انتشارات دانشگاه تهران
۱۰۳۰

جبر خطّی

تانسورها و هندسهٔ ریمانی

جبر کارتان - تنسنده‌ها

کواترنیون‌ها

تألیف

م. ه. شفیعها

جبر خطی

تانسورها و هندسه ریمانی

انتشارات دانشگاه تهران

شماره ۱۰۳۰

تهران - ۱۳۴۴

جبر خطّی

تانسورها و هندسهٔ ریمانی

جبر کارتان - تننده‌ها

کواترنیون‌ها

تألیف:

م . ه . شفیعیها

چاپ و صحافی یکهزار ودویست نسخه از این کتاب دراسفندماه ۱۳٤٤
درچاپخانه دانشگاه تهران باتمام رسید
بها : ۱٤۰ ریال

مقدمه بر چاپ اول

اکنون که چاپ اول این کتاب بپایان رسیده است لازم میدانم که از استاد محترم جناب آقای دکتر احمد سادات عقیلی که بدون راهنمائی و کمکهای معنوی ایشان هرگز این مجموعه فراهم نمیآمد صمیمانه تشکر کنم. بطوریکه خوانندگان گرامی مستحضرند هنوز چاپ کتب علمی نظیر کتاب حاضر، بعلت فقدان حروف امری بسیار دشوار است. خوشبختانه در این باب هم مساعدتهای جناب آقای مهندس محمدمظفر زنگنه استاد محترم دانشگاه و مدیر عامل چاپخانهٔ دانشگاه یار و همراه من بوده است. با آنکه برای بدون غلط چاپ‌شدن کتاب کوشش فراوانی بعمل آمد، با کمال تأسف غلطهای چندی در آن باقی مانده که قسمت عمدهٔ آنها در غلطنامهٔ تنظیمی اصلاح شده است. از همهٔ خوانندگان محترم تقاضا دارم قبل از مطالعه آنها را اصلاح فرمایند. امیدوارم این کوشش مختصر برای دانش پژوهان مورد استفاده قرار گیرد. از صاحبنظران و اساتید و همکاران گرامی خواهش دارم هنگام برخورد به نقایص منتی براینجانب بگذارند واز راهنمائی و تذکر آن مضایقه نفرمایند تا بهمت ایشان در چاپ بعدی آن نقایص مرتفع گردد. قبلاً از این همکاری و مساعدت خالصانه تشکر مینمایم.

م. ه. شفیعیها

۱۰ر۱۱ر۴۴

خواهشمند است غلطهای زیر را قبل‌از مطالعه اصلاح فرمائید

صفحه	سطر	غلط	صحیح
٤	۱۹	کشانی	کشسانی
۲۹	۵	$(n-r)!\delta^{i_۱ i_۲ \dots i_r}_{i_۱ j_۲ \dots j_r}$	$(n-r)!\delta^{i_۱ i_۲ \dots i_r}_{j_۱ j_۲ \dots j_r}$
۳٤	۲	$a'_۲ b^۲ a_۲ b'^۲$	$a'_۲ b^۲ + a_۲ b'^۲$
۳٤	۳	$a_i b''^i$	$a_i b'^i$
۳۵	۱۷	$a_{ik} x_i$	$a_{ik} x^i$
۷۱	۱	$\hat{\mathbf{e}}_{۳'} , \hat{\mathbf{e}}_{۲'} , \hat{\mathbf{e}}_{۱'}$	$\mathbf{e}_{۳'} , \mathbf{e}_{۲'} , \mathbf{e}_{۱'}$
۷۰	آخر	$\mathbf{e}'_۲ , \mathbf{e}'_۱$	$\mathbf{e}_۲ , \mathbf{e}_۱$
۷۲	۱۳	متعامداند	متعامدند
۸۵	۱۰ ودرزیر تصویر	(ش ۱–۱۰)	(ش ۲–۱۰)
۹۶	آخر	$+n$	$=n$
۹۹	۱۸	(۱۳—۲۵)	(۱۲—۲۵)
۱۰۲	۱۲	یک نقطه	بیک نقطه
۱۰۶	۱۲	جمع اعداد	جمیع اعداد
۱۲٤	۱۵	$\wedge dX^۳$	$\wedge d\mathbf{X}^۳$
۱۵۲	۱۰	$g'_{ij'}$	$g_{i'j'}$
۱۶۰	۸	$\omega^r_{r'}$	$\omega^r_{r'}$ را
۱۶۶	٤	مانند V	مانند **V**
۱۷۸	۷	$\dfrac{\mathbf{e}^i}{\lvert \mathbf{e}_j \rvert^۲}$	$\dfrac{\mathbf{e}_i}{\lvert \mathbf{e}_j \rvert^۲}$
۲۰۹	۱	$\dfrac{۱}{\lvert g_{ii}}$	$\dfrac{۱}{g_{ii}}$
۲۱۶	۱۹	$-\sigma$	$-\varsigma$
۲۲۶	۱۱	(۳۰—۱۶)	(۳۰—۱۵)
۲۳۲	۸۰	$[\partial_۱ (x'')^۲$	$[\partial_{۱'} ((x'')^۲$
۲۳۶	آخر	(۳۲—۲)	(۳۲—۳)
۲۵۶	آخر	(۲۷—۲)	(۳۷—۲)
۳۰۲	۶	بردار ، تکروند	بردار تکروند
۳۰٤	۵	$\beta^* = a_۱ - ia_۱$	$\beta^* = a_۱ - ia_۲$
۳۱۶	۱۵	$+X^j Y_i (\partial_j A_i)$	$+X^j Y^i (\partial_j A_i)$
۳٤۷	۱۲	$+([\nabla_{\mathbf{x}_۲} , \mathbf{Y}]-$	$+([\nabla_{\mathbf{x}_۲} , \nabla_{\mathbf{y}}]-$

فهرست مندرجات

موضوع	صفحهٔ
مقدمه	۱

فصل اول

۱– سیدانها	۹
۲– فضاهای برداری – زیر فضاها	۱۱
۳– استعمال حروف اندیس‌دار – نمادهای خاص	۱۵
تمرینات	۲۷
٤– عملیات جبری روی حروف اندیس‌دار	۳۰
۵– دستگاههای مختصات	۳٦
تمرینات	۵٦
٦– تصور ریاضی فضا – فضاهای متری و آفین ، فضاهای برداری هنجدار – فضاهای باناك و هیلبر	۵۸

فصل دوم

۷– مقدمه – تعاریف نقطه و بردار – استقلال خطی بردارها – تعاریف بعد و بردارهای مبنا	٦٤
۸– تغییر محورهای مختصات – تبدیلات کلی	۷۰
۹– نوع – همگردی و ناهمگردی	۷۹
۱۰– مبناهای e^i و تعبیر هندسی آنها	۸۱
۱۱– تانسورها	۸٦
۱۲– جبر تانسورها : جمع ، ضرب ، ادغام ، تقسیم‌تانسوری،قانون خارج قسمت، تانسورهای همپا	۹٤
۱۳– تانسورهای قرینه و قرینهٔ چپ ، حاصلضرب بیرونی دو و سه و چند بردار	۱۰۷
۱٤– ژاکوبین	۱۱۸
۱۵– تانسورهای نسبی‌یاشبه تانسورها – ظرفیت عددوار – جرم مخصوص عددوار	۱۲۱
تمرینات	۱۲۸

فصل سوم

۱٦– مقدمه – فضای برداری اقلیدسی	۱۳۱

موضوع | صفحه

۱۷– حاصلضرب عددوار – متریک اقلیدسی – شکل درجهٔ دوم اصلی ۱۳۱
۱۸– خواص مختلف تانسور اصلی اقلیدسی ۱۳۹
۱۹– فضای اقلیدسی خاص – فضای اقلیدسی غیر خاص ۱۴۱
۲۰– امثله ۱۴۴
۲۱– مؤلفه های همگرد یک بردار –تانسورهای جایگشت ، شبه تانسورهای مهم در فضای اقلیدسی ۱۵۰
۲۲– تانسورهای همگن و تکروند ۱۵۸
۲۳– فضای برداری هرمیتی ۱۶۷
تمرینات ۱۷۶
۲۴– فضاهای متقابل – ضرب تانسوری فضاها – تعریف ذاتی ادغام ۱۸۰

فصل چهارم

آنالیز تانسوری در فضای برداری اقلیدسی

۲۵– مقدمه ۱۹۵
۲۶– مسئلهٔ اساسی آنالیز تانسوری ۱۹۶
۲۷– ارتباطات ۱۹۷
۲۸– رابطهٔ بین Γ^{i}_{jk} و تانسورهای متریک g_{ij} و g^{ij} ۲۰۰
۲۹– مشتق– همگرد یک تانسور؛ دیفرانسیل مطلق ؛ قوانین مشتق – همگرد گیری میدانهای برداری موازی ۲۱۰
۳۰– پارامتر دیفرانسیلها – کارگزارهای دیفرانسیل (گرادین ، دیورژانس ، روتاسیونل و لاپلاسی) ۲۲۴
۳۱– مؤلفه های فیزیکی یک بردار ۲۲۸
تمرینات ۲۳۳

فصل پنجم

۳۲– فضا و هندسهٔ ریمانی. ۲۳۵
۳۳– فضاهای بخصوص ریمانی ،فضای اقلیدسی ۲۴۰
۳۴– آنالیز تانسوری در فضای ریمانی ۲۴۵
۳۵– هندسه های اقلیدسی و ریمانی ۲۴۷
۳۶– معادلات ژئودزیکها ۲۵۱
۳۷– خاصیت اساسی ژئودزیکها ۲۵۶
۳۸– انحنای (خمیدگی) فضا ۲۶۴

موضوع | صفحه

۳۹– تعیین انحنا (یا خمیدگی فضا) ۲۶۷
۴۰– تانسور خمیدگی ریمان – کریستوفل ۲۷۳
۴۱– مشتق – همگرد مرتبهٔ دوم و مراتب بالاتر ۲۸۰
۴۲– تانسور ادغام شدهٔ ریچی – اینشتین ، اتحادهای بیانکی ، نمایش هندسی تانسور خمیدگی . فضاهای ریمانی خاص ، پایاهای دیفرانسیل ۲۸۸
تمرینات ۲۹۶

فصل ششم

۴۳– تننده‌ها – بردارهای تکروند – پارامتر تکروند ۲۹۹

فصل هفتم

۴۴– فضاهای متقابل یک‌فضای برداری ، کوموتاتوردوتبدیل بینهایت کوچک ، ضرب ـ لی ، جبر ـ لی ، مشتق ـ لی ۳۱۰
۴۵– جبرخارجی یک‌فضای‌برداری ، جبرصورتهای‌دیفرانسیل ، دیفرانسیل گیری خارجی ۳۲۰
۴۶– مشتق مطلق صورتهای تانسوری – معادلات ساختمان ۳۳۲

فصل هشتم

۴۷– Γ^i_{jk} ها وتعاریف‌هم‌ارزآنها – ارتباطات‌آفین ∇ – معادلات‌ساختمانی کارتان و اتحادهای بیانکی ۳۴۳
۴۸– مشتق ـ لی یک ارتباط ، نمایش ارتباط ریمانی توسط ∇ ۳۵۶

فصل نهم

۴۹– کواترنیونها (چهار مقداریها) ۳۶۹
۵۰– تقسیم کواترنیونها ۳۷۸
۵۱– حاصلضرب بردارها ۳۸۰
۵۲– ریشه‌های یک کواترنیون ۳۸۴
۵۳– دوران ۳۹۳
تمرینات ۴۰۲

فهرست کتبی که مورد استفاده قرار گرفته

1—S. Austen Stingnat, The elements of Deter., Matrices & Tensors for Engineers, Macdonald, London, 1959.

2—Bourbaki, Algèbre, Actualités scientifiques et industrielles, No. 1044, Hermann 1948.

3—L. Brand, Vector & Tensor Analysis, New York, John Wiley & Sons, Inc. 1959.

4—E. Cartan, Les systems differentiels exterieurs et leurs applications géometriques, Actualités scientifiques et industrielles, No. 994, Hermann 1945.

5—N. Coburn, Vector & Tensor Analysis, The Mac Millan company, New York, 1955.

6—P. M. Cohn, Lie groups, Cambridge At the University Press 1961.

7—H. V. Craig, Vector & Tensor Analysis, New York, Mc-Graw-Hill Book Co. 1943.

8—M. Denis-Papin & L. C. Kaufmann, Cours de calcul tensoriel, Paris, Edition Albin Michel 1961.

9—A. P. Eisenhart. Diff. geometry, Princeton, Priceton Univ. Press, 1947.

10—L. P. Eisenhart, Riemannian Géom. Princeton, Princeton Univ. Press, 1947.

11—J. C. H. Gerretsen, Lectures on Tensor Calculus & Diff., Géom., P. Noordhoff N. V. Groningen, 1962.

12—P. R. Halmos, Finite dimensional Vector space, D. Van Nordstrand Co. inc. New York 1961.

13—Helgason, Diff. Géom. & Symmetric spaces, Acadmic Press, New York, 1962.

14—Korn & Korn, Mathemtical Handbook for scientists & Engineers, Mc Graw-Hill Book Co., inc., 1961.

15—B. Kostant, A characterization of invariant affine connections, Transaction of the American Mathematical society 1959.
16—A. Lichnerowic, Elements de calcul tensoriel, Armand-Colin, Paris 1951.
17—A. Lichnerowich, Geometrie des groupes de transformations, Dunod, Paris, 1958.
18—K. Nomizu, Lie Groups & differential Géom., The Mathematical society of Japan, 1956.
19—B. Spain, Tensor calculus, Oliver & Body, Edinburgh and London, 1960.
20—I. S. Sokolnikoff, Tensor Analysis, John Wiley & Sons, INC. New-York, 1960.
21—G. Temple, cartesian Tensors, London, Methuen & Co. LTD, 1960.
22—T. Y. Thomas, Concept from Tensor Analysis & Diff. Géom., Academic Press, New York, 1961.
23—J. Y. Thomas, The differential invariants of generalized spaces, Cambridge, Univ. Press 1934.
24—T. J. Willmore, Diff. Géom., Clarendon Press, Oxford, 1961.
25—K. Yano, The theory of Lie derivative and its applications, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1955.

توجه ـ اعداد داخل کروشه [ ] در زیر صفحات، عطف به شمارهٔ کتابهائی است که در این فهرست آمده است.

اسامی دانشمندانی‌که نام آنها در اینجا برده شده است

Banach	باناك
Bianchi	بیانکی
Bourbaki	بورباکی
Cartan (Elie)	کارتان
Cauchy	کوشی
Christoffel	کریستوفل
Clifford	کلیفورد
Donkin	دنکین
Einstein	اینشتین
Euler	اولر
Galois	گالوا
Gauss	گوس
Grassmann	گراسمن
Hamilton	هامیلتن
Hilbert	هیلبرت
Killing	کیلینگ
Koszul	کسول
Kronecker	کرونکر
Levi - Civita	لوی چیویتا
Lichnerowic	لیشنروویچ
Lie	لی
Lobachevsky	لوباچفسکی
Olind	اولند
Pauli	پولی
Ricci	ریچی
Riemann	ریمان
Rodrigues	رودریگ
Schur	شور
Schwartz	شوارتس
Voigt	فویگت

مقدمه

فرآیند[1] های فیزیکی معمولاً برحسب **عملیاتی** (مشاهدات ، تجربیات) که **موجودات** فیزیکی را بهم مربوط میسازد بیان میشود . پیچیدگی شرایطواقعیات در فیزیک ایجاب میکند که بیانهای سادهتری برحسب **نمونه** [2] های لفظی ، نمادی[3] وحتی فیزیکیوجود داشتهباشد تاخواص «اساسی» موجوداتوعملیاتیرا که بنحومناسبی انتخاب شده است «تجرید»نماید .

موضوع ریاضیات بمفهوم کلیترآن ، تعریف و برزیدن [4] نمونههای نمادی است . یک **نمونهٔ ریاضی** یک طبقه از **موجودات ریاضی** (مجرد ، نمادی) تعریف نشدهای از قبیل اعداد ، بردارها و **روابط** بین این موجوداترا دربردارد . یک رابطهٔ ریاضی قانونی است فرضی که دو یا چند موجودتعریف نشدهای را بهم مربوط میکند . بیان بسیاری از روابط برحسب **عملیاتی ریاضی** که یک یا چند موجود (کارگزار [5]) را با موجود یا مجموعهٔ موجودات (منتجه) بهم مربوط میسازد صورت میگیرد . یک نمونهٔ مجردی که موجودات ، روابط و عملیاتش مشخص نیست با مجموعهٔ قوانینی قائم بخود **(اصول تعریف کننده)** تعریفمیشود که این قوانین عملیاتی راکه باید بکار برده شود ارائه میدهد و روابط کلی بین نتایجآنها را بیان میکند (تعریف توصیفینمونهٔ ریاضی برحسب خواص آن) . یک تعریف سازنده[6] یک نمونهٔجدیدریاضی رابرحسبمفاهیمریاضیقبلاً تعریف شدهای معرفی میکند(مثل تعریف جمع و ضرب ماتریسها برحسبجمع وضرب عددی) .

سادهترین **نمونهٔ** ریاضی که همه باآن آشنائی داریم دستگاهاعدادحقیقی

۱– Process　　　۲– Models

۳– Symbolic　　　٤– Manipulation

٥– Operand　　　٦– Constructive definition

واقلیدسی است که خواص تعریف کنندهٔ آن کم‌وبیش مستقیماً از تجربیات‌فیزیکی (شمارش ، ترتیب ، مقایسه ، اندازه‌گیری) تجرید شده است . گروه‌ها نمونه‌های دیگری است که یک عمل تعریف کننده[۱] بیشتر ندارد . حلقه‌ها [۲] و میدانها [۳] نمونه‌هائی است که دارای دو عمل تعریف کننده میباشد . فضاهای برداری خطی و جبرهای خطی نمونه‌هائی است که بیش‌از یک طبقه از موجودات ریاضی را شامل است .

موجودات و عملیات نمونه‌های کلی‌تر ریاضیات اغلب با مجموعهٔ مرتبی از اعدادحقیقی که معمولاً به‌نتایج اندازه‌گیریهای فیزیکی ارتباط دارد نمایش داده میشود . از طرفی هرنمونه‌ای را هم ممکنست بترتیب زیر توسط‌نمونهٔ دیگری نمایش داد :

فرض میکنیم M یک نمونهٔ ریاضی شامل موجودات a و b و ... و عملیات O و P و . . . باشد که نتایج این عملیات یعنی :

$$O(a\ ,\ b\ ,\ \ldots) \quad و \quad P(a\ ,\ b\ ,\ \ldots) \quad و \ \ldots$$

هم عناصری از M باشد . نمونهٔ دیگری مانند M' را موقعی تصویر همسان [٤] M نسبت به عمل $O(a\ ,\ b\ ,\ \ldots)$ نامند که شرایط زیر موجود باشد :

۱- یک ارتباط منحصری مانند $a \to a'$ و $b \to b'$ و . . . که عناصر a' و b' و . . . از M' را بهر عنصر M مربوط میسازد .

۲- عملی مانند O' را بتوانیم روی عناصر M' طوری تعریف کنیم که :

$$O(a\ ,\ b\ ,\ \ldots) \longrightarrow O'(a'\ ,\ b'\ ,\ \ldots)$$

شود .

ارتباطی باچنین‌خواص‌را هوموموفیسم(یاتبدیل همسانی) M به M' نامند.

۱- Defining Operation

۲- Rings

۳- Fields

٤- Homomorphic image

این ارتباط تمام روابطی را که براساس عمل مذکور در فوق نهاده شده است حفظ مینماید. یعنی یک چنین رابطه‌ای بین عناصر a و b و ... از M وجود رابطهٔ متناظری را بین عناصر 'a و 'b و ... از 'M ایجاب میکند.

هرگاه هومومورفیسمی مجموعهٔ عناصر M را به عناصر خود M تحویل[۱] کند آنرا **آندومورفیسم**[۲] نامند.

هومومورفیسمی که شامل یک ارتباط یک - بیک متقابل[۳] باشد **ایزومورفیسم** نامیده میشود. اگر رابطهٔ بین دو نمونهٔ M و 'M بدینترتیب باشد آن دو را نسبت به این عمل ایزومورف نامند. دراینحالت ، هم $M \rightarrow M'$ هومومورفیسم است و هم $M' \rightarrow M$. بدیهی‌است ایزومورفیسم یک رابطهٔ هم‌ارزی‌بین نمونه هاست.

ایزومورفیسمی که مجموعهٔ عناصر M را برروی[۴] خود M تحویل میکند **اتومورفیسم**[۵] M نامیده میشود.

اهمیت مفاهیم فوق از این لحاظ است که میتوانیم بکمک آنها نمونه ها را توسط یکدیگر ارائه دهیم و بالاخص موجودات ریاضی را توسط مجموعه‌هائی از اعداد حقیقی نمایش دهیم (هندسهٔ تحلیلی ، ماتریس ها ، تانسورها) . از این مطلب بخوبی معلوم میشود که توصیف کیفیات فیزیکی برحسب کمیات برداری را نباید تنها بعنوان نوعی کوتاه نویسی و تلخیصی تلقی کنیم که از مجموعهٔ اجزاء معادلات ، توسط خودمعادلات به تنهائی صورت میگیرد بلکه باید آنرا بعنوان مثالی‌ازیک «**نمونهٔ ریاضی**» که بلوکهای ساختمانی[۶] اساسیش به اعدد محدود نشده است درنظر بگیریم.

در فیزیک جدید ، بردارها در درجهٔ اول اهمیت قرار دارد و برای نمایش

۱– To map
۲– Endomorphism
۳– Reciproc
٤ـ Onto
٥– Automorphism
٦– Building blocks

۱

شماتیک (۱) ساده‌ترین و دقیقترین « حالت یکدستگاه » بکار میرود . ساده‌ترین **دستگاهی که** ما مورد مطالعه قرار میدهیم **نقطهٔ مادی** است . مثلاً یک فوتون ، یک الکترون یا ذرهٔ وزینی مثل پروتون یک نقطهٔ مادی است . از لحاظ کلاسیک «حالت» دستگاه را با وضع وسرعتش درفضا معین میسازیم . وقتی کمیتی درفیزیک تعریف شد ، گذشته از آنکه باید سعی کرد این تعریف بصورتی کلی و دقیق صورت گیرد باید بویژه ارتباط آنرا با واحدهای انتخابی اصلی تعیین نمود و محورهای مختصات را نیز نادیده نگرفت . یعنی تغییرات این کمیات فیزیکی را هنگام تغییر محورهای مختصات نیزمورد مطالعه قرارداد . وارد کردن محاسبات برداری اولین قدمی بوده است که دراین راه برداشته شده .

فیزیکدانها از اوایل متوجه دو مفهوم : کمیت عددوار (وزن ، جرم ، انرژی و . . .) و کمیت برداری (نیرو ، سرعت ـ شتاب و . . . .) شده بودند .

کمیت عددوار (۲) فقط با عددی که معرف قدر مطلق آن است نشانداده میشود و وقتی تغییر محورها بدون تغییر واحدهای اصلی پیش میآید این کمیت تغییر نمیکند و همان معادلهٔ ابعادش برای تعیین آن کافیست . اما برای تعیین بردار دانستن قدرمطلق آن کافی نیست و باید مولفه های آنرا هم داشت . هربردار ، درفضای سه بعدی معمولی با ۳ مولفه و درفضای r بعدی با r مولفه معین میشود . درکلیهٔ مباحث فیزیک کلاسیک از دو نوع بردار قطبی ومحوری استفاده میشود . بردارهای قطبی همان بردارهای معمولی است و حال آنکه بردارهای محوری که در بعضی از مباحث فیزیک جدید مثل کشانی (۳) الزاماً وارد میشود جز درحالت خاص فضای سه بعدی شباهتی با بردارهای قطبی ندارد .

---

۱ – Schematic

۲ – (Scalar) – اقتباس ازکلمهٔ Scala که اولین بار توسط هامیلتن انگلیسی در تئوری « کواترنیون ها » استعمال شده است .

۳ – Elasticity

همچنین وقتی درداخل یک جسم تغییر شکل یافته‌ای[۱] دنبال نیروها یا کششها[۲] میگردیم بیک مجموعهٔ شش عددی که شبیه به شش مولفهٔ یک کمیت جدیدی است برمیخوریم که بهیچوجه نمیتوانیم آنها را از هم جدا کنیم .

فیزیکدانها مدتها در اسم گذاری این کمیات جدید مردد بودند تا اینکه مطالعهٔ فیزیک تبلورها وجود عدهٔ زیادی از این موجودات را نشان داد و برای نخستین بار بلورشناس وفیزیک‌دان مشهور آلمانی Voigt قرابت این کمیات مختلف را با یکدیگر پیدا و روی خواص مشترك آنها دقت کرد و در کتاب خود بنام Lehrbuch Der Kristalphysik نام «تانسور» [۳] بآنها داد . از اینجا ریشهٔ این وجه تسمیه که با دستگاه کششهای موجود دریک جسم تغییرصورت‌یافته متحد گرفته شده است پیدا میشود .

استعمال تانسورها درفیزیک توسط ادینگتون درکتاب :
Report on the Relativity Theory و در ریاضیات توسط گوس [۴] ریمان [۵] کریستوفل [۶] برای بسط هندسهٔ دیفرانسیل صورت گرفت . پیدایش « محاسبات تانسوری» و یا بعبارت دیگر «محاسبات دیفرانسیل مطلق» بعنوان شاخهٔ منظمی از علوم ریاضی مرهون زحمات ریچی [۷] و شاگردش لوی چیویتا [۸] است که نخستین مقاله را دراین باب مشترکاً درمجلهٔ Mathematishe Annalen شمارهٔ ۵۴ سال ۱۹۰۱ درج کردند .

هدف اصلی این محاسبات مطالعهٔ روابطی است که تغییرات آنها بتغییر محورهای مختصات بستگی نداشته باشد . ازآنجا که یک‌دستگاه مختصات‌دکارتی معمولاً دستگاهی است خارجی که هیچگونه ارتباطی ذاتی یا عضوی با موجودات

۱ - Deformed
۲ - Tension
۳ - Tensor
۴ - Gauss
۵ - Riemann
۶ - Christoffel
۷ - Ricci
۸ - Levi - civita

ریاضی وفیزیکی که ما میخواهیم بیان کنیم ندارد لذا تنها راه تأمین نظرفوق اینست که آن موجودات را طوری بیان کنیم که شکل آنها در تمام دستگاههای دکارتی یکی باشد . لذا به ساختمانی ریاضی احتیاج پیدا میکنیم که براثر تبدیل از دستگاهی بدستگاه دیگر پایا [1] بماند . چنین ساختمانی همان ساختمان جبر و آنالیزتانسورهاست. **چون شکل معادلات تانسوری درتمام دستگاههای مختصات محفوظ میماند** ، لذا هرخاصیت‌فیزیکی یا هندسی که توسط معادله‌ای‌بین‌تانسورها بیان شده باشد در هردستگاه‌غیرمشخص‌دیگر هم این خاصیت با همین معادله بیان خواهد شد .

با این مقدمات دیده میشود که استعمال تانسورها در فیزیک نظری جدید ، در تمام شعب علوم ریاضی بالاخص هندسهٔ دیفرانسیل و هیپر سطح ها [2] اجتناب ناپذیر میگردد. اهمیت این مسئله هنگامی آشکارمیشود که می‌بینیم نظریهٔ‌نسبی بوسیلهٔ تانسورها تشریح گردیده وحتی میتوانیم بگوئیم که بدون استعمال‌تانسورها بیان این نظریه غیر ممکن بوده است .

تکمیل جبرتانسورها بوسیلهٔ‌تعمیم تئوری‌فضاهای برداری جبرخطی ونمایش آنها صورت گرفته است . سروکار آنالیز تانسوری بالاخص با تانسورهاست وقتی که آنهابصورت توابع نقطه درنظر گرفته میشود و برای توصیف فضاهای خمیده [3] و میدانهای پیوسته در فیزیک بکار میرود . روشهای تانسوری اکثراً کمیات پیچیدهٔ عددی‌راکه دردستگاههای مختلف اندازه گرفته میشود به نمونه‌های مجرد نسبتاً ساده‌ای ربط میدهد .

هدف ما در قسمتهای اول این کتاب ذکر جبر و آنالیز تانسورها یعنی این موجودات هندسی بسیار مهم و موارد استعمال آنهاست . درضمن فصول مختلف به تناسب مطالبی که ذکر مینمائیم برای‌تانسورها‌نیزتعاریف‌متناسبی اختیارمیکنیم. مثلاً باتوجه‌بمطالبی که‌تاکنون‌ذکرکرده‌ایم‌تانسورهارابترتیب‌زیر تعریف‌میکنیم :

۱ - Invariant ۲ - Hyper Surfaces ۳ - Curved

تانسورها مثل ماتریس‌ها ، فضاهای توپولوژیک وفضاهای برداری ، نوعی نمونهٔ ریاضی است؛ موجوداتی است ریاضی که بایک کلاس (فضا) از موجودات دیگر («نقطه»هائی که بامختصات عددی نموده شده‌است) بصورت‌توابعی‌از«وضع» وابسته‌است . هرتانسور توسط مجموعهٔ مرتبی ازتوابعی عددی(مؤلفه‌های‌تانسور) ازمختصات ، طوری‌بیان(نمایش‌داده)شده‌است که‌بتوان روابط ریاضی بین‌تانسورها را مستقل از (پایا نسبت به) دستگاه مختصات تعریف نمود .

چون کتاب حاضربرای شناساندن تانسورها بدانشجویانی که‌ریاضیات وفیزیک عالی میخوانند نوشته شده است حتی‌المقدورسعی شده که بصورت خود آموزی‌ساده تحریر شود تا کمک بزرگی حتی برای مبتدیان باشد . هرجاهم که زبان بخش تشخیص داده نشده بعضی‌از مطالب باعباراتی مختلف تکرار شده است . مثلاً در مبحث حاصلضرب فضاهای تانسوری ، خود تانسورها هم مجدداً با بیان تازهٔ دیگری که با تئوری مجموعه‌ها و تحویلات [1] بستگی دارد معرفی گردیده است . ضمناً قسمتی از این کتاب نیزبه هندسه‌های ریمانی که‌بستگی مستقیم با این محاسبات دارد اختصاص‌داده شده است . علاوه برآن ، برای آنکه پژوهندگان‌با ابزارهای لازم برای مطالعات هندسه و فیزیک جدید بهتر مجهز شوند بخشی از این کتاب به : تنندها ، جبر گراسمن ، جبر کوارترنیون‌ها و مشتقات ـ لی تخصیص داده شده است . برای آنهائیکه بمطالعهٔ هندسه دیفرانسیل جدید احتیاج دارند ارتباطات آفین بصورت پایاهای ∇ و پایاهای ناشیه از آن بیان شده است . همچنین تانسورهای خمیدگی و پیچش بصورت جدیدی که در نتیجهٔ استعمال گروه‌لی[2] در هندسه و نظریهٔ (Fibre – Bundle) پیدا شده و در حقیقت حکم کارگزارهائی[3] را پیدا کرده ارائه شده است .

باتوجه بدشواریهای ناشیه از نبودن تعابیر کافی برای لغات تازه در زبان ،

---

۱ - Mappings ۲ - Lie Group ۳ - Operators

تا آنجا که مقدور بوده در نوشتن این کتاب از کلمات رایج فارسی استفاده گردیده است . در بعضی جاها هم بعضی لغات که جنبهٔ بین‌المللی داشته عیناً با همان تلفظ خارجی بکار رفته و از استعمال کلمات نامأنوس و دور از ذهن حتی‌المقدور خودداری شده است .

ناگفته نماند که حق بود دراین کتاب از ماتریسها نیزبطور تفصیل صحبت شود ولی چون این مطلب موضوع کتابی جداگانه قرارگرفته لذا در اینجا اشاره‌ای بآن نگردیده است .

فصل اول

۱ـ میدانها [۱]

A ـ بیک جفت عدد α و β (حقیقی ، موهومی ، مختلط) یکعدد $\alpha+\beta$ بنام حاصل جمع طوری مربوط میکنیم که :

۱ـ جمع مستقل از ترتیب عوامل باشد یعنی :

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha \qquad (۱-۱)$$

۲ـ جمع شرکت پذیر باشد یعنی :

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma) \qquad (۱-۲)$$

۳ـ یکعدد منحصر o (بنام صفر) چنان مربوط میکنیم که داشته باشیم :

$$\alpha+o=\alpha \qquad (۱-۳)$$

٤ـ بهر عدد α عددی مانند $(-\alpha)$ چنان مربوط میکنیم که :

$$\alpha+(-\alpha)=o \qquad (۱-٤)$$

B ـ بهر جفت عدد α و β عددی مانند $\alpha\beta$ بنام حاصلضرب چنان مربوط میکنیم که :

۱ـ حاصلضرب مستقل از ترتیب عوامل باشد :

$$\alpha\beta=\beta\alpha \qquad (۱-٥)$$

۲ـ حاصلضرب شرکت پذیر باشد :

$$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma \qquad (۱-٦)$$

---

۱ - Fields

۳- یکعدد منحصر غیر صفر ۱ (بنام واحد) چنان درنظر میگیریم که داشته باشیم :

$$\alpha \cdot 1 = \alpha \qquad (1-7)$$

٤- بهر عدد غیر صفر α عدد منحصری مثل α^{-1} یا $\frac{1}{\alpha}$ چنان مربوط میکنیم که :

$$\alpha \alpha^{-1} = 1 \qquad (1-8)$$

C - حاصلضرب نسبت به جمع توزیعی باشد یعنی :

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \qquad (1-9)$$

اگر جمع و ضرب برای مجموعه‌ای از موجودات (اعداد) چنان تعریف شده باشدکه‌د رشرایط A و B و Cصدق کند گوینداین مجموعه(همراه بااین عملیات) تشکیل یک میدان میدهد .

لذا مجموعه های اعداد گویا (باتعاریف معمولی جمع‌وضرب) ، مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی و مجموعهٔ اعداد مختلط هریک تشکیل میدانی را میدهد .

تمرین ۱- آیا کلیهٔ اعداد درست مثبت تشکیل میدانی میدهد یانه ؟ (اگر صفر را جدا کنیم مجموعهٔ اعداد درست ، به مثبت موکد [1] موسوم است).

تمرین ۲- فرض میکنیم F مجموعهٔ تمام‌اعداد حقیقی مرتب‌دوتائی(α , β) باشد :

۱- اگر جمع باقانون :

$$(\alpha , \beta) + (\gamma , \delta) = (\alpha + \gamma , \beta + \delta) \qquad (1-10)$$

و ضرب باقانون :

$$(\alpha , \beta) \cdot (\gamma , \delta) = (\alpha\gamma , \beta\delta) \qquad (1-11)$$

تعریف شود آیا F یک میدان هست یانه ؟

---

۱ - Strictly positive

۲- اگر جمع با (۱۰ — ۱) و ضرب با :

$$(\alpha\ ,\ \beta)\cdot(\gamma\ ,\ \delta)=(\alpha\gamma-\beta\delta\ ,\ \alpha\delta+\beta\gamma) \qquad (۱-۱۲)$$

تعریف شود آیا بازهم F یک میدان هست یانه ؟

اگر وجود عکس عدد یعنی α^{-1} را از میدانی حذف کنیم حلقه [۱] پیدا میشود . لذا در حلقه فقط جمع و تفریق و ضرب ممکنست . اگر حاصلضرب دو عنصر α و β از یک حلقه صفر نشود ـ مگر اینکه یکی از دو عامل صفر باشد ـ حلقه را بدون مقسوم‌علیه صفرنامند . اگر کمیتی مثل ρ تابع متغیرهای مستقلی نظیر x و y و z باشد آنرا میدان عدد وار [۲] نامند .

تبصرهٔ ۱ـ فرض میکنیم α و β عناصر میدان R باشد . اگر $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$ نیزجزو عناصر R باشد اصطلاحاً میدان R را در تحت عملیات جمع و ضرب مسدود گویند .

تبصرهٔ ۲ـ اگر میدان R معین [۳] ودرضرب مستقل از ترتیب عوامل باشد آنرا میدان گالوا [٤] مینامند .

۲ـ فضاهای برداری

فیزیکدانها و ریاضیدانها اغلب بمسائل مجردی برمیخورند که بظاهر قرابت زیادی باهم دارد و بالمآل بمحاسبات خطی صورتاً همانندی منجر میشود . دلایل این مطلب از مفهوم فضاهای برداری معلوم میشود .

در فضای ۳ بعدی معمولی هندسهٔ کلاسیک ، مجموعهٔ بردارهائی مانند X را که مبدءشان نقطهٔ ثابتی مانند ω است درنظرمیگیریم (درسراسر این کتاب بردارها

---

۱ - Ring ۲ - Scalar field ۳ - Finite

٤ - Galois Field

با حروف درشت نظیر $\mathbf{X}$ نشان داده میشود) :

A ـ بهردوبردار $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ بردارثالثی مانند $\mathbf{X+Y}$ بنام حاصل جمع که دارای مشخصات زیر است مربوط میشود :

۱ـ حاصل جمع مستقل از ترتیب عوامل است :

$$\mathbf{X+Y=Y+X} \qquad (۱-۱)$$

۲ـ نسبت به جمع شرکت پذیر است :

$$(\mathbf{X+Y})+\mathbf{Z}=\mathbf{X}+(\mathbf{Y+Z}) \qquad (۲-۲)$$

۳ـ اگر دو بردار $\mathbf{Y}$ و $\mathbf{X}$ داشته باشیم فقط و فقط یک بردار مثل $\mathbf{Z}$ چنان موجود است که :

$$\mathbf{X=Y+Z} \qquad (۲-۳)$$

دراینصورت $\mathbf{Z}$ را تفاضل $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ خوانند :

$$\mathbf{Z=X-Y} \qquad (۲-٤)$$

اگر دوبردار مساوی مانند $\mathbf{X}$ را از هم کم کنیم بردار صفر بدست میآید (مبدأ و منتهایش در ω است) که با $\mathbf{o}$ نشان داده میشود بطوریکه :

$$\mathbf{X+o=X} \qquad (۲-٥)$$

این خاصیت که $\mathbf{o}$ مستقل ازبردار $\mathbf{X}$ بوده وبعنوان تعریف انتخاب شده است مستقیماً از خاصیت شرکت پذیر بودن نتیجه میشود . بعلاوه بهر بردار $\mathbf{X}$ برداری مانند $(\mathbf{-X})$ طوری مربوط میکنیم که وقتی باآن جمع شود بردار $\mathbf{o}$ حاصل شود :

$$(\mathbf{X})+(\mathbf{-X})=\mathbf{o} \qquad (۲-٦)$$

B ـ بیک بردار $\mathbf{X}$ ویک عدد حقیقی α بردارجدیدی مانند $\alpha\mathbf{X}$ بنام حاصلضرب $\mathbf{X}$ در α که دارای خواص زیر است مربوط میشود :

۱ — $$\alpha(\beta\mathbf{X})=(\alpha\beta)\mathbf{X} \qquad (۲—۷)$$

۲ — $$۱\cdot\mathbf{X}=\mathbf{X} \qquad (۲—۸)$$

C - اولاً - ضرب در اعداد نسبت بجمع برداری توزیعی است :

$$\alpha(\mathbf{X}+\mathbf{Y})=\alpha\mathbf{X}+\alpha\mathbf{Y} \qquad (۲—۹)$$

ثانیاً - ضرب در بردار نسبت بجمع عددی توزیعی است :

$$(\alpha+\beta)\mathbf{X}=\alpha\mathbf{X}+\beta\mathbf{X} \qquad (۲—۱۰)$$

بطور کلی مجموعهٔ غیر مشخصی مانند E ازعناصر $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ را درنظرمیگیریم و فرض میکنیم که بتوانیم دو قانون ترکیب چنان تعریف کنیم که :

۱- بهر جفت عنصر $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ یک عنصر $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ با خواص A مربوط شود.

۲- بهرعنصر $\mathbf{X}$ ویک عدد حقیقی α یک عنصر $\alpha\mathbf{X}$ باخواص B و C مربوط شود

دراینصورت گوئیم E **یک فضای برداری نسبت به (یاروی) میدان اعداد حقیقی است و $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ و . . . بردارهای آن است** و یا بعبارت دیگر، **یک فضای برداری مجموعه‌ای است از عناصر بنام بردار** که در شرایط فوق صدق میکنند .

مثال: فرض کنیم $\mathbf{X}$ مجموعهٔ n عدد حقیقی مرتب $\mathbf{X}=(X_1 , \ldots , X_n)$ و $\mathbf{Y}$ مجموعهٔ n عدد حقیقی مرتب $\mathbf{Y}=(Y_1 , Y_2 , \ldots , Y_n)$ و E مجموعهٔ تمام عناصر $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ باشد .

اگر دو قانون :

$$\mathbf{X}+\mathbf{Y}=(X_1+Y_1 , X_2+Y_2 , \ldots , X_n+Y_n) \qquad (۲—۱۱)$$

$$\alpha\mathbf{X}=(\alpha X_1 , \alpha X_2 , \ldots , \alpha X_n) \qquad (۲—۱۲)$$

را برای مجموعهٔ E قبول کنیم بآسانی می‌بینیم که این دوقانون درشرایط A و B و C

صدق میکند و درنتیجه مجموعهٔ E با این دو قانون ترکیب یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی تشکیل میدهد .

تبصرهٔ ۱- **هرمیدان مطابق تعریف ، اقلاً دارای دوعنصر است درصورتیکه یک فضای برداری ممکنست فقط یک عنصر بیشتر نداشته باشد** . چون هرفضای برداری شامل یک مبدأ است پس تعداد فضاهائی که منحصراً شامل یک بردار باشد فقط یکی بیشتر نیست . این فضای برداری (کاملاً اولیه) را به θ نشان میدهند .

تبصرهٔ ۲- تشابه (و همچنین اختلاف) زیادی مابین اصول یک میدان و اصول یک فضای برداری روی یک میدان موجود است . درهردوحالت اصول A معرف ساختمان جمعی دستگاه و اصول B معرف ساختمان ضربی آن و اصولC معرف رابطهٔ بین این دو ساختمان است. آنهائیکه بااصطلاحاتجبرآشنائی دارند میدانند که اصول A درهردو ، تعریفی است برای یک گروه مستقل ازترتیب عوامل یعنی گروه آبل (۱) . اصل C در فضاهای برداری معرف این حقیقت است که اینفضاها گروه اعداد را بعنوان کارگزار (۲)هائی میپذیرد .

تعریف زیر فضاها (۳) : یک مجموعهٔ غیر خالی m از یک فضای برداری V وقتی زیر فضا یا مانیفلد (٤) خطی خوانده میشود که اگر $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ دو بردار از m باشد هرترکیب خطی مثل $\alpha\mathbf{Y}+\beta\mathbf{X}$ هم در m باشد .

توجه : با هربردار $\mathbf{X}$ یک زیر فضای شامل $\mathbf{X}-\mathbf{X}$ هم وجود دارد . بنابراین وقتی میخواهیم زیر فضاهائی را که از خطوط و صفحات بوجود آمده است مطالعه کنیم باید دقت نمائیم که فقط خطوط و صفحاتی را که از مبدأ میگذرد درنظر بگیریم .

---

۱ - Abelien Group ۲ - Operators ۳ - Subspaces

٤ - Manifold

۲ـ استعمال حروف با اندیسهای تحتانی و فوقانی

این مبحث را بذکر بعضی امثلهٔ مقدماتی با حروف اندیس‌دار اختصاص میدهیم وسعی میکنیم با ذکر مثالهای متنوع ذهن خوانندگانی‌را که آشنایی‌با این نوع قرار دادها ندارند تا حد لازم‌آماده سازیم تا درفصول بعد با هیچگونه اشکالی از این نوع مواجه نشوند .

از آنجا که برای‌بیان‌هرموجود ریاضی باید تعریف مصطلح وساده‌ای‌برگزید در محاسبات تانسوری نیز باید قرار دادهای خاصی را که به مفهوم خود تانسور بستگی ندارد انتخاب و قبول کرد . فعلاً قبول شده است که استعمال حروف با اندیسهای فوقانی و تحتانی ساده‌ترین روش برای بیان تانسورهاست . منظور از استعمال حروف با اندیسهای فوقانی و تحتانی اینستکه بجای بکار بردن حروف x و y و z و t و ... یک حرف منحصر مثلاً x را انتخاب میکنیم واندیسهای فوقانی یا تحتانی‌بآن میدهیم مثل x^1 و x^2 و x^3 و x^4 و ... و یا x_1 و x_2 و x_3 و x_4 و ... همچنین بجای x' و y' و z' و ... حروف $x^{1'}$ و $x^{2'}$ و $x^{3'}$ و ... را بکار میبریم و بطوریکه خواهیم دید این طرز نوشتن سبب میشود که عبارات ما بطور قابل ملاحظه‌ای فشرده نوشته شود . مثلاً بااین قرار داد عبارت :

$$a_1x+a_2y+a_3z+a_4t$$

را بصورت زیر مینویسیم :

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=\sum_{i=1}^{4} a_i x_i \qquad (۲-۱)$$

همچنین بجای :

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$$

مینویسیم :

$$(۳-۲)\qquad \frac{\partial u}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial u}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial u}{\partial x^3}dx^3=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u}{\partial x^i}dx^i$$

و نیز :

$$(۳-۳)\qquad \frac{\partial y}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial y}{\partial x^\beta}+\frac{\partial z}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial z}{\partial x^\beta}+\cdots+\frac{\partial t}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial t}{\partial x^\beta}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial y^i}{\partial x^\beta}$$

اگر حروف اندیسهای مکرر هم داشته باشد باز میتوانیم از همین قرارداد استفاده کنیم :

$$(۳-۴)\qquad \frac{\partial A^{21}_{31}}{\partial x^{13}}+\frac{\partial A^{21}_{32}}{\partial x^{23}}+\frac{\partial A^{21}_{33}}{\partial x^{33}}+\frac{\partial A^{21}_{34}}{\partial x^{43}}=\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial A^{21}_{3i}}{\partial x^{i3}}$$

برای اعمال جمع [1] مضاعف وسه برابر و . . . هم داریم :

$$(۳-۵)\qquad \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}A^{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}=\sum_{\beta=1}^{n}\Big[A^{1\beta}\frac{\partial x^1}{\partial y^i}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}+A^{2\beta}\frac{\partial x^2}{\partial y^i}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}+\cdots+A^{n\beta}\frac{\partial x^n}{\partial y^i}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}\Big]$$

$$\begin{aligned}
&=A^{11}\frac{\partial x^1}{\partial y^i}\,\frac{\partial x^1}{\partial y^j}+A^{21}\frac{\partial x^2}{\partial y^i}\,\frac{\partial x^1}{\partial y^j}+\cdots+A^{n1}\frac{\partial x^n}{\partial y^i}\,\frac{\partial x^1}{\partial y^j}\\
&+A^{12}\frac{\partial x^1}{\partial y^i}\,\frac{\partial x^2}{\partial y^j}+A^{22}\frac{\partial x^2}{\partial y^i}\,\frac{\partial x^2}{\partial y^j}+\cdots+A^{n2}\frac{\partial x^n}{\partial y^i}\,\frac{\partial x^2}{\partial y^j}\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+A^{1n}\frac{\partial x^1}{\partial y^i}\,\frac{\partial x^n}{\partial y^j}+A^{2n}\frac{\partial x^2}{\partial y^i}\,\frac{\partial x^n}{\partial y^j}+\cdots+A^{nn}\frac{\partial x^n}{\partial y^i}\,\frac{\partial x^n}{\partial y^j}
\end{aligned}$$

۱ - Summation

برای عمل ضرب نیز استعمال حروف اندیس‌دار متداول است:

$$\prod_{i=۱}^{۳} (a_i^1 - b_i^1) = (a_۱^1 - b_۱^1)(a_۲^1 - b_۲^1)(a_۳^1 - b_۳^1) \quad (۳-۶)$$

ازاین ببعد دراین کتاب دو قرارداد زیر را نیز رعایت خواهیم کرد:

۱- اگر بعباراتی برخورد کنیم که در آنها یک اندیس معین درعین‌حال هم دربالا و هم در پائین آمده باشد برای سهولت تحریر قرار داد اینشتین راکه **حذف علامت** Σ است می‌پذیریم. **قرار داد: وجود اندیس واحدی در هریک جمله‌ای هم در بالا و هم در پائین، معرف یک عمل جمع روی این اندیس است.** این اندیس را «اندیس گنگ» می‌نامند. (اندیسهائی که «گنگ» نیست ولذا درهریک جمله‌ای فقط یا در بالا یا در پائین میآید اندیسهای «آزاد» نامیده میشود).

مثلاً بجای $\sum_{i=۱}^{n} a_i y^i$ می‌نویسیم: $a_i y^i$ و بجای $\sum_{k=۱}^{n} a_k^1 b_۳^k$ می‌نویسیم: $a_k^1 b_۳^k$.

۲- کلیهٔ اندیسها خواه فوقانی و خواه تحتانی از ۱ تا n تغییر میکنند مگر اینکه خلاف آن تصریح شود.

بنابراین بجای $\sum_{k=۱}^{m} \sum_{l=۱}^{n} a_k b_l^k c^l$ می‌نویسیم:

$$a_k b_l^k c^l \qquad k = ۱, ۲, \ldots, m \quad \text{و} \quad l = ۱, ۲, \ldots, n.$$

ملاحظه می‌کنیم که چون حدود l و k متفاوت بود در مقابل عبارت فوق حدود آنها را نیز بخصوص برای جلوگیری از اشتباه قید کرده‌ایم. بنابراین داریم:

$$a_k b_l^k c^l = a_1 b_1^1 c^1 + a_2 b_1^2 c^1 + \cdots + a_m b_1^m c^1$$
$$+ a_1 b_2^1 c^2 + a_2 b_2^2 c^2 + \cdots + a_m b_2^m c^2$$
$$+ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots$$
$$+ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots$$
$$+ a_1 b_n^1 c^n + a_2 b_n^2 c^n + \cdots + a_m b_n^m c^n \qquad (۳-۹)$$

نحوهٔ عمل برای عباراتیکه شامل «مشتقات جزئی» میباشد نیز بهمین ترتیب است.

مثلاً بجای $\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial x^2}{\partial y^\beta} dy^\beta$ می‌نویسیم :

$$\frac{\partial x^2}{\partial y^\beta} dy^\beta = \frac{\partial x^2}{\partial y^1} dy^1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2} dy^2 + \cdots + \frac{\partial x^2}{\partial y^n} dy^n \qquad (۳-۱۰)$$

و همینطور :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial s}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial y^k} = \frac{\partial s}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial y^k} = \frac{\partial s}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial y^k} + \frac{\partial s}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial y^k} + \cdots + \frac{\partial s}{\partial x^n}\frac{\partial x^n}{\partial y^k} \qquad (۳-۱۱)$$

اندیس گنگ [۱] را با حروف مختلف میتوان نشان داد :

$$A_{ik}B^i = A_{jk}B^j = A_{lk}B^l = \cdots \qquad (۳-۱۲)$$

و :

$$\frac{\partial s}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial y^k} = \frac{\partial s}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial y^k} = \frac{\partial s}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial y^k} = \cdots \qquad (۳-۱۳)$$

علت این امر اینستکه اندیس گنگ براثر عمل جمع خودبخود حذف میشود .

۱ - Dummy index

مجدداً یادآوری میکنیم که وقتی میخواهیم عباراتی نظیر :

$$du \equiv \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

را بصورت فشرده بنویسیم چون تعداد جملات محدود ومساوی ۳ است باید حدود تغییرات حتماً قید شود :

$$du \equiv \frac{\partial u}{\partial x^i} dx^i \qquad i = ۱ , ۲ , ۳ \qquad (۳-۱٤)$$

تبصره - جای اندیسها درمحاسبات تانسوری اهمیت زیادی دارد وطبق قرار داد بتعاریف همگردی[۱] و ناهمگردی[۲] که بعداً ازآن صحبت خواهیم کرد بستگی دارد . در عبارت $\frac{\partial A^i}{\partial x^k}$ حرف k اندیس تحتانی شمرده میشود .

نمادهای خاص : دستگاههای e [۳]
وتعمیم داده‌شدهٔ دلتای کرونکر [٤]

تعریف ۱ - کمیات $A_{i_1 i_2 \dots i_k}$ (یا $A^{i_1 i_2 \dots i_k}$) که تابع k اندیس است وقتی کاملاً متقارن [٥] نامیده میشود که با هرگونه جابگشت [٦] اندیسها مقدار نماد A تغییر نکند .

تعریف ۲ - دستگاه $A_{i_1 i_2 \dots i_k}$ (یا $A^{i_1 i_2 \dots i_k}$) که تابع k اندیس است وقتی کاملاً قرینهٔ چپ[۷] نامیده میشود که مقدارنماد A با هرگونه جایگشت زوج اندیسها تغییر نکند و باجایگشت فرداندیسها **فقط علامت** آن تغییر نماید .

---

۱ - Covariance
۲ - Contravariance
۳ - e - Systems
٤ - Generalized Kronecker deltas
٥ - Completely symmetric
٦ - Permutation
۷ - Completely skew - symmetric

از تعریف اخیر بلافاصله نتیجه میشود که در هردستگاه کاملاً قرینهٔ چپ ، جملاتی که دواندیس مساوی دارد لزوماً باید صفر باشد . مثلاً اگردستگاه قرینهٔ چپی از کمیات A_{ijk} $(i , j , k = ۱ , ۲ , ۳)$ داشته باشیم باید روابط :
$A_{۱۲۲} = o$ و $A_{۱۲۳} = -A_{۲۱۳}$ و $A_{۳۱۲} = A_{۱۲۳}$ و ... برقرار باشد . بطور کلی مؤلفه های A_{ijk} از یکدستگاه قرینهٔ چپ در روابط زیر صدق میکنند :

$$A_{ijk} = -A_{ikj} = -A_{jik} = A_{jki} = A_{kij} = -A_{kji} \qquad (۳-۱۵)$$

حال یکدستگاه قرینهٔ چپ ازکمیات $A_{i_۱ i_۲ \ldots i_k}$ (یا $A^{i_۱ i_۲ \ldots i_k}$) را بفرض $i_۱ , i_۲ , \ldots i_n = ۱ , ۲ , \ldots , n$ در نظر بیگیریم و دستگاه e را بترتیب زیر تعریف میکنیم :

تعریف ۳- هرگاه مقدار $A_{i_۱ i_۲ \ldots i_k}$ (یا $A^{i_۱ i_۲ \cdots i_k}$) وقتی که $i_۱ i_۲ \ldots i_k$ جایگشت زوجی از اعداد $۱۲ \ldots n$ است مساوی ۱+ و وقتی که $i_۱ i_۲ \ldots i_k$ جایگشت فردی از $۱۲ \ldots n$ است مساوی ۱− و در بقیهٔ حالات مساوی صفرباشد دستگاه $A_{i_۱ i_۲ \ldots i_k}$ (یا $A^{i_۱ i_۲ \cdots i_k}$) را دستگاه e مینامیم و با نماد $e_{i_۱ i_۲ \ldots i_k}$ (یا $e^{i_۱ i_۲ \cdots i_k}$) نمایش میدهیم .

حالت خاص دستگاه e نماد قرینهٔ چپ یا نماد تنش[1] e_{ij} (یا e^{ij}) است که با ماتریس مربع :

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} = e^{ij} \qquad (۳-۱۶)$$

نموده میشود ومقادیرآن: $e_{۱۱} = e_{۲۲} = ۰$ (یا $e^{۱۱} = e^{۲۲} = ۰$) و $e_{۱۲} = ۱$ (یا $e^{۱۲} = ۱$) و $e_{۲۱} = -۱$ (یا $e^{۲۱} = -۱$) است .

اگردستگاه e تابع سه اندیس $i , j , k = ۱ , ۲ , ۳$ باشد یعنی داشته باشیم

---

۱ - Spin's symbol

e^{ijk} (یا e_{ijk}) آنرا «نمادجایگشت» [1] نیز مینامند و مقادیر آن خواهد بود :

$$e_{123}=e_{231}=e_{312}=1 \qquad (\text{یا}\ e^{123}=e^{231}=e^{312}=1)$$

$$e_{132}=e_{213}=e_{321}=-1 \qquad (\text{یا}\ e^{132}=e^{213}=e^{321}=-1)$$

$$e_{112}=e_{222}=\ldots=0 \qquad (\text{یا}\ e^{112}=e^{222}=\ldots=0)$$

وقتیکه تعداد اندیسها را به ۳ محدود کنیم میتوانیم بنویسیم :

$$(3-17) \quad e_{ijk}=e^{ijk}=\frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i) \qquad i,j,k=1,2,3$$

مورد استعمال دستگاه e بیشتردربسط عباراتی است که برحسب اندیسهاقرینهٔ چپ میباشد .

مثال ۱ـ بکمک دستگاه e یک دترمینان مرتبهٔ دوم را بصورت :

$$(3-18) \qquad e^{ij}a_i^1 a_j^2 \equiv e^{11}a_1^1 a_1^2+e^{12}a_1^1 a_2^2+e^{21}a_2^1 a_1^2 + e^{22}a_2^1 a_2^2 \equiv a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2$$

و یک دترمینان مرتبهٔ سوم را بصورتهای :

$$(3-19) \qquad A\equiv e^{ijk}a_i^1 a_j^2 a_k^3 \equiv e_{ijk}a_1^i a_2^j a_3^k \qquad i,j,k=1,2,3$$

و یک دترمینان مرتبهٔ چهارم را بصورتهای :

$$(3-20) \qquad C\equiv e^{ijkl}a_i^1 a_j^2 a_k^3 a_l^4 \equiv e_{ijkl}a_1^i a_2^j a_3^k a_4^l \qquad i,j,k,l=1,2,3,4$$

و حاصلضرب دترمینانهای :

$$B=e^{rst}b_r^1 b_s^2 b_t^3 \quad , \quad A\equiv e^{ijk}a_i^1 a_j^2 a_k^3$$

[1]- Permutation symbol

را بصورت زیر میتوانیم نشان دهیم :

$$AB = b^{rst}(a_i^{۱}\, b_r^i)\,(a_j^{۲}\, b_s^j)\,(a_k^{۳}\, b_t^k) \qquad (۳-۲۱)$$
$$i, j, k, l, r, s = ۱, ۲, ۳$$

مثال ۲- مؤلفه های حاصلضرب خارجی دوبردار **A** و **B** یعنی $\mathbf{D} = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ با رابطهٔ زیر معین میشود :

$$D^i = e^{ijk}(A_j B_k) \qquad i, j, k = ۱, ۲, ۳ \qquad (۳-۲۲)$$

«تعمیم داده شدهٔ دلتای کرونکر» که با تعریف زیر مشخص میشود ارتباط نزدیکی با دستگاه e دارد .

تعریف ٤- نماد $\delta^{i_۱ i_۲ \dots i_k}_{j_۱ j_۲ \dots j_k}$ که دارای k اندیس فوقانی و k اندیس تحتانی است بطوری که هریک از اندیسها از ۱ تا n تغییر میکند وقتی «تعمیم داده شدهٔ دلتای کرونکر» نامیده میشود که خواص زیر را داشته باشد :

۱- هم برحسب اندیسهای فوقانی و هم برحسب اندیسهای تحتانی کاملاً قرینهٔ چپ باشد .

۲- اندیسهای فوقانی همه از هم متمایز و اندیسهای تحتانی همان مجموعهٔ اعداد اندیسهای فوقانی باشد . مقدارنماد برحسب اینکه تغییرمکان زوج یا فردی از اندیسها لازم باشد تا اندیسهای فوقانی همان ترتیب اندیسهای تحتانی را اختیارکنند بترتیب مساوی ۱+ یا ۱− باشد .

۳- در بقیهٔ حالات مقدار نماد صفر باشد .

بعنوان نمونه نماد : δ^{ij}_{kl} را درنظرمیگیریم . از تعریف ٤ نتیجه میگیریم که اگر $k=l$ و $i=j$ باشد و یا مجموعهٔ ij همان مجموعهٔ kl نباشد δ^{ij}_{kl} مساوی صفر میشود . ودربقیهٔ حالات برحسب اینکه kl جایگشت زوج یا فردی از ij باشد مقدار آن بترتیب مساوی ۱+ یا ۱− میشود . لذا :

$$\cdot = \delta^{11}_{kl} = \delta^{22}_{kl} = \delta^{12}_{13} = \dots$$

$$1 = \delta^{12}_{12} = \delta^{13}_{13} = \delta^{21}_{21} = \dots$$

$$-1 = \delta^{12}_{21} = \delta^{13}_{31} = \delta^{21}_{12} = \dots$$

از تعریف ۳ نتیجه میشود که حاصلضرب $e^{i_1 i_2 \cdots i_n} e_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ همان «تعمیم داده شدهٔ دلتای کرونکر» است . مثلاً $e^{\alpha\beta\gamma} e_{ijk}$ را درنظر میگیریم :

۱- اگرحداقل دوتا ازاندیسهای فوقانی یا دو تا از اندیسهای تحتانی مثل همدیگر باشد $e^{\alpha\beta\gamma} e_{ijk}$ مساوی صفر میشود .

۲- اگراختلاف تعداد تغییرمکانهای $\alpha\beta\gamma$ و ijk با ۱۲۳ عدد زوجی باشد $e^{\alpha\beta\gamma} e_{ijk}$ مساوی ۱+ میشود .

۳- اگر اختلاف تعداد تغییرمکانهای $\alpha\beta\gamma$ و ijk با ۱۲۳ عدد فردی باشد $e^{\alpha\beta\gamma} e_{ijk}$ مساوی ۱− میشود .

اندك تأملی نشان میدهد که احکام (۲) و (۳) را بصورتهای زیرنیزمیتوانیم بیان کنیم :

('۲) اگر عدهٔ زوجی تغییرمکان لازم باشد تا اندیسهای فوقانی بترتیب اندیسهای تحتانی درآید $e^{\alpha\beta\gamma} e_{ijk}$ مساوی ۱+ میشود .

('۳) اگرعدهٔ فردی تغییرمکان لازم باشد تا اندیسهای فوقانی ترتیب اندیسهای تحتانی را اختیارکند $e^{\alpha\beta\gamma} e_{ijk}$ مساوی ۱− میشود .

پس میتوانیم بنویسیم :

$$e^{\alpha\beta\gamma} e_{ijk} = \delta^{\alpha\beta\gamma}_{ijk} \qquad (۳—۲۳)$$

از تعاریف ۳ و ٤ نتیجه میگیریم که میتوانیم دستگاههای e را برحسب دلتاهای کرونکر تعریف کنیم :

$$e^{i_1 i_2 \dots i_n} = \delta^{i_1 i_2 \dots i_n}_{12\dots n} \quad \text{و} \quad e_{i_1 i_2 \dots i_n} = \delta^{12\dots n}_{i_1 i_2 \dots i_n} \qquad (۳-۲۴)$$

هنگامی $e=+1$ یا $e=-1$ است که مجموعهٔ اعداد صحیح متمایز $i_1 i_2 \dots i_n$ بترتیب توسط جایگشت زوج یا فردی از مجموعهٔ $12\dots n$ بدست آمده باشد. در بقیهٔ حالات $e=0$ است.

اکنون فرض میکنیم در $\delta^{ijk}_{\alpha\beta\gamma}$ اندیسهای $k=\gamma$ باشد. بازاء $n=3$ داریم:

$$\delta^{ijk}_{\alpha\beta k} = \delta^{ij1}_{\alpha\beta 1} + \delta^{ij2}_{\alpha\beta 2} + \delta^{ij3}_{\alpha\beta 3} = \delta^{ij}_{\alpha\beta} \qquad (۳-۲۵)$$

بسهولت دیده میشود که این عبارت وقتی مساوی صفر است که $i=j$ یا $\alpha=\beta$ باشد. اگر فرض کنیم $i=1$ و $j=2$ باشد داریم: $\delta^{12}_{\alpha\beta}=\delta^{123}_{\alpha\beta 3}$ و لذا $\delta^{12}_{\alpha\beta}$ تنها وقتی مساوی صفر نیست که $\alpha\beta$ جایگشتی از 12 باشد. دراینصورت اگر $\alpha\beta$ جایگشت زوجی از 12 باشد داریم $\delta^{12}_{\alpha\beta}=+1$ و اگر $\alpha\beta$ جایگشت فردی از 12 باشد $\delta^{12}_{\alpha\beta}=-1$ خواهد شد. هرمقداری که برای α و β ازمجموعهٔ ۱و۲و۳ انتخاب کنیم همین نتایج را خواهیم گرفت. پس بطورخلاصه برای $\delta^{ij}_{\alpha\beta}$ حکم زیررا میتوانیم بیان کنیم:

۱- درصورتیکه اندیسهای تحتانی یا اندیسهای فوقانی مثل همدیگر باشد و یا اندیسهای تحتانی و فوقانی از اعداد یکسانی تشکیل نشده باشد داریم:

$$\delta^{ij}_{\alpha\beta}=0$$

۲- اگر ij جایگشت زوجی از $\alpha\beta$ باشد داریم:

$$\delta^{ij}_{\alpha\beta}=+1$$

۳- اگر ij جایگشت فردی از $\alpha\beta$ باشد داریم:

$$\delta^{ij}_{\alpha\beta}=-1$$

حال اگر در $\delta^{ij}_{\alpha\beta}$ فرض کنیم $\beta=j$ باشد با‌ستگاهی که تابع دواندیس است میرسیم:

$$\delta^{i}_{\alpha}=\frac{۱}{۲}\ \delta^{ij}_{\alpha j}=\frac{۱}{۲}\left(\delta^{i۱}_{\alpha۱}+\delta^{i۲}_{\alpha۲}+\delta^{i۳}_{\alpha۳}\right) \qquad (۳-۲۶)$$

حال اگر i را در δ^{i}_{α} مساوی ۱ بگیریم داریم :

$$\delta^{۱}_{\alpha}=\frac{۱}{۲}\left(\delta^{۱۲}_{\alpha۲}+\delta^{۱۳}_{\alpha۳}\right)$$

این عبارت وقتی مخالف صفر است که $\alpha=۱$ باشد و دراینحال $\delta^{۱}_{۱}=۱$ میشود . اگر i را مساوی ۲ یا ۳ میگرفتیم بازبهمین نتیجه میرسیدیم . پس میتوانیم بگوئیم δ^{i}_{α} یا «دلتای کرونکر» مساوی ۱ یا صفر است وقتیکه بترتیب $i=\alpha$ یا $i\neq\alpha$ باشد .

«دلتای کرونکر «را بصورتهای δ_{ij} و δ^{ij} نیزمی‌نویسند و با ماتریس مربع زیر نشان میدهند :

$$\delta^{i}_{j}=\delta_{ij}=\delta^{ij}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad (۳-۲۷)$$

توجه : e_{ij} (یا e^{ij}) را نمیتوان بصورت e^{i}_{j} نوشت .

موارد استعمال ـ از دلتای کرونکر دربسط عبارات استفادهٔ زیادی میشود . مثلاً عبارت طول قوس راکه بصورت :

$$ds^{۲}=\sum_{i=۱}^{n}(dx^{i})^{۲}$$

است میتوانیم بصورت :

$$ds^{۲}=\delta_{ij}\,dx^{i}dx^{j}$$

بنویسیم و همچنین بجای $A_{\alpha\alpha}dx^{\alpha}dx^{\alpha}$ که هنگام بسط ممکنست دچاراشتباه شویم

میتوانیم عبارت $\delta_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}$ را بنویسیم .

صحت رابطهٔ $\delta_j^k A^j = A^k$ بخوبی دیده میشود . زیرا تنها جمله‌ای از طرف چپ که صفر نمیشود جمله‌ایست که در آن $j=k$ است .

همچنین اگر همعامل [1] یا ضریب جملهٔ a_s^r را در دترمینان (۳ - ۱۹) به A_s^r نشان دهیم با استفاده از نمادهای کرونکر میتوانیم بنویسیم :

$$A_i^r = \frac{1}{2} \delta_{ijk}^{rst} a_s^j \; a_t^k \qquad (۳—۲۸)$$

(برای اثبات فورمولهای مربوط به دترمینان‌ها به [۷] مراجعه شود) .

۱ - Cofactor

تمرینات

۱- عبارات زیر را بسط دهید :

(a) $X^i_k Y^j_i$ $\qquad$ $i=1,2,3$

(b) $X_i Y^i_j$ $\qquad$ $i=1,2,3,4$

(c) $X^i Y^k_i Z_k$ $\qquad$ $k=1,2$ و $i=1,2,3$

(d) $X^i Y_i Z^i_j$ $\qquad$ $i=1,2$

(e) $X_{ii} Y^{ij} Z_j$ $\qquad$ $j=1,2$ و $i=1,2,3$

(f) $A^i_j \dfrac{\partial x^j}{\partial y^\alpha} \dfrac{\partial x^\beta}{\partial y^i}$ $\qquad$ i و $j=1,2,3$

۲- اگر $\alpha=\beta$ باشد ثابت کنید :

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} = \delta^i_j$$

و :

$$\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \frac{\partial x^\gamma}{\partial y^k} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} + \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial y^j \partial y^k} = 0$$

۳- عبارات زیر را بصورت اختصاری با حروف اندیس‌دار بنویسید :

(a $$k_{11}(x^1)^2 + k_{12}x^1x^2 + k_{13}x^1x^3 + k_{21}x^2x^1 + k_{22}(x^2)^2 + k_{23}x^2x^3 + k_{31}x^3x^1 + k_{32}x^3x^2 + a_{33}(x^3)^2$$

(b $$a^2_1 b^1_1 c^1_3 + a^2_1 b^1_2 c^2_3 + a^2_1 b^1_3 c^3_3 + \cdots + a^2_1 b^1_n c^n_3$$

(c $$\frac{\partial y^i}{\partial x^1} \frac{\partial y^j}{\partial x^1} + \frac{\partial y^i}{\partial x^2} \frac{\partial y^j}{\partial x^2} + \frac{\partial y^i}{\partial x^3} \frac{\partial y^j}{\partial x^3}$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
y_{۱}=g_{۱۱}y^{۱}+g_{۱۲}y^{۲}+g_{۱۳}y^{۳}\\
y_{۲}=g_{۲۱}y^{۱}+g_{۲۲}y^{۲}+g_{۲۳}y^{۳}\\
y_{۳}=g_{۳۱}y^{۱}+g_{۳۲}y^{۲}+g_{۳۳}y^{۳}
\end{array}
\right. \qquad (d
$$

۴- بازاء ۳ و ۲ و ۱ $= i$ و j عبارات زیر را بسط دهید :

$$\delta_{۳i}x^{i} \text{ و } \delta_{ij}\, x^{i}x^{j} \text{ و } \delta^{i}_{j}x^{j}x_{i} \text{ و } \delta^{۱۲}_{ij}x^{i}y^{j} \text{ و } \delta^{۱۳}_{ij}x^{i}y^{j} \text{ و } \delta^{ij}_{ij}$$

۵- با استفاده از اتحاد :

$$\delta^{\alpha}_{\beta}\frac{\partial y^{i}}{\partial x^{\alpha}}\;\frac{\partial x^{\beta}}{\partial y^{j}}\equiv\delta^{i}_{j}$$

عبارت زیر را ثابت کنید :

$$\frac{\partial^{۲}y^{i}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\gamma}}+\frac{\partial^{۲}x^{\beta}}{\partial y^{j}\,\partial y^{k}}\;\frac{\partial y^{j}}{\partial x^{\alpha}}\;\frac{\partial y^{k}}{\partial x^{\gamma}}\;\frac{\partial y^{i}}{\partial x^{\beta}}=۰$$

۶- تساویهای زیر را ثابت کنید :

$$\delta^{ij}\delta_{ik}=\delta^{j}_{k} \quad \text{و} \quad \delta^{i}_{j}\;\delta^{j}_{k}=\delta^{i}_{k} \quad \text{و} \quad \delta^{u}_{i}\,x_{u}=x_{i}$$

$$e^{ijk}\,a^{l}_{i}\,a^{m}_{j}\,a^{n}_{k}=\left|a^{i}_{j}\right|e^{lmn} \quad \text{و} \quad e_{ijk}\,a^{i}_{l}\,a^{j}_{m}\,a^{k}_{n}=\left|a^{i}_{j}\right|e_{lmn}$$

$$\delta^{ij}_{ln}=\delta^{i}_{l}\,\delta^{j}_{n}-\delta^{i}_{n}\,\delta^{j}_{l}=\begin{vmatrix}\delta^{i}_{l} & \delta^{i}_{n}\\ \delta^{j}_{l} & \delta^{j}_{n}\end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \delta^{ijk}_{\alpha\beta\gamma}=\begin{vmatrix}\delta^{i}_{\alpha} & \delta^{i}_{\beta} & \delta^{i}_{\gamma}\\ \delta^{j}_{\alpha} & \delta^{j}_{\beta} & \delta^{j}_{\gamma}\\ \delta^{k}_{\alpha} & \delta^{k}_{\beta} & \delta^{k}_{\gamma}\end{vmatrix}$$

$$\delta^{ij}_{\alpha\beta}a^{\alpha\beta}=a^{ij}-a^{ji} \quad \text{و} \quad \delta^{ijk}_{\alpha\beta\gamma}a^{\alpha\beta\gamma}=a^{ijk}-a^{ikj}+a^{jki}-a^{jik}+a^{kij}-a^{kji}$$

۷- اگر تمام اندیسهای فوقانی و تحتانی از ۱ تا ۴ تغییر کند ثابت کنید :

$$\delta^{i}_{r}=\frac{۱}{۳}\;\delta^{ij}_{rj}=\frac{۱}{۳\,!}\;\delta^{ijkl}_{rjkl} \quad \text{و} \quad \delta^{ijkl}_{ijkl}=۴\,!$$

۸- ثابت کنید که اگر تمام اندیسها از ۱ تا n تغییر کند روابط زیر برقرار است:

$$e^{i_1 i_2 \ldots i_n} e_{i_1 i_2 \ldots i_n} = n!$$

و:

$$e^{i_1 i_2 \ldots i_r i_{r+1} \ldots i_n} e_{j_1 j_2 \ldots j_r i_{r+1} \ldots i_n} = (n-r)!\, \delta^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_r}$$

و:

$$\delta^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \frac{n!}{(n-r)!} \quad و \quad \delta^{i}_{\alpha} = \frac{1}{n-1}\delta^{ij}_{\alpha j} \quad و \quad \delta^{ij}_{ij} = n(n-1)$$

و:

$$\delta^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_r} = \frac{(n-k)!}{(n-r)!} \delta^{i_1 i_2 \ldots i_r i_{r+1} \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_r i_{r+1} \ldots i_k}$$

۹- ثابت کنید که اگر کمیات $A_{i_1 \ldots i_k}$ نسبت باندیسها کاملاً قرینهٔ چپ باشد داریم:

$$\delta^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} A_{i_1 i_2 \ldots i_k} = k!\, A_{j_1 j_2 \ldots j_k}$$

۱۰- ثابت کنید اگر A_{ijk} کاملاً قرینه باشد واندیسها از ۱ تا n تغییر کند تعداد عناصر متمایز مجموعهٔ A_{ijk} برابر:

$$N = n + n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

و اگر A_{ijk} کاملاً قرینهٔ چپ باشد تعداد جملات متمایزو غیرصفر A_{ijk} برابر:

$$N' = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

است.

۱۱- ثابت کنید که اگر a_{ij} در معادلهٔ $ba_{ij}+ca_{ji}=0$ صدق کند یا $b=-c$ و a_{ij} قرینه است و یا $b=c$ و a_{ij} قرینهٔ چپ است .

راهنمائی : چون i و j از ۱ تا n تغییر میکنند معادله بصورت :

$$ba_{ji}+ca_{ij}=0$$

نوشته میشود و از جمع این دو معادله داریم :

$$(b+c)\ (a_{ij}+a_{ji})=0$$

۱۲- ثابت کنید که اگریک مجموعهٔ n^{p+q} کمیت $A^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}$ (i هاو j ها از ۱ تا n تغییر میکنند) نسبت‌به دویاچند اندیس تحتانی قرینه باشدداریم:

$$\delta^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_q}\ A^{r_1 r_2 \dots r_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}=0$$

واگر نسبت به دو یاچند اندیس فوقانی قرینه باشد داریم:

$$\delta^{s_1 s_2 \dots s_p}_{i_1 i_2 \dots i_p}\ A^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}=0$$

٤- عملیات جبری روی حروفی که دارای اندیسهای تحتانی و فوقانی است

۱ - ٤ - **جمع** : چون فقط کمیات هم جنس قابل جمع شدن با یکدیگراست لذا باید درجمع :

۱- کمیاتی که بوسیله حروف با اندیسهای فوقانی و تحتانی نموده میشود همجنس باشد . مثلاً یک کمیت عددوار با یک کمیت برداری قابل جمع شدن نیست .

۲- علامات مربوطه برای عمل جمع[1] حدود واحدی داشته باشد والا باید آنها را بسط داد وقوانین عمل جمع را پس‌از بسط اجرا کرد .

مثال : فرض میکنیم ab و cd همجنس باشد برای حاصل جمع دوعبارت :

$$a_i^{3} b^i \quad \text{و} \quad c_i d^i \qquad i=1,2,3,4$$

داریم :

$$a_i^{3}b^i + c_i d^i \equiv a_1^{3}b^1 + a_2^{3}b^2 + a_3^{3}b^3 + a_4^{3}b^4 + c_1 d^1 + c_2 d^2 + c_3 d^3 + c_4 d^4 \tag{۴—۱}$$

اما اگر بخواهیم :

$$c_i d^i \quad i=1,2 \quad \text{و} \quad a_i^{3} d^i \qquad i=1,2,3,4$$

را باهم جمع کنیم باید اول آنها را بسط دهیم و بعد جمع کنیم ویا اندیسهای گنگ را در یکی از آنها عوض کنیم یعنی بنویسیم :

$$a_i^{3} d^i + c_j d^j \qquad i=1,2,3,4 \quad \text{و} \quad j=1,2$$

بااین شرایط اصول A(۳ §) کاملاً صادق است .

۲ - ۴ - **ضرب دریک عدد** : بدیهی است اصول B و C(۲ §) نیز صادق است . یعنی اگر α و β دو عدد باشد داریم :

$$\circ(\alpha\, a^i b_i^j) = \circ\,\alpha (a^i b_i^j) \tag{۴=۲}$$

$$(\alpha+\beta)a^i b_i^j = \alpha a^i b_i^j + \beta a^i b_i^j \tag{۴—۳}$$

$$\alpha(a^i b_i^j + c^i d_i^j) = \alpha a^i b_i^j + \alpha c^i d_i^j \tag{۴—۴}$$

۳ - ۴ - ضرب کمیاتی که بوسیلهٔ حروف با اندیسهای فوقانی و تحتانی نموده شده است :

۱ _ Summation

اگر داشته باشیم :

$$a = m^{\alpha} r_{\alpha} \qquad \alpha = ۱ , ۲ , ۳ , ٤ \qquad (٤-٥)$$

و :

$$b = n^{\alpha} s_{\alpha} \qquad \alpha = ۱ , ۲ , ۳ , ٤ \qquad (٤-٦)$$

حاصلضرب زیر $ab = m^{\alpha} n^{\alpha} r_{\alpha} s_{\alpha}$ **صحیح نیست** . یعنی این حاصلضرب مساوی حاصلضرب منبسط دو عبارت فوق نمیباشد . برای تعیین حاصلضرب باید اندیسهای گنگ را عوض کرد و مثلا نوشت :

$$a = m^{\alpha} r_{\alpha} \qquad \alpha = ۱ , ۲ , ۳ , ٤ \qquad (٤-٥)'$$

$$b = n^{\beta} s_{\beta} \qquad \beta = ۱ , ۲ , ۳ , ٤ \qquad (٤-٦)'$$

و دراینصورت حاصلضرب زیر **صحیح است** :

$$ab = m^{\alpha} n^{\beta} r_{\alpha} s_{\beta} \qquad \alpha \text{ و } \beta = ۱ , ۲ , ۳ , ٤ \qquad (٤-٧)$$

مثال دیگر : اگر داشته باشیم :

$$dy^{i} = \frac{\partial y^{i}}{\partial x^{\alpha}} dx^{\alpha} \qquad \alpha = ۱ , ۲ , ۳ , ٤ \qquad (٤-٨)$$

و :

$$dy^{i} = \frac{\partial y^{i}}{\partial x^{\alpha}} dx^{\alpha} \qquad (٤-٩)$$

حاصلضرب :

$$(dy^{i})^{۲} = \left(\frac{\partial y^{i}}{\partial x^{\alpha}} \right)^{۲} (dx^{\alpha})^{۲}$$

صحیح نیست . حاصلضرب صحیح این دو عبارت خواهد بود :

$$dy^{i} dy^{j} = \frac{\partial y^{i}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial y^{j}}{\partial x^{\beta}} dx^{\alpha} dx^{\beta} \qquad \alpha \text{و} \beta = ۱ , ۲ , ۳ , ٤ \qquad (٤-۱۰)$$

تحقیق صحت روابط زیر از بسط طرفین آنها صورت میگیرد .

استقلال از ترتیب درضرب :

$$a_i b^i = b^i a_i \qquad (۴-۱۱)$$

شرکت پذیر بودن در ضرب :

$$(a^i_j b^j_i)\, c^k_l = a^i_j (b^j_k\, c^k_l) \qquad (۴-۱۲)$$

توزیعی بودن نسبت به جمع :

$$a_i (b^i_n + c^i_n) = a_i b^i_n + a_i c^i_n \qquad (۴-۱۳)$$

این روابط نشان میدهد که ترتیب عمل جمع روی‌اندیسهای گنگ‌بی‌تفاوت است .

۵ - ۴ - **توانها** : درموقع توان رسانیدن **باید اندیسهای‌گنگ را عوض کرد .** رابطهٔ :

$$(a^i_j b^j_k)^۳ = (a^i_j)^۳ (b^j_k)^۳$$

صحیح نیست و صحیح آن بصورت زیر باید نوشته شود :

$$(a^i_j b^j_k)^۳ = a^i_r b^r_k \times a^i_s b^s_k \times a^i_t b^t_k \qquad j, r, s, t = ۱, ۲, ۳ \qquad (۴-۱۴)$$

و همینطور در عباراتی نظیر :

$$(a^i_j b^j_k)^۳ (a^i_j b^j_k)^۲$$

باید اندیسهای گنگ را عوض نمود .

۶ - ۴ - **مشتق** : اگر a_i و b^i توابعی از یک متغیر t باشد داریم :

$$\frac{d}{dt}(a_i b^i) = a'_i b^i + a_i b'^i \qquad (۴-۱۵)$$

$$\left(a'_i = \frac{da_i}{dt}\ ,\ b'^i = \frac{db^i}{dt} \right)$$

زیرا :

$$\frac{d}{dt}(a_i b^i) = \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i b^i\right] = \frac{d}{dt}(a_1 b^1 + a_2 b^2 + \cdots + a_n b^n)$$

$$= a'_1 b^1 + a_1 b'^1 + a'_2 b^2 a_2 b'^2 + \cdots + a_n b'^n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (a'_i b^i + a_i b'^i) = a'_i b^i + a_i b'^i$$

وقتی که دارای دو اندیس گنگ هستیم نحوهٔ عمل نیز همین است :

$$\frac{d}{dt}(a_{ij} b^i c^j) = \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b^i c^j\right] \tag{٤—١٦}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} b^i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c^j\right)\right]$$

حال اگر فرض کنیم :

$$d_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c^j$$

پس :

$$\frac{d}{dt}(a_{ij} b^i c^j) = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} d_i b^i = d'_i b^i + d_i b'^i \tag{٤—١٧}$$

اما میدانیم :

$$d'_i = a'_{ij} c^j + a_{ij} c'^j$$

و لذا :

$$\frac{d}{dt}(a_{ij} b^i c^j) = (a'_{ij} c^j + a_{ij} c'^j) b^i + a_{ij} b'^j c^i = a'_{ij} b_i c^j \tag{٤—١٨}$$

$$+ a_{ij} b'^i c^j + a_{ij} b^i c'^j$$

وقتی هم که دارای n اندیس گنگ باشیم نحوهٔ عمل نیز بهمین ترتیب است .
رابطهٔ زیر از گفته های فوق نتیجه میشود :

$$\frac{d}{dt}(a_{ij}b^{ij}) = a'_{ij}b^{ij} + a_{ij}b'^{ij} \qquad (۴-۱۹)$$

۷ - ۴ - **مشتق جزئی :** صورتهای جبری اندیس داری که شامل توابعی از چند متغیراست مثل توابعی که دارای یک متغیراست مشتق گرفته میشود . بدیهی است بجای نماد (d) نماد (∂) گذاشته خواهد شد :

$$\frac{\partial}{\partial x^1}(a_{ij}b^i c^j) = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^1}(b^i c^j) + a_{ij}\left(\frac{\partial b^i}{\partial x^1}\right)c^j + a_{ij}b^i\frac{\partial c^j}{\partial x^1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^2}(a_{ij}b^i c^j) = \frac{\partial a^{ij}}{\partial x^2}(b^i c^j) + a_{ij}\left(\frac{\partial b^i}{\partial x^2}\right)c^j + a_{ij}b^i\frac{\partial c^j}{\partial x^2}$$

. . . .

. . . .

. . . .

یک‌حالت بسیارمهم مشتق‌جزئی شکل درجهٔ دوم متقارنی است که درآن a_{ij} مقدار ثابتی باشد . اگر داشته باشیم :

$$T = a_{ij}x^i x^j \qquad (۴-۲۰)$$

میتوانیم بنویسیم :

$$\frac{\partial T}{\partial x^k} = a_{ij}\left[\frac{\partial x^i}{\partial x^k}x^j + x^i\frac{\partial x^j}{\partial x^k}\right]$$

$$= a_{ij}[\delta_k{}^i x^j + \delta_k{}^j x^i] = a_{kj}x^j + a_{ik}x_i$$

با توجه باینکه :

$$a_{ik} = a_{ki}$$

لذا خواهیم داشت :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial x^k} = ۲ a_{kj} x^j} \qquad (۴ - ۲۱)$$

۸ - ۴ - **تابع اولیه گیری** [۱] تابع اولیه گیری معمولاً روی بسط داده شدهٔ جملات صورت میگیرد ودربعضی حالات تابع اولیه گیری بصورت جزء بجزء [۲] نیز مفید واقع میشود :

مثال :

$$\int_{t_۰}^{t_۱} (a_i b^i) dt = \int_{t_۰}^{t_۱} (a_۱ b^۱) dt + \int_{t_۰}^{t_۱} (a_۲ b^۲) dt + \cdots + \int_{t_۰}^{t_۱} (a_n b^n) dt$$

ویا :

$$\int_{t_۰}^{t_۱} a_i \, db^i = [a_i b^i]_{t_۰}^{t_۱} - \int_{t_۰}^{t_۱} b^i \, da_i$$

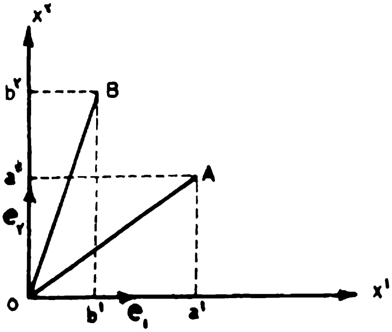
۵ـ دستگاههای مختصات مستقیم الخط و منحنی الخط در صفحه و در فضا

۱ - ۵ - مختصات دکارتی قائم ومایل در صفحه و درفضا (مستقیم الخط) .

ازموقعیت استفاده می کنیم ومحورهای مختصات ومختصات نقاط را با حروف اندیس دار نمایش میدهیم .

۱ - Integration ۲ - Par partie

دو محور مستقیم‌الخط متعامد Ox^1 و Ox^2 یک صفحه را مشخص میکنند .



ش ۵.۱

طولهای واقع روی این محورها با بردارهای یکهٔ آنها و وضع نقاط واقع درصفحه باتصاویر قائم این نقاط روی همین محورها مشخص میشود (ش ۱ - ۵) .

فاصلهٔ بین دونقطهٔ A و B یعنی l با رابطهٔ :

$$l^2=(b^1-a^1)^2+(b^2-a^2)^2=\delta_{ij}(b^i-a^i)(b^j-a^j) \qquad (۵-۱)$$

i و $j=1\,,\,2$

و فاصلهٔ بین دو نقطهٔ بینهایت نزدیک :

$$X'(x^1+dx^1\,,\,x^2+dx^2) \quad \text{و} \quad X(x^1\,,\,x^2)$$

یعنی ds با رابطهٔ :

$$ds^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2=\delta_{ij}dx^i\,dx^j \qquad i \text{ و } j=1\,,\,2 \qquad (۵-۲)$$

مشخص میشود .

بردار قطبی $\mathbf{V}$ بمؤلفه‌های v^1 و v^2 با رابطهٔ :

$$\mathbf{V}=v^1\mathbf{e}_1+v^2\mathbf{e}_2=v^i\mathbf{e}_i \qquad i=1\,,\,2 \qquad (۵-۳)$$

وقدر مطلق طول یا مدول [1] آن با رابطهٔ :

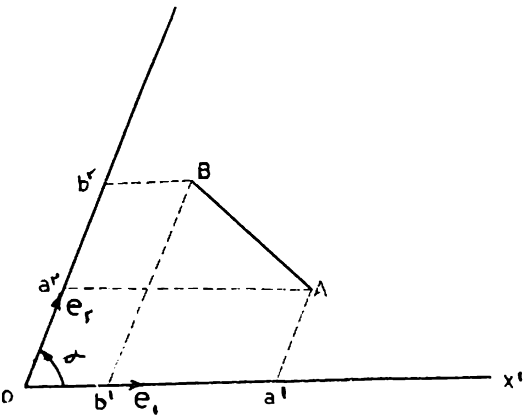
$$|\mathbf{V}|=+\sqrt{(v^1)^2+(v^2)^2}=+\sqrt{\delta_{ij}v^i v^j} \qquad i\,,\,j=1\,,\,2 \qquad (۵-۴)$$

تعریف میشود .

---

۱ - Module

اگر محورهای مختصات مایل باشد (ش ۲ - ۵) ، مفاهیم فوق یعنی :
$l^۲$ و $ds^۲$ و $\mathbf{V}$ و $|\mathbf{V}|$ بترتیب از روابط زیر بدست میآید :



ش ۵.۲

$$l^۲=(b^۱-a^۱)^۲+(b^۲-a^۲)^۲+۲(b^۱-a^۱)(b^۲-a^۲)\cos\alpha \qquad (۵-۵)$$

$$ds^۲=(dx^۱)^۲+(dx^۲)^۲+۲dx^۱dx^۲\cos\alpha \qquad (۵-۶)$$

$$\mathbf{V}=v^i\mathbf{e}_i \qquad i=۱,۲ \qquad (۵-۷)$$

$$|\mathbf{V}|=+\sqrt{(v^۱)^۲+(v^۲)^۲+۲v^۱v^۲\cos\alpha} \qquad (۵-۸)$$

اگر نقطه‌ای مانند A در فضا باشد وضع آن نسبت بسه محور متعامد $Ox^۱$ و $Ox^۲$ و $Ox^۳$ با سه عدد $a^۱$ و $a^۲$ و $a^۳$ که با بردارهای یکهٔ محورها اندازه گرفته میشود معین (ش ۳ - ۵) وراﺑﻄﮥ (۵ - ۵) تا (۸ - ۵) بترتیب بصورتهای زیر بیان میگردد :

$$l^۲=(b^۱-a^۱)^۲+(b^۲-a^۲)^۲+(b^۳-a^۳)^۲ \qquad (۵-۹)$$

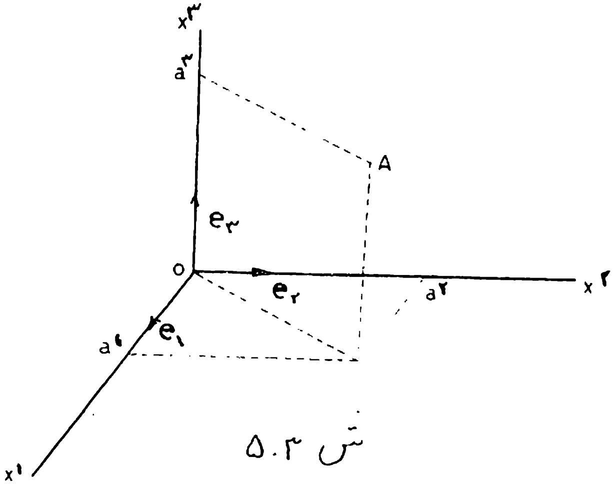
$$=\delta_{ij}(b^i-a^i)(b^j-a^j) \qquad i \text{ و } j=۱,۲,۳$$

$$ds^۲=\delta_{ij}dx^idx^j \qquad i \text{ و } j=۱,۲,۳ \qquad (۵-۱۰)$$

$$\mathbf{V} = v^i \mathbf{e}_i \qquad i = ۱, ۲, ۳ \qquad (۵ — ۱۱)$$

$$|\mathbf{V}| = +\sqrt{\delta_{ij} v^i v^j} \qquad i \text{ و } j = ۱, ۲, ۳ \qquad (۵ — ۱۲)$$

از محاسبهٔ طول در دستگاههای مایل که بصورت پیچیده‌ای در میآید فعلاً صرفنظر

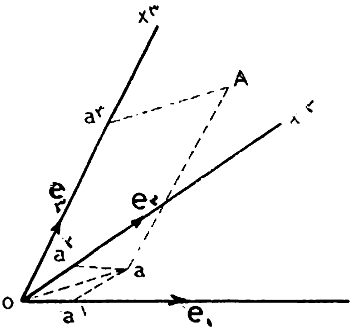


ش ۵.۳

میکنیم وفقط رابطهٔ (۱۱ - ۵) راکه دردستگاههای مایل سه بعدی عیناً با روابطی نظیر (۱۱ - ۵) بیان میشود ذکر میکنیم :

$$\mathbf{V} = v^i \mathbf{e}_i \qquad i = ۱, ۲, ۳ \qquad (۵ — ۱۳)$$

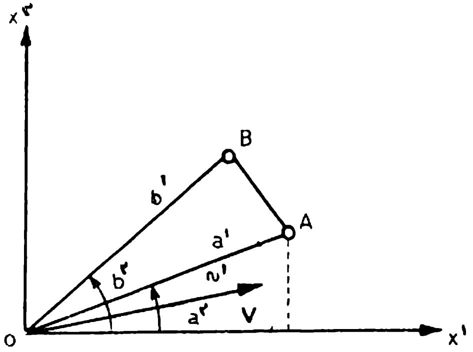
مختصات مایل نقطهٔ A مطابق ش (۴ - ۵) بدست میآید :



ش ۵.۴

۲ - ۵ - مختصات منحنی‌الخط در صفحه و در فضا .

اگر A نقطه‌ای از صفحه باشد مختصات قطبی آن نسبت بمحور Ox^1 یعنی a^1 و a^2 در ش (۵ - ۵) نموده شده است .



ش ۵.۵

رابطهٔ بین این مختصات ومختصات دکارتی قائم آن نسبت بدو محورمتعامد Ox^1 و Ox^2 خواهد بود :

$$x^1 = a^1 \cos a^2 \qquad (5-14)$$

$$x^2 = a^1 \sin a^2 \qquad (5-15)$$

که در اینجا $OA = a^1$ گرفته شده است . و طول بردار قطبی **V** خواهد بود :

$$|\mathbf{V}| = v^1 \qquad (5-16)$$

رابطهٔ (۵ - ۵) بصورت زیر در میآید :

$$l^2 = (a^1)^2 - 2a^1 b^1 \cos(b^2 - a^2) + (b^1)^2 \qquad (5-17)$$

و رابطهٔ (۶ - ۵) یعنی فاصلهٔ بین دو نقطهٔ بینهایت نزدیک از رابطهٔ زیر با توجه به ش (۶ - ۵) بدست میآید :

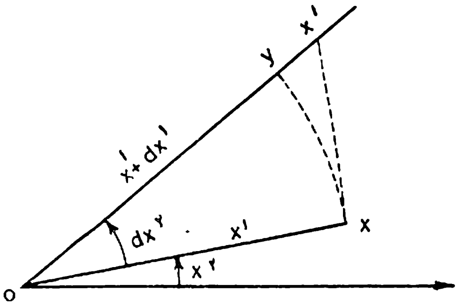
$$ds^2 = (dx^1)^2 + (x^1 dx^2)^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2 (dx^2)^2 \qquad (5-18)$$

مختصات قطبی نقطهٔ A برحسب مختصات دکارتی آن خواهد بود :

$$a^1 = +\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} \qquad (٥ - ١٩)$$

$$a^2 = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{x^1} \qquad (٥ - ٢٠)$$

از رابطهٔ (٩ ١ - ٥) و (٢٠ - ٥) دیده میشود که محورهای مختصات یعنی خطوط



ش ٥.٦

$a^1 = c_t$ و $a^2 = c_t$ بترتیب دوایر بمرکز O و خطوط مار از O میباشد ، یعنی مختصات قطبی یک مختصات منحنی‌الخط متعامد است .

مثال دیگر برای مختصات منحنی‌الخط متعامد در صفحه مختصات بیضوی u^1 و u^2 است .

یک خانواده بیضی و یک خانواده هذلولی همکانون و متعامد درنظر میگیریم ش (٧ - ٥) .

مختصات دکارتی هرنقطهٔ M ازصفحه را با روابط زیرمی‌توانیم نشان دهیم:

$$\begin{cases} x^1 = a\,ch\,u^1 \cos u^2 \\ x^2 = a\,sh\,u^1 \sin u^2 \end{cases} \qquad (٥ - ٢١)$$

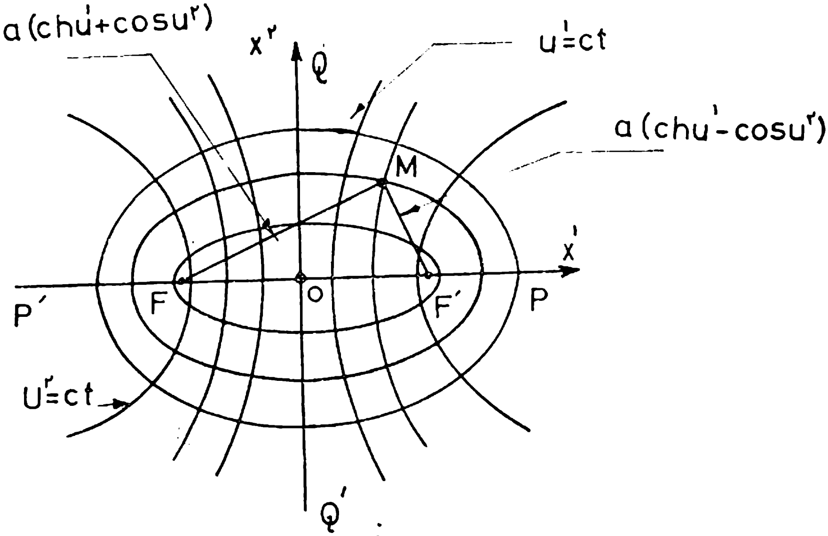
که اگر $u^1 = c_t$ فرض شود معادلهٔ یک خانواده بیضی :

$$\frac{(x^1)^2}{(a\,ch\,u^1)^2}+\frac{(x^2)^2}{(a\,sh\,u^1)^2}=1 \qquad (\circ-22)$$

واگر $u^2=ct$ فرض شود معادلهٔ یک خانواده هذلولی :

$$\frac{(x^1)^2}{(a\cos u^2)^2}-\frac{(x^2)^2}{(a\sin u^2)^2}=1 \qquad (\circ-23)$$

بدست میآید. یعنی محورهای مختصات u^1 و u^2 دومنحنی متعامد است.



ش ۷.۵

۳ - ۵ مختصات منحنی‌الخط نقطه در فضا ـ مختصات استوانه‌ای وکروی.

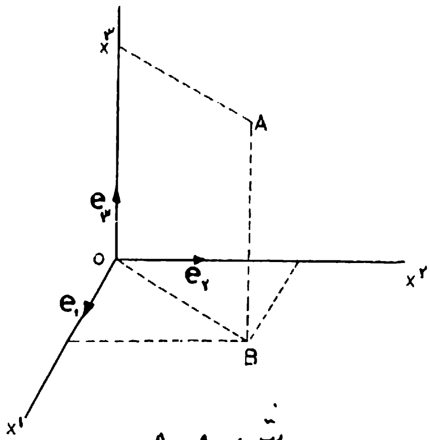
مقادیر $\overrightarrow{OB}=u^1$ و $\widehat{x^1OB}=u^2$ و $\overrightarrow{BA}=u^3$ را مطابق تعریف مختصات استوانه‌ای نقطهٔ A گویند (ش ۸ - ۵). مختصات دکارتی نقطهٔ A برحسب مختصات استوانه‌ای آن عبارتست از :

$$\begin{cases} x^1 = u^1 \cos u^2 \\ x^2 = u^1 \sin u^2 \\ x^3 = u^3 \end{cases} \qquad (5-24)$$

سطوح مختصات یعنی $u^1 = ct$ و $u^2 = ct$ و $u^3 = ct$ بترتیب عبارتست از:

استوانه های دوار قائم (حول محور Ox^3) :

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = (u^1)^2 = ct \qquad (5-25)$$



ش ۵.۸

صفحات ماربرمحور Ox^3 :

$$\frac{x^2}{x^1} = tg u^2 = ct \qquad (5-26)$$

صفحات عمود برمحور Ox^3 :

$$x^3 = u^3 = ct \qquad (5-27)$$

تعیین محورهای مختصات واینکه آیا این محورها بر هم عمود است یا نه بعنوان تمرین واگذار میشود.

مختصات استوانه‌ای نقطهٔ A برحسب مختصات دکارتی آن از روابط زیر بدست میآید :

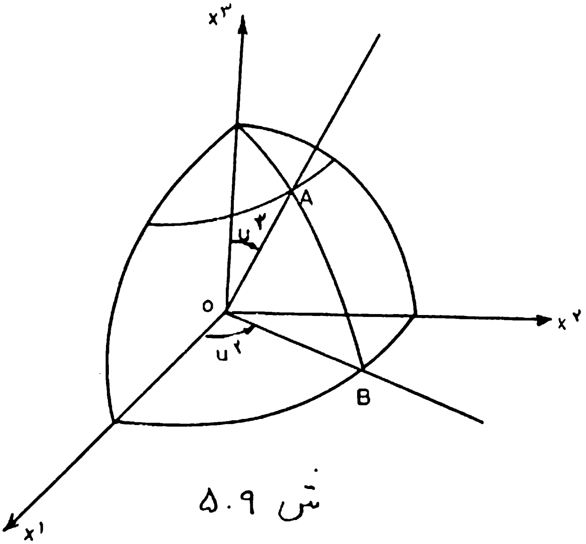
$$
(\text{٥ — ٢٨})\qquad
\begin{cases}
u^1 = +\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} \\
u^2 = \operatorname{arctg} \dfrac{x^2}{x^1} \\
u^3 = x^3
\end{cases}
$$

فاصلهٔ دو نقطهٔ بینهایت نزدیک از رابطهٔ زیر حاصل میشود :

$$
(\text{٥ — ٢٩})\qquad ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = (du^1)^2 + (u^1)^2(du^2)^2 + (du^3)^2
$$

یکی دیگر از مختصات منحنی‌الخط فضائی مهم ، مختصات کروی است .

مقادیر $\overrightarrow{OA} = u^1$ و $\widehat{x^1OB} = u^2$ و $\widehat{x^3OA} = u^3$ را مختصات کروی نقطهٔ A گویند (ش ۹ ـ ٥) .



ش ٥.٩

مختصات دکارتی نقطهٔ A برحسب مختصات کروی آن از رابطهٔ زیر بدست میآید :

$$
\left\{
\begin{aligned}
x^1 &= u^1 \sin u^3 \cos u^2 \\
x^2 &= u^1 \sin u^3 \sin u^2 \\
x^3 &= u^1 \cos u^3
\end{aligned}
\right. \qquad (٥-٣٠)
$$

سطوح مختصات یعنی $u^1 = c\underline{t}$ و $u^2 = c\underline{t}$ و $u^3 = c\underline{t}$ بترتیب عبارتست از :

کرات بمرکز O :

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = (u^1)^2 = c\underline{t} \qquad (٥-٣١)$$

صفحات ماربرمحور Ox^3 :

$$\frac{x^2}{x^1} = tg\, u^2 = c\underline{t} \qquad (٥-٣٢)$$

مخروطهای دوار برأس O و محور Ox^3 :

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 tg^2 u^3 = 0 \qquad (٥-٣٣)$$

تغيين محورهای مختصات و اینکه آیا متعامد است یا نه ، باز بعنوان تمرین واگذار میشود .

مختصات کروی یک نقطه برحسب مختصات دکارتی آن از روابط زیر بدست میآید :

$$u^1 = +\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \qquad (٥-٣٤)$$

$$u^2 = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{x^1} \qquad (٥-٣٥)$$

$$u^3 = \arccos \frac{x^3}{u^1} \qquad (٥-٣٦)$$

فاصلهٔ دو نقطهٔ بینهایت نزدیک از رابطهٔ زیر نتیجه میشود :

$$
\begin{aligned}
ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 &= (du^1)^2 \\
&+ (u^1)^2 (du^3)^2 + (u^1)^2 \sin^2 u^3 (du^2)^2
\end{aligned} \qquad (٥-٣٧)
$$

علاوه بردودسته مختصات منحنی‌الخط فضائی فوق‌الذکرچند دسته مختصات منحنی‌الخط فضائی دیگری هم وجود دارد که در درجهٔ دوم اهمیت قرار دارد و ما فقط بذکر نام آنها و روابط آنها با مختصات دکارتی‌شان اکتفا میکنیم :

۱- مختصات بیضوی مانند(۱) یک نقطه، یعنی λ و μ و ν . سطوح مختصات عبارتست از :

$$\begin{cases} \dfrac{(x^1)^2}{a^2+\lambda} + \dfrac{(x^2)^2}{b^2+\lambda} + \dfrac{(x^3)^2}{c^2+\lambda} = 1 & \text{بیضوی ها} \\ \dfrac{(x^1)^2}{a^2+\mu} + \dfrac{(x^2)^2}{b^2+\mu} + \dfrac{(x^3)^2}{c^2+\mu} = 1 & \text{هیپربولوئیدهای یکپارچه‌ای} \\ \dfrac{(x^1)^2}{a^2+\nu} + \dfrac{(x^2)^2}{b^2+\nu} + \dfrac{(x^3)^2}{c^2+\nu} = 1 & \text{هیپربولوئیدهای دو پارچه‌ای} \end{cases} \tag{5-38}$$

$$(\lambda > -c^2 > \mu > -b^2 > \nu > a^2)$$

مختصات دکارتی یک نقطه برحسب این مختصات از روی روابط زیربدست میآید :

$$\begin{cases} (x^1)^2 = \dfrac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} \\ (x^2)^2 = \dfrac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)} \\ (x^3)^2 = \dfrac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)} \end{cases} \tag{5-39}$$

محاسبهٔ λ و μ و ν برحسب مختصات دکارتی x^1 و x^2 و x^3 بعنوان تمرین واگذار میشود .

---

۱ - Ellipsoidal Coordinates

۲- مختصات گویوار کشیده [1] که سطوح آن از دوران ش ۷ - ۵ در حول محور $P'OP$ حاصل میشود و معادلات آنها عبارتست از :

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{(x^1)^2+(x^2)^2}{a^2(ch^2u^1-1)}+\frac{(x^3)^2}{a^2ch^2u^1}=1 & \text{گویوارهای کشیده} \\ \frac{(x^1)^2+(x^2)^2}{a^2(\cos^2u^2-1)}+\frac{(x^3)^2}{a^2\cos^2u^2}=1 & \text{هیپربولوئیدهای دوار دوپارچه‌ای} \\ x^2=x^1 tg u^3 & \text{صفحات ماربر } Ox^3 \end{array}\right\} \quad (5-40)$$

$$chu^1 \geqslant 1 \geqslant \cos u^2 \geqslant 1$$

تمامی گویوارها و هیپربولوئیدها کانونهای مشترک $F'(0, 0, a)$ و $F(0, 0, -a)$ دارد و مجموع و تفاضل شعاعهای حامل یک نقطهٔ $M(x^1, x^2, x^3)$ بترتیب برابر $2achu^1$ و $2a\cos u^2$ می‌باشد .

مختصات دکارتی یک نقطه برحسب این مختصات از رابطهٔ زیر بدست میآید :

$$(5-41) \quad \left\{\begin{array}{l} (x^1)^2=a^2(ch^2u^1-1)(1-\cos^2u^2)\cos^2u^3 \\ (x^2)^2=a^2(ch^2u^1-1)(1-\cos^2u^2)\sin^2u^3 \\ x^3=achu^1\cos u^2 \end{array}\right.$$

۳- مختصات گویوار پَخ [2] که سطوح آن از دوران ش ۷ - ۵ در حول $Q'OQ$ حاصل میشود و معادلات آنها عبارتست از :

---

۱ - Prolate Spheroidal Coordinates

۲ - Oblate Spheroidal Coordinates

گویوارهای پخ

هیپربولوئیدهای دواریکپارچه

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{(x^1)^2+(x^2)^2}{a^2(1+sh^2u^1)}+\dfrac{(x^3)^2}{a^2sh^2u^1}=1 \\[2ex] \dfrac{(x^1)^2+(x^2)^2}{a^2(1-\cos^2u^2)}-\dfrac{(x^3)^2}{a^2\cos^2u^2}=1 \\[2ex] x^2=x^1\,tg\,u^3 \end{array}\right. \qquad (۵-۴۲)$$

$shu^1 \geqslant 0$ و $1 \geqslant \sin u^2 \geqslant -1$

مختصات دکارتی یک نقطه برحسب این مختصات از روابط زیر بدست میآید :

$$\left\{\begin{array}{l} (x^1)^2=a^2(1+sh^2u^1)\,(1-\cos^2u^2)\cos^2u^3 \\ (x^2)^2=a^2(1+sh^2u^1)\,(1-\cos^2u^2)\sin^2u^3 \\ x^3=a\,shu^1\cos u^2 \end{array}\right. \qquad (۵-۴۳)$$

۴- مختصات استوانه‌ای بیضی‌وار[1] که سطوح آن از انتقال شن (۷ - ۵) در امتداد عمودبر صفحهٔ شکل بدست میآید و معادلات آنها عبارتست‌از :

استوانه‌های قائمی که قاعده‌شان بیضی است

استوانه‌های قائمی که قاعده‌شان هذلولی‌است

صفحات عمودبر Ox^3

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{(x^1)^2}{a^2ch^2u^1}+\dfrac{(x^2)^2}{a^2(ch^2u^1-1)}=1 \\[2ex] \dfrac{(x^1)^2}{a^2\cos^2u^2}+\dfrac{(x^2)^2}{a^2(\cos^2u^2-1)}=1 \\[2ex] x^3=u^3 \end{array}\right. \qquad (۵-۴۴)$$

$chu^1 \geqslant 1 \geqslant \cos u^2 \geqslant -1$

مختصات دکارتی نقطه‌برحسب این نوع مختصات یعنی u^1 و u^2 و u^3 ازروابط زیر بدست میآید :

---

۱ - Elliptic Cylindrical Coordinates

$$(5-45)\qquad \begin{cases} x^1 = a\,\mathrm{ch}\,u^1 \cos u^2 \\ (x^2)^2 = a^2(\mathrm{ch}^2 u^1 - 1)(1-\cos^2 u^2) \\ x^3 = u^3 \end{cases}$$

۵- مختصات مخروطی [1] که معادلات سطوح آن عبارتست از:

$$(5-46)\qquad \begin{cases} (x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=(u^1)^2 & \text{کرات} \\ \dfrac{(x^1)^2}{(u^2)^2}+\dfrac{(x^2)^2}{(u^2)^2-b^2}+\dfrac{(x^3)^2}{(u^2)^2-c^2}=0 & \text{مخروطها} \\ \dfrac{(x^1)^2}{(u^3)^2}+\dfrac{(x^2)^2}{(u^3)^2-b^2}+\dfrac{(x^3)^2}{(u^3)^2-c^2}=0 & \text{مخروطها} \end{cases}$$

$$c^2 > (u^2)^2 > b^2 > (u^3)^2$$

مختصات دکارتی نقطه برحسب مختصات مخروطی آن یعنی u^1 و u^2 و u^3 از روابط زیر بدست میآید:

$$(5-47)\qquad \begin{cases} x^1 = \pm \dfrac{u^1u^2u^3}{bc} \\ (x^2)^2 = \dfrac{(u^1)^2}{b^2}\cdot\dfrac{((u^2)^2-b^2)((u^3)^2-b^2)}{b^2-c^2} \\ (x^3)^2 = \dfrac{(u^1)^2}{c^2}\cdot\dfrac{((u^2)^2-c^2)((u^3)^2-c^2)}{c^2-b^2} \end{cases}$$

۶- مختصات پارابولوئیدی [2] یک نقطه، یعنی λ و μ و ν. معادلات سطوح مختصات آن عبارتست از:

---

1 - Conical coordinates

2 - Paraboloidal coordinates

$$(\text{۵}-\text{۴۸})\quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{(x^1)^2}{\lambda-A}+\dfrac{(x^2)^2}{\lambda-B}=2x^3+\lambda & \text{پارابولوئیدهای بیضوی} \\ \dfrac{(x^1)^2}{\mu-A}+\dfrac{(x^2)^2}{\mu-B}=2x^3+\mu & \text{پارابولوئید هیپربولیک} \\ \dfrac{(x^1)^2}{\nu-A}+\dfrac{(x^2)^2}{\nu-B}=2x^3+\nu & \text{پارابولوئیدهای بیضوی} \end{array}\right.$$

$$\nu > A > \mu > B > \lambda$$

مختصات دکارتی یک نقطه برحسب مختصات پارابولوئیدی آن ازمعادلات زیر نتیجه میشود :

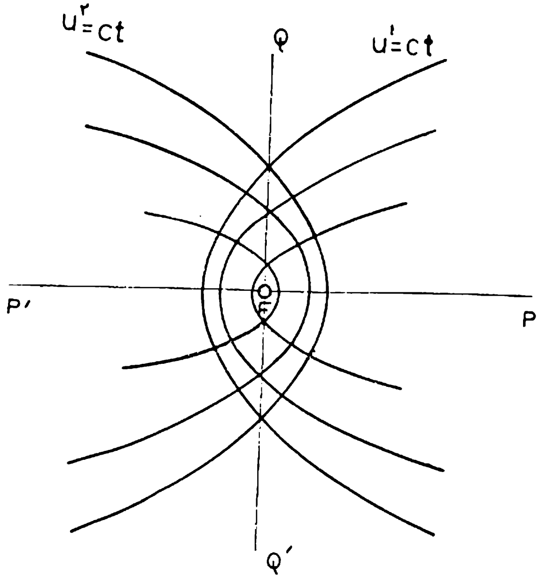
$$(\text{۵}-\text{۴۹})\quad \left\{\begin{array}{l} (x^1)^2=\dfrac{(A-\lambda)\,(A-\mu)\,(A-\nu)}{B-A} \\ (x^2)^2=\dfrac{(B-\lambda)\,(B-\mu)\,(B-\nu)}{A-B} \\ x^3=\dfrac{1}{2}\,(A+B-\lambda-\mu-\nu) \end{array}\right.$$

محاسبهٔ مختصات پارابولوئیدی یک نقطه برحسب مختصات دکارتی آن بعنوان تمرین واگذار میشود .

