جبر خطی

چارلز کرتیس

ترجمهٔ نوروز ایزددوستدار، بیژن شمس، اسدالله کارشناس

جبر خطی

چارلز کرتیس

ترجمهٔ نوروز ایزددوستدار، بیژن شمس، اسدالله کارشناس

مرکز نشردانشگاهی، تهران

ریاضی، آمار، و کامپیوتر
۱۰۱

مرکز نشر دانشگاهی
۷۷۷

Linear Algebra, An Introductory Approach
Charles W. Curtis
Springer-Verlag, 1984

جبر خطی
تألیف چارلز کرتیس
ترجمهٔ دکتر نوروز ایزددوستدار، دکتر بیژن شمس، دکتر اسدالله کارشناس
ویراستهٔ دکتر محمدهادی شفیعیها

نسخه‌پرداز: ابوالفضل بیرامی
مرکز نشر دانشگاهی، تهران
چاپ اول ۱۳۷۴
تعداد ۳۰۰۰
حروفچینی: مرکز نشر دانشگاهی
چاپ و صحافی: نوبهار

فهرستنویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

کرتیس، چارلز — Curtis, Charles W.
جبر خطی/ چارلز کرتیس: ترجمهٔ نوروز ایزد دوستدار، بیژن شمس، اسدالله کارشناس.ـ تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۴.
چهار، ۳۹۱ ص.: مصور.ـ (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۷۷۷. ریاضی، آمار و کامپیوتر؛ ۱۰۱)
ISBN 964-01-0777-8
عنوان اصلی: Linear algebra, An introductory approach
واژه‌نامه:
کتابنامه: ص. ۳۶۷
۱. جبر خطی. الف. ایزد دوستدار، نوروز، ۱۳۱۵ـ ، مترجم. ب. شمس، بیژن، ۱۳۱۰ـ ، مترجم. ج. کارشناس، اسدالله، ۱۳۱۱ـ ، مترجم. د. مرکز نشر دانشگاهی.
هـ. عنوان.
۵۱۲/۵ — QA ۲۵۱ / ۴ ج ۲ ک
۱۳۷۴
کتابخانهٔ ملی ایران — ۷۴ـ۵۶۲۲م

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست

پیشگفتار

جبر خطی شاخه‌ای است از ریاضیات که از مطالعهٔ نظری مسألهٔ حل دستگاههای معادلات خطی نشأت گرفته است. مفاهیمی که به‌این ترتیب بسط یافته‌اند، عملاً بخشی از زبان ریاضیات عالی شده‌اند، و در عین حال چارچوبی برای کاربردهای آنها در اقتصاد ریاضی (برنامه‌ریزی خطی)، دانش کامپیوتر و علوم‌طبیعی فراهم آورده‌اند.

این کتاب، چاپ چهارم کتابی درسی است که برای درسهایی از سطوح بالاتر در جبر خطی طرح‌ریزی شده است. در عین حال که پیشنیازی برای مطالعهٔ آن منظور نشده است، نحوهٔ برداشت و تکیه بر بسط نظری، مطالعهٔ آن را برای دانشجویانی مناسب می‌سازد که یک دوره درس حساب دیفرانسیل و انتگرال را بپایان رسانده باشند.

شاید برای بسیاری از دانشجویان، این نخستین درسی باشد که در آن برهان قضیه‌های اصلی پابه‌پای روشهای حل مسأله‌ها ارائه و نشان داده شده است که مفاهیم نظری طبعاً از تلاش برای درک مسائل خاص پدیدار شده‌اند. این ارتباط تقریباً در هر بخش با نمونه‌های حل‌شده ارائه شده است.

موضوع جبر خطی به‌ویژه از این نظر ارضاکننده است که در آن براهین قضیه‌های اصلی معمولاً با شیوه‌های محاسباتی لازم برای حل مسأله‌های عددی همراه‌اند. تمرینهای عددی بسیاری گنجانده شده‌اند که در آنها از همهٔ مفاهیم اساسی استفاده می‌شود، و تکنیکهای مهمّی برای حل مسائل پدید می‌آورد. تمرینهای نظری نیز در آن وجود دارند که فرصتهائی را برای دانشجویان فراهم می‌کنند تا چیزهای جالبی را خود کشف و صورتهای مختلف استدلالهائی را که در متن آمده، پیدا کنند، و نوشتن مطالب ریاضی را به‌روشی روشن و منطقی فراگیرند. پاسخها و راهنمائیهای مسأله‌های نظری در آخر کتاب آورده شده‌اند. ولی همهٔ پاسخها داده نشده‌اند تا دانشجویان در پرورانیدن شیوه‌های خود برای بازبینی کارشان تشویق شوند.

یک جنبهٔ خاص این کتاب دارا بودن بخشهایی است که به‌کاربردهای جبر خطی اختصاص دارند. این بخشها عبارت‌اند از: بخشهای ۸ و ۹ دربارهٔ دستگاه معادلات، بخش ۱۰ دربارهٔ تعبیر هندسی دستگاههای معادلات خطی، بخشهای ۱۴ و ۳۳ دربارهٔ گروههای متقارن متناهی در

فضاهای دو و سه‌بعدی، بخش ۳۴ دربارهٔ دستگاه معادلات خطی مرتبهٔ اول و ماتریس نمائی، و بخش ۳۵ دربارهٔ ترکیب صورتهای درجهٔ دوم. این بخشها شامل یادداشتهای تاریخی از نتایجی ژرف مبتنی بر قضیه‌های متن، همراه با مطالبی بدون احتیاج به پیشنیازند که توان و چند جهتی بودن جبر خطی را نشان می‌دهند. این بخشها در مسیر اصلی گفتار نیستند و می‌توان آنها را ضمن درس مطرح و یا جداگانه مطالعه کرد.

جنبهٔ دیگر کتاب، فراهم‌کردن مقدمه‌ای برای روشهای اصل موضوعی جبرنوین است. دستگاههای اساسی جبر ـ گروهها، حلقه‌ها و هیأتها ـ همه به‌طور طبیعی در جبر خطی ظاهر می‌شوند. تعریفها و ویژگیهای مقدماتی آنها در مبحثی که مطرح می‌شوند، مشخص و ثابت می‌شوند. بر پایهٔ این کتاب می‌توان درسی کامل درگروهها، حلقه‌ها، هیأتها و مدولها، در سطح پیشرفتهٔ کارشناسی تهیه کرد. باید توجه داشت که ویژگیهای اساسی هیأتها در بخش ۲ بیان و در بخش ۳ برای تعریف فضاهای برداری مورد استفاده قرارگرفته‌اند. ولی اگر با حذف بخش ۲ و توجه به فضاهای برداری فقط روی هیأت اعداد حقیقی F در فصلهای ۲ و ۵، شیوهٔ کمتر مجرّدی دنبال شود، چیزی از دست نمی‌رود. در این صورت لازم است پیش از شروع فصل ۷ خاطرنشان کنیم که قضیه‌های فصلهای ۲، ۳، ۵ (با همان برهانها) برای فضاهای برداری روی هیأت اعداد مختلط نیز برقرارند.

در صورتی‌که درسی در یک نیمسال (یا دو ربع سال) داده شود، باید شامل قسمتهای زیر باشد: فصلهای ۲، ۶، بخشهای ۲۲، ۲۴ از فصل ۷، بخشهای ۳۰ و ۳۱ از فصل ۹، با یادآوریهایی مقدماتی در آغاز دربارهٔ هیأتها و استقراء ریاضی از بخش ۲.

درس یک‌ساله باید نظریهٔ صورتهای گویا و صورتهای متعارف ژوردان راکه از بخش ۲۵ شروع می‌شوند نیز دربرگیرد. برهان مقدماتی قضیهٔ مقسوم‌علیه (بخش ۲۹) بر پایهٔ نظریهٔ فضاهای برداری دوگان نهاده شده‌است. ولی الگوریتم تعیین عاملهای پایای یک ماتریس با درایه‌های چندجمله‌یی نیامده است. این قسمت به‌نظریهٔ مدولها روی حوزه‌های ایدئال اصلی تعلق دارد و برای درس بعدی گذاشته شده است. مبحثهای دیگری که بر پایهٔ این کتاب باید در یک درس برای یک سال گنجانده شوند، حاصلضرب تانسوری فضاهای برداری، تبدیلهای یکانی و قضیهٔ طیفی و بخشهای مربوط به‌کاربردهایی هستند که قبلاً خاطرنشان شده‌اند.

وظیفهٔ خود می‌دانم که از تشویق دانشجویانم در مورد این طرح درکلاسهای خود در ویسکانسین و اورگون تشکر کنم. توصیه‌های آنها و نقدهای سنجیدهٔ معلمانی که از روی چاپهای قبلی آن تدریس کرده‌اند، مرا به‌بهبود چاپهای بعدی، از جمله، اصلاحات، تجدیدنظرها و افزودن تمرینهای اضافی به‌این چاپ جدید رهبری کرده‌اند. از علاقه و پشتیبانی خانواده‌ام نیز سپاسگزارم.

چارلز، کرتیس

یوجین، اورگون
۱۲ فوریهٔ، ۱۹۸۴

۱

مقدمه‌ای بر جبر خطی

نظریه‌های ریاضی به‌خودی خود به‌وجود نیامده‌اند. نظریه‌هایی که سودمندی آنها به ثبوت رسیده، در بیشتر موارد، منبعث از مسائل خاصی هستند، که فهم یا حل آنها بدون درک اصول اساسی دشوار است، این فصل را با دو مسأله از این نوع، که یک مجموعه اصول مشترکی دارند، آغاز می‌کنیم. جبر خطی، که مطالعهٔ فضاهای برداری، تبدیلهای خطی و ماتریسهاست، نتیجهٔ کوششی برای دریافت جنبه‌های مشترک این مسائل و مسائل مشابه است.

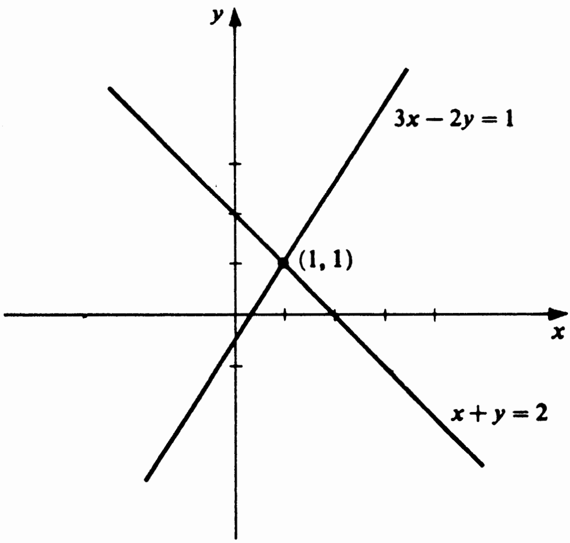
۱. چند مسأله که به جبر خطی منجر می‌شود

این بخش را باید بار اول، نه به‌منظور فهم دقیق جزئیات آن، بلکه برای پی بردن به انگیزهٔ نگارش آن، به‌سرعت مرور کرد.

مسألهٔ الف. هرکسی، از جبر مقدماتی، با مسألهٔ حل دو معادلهٔ دومجهولی خطی، مانند

$$\begin{aligned} ۳x - ۲y &= ۱ \\ x + y &= ۲ \end{aligned} \qquad (۱.۱)$$

آشناست. چنین دستگاهی را با حذف یک مجهول، مثلاً پس از ضرب معادلهٔ دوم در ۲ و افزودن آن به معادلهٔ اول، حل می‌کنیم. حاصل آن $۵x = ۵$، یا $x = ۱$ است. پس از قراردادن مقدار آن



شکل ۱.۱

در معادلهٔ اول، می‌بینیم که

$$۳ - ۲y = ۱$$

یا $y = ۱$، جواب دستگاه اولیّهٔ معادلات زوج اعداد (۱، ۱) است، و فقط یک جواب وجود دارد.

اگر، از دیدگاه هندسی، به‌مسألهٔ اولیّه نگاه کنیم، چیزی که رخ می‌دهد روشن می‌شود. معادلات

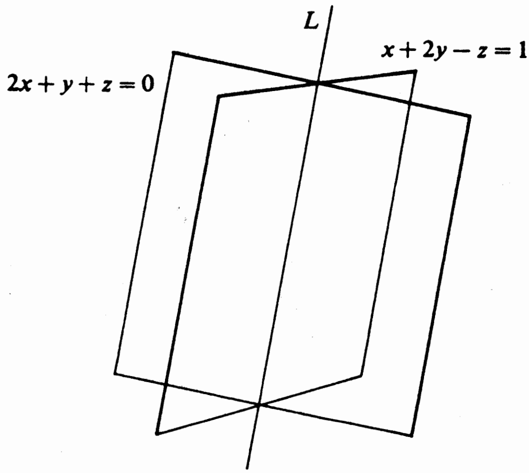
$$x + y = ۲ \quad \text{و} \quad ۳x - ۲y = ۱$$

معادله‌های خطوط راستی در صفحهٔ (x, y) هستند (← شکل ۱.۱). جواب بالا، که برای این دستگاه معادلات به‌دست آمد، مبین این است که دو خط نامبرده در نقطه‌ای یکتا، که در این حالت (۱, ۱) است، یکدیگر را قطع می‌کنند.

اکنون مسألهٔ مشابهی را، که شامل دو معادلهٔ سه‌مجهولی است، در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} x + ۲y - z &= ۱ \\ ۲x + y + z &= ۰ \end{aligned} \qquad (۲.۱)$$

این بار حذف مجهولات چندان آسان نیست. ولی می‌بینیم که اگر به z مقدار خاصی، مثلاً ۰،



شکل ۲.۱

بدهیم، می‌توانیم دستگاه حاصل:

$$x + ۲y = ۱$$
$$(z = ۰)$$
$$۲x + y = ۰$$

را حل کنیم و $x = -\frac{۱}{۳}$، $y = \frac{۲}{۳}$ را به‌دست آوریم؛ از این‌رو یک جواب دستگاه اولیّهٔ (۲.۱) عبارت از $(-\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}, ۰)$ است. ولی این‌بار جوابهای بسیار دیگری نیز وجود دارد؛ مثلاً، اگر قرار دهیم $z = ۱$، جواب $(-\frac{۴}{۳}, \frac{۵}{۳}, ۱)$ را به‌دست می‌آوریم. درواقع، به‌ازای هر مقدار z، می‌توانیم یک جواب به‌دست آوریم. باز با یک تعبیر هندسی، پاسخ معمای وجود این همه جواب داده می‌شود. معادلات (۲.۱) معادله‌های دو صفحه در مختصات (x, y, z) هستند. (← شکل ۲.۱). این بار جوابها، که به‌صورت نقاطی در مختصات (x, y, z) در نظر گرفته می‌شوند. متناظر با نقاط واقع بر خط L، یعنی فصل مشترک دو صفحهٔ نامبرده‌اند.

مسألهٔ دوم نشان می‌دهد که برای بیان جوابهای دستگاه (۲.۱) و ارائهٔ روشی برای یافتن همهٔ آنها، کار بیشتری مورد نیاز است. ولی چرا در اینجا متوقف شویم؟ در انواع بسیاری از مسائل، به‌جوابی برای دستگاه معادلاتی با بیش از دو یا سه مجهول نیازمندیم؛ مثل

$$\begin{aligned} x + ۲y - ۳z + t &= ۱ \\ x + y + z + t &= ۰ \end{aligned} \qquad (۳.۱)$$

در این حالت و حالتهای پیچیده‌تر دیگر، شهود هندسی برای دادن نمونهٔ کاملی از چه بود جواب

(به‌هر حال، برای بیشتر ما) مهیا نیست. در عین حال، از لحاظ کاربردی، وجود این‌گونه مثالها بعید نیست، مثلاً دستوری که دمای t را در نقطهٔ (x, y, z) می‌دهد، متضمن چهار متغیر است. یکی از وظایف جبر خطی، فراهم آوردن چارچوبی برای بحث در مسائلی است که چنین ماهیتی دارند.

مسألهٔ ب. در حساب دیفرانسیل و انتگرال، مسأله‌ای که با آن آشنا هستیم یافتن تابعی است مانند $y = f(x)$ که مشتق آن $y' = Df(x)$ معلوم است. مثلاً اگر y' تابع ثابت ۱ باشد، می‌دانیم $y = x + C$، که در آن C مقداری ثابت است. این نوع مسأله را یک معادلهٔ دیفرانسیل می‌نامند. هم در مکانیک و هم در مدارهای الکتریکی، مسائلی هستند که به معادلات دیفرانسیلی مانند

$$y'' + m^۲ y = ۰ \qquad (۴.۱)$$

که در آن m یک ثابت مثبت و y'' مشتق دوم تابع مجهول y است، منجر می‌شوند. این‌بار جواب موردنظر چندان روشن نیست.

با روش مشتق‌گیری از توابع مقدماتی، دیده می‌شود که $y = A \sin mx$ یا $y = B \cos mx$، که در آنها A و B ثابتهای دلخواه هستند، جوابهایی از این معادله‌اند. ولی در اینجا نیز همانند حالت معادلات (۲.۱) و (۳.۱)، جوابهای بسیار دیگری، مانند $y = C \sin(mx + D)$، وجود دارند که در آن C و D ثابت‌اند. در این حالت، مسأله عبارت است از یافتن بیان روشنی برای همهٔ جوابهای ممکن معادلات دیفرانسیلی مانند (۴.۱).

اکنون ببینیم وجه اشتراک این دو نوع مسأله، در صورت وجود، جز این واقعیّت که هر دو متضمّن حل معادلات هستند در چیست. مثلاً در مورد معادلات (۳.۱)، ما به مجموعه‌های مرتب چهار عددی مانند $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ علاقه‌مندیم که، اگر آنها را، به‌ترتیب، به‌جای x، y، z و t قرار دهیم. در معادلات (۳.۱) صدق کنند. $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ را یک بردار چهار درایه‌ای خواهیم نامید: بعداً (در فصل ۲)، بردارهای $(\alpha_۱, \cdots, \alpha_n)$، $n = ۱, ۲, ۳, \cdots$ را با n درایهٔ $\alpha_۱$، ... ، α_n تعریف خواهیم کرد. برداری مانند $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ را که در معادلات (۳.۱) صدق می‌کند، یک بردار جواب دستگاه (۳.۱) [یا به‌طور ساده یک جواب (۳.۱)] خواهیم نامید. اکنون می‌توان احکام زیر را دربارهٔ جوابهای (۳.۱)، بیان داشت.

(i) اگر $u = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ و $u' = (\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ هردو، جوابهای (۳.۱) باشند، آنگاه

$$(\alpha - \alpha', \beta - \beta', \gamma - \gamma', \delta - \delta')$$

یک جواب، دستگاه معادلات همگن زیر است (که از صفر گذاردن طرف راست به‌دست آمده‌اند).

$$\begin{aligned} x + ۲y - ۳z + t &= ۰ \\ x + y + z + t &= ۰ \end{aligned} \qquad (۵.۱)$$

(ii) اگر $u = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ و $u' = (\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ جوابهای دستگاه همگن (۵.۱) باشند، آنگاه

$$(\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma', \delta + \delta')$$

و نیز،

$$(\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma, \lambda\delta)$$

که λ عددی است دلخواه، جوابهای آن هستند.

(iii) فرض کنیم $u_\circ = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ یک جواب ثابت دستگاه ناهمگن (۳.۱) باشد. پس v یک جواب دلخواه این دستگاه ناهمگن، **به‌صورت زیر است**

$$v = (\alpha + \xi, \beta + \eta, \gamma + \lambda, \delta + \mu) \qquad (۶.۱)$$

که در آن، $(\xi, \eta, \lambda, \mu)$ یک جواب دلخواه دستگاه همگن (۵.۱) است.

درستی احکام (i) و (ii) از قراردادن مستقیم در معادلات تحقیق می‌شوند. برای تحقیق درستی‌حکم (iii)، نخست فرض می‌کنیم $v = (a, b, c, d)$ یک جواب دلخواه دستگاه (۳.۱) باشد. به‌موجب حکم (i) با توجه به‌اینکه $u_\circ = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ جواب ثابت (۳.۱) است، می‌بینیم که

$$(a - \alpha, b - \beta, c - \gamma, d - \delta)$$

یک جواب دستگاه همگن نامبرده است، و اگر قرار دهیم $\xi = a - \alpha$، $\eta = b - \beta$، $\lambda = c - \gamma$، $\mu = d - \delta$، خواهیم داشت،

$$v = (a, b, c, d) = (\alpha + \xi, \beta + \eta, \gamma + \lambda, \delta + \mu)$$

همان چیزی راکه می‌خواستیم. یک استدلال دیگر (که از ذکر آن خودداری می‌کنیم) نشان می‌دهد که هر بردار به‌صورت (۶.۱) واقعاً یک جواب دستگاه ناهمگن (۳.۱) است.

از آنچه که گذشت چه فراگرفتیم؟ نخست آنکه می‌توان مطالب مربوط به‌جوابهای معادلات را، برحسب اعمال معینی روی بردارها:

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) + (\alpha', \beta', \gamma', \delta') = (\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma', \delta + \delta')$$

و

$$\lambda(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma, \lambda\delta)$$

بیان کرد. بدینسان می‌توانیم دو بردار را بر هم بیفزاییم و بردار جدیدی به‌دست آوریم، و می‌توانیم یک بردار را در یک عدد ضرب کنیم تا بردار جدیدی حاصل شود. بنابراین، برحسب این اعمال، می‌توانیم

مسألهٔ حل دستگاه (۳.۱) را به‌صورت زیر بیان کنیم: (۱) یک جواب $u_\circ$ دستگاه ناهمگن را می‌یابیم؛ (۲) یک جواب دلخواه vی دستگاه ناهمگن (که اغلب جواب عمومی نامیده می‌شود) با

$$v = u_\circ + u$$

بیان می‌شود که در آن، u در مجموعهٔ جوابهای دستگاه همگن تغییر می‌کند؛ (۳) همهٔ جوابهای دستگاه همگن (۵.۱) را می‌یابیم.

حال به‌معادلهٔ دیفرانسیل (۴.۱) برمی‌گردیم. نخست می‌بینیم که اگر توابع f_1 و f_2 جوابهای این معادله باشند (یعنی، $f_1'' + m^2 f_1 = 0$، $f_2'' + m^2 f_2 = 0$)، آنگاه $f_1 + f_2$ و λf_1 نیز، که در آن λ یک عدد دلخواه است، جوابهای آنند. ولی این همان وضعیتی است که در گزارهٔ (ii) بالا مشاهده کردیم، در حالی‌که اکنون، به‌جای بردار، تابع داریم. کمی جلوتر برویم. فرض کنیم یک معادلهٔ دیفرانسیل ناهمگن (به‌قیاس با معادلات خطی) مانند

$$y'' + m^2 y = F \tag{۷.۱}$$

که در آن F تابع مشخصی است، داریم. در این‌صورت می‌بینیم که هر سه حکمی که در مورد مسألهٔ الف داشتیم، برقرارند. تفاضل دو جواب دستگاه ناهمگن (۷.۱) یک جواب این دستگاه همگن است. اگر به‌جای اعمال جمع توابع و ضرب آنها در ثابتها، اعمال متناظر روی بردارها گذاشته شوند، جوابهای دستگاه همگن در حکم (ii) صدق می‌کنند. سرانجام، یک جواب دلخواه دستگاه ناهمگن، از یک جواب خصوصی $f_\circ$ آن و افزودن یک جواب دستگاه همگن به $f_\circ$، به‌دست می‌آید.

بجاست که بپذیریم رفتار مشابه جوابهای مسائل (الف) و (ب)، یک تصادف محض نیست. با مفهوم فضای برداری، که در فصل ۲ به آن می‌پردازیم، چارچوب مشترکی فراهم می‌سازیم که زیربنای هر دو مسألهٔ فوق‌الذکر خواهد بود. پیش از شروع به مطالعهٔ فضاهای برداری، یک بخش مقدماتی دیگری نیز داریم، که در آن مطالبی را دربارهٔ مجموعه‌ها و اعداد مورد نیاز، مرور می‌کنیم.

۲. دستگاههای اعداد و استقرای ریاضی

آشنایی با دستگاه اعداد حقیقی را، که در درسهای اولیه در جبر مقدماتی، مثلثات یا در حساب دیفرانسیل و انتگرال مورد بحث قرار گرفته است، مسلم فرض می‌کنیم. ولی خواهیم دید که دستگاههای اعداد دیگری به‌جز اعداد حقیقی (مانند اعداد مختلط) نیز نقش مهمی در جبر خطی دارند. در عین حال، همهٔ جزئیات مطالب مربوط به این دستگاههای اعداد (مانند قدرمطلق و نمایش قطبی اعداد مختلط) تا اواخر این کتاب مورد نیاز نخواهند بود.

برای اینکه سرآغاز کاملاً مشخصی داشته باشیم، مجموعه‌ای از اصول موضوع را برای دستگاهی از اعداد، به‌نام هیأت، ذکر خواهیم کرد که پایهٔ محکمی است برای نظریهٔ فضاهای برداری، که در

فصل بعد مورد بحث قرار می‌گیرند. دستگاه اعداد حقیقی مثالی است از یک هیأت. نخست باید چند مفهوم اساسی را دربارهٔ مجموعه‌ها یادآوری کنیم.

واژهٔ مجموعه را مترادف با «گردایه» یا «خانواده»ای از اشیاء نوع معینی به‌کار می‌بریم.

فرض کنیم X مجموعه‌ای از اشیاء باشد. به‌ازای شیء مفروض x، یا x به‌مجموعهٔ X تعلق دارد یا ندارد. اگر x به X تعلق داشته باشد، می‌نویسیم $x \in X$ (بخوانید «x عنصری از X است» یا «x عضوی از X است»)؛ اگر x به X تعلق نداشته باشد، می‌نویسیم $x \notin X$.

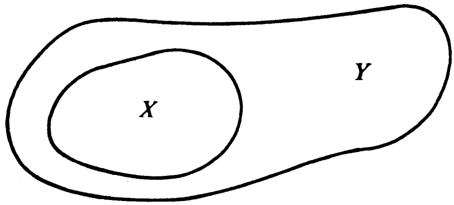
مجموعه‌ای مانند Y را یک زیر مجموعهٔ X می‌نامند، هرگاه به‌ازای همهٔ اشیاء y، $y \in Y$ مستلزم $y \in X$ باشد. به‌گفتهٔ دیگر، هر عنصر Y یک عنصر X نیز باشد. اگر Y یک زیر مجموعهٔ X باشد، می‌نویسیم $Y \subset X$. اگر $Y \subset X$ و $X \subset Y$، آنگاه می‌گوییم که مجموعه‌های X و Y برابرند و می‌نویسیم $X = Y$. بدینسان، دو مجموعه برابرند هرگاه اعضای آنها دقیقاً یکی باشند.

بجاست مجموعه‌ای را که شامل هیچ عنصری نیست، وارد بحث کنیم. آن را مجموعهٔ تهی می‌نامیم و با $\varnothing$ نشان می‌دهیم. بدینسان، به‌ازای هر شیء x، $x \notin \varnothing$. مثلاً، مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی x که، به‌ازای آنها، نامساویهای $x < ۰$ و $x > ۱$ توأماً برقرارند، مجموعهٔ تهی است. خواننده تحقیق خواهد کرد که، از تعریف زیر مجموعه منطقاً نتیجه می‌شود که مجموعهٔ تهی $\varnothing$، زیرمجموعه‌ای از هر مجموعه است (چرا؟)

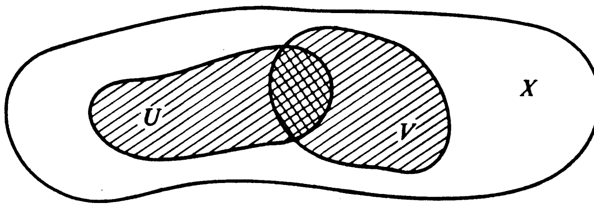
دو ساختمان مهم وجود دارد که می‌توان آنها را در مورد زیرمجموعه‌های یک مجموعه به‌کار برد تا زیرمجموعه‌های جدیدی حاصل شوند. فرض کنیم U و V زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ دادهٔ شدهٔ X باشند. $U \cap V$ را زیرمجموعه‌ای مرکب از همهٔ عناصری که هم به U و هم به V تعلق دارند، تعریف می‌کنیم و $U \cap V$ را اشتراک U و V می‌نامیم. پرسش: اشتراک مجموعهٔ اعداد حقیقی x به‌طوری‌که $x > ۰$ با مجموعهٔ اعداد حقیقی y به‌طوری‌که $y < ۵$، چیست؟ اگر زیرمجموعه‌های بسیاری از X داشته باشیم، اشتراک آنها را به‌صورت مجموعهٔ همهٔ عناصری که متعلق به‌همهٔ زیرمجموعه‌های مفروضند، تعریف می‌کنیم.

