$$(\lambda f)(x_1, x_2, \dots, x_p) = \lambda f(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

به این ترتیب مجموعه فرمهای p خطی روی E ، یک فضای برداری روی هيات \mathbf{K} تشکیل می‌دهد.

۳.۱.۱۰ - فرم p خطی f روی E را متقارن می‌نامند هرگاه برای p عنصر دلخواه

x_1, x_2, \dots, x_p از E و هر تبدیل σ از $\{1, 2, \dots, p\}$ داشته باشیم :

$$(1) \quad f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = f(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

به ویژه فرم دوخطی f روی E متقارن است اگر به ازای هر x و هر y داشته باشیم :

$$f(x, y) = f(y, x)$$

روشن است که با این تعریف فرمهای خطی متقارن روی E همان فرمهای خطی روی E می‌باشند.

۴.۱.۱۰ - اگر فضای برداری فرمهای p خطی روی E را F بنامیم، مجموعه فرمهای

p خطی متقارن روی E یک زیر فضای برداری از F است.

۵.۱.۱۰ - در شماره ۱.۲.۱۰ فرمهای p خطی متناوب روی E را تعریف کردیم .

اگر f یک فرم p خطی متناوب روی E باشد بنا به شماره ۲.۲.۱۰ برای هر p عنصر

x_1, x_2, \dots, x_p متعلق به E و هر تبدیل σ از تبدیل‌های $\{1, 2, \dots, p\}$ داریم :

$$(2) \quad f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon_{\sigma} f(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

فرمهای خطی متناوب روی E همان فرمهای خطی روی E هستند. بر حسب قرارداد

یک فرم 0 خطی متناوب روی E را عنصری از \mathbf{K} می‌گیریم .

۶.۱.۱۰ - اگر فضای برداری فرمهای p خطی روی E را F بنامیم، مجموعه فرمهای

p خطی متناوب روی E یک زیر فضای برداری از F است.

۷.۱.۱۰ - به جای فرمهای p خطی روی E می‌توان به طور کلی‌تر، گسترشهای p

خطی E در یک فضای برداری E_1 را در نظر گرفت. هر گسترش p خطی E در E_1 یک

گسترش f فضای E^p در E_1 است به قسمی که $f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ به طور خطی به x_1, x_2, \dots, x_p بستگی داشته باشد. در این حالت هم f را مستقار گویند هرگاه f درهمانی (اتحاد) (۱) صدق کند. همچنین f را متناوب خوانند اگر هر بار که دو تا از بردارهای x_i برابر باشند داشته باشیم: $f(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$. در این صورت مانند شماره ۲.۲.۱۰ به آسانی دیده می شود که f درهمانی (۲) صدق می کند.

۲.۱۵- سایه وارون به وسیله یک گسترش خطی

۱.۲.۱۰- فرض می کنیم E و F دو فضای برداری روی K ، u یک گسترش خطی

در F و f یک فرم p خطی روی F باشد. به آسانی دیده می شود که گسترش:

$$(x_1, x_2, \dots, x_p) \rightarrow f(ux_1, ux_2, \dots, ux_p)$$

فضای E^p در K یک فرم p خطی f' روی E است. f' را سایه وارون f به وسیله u می نامند.

اگر $p=1$ باشد، f یک فرم خطی روی F است و در این صورت $f' = f \circ u$

گردانده (مبدل) f به وسیله u است (شماره ۲.۱۶.۸).

۲.۲.۱۰- فرض می کنیم E_p و F_p به ترتیب فضاهای برداری فرمهای p خطی

روی E و F باشند. در شماره پیش گسترش $f' \rightarrow f$ فضای F_p در فضای E_p را تعریف کردیم. به آسانی می توان دید که این گسترش خطی است.

۳.۲.۱۰- فضاهای برداری E, F, G روی K و گسترشهای خطی:

$$u: E \rightarrow F \quad \text{و} \quad v: F \rightarrow G$$

داده شده است. فرض می کنیم f یک فرم p خطی روی G ، f' سایه وارون f بوسیله

v و f'' سایه وارون f' بوسیله u باشند. در این صورت f'' سایه وارون f به وسیله $v \circ u$

است. زیرا برای هر p عنصر دلخواه x_1, x_2, \dots, x_p متعلق به E داریم:

$$\begin{aligned} f''(x_1, x_2, \dots, x_p) &= f'(ux_1, ux_2, \dots, ux_p) \\ &= f(v(ux_1), v(ux_2), \dots, v(ux_p)) \\ &= f((v \circ u)x_1, (v \circ u)x_2, \dots, (v \circ u)x_p) \end{aligned}$$

۴.۲.۱۵ - بار دیگر فرضهای شماره ۱.۲.۱۵ را روی E, F, u, f, f' و در نظر می‌گیریم. به آسانی دیده می‌شود که اگر f متقارن باشد f' متقارن است و اگر f متناوب باشد f' متناوب است. اگر f یک فرم \circ خطی و متناوب باشد یعنی اگر f یک اسکالر λ باشد بر حسب قرارداد f' را نیز همان اسکالر λ می‌گیریم.

۵.۲.۱۵ - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری n بعدی، u یک گسترش خطی E در E و f یک فرم n خطی متناوب روی E باشد. اگر دترمینان x_1, x_2, \dots, x_n نسبت به یک پایه ثابت از E برابر با $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ باشد، بنا بر شماره ۳.۵.۱۵ سایه وارون f به وسیله u برابر است با $f \cdot (\det u)$. حالت کلی را هم می‌توان به این حالت برگرداند. زیرا بنا بر ۲.۳.۱۵، (II) تمام فرمهای n خطی متناوب روی E بایکدیگر متناسبند.

فصل شانزدهم

فرم‌های دو خطی متقارن

در این فصل به بررسی فرم‌های دو خطی متقارن می‌پردازیم. مطالعه این فرم‌ها تقریباً به مطالعه فرم‌های درجه دوم (کوادراتیک) منجر می‌شود. این مفاهیم تعمیم حاصل ضرب اسکالر معمولی می‌باشند. گروه‌های وابسته (مثلاً گروه‌های متعامد) نقش مهمی در هندسه، مکانیک و فیزیک بازی می‌کنند. مثلاً گروه لورنتز که در فیزیک نقش مهمی دارد یک گروه متعامد است.

در سراسر این فصل فرض می‌کنیم بعد فضاهای برداری با پایان و هیأت پایه هئاتی است که مشخص آن مخالف با ۲ می‌باشد.

۱.۱۶- فرم‌های دو خطی متقارن

۱.۱.۱۶- فرض می‌کنیم (e_1, e_2, \dots, e_n) یک پایه فضای برداری E و f یک فرم دو خطی روی E باشد.

قضیه - برای اینکه f متقارن باشد با یا وابسته است که ماتریس آن (۱.۱۱.۹) نسبت به (e_1, e_2, \dots, e_n) متقارن باشد.

اثبات - فرضی می‌کنیم $[a_{ij}]$ ماتریس f نسبت به پایه انتخاب شده باشد. اگر f متقارن باشد داریم:

$$a_{ij} = f(e_i, e_j) = f(e_j, e_i) = a_{ji}$$

پس ماتریس $[a_{ij}]$ متقارن است.

به وارون فرض می‌کنیم برای هر i و هر j داریم $a_{ij} = a_{ji}$. چنانچه:

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \quad \text{و} \quad y = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n$$

دو بردار دلخواه از E باشند داریم:

$$f(x, y) = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \mu_j f(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \mu_j \alpha_{ij}$$

$$f(y, x) = \sum_{i,j=1}^n \mu_j \lambda_i f(e_j, e_i) = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \mu_j \alpha_{ji}$$

$$f(x, y) = f(y, x)$$

بنابراین

یعنی f متقارن است.۲.۱.۱۶- می‌بینیم که اگر $\alpha_{ji} = \alpha_{ij}$ باشد می‌توان نوشت .

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n \mu_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i \alpha_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i \mu_j + \lambda_j \mu_i) \alpha_{ij}$$

۳.۱.۱۶- مثال - فرض می‌کنیم E فضای برداری بردارهای آزاد فضای معمولی

باشد. در اینصورت گسترش $\vec{V} \cdot \vec{V}' \rightarrow (\vec{V}, \vec{V}')$ یک فرم دوخطی متقارن است. از این روگاهی یک فرم دوخطی متقارن را حاصلضرب اسکالر می‌نامند و با $x \cdot y \rightarrow (x, y)$ نمایش می‌دهند.

۴.۱.۱۶- مثال - فرض می‌کنیم $E = K^n$ باشد. گسترش :

$$((\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)) \rightarrow \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \dots + \lambda_n \mu_n$$

یک فرم دوخطی متقارن است که حاصلضرب اسکالر کانونیک K^n نامیده می‌شود.

۲.۱۶- فرم‌های درجه دوم یا فرم‌های کوادراتیک

۱.۲.۱۶- قضیه - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری روی K و q یک گسترش E در K باشد. چنانچه برای یک پایه (e_1, e_2, \dots, e_n) از E عبارت $q(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n)$ نسبت به $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ یک چند جمله‌ای همگن درجه دوم باشد، برای هر پایه دیگری از E این

مطلب برقرار خواهد بود.

اثبات - بنابه فرض داریم :

$$q\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = \sum_{i,j=1}^n \rho_{ij} \lambda_i \lambda_j$$

که در آن ρ_{ij} ها اسکالرهایی ثابتی می باشند. فرض می کنیم $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$

پایه دیگری از E باشد. آرایندهای بردار $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ را در این پایه $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n$

می نامیم. در این صورت داریم :

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \lambda'_j$$

که در آن α_{ij} ها اسکالرهایی ثابت می باشند (۵.۸.۹). پس :

$$\begin{aligned} q\left(\sum_{i=1}^n \lambda'_i e'_i\right) &= q\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = \sum_{i,j=1}^n \rho_{ij} \lambda_i \lambda_j \\ &= \sum_{i,j=1}^n \rho_{ij} \left(\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \lambda'_k\right) \left(\sum_{l=1}^n \alpha_{jl} \lambda'_l\right) \end{aligned}$$

و این عبارت نسبت به $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n$ یک چند جمله ای همگن درجه دوم می باشد.

۲.۲.۱۶- تعریف - یک گسترش E در K را که در قضیه ۱.۲.۱۶ صدق

می کند یک فرم درجه دوم یا فرم کوادراتیک روی E می نامیم.

۳.۲.۱۶- فرض می کنیم S مجموعه فرم های دو خطی متقارن روی E و Q

مجموعه فرم های درجه دوم روی E باشند.

قضیه :

(I) - فرض می کنیم f متعلق به S باشد و برای هر x متعلق به E قرار

می دهیم $q_f(x) = f(x, x)$. در این صورت داریم $q_f \in Q$.

(II) - فرض می‌کنیم q متعلق به Q باشد. برای هر x و هر y متعلق

به E قرار می‌دهیم :

$$f_q(x, y) = \frac{1}{\gamma} [q(x+y) - q(x) - q(y)]$$

در این صورت داریم $f_q \in S$.

(III) - گسترش $f \rightarrow q_f$ يك گسترش دو سوایی S روی Q است و

$q \rightarrow f_q$ گسترش وارون آن می‌باشد.

اثبات - فرض می‌کنیم (e_1, e_2, \dots, e_n) پایه‌ای از E باشد.

(I) - اگر f متعلق به S و $[a_{ij}]$ ماتریس f نسبت به پایه (e_1, e_2, \dots, e_n)

باشد، برای هر بردار دلخواه $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ متعلق به E داریم :

$$q_f(x) = f(x, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \lambda_i \lambda_j$$

پس $q_f \in Q$.

(II) - فرض می‌کنیم q متعلق به Q باشد و قرار می‌دهیم :

$$q(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = \sum_{i,j=1}^n \rho_{ij} \lambda_i \lambda_j$$

در این صورت داریم :

$$f_q(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n, \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n)$$

$$= \frac{1}{\gamma} \left[\sum_{i,j=1}^n \rho_{ij} (\lambda_i + \mu_i) (\lambda_j + \mu_j) - \sum_{i,j=1}^n \rho_{ij} \lambda_i \lambda_j - \sum_{i,j=1}^n \rho_{ij} \mu_i \mu_j \right]$$

$$= \frac{1}{\gamma} \sum_{i,j=1}^n \rho_{ij} [(\lambda_i + \mu_i) (\lambda_j + \mu_j) - \lambda_i \lambda_j - \mu_i \mu_j]$$

$$= \frac{1}{\gamma} \sum_{i,j=1}^n \rho_{ij} (\lambda_i \mu_j + \lambda_j \mu_i)$$

بنابراین f_q دوخطی است. به علاوه از روی تعریف آشکار است که $f_q(x, y) = f_q(y, x)$ پس $f_q \in S$.

(III) - داریم :

$$\begin{aligned} f_{q_f}(x, y) &= \frac{1}{\gamma} [q_f(x+y) - q_f(x) - q_f(y)] \\ &= \frac{1}{\gamma} [f(x+y, x+y) - f(x, x) - f(y, y)] \\ &= \frac{1}{\gamma} [f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y) - f(x, x) - f(y, y)] \\ &= \frac{1}{\gamma} [f(x, y) + f(y, x)] = \frac{1}{\gamma} \gamma f(x, y) = f(x, y) \end{aligned}$$

بنابراین $f_{q_f} = f$. همچنین :

$$q_{f_q}(x) = f_q(x, x) = \frac{1}{\gamma} [q(\gamma x) - q(x) - q(x)]$$

اما از روی تعریف ۲.۲.۱۶ می‌توان به آسانی نتیجه گرفت که :

$$q(\gamma x) = \varepsilon q(x)$$

$$q_{f_q}(x) = q(x)$$

پس

و بنابراین گسترشهای $f \rightarrow q_f$ و $q \rightarrow f_q$ دوسویی و وارون یکدیگرند (۱.۸.۵).
۲.۲.۱۶- تعریف - گسترشهای f و q_f شمارهٔ بالا را وابسته به یکدیگر می‌گویند.

۵.۲.۱۶- مثال - فرض می‌کنیم بعد E برابر ۳ و (e_1, e_2, e_3) پایه‌ای از E باشد. کلی‌ترین فرم دوخطی متقارن f روی E را که با دستور زیر داده شده است در نظر می‌گیریم (شمارهٔ ۲.۱.۱۶) :

$$\begin{aligned} &f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3, \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3) \\ &= \alpha \lambda_1 \mu_1 + \beta (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) + \gamma \lambda_2 \mu_2 + \delta (\lambda_1 \mu_3 + \lambda_3 \mu_1) \\ &\quad + \varepsilon (\lambda_2 \mu_3 + \lambda_3 \mu_2) + \zeta \lambda_3 \mu_3 \end{aligned}$$

در اینصورت فرم درجه دوم وابسته به f عبارتست از :

$$q(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3) = \alpha \lambda_1^2 + 2\beta \lambda_1 \lambda_2 + \gamma \lambda_2^2 + 2\delta \lambda_1 \lambda_3 + 2\epsilon \lambda_2 \lambda_3 + \zeta \lambda_3^2$$

۶.۲.۱۶- مثال - اگر روی K^n ضرب اسکالر کانونیک را در نظر بگیریم (۴.۱.۱۶)

فرم وابسته به آن عبارتست از :

$$q((\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2$$

q را فرم درجه دوم کانونیک K^n می نامند.

۷.۲.۱۶- مثال - E را همان فضای برداری بردارهای آزاد فضای معمولی فرض

می کنیم. اگر $f(\vec{V}, \vec{V}')$ حاصل ضرب اسکالر معمولی باشد فرم درجه دوم وابسته به آن عبارتست از تابع :

$$\vec{V} \rightarrow \vec{V} \cdot \vec{V} = |\vec{V}|^2$$

۸.۲.۱۶- از شماره ۳.۲.۱۶ نتیجه می شود که مطالعه فرم های درجه دوم و مطالعه

فرم های دو خطی متقارن هم ارز می باشند.

۳.۱۶- تعامد

۱.۳.۱۶- تعریف - فرض می کنیم E یک فضای برداری ، f یک فرم

دو خطی متقارن روی E و q فرم درجه دوم وابسته به f باشد. دو عنصر x و y از E را نسبت به f (یا نسبت به q) عمود برهم گوئیم هرگاه داشته باشیم :

$$f(x, y) = 0$$

بستگی عمود بودن x و y یک بستگی متقارن است. در شماره ۵.۱۶ خواهیم دید که این تعریف با تعریف ۱.۱۵.۸ سازگار است.

۲.۳.۱۶- دو بخش M و N از E را عمود برهم گویند هرگاه هر عنصر M

بر هر عنصر N عمود باشد.

۳.۳.۱۶- اگر M و N برهم عمود باشند هر ترکیب خطی از عناصر M

بر هر ترکیب خطی از عناصر N عمود است. پس مجموعه بردارهایی از E که بر M

(II) - برای اینکه f غیراصیل باشد یا وابسته است که $\det[a_{ij}] = 0$.

اثبات - داریم :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n \in N$$

$$\Leftrightarrow \forall i, f((\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n), e_i) = 0, \quad (۳.۲.۱۶ \text{ شماره})$$

$$\Leftrightarrow \forall i, \lambda_1 f(e_1, e_i) + \lambda_2 f(e_2, e_i) + \dots + \lambda_n f(e_n, e_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall i, \lambda_1 a_{1i} + \lambda_2 a_{2i} + \dots + \lambda_n a_{ni} = 0$$

به این ترتیب قسمت (I) ثابت می‌شود. بنابر (I) برای اینکه f غیر اصیل باشد یا وابسته است که دستگاه (۱) غیر از صفر جوابهای دیگری نیز داشته باشد. پس بنابر ۱.۲.۱۱ باید داشته باشیم $\det[a_{ij}] = 0$ و در نتیجه قسمت (II) نیز ثابت می‌شود.

۳.۴.۱۶-۴. در مینان ماتریس $[a_{ij}]$ را مین f' (یا مین فرم درجه دوم وابسته به f) نسبت

به پایه (e_1, e_2, \dots, e_n) می‌نامند. گرچه مقدار این در مینان به پایه انتخاب شده بستگی دارد ولی بنابر ۳.۴.۱۶، صفر و یا مخالف با صفر بودن این در مینان یک ویژگی ذاتی f می‌باشد.

۳.۴.۱۶-۵. چنانچه f یک فرم دو خطی متقارن روی E باشد، به کمک مطالب

زیر می‌توان مطالعه f را همواره به مطالعه یک فرم دو خطی متقارن اصیل منجر ساخت.

فرض می‌کنیم N هسته f و E' فضای برداری E/N باشد. در روی E' فرم دو

خطی f' را به روش زیر تعریف می‌کنیم :

$$f'(x', y') = f(x, y) \quad \text{برای هر دو عنصر } x' \text{ و } y' \text{ از } E' \text{ قرار می‌دهیم} :$$

که در آن x نماینده‌ای از x' و y نماینده‌ای از y' در E می‌باشد. اسکالر $f'(x', y')$

به انتخاب این نماینده‌ها بستگی ندارد. زیرا هر نماینده دیگر x' (یا y') به صورت $x + x_1$

(یا $y + y_1$) است که در آن x_1 (یا y_1) به N متعلق است. پس داریم :

$$f(x + x_1, y + y_1) = f(x, y) + f(x, y_1) + f(x_1, y)$$

$$+ f(x_1, y_1) = f(x, y)$$

زیرا $f(x, y_1) = f(x_1, y) = f(x_1, y_1) = 0$. چون f یک فرم دو خطی متقارن روی

E است به آسانی دیده می‌شود که f' نیز یک فرم دو خطی متقارن روی E' می‌باشد.

اکنون ثابت می‌کنیم که f' اصیل است. برای این کار فرض می‌کنیم x' عنصری از E' متعلق به هسته f' باشد. یعنی برای هر عنصر دیگر y' از E' داشته باشیم:

$$f'(x', y') = 0$$

چنانچه x نماینده‌ای از x' در E باشد برای هر عنصر z متعلق به E داریم:

$$f(x, z) = f'(x', z') = 0$$

که در آن z' سایه کانونیک z در E' می‌باشد. پس $x \in N$ و بنابراین $x' = 0$ یعنی f' اصیل است. f' را فرم دو خطی متقارن اصیل وابسته به f می‌گویند.

۶.۴.۱۶ - قضیه - فرض می‌کنیم f یک فرم دو خطی متقارن اصیل

روی E باشد.

(I) - برای هر x متعلق به E ، گسترش E در K که با $g_x : y \rightarrow f(x, y)$

تعریف شده است یک فرم خطی روی E می‌باشد.

(II) - گسترش $x \rightarrow g_x$ یک ایزومرفیسم E روی E^* است.

اثبات - حکم (I) از دو خطی بودن f نتیجه می‌شود. برای اثبات (II) فرض

می‌کنیم x و x' دو عنصر از E باشند. برای هر عنصر y متعلق به E داریم:

$$\begin{aligned} g_{x+x'}(y) &= f(x+x', y) = f(x, y) + f(x', y) = g_x(y) + g_{x'}(y) \\ &= (g_x + g_{x'})(y) \end{aligned}$$

پس $g_{x+x'} = g_x + g_{x'}$. همچنین برای هر اسکالر λ داریم $g_{\lambda x} = \lambda g_x$ یعنی گسترش $x \rightarrow g_x$ خطی است.

اکنون ثابت می‌کنیم که گسترش $x \rightarrow g_x$ انژکتیو است. برای این کار کافی

است ثابت کنیم که هسته آن 0 است. اگر x عنصری از E باشد به قسمی که داشته باشیم $g_x = 0$ ، برای هر y متعلق به E خواهیم داشت:

$$f(x, y) = g_x(y) = 0$$

و از آنجا نتیجه می‌شود $x = 0$ زیرا f اصیل است.

فرض می‌کنیم $n = \dim E$ باشد. بنابراین گذشته رتبه گسترش خطی $x \rightarrow g_x$

برابر $n - 0 = n$ می‌باشد (۲.۱۱.۸). بنابراین بعد سایه E بوسیله این گسترش نیز n

است (۲.۱۱.۸). چون $\dim E^* = n$ می‌باشد (۶.۱۲.۸)، این سایه همان E^* است (۷.۴.۱۶). به این ترتیب (II) ثابت می‌شود.

۷.۴.۱۶- هنگامی که یک فرم دو خطی متقارن اصیل f روی E داده شده باشد، اغلب E و E^* را به کمک ایزومرفیسم شماره ۶.۴.۱۶ (که ایزومرفیسم کانونیک گفته می‌شود) یکی می‌گیرند. به بیان دیگر هر عنصر x از E به صورت یک فرم خطی روی E ، که عبارت از فرم خطی $f(x, y) = f(y, x)$ باشد، در نظر گرفته می‌شود. پس اگر x و y دو عنصر از E باشند نماد $\langle x, y \rangle$ می‌تواند دو معنی داشته باشد یکی $\langle g_x, y \rangle$ و دیگری $\langle x, g_y \rangle$ اما چون این اسکالر‌ها به ترتیب برابر با $f(x, y)$ و $f(y, x)$ هستند پس باهم برابرند، و در نتیجه خطر اشتباه وجود ندارد. بنابراین داریم:

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle = f(x, y) = f(y, x)$$

۸.۴.۱۶- مثال - در فضای برداری بردارهای آزاد فضای معمولی E که در آن ضرب

اسکالر معمولی تعریف شده است، بردار \vec{V} یک فرم خطی روی E است که با:

$$\vec{V}' \rightarrow \vec{V} \cdot \vec{V}'$$

معین شده است. به علاوه هر فرم خطی روی E به این روش، و تنها به کمک یک بردار V از E ، به دست می‌آید.

۱۶. ۵- بستگی‌های تعامد بالا با تعامد فصل هشتم

۱۰.۵.۱۶- مطالب ۶.۴.۱۶ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که f همواره اصیل

باشد. اگر x و y دو عنصر دلخواه E باشند داریم:

$$f(x, y) = 0 \iff (x \text{ و } y \text{ نسبت به } f \text{ برهم عمودند})$$

$$\iff \langle g_x, y \rangle = 0$$

$$\iff (y \text{ و } g_x \text{ به معنای شماره } ۱۰.۵.۸ \text{ برهم عمودند})$$

چنانچه با توجه به ۷.۴.۱۶، x و g_x را باهم یکی بگیریم می‌بینیم که این مفهوم

تعامد، همان مفهوم تعامد ۱۰.۵.۸ است. این مطلب درستی نام گذاری‌های یکسان را

در هر دو حالت، آشکار می‌سازد.

۲.۵.۱۶- باتوجه به ۹.۱۵.۸ و ۱۱.۱۵.۸ قضیه زیر به دست می‌آید :

قضیه - فرض می‌کنیم F و $n = \dim E$ يك زیر فضای برداری k بعدی E باشد. در این صورت F^\perp يك زیر فضای برداری $n-k$ بعدی است و داریم $(F^\perp)^\perp = F$.

۳.۵.۱۶- قضیه زیر از شماره ۷.۱۳.۸ نتیجه می‌شود.

قضیه - فرض می‌کنیم (e_1, e_2, \dots, e_n) پایه‌ای از E باشد. يك پایه $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ از E و تنها يك پایه وجود دارد به قسمی که برای هر i و هر j داریم $f(e_i, e_j^*) = \delta_{ij}$.

۴.۵.۱۶- پایه $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ را پایهٔ دوآل (e_1, e_2, \dots, e_n) (نسبت به f یا نسبت به فرم درجه دوم وابسته به f) می‌گویند. از طرفی به کمک ۷.۴.۱۶ می‌توان این پایه دوآل را با پایه دوآل (e_1, e_2, \dots, e_n) به معنای ۸.۱۳.۸ یکی گرفت. پایه $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n)$ نیز پایه دوآل $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ می‌باشد.

۵.۵.۱۶- مثال - در فضای معمولی يك مبدأ و ضرب اسکالر معمولی را در نظر

می‌گیریم و فرض می‌کنیم $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ و $(\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \vec{e}_3^*)$ دو پایهٔ دوآل باشند. بردار \vec{e}_1^* بردارهای \vec{e}_2 و \vec{e}_3 عمود است و با \vec{e}_1 يك زاویهٔ کوچکتر از $\frac{\pi}{2}$ می‌سازد، زیرا $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1^* = 1 > 0$. با استدلالی مشابه برای \vec{e}_2 و \vec{e}_3 دیده

می‌شود که دستگاه نیم خط‌های پدیدآمده به وسیله $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ و دستگاه نیم خط‌های پدیدآمده به وسیله $\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \vec{e}_3^*$ دوسه وجهی متمم تشکیل می‌دهند.

۱۶. ۶- پایه‌های متعامد

۱.۶.۱۶- فرض می‌کنیم f يك فرم دو خطی متقارن روی E و q فرم درجه دوم وابسته به آن باشد. خانواده (e_i) از بردارهای E را (نسبت به f یا نسبت به q) متعامد می‌گوئیم هرگاه بردارهای e_i دویه دو برهم عمود باشند. این خانواده را (نسبت به f

یا نسبت به q) یک‌های متعامد (ارتونرمال) می‌نمایم هرگاه این خانواده متعامد باشد و به علاوه برای هر i داشته باشیم $f(e_i, e_i) = 1$.

۲.۶.۱۶- قضیه - برای هر فرم دو خطی متقارن f روی E پایه‌های متعامدی وجود دارد.

اثبات - درحالتی که $\dim E = 1$ باشد قضیه آشکار است.

فرض می‌کنیم $\dim E$ برابر با n و قضیه برای فضاهای $n-1$ بعدی ثابت شده باشد.

حالت اول: در E دست کم یک بردار غیر ایزوترپ x_0 وجود دارد. مجموعه بردارهای x متعلق به E را به قسمی که $f(x_0, x) = 0$ باشد H می‌نامیم. چون $f(x_0, x_0) \neq 0$ می‌باشد، پس H یک هیپرپلان است (۱۰.۱۰.۸) و داریم $x_0 \notin H$. بنابراین $\dim H = n-1$ پس بنا به فرض بازگشت یک پایه متعامد $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ برای H وجود دارد. در این صورت بنا بر ۸.۷.۸ بردارهای $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, x_0$ نایستگی خطی دارند و در نتیجه یک پایه E را تشکیل می‌دهند. روشن است که این پایه متعامد است.

حالت دوم: کلیه بردارهای E ایزوترپ هستند، به بیان دیگر برای هر x داریم $q(x) = 0$. بنا بر شماره ۳.۲.۱۶ داریم $f = 0$ و در نتیجه هر پایه‌ای از E متعامد است. ۳.۶.۱۶- قضیه - فرض می‌کنیم (e_1, e_2, \dots, e_n) یک پایه متعامد E نسبت به f باشد و قرار می‌دهیم:

$$f(e_1, e_1) = \alpha_1, \quad f(e_2, e_2) = \alpha_2, \quad \dots, \quad f(e_n, e_n) = \alpha_n$$

(I) - برای بردارهای دلخواه $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ و $\sum_{j=1}^n \mu_j e_j$ متعلق به E داریم:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n \mu_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \mu_i$$

(II) - هسته f برابر با زیر فضای برداری پدید آمده به وسیله e_i هایی

است که برای آنها داریم $\alpha_i = 0$.

(III) - برای اینکه f اصیل باشد بایاوبسنده است که برای هر اندیس

i داشته باشیم $\alpha_i \neq 0$.

اثبات - داریم :

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n \mu_j e_j\right) &= \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \mu_j f(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i f(e_i, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \mu_i \end{aligned}$$

به این ترتیب قسمت (I) ثابت می شود. بنابر ۳.۴.۱۶ برای اینکه $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ متعلق به هسته f باشد بایاوبسنده است که داشته باشیم :

$$\alpha_1 \lambda_1 = \dots = \alpha_n \lambda_n = 0$$

یعنی برای هر i به طوری که $\alpha_i \neq 0$ باشد داشته باشیم $\lambda_i = 0$. بدین ترتیب (II) ثابت می شود. قسمت (III) را می توان از (II) نتیجه گرفت.

۴.۶.۱۶- مثال پایه های متعامد - چنانچه فضای معمولی و ضرب اسکالر معمولی

را در نظر بگیریم سه بردار مخالف با صفر \vec{V} و \vec{V}' و \vec{V}'' که دو به دو برهم عمود باشند یک پایه متعامد تشکیل می دهند. اگر به علاوه :

$$|\vec{V}| = |\vec{V}'| = |\vec{V}''| = 1$$

باشد این پایه یکه ای متعامد است. همچنین در فضای \mathbf{K}^n وقتی ضرب اسکالر کانونیک (۴.۱.۱۶) را در نظر بگیریم پایه کانونیک یک پایه یکه ای متعامد می باشد.

۵.۶.۱۶- چنانچه (e_1, e_2, \dots, e_p) یک خانواده یکه ای متعامد باشد، بردارهای e_1, e_2, \dots, e_p نایستگی خطی دارند. زیرا اگر اسکالرهایی $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ به قسمی باشند که داشته باشیم $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_p e_p = 0$ خواهیم داشت :

$$0 = f(e_i, \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p) = \lambda_i f(e_i, e_i) = \lambda_i$$

و چون این بستگی برای هر i برقرار است پس حکم ثابت است. به ویژه اگر شمار p برابر

با بعد E باشد، (e_1, \dots, e_p) یک پایهٔ یک‌ای متعامد E خواهد بود.
 ۶.۶.۱۶- فرض می‌کنیم (e_1, e_2, \dots, e_n) یک پایهٔ یک‌ای متعامد باشد.
 بنا بر ۳.۶.۱۶ اگر x برداری از E باشد اسکالرهای $f(x, e_1), \dots, f(x, e_n)$ آراینده‌های x نسبت به پایهٔ (e_1, e_2, \dots, e_n) می‌باشند.

۱۶. ۷- حالتی که هیأت پایه‌هیأت شمارهای مختلط است

در اینجا فرض می‌کنیم که $K = \mathbb{C}$ باشد.

۱۶. ۷. ۱- چنانچه f یک فرم دو خطی متقارن روی E باشد، بنا بر ۲.۶.۱۶ یک پایهٔ متعامد $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ وابسته به f در E وجود دارد. اگر قرار دهیم $f(e'_i, e'_i) = a_i$ با تعویض شماره گذاری e'_i ها می‌توان فرض کرد:

$$a_1 \neq 0, \dots, a_r \neq 0, \quad a_{r+1} = \dots = a_n = 0$$

(r ممکن است برابر یا n و یا برابر ۰ باشد). یکی از ریشه‌های دوم a_i را $\sqrt{a_i}$ می‌نامیم و قرار می‌دهیم:

$$e_1 = \frac{e'_1}{\sqrt{a_1}}, \quad e_2 = \frac{e'_2}{\sqrt{a_2}}, \quad \dots, \quad e_r = \frac{e'_r}{\sqrt{a_r}}$$

$$e_{r+1} = e'_{r+1}, \quad \dots, \quad e_n = e'_n$$

در این صورت (e_1, e_2, \dots, e_n) نیز یک پایهٔ متعامد E است، و به علاوه برای $1 \leq i \leq r$ داریم:

$$f(e_i, e_i) = \frac{1}{\sqrt{a_i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_i}} f(e'_i, e'_i) = \frac{a_i}{a_i} = 1$$

پس بنا بر ۳.۶.۱۶ می‌توان نوشت:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n \mu_j e_j\right) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mu_i$$

۱۶. ۷. ۲- اگر f فرمی اصیل باشد از شمارهٔ ۳.۶.۱۶ نتیجه می‌شود $r = n$.

بنابراین داریم:

قضیه - اگر f یک فرم دو خطی متقارن اصیل روی یک فضای برداری مختلط باشد، برای f پایه‌های یک‌ه‌ای متعامد وجود دارد.

۳.۷.۱۶- چنانچه (e_1, e_2, \dots, e_n) چنین پایه‌ای باشد نسبت به آن داریم:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n \mu_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i$$

و فرم درجه دوم وابسته به آن با معادله زیر معین می‌شود:

$$q\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$$

بدین ترتیب دیده می‌شود که در روی یک فضای برداری مختلط n بعدی با تقریب یک ایزوسرفیس، تنها یک فرم درجه دوم اصیل وجود دارد.

۴.۷.۱۶- با توجه به فرضهای شماره ۳.۷.۱۶ دیده می‌شود که مثلاً بردار $e_1 + i e_2$

ایزوترپ است.

۸.۱۶- حالتی که هیأت پایه هیأت‌شمارهای حقیقی است

در اینجا فرض می‌کنیم که $K = \mathbf{R}$ باشد.

۱۰.۸.۱۶- تعریف - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری حقیقی باشد.

فرم دو خطی متقارن f روی E را مثبت می‌گوییم هرگاه برای هر x متعلق

به E داشته باشیم $f(x, x) \geq 0$.

همچنین فرم درجه دوم q روی E را مثبت می‌گوییم هرگاه برای هر x متعلق به

E داشته باشیم $q(x) \geq 0$.

با روشی مشابه فرم‌های منفی تعریف می‌شوند.

۲.۸.۱۶- مثال - ضرب اسکالر معمولی یک فرم دو خطی متقارن مثبت است.

۳.۸.۱۶- قضیه- فرض می‌کنیم f یک فرم دو خطی متقارن مثبت روی

E باشد. برای هر x و y متعلق به E داریم:

$$f(x, y)^2 \leq f(x, x)f(y, y)$$

اثبات - برای هر λ متعلق به \mathbf{R} می‌توان نوشت:

$$f(x + \lambda y, x + \lambda y) \geq 0$$

و یا :

$$(1) \quad \lambda^2 f(y, y) + 2\lambda f(x, y) + f(x, x) \geq 0$$

اگر $f(y, y) = 0$ باشد، برای اینکه نابرابری (۱) به ازای هر مقدار λ برقرار باشد باید داشته باشیم $f(x, y) = 0$ ، و قضیه در این حالت برقرار است.

اگر $f(y, y) > 0$ باشد، نابرابری (۱) نمی تواند برای هر مقدار λ برقرار باشد مگر اینکه سبب طرف اول منفی یا برابر با صفر باشد یعنی داشته باشیم :

$$f(x, y)^2 - f(x, x)f(y, y) \leq 0$$

که در این صورت نیز قضیه برقرار است.

۴.۸.۱۶ - قضیه - اگر f یک فرم دو خطی متقارن مثبت روی E

باشد، برای هر x و هر y متعلق به E داریم :

$$\sqrt{f(x+y, x+y)} \leq \sqrt{f(x, x)} + \sqrt{f(y, y)}$$

اثبات - با توجه به فرض می توان نوشت :

$$f(x+y, x+y) = f(x, x) + 2f(x, y) + f(y, y)$$

که بنا بر ۳.۸.۱۶ این مقدار کوچکتر و یا برابر است با :

$$f(x, x) + 2\sqrt{f(x, x)f(y, y)} + f(y, y) = (\sqrt{f(x, x)} + \sqrt{f(y, y)})^2$$

و به این ترتیب قضیه ثابت می شود.

۵.۸.۱۶ - مثال - چنانچه f ضرب اسکالر معمولی باشد از شماره های ۳.۸.۱۶ و

۴.۸.۱۶ نابرابریهای :

$$(\vec{V} \cdot \vec{V}')^2 \leq |\vec{V}|^2 |\vec{V}'|^2$$

$$|\vec{V} + \vec{V}'| \leq |\vec{V}| + |\vec{V}'|$$

به دست می آید.

۶.۸.۱۶ - قضیه - هسته یک فرم دو خطی متقارن مثبت f عبارت است

از مجموعه بردارهایی که برای f ایزوتروپ می باشند.

اثبات - فرض می‌کنیم N هسته f باشد. آشکاراست که هر بردار x متعلق به N ایزوترپ است. به وارون فرض می‌کنیم $f(x, x) = 0$ باشد. بنابر ۲.۸.۱۶ برای هر y در E داریم:

$$0 \leq f(x, y)^2 \leq f(x, x)f(y, y) = 0$$

پس $f(x, y) = 0$ و در نتیجه $x \in N$ است.

۷.۸.۱۶ - نتیجه - فرض می‌کنیم f یک فرم دوخطی متقارن مثبت اصیل

روی E باشد.

(I) - تنها بردار ایزوترپ بردار 0 است.

(II) - اگر F یک زیر فضای برداری E و g تحدید f به F باشد g

مثبت و اصیل است.

زیرا قسمت (I) به آسانی از شماره ۶.۸.۱۶ به دست می‌آید، به علاوه اگر

x برداری از F باشد که برای g ایزوترپ است، x برای f نیز ایزوترپ می‌باشد. پس بنابر ۶.۸.۱۶ فرم g اصیل است.

۸.۸.۱۶ - قضیه - چنانچه f یک فرم دوخطی متقارن مثبت باشد،

پایه‌های متعامدی از E مانند (e_1, e_2, \dots, e_n) وجود دارد به قسمی که داشته باشیم:

$$f(e_1, e_1) = \dots = f(e_r, e_r) = 1 \quad \text{و} \quad f(e_{r+1}, e_{r+1}) = \dots = f(e_n, e_n) = 0$$

اثبات - بنابر ۲.۶.۱۶ برای E یک پایه متعامد $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$

می‌توان یافت. فرض می‌کنیم $f(e'_i, e'_i) = \alpha_i$ چون f مثبت است داریم $\alpha_i \geq 0$. با انتخاب شماره گذاری مناسبی برای e'_i ها، می‌توان فرض کرد:

$$\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_r > 0 \quad \text{و} \quad \alpha_{r+1} = \dots = \alpha_n = 0$$

اکنون اگر قرار دهیم:

$$e_i = \frac{e'_i}{\sqrt{\alpha_i}} \quad , \quad (1 \leq i \leq r) \quad \text{برای}$$

$$e_i = e'_i \quad , \quad (r+1 \leq i \leq n) \quad \text{برای}$$

و

بردارهای e_i تمام خواسته‌های قضیه را دارا می‌باشند.

۹.۸.۱۶- قضیه - فرض می‌کنیم f یک فرم دو خطی متقارن مثبت و

اصیل باشد. همواره می‌توان برای f پایه‌های یکه‌ای متعامد یافت.

اثبات - با استفاده از شماره ۸.۸.۱۶ و با توجه به اینکه f اصیل است، از شماره

۳.۶.۱۶ نتیجه می‌شود که باید داشته باشیم $r=n$.

۱۰.۸.۱۶- نسبت به پایه یکه‌ای متعامد (e_1, e_2, \dots, e_n) داریم:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n \mu_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i$$

و اگر فرم درجه دوم وابسته به f را q بنامیم خواهیم داشت:

$$q\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$$

بنابراین، با تقریب یک ایزومرفیسم، در روی یک فضای برداری حقیقی n بعدی تنها یک

فرم درجه دوم مثبت و اصیل وجود دارد.

۱۱.۸.۱۶- در حالت ضرب اسکالر معمولی، درستی قضیه ۹.۸.۱۶ کاملاً آشکار

است.

۱۲.۸.۱۶- فرض می‌کنیم f یک فرم دوخطی متقارن مثبت و اصیل و

(e_1, e_2, \dots, e_r) یک خانواده یکه‌ای متعامد باشد. در این صورت بردارهایی مانند

$e_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_n$ می‌توان یافت به قسمی که (e_1, e_2, \dots, e_n) یک

پایه یکه‌ای متعامد باشد. برای اثبات فرض می‌کنیم که F زیر فضای برداری پدید آمده

به وسیله (e_1, e_2, \dots, e_r) باشد. بنابر ۵.۶.۱۶ خانواده (e_1, e_2, \dots, e_r)

یک پایه یکه‌ای متعامد برای F است. پس بنابر شماره ۷.۸.۱۶، (I) داریم

$$F \cap F^\perp = \{0\}$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\dim(F + F^\perp) = \dim F + \dim F^\perp$$

بنابراین $\dim(F + F^\perp) = \dim E$ (شماره ۲.۵.۱۶)، یعنی $F + F^\perp = E$. بنابر

شماره‌های ۷.۸.۱۶ ، (II) و ۹.۸.۱۶ برای F^\perp یک پایه‌یکه‌ای متعامد مانند (e_{r+1}, \dots, e_n) وجود دارد. پس (e_1, e_2, \dots, e_n) یک پایه‌یکه‌ای متعامد برای E می‌باشد.

۱۲.۸.۱۶ - قضیه - اگر f یک فرم دو خطی متقارن باشد، پایه‌های

متعامدی مانند (e_1, e_2, \dots, e_n) برای E می‌توان یافت به قسمی که :

$$f(e_1, e_1) = \dots = f(e_s, e_s) = 1$$

$$f(e_{s+1}, e_{s+1}) = \dots = f(e_{s+t}, e_{s+t}) = -1$$

$$f(e_{s+t+1}, e_{s+t+1}) = \dots = f(e_n, e_n) = 0$$

اثبات - بنا بر شماره ۲.۶.۱۶ پایه متعامدی مانند $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ وجود

دارد. اگر $f(e'_i, e'_i) = \alpha_i$ باشد، با شماره‌گذاری مناسب e'_i ها می‌توان فرض کرد :

$$\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_s > 0 \quad \text{و} \quad \alpha_{s+1} < 0, \dots, \alpha_{s+t} < 0$$

$$\alpha_{s+t+1} = 0, \dots, \alpha_n = 0$$

اکنون قرار می‌دهیم :

$$e_i = \frac{e'_i}{\sqrt{\alpha_i}} \quad , \quad (1 \leq i \leq s \text{ برای})$$

$$e_i = \frac{e'_i}{\sqrt{-\alpha_i}} \quad , \quad (s+1 \leq i \leq s+t \text{ برای})$$

$$e_i = e'_i \quad , \quad (s+t+1 \leq i \leq n \text{ برای})$$

در آن صورت بردارهای e_i کلیه خواسته‌های قضیه را دارا می‌باشند.

۱۴.۸.۱۶ - نسبت به پایه‌ای که دارای ویژگیهای ۱۲.۸.۱۶ باشد داریم :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n \mu_j e_j\right) = \sum_{i=1}^s \lambda_i \mu_i - \sum_{i=s+1}^{s+t} \lambda_i \mu_i$$

در این صورت برای فرم درجه دوم q وابسته به f خواهیم داشت :

$$q\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^s \lambda_i^2 - \sum_{i=s+1}^{s+t} \lambda_i^2$$

۱۵.۸.۱۶ - قضیه - در قضیه ۱۳.۸.۱۶ شماره های درست s و t تنها به فرم f بستگی دارند نه به انتخاب پایه متعامد.

اثبات - فرض می کنیم (e_i) و (\bar{e}_i) دو پایه از E باشند به قسمی که :

$$q\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_s^2 - \lambda_{s+1}^2 - \dots - \lambda_{s+t}^2, \quad ,$$

$$q\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{e}_i\right) = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_s^2 - \lambda_{s+1}^2 - \dots - \lambda_{s+\bar{s}}^2$$

باید ثابت کنیم که $s = \bar{s}$ و $t = \bar{t}$ است. دوزیر فضای برداری F و G از E را که به صورت زیر تعریف شده اند در نظر می گیریم :

$$F = \mathbf{R}e_1 + \mathbf{R}e_2 + \dots + \mathbf{R}e_s, \quad ,$$

$$G = \mathbf{R}e_{s+1} + \mathbf{R}e_{s+2} + \dots + \mathbf{R}e_n$$

چون داریم $q\left(\sum_{i=1}^s \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^s \lambda_i^2$ ، پس تحدید q به F مثبت و اصیل است.

به روشی مشابه دیده می شود که تحدید q به G منفی است. بنابراین اگر $x \in F \cap G$ باشد داریم $q(x) \geq 0$ و $q(x) \leq 0$ ، یعنی $q(x) = 0$. پس بنابر ۷.۸.۱۶ ، (I)

داریم $x = 0$ و در نتیجه $F \cap G = \{0\}$. از این مطلب نتیجه می شود که :

$$\dim F + \dim G \leq \dim E$$

$$s + (n - \bar{s}) \leq n$$

یعنی

و از آنجا $s \leq \bar{s}$. با تعویض نقش های (e_i) و (\bar{e}_i) خواهیم داشت $\bar{s} \leq s$.

بنابراین $s = \bar{s}$. همچنین با تعویض f به $-f$ دیده می شود که $t = \bar{t}$ است.

۱۶.۸.۱۶ - چنانچه در قضیه بالا فرم f را اصیل بگیریم خواهیم داشت $s + t = n$

(شماره ۳.۶.۱۶).

۱۷.۸.۱۶ - جفت (s, t) را که در شماره ۱۳.۸.۱۶ معین کردید ، نشان فویا q

می نامند.

۱۶. ۱۸.۸.۱۶ - مثلاً فضای نسبت خصوصی یک فضای آفین حقیقی چهار بعدی است به قسمی که فضای برداری E وابسته به آن از یک فرم درجه دوم که نشان آن $(۱, ۳)$ است برخوردار می‌باشد. پس پایه‌ای مانند (e_1, e_2, e_3, e_4) در E وجود دارد به طوری که برای شماره‌های حقیقی و دلخواه $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ داشته باشیم:

$$q(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_4^2$$

در این فضا بردار x را در حالت‌های $q(x) > 0$, $q(x) < 0$, و $q(x) = 0$ به ترتیب بردار فضا، بردار زمان و بردار نور می‌نامند.

۱۶. ۹. آذروئن

باردیگر به حالت‌های دلخواه \mathbb{K} که مشخص آن مخالف با ۲ است بررسی کردیم.
 ۱۶. ۱۰. ۱ - قضیه - فرض می‌کنیم f یک فرم دو خطی متقارن اصیل روی E باشد. برای هر عنصر u از $\mathcal{L}(E, E)$ یک عنصر دیگر v از $\mathcal{L}(E, E)$ و تنها یکی وجود دارد به قسمی که برای هر عنصر x و هر عنصر y متعلق به E داشته باشیم:

$$f(u(x), y) = f(x, v(y))$$

اثبات - می‌دانیم که یک گسترش خطی u' و تنها یکی از E^* در E^* وجود دارد به قسمی که برای هر x متعلق به E و هر y' متعلق به E^* داریم:

$$\langle u(x), y' \rangle = \langle x, u'(y') \rangle$$

u' همان ترانسپوز u می‌باشد. پس برای اثبات قضیه کافی است ایزومرفیسم E^* روی E را که به وسیله f معین شده است بکار ببریم (۱۶. ۴. ۶).

۱۶. ۲۰. ۹ - تعریف - گسترش خطی v شماره ۱۶. ۱۰. ۱ را آذروئن u (نسبت به f) می‌نامند و آنرا به صورت u^* می‌نمایند.

۱۶. ۳۰. ۹ - بنابراین برای عنصرهای دلخواه x و y متعلق به E داریم:

$$f(u(x), y) = f(x, u^*(y))$$

کلید و ویژگیهای ترانسپوز را می‌توان به صورت ویژگیهای آذروئن بیان نمود.

۱۶.۹.۴- اگر u و v عنصرهایی از $\mathcal{L}(E, E)$ و λ یک اسکالر باشد،
 بنابر شماره های ۵.۱۶.۸ و ۶.۱۶.۸ و ۹.۱۶.۸ داریم :

$$(u+v)^* = u^* + v^* , (\lambda u)^* = \lambda u^* , (uv)^* = v^* u^* , u^{**} = u$$

۱۶.۹.۵- بنابر ۷.۱۶.۸ اگر u وارون پذیر باشد u^* نیز وارون پذیر است و داریم
 $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.

۱۶.۹.۶- بنابر ۱۱.۱۶.۸ گسترشهای u و u^* هر دو دارای یک رتبه می باشند.

$$\det(u^*) = \det(u) \quad \text{داریم } ۱۳.۶.۱۰$$

۱۶.۹.۸- قضیه - اگر زیر فضای برداری F از E به وسیله u پایدار
 باشد F^\perp به وسیله u^* پایدار است.

اثبات - فرض می کنیم x عنصری از F^\perp باشد. باید ثابت کنیم که :

$$u^*(x) \in F^\perp$$

به گفته دیگر باید ثابت کنیم که برای هر عنصر y از F داریم $f(y, u^*(x)) = 0$. اما
 می دانیم که $f(y, u^*(x)) = f(u(y), x)$ ، و چون F به وسیله u پایدار است پس
 داریم $u(y) \in F$ بنابراین $u(y)$ بر x عمود است.

۱۶.۹.۹- بنابر ۲.۶.۹ اگر M ماتریس u نسبت به پایه (e_1, e_2, \dots, e_n)
 باشد، M^* ماتریس u^* نسبت به پایه دوآل $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ خواهد بود.
 به ویژه اگر M ماتریس u نسبت به یک پایه یکه ای متعامد (e_1, e_2, \dots, e_n)
 باشد، M^* ماتریس u^* نسبت به همان پایه (e_1, e_2, \dots, e_n) خواهد بود.

۱۶.۹.۱۰- مثال - در K^n فرم درجه دوم کانونیک q یعنی :

$$q((\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2$$

را در نظر می گیریم (۶.۲.۱۶) و فرض می کنیم u عنصری از $\mathcal{L}(K^n, K^n)$ باشد.
 اگر ماتریس u نسبت به پایه کانونیک را M بنامیم ماتریس u^* نسبت به همین پایه
 برابر با M^* خواهد بود (۴.۶.۱۶ و ۹.۹.۱۶).

۱۶.۱۰- گروه متعامد

فضای برداری E و فرم دو خطی متقارن و اصیل f را روی آن در نظر می گیریم :

۱.۱۰.۱۶- قضیه - اگر عنصر u متعلق به $\mathcal{L}(E, E)$ باشد شرایط زیر هم ارزند :

(I) - برای هر x و هر y متعلق به E داریم $f(u(x), u(y)) = f(x, y)$.

(II) - برای هر x متعلق به E داریم $f(u(x), u(x)) = f(x, x)$.

(III) - $u^*u = id_E$

(IV) - $uu^* = id_E$

(V) - $u^{-1} = u^*$ وارون پذیر است و داریم

اثبات - (I) \implies (II) : فرض می کنیم شرط (II) برقرار باشد. گسترشهای

$f(x, y) \rightarrow f(x, y)$ و $f(u(x), u(y)) \rightarrow f(x, y)$ که فرم هایی دوخطی و متقارن هستند هر دو دارای یک فرم درجه دوم وابسته می باشند بنابراین با هم برابرند (۳.۲.۱۶).

(I) \implies (III) : فرض می کنیم شرط (I) برقرار باشد. بنا بر ۳.۹.۱۶ می توان

آنرا به صورت زیر نوشت :

$$f(u^*u(x), y) = f(x, y)$$

بنابراین $x - u^*u(x)$ بر هر بردار y از E عمود است و در نتیجه چون f اصیل است ، بردار $x - u^*u(x)$ برابر با صفر است. پس برای هر x متعلق به E داریم :

$$u^*u(x) = x$$

(II) \implies (III) : فرض می کنیم شرط (III) برقرار است. در این صورت به ازای

هر x در E داریم :

$$f(u(x), u(x)) = f(u^*u(x), x) = f(x, x)$$

به این ترتیب (I) و (II) و (III) هم ارزند. از طرف دیگر بنا بر ۴.۱۱.۸ شرایط (III) و (IV) و (V) هم ارز می باشند.

۲.۱۰.۱۶- تعریف - هر گسترش خطی E در E را که مانند u در شرایط

قضیه ۱.۱۰.۱۶ صدق کند یک گسترش متعامد (نسبت به f) می گویند .

۳.۱۰.۱۶- قضیه - اگر G مجموعه گسترشهای خطی متعامد E در E

باشد ، G زیر گروهی است از گروه $GL(E)$ (شماره ۳.۴.۸).

اثبات - بنابر شرط (V) شماره ۱۰.۱۶ داریم $G \subset GL(E)$. فرض می‌کنیم u_1 و u_2 عنصرهای دلخواهی از G باشند. با بکار بردن شرط (I) شماره ۱۰.۱۶ به آسانی دیده می‌شود که $u_1 u_2 \in G$ و $u_1^{-1} \in G$.

۴.۱۰.۱۶ - تعریف - گروه G بالا را گروه متعامد فرم f می‌نامند. در فضای برداری حقیقی چهار بعدی، گروه متعامد فرمی با نشان (۱ و ۳) را گروه لورنتس می‌نامند.

۵.۱۰.۱۶ - اگر u عنصری از G باشد داریم $u^* \in G$ زیرا $u^* = u^{-1}$.

۶.۱۰.۱۶ - قضیه - اگر $u \in G$ باشد داریم $\det u = \pm 1$.

اثبات - چون داریم $u u^* = id_E$ پس بنابر شماره‌های ۴.۰۱۰ و ۶.۰۱۰ و ۷.۰۹.۱۶ خواهیم داشت:

$$1 = \det(id_E) = \det(u u^*) = (\det u)(\det u^*) = (\det u)^2$$

$$(\det u - 1)(\det u + 1) = 0 \quad \text{در نتیجه:}$$

۷.۱۰.۱۶ - تعریف - عنصرهایی از G را که دترمینان نشان برابر با یک است چرخش (نسبت به f) می‌نامند.

اگر $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ باشد چرخش‌ها اتومورفیسمهایی از E هستند که f و سوی E را پایدار نگه‌میدارند (۶.۱۱.۱۰).

اگر مبداء فضای معمولی را O بنامیم، چرخش‌ها نسبت به ضرب اسکالر معمولی همان ترانسفورماسیون‌هایی هستند که معمولاً چرخش به دور O نامیده می‌شوند. تقارن نسبت به O ضرب اسکالر را پایدار نگه‌میدارد اما سوی فضا را عوض می‌کند، در نتیجه عنصری است از G ولی یک چرخش نیست.

۸.۱۰.۱۶ - قضیه - فرض می‌کنیم برای f یک پایهٔ یک‌ای متعامد (e_1, e_2, \dots, e_n) وجود داشته و u یک گسترش خطی E در E باشد. در این صورت شرایط زیر هم‌ارزند:

(I) - u متعامد است.

(II) - $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ یک پایهٔ یک‌ای متعامد است.

(III) - $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ يك خانواده يک‌ه‌ای متعامد است.

اثبات - از شرط (I) شماره ۱.۱۰.۱۶ نتیجه می‌شود که $(I) \Rightarrow (III)$ و

از شماره ۰.۶.۱۶ نتیجه می‌شود که $(III) \Rightarrow (II)$. برای اثبات اینکه $(II) \Rightarrow (I)$

فرض می‌کنیم $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ یک پایه یکه‌ای متعامد E و

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \text{ برداری از } E \text{ باشد. بنا بر ۳.۶.۱۶ داریم:}$$

$$f(x, x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$$

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(e_i) \quad \text{به علاوه:}$$

بنابراین از فرض قضیه و شماره ۳.۶.۱۶ نتیجه می‌شود:

$$f(u(x), u(x)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$$

پس $f(u(x), u(x)) = f(x, x)$ یعنی u متعامد است (شرط (II) شماره ۱.۱۰.۱۶).

۹.۱۰.۱۶- فرض می‌کنیم (e_1, e_2, \dots, e_n) و (f_1, f_2, \dots, f_n)

دو پایه یکه‌ای متعامد E باشند. در آن صورت داریم:

$$\det(e_1, e_2, \dots, e_n)(f_1, f_2, \dots, f_n) = \pm 1$$

زیرا اگر u گسترش خطی E در E باشد به قسمی که:

$$u(e_1) = f_1, \dots, u(e_n) = f_n$$

u یک گسترش متعامد است (۸.۱۰.۱۶) و بنابراین $\det u = \pm 1$ (شماره ۶.۱۰.۱۶).

اما بنا بر ۳.۰.۱۰ داریم:

$$\det u = \det(e_1, \dots, e_n)(u(e_1), \dots, u(e_n))$$

۱۶. ۱۱- ماتریسهای متعامد

۱۶.۱۱.۱۱- قضیه - اگر M ماتریسی از رسته (n, n) با عنصرهای متعلق به K باشد شرایط زیر هم‌ارزند:

$${}^tM \cdot M = I_n \quad \text{(I)}$$

$$M \cdot {}^tM = I_n \quad \text{(II)}$$

$$M^{-1} = {}^tM \quad \text{و وارون پذیر است و} \quad \text{(III)}$$

به علاوه اگر ضرب اسکالر کانونیک K^n را در نظر بگیریم هر یک از شرطهای بالا هم‌ارز هر یک از شرطهای زیر است:

(IV) - ستونهای M یک خانواده یکه‌ای متعامد تشکیل می‌دهند.

(V) - سطرهای M یک خانواده یکه‌ای متعامد تشکیل می‌دهند.

اثبات - اگر عنصر وابسته به M از (K^n, K^n) را u بنامیم عنصر وابسته

به tM از (K^n, K^n) همان u^* خواهد بود (۱۰.۹.۱۶). بنابراین هم‌ارزی شرایط (I) و (II) و (III) از هم‌ارزی شرایط (III) و (IV) و (V) شماره ۱۰.۱۰.۱۶ نتیجه می‌شود. همچنین هم‌ارزی (I) و (IV) را از شماره ۸.۱۰.۱۶ و هم‌ارزی (II) و (V) را از هم‌ارزی (I) و (IV) با تعویض M به tM نتیجه می‌گیریم.

۱۶.۱۱.۲- تعریف - ماتریسی که در شرایط هم‌ارز ۱۰.۱۱.۱۶ صدق

کند ماتریس متعامد نامیده می‌شود.

۱۶.۱۱.۳- مثال - بنابه شرط (IV) شماره ۱۰.۱۱.۱۶ برای اینکه ماتریس:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}$$

متعامد باشد بایاوبسنده است که داشته باشیم:

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = b^2 + b'^2 + b''^2 = c^2 + c'^2 + c''^2 = 1$$

$$ab + a'b' + a''b'' = ac + a'c' + a''c'' = bc + b'c' + b''c'' = 0$$

و یا با توجه به شرط (V) شماره ۱.۱۱.۱۶، بایاوبسنده است که داشته باشیم :

$$a^2 + b^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 = a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1$$

$$aa' + bb' + cc' = aa'' + bb'' + cc'' = a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0$$

۴.۱۱.۱۶- قضیه - فضای برداری E روی K و فرم دوخطی متقارن

و اصیل f روی E داده شده اند. فرض می کنیم که يك پایه یکه ای متعامد

(e_1, e_2, \dots, e_n) برای f وجود داشته باشد. برای اینکه يك گسترش

خطی E در E متعامد باشد بایاوبسنده است که ماتریس آن نسبت به پایه

(e_1, e_2, \dots, e_n) متعامد باشد.

اثبات - اگر این گسترش خطی را u و ماتریس آنرا M بنامیم بنا بر ۹.۹.۱۶

ماتریس u^* نسبت به (e_1, e_2, \dots, e_n) همان tM خواهد بود. بنابراین داریم :

$$M \text{ متعامد است} \iff M \cdot {}^tM = I \iff M \cdot u u^* = idE \iff u \text{ متعامد است.}$$

۵.۱۱.۱۶ - بنا بر ۳.۱۰.۱۶ ماتریسهای متعامد یک زیر گروه از گروه ماتریسهای

وارون پذیر تشکیل می دهند.

۶.۱۱.۱۶ - بنا بر ۶.۱۰.۱۶ دترمینان یک ماتریس متعامد ۱ و یا -۱ است.

۷.۱۱.۱۶ - مثال - در صفحه معمولی سودار که در آن یک مبدا O اختیار شده است

پایه یکه ای متعامد (\vec{e}_1, \vec{e}_2) را در سوی مثبت انتخاب می کنیم. اگر u چرخشی به مرکز

O و به زاویه φ باشد، بنا بر ۳.۲.۹ ماتریس u نسبت به (\vec{e}_1, \vec{e}_2) برابر است با :

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

به آسانی ثابت می شود که این ماتریس متعامد و دترمینانش برابر با یک است.

۱۲.۱۶- گسترشهای خطی متقارن

۱.۱۲.۱۶ - فضای برداری E و فرم دوخطی متقارن اصیل f روی آن داده شده

است .

قضیه - اگر u عنصری از $\mathcal{L}(E, E)$ باشد، شرایط زیر هم‌ارزند:

$$(I) - \forall x \in E, \forall y \in E, f(u(x), y) = f(x, u(y))$$

$$(II) - u^* = u$$

اثبات - $(II) \Rightarrow (I)$: فرض می‌کنیم شرط (II) برقرار باشد در این صورت با

توجه به ۳.۹.۱۶ برای هر دو عنصر x و y از E داریم:

$$f(u(x), y) = f(x, u^*(y)) = f(x, u(y))$$

$I \Rightarrow II$: فرض می‌کنیم شرط (I) برقرار باشد. بنابراین برای هر دو عنصر دلخواه

x و y از E داریم:

$$f(u(x), y) = f(x, u(y))$$

که با توجه به تعریف u^* (شماره ۲.۹.۱۶) و ویژگی یکتایی v در قضیه ۱.۹.۱۶ نتیجه می‌شود $u^* = u$.