۷- مختصات سهمیوار[1] که سطوح مختصات آن از دوران ش (۵ - ۱۰) (دودستگاه سهمی متعامد همکانون u^1 و u^2) درحول محور P'FP بدست میآید با معادلات زیر مشخص میشود :

---

۱ - Parabolic coordinates



ش ۵.۱۰

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\dfrac{(x^1)^2+(x^2)^2}{(u^1)^2}=2x^3+(u^1)^2 & \\
\dfrac{(x^1)^2+(x^2)^2}{(u^2)^2}=-2x^3+(u^2)^2 & \\
x^2=x^1 tg u^3 &
\end{array}
\right.
\qquad (5-50)
$$

پارابولوئیدهای دوار همکانون (کانون در مبدأ)

صفحات ماربرمحور Ox^3

۸- مختصات استوانه‌ای سهمیوار[1] یک نقطه ، یعنی u^1 و u^2 و u^3 . اگر شکل (۵ - ۱۰) را درامتداد عمود برصفحهٔ شکل انتقال دهیم مختصات استوانه‌ای سهمیوار بدست می‌آید که معادلات سطوح مختصات آن با روابط زیر مشخص شده است :

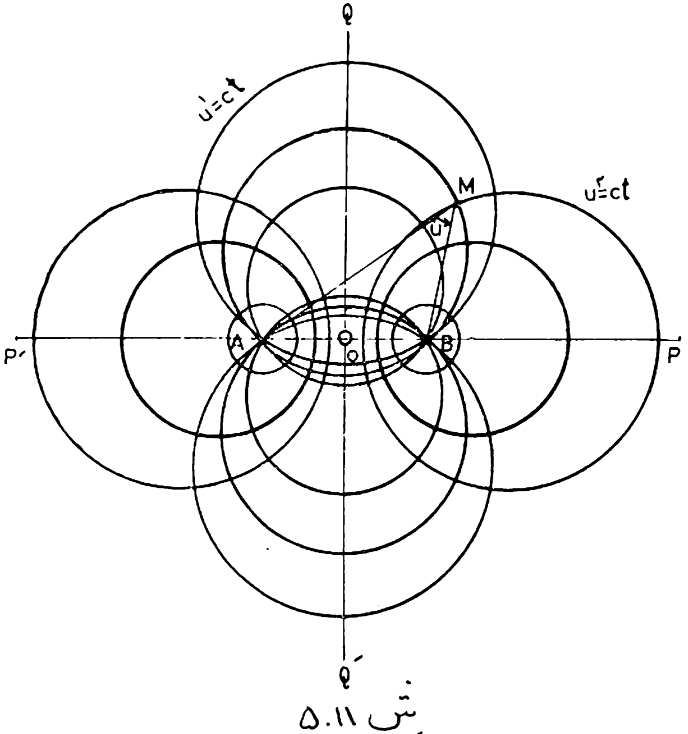
۱ - Parabolic cylindrical coordinates

$$
(۵-۵۲)\qquad
\begin{cases}
\dfrac{(x^1)^2}{(u^1)^2}=2x^2+(u^1)^2 \\[2mm]
\dfrac{(x^2)^2}{(u^2)^2}=-2x^2+(u^2)^2 \\[2mm]
x^3=u^3
\end{cases}
$$

استوانه‌های سهمیوار قائم همکانون (دو معادلهٔ اول)

صفحات عمود بر Ox^3 (معادلهٔ سوم)

تبصرهٔ ۱- شکل (۱۱ - ۵) یک‌خانواده از دوایری مانند u^1 را نشان میدهد که از دو قطب A و B گذشته و بریک خانواده دوایر دیگری مانند u^2 عمود است .



ش ۵.۱۱

۹- مختصات دوقطبی [1]. اگر شکل ۱۱-۵ را دراستداد عمود برصفحهٔ شکل

---

۱ - Bipolar coordinates

انتقال دهیم مختصات دوقطبی پیدا میشود که معادلات سطوح آن با روابط زیر مشخص میشود :

$$
(۵-۵۳)\quad \begin{cases} (x^1)^2+(x^2-a\cot g u^1)^2=\dfrac{a^2}{\sin^2 u^1} \\ (x^1-a\coth u^2)^2+(x^2)^2=\dfrac{a^2}{sh^2 u^2} \\ x^3=u^3 \end{cases}
$$

استوانه های دوارقائم (دو معادلهٔ اول)

صفحات عمود برمحور Ox^3 (معادلهٔ سوم)

برای هرنقطهٔ M واقع در صفحهٔ x^1Ox^2 ، u^1 زاویهٔ بین دوخط واصل ازاین نقطه به دو قطب $(-a, ۰)$ و $(a, ۰)$ است .

مختصات دکارتی یک نقطه برحسب مختصات دو قطبی آن از روابط زیر بدست میآید :

$$
(۵-۵۴)\quad \begin{cases} x^1=\dfrac{a\, sh u^2}{ch u^2-\cos u^1} \\ x^2=\dfrac{a\sin u^1}{ch u^2-\cos u^1} \\ x^3=u^3 \end{cases}
$$

بالعکس مختصات دوقطبی نقطه برحسب مختصات دکارتی آن از روابط زیر حاصل میشود :

$$
(۵-۵۵)\quad \begin{cases} u^1=\dfrac{i}{2}\,\log_e\dfrac{(x^1)^2+(x^2-ia)^2}{(x^1)^2+(x^2+ia)^2} \\ u^2=\dfrac{1}{2}\,\log_e\dfrac{(x^1+a)^2+(x^2)^2}{(x^1-a)^2+(x^2)^2} \\ u^3=x^3 \qquad\qquad i=\sqrt{-1} \end{cases}
$$

۱۰- مختصات چنبره‌ای[۱] که سطوح مختصات آن ازدوران ش ۱۱-۵ حول محور $Q'OQ$ بدست میآید و با معادلات زیر مشخص میشود :

$$(\text{۵}-\text{۵۶})\quad \begin{cases} \text{کرات}: & (x^1)^2+(x^2)^2+(x^3-a\cot g u^1)^2=\dfrac{a^2}{\sin^2 u^1} \\ \text{چنبره‌ها}: & \left(\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}-a\coth u^2\right)^2+(x^3)^2=\dfrac{a^2}{sh^2 u^2} \\ \text{صفحات ماربر } Ox^3: & x^2=x^1 tg u^3 \end{cases}$$

بالاخره معادلات تبدیل خواهد بود :

$$(\text{۵}-\text{۵۷})\quad \begin{cases} x^1=\dfrac{a\,sh u^2}{ch u^2-\cos u^1}\cos u^3 \\ x^2=\dfrac{a\,sh u^2}{ch u^2-\cos u^1}\sin u^3 \\ x^3=\dfrac{a\sin u^1}{ch u^2-\cos u^1} \end{cases}$$

و :

$$(\text{۵}-\text{۵۸})\quad \begin{cases} u^1=\dfrac{i}{2}\log_e\dfrac{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3-ia)^2}{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3+ia)^2} \\ u^2=\dfrac{1}{2}\log_e\dfrac{\left[\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}+a\right]^2+(x^3)^2}{\left[\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}-a\right]^2+(x^3)^2} \\ u^3=\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{x^1} \end{cases}$$

تبصرهٔ ۲- بطوریکه ملاحظه میشود ، دردستگاههای مختصات اخیر، اشاره‌ای بطول پاره خط نکرده‌ایم. علت آن اختلاف اساسی موجود بین نقاط واقع درصفحه و نقاط واقع روی یک سطح غیر مشخص است .

---

۱ - Toroidal coordinates

اقصر فاصلهٔ مابین دو نقطهٔ واقع **در یک صفحه** خطی است مستقیم . ولی اگرنقاط روی‌سطح غیرمشخصی‌مثلاً بیضوی دوارواقع باشد اقصرفاصلهٔ مابین دونقطه در روی آن ، منحنی خاصی است بنام **ژئودزیک** . در بعضی سطوح خاص مثل سطوح خط کشی [1] ممکنست ژئودزیکها خطوط مستقیم هم باشد. مثلاً ژئودزیکهای مخروطقائم‌دوار خطوط مستقیم ، دوایرومنحنی‌هائی‌است‌بنام هلیس. ژئودزیکهای کره دوایر عظیمه است که آنها را ارتودرومی [2] هم مینامند .

چون تعیین ژئودزیکها کارساده‌ای نیست بحث در باب آنها و درنتیجه تعیین طول در دستگاههای منحنی‌الخط را به مباحث بعد موکول میکنیم .

---

۱ - Régleé ۲ - Orthodromie

تمرینات

در تمام مسائل زیر کلیهٔ اندیسها از ۱ تا n تغییر میکنند :

۱- آیا تساویهای زیر صحیح است یا نه ؟

$$g_{ij}x^i x^j + h_{rs}x^r x^s = (g_{ij} + h_{ij})x^i x^j$$

$$a_{ij}x^i + b_{rs}x^s = (a_{ij} + b_{ij})x^i$$

$$a_{ij}b^{jk}c_{kl} = a_{ir}b^{rs}c_{sl}$$

$$(a_i b^i)^۲(c_i d^i)^۲ = (a_i c_i)^۲(b^i d^i)^۲$$

$$a_i^۳(b^i_۳ + c^i_۳) = a_i^۳ b^i_۳ + a_i^۳ c^i_۳$$

$$\delta_{ij}x^i x^j x^k = \delta_{ik} x^i x^j x^k$$

۲- مشتقات زیر را حساب کنید :

$$\frac{d}{dt}(a_i b^j c_k) \quad \text{و} \quad \frac{d}{dt}(a_{ij}b^j + c_{ij}d^i)$$

و :

$$\frac{d}{dt}(\delta_{ij}a^i a^j) \quad \text{و} \quad \frac{d}{dt}(\delta_{ij}\delta^{jk} a^i b_k)$$

۳- مشتقات جزئی زیر را حساب کنید :

$$\partial_k(A_{ij}x^i x^j) \quad \text{و} \quad \partial_k(A_{hij}x^h x^i x^j) \quad \text{و} \quad \partial_k\partial_l(A_{ij}x^i x^j)$$

و :

$$\partial_k\partial_l(A_{hij}x^h x^i x^j)$$

(دراین مسئله نماد ∂_k بجای $\frac{\partial}{\partial x^k}$ و نماد $\partial_l\partial_k$ بجای $\frac{\partial^۲}{\partial x^l \partial x^k}$ انتخاب شده است) .

۴- اگر $da_i = A^j_{ki} a_j\, dy^k$ باشد عبارت $\frac{\partial a_i}{\partial y^k}$ را حساب کنید .

۵- اگر $A^k_{ij} = \frac{\partial a^k}{\partial y^i} + \frac{\partial a^k}{\partial y^j}$ باشد حساب کنید $\frac{\partial A^k_{ij}}{\partial y^l}$ را .

۶- فرض میکنیم داشته باشیم :

$$A^i_{jhrs} = \partial_j \partial_r B^i_{sh} - \partial_j \partial_s B^i_{rh}$$

(با همان قرار داد مسئلهٔ ۳) تحقیق کنید که با جایگشت مستدیر اندیسها رابطهٔ زیر بدست میآید :

$$A^i_{jhrs} + A^i_{rhsj} + B^i_{shjr} = ۰$$

۷- فرض میکنیم داشته باشیم :

$$u^j = \frac{dy^j}{ds} \quad و \quad \frac{du^j}{dy^k} + M^j_{kl} u^l = ۰$$

ثابت کنید :

$$\frac{d^۲ y^j}{ds^۲} + M^j_{kl} \frac{dy^k}{ds} \frac{dy^l}{ds} = ۰$$

۸- دردستگاههای زیر که درآنها x^i هامختصات دکارتی است ، $x^{i'} = c^t$ چه سطوحی است ؟

$$\begin{cases} x^۱ = x^{۱'} x^{۲'} \cos x^{۳'} \\ x^۲ = x^{۱'} x^{۲'} \sin x^{۳'} \\ ۲x^۳ = (x^{۱'})^۲ - (x^{۲'})^۲ \end{cases}$$

$$x^i = \left[\frac{(x^{۱'} - a^i)\,(x^{۲'} - a^i)\,(x^{۳'} - a^i)}{(a^j - a^i)\,(a^k - a^i)} \right]^{\frac{۱}{۲}}$$

در دستگاههای دوم i و j و k بترتیب جایگشت مستدیر از ۱ و ۲ و ۳ بوده و بعلاوه $a^۱ > a^۲ > a^۳ > ۰$ است .

۶ـ تصور ریاضی فضا ـ فضاهای مختلف

همانطوریکه میدانیم هندسه نظریهٔ فضاهاست . فضا مجموعهٔ موجوداتی است بنام نقطه‌بانضمام یک رشته روابطی که این نقاط بایکدیگردارد . لذا فضای هندسی تنها از یک مجموعه موجوداتی مجرد درست نشده بلکه ازموجوداتی همراه یکدستگاه خواص معین که ساختمان[1] فضا نامیده میشود بوجود آمده است. مثلاً ساختمان‌فضاهای متری[2] (که بعداً خواهیم دید) با یک تابع $d(X , Y)$ بنام تابع فاصلهٔ بین دونقطهٔ غیر مشخص X و Y که دارای خواص زیراست تعریف میشود:

۱ — $$d(X , Y)=d(Y , X) \qquad (۶—۱)$$

۲ — $$d(X , Z) \leqslant d(X , Y)+d(Y , Z) \qquad (۶—۲)$$

۳ — فقط وقتی $d(X , Y)=0$ است که $X=Y$ باشد (۶ — ۳)

۴ — $d(X , Y) \geqslant 0$ است . یعنی فاصلهٔ بین دونقطه هرگز منفی نمیشود (۶ — ۴)

کلمهٔ «فضا» اغلب‌بهمین معنای کلی هندسیش استعمال میشود ولی ما در اینجافضا را بنحو ساده‌تری تعریف میکنیم : «فضای n بعدی» مجموعهٔ نقاطی است مانند X که توسط n عدد مرتب x^1 و x^2 و . . . و x^n مشخص میشود. لذا مفهوم‌فضابدستگاه مختصاتی که n مختص فوق نسبت بآن تعریف شده است بستگی پیدا میکند . « بعد » کلمه‌ای است که اغلب بمعنای محدودی استعمال میشود . منظور ما هم دراینجا «حداقل تعداد کمیاتی است که برای‌تعیین آن‌چه که نقطه‌اش مینامیم لازمست» .

در هندسهٔ مقدماتی وقتی احتیاجات خود را به خط و سطح و حجم محدود کنیم به بیش‌ازسه بعد احتیاج پیدا نمی‌کنیم . ولی تعمیم‌های ریاضی هماهنگ

---

۱ - Structure ۲ - Metric spaces

با نظریه‌های مکانیک و فیزیک جدید ریاضیدانها را بفرض «فضا» های «مجرد»ی باپیش‌از سه بعد وادارساخته است. مثلاً در مکانیک مجبورند دستگاههائی که باصطلاح ٤ و ٥ و ... و n درجه‌آزادی دارد یعنی درآنها ٤ و ٥ و ... و n متغیر بنام مختصات دخالت دارد درنظر بگیرند. فضای «مجرد» مربوطه فضای ٤ و ٥ و ... و n بعدی خوانده میشود. همچنین درنظریهٔ نسبی «شبه بعد» دیگری (فضا ـ زمان مینکوسکی) که زمان را نیز دخالت میدهد به ۳ بعد حقیقی اضافه شده است.

بدنبال همین تعمیم‌ها است که کلیهٔ مفاهیم فضاهای ۲ و ۳ بعدی ازقبیل: فاصله، زاویه، خمیدگی و غیره نیز تا n تعمیم داده شده است. بدیهی است که نمایش مجازی موجودات ریاضی واقع درآنها غیر ممکن و در عمل اصولاً بیفایده است.

۱ - ٦ - **فضاهای مختلف**: فیزیکدانها بطورغریزی بتمام فضاهائی که‌بکار میبرند خواص معمولی‌فضای اقلیدسی را نسبت میدهند. البته این قرارداد دربررسی بسیاری از مسائل کمکهای زیادی بما میکند. ولی دربعضی مسائل این قرار داد مورد استفاده قرارنمی گیرد، یعنی بعضی مواقع‌به مسائلی برمیخوریم که نمیتوانیم تمام خواص فضای اقلیدسی را بآنها نسبت دهیم. دراینصورت ازفضاهای دیگری استفاده میکنیم.

ریاضیدانها دو نوع فضای اساسی متمایز دارند: فضاهای برداری و فضاهای بستری.

در فضاهای برداری که طرز بوجود آمدن آنها را در (§۲) دیدیم یکه‌های محورهای مختصات‌رانمیتوان باهم سنجید. یعنی واحد مشترکی برای اندازه‌گیری طولهای واقع روی محورهای مختلف مختصات در دست نیست و در نتیجه نمیتوان اندازهٔ مطلق یک بردارا تعریف وفاصلهٔ بین دونقطه را دراین فضاها تعیین نمود.

درچنین فضاهای مجردی مفهوم «هنج»[۱] جای مفهوم طول را میگیرد . هنج، دریک فضای خطی عبارتیست حقیقی که تابع برداری است مانند $\mathbf{X}$ و با علامت $\|\mathbf{X}\|$ نشانداده میشود (خوانده میشود هنج $\mathbf{X}$) . هنج دارای خواص زیر است :

۱- $$\|\mathbf{X}+\mathbf{Y}\| \leq \|\mathbf{X}\| + \|\mathbf{Y}\| \qquad (۶—۵)$$

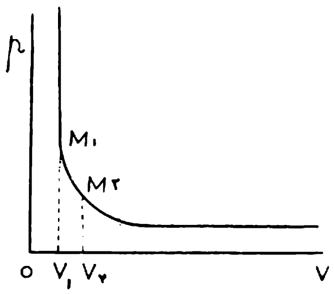
۲- اگر a عدد دلخواهی باشد داریم :

$$\|a\mathbf{X}\| = |a| \cdot \|\mathbf{X}\| \qquad (۶—۶)$$

هرگز هنج یک بردار منفی نمیشود یعنی همیشه $\|\mathbf{X}\| \geq 0$ است (۶—۷)

۴- اگر $\mathbf{X} \neq 0$ باشد لذا $\|\mathbf{X}\| \geq 0$ میشود .

حال با این مقدمه این سئوال پیش میآید که آیا این فضاها با چنین تجردی میتواند درفیزیک بکاربرده شود یا نه ؟ جواب این سئوال مثبت است. دربسیاری از شعبات فیزیک و صنعت از اشکال و دیاگرامهائی که درفضای برداری رسم شده است استفاده میکنند . مثلاً منحنی نمایش تغییرات قانون ماریوت $pv=ct$ روی دو محور قائم مختصات یکی از این موارد است (ش ۱ - ۶) . چون میدانیم امکان پیدا کردن واحد مشترکی برای سنجش فشار وحجم بایکدیگروجود ندارد طول یک قسمت از منحنی هیچ معنائی پیدا نمیکند واگر آنرا بطور گرافیک اندازه بگیریم طول بدست آمده نه معرف حجم و نه معرف فشار است .



ش ۶.۱

درهندسهٔ معمولی تبدیلاتی همو گرافیک را که صفحهٔ بینهایت را حفظ کنند درنظر میگیریم .

۱ - Norm

آن دسته ازخواص اشکال که بر اثر این تبدیل محفوظ میماند یعنی آن خواصی که نسبت به تغییر یکه های محورهای مختصات پایااست به خواص آفین موسوم است. مفاهیم: بردار، تعادل بردارها و مجموع هندسی دوبردار مفاهیم آفین و طول یک بردار مفهوم متری است. در هندسهٔ آفین فقط دوبردار موازی را میتوان با هم سنجید. نظریهٔ دستگاه بردارهای لغزان، هم‌ارزی و تبدیل آنها به یک بردار و یک زوج (باوجود شکل متریکی که معمولاً در تحت آن مطالعه میشود) نظریهٔ کاملاً آفین است.

خلاصه: وقتی بردارهای یکهٔ محورهای مختصات واحد مشترکی نداشته باشد گوئیم این دستگاه مختصات متعلق به یک فضای آفین است.

رسم محورهای متعامد دراین فضاصرفاً یک قرار داد محض است و زاویهٔ بین محورها اصولاً تأثیری در نتایج حاصله ندارد. بدیهی است عدم امکان تعریف طول موجب میشود که نتوانیم زاویه را هم تعریف کنیم. چون اندازهٔ زاویه نسبت دو طول است که یکی روی محیط دایره و دیگری روی شعاع درنظر گرفته میشود. توابع $\sin\theta$ و $\cos\theta$ نسبتهای طولی است.

وقتی تمام یکه های محورهای مختصات واحد مشترکی قبول کند طول وزاویه را میتوانیم تعریف کنیم. و دراین حال گوئیم دستگاه محورهای مختصات به یک «فضای متری» تعلق دارد.

حال بعداز این مقدمات تعریف دقیق زیر را بخاطر می‌سپاریم:

فضائی که **نتوانیم** فاصله را در آن تعریف کنیم **فضای آفین** (۱) و فضائی که **بتوانیم** در آن فاصله ودر نتیجه زاویه را تعریف کنیم **فضای متری** (۲) نام دارد.

فضای آفین بطورمنطقی توسط هندسهٔ برداری n بعدی بررسی میگردد وفضای حاصله «فضای برداری آفین» نامیده میشود.

تبصرهٔ ۱ـ فضاهای خطی را میتوان بطریق زیربفضاهای متری تبدیل نمود.

۱ - Affine

۲ـ دراینحال تابع فاصله را «متریک» فضاهم مینامند.

فرض میکنیم دریک فضای خطی هنجی را تعریف کرده باشیم. اگردرچنین فضائی مقدار $\|X-Y\|$ را مساوی $d(X, Y)$ بگیریم فضای ما بفضای متری تبدیل میشود. یک فضای خطی که با تعریف:

$$d(X, Y)=\|X-Y\| \qquad (۶-۷)$$

بفضای متری بدل شده به فضای خطی هنجدار [۱] یا فضای برداری هنجدار [۲] موسوم است. مهمترین نوع این فضاها آنهائی است که خاصیت اضافی دیگری نیز دارد. آن خاصیت اضافی همان «کامل بودن» [۳] است که مختصراً بآن اشاره میکنیم:

فرض میکنیم یک مجموعهٔ متوالی [۴] نقاط $X_۱$ و $X_۲$ و ... و X_n ازیک فضای متری V طوری داده شده باشد که تابع فاصلهٔ [۵] $d(X, Y)$ و یا $\|X_n - Y_m\|$ وقتی n و m بسمت بینهایت میل میکنند برابر صفر شود. چنین مجموعه نقاط را توالی کوشی [۶] مینامند. معنای مفهوم فوق اینستکه این مجموعهٔ متوالی یک نقطهٔ حدی مانند X دارد. یعنی نقطهٔ ثابت منحصری مانند X چنان پیدا میشود که $\underset{n\to\infty}{d(X, X_n)=۰}$ باشد. دراینصورت گوئیم $\underset{n\to\infty}{\operatorname{Lim} X_n}=۰$ است و یا گوئیم مجموعهٔ متوالی کوشی در X **متقارب** است. ثابت میشود که درفضای معمولی ما، چنین نقطه‌ای وجود دارد. ولی دریک فضای مجرد یک توالی کوشی لزومی بتقارب ندارد. یعنی دلیلی نداریم که **نقطه‌ای مانند** X **در فضا** چنان موجود باشد که توالی نقاط در آن متقارب شود.

وقتی هرتوالی کوشی از V در یک نقطه از V متقارب باشد فضا را **کامل**

---

۱ - Normed linear space　　۲ - Normed vector space

۳ - Completeness　　۴ - Sequence　　۵ - Distance function

۶ - Cauchy sequence

گوئیم . **فضاهای خطی هنجدار کامل**، که درریاضیات جدید اهمیت زیادی دارد به فضاهای **باناك** [1] موسوم است .

تبصرهٔ ۲- تعریف متریک[2] منطقاً بوسیلهٔ حاصلضرب عددی دوبردار که فضای حاصلضرب داخلی را بوجود میآورد وارد میشود. جالبترین نوع این فضاها آنهائی است که علاوه بر « کامل بودن » بعد بینهایت دارد . فضاهای حاصلضرب داخلی کامل با ابعاد بینهایت به فضاهای هیلبرت[3] موسوم است.

---

۱ - Banach ۲ - Metric ۳ - Hilbert

فصل دوم

۷ - مقدمه - مفاهیم تانسور و شبه تانسور [۱] در موقع بررسی تبدیلات و تغییر محورهای مختصات درفضاهای برداری آفین بطور منطقی وارد میشود . لذا تعریف مجردی از موجودات هندسی (نقطه و بردار) و مطالعهٔ مختصر هندسهٔ آنها برای ما ضروری است .

۱ - ۷ - **نقطه** - تعریف: n عدد مرتب x^1 و x^2 و $\cdots$ و x^n که ترتیب آنها توسط اندیسهای فوقانی آنها معین شده معرف یک نقطهٔ X است . بالعکس n عدد مرتب x^1 و x^2 و $\cdots$ و x^n « مختصات » نقطهٔ X نامیده میشود . مبدأ مختصات نقطه ایست مانند O که برای آن $x^1=x^2=\ldots=x^n=0$ ویا $x^i=0$ است . شرط لازم و کافی برای انطباق دو نقطهٔ X و Y اینستکه داشته باشیم : $x^1=y^1$ و $x^2=y^2$ و $\cdots$ و $x^n=y^n$ ویا بطور خلاصه $x^i=y^i$.

۲ - ۷ - **بردار** - تعریف : مجموعهٔ n عدد مرتب X^1 و X^2 و $\cdots$ و X^n که ترتیب آنها توسط اندیسهای فوقانی آنها معین شده است یک بردار $\mathbf{X}$ را تشکیل میدهد . X^i را «مولفه» های بردار $\mathbf{X}$ می‌نامند و بصورت :

$$\mathbf{X}=(X^1\ ,\ X^2\ ,\ \ldots\ ,\ X^n)$$

نمایش میدهند .

بردار :

$$\mathbf{W}=(X^1+Y^1\ ,\ X^2+Y^2\ ,\ \ldots\ ,\ X^n+Y^n)$$

ویا بطور اختصار $W^i=X^i+Y^i$ مجموع دوبردار $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ وبردار :

$$\lambda\mathbf{X}=(\lambda X^1\ ,\ \lambda X^2\ ,\ \ldots\ ,\ \lambda X^n)$$

---

۱ - Pseudo - Tensor

بمؤلفه های λX^i «حاصلضرب بردار $\mathbf{X}$ درعدد وار λ» نامیده میشود . بردار $\mathbf{o}$ را با $\mathbf{o}=(o, o, \cdots, o)$ نشان میدهند . با درنظرگرفتن این تعاریف احکام (§۲) با حروف اندیس‌دار بصورتهای زیر بیان میشود :

$\mathbf{X}+\mathbf{Y}=\mathbf{Y}+\mathbf{X}$ است زیرا که میدانیم :

$$X^i+Y^i=Y^i+X^i \qquad (۷-۱)$$

$(\mathbf{X}+\mathbf{Y})+\mathbf{Z}=\mathbf{X}+(\mathbf{Y}+\mathbf{Z})$ است زیرا که :

$$(X^i+Y^i)+Z^i=X^i+(Y^i+Z^i) \qquad (۷-۲)$$

$\mathbf{X}+(\mathbf{o})=\mathbf{X}$ است زیرا :

$$X^i+o=X^i \qquad (۷-۳)$$

بهربردار $\mathbf{X}$ میتوان برداری مانند $\mathbf{Y}=(-\mathbf{X})$ چنان مربوط کرد که :

$\mathbf{X}+(-\mathbf{X})=\mathbf{o}$ باشد زیرا :

$$X^i+(-X^i)=o \qquad (۷-۴)$$

و $\alpha(\beta\mathbf{X})=(\alpha\beta)\mathbf{X}$ باشد زیرا :

$$\alpha(\beta X^i)=(\alpha\beta)X^i \qquad (۷-۵)$$

و $(\alpha+\beta)\mathbf{X}=\alpha\mathbf{X}+\beta\mathbf{X}$ باشد زیرا :

$$(\alpha+\beta)X^i=\alpha X^i+\beta X^i \qquad (۷+۶)$$

و $\alpha(\mathbf{X}+\mathbf{Y})=\alpha\mathbf{X}+\alpha\mathbf{Y}$ باشد زیرا :

$$\alpha(X^i+Y^i)=\alpha X^i+\alpha Y^i \qquad (۷-۷)$$

و $۱\mathbf{X}=\mathbf{X}$ باشد زیرا :

$$۱(X^i)=X^i \qquad (۷-۸)$$

عدد o و بردار $\mathbf{o}$ بوسیلهٔ اتحاد مهم زیر بهم مربوط میشوند :

$o\mathbf{X}=\mathbf{o}$ باشد زیرا :

$$o(X^i)=o \qquad (۷-۹)$$

در واقعیت فیزیکی بردار وجود ندارد ما فقط به «مؤلفه» های بردارها برمیخوریم . بعبارت دیگرما میدانیم بردار چیست‌واستعمال مؤلفه ها صرفاً برای نمایش آن‌است.

مثال ۱ـ n جریان شبکه‌ای $\mathbf{I}_1=(i_1 , i_2 , \ldots , i_n)$ از یک شبکهٔ خطی با n شبکهٔ مستقل را درنظر می‌گیریم . این n جریان یک بردار را تشکیل میدهد زیرا میتوانیم بنویسیم :

$$\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}'_1 = (i_1 + i'_1 , \ldots , i_n + i'_n) \qquad (۷-۱۰)$$

و :

$$\alpha\mathbf{I}_1 = (\alpha i_1 , \alpha i_2 , \ldots , \alpha i_n) \qquad (۷-۱۱)$$

مثال ۲ـ تمام اعدادی نظیر :

$$Z = a + Jb \qquad (۷-۱۲)$$

راکه درآنها a و b اعدادی‌حقیقی و $J=\sqrt{-1}$ است درنظرمی‌گیریم . جمع‌آنهارا بایکدیگر و ضرب آنها را در یک عدد بترتیب زیر تعریف میکنیم :

$$Z_1 + Z_2 = a_1 + a_2 + J(b_1 + b_2) \qquad (۷-۱۳)$$

$$\alpha Z = \alpha a + J\alpha b \qquad (۷-۱۴)$$

بنابراین بتمام اعدادی نظیر Z میتوان یک‌بردار مربوط کرد .

تبصرهٔ ۱ـ اگر X^i یعنی مؤلفه های $\mathbf{X}$ اعداد حقیقی باشد فضا را اصطلاحاً «فضای برداری نسبت به اعداد حقیقی» و اگر اعداد مختلط باشد « فضای برداری نسبت باعداد مختلط» گویند .

اگر n مؤلفهٔ X^i راکمیتهای هم جنس نگیریم (یعنی فرض‌کنیم یکه‌های محورها مساوی باشد) فضا «فضای برداری آفین» نامیده خواهد شد .

تبصرهٔ ۲ـ اگر مؤلفه های برداری در هرنقطه توابعی از مختصات آن نقطه یعنی x^i باشد ، آن بردار را «بردارتابع نقطه»نامند وبصورت $\mathbf{X}(x^1 , x^2 , \ldots , x^n)$

نمایش میدهند . دراین حال گویند از یک «میدان برداری» صحبت میشود .

۳ - ۷ - **استقلال خطی بردارها ـ** n بردار $\mathbf{a}_1$ و $\mathbf{a}_2$ و ... و $\mathbf{a}_n$ را وقتی «بطور خطی مستقل» گویند که نتوانیم n عدد λ^1 و λ^2 و ... و λ^n که در آن‌واحد همه باهم صفر نیستند چنان پیدا کنیم که رابطهٔ زیرصادق باشد:

$$\lambda^1\mathbf{a}_1+\lambda^2\mathbf{a}_2+\cdots+\lambda^n\mathbf{a}_n=0 \qquad (۷-۱۵)$$

و اگر چنین رابطه‌ای بین بردارها موجود باشد آنها را «بطور خطی تابع» گویند .

ازاین تعریف پیداست که n بردار $\mathbf{a}_1$ و $\mathbf{a}_2$ و ... و $\mathbf{a}_n$ وقتی بطور خطی تابعند که بتوانیم یکی از آنها را بصورت تابعی خطی ازبردارهای دیگربنویسیم .

اگر m بردار بطور خطی تابع باشند هر $n(n>m)$ برداری هم که شامل همین عده بردار هستند باز بطور خطی تابع خواهند بود . زیرا اگر رابطهٔ :

$$\lambda^1\mathbf{a}_1+\lambda^2\mathbf{a}_2+\cdots+\lambda^n\mathbf{a}_n=0 \qquad (۷-۱۶)$$

برقرار باشد میتوان مقادیر $\lambda^{m+1}=\cdots=\lambda^n$ را مساوی صفر فرض کرد ودرنتیجه حکم صادق خواهد بود .

اگر $\lambda\mathbf{a}=\lambda\mathbf{o}$ و $\lambda\neq 0$ باشد (λ را ازرابطهٔ $\lambda\mathbf{a}=\lambda\mathbf{o}$ حذف میکنیم) پس $\mathbf{a}=\mathbf{o}$ خواهد بود . بنابراین **یک بردار وقتی فقط بطور خطی تابع است که بردار صفرباشد .** لذا بردارهای هرمجموعه‌ای که شامل بردار صفر باشد نیز بطور خطی تابعند .

۴ - ۷ - **زیر فضاها ـ** یک زیر مجموعه از بردارهای فضای V را که خود یک فضای برداری را تشکیل میدهد زیر فضای برداری V نامند .

اگر $\mathbf{a}_1$ و ... و $\mathbf{a}_k$ بردارهای مفروضی در V باشد مجموعهٔ تمام ترکیبات خطی :

$$\mathbf{a}=\lambda^1\mathbf{a}_1+\lambda^2\mathbf{a}_2\cdots+\lambda^k\mathbf{a}_k \qquad (۷-۱۷)$$

رادستگاه خطی L_k نامند ومیگویند که زیرفضای L_k توسط بردارهای $\mathbf{a}_1$ و ... و $\mathbf{a}_k$

تنیده [۱] شده است . لذا در فضای معمولی زیر فضای L_1 که توسط بردار $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ تنیده‌شده مرکب ازتمام بردارهای $\lambda\mathbf{a}_1$ است که با $\mathbf{a}_1$ روی یک خط مستقیم قراردارند، و زیر فضای L_2 که توسط دو بردار $\mathbf{a}_1$ و $\mathbf{a}_2$ غیر واقع روی یک خط تنیده شده است از کلیهٔ بردارهای $\lambda^1\mathbf{a}_1+\lambda^2\mathbf{a}_2$ که با $\mathbf{a}_1$ و $\mathbf{a}_2$ دریک صفحه واقعند تشکیل شده است . بالاخره اگر $\mathbf{a}_1$ و $\mathbf{a}_2$ و $\mathbf{a}_3$ دریک صفحه نباشند، L_3 یعنی زیرفضائی که آنها می‌تنند مرکب از تمام بردارهای $\lambda^1\mathbf{a}_1+\lambda^2\mathbf{a}_2+\lambda^3\mathbf{a}_3$ است . چون هربردار را میتوان بصورت اخیر نوشت لذا $\mathbf{a}_1$ و $\mathbf{a}_2$ و $\mathbf{a}_3$ تمام فضای ۳ بعدی را می‌تنند .

تعریف : یک مجموعه از بردارهای بطور خطی مستقل که تمام یک فضای برداری را می‌تنند مبنائی برای این فضا نامیده میشود .

بنابراین هرسه بردار غیر واقع در یک صفحه یک مبنا برای فضای برداری معمولی سه بُعدی تشکیل میدهد . قضیهٔ زیر را که در اینجا اثبات نمی‌کنیم یادآوری مینمائیم :

قضیهٔ ۱ـ اگر n بردار ، یک فضای برداری متشکل از K بردار بطور خطی مستقل را به تنند ، حتماً $n \geqslant K$ می‌باشد [۲] .

۵ - ۷ - **مبناها و بُعد** ـ بکمک قضیهٔ زیرمیتوانیم بُعد یک‌فضای برداری را که مبنای آن از عدهٔ محدودی بردار درست شده است تعریف کنیم :

قضیهٔ ۲ـ تمام مبناهای یک فضای برداری یکعده بردار دارند بشرطیکه تعداد آنها محدود باشد .

اثبات : فرض میکنیم :

$$\mathbf{a}_1 \text{ و } \mathbf{a}_2 \text{ و } \ldots \text{ و } \mathbf{a}_n \text{ ؛ } \mathbf{b}_1 \text{ و } \mathbf{b}_2 \text{ و } \ldots \text{ و } \mathbf{b}_n$$

دو مبنا ازیک فضای برداری باشد . چون $\mathbf{a}$ ها V را می‌تنند و $\mathbf{b}$ ها بطور خطی

۱- To spin

۲ـ به [۱۱] مراجعه شود

مستقلند پس باید $n \geqslant K$ باشد. اما چون **b** ها هم V را می‌تنند و **a** ها بطورخطی مستقلند پس باید $K \geqslant n$ و در نتیجه $K = n$ باشد یعنی حکم ثابت میشود.

لذا می‌توانیم بگوئیم که: **بُعد** یک فضای برداری مساوی تعداد بردارها (بشرطیکه محدود باشند) درهریک ازمبناهای آنست. هرفضای برداری n بُعدی یکدستگاه خطی L_n است.

نتیجه - درهرفضای برداری n بُعدی هر $(n+1)$ بردار بطور خطی تابعند.

اثبات: زیرا هرمبنای فضای برداری از n بردار مرکب شده است. اگر هر $n+1$ بردار در L_n بطور خطی مستقل باشد پس طبق قضیهٔ ۱ باید $n+1 \leqslant n$ باشدواینمطلب غیر ممکنست. پس باید $n+1$ بردار فضا بطور خطی تابع باشند.

حال بردارهای زیر را درنظر میگیریم:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$$
$$\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

یعنی تمام مؤلفه های $\mathbf{e}_1$ صفر است باستثنای مؤلفهٔ با اندیس تحتانی ۱ و تمام مؤلفه های $\mathbf{e}_2$ صفراست باستثنای مؤلفهٔ با اندیس تحتانی ۲ و...وتمام مؤلفه های $\mathbf{e}_n$ باستثنای مؤلفهٔ بااندیس تحتانی n صفر میباشد. بدیهی است این n برداربطور خطی مستقلند و لذا میتوانند معرف محورهای مستقیم‌الخط مجرد مختصات باشند.

زیرا اگر n عدد λ^1 و λ^2 و ... و λ^n را درنظر بگیریم عبارت:

$$\lambda^i \mathbf{e}_i = \lambda^1 \mathbf{e}_1 + \lambda^2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \lambda^n \mathbf{e}_n \qquad (۷—۱۸)$$

وقتی میتواند صفر باشد که λ^i ها همه باهم صفر باشند یعنی داشته باشیم:

$$\lambda^1=\lambda^2=\cdots=0$$

پس این n امتداد بطورخطی مستقل است ومیتوانیم بردار e_i را معرف امتداد محورتصویر با علامت i و طول $|e_i|$ را معرف یکهٔ مقیاس انتخابی برای اندازه گیری مؤلفه های بردارها روی این محور بدانیم - یعنی خلاصه e_i ها را مبنا بگیریم .

حالا میخواهیم ثابت کنیم که هربردار **a** را فقط وفقط بیک صورت باترکیب خطی ازبردارهای مبنای e_i میتوانیم بیان کنیم . زیرا اگر a^1 و a^2 و ... و a^n n مؤلفهٔ **a** باشد که بترتیب با یکه‌های مربوطه روی هرمحور سنجیده شده است میتوانیم بنویسیم :

$$\mathbf{a}=a^1\mathbf{e}_1+a^2\mathbf{e}_2\cdots+a^n\mathbf{e}_n=a^i\mathbf{e}_i \qquad (۷—۱۹)$$

اما این تجزیه بطورمنحصری صورت میگیرد . چه اگرفرض کنیم که بتوانیم بنویسیم:

$$\mathbf{a}=b^i\mathbf{e}_i \qquad (۷—۲۰)$$

پس میتوانیم بنویسیم :

$$(a^i-b^i)\mathbf{e}_i=0 \qquad (۷—۲۱)$$

و چون e_i ها بطور خطی مستقلند پس باید $a^i=b^i$ و درنتیجه حکم ثابت باشد .

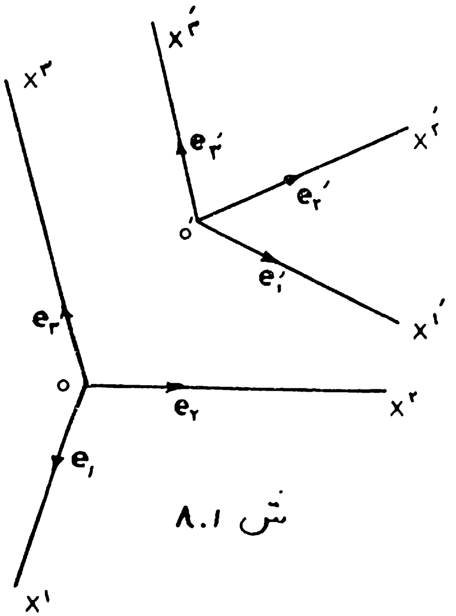
تبصرهٔ ۳- ازمطالب فوق تعریف دیگری برای بُعد پیدا می کنیم :

اگر فضای برداری V شامل n بردار بطور خطی مستقل باشد و هر $n+1$ برداردر V بطورخطی تابع باشند دراینصورت فضای‌برداری V را n بُعدی‌مینامیم.

۸ ـ تغییر محورهای مختصات ـ تبدیل بردارهای مبنا

دراین مبحث تمام کمیات حقیقی و فضا ۳ بُعدی انتخاب شده است. نخست دو دستگاه مستقیم‌الخط یکی بمبدأ O و بردارهای مبنای $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ و $\mathbf{e}_3$ ودیگری

بمبدأ O' و بردارهای مبنای $\mathbf{e}_{1'}$ و $\mathbf{e}_{2'}$ و $\mathbf{e}_{3'}$ در نظر می گیریم (ش ۱-۸).
هریک ازبردارهای $\mathbf{e}_{i'}$ مؤلفه هائی روی بردار $\mathbf{e}_i$ دارد . یعنی میتوانیم بنویسیم :



ش ۸.۱

$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{e}_{1'} &= \alpha^1_{1'}\mathbf{e}_1 + \alpha^2_{1'}\mathbf{e}_2 + \alpha^3_{1'}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_{2'} &= \alpha^1_{2'}\mathbf{e}_1 + \alpha^2_{2'}\mathbf{e}_2 + \alpha^3_{2'}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_{3'} &= \alpha^1_{3'}\mathbf{e}_1 + \alpha^2_{3'}\mathbf{e}_2 + \alpha^3_{3'}\mathbf{e}_3 \end{aligned}\right. \qquad (۸-۱)$$

و یا :

$$\boxed{\mathbf{e}_{i'} = \alpha^i_{i'}\mathbf{e}_i} \qquad i \text{ و } i' = ۱ , ۲ , ۳ \qquad (۸-۲)$$

یعنی وقتی از دستگاهی بدستگاه دیگرمیرویم بردارهای مبنا طبق (۲ - ۸) که‌درآن $\alpha^i_{i'}$ ها مقادیرثابتست وبعلت استقلال خطی بردارهای $\mathbf{e}_{i'}$ تشکیل ماتریس عادی ۳ × ۳ را میدهد تغییر می‌نماید .

بهمین نحو هربردار $\mathbf{e}_i$ مؤلفه هائی روی بردار $\mathbf{e}_{i'}$ خواهد داشت یعنی :

$$
(\text{۸—۳}) \qquad \begin{cases} \mathbf{e}_1 = \alpha_1^{1'} \mathbf{e}_{1'} + \alpha_1^{2'} \mathbf{e}_{2'} + \alpha_1^{3'} \mathbf{e}_{3'} \\ \mathbf{e}_2 = \alpha_2^{1'} \mathbf{e}_{1'} + \alpha_2^{2'} \mathbf{e}_{2'} + \alpha_2^{3'} \mathbf{e}_{3'} \\ \mathbf{e}_3 = \alpha_3^{1'} \mathbf{e}_{1'} + \alpha_3^{2'} \mathbf{e}_{2'} + \alpha_3^{3'} \mathbf{e}_{3'} \end{cases}
$$

و یا :

$$
(\text{۸—٤}) \qquad \mathbf{e}_i = \alpha_i^{i'} \mathbf{e}_{i'} \qquad i \text{ و } i' = 1, 2, 3
$$

که باز $\alpha_i^{i'}$ ها مقادیری ثابتست و تشکیل ماتریس عادی ۳ × ۳ میدهد.

اگر (۸-۲) را در (۸-٤) بگذاریم خواهیم داشت :

$$
(\text{۸—٥}) \qquad \mathbf{e}_i = \alpha_i^{i'} \alpha_{i'}^{j} \mathbf{e}_j
$$

و یا با توجه باستقلال خطی بردارهای $\mathbf{e}_i$ میتوانیم بنویسیم :

$$
(\text{۸—٦}) \qquad \alpha_i^{i'} \alpha_{i'}^{j} = \delta_i^j \qquad i \text{ و } i' \text{ و } j = 1, 2, 3
$$

اگر (۸-٦) را بصورت روابط ماتریسی بنویسیم خواهیم داشت :

$$
(\text{۸—۷}) \qquad \begin{bmatrix} \alpha_1^{1'} & \alpha_1^{2'} & \alpha_1^{3'} \\ \alpha_2^{1'} & \alpha_2^{2'} & \alpha_2^{3'} \\ \alpha_3^{1'} & \alpha_3^{2'} & \alpha_3^{3'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{1'}^{1} & \alpha_{1'}^{2} & \alpha_{1'}^{3} \\ \alpha_{2'}^{1} & \alpha_{2'}^{2} & \alpha_{2'}^{3} \\ \alpha_{3'}^{1} & \alpha_{3'}^{2} & \alpha_{3'}^{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I
$$

یعنی ماتریسهای $[\alpha_{i'}^{i}]$ و $[\alpha_j^{j'}]$ ماتریسهای متعامداند[۱] .

همچنین از قرار دادن (۸-٤) در (۸-۲) و توجه باستقلال خطی بردارهای $\mathbf{e}_{i'}$ نتیجه میشود :

$$
(\text{۸—۸}) \qquad \alpha_{i'}^{i} \alpha_i^{j'} = \delta_{i'}^{j'} \qquad i, i', j' = 1, 2, 3
$$

حال برداری مانند $\mathbf{a}$ درنظر میگیریم و می‌نویسیم :

۱- Orthogonal

$$\mathbf{a}=a^{1}\mathbf{e}_{1}+a^{2}\mathbf{e}_{2}+a^{3}\mathbf{e}_{3}=a^{1'}\mathbf{e}_{1'}+a^{2'}\mathbf{e}_{2'}+a^{3'}\mathbf{e}_{3'}$$

یا :

$$\mathbf{a}=a^{i}\mathbf{e}_{i}=a^{i'}\mathbf{e}_{i'} \qquad i \text{ و } i'=1,2,3 \qquad (8-9)$$

که دراینجا a^i و $a^{i'}$ بترتیب مؤلفه‌های $\mathbf{a}$ روی محورهای مربوط به بردارهای مبنای $\mathbf{e}_i$ و $\mathbf{e}_{i'}$ میباشد .

اگر در (۹ - ۸) بجای $\mathbf{e}_{i'}$ مقدارش را از رابطهٔ (۲ - ۸) بگذاریم خواهیم داشت :

$$a^{i}\mathbf{e}_{i}=a^{i'}\alpha^{i}_{i'}\mathbf{e}_{i} \qquad i \text{ و } i'=1,2,3$$

که بازهم با توجه باستقلال خطی بردارهای $\mathbf{e}_i$ داریم :

$$\underline{a^{i}=\alpha^{i}_{i'}a^{i'}} \qquad i \text{ و } i'=1,2,3 \qquad (8-10)$$

بالعکس اگر (٤ - ۸) را در (۹ - ۸) بگذاریم نتیجه میگیریم :

$$\underline{a^{i'}=\alpha^{i'}_{i}a^{i}} \qquad i \text{ و } i'=1,2,3 \qquad (8-11)$$

که ازاین روابط چگونگی تغییرات مؤلفه‌های یک بردار هنگام تغییر محورهای مختصات بدست میآید .

استعمال اندیسهای پریم‌دار بسیاری از عملیات ما را آسان میکنند مثلاً داریم :

$$\alpha^{i'}_{i}a^{i}=\alpha^{i'}_{i}\alpha^{i}_{j'}a^{j'}=\delta^{i'}_{j'}a^{j'}=a^{i'}$$

یعنی بسهولت ازطرف دوم (۱۱ - ۸) به طرف اول آن رسیدیم .

حال ببینیم بردار معرف نقطه چگونه در تغییر مختصات تبدیل میشود . از تصویر رابطهٔ برداری :

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P} \tag{۸—۱۲}$$

روی محور x^i خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x^1=c^1+\alpha^1_{1'}x^{1'}+\alpha^1_{2'}x^{2'}+\alpha^1_{3'}x^{3'} \\ x^2=c^2+\alpha^2_{1'}x^{1'}+\alpha^2_{2'}x^{2'}+\alpha^2_{3'}x^{3'} \\ x^3=c^3+\alpha^3_{1'}x^{1'}+\alpha^3_{2'}x^{2'}+\alpha^3_{3'}x^{3'} \end{cases} \tag{۸—۱۳}$$

و یا :

$$x^i=c^i+\alpha^i_{i'}x^{i'} \qquad i\,,\,i'=1\,,\,2\,,\,3 \tag{۸—۱٤}$$

که دراینجا $\alpha^i_{i'}$ ها همان ضرائبی است که در (۲ - ۸) دیده‌ایم و c^i ها مؤلفه‌های $\overrightarrow{OO'}$ نسبت به سه محور با بردارهای یکهٔ e_i می‌باشد .

بطوریکه ملاحظه میشود در تغییر مختصات مستقیم‌الخط کلیهٔ ضرائب $\alpha^i_{i'}$ و c^i و $c^{i'}$ و $\alpha^{i'}_i$ ها **مقادیری ثابتست**. ولی اگرمحورهای ما منحنی‌الخط باشد دیگر این مقادیر **ثابت نیست** .

اگر در تبدیل (۸ - ۱٤) مقادیر c^i ها صفرباشد آنرا تبدیل آفین مرکزدار(۱) نامند .

۱ - ۸ - **تبدیلات کلی** ـ یکدستگاه منحنی‌الخط غیر مشخص سه بعدی با یکدستگاه معادلات :

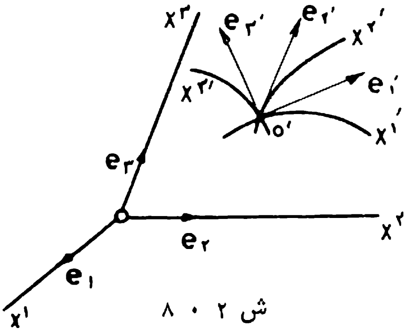
$$\begin{cases} x^1=x^1(x^{1'}\,,\,x^{2'}\,,\,x^{3'}) \\ x^2=x^2(x^{1'}\,,\,x^{2'}\,,\,x^{3'}) \\ x^3=x^3(x^{1'}\,,\,x^{2'}\,,\,x^{3'}) \end{cases} \tag{۸—۱۵}$$

ویا :

$$x^i=x^i(x^{i'}) \qquad i \text{ و } i'=1\,,\,2\,,\,3 \tag{۸—۱٦}$$

۱- Centered Affine

مشخص میشود که x^i ها برحسب $x^{i'}$ ها و همچنین $x^{i'}$ ها برحسب x^i ها توابعی یکمقداری(۱)است ، یعنی یک ارتباط یک ـ بیک بین مجموعه های اعداد x^i و $x^{i'}$ برقرار است .



ش ۲ ـ ۸

بنابراین میتوانیم روابط زیر را بنویسیم :

$$(\text{۸—۱۷})\qquad \begin{cases} x^{1'}=x^{1'}(x^1\,,\ x^2\,,\ x^3) \\ x^{2'}=x^{2'}(x^1\,,\ x^2\,,\ x^3) \\ x^{3'}=x^{3'}(x^1\,,\ x^2\,,\ x^3) \end{cases}$$

و یا :

$$(\text{۸—۱۸})\qquad x^{i'}=x^{i'}(x^i) \qquad i \text{ و } i'=1\,,2\,,3$$

حال اگر به $x^{1'}$ و $x^{2'}$ و $x^{3'}$ مقادیر خاصی بدهیم نقطه‌ای مانند O' بمختصات x^1 و x^2 و x^3 بدست خواهیم آورد ش ۲-۸ . از این نقطه منحنی $\begin{cases} x^{2'}=ct \\ x^{3'}=ct \end{cases}$ را رسم میکنیم . این منحنی را که در آن فقط $x^{1'}$ متغیر است محور منحنی‌الخط $O'x^{1'}$ میگیریم . محورهای منحنی‌الخط $x^{2'}$ و $x^{3'}$ را نیزبهمین ترتیب مشخص میکنیم .

در روی محورهای منحنی‌الخط $x^{i'}$ هرتغییرمکان بینهایت کوچکی نظیر $dx^{i'}$ را میتوان تغییرمکانی تصورکرد که روی محور مستقیم‌الخط مماس در O' براین منحنی صورت گرفته است . محورهای مستقیم‌الخطی را که بدین ترتیب تعریف

۱- Single - Valued

کردیم با بردارهای مبنایشان $e_{i'}$ نشان میدهیم . بنابراین داریم :

$$e_i = \alpha_i^{i'} e_{i'} \qquad i \text{ و } i' = ۱ , ۲ , ۳ \qquad (۸-۱۹)$$

و :

$$e_{i'} = \alpha_{i'}^{i} e_i \qquad i \text{ و } i' = ۱ , ۲ , ۳ \qquad (۸-۲۰)$$

و برای مؤلفه‌های dx^i و $dx^{i'}$ هم داریم :

$$dx^i = \alpha_{i'}^{i} dx^{i'} \qquad (۸-۲۱)$$

$$dx^{i'} = \alpha_i^{i'} dx^i \qquad (۸-۲۲)$$

دراینجا ضرائب $\alpha_{i'}^{i}$ و $\alpha_i^{i'}$ دیگر مقادیرثابتی نیست بلکه تابعی ازمختصات نقطهٔ مفروض میباشد. زیرا اگراز(۱۶ - ۸) و (۱۸ - ۸) دیفرانسیل بگیریم داریم :

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dx^{i'} \qquad (۸-۲۳)$$

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} dx^i \qquad (۸-۲۴)$$

ازمقایسهٔ این روابط با (۲۱ - ۸) و (۲۲ - ۸) داریم :

$$\alpha_{i'}^{i} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \qquad (۸-۲۵)$$

$$\alpha_i^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \qquad (۸-۲۶)$$

ازاین روابط بخوبی دیده میشود که ضرائب $\alpha_{i'}^{i}$ و $\alpha_i^{i'}$ توابعی از مختصات نقطهٔ مفروض‌است . لذا بردارهای مبنای $e_{i'}$ ازیک نقطه بنقطهٔ دیگر تغییر میکند. **این وجه امتیاز بسیار مهم است .**

از این ببعد وقتی محورها منحنی‌الخط باشد بخصوص برای جلوگیری از اشتباه بجای $\alpha_{i'}^{i}$ و $\alpha_{i}^{i'}$ بترتیب نمادهای $p_{i'}^{i}$ و $p_{i}^{i'}$ را که بترتیب مساوی $\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}$ و $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}$ است بکارخواهیم برد یعنی مینویسیم :

$$\mathbf{e}_{i} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\, \mathbf{e}_{i'} = p_{i}^{i'}\, \mathbf{e}_{i'} \qquad (۸-۲۷)$$

و :

$$\mathbf{e}_{i'} = p_{i'}^{i}\, \mathbf{e}_{i} \qquad i \text{ و } i' = ۱, ۲, ۳ \qquad (۸-۲۸)$$

و مانند (۶ - ۸) و (۷ - ۸) داریم :

$$p_{i'}^{i}\, p_{i}^{j'} = \delta_{i'}^{j'} \quad \text{و} \quad p_{i}^{i'}\, p_{i'}^{j} = \delta_{i}^{j} \qquad i \text{ و } j \text{ و } i' \text{ و } j' = ۱, ۲, ۳$$

مثال ـ میدانیم که بین مختصات دکارتی قائم و کروی یک نقطه روابط زیر برقرار است (ش ۳ - ۸) :

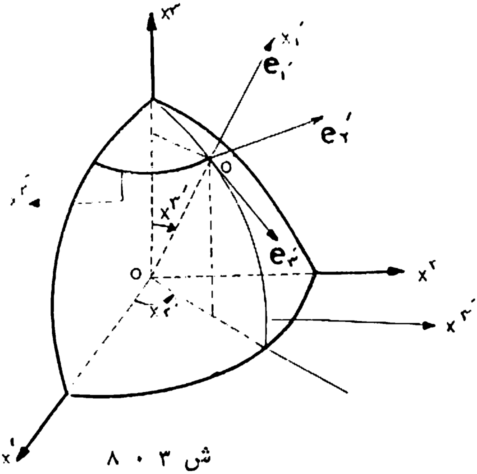
$$\begin{cases} x^{1} = x^{1'} \cos x^{2'} \sin x^{3'} \\ x^{2} = x^{1'} \sin x^{2'} \sin x^{3'} \\ x^{3} = x^{1'} \cos x^{3'} \end{cases} \qquad (۸-۲۹)$$

برای محاسبهٔ $p_{i'}^{i}$ ها خواهیم داشت :

$$\begin{cases} p_{1'}^{1} = \dfrac{\partial x^{1}}{\partial x^{1'}} = \cos x^{2'} \sin x^{3'} \\[2ex] p_{2'}^{1} = \dfrac{\partial x^{1}}{\partial x^{2'}} = -x^{1'} \sin x^{2'} \sin x^{3'} \\[2ex] p_{3'}^{1} = \dfrac{\partial x^{1}}{\partial x^{3'}} = x^{1'} \cos x^{2'} \cos x^{3'} \end{cases} \qquad (۸-۳۰)$$

و غیره ...

کلیهٔ مطالب مذکور در فوق برای فضاهای n بعدی نیز صحیح است و برای اثبات آنها کافیست که $i, i'=1, 2, \ldots, n$ اختیار شود . بدیهیست تنها وقتی میتوانیم تجسم خارجی بآنها بدهیم که $n=3$ باشد .



ش ۳ ۰ ۸

لذا فورمولهای تبدیل مبناها در یک فضای n بعدی بصورت :

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,\mathbf{e}_{i'} = p_i^{i'}\,\mathbf{e}_{i'} \qquad i \text{ و } i' = 1, 2, \ldots, n \tag{۸—۳۱}$$

و :

$$\mathbf{e}_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,\mathbf{e}_i = p_{i'}^{i}\,\mathbf{e}_i \qquad i \text{ و } i' = 1, 2, \ldots, n \tag{۸—۳۲}$$

و مؤلفه های یک تغییرمکان بینهایت کوچک بصورت زیر نوشته میشود :

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\,dx^{i'} = p_{i'}^{i}\,dx^{i'} \tag{۸—۳۳}$$

و :

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\,dx^i = p_i^{i'}\,dx^i \tag{۸—۳۴}$$

بدیهی است وقتی دستگاه مستقیم الخط باشد $p_{i'}^{i}$ و $p_i^{i'}$ ها مقادیر ثابتی میشود .

۹ــ نوع [۱]

تعریف : اگر n مؤلفهٔ $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ A^i از برداری هنگام تغییر محورهای مختصات به n مؤلفهٔ $A^{i'}(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'})$ چنان تبدیل شود که داشته باشیم :

$$A^{i'} = p^{i'}_i A^i \qquad (۹ - ۱)$$

دراینصورت A^i را مؤلفه های « ناهمگرد » [۲] این بردار گویند . مثلاً از روابط (۳۳ - ۸) و (۳٤ - ۸) پیداست که مؤلفه های عنصربینهایت کوچک $\overrightarrow{dl}$ مؤلفه های ناهمگرد آن است و مؤلفه های بردار مماس برمنحنی $x^i = x^i(u)$ یعنی $\frac{dx^i}{du}$ نیز همینطور است .

حال کمیت عدد واری مثل $f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ را درنظر می گیریم . داریم :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^{i'}} dx^{i'} \qquad (۹ - ۲)$$

و یا :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dx^{i'} \qquad (۹ - ۳)$$

از مقایسهٔ طرفین دوم (۲ - ۹) و (۳ - ۹) خواهیم داشت :

$$\frac{\partial f}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = p^i_{i'} \frac{\partial f}{\partial x^i} \qquad (۹ - ٤)$$

۱- Type ۲- Contravariant

یعنی کمیتی به مؤلفه های $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ (گرادین [۱] یک تابع) هنگام تغییر محورهای مختصات بترتیب عکس (۱ - ۹) تغییر میکند و همین مطلب ما را به کمیتی از نوع دیگر هدایت مینماید :

اگر هنگام تغییر محورهای مختصات n مؤلفهٔ $A_i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ از برداری به n مؤلفهٔ $A_{i'}(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'})$ چنان تبدیل شود که داشته باشیم:

$$A_{i'} = p^i_{i'} A_i \qquad (۹-۵)$$

دراینحال A_i را مؤلفه های « همگرد » [۲] این بردار گوئیم . **همیشه نا همگردی با یک اندیس فوقانی وهمگردی بایک اندیس تحتانی نشان داده میشود .**

وقتی کمیتی مثل $A(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ در تغییر محورهای مختصات تغییر نکند یعنی داشته باشیم :

$$A'(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}) = A(x^1, x^2, \ldots, x^n) \qquad (۹-۶)$$

دراینصورت آنرا پایا [۳] یا عدد وار [۴] گویند .

مثال : اگر A^i و B_i بترتیب مؤلفه های ناهمگرد و همگرد دو بردار باشد میتوانیم بنویسیم :

$$A^{i'} B_{i'} = p^{i'}_j A^j \; p^i_{i'} B_i = \delta^i_j A^j B_i = A^i B_i \qquad (۹-۷)$$

یعنی $A^i B_i$ پایاست .

تبصرهٔ ۱- فرض میکنیم x^i مختصات قدیم و $x^{i'}$ مختصات جدید نقطه‌ای با رابطهٔ $x^{i'} = x^{i'}(x^i)$ بهم مربوط باشند . اگر محورهای مختصات را مجدداً تغییر

۱- Gradient ۲- Covariant ۳- Invariant

٤- Scalar

دهیم بین $x^{i''}$ یعنی مختصات اخیر نقطه و $x^{i'}$ رابطه‌ای بصورت :

$$x^{i''}=x^{i''}(x^{i'})$$

خواهیم داشت . حال اگر $A^{i''}$ مؤلفه های ناهمگرد برداری در دستگاه اخیر باشد میتوانیم بنویسیم :

$$A^{i''}=\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}A^{i'}=\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\;\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}A^{i}=\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i}}\;A^{i}=p_{i}^{i''}A^{i} \qquad (۹-۸)$$

این رابطه بصورت (۱-۹) است و نشان میدهد که تبدیلات بردارهای ناهمگرد تشکیل یک گروه میدهند. عین همین مطلب برای بردارهای همگرد نیزصحیح است .

تبصرهٔ ۲- باستثنای خود مختصات x^{i} یک اندیس فوقانی تنها ، همیشه معرف یک بردار ناهمگرد است . مختصات x^{i} **فقط در تبدیلاتی خطی بصورت :** $x^{i'}=\alpha_{i}^{i'}x^{i}$ که در آنها $\alpha_{i}^{i'}$ ، n^{2} مقدار ثابتست و لزوماً معرف مؤلفه های موجوداتی که بعداً تانسورمینامیم نیست ، مثل مؤلفه های یک بردارناهمگرد تغییر میکنند . زیرا همانطوریکه قبلاً دیدیم تنها دراینحالت است که $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}=\alpha_{i}^{i'}$ است ومیتوانیم تبدیل را بصورت : $x^{i'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}x^{i}$ بنویسیم ، ولی در تبدیل مختصات کلی ، x^{i} ها تشکیل مؤلفه های یک بردار ناهمگرد را نمیدهد . یعنی اگر A^{i} را مساوی x^{i} بگیریم ، $A^{i'}$ مؤلفه های جدید آن نسبت به مختصات جدید $x^{i'}$ ، دررابطهٔ $A^{i'}=x^{i'}$ صدق نمی کند وچنانکه در (§۸) دیدیم $\alpha_{i}^{i'}$ و $\alpha_{i'}^{i}$ چیزی جز عناصر یک ماتریس تبدیل نیست .

۱۰ـ مبناهای e^{i}

بردارهای مبنای e_{j} راکه تاکنون ازآنها استفاده کرده‌ایم **بردارهای مبنای همگرد مینامیم .**

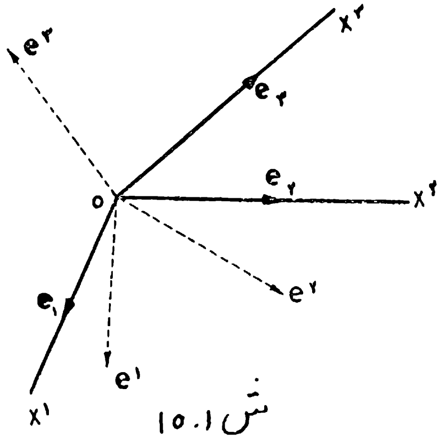
حال بردارهای مبنائی مانند e^i چنان انتخاب میکنیم که داشته باشیم :

$$e^i \cdot e_j = \delta^i_j \qquad (۱۰-۱)$$

بردارهای e^i که بدین ترتیب تعریف میشود به بردارهای دوئل [۱] و یا دستگاه متقابل [۲] بردارهای e_j موسومست . دراینجا برای تجسم شکل خود را بفضای سه بُعدی محدود می کنیم یعنی ۳ , ۲ , ۱ $=j$ و i می گیریم . وقتی $i=j=۱$ باشد رابطهٔ (۱۰-۱) بصورت زیر در میآید :

$$|e^۱| \cdot |e_۱| \cos(e^۱ , e_۱) = ۱ \qquad (۱۰-۲)$$

رابطهٔ (۱۰-۱) نشان میدهد که $e^۱$ برصفحهٔ $(e_۳ , e_۲)$ و $e^۲$ برصفحهٔ $(e_۱ , e_۳)$ و بالاخره $e^۳$ برصفحهٔ $(e_۲ , e_۱)$ عمود است و لذا (ش ۱۰-۱) حاصل میشود .



ش ۱۰.۱

از تعامد $e^۱$ برصفحهٔ $(e_۳ , e_۲)$ نتیجه میگیریم که $e^۱$ با بردار $e_۳ \wedge e_۲$ («$\wedge$» نماد ضرب خارجی) موازی است و درنتیجه میتوانیم بنویسیم :

$$e^۱ = \lambda e_۲ \wedge e_۳ \qquad (۱۰-۳)$$

۱- Dual ۲- Reciprocal System

و یا :

$$۱=\lambda \mathbf{e}_۱ \cdot \mathbf{e}_۲ \wedge \mathbf{e}_۳ \qquad (۱۰-۴)$$

یعنی :

$$\lambda=\frac{۱}{\mathbf{e}_۱ \cdot \mathbf{e}_۲ \wedge \mathbf{e}_۳} \qquad (۱۰=۵)$$

پس :

$$\mathbf{e}^۱=\frac{\mathbf{e}_۲ \wedge \mathbf{e}_۳}{\mathbf{e}_۱ \cdot \mathbf{e}_۲ \wedge \mathbf{e}_۳} \qquad (۱۰-۶)$$

و :

$$\mathbf{e}^۲=\frac{\mathbf{e}_۳ \wedge \mathbf{e}_۱}{\mathbf{e}_۱ \cdot \mathbf{e}_۲ \wedge \mathbf{e}_۳} \qquad (۱۰-۷)$$

$$\mathbf{e}^۳=\frac{\mathbf{e}_۱ \wedge \mathbf{e}_۲}{\mathbf{e}_۱ \cdot \mathbf{e}_۲ \wedge \mathbf{e}_۳} \qquad (۱۰-۸)$$

از تقارن (۱۰-۱) نسبت به $\mathbf{e}^i$ و $\mathbf{e}_j$ یعنی تعامد $\mathbf{e}_۱$ برصفحهٔ $(\mathbf{e}^۲ , \mathbf{e}^۳)$ و $\mathbf{e}_۲$ برصفحهٔ $(\mathbf{e}^۳ , \mathbf{e}^۱)$ و بالاخره $\mathbf{e}_۳$ برصفحهٔ $(\mathbf{e}^۱ , \mathbf{e}^۲)$ نتیجه میگیریم :

$$\mathbf{e}_۱=\frac{\mathbf{e}^۲ \wedge \mathbf{e}^۳}{\mathbf{e}^۱ \cdot \mathbf{e}^۲ \wedge \mathbf{e}^۳} \quad \text{و} \quad \mathbf{e}_۲=\frac{\mathbf{e}^۳ \wedge \mathbf{e}^۱}{\mathbf{e}^۱ \cdot \mathbf{e}^۲ \wedge \mathbf{e}^۳} \qquad (۱۰-۹)$$

و :

$$\mathbf{e}_۳=\frac{\mathbf{e}^۱ \wedge \mathbf{e}^۲}{\mathbf{e}^۱ \cdot \mathbf{e}^۲ \wedge \mathbf{e}^۳}$$

و از آنجا :

$$\mathbf{e}^۱ \cdot \mathbf{e}_۱=\frac{(\mathbf{e}_۲ \wedge \mathbf{e}_۳) \cdot (\mathbf{e}^۲ \wedge \mathbf{e}^۳)}{(\mathbf{e}_۱ \cdot \mathbf{e}_۲ \wedge \mathbf{e}_۳) \cdot (\mathbf{e}^۱ \cdot \mathbf{e}^۲ \wedge \mathbf{e}^۳)} \qquad (۱۰-۱۰)$$

$$=\frac{۱}{(\mathbf{e}_۱ \cdot \mathbf{e}_۲ \wedge \mathbf{e}_۳) \cdot (\mathbf{e}^۱ \cdot \mathbf{e}^۲ \wedge \mathbf{e}^۳)}$$

ویا بالاخره :

$$(\mathbf{e}_۱ \cdot \mathbf{e}_۲ \wedge \mathbf{e}_۳) \cdot (\mathbf{e}^۱ \cdot \mathbf{e}^۲ \wedge \mathbf{e}^۳)=۱ \qquad (۱۰-۱۱)$$

که وجود معادلهٔ اخیر خود علت دیگری برای تسمیهٔ دستگاه جدید است .

چون طرف دوم (۱۱-۱۰) مساوی ۱ میباشد لذا اگر $(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3)=1$ باشد دستگاه متقابل آن ازراست بچپ واگر $(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3)=-1$ باشد دستگاه متقابل آن از چپ بر است خواهد بود .

فرض میکنیم $\mathbf{a}=a^i\mathbf{e}_i$ باشد . از ضرب طرفین این تساوی بطور داخلی در $\mathbf{e}^j$ خواهیم داشت :

$$(۱۰-۱۲) \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}^j=a^i\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}^j=\delta^j_i a^i=a^j \qquad i \text{ و } j=۱,۲,۳$$

و همچنین :

$$(۱۰-۱۳) \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_i=a_i \qquad i=۱,۲,۳$$

یعنی a^j تصویرقائم $\mathbf{a}$ روی $\mathbf{e}^j$ و a_i تصویرقائم‌آن روی $\mathbf{e}_i$ است. پس بخصوص تصویر قائم $\mathbf{a}$ روی $\mathbf{e}^{j'}$ و $\mathbf{e}_{i'}$ بترتیب $a^{j'}$ و $a_{i'}$ خواهد بود یعنی داریم :

$$(۱۰-۱٤) \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}^{j'}=a^{j'} \qquad j'=۱,۲,۳$$

پس بردار $\mathbf{a}$ توسط روابط زیر داده میشود :

$$(۱۰-۱٥) \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_{i'}=a_{i'} \qquad i'=۱,۲,۳$$

و :

$$(۱۰-۱٦) \qquad \mathbf{a}=a_i\mathbf{e}^i=a^i\mathbf{e}_i$$

یعنی درواقع a^i و a_i بترتیب مؤلفه های‌ناهمگرد وهمگرد **یک بردار**یا میباشند **یعنی دو نمایش مختلف از یک بردار منحصری** را ارائه میدهند .

اگر بجای طرف اول و دوم (۱۱-۸) بترتیب طرفهای اول (۱۰-۱٤) و (۱۰-۱۲) را بگذاریم خواهیم داشت :

$$(۱۰-۱۷) \qquad \boxed{\mathbf{e}^{i'}=\alpha^{i'}_i\mathbf{e}^i} \qquad i \text{ و } i'=۱,۲,۳$$

این رابطه قانون تبدیل بردارهای متقابل مبنا می‌باشد .

از ضرب طرفین (۲-۸) بطور داخلی در $\mathbf{a}$ خواهیم داشت :

$$\mathbf{a}\cdot \mathbf{e}_{i'}=\alpha^{i}_{i'}\mathbf{a}\cdot \mathbf{e}_{i} \qquad i \text{ و } i'=۱,۲,۳ \tag{۱۰—۱۷}$$

و با توجه به (۳-۱۰) و (۵-۱۰) میتوانیم بنویسیم :

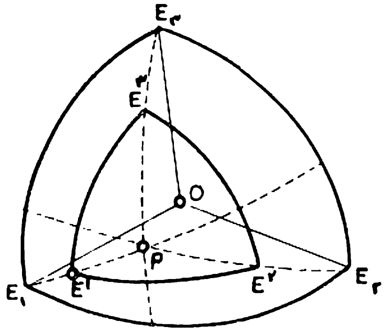
$$\boxed{a_{i'}=\alpha^{i}_{i'}a_{i}} \qquad i \text{ و } i'=۱,۲,۳ \tag{۱۰—۱۹}$$

که این رابطه هم قانون تبدیل بردارهای همگرد یعنی همان (۵-۹) را میدهد.

توجه : $\mathbf{e}^{i}$ و $\mathbf{e}^{i'}$ در (۱۰ - ۱۷) یا $\mathbf{e}_{i}$ و $\mathbf{e}_{i'}$ در (۸ - ۲۹) بطورکلی ، بردارهای مختلفی ازیک فضای برداری هستند نه **نمایشهای مختلف یک بردار**.

۱ - ۱۰ - تعبیری هندسی ازبردارهای مبنای $\mathbf{e}^{i}$.

کرهٔ S بمرکز O و بشعاع واحد را رسم میکنیم (ش ۱-۱۰) تا بردارهای $\mathbf{e}_{i}$ و $\mathbf{e}^{i}$ را بترتیب در E_{i} و E^{i} ببرد . سه صفحهٔ $OE_{i}E_{j}$ کرهٔ S را درمثلث



ش ۱۰.۱

مثلث کروی $E_{۱}E_{۲}E_{۳}$ و سه صفحهٔ $OE^{i}E^{j}$ آنرا درمثلث $E^{۱}E^{۲}E^{۳}$ قطع میکنند . دومثلث اخیرقطبی‌یکدیگرند زیرا $E_{۱}$ و $E_{۲}$ و $E_{۳}$ بترتیب‌قطبهای‌قوسهای‌عظیمهٔ $\widehat{E_{۲}E_{۳}}$ و $\widehat{E_{۳}E_{۱}}$ و $\widehat{E_{۱}E_{۲}}$ و نقاط $E^{۱}$ و $E^{۲}$ و $E^{۳}$ بترتیب‌قطبهای قوسهای‌عظیمهٔ

$\widehat{E^2E^3}$ و $\widehat{E^3E^1}$ و $\widehat{E^1E^2}$ میباشد . از روابط (۸ و ۷ و ۶ - ۱۰) اتحاد زیر بدست می‌آید :

$$e_1 \wedge e^1 + e_2 \wedge e^2 + e_3 \wedge e^3 = e_1 \wedge (e_2 \wedge e_3) + e_2 \wedge (e_3 \wedge e_1) + e_3 \wedge (e_1 \wedge e_2) \equiv 0 \qquad (۱۰-۲۰)$$

این رابطه که نشان میدهد بردارهای $e_1 \wedge e^1$ و $e_2 \wedge e^2$ و $e_3 \wedge e^3$ دریک صفحهٔ $\prod$ واقعند تعبیر جالبی دارد .

دایرهٔ عظیمهٔ $\widehat{E_1E^1}$ بردودایرهٔ عظیمهٔ $\widehat{E_2E_3}$ و $\widehat{E^2E^3}$ عمودودرنتیجه شامل آن ارتفاعاتی از مثلثهای $E_1E_2E_3$ و $E^1E^2E^3$ است که بترتیب از E_1 و E^1 رسم میشود .

بهمین نحودوایر عظیمهٔ $\widehat{E_2E_3}$ و $\widehat{E^2E^3}$ شامل آن ارتفاعاتی از همان دو مثلث است که بترتیب از رؤس (E_2 , E^2) و (E_3 , E^3) رسم میشود . صفحات دوایر عظیمهٔ $\widehat{E_1E^1}$ و $\widehat{E_2E^2}$ و $\widehat{E_3E^3}$ بترتیب بر بردارهای $e_1 \wedge e^1$ و $e_2 \wedge e^2$ و $e_3 \wedge e^3$ که در صفحهٔ $\prod$ واقعست عمود بوده و لذا قطبهای صفحهٔ $\prod$ نقاط تلاقی همهٔ دوایر عظیمهٔ $\widehat{E_iE^i}$ $(i=1 , 2 , 3)$ می‌باشد . لذا سه ارتفاع E_iE^i $(i=1 , 2 , 3)$ از مثلثهای قطبی $E_1E_2E_3$ و $E^1E^2E^3$ در یکنقطهٔ P که قطب صفحهٔ $\prod$ است متلاقیند .

۱۱ـ تانسورها

هرتابع نقطه‌ای که مؤلفه های آن یعنی : $A^i(x^1 , x^2 , \ldots , x^n)$ هنگام تغییرمحورهای مختصات به n مؤلفهٔ $A^{i'}(x^{1'} , x^{2'} , \ldots , x^{n'})$ طوری تبدیل شود که داشته باشیم :

$$A^{i'}(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}) = p^{i'}_{i} A^{i}(x^{1}, x^{2}, \ldots, x^{n}) \qquad (11-1)$$

به «تانسور ناهمگرد با ظرفیت ۱» یا بطور ساده «بردار ناهمگرد» موسوم است. (گاهی‌اوقات بجای «ظرفیت» کلمهٔ «مرتبه» را نیز بکار میبرند. ما دراین کتاب از هردو کلمه استفاده کرده‌ایم).

هرتابع نقطه‌ای که n مؤلفهٔ $A_i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ ازآن هنگام عبور ازدستگاه مختصات $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ به مختصات $(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'})$ طبق فورمول:

$$A_{i'}(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}) = p^{i}_{i'} A_{i}(x^{1}, x^{2}, x^{3}, \ldots, x^{n}) \qquad (11-2)$$

تبدیل شود « تانسور همگرد بظرفیت ۱ » و یا بطور ساده « بردار همگرد » نامیده می‌شود.

بالاخره هرتابع نقطه‌ای که مؤلفهٔ منحصر آن در تغییر محورهای مختصات تغییر نکند یعنی داشته باشیم:

$$A'(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}) = A(x^{1}, x^{2}, \ldots, x^{n}) \qquad (11-3)$$

به «تانسور به ظرفیت صفر» یا پایا موسوم است.

این تعاریف را میتوان برای تانسورهای بظرفیت های بالاتر نیز تعمیم داد مثلاً:

تانسور بظرفیت ۲ دو بار ناهمگرد:

$$A^{i'j'} = p^{i'}_{i}\, p^{j'}_{j} A^{ij} \qquad (11-4)$$

تانسور بظرفیت ۲ دوبار همگرد:

$$A_{i'j'} = p^{i}_{i'}\, p^{j}_{j'} A_{ij} \qquad (11-5)$$

تانسور مختلط بظرفیت ۲:

$$A^{i'}_{j'} = p^{i'}_{i}\, p^{j}_{j'} A^{i}_{j} \qquad (11-6)$$

تانسور مختلط بظرفیت ۳ ، دو بار ناهمگرد و یکبار همگرد :

$$A^{i'j'}_{k'} = p^{i'}_{i}\, p^{j'}_{j}\, p^{k}_{k'} A^{ij}_{k} \qquad (۱۱-۷)$$

. . . .

. . . .

. . . .

و بالاخره :

$$A^{\overbrace{i' \ldots l'}^{m}}_{\underbrace{r' \ldots s'}_{n}} = \underbrace{p^{i'}_{i} \ldots p^{l'}_{l}}_{m}\, \underbrace{p^{r}_{r'} \ldots p^{s}_{s'}}_{n}\, A^{\overbrace{i \ldots l}^{m}}_{\underbrace{r \ldots s}_{n}} \qquad (۱۱-۸)$$

که تانسوری است مختلط بظرفیت $(m+n)$ ، m بار ناهمگرد و n بارهمگرد که بانماد $(m\ ,\ n)$ یا $\binom{m}{n}$ نشان داده و **اصطلاحاً تانسور از نوع** m و n **خوانده میشود** . ازضرب طرفین (۱۱-٤) در $p^{m}_{i'}\, p^{n}_{j'}$ خواهیم داشت :

$$p^{m}_{i'}\, p^{n}_{j'} A^{i'j'} = p^{i'}_{i}\, p^{j'}_{j}\, A^{ij}\, p^{m}_{i'}\, p^{n}_{j'} = \delta^{m}_{i}\, \delta^{n}_{j} A^{ij} = A^{mn}$$

و یا :

$$A^{mn} = p^{m}_{m'}\, p^{n}_{n'} A^{m'n'} \qquad (۱۱-۹)$$

رابطهٔ (۱۱-۹) عکس [1] فورمول (۱۱-٤) نامیده میشود .

بهمین نحو روابط زیر بترتیب از فورمولهای (۱۱-۵) و (۱۱-٦) و (۱۱-۷) و (۱۱-۸) بدست میآید :

$$A_{mn} = p^{m'}_{m}\, p^{n'}_{n} A_{m'n'} \qquad (۱۱-۱۰)$$ و

۱- Inverse

و
$$A_n^m = p_{m'}^m \, p_n^{n'} A_{n'}^{m'} \qquad (۱۱-۱۱)$$

و
$$A_r^{mn} = p_{m'}^m \, p_{n'}^n \, p_r^{r'} A_{r'}^{m'n'} \qquad (۱۱-۱۲)$$

. . . .

. . . .

. . . .

و بالاخره :

$$A^{\overbrace{ij\ldots l}^{m}}_{\underbrace{rs\ldots t}_{n}} = \underbrace{p_{i'}^i \, p_{j'}^j \ldots p_{l'}^l}_{m} \; \underbrace{p_r^{r'} \, p_s^{s'} \ldots p_t^{t'}}_{n} \; A^{\overbrace{i'j'\ldots l'}^{m}}_{\underbrace{r's'\ldots t'}_{n}} \qquad (۱۱-۱۳)$$

اگرتعداد ابعاد فضائی که مؤلفه های تانسور را درآن حساب میکنیم n باشد ، یک تانسور بظرفیت r دارای n^r مؤلفه خواهد بود . مثلاً :

تانسور بظرفیت صفر دارای ۱ مؤلفه

» » ۱ » n »

» » ۲ » $n^۲$ »

. . . .

. . . .

تابع نقطه‌ای که تشکیل یک تانسور را میدهد به « میدان تانسوری » [۱] موسوم است . از تعاریف فوق تعریف زیر نتیجه میشود :

تانسورموجودی‌است مجردکه درهردستگاه مختصات مؤلفه‌های‌خاصی‌دارد که با تغییر محورهای مختصات بصورت معینی تغییر میکند .

۱ - Tensor field

مثال ۱- تانسور کرونکر :

$$\delta^{j'}_{i'} = p^{j'}_{j}\, p^{i}_{i'}\, \delta^{j}_{i} \qquad (11-14)$$

تانسور مختلطی است بظرفیت ۲ . یا اگرطرف دوم را ساده کنیم خواهیم‌داشت:

$$p^{j'}_{j}\, p^{i}_{i'}\, \delta^{j}_{i} = \delta^{j}_{i} p^{j'}_{j}\, p^{i}_{i'} = p^{j'}_{i}\, p^{i}_{i'} = \delta^{j'}_{i'}$$

یعنی دلتای کرونکر تانسورمختلطی است بظرفیت۲ که مؤلفه هایش درهردستگاهی مجدداً یک دلتای کرونکر است .

حال اگر n^2 کمیت δ_{ij} را مؤلفه های تانسوری دو بار همگرد بگیریم بعداز تغییر محورهای مختصات خواهیم داشت :

$$\delta_{i'j'} = p^{i}_{i'}\, p^{j}_{j'}\, \delta_{ij} = p^{i}_{i'}\, p^{i}_{j'}$$

یعنی مؤلفه‌های $\delta_{i'j'}$ در دستگاه جدید دیگر یک تانسورکرونکر نیست .

مثال ۲- درعلم‌الحرکات یک میدان سرعت ، برداری است ناهمگرد . زیرا مطابق تعریف داریم :

$$v^{i'} = \frac{dx^{i'}}{dt} \quad \text{و} \quad v^{i} = \frac{dx^{i}}{dt}$$

اما :

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\, dx^{i}$$

پس میتوانیم بنویسیم :

$$v^{i'} = \frac{dx^{i'}}{dt} = \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i}} \cdot \frac{dx^{i}}{dt} = p^{i'}_{i}\, v^{i} \qquad (11-15)$$

کمیاتی فیزیکی نظیر نیرو درمکانیک و میدانهای الکتریکی بردارهائی همگرد میباشد .

تبصرهٔ ۱ـ از ضرب دو تانسور با ظرفیت کم میتوان تانسوری بظرفیت زیادتر بدست آورد . مثلاً اگر فرض کنیم :

$$u^{i'}=p_i^{i'}u^i \quad \text{و} \quad v^{j'}=p_j^{j'}v^j$$

و حاصلضرب $u^i v^j$ مساوی A^{ij} باشد لذا می‌توانیم بنویسیم :

$$A^{i'j'}=u^{i'}v^{j'}=p_i^{i'}p_j^{j'}A^{ij} \qquad (۱۱-۱۶)$$

حال اگر برای سهولت خود را در فضای سه بُعدی قرار دهیم یعنی فرض کنیم ۳ , ۲ , ۱ $=j'$ و j و i' و i باشد دیده میشود که ۹ $=$ ۲۳ مؤلفهٔ A^{ij} مثل حاصلضرب مؤلفه های u^i و v^j از دوبردار ، یعنی $u^i v^j$ تغییر میکند .

وبهمین نحو ۹ مؤلفهٔ A_j^i مثل حاصلضرب $u^i v_j$ و ۹ مؤلفهٔ A_{ij} مثل حاصلضرب $u_i v_j$ و بالاخره ۹ مؤلفهٔ A_i^j مثل حاصلضرب $u_i v^j$ تغییر میکنند . با توجه باینکه u^i و u_i هردونمایش یک بردار و v^j و v_j نیزمعرف یک بردارند میتوانیم بگوئیم که A^{ij} و A_{ij} و A_j^i و A_i^j نیز **چهارنمایش ازیک تانسور A بظرفیت ۲ میباشند.** یعنی درفضای ۳ بُعدی تانسورهای بظرفیت ۲ دارای ۹ مؤلفه و ٤ صورتند .

بطورکلی تانسوربظرفیت m، دارای ۳^m مؤلفه است که این مؤلفه ها مثل حاصلضرب مؤلفه های m بردارتغییرمیکنند وچون هریک ازاین مؤلفه ها ممکن است مؤلفه های همگرد یاناهمگرد باشد لذا ۲^m نوع تانسورخواهیم داشت که یکی تماماً ناهمگرد ودیگری تماماً همگرد وبقیه تانسورهای مختلط هستند. مثلاً تانسور T بظرفیت ۳ دارای ۲۷ مؤلفه و ۸ $=$ $۲^۳$ نوع ومؤلفه های همگرد آن حاصلضرب $u_i v_j w_k$ یعنی:

$$T_{i'j'k'}=p_{i'}^{i}p_{j'}^{j}p_{k'}^{k}T_{ijk} \quad i \text{ و } i' \text{ و } j \text{ و } j' \text{ و } k \text{ و } k'=۱,۲,۳ \qquad (۱۱-۱۷)$$

و مؤلفه های ناهمگرد آن مثل حاصلضرب $u^i v^j w^k$ یعنی :

$$T^{i'j'k'}=p_i^{i'}p_j^{j'}p_k^{k'}T^{ijk} \quad i \text{ و } i' \text{ و } j \text{ و } j' \text{ و } k \text{ و } k'=۱,۲,۳ \qquad (۱۱-۱۸)$$

تغییر میکند و همینطور الی آخر ...

تبصرهٔ ۲ـ همانطورکه بردارهائی مانند $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ را توسط صورتهای خطی پایائی ازبردارهای همگرد وناهمگرد مبناهای محلی $\mathbf{e}_i$ و $\mathbf{e}^i$ نشان میدادیم یعنی مینوشتیم :

$$\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i = u_i \mathbf{e}^i \qquad (۱۱—۱۹)$$

$$i \text{ و } j = ۱, ۲, \ldots, n$$

$$\mathbf{v} = v^j \mathbf{e}_j = v_j \mathbf{e}^j \qquad (۱۱—۲۰)$$

(i امین بردارمبنای $\mathbf{e}_i$ دارای مؤلفه های δ_i^1 و δ_i^2 و ... و δ_i^n و i امین بردار مبنای $\mathbf{e}^i$ دارای مؤلفه های δ_1^i و δ_2^i و ... و δ_n^i است)تانسورها را نیزمیتوانیم توسط بردارهای مبنای محلی‌شان نشان دهیم مثلاً یک تانسور بظرفیت ۲ را بصورت خطی :

$$\mathbf{T} = T^{ij}\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = T_{ij}\mathbf{e}^i \mathbf{e}^j = T^i{}_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}^j = T_j{}^i \mathbf{e}^j \mathbf{e}_i \qquad (۱۱—۲۱)$$

$$i \text{ و } j = ۱, ۲, \ldots, n$$

و یک تانسور بظرفیت ۳ را بصورت :

$$\mathbf{T} = T_{ijk}\mathbf{e}^i \mathbf{e}^j \mathbf{e}^k = T_i{}^{jk}\mathbf{e}^i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = T_{ij}{}^k \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j \mathbf{e}_k \qquad (۱۱—۲۲)$$

$$= \cdots = T^{ijk}\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k$$

نمایش میدهیم .

دراینجا باید متوجه بود که اندیسهای مؤلفه‌ها و بردارهای مبنا همیشه بیک ترتیب از چپ براست نوشته میشود .

مثلاً در $T^i{}_j$ اندیس فوقانی ودر $T_i{}^j$ اندیس تحتانی اول میآید .

بانمایش تانسورها توسط روابطی نظیر (۱۱-۲۱) و (۱۱-۲۲) پایا بودن آنها را بهتر می‌بینیم . مثلاً با استفاده از (۸-۲) و (۸-۱۱) و (۱۱-۲۱) داریم:

$$T' = T_{i'j'} e^{i'} e^{j'} = p^{i'}_{i}\, p^{j'}_{j} T^{ij} p^{k}_{i'} e_k p^{l}_{j'} e_l = \delta^{k}_{i}\, \delta^{l}_{j} T^{ij} e_k e_l = T^{ij} e_i\, e_j = T \qquad (۱۱-۲۳)$$

و همچنین :

$$T' = T_{i'j'k'} e^{i'} e^{j'} e^{k'} = (p^{i}_{i'}\, p^{j}_{j'}\, p^{k}_{k'} T_{ijk})\,(p^{i'}_{r} e^{r})\,(p^{j'}_{s} e^{s})\,(p^{k'}_{t} e^{t}) \qquad (۱۱-۲۴)$$

$$= \delta^{i}_{r}\, \delta^{j}_{s}\, \delta^{k}_{t} T_{ijk} e^{r}\, e^{s}\, e^{t} = T_{ijk} e^{i}\, e^{j}\, e^{k} = T$$

بازهم توجه می‌کنیم که ترتیب اندیسها روی بردارهای مبنا در **T** عین ترتیب آنها روی مؤلفه‌های **T** است منتها در دو وضع مختلف .

بطورکلی یک تانسور از نوع (m , n) را برحسب بردارهای مبنای محلی با رابطهٔ زیر میتوانیم نمایش دهیم :

$$A = A^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_n}\, e_{i_1}\, e_{i_2} \dots e_{i_m}\, e^{j_1}\, e^{j_2} \dots e^{j_n} \qquad (۱۱-۲۵)$$

نمایش تانسورها توسط (۱۱-۲۵) بما امکان میدهد که تعریف بورباکی را برای تانسورها دراینجا ذکرکنیم :

تانسور تابعی است پایا [1] وچند خطی از امتدادها . یعنی تابعی است از یکعده از امتدادهای مبنا که مقدار عددی آن در تمام دستگاههای مختصات یکی و مؤلفه‌های آن در هرمبنای خاص تابع کوسینوس دیرکتورهای امتدادهای آن مبنا است . تعداد این امتدادها ظرفیت یا مرتبهٔ تانسور نامیده میشود .

توجه : هرکمیتی که درفضای n بـُعدی r^n مؤلفه داشته باشد تانسوری بظرفیت r نیست . خاصیت اساسی یک تانسور توسط (۱۱-۸) داده شده است .

نکتهٔ مهم ـ بردارهای همگرد و ناهمگرد هریک متعلق به فضاهای برداری مختلف هستند . معمولاً مؤلفه‌های همگرد و ناهمگرد یک بردار مساوی نیست .

۱- Invariant

۱۲ـ جبر تانسورها

جبر تانسورها عبارتست از بررسی خواص آنها در تحت چهار قانون زیر :

۱ـ جمع تانسورهای «هم خصوصیت» .

۲ـ ضرب تانسوری از نوع (r , s) در یکعدد حقیقی که نتیجهٔ آن تانسوری است از همان نوع (r , s) .

۳ـ ضرب دو تانسور با خصوصیات مختلف .

٤ـ ادغام که بکمک آن از تانسور نوع (r , s) تانسوری از نوع (r—۱ , s—۱) بدست میآوریم .

قبل از ذکر قوانین فوق تذکر نکتهٔ زیر را لازم میدانیم :

ظرفیت وتعداد ابعاد فضائی که تانسوردرآن‌واقع‌شده مجموعاً به «خصوصیت یک تانسور» موسوم است . مثلاً خصوصیت تانسور T^i_{jk} اینست : یکبار ناهمگرد و دو بار همگرد یعنی از نوع (۲ و ۱) و فضای آن n بعدی یعنی : i و j و $k=۱ , ۲ , . . . , n$ است . دو تانسور که نوع وابعادشان یکی باشد «هم خصوصیت» خوانده میشوند .

۱ - ۱۲ - **جمع** : فقط تانسورهای «هم خصوصیت» با هم جمع میشوندواین خصوصیت در جمع محفوظ می‌ماند :

مثال : فرض میکنیم :

$$T_{i'j'} = p^i_{i'}\, p^j_{j'}\, T_{ij} \qquad i \text{ و } i' \text{ و } j \text{ و } j'=۱ , ۲ , . . . , n \qquad (۱۲—۱)$$

و :

$$R_{i'j'} = p^i_{i'}\, p^j_{j'}\, R_{ij} \qquad i \text{ و } i' \text{ و } j \text{ و } j'=۱ , ۲ , . . . , n \qquad (۱۲—۲)$$

پس :

$$T_{i'j'}+R_{i'j'}=p^{i}_{i'}\,p^{j}_{j'}\,(T_{ij}+R_{ij}) \qquad (۱۲-۳)$$

$$i \text{ و } i' \text{ و } j \text{ و } j'=۱,۲,\ldots,n$$

۲ - ۱۲ - ضرب تانسورها در یک عددوار : اگر تمام مؤلفه های تانسوری در عددواری مثل α ضرب شود خصوصیت آن عوض نمی‌شود :

$$\alpha T_{i'j'}=p^{i}_{i'}\,p^{j}_{j'}\alpha T_{ij} \qquad (۲۲-٤)$$

۳ - ۱۲ - حاصلضرب (خارجی) دوتانسور: حاصلضرب مؤلفه های تانسوری از نوع $(m\ ,\ n)$ در مؤلفه های تانسوری از نوع $(p\ ,\ q)$ مؤلفه های تانسوری است از نوع $(m+p\ ,\ n+q)$.

تکرارمیکنیم : تانسورازنوع $(m\ ,\ n)$ یعنی m بارنا همگرد و n بارهمگرد .

فرض میکنیم :

$$T_{i'j'}=p^{i}_{i'}\,p^{j}_{j'}\,T_{ij} \qquad (۱۲-۵)$$

و :

$$R^{k'}=p^{k'}_{k}R^{k} \qquad (۱۲-٦)$$

لذا :

$$T_{i'j'}R^{k'}=p^{i}_{i'}\,p^{j}_{j'}\,p^{k'}_{k}\,T_{ij}R^{k} \qquad (۱۲-۷)$$

حال اگر فرض کنیم :

$$T_{ij}R^{k}=A^{k}_{ij} \qquad (۱۲-۸)$$

$$T_{i'j'}R^{k'}=A^{k'}_{i'j'} \qquad (۱۲-۹)$$

لذا می‌توانیم بنویسیم :

$$A^{k'}_{i'j'}=p^{i}_{i'}\,p^{j}_{j'}\,p^{k'}_{k}A^{k}_{ij} \qquad (۱۲-۱۰)$$

٤ - ۱۲ - ادغام [1] **:** اگر درمؤلفه های تانسورمختلطی یک اندیس فوقانی

۱- Contraction

و یک اندیس تحتانی را بطور دلخواه مساوی بگیریم ظرفیت تانسور دوبار پائین میآید و نوع تانسور باقیمانده به اندیس هائی که دراین ادغام دخالت نکرده است بستگی پیدا میکند . این عمل را «ادغام» یا «فشردگی» گویند .

مثال ۱- در تانسور :

$$T^{k'}_{i'j'} = p^{i}_{i'} p^{j}_{j'} p^{k'}_{k} T^{k}_{ij} \qquad (۱۲-۱۱)$$

اگر $k'=j'$ فرض شود خواهیم داشت :

$$T^{j'}_{i'j'} = p^{i}_{i'} p^{j}_{j'} p^{j'}_{k} T^{k}_{ij} = p^{i}_{i'} \delta^{j}_{k} T^{k}_{ij} = p^{i}_{i'} T^{j}_{ij} \qquad (۱۲-۱۲)$$

یعنی تانسور T^{k}_{ij} که بظرفیت ۳ بود پس‌از «ادغام» تانسور T^{j}_{ij} بظرفیت ۱ از نوع (۱ و ۰) ایجاد کرده است .

مثال ۲- در تانسور :

$$T^{j'}_{i'} = p^{j'}_{j} p^{i}_{i'} T^{j}_{i} \qquad (۱۲-۱۳)$$

فرض میکنیم : $j'=i'$ باشد . لذا داریم :

$$T^{i'}_{i'} = p^{i'}_{j} p^{i}_{i'} T^{j}_{i} = \delta^{i}_{j} T^{j}_{i} = T^{i}_{i} = T^{۱}_{۱} + T^{۲}_{۲} + T^{۳}_{۳} + \cdots + T^{n}_{n} \qquad (۱۲-۱٤)$$

یعنی تانسورمختلط T^{j}_{i} به تانسور«بظرفیت صفر» یعنی یک عددوارتبدیل‌شده‌است.

مثال ۳- **تانسورکرونکر** . در تانسور :

$$\delta^{j'}_{i'} = p^{j'}_{j} p^{i}_{i'} \delta^{j}_{i} \qquad (۱۲-۱۵)$$

اگر $j'=i'$ فرض شود خواهیم داشت :

$$\delta^{i'}_{i'} = p^{i'}_{j} p^{i}_{i'} \delta^{j}_{i} = \delta^{i}_{j} \delta^{j}_{i} = \delta^{i}_{i} = ۱ + ۱ + \cdots + n \qquad (۱۲-۱٦)$$

تعبیر دو مثال اخیر اینست که اگر بر اثر ادغام یک یا چند اندیس ، **اندیس آزادی باقی نماند کمیت نتیجه شده یک عددوار است .**

چون ادغام ممکنست بر اثر تساوی دو اندیس فوقانی و تحتانی دلخواهی صورت گیرد لذا بر اثر ادغام ، میتوان از یک تانسور ، تانسورهای مختلفی بدست آورد . مثلاً از تانسور $T^{ij}{}_{klm}$ تانسورهای زیر را میتوان نتیجه گرفت :

$$T^{ij}{}_{ijm} \text{ و } T^{ij}{}_{ilm} \text{ و } T^{ij}{}_{kim} \text{ و } T^{ij}{}_{kli} \text{ و } T^{ij}{}_{jlm} \text{ و } T^{ij}{}_{kjm}$$

$$T^{ij}{}_{jim} \text{ و } T^{ij}{}_{ijm} \text{ و } T^{ij}{}_{kij} \text{ و } T^{ij}{}_{kji} \text{ و } T^{ij}{}_{ilj} \text{ و } T^{ij}{}_{jli}$$

اگر $T^{ij}{}_{klm}$ تانسور متقارنی باشد تعداد تانسورهائی که بر اثر ادغام بدست میآید کمتر است .

تبصره ـ اگر تانسورها را با روابطی نظیر (۵-۲-۱۱) نمایش دهیم ادغام یک جفت اندیس ، معادل است با ضرب داخلی دو بردار مبنای مربوطهٔ موجود در خود تانسور. یعنی اگر تانسور :

$$\mathbf{T} = T^{ij}{}_k \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}^k \qquad (۱۲-۱۷)$$

مفروض باشد تساوی $k=j$ معادل باضرب داخلی بردارهای $\mathbf{e}^k$ و $\mathbf{e}_j$ است. زیرا:

$$\mathbf{u} = T^{ij}{}_k \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^k = T^{ij}{}_k \delta_j^k \mathbf{e}_i = T^{ij}{}_j \mathbf{e}_i \qquad (۱۲-۱۸)$$

اگر ادغام چندین بار صورت گیرد نحوهٔ استدلال باز تغییر نمیکند . مثلاً از دوبار ادغام متوالی تانسور $T^{ij}{}_{kh}$ دو عددوار مختلف $T^{ij}{}_{ij}$ و $T^{ij}{}_{ji}$ بدست میآید . یعنی این دوعددوار از تانسور پایای $T^{ij}{}_{kh}\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}^k \mathbf{e}^h$ با تشکیل $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^k$ و $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^h$ و $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^h$ و $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^k$ نتیجه میشوند .

۵ - ۱۲ - ضرب مدغم (فشرده) یا ضرب داخلی : در تانسور :

$$A^k{}_{ij} = R^k T_{ij} \qquad (۱۲-۱۹)$$

اگر $k=j$ گرفته شود خواهیم داشت:

$$A^j{}_{ij} = R^j T_{ij} = A^1{}_{i1} + A^2{}_{i2} + A^3{}_{i3} + \cdots + A^n{}_{in}$$

ضربی که در آن «ادغامی» صورت گیرد به «ضرب مدغم» موسوم است. بویژه از ضرب مدغم یک بردار همگرد دریک بردار ناهمگرد همانطور که در(۷-۹) دیدیم یک عددوار بدست میآید.

عمل ادغام ممکنست روی چند زوج از اندیسها صورت گیرد. مثلاً درتانسور $T^{rst}{}_{ijklm}$ که از نوع (۵ , ۳) است اگر $l=s$ و $m=t$ فرض شود یک تانسور $T^{rlm}{}_{ijklm}$ که از نوع (۳ , ۱) است بدست میآید.

درحالتیکه تانسورها برحسب بردارهای همگرد وناهمگرد مبناها بیان شده باشند استدلال تبصرهٔ فوق بقوت خود باقی است. یعنی اگر داشته باشیم:

$$\mathbf{A} = A^{ij}\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j \qquad (۱۲-۲۰)$$

$$\mathbf{B} = B_{hk}\mathbf{e}^h\mathbf{e}^k \qquad (۱۲-۲۱)$$

و فرض کنیم $j=h$ باشد خواهیم داشت:

$$\mathbf{T} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A^{ij}B_{hk}\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}^h\mathbf{e}^k = \delta_j{}^h A^{ij}B_{hk}\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}^k = T^{ih}{}_{hk}\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}^k \qquad (۱۲-۲۲)$$

چنانکه بعداً خواهیم دید یکی ازموارد استعمال ضرب مدغم، بالا بردن یا پائین آوردن اندیسها بکمک تانسورهای متریک g^{ij} و g_{ij} است که بااستفاده ازآن میتوان ادغام را برای دو اندیس تحتانی یا دو اندیس فوقانی نیز اجرا کرد.

۶ - ۱۲ - **تقسیم تانسوری**: منظور از تقسیم تانسوری برتانسور دیگر این نیست که مؤلفه های یکی را برمؤلفه های دیگری تقسیم کنیم. اصولاً چنین مفهومی برای تقسیم بیمعنی است. اما بعضی اوقات لازم میشود تحقیق کنیم که آیا یک مجموعه از توابع مؤلفه های تانسوری هستند یا نه؟ بدیهی است راه مستقیم این

تحقیق اینستکه به‌بینیم آیا این توابع هنگام تغییرمحورهای مختصات طبق فورمول (۸ - ۱۱) تبدیل میشوند یانه ؟ از آنجاکه این عمل تا حدی مشکل است این تحقیق از راه غیر مستقیم توسط قانونی بنام «قانون خارج قسمت» صورت میگیرد . این‌قانون میگوید که : N^p تابع از x^i وقتی مؤلفه های‌تانسوری‌بظرفیت p راتشکیل میدهد که نتیجهٔ حاصلضرب این توابع در یک تانسور غیر مشخص یک تانسور باشد .

مثال ۱ـ میخواهیم به بینیم که‌آیا N^3 تابع T^{ijk} مؤلفه های تانسوری ازنوع (۰ , ۳) هست یانه ؟ برای این منظور تانسور غیر مشخصی بمؤلفه های $R_{ij}{}^m$ را انتخاب و بطور داخلی در T^{ijk} ضرب میکنیم . میخواهیم بگوئیم درصورتیکه حاصلضرب :

$$T^{ijk}R_{ij}{}^{m}=A^{km} \tag{۱۲—۲۳}$$

مؤلفه های یک تانسور باشد ، T^{ijk} ها هم مؤلفه های یک تانسور خواهد بود .

چون مطابق فرض A^{km} مؤلفه های یک تانسور فرض شده است لذا وقتی از مختصات x^i به مختصات $x^{i'}$ میرویم میتوانیم بنویسیم :

$$T^{i'j'k'}R_{i'j'}{}^{m'}=A^{k'm'} \tag{۱۲—۲٤}$$

و چون $R_{ij}{}^m$ مؤلفه های تانسوری فرض شده است لذا اگر بجای $R_{i'j'}{}^{m'}$ و $A^{k'm'}$ مقدار آنها را از رابطهٔ (۸ - ۱۱) بگذاریم خواهیم داشت :

$$T^{i'j'k'}p^{m'}_{m}\, p^{i}_{i'}\, p^{j}_{j'}R^{m}_{ij}=p^{k'}_{k}\, p^{m'}_{m}A^{km} \tag{۱۲—۲۵}$$

حال در طرف دوم این رابطه بجای A^{km} مقدارش را از (۲۳-۱۲) میگذاریم . لذا داریم :

$$T^{i'j'k'}p^{m'}_{m}\, p^{i}_{i'}\, p^{j}_{j'}R^{m}_{ij}=p^{k'}_{k}\, p^{m'}_{m}T^{ijk}R^{m}_{ij} \tag{۱۲—۲٦}$$

و یا :

$$p^{m'}_{m}\,(p^{i}_{i'}\, p^{j}_{j'}T^{i'j'k'}-p^{k'}_{k}T^{ijk}\,)\;R^{m}_{ij}=0 \tag{۱۲—۲۷}$$

از ضرب طرفین (۱۲-۲۷) در $p^{s}_{m'}$ خواهیم داشت :

$$(p^{i}_{i'}\, p^{j}_{j'} T^{i'j'k'} - p^{k'}_{k} T^{ijk})\, R^{s}{}_{ij} = 0 \qquad (۱۲-۲۸)$$

چون $R^{s}{}_{ij}$ تانسوری‌است اختیاری ، میتوانیم‌آنرا طوری انتخاب کنیم که فقط یکی‌از مؤلفه هایش مخالف صفر باشد و از آنجا عبارت داخل پرانتز خواهد شد :

$$p^{i}_{i'}\, p^{j}_{j'} T^{i'j'k'} - p^{k'}_{k} T^{ijk} = 0 \qquad (۱۲-۲۹)$$

از ضرب طرفین این رابطه در $p^{s'}_{i}\, p^{r'}_{j}$ نتیجه میشود :

$$\delta^{s'}_{i'}\, \delta^{r'}_{j'} T^{i'j'k'} = p^{s'}_{i}\, p^{r'}_{j}\, p^{k'}_{k} T^{ijk} \qquad (۱۲-۳۰)$$

و یا :

$$T^{s'r'k'} = p^{s'}_{i}\, p^{r'}_{j}\, p^{k'}_{k} T^{ijk}$$

و یا پس‌از تعویض اندیسهای آزاد خواهیم داشت :

$$T^{i'j'k'} = p^{i'}_{i}\, p^{j'}_{j}\, p^{k'}_{k} T^{ijk} \qquad (۱۲-۳۱)$$

یعنی T^{ijk} ها مؤلفه های تانسوری است از نوع (۰ و ۳) .

مثال ۲- کمیت T_{ijklm} بظرفیت ۵ را که هنگام تغییر محورهای مختصات به $T_{i'j'k'l'm'}$ تبدیل میشود درنظر میگیریم . فرض میکنیم ازضرب مدغم T_{ijklm} در تانسوری مثل R^{j}_{k} تانسور A^{l}_{im} بدست آمده باشد یعنی داشته باشیم :

$$T_{ijklm} R^{j}_{k} = A^{l}_{im} \qquad (۱۲-۳۲)$$

(ما هر پنج اندیس را تحتانی اختیار کرده‌ایم زیرا فعلاً نمیتوانیم ازآنها بعنوان نوع استفاده کنیم) . میخواهیم ثابت کنیم که T_{ijklm} یک تانسور است ونوع آنرا تعیین نمائیم .

چون مطابق فرض A^{l}_{im} یک تانسور فرض شده است لذا بعداز تغییرمحورها خواهیم داشت :

$$T_{i'j'k'l'm'}\,R^{j'}_{k'} = A^{l'}_{i'm'} \qquad (۱۲-۳۳)$$

با توجه باینکه A^{l}_{im} و R^{j}_{k} هردو تانسورند رابطهٔ (۳۳ - ۱۲) پس‌از توجه به (۳۲ - ۱۲) بصورت زیر درمیآید :

$$T_{i'j'k'l'm'}\,R^{j'}_{k'} = p^{l'}_{l}\,p^{i}_{i'}\,p^{m}_{m'}A^{l}_{im} = p^{l'}_{l}\,p^{i}_{i'}\,p^{m}_{m'}T_{ijklm}\,R^{j}_{k} \qquad (۱۲-۳۴)$$

و یا :

$$T_{i'j'k'l'm'} = p^{l'}_{l}\,p^{i}_{i'}\,p^{m}_{m'}\,p^{j}_{j'}\,p^{k'}_{k}T_{ijklm} \qquad (۱۲-۳۵)$$

این رابطه نشان میدهد که باید T_{ijklm} مؤلفه‌های تانسوری مانند **T** ازنوع (۳, ۲) باشد . پس میتوانیم بگوئیم :

اگر **R** تانسوری از نوع (۱ , ۱) مفروض باشد و **A** هم تانسوری از نوع (۲ , ۱) باشد که براثر دو ادغام از ضرب داخلی **TR** بدست آمده است لذا **T** تانسوری است از نوع (۳ , ۲) یعنی (۱—۲+۲ , ۱—۲+۱) .

حال اگر **R** تانسوری از نوع (p , q) و **A** هم تانسوری از نوع (s , t) که براثر α ادغام بدست آمده است باشد لذا **T** الزاماً تانسوری از نوع $(s+\alpha-p\ ,\ t+\alpha-q)$ خواهد شد . بویژه اگر **A** یک عددوار یعنی تانسوری ازنوع (۰ , ۰) باشد **T** از نوع $(\alpha-p\ ,\ \alpha-q)$ میشود .

پس قضیهٔ زیر که به «قانون خارج قسمت» یا « اصل شناسائی تانسورها » موسوم است پیدا میشود :

قضیه : هرگاه کمیتی بظرفیت r **وابسته‌به مبنائی** درتانسوری‌ازنوع (p , q) **وابسته بهمان مبنا** ضرب‌شود وپس‌از α ادغام تانسوری ازنوع (s , t) **وابسته بهمان مبنا** بدهد این کمیت تانسوری است از نوع $(s+\alpha-p\ ,\ t+\alpha-q)$.

مثال ۱ـ ثابت کنید که مؤلفه های کمیت $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ (گرادین) که درآن f یک عددوار است تشکیل تانسوری از نوع (۱ , ۰) میدهد .

حل : میدانیم : $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$. چون dx^i تانسوری‌ازنوع (۰ , ۱) و df یکعددوار است لذا نوع $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ ازرابطهٔ (۱ , ۰) = (۰ــ ۱ , ۱ ــ ۱) بدست میآید .

مثال ۲ـ فورمول کلاسیک کار یعنی : $d\mathcal{T} = F_i dx^i$ را که در آن dx^i مؤلفه های تانسوری از نوع (۰ , ۱) و $d\mathcal{T}$ یک عددوار است درنظر میگیریم .

پس معلوم میشود F_i یعنی نیرو، تانسوری است ازنوع (۱, ۰) = (۰ــ ۱ , ۱ ــ ۱) .

مثال ۳ـ کمیت $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$ را درنظر میگیریم . داریم :

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} dx^i$$

dx^i و $dx^{i'}$ هردوتانسوری ازنوع (۰ , ۱) ولی **وابسته به دومبنای مختلف‌میباشند** لذا $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$ مؤلفه های یک تانسورمختلط **نیست** .

تبصرهٔ مهم : باید متوجه باشیم که هر تانسور ، **وابسته یک نقطهٔ معین وتمام مؤلفه هایش مربوط بیک دستگاه مختصاتست** . وقتی میخواهیم عملیاتی را روی چند تانسور انجام دهیم باید این تانسورها مربوط بیک نقطه و یکدستگاه باشد .

ممکنست اتفاقاً بخواهیم اعمالی روی تانسورها در نقاط مختلف (ولی حتماً در یکدستگاه مختصات) انجام دهیم . مثلاً بخواهیم به بینیم که آیا تفاضل بین مؤلفه های متناظر یک تانسور در دو نقطهٔ اختیاری P و P' (البته در یکدستگاه مختصات) مؤلفه های یک تانسور است یانه ؟ درچنین مواردی باید مطلب زیر را درنظر داشته باشیم :

تفاضل بین مؤلفه‌های متناظر یک تانسور در دو نقطهٔ مختلف ، تنها وقتی مؤلفه‌های یک تانسور است که دستگاه مستقیم‌الخط باشد .

ما این مطلب‌را برای حالت ساده‌ای که تانسور از نوع (۰ , ۱) یعنی برداری ناهمگرد است ثابت و تعمیم آنرا بعهدهٔ خوانندگان واگذار میکنیم .