ساختمان دوم عبارت از اجتماع $(U \cup V)$ دو زیرمجموعهٔ U و V است؛ این همان زیرمجموعهٔ X، مرکب از همهٔ عناصری است که به U یا به V تعلق دارند. (وقتی می‌گوییم «به ... یا به ...» منظور این است که به ... یا به ... یا به هردو»).

اغلب سودمند است که احکام مربوط به مجموعه‌ها را با رسم نمودارهایی روشن سازیم. اگرچه این نمودارها هیچ‌گونه ارزش ریاضی ندارند، ولی این اطمینان را به‌ما می‌دهند که کاری را که داریم انجام می‌دهیم معقول است، و گاهی الهام‌بخش مراحل مهمی در یک استدلال هستند. مثلاً، حکم $X \subset Y$ در شکل ۳.۱ نشان داده شده است. در شکل ۴.۱ بخش سایه‌دار، $U \cup V$



شکل ۱.۳



شکل ۱.۴

را نشان می‌دهد، در صورتی‌که بخش با پرداز متقاطع $U \cap V$ را.

مثالها و قراردادها

برای نشان دادن مجموعهٔ اشیاء x واقع در یک مجموعهٔ X، که دارای ویژگی مشترکی مانند P هستند، اغلب نماد

$$\Big\{x \in X | \text{است } P \text{ دارای ویژگی } x\Big\}$$

را به‌کار خواهیم برد. از این‌رو، اگر R معرّف مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، $\{x \in R | x < ۵\}$ معرف همهٔ اعداد حقیقی x است به‌طوری‌که $x < ۵$. با استفاده از این نماد، مجموعهٔ جوابهای دستگاه معادلات (۱.۱) با حکم

$$\{(x, y) | ۳x - ۲y = ۱\} \cap \{(x, y) | x + y = ۲\} = \{(۱, ۱)\}$$

توصیف می‌شود که در آن، $\{(۱, ۱)\}$ معرف مجموعه‌ای است که شامل فقط یک نقطهٔ (۱،۱) است. به‌طورکلی، برای نشان دادن مجموعه‌هایی که اعضایشان به‌ترتیب، a، a و b، و a_i، $i = ۱, ۲ \ldots$ هستند، نمادهای $\{a\}$، $\{a, b\}$، $\{a_i\}$ و غیره را به‌کار خواهیم برد. در هندسه، مثالهای مجموعه‌ها به‌وفور یافت می‌شوند. خطوط و صفحات، مجموعه‌هایی هستند از نقاط؛ اشتراک دو خط در یک صفحه یا مجموعهٔ تهی است (اگر این دو خط موازی باشند) یا فقط یک نقطه است؛ اشتراک دو صفحه یا $\varnothing$ یا یک خط است.

حال نوع دستگاه اعدادی را که در فصل ۲ سرآغاز بحث ما از فضاهای برداری خواهد بود، معرفی می‌کنیم.

(۱.۲) تعریف. هیأت عبارت است از یک دستگاه ریاضی مرکب از یک مجموعهٔ ناتهی F همراه با دو عمل جمع و ضرب، که به هر زوج از عناصر $\alpha, \beta \in F$، عناصر مشخص $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ (یا $\alpha.\beta$) متعلق به F را چنان نسبت می‌دهند که، به‌ازای $\alpha, \beta, \gamma \in F$، شرایط زیر برقرار باشند.

۱. (قوانین تعویضپذیری) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$، $\alpha\beta = \beta\alpha$

۲. (قوانین شرکتپذیری) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ ، $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$

۳. (قوانین توزیعپذیری) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$

۴. عنصری مانند $\circ$ در F وجود دارد به‌طوری‌که، به‌ازای هر $\alpha \in F$، $\alpha + \circ = \alpha$.

۵. به‌ازای هر عنصر $\alpha \in F$، عنصری مانند $-\alpha$ در F وجود دارد به‌طوری‌که، $\alpha + (-\alpha) = \circ$.

۶. عنصری مانند $۱ \in F$ وجود دارد به‌طوری‌که $\circ \neq ۱$ و به‌طوری‌که، به‌ازای هر $\alpha \in F$، $\alpha.۱ = \alpha$.

۷. به‌ازای هر عنصر غیرصفر $\alpha \in F$، عنصری مانند $\alpha^{-۱} \in F$ وجود دارد به‌طوری‌که $\alpha\alpha^{-۱} = ۱$.

نخستین مثال یک هیأت، دستگاه اعداد حقیقی R مجهز به‌اعمال معمولی جمع و ضرب است.

مجموعهٔ اعداد صحیح $Z = \{\cdots, -۲, -۱, \circ, ۱, ۲, \cdots\}$، زیرمجموعه‌ای است از R که نسبت به اعمال موجود در R بسته است، به این معنی که اگر m و n متعلق به Z باشند، آنگاه حاصل‌جمع آنها $m + n$ و حاصلضرب آنها mn (که برحسب اعمال مجموعهٔ بزرگتر R تعریف شده‌اند) نیز به Z تعلق دارند. ولی Z، نسبت به این اعمال، یک هیأت نیست، زیرا اصل موضوع [۲. ۱ (۷)] برقرار نیست، مثلاً، $۲ \in Z$ و $۲^{-۱} \in R$، ولی $۲^{-۱} \notin Z$ و درواقع هیچ عنصری مانند $m \in Z$، وجود ندارد به‌طوری‌که $۲m = ۱$. این مثال الهام‌بخش تعریف زیر است.

(۲.۲) تعریف. زیر هیأت $F_\circ$ از یک هیأت F، زیرمجموعه‌ای است مانند $F_\circ$ از F که، نسبت به اعمال تعریف شده در F، بسته است و در تمام اصول موضوع [(۲ ۰ ۱(۱) − (۷)] مربوط به این اعمال، صدق می‌کند. (در اینجا بسته به این معناست که اگر $\alpha, \beta \in F_\circ$، آنگاه $\alpha + \beta \in F_\circ$ و $\alpha\beta \in F_\circ$.)

با وجود آنکه اعداد صحیح Z یک زیرهیأت R نیستند، مجموعهٔ اعداد گویا، Q، یک زیر هیأت است. یادآوری می‌کنیم که مجموعهٔ اعداد گویا یعنی Q مرکب از همهٔ اعداد حقیقی به‌صورت

$$mn^{-۱}$$

است که در آن، $m, n \in Z$ و $n \neq ۰$. اثبات این‌که اعداد گویا زیرهیأت R هستند، عملاً نیاز به‌کار دارد بررسی این‌گونه چیزها، بعداً در این بخش مورد بحث قرار خواهد گرفت.

هیأتهای اعداد حقیقی و اعداد گویا هر دو، هیأتهای مرتبی هستند، به‌این معنی که هر یک شامل زیرمجموعه‌ای است مانند P (موسوم به‌مجموعهٔ عناصر مثبت) با ویژگیهای زیر

۱. اگر $\alpha, \beta \in P$، آنگاه $\alpha + \beta \in P$ و $\alpha\beta \in P$.

۲. به‌ازای جمیع مقادیر α واقع در این هیأت، یک و فقط یکی از شرایط زیر برقرار است:

$$\alpha \in P ،\alpha = ۰ ،-\alpha \in P$$

هیأت اعداد مختلط C (که در فصل ۶ مفصلتر مورد بحث قرار خواهد گرفت) یک هیأت مرتب نیست. این هیأت به‌صورت مجموعهٔ همهٔ جفتهای اعداد حقیقی (α, β)، $\alpha, \beta \in R$ تعریف می‌شود که در آن، به‌موجب تعریف دو جفت (α, β) و (α', β') را مساوی می‌گیرند اگر، و فقط اگر، $\alpha = \alpha'$ و $\beta = \beta'$. در C، اعمال به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(\alpha, \beta) + (\alpha', \beta') = (\alpha + \alpha', \beta + \beta')$$

و

$$(\alpha, \beta)(\alpha', \beta') = (\alpha\alpha' - \beta\beta', \alpha\beta' + \beta\alpha')$$

اثبات برقراری اصول موضوع یک هیأت، در فصل ۶ صورت خواهد گرفت.

مجموعهٔ همهٔ اعداد مختلط به‌صورت $\{(\alpha, ۰), \alpha \in R\}$ را در نظر می‌گیریم. این اعداد دارای این ویژگی هستند که، به‌ازای هر $\alpha, \beta \in R$،

$$(\alpha, ۰) + (\beta, ۰) = (\alpha + \beta, ۰)$$
$$(\alpha, ۰)(\beta, ۰) = (\alpha\beta, ۰) \qquad (۳.۲)$$

می‌توان تحقیق کرد که این اعداد یک زیرهیأت C مانند R' تشکیل می‌دهند. به‌علاوه، قاعده یا تناظر $\alpha \leftrightarrow (\alpha, ۰)$ که به‌هر $\alpha \in R$ یک عدد مختلط $(\alpha, ۰) \in R'$ را نسبت می‌دهد، دارای ویژگیهای زیر است (الف) $(\alpha, ۰) = (\alpha', ۰)$ اگر و فقط اگر $\alpha = \alpha'$ و (ب) طبق معادلات (۳.۲) بالا، این تناظر اعمال مورد بحث را در دستگاههای اعداد مربوطه حفظ می‌کند. یک تناظر بین دو هیأت با ویژگیهای (الف) و (ب) را یکریختی می‌نامند، واژه‌ای که از واژه‌های یونانی می‌آید و معنای آن «ریخت مشابه داشتن» است. وجود یکریختی $\alpha \leftrightarrow (\alpha, ۰)$ بین هیأتهای R و R' بدین‌معنی است که اگر، از همهٔ ویژگیهای دیگری که در تعریف هیأت نیامده‌اند، چشم‌پوشی کنیم، آنگاه R و R' غیرقابل تمیز از یکدیگرند. از این‌رو، ما عناصر R را با عناصر متناظر R' یکی خواهیم گرفت، و به‌این معنی، شمولهای زیر را بین دستگاههای اعدادی که تا

اینجا تعریف کردیم، داریم:

$$Z \subset Q \subset R \subset C$$

حال به‌اصل استقرای ریاضی می‌پردازیم که به‌عنوان اصل موضوعی برای مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت $Z^+ = \{۱, ۲, \cdots\}$ خواهیم گرفت. از اهمیت آن برای جبر خطی هرچه بگوییم کم گفته‌ایم. تقریباً همهٔ نتایج عمیق این کتاب، به‌نحوی از انحاء به‌این اصل بستگی پیدا می‌کنند.

(۴.۲) اصل استقرای ریاضی. فرض کنیم که برای هر عدد صحیح مثبت n، حکمی مانند $E(n)$، که یا درست است یا نادرست، جاری شود. فرض کنیم *(الف)* $E(۱)$ درست باشد، و *(ب)* اگر، به‌ازای هر $n \in Z^+$ حکم $E(n)$ درست باشد $E(n + ۱)$ نیز درست باشد. در این‌صورت $E(n)$ به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n درست است.

اغلب شکلهای هم‌ارز این اصل استقراء نیز مفید واقع می‌شوند، در اینجا برخی از آنها را می‌آوریم

(۵.۲) الف. گیریم $\{E(n)\}$ خانواده‌ای از احکام باشد که برای هر عدد صحیح مثبت n تعریف شده است. فرض کنیم *(الف)* $E(۱)$ درست باشد، و *(ب)* اگر به‌ازای همهٔ اعداد صحیح مثبت $r < n$، $E(n)$ درست باشد، آنگاه $E(n)$ درست باشد. در این‌صورت، به‌ازای همهٔ اعداد صحیح مثبت n، $E(n)$ درست است

در بحثهایی که متضمن استقرای ریاضی هستند، غالباً حکمی که نقش $E(n)$ را بازی می‌کند، فرض استقرا نامیده می‌شود.

یک صورت هم‌ارز با (۴.۲) را بعداً، به‌ویژه در فصل ۶، مورد استفاده قرار خواهیم داد. برای داشتن بحثی دربارهٔ اینکه چگونه می‌توان نشان داد که این صورت با (۴.۲) هم‌ارز است، به کتاب کورانت و رابینز که در کتابنامه آمده است، مراجعه کنید.

(۵.۲) ب. اصل خوشترتیبی. گیریم M مجموعه‌ای ناتهی از اعداد صحیح مثبت باشد. دراین‌صورت M شامل یک کوچکترین عنصر است، یعنی، عنصری مانند $m_۰$ در M وجود دارد که در شرط $m_۰ \leq m$، به‌ازای جمیع مقادیر $m \in M$، صدق می‌کند.

مثالهایی از استقرای ریاضی

مثال الف. به‌ازای همهٔ اعداد صحیح مثبت n، دستور

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n = \frac{n(n+۱)}{۲} \qquad (۶.۲)$$

را اثبات خواهیم کرد. فرض استقراء، خود حکم (۶.۲) است. به‌ازای $n = ۱$، این حکم به‌صورت $\frac{۱(۲)}{۲} = ۱$ درمی‌آید. حال فرض کنیم که حکم (۶.۲)، به‌ازای عددی مانند n، برقرار باشد. باید

نشان دهیم که این حکم، به‌ازای $n+۱$، درست است. پس از قراردادن طرف راست (۶.۲) به‌جای $n + \cdots + ۲ + ۱$، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} ۱+۲+\cdots+n+(n+۱) &= \frac{n(n+۱)}{۲}+(n+۱) \\ &= (n+۱)\left(\frac{n}{۲}+۱\right) = \frac{(n+۱)(n+۲)}{۲} \end{aligned}$$

که همان حکم (۶.۲) به‌ازای $n+۱$ است. بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجه می‌گیریم که (۶.۲)، به‌ازای همهٔ اعداد صحیح مثبت n، درست است.

مثال ب. به‌ازای هر عدد حقیقی دلخواه $x \neq ۱$،

$$۱+x+x^۲+\cdots+x^{n-۱} = \frac{۱-x^n}{۱-x} \qquad (۷.۲)$$

باز قرار می‌گذاریم که (۷،۲) فرض استقرای $E(n)$ باشد. به‌ازای $n=۱$، این حکم به‌صورت

$$۱ = \frac{۱-x}{۱-x}$$

درمی‌آید که درست است. فرض کنیم (۷.۲) به‌ازای مقداری مانند n برقرار باشد. آنگاه، با استفاده از (۷.۲)، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} ۱+x+x^۲+\cdots+x^n &= (۱+x+\cdots+x^{n-۱})+x^n \\ &= \frac{۱-x^n}{۱-x}+x^n \\ &= \frac{۱-x^n+x^n(۱-x)}{۱-x} \\ &= \frac{۱-x^{n+۱}}{۱-x} \end{aligned}$$

و حکم (۷.۲) به‌ازای همهٔ مقادیر n برقرار است.

این فصل را با بیان چند ویژگی هیأت دلخواهی مانند F، به‌پایان می‌بریم. همهٔ اینها حقایقی آشنا دربارهٔ دستگاه اعداد حقیقی هستند، ولی ممکن است خواننده بخواهد که آنها را با دقت بیشتری مورد مطالعه قرار دهد تا تحقیق کند که این ویژگیها فقط به‌اصول موضوع یک هیأت بستگی دارند. علاوه بر اصول موضوع نامبرده، اصل جایگذاری را به‌کرات به‌کار می‌برند. معنای این اصل به‌طور ساده این است که، در هیأتی مانند F، می‌توانیم در دستوری که شامل عنصری مانند α متعلق به F است، به‌جای α هر عنصر دیگری مانند $\alpha' \in F$ را، به‌طوری‌که $\alpha' = \alpha$، بگذاریم.

همچنین از ویژگیهای آشنای رابطهٔ تساوی $\alpha = \beta$ در زیر استفاده خواهیم کرد:

$\alpha = \alpha$

$\alpha = \beta$ مستلزم $\beta = \alpha$ است

$\alpha = \beta$ و $\beta = \gamma$ مستلزم $\alpha = \gamma$ است.

همهٔ احکامی که در زیر می‌آیند، به‌تفصیل اثبات نمی‌شوند. اثبات آنهایی که با شماره‌های ستاره‌دار [مثل* (۹.۲)] آمده‌اند به‌عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود.

(۸.۲) اگر $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$، آنگاه $\beta = \gamma$ *(قانون حذف برای جمع)*

برهان. می‌گوییم باید «به‌دو طرف $-\alpha$ بیفزاییم». این کار را، با استفاده از اصل جایگذاری، به‌طریق زیر انجام می‌دهیم. با توجه به‌فرض $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$، داریم

$$(-\alpha) + (\alpha + \beta) = (-\alpha) + (\alpha + \gamma)$$

از سوی دیگر، با توجه به اصول موضوع معرف یک هیأت (کدام یک؟) داریم

$$(-\alpha) + (\alpha + \beta) = [(-\alpha) + \alpha] + \beta = \circ + \beta = \beta^*$$

به‌طریق مشابه،

$$(-\alpha) + (\alpha + \gamma) = \gamma$$

بنابر ویژگیهای رابطهٔ تساوی، داریم $\beta = \gamma$ و نتیجهٔ مطلوب حاصل است.

برهانی نظیر این را نمی‌توان مانند یک مقالهٔ روزنامه خواند؛ خواننده متوجه خواهد شد که باید کاغذ و مداد در اختیار داشته باشد و همهٔ مراحل را بنویسد، ارجاع به‌اصول موضوع را بررسی کند، تا ببیند چه کاری صورت گرفته است.

(۹.۲) به‌ازای مقادیر دلخواه α و β در F، معادلهٔ $\alpha + x = \beta$ دارای یک جواب یکتاست.

برهان. این قضیه، دو قضیه است در یک قضیه. نخست از ما خواسته شده است تا نشان دهیم دست‌کم یک عنصر مانند x وجود دارد که در این معادله صدق می‌کند، و دوم اینکه حداکثر یک جواب وجود دارد. ولی، هر دو حکم آسانند. نخست، با توجه به‌اصول موضوع هیأتها، داریم

$$\alpha + [(-\alpha) + \beta] = [\alpha + (-\alpha)] + \beta = \circ + \beta = \beta$$

---

* درواقع، حکمی به‌صورت $a = b = c = d$، یک نوع خلاصه‌نویسی برای حکمهای مجزای $a = b$، $b = c$، $c = d$ است. ویژگیهای رابطهٔ تساوی مستلزم این است که از این حکم مجزا می‌توانیم نتیجه بگیریم که همهٔ اشیاء a، b، c و d با یکدیگر برابرند، و این معنای حکم خلاصه شدهٔ $a = b = c = d$ است.

و به این ترتیب نشان داده‌ایم که دست‌کم یک جواب، یعنی $x = (-\alpha) + \beta$، وجود دارد.

حال فرض کنیم γ و γ' جوابهای این معادله باشند. پس، داریم $\alpha + \gamma = \beta$، $\alpha + \gamma' = \beta$، و بنابراین $\alpha + \gamma = \alpha + \gamma'$ (چرا؟). بنابر قانون حذف (۸.۲) داریم $\gamma = \gamma'$ و به‌این ترتیب اثبات کردیم که اگر γ یک جواب این معادله باشد، هر جواب دیگر آن با γ برابر است.

(۱۰.۲) تعریف. منظور ما از $\beta - \alpha$، جواب یکتای معادلهٔ $\alpha + x = \beta$ است.

داریم $\beta - \alpha = \beta + (-\alpha)$، و $\beta - \alpha$ را نتیجهٔ تفریق α از β می‌نامیم. (خواننده باید توجه کند که مسألهٔ «اثبات» حکمی مانند حکم اخیر، در میان نیست. بررسی دقیق اصول موضوع هیأتها نشان می‌دهد که دستور $\beta - \alpha$ معنی‌خاصی ندارد؛ باید با آن به‌صورت یک تعریف برخورد کرد.)

(۱۱.۲) $$-(-\alpha) = \alpha$$

برهان. نتیجه از بررسی معادلهٔ $\alpha + (-\alpha) = ۰$ از دید دیگری به‌دست می‌آید. زیرا $-(-\alpha) + (-\alpha) = ۰$ را نیز داریم؛ بنابر قانون حذف به‌دست می‌آوریم $-(-\alpha) = \alpha$.

حال می‌رسیم به ویژگیهای ضرب که دقیقاً شبیه ویژگیهای جمع هستند. خاطرنشان می‌کنیم که خواننده باید احکام ستاره‌دار را اثبات کند.

*(۱۲.۲) اگر $\alpha \neq ۰$ و $\alpha\beta = \alpha\gamma$، آنگاه $\beta = \gamma$.

*(۱۳.۲) معادلهٔ $\alpha x = \beta$، که در آن $\alpha \neq ۰$، دارای یک جواب یکتاست.

(۱۴.۲) تعریف. جواب یکتای $\alpha x = \beta$ را با β/α (یا β/α) نمایش می‌دهیم و از β/α یا β/α به‌عنوان نتیجهٔ تقسیم β بر α نام خواهیم برد.

بدینسان، بنابر اصل موضوع [۱.۲(۶)]، $\alpha^{-۱} = \frac{۱}{\alpha}$.

*(۱۵.۲) اگر $\alpha \neq ۰$، آنگاه $\alpha = (\alpha^{-۱})^{-۱}$.

تاکنون از قانون توزیعپذیری [۱.۲(۳)] استفاده نکرده‌ایم. از لحاظی، این قویترین اصل موضوع است و بیشتر قضایای نسبتاً جالب جبر مقدماتی، مانند $(-۱)(-۱) = ۱$، از این قانون توزیعپذیری نتیجه می‌شوند.

(۱۶.۲) به‌ازای هر α در F، $\alpha . ۰ = ۰$.

برهان. داریم $۰ = ۰ + ۰$. بنابر قانون پخش‌پذیری [۱.۲(۳)] داریم $\alpha \cdot ۰ = \alpha \cdot ۰ + \alpha \cdot ۰$. ولی، بنابر [۱.۲(۴)] $\alpha \cdot ۰ = \alpha \cdot ۰ + ۰$]، و بنابر قانون حذف، $\alpha \cdot ۰ = ۰$.

(۱۷.۲) به‌ازای جمیع مقادیر α و β، $(-\alpha)\beta = -(\alpha\beta)$

برهان. بنابر اصل جایگذاری، از $\alpha + (-\alpha) = ۰$ نتیجه می‌گیریم $[\alpha + (-\alpha)]\beta = ۰ \cdot \beta$. با توجه به قانون توزیعپذیری و (۱۶.۲)، نتیجه می‌شود که

$$\alpha\beta + (-\alpha)\beta = ۰$$

چون $\circ = [(\alpha\beta)-] + \alpha\beta$، قانون‌حذف تساوی $(\alpha\beta)- = \beta(\alpha-)$ را، که می‌خواستیم اثبات کنیم، به‌ما می‌دهد.

(۱۸.۲) به‌ازای جمیع مقادیر α و β متعلق به F، $(-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta$.

برهان. با دوبار به‌کار بستن (۱۷.۲) و با استفاده از قانون تعویضپذیری برای ضرب، داریم

$$(-\alpha)(-\beta) = -[\alpha(-\beta)] = -[-(\alpha\beta)]$$

سرانجام، بنابر (۱۱.۲)، $-[-(\alpha\beta)] = \alpha\beta$.

به‌عنوان نتیجه‌ای از (۱۸.۲)، خواهیم داشت:

$$(-۱)(-۱) = ۱ \qquad \textbf{(۱۹.۲)}$$

(جالب است که براساس اصول موضوع اولیه، اثبات مستقیمی از این مطلب اخیر ارائه دهیم.)

تمرینها

۱. با استفاده از استقرای ریاضی احکام زیر را اثبات کنید:

الف) $۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲k - ۱) = k^۲$

ب) $۱^۲ + ۲^۲ + \cdots + n^۲ = \dfrac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$

۲. با استفاده از تعریف α/β به‌عنوان جواب (به‌ازای $\beta \neq \circ$) معادلهٔ $\beta x = \alpha$، نشان دهید که در یک هیأت دلخواه مانند F، احکام زیر، به‌ازای جمیع مقادیر α، β، γ، δ، با فرض $\beta, \delta \neq \circ$ برقرارند.

الف)

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\beta\delta}.$$

ب)

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}.$$

پ)

اگر $\dfrac{\gamma}{\delta} \neq \circ$،
$$\frac{\alpha/\beta}{\gamma/\delta} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$$

۳. به‌ازای $n = ۱, ۲, \cdots$ و به‌ازای جمیع مقادیر n و k، $n, \cdots, k = \circ, ۱, ۲$، ضرایب دو جمله‌یی $\binom{n}{k}$ اعداد صحیح مثبت معینی هستند که به‌کمک استقراء، به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$1 = \binom{1}{1} = \binom{1}{0}$. اگر فرض کنیم که به‌ازای مقداری از n و به‌ازای $k = 0, 1, \cdots, n-1$، $\binom{n-1}{k}$ تعریف شده باشد، ضریب دو جمله‌یی $\binom{n}{k}$ را با $1 = \binom{n}{1} = \binom{n}{0}$، و

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad k = 1, \cdots, n-1$$

تعریف می‌کنیم. با استفاده از استقرای ریاضی، نشان دهید که در هر هیأت دلخواه مانند F، قضیهٔ دو جمله‌یی

$$(\alpha+\beta)^n = \binom{n}{0}\alpha^n + \binom{n}{1}\alpha^{n-1}\beta + \cdots + \binom{n}{n}\beta^n$$

به‌ازای جمیع مقادیر α و β در F، برقرار است، که در آن $2\alpha = \alpha + \alpha$، $3\alpha = 2\alpha + \alpha$، و غیره.

۴. فرض کنیم F دستگاهی مرکب از دو عنصر $\{1, 0\}$ و دو عمل باشد که به کمک جدولهای زیر تعریف شده‌اند

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\circ$	0	1
0	0	0
1	0	1

نشان دهید که F یک هیأت است با این ویژگی که، به‌ازای هر $\alpha \in F$، $2\alpha = \alpha + \alpha = 0$.

۵. با استفاده از تمرین ۲، نشان دهید که مجموعهٔ اعداد گویا، Q، یک زیرهیأت اعداد حقیقی R است.

۶. فرض کنیم اصول موضوع هیأتها ($\leftarrow$ تعریف (۱.۲)) شامل 0^{-1} باشد. ثابت کنید که در این حالت، هر عنصر با 0 برابر است.

۲

فضاهای برداری و دستگاههای معادلات خطی

این فصل شامل تعاریف اساسی و ویژگیهای فضاهای برداری، همراه با بحث کاملی از کاربرد قضایای کلی فضاهای برداری در تعیین جوابهای دستگاههای معادلات خطی است. این فصل با بحثی دربارهٔ تعبیر هندسی نظریهٔ دستگاههای معادلات خطی، که خواندن آن اختیاری است، پایان می‌پذیرد. انگیزهٔ تعریف فضای برداری و قضایایی که بناست در این فصل اثبات شوند، در بخش ۱ ارائه شده بود.

۳. فضاهای برداری

کار خود را با حالتی که در بخش ۱ مورد بحث قرار گرفت، آغاز می‌کنیم. آنجا مناسب دیدیم که برداری مانند u را به‌صورت یک چهارتایی مرتب از اعداد حقیقی $u = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ تعریف کنیم، بدین تعبیر که دو بردار

$$u = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \quad \text{و} \quad u' = (\alpha', \beta', \gamma', \delta')$$

برابرند اگر، و فقط اگر،

$$\alpha = \alpha', \;\; \beta = \beta', \;\; \gamma = \gamma', \;\; \delta = \delta'$$

تأکید روی مرتب‌بودن ضروری است زیرا در مسأله‌ای که در بخش ۱ مورد بحث قرار گرفت، چهارتاییهای $(۱, ۲, ۰, ۰)$ و $(۲, ۱, ۰, ۰)$ دارای تعابیری کاملاً متفاوت هستند. لذا حاصل‌جمع دو بردار u و u' بالا را با

$$u + u' = (\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma', \delta + \delta')$$

و نیز حاصلضرب بردار $u = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ را در یک عدد حقیقی λ، با

$$\lambda u = (\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma, \lambda\delta)$$

تعریف کردیم. با این تعاریف و با توجه به‌ویژگیهای هیأت اعداد حقیقی، می‌بینیم که بردارها، نسبت به اعمال $u + u'$ و λu که تعریف کردیم، در قوانین زیر صدق می‌کنند.

۱. (قانون تعویضپذیری) $u + u' = u' + u$

۲. (قانون شرکتپذیری) $(u + u') + u'' = u + (u' + u'')$

۳. برداری مانند $\vec{\circ}$ وجود دارد به‌طوری‌که، به‌ازای هر u، $u + \vec{\circ} = u$

۴. به‌ازای هر بردار u، برداری مانند $-u$ وجود دارد به‌طوری‌که، $u + (-u) = \vec{\circ}$

۵. به‌ازای همهٔ بردارهای u و همهٔ اعداد حقیقی α، β، $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$

۶.