۲.۱۲.۱۶ - تعریف - هر گسترش خطی E در E مانند u که در شرایط

۱.۱۲.۱۶ صدق کند (نسبت به f) متقارن نامیده می‌شود.

۳.۱۲.۱۶ - مجموعه گسترش‌های خطی متقارن E در E یک زیر فضای برداری

$\mathcal{L}(E, E)$ را تشکیل می‌دهد. زیرا اگر u و v دو عنصر $\mathcal{L}(E, E)$ باشند به قسمی

که داشته باشیم $u = u^*$ و $v = v^*$ ، برای اسکالرهای دلخواه λ و μ خواهیم داشت:

$$(\lambda u + \mu v)^* = \lambda u^* + \mu v^* = \lambda u + \mu v$$

۴.۱۲.۱۶ - قضیه - فرض می‌کنیم (e_1, \dots, e_n) یک پایهٔ یک‌ای متعامد

برای f و u عنصری از $\mathcal{L}(E, E)$ باشد. برای اینکه u متقارن باشد یا وابسته

است که ماتریس آن نسبت به (e_1, e_2, \dots, e_n) متقارن باشد.

اثبات - اگر ماتریس u را نسبت به (e_1, e_2, \dots, e_n) با M نشان دهیم

بنابر ۹.۹.۱۶ ماتریس u^* نسبت به همین پایه برابر است با tM . بنابراین:

$$u \text{ متقارن است} \iff u = u^* \iff M = {}^tM \iff M \text{ متقارن است.}$$

۰.۱۲.۱۶ - برای هر عنصر متقارن u از $\mathcal{L}(E, E)$ گسترش $g_u: E \times E \rightarrow K$

را به روش زیر معین می‌کنیم :

$$\forall x, y \in E, \quad g_u(x, y) = f(ux, y)$$

آشکاراست که g_u یک فرم دوخطی روی E می‌باشد. به‌علاوه داریم :

$$g_u(y, x) = f(uy, x) = f(y, ux) = f(ux, y) = g_u(x, y)$$

پس g_u متقارن است .

قضیه - گسترش $u \rightarrow g_u$ یک گسترش دوسویی مجموعه عنصرهای متقارن $\mathcal{L}(E, E)$ (نسبت به f) روی مجموعه فرمهای دوخطی متقارن روی E ، می‌باشد .

اثبات - الف - ثابت می‌کنیم که این گسترش انژکتیو است. فرض می‌کنیم u و u' دو عنصر متقارن از $\mathcal{L}(E, E)$ باشند و داشته باشیم $g_u = g_{u'}$ در این صورت برای هر دو عنصر x و y در E داریم :

$$f(ux, y) = g_u(x, y) = g_{u'}(x, y) = f(u'x, y)$$

چون f اصیل است از برابری‌های بالا نتیجه می‌شود که برای هر x در E داریم $ux = u'x$ و بنابراین $u = u'$.

ب - برای اثبات اینکه این گسترش سورژکتیو است فرض می‌کنیم g یک فرم دوخطی متقارن روی E باشد و ثابت می‌کنیم عنصری متقارن از $\mathcal{L}(E, E)$ مانند u وجود دارد به‌طوری‌که $g = g_u$.

برای هر x متعلق به E فرم خطی $y \rightarrow g(x, y)$ روی E را با h_x می‌نماییم . بنا بر ۰.۴.۱۶ ، (II) یک عنصر x' در E و تنهایی وجود دارد به‌قسمی که برای هر $y \in E$ داشته باشیم :

$$h_x(y) = f(x', y)$$

اکنون گسترشی را که به هر $x \in E$ عنصر x' از E را که به روش بالا معین شد وابسته

می‌کند با u نشان می‌دهیم. با این تعریف برای هر x و هر y در E خواهیم داشت :

$$(1) \quad g(x, y) = f(ux, y)$$

روشن است که :

$$h_{x_1 + x_2} = h_{x_1} + h_{x_2}$$

پس بنا بر ۱۶.۴.۶، (II) داریم :

$$(x_1 + x_2)' = x_1' + x_2'$$

به عبارت دیگر $u(x_1 + x_2) = u(x_1) + u(x_2)$. همچنین دیده می‌شود که برای هر x

متعلق به E و هر λ متعلق به \mathbf{K} برابری $u(\lambda x) = \lambda u(x)$ برقرار است. پس u یک

گسترش خطی E در E می‌باشد. به علاوه برای هر x و y متعلق به E داریم :

$$f(ux, y) = g(x, y) = g(y, x) = f(uy, x) = f(x, uy)$$

یعنی u (نسبت به f) متقارن است. در نتیجه از فرمول (۱) برابری $g = g_u$ بدست می‌آید.

فصل هفدهم

فرم‌های هرمیتی

ویژگی‌های فرم‌های هرمیتی شبیه‌ویژگی‌های فرم‌های دوخطی متقارن است. اما فرم‌های هرمیتی بیشتر در آنالیز بکار می‌روند (بدینجهت گاهی فضا‌های برداری‌ایکه در این فصل در نظر گرفته می‌شوند بعدشان بی‌پایان است). بطوریکه خواهیم دید بعضی از قضایای فرم‌های هرمیتی برخی از ویژگی‌های فرم‌های دوخطی متقارن را بدست میدهند. در این فصل همه فضا‌های برداری روی هیأت C در نظر گرفته شده‌اند و بعد این فضاها ممکن است بی‌پایان باشد.

۱.۱۷ - فرم‌های هرمیتی

۱.۱.۱۷ - تعریف - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری روی C باشد.

یک گسترش $E \times E$ در C مانند $f(x, y) \rightarrow (x, y)$ را یک فرم هرمیتی گوییم هرگاه داشته باشیم :

$$(۱) \quad f(x+x', y) = f(x, y) + f(x', y), \quad \text{برای هر } x \text{ و } x' \text{ و } y \text{ متعلق به } E$$

$$(۲) \quad f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y), \quad \text{برای هر } x \text{ و } y \text{ متعلق به } E \text{ و هر } \lambda \text{ متعلق به } C$$

$$(۳) \quad f(y, x) = \overline{f(x, y)}, \quad \text{برای هر } x \text{ و } y \text{ متعلق به } E$$

۲.۱.۱۷ - از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که برای عنصرهای دلخواه x و y, y'

متعلق به E داریم :

$$f(x, y+y') = \overline{f(y+y', x)} = \overline{f(y, x)} + \overline{f(y', x)}$$

$$(۴) \quad f(x, y+y') = f(x, y) + f(x, y') \quad \text{بنابراین}$$

۳.۱.۱۷ - از (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که برای هر x و y متعلق به E و هر μ

متعلق به C داریم :

$$f(x, \mu y) = \overline{f(\mu y, x)} = \overline{\mu f(y, x)}$$

بنابراین :

$$(۵) \quad f(x, \mu y) = \overline{\mu f(x, y)}$$

۴.۱.۱۷ - از (۲) و (۵) نتیجه میشود که برای هر x و هر y در E داریم :

$$(۶) \quad f(x, 0) = f(0, y) = 0$$

۵.۱.۱۷ - از (۳) نتیجه می شود که برای هر x متعلق به E اسکالر $f(x, x)$ حقیقی

است .

۶.۱.۱۷ - از (۱) و (۲) و (۴) و (۵) نتیجه می شود که :

$$(۷) \quad f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^q \mu_j y_j\right) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \lambda_i \overline{\mu_j} f(x_i, y_j)$$

که در آن $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q$ عنصرهای دلخواهی از E و $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q$ عنصرهای دلخواهی از C می باشند.

۷.۱.۱۷ - فرض می کنیم (e_1, e_2, \dots, e_n) پایه ای از E باشد. ماتریس n

سطری و n ستونی $[a_{ij}]$ را که در آن $a_{ij} = f(e_i, e_j)$ است، ماتریس فرم f نسبت به پایه (e_1, e_2, \dots, e_n) می نامند. بنابر (۳) داریم :

$$a_{ij} = \overline{a_{ji}}$$

به ویژه شماره های $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ حقیقی می باشند .

۸.۱.۱۷ - ماتریس مختلط $[\beta_{ij}]$ از رسته (n, n) را هرمیتی گوئیم هرگاه برای

اندیس های دلخواه i و j داشته باشیم $\beta_{ij} = \overline{\beta_{ji}}$ (مثلاً یک ماتریس متقارن حقیقی هرمیتی است).

بنابراین می توان گفت که ماتریس یک فرم هرمیتی نسبت به یک پایه دلخواه ، یک

ماتریس هرمیتی است.

۹.۱.۱۷ - فضای برداری مختلط E و پایه (e_1, \dots, e_n) از آن داده شده اند.

فرض می کنیم \mathcal{K} مجموعه فرم های هرمیتی روی E و \mathcal{M} مجموعه ماتریس های مختلط

هرمیتی از رسته (n, n) باشند . اگر f عنصری از \mathcal{K} باشد، ماتریس آن را نسبت به پایه

دوسوی \mathcal{E} روی \mathcal{M} می باشد. زیرا اگر قرار دهیم $M(f) = [a_{ij}]$ ، بنا بر (۷) خواهیم داشت :

$$(۸) \quad f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n, \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \lambda_i \bar{\mu}_j$$

یعنی گسترش $f \rightarrow M(f)$ از نظر دیگر اگر $[a_{ij}]$ را یک ماتریس هرمیتی (n, n) بگیریم و یک گسترش f فضای $E \times E$ در \mathbf{C} را با فرمول (۸) معین کنیم، به آسانی دیده می شود که f در دستورهای (۱) و (۲) صدق می کند و به علاوه چون $[a_{ij}]$ هرمیتی است داریم :

$$\begin{aligned} (\mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n, \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \mu_i \bar{\lambda}_j \\ &= \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ji} \mu_j \bar{\lambda}_i = \sum_{i,j=1}^n \bar{\alpha}_{ij} \mu_j \bar{\lambda}_i \end{aligned}$$

به طوریکه می بینیم این مقدار برابر با مزدوج شمار مختلط

$$f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n, \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n)$$

است. بنابراین f یک فرم هرمیتی روی E می باشد. به ویژه از فرمول (۸) نتیجه می شود که $f(e_i, e_j) = a_{ij}$ پس $M(f) = [a_{ij}]$. بنابراین گسترش نام برده سوزن کنیواس است.

از اینجا روش ساختن فرمهای هرمیتی وی فضاهای برداری مختلط با بعد n با پایان،

بدست می آید

۱۷.۱.۱۰ مثال - چنانچه $E = \mathbf{C}^n$ باشد گسترش:

$$((\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)) \rightarrow \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \dots + \lambda_n \bar{\mu}_n$$

یک فرم هرمیتی است که آنرا فرم هرمیتی کانونیک روی \mathbf{C}^n می نامند.

۱۷.۱.۱۱ مثال - فرض می کنیم $[a, b]$ یک فاصله از \mathbf{R} و E فضای برداری

توابع مختلط پوسته روی $[a, b]$ باشد برای u, v متعلق به E قرار می دهیم :

$$f(u,v) = \int_a^b u(t)\overline{v(t)} dt$$

در این صورت f یک فرم هرمیتی روی E می باشد.

۱۲.۱.۱۷ - قضیه - اگر f یک فرم هرمیتی روی E باشد، برای هر دو عنصر x و y متعلق به E داریم :

$$(۹) \quad \begin{aligned} f(x,y) &= f(x+y, x+y) - f(x-y, x-y) \\ &\quad + if(x+iy, x+iy) - if(x-iy, x-iy) \end{aligned}$$

اثبات - چنانچه طرف راست (۹) را به کمک (۱) و (۲) و (۴) و (۵) بسط دهیم

خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} & f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) + f(y,y) \\ & - f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) - f(y,y) \\ & + if(x,x) + f(x,y) - f(y,x) + if(y,y) \\ & - if(x,x) + f(x,y) - f(y,x) - if(y,y) \\ \hline & \quad \circ \quad + if(x,y) \quad + \quad \circ \quad + \quad \circ \end{aligned}$$

۱۲.۱.۱۷ - قضیه - فضای برداری مختلط E و گسترش $f: E \times E \rightarrow \mathbb{C}$

که در برابری های (۱) و (۲) و (۴) و (۵) صدق می کند داده شده اند . فرض می کنیم که برای هر x متعلق به E مقدار $f(x,x)$ حقیقی باشد . در این صورت f یک فرم هرمیتی است .

اثبات - تنها برابری (۲) را باید ثابت کرد . اما همانطور که در ۱۲.۱.۱۷ دیدمشد

برابری های (۱) و (۲) و (۴) و (۵) برای اثبات (۹) بسنده اند . با تعویض x و y در (۹) داریم :

$$\begin{aligned} f(y,x) &= f(y+x, y+x) - f(y-x, y-x) \\ &\quad + if(i(x-iy), i(x-iy)) - if(-i(x+iy), -i(x+iy)) \end{aligned}$$

در نتیجه با استفاده از (۲) و (۵) خواهیم داشت :

$$f(y, x) = f(x + y, x + y) - f(x - y, x - y) \\ + if(x - iy, x - iy) - if(x + iy, x + iy)$$

از مقایسه این بستگی و (۹) وبا توجه به اینکه برای هر z متعلق به E ، اسکالر $f(z, z)$ حقیقی است دیده می‌شود که $f(y, x)$ و $f(x, y)$ ؛ شمارهای مختلط مزدوج می‌باشند.

۲.۱۷ - تعامد

۱.۲.۱۷ - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری مختلط و f یک فرم هرمیتی روی E باشد. دو عنصر x و y متعلق به E را (نسبت به f) عمود برهم گویند هرگاه $f(x, y) = 0$ باشد. این بستگی نسبت به x و y متقارن است. هر عنصر E را که برخوردش عمود باشد ایزوتروپ خوانند.

اگر بردارهای x_1, x_2, \dots, x_n دوه‌دو برهم عمود باشند، داریم:

$$f(x_1 + \dots + x_n, x_1 + \dots + x_n) = f(x_1, x_1) + \dots + f(x_n, x_n)$$

(توجه خواننده را به شباهت این مطلب با قضیه فیثاغورث جلب می‌کنیم).

۲.۲.۱۷ - دوبخش M و N از E را عمود برهم گویند هرگاه هر عنصر M بر هر عنصر N عمود باشد.

۳.۲.۱۷ - اگر M, N برهم عمود باشند هر ترکیب خطی از عناصر M بر هر ترکیب خطی از عناصر N عمود است. بنابراین مجموعه بردارهای E که بر M عمودند یک زیر فضای برداری از E می‌باشد (این زیر فضا را زیر فضای برداری E عمود بر M می‌نامند و با M^\perp نشان می‌دهند).

۴.۲.۱۷ - مجموعه عنصرهایی از E را که بر تمام E عمود باشد هسته f می‌نامند. هسته f یک زیر فضای برداری از E می‌باشد. چنانچه این هسته مخالف با $\{0\}$ باشد، f را یک فرم غیر اصیل می‌گویند.

۵.۲.۱۷ - فرض می‌کنیم (e_1, e_2, \dots, e_n) یک پایه E و $[a_{ij}]$ ماتریس f نسبت به این پایه باشد. شمار مختلط $\det[a_{ij}]$ را مبین f نسبت به (e_1, e_2, \dots, e_n) می‌نامند. برای اینکه f غیر اصیل باشد بایاویسنده است که این مبین صفر باشد. اثبات این مطلب شبیه ۲.۴.۱۶ است.

۳.۱۷ - پایه‌های متعامد

۱.۳.۱۷ - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری مختلط و f یک فرم هرمیتی روی E باشد. یک خانواده (e_i) از بردارهای E را (نسبت به f) متعامد گوئیم هرگاه e_i ها دویبدو برهم عمود باشند. این خانواده را **یکه‌ای متعامد** خوانیم هرگاه به علاوه برای هر i داشته باشیم $f(e_i, e_i) = 1$.

۲.۳.۱۷ - قضیه - چنانچه بعد E با پایان باشد پایه‌های متعامدی در E وجود دارد.

اثبات این قضیه شبیه ۲.۶.۱۶ است.

۳.۳.۱۷ - پایه متعامد $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ را اختیاری می‌کنیم و قرار می‌دهیم $f(e'_i, e'_i) = \alpha_i$. بنا بر ۱.۱۷.۵ همه α_i ها حقیقی هستند. با تعویض شماره گذاری e'_i ها میتوان فرض کرد:

$$\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_s > 0, \quad \alpha_{s+1} < 0, \dots, \alpha_{s+t} < 0$$

$$\alpha_{s+t+1} = 0, \dots, \alpha_n = 0$$

اکنون قرار می‌دهیم:

$$1 \leq i \leq s \quad \text{برای} \quad e_i = \frac{e'_i}{\sqrt{\alpha_i}}$$

$$s+1 \leq i \leq s+t \quad \text{برای} \quad e_i = \frac{e'_i}{\sqrt{-\alpha_i}}$$

$$s+t+1 \leq i \leq n \quad \text{برای} \quad e_i = e'_i$$

در این صورت (e_1, e_2, \dots, e_n) نیز یک پایه متعامد از E است به قسمی که:

$$f(e_1, e_1) = \dots = f(e_s, e_s) = 1, \quad f(e_{s+1}, e_{s+1}) = \dots = f(e_{s+t}, e_{s+t}) = -1$$

$$f(e_{s+t+1}, e_{s+t+1}) = \dots = f(e_n, e_n) = 0$$

به علاوه شماره‌های مختلط $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n$ هرچه باشند داریم:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n \mu_j e_j\right) = \sum_{i=1}^s \lambda_i \bar{\mu}_i - \sum_{i=s+1}^{s+t} \lambda_i \bar{\mu}_i$$

۱۷.۳.۴ - مانند شماره ۱۰.۸.۱۶ ثابت می کنند که شمارهای درست s و t پیشین به پایه متعامد انتخاب شده بستگی ندارند بلکه تنها به f وابسته اند.

به آسانی دیده می شود که e_n, \dots, e_{s+t+1} متعلق به هسته f می باشند. بنابراین اگر f اصیل باشد داریم $s+t=n$.

۱۷.۳.۵ - اگر (e_1, e_2, \dots, e_p) یک خانواده یکه ای متعامد باشد، بردارهای e_p, \dots, e_2, e_1 نابستگی خطی دارند. این مطلب مانند ۱۰.۶.۱۶ ثابت می شود.

۱۷.۳.۶ - فرض می کنیم (e_1, e_2, \dots, e_n) یک پایه یکه ای متعامد باشد. اگر داشته باشیم:

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \in E$$

خواهیم داشت:

$$f(x, e_i) = f(\sum \lambda_j e_j, e_i) = \lambda_i$$

به این ترتیب شمارهای $f(x, e_i)$ آراینده های x نسبت به پایه (e_1, e_2, \dots, e_n) می باشند.

۱۷.۴ - فضاهای تقریباً هیلبرتی

۱۷.۴.۱ - تعریف - فرم هرمیتی f روی E را مثبت گوییم، هرگاه

$$\text{برای هر } x \text{ متعلق به } E \text{ داشته باشیم } f(x, x) \geq 0.$$

به روش مشابه فرمهای هرمیتی منفی تعریف می شوند.

۱۷.۴.۲ - قضیه - فرض می کنیم f یک فرم هرمیتی مثبت روی E

باشد. برای هر x و هر y در E داریم

$$|f(x, y)|^2 \leq f(x, x)f(y, y) \quad (\text{نابرابری سوارتس})$$

اثبات - برای هر عنصر λ از \mathbf{C} داریم:

$$(1) \quad 0 \leq f(x + \lambda y, x + \lambda y) = f(x, x) + \lambda \overline{f(x, y)} + \lambda f(x, y) + \lambda \lambda \overline{f(y, y)}$$

که چون عبارت بالا را در شمار مثبت $f(y, y)$ ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$0 \leq [\lambda \overline{f(y, y)} + f(x, y)] [\lambda \overline{f(y, y)} + \overline{f(x, y)}]$$

$$-f(x, y)\overline{f(x, y)} + f(y, y)f(x, x)$$

اگر $f(y,y) \neq 0$ باشد در آنچه که گذشت می‌توان λ را برابر با $\frac{f(x,y)}{f(y,y)}$ — گرفت و
 نابرابری مورد نظر را به دست آورد. اگر $f(x,x) \neq 0$ باشد کافی است که نقش x و y را
 در آنچه که گذشت عوض کنیم. بالاخره اگر $f(x,x) = f(y,y) = 0$ باشد نابرابری (۱)
 به صورت :

$$0 \leq \lambda \overline{f(x,y)} + \lambda f(x,y)$$

درسی‌آید که با قرار دادن $\lambda = -f(x,y)$ خواهیم داشت :

$$f(x,y) = 0 \quad \text{یعنی} \quad |f(x,y)|^2 \leq 0$$

و قضیه در این حالت هم برقرار است.

۲.۴.۱۷ - قضیه - اگر f یک فرم هرمیتی مثبت روی E باشد برای
 عنصرهای دلخواه x و y متعلق به E داریم :

$$\sqrt{f(x+y, x+y)} \leq \sqrt{f(x,x)} + \sqrt{f(y,y)}$$

زیرا :

$$f(x+y, x+y) = f(x,x) + f(y,y) + f(x,y) + f(y,x)$$

$$\leq f(x,x) + f(y,y) + 2|f(x,y)|$$

$$\leq f(x,x) + f(y,y) + 2\sqrt{f(x,x)f(y,y)}$$

(بنابراین ۲.۴.۱۷)

$$= (\sqrt{f(x,x)} + \sqrt{f(y,y)})^2$$

۴.۴.۱۷ - قضیه - اگر f یک فرم هرمیتی مثبت باشد هسته f عبارتست

از مجموعه بردارهای ایزوتروپ برای f .

اثبات این قضیه شبیه شماره ۶.۸.۱۶ است.

۵.۴.۱۷ - نتیجه - فرض می‌کنیم f یک فرم هرمیتی مثبت و اصیل

روی E باشد.

(I) - تنها بردار ایزوتروپ بردار ۰ است.

(II) - اگر F يك زیر فضای برداری E باشد تحدید f به F مثبت و

اصیل است .

اثبات این مطلب شبیه شماره ۷.۸.۱۶ است.

۶.۴.۱۷ - تعریف - يك فضای برداری مختلط را که از يك فرم هرمیتی

مثبت برخوردار باشد يك فضای تقریباً هیلبرتی می نامند . اگر این فرم

اصیل هم باشد فضای تقریباً هیلبرتی را مجزا خوانند .

(بعضی از فضاهاى تقریباً هیلبرتی ویژه که در این درس در نظر گرفته نخواهند شد

فضاهای هیلبرتی ناسیده می شوند).

در يك فضای تقریباً هیلبرتی برای دو عنصر x و y مقدار فرم هرمیتی را معمولاً به صورت

$(x|y)$ می نویسند و آنرا حاصلضرب اسکالر x و y می نامند و قرار می دهند $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$

در این صورت نا برابرى شوارتس چنین نوشته می شود :

$$|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

بنابراین قضیه ۳.۴.۱۷ را می توان به صورت زیر نوشت :

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

همچنین داریم :

$$\|\lambda x\|^2 = (\lambda x|\lambda x) = \lambda \bar{\lambda} (x|x) = |\lambda|^2 \|x\|^2$$

پس :

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

بدین ترتیب تابع $\|x\|$ روی E ویژگیهای شبیه ویژگیهای يك نرم را

داراست . بردارهای ایزوتروپ بردارهایی هستند که برای آنها $\|x\| = 0$ است . بنابراین

اگر فضای تقریباً هیلبرتی مجزا باشد داریم :

$$x=0 \iff \|x\|=0$$

۷.۴.۱۷ - مثال - فضای \mathbb{C}^n که از فرم هرمیتی کانونیک برخوردار باشد

(۱۵.۱.۱۷) يك فضای تقریباً هیلبرتی مجزاست .

۸.۴.۱۷ - مثال - مثال ۱۱.۱.۱۷ را در نظر می گیریم . در این مثال فرم هرمیتی

مثبت است زیرا اگر $u \in E$ باشد داریم :

$$f(u,u) = \int_a^b u(t)\overline{u(t)} dt = \int_a^b |u(t)|^r dt \geq 0.$$

نشان می‌دهیم که این فرم هرستی اصیل نیز هست. برای این منظور ثابت می‌کنیم که اگر u یک عنصر دلخواه مخالف با صفر و متعلق به E باشد، u ایزوترپ نیست. چون $u \neq 0$ است می‌توان t_0 متعلق به $[a, b]$ را به‌قسمی یافت که $|u(t_0)|$ برابر با شمار مثبت و مخالف با صفر α باشد. چون تابع u پیوسته است یک فاصله I به درازای $\alpha > 0$ می‌توان یافت به‌طوری که:

$$\forall t \in I, \quad |u(t)| > \frac{1}{r} \alpha$$

بنابراین $\int_a^b |u(t)|^r dt \geq 1 \frac{1}{r} \alpha^r$ پس $f(u,u) > 0$ ، یعنی فرم هرستی اصیل است.

بدین ترتیب می‌بینیم که E یک فضای تقریباً هیلبرتی مجزاست.

با یکبار بردن ناهم‌ارایی شوارتس و شماره ۱۷، ۴، ۳ دیده می‌شود که اگر u و v توابع

پیوسته و مختلط روی $[a, b]$ باشند داریم:

$$\left| \int_a^b u(t)\overline{v(t)} dt \right|^r \leq \int_a^b |u(t)|^r dt \int_a^b |v(t)|^r dt$$

$$\left[\int_a^b |u(t)+v(t)|^r dt \right]^{\frac{1}{r}} \leq \left[\int_a^b |u(t)|^r dt \right]^{\frac{1}{r}} + \left[\int_a^b |v(t)|^r dt \right]^{\frac{1}{r}}$$

۱۷، ۴، ۹ - قضیه - اگر E یک فضای تقریباً هیلبرتی مجزا با بعد پایان

باشد، در E یک پایهٔ یک‌ای متعام وجود دارد.

اثبات این قضیه از ۱۷، ۲، ۳ و ۱۷، ۳، ۳ نتیجه می‌شود.

۱۷، ۴، ۱۰ - نسبت به پایهٔ یک‌ای متعام (e_1, e_2, \dots, e_n) داریم:

$$\begin{aligned}
 (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n | \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \dots + \mu_n e_n) &= \\
 &= \lambda_1 \bar{\mu}_1 + \lambda_2 \bar{\mu}_2 + \dots + \lambda_n \bar{\mu}_n
 \end{aligned}$$

بنابراین دیده می شود که با تقریب یک ایزومرفیسم تنها یک فضای تقریباً هیلبرتی مجزای بعدی وجود دارد و این فضا \mathbf{C}^n است که از حاصل ضرب اسکالر کانونیک برخوردار می باشد.

۱۷. ۵- آدژوئن

۱۷. ۱. ۵- فرض می کنیم E یک فضای تقریباً هیلبرتی مجزا با بعد با پایان باشد.

بنابر شماره ۱۷. ۲. ۷ می توان فضای E^* را با \bar{E} یکی گرفت. همچنین اگر $u \in \mathcal{L}(E, E)$ باشد u با یک عنصر از $\mathcal{L}(E, E)$ یکی گرفته می شود. این عنصر را که با u^* نشان می دهند، آدژوئن u (نسبت به ساختمان تقریباً هیلبرتی E) می نامند. بنابراین برای هر x و هر y متعلق به E داریم:

$$(1) \quad (ux | y) = (x | u^*y)$$

۱۷. ۲. ۵- اگر u و v عنصرهایی از $\mathcal{L}(E, E)$ و $\lambda \in \mathbf{C}$ باشد داریم:

$$(2) \quad (u+v)^* = u^* + v^*$$

$$(3) \quad (\lambda u)^* = \bar{\lambda} u^*$$

$$(4) \quad (uv)^* = v^* u^*$$

$$(5) \quad u^{**} = u$$

این ویژگی ها را می توان از ویژگی های ترانسپوزیسیون ماتریسها نتیجه گرفت و یا اینکه آنها را مستقیماً ثابت کرد. مثلاً (۳) را مستقیماً ثابت می کنیم. برای عنصرهای دلخواه x و y متعلق به E داریم:

$$\begin{aligned}
 (x | (\lambda u)^* y) &= ((\lambda u)x | y) && \text{بنابر (1) ،} \\
 &= (\lambda (ux) | y) && \text{بنابر تعریف } \lambda u \text{ ،} \\
 &= \lambda (ux | y) && \text{بنابر (2). 1. 1. 17 ،} \\
 &= \lambda (x | u^* y) && \text{بنابر (1) ،} \\
 &= (x | \bar{\lambda} (u^* y)) && \text{بنابر (5). 1. 1. 17 ،} \\
 &= (x | (\bar{\lambda} u^*)) y && \text{بنابر تعریف } \bar{\lambda} u^* \text{ ،}
 \end{aligned}$$

بنابراین برای هر y متعلق به E خواهیم داشت :

$$(\lambda u)^* = \bar{\lambda} u^* \quad \text{و یا} \quad (\lambda u)^* y = (\bar{\lambda} u^*) y$$

۳.۵.۱۷ - روشن است که $(id_E)^* = id_E$. پس از فرمول (۴) نتیجه می‌شود

که اگر u وارون پذیر باشد، u^* نیز وارون پذیر است و داریم $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.

۴.۵.۱۷ - بنابر ۱۱.۱۶.۸ رتبه u و رتبه u^* باهم برابرند.

۵.۵.۱۷ - قضیه - اگر F یک زیر فضای برداری از E باشد که به وسیله u

پایدار است، F^\perp بوسیله u^* پایدار خواهد بود.

اثبات این قضیه شبیه شماره ۸.۹.۱۶ است.

۶.۵.۱۷ - اگر M یک ماتریس مختلط باشد، ماتریسی را که از تعویض هر عنصر

M با مزدوجش بدست می‌آید با \overline{M} نشان می‌دهند و آنرا ماتریس مزدوج M می‌نامند.

ماتریس $({}^t M) = \overline{({}^t \overline{M})}$ را که با M^* نشان داده می‌شود آدژوئن M می‌گویند.

۷.۵.۱۷ - قضیه - فرض می‌کنیم (e_1, e_2, \dots, e_n) یک پایه یکه‌ای

متعامد E باشد. اگر u متعلق به $\mathcal{L}(E, E)$ و M ماتریس u نسبت به

(e_1, e_2, \dots, e_n) باشد، M^* ماتریس u^* نسبت به (e_1, e_2, \dots, e_n)

خواهد بود.

اثبات - فرض می‌کنیم $M = [\alpha_{ij}]$. داریم :

$$u(e_j) = \alpha_{1j}e_1 + \alpha_{2j}e_2 + \dots + \alpha_{nj}e_n$$

بنابراین $(u(e_j) | e_i) = \alpha_{ij}$. همچنین اگر $[\beta_{ij}]$ ماتریس u^* باشد داریم :

$$(u^*(e_j) | e_i) = \beta_{ij}$$

اما :

$$(u^*(e_j) | e_i) = (e_j | u(e_i)) = \overline{(u(e_i) | e_j)}$$

بنابراین $\beta_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$. به عبارت دیگر $[\beta_{ij}] = [\alpha_{ij}]^*$.

۸.۵.۱۷ - از فرمول‌های (۲) و (۳) و (۴) و (۵) شماره ۲.۵.۱۷ نتیجه می‌شود

که اگر M و N ماتریسهای مختلطی از رسته (n, n) و λ شمار مختلطی باشد داریم :

$$(M+N)^* = M^* + N^*$$

$$(\lambda M)^* = \bar{\lambda} M^*$$

$$(MN)^* = N^* M^*$$

$$M^{**} = M$$

۱۷.۰.۹ - آشکاراست که $\det[\bar{M}] = \overline{\det M}$ بنابراین :

$$\det[M^*] = \overline{\det[{}^t M]} = \overline{\det[M]}$$

پس اگر $u \in \mathcal{L}(E, E)$ خواهیم داشت $\det(u^*) = \overline{\det(u)}$.

۱۷.۶ - گروه یگانی

E را همواره یک فضای تقریباً هیلبرتی مجزا با بعد با پایان فرض می‌کنیم.

۱۷.۶.۱ - قضیه - اگر u یک عنصر از $\mathcal{L}(E, E)$ باشد شرط‌های

زیرهم ارزند :

$$(I) - \text{برای هر } x \text{ و هر } y \text{ در } E, (ux|uy) = (x|y)$$

$$(II) - \text{برای هر } x \text{ در } E, \|ux\| = \|x\|$$

$$(III) - u^*u = \text{id}_E$$

$$(IV) - uu^* = \text{id}_E$$

$$(V) - u \text{ وارون پذیر است و } u^{-1} = u^*$$

اثبات - اثبات این قضیه به غیر از قسمت (II) \Leftarrow (I) مانند قضیه ۱۶.۱۰.۱۷.

است. برای اثبات این قسمت دو عنصر دلخواه x و y از E را در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم

$f(x, y) = (x|y)$ و $g(x, y) = (ux|uy)$. بنابراین f و g فرم‌هایی هرمیتی می‌باشند

و اگر (II) برقرار باشد برای هر x متعلق به E داریم $f(x, x) = g(x, x)$. پس بنابر

۱۷.۱.۱۲ خواهیم داشت :

$$\forall x, y \in E, f(x, y) = g(x, y)$$

۱۷.۶.۲ - تعریف - یک گسترش خطی E در E را که در شرط‌های

قضیه پیشین صدق می‌کند یک گسترش یگانی می‌نامند.

مانند شماره ۳.۱۰.۱۶ ثابت می‌شود که مجموعه گسترش‌های یگانی E در E یک گروه است که گروه یگانی نامیده می‌شود.

۳.۶.۱۷ - اگر u یگانی باشد u^* نیز یگانی است زیرا $u^* = u^{-1}$.

۴.۶.۱۷ - اگر u یگانی باشد داریم $|\det u| = 1$. زیرا:

$$\begin{aligned} |\det u|^2 &= (\det u) \cdot \overline{(\det u)} = (\det u) \cdot (\det u^*) = \\ &= \det(uu^*) = \det(\text{id}_E) = 1 \end{aligned}$$

۵.۶.۱۷ - قضیه - فرض می‌کنیم (e_1, e_2, \dots, e_n) یک پایه یکه‌ای

متعامد E و u یک عنصر $\mathcal{L}(E, E)$ باشد. شرط‌های زیرهم‌ارزند:
(I) - u یگانی است.

(II) - $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ یک پایه یکه‌ای متعامد E است.

(III) - $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ یک خانواده یکه‌ای متعامد است.

اثبات این قضیه مانند ۸.۱۰.۱۶ است.

۶.۶.۱۷ - قضیه - اگر M ماتریسی مختلط از رسته (n, n) باشد شرط‌های

زیرهم‌ارزند:

$$M^*M = I_n \quad \text{(I)}$$

$$MM^* = I_n \quad \text{(II)}$$

$$M^{-1} = M^* \quad \text{(III)}$$

به‌علاوه چنانچه C^n از فرم هر میتی کانونیک برخوردار باشد شرط‌های بالا با هم‌ریک از شرط‌های زیرهم‌ارزند:

(IV) - ستون‌های M یک خانواده یکه‌ای متعامد تشکیل می‌دهند.

(V) - سطرهای M یک خانواده یکه‌ای متعامد تشکیل می‌دهند.

اثبات این قضیه مانند ۱.۱۱.۱۶ می‌باشد.

۷.۶.۱۷ - ماتریسی را که در شرط‌های قضیه ۶.۶.۱۷ صدق می‌کند ماتریس

یگانی می‌نامند.

۸.۶.۱۷ - فرض می‌کنیم (e_1, e_2, \dots, e_n) یک پایه یکه‌ای متعامد E باشد.

برای اینکه یک عنصر از $\mathcal{L}(E, E)$ یگانی باشد بایاوبسند است که ماتریس آن نسبت

به (e_1, e_2, \dots, e_n) یگانی باشد. این مطلب از ۷.۵.۱۷ نتیجه می شود.

۷.۱۷ - گسترش های خطی هرمیتی

E را همواره یک فضای تقریباً هیلبرتی مجزا با بعد با پایان فرض می کنیم.

۱.۷.۱۷ - قضیه - چنانچه u يك عنصر از $\mathcal{L}(E, E)$ باشد، شرط های

زیرهم ارزند :

$$\forall x, y \in E, \quad (x|uy) = (ux|y) \quad \text{(I)}$$

$$u^* = u \quad \text{(II)}$$

(III) - برای هر x متعلق به E اسکالر $(x|ux)$ حقیقی است .

اثبات - هم ارزی (I) با (II) شبیه ۱.۱۲.۱۶ ثابت می شود . اگر شرط (I)

برقرار باشد داریم :

$$(x|ux) = (ux|x) = \overline{(x|ux)}$$

بنابراین $(x|ux)$ حقیقی است . چنانچه شرط (III) برقرار باشد برای هر x و y متعلق به

E قرار می دهیم $f(x, y) = (ux|y)$ در این صورت f در فرض های ۱۳.۱.۱۷ صدق می کند .

بنابراین f یک فرم هرمیتی است به ویژه برای x و y متعلق به E داریم $\overline{f(y, x)} = f(x, y)$

یعنی :

$$(uy|x) = \overline{(ux|y)} = (y|ux)$$

پس شرط (I) برقرار است .

۲.۷.۱۷ - تعریف - يك گسترش خطی E در E را که در شرط های

۱.۷.۱۷ صدق می کند هرمیتی می گویند .

۳.۷.۱۷ - اگر u و v هرمیتی و λ یک شمار حقیقی باشد $u+v$ و λv هرمیتی

است . این مطلب از دستورهای (۲) و (۳) شماره ۲.۵.۱۷ نتیجه می شود .

۴.۷.۱۷ - فرض می کنیم (e_1, e_2, \dots, e_n) یک پایه یگانه ای متعامد E و u

یک عنصر از $\mathcal{L}(E, E)$ باشد . ماتریس u نسبت به (e_1, e_2, \dots, e_n) را M می نامیم .

بنابر ۷.۵.۱۷ برای اینکه گسترش u هرمیتی باشد بایاوبسنده است که داشته باشیم

$$M = M^*$$

۵.۷.۱۷ - قضیه - فرض می کنیم u يك عنصر هرمیتی از $\mathcal{L}(E, E)$ و

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ مقادیر ویژه متمایز u باشند.

(I) - $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ حقیقی هستند.

(II) - اگر V_{λ_i} زیر فضای ویژه وابسته به λ_i باشد V_{λ_i} ها دو به دو

برهم عمودند و E مجموع مستقیم $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \dots, V_{\lambda_r}$ می باشد.

اثبات - الف- فرض می کنیم x عنصری مخالف با صفر از V_{λ_i} و y عنصری مخالف

با صفر از V_{λ_j} باشد. داریم :

$$(1) \quad \lambda_i(x|y) = (\lambda_i x|y) = (ux|y) = (x|uy) = (x|\lambda_j y) = \bar{\lambda}_j(x|y)$$

اگر $i \neq j$ برابر باشند با قرار دادن $y=x$ از (1) نتیجه می شود که $\lambda_i = \bar{\lambda}_i$ و در نتیجه (I)

برقرار است. در این صورت (1) را می توان چنین نوشت $\lambda_i(x|y) = \lambda_j(x|y)$

اگر $i \neq j$ باشد داریم $(x|y) = 0$ و بنابراین V_{λ_i} ها دو به دو برهم عمودند.

ب - بدین ترتیب V_{λ_i} بر $\sum_{j \neq i} V_{\lambda_j}$ عمود است و بنابراین هر بردار از :

$$V_{\lambda_i} \cap \left(\sum_{j \neq i} V_{\lambda_j} \right)$$

برخودش عمود می باشد و در نتیجه صفر است (۱۷.۴.۵)، یعنی :

$$V_{\lambda_i} \cap \left(\sum_{j \neq i} V_{\lambda_j} \right) = \{0\}$$

پ - قرار می دهیم $F = \sum_{i=1}^r V_{\lambda_i}$. بنا بر (ب) فضای F مجموع مستقیم V_{λ_i} ها است.

پس باید ثابت کنیم که $F = E$. اما چون V_{λ_i} ها به وسیله u پایدار هستند و F^\perp نیز

به وسیله u پایدار می باشند (۱۷.۵.۵). اگر $F^\perp \neq \{0\}$ باشد تحدید u به F^\perp

دست کم دارای یک بردار ویژه مخالف با صفر مانند x است (۱۴.۴.۱). در این صورت x

متعلق به یکی از V_{λ_i} ها و در نتیجه متعلق به F می باشد. پس $x \in F \cap F^\perp$ و این ممکن

نیست. بنابراین داریم $F^\perp = \{0\}$ و با توجه به ۸.۲.۱۷ خواهیم داشت :

$$F = (F^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = E$$

۶.۷.۱۷ - نتیجه - با در نظر گرفتن فرضهای شماره ۵.۷.۱۷ يك پایه

یکه ای متعامد برای E می توان یافت به طوری که ماتریس u نسبت به این پایه يك ماتریس قطری حقیقی باشد.

زیرا با توجه به ۷.۸.۸ چنین پایه ای را می توان از اجتماع یک پایه یکه ای متعامد

از V_{λ_1} ، یک پایه یکه ای متعامد از V_{λ_p} ، ... و یک پایه یکه ای متعامد از V_{λ_r}

بدست آورد (وجود چنین پایه هایی برای هر یک از V_{λ_i} ها از شماره های ۵.۴.۱۷ و

۹.۴.۱۷ نتیجه می شود).

۷.۷.۱۷ - نتیجه - فرض می کنیم M يك ماتریس هرمیتی از رسته (n, n)

باشد. يك ماتریس یگانی U از همان رسته می توان یافت به طوری که

$U^{-1}MU$ يك ماتریس قطری حقیقی باشد.

زیرا اگر گسترش خطی C^n در C^n وابسته به M را v بنامیم و روی C^n فرم هرمیتی

کانونیک را در نظر بگیریم، چون پایه کانونیک C^n یکه ای متعامد است M و در نتیجه v

هرمیتی می باشد (۴.۷.۱۷). بنابراین یک پایه یکه ای متعامد $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$

وجود دارد که نسبت به آن ماتریس v قطری حقیقی است (۶.۷.۱۷). اگر (e_1, e_2, \dots, e_n)

پایه کانونیک C^n باشد، در آن صورت گسترش خطی ای که e_1 را به e'_1 و e_2 را به

e'_2 و ... و e_n را به e'_n بدل می کند یک گسترش یگانی است (۵.۶.۱). بنابراین ماتریس

تعویض پایه (e_1, e_2, \dots, e_n) به $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ یک ماتریس یگانی می باشد

(۲.۸.۹ و ۸.۶.۱۷). اما آشکار است که ماتریس v نسبت به $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$

برابر با $U^{-1}MU$ است (۶.۸.۹).

۸.۱۷ - برگشت به حالت گسترشهای خطی متقارن

۱.۸.۱۷ - قضیه - ماتریس حقیقی و متقارن M از رسته (n, n) داده شده است. فرض می‌کنیم $P(X)$ چند جمله‌ای مفسر M باشد (پس ضرایب $P(X)$ حقیقی هستند). در این صورت همه ریشه‌های $P(X)$ در C حقیقی می‌باشند.

زیرا می‌توان M را یک ماتریس هرمیتی فرض نمود، که در آن صورت قضیه از ۷.۷.۱۷ و ۵.۲.۱۴ نتیجه می‌شود.

۲.۸.۱۷ - لم - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری حقیقی با بعد n پایان و مخالف با صفر، f یک فرم دوخطی متقارن مثبت اصیل روی E و u یک گسترش خطی متقارن E در E باشد. در این صورت u دست‌کم دارای یک بردار ویژه مخالف با صفر است.

اثبات - بنابر ۹.۸.۱۶ در E می‌توان یک پایه (e_1, e_2, \dots, e_n) یافت که برای f یک‌های متعامد باشد. اگر M ماتریس u نسبت به پایه (e_1, e_2, \dots, e_n) باشد، M یک ماتریس حقیقی متقارن است (۴.۱۲.۱۶) و چند جمله‌ای مفسر M دارای یک ریشه حقیقی λ است (۱.۸.۱۷). چون λ به هیأت پایه E (یعنی \mathbf{R}) متعلق است پس یک مقدار ویژه u می‌باشد (۱.۲.۱۴) و می‌توان به آن یک بردار ویژه مخالف با صفر وابسته کرد.

۳.۸.۱۷ - قضیه - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری حقیقی با بعد n پایان، f یک فرم دوخطی متقارن مثبت اصیل روی E و u یک گسترش خطی متقارن E در E باشد. چنانچه $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ مقادیر ویژه متمایز u و V_{λ_i} زیر فضای ویژه u وابسته به λ_i باشد، V_{λ_i} ها دو به دو برهم عمودند و E حاصل جمع مستقیم $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \dots, V_{\lambda_r}$ است.

اثبات این قضیه مانند ۵.۷.۱۷ است با این تفاوت که در بخش (پ) استدلال، باید

بجای شماره ۱.۴.۱۴ شماره ۲.۸.۱۷ را بکاربرد.

۴.۸.۱۷ - نتیجه - فرض‌های شماره ۳.۸.۱۷ را در نظرمی‌گیریم .
یک پایه‌یکه‌ای متعامد در E وجود دارد به طوری که ماتریس u نسبت به آن
قطری است .

این مطلب مانند شماره ۶.۷.۱۷ ثابت می‌گردد.

۵.۸.۱۷ - نتیجه - فرض می‌کنیم M یک ماتریس متقارن حقیقی از
رسته (n, n) باشد. یک ماتریس متعامد و حقیقی مانند P از رسته (n, n)
وجود دارد به قسمی که $P^{-1}MP$ قطری باشد.

این مطلب مانند شماره ۷.۷.۱۷ ثابت می‌شود.

۹.۱۷ - بررسی دو فرم درجه دوم با هم

۱.۹.۱۷ - فضای برداری حقیقی E با بعد n با پایان و دو فرم دوخطی متقارن f و g
روی E داده شده‌اند. فرض می‌کنیم که f مثبت و اصیل باشد.

لم - دو پایه (e_1, e_2, \dots, e_n) و $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ از E را که برای
 f یکه‌ای متعامد هستند در نظرمی‌گیریم . چنانچه A و A' ماتریسهای g
نسبت به این دو پایه باشند ، A و A' همانندند یعنی چند جمله‌ای مفسر آنها
یکی است .

اثبات - فرض می‌کنیم M ماتریس تعویض پایه (e_1, \dots, e_n) به (e'_1, \dots, e'_n)
باشد . بنابر ۳.۱۱.۹ داریم $A' = MAM$. گسترش خطی E در E که e_1 را به
 e'_1 و e_2 را به e'_2 و \dots و e_n را به e'_n بدل می‌کند یک گسترش متعامد است (۸.۱۰.۱۶) .
بنابراین M نیز متعامد است (۲.۸.۹ و ۴.۱۱.۱۶) . به گفته دیگر $M^{-1}M = I$
و داریم $A' = M^{-1}AM$.

۲.۹.۱۷ - نخست یادآوری می‌کنیم که همه ریشه‌های چند جمله‌ای مفسر A حقیقی
هستند (۱.۸.۱۷) . فرض می‌کنیم $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ این ریشه‌ها باشند ، که در آن هر
ریشه به شماره مرتبه چندگانگی اش نوشته شده است . بنابر ۱.۹.۱۷ دنباله $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

با تقریب یک ترتیب، بوسیله f و g کاملاً مشخص است و بستگی به انتخاب پایه یکه‌ای متعامد (e_1, e_2, \dots, e_n) ندارد. این دنباله را دنباله پایاهای g نسبت به f می‌نامند.

۳.۹.۱۷ - مثال - فرض می‌کنیم که بتوان پایه‌ای مانند (e_1, e_2, \dots, e_n) از E یافت که برای f یکه‌ای متعامد و برای g متعامد باشد و قرار می‌دهیم $g(e_i, e_j) = a_{ij}$ در این صورت ماتریس g نسبت به (e_1, e_2, \dots, e_n) یک ماتریس قطری است که عنصرهای قطران $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ می‌باشند. بنابر ۷.۲.۱۴ دنباله پایاهای g نسبت به f دنباله $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ است.

۴.۹.۱۷ - در زیر خواهیم دید که مطلب مورد مطالعه در ۳.۹.۱۷ که به ظاهر حالتی بسیار ویژه دارد، عملاً یک حالت کلی است.

قضیه - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری حقیقی باشد با پایان f ، یک فرم دوخطی متقارن مثبت اصیل روی E ، g یک فرم دوخطی متقارن روی E و $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ دنباله پایاهای g نسبت به f باشد. در این صورت:

(I) - پایه‌ای از E وجود دارد که برای f یکه‌ای متعامد و برای g متعامد باشد.

(II) - اگر (e_1, e_2, \dots, e_n) چنین پایه‌ای باشد (در صورت لزوم می‌توان ترتیب a_i ها را تغییر داد) داریم:

$$\begin{aligned} g(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n, \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \dots + \mu_n e_n) \\ = a_{11} \lambda_1 \mu_1 + a_{22} \lambda_2 \mu_2 + \dots + a_{nn} \lambda_n \mu_n \end{aligned}$$

اثبات - الف - بنابر ۵.۱۲.۱۶ یک گسترش خطی متقارن E در E مانند u وجود دارد به قسمی که برای هر x و y در E داریم $g(x, y) = f(ux, y)$ و بنابر ۴.۸.۱۷ یک پایه (e_1, e_2, \dots, e_n) وجود دارد که برای f یکه‌ای متعامد است و برای هر i داریم $ue_i = \lambda_i e_i$ که در آن λ_i ها شماره‌هایی حقیقی می‌باشند. در این صورت برای $i \neq j$ خواهیم داشت:

$$g(e_i, e_j) = f(ue_i, e_j) = f(\lambda_i e_i, e_j) = \lambda_i f(e_i, e_j) = \lambda_i \cdot 0 = 0$$

بنابراین پایه (e_1, e_2, \dots, e_n) برای g متعامد است. بدین ترتیب (I) ثابت شد.
 ب - فرض می‌کنیم (e_1, e_2, \dots, e_n) یک پایه یک‌ای متعامد برای f و متعامد برای g باشد (لازم نیست که این پایه همان پایه‌ای باشد که در بالا در نظر گرفته شد). بنا بر ۳.۹.۱۷ و در صورت لزوم پس از تغییر ترتیب α_i ها، داریم.

$$g(e_1, e_1) = \alpha_1, \dots, g(e_n, e_n) = \alpha_n$$

در این صورت قسمت (II) قضیه از ۳.۶.۱۶ نتیجه می‌گردد.

فصل هیجدهم

فرم‌های چند خطی متناوب

فرض می‌کنیم E یک فضای برداری n بعدی باشد. در فصل دهم فرم‌های p خطی متناوب روی E تعریف شد اما تنها حالت $p=n$ مورد مطالعه قرار گرفت. در اینجا باردیگر به مطالعه دقیق حالت کلی می‌پردازیم. به‌ویژه ضرب «خارجی» فرم‌های متناوب را بررسی می‌کنیم. این مفاهیم در فصل فرم‌های دیفرانسیل (کتاب آنالیز) به کار می‌آیند، زیرا هر فرم دیفرانسیل درحقیقت یک «میدان» فرم‌های چند خطی متناوب است. در این فصل فرض می‌کنیم که همه فضای برداری فضاهایی با بعد p پایانی باشند.

۱.۱۸ - نامتقارن کردن

۱.۱.۸ - قضیه - فرض می‌کنیم f یک فرم p خطی روی E باشد.

گسترش $g : E^p \rightarrow K$ را به صورت :

$$g(x_1, x_2, \dots, x_p) = \sum_{\sigma \in G_p} \varepsilon_\sigma f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)})$$

که در آن G_p گروه تبدیلهای $\{1, 2, \dots, p\}$ است، در نظر می‌گیریم. در این صورت g یک فرم p خطی متناوب روی E می‌باشد.

اثبات - روشن است که g یک فرم p خطی است زیرا ترکیبی خطی از فرم‌های p خطی می‌باشد. ثابت می‌کنیم که g متناوب نیز هست.

بدین منظور فرض می‌کنیم برای دو اندیس متمایز i و j داشته باشیم $x_i = x_j$

$$g(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$$

عنصر τ از G_p را که برای آن $\tau(i) = j$ ، $\tau(j) = i$ و برای $k \neq i, j$

$\tau(k) = k$ است؛ در نظر می‌گیریم. چون $\tau^2 = e$ است (شماره ۰.۲.۳) پس زیرگروه

H از G_p پدید آمده به وسیله τ برابر با $\{e, \tau\}$ است. هر کلاس راست G_p بر حسب H مجموعه‌ای دو عنصری است. این کلاسها دوی دو جدا از هم می‌باشند و اجتماع آنها G_p است. در هر کلاس راست c یک عنصر σ_c را انتخاب می‌کنیم (پس عنصر دیگر این کلاس $\tau\sigma_c$ خواهد بود).

اگر A مجموعه σ_c ها باشد G_p اجتماع دو مجموعه جدا از هم A و τA خواهد شد. پس

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_p) &= \sum_{\sigma \in A} \varepsilon_{\sigma} f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) + \sum_{\sigma \in A} \varepsilon_{\tau\sigma} f(x_{\tau\sigma(1)}, \dots, x_{\tau\sigma(p)}) \\ &= \sum_{\sigma \in A} \varepsilon_{\sigma} [f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) - f(x_{\tau\sigma(1)}, \dots, x_{\tau\sigma(p)})] \end{aligned}$$

در مطالعه $x_{\tau\sigma(k)}$ سه حالت پیش می‌آید :

$$x_{\tau\sigma(k)} = x_{\sigma(k)} \quad \text{پس } \sigma(k) \neq j \text{ و } \sigma(k) \neq i - 1$$

$$x_{\tau\sigma(k)} = x_{\tau(i)} = x_j = x_i = x_{\sigma(k)} \quad \text{پس } \sigma(k) = i - 2$$

$$x_{\tau\sigma(k)} = x_{\tau(j)} = x_i = x_j = x_{\sigma(k)} \quad \text{پس } \sigma(k) = j - 2$$

بنابراین در حاصل جمع بالا مقدار هر گروه صفر است و در نتیجه :

$$g(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$$

۱۰.۱.۱۸ - تعریف - با فرض‌های ۱۰.۱.۱۸ گوییم که g یک فرم p خطی

متناوب است که از نامتقارن کردن f بدست آمده است.

۱۰.۱.۱۸ - فرض می‌کنیم f_1, f_2, \dots, f_p فرم‌هایی خطی روی E باشند.

گسترش $f: E^p \rightarrow K$ که به صورت :

$$(x_1, x_2, \dots, x_p) \rightarrow f_1(x_1)f_2(x_2) \cdots f_p(x_p)$$

تعریف شده است یک فرم p خطی روی E می‌باشد. فرم p خطی متناوب روی E را که از

نامتقارن کردن f بدست می‌آید حاصل ضرب خارجی f_1, f_2, \dots, f_p می‌نامیم و با

$f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_p$ می‌نامیم.

بنابراین برحسب تعریف داریم :

$$(1) (f_1 \wedge \cdots \wedge f_p)(x_1, x_r, \dots, x_p) = \sum_{\sigma \in G_p} \varepsilon_\sigma f_1(x_{\sigma(1)}) f_r(x_{\sigma(r)}) \cdots f_p(x_{\sigma(p)})$$

بدگفته دیگر :

$$(1') (f_1 \wedge f_r \wedge \cdots \wedge f_p)(x_1, x_r, \dots, x_p) = \det[f_i(x_j)]_{1 \leq i, j \leq p}$$

$$= \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_r) & \cdots & f_1(x_p) \\ f_r(x_1) & f_r(x_r) & \cdots & f_r(x_p) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_p(x_1) & f_p(x_r) & \cdots & f_p(x_p) \end{vmatrix}$$

۴.۱.۱۸ - مثال - اگر f_1 و f_r دو فرم خطی روی E باشند ، $f_1 \wedge f_r$ یک فرم

دوخطی متناوب روی E است به قسمی که داریم :

$$(f_1 \wedge f_r)(x_1, x_r) = f_1(x_1)f_r(x_r) - f_1(x_r)f_r(x_1)$$

۵.۱.۱۸ - قضیه - فرض می‌کنیم f_1, f_r, \dots, f_p فرم‌هایی خطی

روی E باشند. اگر دو تا از f_i ها باهم برابر باشند خواهیم داشت :

$$f_1 \wedge f_r \wedge \cdots \wedge f_p = 0$$

اثبات - فرض می‌کنیم که برای دو اندیس متمایز i و j داریم $f_i = f_j$ و ثابت

می‌کنیم که $f_1 \wedge f_r \wedge \cdots \wedge f_p = 0$. در این صورت در دترمینان فرمول (۱') سطر i ام

و سطر j ام یکی می‌باشند در نتیجه بنا بر ۸.۶.۱۰ مقدار این دترمینان صفر است. بنابراین :

$$(f_1 \wedge f_r \wedge \cdots \wedge f_p)(x_1, x_r, \dots, x_p) = 0$$

چون این مطلب برای بردارهای دلخواه x_p, \dots, x_r, x_1 برقرار می‌باشد پس :

$$f_1 \wedge f_r \wedge \cdots \wedge f_p = 0$$

۶.۱.۱۸ - قضیه - اگر فضای برداری فرم‌های p خطی متناوب روی

E را F بنامیم، گسترش $f_1 \wedge f_r \wedge \cdots \wedge f_p \rightarrow (f_1, f_r, \dots, f_p)$ فضای $(E^*)^p$

در F یک گسترش p خطی است .

اثبات - چنانچه $f_p, \dots, f_r, f_r', f_1$ متعلق به E^* باشد، بنابراین فرمول

(۱) شماره ۳.۱.۱۸ آشکار است که x_p, \dots, x_r, x_1 هرچه باشند داریم:

$$((f_1 + f_1') \wedge f_r \wedge \dots \wedge f_p)(x_1, x_r, \dots, x_p)$$

$$= (f_1 \wedge f_r \wedge \dots \wedge f_p)(x_1, x_r, \dots, x_p) + (f_1' \wedge f_r \wedge \dots \wedge f_p)(x_1, x_r, \dots, x_p)$$

بنابراین:

$$(f_1 + f_1') \wedge f_r \wedge \dots \wedge f_p = f_1 \wedge f_r \wedge \dots \wedge f_p + f_1' \wedge f_r \wedge \dots \wedge f_p$$

به همین ترتیب دیده می‌شود که:

$$(\lambda f_1) \wedge f_r \wedge \dots \wedge f_p = \lambda (f_1 \wedge f_r \wedge \dots \wedge f_p)$$

به روش مشابه این مطلب برای اندیسهای ۲، ۳، ...، p ثابت می‌شود.

۷.۱.۱۸ - قضیه - چنانچه f_p, \dots, f_r, f_1 متعلق به E^* و σ یک تبدیل

$\{1, 2, \dots, p\}$ باشد، خواهیم داشت:

$$f_{\sigma(1)} \wedge f_{\sigma(2)} \wedge \dots \wedge f_{\sigma(p)} = \varepsilon_\sigma f_1 \wedge f_r \wedge \dots \wedge f_p$$

زیرا با توجه به ۷.۱.۱۵ این مطلب از ۵.۱.۱۷ و ۶.۱.۱۷ نتیجه می‌شود.

۸.۱.۱۸ - قضیه - فرض می‌کنیم (e_1, e_2, \dots, e_n) پایه‌ای از E و

$(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ پایهٔ دوآل آن در E^* باشد. شماره‌های درست i_1, i_2, \dots, i_p

بین ۱ و n و $f = e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*$ را در نظر می‌گیریم.

(I) - اگر

$$x_1 = \lambda_1^1 e_1 + \lambda_1^2 e_2 + \dots + \lambda_1^n e_n$$

$$x_2 = \lambda_2^1 e_1 + \lambda_2^2 e_2 + \dots + \lambda_2^n e_n$$

$$\dots$$

$$x_p = \lambda_p^1 e_1 + \lambda_p^2 e_2 + \dots + \lambda_p^n e_n$$

بردارهایی از E باشند داریم:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_p) = \begin{vmatrix} \lambda_{i_1}^1 & \lambda_{i_1}^2 & \dots & \lambda_{i_1}^p \\ \lambda_{i_2}^1 & \lambda_{i_2}^2 & \dots & \lambda_{i_2}^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{i_p}^1 & \lambda_{i_p}^2 & \dots & \lambda_{i_p}^p \end{vmatrix}$$

(II) - چنانچه $i_1 < i_2 < \dots < i_p$ و j_1, \dots, j_r, j_1 شماره‌های

درستی بین ۱ و n باشند به‌قسمی که $j_1 < j_2 < \dots < j_p$ داریم $f(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_p}) = 0$ مگر اینکه $j_1 = i_1, j_2 = i_2, \dots, j_p = i_p$ که در

این حالت خواهیم داشت $f(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_p}) = 1$

اثبات - داریم :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_p) = \sum_{\sigma \in G_p} \varepsilon_\sigma e_{i_1}^*(x_{\sigma(1)}) \dots e_{i_p}^*(x_{\sigma(p)})$$

$$= \sum_{\sigma \in G_p} \varepsilon_\sigma \lambda_{i_1}^{\sigma(1)} \dots \lambda_{i_p}^{\sigma(p)}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_{i_1}^1 & \lambda_{i_1}^2 & \dots & \lambda_{i_1}^p \\ \lambda_{i_2}^1 & \lambda_{i_2}^2 & \dots & \lambda_{i_2}^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{i_p}^1 & \lambda_{i_p}^2 & \dots & \lambda_{i_p}^p \end{vmatrix}$$

به‌ویژه :

$$f(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_p}) = \sum_{\sigma \in G_p} \varepsilon_\sigma \langle e_{i_1}^*, e_{j_{\sigma(1)}} \rangle \dots \langle e_{i_p}^*, e_{j_{\sigma(p)}} \rangle$$

اگر یکی از اندیسهای j_1, j_2, \dots, j_p به $\{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ تعلق نداشته باشد

تمام جمله‌های این حاصل جمع صفرند و بنابراین $f(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_p}) = 0$ فرض می‌کنیم

که $j_1, j_2, \dots, j_p, z_p, \dots, z_2, z_1$ همگی به $\{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ متعلق باشند. اگر

$$j_1 < j_2 < \dots < j_p \quad \text{و} \quad i_1 < i_2 < \dots < i_p$$

باشد باید داشته باشیم $j_1 = i_1, j_2 = i_2, \dots, j_p = i_p$ و در حاصل جمع پیشین تنها جمله مخالف با صفر جمله وابسته به $e = \sigma$ می‌باشد و این جمله برابر با ۱ است.