اول فرض میکنیم x^i دستگاه مستقیم‌الخطی باشد که از آن بدستگاه مستقیم‌الخط دیگری مثل $x^{i'}$ رفته‌ایم . اگر $(u^i)_P$ نمایش مؤلفه‌های بردار **u** در نقطهٔ P و $(u^i)_{P'}$ معرف نمایش مؤلفه‌های آن در P′ باشد داریم :

$$u^{i'} = p_i^{i'} u^i \qquad (۱۲—۳۶)$$

پس :

$$(u^{i'}) = (p_i^{i'})_P (u^i)_P \qquad (۱۲—۳۷)$$

و همچنین :

$$(u^{i'})_{P'} = (p_i^{i'})_{P'} (u^i)_{P'} \qquad (۱۲—۳۸)$$

ولی چون دستگاهها مستقیم‌الخط است ، داریم :

$$p_i^{i'} = (p_i^{i'})_P = (p_i^{i'})_{P'} = c\underline{\underline{t}} \qquad (۱۲—۳۹)$$

بنابراین میتوانیم بنویسیم :

$$[(u^{i'})_{P'} - (u^{i'})_P] = p_i^{i'} [(u^i)_{P'} - (u^i)_P] \qquad (۱۱—۴۰)$$

یعنی تفاضل : $[(u^i)_{P'} - (u^i)_P]$ مؤلفه‌های تانسوری است ازنوع (۰ و ۱) .

اما اگردستگاه مختصات منحنی‌الخط باشد دیگر $p_i^{i'}$ ها درتمام نقاط فضای مفروض یکی نیست . لذا :

$$(u^{i'})_{P'} - (u^{i'})_P = (p_i^{i'})_{P'} (u^i)_{P'} - (p_i^{i'})_P (u^i)_P \qquad (۱۲—۴۱)$$

و چون داریم :

$$(p_i^{i'})_{P'} \neq (p_i^{i'})_P$$

لذا تفاضل فوق دیگر مؤلفه های برداری ازنوع (٥ , ۱) نیست . بعبارت دیگر وقتی درفضائی دستگاههای مختصات را مستقیم‌الخط گرفتیم میتوانیم مقادیر مؤلفه های یک تانسور را در دو نقطهٔ اختیاری با هم مقایسه کنیم و اختلاف آنها مؤلفه های یک تانسور خواهد بود . درصورتیکه اگر دستگاهها منحنی‌الخط باشد این مقایسه میسر نیست . بعداً خواهیم دید که با دخالت دادن شرایط خاصی میتوانیم باین تفاضل خصوصیت مؤلفه های یک تانسور را بدهیم .

بدیهی است برای تانسوری بظرفیت صفر (عددوار) این وجه تمیز وجود ندارد و تفاضل مابین دو مقدار آن دردونقطهٔ متمایز P و P' همیشه یک‌عددوار است . ولی معهذا همیشه باید تحقیق کنیم که کمیتی که روی آن عمل میکنیم‌آیا واقعاً یک پایا هست یانه ؟ زیرا بعداً خواهیم‌دید که تابع نقطه‌هائی‌وجود دارد که فقط‌یک مؤلفه بیشتر ندارد ولی پایا نیست (شبه عددوارها [۱]) .

۷ - ۱۲ - **تانسورهای همپا**[۲] : تانسوربمؤلفه های T^i_{jk} وتانسوربمؤلفه های R^{lm}_n را درنظر میگیریم . ازادغام کامل اندیسها یعنی $n=i$ و $l=j$ و $m=k$ و ضرب داخلی $T^i_{jk}R^{lm}_n$ یکعدد وار خواهیم داشت :

$$T^i_{jk}R^{jk}_i = T^{1}_{11}R^{11}_{1} + T^{2}_{22}R^{22}_{2} + \cdots + T^n_{nn}R^{nn}_n \qquad (۱۲-٤۲)$$

دراینصورت دو تانسور T^i_{jk} و R^{lm}_n را دو تانسور همپا گویند .

قضیهٔ اصلی : اگرتمام مؤلفه های‌تانسوری دریک‌نقطه دردستگاه مختصاتی صفر باشد در هردستگاه مختصات دیگر نیز در همین نقطه صفرخواهد بود . واگر تمام مؤلفه ها در دستگاهی متحد با صفر باشد در هردستگاه دیگرنیز متحد با صفر است .

اثبات این قضیه بسیارروشن است. زیرا مثلاً درتانسور $T^{i'j'} = p^{i'}_i\, p^{j'}_j\, T^{ij}$

۱- Pseudo - Scalars ۲- Associate

اگر تمام T^{ij} ها صفر باشد بموجب قانون جمع ، تمام $T^{i'j'}$ ها هم صفر میشود و در نتیجه قضیه ثابت میگردد .

تبصره : برای تحقیق اینکه آیا کمیاتی مؤلفه های یک تانسور است یا نه معمولاً علاوه بر «قانون خارج قسمت» از قضیهٔ زیر نیز استفاده میکنند :

قضیه : شرط لازم و کافی برای اینکه $r+s$ عدد : $T^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s}$، مؤلفه های تانسوری مانند **T** از نوع (r, s) باشد اینستکه بازاء r بردار همگرد دلخواه **X** و **Y** و . . . و **Z** و s بردار ناهمگرد دلخواه **A** و **B** و . . . و **D** عبارت :

$$T^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s} A^{j_1} B^{j_2} \ldots D^{j_s} X_{i_1} Z_{i_2} \ldots Z_{i_r} \qquad (۱۲-۴۳)$$

هنگام تغییر محورهای مختصات پایا بماند .

اول ثابت میکنیم که تغییر ناپذیر بودن (۳-۴۲-۱) شرط لازم است . طبق (۱-۹) و (۵-۹) و (۳-۱۱-۱) داریم :

$$\begin{aligned}
(۱۲-۱۴) \qquad & T^{i_1' i_2' \cdots i_r'}_{j_1' j_2' \cdots j_s'} A^{j_1'} B^{j_2'} \ldots D^{j_s'} X_{i_1'} Y_{i_2'} \ldots Z_{i_r'} = \\
& p^{i_1'}_{i_1} p^{i_2'}_{i_2} \ldots p^{i_r'}_{i_r} p^{j_1}_{j_1'} p^{j_2}_{j_2'} \ldots p^{j_s}_{j_s'} T^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s} p^{j_1'}_{k_1} A^{k_1} p^{j_2'}_{k_2} B^{k_2} \\
& \ldots p^{j_s'}_{k_s} D^{k_s} p^{h_1}_{i_1'} X_{h_1} p^{h_2}_{i_2'} Y_{h_2} \ldots p^{h_r}_{i_r'} Z_r \\
& = \left(p^{i_1'}_{i_1} p^{h_1}_{i_1'}\right)\left(p^{i_2'}_{i_2} p^{h_2}_{i_2'}\right) \ldots \left(p^{i_r'}_{i_r} p^{h_r}_{i_r'}\right)\left(p^{j_1}_{j_1'} p^{j_1'}_{k_1}\right)\left(p^{j_2}_{j_2'} p^{j_2'}_{k_2}\right) \\
& \ldots \left(p^{j_s}_{j_s'} p^{j_s'}_{k_s}\right) T^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s} A^{k_1} B^{k_2} \ldots D^{k_s} X_{h_1} Y_{h_2} \ldots Z_{h_r} \\
& = \delta^{h_1}_{i_1} \delta^{h_2}_{i_2} \ldots \delta^{h_r}_{i_r} \delta^{j_1}_{k_1} \delta^{j_2}_{k_2} \ldots \delta^{j_s}_{k_s} T^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s} A^{k_1} B^{k_2} \ldots \\
& \qquad D^{k_s} X_{i_1} Y_{i_2} \ldots Z_{i_r} \\
& = T^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s} A^{j_1} B^{j_2} \ldots D^{j_s} X_{i_1} Y_{i_2} \ldots Z_{i_r}
\end{aligned}$$

یعنی تغییر ناپذیر بودن (۱۲-۴۳) شرط لازم است .

برای اثبات کافی بودن شرط فوق بطریق زیر عمل میکنیم . مطابق فرض داریم :

$$T^{i_1' i_2' \ldots i_{r'}}_{j_1' j_2' \ldots j_{s'}} A^{j_1'} B^{j_2'} \ldots D^{j_{s'}} X_{i_1'} Y_{i_2'} \ldots Z_{i_{r'}} = T^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s} A^{j_1} B^{j_2} \ldots D^{j_s} X_{i_1} Y_{i_2} \ldots Z_{i_r} \qquad (12-45)$$

با استفاده از (۹-۱) و (۹-۵) طرف چپ (۱۲-۴۵) بصورت زیر در میآید :

$$T^{i_1' i_2' \ldots i_{r'}}_{j_1' j_2' \ldots j_{s'}} p^{j_1'}_{j_1} p^{j_2'}_{j_2} \ldots p^{j_{s'}}_{j_s} p^{i_1}_{i_1'} p^{i_2}_{i_2'} \ldots p^{i_r}_{i_{r'}} A^{j_1} B^{j_2} \ldots D^{j_s} X_{i_1} Y_{i_2} \ldots Z_{i_r} \qquad (12-46)$$

و لذا داریم :

$$\left(T^{i_1' i_2' \ldots i_{r'}}_{j_1' j_2' \ldots j_{s'}} p^{j_1'}_{j_1} p^{j_2'}_{j_2} \ldots p^{j_{s'}}_{j_s} p^{i_1}_{i_1'} p^{i_2}_{i_2'} \ldots p^{i_r}_{i_{r'}} - T^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s}\right) A^{j_1} B^{j_2} \ldots D^{j_s} X_{i_1} Y_{i_2} \ldots Z_{i_r} = 0 \qquad (12-47)$$

چون این رابطه بازاء جمع اعداد A^{j_1} و B^{j_2} و ... صادق است لذا داریم :

$$T^{i_1' i_2' \ldots i_{r'}}_{j_1' j_2' \ldots j_{s'}} = p^{i_1'}_{i_1} p^{i_2'}_{i_2} \ldots p^{i_{r'}}_{i_r} p^{j_1}_{j_1'} p^{j_2}_{j_2'} \ldots p^{j_s}_{j_{s'}} T^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s}$$

یعنی اعداد $T^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s}$ مؤلفه های تانسور $\mathbf{T}$ ازنوع $(r\ ,\ s)$ می باشد . ملاحظه میشودکه این قضیه در واقع همان حالت خاص «قانون خارج قسمت» است .

۱۳- تانسورهای قرینه و قرینهٔ چپ - حاصلضرب خارجی

تانسورهای T^{ij} یا T_{ij} را وقتی «قرینه» خوانند که داشته باشیم:

$$T^{ij}=T^{ji} \quad \text{و یا} \quad T_{ij}=T_{ji}$$

اگر داشته باشیم:

$$T^{ij}=-T^{ji} \quad \text{و یا} \quad T_{ij}=-T_{ji}$$

دراینصورت آنها را «قرینهٔ چپ»[1] مینامند. خواص فوق خواص ذاتی تانسورها است یعنی هنگام تغییر دستگاه مختصات این خواص محفوظ میماند. ما این مطلب را برای تانسور $T_{ij}=T_{ji}$ که از نوع (۲ , ۰) میباشد ثابت میکنیم.

میدانیم:

$$T_{i'j'}=p^i_{i'}p^j_{j'}T_{ij} \qquad (۱۳-۱)$$

چون فرض کرده‌ایم $T_{ij}=T_{ji}$ است پس:

$$T_{i'j'}=p^i_{i'}p^j_{j'}T_{ji}=p^j_{j'}p^i_{i'}T_{ji}=T_{j'i'} \qquad (۱۳-۲)$$

یعنی حکم ثابت است.

اما تانسورهای مختلط ازنوع (m , p) فاقد این خاصیت هستند. یعنی اگر تانسورمختلطی قرینه باشداین خاصیت پس ازتغییر محورهای مختصات ازبین میرود. زیرا اگرداشته باشیم:

$$T^{i'}_{j'}=p^{i'}_i p^j_{j'}T^i_j \qquad (۱۳-۳)$$

و فرض کنیم:

۱- Skew symmetric

$$T^i_j = T^j_i \quad (۱۳-۴)$$

پس :

$$T^{i'}_{j'} = p^j_{j'}\, p^{i'}_i T^j_i \longrightarrow \text{یا} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p^j_{j'}\, p^{i'}_i T^j_i \quad (۱۳-۵)$$

ولی :

$$T^{j'}_{i'} = p^i_{i'} p^{j'}_j T^j_i \longrightarrow \text{یا} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p^i_{i'} p^{j'}_j T^j_i \quad (۱۳-۶)$$

و لذا خواهیم داشت :

$$T^{j'}_{i'} \neq T^{i'}_{j'} \quad (۱۳-۷)$$

تنها یک تانسورمختلط بظرفیت ۲ وجود دارد که قرینه‌است وآنهم تانسور کرونکر δ^i_j می‌باشد . زیرا :

$$\delta^{i'}_{j'} = p^j_{j'}\, p^{i'}_i\ \delta^i_j \quad (۱۳-۸)$$

$$\delta^{j'}_{i'} = p^i_{i'} p^{j'}_j\ \delta^j_i \quad (۱۳-۹)$$

دیده میشود که اگر $\delta^j_i = \delta^i_j$ فرض شود طرفین اول (۸-۱۳)و(۹-۱۳) نیزمساوی و حکم ثابت میشود .

قرینه یا قرینهٔ چپ بودن را برای تانسورهای با ظرفیت بالاتر نیزهمین گونه تعریف میکنیم . ولی باید این خواص همیشه برای اندیسهای همنوع درنظرگرفته شود . اگر تانسور T^{ijk}_l راکه از نوع (۱ , ۳) است درنظرگیریم وفرض کنیم که این تانسور نسبت به i و j قرینه (یا قرینهٔ چپ) یعنی :

$T^{ijk}_l = T^{jik}_l$ (یا $T^{ijk}_l = -T^{jik}_l$) باشد گوئیم این تانسور « یکبار قرینه » (یا «یکبار قرینهٔ چپ») است .

دوحالت بسیارمهم ، حالات«کاملاً قرینه»و«کاملاً قرینهٔ چپ» برای کلیهٔ اندیسهای همنوع است . مثلاً :

$$T^{ijk}_{m} = T^{jki}_{m} = T^{kij}_{m} = \cdots \qquad (۱۳-۱۰)$$

این تساویها برای همهٔ ۶ جایگشت اندیسها برقرار است .

وقتی با تانسورهای «کاملاً قرینهٔ چپ» سروکار داریم باید تغییر علامتها را هم درنظر گیریم . اگر تعداد جایگشت اندیسها زوج باشد مؤلفه ها علامتهای خود را حفظ میکنند و الا تغییر علامت میدهد :

$$T^{ijk}_{m} = -T^{jik}_{m} = T^{kij}_{m} = -T^{ikj}_{m} = \cdots \qquad (۱۳-۱۱)$$

۱ - ۱۳ - **چند خاصیت مهم** : یک تانسور از نوع (۲ , ٥) یا از نوع (٥ , ۲) اگر قرینه باشد :

$$\frac{n(n+۱)}{۲} \qquad (۱۳-۱۲)$$

و اگر قرینهٔ چپ باشد :

$$\frac{n(n-۱)}{۲} \qquad (۱۳-۱۳)$$

مؤلفهٔ مستقل دارد .

یک تانسور «کاملاً قرینهٔ چپ» از نوع (m , ٥) یا (٥ , m) فقط $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ مؤلفهٔ مستقل دارد .

عناصر قطری در تانسورهای قرینه نقش مهمی دارد . در تانسورهای قرینهٔ چپ مؤلفه های واقع روی قطر اصلی لزوماً صفراند . یعنی داریم :

$$R^{jjk}_{m} = ٥ \quad \text{و} \quad T_{ii} = ٥ \quad \text{و} \quad \ldots \qquad (۱۳-۱٤)$$

زیرا اگر داشته باشیم $T_{ij} = -T_{ji}$ پس باید $T_{ii} = -T_{ii}$ یعنی $T_{ii} = ٥$

باشد . بعبارت دیگر دریک تانسورقرینهٔ چپ هرمؤلفهٔ با یک اندیس مکرر ، صفر است . بدیهی است تکرار باید روی اندیسهائی که تماماً دربالا (یاتماماً درپائین) است صورت گیرد .

برای تجسم بهتر مطالب بالا ، مؤلفه های تانسور قرینهٔ A_{ij} وتانسور قرینهٔ چپ B_{kl} را درفضای $n=5$ بعدی بصورت ماتریسی نشان میدهیم[1]:

$$A_{ij}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35}\\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45}\\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55}\end{pmatrix} \qquad B_{kl}=\begin{pmatrix} 0 & B_{12} & B_{13} & B_{14} & B_{15}\\ -B_{12} & 0 & B_{23} & B_{24} & B_{25}\\ -B_{13} & -B_{23} & 0 & B_{34} & B_{35}\\ -B_{14} & -B_{24} & -B_{34} & 0 & B_{45}\\ -B_{15} & -B_{25} & -B_{35} & -B_{45} & 0\end{pmatrix} \qquad (۱۳-۱۵)$$

ماتریسهای بالا نشان میدهد که جدول مؤلفه ها شامل n^2 عنصر است که برحسب قطر اصلی $\frac{n(n-1)}{2}$ عنصر دربالا و $\frac{n(n-1)}{2}$ عنصر در پائین آن قرار دارد . لذا اثبات فورمولهای (۲-۱۳) و (۳-۱۳) بسیار سهل میشود .

بعداً خواهیم دید که یک تانسور T_{ij} یا T_{ijk} (T^{ij} یا T^{ijk}) که کاملاً قرینهٔ چپ باشد **دوبرداره** [2] یا **سه برداره** [3] نامیده میشود .

قضیهٔ مهم : هرتانسورازنوع (۲ , ۰) یا (۰ , ۲) را میتوان به سجموع دو تانسور قرینه و قرینهٔ چپ تجزیه کرد .

اثبات : فرض میکنیم λ_{ij} مؤلفه های تانسوری باشد که نه قرینه است و نه قرینهٔ چپ . میتوانیم بنویسیم :

۱- توجه : $A_{12}=A_{21}$ و $A_{31}=A_{13}$ و $A_{41}=A_{14}$ و $A_{51}=A_{15}$ و $A_{32}=A_{23}$ و $A_{42}=A_{24}$ و $A_{34}=A_{43}$ و $A_{25}=A_{52}$ و $A_{53}=A_{35}$ و $A_{45}=A_{54}$

۲- Bivector ۳- Threevector

$$\lambda_{ij}=\frac{۱}{۲}(\lambda_{ij}-\lambda_{ji})+\frac{۱}{۲}(\lambda_{ij}+\lambda_{ji}) \qquad (۱۳-۱۶)$$

حال اگر پرانتزهای اول و دوم را بترتیب زیر نشان دهیم :

$$A_{ij}=\frac{۱}{۲}(\lambda_{ij}+\lambda_{ji}) \qquad (۱۳-۱۷)$$

$$B_{ij}=\frac{۱}{۲}(\lambda_{ij}-\lambda_{ji}) \qquad (۱۳-۱۸)$$

دیده میشود که :

$B_{ij}=-B_{ji}$ و $A_{ij}=A_{ji}$

لذا رابطهٔ (۱۳-۱۶) بصورت زیر نوشته میشود :

$$\lambda_{ij}=A_{ij}+B_{ij} \qquad (۱۳-۱۹)$$

یعنی تانسور λ_{ij} به مجموع دو تانسور که یکی قرینه و دیگری قرینهٔ چپ است تجزیه شده .

مثال : اگر λ_{ij} (در فضای دو بُعدی) با ماتریس :

$$\lambda_{ij}=\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ ۲ & ۷ \end{bmatrix} \qquad (۱۳-۲۰)$$

نموده شده باشد اجزای قرینه و قرینهٔ چپ آن خواهد شد :

$$A_{ij}=\begin{bmatrix} ۰ & ۲٫۵ \\ ۲٫۵ & ۷ \end{bmatrix} \qquad (۱۳-۲۱)$$

$$B_{ij}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰٫۵ \\ -۰٫۵ & ۰ \end{bmatrix} \qquad (۱۳-۲۲)$$

از دو رابطهٔ اخیر نیز پیداست که اگر جای i و j را باهم عوض کنیم رابطهٔ (۱۳-۱۷) اصلاً تغییر نمیکند و رابطهٔ (۱۳-۱۸) فقط تغییر علامت میدهد .

تبصرهٔ ۱ـ نمادهای قرینهٔ چپ e_{ijk} و e^{ijk} تانسور نیست .

تبصرهٔ ۲- اکنون که تانسورهای قرینه و قرینهٔ چپ را می‌شناسیم تذکرنکتهٔ زیررا بجا میدانیم. درفورمول (۳-۲۳-۱۲) اگر R_{ij}^{m} را مؤلفه های تانسورغیرمشخصی نگیریم یعنی مؤلفه های تانسور قرینه یا قرینهٔ چپی انتخاب کنیم باید قانون خارج قسمت را با دقت بیشتری اجرانمائیم. زیرا اگر فرض کنیم R_{ij}^{m} مؤلفه های تانسور قرینه‌ای باشد برای رسیدن بجواب صحیح باید از (۹-۲-۱۲) ببعد بترتیب زیرعمل کنیم: باتعویض اندیسهای j و i و 'j و 'i رابطهٔ (۹-۲-۱۲) بصورت زیردرمیآید:

$$p_{j'}^{i}\, p_{i'}^{j}\, T^{j'i'k'} = p_{k}^{k'} T^{jik} \qquad (۱۳-۲۳)$$

از جمع (۹-۲-۱۲) و(۳-۲۳-۱۳) و با تعویض مناسب اندیسها خواهیم داشت:

$$(T^{i'j'k'} + T^{j'i'k'})p_{i'}^{i} p_{j'}^{j} = (T^{ijk} + T^{jik})p_{k}^{k'} \qquad (۱۳-۲۴)$$

از ضرب طرفین این رابطه در $p_{i}^{r'}\, p_{j}^{s'}$ داریم:

$$(T^{i'j'k'} + T^{j'i'k'})p_{i'}^{i}\, p_{j'}^{j}\, p_{i}^{r'}\, p_{j}^{s'} = (T^{ijk} + T^{jik})p_{k}^{k'}\, p_{i}^{r'}\, p_{j}^{s'} \qquad (۱۳-۲۵)$$

و یا:

$$(T^{i'j'k'} + T^{j'i'k'})\delta_{i'}^{r'}\, \delta_{j'}^{s'} = (T^{ijk} + T^{jik})p_{i}^{r'}\, p_{j}^{s'}\, p_{k}^{k'} \qquad (۱۳-۲۶)$$

و یا:

$$(T^{r's'k'} + T^{s'r'k'}) = (T^{ijk} + T^{jik})p_{i}^{r'}\, p_{j}^{s'}\, p_{k}^{k'} \qquad (۱۳-۲۷)$$

و اگر بجای i و j بترتیب r و s بگذاریم خواهیم داشت:

$$(T^{r's'k'} + T^{s'r'k'}) = (T^{rsk} + T^{srk})p_{r}^{r'}\, p_{s}^{s'}\, p_{k}^{k'} \qquad (۱۳-۲۸)$$

یعنی عبارت: $(T^{rsk} + T^{srk})$ مؤلفه های تانسوری است بظرفیت ۳ از نوع (۳ , ۰).

۲-۳-۱ - **حاصلضرب بیرونی**: دو بردار **X** و **Y** بمؤلفه های X^{i} و Y^{i}

را درنظر میگیریم . دیده‌ایم (۱۱ § تبصرهٔ ۱) که هریک ازحاصلضرب های $X^i Y^j$ و $X^j Y^i$ مانند مؤلفه های یک تانسور است . تفاضل آنها یعنی :

$$P^{ij} = X^i Y^j - X^j Y^i = \begin{vmatrix} X^i & X^j \\ Y^i & Y^j \end{vmatrix} \qquad (۱۳-۲۹)$$

نیز مؤلفه های تانسوری است قرینهٔ چپ که $\frac{n(n-1)}{2}$ مؤلفهٔ مستقل دارد . زیرا باید از n^2 مؤلفهٔ آن n مؤلفهٔ قطری را کم (چون صفرند) و حاصل را نصف کنیم (بعلت تقارن) :

$$P^{ij} = -P^{ji} \quad \text{و} \quad P^{ii} = 0 \qquad (۱۳-۳۰)$$

صورت (۱۳-۲۹) حاصلضرب بیرونی بردارهای **X** و **Y** یا «دو برداره»[۱] نامیده و با $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ نموده میشود . همانطوریکه هربردارمیتوانست معرف پاره خط جهت داری باشد ، $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ نیز پاره خط جهت‌داری است که برصفحهٔ **X** و **Y** عمود است . ولی ما دراینجا آنرا با این تعریف متحد نمیگیریم . بلکه بعنوان موجود جدید « دو برداره » درنظرمیگیریم که میتواند برای بیان مساحات جهت‌داری بکار رود ، یعنی مساحت شکلی مسطح با جهت معینی که روی محیط آن درنظرگرفته شده است .

حاصلضرب بیرونی دارای خواص زیر است :

۱- نسبت به جمع توزیعی است :

$$\begin{cases} \mathbf{X} \wedge (\mathbf{Y}+\mathbf{Z}) = \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} + \mathbf{X} \wedge \mathbf{Z} \\ (\mathbf{X}+\mathbf{Y}) \wedge \mathbf{Z} = \mathbf{X} \wedge \mathbf{Z} + \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Z} \end{cases} \qquad (۱۳-۳۱)$$

۲- نسبت به ضرب در یک عددوار شرکت پذیر است :

$$\alpha(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}) = \alpha\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} = \mathbf{X} \wedge \alpha\mathbf{Y} \qquad (۱۳-۳۲)$$

۱- Bivector

۳- علامت حاصلضرب با تغییر عوامل ضرب تغییر میکند :

$$\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} = -\mathbf{Y} \wedge \mathbf{X} \qquad (۱۳-۲۳)$$

واز آنجا :

$$\mathbf{X} \wedge \mathbf{X} = 0 \qquad (۱۳-۲٤)$$

۳-۱۳- اختلاف اساسی بین بردارهای قطبی و محوری در فضای دکارتی ۳ بُعدی

۳ بُعدی : در حالت خاص فضای ۳ بُعدی مؤلفه‌های حاصلضرب بیرونی دوبردار طبق (۱۳-۲۹)، مینورهای مرتبهٔ دوم دترمینان ماتریس : $\begin{bmatrix} X^1 & X^2 & X^3 \\ Y^1 & Y^2 & Y^3 \end{bmatrix}$ میباشدولذا ۳ مؤلفهٔ آن مستقل : $P^{12} = -P^{21}$ و $P^{23} = -P^{32}$ و $P^{31} = -P^{13}$ و بقیه هم صفر است . یعنی تانسوربمؤلفه‌های (۱۳-۲۹) که باید ۹ مؤلفه داشته باشد فقط با ۳ مؤلفهٔ P^{12} و P^{23} و P^{31} مشخص میشود . ازطرفی بردار راکمیتی تعریف کردیم که درفضای n بُعدی دارای n مؤلفه است . لذا تانسور (۱۳-۲۹) را میتوانیم درفضای ۳ بُعدی «بردار» بنامیم . چنین برداری را در فضای ۳ بُعدی دکارتی «بردار محوری» نامیده‌اند .

این بردار با بردار معمولی (که درمحاسبات برداری اغلب بردارقطبی‌نامیده میشود) یک اختلاف اساسی دارد:

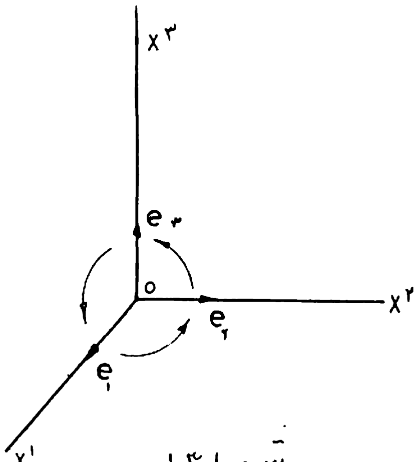
اگر جهتی قراردادی برای جایگشت اندیسها از چپ براست (ش ۱۳-۱) یا از راست به چپ (ش ۱۳-۲) قائل شویم مؤلفه های یک بردار قطبی با تغییر این جهت قراردادی‌محورهاتغییرعلامت نمیدهد . درحالیکه‌از(۱۳-۲۹) و (۱۳-۳۰) بخوبی پیداست که مؤلفه‌های هربردار محوری با تغییر این جهت قرار دادی محورهای‌مختصات تغییر علامت میدهد . بعبارت دیگر در یک فضای ۳ بُعدی برای یکدستگاه محورهای از چپ براست مؤلفه‌های آن توسط رابطهٔ :

$$P_i = e_{ijk} X^j Y^k \qquad i \text{ و } j \text{ و } k = ۱, ۲, ۳ \qquad (۱۳-۳۵)$$

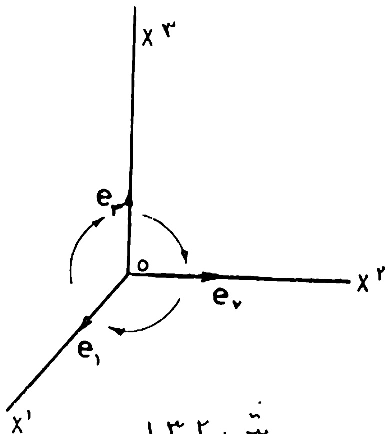
و برای یکدستگاه محورهای از راست بچپ توسط رابطهٔ زیر مشخص خواهد شد :

$$Q_i = e_{ijk} Y^j X^k \qquad (۱۳-۳۶)$$

تبصرهٔ ۲- بکمک تانسور متریک [1] g_{ij} (که بعداً خواهیم دید) میتوانیم



شکل ۱۳.۱



شکل ۱۳.۲

مؤلفه های همگرد «دو برداره» ها را از روی مؤلفه های ناهمگرد آنها از فورمول زیر پیدا کنیم :

$$P_{ij} = \begin{vmatrix} X_i & X_j \\ Y_i & Y_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{ih} X^h & g_{jk} X^k \\ g_{ih} Y^h & g_{jk} Y^k \end{vmatrix} \qquad (۱۳-۳۷)$$

۱۳-۴ - **حاصلضرب بیرونی ۳ بردار** : مؤلفه های حاصلضرب بیرونی ۳ بردار **X** و **Y** و **Z** بمؤلفه های X^i و Y^j و Z^k که مؤلفه های «سه برداره» نیز نامیده میشود ، مطابق تعریف ، عبارتست از :

۱- Metric tensor

$$P^{ijk}=\begin{vmatrix} X^i & X^j & X^k \\ Y^i & Y^j & Y^k \\ Z^i & Z^j & Z^k \end{vmatrix}=X^i(Y^jZ^k-Y^kZ^j)+X^j(Y^kZ^i-Y^iZ^k)+X^k(Y^iZ^j-Y^jZ^i) \qquad (۱۳-۳۸)$$

این کمیت تانسوری است « کاملاً قرینه چپ » از نوع $(0\ ,\ ۳)$. زیرا اولاً حاصلضرب و حاصل جمع دو یا چند تانسور از جنس تانسور است . ثانیاً اگر در دترمینانی جای دو ستون را باهم عوض کنیم علامت آن تغییر میکند و اگر دو اندیس را مساوی بگیریم دترمینان صفر میشود . لذا این تانسور « کاملاً قرینهٔ چپ» است و در نتیجه دارای $\frac{n!}{۳!(n-۳)!}$ مؤلفهٔ مستقل .

حاصلضرب بیرونی سه بردار را با :

$$\mathbf{X}\wedge\mathbf{Y}\cdot\mathbf{Z} \text{ و یا } \mathbf{X}\cdot(\mathbf{Y}\wedge\mathbf{Z}) \text{ یا } (\mathbf{X}\wedge\mathbf{Y})\cdot\mathbf{Z}$$

نمایش میدهند . این تانسور درحالت خاص فضای سه بُعدی فقط یک مؤلفهٔ مستقل دارد :

$$P^{۱۲۳}=P^{۳۱۲}=P^{۲۳۱}=P \qquad (۱۳-۳۹)$$

$$P^{۳۲۱}=P^{۱۳۲}=P^{۲۱۳}=-P \qquad (۱۳-۴۰)$$

و بقیهٔ مؤلفه‌های آن صفر است . P معرف حجمی است که روی ۳ بردار $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ و $\mathbf{Z}$ بنا میشود . یعنی حجم متوازی‌السطوحی که یالهای آن $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ و $\mathbf{Z}$ ومقدارعددی آن دترمینان زیر است :

$$P=\begin{vmatrix} X^۱ & X^۲ & X^۳ \\ Y^۱ & Y^۲ & Y^۳ \\ Z^۱ & Z^۲ & Z^۳ \end{vmatrix}=\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}\wedge\mathbf{Z} \qquad (۱۳-۴۱)$$

اگر بجای بردارهای غیر مشخص $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ و $\mathbf{Z}$ بردارهای مبنای $\mathbf{e}_i$ یا $\mathbf{e}^i$ را

انتخاب کنیم حجمیکه روی آنها بنا میشود خواهد بود :

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \begin{vmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{vmatrix} = e_1 e_2 e_3 \qquad (۱۳-۴۲)$$

و یا :

$$\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3 = \begin{vmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{vmatrix} = e^1 e^2 e^3 \qquad (۱۳-۴۳)$$

درفضای سه بُعدی ضرب بالاتری وجود ندارد. زیرا دراین فضاتانسورقرینهٔ چپی که ظرفیت آن بیش از ۳ باشد لزوماً صفر است. زیرا میدانیم که مثلاً مؤلفه های یک تانسور بظرفیت چهار از رابطهٔ زیر بدست می‌آید :

$$t^{ijkl} = \begin{vmatrix} X^i & X^j & X^k & X^l \\ Y^i & Y^j & Y^k & Y^l \\ Z^i & Z^j & Z^k & Z^l \\ W^i & W^j & W^k & W^l \end{vmatrix} \quad i \text{ و } j \text{ و } k \text{ و } l = ۱, ۲, ۳ \qquad (۱۳-۴۴)$$

چون اندیسهای i و j و k و l هریک از ۱ تا ۳ تغییرمیکند پس تمام مؤلفه های t^{ijkl} هریک دو اندیس مشترک خواهند داشت ولذا دترمینان فوق همیشه دوستون مساوی دارد و درنتیجه حاصلش صفر است .

۵ - ۱۳ - **«چند برداره»** (۱) : مؤلفه های حاصلضرب بیرونی m بردار نیزطبق تعریف با دترمینان زیر مشخص میشود :

۱- Multivector

$$P^{ij\ldots r}=\begin{vmatrix} X^i & X^j & \ldots & X^r \\ Y^i & Y^j & \ldots & Y^r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ W^i & W^j & \ldots & W^r \end{vmatrix} \qquad (۱۳-۴۵)$$

i و $j, \ldots, r=۱, ۲, \ldots, n$

که تانسوری است «کاملاً قرینهٔ چپ» و دارای $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ مؤلفهٔ مستقل.
وقتی تعداد بردارها با ابعاد فضا یکی باشد $(n=m)$ تعداد این مؤلفه‌ها به ۱ تقلیل می‌یابد که همان «هیپر حجمی»[۱] است که روی n بردار مفروض بنا میشود.

چون در جبر صورتهای دیفرانسیل باز از حاصلضرب بیرونی صحبت خواهیم کرد لذا دراینجا بهمین مختصر اکتفا میکنیم.

۱۴- ژاکوبین[۲]

تبدیل مختصاتی راکه با معادلات:

$$x^i=x^i(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}) \qquad (۱۴-۱)$$

مشخص شده است درنظر میگیریم. دترمینان:

$$J=\begin{vmatrix} p^1_{1'} & p^1_{2'} & \ldots & p^1_{n'} \\ p^2_{1'} & p^2_{2'} & \ldots & p^2_{n'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p^n_{1'} & p^n_{2'} & \ldots & p^n_{n'} \end{vmatrix} \qquad \left(p^i_{i'}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right) \qquad (۱۴-۲)$$

۱- Hyper - Volume ۲- Jacobian

که باصطلاح ریاضی ژاکوبین (بنام ریاضیدان آلمانی) نامیده میشود و دترمینان عکس آن :

$$K=\begin{vmatrix} p_1^{1'} & p_2^{1'} \cdots p_n^{1'} \\ p_1^{2'} & p_2^{2'} \cdots p_n^{2'} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p_1^{n'} & p_2^{n'} \cdots p_n^{n'} \end{vmatrix} \qquad \left(p_i^{i'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right) \tag{۱۴—۳}$$

که نسبت بتغییر مختصات $x^{j'}=x^{j'}(x^1 , x^2 , \ldots , x^n)$ بدست آمده است نقش مهمی را در محاسبات تانسوری دارند و اغلب بانمادهای :

$\dfrac{D(x^1 , x^2 , \ldots , x^n)}{D(x^{1'} , x^{2'} , \ldots , x^{n'})}$ یا $\left|\dfrac{\partial x}{\partial x'}\right|$ یا J و همچنین با

$\dfrac{D(x^{1'} , x^{2'} , \ldots , x^{n'})}{D(x^1 , x^2 , \ldots , x^n)}$ یا $\left|\dfrac{\partial x'}{\partial x}\right|$ و یا K نموده میشوند . رابطهٔ $JK=1$ بین J و K برقراراست . زیرا اگر حاصلضرب زیر را تشکیل دهیم :

$$P_{i'}^{j'}=p_{i'}^{k}p_{k}^{j'}=p_{i'}^{k}(\delta_k^l p_l^{j'}) =\delta_k^l\, p_{i'}^{k}p_l^{j'}=\delta_{i'}^{j'} \tag{۱۴—۴}$$

چون داریم : $|\delta_{i'}^{j'}|=1$ لذا حکم ثابت است .

(یادآوری میکنیم که حاصلضرب دو دترمینان $|A_i^j|$ و $|B_i^j|$ یعنی $|C_i^j|=|A_i^j|\cdot|B_i^j|$ دترمینانی است دارای n^2 عنصر C_i^j که بیکی از طرق زیر بدست می‌آید : $(C_i^j=A_i^kB_k^j=A_k^jB_i^k)$.

بهر تبدیل مختصاتی یک ژاکوبین میتوان اختصاص داد . اگر ژاکوبین بتغییر محورهای مستقیم‌الخط مربوط باشد مقدارش ثابت و اگر بتغییر محورهای منحنی‌الخط مربوط باشد تابعی از مختصات نقطه خواهد بود .

مثال : بین مختصات قائم‌و کروی یک نقطه روابط زیربرقرار بود (۳۰-۵):

$$\begin{cases} x^{1} = x^{1'} \cos x^{2'} \sin x^{3'} \\ x^{2} = x^{1'} \sin x^{2'} \sin x^{3'} \\ x^{3} = x^{1'} \cos^{3'} \end{cases} \qquad (۱۴—۵)$$

میخواهیم ژاکوبین این تبدیل را حساب کنیم. داریم :

$$\begin{cases} p^{1}_{1'} = \cos x^{2'} \sin x^{3'} \\ p^{2}_{1'} = \sin x^{2'} \sin x^{3'} \\ p^{3}_{1'} = \cos x^{3'} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} p^{1}_{2'} = -x^{1'} \sin x^{2'} \sin x^{3'} \\ p^{2}_{2'} = x^{1'} \cos x^{2'} \sin x^{3'} \\ p^{3}_{2'} = 0 \end{cases} \qquad (۱۴—۶)$$

و

$$\begin{cases} p^{1}_{3'} = x^{1'} \cos x^{2'} \cos x^{3'} \\ p^{2}_{3'} = x^{1'} \sin x^{2'} \cos x^{3'} \\ p^{3}_{3'} = -x^{1'} \sin^{3'} \end{cases}$$

از آنجا :

$$J = \begin{vmatrix} \cos x^{2'} \sin x^{3'} & -x^{1'} \sin x^{2'} \sin x^{3'} & x^{1'} \cos x^{2'} \cos x^{3'} \\ \sin x^{2'} \sin x^{3'} & x^{1'} \cos x^{2'} \sin x^{3'} & x^{1'} \sin x^{2'} \cos x^{3'} \\ \cos x^{3'} & 0 & -x^{1'} \sin x^{3'} \end{vmatrix} = -(x^{1'})^{2} \sin x^{3'} \qquad (۱۴—۷)$$

این مثال‌را بخصوص بدینجهت انتخاب کرده‌ایم که نشان دهیم ژاکوبین میتواند هم مثبت و هم منفی باشد . فرض اینکه ژاکوبین باید همیشه مقدار مثبتی باشد اشتباه محض است .

۱۵ـ تانسورهای نسبی یا شبه تانسورها [1]

«تانسور نسبی» یا «شبه تانسور» تابع نقطه‌ای‌است که اختلاف‌قانون تبدیل آن با قانون تبدیل تانسورها و جود یک ژاکوبین است . مثلاً تابع :

$$A^{i'}(x^{1'}, x^{2'}, \dots, x^{n'}) = J^w p^{i'}_i A^i(x^1, x^2, \dots, x^n) \qquad (۱۰-۱)$$

تانسوری است بوزن W که W توان ژاکوبین است و میتواند مساوی ۱ ± یا ۲ ± و . . . باشد. بنابراین میتوان گفت که : تانسور ، تانسوری است نسبی به‌وزن صفر . همچنین :

$$T'(x^{1'}, x^{2'} \dots, x^{n'}) = JT(x^1, x^2, \dots, x^n) \qquad (۱۰-۲)$$

تانسوری‌است نسبی بظرفیت صفرو وزن ۱ . چنین تابعی را «شبه عددواربه وزن ۱» خوانند . همچنین :

$$T'(x^{1'}, x^{2'}, \dots, x^{n'}) = \frac{1}{J^2} T(x^1, x^2, \dots, x^n) \qquad (۱۰-۳)$$

تانسوری است نسبی بظرفیت صفر و وزن ۲— و :

$$T_{i'j'}(x^{1'}, x^{2'}, \dots, x^{n'}) = J^2 p^i_{i'} p^j_{j'} T_{ij}(x^1, x^2, \dots, x^n) \qquad (۱۰-٤)$$

تانسوری است نسبی از نوع (۲ , ٥) و بوزن ۳ . و بالاخره :

$$T^{k'l'm'}_{i'j'} = J p^i_{i'} p^j_{j'} p^{k'}_k p^{l'}_l p^{m'}_m T^{klm}_{ij} \qquad (۱۰-٥)$$

تانسوری است نسبی از نوع (۲ , ۳) بوزن ۱ .

۱- Relatives tensors یا Pseudo tensors

«تانسورهای‌نسبی» یا «شبه تانسورها»توابع نقطه‌ای هستند که مثل تانسورها وابسته بیک نقطهٔ معین بوده و تمام مؤلفه‌هایشان بیکدستگاه مختصات مربوطند . وقتی میخواهیم عملیاتی‌را روی چند «تانسورنسبی» انجام دهیم باید این‌تانسورها مربوط بیک نقطه و یکدستگاه مختصات باشند .

دوتانسور نسبی مهم در فضای سه بُعدی داریم : «ظرفیتهای عددوار» (۱) بوزن ۱ — و «جرم مخصوص‌های عددوار» (۲) به وزن ۱ .

همانطوریکه قبلاً دیدیم یک تانسور«کاملاً قرینهٔ چپ» از نوع (o , m) یا (m , o) فقط دارای $N=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ مؤلفهٔ مستقل است . درصورتیکه فضا سه بُعدی و $m=n$ باشد $N=۱$ خواهد شد . بنابراین یک تانسور«کاملاً قرینهٔ چپ» از نوع $(o , ۳)$ درفضای ۳ بُعدی فقط یک مؤلفهٔ مستقل مثل C دارد :

$$c^{ijk}=e^{ijk}C \qquad i \text{ و } j \text{ و } k=۱,۲,۳ \qquad (۱۰-۶)$$

از طرف دیگر :

$$c^{ijk}=p^i_{i'}p^j_{j'}p^k_{k'}c^{i'j'k'} \qquad (۱۰-۷)$$

$$i \text{ و } j \text{ و } k \text{ و } i' \text{ و } j' \text{ و } k'=۱,۲,۳$$

ولی چون خاصیت «کاملاً قرینهٔ چپ» بودن در تغییر محورها محفوظ میماند لذا داریم :

$$c^{i'j'k'}=e^{i'j'k'}C' \qquad i' \text{ و } j' \text{ و } k'=۱,۲,۳ \qquad (۱۰-۸)$$

مثلاً مؤلفهٔ $c^{۱۲۳}$ بشکل زیر خواهد شد :

$$C=c^{۱۲۳}=p^۱_{i'}p^۲_{j'}p^۳_{k'}c^{i'j'k'} \qquad i' \text{ و } j' \text{ و } k'=۱,۲,۳ \qquad (۱۰-۹)$$

۱- Scalar capacity   ۲- Scalar density

و یا :

$$C = p_{i'}^{1} p_{j'}^{2} p_{k'}^{3} e^{i'j'k'} C' = e^{i'j'k'} p_{i'}^{1} p_{j'}^{2} p_{k'}^{3} C' \qquad (10-10)$$

i' و j' و $k' = 1, 2, 3$

اما از طرفی :

$$J = e^{i'j'k'} \frac{\partial x^{1}}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{2}}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{3}}{\partial x^{k'}} = e^{i'j'k'} p_{i'}^{1} p_{j'}^{2} p_{k'}^{3} \qquad (10-11)$$

پس :

$$C = JC' \qquad (10-12)$$

و یا :

$$C' = \frac{1}{J} C \qquad (10-13)$$

تابع C که تنها مؤلفهٔ مستقل تانسور «کاملاً قرینهٔ چپ» c^{ijk} است به « ظرفیت عددوار» موسوم است. بطوریکه می‌بینیم «ظرفیت عددوار» شبه عددواریا «عددوار نسبی»است به‌وزن ۱ — .

با استدلالی شبیه باستدلال فوق برای تانسوری « کاملاً قرینه چپ » مثل d_{ijk} از نوع (۳ , ٥) داریم :

$$d_{123} = D = e_{i'j'k'} p_{1}^{i'} p_{2}^{j'} p_{3}^{k'} D' \quad i' \text{ و } j' \text{ و } k' = 1, 2, 3 \qquad (10-14)$$

اما :

$$K = e^{ijk} p_{i}^{1'} p_{j}^{2'} p_{k}^{3'} = e_{i'j'k'} p_{1}^{i'} p_{2}^{j'} p_{3}^{k'} \qquad (10-15)$$

و لذا :

$$D = KD' = \frac{1}{J} D' \qquad (10-16)$$

پس :

$$D' = JD \qquad (10-17)$$

تابع D که تنها مؤلفهٔ مستقل تانسور «کاملاً قرینه چپ» d_{ijk} است به «جرم مخصوص عددوار» موسوم است و چنانکه می‌بینیم « جرم مخصوص عددوار » عددواریست نسبی به وزن ۱ + .

مطالب فوق را بدون اشکال میتوانیم در فضای n بُعدی برای تانسورهای «کاملاً قرینهٔ چپ» $c^{ijk\dots r}$ و $d_{ijk\dots r}$ بکمک ژاکوبین های زیر تعمیم دهیم :

$$J = e^{i'j'k'\dots r'} p^{1}_{i'} p^{2}_{j'} p^{3}_{k'} \dots p^{n}_{r'} \qquad (۱۰-۱۸)$$

$$i' \text{ و } j' \text{ و } k', \dots, r' = 1, 2, \dots, n$$

$$K = e_{i'j'k'\dots r'} p^{i'}_{1} p^{j'}_{2} p^{k'}_{3} \dots p^{r'}_{n} \qquad (۱۰-۱۹)$$

$$i' \text{ و } j' \text{ و } k', \dots, r' = 1, 2, \dots, n$$

۱ - ۱۰ - **علل نامگذاری‌های فوق** : با توجه بتعریف حاصلضرب بیرونی ۳ بردار در فضای سه بُعدی سه بردار $d\mathbf{X}^i$ را روی محورهای مختصات میگیریم و حاصلضرب بیرونی آنها را «حجم آفین» می‌نامیم . طبق (۲-٤۳-۱) این حجم تانسوری است «کاملاً قرینهٔ چپ» از نوع (۰ , ۳) بصورت dV^{ijk}:

$$dV^{ijk} = \begin{vmatrix} dx^1 & 0 & 0 \\ 0 & dx^2 & 0 \\ 0 & 0 & dx^3 \end{vmatrix} = dx^1 dx^2 dx^3 = dV \qquad (۱۰-۲۰)$$

$$= d\mathbf{X}^1 \cdot d\mathbf{X}^2 \wedge dX^3$$

اما :

$$dV^{ijk} = dx^i dx^j dx^k = p^i_{i'} p^j_{j'} p^k_{k'} dx^{i'} dx^{j'} dx^{k'} \qquad (۱۰-۲۱)$$

$$i \text{ و } i' \text{ و } j \text{ و } j' \text{ و } k \text{ و } k' = 1, 2, 3$$

وچون خاصیت «کاملاً قرینهٔ چپ» بودن dV^{ijk} هنگام تغییرمحورها محفوظ میماند میتوانیم بنویسیم :

$$dx^{i'}dx^{j'}dx^{k'} = e^{i'j'k'}dV' \qquad (۱۰-۲۲)$$

و لذا :

$$dV = e^{i'j'k'}p_{i'}^{1}\,p_{j'}^{2}\,p_{k'}^{3}dV' = JdV' \qquad (۱۰-۲۳)$$

و یا :

$$dV' = \frac{1}{J}\,dV \qquad (۱۰-۲۴)$$

و یا :

$$dx^{1'}dx^{2'}dx^{3'} = \frac{1}{J}dx^1dx^2dx^3 \qquad (۱۴-۲۵)$$

یعنی «حجم آفین» هنگام تغییر محورها پایا نمیماند بلکه «عددوار نسبی» به وزن ۱ — است. بموجب طبیعت dV هر کمیتی که هنگام تبدیل مانند dV تبدیل‌شود به «ظرفیت»[۱] یا «حجم» عددوار موسوم است.

فرض میکنیم $\mu(x^1, x^2, x^3)$ معرف «جرم مخصوص آفین» محلی در نقطه‌ای بمختصات (x^1, x^2, x^3) باشد. حاصلضرب زیر را درنظر میگیریم:

$$dm = \mu(x^1, x^2, x^3)dx^1dx^2dx^3 \qquad (۱۰-۲۶)$$

چون جرم را هنگام تغییر محورهای مختصات پایا میگیرند لذا داریم :

$$dm = \mu dV = \mu' dV' \qquad (۱۰-۲۷)$$

چون dm تغییرناپذیرو dV تانسوری است نسبی به‌وزن ۱ — پس μ تانسوری‌است نسبی به‌وزن ۱ + .

زیرا :

$$dm = \mu dV = \mu' dV' = \mu' \frac{1}{J}\,dV \qquad (۱۰-۲۸)$$

و یا :

$$\mu' = J\mu \qquad (۱۰-۲۹)$$

۱- Capacity

بعلت این تشابه هرکمیتی که هنگام تغییر مختصات مانند μ تبدیل شود به «جرم مخصوص عددوار» موسوم است .

مابین «شبه تانسورها» یا «تانسورهای نسبی» مهمتر ازهمه نمادهای جایگشت $e^{ij\ldots w}$ و $e_{ij\ldots w}$ می‌باشد . از آنجا که داریم :

$$J = e^{i'j'k'} p^1_{i'}\, p^2_{j'}\, p^3_{k'} \qquad i' \text{ و } j' \text{ و } k' = ۱ , ۲ , ۳ \tag{۱۵—۳۰}$$

پس با توجه بتعریف e میتوانیم بنویسیم :

$$J e^{ijk} = p^i_{i'}\, p^j_{j'}\, p^k_{k'}\, e^{i'j'k'} \tag{۱۵—۳۱}$$

$$i \text{ و } i' \text{ و } j \text{ و } j' \text{ و } k \text{ و } k' = ۱ , ۲ , ۳$$

یا :

$$e^{ijk} = \frac{۱}{J}\, p^i_{i'} p^j_{j'}\, p^k_{k'} e^{i'j'k'} \tag{۱۵—۳۲}$$

$$i \text{ و } i' \text{ و } j \text{ و } j' \text{ و } k \text{ و } k' = ۱ , ۲ , ۳$$

و بهمین نحو خواهیم داشت :

$$e_{ijk} = J p^{i'}_i\, p^{j'}_j\, p^{k'}_k\, e_{i'j'k'} \tag{۱۵—۳۳}$$

یعنی e^{ijk} مؤلفه های تانسوری‌است نسبی به‌وزن ۱+ و e_{ijk} مؤلفه های تانسوری است نسبی به وزن ۱— .

برای فضاهائی که بیش از ۳ بُعد دارند خواص تانسورهای نسبی عیناً مانند فوق بیان واثبات میشود. اصل زیرکه به «اصل شناسائی تانسورهای نسبی»موسوم است برای شناختن خصوصیت یک تانسور نسبی بکار میرود :

اصل : **هرگاه کمیتی بظرفیت r وابسته به مبنائی را در « شبه تانسوری » از نوع (p , q) و به وزن u وابسته بهمان مبنا ضرب کنیم و پس‌از α ادغام « شبه تانسوری» از نوع (s , t) به وزن v باز وابسته بهمان مبنا بدست آوریم کمیت**

مفروض «شبه تانسوری است از نوع $(s+\alpha-p\ ,\ t+\alpha-q)$ و به وزن $v-u$.

توجه : اعداد صحیح s و t و p و q و α مثبت یا صفر و اعداد صحیح u و v مثبت ، منفی و یا صفر میتوانند باشند .

تبصره ـ با توجه به (۳-۲۳) و (۳۲-۱۵) و (۳۳-۱۵) معلوم میشود که $\delta^{ijk}_{\alpha\beta\gamma}$ یک تانسور است . و بطور کلی مسئلهٔ ۸ صفحهٔ ۹۲ یعنی :

$$e^{i_1 \dots i_r i_{r+1} \dots i_n} e_{j_1 \dots j_r i_{r+1} \dots i_n} = (n-r)\ !\ \delta^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_r}$$

نشان میدهد که دلتای کرونکر از ضرب دو تانسور نسبی به وزنهای ۱+ و ۱− که نسبت بچند اندیس ادغام گردیده بدست آمده است . یعنی نتیجه شبه تانسوری است از وزن صفر. پس میتوان گفت که : «تعمیم داده شدهٔ دلتا های کرونکر» تانسور است .

تمرینات

۱- اگر A_{ij} قرینهٔ چپ باشد ثابت کنید صورت $A_{ij}u^i u^j$ متحد با صفر است.

۲- ثابت کنید که همعامل [1] جملهٔ A^i_j در دترمینانی که از n^2 عنصر a^i_j درست شده است برابر $\frac{1}{2!} e^{ipq} e_{jrs} a^r_p a^s_q$ خواهد بود $(i$ و j و p و q و r و $s = 1, 2, \ldots, n)$.

۳- فرض میکنیم کمیات زیر تانسور باشند. ثابت کنید که خواص زیر برای آنها در تغییر دستگاه مختصات محفوظ میماند:

$$A_{ij} = A_{ji} \quad \text{و} \quad A_{ij} = -A_{ji} \quad \text{و} \quad A_{ij} = KA_{ji}$$

$$A_{ij} = -KA_{ji} \quad \text{و} \quad A_{ij} = A_{ji} + B_{ij} \quad \text{و} \quad A_{ij} = -A_{ji} + B_{ij}$$

۴- ثابت کنید که اگر $a = \det \cdot a_{ij}$ $(i$ و $j = 1, 2, \ldots, n)$ باشد داریم:

$$\frac{\partial a}{\partial x^k} = A^{ij} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} \qquad i \text{ و } j \text{ و } k = 1, 2, \ldots, n$$

۵- اگر $J = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|$ باشد ثابت کنید:

$$\frac{\partial J}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} J \qquad (i \text{ و } i' \text{ و } j' = 1, 2, \ldots, n)$$

۶- تانسورهای A_{ijk} یا A^{ijk} را درنظرمیگیریم. فرض میکنیم M و N و P بترتیب تعداد مؤلفه‌های متمایز در ۳ حالت زیر باشند:

اول - بین i و j و k هیچگونه تساوی وجود نداشته باشد.

دوم - $i=j$ باشد.

1- Cofactor

سوم $i=j=k$ باشد ثابت کنید : درصورتیکه تانسور A_{ijk} یا A^{ijk} کاملاً قرینه باشد داریم :

$$M=\frac{n(n+1)(n+2)}{3!} \text{ و } N=n(n-1) \text{ و } P=n$$

و درصورتیکه «کاملاً قرینهٔ چپ» باشد داریم :

$$M=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \text{ و } N=0 \text{ و } P=0$$

۷- نوع و تعداد مؤلفه های متمایز تانسور یا شبه تانسورهای زیر را تعیین کنید :

$$(a^i-b^i)(a^j-b^j) \text{ و } a^i b^j - a^j b^i \text{ و } a^i a^j - b^i b^j \text{ و } A^k_{ij}+A^k_{ji}$$

$$c^{ijk}A^{i'}_i B^{j'}_j C^{k'}_k \text{ و } a^i_r a^j_s a^k_t - b^i_r b^j_s b^k_t \text{ و } \delta_{ij}(B^{ij}+C^{ij}) \text{ و } A_{jk}B^{rs}C^j_r$$

۸- اگر $J=\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| \neq 0$ فرض شود ثابت کنید :

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'}\partial x^{j'}}=-\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^k}$$

$$i \text{ و } i' \text{ و } j \text{ و } j' \text{ و } k \text{ و } k'=1,2,\ldots,n$$

۹- اگر λ یک ریشهٔ معادلهٔ $|A_{ij}-\lambda B_{ij}|=0$ باشد ثابت کنید که یک ریشهٔ معادلهٔ $|A_{i'j'}-\lambda B_{i'j'}|=0$ نیز λ خواهد بود ، درصورتیکه داشته باشیم :

$$B_{i'j'}=p^i_{i'}p^j_{j'}B_{ij} \text{ و } A_{i'j'}=p^i_{i'}p^j_{j'}A_{ij}$$

$$J=\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| \neq 0 \text{ و } (i,j,i',j'=1,2,\ldots,n)$$

۱۰- اگر $\cos\theta=\delta_{\alpha\beta}m^\alpha n^\beta$ و $\cos\varphi=\delta_{\alpha\beta}n^\alpha l^\beta$ و $\cos\gamma=\delta_{\alpha\beta}l^\alpha m^\beta$ باشد

(۳ , ۲ , ۱ = α , β) ثابت کنید حجم متوازی‌السطوح به یالهای واحد ومؤلفه های (m^α) و (n^α) و (l^α) خواهد بود :

$$V = ۱ - cos^۲\theta - cos^۲\varphi - cos^۲\gamma + ۲\, cos\theta\, cos\varphi\, cos\gamma$$

۱۱- با استفاده از حاصلضرب داخلی دوبردار ثابت کنید :

$$cos(A - B) = cosA\,cosB + sinA\,sinB$$

۱۲- با استفاده از حاصلضرب خارجی دوبردار ثابت کنید:

$$sin(A - B) = sinA\,cosB - cosA\,sinB$$

۱۳- اگر A_{ij} یک تانسور قرینهٔ چپ باشد رابطهٔ زیر را ثابت کنید :

$$(\delta^i_j\,\delta^k_l + \delta^i_l\,\delta^k_j)A_{ik} = 0$$

فصل سوم

فضای برداری اقلیدسی

۱۶ - در فضای آفین وقتی متریک دلخواهی انتخاب کنیم یعنی وقتی تمام بردارهای مبنا را با واحد مشترکی بسنجیم واضح است که خواص بسیار کلی فضا بقوت خود باقی میماند . ما دراینجا از ساده‌ترین حالات یعنی از فضای اقلیدسی شروع میکنیم . با داشتن یکدستگاه مختصات قائمی که تمام بردارهای مبنای آن مساوی و با واحد مشترکی اندازه‌گرفته شده باشد میتوان بکمک تغییر محورهای مختصات بینهایت دستگاه مستقیم یا منحنی‌الخط ساخت که طولها را تغییر ناپذیر نگهدارد و از آنجا با تعیین طول زاویه را تعریف نمود .

۱۷ - حاصلضرب عددوار (داخلی) [۱] - متریک اقلیدسی .

در هندسهٔ برداری مقدماتی ، در فضای ۳ بُعدی و مختصات مستقیم‌الخط به هرزوج بردار $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ طبق تعریف ، عددواری بنام « حاصلضرب عددوار » یا «حاصلضرب داخلی» باکمیتی تغییر ناپذیرکه با یکی از نمادهای : $<\mathbf{X}\,,\,\mathbf{Y}>$ یا $(\mathbf{X}\,,\,\mathbf{Y})$ و یا $\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}$ نشان داده میشود تعلق میگیرد :

$$(\mathbf{X}\,,\,\mathbf{Y})\equiv<\mathbf{X}\,,\,\mathbf{Y}>\equiv\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}=\delta_{ij}X^iX^j \qquad (۱۷-۱)$$

$$i \text{ و } j=۱\,,\,۲\,,\,۳$$

حاصلضرب داخلی دارای خواص زیر است :

۱ - مستقل از ترتیب عوامل است :

$$(\mathbf{X}\,,\,\mathbf{Y})=(\mathbf{Y}\,,\,\mathbf{X}) \qquad (۱۷-۲)$$

۱- Scalar Product یا Inner Product

۲- در ضرب شرکت پذیر است :

$$\alpha(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y})=(\alpha\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y})=(\mathbf{X}\ ,\ \alpha\mathbf{Y}) \qquad (۱۷-۳)$$

۳- در ضرب توزیعی است :

$$(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y}+\mathbf{Z})=(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y})+(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Z}) \qquad (۱۷-٤)$$

٤- اگر $(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y})=o$ و $\mathbf{X}$ غیر مشخص باشد داریم :

$$\mathbf{Y}=o \qquad (۱۷-٥)$$

بین حاصلضرب بیرونی و داخلی چند بردار رابطهٔ زیر برقرار است :

$$(\mathbf{X}\wedge\mathbf{Y}\ ,\ \mathbf{Z}\ ,\ \mathbf{T})=(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Z})\,(\mathbf{Y}\ ,\ \mathbf{T})-(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{T})\,(\mathbf{Y}\ ,\ \mathbf{Z}) \qquad (۱۷-٦)$$

طول و یا «اندازهٔ» یک بردار را «مدول» آن گویند و مربع آنرا که از روی قضیهٔ فیثاغورث بدست میآید «هنج»[۱] آن مینامند وبا $\|\mathbf{X}\|$ یا $N\mathbf{X}$ و یا ه $\mathbf{X}$ نشان میدهند :

$$N\mathbf{X}\equiv ه\,\mathbf{X}=(X^{۱})^{۲}+(X^{۲})^{۲}+(X^{۳})^{۲}=\delta_{ij}X^iX^j \qquad (۱۷-۷)$$
$$i \text{ و } j=۱\,,\,۲\,,\,۳$$

پیداست برای اینکه این عبارت معنائی داشته باشد باید مؤلفه های $\mathbf{X}$ کمیاتی همجنس باشند ، یعنی فضا **آفین نباشد** تا « طول بردار » قابل تعریف باشد . چنین دستگاه مختصاتی اقلیدسی و بعبارت صحیح تر جزئی از فضای اقیدسی است زیرا اصل اقلیدس راجع بتوازی خطوط در آن صادق است. بعداً خواهیم دید که ممکنست فضاهائی تصور کرد که متریک داشته باشند ولی اقلیدسی نباشند.

در یک فضای n بُعدی پایاهای «حاصلضرب داخلی» و «هنج» نیز بهمان

۱- Norm

ترتیب بالا تعریف و تعمیم داده میشود (در مختصات مستقیم یا منحنی‌الخط قائم یا غیر قائم) . مثلاً فرض میکنیم بردارهای **a** و **b** به مؤلفه‌های $a^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ و $b^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ که بردارهای مبنای آنها همه مساوی و از یک جنس است داده شده باشد . طبق تعریف حاصلضرب داخلی و هنج میتوالیم بنویسیم :

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a^1b^1 + a^2b^2 + \cdots + a^nb^n = \delta_{ij}a^i b^j \qquad (۱۷-۸)$$

و :

$$\mathbf{a}\,\mathbf{a} = (a^1)^2 + (a^2)^2 + \cdots + (a^n)^2 = \delta_{ij}a^i a^j \qquad (۱۷-۹)$$

فاصلهٔ نقطه‌ای بمختصات $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ از مبدأ مختصات یعنی نقطهٔ $(0, 0, \ldots, 0)$ از رابطهٔ زیر بدست میآید :

$$l^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^n)^2 = \delta_{ij}x^i x^j \qquad (۱۷-۱۰)$$

و برای فاصلهٔ دو نقطهٔ بینهایت نزدیک رابطهٔ زیر را داریم :

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \cdots + (dx^n)^2 = \delta_{ij}dx^i dx^j \qquad (۱۷-۱۱)$$

۱ - ۱۷ - **تانسور اصلی اقلیدسی :** تبدیل مختصاتی را درنظر میگیریم که با n معادلهٔ :

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, \ldots, x^n) \qquad (۱۷-۱۲)$$

و معادلات عکس [۱] آن یعنی :

$$x^i = x^i(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}) \qquad (۱۷-۱۳)$$

مشخص شده باشد و بعلاوه ژاکوبین های آنها حقیقی و غیر صفر و x^i و $x^{i'}$ بطور پیوسته دیفرانسیل پذیر باشد . فورمولهای تبدیل **a** و **b** خواهد بود :

۱ - Inverse

$$a^i = p^i_{i'} a^{i'} \qquad (۱۷—۱٤)$$

$$b^j = p^j_{j'} b^{j'} \qquad (۱۷—۱۵)$$

حاصلضرب داخلی این دوبردار در دستگاه $x^{i'}$ خواهد بود :

$$(\mathbf{a}\ ,\ \mathbf{b}) = \delta_{ij} p^i_{i'} p^j_{j'} a^{i'} b^{j'} \qquad (۱۷—۱٦)$$

ملاحظه میکنیم که دراین عبارت کمیت تازهٔ زیر پیدا میشود :

$$g_{i'j'} = \delta_{ij} p^i_{i'} p^j_{j'} \qquad (۱۷—۱۷)$$

باین کمیت که مؤلفه های تانسوری است از نوع (۲ , ٥) ـ کافیست که به قانون خارج قسمت مراجعه کنیم ـ نام «تانسوراصلی اقلیدسی» داده شده است. بدین ترتیب حاصلضرب داخلی دوبردار نسبت بمختصات جدید با رابطهٔ :

$$(\mathbf{a}\ ,\ \mathbf{b}) = g_{i'j'} a^{i'} b^{j'} \qquad (۱۷—۱۸)$$

و «هنج» یک بردار با رابطهٔ :

$$\text{ه}\ \mathbf{a} = g_{i'j'} a^{i'} a^{j'} \qquad (۱۷—۱۹)$$

مشخص میشود .

با در دست داشتن تانسور اصلی اقلیدسی دستگاه مختصاتی که انتخاب کرده‌ایم کاملاً مشخص میشود . حال ثابت میکنیم که مؤلفه های این تانسور حاصلضربهای داخلی بردارهای همگرد مبنای جدید است . زیرا :

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_i a^i = \mathbf{e}_{i'} a^{i'} \qquad (۱۷—۲۰)$$

و :

$$\mathbf{b} = \mathbf{e}_j b^j = \mathbf{e}_{j'} b^{j'} \qquad (۱۷—۲۱)$$

و از آنجا :

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\ ,\ \mathbf{b}) &= (\mathbf{e}_i a^i\ ,\ \mathbf{e}_j b^j) = a^i b^j (\mathbf{e}_i\ ,\ \mathbf{e}_j) \\ &= (\mathbf{e}_{i'}\ ,\ \mathbf{e}_{j'}) a^{i'} b^{j'}\end{aligned} \qquad (۱۷—۲۲)$$

ولی چون بردارهای مبنا طبق تعریف همه مساوی واحد و متعامدند یعنی دستگاه **ارتونورمه** [1] است لذا داریم :

$$(\mathbf{e}_i\ ,\ \mathbf{e}_j)=\delta_{ij} \qquad (۱۷-۲۳)$$

بنابراین :

$$(\mathbf{e}_{i'}\ ,\ \mathbf{e}_{j'})=(p^i_{i'}\mathbf{e}_i\ ,\ p^j_{j'}\mathbf{e}_j)=p^i_{i'}p^j_{j'}(\mathbf{e}_i\ ,\ \mathbf{e}_j) \qquad (۱۷-۲۴)$$
$$=p^i_{i'}p^j_{j'}\delta_{ij}=g_{i'j'}$$

از آنجا :

$$(\mathbf{e}_{i'}\ ,\ \mathbf{e}_{i'})=(\mathbf{e}_{i'})^2=g_{i'i'} \qquad (۱۷-۲۵)$$

چون حاصلضرب داخلی مستقل از ترتیب عوامل است پس $g_{i'j'}=g_{j'i'}$ یعنی $g_{i'j'}$ مؤلفه های یک تانسور قرینه است .

تبصرهٔ ۱- چون $g_{i'j'}$ مؤلفه های تانسوری ازنوع (۲ , ٥) است لذا داریم :

$$g_{i'j'}=p^i_{i'}p^j_{j'}g_{ij} \qquad (۱۷-۲۶)$$

ازمقایسهٔ (۱۷-۲٤) با (۱۷-۲٦) معلوم میشود که دردستگاه‌قائم‌اقلیدسی داریم:

$$g_{ij}=\delta_{ij} \qquad (۱۷-۲۷)$$

یعنی :

$$g_{ij}=(\mathbf{e}_i\ ,\ \mathbf{e}_j) \qquad (۱۷-۲۸)$$

یعنی در هردستگاه مختصات g_{ij} ها مؤلفه‌های حاصلضرب داخلی بردارهای مبنا است .

تبصرهٔ ۲- اگربرای‌سهولت اثبات، فضارا سه بُعدی بگیریم ازبسط(۱۷-۲٤) داریم :

$$g_{1'1'}=(p^1_{1'})^2+(p^2_{1'})^2+(p^3_{1'})^2 \qquad (۱۷-۲۹)$$
$$=(\alpha^1)^2+(\alpha^2)^2+(\alpha^3)^2$$

۱- Orthonormé

$$g_{2'2'}=(P^1_{2'})^2+(p^2_{2'})^2+(p^3_{2'})^2 \\ =(\beta^1)^2+(\beta^2)^2+(\beta^3)^2 \tag{۱۷—۳۰}$$

$$g_{3'3'}=(p^1_{3'})^2+(p^2_{3'})^2+(p^3_{3'})^2 \\ =(\gamma^1)^2+(\gamma^2)^2+(\gamma^3)^2 \tag{۱۷—۳۱}$$

(برای سهولت تحریر α^i بجای $p^i_{1'}$ و β^i بجای $p^i_{2'}$ و γ^i بجای $p^i_{3'}$ اختیار شده است). از روابط (۱۷-۲۹) و(۱۷-۳۰) با توجه به (۱۷-۲۵) معلوم میشود که تمام $g_{i'i'}$ ها مثبت ولذا اندازه‌های بردارهای مبنای $\mathbf{e}_i$ حقیقی وغیرصفراست.

از طرفی داریم :

$$g_{1'2'}=p^1_{1'}p^1_{2'}+p^2_{1'}p^2_{2'}+p^3_{1'}p^3_{2'} \\ =\alpha^1\beta^1+\alpha^2\beta^2+\alpha^3\beta^3 \tag{۱۷—۳۲}$$

حال اگر نامساوی محقق :

$$(\alpha^1\beta^2-\alpha^2\beta^1)^2+(\alpha^2\beta^3-\alpha^3\beta^2)^2+(\alpha^3\beta^1-\alpha^1\beta^3)^2>0 \tag{۱۷—۳۳}$$

را بسط دهیم خواهیم داشت (نامساوی شوارتس)[۱]:

$$[(\alpha^1)^2+(\alpha^2)^2+(\alpha^3)^2]\ [(\beta^1)^2+(\beta^2)^2+(\beta^3)^2] \\ >(\alpha^1\beta^1+\alpha^2\beta^2+\alpha^3\beta^3)^2 \tag{۱۷—۳۴}$$

یعنی :

$$g_{1'1'}g_{2'2'}>(g_{1'2'})^2 \tag{۱۷—۳۵}$$

که اگر تمام مؤلفه های $g_{i'j'}$ را پیدا کنیم رابطهٔ زیر را میتوانیم بنویسیم :

$$-1<\frac{g_{i'j'}}{\sqrt{g_{i'i'}}\sqrt{g_{j'j'}}}<1 \qquad i' \text{ و } j'=1,2,3 \tag{۱۷—۳۶}$$

و یا :

$$-1<\frac{(\mathbf{e}_{i'}\ ,\ \mathbf{e}_{j'})}{e_{i'}\ e_{j'}}<1 \qquad i' \text{ و } j'=1,2,3 \tag{۱۷—۳۷}$$

۱- Schwarz

بنابراین میتوانیم تساوی زیر را فرض کنیم :

$$\cos\theta_{i'j'}=\frac{(\mathbf{e}_{i'}\ ,\ \mathbf{e}_{j'})}{e_{i'}e_{j'}}\qquad i'\ \text{و}\ j'=۱,۲,۳ \tag{۱۷—۳۸}$$

و یا :

$$\boxed{(\mathbf{e}_{i'}\ ,\ \mathbf{e}_{j'})=e_{i'}e_{j'}\cos\theta_{i'j'}}\qquad i'\ \text{و}\ j'=۱,۲,۳ \tag{۱۷—۳۹}$$

اگر فضا را n بُعدی هم میگرفتیم رابطهٔ (۱۷-۳٤) بصورت :

$$^{(1)}\ (\text{ه}\mathbf{A})\ (\text{ه}\mathbf{B})\geqslant(\mathbf{A}\ ,\ \mathbf{B})^{۲} \tag{۱۷—٤۰}$$

و یا بصورت :

$$-۱\leqslant\frac{(\mathbf{A}\ ,\ \mathbf{B})}{A\cdot B}\leqslant ۱ \tag{۱۷—٤۱}$$

درمی‌آمد که بدینوسیله میتوانستیم زاویهٔ حقیقی دو امتداد $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را تعریف و حاصلضرب داخلی را بصورتیکه خوانندگان با آن آشنائی دارند بیان کنیم یعنی :

$$(\mathbf{A}\ ,\ \mathbf{B})=AB\cos(\mathbf{A}\ ,\ \mathbf{B}) \tag{۱۷—٤۲}$$

از مجموع آنچه که در بالا گفتیم قضیهٔ زیر نتیجه میشود :

قضیه - در هردستگاه مختصات $x^{i'}$ ، جیب تمام زوایای بین محورهای $x^{i'}$ و $x^{j'}$ درهرنقطه مساوی با مقدار : $\frac{g_{i'j'}}{\sqrt{g_{i'i'}}\sqrt{g_{j'j'}}}$ است در آن نقطه .

این کسر نشان میدهد که شرط تعامد محورهای مختصات وجود رابطهٔ :

$$(\mathbf{e}_{i'}\ ,\ \mathbf{e}_{j'})=g_{i'j'}=0 \tag{۱۷—٤۳}$$

و شرط تعامد دوبردار غیر مشخص $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ وجود رابطهٔ زیر است :

۱- دراینجا $\mathbf{A}\left|\begin{matrix}\alpha^{۱}\\ \alpha^{۲}\\ \alpha^{۳}\end{matrix}\right.$ و $\mathbf{B}\left|\begin{matrix}\beta^{۱}\\ \beta^{۲}\\ \beta^{۳}\end{matrix}\right.$ فرض شده است .

$$(\mathbf{a}\ ,\ \mathbf{b}) = g_{i'j'}a^{i'}b^{j'} = 0 \qquad (۱۷-۴۴)$$

اگر :

$$g_{i'i'}g_{j'j'} = (g_{i'j'})^{۲}$$

باشد لازم می‌آید داشته باشیم :

$$\theta_{i'j'} = 0$$

ودراینصورت بردارهای مبنای $\mathbf{e}_{i'}$ و $\mathbf{e}_{j'}$ بطور خطی مستقل نیستند .

۳ - ۱۷ - شکل درجهٔ دوم [۱] اصلی : اگر مقادیر :

$$dx^i = p^i_{i'}dx^{i'} \qquad (۱۷-۴۵)$$

$$dx^j = p^j_{j'}dx^{j'} \qquad (۱۷-۴۶)$$

را در رابطهٔ :

$$ds^{۲} = \delta_{ij}dx^i xd^j \qquad (۱۷-۴۷)$$

قرار دهیم خواهیم داشت :

$$ds^{۲} = \delta_{ij}p^i_{i'}p^j_{j'}dx^{i'}dx^{j'} = g_{i'j'}dx^{i'}dx^{j'} \qquad (۱۷-۴۸)$$

این رابطه به «شکل درجهٔ دوم اصلی» فضای اقلیدسی موسوم است .

اگر مختصات $x^{i'}$ مثل x^i مستقیم‌الخط وبا x^i هم مبدأ باشد فاصلهٔ یکنقطه از مبدأ ، از رابطهٔ زیر بدست می‌آید :

$$l^{۲} = \delta_{ij}x^i x^j = g_{i'j'}x^{i'}x^{j'} \qquad (۱۷-۴۹)$$

وطول قطعه‌ای ازمنحنی پارامتری $x^{i'} = \varphi^{i'}(t)$ واقع مابین دونقطهٔ A و B خواهد شد :

۱- Form quadratic

$$L=\int_{A}^{B} ds=\int_{A}^{B}\sqrt{g_{i'j'}\,dx^{i'}dx^{j'}} \qquad (۱۷-۵۰)$$

$$=\int_{A}^{B}\sqrt{g_{i'j'}\frac{dx^{i'}}{dt}\frac{dx^{j'}}{dt}}\,dt$$

۱۸- خواص مختلف تانسور اصلی اقلیدسی : فرض کنیم ازدستگاه مختصات ثانی $x^{i'}$ بدستگاه مختصات $x^{i''}$ برویم بطوریکه داشته باشیم :

$$\begin{cases} x^{i''}=x^{i''}(x^{1'},\ x^{2'},\ \dots,\ x^{n'}) \\ x^{i'}=x^{i'}(x^{1''},\ x^{2''},\ \dots,\ x^{n''}) \end{cases} \qquad (۱۸-۱)$$

و بعلاوه این توابع بطورپیوسته دیفرانسیل پذیر[۱] وژاکوبین آنها هم حقیقی وغیر صفر باشد . حال میتوان خاصیت متعدی بودن $g_{i'j'}$ ها را تحقیق کرد :

$$dx^{i'}=p^{i'}_{i''}dx^{i''} \qquad (۱۸-۲)$$

و :

$$dx^{j'}=p^{j'}_{j''}dx^{j''} \qquad (۱۸-۳)$$

لذا :

$$ds^{2}=g_{i'j'}dx^{i'}dx^{j'}=g_{i'j'}p^{i'}_{i''}p^{j'}_{j''}dx^{i''}dx^{j''} \qquad (۱۸-۴)$$

و درنتیجه :

$$g_{i''j''}=g_{i'j'}p^{i'}_{i''}p^{j'}_{j''} \qquad (۱۸-۵)$$

همانطوریکه در (§ ۱۷) ثابت میکردیم ، میتوانیم ثابت کنیم که بردارهای مبنای محورهای مختصات $x^{i''}$ نیزهمه‌دارای مدولهای حقیقی هستندوباهم زوایای حقیقی میسازند .

۱- Differentiable

همهٔ تانسورهای اصلی اقلیدسی دارای **دترمینانی غیرصفرند** . یعنی :

$$g' = | g_{i'j'} | \neq 0$$

زیرا شرط لازم وکافی برای اینکه بازاء هرمقدار **a** مقدار :

$$(\mathbf{a}\ ,\ \mathbf{b}) = g_{i'j'} a^{i'} b^{j'} = 0 \qquad (۱۸—۶)$$

باشد اینستکه دستگاه n معادلهٔ n مجهولی خطی :

$$g_{i'j'} b^{j'} = 0$$

غیراز صفر جواب دیگری نداشته باشد یعنی داشته باشیم :

$$| g_{i'j'} | \neq 0$$

حال ثابت میکنیم که اگر(۲ ; ۱۷-۱) و (۱۷-۱۳) دارای شرایطی که برای آنها تعیین کرده بودیم باشند $g_{i'j'}$ ها علاوه برآنکه صفر نیستند همیشه مثبت هم هستند . زیرا رابطهٔ :

$$g_{i'j'} = \delta_{ij} p^i_{i'} p^j_{j'} \qquad (۱۸—۷)$$

را میتوانیم بعنوان فورمولی درنظر بگیریم که عنصر $g_{i'j'}$ ازحاصلضرب ۳ دترمینان δ_{ij} و $p^i_{i'}$ و $p^j_{j'}$ را بما میدهد . اگر فرض کنیم : $P_{i'j} = \delta_{ij} p^i_{i'}$ باشد در نتیجه : $g_{i'j'} = P_{i'j}\, p^j_{j'}$ میشود و لذا خواهیم داشت :

$$g' = | g_{i'j'} | = J^۲ \qquad (۱۸—۸)$$

و چون مطابق فرض $J \neq 0$ است پس دترمینان $g_{i'j'}$ همیشه مثبت است . این خاصیت طبق (۱۸-۵) متعدی است :

$$g'' = |g_{i''j''}| = |g_{i'j'}\, p^{i'}_{i''} p^{j'}_{j''}| = |g_{i'j'}| \cdot |p^{i'}_{i''}| \cdot |p^{j'}_{j''}| = g' J'^۲ \qquad (۱۸—۹)$$

یعنی داریم : $g'' > 0$.

مجدداً یادآوری میکنیم که وقتی تبدیلی در شرط : $J \neq o$ (یا $K \neq o$) صدق کرد آنرا «عادی» گویند .

۱۹ - **فضای اقلیدسی خاص** : در مبحث قبل ثابت کردیم که در فضای اقلیدسی همیشه داریم : $|g_{i'j'}| > o$. برای تعمیم تعریفی که از یک تبدیل مختصات در(۱۲-۱۷) و(۱۳-۱۷) کردیم ممکنست فضا های مشابهی را که درآنها دترمینان $g_{i'j'}$ منظماً [۱] مثبت نیست مورد بررسی قرار دهیم .

وقتی فضای اقلیدسی آنطوری که ما تعریف کردیم تعریف شده باشد آنرا اقلیدسی «خاص» گویند . دراینحالت هرشکل : $ds^2 = g_{i'j'}dx^{i'}dx^{j'}$ «معین مثبت» است یعنی متغیرهای $x^{i'}$ هرچه باشد (طبق تعریف ، مقادیری حقیقی) این شکل مثبت میماند . زیرا میتوانیم بگوئیم که چون $ds^2 = \delta_{ij}dx^i dx^j$ مجموع چند مربع است اجباراً مثبت میشود وبازاء هرمقداری که به $x^{i'}$ بدهیم برای x^i مقداری بدست میآید که لزوماً شکل درجه دوم را که مجموع چندین مربع است مثبت میسازد .

در زیر چند مثال برای شکلهای درجهٔ دوم معین مثبت ذکر میکنیم وبرای اجتناب از عملیات زیاد ، n را مساوی ۲ میگیریم .

مثال ۱- فرض میکنیم داشته باشیم :

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2$$

تبدیل مختصات زیر را درنظر میگیریم :

$$\left\{ \begin{aligned} x^1 &= 5x^{1'} - 3x^{2'} \\ x^2 &= 2x^{1'} + x^{2'} \end{aligned} \right. \qquad (۱۹-۱)$$

داریم :

۱- Systematically

$$J=\begin{vmatrix} p^{1'}_{1'} & p^{1'}_{2'} \\ p^{2'}_{1'} & p^{2'}_{2'} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ۵ & -۳ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix}=۱۱ \qquad (۱۹-۲)$$

و لذا :

$$|g_{i'j'}|=J^۲=۱۲۱ \qquad (۱۹-۲)$$

دراینجا تبدیل خطی و عادی است و طبق (۱۷-۱۷) داریم :

$$g_{1'1'}=۵^۲+۲^۲=۲۹ \text{ و } g_{2'2'}=(-۳)^۲+(۱)^۲=۱۰ \qquad (۱۹-٤)$$

و :

$$g_{1'2'}=g_{2'1'}=(-۱۵)+(۲)=-۱۳$$

و لذا :

$$ds^۲=g_{i'j'}dx^{i'}dx^{j'}=۲۹(dx^{1'})^۲-۲۶dx^{1'}dx^{2'}+۱۰(dx^{2'})^۲ \qquad (۱۹-۵)$$

مثال ۲ـ تبدیل مختصات منحنی‌الخط زیر را درنظر میگیریم :

$$\begin{cases} x^1=e^{۳x^{1'}+x^{2'}} \\ x^۲=x^{1'}+x^{2'} \end{cases} \qquad (۱۹-٦)$$

داریم :

$$J=\begin{vmatrix} ۳e^{۳x^{1'}+x^{2'}} & e^{۳x^{1'}+x^{2'}} \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}=۲e^{۳x^{1'}+x^{2'}} \qquad (۱۹-۷)$$

و :

$$|g_{i'j'}|=J^۲=٤e^{٦x^{1'}+۲x^{2'}} \qquad (۱۹-۸)$$

و :

$$g_{1'1'}=۹e^{۲(۳x^{1'}+x^{2'})}+۱ \text{ و } g_{2'2'}=e^{۲(۳x^{1'}+x^{2'})}+۱ \qquad (۱۹-۹)$$

$$g_{1'2'}=g_{2'1'}=۳e^{۲(۳x^{1'}+x^{2'})}+۱ \text{ و}$$

بنابراین :

$$ds^{2}=\left[9e^{2(3x^{1\prime}+x^{2\prime})}+1\right](dx^{1\prime})^{2}+2\left[3e^{2(2x^{1\prime}+x^{2\prime})}+1\right]dx^{1\prime}dx^{2\prime}+\left[e^{2(3x^{1\prime}+x^{2\prime})}+1\right](dx^{2\prime})^{2} \qquad (19-10)$$

ds^2 ها اغلب اشکال درجهٔ دوم بسیار پیچیده‌ای هستند و ما دراینجا بذکر امثلهٔ کاسلاً کلاسیک اکتفا کرده‌ایم .

۱ - ۱۹ - **فضای اقلیدسی «غیر خاص»** [۱] : مابین فضاهای اقلیدسی غیر خاصی که میتوانیم فرض کنیم ، به تبدیلاتی برمیخوریم که کمیات مختلط [۲] را وارد میکنند و می‌بینیم که اجباراً در چنین حالاتی مقدار $|g_{i'j'}|$ حقیقی و بزرگتر از صفر نیست .

یک نمونهٔ سادهٔ این فضاها فضای مینکوسکی است که در نسبیت محدود مورد استفاده واقع شده است .

تبدیل :

$$\begin{cases} x^{1}=x^{1\prime} \\ x^{2}=x^{2\prime} \\ x^{3}=x^{3\prime} \\ x^{4}=jx^{4\prime} \end{cases} \qquad (j=\sqrt{-1}) \qquad (19-11)$$

را درنظر میگیریم . داریم :

$$J=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j \end{vmatrix}=j \qquad (19-12)$$

از آنجا :

۱- Improper ۲- Complex

$$|g_{i'j'}|=J^{۲}=-۱ \qquad (۱۹-۱۳)$$

و همچنین :

$$g_{۱'۱'}=g_{۲'۲'}=g_{۳'۳'}=۱ \quad \text{و} \quad g_{۴'۴'}=-۱ \quad \text{و} \qquad (۱۹-۱۴)$$

$$g_{i'j'}=0 \quad (i'\neq j')$$

و لذا شکل درجهٔ دوم :

$$ds^{۲}=(dx^{۱'})^{۲}+(dx^{۲'})^{۲}+(dx^{۳'})^{۲}-(dx^{۴'})^{۲} \qquad (۱۹-۱۵)$$

ممکنست مثبت ، منفی و یا صفر باشد .

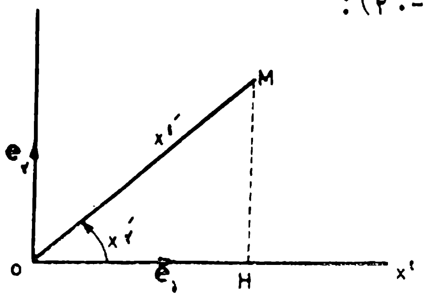
در اینجا بجای یکدستگاه قائم ، یکدستگاه شبه قائم[۱] داریم .

اگر $g_{i'j'}$ بطور اختیاری تعریف شده باشد فضاهای متنوع قابل مطالعه‌ای نظیر **فضاهای ریمانی** که بعداً خواهیم دید بوجود میاید . ما در این کتاب یک حالت خاص تعمیم فضای اقلیدسی را وقتی که بردارها مختلطند (فضای برداری هرمیتی [۲]) نیز مطالعه خواهیم کرد .

تبصره ـ وقتی ابهامی در کار نباشد برای جلوگیری از درازی جملات بجای «فضای برداری اقلیدسی خاص» بطورساده «فضای اقلیدسی» را استعمال ودرصورت لزوم آنرا تأکید هم میکنیم .

۲۰ ـ مثالهای تغییر دستگاههای مختصات درفضای اقلیدسی :

۱ ـ رابطهٔ بین مختصات دکارتی قائم ومختصات قطبی درصفحه ازفورمولهای زیربدست‌میاید (ش ۱ـ ۲۰) :



ش ۱.۲۰

۱- Pseudo – Orthogonal ۲- Hermitian Space

$$\begin{cases} x^{1}=x^{1'}\cos x^{2'} \\ x^{2}=x^{1'}\sin x^{2'} \end{cases} \longrightarrow \text{یا} \quad \begin{aligned} x^{1'}&=\sqrt{(x^{1})^{2}+(x^{2})^{2}} \\ x^{2'}&=\operatorname{arctg}\frac{x^{2}}{x^{1}} \end{aligned} \tag{۲۰—۱}$$

از آنجا :

$$J=\begin{vmatrix} p^{1}_{1'} & p^{1}_{2'} \\ p^{2}_{1'} & p^{2}_{2'} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos x^{2'} & -x^{1'}\sin x^{2'} \\ \sin x^{2'} & x^{1'}\cos x^{2'} \end{vmatrix} \tag{۲۰—۲}$$

و :

$$g_{1'1'}=(p^{1}_{1'})^{2}+(p^{2}_{1'})^{2}=1 \tag{۲۰—۳}$$

و :

$$g_{1'2'}=g_{2'1'}=p^{1}_{1'}p^{1}_{2'}+p^{2}_{1'}p^{2}_{2'}=0 \tag{۲۰—٤}$$

پس معلوم میشود که مختصات $x^{1'}$ و $x^{2'}$ قائم است .

و :

$$g_{2'2'}=(x^{1'})^{2} \tag{۲۰—۵}$$

و :

$$ds^{2}=(dx^{1})^{2}+(dx^{2})^{2}=(dx^{1'})^{2}+(x^{1'}dx^{2'})^{2} \tag{۲۰—۶}$$

و :

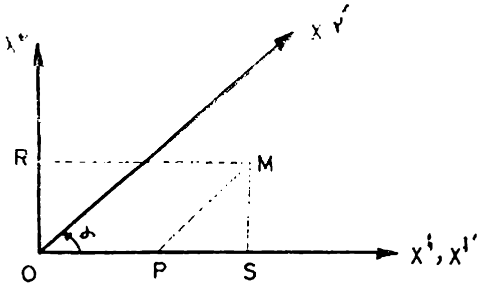
$$e_{1'}=\sqrt{g_{1'1'}}=1 \quad \text{و} \quad e_{2'}=\sqrt{g_{2'2'}}=x^{1'} \tag{۲۰—۷}$$

و :

$$g'=|g_{i'j'}|=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (x^{1'})^{2} \end{vmatrix}=(x^{1'})^{2}>0 \tag{۲۰—۸}$$

۲- بین مختصات دکارتی قائم و مختصات مستقیم‌الخط مایل روابط زیر موجود است ش ۲-۲۰ :

$$\begin{cases} x^{1} = x^{1'} + x^{2'} \cos\alpha \\ x^{2} = x^{2'} \sin\alpha \end{cases} \qquad (۲۰-۹)$$



ش. ۲۰.۲

$OS = x^{1}$ و $OR = x^{2}$ و $OP = x^{1'}$ و $OQ = x^{2'}$

لذا داریم :

$$J = \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha \\ 0 & \sin\alpha \end{vmatrix} \qquad (۲۰-۱۰)$$

و :

$$g_{1'1'} = g_{2'2'} = 1 \quad \text{و} \quad g_{1'2'} = g_{2'1'} = \cos\alpha \qquad (۲۰-۱۱)$$

و :

$$ds^{2} = (dx^{1})^{2} + (dx^{2})^{2} = (dx^{1'})^{2} + 2\cos\alpha\, dx^{1'}\, dx^{2'} + (dx^{2'})^{2} \qquad (۲۰-۱۲)$$

و :

$$e_{1'} = \sqrt{g_{1'1'}} = 1 \quad \text{و} \quad e_{2'} = \sqrt{g_{2'2'}} = 1 \qquad (۲۰-۱۳)$$

پس طول بردارهای مبنای $e_{1'}$ و $e_{2'}$ واحد بوده و این بردارها باهم زاویهٔ α می‌سازند .

چون بردارهای مبنا از لحاظ طول و امتداد ثابتند لذا رابطهٔ (۲۰-۱۲) که

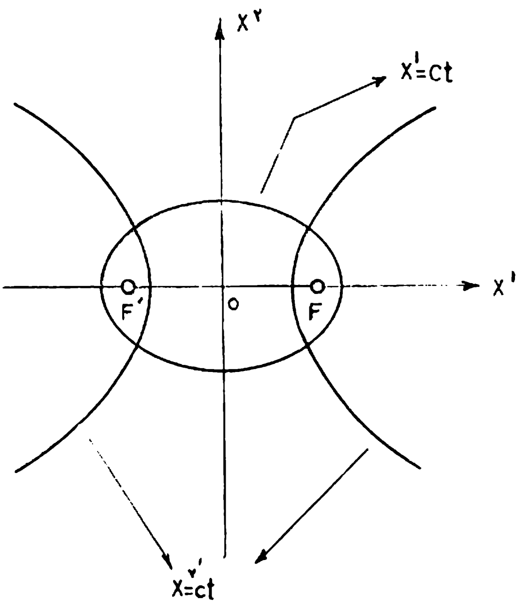
هنج بردار بینهایت کوچک $\overrightarrow{ds}$ را میدهدبرای هربردار غیر بینهایت کوچک نیز صادق است ، یعنی میتوانیم بنویسیم :

$$\text{ه}(\mathbf{l}) = (l)^2 = (l^1)^2 + 2 l^1 l^2 \cos\alpha + (l^2)^2 \qquad (۲۰-۱۴)$$

و بعلاوه داریم :

$$g' = g_{i'j'} = \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = \sin^2\alpha > 0 \qquad (۲۰-۱۵)$$

۳- روابط زیر بین مختصات دکارتی قائم و مختصات بیضوی در صفحه برقرار است ش ۳-۲۰ :



ش ۳.۲۰

$$\begin{cases} x^1 = a\,\mathrm{ch}\,x^{1'} \cos x^{2'} \\ x^2 = a\,\mathrm{sh}\,x^{1'} \sin x^{2'} \end{cases} \qquad (۲۰-۱۶)$$

$$J=\begin{vmatrix} a\,\mathrm{sh}\,x^{1'}\,\cos x^{2'} & -a\,\mathrm{ch}\,x^{1'}\,\sin^{2'} \\ a\,\mathrm{ch}\,x^{1'}\,\sin x^{2'} & a\,\mathrm{sh}\,x^{1'}\,\cos x^{2'} \end{vmatrix} \qquad (۲۰—۱۷)$$

$$g_{1'1'}=g_{2'2'}=a^2[(\mathrm{sh}\,x^{1'})^2+(\sin x^{2'})^2] \qquad (۲۰—۱۸)$$

$$g_{1'2'}=g_{2'1'}=0 \qquad (۲۰—۱۹)$$: (یعنی محورهای $x^{i'}$ متعامدند)

و :

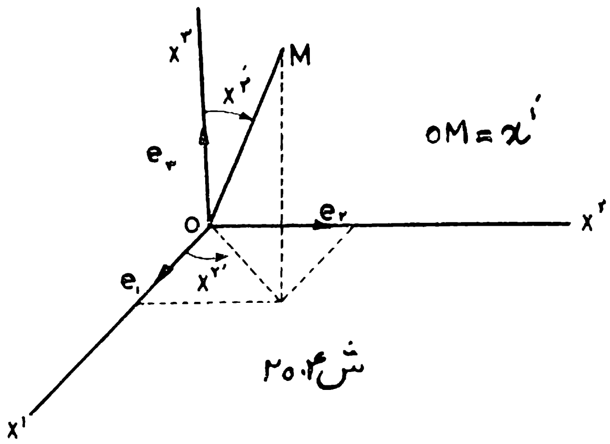
$$ds^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2=a^2\left(\sqrt{(\mathrm{sh}\,x^{1'})^2+(\sin x^{2'})^2}\,dx^{1'}\right)^2 + a^2\left(\sqrt{(\mathrm{sh}\,x^{1'})^2+(\sin^{2'})^2}\,dx^{2'}\right)^2 \qquad (۲۰—۲۰)$$

و :

$$e_{1'}=e_{2'}=a\sqrt{(\mathrm{sh}\,x^{1'})^2+(\sin x^{2'})^2} \qquad (۲۰—۲۱)$$

و :

$$g'=|g_{i'j'}|=a^4[(\mathrm{sh}\,x^{1'})^2+(\sin x^{2'})^2]^2>0 \qquad (۲۰—۲۲)$$



ش ۲۰.۴

٤- روابط زیر بین مختصات دکارتی قائم ومختصات کروی [۱] موجود است

ش ٤-۲۰ :

$$(۲۰—۲۳)\quad \begin{cases} x^{1}=x^{1'}\cos x^{2'}\sin x^{3'} \\ x^{2}=x^{1'}\sin x^{2'}\sin x^{3'} \\ x^{3}=x^{1'}\cos^{3'} \end{cases} \longrightarrow \text{یا} \begin{cases} x^{1'}=\sqrt{\delta_{ij}x^{i}x^{j}} \\ x^{2'}=\operatorname{arctg}\dfrac{x^{2}}{x^{1}} \\ x^{3'}=\arccos\dfrac{x^{3}}{\sqrt{\delta_{ij}x^{i}x^{j}}} \end{cases}$$

پس داریم :

$$(۲۰—۲٤)\quad J=\begin{vmatrix} \cos x^{2'}\sin x^{3'} & -x^{1'}\sin x^{2'}\sin x^{3'} & x^{1'}\cos x^{2'}\cos x^{3'} \\ \sin x^{2'}\sin x^{3'} & x^{1'}\cos x^{2'}\sin x^{3'} & x^{1'}\sin x^{2'}\cos x^{3'} \\ \cos x^{3'} & 0 & -x^{1'}\sin x^{3'} \end{vmatrix}$$

$$(۲۰—۲۵)\quad g_{1'1'}=1 \ \text{و}\ g_{2'2'}=(x^{1'}\sin x^{3'})^{2} \ \text{و}\ g_{3'3'}=(x^{1'})^{2}$$

و بازاء $i'\neq j'$ بقیهٔ $g_{i'j'}$ ها صفر است یعنی $x^{i'}$ دستگاهی است قائم .

از آنجا :

$$(۲۰—۲٦)\quad ds^{2}=(dx^{1})^{2}+(dx^{2})^{2}+(dx^{3})^{2}=(dx^{1'})^{2}+(x^{1'}\sin x^{3'})^{2}(dx^{2'})^{2}+(x^{1'})^{2}(dx^{3'})^{2}$$

و :

$$(۲۰—۲۷)\quad e_{1'}=1 \ \text{و}\ e_{2'}=x^{1'}\sin x^{3'} \ \text{و}\ e_{3'}=x^{1'}$$

و :

$$(۲۰—۲۸)\quad g'=|g_{i'j'}|=[(x^{1'})^{2}\sin x^{3'}]^{2}>0$$

۱- برای تعمیم بیشتری دستگاههای x^{1} , x^{2} , x^{3} و $x^{1'}$, $x^{2'}$, $x^{3'}$ را هم جهت نگرفته بلکه آنها را بترتیب از چپ براست و از راست بچپ گرفته ایم . یک جایگشت $x^{2'}$ با $x^{3'}$ دو دستگاه از چپ براست بما میدهد . این ترتیب اختیاری است .

۲۱ - **مؤلفه‌های همگرد یک بردار** : در فضای آفین یک بردار ناهمگرد و یک بردارهمگرد دو موجود هندسی کاملاً متمایزی را تشکیل میدهند . از ابتدا نمیتوانستیم یکی را برحسب دیگری بیان کنیم . ولی حالا با وارد کردن «متریک» میتوانیم این مؤلفه ها را نسبت بیکدیگر حساب کنیم . این عمل توسط تانسوراصلی اقلیدسی صورت میگیرد .

n حاصلضرب عددی زیررا که n کمیت $a_{i'}$ را دردستگاه مختصات $x^{i'}$ تعریف میکنند ، درنظر میگیریم :

$$a_{i'}=(\mathbf{a}\ ,\ \mathbf{e}_{i'}) \tag{۲۱—۱}$$

طبق تعریف ، $\mathbf{a}$ وقتی ناهمگرد است که داشته باشیم :

$$\mathbf{a}=\mathbf{e}_{j'}a^{j'} \tag{۲۱—۲}$$

و ازآنجا داریم :

$$a_{i'}=(\mathbf{e}_{j'}a^{j'}\ ,\ \mathbf{e}_{i'})=(\mathbf{e}_{j'}\ ,\ \mathbf{e}_{i'})a^{j'}=g_{i'j'}a^{j'} \tag{۲۱—۳}$$

بدین‌ترتیب n مؤلفهٔ همگرد بردار $\mathbf{a}$ برحسب مؤلفه های ناهمگرد آن تعریف میشود . طبق (۲۱-۱) **مؤلفه‌های همگرد بردار $\mathbf{a}$ تصاویر قائم آن روی n بردار مبنای $\mathbf{e}_{i'}$ می‌باشد.** طبق (۲۱-۳) ملاحظه میکنیم که دریکدستگاه‌اقلیدسی‌ارتونورمه، مؤلفه های ناهمگرد و همگرد یک‌بردار یکی هستند :

$$a_i=(\mathbf{e}_j\ ,\ \mathbf{e}_i)a^j=\delta_{ij}a^j \tag{۲۱—٤}$$

بهمین جهت است که در محاسبات برداری کلاسیک ، دستگاه دکارتی قائم که مفهوم نوع را دخالت نمیدهد بکار برده میشود .

برای عنصر دیفرانسیل $dx_{i'}$ میتوانیم بنویسیم :

$$dx_{i'}=g_{i'j'}dx^{j'} \tag{۲۱—۵}$$

و در حالت خاص مختصات مستقیم‌الخط ، مختصات همگرد با رابطهٔ زیرتعریف میشود :

$$x_{i'} = g_{i'j'} x^{j'} \qquad (۲۱-۶)$$

حال بفضای اقلیدسی خاص (حالت کلی آن) برمیگردیم . ثابت کرده‌ایم که : $|g_{i'j'}| \neq 0$ است . اگر فرض کنیم :

$$g^{j'i'} = \frac{g_{j'i'} \text{ همعامل}}{|g_{i'j'}|} \qquad (۲۱-۷)$$

باشد (منظور از « همعامل [1] $g_{j'i'}$ » ضریب عنصر $g_{j'i'}$ در دترمینانی است که از عناصر $g_{j'i'}$ درست شده) میتوانیم دستگاه (۳-۲۱) را نسبت به $a^{j'}$ حل کنیم و لذا خواهیم داشت :

$$a^{j'} = g^{j'i'} a_{i'} \qquad (۲۱-۸)$$

عناصر $g^{j'i'}$ جبری و طوری است که داریم :

$$g_{i'j'} g^{j'k'} = \delta_{i'}^{k'} \qquad (۲۱-۹)$$

طبق تعریف تانسورهای همپا(§۱۲) بردار به‌مؤلفه‌های $g_{i'j'}a^{j'}$ همپای بردار بمؤلفه‌های $a^{j'}$ است ، و با توجه به (۹-۲۱) رابطهٔ بین هر بردار و همپایش رابطهٔ متقابل[2] است . زیرا بردار همپای A_i خواهد بود :

$$g^{ij}A_j = g^{ij}g_{jk}A^k = \delta_k^i A^k = A^i \qquad (۲۱-۱۰)$$

در رابطهٔ (۹-۲۱) ، $\delta_{i'}^{k'}$ تانسوری‌است ازنوع (۱ , ۱) و $g_{i'j'}$ تانسوری از نوع (۲ , ۰) . پس با توجه به «قانون خارج قسمت» می‌بینیم که $g^{j'i'}$ تانسوری است از نوع :

$$(۱+۱ \ , \ ۱+۱-۲) = (۲ \ , \ ۰)$$

۱- Cofactor ۱- Reciproc

که کاملاً مؤید وضع اندیسهای آنست . و همچنین دیده میشود که $g^{j'i'}$ مثل $g_{i'j'}$ تانسور قرینه است .

حال به ذکر چندخاصیت از تانسورهای $g_{i'j'}$ و $g^{j'i'}$ میپردازیم : از رابطهٔ (۲۱-۹) مستقیماً دیده میشود که داریم :

$$|g^{j'i'}|=\frac{1}{|g_{i'j'}|} \qquad (۲۱-۱۱)$$

و رابطهٔ متقابل (۲۱-۷) خواهد شد :

$$g_{i'j'}=\frac{g^{i'j'}\ \text{همعامل}}{|g^{j'i'}|} \qquad (۲۱-۱۲)$$

درحالت خاصیکه بردارهای مبنای $e_{i'}$ متعامد باشند مؤلفه های $g_{i'j'}$ و $g^{j'i'}$ را با ماتریسهای زیر نشان میدهیم :

$$g_{i'j'}=\begin{bmatrix} (e_{1'})^2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & (e_{2'})^2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & (e_{n'})^2 \end{bmatrix} \qquad (۲۱-۱۳)$$

و :

$$g^{j'i'}=\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{e_{1'}}\right)^2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{e_{2'}}\right)^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \left(\frac{1}{e_{n'}}\right)^2 \end{bmatrix}$$

فقط و فقط دراینحالت است که داریم :

$$g_{i'i'}=\frac{1}{g^{i'i'}} \qquad (۲۱—۱۴)$$

۱ - ۲۱ - **تانسورهای جایگشت** [1] : در (§۱۵) دیدیم که e^{ijk} و e_{ijk} (۳ , ۲ , ۱ = k و j و i) تانسور نیست . حالا میخواهیم ثابت کنیم که در فضای ۳ بُعدی اقلیدسی کمیات :

$$\varepsilon_{ijk}=\sqrt{g}\,e_{ijk} \quad \text{و} \quad \varepsilon^{ijk}=\frac{1}{\sqrt{g}}\,e^{ijk} \qquad (۲۱—۱۵)$$

۳ , ۲ , ۱ = k و j و i

که در آنها g دترمینان g_{ij} نسبت به دستگاه دکارتی غیر مشخصی است تانسورند .

اولاً طبق تعریف نماد قرینهٔ چپ (§۳) ، ε_{ijk} و ε^{ijk} قرینهٔ چپند .

ثانیاً رابطهٔ :

$$e_{ijk}p^i_{i'}p^j_{j'}p^k_{k'}=e_{jik}p^j_{i'}p^i_{j'}p^k_{k'}=-e_{ijk}p^i_{j'}p^j_{i'}p^k_{k'} \qquad (۲۱—۱۶)$$

۳ , ۲ , ۱ = k' و k و j' و j و i' و i

نشان میدهد که $e_{ijk}p^i_{i'}p^j_{j'}p^k_{k'}$ نسبت به i' و j' و k' و با دلیل مشابه نسبت به اندیسهای i' و j' و k' قرینه چپ است . اما این عبارت صرفنظر از علامتش نظیر رابطهٔ (۳۱-۱۵) است . یعنی داریم :

$$e_{ijk}p^i_{i'}p^j_{j'}p^k_{k'}=Je_{i'j'k'} \qquad (۲۱—۱۷)$$

۳ , ۲ , ۱ = k' و k و j' و j و i' و i

اما وقتی ازمختصات x^i به $x^{i'}$ میرویم تانسوراصلی g_{ij} طبق (۹-۱۸) به $g_{i'j'}$ بدل میشود که داریم :

---

۱ - Permutation Tensors

(g' دترمینان $g_{i'j'}$ است) $$g' = gJ^2 \qquad (۲۰-۱۸)$$

و کمیات ε_{ijk} به $\varepsilon_{i'j'k'}$ بدل میشود بطوریکه :

$$\varepsilon_{i'j'k'} = \sqrt{g'}e_{i'j'k'} = \sqrt{g}\,Je_{i'j'k'} = \sqrt{g}\,e_{ijk}p^i_{i'}\,p^j_{j'}\,p^k_{k'} \qquad (۲۱-۱۹)$$
$$= \varepsilon_{ijk}p^i_{i'}\,p^j_{j'}\,p^k_{k'} \quad i \text{ و } i' \text{ و } j \text{ و } j' \text{ و } k \text{ و } k' = ۱\,,\,۲\,,\,۳$$

یعنی ε_{ijk} مؤلفه های تانسوری است از نوع (۳ , ۰) .

وهمچنین با توجه به‌روابط (۱۸-۲) و (۱۵-۳۱) داریم :

$$\varepsilon^{ijk} = \frac{۱}{\sqrt{g}}\;e^{ijk} = \frac{J}{\sqrt{g'}}\;e^{ijk} = \frac{۱}{\sqrt{g'}}\;p^i_{i'}\,p^j_{j'}\,p^k_{k'}e^{i'j'k'} \qquad (۲۱-۲۰)$$
$$= p^i_{i'}p^j_{j'}\,p^k_{k'}\varepsilon^{i'j'k'} \qquad i \text{ و } i' \text{ و } j \text{ و } j' \text{ و } k \text{ و } k' = ۱\,,\,۲\,,\,۳$$

یعنی ε^{ijk} هم‌تانسوری‌است‌ازنوع (۰ , ۳) .تانسورهای ε_{ijk} و ε^{ijk} به **تانسورهای جایگشت** موسومند .

اگر دستگاه مختصات قائم دکارتی باشد داریم $g=۱$ و لذا مؤلفه های تانسورهای جایگشت همان مؤلفه های نماد های قرینهٔ چپ میشود .

تانسورهای جایگشت را برحسب بردارهای همگرد و ناهمگرد مبنای محلی با رابطهٔ زیر میتوانیم تعریف کنیم :

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j\mathbf{e}^k = \mathbf{e}^i\cdot\mathbf{e}^j \wedge \mathbf{e}^k\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k \qquad (۲۱-۲۱)$$

اولاً این کمیات تانسورند . زیرا اگر فرض کنیم :

$$\mathbf{e}^i = g^{ir}\mathbf{e}_r \text{ و } \mathbf{e}^j = g^{js}\mathbf{e}_s \text{ و } \mathbf{e}^k = g^{kt}\mathbf{e}_t$$

طرف چپ (۲۱-۲۱) خواهد شد :

$$\mathbf{e}^r\cdot\mathbf{e}^s \wedge \mathbf{e}^t\mathbf{e}_r\mathbf{e}_s\mathbf{e}_t$$

بعلاوه داریم :

$$\mathbf{e}_{i'}\cdot\mathbf{e}_{j'}\wedge\mathbf{e}_{k'}\,\mathbf{e}^{i'}\mathbf{e}^{j'}\mathbf{e}^{k'}=p^{i}_{i'}\mathbf{e}_i\cdot p^{j}_{j'}\mathbf{e}_j\ \wedge\ p^{k}_{k'}\mathbf{e}_k p^{i'}_{r}\mathbf{e}^r p^{j'}_{s}\mathbf{e}^s p^{k'}_{t}\mathbf{e}^t$$
$$=\delta^i_r\,\delta^j_s\,\delta^k_t\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j\wedge\mathbf{e}_k\mathbf{e}^r\mathbf{e}^s\mathbf{e}^t=\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j\wedge\mathbf{e}_k\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j\mathbf{e}^k \qquad (۲۱-۲۲)$$

رابطهٔ (۲۱-۲۱) نشان میدهد که مؤلفه های همگرد و ناهمگرد تانسور جایگشت بترتیب عبارتند :

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j\ \wedge\ \mathbf{e}_k=e_{ijk}J \qquad (۲۱-۲۳)$$

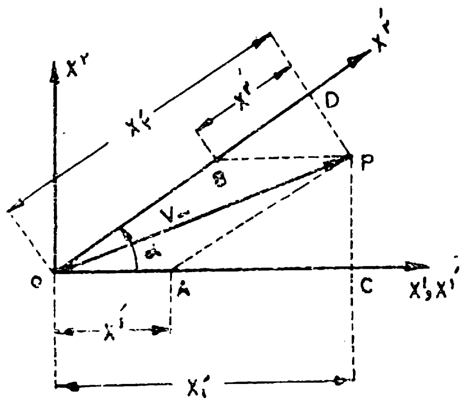
و :

$$\mathbf{e}^i\cdot\mathbf{e}^j\ \wedge\ \mathbf{e}^k=\frac{1}{J}\ e^{ijk} \qquad (۲۱-۲۴)$$

که با توجه به (۱۸-۸) دو رابطهٔ اخیر همان روابط (۲۱-۱۵) است .

مثالی برای مورد استعمال مختصات همگرد :

دودستگاه قائم‌ومایل x^2Ox^1 و $x^{2'}Ox^{1'}$ را که محورهای Ox^1 و $Ox^{1'}$ ومبدأ آنهابرهم منطبق است درنظرمیگیریم . بردار **V** برداری است که مؤلفه های ناهمگردش $OA=x^{1'}$ و $OB=x^{2'}$ و مؤلفه های همگردش $OC=x_{1'}$ و $OD=x_{2'}$ می‌باشد . لذا طبق (ش ۲۱-۱) میتوانیم بنویسیم :



ش ۲۱.۱

$$
(۲۱-۲۵) \qquad \begin{cases} x^1 = x^{1'} + x^{2'} \cos\alpha \\ x^2 = x^{2'} \sin\alpha \end{cases}
$$

از طرفی روابط زیر بین مؤلفه‌های **V** برقرار است :

$$
(۲۱-۲۶) \qquad \begin{cases} x_{1'} = g_{1'1'} x^{1'} + g_{1'2'} x^{2'} \\ x_{2'} = g_{2'1'} x^{1'} + g_{2'2'} x^{2'} \end{cases}
$$

حال اگر در این روابط بجای $g_{i'j'}$ مقادیرشان‌را از(۲۰-۱ ز) بگذاریم خواهیم داشت:

$$
(۲۱-۲۷) \qquad \begin{cases} x_{1'} = x^{1'} + x^{2'} \cos\alpha \\ x_{2'} = x^{1'} \cos\alpha + x^{2'} \end{cases}
$$

که صحت این روابط بلافاصله از روی (ش ۱ - ۲۱) تأیید میشود و در نتیجه می‌بینیم که تعبیری که در شکل فوق از مؤلفه‌ها بعمل آمده کاملاً صحیح است .
از طرفی اگر **V** را بامؤلفه‌های همگردش نشان دهیم داریم :

$$
(۲۱-۲۸) \qquad \mathbf{V} = x_{i'} \mathbf{e}^{i'}
$$

ازاین رابطه پیداست که بردارهای مبنای $\mathbf{e}^{i'}$ روی محورهای مختصات نیست مگر وقتی که دستگاه مختصات دکارتی قائم باشد . بهمین دلیل است که تعبیرهندسی همگردی و ناهمگردی معمولاً برحسب $\mathbf{e}_{j'}$ صورت میگیرد .