۷. (قوانین توزیعپذیری) $\left.\begin{aligned} (\alpha + \beta)u &= \alpha u + \beta u \\ \alpha(u + u') &= \alpha u + \alpha u' \end{aligned}\right\}$

۸. به‌ازای هر بردار u، $۱ \cdot u = u$.

اثبات این نکات، با توجه به اصول موضوع هیأت اعداد حقیقی و تعریف تساوی دو بردار، بی‌درنگ انجام می‌پذیرد. به‌عنوان مثال، اثباتی برای (۲) ارائه خواهیم داد. فرض کنیم

$$u = (\alpha, \beta, \gamma, \delta), u' = (\alpha', \beta', \gamma', \delta'), u'' = (\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta'')$$

پس

$$\begin{aligned} &(u + u') + u'' \\ &\qquad = ((\alpha + \alpha') + \alpha'', (\beta + \beta') + \beta'', (\gamma + \gamma') + \gamma'', (\delta + \delta') + \delta'') \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} &u + (u' + u'') \\ &\qquad = (\alpha + (\alpha' + \alpha''), \beta + (\beta' + \beta''), \gamma + (\gamma' + \gamma''), \delta + (\delta' + \delta'')) \end{aligned}$$

چون داریم $(\alpha + \alpha') + \alpha'' = \alpha + (\alpha' + \alpha'')$ و غیره، بنابر قانون شرکتپذیری در R، نتیجه می‌شود که بردارهای $(u + u') + u''$ و $u + (u' + u'')$ برابرند و قانون شرکتپذیری برای بردارها به اثبات می‌رسد. می‌توان به‌طریق مشابهی، درستی گزاره‌های دیگر را تحقیق کرد.

حال مسألهٔ دومی را که در بخش ۱ مورد بحث قرار گرفت (مسألهٔ ب) در نظر می‌گیریم. در آن مسأله، توجه ما به‌توابع معین روی خط حقیقی معطوف بود. اعمال جبری معیّنی را روی توابع معرفی کردیم، یعنی حاصل‌جمع $f+g$ی دو تابع f و g و حاصلضرب یک تابع در یک عدد حقیقی را تعریف کردیم. به‌طور دقیقتر، تعریف حاصل‌جمع $f+g$ عبارت است از $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$، $x \in R$، و به‌ازای $\lambda \in R$، تابع λf با $(\lambda f)(x)=\lambda \cdot f(x)$، $x \in R$، تعریف می‌شود. بدون تلاش زیاد، می‌توان تحقیق کرد که اعمال $f+g$ و λf در شرایط (۱) تا (۸)، که درستی آنها را هم‌اکنون برای بردارهای $u=(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ دیدیم، صدق می‌کنند.

ویژگیهای مشترک این اعمال در دو مثال نامبرده، به‌مفهوم مجرد یک فضای برداری روی یک هیأت که در زیر ارائه می‌کنیم، منجر می‌شود. نکته این است که اگر بنا باشد مسائل بخش ۱ را به‌طور کامل بررسی کنیم، عملاً مجبوریم که مفهوم یک فضای برداری را ابداع کنیم.

(۱.۳) تعریف. فرض کنیم F یک هیأت دلخواه باشد. یک فضای برداری V روی F، عبارت است از مجموعه‌ای ناتهی مانند V از اشیاء $\{v\}$، که بردار نامیده می‌شوند، همراه با دو عمل، که یکی از آنها به‌هر جفت از بردارهای v و w برداری مانند $v+w$ به‌نام حاصل‌جمع v و w نسبت می‌دهد و عمل دیگر، به‌هر عنصر $\alpha \in F$ و هر بردار $v \in V$، برداری مانند αv به‌نام حاصلضرب v در عنصر $\alpha \in F$ نسبت می‌دهد. فرض بر این است که این اعمال، به‌ازای $\alpha, \beta \in F$ و $u, v, w \in V$، در اصول موضوع زیر صدق می‌کنند.

۱. $u+(v+w)=(u+v)+w$ و $u+v=v+u$

۲. برداری مانند 0 وجود دارد به‌طوری‌که، به‌ازای هر $u \in V$، $u+0=u$.*

۳. به‌ازای هر بردار u، برداری مانند $-u$ وجود دارد به‌طوری‌که $u+(-u)=0$.

۴. $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$

۵. $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$

۶. $(\alpha\beta)u=\alpha(\beta u)$

۷. $1u=u$

در این کتاب، حروف رومی $\{x, y, u, v, \cdots\}$ را برای نشان‌دادن بردارها و حروف یونانی $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi, \eta, \theta, \lambda, \cdots\}$ را برای نشان‌دادن عناصر هیأت مورد بحث به‌کار می‌بریم. عناصر این هیأت را غالباً اسکالر (یا، وقتی‌که این هیأت R باشد، عدد) می‌نامند.

حال می‌توانیم تحقیق کنیم که مثالهای ما حتماً در این اصول موضوع صدق می‌کنند. در مثال نخست، مربوط به بردارهای $u=(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$، چیز خاصی در انتخاب چهارتاییها وجود ندارد. می‌توانستیم دوتاییها، سه‌تاییها و غیره را انتخاب کنیم. برای داشتن همهٔ این حالتها، مفهوم یک nتایی از اعداد حقیقی را، به‌ازای عدد صحیح مثبتی مانند n، وارد می‌کنیم.

* برای سهولت، همین نماد را برای نشان‌دادن بردار صفر و عنصر صفر هیأت به‌کار می‌بریم. معنای «0» همیشه از متن مورد مطالعه روشن خواهد بود.

(۲.۳) تعریف. فرض کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد. یک nتایی ازاعداد حقیقی، قاعده‌ای است که به‌هر عدد صحیح مثبت i (به‌ازای $i = ۱, ۲, \cdots, n$) یک عدد حقیقی یکتای α_i را تخصیص می‌دهد. یک nتایی را با نماد $< \alpha_۱, \alpha_۲, \cdots, \alpha_n >$ نشان خواهیم داد. به‌عبارت دیگر، یک nتایی چیزی نیست جز گردایه‌ای از n عدد که به‌ترتیب معینی داده شده‌اند، که عدد اول را $\alpha_۱$، عدد دوم را $\alpha_۲$ و غیره می‌نامند. دو nتایی $< \alpha_۱, \cdots, \alpha_n >$ و $< \beta_۱, \cdots, \beta_n >$ را برابر گویند و می‌نویسند

$$< \alpha_۱, \cdots, \alpha_n > = < \beta_۱, \cdots, \beta_n >$$

اگر، و فقط اگر، $\alpha_۱ = \beta_۱$، $\alpha_۲ = \beta_۲$، ... ، $\alpha_n = \beta_n$.

توجه داشته باشید که دربارهٔ متفاوت‌بودن یا نبودن اعداد حقیقی $\{\alpha_i\}$ در $< \alpha_۱, \cdots, \alpha_n >$، چیزی گفته نشده است. $< ۰, ۰, ۰ >$ و $< ۱, ۰, ۱ >$ سه‌تاییهای کاملاً مجازند. همچنین توجه می‌کنیم که، مثلاً، $< ۱, ۰, ۱ > \neq < ۰, ۱, ۱ >$.

(۳.۳) تعریف فضای برداری R_n. فضای برداری R_n روی هیأت اعداد حقیقی R عبارت است از دستگاهی جبری مرکب از nتاییهای $a = < \alpha_۱, \cdots, \alpha_n >$، که در آن $\alpha_i \in R$، همراه با اعمال جمع nتاییهایی با هم و ضرب nتاییها در اعداد حقیقی، که در زیر تعریف می‌شوند. nتاییهای $a \in R_n$ را بردار و اعداد حقیقی α_i را مؤلفه‌های بردار $a = < \alpha_۱, \cdots, \alpha_n >$ می‌نامند. دو بردار $a = < \alpha_۱, \cdots, \alpha_n >$ و $b = < \beta_۱, \cdots, \beta_n >$ را برابر گویند و می‌نویسند $a = b$ اگر، و فقط اگر، $\alpha_i = \beta_i$، $i = ۱, \cdots, n$. حاصل‌جمع بردارهای $a = < \alpha_۱, \cdots, \alpha_n >$ و $b = < \beta_۱, \cdots, \beta_n >$ به‌صورت

$$a + b = < \alpha_۱ + \beta_۱, \cdots, \alpha_n + \beta_n >$$

تعریف می‌شود و حاصلضرب بردار a در عدد حقیقی λ با

$$\lambda a = < \lambda\alpha_۱, \cdots, \lambda\alpha_n >$$

تحقیق این امرکه R_n، بنابر تعریف (۱.۳)، یک فضای برداری روی R است، کار ساده‌ای است. به‌ویژه، بردار ۰ با تساوی $۰ = < ۰, \cdots, ۰ >$ مشخص می‌شود، و اگر $a = < \alpha_۱, \cdots, \alpha_n >$، آنگاه $-a = < -\alpha_۱, \cdots, -\alpha_n >$.

(۳.۳)′ تعریف. فضای برداری F_n. فرض کنیم F هیأتی دلخواه باشد. یک nتایی مانند $< \alpha_۱, \cdots, \alpha_n >$، که در آن α_i در F است، مشابه با آنچه که در (۲.۳) دیدیم تعریف می‌شود. مجموعهٔ همهٔ این nتاییها، با اعمالی که مشابه با (۳.۳) تعریف می‌شوند، فضایی است برداری مانند F_n روی F.

(۴.۳) تعریف. فضای برداری توابع روی خط حقیقی. این بار، فرض کنیم $\mathcal{F}(R)$ مجموعهٔ همهٔ توابع حقیقی معین روی مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی R باشد. آنگاه $\mathcal{F}(R)$ یک فضای برداری روی هیأت اعداد حقیقی R می‌شود مشروط بر آنکه تعریف کنیم

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x), \qquad x\in R, f, g\in\mathcal{F}(R)$$
$$(\alpha f)(x)=\alpha f(x), \qquad x\in R, \alpha\in R, f\in\mathcal{F}(R)$$

آنگاه، همان‌طورکه قبلاً خاطرنشان کردیم، می‌توان درستی اصول موضوع فضاهای برداری را تحقیق کرد.

حال برمی‌گردیم به‌مفهوم کلی یک فضای برداری. نخستین قضیه گویای آن است که بسیاری از خواص هیأتها که در بند ۲ اثبات شدند، در فضاهای برداری نیز برقرارند.

(۵.۳) قضیه. فرض کنیم V فضایی برداری روی یک هیأت F باشد. لذا احکام زیر برقرارند.

(i) به‌ازای جمیع مقادیر $u, v, w\in V$، اگر $u+v=u+w$، آنگاه $v=w$.

(ii) معادلهٔ $u+x=v$ دارای یک جواب یکتاست (که آن را با $v-u$ نمایش می‌دهیم). داریم $v-u=v+(-u)$.

(iii) به‌ازای هر $u\in V$، $-(-u)=u$.

(iv) به‌ازای هر $u\in V$، $0\cdot u=0$.*

(v) به‌ازای $\alpha\in F$، $u\in V$، $-(\alpha u)=(-\alpha)u=\alpha(-u)$

(vi) $\alpha\in F$، $u\in V$، $(-\alpha)(-u)=\alpha u$

(vii) به‌ازای هر $u, v\in V$، اگر $\alpha u=\alpha v$، با فرض $\alpha\neq 0$ متعلق به F، آنگاه $u=v$.

برهان (i) تا (vi) با برهان موارد متناظر برای هیأتها، (کلمه به‌کلمه) همانند است. برهان (vii) را ارائه می‌کنیم. فرض این است که

$$\alpha u=\alpha v \quad \text{و} \quad \alpha\neq 0$$

آنگاه α^{-1} وجود دارد و اصل جایگذاری (که علاوه بر هیأتها، در مورد فضاهای برداری نیز به‌کار می‌رود) مستلزم این است که

$$\alpha^{-1}(\alpha u)=\alpha^{-1}(\alpha v)$$

بنابر [۱.۳(۶)] به‌دست می‌آوریم

$$(\alpha^{-1}\alpha)u=(\alpha^{-1}\alpha)v,$$

* ← پانویس صفحهٔ ۲۱.

و چون $\alpha^{-1}\alpha = 1$ و بنابر [$1v = v, 1u = u(7)1.3$]، خواهیم داشت $u = v$، همان که می‌خواستیم.

حال به استخراج نتایجی از تعریف می‌پردازیم که در بند بعدی مورد نیاز خواهند بود. قانون شرکتپذیری بیان می‌کند که، به‌ازای a_1، a_2، a_3 در V.

$$(a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + (a_2 + a_3)$$

اگر چهار بردار a_1، a_2، a_3، a_4 داشته باشیم، حاصل‌جمعهای ممکن زیرین را می‌توانیم به‌دست آوریم:

$$a_1 + [a_2 + (a_3 + a_4)],$$
$$a_1 + [(a_2 + a_3) + a_4],$$
$$[a_1 + (a_2 + a_3)] + a_4,$$
$$[(a_1 + a_2) + a_3] + a_4.$$

خواننده می‌تواند تحقیق کند که همهٔ این عبارات معرّف بردار واحدی هستند. به‌طورکلی، با استفاده از استقرای ریاضی می‌توان ثابت کرد که همهٔ طرق ممکن افزودن n بردار a_1، ... ، a_n به‌یکدیگر برای به‌دست آوردن یک بردار جدید، درواقع به‌پدید آوردن بردار یکتای معینی منجر می‌شوند که آن را با

$$a_1 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

نشان خواهیم داد. قانون تعویضپذیری و این «تعمیم قانون شرکتپذیری» ایجاب می‌کنند که با استفاده از استقرای ریاضی داشته باشیم:

$$(a_1 + \cdots + a_n) + (b_1, \cdots, b_n) = (a_1 + b_1) + \cdots + (a_n + b_n)$$

یا به‌اختصار،

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) \qquad (6.3)$$

قواعد دیگر را نیز می‌توان برای حاصل‌جمعهای بیشتر از دو بردار تعمیم داد:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a$$
$$\lambda \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_i$$

همچنین بنابر (۶.۳) داریم:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i)\, a_i$$

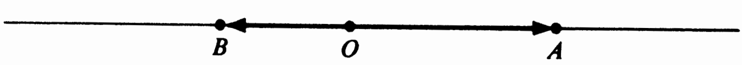
نکته مهم این است که این قواعد به‌برهانی مبتنی بر قواعد اساسی (۱.۳) نیاز دارند، و برای خواننده تمرین جالبی خواهد بود که استقرای ریاضی را برای ارائهٔ برهانی، مثلاً، برای (۶.۳) به‌کار برد.

این بخش مقدماتی دربارهٔ فضاهای برداری را با ذکر چند مثال به‌منظور نشان‌دادن سازگاری تعریف ما از فضای برداری R_n با تعبیری که گاهی در هندسه و فیزیک از بردارها می‌شود، به‌پایان می‌بریم. از مطالعهٔ این مثالها می‌توان، بی‌آنکه به‌پیوستگی بحث از فضاهای برداری خللی وارد آید، صرف‌نظر کرد یا آن را به‌تعویق انداخت.

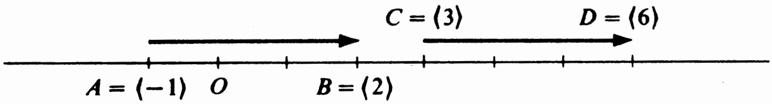
مثال الف. در اینجا به یک تعبیر هندسی از بردارها، برحسب پاره‌خطهای سودار، می‌پردازیم. مطلب را با خط حقیقی، که آن را با فضای برداری R_1 یکی می‌گیریم، شروع می‌کنیم. بردارهای R_1 را با حروف بزرگ A، B، C و غیره نشان می‌دهیم و آنها را به‌عنوان نقاطی از خط حقیقی تلقی می‌کنیم، که محل آنها با بردارهای مکانشان از مبدأ $O = <0>$ مشخص می‌شود (← شکل ۱.۲). یک پاره‌خط سودار روی R_1 جفت مرتبی است از نقاط که با $\vec{AB}$ نمایش داده می‌شود و فقط معرف پاره‌خط بین نقاط A و B همراه با یک سو است، با این فرض که A نقطهٔ آغاز و B نقطهٔ پایان این پاره‌خط خوانده شود. بدینسان $\vec{BA}$ همان پاره‌خط است که در آن، سو وارون شده‌است. ما می‌خواهیم مفهوم پاره‌خط سودار را فقط بر طول و سو، و نه نقطهٔ آغاز مشخصی استوار کنیم. یک تجزیه و تحلیل مورد به‌مورد نشان می‌دهد که دو پاره‌خط سودار $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ دارای یک طول و یک سو هستند اگر، و فقط اگر، $B - A = D - C$. این تساوی گویای این مطلب است که می‌توان تعریف رسمی پاره‌خط سودار $\vec{AB}$ را به‌صورت

$$\vec{AB} = B - A$$

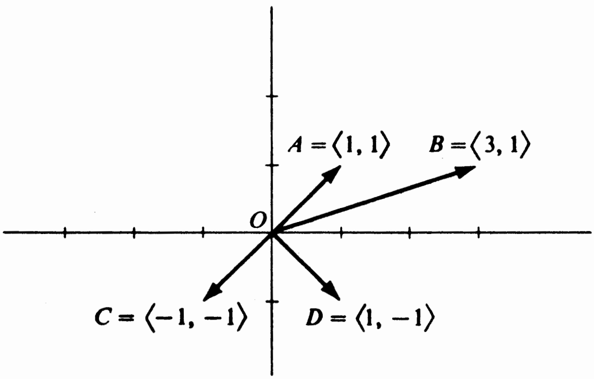
عرضه کرد (فراموش نکنیم که A و B بردارهایی در R_1اند، و در نتیجه این تفاضل تعریف شده است). مثلاً، پاره‌خطهای سودار $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ که در آن، $A = <-1>$، $B = <2>$، $C = <3>$، $D = <6>$، باهم برابرند، زیرا $B - A = D - C$ (← شکل ۲.۲).



شکل ۱.۲



شکل۲.۲



شکل۳.۲

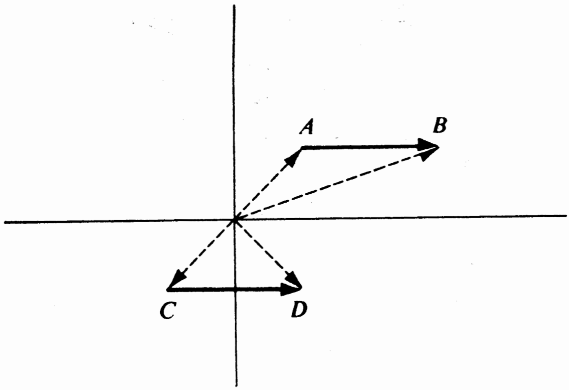
حال پاره‌خطهای سودار را در صفحه تعریف می‌کنیم. مانند مثال (الف)، با فضای برداری $R_۲$ شروع می‌کنیم، و بردارهای $R_۲$ را با حروف بزرگ A، B، ... نشان می‌دهیم و آنها را به‌عنوان نقاطی در صفحه تلقی می‌کنیم، که با بردارهای مکان خویش از مبدأ $O =< ۰, ۰ >$ مشخص می‌شوند، (← شکل ۳.۲).

(۷.۳) تعریف. گیریم A و B بردارهایی در $R_۲$ باشند. پاره‌خط سودار $\vec{AB}$ به‌عنوان بردار $B - A$ در $R_۲$ تعریف می‌شود.

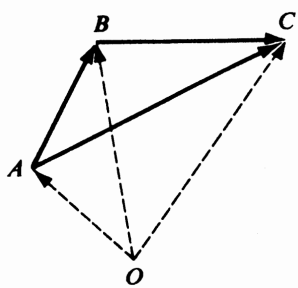
این تعریف از تجزیه و تحلیلی که از پاره‌خطهای سودار در $R_۱$ کردیم به ذهن ما القا شده است. این تعریف، برگردان ریاضی دقیقی از این نظر است که یک «بردار هندسی» (یا پاره‌خط سودار) باید با یک طول و یک سو، بدون اشاره به‌مکان ویژهٔ آن در صفحه، تعریف شود. در فیزیک گاهی این اشیاء را «بردارهای آزاد» می‌نامند.

ما این پاره‌خطهای سودار را بر صفحهٔ کاغذ مانند شکل ۴.۲ نمایش می‌دهیم (که در آن، پاره‌خطهای سودار $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$، با استفاده از همان نقاط شکل ۳.۲، رسم شده‌اند). توجه داشته باشید که پیکانهای $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ یک طول و یک سو دارند، و بنابر تعریف (۷.۳)، یک پاره‌خط سودار را نمایش می‌دهند، زیرا $\vec{AB} = B - A =< ۲, ۰ >$ و $\vec{CD} = D - C =< ۲, ۰ >$.

در حالت کلی معنای تعریف (۷.۳) اصلاً این است که دو پاره‌خط سودار برابرند مشروط بر



شکل۲.۴



شکل۲.۵

آنکه یک طول و یک سو داشته باشند.

حال می‌توانیم نشان دهیم که جمع پاره‌خطهای سودار با «قانون متوازی‌الاضلاع» ارائه می‌شود

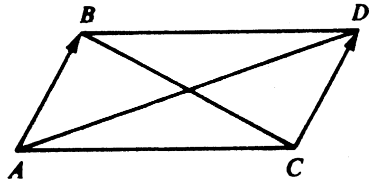
(۳.۸) قضیه. فرض کنیم A، B، C نقاطی در R_2 باشند. آنگاه $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ ($\leftarrow$ شکل ۲.۵).

برهان. بنابر تعریف (۳.۷)، داریم $\vec{AB} = B - A$، $\vec{BC} = C - B$، و بنابراین، همان‌طور که می‌خواستیم،

$$\vec{AB} + \vec{BC} = (B - A) + (C - B) = C - A = \vec{AC}$$

قضیهٔ (۳.۸) نشان می‌دهد که اگر پاره‌خطهای سودار $\vec{AB}$ و $\vec{BC}$ را چنان مرتب کنند که متنهای اولی مبدأ دومی باشد، حاصل‌جمع آنها پاره‌خط سوداری است که با قطر متوازی‌الاضلاعی که اضلاع مجاورش AB و BC هستند، مشخص می‌شود.

این بحث را با چند کاربرد این مفاهیم در مورد هندسهٔ مسطحه به‌پایان می‌بریم.



شکل۲.۶

استفاده از مفاهیمی را که در مثال (الف) وارد کردیم، ادامه می‌دهیم. وانگهی ما به مفهوم یک پاره‌خط (بدون سوی) $\overline{AB}$، که با مجموعهٔ نامرتبی از دو نقطه بیان می‌شود، نیز نیاز داریم. دو پاره‌خط را برابر تعریف می‌کنیم اگر، و فقط اگر، مبدأ و منتهای آنها یکی باشند.

(۹.۳) تعریف. نقطه‌ای مانند X را وسط پاره‌خط $\overline{AB}$ گویند هرگاه پاره‌خطهای سودار $\vec{AX}$ و $\vec{XB}$ برابر باشند.

(۱۰.۳) قضیه. X یا نقطهٔ وسط پاره‌خط $\overline{AB}$ با.

$$X = \frac{۱}{۲}(A+B)$$

داده می‌شود.

برهان. با توجه به‌تعریف (۹.۳)، داریم $\vec{AX} = \vec{XB}$. بنابراین

$$X - A = B - X,$$

و

$$۲X = A + B$$

پس از ضرب دو طرف در $\frac{۱}{۲}$، نتیجه حاصل می‌شود.

(۱۱.۳) تعریف. چهار نقطهٔ $\{A, B, C, D\}$ را رئوس یک متوازی‌الاضلاع گویند هرگاه $\vec{AB} = \vec{CD}$ (← شکل ۲.۶). اضلاع این متوازی‌الاضلاع را با پاره‌خطهای $\overline{AB}$، $\overline{CD}$، $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ تعریف می‌کنند؛ قطرهای این متوازی‌الاضلاع پاره‌خطهای $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$ هستند.

(۱۲.۳) قضیه. قطرهای یک متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند.

برهان. نقاط وسط قطرهای متوازی‌الاضلاع شکل ۲.۶، بنابر قضیهٔ (۱۰.۳)، نقاط

$$X = \frac{۱}{۲}(A+D) \ , \ Y = \frac{۱}{۲}(B+C)$$

هستند. باید نشان دهیم که $X = Y$. چون $\{A, B, C, D\}$ رئوس یک متوازی‌الاضلاع‌اند، داریم $\vec{AB} = \vec{CD}$، و بنابراین $B - A = D - C$. در نتیجه $B + C = A + D$ و، همان‌طور که می‌خواستیم اثبات کنیم، $X = Y$.

تمرینها

۱.در فضای برداری $R_۳$، بردارهای زیر را که از $a =< -۱, ۲, ۱ >$، $b =< ۲, ۱, -۳ >$، $c =< ۰, ۱, ۰ >$ تشکیل شده‌اند، محاسبه کنید (یعنی، آنها را به‌صورت $< \lambda, \mu, \nu >$ بیان کنید):

الف) $a + b + c$

ب) $۲a - b + c$

پ) $-a + ۲b$

ت) $\alpha a + \beta b + \gamma c$

۲.با فرض اینکه a، b، c همان بردارهای تمرین ۱ باشند، مطلوب است حل معادلات زیر در $R_۳$، به‌ازای $x =< \alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳ >$ در $R_۳$.

الف) $x + a = b$

ب) $۲x - ۳b = c$

پ) $b + x = a - ۲c$

۳.تحقیق کنید که اصول موضوع یک فضای برداری برای فضاهای برداری R_n، F_n، و $\mathcal{F}(R)$، برقرارند.

۴.در R_n قرار می‌دهیم $a =< \alpha_۱, \cdots, \alpha_n >$، $b =< \beta_۱, \cdots, \beta_n >$. نشان دهید که

$$b - a =< \beta_۱ - \alpha_۱, \cdots, \beta_n - \alpha_n >$$

تمرینهای زیر مبتنی بر مثالهای الف و (۹.۳)ـ(۱۲.۳) هستند.

۵.فرض کنیم AB پاره‌خطی سودار در $R_۲$ باشد. نشان دهید که $\vec{AB} = -\vec{BA}$

۶.نشان دهید که پاره‌خطهای سودار $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ برابرند اگر، و فقط اگر، برداری مانند X وجود داشته باشد به‌طوری‌که $C = A + X$، و $D = B + X$. (تعبیر این مطلب این است که دو پاره‌خط سودار برابرند اگر، و فقط اگر، بر اثر انتقال، یکی بر دیگری منطبق شود. یک انتقال در $R_۲$، قاعده‌ای است که هر بردار A را، به‌ازای بردار ثابتی مانند X، به بردار $A + X$ می‌فرستد.)

۷.نقطهٔ وسط پاره‌خط $\overline{AB}$ را در حالات زیر بیابید.

الف) $A =< ۰, ۰ >, B =< ۲, ۱ >$

ب) $A =< ۱, -۱ >, B =< ۳, ۲ >$

۸.مجموعه‌های نقاط زیرین را مورد آزمون قرار دهید و تعیین کنید که کدام‌ها رئوس متوازی‌الاضلاع هستند. مسأله تعیین برقراری شرایط تعریف (۱۱.۳) برای ترتیب معیّنی از نقاط است.

الف) $< ۰, ۰ >$، $< ۱, ۱ >$، $< ۴, ۲ >$، $< ۳, ۱ >$.

ب) $< ۰, ۰ >$، $< ۱, ۱ >$، $< ۴, ۳ >$، $< ۲, ۱ >$.

پ) $< ۱, ۱ >$، $< ۳, ۴ >$، $< -۱, ۲ >$، $< ۱, ۵ >$.

۹.فرض کنیم A، B، C، D نقاطی هستند که $\vec{AB} = \vec{CD}$. نشان دهید که $\vec{AC} = \vec{BD}$.

۱۰.یک چهارضلعی عبارت از مجموعه‌ای از چهار نقطهٔ متمایز $\{A, B, C, D\}$ است؛ اضلاع این چهار ضلعی پاره‌خطهای $\overline{AB}$، $\overline{BC}$، $\overline{CD}$ و $\overline{DA}$ هستند. نشان دهید که وسطهای اضلاع یک چهارضلعی رؤوس یک متوازی‌الاضلاع هستند.

۴. زیر فضاها و وابستگی خطی

این بخش با مفاهیمی آغاز می‌شود که برای مطالعهٔ مثالهای بخش ۱، مورد نیازند.

(۱.۴) **تعریف.** یک زیرفضای S از فضای برداری V مجموعه‌ای است ناتهی از بردارهای V به‌طوری‌که،

۱. اگر a و b در S هستند، آنگاه $a + b \in S$.

۲. اگر $a \in S$ و $\lambda \in F$، آنگاه $\lambda a \in S$.

آشکار است که اصول موضوع (۱.۳) فضاهای برداری، برای هر زیرفضای دلخواه S از یک فضای برداری V برقرارند؛ از این‌رو می‌بینیم که یک زیرفضا، اساساً یک فضای برداری است مشمول در یک فضای برداری بزرگتر، که در آن اعمال جمع و ضرب در اسکالرها، همانند این اعمال در فضای برداری بزرگتر هستند.