۹.۱.۱۸ - قضیه - فرض می‌کنیم (e_1, e_2, \dots, e_n) یک پایه از E و

$(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ پایه دوآل آن در E^* باشد. در این صورت حاصلضرب‌های

خارجی $e_1^* \wedge e_2^* \wedge \dots \wedge e_p^*$ ، به قسمی که داشته باشیم $i_1 < i_2 < \dots < i_p$ ، یک

پایه فضای برداری فرم‌های p خطی متناوب روی E را تشکیل می‌دهند.

اثبات - الف - ثابت می‌کنیم که این حاصلضرب‌های خارجی وابستگی خطی دارند.

برای این منظور فرض می‌کنیم داشته باشیم :

$$\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} \mu_{i_1 i_2 \dots i_p} e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^* = 0$$

که در آن $\mu_{i_1 i_2 \dots i_p}$ اسکارهای دلخواه می‌باشند. در آن صورت بنا بر ۸.۱.۱۸ (II) برای

هر دنباله کاملاً افزایشی (j_1, j_2, \dots, j_p) از شماره‌های درست بین ۱ و n داریم :

$$0 = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} \mu_{i_1 i_2 \dots i_p} (e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*) (e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_p})$$

$$= \mu_{j_1 j_2 \dots j_p}$$

ب - اکنون نشان می‌دهیم که هر فرم p خطی متناوب g روی E را می‌توان به صورت

ترکیبی خطی از $e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*$ ها نوشت. برای این کار قرار می‌دهیم :

$$g(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}) = g_{i_1 i_2 \dots i_p} \in K$$

و ثابت می‌کنیم :

$$(۲) \quad g = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} g_{i_1 i_2 \dots i_p} e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*$$

فرض می‌کنیم x_1, x_2, \dots, x_p بردارهایی از E باشند و ثابت می‌کنیم که مقادیر

دوطرف (۲) برای x_1, x_2, \dots, x_p یکی است. چون دوطرف (۲) فرم‌های p خطی می‌باشند، کافی

است مطلب را برای حالتی که x_p, \dots, x_r, x_1 از بردارهای پایه $e_1, e_2, \dots, e_r, \dots, e_n$ هستند ثابت کنیم. و چون دوطرف (۲) فرم‌های متناوب می‌باشند کافی است استدلال را در مورد $x_1 = e_{j_1}$ و $x_r = e_{j_r}$ و \dots و $x_p = e_{j_p}$ ، که در آن داریم $j_1 < j_2 < \dots < j_p$ ، انجام دهیم. اما بنا بر تعریف j_1, j_2, \dots, j_p داریم:

$$g(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_p}) = g_{j_1 j_2 \dots j_p}$$

پس بنا بر ۸.۱.۱۸ (II) خواهیم داشت:

$$\sum_{i_1 < \dots < i_p} g_{i_1 \dots i_p} (e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*)(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = g_{j_1 j_2 \dots j_p}$$

۱۰.۱.۱۸ - مثال - اگر $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ پایه‌ای از فضای برداری E

باشد، فضای برداری فرم‌های سه خطی متناوب روی E دارای پایه‌ای با عنصرهای زیر خواهد بود:

$$e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*, e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_4^*, e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_5^*, e_1^* \wedge e_3^* \wedge e_4^*, \\ e_1^* \wedge e_3^* \wedge e_5^*, e_1^* \wedge e_4^* \wedge e_5^*, e_2^* \wedge e_3^* \wedge e_4^*, e_2^* \wedge e_3^* \wedge e_5^*, \\ e_2^* \wedge e_4^* \wedge e_5^*, e_3^* \wedge e_4^* \wedge e_5^*$$

۱۱.۱.۱۸ - نتیجه - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری n بعدی باشد.

(I) - برای $p = 1, 2, \dots, n$ بعد فضای برداری فرم‌های p خطی

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ برابراست با } E$$

(II) - برای $p > n$ فضای برداری فرم‌های p خطی متناوب روی E

برابر با $\{0\}$ است.

زیرا اگر $p > n$ باشد p بردار E همیشه بستگی خطی خواهند داشت و بنابراین

(II) را از ۳.۲.۱۰ می‌توان بدست آورد. اگر $p \leq n$ باشد شماره دنباله‌های کاملاً افزایشی

$\{i_1 < i_2 < \dots < i_p\}$ در $\{1, 2, \dots, n\}$ برابر است با شماره بخش‌های p عنصری از

$\{1, 2, \dots, n\}$ یعنی C_n^p . بنابراین (I) از ۹.۱.۱۸ بدست می‌آید.

۱۲.۱.۱۸ - به‌ویژه بعد فضای برداری فرم‌های n خطی متناوب روی E برابر با یک است، و تنها عنصر $e_1^* \wedge e_2^* \wedge \dots \wedge e_n^*$ یک پایه این فضا را تشکیل می‌دهد (e_1, e_2, \dots, e_n) پایه‌ای از E فرض شده است]. بدین ترتیب دوباره قسمت (II) قضیه ۲.۳.۱۵ بدست می‌آید.

۲.۱۸ - حاصلضرب خارجی فرم‌های متناوب

۱.۲.۱۸ - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری، f یک فرم p خطی متناوب روی E و g یک فرم q خطی متناوب روی E باشند. می‌خواهیم یک فرم $(p+q)$ خطی روی E تعریف کنیم. این فرم را به صورت $f \wedge g$ می‌نماییم.

فرض می‌کنیم G_{p+q} گروه تبدیلیهای $\{1, 2, 3, \dots, p+q\}$ و A مجموعه عنصرهایی مانند σ از G_{p+q} باشد که برای آنها داریم:

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(p)$$

$$\sigma(p+1) < \sigma(p+2) < \dots < \sigma(p+q)$$

اکنون گسترش $f \wedge g : E^{p+q} \rightarrow K$ را بصورت:

$$(f \wedge g)(x_1, x_2, \dots, x_{p+q}) = \sum_{\sigma \in A} \varepsilon_\sigma f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) g(x_{\sigma(p+1)}, \dots, x_{\sigma(p+q)})$$

تعریف می‌کنیم.

آشکار است که $(f \wedge g)(x_1, x_2, \dots, x_{p+q})$ به‌طور خطی به x_1, x_2, \dots, x_{p+q} بستگی دارد بنابراین $f \wedge g$ یک فرم $(p+q)$ خطی است. در شماره ۵.۲.۱۸ ثابت خواهیم کرد که $f \wedge g$ متناوب می‌باشد.

هنگامی که $p=0$ یعنی f یک اسکالر λ است داریم $f \wedge g = \lambda g$. هم‌چنین اگر g یک اسکالر μ باشد داریم $f \wedge g = \mu f$.

۲.۲.۱۸ - مثال - اگر f و g فرم‌های دوخطی متناوب روی E باشند $f \wedge g$ یک فرم

چهارخطی است که بدستور زیر معین می‌شود:

$$\begin{aligned}
 & (f \bar{\wedge} g)(x_1, x_2, x_3, x_4) \\
 &= f(x_1, x_2)g(x_3, x_4) - f(x_1, x_3)g(x_2, x_4) + f(x_1, x_4)g(x_2, x_3) \\
 &+ f(x_2, x_3)g(x_1, x_4) - f(x_2, x_4)g(x_1, x_3) + f(x_3, x_4)g(x_1, x_2)
 \end{aligned}$$

از روی این مثال به آسانی دیده می شود که $f \bar{\wedge} g$ متناوب است.

۳.۲.۱۸ - فرض می کنیم f, f_1, f_2 فرم های p خطی متناوب روی E و g, g_1, g_2 فرم های q خطی متناوب روی E باشند. چنانچه λ یک اسکالر باشد به آسانی می توان درستی برابری های زیر را بررسی کرد :

$$(f_1 + f_2) \bar{\wedge} g = f_1 \bar{\wedge} g + f_2 \bar{\wedge} g$$

$$f \bar{\wedge} (g_1 + g_2) = f \bar{\wedge} g_1 + f \bar{\wedge} g_2$$

$$(\lambda f) \bar{\wedge} g = \lambda (f \bar{\wedge} g)$$

$$f \bar{\wedge} (\lambda g) = \lambda (f \bar{\wedge} g)$$

۴.۲.۱۸ - فرض می کنیم f_1, f_2, \dots, f_{p+q} فرم های خطی روی E باشند. یادآوری

می کنیم که $f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_p$ یک فرم p خطی متناوب روی E و $f_{p+1} \wedge f_{p+2} \wedge \dots \wedge f_{p+q}$ یک فرم q خطی متناوب روی E می باشد.

لم - داریم :

$$(f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_p) \bar{\wedge} (f_{p+1} \wedge f_{p+2} \wedge \dots \wedge f_{p+q}) = f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_{p+q}$$

اثبات - در گروه G_{p+q} می توانیم زیر گروهی را در نظر بگیریم که هر عنصر آن شمارهای

درست $1, 2, \dots, p$ را به یکدیگر بدل می کند ولی شمارهای درست

$1, p+1, p+2, \dots, p+q$ را ثابت نگه می دارد. این زیر گروه راسی توان با گروه G_p یکی

گرفت. همچنین می توانیم زیر گروه دیگری در نظر بگیریم که هر عنصرش شمارهای درست

$1, p+1, p+2, \dots, p+q$ را به یکدیگر بدل می کند ولی شمارهای درست

$1, 2, \dots, p$ را ثابت نگه می دارد. این زیر گروه را با گروه G_q یکی می گیریم. هر عنصر

G_{p+q} راتنها به یک روش می توان به صورت $\sigma\sigma'$ نوشت که در آن $\sigma' \in G_p$ و $\sigma \in G_q$ و

σ به مجموعه A ، که در شماره ۱.۲.۱۸ در نظر گرفته شد، متعلق است. اکنون اگر

عنصرهای دلخواهی از E باشند داریم :

$$\begin{aligned}
 & (f_1 \wedge f_r \wedge \cdots \wedge f_{p+q})(x_1, x_r, \dots, x_{p+q}) \\
 = & \sum_{\sigma \in A, \sigma' \in G_p, \sigma'' \in G_q} \varepsilon_{\sigma\sigma'\sigma''} f_1(x_{\sigma\sigma'(1)}) \cdots f_{p+q}(x_{\sigma\sigma''(p+q)}) \quad (\text{بنابر ۳.۱.۱۸}) \\
 = & \sum_{\sigma \in A, \sigma' \in G_p, \sigma'' \in G_q} \varepsilon_{\sigma\sigma'} \varepsilon_{\sigma''} f_1(x_{\sigma\sigma'(1)}) \cdots f_p(x_{\sigma\sigma'(p)}) f_{p+1}(x_{\sigma\sigma''(p+1)}) \cdots
 \end{aligned}$$

$f_{p+q}(x_{\sigma\sigma''(p+q)})$ ، (G_q, G_p) تعریف

عبارت بالا پس از دسته‌بندی جمله‌ها به صورت $\sum_{\sigma \in A} \varepsilon_{\sigma} \alpha_{\sigma} \beta_{\sigma}$ نوشته می‌شود که

در آن :

$$\alpha_{\sigma} = \sum_{\sigma' \in G_p} \varepsilon_{\sigma'} f_1(x_{\sigma\sigma'(1)}) \cdots f_p(x_{\sigma\sigma'(p)})$$

$$\beta_{\sigma} = \sum_{\sigma'' \in G_q} \varepsilon_{\sigma''} f_{p+1}(x_{\sigma\sigma''(p+1)}) \cdots f_{p+q}(x_{\sigma\sigma''(p+q)})$$

بنابراین :

$$(f_1 \wedge f_r \wedge \cdots \wedge f_{p+q})(x_1, \dots, x_{p+q})$$

$$= \sum_{\sigma \in A} \varepsilon_{\sigma} (f_1 \wedge \cdots \wedge f_p)(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) (f_{p+1} \wedge \cdots \wedge f_{p+q})$$

$(x_{\sigma(p+1)}, \dots, x_{\sigma(p+q)})$ ، (بنابر ۳.۱.۱۸)

$$= (f_1 \wedge \cdots \wedge f_p) \overline{\wedge} (f_{p+1} \wedge \cdots \wedge f_{p+q})(x_1, x_r, \dots, x_{p+q}) \quad (\text{بنابر ۱.۲.۱۸})$$

۱.۲.۱۸ - قضیه - فرض می‌کنیم f یک فرم p خطی متناوب روی E و g

یک فرم q خطی متناوب روی E باشد. در آن صورت $f \overline{\wedge} g$ یک فرم $(p+q)$

خطی متناوب روی E خواهد بود .

اثبات - بنابر ۹.۱.۱۸ می‌توان نوشت :

$$f = f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_p + f'_1 \wedge f'_2 \wedge \dots \wedge f'_p + f''_1 \wedge f''_2 \wedge \dots \wedge f''_p + \dots$$

$$g = g_1 \wedge g_2 \wedge \dots \wedge g_q + g'_1 \wedge g'_2 \wedge \dots \wedge g'_q + g''_1 \wedge g''_2 \wedge \dots \wedge g''_q + \dots$$

که در آن $f_i, f'_i, f''_i, \dots, g_i, g'_i, g''_i, \dots$ فرمهایی خطی روی E می‌باشند. پس

بنابر ۳.۲.۱۸ فرم $f \overline{\wedge} g$ برابر است با حاصل جمع جمله‌هایی به صورت :

$$(f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_p) \overline{\wedge} (g_1 \wedge g_2 \wedge \dots \wedge g_q)$$

اما هر یک از این جمله‌ها یک فرم $(p+q)$ خطی متناوب است (۴.۲.۱۸).

۶.۲.۱۸ - بدین ترتیب دیده می‌شود که در مجموعه فرم‌های چند خطی متناوب روی

E قانون $\overline{\wedge}$ یک قانون ترکیب است. بنابراین مانند شماره ۴.۱.۲ اگر f, g, h, k, \dots

فرم‌های چند خطی متناوبی روی E باشند می‌توان $f \overline{\wedge} g \overline{\wedge} h \overline{\wedge} k, \dots$

را بادستورهای زیر تعریف کرد :

$$f \overline{\wedge} g \overline{\wedge} h = f \overline{\wedge} (g \overline{\wedge} h), f \overline{\wedge} g \overline{\wedge} h \overline{\wedge} k = f \overline{\wedge} (g \overline{\wedge} (h \overline{\wedge} k)), \dots$$

۷.۲.۱۸ - قضیه - چنانچه f_1, f_2, \dots, f_p فرم‌هایی خطی روی E

باشند داریم :

$$f_1 \overline{\wedge} f_2 \overline{\wedge} \dots \overline{\wedge} f_p = f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_p$$

اثبات - قضیه را به روش بازگشت ثابت می‌کنیم. برای $p=1$ مطلب آشکار

است. فرض می‌کنیم که قضیه در حالت $p-1$ فرم برقرار باشد. داریم :

$$f_1 \overline{\wedge} f_2 \overline{\wedge} \dots \overline{\wedge} f_p = f_1 \overline{\wedge} (f_2 \overline{\wedge} \dots \overline{\wedge} f_p) \quad (بنابر ۶.۲.۱۸)$$

$$= f_1 \overline{\wedge} (f_2 \wedge \dots \wedge f_p) \quad (بنابر فرض بازگشت)$$

$$= f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_p \quad (بنابر ۴.۲.۱۸)$$

۸.۲.۱۸ - به کمک قضیه ۷.۲.۱۸ می‌توانیم پس از این علامت $\overline{\wedge}$ را رها کرده

و علامت \wedge را جانشین آن سازیم و این عمل، تولید هیچگونه ابهامی نخواهد کرد. مثلاً

وقتی برای $r=1, 2, \dots$ یکی فرم p_i خطی متناوب روی E باشد می‌توان

فرم $g_1 \wedge g_2 \wedge \dots \wedge g_r$ را در نظر گرفت. این فرم یک فرم $(p_1 + p_2 + \dots + p_r)$

خطی متناوب روی E می‌باشد و حاصل ضرب خارجی g_1, g_2, \dots, g_r نامیده می‌شود.

چنانچه $p_1 = p_2 = \dots = p_r = 1$ باشد مفهوم ۳.۱.۱۸ دوباره بدست می آید. فرم $g_1 \wedge g_2 \wedge \dots \wedge g_r$ به طور خطی به g_1, g_2, \dots, g_r بستگی دارد. بنابر ۱.۲.۱۸ ضرب یک فرم در یک اسکالر حالت ویژه ای از ضرب خارجی است.

۹.۲.۱۸ - قضیه - چنانچه f, g, h فرمهای چند خطی متناوب روی

E باشند داریم:

$$f \wedge (g \wedge h) = (f \wedge g) \wedge h$$

اثبات - به کمک ۹.۱.۱۸ می توان فرض کرد:

$$f = f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_p$$

$$g = g_1 \wedge g_2 \wedge \dots \wedge g_q$$

$$h = h_1 \wedge h_2 \wedge \dots \wedge h_r$$

که در آن $f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_q, h_1, h_2, \dots, h_r$ فرمهایی خطی روی E هستند. چنانچه دوبار بی دربی لم شماره ۴.۲.۱۸ را به کار ببریم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f \wedge (g \wedge h) &= (f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_p) \wedge [(g_1 \wedge g_2 \wedge \dots \wedge g_q) \\ &\quad \wedge (h_1 \wedge h_2 \wedge \dots \wedge h_r)] \\ &= (f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_p) \wedge (g_1 \wedge g_2 \wedge \dots \wedge g_q \wedge h_1 \wedge h_2 \wedge \dots \wedge h_r) \\ &= f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_p \wedge g_1 \wedge g_2 \wedge \dots \wedge g_q \wedge h_1 \wedge h_2 \wedge \dots \wedge h_r \end{aligned}$$

از عبارت $(f \wedge g) \wedge h$ هم همین نتیجه بدست می آید.

۱۰.۲.۱۸ - شماره های ۸.۲.۱۸ و ۹.۲.۱۸ نتایج شماره های ۳.۲.۱۸

و ۴.۲.۱۸ و ۵.۲.۱۸ و ۶.۲.۱۸ و ۷.۲.۱۸ را دربردارند. بنابراین شماره های اخیر را می توان به عنوان لم هایی در نظر گرفت.

۱۱.۲.۱۸ - قضیه - چنانچه f یک فرم p خطی متناوب روی E و g یک

فرم q خطی متناوب روی E باشد داریم:

$$(g \wedge f) = (-1)^{pq} f \wedge g$$

اثبات - به کمک ۹.۱.۱۸ می توان فرض کرد:

$$f = f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_p, \quad g = g_1 \wedge g_2 \wedge \dots \wedge g_q$$

که در آن $f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q$ فرمهای خطی روی E می باشند. در اینصورت داریم:

$$f \wedge g = f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_p \wedge g_1 \wedge g_2 \wedge \dots \wedge g_q$$

$$g \wedge f = g_1 \wedge g_2 \wedge \dots \wedge g_q \wedge f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_p$$

اما بنا بر ۷.۱.۱۸ داریم $g \wedge f = \varepsilon_\sigma f \wedge g$ که در آن σ تبدیلی از $\{1, 2, \dots, p+q\}$

است که به روش زیر معین شده است:

$$\sigma(1) = p+1, \sigma(2) = p+2, \dots, \sigma(q) = p+q$$

$$\sigma(q+1) = 1, \sigma(q+2) = 2, \dots, \sigma(q+p) = p$$

جفت های (i, j) که برای آنها $1 \leq i < j \leq p+q$ و $\sigma(i) > \sigma(j)$ می باشد

جفت هایی هستند که در آنها $1 \leq i \leq q$ و $q+1 \leq j \leq q+p$. پس بنا بر ۲.۱.۱۰

شماره وارونی های σ برابر است با pq و در نتیجه $\varepsilon_\sigma = (-1)^{pq}$.

۱۲.۲.۱۸ - فضاها برداری E و F روی K و گسترش خطی $u: E \rightarrow F$

داده شده اند. فرض می کنیم f یک فرم p خطی متناوب روی F و g یک فرم q خطی متناوب

روی F باشند. اگر سایه های وارون f و g به وسیله u را به ترتیب f' و g' بنامیم یک

فرم p خطی متناوب روی E و g' یک فرم q خطی متناوب روی E می باشند. در زیر ثابت

می کنیم که h ، سایه وارون $f \wedge g$ به وسیله u برابر است با $f' \wedge g'$.

فرض می کنیم A زیر مجموعه ای از گروه G_{p+q} باشد که در شماره ۱۰.۲.۱۸ در نظر

گرفته شد. برای عنصرهای دلخواه x_1, x_2, \dots, x_{p+q} متعلق به E داریم:

$$h(x_1, x_2, \dots, x_{p+q}) = (f \wedge g)(ux_1, \dots, ux_{p+q})$$

$$= \sum_{\sigma \in A} \varepsilon_\sigma f(ux_{\sigma(1)}, \dots, ux_{\sigma(p)}) g(ux_{\sigma(p+1)}, \dots, ux_{\sigma(p+q)})$$

$$= \sum_{\sigma \in A} \varepsilon_\sigma f'(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) g'(x_{\sigma(p+1)}, \dots, x_{\sigma(p+q)})$$

$$= (f' \wedge g')(x_1, x_2, \dots, x_{p+q}) \quad (\text{بنا بر ۱۰.۲.۱۸})$$

۳.۱۸ - فرم‌های دوخطی متناوب

۱.۳.۱۸ - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری و f یک فرم دوخطی متناوب روی E باشد. عنصرهای x و y متعلق به E را (نسبت به f) عمود برهم گوییم هرگاه داشته باشیم $f(x, y) = 0$. چون $f(x, y) = -f(y, x)$ این بستگی بین x و y متقارن است. ۲.۳.۱۸ - مفاهیم و تعاریف ۲.۳.۱۶ و ۳.۳.۱۶ را می‌توان کلمه به کلمه در این حالت تعمیم داد.

۳.۳.۱۸ - مانند شماره‌های ۱.۴.۱۶ و ۲.۴.۱۶ هسته f و فرم‌های غیر اصیل را تعریف می‌کنیم. قضیه ۳.۴.۱۶ و اثبات آن در این حالت نیز برقرار است و مانند شماره ۵.۴.۱۶ مطالعه فرم‌های دوخطی متناوب دلخواه را می‌توان به مطالعه فرم‌های دوخطی متناوب اصیل برگرداند. قضیه ۶.۴.۶ و اثبات آن نیز برقرار است.

۴.۳.۱۸ - فرض می‌کنیم $\dim E = n$ و f یک فرم دوخطی متناوب اصیل روی E باشد. چنانچه F یک زیر فضای برداری k بعدی E باشد، F^\perp یک زیر فضای برداری $n-k$ بعدی E می‌باشد و داریم $(F^\perp)^\perp = F$. اثبات این مطالب شبیه ۲.۵.۱۶ است. ۵.۳.۱۸ - قضیه - فضای برداری E که بعد آن زوج و برابر با $2p$ می‌باشد داده شده است. اگر f یک فرم دوخطی روی E و $(e_1, e_2, \dots, e_{2p})$ یک پایه E باشد:

(I) - شرایط زیر هم‌ارزند:

الف- اسکالرهای $f(e_i, e_j)$ همگی صفرند مگر:

$$f(e_1, e_2) = -f(e_2, e_1) = 1, \quad f(e_3, e_4) = -f(e_4, e_3) = 1, \quad \dots,$$

$$f(e_{2p-1}, e_{2p}) = -f(e_{2p}, e_{2p-1}) = 1$$

ب - برای بردارهای دلخواه

$$y = \eta_1 e_1 + \dots + \eta_{2p} e_{2p}$$

$$f(x, y) = (\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1) + (\xi_3 \eta_4 - \xi_4 \eta_3) + \dots + (\xi_{2p-1} \eta_{2p} - \xi_{2p} \eta_{2p-1})$$

-پ-

$$f = e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^* + \dots + e_{2p-1}^* \wedge e_{2p}^*$$

(II) - اگر شرایط بالا برقرار باشند f یک فرم متناوب اصیل است.

اثبات - بنابر ۴.۱.۱۸ داریم :

$(e_r^* \wedge e_r^*)(\xi_1 e_1 + \dots + \xi_{rp} e_{rp}, \eta_1 e_1 + \dots + \eta_{rp} e_{rp}) = \xi_1 \eta_r - \xi_r \eta_1$
 که از آن هم‌ارزی ب و پ ثابت می‌شود. به آسانی می‌توان بررسی کرد که الف از ب نتیجه می‌گردد .

اگر شرط الف برقرار باشد داریم :

$$\begin{aligned} & f(\xi_1 e_1 + \dots + \xi_{rp} e_{rp}, \eta_1 e_1 + \dots + \eta_{rp} e_{rp}) \\ &= f(\xi_1 e_1, \eta_r e_r) + f(\xi_r e_r, \eta_1 e_1) + \dots \\ &+ f(\xi_{rp-1} e_{rp-1}, \eta_{rp} e_{rp}) + f(\xi_{rp} e_{rp}, \eta_{rp-1} e_{rp-1}) \\ &= \xi_1 \eta_r - \xi_r \eta_1 + \dots + \xi_{rp-1} \eta_{rp} - \xi_{rp} \eta_{rp-1} \end{aligned}$$

بدین ترتیب (I) ثابت می‌شود. از شرط پ نتیجه می‌شود که f متناوب است و از شرط ب نتیجه می‌شود که اگر یک بردار x از E بر بردار y متعلق به E عمود باشد تمام آراینده‌های x صفرند و بنابراین f اصیل است.

۶.۳.۱۸ - تعریف - هر پایه‌ای را که در شرایط الف، ب، پ قضیه ۰.۳.۱۸

صدق کند یک پایه بهم بافته یا سمپلکتیک (نسبت به f) می‌نامند.

۷.۳.۱۸ - قضیه - اگر f یک فرم دوخطی متناوب اصیل روی E باشد،

برای E پایه‌هایی وجود دارد که نسبت به f بهم بافته می‌باشند.

اثبات - قضیه برای حالتی که بعد فضای E برابر با صفر است آشکار می‌باشد. فرض

می‌کنیم که بعد فضا یعنی n مثبت و مخالف با صفر و قضیه برای بعدهای کوچکتر از n برقرار

باشد. اگر e_1 یک بردار غیر صفرازی E باشد، چون f اصیل است برداری مانند e_p در E وجود

دارد به قسمی که $f(e_1, e_p) \neq 0$. با ضرب e_p در یک اسکالر می‌توان فرض کرد $f(e_1, e_p) = 1$ و

چون f متناوب است e_1 و e_p نابسنگی خطی دارند. قرار می‌دهیم $F = Ke_1 + Ke_p$ و

$G = F^\perp$. در این صورت F یک زیر فضای ν بعدی از E و G یک زیر فضای $n - \nu$

بعدی از E می‌باشد (۴.۳.۱۸). فرض می‌کنیم x متعلق به $F \cap G$ باشد، چون داریم

$x \in F$ اسکالرهایی λ و μ وجود دارند به قسمی که $x = \lambda e_1 + \mu e_p$ و چون $x \in G$

است پس بر e_1 و e_r عمود می باشد یعنی :

$$0 = f(x, e_1) = f(\lambda e_1 + \mu e_r, e_1) = \lambda f(e_1, e_1) + \mu f(e_r, e_1) = -\mu$$

$$0 = f(x, e_r) = f(\lambda e_1 + \mu e_r, e_r) = \lambda f(e_1, e_r) + \mu f(e_r, e_r) = \lambda$$

بنابراین $x=0$. بدین ترتیب ثابت می شود که $F \cap G = \{0\}$ و در نتیجه

$F + G = E$ یک زیر فضای $r + (n - r) = n$ بعدی از E می باشد. پس

یعنی E حاصل جمع مستقیم F و G است. اگر f' تعدید f به $G \times G$ باشد، f'

یک فرم دوخطی متناوب روی G است. فرض می کنیم y عنصری از G باشد که نسبت به

f' بر G عمود است. در این صورت از طرفی y نسبت به f بر G عمود است و از طرف دیگر

چون $G = F^\perp$ ، y بر F عمود است. پس y بر E عمود می باشد، و چون f اصیل است

داریم $y=0$. بدین ترتیب ثابت می شود که f' اصیل است. بنابراین فرض بازگشت می توان

در G یک پایه بهم بافته نسبت به f' یافت؛ این پایه را به صورت :

$$(e_p, e_{p-1}, \dots, e_3, e_2, e_1)$$

می نویسیم. چنانکه دیده می شود $(e_1, e_2, e_3, \dots, e_{p-1}, e_p)$ پایه ای

است از E که در شرط الف قضیه ۵.۳.۱۸ صدق می کند.

۸.۳.۱۸ - نتیجه - چنانچه روی E یک فرم دوخطی متناوب اصیل

وجود داشته باشد بعد E زوج است.

۹.۳.۱۸ - از ۷.۳.۱۸ نتیجه می شود که در روی یک فضای برداری با بعد $2p$ ،

با تقریب یک ایزومرفیسم، تنها یک فرم دوخطی متناوب اصیل وجود دارد.

۱۰.۳.۱۸ - شباهتی را که تاکنون بین مطالعه فرم های دوخطی متناوب و مطالعه

فرم های دوخطی متقارن دیده شد می توان بیش از این هم دنبال کرد.

۴.۱۸ - حالت فضای معمولی سودار

۱۰.۴.۱۸ - فرض می کنیم E فضای برداری بردارهای آزاد فضای معمولی سودار باشد.

بنابر ۶.۴.۱۶ یک ایزومرفیسم کانونیک E روی E^* وجود دارد. چنانچه F فضای

بردارى فرم‌هاى دوخطى متناوب روى E باشد، قضيه زير نشان مى‌دهد كه يك ايزومرفيسم كانونيك E روى F نيز وجود دارد.

قضيه - براى هر بردار \vec{V} متعلق به E ، گسترش $f_{\vec{V}} : E \times E \rightarrow \mathbf{R}$ را به روش زير تعريف مى‌كنيم :

$$f_{\vec{V}}(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = (\vec{V}, \vec{V}_1, \vec{V}_2) = (\vec{V}_2, \vec{V}_1, \vec{V})$$

(حاصلضرب مختلط)

در اين صورت يك فرم دوخطى متناوب روى E است، و گسترش

$$\vec{V} \rightarrow f_{\vec{V}}$$

يك ايزومرفيسم E روى F مى‌باشد.

اثبات - اثبات اينكه $f_{\vec{V}}$ يك فرم دوخطى متناوب روى E است از شماره‌هاى

۳۰۱۲۰۱۰ و ۵۰۱۲۰۱۰ نتيجه مى‌شود به علاوه داريم :

$$\begin{aligned} f_{\vec{V}+\vec{V}'}(\vec{V}_1, \vec{V}_2) &= \\ &= (\vec{V}+\vec{V}', \vec{V}_1, \vec{V}_2) = (\vec{V}, \vec{V}_1, \vec{V}_2) + (\vec{V}', \vec{V}_1, \vec{V}_2) \\ &= f_{\vec{V}}(\vec{V}_1, \vec{V}_2) + f_{\vec{V}'}(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = (f_{\vec{V}} + f_{\vec{V}'}) (\vec{V}_1, \vec{V}_2) \end{aligned}$$

بنابراين :

$$f_{\vec{V}+\vec{V}'} = f_{\vec{V}} + f_{\vec{V}'}$$

به همين ترتيب ديده مى‌شود كه $f_{\lambda\vec{V}} = \lambda f_{\vec{V}}$. بنابراين $\vec{V} \rightarrow f_{\vec{V}}$ يك گسترش خطى

در F است. اگر $\vec{V} \neq 0$ باشد بردارهاى \vec{V}_1, \vec{V}_2 وجود دارند به قسمى كه

$(\vec{V}, \vec{V}_1, \vec{V}_2)$ يك پايه E باشد. در آنصورت بنا بر ۵۰۱۲۰۱۰ داريم :

$$f_{\vec{V}}(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = (\vec{V}, \vec{V}_1, \vec{V}_2) \neq 0$$

پس $f_{\vec{V}}$ و در نتيجه هسته گسترش $\vec{V} \rightarrow f_{\vec{V}}$ برابر با $\{0\}$ است. بنابراين رتبه اين گسترش

برابر است با $\dim E = 3$. پس بعد سایه این گسترش نیز ۳ است، چون داریم

$$\dim F = 3 \quad (\text{بنابر } 11.1.18), \quad \text{گسترش } \vec{V} \rightarrow f_{\vec{V}} \text{ سورژکتیو می‌باشد.}$$

۲.۴.۱۸ - فرض می‌کنیم $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ یک پایهٔ یک‌ه‌ای متعامد E و باسوی

مثبت باشد. داریم:

$$f_{\vec{e}_1}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = (\vec{e}_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0$$

$$f_{\vec{e}_1}(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = (\vec{e}_1, \vec{e}_1, \vec{e}_3) = 0$$

$$f_{\vec{e}_1}(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 1, \quad (\text{بنابر } 2.12.10)$$

اما بنابر ۸.۱.۱۸ داریم:

$$(\vec{e}_2^* \wedge \vec{e}_3^*)(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = (\vec{e}_2^* \wedge \vec{e}_3^*)(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = 0,$$

$$(\vec{e}_2^* \wedge \vec{e}_3^*)(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = 1$$

پس:

$$(1) \quad f_{\vec{e}_1} = \vec{e}_2^* \wedge \vec{e}_3^*$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که:

$$(2) \quad f_{\vec{e}_2} = \vec{e}_3^* \wedge \vec{e}_1^*$$

$$(3) \quad f_{\vec{e}_3} = \vec{e}_1^* \wedge \vec{e}_2^*$$

۳.۴.۱۸ - حاصلضرب مختلط، یک فرم سه خطی متناوب روی E می‌باشد. اگر

باردیگر $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ را یک پایهٔ یک‌ه‌ای متعامد E و باسوی مثبت بگیریم، بنابر

۸.۱.۱۸ خواهیم داشت:

$$(\vec{e}_1^* \wedge \vec{e}_2^* \wedge \vec{e}_3^*)(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 1$$

به علاوه بنا بر ۲۰.۱۲.۱۰ حاصلضرب مختلط $\vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_1$ برابر با یک است. چون دو فرم سه خطی متناوب روی E باید دیگر متناسب می باشند، دیده می شود که این حاصلضرب

$$\vec{e}_1^* \wedge \vec{e}_2^* \wedge \vec{e}_3^* \quad \text{مختلط روی } E \text{ برابر است با}$$

تمرین

۱ - مجموعه E و دو بخش A و B از آن داده شده‌اند. ثابت کنید که

$$A \subset B \implies \complement B \subset \complement A$$

۲ - این عبارتها را ساده کنید: $(A \cap B) \cup B$ ، $(A \cup B) \cap B$

$$(A \cup B) \cap (C \cup A) , A \cap (B \cup C) \cap (D \cup A)$$

۳ - این هم‌ارزی‌ها را ثابت کنید: $(A \supset B , A \supset C) \iff A \supset (B \cup C)$

$$(A \cap B) \supset (C \cup D) \iff (\complement A \cup \complement B) \subset (\complement C \cup \complement D)$$

۴ - مجموعه E و مجموعه بخشهای آن یعنی $\mathcal{P}(E)$ را در نظر می‌گیریم و فرض

می‌کنیم f یک گسترش $\mathcal{P}(E)$ در مجموعه شمارهای حقیقی \mathbf{R} باشد به طوری که:

$$\forall A , B \in \mathcal{P}(E) : A \cap B = \emptyset \implies f(A \cup B) = f(A) + f(B)$$

(در این صورت گسترش f را یک تابع جمعی مجموعه‌ای نامند). ثابت کنید که:

$$f(\emptyset) = 0 \quad \text{الف -}$$

$$\forall A , B \in \mathcal{P}(E) : f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B) \quad \text{ب -}$$

فرمول بالا برای بخشهای A_1 و A_2 و A_3 و A_4 از E به چه صورت درمی‌آید؟

۵ - فرض می‌کنیم A ، B و C سه بخش از یک مجموعه E باشند. قرار

می‌دهیم:

$$E_1 = A \cap \complement B \cap \complement C \quad \text{و} \quad E_2 = A \cap (B \cup C)$$

مجموعه‌های $E_1 \cup E_2$ و $E_1 \cap E_2$ را معین کنید.

۶ - فرض می‌کنیم مجموعه شمارهای اول و بزرگتر از ۲ باشد. بستگی دوتایی

$$aRb \implies \frac{a+b}{2} \in E , (a , b \in E) \quad \text{روی } E \text{ به صورت زیر داده شده است:}$$

ویژگیهای بستگی R را مطالعه کنید.

۷ - ثابت کنید که در روی مجموعه خطهای یک صفحه، بستگی $aRb \iff$ (دو خط a و b هم راستا هستند) یک بستگی هم‌ارزی است. اما بستگی $aRb \iff$ (دو خط a و b بریکدیگر عمودند) یک بستگی هم‌ارزی نیست.

۸ - فرض می‌کنیم O یک نقطه از صفحه P و Γ مجموعه دایره‌های صفحه P باشند که بر O نمی‌گذرند. بستگی دوتایی R را روی مجموعه Γ به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

دو دایره C و C' از Γ در بستگی R صدق می‌کنند، اگر و تنها اگر یک انعکاس به قطب O وجود داشته باشد به طوری که C را به C' بدل کند. ویژگیهای بستگی R را مطالعه کنید.

۹ - در یک صفحه، خط D و بستگی MRM' (دو نقطه M و M' در یک طرف D قرار دارند) را در نظر می‌گیریم. آیا بستگی R یک بستگی هم‌ارزی است؟

۱۰ - اگر E یک مجموعه n عنصری باشد، ثابت کنید که شماره بخشهای مجموعه E برابر است با 2^n .

۱۱ - مجموعه n عنصری E داده شده است. شماره بستگیهای متقارنی را که می‌توان روی E تعریف کرد پیدا کنید.

۱۲ - مجموعه E و بستگی دوتایی R روی E داده شده‌اند. اگر R بازتابی و متقارن باشد، ثابت کنید که بستگی دوتایی R' به طوری که برای a و b متعلق به E :

$$aR'b \iff (aRb \text{ و } bRa)$$

یک بستگی هم‌ارزی روی E است.

۱۳ - در روی یک مجموعه n عنصری چند بستگی بازتابی و چند بستگی بازتابی و متقارن می‌توان تعریف کرد.

۱۴ - مجموعه E را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم d یک گسترش $E \times E$ در \mathbf{R}_+ باشد، که دارای ویژگیهای زیر است:

$$\forall x \in E, \quad d(x, x) = 0 \quad \text{الف -}$$

$$\forall x, y \in E, \quad d(x, y) = d(y, x) \quad \text{ب -}$$

$$\forall x, y, z \in E, \quad d(x, y) \leq \sup [d(x, z), d(y, z)]$$

ثابت کنید که برای مقدار ثابت λ متعلق به \mathbf{R}^*_+ بستگی‌های $d(x, y) < \lambda$ و $d(x, y) \leq \lambda$ بستگی‌های هم‌ارزی روی E می‌باشند. کلاس هم‌ارزی یک عنصر a از E را برای هر یک از این بستگی‌ها معین کنید.

۱۵ - فرض می‌کنیم φ یک گسترش \mathbf{R}^2 در \mathbf{R}^2 باشد به طوری که برای هر x و y متعلق به \mathbf{R} داشته باشیم: $\varphi(x, y) = (x, xy - y^2)$

معین کنید که آیا گسترش φ سورژکتیو است؟ آیا گسترش φ انژکتیو است؟

۱۶ - مجموعه‌های E و F و گسترش φ مجموعه E در F داده شده‌اند. اگر مجموعه‌بخشهای E را با $\mathcal{P}(E)$ و مجموعه‌بخشهای F را با $\mathcal{P}(F)$ بنماییم، گسترش φ یک گسترش $\mathcal{P}(E)$ در $\mathcal{P}(F)$ معین می‌کند به طوری که به هر بخش A از E ، بخش $\varphi(A)$ از F را وابسته می‌کند.

ثابت کنید که: الف - $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$

ب - $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \varphi(A \cap B) \subset \varphi(A) \cap \varphi(B)$

و به کمک یک مثال نشان دهید که در حالت کلی $\varphi(A \cap B)$ و $\varphi(A) \cap \varphi(B)$ برابر نیستند.

پ - اگر گسترش φ انژکتیو باشد فرمول ب به چه صورت در می‌آید؟

۱۷ - مجموعه‌های E و F و گسترش $f: E \rightarrow F$ را در نظر می‌گیریم. اگر B بخشی از E و A^* بخشی از F باشد قرار می‌دهیم:

$$f(B) = B^* \quad \text{و} \quad A = f^{-1}(A^*)$$

ثابت کنید که $f(A \cap B) = A^* \cap B^*$

۱۸ - عنصر p از \mathbf{Z} را در نظر می‌گیریم و برای عنصرهای a و b از \mathbf{Z} بستگی دوتایی R را روی \mathbf{Z} چنین تعریف می‌کنیم:

a و b در R صدق می‌کنند اگر و تنها اگر $a + b$ بر p بخش پذیر باشد.

ویژگیهای بستگی دوتایی R را مطالعه کنید.

۱۹ - فرض می‌کنیم E مجموعه بردارهای فضا باشد. برای بردارهای \vec{V} و \vec{V}'

از E بستگی دوتایی R را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\vec{V} R \vec{V}' \iff (\vec{V} = \vec{X} \wedge \vec{V}') \quad (\text{هر گاه } \vec{X} \text{ متعلق به } E \text{ وجود داشته باشد به طوری که})$$

ویژگیهای بستگی دوتایی R را بررسی کنید.

۲۰ - بستگی دوتایی R را روی مجموعه E در نظر می گیریم و بستگی دوتایی دیگر

R' را روی E ، به کمک R ، چنین تعریف می کنیم : « برای عنصرهای a و b از E قرار

می دهیم $aR'b$ هر گاه عنصرهای x_0, x_1, \dots, x_n از E وجود داشته باشد به طوری

که برای هر $i = 0, 1, \dots, n-1$ داشته باشیم $x_i R x_{i+1}$ که در آن $x_0 = a$ و $x_n = b$

است ». ثابت کنید که R' متعددی است. اگر A مجموعه جفت های (a, b) باشد به

طوری که داشته باشیم aRb و A' مجموعه جفت های (a', b') باشد به طوری که داشته

باشیم $a'R'b'$ ثابت کنید که $A' \supset A$. نشان دهید که A' کوچکترین بخش از $E \times E$

است به طوری که $A' \supset A$ و بستگی R' وابسته به A' متعددی باشد (اگر B یک بخش

از $E \times E$ باشد، منظور از بستگی S وابسته به B عبارت است از $(a, b) \in B \iff aSb$)

در صورتی که بستگی R بازتابی و متقارن باشد بستگی R' چگونه خواهد بود؟

۲۱ - گسترش f مجموعه Z در Z را به صورت زیر در نظر می گیریم :

$$f(n) = \begin{cases} k & , n = rk \\ n & , n \neq rk \end{cases}$$

آیا گسترش f انزکتیو است؟ آیا f سورژکتیو است؟

۲۲ - مجموعه E و بخش A از آن را در نظر می گیریم. فرض می کنیم f و g دو

گسترش $\mathcal{P}(E)$ در $\mathcal{P}(E)$ باشند به طوری که برای هر X از $\mathcal{P}(E)$ داشته باشیم

$$f(X) = A \cap X \quad \text{و} \quad g(X) = A \cup X$$

تجزیه های کانونیک f و g را بدست آورید، و ثابت کنید که گسترش

$\varphi: g(\mathcal{P}(E)) \rightarrow \mathcal{P}(E-A)$ به طوری که $\varphi(Z) = Z - A$ دوسویی است.

۲۳ - فرض می‌کنیم $(R_i)_{i \in I}$ یک دسته بستگی ترتیبی تام روی یک مجموعه E باشد (مجموعه I با پایان است). قرار می‌دهیم:

$$A_i = \{ (a, b) \mid aR_i b, a \in E, b \in E \}$$

اگر $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ و R بستگی دوتایی $xRy \Leftrightarrow (x, y) \in A$ روی E

باشد، آیا R یک بستگی ترتیبی است؟ آیا R یک بستگی ترتیبی تام است؟

۲۴ - فرض می‌کنیم E یک مجموعه، R یک بستگی ترتیبی غیر تام روی E و P یک بستگی دوتایی روی E باشد به طوری که « برای a و b متعلق به E داشته باشیم aPb هرگاه هیچیک از بستگی‌های aRb و bRa برقرار نباشند ». اگر قرار دهیم:

$$A = \{ (a, b) \mid aRb, a \in E, b \in E \}$$

$B = \{ (a', b') \mid a'Pb', a' \in E, b' \in E \}$ و بستگی Q را به صورت زیر معین کنیم:

$$aQb \Leftrightarrow (a, b) \in A \cup B$$

ویژگی‌های دو بستگی P و Q را مطالعه کنید.

۲۵ - فرض می‌کنیم E یک مجموعه n عنصری و $\mathcal{P}(E)$ مجموعه بخش‌های E باشد. برای X و Y متعلق به $\mathcal{P}(E)$ قرار می‌دهیم XY هرگاه $Y \supset X$ باشد. ثابت کنید که R یک بستگی ترتیبی است و اگر $F = \{ (X, Y) \mid XY \}$ باشد شماره عنصرهای F را پیدا کنید.

۲۶ - اگر n یک شمار درست و مثبت باشد عبارت $\sum_{p=0}^n (C_n^p)^2$ را حساب کنید.

۲۷ - ثابت کنید که $1000!$ بر 2^{114} بخش پذیر است اما بر 2^{115} بخش پذیر نیست، و بزرگترین شمار درست و مثبت n را پیدا کنید به طوری که 3^n بخش‌یاب $1000!$ باشد.

۲۸ - اگر n, p و k شمارهای درستی باشند به طوری که $n \geq p \geq k \geq 0$ برابری

های زیر را ثابت کنید:

$$(۱) \quad C_n^k C_n^{p-k} = C_p^k C_n^p$$

$$(۲) \quad C_n^0 C_n^p + C_n^1 C_n^{p-1} + \dots + C_n^p C_n^0 = {}_2^p C_n^p$$

۲۹- در روی مجموعه X دو قانون ترکیب با عنصرهای بی اثر e و e' داده شده است. اگر x و y دو عنصر از X باشند، ترکیب x و y را به وسیله این دو قانون ترکیب، به ترتیب با xy و $x * y$ نمایش می‌دهیم. فرض می‌کنیم برای عنصرهای دلخواه x, y, u, v از X داشته باشیم $(x * y) (u * v) = (xu) * (yv)$ ثابت کنید که:

الف- داریم $e = e'$.

ب- برای هر دو عنصر x و y از X داریم $x * y = xy$.

پ- دو قانون ترکیب داده شده جابجایی و انجمنی هستند.

۳۰- در روی مجموعه شمارهای حقیقی \mathbf{R} قانون ترکیب داخلی T به صورت زیر داده شده است:

$$\forall a, b \in \mathbf{R}, aTb = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} \quad \text{و} \quad (a^2 + b^2 \neq 0 \text{ اگر})$$

$$0T0 = 0$$

الف- آیا این قانون ترکیب جابجایی است؟ انجمنی است؟ نسبت به قانون ضرب

روی \mathbf{R} پخشی است؟ آیا قانون ضرب روی \mathbf{R} نسبت به قانون T پخشی است؟

ب- آیا قانون T دارای عنصر بی اثر است؟ آیا هر عنصر a از \mathbf{R} دارای عنصر

وارون است؟ آیا قانون T یک قانون ترکیب گروه است؟

۳۱- مجموعه $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ را در نظر می‌گیریم و برای عنصرهای

$$aTb = (a^2 + b^2) \pmod{5}$$

ویژگیهای قانون ترکیب T را بررسی کنید.

۳۲- در روی مجموعه شمارهای حقیقی \mathbf{R} قانون ترکیب T به صورت زیر داده

شده است:

$$aTb = a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2}, \quad \forall a, b \in \mathbf{R}$$

ثابت کنید که مجموعه (\mathbf{R}, T) با گروه جمعی $(\mathbf{R}, +)$ ایزومرف است (از گسترش $x \rightarrow shx$ استفاده کنید).

۳۳- در روی مجموعه \mathbf{R} قانون ترکیب $*$ به صورت زیر داده شده است :

$$x * y = x + y - xy, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$$

ثابت کنید که \mathbf{R} با این قانون تشکیل گروه نمی‌دهد، اما $\mathbf{R} - \{1\}$ با این قانون تشکیل گروه می‌دهد. سپس $x^{(n)} = x * \dots * x$ را محاسبه کنید.

۳۴- اگر E یک مجموعه n عنصری و F یک مجموعه m عنصری باشد ثابت کنید که شماره همه گسترش‌های E در F برابر با n^m است.

۳۵- مجموعه دو عنصری $E = \{a, b\}$ را در نظر می‌گیریم و دو قانون ترکیب داخلی $+$ و \cdot را در روی E به صورت زیر معین می‌کنیم :

\cdot	a	b
a	a	a
b	a	b

جدول قانون \cdot

$+$	a	b
a	a	b
b	b	b

جدول قانون $+$

فرض می‌کنیم f گسترش دوسویی E روی E باشد به طوری که $f(a) = b$ و $f(b) = a$ الف - آیا E با یکی از دو قانون $+$ یا \cdot تشکیل گروه می‌دهد؟

ب- اگر F مجموعه توابع دو متغیری روی E با مقادیر در E باشد (گسترش‌های E^2 در E^2)، شماره عنصرهای F را پیدا کنید، و ثابت کنید که هر عنصر ϕ از F تنها دارای یک تجزیه به صورت :

$$\phi(a, b) = \alpha_0 \cdot f(a) \cdot f(b) + \alpha_1 \cdot f(a) \cdot b + \alpha_2 \cdot a \cdot f(b) + \alpha_3 \cdot a \cdot b$$

است که در آن $\alpha_i \in E$ ، $(i=0, 1, 2, 3)$ و علامتهای $+$ و \cdot همان جمع و ضربی است که به وسیله جدولهای بالا معین گردید.

۳۶- اگر E یک مجموعه n عنصری باشد، چند قانون ترکیب داخلی روی E

می‌توان تعریف کرد؟ چند تا از این قانونهای ترکیب جایجایی هستند؟

۳۷- ثابت کنید که مجموعه شمارهای گویا به صورت $\frac{1+2p}{1+2q}$ با ضرب معمولی

تشکیل یک گروه می‌دهد ($p, q \in \mathbb{Z}$).

۳۸- ثابت کنید که اگر دو عنصر a و b از یک گروه گردش پذیر باشند، a^p و b^q

نیز گردش پذیرند (p و q شمارهای درست و مثبتی هستند).

۳۹- ثابت کنید که یک گروه G جابجایی است اگر و تنها اگر گسترش $x \rightarrow x^{-1}$

یک اتومرفیسم G باشد.

۴۰- فرض می‌کنیم f یک گسترش \mathbf{R} در \mathbf{R} باشد. $T \in \mathbf{R}$ را دوره تناوب f گوئیم

اگر برای هر x از \mathbf{R} داشته باشیم $f(x+T) = f(x)$. ثابت کنید مجموعه دوره‌های

تناوب f تشکیل یک زیر گروه جمعی از \mathbf{R} می‌دهد.

۴۱- ثابت کنید که گسترش $x \rightarrow \varphi(x) = 2^x$ یک ایزومرفیسم گروه جمعی \mathbf{R}

روی گروه ضربی \mathbf{R}^*_+ است.

۴۲- همه گروه‌های مرتبه چهار را پیدا کنید و ثابت کنید که همه آنها جابجایی

هستند.

۴۳- فرض می‌کنیم G یک گروه با پایان مرتبه $2n$ و e عنصر بی اثر آن باشد.

اگر H_1 و H_2 دو زیر گروه مرتبه n از G باشند به طوری که $H_1 \cap H_2 = \{e\}$ ثابت

کنید که $n=2$ و در این صورت ساختمان G کاملاً معین است. جدول G را تشکیل

دهید و زیر گروه‌های دیگر G را بدست آورید.

۴۴- نخست یادآوری می‌کنیم که رتبه یک عنصر a از یک گروه ضربی عبارت است از

کوچکترین شمار درستی مانند n به قسمتی که a^n عنصر بی اثر گروه باشد. فرض می‌کنیم

G یک گروه با پایان و a و b دو عنصر از G باشند. ثابت کنید که اگر a و b و ba

دارای رتبه 2 باشند a و b گردش پذیرند. همچنین ثابت کنید که a و a^{-1} دارای یک

رتبه هستند.

۴۵- فرض می‌کنیم G و G' دو گروه و f و g دو همومرفیسم G در G' باشند.

مجموعه عنصرهای x از G را به طوری که $f(x) = g(x)$ باشد، با H می‌نماییم.

ثابت کنید که H یک زیر گروه از G است. اگر h گسترش همانی H در G باشد،

ثابت کنید که $f \circ h = g \circ h$. نشان دهید که اگر G'' یک گروه دیگر و h' یک همومرفیسم G'' در G باشد به طوری که $f \circ h' = g \circ h'$ در این صورت یک همومرفیسم $\varphi: G'' \rightarrow H$ و تنها یک همومرفیسم وجود دارد به طوری که $h' = h \circ \varphi$ باشد.

۴۶ - مجموعه سه عنصری $E = \{a, b, c\}$ را در نظر می گیریم. اگر S مجموعه همه تبدیلهای E باشد، جدول ترکیب گروه S را تشکیل دهید، و همه زیر گروه های S را معین کنید.

۴۷ - مجموعه $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ داده شده است. اگر S_1 و S_2 دو تبدیل از E به صورت:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

باشند، تبدیلهای $S_1 \circ S_2$ ، S_1^{-1} ، S_2^{-1} ، $S_2^{-1} \circ S_1^{-1}$ ، $S_2^{-1} \circ S_1$ ، $S_2 \circ S_1$ و $(S_2 \circ S_1)^{-1}$ را پیدا کنید.

۴۸ - مجموعه $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ را در نظر می گیریم و عنصرهای آن را با $\bar{0}$ ، $\bar{1}$ ، $\bar{2}$ ، $\bar{3}$ و $\bar{4}$ نمایش می دهیم. جدول ضرب این مجموعه را تشکیل دهید و جواب هر یک از معادله های

$$\begin{cases} \bar{3}x + \bar{4}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{3}y = \bar{2} \end{cases} \quad \text{و همچنین جواب دستگاه} \quad \bar{2}x + \bar{4} = \bar{0} \quad \text{و} \quad \bar{2}x + \bar{1} = \bar{0}$$

را بدست آورید.

اگر $f(x) = \bar{1}x^2 + \bar{1}x + \bar{1}$ باشد ($x \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$)، مقادیر ممکن $f(x)$ را پیدا کنید، و نتیجه را توضیح دهید.

۴۹ - مجموعه E از جفت های (a, b) را که در آن a و b شمارهای حقیقی هستند و $a \neq 0$ است در نظر می گیریم و قانون ترکیب $*$ را روی E به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(a, b) * (a', b') = (aa', ab' + b)$$

الف - نشان دهید که $(E, *)$ یک گروه است. آیا این گروه جابجایی است؟

ب - ثابت کنید که عنصرهای $(a, 0)$ از E تشکیل یک زیر گروه از E می دهند

که با گروه ضربی شمارهای حقیقی ایزومرف است.

پ- گسترش $\varphi: E \rightarrow \mathbf{R}$ به طوری که $\varphi[(a, b)] = a$ داده شده است. تحقیق کنید که داریم $\varphi[(a, b) * (a', b')] = \varphi[(a, b)] \varphi[(a', b')]$ و به علاوه مجموعه $(1) \varphi^{-1}$ زیرگروهی از E است که با گروه جمع‌شماره‌های حقیقی ایزومرف است.

۵۰- G یک گروه ضربی است با عنصر بی‌اثر e و A و B دو زیرگروه از G هستند. اگر X و Y دو زیر مجموعه از G باشند قرار می‌دهیم:

$$XY = \{xy \mid x \in X, y \in Y\} \quad \text{و} \quad X^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in X\}$$

الف- ثابت کنید که $(AB)^{-1} = BA^{-1}$ و از آنجا نتیجه بگیرید که برای این که AB یک زیرگروه از G باشد با یا وابسته است که $AB = BA$ باشد. در صورتی که این شرط برقرار باشد زیرگروه پدید آمده به وسیله $A \cup B$ را معین کنید.

ب- فرض می‌کنیم که $AB = BA$ داشته باشیم و C یک زیرگروه دیگر از G و شامل A باشد. نشان دهید که $C \cap AB$ یک زیرگروه از G است که بر $A(B \cap C)$ منطبق است.

۵۱- حلقه A را که برای آن داریم $x^2 = x$ ، $\forall x \in A$ در نظر می‌گیریم (دو قانون ترکیب A را با همان علامتهای جمع و ضرب معمولی نمایش می‌دهیم و عنصر بی‌اثر قانون جمع را با 0 می‌نماییم). ثابت کنید که:

$$\text{الف-} \quad \forall x \in A, \quad x + x = 0$$

$$\text{ب-} \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in A, \quad xy = yx$$

پ- بستگی $xy = x$ بین عنصرهای A یک بستگی ترتیبی است.
ت- $xy(x+y) = 0$ ، $\forall x \in A$ ، $\forall y \in A$ و از آنجا نتیجه بگیرید که اگر A انتگر باشد، یا A تنها دارای عنصر 0 است و یا A تنها دارای دو عنصر است.

۵۲- مجموعه بخشهای مجموعه E یعنی $\mathcal{P}(E)$ را در نظر می‌گیریم و دو قانون ترکیب \oplus و $*$ را در روی $\mathcal{P}(E)$ به صورت:

$$A \oplus B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B), \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(E)$$

$$A * B = A \cap B$$

اختیار می‌کنیم. ثابت کنید که با این دو قانون، $\mathcal{S}(E)$ یک حلقهٔ جابجایی یک‌ه‌دار است. آیا این حلقه انتگراس است؟ آیا این حلقهٔ یک هیأت است؟

۵۳- فرض می‌کنیم A یک حلقه، o عنصر بی‌اثر قانون جمع A و $A \neq \{o\}$ باشد. ثابت کنید که اگر برای هر دو عنصر a و b از A ، $a \neq o$ ، هر یک از معادله‌های $ax=b$ و $ya=b$ دست‌کم دارای یک جواب باشند، A یک هیأت است و جواب‌های معادله‌های بالا یکتا می‌باشند.

۵۴- دو شمارگویا و دلخواه a و b و شمار درست و مثبت n را در نظری می‌گیریم (n ثابت)، و فرض می‌کنیم که n مربع هیچ شمار درستی نباشد. ثابت کنید که مجموعهٔ شمارها حقیقی $a+b\sqrt{n}$ با همان دو قانون جمع و ضرب معمولی تشکیل یک هیأت می‌دهد.

۵۵- فرض می‌کنیم f یک آندومرفیسم هیأت \mathbf{R} باشد. یعنی برای هر x و y متعلق به \mathbf{R} داشته باشیم:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad , \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

ثابت کنید که در این صورت f یا گسترش همانی است و یا گسترش صفر است.

۵۶- مجموعهٔ سه عنصری $E = \{a, b, c\}$ داده شده است. اگر H مجموعهٔ قانون‌های ترکیب داخلی روی E باشد، شمارهٔ عنصرهای H را پیدا کنید. چنانچه \perp و \top دو عنصر دلخواه از H باشند، آیا E با این دو قانون تشکیل یک هیأت می‌دهد؟ به چند روش؟

۵۷- قرار می‌دهیم $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{o\}$ و در روی مجموعهٔ $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^*$ قانون ترکیب * را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x, y) * (x', y') = (xx', \frac{y'}{x} + x'y)$$

ثابت کنید که $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^*$ با قانون * یک گروه است. یک گسترش \mathbf{R}^* در \mathbf{R} پیدا کنید که نموداران یک زیر گروه از گروه $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^*$ باشد. دو زیر گروه دیگر از گروه $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^*$ مشخص کنید.

۵۸- فرض می‌کنیم G گروه تبدیلهای یک مجموعهٔ چهار عنصری E باشد. مجموعهٔ تشکیل شده از تبدیل همانی E و تبدیلهایی که جای هر دو عنصر از E را با یکدیگر عوض

می کنند با H نمایش می دهیم $(H \subset G)$. ثابت کنید که H یک زیر گروه ممتاز از G است (H گروه کلین نامیده می شود).

۵۹- در حلقه $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ هر یک از دو دستگاه معادله های زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} \bar{0}x + \bar{2}y = \bar{a} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{b} \end{cases}, \quad \begin{cases} \bar{2}x + \bar{0}y = \bar{1} \\ \bar{0}x + \bar{2}y = \bar{a} \end{cases}$$

۶۰- در هیات $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ هر یک از دو دستگاه معادله های زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{1} \\ \bar{0}x + \bar{2}y = \bar{1} \end{cases}, \quad \begin{cases} \bar{2}x + \bar{1}y = \bar{0} \\ \bar{2}x + \bar{1}y = \bar{3} \end{cases}$$

۶۱- نشان دهید که مجموعه $\{1, -1, i, -i\}$ یک زیر گروه از گروه ضربی C^* است که با گروه جمعی $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ایزومرف است.

۶۲- فرض می کنیم A مجموعه تابع های آفین با ضرایب حقیقی $f(x) = ax + b$ باشد. در A دو قانون جمع و ضرب را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall f, g \in A$$

$$(fg)(x) = f[g(x)]$$

الف- ثابت کنید که A با قانون جمع یک گروه جابجایی است؟

ب- ثابت کنید که قانون ضرب انجمنی است اما جابجایی نیست. آیا A یک حلقه است؟

۶۳- حلقه دلخواه A را در نظر می گیریم و در روی $Z \times A$ دو قانون جمع و ضرب را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$(m, x) + (n, y) = (m + n, x + y)$$

$$(m, x) \cdot (n, y) = (mn, my + nx + xy)$$

ثابت کنید که مجموعه $Z \times A$ با این دو قانون یک حلقه یکه دار است و این حلقه دارای یک ایده آل I می باشد که با A ایزومرف است.

۶۴ - الف - فرض می‌کنیم p یک شمار اول و q شمار درستی باشد به طوری که $0 < q < p$. ثابت کنید که C_p^q بر p بخش پذیر است.