۲ - ۲۱ - **تصویر یک بردار روی یک امتداد :** بردار **V** و امتدادی را که در دستگاه مختصات دکارتی قائم با بردارواحد **n** نشان داده شده درنظر میگیریم . «تصویر» بردار **A** روی امتداد **n** عبارتست ازحاصلضرب عددوار بردارهای **A** و **n** :

$$
(۲۱-۲۹) \qquad (\mathbf{A}\ ,\ \mathbf{n}) = A\cos(\mathbf{A}\ ,\ \mathbf{n}) = \delta_{ij} A^i n^j = A^i n_i
$$

و در مختصات منحنی‌الخط خواهد بود :

$$
(۲۱-۳۰) \qquad (\mathbf{A}\ ,\ \mathbf{n}) = g_{i'j'} A^{i'} n^{j'} = A_{j'} n^{j'} = A^{i'} n_{i'}
$$

۳ - ۲۱ - شبه تانسورهای مهم فضای اقلیدسی : از(۹-۱۸) نتیجه میشود :

$$\sqrt{g''}=\sqrt{g'}J' \qquad (۲۱-۳۱)$$

روابط (۹-۱۸) و (۳۱-۲۱) نشان میدهد که g' و $\sqrt{g'}$ شبه عددوار [1] است.

بهمین ترتیب اگر $|g^{j'i'}|$ را به h' نشان دهیم خواهیم داشت :

$$h''=K'^{2}h'=\frac{1}{J'^{2}}h' \qquad (۲۱-۳۲)$$

$$\sqrt{h''}=\frac{1}{J'}\sqrt{h'} \qquad (۲۱-۳۳)$$

این روابط شبه عددوارهای جدیدی را ارائه میدهد که وزن آنها عکس وزن شبه‌عددوارهای قبلی است .

یادآور میشویم که رویهمرفته محاسبهٔ یک ژاکوبین اغلب پیچیده است . درحالتیکه دستگاه مختصات قائم باشد بهتر است نخست $|g_{i'j'}|$ و $|g^{j'i'}|$ را حساب کنیم .

۴ - ۲۱ - حجم اولیهٔ فضای اقلیدسی : حجم اولیهٔ فضای اقلیدسی که بازاء $n>۳$ به **هیپر حجم** موسوم است حجمی است که روی n بردار :

$$e_{1'}dx^{1'} \text{ و } e_{2'}dx^{2'} \text{ و } e_{3'}dx^{3'} \text{ و } e_{4'}dx^{4'} \text{ و } \ldots \text{ و } e_{n'}dx^{n'}$$

(همانطوریکه در ۱۰§ دیدیم) بنا میشود .

اگر dV حجمی که روی n عنصر dx^i از یکدستگاه ارتونورمه بنا میشود ، باشد لذا میتوانیم بنویسیم :

$$dV=dx^{1}dx^{2}\ldots dx^{n}=\prod_{i=1}^{n}dx^{i} \qquad (۲۱-۳۴)$$

۱- Pseudo - Scalar

اگر(۲۴-۱۵) را برای فضای n بُعدی تعمیم دهیم برای حجم اولیه داریم :

$$dV' = \frac{1}{J} dV \qquad (۲۱-۳۵)$$

(برای دستگاههای از چپ به راست یا از راست به چپ) که در مختصات $x^{i'}$ بیان شده است . و یا :

$$dV = J dV' \qquad (۲۱-۳۶)$$

چون در فضای اقلیدسی هستیم یعنی داریم :

$$g' = |g_{i'j'}| = J^2$$

پس :

$$dV = \sqrt{g'}\, dx^{1'} dx^{2'} \ldots dx^{n'} = \sqrt{g'} \prod_{p'=1}^{n} dx^{p'} \qquad (۲۱-۳۷)$$

۲۲ـ تانسورهای همگن و تانسورهای تکروند [1]

یک محیط مادی مثلاً یک مایع یاجامدی را وقتی میتوانیم تقریباً «همگن» بخوانیم که خواصش (یا بهتربگوئیم خواص کشسانی آن) مستقل از وضعش باشد و وقتی «تکروند» میخوانیم که خواص آن(خواص کشسانیآن) مستقل ازامتدادش باشد .

این اصطلاحات عیناً در ریاضی برای تانسورها استعمال میشود . منظور از یک تانسور «همگن» در فضای متری اقلیدسی تانسوری است که مؤلفه‌های آن درهردستگاه قائمی که درآن محیط بکار برده میشود ثابت باشد ، و یک تانسور «تکروند» در فضای متری اقلیدسی تانسوری است که مؤلفه‌های آن از یکدستگاه

۱- Isotrope

قائم به دستگاه قائم دیگرتغییرنکند. بیان اینکه تانسوری همگن است چندان مشکل نیست. زیرا شرط همگنی صرفاً با بیان این مطلب که «مؤلفه‌های تانسور در هردستگاه قائمی ثابت است» بدست خواهد آمد. بنابراین ما فقط به تانسورهای تکروند (که دوتا ازآنها یعنی δ^i_j و e_{ijk} را قبلاً دیده بودیم) میپردازیم وهنگام بحث درباب این مسئله خود را به‌فضای ۳ بُعدی وبعد هم به یک تانسور C به‌ظرفیت چهار بنام «تانسورکشسانی» که مؤلفه‌های C^{ij}_{kl} ازآن نسبت به i و j و k و l قرینه است و در مکانیک محیطهای پیوسته [1] مورد مطالعه قرار میگیرد محدود میکنیم. روشی را که بکارمیبریم قابل‌تعمیم برای هرنوع تانسوری نیزخواهد بود:

تبدیلات یک پارامتری:

$$x^{i'} = \alpha^{i'}_i x^i \qquad i \text{ و } i' = ۱, ۲, ۳ \qquad (۲۲-۱)$$

راکه درآنها:

$$\delta_{ij}\alpha^i_{i'}\alpha^j_{j'} = \delta_{i'j'} \qquad i \text{ و } i' \text{ و } j \text{ و } j' = ۱, ۲, ۳ \qquad (۲۲-۲)$$

است (گروه دورانی متعامد) درنظر میگیریم و فرض میکنیم:

۱- ضرائب $\alpha^{i'}_i$ تابع یک پارامتر t $(o \leqslant t \leqslant t_o)$ و بطور پیوسته دیفرانسیل پذیر باشد.

۲- بازاء $t=o$ داشته باشیم $\alpha^{i'}_i = \delta^{i'}_i$. یعنی دوران (۲۲-۱) یک تبدیل متحد [2] باشد.

مؤلفه‌های C^{ij}_{kl} براثر هرتبدیلی ازاین خانواده طبق فورمول زیرتغییرمیکند:

$$C^{i'j'}_{k'l'} = \alpha^{i'}_i \alpha^{j'}_j \alpha^k_{k'} \alpha^l_{l'} C^{ij}_{kl} \qquad (۲۲-۳)$$

$$i \text{ و } i' \text{ و } j \text{ و } j' \text{ و } k \text{ و } k' \text{ و } l \text{ و } l' = ۱, ۲, ۳$$

که خاصیت تکروندی C یعنی پایائی مؤلفه‌های C^{ij}_{kl} نیز درنظرگرفته شده است.

۱- Continuous medium ۲- Identity transformation

حال از (۳-۲۲) نسبت به t مشتق میگیریم و رعایت میکنیم که C^{ij}_{kl} مستقل از پارامتر t است :

$$\left(\left(\frac{d}{dt}\alpha^{i'}_{i}\right)\alpha^{j'}_{j}\alpha^{k}_{k'}\alpha^{l}_{l'}+\alpha^{i'}_{i}\left(\frac{d}{dt}\alpha^{j'}_{j}\right)\alpha^{k}_{k'}\alpha^{l}_{l'} +\alpha^{i'}_{i}\alpha^{j'}_{j}\left(\frac{d}{dt}\alpha^{k}_{k'}\right)\alpha^{l}_{l'}+\alpha^{i'}_{i}\alpha^{j'}_{j}\alpha^{k}_{k'}\left(\frac{d}{dt}\alpha^{l}_{l'}\right)\right)C^{ij}_{kl}=0 \tag{۲۲—۴}$$

و بازاء $t=0$ خواهیم داشت :

$$\left(\left(\frac{d}{dt}\alpha^{i'}_{i}\right)_{t\to 0}\delta^{j'}_{j}\delta^{k}_{k'}\delta^{l}_{l'}+\delta^{i'}_{i}\left(\frac{d}{dt}\alpha^{j'}_{j}\right)_{t\to 0}\delta^{k}_{k'}\delta^{l}_{l'} +\delta^{i'}_{i}\delta^{j'}_{j}\left(\frac{d}{dt}\alpha^{k}_{k'}\right)_{t\to 0}\delta^{l}_{l'}+\delta^{i'}_{i}\delta^{j'}_{j}\delta^{k}_{k'}\left(\frac{d}{dt}\alpha^{l}_{l'}\right)_{t\to 0}\right)C^{ij}_{kl}=0 \tag{۲۲+۵}$$

اگر دراین رابطه بجای مشتقات $\alpha^{r}_{r'}$ مقادیر $\omega^{r}_{r'}$ بگذاریم رابطهٔ زیر نتیجه میشود :

$$C^{ij'}_{k'l'}\omega^{i'}_{i}+C^{i'j}_{k'l'}\omega^{j'}_{j}+C^{i'j'}_{kl'}\omega^{k}_{k'}+C^{i'j'}_{k'l}\omega^{l}_{l'}=0 \tag{۲۲—۶}$$

i و i' و j و j' و k و k' و l و $l'=1,2,3$

و چون i و j و k و l حکم اندیسهای گنگ را دارند پس داریم :

$$C^{a'j'}_{k'l'}\omega^{i'}_{a'}+C^{i'a'}_{k'l'}\omega^{j'}_{a'}+C^{i'j'}_{a'l'}\omega^{a'}_{k'}+C^{i'j'}_{k'a'}\omega^{a'}_{l'}=0 \tag{۲۲—۷}$$

i' و j' و k' و l' و $a'=1,2,3$

حال از (۲-۲۲) نیز نسبت به t مشتق میگیریم و حاصل آنرا بازاء $t=0$ حساب می کنیم :

$$\delta_{ij}\alpha^{j}_{j'}\frac{d}{dt}\alpha^{i}_{i'}+\delta_{ij}\alpha^{i}_{i'}\frac{d}{dt}\alpha^{j}_{j'}=0 \tag{۲۲—۸}$$

و یا :

$$\delta_{ij'}\omega^{i}_{i'}+\delta_{ji'}\omega^{j}_{j'}=0 \tag{۲۲—۹}$$

$$\omega_{i'j'}+\omega_{j'i'}=0 \qquad i' \text{ و } j'=1,2,3 \tag{۲۲—۱۰}$$

یعنی $\omega_{i'j'}$ «قرینهٔ چپ» است (توجه داریم که در اینجا مؤلفه های همگرد و ناهمگرد ω یکی هستند) .

بدیهی است شرط (۲۲-۱۰) شرط منحصری است که برای ω بدست میآید .
لذا فقط ۳ کمیت مستقل (یا مؤلفهٔ مستقل) برای $\omega_{i'j'}$ موجود است که میتوانیم آنها را با روابط زیر نشان دهیم :

$$\omega_{i'j'} = e_{i'j'k'}\xi^{k'} \qquad i' \text{ و } j' \text{ و } k' = ۱ , ۲ , ۳ \qquad (۲۲-۱۱)$$

در اینجا $e_{i'j'k'}$ همان نماد قرینهٔ چپ و $\xi^{k'}$ ۳ متغیر اختیاری است .

چون مؤلفه های همگرد و ناهمگرد در ω و C یکی هستند لذا در (۲۲-۷) بجای $\omega^{i'}_{j'}$ مقدار $\omega_{i'j'}$ و بجای $C^{i'j'}_{k'l'}$ مقدار $C_{i'j'k'l'}$ را میگذاریم و ضریب متغیر مستقل $\xi^{k'}$ را مساوی صفر قرارمیدهیم . ضمناً برای سهولت تحریر، کلیهٔ پریم(′) ها را از روی اندیسها حذف و رابطهٔ (۲۲-۱۰) را نیز رعایت میکنیم . لذا (۲۲-۷) بصورت زیر درمیآید :

$$C_{ajkl}e_{iab}+C_{iakl}e_{jab}+C_{ijal}e_{kab}+C_{ijka}e_{lab}=0 \qquad (۲۲-۱۲)$$
$$i \text{ و } j \text{ و } k \text{ و } l \text{ و } a \text{ و } b = ۱ , ۲ , ۳$$

طرفین این رابطه را در e^{ibc} ضرب میکنیم :

$$C_{ajkl}e_{iab}e^{ibc}+C_{iakl}e_{jab}e^{ibc}+C_{ijal}e_{kab}e^{ibc}+C_{ijka}e_{lab}e^{ibc}=0 \qquad (۲۲-۱۳)$$

و یا :

$$-۲\,C_{ajkl}\delta^{c}_{a}+C_{iakl}\delta^{ci}_{ja}+C_{ijal}\delta^{ci}_{ka}+C_{ijka}\delta^{ci}_{la}=0 \qquad (۲۲-۱۴)$$
$$i \text{ و } j \text{ و } k \text{ و } l \text{ و } a \text{ و } c = ۱ , ۲ , ۳$$

و یا :

$$-۲\,C_{ajkl}\,\delta^{c}_{a}+C_{iakl}(\delta^{c}_{j}\,\delta^{i}_{a}-\delta^{c}_{a}\,\delta^{i}_{j})+C_{ijal}(\delta^{c}_{k}\,\delta^{i}_{a}-\delta^{c}_{a}\,\delta^{i}_{k}) \qquad (۲۲=۱۵)$$
$$+C_{ijka}(\delta^{c}_{l}\,\delta^{i}_{a}-\delta^{c}_{a}\,\delta^{i}_{l})=0$$

و یا :

$$-2\delta_a^c C_{ajkl}+\delta_j^c C_{aakl}-\delta_a^c C_{jakl}+\delta_k^c C_{ajal}-\delta_a^c C_{kjal}+\delta_l^c C_{ajka}-\delta_a^c C_{ljka}=0 \qquad (۲۲-۱۶)$$

و یا :

$$3\delta_a^i C_{ajkl}+\delta_a^i C_{kjal}+\delta_a^i C_{ljka}=\delta_j^i C_{aakl}+\delta_k^i C_{ajal}+\delta_l^i C_{ajka} \qquad (۲۲-۱۷)$$

البته باتوجه باینکه C_{ijkl} هانسبت به‌دواندیس اول ودواندیس دوم قرینه هستند.

و یا :

$$3C_{ijkl}+C_{kjil}+C_{ljki}=\delta_j^i C_{aakl}+\delta_k^i C_{ajal}+\delta_l^i C_{ajka} \qquad (۲۲-۱۸)$$

حال اندیسهای i و j را باهم عوض میکنیم :

$$3C_{jikl}+C_{kijl}+C_{likj}=\delta_i^j C_{aakl}+\delta_k^j C_{aial}+\delta_l^j C_{aika} \qquad (۲۲-۱۹)$$

و یا بالاخره :

$$3C_{ijkl}+C_{ikjl}+C_{iljk}=\delta_{ji}C_{aakl}+\delta_{jk}C_{iaal}+\delta_{jl}C_{iaak} \qquad (۲۲-۲۰)$$

حال برای اینکه اطلاع بیشتری از ساختمان مؤلفه های C_{ijkl} پیدا کنیم رابطهٔ اخیر را بصورت زیر مینویسیم :

$$2C_{ijkl}+(C_{ijkl}+C_{iklj}+C_{iljk})=\delta_{ji}C_{aakl}+\delta_{jk}C_{iaal}+\delta_{jl}C_{iaak} \qquad (۲۲-۲۱)$$

از جایگشت مستدیر j و k و l خواهیم داشت :

$$2C_{iklj}+(C_{iklj}+C_{iljk}+C_{ijkl})=\delta_{ki}C_{aalj}+\delta_{kl}C_{iaaj}+\delta_{kj}C_{iaal} \qquad (۲۲-۲۲)$$

و :

$$\text{۲}\,C_{iljk}+(C_{iljk}+C_{ijkl}+C_{iklj})=\delta_{li}C_{aajk}+\delta_{lj}C_{iaak}+\delta_{lk}C_{iaaj} \qquad (\text{۲۲}-\text{۲۳})$$

ازجمع روابط (۲۲-۲-۱) و (۲۲-۲-۲) و (۲۲-۲-۳) و توجه به تقارن δ_{ij} هاداریم :

$$\text{٥}\,(C_{ijkl}+C_{iklj}+C_{iljk})=\text{۲}\,(\delta_{kl}C_{iaaj}+\delta_{lj}C_{iaak}+\delta_{jk}C_{iaal})+\delta_{ij}C_{aakl}+\delta_{ik}C_{aalj}+\delta_{il}C_{aajk} \qquad (\text{۲۲}-\text{۲٤})$$

از حذف عبارت :

$$(C_{ijkl}+C_{iklj}+C_{iljk})$$

بین روابط (۲۲-۲-۱) و (۲۲-۲-٤) داریم :

$$\text{۱۰}\,C_{ijkl}=\text{٤}\,\delta_{ij}C_{aakl}-\delta_{il}C_{aajk}-\delta_{ik}C_{aalj}+\text{۳}\,\delta_{jk}C_{iaal}+\text{۳}\,\delta_{jl}C_{iaak}-\text{۲}\,\delta_{kl}C_{jaaj} \qquad (\text{۲۲}-\text{۲٥})$$

حال فقط مانده است که مؤلفه های «جزئی ادغام شدهٔ» تانسور C را که در طرف دوم (۲۲-۲-٥) پیدا شده برحسب مؤلفه های «کاملاً ادغام شده» اش بیان کنیم . برای این منظوردر رابطهٔ (۲۲-۲-۰) فرض میکنیم $k=l$ باشد ولذا داریم :

$$\text{۳}\,C_{ijll}+\text{۲}\,C_{illj}=\delta_{ij}C_{aall}+\text{۲}\,C_{iaaj} \qquad i\text{ و }j\text{ و }l\text{ و }a=\text{۱},\text{۲},\text{۳} \qquad (\text{۲۲}-\text{۲٦})$$

و چون a در طرف دوم اندیسی است آزاد پس داریم :

$$\text{۳}\,C_{ijaa}=\delta_{ij}C_{aabb} \qquad i\text{ و }j\text{ و }a\text{ و }b=\text{۱},\text{۲},\text{۳} \qquad (\text{۲۲}-\text{۲۷})$$

همینطور اگر در (۲۲-۲-۰) فرض کنیم $j=k$ باشد لذا :

$$\text{٤}\,C_{ikkl}+C_{ilkk}=C_{aail}+C_{iaal}\delta_{kk}+C_{iaal} \qquad i\text{ و }k\text{ و }l\text{ و }a=\text{۱},\text{۲},\text{۳} \qquad (\text{۲۲}-\text{۲۸})$$

و یا :

$$\text{٤}\,C_{ikkl}+C_{ilkk}=C_{aail}+\text{۳}\,C_{iaal}+C_{iaal} \qquad i\text{ و }k\text{ و }l\text{ و }a=\text{۱},\text{۲},\text{۳} \qquad (\text{۲۲}-\text{۲۹})$$

و یا :

$$4 C_{ikkl} + C_{ilkk} = C_{aail} + 4 C_{iaal} \qquad (22-30)$$

و بالاخره :

$$\boxed{C_{ilaa} = C_{aail}} \qquad i \text{ و } l \text{ و } a = 1, 2, 3 \qquad (22-31)$$

و بالاخره اگر در (۲۲-۲۰) ، i=l فرض شود داریم :

$$3 C_{ljkl} + C_{lklj} + C_{lljk} = \delta_{lj} C_{aakl} + \delta_{jk} C_{iaai} + \delta_{jl} C_{laak} \qquad (22-32)$$

و یا :

$$3 C_{jllk} + C_{kllj} + C_{lljk} = C_{aakj} + \delta_{jk} C_{iaai} + C_{jaak} \qquad (22-33)$$

و یا :

$$3 C_{jaak} + C_{kaaj} + C_{aajk} = C_{aakj} + \delta_{jk} C_{baab} + C_{jaak} \qquad (22-34)$$

و یا :

$$2 C_{jaak} = \delta_{jk} C_{baab} - C_{kaaj} \qquad (22-35)$$

دراین رابطه جای j و k را باهم عوض میکنیم :

$$2 C_{kaaj} = \delta_{jk} C_{baab} - C_{jaak} \qquad (22-36)$$

از روابط (۲۲-۳۵) و (۲۲-۳٦) داریم :

$$\boxed{C_{jaak} = C_{kaaj}} \qquad a \text{ و } j \text{ و } k = 1, 2, 3 \qquad (22-37)$$

بنابراین رابطهٔ (۲۲-۳۵) بصورت زیر درمیآید :

$$\boxed{C_{jaak} = \frac{1}{3} \delta_{jk} C_{baab}} \qquad j \text{ و } k \text{ و } a \text{ و } b = 1, 2, 3 \qquad (22-38)$$

اگر (۲۲-۲۷) و (۲۲-۳۱) و (۲۲-۳۸) را درطرف راست (۲۲-۲۵) بگذاریم خواهیم داشت :

$$۱۰ C_{ijkl} = \frac{۲}{۳} (۲ C_{aabb} - C_{baab}) \delta_{ij}\delta_{kl} + (C_{baab} - \frac{۱}{۳} C_{aabb}) (\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{jl}\delta_{ik}) \quad (۲۲-۳۹)$$

و یا :

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{jl}\delta_{ik}) \quad (۲۲-٤۰)$$

i و j و k و $l = ۱ , ۲ , ۳$

که در آن فرض شده است :

$$\begin{cases} \lambda = \frac{۲}{۱۵} C_{aabb} - \frac{۱}{۱۵} C_{baab} \\ \mu = \frac{۱}{۱۰} C_{baab} - \frac{۱}{۳۰} C_{aabb} \end{cases} \quad (۲۲-٤۱)$$

یعنی λ و μ عددوار هستند .

بالعکس وقتی تانسوری مانند C بمؤلفه های C_{ijkl} در (۲۲-٤۰) صدق کند تانسوری است تکروند. لذا میتوانیم نتیجهٔ زیر را بیان کنیم : **اگر تانسورتکروندی مانند C بمؤلفه‌های C^{ij}_{kl} نسبت به اندیسهای فوقانی i و j و اندیسهای تحتانی k و l متقارن باشد C^{ij}_{kl} ها در دستگاه قائم با روابط :**

$$C^{ij}_{kl} = \lambda \delta^{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta^i_k \delta^j_l + \delta^i_l \delta^j_k) \quad (۲۲-٤۲)$$

i و j و k و $l = ۱ , ۲ , ۳$

که در آن λ و μ عددوار است مشخص میشوند .

از رابطهٔ (۲۲-٤۲) بلافاصله دیده میشود که هرگاه C علاوه برتکروندی همگن هم باشد باید اعداد λ و μ ثابت باشند . زیرا اگر در (۲۲-٤۰) یکدفعه $i=k$ و $j=l$ و یکدفعه $i=j$ و $k=l$ فرض شود چون C ها مقادیر ثابتی است خواهیم داشت :

$$\left\{\begin{aligned} \lambda+4\mu&=ct\\ 3\lambda+2\mu&=ct\end{aligned}\right. \qquad (22-43)$$

یعنی λ و μ (که ضرایب لامه نامیده میشوند) مقادیری است ثابت .

تبصره : حال امکان وجود یک بردار تکروندی مانند V را مطالعه میکنیم .
دراینحال فورمولهای (۲۲-۳) و (۲۲-۷) و (۲۲-۱۲) بترتیب به فورمولهای زیر تبدیل میشوند :

$$V_{i'}=\alpha_{i'}^{p}V_{p} \qquad (22-44)$$

$$\omega_{i'}^{a}V_{a}=0 \qquad (22-45)$$

$$V_{a}e_{aib}=0 \qquad (22-46)$$

از ضرب معادلات (۲۲-۴۶) در e^{cjb} و جمع نسبت باندیس مکرر b داریم :

$$V_{a}e_{aib}e^{cjb}=V_{a}(\delta_{a}^{c}\delta_{i}^{j}-\delta_{a}^{j}\delta_{i}^{c})=V_{c}\delta_{i}^{j}-V_{j}\delta_{i}^{c}=0 \qquad (22-47)$$

و اگر دراین رابطه $i=j$ فرض‌شود خواهیم‌داشت : $V_{i}=0$. **یعنی بردارتکروند غیر صفر ، وجود ندارد.**

حال به بینیم تانسورتکروندی بظرفیت ۲ نظیر $\mathbf{W}$ میتواند وجود داشته باشد یانه ؟ دراینحال معادلات (۲۲-۳) و (۲۲-۷) و (۲۲-۱۲) بترتیب به صورتهای زیر در میآیند :

$$W_{i'j'}=\alpha_{i'}^{p}\,\alpha_{j'}^{q}W_{pq} \qquad (22-48)$$

$$W_{aj}\,\omega_{i}^{a}+W_{ia}\,\omega_{j}^{a}=0 \qquad (22-49)$$

$$W_{aj}\,e_{aik}+W_{ia}\,e_{ajk}=0 \qquad (22-50)$$

از ضرب معادلهٔ اخیر در e^{bmk} و جمع نسبت به اندیسهای مکرر داریم :

$$\delta_{i}^{m}W_{bj}-\delta_{i}^{b}W_{mj}+\delta_{j}^{m}W_{ib}-\delta_{j}^{b}W_{im}=0 \qquad (22-51)$$

و اگر $i=m$ فرض شود خواهیم داشت :

$$2W_{bj}+W_{jb}=\delta_j^b W_{ii} \qquad (۲۲-۵۲)$$

و یا اگر $i=b$ و $i=a$ گرفته شود :

$$2W_{ij}+W_{ji}=W_{aa}\delta_{ji} \qquad (۲۲-۵۳)$$

حال اگر جای i و j را باهم عوض کنیم :

$$2W_{ji}+W_{ij}=W_{aa}\delta_{ij} \qquad (۲۲-۵۴)$$

از ترکیب (۲۲-۵۳) و (۲۲-۵۴) داریم :

$$W_{ij}=W_{ji}$$

و از آنجا :

$$W_{ij}=\lambda\delta_{ij} \qquad (۲۲-۵۵)$$

که در آن $\lambda=\frac{1}{3}W_{aa}$ فرض شده است .

بنابراین اگر **W** تانسور تکروندی به ظرفیت ۲ باشد ، باید مؤلفه‌های آن در یکدستگاه قائم یعنی W_{ij} ، در رابطهٔ (۲۲-۵۵) که در آن λ یک عددوار است صدق نماید .

۲۳ـ فضای برداری هرمیتی [1]

دراین مبحث میخواهیم مفاهیم فضای‌اقلیدسی را برای فضای اعداد مختلط نیز تعمیم دهیم . هنگام مطالعهٔ این فضاها خود را به دستگاههای مستقیم‌الخط دکارتی قائم n بُعدی و هم مبدأ محدود میکنیم و بردارهای یکهٔ مبنا را مانند فضای اقلیدسی ، حقیقی و مساوی واحد معینی میگیریم . دراینصورت هندسهٔ ما که

۱- Hermitian Space

بعلت ابعادفضا مجرد بود مجردتر میشود ولی بجهت نمایش تحلیلی عناصرش قابل درك میماند.

کلیهٔ مفاهیم فضای آفین درحالتی هم که مؤلفه ها اعداد مختلط باشند دراین دستگاهها قابل بیانند . مثلاً مختصات نقاط ، اعدادی مختلط بصورت :

$$x^i = \lambda^i + j\mu^i \qquad (j=\sqrt{-۱}) \tag{۲۳-۱}$$

و مؤلفه های ناهمگرد یک بردار بصورت :

$$a^i = u^i + jv^i \qquad (j=\sqrt{-۱}) \tag{۲۳-۲}$$

نمایش داده میشود .

حاصلضرب عددوار را با عبارت زیر :

$$(\mathbf{a}\ ,\ \mathbf{b}) = a^۱\overline{b^۱} + a^۲\overline{b^۲} + a^۳\overline{b^۳} + \cdots + a^n\overline{b^n} = \delta_{ij}a^i\overline{b^j} \tag{۲۳-۳}$$

که در آن $\overline{b^j}$ مزدوج b^j فرض شده است **تعریف میکنیم** و آنرا پایا میگیریم .

بااین تعریف ، دیگر تساوی $(\mathbf{a}\ ,\mathbf{b}) = \overline{(\mathbf{b}\ ,\ \mathbf{a})}$ که همان رابطهٔ (۲-۱۷) میباشد برقرار نیست. بالعکس میتوان ثابت کرد که خواص (۳-۱۷) و (٤-۱۷) و (٥-۱۷) بقوت خود باقی میماند .

هنج بردار $\mathbf{a}$ عدد حقیقی :

$$\mathbf{a} = a^۱\overline{a^۱} + a^۲\overline{a^۲} + \cdots + a^n\overline{a^n} = \delta_{ij}a^i\overline{a^j} \tag{۲۳-٤}$$

خواهد بود . زیرا که حاصلضربهای $a^j\overline{a^j}$ همه اعداد حقیقی هستند .

حال فرض میکنیم از دستگاه x^i بدستگاه مستقیم الخط $x^{i'}$ برویم . داریم :

$$x^i = C^i_{i'}x^{i'} \tag{۲۳-٥}$$

که دراینجا $C^i_{i'}$ ها مقادیر مختلط و ثابتی هستند.

ملاحظه میکنیم که حاصلضرب $J\overline{J}$ که درآن $J=|C^i_{i'}|$ فرض میشود همیشه حقیقی و مثبت است زیرا نظیر حاصلضرب دو عدد مختلط مزدوج است که میدانیم همیشه حقیقی و مثبت می‌باشد . بعلاوه فرض میشود که این حاصلضرب صفر نباشد.

اگر a^i و b^j مؤلفه های دوبردار **a** و **b** باشند طبق فورمولهای زیر تبدیل میشوند :

$$a^i = C^i_{i'} a^{i'} \qquad (۲۳—۶)$$

$$b^j = C^j_{j'} b^{j'} \qquad (۲۳—۷)$$

و ازآنجا داریم :

$$(\mathbf{a}\ ,\ \mathbf{b}) = \delta_{ij} a^i \overline{b^j} = \delta_{ij} C^i_{i'} \overline{C^j_{j'}} a^{i'} \overline{b^{j'}} \qquad (۲۳—۸)$$

از همینجا تعریف «تانسور اصلی هرمیتی» پیدا میشود :

$$g_{i'j'} = \delta_{ij} C^i_{i'} \overline{C^j_{j'}} \qquad (۲۳—۹)$$

که خاصیت تقارن مزدوج دارد یعنی :

$$g_{i'j'} = \overline{g_{j'i'}} \qquad (۲۳—۱۰)$$

با توجه به رابطهٔ (۲۳-۹) که بسط فورمول حاصلضرب سه دترمینان است بآسانی ثابت میشود که :

$$|g_{i'j'}| = J\overline{J} \qquad (۲۳—۱۱)$$

مقداریست حقیقی و مثبت .

هنج بردار **a** (بمعنای هرمیتی کلمه) دراین دستگاه خواهد شد :

$$\text{ه}\,\mathbf{a} = \delta_{ij} a^i \overline{a^j} = g_{i'j'} a^{i'} \overline{a^{j'}} \qquad (۲۳—۱۲)$$

برای تعیین دستگاه مختصات جدید ، بردارهای مبنا را وارد میکنیم:

$$\mathbf{e}_{i'} = C^{i}_{i'}\mathbf{e}_i \quad و \quad \mathbf{e}_{j'} = C^{j}_{j'}\mathbf{e}_j \tag{۲۳—۱۳}$$

لذا حاصلضرب عددوار آنها با توجه باینکه بردارهای مبنا واحد فرض شده است خواهد بود :

$$(\mathbf{e}_{i'}\ ,\ \mathbf{e}_{j'}) = C^{i}_{i'}\overline{C}^{j}_{j'}(\mathbf{e}_i\ ,\ \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}C^{i}_{i'}\overline{C}^{j}_{j'} = C^{1}_{i'}\overline{C}^{1}_{j'} + C^{2}_{i'}\overline{C}^{2}_{j'} + \cdots + C^{n}_{i'}\overline{C}^{n}_{j'} \tag{۲۳—۱۴}$$

یعنی :

$$(\mathbf{e}_{i'}\ ,\ \mathbf{e}_{j'}) = g_{i'j'} \tag{۲۳—۱۵}$$

کلیهٔ $g_{i'i'}$ ها مقادیری حقیقی ومثبت است. مدول(همیشه بمعنای هرمیتی)بردارهای مبنای $\mathbf{e}_{i'}$ با رابطهٔ زیر تعریف میشود :

$$g_{i'i'} = (\mathbf{e}_{i'}\ ,\ \mathbf{e}_{i'}) = e_{i'}\overline{e_{i'}} \tag{۲۳—۱۶}$$

با استدلالی مشابه استدلال مبحث قبل ثابت میشود که :

$$g_{i'i'}g_{j'j'} - g_{i'j'}\overline{g_{i'j'}} > 0 \tag{۲۳—۱۷}$$

و ازآنجا میتوانیم زاویه‌را تعریف کنیم. زیرا از نامساوی(۲۳-۱۷) نتیجه میشود:

$$\frac{g_{i'j'}\overline{g_{i'j'}}}{g_{i'i'}g_{j'j'}} = \frac{(\mathbf{e}_{i'}\ ,\ \mathbf{e}_{j'})}{e_{i'}\ \overline{e_{i'}}} \cdot \frac{\overline{(\mathbf{e}_{i'}\ ,\ \mathbf{e}_{j'})}}{e_{j'}\ \overline{e_{j'}}} < 1 \tag{۲۳—۱۸}$$

حال اگر فرض کنیم :

$$\alpha_{(i'j')} = \frac{(\mathbf{e}_{i'}\ ,\ \mathbf{e}_{j'})}{e_{i'}\overline{e_{j'}}} \tag{۲۳—۱۹}$$

(اندیسهای $(i'j')$ صادقند زیرا معرف عمل‌جمع [1] نیستند)

1 – Summation

نامساوی (۱۸-۲۳) بصورت زیر در میآید :

$$\alpha_{(i'j')}\,\overline{\alpha}_{(i'j')} < 1 \qquad (۲۳-۲۰)$$

لذا میتوان زاویه را با عبارت زیر تعریف کرد :

$$\cos^2\theta_{(i'j')} = \alpha_{(i'j')}\,\overline{\alpha}_{(i'j')} \qquad (۲۳-۲۱)$$

بنابراین میتوانیم بنویسیم :

$$(\mathbf{e}_{i'}\ ,\ \mathbf{e}_{j'}) = e_{i'}\cdot\overline{e}_{j'}\,\alpha_{(i'j')} \qquad (۲۳-۲۲)$$

ولی نمیتوانیم بنویسیم :

$$(\mathbf{e}_{i'}\ ,\ \mathbf{e}_{j'}) = e_{i'}\cdot\overline{e}_{j'}\cos\theta_{(i'j')} \qquad (۲۳-۲۳)$$

زاویهٔ $\theta_{i'j'}$ به «زاویهٔ مدولر» موسوم است .

درفضای هرمیتی بهتراستازاستعمال «مدول» که ممکنست موجب اشتباهات عدیده شود خودداری و بهمان مفهوم هنج اکتفا کنیم .

اگر کلیهٔ $\cos^2\theta_{i'j'}$ هارا صفرفرض کنیم یعنیازدستگاههای مختصاتیاستفاده کنیم که $g_{i'j'}$ های غیر قطری همه‌شان صفر باشند (مختصات متعامد ، بمعنای هرمیتی کلمه) اشکالات زیادی مرتفع خواهد شد. چنین فضائی به فضایواحد[1] موسوم است . تعامد (بمعنای هرمیتی) برای دو بردار غیر مشخص $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ با رابطهٔ :

۱- تبدیلاتی که ماتریس آنها در رابطهٔ $\boxed{c}\,\boxed{c}^+ = 1$ صدق کند به تبدیلات واحد (Unitary) موسومند. این ماتریس‌هادرفضای هرمیتی همان نقشی را دارند که ماتریسهای قائم در فضای ریمانی اقلیدسی دارند. ثابت میشود که درهرماتریس واحد (Unitary) $\det\boxed{c} = \pm 1$ است . یک فضای هرمیتی که درآن تمام تبدیلات واحد باشد به « فضای واحد» (Unitary space) موسوم است .

$$(\mathbf{a}\ ,\ \mathbf{b})=0 \qquad (۲۳-۲۴)$$

و یا :

$$g_{ij}a^i\overline{b^j}=0$$

و برای دوبردار مبنا با رابطهٔ :

$$(\mathbf{e}_{i'}\ ,\ \mathbf{e}_{j'})=g_{i'j'}=0 \qquad (۲۳-۲۵)$$

تعریف میشود .

تانسور اصلی $g_{i'j'}$ خاصیت تعدی دارد یعنی :

$$g_{i''j''}=p^{i'}_{i''}\,p^{j'}_{j''}g_{i'j'} \qquad (۲۳-۲۶)$$

عبارت :

$$l^2=g_{i'j'}x^{i'}\overline{x^{j'}} \qquad (۲۳-۲۷)$$

همیشه مثبت تعریف میشود زیرا بموجب رابطهٔ :

$$g_{i'j'}+g_{j'i'}=g_{i'j'}+\overline{g_{i'j'}}=\text{یک عدد حقیقی} \qquad (۲۳-۲۸)$$

تمام جملات شکل درجهٔ دوم[۱] فوق حقیقی است (برای دیدن این حقیقت باید جملات غیر قطری را دوبدو دسته بندی کنیم) .

و همچنین داریم :

$$g_{i''j''}=J'\overline{J'}\,|g_{i'j'}| \qquad (۲۳-۲۹)$$

چون طبق فرض $|g_{i'j'}|\neq 0$ است میتوانیم یک تانسوراصلی ناهمگردی را با فورمول زیر تعریف کنیم :

$$g^{j'i'}=\frac{\text{همعامل } g_{j'i'}}{|g_{i'j'}|} \qquad (۲۳-۳۰)$$

و از آنجا :

$$|g_{i'j'}|\cdot|g^{j'i'}|=1 \qquad (۲۳-۳۱)$$

۱- Form quadratic

دراینجا $g^{j'i'} = \overline{g^{i'j'}}$ است (اثبات دو رابطهٔ اخیر از راه ماتریسی فوق‌العاده ساده است) .

مثال زیر را برای تبدیلات درفضای هرمیتی درنظرمیگیریم . فرض میکنیم که داشته باشیم :

$$l^{۲} = x^{۱}\overline{x^{۱}} + x^{۲}\overline{x^{۲}} \qquad (۲۳-۳۲)$$

حال تبدیل مختصاتی بصورت زیر میدهیم :

$$\begin{cases} x^{۱} = (۱-۲j)x^{۱'} + ۲x^{۲'} \\ x^{۲} = (۲+j)x^{۱'} + (۱+j)x^{۲'} \end{cases} \qquad (j=\sqrt{-۱}) \qquad (۲۳-۳۳)$$

بنابراین داریم :

$$J = \begin{vmatrix} ۱-۲j & ۲ \\ ۲+j & ۱+j \end{vmatrix} = -۱-۳j$$

و :

$$|g_{i'j'}| = J\overline{J} = ۱۰ > ۰$$

و :

$$g_{۱'۱'} = (p^{۱}_{۱'})\,(\overline{p^{۱}_{۱'}}) + (p^{۲}_{۱'})\,(\overline{p^{۲}_{۱'}}) = ۱۰$$

و :

$$g_{۱'۲'} = \overline{g_{۲'۱'}} = ۵(۱-j)$$

و :

$$g_{۲'۲'} = ۶$$

بنابراین :

$$l^{۲} = x^{۱}\overline{x^{۱}} + x^{۲}\overline{x^{۲}} = ۱۰x^{۱'}\overline{x^{۱'}} + (۵-۵j)x^{۱'}\overline{x^{۲'}} + (۵+۵j)x^{۲'}\overline{x^{۱'}} + ۶x^{۲'}\overline{x^{۲'}} \qquad (۲۳-۳۴)$$

بطوریکه دیده میشود (۲۳-۲۸) صادق است یعنی عبارت :

$$(5-5j)x^{1'}\overline{x^{2'}}+(5+5j)x^{2'}\overline{x^{1'}} \tag{۲۳-۳۵}$$

کمیتی است حقیقی . زیرا میتوان بطریق زیرآنرا طوری تبدیل کرد که فقط مقادیر حقیقی در آن باقی بماند :

$$x^{1'}=\rho^1 e^{j\varphi^1} \quad \text{و} \quad x^{2'}=\rho^2 e^{j\varphi^2} \tag{۲۳-۳۶}$$

و :

$$5-5j=\frac{10}{\sqrt{2}}e^{-j\frac{\pi}{4}} \quad \text{و} \quad 5+5j=\frac{10}{\sqrt{2}}e^{j\frac{\pi}{4}} \tag{۲۳-۳۷}$$

و از آنجا :

$$x^{1'}\overline{x^{1'}}=(\rho^1)^2 \quad \text{و} \quad x^{2'}\overline{x^{2'}}=(\rho^2)^2 \tag{۲۳-۳۸}$$

و لذا (۳۵-۲۳) بصورت :

$$(5-5j)x^{1'}\overline{x^{2'}}+(5+5j)x^{2'}\overline{x^{1'}}=\frac{10}{\sqrt{2}}\rho^1\rho^2 e^{j\left(\varphi^1-\varphi^2-\frac{\pi}{4}\right)} \tag{۲۳-۳۹}$$

$$+\frac{10}{\sqrt{2}}\rho^1\rho^2 e^{-j\left(\varphi^1-\varphi^2-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{20}{\sqrt{2}}\rho^1\rho^2\cos\left(\varphi^1-\varphi^2-\frac{\pi}{4}\right)$$

که عددی است حقیقی در میآید . عبارت (۳٤-۲۳) هم بصورت زیر در میآید :

$$l^2=10(\rho^1)^2+10\sqrt{2}\rho^1\rho^2\cos\left(\varphi^1-\varphi^2-\frac{\pi}{4}\right)+6(\rho^2)^2$$

تبصرهٔ مهم ـ ریاضیدانها هنگام تعریف فضای اقلیدسی خاص ترجیح میدهند که شرط $|g_{i'j'}|>0$ را هم بآن اضافه کنند. این همان کاری است که ما در اینجا برای فضای هرمیتی انجام داده‌ایم . زیرا شرط $J\overline{J}>0$ معادل همان شرط $|g_{i'j'}|>0$ میباشد .

فضای اقلیدسی ، حالت خاص (اعداد حقیقی) فضای هرمیتی است . در ریاضیات نظری منطقاً باید ازحالت کلی ودر ریاضیات عملی(بدلایل عدیده) ازحالت خاص شروع کرد . روی همین اصل است که ما درفضای اقلیدسی بجای $0 < |g_{i'j'}|$ ترجیح دادیم J حقیقی و مخالف صفر را بگذاریم ، و لذا وقتی معادلات تبدیل مختصات را مینوشتیم بجای آنکه دترمینان تانسوری را (که بعداً تعریف خواهیم کرد) بآنها مربوط کنیم ژاکوبین را بآنها ارتباط دادیم . گذشته از آن این نحوهٔ عمل مستقیماً نشان میدهد که بایک تبدیل «عادی» میتوان از dx^i به $dx^{i'}$ رسید .

تمرینات

۱ـ حساب کنید :

اولاً ـ مدول بردارهای مبنای جدید $e_{i'}$

ثانیاً ـ زوایای بین این بردارهای مبنا یعنی $\theta_{i'j'}$

ثالثاً ـ ژاکوبین $J = \left| \dfrac{\partial x}{\partial x'} \right|$

رابعاً ـ $|g_{i'j'}|$ و $|g^{i'j'}|$ مربوط به تبدیلات زیررا . x^i مختصات قدیم دکارتی قائم فرض شده است .

در فضای اقلیدسی :

$$(a) \begin{cases} x^1 = 3x^{1'} - 5x^{2'} \\ x^2 = 7x^{1'} + x^{2'} + 3x^{3'} \\ x^3 = 2x^{2'} + x^{3'} \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x^1 = x^{3'} \\ x^2 = -x^{1'} \\ x^3 = x^{4'} \\ x^4 = -x^{2'} \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x^1 = x^{1'} \cos x^{2'} \\ x^2 = x^{1'} \sin x^{2'} \\ x^3 = x^{3'} \end{cases}$$ مختصات استوانه‌ای

$$(d) \begin{cases} x^1 = x^{2'} x^{2'} \cos x^{3'} \\ x^2 = x^{1'} x^{2'} \sin x^{3'} \\ x^3 = \dfrac{1}{2}\left[(x^{1'})^2 - (x^{2'})^2\right] \end{cases}$$ مختصات سهمیوار

$$(e)\begin{cases} x^{۱}=e^{x^{۱'}} & e=۲٫۱۷۸۲ \\ x^{۲}=e^{x^{۲'}} & \text{مختصات آناموروفوزه} \\ x^{۳}=x^{۳'} & \text{(Coo. Anamorphosées)} \end{cases}$$

$$(f)\begin{cases} x^{۱}=۰٫۷۵۰۰۵x^{۱'}+۰٫۲۷۳۱x^{۲'}+۰٫۶۰۱۸x^{۳'} \\ x^{۲}=-۰٫۶۴۱۸x^{۱'}+۰٫۵۱۹۰x^{۲'}+۰٫۵۶۴۷x^{۳'} \\ x^{۳}=-۰٫۱۵۸۱x^{۱'}-۰٫۸۱۰۰x^{۲'}+۰٫۵۶۴۷x^{۳'} \end{cases}$$

$$(g)\begin{cases} x^{۱}=x^{۱'} \\ x^{۲}=x^{۲'}\cos\theta+x^{۳'}\sin\theta \\ x^{۳}=-x^{۲'}\sin\theta+x^{۳'}\cos\theta \end{cases}$$

در فضای هرمیتی :

$$(h)\begin{cases} x^{۱}=jx^{۱'} \\ x^{۲}=-x^{۱'}+jx^{۲'} \end{cases}$$

$$(i)\begin{cases} x^{۲}=(۱+j)x^{۱'}+jx^{۲'}+x^{۳'} \\ x^{۲}=x^{۱'}-jx^{۲'}+x^{۳'} \\ x^{۳}=x^{۲'}+jx^{۳'} \end{cases}$$

$$(k)\begin{cases} x^{۱}=\dfrac{۱-j}{۲}x^{۱'}+\dfrac{۱+j}{\sqrt{۶}}x^{۲'} \\ x^{۲}=\dfrac{j}{۲}x^{۱'}+\dfrac{۲}{\sqrt{۶}}x^{۲'} \end{cases}$$

$$(l)\begin{cases} x^{۱}=x^{۱'}\cos\xi+x^{۲'}\sin\xi & \xi=a+jb \\ x^{۲}=-x^{۱'}\sin\xi+x^{۲'}\cos\xi & (\text{اعداد حقیقی } b\ ,\ a) \end{cases}$$

$$(m)\begin{cases} x^{۱}=x^{۱'}e^{j\frac{\pi}{۶}}+x^{۲'}e^{-j\frac{\pi}{۶}} \\ x^{۲}=x^{۲'}e^{j\frac{\pi}{۳}}+x^{۳'}e^{-j\frac{\pi}{۳}} & (j=\sqrt{-۱}) \\ x^{۳}=x^{۳'}e^{j\frac{\pi}{۶}}+x^{۱'}e^{-j\frac{\pi}{۳}} \end{cases}$$

۲- بردارهای متقابل[1] بردارهای $\mathbf{e}_1=[۱\ ,\ ۰\ ,\ ۰]$ و $[۰\ ,\ ۱\ ,\ ۱]=\mathbf{e}_2$ و $\mathbf{e}_3=[۱\ ,\ ۱\ ,\ ۱]$ را پیدا کنید و مؤلفه‌های بردار $\mathbf{V}=(۱\ ,\ ۰\ ,\ ۰)$ را نسبت به $[\mathbf{e}_i]$ و $[\mathbf{e}^j]$ بدست آورید و ثابت کنید:

$$|\mathbf{V}|^۲=\delta_i^j V^i V_j$$

۳- اگر $\mathbf{e}_i$ $(i=۱\ ,\ ۲\ ,\ ۳)$ یک مجموعه بردار متعامد باشد ثابت کنید که مجموعهٔ متقابل آنها خواهد بود:

$$\mathbf{e}^i=\delta^{ij}\frac{\mathbf{e}^i}{|\mathbf{e}_j|^۲}$$

٤- ثابت کنید که در مختصات بیضوی مانند، داریم:

$$g_{\lambda\lambda}=\frac{(\lambda-\mu)\ (\lambda-\nu)}{٤f(\lambda)} \quad \text{و} \quad g_{\mu\mu}=\frac{(\mu-\lambda)\ (\mu-\nu)}{٤f(\mu)}$$

و

$$g_{\nu\nu}=\frac{(\nu-\lambda)\ (\nu-\mu)}{٤f(\nu)}$$

که در آن:

$$f(t)=(a^۲+t)\ (b^۲+t)\ (c^۲+t)$$

فرض شده است.

و همچنین در مختصات گوی‌وار کشیده داریم:

$$g_{۱'۱'}=a^۲\frac{\mathrm{ch}^۲u^۱-\cos^۲u^۲}{\mathrm{ch}^۲u^۱-۱} \quad \text{و} \quad g_{۲'۲'}=\frac{a^۲(\mathrm{ch}^۲u^۱-\cos^۲u^۲)}{۱-\cos^۲u^۲}$$

و

$$g_{۳'۳'}=a^۲(\mathrm{ch}^۲u^۱-۱)\ (۱-\cos^۲u^۲)$$

۱- Reciproc

۵- $g_{i'j'}$ ها را در مختصات گوی‌وار پخ، مختصات استوانه‌ای بیضی‌وار، مختصات مخروطی، مختصات پاراهولوئیدی و مختصات سهمیوار حساب کنید .

۶- ثابت کنید که در مختصات استوانه‌ای سهمیوار داریم :

$$g_{1'1'} = g_{2'2'} = (u^1)^2 + (u^2)^2$$

و :

$$g_{3'3'} = 1$$

۲۴ـ فضاهای متقابل[1] ـ ضرب تانسوری فضاها

تعاریفی که تاکنون از تانسورها کرده‌ایم شاید برای آنهائیکه با هندسهٔ دیفرانسیل جدید سروکار دارند کافی نباشد. دراین مبحث ضمن تعریف حاصلضرب تانسوری فضاها میخواهیم تانسورها و طرز بوجود آمدن آنها را با روش دیگری که با تئوری مجموعه‌ها بستگی کامل دارد تعریف کنیم. لذا قبل‌از مطالعهٔ این مبحث قرائت کتبی راکه‌دراین زمینه نوشته شده‌است به‌خوانندگان توصیه میکنیم.

قبلاً دیدیم که یک فضای برداری V روی میدان اعداد حقیقی، مجموعهٔ عناصری است مانند $\mathbf{X}$ به نام بردار با خواص A و B و C مذکور در (§۲) و یک زیر فضای برداری V، زیر مجموعه‌ای است از V که در تحت‌تأثیر قوانین جمع و ضرب در اعداد حقیقی بیک فضای برداری تبدیل شده است. این بردارهای $\mathbf{X}$ همانهائی است که مادرمباحث قبل اصطلاحاً آنها را **بردارهای ناهمگرد خواندیم،** مؤلفه های آنها را با X^i نشان دادیم و بوسیلهٔ بردارهای مبنای $\mathbf{e}_i$ با رابطهٔ :

$$\mathbf{X} = X^i \mathbf{e}_i \qquad (۲۴-۱)$$

معرفی کردیم.

حال به فضای V بترتیب زیرفضای دیگری مانند V^* که عناصرآن **بردارهای همگرد** نامیده میشود مربوط میکنیم.

یک تابع خطی مثل $\mathbf{Y}$ که مقدار آن روی فضای برداری V حقیقی است، بردار همگرد خوانده میشود. تابع $\mathbf{Y}$ بردار $\mathbf{X}$ را به‌یکعدد حقیقی‌که به $Y(\mathbf{X})$ نشان میدهیم تحویل میکند[2] یعنی $Y(\mathbf{X})$ مقداریست که تابع $\mathbf{Y}$ وقتی با بردار $\mathbf{X}$ سنجیده میشود اختیار میکند.

۱– Dual ۲– to Map

وقتی میگوئیم $\mathbf{Y}$ تابعی‌است‌خطی منظور اینست که اگر α و β دوعدد حقیقی دلخواه و $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Z}$ دو بردار ناهمگرد غیر مشخصی باشد داریم :

$$Y(\alpha\mathbf{X}+\beta\mathbf{Z})=\alpha Y(\mathbf{X})+\beta Y(\mathbf{Z}) \qquad (۲۴-۲)$$

مثال‌برای‌بردارهمگرد: آن تابع $\mathbf{Y}$ که $\mathbf{X}$ را به X^i یعنی به i امین مؤلفه‌اش نسبت به مبنای $\mathbf{e}_i$ از V تحویل میکند درنظر میگیریم . بدیهی است $\mathbf{Y}$ تابعی است که مقدارش روی V حقیقی است وچون $(\alpha X^i+\beta Z^i)$ i امین مؤلفهٔ بردار $(\alpha\mathbf{X}+\beta\mathbf{Z})$ است لذا $\mathbf{Y}$ برداریست همگرد .

اکنون خواهیم دید که باتعاریف مناسبی برای جمع دوبردارهمگرد وضرب یک بردارهمگرد دریکعدد حقیقی مجموعهٔ بردارهای همگرد خود بصورت فضائی برداری در میآید .

اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دو بردار همگرد باشد مطابق تعریف مجموع آنها یعنی $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ برداری است مانند $\mathbf{C}$ که خاصیت زیر را دارد :

$$C(\mathbf{X})=a(\mathbf{X})+b(\mathbf{X}) \qquad (۲۴-۳)$$

یعنی‌عدد حقیقی $C(\mathbf{X})$ درست مساوی مجموع دوعدد حقیقی $a(\mathbf{X})$ و $b(\mathbf{X})$ است .

اگر α عددی حقیقی باشد حاصلضرب α در $\mathbf{a}$ مطابق تعریف برداری است مانند $\mathbf{d}$ با خاصیت زیر :

$$d(\mathbf{X})=\alpha a(\mathbf{X}) \qquad (۲۴-۴)$$

بااین قوانین ترکیب ، همانگونه که در (§۲) دیدیم بردارهای‌همگرد تشکیل یک فضا میدهند. ما این فضا را **فضای متقابل** V می‌نامیم و به V^* نشان میدهیم .

حال‌ثابت میکنیم که هرمبنای $(\mathbf{e}_i)$ از V مبنای‌دیگری مثل $(\mathbf{e}^i)$ در V^* بوجود میآورد که آنرا مبنای متقابل $(\mathbf{e}_i)$ می‌نامیم .

اگر X^i مؤلفه های بردار ناهمگرد $\mathbf{X}$ نسبت به مبنای $(\mathbf{e}_i)$ و $\mathbf{Y}$ برداری همگرد باشد مطابق (۲۴-۲) داریم :

$$Y(\mathbf{X}) = Y(X^i \mathbf{e}_i) = X^i Y(\mathbf{e}_i) \qquad (۲٤-۵)$$

اگر n عدد Y_i را با رابطهٔ :

$$Y_i = Y(\mathbf{e}_i) \qquad (۱٤-٦)$$

تعریف کنیم ، خواهیم داشت :

$$Y(\mathbf{X}) = X^i Y_i \qquad (۲٤-۷)$$

از طرفی میدانیم که یک تابع خطی با مقدار حقیقی که برداری مانند $\mathbf{X}$ از V را به i امین مؤلفه‌اش نسبت به یک مبنای $(\mathbf{e}_i)$ تحویل میکند برداری است همگرد که به $\mathbf{e}^i$ نشان میدهیم و فرض میکنیم خواص زیر را دارا باشد :

$$\mathbf{e}^i(\mathbf{X}) = X^i \qquad (۲٤-۸)$$

$$\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j \qquad (۲٤-۹)$$

از مقایسهٔ (۲٤-۷) و (۲٤-۸)نتیجه میگیریم که بازاء هربردارناهمگرد $\mathbf{X}$ داریم:

$$Y(\mathbf{X}) = Y_i \mathbf{e}^i(\mathbf{X}) \qquad (۲٤-۱۰)$$

در نتیجه :

$$\mathbf{Y} = Y_i \mathbf{e}^i \qquad (۲٤-۱۱)$$

پس بدین ترتیب توانستیم یک بردارهمگرد اختیاری $\mathbf{Y}$ را بطورخطی بوسیلهٔ ترکیبی از n بردار $\mathbf{e}^i$ بیان کنیم . حال گوئیم $\mathbf{e}^i$ ها بطور خطی مستقلند (§۷) . زیرا اگر بطور خطی مستقل نباشند باید بتوانیم بنویسیم :

$$\lambda_i \mathbf{e}^i = \mathbf{o} \qquad (۲٤-۱۲)$$

لذا باید هرتابعی مانند $\mathbf{e}_j$ رابطهٔ (۲٤-۱۲) را به صفر تحویل کند یعنی :

$$\mathbf{e}_j(\lambda_i \mathbf{e}^i) = \delta^i_j \lambda_i = \lambda_j = o \qquad (۲٤-۱۳)$$

یعنی باید داشته باشیم :

$$\lambda_۱ = \lambda_۲ = \cdots = \lambda_n = o$$

ودرنتیجه $\mathbf{e}^i$ هاباید الزاماً بطورخطی‌مستقل باشندوطبق قضایای (۳-§۷)بردارهای

$\mathbf{e}^i$ تشکیل مبنائی برای V^* بدهند . میدانیم که در اینصورت فضای V^* هم n بُعدی است [۱] و این خاصیت را بانماد $\dim V^* = n$ نشان میدهیم و میخوانیم : بعد V^* برابر n است .

اما در رابطهٔ (۹-۲-۸) دیدیم که بردارهای $\mathbf{e}_i$ هنگام تبدیل طبق فورمول زیر تبدیل میشوند :

$$\mathbf{e}_{i'} = p^i_{i'}\mathbf{e}_i \qquad (۲۴-۱۴)$$

حال فرض میکنیم $\mathbf{e}^i$ ها در فضای متقابل طبق فورمول زیر تبدیل شوند :

$$\mathbf{e}^{i'} = q^{i'}_i\mathbf{e}^i \qquad (۲۴-۱۵)$$

پس میتوانیم بنویسیم :

$$\delta^{i'}_{j'} = e^{i'}(\mathbf{e}_{j'}) = q^{i'}_i e^i(p^j_{j'}\mathbf{e}_j) = q^{i'}_i p^j_{j'} \delta^i_j = q^{i'}_i p^i_{j'}$$

از ضرب طرفین این رابطه در $p^{j'}_k$ داریم :

$$\delta^{i'}_{j'} p^{j'}_k = q^{i'}_i p^i_{j'} p^{j'}_k$$

و یا :

$$p^{i'}_k = q^{i'}_k$$

یعنی :

$$\mathbf{e}^{i'} = p^{i'}_i\mathbf{e}^i$$

که همان فورمول (۱۰-۱۷) است .

باید بدانیم که کلیهٔ فضاهای برداری n بُعدی، بخصوص V و V^* ایزومورف [۲] هستند . از آن گذشته بعضی از فضاهای برداری که بعداً خواهیم دید با یک ایزومورفیسم طبیعی که شرط دقیقتری است بهم مربوط میشوند .

۱- به [۱۱] مراجعه شود .

۲- به [۱۱] و مقدمهٔ همین کتاب مراجعه شود .

۱ - ۲٤ - **ضرب‌تانسوری فضاها** ـ فرض میکنیم V و W فضاهائی برداری بترتیب بابعاد n و m باشد. جمع مستقیم V و W مطابق تعریف،فضائی‌است برداری بابعاد $(m+n)$ که معمولاً با $V \dotplus W$ یا $V \oplus W$ نشان داده میشود. هریک ازعناصر $V \oplus W$ ازیک زوج بردار مرتب $(\mathbf{a}\ ,\ \mathbf{X})$ که $\mathbf{a}$ به V و $\mathbf{X}$ به W متعلق میباشد درست شده است. عملیات جمع بردارها وضرب بردار دریک عدد، روی $V \oplus W$ طبق تعریف بطریق زیرصورت میگیرد:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&(\mathbf{a}\ ,\ \mathbf{X})+(\mathbf{b}\ ,\ \mathbf{Y})=(\mathbf{a}+\mathbf{b}\ ,\ \mathbf{X}+\mathbf{Y})\\
&\alpha(\mathbf{a}\ ,\ \mathbf{X})=(\alpha\mathbf{a}\ ,\ \alpha\mathbf{X})
\end{aligned}
\right.
\tag{۲٤—۱٦}
$$

حال میخواهیم بگوئیم که میتوان‌به دوفضای برداری V و W یک فضای‌برداری دیگری بابعاد mn بنام **حاصلضرب تانسوری** V و W که با $V \otimes W$ **نشانداده** میشود مربوط کرد.

قبل‌ازتعریف $V \otimes W$ لازمست معنای یک تابع **دوخطی**(۱) راکه مقدارش روی حاصلضرب دکارتی دو فضای برداری، حقیقی تعریف شده است ذکر کنیم.

فرض میکنیم A و U دوفضای برداری و $A \times U$ حاصلضرب دکارتی آنها (مجموعهٔ بردارهای زوج مرتبی نظیر $(\mathbf{a}\ ,\ \mathbf{X})$ که $\mathbf{a}$ به A و $\mathbf{X}$ به U متعلق است) باشد. ما دراینجا عناصر $A \times U$ را با عناصر جمع مستقیم یعنی $A \oplus U$ متحد میگیریم و همین علامت $A \times U$ را بجای جمع مستقیم بکار می‌بریم زیرا در اینحال عناصر فقط بعنوان اعضای یک مجموعه درنظرگرفته میشود وساختمان برداری درآنها بکار نمیرود. طبق تعریف وقتی $\mathbf{T}$ را یک تابع دو خطی با مقدار حقیقی روی $A \times U$ میخوانیم که شرایط زیر را دارا باشد:

$$
T(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}\ ,\ \mathbf{Y})=\alpha T(\mathbf{a}\ ,\ \mathbf{Y})+\beta T(\mathbf{b}\ ,\ \mathbf{Y}) \tag{۲٤—۱۷}
$$

$$
T(\mathbf{a}\ ,\ \alpha\mathbf{Y}+\beta\mathbf{Z})=\alpha T(\mathbf{a}\ ,\ \mathbf{Y})+\beta T(\mathbf{a}\ ,\ \mathbf{Z}) \tag{۲٤—۱۸}
$$

۱– Bilinear Function

که درآنها بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ به A و $\mathbf{Y}$ و $\mathbf{Z}$ به U متعلق و α و β اعداد حقیقی است.

حال به فضاهای مفروض V و W برمیگردیم وآن توابعی دو خطی را که روی $V^* \times W^*$ یعنی روی حاصلضرب دکارتی فضاهای متقابل V و W تعریف شده‌استدرنظرمیگیریم. اگر $\mathbf{Q}$ و $\mathbf{R}$ چنین توابعی باشد مطابق تعریف،مجموع $\mathbf{Q}+\mathbf{R}$ تابعی است دوخطی مانند $\mathbf{T}$ که در رابطهٔ:

$$T(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y}) = Q(\mathbf{X}\ ;\ \mathbf{Y}) + R(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y}) \qquad (۲۴-۱۹)$$

وحاصلضرب $\mathbf{Q}$ دریک عدد α تابعی است‌دوخطی نظیر $\mathbf{S}$ که دررابطهٔ زیرصدق میکند:

$$S(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y}) = \alpha Q(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y}) \qquad (۲۴-۲۰)$$

قبلاً دیده‌ایم که باداشتن همین دوقانون،مجموعهٔ توابع‌دوخطی که مقدار آنهاروی $V^* \times W^*$ حقیقی است ، فضائی برداری روی اعداد حقیقی تشکیل میدهد. این فضای برداری به **حاصلضرب تانسوری** V و W موسوم استوبه $V \otimes W$ نشان داده میشود. باید توجه کنیم که درتعریف‌حاصلضرب تانسوری V و W ، توابع دو خطی با مقادیر حقیقی روی حاصلضرب دکارتی فضاهای متقابل V^* و W^* تعریف شده‌اند **نه روی حاصلضرب دکارتی فضاهای** V و W .

فرض میکنیم $\mathbf{e}^i$ $(i=۱\ ,\ ۲\ ,\ \ldots\ ,n)$ مبنای V^* متقابل مبنای $(\mathbf{e}_i)$ از V و $\mathbf{e}^\alpha$ $(\alpha=۱\ ,\ ۲\ ,\ \ldots\ ,\ m)$ مبنای W^* متقابل مبنای $(\mathbf{e}_\alpha)$ از W باشد. میخواهیم ثابت کنیم که‌این دومبنا یک مبنای منحصری را برای‌حاصلضرب‌تانسوری $V \otimes W$ میسازند.

فرض میکنیم $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ بترتیب‌دوبرداراختیاری‌از V^* و W^* باشدپس‌داریم:

$$\mathbf{X} = X_i\,\mathbf{e}^i \quad \text{و} \quad \mathbf{Y} = Y_\alpha \mathbf{e}^\alpha$$

$$i = ۱\ ,\ ۲\ ,\ \ldots\ ,\ n \quad \text{و} \quad \alpha = ۱\ ,\ ۲\ ,\ \ldots\ ,\ m$$

اگر $\mathbf{T}$ عنصری از $V \otimes W$ باشد داریم:

$$T(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y}) = T(X_i\,\mathbf{e}^i\ ,\ Y_\alpha \mathbf{e}^\alpha) = X_i Y_\alpha T(\mathbf{e}^i\ ,\ \mathbf{e}^\alpha) \qquad (۲۴-۲۱)$$

اگر بگیریم $T^{i\alpha} = T(\mathbf{e}^i\ ,\ \mathbf{e}^\alpha)$ میتوانیم بنویسیم :

$$T(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y}) = T^{i\alpha} X_i Y_\alpha \qquad (۲۴-۲۲)$$

طبق تعریف قبلی تابعی که یک زوج بردار مرتب $(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y})$ را به عدد حقیقی $X_i Y_\alpha$ تحویل میکند تابعی است دوخطی با مقدار حقیقی که به $\mathbf{e}_{i\alpha}$ نمایش میدهیم. پس $\mathbf{e}_{i\alpha}$ مقدار $(\mathbf{e}^j\ ,\ \mathbf{e}^\beta)$ را به عدد $\delta^\beta_\alpha\,\delta^j_i$ تبدیل میکند یعنی :

$$e_{i\alpha}(\mathbf{e}^j\ ,\ \mathbf{e}^\beta) = \delta^j_i\,\delta^\beta_\alpha \qquad (۲۴-۲۳)$$

بنابراین رابطهٔ (۲۴-۲۲) را میتوانیم بصورت زیر بنویسیم :

$$\begin{aligned} T(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y}) &= T^{i\alpha}(\delta^j_i X_j)\ (\delta^\beta_\alpha Y_\beta) = T^{i\alpha}(\delta^j_i\,\delta^\beta_\alpha) X_j Y_\beta \\ &= T^{i\alpha} e_{i\alpha}(\mathbf{e}^j\ ,\ \mathbf{e}^\beta) X_j Y_\beta = T^{i\alpha} e_{i\alpha}(X_j\,\mathbf{e}^j\ ,\ Y_\beta \mathbf{e}^\beta) \\ &= T^{i\alpha} e_{i\alpha}(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y}) \end{aligned}$$

چون این رابطه برای هرزوج بردار دلخواه $(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y})$ صادق است لذا داریم :

$$\mathbf{T} = T^{i\alpha}\mathbf{e}_{i\alpha} \quad i = ۱\,,۲\,,\ldots,n \ \text{و}\ \alpha = ۱\,,۲\,,\ldots,m \qquad (۲۴-۲۴)$$

یعنی هرعنصر $V \otimes W$ با یک ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{e}_{i\alpha}$ قابل بیان است.

حال گوئیم $\mathbf{e}_{i\alpha}$ ها بطور خطی مستقلند . چه درغیر اینصورت باید بازاء بعضی ضرائب غیرصفر $\lambda^{i\alpha}$ داشته باشیم $\lambda^{i\alpha}\mathbf{e}_{i\alpha} = \mathbf{o}$ یعنی باید بازاء جمیع مقادیر $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ داشته باشیم : $\lambda^{i\alpha} e_{i\alpha}(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y}) = o$ ویاباالاخص $\lambda^{i\alpha} e_{i\alpha}(\mathbf{e}^j\ ,\ \mathbf{e}^\beta) = o$ و یا بالاخره :

$$\lambda^{i\alpha}\,\delta^j_i\,\delta^\beta_\alpha = \lambda^{j\beta} = o \qquad (۲۴-۲۵)$$

یعنی $\lambda^{j\beta}$ ها باید همه صفر و در نتیجه بردارهای $\mathbf{e}_{i\alpha}$ بطور خطی مستقل باشند .

لذا باتوجه به‌قضایای (۳ — ۷ §) بردارهای $e_{i\alpha}$ تشکیل مبنائی بصورت $(e_{i\alpha})$ میدهند . بعلاوه $dim(V \otimes W) = mn$ است [۱] .

اگر X^i مؤلفه‌های X نسبت به (e_i) و Y^α مؤلفه‌های Y نسبت به (e_α) باشد طبق تعریف ، حاصلضرب تانسوری X و Y که با $X \otimes Y$ نشان داده میشودآن عنصری است‌از $V \otimes W$ که مؤلفه هایش نسبت‌به مبنای $(e_{i\alpha})$ مقدار $X^i Y^\alpha$ باشد . یعنی :

$$X \otimes Y = X^i Y^\alpha e_{i\alpha} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \text{ و } \alpha = 1, 2, \ldots, m$$

هرعنصری‌بصورت $X \otimes Y$ از $V \otimes W$ را عنصرتجزیه پذیرمینامند. بالاخص بردارهای‌مبنای $e_{i\alpha}$ تجزیه‌پذیرندزیرا که میتوانیم بنویسیم: $e_{i\alpha} = e_i \otimes e_\alpha$

و چون هرعنصر $V \otimes W$ با یک ترکیب خطی از بردارهای مبنا قابل بیان‌است نتیجه میگیریم که : **هرعنصر $V \otimes W$ بصورت ترکیبی خطی از عناصر تجزیه پذیر قابل بیان است .**

فرض میکنیم L تحویلی خطی [۲] از V^* به W باشد یعنی تابعی خطی که روی V^* تعریف شده ومقادیرآن بردارهائی است در W . پس بازاء جمیع بردارهای a^* و b^* از V^* و اعداد حقیقی α و β داریم :

$$L(\alpha a^* + \beta b^*) = \alpha L(a^*) + \beta L(b^*) \qquad (۲۴ — ۲۶)$$

طبق تعریف ، مجموع دوچنین تابع خطی L و M تابعی است خطی نظیر N که بازاء جمیع مقادیر a^* از V^* در رابطهٔ :

$$N(a^*) = L(a^*) + M(a^*) \qquad (۲۴ — ۲۷)$$

۱– مراجعه به [۱۱] .

۲– Linear Mapping

و حاصلضرب $\mathbf{L}$ در عدد حقیقی α تابعی است خطی مثل $\mathbf{P}$ که در رابطهٔ زیر صدق میکنند :

$$P(\mathbf{a}^*)=\alpha L(\mathbf{a}^*) \tag{۲۴—۲۸}$$

میدانیم که با این قوانین ترکیبی مجموعهٔ تمام تحویلات خطی V^* به W یک فضای برداری تشکیل میدهند که با $\mathcal{L}(V^*, W)$ نشان داده میشود . اکنون گوئیم که فضاهای برداری $V\otimes W$ و $\mathcal{L}(V^*, W)$ بطور طبیعی ایزومورف هستند و یک تحویل دو خطی با مقدار حقیقی از $V^*\times W^*$ ، یک تحویل خطی از V^* به W را مشخص میسازد و بالعکس .

هرعنصر $\mathbf{T}$ از $V\otimes W$ را نسبت به مبناهای $(\mathbf{e}_i)$ از V و $(\mathbf{e}_\alpha)$ از W بصورت :

$$\mathbf{T}=T^{i\alpha}\,\mathbf{e}_{i\alpha} \tag{۲۴—۲۹}$$

که در آن $T^{i\alpha}$ ها بطور منحصری تعیین شده است میتوانیم بنویسیم . فرض میکنیم X_i مؤلفه های $\mathbf{X}^*$ از V^* نسبت به مبنای $(\mathbf{e}^i)$ و Y^α مؤلفه های بردار $\mathbf{Y}$ از W نسبت به $(\mathbf{e}_\alpha)$ باشد . پس رابطهٔ $Y^\alpha=T^{i\alpha}X_i$ تحویلی است خطی و منحصر از V^* به W . بالعکس هرتحویل خطی از V^* به W نسبت به مبنای $(\mathbf{e}^i)$ و $(\mathbf{e}_\alpha)$ بطورمنحصری بوسیلهٔ $T^{i\alpha}$ معین میشود واین ضرائب عنصرواحدی از $V\otimes W$ راکه بوسیلهٔ (۲۴-۲۹) داده شده است مشخص میسازند . ثابت میشود [1] که این ارتباط مابین $V\otimes W$ و $\mathcal{L}(V^*, W)$ یک **ایزومورفیسم طبیعی یعنی مستقل ازمبناهای مخصوص در** V یا W **است**. ما ازاین ایزومورفیسم در فصول بعد استفاده خواهیم کرد .

بعضی اوقات مناسبتر اینست که بجای اینکه یک عنصر از $V\otimes W$ را

۱— مراجعه به [۱۱] .

بعنوان یک **تحویل دو خطی** از $V^* \otimes W^*$ به اعداد حقیقی بگیریم، آنرا یک **تحویل خطی** از V^* به W بگیریم .

فرض میکنیم V و W و μ بترتیب سه فضای برداری با مبناهای (e_i) و (e_α) و (e_A) باشد . میخواهیم ثابت کنیم که دوفضای برداری $(V \otimes W) \otimes \mu$ و $V \otimes (W \otimes \mu)$ بطور طبیعی ایزومورف هستند .

از آنچه که قبلاً گفتیم نتیجه میشود که هرعنصر از $(V \otimes W) \otimes \mu$ قابل بیان بصورت زیر است :

$$T^{i\alpha A}(e_i \otimes e_\alpha) \otimes e_A \qquad (۲۴—۳۰)$$

چون ضرائب $T^{i\alpha A}$ منحصراً تعیین شده است پس میتوانیم بردار $T^{i\alpha A} e_i \otimes (e_\alpha \otimes e_A)$ را در $V \otimes (W \otimes \mu)$ بآن مربوط سازیم . بالعکس هرعنصر از $V \otimes (W \otimes \mu)$ یک عنصر واحدی از $(V \otimes W) \otimes \mu$ را مشخص میکند و روشن است که این ارتباط یک ایزومورفیسم طبیعی است . بنابراین اگر این دو فضای برداری متحد گرفته شده وبصورت $V \otimes W \otimes \mu$ نشان داده شود هیچگونه ابهامی بوجود نمی‌آید .

حال ثابت میکنیم که فضای $V \otimes W \otimes \mu$ بطور طبیعی بافضای برداری ثالثی که عناصرآن توابعی سه خطی هستند ایزومورف میباشد . یک تابع ازچند متغیروقتی **چند خطی** خوانده میشود که اگرتمام عناصررا باستثنای یک عنصرثابت نگهداریم این تابع نسبت بآن عنصر **یک خطی** باشد . درواقع مجموعهٔ تمام توابع سه خطی که با مقدارحقیقی روی حاصلضرب دکارتی $V^* \times W^* \times \mu^*$ تعریف شده‌اند تشکیل یک فضای برداری میدهند که بطور طبیعی با $V \otimes W \otimes \mu$ ایزومورف هستند . اگر $\mathbf{S}$ و $\mathbf{T}$ دوتابع سه خطی تعریف شده روی $V^* \times W^* \times \mu^*$ باشد مطابق تعریف، مجموع این دوتابع یعنی $\mathbf{S}+\mathbf{T}$ تابعی است سه خطی مانند $\mathbf{U}$ که بازاء جمیع

مقادیر $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ و $\mathbf{Z}$ بترتیب متعلق به V^* و W^* و μ^* دررابطهٔ زیرصدق کند:

$$U(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})=S(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})+T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \tag{۲۴—۳۱}$$

و همچنین حاصلضرب $\mathbf{S}$ درعدد حقیقی α یعنی $\alpha\mathbf{S}$ طبق تعریف تابعی‌است سه‌خطی مانند $\mathbf{R}$ که در رابطهٔ زیر صدق نماید :

$$R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})=\alpha S(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \tag{۲۴—۳۲}$$

دیده‌ایم که بااین قوانین ترکیب مجموعهٔ توابع سه خطی روی $V^*\times W^*\times\mu^*$ یک فضای برداری تشکیل میدهد . تابعی سه خطی که عنصر سه‌تائی $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ را به حاصلضرب سه مؤلفه‌شان یعنی $X_i Y_\alpha Z_A$ تحویل میکند به $\mathbf{e}_{i\alpha A}$ نشان داده میشود . این تابع عنصر سه‌تائی $(\mathbf{e}^j, \mathbf{e}^\beta, \mathbf{e}^B)$ را به عدد $\delta_i^j\,\delta_\alpha^\beta\,\delta_A^B$ تحویل میکند . یعنی :

$$e_{i\alpha A}(\mathbf{e}^j, \mathbf{e}^\beta, \mathbf{e}^B)=\delta_i^j\,\delta_\alpha^\beta\,\delta_A^B \tag{۲۴—۳۳}$$

اگر $\mathbf{T}$ تابعی سه خطی باشد داریم :

$$\begin{aligned}T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})&=T(X_i\mathbf{e}^i, Y_\alpha\mathbf{e}^\alpha, Z_A\mathbf{e}^A)\\&=X_i Y_\alpha Z_A T(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^\alpha, \mathbf{e}^A)\end{aligned}$$

و اگر مقدار $T(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^\alpha, \mathbf{e}^A)$ را به $T^{i\alpha A}$ نشان دهیم داریم :

$$\begin{aligned}T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})&=T^{i\alpha A}X_i Y_\alpha Z_A=T^{i\alpha A}\delta_i^j X_j\,\delta_\alpha^\beta Y_\beta\,\delta_A^B Z_B\\&=T^{i\alpha A}(\delta_i^j\,\delta_\alpha^\beta\,\delta_A^B)X_j Y_\beta Z_B=T^{i\alpha A}e_{i\alpha A}(\mathbf{e}^j, \mathbf{e}^\beta, \mathbf{e}^B)X_j Y_\beta Z_B\\&=T^{i\alpha A}e_{i\alpha A}(X_j\mathbf{e}^j, Y_\beta\mathbf{e}^\beta, Z_B\mathbf{e}^B)=T^{i\alpha A}e_{i\alpha A}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})\end{aligned}$$

پس :

$$\mathbf{T}=T^{i\alpha A}\mathbf{e}_{i\alpha A} \tag{۲۴—۳۴}$$

بهمان نحوی که برای توابع دوخطی $\mathbf{e}_{i\alpha}$ دیدیم ثابت میشود که بردارهای $\mathbf{e}_{i\alpha A}$

بطورخطی مستقلند وچون هر T بصورت ترکیبی خطی ازاین توابع قابل بیان است لذا توابع $e_{i\alpha A}$ مبنائی را برای فضای برداری تشکیل میدهند.

ایزومورفیسم طبیعی بین این فضای برداری و فضای $V \otimes W \otimes \mu$ بسهولت با ارتباط دادن $T^{i\alpha A} e_{i\alpha A}$ از فضای اول به عنصر $T^{i\alpha A} e_i \otimes e_\alpha \otimes e_A$ از فضای دوم بدست میآید.

بهمین ترتیب میتوان نشان داد که مجموعهٔ تمام توابع چند خطی با مقدار حقیقی [1] روی $U_1^* \times U_2^* \times \ldots \times U_p^*$ تشکیل فضائی را میدهند که با حاصلضرب تانسوری $U_1 \otimes U_2 \otimes \cdots \otimes U_p$ بطور طبیعی ایزومورف هستند.

حال با این مقدمات میتوانیم تانسوررا تعریف کنیم: **اگرفضاهای V و V^* را چندین بار بطور تانسوری درهم ضرب کنیم عناصر فضاهای برداری حاصل را تانسورمیگوئیم.** یا بعبارت دیگر: **تانسور ساختمانی است جبری که به یک فضای برداری مجردی وابسته است.** اگر V^1 را فضای برداری ناهمگرد V بگیریم عناصر فضائی که از r بار حاصلضرب تانسوری V^1 بدست آمده است و به V^r نشان داده میشود **تانسورهای ناهمگرد از مرتبهٔ (بظرفیت) r نامیده میشود.** همچنین اگر V_1 را همان فضای بردارهای همگرد V^* بگیریم عناصر فضائی که از s بار حاصلضرب تانسوری V_1 بدست میآید و به V_s نشانداده میشود **تانسورهای همگرد ازمرتبهٔ s** نامند. هرعنصر از فضای $V^r \otimes V_s$ به تانسور مرتبهٔ $(r+s)$ ، r **بار ناهمگرد و s بارهمگرد ویاتانسوری از نوع (r, s) موسوم است.** بعضی‌اوقات $V^r \otimes V_s$ را بصورت V_s^r نشان میدهند.

بااستفاده از ایزومورفیسم طبیعی بین تانسورها و توابع چند خطی با مقدار حقیقی، میتوانیم یک تانسورازنوع (r, s) را بنحودیگری تعریف کنیم وبگوئیم

۱- Real - valued

این تانسور تابعی است چند خطی بامقدار حقیقی روی حاصلضرب دکارتی :

$$\overbrace{(V_1\times V_1\times\ldots\times V_1)}^{r}\times\overbrace{(V^1\times V^1\times\ldots\times V^1)}^{s}$$

که پرانتز اول r و پرانتز دوم s عامل دارد .

بخصوص باید توجه کنیم که یک تانسورازنوع $(r\ ,\ s)$ یا بصورت عنصری از **حاصلضرب تانسوری** r فضای V^1 و s فضای V_1 ویا یکتابع چند خطی بامقدار حقیقی روی **حاصلضرب دکارتی** s فضای V^1 و r فضای V_1 بدست میآید .

هرمبنای $(\mathbf{e}_i)$ از V^1 یک مبنای $(\mathbf{e}_{i_1 i_2})$ از V^2 را مشخص میسازد. وچون هرعنصری مانند $\mathbf{T}$ از V^2 بطور منحصری بصورت :

$$\mathbf{T}=T^{i_1 i_2}\ \mathbf{e}_{i_1 i_2} \qquad (۲۴-۳۵)$$

نوشته میشود اعداد $T^{i_1 i_2}$ **را مؤلفه‌های $\mathbf{T}$ نسبت به مبنای $(\mathbf{e}_i)$ از V^1 گویند .**

هرمبنای $(\mathbf{e}_i)$ از V^1 یک مبنای متقابل $\mathbf{e}^j$ از V_1 ودرنتیجه مبنای منحصر $\left(\mathbf{e}_{i_1}^{j_1}\right)$ از V_1^1 را مشخص میکند و چون هرعنصر V_1^1 بطور منحصری بصورت :

$$\mathbf{T}=T_{j_1}^{i_1}\,\mathbf{e}_{i_1}^{j_1} \qquad (۲۴-۳۶)$$

بیان میشود اعداد $T_{j_1}^{i_1}$ را : **مؤلفه‌های $\mathbf{T}$ نسبت به مبنای $(\mathbf{e}_i)$ از V^1 گویند .**

همچنین هرمبنای $(\mathbf{e}_i)$ از V^1 یک مبنای $(\mathbf{e}^{j_1 j_2})$ را در V_2 مشخص میسازد وچون هرعنصر V_2 بطور منحصری بصورت:

$$\mathbf{T}=T_{j_1 j_2}\ \mathbf{e}^{j_1 j_2}$$

نوشته میشود ، اعداد $T_{j_1 j_2}$ **مؤلفه‌های $\mathbf{T}$ نسبت به مبنای $(\mathbf{e}_i)$ از V^1** نامیده

میشود . و خلاصه یک مبنای $(\mathbf{e}_i)$ بطور منحصری یک مبنای $\mathbf{e}^{j_1 j_2 \cdots j_s}_{i_1 i_2 \cdots i_r}$ رادر V^r_s مشخص میسازد و چون هرعنصر از V^r_s بطور منحصری بصورت :

$$\mathbf{T} = T^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s} \mathbf{e}^{j_1 j_2 \cdots j_s}_{i_1 i_2 \cdots i_r} \qquad (۲٤ - ۳۷)$$

نوشته میشود اعداد $T^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s}$ **مؤلفه‌های T نسبت به مبنای $(\mathbf{e}_i)$** از V^1 نامیده میشود .

تبصره : این نحوهٔ بیان برای معرفی تانسورها وفورمولهای حاصله ، بالاخص (۳۷ - ۲٤) باز نشان میدهد که ساده‌ترین تعاریف برای تانسورها همان تعریف **بورباکی** است که قبلاً ذکر کردیم : **تانسور تابعی است چند خطی ازامتدادها.**

۳ - ۲٤ - **تعریف ذاتی ادغام** : با تعریفی که از حاصلضرب تانسوری فضاها کرده‌ایم میتوانیم عمل ادغام را بطورذاتی تعریف کنیم . برای این منظورساده‌تر است عمل را برای تانسورهای تجزیه پذیریعنی تانسورهائی که بصورت‌حاصلضرب تانسوری مکرر بردارهای همگرد ونا همگرد قابل بیان هستند ذکر کنیم .

فرض کنیم تانسور تجزیه پذیری‌ازنوع (r , s) بصورت‌حاصلضرب‌تانسوری r بردار ناهمگرد $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ و $\mathbf{Z}$ و ... و $\mathbf{R}$ و s بردارهمگرد $\mathbf{a}$ و$\mathbf{b}$ و$\mathbf{c}$ و... و $\mathbf{h}$ بیان شده باشد ؛ یعنی داشته باشیم :

$$T = X \otimes Y \otimes Z \otimes \cdots \otimes R \otimes a \otimes b \otimes c \otimes \cdots \otimes h$$

پس تانسوریکه مثلاً ازادغام دومین بردارناهمگرد با نخستین بردارهمگرد حاصل شده است طبق تعریف خواهد بود :

$$S = a(Y) X \otimes Z \otimes \cdots \otimes R \otimes b \otimes c \otimes \cdots \otimes h$$

بدیهی است این معادله معرف تانسوری است ازنوع $(r-1 , s-1)$. لذا دیگر لزومی ندارد که ثابت کنیم **S یک تانسور است** . چون هرتانسور V^r_s قابل بیان

بصورت‌ترکیبی خطی ازتانسورهای تجزیه پذیر است وادغام نیز عملی است‌خطی، نتیجه میگیریم که این‌تعریف‌ذاتی ازعمل ادغام ممکنست برای تانسورهای‌دلخواه نیز تعمیم داده شود . دراینصورت ادغامی که نسبت به دومین بردار ناهمگرد و نخستین بردار همگرد صورت میگیرد،به ادغام نسبت به دومین اندیس ناهمگردی ونخستین اندیس همگردی مربوط میشود .

فصل چهارم

آنالیز تانسوری در فضای برداری اقلیدسی

۰ ۲- مقدمه : این مبحث به مسائل دقیقتر محاسبات تانسوری و بالاخص تعمیم تعریف مشتقات جزئی و دیفرانسیل کلی [۱] در فضای n بُعدی اقلیدسی و همچنین به مفاهیم جدیدی مثل مشتق ـ همگرد و دیفرانسیل مطلق که نقش آنها در آنالیز تانسوری بسیار مهم است اختصاص داده شده . بعلاوه بعضی نکاتی که در محاسبات برداری چندان روشن نبود و یا بعنوان حالات خاص ذکر می‌شد دقیقتر مورد بررسی قرار گرفته است. ضمناً کمیت اندیس‌داری را بنام «نماد کریستوفل» [۲] که تانسور نیست ولی بکمک آن میتوان تمام تغییرات بینهایت کوچک یک تانسور را از هرمرتبه و معرف هرموجود فیزیکی که باشد ، در فضای اقلیدسی بشکل کلی‌تری نوشت در اینجا معرفی نموده‌ایم. خلاصه در اینجا از آنالیز تانسوری که سروکارش با مطالعهٔ موجودات مجردی است بنام تانسور که خواصشان از دستگاه مختصاتی که برای بیان آنها بکار میرود مستقل میباشد بطور تفصیل صحبت کرده‌ایم .

این مطلب را یادآوری میکنیم که آنالیز تانسوری یک ابزار ایده‌آلی وارزنده‌ای برای مطالعهٔ قوانین طبیعت است. زیرا اگرچه پیدا کردن قوانین اساسی یکدستگاه فیزیکی صرفاً از روی یک بررسی ریاضی از قبیل نظریهٔ تانسورها غیر ممکنست ولی نظریهٔ تانسورها دو خدمت اساسی برای فیزیکدانها انجام میدهد:

۱- بسیاری از مشخصات اصلی دستگاههای فیزیکی از قبیل عزم ، فشار وکشش در اجسام کشسا و غیره را بنحوخاصی توسط تانسورها نمایش میدهد.

۱- Differential Total ۲- Christoffel symbol

۲- ساده‌ترین روابط اساسی در اجسام کشسا و مایعات لزج را بطور دقیقی معین میکنند.

۶ ۲- مسئلهٔ اساسی آنالیز تانسوری : فرض میکنیم $y=f(x)$ یک تابع حقیقی یکمقداری [1] از متغیر x در مجاورت نقطهٔ x باشد. درآنالیز دیده‌ایم که **مشتق** یا **ضریب‌دیفرانسیل** این تابع نسبت به x درصورت موجود بودن با رابطهٔ :

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{۲۶-۱}$$

$$=\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)=f'(x)$$

تعریف و اگرمشتق از طرف راست باشد به $f'_{+}(x)$ و اگر مشتق از سمت چپ‌باشد به $f'_{-}(x)$ نموده میشود.

وهمچنین اگر $F(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ تابع‌حقیقی یکمقداری از متغیرهای حقیقی x^1 و x^2 و ... و x^n در مجاورت نقطهٔ $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ باشد مشتق جزئی آن نسبت به x^1 درصورت موجود بودن با عبارت زیر تعریف میشود:

$$\lim_{\Delta x^1\to 0}\frac{F(x^1+\Delta x^1, x^2, \ldots, x^n)-F(x^1, x^2, \ldots, x^n)}{\Delta x^1} \tag{۲۶-۲}$$

$$=\frac{\partial F(x^1, x^2, \ldots, x^n)}{\partial x^1}=\frac{\partial F}{\partial x^1}=\partial_1 F$$

حال تعریف مشتق‌جزئی نسبت‌بیک متغیررا برای یک تانسور (بعبارت دقیقتر برای مؤلفه‌های یک تانسور) تعمیم میدهیم و میخواهیم به بینیم که آیا مشتق جزئی بدست‌آمده هم بنوبهٔ خود مؤلفه‌های یک تانسورهست یانه. این مسئله، مسئلهٔ‌اساسی آنالیز تانسوری است.

۱- Single - valued

فرض میکنیم بخواهیم مشتق جزئی یک تانسور از نوع $(0\ ,\ 1)$ بمؤلفه های $\lambda^j(x^1\ ,\ x^2\ ,\ \dots\ ,\ x^n)$ را نسبت بیکی از مختصات (متغیرها) مثلاً x^k بدست آوریم (نتیجهٔ حاصله را بعداً برای یک تانسورازنوع غیرمشخص هم تعمیم خواهیم داد) . داریم :

$$\frac{\partial\lambda^j}{\partial x^k} \equiv \partial_k\lambda^j \tag{۲۶—۳}$$

$$\equiv \underset{\Delta x^k\to 0}{\text{حد}} \frac{\lambda^j(x^1\ ,x^2\ ,\dots ,x^k+\Delta x^k,\dots ,x^n) - \lambda^j(x^1\ ,x^2\ ,\dots ,x^k,\dots ,x^n)}{\Delta x^k}$$

به بینیم آیا میتوانیم بگوئیم که چنین حدی معرف تانسوری درهمان فضای تانسور λ^j است یانه ؟ قبل از جواب دادن باین سؤال فرض میکنیم که n مؤلفهٔ λ^j که میدانی تانسوری دراین فضا تشکیل میدهند بطورپیوسته دیفرانسیل پذیر باشند.

تبصرهٔ مهمی راکه درآخر (۱۲§) ذکرکرده بودیم دوباره یادآور میشویم :

هرتفاضلی نظیر :

$$\lambda^j(x^1\ ,\ x^2\ ,\ \dots\ ,\ x^k+\Delta x^k\ ,\ \dots\ ,\ x^n) - \lambda^j(x^1\ ,\ x^2\ ,\ \dots\ ,\ x^k\ ,\ \dots\ ,\ x^n) \tag{۲۶—٤}$$

درفضائی که دستگاههای مختصات آن میتوانند، هم مستقیم الخط وهم منحنی الخط باشد **یک تانسورنیست.** نشان میدهیم که درحالت کلی مشتقات (۳-۲٦ ۲) نمیتوانندتانسور باشند ولی نوع جدیدی از مشتق بنام «مشتق ـ همگرد» [1] وجود دارد که تانسور است و بنوع محورهای مختصات در فضای مفروض بستگی ندارد .

۲۷ـ فرض میکنیم درفضائی n بُعدی باشیم . دستگاه مختصات منحنی الخط $(x^1\ ,\ x^2\ ,\ \dots\ ,\ x^n)$ را با n بردار مبنای $(\mathbf{e}_i)$ که طول آنها درهرنقطه تغییر میکند و بالمآل در هرنقطه دستگاه متغیری بوجود میآورد درنظر میگیریم . دراین فضا برداری مانند λ بمؤلفه های $\lambda^i(x^1\ ,\ x^2\ ,\ \dots\ ,\ x^n)$ نسبت به دستگاه محلی $(\mathbf{e}_i)$ انتخاب میکنیم. پس داریم :

۱ـ Covariant derivative

$$\boldsymbol{\lambda}=\lambda^i \mathbf{e}_i \tag{۲۷—۱}$$

اگر از نقطهٔ $M(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ بنقطهٔ بینهایت نزدیک : $M_1(x^1+dx^1, \ldots, x^n+dx^n)$ برویم بردار $\boldsymbol{\lambda}$ دردستگاه جدید که بردارهای مبنایش $(\mathbf{e}_i+d\mathbf{e}_i)$ است بصورت $\boldsymbol{\lambda}+d\boldsymbol{\lambda}$ در خواهد آمد . مسئلهٔ زیر مورد نظر است:

«با توجه باینکه در نقطهٔ M_1 بردارهای مبنا $(\mathbf{e}_i+d\mathbf{e}_i)$ است نه $(\mathbf{e}_i)$ ، میخواهیم $d\boldsymbol{\lambda}$ یعنی تغییرات $\boldsymbol{\lambda}$ را درتابعی‌از $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ پیدا کنیم».

چون منظور ما در واقع تعیین رابطه‌ای بین دو دستگاه مختصات و یا بعبارت دیگر بین مشتقات‌بردارهای مبنا دراین دو نقطه است لذا گوئیم مطلوب تعیین یک «ارتباط آفین» [1] است. از رابطهٔ (۲۷-۱) دیفرانسیل میگیریم :

$$d\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{e}_i d\lambda^i+\lambda^i d\mathbf{e}_i \tag{۲۷—۲}$$

دیده میشود که $d\lambda^i$ وقتی میتواند مؤلفه های‌ناهمگرد $d\boldsymbol{\lambda}$ باشد که‌دستگاه مختصات مستقیم‌الخط یعنی : $d\mathbf{e}_i=\mathbf{o}$ باشد. اکنون میخواهیم n بردار $d\mathbf{e}_i$ را در تابعی ازمختصات $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ بدست آوریم . اگر $d\mathbf{S}$ تغییرمکان بینهایت کوچکی در مجاورت نقطهٔ $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ باشد میتوانیم بنویسیم :

$$d\mathbf{S}=dx^i \mathbf{e}_i \tag{۲۷—۳}$$

اما هریک‌ازn بردار $d\mathbf{e}_i$ ، n مؤلفهٔ ناهمگرد ودرنتیجه رویهمرفته n^2 مؤلفهٔ‌ناهمگرد در دستگاه مختصات $\mathbf{e}_i$ دارد که به ω_i^j نشان میدهیم یعنی مینویسیم :

$$d\mathbf{e}_i=\omega_i^j \mathbf{e}_j \tag{۲۷—۴}$$

ازطرفی مابین مؤلفه های‌$d\mathbf{S}$ و $d\mathbf{e}_i$ یعنی‌بین dx^i و ω_i^j نسبت‌به‌دستگاه $\mathbf{e}_i$روابطی خطی بصورت :

۱– Affine Connexion

$$\omega_i^j = \Gamma_{ki}^j dx^k \qquad (۲۷-۵)$$

موجود است.

$n^۲$ مؤلفهٔ Γ_{ki}^j که مؤلفه های یک تانسور نیست (ثابت خواهیم کرد) به «توابع اقلیدسی ارتباط آفین» یا «نمادهای کریستوفل» موسوم است. پس رابطهٔ (۲۷-٤) بصورت:

$$d\mathbf{e}_i = \Gamma_{ki}^j dx^k \mathbf{e}_j \qquad (۲۷-٦)$$

و یا بصورت:

$$\partial_k \mathbf{e}_i = \Gamma_{ki}^j \mathbf{e}_j \qquad (۲۷-۷)$$

در میآید.

با اینکه Γ_{ki}^j مؤلفه های یک تانسور نیست ولی معنای هندسی بسیار مهمی دارد. بدین معنی که اگر Γ_{ki}^j ها را بدانیم میتوانیم مشتق بردارها و تانسورها را بدست آوریم. مفهوم این مطلب اینست که میتوانیم تانسورها را در دو نقطهٔ متمایز M و M′ باهم بسنجیم، یعنی Γ_{ki}^j ها برای تعیین ارتباط بین میدانهای تانسوری در دو نقطهٔ متمایز بکار میرود.

تبصره: اگر بجای مبناهای متغیر $\mathbf{e}_i$ مبناهای متغیر $\mathbf{e}^i$ دردست بود فورمولهای (۲۷-۱) تا (۲۷-٦) بصورتهای زیر بدست میآمد:

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda_i \mathbf{e}^i \qquad (۲۷-۸)$$

$$d\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{e}^i d\lambda_i + \lambda_i d\mathbf{e}^i \qquad (۲۷-۹)$$

$$d\mathbf{S} = \mathbf{e}^i dx_i \qquad (۲۷-۱۰)$$

$$d\mathbf{e}^j = \omega_i^j \mathbf{e}^i \qquad (۲۷-۱۱)$$

$$\omega_i^j = u_{ik}^j dx^k \qquad (۲۷-۱۲)$$

و بالاخره:

$$d\mathbf{e}^j = u_{mk}^j dx^k \mathbf{e}^m \qquad (۲۷-۱۳)$$

اما اگر از رابطهٔ : $e^j \cdot e_k = \delta^j_k$ دیفرانسیل بگیریم خواهیم داشت :

$$de^j \cdot e_k + e^j \cdot de_k = 0 \qquad (۲۷-۱۴)$$

و یا :

$$u^j_{mk} dx^k e^m \cdot e_k + \Gamma^n_{mk} dx^m e_n \cdot e^j = 0 \qquad (۲۷-۱۵)$$

و یا :

$$u^j_{mk} dx^m + \Gamma^j_{mk} dx^m = 0 \qquad (۲۷-۱۶)$$

و یا بالاخره :

$$u^j_{mk} = -\Gamma^j_{mk} \qquad (۲۷-۱۷)$$

یعنی فقط و فقط یک ارتباط برای فضای اقلیدسی وجود دارد نه بیش (این مطلب برای فضاهای ریمانی هم صادق است).

۲۸- رابطهٔ بین $\Gamma^j_{ki}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ **وتانسورهای متریک** g_{ij} و g^{ij} .

داشتیم :

$$g_{ij} = (e_i , e_j) \qquad (۲۸-۱)$$

لذا :

$$dg_{ij} = (e_i , de_j) + (e_j , de_i) \qquad (۲۸-۲)$$

و با توجه به (۲۷-۴) و (۲۷-۱۱) داریم :

$$dg_{ij} = (e_i , e_l)\omega^l_j + (e_j , e_l)\omega^l_i \qquad (۲۸-۳)$$

و یا :

$$dg_{ij} = g_{il}\omega^l_j + g_{jl}\omega^l_i \qquad (۲۸-۴)$$

حال ω_{ji} را با عبارت :

$$\omega_{ji} = g_{jl}\omega^l_i \qquad (۲۸-۵)$$

و یا :

$$\omega_{ji} = g_{jl}\Gamma^l_{ki} dx^k \qquad (۲۸-۶)$$

و همچنین n^2 تابع جدید Γ_{kji} را بترتیب زیر تعریف میکنیم :

$$\Gamma_{kji}=g_{jl}\Gamma^{l}_{ki} \tag{۲۸—۷}$$

و اگر طرفین تساوی : $\Gamma_{kli}=g_{lm}\Gamma^{m}_{ki}$ را در g^{jl} ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$g^{jl}\Gamma_{kli}=g_{lm}g^{jl}\Gamma^{m}_{ki}=\delta^{j}_{m}\,\Gamma^{m}_{ki}=\Gamma^{j}_{ki}$$

و یا :

$$\Gamma^{j}_{ki}=g^{jl}\Gamma_{kli} \tag{۲۸—۸}$$

با استفاده از دو تعریف اخیر میتوانیم حل مسئله را تمام کنیم : اگر (۲۸-۵) را در (۲۸-٤) بگذاریم خواهیم داشت:

$$dg_{ij}=\omega_{ij}+\omega_{ji} \tag{۲۸—۹}$$

با توجه به (۲۸-٦) و (۲۸-۷) رابطهٔ (۲۸-۹) بصورت زیر در میآید:

$$dg_{ij}=(g_{il}\Gamma^{l}_{kj}+g_{jl}\Gamma^{l}_{ki})dx^{k}=(\Gamma_{kij}+\Gamma_{kji})dx^{k} \tag{۲۸—۱۰}$$

اما :

$$dg_{ij}\equiv\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{k}}\,dx^{k}\equiv\partial_{k}g_{ij}dx^{k} \tag{۲۸—۱۱}$$

از متحد قرار دادن (۲۸-۱۱) و (۲۸-۱۰) خواهیم داشت:

$$\partial_{k}g_{ij}=\Gamma_{kij}+\Gamma_{kji} \tag{۲۸—۱۲}$$

اما از طرفی توابع Γ^{j}_{ki} نسبت باندیسهای تحتانی و توابع Γ_{kji} نسبت به دو اندیس اولی و آخری قرینه‌اند. زیرا از (۲۷-۳) نتیجه میشود:

$$\frac{\partial^{2}\mathbf{S}}{\partial x^{k}\partial x^{i}}\equiv\partial_{k}(\partial_{i}\mathbf{S})=\partial_{k}\mathbf{e}_{i}=\partial_{i}(\partial_{k}\mathbf{S})=\partial_{i}\mathbf{e}_{k} \tag{۲۸—۱۳}$$

از طرف دیگر اگر جای اندیسهای i و k را در (۲۷-۷) عوض کنیم داریم:

$$\partial_{i}\mathbf{e}_{k}=\Gamma^{j}_{ik}\mathbf{e}_{j} \tag{۲۸—۱٤}$$

از مقایسهٔ (۲۷-۷) و (۲۸-۱٤) با رعایت (۲۸-۱۳) داریم :

$$\boxed{\Gamma^{j}_{ki}=\Gamma^{j}_{ik}} \tag{۲۸—۱۵}$$

همچنین اگردر (۲۸-۷) جای اندیسهای i و k را عوض کنیم خواهیم داشت:

$$\Gamma_{ijk}=g_{jl}\Gamma^{l}_{ik} \tag{۲۸—۱٦}$$

از مقایسهٔ (۲۸-۷) و (۲۸-۱٦) و رعایت (۲۸-۱۵) داریم:

$$\boxed{\Gamma_{kji}=\Gamma_{ijk}} \tag{۲۸—۱۷}$$

حال به (۲۸-۱۲) برمیگردیم:

$$\partial_k g_{ij}=\Gamma_{kij}+\Gamma_{kji} \tag{۲۸—۱۸}$$

از جایگشت مستدیر اندیسهای i و j و k داریم:

$$\partial_i g_{jk}=\Gamma_{ijk}+\Gamma_{ikj} \tag{۲۸—۱۹}$$

و :

$$\partial_j g_{ki}=\Gamma_{jki}+\Gamma_{jik} \tag{۲۸—۲۰}$$

اگرازمجموع (۲۸-۱۸)و(۲۸-۱۹) رابطهٔ (۲۸-۲۰) راکم کنیم خواهیم داشت:

$$\partial_k g_{ij}+\partial_i g_{jk}-\partial_j g_{ki}=\Gamma_{kji}+\Gamma_{ijk}=۲\Gamma_{ijk} \tag{۲۸—۲۱}$$

و یا :

$$\Gamma_{ijk}=\frac{۱}{۲}\left(\partial_k g_{ij}+\partial_i g_{jk}-\partial_j g_{ki}\right) \tag{۲۸—۲۲}$$

(جهت جایگشت $\uparrow i\ ,\ j\ ,\ k\downarrow$)

اغلب طرف دوم (۲۸-۲۲) را به [ki , j] نشان میدهند پس :

$$\Gamma_{ijk}\equiv[ki\ ,j] \tag{۲۸—۲۳}$$

برای محاسبهٔ Γ^j_{ik} از (۲۸-۸) استفاده میکنیم:

$$\Gamma^l_{ki} \equiv g^{lj}[ki\,,\,j] \tag{۲۸—۲۴}$$

واغلب طرف دوم (۲۸-۲۴) را با $\left\{ {l \atop ki} \right\}$ نشان میدهند. پس:

$$\Gamma^l_{ki} \equiv \left\{ {l \atop ki} \right\} \equiv g^{lj}[ki\,,\,j] \tag{۲۸—۲۵}$$

کمیات $[ki\,,\,j]$ و $\left\{ {l \atop ki} \right\}$ بترتیب نمادهای کریستوفل نوع اول ودوم نامیده میشود.

تبصره - روابط (۲۸-۱۸) و (۲۸-۱۹) و (۲۸-۲۰) را بترتیب بصورتهای زیر میتوانیم بنویسیم:

$$\partial_k g_{ij} = [jk\,,\,i] + [ik\,,\,j] \tag{۲۸—۲۶}$$

$$\partial_i g_{jk} = [ki\,,\,j] + [ji\,,\,k] \tag{۲۸—۲۷}$$

$$\partial_j g_{ki} = [ij\,,\,k] + [kj\,,\,i] \tag{۲۸—۲۸}$$

که مشتقات g_{ij} ها را برحسب نمادهای کریستوفل بما میدهند.

برای محاسبهٔ مشتقات g^{ij} ها برحسب نمادهای کریستوفل از رابطهٔ:

$$g_{ij}g^{ik} = \delta^k_j \tag{۲۸—۲۹}$$

نسبت به x^l مشتق میگیریم:

$$(\partial_l g_{ij})g^{ik} + g_{ij}(\partial_l g^{ik}) = 0$$

از ضرب این رابطه بطور داخلی در g^{jm} خواهیم داشت:

$$\partial_l g^{mk} = -g^{ik}g^{jm}(\partial_l g_{ij}) = -g^{ik}g^{jm}(\Gamma_{lij} + \Gamma_{lji})$$
$$= -g^{jm}\Gamma^k_{lj} - g^{ik}\Gamma^m_{li}$$

و یا:

$$\partial_l g^{mk} = -g^{im}\Gamma^k_{il} - g^{ik}\Gamma^m_{il}$$

ویا:

$$\partial_k g^{ij} = -g^{li}\Gamma^j_{lk} - g^{lj}\Gamma^i_{lk} \qquad (۲۸-۳۰)$$

۱ - ۲۸ - چگونگی تغییرات Γ^j_{ik} و Γ_{ijk} هنگام تغییر محورهای مختصات:

از رابطهٔ :

$$g_{i'j'} = p^i_{i'}\, p^j_{j'}\, g_{ij} \qquad (۲۸-۳۱)$$

نسبت به $x^{k'}$ مشتق میگیریم:

$$\partial_{k'} g_{i'j'} = p^i_{i'}\, p^j_{j'}\, p^k_{k'}\, \partial_k g_{ij} + (p^j_{j'}\, p^i_{i'k'} + p^i_{i'}\, p^j_{j'k'}) g_{ij} \qquad (۲۸-۳۲)$$

که دراینجا $p^j_{j'k'} = \dfrac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}$ میباشد . با تعویض i' و k' در تمام جملات و i و k فقط در جملهٔ اول طرف دوم خواهیم داشت :

$$\partial_{i'} g_{k'j'} = p^j_{j'}\, p^k_{k'}\, p^i_{i'}\, \partial_i g_{kj} + (p^j_{j'}\, p^i_{k'i'} + p^i_{k'}\, p^j_{j'i'}) g_{ij} \qquad (۲۸-۳۳)$$

و اگر جای k' و j' را در تمام جملات و k و j را فقط در جملهٔ اول طرف دوم (۲۸-۳۲) عوض کنیم خواهیم داشت:

$$\partial_{j'} g_{i'k'} = p^j_{j'}\, p^i_{i'}\, p^k_{k'}\, \partial_j g_{ik} + (p^j_{k'}\, p^i_{i'j'} + p^i_{i'}\, p^j_{k'j'}) g_{ij} \qquad (۲۸-۳٤)$$

اگر (۲۸-۳٤) را ازمجموع (۲۸-۳۲) و (۲۸-۳۳) کم و قرینه بودن $g_{i'j'}$ ها را هم رعایت کنیم داریم :

$$\frac{1}{2}(\partial_{k'} g_{i'j'} + \partial_{i'} g_{j'k'} - \partial_{j'} g_{k'i'}) = \frac{1}{2}(\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki}) p^i_{i'}\, p^j_{j'}\, p^k_{k'} + p^j_{j'}\, p^i_{i'k'} g_{ij} \qquad (۲۸-۳۵)$$

و یا :

$$\Gamma_{i'j'k'} = p^i_{i'} p^j_{j'}\, p^k_{k'}\, \Gamma_{ijk} + p^j_{j'}\, p^i_{i'k'} g_{ij} \qquad (۲۸-۳٦)$$

ازطرف دیگر ازضرب طرفین رابطهٔ :

$$g^{i'j'}=p^{i'}_{i}p^{j'}_{j}g^{ij} \qquad (۲۸—۳۷)$$

در $p^{i}_{j'}$ نتیجه میشود :

$$p^{i}_{j'}g^{i'j'}=p^{i'}_{j}g^{ij} \qquad (۲۸-۳۸)$$

و با فرض $i=h$ و $j'=h'$ و $j=l$ خواهیم داشت :

$$p^{h}_{h'}g^{i'h'}=p^{i'}_{l}g^{il} \qquad (۲۸—۳۹)$$

و اگر مجدداً $i'=j'$ فرض شود داریم :

$$p^{h}_{h'}g^{j'h'}=p^{j'}_{l}g^{jl} \qquad (۲۸—٤٠)$$

از ضرب (۲۸-۳٦) و (۲۸-٤٠) در همدیگر خواهیم داشت:

$$p^{h}_{h'}g^{j'h'}\Gamma_{i'j'k'}=p^{i}_{i'}p^{j}_{j'}p^{j'}_{l}g^{hl}p^{k}_{k'}\Gamma_{ijk}+p^{j}_{j'}p^{j'}_{l}g^{hl}p^{i}_{i'k'}g_{ij} \qquad (۲۸—٤۱)$$

و یا :

$$p^{h}_{h'}\Gamma^{h'}_{i'k'}=p^{i}_{i'}p^{k}_{k'}\Gamma^{h}_{ik}+p^{h}_{i'k'} \qquad (۲۸—٤۲)$$

و پس‌از ضرب طرفین در $p^{l'}_{h}$ و فرض $h=l$ در نتیجهٔ حاصلضرب خواهیم داشت:

$$\Gamma^{l'}_{i'k'}=p^{i}_{i'}p^{k}_{k'}p^{l'}_{l}\Gamma^{l}_{ik}+p^{l'}_{l}p^{l}_{i'k'} \qquad (۲۸—٤۳)$$

از (۲۸-۳٦)و(۲۸-٤۳) پیداست که **هیچیک ازنمادهای کریستوفل تانسورنیست.**
شرط اینکه Γ^{l}_{ik} تانسور باشد باید داشته باشیم:

$$p^{l'}_{l}p^{l}_{i'k'}\equiv\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^{l}}\cdot\frac{\partial^{2}x^{l}}{\partial x^{i'}\partial x^{k'}}=0 \qquad (۲۸—٤٤)$$

ازضرب طرفین این رابطه در $\frac{\partial x^{q}}{\partial x^{l'}}$ داریم :

$$\frac{\partial^2 x^q}{\partial x^{i'} \partial x^{k'}} = 0$$

و یا :

$$x^q = \alpha^q_{q'} x^{q'} + a^q_o \qquad (۲۸-۴۴)$$

یعنی باید دستگاه مستقیم‌الخط باشد .

تبصرهٔ ۱- از (۴۳-۲۸) پیداست که اگر Γ^l_{ik} و $\overline{\Gamma}^l_{ik}$ دو ارتباط آفین باشند توابع :

$$a^l_{ik} = \overline{\Gamma}^l_{ik} - \Gamma^l_{ik} \qquad (۲۸-۴۶)$$

مؤلفه های یک میدان تانسوری هستند . بالعکس اگر Γ^l_{ik} مؤلفه های یک ارتباط آفین و a^l_{ik} مؤلفه های یک میدان تانسوری باشد توابع : $\overline{\Gamma}^l_{ik} = \Gamma^l_{ik} + a^l_{ik}$ مؤلفه های یک ارتباط دیگر خواهد بود .

تبصرهٔ ۲- دیده‌ایم که اگر دستگاه مختصات مستقیم‌الخط باشد کلیهٔ Γ^j_{ik} و Γ_{ijk} ها صفر میشوند و تنها در این حالت است که (۴۳-۲۸) بصورت زیر درمیآید:

$$\Gamma^{l'}_{i'k'} = p^{l'}_l \, p^l_{i'k'} \qquad (۲۸-۴۷)$$

تبصرهٔ ۳- بااستفاده از آنچه که تابحال در باب نمادهای کریستوفل گفته‌ایم صحت روابط زیر محرز است:

$$\Gamma^k_{ij} = \partial_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^k = \partial_i \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^k = -\partial_j \mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_i$$

و :

$$[ij\,,\,k] = \partial_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k$$

درحالتیکه مختصات منحنی‌الخط $x^{i'}$، درتابعی ازمختصات مستقیم‌الخط x^i داده شده باشد بکمک فورسولهای (۴۷-۲۸) بطور بسیار ساده‌ای میتوان نمادهای اقلیدسی کریستوفل را حساب کرد .