مثال الف. دستگاه معادلات همگن

$$x + ۲y - ۳z + t = ۰$$
$$x - y + z + t = ۰$$

را که در بخش ۱ مورد بحث قرار دادیم، در نظر می‌گیریم. یکی از حکمهایی که در آن بخش به‌دست آوردیم این بود که، اگر $u =< \alpha, \beta, \gamma, \delta >$ و $u' =< \alpha', \beta', \gamma', \delta' >$ جواب دستگاه باشند، $u + u'$، و به‌ازای $\lambda \in F$، λu نیز جواب دستگاه هستند به‌عبارت دیگر، مجموعهٔ جوابهای این دستگاه معادلات همگن یک زیر فضای $R_۴$ است، در نتیجه مسألهٔ حل این دستگاه معادلات دادنِ بیانِ روشنی از زیرفضای جوابهاست.

مثال ب. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' + m^۲ y = ۰ \qquad (۲.۴)$$

را که در مسألهٔ ب، بخش ۱، مورد مطالعه قرار دادیم، در نظر می‌گیریم. در آنجا ملاحظه کردیم که، اگر f و g جوابهای مسأله باشند، $f + g$ و همچنین λf به‌ازای همهٔ اعداد حقیقی λ، نیز جوابهای آن هستند. این‌بار، جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل همگن (۲.۴) یک زیرفضای برداری از فضای برداری $\mathcal{F}(R)$ تشکیل می‌دهند، که در بخش ۳ تعریف شد، و مانند مثال الف، مسألهٔ

یافتن همهٔ جوابهای این معادلهٔ دیفرانسیل به‌یافتن دقیق اینکه، چه توابعی به‌این زیرفضای $\mathcal{F}(R)$ تعلق دارند، باز می‌گردد.

مثال پ. ممکن است تا اینجا برای خواننده این تصور پیش آمده باشد که مفهوم زیرفضا، چارچوبی برای مسائل دیگری است که در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی مورد بحث قرار می‌گیرند. مثلاً، بعضی از نتایج استانده (کدامها؟) دربارهٔ توابع پیوسته و مشتق‌پذیر نشان می‌دهند که زیرمجموعه‌های زیرین از $\mathcal{F}(R)$ درواقع زیرفضا هستند:

(i) مجموعهٔ $C(R)$ از همهٔ توابع حقیقی پیوسته که روی خط حقیقی تعریف شده‌اند.

(ii) مجموعهٔ $D(R)$ مرکب از همهٔ توابع حقیقی مشتق‌پذیر روی R.

یک مثال آشنای دیگر از زیرفضای $\mathcal{F}(R)$ مثال زیرین است:

(iii) مجموعهٔ $P(R)$ از توابع چندجمله‌یی روی R، که در آن هر تابع چندجمله‌یی تابعی است مانند $f \in \mathcal{F}(R)$ به‌طوری‌که، به‌ازای مجموعهٔ ثابتی از اعداد حقیقی α_0، α_1، ... ، α_n،

$$\text{به‌ازای هر } x \in R، \quad f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$$

حال به‌ذکر چند نکتهٔ کلی دربارهٔ زیرفضاهای یک فضای برداری V روی هیأتی مانند F می‌پردازیم. داشتن تعریفی دیگر را در اینجا مناسب می‌دانیم.

(۳.۴) تعریف. فرض کنیم $\{a_1, \cdots, a_m\}$ مجموعه‌ای از بردارهای V باشد. برداری مانند $a \in V$ را یک ترکیب خطی از $\{a_1, \cdots, a_m\}$ گویند هرگاه بتوان عناصری مانند λ_1، ... ، λ_m در F پیدا کرد به‌طوری‌که

$$a = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m$$

حال می‌توانیم ملاحظه کنیم که

(۴.۴) اگر S زیرفضایی از V شامل بردارهای a_1، ... ، a_m باشد، هر ترکیب خطی از a_1، ... ، a_m به S تعلق دارد.

برهان. این نتیجه را به‌استقراء روی m اثبات می‌کنیم. اگر $m = 1$، این نتیجه بنابر تعریف یک زیرفضا درست است. فرض کنیم هر ترکیب خطی دلخواه از $m - 1$ بردار S، به S تعلق داشته باشد، و یک ترکیب خطی از m بردار متعلق به S به‌صورت

$$a = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m$$

در نظر می‌گیریم. اگر قرار دهیم $a' = \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_m a_m$، خواهیم داشت

$$a = \lambda_1 a_1 + a'$$

که در آن $\lambda_1 a_1 \in S$ و، بنابر فرض استقراء، $a' \in S$. بنابر قسمت (۱) تعریف (۱.۴)، $a \in S$ و لذا (۴.۴) اثبات می‌شود.

فرایند تشکیل ترکیبات خطی به‌روشی برای ساختن زیرفضاها منجر می‌شود که به‌قرار زیر است.

(۵.۴) فرض کنیم $\{a_1, \cdots, a_m\}$، $m \geq 1$، مجموعه‌ای از بردارهای V باشد؛ مجموعهٔ همهٔ ترکیبات خطی بردارهای a_1، ... ، a_m یک زیرفضای $S = S(a_1, \cdots, a_m)$ می‌سازند. S کوچکترین زیرفضای شامل $\{a_1, \cdots, a_m\}$ است، بدین‌معنی که اگر T زیرفضای دلخواهی شامل a_1، ... ، a_m باشد، آنگاه $S \subset T$.

برهان. فرض کنیم $a = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$ و $b = \sum_{i=1}^{m} \mu_i a_i$، پس

$$a + b = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i + \mu_i) a_i$$

باز ترکیبی خطی از a_1، ... ، a_m است. اگر $\lambda \in F$، آنگاه

$$\lambda a = \lambda \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda (\lambda_i a_i) = \sum_{i=1}^{m} (\lambda \lambda_i) a_i$$

این محاسبات ثابت می‌کنند که S یک زیرفضاست، و این امر که این کوچکترین زیرفضای شامل بردارهای مفروض است، بی‌درنگ از (۴.۴) نتیجه می‌شود.

(۶.۴) تعریف. زیرفضای $S = S(a_1, \cdots, a_m)$ را که در (۵.۴) تعریف شد، زیرفضای تولیدشده (یا اغلب تنیده‌شده) به‌وسیلهٔ a_1، ... ، a_m می‌نامند و a_1، ... ، a_m را مولدهای S می‌خوانند. زیرفضایی مانند S از V را متناهی‌ـمولّد گویند اگر بردارهایی مانند s_1، ... ، s_k در S وجود داشته باشند به‌طوری‌که $S = S(s_1, \cdots, s_k)$.

حال مسألهٔ حل دستگاه معادلات مثال (الف) یا معادلهٔ دیفرانسیل مثال (ب) روشنتر می‌شود. اگر، در هر دو حالت، S زیرفضای جوابها باشد، آنگاه بیان رضایت‌بخشی از جوابها داریم، مشروط بر آن که بتوانیم:

۱. نشان دهیم S (متناهی‌ـمولّد) است.

۲. مجموعه‌ای از مولدهای S (به‌معنای تعریف (۶.۴)) را بیابیم.

این نظر به‌مفهوم تازهٔ دیگری منجر می‌شود که به‌استدلال دقیقی نیاز دارد. فرض کنیم S یک زیرفضای متناهی‌ـمولّد از فضایی برداری مانند V روی هیأت F، با مولدهای $\{a_1, \cdots, a_m\}$ باشد. بیان S به‌عنوان مجموعهٔ ترکیبات خطی از $\{a_1, \cdots, a_m\}$ به‌ویژه هنگامی سودمند است که هیچ‌یک از a_iها زائد نباشد. معنای این سخن چیست؟ این سخن بدین معناست که هیچ مولد a_i را نتوان به‌صورت ترکیبی خطی از بقیهٔ مولدها بیان کرد. زیرا، فرض کنیم a_i ترکیبی خطی از

$a_i \in S(a_1, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_m)$ و $\{a_1, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_m\}$ باشد. آنگاه نتیجه می‌شود که $S(a_1, \cdots, a_m) = S(a_1, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_m)$، که به‌عبارت دیگر می‌توانیم، به‌جای مجموعهٔ مولدهای a_1، ... ، a_m، مجموعهٔ کوچکتری را قرار دهیم. این حکم که a_i ترکیبی خطی از $a_1, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_m$ است، به‌این معناست که اعدادی مانند λ_1، ... ، λ_{i-1}، λ_{i+1}، ... ، λ_m در F وجود دارند به‌طوری‌که

$$a_i = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_{i-1} a_{i-1} + \lambda_{i+1} a_{i+1} + \cdots + \lambda_m a_m$$

پس از افزودن $-a_i = (-1)a_i$ به‌دو طرف و استفاده از قانون تعویضپذیری، به‌دست می‌آوریم

$$0 = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_{i-1} a_{i-1} + (-1)a_i + \lambda_{i+1} a_{i+1} + \cdots + \lambda_m a_m$$

و به‌این ترتیب نشان دادیم که عناصری مانند μ_1، ... ، μ_m در F، که همگی صفر نیستند، وجود دارند به‌طوری‌که

$$\mu_1 a_1 + \cdots + \mu_m a_m = 0 \qquad (7.4)$$

(در این حالت، $\mu_j = \lambda_j$، $j \neq i$، و $\mu_i = -1 \neq 0$). برعکس، فرض کنیم دستوری مانند (۷.۴)، که در آن همهٔ μ_iها، همزمان صفر نیستند، برقرار باشد. در این‌صورت ثابت خواهیم کردکه یکی از a_jها ترکیبی خطی از بقیهٔ بردارهای $\{a_i, i \neq j\}$ است. فرض کنیم $\mu_j \neq 0$. لذا با استفاده از قانون تعویضپذیری و پس از افزودن $-\mu_j a_j$ به‌دو طرف، به‌دست می‌آوریم

$$-\mu_j a_j = \mu_1 a_1 + \cdots + \mu_{j-1} a_{j-1} + \mu_{j+1} a_{j+1} + \cdots + \mu_m a_m$$

اگر دو طرف را در $-\mu_j^{-1}$ (که در F وجود دارد زیرا $\mu_j \neq 0$) ضرب کنیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}(-\mu_j^{-1})(-\mu_j a_j) &= (-\mu_j^{-1})\mu_1 a_1 + \cdots + (-\mu_j^{-1})\mu_{j-1} a_{j-1} \\ &\quad + (-\mu_j^{-1})\mu_{j+1} a_{j+1} + \cdots + (-\mu_j^{-1})\mu_m a_m\end{aligned} \qquad (8.4)$$

با استفاده از قضیهٔ (۵.۳)، برای طرف چپ خواهیم داشت،

$$(-\mu_j^{-1})(-\mu_j a_j) = \mu_j^{-1}\mu_j a_j = 1 a_j = a_j$$

اگر این مقدار را در(۸.۴) بگذاریم، ثابت می‌شود که $a_j \in S(a_1, \cdots, a_{j-1}, a_{j+1}, \cdots, a_m)$. به‌طور خلاصه، قضیهٔ مهم زیر را ثابت کرده‌ایم.

(۹.۴) قضیه. فرض کنیم $\{a_1, \cdots, a_m\}$، $m \geq 1$، مجموعه‌ای از بردارها در V باشد. می‌توان برداری مانند a_i را به‌صورت ترکیبی خطی از بقیهٔ بردارهای

$\{a_1, \cdots , a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots , a_m\}$ بیان کرد اگر، و فقط اگر، عناصری مانند μ_1، ... ، μ_m در F، که همگی با هم صفر نیستند، موجود باشند به‌طوری‌که

$$\mu_1 a_1 + \cdots + \mu_m a_m = 0$$

مفهوم جدیدی، که در آغاز برهان قضیهٔ (۹.۴) به‌آن اشاره کردیم آن شرط نسبتاً ظریف ولی طبیعی دربارهٔ بردارهای $\{a_1, \cdots , a_m\}$ است که در جریان این اثبات پدیدار گشته است.

(۱۰.۴) تعریف. فرض کنیم $\{a_1, \cdots , a_m\}$ مجموعهٔ متناهی دلخواهی از بردارهای V باشد. مجموعهٔ بردارهای $\{a_1, \cdots , a_m\}$ را وابسته خطی گویند هرگاه عناصری مانند λ_1، ...، λ_m در F، که همزمان همگی صفر نیستند، وجود داشته باشند به‌طوری‌که

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_m a_m = 0$$

چنین دستوری را یک رابطهٔ وابستگی خطی خواهیم نامید. مجموعه‌ای از بردارها را که وابسته خطّی نباشد، نابسته خطی می‌گویند.

بدینسان، مجموعهٔ $\{a_1, \cdots , a_m\}$ نابسته خطّی است اگر، و فقط اگر، تساوی

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m = 0, \qquad \lambda_i \in F$$

مستلزم $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$ باشد.

پیش از ادامهٔ بحث، به چند حالت ساده از وابستگی خطی می‌پردازیم.

اول از همه، مجموعه‌ای مرکب از بردار صفر $\{0\}$ در V، همیشه یک مجموعهٔ وابسته خطی تشکیل می‌دهد، زیرا، به‌ازای هر $\lambda \neq 0$ در F، داریم

$$\lambda 0 = 0$$

ولی اگر در V، $a \neq 0$، آنگاه مجموعهٔ $\{a\}$ به‌تنهایی یک مجموعهٔ نابسته خطّی است. برای پی‌بردن به‌علّت آن، باید اثبات کنیم که اگر

$$\lambda a = 0, \lambda \in F$$

آنگاه $\lambda = 0$. این حکم با این هم‌ارز است که اثبات کنیم اگر نتیجهٔ $(\lambda = 0)$ نادرست باشد، آنگاه فرض $(\lambda a = 0, a \neq 0)$ نیز نادرست است. اگر $\lambda \neq 0$، آنگاه بنابر اصل موضوع ۷ تعریف (۱.۲)، عنصری مانند λ^{-1} وجود دارد به‌طوری‌که $\lambda^{-1}\lambda = 1$. چون $\lambda a = 0$، به‌دست می‌آوریم

$$\lambda^{-1}(\lambda a) = (\lambda^{-1}\lambda)a = 0$$

ولی $۱ = \lambda^{-۱}\lambda$، و بنابراین نشان دادیم که $\lambda a = ۰$، با $\lambda \neq ۰$، مستلزم $a = ۱ \cdot a = ۰$ است، و این برخلاف فرض $a \neq ۰$ است.

حال فرض کنیم $\{a, b\}$ مجموعه‌ای مرکب از دو بردار در V باشد. ثابت خواهیم کرد.

(۱۱.۴) $\{a, b\}$ مجموعه‌ای وابسته خطی است اگر، و فقط اگر، به‌ازای مقادیری مانند λ یا λ' در F، $a = \lambda b$ یا $b = \lambda' a$.

برهان. نخست فرض می‌کنیم $a = \lambda b$، $\lambda \in F$. پس داریم

$$a + [-(\lambda b)] = ۰$$

امّا بنابر قضیهٔ (۵.۳)،

$$-(\lambda b) = (-\lambda) b$$

لذا خواهیم داشت

$$۱ \cdot a + (-\lambda) b = ۰$$

چون $۰ \neq ۱$، پس ثابت کردیم که $\{a, b\}$ مجموعه‌ای وابسته خطّی است. به‌طریقی مشابه، $b = \lambda' a$ مستلزم این است که $\{a, b\}$ مجموعه‌ای وابسته خطّی باشد.

حال فرض می‌کنیم که

$$\alpha a + \beta b = ۰ \ , \ \alpha, \beta \in F \qquad (۱۲.۴)$$

که در آن α یا β مخالف صفر است. اگر $\alpha \neq ۰$، آنگاه خواهیم داشت

$$\alpha a = (-\beta) b$$

و

$$a = \alpha^{-۱}(\alpha a) = \alpha^{-۱}(-\beta)\ b = (-\alpha^{-۱}\beta) b$$

همان چیزی را که می‌خواستیم ثابت کنیم. از طرف دیگر، اگر $\alpha = ۰$ و $\beta \neq ۰$، معادلهٔ (۳.۶) به $\beta b = ۰$ تبدیل می‌شود، و بنابراین $b = ۰$. در این حالت، به‌ازای $\lambda' = ۰$، داریم $b = \lambda' a$، و (۱۱.۴) کاملاً به اثبات می‌رسد.

یکی دو مثال عددی ذکر می‌کنیم.

مثال ت. در $R_۲$ فرض کنیم $a = < ۱, -۱ >$. پس، اگر $b = < ۱, ۱ >$ یا $b = < ۱, ۰ >$، $\{a, b\}$ یک مجموعهٔ نابسته خطّی است و اگر $b = < -۲, ۲ >$ یا $< ۰, ۰ >$، $\{a, b\}$ یک مجموعهٔ وابسته خطّی است. [برای تحقیق درستی این حکمها، (۱۱.۴) را به‌کار ببرید.]

مثال ث. در $R_۲$، $a =< ۱, -۱ >$، $b =< ۱, ۱ >$ و $c =< ۲, ۱ >$ را در نظر می‌گیریم. آیا $\{a, b, c\}$ نابسته خطّی است؟ رابطهٔ وابستگی خطی ممکنی مانند $\alpha a + \beta b + \gamma c = ۰$ را، با α، β، γ اعدادی حقیقی، در نظر می‌گیریم. پس

$$\alpha a + \beta b + \gamma c =< \alpha + \beta + ۲\gamma, -\alpha + \beta + \gamma >$$

برای اینکه این بردار صفر شود، باید داشته باشیم

$$\alpha + \beta + ۲\gamma = ۰$$
$$-\alpha + \beta + \gamma = ۰$$

آیا اعدادی مانند α، β، γ وجود دارند که همگی همزمان صفر نباشند و در این معادلات صدق کنند؟ $\gamma = ۱$ را آزمایش می‌کنیم؛ پس این معادلات به

$$\alpha + \beta + ۲ = ۰$$
$$-\alpha + \beta + ۱ = ۰$$

تبدیل می‌شوند و می‌توانیم آنها را نسبت به α و β حل کنیم تا به‌دست آوریم

$$\alpha = -\frac{۱}{۲},\ \beta = -\frac{۳}{۲},\ \gamma = ۱$$

بدینسان این بردارها وابسته خطی هستند. بعداً در این فصل، روش منظّمتری برای انجام این نوع آزمون ارائه خواهیم داد.

این بخش را با مثالی عددی که بسیاری از نظرهای این بخش را به‌هم پیوند می‌دهد به پایان می‌بریم. وظیفهٔ تحقیق در درستی بعضی از احکامی که در بحث مربوط به‌این مثال پیش می‌آید، به‌عنوان تمرین واگذار می‌شود.

مثال ج. مجموعهٔ همهٔ جوابهای معادلهٔ

$$x_۱ + ۲x_۲ - x_۳ = ۰$$

را مشخّص کنید. قبل از همه، یکی از جوابها برداری است مانند $< \alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳ >$ در $R_۳$، و مجموعهٔ همهٔ جوابها، یک زیرمجموعهٔ S از $R_۳$ است. اگر قرار دهیم $x_۳ = ۰$، می‌بینیم که داریم

$$u_۱ =< ۱, -\frac{۱}{۲}, ۰ >\in S$$

به‌طریق مشابه، اگر قرار دهیم $x_۱ = ۰$، خواهیم داشت

$$u_۲ =< ۰, ۱, ۲ >\in S$$

نشان خواهیم داد که $S = S(u_۱, u_۲)$؛ به‌عبارت دیگر، نشان خواهیم داد که $u_۱$ و $u_۲$ مولدهای زیرفضایی متشکل از همهٔ جوابهای معادلهٔ مفروض هستند. فرض کنیم $u =< \alpha, \beta, \gamma >$ یک جواب باشد. اگر $\alpha = \beta = \gamma = ۰$، آنگاه $u \in S$، و جواب روشن است. حال فرض کنیم $\alpha \neq ۰$. پس

$$u - \alpha u_۱ =< ۰, \beta + \frac{\alpha}{۲}, \gamma >=< ۰, \frac{\gamma}{۲}, \gamma >= \frac{\gamma}{۲} u_۲$$

که آخرین تساوی طرف دوّم با توجه به‌رابطهٔ $\gamma - ۲\beta - \alpha = ۰$ که نتیجهٔ قراردادن $< \alpha, \beta, \gamma >$ در معادلهٔ اصلی است به‌دست آمده است. لذا $u \in S < u_۱, u_۲ >$. سرانجام، فرض کنیم $\alpha = ۰$، ولی $\beta \neq ۰$. آنگاه $۲\beta - \gamma = ۰$ و بی‌درنگ حاصل می‌شود

$$< ۰, \beta, \gamma >= \beta u_۲$$

تا اینجا ثابت کردیم که زیرفضای S متناهی-مولّد است، و بردارهای $u_۱$ و $u_۲$ مولدهای آن هستند. بنابر (۱۱.۴) نتیجه می‌شود که $u_۱$ و $u_۲$ به‌طور نابسته خطّی هستند. بنابراین قضیهٔ (۹.۴) ایجاب می‌کند که $S = S(u_۱, u_۲)$، و هیچ یک از دو بردار $u_۱$ و $u_۲$ را نتوان از مجموعهٔ مولدهای $\{u_۱, u_۲\}$ حذف کرد. سرانجام، حکم $S = S(u_۱, u_۲)$ بدین معناست که هر جواب u از معادلهٔ

$$x_۱ + ۲x_۲ - x_۳ = ۰$$

را می‌توان به‌صورت ترکیبی خطی از بردارهای

$$u_۲ =< ۰, ۱, ۲ > \quad \text{و} \quad u_۱ =< ۱, -\frac{۱}{۲}, ۰ >$$

یعنی به‌صورت $u = \lambda_۱ u_۱ + \lambda_۲ u_۲$ بیان کرد.

تمرینها

۱. تعیین کنید که کدام‌یک از زیرمجموعه‌های زیرین از R_n زیرفضا هستند.

الف) همهٔ بردارهایی به‌صورت $< \alpha_۱, \cdots, \alpha_n >$ به‌طوری که $\alpha_۱ = ۱$.

ب) همهٔ بردارهایی به‌صورت $< \alpha_۱, \cdots, \alpha_n >$ به‌طوری که $\alpha_۱ = ۰$.

پ) همهٔ بردارهایی به‌صورت $< \alpha_۱, \cdots, \alpha_n >$ به‌طوری که $\alpha_۱ + ۲\alpha_۲ = ۰$.

ت) همهٔ بردارهایی به‌صورت $< \alpha_۱, \cdots, \alpha_n >$ به‌طوری که $\alpha_۱ + \alpha_۲ + \cdots + \alpha_n = ۱$.

ث) همهٔ بردارهایی به‌صورت $<\alpha_1, \cdots, \alpha_n>$ به‌طوری که، به‌ازای A_1، ... ، A_n ثابت در R، $A_1\alpha_1 + \cdots + A_n\alpha_n = 0$.

ج) همهٔ بردارهای $<\alpha_1, \cdots, \alpha_n>$ به‌طوری که، به‌ازای مقادیر ثابت A_1، ... ، A_n، B در R، تساوی $A_1\alpha_1 + \cdots + A_n\alpha_n = B$ برقرار باشد.

چ) همهٔ بردارهایی به‌صورت $<\alpha_1, \cdots, \alpha_n>$ به‌طوری که $\alpha_1^2 = \alpha_2$.

۲.تحقیق کنید که زیرمجموعه‌های $C(R)$، $D(R)$، و $P(R)$ از مجموعهٔ $\mathcal{F}(R)$ که در مثال پ تعریف شدند، زیرفضاهایی از $\mathcal{F}(R)$ هستند.

۳.تعیین کنید که از زیرمجموعه‌های زیرین از $C(R)$، کدامها زیرفضایی از $C(R)$ هستند.

الف) مجموعهٔ توابع چندجمله‌یی در $C(R)$.

ب) مجموعهٔ همهٔ تابعهای $f \in C(R)$ به‌طوری که $f(\frac{1}{2})$ عدد گویایی باشد.

پ) مجموعهٔ همهٔ تابعهای $f \in C(R)$ به‌طوری که $f(\frac{1}{2}) = 0$.

ت) مجموعهٔ همهٔ تابعهای $f \in C(R)$ به‌طوری که $\int_0^1 f(t)dt = 1$.

ث) مجموعهٔ همهٔ تابعهای $f \in C(R)$ به‌طوری که $\int_0^1 f(t)dt = 0$.

ج) مجموعهٔ همهٔ تابعهای $f \in C(R)$ به‌طوری که $\frac{df}{dt} = 0$.

چ) مجموعهٔ همهٔ تابعهای $f \in C(R)$ به‌طوری که، به‌ازای α، β، $\gamma \in R$

$$\alpha\frac{d^2 f}{dt^2} + \beta\frac{df}{dt} + \gamma f = 0$$

ح) مجموعهٔ همهٔ تابعهای $f \in C(R)$ به‌طوری که، به‌ازای تابع ثابتی مانند $g \in C(R)$،

$$\alpha\frac{d^2 f}{dt^2} + \beta\frac{df}{dt} + \gamma f = g$$

۴.مجموعه بردارهای زیرین در R_2 و R_3 را مورد آزمون قرار دهید و وابسته خطی بودن یا نبودن آنها را تعیین کنید

الف) $<1, 1>$، $<2, 1>$

ب) $<1, 1>$، $<2, 1>$، $<1, 2>$

پ) $<0, 1>$، $<1, 0>$

ت) $<0, 1>$، $<1, 0>$، $<\alpha, \beta>$

ث) $<1, 1, 2>$، $<3, 1, 2>$، $<-1, 0, 0,>$

ج) $<3, -1, 1>$، $<4, 1, 0>$، $<-2, -2, -2>$

چ) $<1, 1, 0>$، $<0, 1, 1>$، $<1, 0, 1>$، $<1, 1, 1>$.

۵.مجموعهٔ نابسته خطی از مولدهای زیرفضای R_3، مرکب از همهٔ جوابهای معادلهٔ

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

را بیابید.

۶.نشان دهید که مجموعهٔ توابع چندجمله‌یی $P(R)$ ($\leftarrow$ مثال پ) یک فضای برداری متناهی‌ـمولّد نیست.

۷.آیا اشتراک دو زیرفضا همیشه یک زیرفضاست؟ پاسخ خود را اثبات کنید.

۸.آیا اجتماع دو زیرفضا همیشه یک زیرفضاست؟ توضیح دهید.

۹.فرض می‌کنیم بردار a در R_n ترکیبی خطی از بردارهای $b_۱$، . . . ، b_r متعلق به R_n باشد، و فرض می‌کنیم هر بردار b_i، $۱ \leq i \leq r$، ترکیبی خطی از بردارهای $c_۱$، . . . ، c_s باشد. ثابت کنید a ترکیبی خطی از $c_۱$، . . . ، c_s است.

۱۰.نشان دهید که مجموعه‌ای از بردارها که شامل یک مجموعه از بردارهای وابسته خطی باشد، وابسته خطی است. حکم مشابه مربوط به بردارهای نابسته خطی چیست؟

۵. مفاهیم پایه و بعد

در مثال ج از بخش ۴، نشان دادیم که زیرفضای جوابهای معادلهٔ

$$x_۱ + ۲x_۲ - x_۳ = ۰$$

به‌وسیلهٔ دو بردار $u_۱ =< ۱, -\frac{۱}{۲}, ۰ >$ و $u_۲ =< ۰, ۱, ۲ >$ تولید شده است. همچنین نشان دادیم که هیچ‌یک از دو بردار $u_۱$ و $u_۲$ را نمی‌توان از مجموعهٔ مولدهای $\{u_۱, u_۲\}$ حذف کرد. ولی آیا این نکته نشان می‌دهد که هیچ مجموعه‌ای از مولدهای S، کمتر از دو بردار ندارد؟ نه لزوماً. ممکن است تصادفاً کسی، از خوش‌شانسی، یک مولد تنها برای S بیابد که کار ما را در یافتن $u_۱$ و $u_۲$ به‌تلاش بیهوده‌ای مبدل سازد. هدف از این بخش این است که نشان دهیم این امر امکان‌پذیر نیست. درواقع، ثابت خواهیم کرد که اگر S زیرفضایی از یک فضای برداری V دارای m مولد نابسته خطی باشد، آنگاه هر مجموعهٔ دیگری از مولدها شامل حداقل m بردار است.