ب - ثابت کنید که در یک حلقه جابجایی A که مفسر آن p است برای هر دنباله با پایان a_1, a_2, \dots, a_k از عنصرهای A داریم:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^p = a_1^p + a_2^p + \dots + a_k^p$$

و از آنجا نتیجه بگیرید که برای هر شمار درست و مثبت k داریم $k^p \equiv k \pmod{p}$

۶۵ - بزرگترین بخش‌یاب مشترک و کوچکترین مضرب مشترك چند جمله‌ای‌های حقیقی زیر را پیدا کنید :

$$P_1 \equiv x^6 - x^4 - x^2 + 2x + 2$$

$$P_2 \equiv x^4 + 5x^2 + 10x + 5$$

۶۶ - یک چندجمله‌ای تشکیل دهید که ضریبهای آن شمارهای درست، درجه آن می‌نیم و

$$\alpha = 2 + \sqrt[3]{3}$$

۶۷ - برای چه مقادیری از $n \in \mathbb{N}$ چند جمله‌ای $P(x) \equiv (x+1)^n - x^n - 1$

بر $x^2 + x + 1$ بخش پذیر است.

۶۸ - مانده تقسیم $(cha + xsha)^n$ را بر $x^2 - 1$ پیدا کنید.

۶۹ - معادله $x^2 + px + q = 0$ که در آن p و q دو شمار مختلط اند داده شده

است ریشه‌های این معادله را x_1 و x_2 و x_3 می‌گیریم. عبارت

$$\Delta = (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_1)^2 (x_1 - x_2)^2$$

۷۰ - چنانچه $A[X] = \frac{Z}{2Z} [X]$ حلقه چندجمله‌ای‌های روی هیأت $Z/2Z$ باشد،

نشان دهید که مجموعه چندجمله‌ای‌های درجه اول $A[X]$ با پایان است و چند جمله‌ای

$$u = -1 - 1x + 1x^2$$

۷۱ - هرگاه K یک هیأت جابجایی باشد که مفسر آن مخالف با 2 است و $A(X, Y)$

یک چند جمله‌ای از حلقه $K[X, Y]$ باشد به طوری که داشته باشیم:

$$A(X, Y) = A(Y, X)$$

ثابت کنید که اگر $A(X, Y)$ بر $X - Y$ بخش پذیر باشد بر $(X - Y)^2$

نیز بخش پذیر است.

۷۲- معادله $\frac{x}{t-a} + \frac{y}{t-b} + \frac{z}{t-c} - 1 = 0$ که در آن a, b, c و

سه شمار حقیقی دویه دو متمایزند، داده شده است. فرض می‌کنیم x, y و z جوابهای دستگاه خطی ای باشد که به ترتیب از قرارداد h, k و l به جای t در معادله بالا بدست می‌آید.

الف - چنانچه طرف چپ معادله داده شده را به صورت کسر گویای:

$$\frac{P(t)}{(t-a)(t-b)(t-c)}$$

بنویسیم، درجه چند جمله‌ای $P(t)$ و جمله‌ای از آن را که دارای بزرگترین درجه است معین کنید و ریشه‌های آن را بدست آورید، و از روی آنها $P(t)$ را پیدا کنید.

ب - با بکار بردن روش عملی تجزیه کسرهای گویا به عنصرهای ساده مقادیر x, y و z را بر حسب a, b, c, h, k, l حساب کنید.

۷۳- فرض می‌کنیم a و b دو شمار حقیقی متمایز و ϕ و ψ دو چند جمله‌ای از $\mathbb{C}[X]$ باشند که نسبت به یکدیگر اولند. کلیه چند جمله‌ای‌های $f(x)$ را پیدا کنید به طوری که $f(x) + a$ بر $\phi(x)$ و $f(x) + b$ بر $\psi(x)$ بخش پذیر باشد.

درحالتی که $a=1, b=-1, \phi(x)=x^2+1$ و $\psi(x)=x^3+1$ باشد $f(x)$ را بدست آورید.

۷۴- در معادله $f(x) \equiv (x+1)^n - x^n - \lambda = 0$ مقادیر $\lambda \in \mathbb{C}$ را بدست آورید به طوری که این معادله دارای ریشه چند گانه باشد (n شمار درستی است بزرگتر و یا برابر ۲).

۷۵- شمارهای مختلط m, n و p را پیدا کنید به طوری که معادله:

$$f(x) \equiv x^6 + mx^4 + 1 \cdot x^3 + nx + p = 0$$

دارای یک ریشه چهار گانه باشد، سپس ریشه‌های معادله را بدست آورید.

۷۶- فرض می‌کنیم $P(x)$ یک چند جمله‌ای حقیقی درجه پنجم باشد. اگر $P(x) + 1$ بر $(x-1)^2$ و $P(x) - 1$ بر $(x+1)^3$ بخش پذیر باشند، $P(x)$ را پیدا کنید.

۷۷- دو چند جمله‌ای $f(X)$ و $g(X)$ با ضریبهای مختلط به صورت زیر داده شده‌اند:

$$f(X) \equiv X^r - \varepsilon X + \varepsilon$$

$$g(X) \equiv X^r - (1 + \varepsilon i)X^r - \varepsilon X + \varepsilon i - 1$$

نشان دهید که $f(X)$ و $g(X)$ یک ریشه مشترک α دارند و آن را حساب کنید، و از آنجا تجزیه کسر گویای $\frac{f(X)}{g(X)}$ را به عنصرهای ساده در روی هیأت شمارهای مختلط بدست آورید.

۷۸ - چند جمله‌ای حقیقی A را طوری پیدا کنید که دارای کمترین درجه بوده و A بر $X^2 + 1$ و $A - 1$ بخش پذیر باشد.

آیا می‌توان چند جمله‌ای A را که بر چند جمله‌ای B بخش پذیر باشد طوری بدست آورد که $A - 1$ بر C بخش پذیر باشد؟ (B و C دو چند جمله‌ای داده شده هستند).

۷۹ - اگر K یک هیأت با مشخص p باشد، نشان دهید که مشتق یک چند جمله‌ای A از $K[X]$ برابر با صفر است اگر و تنها اگر A یک ترکیب خطی از 1 و توانهای مثبت X^p با ضرایب متعلق به K باشد.

۸۰ - هیأت جابجایی K و x_1, x_2, x_3 سه عنصر متمایز از آن داده شده‌اند. چنانچه r_1, r_2, r_3 به ترتیب مانده‌های تقسیم چند جمله‌ای A از $K[X]$ بر $X - x_1, X - x_2, X - x_3$ باشد مانده تقسیم A بر $(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$ را پیدا کنید.

۸۱ - چنانچه a و b دو عنصر متمایز از یک هیأت جابجایی K باشد، ثابت کنید که در $K[X]$ چند جمله‌ای‌های P و Q وجود دارند به طوری که:

$$(1) \quad \deg P < rn \quad , \quad \deg Q < rn$$

$$(2) \quad (X - a)^{rn}P + (X - b)^{rn}Q = 1$$

و از آنجا نتیجه بگیرید که:

$$P(a + b - X) = Q(X) \quad , \quad Q(a + b - X) = P(X)$$

۸۲ - چند جمله‌ای $A = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$ را که ضریبهای آن

متعلق به Z و نسبت به یکدیگر اول هستند، در نظر می‌گیریم.

الف - اگر شمارگویای x که برابر با کسر ساده نشدنی p/q است یک صفر A باشد، ثابت کنید که a_0 بر p و a_n بر q بخش پذیر است.

ب - ریشه‌های گویای چند جمله‌ای $x^3 - 4x^2 + 4x - 4$ را پیدا کنید.

۸۳ - حلقه $E = \mathbf{R}[X]/(X^2 - 1)$ یعنی حلقه خارج قسمت حلقه چند جمله‌ای های با ضرایب حقیقی $\mathbf{R}[X]$ بر ایدال مضارب $X^2 - 1$ را در نظر می‌گیریم (هر عنصر از E به وسیله یک چند جمله‌ای درجه ۰ و یا درجه ۱ نشان داده می‌شود).

الف - مجموع و حاصل ضرب دو عنصر از E را معین کنید و نشان دهید که E دارای بخشایب‌های صفر است و مجموعه بخشایب‌های صفر از اجتماع دو ایدال I و J تشکیل می‌شود.

ب - عنصرهای وارون پذیر E را بدست آورید و معادله درجه اول $\alpha\xi + \beta = 0$ را (که در آن α و β عنصرهای داده شده از E و ξ نامعین است) حل و بحث کنید.

پ - ثابت کنید که اگر حاصل ضرب $\delta_1\delta_2$ صفر باشد معادله $(\xi - \delta_1)(\xi - \delta_2) = 0$ دست کم دارای چهار جواب است.

۸۴ - شمارهای مختلط زیر را به صورت $x + iy$ درآورید :

$$\frac{3+6i}{3-4i}, \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{1-7i}{4+3i}, \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$$

۸۵ - مدول و آرگومان $z = a \frac{1+ib}{1-ib}$ را بدست آورید (a و b دو شمار حقیقی

هستند و $a > 0$ است).

۸۶ - شمارهای مختلط z را پیدا کنید به طوری که $z^2 = \frac{1}{z}$ مزدوج یکدیگر باشند.

۸۷ - اگر $|z| = |z-2|$ و $\arg z = \arg(z+3+i)$ باشد، z را بدست

آورید (منظور از \arg آرگومان است).

۸۸ - فرص می‌کنیم z_1, z_2 و z_3 سه شمار مختلط باشند به طوری که $z_1, z_2 \neq 0$ و

$\frac{z_1}{z_2} \in \mathbf{R}$. ثابت کنید که یک جفت حقیقی (a, b) و تنها یک جفت وجود دارد به

تسمی که داریم $z_3 = az_1 + bz_2$ و از آنجا نتیجه بگیرید که
 $I_m(z_3 \cdot \bar{z}_2) = aI_m(z_1 \cdot \bar{z}_2)$ و $I_m(z_3 \cdot \bar{z}_1) = bI_m(z_2 \cdot \bar{z}_1)$ (منظور از I_m بخش انگاری است).

۸۹ - شماره‌های مختلط z را بدست آورید به طوری که z و $\frac{1}{z}$ دارای

یک مدول باشند.

۹۰ - معادله‌های زیر را حل کنید :

$$z^2 - (0 - 14i)z - 2(0i + 12) = 0 ,$$

$$z^2 - 2iz + 2 - 4i = 0 , \quad 27(z-1)^2 + (z+1)^2 = 0$$

$$z^4 = -119 + 120i , \quad z^2 - (2 + 4i)z - 1 + 0i = 0$$

$$z^4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}} , \quad z^3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$$

۹۱ - عبارت $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{1+k(k+1)+i}{1+k(k+1)-i}$ را حساب کنید.

۹۲ - فرض می‌کنیم a ، b و c سه شمار مختلط و A ، B و C سایه‌های آنها

در صفحه باشد. ثابت کنید یک شرط با یابسنده برای این که درسه بر ABC داشته باشیم

$AB=BC=CA$ این است که $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$ باشد.

۹۳ - معادله درجه دوم $z^2 - 2(\cos\theta + i\sin\theta)z + 1 = 0$ را در نظر می‌گیریم.

الف - اگر z' و z'' ریشه‌های این معادله باشند ، ثابت کنید که مدولهای z' و z''

وارون یکدیگر و آرگومانهای آنها قرینه یکدیگرند.

ب - اگر M' و M'' سایه‌های z' و z'' باشند، مکان نقطه M میانه پاره خط $M'M''$

را هنگامی که θ تغییر می‌کند پیدا کنید.

پ - z' و z'' برای چه مقادیر θ انگاری محض هستند ؟ حقیقی هستند ؟

۹۴ - در صفحه مختلط تبدیل $Z = \frac{z}{z-2}$ داده شده است.

الف - نقطه‌های دوگانه این تبدیل را پیدا کنید.

ب - فرض می‌کنیم $z_1 \neq 0$ ، $z_1 \neq 1$ و $|z_1| \leq 1$ باشد. دنباله (z_n) را به

طوری که $z_{n+1} = \frac{z_n}{2 - z_n}$ باشد در نظر می‌گیریم ($n=1, 2, \dots$). ثابت کنید که

$$|z_1| > |z_2| > \dots > 0 \text{ و به طور کلی دنباله } (|z_n|) \text{ کاملاً کاهشی است.}$$

پ - نشان دهید که حد دنباله (z_n) برابر با صفر است (از نا برابری

$$|z_1| - |z_2| \geq 2 - |z_1| \text{ استفاده کنید).}$$

۹۵ - معادله $(z+1)^n = \cos \varphi na + i \sin \varphi na = e^{i \varphi na}$ را حل کنید ($a \in \mathbf{R}$)

و از آنجا مقدار عبارت :

$$P_n = \sin a \cdot \sin \left(a + \frac{\pi}{n} \right) \cdots \sin \left(a + \frac{(n-1)\pi}{n} \right) \text{ را حساب کنید.}$$

۹۶ - دستگاه معادله‌های زیر را حل کنید :

$$iz - 2\omega = -4 + 2i, \quad 2\bar{\omega} + \bar{z} = 2$$

۹۷ - مقدار $(1+i)^{120}$ را بدست آورید.

۹۸ - اگر سایه‌های سه‌شمار مختلط az^2 ، a^2z و z^3 رأس‌های یک سه بر باشند که

دارای ضلع‌های برابر است، z را بدست آورید ($a \in \mathbf{C}$)

۹۹ - مدول، آرگومان، بخش حقیقی، بخش انکاری و ریشه‌های دوم $(1 \times 2i)^3$

را پیدا کنید.

۱۰۰ - ثابت کنید که یک شرط بایاویسندگی برای این که سایه‌های سه‌شمار مختلط

z ، z' و z'' روی یک خط باشند این است که داشته باشیم :

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z' & \bar{z}' & 1 \\ z'' & \bar{z}'' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

۱۰۱ - معادله $z^n - a = 0$ که در آن داریم $a \in \mathbf{C}$ ، $|a| = 1$ و $n \in \mathbf{N}$ داده

شده است. ریشه‌های این معادله را z_1, z_2, \dots, z_n می‌نامیم و قرار می‌دهیم:

$$u_1 = (1+z_1)^n, \dots, u_n = (1+z_n)^n$$

ثابت کنید که سایه‌های شماره‌های مختلط u_i روی یک خط قرار دارند.

۱۰۲ - z را طوری تعیین کنید که سایه‌های z و z^2 و z^4 هم خط باشند.

۱۰۳ - ریشه‌های معادله $x^4 + x^2 + 1 = 0$ را به دورش زیر پیدا کنید :

$$\text{الف - باحل دستگاه } x^4 = u \text{ و } u^2 + u + 1 = 0$$

ب - با تجزیه چند جمله‌ای $x^4 + x^2 + 1$ به حاصل ضرب سازه‌های درجه دوم

با ضرایب حقیقی .

$$104 - \text{مطوبست محاسبه } \cos \frac{\pi}{9}$$

الف - با استفاده از معادله $z^9 + 1 = 0$.

ب - با استفاده از فرمول موآور .

۱۰۵ - شماره‌های مختلط a و b و u داده شده‌اند. معادله :

$$(A) \quad (z-a)^n = u(z-b)^n$$

را در نظر می‌گیریم :

الف - نشان دهید که معادله (A) هم‌ارز با دستگاه زیر است :

$$\frac{z-a}{z-b} = x, \quad x^n = u$$

ریشه‌های این معادله را هنگامی که $a=j$ ، $b=j^2$ ، $u=1$ و $n=6$ است بدست

آوردید و نتیجه بدست آمده را با بسط و طرف معادله (A) و حل مستقیم آن مقایسه کنید.

ب - ثابت کنید که سایه ریشه‌های معادله (A)، برحسب مقادیر $|u|$ روی یک

دایره یا روی یکی خط قرار دارند.

اگر $n \geq 2$ باشد، a ، b و u را چگونه انتخاب کنیم تا همه ریشه‌های (A)

حقیقی باشند؟

۱۰۶ - یک شرط بیاویسند بدست آوردید برای این که سایه‌های ریشه‌های معادله

$z^2 + pz + q = 0$ رأسهای یک سدر ABC باشد به طوری که $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$ و $AB = AC$

$$\frac{Z-1}{Z+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 \quad \text{۱۰۷ - شمارهای مختلط } z \text{ و } Z \text{ به طوری که داریم}$$

داده شده‌اند.

الف - Z را به صورت تابعی از z و $z_1 = \frac{1}{z}$ بدست آورید .

ب - سایه‌های Z ، z و z_1 نسبت به یکدیگر چگونه‌اند ؟

۱۰۸ - در صفحه مختلط، همتای دایره به معادله $|z-1|=1$ را به وسیله

$$\text{تبدیل } Z = \frac{z}{z-2} \text{ پیدا کنید } (z \neq 2).$$

۱۰۹ - به وسیله محاسبه و به روش هندسی شمارهای مختلط z را معین کنید به

طوری که:

$$(1) \quad \left| \frac{z-2}{z-5} \right| = 1, \quad (2) \quad \left| \frac{z-2}{z-5} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۱۰ - بردارهای $x_1(1, 1, 2, 1)$ ، $x_2(1, -1, 0, 1)$ ، $x_3(0, 0, -1, 1)$

و $x_4(1, 1, 1, 1)$ از فضای برداری \mathbf{R}^4 داده شده‌اند.

الف - ثابت کنید که x_1 ، x_2 ، x_3 و x_4 تشکیل یک پایه از \mathbf{R}^4 را می‌دهند.

ب - آرایندهای x را در پایه (x_1, x_2, x_3, x_4) بدست آورید.

۱۱۱ - سه بردار a ، b و c از فضای برداری E روی هیأت K را، که مفسر آن

مخالف با $\mathbf{2}$ است در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم :

$$u = b + c, \quad v = c + a, \quad w = a + b$$

الف - ثابت کنید که زیرفضاهای برداری پدید آمده به وسیله (a, b, c) و (u, v, w)

بر یکدیگر منطبق می‌باشند.

ب - نشان دهید که بردارهای u ، v و w نابستگی خطی دارند اگر و تنها اگر

بردارهای a ، b و c نابستگی خطی داشته باشند.

۱۱۲ - بردارهای $a(-2, x, y, 3)$ ، $c_1(1, -1, 1, 2)$ و $c_2(-1, 2, 3, 1)$

از فضای برداری \mathbf{R}^4 داده شده‌اند. x و y را پیدا کنید به طوری که بردار a به زیرفضای

برداری F از \mathbf{R}^4 ، پدید آمده به وسیله c_1 و c_2 متعلق باشد.

۱۱۳ - در فضای برداری \mathbf{R}^4 زیر فضای بردار F_1 پدید آمده به وسیله بردارهای

$$e_1(2, 2, 1, 0), e_2(1, 4, 2, -1), e_3(2, 1, -1, 0), \\ e_4(2, -5, -4, 2)$$

و زیر فضای برداری F_2 پدید آمده به وسیله بردارهای $a_1(2, 1, 4, 5)$ و $a_2(1, 2, 3, 4)$ را در نظر می گیریم. بعد هر یک از این دو زیر فضای برداری و یک پایه از هر کدام را بدست آورید. همچنین معادله های $F_1 + F_2$ و $F_1 \cap F_2$ را معین کنید و یک پایه از هر کدام از این دو زیر فضا، پیدا نمایید.

۱۱۴ - آیا مجموعه بردارهای (x_1, x_2, x_3) از \mathbf{R}^3 به طوری که

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \text{ باشد یک زیر فضای برداری از } \mathbf{R}^3 \text{ است ؟ به همین مطلب در مورد} \\ \text{مجموعه بردارهای } x \text{ از } \mathbf{R}^3 \text{ به طوری که } x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \text{ باشد جواب دهید.}$$

۱۱۵ - آيا می توان x و y را یافت به طوری که بردار $(x, 1, y, 1)$ از \mathbf{R}^4 به

$$\text{زیر فضای برداری پدید آمده به وسیله } e_1(1, 2, 3, 4) \text{ و } e_2(1, -2, 3, -4) \text{ از } \mathbf{R}^4 \\ \text{متعلق باشد.}$$

۱۱۶ - فضای برداری چند جمله ای های یک متغیری حقیقی را در نظر می گیریم و آن

$$\text{را } \mathcal{P} \text{ می نماییم. ثابت کنید که مجموعه چند جمله ای های } P \text{ متعلق به } \mathcal{P} \text{ به طوری که} \\ \int_0^1 P(x) dx = 0 \text{ باشد یک زیر فضای برداری از } \mathcal{P} \text{ است، اما مجموعه چند جمله ای های}$$

$$Q \text{ از } \mathcal{P} \text{ به طوری که } \int_0^1 Q(x) dx = -1 \text{ باشد یک زیر فضای برداری از } \mathcal{P} \text{ نیست.}$$

۱۱۷ - فرض می کنیم E یک فضای برداری A ، B و C سه زیر فضای برداری از

$$E \text{ باشند، به طوری که داشته باشیم } A \cap B = A \cap C, A + B = A + C, B \subset C \\ \text{ثابت کنید که داریم } B = C.$$

۱۱۸ - در فضای برداری \mathbf{R}^4 بردارهای $a(1, 2, -1, -2)$ ، $b(2, 3, 5, -1)$

$$c(1, 3, -1, 5) \text{ و } d(1, 2, 1, 4) \text{ نسبت به پایه کانونیک } \mathbf{R}^4 \text{ داده شده اند.} \\ \text{ثابت کنید که این چهار بردار وابستگی خطی دارند و مؤلفه های بردار } x(7, 14, -1, 2) \\ \text{را نسبت به پایه } (a, b, c, d) \text{ پیدا کنید.}$$

۱۱۹- بردارهای $a(\lambda, 1, 1)$ ، $b(-1, -1, \lambda)$ و $c(-1, -\lambda, 1)$ از \mathbf{R}^3 داده شده‌اند. رتبه این دستگاه بردار را برحسب مقادیر مختلف λ پیدا کنید (رتبه یک دستگاه بردار عبارتست از شمارهٔ ماکزیمم بردارهایی از دستگاه که نا بستگی خطی دارند).

۱۲۰- بردارهای $a(1, 1, \alpha)$ ، $b(1, \alpha, 1)$ و $c(\alpha, 1, 1)$ از فضای برداری V داده شده‌اند. رتبه این دستگاه بردار را برحسب مقادیر مختلف α پیدا کنید اگر:

الف - V فضای برداری حقیقی \mathbf{R}^3 باشد.

ب - V فضای برداری $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3$ روی هیأت $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ باشد.

۱۲۱- فضای برداری \mathbf{R}^4 و پایهٔ کانونیک آن را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

$$f_1(1, 0, 0, 0), f_2(0, 1, 0, 0), f_3(1, 0, 0, -\mu),$$

$$f_4(0, 1, 0, -\frac{1}{\mu})$$

چهار فرم خطی روی \mathbf{R}^4 ، نسبت به پایهٔ دو ال پایهٔ کانونیک \mathbf{R}^4 ، باشند (λ و μ مخالف با صفرند).

نا بستگی خطی این فرمها را مطالعه کنید و درحالتی که این چهار فرم نا بستگی خطی دارند پایهٔ دو ال پایهٔ (f_1, f_2, f_3, f_4) را بدست آورید.

مطلب بالا را در مورد فرمهای خطی زیر نیز مطالعه کنید:

$$g_1(1, 0, 0, -\sin\alpha, -\cos\alpha), g_2(0, 1, 0, -\cos\alpha, \sin\alpha), \alpha \in \mathbf{R}$$

$$g_3(1, 0, \sin\beta, -\cos\beta), g_4(0, 1, -\cos\beta, -\sin\beta), \beta \in \mathbf{R}$$

۱۲۲- چنانچه n یک شمار درست و مثبت و E مجموعهٔ توابع x روی \mathbf{R} به صورت:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

باشد ($a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ شماره‌های حقیقی هستند):

الف - ثابت کنید که E یک زیر فضای برداری از فضای برداری حقیقی گسترشهای \mathbf{R}

در \mathbf{R} می‌باشد.

ب - اگر m یک شمار درست و E_m مجموعه توابع x باشد به طوری که:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^m (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad , \quad 0 \leq m \leq n$$

با استفاده از روش بازگشت روی m ثابت کنید که اگر $x \in E_m$ تابع صفر باشد ضرایب a_k و b_k برابر با صفرند (از تابع $x'' + m^2 x$ که در آن x'' مشتق دوم تابع x است استفاده کنید).

پ - یک پایه E را پیدا کنید.

۱۲۳ - الف - ثابت کنید که چند جمله ای $2 - X^2$ در $Q[X]$ ساده نشدنی است.

ب - نشان دهید که مجموعه E شمارهای حقیقی به صورت $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{4}$ که در آن a, b, c شمارهای گویا هستند یک هیأت است.

پ - ثابت کنید که E یک فضای برداری سه بعدی روی هیأت Q می باشد.

۱۲۴ - E مجموعه داده شده در تمرین شماره (۱۲۲) است. گسترش خطی E در E را که به هر عنصر x از E عنصر $y = u(x) \in E$ را وابسته میکند در نظریه گیریم بطوری که:

$$y(t) = x\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

ثابت کنید که u یک گسترش خطی و u^8 گسترش همانی است (u^8 ترکیب ۸ گسترش u می باشد). هسته u و سایه $u(E)$ را پیدا کنید.

۱۲۵ - ثابت کنید که مجموعه گسترشهای $[-1, 1]$ در هیأت R که آن را با F می نماییم، با دو قانون ترکیب جمع و ضرب:

$$(۱) \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(۲) \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

یک حلقه جابجائی است.

معلوم کنید کدام یک از زیر مجموعه های F که در زیر مشخص شده اند زیر حلقه F و کدام یک از آنها ایدال F می باشند:

$\mathcal{P} =$ مجموعه توابع چند جمله ای.

$\mathcal{P}_n =$ مجموعه توابع چند جمله‌ای که درجه آنها کوچکتر و یا برابر با n است.

$\mathcal{Q}_n =$ مجموعه توابع چندجمله‌ای درجه n .

$\mathcal{N} =$ مجموعه گسترشهای f به طوری که $f(0) = 0$ باشد.

$\mathcal{U} =$ مجموعه گسترشهای f به طوری که $f(0) = 1$ باشد.

۱۲۶ - ثابت کنید مجموعه F که در تمرین شماره (۱۲۵) معین گردید با دو قانون:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad , \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \quad , \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

یک فضای برداری روی \mathbf{R} می‌باشد.

معلوم کنید کدام یک از زیر مجموعه‌های \mathcal{P} ، \mathcal{P}_n ، \mathcal{Q}_n ، \mathcal{N} و \mathcal{U} تشکیل

زیر فضای برداری میدهند (این زیر مجموعه‌ها در تمرین شماره ۱۲۵ معین شده‌اند).

۱۲۷ - فضای برداری n بعدی E روی هیأت K و E^* دوآل E را در نظر می‌گیریم

و فرض می‌کنیم Φ مجموعه‌ای از بردارهای E و F زیر فضای برداری E پدید آمده بوسیله

بردارهای Φ باشد. ثابت کنید:

الف - فرمهای خطی‌ای که مقدار آنها برای هر بردار از Φ برابر با صفر است یک زیر

فضای برداری F^* از E^* تشکیل میدهند.

ب - صفرهای مشترک فرمهای خطی F^* بردارهای F هستند.

پ - $\dim F + \dim F^* = n$.

۱۲۸ - گسترش خطی f فضای برداری \mathbf{R}^4 در \mathbf{R}^4 که به بردار u به مؤلفه‌های

x, y, z, t بردار $f(u)$ به مؤلفه‌های X, Y, Z, T را وابسته میکند داده شده

است و داریم:

$$X = x + y + z - t$$

$$Y = -x + y - z - t$$

$$Z = x - y - z - t$$

$$T = -x - y + z + t$$

رتبه f و فضای $f(\mathbf{R}^4)$ را معلوم کنید. ثابت کنید که $f(\mathbf{R}^4)$ نقطه مشترکی با میدان D

معین شده بوسیله $T > 0$ ، $Z > 0$ ، $Y > 0$ و $X > 0$ ندارد.

۱۲۹ - فضای برداری \mathbf{R}^4 را در نظر می گیریم . نشان دهید که مجموعه بردارهای $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ که درستی های :

$$\sum_{i=1}^5 a_{ij}x_i = 0, \quad j=1, \dots, 4$$

صدق می کنند یک زیر فضای برداری از \mathbf{R}^5 است و این مطلب را از روی گسترش خطی تعبیر کنید .

۱۳۰ - عنصرهای a, b, c, d از هیأت جابجایی K و ماتریس :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

را در نظر می گیریم .

الف - ماتریس A^2 را محاسبه کنید و نشان دهید که شمارهای α و β وابسته به a, b, c, d وجود دارند به قسمی که داریم :

$$A^2 - \alpha A - \beta I = 0$$

درجه حالتی ضریب های α و β یکتا نیستند .

ب - ثابت کنید مجموعه \mathcal{L} که از ماتریس B به صورت $B = uI + vA$ (u و v) عنصرهای دلخواهی از K و I ماتریس یکه است) تشکیل شده است یک حلقه یکه دار جابجایی است .

پ - در حالت $K = \mathbf{R}$ نشان دهید که اگر B دارای وارون B^{-1} باشد ، B^{-1} نیز متعلق به \mathcal{L} است . درجه صورت \mathcal{L} یک هیأت است .

۱۳۱ - فرض می کنیم E فضای برداری مجموعه تابع هایی به صورت

$P(x) = a \cos x + b \sin x + c$ روی هیأت \mathbf{R} باشد . اگر ϕ و ψ دو گسترش E در E باشند و $\phi(P) = Q$ و $\psi(P) = R$ به طوری که داشته باشیم

$$Q(x) = P\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \quad \text{و} \quad R(x) = \frac{d}{dx}(P(x))$$

$\phi \circ \psi$ را پیدا نمایید و آنها را با یکدیگر مقایسه کنید .

۱۳۲- ماتریس مربع X را که در برابری زیر صدق می‌کنند پیدا کنید.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{bmatrix}$$

۱۳۳- برای $x \in \mathbb{R}$ ماتریس $A(x)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$A(x) = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}x & \operatorname{sh}x \\ \operatorname{sh}x & \operatorname{ch}x \end{bmatrix}$$

الف- اگر $y \in \mathbb{R}$ باشد ماتریس $A(x) \cdot A(y)$ را حساب کنید.

ب- اگر $n \in \mathbb{Z}$ باشد $(A(x))^n$ را بدست آورید.

۱۳۴- ماتریسهای A و B به صورت زیر داده شده‌اند:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریسهای A^n و B^n را برای $n \in \mathbb{N}$ حساب کنید.

۱۳۵- فرض می‌کنیم \mathcal{M} مجموعه ماتریسهای حقیقی مربع مرتبه دوم باشد. همه

ماتریسهای A متعلق به \mathcal{M} را که در برابری $A^2 = A$ صدق می‌کنند، بدست آورید.

۱۳۶- ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ داده شده است. همه ماتریسهای حقیقی

X و Y را که در برابری‌های $AX = A$ و $YA = A$ صدق می‌کنند، بدست آورید.

۱۳۷- فرض می‌کنیم E مجموعه ماتریسهایی به صورت $M(a, b) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$

باشد که در آنها a و b متعلق به \mathbb{R} هستند.

الف- ثابت کنید که E یک زیرفضای برداری از فضای برداری ماتریسهای مربع

مرتبه دوم \mathcal{M} با عنصرهای متعلق به \mathbb{R} روی \mathbb{R} ، می‌باشد و بعد E را معین

کنید. همچنین ثابت کنید که E یک زیر حلقه از \mathcal{M} است.

ب- فرض می‌کنیم φ گسترش \mathbf{C} در \mathbf{E} باشد به طوری که:

$$\varphi(a+ib) = M(a, b)$$

ثابت کنید که φ یک ایزومرفیسم فضای برداری و حلقه است. آیا \mathbf{E} دارای یک ساختمان هیأت می‌باشد؟

۱۳۸- فرض می‌کنیم a, b و c متعلق به \mathbf{C} و f آندومرفیسمی از \mathbf{C}^3 باشد

که نسبت به پایه کانونیک (e_1, e_2, e_3) دارای ماتریس زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$$

ماتریس f را نسبت به پایه $e'_1 = e_1 + e_2 + e_3$ ، $e'_2 = e_2$ و $e'_3 = e_3$ بدست آورید.

۱۳۹- دو ماتریس مربع مرتبه سوم A و B به صورت زیر داده شده است. ماتریس

مربع مرتبه سوم C را بدست آورید به طوری که داشته باشیم $CB = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{الف-}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & k \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ب-}$$

۱۴۰- رتبه ماتریس‌های زیر را در هیأت \mathbf{Q} پیدا کنید:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 7 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

۱۴۱- در هیأت $\mathbf{K} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ماتریس A به صورت زیر داده شده است:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

رتبه A را بدست آورید. همین مسأله را برای هیاتهای $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ و $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ حل کنید.

۱۴۲- فرض می‌کنیم E یک فضای برداری، f یک آندومرفیسم E و $N(f)$ هسته f باشد. ثابت کنید که:

$$f(E) \supseteq f^2(E) \supseteq f^3(E) \supseteq \dots \quad \text{و} \quad N(f) \subsetneq N(f^2) \subsetneq N(f^3) \subsetneq \dots$$

ب- f^2 گسترش صفر است اگر و تنها اگر داشته باشیم $f(E) \subsetneq N(f)$

۱۴۳- گسترش خطی \mathbb{R}^3 در \mathbb{R}^4 را که نسبت به پایه‌های کانونیک \mathbb{R}^3 و \mathbb{R}^4 دارای ماتریس:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -8 & -2 \end{bmatrix}$$

است با f نمایش می‌دهیم. بعد $f(\mathbb{R}^3)$ و بعد هسته f را پیدا کنید. یک پایه از هسته f را بدست آورید.

۱۴۴- فرض می‌کنیم p و q دو شمار حقیقی ثابت و E مجموعه ماتریسهای به صورت:

$$M(a, b) = \begin{bmatrix} a & b \\ -qb & a+pb \end{bmatrix}$$

باشد که در آن a و b دو شمار حقیقی دلخواه هستند. ثابت کنید که E یک حلقه جابجایی است. آیا E می‌تواند یک هیأت باشد؟

۱۴۵- فرض می‌کنیم E یک فضای برداری با بعد n و u یک آندومرفیسم E باشد. ثابت کنید که اگر هسته u و $u(E)$ بر یکدیگر منطبق باشند بعد E زوج است.

آیا چنین گسترشهایی وجود دارد؟ آیا این گسترشها می‌توانند دوسوی باشند؟

۱۴۶- ماتریس $A = [a_{ij}]$ از رسته (n, n) که در آن داریم:

$$a_{ij} = 1 \quad \text{اگر } j = i + 1 \quad \text{باشد} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$a_{ij} = 0 \quad \text{اگر } j \neq i + 1 \quad \text{باشد}$$

داده شده است. رتبه ماتریس A^k را بدست آورید ($k \in \mathbb{N}$).

۱۴۷- فضای برداری \mathbb{R}^4 و بردار دلخواه $u(x, y, z, t)$ از آن را در نظر

می‌گیریم. فرض می‌کنیم فرمهای خطی $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ و φ_4 روی \mathbb{R}^4 به صورت زیر داده شده باشند:

$$\varphi_1 : u \rightarrow \varphi_1(u) = x + y + z + t$$

$$\varphi_2 : u \rightarrow \varphi_2(u) = x - y - z + t$$

$$\varphi_3 : u \rightarrow \varphi_3(u) = -x - y + z + t$$

$$\varphi_4 : u \rightarrow \varphi_4(u) = -2x + y - 2z - 4t$$

ثابت کنید که $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ و φ_4 بستگی خطی دارند، و از آنجا نتیجه بگیرید که بخش A از \mathbb{R}^4 به طوری که:

$$A = \{u \mid \varphi_i(u) > 0, i = 1, 2, 3, 4\}$$

تهی است.

۱۴۸- ثابت کنید که بردارهای $\vec{a}(1, 2, 1)$ ، $\vec{b}(2, 3, 3)$ و $\vec{c}(3, 7, 1)$

تشکیل یک پایه از \mathbb{R}^3 را می‌دهند. همچنین در مورد بردارهای:

$$\vec{a}'(2, 1, 4) \quad , \quad \vec{b}'(0, 2, 3) \quad , \quad \vec{c}'(1, 1, -1)$$

ماتریس تعویض پایه $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ را به $(\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}')$ پیدا کنید.

۱۴۹- مطالب بالا را در \mathbb{R}^4 ، در مورد بردارهای زیر نیز ثابت کنید:

$$\vec{a}(1, 1, 1, 1) \quad , \quad \vec{b}(1, 2, 1, 1) \quad , \quad \vec{c}(1, 1, 2, 1) \quad , \quad \vec{d}(1, 3, 2, 3)$$

$$\vec{a}'(1, 0, 3, 3) \quad , \quad \vec{b}'(-2, -3, -0, -4) \quad , \quad \vec{c}'(2, 2, 0, 4);$$

$$\vec{d}'(-2, -3, -4, -4)$$

۱۵۰- وارون ماتریس زیر را حساب کنید :

$$\begin{bmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{bmatrix}$$

۱۵۱- اگر $\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ باشد ثابت کنید که وارون ماتریس :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)^2} \end{bmatrix}$$

از ماتریس M با تبدیل ω به ω^{-1} و تقسیم آن بر n بدست می‌آید.

۱۵۲- وارون ماتریس :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+i & -i \\ 0 & i & 1-2i \\ 1 & 1 & i \end{bmatrix}$$

را در حلقه \mathbb{C} حساب کنید.

۱۵۳- آیا سه فرم خطی $2x - y + 2z$ ، $2x - 5y + z$ و $x - 7y + z$ روی

\mathbb{R}^3 یک پایه از فضای دوآل فضای \mathbb{R}^3 را تشکیل می‌دهند؟

۱۵۴- ثابت کنید که فرمهای خطی $x + 2y + z$ ، $2x + 2y + 2z$ و

$2x + 7y + z$ تشکیل یک پایه فضای دوآل $(\mathbb{R}^3)^*$ را می‌دهند. پایه دوآل این پایه

را در \mathbb{R}^3 پیدا کنید.

۱۵۵- دترمینانهای زیر را حساب کنید :

$$D_n = \begin{vmatrix} ۲ & ۲ & ۰ & ۰ & \dots & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۲ & ۰ & \dots & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۲ & \dots & ۰ & ۰ \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \dots & ۱ & ۲ \end{vmatrix}, \quad D_n = \begin{vmatrix} ۱-n & ۱ & ۱ & \dots & ۱ \\ ۱ & ۱-n & ۱ & \dots & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱-n & \dots & ۱ \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ۱ & ۱ & ۱ & \dots & ۱-n \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} ۱ & n & n & \dots & n \\ n & ۲ & n & \dots & n \\ n & n & ۲ & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}, \quad D_{n+1} = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_۲ & \dots & a_{n-1} & ۱ \\ a_1 & x & a_۲ & \dots & a_{n-1} & ۱ \\ a_1 & a_۲ & x & \dots & a_{n-1} & ۱ \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_۲ & a_۳ & \dots & x & ۱ \\ a_1 & a_۲ & a_۳ & \dots & a_n & ۱ \end{vmatrix}$$

۱۵۶- برابری‌های زیر را ثابت کنید :

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \cos ۲\alpha & \cos ۲\beta & \cos ۲\gamma \end{vmatrix} = ۲(\cos \beta - \cos \alpha)(\cos \gamma - \cos \alpha)(\cos \gamma - \cos \beta)$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} p+q & q & \dots & q \\ q & p+q & \dots & q \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q & q & \dots & p+q \end{vmatrix} = (p+nq)p^{n-1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & (1+a_1) & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & (1+a_2) & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & (1+a_n) \end{vmatrix} = a_1 a_2 \dots a_n$$

۱۵۷- در فضای برداری اقلیدسی \mathbf{R}^3 چهار بردار $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ و \vec{v}_4 داده

شده‌اند. ثابت کنید که:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \vec{v}_1^T & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_4 \\ \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_2^T & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_4 \\ \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_2 & \vec{v}_3^T & \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_4 \\ \vec{v}_4 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_4 \cdot \vec{v}_2 & \vec{v}_4 \cdot \vec{v}_3 & \vec{v}_4^T \end{vmatrix} = 0$$

۱۵۸- برای‌های زیر را ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & C_1^1 & C_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & C_2^3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \dots & C_n^{n-1} \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

۱۵۹- معادله های زیر را حل و بحث کنید :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 + 7x_5 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 9x_4 + 7x_5 = \lambda \end{cases}$$

۱۶۰- دستگاه معادله های زیر را که در آن ضرایب و مجهولات متعلق به هیأت C

میباشند ، حل و بحث کنید :

$$\begin{cases} \lambda x_i + a_i x_{n+1} = b_i & , \quad (i=1, 2, 3, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^n a_i x_i + \lambda x_{n+1} = b_{n+1} \end{cases}$$

۱۶۱- دستگاه معادله های خطی زیر را حل و بحث کنید:

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases} , \quad \begin{cases} cy - bz = p \\ -cx + az = q \\ bx - ay = r \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + by + rz = 1 \\ ax + (rb - 1)y + rz = 1 \\ ax + by + (b + r)z = rb - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r(a+1)x + ry + az = a + 1 \\ (\epsilon a - 1)x + (a+1)y + (ra - 1)z = ra + r \\ (0a - \epsilon)x + (a+1)y + (ra - \epsilon)z = a - 1 \end{cases}$$

۱۶۲- صفحهٔ آفین E روی K داده شده است. نقاط a, b, c, d از E را که هیچ سه‌تای آنها هم خط نیستند در نظر می‌گیریم و خطی را که از نقاط x و y می‌گذرد با D_{xy} نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم خطوط D_{ab}, D_{cd}, D_{ce} در نقطه e و D_{bc}, D_{ad} در نقطه f به یکدیگر برخورد کنند. نشان دهید که گرانیگاههای سه دسته نقاط (a, c) و (b, d) و (e, f) هم خط می‌باشند. چنانچه خط‌های D_{ab} و D_{cd} هم راستا باشند چه وضعی پیش می‌آید؟

۱۶۳- فضای آفین E روی هیأت K را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم نقاط a, b, c از E هم خط نباشند. چنانچه گرانیگاههای $(a, b), (b, c), (c, a)$ را برتریب با a', b', c' نشان دهیم ثابت کنید که خطوط $D_{aa'}, D_{bb'}, D_{cc'}$ از گرانیگاههای سه نقطه a, b, c می‌گذرند.

این تمرین را برای n نقطه که نابستگی خطی دارند بررسی کنید.

۱۶۴- سه برهای (a, b, c) و (a', b', c') از فضای آفین E روی K داده شده‌اند به طوری که خط‌های aa', bb', cc' بزرگ O می‌گذرند. چنانچه e نقطه برخورد D_{ab} و $D_{a'b'}$ و f نقطه برخورد D_{bc} و $D_{b'c'}$ و g نقطه برخورد D_{ca} و $D_{c'a'}$ باشند، نشان دهید که سه نقطه e, f, g هم خط می‌باشند (قضیه دزارک).
۱۶۵- فضای آفین E روی هیأت K و گسترش آفین u فضای E در E را در نظر می‌گیریم.

الف- ثابت کنید برای اینکه u هر خط راست D را به یک خط راست هم راستا با D بدل کند بایا و بسنده است که گسترش خطی v وابسته به u یک همسانی $t \rightarrow \lambda t$ به نسبت λ مخالف با صفر باشد (چنانچه $\lambda = 1$ باشد u یک انتقال است).

ب- ثابت کنید که برای $\lambda \neq 1$ یک نقطه $a \in E$ وجود دارد به قسمی که داریم $u(a) = a$ و چنانچه a را مبدأ قرار دهیم گسترش u همسانی به مبدأ a و نسبت λ خواهد شد.

پ- چنانچه دو گسترش آفین u_1 و u_2 فضای E در E انتقال ویا همسانی باشد، نشان دهید که $u_1 \circ u_2$ یک همسانی ویا یک انتقال است.

هرگاه هر سه گسترش u_1 ، u_2 و $u_1 \circ u_2$ همسانی باشند. ثابت کنید که مرکزهای آنها هم خط می‌باشند. درحالتی که u_1 و u_2 همسانی و $u_1 \circ u_2$ یک انتقال باشد چه بستگی‌ای بین مرکزهای همسانی و بردار انتقال $u_1 \circ u_2$ وجود دارد.

۱۶۶- فرض می‌کنیم E مجموعه توابع حقیقی پیوسته در فاصله $[0, 1]$ باشد. مجموعه عنصرهای ϕ از E را که برای آنها داریم $\phi(0) = 1$ و $\phi(1) \leq 0$ با A نمایش می‌دهیم. ثابت کنید که A یک بخش کوژ از E است.

۱۶۷- گروه G که قانون ترکیب آن ضربی است داده شده است. چنانچه A یک بخش غیرتهی از G باشد بخش‌های $C(A)$ و $N(A)$ را به روش زیر معین می‌کنیم:

$$N(A) = \{x \mid Ax = xA\} \text{ و } C(A) = \{x \mid \forall a \in A, xa = ax\}$$

الف- ثابت کنید $N(A)$ یک زیرگروه از G و $C(A)$ یک زیرگروه ممتاز از $N(A)$ می‌باشد.

ب- چنانچه $A = G$ باشد $C(A)$ را مرکز گروه می‌نامیم ویا C نشان می‌دهیم. ثابت کنید که گروه خارج قسمت G/C با گروه اتومورفیسمهای درونی G ایزومرف است.

۱۶۸- گروه دلخواه G داده شده است.

الف- فرض می‌کنیم A و B دو زیرگروه ممتاز G باشند به قسمی که $A \subset B \subset G$. ثابت کنید که B/A یک زیرگروه ممتاز از G/A می‌باشد و از آن نتیجه بگیرید که گروه‌های G/B و $(G/A)/(B/A)$ ایزومرفند.

ب- چنانچه H و S دو زیرگروه دلخواه از G باشند قرار می‌دهیم:

$$HS = \{xy \mid x \in H, y \in S\}$$

۱- به کمک یک مثال نشان دهید که HS ممکن است یک زیرگروه از G نباشد.

۲ - چنانچه S ممتاز باشد نشان دهید که $HS=SH$ و ثابت کنید که در این حالت HS یک زیر گروه از G و H و S زیر گروههایی از HS می باشند، به علاوه $H \cap S$ یک زیر گروه ممتاز می باشد.

۳ - ثابت کنید که گروههای $H/H \cap S$ و HS/S ایزومرفند.

۱۶۹ - گروههای ضربی G و G' که عنصرهای بی اثر آنها به ترتیب e و e' است داده شده اند.

الف - نشان دهید که مجموعه $G \times G'$ با قانون $(a, b)(a', b') = (aa', bb')$ یک گروه است.

ب - فرض می کنیم H یک زیر گروه ممتاز G و H' یک زیر گروه ممتاز G' باشد. گسترش GG' در $G/H \times G'/H'$ را که با $(xH, x'H') \rightarrow (x, x')$ معین شده است g می نامیم. ثابت کنید که g یک همومرفیسم گروه و سورژکتیو است.

پ - نشان دهید که $H \times H'$ یک زیر گروه ممتاز از $G \times G'$ است و گروههای $G \times G'/H \times H'$ و $G/H \times G'/H'$ ایزومرف می باشند.

ت - اکنون فرض می کنیم f یک همومرفیسم سورژکتیو G روی G' باشد و قرار می دهیم $H_1 = f^{-1}(H')$. ثابت کنید که H_1 یک زیر گروه ممتاز از G می باشد و از آن نتیجه بگیرید که گروههای G/H_1 و G'/H' ایزومرفند.

۱۷۰ - مجموعه $G = \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ با قانون ترکیب:

$$(a, b)(a', b') = \left(aa', \frac{b'}{a} + a'b \right)$$

را در نظر می گیریم.

الف - ثابت کنید که با این قانون G یک گروه غیرجابجایی است که عنصر بی اثر آن $(1, 0)$ است، به علاوه گسترش $f((x, y)) = |x|$ یک همومرفیسم گروه G در گروه \mathbf{R}^* است و از آن نتیجه بگیرید که $G' = \{-1, +1\} \times \mathbf{R}$ یک زیر گروه ممتاز از G می باشد (قانون ترکیب گروه \mathbf{R}^* ضرب است).

ب - نشان دهید که گروههای G/G' و \mathbf{R}_+^* ایزومرفند.

(منظور از \mathbf{R}^* مجموعه $\mathbf{R} - \{0\}$ و \mathbf{R}_+^* مجموعهٔ عنصرهای بزرگتر از صفر \mathbf{R} است).

۱۷۱- فرض می‌کنیم E یک فضای برداری حقیقی دوبعدی و e یک بردار غیرصفر از E باشد. مجموعهٔ آندومرفیسم‌های E را که در ترمینان آنها برابر با e بوده و e یک بردار ویژهٔ آنها باشد با V نشان می‌دهیم.

الف - ثابت کنید که با قانون ترکیب آندومرفیسم‌ها، V یک گروه است.

ب - فرض می‌کنیم f یک عنصر از V و M ماتریس آن وابسته به پایهٔ (e, e') باشد (e' برداری است دلخواه که با e متناسب نیست) ماتریس M^n را حساب کنید. پ - ثابت کنید که گروه V با گروه $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ ایزومرف می‌باشد (قانون ترکیب

گروه $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ عبارت است از $((a, b) (a', b')) = (aa', \frac{b'}{a} + a'b)$).

۱۷۲- فرض می‌کنیم \mathcal{M}_n فضای برداری ماتریس‌های مربع حقیقی مرتبهٔ n باشد.

زیرمجموعهٔ \mathcal{E} از \mathcal{M}_n را به روش زیر تعریف می‌کنیم: هر عنصر $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ از \mathcal{M}_n به \mathcal{E} متعلق است هرگاه و تنها هرگاه داشته باشیم:

$$\sum_{j=1}^n a_{1j} = \sum_{j=1}^n a_{2j} = \dots = \sum_{j=1}^n a_{nj}$$

این مقدار مشترک را با $\lambda(A)$ نشان می‌دهیم.

الف - ثابت کنید که \mathcal{E} یک زیر فضای برداری \mathcal{M}_n است و نشان دهید که گسترش

$\lambda: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}$ یک همومرفیسم گروه \mathcal{E} در گروهٔ جمعی \mathbf{R} است.

ب - ثابت کنید که برای هر $A \in \mathcal{E}$ اسکالر $\lambda(A)$ یک مقدار ویژهٔ A است.

۱۷۳- فرض می‌کنیم E یک فضای برداری n بعدی روی هیأت \mathbf{K} و:

$$B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$$

یک پایهٔ E و u یک آندومرفیسم E باشد.

الف - برای هر $1 \leq i \leq n$ زیر فضای E پدید آمده به وسیلهٔ \vec{e}_i را S_i می‌نامیم.

ثابت کنید شرط بایاوبسندۀ برای آنکه ماتریس u نسبت به پایه B قطری باشد این است که برای هر $1 \leq i \leq n$ داشته باشیم $u(S_i) \subset S_i$.

ب- اگر λ یک مقدار ویژه u باشد، نشان دهید که برای هر شمار درست m اسکالر λ^m یک مقدار ویژه آندومرفیسم u^m می باشد و از آن نتیجه بگیرید که برای هر چندجمله ای $P(x)$ با ضرایب متعلق به \mathbf{K} اسکالر $P(\lambda)$ یک مقدار ویژه آندومرفیسم $v = P(u)$ است.

۱۷۴- مقادیر ویژه هریک از ماتریس های سختنظ زیر را حساب کنید و برای هر مقدار ویژه زیر فضای ویژه وابسته به آن را مشخص کنید :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{bmatrix}$$

۱۷۵- ثابت کنید که ماتریس های حقیقی و مربع A و A^t دارای مقادیر ویژه مشترکند. چنانچه x یک بردار ویژه ماتریس A وابسته به مقدار ویژه λ و y یک بردار ویژه A^t وابسته به مقدار ویژه μ باشد، ثابت کنید که اگر $\lambda \neq \mu$ باشد بردارهای x و y بریکدیگر عمودند.

۱۷۶- ماتریس P را طوری تعیین کنید که ماتریس $A' = P^{-1}AP$ که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

است حل کنید.

(در هر دو حالت A ماتریسی با عنصرهای متعلق به هیأت \mathbf{R} است).

۱۷۷- مسأله بالا را وقتی A یکی از ماتریس های زیر و با عنصرهای متعلق به هیأت داده شده است حل کنید :

$$\mathbf{K}=\mathbf{C}: \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 14 & 13 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2-i & 0 & i \\ 0 & 1+i & 0 \\ i & 0 & 2-i \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}=\mathbf{Q}: \quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}=\mathbf{R}: \quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}=\mathbf{Z}/\mathbf{Z}: \quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{-1} & \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$$

۱۷۸- ماتریس $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ مفروض است. یک ماتریس سه‌بری پیدا کنید که با ماتریس \mathbf{A} همانند باشد.

۱۷۹- مسأله بالا را در مورد ماتریس \mathbf{A} و ماتریس مختلط \mathbf{B} حل کنید.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 9 & -1 & 8 & -9 \\ 6 & -1 & 0 & -0 \\ -0 & 1 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} -1 & -1 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -0 & 3 \end{bmatrix}$$

۱۸۰- a یک شمار حقیقی مخالف با صفر و f یک آندومورفیسم \mathbb{R}^4 است به طوری که

ماتریس f نسبت به پایه کانونیک $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ به صورت زیر می باشد:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الف - آیا A قطری شدنی است.

ب - ماتریس f را نسبت به پایه $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ که به صورت زیر

معین شده است بنویسید:

$$e'_k = e_1 + e_2 + \dots + e_k \quad (k=1, 2, 3, 4)$$

۱۸۱- مقادیر ویژه و بردارهای ویژه هریک از ماتریس های مختلط زیر را حساب کنید،

و هریک از این ماتریس ها را ، در صورت امکان بیک ماتریس قطری و در غیر این صورت بیک ماتریس سه بری تحویل کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \sin \varphi & \sin 2\varphi \\ \sin \varphi & 0 & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \sin \varphi & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 \\ -12 & -7 & 0 & 0 \\ 20 & 11 & -6 & -12 \\ -12 & -6 & 6 & 11 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} r \cos(\theta + \varphi) & \cos 2\theta + i \sin 2\theta \\ \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi & -r i \sin(\theta + \varphi) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & m & m \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

۱۸۲- برای چه مقادیری از m میتوان ماتریس حقیقی

را قطری کرد.

۱۸۳- فرض می‌کنیم E یک فضای برداری با بعد n و K یک میدان و u یک

آندومرفیسم E باشد. مجموعه تمام λ های متعلق به K را که برای آنها $u - \lambda \text{id}_E$ وارون پذیر نیست طیف (اسپکتور) u و هر عنصر طیف را یک «مقدار ویژه» u می‌نامیم. اگر $K = \mathbb{C}$ و S طیف u باشد برای هر $\lambda \in \mathbb{C} - S$ قرار می‌دهیم:

$$v_\lambda = u - \lambda e, \quad t_\lambda = (v_\lambda)^{-1}$$

الف - ثابت کنید:

$$\forall \mu, \lambda \in \mathbb{C} - S, \quad t_\lambda - t_\mu = (\lambda - \mu)t_\lambda \circ t_\mu$$

ب - اکنون فرض می‌کنیم C' یک زیرمجموعه C و $\mathcal{F} = (f_\lambda)_{\lambda \in C'}$ یک خانواده از آندومرفیسم‌های E باشد به قسمی که:

$$\forall \lambda, \mu \in C', \quad f_\lambda - f_\mu = (\lambda - \mu)f_\lambda \circ f_\mu$$

به علاوه فرض می‌کنیم یکی از آندومرفیسم‌های \mathcal{F} وارون پذیر باشد. ثابت کنید که هر آندومرفیسم \mathcal{F} وارون پذیر است و یک آندومرفیسم u و تنها یکی می‌توان یافت

$$\forall \lambda \in C', \quad (f_\lambda)^{-1} = u - \lambda \text{id}_E$$

به طوری که:

۱۸۴- فرض می‌کنیم A یک ماتریس حقیقی وارون پذیر از رسته (n, n) باشد.

ثابت کنید که هر فرم درجه دوم q که ماتریس آن برابر با $B = A^t A$ باشد یک فرم مثبت و اصیل است.

۱۸۵- فرض می‌کنیم E یک فضای برداری حقیقی و Q مجموعه فرم‌های درجه دوم

روی E باشد. در روی Q بستگی دوتایی R را به روش زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Phi R \Psi \iff$$

یک اتومرفیسم E مانند u وجود دارد به قسمی که برای هر x متعلق به E داریم:

$$\Phi(u(x)) = \Psi(x)$$

الف - ثابت کنید R یک بستگی هم‌ارزی است.

ب - چنانچه ϕ و ψ فرم‌های دو خطی متقارن وابسته به Φ و Ψ باشد، ثابت

کنید:

$$\Phi R \Psi \implies \forall x, y \in E \quad \text{و} \quad \varphi(u(x), u(y)) = \psi(x, y)$$

۱۸۶- فرض می‌کنیم E یک فضای برداری حقیقی و گسترش $\Phi : E \rightarrow \mathbf{R}$

به قسمی باشد که برای هر جفت (x, y) از عنصرهای E شرایط زیر برقرار باشد :

$$\text{الف - } \Phi(x+y) + \Phi(x-y) = 2(\Phi(x) + \Phi(y))$$

ب - گسترش $t \rightarrow \Phi(tx+y)$ یک گسترش پیوسته است.

ثابت کنید Φ یک فرم درجه دوم روی E می‌باشد.

راهنمایی - ثابت کنید که گسترش $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbf{R}$ که با دستور

$$\varphi(x, y) = \Phi(x+y) - \Phi(x-y)$$

است و Φ فرم درجه دوم وابسته به آن است.

۱۸۷- ماتریس حقیقی $\Omega_n = [\omega_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$ را که در آن $\omega_{ij} = i + j - 1$

است در نظر می‌گیریم. ثابت کنید که هر فرم درجه دوم که ماتریس آن Ω_n باشد حاصل ضرب

دو فرم خطی است و این فرمها را معین کنید.

۱۸۸- فرض می‌کنیم A یک ماتریس از رسته $(n, 1)$ باشد. ثابت کنید هر فرم

درجه دوم که با ماتریس $\Omega = A + A^t$ تعریف شده باشد مربع یک فرم خطی است.

۱۸۹- ثابت کنید که اگر دو بردار x و y از یک فضای تقریباً هیلبرتی برهم عمود

و $z = x + y$ باشد داریم :

$$\|z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad (\text{قضیه فیثاغورث})$$

۱۹۰- فرض می‌کنیم E یک فضای برداری n بعدی روی هیأت \mathbf{K} و f یک فرم

دوخطی روی E و A ماتریس آن نسبت به یک پایه $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ باشد. چنانچه

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{برای هر بردار } x = (x_1, \dots, x_n) \text{ قرار دهیم}$$

X ثابت کنید :

$$\text{الف - } f(x, y) = \det ({}^t Y \cdot A \cdot X)$$

ب - اگر B ماتریس f نسبت به پایه‌ی دیگر $(e'_i)_{1 \leq i \leq n}$ و P ماتریس تعویض پایه‌ی (e_i) به (e'_i) باشد ثابت کنیم $B = {}^t P A P$.

۱۹۱- فرض می‌کنیم q یک فرم درجه‌ی دوم روی \mathbb{R}^n و $y \in \mathbb{R}^n$ باشد.

الف - ثابت کنید که اگر $q(y) \neq 0$ باشد مجموعه‌ی بردارهای عمود بر y یک زیر فضای برداری از \mathbb{R}^n با بعد $n-1$ است و چنانچه این زیرفضا را H و فضای پدید آمده به وسیله‌ی y را F بنامیم H و F در \mathbb{R}^n متمم یکدیگرند.
ب - اگر $q(y) = 0$ باشد:

یا y بر تمام برداری‌های فضای عمود است.

یا بردارهای عمود بر y یک زیر فضای برداری $n-1$ بعدی است که شامل y

است .

۱۹۲- فرض می‌کنیم E مجموعه‌ی تمام دنباله‌های (x_n) با جمله‌ی عمومی $x_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty$$

باشد به قسمی که

الف - ثابت کنید که E یک فضای برداری است.

ب - قرار می‌دهیم $((x_n) | (y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ ثابت کنید که با این ضرب داخلی

E یک فضای تقریباً هیلبرتی مجزاست.

پ - چنانچه قرار دهیم $f((x_n)) = (\xi_n)$ که در آن $\xi_n = \frac{x_n}{n}$ ، ثابت کنید f

یک گسترش هرمیتی است.

ت - قرار می‌دهیم $g((x_n)) = (\eta_n)$ که در آن $\eta_n = x_{n-1}$ ($n \geq 2$) و $\eta_1 = 0$

ثابت کنید g آندومرفیسمی است که نرم را پایدار نگه میدارد. آیا g همانی است؟

۱۹۳- فرض می‌کنیم E یک فضای تقریباً هیلبرتی و h یک آندومرفیسم هرمیتی E

باشد. برای هر $x \in E$ قرار می‌دهیم $\varphi(x, y) = (h(x) | y)$

الف - ثابت کنید که φ یک فرم هرمیتی است.

ب - چنانچه φ مثبت باشد ثابت کنید که هر مقدار ویژه h یک شمار حقیقی مثبت است .

۱۹۴ - فرض می‌کنیم برای دو آندومرفیسم f و g از فضای تقریباً هیلبرتی E

داشته باشیم : $g \circ f - f \circ g = \text{id}_E$ ، $f = g^*$ و قراری دهیم $g \circ f = h$. ثابت کنید .

الف - بعد E بی‌پایان است . ب - f انژکتیو است . پ - h یک گسترش هرمیتی است .

۱۹۵ - فضای تقریباً هیلبرتی E و $a \in E$ را در نظر می‌گیریم به‌قسمی که $\|a\| = 1$

و فرض می‌کنیم $k \in \mathbb{C}$ و $k \neq -1$ باشد و قراری دهیم $u(x) = k(x|a)a + x$. الف - ثابت کنید u یک اتومرفیسم است و وارون آنرا حساب کنید .

ب - ثابت کنید u هرمیتی است . برای چه مقدار k گسترش u یگانی است ؟
پ - مقادیر ویژه و بردارهای ویژه u را حساب کنید .

۱۹۶ - ثابت کنید که شرط بایا و بسنده برای آنکه حاصل ضرب دو ماتریس هرمیتی A و B

ماتریسی هرمیتی باشد این است که داشته باشیم $AB = BA$.