مثال ۱- مطلوبست محاسبهٔ Γ^{j}_{ik} ها در مختصات کروی :

$$\begin{cases} x^{1} = x^{1'} \cos x^{2'} \sin x^{3'} \\ x^{2} = x^{1'} \sin x^{2'} \sin x^{3'} \\ x^{3} = x^{1'} \cos x^{3'} \end{cases}$$

طبق فورمولهای (۲۰-۲۰) وتوجه‌باین نکتهٔ دقیق که $g_{i'j'}$ ها درآنجا حکم g_{ij} ها را دراینجا دارند مینویسیم :

$$g_{11} = 1 \text{ و } g_{22} = (x^{1'} \sin x^{3'})^{2} \text{ و } g_{33} = (x^{1'})^{2} \text{ و } g_{ij} = 0 \quad i \neq j$$

از طرفی چون دستگاههای مختصات هردو متعامدند g^{ij} ها از رابطهٔ (۱۴-۲۱) بدست میآیند :

$$g^{11} = 1 \text{ و } g^{22} = \frac{1}{(x^{1'} \sin x^{3'})^{2}} \text{ و } g^{33} = \frac{1}{(x^{1'})^{2}} \text{ و } g^{ij} = 0 \ (i \neq j)$$

بنابراین با استفاده از فورمول (۲۸-۲۴) یعنی فورمول :

$$\Gamma^{l}_{ki} = \frac{1}{2} g^{lj} (\partial_{k} g_{ij} + \partial_{i} g_{jk} - \partial_{j} g_{ki})$$

بترتیب میتوانیم بنویسیم :

$$\Gamma^{1}_{11} = \left\{ {1 \atop 1\,1} \right\} = \frac{1}{2} g^{1j} (\partial_{1} g_{1j} + \partial_{1} g_{j1} - \partial_{j} g_{11}) \tag{۲۸—۴۸}$$

$$= \frac{1}{2} g^{11} (\partial_{1} g_{11} + \partial_{1} g_{11} - \partial_{1} g_{11}) + \frac{1}{2} g^{12} (\partial_{1} g_{12} + \partial_{1} g_{21}$$

$$- \partial_{2} g_{11}) + \frac{1}{2} g^{13} (\partial_{1} g_{13} + \partial_{1} g_{31} - \partial_{3} g_{11}) = \frac{1}{2} (0)$$

$$+ \frac{0}{2} (0) + \frac{0}{2} (0) = 0$$

$$\Gamma^{1}_{22}=\left\{ {1 \atop 22} \right\}=\frac{1}{2}g^{11}(\partial_2 g_{12}+\partial_2 g_{12}-\partial_1 g_{22}) \tag{۲۸-۴۹}$$

$$+\frac{1}{2}g^{12}(\partial_2 g_{12}+\partial_2 g_{22}-\partial_2 g_{22})+\frac{1}{2}g^{13}(\partial_2 g_{13}$$

$$+\partial_2 g_{32}-\partial_3 g_{22})=-x^{1'}(\sin x^{3'})^2$$

$$\Gamma^{1}_{33}=\left\{ {1 \atop 33} \right\}=\frac{1}{2}g^{11}(\partial_3 g_{31}+\partial_3 g_{13}-\partial_1 g_{33}) \tag{۲۸-۵۰}$$

$$+\frac{1}{2}g^{12}(\partial_3 g_{32}+\partial_3 g_{23}-\partial_2 g_{33})+\frac{1}{2}g^{13}(\partial_3 g_{33}$$

$$+\partial_3 g_{33}-\partial_3 g_{33})=-x^{1'}$$

و بهمین ترتیب خواهیم داشت:

$$\Gamma^{3}_{13}=\Gamma^{2}_{21}=\frac{1}{x^{1'}} \tag{۲۸-۵۱}$$

$$\Gamma^{2}_{32}=\left\{ {2 \atop 32} \right\}=\operatorname{cotg} x^{3'} \tag{۲۸-۵۲}$$

$$\Gamma^{3}_{22}=\left\{ {3 \atop 22} \right\}=-\frac{1}{2}\sin 2x^{3'} \tag{۲۸-۵۳}$$

و مابقی Γ^{j}_{ik} ها همه صفر میشوند.

مثال ۲- میخواهیم Γ^{j}_{ik} ها را برای تبدیل مختصات قطبی زیر، واقع درصفحه حساب کنیم:

$$\begin{cases} x^{1}=x^{1'}\cos x^{2'} \\ x^{2}=x^{1'}\sin x^{2'} \end{cases}$$

طبق (۳-۲۰) و (۴-۲۰) و (۵-۲۰) و با توجه باینکه باز $g^{i'j'}$ ها درآنجا، همان g^{ij} ها در اینجا هستند داریم:

$$g_{11}=1 \quad \text{و} \quad g_{22}=(x^{1'})^2 \quad \text{و} \quad g_{12}=g_{21}=0$$

دراینجا هم چون دستگاههای مختصات هردومتعامدند لذا g^{ij} هاازرابطهٔ $g^{ii}=\frac{1}{g_{ii}}$ حساب میشوند :

$$g^{11}=1 \text{ و } g^{22}=\frac{1}{(x^{1'})^2} \text{ و } g^{12}=g^{21}=0$$

لذا داریم :

$$\Gamma^1_{11}=\left\{\begin{matrix}1\\11\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{11}+\partial_1 g_{11}-\partial_1 g_{11}) \tag{۲۸—۵۴}$$

$$+\frac{1}{2}g^{12}(\partial_1 g_{12}+\partial_1 g_{21}-\partial_2 g_{11})=0$$

و با ادامهٔ همین روش خواهیم داشت:

$$\Gamma^2_{11}=\Gamma^1_{12}=0 \tag{۲۸—۵۵}$$

$$\Gamma^2_{12}=\left\{\begin{matrix}2\\12\end{matrix}\right\}=\frac{1}{x^{1'}} \tag{۲۸—۵۶}$$

$$\Gamma^1_{22}=\left\{\begin{matrix}1\\22\end{matrix}\right\}=-(x^{1'}) \tag{۲۸—۵۷}$$

$$\Gamma^2_{22}=0 \tag{۲۸—۵۸}$$

و با توجه به تقارن این نمادها نسبت به اندیسهای تحتانی ، بقیه خود بخود معلوم میشوند.

حال میخواهیم بعنوان تمرین ، کمیات رابطهٔ (۲۸-٤۷) را برای این مسئله که در آن x^i مستقیم‌الخط است حساب کنیم .

میدانیم که در فورمول :

$$\Gamma^{l'}_{k'i'}=p^{l'}_l\, p^l_{i'k'}$$

داریم :

$$p^{l'}_l=\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^l} \quad \text{و} \quad p^l_{i'k'}=\frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{i'}\partial x^{k'}}\ .$$

لذا :

$$p^{1'}_{1} = \frac{x^1}{x^{1'}} \quad و \quad p^{1'}_{2} = \frac{x^2}{x^{1'}} \quad و \quad p^{2'}_{1} = \frac{-x^2}{(x^{1'})^2} \qquad (۲۸-۵۹)$$

و

$$p^{2'}_{2} = \frac{x^1}{(x^{1'})^2}$$

$$p^{1}_{1'1'} = 0 \quad و \quad p^{1}_{1'2'} = p^{1}_{2'1'} = -\sin x^{2'} \quad و \quad p^{1}_{2'2'} = -x^{1'} \sin x^{2'} \qquad (۲۸-۶۰)$$

از آنجا :

$$\Gamma^{1'}_{1'1'} = p^{1'}_{1} p^{1}_{1'1'} + p^{1'}_{2} p^{2}_{1'1'} = 0 \qquad (۲۸-۶۱)$$

و :

$$\Gamma^{2'}_{1'1'} = 0 \quad و \quad \Gamma^{1'}_{1'2'} = 0 \quad و \quad \Gamma^{2'}_{1'2'} = \frac{1}{x^{1'}} \quad و \ldots \qquad (۲۸-۶۲)$$

و الی‌آخر .

Γ^{j}_{ik} ها در مختصات استوانه‌ای و مختصات قطبی عیناً یکی هستند .

۲۹ - **مشتق ـ همگرد یک تانسور** : مشتق ـ همگرد گیری [۱] یک رشته عملیاتی است که درفضاهای آفین قابل اجراست وبکمک آن میتوانیم ازیک‌تانسور $\mathbf{T}$ به تانسور جدید $\mathbf{T'}$ که یک اندیس همگرد بیشتراز $\mathbf{T}$ دارد برسیم . بعلت تشابه بین عملیاتی‌که برای بدست‌آوردن $\mathbf{T'}$ ومشتقات جزئی وجود دارد این‌عمل به مشتق ـ همگرد گیری موسوم است .

از مقایسهٔ (۲۷-۲) و (۲۷-۴) و تعویض اندیسهای گنگ داریم :

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\lambda} &= d\lambda^j \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \omega^j_l d\lambda^l = (d\lambda^j + \omega^j_l d\lambda^l)\mathbf{e}_j \\ &= (d\lambda^j + \Gamma^j_{kl}\lambda^l dx^k)\mathbf{e}_j \end{aligned} \qquad (۲۹-۱)$$

اگر مقدار داخل پرانتز را به $D\lambda^j$ نشان دهیم خواهیم داشت:

۱- Covariant Differentiation

$$D\lambda^j \equiv d\lambda^j + \Gamma^j_{kl}\lambda^l dx^k \qquad (۲۹—۲)$$

این رابطه با توجه به فورمول بدیهی :

$$d\lambda^j \equiv \frac{\partial \lambda^j}{\partial x^k} dx^k \equiv (\partial_k \lambda^j) dx^k$$

بصورت زیر درمیآید :

$$D\lambda^j \equiv \partial_k \lambda^j dx^k + \Gamma^j_{kl}\lambda^l dx^k \equiv (\partial_k \lambda^j + \lambda^l \Gamma^j_{kl}) dx^k \qquad (۲۹—۳)$$

$D\lambda^j$ که باراابطهٔ (۳-۲۹) تعیین میشود به **«دیفرانسیل مطلق»** مؤلفهٔ λ^j ازبردار λ موسوم است.

اما (۱-۲۹) که بصورت $d\boldsymbol{\lambda} = (D\lambda^j)\mathbf{e}_j$ نیزنوشته میشود نشان میدهد که $D\lambda^j$ مؤلفه های‌ناهمگرد تانسوری است از نوع $(0,1)$. ازطرفی (۲-۲۹) را میتوانیم بصورت زیر بنویسیم :

$$D\lambda^j = (D_k \lambda^j) dx^k$$

که درآن کمیات $D_k\lambda^j$ با عبارت زیر مشخص شده‌است :

$$\boxed{D_k \lambda^j \equiv \partial_k \lambda^j + \lambda^l \Gamma^j_{kl} \equiv \lambda^j_{,k}} \qquad (۲۹—۳)$$

چون $D\lambda^j$ مؤلفه های ناهمگرد یک تانسور و dx^k هم مؤلفه های تانسوردلخواهی از نوع $(0,1)$ میباشد لذا طبق «قانون خارج قسمت» $D_k\lambda^j$ باید مؤلفه های یک تانسور مرتبهٔ دوم باشد.

تانسور (۴-۲۹) که به $\lambda^j_{,k}$ هم نموده میشود «مشتق ـ همگرد» مؤلفه های λ^j از بردار λ نسبت به متغیر x^k نامیده میشود.

این تعریف‌درمختصات منحنی‌الخط در واقع همان تعمیم مشتق جزئی $\partial_k \lambda^j$ نسبت بیکدستگاه مختصات ثابت است. زیرا از (۴-۲۷) و (۵-۲۷) پیداست که اگر $\mathbf{e}_j$ ها ثابت باشدکلیهٔ Γ^j_{ik} ها صفر میشود و (۴-۲۹) بصورت زیر در میآید:

$$D_k\lambda^j = \partial_k\lambda^j \qquad (۲۹-۵)$$

برای محاسبهٔ مشتق ـ همگرد λ_i نسبت به متغیر x^k ، از (۲۷-۹) و (۲۷-۱۳) با رعایت (۲۷-۱۷) استفاده میکنیم :

$$d\boldsymbol{\lambda} = d\lambda_i \mathbf{e}^i + \lambda_i d\mathbf{e}^i = d\lambda_i \mathbf{e}^i - \Gamma^i_{mk}\lambda_i dx^k \mathbf{e}^m$$

$$= d\lambda_j \mathbf{e}^j - \Gamma^i_{jk}\lambda_i dx^k \mathbf{e}_j$$

و یا :

$$d\boldsymbol{\lambda} = (d\lambda_j - \lambda_i \Gamma^i_{jk} dx^k)\mathbf{e}^j \qquad (۲۹-۶)$$

اگر مقدار داخل پرانتز طرف دوم را به $D\lambda_j$ نشان دهیم داریم :

$$d\boldsymbol{\lambda} = (D\lambda_j)\mathbf{e}^j \qquad (۲۹-۷)$$

یعنی $D\lambda^j$ برداریست همگرد . پس میتوانیم بنویسیم :

$$D\lambda_j = (\partial_k\lambda_j - \lambda_i \Gamma^i_{jk})dx^k = (D_k\lambda^j)dx^k$$

چون $D\lambda_j$ برداری همگرد و dx^k برداریست ناهمگرد ، پس طبق « قانون خارج قسمت» باید کمیات $D_k\lambda^j$ یا :

$$\boxed{D_k\lambda_j = (\partial_k\lambda_j - \lambda_i \Gamma^i_{jk}) = \lambda_{j,k}} \qquad (۲۹-۸)$$

مؤلفه‌های تانسوری همگرد از نوع (۲ , ۰) باشد .

برای محاسبهٔ مشتق ـ همگرد تانسورهای دیگر راه مناسبتری هم میتوانیم انتخاب کنیم . مثلاً برای محاسبهٔ مشتق ـ همگرد T^i_j ، **دوبردار ثابت** ناهمگرد و همگرد بمؤلفه‌های Y^j و X_i انتخاب میکنیم و از حاصلضرب مدغم $T^i_j X_i Y^j$ دیفرانسیل میگیریم :

$$d(T^i_j X_i Y^j) = dT^i_j X_i Y^j + T^i_j dX_i Y^j + T^i_j X_i dY^j \qquad (۲۹-۹)$$

ولی چون تغییرات بردار ثابت صفر است داریم :

$$DX_i = dX_i - \Gamma^l_{ik} dx^k X_l = o$$

و یا :

$$dX_i = X_l \Gamma^l_{ik} dx^k \qquad (۲۹-۱۰)$$

و همچنین :

$$DY^j = dY^j + Y^l \Gamma^j_{lk} dx^k = o$$

و یا :

$$dY^j = -Y^l \Gamma^j_{lk} dx^k \qquad (۲۹-۱۱)$$

پس داریم :

$$d(T^i_j X_i Y^j) = dT^i_j X_i Y^j + T^i_j Y^j (X_l \Gamma^l_{ik} dx^k) - T^i_j X_i Y^l \Gamma^j_{lk} dx^k = (dT^i_j + T^l_j \Gamma^i_{lk} dx^k - T^i_l \Gamma^l_{jk} dx^k) X_i Y^l$$

چون طرف اول پایا است طرف دوم نیز باید پایا باشد یعنی مقدار داخل پرانتز که به DT^i_j نشان داده میشود باید تانسوری ازنوع (۱ , ۱) باشد(آخرین قضیهٔ ۱۲§) .

پس :

$$DT^i_j = (\partial_k T^i_j + T^l_j \Gamma^i_{lk} - T^i_l \Gamma^l_{jk}) dx^k = (D_k T^i_j) dx^k \qquad (۲۹-۱۲)$$

چون DT^i_j یک تانسور و dx^k نیز تانسوری است دلخواه پس باید $D_k T^i_j$ یعنی:

$$\underline{D_k T^i_j = T^i_{j,k} = \partial_k T^i_j + T^l_j \Gamma^i_{lk} - T^i_l \Gamma^l_{jk}} \qquad (۲۹-۱۳)$$

یک تانسور مرتبهٔ سوم باشد .

مثال دیگر: میخواهیم مشتق ـ همگرد تانسور T^{jl}_i رانسبت به x^k بدست آوریم .

حل : سه بردار ثابت (مستقل از مختصات $x^1, x^2, \ldots, x^n$) **X** و **Y** و **Z**

به‌مؤلفه‌های X^i و Y_j و Z_l انتخاب میکنیم ومانند مسئلهٔ قبل حاصلضرب فشردهٔ $T_i^{jl}X^iY_jZ_l$ را تشکیل میدهیم وازحاصلضرب، که یک عددوار یعنی پایا میباشد دیفرانسیل می گیریم :

$$d(T_i^{jl}X^iY_jZ_l)=dT_i^{jl}X^iY_jZ_l+T_i^{jl}dX^iY_jZ_l$$
$$+T_i^{jl}X^idY_jZ_l+T_i^{jl}X^iY_jdZ_l$$

بااستفاده از فورمولهای (۲۹-۱۰) و (۲۹-۱۱) داریم :

$$dX^i=-X^m\Gamma^i_{mk}dx^k$$

$$dY_j=\quad Y_m\Gamma^m_{jk}dx^k$$

$$dZ_l=\quad Z_m\Gamma^m_{lk}dx^k$$

پس :

$$d(T_i^{jl}X^iY^jZ_l)=dT_i^{jl}X^iY_jZ_l-T_i^{jl}X^m\Gamma^i_{mk}Y_jZ_ldx^k \tag{۲۹-۱۴}$$
$$+T_i^{jl}X^iY_m\Gamma^m_{jk}Z_ldx^k+T_i^{jl}X^iY_jZ_m\Gamma^m_{lk}dx^k$$
$$=dT_i^{jl}X^iY_jZ_l-T_m^{jl}X^i\Gamma^m_{ik}Y_jZ_ldx^k$$
$$+T_i^{ml}X^iY_j\Gamma^j_{mk}Z_ldx^k+T_i^{jm}X^iY_jZ_l\Gamma^l_{mk}dx^k$$
$$=(dT_i^{jl}-T_m^{jl}\Gamma^m_{ik}dx^k+T_i^{ml}\Gamma^j_{mk}dx^k$$
$$+T_i^{jm}\Gamma^l_{mk}dx^k)X^iY_jZ_l$$

برای اینکه طرف دوم(۲۹-۱۴) مثل طرف اولش پایا باشد باید مقدارداخل پرانتز که به DT_i^{jl} نشان داده میشود تانسوری از نوع (۱ , ۲) باشد یعنی :

$$DT_i^{jl}=(\partial_kT_i^{jl}-T_m^{jl}\Gamma^m_{ik}+T_i^{ml}\Gamma^j_{mk}+T_i^{jm}\Gamma^l_{mk})dx^k$$
$$\equiv(D_kT_i^{jl})dx^k$$

چون DT_i^{jl} و dx^k هردوتانسور هستند طبق، اصل شناسائی تانسورها باید $D_kT_i^{jl}$

تانسوری از نوع (۲ , ۲) باشد. پس :

$$D_k T^{jl}_i \equiv T^{jl}_{i,k} \equiv \partial_k T^{jl}_i - T^{jl}_m \Gamma^m_{ik} + T^{ml}_i \Gamma^j_{mk} + T^{jm}_i \Gamma^l_{mk} \qquad (۲۹-۱۵)$$

این راه کلی تروساده‌تر از راههای دیگر است. (۲۹-۴) یا (۲۹-۸) را نیز میتوانستیم از همین راه بدست آوریم.

از امثلهٔ فوق دیده میشود که درهرحالت ، مشتق ـ همگرد بایک اندیس همگرد نشان داده میشود که قبل‌از این اندیس ، نماد (,) قرار دارد. بعلاوه هرعبارت ، شامل مشتق جزئی تانسوراصلی نسبت به x^k است که k همان اندیس همگرداست. ودرقبال هراندیس‌ناهمگرد، یک‌جمله‌ای که مشتمل برنماد کریستوفل نوع دوم میباشد اضافه ودرقبال هراندیس همگرد یک جمله‌ای که مشتمل برنماد کریستوفل نوع دوم است کسر میشود.

بطور خلاصه فورمول کلی زیر برای مشتق ـ همگرد بدست میآید :

$$(۲۹-۱۶)$$

$$T^{r_1 r_2 \ldots r_m}_{s_1 s_2 \ldots s_{p,k}} \equiv \partial_k T^{r_1 r_2 \ldots r_m}_{s_1 s_2 \ldots s_p} + \sum_{\alpha=1}^{m} T^{r_1 r_2 \ldots r_{\alpha-1} j r_{\alpha+1} \ldots r_m}_{s_1 s_2 \ldots s_p} \Gamma^{r_\alpha}_{jk}$$

$$- \sum_{\beta=1}^{p} T^{r_1 r_2 \ldots r_m}_{s_1 s_2 \ldots s_{\beta-1} j s_{\beta+1} \ldots s_p} \Gamma^{j}_{s_\beta k}$$

۱ - ۲۹ - **مشتق ـ همگرد مراتب‌بالاتر :** میتوانیم ازیک‌تانسور چندین مرتبه مشتق ـ همگرد بگیریم . درفورمولهای زیر (برای صرفه‌جوئی در نوشتن) نماد $\mathfrak{S}$ مقدم برهرپرانتز را معرف مجموع جملاتی که ازجابگشت اندیسهای p و q و یا p و q و r و یا p و q و r و s درعبارت‌داخل پرانتزحاصل میشود گرفته‌ایم. مثلاً : و :

$$\mathfrak{S}(\partial_p T_\alpha \Gamma^\alpha_{iq}) = \partial_p T_\alpha \Gamma^\alpha_{iq} + \partial_q T_\alpha \Gamma^\alpha_{ip}$$

$$\mathfrak{S}(\partial_{\alpha p} T_i \Gamma^\alpha_{qr}) = \partial_{\alpha p} T_i \Gamma^\alpha_{qr} + \partial_{\alpha q} T_i \Gamma^\alpha_{pr} + \partial_{\alpha r} T_i \Gamma^\alpha_{pq}$$

طبق (۲۹-۸) داشتیم :

$$T_{i,p} \equiv \partial_p T_i - T_\alpha \Gamma^\alpha_{ip} \tag{۲۹—۱۷}$$

و همچنین :

$$T_{i,pq} \equiv \partial_{pq} T_i - \partial_\alpha T_i \Gamma^\alpha_{pq} - \mathfrak{S}(\partial_p T_\alpha \Gamma^\alpha_{iq}) - T_\alpha \Gamma^\alpha_{ipq} \tag{۲۹—۱۸}$$

و همچنین :

$$\begin{aligned} T_{i,pqr} \equiv\; & \partial_{pqr} T_i - \mathfrak{S}(\partial_{\alpha p} T_i \Gamma^\alpha_{qr}) - \mathfrak{S}(\partial_{pq} T_\alpha \Gamma^\alpha_{ir}) \\ & + \mathfrak{S}(\partial_\beta T_\alpha \Gamma^\alpha_{ip} \Gamma^\beta_{qr}) - \mathfrak{S}(\partial_p T_\alpha \Gamma^\alpha_{iqr}) - \partial_\alpha T_i \Gamma^\alpha_{pqr} - T_\alpha \Gamma^\alpha_{ipqr} \end{aligned} \tag{۲۹—۱۹}$$

و همچنین :

$$\begin{aligned} T_{i,pqrs} \equiv\; & \partial_{pqrs} T_i - \mathfrak{S}(\partial_{\alpha pq} T_i \Gamma^\alpha_{rs}) - \mathfrak{S}(\partial_{pqr} T_\alpha \Gamma^\alpha_{is}) \\ & + \mathfrak{S}(\partial_{\alpha\beta} T_i \Gamma^\alpha_{pq} \Gamma^\beta_{rs}) + \mathfrak{S}(\partial_{\beta p} T_\alpha \Gamma^\alpha_{iq} \Gamma^\beta_{rs}) - \mathfrak{S}(\partial_{\alpha p} T_i \Gamma^\alpha_{qrs}) \\ & - \mathfrak{S}(\partial_{pq} T_\alpha \Gamma^\alpha_{irs}) + \mathfrak{S}(\partial_\beta T_\alpha \Gamma^\alpha_{ip} \Gamma^\beta_{qrs}) + \mathfrak{S}(\partial_\beta T_\alpha \Gamma^\alpha_{ipq} \Gamma^\beta_{rs}) \\ & - \mathfrak{S}(\partial_p T_\alpha \Gamma^\alpha_{iqrs}) - \partial_\alpha T_i \Gamma^\alpha_{pqrs} - T_\alpha \Gamma^\alpha_{ipqrs} \end{aligned} \tag{۲۹—۲۰}$$

و برای تانسور ناهمگرد مرتبهٔ دوم T_{ij} بترتیب داریم :

$$\begin{aligned} T_{ij,p} &\equiv \partial_p T_{ij} - T_{\alpha j} \Gamma^\alpha_{ip} - T_{i\alpha} \Gamma^\alpha_{jp} \\ T_{ij,pq} &\equiv \partial_{pq} T_{ij} - \partial_\alpha T_{ij} \Gamma^\alpha_{pq} - \mathfrak{S}(\partial_p T_{\alpha j} \Gamma^\alpha_{iq}) \\ & - \mathfrak{S}(\partial_p T_{i\alpha} \Gamma^\alpha_{jq}) + \mathfrak{S}(T_{\alpha\beta} \Gamma^\alpha_{ip} \Gamma^\beta_{jq}) - T_{\alpha j} \Gamma^\alpha_{ipq} \\ & - T_{i\alpha} \Gamma^\alpha_{jpq} \end{aligned} \tag{۲۹—۲۱}$$

$$\begin{aligned} T_{ij,pqr} \equiv\; & \partial_{pqr} T_{ij} - \mathfrak{S}(\partial_{pq} T_{\alpha j} \Gamma^\alpha_{ir}) - \mathfrak{S}(\partial_{pq} T_{i\alpha} \Gamma^\alpha_{jr}) \\ & - \mathfrak{S}(\partial_{\alpha p} T_{ij} \Gamma^\alpha_{qr}) + \mathfrak{S}(\partial_\beta T_{\alpha j} \Gamma^\alpha_{ip} \Gamma^\beta_{qr}) + \mathfrak{S}(\partial_\beta T_{i\alpha} \Gamma^\alpha_{jp} \Gamma^\beta_{qr}) \\ & + \mathfrak{S}(\partial_p T_{\alpha\beta} \Gamma^\alpha_{iq} \Gamma^\beta_{jr}) - \mathfrak{S}(\partial_p T_{\alpha j} \Gamma^\alpha_{iqr}) - \sigma(\partial_p T_{i\alpha} \Gamma^\alpha_{jqr}) \\ & - \partial_\alpha T_{ij} \Gamma^\alpha_{pqr} + \mathfrak{S}(T_{\alpha\beta} \Gamma^\alpha_{ip} \Gamma^\beta_{jqr}) + \mathfrak{S}(T_{\alpha\beta} \Gamma^\alpha_{ipq} \Gamma^\beta_{jr}) \\ & - T_{\alpha j} \Gamma^\alpha_{ipqr} - T_{i\alpha} \Gamma^\alpha_{jpqr} \end{aligned} \tag{۲۹—۲۲}$$

$$
\begin{aligned}
T_{ij,pqrs} \equiv\ & \partial_{pqrs} T_{ij} - \mathfrak{S}(\partial_{pqr} T_{\alpha j} \Gamma^{\alpha}_{is}) - \mathfrak{S}(\partial_{pqr} T_{i\alpha} \Gamma^{\alpha}_{js}) \\
& - \mathfrak{S}(\partial_{\alpha pq} T_{ij} \Gamma^{\alpha}_{rs}) + \mathfrak{S}(\partial_{pq} T_{\alpha\beta} \Gamma^{\alpha}_{ir} \Gamma^{\beta}_{js}) + \mathfrak{S}(\partial_{\beta p} T_{\alpha j} \Gamma^{\alpha}_{iq} \Gamma^{\beta}_{rs}) \\
& + \mathfrak{S}(\partial_{\beta p} T_{i\alpha} \Gamma^{\alpha}_{jq} \Gamma^{\beta}_{rs}) - \mathfrak{S}(\partial_{pq} T_{i\alpha} \Gamma^{\alpha}_{jrs}) - \mathfrak{S}(\partial_{\alpha p} T_{ij} \Gamma^{\alpha}_{qrs}) \\
& + \mathfrak{S}(\partial_{\alpha\beta} T_{ij} \Gamma^{\alpha}_{pq} \Gamma^{\beta}_{rs}) - \mathfrak{S}(\partial_{pq} T_{\alpha j} \Gamma^{\alpha}_{irs}) - \mathfrak{S}(\partial_{p} T_{\alpha j} \Gamma^{\alpha}_{iqrs}) \\
& + \mathfrak{S}(\partial_{p} T_{\alpha\beta} \Gamma^{\alpha}_{iqr} \Gamma^{\beta}_{js}) + \mathfrak{S}(\partial_{\beta} T_{\alpha j} \Gamma^{\alpha}_{ipq} \Gamma^{\beta}_{rs}) + \mathfrak{S}(\partial_{p} T_{\alpha\beta} \Gamma^{\alpha}_{iq} \Gamma^{\beta}_{jrs}) \\
& - \mathfrak{S}(\partial_{\gamma} T_{\alpha\beta} \Gamma^{\alpha}_{ip} \Gamma^{\beta}_{jq} \Gamma^{\gamma}_{rs}) + \mathfrak{S}(\partial_{\beta} T_{\alpha j} \Gamma^{\alpha}_{ip} \Gamma^{\beta}_{qrs}) - \mathfrak{S}(\partial_{p} T_{i\alpha} \Gamma^{\alpha}_{jqrs}) \\
& + \mathfrak{S}(\partial_{\beta} T_{i\alpha} \Gamma^{\alpha}_{jpq} \Gamma^{\beta}_{rs}) + \mathfrak{S}(\partial_{\beta} T_{i\alpha} \Gamma^{\alpha}_{jp} \Gamma^{\beta}_{qrs}) - \partial_{\alpha} T_{ij} \Gamma^{\alpha}_{pqrs} \\
& + \mathfrak{S}(T_{\alpha\beta} \Gamma^{\alpha}_{ipqr} \Gamma^{\beta}_{js}) + \mathfrak{S}(T_{\alpha\beta} \Gamma^{\alpha}_{ip} \Gamma^{\beta}_{jqrs}) + \mathfrak{S}(T_{\alpha\beta} \Gamma^{\alpha}_{ipq} \Gamma^{\beta}_{jrs}) \\
& - T_{\alpha j} \Gamma^{\alpha}_{ipqrs} - T_{i\alpha} \Gamma^{\alpha}_{jpqrs}
\end{aligned}
\qquad (۲۹-۲۳)
$$

۲-۹-۲- قوانین مشتق - همگردگیری: مشتقات - همگرد، تابع قوانین زیراست:

۱- مشتق - همگرد مجموع (یا تفاضل) دو تانسور مساوی مجموع (یا تفاضل) مشتق - همگردهای آنهاست. اثبات این قانون که نتیجهٔ مستقیم (۲۹-۱۶) است بعهدهٔ خوانندگان واگذار میشود .

۲- مشتق - همگرد حاصلضرب خارجی (یا داخلی) دوتانسورمساوی مجموع دو جمله‌ایست که ازضرب خارجی (یا داخلی) هرتانسور در مشتق - همگرد دیگری بدست میآید. زیرا :

$$
\begin{aligned}
(A_{ij}B^{l})_{,m} &= \partial_m (A_{ij}B^{l}) + A_{ij}B^{k}\Gamma^{l}_{mk} - A_{kj}B^{l}\Gamma^{k}_{im} - A_{ik}B^{l}\Gamma^{k}_{jm} \\
&= (\partial_m A_{ij})B^{l} + A_{ij}\partial_m B^{l} + A_{ij}B^{k}\Gamma^{l}_{mk} - A_{kj}B^{l}\Gamma^{k}_{im} - A_{ik}B^{l}\Gamma^{k}_{jm} \\
&= (\partial_m A_{ij} - A_{kj}\Gamma^{k}_{im} - A_{ik}\Gamma^{k}_{jm})B^{l} + (\partial_m B^{l} + B^{k}\Gamma^{l}_{mk})A_{ij} \\
&= (A_{ij,m})B^{l} + A_{ij}B^{l}_{,m}
\end{aligned}
\qquad (۲۹-۲۴)
$$

این مطلب برای ضرب خارجی دو تانسور بود. ازادغام l و j رابطهٔ زیر بدست

میآید که نشان میدهد این قانون برای ضرب داخلی نیز صحیح است :

$$(A_{ij}B^j)_{,m}=A_{ij,m}B^j+A_{ij}B^j_{,m}$$

۳- مشتق ـ همگرد یک عددوار یک مشتق معمولی است . یعنی :

$$(A_i B^i)_{,k}=\partial_k(A_i B^i) \qquad (۲۹—۲۵)$$

زیرا :

$$(A_i B^i)_{,k}=A_{i,k}B^i+A_i B^i_{,k}=(\partial_k A_i - A_l \Gamma^l_{ik})B^i$$
$$+A_i(\partial_k B^i+B^l\Gamma^i_{lk})=B^i\partial_k A_i+A_i\partial_k B^i-A_l B^i\Gamma^l_{ik}$$
$$+A_i B^l\Gamma^i_{lk}=\partial_k(A_i B^i)-A_l B^i\Gamma^l_{ik}+A_l B^i\Gamma^l_{ik}=\partial_k(A_i B^i)$$

۴- مشتق ـ همگرد تانسورهای متریک g_{ij} و g^{ij} و δ^i_j نسبت به x^k صفر است. زیرا با توجه به (۱۶-۲۸) و (۱۸-۲۸) داریم :

$$g_{ij,k}=\partial_k g_{ij}-g_{lj}\Gamma^l_{ik}-g_{il}\Gamma^l_{jk}=\Gamma_{kij}+\Gamma_{kji}-g_{lj}\Gamma^l_{ik}$$
$$-g_{il}\Gamma^l_{jk}=g_{il}\Gamma^l_{jk}+g_{lj}\Gamma^l_{ik}-g_{lj}\Gamma^l_{ik}-g_{il}\Gamma^l_{jk}$$

پس :

$$\underline{g_{ij,k}=0} \qquad (۲۹—۲۶)$$

و همچنین با رعایت (۳۰-۲۸) داریم :

$$g^{ij}_{,k}=\partial_k g^{ij}+g^{lj}\Gamma^i_{lk}+g^{il}\Gamma^j_{lk}=-g^{li}\Gamma^j_{lk} \qquad (۲۹—۲۷)$$
$$-g^{lj}\Gamma^i_{lk}+g^{lj}\Gamma^i_{lk}+g^{li}\Gamma^j_{lk}=0$$

رابطهٔ (۲۷-۲۹) را میتوانستیم از مشتق ـ همگرد رابطهٔ مسلم $g_{mi}g^{ij}=\delta^j_m$ نیز بدست آوریم . بدین ترتیب که اول مشتق ـ همگرد δ^i_j را حساب میکنیم :

$$\delta^i_{j,k}=\partial_k\delta^i_j+\delta^l_j\Gamma^i_{lk}-\delta^i_k\Gamma^l_{jk}=0+\Gamma^i_{jk}-\Gamma^i_{jk}=0 \qquad (۲۹-۲۸)$$

و می‌بینیم که صفر میشود . بعداز (۲۹-۲۶) استفاده میکنیم و حکم ثابت میشود . از روابط (۲۹-۲۶) و (۲۹-۲۷) و(۲۹-۲۸) قضیهٔ زیر که منسوب به ریچی است نتیجه میشود :

قضیه : درمشتق ـ همگرد گیری ، تانسورهای g_{ij} و g^{ij} ودلتای کرونکرنقش اعداد ثابت را دارند .

۵ـ مشتق ـ همگرد دترمینان g : باتوجه به (۲۱-۷) از رابطهٔ $g=|g_{ij}|$ نسبت به متغیر x^k مشتق میگیریم :

$$\partial_k g=\partial_k g_{ij}(g_{ji}\ \text{همعامل})=\partial_k g_{ij}(g\, g^{ij}) \qquad (۲۹-۲۹)$$

حال از رابطهٔ (۲۸-۱۸) برای ساده کردن طرف دوم استفاده میکنیم . بنابراین :

$$\partial_k g=g\, g^{ij}(\Gamma_{kij}+\Gamma_{kji})=g(\Gamma^i_{ki}+\Gamma^j_{kj})=۲g\Gamma^i_{ki}$$

و یا :

$$\frac{۱}{۲g}\,\partial_k g=\Gamma^i_{ki}$$

(g همیشه مثبت استزیرا فضا «اقلیدسی خاص» گرفته شده است) پس داریم:

$$\boxed{\partial_k(\log_n\sqrt{g})=\Gamma^i_{ki}} \qquad (۲۹-۳۰)$$

منظور از $\log_n$ لگاریتم نپری میباشد .

ولی با توجه به تساوی : $\dfrac{du}{u}=\dfrac{۲}{\sqrt{u}}\,d\sqrt{u}$ رابطهٔ (۲۹-۳۰) بصورت زیر در میآید :

$$\boxed{\frac{۱}{\sqrt{g}}\,(\partial_k\sqrt{g})=\Gamma^i_{ki}} \qquad (۲۹-۳۱)$$

طرف‌دوم (۲۹-۳۰) به **نماد کریستوفل ادغام‌شده یاکریستوفل‌نوع سوم** موسوم‌است .

۶ـ دو عمل ادغام ومشتق ـ همگردگیری مستقل ازترتیب [1] عمل هستند.
زیرا مثلاً برای تانسوری از نوع (۲ , ۱) میتوانیم بنویسیم :

$$A^i_{il} = \delta^j_i A^i_{jl}$$

و از آنجا :

$$\underline{A^i_{il,k} = \delta^j_i (A^i_{jl,k})} \qquad (۲۹—۳۲)$$

۷ـ دوعمل تبدیل نوع به‌کمک g_{ij} (یا g^{ij}) و مشتق ـ همگردگیری مستقل از ترتیب عمل هستند :
زیرا :

$$\lambda_{i,k} = (g_{ij}\lambda^j)_{,k} = g_{ij}(\lambda^j_{,k})$$

۸ـ میدانهای برداری موازی : اگر بردار λ^i بنحوی باشد که مشتق ـ همگرد آن نسبت به x^k صفرشود میگوئیم λ^i یک میدان‌برداری موازی‌است. برای اینکه معنای اصطلاح «میدان برداری موازی» را درک کنیم در نقطهٔ P بمختصات (x^j) ازفضابرداری مانند $\boldsymbol{\lambda}$ درنظرمیگیریم. فرض میکنیم منحنی C به معادلات‌پارامتری $x^i = x^i(t)$ ازاین نقطه گذشته باشد. درنقطهٔ P' ازمنحنی بمختصات $(x^j + dx^j)$ برداری مساوی و موازی $\boldsymbol{\lambda}$ رسم میکنیم. اگر λ^i مؤلفه‌های $\boldsymbol{\lambda}$ و $\mathbf{e}_j$ بردارهای همگرد مبنادرنقطهٔ P و $\lambda^i + d\lambda^i$ مؤلفه‌های λ و $\mathbf{e}_j + d\mathbf{e}_j$ بردارهای همگرد مبنا در نقطهٔ P' باشند ، مطابق شکل (۱-۲۹) داریم :

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda^i \mathbf{e}_i = (\lambda^i + d\lambda^i)(\mathbf{e}_i + d\mathbf{e}_i) \qquad (۲۹—۳۳)$$

با رعایت (۶-۲۷) میتوانیم بنویسیم :

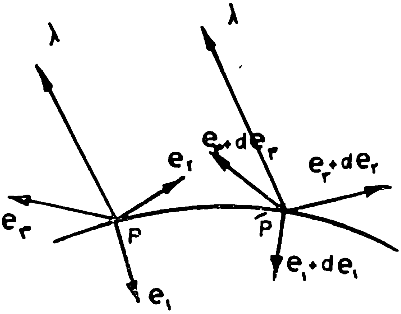
$$d\lambda^i + \lambda^j \Gamma^i_{kj} dx^k + \Gamma^i_{kj} dx^k d\lambda^j = 0 \qquad (۲۹—۳۴)$$

۱– Commutative

اگر فقط جملات مرتبهٔ اول را حفظ کنیم (۲۹-۳٤) بصورت زیر در میآید :

$$d\lambda^i + \lambda^j \Gamma^i_{kj} dx^k = D\lambda^i = 0 \qquad (۲۹-۳۵)$$

لذا اگر برداری روی یک منحنی بموازات خود باقی بماند (بطور موازی انتقال پیدا کند) دیفرانسیل مطلقش صفر میشود. یعنی رابطهٔ $D\lambda^i = 0$ در دستگاههای مستقیم ومنحنیالخط مختصات معرف حرکت موازی روی یک منحنی است.



ش ۲۹.۱

اگر λ یک میدان برداری موازی در فضا باشد رابطهٔ $D\lambda^i = 0$ در روی هر منحنی غیر مشخصی صدق میکند. یعنی بازاء هرمقدار dx^k داریم :

$$D\lambda^i = (\lambda^i_{,k}) dx^k = 0$$

پس شرط لازم و کافی برای اینکه λ یک میدان برداری موازی باشد اینستکه داشته باشیم :

$$\lambda^i_{,k} = 0 \qquad (۲۹-۳٦)$$

۹ـ اگر f یکعدد دوار و $f_{,i} = \partial_i f$ فرض شود داریم :

$$(f_{,i})_{,j} = \partial_{ij} f - \partial_r f \Gamma^r_{ij}$$

و ازاینجا دیده میشود که :

$$(f_{,i})_{,j}=(f_{,j})_{,i} \qquad (۲۹-۳۷)$$

یعنی مشتق ـ همگرد گیری از عددوارها مستقل از ترتیب عوامل است . بعداً خواهیم دید که :

مشتق ـ همگردگیری بردارها ، درحالت کلی مستقل از ترتیب نیست .

تعریف : اگر برداری همگرد به‌مؤلفه‌های λ_i درشرایط :

$$\begin{cases} \lambda_{i,j}-\lambda_{j,i}=0 \\ \lambda^{i}_{,i}=0 \end{cases} \qquad (۲۹-۳۸)$$

صدق کند آن را بردار سوزون (۱) نامند .

اگر برداری ناهمگرد به‌مؤلفه‌های λ^i درشرایط :

$$\begin{cases} \lambda_{i,j}+\lambda_{j,i}=0 \\ \lambda^{i}_{,i}=0 \end{cases} \qquad (۲۹-۳۹)$$

صدق کند آنرا بردارکیلینگ (۲) نامند .

تبصره ـ نتایج مذکوردرفوق درخصوص مشتق ـ همگرد گیری ، برای‌حالتی ذکرشده است که نمادهای کریستوفل نسبت به‌تانسورمتریک g_{ij} که‌درآن دترمینان g_{ij} مخالف‌صفر بود تعیین گردیده است . چون ممکنست‌ازیک مشتق ـ همگرد گیری هم‌که براساس تانسورمتریک g_{ij} بنا نشده صحبت کنیم‌لذا بهتراست‌دراینجاتصریح کنیم که :

نتایج این فصل متکی برمشتقات ـ همگردی است که براساس تانسورمتریک g_{ij} نهاده شده است .

۱۰ـ مشتق ـ همگرد شبه تانسور : ابتدا از یک جرم مخصوص عددوار (۳) A در فضای ۳ بُعدی مانند :

۱- Harmonic ۲- Killing

۳- Scalar Density

$$d_{ijk}=e_{ijk}A \qquad (۲۹-۴۰)$$

شروع میکنیم و نتایج آنرا برای فضای n بُعدی تعمیم میدهیم. طبق (۲۹-۱۶) داریم :

$$d_{ijk,r}=\partial_r d_{ijk}-d_{hjk}\Gamma^h_{ir}-d_{ihk}\Gamma^h_{jr}-d_{ijh}\Gamma^h_{kr} \qquad (۲۹-۴۲)$$
$$i\,,j\,,k\,,r=۱\,,۲\,,۳$$

و همچنین :

$$A_{,r}=d_{۱۲۳,r}=\partial_r d_{۱۲۳}-d_{h۲۳}\Gamma^h_{۱r}-d_{۱h۳}\Gamma^h_{۲r}-d_{۱۲h}\Gamma^h_{۳r} \qquad (۲۹-۴۲)$$
$$h\,,r=۱\,,۲\,,۳$$

ولی چون d_{ijk} ها کاملاً قرینهٔ چپ هستند لذا تمام مؤلفه هائی نظیر $d_{۱۱۲}$ و $d_{۱۲۲}$ و ... که اندیسهای مکرر دارند صفر میشوند و لذا میتوانیم بنویسیم :

$$A_{,r}=\partial_r d_{۱۲۳}-(\Gamma^۱_{۱r}+\Gamma^۲_{۲r}+\Gamma^۳_{۳r})d_{۱۲۳}$$

و یا :

$$\boxed{A_{,r}=\partial_r A-A\Gamma^k_{kr}} \qquad k\,,r=۱\,,۲\,,۳ \qquad (۲۹-۴۳)$$

و برای یک فضای n بُعدی داریم :

$$A_{,r}=\partial_r A-A\Gamma^k_{kr} \qquad k\,,r=۱\,,۲\,,\dots\,,n\,. \qquad (۲۹-۴۴)$$

برای یک ظرفیت عدوار [۱] با محاسبه‌ای شبیه محاسبهٔ فوق رابطهٔ زیر را پیدا خواهیم کرد :

$$C_{,r}=\partial_r C+\Gamma^k_{kr}C \qquad (۲۹-۴۵)$$

بهمین نحو با توجه به رابطهٔ (۲۹-۴۴) برای شبه تانسوری بوزن ۱ـ و از نوع (۰ , ۱) یعنی «جرم مخصوص تانسوری» خواهیم داشت:

۱- Scalar Capacity

$$(A\lambda^{i})_{,r}=\partial_r(A\lambda^{i})-(A\lambda^{i})\Gamma^{k}_{kr}+(A\lambda^{j})+\Gamma^{i}_{jr} \qquad (۲۹-٤٦)$$

که دراین رابطه شبه تانسور بصورت حاصلضرب یک جرم مخصوص عددوار ویک تانسوراز نوع (۰ , ۱) نشان داده شده‌است. فورمول (۲۹-٤٦)را ممکنست برای شبه تانسورهائی از نوع و وزن بالاتر نیز تعمیم داد.

تبصره ـ اگرتانسور **A** بصورت(۲۹-۲۰) بیان شده باشد مشتق ـ همگرد آن بصورت زیر نشان داده میشود :

$$\triangle\mathbf{A}=A^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_n, k}\,\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\dots\mathbf{e}_{i_m}\mathbf{e}^{j_1}\mathbf{e}^{j_2}\dots\mathbf{e}^{j_n}\mathbf{e}^{k} \qquad (۲۹-٤۷)$$

۳۰ ـ پارامتر دیفرانسیل‌ها ـ کارگزارهای دیفرانسیل [1].

در محاسبات برداری با مفاهیم گرادین ، دیورژانس ، روتاسیونل ولاپلاسی آشنائی پیدا کرده دیده بودیم که این عناصردرفضای سه بعدی‌ارتونورمه با عبارت زیر تعریف میشد :

$$\overrightarrow{\text{Grad}\,.\,f}=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{I}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{J}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{K} \qquad (۳۰-۱)$$

$$\text{Div}\,.\,\mathbf{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (۳۰-۲)$$

$$\overrightarrow{\text{Rot}\,.\,\mathbf{B}}=\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\mathbf{I}+\left(\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\mathbf{J}+\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\mathbf{K} \qquad (۳۰-۳)$$

$$\text{Lap}\,.\,f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \qquad (۳۰-٤)$$

حال میخواهیم به بینیم که این مفاهیم در مختصات منحنی‌الخط n بعدی به‌چه صورتی در میآید.

۱- Differential Operators

۱ - ۳۰ - **گرادین** (۱) **یک عددوار** : تابع عددوار $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ و دیفرانسیل آن یعنی :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^i = \partial_i f dx^i \qquad (۳۰-۵)$$

را درنظر میگیریم .

n تابع $\partial_i f$ تشکیل n مؤلفهٔ تانسوری از نوع (۱ , ۰) را میدهد که به «بردار گرادین» موسوم است :

$$\mathrm{Grad}_k . f = \partial_k f \qquad (۳۰-۶)$$

اگر بنویسیم :

$$\overrightarrow{\mathrm{Grad}} . f = \mathbf{e}_j \mathrm{Grad}^j f = \mathbf{e}_j g^{jk} \partial_k f \qquad (۳۰-۷)$$

لذا :

$$\mathrm{Grad}^j . f = g^{jk} \mathrm{Grad}_k . f \qquad (۳۰-۸)$$

مؤلفه های ناهمگرد بردار گرادین میباشد .

هنج گرادین با رابطهٔ زیر تعریف میشود :

$$\|\overrightarrow{\mathrm{Grad}} . f = \mathrm{Grad}^j . f . \mathrm{Grad}^j . f = g^{ij} \partial f_i \partial_j f \qquad (۳۰-۹)$$

که اگر دستگاه ارتونورمه باشد خواهیم داشت :

$$\|\overrightarrow{\mathrm{Grad}} . f = (\partial_1 f)^2 + (\partial_2 f)^2 + \cdots + (\partial_n f)^2 \qquad (۳۰-۱۰)$$

۲ - ۳۰ - **دیورژانس**(۲) **یک بردار** : بردار :

$$\mathbf{A}(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

به مؤلفه های ناهمگرد A^i رادرنظرمیگیریم . طبق تعریف مقدار $A^k_{,k}$ را «دیورژانس

---

۱ - Gradient

۲ - Divergence

بردار A» مینامند و بصورت زیر نشان میدهند :

$$\mathrm{Div}\,.\,\mathbf{A}=A^k_{,k} \qquad (۳۰-۱۱)$$

پس :

$$\mathrm{Div}\,.\,\mathbf{A}=\partial_k A^k+A^l\Gamma^k_{kl} \qquad (۳۰-۱۲)$$

و یا با توجه به (۲۹-۳۱) خواهیم داشت :

$$\mathrm{Div}\,.\,\mathbf{A}=\partial_k A^k+\frac{۱}{\sqrt{g}}(\partial_l\sqrt{g})A^l \qquad (۳۰-۱۳)$$

که درآن $\sqrt{g}$ و A^k دیفرانسیل پذیر فرض شده است . حال اتحاد زیر را درنظر میگیریم :

$$\frac{۱}{\sqrt{v}}\cdot\frac{d(u\sqrt{v})}{dx}u\equiv\frac{du}{dx}+\frac{۱}{\sqrt{v}}\,\frac{d\sqrt{v}}{dx}u \qquad (۳۰-۱۴)$$

و یا :

$$\frac{۱}{\sqrt{v}}\cdot\frac{d\sqrt{v}}{dx}u\equiv\frac{۱}{\sqrt{v}}\cdot\frac{d(u\sqrt{v})}{dx}-\frac{du}{dx} \qquad (۳۰-۱۶)$$

بنابراین میتوانیم بنویسیم :

$$\frac{۱}{\sqrt{g}}(\partial_l\sqrt{g})A^l=\frac{۱}{\sqrt{g}}\partial_k(\sqrt{g}A^k)-\partial_k A^k \qquad (۳۰-۱۶)$$

و از آنجا :

$$\boxed{\mathrm{Div}\,.\,\mathbf{A}=\frac{۱}{\sqrt{g}}\partial_k(\sqrt{g}A^k)} \qquad (۳۰-۱۷)$$

بکمک این فورمول است که میتوانیم دیورژانس برداری را در دستگاه منحنی‌الخط حساب کنیم .

۳ - ۳۰ - روتاسیونل[1] یک بردار : بردار $\mathbf{B}$ را که با n مؤلفهٔ همگردش B_i مشخص شده درنظر میگیریم . میدانیم :

$$B_{i,j} = \partial_j B_i - B_l \Gamma^l_{ji} \qquad (۳۰-۱۸)$$

و همچنین :

$$B_{j,i} = \partial_i B_j - B_l \Gamma^l_{ij} \qquad (۳۰-۱۹)$$

طبق تعریف،تانسورقرینهٔ چپ : $(B_{i,j} - B_{j,i})$ را که از نوع $(۲ , o)$ است«تانسور روتاسیونل» بردار $\mathbf{B}$ نامند و بصورت زیر نمایش میدهند :

$$\boxed{\mathrm{Rot}\mathbf{B} = B_{i,j} - B_{j,i} = \partial_j B_i - \partial_i B_j} \qquad (۳۰-۲۰)$$

این تانسور در فضای n بُعدی دارای $\frac{n(n-۱)}{۲} = \frac{n!}{۲!(n-۲)!}$ مؤلفهٔ مستقل میباشد . حالت بسیار مهم آن وقتی است که مختصات قائم وفضا ۳ بُعدی باشد . دراینحال تعداد مؤلفه های مستقل ۳ ودرنتیجه روتاسیونل معرف یک بردارمحوری خواهد بود .

٤ - ۳۰ - لاپلاسی[2] یک عددوار : دیورژانس گرادین یک تابع عددوار را لاپلاسی آن نامند :

$$\mathrm{Lap}\,.\,f = \mathrm{Div}\,.\,\mathrm{Grad}\,.\,f \qquad (۳۰-۲۱)$$

و یا :

$$\mathrm{Lap}\,.\,f = g^{kj}(f_{,j})_{,k} = (g^{kj}\partial_j f)_{,k} = g^{jk}(\partial_j f)_{,k} \qquad (۳۰-۲۲)$$

حال اگر فرض کنیم : $\partial_j f = A_j$ باشد لذا داریم :

۱- Curl یا Rotationnel ۲- Laplacian

$$A_{j,k} = \partial_k A_j - A_h \Gamma^h_{jk}$$

و بنابراین :

$$\text{Lap}\,.\,f = g^{jk}(\partial_{jk} f - \partial_h f \Gamma^h_{jk}) \qquad (۳۰-۲۳)$$

و یا بالاخره :

$$\text{Lap}\,.\,f = \frac{۱}{\sqrt{g}}\,\partial_k(\sqrt{g}\,g^{kj}\,\partial_j f) \qquad (۲۰-۲۴)$$

۳۱ - **مؤلفه‌های فیزیکی یک‌بردار:** از (۳۰-۸) پیداست که دیفرانسیل های متغیرهای مختصات هنگام تغییر محورها مثل یک بردار ناهمگرد تبدیل میشوند. حالا اگر این متغیرها زاویه باشد مؤلفه‌های ناهمگرد یک بردار، دیگر مثل **تغییرمکان** تبدیل نمیشود. گذشته از آن در ترکیب $dx^j e_j$ که معرف یک تغییرمکان است ∂_k ها درحالت کلی بردار یکه نیستند.

فیزیکدانها و آنهائیکه در ریاضیات عملی کار میکنند به کمیاتی که مانند تغییرمکان تبدیل میشوند علاقمندند. مؤلفه‌های این نوع کمیات را **مؤلفه‌های فیزیکی** آنها مینامند وفورمول تبدیل آنها بسیار پیچیده است. و بهمین دلیل کلیهٔ مطالعاتی که روی این مؤلفه‌ها صورت میگیرد در دستگاه‌های خاصی بعمل میآید. چون در محاسبات برداری کلاسیک تعاریف همگرد و نا همگرد دخالت نمیکنند مؤلفهٔ یک بردار روی یک محور (که همان مؤلفهٔ فیزیکی است) تصویر آن روی آن محور تعریف میشود (خاصیتی که بهر دستگاه ارتونورمه پیوسته است). ولی در محاسبات تانسوری اگر $\mathbf{u}_i$ برداریکه‌ای در امتداد $\mathbf{e}_i$ (بردارهای مبنای محلی) و v_i^* مؤلفهٔ فیزیکی بردار $\mathbf{V}$ باشد (ش ۱-۳۱) طبق تعریف داریم :

$$v^*_۱ = e_۱ v^۱ = \frac{۱}{e_۱} v_۱ \quad \text{و} \quad v^*_۲ = e_۲ v^۲ = \frac{۱}{e_۲} v_۲ \quad \text{و} \qquad (۳۱-۱)$$

$$v^*_۳ = e_۳ v^۳ = \frac{۱}{e_۳} v_۳$$

و یا :

$$v_1^* = +\sqrt{|g_{11}|}\,v^1 = \frac{1}{+\sqrt{|g_{11}|}}\,v_1 \quad \text{و} \qquad (۲۱-۲)$$

$$v_2^* = +\sqrt{|g_{22}|}\,v^2 = \frac{1}{+\sqrt{|g_{22}|}}\,v_2 \quad \text{و} \quad v_3^* = +\sqrt{|g_{33}|}\,v^3 = \frac{1}{+\sqrt{|g_{33}|}}\,v_3$$

و :

$$u_i = \frac{1}{+\sqrt{|g_{ii}|}}\,\mathbf{e}_i = \frac{1}{+\sqrt{|g_{ii}|}}\,g_{ik}\,\mathbf{e}^k \qquad (۲۱-۳)$$

و یا :

$$\mathbf{e}_1 = +\sqrt{|g_{11}|}\,\mathbf{u}_1 \quad \text{و} \quad \mathbf{e}_2 = +\sqrt{|g_{22}|}\,\mathbf{u}_2 \quad \text{و} \qquad (۲۱-٤)$$

$$\mathbf{e}_3 = +\sqrt{|g_{33}|}\,\mathbf{u}_3$$

۱ - ۳۱ - مؤلفه‌های فیزیکی توابع مشتق - حالت خاص فضای اقلیدسی قائم:

در محاسبات برداری معمولاً از مبناهای متعامد استفاده میشود و تغییر مختصات از یک مبنای ارتونورمه $(\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 = 1)$ بیک مبنای قائم صورت میگیرد .

در یک فضای قائم داشتیم :

$$g_{ij} = (\mathbf{e}_i \,,\, \mathbf{e}_j) = 0 \qquad i \neq j \,,\, i,j = 1,2,\dots,n$$

$$g_{ii} = (\mathbf{e}_i)^2 \quad \text{یا} \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}_i = \sqrt{g_{ii}} \qquad i = 1,2,\dots,n$$

و اگر فضای ما دارای ۳ بُعد بود داشتیم :

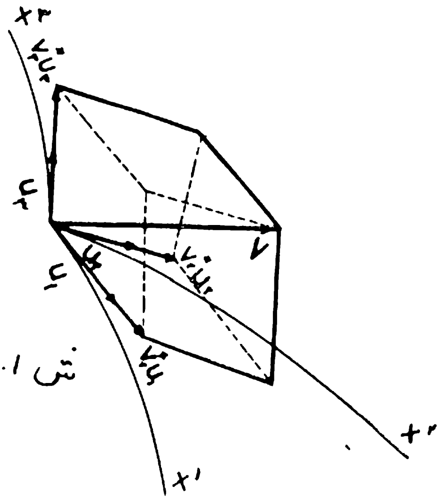
$$+\sqrt{g} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \quad \text{و یا} \quad g = |g| = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)^2$$

۲ - ۳۱ - گرادین : مؤلفه های فیزیکی گرادین که در محاسبات تانسوری بصورت $G_k = \mathrm{Grad}_k\, f = \partial_k f$ تعریف شده بود بترتیب زیر خواهد بود :

$$G_1^* = \frac{1}{e_1} G_1 \quad و \quad G_2^* = \frac{1}{e_2} G_2 \quad و \quad G_3^* = \frac{1}{e_3} G_3 \qquad (۳۱-۵)$$

و یا :

$$G_1^* = \frac{1}{e_1} \partial_1 f \quad و \quad G_2^* = \frac{1}{e_2} \partial_2 f \quad G_3^* = \frac{1}{e_3} \partial_3 f \qquad (۳۱-۶)$$



نش ۳۱.۱

مثال : تبدیل مختصات دکارتی به مختصات کروی :

$$e_1 = \sqrt{g_{11}} = 1 \quad و \quad e_2 = \sqrt{g_{22}} = x^1 \sin x^3 \quad و \quad e_3 = \sqrt{g_{33}} x^1$$

$$\mathrm{Grad}_1 f = \partial_1 f \quad و \quad \mathrm{Grad}_2 f = \frac{1}{x^1 \sin x^3} \partial_2 f \quad و \quad \mathrm{Grad}_3 f = \frac{1}{x^1} \partial_3 f$$

$$\overrightarrow{\mathrm{Grad}\, f} = \partial_1 f \mathbf{e}_1 + \frac{1}{x^1 \sin x^3} \partial_2 f\, \mathbf{e}_2 + \frac{1}{x^1} \partial_3 f \mathbf{e}_3 \qquad (۳۱-۷)$$

۳ - ۳۱ - **دیورژانس** : با استفاده از (۳۰-۱۷) داریم :

$$A^1 = \frac{1}{e_1} A_1^* \quad و \quad A^2 = \frac{1}{e_2} A_2^* \quad و \quad A^3 = \frac{1}{e_3} A_3^* \qquad (۳۱-۸)$$

و لذا :

$$\operatorname{div}A=\frac{1}{e_1e_2e_3}[\partial_1(e_2e_3A_1^*)+\partial_2(e_3e_1A_2^*)+\partial_3(e_1e_2A_3^*)] \qquad (31-9)$$

مثال : با همان تغییر مختصات ، مثل قبل داریم :

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=\frac{1}{x^{1'}\,sin^{3'}}\left\{\partial_1'[(x^{1'})^2 \sin x^{3'}\,A_1^*]+\partial_2'(x_1'\,A_2^*)+\partial_3'(x^{1'}\sin x^{3'}\,A_3^*)\right\}$$

۴ - ۳۱ - **روتاسیونل** : برای مؤلفه های فیزیکی روتاسیونل (که درمحاسبات برداری بعنوان یک بردار درنظرگرفته شده بود) داریم :

مؤلفهٔ واقع روی e_3 :

$$\operatorname{Rot}_{12}\mathbf{A}=\frac{1}{e_1e_2}[\partial_1(e_2A_2^*)-\partial_2(e_1A_1^*)] \qquad (31-10)$$

مؤلفهٔ واقع روی e_1 :

$$\operatorname{Rot}_{23}\mathbf{A}=\frac{1}{e_2e_3}[\partial_2(e_3A_3^*)-\partial_3(e_2A_2^*)] \qquad (31-11)$$

مؤلفهٔ واقع روی e_2 :

$$\operatorname{Rot}_{31}A=\frac{1}{e_3e_1}[\partial_3(e_1A_1^*)-\partial_1(e_3A_3^*)] \qquad (31-12)$$

مثال : با همان تغییر مختصات دو مثال قبل داریم :

$$\overrightarrow{\operatorname{Rot}\mathbf{A}}=\frac{1}{(x^{1'})^2\sin x^{3'}}[\partial_{2'}(x^{1'}A_3^*)-\partial_{3'}(x^{1'}\sin x^{3'}A_2^*)]\Big\}\mathbf{e}_1$$
$$+\left\{\frac{1}{x^{1'}}[\partial_{3'}A_2^*-\partial_{1'}(x^{1'}A_3^*)]\right\}\mathbf{e}_2$$
$$+\left\{\frac{1}{x^{1'}\sin x^{3'}}[\partial_{1'}(x^{1'}\sin x^{3'}A_2^*)-\partial_{2'}A_1^*]\right\}\mathbf{e}_3$$

۵ - ۳۱ - لاپلاسی : با توجه به فورمول (۲۷-۳۰) در فضای سه بُعدی قائم داریم :

$$+\sqrt{g}=e_{۱}e_{۲}e_{۳} \text{ و } g^{۱۱}=\left(\frac{۱}{e_{۱}}\right)^{۲} \text{ و } g^{۲۲}=\left(\frac{۱}{e_{۲}}\right)^{۲} \text{ و } g^{۳۳}=\left(\frac{۱}{e_{۳}}\right)^{۲}$$

و بازاء $i \neq j$ داریم : $g_{ij}=0$ و از آنجا :

$$\operatorname{Lap} f=\frac{۱}{e_{۱}e_{۲}e_{۳}}\left[\partial_{۱}\left(\frac{e_{۲}e_{۳}}{e_{۱}}\partial_{۱} f\right)+\partial_{۲}\left(\frac{e_{۳}e_{۱}}{e_{۲}}\partial_{۲} f\right)+\partial_{۳}\left(\frac{e_{۱}e_{۲}}{e_{۳}}\partial_{۳} f\right)\right] \quad (۱۳-۳۱)$$

مثال : مجدداً با همان تغییر مختصات امثلهٔ قبل داریم :

$$\operatorname{Lap} f=\frac{۱}{(x^{۱'})^{۲}\sin x^{۳'}}\left[\partial_{۱}\left((x^{۱'})^{۲}\sin x^{۳'}\partial_{۱} f\right)+\partial_{۲'}\left(\frac{۱}{\sin x^{۳'}}\partial_{۲} f\right)+\partial_{۳'}\left(\sin x^{۳'}\partial_{۳} f\right)\right] \quad (۱۴-۳۱)$$

تمرینات

۱- ثابت کنید که نمادهای کریستوفل نوع دوم مربوط به تبدیل :

$$\begin{cases} x^{1} = x'^{1} \cos x'^{2} \\ x^{2} = x'^{1} \sin x'^{2} \\ x^{3} = x'^{3} \end{cases}$$

عبارتند از $\Gamma^{1}_{22} = -x'^{1}$ و $\Gamma^{2}_{12} = \Gamma^{2}_{21} = \frac{1}{x'^{1}}$ و بقیه صفرند .

۲- تساوی‌های زیر را ثابت کنید :

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_i \left(g^{ij}\sqrt{g} + g^{ik}\,\Gamma^{j}_{ik}\right) = 0$$

$$A^{j}_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_j \left(\sqrt{g}\,A^{j}_{i}\right) - A^{j}_{k}\,\Gamma^{k}_{ij}$$

۳- ثابت کنید که دیفرانسیل مطلق شبه عددواری به وزن W خواهد بود:

$$DA = dA - WA\Gamma^{k}_{jk}dx^{j}$$

٤- ثابت کنید که اگر A^{ij} تانسوری دوبارنا همگرد وقرینهٔ چپ باشد عبارت:

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_i \left(\sqrt{g}\,A^{ij}\right)$$

معرف مؤلفه های برداری است ناهمگرد .

۵- اگر رابطهٔ $b_{ijk}dx^{i}dx^{j}dx^{k} = 0$ بازاء مقادیر دلخواه دیفرانسیل ها برقرار باشد ثابت کنید :

$$b_{123} + b_{231} + b_{312} + b_{132} + b_{321} + b_{213} = 0$$

اگر b_{ijk} نسبت به i و j قرینه باشد این شرط بچه صورتی در میآید ؟

۶- اگر بازاء $i \neq j$ داشته باشیم $g_{ij}=0$ (یعنی دستگاه قائم باشد) ثابت کنید:

$$[ij\,,k]=0 \quad \text{و} \quad [ij\,,i]=-[ii\,,j]=\frac{۱}{۲}\partial_j g_{ii} \quad \text{و}$$

$$\left\{\begin{matrix} k \\ ij \end{matrix}\right\}=0 \quad \text{و} \quad \left\{\begin{matrix} i \\ ii \end{matrix}\right\}=\Gamma^i_{ii}=\frac{۱}{۲}\partial_i(\log g_{ii}) \quad \text{و}$$

$$\left\{\begin{matrix} i \\ ij \end{matrix}\right\}\equiv\Gamma^i_{ij}=\frac{۱}{۲}\partial_j(\log g_{ii}) \quad \text{و} \quad \Gamma^i_{jj}=-\frac{۱}{۲g_{ii}}\partial_i g_{jj}$$

و اگر $\neq k$ و j و i باشد $\left\{\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right\}\equiv\Gamma^i_{jk}=0$ است. بدیهی است اندیس مکرر نشانهٔ عمل جمع نیست و معنی $\neq$ k و j و i اینستکه هیچیک از اندیسهای i و j و k دوبدو باهم مساوی نیست .

۷- ثابت کنید که نمادهای کریستوفلی که نسبت به هرتانسور g_{ij} با شرط $g\equiv|g_{ij}|\neq 0$ تشکیل میشود در عبارت زیر صادق است :

$$g_{lh}\,\partial_j\left\{\begin{matrix} h \\ ik \end{matrix}\right\}=\partial_j[ik\,,l]-\left\{\begin{matrix} h \\ ik \end{matrix}\right\}\Big([hj\,,l]+[lj\,,h]\Big)$$

۸- ثابت کنید که برای هرعددوار f کمیت $g^{ij}f_{,ij}$ عددواری است مساوی :

$$\frac{۱}{\sqrt{g}}\partial_i\left(\sqrt{g}\,g^{ij}\partial_j f\right)$$

فصل پنجم

فضا و هندسهٔ ریمانی

۳۲ ـ چنانکه میدانیم درهندسهٔ دیفرانسیل سروکار ما با مطالعهٔ موجوداتی است هندسی که روی مانیفلد [۱]های دیفرانسیل پذیرواقعند. یکی ازاین موجودات که از همه ساده‌تر میباشد تانسوری است متقارن مانند G_{ij} ، عادی ($|G_{ij}| \neq 0$) ازنوع (۲ ، ۰) . آن شاخه‌ای ازهندسهٔ دیفرانسیل که به مطالعهٔ ساختمانهای مربوط باین تانسوراختصاص داده شده به **هندسهٔ ریمانی** موسوم است. یا میتوانیم بگوئیم که یک فضای نقطه‌ای با ابعاد معین [۲] که از مجموعهٔ مرتبی از مختصات حقیقی x^1 و x^2 و ... و x^n درست‌شده وقتی یک **فضای ریمانی** است که بتوانیم درآن تانسوری از نوع (۲ ، ۰) به مؤلفه های $G_{ij}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ را که دارای خواص زیرباشد تعریف کنیم :

۱ ـ G_{ij} ها توابعی باشند یک مقداری [۳] از مختصات ، که مشتقات جزئی پیوسته داشته باشند .

۲ ـ $G_{ij} = G_{ji}$ باشد .

۳ ـ $$G = G(x^1, x^2, \dots, x^n) = \mathrm{Det}[G_{ij}(x^1, \dots, x^n)] \neq 0$$

که دراینجا G معمولاً (نه همیشه) مثبت و معین است .

مادراین کتاب ازهندسهٔ **ریمانی محلی** یعنی فقط ازخواص هندسهٔ دیفرانسیلی

---

۱ – Manifold   ۲ – Definite

۳ – Single - Valued

آن قسمتی ازمانیفلد دیفرانسیل پذیر که بادستگاههای مختصات پوشیده شده صحبت خواهیم کرد .

عنصر طول یعنی ds را با رابطهٔ :

$$ds^2 = G_{ij}(x^1, x^2, \ldots, x^n)dx^i dx^j \qquad (۳۲-۱)$$

که طبق تعریف پایا است تعریف میکنیم .

بطوریکه دیده میشود ds فقط و فقط وقتی مقدار حقیقی دارد که شکل درجهٔ دوم طرف (۳۲-۱) مثبت معین باشد.

ولی‌چون درنسبیت عمومی شکل درجهٔ دوسی که نامعین[1] است‌نیزوارد شده ، در بسیاری از کتب فرض معین مثبت بودن را کنار گذاشته و عنصر طول ds را با رابطهٔ :

$$ds^2 = eG_{ij}dx^i dx^j \qquad (۳۲-۲)$$

تعریف کرده‌اند که در آن :

$e = +1$ است اگر $G_{ij}dx^i dx^j > 0$ باشد.

و $e = -1$ » » $G_{ij}dx^i dx^j < 0$ »

و $e = 0$ » » $G_{ij}dx^i dx^j = 0$ »

e را شاخص[2] بردار $\vec{ds}$ نامند .

معنای (۳۲-۲) که طولی را تعریف میکند اینستکه ds طول برداری است ناهمگرد به مؤلفه های dx^i . اگر X^i مؤلفه های ناهمگرد میدان برداری دلخواهی باشد کمیت :

$$|\mathbf{X}|^2 = eG_{ij}X^i X^j \qquad (۳۲-۲)$$

۱- Indefinite ۲- Indicator

پایا بوده وبعنوان «طول» بردار $\mathbf{X}$ (درهرنقطهٔ فضا) تعریف میشود. طول قسمتی از قوس یک منحنی با رابطهٔ :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{eG_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\, dt \qquad (۳۲-٤)$$

تعریف میشود .

چون $|G_{ij}| \neq 0$ فرض شده لذا میتوانیم مانند (۲۱-۷) تانسوراصلی ناهمگرد دیگری را طبق رابطهٔ زیر تعریف کنیم :

$$G^{ij}(x^1, x^2, \dots, x^n) = (\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j) = \frac{G_{ji}\text{همعامل}}{|G_{ij}|} \qquad (\mathbf{e}^i = G^{ik}\mathbf{e}_k) \qquad (۳۲-٥)$$

و از آنجا داریم :

$$X^i = G^{ij}X_j \quad \text{و} \quad X_i = G_{ij}X^j \qquad (۳۲-٦)$$

و :

$$G^{ij}X_i X_j = G^{ij}G_{ik}X^kG_{jl}X^l = G_{kl}X^kX^l = e|\mathbf{X}|^2 \qquad (۳۲-٧)$$

اگر در (۳۲-۳) مقدار $\mathbf{X}=0$ باشد یعنی داشته باشیم :

$$G_{ij}X^i X^j = 0 \qquad (۳۲-٨)$$

دراینصورت $\mathbf{X}$ را بردار به **طول صفر** درآن نقطه نامند . واگر(۳۲-۸) درهمه جا صادق باشد گویند یک **میدان برداری صفر** داریم . ولی اگر شکل اصلی درجهٔ دوم (۳۲-۱) **نامعین** باشد مقدار $|\mathbf{X}|^2 = G_{ij}X^i X^j$ ممکنست مثبت ، منفی ویاصفر باشد و بنابراین رابطهٔ (۳۲-۸) ایجاب نمیکند که $\mathbf{X}=0$ باشد . یعنی ممکنست (۳۲-۸) برقرار باشد بی‌آنکه طول بردار صفر باشد ، دراینصورت $\mathbf{X} \neq 0$ را یک **امتداد صفر خوانند** . بدیهی است دراینصورت طول یک قطعه از منحنی :

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{G_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\,dt$$

نیز صفر خواهد بود . دراینحال منحنی را منحنی بطول صفر یا « مینیمال » نامند یعنی فاصلهٔ دو نقطه از منحنی صفر است بی‌آنکه دو نقطه برهم منطبق باشند [۱] .

دراین کتاب مابرای سهولت ، متریک‌را معین مثبت میگیریم یعنی (۱-۳۲) را بعنوان عنصر طول قبول میکنیم .

میتوانستیم عین روشی را که برای وارد کردن یک متریک بطور منطقی (§ ۱۷) در یک فضای آفین n بـُعدی بکار برده بودیم دراینجا نیز بکار بریم . یعنی حاصلضرب عددواردوبردار $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ بمؤلفه های ناهمگرد Y^i و X^j راکه توابعی از n متغیر x^k هستند بترتیب زیر تعریف کنیم :

$$(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y})= \tag{۳۲—۹}$$
$$=G_{ij}(x^1, x^2, \ldots, x^n)X^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)Y^j(x^1, x^2, \ldots, x^n)$$
$$=X_j Y^j=G_{ij}X^i Y^j$$

بدیهی است طبق تعریف این حاصلضرب پایا فرض شده است و از خاصیت زیر پیروی میکند :

$$(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y})=(\mathbf{Y}\ ,\ \mathbf{X}) \tag{۳۲—۱۰}$$

دراینصورت فضای ریمانی را بترتیب زیر نیز میتوانستیم تعریف کنیم :

فضائی‌که در آن حاصلضرب عددوار با (۹-۳۲) تعریف میشود. به فضای ریمانی (یا ریمان) موسوم است . ازآنچه تاکنون گفتیم اختلاف اساسی درتعریف تحلیلی بین فضای اقلیدسی و فضاهای ریمانی آشکار میشود :

۱- یادآوری میکنیم که در«فضا ـ زمان» نظریهٔ نسبی بعضی منحنی‌های بطول صفر با «خطوط جهانی» نور متحد گرفته شده است.

در یک فضای اقلیدسی تانسور اصلی $g_{i'j'}$ از روی دستگاه ارتونورمهٔ فضا توسط فورمول زیر وارد میشود :

$$g_{i'j'} = \delta_{ij} p^{i}_{i'} p^{j}_{j'} \qquad (۱۱—۳۲)$$

که در آن n فورمول تبدیل $x^i = x^i(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'})$ که معرف n مختصات منحنی یا مستقیم‌الخط $x^{i'}$ نسبت بدستگاه ارتونورمه میباشند نیز دخالت میکنند .

در فضاهای ریمانی تانسور اصلی اختیاری است و اگر بتوانیم آنرا با یک تبدیل مختصاتی خاص ، بشکل ارتونورمهٔ δ_{ij} درآوریم آنوقت فضای ریمانی یک فضای اقلیدسی میشود .

فقط یک فضای اقلیدسی بیشتر نداریم درحالیکه بتعداد مقادیر اختیاری‌که میتوانیم به G_{ij} ها نسبت دهیم دارای فضای ریمانی هستیم . بهمین جهت است که باید از فضاهای ریمانی و فضای اقلیدسی صحبت کنیم [۱].

بعداً خواهیم دید که در فضاهای ریمانی عبور از یکدستگاه بدستگاه دیگر عملاً توسط انتقال ودوران صورت میگیرد که انتقال‌آن مستقیماً توسط ds^2 و دوران آن توسط انتقال موازی بیان میشود .

یکی از مشخصات اصلی فضاهای ریمانی اینستکه کلیهٔ پدیده‌های فیزیکی - آنهائی که در محیط‌هائی صورت میگیرند که تقابل [۲] آنها مورد قبول است - در فضاهای ریمانی نیز میتوانند صورت گیرند .

۱- برای آنهائیکه با تئوری گروه‌ها آشنائی کامل دارند میتوانیم هندسهٔ ریمانی را بترتیب زیر تعریف کنیم (تعریف کارتان) : هندسهٔ ریمانی مطالعهٔ پایاهای گروه بینهایت کلیهٔ تبدیلات نقطه‌ای با n متغیراست که یک شکل دیفرانسیل درجهٔ‌دوم معینی بآن‌الحاق شده است.

۲- Reciprocality

۳۳ - فضای بخصوص ریمانی [۱]

اگر دترمینان G_{ij} همیشه مثبت‌وتمام مینورهای فقط‌یک‌زنجیرهٔ این دترمینان بزرگتر از صفر باشد فضا «بخصوص ریمانی» نامیده میشود . در اینصورت شکل دیفرانسیل :

$$ds^2 = G_{ij} dx^i dx^j \qquad (۳۳-۱)$$

«معین مثبت» خواهد بود .

به‌بینیم زنجیرهٔ مینورها[۲] یعنی چه ؟ دترمینانی را که از n^2 عنصر a_{ij} تشکیل شده است درنظر میگیریم . یک «زنجیره ازمینورها»ی این دترمینان عبارتست از:

$$a_{11} \text{ و } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ و } \cdots \text{ و } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

و همچنین :

$$a_{22} \text{ و } \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix} \text{ و } \cdots \text{ و } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

عنصر a_{ii} که در اول انتخاب شده به **مبنای زنجیره**[۳] موسوم است . دور این مبنا

۱- Proprement Riemannian

۲- Chaine de Mineurs

۳- Pivot de Chaine

بطرز دلخواهی سطرها و ستونهائی که همدیگر را روی قطر ببرند اضافه میکنیم. اگر تمام مینورهای مراتب ۱ و ۲ و ... و n از یک زنجیره به مبنای a_{ii}، بزرگتر از صفر باشند کلیهٔ مینورهائی هم که از آنها ساخته شود همین خاصیت را خواهند داشت [۱].

اکنون که G_{ij} های فضای «بخصوص ریمانی» را مشخص ساختیم میخواهیم ثابت کنیم که میتوانیم دستگاه مختصاتی را در این فضا تعریف کنیم. چون هرمینور:

$$\begin{vmatrix} G_{ii} & G_{ij} \\ G_{ji} & G_{jj} \end{vmatrix} \qquad (۲۳-۲)$$

یک حلقهٔ کوچک از یک زنجیره و طبق تعریف مثبت است پس داریم:

$$G_{ii}G_{jj} - (G_{ji})^{2} \geqslant 0 \qquad (۲۳-۳)$$

حال اگر فرض کنیم:

$$(\mathbf{e}_i \; , \; \mathbf{e}_j) = G_{ij} \qquad (۲۳-۴)$$

میتوانیم طول هربردار مبنا را با رابطهٔ:

$$|\mathbf{e}_i| = \sqrt{G_{ii}} \qquad (۲۳-۵)$$

و زاویهٔ بین دوبردار مبنا را با رابطهٔ:

$$\cos\theta_{ij} = \frac{(\mathbf{e}_i \; , \; \mathbf{e}_j)}{|\mathbf{e}_i| \cdot |\mathbf{e}_j|} = \frac{G_{ij}}{\sqrt{G_{ii}G_{jj}}} \qquad (۲۳-۶)$$

و بالاخره زاویهٔ بین دو بردار غیر مشخص $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ را با رابطهٔ زیر تعریف کنیم:

$$\cos(\mathbf{X} \; , \; \mathbf{Y}) = \frac{(\mathbf{X} \; , \; \mathbf{Y})}{|\mathbf{X}| \cdot |\mathbf{Y}|} = \frac{G_{ij}X^i Y^j}{\sqrt{(G_{ij}X^i X^j)\;(G_{kl}Y^k Y^l)}} \qquad (۲۳-۷)$$

۱- برای اثبات آن به [۸] مراجعه شود.

از آنجا شرط لازم وکافی برای تعامد دو بردار غیر صفر $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ خواهد بود :

$$G_{ij}X^iY^j = 0 \qquad (۳۳-۸)$$

تبصره ـ ازآنچه که تاکنون دراین مبحث گفتیم معلوم میشود که اگرمتریک فضا نامعین فرض شود $\cos\theta$ عدداً ممکن است ازواحد بزرگتر شود و بالمآل به مطلبی که با دید هندسی تناقض دارد برخواهیم خورد . دراینصورت $\cos\theta$ فقط بعنوان نمادی برای نمایش طرف دوم بکار میرود و دیگر تعبیر هندسی متداول را ندارد .

۱ - ۳۳ - **فضای اقلیدسی مماس** : اگردستگاه مختصات اولیه را x^i ومتریک مربوط بآن را G_{ij} بگیریم میتوانیم با تبدیلی نظیر :

$$x^i = C^i_{i'}x^{i'} \qquad (۳۳-۹)$$

(که ژاکوبین J درآن مخالف صفر است) ازمختصات x^i به $x^{i'}$ برویم و تانسور G_{ij} را به **شکل قطری** درآوریم . این عمل ، پایا بودن شکل درجهٔ دوم را محفوظ نگاه میدارد . وقتی تانسور اصلی به شکل قطری درآید بصورت زیر خواهد بود :

$$\Delta_{i'j'} = C^i_{i'}C^j_{j'}G_{ij} \qquad (۳۳-۱۰)$$

دراینحال مختصات جدید $x^{i'}$ را «مختصات نرمال» نامند . صورت قطری تبدیل شدهٔ تانسور G_{ij} با عبارت زیر معین میشود :

$$\text{اگر} \quad i' \neq j' \qquad \Delta_{i'j'} = 0 \qquad (۳۳-۱۱)$$

$$\text{اگر} \quad i' = j' \qquad \Delta_{i'j'} \neq 0 \qquad (۳۳-۱۲)$$

فایدهٔ این به « شکل قطری » درآوردن [1] بلافاصله آشکار میشود . زیرا با یک تبدیل مختصات دیگری مثل :

۱- Diagonalisation

$$y^{i'} = \sqrt{\Delta_{i'i'}}\, x^{i'} \qquad (۳۳-۱۳)$$

(اندیسها ، اندیسهای «عمل جمع» نیست) بیکدستگاه اقلیدسی ارتونورمه میرسیم .
دراینحال مختصات $x^{i'}$ به متغیر مبدل [۱] موسوم است .

اگر G_{ij} ها مقادیر ثابتی نباشد میتوان درهرنقطه دستگاه قائمی ساخت که توسط شکل قطری $\Delta_{i'j'}$ مشخص شود وبدینوسیله فضای ریمانی به فضای اقلیدسی محلی تبدیل گردد .

از روی دستگاهی که توسط $\Delta_{i'j'}$ تعیین میشود میتوان هرتبدیل مختصاتی را چه مستقیم‌الخط وچه منحنی‌الخط بطورمحلی انجام داد وبدین ترتیب یک فضای اقلیدسی محلی مستقر ساخت . چنین فضای اقلیدسی محلی به « فضای اقلیدسی مماس» موسوم است .

مثال : فرض کنیم مقادیر محلی تانسور اصلی G_{ij} $(i, j = ۱ , ۲)$ مقادیر :

$$G_{11} = 11 \quad و \quad G_{22} = 9 \quad و \quad G_{12} = G_{21} = \sqrt{3} \qquad (۳۳-۱۴)$$

که به متغیرهای x^1 و x^2 مربوطند باشد . تبدیل متغیری بصورت زیر میدهیم :

$$\begin{cases} x^{1'} = \dfrac{1}{2} x^1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} x^2 \\[2ex] x^{2'} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} x^1 + \dfrac{1}{2} x^2 \end{cases} \qquad (۳۳-۱۵)$$

(این تبدیل مختصات اختیاری نیست بلکه از راه تعیین‌امتدادهای خاص ماتریسی که دترمینان‌آن(۳۳-۲) میباشد ، توسط محاسبات ماتریسی معین میشود) بنابراین از حل (۳۳-۱۵) داریم :

۱- Reduite

$$\left\{\begin{array}{l} x^{1}=\frac{1}{2}x^{1'}+\frac{\sqrt{3}}{2}x^{2'} \\ x^{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}x^{1'}+\frac{1}{2}x^{2'} \end{array}\right. \qquad (۳۳-۱۶)$$

و از آنجا :

$$C^{1}_{1'}=\frac{\partial x^{1}}{\partial x^{1'}}=\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad C^{1}_{2'}=\frac{\partial x^{1}}{\partial x^{2'}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{و} \qquad (۳۳-۱۷)$$

$$C^{2}_{1'}=\frac{\partial x^{2}}{\partial x^{1'}}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{و} \quad C^{2}_{2'}=\frac{\partial x^{2}}{\partial x^{2'}}=\frac{1}{2}$$

و لذا طبق (۳۳-۱۰) داریم :

$$\Delta_{1'1'}=8 \quad \text{و} \quad \Delta_{2'2'}=12 \quad \text{و} \quad \Delta_{1'2'}=\Delta_{2'1'}=0 \qquad (۳۳-۱۸)$$

اما شکل درجهٔ دوم ، طبق فورمول زیر پایا میماند :

$$ds^{2}=11(dx^{1})^{2}+2\sqrt{3}\,dx^{1}dx^{2}+9(dx^{2})^{2} \qquad (۳۳-۱۹)$$

$$=8(dx^{1'})^{2}+12(dx^{2'})^{2} \qquad \text{(شکل قطری)}$$

حال اگر فرض کنیم :

$$\left\{\begin{array}{l} y^{1'}=\sqrt{8}\,x^{1'} \\ y^{2'}=\sqrt{12}\,x^{2'} \end{array}\right. \qquad (۳۳-۲۰)$$

لذا شکل اقلیدسی ارتونورمهٔ زیر بدست خواهد آمد :

$$ds^{2}=(dy^{1'})^{2}+(dy^{2'})^{2} \qquad (۳۳-۲۱)$$

متغیرهای $y^{i'}$ ، متغیرهای مبدل وارتونورمهٔفضای‌اقلیدسی مماس نامیده میشوند .

تبصره ـ در حالت کلی ، وقتی از دستگاه $x^{i'}$ بدستگاه x^{i} میرویم میدانیم که داریم :

$$G_{ij}=p_i^{i'}\,p_j^{j'}G_{i'j'} \tag{۳۳—۲۲}$$

و یا :

$$G=J^{۲}G' \tag{۳۳—۲۳}$$

که در رابطهٔ اخیر فرض شده است :

$$G'=|G_{i'j'}| \;\text{و}\; G=|G_{ij}| \;\text{و}\; J=|p_i^{i'}| \tag{۳۳—۲۴}$$

اما تنها در تابعی از متغیرهای مبدل فضای اقلیدسی مماس است که (۲۳ - ۳۳) بصورت زیر در میآید :

$$G=J^{۲} \tag{۳۳—۲۵}$$

۳۴ـ آنالیز تانسوری در فضای ریمانی

با استدلالی مشابه استدلال (۲۸ §) و رعایت دستگاههای e_i که براساس G_{ij} ها ساخته میشود نمادهای کریستوفل نوع اول و دوم با عبارت زیر تعریف میشود :

$$[ik\,,\,j]=\Gamma_{ijk}=\frac{۱}{۲}\,(\partial_k G_{ij}+\partial_i G_{jk}-\partial_j G_{ki}) \tag{۳۴—۱}$$

$$\begin{Bmatrix} j \\ ik \end{Bmatrix}=\Gamma^j_{ik}=\frac{۱}{۲}\,G^{jl}(\partial_k G_{il}+\partial_i G_{lk}-\partial_l G_{ki}) \tag{۳۴—۲}$$

$$=G^{jl}\Gamma_{ilk}$$

فورمولهای تبدیل (۲۸-۴۳) عیناً بقوت خود باقی میمانند ، فقط درآنها بجای g_{ij} باید G_{ij} قرار داده شود . همینطور «دیفرانسیل مطلق» با روابط :

$$\left\{\begin{aligned} D\lambda^j &= d\lambda^j+\Gamma^j_{kl}\lambda^l dx^k \\ D\lambda_i &= d\lambda_i-\Gamma^l_{ik}\lambda_l dx^k \end{aligned}\right. \tag{۳۴—۳}$$

و مشتق ـ همگرد با روابط :

$$\lambda^j_{,k} = \partial_k \lambda^j + \lambda^h \Gamma^j_{hk} \qquad (۲٤-٤)$$

$$\lambda_{i,k} = \partial_k \lambda_i - \lambda_h \Gamma^h_{ik} \qquad (۲٤-٥)$$

تعریف میشود .

فورسول کلی (۲۹-۱٦) برای فضاهای ریمانی نیز صادق است .

تحقیق قضیهٔ ریچی یعنی :

$$G_{ij,k} = 0 \quad \text{و} \quad G^{ij}_{,k} = 0$$

بآسانی صورت میگیرد و خواص مشتق ـ همگرد تانسورهای مرکب دراینجا هم محفوظ میماند .

فورمولهای (۲۹-۳۲) دراینجا هم صادق است و اثبات رابطهٔ :

$$\lambda_{i,k} = (G_{ij}\lambda^j)_{,k} = G_{ij}(\lambda^j_{,k}) \qquad (۲٤-٦)$$

عیناً مانندقبل صورت میگیرد .

مشتق ـ همگرد یک دترمینان و در نتیجه نمادهای کریستوفل ادغام شده (یا کریستوفل نوع سوم) با عبارات زیر مشخص میشود :

$$\begin{Bmatrix} i \\ ik \end{Bmatrix} = \Gamma^i_{ik} = \frac{۱}{۲G}(\partial_k G) = \frac{۱}{\sqrt{G}}\partial_k\sqrt{G} = \partial_k log_n \sqrt{G} \qquad (۲٤-۷)$$

مشتق ـ همگرد شبه تانسورها عیناً مانند قسمت آخر (۲۹ §) صورت میگیرد .

اختلاف اساسی مابین فضایاقلیدسی وفضاهای ریمانی درمفهوم «خمیدگی» فضا است که بعداً بطور تفصیل از آن صحبت خواهیم کرد .

تبصرهٔ ۱ـ اگر یک رشته ارتباطات آفین Γ^i_{kj} مفروض باشند دوارتباط دیگر از آن میتوانیم بسازیم :

اول :
$$L^i_{jk} = \frac{۱}{۲}(\Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{kj}) \qquad (۲٤-۸)$$

که چون Γ^i_{kj} و Γ^i_{jk} هردو در (۳-۲۸) صدق میکنند پس L^i_{jk} هم درآن صدق میکنند یعنی L^i_{jk} هم یک ارتباط آفین است .

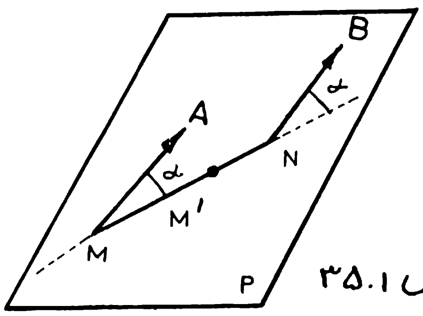
دوم :
$$T^i_{jk} = \frac{۱}{۲}\,(\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}) \qquad (۳۴-۹)$$

که با توجه به تبصرهٔ ۱ (§ ۲۸) یک تانسور است و آنرا **تانسور پیچش**[۱] **ارتباط آفین** مینامند . از (۹-۳۴) پیداست که تانسور پیچش یک ارتباط متقارن ، صفر است . و بهمین دلیل ارتباط متقارن را اکثراً ارتباط «بدون پیچش» مینامند .

تبصرهٔ ۲- اگر **L** و **M** دو تانسور باشند ، تابع **N** که با عبارت :
$$N^k_{ij} = \alpha L^\alpha_{ij} + (۱-\alpha) M^k_{ij} \qquad (۳۴-۱۰)$$

مشخص میشود نیز یک تانسور است . بالاخص وقتی $\alpha = \frac{۱}{۲}$ باشد داریم :
$$\mathbf{N} = \frac{۱}{۲}\,(\mathbf{L} + \mathbf{M})$$

۳۵- هندسه‌های اقلیدسی و ریمانی : بردارهای **A** و **B** واقع در صفحهٔ P و مستقر در نقاط M و N را وقتی بمعنای اقلیدسی «موازی» گوئیم که با خط واصل بین نقاط M و N زوایای مساوی بسازند و بعلاوه متحدالجهت هم باشند (ش ۱-۳۵) و وقتی آنها را «هم‌ارز» گوئیم که مدولهای آنها هم یکی باشند .

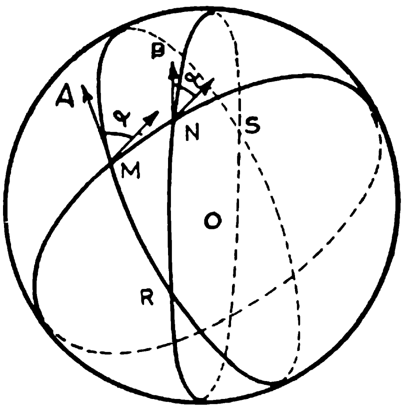


ش ۳۵.۱

۱- Torsion

در روی کره نیز میتوان عین همین مفهوم را برای «توازی» تعریف کرد .

دور بردار **A** و **B** مستقر در نقاط M و N واقع در صفحات مماس بر کره در همین نقاط ، وقتی «موازی در روی کره» خوانده میشوند که با مماسهای در M و N بردایرهٔ عظیمهٔ مارا ازاین دونقطه ، زوایای مساوی بسازند (ش ۲-۳۵) . اگر مدولهای آنها هم یکی باشند آنها را «هم‌ارز» گویند .



ش ۳۵.۲

دراینجا طبق تعریف،دایرهٔ عظیمه همان نقش خط مستقیم را درصفحه‌دارد .

کره سطحی است‌ریمانی که تعریف«توازی»در روی‌آن دیگراقلیدسی نیست . برای موجودات«بینهایت مسطح» که روی کره زندگی میکنند خطوط مستقیم همان «قوسهای عظیمه» خواهند بود که همیشه در دو نقطه R و S همدیگر را میبرند . یعنی هندسهٔ آنها دیگر اقلیدسی نیست .

حال‌بجای کره سطح غیرمشخصی به‌معادلهٔ $\varphi(x^1 , x^2 , x^3)=0$ را درنظر میگیریم . به بینیم‌آیا میتوانیم روی این سطح خطوطی پیدا کنیم که تعریف غیر اقلیدسی «توازی» برای آنها نظیر تعریف آن روی کره باشد ؟

برای جواب دادن باین سئوال قبلاً متذکر میشویم که تمام نقاط واقع روی خط MN در صفحهٔ P (ش ۱-۳۵) همان خاصیت نقاط M و N را دارند . یعنی

درهرنقطهٔ اختیاری M' ازاین خط هم ، یک بردار موازی با **A** ، با بردار **B** موازی است . نظیر همین مطلب برای کره وجود دارد یعنی در تمام نقاط دایرهٔ عظیمهٔ ماربر نقاط M و N ، هربردار «موازی»[۱] با **A** ، با بردار **B** «موازی» و هربردار «هم‌ارز» با **A** ، با **B** «هم‌ارز» خواهد بود .

پس در روی صفحه (یا کره) بموجب تعریف اصل توازی ، میتوان جای هربردار را در طول یک خط (یا یک دایره عظیمه) تغییر داد بی‌آنکه قدر مطلق و همچنین زاویه‌اش باآن خط (یا با مماس بردایرهٔ عظیمه) تغییر کند . دراینحال گوئیم «انتقال موازی» در طول این خط (یا منحنی) امکان پذیراست . تمام خطوط یک صفحه و تمام دوایر عظیمهٔ واقع روی یک کره این خاصیت را دارند . بعلت «شبه کروی» بودن شکل زمین و استعمال این کلمه نخستین بار در فیزیک کرهٔ زمین ، چنین خمهائی را «ژئودزیک»[۲] نامیده‌اند .

بااین مقدمه ، جواب این سئوال که‌آیا چنین خمهائی روی سطح : $\varphi(x^1 , x^2 , x^3) = 0$ وجود دارند یانه ، مثبت است . ما دراینجا گذشته ازآنکه وجود ژئودزیکها را روی چنین سطوحی ثابت خواهیم کرد تعریف توازی ، انتقال موازی و ژئودزیک‌را برای فضاهای ریمانی با ابعاد بالاتر نیزتعمیم خواهیم داد .

اول فرض میکنیم در فضای اقلیدسی n بُعدی هستیم . انتقال موازی در طول هرخطی ممکنست (اگر $n > 3$ باشد خط را هیپرخط[۳] گویند) . آن خاصیتی

۱- از این ببعد برای اشتباه نکردن با هندسه اقلیدسی کلمات «توازی» و «هم‌ارزی» را در **فضاهای ریمانی** درون گیومه خواهیم گذارد .

۲- Geodesics

۳- معادلهٔ یک هیپر خط در فضای اقلیدسی n بعدی :

$$\frac{x^1 - x_0^1}{a^1} = \frac{x^2 - x_0^2}{a^2} = \cdots\cdots = \frac{x^n - x_0^n}{a^n}$$

را که بازاء $n=2$ در آغاز این مبحث مطالعه کردیم برای فضای‌ها ابعاد بالاتر نیز ممکنست بسط دهیم ، ولی بجای اینکه توازی را با دخالت دادن زاویه‌ای مانند α تعریف نمائیم ، بیان میکنیم که درمختصات مستقیم‌الخط ، n مؤلفهٔ بردار هنگام انتقال تغییر نمیکنند یعنی :

$$A^j(x^i+x^i_{\cdot})=A^j(x^i) \quad \text{(فقط در مختصات مستقیم‌الخط)} \qquad (۳۵-۱)$$

$x^i_{\cdot}$ ها دراین روابط معرف مؤلفه های تغییرمکان هستند .

این تعریف تغییرمکان را برای مختصات منحنی‌الخط نیز میتوان بکار برد . ولی باید متوجه بود که اصل‌انتقال برای چنین مختصاتی فقط وقتی صادق است که تغییرمکان بینهایت کوچک باشد :

$$A^j(x^i+dx^i)=A^j(x^i)$$

حال میخواهیم « انتقال موازی » را در یک فضای ریمانی معین با تانسور اصلی G^{ij} تعریف کنیم .

اگر همهٔ G^{ij} ها ثابت باشند ، شرط «انتقال موازی» همان شرطی خواهد بود که در فضای اقلیدسی برای محورهای مستقیم‌الخط وجود داشت. یعنی :

$$A^j(x^i+x^i_{\cdot})=A^j(x^i) \quad \text{(فضای ریمانی با } G^{ij} \text{ های ثابت)} \qquad (۳۵-۲)$$

در حالت کلی که G^{ij} ها ثابت نیستند ، همانطورکه دربالا گفتیم ، از رابطهٔ زیر استفاده میکنیم :

$$A^j(x^i+dx^i)=A^j(x^i) \qquad (۳۵-۳)$$

شرایط (۳۵-۳) معرف یک عنصر کوچک $\vec{ds}$ به مؤلفه‌های dx^i از خمی است که « انتقال موازی » در روی آن امکان پذیر است . اگر از این دستگاه n معادلهٔ دیفرانسیل ، انتگرال بگیریم معادلات « ژئودزیک » های فضای ریمانی

مفروض بدست میآید . اضافه میکنیم که معمولاً حل چنین معادلاتی باستثنای بعضی حالات خاص مقدور نیست .

خوانندگان ملاحظه میکنند که سطح ریمانی مورد نظرما ، به یک هیپرسطح تشبیه شده است . زیرا ثابت میشود که میتوان فرض کرد که هرفضای ریمانی در یک فضای اقلیدسی $\frac{n(n-1)}{2}$ بُعدی «فرورفته» (۱) است . البته این مطلب هنوز بطور دقیق اثبات نشده است . اگر بعنوان مثال اشاره کنیم که هرسطح $\varphi(x^1, x^2, x^3)=0$ در یک فضای سه بُعدی « فرورفته است » و دستگاههای مختصات واقع روی این سطوح دو بُعدی هستند بخوبی مفهوم « فرورفته » را درك می نمائیم .

۳۶- معادلات ژئودزیکها : فرض میکنیم $x^i=\varphi^i(t)$ معادلهٔ خطی ازفضای ریمانی مفروضی باشد (ما دراینجا خود را به فضاهای ریمانی خاص که t پارامتری است اختیاری محدود مینمائیم) . بیان میکنیم که میتوان برداری مانند **A** را روی یک قطعهٔ بینهایت کوچک $\overrightarrow{ds}$ ازاین خط بطور « موازی » انتقال داد . یعنی شرط لازم و کافی زیر برقرار است :

$$d\mathbf{A}=\lim_{\Delta x^j \to 0}\left[A^i(x^j+\Delta x^j)-A^i(x^j)\right]=0 \qquad (۳۶-۱)$$

اما چون داریم : $\mathbf{A}=A^i\mathbf{e}_i$ پس :

$$d\mathbf{A}=\mathbf{e}_i\,dA^i+d\mathbf{e}_i\,A^i=0 \qquad (۳۶-۲)$$

و اگر پارامتر t را وارد کنیم :

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\mathbf{e}_i\frac{dA^i}{dt}+A^i\frac{d\mathbf{e}_i}{dt}=0 \qquad (۳۶-۳)$$

۱- Embeded

و یا :

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\mathbf{e}_i\frac{dA^i}{dt}+A^i\partial_k\mathbf{e}_i\frac{dx^k}{dt}=0 \qquad (۳۶—۴)$$

ولی در (۳۴ §) نشان‌دادیم که کلیهٔ محاسبات (۲۸ §) درهندسهٔ ریمانی هم ممکنست صورت گیرد. لذا طبق (۲۷-۷) داریم :

$$\partial_k\mathbf{e}_i=\mathbf{e}_j\Gamma^j_{ki} \qquad (۳۶—۵)$$

پس :

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\mathbf{e}_j\frac{dA^j}{dt}+\mathbf{e}_j\Gamma^j_{kl}A^l\frac{dx^k}{dt}=\mathbf{e}_j\left(\frac{dA^j}{dt}+\right.$$
$$\left.+\Gamma^j_{kl}A^l\frac{dx^k}{dt}\right)\equiv\mathbf{e}_j\frac{DA^j}{dt}=0 \qquad (۳۶—۶)$$

لذا رابطهٔ :

$$\frac{DA^j}{dt}\equiv\frac{dA^j}{dt}+\Gamma^j_{kl}A^l\frac{dx^k}{dt}=0 \qquad (۳۶—۷)$$

شرطیست که یک‌بردار ناهمگرد A^j باید داشته باشد تابتواند یک انتقال «موازی» بینهایت کوچکی را درفضای ریمانی مفروضی بپذیرد .

حال این فورمول را برای یک بردار ناهمگرد $\vec{ds}$ بمؤلفه‌های dx^i که معرف تغییرمکان بینهایت کوچکی روی یک ژئودزیک است بکار میبریم . اگر $A^j=v^j=\dfrac{dx^j}{dt}$ فرض شود داریم :

$$\frac{dv^j}{dt}+\Gamma^j_{kl}v^l\frac{dx^k}{dt}=0 \qquad (۳۶—۸)$$

و یا :

$$\boxed{\frac{d^2x^j}{dt^2}+\Gamma^j_{kl}\frac{dx^l}{dt}\frac{dx^k}{dt}=0} \qquad (۳۶—۹)$$

بدینترتیب n معادله که همان معادلات دیفرانسیل ژئودزیکهای فضای ریمانی مفروض هستند بدست میآید. ضمناً این معادلات نشان میدهند که بردارهای مماس بر ژئودزیک وقتی روی منحنی بوسیلهٔ «انتقال موازی» تغییرمکان میدهند باز بموازات خود باقی میمانند، یعنی میتوانیم بگوئیم که مماسهای برنقاط مختلف یک ژئودزیک شاخص واحدی دارند و در واقع از شاخص یک ژئودزیک صحبت کنیم. اگر شاخص صفرباشد منحنی به ژئودزیک صفرموسوم است که همانطوریکه قبلاً گفتیم، در تئوری نسبیت برمسیرهای شعاعهای نورانی منطبق گرفته شده است.

سئوالات بسیاری ازقبیل سئوالات: در روی یک ژئودزیک، فاصلهٔ دو نقطهٔ P_0 و P چقدر باشد تا بتواند معرف «حداقل فاصله» باشد؟ یا تحت چه شرایطی طول یک ژئودزیک را میتوانیم تا بینهایت امتداد دهیم؟ و . . . درباب ژئودزیکها پیش میآید.

ما دراینجا اصولاً این مسائل را مطرح نمیکنیم و فقط اشاره مینمائیم که ثابت میشود میتوان ازهرنقطه ازسطح ریمانی یک ژئودزیک درامتداد معین رسم کرد و جوابهای دستگاههای (۹-۳۶) منحصر بفردند یعنی از دو نقطهٔ بینهایت نزدیک (۱) روی یک سطح فقط و فقط یک ژئودزیک میگذرد نه بیشتر.

اگرپارامتر t معرف زمان باشد نمایش سینماتیک آن آسانست. چه دراینصورت v^j معرف سرعت یک متحرک درطول ژئودزیک خواهد بود. لذا معادلات (۹-۳۶) که معرف ژئودزیکها بودند بصورت:

۱- این شرط بااین واقعیت که منحصر بفرد بودن ژئودزیک به توپولوژی کلی (Global) سطح بستگی دارد بیان میشود. مثلاً دونقطه ازیک استوانهٔ دوار را بابینهایت هلیس میتوان بهم وصل کرد. اگر این دو نقطه روی دو مولد متقاطر واقع باشند دو قوس ازاین هلیس میتوان پیدا کرد که هردو معرف اقصر فاصله باشند. وهمینطوردو نقطهٔ متقاطر واقع روی یک کره را بوسیلهٔ بینهایت نیمدایره‌های عظیمه که هریک حداقل فاصله هستند میتوان بهم وصل کرد.

$$\gamma^j \equiv \frac{Dv^j}{dt} = \frac{d^2x^j}{dt^2} + \Gamma^j_{kl}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt} = 0 \qquad (۳۶-۱۰)$$

که در آن γ^j معرف شتاب مطلق روی منحنی است در میآید . دیده میشود که این شتاب در طول یک ژئودزیک صفر است .

قبلاً این نکته را اضافه میکنیم که اگر همهٔ G^{ij} ها صفر باشند کلیهٔ Γ^j_{kl} ها هم صفر خواهند شد و در نتیجه معادلات ژئودزیک بصورت $\frac{d^2x^j}{dt^2}=0$ در میآید که جوابهای آن خواهد بود :

$$x^j = a^j t + x^j_0 \qquad (۳۶-۱۱)$$

که معادلات خط مستقیم هستند . یعنی همان نتیجهایرا که قبلاً گرفته بودیم باز میگیریم : **یک فضای ریمانی با G^{ij} های ثابت فضائی است اقلیدسی .**

برای تعیین معادلات ژئودزیک ، اغلب پارامتر را s یعنی طول منحنیالخط متحرك در روی منحنی میگیرند ، یعنی بیان میکنند که n مختصات x^j توابعیازاین پارامترند :

$$x^j = \varphi^j(s) \qquad (۳۶-۱۲)$$

بدیهی است که انتخاب s بعنوان پارامتروقتی ممکنست که منحنی بطول صفرنباشد . فرض میکنیم داشته باشیم :

$$u^j = \frac{dx^j}{ds} \qquad (۳۶-۱۳)$$

این بردار بعلت نمایش هندسیش اغلب به « برداریکهٔ سرعت » موسوم و معرف برداریکهٔ مماس برمنحنی(۳۶-۱۲) است . بااین پاراﻣترجدید معادلات (۳۶-۹) بصورت زیر در میآید :

$$\boxed{\frac{d^2x^j}{ds^2} + \Gamma^j_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0} \qquad (۳۶-۱٤)$$

بین پارامترهای t و s رابطهٔ سادهٔ زیر موجود است :

$$v^j = \frac{dx^j}{dt} = \frac{dx^j}{ds} \frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}| u^j \qquad (۳۶—۱۵)$$

که در آن $|\mathbf{v}|$ معرف مدول بردار بمؤلفه های v^j و رابطهٔ :

$$u^j = \frac{v^j}{|\mathbf{v}|} \qquad (۳۶—۱۶)$$

نیز مؤید این نامگذاری است.

قبلاً دیده‌ایم که اگرمنحنی، منحنی بطول صفرباشد ژئودزیک‌را«ژئودزیک می‌نیمال» گویند. البته باید متوجه باشیم که درچنین ژئودزیکی وقتی t را پارامتر میگیریم معادلات(۳۶-۱۴) حاصل میشود.

مثلاً فضای نسبیت خاص را با شکل درجهٔ دوم اصلی :

$$\varphi = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^4)^2 \qquad (۳۶—۱۷)$$

درنظر میگیریم. هرمنحنی بطول صفردراین فضا را میتوان با معادلاتی بصورت :

$$\left\{ \begin{aligned} x^1 &= \int R \cos\theta \cos\varphi \, ds \\ x^2 &= \int R \sin\theta \sin\varphi \, ds \\ x^3 &= \int R \sin\theta \quad ds \\ x^4 &= \int R \, ds \end{aligned} \right. \qquad (۳۶—۱۸)$$

که درآنها R و θ و φ توابعی از s هستند بیان کرد. تنها درحالتیکه R و θ و φ مقادیر ثابتی باشند این منحنی‌های انتگرال همان منحنی‌های (۳۶-۱۴) خواهند بود که بصورت $\frac{d^2x^i}{dt^2} = 0$ در میآیند و لذا بطور کلی **یک منحنی بطول صفر ژئودزیک نیست**. معادلهٔ(۳۶-۱۴)را بصورت متراکم زیرهم میتوانیم بنویسیم :

$$\frac{d^2x^j}{ds^2}+\Gamma^j_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds}=\frac{du^j}{ds}+\Gamma^j_{kl}u^l\frac{dx^k}{ds} \tag{۳۶—۱۹}$$

$$=\partial_k u^j\frac{dx^k}{ds}+\Gamma^j_{kl}u^l\frac{dx^k}{ds}$$

$$=(\partial_k u^j+\Gamma^j_{kl}u^l)\frac{dx^k}{ds}\equiv(u^j_{,k})u^k=0$$

رابطهٔ :

$$(v^j_{,k})v^k=0 \tag{۳۶—۲۰}$$

نیز عیناً بهمین نحو پیدا خواهد شد .

۳۷- **خاصیت اساسی ژئودزیکها** : ژئودزیک مارّ از دونقطهٔ بینهایت‌نزدیک اکسترموم فاصلهٔ بین این دو نقطه است [۱].

برای اینکه بتوانیم مطلب را روی شکل بسادگی دنبال کنیم مسئله را در یک فضای ریمانی دو بُعدی که با یک سطح غیر مسطح [۲] نشان داده میشود مجسم میکنیم. بدیهی است که ابعاد فضا هرچه باشد نوع استدلال تغییر نمیکند.

فرض میکنیم A و B دونقطه از یک فضای ریمانی داده شده باشد. خمی مانند $\overset{\frown}{AMB}$ بمعادلهٔ :

$$x^i=\varphi^i(t) \tag{۳۷—۱}$$

راکه از این دو نقطه میگذرد درنظر میگیریم (ش ۱-۳۷).

طول خم $\overset{\frown}{AMB}$ از روی انتگرال معین :

$$l=\int_A^B ds \tag{۳۷—۲}$$

۱- ماکزیمم یا مینیمم تابعی را بی‌آنکه مشخص باشد کدام یک منظوراست اکسترموم آن تابع نامند.

۲- Non - Plane

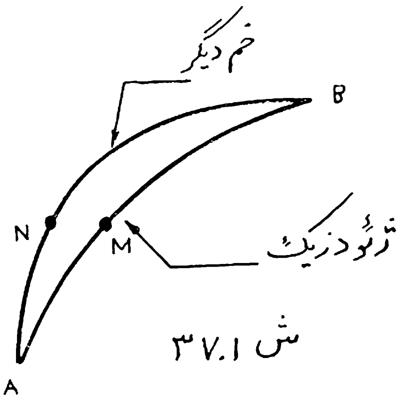
که در آن ds با رابطهٔ :

$$ds = \sqrt{G_{jk}dx^j\,dx^k} = \sqrt{G_{jk}\frac{dx^j}{dt}\;\frac{dx^k}{dt}}\,dt \qquad (۳۷-۳)$$

مشخص میشود ، بدست میآید . حال خم بینهایت نزدیک دیگری را که طول آن $l+\delta l$ است درنظر میگیریم . اختلاف بین طولهای دو خم خواهد بود :

$$\delta l = \delta\int_A^B ds \qquad (۳۷-٤)$$

میخواهیم ثابت کنیم که اگر خم $\widehat{AMB}$ ژئودزیک غیر مشخصی باشد طولش از



ش ۳۷.۱

هرمنحنی دیگر نزدیک بآن مثل $\widehat{ANB}$ کوتاهتر است. برای اثبات این خاصیت مهم ، اول ثابت میکنیم که‌شرط $\frac{Dv^j}{dt}=0$ شرط $\frac{Dv_i}{dt}=0$ را ایجاب میکند و بالعکس .