اثبات نتیجهٔ مطلوب در مورد مثال ما در بالا، آسان است. از یک برهان غیرمستقیم استفاده می‌کنیم. فرض کنیم S به‌وسیلهٔ یک بردار تنهای u تولید شده باشد. چون $u_۱ \neq ۰$ و $u_۲ \neq ۰$، پس خواهیم داشت

$$u_۱ = \alpha u, \quad u_۲ = \beta u$$

که در آن، α و β مخالف با صفرند. لذا

$$\beta u_۱ - \alpha u_۲ = ۰$$

که نشان می‌دهد $u_۱$ و $u_۲$ وابسته خطی هستند. ولی می‌دانیم که $u_۱$ و $u_۲$ نابسته خطی هستند؛ از این‌رو به یک تناقض می‌رسیم. بنابراین، فرض اولیهٔ ما، یعنی $S = S(u)$، باید نادرست باشد و نتیجه می‌گیریم که هر مجموعه از مولدهای S دارای حداقل دو بردار است.

هدف ما به‌کاربردن استدلال مشابهی برای اثبات قضیّهٔ اساسی زیرین است، که صورت کلی آن چیزی است که هم‌اکنون در مورد مثال بالا اثبات کردیم. پس از اثبات این قضیه یک مثال عددی آورده شده است که ممکن است خواننده ترجیح دهد، قبل از پرداختن به این اثبات، آن را مطالعه کند.

(۱.۵) قضیه. فرض کنیم S زیرفضایی از یک فضای برداری V روی هیأت F باشد، که به‌وسیلهٔ n بردار $\{a_1, \cdots, a_n\}$ تولید شده است. فرض کنیم $\{b_1, \cdots, b_m\}$، با فرض $m > n$، بردارهایی در S باشند. آنگاه بردارهای $\{b_1, \cdots, b_m\}$ وابسته خطی هستند.

برهان. این قضیه را با استقراء روی n اثبات می‌کنیم. به‌ازای $n = 1$، داریم $S = S(a)$، و بردارهای $\{b_1, \cdots, b_m\}$ در S، با فرض $m > 1$، به‌ما داده شده‌اند. پس (مانند مثالی که قبل از این قضیه مورد بحث قرار گرفت) به‌ازای $\lambda_i \in F$

$$b_1 = \lambda_1 a, \quad b_2 = \lambda_2 a, \cdots, b_m = \lambda_m a$$

دست‌کم یک $\lambda_j \neq 0$؛ زیرا در غیر این‌صورت $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$، و $b_1 - b_2 = 0$ یک رابطهٔ وابستگی خطی است. فرض کنیم $\lambda_j \neq 0$؛ در این صورت

$$\begin{aligned}\lambda_j b_1 + 0 b_2 + \cdots + 0 b_{j-1} + (-\lambda_1) b_j + 0 b_{j+1} + \cdots + 0 b_n \\ = \lambda_j \lambda_1 a - \lambda_1 \lambda_j a = 0\end{aligned}$$

و چون $\lambda_j \neq 0$، پس نشان داده‌ایم که بردارهای $\{b_1, \cdots, b_m\}$ وابسته خطی‌اند.

حال فرض کنیم، بنابر فرض استقراء، که این قضیه برای زیرفضاهایی که به‌وسیلهٔ $n - 1$ بردار تولید شده‌اند درست باشد، و m بردار متمایز $\{b_1, \cdots, b_m\}$ واقع در $S = S(a_1, \cdots, a_n)$ را، با شرط $m > n$، در نظر می‌گیریم. پس به‌ازای عناصری مانند $\lambda_{ij} \in F$ داریم

$$\begin{aligned} b_1 &= \lambda_{11} a_1 + \cdots + \lambda_{1n} a_n \\ b_2 &= \lambda_{21} a_1 + \cdots + \lambda_{2n} a_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_m &= \lambda_{m1} a_1 + \cdots + \lambda_{mn} a_n \end{aligned} \qquad (۲.۵)$$

(اندیس ij در λ_{ij} به‌این معناست که λ_{ij} ضریب a_j در عبارت b_i است، وقتی به‌صورت ترکیبی خطی از بردارهای $\{a_1, \cdots, a_n\}$ نوشته شود).

می‌توانیم فرض کنیم که، به‌ازای مقداری از i، $\lambda_{i1} \neq 0$. در غیر این‌صورت همهٔ جملات شامل a_1 در معادلات (۲.۵) حذف می‌شوند و همهٔ $\{b_1, \cdots, b_m\}$ها به‌زیرفضای $S(a_2, \cdots, a_n)$، که دارای $n - 1$ مولد است، تعلق پیدا می‌کنند. چون $m > n > n - 1$، فرض استقراء ایجاب

می‌کند که $\{b_1, \cdots, b_m\}$ به‌طور خطی وابسته باشند، و در این حالت دیگر قضیه اثبات شده است.

حال فرض کنیم که یکی از λ_{i1}ها مخالف صفر باشد؛با نام‌گذاری مجدد $\{b_i\}$ها (با قراردادن b_1 به‌جای b_i)، می‌توانیم فرض کنیم که $\lambda_{11} \neq 0$، دراین‌صورت ضریب a_1 در $b_2 - \lambda_{21}\lambda_{11}^{-1}b_1$ عبارت است از $\lambda_{21} - \lambda_{21}\lambda_{11}^{-1}.\lambda_{11} = 0$، درنتیجه، به‌ازای ضرایب ثابت جدیدی مانند $\{\lambda'_{22}, \ldots, \lambda'_{2n}\}$ در F،

$$b_2 - \lambda_{21}\lambda_{11}^{-1}b_1 = \lambda'_{22}a_2 + \cdots + \lambda'_{2n}a_n$$

به‌طریق مشابهی، داریم

$$b_3 - \lambda_{31}\lambda_{11}^{-1}b_1 = \lambda'_{32}a_2 + \cdots + \lambda'_{3n}a_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_m - \lambda_m\lambda_{11}^{-1}b_1 = \lambda'_{m2}a_2 + \cdots + \lambda'_{mn}a_n$$

نشان دادیم که $m - 1$ بردار

$$\{b_2 - \lambda_{21}\lambda_{11}^{-1}b_1, \cdots, b_m - \lambda_{m1}\lambda_{11}^{-1}b_1\}$$

همگی به‌زیر فضای $S(a_2, \cdots, a_n)$، که دارای $n - 1$ مولد است، تعلق دارند. چون $m > n$، $m - 1 > n - 1$، و از فرض استقراء نتیجه می‌شود که عناصری مانند μ_2، ... ، μ_m در F، که همگی همزمان صفر نیستند، وجود دارند به‌طوری که

$$\mu_2(b_2 - \lambda_{21}\lambda_{11}^{-1}b_1) + \cdots + \mu_m(b_m - \lambda_{m1}\lambda_{11}^{-1}b_1) = 0$$

اگر این عبارت را دوباره به‌صورت ترکیبی خطی از مجموعهٔ $\{b_1, \cdots, b_m\}$ بنویسیم، داریم

$$((-\mu_2\lambda_{21}\lambda_{11}^{-1}) + \cdots + (-\mu_m\lambda_{m1}\lambda_{11}^{-1}))b_1 + \mu_2b_2 + \cdots + \mu_mb_m = 0$$

که در آن، حداقل یکی از ضرایب $\{\mu_2, \cdots, \mu_m\}$ مخالف با صفر است. اثبات اینکه $\{b_1, \cdots, b_m\}$ نابسته خطی هستند کامل، و بنابراین قضیه اثبات می‌شود.

مثال الف. فرض کنیم $S = S(a_1, a_2)$ زیرفضایی از یک فضای برداری V روی هیأت اعداد حقیقی باشد، و فرض کنیم

$$b_1 = 2a_1 + a_2$$

$$b_2 = -a_1 + a_2$$

$$b_3 = a_1$$

سه بردار در S باشند. می‌خواهیم نشان دهیم که $b_۱$، $b_۲$، $b_۳$ وابسته خطی هستند. قصد ما این است که مضاربی از $b_۱$ را از $b_۲$ و $b_۳$ کم کنیم تا ضریب $a_۱$ برابر صفر شود. داریم

$$b_۲ + \left(\frac{۱}{۲}\right) b_۱ = \left(\frac{۳}{۲}\right) a_۲$$
$$b_۳ - \left(\frac{۱}{۲}\right) b_۱ = -\left(\frac{۱}{۲}\right) a_۲$$

حال دو بردار متعلق به‌فضای $S(a_۲)$ داریم و

$$b_۲ + \frac{۱}{۲} b_۱ + ۳\left[b_۳ - \left(\frac{۱}{۲}\right) b_۱\right] = ۰$$

اگر آن را به‌صورت ترکیبی خطی از $b_۱$، $b_۲$، $b_۳$ بنویسیم، خواهیم داشت

$$\left[\frac{۱}{۲} - \left(\frac{۳}{۲}\right)\right] b_۱ + b_۲ + ۳b_۳ = ۰$$

که همان رابطهٔ مطلوب وابستگی خطی بین $\{b_۱, b_۲, b_۳\}$ است.

این بخش را با قضیهٔ دیگری به پایان می‌بریم که بیانگر نکتهٔ مهمی دربارهٔ مجموعه‌های مختلف مولدهای یک فضای برداری متناهی-مولّد است و با استفاده از آن می‌توانیم مفاهیم پایه و بعد یک فضای برداری متناهی-مولّد را وارد کنیم.

(۳.۵) قضیه. فرض کنیم S زیرفضایی برداری از یک فضای برداری V باشد، و فرض کنیم که $\{a_۱, \cdots, a_m\}$ و $\{b_۱, \cdots, b_n\}$ هر دو مجموعه‌هایی از مولدهای نابسته خطی S باشند. آنگاه $n = m$.

برهان. نخست، $\{b_۱, \cdots, b_m\}$ را بردارهایی در $S(a_۱, \cdots, a_m)$ می‌گیریم. چون فرض بر این است که $b_۱$، ... ، b_n نابسته خطی هستند، قضیهٔ (۱.۵) به‌ما می‌گوید که $n \le m$. بعد، با درنظر گرفتن $\{a_۱, \cdots, a_m\}$ به‌عنوان بردارهایی در $S(b_۱, \cdots, b_n)$ با همان استدلال، خواهیم داشت $m \le n$. از اینجا نتیجه می‌شود که $n = m$، و قضیه به اثبات می‌رسد.

(۴.۵) تعریف. مجموعه‌ای متناهی از بردارهای $\{b_۱, \cdots, b_k\}$ را یک پایهٔ فضای برداری V می‌نامند هرگاه $\{b_۱, \cdots, b_k\}$ یک مجموعهٔ نابسته خطی از مولدهای V باشد

قضیهٔ (۳.۵) می‌گوید که اگر یک فضای برداری V پایه‌ای مانند $\{b_۱, \cdots, b_k\}$ داشته باشد، آنگاه هر پایهٔ دیگر V باید شامل دقیقاً k بردار باشد.

(۵.۵) تعریف. فرض کنیم V یک فضای برداری با یک پایهٔ $\{b_۱, \cdots, b_k\}$ باشد. عدد یکتای k را که با تعداد بردارهای پایه معین می‌شود، بعد فضای برداری V می‌نامند (نمادگذاری: $\dim V = k$).

مثال ب. فرض کنیم n عدد صحیح مثبت ثابتی باشد. ثابت می‌کنیم که فضای برداری R_n که در بخش ۲ تعریف شد، دارای بعد n است.

آنچه در این مورد باید انجام دهیم پیدا کردن پایه‌ای است از R_n که شامل n بردار باشد. گیریم

$$e_1 = <1, 0, 0, \cdots, 0>$$
$$e_2 = <0, 1, 0, \cdots, 0>$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$e_n = <0, 0, \cdots, 0, 1>$$

نشان خواهیم داد که بردارهای $\{e_i\}$ یک پایه برای R_n می‌سازند. چه‌چیزی را باید تحقیق کنیم؟ نخست آنکه این بردارها نابسته خطی هستند. این بدان معناست که هرگاه $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ عناصری از R باشند به‌طوری که $\sum \lambda_i e_i = 0$، آنگاه همهٔ λ_iها صفرند. حال داریم

$$\lambda_1 e_1 = <\lambda_1, 0, \cdots, 0>, \cdots; \lambda_n e_n = <0, \cdots, 0, \lambda_n>,$$

در نتیجه

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = <\lambda_1, \cdots, \lambda_n> = 0$$

که ایجاب می‌کند، بنابر تعریف تساوی دو بردار در R_n. $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. پس از آن باید نشان دهیم که $\{e_1, \cdots, e_n\}$ مجموعه‌ای از مولدهای R_n است. همان محاسبات انجام شده در بالا نشان می‌دهد که اگر

$$a = <\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n>$$

آنگاه

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$$

و نتیجهٔ مطلوب برقرار می‌شود. گاهی بردارهای $\{e_i\}$ را بردارهای یکه می‌نامند.

تمرینها

۱. فرض کنیم b_1، ...، b_r پایه‌ای برای یک فضای برداری V باشد. ثابت کنید که، به‌ازای $i = 1, \cdots, r$، $b_i \neq 0$.

۲. با توجه به‌تعاریف، ثابت کنید که هر مجموعهٔ دلخواه شامل سه بردار در R_2، یک مجموعهٔ وابسته خطی است. (راهنمایی: با استفاده از مثال ب مجموعه‌ای از مولدهای R_2 بیابید، و سپس استدلال مثال الف را دنبال کنید.)

۳.فرض کنیم، به‌ازای عدد صحیح مثبت ثابتی مانند n، P_n مجموعهٔ همهٔ توابع چندجمله‌یی در $P(R)$ به‌صورت $\alpha_۰ + \alpha_۱ x + \cdots + \alpha_n x^n$ باشد. نشان دهید که P_n زیرفضایی از $P(R)$ است، و $\{۱, x, x^۲, \cdots, x^n\}$ پایه‌ای برای P_n تشکیل می‌دهد.

۴.نشان دهید که مجموعهٔ همهٔ توابع $f \in C(R)$ به‌طوری که $\frac{df}{dt} = ۰$، یک زیرفضای یک بعدی $C(R)$ است. آیا می‌توانید این نتیجه را تعمیم دهید؟ مثلاً، بعد زیرفضای مرکب از همهٔ fها، به‌طوری که $\frac{d^۲f}{dt^۲} = ۰$، چیست؟

۵.فرض کنیم $a_۱, \cdots, a_m$ بردارهای نابسته خطی در V باشند. ثابت کنید که $\alpha_۱ a_۱ + \cdots + \alpha_m a_m = \alpha'_۱ a_۱ + \cdots + \alpha'_m a_m$ اگر، و فقط اگر، $\alpha_۱ = \alpha'_۱$، ... ، $\alpha_m = \alpha'_m$. به‌عبارت دیگر، ضرایب برداری که، به‌صورت ترکیبی خطی از بردارهای نابسته خطی بیان شده‌اند، به‌طور یکتا تعیین می‌شوند.

۶. هم‌ارزی سطری ماتریسها

در این بخش روش محاسبهٔ مهمی را که به‌ویژه در حل عملی همهٔ مسأله‌های وابستگی خطی و دستگاههای معادله‌های خطی به‌کار می‌رود، ارائه می‌دهیم. بحث را با یک مثال شروع می‌کنیم

مثال الف. می‌خواهیم برای زیر فضای $R_۴$ که به‌وسیلهٔ بردارهای:

$$a =< -۳, ۲, ۱, ۴ > \quad ، \quad b =< ۴, ۱, ۰, ۲ > \quad ، \quad c =< -۱۰, ۳, ۲, ۶ >$$

پدید آمده پایه‌ای بیابیم. گیریم بردارهای یکهٔ $e_۱$، $e_۲$، $e_۳$ و $e_۴$ یک پایهٔ $R_۴$ باشند:

$$e_۱ =< ۱, ۰, ۰, ۰ >, \cdots, e_۴ =< ۰, ۰, ۰, ۱ >$$

همانند مثال ب‌ی بخش ۵ داریم:

$$\begin{aligned} a &= -۳e_۱ + ۲e_۲ + e_۳ + ۴e_۴ \qquad (*) \\ b &= ۴e_۱ + e_۲ + ۲e_۴ \\ c &= -۱۰e_۱ + ۳e_۲ + ۲e_۳ + ۶e_۴ \end{aligned}$$

نابستگی خطی a، b، c روشن نیست. بهترین روش پی‌بردن به آن همچنین بهترین روش یافتن یک پایهٔ $S(a, b, c)$، این است که به‌هر بردار مضرب بردارهای دیگر را بیفزاییم تا مجموعهٔ جدیدی از مولدهای $S(a, b, c)$ به‌دست آید به‌گونه‌ای که روابط $(*)$ تا آنجا که شدنی است ساده گردد. بعضی از عملهایی که به‌مجموعه‌های تازه‌ای از مولدها منجر می‌شود به‌شرح زیرند.

(۱) تعویض یک بردار با دیگری [برای مثال $S(b, a, c) = S(a, b, c)$، زیرا هر ترکیب خطی از بردارهای $\{b, a, c\}$ به‌طور یقین یک ترکیب خطی از بردارهای a، b و c است و به وارون].

(۲) تعویض[1] یک بردار با مجموع آن بردار و یک مضرب عددی از بردار دیگر. برای مثال، $S(a-۲b,b,c) = S(a,b,c)$. برای بررسی درستی این برابری باید تحقیق کنیم که هرترکیب‌خطی‌از $\{a-۲b,b,c\}$ یقیناً یک ترکیب خطی از $\{a,b,c\}$ است (چرا؟). بنابراین $S(a-۲b,b,c)\subset S(a,b,c)$. به‌وارون، فرض کنیم:

$$x = \lambda a + \mu b + \nu c$$

یک ترکیب خطی از $\{a,b,c\}$ است. چون:

$$a = (a-۲b)+۲b$$

داریم:

$$x = \lambda(a-۲b)+(۲\lambda+\mu)b+\nu c$$

پس نشان دادیم که:

$$x \in S(a-۲b,b,c)$$

مطلب دیگری که باید در نظر داشت این است که این عملهای روی بردارها، درواقع روی فقط ضریبهای معادله‌های $(*)$ صورت گرفته است.

یک راه خوب برای تجسّم این عملها ارائهٔ مفهوم ماتریس است.

(۱.۶) تعریف. هر مجموعهٔ مرتب $\{r_۱,\cdots,r_m\}$ از m بردار R_n را یک ماتریس $m\times n$ می‌نامند. بردارهای $\{r_۱,\cdots,r_m\}$ را سطرهای ماتریس می‌نامند.

برای ماتریسها طرز نمایش زیر را به‌کار می‌بریم. در مثال الف بردارهای

$$r_۱ =< -۳,۲,۱,۴ > \quad , \quad r_۲ =< ۴,۱,۰,۲ > \quad , \quad r_۳ =< -۱۰,۳,۲,۶ >$$

را در نظر گرفتیم. ماتریس ۳×۴ با سطرهای $r_۱$، $r_۲$ و $r_۳$ را به‌شکل:

$$\begin{pmatrix} -۳ & ۲ & ۱ & ۴ \\ ۴ & ۱ & ۰ & ۲ \\ -۱۰ & ۳ & ۲ & ۶ \end{pmatrix} \qquad (۲.۶)$$

---

۱. اگر بخواهیم مشابهت این سطر را با سطری که در صفحهٔ ۴۹، زیر ماتریس اوّل آمده حفظ کنیم، می‌توانیم چنین بنویسیم: گذاشتن مجموع بردار و مضربی از آن، به‌جای هر بردار.ـم.

نشان می‌دهیم. به‌طورکلی سطرهای $\{r_۱, r_۲, r_۳\}$ از یک ماتریس ۳×۴ را به‌شکل زیر می‌نویسیم:

$$r_۱ = <\alpha_{۱۱}, \alpha_{۱۲}, \alpha_{۱۳}, \alpha_{۱۴}>$$
$$r_۲ = <\alpha_{۲۱}, \alpha_{۲۲}, \alpha_{۲۳}, \alpha_{۲۴}>$$
$$r_۳ = <\alpha_{۳۱}, \alpha_{۳۲}, \alpha_{۳۳}, \alpha_{۳۴}>$$

عددهای $\{\alpha_{ij}\}$ را درایه‌های ماتریس می‌نامند. در طرز نمایش ماتریس، عنصر α_{ij} در سطر iام و ستون jام قرار دارد. برای مثال، اگر ماتریس (۲.۶) را با این قرارداد بنویسیم خواهیم داشت: $\alpha_{۱۱} = -۳$، $\alpha_{۲۱} = ۴$، $\alpha_{۳۳} = ۲$، $\alpha_{۱۴} = ۴$ و غیره.

عمل تعویض دو بردار منجر به تعویض دو سطر ماتریس (۲.۶) می‌گردد و آن را چنین می‌نویسند:

$$\begin{pmatrix} -۳ & ۲ & ۱ & ۴ \\ ۴ & ۱ & ۰ & ۲ \\ -۱۰ & ۳ & ۲ & ۶ \end{pmatrix} \underset{\sim}{\mathrm{I}} \begin{pmatrix} ۴ & ۱ & ۰ & ۲ \\ -۳ & ۲ & ۱ & ۴ \\ -۱۰ & ۳ & ۲ & ۶ \end{pmatrix}$$

گذاشتن $a - ۲b$ به‌جای a را با شکل زیر نشان می‌دهیم:

$$\begin{pmatrix} -۳ & ۲ & ۱ & ۴ \\ ۴ & ۱ & ۰ & ۲ \\ -۱۰ & ۳ & ۲ & ۶ \end{pmatrix} \underset{\sim}{\mathrm{II}} \begin{pmatrix} -۱۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۴ & ۱ & ۰ & ۲ \\ -۱۰ & ۳ & ۲ & ۶ \end{pmatrix}$$

این عملها را عملهای مقدماتی سطری از نوع I و II روی ماتریس می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$\begin{pmatrix} -۳ & ۲ & ۱ & ۴ \\ ۴ & ۱ & ۰ & ۲ \\ -۱۰ & ۳ & ۲ & ۶ \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha_{۱۱} & \alpha_{۱۲} & \alpha_{۱۳} & \alpha_{۱۴} \\ \alpha_{۲۱} & \alpha_{۲۲} & \alpha_{۲۳} & \alpha_{۲۴} \\ \alpha_{۳۱} & \alpha_{۳۲} & \alpha_{۳۳} & \alpha_{۳۴} \end{pmatrix} \qquad (۳.۶)$$

تا این‌که نشان دهیم ماتریس:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \alpha_{۱۱} & \alpha_{۱۲} & \alpha_{۱۳} & \alpha_{۱۴} \\ \alpha_{۲۱} & \alpha_{۲۲} & \alpha_{۲۳} & \alpha_{۲۴} \\ \alpha_{۳۱} & \alpha_{۳۲} & \alpha_{۳۳} & \alpha_{۳۴} \end{pmatrix}$$

از ماتریس $\mathbf{A}$ به‌ترتیب زیر به‌دست آمده است. شمارهٔ متناهی از ماتریسها:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_۱, \mathbf{A}_۲, \cdots, \mathbf{A}_s = \mathbf{A}'$$

وجود دارند که همه همان بعد $\mathbf{A}$ را دارند به‌گونه‌ای که برای هر i، $۲ \leq i \leq s$، $\mathbf{A}_i$ با یک عمل مقدماتی* سطری از روی $\mathbf{A}_{i-۱}$ به‌دست آمده است. چون این عملهای مقدماتی سطری زیر فضای مربوط به سطرها را تغییر نمی‌دهد، نتیجه می‌گیریم که اگر (۳.۶) برقرار باشد، زیرفضای $S(a', b', c')$ با زیرفضای $S(a, b, c)$ برابر است، که در آن:

$$\begin{aligned} a' &= \alpha_{۱۱}e_۱ + \alpha_{۱۲}e_۲ + \alpha_{۱۳}e_۳ + \alpha_{۱۴}e_۴ \\ b' &= \alpha_{۲۱}e_۱ + \alpha_{۲۲}e_۲ + \alpha_{۲۳}e_۳ + \alpha_{۲۴}e_۴ \\ c' &= \alpha_{۳۱}e_۱ + \alpha_{۳۲}e_۲ + \alpha_{۳۳}e_۳ + \alpha_{۳۴}e_۴ \end{aligned} \qquad (۴.۶)$$

و $\{a, b, c\}$ بردارهایی هستند که با سطرهای ماتریس اصلی بیان شده‌اند:

$$\begin{pmatrix} -۳ & ۲ & ۱ & ۴ \\ ۴ & ۱ & ۰ & ۲ \\ -۱۰ & ۳ & ۲ & ۶ \end{pmatrix}$$

این می‌رساند که آنچه برای یافتن یک پایهٔ $S(a, b, c)$ باید انجام دهیم استفاده از عملهای مقدماتی سطری در مورد ماتریس (۲.۶) است تا همانند (۴.۶) بردارهای $\{a', b', c'\}$ را چنان بیابیم که آزمون نابستگی خطی آنها در مورد بردارهای ناصفر یافت‌شده آسان باشد.

یکی از روشهای انجام این کار روش حذف گاوس است. با استفاده از عملهای مقدماتی سطری ضریبهای $e_۱$ را در همهٔ بردارها به‌جز یکی از آنها به صفر تبدیل می‌کنیم. سپس ضریبهای بردار پایهٔ دیگر را حذف می‌کنیم و همین‌طور عمل را ادامه می‌دهیم.

در مثال مورد بحث ضریب $e_۱$ را در سطرهای دوم و سوم حذف می‌کنیم. اگر به‌جای سطر دوّم، مجموع آن را با حاصلضرب سطر اوّل در $\frac{۴}{۳}$ قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix} -۳ & ۲ & ۱ & ۴ \\ ۴ & ۱ & ۰ & ۲ \\ -۱۰ & ۳ & ۲ & ۶ \end{pmatrix} \underset{\sim}{\mathrm{II}} \begin{pmatrix} -۳ & ۲ & ۱ & ۴ \\ ۰ & \frac{۱۱}{۳} & \frac{۴}{۳} & \frac{۲۲}{۳} \\ -۱۰ & ۳ & ۲ & ۶ \end{pmatrix}$$

در ماتریس سمت راست به‌جای سطر سوم، تفاضل سطر سوم و $\frac{۱۰}{۳}$ سطر نخست را می‌گذاریم، نتیجه می‌شود:

$$\begin{pmatrix} -۳ & ۲ & ۱ & ۴ \\ ۰ & \frac{۱۱}{۳} & \frac{۴}{۳} & \frac{۲۲}{۳} \\ -۱۰ & ۳ & ۲ & ۶ \end{pmatrix} \underset{\sim}{\mathrm{II}} \begin{pmatrix} -۳ & ۲ & ۱ & ۴ \\ ۰ & \frac{۱۱}{۳} & \frac{۴}{۳} & \frac{۲۲}{۳} \\ ۰ & \frac{-۱۱}{۳} & \frac{-۴}{۳} & \frac{-۲۲}{۳} \end{pmatrix}$$

* بعداً عمل مقدماتی نوع سومی ارائه خواهد شد که در اینجا مورد نیاز نیست.

اکنون به‌جای سطر سوم، مجموع سطرهای سوم و دوم را می‌گذاریم:

$$\begin{pmatrix} -۳ & ۲ & ۱ & ۴ \\ ۰ & \frac{۱۱}{۳} & \frac{۴}{۳} & \frac{۲۲}{۳} \\ ۰ & \frac{-۱۱}{۳} & \frac{-۴}{۳} & \frac{-۲۲}{۳} \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{II}} \begin{pmatrix} -۳ & ۲ & ۱ & ۴ \\ ۰ & \frac{۱۱}{۳} & \frac{۴}{۳} & \frac{۲۲}{۳} \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

اگر آنچه را که انجام شد به دنبال هم بنویسیم، نتیجه می‌شود:

$$\begin{pmatrix} -۳ & ۲ & ۱ & ۴ \\ ۴ & ۱ & ۰ & ۲ \\ -۱۱ & ۳ & ۲ & ۶ \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{II}} \begin{pmatrix} -۳ & ۲ & ۱ & ۴ \\ ۰ & \frac{۱۱}{۳} & \frac{۴}{۳} & \frac{۲۲}{۳} \\ -۱۰ & ۳ & ۲ & ۶ \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\text{II}} \begin{pmatrix} -۳ & ۲ & ۱ & ۴ \\ ۰ & \frac{۱۱}{۳} & \frac{۴}{۳} & \frac{۲۲}{۳} \\ ۰ & \frac{-۱۱}{۳} & \frac{-۴}{۳} & \frac{-۲۲}{۳} \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{II}} \begin{pmatrix} -۳ & ۲ & ۱ & ۴ \\ ۰ & \frac{۱۱}{۳} & \frac{۴}{۳} & \frac{۲۲}{۳} \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که:

$$S(a,b,c) = S(a',b')$$

که در آن

$$\begin{aligned} a' &= -۳e_۱ + ۲e_۲ + e_۳ + ۴e_۴ \\ b' &= \quad \frac{۱۱}{۳}e_۲ + \frac{۴}{۳}e_۳ + \frac{۲۲}{۳}e_۴ \end{aligned} \qquad (۵.۶)$$

اکنون می‌توان نابسته خطّی بودن a' و b' را به‌آسانی بررسی کرد. زیرا، فرض کنیم:

$$\lambda a' + \mu b' = ۰ \qquad (۶.۶)$$

در این‌صورت پس از دسته‌بندی برحسب $e_۱$، $e_۲$، $e_۳$ و $e_۴$ نتیجه می‌شود:

$$-۳\lambda e_۱ + (\cdots)e_۲ + (\cdots)e_۳ + (\cdots)e_۴ = ۰$$

از اینجا نتیجه می‌شود که $\lambda = ۰$، زیرا $\{e_۱, e_۲, e_۳, e_۴\}$ نابسته خطی هستند. لذا معادلهٔ (۶.۶) چنین می‌شود:

$$\mu b' = ۰$$

و چون $b' \neq 0$ پس $\mu = 0$.