۱۹۷ - چنانچه f یک فرم هرمیتی اصیل روی E با بعد n پایان و M و N دو زیر

فضای برداری E باشند ثابت کنید :

$$(M+N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp \quad \text{و} \quad (M \cap N)^\perp = M^\perp + N^\perp$$

۱۹۸ - نشان دهید که اگر f یک فرم هرمیتی اصیل روی یک فضای E با بعد n پایان

و M یک زیرفضای E باشد شرط‌های زیر هم‌ارزند :

الف - $M \cap M^\perp = \{0\}$.

ب - تحدید f به M یک فرم اصیل است .

پ - فضای E جمع مستقیم M و M^\perp است .

ت - $E = M + M^\perp$.

۱۹۹- در روی \mathbb{R}^4 (نسبت به پایه کانونیک) فرم:

$$f(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - c x_4 y_4$$

را که در آن $c > 0$ است در نظر می گیریم.

الف - ثابت کنید f یک فرم دوخطی متقارن و اصیل است.

ب - مخروط ایزوترپ آنرا مشخص کنید.

پ - عنصرهای گروه متعامد f را معین کنید (چرخش های f را نیز معین کنید).

۲۰۰- در یک فضای برداری تقریباً هیلبرتی دلخواه E خانواده یکه ای متعامد

(e_1, \dots, e_n) را در نظر می گیریم و برای هر $x \in E$ قراری دهیم $\xi_k = (x | e_k)$ ،

$$\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \quad 1 \leq k \leq n \quad \text{ثابت کنید}$$

۲۰۱- ثابت کنید هر فرم هرمیتی غیرصفر روی یک فضای برداری دارای بردارهای

غیرایزوترپ است.

۲۰۲- ثابت کنید که اگر f یک فرم هرمیتی روی E و $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ یک

پایه یکه ای متعامد باشد برای هر $x \in E$ و $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$ داریم $\xi_i = f(x, e_i)$

۲۰۳- فرض می کنیم E یک فضای تقریباً هیلبرتی مجزا ، u یک آندومرفیسم

و u^* آدژوئن آن باشد و داشته باشیم $u \circ u^* = u^* \circ u$.

الف - ثابت کنید $\text{Ker } u = \text{Ker } u^*$ (منظور از $\text{Ker } u$ هسته آندومرفیسم u

است) .

ب - اگر λ یک مقدار ویژه u باشد ثابت کنید λ یک مقدار ویژه u^* است.

۲۰۴- فرض می کنیم $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ باشد. یک ماتریس

متعامد مانند P پیدا کنید به قسمی که $P^{-1}AP$ ماتریسی قطری و عناصرهای قطر آن مقادیر ویژه A باشند.

۲۰۵- مسأله بالا را در مورد هریک از ماتریسهای زیر حل کنید :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

حل چند مسأله نمونه

پیش از پایان این کتاب به حل چند مسأله به عنوان نمونه می پردازیم. در اینجا از تکرار صورت این مسأله ها که در قسمت تمرین ها داده شده است خودداری می کنیم و تنها به نوشتن شماره آنها اکتفا می نماییم.

حل ۱- فرض می کنیم $A \subset B$ در این صورت داریم :

$$x \notin B \Rightarrow x \notin A \quad \text{و یا} \quad x \in A \Rightarrow x \in B$$

$$x \notin A \Leftrightarrow x \in \complement_E B \quad \text{و} \quad x \notin B \Leftrightarrow x \in \complement_E B \quad \text{و چون}$$

$$\forall x, \quad x \in \complement_E B \Rightarrow x \in \complement_E A \quad \text{پس}$$

$$\complement_E B \subset \complement_E A \quad \text{یعنی}$$

حل ۴- الف - با توجه به فرض داریم :

$$f(A \cup \emptyset) = f(A) + f(\emptyset) = f(A) \Rightarrow f(A) = 0$$

ب - اگر A و B دو بخش دلخواه از $\mathcal{P}(E)$ باشند داریم :

$$A \cup B = A \cup (B \cap \complement_E A)$$

و چون A و $B \cap \complement_E A$ دو بخش جدا از هم هستند خواهیم داشت :

$$(۱) \quad f(A \cup B) = f(A) + f(B \cap \complement_E A)$$

به علاوه داریم $B = (A \cap B) \cup (B \cap \complement_E A)$ و دو بخش $A \cap B$ و $B \cap \complement_E A$ جدا از هم می باشند پس $f(B) = f(A \cap B) + f(B \cap \complement_E A)$ که با استفاده از آن برابری (۱) به صورت زیر درسی آید :

$$(۲) \quad f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$$

فرمول بالا برای سه بخش از E چنین نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
 f(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= f[(A_1 \cup A_2) \cup A_3] = f(A_1 \cup A_2) \\
 &\quad + f(A_3) - f[(A_1 \cup A_2) \cap A_3] \\
 &= f(A_1) + f(A_2) - f(A_1 \cap A_2) + f(A_3) \\
 &\quad - f[(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)] \\
 &= \sum_{i=1}^3 f(A_i) - f(A_1 \cap A_2) \\
 &\quad - [f(A_1 \cap A_3) + f(A_2 \cap A_3) - f(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)] \\
 &= \sum_{i=1}^3 f(A_i) - \sum_{\substack{r, i < j \\ i, j = 1}} f(A_i \cap A_j) + f(A_1 \cap A_2 \cap A_3)
 \end{aligned}$$

و برای چهار بخش :

$$\begin{aligned}
 f\left(\bigcup_{i=1}^{\xi} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{\xi} f(A_i) - \sum_{i < j} f(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} f(A_i \cap A_j \cap A_k) \\
 &\quad - f\left(\bigcap_{i=1}^{\xi} A_i\right), \quad (i, j, k = 1, \dots, \xi)
 \end{aligned}$$

حل ۶- چون همهٔ عناصرهای E فرد هستند پس $\frac{a+b}{2}$ یک شمار درست

است. بستگی R بازتابی است زیرا برای هر $a \in E$ داریم $\frac{a+a}{2} = a \in E$

پس aRa . بستگی R متقارن است زیرا $\frac{a+b}{2} = \frac{b+a}{2}$ پس :

$$aRb \iff bRa$$

اما بستگی R متعدی نیست، زیرا مثلاً داریم $2R3$ و $3R4$ و چون :

$$\frac{۲۲+۷}{۲}=۱۵ \notin E \quad \text{اما} \quad \frac{۳+۷}{۲}=۵ \in E \quad \text{و} \quad \frac{۳+۲۲}{۲}=۱۲ \in E$$

پس $۲۳R۷$ درست نیست. بنابراین $۲۳R۷ \not\Rightarrow (۲۳R۳ \text{ و } ۳R۷)$. یعنی R متعدی نیست.

حل ۸- اگر C یک دایره از مجموعه Γ باشد داریم CRC زیرا یک انعکاس وجود دارد که C را تغییر نمی‌دهد و آن عبارتست از انعکاس به قطب O و با توانی برابر با توان O نسبت به دایره C . پس بستگی R بازتابی است. بستگی R متقارن است، زیرا اگر انعکاس J دایره C را به دایره C' بدل کند J دایره C' را نیز به C بدل می‌کند. به علاوه اگر انعکاس J به قطب O و با توان p دایره C را به دایره C' بدل کند و انعکاس J' به قطب O و با توان p' دایره C' را به دایره C'' بدل نماید، دایره C'' همتای دایره C در یک همسانی به مرکز O و با نسبت $\frac{p'}{p}$ خواهد بود. بنابراین یک انعکاس به قطب O وجود دارد که C را به C'' بدل می‌کند. پس بستگی R متعدی است.

حل ۱۰- این مسأله را با استفاده از روش بازگشت حل می‌کنیم. فرض می‌کنیم $E = \emptyset$ باشد. در این صورت تنها بخش E همان $\{\emptyset\}$ است. یعنی شماره بخشهای E برابر است با $۲^0 = ۱$. اگر E یک مجموعه یک عنصری باشد، مجموعه بخشهای E عبارتست از $\{\emptyset, E\}$ یعنی شماره بخشهای E برابر است با $۲^1 = ۲$. اکنون فرض می‌کنیم شماره بخشهای یک مجموعه $(n-1)$ عنصری برابر با ۲^{n-1} باشد و ثابت می‌کنیم که شماره بخشهای یک مجموعه n عنصری برابر است با ۲^n . بدین منظور مجموعه n عنصری E را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم x عنصری از E باشد. مکمل $\{x\}$ را در E با F نمایش می‌دهیم. در این صورت داریم $F \cup \{x\} = E$ و $F \cap \{x\} = \emptyset$. چنانچه A بخش دلخواهی از F باشد، A و $A \cup \{x\}$ دو بخش از E خواهند بود. به علاوه اگر A و B دو بخش از F باشند به طوری که داشته باشیم $A \neq B$ خواهیم داشت $A \cup \{x\} \neq B \cup \{x\}$. از اینجا نتیجه می‌شود که شماره بخشهای E دو برابر

شماره بخشهای F است (برای بخش \emptyset از F دو بخش \emptyset و $\{x\}$ و $\emptyset \cup \{x\} = \{x\}$ از E را خواهیم داشت). اما F یک مجموعه $n-1$ عنصری است و بنابه فرض بازگشت شماره بخشهای F برابر است با 2^{n-1} پس شماره بخشهای مجموعه n عنصری E برابر است با $2^n = 2 \times 2^{n-1}$.

حل ۱۱- اگر E یک مجموعه n عنصری باشد، مجموعه حاصلضرب $E \times E$ دارای n^2 عنصر است. چون هر بستگی دوتایی روی E با دادن بخشی از $E \times E$ معین می‌شود پس شماره همه بستگی‌های دوتایی که می‌توان روی E تعریف کرد برابر است با شماره بخشهای مجموعه $E \times E$ یعنی $2^{(n^2)}$. اما برای بستگی دوتایی متقارن R روی E از دو جفت (x, y) و (y, x) کافی است تنها یکی در نظر گرفته شود. زیرا $xRy \iff yRx$ پس با توجه به اینکه مجموعه $E \times E$ دارای n عنصر به صورت (x, x) (عنصرهای قطری) و $\frac{1}{2}(n^2 - n)$ عنصر به صورت (x, y) ، $(x \neq y)$ است، نتیجه می‌شود که شماره جفت‌های معین‌کننده یک بستگی دوتایی متقارن روی E برابر است با $\frac{n(n+1)}{2}$ بنابراین شماره بستگی‌های دوتایی متقارنی که می‌توان روی E تعریف کرد برابر است با شماره بخشهای یک مجموعه $\frac{n(n+1)}{2}$ عنصری یعنی $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

حل ۱۲- برای هر $a \in E$ داریم $aR'a$ زیرا aRa برقرار است (چون R بازتابی است)، پس R' بازتابی است. اگر $aR'b$ در این صورت bRa و aRb پس $bR'a$ یعنی R' متقارن است. چنانچه $aR'b$ و $bR'c$ در این صورت $(bRa$ و $aRb)$ و $(cRb$ و $bRc)$ اما R متعدی است پس aRc \implies $(aRb$ و $bRc)$ و cRa \implies $(cRb$ و $bRa)$ و در نتیجه $aR'c$ یعنی R' متعدی است.

حل ۱۴- بستگی بین x و y از E را برای $d(x, y) < \lambda$ با $xR_\lambda y$ نمایش می‌دهیم. در این صورت داریم $xR_\lambda x$ زیرا $d(x, x) = 0 < \lambda$. همچنین:

$$xR_\lambda y \implies yR_\lambda x$$

زیرا $d(x, y) = d(y, x)$. به علاوه اگر $xR_\lambda y$ و $yR_\lambda z$ خواهیم داشت
 $d(x, y) < \lambda$ و $d(y, z) < \lambda$ پس $d(x, y) < \lambda$ و $d(y, z) < \lambda$ و از آنجا
 $d(x, z) < \lambda$ بنابراین $xR_\lambda z$ و در نتیجه بستگی R_λ یک بستگی هم‌ارزی
روی E است. اگر برای λ قرار دهیم $xR'_\lambda y$ ، به روش مشابه می‌توان
ثابت کرد که R'_λ نیز یک بستگی هم‌ارزی روی E است.
کلاس هم‌ارزی a برای R_λ عبارتست از مجموعه:

$$C_a = \{x, x \in E \mid xR_\lambda a\} = \{x, x \in E \mid d(a, x) < \lambda\}$$

یعنی C_a عبارتست از مجموعه x هایی از E که برای آنها داریم $d(a, x) < \lambda$.
مجموعه C_a را گوی باز به مرکز a و به شعاع λ می‌نامند. همچنین کلاس هم‌ارزی
 a برای R'_λ عبارتست از مجموعه x هایی از E که برای آنها $d(a, x) \leq \lambda$ باشد
این مجموعه را گوی بسته به مرکز a و به شعاع λ می‌گویند.

حل ۱۵- قرار می‌دهیم $\varphi(x, y) = (X, Y)$. اگر φ سورژکتیو باشد برای هر
 $(X, Y) \in \mathbf{R}^2$ باید دست کم یک عنصر $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ وجود داشته باشد به طوری که
 $\varphi(x, y) = (X, Y)$ یعنی دستگاه $x = X$ و $xy - y^2 = Y$ دست کم دارای یک
جواب (x, y) باشد. اما این دستگاه هم‌ارز با معادله درجه سوم $y^2 - Xy + Y = 0$
است که همیشه دست کم یک ریشه حقیقی دارد. پس φ سورژکتیو است. اما φ
انژکتیو نیست زیرا این معادله درجه سوم می‌تواند بیش از یک ریشه حقیقی داشته باشد
(کافی است که $0 \leq X^2 + 27Y^2 < 4$ باشد).

حل ۱۶- الف- اگر A بخش دلخواهی از E باشد $\varphi(A)$ بخشی است از F

زیرا $\varphi(A) = \{y, y \in F \mid \exists x \in A, \varphi(x) = y\}$ پس داریم:

$$\begin{aligned} y \in \varphi(A \cup B) &\implies (\exists x \in A \cup B : \varphi(x) = y) \\ &\implies (\exists x \in A \text{ یا } \exists x \in B : \varphi(x) = y) \\ &\implies [\varphi(x) \in \varphi(A) \text{ یا } \varphi(x) \in \varphi(B)] \\ &\implies \varphi(x) \in \varphi(A) \cup \varphi(B) \end{aligned}$$

بنابراین $\varphi(A \cup B) \subset \varphi(A) \cup \varphi(B)$
به وارون می‌توان نوشت :

$$\begin{aligned} y \in \varphi(A) \cup \varphi(B) &\Rightarrow [y \in \varphi(A) \text{ یا } y \in \varphi(B)] \\ &\Rightarrow [\exists x_1 \in A \mid y = \varphi(x_1) \text{ یا } \exists x_2 \in B \mid y = \varphi(x_2)] \\ &\Rightarrow [\exists x \in A \cup B \mid y = \varphi(x)] \\ &\Rightarrow \varphi(x) \in \varphi(A \cup B) \end{aligned}$$

پس $\varphi(A) \cup \varphi(B) \subset \varphi(A \cup B)$ و از آنجا $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$
ب- برای اثبات این قسمت داریم :

$$\begin{aligned} y \in \varphi(A \cap B) &\Rightarrow [\exists x, x \in A \text{ و } x \in B \mid \varphi(x) = y] \\ &\Rightarrow [\varphi(x) \in \varphi(A) \text{ و } \varphi(x) \in \varphi(B)] \\ &\Rightarrow \varphi(x) \in \varphi(A) \cap \varphi(B) \end{aligned}$$

یعنی $\varphi(A \cap B) \subset \varphi(A) \cap \varphi(B)$. وارون این مطلب درحالتی که φ یک گسترش دلخواه باشد برقرار نیست. مثلاً اگر در صفحه معمولی دو خط متقاطع δ و Δ را که با محور x ها هم‌راستا نیستند در نظر بگیریم و مجموعه نقاط روی δ را با A ، مجموعه نقاط روی Δ را با B و گسترش «تصویرستعامد روی محور x ها» را با φ نشان دهیم در این صورت داریم (محور x ها) $\varphi(A) = \varphi(B) =$ پس :

$$\varphi(A) \cap \varphi(B) = (\text{محور } x \text{ ها})$$

در صورتیکه $\varphi(A \cap B)$ تنها دارای یک عنصر است و آن تصویر نقطه برخورد δ و Δ

$$\varphi(A \cap B) \subsetneq \varphi(A) \cap \varphi(B) \text{ پس}$$

ب- اینک فرض می‌کنیم φ انژکتیو و y عنصری از $\varphi(A) \cap \varphi(B)$ باشد پس یک $x_1 \in A$ و یک $x_2 \in B$ وجود دارد به طوری که $\varphi(x_1) = y$ و $\varphi(x_2) = y$ پس $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ و از آنجا $x_1 = x_2 = x$. چون $x_1 \in A$ و $x_2 \in B$ پس

$x \in A \cap B$ و در نتیجه $y = \varphi(x) \in \varphi(A \cap B)$ پس بطور خلاصه اگر φ انژکتیو باشد داریم $\varphi(A \cap B) \supset \varphi(A) \cap \varphi(B)$ و با توجه به قسمت ب در این حالت داریم :

$$\varphi(A \cap B) = \varphi(A) \cap \varphi(B)$$

حل ۲۲- بستگی هم‌ارزی وابسته به f عبارتست از بستگی R روی $\mathcal{P}(E)$ که به صورت زیر معین می‌شود :

$$XRY \iff f(X) = A \cap X = A \cap Y = f(Y)$$

در این صورت کلاس هم‌ارزی یک عنصر X از $\mathcal{P}(E)$ ، که آن را با X' نمایش می‌دهیم، از همه بخشهای E که مقطع آنها با A همان $A \cap X$ است، تشکیل می‌گردد. آشکار است که داریم $f(\mathcal{P}(E)) = \mathcal{P}(A)$. گسترش h مجموعه $\mathcal{P}(E)/R$ در $\mathcal{P}(A)$ به طوری که $h(X') = f(X)$ باشد یک گسترش دوسویی است و تجزیه f به صورت $i \circ h \circ s$ در می‌آید که در آن s گسترش سورژکتیو کانونیک $\mathcal{P}(E)$ در $\mathcal{P}(E)/R$ و i گسترش انژکتیو کانونیک $\mathcal{P}(A)$ در $\mathcal{P}(E)$ است. همچنین بستگی هم‌ارزی وابسته به g عبارتست از بستگی S روی $\mathcal{P}(E)$ که به صورت زیر معین می‌شود :

$$XSY \iff g(X) = A \cup X = A \cup Y = g(Y)$$

در این صورت کلاس هم‌ارزی یک عنصر X از $\mathcal{P}(E)$ ، که آنرا با X'' نمایش می‌دهیم، از همه بخشهای E که اجتماع آنها با A همان $A \cup X$ است، تشکیل می‌شود. آشکار است که $g(\mathcal{P}(E))$ مجموعه بخشهایی از E است که شامل A می‌باشند. اگر s' گسترش سورژکتیو کانونیک $\mathcal{P}(E)$ روی $\mathcal{P}(E)/S$ و i' گسترش انژکتیو کانونیک $g(\mathcal{P}(E))$ در $\mathcal{P}(E)$ و h' گسترش $\mathcal{P}(E)/S$ در $g(\mathcal{P}(E))$ باشد به طوری که برای $X \in \mathcal{P}(E)$ داشته باشیم $h'(X'') = g(X)$ گسترش h' دوسویی است و تجزیه g به صورت $i' \circ h' \circ s'$ است.

اگر Z و Z' دو عنصر از $g(\mathcal{P}(E))$ باشند به طوری که داشته باشیم :

$$\varphi(Z) = Z - A = Z' - A = \varphi(Z')$$

$$(Z - A) \cup A = (Z' - A) \cup A \quad \text{خواهیم داشت}$$

و چون Z و Z' شامل A هستند پس $(Z - A) \cup A = Z$ و $(Z' - A) \cup A = Z'$ یعنی φ انژکتیو است. همچنین اگر Y عنصری از $\mathcal{P}(E - A)$ باشد داریم $Y \cup A \in g(\mathcal{P}(E))$ و $\varphi(Y \cup A) = Y$ یعنی φ سورژکتیو است. بنابراین φ دوسویی است. از اینجا نتیجه می شود که گسترش $\varphi \circ h'$ نیز یک گسترش دوسویی $\mathcal{P}(E)/S$ روی $\mathcal{P}(E - A)$ است.

حل ۲۶- فرض می کنیم E یک مجموعه n عنصری باشد. می دانیم که شماره بخشهای n عنصری E برابر است با C_{rn}^n . اکنون شماره این بخشها را به روش دیگر حساب می کنیم. بدین منظور یک زیر مجموعه n عنصری A از E در نظر می گیریم و فرض می کنیم X_1 یک بخش ثابت p عنصری از A باشد ($p \leq n$). در این صورت شماره بخشهای n عنصری X از E به طوری که $X \cap A = X_1$ برابر است با C_n^{n-p} . زیرا برای بدست آوردن X باید به p عنصر X_1 ، $n-p$ عنصر دیگر از $E - A$ را افزود. اما شماره بخشهای p عنصری مجموعه A برابر است با C_p^p (شماره روشهایی که می توان X_1 را در A انتخاب کرد). بنابراین شماره بخشهای n عنصری X از E به طوری که $X \cap A = X_1$ یک بخش p عنصری باشد، برابر است با $C_p^p \cdot C_n^{n-p}$. از اینجا نتیجه می شود که شماره بخشهای n عنصری مجموعه E عبارتست از:

$$\sum_{p=0}^n C_p^p \cdot C_n^{n-p}$$

$$\sum_{p=0}^n (C_p^p)^2 = C_{rn}^n \quad \text{پس } C_p^p = C_n^{n-p} \text{ می دانیم که}$$

حل ۲۷- به طور کلی اگر $p!$ بر 2^n بخش پذیر باشد $(Q(p/2)!) \cdot 2^{Q(p/2)}$ نیز بر 2^n بخش پذیر است $[Q(p/2)]$ عبارتست از خارج قسمت تقسیم p بر 2 . زیرا سازه های زوج $p!$ عبارتند از $1 \times 2, 2 \times 2, 2 \times 2, 2 \times 2, \dots, 2 \times Q(p/2)$

اکنون از این مطلب برای پیدا کردن بزرگترین شمار درست n به طوری که $1000!$ بر 2^n بخش پذیر باشد استفاده می‌کنیم. داریم:

$$Q\left(\frac{1000}{2}\right) = 500, \quad Q\left(\frac{500}{2}\right) = 250, \quad Q\left(\frac{250}{2}\right) = 125,$$

$$Q\left(\frac{125}{2}\right) = 62, \quad Q\left(\frac{62}{2}\right) = 31, \quad Q\left(\frac{31}{2}\right) = 15, \quad Q\left(\frac{15}{2}\right) = 7,$$

$$Q\left(\frac{7}{2}\right) = 3, \quad Q\left(\frac{3}{2}\right) = 1$$

پس اگر $1000!$ بر 2^n بخش پذیر باشد:

$$2^{500} \times 2^{250} \times 2^{125} \times 2^{62} \times 2^{31} \times 2^{15} \times 2^7 \times 2^3 \times 2^1 (1!)$$

نیز بر 2^n بخش پذیر است. بنابراین بزرگترین شمار درست n به طوری که $1000!$ بر 2^n بخش پذیر باشد عبارتست از:

$$x = 500 + 250 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 994$$

در نتیجه $1000!$ بر 2^{994} بخش پذیر است و بر 2^{995} بخش پذیر نیست.

برای پیدا کردن بزرگترین شمار درست n به طوری که $1000!$ بر 3^n بخش پذیر باشد به روش مشابه عمل می‌کنیم:

$$Q\left(\frac{1000}{3}\right) = 333, \quad Q\left(\frac{333}{3}\right) = 111$$

$$Q\left(\frac{111}{3}\right) = 37, \quad Q\left(\frac{37}{3}\right) = 12$$

$$Q\left(\frac{12}{3}\right) = 4, \quad Q\left(\frac{4}{3}\right) = 1$$

پس اگر $1000!$ بر 3^n بخش پذیر باشد $(1!) \times 3^1 \times 3^4 \times 3^{12} \times 3^{27} \times 3^{111} \times 3^{222}$ نیز بر 3^n بخش پذیر است. بنابراین خواهیم داشت:

$$n = 222 + 111 + 27 + 12 + 4 + 1 = 498$$

حل ۲۹- الف - در برابری $(x * y)(u * v) = (xu) * (yv)$ قرار می دهیم

$(e' * e)(e * e') = (e'e) * (ee')$ خواهیم داشت $y = u = e$ و $x = v = e'$ اما e' عنصر بی اثر قانون $*$ است پس داریم $e' * e = e * e' = e$ و $e' * e' = e'$ و همچنین عنصر بی اثر قانون ضرب است پس $e'e = ee' = e'$ و $ee = e$ بنابراین برابری بالا به صورت $ee = e' * e'$ در می آید یعنی $e = e'$.

ب - برابری داده شده برای $y = u = e$ چنین نوشته می شود:

$$(x * e)(e * v) = (xe) * (ev)$$

و چون بنا بر قسمت الف e عنصر بی اثر هر دو قانون است پس $x * e = xe = x$ و $e * v = ev = v$ بنابراین برای هر عنصر $(x, v) \in X \times X$ داریم $xv = x * v$ یعنی قانون ضرب و قانون $*$ یکی هستند (پس $xy = x * y$).

پ - اکنون برابری داده شده را با استفاده از قسمت ب چنین می نویسیم:

$$(xy)(uv) = (xu)(yv)$$

و این برابری برای $x = v = e$ و عنصرهای دلخواه u و y از X به صورت $yu = uy$ در می آید. یعنی قانون ترکیب جابجایی است. برای اثبات انجمنی بودن قانون ترکیب، در $(xy)(uv) = (xu)(yv)$ قرار می دهیم $u = e$ در این صورت برای هر سه عنصر دلخواه x و y و v از X خواهیم داشت $(xy)v = x(yv)$.

حل ۳۰- الف - جابجایی بودن قانون \top آشکار است زیرا:

$$\frac{a^r + b^r}{a^r + b^r} = \frac{b^r + a^r}{b^r + a^r}$$

اما قانون \top انجمنی نیست زیرا $(a \top b) \top c \neq a \top (b \top c)$ همیشه برقرار نیست مثلاً
 برای $b=a=1$ و $c=0$ طرف اول برابر با $\frac{1}{0}$ و طرف دوم برابر با $\frac{427}{260}$ است
 قانون \top نسبت به ضرب معمولی \mathbf{R} پخشی نیست زیرا داریم :

$$a \top (bc) = \frac{a^r + b^r c^r}{a^r + b^r c^r}, \quad (a^r + b^r c^r \neq 0)$$

$$(a \top b)(a \top c) = \frac{a^r + b^r}{a^r + b^r} \cdot \frac{a^r + c^r}{a^r + c^r} \quad \text{و}$$

و مانند بالا به آسانی دیده می‌شود که $(a \top b)(a \top c)$ همیشه با $a \top (bc)$ برابر نیست.
 ضرب معمولی \mathbf{R} نسبت به قانون \top پخشی است یعنی داریم :

$$a(b \top c) = (ab) \top (ac)$$

$$a(b \top c) = a \frac{b^r + c^r}{b^r + c^r}, \quad (b^r + c^r \neq 0) \quad \text{زیرا :}$$

و:

$$(ab) \top (ac) = \frac{a^r b^r + a^r c^r}{a^r b^r + a^r c^r} = a \frac{b^r + c^r}{b^r + c^r}, \quad (a^r (b^r + c^r) \neq 0)$$

به علاوه برای $b=c=0$ داریم $a(0 \top 0) = a \cdot 0 = 0$ و $(a \cdot 0) \top (a \cdot 0) = 0 \top 0 = 0$ یعنی

$$0 \cdot (b \top c) = 0 = (0 \cdot b) \top (0 \cdot c) = 0 \top 0 = 0 \quad \text{داریم } a=0 \text{ و برای } a=0$$

ب- اگر قانون \top دارای عنصر بی‌اثر e باشد باید برای هر $a \in \mathbf{R}$ داشته

باشیم :

$$a \top e = \frac{a^r + e^r}{a^r + e^r} = a, \quad a^r + e^r \neq 0$$

و یا $a^r + e^r = a^r + a e^r$ یعنی $e^r = a e^r$ و از آنجا $e=0$.

اگر a نسبت به \top دارای وارون a' باشد باید داشته باشیم :

$$a \top a' = 0 = \frac{a^r + a'^r}{a^r + a'^r}$$

که از آن برای $a \neq 0$ نتیجه می‌شود $a' = -a$ و چنانچه $a = 0$ باشد خواهیم داشت $a' = 0$ پس هر عنصر از \mathbf{R} دارای وارون است. قانون \top یک قانون ترکیب گروه نیست زیرا \top انجمنی نیست.

حل ۳۱- جدول ترکیب مجموعه E به صورت زیر است :

a \ b	0	1	2	3	4
0	0	1	4	4	1
1	1	2	0	0	2
2	4	0	3	3	0
3	4	0	3	3	0
4	1	2	0	0	2

بنابراین قانون \top یک قانون ترکیب داخلی روی E است. به علاوه \top انجمنی و جابجایی است. قانون \top دارای عنصر بی اثر نیست.

حل ۳۲- گسترش $x \rightarrow \text{sh}x$ مجموعه \mathbf{R} در \mathbf{R} را با φ نمایش می‌دهیم.

گسترش φ دوسویی است و داریم :

$$\begin{aligned}\varphi(a) \top \varphi(b) &= \text{sha} \sqrt{1 + \text{sh}^2 b} + \text{shb} \sqrt{1 + \text{sh}^2 a} \\ &= \text{sh}a \text{ch}b + \text{ch}a \text{sh}b = \text{sh}(a + b)\end{aligned}$$

یعنی $\varphi(a) \top \varphi(b) = \varphi(a + b)$ پس φ یک ایزومرفیسم (\mathbf{R}, \top) روی $(\mathbf{R}, +)$ است بنابراین مجموعه (\mathbf{R}, \top) یک گروه جابجایی است (زیرا $(\mathbf{R}, +)$ یک گروه جابجایی است).

حل ۳۳- به آسانی ثابت می‌شود که قانون \cdot انجمنی و جابجایی است. اگر قانون

* دارای عنصر بی اثر e باشد باید برای هر $x \in \mathbf{R}$ داشته باشیم :

$$e(1-x) = 0 \quad \text{و یا} \quad x * e = x + e - ex = x$$

پس $e = 0$ و در اینصورت داریم $x * 0 = 0 * x = x$. یعنی 0 عنصر بی اثر * است .
چنانچه برای این قانون x' وارون x باشد باید داشته باشیم :

$$x * x' = x + x' - xx' = 0$$

اما این برابری برای $x = 1$ برقرار نیست و برای $x \neq 1$ داریم $x' = \frac{x}{1-x}$ پس همه
عنصرهای \mathbf{R} دارای وارون هستند به جز عنصر 1 بنابراین \mathbf{R} با قانون * تشکیل
گروه نمی دهد .

اما مجموعه $\mathbf{R}' = \mathbf{R} - \{1\}$ با قانون * تشکیل گروه می دهد . چون اولاً *
یک قانون ترکیب داخلی روی \mathbf{R}' است ، زیرا اگر $x \neq 1$ و $y \neq 1$ باشد داریم
 $(x-1)(y-1) \neq 0$ و یا $x+y-xy \neq 1$ یعنی $x * y \neq 1$ به علاوه $(\mathbf{R}', *)$
همه ویژگیهای $(\mathbf{R}, *)$ را دارد و همه عنصرهای آن وارون پذیرند بنابراین $(\mathbf{R}', *)$
یک گروه است و این گروه جابجایی نیز هست .

برای محاسبه $x^{(n)}$ از برابری $x * y = (1-x)(y-1) + 1$ استفاده می کنیم .

داریم :

$$x^{(2)} = x * x = (1-x)(x-1) + 1 = 1 - (1-x)^2$$

$$x^{(3)} = x^{(2)} * x = [1 - (1 - (1-x)^2)](x-1) + 1 = 1 - (1-x)^3$$

و به روش بازگشت خواهیم داشت $x^{(n)} = 1 - (1-x)^n$.

حل ۳۵ - الف - مجموعه E با قانون + تشکیل گروه نمی دهد . زیرا با قانون + ، که

عنصر بی اثر آن a است ، b دارای عنصر وارون نیست (یعنی عنصری مانند x از E وجود
ندارد به طوری که $b+x = x+b = a$ باشد) . مجموعه E با قانون ضرب \cdot نیز
تشکیل گروه نمی دهد . زیرا با این قانون ، که عنصر بی اثر آن b است ، a دارای عنصر
وارون نیست (یعنی عنصری مانند x از E وجود ندارد به طوری که $a \cdot x = x \cdot a = b$
باشد) .

ب- اگر (x, y) عنصر دلخواهی از E' باشد، هر عنصر φ از F با در دست داشتن $\varphi(x, y)$ از E کاملاً معین است. اما $\varphi(x, y)$ یکی از چهار عبارت زیر است:

$$(۱) \quad \varphi(a, a), \varphi(a, b), \varphi(b, a), \varphi(b, b)$$

و چون هر یک از عبارتهای بالا تنها و تنها می‌تواند برابر با دو مقدار a یا b باشد پس F دارای $۲^۴ = ۱۶$ عنصر است (شماره گسترشهای یک مجموعه چهار عنصری در یک مجموعه ۲ عنصری).

به طوری که دیده شد هر عنصر φ از F به کمک چهار عبارت (۱) کاملاً معین می‌گردد و اگر داشته باشیم:

$$\varphi(x, y) = \alpha_0 \cdot f(x) \cdot f(y) + \alpha_1 \cdot f(x) \cdot y + \alpha_2 \cdot x \cdot f(y) + \alpha_3 \cdot x \cdot y$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \varphi(a, a) &= \alpha_0 \cdot b \cdot b + \alpha_1 \cdot b \cdot a + \alpha_2 \cdot a \cdot b + \alpha_3 \cdot a \cdot a \\ &= \alpha_0 \cdot b + \alpha_1 \cdot a + \alpha_2 \cdot a + \alpha_3 \cdot a = \alpha_0 \cdot b + a + a + a \\ &= \alpha_0 \cdot b = \alpha_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(a, b) &= \alpha_0 \cdot b \cdot a + \alpha_1 \cdot b \cdot b + \alpha_2 \cdot a \cdot a + \alpha_3 \cdot a \cdot b \\ &= \alpha_1 \cdot b = \alpha_1 \end{aligned}$$

همچنین:

$$\varphi(b, a) = \alpha_2, \quad \varphi(b, b) = \alpha_3$$

حل ۴۲- فرض می‌کنیم G یک گروه ضربی چهار عنصری باشد (برای آسانی قانون ترکیب گروه را ضرب گرفته‌ایم). اگر e عنصر بی‌اثر G و a_1, a_2, a_3 و a_4 عنصرهای دیگر آن باشند، می‌دانیم که رتبه هر یک از عنصرهای a_1, a_2, a_3 بخششایی از ۴ است و رتبه هیچ یک از این سه عنصر برابر با یک نیست (زیرا عنصر بی‌اثر یک گروه تنها دارای رتبه یک است). پس دو حالت پیش می‌آید.

الف- رتبه یکی از عنصرهای a_1, a_2, a_3 برابر با ۴ است: فرض می‌کنیم

مثلاً رتبه a_1 چهار باشد. در اینصورت a_1 گروه G را پدید می‌آورد (چنین گروهی را گروه دوری می‌گویند) و G با گروه جمعی $Z/4Z$ ایزومرف است.
 ب- رتبه سه عنصر a_1 ، a_2 و a_3 برابر با ۲ است: در اینصورت داریم:

$$a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = e$$

و برای G تنها و تنها جدول ترکیب زیر را خواهیم داشت:

	e	a_1	a_2	a_3
e	e	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	e	a_3	a_2
a_2	a_2	a_3	e	a_1
a_3	a_3	a_2	a_1	e

زیرا ترکیب a_i و a_j برای $i \neq j$ ، عنصر a_k است به طوری که $k \neq i$ و $k \neq j$ باشد. جدول بالا یک قانون ترکیب انجمنی و جابجایی روی G معین می‌کند. وانگهی اگر عنصرهای گروه جمعی $H = Z/2Z$ را با $\bar{0}$ و $\bar{1}$ نمایش دهیم با قرارداد:

$$\begin{aligned} \varphi(e) &= (\bar{0}, \bar{0}), \quad \varphi(a_1) = (\bar{0}, \bar{1}), \quad \varphi(a_2) = (\bar{1}, \bar{0}), \\ \varphi(a_3) &= (\bar{1}, \bar{1}) \end{aligned}$$

یک گسترش دوسویی φ گروه G روی مجموعه حاصلضرب $H \times H$ خواهیم داشت. به علاوه φ یک همومرفیسم G روی گروه جمعی $H \times H$ نیز هست (مثلاً داریم

$$\varphi(a_1 a_2) = \varphi(a_3) = (\bar{1}, \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{1}) + (\bar{1}, \bar{0}) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2)$$

پس φ یک ایزومرفیسم G روی $H \times H$ است. بنابراین همه گروه‌های مرتبه ۴ جابجایی می‌باشند. این گروه‌ها:

- یا دوری مرتبه ۴ هستند و در نتیجه با گروه جمعی $Z/4Z$ ایزومرفند.
 - یا با گروه جمعی $(Z/2Z) \times (Z/2Z)$ که گروه کلین نامیده می‌شود، ایزومرف می‌باشند.

حل ۴۳- آشکار است که باید $n \geq 2$ باشد و گرنه خواهیم داشت:

$$H_1 = H_2 = \{e\}$$

و چون داریم $H_1 \cap H_2 = \{e\}$ پس مجموعه $H_1 \cup H_2$ دارای $2n-1$ عنصر است.
 بنابراین $G = H_1 \cup H_2 \cup \{a_3\}$ که در آن $a_3 \in G$ و $a_3 \in H_1$ و $a_3 \in H_2$ و $a_3 \in H_1$ به علاوه اگر a_3^{-1} وارون a_3 باشد داریم $a_3^{-1} \in H_1 \cup H_2$. زیرا چنانچه:

$$a_3^{-1} \in H_1 \cup H_2$$

باشد باید داشته باشیم $a_3 \in H_1 \cup H_2$ که چنین نیست. پس $a_3^{-1} = a_3$.

اکنون فرض می‌کنیم $n > 2$ پس $H_1 \cup H_2$ دست کم دارای سه عنصر مانند a_1, a_1', a_2 و a_2 است به قسمی که $a_1 \neq e, a_1' \neq e, a_1' \neq a_1, a_1' \neq a_2$ و در این صورت اگر عنصرهای a_1 و a_1' متعلق به H_1 و عنصر a_2 متعلق به H_2 باشند خواهیم داشت $a_1 a_2 = a_3$. زیرا اگر $a_1 a_2 \in H_1$ باشد باید $a_2 \in H_1$ و چنانچه $a_1 a_2 \in H_1$ باشد باید $a_1 \in H_2$ باشد که چنین نیست. به همین ترتیب ثابت می‌شود که $a_1' a_2 = a_3$ و در نتیجه $a_1 a_2 = a_1' a_2$ و از آنجا $a_1 = a_1'$ که مخالف با فرض است پس داریم $n=2$ یعنی مرتبه گروه G چهار است.

اگر قرار دهیم $H_1 = \{e, a_1\}$ و $H_2 = \{e, a_2\}$ خواهیم داشت:

$$G = \{e, a_1, a_2, a_3\}, \quad a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = e$$

و به طوری که در حل مسأله ۴۲ دیده شد، در این شرایط G یک گروه جابجایی است که با گروه جمعی $(Z/2Z) \times (Z/2Z)$ ایزومرف می‌باشد. جدول ترکیب این گروه همان است که در حل مسأله پیش دیده شد. از اینجا نتیجه می‌شود که زیرگروه‌های G عبارتند از H_1, H_2 و $H_3 = \{e, a_3\}$.

حل ۴۴- چون a, b و ab دارای رتبه ۲ هستند داریم $a^2 = b^2 = (ab)^2 = e$

(e عنصر بی اثر گروه است). پس $a = a^{-1}$ ، $b = b^{-1}$ و $ab = (ab)^{-1}$ و در نتیجه $ab = b^{-1}a^{-1} = ba$ یعنی a و b گردش پذیرند. آشکار است که زیر گروه پدید آمده بوسیله a از G برزیر گروه پدید آمده بوسیله a^{-1} منطبق است. بنابراین رتبه a و a^{-1} یکی است.

حل ۴۵- فرض می کنیم e عنصر بی اثر G و e' عنصر بی اثر G' باشد. در این صورت داریم $f(e) = g(e) = e'$ پس $e \in H$.

به طور کلی اگر A بخشی از یک گروه G باشد، برای اینکه A یک زیر گروه از G تشکیل دهد باید و بسنده است که برای هر دو عنصر دلخواه x و y از A عنصر xy^{-1} متعلق به A باشد. پس فرض می کنیم x و y متعلق به H باشند، داریم $f(x) = g(x)$ و $f(y) = g(y)$ و چون f و g همومرفیسم هستند داریم $f(y^{-1}) = (f(y))^{-1}$ و $f(y^{-1}) = (g(y))^{-1}$ (زیرا مثلاً برای f داریم $f(y^{-1}) = (f(y))^{-1} = (g(y))^{-1} = g(y^{-1})$) و از آنجا $f(xy^{-1}) = f(x)f(y^{-1}) = f(x)g(y^{-1}) = g(xy^{-1})$ و در نتیجه:

$$f(xy^{-1}) = f(x)f(y^{-1}) = g(x)g(y^{-1}) = g(xy^{-1})$$

بنابراین xy^{-1} متعلق است به H پس H یک زیر گروه از G است. اگر $x \in H$ باشد $h(x) \in H$ پس $f(h(x)) = g(h(x))$ یعنی $f \circ h = g \circ h$.

چنانچه x'' عنصر دلخواهی از G'' باشد چون داریم $f \circ h' = g \circ h'$ پس $h'(x'') \in H$ یعنی $f(h'(x'')) = g(h'(x''))$.

اکنون گسترش $\varphi : G'' \rightarrow H$ را چنین تعریف می کنیم:

$$\forall x'' \in G'' \quad , \quad \varphi(x'') = h'(x'')$$

در این صورت φ یک همومرفیسم است و به علاوه برای هر عنصر x'' از G'' داریم:

$$h(\varphi(x'')) = \varphi(x'') = h'(x'')$$

یعنی $h \circ \varphi = h'$. اگر φ' یک همومرفیسم دیگر در G'' باشد به طوری که $h \circ \varphi' = h'$ ، برای هر عنصر x'' از G'' خواهیم داشت:

$$h(\varphi'(x'')) = h(\varphi(x'')) = h'(x'')$$

و از آنجا با توجه به اینکه h انزکتیو است $\varphi'(x'') = \varphi(x'')$ یعنی $\varphi' = \varphi$.

حل ۶-۴- فرض می‌کنیم $s = \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$ عنصر دلخواهی از S باشد

$(\alpha \beta \gamma)$ تبدیلی از $(a b c)$ است. چون شماره تبدیلیهای یک مجموعه سه‌عنصری

برابر است با $۳! = ۶$ پس S دارای ۶ عنصر زیر است:

$$s_0 = I = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}, \quad s_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$$

$$s_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}, \quad s_4 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}, \quad s_5 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

اگر $s = \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$ و $s' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ دو عنصر دلخواه از S باشند

$(a' b' c')$ تبدیلی از $(a b c)$ است) ترکیب s و s' را به صورت زیر معین می‌کنیم:

$$s' \circ s = \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

و یا:

$$(s' \circ s)(a) = s'(s(a)) = s'(\alpha) = a', \quad (s' \circ s)(b) = s'(s(b)) = s'(\beta) = b',$$

$$(s' \circ s)(c) = s'(s(c)) = s'(\gamma) = c'$$

مثلاً برای بدست آوردن $s_3 \circ s_4$ چنین عمل می‌کنیم:

$$s_3 \circ s_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ & & \\ b & a & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ & & \\ b & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ & & \\ b & a & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a & c \\ & & \\ c & b & a \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a & b & c \\ & & \\ c & b & a \end{pmatrix} = s_0$$

اکنون اگر به روش بالا ترکیبهای $s_i \circ s_j$ را بدست آوریم جدول ترکیب زیر را برای S خواهیم داشت :

	I	s_1	s_2	s_3	s_4	s_0
I	I	s_1	s_2	s_3	s_4	s_0
s_1	s_1	I	s_4	s_0	s_2	s_3
s_2	s_2	s_3	I	s_1	s_0	s_4
s_3	s_3	s_2	s_0	s_4	I	s_1
s_4	s_4	s_0	s_1	I	s_3	s_2
s_0	s_0	s_4	s_3	s_2	s_1	I

از روی این جدول دیده می‌شود که I عنصر بی اثر است، عنصرهای s_3 و s_4 وارون یکدیگرند و وارون عنصرهای s_1 ، s_2 و s_0 خود این عنصرها هستند. پس S یک گروه است که جایابی نیست. به آسانی دیده می‌شود که زیرگروه‌های S عبارتند از $\{I\}$ ، $\{I, s_1\}$ ، $\{I, s_2\}$ ، $\{I, s_0\}$ و $\{I, s_3, s_4\}$.

حل ۴۷- با توجه به حل مسأله ۴۶ که در بالا دیده شد، چنین داریم :

$$s_1 \circ s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & & & & \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & & & & \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

به همین ترتیب :

$$S_r \circ S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$S_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$S_r^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$S_1^{-1} \circ S_r^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (S_r \circ S_1)^{-1}$$

حل ۴۸- جدول ضرب مجموعه $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ چنین است :

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

با استفاده از این جدول جواب معادله ها و دستگاه داده شده را پیدا می کنیم :

$$\bar{3}x + \bar{4} = \bar{0} \Rightarrow \bar{3}x = -\bar{4} = \bar{1} \Rightarrow x = \frac{\bar{1}}{\bar{3}} = \bar{2}$$

$$\bar{2}x + \bar{1} = \bar{0} \Rightarrow \bar{2}x = -\bar{1} = \bar{4} \Rightarrow x = \bar{2}$$

$$\bar{2}x + \bar{4}y = \bar{1} \Rightarrow x = \frac{\bar{1}}{\bar{2}} - \frac{\bar{4}}{\bar{2}}y = \bar{2} - \bar{2}y \quad \text{و} :$$

$$\bar{2}x + \bar{2}y = \bar{2} = \bar{2}(\bar{2} - \bar{2}y) + \bar{2}y = \bar{4} - \bar{2}y \quad \text{پس} :$$

$$\text{و یا } \bar{2}y = \bar{2} \quad \text{پس } y = \bar{4} \quad \text{و از آنجا } x = \bar{2} - \bar{2} = \bar{0}$$

داریم $f(\bar{0}) = \bar{1}$ ، $f(\bar{1}) = \bar{2}$ ، $f(\bar{2}) = \bar{2}$ ، $f(\bar{3}) = \bar{3}$ و $f(\bar{4}) = \bar{1}$ از اینجا نتیجه می شود که معادله $f(x) = \bar{0}$ در هیأت $Z/5Z$ جواب ندارد. به طور کلی اگر K یک هیأت باشد و ریشه های هر معادله جبری با ضرایب متعلق به K ، متعلق به K باشند گویند که هیأت K به طور جبری بسته است. پس با توجه به آنچه که دیده شد هیأت $Z/5Z$ به طور جبری بسته نیست.

حل ۵۱- الف - چون داریم $x^2 = x$ پس :

$$x^2 + x^2 + x^2 + x^2 = x + x \quad \text{و یا} \quad (x+x)^2 = x+x$$

که از آن نتیجه می شود $x+x=0$ (یعنی $x = -x$).

ب- همچنین داریم $(x+y)^2 = x+y$ و یا $x^2 + xy + yx + y^2 = x+y$

یعنی $x+y+xy+yx = x+y$ پس $x+y+yx = 0$ و یا $xy = -yx$

پ- برای بستگی $xRy \iff xy = x$ ویژگیهای زیر را داریم :

- xRx : زیرا برای هر عنصر x متعلق به A ، $x^2 = x$ پس R بازتابی است.

- از xRy و yRx نتیجه می شود $x=y$. زیرا در این صورت $xy = x$ و

$yx = y$ و با توجه به قسمت ب $x=y$. پس R نامتقارن است.

- از xRy و yRz نتیجه می‌شود xRz زیرا در این صورت $xy=x$ و $yz=y$

که از ضرب آنها خواهیم داشت $(xy)(yz)=xy=x$ و از طرف دیگر :

$$(xy)(yz)=xy^rz=xyz=(xy)z=xz$$

پس $xz=x$ یعنی xRz بنابراین R متعدی است. از اینجا نتیجه می‌شود که R یک بستگی ترتیبی است.

$$xy(x+y)=xyx+xy^r=(yx)x+xy \quad \text{ت - داریم}$$

$$=yx^r+xy=yx+xy=0$$

اکنون اگر عنصری مانند x متعلق به A وجود داشته باشد به طوری که $x \neq 0$ در این صورت $(x, y) \in A^r$ و برای هر y متعلق به A داریم $xy(x+y)=0$ پس یا $y=0$ و یا $x=y$ بنابراین $A=\{0, x\}$. و اگر عنصری مانند x متعلق به A وجود نداشته باشد به طوری که $x \neq 0$ در این صورت داریم $A=\{0\}$.

حل ۵۲- آشکار است که دو قانون ترکیب \oplus و $*$ داخلی و جابجایی هستند.

برای اثبات ویژگی انجمنی \oplus از برابریهای $\mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}A \cap \mathcal{C}B$ و $\mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}A \cup \mathcal{C}B$ و ویژگیهای پخشی اجتماع و مقطع نسبت به یکدیگر استفاده می‌کنیم، خواهیم داشت :

$$A \oplus (B \oplus C) := [A \cap \mathcal{C}(B \oplus C)] \cup [A \cap (B \oplus C)]$$

$$= \{A \cap \mathcal{C}[(B \cap \mathcal{C}C) \cup (\mathcal{C}B \cap C)]\} \cup \{A \cap [(B \cap \mathcal{C}C) \cup (\mathcal{C}B \cap C)]\}$$

$$= \{A \cap [\mathcal{C}(B \cap \mathcal{C}C) \cap \mathcal{C}(\mathcal{C}B \cap C)]\} \cup \{A \cap [B \cap \mathcal{C}C] \cup A \cap [\mathcal{C}B \cap C]\}$$

$$= \{A \cap [\mathcal{C}(B \cup C) \cap (B \cup \mathcal{C}C)]\} \cup D$$

$$= (A \cap [\mathcal{C}B \cap (B \cup \mathcal{C}C)] \cup [C \cap (B \cup \mathcal{C}C)]) \cup D$$

$$= (A \cap [\mathcal{C}(B \cap B) \cup (\mathcal{C}B \cap \mathcal{C}C)] \cup [(C \cap B) \cup (C \cap \mathcal{C}C)]) \cup D$$

$$= (A \cap [\emptyset \cup (\mathcal{C}B \cap \mathcal{C}C)] \cup [(C \cap B) \cup \emptyset]) \cup D$$

$$= \{A \cap [(\mathcal{C}B \cap \mathcal{C}C) \cup (C \cap B)]\} \cup D$$

$$= [(A \cap \mathcal{C}B \cap \mathcal{C}C) \cup (A \cap C \cap B)] \cup D$$

که در آنها قرار داده‌ایم $D = (CA \cap B \cap CC) \cup (CA \cap CB \cap C)$ برای محاسبه $(A \oplus B) \oplus C$ با توجه به اینکه \oplus جابجایی است و در نتیجه داریم:

$$(A \oplus B) \oplus C = C \oplus (A \oplus B)$$

کافی است عبارت $C \oplus (A \oplus B)$ را حساب کنیم. اما این عبارت از $A \oplus (B \oplus C)$ با تبدیل دوری روی A ، B و C بدست می‌آید. و چون طرف راست برابری:

$$A \oplus (B \oplus C) = (A \cap CB \cap CC) \cup (A \cap B \cap C) \cup (CA \cap B \cap CC) \cup (CA \cap CB \cap C)$$

که در بالا محاسبه شدن نسبت به A ، B و C متقارن است و با تبدیل دوری روی A ، B و C تغییر نمی‌کند پس خواهیم داشت:

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

اگر قانون \oplus دارای عنصر بی‌اثر X باشد برای هر بخش A از E باید داشته باشیم:

$$A \oplus X = (A \cap CX) \cup (CA \cap X) = A$$

اما برای $A = E$ برابری بالا چنین نوشته می‌شود:

$$E \oplus X = (E \cap CX) \cup (CE \cap X) = (CX) \cup \emptyset = CX = E$$

پس باید $X = \emptyset$ باشد و در این صورت برای هر بخش A داریم:

$$A \oplus \emptyset = (A \cap E) \cup (CA \cap \emptyset) = A \cup \emptyset = A$$

قرینه A نسبت به \oplus خود A است زیرا:

$$A \oplus A = (A \cap CA) \cup (CA \cap A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

بنابراین $\mathcal{P}(E)$ با قانون \oplus یک گروه جمعی جابجایی است.

ویژگی انجمنی قانون \oplus آشکار است. برای ویژگی پخشی \oplus نسبت به \oplus

داریم:

$$\begin{aligned} A * (B \oplus C) &= A \cap [(B \cap C) \cup (C \cap B)] \\ &= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap C \cap B) \end{aligned}$$

: 9

$$\begin{aligned} (A * B) \oplus (A * C) &= [(A \cap B) \cap (A \cap C)] \cup \{[(A \cap B)] \cap (A \cap C)\} \\ &= [(A \cap B) \cap (A \cup C)] \cup [(A \cup B) \cap (A \cap C)] \\ &= (A \cap B \cap A) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap A \cap C) \cup (B \cap A \cap C) \\ &= \emptyset \cup (A \cap B \cap C) \cup \emptyset \cup (B \cap A \cap C) \\ &= (A \cap B \cap C) \cup (B \cap A \cap C) \end{aligned}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که $A * (B \oplus C) = (A * B) \oplus (A * C)$ یعنی $*$ نسبت به \oplus پخش است. پس مجموعه (E) با دو قانون $*$ و \oplus یک حلقه جابجایی است و به علاوه این حلقه یک‌دار است، زیرا برای هر بخش دلخواه A از E داریم:

$$A * E = A \cap E = A$$

یعنی E عنصریکه قانون $*$ است. حلقه (E) انتگر نیست، زیرا اگر A و B دو بخش متمایز از مجموعه E باشند داریم $A * B = A \cap B = \emptyset$ (پس اگر مجموعه E بیش از یک عنصر داشته باشد حلقه (E) انتگر نیست، چون در این صورت همیشه دو بخش $A \neq \emptyset$ و $B \neq \emptyset$ وجود دارد به طوری که $A \cap B = \emptyset$ باشد). بنابراین (E) نمی‌تواند یک هیأت باشد چون (E) حلقه انتگر نیست.

از برابری $A \oplus A = \emptyset$ که در بالا بدست آوردیم نتیجه می‌شود که حلقه (E) دارای مفسر ۲ می‌باشد.

حل ۵۳- اگر $a \in A$ و $a \neq 0$ باشد، چون بنابه فرض معادله $ax = b$ دست کم دارای یک جواب است پس عنصری مانند e متعلق به A وجود دارد به طوری که $ae = a$. همچنین اگر c عنصری از A باشد چون بنابه فرض معادله $ya = b$ دست کم دارای یک جواب است پس عنصری مانند z متعلق به A وجود دارد به طوری که

$za = c$. بنابراین خواهیم داشت $ce = (za)e = z(ae) = za = c$. به همین ترتیب از برابری های $e'a = a$ و $au = c$ (این برابری ها بنابه فرض وجود دارند) که در آنجا عنصر دلخواهی از A است نتیجه می شود $e'c = e'(au) = (e'a)u = au = c$. اما از دو برابری $ce = c$ و $e'c = c$ خواهیم داشت $e'e = e$ و $e'e = e'$ پس $e = e'$ و از آنجا $ce = ec = c$ یعنی e عنصریکه حلقه A است و یا به عبارت دیگر A یکه دار است. به علاوه برای $a \neq 0$ دو عنصر a' و a'' متعلق به A وجود دارند به طوری که $aa' = e$ و $a''a = e$. در این صورت داریم :

$$a''aa' = a''(aa') = a''e = a'' \quad \text{و} \quad a''aa' = (a''a)a' = ea' = a'$$

پس $a' = a''$ یعنی هر عنصر $a \neq 0$ متعلق به A دارای وارون است. بدین ترتیب A یک هیأت است. و چون وارون a یکتاست، پس معادله $ax = b$ دارای جواب یکتای $x = a^{-1}b$ و معادله $ya = b$ دارای جواب یکتای $y = ba^{-1}$ می باشد (این مطلب از هیأت بودن A نیز نتیجه می شود).

حل ۵۴- قرار می دهیم $K = \{a + b\sqrt{n}\}$. برای هر دو عنصر $a + b\sqrt{n}$ و $a' + b'\sqrt{n}$ از K داریم :

$$a + b\sqrt{n} + a' + b'\sqrt{n} = [(a + a') + (b + b')\sqrt{n}] \in K$$

$$(a + b\sqrt{n})(a' + b'\sqrt{n}) = [aa' + nbb' + (ab' + a'b)\sqrt{n}] \in K$$

آشکار است که K با قانون جمع یک گروه جابجایی است که عنصر بی اثر آن 0 و قرینه عنصر $a + b\sqrt{n}$ عنصر $a - b\sqrt{n}$ است.

همان طوری که دیده شد قانون ضرب یک قانون ترکیب داخلی روی K است. به علاوه قانون ضرب انجمنی است و نسبت به جمع پهنشی است و عنصریکه آن 1 می باشد $(a = 1, b = 0)$. اگر وارون عنصر $a + b\sqrt{n}$ را $a' + b'\sqrt{n}$ بگیریم خواهیم داشت $(a + b\sqrt{n})(a' + b'\sqrt{n}) = 1$ و یا $aa' + nbb' + (ab' + a'b)\sqrt{n} = 1$ که از آن نتیجه می شود $aa' + nbb' = 1$ و $ab' + a'b = 0$. این دو معادله که

نسبت به a' و b' خطی هستند هنگامی دارای جواب یکتا می‌باشند که $a^2 - nb^2 \neq 0$. یعنی دستگاه کرامر باشد. اما شرط $n \neq \frac{a^2}{b^2}$ با فرض $b \neq 0$ برای n برقرار است زیرا n شمار درستی است که مربع هیچ شمار درستی نیست. در این صورت داریم:

$$a' = \frac{a}{a^2 - nb^2} \quad \text{و} \quad b' = \frac{-b}{a^2 - nb^2}$$

اگر $b=0$ باشد دو معادله $aa'=1$ و $ab'=0$ را برای تعیین a' و b' خواهیم داشت، که چون باید $a \neq 0$ باشد (زیرا 0 عنصر بی‌اثر قانون جمع K است) پس خواهیم داشت $b'=0$ و $a'=\frac{1}{a}$. بدین ترتیب هر عنصر از K که مخالف با 0 باشد وارون پذیر است. بنابراین K یک هیأت است. این هیأت جابجایی نیز می‌باشد.

حل ۵۶- بطور کلی یک قانون ترکیب داخلی روی یک مجموعه E عبارتست

از یک گسترش $E \times E$ در E . پس شماره قانونهای ترکیب داخلی روی مجموعه E عبارتست از شماره همه گسترش‌های مجموعه $E \times E$ در E . به علاوه بنا بر مسأله ۳۴ شماره گسترش‌های یک مجموعه n عنصری در یک مجموعه m عنصری برابر است با m^n . پس در این جا چون E سه عنصر دارد مجموعه $E \times E$ دارای نه عنصر است و بنابراین شماره قانونهای ترکیب داخلی روی E یعنی شماره عنصرهای H برابر است با 3^9 .

هریک از این قانون‌ها را می‌توان به کمک یک جدول سه سطری و سه ستونی نمایش داد و آشکار است که برای هر یک از آنها یکی از سه عنصر a ، b ، c عنصر بی‌اثر است. از میان همه قانونهایی مانند T که برای آنها a عنصر بی‌اثر است تنها یکی هست که برای آن (E, T) یک گروه آبدلی است. زیرا چون در یک گروه دستور ساده کردن از دو طرف برقرار است، در جدول گروه هر عنصر یک بار و تنها یک بار در هر سطر و در هر ستون نوشته می‌شود. بدین ترتیب برای E با عنصر بی‌اثر a تنها جدول ترکیب زیر را داریم:

	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

اکنون گسترش φ مجموعه (E, \top) را در گروه جمعی $\mathbb{Z}/\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\varphi: a \rightarrow \bar{0}, \quad b \rightarrow \bar{1}, \quad c \rightarrow \bar{2}$$

چون φ یک ایزومرفیسم است پس (E, \top) یک گروه جابجایی است.

اینکه فرض می‌کنیم b برای قانون \perp عنصر بی‌اثر باشد (عنصر بی‌اثر قانون \perp باید متمایز از عنصر بی‌اثر قانون \top باشد). در این صورت داریم:

$$\forall x, y \in E, \quad a \perp x = a, \quad b \perp y = y$$

و چون باید $E - \{a\}$ یک گروه ضربی باشد، تنها جدول ترکیب زیر بدست می‌آید:

	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

اثبات ویژگی پهنی و انجمنی ساده است و آنرا به عهده خواننده می‌گذاریم.

شماره هیأت‌هایی که E با دو قانون \top و \perp تشکیل می‌دهد برابر است با شماره روش‌هایی که می‌توان عنصر بی‌اثر قانون \top و عنصر یکه قانون \perp را انتخاب کرد، و چون عنصر بی‌اثر \top متمایز با عنصر یکه \perp است پس این شماره برابر است با ۶. یعنی شماره این هیأت‌ها ۶ تا است و همه آنها جایابی هستند و با $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ایزومرف می‌باشند.

حل ۵۷- آشکار است که قانون ترکیب $*$ روی $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ داخلی است اما جایابی نیست. برای اثبات ویژگی انجمنی $*$ عبارتهای:

$$((x, y) * (x', y')) * (x'', y'') \quad \text{و} \quad (x, y) * ((x', y') * (x'', y''))$$

را محاسبه می‌کنیم، که برای هر دو، با استفاده از جایابی بودن \mathbf{R} ، عبارت:

$$\left(xx'x'', \frac{y''}{xx'} + \frac{x''y'}{x} + x'x''y' \right)$$

بدست می‌آید.