در واقع با توجه به تساوی $v_i = G_{ij}v^j$ میتوانیم بنویسیم :

$$Dv_i = D(G_{ij}v^j) = G_{ij}Dv^j \qquad (۳۷-۵)$$

چون Dv^j هاهمه صفرند Dv_i ها هم همه صفرمیشوند. عکس مطلب نیزبهمین

نحو ثابت میشود . بطریق مشابهی ثابت میشود که داریم :

$$Du_i = 0 \qquad (۳۷-۶)$$

اما با توجه به رابطهٔ دوم (۳-۳٤) میتوانیم بنویسیم :

$$\frac{Dv_i}{dt} = \frac{dv_i}{dt} - \Gamma^l_{ki}\, v_l \frac{dx^k}{dt} = \frac{dv_i}{dt} - \Gamma^l_{ki} v_l\, v^k = 0 \qquad (۳۷-۷)$$

اگر از نمادهای کریستوفل نوع اول استفاده کنیم خواهیم داشت :

$$\frac{dv_i}{dt} - \Gamma_{ijk} v^j\, v^k = 0 \qquad (۳۷-۸)$$

که با جایگشت اندیسهای j و k بصورت زیر در میآید :

$$\frac{dv_i}{dt} - \Gamma_{ikj} v^j\, v^k = 0 \qquad (۳۷-۹)$$

از جمع این دو رابطه ، رابطهٔ :

$$\frac{dv_i}{dt} - \frac{۱}{۲}\left[\Gamma_{ikj} + \Gamma_{ijk}\right] v^j\, v^k = 0 \qquad (۳۷-۱۰)$$

و بالاخره با رعایت (۲۸-۲۷) که در فضای ریمانی هم صدق میکند رابطهٔ زیر را خواهیم داشت :

$$\frac{Dv_i}{dt} = \frac{dv_i}{dt} - \frac{۱}{۲}\, \partial_i\, G_{jk}\, v^j\, v^k = 0 \qquad (۳۷-۱۱)$$

حال ازاین فورمولها استفاده مینمائیم و فرض میکنیم :

$$x^i = \varphi^i(t) \qquad (۳۷-۱۲)$$

معادلات پارامتری ژئودزیک $\widehat{AMB}$ و :

$$x^i = \varphi^i\left[t + \epsilon q^i(t)\right] \qquad (۳۷-۱۳)$$

معادلات پارامتری خم $\widehat{ANB}$ ، بینهایت نزدیک بآن باشد . $(q^i(t)$ ، n تابع

اختیاری و ε مقداریست بینهایت کوچک). مطابق تعریف ، درطول $\widehat{AMB}$ داریم:

$$v^i(t) = \frac{dx^i}{dt} \qquad (۳۷—۱۴)$$

و همینطور در طول $\widehat{ANB}$ داریم :

$$v^i(t) = \varepsilon r^i(t) \qquad (۳۷—۱۵)$$

که در اینجا فرض کرده‌ایم :

$$r^i(t) = \frac{dq^i}{dt} \qquad (۳۷—۱۶)$$

δl یعنی اختلاف طول ژئودزیک $\widehat{AMB}$ و خم مجاورش $\widehat{ANB}$ خواهد بود :

(۳۷—۱۷)

$$\delta l = \delta \int_A^B \sqrt{G_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}}\,dt = \int_A^B \delta\left(\sqrt{G_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}}\right)dt$$

$$= \int_A^B \frac{\delta G_{jk} v^j v^k}{۲\sqrt{G_{jk} v^j v^k}}\,dt$$

(حدود انتگرال گیری ثابت است). درطول یک ژئودز یک مدول یک بردار تغییر نمیکند . لذا برداری که مؤلفه های آن v^j است مدولش یعنی $\sqrt{G_{jk} v^j v^k}$ پایا میماند. بنابراین میتوانیم مخرج را در خارج علامت انتگرال بگذاریم و بنویسیم:

$$\delta l = \frac{۱}{۲v}\int_A^B \delta(G_{jk} v^j v^k)\,dt \qquad (۳۷—۱۸)$$

حال $\delta(G_{jk} v^j v^k)$ را طبق فورمول افزایش محدود[۱] برای توابع مرکب[۲] بسط

۱- Accroissement fini ۲- Compo.é

میدهیم و از فورمولهای (۳۷-۱۲) تا (۳۷-۱۶) استفاده میکنیم. لذا داریم :

$$\delta(G_{jk} v^j v^k) = \partial_i G_{jk}\, \varepsilon q^i v^j v^k + G_{jk}\, \varepsilon r^j v^k + G_{jk} v^j \varepsilon r^k \qquad (۳۷-۱۹)$$

که دو جملهٔ آخر در این رابطه مساوی هستند. اگر اندیسهای i و k را درجملهٔ اول عوض کنیم خواهیم داشت :

$$\delta(G_{jk} v^j v^k) = \partial_k G_{ij} \varepsilon q^k v^i v^j + ۲ v_k \varepsilon \frac{dq^k}{dt} \qquad (۳۷-۲۰)$$

بعد بطور جزء بجزء [1] انتگرال میگیریم و رعایت میکنیم که مقدار q^k در نقاط A و B صفر است. لذا داریم :

$$\delta l = \frac{۱}{۲v} \int_A^B \left(\frac{۱}{۲} \partial_k G_{ij} v^i v^j - \frac{dv^k}{dt} \right) q^k dt \qquad (۳۷-۲۱)$$

مقدار داخل پرانتز همان (۳۷-۱۱) یعنی $\frac{Dv_k}{dt}$ است. ولی میدانیم که فقط و فقط در طول یک ژئودزیک یاخمی مانند آنستکه DV^j و Dv_j صفر میشوند. لذا نتیجه میگیریم که δl برای هرخم غیر ژئودزیکی نظیر ANB صفر نیست. خم AMB «اکسترمالی» است که نقاط A و B را بهم وصل میکند. وقتی فضای ریمانی اقلیدسی باشد کوتاهترین راه بین دونقطه خط مستقیم است زیرا ژئودزیکها همه خطوط مستقیم هستند.

تبصرهٔ ۱- اگر از (۳۶-۱۵) نسبت به s مشتق بگیریم داریم :

$$\frac{d^۲x^i}{ds^۲} + \partial_l \Gamma^i_{jk} \frac{dx^l}{ds} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} + \Gamma^i_{jk} \left(\frac{d^۲x^j}{ds^۲} \frac{dx^k}{ds} + \frac{d^۲x^k}{ds^۲} \frac{dx^j}{ds} \right) = 0$$

و یا با توجه به (۳۶-۱۵) داریم :

۱- Integration by parts

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\partial_l\Gamma^i_{jk}\frac{dx^l}{ds}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}$$
$$+\Gamma^i_{jk}\left[\frac{dx^k}{ds}\left(-\Gamma^j_{\alpha l}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^l}{ds}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{dx^j}{ds}\left(-\Gamma^k_{\alpha l}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^l}{ds}\right)\right]=0$$

و یا :

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+(\partial_l\Gamma^i_{jk}-\Gamma^i_{\alpha k}\Gamma^\alpha_{jl}-\Gamma^i_{j\alpha}\Gamma^\alpha_{kl})\frac{dx^l}{ds}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0$$

و یا :

$$\boxed{\frac{d^2x^i}{ds^2}+\Gamma^i_{jkl}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds}=0} \tag{۳۷—۲۲}$$

که در آن فرض کرده‌ایم :

$$\Gamma^i_{jkl}=\frac{1}{3}\mathfrak{S}(\partial_l\Gamma^i_{jk}-\Gamma^i_{\alpha k}\Gamma^\alpha_{jl}-\Gamma^i_{j\alpha}\Gamma^\alpha_{kl}) \tag{۳۷—۲۳}$$

نماد $\mathfrak{S}$ جلوی عبارت طرف دوم معرف مجموع جملاتی است که از جایگشت مستدیر(۱) اندیسهای تحتانی j و k و l در داخل پرانتز بدست آمده است.

اگر از (۲۲-۳۷) نسبت به s مشتق بگیریم داریم :

$$\frac{d^4x^i}{ds^4}+\partial_r\Gamma^i_{jkl}\frac{dx^r}{ds}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} \tag{۳۷—۲٤}$$
$$+\Gamma^i_{jkl}\left[\left(-\Gamma^i_{\alpha r}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^r}{ds}\right)\frac{dx^l}{ds}\frac{dx^k}{ds}\right.$$
$$+\frac{dx^j}{ds}\left(-\Gamma^k_{\alpha r}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^r}{ds}\right)\frac{dx^l}{ds}$$
$$\left.+\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}\left(-\Gamma^l_{\alpha r}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^r}{ds}\right)\right]=0$$

۱- Permutation circulaire

و یا :

$$\frac{d^{4}x^{i}}{ds^{4}}+(\partial_{r}\Gamma^{i}_{jkl}-\Gamma^{i}_{\alpha kl}\Gamma^{\alpha}_{jr}-\Gamma^{i}_{j\alpha l}\Gamma^{\alpha}_{kr}-\Gamma^{i}_{jk\alpha}\Gamma^{\alpha}_{lr})\times \times\frac{dx^{j}}{ds}\frac{dx^{k}}{ds}\frac{dx^{l}}{ds}\frac{dx^{r}}{ds}=0 \qquad (۳۷-۲۵)$$

و یا :

$$\boxed{\frac{d^{4}x^{i}}{ds^{4}}+\Gamma^{i}_{jklr}\frac{dx^{j}}{ds}\frac{dx^{k}}{ds}\frac{dx^{l}}{ds}\frac{dx^{r}}{ds}=0} \qquad (۳۷-۲۶)$$

که در آن :

$$\Gamma^{i}_{jklr}=\frac{1}{4}\mathfrak{S}(\partial_{r}\Gamma^{i}_{jkl}-\Gamma^{i}_{\alpha kl}\Gamma^{\alpha}_{jr}-\Gamma^{i}_{j\alpha l}\Gamma^{\alpha}_{kr}-\Gamma^{i}_{jk\alpha}\Gamma^{\alpha}_{lr}) \qquad (۳۷-۲۷)$$

که بازهم $\mathfrak{S}$ معرف مجموع جملاتی است که از جایگشت مستدیر اندیسهای تحتانی j و k و l و r در داخل پرانتز بدست آمده است. و بهمین نحو خواهیم داشت:

$$\boxed{\frac{d^{5}x^{i}}{ds^{5}}+\Gamma^{i}_{jklrm}\frac{dx^{j}}{ds}\frac{dx^{k}}{ds}\frac{dx^{l}}{ds}\frac{dx^{r}}{ds}\frac{dx^{m}}{ds}=0} \qquad (۳۷-۲۸)$$

. . . .

. . . .

که در آن :

$$\Gamma^{i}_{jklrm\ldots pn}=\frac{1}{M}\mathfrak{S}(\partial_{n}\Gamma^{i}_{jklrm\ldots p} -\Gamma^{i}_{\alpha klrm\ldots p}\Gamma^{\alpha}_{jn}-\ldots-\Gamma^{i}_{jklrm\ldots\alpha}\Gamma^{\alpha}_{pn}) \qquad (۳۷-۲۹)$$

و M معرف تعداد اندیسهای تحتانی طرف اول و $\mathfrak{S}$ مانند حالات قبل معرف مجموع جملاتی است که از جایگشت مستدیر همین اندیسها در داخل پرانتز بدست آمده است.

تبصرهٔ ۲- انتخاب پارامترهای t یا s اختیاری است زیرا پارامترهائی که انتخاب میکنیم همه با یک رابطهٔ خطی بهم مربوط میشوند .

برای اثبات این مطلب دو پارامتر اختیاری λ و μ در نظر میگیریم و بیان میکنیم که پارامتر هرچه باشد شکل معادلات ژئودزیک عوض نمیشود :

$$\frac{x^{2}x^{j}}{d\lambda^{2}}+\Gamma^{j}_{kl}\frac{dx^{k}}{d\lambda}\frac{dx^{l}}{d\lambda}=0 \qquad (۳۷—۳۰)$$

و :

$$\frac{d^{2}x^{j}}{d\mu^{2}}+\Gamma^{j}_{kl}\frac{dx^{k}}{d\mu}\frac{dx^{l}}{d\mu}=0 \qquad (۳۷—۳۱)$$

اما :

$$\frac{dx^{j}}{d\lambda}=\frac{dx^{j}}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda} \qquad (۳۷—۳۲)$$

و از آنجا :

$$\frac{d^{2}x^{j}}{d\lambda^{2}}=\frac{d^{2}x^{j}}{d\mu^{2}}\left(\frac{d\mu}{d\lambda}\right)^{2}+\frac{dx^{j}}{d\mu}\frac{d^{2}\mu}{d\lambda^{2}} \qquad (۳۷—۳۳)$$

حال اگر (۳۷-۳۲) و (۳۷-۳۳) را در (۳۷-۳۰) بگذاریم خواهیم داشت :

$$\left(\frac{d^{2}x^{j}}{d\mu^{2}}+\Gamma^{j}_{kl}\frac{dx^{k}}{d\mu}\frac{dx^{l}}{d\mu}\right)\left(\frac{d\mu}{d\lambda}\right)^{2}+\frac{dx^{j}}{d\mu}\cdot\frac{d^{2}\mu}{d\lambda^{2}}=0 \qquad (۳۷—۳۴)$$

از مقایسهٔ این رابطه با (۳۷-۳۱) نتیجه میگیریم :

$$\frac{d^{2}\mu}{d\lambda^{2}}=0 \qquad (۳۷—۳۵)$$

و یا :

$$\mu=C\lambda+D \qquad (۳۷—۳۶)$$

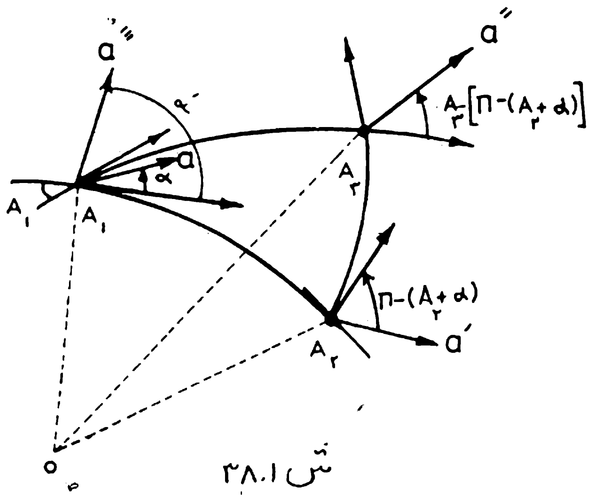
که دراینجا C و D مقادیری هستند ثابت و اختیاری. همینطور است برای s و t زیرا داریم:

$$s = vt + s_0 \qquad (۳۷-۳۷)$$

که v در طول یک ژئودزیک مقداریست ثابت و s_0 طول منحنی‌الخط مبدئی است اختیاری در روی این ژئودزیک.

۳۸- **انحنای فضا**: قبل از تعیین کمیتی که از لحاظ کیفی و کمی انحنا یا خمیدگی فضای ریمانی را بدهد میخواهیم به بینیم که این خمیدگی چگونه در سطح وارد میشود. ما این مسئله را برای سطح کروی که ساده‌ترین سطوح است بررسی و از نتیجهٔ آن که یک کاراکتریستیک (۱) انحنا در روی کره است، درهنگام بسط تحلیلی فضاهای n بُعدی استفاده میکنیم.

مثلث کروی $A_۱A_۲A_۳$ را که ۳ ضلع آن سه ژئودزیک یعنی سه قوس از ۳ دایرهٔ عظیمه هستند درنظر میگیریم (ش ۱-۳۸). از رأس $A_۱$ برداری مانند **a** که با مماس دراین نقطه برژئودزیک $A_۱A_۲$ زاویهٔ α بسازد رسم میکنیم. **a** را



ش ۳۸.۱

۱- Characteristic

« بطور موازی » در طول A_1A_2 بنقطهٔ A_2 انتقال میدهیم تا بردار $\mathbf{a}'$ بدست آید (بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{a}'$ نسبت به ژئودزیک A_1A_2 «هم ارزند») . $\mathbf{a}'$ در نقطهٔ A_2 با مماس برژئودزیک A_2A_3 زاویه‌ای برابر $\pi-(A_2+\alpha)$ می‌سازد . حال به $\mathbf{a}'$ یک «انتقال سوازی» در طول A_2A_3 میدهیم تا $\mathbf{a}''$ بدست آید (بردارهای $\mathbf{a}'$ و $\mathbf{a}''$ نسبت به A_2A_3 «هم‌ارز» هستند) . در نقطهٔ A_3 بردار $\mathbf{a}''$ با مماس برژئودزیک A_3A_1 زاویه‌ای‌برابر $A_3-[\pi-(A_2+\alpha)]=A_2+A_3+\alpha-\pi$ میسازد . بالاخره انتقال «سوازی» سوی‌درطول A_3A_1 میدهیم تا بهمان نقطهٔ عزیمت‌یعنی A_1 برسیم ($\mathbf{a}''$ و $\mathbf{a}'''$ نسبت به A_3A_1 «هم‌ارز» هستند) . در نقطهٔ A_1 بردار $\mathbf{a}'''$ با مماس برژئودزیک A_1A_2 زاویه‌ای‌برابر: $\alpha'=A_1+A_2+A_3+\alpha-\pi$ میسازد . بنابراین داریم :

$$\alpha'-\alpha=A_1+A_2+A_3-\pi \qquad (۳۸-۱)$$

اما میدانیم که :

$$\pi < A_1+A_2+A_3 < ۳\pi \qquad (۳۸-۲)$$

پس :

$$\pi < \alpha'-\alpha+\pi < ۳\pi \qquad (۳۸-۳)$$

و یا :

$$0 < \alpha'-\alpha < ۲\pi \qquad (۳۸-٤)$$

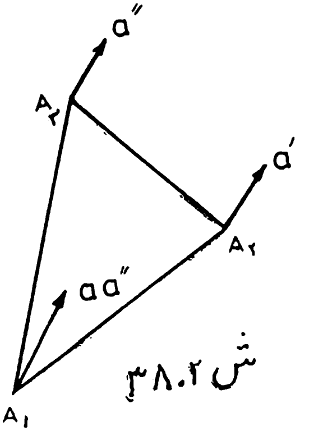
ازاینجا معلوم میشود که $\mathbf{a}$ پس‌از انتقال در روی این مدار بسته باندازهٔ $A_1+A_2+A_3-\pi$ بدور خود گشته است .

اگراین عمل را برای مداری که‌از r ژئودزیک درست شده است یعنی برای یک کثیرالاضلاع کروی انجام دهیم خواهیم داشت :

$$\alpha'-\alpha=\sum_{k=1}^{r}\Big(A_k-(k-۲)\pi\Big) \qquad (۳۸-٥)$$

(A_k ها زوایای مثلث کروی است) .

روی یک سطح مسطح $A_1+A_2+A_3=\pi$ است و «انحنا» ازبین میرود و یک انتقال موازی روی یک مدار بسته در امتداد یک رشته پاره خطهای متوالی بردار منتقله را دوران نمیدهد (ش ۲-۳۸) . لذا فضل کروی $\varepsilon=\alpha'-\alpha$ یک کاراکتریستیک انحنا را روی کره بما میدهد.



ش ۲.۳۸

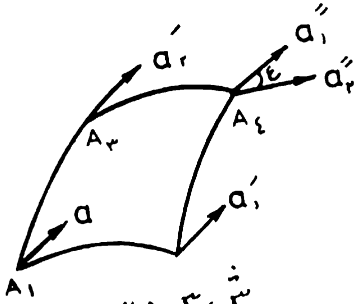
از روی همین روش است که موجودات بینهایت مسطحی که روی کره‌ای زندگی میکنند میتوانند انحنای فضای خود را مشخص سازند .

در هندسهٔ کروی داشتیم $\varepsilon=\frac{\sigma}{R^2}$ که σ مساحت کثیراضلاع کروی و R شعاع کره است. کمیت $K=\frac{\varepsilon}{\sigma}=\frac{1}{R^2}$ «انحنا» نامیده میشود.

پیش‌ازآنکه بطورتحلیلی انحنای یک فضای n بُعدی را تعریف کنیم ذکر نکته‌ای را مفید میدانیم .

برای تعیین فضل کروی یعنی ε بطریق زیر عمل میکنیم : چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ راکه اضلاع آن همه ژئودزیک هستند درنظرمیگیریم(ش ۳-۳۸) . برای رسیدن از A_1 به A_4 دوراه داریم : یکی $A_1A_2A_4$ و دیگری $A_1A_3A_4$.

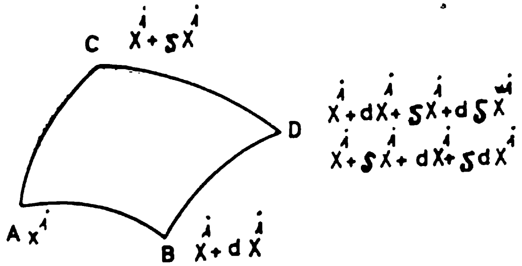
بردارهای a''_1 و a''_2 باهم زاویه‌ای برابر ε می‌سازند که همان فضل کروی مورد نظر یعنی $\varepsilon = \frac{\sigma}{R^2}$ است.



ش ۳۸.۳

۳۹- تعیین انحنا (یا خمیدگی).

یک فضای ریمانی n بُعدی را که در روی شکل با دو بُعد مجسم شده در نظر میگیریم . متوازی‌الاضلاع بینهایت کوچک دلخواه ABCD (ش ۱-۳۹) را که



ش ۳۹.۱

بطریق زیر در این فضا درست‌شده است انتخاب میکنیم : فرض میکنیم x^i مختصات نقطهٔ A و $x^i + dx^i$ مختصات نقطهٔ B و $x^i + \delta x^i$ مختصات نقطهٔ C باشد . معمولاً افزایشهای dx^i و δx^i یکی نیستند . حال اگر در نقطهٔ B افزایشی به نماد δ به متغیرها بدهیم یعنی همان افزایشی را که برای رسیدن از CA به متغیرها داده

بودیم بدهیم ، بنقطه‌ای مانند $\acute{D}$ با مختصات زیر میرسیم :

$$x^i+dx^i+\delta(x^i+dx^i)=x^i+dx^i+\delta x^i+\delta dx^i \qquad (۳۹-۱)$$

اگر در نقطهٔ C هم افزایشی به نماد d به متغیرها بدهیم یعنی همان افزایشی را بدهیم که برای رسیدن از A به B به متغیرها داده بودیم ، به نقطه‌ای مانند D' با مختصات زیر میرسیم :

$$x^i+\delta x^i+d(x^i+\delta x^i)=x^i+\delta x^i+dx^i+d\delta x^i \qquad (۳۹-۲)$$

اگر بخواهیم نقطهٔ D برنقطهٔ D' منطبق شود باید $\delta dx^i=d\delta x^i$ باشد و الافضا دارای پیچش میشود و دیگر فضای ریمانی نخواهد بود .

حال بیان میکنیم که انتقال «موازی» برای یک بردار **a** درطول چهار عنصر بینهایت کوچک AB و BD و AC و CD میسر است . یعنی :

در طول AB $\qquad a^j(x^i+dx^i)-a^j(x^i)=0 \qquad (۳۹-۳)$

» AC $\qquad a^j(x^i+\delta x^i)-a^j(x^i)=0 \qquad (۳۹-٤)$

» BD $\qquad a^j(x^i+dx^i+\delta x^i+\delta dx^i)-a^j(x^i+dx^i)=0 \qquad (۳۹-٥)$

» CD $\qquad a^j(x^i+\delta x^i+dx^i+d\delta x^i)-a^j(x^i+\delta x^i)=0 \qquad (۳۹-٦)$

اگرعبارت فوق را بصورت دیفرانسیل بنویسیم عبارات (۳-۳۹) تا (٦-۳۹) بترتیب بصورتهای زیر نوشته میشوند :

برای (۳۹-۳) $\qquad \mathbf{da}=\mathbf{e}_i da^i+a^i d\mathbf{e}_i=0 \qquad (۳۹-۷)$

» (۳۹-٤) $\qquad \delta\mathbf{a}=\mathbf{e}_i\delta a^i+a^i\delta\mathbf{e}_i=0 \qquad (۳۹-۸)$

اما بموجب (۷-۳۹) و (۸-۳۹) بردارهای **da** و δ**a** صفرند لذا :

برای (۳۹-٥) $\qquad \delta(\mathbf{a}+\mathbf{da})=\delta\mathbf{a}+\delta\mathbf{da}=\delta\mathbf{da}=0 \qquad (۳۹-۹)$

برای (۶ — ۳۹)

$$d(\mathbf{a}+\delta\mathbf{a})=d\mathbf{a}+d\delta\mathbf{a}=d\delta\mathbf{a}=0 \qquad (۳۹—۱۰)$$

حال $\delta d\mathbf{a}$ و $d\delta\mathbf{a}$ را بسط میدهیم :

$$\delta d\mathbf{a}=\delta(\mathbf{e}_i da^i)+\delta(a^i d\mathbf{e}_i)=0$$

و یا :

$$\delta d\mathbf{a}=\delta\mathbf{e}_i da^i+\mathbf{e}_i\delta da^i+\delta a^i d\mathbf{e}_i+a^i\delta d\mathbf{e}_i=0 \qquad (۳۹—۱۱)$$

و همچنین :

$$d\delta\mathbf{a}=d(\mathbf{e}_i\delta a^i)+d(a^i\delta\mathbf{e}_i)=0$$

و یا :

$$d\delta\mathbf{a}=d\mathbf{e}_i\delta a^i+\mathbf{e}_i d\delta a^i+da^i\delta\mathbf{e}_i+a^i d\delta\mathbf{e}_i=0 \qquad (۳۹—۱۲)$$

از تفاضل (۱۱-۳۹) و (۱۲-۳۹) داریم :

$$d\delta\mathbf{a}-\delta d\mathbf{a}=\mathbf{e}_i(d\delta a^i-\delta da^i)+a^i(\delta d\mathbf{e}_i-d\delta\mathbf{e}_i) \qquad (۳۹—۱۳)$$

اما ثابت میشود [۱] که وجود رابطهٔ $\delta dx=d\delta x$ رابطهٔ زیر را ایجاب میکند :

۱- رابطهٔ (۱۴ — ۳۹) بکمک قضیهٔ زیرکه به **کارتان** تعلق دارد ثابت میشود :

اگر متغیرهای x^i نمادهای دیفرانسیل‌گیری قابل تعویض داشته باشند هر تابع بطور پیوسته دیفرانسیل پذیر نیز همین خاصیت را دارد. یعنی این خاصیت تعویض برای تمام توابعی که بطور پیوسته دیفرانسیل پذیر هستند متعدی است :

برای دیفرانسیلها نمادهای d و δ را بکار میبریم . این نمادها معرف تغییراتی اختیاری مثل dx^i و δx^i هستند. اول به x^i افزایشی برابر dx^i میدهیم. یعنی‌مینویسیم:

$$x^i+dx^i \qquad (۱)$$

و ازاین عبارت دیفرانسیل گیری δ را انجام میدهیم و حاصل را با خود این عبارت جمع میکنیم :

بقیهٔ پاورقی درصفحهٔ بعد

$$d\delta a^i = \delta d a^i \qquad (۳۹-۱۴)$$

و از آنجا داریم :

$$d\delta \mathbf{a} - \delta d\mathbf{a} = a^i (\delta d\mathbf{e}_i - d\delta \mathbf{e}_i) = 0 \qquad (۳۹-۱۵)$$

کمیت $\delta d\mathbf{e}_i - d\delta \mathbf{e}_i$ که معرف اختلاف «دوران» دستگاهها برای دومسیر مختلف ABD و ACD است درست معرف انحنائی مشابه همان انحنای مثال مقدماتی است که برای هندسهٔ کروی اختیار کرده بودیم .

باید توجه داشت که اگر $a^i (\delta d\mathbf{e}_i - d\delta \mathbf{e}_i) = 0$ یعنی کلیهٔ $\delta d\mathbf{e}_i - d\delta \mathbf{e}_i$ ها مساوی صفر و یا :

ماندهٔ پاورقی از صفحهٔ قبل

$$x^i + dx^i + \delta x^i + \delta(dx^i) \qquad (۲)$$

بار دیگر عکس این عمل را انجام میدهیم یعنی اول به x^i افزایشی برابر δx^i میدهیم :

$$x^i + \delta x^i \qquad (۳)$$

و بعد دیفرانسیل گیری d را انجام میدهیم و حاصل را با خود این عبارت جمع میکنیم :

$$x^i + \delta x^i + dx^i + d(\delta x^i) \qquad (٤)$$

شرط لازم و کافی برای تساوی (۲) و (٤) یعنی عدم دخالت ترتیب دیفرانسیل گیری خواهد بود :

$$d(\delta x^i) = \delta(dx^i) \qquad (۵)$$

این تساوی شرط قابل‌تعویض‌بودن نمادهای دیفرانسیل گیری را بما میدهد. هرتابعی از x^i که چنین خاصیتی داشته باشد دارای مشتقات جزئی قابل تعویض خواهد بود .

حال این خاصیت را برای یک تابع $f(x^i)$ که بطور پیوسته دیفرانسیل پذیر است درنظر میگیریم :

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \delta x^i = \partial_i f \delta x^i \qquad (٦)$$

بقیهٔ پاورقی در صفحهٔ بعد

$$\delta d\mathbf{e}_i = d\delta \mathbf{e}_i \qquad (۱۶—۲۹)$$

باشد ، اختلاف برابر صفر و لذا فضا اقلیدسی است. در غیر اینصورت فضا خمیده است .

حال بجای صورت‌برداری شرط خمیدگی ، صورت تحلیلی آنرا میگذاریم و درنتیجه به تانسور مختلط جدیدی بنام تانسور دوران [1] میرسیم . عبارت زیر را بسط میدهیم :

ماندهٔ پاورقی از صفحهٔ قبل

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j = \partial_j f dx^j \qquad (۷)$$

$$d(\delta f) = \frac{\partial}{\partial x^j} (\partial_i f)\delta x^i dx^j + \partial_i f d(\delta x^i) \qquad (۸)$$

$$= \partial_j (\partial_i f)\delta x^i dx^j + \partial_i d(\delta x^i)$$

$$\delta(df) = \partial_i (\partial_j f) dx^j \delta x^i + \partial_j \delta(dx^j) \qquad (۹)$$

چون : $\partial_j(\partial_i f) = \partial_i(\partial_j f)$ لذا داریم :

$$\partial_j (\partial_i f)\delta x^i dx^j = \partial_i (\partial_j f) dx^j \delta x^i$$

با تعویض اندیس‌آزاد j درآخرین جملهٔ (۹) می‌بینیم که از n تساوی $d(\delta x^i) = \delta(dx^i)$ نتیجه میشود :

$$d(\delta f) = \delta(df)$$

ممکن بود توابعی از x^i را که برای آنها نمادهای دیفرانسیل گیری قابل تعویض نباشد درنظر میگرفتیم . این توابع را که در فضاهای دارای « پیچش » یعنی فضاهای کارتان پیدا میشوند مادراینجا طرح نمیکنیم زیرا فضای ما بدون « پیچش » فرض شده‌است . این روش به روش «متوازی‌الاضلاع دلخواه» موسوم و علت تسمیهٔ آنهم روشن‌است .

۱- Rotation tensor

$$d\delta \mathbf{e}_i - \delta d\mathbf{e}_i = d(\underset{\delta}{\omega_i^h}\mathbf{e}_h) - \delta(\underset{d}{\omega_i^h}\mathbf{e}_h) \tag{۳۹-۱۷}$$

دراینجا فرض شده است :

$$d\mathbf{e}_i = \underset{d}{\omega_i^h}\mathbf{e}_h \quad \text{و} \quad \delta\mathbf{e}_i = \underset{\delta}{\omega_i^h}\mathbf{e}_h \tag{۳۹-۱۸-۱۹}$$

از ادامهٔ بسط (۳۹-۱۷) داریم :

$$d\delta \mathbf{e}_i - \delta d\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_h(d\underset{\delta}{\omega_i^h} - \delta\underset{d}{\omega_i^h}) + \underset{\delta}{\omega_i^k} d\mathbf{e}_k - \underset{d}{\omega_i^k}\delta\mathbf{e}_k \tag{۳۹-۲۰}$$

و با استفاده از (۳۹-۱۸-۱۹) داریم :

$$d\delta \mathbf{e}_i - \delta d\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_h(d\underset{\delta}{\omega_i^h} - \delta\underset{d}{\omega_i^h} + \underset{\delta}{\omega_i^k}\,\underset{d}{\omega_k^h} - \underset{d}{\omega_i^k}\,\underset{\delta}{\omega_k^h}) \tag{۳۹-۲۱}$$

اگر عبارت داخل پرانتز را به Ω_i^h نشان دهیم یعنی بنویسیم :

$$\Omega_i^h \equiv d\underset{\delta}{\omega_i^h} - \delta\underset{d}{\omega_i^h} + \underset{\delta}{\omega_i^k}\,\underset{d}{\omega_k^h} - \underset{d}{\omega_i^k}\,\underset{\delta}{\omega_k^h} \tag{۳۹-۲۲}$$

خواهیم داشت :

$$d\delta \mathbf{e}_i - \delta d\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_h\Omega_i^h \tag{۳۹-۲۳}$$

کمیت Ω_i^h تانسوری است بنام تانسور اختلاف [1] یا « تانسور دوران » . اکنون ثابت میکنیم که Ω_i^h یک تانسور است . برای این منظور کافیست که مثلاً ثابت کنیم طرف چپ (۳۹-۲۳) تانسوری است یکبار همگرد .

برای یک تبدیل اختیاری $x^i = x^i(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'})$ داریم :

$$\mathbf{e}_i = p_i^{i'}\mathbf{e}_{i'} \tag{۳۹-۲۴}$$

$$\delta\mathbf{e}_i = p_i^{i'}\delta\mathbf{e}_{i'} + \delta(p_i^{i'})\mathbf{e}_{i'} \tag{۳۹-۲۵}$$

۱- L' écart

$$d\delta \mathbf{e}_i = d(p_i^{i'})\delta \mathbf{e}_{i'} + p_i^{i'} d\delta \mathbf{e}_{i'} + d\delta(p_i^{i'})\,\mathbf{e}_{i'} + \delta(p_i^{i'})d\mathbf{e}_{i'} \qquad (۳۹-۲۶)$$

عبارت $\delta d\mathbf{e}_i$ از جایگشت d و δ بدست میآید : اگر تفاضل $d\delta \mathbf{e}_i - \delta d\mathbf{e}_i$ را بدست آوریم و در نظر بگیریم که تساوی زیر برقرار است :

$$\delta d(p_i^{i'}) = d\delta(p_i^{i'}) \qquad (۳۹-۲۷)$$

(چون خاصیت‌قابل‌تعویض بودن نمادهای دیفرانسیل گیری از x^i به $x^{i'}$ ومشتقات جزئی‌شان متعددی است ـ زیراکه این توابع ، توابعی از x^i ها هستند) میتوانیم بنویسیم :

$$d\delta \mathbf{e}_i - \delta d\mathbf{e}_i = p_i^{i'}(d\delta \mathbf{e}_{i'} - \delta d\mathbf{e}_{i'}) \qquad (۳۹-۲۸)$$

و در نتیجه حکم ثابت است. با استفاده از«اصل شناسائی تانسورها» دیده میشود که Ω_i^h مؤلفه های یک تانسور مختلط است .

. ٤- تانسور خمیدگی ریمان ـ کریستوفل: اکنون دیگر میتوانیم تانسوری از نوع (۳ , ۱) چنان پیدا کنیم که همانطوریکه (۲۲-۳۹) تانسور اختلاف را تعریف میکرد ، این تانسور هم بطور تحلیلی خمیدگی را تعریف نماید .

طرف دوم (۲۲-۳۹) را با استفاده از نمادهای کریستوفل پیدا میکنیم :

$$d\underset{\delta}{\omega_i^h} = d(\Gamma_{ki}^h \delta x^k) = \partial_l \Gamma_{ki}^h dx^l \delta x^k + \Gamma_{ki}^h d\delta x^k \qquad (٤٠-١)$$

$$d\underset{d}{\omega_i^h} = \delta(\Gamma_{ki}^h dx^k) = \partial_l \Gamma_{ki}^h \delta x^l dx^k + \Gamma_{ki}^h \delta dx^k \qquad (٤٠-٢)$$

از تفاضل این دو رابطه نتیجه میشود :

$$d\underset{\delta}{\omega_i^h} - \delta\underset{d}{\omega_i^h} = \partial_l \Gamma_{ki}^h dx^l \delta x^k - \partial_l \Gamma_{ki}^h \delta x^l dx^k$$

(بقیهٔ جملات بعلت قابل تعویض بودن d و δ حذف شده است) . حال درجملهٔ

اول طرف دوم ، جای l و k را باهم عوض میکنیم :

$$d\omega_i^h - \delta\omega_i^h = (\partial_k \Gamma^h_{li} - \partial_l \Gamma^h_{ki}) dx^k \delta x^l \qquad (٤٠-٣)$$
$$\;\;\delta \qquad\; d$$

و همچنین داریم :

$$\underset{\delta}{\omega_i^m}\,\underset{d}{\omega_m^h} - \underset{d}{\omega_i^m}\,\underset{\delta}{\omega_m^h} = (-\Gamma^m_{ki}\Gamma^h_{lm} + \Gamma^m_{li}\Gamma^h_{km}) dx^k \delta x^l \qquad (٤٠-٤)$$

از جمع این دو رابطه و توجه به (۳۹-۲۲) و تعویض h و i بایکدیگر داریم :

$$\Omega_h^i = (\partial_k \Gamma^i_{lh} - \partial_l \Gamma^i_{kh} - \Gamma^m_{kh}\Gamma^i_{lm} + \Gamma^m_{lh}\Gamma^i_{km}) dx^k \delta x^l \qquad (٤٠-٥)$$

$$= \left(\begin{vmatrix} \partial_k & \partial_l \\ \Gamma^i_{kh} & \Gamma^i_{lh} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Gamma^i_{lm} & \Gamma^i_{km} \\ \Gamma^m_{lh} & \Gamma^m_{kh} \end{vmatrix} \right) dx^k \delta x^l$$

اگر فرض کنیم :

$$R^i_{hkl} = \begin{vmatrix} \partial_k & \partial_l \\ \Gamma^i_{kh} & \Gamma^i_{lh} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Gamma^i_{lm} & \Gamma^i_{km} \\ \Gamma^m_{lh} & \Gamma^m_{kh} \end{vmatrix} \qquad (٤٠-٦)$$

میتوانیم بنویسیم :

$$\Omega_h^i = R^i_{hkl} dx^k \delta x^l \qquad (٤٠-٧)$$

این رابطه نشان میدهد که (٤٠-٦) یک تانسور است و آنرا «تانسور ریمان - کریستوفل» نوع دوم نامند .

معنی اصطلاح «تانسور انحناء» ازملاحظات زیر معلوم میشود : فرض میکنیم بجای یک فضای ریمانی یک صفحه داشته باشیم . از معنای هندسی « انتقال موازی» نتیجه میشود که (۳۹-۲۲) یعنی Ω_h^i و در نتیجه R^i_{hkl} ها همه برای صفحه صفر میباشد. و چون R^i_{hkl} بستگی به متر یک g_{ij} ومشتقات آن دارد لذا یک‌پایای خمش [1] است و برای هر سطح دیگری نظیر استوانه و مخروط (سطوح قابل

1- Bending Invariant

گسترش) هم که قابل گسترش روی صفحه باشند نیز صفر خواهد شد . با این استدلال میتوانیم بگوئیم که R^i_{hkl} در واقع انحنای ذاتی یک سطح را برای ما اندازه میگیرد و تاحدی تعمیم خمیدگی یک خم برای سطوح است. مثلاً اگر یکه های نرمالهای اصلی یک منحنی فضائی را رسم کنیم و از نقطهٔ ثابتی خطوطی بموازات آنها بکشیم انتهای این بردارها ، روی کرهٔ بشعاع واحد خمی رسم میکند. **نسبت عنصر قوسی از خم اخیر به عنصر قوس فضائی متناظرش خمیدگی خم نامیده میشود** . حال اگر یکه های نرمالهای برسطحی را رسم کنیم و از یک نقطهٔ ثابتی خطوطی بموازات آنها بکشیم انتهای این خطوط نمایش کروی سطح را روی کرهٔ بشعاع واحد بما میدهد . **نسبت مساحت این نمایش به مساحت سطح مربوطه‌اش تانسور خمیدگی نامیده میشود** .

تانسور ریمانی چند خاصیت تقارن جالبی دارد :

۱- با توجه به رابطهٔ (۶-۴۰) داریم :

$$R^i_{hkl}+R^i_{klh}+R^i_{lhk}=0 \qquad (۴۰-۸)$$

۲- رابطهٔ (۶-۴۰) نشان میدهد که تانسور R^i_{hkl} نسبت به دواندیس تحتانی آخری خود **قرینهٔ چپ** میباشد یعنی :

$$R^i_{hlk}=-R^i_{hkl} \qquad (۴۰-۹)$$

۳- اگر مؤلفه های همگرد تانسور خمیدگی را با روابط زیر تعریف کنیم :

$$R_{hjkl}=G_{ji}R^i_{hkl} \qquad (۴۰-۱۰)$$

$$R^i_{hkl}=G^{ij}R_{hjkl} \qquad (۴۰-۱۱)$$

با توجه به (۶-۴۰) مقادیر آنها برحسب نمادهای کریستوفل بطریق زیر بدست میآید:

$$R_{hjkl}=G_{ij}(\partial_k\Gamma^i_{lh}-\partial_l\Gamma^i_{kh}+\Gamma^i_{km}\Gamma^m_{lh}-\Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{kh})$$

حال باتوجه به تقارن Γ^i_{jk} نسبت به اندیسهای تحتانی و (۹ ۱-۸ ۲) خواهیم داشت:

$$R_{hjkl}=\partial_k(G_{ij}\Gamma^i_{lh})-\Gamma^i_{lh}\partial_k G_{ij}-\partial_l(G_{ij}\Gamma^i_{kh})+\Gamma^i_{kh}\partial_l G_{ij}$$
$$+G_{ij}(\Gamma^i_{km}\Gamma^m_{lh}-\Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{kh})=\partial_k\Gamma_{ljh}-\Gamma^i_{lh}(\Gamma_{kij}+\Gamma_{kji})-\partial_l\Gamma_{kjh}$$
$$+\Gamma^i_{kh}(\Gamma_{lij}+\Gamma_{lji})+\Gamma_{kjm}\Gamma^m_{lh}-\Gamma_{ljm}\Gamma^m_{kh}=\partial_k\Gamma_{ljh}-\partial_l\Gamma_{kjh}$$
$$-\Gamma^i_{lh}\Gamma_{kij}+\Gamma^i_{kh}\Gamma_{lij}=\partial_k\Gamma_{hjl}-\partial_l\Gamma_{hjk}-\Gamma^i_{lh}(G_{mi}\Gamma^m_{kj})$$
$$+\Gamma^i_{kh}(G_{mi}\Gamma^m_{lj})$$

و یا :

$$\boxed{R_{hjkl}=\partial_k\Gamma_{hjl}-\partial_l\Gamma_{hjk}-\Gamma^m_{kj}\Gamma_{lmh}+\Gamma^m_{lj}\Gamma_{kmh}} \qquad (۴۰-۱۲)$$

و یا :

$$R_{hjkl}=\frac{۱}{۲}(\partial_k\partial_h G_{jl}-\partial_k\partial_j G_{lh}+\partial_l\partial_j G_{kh}-\partial_l\partial_h G_{jk})$$
$$+G^{im}(\Gamma_{lij}\Gamma_{kmh}-\Gamma_{kij}\Gamma_{lmh}) \qquad (۴۰-۱۲)'$$

این رابطه نشان میدهد که تانسور R_{hjkl} که به تانسور ریمان ـ کریستوفل نوع اول موسوم است دارای خواص زیر است :

اولاً ـ نسبت به اندیسهای اول و دوم یعنی h و j قرینهٔ چپ است :

$$R_{hjkl}+R_{jhkl}=0 \qquad (۴۰-۱۳)$$

ثانیاً ـ نسبت به اندیسهای سوم و چهارم یعنی l و k نیز قرینهٔ چپ است :

$$R_{hjkl}+R_{hjlk}=0 \qquad (۴۰-۱۴)$$

ثالثاً :

$$R_{hjkl}+R_{hklj}+R_{hljk}=0 \qquad (۴۰-۱۵)$$

(توجه داریم که این رابطه از ثابت نگهداشتن اندیس اول و جایگشت مستدیر سه اندیس دیگر بدست آمده است) .

رابعاً - ازجایگشت مستدیراندیسهای h و j و k و l در (۴۰-۱۴) سه رابطهٔ دیگر بدست میآید :

$$(۴۰-۱۶) \qquad \begin{cases} R_{hjkl}+R_{hklj}+R_{hljk}=0 \\ R_{jklh}+R_{jlhk}+R_{jhkl}=0 \\ R_{klhj}+R_{khjl}+R_{kjlh}=0 \\ R_{lhjk}+R_{ljkh}+R_{lkhj}=0 \end{cases}$$

اگر روابط اول و چهارم این دستگاه را در ۱- ضرب و با دو رابطهٔ دیگر جمع کنیم با رعایت (۴۰-۱۳) و (۴۰-۱۴) رابطهٔ جالب زیر بدست میآید :

$$R_{hjkl}=R_{klhj} \qquad (۴۰-۱۷)$$

یعنی تانسور R_{hjkl} **نسبت به دوزوج اندیسهای اولی و آخری قرینه است .**

بعلت وجود روابط فوق ، این تانسور مرتبهٔ چهارم دیگر دارای n^4 مؤلفه نیست بلکه فقط $\frac{1}{2}n^2(n^2-1)$ مؤلفهٔ مستقل دارد .

برهان : بموجب (۴۰-۱۳) بازاء $h=j$ داریم $R_{hjkl}=0$ لذا تنها آن مؤلفه هائی صفر نیستند که در آنها $h\neq j$ باشد . اما $\frac{n(n-1)}{2}$ طریق برای ترکیب متمایز h و j و در نتیجه طبق (۴۰-۱۳) برای استقلال مؤلفه ها وجود دارد (تعداد عناصر متمایز یک ماتریس قرینهٔ چپ $n\times n$:) . بموجب (۴۰-۱۴) نیز بازاء $l=k$ خواهیم داشت : $R_{hjkl}=0$. با استدلالی مشابه استدلال فوق دراینحال نیز $\frac{n(n-1)}{2}$ طریق برای استقلال مؤلفه ها وجود دارد . همچنین

بموجب (۱۷-۴۰) بازاء $hj=kl$ مؤلفه های این تانسور صفر است و لذا :

$$\frac{\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2+\frac{n(n-1)}{2}}{2}=\frac{n(n-1)(n^2-n+2)}{8} \qquad (40-18)$$

طریق برای عدم تساوی hj و kl یعنی استقلال مؤلفه ها وجود دارد (تعداد عناصر متمایز ماتریس متقارن $\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{n(n-1)}{2}$) .

از طرفی تعداد $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$ رابطه نظیر (۱۶-۴۰) برای ما موجود است (ترکیب n عدد ۴ به ۴ یعنی C_n^4) پس بطور کلی تعداد مؤلفه های مستقل خواهد بود :

$$N=\frac{n(n-1)(n^2-n+2)}{8}-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \qquad (40-19)$$

$$=\frac{1}{12}n^2(n^2-1)$$

و حکم ثابت میشود .

برای سطح ، $n=2$ و در نتیجهٔ $N=1$ است . برای یک فضای ۳ بُعدی غیر اقلیدسی $n=3$ و در نتیجه $N=4$ است . بازاء $n=4$ خواهیم داشت : $N=20$.

حال این سئوال پیش میآید که آیا روابط خطی دیگری مابین مؤلفه های R_{hjkl} وجود دارد یانه ؟

بازاء $n=2$ نمیتواند رابطهٔ دیگری وجود داشته باشد . محاسبهٔ R_{hjkl} برای یک کره مؤید این مطلب است . و بازاء مقدار غیر مشخص n باید از (۱۲-۴۰) استفاده کرد . بدیهی است محاسبهٔ جملات : $\Gamma_{kjm}\Gamma_{lh}^m-\Gamma_{ljm}\Gamma_{kl}^m$ پیچیده وتاحدی دشوار است . دراینحال از دستگاههای مختصاتی که درآنها Γ_{jm}^k ها مساوی صفر هستند یعنی از مختصات نرمال فضای اقلیدسی مماس (§ ۳۳) استفاده میکنیم .

مثال : میخواهیم بازاء $n=2$ تانسور ریمان - کریستوفل نوع اول را حساب کنیم . بموجب $'$(۴۰-۱۲) داریم :

$$R_{1212}=\frac{1}{2}\left(\partial_1\partial_1 G_{22}-\partial_1\partial_2 G_{21}+\partial_2\partial_2 G_{11}-\partial_2\partial_1 G_{21}\right)+G^{im}\left(\Gamma_{2i2}\Gamma_{1m1}-\Gamma_{1i2}\Gamma_{2m1}\right) \qquad (۴۰-۲۰)$$

ما دراینجا بردارهای مبنا را متعامد میگیریم یعنی :

$$G_{12}=0 \quad \text{و} \quad G=G_{11}G_{22} \quad \text{و} \quad G^{11}=\frac{1}{G_{11}} \quad \text{و} \quad G^{22}=\frac{1}{G_{22}}$$

و لذا :

$$\begin{aligned} R_{1212}&=\frac{1}{2}\left(\partial_1\partial_1 G_{22}+\partial_2\partial_2 G_{11}\right)\\ &+G^{11}\left(\Gamma_{212}\Gamma_{111}-\Gamma_{112}\Gamma_{211}\right)+G^{22}\left(\Gamma_{222}\Gamma_{121}-\Gamma_{122}\Gamma_{221}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(\partial_1\partial_1 G_{22}+\partial_2\partial_2 G_{11}\right)+\frac{1}{4G_{11}}\left(-\partial_1 G_{22}\partial_1 G_{11}-\partial_2 G_{11}\partial_2 G_{11}\right)\\ &+\frac{1}{4G_{22}}\left(-\partial_2 G_{22}\partial_2 G_{11}-\partial_1 G_{22}\partial_1 G_{22}\right)=\frac{1}{2}\left(\partial_1\partial_1 G_{22}\right.\\ &\left.+\partial_2\partial_2 G_{11}\right)-\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{G_{11}}\partial_1 G_{11}+\frac{1}{G_{22}}\partial_1 G_{22}\right)\partial_1 G_{22}\right.\\ &\left.+\left(\frac{1}{G_{11}}\partial_2 G_{11}+\frac{1}{G_{22}}\partial_2 G_{22}\right)\partial_2 G_{11}\right\}\\ &=\frac{\sqrt{G}}{2}\left\{\partial_1\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\partial_1 G_{22}\right)+\partial_2\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\partial_2 G_{11}\right)\right\} \end{aligned} \qquad (۴۰-۲۱)$$

عددوار :

$$\begin{aligned} K=-\frac{R_{1212}}{G}=-\frac{1}{2\sqrt{G}}&\left\{\partial_1\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\partial_1 G_{22}\right)\right.\\ &\left.+\partial_2\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\partial_2 G_{11}\right)\right\} \end{aligned} \qquad (۴۰-۲۲)$$

درست انحنای کلی [1] سطحی است که صورت دیفرانسیل اصلی آن عبارتست :

$$ds^2 = G_{11}(dx^1)^2 + G_{22}(dx^2)^2 \quad (۴۰-۲۳)$$

۱ ۴- مشتق ـ همگرد مرتبهٔ دوم : میخواهیم مشتق ـ همگرد مرتبهٔدوم یک بردار ناهمگرد را بدست آوریم.

دیده بودیم که :

$$\lambda^i_{,k} = \partial_k \lambda^i + \lambda^h \Gamma^i_{kh}$$

لذا :

$$\begin{aligned}\lambda^i_{,kl} &= \partial_l(\partial_k\lambda^i + \lambda^h\Gamma^i_{kh}) + \lambda^h_{,k}\Gamma^i_{lh} - \lambda^i_{,h}\Gamma^h_{lk} \quad (۴۱-۱)\\ &= \partial_l(\partial_k\lambda^i) + \lambda^h\partial_l\Gamma^i_{kh} + \Gamma^i_{kh}\partial_l\lambda^h + \lambda^h_{,k}\Gamma^i_{lh} - \lambda^i_{,h}\Gamma^h_{lk}\\ &= \partial_l(\partial_k\lambda^i) + \lambda^h\partial_l\Gamma^i_{kh} + \Gamma^i_{kh}\partial_l\lambda^h + (\partial_k\lambda^h\\ &+ \lambda^m\Gamma^h_{km})\Gamma^i_{lh} - (\partial_h\lambda^i + \lambda^m\Gamma^i_{hm})\Gamma^h_{lk} = \partial_l(\partial_k\lambda^i)\\ &+ \lambda^h\partial_l\Gamma^i_{kh} + \Gamma^i_{kh}\partial_l\lambda^h + \Gamma^i_{lh}\partial_k\lambda^h + \lambda^m\Gamma^i_{lh}\Gamma^h_{km}\\ &- \Gamma^h_{lk}\partial_h\lambda^i + \lambda^m\Gamma^h_{lk}\Gamma^i_{hm}\end{aligned}$$

از جابگشت l و k خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}\lambda^i_{,l} &= \partial_k(\partial_l\lambda^i) + \lambda^h\partial_k\Gamma^i_{lh} + \Gamma^i_{lh}\partial_k\lambda^h + \Gamma^i_{kh}\partial_l\lambda^h \quad (۴۱-۲)\\ &+ \lambda^m\Gamma^i_{kh}\Gamma^h_{lm} - \Gamma^h_{kl}\partial_h\lambda^i + \lambda^m\Gamma^h_{kl}\Gamma^i_{hm}\end{aligned}$$

از تفاضل روابط (۴۰-۹) و (۴۰-۱۰) و تغییر مناسب اندیسها و توجه به تقارن Γ^i_{jk} ها نسبت به اندیسهای تحتانی داریم :

$$\lambda^i_{,kl} - \lambda^i_{,lk} = -\lambda^h(-\partial_l\Gamma^i_{kh} + \partial_k\Gamma^i_{lh} - \Gamma^m_{kh}\Gamma^i_{lm} + \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{lh}) \quad (۴۱-۳)$$

و با درنظرگرفتن (۴۰-۶) داریم :

۱- Total Curvature

$$\lambda^{i}_{,kl}-\lambda^{i}_{,lk}\equiv-\lambda^{h}R^{i}_{hkl} \tag{۴۱–۴}$$

از این رابطه پیداست که شرط لازم و کافی برای اینکه مشتق ـ همگرد مستقل از ترتیب مشتق گیری باشد یعنی داشته باشیم $\lambda^{i}_{,kl}=\lambda^{i}_{,lk}$ باید کلیهٔ R^{i}_{hkl} ها صفر باشد. چون در فضای مستقیم‌الخط اقلیدسی کلیهٔ نمادهای کریستوفل صفر است ، R^{i}_{hkl} ها هم همه صفر میشوند و چون R^{i}_{hkl} ها در هردستگاه مستقیم‌الخطی صفرند پس بموجب قضیهٔ اصلی (§ ۱۲) در هردستگاه منحنی‌الخطی نیز صفر خواهند شد .

پس نتیجه میگیریم که : **شرط لازم و کافی برای اینکه یک فضای ریمانی، اقلیدسی باشد اینستکه کلیهٔ نمادهای ریمان ـ کریستوفل در آن صفر باشد .**

با توجه به (۱۸-۲۹) و مستقل از ترتیب عوامل بودن [۱] مشتق ـ همگرد عددوارها یعنی (۳۷ - ۲۹) ، میتوانیم مقدار $\lambda_{i,kl}-\lambda_{i,lk}$ را بطرز بسیار ساده‌ای حساب کنیم : بردار ناهمگردی ثابت بمؤلفهٔ X^{i} انتخاب میکنیم و مشتق ـ همگرد مرتبهٔ دوم عددوار : $\lambda_{i}X^{i}=f$ را بدست میآوریم :

$$(\lambda_{i,kl}-\lambda_{i,lk})X^{i}+\lambda_{i}(X^{i}_{,kl}-X^{i}_{,lk})=f_{,kl}-f_{,lk}=0$$

و با درنظر گرفتن (۴-۴۱) داریم :

$$(\lambda_{i,kl}-\lambda_{i,lk})X^{i}+\lambda_{i}(-X^{h}R^{i}_{hkl})=0$$

یا :

$$(\lambda_{i,kl}-\lambda_{i,lk})X^{i}-(\lambda_{h}R^{h}_{ikl})X^{i}=0$$

یا :

$$\lambda_{i,kl}-\lambda_{i,lk}\equiv\lambda_{h}R^{h}_{ikl} \tag{۴۱–۵}$$

۱- Commutativity

مقدار $\lambda^{ij}_{,kl}-\lambda^{ij}_{,lk}$ را نیز میتوانیم بهمین نحو حساب میکنیم : بردارهای همگرد ثابت X_i و Y_j را انتخاب و از حاصلضرب فشرده زیر استفاده میکنیم :

$$\lambda^{ij}X_i Y_j = f$$

لذا :

$$(\lambda^{ij}_{,kl}-\lambda^{ij}_{,lk})X_i Y_j + \lambda^{ij}(X_{i,kl}-X_{i,lk})Y_j + \lambda^{ij}X_i(Y_{j,kl}-Y_{j,lk}) = f_{,kl}-f_{,lk}=0$$

و با درنظر گرفتن (۵-۴۱) داریم :

$$(\lambda^{ij}_{,kl}-\lambda^{ij}_{,lk})X_i Y_j + \lambda^{ij}(X_h R^h_{ikl})Y_j + \lambda^{ij}X_i(Y_h R^h_{jkl})=0$$

یا :

$$(\lambda^{ij}_{,kl}-\lambda^{ij}_{,lk})X_i Y_j + \lambda^{hj}(X_i R^i_{hkl})Y_j + \lambda^{ih}X_i(Y_j R^j_{hkl})=0$$

یا :

$$\boxed{(\lambda^{ij}_{,kl}-\lambda^{ij}_{,lk}) \equiv -\lambda^{hj}R^i_{hkl}-\lambda^{ih}R^j_{hkl}} \qquad (۶-۴۱)$$

و یا بطور کلی :

$$\boxed{\lambda^{r_1 r_2 \dots r_m}_{,kl}-\lambda^{r_1 r_2 \dots r_m}_{,lk} \equiv -\sum_{\alpha=1}^{m}\lambda^{r_1 r_2 \dots r_{\alpha-1} h r_{\alpha+1} \dots r_m}R^{r_\alpha}_{hkl}} \qquad (۷-۴۱)$$

همچنین داریم :

$$\lambda_{ij}X^i Y^j = f$$

پس :

یا :

$$(\lambda_{ij,kl}-\lambda_{ij,lk})X^iY^j+\lambda_{ij}(X^i_{,kl}-X^i_{,lk})Y^j$$
$$+\lambda_{ij}X^i(Y^j_{,kl}-Y^j_{,lk})=0$$

$$(\lambda_{ij,kl}-\lambda_{ij,lk})X^iY^j+\lambda_{ij}(-X^hR^i_{hkl})Y^j$$
$$+\lambda_{ij}X^i(-Y^hR^j_{hkl})=0$$

یا :

$$(\lambda_{ij,kl}-\lambda_{ij,lk})X^iY^j-(\lambda_{hj}R^h_{ikl})X^iY^j$$
$$-(\lambda_{ih}R^h_{jkl})X^iY^j=0$$

یا :

$$\lambda_{ij,kl}-\lambda_{ij,lk}\equiv\lambda_{hj}R^h_{ikl}+\lambda_{ih}R^h_{jkl} \tag{۴۱–۸}$$

و یا بطور کلی :

$$\lambda_{r_1r_2\ldots r_m,kl}-\lambda_{r_1r_2\ldots r_m,lk}\equiv\sum_{\alpha=1}^{m}\lambda_{r_1r_2\ldots r_{\alpha-1}hr_{\alpha+1}\ldots r_m}R^h_{r_\alpha kl} \tag{۴۱–۹}$$

بالاخره :

$$\lambda^i_jX^jY_i=f$$

و از آنجا :

$$(\lambda^i_{j,kl}-\lambda^i_{j,lk})X^jY_i+\lambda^i_j(X^j_{,kl}-X^j_{,lk})Y_i$$
$$+\lambda^i_jX^j(Y_{i,kl}-Y_{i,lk})=0$$

یا :

$$(\lambda^i_{j,kl}-\lambda^i_{j,lk})X^jY_i+\lambda^i_j(-X^hR^j_{hkl})Y_i$$
$$+\lambda^i_jX^j(Y_hR^h_{ikl})=0$$

و بالاخره :

$$\boxed{\lambda^i_{j,kl} - \lambda^i_{j,lk} = \lambda^i_h R^h_{jkl} - \lambda^h_j R^i_{hkl}} \qquad (۴۱-۱۰)$$

و یا بطور کلی :

(۴۱-۱۱)

$$\lambda^{r_1 r_2 \dots r_m}_{s_1 s_2 \dots s_p, jk} - \lambda^{r_1 r_2 \dots r_m}_{s_1 s_2 \dots s_p, kj} = \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda^{r_1 r_2 \dots r_m}_{s_1 s_2 \dots s_{\alpha-1} l s_{\alpha+1} \dots s_p} R^l_{s_\alpha jk}$$

$$- \sum_{\beta=1}^{m} \lambda^{r_1 r_2 \dots r_{\beta-1} l r_{\beta+1} \dots r_m}_{s_1 s_2 \dots s_p} R^{r_\beta}_{ljk}$$

فورمولهای (۴۱-۷) و (۴۱-۹) و (۴۱-۱۱) به قوانین «استقلال از ترتیب» [۱] ریچی برای مشتق ـ همگرد موسوم است. وقتی بجای مشتق معمولی مشتق ـ همگرد بکاربرده میشود باید بجای شرط انتگرال پذیر بودن ازاین اتحادها استفاده کرد .

تبصرهٔ ۱ـ رابطهٔ (۴۱-۵) را بترتیب زیرنیز میتوانیم حساب کنیم . طرفین (۴۱-۴) را در G_{ij} ضرب میکنیم :

$$G_{ij}(\lambda^i_{,kl}) - G_{ij}(\lambda^i_{,lk}) = -G_{ij}\lambda^h R^i_{hkl}$$
$$= -\lambda^h R_{hjkl} = \lambda^h R_{jhkl}$$

و یا :

$$(G_{ij}\lambda^i)_{,kl} - (G_{ij}\lambda^i)_{,lk} = G^{mh}\lambda_m R_{jhkl}$$

و یا :

$$\lambda_{j,kl} - \lambda_{j,lk} = \lambda_m R^m_{jkl}$$

و یا :

$$\lambda_{i,kl} - \lambda_{i,lk} = \lambda_h R^h_{jkl}$$

تبصرهٔ ۲ـ کلیهٔ فورمولهای مربوط به مشتق ـ همگرد که دراین قسمت

۱- Commutation

تابحال ذکر کردیم وقتی صادق است که ارتباط Γ^h_{kl} نسبت به اندیسهای تحتانی k و l قرینه باشد . اکنون حالتی را در نظر میگیریم که این تقارن وجود نداشته باشد .

اولاً - برای یک عددوار f داریم :

$$f_{,k} = \partial_k f$$

$$f_{,kl} = \partial_l (\partial_k f) - f_{,h} \Gamma^h_{lk}$$

و همچنین :

$$f_{,lk} = \partial_k (\partial_l f) - f_{,h} \Gamma^h_{kl}$$

از آنجا :

$$f_{,kl} - f_{,lk} = -(\Gamma^h_{lk} - \Gamma^h_{kl}) f_{,h} = -۲ f_{,h} T^h_{kl} \qquad (۴۱-۱۲)$$

که در آن : $T^h_{kl} = \frac{۱}{۲}(\Gamma^h_{lk} - \Gamma^h_{kl})$ یعنی تانسور پیچش میباشد .

ثانیاً - برای یک میدان برداری ناهمگرد بمؤلفهٔ λ^i داریم :

$$\begin{aligned} \lambda^i_{,kl} &= \partial_l (\partial_k \lambda^i + \lambda^h \Gamma^i_{kh}) + \lambda^h_{,k} \Gamma^i_{lh} - \lambda^i_{,h} \Gamma^h_{lk} \\ &= \partial_l (\partial_k \lambda^i) + \lambda^h \partial_l \Gamma^i_{kh} + \Gamma^i_{kh} \partial_l \lambda^h + \lambda^h_{,k} \Gamma^i_{lh} \\ &\quad - \lambda^i_{,h} \Gamma^h_{lk} = \partial_l (\partial_k \lambda^i) + \lambda^h \partial_l \Gamma^l_{kh} + \Gamma^i_{kh} (\lambda^h_{,l} \\ &\quad - \lambda^m \Gamma^h_{lm}) + \lambda^h_{,k} \Gamma^i_{lh} - \lambda^i_{,h} \Gamma^h_{lk} = \partial_l (\partial_k \lambda^i) \\ &\quad + \lambda^h (\partial_l \Gamma^i_{kh} - \Gamma^i_{km} \Gamma^m_{lh}) + (\lambda^h_{,l} \Gamma^i_{kh} + \lambda^h_{,k} \Gamma^i_{lh}) - \lambda^i_{,h} \Gamma^h_{lk} \end{aligned} \qquad (۴۱-۱۳)$$

چون جملات اول وسوم طرف دوم این تساوی نسبت به اندیسهای l و k متقارنند داریم :

$$\begin{aligned} \lambda^i_{,kl} - \lambda^i_{,lk} &= -\lambda^h (\partial_k \Gamma^i_{lh} - \partial_l \Gamma^i_{kh} + \Gamma^i_{km} \Gamma^m_{lh} \\ &\quad - \Gamma^i_{lm} \Gamma^m_{kh}) - ۲ \lambda^i_{,h} T^h_{kl} \end{aligned}$$

یا :

$$\lambda^i_{,kl} - \lambda^i_{,lk} = -\lambda^h R^i_{hkl} - ۲\lambda^i_{,h} T^h_{kl} \qquad (۴۱-۱۴)$$

از این رابطه دیده میشود که حتی وقتی هم ارتباط دارای پیچش صفر باشد مشتق ـ همگرد متوالی یک میدان برداری ناهمگرد ، مستقل ازترتیب مشتق گیری نیست مگر اینکه تانسور انحنا صفر باشد .

اگر A_i مؤلفه های میدان برداری همگرد یک بردار باشد داریم :

$$A_{i,kl} - A_{i,lk} = A_h R^h_{ikl} - ۲A_{i,h} T^h_{kl} \qquad (۴۱-۱۵)$$

و همچنین :

$$B_{ij,kl} - B_{ij,lk} = B_{hj} R^h_{ikl} + B_{ih} R^h_{jkl} - ۲B_{ij,h} T^h_{kl} \qquad (۴۱-۱۶)$$

و بطور کلی برای یک تانسور از نوع (m , p) خواهیم داشت :

(۴۱-۱۷)

$$\lambda^{r_1 r_2 \dots r_m}_{s_1 s_2 \dots s_p, kl} - \lambda^{r_1 r_2 \dots r_m}_{s_1 s_2 \dots s_p, lk} = \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda^{r_1 r_2 \dots r_m}_{s_1 s_2 \dots s_{\alpha-1} h s_{\alpha+1} \dots s_p} R^h_{s_\alpha kl}$$
$$- \sum_{\beta=1}^{m} \lambda^{r_1 r_2 \dots r_{\beta-1} h r_{\beta+1} \dots r_m}_{s_1 s_2 \dots s_p} R^{r_\beta}_{hkl} - ۲\lambda^{r_1 r_2 \dots r_m}_{s_1 s_2 \dots s_p, h} R^h_{s_\alpha kl}$$

که این رابطه نیز توسط ریچی پیدا شده است .

از ترکیب روابط (۸-۳۴) و (۹-۳۴) نتیجه میگیریم :

$$\Gamma^i_{jk} = L^i_{jk} + T^i_{jk} \qquad (۴۱-۱۸)$$

اگر این مقدار را در (۶-۴۰) بگذاریم خواهیم داشت :

$$R^i_{hlk} = B^i_{hlk} + \Omega^i_{hlk} \qquad (۴۱-۱۹)$$

که در آن :

$$B^i_{hlk} = \partial_i L^i_{hk} - \partial_k L^i_{hl} + L^m_{hk} L^i_{ml} - L^m_{hl} L^i_{mk} \qquad (٤١-٢٠)$$

و :

$$\Omega^i_{hlk} = T^i_{hl,k} - T^i_{hk,l} + T^i_{mk} T^m_{hl} - T^i_{ml} T^m_{hk} - ٢ T^i_{hm} T^m_{lk} \qquad (٤١-٢١)$$

از این تانسورها میتوان بوسیلهٔ ادغام ، تانسورهای دیگری نیز بدست آورد :

$$B_{hl} = B^i_{hli} \qquad (٤١-٢٢)$$

$$b_{hl} = \frac{١}{٢} (B_{hl} + B_{lh}) \qquad (٤١-٢٣)$$

$$\beta_{hl} = \frac{١}{٢} (B_{hl} - B_{lh}) \qquad (٤١-٢٤)$$

که b_{hl} و β_{hl} بترتیب قسمتهای متقارن و نا متقارن تانسور B_{hl} است .

از (٤١-٢٠) نتیجه میگیریم :

$$b_{hl} = \frac{١}{٢} (\partial_l L^m_{mh} + \partial_h L^m_{ml}) - \partial_m L^m_{hl} + L^m_{hi} L^i_{ml} - L^m_{hl} L^i_{mi} \qquad (٤١-٢٥)$$

و :

$$\beta_{hl} = \frac{١}{٢} (\partial_l L^m_{mh} - \partial_h L^m_{ml}) \qquad (٤١-٢٦)$$

تانسوردیگری که بامؤلفه های S_{lk} ازادغام اندیسهای i و h در B^i_{hlk} بدست میاید یعنی :

$$S_{lk} = B^i_{ilk} \qquad (٤١-٢٧)$$

اصولاً تانسور جدیدی نیست . چه بسهولت دیده میشود که داریم :

$$S_{lk} = ٢ \beta_{kl} \qquad (٤١-٢٨)$$

تبصره ـ چون درفضا های ریمانی Γ^i_{jk} ها متقارنند بموجب رابطهٔ (٤١-٢١) ،

R^{i}_{hlk} مساوی B^{i}_{hlk} و بموجب روابط (۳۴-۷) و (۴۱-۲۶) مقادیر β_{hl} مساوی صفر و بموجب (۴۱-۲۸) مقدار S_{lk} مساوی صفر میشود .

۴۲- تانسورادغام شدهٔ ریچی - اینشتین - تانسور خمیدگی $R^{i}_{hkl}=G^{ij}R_{hjkl}$ را به‌دوراه مختلف میتوان ادغام کرد . یا h را مساوی i میگیریم که دراینصورت خواهیم داشت :

$$R^{i}_{ikl}=G^{ij}R_{ijkl} \tag{۴۲-۱}$$

زیرا G^{ij} و R_{ijkl} نسبت به i و j بترتیب قرینه و قرینهٔ چپ هستند .

دراینحال با توجه به (۳۴-۷) دیده میشود که داریم :

$$R^{i}_{ikl}=0 \tag{۴۲-۲}$$

و یا k را مساوی i میگیریم که دراینصورت داریم :

$$R^{i}_{hil}=G^{ij}R_{hjil}=G^{ij}R_{ilhj}=G^{ij}R_{lijh} \tag{۴۲-۳}$$

فرض میکنیم :

$$R_{hl}=R^{i}_{hil}=G^{ij}R_{lijh} \tag{۴۲-۴}$$

با توجه به (۴۲-۳) می‌بینیم که :

$$R_{hl}=R_{lh} \tag{۴۲-۵}$$

این تانسور متقارن به «تانسور ادغام شدهٔ ریچی - اینشتین» موسوم است .
ازطرفی اگریکی‌ازاندیسهای i یا h از R^{i}_{hkl} را بطور دلخواه بایک‌اندیس k یا i ادغام کنیم همیشه یا R_{hl} ویا $-R_{hl}$ بدست خواهد آمد . بنابراین این تانسور ، تمام عناصرمستقل R^{i}_{hkl} را تحت شکل سادهٔ یک تانسورقرینه ارائه میدهد . تانسور ادغام شدهٔ ریچی - اینشتین نقش بسیار مهمی درنظریهٔ نسبی عمومی‌دارد . ازاین‌تانسورتانسوری‌ازنوع (۱ , ۱) با مؤلفه های $R^{i}_{j}=G^{ik}R_{kj}$ و

خمیدگی عددواری بصورت $R=R^i_i=G^{ij}R_{ij}$ میتوانیم بدست آوریم .

۱-۴۲- اتحادهای بیانکی[1] : بار دیگر از قضیهٔ اصلی : «اگر تمام مؤلفه های تانسوری در دستگاهی متحد با صفر باشد پس از تغییر محورهای مختصات نیز این خاصیت محفوظ میماند» استفاده میکنیم . همانطور که در (§ ۳۳) دیدیم میتوان در یک نقطهٔ اختیاری از یک فضای ریمانی ، G_{ij} ها را به یک صورت قطری که تمام عناصر آن مقادیری ثابت ودرهمین نقطهٔ بخصوص ، قابل محاسبه‌اند تبدیل نمود . این فضا همان‌فضای اقلیدسی مماس خواهد بود . دراین فضا مشتق - همگرد به مشتق جزئی تبدیل میشود و با توجه به (۴-۶) میتوانیم بنویسیم :

$$R^i_{hkl,j}=\partial_j\,\partial_k\Gamma^i_{lh}-\partial_j\,\partial_l\,\Gamma^i_{kh} \qquad (۴۲-۶)$$

از جایگشت مستدیر اندیسهای k و l و j روابط زیر حاصل میشود :

$$R^i_{hlj,k}=\partial_k\partial_l\,\Gamma^i_{jh}-\partial_k\partial_j\,\Gamma^i_{lh} \qquad (۴۲-۷)$$

$$R^i_{hjk,l}=\partial_l\,\partial_j\,\Gamma^i_{kh}-\partial_l\,\partial_k\Gamma^i_{jh} \qquad (۴۲-۸)$$

از جمع این سه رابطه داریم .

$$R^i_{hkl,j}+R^i_{hlj,k}+R^i_{hjk,l}=0 \qquad (۴۲-۹)$$

خلاصه میتوان این روابط رابرای کلیهٔ نقاط فضای ریمانی مفروض تحقیق کرد . یعنی گفت که تانسور (۴۲-۹) در همه‌جا صفر و این خاصیت در هردستگاه مختصاتی محفوظ است . لذا اتحاد زیر که به اتحاد بیانکی موسوم است بدست میآید :

$$\boxed{R^i_{hlk,j}+R^i_{hlj,k}+R^i_{hjk,l}\equiv 0} \qquad (۴۲-۱۰)$$

۱- Bianchi Identities

چون هنگام مشتق ـ همگرد گیری G^{im} ها نقش اعداد ثابت‌را دارند لذا(۴۲-۱۰) بصورت زیر در میآید :

$$\underline{R_{hmkl,j}+R_{hmlj,k}+R_{hmjk,l}\equiv 0} \qquad (۴۲-۱۱)$$

معادلات (۹-۴۰) برای کلیهٔ ارتباطات‌آفین و روابط '(۸-۴۰) و (۴۲-۱۰) برای تمام‌ارتباطات متقارن‌و روابط (۴۲-۲) و (۴۲-۵) برای تمام ارتباطات ریمانی صادقند . از (۹-۴۰) و (۴۲-۱۰) نتیجه میشود :

$$R^{i}_{hkl,j}-R^{i}_{hjl,k}+G^{im}R_{hmjk,l}=0 \qquad (۴۲-۱۲)$$

ازمساوی قرار دادن i و l داریم :

$$R_{hk,j}-R_{hj,k}+G^{lm}R_{hmjk,l}=0 \qquad (۴۲-۱۳)$$

(R_{hk} همان تانسور ریچی ـ اینشتین است) . ازضرب طرفین (۴۲-۱۳) در G^{hj} خواهیم داشت :

$$R^{j}_{k,j}-R_{,k}+R^{l}_{k,l}=0 \qquad (۴۲-۱۴)$$

و یا :

$$R^{l}_{k,l}=\frac{۱}{۲}\,\partial_k R \qquad (۴۲-۱۵)$$

اگر تانسورجدیدی را با رابطهٔ زیرکه درآن λ مقداریست ثابت ، تعریف کنیم :

$$T^{l}_{k}=R^{l}_{k}-\frac{۱}{۲}\,(R-۲\lambda)\delta^{l}_{k} \qquad (۴۲-۱۶)$$

رابطهٔ (۴۲-۱۵) خواهد شد :

$$\underline{T^{l}_{k,l}=0} \qquad (۴۲-۱۷)$$

که معادلهٔ اخیر هم نقش مهمی را درنظریهٔ نسبی دارد .

۲-۴۲- نمایش هندسی تانسور خمیدگی : فرض میکنیم **X** و **Y** دوبردار واحد مماس در یک نقطهٔ P برسطح ریمانی n بعُدی باشد . دوژئودزیک درنظر میگیریم که از نقطهٔ P بگذرند وامتداد های آنها با دو امتداد **X** و **Y** ، واقع در تحت فضای دوبعُدی سطح مماس در P ، مشخص باشند. مطابق تعریف ریمان، خمیدگی ریمانی در نقطهٔ P در امتداد های **X** و **Y** عبارتست از K یعنی انحنای گوس (۱) در نقطهٔ P از این تحت فضای دو بعُدی که با فورمول زیر مشخص میشود (۲) :

$$K=\frac{R_{hjkl}X^hY^jX^kY^l}{(G_{hk}G_{jl}-G_{hl}G_{jk})X^hY^jX^kY^l} \qquad (۴۲-۱۸)$$

این رابطه نشان میدهد که چرا کلمهٔ خمیدگی برای تانسور به مؤلفه های R_{hjkl} انتخاب شده است .

اگرانحنای K در نقطهٔ P مستقل ازامتداد های‌خاص **X** و **Y** باشد داریم :

$$R_{hjkl}=K(G_{hk}G_{jl}-G_{hl}G_{jk}) \qquad (۴۲-۱۹)$$

شور (۳) اثبات کرده است که اگر خمیدگی در نقطهٔ P ودرتمام نقاط مجاور آن مستقل ازامتداد های **X** و **Y** باشد بشرط ۲ < n ، K در روی این ناحیه مقدار ثابتی خواهد داشت . برای اثبات این مطلب از (۴۲ - ۱۹) مشتق ـ همگرد میگیریم :

$$R_{hjkl,i}=K_{,i}(G_{hk}G_{jl}-G_{hl}G_{jk}) \qquad (۴۲-۲۰)$$

و یا با استفاده از (۴۲-۱۱) داریم :

$$K_{,i}(G_{hk}G_{jl}-G_{hl}G_{jk})+K_{,k}(G_{hl}G_{ji}-G_{hi}G_{jl})+K_{,l}(G_{hi}G_{jk}-G_{hk}G_{ji})=0 \qquad (۴۲-۲۱)$$

۱- Gaussian Curvature

۲- به [۱۰] صفحهٔ ۸۱ مراجعه شود

۳- Schur

از ضرب طرفین این تساوی در G^{hj} داریم :

$$(n-۲)[K_{,i}G_{jl}-K_{,l}G_{ji}]=0 \qquad (۴۲-۲۲)$$

و چون $n \neq ۲$ فرض شده است لذا :

$$K_{,i}G_{jl}=K_{,l}G_{ji} \qquad (۴۲-۲۳)$$

و یا از ضرب طرفین در G^{hj} داریم :

$$K_{,i}\delta_l^h= K_{,l}\,\delta_i^h \qquad (۴۲-۲۴)$$

و از اینجا لازم میآید که $K_{,l}=0$ یعنی K مقداری ثابت باشد .

یک فضای ریمانی که تانسور خمیدگی برای آن توسط (۴۲-۱۹) بیان شده باشد به **فضای با انحنای ثابت** موسوم است .

در فضاهای با خمیدگی ثابت سه هندسه وجود دارد : هندسهٔ لباچفسکی ، با خمیدگی ثابت منفی هندسهٔ ریمانی ، با خمیدگی ثابت مثبت و هندسهٔ اقلیدسی (یا فضاهای مسطح) [۱] با انحنای صفر که بترتیب به هندسه‌های هیپربولیک [۲] الیپتیک [۳] و پارابولیک [۴] موسومند .

۴۲-۳- **فضاهای ریمانی خاص :** تاکنون آن عده ازفضاهای ریمانی که در بعضی شرایط اضافی صدق میکنند بیشتر مورد مطالعه قرارگرفته‌اند . این شرایط ممکن است یا تعبیر هندسی ساده‌ای داشته باشند و یا طبیعةً تحلیلی باشند. مثلاً ساده‌ترین شرط اینستکه تانسور خمیدگی R_{hjkl} درکلیهٔ نقاط صفر باشد . چنین فضائی بطور محلی اقلیدسی است یعنی متریکی بصورت $ds^۲=\delta_{ij}dx^i dx^j$ قبول میکند . مثال دیگر ، فضاهای با خمیدگی ثابت هستند که تانسور خمیدگی آنها با (۴۲-۱۹) بیان میشود . تعبیر هندسی این شرط کاملاً روشن است . فضائی

۱- Flat Spaces ۲- Hyperbolic

۳- Elliptic ۴- Parabolic

که درآنها تانسور ریچی ـ اینشتین با رابطهٔ $R_{hl} = \lambda G_{hl}$ (λ مقداری است ثابت) بیان میشود نیز یکی از این فضاهای خاص است . این فضا به «فضای اینشتین» موسوم است . از ضرب (۴۲-۱۹) در G^{hl} داریم :

$$R_{jk} = K(1-n)G_{jk} \qquad (۴۲-۲۵)$$

بنابراین فضای با انحنای ثابت یک فضای اینشتین خواهد بود .

نوع خاص دیگری از فضا که زیاد مورد توجه بوده فضای موزون [1] است که بطریق زیر تعریف میشود :

فرض میکنیم s فاصلهٔ ژئودزیکی نقطهٔ مفروض x_o از نقطهٔ بینهایت نزدیک بآن x باشد. شاخص ژئودزیک x_ox را e (مساوی ۱ $\pm$ یا صفر) میگیریم. اگر $\Omega = \frac{1}{2} es^2$ را تابعی از x بگیریم ، فضا را در نقطهٔ x_o وقتی موزون گوئیم که بازاء تابعی مانند f داشته باشیم :

$$\nabla_2 \Omega = f(\Omega , x_o) \qquad (۴۲-۲۶)$$

(∇_2 پارامتر دیفرانسیل نوع دوم و یا کارگزار لاپلاسی [2] است که با رابطهٔ $\nabla_2 f = G^{ij} f_{,ij}$ مشخص میشود) . وقتی فضا در نقطهٔ x_o بازای جمیع مقادیر x_o موزون باشد فضا موزون خوانده میشود .

ثابت میشود که **هرفضای موزون یک فضای اینشتین است ولی هرفضای اینشتین ، فضائی موزون نیست .**

همچنین ثابت میشود که **هرفضای باانحنای ثابت موزون است ولی هرفضای موزونی انحنای ثابت ندارد .**

بنابراین فضای موزون نوع تازه‌ایست ازفضا که ازفضای اینشتین خصوصی‌تر ولی اختصاص آن از فضاهای با انحنای ثابت کمتر است .

۱- Harmonic space ۲- Laplacian

نوع دیگری ازفضاها که خواص آنها زیاد مورد مطالعه قرار گرفته **فضاهای متقارن** هستند که با معادلهٔ $R_{hijk,l}=0$ مشخص میشوند .

ثابت‌شده است که فضاهای موزون ٤ بعدی بامتریک معین مثبت ، متقارنند ولی آیا این قضیه برای فضاهای موزون بابعاد بالاتر نیز صادق است یانه ، هنوز مجهول است .

بالاخره نوع دیگری از فضاها که نام بردن آنها را لازم میدانیم فضاهای **رکوران**[۱] هستند که با شرط $R_{hijk,l}=\lambda_l R_{hijk}$ (λ_l برداری است همگرد) تعریف میشوند . این فضاها خواص جالب زیادی دارند و یکی از مسائلی که تاکنون حل نشده است اینستکه هنوزنتوانسته‌اند یک تعبیر هندسی طبیعی برای بردار باصطلاح **رکورانس** λ_l پیدا کنند .

٤-٢-٤- **پایاهای دیفرانسیل**[۲] : در بسط تئوری فضاهای با ارتباط آفین (§ ۲۸ و § ۲۹) با عددوارها و تانسورهائی سروکار پیدا کردیم که مؤلفه هاشان به توابع اصلی Γ^i_{jk} و مشتقات آنها تا مراتب مشخصی بستگی داشت . چنین عددوارها و تانسورها را پایاهای دیفرانسیل آفین به معنای زیر نامند :

یک تانسور T وقتی پایای دیفرانسیل آفین از مرتبهٔ r نامیده میشود که مؤلفه‌هایش‌یعنی $T^{i\,\cdots\,j}_{k\,\cdots\,m}(\Gamma^a_{bc}\ ,\ \partial_p\Gamma^a_{bc}\ ,\ \ldots\ ,\ \partial_p\ldots\partial_q\,\partial_r\,\Gamma^a_{bc})$ توابعی‌از Γ ها و مشتقات آنها تا مرتبه r ام باشند ، بطوریکه هرمؤلفه هنگام تغییر مختصات در فضای با ارتباط آفین شکل خود را بصورت تابعی از Γ ها و مشتقاتشان حفظ کند.

دراین تعریف اگر بجای قانون تبدیل تانسوری ، معادلات تبدیل دیگری‌را که واجد خاصیت تعدی مورد لزوم هستند بگذاریم به مفهوم پایاهای دیفرانسیل که همان تعمیم پایاهای دیفرانسیل تانسور آفین است میرسیم . بدین ترتیب

۱- Recurrent ۲- Differential Invariants

کمیات Γ^i_{jk} ها خودشان مؤلفه های یک پایای دیفرانسیل غیر تانسوری از مرتبهٔ صفر یعنی ارتباط آفین هستند .

درحالت‌فضاهای ریمانی ، با پایاها ، بمعنای کلی پایاهای دیفرانسیل آفین سروکار پیدا میکنیم ؛ بااین تفاوت که مؤلفه‌های مورد نظر به G_{ij} ها و مشتقات آنها بستگی دارند . اگر مؤلفه های پایاها شامل مشتقات G_{ij} تا مرتبهٔ r و خود مرتبهٔ r $(r \geqslant o)$ بود آن‌را متریک پایای دیفرانسیل ، از مرتبهٔ r خوانند. بعنوان مثال برای چنین پایاهائی‌تانسورمتریک‌اصلی‌با مؤلفه های ـ همگرد G_{ij} ومؤلفه های نا همگرد G^{ij} رانام میبریم. نمادهای کریستوفل،مؤلفه های‌یک پایای دیفرانسیل غیرـ تانسوراز مرتبهٔ ۱ یعنی ارتباطات آفین این فضا هستند .

پایاهای‌دیفرالسیل تانسوری وغیرـ تانسوری‌زیادی موجود است که‌تانسور خمیدگی درفضای ریمانی از آن جمله است [۱].

۱– برای اطلاع بیشتر به [۲۵] مراجعه شود .

تمرینات

۱- تعیین کنید :

اولاً - مدولهای بردارهای مبنای e_i و زوایای θ_{ij} بین این بردارها

ثانیاً - دترمینان $|G_{ij}|$ نمادهای کریستوفل و معادلات دیفرانسیل ژئودزیکهای مربوط به فضاهای ریمانی را که با G_{ij} های زیر تعیین میشوند :

a) $G_{11}=1$ و $G_{22}=(x^1)^2+(c)^2$ و $G_{12}=G_{21}=0$ (c مقداریست ثابت)

b) $G_{11}=1$ و $G_{22}=(x^1 \sin x^2)^2$ و $G_{33}=(x^1)^2$ و بقیهٔ G_{ij} ها صفرند (بازاء $i \neq j$) . تحقیق کنید که آیا این فضا اقلیدسی است یا نه ؟

c) $G_{11}=3$ و $G_{22}=(\sin x^1)^2$ و $G_{12}=G_{21}=0$

۲- مؤلفه‌های تانسور خمیدگی R_{hjkl} را برای دو فضای ریمانی زیر حساب کنید (بحث از فضائی دو بُعدی است که در فضای اقلیدسی ۳ بُعدی فرو برده شده است) .

a) $G_{11}=1$ و $G_{22}=(x^1)^2+(c^2)$ و $G_{12}=G_{21}=0$ (c ثابت)
(هلیکوئید) .

b) $G_{11}=1$ و $G_{22}=(r \sin x^2)^2$ و $G_{12}=G_{21}=0$ (کره)

۳- مطلوبست معادلات ژئودزیک سطح بیضوی دواری که معادلهٔ آن در مختصات دکارتی قائم بصورت زیر است :

$$\frac{(x^1)^2+(x^2)^2}{a^2}+\frac{(x^3)^2}{b^2}=1$$

فرض کنید :

$$x^1=a\sin x^1 \cos x^2 \quad \text{و} \quad x^2=a\cos x^1 \cos x^2 \quad \text{و} \quad x^3=b\sin x^2$$

۴- ثابت کنید که ژئودزیک‌های یک استوانهٔ دوار قائم ، هلیس است.

۵- ثابت کنید که در یک فضای ریمانی دو بُعدی قائم ، روابط زیر صادق است :

$$R = \frac{R_{1221}}{G_{11}G_{22}} \quad \text{و} \quad R_{12} = 0 \quad \text{و} \quad G_{11}G_{22} = R_{22}G_{11}$$

($R = G^{ij}R_{ij}$ انحنای عددوار است) .

۶- ثابت کنید :

$$\partial_i R^i_j = \frac{1}{2}\,\partial_j R \qquad (R = G^{ij}R_{ij} \quad \text{و} \quad R^i_j = G^{ik}R_{kj})$$

۷- ثابت کنید که دیورژانس تانسور a^{ij} یعنی $a^{ij}_{,j}$ نسبت به تانسور متقارن G^{ij} با عبارت زیر بیان میشود :

$$a^{ij}_{,j} = \frac{1}{\sqrt{G}}\,\partial_j\,(a^{ij}\sqrt{G}) + a^{jk}\,\Gamma^i_{jk}$$

و اگر a^{ij} قرینهٔ چپ باشد جملهٔ آخر عبارت فوق صفر است .

۸- ثابت کنید که دیورژانس تانسور a^j_i با عبارت زیر قابل بیان است :

$$a^j_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{G}}\,\partial_j\,(a^j_i\sqrt{G}) - a^j_l\,\Gamma^l_{ij}$$

۹- ثابت کنید که اگر a^{ij} متقارن باشد داریم :

$$a^j_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{G}}\,\partial_j\,(a^j_i\sqrt{G}\,) - \frac{1}{2}\,a^{jk}\,\partial_i G_{jk}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{G}}\,\partial_j\,(a^j_i\sqrt{G}) + \frac{1}{2}\,a_{jk}\,\partial_i G^{jk}$$

۱۰- روابط زیر را برای فضای ۳ بُعدی در دستگاه سه سطح متعامد ثابت کنید :

$$R_{ij}=\frac{۱}{G_{kk}}R_{ikkj}$$ و

$$R_{ji}=\frac{۱}{G_{jj}}R_{ijji}+\frac{۱}{G_{kk}}R_{ikki}$$ و

$$R=\sum_{i,j}\frac{۱}{G_{ii}}\frac{۱}{G_{jj}}R_{ijji}$$ و

$$R_{ij}=R^{k}_{ijk}=\partial_j\left(\partial_i \log_n\sqrt{G}\right)-\partial_k\Gamma^{k}_{ij}+\Gamma^{m}_{kj}\Gamma^{k}_{mj}-\Gamma^{m}_{ij}\left(\partial_m \log_n\sqrt{G}\right)$$

فصل ششم

٤٣- تننده‌ها [1]

همانطوریکه دیدیم تئوری کلاسیک تانسورها تشکیل ساختمان جبری کاملی را میدهد که برای بیان واقعیات فیزیکی کافی و رسا است. معهذا درسال ۱۹۱۳ **الی کارتان** به کشف بسیار مهمی نائل گردید: غیراز بردارها و تانسورها موجودات هندسی دیگری هم وجود دارند که بمراتب ساده‌تراز بردارها هستند و همانطورکه میتوانستیم تانسور سرتبهٔ دومی را برحسب بردارها بیان کنیم میتوانیم هربرداری را هم برحسب این موجودات که به «تننده»ها موسوم ودر واقع ساختمان ذره‌ای[2] تانسورند نشان دهیم. تئوری تننده‌ها تئوری تانسورها را بسط میدهد وساده میکند وازآن یک ابزار ریاضی مناسبی برای تئوری کوانتوم ذرات، با عزم‌زاویه‌ای ذاتی بوجود میآورد.

برای دست یافتن به تئوری تننده‌ها دو راه موجود است: یکی استفاده از بردارهای تکروند (متشابه الامتداد) [3] و دیگری بکار بردن جبر **کلیفورد** [4]، که ما راه اول را اختیار میکنیم.

۱-۴۳- بردارهای تکروند: ما دراینجا مسئله را برای فضای سه بُعدی بررسی میکنیم و لذا در تمام این مبحث اندیسها را از ۱ تا ۳ تغییر میدهیم وتعمیم نتایج حاصله را بعهدهٔ خوانندگان میگذاریم.

باآنکه در فضای ۳ بُعدی امتدادی که براثر دوران تغییر نکند وجود ندارد ولی هردوران یک مجموعه‌امتدادهای‌خاصی دارد که یکی ازآنها حقیقی ودرامتداد

۱- Spinors　　　۲- Micro – Structure

۳- Isotrope　　　۴- Clifford

محور دوران قرار دارد و دوتای دیگر تشکیل یک زوج بردار مختلط را میدهند. هر امتداد خاص مختلط یک دوران، معمولاً یک «بردار تکروند» نامیده میشود. برای تعیین این امتدادهای خاص Ox^3 را محور دوران میگیریم و همانطور که میدانیم بردار به مؤلفه‌های x_α به برداری به مؤلفه‌های $x_{\alpha'}$ بدل میشود که با روابط زیر که درآنها θ زاویهٔ دوران است مشخص میگردد:

$$\left\{\begin{aligned} x_{1'} &= x_1\cos\theta + x_2\sin\theta \\ x_{2'} &= -x_1\sin\theta + x_2\cos\theta \\ x_{3'} &= x_3 \end{aligned}\right. \qquad (۴۳-۱)$$

یک **امتداد خاص** برداری بمؤلفهٔ های (x_α) و **مقدار خاص** مربوط بآن یعنی λ باید در معادلهٔ ماتریسی زیر صدق کند:

$$\begin{Bmatrix} x_{1'} \\ x_{2'} \\ x_{3'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\cos & \theta\cos & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \qquad (۴۳-۲)$$

و یا:

$$\left\{\begin{aligned} (\lambda - \cos\theta)x_1 - x_2\sin\theta &= 0 \\ x_1\sin\theta + (\lambda - \cos\theta)x_2 &= 0 \\ (\lambda - 1)x_3 &= 0 \end{aligned}\right. \qquad (۴۳-۳)$$

شرط اینکه این سه معادله دارای جوابهای غیر صفر باشد باید داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix} \lambda - \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \lambda - \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (۴۳-۴)$$

که ریشه‌های این معادله خواهد بود:

$$\lambda_3 = e^{-i\theta} \quad \text{و} \quad \lambda_2 = e^{i\theta} \quad \text{و} \quad \lambda_1 = 1 \qquad (۴۳-۵)$$

از قرار دادن این مقادیر در (۴۳-۳) بترتیب ، سه امتداد خاص :

$$(0 , 0 , 1) \quad و \quad (1 , i , 0) \quad و \quad (1 , -i , 0)$$

بدست میآید. امتدادهای خاص $(1 , \pm i , 0)$ که طولشان صفرمیباشد بردارهای تکروند نامیده میشوند . بدیهی است محورها هرنوع گرفته شود این امتدادها تغییر نخواهدکرد . لذا اگر $(s_\alpha \pm it_\alpha)$ یک زوج بردار مزدوج تکروند باشد داریم :

$$\delta^{\alpha\beta}(s_\alpha \pm it_\alpha)\ (s_\beta \pm it_\beta)=0 \qquad (۴۳—۶)$$

و از آنجا :

$$\delta^{\alpha\beta}(s_\alpha s_\beta)=\delta^{jk}\,(t_j\, t_k) \quad و \quad \delta^{\alpha\beta}(s_\alpha t_\beta)=0 \qquad (۴۳—۷)$$

یعنی هربردار تکروند برخودش عمود است و قسمتهای حقیقی و موهومی آن یعنی s_α و t_α بردارهائی متساویالطول و متعامدند .

۴۳-۲ - **پارامتر تکروند** : یک بردار تکروند به مؤلفه های (v_1 , v_2 , v_3) در (۴۳-۶) صدق میکند یعنی :

$$(v_1)^2+(v_2)^2+(v_3)^2=0 \qquad (۴۳—۸)$$

وبنابراین در روی یکی ازمولدهای مستقیمالخط (مختلط) مخروط $(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2=0$ قرار دارد.

مؤلفه های یک بردار تکروند را میتوانیم بصورت پارامتری زیرکه در آن ξ «پارامتر تکروند» (مختلط) نامیده میشود بنویسیم :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{v_1+iv_2}{v_3}=\xi \\ &\frac{v_1+iv_2}{v_3}=-\xi^{-1} \end{aligned}\right. \qquad (۴۳—۹)$$

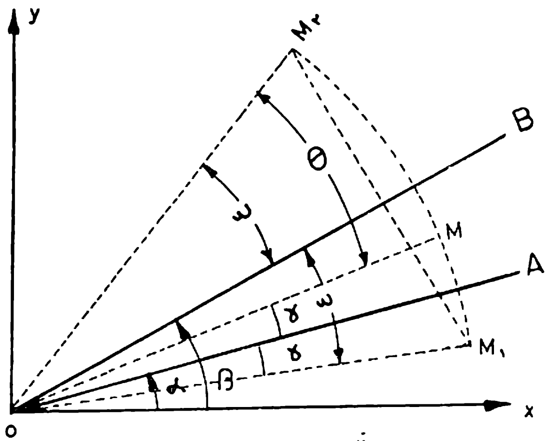
معادلات (۴۳-۹) درواقع معادلات دوصفحه‌اند که فصل مشترکشان بردار تکروند مفروض است ، یعنی معادلهٔ تمام مولدهای مستقیم‌الخط مخروط :

$$(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2=0$$

چون (۴۳-۸) که بردار تکروند را بعنوان برداری بطول صفر تعریف میکند نسبت به هردورانی در حول مبدأ پایا است ، پس یک چنین دورانی باید بردار تکروند (v_3 , v_2 , v_1) را به بردار ، تکروند دیگری مانند (v_3' , v_2' , v_1') تبدیل کند . دراینحال پارامتر تکروند بردار قبل‌از دوران یعنی ξ ، به ξ' که پارامتر تکروند بردار ، پس‌از دوران است تبدیل میشود . حال میخواهیم رابطهٔ بین ξ و ξ' را تعیین کنیم .

محاسبهٔ مستقیم ξ' برحسب ξ از راه یک دوران کلی R مشکل است . لذا این عمل را بااستفاده ازاین قضیه که «هردوران R حاصلضرب دو انعکاس A و B است» [1] در دو مرحله ، که هریک ، یک انعکاس است انجام میدهیم .

۱- اگر M_1 قرینهٔ M نسبت به OA و M_2 قرینهٔ M_1 نسبت به OB باشد از



ش ۴۳.۱

بقیهٔ پاورقی در صفحهٔ بعد

براثرانعکاس A درصفحهٔ $\delta^{\alpha\beta}a_\alpha x_\beta=0$ که‌درآن $\delta^{\alpha\beta}a_\alpha a_\beta=۱$ است برداری بمؤلفه های v_α ، به بردار:

$$v_{\alpha'}=v_\alpha-۲a_\alpha(\delta^{\beta\gamma}a_\beta v_\gamma) \qquad (۴۳-۱۰)$$

تبدیل میشود [۱]. برای محاسبهٔ پارامتر تکروند $v_{\alpha'}$ مینویسیم :

$$(۴۳-۱۱)$$
$$\begin{cases} \dfrac{v_{۱'}+iv_{۲'}}{v_{۳'}}=\xi'=\dfrac{(v_۱+iv_۲)-۲(a_۱v_۱+a_۲v_۲+a_۳v_۳)\,(a_۱+ia_۲)}{v_۳-۲a_۳(a_۱v_۱+a_۲v_۲+a_۳v_۳)} \\ \dfrac{v_{۱'}-iv_{۲'}}{v_{۳'}}=-\dfrac{۱}{\xi'}=\dfrac{(v_۱-iv_۲)-۲(a_۱v_۱+a_۲v_۲+a_۳v_۳)\,(a_۱-ia_۲)}{v_۳-۲a_۳(a_۱v_۱+a_۲v_۲+a_۳v_۳)} \end{cases}$$

اگر فرض کنیم $M=a_۱v_۱+a_۲v_۲+a_۳v_۳$ پس :

$$(۴۳-۱۲) \qquad \begin{cases} (v_۱+iv_۲)-\xi'v_۳=۲M(a_۱+ia_۲-a_۳\xi') \\ (v_۱-iv_۲)\xi'+v_۳=۲M[a_۳+\xi'(a_۱-ia_۲)] \end{cases}$$

از تقسیم این دو رابطه برهمدیگر و رعایت (۹-۴۳) داریم :

ماندهٔ پاورقی از صفحهٔ قبل

تساوی $OM=OM_۱=OM_۲$ نتیجه میشود که $OM_۲$ از دوران OM درحول O باندازهٔ زاویهٔ θ پیدا شده است . مقدار زاویهٔ دوران از رابطهٔ زیر بدست میاید :

$$\theta=\omega+(\beta-\alpha-\gamma)=(\omega-\gamma)+(\beta-\alpha)=(\beta-\alpha)+(\beta-\alpha)=۲(\beta-\alpha)$$

۱- در هندسه دیده بودیم که مختصات نقطهٔ $M_۲(x_۲\,,\,y_۲\,,\,z_۲)$ قرینهٔ نقطهٔ $M_۱(x_۱\,,\,y_۱\,,\,z_۱)$ ، نسبت به صفحهٔ $P\equiv Ax+By+Cz=0$ که‌درآن $A^۲+B^۲+C^۲=۱$ است از فورمول زیر بدست میاید :

$$\begin{cases} x_۲=x_۱-۲AP_۱ \\ y_۲=y_۱-۲BP_۱ \\ z_۲=z_۱-۲CP_۱ \end{cases}$$

$$\frac{\xi v_3 - \xi' v_3}{\left(-\frac{v_3}{\xi}\right)\xi' + v_3} = \frac{(a_1 + ia_2) - a_3\xi'}{a_3 + \xi'(a_1 - ia_2)} \qquad (43-13)$$

و یا :

$$\boxed{\xi' = \frac{-a_3\xi + (a_1 + ia_2)}{a_3 + (a_1 - ia_2)\xi}} \qquad (43-14)$$

حال اگر فرض کنیم :

$$\left\{\begin{array}{l} \beta^* = a_1 - ia_1 \quad \text{و} \quad \beta = a_1 + ia_2 \quad \text{و} \quad \alpha = -a_3 = \alpha^* \\ \alpha\alpha^* + \beta\beta^* = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \end{array}\right. \qquad (43-15)$$

رابطهٔ (٤٣-١٤) بصورت زیردرمیآید که پارامترتکروند را درانعکاس اول میدهد :

$$\xi' = \frac{\alpha\xi + \beta}{\beta^*\xi - \alpha^*} \qquad (43-16)$$

و بهمین نحو در انعکاس دوم خواهیم داشت :

$$\xi'' = \frac{\gamma\xi' + \delta}{\delta^*\xi' - \gamma^*} = \frac{\rho\xi + \sigma}{-\sigma^*\xi + \rho^*} \qquad (43-17)$$

که در رابطهٔ اخیر $\rho = \gamma\alpha + \delta\beta^*$ و $\sigma = \gamma\beta - \delta\alpha^*$ فرض شده است .

رابطهٔ (٤٣-١٧) مبدل پارامتر تکروند ξ را در دوران $R = BA$ بما میدهد .

زیرا تبدیل :

$$\rho\rho^* + \sigma\sigma^* = (\alpha\alpha^* + \beta\beta^*)\ (\gamma\gamma^{**} + \delta\delta^*) = 1 \qquad (43-18)$$

تبدیلی است که دترمینان ماتریس آن مساوی واحد است یعنی تبدیل بامدول واحد میباشد .

از آنجائیکه هردوران R بوسیلهٔ حاصلضرب یک زوج انعکاس قابل بیان است لذا معلوم میشود که به هردوران R یک تبدیلی از پارامترهای تکروند با مدول واحد تعلق میگیرد . لذا این تبدیلات با مدول واحد یک « نمایشی » از گروه انعکاس برای ما بوجود میآورد .

۳-۴۳- **تننده‌ها** : اگربجای پارامتر تکروند ξ ، نسبت یک جفت عدد مختلط $\frac{\xi_1}{\xi_0}$ را بگذاریم معادلات تبدیل برای یک انعکاس بصورت :

$$\begin{cases} \xi_0' = -\alpha^*\xi_0 + \beta^*\xi_1 \\ \xi_1' = \beta\xi_0 + \alpha\xi_1 \end{cases} \tag{۴۳—۱۹}$$

و معادلات تبدیل برای یک دوران بصورت زیر بیان میشود :

$$\begin{cases} \xi_0' = \rho^*\xi_0 - \sigma^*\xi_1 \\ \xi_1' = \sigma\xi_0 + \rho\xi_1 \end{cases} \tag{۴۳—۲۰}$$

یک‌تننده ، مطابق‌تعریف،عبارتست ازیک جفت‌عدد مختلط مرتب $(\xi_0 \,,\, \xi_1)$ که در انعکاس A و دوران R طبق معادلات (۱۹-۴۳) و (۲۰-۴۳) تبدیل میشوند و ضرائب آنها از روابط (۱۵-۴۳) و معادلات مربوط به آنها برای ρ و σ بدست میآیند . ما بعضی اوقات اندیسها را حذف و از تنندهٔ $(\xi) = (\xi_0 \,,\, \xi_1)$ صحبت میکنیم :

برای نشاندادن رابطهٔ بین یک تننده و بردار تکروند مربوط بآن ، معادلات (۹-۴۳) را بصورت زیر مینویسیم :

$$\begin{cases} \xi_0 v_3 + \xi_1(v_1 - iv_2) = 0 \\ \xi_0(v_1 + iv_2) - \xi_1 v_3 = 0 \end{cases} \tag{۴۳—۲۱}$$

ماتریس این تبدیل عبارتست از ماتریس $\begin{bmatrix} v_3 & v_1-iv_2 \\ v_1+iv_2 & -v_3 \end{bmatrix}$ که مساویست با $v_1\sigma_1+v_2\sigma_2+v_3\sigma_3$ که در آن داریم :

$$\sigma_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \quad \sigma_2=\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} , \quad \sigma_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (۴۳-۲۲)$$

این ماتریسها به ماتریسهای تنش[1] موسومند که پولی[2] در نظریهٔ کلاسیک (غیر نسبیت) کوانتوم وارد کرده است .

اثبات تساویهای زیر بسهولت صورت میگیرد :

$$\begin{cases} \sigma_1^2=I \ , \ \sigma_2^2=I \ , \ \sigma_3^2=I \\ \sigma_2\sigma_3=i\sigma_1=-\sigma_3\sigma_2 \\ \sigma_3\sigma_1=i\sigma_2=-\sigma_1\sigma_3 \\ \sigma_1\sigma_2=i\sigma_3=-\sigma_2\sigma_1 \end{cases} \qquad (۴۳-۲۳)$$

در روابط فوق $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ماتریس واحد) است .

از مطالب مذکور در بالا نتیجهٔ زیر حاصل میشود :

$$(x_1\sigma_1+x_2\sigma_2+x_3\sigma_3)^2=[(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2]I \qquad (۴۳-۲۴)$$

و بموجب روابط (۴۳-۱۹) و (۴۳-۲۲) و (۴۳-۹) ، ماتریس مربوط بانعکاس A خواهد بود :

$$\begin{bmatrix} -\alpha^* & \beta^* \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_3 & a_1-ia_2 \\ a_1+ia_2 & -a_3 \end{bmatrix} \qquad (۴۳-۲۵)$$

$$=a_1\sigma_1+a_2\sigma_2+a_3\sigma_3$$

۱- Spin matrices ۲- Pauli

بنابراین تننده $\xi=(\xi_1 , \xi_0)$ در انعکاس A به تننده $\xi'=(\xi'_0 , \xi'_1)$ تبدیل میشود که در آن (اگر ξ بعنوان ماتریس سطری درنظر گرفته شود) داریم :

$$\xi'=(a_1\sigma_1+a_2\sigma_2+a_3\sigma_3)\xi$$

و در انعکاس دوم یعنی B ، ξ' طبق رابطهٔ زیر به ξ'' تبدیل میشود :

$$\xi''=(b_1\sigma_1+b_2\sigma_2+b_3\sigma_3)\xi'$$

لذا دردوران $R=BA$ ، تننده ξ طبق رابطهٔ زیر به ξ'' تبدیل میشود:

$$\begin{aligned}\xi''&=(b_1\sigma_1+b_2\sigma_2+b_3\sigma_3)\,(a_1\sigma_1+a_2\sigma_2+a_3\sigma_3)\xi\\&=(\rho+i\lambda\sigma_1+i\mu\sigma_2+i\nu\sigma_3)\xi\end{aligned} \qquad (۴۳-۲۶)$$

که در آن :

$$\begin{cases}\rho=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\cos\frac{\theta}{2}\\ \lambda=b_2a_3-b_3a_2 \qquad =c_1\sin\frac{\theta}{2}\\ \mu=b_3a_1-b_1a_3 \qquad =c_2\sin\frac{\theta}{2}\\ \nu=b_1a_2-b_2a_1 \qquad =c_3\sin\frac{\theta}{2}\end{cases} \qquad (۴۳-۲۷)$$

و c_1 و c_2 و c_3 کوسینوسهای هادی محور دوران و θ زاویه دوران میباشد.

مقادیر θ و λ و μ و ν توسط اولر [۱] و اولند[۲] و رودریگ [۳] برای بیان یک دوران کلی وارد شده‌است.

از فورمولهای مذکور در بالا دیده میشود که وارد کردن ماتریسهای تنش ،

۱- Euler ۲- Olind

۳- Rodrigues

فورمولهای تننده‌ها را بطور قابل ملاحظه‌ای ساده میکند و محاسبهٔ تننده‌ها را آسان میسازد .

۴۳-۴- تننده‌ها و بردارها : ارتباط نزدیک بین تننده‌ها و بردارهای تکروند نشان میدهد که تننده‌ها بدون تردید موجوداتی هندسی هستند . برای اینکه نشان دهیم این موجودات به تعبیری ، اصیل‌تر از بردارها هستند میآییم از نرمال ساختن [۱] : $v_3 = -2\xi_0\xi_1$ استفاده میکنیم و یک تننده را برحسب پارامترهای همگن (ξ_1 , ξ_0) نشان میدهیم . از معادلات (۴۳-۲۱) روابط :

$$\begin{cases} v_1 + iv_2 = -2\xi_1^2 \\ v_1 - iv_2 = 2\xi_0^2 \end{cases} \qquad (43-28)$$

و بالمآل روابط :

$$\begin{cases} v_1 = \xi_0^2 - \xi_1^2 \\ v_2 = i(\xi_0^2 + \xi_1^2) \end{cases} \qquad (43-29)$$

نتیجه میشود . حال میتوانیم نشان دهیم که هربردار برحسب یک تننده قابل بیان است .

فرض میکنیم $s+it=(v_1 , v_2 , v_3)$ و $s-it=(v_1^* , v_2^* , v_3^*)$

بردارهائی تکروند و معرف امتدادهای خاص یک دوران R درحول محوری باشند که با بردار حقیقی (u_1 , u_2 , u_3) معین شده است . محاسبهٔ مستقیم نشان میدهد که حاصلضرب برداری $(s-it) \wedge (s+it)$ مؤلفه‌هائی بصورت :

$$-2i(\xi_0\xi_0^* + \xi_1\xi_1^*) \cdot (W_1 , W_2 , W_3) \qquad (43-30)$$

۱- Normalisation

خواهد داشت که در آن :

$$W_\alpha = \sum_{p=o}^{1} \sum_{q=o}^{1} \xi_p^* \sigma_\alpha(pq) \xi_q \qquad (۴۳-۳۱)$$

و $\sigma_\alpha(pq)$ عنصر سطر p ام و ستون q ام در ماتریس σ_α میباشد (دراینجا سطر و ستون صفرم بجای سطر و ستون یکم و هکذا الی آخر گرفته شده است). وهمچنین بارعایت (۴۳-۷) حاصلضرب داخلی $(s-it\ ,\ s+it)$ مساوی $۲(\xi_o \xi_o^* + \xi_1 \xi_1^*)^۲$ خواهد شد. از طرفی اتحاد لاگرانژ یعنی :

$$(v_۲ v_۳^* - v_۳ v_۲^*)^۲ + (v_۳ v_۱^* - v_۱ v_۳^*)^۲ + (v_۱ v_۲^* - v_۲ v_۱^*)^۲$$
$$= (v_۱^۲ + v_۲^۲ + v_۳^۲)\ (v_۱^{*۲} + v_۲^{*۲} + v_۳^{*۲}) - (v_۱ v_۱^* + v_۲ v_۲^* + v_۳ v_۳^*)^۲$$

نشان میدهد که باید داشته باشیم :

$$w_۱^۲ + w_۲^۲ + w_۳^۲ = (\xi_o \xi_o^* + \xi_1 \xi_1^*)^۲$$

لذا طول بردار بمؤلفه های $w_\alpha = \sum_p \sum_q \xi_p^* \sigma_\alpha(pq) \xi_q$ خواهد بود :

$$\sqrt{\delta^{\alpha\beta} w_\alpha w_\beta} = (\xi_o \xi_o^* + \xi_1 \xi_1^*)$$

یعنی بردار بمؤلفه های w_α ، برحسب تننده ها نموده شده است.

فصل هفتم

فضای متقابل(۱) یك فضای برداری

کوموتاتور(۲) دو تبدیل بینهایت کوچك

۴۴- دراینجا مجدداً نکاتی از (۲۴ §) را تکرار میکنیم . اگر V فضائی برداری در روی R باشد ، یک صورت خطی در روی V ، در واقع تحویلی(۳) است مانند $\mathbf{Y}$ از V بر روی R . یعنی :

$$\mathbf{Y} : \mathbf{X} \longrightarrow (\mathbf{X} , \mathbf{Y}) \qquad (۴۴-۱)$$

که در شرط زیر که در آن $\mathbf{X} , \mathbf{Y} \in V$ و $a , b \in R$ میباشد صدق میکند :

$$(a\mathbf{X}+b\mathbf{Z} , \mathbf{Y}) = a(\mathbf{X} , \mathbf{Y}) + b(\mathbf{Z} , \mathbf{Y}) \qquad (۴۴-۲)$$

مجموعهٔ تمام اشکال خطی در روی V را به V^* نشان دادیم (۲۵ §) و جمع وضرب درعدد رادر روی V^* با عبارت زیر که در آن $\mathbf{X} \in V$ و $\mathbf{Y} , \mathbf{u} \in V^*$ و $a , b \in R$ بود تعریف کردیم :

$$(\mathbf{X} , a\mathbf{Y}+b\mathbf{u}) = a(\mathbf{X} , \mathbf{Y}) + b(\mathbf{X} , \mathbf{u}) \qquad (۴۴-۳)$$

بااین تعریف V^* بصورت فضائی برداری در روی R در میآمد که فضای متقابل V نامیده میشد و $(\mathbf{X} , \mathbf{Y})$ به حاصلضرب داخلی $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ موسوم بود .