از اینجا نتیجه می‌شود که بردارهای a' و b' پایه‌ای برای زیرفضای $S(a, b, c)$ تشکیل می‌دهند زیرا این دو بردار نابسته خطی‌اند.

دومین کاربرد این روش آزمون وابستگی خطی بردارهاست. در این مورد ما، نتیجه می‌شود که بردارهای اصلی یعنی $\{a, b, c\}$ وابسته خطّی‌اند. زیرا اگر نابسته خطی بودند، پایهٔ زیرفضای $S(a, b, c)$ متشکل از سه بردار می‌شد و پایه‌ای با دو بردار بنا به قضیهٔ (۳.۵) نشدنی است.

مسألهٔ یافتن یک بستگی خطی بین $\{a, b, c\}$ چندان دشوار نیست، ولی، آن را تا بخش ۹ به‌تعویق خواهیم انداخت، زیرا این مسأله هم‌ارز مسألهٔ کلی یافتن پاسخهای یک دستگاه معادلات همگن است.

از این مثال نتایج زیادی دربارهٔ چگونگی پدیدآمدن زیرفضاهای فضاهای برداری به‌دست آوردیم. این بخش را با بیان نتیجه‌های خود در حالت کلی پایان می‌دهیم. در مطالعهٔ موضوع این بخش مثالهای (الف) یا (پ) (آخر بخش) محتملاً برای درک نکته‌های گوناگون مورد بحث بسیار مفید خواهند بود.

فرض‌کنیم V یک فضای برداری با پایهٔ متناهی $\{a_1, \cdots, a_n\}$ روی هیأت F است. فرض کنیم $\{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$ بردارهایی متعلق به V باشند به‌گونه‌ای که:

$$\begin{array}{rl} b_1 = & \lambda_{11}a_1 + \lambda_{12}a_2 + \cdots + \lambda_{1n}a_n \\ b_2 = & \lambda_{21}a_1 + \lambda_{22}a_2 + \cdots + \lambda_{2n}a_n \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ b_m = & \lambda_{m1}a_1 + \lambda_{m2}a_2 + \cdots + \lambda_{mn}a_n \end{array} \qquad (۷.۶)$$

ماتریس:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \cdots & \lambda_{mn} \end{pmatrix} \qquad (۸.۶)$$

ماتریس ضریبهای دستگاه معادله‌های (۷.۶) است (← به‌تعریفی که در ابتدای این بخش انجام شد) که سطرهای آن عبارت‌اند از بردارهای:

$$\begin{array}{ll} r_1 = < \lambda_{11}, \lambda_{12}, \cdots, \lambda_{1n} > & \text{(سطر نخست)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ r_m = < \lambda_{m1}, \lambda_{m2}, \cdots, \lambda_{mn} > & \text{(سطر } m\text{ام)} \end{array}$$

ستونهای $\mathbf{A}$ مطابق تعریف بردارهایی متعلق به F_m هستند،

$$c_۱ = \begin{pmatrix} \lambda_{۱۱} \\ \lambda_{۲۱} \\ \vdots \\ \lambda_{m۱} \end{pmatrix}, \cdots, c_n = \begin{pmatrix} \lambda_{۱n} \\ \lambda_{۲n} \\ \vdots \\ \lambda_{mn} \end{pmatrix}$$

یا می‌توان ستون اول را به‌شکل،

$$c_۱ = < \lambda_{۱۱}, \lambda_{۲۱}, \cdots, \lambda_{m۱} >$$

نوشت. تعریف این mتایی چگونگی نقش ضریبها را نشان می‌دهد. می‌دانیم که ماتریس $\mathbf{A}$ را یک ماتریس $m \times n$ و عددهای $\{\lambda_{ij}\}$ را درایه‌های آن می‌نامند. درایهٔ λ_{ij} به سطر iام و ستون j ام $\mathbf{A}$ تعلق دارد و در (۷.۶) معرّف ضریب a_j در عبارت b_i به‌عنوان یک ترکیب خطی از بردارهای پایه می‌باشد. همانند حالت R_n، $\mathbf{A} = ۰$ نمایش این است که همهٔ درایه‌های $\mathbf{A}$ برابر صفرند.

مثال ب. گیریم:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ -۳ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{۱۱} & \lambda_{۱۲} & \lambda_{۱۳} \\ \lambda_{۲۱} & \lambda_{۲۲} & \lambda_{۲۳} \\ \lambda_{۳۱} & \lambda_{۳۲} & \lambda_{۳۳} \\ \lambda_{۴۱} & \lambda_{۴۲} & \lambda_{۴۳} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}$ یک ماتریس ۳ × ۴ با بردارهای سطری زیر است:

$$r_۱ = < ۲, ۱, ۰ >$$
$$r_۲ = < -۳, ۱, ۲ >$$
$$r_۳ = < ۱, ۱, -۱ >$$
$$r_۴ = < ۲, ۱, ۴ >$$

مثلاً عنصری که در سطر سوم و ستون یکم قرار دارد برابر است با ۱. $\lambda_{۲۲}$، $\lambda_{۳۳}$، $\lambda_{۱۳}$ را معین کنید.

(۹.۶) تعریف. گیریم $\mathbf{A}$ یک ماتریس $m \times n$ با ضریبهای $\{\lambda_{ij}\}$ باشد. یک عمل سطری مقدماتی روی ماتریس $\mathbf{A}$ قاعده‌ای است که با انجام آن روی $\mathbf{A}$ یک ماتریس $m \times n$ دیگر به‌دست می‌آید. عملهای سطری مقدماتی عبارت‌اند از:

I) تعویض دو سطر $\mathbf{A}$

II) تعویض سطر iام $\mathbf{A}$ یعنی r_i با $r_i + \lambda r_j$، که در آن r_j، $i \neq j$، یک سطر دیگر $\mathbf{A}$ و λ یک عدد است.

III) تعویض سطر iام $\mathbf{A}$ یعنی r_i با μr_i، $\mu \neq 0$.

(۱۰.۶) **تعریف.** گیریم $\mathbf{A}$ یک ماتریس $m \times n$ باشد. ماتریس $m \times n$ بعدی $\mathbf{A}'$ را هم‌ارز سطری $\mathbf{A}$ گویند هرگاه ماتریسهای $m \times n$ بعدی مانند $\mathbf{A}_0$، $\mathbf{A}_1$، ...، $\mathbf{A}_s$، وجود داشته باشند به‌گونه‌ای که:

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A} \qquad \mathbf{A}_s = \mathbf{A}'$$

و به‌ازای هر i، $1 \leq i \leq s$، $\mathbf{A}_i$ از $\mathbf{A}_{i-1}$ با یکی از سه‌عمل مقدماتی سطری I، II و III به‌دست آید. اگر $\mathbf{A}'$ هم‌ارز سطری $\mathbf{A}$ باشد می‌نویسیم $\mathbf{A} \sim \mathbf{A}'$ رابطهٔ هم‌ارزی سطری دارای ویژگیهای زیر است (به تمرینها مراجعه کنید):

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{A}$$
$$\mathbf{A} \sim \mathbf{A}' \Longleftrightarrow \mathbf{A}' \sim \mathbf{A}$$
$$\mathbf{A} \sim \mathbf{A}' \,,\, \mathbf{A}' \sim \mathbf{A}'' \Longrightarrow \mathbf{A} \sim \mathbf{A}''$$

(۱۱.۶) **قضیه.** گیریم V یک فضای برداری با پایهٔ متناهی $\{a_1, \cdots, a_n\}$ و $\{b_1, \cdots, b_m\}$ بردارهایی در آن باشند به‌گونه‌ای که:

$$\begin{aligned} b_1 &= \lambda_{11} a_1 + \cdots + \lambda_{1n} a_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_m &= \lambda_{m1} a_1 + \cdots + \lambda_{mn} a_n \end{aligned}$$

فرض می‌کنیم ماتریس $m \times n$:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \lambda'_{11} & \cdots & \lambda'_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda'_{m1} & \cdots & \lambda'_{mn} \end{pmatrix}$$

هم‌ارز سطری ماتریس ضریبهای $\{b_i\}$ها برحسب $\{a_j\}$ها، یعنی:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{m1} & \cdots & \lambda_{mn} \end{pmatrix}$$

باشد. در این صورت:

$$S(b_۱, \cdots, b_m) = S(b'_۱, \cdots, b'_m)$$

که در آن:

$$b'_۱ = \lambda'_{۱۱}a_۱ + \cdots + \lambda'_{۱n}a_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b'_m = \lambda'_{m۱}a_۱ + \cdots + \lambda'_{mn}a_n$$

برهان. کافی است قضیه را در حالتی ثابت کنیم که در آن $\mathbf{A}'$ از $\mathbf{A}$ با یک عمل مقدماتی سطری به‌دست آمده است. اگر عمل سطری از نوع I و II باشد، در این حالت نتیجهٔ قضیه را در مثال $\mathbf{A}$ بررسی کردیم، و از بازگویی جزئیات آن خودداری می‌کنیم. اکنون فرض می‌کنیم عمل مقدماتی سطری از نوع III است، به‌طوری‌که سطر iام $\mathbf{A}'$ یعنی r'_i برابر است با μr_i که در آن $\mu \neq ۰$ و r_i سطر iام ماتریس $\mathbf{A}$ است. باید ثابت کنیم که زیرفضاهای حاصل از بردارهای $\{b_۱, \cdots, b_m\}$ و $\{b_۱ \cdots b_{i-۱}, \mu b_i, b_{i+۱}, \cdots, b_m\}$ یکی هستند برای این‌که نشان دهیم:

$$S(b_۱, \cdots, b_m) \subset S(b_۱, \cdots, b_{i-۱}, \mu b_i, b_{i+۱}, \cdots, b_m) \quad (۱۲.۶)$$

گیریم:

$$u = \beta_۱ b_۱ + \cdots + \beta_m b_m \in S(b_۱, \cdots, b_m)$$

چون $\mu \neq ۰$ می‌توانیم بنویسیم:

$$u = \beta_۱ b_۱ + \cdots + \beta_{i-۱} b_{i-۱} + \beta_i \mu^{-۱}(\mu b_i) + \beta_{i+۱} b_{i+۱} + \cdots$$

این برابری رابطهٔ شمول را ثابت می‌کند. اثبات شمول وارون را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

اکنون به‌موضوع حذف ضریبهای $e_۱$، $e_۲$، ... به‌ترتیب، که در مثال الف به‌کار بستیم، برمی‌گردیم.

(۱۳.۶) تعریف. یک مجموعهٔ مرتب از بردارهای F_n مانند $\{b_۱, \cdots, b_p\}$ را یک مجموعهٔ پلّه‌یی شکل گویند هرگاه $b_i \neq ۰$، و جای نخستین درایهٔ ناصفر در b_i، در سمت چپ جای نخستین درایهٔ ناصفر در $b_{i+۱}$، $i = ۱, ۲, \cdots, p - ۱$، باشد. برای مثال:

$$< ۱, ۰, -۲, ۳ >, \quad < ۰, ۱, ۲, ۰ >, \quad < ۰, ۰, ۰, ۱ >$$

پلّه‌یی شکل است، در حالی‌که:

$$< ۰, ۱, ۰, ۰ >, < ۱, ۰, ۰, ۰ >$$

پلّه‌یی شکل نیست.

موضوع پلّه‌یی شکل داشتن بردارها یک حقیقت کلی زیر است که در مثال الف پیش‌بینی شده بود.

(۱۴.۶) لم. گیریم **A** ماتریس ضریبهای یک مجموعه بردار $\{b_1, \cdots, b_m\}$ برحسب یک مجموعه از بردارهای پایهٔ $\{a_1, \cdots, a_n\}$ از فضای برداری V [همانند (۷.۶)] باشد، یعنی:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \cdots & \lambda_{mn} \end{pmatrix}$$

فرض می‌کنیم که سطرهای r_1، ... ، r_m ماتریس A پلّه‌یی شکل باشند، در این صورت بردارهای $\{b_1, \cdots, b_m\}$ نابسته خطی هستند.

برهان. لم را با روش استقراء روی m ثابت می‌کنیم. اگر $m = 1$، آنگاه بنا به‌تعریف (۱۳.۶)، $b_1 \neq 0$ و $\{b_1\}$ یک مجموعهٔ نابسته خطی است. اکنون مثل فرض استقراء، فرض می‌کنیم که $m > 1$ و لم برای ماتریس با $m - 1$ سطر درست باشد. گیریم **A** در فرضهای لم صدق می‌کند، و فرض می‌کنیم:

$$\beta_1 b_1 + \cdots + \beta_m b_m = 0, \qquad \beta_i \in F \qquad (15.6)$$

نشان می‌دهیم که $\beta_1 = 0$. گیریم λ_{1i} نخستین درایهٔ ناصفر r_1 باشد. در این‌صورت بنا به‌تعریف پلّه‌یی شکل‌بودن، هنگامی‌که (۱۵.۶) را به‌شکل ترکیب خطی از بردارهای پایهٔ $\{a_1, \cdots, a_n\}$ بنویسیم، ضریب a_i برابر $\lambda_{1i}\beta_1$ است، که باید برابر ۰ باشد. چون $\lambda_{1i} \neq 0$، پس $\beta_1 = 0$. اکنون بردارهای $\{b_2, \cdots, b_m\}$ را در نظر می‌گیریم. ماتریس ضریبهای این بردارها، $m - 1$ سطر دارد که پلّه‌یی شکل است (چرا؟). امّا رابطهٔ (۱۵.۶) حالا به شکل زیر است:

$$\beta_2 b_2 + \cdots + \beta_m b_m$$

با استفاده از فرض استقراء، نتیجه می‌گیریم:

$$\beta_2 = \cdots = \beta_m = 0$$

بدین ترتیب لم ثابت می‌شود.

اکنون به‌قضیهٔ عمدهٔ این بخش می‌پردازیم.

(۱۶.۶) قضیه. گیریم **A** ماتریس ضریبهای دستگاه معادله‌های (۷.۶) است، که یک مجموعه از بردارهای $\{b_1, \cdots, b_m\}$ را به‌شکل ترکیب خطی از یک مجموعهٔ داده‌شده از بردارهای پایهٔ یک فضای برداری V بیان می‌کند. در این‌صورت احکام زیر برقرارند:

i) یک ماتریس $\mathbf{A}'$ وجود دارد که هم‌ارز سطری ماتریس $\mathbf{A}$ است به‌گونه‌ای که یا $\mathbf{A}' = ۰$، یا یک عدد درست و مثبت یکتای k وجود دارد، $۱ \leq k \leq m$، به‌گونه‌ای که نخستین k سطر $\mathbf{A}'$ پلّه‌یی شکل است و بقیهٔ سطرها صفرند.

ii) بردارهای $\{b'_۱, \cdots, b'_k\}$ مربوط به k سطر نخستین $\mathbf{A}'$ پایه‌ای برای $S(b_۱, \cdots, b_k)$ است.

iii) شرط لازم و کافی برای اینکه بردارهای اصلی $\{b_۱, \cdots, b_m\}$ نابسته خطّی باشند این است که $k = m$.

برهان. نخست ثابت می‌کنیم که اگر $\mathbf{A} \neq ۰$، آنگاه یک ماتریس $\mathbf{A}' \sim \mathbf{A}$ وجود دارد به‌گونه‌ای که نخستین k سطر $\mathbf{A}'$ پلّه‌یی شکل است و بقیهٔ سطرهای آن صفرند. اثبات را به‌روش استقراء روی شمارهٔ سطرهای $\mathbf{A}$ انجام می‌دهیم. اگر شمارهٔ سطرها یک باشد، در این‌صورت نتیجه به‌روشنی درست است، زیرا یک بردار ناصفرتنها، پلّه‌یی شکل است. اکنون فرض می‌کنیم که $\mathbf{A} \neq ۰$ دارای $m > ۱$ سطر است. با تعویض دو سطر، می‌توانیم فرض کنیم که $r_۱$ یعنی نخستین سطر $\mathbf{A}$ ناصفر است و درایهٔ ناصفر آن در منتهاالیه دست چپ است. با افزودن مضربهای سطر اول به‌سایر سطرها ماتریسی به‌دست می‌آوریم به‌شکل زیر که هم‌ارز سطری $\mathbf{A}$ است:

$$\mathbf{A}_۱ = \begin{pmatrix} ۰ & \cdots & ۰ & \lambda_{۱i} & \cdots \\ ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & \cdots \end{pmatrix} \qquad (۱۷.۶)$$

و در آن $\lambda_{۱i} \neq ۰$. بنابر فرض استقراء، می‌توانیم با اعمال عملهای مقدماتی سطری بر ماتریس متشکل از $m - ۱$ سطر آخر $\mathbf{A}_۱$، ماتریس زیر را بیابیم:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} ۰ & \cdots & ۰ & \lambda_{۱i} & \cdots \\ ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & \cdots \\ ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & \cdots \end{pmatrix}$$

به‌گونه‌ای که همهٔ سطرهای $\mathbf{A}'$ به‌جز سطر اول از صفر تشکیل شود، یا اینکه سطرهای $\mathbf{A}'$ یعنی $\{r'_۲, \cdots, r'_k\}$ پلّه‌یی شکل و بقیهٔ سطرها صفر باشند. بنابر تعریف پلّه‌یی شکل، روشن است که سطرهای $\{r_۱, \cdots, r_k\}$ از $\mathbf{A}'$ پلّه‌یی شکل‌اند و نخستین حکم ثابت می‌شود.

گیریم $\{b'_۱, \cdots, b'_k\}$ بردارهای مربوط به‌نخستین k سطر $\mathbf{A}'$ باشند. بنابر قضیهٔ (۱۱.۶):

$$S(b_۱, \cdots, b_m) = S(b'_۱, \cdots, b'_k)$$

و بنابر لم (۱۴.۶) بردارهای $\{b'_۱, \cdots, b'_k\}$ نابسته خطی هستند. بنابراین $\{b'_۱, \cdots, b'_k\}$ پایه‌ای است برای $S(b_۱, \cdots, b_m)$. به‌علاوه، هر ماتریس دیگری که دارای همان شرطهای $\mathbf{A}'$ باشد دارای

این ویژگی خواهد بود که سطرهای ناصفر آن پایه‌ای برای $S(b_۱, \cdots, b_m)$ است. از قضیهٔ (۳.۵) نتیجه می‌شود که شمارهٔ سطرهای ناصفر $\mathbf{A}'$ به‌طور یکتا تعیین می‌شود. تا اینجا احکام (i) و (ii) قضیه را ثابت کردیم. حکم (iii) همان‌گونه که در مثال الف دیدیم با یک کاربرد دیگر قضیهٔ (۳.۵) ثابت می‌شود. زیرا شرط لازم و کافی برای نابستگی خطی بردارهای $\{b_۱, \cdots, b_m\}$ این است که شمارهٔ بردارهای پایهٔ $S(b_۱, \cdots, b_m)$ برابر m باشد. ولی شمارهٔ بردارهای پایهٔ $S(b_۱, \cdots, b_m)$ برابر است با شمارهٔ سطرهای ناصفر $\mathbf{A}'$ که برابر k است. به‌این ترتیب اثبات قضیه پایان می‌یابد.

مثال پ. در این مثال چگونگی استفاده از تکنیکی را که در این بخش گفته شد نشان می‌دهیم.

برای زیرفضایی از $R_۳$ که به‌وسیلهٔ بردارهای $<۱, ۳, ۴>$، $<۴, ۰, ۱>$ و $<۳, ۱, ۲>$ پدید می‌آید، پایه‌ای بیابید. بستگی خطّی این بردارها را امتحان کنید.

بنابر روشی که گفته شد، این بردارها را برحسب یک پایهٔ $R_۳$ متشکل از بردارهای یکهٔ $\{e_۱, e_۲, e_۳\}$ بیان می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
b_۱ &=< ۱, ۳, ۴ >= e_۱ + ۳e_۲ + ۴e_۳\\
b_۲ &=< ۴, ۰, ۱ >= ۴e_۱ \qquad + e_۳\\
b_۳ &=< ۳, ۱, ۲ >= ۳e_۱ + e_۲ + ۲e_۳
\end{aligned}$$

ماتریس ضریبها برابر است با:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۰ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}$$

اکنون ماتریسی مانند $\mathbf{A}'$ را که هم‌ارز ماتریس $\mathbf{A}$ است، به‌گونه‌ای می‌یابیم که k سطر نخست آن پلّه‌یی شکل باشند.

$$\mathbf{A} \overset{\mathrm{II}}{\sim} \begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۴ \\ ۰ & -۱۲ & -۱۵ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II}}{\sim} \begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۴ \\ ۰ & -۱۲ & -۱۵ \\ ۰ & -۸ & -۱۰ \end{pmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{III}}{\sim} \begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۱ & \frac{۵}{۴} \\ ۰ & -۸ & -۱۰ \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II}}{\sim} \begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۱ & \frac{۵}{۴} \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

باید به‌چگونگی استفاده از عمل سطری نوع III برای تبدیل نخستین درایهٔ سطر دوم به ۱، توجه کرد. این مرحله، بااینکه اساسی نیست، اغلب برای ساده‌کردن محاسبات به‌کار می‌رود.

با به‌کار بردن قضیهٔ (۱۶.۶) نتیجه می‌گیریم که بردارهای:

$$b'_۱ = e_۱ + ۳e_۲ + ۴e_۳$$
$$b'_۲ = \quad e_۲ + \frac{۵}{۴}e_۳$$

پایه‌ای برای $S(b_۱, b_۲, b_۳)$ هستند، و بردارهای اصلی $\{b_۱, b_۲, b_۳\}$ به‌طور خطی وابسته‌اند.

تمرینها

۱.ماتریسهایی هم‌ارز سطری با ماتریسهای زیر بیابید که سطرهای هریک پلّه‌یی شکل باشند.

الف) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ & -۱ \end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۲ & -۱ \\ ۱ & ۲ & ۴ \end{pmatrix}$

پ) $\begin{pmatrix} ۲ & -۱ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۳ & -۱ & -۴ \end{pmatrix}$

۲.بردارهای زیر را از نظر وابستگی خطی بیازمایید. فرض می‌کنیم که این بردارها به‌ازای مقدار مناسبی از n به R_n تعلق دارند:

الف) $<-۱,۱>$، $<۱,۲>$، $<۱,۳>$.

ب) $<۲,۱>$، $<۱,۰>$، $<-۲,۱>$.

پ) $<۱,۴,۳>$، $<۳,۰,۱>$، $<۴,۱,۲>$.

ت) $<۱,۱,۲>$، $<۲,۱,۳>$، $<۴,۰,-۱>$، $<-۱,۰,۱>$.

ث) $<۰,۱,۱,۲>$، $<۳,۱,۵,۲>$، $<-۲,۱,۰,۱>$، $<۱,۰,۳,-۱>$.

ج) $<۱,۱,۰,۰,۱>$، $<-۱,۱,۱,۰,۰>$، $<۲,۱,۰,۱,۱>$، $<۰,-۱,-۱,-۱,۰>$.

۳.برای فضاهایی که دسته بردارهای تمرین ۲ پدید می‌آورند پایه‌هایی پلّه‌یی شکل بیابید.

۴.گیریم $f_۱$، $f_۲$، $f_۳$ توابعی در $\mathcal{F}(R)$ هستند.

الف) برای مجموعهٔ اعداد حقیقی $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، فرض می‌کنیم $(f_i(x_j))$ یک ماتریس ۳ در ۳ است که درایهٔ (i,j)ام آن $f_i(x_j)$ است، برای $۱ \leq i,j \leq ۳$. ثابت کنید که توابع $f_۱$، $f_۲$، $f_۳$ هنگامی به‌طور خطی نابسته‌اند که سطرهای ماتریس $(f_i(x_j))$ به‌طور خطی نابسته باشند.

ب) فرض کنید که توابع $f_۱$، $f_۲$، $f_۳$ روی بازهٔ (a,b) دارای مشتقهای مرتبهٔ اول و دوّم هستند، W ماتریس ۳×۳ای است که درایهٔ (i,j)ام آن $f_i^{(j-۱)}$، $۱ \leq i,j \leq ۳$ است، که در آن برای هر تابع مشتقپذیر f داریم: $f^{(۰)} = f$، $f^{(۱)} = f'$، $f^{(۲)} = f''$. ثابت کنید که توابع

f_1، f_2، f_3 روی بازهٔ (a,b) وقتی به‌طور خطی نابسته‌اند که سطرهای ماتریس $W(x)$ به‌طور خطی نابسته باشند.

نشان دهید که هریک از مجموعهٔ توابع زیر به‌طور خطی نابسته‌اند:

پ) $f_1(x) = -x^2 + x + 1$، $f_2(x) = x^2 + 2x$، $f_3(x) = x^2 - 1$

ت) $f_1(x) = e^{-x}$، $f_2(x) = x$، $f_3(x) = e^{2x}$

ث) $f_1(x) = e^x$، $f_2(x) = \sin x$، $f_3(x) = \cos x$

توجه کنید که اگر آزمونهای مذکور در (الف) و (ب) درست از آب درنیایند، تضمینی برای وابستگی خطی توابع وجود ندارد.

۵. نابستگی خطی مجموعهٔ زیر از چندجمله‌ییها را آزمون کنید. (راهنمایی از تمرین ۳ صفحهٔ ۴۴ استفاده کنید.)

الف) $x^2 + 2x + 1$، $2x + 1$، $2x^2 - 2x - 1$

ب) 1، $x - 1$، $(x-1)^2$، $(x-1)^3$

۷. قضیه‌های کلی در مورد فضاهای برداری متناهی-مولّد

در این بخش چند قضیهٔ دیگر را در مورد فضاهای برداری ثابت می‌کنیم که در نظریهٔ دستگاههای معادله‌های خطی و در سایر کاربردها بعداً مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

(۱.۷) لم. اگر $\{a_1, \cdots, a_m\}$ وابسته خطی، و $\{a_1, \cdots, a_{m-1}\}$ نابسته خطی باشند، آنگاه a_m ترکیبی خطی از a_1، ...، a_{m-1} است.

برهان. بنابر فرض داریم:

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m = 0$$

که در آن دست‌کم یک $\lambda_i \neq 0$. اگر $\lambda_m = 0$، آنگاه به‌ازای $1 \le i \le m-1$ یک $\lambda_i \neq 0$ وجود دارد، و معادلهٔ وابستگی خطی چنین می‌شود:

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_{m-1} a_{m-1} = 0$$

که خلاف فرض نابستگی خطّی $\{a_1, \cdots, a_{m-1}\}$ است. بنابراین $\lambda_m \neq 0$، و داریم:

$$\begin{aligned} a_m &= \lambda_m^{-1}[(-\lambda_1)a_1 + \cdots + (-\lambda_{m-1})a_{m-1}] \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} (-\lambda_m^{-1}\lambda_i) a_i \end{aligned}$$

همان‌چیزی را که می‌خواستیم ثابت کنیم.

برای توضیح (۱.۷)، گیریم در R_2، $a = <0, 1>$، $b = <1, -1>$ و $c = <-2, 2>$.

در این‌صورت a، b، c وابسته خطّی هستند (چرا؟) به‌علاوه a و b نابسته خطی‌اند، پس بنابر (۱.۷) c باید ترکیبی خطی از a و b باشد، (نشان دهید که این مطلب درست است.) ولی b و c نابسته خطی نیستند، و در این حالت به‌آسانی ثابت می‌شود که a ترکیبی از b و c نیست. بنابراین فرض (۱.۷) اساسی است.

(۲.۷) قضیه. هر فضای برداری متناهی-مولّد V یک پایه دارد.

برهان. نخست حالتی را که V تنها شامل بردار صفر است در نظر می‌گیریم. در این‌صورت بردار صفر V را پدید می‌آورد ولی نمی‌تواند پایه‌ای برای آن باشد (چرا؟). در این‌حالت می‌پذیریم که مجموعهٔ تهی یک پایهٔ V است، پس بعد V برابر صفر است. اکنون گیریم $V \neq \{\circ\}$ فضایی با n مولّد باشد. بنابر قضیهٔ (۱.۵) هر مجموعه از $n+۱$ بردار در V وابسته خطی است، و چون هر مجموعه‌ای با یک بردار ناصفر تنها، نابسته خطی است، پس برای یک عدد درست $m \geq ۱$، V متضمن بردارهای نابسته خطّی $b_۱$، . . . ، b_m است به‌طوری‌که هر مجموعهٔ متشکل از $m+۱$ بردار V وابسته خطی است. ثابت خواهیم کرد که $\{b_۱, \cdots, b_m\}$ پایه‌ای است برای V. برای این منظور کافی است نشان دهیم که هر بردار $b \in V$ به $S(b_۱, \cdots, b_m)$ نیز تعلق دارد. چون $\{b_۱, \cdots, b_m\}$ نابسته خطی است، پس مجموعهٔ $\{b_۱, \cdots, b_m, b\}$ وابسته خطی است. چون $\{b_۱, \cdots, b_m\}$ نابسته خطی است، بنابر لم (۱.۷)، $b \in S(b_۱, \cdots, b_m)$ و قضیه ثابت می‌شود.