عنصر بی‌اثر $*$ عبارت است از $(1, 0)$ زیرا برای هر عنصر (x, y) از $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$

داریم:

$$(1, 0) * (x, y) = (x, y) * (1, 0) = (x, y)$$

و اکنون عنصر دلخواه (x, y) از $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ عنصر $\left(\frac{1}{x}, -y\right)$ است زیرا:

$$(x, y) * \left(\frac{1}{x}, -y\right) = \left(\frac{1}{x}, -y\right) * (x, y) = (1, 0)$$

بدین ترتیب $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ با قانون $*$ یک گروه است.

فرض می‌کنیم f یک گسترش \mathbf{R}^* در \mathbf{R} و Γ نمودار این گسترش باشد. از

برابری:

$$(x, f(x)) * (x', f(x')) = \left(xx', \frac{1}{x} f(x') + x'f(x) \right)$$

نتیجه می‌شود که برای پایدار بودن بخش غیر تهی Γ از $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ ، نسبت به قانون $*$ ،

لازم است که برای هر x و x' متعلق به \mathbf{R}^* داشته باشیم:

$$(۱) \quad f(xx') = \frac{1}{x} f(x') + x'f(x)$$

اما داریم $f(xx') = f(x'x)$ پس خواهیم داشت :

$$\frac{1}{x} f(x') + x'f(x) = \frac{1}{x'} f(x) + x'f(x')$$

و یا :

$$\forall x, x' \in \mathbf{R}^* \quad ; \quad \left(x - \frac{1}{x}\right) f(x') = \left(x' - \frac{1}{x'}\right) f(x)$$

که اگر x' را ثابت و مخالف با ۱ و -۱ بگیریم نتیجه خواهد شد :

$$(۲) \quad \forall x \in \mathbf{R}^* \quad , \quad f(x) = k \left(x - \frac{1}{x}\right) \quad , \quad (k \text{ مقداری است ثابت})$$

به وارون برای هر عنصر ثابت k متعلق به \mathbf{R} گسترش f مجموعه \mathbf{R}^* در \mathbf{R} که با برابری (۲) تعریف شده است در (۱) صدق می کند و نمودار این گسترش یک بخش غیر تهی و پایدار Γ از گروه $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ ، نسبت به قانون * است. Γ یک زیرگروه از $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ است اگر و تنها اگر وارون هر عنصر $(x, f(x))$ از Γ (به وسیله قانون *) که به صورت $\left(\frac{1}{x}, -f(x)\right)$ است عنصری از Γ باشد. به عبارت دیگر اگر و تنها

اگر برای هر x متعلق به \mathbf{R}^* داشته باشیم $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ یعنی :

$$k\left(\frac{1}{x} - x\right) = -k\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

که همواره برقرار است.

از نظر هندسی زیرگروه های بدست آمده هذلولی هایی به مرکز O هستند که یکی از مجانبهای آنها محور y ها است و بردو نقطه $(1, 0)$ و $(-1, 0)$ می گذرند. البته به این هذلولی ها باید $Ox - \{0\}$ که نمودار تابع f برای مقدار $k=0$ است افزوده شود.

دو زیرگروه دیگر $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ عبارتند از $\{1\} \times \mathbf{R}$ و $\{-1, 1\} \times \mathbf{R}$.

حل ۵۸- فرض می‌کنیم $E = \{1, 2, 3, 4\}$ باشد در اینصورت :

$$H = \{e, a, b, c\}$$

که در آن داریم :

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

آشکاراست که برای هر عنصر s متعلق به H داریم $s^2 = e$ و $s^{-1} \in H$ و ترکیب هر دو عنصر از سه عنصر a, b, c متعلق به H ، عنصر دیگر H است. زیرا اگر مجموعه $\{i, j, k\}$ همان مجموعه $\{2, 3, 4\}$ باشد :

$$\begin{pmatrix} 1 & i & j & k \\ i & 1 & k & j \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & j & i & k \\ j & 1 & k & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k & i & j \\ k & 1 & j & i \end{pmatrix}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که H یک بخش غیرتهی از G است که نسبت به قانون ترکیب تبدیلیها پایدار است و بنابراین آنچه که گفته شد H یک زیرگروه از G است.

اکنون اگر s عنصر دلخواهی از H و σ عنصر دلخواهی از G باشد، قرار می‌دهیم $\sigma^* = \sigma^{-1} \circ s \circ \sigma$. در اینصورت اگر $s = e$ باشد خواهیم داشت $\sigma^* = e$ و در نتیجه $\sigma^* \in H$ و چنانچه $s \neq e$ باشد، با در نظر گرفتن مجموعه $\{i, j, k\}$ بالا، و فرض اینکه $\sigma(i)$ سایه $\sigma(1)$ به وسیله s باشد خواهیم داشت :

$$s[\sigma(1)] = \sigma(i), \quad s[\sigma(i)] = \sigma(1)$$

$$s[\sigma(j)] = \sigma(k), \quad s[\sigma(k)] = \sigma(j)$$

که اگر سایه عنصرهای بالا را به وسیله σ^{-1} در نظر بگیریم نتیجه می‌شود :

$$\sigma^*(1) = i, \quad \sigma^*(i) = 1, \quad \sigma^*(j) = k, \quad \sigma^*(k) = j$$

یعنی σ^* عنصری است از H . بنابراین H یک زیرگروه ممتاز G است.
حل ۵۹- باید دانست که اگر k یک عنصر وارون پذیر و k' عنصر دلخواهی از یک حلقه باشند سه دستگاه:

$$S : \begin{cases} A = \bar{0} \\ B = \bar{0} \end{cases}, \quad S' : \begin{cases} B + kA = \bar{0} \\ B = \bar{0} \end{cases}, \quad S'' : \begin{cases} B + kA = \bar{0} \\ B + k'(B + kA) = \bar{0} \end{cases}$$

جوابهای یکسان دارند. اکنون اگر S را همان دستگاه داده شده:

$$\begin{cases} \bar{0}x + \bar{2}y = a \\ \bar{2}x + \bar{4}y = b \end{cases}$$

بگیریم و قرار دهیم $k=1$ و $k'=\bar{4}$ دستگاه‌های S' و S'' به صورت زیر درمی‌آیند:

$$S' : \begin{cases} x = a + b \\ \bar{2}x + \bar{4}y = b \end{cases}, \quad S'' : \begin{cases} x = a + b & (1) \\ \bar{4}y = \bar{4}a + \bar{0}b & (2) \end{cases}$$

پس می‌توان به جای دستگاه داده شده دستگاه S'' را حل کرد. اما معادله (۲) دستگاه S'' را با توجه به اینکه $\bar{4}$ عنصر وارون پذیری از حلقه نیست، بلکه یک مقسوم علیه صفر است (زیرا $\bar{0} = \bar{4} \times \bar{3}$) می‌توان چنین نوشت $\bar{4}a + \bar{0}b = \bar{4}y = \bar{3} \times \bar{4}y$ که از آن نتیجه می‌شود $\bar{3}b = \bar{0}$. پس b باید برابر با $\bar{0}$ ، $\bar{2}$ یا $\bar{4}$ باشد. بنابراین:

- اگر b برابر با $\bar{1}$ ، $\bar{3}$ یا $\bar{0}$ باشد دستگاه S جواب ندارد.

- اگر $b = \bar{0}$ باشد معادله (۲) به صورت $\bar{0} = (y - a)$ درمی‌آید و جوابهای

آن $y = a + \bar{2}$ و $y = a$ است. پس S دارای دو جواب زیر است:

$$\begin{cases} x = a \\ y = a \end{cases}, \quad \begin{cases} x = a \\ y = a + \bar{2} \end{cases}$$

- چنانچه $b = \bar{2}$ باشد معادله (۲) به صورت $\bar{0} = (y - a - \bar{1})$ نوشته می‌شود و S

دارای دو جواب زیر است:

$$\begin{cases} x = a + \bar{r} \\ y = a + \bar{1} \end{cases}, \begin{cases} x = a + \bar{r} \\ y = a + \bar{\epsilon} \end{cases}$$

- اگر $\bar{\epsilon} = b$ باشد، معادله (r) به صورت $\bar{\epsilon}(y - a + \bar{1}) = \bar{0}$ درمی آید و برای S دو جواب زیر را داریم:

$$\begin{cases} x = a + \bar{\epsilon} \\ y = a + \bar{0} \end{cases}, \begin{cases} x = a + \bar{\epsilon} \\ y = a + \bar{r} \end{cases}$$

دستگاه دیگر این مساله به روش مشابه حل می شود.

حل $\bar{\epsilon} = \bar{1}$ - الف - می دانیم که $C_p^q = \frac{p(p-1)\cdots(p-q+1)}{q(q-1)\cdots 2 \times 1}$ و چون C_p^q یک شمار درست است پس $p(p-1)\cdots(p-q+1)$ بر $q(q-1)\cdots 2 \times 1$ بخش پذیر است. اما p با $q(q-1)\cdots 2 \times 1$ اول است، زیرا q مخالف باصفر و مخالف p است. پس $(p-1)\cdots(p-q+1)$ بر $q(q-1)\cdots 2 \times 1$ بخش پذیر است. بنابراین داریم $C_p^q = pm$ که در آن $m = \frac{(p-1)\cdots(p-q+1)}{q(q-1)\cdots 2 \times 1}$ و $m \in \mathbb{N}$ یعنی C_p^q بر p بخش پذیر است.

ب - برابری داده شده برای $k=1$ آشکار است. برای $k=2$ با استفاده از فرمول نیوتن داریم:

$$(a_1 + a_2)^p = a_1^p + \left(\sum_{q=1}^{p-1} C_p^q a_1^q a_2^{p-q} \right) + a_2^p$$

و چون p مشخص حلقه جابجایی A است، پس برای هر شمار درست q به طوری که $1 \leq q \leq p-1$ داریم $C_p^q a_1^q a_2^{p-q} = 0$ و از آنجا نتیجه می شود:

$$(a_1 + a_2)^p = a_1^p + a_2^p$$

اکنون فرض می کنیم که برابری داده شده برای $k-1$ درست باشد. در این صورت برابری:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^p = [(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}) + a_k]^p$$

برای دو عنصر $(a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1})$ و a_k چنین می‌نویسیم :

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^p = (a_1 + \dots + a_{k-1})^p + a_k^p$$

و چون بنا به فرض داریم $(a_1 + \dots + a_{k-1})^p = a_1^p + \dots + a_{k-1}^p$ پس خواهیم داشت

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^p = a_1^p + a_2^p + \dots + a_k^p$$

اینک حلقه $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ را در نظر می‌گیریم . برای $k \in \mathbb{N}$ داریم :

$$\bar{k} = \bar{1} + \bar{1} + \dots + \bar{1} = (\bar{1} \text{ جمله } k \text{ برابر با } \bar{1})$$

که با استفاده از اثبات قسمت (ب) بالا خواهیم داشت :

$$\bar{k}^p = (\bar{1} + \bar{1} + \dots + \bar{1})^p = \bar{1}^p + \bar{1}^p + \dots + \bar{1}^p = \bar{k}$$

$$k^p = k \pmod{p} \quad \text{و یا}$$

حل ۶۵ - چون درجه P_1 از درجه P_2 بزرگتر است ابتدا P_1 را بر P_2 تقسیم می‌کنیم

(از نوشتن عملیات تقسیم خودداری می‌شود) و بخش‌یاب و مانده تقسیم را که به ترتیب

عبارتند از $x-6$ و $P_3 = 19x^2 + 51x + 32$ بدست می‌آوریم . یعنی

$$P_1 = (x-6)P_2 + P_3$$

اکنون P_2 را بر P_3 تقسیم می‌کنیم ، خواهیم داشت :

$$P_2 = \left(\frac{x}{19} + \frac{44}{192} \right) P_3 + \frac{297}{361} (x^2 + x + 1)$$

از تقسیم P_3 بر مانده تقسیم بالا یعنی $x^2 + x + 1$ (از نوشتن ضریب آن چشم‌پوشی می‌کنیم) نتیجه می‌شود .

$$P_3 = (19x + 32) (x^2 + x + 1)$$

به‌طوریکه دیده می‌شود مانده تقسیم بالا برابر با صفر است . بنابراین بزرگترین بخش‌یاب

مشترك P_1 و P_2 عبارت است از $x^2 + x + 1$ و داریم :

$$P_1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - 2x^2 + 2)$$

$$P_2 = (x^2 + x + 1)(x^2 + 4x + 5)$$

در نتیجه برای کوچکترین مضرب مشترك P_1 و P_2 عبارت زیر بدست می‌آید:

$$(x^2 + x + 1)(x^2 + 4x + 5)(x^2 - 2x^2 + 2)$$

حل ۶۶ - معادله درجه n :

$$c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n = 0, \quad c_k \in \mathbb{Z}$$

را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم a یکی از ریشه‌های این معادله باشد، یعنی داشته باشیم:

$$c_0 a^n + c_1 a^{n-1} + \dots + c_n = 0$$

پس خواهیم داشت:

$$a^n = -\frac{c_1}{c_0} a^{n-1} - \dots - \frac{c_n}{c_0} = a_{n-1} a^{n-1} + \dots + a_0$$

که در آن $a_k = -\frac{c_k}{c_0} \in \mathbb{Q}$ است. پس برای حل مسأله کافی است توانهای پی‌درپی

a را تشکیل داده در معادله بالا ببریم و کوچکترین مقدار n را که برای آن a^n یک ترکیب

خطی از n ها با ضرایب گویا باشد ($0 \leq j < n$) پیدا کنیم. اما داریم:

$$a^2 = 4 + 4\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2, \quad a^3 = 17 + 12\sqrt{3} + 6(\sqrt{3})^2$$

بطوری که دیده می‌شود a^2 ترکیب خطی a و 1 با ضرایب های گویا نیست اما a^3 را

می‌توان بصورت زیر که ترکیبی خطی از a^2 و a و 1 با ضرایب های گویا می‌باشد نوشت:

$$a^3 = a_0 + a_1(2 + \sqrt{3}) + a_2(2 + \sqrt{3})^2$$

که در آن $a_0 = 17$ و $a_1 = -12$ و $a_2 = 6$ است. پس خواهیم داشت $n=3$

و a ریشه معادله $x^3 - 6x^2 + 12x - 17 = 0$ می‌باشد.

حل ۶۷ - چند جمله‌ای $P(x)$ دارای ضریب‌های حقیقی است و ریشه‌های $x^2 + x + 1$ شماره‌های مختلط مزدوج j و j^2 می‌باشند (j ریشه سوم شمار ۱ است). پس برای اینکه $P(x)$ بر $x^2 + x + 1$ بخش پذیر باشد، یعنی داشته باشیم:

$$P(x) = (x^2 + x + 1)q(x) \quad , \quad q(x) \in \mathbb{R}[x]$$

با یا و بسنده است که $P(j) = 0$ باشد. اما داریم:

$$P(j) = (j+1)^n - j^n - 1 = (-j^2)^n - j^n - 1$$

اکنون اگر قرار دهیم $n = m + r$ خواهیم داشت:

$$(-j^2)^n - j^n - 1 = (-j^2)^m (-j^2)^r - j^{m+r} - 1$$

به طوری که دیده می‌شود برای اینکه طرف راست برابری بالا به صورت $(-j^2)^m - j^m - 1$ درآید با یا و بسنده است که $j^r = 1$ و $(-j^2)^r = 1$ باشد و از آنجا کوچکترین مقدار درستی که برای r به دست می‌آید $r = 6$ است. بنابراین می‌توان n را شماره‌های درستی گرفت که با مقیاس ۶ برابرند. اگر:

$$n \equiv 0 \pmod{6} \quad , \quad P(j) = -1$$

$$n \equiv 1 \pmod{6} \quad , \quad P(j) = 0$$

$$n \equiv 2 \pmod{6} \quad , \quad P(j) = 2j$$

$$n \equiv 3 \pmod{6} \quad , \quad P(j) = -2$$

$$n \equiv 4 \pmod{6} \quad , \quad P(j) = 2j^2$$

$$n \equiv 5 \pmod{6} \quad , \quad P(j) = 0$$

پس جواب‌ها عبارتند از $n = 6k + 1$ و $n = 6k + 5$

حل ۶۸ - چون بخش‌یاب یعنی $x^2 - 1$ از درجه دوم است پس درجه مانده تقسیم

از یک بیشتر نیست. بنابراین می‌توان نوشت:

$$P(x) = (cha + x sha)^n = (x^r - 1)q(x) + \lambda x + \mu$$

و آزانجا خواهیم داشت:

$$P(1) = (cha + sha)^n = \lambda + \mu$$

$$P(-1) = (cha - sha)^n = -\lambda + \mu$$

که با استفاده از فرمولهای :

$$cha + sha = e^a, \quad cha - sha = e^{-a}$$

نتیجه می‌شود :

$$\lambda = \frac{e^{na} - e^{-na}}{2} = shna \quad \text{و} \quad \mu = \frac{e^{na} + e^{-na}}{2} = chna$$

و آزانجا :

$$\lambda x + \mu = x shna + chna$$

حل ۶۹ - بستگی‌های بین ضرایب و ریشه‌های معادله داده شده عبارتند از :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = p$$

$$x_1 x_2 x_3 = -q$$

اکنون برای محاسبه $(x_2 - x_3)^2$ چنین عمل می‌کنیم :

$$(x_2 - x_3)^2 = x_2^2 + x_3^2 - 2x_2 x_3$$

$$x_2^2 + x_3^2 + x_1^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) = -2p$$

$$x_2 x_3 = \frac{x_1 x_2 x_3}{x_1} = -\frac{q}{x_1}$$

پس خواهیم داشت :

$$(x_2 - x_3)^2 = -2p - x_1^2 + \frac{2q}{x_1} = \frac{-x_1^3 - 2px_1 + 2q}{x_1}$$

اما داریم $x_1^2 + px_1 + q = 0$ که از آن نتیجه می‌شود $-x_1^2 = px_1 + q$. پس :

$$(x_2 - x_3)^2 = \frac{-px_1 + 2q}{x_1}$$

به این ترتیب $(x_2 - x_3)^2$ نسبت به x_1 بدست می‌آید. چنانچه همین روش را در مورد $(x_3 - x_1)^2$ و $(x_1 - x_2)^2$ بکار ببریم خواهیم داشت:

$$\Delta = \frac{(-px_1 + 2q)(-px_2 + 2q)(-px_3 + 2q)}{x_1 x_2 x_3} =$$

$$-\frac{p^3}{q} \left(\frac{2q}{p} - x_1 \right) \left(\frac{2q}{p} - x_2 \right) \left(\frac{2q}{p} - x_3 \right)$$

وانگهی x_1 ، x_2 و x_3 ریشه‌های معادله $\varphi(x) = 0$ می‌باشند پس داریم :

$$\varphi(x) = x^3 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

که با استفاده از آن عبارت Δ به صورت زیر بدست می‌آید :

$$\Delta = -\frac{p^3}{q} \varphi\left(\frac{2q}{p}\right) = -\frac{p^3}{q} \left[\left(\frac{2q}{p}\right)^3 + p\left(\frac{2q}{p}\right) + q \right]$$

یا :

$$\Delta = -(4p^3 + 27q^2)$$

حل ۷۰ - هرچند جمله‌ای درجه اول از $\frac{\mathbb{Z}}{r\mathbb{Z}}[x]$ به صورت $ax + b$ نوشته

می‌شود که در آنجا داریم $a, b \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$. پس a و b می‌توانند مقادیر $1, 0, -1, \dots$ را

را اختیارکنند و در نتیجه ۹ چند جمله‌ای درجه اول در $\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}[x]$ وجود دارد.

اگر چند جمله‌ای u دارای یک بخش‌یاب درجه اول باشد این چند جمله‌ای یک

ریشه در $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ خواهد داشت و چون داریم :

$$u(\bar{0}) = -\bar{1} \quad , \quad u(\bar{1}) = -\bar{1} \quad , \quad u(-\bar{1}) = \bar{1}$$

چند جمله‌ای u در $\mathbf{Z}/\mathbf{2}\mathbf{Z}$ ریشه ندارد یعنی ساده نشدنی است .

حل ۷۱- فرض می‌کنیم $A(X, Y)$ بر $X - Y$ بخش پذیر باشد، به عبارت دیگر یک چند جمله‌ای Q از $K[X, Y]$ وجود داشته باشد به طوری که :

$$A(X, Y) = (X - Y) Q(X, Y)$$

پس چند جمله‌ای $Q(X, Y)$ در شرط زیر صدق می‌کند :

$$A(X, Y) = (X - Y) Q(X, Y) = (Y - X) Q(Y, X) = A(Y, X)$$

یا :

$$(X - Y) [Q(X, Y) + Q(Y, X)] = 0$$

اما حلقه $K[X, Y]$ یک حلقه انتگرال است و چند جمله‌ای $X - Y$ برابر با صفر نیست .
پس خواهیم داشت :

$$Q(X, Y) + Q(Y, X) = 0$$

که از آن نتیجه می‌شود :

$$Q(Y, Y) + Q(Y, Y) = 2Q(Y, Y) = 0 \implies Q(Y, Y) = 0$$

از مسادله بالا چنین برمی‌آید که $Q(X, Y)$ بر $X - Y$ بخش پذیر است .

از اینجا بخش پذیری $A(X, Y)$ بر $(X - Y)^2$ آشکار می‌گردد .

حل ۷۲- داریم :

$$P(t) = x(t - b)(t - c) + y(t - c)(t - a) + z(t - a)(t - b)$$

$$- (t - a)(t - b)(t - c)$$

به طوری که دیده می‌شود $P(t)$ از درجه سوم است و جمله‌ای از آن که بزرگترین درجه را

دارد $t^3 - 1$ می‌باشد. با توجه به فرض مسأله آشکار است که :

$$P(h) = P(k) = P(l) = 0$$

پس $P(t)$ دارای سه جواب متمایز h و k و l است و در نتیجه خواهیم داشت :

$$P(t) = -(t-h)(t-k)(t-l)$$

ب- برای تجزیه کسر گویای مورد نظر چنین می‌نویسیم :

$$\begin{aligned} \frac{P(t)}{(t-a)(t-b)(t-c)} &= \frac{x}{t-a} + \frac{y}{t-b} + \frac{z}{t-c} - 1 \\ &= -\frac{(t-h)(t-k)(t-l)}{(t-a)(t-b)(t-c)} \end{aligned}$$

پس در تجزیه بالا x و y و z به صورت ضرایب عنصرهای ساده و -1 به صورت بخش درست کسر درمی‌آیند. برای محاسبه x همانی :

$$\frac{x}{t-a} + \frac{y}{t-b} + \frac{z}{t-c} = 1 - \frac{(t-h)(t-k)(t-l)}{(t-a)(t-b)(t-c)}$$

را در $t-a$ ضرب می‌کنیم و سپس قرار می‌دهیم $t=a$ ، خواهیم داشت :

$$x = 1 - \frac{(a-h)(a-k)(a-l)}{(a-b)(a-c)}$$

به همین ترتیب مقادیر y و z را به دست می‌آوریم :

$$y = 1 - \frac{(b-h)(b-k)(b-l)}{(b-a)(b-c)}$$

$$z = 1 - \frac{(c-h)(c-k)(c-l)}{(c-a)(c-b)}$$

حل ۷۳ - چنانچه :

$$f(x) + b = \psi(x)Q_r(x) \quad \text{و} \quad f(x) + a = \varphi(x)Q_1(x)$$

باشد خواهیم داشت $\varphi Q_1 - \psi Q_r = a - b \neq 0$ و چون $a - b \neq 0$ است این معادله چنین نوشته می شود :

$$\varphi \cdot \frac{Q_1}{a-b} + \psi \cdot \frac{-Q_r}{a-b} = 1$$

و یا بصورت :

$$(1) \quad \varphi(x)\alpha(x) + \psi(x)\beta(x) = 1$$

بستگی (۱) همان اتحاد بزو برای دوچند جمله ای $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ است و در نتیجه $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ که در برابری (۱) صدق کنند وجود دارند. برای تعیین یکی از جوابهای $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ کسرگویای $\frac{1}{\varphi(x)\psi(x)}$ را به عنصرهای ساده تجزیه می کنیم، و چون φ و ψ دارای ریشه مشترک نیستند می توان عنصرهای ساده وابسته به هریک از چند جمله ای های φ و ψ را به طور جداگانه بدست آورد. پس می توان نوشت:

$$\frac{1}{\varphi(x)\psi(x)} = \frac{\beta_0(x)}{\varphi(x)} + \frac{\alpha_0(x)}{\psi(x)}$$

که در آن $\alpha_0(x)$ و $\beta_0(x)$ یکی از جوابهای $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ است و داریم :

$$\deg \beta_0 < \deg \varphi \quad \text{و} \quad \deg \alpha_0 < \deg \psi$$

پس $\alpha_0 \varphi + \beta_0 \psi = 1$ چنانچه α و β یک جواب دیگر (۱) باشد، در اینصورت

$$\alpha \varphi + \beta \psi = 1 \quad \text{و داریم}$$

$$(\alpha - \alpha_0)\varphi + (\beta - \beta_0)\psi = 0$$

برابری بالا نشان می دهد که $(\beta - \beta_0)\psi$ بر φ بخش پذیر است و چون φ و ψ نسبت به

یکدیگر اولند $\beta - \beta_0$ بر φ بخش پذیر می‌باشد. پس خواهیم داشت:

$$\beta - \beta_0 = \lambda(x)\varphi$$

$$(۲) \quad \begin{cases} \beta = \beta_0 + \lambda(x)\varphi(x) \\ \alpha = \alpha_0 - \lambda(x)\psi(x) \end{cases} \quad \text{و در نتیجه:}$$

به‌وارون چنانچه $\lambda(x)$ یک چند جمله‌ای دلخواه باشد، چند جمله‌ای‌های $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ که از فرمولهای (۲) نسبت به α_0 و β_0 بدست می‌آیند جوابهای (۱) می‌باشند. به این ترتیب برابریهای (۲) همه جوابهای (۱) را معین می‌کنند.

$$\text{اما داریم } \alpha(x) = \frac{Q_1(x)}{a-b} \quad \text{پس } Q_1(x) = (a-b) [\alpha_0(x) - \lambda(x)\psi(x)]$$

و در نتیجه همه جوابهای $f(x)$ به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} f(x) &= -a + \varphi(x)Q_1(x) \\ &= -a + (a-b)\varphi(x)[\alpha_0(x) - \lambda(x)\psi(x)] \\ &= -b + (b-a)\psi(x)[\beta_0(x) + \lambda(x)\varphi(x)] \end{aligned}$$

اکنون چنانچه روش بالا را در حالت $a=1$ ، $b=-1$ ، $\varphi(x)=x^2+1$ و $\psi(x)=x^2+1$ بکاربریم خواهیم داشت:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+1)} = \frac{\beta_0(x)}{x^2+1} + \frac{\alpha_0(x)}{x^2+1}$$

$$\beta_0(x) = Ax + B = \frac{1}{2}(x+1) \quad \text{از همانی بالا نتیجه می‌شود}$$

و:

$$\frac{\alpha_0(x)}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)(x^2+1)} - \frac{x+1}{2(x^2+1)} = \frac{-x^2-x+1}{2(x^2+1)}$$

پس برای چند جمله‌ای $f(x)$ خواهیم داشت:

$$f(x) = 1 - \nu(x^r + 1) \left[\frac{1}{\nu} (x+1) + \lambda(x)(x^r + 1) \right]$$

$$= 1 - (x^r + 1)(x+1) + \mu(x)(x^r + 1)(x^r + 1)$$

که در آن $\mu(x)$ یک چند جمله‌ای دلخواه است.

حل ۷۴ - هر ریشه چندگانه معادله $f(x) = 0$ در معادله $f'(x) = 0$ نیز صدق

می‌کند. اما داریم:

$$f'(x) = n(x+1)^{n-1} - nx^{n-1} = 0$$

و چون $x=0$ ریشه مورد نظر نیست معادله بالا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(1) \quad \left(\frac{x+1}{x} \right)^{n-1} = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{n-1} = 1$$

بنابراین $1 + \frac{1}{x}$ یکی از ریشه‌های $(n-1)$ ام‌شمار 1 (بجز خود 1) است یعنی:

$$1 + \frac{1}{x} = \cos \frac{\nu k \pi}{n-1} + i \sin \frac{\nu k \pi}{n-1}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n-2\}$$

و یا:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \cos \frac{\nu k \pi}{n-1} - 1 + i \sin \frac{\nu k \pi}{n-1} = \nu \sin \frac{k \pi}{n-1} \left(-\sin \frac{k \pi}{n-1} + i \cos \frac{k \pi}{n-1} \right) \\ &= \nu i \sin \frac{k \pi}{n-1} \left(\cos \frac{k \pi}{n-1} + i \sin \frac{k \pi}{n-1} \right) \end{aligned}$$

و از آنجا:

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{-i}{\nu \sin \frac{k \pi}{n-1}} \left(\cos \frac{k \pi}{n-1} - i \sin \frac{k \pi}{n-1} \right) \\ &= \frac{1}{\nu \sin \frac{k \pi}{n-1}} e^{-i \left(\frac{k \pi}{n-1} + \frac{\pi}{2} \right)} \end{aligned}$$

پس برای λ چنین خواهیم داشت :

$$\lambda_k = (x_k + 1)^n - (x_k)^n = (x_k + 1)^{n-1}(x_k + 1) - x_k^n$$

$$\lambda_k = (x_k)^{n-1}(x_k + 1) - x_k^n = (x_k)^{n-1} \quad \text{ویا با استفاده از (۱):}$$

و در نتیجه :

$$\lambda_k = \frac{1}{\left(2 \sin \frac{k\pi}{n-1}\right)^{n-1}} e^{-i \left[k\pi + (n-1) \frac{\pi}{2} \right]}$$

λ_k را میتوان به صورت زیر نیز نوشت :

$$\lambda_k = \frac{(-1)^{k+n-1} i^{n-1}}{\left(2 \sin \frac{k\pi}{n-1}\right)^{n-1}}$$

حل ۷۵ - اگر معادله $f(x) = 0$ دارای یک ریشه چهارگانه باشد، این ریشه باید

در معادله های :

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = 0$$

نیز صدق کند. پس چنین خواهیم داشت :

$$(1) \quad 6x^5 + 4mx^3 + 3x^2 + n = 0$$

$$(2) \quad 30x^4 + 12mx^2 + 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x^4 + 2mx^2 + 1x = 0$$

$$(3) \quad 10x^3 + 2mx + 0 = 0$$

معادله (۲) دارای ریشه صفر است، اما این ریشه در معادله (۳) صدق نمی‌کند پس ریشه مشترک نخواهد بود. بنابراین ریشه مشترک باید در معادله های زیر صدق کند :

$$5x^3 + 2mx + 1 = 0$$

$$10x^3 + 2mx + 0 = 0$$

از این دو معادله نتیجه می‌شود: $0 = 0 - x^2$

با توجه به اینکه $f(x) = 0$ نمی‌تواند دارای ریشه مختلط (غیر حقیقی) چهارگانه باشد (وگرنه باید مزدوج آن نیز ریشه $f(x) = 0$ باشد که در این صورت $f(x)$ از درجه ۸ خواهد بود) تنها ریشه $x = 1$ معادله بالا می‌تواند ریشه چهارگانه باشد. چنانچه $x = 1$ ریشه چهارگانه $f(x) = 0$ باشد خواهیم داشت:

$$1 + m + 10 + n + p = 0$$

$$6 + 4m + 20 + n = 0$$

$$0 + 2m + 10 = 0$$

و از آنجا: $m = -\frac{10}{2}$, $n = -6$, $p = \frac{0}{2}$

در این صورت چنین داریم: $f(x) = (x-1)^4 \left(x^2 + 4x + \frac{0}{2} \right)$

و دو ریشه دیگر معادله عبارتند از: $-2 \pm \sqrt{\frac{2}{2}}$

حل ۷۶ - چنانچه $P(x) + 1$ بر $(x-1)^2$ بخش پذیر باشد مشتق آن $P'(x)$

بر $(x-1)^2$ بخش پذیر است. همچنین از فرض دوم نتیجه می‌شود که $P'(x)$ بر $(x+1)^2$ بخش پذیر است. اما $(x-1)^2$ و $(x+1)^2$ نسبت به یکدیگر اولند پس $P'(x)$ بر حاصل ضرب آنها بخش پذیر خواهد بود. و چون $P'(x)$ از درجه چهارم است خواهیم داشت:

$$P'(x) = A(x+1)^2(x-1)^2 = A(x^2-1)^2$$

که در آن A یک اسکالر است. از اینجا برای $P(x)$ عبارت زیر بدست می‌آید:

$$P(x) = A \left(\frac{x^0}{0} - \frac{2x^2}{2} + x \right) + B$$

اکنون با توجه به اینکه $P(x) + 1$ بر $(x-1)^2$ و $P(x) - 1$ بر $(x+1)^2$ بخش پذیر است می‌توان A و B را حساب کرد :

$$P(1) + 1 = 0 \quad \text{و} \quad P(-1) - 1 = 0$$

$$P(1) + 1 = A \left(\frac{1}{0} - \frac{2}{2} + 1 \right) + B + 1 = 0 \quad \text{و یا}$$

$$P(-1) - 1 = A \left(-\frac{1}{0} + \frac{2}{2} - 1 \right) + B - 1 = 0$$

از دو معادله بالا نتیجه می‌شود :

$$A = -\frac{10}{8} \quad \text{و} \quad B = 0$$

و از آنجا :

$$P(x) = -\frac{10}{8} \left(\frac{x^2}{0} - \frac{2x^2}{2} + x \right)$$

حل ۷۷ - معادله $f(X) = 0$ دارای دو ریشه است و به آسانی می‌توان دید که ریشه $\alpha = 2 + i$ آن در معادله $g(X) = 0$ صدق میکند. با توجه به ریشه مشترک این دو معادله می‌توان نوشت :

$$f(X) = [X - (2+i)][X - (2-i)]$$

$$g(X) = [X - (2+i)](X-i)(X+1)$$

و از آنجا :

$$\frac{f(X)}{g(X)} = \frac{X - 2 + i}{(X - i)(X + 1)} = \frac{2i}{X - i} + \frac{1 - 2i}{X + 1}$$

حل ۷۸ - با توجه به فرض‌های مسأله می‌توان نوشت :

$$A = (X^2 + 1)U = (X^2 + 1)V + 1$$

$$(X^2 + 1)U - (X^2 + 1)V = 1 \quad \text{واز آنجا خواهیم داشت}$$

اما چند جمله‌ای‌های $X^2 + 1$ و $X^2 + 1$ نسبت یکدیگر اولند. پس برابری بالا همان اتحاد بزو است. بنابراین دو چند جمله‌ای U و V که دارای کمترین درجه باشند وجود دارد که برابری بالا را برقرار کنند. این چند جمله‌ای‌ها را می‌توان با استفاده از روش تعیین بزرگترین بخش‌یاب مشترک $X^2 + 1$ و $X^2 + 1$ به وسیله تقسیم‌های پی در پی بدست آورد:

$$X^2 + 1 = X(X^2 + 1) - (X - 1)$$

$$X^2 + 1 = (X + 1)(X - 1) + 2$$

از آنها نتیجه می‌شود:

$$2 = X^2 + 1 - (X + 1)[X(X^2 + 1) - (X^2 + 1)]$$

$$U = -\frac{1}{2}(X^2 + X - 1) \quad \text{و} \quad V = -\frac{1}{2}(X + 1)$$

پس:

$$A = -\frac{1}{2}(X^2 + 1)(X^2 + X - 1)$$

در حالت کلی چنین داریم:

$$A = BU = CV + 1$$

که از آن برابری $BU - CV = 1$ را خواهیم داشت. این برابری به شرط آنکه (شرط بیاوبسته) چند جمله‌ای‌های U و V نسبت به یکدیگر اول باشند همواره ممکن است (قضیه بزو).

حل ۷۹ - بنا به تعریف مشتق یک چند جمله‌ای چنین داریم:

$$A = \sum_{k=0}^n a_k X^k \implies A' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}$$

پس :

$$A' = 0 \iff \forall k, k\alpha_k = 0$$

چون شمار p ، مشخص هیات K ، شماری است اول، پس اگر α_k صفر نباشد تنها شماره‌های درست k به طوری که $k\alpha_k = 0$ باشد مضربهای p می‌باشند. بنابراین :

- اگر k مضرب p باشد، α_k دلخواه است.

- اگر k مضرب p نباشد، α_k برابر با صفر است.

پس خواهیم داشت :

$$A = a_0 + \sum_{r=1}^s a_{rp} X^{rp}$$

یعنی A ترکیبی خطی از 1 و توانهای مثبت X^p با ضرایب متعلق به K می‌باشد. وارون این مطلب نیز آشکار است.

حل ۸۰ - مانده تقسیم A بر $X - x_i$ یک چند جمله‌ای درجه صفر است که با r_i

نمایش داده می‌شود. پس می‌توان نوشت :

$$A = (X - x_i)Q_i + r_i \implies A(x_i) = r_i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

همچنین مانده تقسیم A بر $(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$ یک چند جمله‌ای R است که درجه آن از 2 بیشتر نیست. یعنی :

$$A = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)Q + R \implies R(x_i) = A(x_i) = r_i$$

پس بنابر دستور انترپلاسیون لاگرانژ تنها جواب دستگاه $A(x_i) = R(x_i) = r_i$ که درجه آن حداکثر برابر با 2 است عبارت است از :

$$R = r_1 \left[\frac{(X - x_2)(X - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + r_2 \frac{(X - x_3)(X - x_1)}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)} \right. \\ \left. + r_3 \frac{(X - x_1)(X - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \right]$$

چنانچه S جواب دیگر دستگاه بالا باشد چند جمله‌ای $S - R$ بر $(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$ بخش پذیر خواهد بود. بنابراین درجه $S - R$ و در نتیجه درجه S دست کم برابر با ۳ خواهد شد و این ممکن نیست.

حل ۸۱ - الف - اگر کلاس α شامل یک چند جمله‌ای A باشد شامل مانده تقسیم A بر $X^2 - 1$ یعنی شامل یک چند جمله‌ای R از درجه ۰ یا ۱ نیز خواهد بود. پس سایر چند جمله‌ای‌های کلاس α از افزودن مضاربی از $X^2 - 1$ بر R بدست می‌آیند و در نتیجه درجه آنها دست کم برابر با ۲ است. بنابراین نمایش یک عنصر از E بوسیله یک چند جمله‌ای درجه ۰ یا ۱ یکتا می‌باشد و خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \alpha = a_0 + a_1 X \\ \beta = b_0 + b_1 X \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)X \\ \alpha\beta = a_0 b_0 + a_1 b_1 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)X \end{cases}$$

(بجای X^2 $a_1 b_1$ هم ارز آن $a_1 b_1$ را قرار داده‌ایم) .

عصرهای α و β بخش‌یابهای صفرند هرگاه داشته باشیم :

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1 X)(b_0 + b_1 X) &= (X^2 - 1) \text{ م ضرب} \iff \\ (a_0 + a_1 X)(b_0 + b_1 X) &= a_1 b_1 (X^2 - 1) \end{aligned}$$

یعنی هرگاه α و β بخش‌یاب‌های $X^2 - 1$ باشند که در این صورت یا داریم :

$$\beta = b_1(X + 1) \text{ و } \alpha = a_1(X - 1)$$

$$\beta = b_1(X - 1) \text{ و } \alpha = a_1(X + 1) \quad \text{و یا :}$$

بنابراین مجموعه بخش‌یاب‌های صفر عبارت است از اجتماع مجموعه‌های :

$$I = \{a(X - 1) : a \in R\} \text{ و } J = \{a(X + 1) : a \in R\}$$

به آسانی می‌توان نشان داد که I و J از ایدآل‌های $R[X]$ می‌باشند.

ب - اگر $\alpha = a_0 + a_1 X$ بخش‌یاب صفر نباشد از معادله

$$(a_0 + a_1 X)(a_0 - a_1 X) = a_0^2 - a_1^2$$

دارای یک وارون به صورت

زیر است:

$$\alpha^{-1} = \frac{a_0}{a_0^2 - a_1^2} - \frac{a_1}{a_0^2 - a_1^2} X$$

پس هر عنصر حلقه E یا وارون پذیر است یا بخش‌یاب صفر می‌باشد.

چنانچه α^{-1} یک وارون α باشد معادله:

$$\alpha \xi + \beta = 0 \iff \alpha^{-1} \alpha \xi + \alpha^{-1} \beta = 0 \iff \xi = -\alpha^{-1} \beta$$

تنها دارای یک ریشه است (β دلخواه است).

اگر α بخش‌یاب صفر باشد α به یکی از ایدئال‌های I یا J متعلق است و ξ که حاصل ضرب یک عنصر ایدئال در یک عنصر حلقه است به همین ایدئال تعلق دارد. پس برای این که معادله $\alpha \xi + \beta = 0$ دارای جواب باشد لازم است که α و β هر دو به یک ایدئال متعلق باشند (I یا J). به علاوه این شرط کافی نیز هست. زیرا اگر α و β را متعلق به I بگیریم و قرار دهیم:

$$\alpha = a(X-1) \quad \text{و} \quad \beta = b(X-1)$$

معادله بالا به صورت $(a\xi + b)(X-1) = 0$ درسی‌آید و دارای جوابهای

$$\xi = -\frac{b}{a} + 1(X+1)$$

یک شمار حقیقی دلخواه می‌باشد.

چنانچه α برابر با صفر باشد لازم است که β نیز صفر باشد. در این صورت هر عنصر

از E جواب معادله خواهد بود.

پ- اگر $\delta_1 \delta_2 = 0$ باشد خواهیم داشت:

$$(\xi - \delta_1)(\xi - \delta_2) = \xi^2 - \xi(\delta_1 + \delta_2) = 0$$

و به این ترتیب آشکار می‌شود که معادله بالا دارای چهار جواب زیر است:

$$\xi = \delta_1, \quad \xi = \delta_2, \quad \xi = 0, \quad \xi = \delta_1 + \delta_2$$

این جواب‌ها متمایزند زیرا مثلاً چنین داریم :

$$\delta_1 = a(X-1) \quad , \quad \delta_2 = b(X+1) \quad , \quad \delta_1 + \delta_2 = (a+b)X + b - a$$

حل ۸۴ = داریم :

$$\frac{r+vi}{r-1i} = \frac{(r+vi)(r+1i)}{r^2} = -\frac{r}{2} + \frac{v}{2}i$$

و :

$$\left(\frac{1+i}{r-1i}\right)^2 + \frac{1-vi}{1+ri} = \left[\frac{(1+i)(r+1i)}{r}\right]^2 + \frac{(1-vi)(1-ri)}{r^2} = -1-i$$

و :

$$\frac{r+oi}{1-i} + \frac{r-oi}{1+i} = \frac{r+oi}{1-i} + \overline{\left(\frac{r+oi}{1-i}\right)} = rR\left(\frac{r+oi}{1-i}\right)$$

(منظور از R بخش حقیقی شمار مختلط است) اما داریم :

$$\frac{r+oi}{1-i} = \frac{(r+oi)(1+i)}{2} = -\frac{r}{2} + \frac{v}{2}i$$

پس :

$$\frac{r+oi}{1-i} + \frac{r-oi}{1+i} = r\left(-\frac{r}{2}\right) = -r$$

حل ۸۵ = داریم :

$$|z| = |a| \frac{|1+ib|}{|1-ib|} = |a| \cdot \left(\frac{1+b^2}{1+b^2}\right)^{\frac{1}{2}} = |a|$$

$$\text{Arg } a = 0 \quad , \quad \text{Arg}(1+ib) = \text{Arc } \text{tg } b \quad \text{و}$$

زیرا برای هر مقدار حقیقی b یکی از آرگومانهای $1+ib$ بین $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$

تکرار دارد.

همچنین داریم $1 - ib = \overline{1 + ib}$ پس :

$$\operatorname{Arg} \frac{1 + ib}{1 - ib} = 2 \operatorname{Arctg} b$$

و از آنجا : $\operatorname{Arg} z = 2 \operatorname{Arctg} b \pmod{2\pi}$

حل ۸۶ - اگر $z^{\sqrt{2}} = \frac{1}{z^2}$ باشد خواهیم داشت :

$$|z^{\sqrt{2}}| = \frac{1}{|z^2|} \quad \text{یا} \quad |z^{\sqrt{2}}| = 1 \Rightarrow |z| = 1$$

پس شمار مختلط z به صورت $z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ نوشته می‌شود ($\theta \in \mathbf{R}$) که

$$\frac{1}{z^2} = e^{-2i\theta} \quad \text{و} \quad \overline{z^{\sqrt{2}}} = e^{-\sqrt{2}i\theta}$$

از اینجا چنین نتیجه می‌شود :

$$e^{i\theta} = 1 \quad \text{و} \quad \theta = \frac{2k\pi}{\sqrt{2}}$$

بنابراین برای z پنج جواب زیر وجود دارد :

$$z = e^{i \frac{2k\pi}{\sqrt{2}}}, \quad (k=0, 1, 2, 3, 4)$$

حل ۸۷ - چنانچه نقطه A سایه شمار z و نقطه M سایه شمار z و مبدأ آراینده‌ها

باشد شرط $|z| = |z - 2|$ هم‌ارز با $OM = AM$ است و نقطه M روی عمود میانۀ پاره خط OA قرار دارد (خط $x=1$).

اگر نقطه B سایه شمار مختلط $z - 3 - i$ باشد خواهیم داشت :

$$\overrightarrow{(Ox \text{ و } OM)} = \overrightarrow{(Ox \text{ و } BM)} \pmod{2\pi}$$

پس نیم خط‌های OM و BM بر یکدیگر منطبق‌اند و در نتیجه M نقطه برخورد OB

و عمود میانۀ OA است. بنابراین با توجه به اینکه بردارهای \overrightarrow{OM} و \overrightarrow{BM} هم سو هستند چنین داریم:

$$x=1 \text{ و } y=\frac{1}{3} \text{ و } z=1+\frac{i}{3}$$

حل ۸۸ - اگر نقطه های M_1 و M_2 و M_3 به ترتیب سایه شمارهای z_1 و

z_2 و z_3 باشند، از شرط $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbf{R}$ نتیجه می شود که نقاط O و M_1 و M_2

هم خط نیستند. پس دو بردار $\overrightarrow{OM_1}$ و $\overrightarrow{OM_2}$ تشکیل یک پایه از صفحه مختلط را می دهند و تنها به یک روش می توان نوشت:

$$\overrightarrow{OM_3} = a\overrightarrow{OM_1} + b\overrightarrow{OM_2} \quad (a, b \in \mathbf{R})$$

$$(1) \quad z_3 = a z_1 + b z_2 \quad \text{یا}$$

از ضرب دو طرف برابری (۱) در \bar{z}_1 نتیجه می شود:

$$z_3 \bar{z}_1 = a |z_1|^2 + b z_2 \bar{z}_1$$

و چون $a |z_1|^2 \in \mathbf{R}$ است خواهیم داشت:

$$\text{Im}(z_3 \cdot \bar{z}_1) = b \cdot \text{Im}(z_2 \cdot \bar{z}_1)$$

به همین ترتیب:

$$\text{Im}(z_3 \cdot \bar{z}_2) = a \cdot \text{Im}(z_1 \cdot \bar{z}_2)$$

حل ۸۹ - بنا به فرض داریم $|z| = \frac{1}{|z|}$ که از آن نتیجه می شود

$|z| = 1$ پس سایه z روی دایره به مرکز O و شعاع یک قرار دارد. هم چنین داریم

$|z| = |1 - z|$ پس سایه z روی خط عمود میانۀ پاره خط OA قرار دارد (نقطه A

به آراینده های $(0, 1)$ است). اما دایره و خط نامبرده دو نقطه برخورد دارند که آرگومانهای

آن‌ها $\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{\pi}{3}$ است. بنابراین دوجواب زیر را داریم:

$$z_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = -j^2 \quad \text{و} \quad z_2 = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \\ = -j = \overline{z_1}$$

حل ۹۰ - چون در معادله $z^2 - (0 - 14i)z - 2(0i + 12) = 0$ داریم:

$$\Delta = (0 - 14i)^2 + 8(0i + 12) = -70 - 100i$$

پس $\Delta \neq 0$ و معادله دارای ریشه‌های $\frac{0 - 14i + \varepsilon d}{2}$ است که در آن $\varepsilon = 1$

یا $\varepsilon = -1$ و d یک ریشه دوم Δ است. اگر قرار دهیم $d = u + iv$ خواهیم

داشت $d^2 = u^2 - v^2 + 2iuv = -70 - 100i$ که از آن نتیجه می‌شود

$u^2 - v^2 = -70$ و $2uv = -100$ از حذف v بین این دو معادله، به معادله

$X^2 + 70X - 2000 = 0$ اما ریشه‌های معادله $u^2 + 70u^2 - 2000 = 0$ می‌رسیم.

عبارتند از -100 و $+20$ پس $u^2 = 20$ و $u = \varepsilon' \cdot 0$ که در آن $\varepsilon^2 = 1$ که

چون در معادله $uv = -50$ قرار دهیم خواهیم داشت $v = -\varepsilon' \cdot 10$. بنابراین ریشه

های دوم Δ عبارتند از $0 - 10i$ و $0 + 10i$ و در نتیجه ریشه‌های معادله چنین

خواهند بود:

$$\frac{(0 - 14i) + (0 - 10i)}{2} = 0 - 12i ; \quad \frac{(0 - 14i) - (0 - 10i)}{2} = -2i$$

معادله $z^2 - (2 + 4i)z - 1 + 0i = 0$ مانند معادله بالا حل می‌شود. در این معادله

ریشه‌های دوم Δ عبارتند از $1 + 2i$ و $-1 - 2i$ و ریشه‌های معادله $2 + 2i$

و $1 + i$ می‌باشند.

در معادله $z^2 - 2iz + 2 - 4i = 0$ نیز ریشه‌های دوم Δ عبارتند از $1 + 2i$

و $-1 - 2i$ و ریشه‌های معادله $1 + 2i$ و $-1 - i$.

معادله $z^3 = 0$ را $z^3 - 1 = 0$ در آن $z \neq -1$ است می‌توان چنین

نوشت $\frac{z-1}{z+1} = u = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ قرار می‌دهیم $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = -\frac{1}{27}$ و از آنجا

خواهیم داشت $u^3 = -\frac{1}{27}$ پس :

$$\rho^3 = \frac{1}{27}, \quad \theta = \pi + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{1}{\sqrt[3]{27}}, \quad \theta_k = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}, \quad (k=0, 1, \dots, 5)$$

بنابراین جواب‌های زیر را داریم :

$$u_0 = \frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad u_1 = \frac{i}{\sqrt{3}}, \quad u_2 = -\frac{1}{3} + \frac{i}{2\sqrt{3}}$$

$$u_3 = -\frac{1}{3} - \frac{i\sqrt{3}}{3}, \quad u_4 = -\frac{i}{\sqrt{3}}, \quad u_5 = \frac{1}{3} - \frac{i}{2\sqrt{3}}$$

اما از برابری $\frac{z-1}{z+1} = u$ نتیجه می‌شود $z = \frac{1+u}{1-u}$ و برای z جوابهای

زیر بدست می‌آید :

$$z_0 = 2 + i\sqrt{3}, \quad z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = \frac{2+i\sqrt{3}}{3}$$

$$z_3 = \frac{2-i\sqrt{3}}{3}, \quad z_4 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}, \quad z_5 = 2 - i\sqrt{3}$$

برای حل معادله $z^3 = -119 + 120i$ قرار می‌دهیم $z^3 = X$ در این صورت معادله

$X^3 = -119 + 120i$ بدست می‌آید که جواب‌های آن عبارتند از $X = \pm(0 + 12i)$

و از آنجا جوابهای زیر را برای z خواهیم داشت :

$$z_1 = 2 - 2i, \quad z_2 = -2 + 2i, \quad z_3 = 2 + 2i, \quad z_4 = -2 - 2i$$

برای حل دو معادلهٔ آخرچنین عمل می‌کنیم :

$$\begin{aligned} \frac{1 + i\sqrt{2}}{1 - i\sqrt{2}} &= \frac{2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)}{2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)} \\ &= \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1 - i}{1 + i\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)}{2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right) \end{aligned}$$

در نتیجه این دو معادله بصورت زیر در می‌آیند :

$$z^1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}, \quad z^2 = \sqrt{\frac{-1}{2}} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right)$$

و برای معادلهٔ درجهٔ ششم بالا ، جوابهای :

$$\begin{aligned} z_k &= \cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{6} = \cos \left(\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3} \right) \\ &\quad + i \sin \left(\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3} \right), \quad 0 \leq k \leq 5 \end{aligned}$$

و برای معادله درجه چهارم بالا جوابهای :

$$z_k = \sqrt[4]{2} \left[\cos \left(\frac{17\pi}{48} + \frac{k\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{17\pi}{48} + \frac{k\pi}{2} \right) \right]$$

$$, \quad 0 \leq k \leq 3$$

را داریم :

حل ۹۱ - قرار می دهیم $\frac{1+k(k+1)+i}{1+k(k+1)-i} = r_k e^{i\theta_k}$ در این صورت داریم

$r_k = 1$ و $\theta_k = 2 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{1}{1+k(k+1)}$ که با فرض $k = \operatorname{tg} u_k$ خواهیم داشت :

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_k}{2} = \frac{(k+1)-k}{1+k(k+1)} = \operatorname{tg}(u_{k+1}-u_k) \quad \text{و} \quad \frac{1}{2} \theta_k = u_{k+1} - u_k$$

پس $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \theta_k = u_{n+1} - u_1 = \operatorname{Arctg}(n+1) - \frac{\pi}{4}$ و از آنجا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \theta_k = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\operatorname{Arctg}(n+1) - \frac{\pi}{4} \right] = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2}$$

بنابراین حد عبارت مورد نظر برابر است با i .

حل ۹۲ - برای این که در سه بر ABC داشته باشیم $AB=BC=CA$ بایا

و بسنده است که :

$$AB=AC \quad \text{و} \quad (AB, AC) = (O_x, AC) - (O_x, AB) = \pm \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$$

و یا با استفاده از شماره های مختلط a ، b و c :

$$|b-a| = |c-a| \quad \text{و} \quad \arg(c-a) - \arg(b-a) = \pm \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$$

$$c-a = (b-a)e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{یا} \quad c-a = (b-a)e^{-i\frac{\pi}{3}} \quad \text{یعنی:}$$

پس شرط با یابسنده بالا چنین نوشته می‌شود :

$$\left[c - a - (b - a)e^{i\frac{\pi}{3}} \right] \left[c - a - (b - a)e^{-i\frac{\pi}{3}} \right] = 0$$

که پس از ساده کردن به صورت زیر درسی آید :

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$$

حل ۹۳ - الف - در معادله داده شده داریم $z' z'' = 1$ و از آنجا $z' = \frac{1}{z''}$

پس خواهیم داشت :

$$|z'| = \frac{1}{|z''|} \quad \text{و} \quad \text{Arg } z' + \text{Arg } z'' = 0$$

ب - اگر u شمار مختلطی باشد که سایه آن M است بنابه فرض داریم :

$$u = \frac{z' + z''}{2} = \cos\theta + i\sin\theta$$

بنابراین مکان نقطه M هنگامی که θ تغییر می‌کند دایره‌ای است به مرکز مبدأ و شعاع یک.

حل ۹۴ - الف - نقطه‌های دوگانه عبارتند از جوابهای معادله $z = \frac{z}{2-z}$

$$z = 1 \quad \text{و} \quad z = 0$$

یعنی :

ب - داریم $z_2 = \frac{z_1}{2-z_1}$ و چون با توجه به فرضهای مسأله $|2-z_1| > 1$

است پس $\left| \frac{z_1}{2-z_1} \right| = |z_2| < |z_1|$ وانگهی $z_2 \neq 0$ است (وگرنه خواهیم

داشت $z_1 = 0$). بنابراین داریم $|z_2| < |z_1|$ و $|z_2| < 1$. از اینجا شرطهای $z_2 \neq 0$

و $|z_2| < 1$ برای z_2 به دست می‌آید، و با روشی مشابه نتیجه می‌شود

اکنون اگر روش بازگشت را بکار ببریم، به آسانی دیده می‌شود که دنباله $(|z_n|)$ کاملاً کاهشی است. به علاوه این دنباله از طرف پائین کراندار است (صفر یک کران پائین آن است). پس دارای حدی است که ممکن است مثبت و یا صفر باشد.

پ- داریم $|z_1| \geq 2 - |z_1|$ و از آنجا نتیجه می‌شود

اما $|z_n| \geq 2 - |z_n|$ پس $|z_1| > |z_n|$ و $|z_n| < 2 - |z_n|$ و یا $|z_1| > 1$ بنابراین خواهیم داشت:

$$|z_{n+1}| < \frac{|z_n|}{2 - |z_1|} < \frac{|z_{n-1}|}{(2 - |z_1|)^2} < \dots < \frac{|z_1|}{(2 - |z_1|)^n}$$

و چون هنگامی که n به سمت $+\infty$ می‌گراید $\frac{|z_1|}{(2 - |z_1|)^n}$ به سمت صفر میل

می‌کند (زیرا داریم $|z_1| > 1$) پس خواهیم داشت: $\lim_{n \rightarrow \infty} z_{n+1} = 0$

حل ۹۵ - داریم $(z+1)^n = (\cos 2a + i \sin 2a)^n$ پس

$z+1 = \alpha_k (\cos 2a + i \sin 2a)$ که در آن α_k یکی از ریشه‌های n ام یک است، یعنی:

$$\alpha_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} = c^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad 0 \leq k \leq n-1$$

از اینجا نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} z_k &= -1 + \cos 2 \left(a + \frac{k\pi}{n} \right) + i \sin 2 \left(a + \frac{k\pi}{n} \right) \\ &= -2 \sin^2 \left(a + \frac{k\pi}{n} \right) + 2i \sin \left(a + \frac{k\pi}{n} \right) \cos \left(a + \frac{k\pi}{n} \right) \\ &= 2i \sin \left(a + \frac{k\pi}{n} \right) \left[\cos \left(a + \frac{k\pi}{n} \right) + i \sin \left(a + \frac{k\pi}{n} \right) \right] \end{aligned}$$

$$z_k = r i \sin \left(a + \frac{k\pi}{n} \right) e^{i \left(a + \frac{k\pi}{n} \right)} \quad \text{و یا}$$

اکنون برای محاسبه P_n حاصل ضرب ریشه‌های معادله داده شده را، هم از روی معادله و هم با استفاده از مقدار z_k که در بالا به دست آوردیم، حساب می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} z_k &= (-1)^n (1 - e^{rina}) = (ri)^n \prod_{k=0}^{n-1} \sin \left(a + \frac{k\pi}{n} \right) e^{i \left(a + \frac{k\pi}{n} \right)} \\ &= (ri)^n P_n \prod_{k=0}^{n-1} e^{i \left(a + \frac{k\pi}{n} \right)} \end{aligned}$$

ما :

$$\prod_{k=0}^{n-1} e^{i \left(a + \frac{k\pi}{n} \right)} = e^{i \sum_{k=0}^{n-1} \left(a + \frac{k\pi}{n} \right)} = e^{ina + \frac{i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k}$$

$$= e^{ina + \frac{i\pi}{n} \cdot \frac{(n-1)n}{2}} = e^{ina} e^{\frac{i(n-1)\pi}{2}}$$

پس :

$$P_n = \frac{(-1)^n (1 - e^{rina})}{(ri)^n e^{ina} e^{\frac{i(n-1)\pi}{2}}} = \frac{(-1)^n (-ri \sin na)}{r^n i^n e^{\frac{i(n-1)\pi}{2}}}$$

(از فرمول $ri \sin x = e^{ix} - e^{-ix}$ استفاده کرده‌ایم).

و چون داریم $i^n = e^{i \frac{n\pi}{2}}$ پس خواهیم داشت $P_n = \frac{\sin n\alpha}{r^{n-1}}$

حل ۹۷ - داریم $1+i = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}$ پس:

$$(1+i)^{1202} = 2^{601} e^{300.5i\pi} = (-1)^{300.5} 2^{601} = 2^{601}$$

حل ۱۰۱ - چون $|a| = 1$ است قرار می‌دهیم $a = \cos\theta + i\sin\theta$ در این صورت خواهیم داشت:

$$z_k = a_k e^{i \frac{\theta}{n}} = e^{i \frac{k\pi}{n}} e^{i \frac{\theta}{n}}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} 1 + z_k &= 1 + e^{i \left(\frac{\theta}{n} + \frac{k\pi}{n} \right)} \\ &= 2 \cos \left(\frac{\theta}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) \left[\cos \left(\frac{\theta}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) \right] \end{aligned}$$

پس:

$$\begin{aligned} u_k = (1 + z_k)^n &= 2^n \cos^n \left(\frac{\theta}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) \left[\cos \left(\frac{\theta}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) \right. \\ &\quad \left. + i \sin \left(\frac{\theta}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) \right] \end{aligned}$$

به طوری که دیده می‌شود یا آرگومان شماره‌های مختلط u_k برابر است با $\frac{\theta}{2}$ و یا برابر است

با $\left(\frac{\theta}{2} + \pi \right)$. بنابراین سایه‌های u_k روی یک خط قرار دارند.

حل ۱۰۲ - برای اینکه سایه‌های z ، z^2 و z^4 هم خط باشند باید وابسته است

که $\frac{z^\varepsilon - z^r}{z^r - z} = z(z+1)$ حقیقی باشد. اما از $z(z+1) \in \mathbf{R}$ نتیجه می‌شود

$y(2x+1) = 0$ پس یا z یک شمار حقیقی دلخواه است و یا $z = -\frac{1}{2} + iy$ است که در آن z عنصر دلخواهی از \mathbf{R} می‌باشد.

حل ۱۰۳ - معادله $u^2 + u + 1 = 0$ دارای جوابهای $u_1 = j$ و $u_2 = j^2$ است

که در آنها داریم $j^3 = 1$ و $j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$

پس به جای دستگاه داده شده می‌توان دستگاه $x^\varepsilon = j$ و $x^\varepsilon = j^2$ را حل کرد. j یکی از ریشه‌های چهارم $x^\varepsilon = j$ است. زیرا داریم $j = j^3$. $j^2 = j^2 \cdot j$ سایر ریشه‌های آن از ضرب j در ریشه‌های چهارم 1 به دست می‌آیند. یعنی:

$$x_1 = j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = ij = \frac{-\sqrt{3} - i}{2}$$

$$x_3 = -x_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad x_4 = -ij = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$$

ریشه‌های $x^\varepsilon = j^2$ را نیز می‌توان به همین روش پیدا کرد. این ریشه‌ها عبارتند از:

$$j^2, \quad ij^2, \quad -j^2, \quad -ij^2$$

همچنین با توجه به اینکه داریم $j^2 = \bar{j} = (x)^\varepsilon$ می‌توان گفت که ریشه‌های $x^\varepsilon = j^2$ مزدوج ریشه‌های $x^\varepsilon = j$ یعنی $x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2$ می‌باشند.