۱-۴۴- **دیفرانسیلها** : اگر T_P فضای بردارهای مماس در نقطهٔ P برسطح M باشد میخواهیم فضای متقابل آن یعنی T_P^* را تعیین کنیم . اگر A مجموعهٔ

۱- Dual ۲- Commutator

۳- Mapping

توابع واقع در روی M باشد ، میدانیم که هر تابع $f\in A_p$ طبق قانون : $\mathbf{X} \to \mathbf{X}f$ یک صورت خطی روی T_p برای ما مشخص میسازد ($\mathbf{X}=X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ که در آن X^i عدد حقیقی و ثابتی است ، همان بردار مماس در P بر M میباشد) . این تحویل از T_p به R معمولاً با df نشانداده میشود . لذا df عنصری است از T_p^* که طبق تعریف : $(\mathbf{X}\ ,\ df)=\mathbf{X}f$ است. بالاخص اگر (x) دستگاه مختصاتی در مجاورت P باشد عناصر dx^i (چون به T_p^* متعلق هستند) تشکیل مبناهائی از T_p^* را میدهند . و با توجه به (۹-٤۲) داریم :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\ ,\ dx^i\right)=\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^j}\right)_p=\delta^i_j \qquad (٤٤-٤)$$

بنابراین هرعنصر T_p^* بصورت $\mu_i dx^i$ بیان میشود که در آن $\mu_i\in R$ است. مثلاً اگر $f\in A_p$ باشد $df=\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p dx^i$ خواهد شد . هرعنصری از T_p^* **یک دیفرانسیل در نقطهٔ** P نامیده میشود .

۲-٤٤- تبدیلات بینهایت کوچک و صورتهای دیفرانسیل [۱] : دیدیم که هربردار مماس دریک نقطهٔ M ازیک سطح ، عبارتی است بصورت $X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ که در آن X^i مثل کارگزاری [۲] است که معرف امتدادی در P یعنی امتداد « بردار بینهایت کوچک» بمؤلفه های $X^i dt$ میباشد . از طرف دیگر دیفرانسیل در نقطهٔ P بصورت $\mu_i dx^i$ بیان میشود که بعنوان تحویلی از T_p برروی R که با رابطهٔ $\lambda^i dt \to \lambda^i \mu_i$ تعریف میشود اختیار شده است . حال میخواهیم مجموعهٔ بردارهای مماس یا دیفرانسیلها را در نقاط مختلف M پیدا کنیم .

تعریف : **یک تبدیل بینهایت کوچک** $\mathbf{X}$ در روی M ، مجموعه‌ای است از

۱- Infinitesimal Transformation & Differential forms

۲- Operator

بردارهای مماس X_p که در هرنقطهٔ P از M یکی از آنها وجود دارد . یک **صورت دیفرانسیل** ω در روی M ، مجموعهٔ دیفرانسیلهای ω_p است که در هرنقطهٔ P از M یکی از آنها موجود است .

یک مثال از صورتهای دیفرانسیل ، مجموعهٔ دیفرانسیلهای df میباشد که f تابعی است که در روی تمام M تعریف شده است . این صورت با df نشان داده میشود . اگر **X** تبدیلی بینهایت کوچک و $f \in A$ باشد ، درهرنقطهٔ P از M که f درآن تعریف‌شده باشد **X** عددی حقیقی مانند $\mathbf{X}_p f$ به f مربوط میسازد . حال وقتی P تغییر کند یک تابع حقیقی $\mathbf{X}f$ بدست میآید که قلمرو آن همان قلمرو f میباشد . اگر بازاء $f \in A$ تابع $\mathbf{X}f$ باز به A متعلق باشد **X** را **تحلیلی** خوانند. یعنی **X** فقط و فقط وقتی تحلیلی است که A را به تابعی از خودش تحویل کند . مجموعهٔ تمام تبدیلات بینهایت کوچک ، با T که همان فضای مماس بر M است نشانداده میشود . لذا با توجه بمطالبی که قبلاً گفته بودیم نتیجه میگیریم که T^* با فضای صورتهای دیفرانسیل خطی متحد گرفته میشود . صورت $\omega = W_i dx^i$ صورت دیفرانسیلی است که در آن $W_i \in A$ است .

۳-٤٤-کوموتاتوردو تبدیل بینهایت کوچک: حال میخواهیم T یعنی فضای تبدیلات بینهایت کوچک یک مانیفلد [۱] M را بطور مفصلتری مورد مطالعه قرار دهیم . اگر **X** و **Y** تبدیلاتی تحلیلی بینهایت کوچک متعلق به T باشند ، مبدل مجموعهٔ A یعنی تمام توابع تحلیلی واقع روی M ، که براثر عناصری از T مثل **X** و **Y** بوجود میآید در خود A واقع خواهدشد . لذا یک تحویل **XY** را میتوانیم با معادلهٔ $(\mathbf{XY})f = \mathbf{X}(\mathbf{Y}f)$ که درآن $f \in A$ است تعریف کنیم . روشن است که درحالت کلی ، **XY** که مجدداً تحویلی از A درون خودش میباشد ، دیگر به T متعلق نیست . زیرا اگر فرض کنیم :

۱- Manifold

$$\mathbf{X}=X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \equiv X^i \partial_i \quad , \quad \mathbf{Y}=Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \equiv Y^j \partial_j$$

خواهیم داشت :

$$\mathbf{XY}f=X^i \partial_i (Y^j \partial_j f)=X^i \partial_i Y^j \partial_j f+X^i Y^j \partial_i (\partial_j f) \tag{۴۴—۵}$$

که بعلت‌وجود مشتق ثانی f ، این عبارت‌دیگریک تبدیل بینهایت کوچک‌نیست. حال اگر **YX**f را هم حساب کنیم ضریب مشتق ثانی f در عبارت حاصله عین همان ضریبش در **XY**f خواهد شد لذا داریم :

$$\mathbf{XY}f-\mathbf{YX}f=(X^i \partial_i Y^j-Y^i \partial_i X^j)\partial_j f \tag{۴۴—۶}$$

ازاینجا معلوم میشود که عمل [۱] :

$$\mathbf{XY}-\mathbf{YX}=(X^i \partial_i Y^j-Y^i \partial_i X^j)\partial_j \tag{۴۴—۷}$$

تبدیلی است بینهایت کوچک ، و چون **X** و **Y** تحلیلی هستند عبات (۴۴-۷) نیز تحلیلی است و از آنجا قضیهٔ زیر حاصل میشود :

قضیهٔ ۱ : اگر **X** و **Y** در T باشند عملی هم که با عبارت :

$$[\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y}] \equiv \mathbf{XY}-\mathbf{YX} \tag{۴۴—۸}$$

تعریف میشود به T متعلق خواهد بود .

عنصر [**X** , **Y**] به **کوموتاتور** یا **حاصلضرب ـ لی**[۲] عناصر **X** و **Y** موسوم است. اگراین حاصلضرب را بعنوان‌ضربی که روی T تعریف شده بحساب بیاوریم T جبری خطی در روی میدان R خواهد شد.

مجدداً یادآوری میکنیم که منظورازجبرخطی‌در روی R ، فضائی‌است‌برداری

۱- Operation

۲- Lie product

مانند V در روی T بایک عمل دوتائی (۱) $\mathbf{XY}$ که روی V تعریف شده و مقادیر آن در V است بطوریکه :

$$(a\mathbf{X}+b\mathbf{Y})\mathbf{Z}=a(\mathbf{XZ})+b(\mathbf{YZ}) \tag{۴۴—۹}$$

$$\mathbf{X}(a\mathbf{Y}+b\mathbf{Z})=a(\mathbf{XY})+b(\mathbf{XZ}) \tag{۴۴—۱۰}$$

(فرض نمیکنیم که این عمل شرکت پذیر باشد) .

قضیهٔ ۲ : ضرب ـ لی که بترتیب مذکور در فوق روی T بیان کردیم نسبت بهریک از عوامل خود خطی است :

$$\begin{cases} [a\mathbf{X}+b\mathbf{Y},\mathbf{Z}]=a[\mathbf{X},\mathbf{Z}]+b[\mathbf{Y},\mathbf{Z}] & \mathbf{X}\,,\,\mathbf{Y}\,,\,\mathbf{Z}\in T \\ [\mathbf{X}\,,\,a\mathbf{Y}+b\mathbf{Z}]=a[\mathbf{X}\,,\,\mathbf{Y}]+b[\mathbf{X}\,,\,\mathbf{Z}] & a\,,\,b\in R \end{cases} \tag{۴۴—۱۱}$$

و بعلاوه در قوانین زیر صدق میکند :

$$[\mathbf{X}\,,\,\mathbf{X}]=0 \tag{۴۴—۱۲}$$

$$[\mathbf{X}\,,\,\mathbf{Y}]+[\mathbf{Y}\,,\,\mathbf{X}]=0 \tag{۴۴—۱۳}$$

$$[[\mathbf{X}\,,\,\mathbf{Y}]\,,\,\mathbf{Z}]+[[\mathbf{Y}\,,\,\mathbf{Z}]\,,\,\mathbf{X}] +[[\mathbf{Z}\,,\,\mathbf{X}]\,,\,\mathbf{Y}]=0 \qquad \text{(اتحاد ژاکوبی)} \tag{۴۴—۱۴}$$

اثبات (۴۴-۱۲) و (۴۴-۱۳) نتیجهٔ مستقیم تعریف ضرب ـ لی است. برای اثبات (۴۴-۱۴) مینویسیم :

$$\begin{cases} [[\mathbf{X}\,,\,\mathbf{Y}]\,,\,\mathbf{Z}]=\mathbf{X\dot{Y}Z}-\mathbf{Y\dot{X}Z}-\mathbf{Z\dot{X}Y}+\mathbf{Z\dot{Y}X} \\ [[\mathbf{Y}\,,\,\mathbf{Z}]\,,\,\mathbf{X}]=\mathbf{Y\dot{Z}X}-\mathbf{Z\dot{Y}X}-\mathbf{X\dot{Y}Z}+\mathbf{X\dot{Z}Y} \\ [[\mathbf{Z}\,,\,\mathbf{X}]\,,\,\mathbf{Y}]=\mathbf{Z\dot{X}Y}-\mathbf{X\dot{Z}Y}-\mathbf{Y\dot{Z}X}+\mathbf{Y\dot{X}Z} \end{cases} \tag{۴۴—۱۵}$$

از جمع این سه رابطه است که حکم ثابت میشود .

---

۱ – Binary operation

هرجبر خطی که در روابط (۱۲-٤٤) و (۱٤-٤٤) صدق کند به جبر ـ لی موسوم است . چنین جبری طبق تعریفش بعنوان یک جبر خطی ، در (۱۱-٤٤) صدق میکند و بسهولت دیده میشود که (۱۳-٤٤) نتیجهٔ (۱۱-٤٤) و (۱۲-٤٤) است . لذا قضیهٔ فوق را میتوانیم بصورت زیر بیان کنیم :

قضیهٔ ۳ : فضای T نسبت به ضرب ـ لی ، یک جبر ـ لی است .

قضیهٔ ٤ : اگر $\mathbf{X} , \mathbf{Y} \in T$ و f و g توابعی دیفرانسیل پذیرباشند روابط زیر صادقند :

$$[f\mathbf{X} , \mathbf{Y}] = f[\mathbf{X} , \mathbf{Y}] - (\mathbf{Y}f)\mathbf{X} \qquad (\text{٤٤}-\text{١٤})'$$

و :

$$[f\mathbf{X} , g\mathbf{Y}] = fg[\mathbf{X} , \mathbf{Y}] + f(\mathbf{X}g)\mathbf{Y} - g(\mathbf{Y}f)\mathbf{X} \qquad (\text{٤٤}-\text{١٥})'$$

اثبات :

$$[f\mathbf{X} , \mathbf{Y}] = f(\mathbf{XY}) - \mathbf{Y}(f\mathbf{X}) = f(\mathbf{XY}) - (\mathbf{Y}f)\mathbf{X} - f(\mathbf{YX}) = f[\mathbf{X} , \mathbf{Y}] - (\mathbf{Y}f)\mathbf{X}$$

و همچنین :

$$\begin{aligned}[f\mathbf{X} , g\mathbf{Y}] &= (f\mathbf{X})(g\mathbf{Y}) - (g\mathbf{Y})(f\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}(g\mathbf{Y})) \\ &- g(\mathbf{Y}(f\mathbf{X})) = f((\mathbf{X}g)\mathbf{Y} + g(\mathbf{XY})) - g((\mathbf{Y}f)\mathbf{X} \\ &+ f(\mathbf{YX})) = fg(\mathbf{XY}) - fg(\mathbf{YX}) + f(\mathbf{X}g)\mathbf{Y} - g(\mathbf{Y}f)\mathbf{X} \\ &= fg[\mathbf{X} , \mathbf{Y}] + f(\mathbf{X}g)\mathbf{Y} - g(\mathbf{Y}f)\mathbf{X}\end{aligned}$$

٤-٤٤- مشتق ـ لی : اگر $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ بردارهای ناهمگرد باشند مطابق تعریف مشتق ـ لی یک تابع f و یک بردار $\mathbf{Y}$ نسبت به یک بردار $\mathbf{X}$ ، که با نماد $\underset{\mathbf{X}}{L}$ نشان داده میشود با عبارات زیر تعریف میشود :

$$\underset{\mathbf{X}}{L}f \equiv \mathbf{X}f \qquad (\text{٤٤}-\text{١٦})$$

$$\underset{\mathbf{X}}{L}\mathbf{Y} \equiv [\mathbf{X} , \mathbf{Y}] \qquad (\text{٤٤}-\text{١٧})$$

مشتق - لی حاصلضرب دو یا چند تابع، مطابق تعریف، از قانون مشتق حاصلضرب دو یا چند تابع در مشتقات معمولی تبعیت میکند. یعنی اگر f و g دو تابع باشند مشتق - لی حاصلضرب fg نسبت به بردار $\mathbf{X}$ خواهد بود:

$$\underset{\mathbf{X}}{L}(fg)=(\underset{\mathbf{X}}{L}f)g+f(\underset{\mathbf{X}}{L}g) \tag{۴۴—۱۸}$$

اکنون میخواهیم مشتق - لی بردار همگرد $\mathbf{A}$ بمؤلفه‌های A_i را نسبت به امتداد $\mathbf{X}$ بدست آوریم. برای این منظور بردار ناهمگرد دلخواه $\mathbf{Y}$ بمؤلفه‌های Y^i را انتخاب میکنیم و از حاصلضرب Y^iA_i که یک عدد واراست استفاده میکنیم. طبق (۴۴-۱۶) داریم:

$$\begin{aligned}\underset{\mathbf{X}}{L}(Y^iA_i)&=\mathbf{X}(Y^iA_i)=X^j\partial_j(Y^iA_i)\\&=(X^j\partial_jY^i)A_i+X^jY^i(\partial_jA_i)\end{aligned} \tag{۴۴—۱۹}$$

و طبق (۴۴-۱۸) با توجه به (۴۴-۱۷) داریم:

$$\begin{aligned}\underset{\mathbf{X}}{L}(Y^iA_i)&=(\underset{\mathbf{X}}{L}Y^i)A_i+Y^i(\underset{\mathbf{X}}{L}A_i)\\&=(X^p\partial_pY^i-Y^p\partial_pX^i)A_i+Y^i(\underset{\mathbf{X}}{L}A_i)\end{aligned} \tag{۴۴—۲۰}$$

از مساوی قرار دادن طرفین دوم (۴۴-۱۹) و (۴۴-۲۰) خواهیم داشت:

$$Y^i(\underset{\mathbf{X}}{L}A_i)+(X^j\partial_jY^i-Y^j\partial_jX^i)A_i=X^j(\partial_jY^i)A_i+X^jY_i(\partial_jA_i)$$

و یا چون Y^i برداریست دلخواه، داریم:

$$\boxed{\underset{\mathbf{X}}{L}A_i\equiv X^j\partial_jA_i+A_j\partial_iX^j} \tag{۴۴—۲۱}$$

حال فرض میکنیم بخواهیم مشتق - لی تانسور T^{ik}_j را بدست آوریم.

بردارنا همگرد دلخواه $\mathbf{Y}$ وبردارهای همگرد دلخواه $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را چنان اختیار میکنیم که داشته باشیم :

$$\underset{\mathbf{X}}{L}\mathbf{Y}=0 \quad و \quad \underset{\mathbf{X}}{L}\mathbf{A}=0 \quad و \quad \underset{\mathbf{X}}{L}\mathbf{B}=0 \qquad (٤٤-٢٢)$$

حال باتوجه باینکه عبارت $T_j^{ik}Y^j A_i B_k$ یک عددوار است مانند حالت‌قبل مشتق - لی این عبارت‌را بدوطریق یعنی‌با استفاده از(٤٤-١٦) و (٤٤-١٨) بدست میآوریم وآنها را مساوی هم قرار میدهیم :

$$\underset{\mathbf{X}}{L}T_j^{ik}Y^j A_i B_k=\mathbf{X}(T_j^{ik}Y^j A_i B_k) \qquad (٤٤-٢٣)$$

$$=X^p\partial_p(T_j^{ik}Y^j A_i B_k)=X^p\Big\{(\partial_p T_j^{ik})Y^j A_i B_k$$

$$+T_j^{ik}(\partial_p Y^j)A_i B_k+T_j^{ik}Y^j(\partial_p A_i)B_k+T_j^{ik}Y^j A_i(\partial B_k)\Big\}$$

از طرفی طبق (٤٤-١٨) داریم :

$$\underset{\mathbf{X}}{L}(T_j^{ik}Y^j A_i B_k)=(\underset{\mathbf{X}}{L}T_j^{ik})Y^j A_i B_k \qquad (٤٤-٢٤)$$

$$+T_j^{ik}(\underset{\mathbf{X}}{L}Y^j)A_i B_k+T_j^{ik}Y^j(\underset{\mathbf{X}}{L}A_i)B_k+T_j^{ik}Y^j A_i(\underset{\mathbf{X}}{L}B_k)$$

اما طبق (٤٤-٢٢) داریم :

$$\left\{\begin{aligned}&\underset{\mathbf{X}}{L}Y^j=X^p\partial_p Y^j-Y^p\partial_p X^j=0\\&\underset{\mathbf{X}}{L}A_i=X^p\partial_p A_i+A_p\partial_i X^p=0\\&\underset{\mathbf{X}}{L}B_k=X^p\partial_p B_k+B_p\partial_k X^p=0\end{aligned}\right. \qquad (٤٤-٢٥)$$

حال اگر طرفین دوم (٤٤-٢٣) و (٤٤-٢٤) را مساوی قرار دهیم و از (٤٤-٢٥) نیز استفاده کنیم داریم :

$$(\underset{X}{L}T_j^{ik})\,Y^j A_i B_k = (X^p\partial_p T_j^{ik})\,Y^j A_i B_k + (T_j^{ik} X^p \partial_p Y^j)\,A_i B_k$$

$$+ (T_j^{ik} Y^j X^p \partial_p A_i)\,Y^j B_k + (T_j^{ik} X^p \partial_p B_k)\,Y^j A_i = (X^p\partial_p T_j^{ik})\,Y^j A_i B_k$$

$$+ (T_j^{ik} Y^p \partial_p X^j)\,A_i B_k - (T_j^{ik} A_p \partial_i X^p)\,Y^j B_k - (T_j^{ik} B_p \partial_k X^p)\,Y^j A_i$$

و اگر اندیسها را بطور مناسبی تعویض کنیم خواهیم داشت :

$$(\underset{X}{L}T_j^{ik})\,Y^j A_i B_k = (X^p\partial_p T_j^{ik})\,Y^j A_i B_k + (T_p^{ik} Y^j \partial_j X^p)\,A_i B_k$$

$$-(T_j^{pk} A_i \partial_p X^i)\,Y^j B_k - (T_j^{ip} B_k \partial_p X^k)\,Y^j A_i$$

و از آنجا :

$$\boxed{\underset{X}{L}T_j^{ik} \equiv X^p\partial_p T_j^{ik} + T_p^{ik}\partial_j X^p - T_j^{pk}\partial_p X^i - T_j^{ip}\partial_p X^k} \qquad (۴۴ - ۲۶)$$

مشتق ـ لی تانسورهای مراتب بالاتر نیز بهمین ترتیب بدست میآید .

ثابت میشود که : **مشتق ـ لی یک تانسور ، یک تانسور است** . ما این قضیه را که متعلق به لیشنروویچ [۱] است اثبات نمیکنیم بلکه فقط صورت قضیه را ذکر و صحت آنرا برای مشتق ـ لی یک تانسور غیر مشخص تحقیق مینمائیم.

میدانیم که طبق مطالب فوق داریم :

$$\underset{X}{L}T^{ij} = X^p\partial_p T^{ij} - T^{pj}\partial_p X^i - T^{ip}\partial_p X^j \qquad (۴۴ - ۲۷)$$

قضیهٔ مورد نظر ما میگوید که :

$$\underset{X}{L}T^{ij} = X^p (T^{ij})_{,p} - T^{pj}\,\overline{(X^i)}_{,p} - T^{ip}\,\overline{(X^j)}_{,p} \qquad (۴۴ - ۲۸)$$

که در طرف دوم، عبارت $(T^{ij})_{,p}$ مشتق ـ همگرد تانسور T^{ij} **برحسب ارتباط** Γ^l_{mn} و $\overline{(X^j)}_{,p}$ مشتق ـ همگرد X^j **برحسب ارتباط** Γ^l_{nm} است . ازآنجا که مشتق ـ همگرد

۱– Lichnerovich

یک تانسور ، یک تانسور است پس طرف دوم (۴۴-۲۸) یک تانسور و درنتیجه حکم ثابت است .

اگر طرف دوم حکم یعنی طرف دوم (۴۴-۲۸) را بسط دهیم داریم :

$$\underset{X}{L}T^{ij}=X^p(\partial_p T^{ij}+T^{qj}\Gamma^i_{qp}+T^{iq}\Gamma^j_{qp}) \qquad (۴۴-۲۹)$$

$$-T^{pj}(\partial_p X^i+X^q\Gamma^i_{pq})-T^{ip}(\partial_p X^j+X^q\Gamma^j_{pq})$$

$$=X^p\partial_p T^{ij}+T^{qj}X^p\Gamma^i_{qp}+T^{iq}X^p\Gamma^j_{qp}$$

$$-T^{pj}\partial_p X^i-T^{pj}X^q\Gamma^i_{pq}-T^{ip}\partial_p X^j-T^{ip}X^q\Gamma^j_{pq}$$

اگر درجملات‌دوم و سوم طرف دوم این عبارت، جای‌اندیسهای p و q را تعویض و طرف دوم را خلاصه کنیم همان رابطهٔ (۴۴-۲۷) بدست میآید و درنتیجه حکم ثابت میشود .

از صورت (۴۴-۲۸) پیداست که در عبارتی بصورت (۴۴-۲۶) کافیست که تقریباً جای مشتق معمولی را با مشتق ـ همگرد تعویض کنیم . یعنی در جملات با علامت مثبت‌بجای مشتق معمولی ، مشتق ـ همگرد برحسب Γ^l_{mn} و درجملات با علامت منفی بجای مشتق معمولی ، مشتق ـ همگرد برحسب Γ^l_{nm} بگذاریم .

مسئله : اگر **X** برداری ناهمگرد باشد ثابت کنید :

$$\underset{X}{L}g_{ij}=X_{j,i}+X_{i,j} \qquad (۴۴-۳۰)$$

حل : طبق تعریف مشتق ـ لی میتوانیم بنویسیم :

$$\underset{X}{L}g_{ij}=X^h\partial_h g_{ij}+g_{pj}\partial_i X^p+g_{ip}\partial_j X^p \qquad (۴۴-۳۱)$$

ازطرفی چون مشتق ـ همگرد g_{ij} نسبت به x^k صفر است داریم :

$$\partial_k g_{ij}=g_{pj}\Gamma^p_{ik}+g_{ip}\Gamma^p_{jk} \qquad (۴۴-۳۲)$$

از طرفی میدانیم :

$$X^j_{,i} = \partial_i X^j + X^p \Gamma^j_{pi} \qquad (۴۴-۳۳)$$

حال اگر فرض کنیم $X_i = g_{ij} X^j$ باشد میتوانیم بنویسیم :

$$X_{i,j} = (g_{pi} X^p)_{,j} = g_{pi} (X^p_{,j}) = g_{pi} (\partial_j X^p + X^h \Gamma^p_{hj}) \qquad (۴۴-۳۴)$$

و :

$$X_{j,i} = (g_{pj} X^p)_{,i} = g_{pj} (X^p_{,i}) = g_{pj} (\partial_i X^p + X^h \Gamma^p_{hi}) \qquad (۴۴-۳۵)$$

بنابراین از جمع دو رابطهٔ اخیر نتیجه میشود :

$$X_{i,j} + X_{j,i} = g_{pi} \partial_j X^p + g_{pj} \partial_i X^p + (g_{pj} \Gamma^p_{hi} + g_{pi} \Gamma^p_{hj}) X^h \qquad (۴۴-۳۶)$$

و با توجه به (۴۴-۳۲) داریم :

$$X_{i,j} + X_{j,i} = g_{pi} \partial_j X^p + g_{pj} \partial_i X^p + X^h \partial_h g_{ij} \qquad (۴۴-۳۷)$$

که از مقایسهٔ (۴۴-۳۱) و (۴۴-۳۷) حکم ثابت است .

۴۵- جبر خارجی یک فضای برداری ـ جبر صورتهای دیفرانسیل .

جبر خارجی را گراسمن[۱] برای حل جبری بعضی مسائل روی مانیفلدهای خطی در فضای تصویری درست کرد وهمینطورمجهول ماند تا اینکه الی کارتان[۲] آنرا کشف و برای مطالعهٔ دیفرانسیلها و انتگرالهای مکرر از آن استفاده نمود . نظریهٔ جبرخارجی ، استعمال بسیار وسیعی در نظریهٔ دترمینانها ، مانیفلدهای خطی در فضای تصویری و نظریهٔ صورتهای دیفرانسیل دارد . این جبر شرکت پذیر که جبر کارتان نیز نامیده میشود اصولاً به جبر خارجی تانسورهای همگرد قرینهٔ چپ بستگی دارد . از فضای اصلی V^1 فضاهای برداری تانسورهای همگرد ازمرتبهٔ

۱- Grassmann ۲- Elie Cartan

۰ و ۱ و ۲ و ... و n ساخته میشود و جمع مستقیم این (n+۱) فضا ، فضائی بوجود میآورد که عناصر آن ، جبر خارجی کارتان را تشکیل میدهند . عناصر این جمع مستقیم چون عناصر یک فضای برداری هستند میتوانند باهم جمع و یادراعداد حقیقی ضرب شوند . اما این ساختمان به تنهائی برای ضرب بردار در بردار کافی نیست . فضای برداری وقتی به یک جبر بدل میشود که یک عمل ضربی را روی آن تعریف کنیم . علامت (∧) را که گووه[1] مینامیم برای ضرب در این جبرانتخاب میکنیم . بااستعمال این علامت میتوانیم بردارها را ، همانطورکه در جبر مقدماتی فضای ۳ بُعدی درهم ضرب میکردیم ، درهم ضرب (خارجی) کنیم .

در (§ ٤٤) دیدیم که به هرزیر فضای یک بُعدی سطح مماس T ، یک صورت دیفرانسیل خطی تعلق میگیرد . حال میخواهیم بگوئیم که بطور کلی به یک زیر فضای K — بُعدی از T ، یک تانسور همگرد قرینهٔ چپ از نوع (K , ۰) و یا بعبارت دیگر یک « صورت دیفرانسیل درجهٔ K » تعلق میگیرد . و بهمین منظور جبر کارتان را روی V^* میسازیم .

قبلاً به بینیم که چگونه میتوانیم از یک تانسور معمولی از نوع (K , ۰) تانسور همگرد قرینهٔ چپی از نوع (K , ۰) بسازیم . اگر **f** تانسوری از نوع (K , ۰) باشد قرینهٔ چپ آنرا که با « قچ **f** » نشان میدهیم با معادلهٔ زیر تعریف میکنیم :

$$\text{قچ}\,\mathbf{f}(\mathbf{X}_1\,,\,\mathbf{X}_2\,,\,\dots\,,\,\mathbf{X}_k) = \frac{1}{K!}\, e^{i_1 i_2 \dots i_k} f\left(\mathbf{X}_{i_1}\,,\,\mathbf{X}_{i_2}\dots\,,\,\mathbf{X}_{i_k}\right) \qquad (\text{۴۵—۱})$$

در این رابطه $e^{i_1 i_2 \dots i_k}$ همان نماد دستگاه e (§ ۳) و $\mathbf{X}_{i_1}\,,\,\mathbf{X}_{i_2}\,,\,\dots\,,\,\mathbf{X}_{i_k}$ بردارهای ناهمگرد هستند وعمل « عمل جمع »[2] روی تمام اندیسها صورت میگیرد .

حال فرض میکنیم V یک فضای برداری n — بُعدی در روی R باشد .

۱ - Wedge ۲- Summation

مسلماً زیر فضاهائی بابعاد $K(o \leqslant K \leqslant n)$ نیز وجود خواهند داشت . یک حجم K-- بُعدی در V با حاصلضرب K- عامل بیان میگردد (تعمیم ۱۳ §) .
ازاینجا فکر زیر برای ساختن این جبر پیدا میشود :

عدد ثابتی مانند $K\ (o \leqslant K \leqslant n)$ اختیار و بازاء هرمجموعه از اعداد $i_1 , i_2 , \dots , i_k\ (1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n)$ نمادی مانند $e_{i_1 i_2 \dots\dots i_k}$ انتخاب میکنیم و آن فضای برداری روی R را که عناصر مبنایش $e_{i_1 i_2 \dots\dots i_k}$ است V^k مینامیم . لذا بُعد V^k مساوی $\binom{n}{k}$ خواهد بود . بخصوص بازاء $K=o$ یک فضای یک بُعدی V° و بازاء $K=1$ یک فضای n بُعدی با بردارهای مبنای $e^1 , e^1 , \dots , e^n$ خواهیم داشت (توجه داریم که V^1 همان فضای برداری **بردارهای همگرد** و V° فضای برداری یک ـ بُعدی ایزومورف با اعداد حقیقی است) . اکنون جمع مستقیم یا دکارتی زیر را درنظر میگیریم :

$$E = V^\circ \oplus V^1 \oplus \dots \oplus V^n \tag{۴۵—۲}$$

پس E فضائی است برداری با مبنای :

$$e_{i_1 i_2 \dots i_k} \qquad (K=1 , 2 , \dots , n \text{ و } i_1 < i_2 < \dots < i_k)$$ و بابعاد

$\sum \binom{k}{2} = 2^k$. ضرب را در روی E ، توسط قانون زیر تعریف میکنیم :

$$e^{i_1 i_2 \dots\dots i_r} \wedge e^{j_1 j_2 \dots\dots j_s} = e^{i_1 i_2 \dots\dots i_r j_1 j_2 \dots\dots j_s} \tag{۴۵—۳}$$

$$i_1 < i_2 < \dots < i_r \text{ و } j_1 < j_2 < \dots < j_s$$

که اگر دو تا از اندیسهای $i_1 , i_2 , \dots , i_r$ و $j_1 , j_2 , \dots , j_s$ باهم مساوی شوند طرف دوم (۳-۴۵) صفر میشود . رابطهٔ اخیر ضرب را روی **عناصر مبنای** فضای E و لذا طبق قانون خطی بودن درسراسر فضای E تعریف میکند . اگر بین $i_1 , i_2 , \dots , i_r$ یا $j_1 , j_2 , \dots , j_s$ جابگشتی صورت گیرد ، درصورت زوج بودن این جابگشت ، طرف دوم در ۱+ و درصورت فرد بودن در ۱— ضرب میشود .

از رابطهٔ (۳-۴۵) دیده میشود که ضرب خارجی شرکت پذیر است و لذا

E جبری است خطی و شرکت پذیر . زیرا اگر برای سهولت
$h=(h_1, h_2, \ldots, h_q)$ فرض و $j=(j_1, j_2, \ldots, j_s)$ و $i=(i_1, i_2, \ldots, i_r)$
شود داریم :

$$(e^h \wedge e^i) \wedge e^j = e^{hij} = e^h \wedge (e^i \wedge e^j) \qquad (۴۵-۴)$$

و بعلت خطی بودن ، قانون شرکت پذیری در تمام E نیز صادق است . عنصر منحصر مبنای e از V^0 بعنوان عنصر واحد E و مبنای $e^1, e^2 \ldots, e^n$ از V^1 بعلاوهٔ e ، تشکیل یک مجموعه از مولدهای E را میدهند . چون هرعنصر E ترکیبی از عناصر :

$$e^{i_1 i_2 \cdots i_k} = e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots \wedge e^{i_k} \qquad (۴۵-۵)$$

میباشد لذا ما V را با زیر فضای V^1 ازفضای E متحد میگیریم و E را جبر خارجی روی فضای برداری V مینامیم وضرب در E را **ضرب خارجی** اصطلاح میکنیم . عناصر V^k را همگن از درجهٔ K و یا $K-$ خطی در عناصر V مینامند . یک جمله ایهای درجهٔ K ، $K-$ برداره نامیده میشوند . بخصوص اگر K مساوی ۱ ، ۲ و یا ۳ باشد ، بردار ، دو برداره یا سه ـ برداره که در (§ ۱۳) دیده ایم ، بوجود میآید .

اگر ω به V^r و θ به V^s متعلق باشد $\omega \wedge \theta$ با رابطهٔ زیر تعریف میشود :

$$\omega \wedge \theta = \text{قج}\,(\omega \otimes \theta) \qquad (۴۵-۶)$$

یعنی حاصلضرب تانسوری ω و θ را بدست میآوریم تانسور قرینهٔ مربوطه اش را پیدا میکنیم تا حاصلضرب خارجی ω و θ بدست آید .

از تعریف ضرب نتیجه میگیریم که اگر $\omega \in V^r$ و $\theta \in V^s$ و f و g توابعی دیفرانسیل پذیر باشند داریم :

$$\omega \wedge \theta = (-1)^{rs}\, \theta \wedge \omega \qquad (۴۵-۷)$$

$$f \wedge g = fg \quad \text{و} \quad (f \wedge \theta)(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_r) = f\theta(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_r) \quad \text{و} \quad (\omega \wedge g)(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_r) = g\omega(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_r) \qquad (۴۵-۸)$$

واگر (e^i) مبنائی از V^1 باشد ۱ و e^i و $e^i \wedge e^j \; (i<j)$ و $e^i \wedge e^j \wedge e^k \; (i<j<k)$ و ... و $e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \ldots \wedge e^n$ مبناهائی برای جبر گراسمن خواهند بود. یا اگر برحسب مختصات درنظر بگیریم یعنی اگر dx^i را مبنا در T^* فرض کنیم ۱ و dx^i و $dx^i \wedge dx^j \; (i<j)$ و $dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \; (i<j<k)$ و ... و $dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^k$ مبناهای ما برای جبر گراسمن E میشوند.

بطور خلاصه جبر شرکت پذیر E (با علامت جمع «+» و علامت ضرب «$\wedge$») وقتی جبر گراسمن یا **جبر خارجی** نامیده میشود که دارای شرایط زیر باشد:

(۱) این جبر شامل عنصر واحد «۱» از R باشد.

(۲) این جبر از ۱ و عناصر E بوجود آمده باشد.

(۳) اگر $X \in E$ باشد $X \wedge X = 0$ باشد.

(٤) بُعد جبر E (بعنوان یک فضای برداری) برابر 2^n باشد.

البته معنای (۲) اینستکه هرعنصر جبر E بصورت ترکیبی خطی از ۱ و حاصلضرب عناصر E بوجود آمده است. معنای (۳) اینستکه:

$$X \wedge Y = -Y \wedge X \qquad (X, Y \text{ در } E \text{ واقعست})$$

از اینجا معلوم میشود که یک K— صورتی با رابطهٔ:

$$\omega = \frac{1}{K!}\, \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x)\, dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \qquad (٤٥-٩)$$

نشانداده میشود که معمولا جزدرمواقع لزوم $\frac{1}{K!}$ را نمینویسند.

صورتهای خطی ازدرجهٔ صفر همان توابع حقیقی روی M هستند. صورتهای درجهٔ ۱ یعنی صورتهای یک ـ خطی همان صورتهای دیفرانسیلی هستند که قبلاً تعریف کرده‌ایم و اغلب آنها را **صورتهای پفاف** [1] مینامند.

یک صورت یک ـ خطی $\alpha_i(x)dx^i$ ممکنست بعنوان عنصری ازطولی جهت‌دار،

۱- Form Pfaff

مثلاً در تشکیل خط انتگرال $\int \alpha_i (x)\, dx^i$ در طول یک منحنی واقع در M بیان شود . همچنین یک صورت دو ـ خطی [۱] $\alpha_{ij}(x)dx^i \wedge dx^j$ را میتوان بعنوان عنصری از یک مساحت جهت‌دار درنظر گرفت . برای نشاندادن این مطلب از تعریف مقدماتی یک سطح انتگرال استفاده میکنیم .

سطح $z=f(x, y)$ در فضای ۳ بُعدی داده شده است . میخواهیم f را روی یک ناحیهٔ C در صفحهٔ (x, y) انتگره کنیم . برای این منظور $dx \wedge dy$ را عنصر مساحت در صفحهٔ (x, y) میگیریم و در $f(x, y)$ ضرب میکنیم و انتگرال میگیریم . لذا انتگرال ما خواهد بود :

$$\int_C f(x, y)dx \wedge dy$$

بااین‌قرارداد اگرتبدیل متغیری‌بدهیم ، انتگرال فوق صورت‌ساده‌ای بخود میگیرد . فرض میکنیم داشته باشیم :

$$\begin{cases} x=x(u, v) \\ y=y(u, v) \end{cases} \qquad (\text{۴۵—۱۰})$$

(x و y بطور پیوسته دیفرانسیل پذیر هستند) پس داریم :

$$\begin{cases} dx=x_u du+x_v dv \\ dy=y_u du+y_v dv \end{cases} \quad \left(x_u=\frac{\partial x}{\partial u} \text{ و } x_v=\frac{\partial x}{\partial v}, \dots\right) \qquad (\text{۴۵—۱۱})$$

لذا :

$$dx \wedge dy=(x_u du+x_v dv) \wedge (y_u du+y_v dv) \qquad (\text{۴۵—۱۲})$$

ازآنجا داریم :

۱- Bilinear form

و
$$\int f(x,y)\,dx \wedge dy = \int f\left(x(u,v) \text{ و } y(u,v)\right)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du \wedge dv \qquad (۴۵-۱۳)$$

که همان قانون تبدیل متغیرها در انتگرالهای مضاعف است .

بطوریکه ازمثال بالا روشن میشود در واقع اشکال‌دیفرانسیل باضرب‌خارجی یا بطور اختصار صورتهای دیفرانسیل خارجی صورتهائی هستندکه در زیر علامت انتگرال ، درانتگرالهای مکررپیدا میشوند. مثلاً در فضای ۳ــ بُعدی معمولی ، یک انتگرال مضاعف در روی یک قسمت از سطحی را درنظر میگیریم :

$$I = \int\int Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \qquad (۴۵-۱۴)$$

درصورت دیفرانسیل $\omega = Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$ جملات $dydz$ و $dzdx$ و $dxdy$ باحاصلضربهای معمولی مطلقاً متفاوتند. یعنی مثلاً $dydz$ با $dzdy$ یکی نیست. این ضرب ، ضرب معمولی نیست بلکه ضرب خارجی (گراسمن) است یعنی درحقیقت $dydz$ همان $dy \wedge dz$ است .

در یک مانیفلد تحلیلی ، یک تبدیل متغیردرمجاورت نقطه‌ای مثل P عبور ازیکدستگاه مختصات بدستگاه مختصات دیگری در P است. اگر معادلات تبدیل $x^i = \varphi^i(y)$ باشد پس شکل :

$$\omega = \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \qquad (۴۵-۱۵)$$

بصورت زیر در خواهد آمد :

$$\omega=\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k}\frac{\partial\varphi^{i_1}}{\partial y^{j_1}}\frac{\partial\varphi^{i_2}}{\partial y^{j_2}}\frac{\partial\varphi^{i_3}}{\partial y^{j_3}}= \quad (۴۰-۱۶)$$

$$\dots \frac{\partial\varphi^{i_k}}{\partial y^{j_k}} dy^{j_1}\wedge dy^{j_2}\wedge \dots \wedge dy^{j_k}$$

۱-۰ ٤- دیفرانسیل گیری خارجی : عناصر $E_0=E_0(M)$ یعنی صورتهای دیفرانسیل درجهٔ صفر همان توابع تحلیلی روی M هستند . بهر چنین تابعی نظیر f ، صورت دیفرانسیلی مانند df چنان مربوط میکنیم که داشته باشیم :

$$(\mathbf{X}\ ,\ df)=\mathbf{X}f \qquad (۴۰-۱۷)$$

(**X** برداری است مماس)

و یا برحسب مختصات :

$$df=\partial_i f dx^i \qquad (۴۰-۱۸)$$

دراینجا d مانند کارگزاری است که E_0 را به E_1 تحویل میکند .

طبق قانون زیر میتوانیم d را بعنوان کارگزاری روی E_k بگیریم . از (۴۰-۱۵) نتیجه میگیریم :

$$d\omega=\frac{\partial\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k}}{\partial x^j}dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}\wedge \dots \wedge dx^{i_k} \qquad (۴۰-۱۹)$$

$$\equiv \partial_j \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} dx^j \wedge dx^{i_1}\wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

d بعلت خطی بودن ، ممکنست روی تمام E تعمیم داده شود . این عمل به **دیفرانسیل گیری خارجی موسوم**است. بازاء $K=0$ به عملیات گرادین وروتاسیونل که با آنهاآشنائی داریم تبدیل میشود .

d دارای خواص زیراست : اگر ω یک p– صورتی و η یک q– صورتی باشد احکام زیر صادقند :

۱– $$d(a\omega+b\eta)=ad\omega+bd\eta \qquad (۴۰-۲۰)$$

۲- $$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta \qquad (40-21)$$

$\omega , \eta \in E ; a , b \in R$

۳- اگر f یک عددوار (صفر صورتی) و $\mathbf{X}$ برداری دلخواه باشد داریم :

$$df(\mathbf{X}) = \mathbf{X}f \qquad (40-22)$$

یعنی d یک دیفرانسیل معمولی f است .

٤- برای هرعددوار f داریم :

$$d(df) = 0$$

و همچنین :

$$d^2\omega = 0 \qquad (40-23)$$

اثبات حکم ٤ : اگر ω با رابطهٔ (٤٥-١٥) مشخص شده باشد $d\omega$ با رابطهٔ (٤٥-١٩) مشخص میشود لذا داریم :

$$d^2\omega = \partial_m \partial_j \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k} dx^m \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \qquad (40-24)$$

میدانیم که اگر جای j و m عوض شود فقط علامت طرف دوم عوض میشود لذا : $d^2\omega = -d^2\omega$ و یا $d^2\omega = 0$ یعنی حکم ثابت میشود .

مثال ۱- فرض میکنیم داشته باشیم :

$$\omega = Pdx + Qdy = P \wedge dx + Q \wedge dy \qquad (40-25)$$

لذا داریم :

$$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \wedge dy \qquad (40-26)$$

و یا :

$$d\omega=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy \qquad (۴۵-۲۷)$$

که همان فورمول گرین ـ کوشی بدست میآید .

مثال ۲ـ فرض میکنیم داشته باشیم :

$$\omega=Pdx+Qdy+Rdz \qquad (۴۵-۲۸)$$

پس :

$$\begin{aligned} d\omega &= dP\wedge dx+dQ\wedge dy+dR\wedge dz \\ &=\left(\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy+\frac{\partial P}{\partial z}dz\right)\wedge dx \\ &+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx+\frac{\partial Q}{\partial y}dy+\frac{\partial Q}{\partial z}dz\right)\wedge dy \\ &+\left(\frac{\partial R}{\partial x}dx+\frac{\partial R}{dy}dy+\frac{\partial R}{\partial z}dz\right)\wedge dz \\ &=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz \\ &+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge dx \end{aligned} \qquad (۴۵-۲۹)$$

یعنی فورمول استوکس بدست میآید .

$d\omega$ همان روتاسیونل ω است . عبارت $d^2\omega=0$ بااتحاد : $\text{Div . Rot . }\omega=0$ بیان میشود .

مثال ۳ـ فرض میکنیم داشته باشیم :

$$\omega=Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

با محاسبه‌ای نظیر محاسبات فوق خواهیم داشت :

$$d\omega=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz \qquad (۴۵-۳۰)$$

که همان فورمول استروگرادسکی بدست میآید .

بطوریکه از امثلهٔ فوق دیده میشود d کارگزاری است که pــ صورتیها را به $(p+1)$ــ صورتی تحویل میکنند .

قضیهٔ مهم ـ رابطهٔ بین عملیات کروشه در روی میدانهای برداری و کارگزار دیفرانسیل گیری خارجی توسط اتحاد زیر که در آن $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ بردارهائی اختیاری و ω یک ، یکصورتی است ، داده شده است :

$$2d\omega(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y})=\mathbf{X}\cdot\omega(\mathbf{Y})-\mathbf{Y}\cdot\omega(\mathbf{X})-\omega([\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y}]) \qquad (45-31)$$

($\mathbf{X}\cdot\omega(\mathbf{Y})$ معرف تابعی است که از اثر $\mathbf{X}$ برتابع $\omega(\mathbf{Y})$ بدست آمده است) .

اثبات : دیده میشود که میتوانیم طرفین این معادله را بعنوان یک دو ـ صورتی درنظر بگیریم . اول فرض میکنیم که داشته باشیم :

$$\mathbf{Y}=\partial_j \quad و \quad \mathbf{X}=\frac{\partial}{\partial x^i}\equiv\partial_i \quad و \quad \omega=\omega_k dx^k$$

پس طرف اول (۳۱-۴۵) بصورت زیر در میآید :

$$2d(\omega_k dx^k)(\partial_i\ ,\ \partial_j)=\frac{2}{2!}\partial_m\omega_k dx^m\wedge dx^k(\partial_i\ ,\ \partial_j) \qquad (45-32)$$

$$=\partial_m\omega_k(\delta_i^m\ \delta_j^k-\delta_j^m\ \delta_i^k)=\partial_i\,\omega_k\delta_j^k-\partial_j\,\omega_k\delta_i^k$$

$$=\partial_i\,\omega_j-\partial_j\,\omega_i$$

و طرف دوم آن خواهد شد :

$$\partial_i\,(\omega_k dx^k(\partial_j))-\partial_j\,(\omega_k dx^k(\partial_i))-\omega_k dx^k([\partial_i\ ,\ \partial_j]) \qquad (45-33)$$

$$=\partial_i\,\omega_k\delta_j^k-\partial_j\,\omega_k\delta_i^k-0=\partial_i\,\omega_j-\partial_j\,\omega_i$$

پس دراینحال حکم ثابت است .

ثانیاً فرض میکنیم که داشته باشیم :

$$\mathbf{Y}=Y^j\partial_j \quad \text{و} \quad \mathbf{X}=X^i\partial_i \quad \text{و} \quad \omega=\omega_k dx^k$$

دراینصورت طرف اول (۳۱-٤٥) خواهد شد :

$$(٤٥-٣٤) \qquad ۲d\omega(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y})=\frac{۲}{۲!}\ \partial_m\omega_k dx^m\wedge dx^k(X^i\partial_i\ ,\ Y^j\partial_j)$$
$$=\partial_m\omega_k X^iY^j dx^m\wedge dx^k(\partial_i\ ,\ \partial_j)$$
$$=\partial_m\omega_k X^iY^j(\delta_i^m\,\delta_j^k-\delta_i^k\,\delta_j^m)$$
$$=\partial_m\omega_k(X^mY^k-X^kY^m)$$

و طرف دوم آن میشود :

$$(٤٥-٣٥) \qquad X^i\partial_i(\omega_k dx^k(Y^j\partial_j))-Y^j\partial_j(\omega_k dx^k(X^i\partial_i))$$
$$-\omega_k dx^k[X^i\partial_i-Y^j\partial_j]=X^i\partial_i(\omega_kY^k)-Y^j\partial_j(\omega_kX^k)$$
$$-\omega_k dx^k(X^i\partial_iY^j-Y^i\partial_iX^j)\partial_j=X^iY^k\partial_i\omega_k$$
$$+X^i\omega_k\partial_iY^k-Y^jX^k\partial_j\omega_k-Y^j\omega_k\partial_jX^k$$
$$-\omega_k(X^i\partial_iY^j-Y^i\partial_iX^j)\delta_j^k=(X^iY^k-Y^iX^k)\partial_i\omega_k$$

که دراینصورت نیز عین طرف اول و درنتیجه حکم ثابت است .

تبصره ـ نکات زیر را بخاطر میسپاریم :

درصورتیکه داشته باشیم : $d\omega=\partial_i f dx^i$

مؤلفه های $d\omega$ خواهد بود : $\partial_i f$

درصورتیکه داشته باشیم : $d\omega=\partial_j\alpha_i dx^j\wedge dx^i$

مؤلفه های $d\omega$ خواهد بود : $(\partial_j\alpha_i-\partial_i\alpha_j)$

و درصورتیکه داشته باشیم : $d\omega=\partial_k\alpha_{ij}dx^k\wedge dx^i\wedge dx^j$

مؤلفه های $d\omega$ میشود : $(\partial_k\alpha_{ij}-\partial_i\alpha_{jk}+\partial_j\alpha_{ki})$

و همینطور الی‌آخر . . .

بسط زیر را هم همیشه درنظر میگیریم :

$$(dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k)(\partial_l , \partial_m , \partial_n) = (dx^i \wedge dx^j)(\partial_l , \partial_m)dx^k(\partial_n)$$
$$-(dx^j \wedge dx^k)(\partial_m , \partial_n)dx^i(\partial_l) + (dx^k \wedge dx^i)(\partial_n , \partial_l)dx^j(\partial_m)$$
$$= (\delta^i_l \delta^j_m - \delta^i_m \delta^j_l)\delta^k_n - (\delta^j_m \delta^k_n - \delta^j_n \delta^k_m)\delta^i_l + (\delta^k_n \delta^i_l - \delta^k_l \delta^i_n)\delta^j_m$$

برای تعداد عوامل بیشتر نیز همین قانون تعمیم داده میشود .

۴۶ـ مشتق مطلق صورتهای تانسوری[1]

در (۲۸ §) دیدیم که در هردستگاه مختصات ، یک ارتباط آفین با n^3 مؤلفهٔ Γ^i_{jk} که درهنگام تبدیل ازقانون (۳-۴۳-۲۸) تبعیت میکنند تعریف میشد . در اینجا میخواهیم ارتباط را بنحو دیگری که تاحدی اختصاصی‌تر و در محاسبات صورتهای دیفرانسیل مفیدتر است تعریف کنیم . تئوری کلاسیک محاسبات تانسوری و محاسبات جدیدتر صورتها باید بعنوان ابزار مکملی درنظر گرفته شوند . بنظر میآید که محاسبات کلاسیک بیشتر برای بررسی خواص انواع خاص ساختمانهای هندسی دیفرانسیل مناسبند درحالیکه محاسبات صورتها برای بسط تئوری کلی‌تر ، مناسب بنظر میآیند .

عبارت $\omega^i_j = \Gamma^i_{jk} dx^k$ راکه درآن $[\omega^i_j]$ یک ماتریس یکصورتی است درنظر میگیریم . اگر دستگاه مختصات تغییر کند خواهیم داشت :

$$\omega^{i'}_{j'} = \Gamma^{i'}_{j'k'} dx^{k'} \qquad (۴۶-۱)$$

حال با توجه به روابط :

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = p^{i'}_i \, p^k_{k'} \, p^j_{j'} \, \Gamma^i_{jk} + p^{i'}_i \, p^i_{j'k'}$$

و :

$$dx^{j'} = p^{j'}_k dx^k \qquad (۴۶-۲)$$

1 - Absolute Derivation of Tensorial forms

داریم :

$$\omega^{i'}_{k'}=(p^{i'}_i\, p^k_{k'}\, p^j_{j'}\, \Gamma^i_{kj}+p^{i'}_i\, p^i_{j'k'})p^{j'}_k dx^k \qquad (\text{٤٦—٣})$$

$$=p^{i'}_i\, p^k_{k'}\, p^j_{j'}\, p^{j'}_k\, \Gamma^i_{kj} dx^k+p^{i'}_i\, p^i_{j'k'} dx^{j'}$$

$$=p^{i'}_i\, \omega^i_j\, p^j_{k'}+p^{i'}_i\, dp^i_{k'}$$

ازاین رابطه معلوم میشود که یک ارتباط آفین نسبت به هرمبنای ω^i را میتوان با یک ماتریس $[\omega^i_j]$ که عناصر آن یکصورتی هستند تعریف کرد . اگر مبنای جدیدی مثل $\bar{\omega}^a$ انتخاب کنیم خواهیم داشت :

$$\bar{\omega}^a=u^a_i\omega^i \qquad (\text{٤٦—٤})$$

و :

$$\omega^i=v^i_a\bar{\omega}^a \qquad (\text{٤٦—٥})$$

دراینحال ارتباط یعنی $\bar{\omega}^a_b$ از رابطهٔ زیر بدست میآید :

$$\bar{\omega}^a_b=u^a_i\,\omega^{ij}\,v^j_b+v^a_i du^i_b \qquad (\text{٤٦—٦})$$

درحالت خاصی که ω^i , $\bar{\omega}^a$ مبناهای طبیعی مربوط بدستگاههای مختصات (x^i) و $(x^{i'})$ باشند روابط(٤٦-٥)و(٤٦-٦) بترتیب به(٤٦-٢)و(٤٦-١)تبدیل میشوند .

دیفرانسیل مطلق یک میدان برداری ناهمگرد λ^i برابر :

$$D\lambda^i=d\lambda^i+\omega^i_j\lambda^j \qquad (\text{٤٦—٧})$$

ودیفرانسیل مطلق یک میدان برداری همگرد μ_i برابر :

$$D\mu_i=d\mu_i-\omega^j_i\lambda_j \qquad (\text{٤٦—٨})$$

و بطور کلی :

$$DT^{r_1 r_2 \dots r_m}_{s_1 s_2 \dots s_p} = dT^{r_1 r_2 \dots r_m}_{s_1 s_2 \dots s_p} + \sum_{\alpha=1}^{m} \omega^{r_\alpha}_{j} T^{r_1 r_2 \dots r_{\alpha-1} j r_{\alpha+1} \dots r_m}_{s_1 s_2 \dots s_p} - \sum_{\beta=1}^{p} \omega^{k}_{s_\beta} T^{r_1 r_2 \dots r_m}_{s_1 s_2 \dots s_{\beta-1} k s_{\beta+1} \dots s_p} \tag{۴۶—۹}$$

خواهد بود. لذا کارگزار D ، یک میدان تانسوری از نوع (r , m)را به یک ، یکصورتی تانسوری از همان نوع تحویل میکند.

کارگزار D را میکنیست بطریق زیر روی صورتهای تانسوری بسط داد. فرض میکنیم φ یک q—صورتی تانسوری باشد که بتوانیم نسبت به مبنای (ω^i) بصورت زیر بنویسیم:

$$\varphi^{i\dots}_{jk\dots} = A^{i\dots}_{jk\dots\alpha_1\dots\alpha_q}\, \omega^{\alpha_1} \wedge \omega^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge \omega^{\alpha_q} \tag{۴۶—۱۰}$$

ثابت میکنیم که صورتهای $D\varphi^{i\dots}_{jk\dots}$ که با رابطهٔ:

$$D\varphi^{i\dots}_{jk\dots} = d\varphi^{i\dots}_{jk\dots} + \omega^i_s \wedge \varphi^{s\dots}_{jk\dots} - \omega^h_j \wedge \varphi^{i\dots}_{hk\dots} - \omega^l_k \wedge \varphi^{i}_{jl\dots} + \dots \tag{۴۶—۱۱}$$

تعریف‌شده‌اند مؤلفه های $(q+1)$— صورتی‌تانسوری نسبت به مبنای (ω^i) هستند که به مشتق ـ **همگرد** φ **نسبت به‌ارتباط** ω^i_j موسومند وبا نماد $D\varphi$ نشانداده میشوند.

فرض میکنیم $\bar{\varphi}^{a\dots}_{bc\dots}$ مؤلفه های φ نسبت‌به مبنای $(\bar{\omega}^a)$ که توسط رابطهٔ(۴۶-۱۱) به (ω^i) مربوط است،باشد. صورتهای $D\bar{\varphi}^{a\dots}_{bc\dots}$ را با معادلات‌زیر تعریف میکنیم:

$$D\bar{\varphi}^{a\dots}_{bc\dots} = d\bar{\varphi}^{a\dots}_{bc\dots} + \bar{\omega}^a_f \wedge \bar{\varphi}^{f\dots}_{bc\dots} - \bar{\omega}^q_p \wedge \bar{\varphi}^{a\dots}_{gc\dots} - \bar{\omega}^h_c \wedge \bar{\varphi}^{a\dots}_{bh\dots} + \dots \tag{۴۶—۱۲}$$

لذا از روابط (۶-۴۶) و (۱۱-۴۶) و (۱۲-۴۶) نتیجه میشود :

$$D\bar{\varphi}^{a\cdots}_{bc\cdots} = u^a_i v^j_b v^k_c \cdots D\varphi^{i\cdots}_{jk\cdots} \quad (۴۶-۱۳)$$

یعنی $D\varphi$ صورتی است تانسوری . بنابراین $D\varphi$ یعنی مشتق ـ همگرد یک $q-$ صورتی تانسوری ، $(q+1)-$ صورتی‌تانسوری‌است‌ازهمان نوع و حکم‌ثابت‌است .

هریکصورتی برداری که مؤلفه های آن نسبت به مبنای (ω^i) مقادیر ω^1 ، ... ، ω^n باشد یک دو ـ صورتی برداری‌بامؤلفهٔ های $\Omega^i = D\omega^i$ پدید میآورد که به **پیچش** صورت ارتباط موسوم است . چون $(\omega^i \wedge \omega^j)$ مبنائی برای یک فضای دو ـ صورتی است لذا داریم :

$$\Omega^i = T^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k \quad (۴۶-۱۴)$$

که در این رابطه ، T^i_{jk} تانسوریست قرینهٔ چپ نسبت به اندیسهای j و k که تانسور پیچش نامیده میشود .

برحسب یک مبنای طبیعی میتوانیم بنویسیم :

$$\Omega^i = D\omega^i = \omega^i_j \wedge \omega^j = \Gamma^i_{jk} dx^k \wedge dx^j \quad (۴۶-۱۵)$$

که درآن $2T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$ است‌وباتعریفی که قبلاً ازتانسورپیچش کردیم صدق میکند. ازاینجا معلوم میشود که‌یک‌ارتباط متقارن ، پیچش‌صفردارد وبالعکس .

حال ثابت میکنیم که دو ـ صورتیها که با رابطهٔ :

$$\Omega^i_j = d\omega^i_j + \omega^i_s \wedge \omega^s_j \quad (۴۶-۱۶)$$

تعریف میشوند مؤلفه های یک یکصورتی تانسوری نسبت به (ω^i) هستند که به **صورت انحنای**[1] ارتباط موسومند . ارتباط (ω^a_b) برحسب مبنای $(\bar{\omega}^a)$ توسط

1- Curvature form

(۲-۱-٤٦)داده میشود وصورتهای مربوطهٔ $\bar{\Omega}^l_k$ ازآن،توسط رابطهٔ زیرتعریف میشوند:

$$\bar{\Omega}^l_k = d\bar{\omega}^l_k + \bar{\omega}^l_h \wedge \bar{\omega}^h_k \tag{٤٦—١٧}$$

لذا با استفاده از روابط (٤-٤٦) و (٦-٤٦) و (١٧-٤٦) داریم :

$$\bar{\Omega}^l_k = u^l_i v^j_k \Omega^i_j \tag{٤٦—١٨}$$

یعنی در واقع مؤلفه های یک ، یکصورتی تانسوری هستند.

برحسب یک مبنای طبیعی (dx^i) داریم :

$$\Omega^i_j = R^i_{jlm} dx^l \wedge dx^m \tag{٤٦—١٩}$$

بآسانی دیده میشود که ضرائب R^i_{jlm} که با این معادله تعریف شده و نسبت به اندیسهای l و m قرینهٔ چپ هستند همان ضرائب تانسور انحنا هستند که قبلاً دیده‌ایم .

از دیفرانسیل گیری خارجی روابط :

$$d\omega^i + \omega^i_j \wedge \omega^j = \Omega^i \tag{٤٦—٢٠}$$

و :

$$d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j = \Omega^i_j \tag{٤٦—٢١}$$

بترتیب خواهیم داشت :

$$d\Omega^i - \Omega^i_j \wedge \omega^j + \omega^i_j \wedge \Omega^j = 0 \tag{٤٦—٢٢}$$

و :

$$d\Omega^i_j - \Omega^i_k \wedge \omega^k_j + \omega^i_k \wedge \Omega^k_j = 0 \tag{٤٦—٢٣}$$

که این روابط را نیز بترتیب بصورتهای زیر میتوانیم بنویسیم :

$$D\Omega^i = \Omega^i_j \wedge \omega^j \tag{٤٦—٢٤}$$

$$D\Omega^i_j = 0 \qquad (۴۶—۲۵)$$

وقتی ارتباط دارای پیچش صفر باشد این اتحادها به بعضی از اتحادهای بیانکی تبدیل میشوند و به **تعمیم اتحادهای بیانکی** موسومند. زیرا موقعیکه پیچش صفر باشد معادلهٔ (۴۶-۲۴) نسبت به مبنای طبیعی (dx^i) به اتحاد:

$$B^i_{jkl} + B^i_{klj} + B^i_{ljk} \equiv 0 \qquad (۴۶—۲۶)$$

و معادلهٔ (۴۶-۲۵) به اتحاد:

$$B^i_{jkl,m} + B^i_{jlm,k} + B^i_{jmk,l} \equiv 0 \qquad (۴۶—۲۷)$$

که همان اتحادهای بیانکی مذکور در (۴۲ §) میباشند تبدیل میشوند. رابطهٔ اخیر از رابطهٔ:

$$B^i_{jkl,m} dx^k \wedge dx^l \wedge dx^m = 0 \qquad (۴۶—۲۸)$$

نتیجه شده است.

معادلات ساختمان [1]: اگر برای سهولت بیان، نماد $d\mathbf{P}$ را برای نمایش وضع بردار یک نقطهٔ P نسبت به نقطهٔ ثابتی مانند O از فضا انتخاب کنیم بردارهای دستگاههای طبیعی مختصات دراین نقطه با n معادلهٔ:

$$\mathbf{e}_i = \partial_i \mathbf{P} \qquad (۴۶—۲۹)$$

مشخص میشوند. بخصوص توجه داریم که $\partial_i \mathbf{P}$ که گرادین تابع عددواری است، مؤلفه‌های یک بردار همگرد **نیست**. اگر P روی یک منحنی پارامتری (۲) حرکت کند داریم:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \partial_i \mathbf{P} \frac{dx^i}{dt} = \mathbf{e}_i \frac{dx^i}{dt} \qquad (۴۶—۳۰)$$

۱ - The equations of Structure

و یا برحسب دیفرانسیل خواهیم داشت :

$$d\mathbf{P} = \mathbf{e}_i \, dx^i \qquad (۴۶-۳۱)$$

که دراینجا بردار $\mathbf{e}_i$ در امتداد منحنی پارامتری $x^j = c^t$ $(j \neq i)$ درنظرگرفته شده است . بنابراین $d\mathbf{P}$ را میتوان یک یکصورتی برداری دانست . بردارهای $\mathbf{e}_i$ مبنائی برای T_p، وصورتهای dx^i مبنای فضای متقابل T_p^*، یعنی فضای بردارهای همگرد یایکصورتیها وعناصر $\mathbf{e}_i \otimes dx^i$ مبنائی برای حاصلضرب تانسوری $T_p \otimes T_p^*$ در P خواهند بود . مؤلفه های $d\mathbf{P}$ برحسب این مبنا بطوریکه از (۴۶-۳۱) پیداست ، δ^i_j میشوند .

از طرفی میدانیم :

$$d\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} dx^j = \partial_j \mathbf{e}_i \, dx^j \qquad (۴۶-۳۲)$$

لذا عناصر $d\mathbf{e}_j$ بازاء یک مقدار ثابت j یک یکصورتی برداری و بنابراین قابل بیان برحسب مبنای $\mathbf{e}_i \otimes dx^k$ هستند. اگر Γ^i_{jk} مؤلفه های $d\mathbf{e}_j$ نسبت باین مبنا هافرض شوند از (۴۶-۳۲) نتیجه میشود :

$$\partial_k \mathbf{e}_j = \Gamma^i_{jk} \mathbf{e}_i \qquad (۴۶-۳۳)$$

حال اگر یک ماتریس $[\omega^i_j]$ را با معادلهٔ :

$$[\omega^i_j] = [\Gamma^i_{jk} dx^k] \qquad (۴۶-۳۴)$$

تعریف کنیم ، میتوانیم بنویسیم:

$$d\mathbf{e}_j = \omega^i_j \mathbf{e}_i \qquad (۴۶-۳۵)$$

بااین مقدمات معادلاتی راکه اصطلاحاً **معادلات ساختمان** هندسهٔ ریمانی

نامیده میشوند و ما آنها را قبلاً بطور پراکنده ذکر کرده بودیم یکجا بصورت زیر جمع‌آوری میکنیم و مینویسیم :

$$dP = e_i \, dx^i \tag{۴۶—۳۶}$$

$$(e_i \, , \, e_j) = G_{ij} \tag{۴۶—۳۷}$$

$$ds^2 = (dP \, , \, dP) = G_{ij} dx^i dx^j \tag{۴۶—۳۸}$$

$$De_i = \omega_i^j e_j \tag{۴۶—۳۹}$$

$$\omega_{ij} = G_{ik} \, \omega_j^k \tag{۴۶—۴۰}$$

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = dG_{ij} \tag{۴۶—۴۱}$$

$$\omega_j^i \wedge dx^j = 0 \tag{۴۶—۴۲}$$

$$\Omega_j^i = d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k \tag{۴۶—۴۳}$$

$$\Omega_j^i = R_{jkl}^i dx^k \wedge dx^l \tag{۴۶—۴۴}$$

$$\Omega_{ij} = G_{ik} \, \Omega_j^k = R_{ijkl} dx^k \wedge dx^l \tag{۴۶—۴۵}$$

از آنجا که درهندسهٔ ریمانی اغلب ساده‌تر اینستکه ازدستگاههائی که بهیچ دستگاه مختصاتی مربوط نباشنداستفاده کنیم،لذا معادلات فوق‌را مجدداً بصورتهای زیرکه برای استعمال مختصات کلی (e_i) و یکصورتیهای (ω^i) مربوط بآنها بیشتر مناسب میباشد مینویسیم :

$$dP = e_i \, \omega^i \tag{۴۶—۳۶}'$$

$$(e_i \, , \, e_j) = G_{ij} \tag{۴۶—۳۷}'$$

$$ds^2 = (d\mathbf{P}\ ,\ d\mathbf{P}) = G_{ij}\omega^i\omega^j \qquad (۴۶-۳۸)'$$

$$D\mathbf{e}_i = \omega_i^j \mathbf{e}_j \qquad (۴۶-۳۹)'$$

$$\omega_{ij} = G_{ik}\,\omega_j^k \qquad (۴۶-۴۰)'$$

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = dG_{ij} \qquad (۴۶-۴۱)'$$

$$d\omega^i + \omega_j^i \wedge \omega^j = 0 \qquad (۴۶-۴۲)'$$

$$\Omega_j^i = d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k \qquad (۴۶-۴۳)'$$

$$\Omega_j^i = \overline{R}_{jkl}^i\omega^k \wedge \omega^l \qquad (۴۶-۴۴)'$$

$$\Omega_{ij} = \overline{R}_{ijkl}\omega^k \wedge \omega^l \qquad (۴۶-۴۵)'$$

بطوریکه دیده میشود وقتی $(\omega^i) = (dx^i)$ باشد این روابط به روابط قبل تبدیل میشوند .

اگردستگاه‌ارتونورمال باشد ، (۴۶-۳۷) نشان میدهد که $G_{ij} = \delta_{ij}$ ومتریک بصورت زیر است :

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} (\omega^i)^2 \qquad (۴۶-۴۶)$$

گذشته از آن تمام تانسورهای مربوط به تانسورمتریک دارای مؤلفه های متحدی هستند یعنی مؤلفه های همگرد و ناهمگرد آنها یکی میشوند و میتوانیم تمام آنها را با مؤلفه های همگرد نشان دهیم . لذا (۴۶-۴۱) بصورت زیر درمیآید :

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0 \qquad (۴۶-۴۷)$$

یعنی وقتی دستگاه مختصات متعامد باشد ماتریس ارتباط یکصورتیها ، قرینهٔ چپ خواهد بود .

اگر از دستگاههای مختصاتی که طبیعی نیستند استفاده کنیم،ضرائب ارتباط دیگر برحسب تانسور متریک توسط نمادهای کریستوفل بیان نمیشوند و وقتی دستگاه مختصات متعامد است ، میتوانیم برای این ضرائب فرمولهائی بترتیب زیر بدست آوریم : چون $(\omega^k \wedge \omega^h)$ مبنائی برای دو ـ صورتیهاست میتوانیم رابطهٔ زیر را که درآن $C_{khi}+C_{hki}=0$ میباشد بنویسیم :

$$d\omega_i = \frac{1}{2} C_{khi}\omega^k \wedge \omega^h \tag{٤٦—٤٨}$$

فرض میکنیم γ_{ijk} ضرائب ارتباط نسبت به مبناهای (ω^i) باشد پس :

$$\omega_{ij} = \gamma_{ijk}\omega^k \tag{٤٦—٤٩}$$

از (٤٦-٤٧) نتیجه میشود :

$$\gamma_{ijk}+\gamma_{jik}=0 \tag{٤٦—٥٠}$$

و از '(٤٦-٤٢) نتیجه میشود :

$$\frac{1}{2} C_{kji}\omega^k \wedge \omega^j + \gamma_{ijk}\omega^k \wedge \omega^j = 0 \tag{٤٦—٥١}$$

چون صورتهای $\omega^k \wedge \omega^j$ بطور خطی مستقلند داریم :

$$\frac{1}{2} C_{kji}+\gamma_{ijk} = \frac{1}{2} C_{jki}+\gamma_{ikj}$$

و یا :

$$C_{kji} = \gamma_{ikj}-\gamma_{ijk} \tag{٤٦—٥٢}$$

و از آنجا میتوانیم بنویسیم :

$$\frac{۱}{۲}\left(C_{ijk}-C_{jki}-C_{kij}\right)$$

$$=\frac{۱}{۲}\left(\gamma_{kij}-\gamma_{kji}-\gamma_{ijk}+\gamma_{ikj}-\gamma_{jki}+\gamma_{jik}\right)=\gamma_{jik}$$

و با استفاده از (۴۶-۵۰) خواهیم داشت :

$$\gamma_{ijk}=\frac{۱}{۲}\left(C_{jki}+C_{kij}-C_{ijk}\right) \tag{۴۶—۵۲}$$

فصل هشتم

۴۷ـ Γ^{i}_{jk} و تعاریف هم‌ارز آنها ـ ارتباطات آفین ∇

تعریف : یک ارتباط‌آفین در روی مانیفلدی مانند M ، قانونی است مانند ∇ که به هرمیدان برداری **X** در روی M ، تحویلی خطی مانند $\nabla_{\mathbf{X}}$ از همین فضای برداری را برروی خودش ، مربوط میکند . ∇ دارای خواص زیر است :

$$\nabla_{\mathbf{X}}\cdot f=\mathbf{X}f \qquad (۴۷—۱)$$

$$\nabla_{\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2}\cdot\mathbf{Y}=\nabla_{\mathbf{X}_1}\cdot\mathbf{Y}+\nabla_{\mathbf{X}_2}\cdot\mathbf{Y} \qquad (۴۷—۲)$$

$$\nabla_{\mathbf{X}}\cdot(\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2)=\nabla_{\mathbf{X}}\cdot\mathbf{Y}_1+\nabla_{\mathbf{X}}\cdot\mathbf{Y}_2 \qquad (۴۷—۳)$$

$$\nabla_{f\mathbf{X}_1+g\mathbf{X}_2}\cdot\mathbf{Y}=f\nabla_{\mathbf{X}_1}\cdot\mathbf{Y}+g\nabla_{\mathbf{X}_2}\cdot\mathbf{Y} \qquad (۴۷—۴)$$

$$\nabla_{\mathbf{X}}\cdot(f\mathbf{Y})=f\nabla_{\mathbf{X}}\cdot\mathbf{Y}+(\mathbf{X}f)\mathbf{Y} \qquad (۴۷—۵)$$

در روابط فوق **X** و **Y** میدانهای برداری و f و g توابعی دیفرانسیل پذیر روی M هستند. کارگزار $\nabla_{\mathbf{X}}$ **مشتق ـ همگردگیری** نسبت به **X** نامیده میشود. توابع Γ^{k}_{ij} را برحسب دستگاه مختصات (x^i) ، با عبارت :

$$\nabla_i\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\nabla_{\mathbf{e}_i}\cdot(\mathbf{e}_j)=\Gamma^{k}_{ij}\mathbf{e}_k \qquad (۴۷—۶)$$

و برحسب مختصات $(x^{i'})$ با عبارت زیر تعریف میکنیم :

$$\nabla_{\mathbf{e}_{i'}}\cdot(\mathbf{e}_{j'})=\Gamma^{k'}_{i'j'}\mathbf{e}_{k'} \qquad (۴۷—۷)$$

حال اگر فرض کنیم :

$$\mathbf{e}_j=p^{j'}_{j}\mathbf{e}_{j'} \quad و \quad \mathbf{e}_{i'}=p^{i}_{i'}\mathbf{e}_i$$

باشد ، رابطهٔ (٦-٤٧) بااستفاده از (٤-٤٧) و (٥-٤٧) بصورت زیر در میآید :

$$\nabla_{e_{i'}} \cdot e_{j'} = \nabla_{p^i_{i'} e_i} \cdot (p^j_{j'} e_j) = p^i_{i'} \nabla_{e_i} \cdot (p^j_{j'} e_j) \tag{٤٧—٨}$$

$$= p^i_{i'} \left\{ p^j_{j'} \nabla_{e_i} \cdot e_j + (e_i\, p^j_{j'})\, e_j \right\}$$

$$= p^i_{i'} p^j_{j'} \Gamma^k_{ij} e_k + p^i_{i'} (e_i\, p^j_{j'}) e_j$$

$$= \Gamma^{k'}_{i'j'} e_{k'} = \Gamma^{k'}_{i'j'} p^k_{k'} e_k$$

و از آنجا :

$$\Gamma^{k'}_{i'j'} e_k = \left\{ p^i_{i'} p^j_{j'} p^{k'}_k \Gamma^k_{ij} + p^{k'}_k (p^i_{i'} e_i\, p^k_{j'}) \right\} e_k$$

$$= \left\{ p^i_{i'} p^j_{j'} p^{k'}_k \Gamma^k_{ij} + p^{k'}_k (e_{i'}\, p^k_{j'}) \right\} e_k$$

و یا :

$$\Gamma^{k'}_{i'j'} = p^i_{i'} p^j_{j'} p^{k'}_k \Gamma^k_{ij} + p^{k'}_k p^k_{i'j'} \tag{٤٧—٩}$$

که همان فورمول (۳-٤۸-۲) است .

برای اینکه مفهوم قانون ∇ را بهتر درك کنیم ، فرض میکنیم :

$$\mathbf{X} = X^i e_i \quad \text{و} \quad \mathbf{Y} = Y^j e_j$$

باشد لذا با توجه به (٤-٤٧) و (٥-٤٧) میتوانیم بنویسیم :

$$\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Y} = \nabla_{X^i e_i} \cdot (Y^j e_j) = X^i \nabla_{e_i} \cdot (Y^j e_j) \tag{٤٧—١٠}$$

$$= X^i \left\{ Y^j \nabla_{e_i} \cdot (e_j) + (e_i\, Y^j) e_j \right\}$$

$$= X^i \left\{ Y^j \Gamma^k_{ij} e_k + (\partial_i Y^k)\, e_k \right\}$$

$$= X^i \left\{ \partial_i Y^k + Y^j \Gamma^k_{ij} \right\} e_k = X^i \left\{ Y^k_{,i} \right\} e_k$$

بهمین ترتیب میتوانیم $\nabla\mathbf{K}$ یعنی مشتق ـ همگرد یک میدان تانسوری $\mathbf{K}$ را تعریف کنیم. مطابق تعریف، $\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{K}$ بازاء هرمیدان برداری $\mathbf{X}$ تانسوری است ازهمان نوع $\mathbf{K}$. اگر $\mathbf{K}$ از نوع $(r\ ,\ s)$ باشد ممکنست آنرا بعنوان قانونی تعریف کنیم که به هرمجموعهٔ s ازمیدان برداری $\mathbf{X}_1$ و $\mathbf{X}_2$ و ... و $\mathbf{X}_s$ یک میدان تانسوری: $\mathbf{K}(\mathbf{X}_1\ ,\ \mathbf{X}_2\ ,\ \dots\ ,\ \mathbf{X}_s)$ ازنوع $(r\ ,\ 0)$ مربوط میکند. $\nabla\mathbf{K}$ را طبق تعریف، میدانی تانسوری ازنوع $(r\ ,\ s+1)$ میگیریم که به $(\mathbf{X}_1\ ,\ \mathbf{X}_2\ ,\ \dots\ ,\ \mathbf{X}_s\ ,\ \mathbf{X})$ یک میدان تانسوری $(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{K})\ (\mathbf{X}_1\ ,\ \mathbf{X}_2\ ,\ \dots\ ,\ \mathbf{X}_s)$ را مربوط میسازد. معنای $\nabla\mathbf{K}=0$ بالاخص، اینستکه بازاء هرمیدان برداری $\mathbf{X}$ ، $\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{X}$ یک میدان تانسوری صفر است .

ما دراین کتاب، بخصوص حالتی راکه در آن $r=1$ است انتخاب میکنیم. اگر $\mathbf{K}$ ازنوع $(s\ ,\ 1)$ باشد، $\mathbf{K}(\mathbf{X}_1\ ,\ \mathbf{X}_2\ ,\ \dots\ ,\ \mathbf{X}_s)$ میدانی است برداری. فورمول زیر را برای یک چنین میدان تانسوری که امثلهٔ آن شامل میدانهای پیچش و انحنای تانسوری است میتوانیم بیان کنیم :

$$(\nabla\mathbf{K})\ (\mathbf{X}_1\ ,\ \mathbf{X}_2\ ,\ \dots\ ,\ \mathbf{X}_s\ ,\ \mathbf{X})$$
$$=\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{K}(\mathbf{X}_1\ ,\ \mathbf{X}_2\ ,\ \dots\ ,\ \mathbf{X}_s)$$
$$-\sum_{i=1}^{s}\mathbf{K}(\mathbf{X}_1\ ,\ \mathbf{X}_2\ \dots\ ,\ \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{X}_i\ ,\ \dots\ ,\ \mathbf{X}_s) \qquad (۴۷-۱۱)$$

تحقیق صحت این رابطه بعنوان تمرین واگذار میشود .

قضیهٔ ۱ـ پیچش و خمیدگی میدانهای تانسوری برحسب مشتق ـ همگرد وابسته بیک ارتباط خطی با عبارات زیر بیان میشوند :

$$T(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y})=\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{Y}-\nabla_{\mathbf{y}}\cdot\mathbf{X}-[\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y}] \qquad (۴۷-۱۲)$$

$$R(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y})=[\nabla_{\mathbf{x}}\ ,\ \nabla_{\mathbf{y}}]-\nabla_{[\mathbf{x},\mathbf{y}]} \qquad (۴۷-۱۳)$$

دراین روابط ، $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ بردارهای دلخواه واقع در روی سطحی هستند که ساختمان آن باساختمان گروه ـ لی یکی است .

از (۴۷-۱۲) و (۴۷-۱۳) بخوبی دیده میشود که داریم :

$$R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -R(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) \qquad (۴۷-۱۴)$$

و :

$$T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -T(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$$

ما این قضیه را دراینجا اثبات نمیکنیم و علاقمندان را به [۱۸] ارجاع میدهیم و فقط بعنوان یک مسئله ، صحت آنها را تحقیق مینمائیم .

قضیهٔ ۲ـ تساویهای زیر را ثابت کنید :

$$T(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2, \mathbf{Y}) = T(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}) + T(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}) \qquad (۴۷-۱۵)$$

$$T(f\mathbf{X}, g\mathbf{Y}) = fgT(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \qquad (۴۷-۱۶)$$

$$R(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2, \mathbf{Y}) = R(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}) + R(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}) \qquad (۴۷-۱۷)$$

$$R(f\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = f \cdot R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \qquad (۴۷-۱۸)$$

$$R(f\mathbf{X}, g\mathbf{Y}) \cdot h\mathbf{Z} = fghR(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \cdot \mathbf{Z} \qquad (۴۷-۱۹)$$

اثبات (۴۷-۱۵) : با توجه به (۴۷-۱۲) و (۴۷-۲) و (۴۷-۳) داریم :

$$\begin{aligned} T(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2, \mathbf{Y}) &= \nabla_{x_1+x_2} \cdot \mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) - [\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2, \mathbf{Y}] \\ &= \nabla_{x_1} \cdot \mathbf{Y} + \nabla_{x_2} \cdot \mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{X}_1 - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{X}_2 - [\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}] \\ &\quad - [\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}] = (\nabla_{x_1} \cdot \mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{X}_1 - [\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}]) \\ &\quad + (\nabla_{x_2} \cdot \mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{X}_2 - [\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}]) \\ &= T(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}) + T(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}) \end{aligned}$$

اثبات (۴۷-۱۶) : با توجه به (۴۷-۳) و (۴۷-۴) و '(۴۴-۱۵) داریم :

$$
\begin{aligned}
T(f\mathbf{X}\ ,\ g\mathbf{Y})&=\nabla_{f\mathbf{x}}\cdot g\mathbf{Y}-\nabla_{g\mathbf{y}}\cdot f\mathbf{X}-[f\mathbf{X}\ ,\ g\mathbf{Y}]\\
&=f\nabla_{\mathbf{x}}\cdot(g\mathbf{Y})-g\nabla_{\mathbf{y}}\cdot(f\mathbf{X})-(fg[\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y}]\\
&+f(\mathbf{X}g)\mathbf{Y}-g(\mathbf{Y}f)\mathbf{X})=f(g\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{Y}+(\mathbf{X}g)\mathbf{Y})\\
&-g(f\nabla_{\mathbf{y}}\cdot\mathbf{X}+(\mathbf{Y}f)\mathbf{X})-fg[\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y}]\\
&-f(\mathbf{X}g)\mathbf{Y}+g(\mathbf{Y}f)\mathbf{X}=fg\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{Y}-fg\nabla_{\mathbf{y}}\cdot\mathbf{X}\\
&-fg[\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y}]=fgT(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y})
\end{aligned}
$$

تبصره ـ بهمین نحو ثابت میشود که :

$$R(f\mathbf{X}\ ,\ g\mathbf{Y})=fgR(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y})$$

اثبات (۴۷-۱۷) :

$$
\begin{aligned}
R(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2\ ,\ \mathbf{Y})&=[\nabla_{\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2}\ ,\ \nabla_{\mathbf{y}}]-\nabla_{[\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2,\mathbf{y}]}\\
&=[\nabla_{\mathbf{x}_1}\ ,\ \nabla_{\mathbf{y}}]+[\nabla_{\mathbf{x}_2}\ ,\ \nabla_{\mathbf{y}}]-\nabla_{[\mathbf{x}_1,\mathbf{y}]}-\nabla_{[\mathbf{x}_2,\mathbf{y}]}\\
&=([\nabla_{\mathbf{x}_1}\ ,\ \nabla_{\mathbf{y}}]-\nabla_{[\mathbf{x}_1,\mathbf{y}]})+([\nabla_{\mathbf{x}_2}\ ,\ \mathbf{y}]-\nabla_{[\mathbf{x}_2,\mathbf{y}]})\\
&=R(\mathbf{X}_1\ ,\ \mathbf{Y})+R(\mathbf{X}_2\ ,\ \mathbf{Y})
\end{aligned}
$$

اثبات (۴۷-۱۸) :

$$
\begin{aligned}
R(f\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y})&=[\nabla_{f\mathbf{x}}\ ,\ \nabla_{\mathbf{y}}]-\nabla_{[f\mathbf{x},\mathbf{y}]}=[f\nabla_{\mathbf{x}}\ ,\ \nabla_{\mathbf{y}}]-\nabla_{f[\mathbf{x},\mathbf{y}]}\\
&-(\mathbf{Y}f)\mathbf{X}=f[\nabla_{\mathbf{x}}\ ,\ \nabla_{\mathbf{y}}]-(\nabla_{\mathbf{y}}\cdot f)\nabla_{\mathbf{x}}-f\nabla_{[\mathbf{x},\mathbf{y}]}\\
&-(\mathbf{Y}f)\nabla_{\mathbf{x}}=f[\nabla_{\mathbf{x}}\ ,\ \nabla_{\mathbf{y}}]-(\mathbf{Y}f)\nabla_{\mathbf{x}}-f\nabla_{[\mathbf{x},\mathbf{y}]}\\
&-(\mathbf{Y}f)\nabla_{\mathbf{x}}=fR(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y}]
\end{aligned}
$$

رابطهٔ (۴۷-۱۹) نیز بهمین نحو ثابت میشود .

مسئلهٔ ۱ـ اگر $\mathbf{X}=X^i\mathbf{e}_i$ و $\mathbf{Y}=Y^j\mathbf{e}_j$ باشد مقدار $T(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y})$ را برحسب Γ^i_{jk} حساب کنید .

حل ـ با توجه به (۴۷-۱۲) و (۴۷-۱۰) و (۴۴-۷) داریم :

$$T(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y})=\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{Y}-\nabla_{\mathbf{y}}\cdot\mathbf{X}-[\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y}]$$
$$=\left\{X^i(Y^j_{,i})-Y^i(X^j_{,i})-[X^i\partial_i Y^j-Y^i\partial_i X^j]\right\}\mathbf{e}_j$$
$$=\left\{X^i(\partial_i Y^j+Y^k\Gamma^j_{ki})-Y^i(\partial_i X^j+X^k\Gamma^j_{ki})\right.$$
$$\left.-X^i\partial_i Y^j+Y^i\partial_i X^j\right\}\mathbf{e}_j=\left\{X^iY^k(\Gamma^j_{ki}-\Gamma^j_{ik})\right\}\mathbf{e}_j$$
$$=X^jY^kT^i_{kj}\mathbf{e}_i$$

که در رابطهٔ اخیر فرض شده است :

$$T^i_{kj}=\Gamma^i_{kj}-\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{[j,k]}$$

مسئلهٔ ۲ـ اگر $\mathbf{X}=\mathbf{e}_i$ و $\mathbf{Y}=\mathbf{e}_j$ و $\mathbf{Z}=\mathbf{e}_k$ باشد مقدار $R(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y})$ را برحسب Γ^i_{jk} بدست آورید .

حل ـ اثر طرفین رابطهٔ (۳-۱۷-٤) را روی $\mathbf{Z}$ بدست میآوریم :

$$R(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y})\cdot\mathbf{Z}=[\nabla_{\mathbf{x}}\ ,\ \nabla_{\mathbf{y}}]\cdot\mathbf{Z}-\nabla_{[\mathbf{x},\mathbf{y}]}\cdot\mathbf{Z}$$
$$=\nabla_{\mathbf{x}}(\nabla_{\mathbf{y}}\cdot\mathbf{Z})-\nabla_{\mathbf{y}}(\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{Z})-\nabla_{[\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j]}\cdot\mathbf{Z}$$
$$=\nabla_{\mathbf{e}_i}(\nabla_{\mathbf{e}_j}\cdot\mathbf{e}_k)-\nabla_{\mathbf{e}_j}(\nabla_{\mathbf{e}_i}\cdot\mathbf{e}_k)-0$$
$$=\nabla_{\mathbf{e}_i}(\Gamma^l_{jk}\mathbf{e}_l)-\nabla_{\mathbf{e}_j}(\Gamma^l_{ik}\mathbf{e}_l)=\Gamma^l_{jk}(\nabla_{\mathbf{e}_i}\cdot\mathbf{e}_l)$$
$$+(\mathbf{e}_i\Gamma^l_{jk})\mathbf{e}_l-\Gamma^l_{ik}(\nabla_{\mathbf{e}_j}\cdot\mathbf{e}_l)-(\mathbf{e}_j\Gamma^l_{ik})\mathbf{e}_l$$
$$=\Gamma^l_{jk}\Gamma^m_{ik}\mathbf{e}_m+\partial_i(\Gamma^l_{jk})\mathbf{e}_l-\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{jl}\mathbf{e}_m$$
$$-\partial_j(\Gamma^l_{ik})\mathbf{e}_l=(\Gamma^l_{jk}\Gamma^m_{li}-\Gamma^l_{ki}\Gamma^m_{lj}+\partial_i\Gamma^m_{jk}$$
$$-\partial_j\Gamma^m_{ik})\mathbf{e}_m=(\partial_i\Gamma^m_{jk}-\partial_j\Gamma^m_{ik}+\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{jk}$$
$$-\Gamma^m_{jl}\Gamma^l_{ik})\mathbf{e}_m$$

بطوریکه دیده میشود مقدار داخل پرانتز همان مقدار رابطهٔ (٥-٤٠) است .

پس بطور کلی اگر $\mathbf{X}_1$ و $\mathbf{X}_2$ و ... و $\mathbf{X}_m$ مبنائی برای میدانهای برداری در مجاور یک نقطه باشد یعنی اگر بتوانیم بنویسیم :

$$\mathbf{X} = \sum_i f_i X_i \qquad (f_i \text{ عدد وار})$$

توابع Γ_{ij}^k و T_{ij}^k و R_{lij}^k را میتوانیم با فورمولهای زیر تعریف کنیم :

$$\nabla_{\mathbf{x}_i} \cdot (\mathbf{X}_j) = \Gamma_{ij}^k \mathbf{X}_k \tag{۴۷—۲۰}$$

$$T(\mathbf{X}_i\ ,\ \mathbf{X}_j) = T_{ij}^k \mathbf{X}_k \tag{۴۷—۲۱}$$

$$R(\mathbf{X}_i\ ,\ \mathbf{X}_j) \cdot \mathbf{X}_l = R_{lij}^k \mathbf{X}_k \tag{۴۷—۲۲}$$

۴۷-۱- **معادلات ساختمانی کارتان** ـ اگر ω^i و ω_j^i $(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m)$ نمایش یکصورتی هائی در مجاورت یکنقطهٔ N از سطحی باشند که با فورمولهای زیر مشخص شده‌اند :

$$\omega^i(\mathbf{X}_j) = \delta_j^i = (\omega^i\ ,\ \mathbf{X}_j) \tag{۴۷—۲۳}$$

$$\omega_j^i = \Gamma_{kj}^i \omega^k \tag{۴۷—۲۴}$$

بدیهی است صورتهای ω_j^i توابع Γ_{kj}^i را روی سطح مفروض مشخص خواهند ساخت. قضایای زیر که به معادلات ساختمانی (۱) کارتان موسومند نشان میدهند که صورتهای ω_j^i توسط پیچش و انحنای میدانهای تانسوری قابل بیانند :

قضیه ـ ثابت کنید :

$$d\omega^i = -\omega_l^i \wedge \omega^l + \frac{1}{2} T_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k \tag{۴۷—۲۵}$$

$$d\omega_l^i = -\omega_p^i \wedge \omega_l^p + \frac{1}{2} R_{ljk}^i \omega^j \wedge \omega^k \tag{۴۷—۲۶}$$

۱- The equations of structure

اثبات : طرفین (۴۷-۲۵) یک دو ـ صورتی روی سطح ما هستند. حال اثر طرفین این رابطه را برروی $(\mathbf{X}_j \ , \ \mathbf{X}_k)$ بدست میآوریم. فرض میکنیم :

$$[\mathbf{X}_j \ , \ \mathbf{X}_k] = C^i_{jk}\mathbf{X}_i \quad و \quad C^i_{jk} = -C^i_{kj}$$

باشد. از رابطهٔ (۴۵-۳۱) یعنی :

$$۲d\omega(\mathbf{X} \ , \ \mathbf{Y}) = \mathbf{X}\cdot\omega(\mathbf{Y}) - \mathbf{Y}\cdot\omega(\mathbf{X}) - \omega([\mathbf{X} \ , \ \mathbf{Y}])$$

استفاده میکنیم. پس طرف اول (۴۷-۲۵) خواهد شد :

$$d\omega^i(\mathbf{X}_j \ , \ \mathbf{X}_k) = \frac{۱}{۲}\Big\{\mathbf{X}_j\cdot\omega^i(\mathbf{X}_k) - \mathbf{X}_k\cdot\omega^i(\mathbf{X}_j)$$

$$-\omega^i[\mathbf{X}_j \ , \ \mathbf{X}_k]\Big\} = \frac{۱}{۲}\Big\{\mathbf{X}_j\delta^i_k - \mathbf{X}_k\delta^i_j$$

$$-\omega^i(C^p_{jk}\mathbf{X}_p)\Big\} = \frac{۱}{۲}\Big\{0 - 0 - C^p_{jk}\omega^i(\mathbf{X}_p)\Big\}$$

$$= -\frac{۱}{۲}C^p_{jk}\delta^i_p = -\frac{۱}{۲}C^i_{jk} \qquad (۴۷-۲۷)$$

طرف دوم آن خواهد شد :

$$-(\omega^i_p \wedge \omega^p)(\mathbf{X}_j \ , \ \mathbf{X}_k) + \frac{۱}{۲}T^i_{rs}(\omega^r \wedge \omega^s)(\mathbf{X}_j \ , \ \mathbf{X}_k) \qquad (۴۷-۲۸)$$

$$= -\frac{۱}{۲}\Big\{\omega^i_p(\mathbf{X}_j)\,\omega^p(\mathbf{X}_k) - \omega^i_p(\mathbf{X}_k)\omega^p(\mathbf{X}_j)\Big\}$$

$$+\frac{۱}{۴}T^i_{rs}\Big\{\omega^r(\mathbf{X}_j)\omega^s(\mathbf{X}_k) - \omega^r(\mathbf{X}_k)\omega^s(\mathbf{X}_j)\Big\}$$

$$= -\frac{۱}{۲}\Big\{\Gamma^i_{qp}\omega^q(\mathbf{X}_j)\omega^p(\mathbf{X}_k) - \Gamma^i_{qp}\omega^q(\mathbf{X}_k)\omega^p(\mathbf{X}_j)\Big\}$$

$$+\frac{۱}{۴}T^i_{rs}(\delta^r_j\,\delta^s_k - \delta^r_k\,\delta^s_j) = -\frac{۱}{۲}(\Gamma^i_{jp}\,\delta^p_k - \Gamma^i_{kp}\,\delta^p_j)$$

$$+\frac{۱}{۴}(T^i_{jk} - T^i_{kj}) = -\frac{۱}{۲}(\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj})$$

$$+\frac{۱}{۴}(T^i_{jk} - T^i_{kj})$$

اما از طرفی میدانیم :

$$T(\mathbf{X}_j\ ,\ \mathbf{X}_k)=\nabla_{\mathbf{x}_j}(\mathbf{X}_k)-\nabla_{\mathbf{x}_k}(\mathbf{X}_j)-[\mathbf{X}_j\ ,\ \mathbf{X}_k] \tag{۴۷-۲۹}$$
$$=(\Gamma^i_{jk}-\Gamma^i_{kj}-C^i_{jk})\mathbf{X}_i$$

و یا :

$$T^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}-\Gamma^i_{kj}-C^i_{jk} \tag{۴۷-۳۰}$$

پس رابطهٔ (۴۷-۲۸) یعنی طرف دوم رابطهٔ (۴۷-۲۵) بصورت زیر در میآید :

$$-(\omega^i_p\wedge\omega^p)(\mathbf{X}_j\ ,\ \mathbf{X}_k)+\frac{۱}{۲}T^i_{rs}(\omega^r\wedge\omega^s)(\mathbf{X}_j\ ,\ \mathbf{X}_k) \tag{۴۷-۳۱}$$
$$=-\frac{۱}{۲}\Gamma^i_{jk}+\frac{۱}{۲}\Gamma^i_{kj}+\frac{۱}{۴}(\Gamma^i_{jk}-\Gamma^i_{kj}-C^i_{jk})$$
$$-\frac{۱}{۴}(\Gamma^i_{kj}-\Gamma^i_{jk}-C^i_{kj})=-\frac{۱}{۲}C^i_{jk}$$

از مقایسهٔ (۴۷-۲۷) و (۴۷-۳۱) حکم (۴۷-۲۵) ثابت میشود .

همینطور اگر طرف اول رابطهٔ (۴۷-۲۶) را برروی $(\mathbf{X}_j\ ,\ \mathbf{X}_k)$ اثر دهیم خواهیم داشت :

$$d\omega^i_l(\mathbf{X}_j\ ,\ \mathbf{X}_k)=d(\Gamma^i_{lm}\omega^m)\cdot(\mathbf{X}_j\ ,\ \mathbf{X}_k) \tag{۴۷-۳۲}$$
$$=(d\Gamma^i_{lm})\omega^m\cdot(\mathbf{X}_j\ ,\ \mathbf{X}_k)+\Gamma^i_{lm}d\omega^m(\mathbf{X}_j\ ,\ \mathbf{X}_k)$$
$$=(\partial_r\Gamma^i_{lm}\omega^r\wedge\omega^m)\cdot(\mathbf{X}_j\ ,\ \mathbf{X}_k)+\Gamma^i_{lm}(-\frac{۱}{۲}C^m_{jk})$$
$$=\frac{۱}{۲}\mathbf{X}_r\Gamma^i_{lm}(\delta^r_j\delta^m_k-\delta^r_k\delta^m_j)+\Gamma^i_{lm}(-\frac{۱}{۲}C^m_{jk})$$
$$=\frac{۱}{۲}\mathbf{X}_j\Gamma^i_{lk}-\frac{۱}{۲}\mathbf{X}_k\Gamma^i_{lj}-\frac{۱}{۲}\Gamma^i_{lm}C^m_{jk}$$
$$=\frac{۱}{۲}(\mathbf{X}_j\Gamma^i_{lk}-\mathbf{X}_k\Gamma^i_{lj}-\Gamma^i_{lm}C^m_{jk})$$

حال اثر جملهٔ دوم طرف دوم را برروی $(\mathbf{X}_j\ ,\ \mathbf{X}_k)$ بدست میآوریم :

$$(-\omega^i_p \wedge \omega^p_l)(\mathbf{X}_j \ , \ \mathbf{X}_k) \tag{۴۷—۳۳}$$

$$= -(\Gamma^i_{pn}\omega^n \wedge \Gamma^p_{lr}\omega^r)\cdot(\mathbf{X}_j \ , \ \mathbf{X}_k)$$

$$= -\frac{۱}{۲}\Gamma^i_{pn}\Gamma^p_{lr}(\delta^n_j\delta^r_k - \delta^n_k\delta^r_j)$$

$$= -\frac{۱}{۲}(\Gamma^i_{pj}\Gamma^p_{lk} - \Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{lj})$$

اثر جملهٔ دوم طرف دوم برروی $(\mathbf{X}_j \ , \ \mathbf{X}_k)$ خواهد شد :

$$\frac{۱}{۲}R^i_{lrs}(\omega^r \wedge \omega^s)(\mathbf{X}_j \ , \ \mathbf{X}_k) \tag{۴۷—۳۴}$$

$$= \frac{۱}{۴}(R^i_{ljk} - R^i_{lkj}) = \frac{۱}{۲}R^i_{ljk}$$

برای محاسبهٔ R ، اثر طرفین رابطهٔ :

$$R(\mathbf{X}_j \ , \ \mathbf{X}_k) = [\nabla_{\mathbf{x}_j} \ , \ \nabla_{\mathbf{x}_k}] - \nabla_{[\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k]} \tag{۴۷—۳۵}$$

را برروی $\mathbf{X}_i$ بدست میآوریم :

$$R(\mathbf{X}_j \ , \ \mathbf{X}_k)\cdot\mathbf{X}_i = [\nabla_{\mathbf{x}_j} \ , \ \nabla_{\mathbf{x}_k}]\cdot\mathbf{X}_i - \nabla_{[\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k]}\cdot\mathbf{X}_i \tag{۴۷—۳۶}$$

$$= \nabla_{\mathbf{x}_j}(\nabla_{\mathbf{x}_k}\cdot\mathbf{X}_i) - \nabla_{\mathbf{x}_k}(\nabla_{\mathbf{x}_j}\cdot\mathbf{X}_i) - \nabla_{C^m_{jk}\mathbf{x}_m}\cdot\mathbf{X}_i$$

$$= \nabla_{\mathbf{x}_j}(\Gamma^m_{ki}\mathbf{X}_m) - \nabla_{\mathbf{x}_k}(\Gamma^m_{ji}\mathbf{X}_m) - C^m_{jk}(\Gamma^n_{mi}\mathbf{X}_n)$$

$$= \Gamma^m_{ki}(\nabla_{\mathbf{x}_j}\cdot\mathbf{X}_m) + (\mathbf{X}_j\Gamma^m_{ki})\mathbf{X}_m - \Gamma^m_{ji}\nabla_{\mathbf{x}_k}\cdot\mathbf{X}_m$$

$$-(\mathbf{X}_k\Gamma^m_{ji})\mathbf{X}_m - C^m_{jk}\Gamma^n_{mi}\mathbf{X}_n = \Gamma^m_{ki}\Gamma^n_{jm}\mathbf{X}_n + \mathbf{X}_j\Gamma^n_{ki}\mathbf{X}_n$$

$$-\Gamma^m_{ji}\Gamma^n_{km}\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_k\Gamma^n_{ji}\mathbf{X}_n - C^m_{jk}\Gamma^n_{mi}\mathbf{X}_n$$

لذا :

$$R^n_{ijk}=\Gamma^m_{ki}\Gamma^n_{jm}+X_j\Gamma^n_{ki}-\Gamma^m_{ji}\Gamma^n_{km}-X_k\Gamma^n_{ji}-C^m_{jk}\Gamma^n_{mi} \quad (۴۷-۳۷)$$

حال اگر (۳۷-۴۷) را در (۳۴-۴۷) بگذاریم خواهیم داشت :

$$\frac{۱}{۲}R^i_{lrs}(\omega^r\wedge\omega^s)\cdot(X_j\ ,\ X_k)=\frac{۱}{۲}R^i_{ljk} \quad (۴۷-۳۸)$$

$$=\frac{۱}{۲}\Gamma^i_{pj}\Gamma^p_{lk}-\frac{۱}{۲}\Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{lk}+\frac{۱}{۲}X_j\Gamma^i_{kl}-\frac{۱}{۲}X_k\Gamma^i_{lj}$$

از جمع طرفین دوم (۳۳-۴۷) و (۳۸-۴۷) ، طرف دوم (۳۲-۴۷) حاصل یعنی حکم دوم نیز ثابت میشود .

ملاحظه میکنیم که ما در واقع در اینجا بجای $\frac{\partial}{\partial x^i}$ و dx^i بترتیب X_i و ω^i که یکصورتی است گرفته‌ایم . و می‌بینیم که اگر در $\omega^i_j=\Gamma^i_{kj}\omega^k$ ، i و j ثابت فرض شوند این عبارت خود یک یکصورتی است .

اتحادهای بیانکی : با استفاده از (۱۱-۴۷) و (۱۲-۴۷) و (۱۳-۴۷) برای هرمیدان برداری X و Y و Z واقع در روی B (مانیفلدی که ساختمان آن ، ساختمان گروه - لی است) داریم :

$$(\nabla_z\cdot T)(X\ ,\ Y)=\nabla_z\cdot T(X\ ,\ Y)-T(\nabla_z\cdot X\ ,\ Y)-T(X\ ,\ \nabla_z\cdot Y) \quad (۴۷-۳۹)$$

و

$$(\nabla_z\cdot R)(X\ ,\ Y)=[\nabla_z\ ,\ R(X\ ,\ Y)]-R(\nabla_z\cdot X\ ,\ Y)-R(X\ ,\ \nabla_z\cdot Y) \quad (۴۷-۴۰)$$

حال میخواهیم بعضی اتحاد های کلاسیک مربوط به T و R ومشتقات همگرد آنها را شرح دهیم .

بعنوان قرارداد ، منظورما از : $\mathfrak{S}K(X\ ,\ Y\ ,\ Z)$ درقضایای زیر ، مجموع دوره‌ای [1] $K(X\ ,\ Y\ ,\ Z)$ یعنی عبارت زیر است :

1- Cyclic sum .

$$\mathfrak{S}\mathbf{K}(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y}\ ,\ \mathbf{Z}) = \mathbf{K}(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y}\ ,\ \mathbf{Z}) + \mathbf{K}(\mathbf{Y}\ ,\ \mathbf{Z}\ ,\ \mathbf{X}) + \mathbf{K}(\mathbf{Z}\ ,\ \mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y})$$

قضیهٔ ۱ـ بازاء هرمیدان برداری $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ و $\mathbf{Z}$ داریم :

$$\mathfrak{S}\left\{R(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y})\cdot\mathbf{Z}\right\} = \mathfrak{S}\left\{T(T(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y})\ ,\ \mathbf{Z})\right\} + \mathfrak{S}\left\{(\nabla_{\mathbf{x}}T)\ (\mathbf{Y}\ ,\ \mathbf{Z})\right\} \tag{٤٧—٤١}$$

و بخصوص وقتی تانسور پیچش صفر باشد رابطهٔ فوق بصورت زیر درمیآید :

$$\mathfrak{S}\left\{R(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y})\cdot\mathbf{Z}\right\} = 0 \tag{٤٧—٤٢}$$

اثبات : با استفاده از (۱۲-٤٧) و توجه به (۱٤-٤٧) داریم :

$$T(T(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y})\ ,\ \mathbf{Z}) = T(\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{Y}\ ,\ \mathbf{Z}) + T(\mathbf{Z}\ ,\ \nabla_{\mathbf{y}}\cdot\mathbf{X}) - T([\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y}]\ ,\ \mathbf{Z}) \tag{٤٧—٤٣}$$

و با رعایت (۱۱-٤٧) داریم :

$$\mathfrak{S}\left\{T(T(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y})\ ,\ \mathbf{Z})\right\} = -\mathfrak{S}\left\{(\nabla_{\mathbf{z}}\cdot T)\ (\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y})\right\} + \mathfrak{S}\left\{\nabla_{\mathbf{z}}\cdot T(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y}) - T([\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y}]\ ,\ \mathbf{Z})\right\}$$

جملهٔ دوم طرف دوم برابر است با :

$$\mathfrak{S}\left\{\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\nabla_{\mathbf{y}}\cdot\mathbf{Z} - \nabla_{\mathbf{y}}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{Z} - \nabla_{[\mathbf{x},\mathbf{y}]}\cdot\mathbf{Z}\right\} + \mathfrak{S}\left\{[[\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y}]\ ,\ \mathbf{Z}]\right\} = \mathfrak{S}\left\{R(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y})\cdot\mathbf{Z}\right\}$$

لذا بموجب اتحاد ژاکوبی داریم : $\mathfrak{S}\left\{[[\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y}]\ ,\ \mathbf{Z}]\right\} = 0$ یعنی حکم ثابت است .

قضیهٔ ۲ـ برای هرمیدان برداری $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ و $\mathbf{Z}$ داریم :

$$\mathfrak{S}\Big\{(\nabla_{\mathbf{z}}\cdot R)(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})\Big\}+\mathfrak{S}\Big\{R(T(\mathbf{X},\ \mathbf{Y}),\ \mathbf{Z})\Big\}=0 \tag{۴۷-۴۴}$$

و بخصوص اگر $T=0$ باشد داریم :

$$\mathfrak{S}\Big\{(\nabla_{\mathbf{z}}\cdot R)(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})\Big\}=0 \quad \text{(اتحاد بیانکی)} \tag{۴۷-۴۵}$$

اثبات : با رعایت (۴۷-۱۱) و (۴۷-۱۲) داریم :

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}\Big\{R(T(\mathbf{X},\ \mathbf{Y}),\ \mathbf{Z})\Big\}&=\mathfrak{S}\Big\{R(\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{Y},\ \mathbf{Z})\\ &+R(\mathbf{Z},\ \nabla_{\mathbf{y}}\cdot\mathbf{X})-R([\mathbf{X},\ \mathbf{Y}],\ \mathbf{Z})\Big\}\\ &=\mathfrak{S}\Big\{R(\nabla_{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{X},\ \mathbf{Y})+R(\mathbf{X},\ \nabla_{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{Y})\Big\}\\ &-\mathfrak{S}\Big\{R([\mathbf{X},\ \mathbf{Y}],\ \mathbf{Z})\Big\}=-\mathfrak{S}\Big\{(\nabla_{\mathbf{z}}\cdot R)(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})\Big\}\\ &+\mathfrak{S}\Big\{[\nabla_{\mathbf{z}},\ R(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})]-R([\mathbf{X},\ \mathbf{Y}],\ \mathbf{Z})\Big\}\end{aligned} \tag{۴۷-۴۶}$$

اما رابطهٔ (۴۷-۱۳) بما میدهد :

$$\begin{aligned}&[\nabla_{\mathbf{z}},\ R(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})]-R([\mathbf{X},\ \mathbf{Y}],\ \mathbf{Z})\\ &=-\nabla_{[\mathbf{x},\mathbf{y}]}\cdot\nabla_{\mathbf{z}}+\nabla_{\mathbf{z}}\cdot\nabla_{[\mathbf{x},\mathbf{y}]}+\nabla_{[[\mathbf{x},\mathbf{y}],\mathbf{z}]}\\ &+\nabla_{\mathbf{z}}\cdot[\nabla_{\mathbf{x}},\ \nabla_{\mathbf{y}}]-\nabla_{\mathbf{z}}\cdot\nabla_{[\mathbf{x},\mathbf{y}]}-[\nabla_{\mathbf{x}},\ \nabla_{\mathbf{y}}]\cdot\nabla_{\mathbf{z}}\\ &+\nabla_{[\mathbf{x},\mathbf{y}]}\cdot\nabla_{\mathbf{z}}\end{aligned} \tag{۴۷-۴۷}$$

و بموجب اتحادهای ژاکوبی ، یعنی :

$$\mathfrak{S}\Big\{[[\mathbf{X},\ \mathbf{Y}],\ \mathbf{Z}]\Big\}=0$$

و :

$$\mathfrak{S}\Big\{[\nabla_{\mathbf{z}},\ [\nabla_{\mathbf{x}},\ \nabla_{\mathbf{y}}]]\Big\}=0$$

مجموع دوره‌ای (۴۷-۴۷) نیز مساوی صفر و در نتیجه حکم ثابت است .

تبصره ـ تعریف ارتباط خطی برحسب $\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{Y}$ اول دفعه توسط J.L.Koszul صورت گرفته است . اگر ارتباط خطی Γ برحسب $\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{Y}$ مفروض باشد بآسانی دیده میشود که عبارت $\nabla'_{\mathbf{y}}\cdot\mathbf{X}=\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{Y}-[\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y}]$ ارتباط دیگر Γ' را تعریف میکند . و اگر Γ با عبارت Γ^k_{ij} تعریف شده باشد Γ' با عبارت : $\Gamma'^k_{ij}=\Gamma^k_{ji}$ تعریف خواهد شد . عبارت $\frac{1}{2}(\Gamma+\Gamma')$ نیز ارتباطی است خطی که با عبارت : $\frac{1}{2}(\Gamma^k_{ij}+\Gamma^k_{ji})$ که میدان پیچش تانسوری آن صفر میباشد تعریف میشود .

۴۸- مشتق ـ لی یک ارتباط : میدانیم که :

$$(\underset{\mathbf{X}}{L}\nabla_i-\nabla_i\underset{\mathbf{X}}{L})f=\underset{\mathbf{X}}{L}(\nabla_i f)-\nabla_i(\underset{\mathbf{X}}{L}f) \tag{۴۸-۱}$$

$$=\underset{\mathbf{X}}{L}(\partial_i f)-\nabla_i(X^j\partial_j f)=X^j\partial_j(\partial_i f)-X^j\partial_i(\partial_j f)$$

$$=X^j(\partial_j\partial_i f-\partial_i\partial_j f)=0$$

یعنی اثر کارگزار $(\underset{\mathbf{X}}{L}\nabla_i-\nabla_i\underset{\mathbf{X}}{L})$ روی یک تابع صفر است . حال میخواهیم اثر همین کارگزار را روی یک میدان برداری $\mathbf{Z}$ تعیین کنیم : فرض میکنیم $\mathbf{Y}$ بردار ناهمگرد دلخواهی باشد . پس داریم :

$$Y^i(\underset{\mathbf{X}}{L}\nabla-\nabla\underset{\mathbf{X}}{L})\cdot\mathbf{Z}=Y^i(\underset{\mathbf{X}}{L}(\nabla_i\cdot\mathbf{Z}))-Y^i\nabla_i(\underset{\mathbf{X}}{L}\cdot\mathbf{Z}) \tag{۴۸-۲}$$

$$=\left\{\underset{\mathbf{X}}{L}(Y^i\nabla_i\cdot\mathbf{Z})-(\nabla_i\cdot\mathbf{Z})(\underset{\mathbf{X}}{L}\cdot Y^i)\right\}-Y^i\nabla_i(\underset{\mathbf{X}}{L}\cdot\mathbf{Z})$$

$$=\underset{\mathbf{X}}{L}(\nabla_{\mathbf{y}}\cdot\mathbf{Z})-(\underset{\mathbf{X}}{L}Y^i)(\nabla_i\cdot\mathbf{Z})-\nabla_{\mathbf{y}}(\underset{\mathbf{X}}{L}\cdot\mathbf{Z})$$

$$=\underset{\mathbf{X}}{L}(\nabla_{\mathbf{y}}\cdot\mathbf{Z})-\nabla_{\mathbf{y}}(\underset{\mathbf{X}}{L}\cdot\mathbf{Z})-[\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y}]^i\nabla_i\cdot\mathbf{Z}$$

$$=\underset{\mathbf{X}}{L}(\nabla_{\mathbf{y}}\cdot\mathbf{Z})-\nabla_{\mathbf{y}}(\underset{\mathbf{X}}{L}\cdot\mathbf{Z})-\nabla_{[\mathbf{x},\mathbf{y}]}\cdot\mathbf{Z}$$

$$=\left\{[\underset{\mathbf{X}}{L}\ ,\ \nabla_{\mathbf{y}}]-\nabla_{[\mathbf{x},\mathbf{y}]}\right\}\mathbf{Z}$$

عبارت‌داخل ابرو در طرف دوم‌تساوی‌اخیر، به «مشتق - لی ارتباط» موسوم است.
از اینجا تعریف زیر پیدا میشود : **اگر مشتق - لی ارتباطی نسبت به بردار X صفر باشد X را یک تبدیل بینهایت کوچک آفین مینامیم.** یعنی اگر X یک تبدیل بینهایت کوچک آفین باشد ∇_i و $\underset{Y}{L}$ بازاء جمیع مقادیر Y، مستقل از ترتیب خواهند بود.