امّا می‌دانیم که هر فضای برداری متناهی-مولّد، با داشتن یک پایه معین می‌شود، -فضا شامل همهٔ ترکیبهای خطی این بردارهای مبناست. دو قضیهٔ بعد نشان می‌دهند که وقتی یک مجموعه از مولدهای فضایی را داشته باشیم چگونه باید یک پایه از آن یا دست‌کم یک مجموعهٔ نابسته از بردارهای آن را بیابیم.

(۳.۷) قضیه. گیریم $V = S(a_۱, \cdots, a_m)$ فضای برداری متناهی-مولّدی با مولّدهای $\{a_m، \cdots، a_۱\}$ باشد. در این‌صورت می‌توان از مولّد $\{a_۱, \cdots, a_m\}$ یک پایه برای فضا برگزید. به‌گفتهٔ دیگر، هر مجموعه از مولدهای یک فضای برداری متناهی-مولّد همواره متضمّن یک پایه است.

برهان. اگر $V = \{\circ\}$، قضیه روشن است. اکنون گیریم $V \neq \{\circ\}$. به‌ازای زیرنمایه‌ای مانند r، $۱ \leq r \leq m$، برای ترتیب مناسبی از بردارهای $a_۱$، . . . a_m، می‌توان بردارهای $a_۱، \cdots، a_r$ را نابسته خطی دانست. در این‌صورت بنابر لم (۱.۷)، بردارهای $a_{r+۱}$، . . . ، a_m همه به $S(a_۱, \cdots, a_r)$ تعلق دارند. بنابراین:

$$S(a_۱, \cdots, a_m) = S(a_۱, \cdots, a_r)$$

و چون $\{a_۱, \cdots, a_r\}$ نابسته خطی است، نتیجه می‌گیریم که مجموعهٔ اخیر پایه‌ای است برای V.

(۴.۷) قضیه. گیریم $\{b_1, \cdots, b_q\}$ مجموعه‌ای از بردارهای نابسته خطی فضای متناهی-مولّد V باشد. اگر b_1، ... ، b_q پایه‌ای برای V نباشد بردارهای دیگری مانند b_{q+1}، ... ، b_m در V وجود دارند به‌طوری‌که $\{b_1, \cdots, b_m\}$ پایه‌ای است برای V.

برهان. بنابر قضیه (۲.۷) V پایه‌ای مانند $\{a_1, \cdots, a_n\}$ دارد. بنابر قضیهٔ (۱.۵) $q \leq n$. اگر $q = n$، آنگاه بنابر قضیهٔ (۱.۵) برای هر i، مجموعهٔ:

$$\{b_1, \cdots, b_n, a_i\}$$

مجموعه‌ای است وابسته خطی. بنابر لم (۱.۷)، $a_i \in S(b_1, \cdots, b_n)$ پس:

$$V = S(b_1, \cdots, b_n)$$

بنابراین $\{b_1, \cdots, b_n\}$ پایه‌ای است برای V، و در این حالت اثبات قضیه روشن است.

اکنون فرض کنیم $q = n - 1$. در این‌صورت به‌ازای یک مقدار $a_i \notin S(b_1, \cdots, b_q)$، و باز بنابر لم (۱.۷)، مجموعهٔ $\{b_1, \cdots, b_q, a_i\}$ یک مجموعهٔ نابسته خطی از n بردار است. بنا به‌استدلالی که در بالا دیدیم، نتیجه می‌گیریم که $\{b_1, \cdots, b_q, a_i\}$ پایه‌ای است برای V و قضیه در این حالت نیز ثابت شده است.

اکنون گیریم $n - q > 1$، به‌استقراء می‌توان فرض کرد که وقتی تفاضل بعد V و شمارهٔ بردارهای $\{b_1, \cdots, b_q\}$ از $n - q$ کوچکتر است قضیه برقرار است. چون $n - q > 1$، برای یک مقدار i، $a_i \notin S(b_1, \cdots, b_q)$. همانند پیش $\{b_1, \cdots, b_q, a_i\}$ یک مجموعهٔ نابسته خطی از $q + 1$ بردار است. چون داریم $n - (q + 1) = n - q - 1$، با استفاده از فرض استقراء می‌توان برای یافتن یک پایه، $\{b_1, \cdots, b_q, a_i\}$ را با بردارهای دیگری کامل کرد. به‌این ترتیب اثبات قضیه کامل می‌گردد.

اکنون روی زیر فضاهای فضای برداری V عملهایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که بر اثر آنها زیرفضاهای دیگری پدید می‌آیند. اگر S و T دو زیرفضای برداری فضای V باشند، از تعریف فضای برداری بی‌درنگ نتیجه می‌شود که $S \cup T$ همیشه زیرفضای برداری نیست. به‌عنوان مثال، اگر S و T دو زیرفضای R_2 به‌صورتهای

$$S = \{< 0, \beta >, \beta \in R\}, \quad T = \{< \alpha, 0 >, \alpha \in R\}$$

باشند، آنگاه $S \cup T$ یک زیرفضای برداری R_2 نیست. با توجه به‌این مثال، برای دو زیرفضای S و T از V، مجموعهٔ زیر را تعریف می‌کنیم:

$$S + T = \{s + t; s \in S, t \in T\}$$

به‌آسانی می‌توان نشان داد که $S + T$ یک زیرفضای برداری است و درواقع کوچکترین زیرفضایی است که $S \cup T$ را در بردارد. از سوی دیگر اگر S و T دو زیرفضا باشند $S \cap T$ همیشه یک

زیرفضاست. اکنون می‌توان این پرسش را پیش کشید که اگر بعدهای S و T در دست باشند بعدهای $S\cap T$ و $S+T$ چه عددهایی می‌توانند باشند؟ پاسخ این پرسش با قضیهٔ زیر که نتیجهٔ روش شمارش در مورد مجموعه‌های متناهی است داده می‌شود: اگر A و B دو مجموعهٔ متناهی باشند، آنگاه شمارهٔ عناصر $A\cup B$ برابر است با مجموع شماره‌های عناصر A و B منهای شمارهٔ عناصر $A\cap B$.

(۵.۷) قضیه. گیریم S و T دو زیرفضای متناهی-مولّد از فضای V باشند. در این‌صورت $S\cap T$ و $S+T$ زیرفضاهایی هستند متناهی-مولّد و داریم:

$$\dim(S+T)+\dim(S\cap T)=\dim S+\dim T$$

برهان. اثبات این قضیه را به‌طور خلاصه بیان می‌کنیم و جزئیات آن را به خواننده واگذار می‌کنیم. گرچه واقعاً لازم نیست، ولی نخست فرض می‌کنیم که $S\cap T=\{0\}$. گیریم $\{s_1,\cdots,s_d\}$ پایه‌ای برای S و $\{t_1,\cdots,t_e\}$ پایه‌ای برای T باشد. در این‌صورت به‌آسانی دیده می‌شود که بردارهای s_1، ...، s_d، t_1، ...، t_e فضای $S+T$ را پدید می‌آورند، و در این حالت اگر ثابت کنیم که این بردارها نابسته خطی هستند، (۵.۷) ثابت می‌شود. فرض کنیم:

$$\alpha_1s_1+\cdots+\alpha_ds_d+\beta_1t_1+\cdots+\beta_et_e=0$$

در این‌صورت:

$$\alpha_1s_1+\cdots+\alpha_ds_d=-\beta_1t_1-\cdots-\beta_et_e\in S\cap T=\{0\}$$

چون sها و tها نابسته خطی هستند. پس:

$$\alpha_1=\cdots=\alpha_d=0,\beta_1=\cdots=\beta_e=0$$

اکنون فرض می‌کنیم $S\cap T\neq\{0\}$. در این‌صورت $S\cap T$ متناهی-مولّد است (چرا؟). بنابر قضیهٔ (۲.۷)، $S\cap T$ دارای پایه‌ای است مانند $\{u_1,\cdots,u_c\}$ که $c=\dim S\cap T$. بنابر قضیهٔ (۴.۷) می‌توان مجموعهٔ بردارهای $\{v_1,\cdots,v_d\}$ و $\{w_1,\cdots,w_e\}$ را چنان یافت که:

$$\{u_1,\cdots,u_c,v_1,\cdots,v_d\}\text{پایه‌ای برای } S$$
$$\{u_1,\cdots,u_c,w_1,\cdots,w_e\}\text{پایه‌ای برای } T$$

باشد. در این‌صورت $S+T=S(u_1,\cdots,u_c,v_1,\cdots,v_d,w_1,\cdots,w_e)$ و اگر نشان دهیم که این بردارها نابسته خطی هستند، قضیه ثابت می‌شود.

فرض می‌کنیم:

$$\xi_۱ u_۱ + \cdots + \xi_c u_c + \lambda_۱ v_۱ + \cdots + \lambda_d v_d + \mu_۱ w_۱ + \cdots + \mu_e w_e = ۰ \qquad (۶.۷)$$

در این‌صورت:

$$\lambda_۱ v_۱ + \cdots + \lambda_d v_d = -(\sum \xi_i u_i) - (\sum \mu_i w_i) \in S \cap T$$

بنابراین عناصر $\zeta_۱$، ... ، ζ_c متعلق به F وجود دارند به‌گونه‌ای که:

$$\lambda_۱ v_۱ + \cdots + \lambda_d v_d = \zeta_۱ u_۱ + \cdots + \zeta_c u_c$$

چون $\{v_۱, \cdots, v_d, u_۱, \cdots, u_c\}$ نابسته خطی هستند، پس $\lambda_۱ = \cdots = \lambda_d = ۰$. در این‌صورت بنابر (۶.۷) داریم $\xi_۱ = \cdots = \xi_c = \mu_۱ = \cdots = \mu_e = ۰$ و اثبات کامل می‌گردد.

تمرینها

۱.تعیین کنید که آیا $< ۱, ۱, ۱ >$ به زیرفضای $R_۳$ پدید آمده از بردارهای $< ۱, ۳, ۴ >$، $< ۱, ۰, ۴ >$، $< ۳, ۱, ۲ >$ تعلق دارد یا نه؟. استدلال کنید.

۲.تعیین کنید که آیا $< ۲, ۰, -۴, -۲ >$ به زیرفضای $R_۴$ پدید آمده از بردارهای $< ۱, -۱, ۲, ۰ >$، $< ۰, ۱, -۱, ۱ >$، $< ۲, -۰, ۱, -۲ >$ تعلق دارد یا نه؟

۳.ثابت کنید که هر زیرفضای برداری S از زیرفضای برداری T از V که با عدهٔ متناهی از بردارهای T تولید می‌شود یک زیرفضای V است که با عدهٔ متناهی از بردارهای آن تولید می‌گردد و $\dim S \leq \dim T$، برابری هنگامی برقرار است که $S = T$.

۴.گیریم S و T دو زیرفضای دو بعدی $R_۳$ باشند، ثابت کنید $\dim(S \cap T) \geq ۱$

۵.گیریم:

$$a_۱ =< ۲, ۱, ۰, -۱ > \quad a_۳ =< ۱, -۳, ۲, ۰ > \quad a_۵ =< -۲, ۰, ۶, ۱ >$$
$$a_۲ =< ۴, ۸, -۴, -۳ > \quad a_۴ =< ۱, ۱۰, -۶, -۲ > \quad a_۶ =< ۳, -۱, ۲, ۴ >$$

و

$$S = S(a_۱, a_۲, a_۳, a_۴), \quad T = S(a_۴, a_۵, a_۶)$$

مطلوب است تعیین $\dim S$، $\dim T$ و $\dim(S+T)$ و تعیین $\dim(S \cap T)$ بااستفاده از قضیهٔ (۵.۷).

۶.گیریم F هیأتی دو عنصری و V روی F یک فضای برداری دوبعدی باشد. چند بردار در V وجود دارد؟ V چند زیرفضای یک بعدی دارد؟ V چند پایهٔ متمایز دارد؟

۸. دستگاههای معادله‌های خطی

بقیهٔ این فصل به‌مسألهٔ حل دستگاههای معادله‌های خطی با ضریبهای حقیقی اختصاص دارد. همان‌گونه که پیش از این نیز خاطرنشان ساختیم این مسأله یکی از مایه‌های جبرخطی است.

یک دستگاه m معادلهٔ n مجهولی خطی را به‌شکل زیر نشان می‌دهیم:

$$\begin{array}{c} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{array} \qquad (۱.۸)$$

که در آن α_{ij} و β_i عددهای حقیقی مشخص و x_1، ... ، x_n مجهول‌اند، زیرنمایه‌ها به‌گونه‌ای گزیده شده‌اند که به‌ازای $1 \leq i \leq m$ معادلهٔ iام برابر است با:

$$\alpha_{i1}x_1 + \cdots + \alpha_{in}x_n = \beta_i$$

که در آن نخستین زیرنمایهٔ i در α_{ij} نمایانگر معادله‌ای است که α_{ij} در آن ظاهر می‌شود و زیرنمایهٔ دوم j نمایانگر مجهول x_j است که α_{ij} ضریب آن است. به‌این ترتیب ،برای‌مثال، α_{21} ضریب x_1 در معادلهٔ دوم است.

ماتریسی که سطرهای آن بردارهای:

$$r_1 =< \alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1n} >, \cdots, r_m =< \alpha_{m1}, \cdots, \alpha_{mn} >$$

می‌باشند، ماتریس ضریبهای دستگاه (۱.۸) نام دارد. (باید یادآور شد که در بخش ۶ ماتریسها اندکی متفاوت با آن عرضه شده است.) همانند بخش ۶ ماتریسی را که سطرهای آن r_1،$\cdots$،r_m است به‌شکل زیر نشان می‌دهیم:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

درایه‌های ماتریس یعنی $\{\alpha_{ij}\}$ طوری مرتب شده‌اند که α_{ij} درایهٔ jام از سطر iام باشد. به‌عنوان مثال α_{13} درایهٔ سوم از سطر نخست، α_{21} درایهٔ نخست از سطر دوم است. اغلب ماتریس را به‌شکل فشرده‌تری با $\mathbf{A}$ یا (α_{ij}) نشان می‌دهیم.

گرچه ماتریسها برحسب سطرهایشان تعریف می‌شوند، بنابر قرارداد به‌هر ماتریس $m \times n$ می‌توان دو مجموعه از بردارها را به‌ترتیب در R_m و در R_n مربوط‌کرد یعنی بردارهای سطری:

$$\{r_۱, \cdots, r_m\} \subset R_n$$

که در آن بردار سطری iام برابر است با:

$$r_i =< \alpha_{i۱}, \cdots, \alpha_{in} >, \quad ۱ \leq i \leq m$$

و بردارهای ستونی:

$$\{c_۱, \cdots, c_n\} \subset R_m$$

که در آن بردار ستونی jام برابر است با:

$$c_j =< \alpha_{۱j}, \alpha_{۲j}, \cdots, \alpha_{mj} >$$

یادآور می‌شویم که بردارهای ستونی و سطری نوع خاصی از ماتریسها هستند و اغلب می‌نویسیم:

$$\mathbf{r}_i = (\alpha_{i۱}, \cdots, \alpha_{in}), \quad \mathbf{c}_j = \begin{pmatrix} \alpha_{۱j} \\ \alpha_{۲j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}$$

زیرفضای سطری یک ماتریس $m \times n$، (α_{ij})، عبارت است از زیرفضای $S(r_۱, \cdots, r_m)$ از R_n، زیرفضای ستونی آن عبارت است از زیرفضای $S(c_۱, \cdots, c_n)$ از R_m.

هر جواب دستگاه (۱.۸) عبارت است از یک nتایی $\{\lambda_۱, \cdots, \lambda_n\}$ از اعداد حقیقی به‌طوری‌که:

$$\alpha_{۱۱}\lambda_۱ + \cdots + \alpha_{۱n}\lambda_n = \beta_۱$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_{m۱}\lambda_۱ + \cdots + \alpha_{mn}\lambda_n = \beta_m$$

به‌گفته دیگر عددهای $\{\lambda_i\}$ در این جواب در معادله‌های (۱.۸) صدق می‌کنند. می‌توان هر جواب را با یک بردار R_n یکی گرفت و آن را یک بردار جواب (۱.۸) نامید. با توجه به‌تعریف بردارهای ستونی، دیده می‌شود که $x =< \lambda_۱, \cdots, \lambda_n >$ یک جواب دستگاه (۱.۸) است اگر و تنها اگر:

$$\lambda_۱ c_۱ + \lambda_۲ c_۲ + \cdots + \lambda_n c_n = b \qquad (۲.۸)$$

که در آن $b = < \beta_۱, \cdots, \beta_n >$. به‌این ترتیب می‌توان دستگاه معادله‌های (۱.۸) را به‌طور فشرده‌تر با نماد زیر نشان داد:

$$x_۱ c_۱ + \cdots + x_n c_n = b \qquad (۳.۸)$$

هر دستگاه معادله‌های همگن یا یک دستگاه همگن، دستگاهی است مانند (۳.۸) که در آن $b = ۰$. اگر در (۳.۸)، $b \neq ۰$، آن را دستگاه ناهمگن می‌نامند. بردار صفر $< ۰, \cdots, ۰ >$ همواره یک جواب دستگاه همگن:

$$x_۱ c_۱ + \cdots + x_n c_n = ۰ \qquad (۴.۸)$$

است. این جواب را جواب بدیهی و هر جواب ناصفر را جواب نابدیهی می‌گویند. برای روشن‌شدن این مطالب، دستگاه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} ۳x_۱ - x_۲ + x_۳ &= ۱ \\ x_۱ + x_۲ - x_۳ &= ۲ \end{aligned}$$

ماتریس دستگاه برابر است با

$$\begin{pmatrix} ۳ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ \end{pmatrix}$$

بردارهای سطری عبارت‌اند از:

$$r_۱ = < ۳, -۱, ۱ >, r_۲ = < ۱, ۱, -۱ >$$

و بردارهای ستونی عبارت‌اند از:

$$c_۱ = < ۳, ۱ >, c_۲ = < -۱, ۱ >, c_۳ = < ۱, -۱ >$$

چنان‌که از جایگذاری دیده می‌شود $< \frac{۳}{۴}, ۰, -\frac{۵}{۴} >$ یک بردار جواب است.

$$\begin{aligned} ۳\left(\frac{۳}{۴}\right) - ۰ - \frac{۵}{۴} &= ۱ \\ \frac{۳}{۴} + ۰ + \frac{۵}{۴} &= ۲ \end{aligned}$$

این دستگاه برحسب بردارهای ستونی چنین نوشته می‌شود:

$$x_۱ c_۱ + x_۲ c_۲ + x_۳ c_۳ = b$$

که در آن $b=<۱,۲>$ و بردار جواب یعنی $<\frac{۳}{۴},۰,-\frac{۵}{۴}>$ به‌شکل زیر بیان می‌شود:

$$b=\frac{۳}{۴}c_۱-\frac{۵}{۴}c_۳$$

ممکن است خواننده در این لحظه، پیش از مطالعهٔ برهان قضیهٔ زیر، بخواهد که مثالهای آخر این بخش را بررسی کند. در قضیه‌های زیر منظور از جواب یک دستگاه خاص تشریح می‌گردد و در مثالهای بعدی روش یافتن آنها نشان داده می‌شود.

(۵.۸) قضیه. برای اینکه دستگاه $x_۱c_۱+\cdots+x_nc_n=b$ دارای جواب باشد لازم و کافی است که شرطهای زیر برقرار باشند:

۱. b به‌فضای ستونی $S(c_۱,\cdots,c_n)$ متعلق باشد.

۲. $\dim S(c_۱,\cdots,c_n)=\dim S(c_۱,\cdots,c_n,b)$

برهان. از (۲.۸) فوراً نتیجه می‌شود که نخستین حکم هم‌ارز وجود یک جواب است. برای اثبات اینکه شرط (۲) هم‌ارز با شرط (۱) است، به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم. اگر $b\in S(c_۱,\cdots,c_n)$، آنگاه روشن است که $S(c_۱,\cdots,c_n,b)=S(c_۱,\cdots,c_n)$ و شرط (۲) برقرار است. به‌وارون اگر شرط (۲) برقرار باشد، در این‌صورت $b\in S(c_۱,\cdots,c_n)$، وگرنه باید b و پایهٔ $S(c_۱,\cdots,c_n)$ یک مجموعه از $\dim S(c_۱,\cdots,c_n)+۱$ بردار نابسته خطی تشکیل دهند، که مخالف قضیهٔ (۱.۵) است. به‌این ترتیب اثبات قضیه پایان می‌یابد.

با استفاده از تعریفهای زیر می‌توان قضیهٔ (۵.۸) را به‌روش مناسبتری بیان داشت.

(۶.۸) تعریف. گیریم (α_{ij}) یک ماتریس $m\times n$ با بردارهای ستونی $\{c_۱,\cdots,c_n\}$ باشد. رتبهٔ این ماتریس، بنابر تعریف برابر است با بعد فضای ستونی $S(c_۱,\cdots,c_n)$.

(۷.۸) تعریف. اگر $x_۱c_۱+\cdots+x_nc_n=b$ دستگاه ناهمگنی باشد که ماتریس ضریبهای آن دارای بردارهای ستونی $c_۱$، ... ، c_n است، آنگاه ماتریس $m\times(n+۱)$ بعدی را که بردارهای ستونی آن $\{c_۱,\cdots,c_n,b\}$ است، ماتریس فزودهٔ دستگاه می‌نامند.

اثبات قضیهٔ زیر با توجه به‌تعریفها و قضیهٔ (۵.۸) آسان است.

(۸.۸) قضیه. یک دستگاه ناهمگن دارای یک جواب است، اگر و تنها اگر رتبهٔ ماتریس ضرایب آن با رتبهٔ ماتریس فزوده برابر باشد.

اکنون به‌طور نظری مسألهٔ جواب داشتن یا نداشتن یک دستگاه ناهمگن را معیّن کرده‌ایم. در آخر بخش‌پیش روشی برای یافتن ریشه‌های یک دستگاه در بعضی حالتهای ویژه آوردیم. اگر دستگاهی دارای جواب باشد، باید بتوانیم همهٔ جوابهای آن را بیابیم. روش یافتن جوابهای یک دستگاه در قضیهٔ زیر بیان می‌شود.

(۹.۸) قضیه. فرض کنیم که دستگاه ناهمگن:

$$x_1c_1 + \cdots + x_nc_n = b \qquad (10.8)$$

دارای جوابی مانند x_0 است، در این‌صورت اگر x یک جواب دلخواه دستگاه همگن

$$x_1c_1 + \cdots + x_nc_n = 0 \qquad (11.8)$$

باشد، آنگاه $x + x_0$ جواب (۱۰.۸) است و هر جواب (۱۰.۸) را می‌توان به‌این شکل نوشت.

برهان. نخست فرض کنیم که $x =< \alpha_1, \cdots, \alpha_n >$ یک جواب دستگاه همگن و $x_0 =< \alpha_1^{(0)}, \cdots, \alpha_n^{(0)} >$ یک جواب (۱۰.۸) باشد. در این صورت داریم:

$$\alpha_1^{(0)}c_1 + \cdots + \alpha_n^{(0)}c_n = b \qquad (12.8)$$

و

$$\alpha_1c_1 + \cdots + \alpha_nc_n = 0$$

از جمع این دو معادله به‌دست می‌آوریم:

$$(\alpha_1^{(0)} + \alpha_1)c_1 + \cdots + (\alpha_n^{(0)} + \alpha_n)c_n = b$$

که یعنی $x + x_0$ یک جواب (۱۰.۸) است.

اکنون گیریم $y =< \beta_1, \cdots, \beta_n >$ یک جواب دلخواه (۱۰.۸) باشد، پس داریم:

$$\beta_1c_1 + \cdots + \beta_nc_n = b \qquad (13.8)$$

اگر (۱۲.۸) را از (۱۳.۸) کم کنیم، به‌دست می‌آوریم:

$$(\beta_1 - \alpha_1^{(0)})c_1 + \cdots + (\beta_n - \alpha_n^{(0)})c_n = 0$$

که بیان می‌کند $u = y - x_0$ یک جواب معادلهٔ همگن است و همان‌گونه که می‌خواستیم داریم:

$$y = x_0 + u$$

و به‌این ترتیب اثبات قضیه کامل می‌گردد.

بنابراین مسألهٔ یافتن همهٔ جوابهای یک دستگاه ناهمگن منجر به یافتن یک جواب دستگاه ناهمگن و حل یک دستگاه همگن می‌گردد. در بخش بعد روش حل یک دستگاه همگن را خواهیم دید.

در خاتمهٔ این بخش چند مثال در مورد یافتن جوابهای دستگاههای ناهمگن، در صورت وجود، می‌آوریم. نخست مثالی را در نظر می‌گیریم که در بخش ۱ دیدیم.

مثال الف. نشان دهید که دستگاه زیر جواب دارد و آن را بیابید:

$$x_۱ + ۲x_۲ - ۳x_۳ + x_۴ = ۱$$
$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۰$$

ماتریس دستگاه برابر است با:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & -۳ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

و ماتریس فزوده برابر است با:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & -۳ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \end{pmatrix} \qquad (۱۴.۸)$$

اگر دستگاه را به‌شکل (۳.۸) بنویسیم، داریم:

$$x_۱c_۱ + x_۲c_۲ + x_۳c_۳ + x_۴c_۴ = b$$

که در آن:

$$c_۱ =< ۱, ۱ >, c_۲ =< ۲, ۱ >, c_۳ = < -۳, ۱ >,$$
$$c_۴ =< ۱, ۱ >, b =< ۱, ۰ >$$

رتبهٔ این ماتریس برابر است با:

$$\dim S(c_۱, c_۲, c_۳, c_۴)$$

به‌آسانی دیده می‌شود که این مقدار برابر ۲ است، زیرا همهٔ c_iها به $R_۲$ تعلق دارند. اکنون اگر ماتریس:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \\ -۳ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

را به فرم پلّه‌یی درآوریم داریم:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

پس $S(c_۱, c_۲, c_۳, c_۴) = R_۲$، از این‌رو $b \in S(c_۱, c_۲, c_۳, c_۴)$ پس بنابر قضیهٔ (۵.۸) یک جواب وجود دارد.

برای یافتن جواب بهتر است که روی سطرهای ماتریس فزوده یعنی (۱۴.۸) کار کنیم. نشان می‌دهیم که اگر ماتریس ۲×۵:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \alpha_{۱۱} & \alpha_{۱۲} & \cdots & \alpha_{۱۵} \\ \alpha_{۲۱} & \alpha_{۲۲} & \cdots & \alpha_{۲۵} \end{pmatrix}$$

هم‌ارز سطری $\mathbf{A}$ باشد، در این‌صورت جوابهای دستگاه:

$$\alpha_{۱۱}x_۱ + \alpha_{۱۲}x_۲ + \alpha_{۱۳}x_۳ + \alpha_{۱۴}x_۴ = \alpha_{۱۵}$$
$$\alpha_{۲۱}x_۱ + \alpha_{۲۲}x_۲ + \alpha_{۲۳}x_۳ + \alpha_{۲۴}x_۴ = \alpha_{۲۵}$$

وابسته به‌ماتریس جدید $\mathbf{A}'$ دقیقاً همان جوابهای دستگاه اصلی است و در این‌صورت این دو دستگاه را هم‌ارز می‌گوییم. کافی است که این حکم را تنها در حالتی که $\mathbf{A}'$ از $\mathbf{A}$ با یک عمل مقدماتی سطری به‌دست می‌آید، ثابت کنیم. برای یک عمل مقدماتی سطری نوع I (یعنی تعویض دو سطر) یا نوع III (ضرب یک سطر در یک ثابت ناصفر) نتیجه روشن است. برای تشریح یک عمل مقدماتی سطری از نوع II، نخست معادله‌های اصلی را به‌شکل زیر می‌نویسیم:

$$L_۱ = ۰ \quad , \quad L_۲ = ۰$$

که در آن:

$$L_۱ = x_۱ + ۲x_۲ - ۳x_۳ + x_۴ - ۱ \;, \;\; L_۲ = x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴$$

باید ثابت کنیم که اگر $L'_۱ = L_۱ + \lambda L_۲$ و $L'_۲ = L_۲$، آنگاه جوابهای $L_۱ = ۰$ و $L_۲ = ۰$، همان جوابهای:

$$L'_۱ = L_۱ + \lambda L_۲ = ۰ \;, \;\; L'_۲ = L_۲ = ۰$$

هستند، روشن است که از $L_۱ = ۰$ و $L_۲ = ۰$ نتیجه می‌شود $L'_۱ = ۰$ و $L'_۲ = ۰$. از سوی دیگر اگر $L'_۱ = ۰$ و $L'_۲ = ۰$ آنگاه $L_۲ = ۰$ و $L_۱ + \lambda L_۲ = ۰$ پس، $L_۱ = ۰$، به‌این ترتیب اثبات کامل می‌گردد.