ب - داریم:

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 - x^2 + 1)(x^2 + x^2 + 1)$$

$$x^4 - x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)$$

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$$

که از آنها نتیجه می‌شود :

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x/\sqrt{2} + 1)(x^2 + x/\sqrt{2} + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$$

با استفاده از برابری بالا می‌توان ریشه‌های معادله داد شده را به دست آورد.

حل ۱۰۴ - الف - ریشه‌های معادله $z^5 = -1 = e^{i\pi}$ عبارتند از

$$z_k = e^{i(2k+1)\pi/5} \quad (k=0, 1, 2, 3, 4) . \text{ همه این ریشه ها به جز}$$

$$z_4 = -1 \text{ جواب‌های معادله زیر می‌باشند :}$$

$$\frac{z^5 + 1}{z + 1} = z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = z^2 \left[z^2 + \frac{1}{z^2} - \left(z + \frac{1}{z} \right) + 1 \right] = 0$$

به جای حل معادله بالا می‌توان دستگاه :

$$\begin{cases} u = z + \frac{1}{z} \\ u^2 - u - 1 = 0 \end{cases}$$

را حل کرد . چنانچه $z = e^{i\alpha}$ باشد خواهیم داشت $u = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2 \cos \alpha$ بنابراین

ریشه‌های معادله $u^2 - u - 1 = 0$ عبارتند از $2 \cos \frac{\pi}{5}$ و $2 \cos \frac{3\pi}{5}$ و چون

$$2 \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0 \text{ است پس } 0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{5} < \pi$$

$$2 \cos \frac{3\pi}{5} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0 \text{ و از آنجا داریم : } 2 \cos \frac{3\pi}{5} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$$

ب - با استفاده از فرمول موآور داریم :

$$\cos^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha$$

چنانچه $\alpha = \frac{\pi}{5}$ باشد $\cos^2 \alpha = \cos \pi = -1$ است و اگر قرار دهیم $x = \cos \frac{\pi}{5}$

$$16x^5 - 20x^3 + 5x + 1 = 0 \quad \text{خواهیم داشت:}$$

از آنچه که گفته شد چنین برمی آید که $\cos \frac{2\pi}{5}$ و $\cos \pi = -1$ نیز ریشه های معادله

بالا هستند. پس عبارت طرف راست این معادله بر $x+1$ بخش پذیر است، یعنی:

$$16x^5 - 20x^3 + 5x + 1 = (x+1)(16x^4 - 16x^3 - 4x^2 + 4x + 1) \\ = (x+1)(4x^2 - 2x - 1)^2$$

بنابراین $\cos \frac{\pi}{5}$ و $\cos \frac{2\pi}{5}$ ریشه های معادله $4x^2 - 2x - 1 = 0$ می باشند و

$\cos \frac{\pi}{5}$ ریشه مثبت آن یعنی $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ است. به علاوه این ریشه ها دو گانه می باشند.

حل ۱۰۵ - الف - چون b ریشه معادله (A) نیست می توان قرارداد

$$\frac{z-a}{z-b} = x \quad \text{که در آن } x \text{ جواب معادله } x^n = u \text{ خواهد بود.}$$

پس حل معادله (A) به تعیین ریشه های n ام شمار u برمی گردد و به هر یک

از این ریشه ها تنها یک مقدار z وابسته می شود مگر اینکه این ریشه برابر با ۱ باشد یعنی

داشته باشیم $u=1$ ، که در این صورت برای z تنها $n-1$ جواب خواهیم داشت.

زیرا در این حالت معادله از درجه $n-1$ است. باید دانست که مقادیر z که به این

ترتیب به دست می آیند از یکدیگر متمایزند، زیرا z تابعی هموگرافیک از x است.

معادله $x^6 = 1$ دارای ۶ ریشه است که یکی از آنها برابر با ۱ می باشد و برای ریشه

دیگر، با در نظر گرفتن مقادیر a و b ، ریشه های معادله (A) چنین می باشند:

$$\begin{cases} x_1 = -j^2 \\ z_1 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = j \\ z_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -1 \\ z_3 = -\frac{1}{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = j^2 \\ z_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_5 = -j \\ z_5 = 1 \end{cases}$$

چنانچه دوطرف معادله را بسط داده و ساده کنیم خواهیم داشت :

$$2z^3 + 5z^2 - 5z - 2 = z(z^2 - 1)(2z^2 + 5z + 2) = 0$$

که از حل آن همان ریشه‌های بالا به دست می‌آید.

ب- سایه‌های a ، b و z را به ترتیب با A ، B و M نشان می‌دهیم، دراین

صورت داریم :

$$\frac{MA}{MB} = \left| \frac{z-a}{z-b} \right| = |x| = \sqrt[n]{|u|}$$

اگر $|u| \neq 1$ باشد مکان نقطه M دایره‌ای است که نسبت فاصله‌های نقاط آن از

A و B برابر با $\sqrt[n]{|u|}$ است.

چنانچه $|u| = 1$ باشد مکان نقطه M عمود میانه پاره AB است.

اگر همه ریشه‌ها حقیقی باشند سایه آنها روی OX قرار دارد، و چون همه ریشه‌ها

متمایزند، در حالت $n \geq 3$ ، سایه ریشه‌ها نمی‌توانند هم روی یک دایره و هم روی OX

واقع باشند. پس شرط بایاوبسنده برای حقیقی بودن همه ریشه‌ها این است که محور OX عمود

میانه پاره AB باشد. به عبارت دیگر $|u| = 1$ و a و b مزدوج یکدیگر باشند.

حل ۱۰۷ - الف - برابری داده شده را می‌توان چنین نوشت :

$$(Z-1)(z+1)^2 = (Z+1)(z-1)^2$$

که از آن نتیجه می‌شود :

$$Z = \frac{z^2+1}{2z} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2} (z+z_1)$$

ب- برابری $Z = \frac{1}{2} (z+z_1)$ نشان می‌دهد که سایه Z نقطه میانه پاره خطی

است که سایه‌های z و z_1 را به هم می‌پیوندد.

حل ۱۰۸ - می‌توان تبدیل داده شده را به تبدیلیهای ساده تجزیه کرد و همتای دایره را بوسیله تبدیلیهای به دست آمده معین کرد. اما در اینجا این مسأله را به روش آسان‌تری حل می‌کنیم. چون داریم $|z - 1| = 1$ پس می‌توان قرارداد $z = 1 + e^{i\theta}$ که در این صورت خواهیم داشت $z = i \cot \theta$. بنابراین هنگامی که θ تغییر می‌کند سایه z دایره داده شده و سایه Z محور y هارا می‌پیماید. یعنی همتای دایره محور y هاست (محور انگاری).

حل ۱۰۹ - قرار می‌دهیم $z = x + iy$ در این صورت خواهیم داشت :

$$|z - 3|^2 = (x - 3)^2 + y^2, \quad |z - 5|^2 = (x - 5)^2 + y^2$$

بنابراین شرط (۱) به صورت $x^2 - 6x + 9 + y^2 = x^2 - 10x + 25 + y^2$ و یا $x = 4$

و شرط (۲) به صورت $\frac{1}{4} [(x - 5)^2 + y^2] = (x - 3)^2 + y^2$ و یا $(x - 1)^2 + y^2 = 8$

درمی‌آید. پس در حالت اول $z = 4 + iy$ است ($y \in \mathbb{R}$) و در حالت دوم سایه z دایره به معادله $(x - 1)^2 + y^2 = 8$ را می‌پیماید.

اکنون برای تعیین z به روش هندسی، فرض می‌کنیم سایه ۳، ۵ و z به ترتیب نقطه‌های A ، B و M از صفحه xoy باشد. در این صورت شرط (۱) هم‌ارز با

$$\|\vec{MA}\| = \|\vec{MB}\| \quad \text{و شرط (۲) هم‌ارز با} \quad \|\vec{MA}\| = \sqrt{2} \|\vec{MB}\| \quad \text{است.}$$

پس در حالت اول M نقطه‌ای است از عمود میانه پاره خط AB . اما این عمود میانه دارای معادله $x = 4$ است. بنابراین برای اینکه z در شرط (۱) صدق کند بایا وابسته است که بخش حقیقی z برابر با ۴ باشد. در حالت دوم مکان نقطه M دایره‌ای است به قطر CD به طوری که دو نقطه C و D بر محور x قرار دارند و پاره خط AB را

به نسبت $\frac{\sqrt{2}}{2}$ تقسیم می‌کنند. برای تعیین این دو نقطه C را بین A و B ، و D

را در خارج A و B می‌گیریم. چون باید داشته باشیم :

$$\frac{\|\vec{CA}\|}{\|\vec{CB}\|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{و} \quad \frac{\|\vec{DA}\|}{\|\vec{DB}\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

پس خواهیم داشت :

$$\|\vec{DB}\| - \|\vec{DA}\| = \|\vec{AB}\| = 2 \quad \text{و} \quad \|\vec{CA}\| + \|\vec{CB}\| = \|\vec{AB}\| = 2$$

بنابراین :

$$\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \|\vec{CB}\| = 2 \quad \text{و} \quad \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \|\vec{DB}\| = 2$$

$$\|\vec{DB}\| = 4 + 2\sqrt{2} \quad \text{و} \quad \|\vec{CB}\| = 4 - 2\sqrt{2} \quad \text{یعنی}$$

در نتیجه C نقطه‌ای به طول $1 + 2\sqrt{2}$ و D نقطه‌ای به طول $1 - 2\sqrt{2}$ می‌باشد.
پس دایره به قطر CD دایره‌ای است که مرکز آن به طول ۱ و شعاع آن $2\sqrt{2}$ است.
بنابراین معادله این دایره چنین است :

$$(x-1)^2 + y^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$$

حل ۱۱۲ - برای این که بردار a به زیر فضای برداری F متعلق باشد باید داشته باشیم $a = \alpha e_1 + \beta e_2$ که در آن α و β متعلق به \mathbf{R} هستند. از برابری بالا چهار معادله زیر برای تعیین x ، y ، α و β به دست می‌آید :

$$-2 = \alpha - \beta, \quad x = -\alpha + 2\beta, \quad y = \alpha + 2\beta, \quad z = 2\alpha + \beta$$

که از آنها نتیجه می‌شود :

$$\beta = \frac{7}{3} \quad \text{و} \quad \alpha = \frac{1}{3}, \quad y = \frac{22}{3}, \quad x = \frac{13}{3}$$

حل ۱۱۳ - ماتریس زیر را که ستونهای آن به ترتیب مؤلفه‌های بردارهای e_1 ، e_2 ، e_3 و e_4 است در نظر می‌گیریم :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

چون دترمینان این ماتریس برابر با صفر است پس چهار بردار e_1 ، e_2 ، e_3 و e_4 بستگی خطی دارند. اما یکی از دترمینانهای مرتبه سومی که می توان از ماتریس بالا جدا کرد، مثلاً دترمینانی که از سه سطر و سه ستون اول به دست می آید، مخالف با صفر است. بنابراین سه بردار e_1 ، e_2 و e_3 نا بستگی خطی دارند. پس بعد F_1 برابر با ۳ است و (e_1, e_2, e_3) یک پایه از F_1 می باشد. همچنین a_1 و a_2 نا بستگی خطی دارند. پس بعد F_2 برابر با ۲ است و (a_1, a_2) یک پایه از F_2 می باشد. وانگهی داریم:

$$\dim F_1 = 3 \leq \dim (F_1 + F_2) \leq 4 = \dim \mathbf{R}^4$$

پس بعد $F_1 + F_2$ یا ۳ است و یا ۴. اما $F_1 + F_2$ را می توان به صورت زیر فضای برداری پدید آمده به وسیله $F_1 \cup F_2$ در نظر گرفت. و چون چهار بردار e_1 ، e_2 ، e_3 و a_1 نا بستگی خطی دارند (بررسی آن به عهده خواننده است) پس:

$\dim (F_1 + F_2) = 4$ و (e_1, e_2, e_3, a_1) یک پایه از $F_1 + F_2$ است. به علاوه داریم:

$$\dim (F_1 \cap F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim (F_1 + F_2) = 1$$

اگر بردار x متعلق به $F_1 \cap F_2$ باشد خواهیم داشت:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = y_1 a_1 + y_2 a_2$$

با در نظر گرفتن مؤلفه های بردارهای e_1 ، e_2 ، e_3 ، e_4 و a_1 و a_2 چهار معادله زیر برای تعیین x_1 ، x_2 ، x_3 (همچنین y_1 و y_2) به دست می آید:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2y_1 - y_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - y_1 - 2y_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 4y_1 - 2y_2 = 0 \\ -x_2 - 5y_1 - 4y_2 = 0 \end{cases}$$

دستگاه همگن بالا دارای رتبه ۴ است و از آن نتیجه می شود $y_1 + y_2 = 0$ که با فرض

$x = \lambda(a_1 - a_2)$. پس بردار $(1, -1, 1, 1)$.
 یک پایه از $F_1 \cap F_2$ است . وانگهی داریم $b = 2e_1 - e_2 - e_3$.

حل ۱۱۷ - چون داریم $B \subset C$ کافی است ثابت کنیم $C \subset B$. اگر c

عنصری از C باشد ، c به $A+C$ و در نتیجه به $A+B$ نیز متعلق است زیرا $A+B = A+C$. پس عنصر a از A و عنصر b از B وجود دارد به طوری که $c = a + b$. اما $B \subset C$ است پس b به C تعلق دارد و در نتیجه $a = c - b$ به $A \cap C$ متعلق است و چون داریم $A \cap B = A \cap C$ پس a به $A \cap B$ و در نتیجه به B تعلق دارد . بنابراین $c = a + b$ که مجموع دو عنصر از B است به B متعلق است . پس هر عنصر از C عنصری است از B یعنی داریم $C \subset B$.

حل ۱۱۸ - با بکار بردن روش معمولی می توان نابستگی خطی چهار بردار داده

شده را ثابت کرد و مؤلفه های بردار x را نسبت به آنها به دست آورد . اما در اینجا ما روش دیگری برای حل این مسأله بکار می گیریم . بدین ترتیب که به جای این چهار بردار ، چهار ترکیب خطی از آنها را در نظر می گیریم و ثابت می کنیم که این چهار ترکیب خطی نابستگی خطی دارند . همچنین نخست بین بردار x و چهار بردار a, b, c, d یک بستگی خطی پیدا می کنیم و سپس از روی آن مؤلفه های x را به دست می آوریم . چگونگی این عملیات از روی جدولهای (دستگاه بردارها) زیر آشکار است :

a	b	c	d	x
۱	۲	۱	۱	۷
۲	۳	۳	۲	۱۴
-۱	۰	-۱	۱	-۱
-۲	-۱	۰	۴	۲

a	$b' = b - 2a$	$c' = c - a$	$d' = d - a$	$x' = x - 2a$
۱	۰	۰	۰	۰
۲	-۱	۱	۰	۰
-۱	۲	۰	۲	۶
-۲	۳	۲	۶	۱۶
a	b'	$c'' = c' + b'$	$d'' = d' - c''$	$x'' = x' - 2c''$
۱	۰	۰	۰	۰
۲	-۱	۰	۰	۰
-۱	۲	۲	۰	۰
-۲	۳	۰	۱	۱

به طوری که در دستگاه آخر دیده می شود چهار بردار a ، b' ، c'' و d'' نایستگی خطی دارند. پس چهار بردار a ، b ، c و d نیز نایستگی خطی دارند. وانگهی داریم $x'' = d''$ که عبارتست از بستگی خطی بین بردارهای x ، a ، b ، c و d . اما $x'' = d''$ به صورت $x' - 2c'' = d' - c''$ و یا $x' = d' + 2c''$ در می آید که می توان آن را چنین نوشت:

$$x - 2a = d - a + 2(c' + b')$$

و یا:

$$x - 2a = d - a + 2(c - a + b - 2a)$$

که از آن نتیجه می شود $x = 2b + 2c + d$ یعنی مؤلفه های x نسبت به پایه (a, b, c, d) عبارتند از $(1, 2, 2, 0)$.

حل ۱۲۰ - الف - این مسأله را نیز به روش مسأله ۱۱۸ حل می کنیم. بدین

منظور دستگاه های زیر را تشکیل می دهیم:

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 a & b & c & a & b-a & c-aa \\
 ۱ & ۱ & a & ۱ & ۰ & ۰ \\
 ۱ & a & ۱ & ۱ & a-۱ & ۱-a \\
 a & ۱ & ۱ & a & ۱-a & ۱-a^2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 a & b-a & c-aa+b-a \\
 ۱ & ۰ & ۰ \\
 ۱ & a-۱ & ۰ \\
 a & ۱-a & ۲-a-a^2
 \end{array}$$

اکنون گوئیم یا $۲-a-a^2=۰$ است یعنی یا $a=۱$ و یا $a=-۲$ می‌باشد، که برای $a=۱$ سه بردار a ، b و c با یکدیگر برابرند و رتبهٔ دستگاه یک است، و برای $a=-۲$ بردارهای a و b نابستگی خطی دارند و داریم $c=(۱+a)a+b$ و رتبهٔ دستگاه ۲ است.

یا $۲-a-a^2 \neq ۰$ است یعنی $a \neq ۱$ و $a \neq -۲$. در این صورت رتبهٔ دستگاه ۳ است.

ب - در این حالت a یا ۰ است و یا ۱ . اگر $a=۱$ باشد سه بردار a ، b و c با یکدیگر برابرند و رتبهٔ دستگاه ۱ است. اگر $a=۰$ باشد محاسبات قسمت الف نشان می‌دهد که a و b نابستگی خطی دارند. و چون داریم $a+b+c=۰$ پس رتبهٔ دستگاه ۲ است.

حل ۱۲۱ - اگر روش حل مسألهٔ ۱۱۸ را بکار ببریم برای فرم خطی $f_4 - f_1$

مؤلفه‌های $\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda}, ۰, ۰, ۰\right)$ به دست می‌آید. از اینجا نتیجه می‌شود که اگر

$\lambda \neq \mu$ باشد چهار فرم f_1 ، f_2 ، f_3 ، f_4 و نابستگی خطی دارند و تشکیل یک پایه می‌دهند. در این صورت اگر (e_1, e_2, e_3, e_4) پایهٔ دو ال پایهٔ (f_1, f_2, f_3, f_4)

باشد باید داشته باشیم:

$$f_i(e_j) = \delta_{ij} \quad , \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

فرض می‌کنیم $x_1^1, x_1^2, x_1^3, x_1^4$ و مؤلفه‌های بردار e_i نسبت به پایه کانونیک \mathbf{R}^4 باشد. پس داریم :

$$f_1(e_1) = x_1^1 - \lambda x_1^2 = 1 \quad , \quad f_2(e_1) = x_1^2 - \frac{1}{\lambda} x_1^4 = 0$$

$$f_3(e_1) = x_1^1 - \mu x_1^4 = 0 \quad , \quad f_4(e_1) = x_1^2 - \frac{1}{\mu} x_1^4 = 0$$

از معادله‌های $f_2(e_1) = 0$ و $f_4(e_1) = 0$ نتیجه می‌شود $x_1^2 = x_1^4 = 0$ و از معادله‌های $f_1(e_1) = 1$ و $f_3(e_1) = 0$ به دست می‌آوریم :

$$x_1^2 = -\frac{1}{\lambda} \quad \text{و} \quad x_1^4 = 0$$

پس مؤلفه‌های e_1 عبارتند از $(0, 0, -\frac{1}{\lambda}, 0)$

برای تعیین مؤلفه‌های e_2 معادله‌های زیر را داریم :

$$x_2^1 - \lambda x_2^2 = 0 \quad , \quad x_2^2 - \frac{1}{\lambda} x_2^4 = 1$$

$$x_2^1 - \mu x_2^4 = 0 \quad , \quad x_2^2 - \frac{1}{\mu} x_2^4 = 0$$

که از حل آنها دستگاه جواب :

$$x_2^1 = \frac{\lambda \mu^2}{\lambda - \mu} \quad , \quad x_2^2 = \frac{\lambda}{\lambda - \mu}$$

$$x_2^3 = \frac{\mu^2}{\lambda - \mu} \quad , \quad x_2^4 = \frac{\lambda \mu}{\lambda - \mu}$$

که عبارتند از مؤلفه‌های e_2 به دست می‌آید.

به همین ترتیب برای به دست آوردن مؤلفه‌های e_3 معادله‌های :

$$x_r^1 - \lambda x_r^r = 0, \quad x_r^r - \frac{1}{\lambda} x_r^\xi = 0$$

$$x_r^1 - \mu x_r^\xi = 1, \quad x_r^r - \frac{1}{\mu} x_r^\xi = 0$$

و برای به دست آوردن مؤلفه‌های e_ξ معادله‌های :

$$x_\xi^1 - \lambda x_\xi^r = 0, \quad x_\xi^r - \frac{1}{\lambda} x_\xi^\xi = 0$$

$$x_\xi^1 - \mu x_\xi^\xi = 0, \quad x_\xi^r - \frac{1}{\mu} x_\xi^\xi = 1$$

را داریم ، که از حل آنها خواهیم داشت :

$$x_r^1 = 1, \quad x_r^r = 0, \quad x_r^r = \frac{1}{\lambda}, \quad x_r^\xi = 0$$

$$x_\xi^1 = \frac{\lambda \mu^r}{\mu - \lambda}, \quad x_\xi^r = \frac{\mu}{\mu - \lambda}$$

$$x_\xi^r = \frac{\mu^r}{\mu - \lambda}, \quad x_\xi^\xi = \frac{\lambda \mu}{\mu - \lambda}$$

که به ترتیب عبارتند از مؤلفه‌های e_r و e_ξ .

قسمت دوم مسأله به روش مشابه حل می‌شود که انجام آن را به عهده خواننده می‌گذاریم .

حل ۱۲۷ - الف - اگر f^* و g^* دو فرم خطی باشند (دو عنصر از F^*) که

مقدار آنها برای هر بردار از Φ برابر با صفر است و λ عنصری از K باشد ، داریم :

$$f^*(x) = g^*(x) = 0 \implies (f^* - g^*)(x) = 0$$

$$f^*(x) = 0 \implies (\lambda f^*)(x) = 0$$

پس F^* یک زیر فضای برداری از E^* است .

ب- مقدار هر فرم خطی f^* از F^* برای هر بردار از Φ صفر است، چون عنصرهای F ترکیب‌های خطی بردارهای Φ هستند، پس مقدار f^* برای هر بردار از F صفر است. وانگهی اگر e_1 برداری از E باشد که به F متعلق نیست و بعد F را p بگیریم و e_2, \dots, e_{p+1} یک پایه از F باشد، بردارهای e_1, e_2, \dots, e_{p+1} وابستگی خطی دارند. پس این بردارها را می‌توان به کمک بردارهای e_{p+2}, \dots, e_n تکمیل کرد به طوری که e_1, \dots, e_n یک پایه از E باشد. در این صورت هر بردار x از E تنها به یک روش به صورت $e = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ نوشته می‌شود. اکنون فرم خطی e^* از

E^* را به طوری که $e^*(x) = x_1$ باشد در نظر می‌گیریم. در این صورت مقدار e^* برای بردارهای e_2, \dots, e_{p+1} برابر با صفر است. پس مقدار e^* برای هر بردار از F صفر است بنابراین e^* به F^* متعلق است و مقدار آن برای e_1 برابر است با ۱ یعنی $e^*(e_1) = 1$. پس برای هر بردار از E مانند e_1 که متعلق به F نباشد، دست کم یک فرم خطی از F^* مانند e^* وجود دارد که برای e_1 صفر نیست. از اینجا نتیجه می‌شود که بردارهای صفرهای مشترک عنصرهای F^* هستند.

پ- فرض می‌کنیم $\dim F^* = q$ و $f_1^*, f_2^*, \dots, f_q^*$ یک پایه از F^* باشد. گسترش خطی E در K^q را که با g نمایش می‌دهیم به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$f_i^*(x) = \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, q$$

در این صورت رتبه گسترش عبارت است از بعد زیرفضای برداری پدید آمده به وسیله فرمهای f_1^*, \dots, f_q^* یعنی برابر با q . اما از طرف دیگر رتبه g برابر است با $\dim E - \dim g^{-1}(0)$ و می‌دانیم که $g^{-1}(0)$ (هسته g) عبارت است از مجموعه صفرهای مشترک عنصرهای F^* یعنی عبارت است از F . و چون $\dim F = p$ پس خواهیم داشت $\dim F + \dim F^* = n$ یعنی $p + q = n$ و یا $q = n - p$

حل ۱۳۱- آشکار است که $\mathcal{B} = (\cos x, \sin x, 1)$ یک پایه از فضای برداری

E است. زیرا $\cos x$ ، $\sin x$ و نایبستگی خطی دارند و هر عنصر از E به صورت یک ترکیب خطی از $\cos x$ ، $\sin x$ و 1 می باشد. سایه عنصرهای پایه \mathcal{B} به وسیله φ و ψ به ترتیب عبارتند از $(1, \cos x, \sin x)$ و $(0, \cos x, -\sin x)$ بنابراین سایه عنصرهای پایه \mathcal{B} به وسیله $\psi \circ \varphi$ و $\varphi \circ \psi$ چنین خواهد بود:

$$\varphi \circ \psi : \quad -\cos x, \sin x, 0$$

$$\psi \circ \varphi : \quad \cos x, -\sin x, 0$$

از اینجا نتیجه می شود که گسترش $\varphi \circ \psi + \psi \circ \varphi$ عبارت است از آندوسر فیسم صفر فضای برداری E . این مطلب را می توان با استفاده از ماتریس های گسترش های φ و ψ نیز به دست آورد. اگر A و B به ترتیب ماتریس های گسترش های φ و ψ نسبت به پایه \mathcal{B} باشند، داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

از ماتریس های A و B نتیجه می شود که ماتریس گسترش $\varphi \circ \psi + \psi \circ \varphi$ یعنی $AB + BA$ ، عبارت است از ماتریس صفر سه سطری و سه ستونی.

حل ۱۳۳ - الف - بنابر قانون ضرب ماتریس ها داریم:

$$A(x)A(y) = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}x & \operatorname{sh}x \\ \operatorname{sh}x & \operatorname{ch}x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{ch}y & \operatorname{sh}y \\ \operatorname{sh}y & \operatorname{ch}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

که در آن:

$$a = \operatorname{ch}x \operatorname{ch}y + \operatorname{sh}x \operatorname{sh}y = \operatorname{ch}(x+y)$$

$$b = \operatorname{ch}x \operatorname{sh}y + \operatorname{sh}x \operatorname{ch}y = \operatorname{sh}(x+y)$$

$$A(x)A(y) = A(x+y)$$

پس:

ب - بنا بر قسمت (الف) داریم :

$$(A(x))^2 = A(x)A(x) = A(x+x) = A(2x)$$

فرض کنیم $n > 2$ و داشته باشیم $A((n-1)x) = A(x)^{n-1}$ در این صورت داریم :

$$A^n(x) = A^{n-1}(x)A(x) = A((n-1)x+x) = A(nx)$$

بنابراین برای $(A(x))^n = A(nx)$ برای هر $n \geq 1$ برقرار است و نکته :

$$A(0) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} 0 & \operatorname{sh} 0 \\ \operatorname{sh} 0 & \operatorname{ch} 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

پس می توان دستور بالا را برای $n=0$ نیز بکاربرد یعنی :

$$(A(x))^0 = A(0x) = A(0) = I_2$$

به علاوه برای هر $x \in \mathbf{R}$ داریم :

$$A(x)A(-x) = A(x-x) = A(0) = I_2$$

پس $A(-x) = (A(x))^{-1}$ از اینجا نتیجه می شود که برای هر $p < \infty$ هر شمارحقیقی

$$[A(x)]^p = [(A(-x))^{-1}]^p = [A(-x)]^{-p} = A(px) \quad \text{داریم}$$

پس به طور خلاصه برای هر $n \in \mathbf{Z}$ داریم :

$$(A(x))^n = A(nx)$$

حل ۱۳۴ - داریم $B^0 = I_3$ و

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و از آنجا :

$$B^r = B^r B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

پس برای هر $n > 3$ داریم $B^n = 0$
برای محاسبه A^n نخست توجه کنیم که :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

یعنی $A = I_3 + B$. چون ماتریس‌های مربع مرتبه ۳ با قانون جمع و ضرب ماتریس‌ها تشکیل یک حلقه می‌دهند و در این حلقه دو عنصر I_3 و B گردش پذیرند، یعنی $I_3 B = B I_3$ پس می‌توان برای آنها دستور دو جمله‌ای را بکاربرد (شماره ۴، ۱، ۹) و در نتیجه نوشت :

$$A^n = (I_3 + B)^n = I_3^n + C_n^1 I_3^{n-1} B + C_n^2 I_3^{n-2} B^2 + \dots + B^n$$

چون برای $n \geq 3$ داشتیم $B^n = 0$ پس :

$$A^n = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2$$

یعنی :

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حل ۱۳۵ - فرض می‌کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ که در آن a, b, c, d و d شماره -

هایی حقیقی هستند. داریم :

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & cb + d^2 \end{bmatrix}$$

از آنجا از برابری $A^2 = A$ معادله‌های زیر نتیجه می‌شود :

$$\begin{cases} a^2 + bc = a & (1) \\ b(a + d) = b & (2) \\ c(a + d) = c & (3) \\ bc + d^2 = d & (4) \end{cases}$$

دو حالت در نظر می‌گیریم :

حالت اول $b = 0$ در این صورت از (۱) نتیجه می‌شود $a^2 - a = 0$ یعنی

$a = 0$ یا $a = 1$ و از (۴) نتیجه می‌شود $d^2 - d = 0$ یعنی $d = 0$ یا $d = 1$.

چون از (۳) نتیجه می‌شود $c(d + a - 1) = 0$ پس اگر $d + a \neq 1$ باشد $c = 0$ و

اگر $d + a = 1$ باشد c دلخواه است. پس جوابها در این حالت عبارتند از ماتریس

های زیر :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$$

که در آن c شماری حقیقی و دلخواه است.

حالت دوم $b \neq 0$ در این صورت از (۲) نتیجه می‌شود $a + d = 1$ و از (۱) حاصل

می‌شود $c = \frac{a - a^2}{b}$. پس جوابها در این حالت ماتریس‌هایی به صورت زیرند :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ \frac{a^2 - a}{b} & 1 - a \end{bmatrix}$$

که در آن $a \in \mathbb{R}$ و $b \in \mathbb{R}^*$

حل ۱۳۶ - چنانچه ماتریس X به صورت $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ فرض شود خواهیم داشت:

$$AX = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+z & 2y+t \\ 2x+z & 2y+t \end{bmatrix}$$

و از آنجا از برابری $AX=A$ دستگاه $\begin{cases} 2x+z=2 \\ 2y+t=1 \end{cases}$ به دست می آید. یعنی

$$\begin{cases} z=2-2x \\ t=1-2y \end{cases}$$

پس جوابهای معادله $AX=A$ ماتریس‌هایی به صورت زیرند:

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ 2-2x & 1-2y \end{bmatrix}$$

که در آن $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$.

هم چنین اگر قرار دهیم $Y = \begin{bmatrix} x' & y' \\ z' & t' \end{bmatrix}$ در این صورت:

$$YA = \begin{bmatrix} x' & y' \\ z' & t' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x'+2y' & x'+y' \\ 2z'+2t' & z'+t' \end{bmatrix}$$

و از آنجا از برابری $YA=A$ دستگاه

$$\begin{cases} x' + y' = 1 \\ z' + t' = 1 \end{cases}$$

نتیجه شود. یعنی:

$$\begin{cases} y' = 1 - x' \\ t' = 1 - z' \end{cases}$$

پس جوابهای معادله ماتریسی $YA=A$ ماتریس‌هایی به صورت زیرند:

$$Y = \begin{bmatrix} x' & 1 - x' \\ z' & 1 - z' \end{bmatrix}$$

که در آن $x' \in \mathbb{R}$, $z' \in \mathbb{R}$

حل ۱۳۷ - الف - فرض می‌کنیم a, a', b, b' و λ شمارهایی

حقیقی باشند. داریم:

$$M(a, b) - M(a', b') = \begin{pmatrix} a - a' & b - b' \\ b - b' & a - a' \end{pmatrix} = M(a - a', b - b')$$

$$\lambda M(a, b) = \lambda \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ -\lambda b & \lambda a \end{bmatrix} = M(\lambda a, \lambda b)$$

$$M(a, b)M(a', b') = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} aa' - bb' & ab' + ba' \\ -(ab' + ba') & aa' - bb' \end{bmatrix} = M(aa' - bb' \text{ و } ab' + ba')$$

بنابراین مجموع و حاصلضرب دو عنصر از E عنصری است از E و ضرب یک اسکالر در

عنصری از E عنصری است از E . پس E یک زیر فضای برداری و یک زیرحلقه از حلقه M است.

برای محاسبه بعد E نخست توجه کنیم که ماتریس های :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

فضای E را پدید می آورند. زیرا داریم $M(a, b) = aI + bJ$ به علاوه I و J نوابستگی خطی دارند، زیرا متناسب نیستند. پس (I, J) یک پایه E است، یعنی $\dim E = 2$.

ϕ - گسترش ϕ گسترشی خطی است. زیرا برای شماره های حقیقی a, b, a', b' و λ داریم :

$$\begin{aligned} \phi[(a+ib) + (a'+ib')] &= \phi[(a+a') + i(b+b')] = M(a+a', b+b') \\ &= M(a, b) + M(a', b') = \phi(a+ib) + \phi(a'+ib') \\ \phi[\lambda(a+ib)] &= \phi(\lambda a + i\lambda b) = M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b) \end{aligned}$$

به علاوه از تعریف ϕ برمی آید که ϕ سورژکتیو است. ϕ انژکتیو نیز هست، زیرا :

$$\phi(a+ib) = 0 \implies M(a, b) = 0 \implies aI + bJ = 0 \implies$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = 0 \implies (a=0 \text{ و } b=0) \implies a+ib=0$$

بنابراین ϕ یک ایزومرفیسم فضای برداری است. به علاوه داریم :

$$\begin{aligned} \phi[(a+ib)(a'+ib')] &= \phi[aa' - bb' + i(ab' + ba')] \\ &= M(aa' - bb', ab' + ba') \\ &= M(a, b) M(a', b') = \phi(a+ib) \phi(a'+ib') \end{aligned}$$

پس ϕ یک ایزومرفیسم حلقه نیز هست.

از آنچه که گذشت نتیجه می شود که E یک حلقه ایزومرف با هیأت C است.

پس E یک هیأت است.

حل ۱۳۸ - ماتریس تعویض پایه (e_1, e_2, e_3) به پایه (e'_1, e'_2, e'_3)

عبارتست از ماتریس :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

از فرض های صورت مسأله نتیجه می شود $e_1 = e'_1 - e'_2 - e'_3$ و $e_2 = e'_2$ و $e_3 = e'_3$ پس :

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پس بنا بر شماره ۹ . ۸ . ۶ ماتریس f در پایه (e'_1, e'_2, e'_3) عبارت است از :

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ -a+b & -b+c & -c+a \\ -a+c & -b+a & -c+b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a+b+c & b & c \\ 0 & -b+c & -c+a \\ 0 & -b+a & -c+b \end{bmatrix}$$

حل ۱۳۹ - الف - داریم $\det B \neq 0$ یعنی ماتریس B وارون پذیر است و

می توان نوشت $C = AB^{-1}$ پس خواهیم داشت :

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

ب - داریم $\det B = 0$ و چون می‌توان از ماتریس B ماتریس وارون پذیر

$$\text{را جدا کرد پس رتبهٔ } B \text{ برابر با } ۲ \text{ است.} \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

آندومرفیسم‌های \mathbb{R}^3 را که ماتریس‌های آنها نسبت به پایهٔ کانونیک $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ همان A, B, C است به ترتیب با f, g, h نمایش می‌دهیم. می‌خواهیم با در دست داشتن آندومرفیسم‌های f و g آندومرفیسم h را به دست آوریم. ستونهای ماتریس B به ترتیب عبارتند از مؤلفه‌های بردارهای $g(e_1), g(e_2)$ و $g(e_3)$ نسبت به پایهٔ \mathcal{E} ، و رتبهٔ این دستگاه بردار، همان طوری که دیده شد، برابر با ۲ است. بین این بردارها بستگی:

$$۲g(e_1) + g(e_2) + 0g(e_3) = 0$$

وجود دارد. برای این که $h \circ g = f$ باشد باید داشته باشیم:

$$۲f(e_1) + f(e_2) + 0f(e_3) = 0$$

که از آن نتیجه می‌شود $0 = k + ۲ + ۱۲$ و یا $k = -۳$. اگر این شرط برقرار باشد معادلهٔ $h \circ g = f$ به صورت:

$$h[g(e_1)] = f(e_1) \quad , \quad h[g(e_2)] = f(e_2)$$

نوشته می‌شود، که می‌توان آنرا به صورت ماتریسی زیر نیز نوشت:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ \\ -۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۸ & ۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$$

از معادلهٔ ماتریسی بالا شش معادلهٔ خطی زیر از ۹ مجهول c_{ij} به دست می‌آید:

$$c_{11} + ۲c_{12} - 0c_{13} = -۲ \quad , \quad ۲c_{11} - c_{12} = ۱$$

$$c_{21} + ۲c_{22} - 0c_{23} = ۸ \quad , \quad ۲c_{21} - c_{22} = ۱$$

$$c_{31} + ۲c_{32} - 0c_{33} = ۴ \quad , \quad ۲c_{31} - c_{32} = ۳$$

$$c_{۳۳}=\gamma \text{ و } c_{۲۳}=\beta \text{ ، } c_{۱۳}=\alpha \quad \text{با فرض}$$

جواب دستگاه بالا به صورت زیر درمی آید (برای حل دستگاه بالامی توانستیم نخست جواب دستگاه ممکن وابسته به این دستگاه را پیدا کنیم و سپس یک جواب ویژه دستگاه را به آن بیفزاییم) :

$$c_{۱۱}=\alpha \text{ ، } c_{۱۲}=\alpha-1 \text{ ، } c_{۲۱}=\beta+2$$

$$c_{۲۲}=\beta+3 \text{ ، } c_{۳۱}=\gamma+2 \text{ ، } c_{۳۲}=\gamma+1$$

بنابراین برای ماتریس C جوابهای بیشماری به صورت زیر خواهیم داشت :

$$C = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha-1 & \alpha \\ \beta+2 & \beta+3 & \beta \\ \gamma+2 & \gamma+1 & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \beta & \beta \\ \gamma & \gamma & \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

حل ۱۴۰ - الف - میدانیم که رتبه هر ماتریس ، با عنصرهای واقع در \mathbb{K} ،

عبارت است از شمارهٔ ماکزیمم ستونهای (یا سطرهای) از ماتریس که نایستگی خطی دارند به شرط این که هرستون را به عنوان برداری از K^n در نظر بگیریم .
در اینجا از ماتریس اولی سه بردار :

$$v_3 = (-4, 0, -1, 4) \text{ ، } v_2 = (-3, 1, 0, 2) \text{ ، } v_1 = (2, 3, -1, 0)$$

از فضای \mathbb{Q}^4 بدست می آید . اما رتبهٔ این ماتریس یعنی شمارهٔ ماکزیمم از این سه بردار که نایستگی خطی دارند . بنابراین رتبهٔ این ماتریس یعنی بعد زیرفضایی از \mathbb{Q}^4 که بوسیلهٔ این سه بردار پدید می آید . اما زیرفضای پدید آمده بوسیلهٔ این سه بردار با زیرفضای پدید آمده بوسیلهٔ سه بردار :

$$v'_3 = v_3 + 2v_1 \text{ ، } v'_2 = 2v_2 + 3v_1 \text{ ، } v'_1 = v_1$$

یکی است (زیرا بردارهای v_1' ، v_2' و v_3' ترکیبی خطی از v_1 ، v_2 ، v_3 هستند).
اما داریم:

$$v_1' = (2, 3, -1, 0), \quad v_2' = (0, 11, -3, 4) \\ v_3' = (0, 11, -3, 4)$$

چنانکه دیده می‌شود از این سه بردار v_1' و v_2' نوابستگی خطی دارند پس رتبه ماتریس مورد نظر ۲ است.

ب - مانند قسمت الف عمل می‌کنیم. در اینجا پنج بردار از \mathbb{Q}^4 داریم که آنها را به ترتیب v_1 ، v_2 ، v_3 ، v_4 و v_5 می‌نامیم. بعد زیر فضای پدید آمده بوسیله این ۵ بردار با بعد زیر فضای پدید آمده بوسیله ۵ بردار زیر یکی است:

$$v_1, \quad v_2' = v_2 - 7v_1, \quad v_3' = v_3 - 5v_1 \\ v_4' = v_4 - 3v_1, \quad v_5' = v_5 + 2v_1 \\ v_3'' = v_4' = (0, 2, -6, -8) \quad \text{چون}$$

پس بعد فضای پدید آمده بوسیله این ۵ بردار برابر است با بعد زیر فضای پدید آمده بوسیله چهار بردار v_1 ، v_2' ، v_3' و v_5' . اما این چهار بردار همان زیر فضایی را پدید می‌آورند که چهار بردار v_1 ، v_2' ، v_3' و $v_4' = v_3' - \frac{1}{3}v_2'$ و v_5' و زیر فضای پدید آمده بوسیله این چهار بردار همان زیر فضای پدید آمده بوسیله چهار بردار زیر است:

$$v_1, \quad v_2', \quad v_3', \quad v_5' = 2v_4' - 5v_3'' \\ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -16 & 2 & 0 \\ 3 & -22 & 3 & 3 \end{array}$$

چنانکه دیده می‌شود این چهار بردار نوابستگی خطی دارند، پس رتبه ماتریس مورد نظر ۴ است.

حل ۱۴۱ - می‌دانیم که رتبهٔ یک ماتریس M بزرگترین شمار درستی است مانند s

به طوری که بتوان از M یک ماتریس مربع مرتبهٔ s با دترمینان مخالف با صفر جدا کرد.
در اینجا داریم :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6$$

پس اگر ماتریس A را در هیأت $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ در نظر بگیریم داریم $\det A = -6 = +4 \neq 0$ و در نتیجه رتبهٔ A ، که ماتریسی است مربع، برابر با ۴ است.

ولی اگر ماتریس A را در هیأت $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ یا هیأت $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ در نظر بگیریم در هر دو حالت داریم $\det A = -6 = 0$. در حالت اول دترمینان ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

که از ماتریس A جدا شده است برابر است با ۱ و در

نتیجه مخالف با صفر است. پس در این حالت رتبهٔ A برابر با ۳ است.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

در حالت دوم ماتریس که از ماتریس A جدا شده است

دترمینانش برابر با $0 \neq 2$ است. پس در این حالت نیز رتبهٔ A برابر با ۳ است.

حل ۱۴۲ - الف - اگر $x \in N(f)$ باشد داریم :

$$f^r(x) = f[f(x)] = 0 \text{ و } f(x) = 0$$

یعنی $x \in N(f^r)$ پس $N(f) \subset N(f^r)$

به همین روش می توان ثابت کرد که $N(f^r) \subset N(f^{r+1}) \subset \dots$

اکنون فرض می کنیم x عنصری از $f^k(E)$ باشد ($k \geq 2$). در این صورت عنصر a از E وجود دارد به طوری که:

$$f^k(a) = x = f^{k-1}[f(a)]$$

از اینجا نتیجه می شود که x سایه عنصر $f(a)$ بوسیله گسترش f^{k-1} است.

پس $x \in f^{k-1}(E) \supset f^k(E)$ و بنابراین

ب = فرض می کنیم $f^2 = 0$ باشد به عبارت دیگر برای هر x متعلق به E داشته باشیم $f[f(x)] = 0$ اگر $y \in f(E)$ باشد عنصر x از E وجود دارد به طوری که

$$f(x) = y \quad \text{پس} \quad f(y) = f^2(x) = 0 \quad \text{یعنی} \quad y \in N(f)$$

بنابراین خواهیم داشت $f(E) \subset N(f)$

به وارون فرض می کنیم $f(E) \subset N(f)$ باشد. چون برای هر x از E داریم

$$f(x) \in f(E) \quad \text{پس} \quad f(x) \in N(f) \quad \text{و در نتیجه خواهیم داشت} \quad f[f(x)] = 0$$

یعنی $f^2 = 0$

حل ۱۴۳ = می دانیم که بعد $f(\mathbb{R}^3)$ برابر است با رتبه ماتریس A . اما به

آسانی دیده می شود که در ماتریس A دوسطر اول (و همچنین دوسطر آخر) متناسب می باشند.

بنابراین از ماتریس A نمی توان در ترمینان مرتبه سوم جدا کرد که مخالف با صفر باشد ولی

می توان در ترمینان مرتبه دومی (به وسیله سطر اول و سطر سوم) جدا کرد که مخالف با صفر

باشد. بنابراین دو تا از سه بردار ستونی ماتریس A نایستگی خطی دارند، پس

$$\dim f(\mathbb{R}^3) = 2$$

$$\dim N(f) = 3 - 2 = 1$$

برای بدست آوردن یک پایه از $N(f)$ قرار می دهیم $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ و معادله

$$AX = 0 \quad \text{را حل می کنیم.}$$

بنابراینچه که دیده شد، در حل معادله ماتریسی $AX=0$ کافی است دو معادله:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$-x_1 + 4x_2 + x_3 = 0$$

را در نظر گرفت. در این صورت از حل این دو معادله خواهیم داشت:

$$\frac{x_1}{0} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{-2}$$

بنابراین هسته f یک زیر فضای برداری یک بعدی از \mathbf{R}^3 است که از بردارهای $(-2\lambda, 2\lambda, 0)$ تشکیل می‌شود. یک پایه از این زیر فضا عبارت است از بردار $X_1(0, 2, -2)$.

حل ۱۴۴- با استفاده از عبارت ماتریس $M(a, b)$ می‌توان درستی همه ویژگیهای یک حلقه جابجایی را بررسی کرد. اما در اینجا ما مسأله را به روش دیگری حل می‌کنیم. داریم:

$$M(a, b) = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & p \end{bmatrix} = aI + bJ$$

که در آن قراردادهایم:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & p \end{bmatrix}$$

پس E عبارت است از مجموعه ماتریسهایی به صورت $aI + bJ$. وانگهی تجزیه ماتریس $M(a, b)$ به صورت $aI + bJ$ یکتاست (اثبات این مطلب آسان است). اکنون برابری زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} M(a, b) + M(a', b') &= aI + bJ + a'I + b'J = (a + a')I + (b + b')J \\ &= M(a + a', b + b') \end{aligned}$$

این برابری یک ایزومرفیسم گروه جمعی \mathbf{R}^2 روی E معین می‌کند. پس مجموعه E دارای یک ساختمان گروه جمعی است. برای بررسی قانون ضرب ماتریس J^2 را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} J^2 &= \begin{bmatrix} -q & p \\ -pq & -q + p^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q & 0 \\ 0 & -q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & p \\ -pq & p^2 \end{bmatrix} \\ &= -q \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & p \end{bmatrix} = -qI + pJ \end{aligned}$$

در نتیجه برای حاصل ضرب دو ماتریس خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} M(a, b) \cdot M(a', b') &= (aI + bJ)(a'I + b'J) = \\ &= aa'I + (ab' + a'b)J + bb'J^2 \\ &= (aa' - qbb')I + (ab' + a'b + bb')J \\ &= M(aa' - qbb', ab' + a'b + pbb') \end{aligned}$$

پس مجموعه E برای قانون ضرب بسته است. به علاوه برابری بالا نسبت به (a, b) و (a', b') متقارن است. بنابراین قانون ضرب ویژگی جابجایی دارد. وجود ویژگی‌های انجمنی و پخشی را می‌توان به آسانی ثابت کرد. به این ترتیب E یک حلقه جابجایی است. وانگهی این حلقه یک‌دار است. زیرا داریم $I = M(1, 0) \in E$ پس برای اینکه E یک هیأت باشد، بایاوبسته است که هر ماتریس $M(a, b)$ از E بجز ماتریس صفر که برای $a=0$ و $b=0$ به دست می‌آید، دارای ماتریس وارونی مانند

$M(a', b')$ در E باشد یعنی داشته باشیم :

$$M(a, b) \cdot M(a', b') = I$$

که از آن دو معادله زیر به دست می‌آید :

$$\begin{cases} aa' - qbb' = 1 \\ ab' + a'b + pbb' = 0 \end{cases}$$

این دستگاه که نسبت به a' و b' خطی است، باید برای هر مقدار a و b (که هر دو باهم صفر نباشند) دارای یک جواب و تنها یک جواب باشد. پس دترمینان :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -qb \\ b & a+pb \end{vmatrix} = a^2 + pab + qb^2$$

همواره باید مخالف با صفر باشد. اما با فرض $a \neq 0$ می‌توان نوشت :

$$\Delta = a^2 \left[1 + p \left(\frac{b}{a} \right) + q \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right]$$

پس برای این که $\Delta \neq 0$ باشد باید کروشه بالا هرگز صفر نشود یعنی داشته باشیم $q < -p$ اگر $a = 0$ و $b \neq 0$ باشد، Δ را چنین می‌نویسیم :

$$\Delta = b^2 \left[q + p \left(\frac{a}{b} \right) + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]$$

و همان نتیجه بالا به دست می‌آید.

بنابراین اگر $q < -p$ باشد حلقه E یک هیات است. در حالتی که

$q \geq -p$ باشد E یک حلقه جابجایی یک‌دار است (در این حالت E یک حلقه انتگرالیست).

حل ۱۴۵ - بعد فضای برداری E را p می‌گیریم. در این صورت داریم :

$$\dim N(u) + \dim u(E) = p$$

پس اگر هسته u یعنی $N(u)$ بر $u(E)$ منطبق باشد داریم $\dim N(u) = \dim u(E)$ و در نتیجه $\dim N(u) = p$ یعنی p زوج است. اکنون قرار می‌دهیم $p = 2n$ و $e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n$ رایک پایه از $N(u)$ می‌گیریم. پس:

$$u(e_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

پایه (e_i) از $N(u)$ را به وسیله بردارهای e_{2n}, \dots, e_{n+1} کامل می‌کنیم به طوری که e_1, e_p, \dots, e_{2n} یک پایه از E تشکیل دهند. در این صورت $u(E)$ به وسیله بردارهای:

$$u(e_1), \dots, u(e_n), u(e_{n+1}), \dots, u(e_{2n})$$

$$u(e_{n+1}), \dots, u(e_{2n}) \quad \text{و یا}$$

پدید می‌آید. چون می‌خواهیم $N(u) = u(E)$ باشد، مثلاً قرار می‌دهیم:

$$u(e_{n+1}) = e_n, \quad u(e_{n+2}) = e_{n-1}, \dots, u(e_{2n}) = e_1$$

در این صورت ماتریس u نسبت به پایه (e_i) ، $1 \leq i \leq 2n$ به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

بنابراین گسترش u وجود دارد. اما این گسترش دوسویی نیست. این مطلب از حل مساله ۱۴۲ نیز نتیجه می‌شود زیرا داریم $u^2 = 0$.

حل ۱۴۶ - داریم :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اکنون اگر پایه (e_1, \dots, e_n) از \mathbf{R}^n را در نظر بگیریم، و گسترشی را که ماتریس A نسبت به این پایه همان ماتریس A است با φ نشان دهیم، داریم :

$$\varphi(e_1) = 0, \quad \varphi(e_2) = e_1, \quad \varphi(e_3) = e_2, \quad \dots, \quad \varphi(e_n) = e_{n-1}$$

پس $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ یک پایه از $\varphi(\mathbf{R}^n)$ است یعنی بعد $\varphi(\mathbf{R}^n)$ برابر است با $n-1$. همچنین داریم :

$$\varphi^2(e_1) = 0, \quad \varphi^2(e_2) = \varphi(e_1) = 0, \quad \varphi^2(e_3) = e_1, \quad \dots, \quad \varphi^2(e_n) = e_{n-2}$$

پس $(e_1, e_2, \dots, e_{n-2})$ یک پایه از $\varphi^2(\mathbf{R}^n)$ است یعنی بعد $\varphi^2(\mathbf{R}^n)$ برابر است با $n-2$. به همین ترتیب ثابت می شود که رتبه ماتریس A^k برای $k < n$ ، برابر است با $(n-k)$. و برای $k \geq n$ داریم $A^k = 0$ یعنی A^k صفر است.

جواب ۱۴۷ - ثابت می شود که $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ و φ_4 بستگی خطی دارند و

داریم :

$$2\varphi_1 + 2\varphi_2 + 2\varphi_3 + \varphi_4 = 0$$

به علاوه رتبه دستگاه (φ_i) برابر با ۳ است. و چون در معادله بالا ضرایب های φ_i همه

مثبت می‌باشند پس دستگاه $\varphi_i(u) > 0$ ، $i = 1, 2, 3, 4$ ، جواب ندارد. یعنی بخش A تهی است.

حل ۱۵۶ - با استفاده از برابری $\cos^2 x = 1 - \cos^2 x$ ، دترمینان اول به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \cos^2 \alpha & \cos^2 \beta & \cos^2 \gamma \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

که دترمینان اول یک دترمینان واندرموند است (مسئله شماره ۱۵۸ را ببینید) و دترمینان دوم برابر با صفر است. پس عبارت بالا برابر است با:

$$2(\cos \beta - \cos \alpha)(\cos \gamma - \cos \alpha)(\cos \gamma - \cos \beta)$$

برای محاسبه دترمینان Δ_n (دترمینان دوم) همه سطرهای Δ_n را با سطر اول جمع می‌کنیم و از $p+nq$ فاکتور می‌گیریم، خواهیم داشت:

$$\Delta_n = (p+nq) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ q & p+q & q & \dots & q \\ q & q & p+q & \dots & q \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q & q & q & \dots & p+q \end{vmatrix}$$

که اگرستون اول را به ترتیب از همه ستونهای دیگر کم کنیم نتیجه می‌شود:

$$\Delta_n = (p+nq) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q & p & 0 & \dots & 0 \\ q & 0 & p & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p & 0 & 0 & \dots & p \end{vmatrix} = (p+nq)p^{n-1}$$

برای محاسبه دترمینان آخر، سطر اول را به ترتیب از همه سطرهای دیگر کم می‌کنیم، در نتیجه یک دترمینان قطری به دست می‌آید که مقدار آن برابر است با $a_1 a_2 \dots a_n$.

حل ۱۵۷ - می‌دانیم که هر چهار بردار دلخواه از فضای برداری \mathbf{R}^3 ، بستگی خطی دارند. یعنی داریم:

$$\vec{\lambda}_1 \vec{v}_1 + \vec{\lambda}_2 \vec{v}_2 + \vec{\lambda}_3 \vec{v}_3 + \vec{\lambda}_4 \vec{v}_4 = \vec{0}$$

که در آن همه λ_i ها با هم صفر نیستند. فرض می‌کنیم $\lambda_1 \neq 0$ و دترمینان $\lambda_1 \Delta$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\lambda_1 \Delta = \begin{vmatrix} \vec{\lambda}_1 \vec{v}_1^T & \vec{\lambda}_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 & \vec{\lambda}_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 & \vec{\lambda}_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_4 \\ \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_2^T & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_4 \\ \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_2 & \vec{v}_3^T & \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_4 \\ \vec{v}_4 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_4 \cdot \vec{v}_2 & \vec{v}_4 \cdot \vec{v}_3 & \vec{v}_4^T \end{vmatrix}$$

اگر در دترمینان بالا سطرهای دوم و سوم و چهارم را به ترتیب در λ_3 ، λ_2 و λ_4 ضرب کنیم و با سطر اول جمع کنیم مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند، و عناصرهای سطر اول آن برابر می‌شوند با:

$$\vec{v}_i (\lambda_1 \vec{v}_1 + \vec{\lambda}_2 \vec{v}_2 + \vec{\lambda}_3 \vec{v}_3 + \vec{\lambda}_4 \vec{v}_4) = \vec{v}_i \cdot \vec{0} = \vec{0}, i=1, 2, 3, 4$$

یعنی عناصرهای سطر اول دترمینان $\lambda_1 \Delta$ صفرند پس $\lambda_1 \Delta = 0$ و در نتیجه $\Delta = 0$

حل ۱۶۸ - الف - زیرگروه A و زیرگروه B ممتاز G است، پس A زیرگروه ممتاز B نیز هست و در نتیجه B/A دارای معنی است. اگر $\xi = zA$ یک عنصر دلخواه G/A باشد $\eta = zB$ یک عنصر G/B است. به علاوه اگر $z' \in zA$ نماینده دیگری از کلاس ξ باشد داریم $\xi = z'A$ و در آن صورت خواهیم داشت $\eta = z'B$ زیرا از $z' \in zA$ نتیجه می‌شود $zB = z'B$. از اینجا نتیجه می‌شود که بستگی $\eta \rightarrow \xi$ یک گسترش G/A در G/B معین می‌کند. این گسترش را f می‌نامیم. پس $f(zA) = zB$ و در

نتیجه f سورژکتیو است. اگر ξ_1 عنصر دیگری از G/A و به صورت $\xi_1 = z_1 A$ باشد داریم :

$$f(\xi_1) = f(z_1 A) = f(z_1) = z_1 B = (z_1 B) = f(\xi) f(\xi_1)$$

پس f یک همومورفیسم گروه است .

چون عنصر بی اثر گروه G/B برابر با B است داریم :

$$\xi = zA \in \text{Ker } f \iff f(\xi) = B \iff zB = B \iff z \in B \iff \xi \in B/A$$

یعنی هسته f برابر با B/A است و چون هسته همومورفیسم یک زیرگروه ممتاز است پس B/A زیرگروه ممتاز G/A است . به علاوه تجزیه کانونیک f بصورت زیر است :

$$\begin{array}{ccc} G/A & \xrightarrow{f} & G/B \\ \downarrow & & \uparrow i \\ & \xrightarrow{h} & \end{array}$$

$$(G/A)/(B/A) \longrightarrow f(G/A) = G/B$$

که در آن h یک ایزومورفیسم است .

ب - ۱ - صفحه معمولی را که از دو محور عمود برهم برخوردار است در نظری می گیریم

و زیر مجموعه G از گروه تبدیلهای صفحه را به روش زیر تعریف می کنیم :

هر عنصر از G یا یک چرخش به مرکز مبدا و یا یک تقارن نسبت به یک محور گذرنده بر مبدا می باشد . برای قانون ترکیب تبدیلهای G یک گروه است . زیرا از طرفی ترکیب دو چرخش یک چرخش ، ترکیب دو تقارن یک تقارن و ترکیب یک تقارن و یک چرخش یک چرخش است . و از طرف دیگر تبدیل همانی ، یک چرخش به زاویه صفر است .

اگر a و b دو تقارن متعلق به G باشند داریم $a^2 = b^2 = I$ که در آن I

تبدیل همانی صفحه است . پس اگر قرار دهیم $A = \{a, I\}$ ، $B = \{b, I\}$

هریک از زیر مجموعه های A و B یک زیر گروه G می باشد و داریم :

$$AB = \{a, b, I, ab\}$$

اما AB یک زیر گروه نیست زیرا $(ab)^2 \notin AB$.

۲ - چون S ممتاز است برای هر عنصر $h \in G$ داریم $hS = Sh$ و از آنجا برای هر عنصر $s \in S$ داریم $hs \in Sh$ و در نتیجه $hs \in SH$ زیرا $Sh \subset SH$. پس $HS \subset SH$ و به روش مشابه خواهیم داشت $SH \subset HS$ ، یعنی $HS = SH$. اثبات این که HS در این حالت یک زیر گروه G و H و S زیر گروه های HS هستند ساده است و به خواننده واگذار می شود.

برای اثبات این که $H \cap S$ زیر گروه ممتاز S است گسترش g گروه H در گروه HS/S را به روش زیر معین می کنیم :

$$\forall h \in H, \quad g(h) = hS$$

چون $H \subset HS$ است بنابراین hS عنصری از HS/S می باشد. چنانکه دیده می شود g سورژکتیو است و داریم $g = \pi \circ i$ که دو آن i انژکسیون کانونیک H در HS و π سورژکسیون کانونیک HS روی HS/S می باشد بنابراین g یک همومرفیسم گروه است. به علاوه داریم :

$$\text{Ker } g = \{h \in H \mid hS = S\} = \{h \in H \mid h \in S\} = H \cap S$$

(منظور از $\text{Ker } g$ هسته g است).

پس $H \cap S$ که هستند همومرفیسم g است یک زیر گروه ممتاز است

۳ - اگر تجزیه کانونیک همومرفیسم g معین شده در بالا را در نظر بگیریم، با توجه به این که g سورژکتیو و $H \cap S$ هسته g است نتیجه خواهد شد که $g(H) \cong H/\text{Ker } g$ و HS/S ایزومرف هستند یعنی $H/H \cap S \cong HS/S$ ایزومرف می باشند.

حل ۱۷۱ - الف - نخست گوشه زد می کنیم که هر مقدار ویژه یک اتومرفیسم، مخالف

با صفر است. مجموعه V تهی نیست زیرا همومرفیسم همانی E متعلق به E می باشد (دترمینان گسترش همانی برابر با یک و هر بردار غیر صفر بردار ویژه آن است). اگر u و v دو عنصر

V باشد و مقدار ویژه u (یا v) وابسته به e را λ (یا μ) بنامیم :

$$\det(u \circ v) = (\det u) (\det v) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$(u \circ v)(e) = u(v(e)) = u(\mu e) = \mu(u(e)) = \mu \lambda e$$

پس e یک بردار ویژه $u \circ v$ است .

از این برابری ها نتیجه می شود که $u \circ v \in V$. به علاوه هر عنصر $u \in V$

وارون پذیر است زیرا دترمینانش مخالف با صفر است . همچنین از $u^{-1} \circ u = \text{id}_E$ نتیجه

می شود $u^{-1}(u(e)) = e$ یعنی $u^{-1}(\lambda e) = e$ و از آنجا $\lambda u^{-1}(e) = e$ پس

$\det u^{-1} = \det u = 1$ و $u^{-1}(e) = \lambda^{-1} e$ یک بردار ویژه u^{-1} است و چون

داریم $u^{-1} \in V$ پس V یک گروه است .