مسئلهٔ ۱ـ با استفاده از اتحاد ژاکوبی و تعریف مشتق - لی تساوی زیر را ثابت کنید :

$$[\underset{X}{L}\,,\,\underset{Y}{L}]=\underset{[X,Y]}{L} \qquad (۴۸-۳)$$

حل - با توجه به تعریف مشتق - لی یعنی :

$$\underset{X}{L}\cdot Y=[X\,,\,Y] \quad \text{و} \quad \underset{[X,Y]}{L}\cdot Z=[[X\,,\,Y]\,,\,Z]$$

میتوانیم اتحاد ژاکوبی یعنی اتحاد :

$$[[X\,,\,Y]\,,\,Z]+[[Y\,,\,Z]\,,\,X]+[[Z\,,\,X]\,,\,Y]\equiv 0$$

را بصورت زیر بنویسیم :

$$[[X\,,\,Y]\,,\,Z]-[X\,,\,[Y\,,\,Z]]-[Y\,,\,[Z\,,\,X]]\equiv 0$$

و یا :

$$\underset{[X,Y]}{L}\cdot Z=\underset{X}{L}\cdot[Y\,,\,Z]+\underset{Y}{L}\cdot[Z\,,\,X]$$

$$\equiv \underset{X}{L}(\underset{Y}{L}\cdot Z)-\underset{Y}{L}(\underset{X}{L}\cdot Z)$$

و یا :

$$\underset{[X,Y]}{L}\cdot Z=[\underset{X}{L}\,,\,\underset{Y}{L}]\cdot Z$$

و یا :

$$L_{[X,Y]}=[L_X \, , \, L_Y]$$

تبصره ـ میتوانستیم از راه دخالت دادن مؤلفه های بردارها (یعنی دستگاه مختصات) نیز آن را ثابت کنیم . بدیهی است دراینحال برای اینکه ثابت کنیم (۳-۸ ٤) نقش یک کارگزار D را دارد ، باید اولاً ثابت کنیم که اگر **T** و **S** دوتانسور دلخواه باشند داریم :

$$D(\mathbf{T}\otimes\mathbf{S})=D\mathbf{T}\otimes\mathbf{S}+\mathbf{T}\otimes D\mathbf{S}$$

که اثبات این قسمت بسیار ساده است. ثانیاً اثر طرفین (۳-۸ ٤) ، هم روی یک تابع f و هم روی یک بردار دلخواه **Z** یکیست .

اما اثر طرف اول آن روی f خواهد بود :

$$[L_{\mathbf{X}} \, , \, L_{\mathbf{Y}}]f=L_{\mathbf{X}}(L_{\mathbf{Y}}f)-L_{\mathbf{Y}}(L_{\mathbf{X}}f)=L_{\mathbf{X}}(\mathbf{Y}f)-L_{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}f)$$

$$=\mathbf{X}\cdot(\mathbf{Y}f)-\mathbf{Y}(\mathbf{X}f)=\partial_i\,\partial_j\,f-\partial_j\,\partial_i\,f=0$$

و اثر طرف دوم آن روی f خواهد بود :

$$L_{[\mathbf{X},\mathbf{Y}]}\cdot f=[\mathbf{X} \, , \, \mathbf{Y}]f=\mathbf{X}(\mathbf{Y}f)-\mathbf{Y}(\mathbf{X}f)=0$$

حال اثر طرفین (۳-۸ ٤) را بر روی بردار **Z** درنظر میگیریم. فرض میکنیم $\mathbf{X}=X^i\partial_i$ و $\mathbf{Y}=Y^j\partial_j$ و $\mathbf{Z}=Z^k\partial_k$ باشد . اثر طرف اول (۳-۸ ٤) برروی **Z** خواهد بود :

$$\underset{X}{L}(\underset{Y}{L}\cdot Z)-\underset{Y}{L}(\underset{X}{L}\cdot Z)=\underset{X}{L}(Y^j\partial_j Z^k-Z^j\partial_j Y^k) \tag{٤٨-٤}$$
$$-\underset{Y}{L}(X^i\partial_i Z^k-Z^i\partial_i X^k)=\underset{X}{L}\cdot T^k-\underset{Y}{L}\cdot S^k$$
$$=\left\{X^i\partial_i T^k-T^i\partial_i X^k\right\}-\left\{Y^j\partial_j S^k-S^j\partial_j Y^k\right\}$$
$$=\left\{X^i(\partial_i Y^j\partial_j Z^k+Y^j\partial_i\partial_j Z^k-\partial_i Z^j\partial_j Y^k-Z^j\partial_i\partial_j X^k)\right.$$
$$\left.-(Y^j\partial_j Z^i-Z^j\partial_j Y^i)\partial_i X^k\right\}-\left\{Y^j(\partial_j X^i\partial_i Z^k\right.$$
$$+X^i\partial_j\partial_i Z^k-\partial_j Z^i\partial_i X^k-Z^i\partial_j\partial_i X^k)$$
$$\left.-(X^i\partial_i Z^j-Z^i\partial_i X^j)\partial_j Y^k\right\}=X^i\partial_i Y^j\partial_j Z^k$$
$$-Y^i\partial_i X^j\partial_j Z^k-Z^j\partial_j X^i\partial_i Y^k-X^i Z^j\partial_i\partial_j Y^k$$
$$+Z^j\partial_j Y^i\partial_i X^k+Z^j Y^i\partial_j\partial_i X^k$$

اگر اثر طرف دوم را هم برروی Z بدست آوریم داریم :

$$\underset{[X,Y]}{L}\cdot Z=(X^i\partial_i Y^j-Y^i\partial_i X^j)\partial_j Z^k \tag{٤٨-٥}$$
$$-Z^j\partial_j(X^i\partial_i Y^k-Y^i\partial_i X^k)=X^i\partial_i Y^j\partial_j Z^k$$
$$-Y^i\partial_i X^j\partial_j Z^k-Z^j\partial_j X^i\partial_i Y^k-Z^j X^i\partial_i\partial_j Y^k$$
$$+Z^j\partial_j Y^i\partial_i X^k+Z^j Y^i\partial_j\partial_i X^k$$

بطوریکه دیده میشود طرفهای دوم (٤-٤٨) و (٥-٤٨) مساویند و درنتیجه حکم ثابت است .

مسئلهٔ ۲- میخواهیم عبارت اتحاد ریچی یعنی : $(\lambda^i_{,rs}-\lambda^i_{,sr})$ را برحسب ارتباط ∇ بدست آوریم .

حل - اگر X و Y دوبردار ناهمگرد دلخواه باشند با توجه به روابط :

$$v\,\frac{du}{ds}=\frac{d}{ds}\,(uv)-u\,\frac{dv}{ds}$$

و :

$$\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{Y}=(Y^j_{,i})X^i$$

میتوانیم بنویسیم :

$$X^rY^s(\lambda^i_{,rs}-\lambda^i_{,sr})=(X^rY^s\lambda^i_{,rs}-X^rY^s\lambda^i_{,sr})\tag{۴۸–۶}$$

$$=Y^s(X^r\lambda^i_{,rs})-X^r(Y^s\lambda^i_{,sr})=Y^s\left\{(X^r\lambda^i_{,r})_{,s}-X^r_{,s}\,\lambda^i_{,r}\right\}$$

$$-X^r\left\{(Y^s\lambda^i_{,s})_{,r}-Y^s_{,r}\,\lambda^i_{,s})\right\}=Y^s(\lambda^i_{,r}X^r)_{,s}$$

$$-Y^sX^r_{,s}\,\lambda^i_{,r}-X^r(\lambda^i_{,s}Y^s)_{,r}+X^rY^s_{,r}\lambda^i_{,s}$$

$$=(\lambda^i_{,r}X^r)_{,s}Y^s-(\lambda^i_{,s}Y^s)_{,r}X^r-Y^rX^s_{,r}\lambda^i_{,s}+X^rY^s_{,r}\lambda^i_{,}$$

$$=\nabla_{\mathbf{y}}(\lambda^i_{,r}X^r)-\nabla_{\mathbf{x}}(\lambda^i_{,s}Y^s)-Y^r\lambda^i_{,s}\left\{\partial_rX^s\right.$$

$$\left.+\Gamma^s_{pr}X^p\right\}+X^r\lambda^i_{,s}\left\{\partial_rY^s+\Gamma^s_{pr}Y^p\right\}=\nabla_{\mathbf{y}}\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\lambda$$

$$-\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{y}}\boldsymbol{\lambda}+\lambda^i_{,s}(X^r\partial_rY^s-Y^r\partial_rX^s)$$

$$+\lambda^i_{,s}(X^rY^p\Gamma^s_{pr}-X^pY^r\Gamma^s_{pr})=\nabla_{\mathbf{y}}\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\boldsymbol{\lambda}$$

$$-\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{y}}\cdot\boldsymbol{\lambda}+\nabla_{[\mathbf{x},\mathbf{y}]}\cdot\boldsymbol{\lambda}+\lambda^i_{,s}X^rY^pT^s_{rp}$$

$$=-\left\{[\nabla_{\mathbf{x}}\;,\;\nabla_{\mathbf{y}}]-\nabla_{[\mathbf{x},\mathbf{y}]}\right\}\cdot\lambda+\nabla_{T(\mathbf{x},\mathbf{y})}\cdot\lambda$$

$$=\left\{-R(\mathbf{X}\;,\;\mathbf{Y})+\nabla_{T(\mathbf{x},\mathbf{y})}\right\}\cdot\lambda$$

تبصره ـ اگر $\nabla=\Gamma^l_{mn}$ و $\overline{\nabla}=\Gamma^l_{nm}$ باشد رابطهٔ (۲۸-۴۴) را بصورت زیر میتوانیم بنویسیم :

$$\underset{\mathbf{X}}{L}T^{ij}=X^p\nabla_pT^{ij}-T^{pj}\,\overline{\nabla}_pX^i-T^{ip}\,\overline{\nabla}_pY^j\tag{۴۸–۷}$$

نمایش ارتباط ریمانی توسط ∇

تعریف ۱ـ فرض میکنیم M یک مانیفلد دیفرانسیل پذیر باشد . یک **ساختمان شبه ریمانی** در روی M میدانی است تانسوری مانند g از نوع (۲ , ۰) که در شرایط زیر صدق میکند :

a— $g(X , Y)=g(Y , X)$ (X , Y بردارهائی‌ناهمگرد هستند)

b— بازاء هرنقطهٔ p از M ، g_p یک صورت دوخطی عادی[1] $M_p \times M_p$ است .

یک مانیفلد **شبه ریمانی** ، مانیفلدی است یکپارچه و دیفرانسیل پذیر که ساختمان شبه ریمانی داشته باشد. اگر بازاء هرنقطهٔ P از M ، g_p معین ومثبت باشد ، پیشوند «شبه» را حذف و از ساختمان مانیفلد ریمانی و ارتباط ریمانی (یا ارتباط لوی ـ چیویتا) صحبت میکنیم .

قضیهٔ ۱ـ در روی‌یک مانیفلد شبه ریمانی فقط و فقط یک‌ارتباط آفین موجود است که در دو شرط زیر صدق میکند :

i— تانسور پیچش صفر است .

ii— تغییرمکان ، حاصلضرب داخلی را در روی سطوح مماس حفظ میکند . بعبارت دیگر: تغییرمکان موازی ، یک تبدیل ایزومتریک‌خطی بین فضاهای مماس است .

اثبات ـ اگر X و Y و Z بردارهای ناهمگردی‌باشند (i) و (ii) بترتیب بصورتهای زیرنمایش داده میشوند:

$$(i)' \qquad \nabla_X \cdot Y - \nabla_Y \cdot X = [X , Y]$$

۱– Non degenerate

(ii)' $\nabla_{z}\cdot g=0$

حال اثر مشتق ∇_{z} را برروی میدان تانسوری $X\otimes Y\otimes Z$ تعیین میکنیم و درنظر میگیریم که این مشتق و ادغام مستقل از ترتیب هستند :

با توجه به (۱۱-٤۷) داریم :

$$(\nabla_{z}\cdot g)(\mathbf{X}, \mathbf{Y})=\nabla_{z}\cdot g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})-g(\nabla_{z}\cdot\mathbf{X}, \mathbf{Y})-g(\mathbf{X}, \nabla_{z}\cdot\mathbf{Y})=0 \quad (٤٨-٨)$$

و یا :

$$\nabla_{z}\cdot g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})=\mathbf{Z}\cdot g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})=g(\nabla_{z}\cdot\mathbf{X}, \mathbf{Y})+g(\mathbf{X}, \nabla_{z}\cdot\mathbf{Y}) \quad (٤٨-٩)$$

ویا با توجه به '(i) داریم :

$$\mathbf{Z}\cdot g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})=g((\nabla_{x}\cdot\mathbf{Z}+[\mathbf{Z}, \mathbf{X}]), \mathbf{Y})+g(\mathbf{X}, \nabla_{z}\cdot\mathbf{Y})=g(\nabla_{x}\cdot\mathbf{Z}, \mathbf{Y})+g([\mathbf{Z}, \mathbf{X}], \mathbf{Y})+g(\mathbf{X}, \nabla_{z}\cdot\mathbf{Y}) \quad (٤٨-١٠)$$

از جایگشت مستدیر $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ و $\mathbf{Z}$ داریم :

$$\mathbf{X}\cdot g(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})=g(\nabla_{y}\cdot\mathbf{X}, \mathbf{Z})+g([\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{Z})+g(\mathbf{Y}, \nabla_{x}\cdot\mathbf{Z}) \quad (٤٨-١١)$$

$$\mathbf{Y}\cdot g(\mathbf{Z}, \mathbf{X})=g(\nabla_{z}\cdot\mathbf{Y}, \mathbf{X})+g([\mathbf{Y}, \mathbf{Z}], \mathbf{X})+g(\mathbf{Z}, \nabla_{y}\cdot\mathbf{X}) \quad (٤٨-١٢)$$

حال اگر (٤٨-١١) را ازمجموع (٤٨-١٠) و (٤٨-١٢) کم کنیم خواهیم داشت :

$$2g(\mathbf{X}, \nabla_{z}\cdot\mathbf{Y})=\mathbf{Z}g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})+g(\mathbf{Z}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}])+\mathbf{Y}g(\mathbf{X}, \mathbf{Z})+g(\mathbf{Y}, [\mathbf{X}, \mathbf{Z}])-\mathbf{X}g(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})-g(\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]) \quad (٤٨-١٣)$$

این روابط نشان میدهد (بعلت عادی بودن g) که حداکثر یک ارتباط آفین وجود

دارد که در (i) و (ii) صدق میکند. از طرفی میتوانیم ارتباط آفین یعنی $\nabla_{\mathbf{Z}}\cdot\mathbf{Y}$ را توسط (۳-۱-۴۸) تعریف کنیم یعنی بگوئیم که اگر متریک ریمانی با $g(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y})$ نموده شده باشد ارتباط ریمانی $\nabla_{\mathbf{Z}}\cdot\mathbf{Y}$ منحصراً با رابطهٔ (۳-۱-۴۸) مشخص میشود و یک محاسبهٔ ساده نشان میدهد که اصولی که برای ارتباطات آفین ذکر کرده بودیم تماماً دراینجا صدق میکند. بالعکس اگر محاسبات فوق را بترتیب عکس انجام دهیم روابط '(i) و '(ii) از روی (۳-۱-۴۸) ثابت میشوند.

ارتباط ∇ که توسط (۳-۱-۴۸) داده شده به ارتباط شبه ریمانی (یا ریمانی) موسوم است. اگر M و میدان تانسوری g هردو تحلیلی باشند M یک **مانیفلد شبه ریمانی تحلیلی** نامیده میشود و دراینحال ارتباط شبه ریمانی تحلیلی است.

تعریف ۲ـ اگر $\mathbf{X}$ میدانی برداری در روی یک مانیفلد ریمانی یکپارچهٔ دیفرانسیل پذیر M باشد وقتی آنرا میدان برداری کیلینگ [۱] مینامند که مشتق ـ لی میدان تانسورمتریک، نسبت بآن صفر باشد، یعنی :

$$\underset{\mathbf{X}}{L}\cdot g(\mathbf{Y}\ ,\ \mathbf{Z})=0 \qquad (۴۸-۱۴)$$

اما :

$$\underset{\mathbf{X}}{L}\cdot g(\mathbf{Y}\ ,\ \mathbf{Z})=\mathbf{X}\cdot g(\mathbf{Y}\ ,\ \mathbf{Z})=(\underset{\mathbf{X}}{L}\cdot g)(\mathbf{Y}\ ,\ \mathbf{Z}) +g(\underset{\mathbf{X}}{L}\cdot\mathbf{Y}\ ,\ \mathbf{Z})+g(\mathbf{Y}\ ,\ \underset{\mathbf{X}}{L}\cdot\mathbf{Z}) \qquad (۴۸-۱۵)$$

و یا :

$$\mathbf{X}\cdot g(\mathbf{Y}\ ,\ \mathbf{Z})=g(\underset{\mathbf{X}}{L}\cdot\mathbf{Y}\ ,\ \mathbf{Z})+g(\mathbf{Y}\ ,\ \underset{\mathbf{X}}{L}\cdot\mathbf{Z}) \qquad (۴۸-۱۶)$$

و یا بطور کلی وقتی $\mathbf{X}$ را میدان برداری کیلینگ گویند که در رابطهٔ زیر صدق کند :

۱- Killing vector field

$$\mathbf{X}\cdot g(\mathbf{Y}\ ,\ \mathbf{Z})=g([\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y}]\ ,\ \mathbf{Z})+g(\mathbf{Y}\ ,\ [\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Z}]) \qquad (٤٨-١٧)$$

تبصره - دیده میشود که با توجه به (٤٤-٣٠) این تعریف و تعریفی که در (٢٩ §) برای میدان برداری کیلینگ کرده‌ایم یکی هستند .

قضیهٔ ۲- اگر $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ میدانهای برداری کیلینگ باشند $[\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y}]$ نیزیک میدان برداری کیلینگ خواهد بود .

$$\underset{\mathbf{X}}{L}\cdot g=0 \quad \Longrightarrow \quad \text{یا} \quad \mathbf{X}\cdot g=0$$

مطابق فرض باید داشته باشیم :

$$\underset{\mathbf{Y}}{L}\cdot g=0 \qquad \text{یا} \quad \mathbf{Y}\cdot g=0$$

اما طبق تعریف مشتق - لی داریم :

$$\underset{[\mathbf{X},\mathbf{Y}]}{L}\cdot g=[\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y}]\cdot g=\mathbf{X}(\mathbf{Y}g)-\mathbf{Y}(\mathbf{X}g)=0 \qquad (٤٨-١٨)$$

یعنی حکم ثابت است .

تعریف ۳- کارگزاری‌را وقتی آندومورفیسم[1] نامیم که اگر برعددواری اثر کند آنرا به **صفر** و اگر بر برداری اثر کند آنرا به **بردار** تبدیل نماید (یعنی اندومورفیسم مشتق است ولی مشتق اندومورفیسم نیست) .

مثلاً کارگزار :

$$A_{\mathbf{x}}=\underset{\mathbf{X}}{L}-\nabla_{\mathbf{x}} \qquad (٤٨-١٩)$$

یک اندومورفیسم است. زیرا :

۱- Endomorphism

$$A_{\mathbf{x}} \cdot f = (\underset{\mathbf{X}}{L} - \nabla_{\mathbf{x}})f = \mathbf{X}f - \mathbf{X}f = o$$

و :

$$A_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{Y} = (\underset{\mathbf{X}}{L} - \nabla_{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{Y} = \underset{\mathbf{X}}{L} \cdot \mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{Y}$$

از طرفی با توجه به قضیهٔ لیشنروویچ داریم :

$$\underset{\mathbf{X}}{L} \cdot \mathbf{Y} = [\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y}]^i = X^j \partial_j Y^i - Y^j \partial_j X^i \tag{۴۸-۲۰}$$

$$= X^j \nabla_j Y^i - Y^j \overline{\nabla}_j X^i = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{Y} - \overline{\nabla}_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{X}$$

از نقل جملهٔ اول طرف دوم ، بطرف دوم داریم :

$$\underset{\mathbf{X}}{L} \cdot - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{Y} = - \overline{\nabla}_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{X}$$

بنابراین :

$$(\underset{\mathbf{X}}{L} - \nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{Y} = - \overline{\nabla}_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{X} = A_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{Y}$$

قضیهٔ ۳ـ اگر $\mathbf{X}$ میدان برداری کیلینگ و g متریک باشد ، کارگزار $A_{\mathbf{x}}$ وقتی قرینهٔ چپ است که داشته باشیم :

$$g(A_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{Y}\ ,\ \mathbf{Z}) + g(\mathbf{Y}\ ,\ A_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{Z}) = o \tag{۴۸-۲۱}$$

اثبات ـ کافیست دراین رابطه بجای $A_{\mathbf{x}}$ مقدارش را از (۴۸-۱۹) بگذاریم و عبارت حاصل را بسط داده بجای $g(\mathbf{X}\ ,\ \nabla_{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{Y})$ مقدارش را از (۴۸-۱۳) قرار دهیم تا برابطهٔ مسلم (۴۸-۱۷) برسیم .

قضیهٔ ۴ـ اگر $A_{\mathbf{x}}$ ($\mathbf{X}$ بردار کیلینگ)قرینهٔچپ باشد بازاء هربردار ناهمگرد $\mathbf{Y}$ کارگزار $\nabla_{\mathbf{y}} \cdot A_{\mathbf{x}}$ نیز قرینهٔ چپ است .

اثبات ـ از (۴۸-۲۱) نسبت به $\mathbf{V}$ مشتق ـ همگرد میگیریم :

$$\nabla_{\mathbf{v}} g\cdot(A_{\mathbf{x}}\cdot \mathbf{Y}\ ,\ \mathbf{Z})+g(\nabla_{\mathbf{v}}\cdot(A_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{Y})\ ,\ \mathbf{Z}) +g(A_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{Y}\ ,\ \nabla_{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{Z})+\nabla_{\mathbf{v}} g\cdot(\mathbf{Y}\ ,\ A_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{Z}) +g(\nabla_{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{Y}\ ,\ A_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{Z})+g(\mathbf{Y}\ ,\ \nabla_{\mathbf{v}}\cdot(A_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{Z}))=0 \quad (۴۸-۲۲)$$

اما طبق قضیهٔ ۱ جملات اول و چهارم (۴۸-۲۲) برابر صفرند و لذا داریم :

$$g((\nabla_{\mathbf{v}}\cdot A_{\mathbf{x}})\mathbf{Y}\ ,\ \mathbf{Z})+g(A_{\mathbf{x}}\cdot(\nabla_{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{Y})\ ,\ \mathbf{Z}) +g(A_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{Y}\ ,\ \nabla_{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{Z})+g(\nabla_{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{Y}\ ,\ A_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{Z}) +g(\mathbf{Y}\ ,\ (\nabla_{\mathbf{v}}\cdot A_{\mathbf{x}})\mathbf{Z})+g(\mathbf{Y}\ ,\ A_{\mathbf{x}}\cdot(\nabla_{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{Z}))=0$$

اما طبق (۴۸-۲۱) داریم :

$$g(A_{\mathbf{x}}\cdot(\nabla_{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{Y})\ ,\ \mathbf{Z})+g(\nabla_{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{Y}\ ,\ A_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{Z})=0$$

و همچنین :

$$g(A_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{Y}\ ,\ \nabla_{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{Z})+g(\mathbf{Y}\ ,\ A_{\mathbf{x}}\cdot(\nabla_{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{Z}))=0$$

پس :

$$g((\nabla_{\mathbf{v}}\cdot A_{\mathbf{x}})\mathbf{Y}\ ,\ \mathbf{Z})+g(\mathbf{Y}\ ,\ (\nabla_{\mathbf{v}}\cdot A_{\mathbf{x}})\mathbf{Z})=0 \quad (۴۸-۲۳)$$

یعنی حکم ثابت است .

قضیهٔ ۵ـ اگر $\mathbf{X}$ میدان برداری کیلینگ و g متریک باشد بازاء هربردار ناهمگرد $\mathbf{Y}$ تانسور خمیدگی $R(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y})$ نیز قرینهٔ چپ است .

اثبات ـ چون داریم $T=0$ پس خواهیم داشت :

$$\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{Y}-\nabla_{\mathbf{y}}\cdot\mathbf{X}=[\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y}]$$

و یا :

$$(\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{Y}-\nabla_{\mathbf{y}}\cdot\mathbf{X})\cdot g(\mathbf{Z}\ ,\ \mathbf{V})=[\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y}]\cdot g(\mathbf{Z}\ ,\ \mathbf{V})$$

و یا :

$$\nabla_X(Y\cdot g(Z, V))-\nabla_Y(X\cdot g(Z, V))$$
$$=[X, Y]\cdot g(Z, V)$$

و یا :

$$\nabla_X(\nabla_Y\cdot g(Z, V))-\nabla_Y(\nabla_X\cdot g(Z, V))$$
$$=[X, Y]\cdot g(Z, V)$$

و یا :

$$[\nabla_X, \nabla_Y]\cdot g(Z, V)=[X, Y]\cdot g(Z, V)$$
$$=\nabla_{[X,Y]}\cdot g(Z, V)$$

پس :

$$([\nabla_X, \nabla_Y]-\nabla_{[X,Y]})\cdot g(Z, V)=0$$

و یا :

$$R(X, Y)\cdot g(Z, V)=0$$

و یا از بسط این رابطه داریم :

$$(R(X, Y)\cdot g)(Z, V)+g(R(X, Y)\cdot Z, V)$$
$$+g(Z, R(X, Y)\cdot V)=0$$

چون جملهٔ اول مساوی صفر است لذا :

$$g(R(X, Y)\cdot Z, V)+g(Z, R(X, Y)\cdot V)=0 \qquad (۴۸-۲۴)$$

یعنی حکم ثابت است .

قضیهٔ ٦ـ اگر کارگزار A_X یعنی $A_X=L_X-\nabla_X$ اندومورفیسم باشد داریم :

$$(L_X, \nabla_Y]-\nabla_{[X,Y]}=R(X, Y)-\nabla_Y\cdot(A_X) \qquad (۴۸-۲۵)$$

اثبات ـ اولاً مقدار $[A_X, \nabla_Y]$ را حساب میکنیم :

$$[A_{\mathbf{x}}\ ,\ \nabla_{\mathbf{y}}]\cdot\mathbf{Z}=A_{\mathbf{x}}\cdot(\nabla_{\mathbf{y}}\cdot\mathbf{Z})-\nabla_{\mathbf{y}}\cdot(A_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{Z}) \qquad (٤٨-٢٦)$$

$$=(A_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{y}})\cdot\mathbf{Z}+\nabla_{\mathbf{y}}(A_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{Z})-\nabla_{\mathbf{y}}(A_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{Z})$$

$$=(A_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{y}})\cdot\mathbf{Z}$$

و یا :

$$[A_{\mathbf{x}}\ ,\ \nabla_{\mathbf{y}}]=\nabla_{\mathbf{y}}(A_{\mathbf{x}}) \qquad (٤٨-٢٧)$$

حال با استفاده از (٤٨-١٩) داریم :

$$[\underset{\mathbf{X}}{L}\ ,\ \nabla_{\mathbf{y}}]=[A_{\mathbf{x}}+\nabla_{\mathbf{x}}\ ,\ \nabla_{\mathbf{y}}]=[A_{\mathbf{x}}\ ,\ \nabla_{\mathbf{y}}]$$

$$+[\nabla_{\mathbf{x}}\ ,\ \nabla_{\mathbf{y}}]=\nabla_{\mathbf{y}}(A_{\mathbf{x}})+[\nabla_{\mathbf{x}}\ ,\ \nabla_{\mathbf{y}}]$$

لذا :

$$[\underset{\mathbf{X}}{L}\ ,\ \nabla_{\mathbf{y}}]-\nabla_{[\mathbf{x},\mathbf{y}]}=\nabla_{\mathbf{y}}(A_{\mathbf{x}})+[\nabla_{\mathbf{x}}\ ,\ \nabla_{\mathbf{y}}]$$

$$-\nabla_{[\mathbf{x},\mathbf{y}]}=R(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y})+\nabla_{\mathbf{y}}(A_{\mathbf{x}})$$

یعنی حکم ثابت است .

فصل نهم

۴۹ ـ کواترنیون‌ها [۱] (چهار مقداریها)

مسئلهٔ تعمیم جبر برداری سه بُعدی که شامل ضرب و تقسیم باشد نخستین بار توسط و.ر. **هامیلتن** [۲] در ۱۸۴۳ صورت گرفت. نامبرده متوجه شد که قبل از جبر سه مقداریها یا بردارها، باید جبری برای چهار مقداریها یا کواترنیونها وجود داشته باشد. و براساس همین توجه بود که جبر کواترنیونها را بوجود آورد.

یک کواترنیون حقیقی، یک چهار مقداری حقیقی است که بترتیب معینی نوشته باشد. کواترنیونها با حروف تنهائی نظیر p و q و r نشان داده میشوند. مثل:

ویا:
$$\begin{cases} q=(d\,,\,a\,,\,b\,,\,c) \\ q'=(d'\,,\,a'\,,\,b'\,,\,c') \end{cases} \qquad (۴۹-۱)$$

تعاریف اصلی عبارتند از:

۱ـ تساوی: تساوی $q=q'$ وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$d=d' \text{ و } a=a' \text{ و } b=b' \text{ و } c=c'$$

۲ـ جمع:

$$q+q'=(d+d'\,,\,a+a'\,,\,b+b'\,,\,c+c') \qquad (۴۹-۲)$$

۳ـ ضرب در یک عددوار [۳] λ:

۱- Quaternions ۲- Hamilton

۳- مجدداً یادآوری میکنیم که عددوار کمیتی است قابل اندازه‌گیری که برای مشخص ساختن آن، به جهت احتیاجی نیست. مثلاً درجهٔ حرارت، یک عددوار است درصورتیکه سرعت یک عددوار نیست.

$$\lambda q=(\lambda d\ ,\ \lambda a\ ,\ \lambda b\ ,\ \lambda c) \qquad (۴۹-۳)$$

۴ـ نفی :

$$-q=(-۱)q \qquad (۴۹-۴)$$

۵ـ تفریق :

$$q-q'=(d-d'\ ,\ a-a'\ ,\ b-b'\ ,\ c-c') \qquad (۴۹-۵)$$

۶ـ کواترنیون صفر : یعنی $(0\ ,0\ ,0\ ,0)$ که با 0 نشان داده میشود .

ازاین تعاریف معلوم میشود که کواترنیونها درجمع وتفریق و ضرب در یک عددوار ، تابع قوانین جبر معمولی هستند :

$$p+q=q+p \quad \text{و} \quad (p+q)+r=p+(q+r) \qquad (۴۹-۶)$$

$$\lambda q=q\lambda \quad \text{و} \quad (\lambda\mu)q=\lambda(\mu q) \quad (\lambda\ ,\ \mu\ \text{عددوارند}) \qquad (۴۹-۷)$$

$$(\lambda+\mu)q=\lambda q+\mu q \quad \text{و} \quad \lambda(p+q)=\lambda p+\lambda q \qquad (۴۹-۸)$$

برای اینکه qq' یعنی ضرب دوکواترنیون را بطور مناسبی تعریف کنیم چهار **کواترنیون واحد** (یکه) بترتیب زیر انتخاب میکنیم :

$$\mathbf{1}=(۱\ ,0\ ,0\ ,0) \quad \text{و} \quad \mathbf{i}=(0\ ,۱\ ,0\ ,0) \quad \text{و}$$

$$\mathbf{j}=(0\ ,0\ ,۱\ ,0) \quad \text{و} \quad \mathbf{k}=(0\ ,0\ ,0\ ,۱)$$

لذا هرکواترنیون را بصورت زیر میتوانیم بنویسیم :

$$q=(d\ ,a\ ,b\ ,c)=d\mathbf{1}+a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k} \qquad (۴۹-۹)$$

تعریف ضرب : کواترنیون حاصلضرب :

$$qq'=(d\mathbf{1}+a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k})(d'\mathbf{1}+a'\mathbf{i}+b'\mathbf{j}+c'\mathbf{k}) \qquad (۴۹-۱۰)$$

مطابق ضرب معمولی دو پرانتز صورت میگیرد منتهی باید هم ترتیب ضرب یکه ها رعایت وهم بجای حاصلضرب هردو **یکه** مقدارش **ازجدول ضرب** زیر گذاشته شود :

(۴۹—۱۱)

↗	۱	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
۱	۱	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{i}$	-۱	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	-۱	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	-۱

از جدول فوق روابط زیر نتیجه میشود :

$$\begin{cases} \mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=\mathbf{k}^2=-1 \\ \mathbf{ij}=\mathbf{k}\ ,\ \mathbf{jk}=\mathbf{i}\ ,\ \mathbf{ki}=\mathbf{j} \\ \mathbf{ji}=-\mathbf{k}\ ,\ \mathbf{kj}=-\mathbf{i}\ ,\ \mathbf{ik}=-\mathbf{j} \end{cases} \qquad (۴۹—۱۲)$$

بااین تعاریف خواهیم داشت :

$$qq'=(dd'-aa'-bb'-cc')+d(a'\mathbf{i}+b'\mathbf{j}+c'\mathbf{k}) \qquad (۴۹—۱۳)$$

$$+d'(a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k})+\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

از (۴۹-۱۳) پیداست که اگر کواترنیون حاصلضرب $q'q$ را هم تشکیل دهیم سه جملهٔ اول حاصلضرب فوق تغییر نمیکند ولی علامت دترمینان بعلت تعویض دو سطر عوض میشود و در نتیجه تنها وقتی تساوی $qq'=q'q$ برقرار است که دترمینان فوق مساوی صفر باشد. این نکته یعنی عدم تساوی qq' و $q'q$ در حالت کلی ازروابط $\mathbf{ij}=\mathbf{k}$ و $\mathbf{ji}=-\mathbf{k}$ نیز دیده میشد . جدول (۴۹-۱۱) نشان میدهد که اگر یکی از کواترنیونهای یکه را در **۱** ضرب کنیم آن کواترنیون تغییر نمیکند .

لذا طبق (۳ ۱-۹ ٤) داریم :

$$(d1)q=q(d1)=dq \quad \text{و} \quad (d1)(d'1)=dd'1$$

و از (۲-۹ ٤) نتیجه میگیریم :

$$d1+d'1=(d+d')1$$

بنابراین کواترنیونهائی‌نظیر $d1$ عیناً مثل عددوارهای‌حقیقی هستند ومیتوان آنها را با عددوارهای حقیقی متحد گرفت . از این ببعد $d1$ یا $(d, 0, 0, 0)$ را بصورت d مینویسیم‌وبالاخص ۱ یا $(0, 0, 0, 1)$ بعنوان یک واحد حقیقی‌درنظر گرفته خواهد شد .

همچنین میتوالیم $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ رابا مجموعهٔ‌بردارهای یکهٔ‌یکدستگاه قائم ازراست بچپ متحد بگیریم . زیرا اگر تبدیل قائمی بصورت زیر بدهیم :

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbf{i}'=\alpha_1^1\mathbf{i}+\alpha_1^2\mathbf{j}+\alpha_1^3\mathbf{k}\\ \mathbf{j}'=\alpha_2^1\mathbf{i}+\alpha_2^2\mathbf{j}+\alpha_2^3\mathbf{k}\\ \mathbf{k}'=\alpha_3^1\mathbf{i}+\alpha_3^2\mathbf{j}+\alpha_3^3\mathbf{k}\end{array}\right. \tag{۴۹—۱۴}$$

که در آنها شرایط :

$$\delta_{rs}\,\alpha_i^r\,\delta_j^s=\delta_{ij} \tag{۴۹—۱۵}$$

صادق باشند ، خواهیم داشت :

$$\mathbf{i}'^2=-\delta_{rs}\,\alpha_1^r\,\alpha_1^s=-1$$

و :

$$\mathbf{j}'\mathbf{k}'=-\delta_{rs}\,\alpha_2^r\,\alpha_3^s+\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3\\ \alpha_3^1 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3\end{vmatrix} \tag{۴۹—۱۶}$$

$$=\alpha_1^1\mathbf{i}+\alpha_1^2\mathbf{j}+\alpha_1^3\mathbf{k}=\mathbf{i}'$$

پس هرگواترنیون $q=d+a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ مجموع **یک عددوار** d و یک بردار $\mathbf{v}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ میباشد . ما دراینجا نمادهای S_q و V_q را بترتیب برای نمایش قسمت‌های عددوار و برداری کواترنیون انتخاب میکنیم . پس میتوانیم بنویسیم $q=S_q+V_q$ که در آن :

$$\begin{cases} S_q=d \\ V_q=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k} \end{cases} \qquad (۴۹-۱۷)$$

بدیهیست که عملیات[۱] S و V نسبت به جمع توزیعی هستند .

اکنون میتوانیم قضیهٔ زیر را ثابت کنیم :

قضیه ـ کواترنیون حاصلضرب ، نسبت بجمع شرکت پذیر و توزیعی است .

ولی رابطهٔ $qp=pq$ وقتی فقط صادق است که یا یکی از دو عامل عددوار و یا قسمتهای برداری هردو عامل p و q متناسب باشند .

یا اگر صورت قضیه را توسط نمادهای مفروض در فوق بیان کنیم میخواهیم ثابت کنیم :

$$(pq)r=p(qr) \qquad (۴۹-۱۸)$$

و :

$$p(q+r)=pq+pr \quad \text{و} \quad (p+q)r=pr+qr \qquad (۴۹-۱۹)$$

و بگوئیم که رابطهٔ $pq=qp$ وقتی صادق است که یا داشته باشیم :

$$V_q=0 \quad \text{و یا} \quad V_p=0$$

و یا اینکه داشته باشیم :

$$V_p=\lambda V_q \qquad (۴۹-۲۰)$$

اثبات (۴۹-۱۸) : کافیست این رابطه را برای جمیع ترکیبات $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ ثابت کنیم . اما چون جدول ضرب (۴۹-۱۱) با جایگشت مستدیر $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$

۱- Operations

تغییرنمیکند کافیست که آن را فقط برای حاصلضربهائی که عناصرسمت‌چپشان $\mathbf{i}$ است تحقیق کنیم . لذا داریم :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{i}(\mathbf{jk})=\mathbf{i}^{۲}=-۱ &&\text{و}\quad (\mathbf{ij})\mathbf{k}=\mathbf{k}^{۲}=-۱\\
&\mathbf{i}(\mathbf{kj})=-\mathbf{i}^{۲}=۱ &&\text{»}\quad (\mathbf{ik})\mathbf{j}=-\mathbf{j}^{۲}=۱\\
&\mathbf{i}(\mathbf{ji})=-\mathbf{ik}=\mathbf{j} &&\text{»}\quad (\mathbf{ij})\mathbf{i}=\mathbf{ki}=\mathbf{j}\\
&\mathbf{i}(\mathbf{ki})=\mathbf{ij}=\mathbf{k} &&\text{»}\quad (\mathbf{ik})\mathbf{i}=-\mathbf{ji}=\mathbf{k} \qquad (۴۹-۲۱)\\
&\mathbf{i}(\mathbf{ij})=\mathbf{ik}=-\mathbf{j} &&\text{»}\quad (\mathbf{ii})\mathbf{j}=(-۱)\mathbf{j}=-\mathbf{j}\\
&\mathbf{i}(\mathbf{ik})=-\mathbf{ij}=-\mathbf{k} &&\text{»}\quad (\mathbf{ii})\mathbf{k}=(-۱)\mathbf{k}=-\mathbf{k}\\
&\mathbf{i}(\mathbf{ii})=\mathbf{i}(-۱)=-\mathbf{i} &&\text{»}\quad (\mathbf{ii})\mathbf{i}=(-۱)\mathbf{i}=-\mathbf{i}
\end{aligned}$$

اثبات (۴۹-۱۹) :

اگر $p(q+r)$ و $pq+pr$ را بابسط معمولی بدون‌استفاده ازجدول حساب کنیم عبارات حاصل ، جمله بجمله مساویند . بنابراین وقتی هم که ازجدول استفاده کنیم باز تساوی محفوظ میماند .

اثبات (۴۹-۲۰) : دیدیم که رابطهٔ $qq'=q'q$ فقط وقتی صادق است که دترمینان (۴۹-۱۳)صفر شود . این مطلب‌فقط دریکی‌از ۳ حالت‌زیر رخ میدهد:

یا :

$$a=b=c=0$$

یا :

$$a'=b'=c'=0$$

و یا :

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

یعنی یا q و یا q' باید عددوار باشند و یا V_q و $V_{q'}$ متناسب .

از (۳-۱۳-۹ ٤) نتیجه میشود :

$$S_{(qq')}=S_{(q'q)}=dd'-aa'-bb'-cc' \qquad (٤٩-٢٢)$$

یعنی : **قسمت عددوار کواترنیون حاصلضرب ، با جایگشت مستدیر عواملش تغییر نمیکند.**

مثلاً داریم :

$$S_{(p.qr)}=S_{(qr.p)}=S_{(q.rp)}=S_{(rp.q)} \qquad (٤٩-٢٣)$$

و از آنجا نتیجه میگیریم :

$$S_{(pqr)}=S_{(qrp)}=S_{(rpq)} \qquad (٤٩-٢٤)$$

مزدوج وهنج یک کواترنیون : مزدوج یک کواترنیون q که با K_q نشانداده میشود با عبارت زیر تعریف میشود :

$$K_q=S_q-V_q \qquad (٤٩-٢٥)$$

روشن است که مزدوج مجموع دو کواترنیون مساوی مجموع مزدوجهای آنهاست یعنی :

$$K_{(q+q')}=K_q+K_{q'} \qquad (٤٩-٢٦)$$

چون هنج قسمت برداری q و K_q فقط از لحاظ علامت اختلاف دارند پس :

$$q(K_q)=(K_q)q \qquad (٤٩-٢٧)$$

حاصلضرب (۲۷-۹ ٤) را هنج q مینامند وبا N_q نشان میدهند. اگر داشته باشیم:

$$q=d+a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$$

و :

$$K_q=d-a\mathbf{i}-b\mathbf{j}-c\mathbf{k}$$

طبق (۱۳-۹ ٤) داریم :

$$N_q=q(K_q)=(K_q)q=d^2+a^2+b^2+c^2 \qquad (٤٩-٢٨)$$

یعنی N_q یک عددوار است . اگر N_q بخواهد صفر باشد باید داشته باشیم :

$$a=b=c=d=0$$

یعنی باید $q=0$ باشد. اگر $N_q=1$ باشد q را کواترنیون واحد گویند. فرض میکنیم داشته باشیم :

$$\mathbf{v}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$$

پس طبق (۴۹-۱۳) داریم :

$$\mathbf{v}\mathbf{v}'=-(aa'+bb'+cc')+\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} \tag{۴۹-۲۹}$$

چون تغییر علامت دترمینان معادل با تعویض سطرهای دوم و سوم آنستلذا :

$$K_{(\mathbf{v}\mathbf{v}')}=\mathbf{v}'\mathbf{v} \tag{۴۹-۳۰}$$

اگر در عبارت :

$$qq'=(d+\mathbf{v})(d'+\mathbf{v}')=dd'+d\mathbf{v}'+d'\mathbf{v}+\mathbf{v}\mathbf{v}' \tag{۴۹-۳۱}$$

مزدوج هرجمله را بگیریم خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} K_{(qq')} &= dd'-d\mathbf{v}'-d'\mathbf{v}+\mathbf{v}'\mathbf{v} \\ &= (d'-\mathbf{v}')(d-\mathbf{v})=(K_{q'})(K_q) \end{aligned} \tag{۴۹-۳۲}$$

لذا : مزدوج حاصلضرب دوکواترنیون ، مساوی حاصلضرب مزدوجهای آنهاست بترتیب عکس .

چون داریم : $K_{\mathbf{v}}=-\mathbf{v}$ پس (۴۹-۳۰) حالت خاص (۴۹-۳۲) میباشد.

حال از این خاصیت برای محاسبهٔ هنج حاصلضرب استفاده میکنیم . طبق (۴۹-۲۸) داریم :

$$\begin{aligned} N_{(pq)} &= pq\cdot K_{(pq)}=pq\cdot K_q\cdot K_p=p\cdot N_q\cdot K_p \\ &= pK_p\cdot N_q \end{aligned}$$

(چون N_q عددوار است جای‌آنرا درتساوی‌آخر ، با K_p عوض کردیم) ولذا داریم:

$$N_{(pq)} = N_p \cdot N_q \qquad (۴۹-۳۳)$$

یعنی هنج حاصلضرب دوکواترنیون مساوی حاصلضرب هنجهای آنهاست .

ازراه استنتاج ریاضی میتوانیم روابط (۴۹-۳۲) و (۴۹-۳۳) را مستقیماً برای حاصلضرب n عامل کواترنیون نیز بسط دهیم :

$$K_{(q_1 q_2 \cdots q_n)} = K_{q_n} \cdot K_{q_{n-1}} \cdots K_{q_2} \cdot K_{q_1} \qquad (۴۹-۳۴)$$

$$N_{(q_1 q_2 \cdots q_n)} = N_{q_1} \cdot N_{q_2} \cdots N_{q_n} \qquad (۴۹-۳۵)$$

از (۴۹-۳۲) نتیجه میگیریم که حاصلضرب دوکواترنیون وقتی صفر میشود که یکی ازعوامل ضرب‌صفر باشد. لذا اگر $pq=0$ باشد ، $N_p \cdot N_q = 0$ میشود وچون هنجها عددوارند پس یا $N_p=0$ و یا $N_q=0$ و درنتیجه یا $p=0$ و یا $q=0$ است .

انتخاب جدول ضرب (۴۹-۱۱) برای ضرب یکه‌های کواترنیونی ، آنرا از کلیهٔ جبرهای دیگر متمایز ساخته است. زیرا باوجود این جدول ، مابین جبرهای هیپراعداد :

$$x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \cdots + x^n e_n$$

که نسبت به بردارهای یکهٔ e_i خطی و ضرائب آنها یعنی x^i اعدادی است حقیقی و بعلاوه قانون‌شرکت پذیری درضرب بخوبی درآنها صدق مینماید،جبرکواترنیونها مقامی‌انحصاری‌پیدا میکنند . ثابت میشود که برروی میدان‌اعداد حقیقی ،کلی‌ترین **جبر شرکت پذیرخطی که در آن حاصلضربی هنگامی صفر میشودکه یکی‌ازعوامل آن صفر باشد ، همان جبرکواترنیونهای حقیقی است .**

کواترنیونها،اعداد حقیقی $(x, 0, 0, 0)$ با یکهٔ منحصر ۱ ، واعداد مختلط $(x, y, 0, 0)$ با دو یکهٔ ۱ و **i** را نیزشامل هستند . اعداد حقیقی و اعداد

مختلط هردو میدانی تشکیل میدهند ؛ یعنی مجموعهٔ اعدادی‌را بوجود میآورند که مجموع ، تفاضل ، حاصلضرب و خارج قسمت (با مقسوم‌علیه غیر صفر) دو عدد از این مجموعه ، اعداد معینی متعلق بهمین مجموعه میباشند . بعلاوه کواترنیونها شامل بردارهای (o, x, y, z) در فضای ۳ بُعدی نیز هستند . ولی رابطهٔ (۹-۲-۹ ٤) نشان میدهد که درحالت کلی ، **حاصلضرب دوبردار یک بردار نیست بلکه یک کواترنیون است.** برخلاف جمع (که مجموع دوبردار همیشه یک بردار است) ضرب بردارها بیرون ازقلمروآنها قرار میگیرد و بعبارت دیگر ، **ضرب برداری مسدود نیست** و در نتیجه وجود یک جبر برداری **مطلقی** که تمام خواص دلخواه جبر کواترنیونها را دارا باشد غیر ممکنست .

. ٥- **تقسیم کواترنیونها** ـ اگر q صفر نباشد N_q عددیست غیر صفر و میتوانیم معادلهٔ (۸-۲-۹ ٤) راکه معرف هنج بود بصورت زیر بنویسیم :

$$q\,\frac{K_q}{N_q}=1 \quad \text{یا} \quad \frac{K_q}{N_q}\,q=1$$

کسر $\frac{K_q}{N_q}$ را **عکس** q میناميم و مینویسیم :

$$q^{-1}=\frac{K_q}{N_q} \quad \text{یا} \quad qq^{-1}=q^{-1}q=1 \qquad (٥٠-١)$$

معادلهٔ اخیر نشان میدهد که داریم :

$$N_q\cdot N_{q^{-1}}=1 \quad \text{یا} \quad N_{q^{-1}}=\frac{1}{N_q} \qquad (٥٠-٢)$$

برای تقسیم p بر q $(q\neq o)$ باید معادلهٔ :

$$rq=p \qquad (٥٠-٣)$$

یا :

$$qr=p \qquad (٥٠-٤)$$

را نسبت به r حل کنیم . این عمل باین نحو صورت میگیرد که (۳-۵۰) را از طرف راست و یا (۵۰-۴) را از طرف چپ در q^{-1} ضرب کنیم . بدین ترتیب دو جواب :

$$r_1 = pq^{-1} \qquad (۵۰-۵)$$

$$r_2 = q^{-1}p \qquad (۵۰-۶)$$

که درحالت کلی مساوی نیستند پیدا میکنیم وبهمین دلیل آنرا بصورت $\frac{p}{q}$ نشان نمیدهیم . قرار دادهای (۵۰-۵) و (۵۰-۶) ابهامی ندارند . r_1 در (۵۰-۳) صدق میکند و خارج قسمت از چپ نامیده میشود و r_2 در (۵۰-۴) صدق میکند و خارج قسمت از راست نامیده میشود . این جوابها منحصرند زیرا مثلاً اگر داشته باشیم: $rp=r_1q$ پس $(r-r_1)q=0$ وچون $q \neq 0$ فرض شده باید $r-r_1=0$ یعنی $r=r_1$ باشد .

اگر در (۵۰-۵) و (۵۰-۶) هنجها را حساب کنیم خواهیم داشت :

$$N_{r_1} = N_{r_2} = \frac{N_p}{N_q} \qquad (۵۰-۷)$$

یعنی : **هنج هریک از خارج قسمتهای کواترنیونها مساوی خارج قسمت هنجهای آنهاست .**

از (۴۹-۳۴) و (۴۹-۳۵) نتیجه میشود که :

$$(q_1q_2 \dots q_n)^{-1} = \frac{K_{(q_1q_2\cdots q_n)}}{N_{(q_1q_2\cdots q_n)}} = q_n^{-1} \cdot q_{n-1}^{-1} \cdots q_1^{-1} \qquad (۵۰-۸)$$

یعنی : **عکس حاصلضرب n کواترنیون مساوی حاصلضرب عکسهای آنهاست بترتیب معکوس .**

تعریف (۱-۰۵) نشان میدهد که عکس یک کواترنیون واحد، مزدوج آنست.

مثال - مطلوبست محاسبهٔ خارج قسمت p بر q درصورتیکه داشته باشیم :

$$p=۱+۳\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k} \quad \text{و} \quad q=۲-\mathbf{i}-۲\mathbf{k}$$

طبق (۱-۰۵) داریم :

$$q^{-۱}=\frac{۲+\mathbf{i}+۲\mathbf{k}}{۹}$$

پس :

$$r_۱=pq^{-۱}=\frac{۱}{۹}(۱+۳\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})(۲+\mathbf{i}+۲\mathbf{k})$$

$$=\frac{۱}{۹}(-۳+۵\mathbf{i}-۷\mathbf{j}+۵\mathbf{k})$$

$$r_۲=q^{-۱}p=\frac{۱}{۹}(۲+\mathbf{i}+۲\mathbf{k})(۱+۳\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

$$=\frac{۱}{۹}(-۳+۹\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۳\mathbf{k})$$

مطابق (۲۲-۴۹) و (۳۳-۴۹) داریم :

$$S_{r_۱}=S_{r_۲} \quad \text{و} \quad N_{r_۱}=N_{r_۲}$$

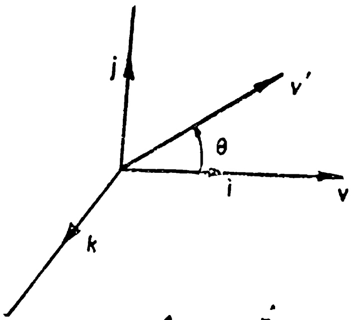
۵۱- حاصلضرب بردارها - حاصلضرب دوبردار $\mathbf{v}$ و $\mathbf{v}'$ کواترنیونی است که قسمتهای عددوار و برداری آن بترتیب خواهد بود :

$$S_{(\mathbf{vv}')}=-(aa'+bb'+cz') \qquad (۵۱-۱)$$

$$V_{(\mathbf{vv}')}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} \qquad (۵۱-۲)$$

برای پیدا کردن معنای هندسی آنها مبنای خاصی مثل **i** و **j** و **k** اختیار

میکنیم . $\mathbf{i}$ را بردار یکه‌ای در روی $\mathbf{v}$ و $\mathbf{j}$ را بردار یکه‌ای عمود بر $\mathbf{i}$ درصفحهٔ $\mathbf{v}$ و $\mathbf{v'}$ چنان میگیریم که زاویهٔ $\mathbf{j}$ و $\mathbf{v'}$ کمتر از °۹۰ باشد (ش ۱ - ۵۱) .



ش ۱-۵۱

بردار یکهٔ $\mathbf{k}$ را چنان میگیریم که دستگاه $\mathbf{ijk}$ متعامد واز راست بچپ باشد . اگر فرض کنیم زاویه $\theta = (\mathbf{v} , \mathbf{v'})$ باشد پس داریم :

$$\mathbf{v} = |v|\mathbf{i}$$

و :

$$\mathbf{v'} = |v'|(\mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\sin\theta)$$

و :

$$\mathbf{vv'} = |v|\cdot|v'|(-\cos\theta + \mathbf{k}\sin\theta)$$

پس :

$$S_{(\mathbf{vv'})} = -|v|\cdot|v'|\cos\theta \qquad (۵۱-۳)$$

و :

$$V_{(\mathbf{vv'})} = (|v|\cdot|v'|\sin\theta)\mathbf{k} \qquad (۵۱-۴)$$

ملاحظه میکنیم که قسمتهای عددوار و برداری حاصلضرب، کاملاً ازمبناهای $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ مستقل است و بعلاوه $\mathbf{k}$ بردار یکه‌ایست عمود برصفحهٔ $\mathbf{v}$ و $\mathbf{v'}$ و جهت آن طوریست که $\mathbf{v}$ و $\mathbf{v'}$ و $\mathbf{k}$ یک مجموعهٔ از راست بچپ بوجود میآورند .

ملاحظات فوق ، پایهٔ جبر برداری **گیبس** [1] را تشکیل میدهند . در جبر

1- J . Willare Gibbs

گیبس حاصلضرب عددوار و برداری‌دو بردار $\mathbf{U}$ و $\mathbf{V}$ بطریق زیرتعریف شده‌اند :

$$\mathbf{U}\cdot\mathbf{V} = -S_{(uv)} \tag{۵۱—۵}$$

$$\mathbf{U}\wedge\mathbf{V}_{(uv)} \tag{۵۱—۶}$$

ما دراینجاازاین ببعد، نمادهای S_{uv} و V_{uv} و K_{uv} و S_{uvw} و ... را بجای $S_{(uv)}$ و $V_{(uv)}$ و $K_{(uv)}$ و $S_{(uvw)}$ و ... اختیار میکنیم .

اگر جای بردارها را عوض کنیم در (۳ - ۵۱) تغییری پیدا نمیشود ولی در (۴-۵۱) جهت $\mathbf{k}$ تغییر میکند . لذا داریم :

$$S_{vu} = S_{vu} \tag{۵۱—۷}$$

$$V_{vu} = -V_{uv} \tag{۵۱—۸}$$

از رابطهٔ $\mathbf{u}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{uv}+\mathbf{uw}$ وخاصیت‌توزیعی بودن S و V نتیجه میگیریم :

$$S_{u(v+w)} = S_{uv}+S_{uw} \tag{۵۱—۹}$$

و :

$$V_{u(v+w)} = V_{uv}+V_{uw} \tag{۵۱—۱۰}$$

و چون :

$$K_{uv} = (-\mathbf{v})(-\mathbf{u}) = \mathbf{vu}$$

پس داریم :

$$\mathbf{uv} = S_{uv}+V_{uv} \quad \text{و} \quad \mathbf{vu} = S_{uv}-V_{uv}$$

لذا :

$$S_{uv} = \frac{۱}{۲}(\mathbf{uv}+\mathbf{vu}) \tag{۵۱—۱۱}$$

و :

$$V_{uv} = \frac{۱}{۲}(\mathbf{uv}-\mathbf{vu}) \tag{۵۱—۱۲}$$

حال بحاصلضرب سه بردار برمیگردیم . طبق (۴۹-۲۴) داریم :

$$S_{uvw} = S_{vwu} = S_{wuv} \tag{۵۱—۱۳}$$

و چون داریم :

$$K_{uvw}=(-\mathbf{w})(-\mathbf{v})(-\mathbf{u})=-\mathbf{wvu}$$

پس :

$$V_{uvw}=-V_{k_{uvw}}=V_{wvu} \qquad (۵۱-۱۴)$$

و :

$$S_{uvw}=S_{k_{uvw}}=-S_{wvu} \qquad (۵۱-۱۵)$$

و همچنین از رابطهٔ :

$$\mathbf{uvw}=\mathbf{u}(S_{vw}+V_{vw})$$

داریم :

$$S_{uvw}=S_{u}V_{vw} \qquad (۵۱-۱۶)$$

و :

$$V_{uvw}=\mathbf{u}S_{vw}+V_{u}V_{vw} \qquad (۵۱-۱۷)$$

حالا V_{uvw} را از راه دیگری حساب میکنیم :

$$۲V_{uvw}=\mathbf{uvw}-K_{uvw}=\mathbf{uvw}+\mathbf{wvu}=\mathbf{uvw}$$
$$+\mathbf{vuw}-\mathbf{vwu}+\mathbf{vwu}+\mathbf{wvu}=(\mathbf{uv}+\mathbf{vu})\mathbf{w}$$
$$-\mathbf{v}(\mathbf{uw}+\mathbf{wu})+(\mathbf{vw}+\mathbf{wv})\mathbf{u}$$

لذا برطبق (۵۱-۱۱) داریم :

$$V_{uvw}=\mathbf{u}S_{vw}+\mathbf{w}S_{uv}-\mathbf{v}S_{uw} \qquad (۵۱-۱۸)$$

ازمقایسه با (۵۱-۱۱) رابطهٔ مهم زیر بدست میآید :

$$\underline{V_{u}V_{vw}=\mathbf{w}S_{uv}-\mathbf{v}S_{uw}} \qquad (۵۱-۱۹)$$

بالاخره این نتایج را با نمادهای ضرب گیبس یعنی : (.) و (×) بترتیب زیر بیان میکنیم :

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{V}=|\mathbf{u}|\,|\mathbf{V}|\cos(\mathbf{u}\ ,\ \mathbf{V}) \qquad (۵۱-۵)'$$

$$\mathbf{U}\wedge\mathbf{V}=|\mathbf{U}|\,|\mathbf{V}|\sin(\mathbf{U}\ ,\ \mathbf{V})\mathbf{K} \qquad (۵۱-۶)'$$

$$\mathbf{V}\cdot\mathbf{U}=\mathbf{U}\cdot\mathbf{V} \qquad (۵۱-۷)'$$

$$\mathbf{V}\wedge\mathbf{U}=-\mathbf{U}\wedge\mathbf{V} \qquad (۵۱-۸)'$$

$$\mathbf{U}\cdot(\mathbf{V}+\mathbf{W})=\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}+\mathbf{U}\cdot\mathbf{W} \qquad (۵۱-۹)'$$

$$\mathbf{U}\wedge(\mathbf{V}+\mathbf{W})=\mathbf{U}\wedge\mathbf{V}+\mathbf{U}\wedge\mathbf{W} \qquad (۵۱-۱۰)'$$

$$\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}\wedge\mathbf{W}=\mathbf{V}\cdot\mathbf{W}\wedge\mathbf{U}=\mathbf{W}\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{V} \qquad (۵۱-۱۳)'$$

$$\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}\wedge\mathbf{W}=-\mathbf{W}\cdot\mathbf{V}\wedge\mathbf{U} \qquad (۵۱-۱۵)'$$

$$\mathbf{U}\wedge(\mathbf{V}\wedge\mathbf{W})=\mathbf{V}(\mathbf{U}\cdot\mathbf{W})-\mathbf{W}(\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}) \qquad (۵۱-۱۹)'$$

و همچنین طبق فورمولهای (۵-۱ ۵) و (۶-۱ ۵) داریم :

$$\mathbf{uv}=-\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}+\mathbf{U}\wedge\mathbf{V} \qquad (۵۱-۲۰)$$

که این رابطه ، رابطهٔ بین جبر کواترنیونها و جبر گیبس است .

۵۲- ریشه‌های یک کواترنیون - هر کواترنیون $q=d+a\mathbf{I}+b\mathbf{J}+C\mathbf{K}$ با ضرائب حقیقی ، ممکنست بصورت مضربی حقیقی از یک کواترنیون واحد نوشته شود:

$$q=h(\cos\theta+\mathbf{e}\sin\theta) \qquad o\leqslant\theta<2\pi \qquad (۵۲-۱)$$

که در آن :

$$\sin\theta=\pm\frac{1}{h}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \quad و \quad \cos\theta=\frac{d}{h} \quad و \quad h=\sqrt{d^2+a^2+b^2+c^2}$$

فرض شده و $a^2+b^2+c^2\neq o$ و $\mathbf{e}$ نیز برداری است که :

$$\mathbf{e}=\pm\frac{a\mathbf{I}+b\mathbf{J}+c\mathbf{K}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad (۵۲-۲)$$

وقتی q عددی حقیقی باشد $\sin\theta=o$ بوده و $\mathbf{e}$ ممکنست بدلخواه انتخاب شود .

چون داریم $\mathbf{(e)}^{۲}=-۱$ پس طبق قضیهٔ **دوموآور** [1] داریم :

$$q^{n}=h^{n}(cos\,n\theta+\mathbf{e}\,sin\,n\theta) \qquad (۵۲-۳)$$

اکنون میتوانیم ریشهٔ n ام یک کواترنیون حقیقی را بدست آوریم :

$$Q=H(cos\varphi+\mathbf{e}\,sin\varphi) \qquad o\leqslant\varphi\leqslant\pi \qquad (۵۲-۴)$$

با انتخاب مخصوص $\mathbf{e}$ در (۵۲-۲) ، زاویهٔ φ همیشه باید در فاصلهٔ بین صفر و π اختیار شود . در حل معادلهٔ $q^{n}=Q$ دو حالت ممکنست پیش آید :

۱- $sin\varphi\neq۰$ است ، دراینصورت $\mathbf{e}$ را ، هم در Q و هم در q یکی میگیریم و لذا داریم :

$$h^{n}=H \quad و \quad cos\,n\theta=cos\,\varphi \quad و \quad sin\,n\theta=sin\varphi$$

و n ریشهٔ n ام Q از رابطهٔ (۵۲-۱) بدست میآید بشرطی که :

$$h=H^{\frac{1}{n}} \qquad (۵۲-۵)$$

ریشهٔ مثبت باشد . از آنجا داریم :

$$\theta=\frac{\varphi+۲\pi m}{n} \qquad (m=o\,,۱\,,\ldots\,,n-۱) \qquad (۵۲-۶)$$

این n مقداری که برای θ بدست میآید کلیهٔ مقادیر θ را در فواصل $o\leqslant\theta<۲\pi$ که در معادلات قبل صدق میکنند شامل میباشد .

۲- $sin\varphi=o$ است . لذا بردار $\mathbf{e}$ در q ، بردار یکه‌ایست اختیاری .

اگر $Q>o$ باشد داریم : $\varphi=o$ و $\theta=\frac{۲m\pi}{n}$ $(m=۰\,,۱\,,\ldots\,,n-۱)$

وقتی $n=۲$ باشد مقادیر $\theta=o\,,\pi$ درست دو ریشهٔ حقیقی یعنی : $\pm\sqrt{Q}$ بما میدهد . وقتی $n>۲$ باشد بعضی مقادیر θ (مخالف صفر یا π) ریشه های غیر

۱- De Moivre

حقیقی برای q بما میدهند که بآنها هر $\mathbf{e}$ ای را ممکن است مربوط ساخت .

اگر $\theta < o$ باشد دراینصورت:

$\varphi = \pi$ و $\theta = \frac{(۲m+۱)\pi}{n}$ $(m = o , ۱ , \ldots n-۱)$ است . در جمیع حالات ، بعضی مقادیر θ (مخالف صفر) ریشه‌های غیر حقیقی برای q میدهند که هر $\mathbf{e}$ ای ممکنست با آنها همپا باشد .

نتایج بالا را در قضیهٔ زیر خلاصه میکنیم :

قضیه ـ یک کواترنیون باضرائب حقیقی (ولی نه یک عدد حقیقی) درست n ریشهٔ n ام دارد. اگر Q عدد حقیقی مثبتی‌باشد درست دوریشهٔ دوم $\pm\sqrt{Q}$ داریم . در بقیهٔ حالات ، یک عدد حقیقی ، بینهایت ریشهٔ کواترنیون با ضرائب حقیقی دارد .

در تمام حالات ، ریشه‌ها ممکن است از روی (۵-۵۲) و (۶-۵۲) حساب شوند . زیرا مثلاً اگر $Q = ۱ + \mathbf{I} + \mathbf{J} + \mathbf{K}$ باشد داریم :

$$Q = ۲(cos ۶۰^\circ + \mathbf{e} sin ۶۰^\circ) \quad و \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{I} + \mathbf{J} + \mathbf{K}}{\sqrt{۳}}$$

و از آنجا ریشه‌های سوم Q خواهند بود :

$$q = \sqrt[۳]{۲}\ (cos\theta + \mathbf{e} sin\theta)$$

$$\theta = ۲۰^\circ\ ,\ ۱۴۰^\circ\ ,\ ۲۶۰^\circ$$

قوسهائی ازیک‌دایرهٔ عظیمه : هرکواترنیون واحد :

$$q = d + a\mathbf{I} + b\mathbf{J} + C\mathbf{K} \qquad (N_q = ۱)$$

را میتوان بصورت زیر نشانداد :

$$q = cos\theta + \mathbf{e} sin\theta \tag{۵۲ — ۷}$$

که در آن e از روی (۲-۵۲) تعیین میشود و θ در روابط زیر صدق میکنند :

$$\cos\theta = d \quad , \quad \sin\theta = \pm\sqrt{a^2+b^2+c^2} \qquad (۵۲-۸)$$

اگردراین فورمول علامت + راانتخاب کنیم، $o \leqslant \theta \leqslant \pi$ خواهدشد. بخصوص اگر $q = ۱ , -۱ , e$ باشد θ بترتیب برابر o و π و $\frac{\pi}{۲}$ میشود .

قضیه ـ کواترنیون واحد : $\cos\theta + \mathbf{e}\sin\theta$ را میتوان بصورت $\mathbf{ba}^{-۱}$ [۱] یعنی خارج قسمت دو برداری که در شرایط زیر صدق میکنند بیان کرد :

۱ـ $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$

۲ـ $\widehat{(\mathbf{a} \, , \, \mathbf{b})} = \theta$

۳ـ صفحهٔ **a** و **b** عمود بربردار **e** است .

۴ـ **a** و **b** و **e** تشکیل یکدستگاه از راست بچپ را میدهند .

اثبات ـ بموجب شرط ۱ میتوانیم بنویسیم :

$$\cos\theta + \mathbf{e}\sin\theta = \frac{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\theta + |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\sin\theta\mathbf{e}}{|\mathbf{a}|^2}$$

بنابراین اگر بردارهای **a** و **b** را چنان انتخاب کنیم که شرایط ۲ و ۳ و ۴ برقرار باشند خواهیم داشت :

$$\cos\theta + \mathbf{e}\sin\theta = \frac{-S_{\mathbf{ab}} + V_{\mathbf{ab}}}{N_{\mathbf{a}}} = \frac{-S_{\mathbf{ab}} - V_{\mathbf{ab}}}{N_{\mathbf{a}}}$$

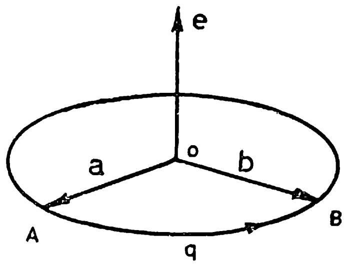
$$= -\frac{\mathbf{ba}}{N_{\mathbf{a}}} = \mathbf{b}\,\frac{K_{\mathbf{a}}}{N_{\mathbf{a}}}$$

و یا بموجب (۵۰-۱) داریم :

۱ـ **ba** حاصلضرب کواترنیونی است نه حاصلضرب تانسوری .

$$\cos\theta + \mathbf{e}\sin\theta = \mathbf{b}\mathbf{a}^{-1} \qquad (۹ - ۵۲)$$

در شکل (۱-۵۲) دیده میشود که اگر **a** و **b** و **e** مجموعه‌ای از راست بچپ بسازند زاویهٔ $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ وقتی کمتر از π باشد، درجهت خلاف حرکت عقربه های ساعت اندازه گرفته میشود (وقتی از انتهای **e** نگاه کنیم). در اینصورت جهت



ش ۱-۵۲

زاویهٔ $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ را نسبت به **e** جهت مثبت میگیریم. وقتی زاویهٔ $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ مساوی صفر یا π باشد مقدار q، برابر ۱ یا ۱ — خواهد شد و **e** کاملاً اختیاری است.

به هر کواترنیون واحد:

$$q = \cos\theta + \mathbf{e}\sin\theta$$

قوسی مانند $\widehat{AB}$ از دائرهٔ عظیمه‌ای واقع روی کرهٔ بمرکز O را میتوان مربوط کرد بشرطی که $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ و $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ در شرایط از (۱) تا (٤) صدق کنند. بدین ترتیب q مربوط به قوسی است از دائرهٔ عظیمه که صفحه‌اش عمود بر **e** وزاویهٔ مرکزی آن θ است و جهت مثبت نسبت به **e** دارد. تمام قوسهائی نظیر این قوس، از همین دایرهٔ عظیمه، میتوانند نمایشهای صحیحی برای q باشند. پس اگر قوس $\widehat{AB}$ معرف q باشد میتواند **روی دایرهٔ عظیمه‌اش حرکت کند بشرطی که طول و جهتش ثابت بماند.**

حالات $q = ۱$ $(\theta = 0)$ و $q = -۱$ $(\theta = \pi)$ که در آنها **e** اختیاری است

استثنائی هستند. هرنقطه از کره معرف $q=1$ وهرنیمدایرهٔ عظیمه معرف $q=-1$ است. بردار یکهٔ $q=\mathbf{e}$ $\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)$ مربوط به ربع قوسی از دایرهٔ عظیمه‌ایست که در صفحهٔ بمرکز O عمود بر $\mathbf{e}$ واقعست.

اگر $q=\cos\theta+\mathbf{e}\sin\theta$ مربوط به قوس $\widehat{AB}$ باشد مقدار:

$$q^{-1}=K_q=\cos\theta-\mathbf{e}\sin\theta \qquad (52-10)$$

بقوسی مربوط است که زاویه وصفحه‌اش با $\widehat{AB}$ یکی، ولی جهتش نسبت به $\mathbf{e}$ مثبت است. لذا q^{-1} بقوس $\widehat{BA}$ مربوط خواهد شد. بعلاوه داریم:

$$-q=-\cos\theta-\mathbf{e}\sin\theta=\cos(\pi-\theta)-\mathbf{e}\sin(\pi-\theta) \qquad (52-11)$$

بنابراین اگر q مربوط بقوس AB و AOA' قطری از دایره باشد، $-q$ به قوس A'B، مکمل قوس AB درجهت عکس مربوط خواهد شد.

اگر علامت $\sim$ را برای نشان دادن ارتباط انتخاب کنیم مطالب فوق را میتوانیم بترتیب زیر جمع و خلاصه کنیم:

ربع دایره $\sim \mathbf{e}$ و نیمدایره ~ -1 و نقطه ~ 1

قوس $A'B \sim -q$ و قوس $BA \sim q^{-1}$ و قوس $AB \sim q$

فایدهٔ این نمایش ارائهٔ روش تحلیلی ساده‌ای برای جمع دو قوس از دوایر عظیمه «بطور برداری» است. **برای جمع دو قوس آنها را روی دایرهٔ عظیمه‌شان حرکت میدهیم تا انتهای قوس اول (AB) با مبدأ قوس دوم (BC) منطبق شود. آنوقت قوس AC از دایرهٔ عظیمه را مجموع برداری آن دو قوس گوئیم.**

اگر $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$ و $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$ و $\mathbf{c}=\overrightarrow{OC}$ باشد قضیهٔ قبل نشان میدهد که کمانهای $\widehat{AB}$ و $\widehat{BC}$ و $\widehat{CA}$ بترتیب با کواترنیونهای $\mathbf{ba}^{-1}$ و $\mathbf{cb}^{-1}$ و $\mathbf{ca}^{-1}$ نشانداده میشوند. اگر $p=\mathbf{ba}^{-1}$ و $q=\mathbf{cb}^{-1}$ باشد، خواهیم داشت:

$\mathbf{ca}^{-1}=\mathbf{cb}^{-1}\mathbf{ba}^{-1}=qp$ ومعادلهٔ $\widehat{AB}+\widehat{BC}=\widehat{AC}$ بصورت زیرنوشته میشود:

$\widehat{p}+\widehat{q}=\widehat{qp}$. همچنین برای سه کمان خواهیم داشت :

$$\widehat{p}+\widehat{q}+\widehat{r}=\widehat{qp}+\widehat{r}=\widehat{rqp} \qquad (۵۲-۱۲)$$

و بطور کلی : **مجموع برداری چند قوس از دایرهٔ عظیمه ، توسط قوسی که به حاصلضرب قوسهای معرف کواترنیون آنها بترتیب عکس مربوط است نشان داده میشود .**

هنگام نمایش معادلاتی برای کمان ـ کواترنیون ، باید توجه داشت که معنی $\widehat{q}=0$ اینستکه $q=1$ است و اگر $\widehat{q}$ نیمدایرهٔ عظیمه‌ای باشد $q=-1$ است . مثلاً اگر $\widehat{p}$ و $\widehat{q}$ و $\widehat{r}$ اضلاع مثلثی کروی راتشکیل بدهند که بترتیب مستدیر درنظر گرفته شده‌اند ، خواهیم داشت :

$$\widehat{p}+\widehat{q}+\widehat{r}=0 \text{ و } \widehat{rpq}=0 \text{ و } rpq=1$$

بطور کلی**قوسهای معرف کواترنیونهای** q_1 و q_2 و ... و q_n **که بترتیب مستدیر گرفته شده‌اند تنها وقتی** یک کثیرالاضلاع مسدود کروی را تشکیل میدهند که داشته باشیم :

$$q_n q_{n-1} \cdots q_2 q_1 = 1 \qquad (۵۲-۱۳)$$

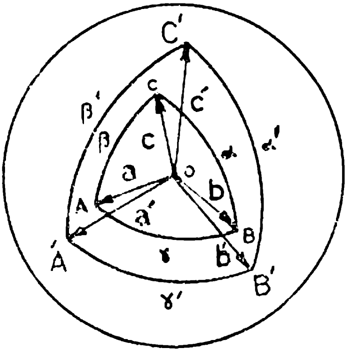
مثال ـ میخواهیم ملاحظات‌فوق‌را برای یک مثلث کروی بیان کنیم . قبلاً ناگزیر بذکر مقدمات زیر هستیم :

O مرکز کرهٔ بشعاع واحد است (ش ۲-۵۲) . ABC مثلثی کروی و

$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}\begin{vmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{vmatrix}$ و $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}\begin{vmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{vmatrix}$ و $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}\begin{vmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{vmatrix}$ فرض و طوری انتخاب شده‌اند

که تشکیل یکدستگاه از راست بچپ را میدهند و لذا $[\mathbf{abc}]=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\b_1 & b_2 & b_3\\c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}>0$

است . α و β و γ اضلاع مثلث و A و B و C زوایای داخلی دو وجهی های رؤس A و B و C فرض شده‌اند . $\mathbf{a}'$ و $\mathbf{b}'$ و $\mathbf{c}'$ بردارهای واحد و $\mathbf{b}'$ عمود برصفحهٔ $(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ و $\mathbf{c}'$ عمود برصفحهٔ $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ و $A-\pi=\alpha'$ زاویهٔ خارجی در A فرض شده‌اند .



ش ۵۲۲

روابط زیر بدیهی است :

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\cos\alpha \qquad \mathbf{c}\cdot\mathbf{a}=\cos\beta \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\cos\gamma \tag{۱'}$$

$$\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}=\cos\alpha\,\mathbf{a}' \qquad \mathbf{c}\wedge\mathbf{a}=\cos\beta\,\mathbf{b}' \qquad \mathbf{a}\wedge\mathbf{b}=\sin\gamma\,\mathbf{c}' \tag{۲'}$$

و از آنجا داریم :

$$\mathbf{b}'\wedge\mathbf{c}'=-\frac{(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a})\wedge(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})}{\sin\beta\sin\gamma}=\frac{[\mathbf{abc}]}{\sin\beta\sin\gamma}\mathbf{a}$$

که مضرب مثبتی است از $\mathbf{a}$. اگر α' و β' و γ' زوایای دو وجهی خارجی در رؤس A و B و C باشند داریم :

$$\mathbf{b}'\cdot\mathbf{c}'=\cos\alpha' \qquad \mathbf{c}'\cdot\mathbf{a}'=\cos\beta' \qquad \mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}'=\cos\gamma' \tag{۳'}$$

$$\mathbf{b}'\wedge\mathbf{c}'=\sin\alpha'\mathbf{a} \qquad \mathbf{c}'\wedge\mathbf{a}'=\sin\beta'\mathbf{b} \qquad \mathbf{a}'\wedge\mathbf{b}'=\sin\gamma'\mathbf{c} \tag{٤'}$$

چون رؤس مثلث C'B'A' قطبهای اضلاع مثلث ABC هستند این دو مثلث قطبی همدیگرند . از '(۲) و '(٤) نتیجه میگیریم :

$$[\mathbf{abc}] = \sin\alpha\, \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}' = \sin\beta\, \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}' = \sin\gamma\, \mathbf{c}\cdot\mathbf{c}'$$

$$[\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'] \sin\alpha'\, \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}' = \sin\beta'\, \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}' = \sin\gamma'\, \mathbf{c}\cdot\mathbf{c}'$$

از تقسیم این دو رابطه بریکدیگر ، داریم :

$$\frac{[\mathbf{abc}]}{[\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}']} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{\sin\beta}{\sin\beta'} = \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma'} \qquad (5)'$$

این رابطه به قانون **جیبها** در مثلث کروی موسوم است .

باز از رابطهٔ '(۲) داریم :

$$\sin\beta\sin\gamma\, \mathbf{b}'\cdot\mathbf{c}' = (\mathbf{c}\wedge\mathbf{a})\cdot(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})$$
$$= (\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$$

از '(۱) و '(۳) نتیجه میگیریم :

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha' \qquad (6)'$$

و همینطور از '(٤) نتیجه میگیریم :

$$\cos\alpha' = \cos\beta'\cos\gamma' - \sin\beta'\sin\gamma'\cos\alpha \qquad (7)'$$

ازجایگشت مستدیر α و β و γ و α' و β' و γ' چهار رابطهٔ دیگر نظیر '(٦) و '(۷) پیدا میشودکه به قانون **جیب تمامها** در مثلث کروی موسوم است . اگردر '(٥) و '(٦) و '(۷) بجای α' و β' و γ' مقادیر $\pi - A$ و $\pi - B$ و $\pi - C$ بگذاریم میتوانیم قوانین جیبها و جیب تمامها را برحسب زوایای **داخلی** مثلث بیان کنیم . لذا برای قانون جیبها خواهیم داشت :

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C}$$

وبرای قانون جیب تمامها داریم :

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A$$

$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos\alpha$$

حال با استفاده از مطالب فوق به مبحث کواترنیونها برمیگردیم . با همان قرار دادهای مذکور در فوق داریم :

$$\widehat{AC} \sim \mathbf{cb}^{-1} = \cos\alpha + \mathbf{a}'\sin\alpha$$

$$\widehat{CA} \sim \mathbf{ac}^{-1} = \cos\beta + \mathbf{b}'\sin\beta$$

$$\widehat{AB} \sim \mathbf{ba}^{-1} = \cos\gamma + \mathbf{c}'\sin\gamma$$

معادلهٔ «برداری» :

$$\widehat{CA} + \widehat{AB} = \widehat{CB}$$

به معادلهٔ کواترنیون :

$$(\mathbf{ba}^{-1})(\mathbf{ac}^{-1}) = (\mathbf{bc}^{-1})$$

و یا به معادلهٔ زیر مربوط است :

$$(\cos\gamma + \mathbf{c}'\sin\gamma)(\cos\beta + \mathbf{b}'\sin\beta) = \cos\alpha - \mathbf{a}'\sin\alpha \qquad (i')$$

اگر طرف اول را بسط داده و فرض کنیم :

$$\mathbf{c}'\mathbf{b}' = -\mathbf{b}'\cdot\mathbf{c}' - \mathbf{b}'\wedge\mathbf{c}' = -\cos\alpha' - \mathbf{a}\sin\alpha'$$

از مساوی قرار دادن قسمتهای عددی در هردوطرف ، داریم :

$$\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha' = \cos\alpha \qquad (ii)'$$

که این قانون همان قانون جیب تمام '(۶) در مثلث کروی است.

اگر قسمتهای برداری را در دو طرف '(i) مساوی بگذاریم داریم :

$$\mathbf{a}'\sin\alpha+\mathbf{b}'\sin\beta\cos\gamma+\mathbf{c}'\cos\beta\sin\gamma=\mathbf{a}\sin\alpha'\sin\beta\sin\gamma \qquad \text{(iii)}'$$

و از ضرب طرفین در $\mathbf{a}$ داریم :

$$\sin\alpha'\sin\beta\sin\gamma=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}'\sin\alpha=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}$$

و یا :

$$\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

چون طرف راست این تساوی با یک جایگشت مستدیر تغییر نمیکند لذا داریم :

$$\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}=\frac{\sin\beta'}{\sin\beta}=\frac{\sin\gamma'}{\sin\gamma} \qquad \text{(iv)}$$

که همان قانون جیبهای '(٥) در مثلث کروی است .

۵۳- **دوران** ـ به کمک جبر کواترنیون ، دوران محدود را درفضا بطرز زیبائی میتوان بیان کرد . این عمل براساس قضیهٔ اصلی زیر بنا میشود :

قضیه : **اگر q و r کواترنیونهای غیر عددواری باشند کواترنیون :**

$$r'=qrq^{-1} \qquad (۵۳-۱)$$

کواترنیونی است که هنج و عددوارش همان هنج و عددوار r است . بردار $V_{r'}$ ازدوران V_r درحول V_q بزاویه‌ای مساوی دو برابر q بدست میآید. بنابراین اگر $q=\sqrt{N_q}\,(\cos\theta+I\sin\theta)$ باشد ، $V_{r'}$ از دوران V_r در حول I باندازهٔ زاویهٔ ۲θ بدست خواهد آمد .

اثبات ـ طبق (۳۵-٤۹) و (۲٤-٤۹) هنج و عددوار 'r خواهد بود :

$$N_{(qrq^{-1})}=N_q\cdot N_r\cdot N_{q^{-1}}=N_r \qquad (۵۳-۲)$$

$$S_{(qrq^{-1})}=S_{(q^{-1}qr)}=S_{(q^{-1}qr)}=S_r \qquad (۵۳-۳)$$

بعلاوه اگر r با عبارت $r=S_r+V_r$ نشانداده شود داریم :

$$qrq^{-1}=S_r+q(V_r)q^{-1}$$

اما طبق (۳-۵۳) ، عددوار عبارت : $q(V_r)q^{-1}$ عین عددوار V_r و لذا یک بردار است .

پس :

$$V_{(qrq^{-1})}=q(V_r)q^{-1} \qquad (۵۳-۴)$$

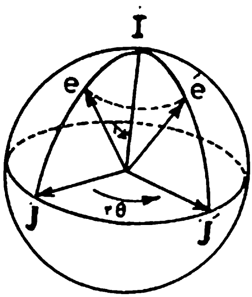
حال مینویسیم :

$$r=\sqrt{N_r}\,(\cos\varphi+\mathbf{e}\sin\varphi) \qquad (۵۳-۵)$$

لذا مطابق (۴-۵۳) داریم :

$$V_{r'}=\sqrt{N_r}\,\sin\varphi\,\mathbf{e}'$$

اگر **j** را درصفحهٔ (**I** , **e**) بگیریم و**K**را نوعی انتخاب کنیم که مجموعهٔ **I** و **J** و **K** از راست بچپ باشد (ش ۱-۵۳) خواهیم داشت :



ش ۱-۵۳

$$\mathbf{e}=\mathbf{I}\cos\lambda+\mathbf{J}\sin\lambda \qquad (۵۳-۶)$$

$$\mathbf{e}'=(q\mathbf{I}q^{-1})\cos\lambda+(q\,\mathbf{J}q^{-1})\sin\lambda \qquad (۵۳-۷)$$

چون V_q با **I** موازی است پس :

$$q\mathbf{I}=\mathbf{I}q \tag{۵۳—۸}$$

$$q\mathbf{I}q^{-1}=\mathbf{I}qq^{-1} \tag{۵۳—۹}$$

و بعلاوه :

$$\begin{aligned} q\mathbf{J}q^{-1} &= (\cos\theta+\mathbf{I}\sin\theta)\mathbf{J}(\cos\theta-\mathbf{I}\sin\theta) \\ &= (\mathbf{J}\cos\theta+\mathbf{K}\sin\theta)(\cos\theta-\mathbf{I}\sin\theta)=\mathbf{J}(\cos^2\theta-\sin^2\theta) \\ &\quad +\mathbf{K}(2\sin\theta\cos\theta) \end{aligned} \tag{۵۳—۱۰}$$

بنابراین $\mathbf{J}$ به :

$$\mathbf{J}'=\mathbf{J}\cos 2\theta+\mathbf{K}\sin 2\theta \tag{۵۳—۱۱}$$

تبدیل میشود یعنی $\mathbf{J}'$ از دوران $\mathbf{J}$ درحول $\mathbf{I}$ بزاویهٔ 2θ در جهت مثبت بدست آمده است . لذا داریم :

$$\mathbf{e}=\mathbf{I}\cos\lambda+\mathbf{J}\sin\lambda \implies \mathbf{e}'=\mathbf{I}\cos\lambda+\mathbf{J}'\sin\lambda \tag{۵۳—۱۲}$$

و اگر V_r هم باندازهٔ 2θ حول $\mathbf{I}$ دوران کند به $V_{r'}$ تبدیل میشود و لذا حکم ثابت است .

ملاحظه میکنیم که بردار ، به بردار تبدیل میشود . بالاخص اگر $q=\mathbf{a}$ برداری واحد و $\theta=90^\circ$ باشد . بردار :

$$\mathbf{e}'=\mathbf{aea}^{-1}=-\mathbf{aea}$$

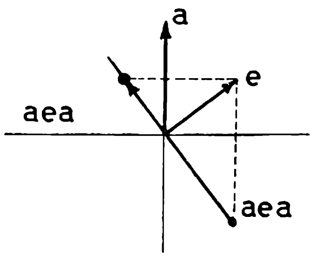
از دوران $\mathbf{e}$ در حول $\mathbf{a}$ باندازهٔ 180° درجه بدست خواهد آمد .

تبدیل $-\mathbf{a}(\ \ )\mathbf{a}$ بردارهائی را میدهد که **نیمدور** بدور $\mathbf{a}$ گردیده باشند .

تبدیل $\mathbf{a}(\ \ )\mathbf{a}$ را ممکنست بعنوان یک **نیمدوری** درنظر گرفت که بدنبال آن یک بازگشت [1] هم صورت گرفته باشد . برداری که باین ترتیب تبدیل شده

۱- Reversal

است در صفحه‌ای عمودبر **a** منعکس خواهد شد . بنابراین **aea** منعکس **e** در صفحه‌ای عمود بر **a** است (ش ۲-۳-۵) .



ش ۲-۳-۵

یک دوران باندازهٔ α در حول **a** مستلزم اینست که زاویهٔ دوران جهت مثبتی نسبت به **a** داشته باشد . اگر :

$$p = \cos\frac{\alpha}{۲} + \mathbf{a}\sin\frac{\alpha}{۲} \qquad (۵۳-۱۳)$$

$$q = \cos\frac{\beta}{۲} + \mathbf{b}\sin\frac{\beta}{۲} \qquad (۵۳-۱٤)$$

کواترنیونهای واحد باشند ، اعمال : $p(\quad)p^{-۱}$ و $q(\quad)q^{-۱}$ دورانهائی باندازهٔ α و β بترتیب حول **a** و **b** را بیان میکنند . برای سهولت این دورانها را p و q مینامیم . توالی دورانهای p و q وابسته به اعمال :

$$qp(\quad)p^{-۱}q^{-۱} = qp(\quad)(qp)^{-۱} \qquad (۵۳-۱۵)$$

میباشد و چون qp یک کواترنیون واحد است یعنی داریم :

$$qp = \cos\frac{\gamma}{2} + \mathbf{c}\sin\frac{\gamma}{2} \qquad (۵۳—۱۶)$$

پس نتیجه معادل است با یک دوران qp یعنی دورانی باندازهٔ γ در حول **c** .
همینطور pq نتیجهٔ دورانهای q و p مربوط به عملیات :

$$pq(\quad)q^{-1}p^{-1} = pq(\quad)(pq)^{-1} \qquad (۵۳-۱۷)$$

میباشد . زیرا رابطهٔ $pq = qp$ وقتی **صحیح است** که V_p و V_q موازی باشند (مقادیر $q = \pm ۱$ و p استثنا شده‌اند) . ترکیب دورانها مستقل از ترتیب نیست مگر وقتیکه محورهایشان یکی باشد .

دوران p که متعاقب آن دوران q صورت گرفته معادل با یک دوران تنهای qp است. بطورکلی تر، **توالی دورانهای $q_۱$ و $q_۲$ و ... و q_n معادل بادوران تنهای $q_n q_{n-۱} \cdots q_۲ q_۱$ میباشد .**

چون داریم $(-q)^{-۱} = -q^{-۱}$ پس دورانهای $q(\quad)q^{-۱}$ و $(-q)(\quad)(-q)^{-۱}$ یکی هستند اگر $q = \cos\theta + \mathbf{e}\sin\theta$ باشد داریم :

$$-q = \cos(\pi - \theta) + (-\mathbf{e})\sin(\pi - \theta) \qquad (۵۳—۱۸)$$

بنابراین $-q$ دورانی است باندازهٔ $۲\pi - ۲\theta$ درحول $-\mathbf{e}$. این عمل همان‌نتیجهٔ دوران q را خواهد داد یعنی دوران ۲θ در حول **e** .

چون داریم : $q^{-۱}q(\quad)q^{-۱}q = ۱(\quad)۱$ لذا دوران : $q^{-۱}(\quad)q$ عکس دوران $q(\quad)q^{-۱}$ است. این مطلب از رابطهٔ $q^{-۱} = \cos\theta - \mathbf{e}\sin\theta$ نیز بطوروضوح دیده میشود .

مثال ۱ـ یک دوران °۹۰ درحول **J** که متعاقب آن یک دوران °۹۰ دیگر در حول **I** صورت گرفته باشد با حاصلضرب کواترنیون :

$$(\cos 45^\circ + \mathbf{I}\sin 45^\circ)(\cos 45^\circ + \mathbf{J}\sin 45^\circ) = \frac{1}{2}(1+\mathbf{I}+\mathbf{J}+\mathbf{K}) \tag{53—19}$$

و یا با :

$$\frac{1}{2} + \frac{\mathbf{I}+\mathbf{J}+\mathbf{K}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 60^\circ + \frac{\mathbf{I}+\mathbf{J}+\mathbf{K}}{\sqrt{3}} \sin 60^\circ \tag{53—20}$$

نشان داده میشود . بنابراین نتیجهٔ دوران ، دورانی است بزاویهٔ 120° در حول محوری که با محورهای (جهت مثبت) x و y و z زوایای مساوی میسازد .

مثال ۲ـ نتیجهٔ دو انعکاس درصفحهٔ عمود بر بردارهای یکهٔ $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ مربوط به کارگزار زیر است :

$$\mathbf{ba}(\quad)\mathbf{ab} = \mathbf{ba}(\quad)(\mathbf{ba})^{-1} \tag{53—21}$$

اما اگر :

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{e}\sin\theta \quad و \quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \cos\theta$$

باشد داریم :

$$\mathbf{ba} = -\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = -(\cos\theta + \mathbf{e}\sin\theta) \tag{53—22}$$

حال که تساوی: $q(\quad)q^{-1} = (-q)(\quad)(-q)^{-1}$ برقرار است، پس انعکاسهای متوالی در دو صفحهٔ صیقلی معادل با یک دوران در حول فصل مشترك آنهاست بزاویه‌ای دو برابر زاویهٔ بین دو صفحه .

مثال ۳ـ طبق (۴۹-۲۲) داریم :

$$S_{(pq)} = S_{(pq)} \tag{53—23}$$

بعلاوه بموجب (۵۶-۴) داریم :

$$V_{(qp)} = V_{(qpqq^{-1})} = qV_{(pq)q^{-1}} \qquad (۵۳-۲۴)$$

لذا $V_{(qp)}$ از دوران $V_{(pq)}$ در حول V_q بزاویه‌ای دو برابر زاویهٔ q بدست آمده است . پس اگر **u** یک بردارباشد $V_{(up)}$ از دوران $V_{(pu)}$ باندازهٔ 180° درحول **u** بدست میآید یعنی **u** نیمساز زاویهٔ بین $V_{(pu)}$ و $V_{(up)}$ است .

فرض میکنیم **a** و **b** و **c** شعاعهائی از یک کرهٔ بمرکز O باشند . پس **a** و **b** و **c** بترتیب نیمسازهای زوایای بین V_{abc} ، V_{bca} و V_{bca} ، V_{cab} و V_{cab} ، V_{abc} خواهند بود . بعبارت دیگر اگر مثلثی کروی برؤس V_{abc} و V_{bca} و V_{cab} بسازیم اوساط اضلاع روبرو بترتیب روی بردارهای **b** و **c** و **a** واقع خواهند شد .

مثال ۴ـ اگر اضلاع یک کثیرالاضلاع کروی با کواترنیونهای q_1 و q_2 و ... و q_n و با همین ترتیب مستدیری نشان داده شده باشد بموجب (۵۱-۱۴) داریم :

$$q_n q_{n-1} \cdots q_2 q_1 = 1$$

لذا دورانهای متوالی :

$$q_n q_{n-1} \cdots q_2 q_1 (\quad) q_1 q_2 \cdots q_{n-1} q_n = 1 (\quad) 1 \qquad (۵۳-۲۵)$$

از جسمی در حول محورهائی که از نقطهٔ معین O میگذرند جسم را بوضع اولیهٔ خود برمیگردانند . ما این حالت را برای مثلث بطریق زیر بیان میکنیم :

قضیهٔ هامیلتن ـ دنکین(۱) اگر ABC مثلثی کروی باشد ، ۳ دوران متوالی آن که باکمانهای $2\widehat{BC}$ و $2\widehat{CA}$ و $2\widehat{AB}$ (درحول محورهای قطبی‌شان) نشان داده میشوند مثلث را بوضع اولیهٔ خود برمیگردانند .

۱- Hamilton – Donkin

همین قضیه برای مثلث قطبی $A'B'C'$ نیز صادق است . چون ضلع $B'C'=\alpha'=\pi-A$ و OA محور قطبی آن است دورانهای متوالی $2\pi-2A$ و $2\pi-2B$ و $2\pi-2C$ بترتیب در حول OA و OB و OC جسم را بوضع اولیه اش برمیگرداند . چون دوران $2\pi-2A$ و $-2A$ در حول OA هردو یک تغییرمکان را میدهند لذا قضیهٔ زیر را میتوانیم بیان کنیم :

قضیهٔ هامیلتن : اگر ABC مثلثی کروی واقع روی کرهٔ بمرکز O باشد سه دوران متوالی در حول OA و OB و OC بزوایای $2A$ و $2B$ و $2C$ درجهت CBA جسم را بوضع اول خود برمیگرداند .

تمرينات

۱- معادلات کواترنیون $rq=p$ و $qs=p$ را برحسب r و s وقتیکه :

$$p=۱+۲\mathbf{i}-\mathbf{J}+\mathbf{k} \text{ و } q=۲-\mathbf{i}-۲\mathbf{k}$$

باشد حل و تحقیق کنید که : $N_r=N_s$ است .

۲- ثابت کنید که کواترنیون q در معادلهٔ درجه دوم :

$$q^۲-۲qS_q+N_q=0$$

که به معادلهٔ اصلی آن موسوم است صدق میکند . همچنین مزدوج همین کواترنیون یعنی K_q نیز درهمین معادله صدق مینماید .

۳- ثابت کنید $۲+0\mathbf{i}$ و $۲+۳\mathbf{J}+\mathbf{K}$ یک معادلهٔ اصلی دارند .

٤- ثابت کنید که اگر کواترنیونهای یکه را با ماتریسهای ۲×۲ ی زیر متحد بگیریم :

$$\mathbf{1}=\begin{bmatrix} ۱ & 0 \\ 0 & ۱ \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{i}=\begin{bmatrix} -\mathrm{j} & 0 \\ 0 & \mathrm{j} \end{bmatrix}$$

و :

$$\mathbf{j}=\begin{bmatrix} 0 & ۱ \\ -۱ & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{K}=\begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{j} \\ -\mathrm{j} & 0 \end{bmatrix}$$

این ماتریسها در جدول ضرب (۱-۱-۵۲) صدق میکنند ($\mathrm{j}^۲=-۱$) .

۵- اگر $\mathbf{U}$ و $\mathbf{V}$ و $\mathbf{W}$ سه بردار باشند اتحادهاي زیر را ثابت کنید :

$$\mathbf{U}^2=-N_u\ ,\ (\mathbf{U}-\mathbf{V})(\mathbf{U}+\mathbf{V})\equiv\mathbf{U}^2+2V_{uv}-\mathbf{V}^2\ ,$$
$$2S_{uvw}\equiv\mathbf{UVW}-\mathbf{WVU}$$

و :

$$2V_{uvw}\equiv\mathbf{UVW}+\mathbf{WVU}\ ,\ S_{(u+v)(v+w)(w+u)}=2S_{uvw}$$

۶- ثابت کنید که تساویهای زیر بطور کامل، جدول ضرب یکه های $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ را بما میدهد :

$$\mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=\mathbf{k}^2=\mathbf{ijk}=-1$$

۷- معادلات: $\mathbf{ij}=\mathbf{k}$ و $\mathbf{jk}=\mathbf{i}$ و $\mathbf{ki}=\mathbf{j}$ و $\mathbf{kji}=1$ را برحسب بردارهای قوسی (Arc - vectors) نشان دهید .

۸- جسمی را باندازهٔ $90°$ در حول دو محور $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ که باهم زاویهٔ θ میسازند ($\cos\theta=\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2$) دوران میدهیم . ثابت کنید که یک دوران بزاویهٔ $2\cos^{-1}\frac{1}{2}(1-\cos\theta)$ درحول محوری موازی با : $\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2$ معادل همان دو دوران است .

۹- اگر $q=\cos\theta+\mathbf{e}\sin\theta$ (غیر عددوار) باشد ثابت کنید: دوران $q(\ \ )q^{-1}$ که متعاقبش انعکاس $\mathbf{a}(\ \ )\mathbf{a}$ صورت گرفته باشد وقتی فقط بیک انعکاس تنهای $\mathbf{b}(\ \ )\mathbf{b}$ تبدیل میشود که $\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}=0$ باشد و بعلاوه داریم :

$$\mathbf{b}=\mathbf{a}q=\mathbf{a}\cos\theta+\mathbf{a}\wedge\mathbf{e}\sin\theta$$

۱۰- اگر بازاء مقدار حقیقی دلخواه n ، q^n را با (۳-۵۵) تعریف کنیم ثابت کنید که هر کواترنیون را میتوان توسط توانهای یک بردار بیان کرد . وقتی $q=\cos\theta+\mathbf{e}\sin\theta$ است ثابت کنید که : $q=\mathbf{e}^{\frac{2\theta}{\pi}}$ است و بعلاوه دورانی بزاویهٔ φ درحول $\mathbf{e}$ باکارگزار $\mathbf{e}^{\frac{\varphi}{\pi}}(\ \ )\mathbf{e}^{\frac{-\varphi}{\pi}}$ نشانداده میشود .

۱۱- ABC مثلثی است کروی و P و Q بترتیب اوساط اضلاع AB و BC از آن . ثابت کنید که دو دوران متوالی که با قوسهای $\widehat{AB}$ و $\widehat{BC}$ نشانداده شده‌اند معادل با یک دورانی است که با دو برابر $\widehat{PQ}$ از دائره عظیمه نشان داده میشود .

۱۲- ثابت کنید که سه دوران متوالی که با قوسهای $\widehat{AB}$ و $\widehat{BC}$ و $\widehat{CA}$ از مثلث کروی ABC نشان داده شده‌اند معادل با یک دوران در حول A بزاویه‌ای برابر : $A+B+C-\pi$ (فضل مثلث کروی ABC) است .

۱۳- ثابت کنید که دورانهای متوالی φ و $\frac{\pi}{2}$ و φ بترتیب در حول محورهای Ox و Oy و Oz معادلند با یک دوران $\frac{\pi}{2}$ در حول محور y ها .

۱۴- اگر $r=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{K}$ و $r'=x'\mathbf{i}+y'\mathbf{j}+z'\mathbf{K}$ بردارهای وضعی (Position vector) و q یک کواترنیون دلخواهی باشد ثابت کنید که تبدیل $r'=qr(K_q)$ معرف کلی‌ترین دوران و تعمیم فضای ۳ بُعدی است . قدر نسبت این تعمیم چیست ؟

اگر $q=d+a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{K}$ باشد، x' و y' و z' رابرحسب x و y و z پیدا کنید .

راهنمای واژه‌ها و اصطلاحات و اسامی بترتیب حروف الفباء

در راهنمای زیر اعداد ، معرف شمارهٔ صفحات بوده و در هریک از ترکیبات ، هرواژه‌ای که باحروف درشت چاپ شده باید مقدم بر کلمات دیگر قرار گرفته خوانده شود . مثلاً «**اتحادهای** : بیانکی ۲۸۹ ، ۳۳۷ ، ۳۵۳ ؛ ریچی ۳۵۹ ؛ ژاکوبی ۳۵۷ » را چنین میخوانیم : «اتحادهای بیانکی در صفحات ۲۸۹ ، ۳۳۷ ، ۳۵۳ و اتحادهای ریچی در صفحهٔ ۳۵۹ و اتحادهای ژاکوبی در صفحهٔ ۳۵۷ باید جستجو شود» .

آنالیز تانسوری: ۱۹۵،۱۹۶،۲٤۵

آندومورفیسم: ۳،۳٦٤،۳٦۷

اتحادهای : بیانکی ۲۸۹،۳۳۷،۳۵۳؛ ریچی ۳۵۹ ؛ ژاکوبی ۳۵۷

اتومورفیسم : ۳

ادغام : ۹۵،۹٦،۱۹۳

ارتباط : آفین ۳٤۳ ؛ ریمانی ۱٦۱ ؛ لوی چیویتا ۳٦۱ ؛ متقارن ۳۳۵

ارتودرومی : ۵۵

ارتونورمه : ۱۳۵،۲۳۹،۲٤۳

استقلال خطی : ٦۷

استروگرادسکی : ۳۳۰

استوکس : ۳۲۹

اصل شناسائی : تانسورها ۱۰۱ ؛ تانسورهای نسبی ۱۲٦

اکسترمال : ۲٦۰

اکسترموم : ۲۵٦

امتدادهای خاص : ۲۹۹،۳۰۰

انتقال موازی : ۲۲۱،۲٤۹

انحنای فضا : ۲٦٤،۲٦۷

اندیس : آزاد ۱۷ ؛ تحتانی ، ۱۵،۱۷ ، ۱۹ ؛ فوقانی ۱۵،۱۷ ؛ گنگ ۱۷،۳۳

اولر : ۳۰۷

اولند : ۳۰۷

ایزومورف : ۳،۱۸۳

ایزومورفیسم : ۳،۱۸۸،۱۹۱

باناك : ٦۳

بُعد : ۵۸،٦۸

بردار: ٦٤ ؛ تکروند ۱٦٦،۲۹۲؛ قطبی ۱۱٤ ؛ کیلینگ ۲۲۲،۳٦۵ ؛ محوری ۱۱٤ ؛ سوزون ۲۲۲ ؛ ناهمگرد ۱۸۰؛ همگرد ۸۷،۱۸۰

برزیدن : ۱۱

پارامتر: تکروند ۳۰۱ ؛ دیفرانسیل ۲۲٤

پایا : ٦

پایاهای دیفرانسیل : ۲۹٤

پفاف : ۳۲٤

پولی : ۳۰٦

پیچش : ۳۳۵،۳٤۵،۳٤۹

تابع : چند خطی ۱۸۹ ؛ فاصله ۵۸ ؛

دو خطی ۱۸۴ ؛ نقطه ۸۷،۸۹

تانسور : ۵ ، ۷ ، ۸۶،۸۹،۹۳،۱۹۱ ، ۱۹۲،۱۹۳ ؛ اختلاف ۲۷۲ ؛ انحناء ۲۷۳،۲۷۵،۲۹۱،۳۶۶ ؛اصلی‌اقلیدسی ۱۳۳ ، ۱۳۴ ؛ اصلی هرمیتی ۱۶۹ ؛ پیچش ۲۴۷ ؛ تکروند ۱۵۸ ؛جایگشت ۱۵۳،۱۵۴ ؛دوران ۲۷۱،۲۷۲ ؛ ریچی-اینشتین ۲۸۸،۲۹۰ ؛ریمان کریستوفل ۲۷۳،۲۷۹ ؛ قرینه ۱۰۷،۱۱۰ ؛ قرینهٔ چپ ۱۰۷ ، ۱۱۰ ؛ کشسانی ۱۵۹ ؛ کرونکر ۹۰،۹۶ ؛متریک ۲۰۰ ؛ مختلط ۸۷ ؛ ناهمگرد ۸۷،۱۹۱ ؛ نسبی ۱۲۱، ۱۲۲،۱۲۶ ؛ همپا ۱۰۴،۱۵۱ ؛همگرد ۸۷،۱۹۱

تبدیل آفین مرکزدار : ۷۴

تبدیلات خطی : ۸۱

تحویل خطی : ۱۸۷،۱۸۸

تحویل دو خطی : ۱۸۸،۱۸۹

تغییرمحورهای مختصات : ۷۰،۱۴۴

تکروند : ۱۵۸

تنندهها : ۳۰۰،۳۰۸،۲۹۹

تنیدن : ۶۸

توازی : ۲۴۸،۲۴۹

توالی کوشی : ۶۲

جایگشت : ۱۹

جبر : خطی ۳۱۳،۳۱۵ ؛ کارتان ۳۲۰؛ کلیفورد ۲۹۹ ؛گراسمن ۳۲۰،۳۲۴ ؛ گیبس ۳۸۱،۳۸۳،۳۸۴ ؛ لی ۳۱۵

جرم مخصوص : آفین ۱۲۵ ؛ عددوار ۱۲۲

جمع مستقیم : ۱۸۴

چند برداره : ۱۱۷

حجم : آفین ۱۲۵ ؛ اولیهٔ فضای‌اقلیدسی ۱۵۷

حلقه‌ها : ۲، ۱۱

خصوصیات تانسور : ۹۴

خمیدگی :فضا ۲۴۶ ؛میدانهای تانسوری ۲۴۵ ؛ یک خم ۲۷۵

خواص آفین : ۶۱

خواص کشسانی : ۱۵۸

دستگاه : ارتونورمال ۱۳۵،۳۴۰ ؛ شبه قائم ۱۴۴

دلتای کرونکر : ۱۹،۲۲،۱۲۷

دنکین : ۴۰۰

دوبرداره : ۱۱۰

دوموآور : ۳۸۵

دیفرانسیل گیری خارجی : ۳۲۷ ، ۳۳۶

دیفرانسیل مطلق : ۲۱۱،۲۴۵،۳۳۳

دیفرانسیلها : ۳۱۰

دیورژانس : ۲۲۴،۲۲۵،۲۳۰

رابطهٔ عکس : ۸۸

ریمان : ۵

روتاسیونل : ۲۲۴،۲۲۷،۲۳۱،۳۲۹

رودریگ : ۳۰۷

زنجیرهٔ مینورها : ۲۴۰
زیر فضا : ۶۷،۱۴

ژاکوبین : ۱۲۰،۱۱۹،۱۱۸
ژئودزیك : ۲۴۹،۵۵ ، ۲۵۱ ، ۲۵۳،
۲۶۳ ؛ صفر ۲۵۳ ؛ سی‌نیمال ۲۵۵

ساختمان : ۵۸ ؛ ذره‌ای ۲۹۹
سطوح خطکشی : ۵۵
سه برداره : ۱۱۰

شاخص : ۲۳۶
شبه تانسور : ۱۵۷،۶۴
شبه عددوار : ۱۲۱
شکل درجهٔ دوم : ۱۷۲ ؛ اصلی ۱۳۸ ؛
متقارن ۳۵
شور : ۲۹۱

صورت انحناء : ۲۳۵
صورتهای پفاف : ۳۲۴
صورتهای دیفرانسیل : ۳۱۲،۳۱۱

ضرایب لامه : ۱۶۶
ضرب تانسوری : ۱۹۲ ؛ فضاها ۱۸۴
ضرب خارجی : ۳۲۴،۳۲۳ ؛ سه بردار
۱۱۵ ؛ دوبردار ۱۱۲ ؛ دوتانسور ۹۵
ضرب داخلی : ۱۳۱،۹۷
ضرب دکارتی : ۱۹۲ ؛ فضاها ۱۸۵
ضرب - لی : ۳۱۴،۳۱۳
ضرب مدغم : ۹۷

ظرفیت : ۸۷،۱۹۱ ؛ عددوار ۱۲۳،۱۲۲

عددوار : ۳۶۹،۹۷ ؛ نسبی ۱۲۴

فرایند : ۱
فرورفته : ۲۵۱
فضا : ۵۸
فضای : آفین ۲۳۸،۶۱ ؛ اقلیدسی ۵۹ ،
۲۳۹،۱۷۵،۱۴۳ ؛ اقلیدسی‌خاص ۱۴۱،
۱۷۴ ؛ اقلیدسی مماس ۲۴۳،۲۴۲ ؛ اینشتین
۲۹۳ ؛ باانحنای‌ثابت ۲۹۲ ؛ بخصوص
ریمانی ۲۴۰ ، ۲۴۱ ؛ برداری اقلیدسی
۱۳۱ ؛ برداری هرمیتی ۱۷۱،۱۶۷ ؛
n بعدی ۷۰ ؛ هندسی ۵۸
فضاهای : برداری ۵۹،۱۳،۱۱ ؛ خطی
۶۱ ؛ خطی‌هنجدار ۶۲ ؛ رکوران ۲۹۴ ؛
ریمانی ۲۵۴،۲۳۸،۲۳۵،۲۳۲،۱۴۴ ،
۲۶۰ ، ۲۸۱ ؛ ریمانی خاص ۲۹۲ ؛
متقابل ۱۸۰ ، ۱۸۱ ؛ متقارن ۲۹۴ ؛
متری ۵۸ ، ۵۹ ؛ مجرد ۵۹ ؛ موزون
۲۹۳
فصل کروی : ۲۶۶
فویگت : ۵

قانون : جیب تمامها ۲۹۲ ؛ خارج قسمت
۱۰۱

کاراکتریستیك : ۲۶۴
کارگزار : ۳۵۶ ، ۳۶۴ ؛ دیفرانسیل
۲۲۴ ؛ لاپلاسی ۲۹۳
کاملاً قرینهٔ چپ : ۱۲۲،۱۰۹،۱۹ ،
۱۲۴،۱۲۳
کاملاً متقارن : ۱۰۹،۱۹
کسول : ۳۵۶
کشسانی : ۴

کمیت : برداری ۴ ؛ عددوار ۴ ؛ مختلط ۱۴۳
کواترنیون : ۳۶۱
کوموتاتور - لی : ۳۱۰
گرادین . ۲۲۹،۲۲۵،۲۲۴
گروه - لی : ۷
لاپلاسی : ۲۳۲،۲۲۷،۲۲۴
او باچفسکی : ۲۹۲
لیشنرو ویچ : ۳۱۸
ماتریس : ۸
ماتریسهای تنش : ۳۰۷،۳۰۶
مانیفلد شبه ریمانی : ۳۶۳،۳۶۱
مبنا : ۶۸
مبناهای متقابل : ۸۱
مبنای زنجیره : ۲۴۰
متریك : ۲۳۸ ؛ اقلیدسی ۱۳۱
مختصات : استوانه‌ای ۴۲ ، استوانه‌ای سهمیوار ۵۱ ؛ بیضوی مانند ۴۶ ؛ پارابولوئیدی ۴۹ ؛ چنبره‌ای ۵۴ ؛ دو قطبی ۵۲ ؛ قطبی ۴۰ ؛ ۲۰۸ ؛ کروی ۴۴ ، ۲۰۷ ؛ گویوار پخ ۴۷ ؛ گویوار کشیده ۴۷ ؛ مخروطی ۴۹ ؛ مستقیم الخط ۱۰۳،۳۶ ؛ منحنی الخط ۴۰ ، ۱۰۳ ؛ نرمال ۲۴۲ ، ۲۷۸ ؛ همگرد ۱۵۱ ، ۱۵۵
مدول : ۲۵۹،۱۳۲
مرتبه : ۱۹۱،۸۷
مشتق-لی : ۳۱۶ ، ۳۱۷ ، ۳۱۸ ؛ یك ارتباط ۳۵۷،۳۵۶
مشتق مطلق صورتهای تانسوری : ۳۳۲
مشتق - همگرد : ۲۱۷ ، ۲۱۵،۲۱۰ ، ۲۸۰ ؛ دترمینان ۲۱۹ ؛ شبه تانسور ۲۴۶،۲۲۲ ؛ گیری ۳۴۳،۲۲۲
معادلات ساختمان : ۳۳۸،۳۳۷
معادلات ساختمانی کارتان : ۳۴۹
معین : ۳
مؤلفه‌های: تانسور ۱۹۲ ؛ فیزیکی ۲۲۸، ۲۲۹ ؛ ناهمگرد ۷۹ ؛ همگرد ۸۰ ؛ همگرد یک‌بردار ۱۵۰ ؛ یك بردار ۶۴
میدان : ۱۴،۹،۲ ؛ برداری ۳۴۵ ؛ برداری کیلینگ ۳۶۶،۳۶۳ ؛ تانسوری ۸۹
میدانهای برداری موازی : ۲۲۰
مینکوسکی : ۱۴۳،۵۹
می‌نیمال : ۲۵۵،۲۳۸
ناهمگردی : ۸۰
نسبیت محدود : ۱۴۳
نقطه : ۶۴
نماد : ۱ ؛ تنش ۲۰ ؛ کریستوفل ۲۰۳، ۲۰۵ ، ۲۹۹ ؛ کریستوفل ادغام شده ۲۱۹
نمادی : ۱
نمونه : ۱
نوع : ۸۸،۷۹
هامیلتن : ۳۶۹
همخصوصیت : ۹۴
همسان : ۲

همسانی : ۲
همعامل : ۱۷، ۲۶، ۱۵۱، ۱۵۲
همگردی ، ۸۰
هنج : ۶۰
هندسهٔ : اقلیدسی ۲۴۷ ؛ الیپتیک ۲۹۲ ؛ پارابولیک ۲۹۲ ؛ دیفرانسیل ۲۳۵ ؛ ریمانی ۲۳۵، ۲۳۹ ؛ ریمانی محلی ۲۳۵، ۲۴۷ ؛ هیپربولیک ۲۹۲
هیپر : حجم ۱۱۸ ، ۱۵۷ ؛ خط ۲۴۹ ؛ سطح ۲۵۱،۶
هیلبرت : ۶۳
یکمقداری : ۷۵، ۲۳۵