ب- اگر مقدار ویژه f وابسته به e را α بنامیم ماتریس f بصورت

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & \mu \\ 0 & \nu \end{bmatrix}$$

خواهد بود که در آن μ و ν مؤلفه های $f(e')$ می باشند . اما چون $\det f = 1$ است

$$\text{پس } \alpha \nu = 1 \text{ یعنی : } \nu = \frac{1}{\alpha}$$

$$M^r = \begin{bmatrix} \alpha^r & \alpha\mu + \frac{\mu}{\alpha} \\ 0 & \frac{1}{\alpha^r} \end{bmatrix} \text{ پس } M = \begin{bmatrix} \alpha & \mu \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} \text{ و}$$

$$M^n = \begin{bmatrix} \alpha^n & \mu_n \\ 0 & \alpha^{-n} \end{bmatrix} \text{ و } M^r = \begin{bmatrix} \alpha^r & \alpha^r \mu + \mu + \frac{\mu}{\alpha^r} \\ 0 & \frac{1}{\alpha^r} \end{bmatrix}$$

که در آن $\mu_n = \mu(\alpha^n + \alpha^{n-1} + \dots + \alpha^2 + \alpha + 1)$.

پ - مجموعه ماتریسهای وابسته به عنصرهای V نسبت به پایه (e, e') باقانون

ضرب ماتریسها، یک گروه ایزومرف با V است. هریک از این ماتریسها بصورت

$$\begin{bmatrix} \alpha & \mu \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix}$$

است که در آن $(\alpha, \mu) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$. بنابراین $f \rightarrow (\alpha, \mu)$ یک گسترش دوسویی در $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ می باشد و به آسانی دیده می شود که این گسترش یک همومرفیسم گروه است. زیرا:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \mu \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha' & \mu' \\ 0 & \alpha'^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\alpha' & \alpha\mu' + \alpha'^{-1}\mu \\ 0 & (\alpha\alpha')^{-1} \end{bmatrix}$$

حل ۱۷۳ - الف - شرط بایاوبسته برای اینکه ماتریس u قطری باشد اینست که داشته باشیم $u(e_i) = \lambda_i e_i$ که در آن λ عنصری از K است. چون S_i پدید آمده بوسیله e_i است پس شرط بایاوبسته برای اینکه $u(S_i) \subset S_i$ باشد اینست که $u(e_i) \in S_i$ باشد. یعنی $u(e_i)$ متناسب با e_i باشد.

ب- اگر یک بردار ویژه وابسته به λ را x بنامیم داریم:

$$u^m(x) = u^{m-1}(u(x)) = u^{m-1}(\lambda x) = \lambda u^{m-1}(x) = \dots = \lambda^m x$$

پس λ^m یک مقدار ویژه u^m و x یک بردار ویژه وابسته به آن است. حال اگر

$$P(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$$

یک چندجمله ای با ضرایب متعلق به K باشد داریم:

$$P(u)(x) = \sum_{i=0}^n a_i u^i(x) = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i x = P(\lambda)x$$

یعنی $P(\lambda)$ یک مقدار ویژه $P(u)$ و x یک بردار ویژه آنست.

حل ۱۷۴ - مقادیر ویژه یک ماتریس عبارتند از ریشه های چند جمله ای مفسر آن.

پس برای پیدا کردن مقادیر ویژه B چند جمله ای مفسر آنرا تشکیل می دهیم و ریشه های

آنرا حساب می کنیم:

$$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-i \\ 1+i & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 2$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda) - 2 = 0 \implies \lambda^2 - 3\lambda = 0 \implies \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3$$

برای پیدا کردن معادله‌های زیرفضای ویژه وابسته به λ معادله را $B \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

ساده می‌کنیم :

$$B \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + (1-i)x_2 \\ (1+i)x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix}$$

پس برای $\lambda_1 = 0$ داریم :

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 + (1-i)x_2 = 0 \\ (1+i)x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

و برای $\lambda_2 = 3$ داریم :

$$(2) \quad \begin{cases} (1-i)x_2 = 3x_1 \\ (1+i)x_1 = x_2 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x_1 + (1-i)x_2 = 3x_1 \\ (1+i)x_1 + 2x_2 = 3x_2 \end{cases}$$

پس زیرفضای ویژه وابسته به صفر، خط مختلط به معادله‌های (۱) و زیرفضای ویژه وابسته به ۳، خط مختلط به معادله‌های (۲) است. مقادیر ویژه ماتریس A و زیرفضاهای وابسته به آن مقادیر نیز به روش بالا حساب می‌شوند.

حل ۱۷۶- به‌طور کلی برای اینکه ماتریس مربع A از رسته (n, n) با عنصرهای متعلق به هیأت K قابل قطری کردن باشد، باید اویسند است که چند جمله‌ای مفسران دارای n ریشه (ساده یا چندگانه) باشد و مرتبه چندگانگی هر ریشه برابر با بعد زیرفضای ویژه وابسته به آن ریشه باشد.

در اینصورت برای پیدا کردن ماتریس A' به روش زیر عمل می‌کنیم :

۱- ریشه‌های چندجمله‌ای مفسر را حساب می‌کنیم.

۲ - برای هر ریشه مانند λ معادله زیرفضای ویژه وابسته به آن را تشکیل می‌دهیم یعنی

$$Ax = \lambda x \text{ می‌نویسیم.}$$

۳ - در هر یک از زیرفضاهای ویژه یک پایه به دلخواه برمی‌گزینیم.

۴ - ماتریس P را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم :

ستونهای P مؤلفه‌های بردارهایی است که برای هر پایه در هر یک از زیرفضاهای ویژه

انتخاب کرده‌ایم (چنانکه دیده می‌شود) P یکتا نیست زیرا در هر فضای برداری میتوان پایه‌های بیشماری انتخاب کرد).

۵ - P^{-1} را حساب کرده و درستی محاسبات خود را با تشکیل دادن $P^{-1}AP$ بررسی

می‌کنیم. $P^{-1}AP = A'$ باید ماتریسی قطری باشد که عنصرهای قطری آن همان مقادیر

ویژه است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

حال مطالب بالا را در مورد ماتریس حقیقی

انجام می‌دهیم :

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0 \Rightarrow (\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3)$$

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 2x_2 + 3x_3 \end{bmatrix}$$

بنابراین اگر E_1 ، E_2 و E_3 به ترتیب زیرفضاهای ویژه وابسته به λ_1 ، λ_2 و λ_3 باشند داریم :

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = x_2 \\ 2x_1 + 2x_3 = x_3 \end{cases} : E_1 \text{ معادله‌های}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x_1 = 2x_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2x_2 \\ 2x_1 + 3x_3 = 2x_3 \end{cases} \quad : E_2 \text{ های معادله}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 - x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x_1 = 2x_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2x_2 \\ 2x_1 + 3x_3 = 2x_3 \end{cases} \quad : E_3 \text{ های معادله}$$

λ ها مقادیر ویژه ساده و E_1 ، E_2 و E_3 هر کدام یک زیرفضای یک بعدی هستند. پس ماتریس قابل قطری کردن است. در E_1 بردار $\vec{e}_1 = (1, 0, -1)$ ، در E_2 بردار $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ و در E_3 بردار $\vec{e}_3 = (0, 1, 1)$ را بررسی کنیم. پس خواهیم

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و از آنجا} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{داشت:}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{چنانکه دیده می شود}$$

باید توجه داشت که برای اینکه ماتریسی قابل قطری کردن باشد لازم نیست که تمام ریشه ها ساده باشند بلکه کافی است شرایطی که در بالا گفته شد برقرار باشند. مثلاً

$$\text{در مورد ماتریس} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{داریم:}$$

$$\det(A - \lambda I_3) = (1 - \lambda)^2(3 - \lambda)$$

پس $\lambda_1 = 3$ ریشه ساده و $\lambda_2 = 1$ ریشه دوگانه است. داریم:

$$Ax = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$Ax = \lambda_1 x \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{برای } \lambda_1$$

$$Ax = \lambda_2 x \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \text{برای } \lambda_2$$

پس زیرفضای ویژه وابسته به λ_2 یک صفحه است و بعد آن برابر مرتبه چندگانگی λ_2 یعنی ۲ می باشد، پس ماتریس قابل قطری کردن است. در این صفحه دو بردار

$$\vec{e}_1 = (0, 1, -1) \quad \text{و} \quad \vec{e}_2 = (1, 0, -1)$$

را که نسبت به هم نایبستگی خطی دارند برمی گزینیم و در زیرفضای ویژه وابسته به λ_1 بردار $\vec{e}_3 = (1, 1, 0)$ را انتخاب می کنیم. داریم:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

و به سادگی دیده می شود که

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

حل ۱۷۸- در قضیه شماره ۷.۴.۱ با استفاده از روش بازگشت ثابت کردیم که هر ماتریس مختلط مربع M را می توان سه بری کرد یعنی می توان یک ماتریس P طوری پیدا کرد که $P^{-1}MP$ یک ماتریس سه بری باشد و عنصرهای قطر اصلی این ماتریس همان مقادیر ویژه M باشند. البته ماتریس P که بدین روش معین می شود یکتا نیست. راههای مختلفی برای پیدا کردن ماتریس P و ماتریس سه بری مورد نظر وجود دارد که یکی از آنها همان روش اثبات قضیه ۷.۴.۱، یعنی ساختن ستونهای P به روش بازگشت

است. این قضیه که روش سه‌بری کردن یک ماتریس مختلط مربع مرتبه n مانند M را می‌دهد چنین است:

۱ - ریشه‌های چند جمله‌ای مفسر M را حساب می‌کنیم (ممکن است بعضی از ریشه‌ها چندگانه و برخی شمار مختلط باشند).

۲ - یکی از ریشه‌ها مثلاً λ_1 را انتخاب می‌کنیم و زیرفضای برداری E_{λ_1} تشکیل

شده از بردارهایی مانند $b = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ، به قسمی که یک $a = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ بتوان یافت

به‌طوری‌که $(M - \lambda_1 I_n)a = b$ ، را در نظر می‌گیریم و معادله یک هیپرپلان F از C^n را می‌نویسیم به قسمی که داشته باشیم $E_{\lambda_1} \subset F$.

(گاهی ممکن است E_{λ_1} خودش یک هیپرپلان باشد در این صورت تنها معادله E_{λ_1} را می‌نویسیم).

۳ - یک بردار $e_1 \in F$ و یک پایه (e_2, \dots, e_n) از F را در نظر گرفته و ماتریسی را که ستون i ام آن مؤلفه‌های e_i در پایه کانونیک است P_1 می‌نامیم.

۴ - ماتریس $P_1^{-1}MP_1$ را تشکیل می‌دهیم. این ماتریس به صورت:

$$P_1^{-1}MP_1 = \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & N_1 & & M_1 \end{array} \right]$$

خواهد بود. چون مقادیر ویژه این ماتریس همان مقادیر ویژه M هستند (زیرا این ماتریس و M همانندند) پس مقادیر ویژه M_1 همان مقادیر ویژه M هستند تنها مرتبه چندگانگی λ_1 یکی کم شده است. به علاوه اگر گسترش خطی وابسته به M را u بنامیم M_1 ماتریس تحدید u به F (که بنا بر همان قضیه یک گسترش F در F است) در پایه (e_2, \dots, e_n) این گسترش را u' می‌نامیم.

۵ - آنچه را که درباره M و u و پایه کانونیک در بالا گفته شد، در مورد M_1 و u' و پایه (e_2, \dots, e_n) عمل می‌کنیم و یک ماتریس P_2 بدست می‌آوریم. خواهیم داشت:

$$P_r^{-1} M_i P_r = \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_r & & & \\ \hline & & & \\ N_r & & & M_r \end{array} \right]$$

به این ترتیب پس از بار مثلاً i ام ماتریس M_i به صورت سه بری درخواهد آمد.

۶ - ماتریس

$$P = P_1 \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline & & & \\ 0 & & & P_r \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline & & & \\ 0 & & & P_r \end{array} \right] \dots \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline & & & \\ 0 & & & P_i \end{array} \right]$$

ماتریس مورد نظر است.

۷ - برای پیدا کردن ماتریس سه بری مورد نظر $P^{-1}MP$ را تشکیل می دهیم.

توجه: ممکن است درحالاتی (به ویژه درحالت یک ماتریس مرتبه ۳)، درقسمت

۳ پایه F را طوری انتخاب کرد که ماتریس M_i سه بری شود.

حال عملیات بالا را درمورد ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ انجام میدهیم:

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3$$

یعنی $\lambda = 1$ یک مقدار ویژه سه گانه است. پس $\lambda_1 = 1$ را در نظر می گیریم.

اگر گسترش خطی وابسته به A را u بنامیم، بعد زیرفضای

$$E_1 = (u - \text{id}_{\mathbb{C}^3}) (\mathbb{C}^3)$$

برابر با ۲ است. زیرا رتبه ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ برابر با ۲ است. چون

ستون های اول و دوم این ماتریس نایستگی خطی دارند، پس E_1 بوسیله این دو ستون

پدیدآمده است، یعنی هر بردار $(X, Y, Z) \in E_1$ ترکیبی خطی از این دو بردار است

$$E_1 \text{ در نتیجه } = 0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & X \\ 0 & -1 & Y \\ 1 & -3 & Z \end{vmatrix} = 0 \text{ و یا } X - 2Y + Z = 0 \text{ که همان معادله } E_1$$

است. در این جا خود E_1 یک هیپرپلان است پس $F = E_1$. اکنون بردار $e_1 = (1, 0, 0)$ را که متعلق به F نیست در نظر می‌گیریم. دو بردار $e_2 = (1, 0, -1)$ و $e_3 = (1, 1, 1)$ متعلق به F می‌باشند و یک پایه از آنرا تشکیل می‌دهند. داریم:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad P_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

پس

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین در این مسأله داریم $P_1 = P$ و ماتریس سه‌بری مورد نظر عبارتست از

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

حل ۱۸۲ - چند جمله‌ای مفسر: $(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$: $\det(A - \lambda I_3) =$

پس ریشه‌ها به m بستگی ندارند.

$$Ax = \begin{bmatrix} x_1 + mx_2 + mx_3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \quad \text{معادله زیرفضای ویژه } E_2 \text{ وابسته به ریشه ساده } 2 \text{ عبارتست از } Ax = 2x \text{ یعنی}$$

پس بردار $e_1 = (0, 1, -1)$ یک پایه این زیرفضا است.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ m(x_2 + x_3) = 0 \end{cases} \quad \text{زیرفضای ویژه } E_1 \text{ وابسته به ریشه دوگانه } 1 \text{ دارای معادله های}$$

است.

حالت اول: $m = 0$ پس معادله این زیرفضا $x_1 + x_3 = 0$ است و دوبعدی

است و ماتریس قابل قطری شدن است. برای بدست آوردن P کافی است دو بردار

$e_2 = (0, 1, 0)$ و $e_3 = (1, 0, -1)$ را که نایستگی خطی دارند، در این

زیرفضا انتخاب کنیم. در اینصورت خواهیم داشت:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

حالت دوم: $m \neq 0$ در اینحالت E_1 یک خط است که بعد آن یک می باشد

در صورتیکه 1 ، ریشه دوگانه معادله مفسر است. در نتیجه ماتریس قابل قطری شدن نیست.

(حل مسأله ۱۷۶ را ببینید).

حل ۱۸۴ - به طور کلی اگر نرم درجه دوم q بوسیله ماتریس $[a_{ij}]$ تعریف شده

$$\text{باشد برای } x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i \text{ داریم:}$$

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \lambda_i \lambda_j = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} \lambda_j \right) \lambda_i = [\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n] [a_{ij}] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$q(x) = \det {}^t X [a_{ij}] X$$

پس

$$X = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{که در آن است.}$$

حال اگر به جای $[a_{ij}]$ ماتریس $B = A^t A$ را که در آن A یک ماتریس حقیقی رسته (n, n) است، قرار دهیم داریم:

$$q(x) = \det({}^t X A^t A X) = \det({}^t Y Y)$$

که در آن $Y = {}^t A X$. اما Y یک ماتریس رسته $(n, 1)$ است. قرار می‌دهیم $Y = [y_1 \ \dots \ y_n]$ پس $q(x) = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$ و در نتیجه $q(x) \geq 0$ یعنی q مثبت است. به علاوه چون برای یک فرم مثبت هر بردار ایزوتروپ متعلق به هسته است و به وارون، پس اصیل بودن q هم ارز است با $x=0 \Rightarrow q(x)=0$ و این نیز برقرار است. زیرا $y_i = 0, \forall i$ و $q(x)=0 \Rightarrow y_i=0$ و از آنجا ${}^t A X = 0$ ولی چون A وارون پذیر است ${}^t A$ وارون پذیر است. پس از برابری ${}^t A X = 0$ نتیجه می‌شود $X = 0$ یعنی $x=0$ (X ماتریس ستونی است که عنصرهایش مولفه‌های x می‌باشد).

$$\omega_{ij} = i + j - 1 = ij - (i-1)(j-1) \quad \text{حل ۱۸۷-}$$

قرار می‌دهیم $\omega_{ij} = ij$ و $\omega_{ij} = (i-1)(j-1)$ پس $\omega_{ij} = \omega'_{ij} - \omega''_{ij}$ اگر فرم‌های درجه دوم تعریف شده بوسیله ماتریس‌های $[\omega'_{ij}]$ ، $[\omega''_{ij}]$ و $[\omega_{ij}]$ را به ترتیب q' ، q'' و q بنامیم برای هر $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ داریم:

$$q(x) = q'(x) - q''(x)$$

اما:

$$q'(x) = \det({}^t X [\omega'_{ij}] X)$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{که در آن پس:}$$

$$q'(x) = \det \left([x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 4 & \dots & 2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 2n & \dots & n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \right)$$

$$= \det \left([x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n ix_i \\ 2 \sum_{i=1}^n ix_i \\ \dots \\ n \sum_{i=1}^n ix_i \end{bmatrix} \right)$$

$$= x_1 \sum_{i=1}^n ix_i + 2x_2 \sum_{i=1}^n ix_i + \dots = \left(\sum_{i=1}^n ix_i \right) \left(\sum_{i=1}^n ix_i \right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n ix_i \right)^2$$

به همین ترتیب دیده می شود که :

$$q''(x) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} ix_{i+1} \right)^2$$

پس :

$$q(x) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} ix_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n-1} ix_{i+1} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\sum_{i=1}^n ix_i - \sum_{i=1}^{n-1} ix_{i+1} \right) \left(\sum_{i=1}^n ix_i + \sum_{i=1}^{n-1} ix_{i+1} \right) \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{k=1}^n (2k-1)x_k \right)
 \end{aligned}$$

و چنانکه دیده می‌شود q حاصلضرب دوم فرم خطی است.

حل ۱۹۱- الف - نخست گوشزد می‌کنیم که هر فرم خطی یاسورژکتیو یا صفر است.

اینکه فرض می‌کنیم φ فرم دوخطی وابسته به q باشد. گسترش φ_y یک فرم خطی روی \mathbf{R}^n است که صفر نیست زیرا $\varphi(y, y) = q(y) \neq 0$ هسته φ_y را H می‌نامیم. داریم:

$$x \in H \iff \varphi_y(x) = 0 \iff \varphi(x, y) = 0 \iff (x \text{ بر } y \text{ عمود است})$$

اما چون φ_y سورژکتیو است داریم $\mathbf{R}^n/H \simeq \mathbf{R}$ و از آنجا $n - \dim H = 1$ یعنی $\dim H = n - 1$. میدانیم که $H \oplus \mathbf{R}^n/H = \mathbf{R}^n$ اما \mathbf{R}^n/H یک فضای یک بعدی و ایزومرف با F است (مستقیماً نیز میتوان ثابت کرد که $H \oplus F = \mathbf{R}^n$ اثبات این مطلب به خواننده توصیه می‌شود).

ب - اگر $q(y)$ صفر باشد دو حالت پیش می‌آید. یا گسترش φ_y تعریف شده در (الف) صفر است. در این صورت برای هر x داریم $\varphi_y(x) = 0$ یعنی x بر y عمود است. یا اینکه φ_y صفر نیست. در این صورت مانند (الف) ثابت می‌شود که هسته φ_y که همان مجموعه بردارهای عمود بر y است، یک زیرفضای $n - 1$ بعدی است. البته در این حالت y متعلق به این هسته است.

حل ۱۹۲- الف - می‌دانیم که مجموعه تمام دنباله‌های شمارهای مختلط یک فضای برداری F روی هیأت \mathbf{C} است که در آن قانون جمع و ضرب در اسکالر بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$(x_i)_{i \in \mathbf{N}^*} + (y_i)_{i \in \mathbf{N}^*} = (x_i + y_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$$

$$\lambda(x_i)_{i \in \mathbf{N}^*} = (\lambda x_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$$

پس کافی است ثابت کنیم E یک زیرفضای برداری از F است. اگر $x = (x_i)$ و $y = (y_i)$ عنصرهایی از E و λ و μ دو اسکالر دلخواه باشند قراری دهیم $z = \lambda x + \mu y$. چون برای هر دو شمار مختلط u و v داریم: $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$ پس

$$\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda x_i + \mu y_i|^2 \leq 2(|\lambda|^2 \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 + |\mu|^2 \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2) < +\infty$$

بنابراین $\lambda x + \mu y \in E$ و در نتیجه E یک زیرفضای برداری از F است.

ب- نخست از بستگی $\overline{x_n y_n} = \frac{1}{4} [(x_n + \overline{y_n})^2 - (x_n - \overline{y_n})^2]$ نتیجه می شود

که وقتی (x_n) و (y_n) دو عنصر از E باشند داریم $\sum_{i=1}^{\infty} \overline{x_n y_n} < \infty$ پس $((x_n) | (y_n))$

دارای معنی است. به علاوه به سادگی دیده می شود که:

$$(1) \quad \forall x = (x_n), y = (y_n), z = (z_n) \in E : (x + y | z) = (x | y) + (x | z)$$

$$(2) \quad \forall x = (x_n), y = (y_n) \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda x | y) = \lambda(x | y)$$

$$(3) \quad \forall x = (x_n), y = (y_n) \in E : (x | y) = \overline{(y | x)}$$

پس $(0 | 0) = 0$ یک فرم هرمیتی است. به علاوه $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \geq 0$ پس فرم

مثبت است و در نتیجه E یک فضای تقریباً هیلبرتی مجزا است (اصیل بودن این فرم آشکار است).

پ- میدانیم که « f هرمیتی است» بدین معنی است که f یک گسترش خطی E

در E است و $f^* = f$ و یا به عبارت دیگر f خطی است و برای هر x و y متعلق به E داریم:

$$(f(x) | y) = (x | f(y))$$

اگر سری $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$ همگرا باشد سری $\sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{x_i}{i} \right|^2$ نیز همگرا است. پس f یک گسترش

در E است و خطی بودن آن نیز آشکار است. اگر $x = (x_i)$ و $y = (y_i)$ باشد داریم:

$$(f(x) | y) = \left(\left(\frac{x_n}{n} \right) \middle| (y_n) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n y_n}{n}$$

$$(x | f(y)) = \left((x_n) \middle| \left(\frac{y_n}{n} \right) \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_n y_n}{n} \quad \text{و}$$

پس f هرمیتی است.

ت- هنگامی که می‌گوییم آندومرفیسم g نرم را پایدار نگه‌میدارد یعنی برای هر x داریم $\|x\| = \|g(x)\|$.

اما:

$$\begin{aligned} \|g(x)\|^2 &= (g(x) | g(x)) = ((\eta_i) | (\eta_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i^2 \\ &= \eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots = x_1^2 + x_2^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \|x\|^2 \end{aligned}$$

برای اینکه g همانی باشد لازم است که g وارون‌پذیر و در نتیجه سورژکتیو باشد. اما g سورژکتیو نیست. زیرا اگر قرار دهیم $(\eta_n) = (1, 0, 0, \dots)$ این دنباله یک‌عنصر از E است و هیچ‌عنصری از E مانند x وجود ندارد به‌قسمی که $g(x) = (\eta_n)$ باشد. پس g همانی نیست.

حل ۱۹۴ - نخست یادآوری می‌کنیم که نمیتوان دو ماتریس مربع A و B با $AB - BA = I_n$ عنصرهای متعلق به یک هیأت K و از رسته (n, n) یافت به‌قسمی که $n \geq 1$ باشد. زیرا اثر ماتریس طرف اول این برابری صفر و اثر ماتریس طرف دوم برابر $n \cdot 1$ خواهد بود.

الف - اگر بعد E با پایان و برابر با n باشد و ماتریس وابسته به f را B و ماتریس

وابسته به g را A بنامیم از بستگی $g \circ f - f \circ g = \text{id}_E$ نتیجه می‌شود $AB - BA = I_n$ و این غیرممکن است. پس بعد E بی‌پایان است.

ب- برای اینکه f انژکتیو باشد بایاویسند است که هسته‌اش صفر باشد. اگر x عنصری متعلق به هسته f باشد داریم:

$$\begin{aligned} \|g(x)\|^2 &= (g(x) | g(x)) = (f(g(x)) | x) = ((f \circ g)(x) | x) \\ &= ((g \circ f - \text{id}_E)(x) | x) \\ &= (g(f(x)) | x) - (x | x) = -\|x\|^2 \end{aligned}$$

زیرا $f(x) = 0$ است. پس بطور خلاصه $\|g(x)\|^2 = -\|x\|^2$ و از آنجا $x = 0$ انژکتیو است.

پ- h ترکیب دو گسترش خطی و در نتیجه خطی است. به علاوه:

$$h^* = (g \circ f)^* = f^* \circ g^* = (g^*)^* \circ g^* = g \circ f = h$$

پس h یک گسترش هرمیتی است.

حل ۲۰۱ - فرض می‌کنیم E یک فضای برداری مختلط و f یک فرم هرمیتی

غیرصفر روی E باشد.

اگر هیچ بردار از E ایزوترپ نباشد برای هر $x \in E$ خواهیم داشت $f(x, x) = 0$.

در این صورت از برابری:

$$0 = f(x+y, x+y) = f(x, x) + f(x, y) + \overline{f(x, y)} + f(y, y)$$

نتیجه می‌شود که برای هر x و y متعلق به E برابری $f(x, y) + \overline{f(x, y)} = 0$

برقرار است. اگر در این برابری بجای x عنصر tx را بگذاریم و قرار دهیم $u = f(x, y)$

خواهیم داشت:

$$tu + \overline{tu} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{C}$$

چون بنا بر فرض f مخالف با صفر است x و y را می‌توان به قسمی برگزید که $u \neq 0$ باشد.

اگر t را برابر u^{-1} بگیریم خواهیم داشت:

$$1 + 1 = 0$$

و این غیرممکن است. پس دست کم یک بردار ایزوتروپ در E برای f وجود دارد.

حل ۲۰۳ - الف - چون $u \circ u^* = u^* \circ u$ است داریم :

$$\begin{aligned} u(x) = 0 &\implies u^*(u(x)) = 0 \implies u(u^*(x)) = 0 \implies (uu^*(x) \mid x) = 0 \\ &\implies (u^*(x) \mid u^*(x)) = 0 \implies \|u^*(x)\|^2 = 0 \implies u^*(x) = 0 \end{aligned}$$

بدین ترتیب ثابت می شود که $\text{Ker } u \subset \text{Ker } u^*$ و به روش مشابه میتوان دید که $\text{Ker } u^* \subset \text{Ker } u$ و از آنجا $\text{Ker } u = \text{Ker } u^*$.

ب- اگر λ یک مقدار ویژه u باشد قرار میدهم $v = u - \lambda \text{Id}_E$. اگر x یک بردار ویژه وابسته به λ باشد داریم :

$$\begin{aligned} u(x) = \lambda x &\iff \exists x \neq 0, (u - \lambda \text{Id}_E)(x) = 0 \\ &\iff v(x) = 0 \iff x \in \text{Ker } v \end{aligned}$$

پس زیرفضای ویژه وابسته به λ برابر با $\text{Ker } v$ میباشد. به علاوه با توجه به اینکه $v^* = u^* - \bar{\lambda} \text{id}_E$ است با تبدیل v به v^* در آنچه که گذشت نتیجه می شود که زیرفضای ویژه u^* وابسته به مقدار ویژه $\bar{\lambda}$ برابر با $\text{Ker } v^*$ است. وانگهی به آسانی دیده می شود که $v^* \circ v = v \circ v^*$ بنابراین بنابر (الف) داریم $\text{Ker } u = \text{Ker } v^*$ پس اگر λ مقدار ویژه u باشد $\bar{\lambda}$ مقدار ویژه u^* است.

حل ۲۰۴ - میدانیم که اگر M یک ماتریس هرمیتی (متقارن) باشد و بتوان M

را قطری کرد یعنی بتوان ماتریس وارون پذیری مانند P پیدا کرد که $P^{-1}MP$ ماتریسی قطری باشد، در آن صورت میتوان P را یک ماتریس یکه ای (متعامد) اختیار کرد، یعنی به طوری که داشته باشیم $P^{-1} = {}^t P$. همانطور که در حل مسأله ۱۷۶ دیدیم برای پیدا کردن P باید یک پایه تشکیل شده از بردارهای ویژه A را پیدا کنیم. برای اینکه P متعامد باشد کافی است که این پایه یک پایه یکه ای متعامد باشد (قضیه). اما داریم :

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} v - \lambda & -2 & 1 \\ -2 & 10 - \lambda & -2 \\ 1 & -2 & v - \lambda \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} v - \lambda & -2 & -1 \\ -2 & 10 - \lambda & 2 \\ 1 & -2 & -v + \lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & -1 \\ 0 & 10-\lambda & 2 \\ -(7-\lambda) & -2 & -7+\lambda \end{vmatrix} \\
 &= - \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & -1 \\ 0 & 10-\lambda & 2 \\ 0 & -4 & -8+\lambda \end{vmatrix} = -(7-\lambda)[(10-\lambda)(-8+\lambda)+8] \\
 &= -(7-\lambda)(\lambda-7)(12-\lambda) = (7-\lambda)^2(12-\lambda)
 \end{aligned}$$

پس $\lambda_1 = 7$ یک ریشه دوگانه و $\lambda_2 = 12$ یک ریشه ساده است.

معادله زیرفضای ویژه وابسته به λ_1 عبارت است از:

$$(1) \quad x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

و معادله‌های زیرفضای ویژه وابسته به λ_2 عبارتند از:

$$(2) \quad \begin{cases} x_2 = -2x_1 \\ x_3 = 0x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

در (1) دو بردار عمودبرهم $\vec{e}_1 = (1, 0, -1)$ و $\vec{e}_2 = (1, 1, 1)$ را برمی‌گزینیم

و در (2) بردار $\vec{e}_3 = (1, -2, 1)$ را که بردار بردار \vec{e}_1 و \vec{e}_2 عمود است انتخاب

می‌کنیم. پس $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ یک پایه متعامد است. از این پایه یک پایه یک‌ای

متعامد می‌سازیم یعنی قرار می‌دهیم:

$$\vec{e}'_1 = \frac{\vec{e}_1}{\sqrt{(\vec{e}_1 | \vec{e}_1)}} = \frac{\vec{e}_1}{\sqrt{2}}, \quad \vec{e}'_2 = \frac{\vec{e}_2}{\sqrt{(\vec{e}_2 | \vec{e}_2)}} = \frac{\vec{e}_2}{\sqrt{3}},$$

$$\vec{e}'_3 = \frac{\vec{e}_3}{\sqrt{(\vec{e}_3 | \vec{e}_3)}} = \frac{\vec{e}_3}{\sqrt{6}}$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$. P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

به آسانی دیده می‌شود که

فهرست نشانه‌ها

$\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$: ۲.۱.۱
$x \in E, x \notin E$: ۳.۱.۱
\emptyset	: ۱.۱.۴
$\{x\}, \{x, y\}$: ۴.۱.۱
$E \subset F, F \supset E$: ۱.۲.۱
$E \cap F, E \cap F \cap G$: ۱.۳.۱
$E \cup F, E \cup F \cup H$: ۲.۳.۱
$E - A, \complement_E A, \complement A$: ۳.۳.۱
$X \times Y$: ۲.۵.۱
$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$: ۴.۵.۱
X^n	: ۵.۵.۱
$x \rightarrow f(x)$: ۱.۶.۱
id_E	: ۲.۶.۱
$f: X \rightarrow Y, X \xrightarrow{f} Y$: ۳.۶.۱
$g \circ f, gf$: ۱.۷.۱
$f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1$: ۳.۷.۱
f^n	: ۴.۷.۱
f^{-1}	: ۲.۸.۱
$f(A)$: ۱.۹.۱
$f^{-1}(B), f^{-1}(b)$: ۲.۹.۱
$(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_i)_{1 \leq i \leq n}$: ۱.۱۰.۱

$(x_1, x_2, \dots), (x_i)_{i \geq 1}$: ۳.۱۰.۱
$(x_i)_{i \in I}, (x_i)$: ۳.۱۰.۱
$\bigcup_{i \in I} X_i, \bigcap_{i \in I} X_i$: ۴.۱۰.۱
$n \equiv n' \pmod{a}$: ۲.۱۱.۱
xRy	: ۳.۱۱.۱
E/R	: ۱۰.۱۱.۱
$x \leq y, y \geq x, x < y, y > x$: ۱.۱۳.۱
$[a, b],]a, b[, [a, b[,]a, b], [a, +\infty[,]a, +\infty[,]-\infty, a],]-\infty, a[,]-\infty, +\infty[$: ۰.۱۳.۱
$\sup Y, \inf Y$: ۶.۱۴.۱
$\sup_{x \in E} f(x), \inf_{x \in E} f(x)$: ۱۰.۱۴.۱
C_n^p	: ۶.۱۵.۱
$x \cdot y, xy, x+y$: ۳.۱.۲
$x_1 x_2 \cdots x_n, \prod_{1 \leq i \leq n} x_i, x^n$: ۱۲.۰.۲ و ۴.۱.۲
$x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \sum_{1 \leq i \leq n} x_i, nx$: ۴.۱.۲
AB, xB, Bx	: ۶.۱.۲
$A+B$: ۶.۱.۲
\setminus, \circ	: ۴.۴.۲
x°	: ۰.۴.۲
$x^{-1}, -x$: ۷.۰.۲
aZ	: ۲.۲.۳

G/H	: ۳.۴.۳
$\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$: ۰.۳.۴ و ۴.۴.۳
A/B	: ۳.۳.۴
$K[X]$: ۸.۱.۰
$\deg P$: ۱.۲.۰
\bar{P}	: ۱.۱۲.۰
i	: ۰.۱۰.۰
$K(x)$: ۱.۱.۶
$K[X, Y]$: ۴.۱.۷
$K[X_1, \dots, X_n]$: ۰.۱.۷
$GL(E)$: ۳.۴.۸
$\mathcal{L}(E, F)$: ۱.۱۲.۸
E^*	: ۲.۱۳.۸
$\langle f, x \rangle$: ۳.۱۳.۸
M	: ۳.۳.۱۶ و ۶.۱۰.۸
${}^t u$: ۱.۱۶.۸
I_n	: ۲.۴.۹
${}^t X$: ۱.۶.۹
ε_π	: ۱.۴.۱۰
$\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)$: ۱.۴.۱۰
$\det u$: ۲.۰.۱۰
$\det M$: ۱.۶.۱۰
$P+x$: ۱.۷.۱۲

$Q-P$: ۱۰.۷.۱۲
$SL(F)$: ۳.۲.۱۳
\bar{F}	: ۷.۲.۱۷
$(x y)$: ۶.۴.۱۷
\bar{M}	: ۶.۵.۱۷
$f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_p$: ۸.۲.۱۸ و ۳.۱.۱۸
$\overline{f \wedge g}$: ۱.۲.۱۸

فهرست الفبائی

بخش: ۱.۲.۱

- انگاری: ۷.۱۵.۵
- پایدار: ۵.۱.۲
- حقیقی: ۷.۱۵.۵
- درست: ۴.۲.۶
- بخشیاب: ۴.۲.۴
- برابری بزو: ۶.۴.۵ و ۴.۲.۳
- بردار: ۲.۷.۱۲ و ۲.۱.۸
- بردارهای متناسب: ۳.۷.۰۸
- بزرگترین بخشیاب مشترك: ۶.۴.۵
- بزرگترین عنصر: ۲.۱۴.۱
- بستگی دوتایی: ۱.۱۱.۱

- ترتیبی: ۱.۱۳.۱
- خطی (بردار): ۲.۷.۰۸
- هم‌ارزی: ۳.۱۱.۱
- بسط یک دترمینان: ۲.۸.۱۵

- بعد: ۳.۱.۱۲، ۳.۱۵.۸
- بهم‌بافته (پایه): ۶.۳.۱۸
- بی‌دوال (فضا): ۱.۱۴.۸

پ

- پاره خط: ۱.۶.۱۲
- پایا (زیرگروه): ۷.۳.۱۳

پایاهای یک فرم درجه دوم نسبت به یکدیگر:

۲.۹.۱۷

الف

- آدژون (گسترش): ۱.۵.۱۷ و ۲.۹.۱۶
- آدژون (ماتریس): ۶.۵.۱۷
- آراینده‌های (مختصات) یک نقطه: ۱۶.۷.۱۲
- (مؤلفه‌های) یک بردار: ۵.۸.۸

آرگومان: ۱۵.۱۵.۵

آندومرفیسم: ۷.۶.۲

اتومرفیسم: ۳.۴.۸، ۷.۶.۲

اتومرفیسم درونی: ۳.۳.۱۳

اثر: ۶.۲.۱۴

اجتماع: ۴.۱۵.۱ و ۲.۳.۱

اسکالر: ۲.۱.۸

افزایشی (تابع): ۴.۱۳.۱

انتقال: ۱۴.۷.۱۲ و ۸.۱.۲

انجمنی (قانون ترکیب): ۱.۲.۲

انژکتیو: ۱.۸.۱

انگاری محض (شمار): ۷.۱۵.۵

انورسیون: ۲.۱.۱۵

ایدال: ۳.۲.۴

ایزوترپ: ۱.۲.۱۷ و ۴.۳.۱۶

ایزومرف (مجموعه‌های): ۵.۶.۲

ایزومرفیسم: ۳.۴.۸ و ۵.۶.۲

ب

بازتابی: ۳.۱۱.۱

- پایه : ۱.۸.۸ و ۱۶.۷.۱۲
- باسوی مثبت ، منفی : ۴.۱۱.۱۰
- های باسوی مخالف : ۱.۱۱.۱۰
- دوال : ۴.۵.۱۶ و ۸.۱۳.۸
- کانونیک K^n : ۳.۸.۸
- های هم سو : ۱.۱۱.۱۰
- پوش کوژ : ۲.۶.۱۲
- ترکیب : ۶.۱۵.۱
- خطی : ۹.۲.۸
- (گسترش) : ۳.۷.۱ و ۱.۷.۱
- تصویر : ۵.۵.۸
- تقریباً هیلبرتی : ۶.۴.۱۷
- تماماً مرتب (مجموعه) : ۳.۱۳.۱
- تهی (مجموعه) : ۴.۱.۱

ت

- تابع : ۱.۶.۱
- آفین : ۱۰.۷.۱۲ و ۱۲.۴.۱۲
- افزایشی : ۴.۱۳.۱
- با متغیر حقیقی : ۲.۶.۱
- چند جمله ای : ۳.۴.۷ و ۵.۸.۵
- حقیقی : ۲.۶.۱
- کاملاً افزایشی (کاهشی) : ۴.۱۳.۱
- کاهشی : ۴.۱۳.۱
- متقارن : ۷.۱۱.۵
- یک نوا : ۴.۱۳.۱
- جابجایی (قانون ترکیب) : ۱.۳.۲
- جفت : ۱.۵.۱
- جواب صفر : ۱.۱.۱۱

ت

- چند جمله ای : ۲.۱.۵ و ۲.۱.۷
- های ساده نشدنی : ۱.۷.۵
- های متناسب : ۳.۴.۵
- های همگن : ۳.۳.۷
- هایی که نسبت به هم اولند :
- ۶.۵.۵ و ۱.۵.۵
- یگانی : ۱.۲.۵
- تبدیل : ۳.۱۵.۱ و ۱.۸.۱
- فرد ، زوج : ۵.۱.۱۵
- تجزیه کانونیک یک گسترش : ۲.۱۲.۱
- کسر به کسرهای ساده : ۱.۳.۶
- تحدید : ۲.۶.۱
- ترانسپوزیون یک گسترش خطی : ۱.۱۶.۸
- یک ماتریس : ۱.۶.۹
- ترانسپوزیسیون : ۸.۱.۱۵

ح

- حاصلضرب اسکالر کانونیک : ۴.۱.۱۶
- برداری : ۱.۱۳.۱۵
- دوبخش : ۶.۱.۲
- دو عنصر : ۳.۱.۲
- دو ماتریس : ۸.۳.۹
- دو مجموعه : ۴.۵.۱ و ۲.۵.۱
- ترتیب : ۲.۱۵.۱

- حاصلضرب خارجی فرمهای چند خطی :
۸۰۲۰۱۸ و ۳۰۱۰۱۸
- مختلط : ۲۰۱۲۰۱
حلقه : ۱۰۱۰۴
- انتگرال : ۱۰۶۰۴
- جابجایی : ۱۰۱۰۴
- خارج قسمت : ۳۰۳۰۴
- یکهدار : ۱۰۱۰۴
- خ
- خارج قسمت : ۲۰۱۴۰۵ و ۱۰۳۰۵
خانواده : ۳۰۱۵۰۱
- مجموعه ها : ۴۰۱۵۰۱
خط : ۳۰۱۰۱۲ و ۱۱۰۱۰۰۸
خطی (p خطی) : ۱۰۱۸۰۸
- د
- داخل (نقطه) : ۵۰۱۳۰۱
دترمینان یک دستگاه بردار : ۱۰۴۰۱۵
- یک گسترش آفین : ۱۳۰۴۰۱۲
- یک گسترش خطی : ۲۰۵۰۱۵
- یک ماتریس مربع : ۱۰۶۰۱۵
درجه : ۱۰۳۰۷ و ۱۰۲۰۵
درجه دوم (فرم) : ۲۰۲۰۱۶
دستگاه خطی همگن : ۱۰۱۰۱۱
- کرامر : ۲۰۲۰۱۱
- همگن وابسته : ۱۰۱۰۱۱
دنباله با پایان : ۱۰۱۵:۱
- بی پایان : ۲۰۱۵۰۱
دوال : ۲۰۱۳۰۸
دوخطی (فرم) : ۲۰۱۷۰۸
دوسویی (گسترش) : ۱۰۸۰۱
- ر
- راستا : ۳۰۱۰۱۲ و ۹۰۷۰۱۲
رتبه یک دستگاه خطی : ۱۰۳۰۱۱
- یک گسترش خطی : ۲۰۱۱۰۸
- یک ماتریس : ۹۰۲۰۹
ریشه دوگانه : ۴۰۹۰۵
- ساده : ۴۰۹۰۵
- (جواب) یک چند جمله ای : ۱۰۹۰۵
- های π ام یک شمارمختلط : ۲۰۱۵۰۵
- یک معادله : ۱۰۹۰۵
- ز
- زیرحلقه : ۱۰۲۰۴
زیرفضاهای برداری متمم : ۲۰۵۰۸
زیرفضای آفین : ۱۰۱۰۱۲ و ۹۰۷۰۱۲
- برداری : ۱۰۲۰۸
- برداری پدید آمده : ۱۱۰۲۰۸
زیرگروه : ۱۰۲۰۳
زیرگروه پدید آمده بوسیله یک عنصر : ۵۰۲۰۳
زیرمجموعه : ۱۰۲۰۱
- س
- سایه : ۱۰۶۰۱ و ۱۰۹۰۱ و ۱۴۰۱۵۰۵
- مستقیم : ۱۰۹۰۱
- وارون : ۲۰۹۰۱

ف

- فاصله : ۰.۱۳.۱
- بسته ، باز ، نیم باز : ۰.۱۳.۱
- فرم اصیل : ۰.۴.۱۶ و ۶.۲.۱۷
- چند خطی متناوب : ۱.۲.۱۵
- خطی : ۱.۱۳.۸
- ساده شده : ۴.۱.۶
- هرمیتی کانونیک : ۱۵.۱.۱۷
- فرمول انتریپلاسیون لاگرانژ : ۲.۱۵.۵
- اولر : ۸.۶.۷
- تیلور : ۶.۶.۷ و ۵.۱۳.۵
- دو جمله ای : ۸.۱.۴ و ۹.۱.۴
- کرامر : ۳.۲.۱۱
- سوارر : ۱۸.۱۵.۵
- فضای آفین : ۱.۷.۱۲
- برداری : ۱.۱.۸
- برداری حاصلضرب : ۱.۶.۸ و ۵.۶.۸
- برداری حقیقی : ۲.۱.۸
- برداری حقیقی سودار : ۴.۱۱.۱۵
- برداری خارج قسمت : ۲.۳.۸
- برداری دارای بعد نا پایان : ۲.۹.۸
- برداری مختلط : ۲.۱.۸

ق

- قانون ترکیب : ۱.۱.۲
- جمعی : ۳.۱.۲
- ضربی : ۳.۱.۲

سایه وارون یک فرم چندخطی : ۱.۲.۱۵

سمپلکتیک (پایه) : ۱.۳.۱۸

سنجیدنی (عنصرهای یک مجموعه مرتب) :

۳.۱۳.۱

سورژکتیو (گسترش) : ۱.۸.۱

ش

- شبه صفحه (هیپرپلان) : ۱۱.۱۵.۸
- شمار طبیعی : ۲.۱.۱
- گویا : ۲.۱.۱
- مختلط : ۲.۱۵.۵
- های درست برابر با مقیاس : ۲.۱۱.۱

ص

- صفحه : ۳.۱.۲۲ و ۱۱.۱۵.۸
- صورت مثلثاتی یک شمار مختلط : ۱۵.۱۵.۵
- ضریب بزرگترین درجه یک چند جمله ای :
- ۱.۲.۵
- یک چند جمله ای : ۲.۱.۷ و ۲.۱.۵

ع

- علامت : ۴.۱.۱۵
- عمودبرهم (بردارها) : ۱.۳.۱۶ و ۱.۲.۱۷
- ۱.۳.۱۸
- عنصر بی اثر : ۱.۴.۲

- های یک ماتریس : ۱.۱.۹

- یک مجموعه : ۱.۱.۱

- یکه : ۱.۱.۴

غیراصیل : ۲.۴.۱۶ و ۴.۲.۱۷ و ۳.۳.۱۸

- قرینه (عنصر) : ۱.۵.۲
 قطراصلی : ۳.۱.۹
 قضیه دالامبر - گوس : ۱.۱.۱۵
 - فرما : ۱.۱۵.۴
 - ویلسون : ۱۱.۹.۵
 قطب : ۶.۱.۶
ک
 کران بالا (پائین) : ۱۰.۱۴.۱ و ۳.۱۴.۱
 کراندار (مجموعه ، تابع) : ۱۰.۱۴.۱
 کسر ساده نوع اول (دوم) : ۲.۵.۶
 - گویا : ۱.۱.۶
 کلاس راست ، چپ : ۳.۳.۳
 - نسبت به یک زیر گروه ممتاز : ۲.۱.۱۳
 - هم ارزی : ۶.۱۱.۱
 کناره بالا (پائین) : ۱.۱۴.۱
 کوچکترین عنصر : ۲.۱۴.۱
 - مضرب مشترک : ۲.۶.۵
 کوژ (مجموعه) : ۱۲.۷.۱۲ و ۲.۶.۱۲
 کوفاکتور : ۱.۸.۱۵
گ
 گرانیگاه : ۱۱.۷.۱۲ و ۱.۵.۱۲
 گردش پذیر (عنصرهای) : ۱.۳.۲
 گروه : ۱.۱.۳
 - آفین : ۹.۴.۱۲
 - اتومرفیسمهای یک گروه : ۱.۳.۱۳
 - جابجایی : ۱.۱.۳
 - خارج قسمت : ۳.۴.۳
 - خطی : ۳.۴.۸
 - شماره‌های با مقیاس a : ۴.۴.۳
 گسترش : ۱.۶.۱
 - آفین : ۱۰.۷.۱۲ و ۱.۴.۱۲
 - خطی : ۱.۴.۸
 - خطی وابسته به یک گسترش آفین :
 ۱۰.۷.۱۲ و ۴.۴.۱۲
خ
 خطی وابسته به یک ماتریس : ۸.۲.۹
 کانونیک یک مجموعه در مجموعه خارج
 قسمت : ۱.۱۱.۱
 - همانی : ۲.۶.۱
م
 ماتریس : ۱.۱.۹
 - اسکالر : ۴.۴.۹
 - تمویض پایه : ۱.۸.۹
 - حقیقی : ۲.۱.۹
 - سطری (ستونی) : ۱.۵.۹
 - سه بری زیرین (زیرین) : ۵.۱.۹
 - قطری : ۴.۱.۹
 - گسترش همانی : ۲.۴.۹
 - متقارن : ۶.۱.۹
 - مختلط : ۲.۱.۹
 - مربع : ۳.۱.۹
 - هم ارز : ۱.۹.۹
 - همانند : ۱.۱۵.۹
 - یک فرم دوخطی : ۱.۱۱.۹
 - یک فرم هرمیتی : ۷.۱.۱۷
 - یک گسترش خطی : ۱.۲.۹

- مانده : ۱.۳.۰۵ و ۲.۱۴.۰۵
 مبدأ : ۲.۱.۰۸ و ۶.۷.۱۲
 مبین : ۴.۴.۱۶ و ۵.۲.۱۷
 متعامد (خانواده) : ۱.۶.۱۶ و ۱.۳.۱۷
 - (عنصر) : ۱.۱۵.۰۸
 - (گروه) : ۴.۱۰.۱۶
 - (گسترش) : ۲.۱۰.۱۶
 - (ماتریس) : ۲.۱۱.۱۶
 متعدی : ۳.۱۱.۰۱ و ۶.۷.۰۳
 متغیر : ۷.۱.۰۵ و ۴.۱.۰۷
 متقارن : ۳.۱۱.۰۱
 - (فرم چند خطی) : ۳.۱.۱۵
 - (گسترش) : ۲.۱۲.۱۶
 متمم (زیرفضاهای برداری) : ۲.۵.۰۸
 مثبت (فرم کوادراتیک) : ۱.۸.۱۶
 - (فرم هرستی) : ۱.۴.۱۷
 مجزا (فضای تقریباً هیلبرتی) : ۶.۴.۱۷
 مجموع دو ماتریس : ۲.۳.۰۹
 - مستقیم : ۷.۵.۰۸
 مجموعه : ۱.۱.۰۱
 - تعریف : ۱.۶.۰۱
 - خارج قسمت : ۱۵.۱۱.۰۱
 - مرتب : ۱.۱۳.۰۱
 - مقادیر : ۱.۶.۰۱
 - های جدا : ۱.۳.۰۱
 مجهول : ۷.۱.۰۵ و ۴.۱.۰۷
- مجهول های اصلی : ۱.۳.۱۱
 محور انگاری : ۱۴.۱۵.۰۵
 - حقیقی : ۱۴.۱۵.۰۵
 مدول روی یک حلقه : ۱.۱.۰۸
 - یک شمار مختلط : ۱۳.۱۵.۰۵
 مرتبه یک ریشه : ۴.۹.۰۵
 - یک عنصر : ۵.۲.۰۳
 - یک گروه : ۲.۱.۰۳
 مرکز یک گروه : ۵.۳.۱۳
 مزدوج (فضای برداری) : ۷.۲.۱۷
 - (ماتریس) : ۶.۵.۱۷
 - شمار مختلط : ۸.۱۲.۰۵
 - کسر گویا : ۵.۵.۰۶
 - یک چندجمله ای : ۱.۱۲.۰۵
 مشتق : ۱.۱۳.۰۵ و ۳.۱۳.۰۵
 - نسبی : ۱.۶.۰۷
 مشخص : ۸.۵.۰۴
 مشمول (مجموعه) : ۱.۲.۰۱
 مضرب : ۴.۲.۰۴
 معاد های اصلی : ۱.۳.۱۱
 مفسر (چندجمله ای) : ۳.۲.۱۴
 مقدار ثابت یک چند جمله ای : ۲.۱.۰۵ و ۲.۱.۰۷
 مقطع : ۱.۳.۰۱ و ۴.۱۰.۰۱
 مکمل (مجموعه) : ۳.۳.۰۱
 ممتاز (زیرگروه) : ۲.۱.۱۳
 منفی (فرم درجه دوم) : ۱.۸.۱۶

- منفی (فرم دوخطی متقارن): ۱.۸.۱۶
 - (فرم هرمیتی): ۱.۴.۱۷
 مؤلفه های یک بردار: ۵.۸.۸
 - همگن: ۴.۳.۷

ن

- ویژه (بردار): ۱.۱.۱۴ و ۵.۱.۱۴
 ۸.۱.۱۴
 - (زیرفضای): ۵.۱.۱۴ و ۸.۱.۱۴
 - (مقدار): ۳.۱.۱۴ و ۴.۱.۱۴
 ۸.۱.۱۴

ه

- هرمیتی (گسترش): ۲.۷.۱۷
 - (ماتریس): ۸.۱.۱۷
 هسته یک فرم درجه دوم: ۱.۴.۱۶
 - دوخطی متقارن: ۱.۴.۱۶
 - دوخطی متناوب: ۳.۳.۱۸
 - هرمیتی: ۴.۲.۱۷

هم راستا: ۳.۱.۱۲

همسانی: ۱۶.۱.۸

هموسرفیسم: ۱.۶.۲ و ۱.۴.۴

هیأت: ۱.۵.۴

- کسرها: ۶.۶.۴

ی

- یکه ای متعامد (خانواده): ۱.۶.۱۶
 ۱.۳.۱۷

یکگانی (گروه): ۲.۶.۱۷

- (گسترش): ۲.۶.۱۷

- (ماتریس): ۷.۶.۱۷

نابرابری شوارز: ۲.۴.۱۷

نابستگی خطی (بردار): ۲.۷.۸

نامتقارن کردن: ۲.۱.۱۸

نرمال (زیر گروه): ۲.۱.۱۳

نشان یک فرم دوخطی متقارن، نشان یک

فرم درجه دوم: ۷.۸.۱۶

نقطه: ۱.۱.۱

نمایش پارامتری: ۱.۳.۱۲

نماینده: ۱۱.۱۱.۱

نمودار: ۴.۶.۱

نیم فضا: ۴.۶.۱۲

و

وابسته (فرم دوخطی متقارن و فرم درجه دوم):

۴.۲.۱۶

وارون (عنصر): ۱.۵.۲

- (گسترش): ۲.۸.۱

- پذیر (عنصر): ۴.۵.۲

واژه‌ها

فرانسه	انگلیسی	فارسی
Adjointe	Adjoint	آدژوئن
Coordonnée	Coordinate	آراینده
Argument	Argument	آرگومان
Affine	Affin	آفین
Endomorphisme	Endomorphism	آندومورفیسم
Automorphisme	Automorphism	اتومورفیسم
Trace	Trace	اثر
Réunion	Union	اجتماع
Escalair	Scalar	اسکالر
Non dégénéré	Non degenerated	اصیل
Croissante (fonction)	Increasing (fonction)	افزایشی (تابع)
Translation	Translation	انتقال
Associative (loi)	Associative (law)	انجمنی (قانون ترکیب)
Injective (application)	Injective, one-to - one (map)	انژکتیو (گسترش)
Imaginaire	Imaginary	انگاری
Inversion	Inversion	انورسیون
Idéal	Ideal	ایدآل
Isotrope	Iotropic	ایزوتروپ
Isomorphisme	Isomorphism	ایزومورفیسم
Finie	Finite	با پایان

فرانسه	انگلیسی	فارسی
Ouvert	Open	باز
Réflexif	Reflexive	بازتابی
Partie	Part	بخش
Diviseur	Divisor	بخش‌شیاب
Egalité	Equality	برابری
Vecteur	Vector	بردار
Plus grand Commun Diviseur	Greatest common Divisor	بزرگترین بخش‌شیاب مشترک
Relation	Relation	بستگی
Relation d'ordre	Order relation	بستگی ترتیبی
Dépendance linéaire	Linear dependence	بستگی خطی (بردار)
Relation d'équivalence	Equivalence relation	بستگی هم‌ارزی
Fermé	Closed	بسته
Développement	Expansion	بسط
Dimension	Dimension	بعد
Neutre	Neutral	بی‌اثر
Infini	Infinite	بی‌پایان
Bidual (Espace)	Bidual (Space)	بی‌دوآل (فضا)
Segment	Segment	پاره خط
Invariant	Invariant	پایا
Stable	Stable	پایدار
Base	Base	پایه
Distributive (loi)	Distributive (law)	پخش‌شی (قانون)
Engendré	Generated	پدید آمده

فرانسه	انگلیسی	فارسی
Fonction	Function	تابع
Permutation	Permutation	تبدیل
Décomposition	Decomposition	تجزیه
Restriction	Restriction	تحدید
Transposé	Transpose	ترانسپوز
Transposition	Transposition	ترانسپوزیسیون
Arrangement	Arrangement	ترتیب
Combinaison linéaire	Linear Combination	ترکیب خطی
Composé	Composite	ترکیب
Projection	Projection	تصویر
Préhilbertien	Prehilbertian	تقریباً هیلبرتی
Totalement	Totally	تماماً
Vide	Empty	تهی
Commutatif	Commutative	جابجایی
Disjoint	Disjoint	جدا
Couple	Pair , couple	جفت
Additive (loi)	Additive (law)	جمعی (قانون)
Polynôme	Polynomial	چند جمله‌ای
Multilinéaire	Multilinear	چند خطی
Produit	Product	حاصلضرب
Produit extérieur	Exterior product	حاصلضرب خارجی
Produit mixte	Triple product	حاصلضرب مختلط
Réel	Real	حقیقی
Anneau	Ring	حلقه

فرانسه	انگلیسی	فارسی
Quotient	Quotient	خارج قسمت
Famille	Family	خانواده
Droite	Line	خط
Intérieur	Intrior	داخل
Détérminant	Determinant	دترمینان
Degré	Degree	درجه
Quadratique	Quadratic	درجه دوم (کوادراتیک)
Entier	Integer	درست
Intérieur	Interior	درونی
Système	System	دستگاه
Suite	Sequence	دنباله
Dual	Dual	دوال
Bilinéaire	Bilinear	دوخطی
Bijective (app.)	One - to - oneonto (map.)	دوسویی
Direction	Direction	راستا
Rang	Rank	رتبه
Racine	Root	ریشه
Paire	Even	زوج
Sous - espace	Sub space	زیرفضا
Sous - groupe	Subgroup	زیرگروه
Sous - ensemble	Subset	زیرمجموعه
Réduite	Reduced	ساده شده
Irréductible	Irreducible	ساده نشدنی
Image	Image	سایه

فرانسه	انگلیسی	فارسی
Comparable	Comparable	سنتجیدنی
Surjective (app)	Onto (map.)	سورژکتیو (گسترش)
Nombre	Number	شمار
Plan	Plane	صفحه
Multiplicative (loi)	Multiplicative (law)	ضربی (قانون)
Coefficient	Coefficient	ضریب
Élément	Element	عنصر
Dégénéré	Degenerated	غیراصیل
Intervalle	Interval	فاصله
Impaire	Odd	فرد
Forme	Form	فرم
Pôle	Pole	قطب
Diagonale principale	Principal diagonal	قطر اصلی
Intègre	Integral	کامل
Strictement Croissante , decroissante , monotone ,	Strictly increasing , decreasing , monotonic	کاملاً افزایشی کاهشی، یک‌نوا
Décroissante (fonction)	Decreasing (function)	کاهشی (تابع)
Borne	Bound	کران
Borné	Bounded	کراندار
Fraction	Fraction	کسر
Classe d'équivalence	Equivalence class	کلاس هم‌ارزی
Convexe	Convex	کوژ
Cofacteur	Cofactor	کوفاکتور

فرانسه	انگلیسی	فارسی
Barycentre	Barycenter	گرانیکاه
Permutable	Permutable	گردش پذیر
Groupe	Group	گروه
Application	Mapping	گسترش
Matrice	Matrix	ماتریس
Matrice ligne	Row matrix	ماتریس سطری
Matrice triangulaire (inférieure , supérieure)	Triangular matrix (inferior , superior)	ماتریس سه‌بری (زیرین ، زیرین)
Matrice diagonale	Diagonal matrix	ماتریس قطری
Matrice carrée	Square matrix	ماتریس مربع
Matrices équivalentes	Equivalent matrices	ماتریس‌های هم‌ارز
Matrices semblables	Similar matrices	ماتریس‌های همانند
Reste	Rest	مانده
Origine	Origin	مبدأ
Discriminant	Discriminant	مبین
Orthogonal	Orthogonal	متعامد عمود برهم
Transitif	Transitive	متعدی
Variable	Variable	متغیر
Symétrique	Symmetric	متقارن
Positif	Positive	مثبت
Distingué	Distinguished	ممتاز
Alternée	Alternated	متناوب
Séparé	Separated	مجزا
Ensemble	Set	مجموعه

فارسی	انگلیسی	فرانسه
مختلط	Complex	Complexe
مدول	Module	Module
مرتب (مجموعه)	Ordered (set)	Ordonné (ensemble)
مرتبہ	Order	Ordre
مرکز	Center	Centre
مزدوج	Conjugate	Conjugué
مستقیم	Direct	Directe
مشتق	Derivative	Dérivée
مشتق نسبی	Partial derivative	Dérivée partielle
مشخص	Characteristic	Caractéristique
مشمول	Included	Inclus
مضرب	Multiple	Multiple
معادله	Equation	Equation
مفسر	Characteristic	Caractéristique
مقطع	Meet	Intersection
منفی	Negative	Negatif
ناابرابری	Inequality	Inégalité
نابستگی (بردار)	Independence	Indépendance
نامتقارن کردن	Antisymmetrisation	Antisymétrisation
نرمال	Normal	Normal
نشان	Signature	Signature
نماینده	Representant	Représentant
نمودار	Graph	Graphe
نیم باز (بسته)	Half - open (closed)	Demi - ouvert (fermé)
وارون	Inverse	Inverse

فرانسه	انگلیسی	فارسی
Inversible	Invertible	وارون پذیر
Propre	Proper	ویژه
Similitude	Similitude	همانندی
Identité	Identity	همانی
Parallèle	Parallel	هم راستا
Homothétie	Homothetic	همسانی
Homogène	Homogeneous	همگن
Homomorphisme	Homomorphism	همومرفیسم
Corps	Field	هیأت
Monoton	Monotonic	یک نوا
Unité	Unity	یکه
Unitaire	Unitary	یکه ای
Orthonormal	Orthonormal	یکه ای متعامد