اکنون می‌توانیم دستگاه اصلی را حل کنیم. سعی ما این است که عملهای مقدماتی سطری ماتریس فزوده را (همانند بخش ۶) به‌شکل پلّه‌یی بنویسیم. سپس درصورت امکان آخرین معادلهٔ مربوط به آخرین سطر ناصفر ماتریس اخیر را نسبت به‌متغیرهایی که ضمن پلّه‌یی کردن ماتریس فزوده حذف نشده‌اند حل می‌کنیم. در این‌صورت مقدارهای دیگر به‌سبب شکل پلّه‌یی ماتریس به‌آسانی پیدا می‌شوند. در مسألهٔ موردنظر، به‌جای معادله‌های $L_۱ = ۰$ و $L_۲ = ۰$ معادله‌های $L_۱ = ۰$ و $L_۲ - L_۱ = ۰$ را قرار می‌دهیم. معادله‌های اخیر عبارت‌اند از:

$$x_۱ + ۲x_۲ - ۳x_۳ + x_۴ = ۱$$
$$-x_۲ + ۴x_۳ = -۱$$

این دستگاه را با پلّه‌یی کردن ماتریس آن نسبت به $x_۲$، $x_۳$ و $x_۴$، که ضمن عمل حذف نمی‌شوند، حل می‌کنیم. به‌عنوان مثال داریم $x_۲ = ۱$، $x_۳ = x_۴ = ۰$ که با جایگذاری در معادلهٔ نخست داریم، $x_۱ + ۲ = ۱$، $x_۱ = -۱$. از آنچه گذشت نتیجه می‌شود که:

$$< -۱, ۱, ۰, ۰ >$$

یک جواب دستگاه اصلی است.

در مورد این روش محاسبه چند نکته را باید خاطرنشان کرد:

۱. انجام عملهای مقدماتی سطری روی ماتریس فزوده، روشی است ساده که بررسی درستی آن در هر مرحله ساده است. این روش در حل مسأله‌های مفصلتر که با ماشین محاسبه انجام می‌شود به‌کار می‌رود.

۲. می‌توان با جایگذاری جواب به‌دست آمده در دستگاه اصلی درستی آن را آزمود.

۳. از این روش می‌توان در مورد هر دستگاهی استفاده کرد. این روش نه‌تنها وجود یا عدم وجود جواب را نشان می‌دهد بلکه در صورت وجود جواب، آن را به‌دست می‌دهد.

در خاتمهٔ این بخش دو مثال دیگر می‌آوریم.

مثال ب. حلپذیری دستگاه زیر را بیازمایید و در صورت حلپذیربودن جواب آن را بیابید:

$$-۳x_۱ + x_۲ + ۴x_۳ = -۵$$
$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۲$$
$$-۲x_۱ + x_۳ = -۳$$
$$x_۱ + x_۲ - ۲x_۳ = ۵$$

ماتریس فزوده را به‌پلّه‌یی تبدیل می‌کنیم، داریم:

$$\begin{pmatrix} -۳ & ۱ & ۴ & -۵ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۲ \\ -۲ & ۰ & ۱ & -۳ \\ ۱ & ۱ & -۲ & ۵ \end{pmatrix} \overset{\mathrm{I}}{\sim} \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۲ \\ -۳ & ۱ & ۴ & -۵ \\ -۲ & ۰ & ۱ & -۳ \\ ۱ & ۱ & -۲ & ۵ \end{pmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{II}}{\sim} \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۴ & ۷ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۰ & -۳ & ۳ \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۲ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & -۳ & ۳ \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۲ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

دستگاه معادله‌های مربوط به ماتریس اخیر عبارت است از:

$$\begin{aligned} x_۱ + x_۲ + x_۳ &= ۲ \\ ۲x_۲ + ۳x_۳ &= ۱ \\ x_۳ &= -۱ \end{aligned}$$

که پس از حل جواب زیر به‌دست می‌آید:

$$< ۱, ۲, -۱ >$$

بنابر بحثی که در مثال (الف) انجام شد، این جواب یک جواب دستگاه اصلی نیز هست.

مثال پ. حلپذیری دستگاه زیر را بیازمایید و در صورت حلپذیربودن جواب آن را بیابید:

$$\begin{aligned} -۳x_۱ + x_۲ + ۴x_۳ &= ۱ \\ x_۱ + x_۲ + x_۳ &= ۰ \\ -۲x_۱ + x_۳ &= -۱ \\ x_۱ + x_۲ - ۲x_۳ &= ۰ \end{aligned}$$

اگر همانند مثال (ب) عمل کنیم، داریم:

$$\begin{pmatrix} -۳ & ۱ & ۴ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ & -۲ & ۰ \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ -۳ & ۱ & ۴ & ۱ \\ -۲ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ & -۲ & ۰ \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۷ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۳ & -۱ \\ ۰ & ۰ & -۳ & ۰ \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۳ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & -۳ & ۰ \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۳ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۹ \end{pmatrix}$$

این بار دستگاه هم‌ارز عبارت است از:

$$\begin{aligned} x_۱ + x_۲ + x_۳ &= ۰ \\ ۲x_۲ + ۳x_۳ &= -۱ \\ x_۳ &= ۳ \\ ۰ \cdot x_۳ &= ۹ \end{aligned}$$

روشن است که دستگاه جواب ندارد.

تمرینها

۱.حلپذیری دستگاههای زیر را بیازمایید و در صورت حلپذیربودن جوابهای آنها را بیابید:

الف)
$$\begin{aligned} x_۱ + x_۲ + x_۳ &= ۸ \\ x_۱ + x_۲ + x_۴ &= ۱ \\ x_۱ + x_۳ + x_۴ &= ۱۴ \\ x_۲ + x_۳ + x_۴ &= ۱۴ \end{aligned}$$

ب)
$$\begin{aligned} x_۱ + x_۲ - x_۳ &= ۳ \\ x_۱ - ۳x_۲ + ۲x_۳ &= ۱ \\ ۲x_۱ - ۲x_۲ + x_۳ &= ۴ \end{aligned}$$

پ) $x_۱ + x_۲ - ۵x_۳ = -۱$

ت)
$$\begin{aligned} ۲x_۱ + x_۲ + ۳x_۳ - x_۴ &= ۱ \\ ۳x_۱ + x_۲ - ۲x_۳ + x_۴ &= ۰ \\ ۲x_۱ + x_۲ - x_۳ + ۲x_۴ &= -۱ \end{aligned}$$

ث)
$$\begin{aligned} -x_۱ + x_۲ + x_۴ &= ۰ \\ x_۲ + x_۳ &= ۱ \end{aligned}$$

ج)
$$\begin{aligned} x_۱ + ۲x_۲ + ۴x_۳ &= ۱ \\ ۲x_۱ + x_۲ + ۵x_۳ &= ۰ \\ ۳x_۱ - x_۲ + ۵x_۳ &= ۰ \end{aligned}$$

چ)
$$\begin{aligned} ۳x_۱ + ۴x_۲ &= -۱ \\ -x_۱ - x_۲ &= ۱ \\ x_۱ - ۲x_۲ &= ۰ \\ ۲x_۱ + ۳x_۲ &= ۰ \end{aligned}$$

ح)
$$\begin{aligned} ۲x_۱ + x_۲ - x_۳ &= ۰ \\ x_۱ \qquad - x_۳ &= ۰ \\ x_۱ + x_۲ + x_۳ &= ۱ \end{aligned}$$

خ)
$$\begin{aligned} x_۱ + ۴x_۲ + ۳x_۳ &= ۱ \\ ۳x_۱ \qquad + x_۳ &= ۱ \\ ۴x_۱ + x_۲ + ۲x_۳ &= ۱ \end{aligned}$$

۲.برای چه مقدارهای α دستگاه زیر جواب دارد؟

$$\begin{aligned} ۳x_۱ - x_۲ + \alpha x_۳ &= ۱ \\ ۳x_۱ - x_۲ + x_۳ &= ۵ \end{aligned}$$

۳.ثابت کنید یک دستگاه m معادلهٔ nمجهولی $(n > m)$ همواره دارای جواب نابدیهی است.

۴.ثابت کنید شرط لازم و کافی برای اینکه دستگاه معادله‌های همگن nمجهولی $x_۱c_۱ + \cdots + x_nc_n = ۰$ دارای جواب ناصفر باشد این است که رتبهٔ ماتریس ضریبها کمتر از n باشد.

۹. دستگاههای معادله‌های همگن

همان‌گونه که در بخشهای قبلی این فصل دیدیم، این بخش را با کلیّاتی دربارهٔ جوابهای دستگاه معادله‌های همگن شروع می‌کنیم. هدف این است که از یک‌سو وسیله‌ای برای بحث دقیق دربارهٔ مسأله‌ها پیدا کنیم، و از سوی دیگر قضیه‌هایی بیابیم که به‌وسیلهٔ آنها بتوانیم پیش از اینکه درگیر محاسبات عددی شویم چگونگی جوابهای مسائل را پیش‌بینی کنیم. بعداً در این بخش روش محاسبهٔ کارایی جهت حل بعضی دستگاههای ویژه ارائه خواهیم داد.

(۱.۹) **قضیه.** مجموعهٔ بردارهای جواب یک دستگاه همگن $x_۱c_۱ + \cdots + x_nc_n = ۰$، که آن را با S نشان می‌دهیم، یک زیرفضای R_n است.

برهان. گیریم $a =< \lambda_1, \cdots, \lambda_n >$ و $b =< \mu_1, \cdots, \mu_n >$ به S تعلق دارند، در این‌صورت داریم:

$$\lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_n c_n = 0, \quad \mu_1 c_1 + \cdots + \mu_n c_n = 0$$

از جمع این دو معادله نتیجه می‌شود:

$$(\lambda_1 + \mu_1)c_1 + \cdots + (\lambda_n + \mu_n)c_n = 0$$

که نشان می‌دهد $a + b \in S$. همچنین اگر $\lambda \in R$ آنگاه:

$$\lambda(\lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_n c_n) = (\lambda\lambda_1)c_1 + \cdots + (\lambda\lambda_n)c_n = 0$$

پس $\lambda a \in S$، به‌این ترتیب اثبات کامل می‌گردد.

از این قضیه و قضیه‌های بخشهای پیشین نتیجه می‌شود که وقتی برای فضای جواب، یعنی مجموعهٔ جوابهای دستگاه، پایه‌ای بیابیم، آنگاه همهٔ جوابهای یک دستگاه همگن به‌دست می‌آیند.

(۲.۹) قضیه. گیریم:

$$\begin{array}{c} \alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = 0 \end{array}$$

یک دستگاه همگن از m معادلهٔ n مجهولی باشد که بردارهای ستونی آن یعنی c_1، ... ، c_n طوری مرتب شده‌اند که به‌ازای یک عدد r، $\{c_1, \cdots, c_r\}$ پایه‌ای برای زیرفضای $S(c_1, \cdots, c_n)$ باشند. در این‌صورت به‌ازای هر i، که در $r + 1 \leq i \leq n$ صدق می‌کند یک رابطهٔ وابستگی خطی:

$$\lambda_1^{(i)} c_1 + \cdots + \lambda_r^{(i)} c_r - c_i = 0, \quad \lambda_j^{(i)} \in R$$

وجود دارد، و به‌ازای $r + 1 \leq i \leq n$:

$$u_i =< \underbrace{\lambda_1^{(i)}, \cdots, \lambda_r^{(i)}, 0, \cdots, 0, \quad -1}_{i}, 0, \cdots, 0 >$$

(باید توجه داشت که عدد ۱− در u_i، در جای iام قرار دارد) یک جواب دستگاه و $\{u_{r+1}, \cdots, u_n\}$ پایه‌ای برای فضای جواب دستگاه است.

برهان. بنابر قضیهٔ (۳.۷) می‌توان از میان خود بردارهای c_1، ... ، c_n پایه‌ای برای $S(c_1, \cdots, c_n)$ برگزید. ترتیب زیرنمایه‌ها را طوری تغییر می‌دهیم که این بردارهای پایه مواضع ۱، ... ،rام را اشغال کنند و همین تعویض را نیز در ترتیب مؤلفه‌های بردارهای جواب می‌دهیم.
چون $\{c_1, \cdots, c_r\}$ پایه‌ای است برای $S(c_1, \cdots, c_n)$، هر بردار c_i که در آن $r+1 \leq i \leq n$، یک ترکیب خطی از بردارهای پایه است، و رابطهٔ وابستگی خطی همان‌گونه که در قضیه گفته شد چنین نوشته می‌شود:

$$\lambda_1^{(i)} c_1 + \cdots + \lambda_r^{(i)} c_r - c_i = 0, \quad \lambda_j^{(i)} \in R, \quad r+1 \leq i \leq n$$

بنابراین بردارهای:

$$u_i =< \lambda_1^{(i)}, \cdots, \lambda_r^{(i)}, \cdots, -1, \cdots, 0 >, \quad r+1 \leq i \leq n$$

که در آنها ۱− در جای iام بردار u_i قرار دارد جوابهای دستگاه‌اند. اکنون باید ثابت کنیم که $\{u_i\}$ به‌طور خطی نابسته‌اند و فضای جواب را پدید می‌آورند.
برای اثبات نابستگی خطی آنها، فرض می‌کنیم که یک رابطهٔ خطی بین آنها برقرار است:

$$\mu_{r+1} u_{r+1} + \cdots + \mu_n u_n = 0, \quad \mu_i \in R \qquad (۳.۹)$$

طرف چپ برداری است متعلق به R_n که همهٔ مؤلفه‌هایش صفرند. برای هر $r+1 \leq i \leq n$ مؤلفهٔ iام (۳.۹) برابر $-\mu_i$ است (چرا؟)، پس نتیجه می‌گیریم که $\mu_{r+1} = \cdots = \mu_n = 0$.
اکنون گیریم $x =< \alpha_1, \cdots, \alpha_n >$ یک جواب دلخواه دستگاه اصلی است. بنابر تعریف u_{r+1}، ... ، u_n، داریم:

$$x + \sum_{k=r+1}^{m} \alpha_k u_k =< \xi_1, \cdots, \xi_r, 0, \cdots, 0 >$$

که در آن عناصر ξ_1، ... ، ξ_r به R تعلق دارند، چون مجموعهٔ جوابها یک زیرفضای R_n است، پس بردار $y =< \xi_1, \cdots, \xi_r, 0, \cdots, 0 >$ یک جواب دستگاه اصلی است و بنابر (۴.۸) داریم:

$$\xi_1 c_1 + \cdots + \xi_r c_r + 0 c_{r+1} + \cdots + 0 c_n = 0$$

چون c_1، ... ، c_r به‌طور خطی نابسته‌اند، پس $\xi_1 = \cdots = \xi_r = 0$، از این‌رو:

$$x = \sum_{k=r+1}^{m} (-\alpha_k) u_k \in S(u_{r+1}, \cdots, u_n)$$

به این ترتیب برهان قضیه پایان می‌یابد.

(۴.۹) نتیجه. بعد فضای جواب هر دستگاه همگن n مجهولی برابر $n-r$ است که در آن r رتبهٔ ماتریس ضریبهاست.

بنابر تعریف رتبه که برابر است با بعد فضای ستونی ماتریس ضریبها این نتیجه بدیهی است.

اکنون با استفاده از این نتیجه، یک قضیهٔ بسیارمفید و غیرمنتظره‌ای در مورد رتبهٔ یک ماتریس مانند:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

به‌دست می‌آوریم. ستونهای این ماتریس را c_1، ... ، c_n و سطرهای آن را r_1، ... ، r_m می‌نامیم. رتبهٔ سطری $\mathbf{A}$ را با بعد فضای سطر یعنی $S(r_1, \cdots, r_m)$ تعریف می‌کنیم. بعضی مؤلفان این رتبه را «رتبهٔ ستونی» می‌نامند ولی همان‌گونه که در قضیهٔ بعد می‌بینیم رتبه‌های سطری و ستونی همواره برابرند.

دستگاه همگن زیر را که ماتریس آن $\mathbf{A}$ است در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1n}x_n &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \cdots + \alpha_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \qquad (۵.۹)$$

به‌سبب استفاده‌ای که در این برهان و برخی استدلالهای بخش آینده از آن خواهیم کرد قرارداد زیر را به‌کار می‌بریم:

$$r_i \cdot x = \alpha_{i1}x_1 + \cdots + \alpha_{in}x_n$$

که در آن r_i و x دو بردارند، پس دستگاه (۵.۹) با این قرارداد به‌شکل معادله‌های زیر نشان داده می‌شود:

$$\begin{aligned} r_1 \cdot x &= 0 \\ \cdots\cdots&\cdots \\ r_m \cdot x &= 0 \end{aligned} \qquad (۶.۹)$$

«ضرب داخلی» $r \cdot x$ دارای این ویژگی است که برای عددهای λ و μ متعلق به R و بردارهای r و s متعلق به R_n تساوی زیر برقرار است:

$$(\lambda r + \mu s) \cdot x = \lambda(r \cdot x) + \mu(s \cdot x)$$

(۷.۹) قضیه. رتبهٔ سطری یک ماتریس $m \times n$ بعدی $\mathbf{A}$ با رتبهٔ $\mathbf{A}$ برابر است.

برهان. از قراردادی که گذاشتیم استفاده می‌کنیم. اکنون بدون اینکه رتبهٔ ستونی تغییر کند می‌توانَ فرض کرد که $\{r_۱, \cdots, r_t\}$ پایه‌ای است برای فضای سطری $\mathbf{A}$، که در آن t رتبهٔ سطری $\mathbf{A}$ است. در این‌صورت به‌آسانی دیده می‌شود که دستگاه:

$$\begin{aligned} &r_۱ \cdot x = ۰ \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &r_t \cdot x = ۰ \end{aligned} \tag{۸.۹}$$

دارای همان فضای جوابی است که (۵.۹) دارد. برای اثبات آن کافی است ثابت کنیم که هر جواب (۸.۹) یک جواب (۵.۹) است. برای $t + ۱ \leq i \leq m$ داریم:

$$r_i = \xi_۱ r_۱ + \cdots + \xi_t r_t, \quad \xi_j \in R$$

در این‌صورت، بنابر خواص ضرب داخلی $r \cdot x$ داریم:

$$r_i \cdot x = \sum_{k=۱}^{t} \xi_k (r_k \cdot x) = ۰$$

زیرا x یک جواب (۸.۹) است و قضیه ثابت می‌شود.

ستونهای ماتریس $\mathbf{A}'$ که دارای سطرهای $r_۱$، ... ، r_t است به R_t متعلق‌اند، از این‌رو

$$\text{رتبهٔ}\mathbf{A}' \leq t$$

و

$$n - \text{رتبهٔ}\mathbf{A}' \geq n - t$$

چون (۶.۹) و (۸.۹) دارای فضای جواب همانندند، پس بنابر نتیجهٔ (۴.۹):

$$n - (\text{رتبهٔ}\mathbf{A}) = n - (\text{رتبهٔ}\mathbf{A}') \geq n - t$$

از این‌رو رتبهٔ $\mathbf{A}$ مساوی با t یا کوچکتر از t است. با تعویض سطرها و ستونهای $\mathbf{A}$، ماتریس $n \times m$ بعدی $\mathbf{A}^*$ به‌دست می‌آید. با استدلال مشابهی در مورد $\mathbf{A}^*$، نتیجه می‌گیریم که رتبهٔ $\mathbf{A}^*$ مساوی رتبهٔ سطری $\mathbf{A}^*$ یا کوچکتر از آن است. ولی رتبهٔ $\mathbf{A}^*$ برابر t و رتبهٔ سطری $\mathbf{A}^*$ برابر رتبهٔ $\mathbf{A}$ است. از ترکیب این نتیجه‌ها داریم:

$$\text{رتبهٔ سطری}\mathbf{A} = \text{رتبهٔ}\mathbf{A}$$

و قضیهٔ (۷.۹) ثابت می‌شود.

به‌عنوان مثال نخست، بحث دستگاه معادله‌های بخش ۱ را تکمیل می‌کنیم.

مثال الف. برای فضای جواب دستگاه معادله‌های همگن زیر پایه‌ای بیابید:

$$x_۱ + ۲x_۲ - ۳x_۳ + x_۴ = ۰$$
$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۰$$

همانند بخش پیش، دستگاه معادله‌های هم‌ارزی می‌یابیم (یعنی دستگاهی که دارای همان فضای جواب است) که ماتریس ضریبهای آن پلّه‌یی شکل باشد، این‌بار لازم نیست با ماتریس فزوده عمل کنیم، زیرا ستون اضافی تنها از ۰ها تشکیل می‌شود. داریم:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & -۳ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & -۳ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۴ & ۰ \end{pmatrix}$$

بنابراین یک دستگاه هم‌ارز عبارت است از:

$$x_۱ + ۲x_۲ - ۳x_۳ + x_۴ = ۰$$
$$۰x_۱ - x_۲ + ۴x_۳ + ۰x_۴ = ۰ \qquad (۹.۹)$$

چون رتبهٔ ماتریس ضریبها برابر ۲ است [با محاسبهٔ این رتبه مثلاً با استفاده از قضیهٔ (۷.۹)]، می‌دانیم که بعد فضای جواب برابر است با ۲ = ۲ − ۴. معادلهٔ دوم (۹.۹) به‌عنوان معادله‌ای برحسب $\{x_۲, x_۳, x_۴\}$ دارای دو جواب نابسته خطی است که عبارت‌اند از:

$$< ۱, \frac{۱}{۴}, ۰ > , \quad < ۰, ۰, ۱ >$$

با گذاردن این جوابها در معادلهٔ نخست، دو جواب نابسته خطی دستگاه اصلی به‌دست می‌آید:

$$u_۱ =< -\frac{۵}{۴}, ۱, \frac{۱}{۴}, ۰ > , \quad u_۲ =< -۱, ۰, ۰, ۱ >$$

مثال ب. جواب عمومی (یعنی همهٔ جوابهای) دستگاه معادله‌های ناهمگن زیر را بیابید:

$$x_۱ + ۲x_۲ - ۳x_۳ + x_۴ = ۱$$
$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۰$$

بنابر قضیه (۹.۸) جواب عمومی برابر است با:

$$u = x_۰ + x$$

که در آن $x_\circ$ یک جواب دستگاه ناهمگن و x همهٔ جوابهای دستگاه همگن را می‌پذیرد. با استفاده از نتیجه‌های مثال الف از بخش ۸ و مثال الف از همین بخش، جواب عمومی دستگاه عبارت است از:

$$u = <-۱, ۱, \circ, \circ> + \lambda <-\frac{۵}{۴}, ۱, \frac{۱}{۴}, \circ> + \mu <-۱, \circ, \circ, ۱>$$
$$= <-۱ - \frac{۵}{۴}\lambda - \mu, ۱ + \lambda, \frac{۱}{۴}\lambda, \mu>$$

که در آن λ و μ عددهای حقیقی دلخواه‌اند.

مثال پ. همهٔ جوابهای دستگاهِ همگن زیر را بیابید:

$$x_۱ + x_۲ - ۲x_۳ + x_۴ = \circ$$
$$-x_۱ - x_۲ + x_۳ + ۳x_۴ = \circ$$
$$۲x_۱ + ۲x_۲ + ۵x_۳ \qquad = \circ$$

اگر طبق معمول عمل کنیم، داریم:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & -۲ & ۱ \\ -۱ & -۱ & ۱ & ۳ \\ ۲ & ۲ & ۵ & \circ \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & -۲ & ۱ \\ \circ & \circ & -۱ & ۴ \\ \circ & \circ & ۹ & -۲ \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & -۲ & ۱ \\ \circ & \circ & -۱ & ۴ \\ \circ & \circ & \circ & ۱ \end{pmatrix}$$

این‌بار دستگاه معادله‌های هم‌ارز عبارت است از:

$$x_۱ + x_۲ - ۲x_۳ + x_۴ = \circ$$
$$-x_۳ + ۴x_۴ = \circ$$
$$x_۴ = \circ$$

رتبهٔ ماتریس ضریبها (که همیشه می‌توان آن را با روش بخش ۶ یافت) برابر ۳ است، پس بعد فضای جواب برابر $۱ = ۳ - ۴$ است. این‌بار از معادلهٔ آخر نتیجه می‌شود $x_۴ = \circ$. اگر این مقادیر را در معادلهٔ دوّم بگذاریم، جواب $x_۳ = \circ$ به‌دست می‌آید از معادلهٔ نخست پایه‌ای برای فضای جواب به‌دست می‌آوریم، که عبارت است از بردار پایهٔ:

$$u = <۱, -۱, \circ, \circ>$$

(فراموش نکنید که باید درستی این جواب را با جایگذاری آن در معادلهٔ نخست امتحان کرد).

در اینجا باید دانست که روش محاسبه‌ای، به‌طور کلی،مسألهٔ یافتن جوابهای یک دستگاه همگن را به‌یافتن جوابهای یک معادلهٔ چندمجهولی تبدیل می‌کند. این‌کار را همواره می‌توان با استفاده مستقیم از روش اثبات قضیهٔ (۲.۹) انجام داد.

مثال ت. همهٔ جوابهای معادلهٔ زیر را بیابید:

$$x_۱ + ۲x_۲ - x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۰$$

بنابر قضیهٔ (۲.۹) یک پایهٔ فضای جواب عبارت است از:

$$< ۲, -۱, ۰, ۰, ۰ >, \quad < -۱, ۰, -۱, ۰, ۰ >$$
$$< ۱, ۰, ۰, -۱, ۰ >, \quad < ۱, ۰, ۰, ۰, -۱ >$$

مثال ث. منظور از این مثال این است که نشان دهیم که نظریهٔ فضاهای برداری بسیار ژرفتر و دامنه‌دارتر از بررسی تنها R_n و دستگاه معادله‌های خطی است. مسأله دوم بخش ۱ را بار دیگر در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم همهٔ جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل:

$$y'' + m^۲ y = ۰$$

را بیابیم. همان‌طورکه دیدیم، مجموعهٔ جوابهای این معادله یک زیرفضای S از $\mathcal{F}(R)$ است. تابعهای:

$$y_۱ = \sin mx, \quad y_۲ = \cos mx$$

هر دو به S تعلق دارند. به‌علاوه این دو تابع نابسته خطی‌اند، ولی این نابستگی با روشهای محاسبه‌یی هم‌ارزی سطری ماتریسها و غیره معلوم نمی‌شود بلکه به‌کمک تعریف اصلی و نتیجه‌های آن ثابت می‌گردد. تنها هنگامی $\{\sin mx, \cos mx\}$ می‌توانند وابسته خطی باشند که به‌ازای یک مقدار حقیقی λ داشته باشیم $\sin mx = \lambda \cos mx$. ولی چنین چیزی امکان ندارد، زیرا به‌عنوان مثال دو تابع $\sin mx$ و $\cos mx$ هر دو همزمان نمی‌توانند صفر باشند. برای اینکه ثابت کنیم که تابعهای $\sin mx$ و $\cos mx$ تشکیل پایه‌ای برای S می‌دهند، از این قضیهٔ مهم، که معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + m^۲ y = ۰$ یک جواب یکتای y دارد که در شرطهای آغازی:

$$y(۰) = \alpha, \quad y'(۰) = \beta$$

با α و β عددهای حقیقی داده شده، صدق می‌کند و اینکه همواره تابعی به‌شکل $\lambda \sin mx + \mu \cos mx$ وجود دارد که در شرطهای آغازی صدق می‌کند، استفاده می‌کنیم. روشن است که اثبات این مطالب تا اندازه‌ای طولانی است (برای برهان آنها به‌بخش ۳۴ مراجعه

کنید). آنچه که ما می‌خواهیم درباره‌اش بحث کنیم این است که نشان دهیم که گرچه به‌کمک نظریهٔ فضاهای برداری می‌توان جوابهای یک معادلهٔ دیفرانسیل را بیان کرد، ولی جزئیات یافتن جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل (از دیدگاه فضاهای برداری) با حل یک دستگاه معادلهٔ خطی بسیار متفاوت است.

تمرینها

۱.پایه‌ای برای فضای جواب دستگاه زیر بیابید:

$$\begin{aligned} ۳x_۱ - x_۲ \qquad + x_۴ &= ۰ \\ x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ &= ۰ \end{aligned}$$

۲.پایه‌ای برای فضای جواب دستگاه همگن مربوط به دستگاه تمرین ۱ از بخش ۸ بیابید.

۳.همهٔ جوابهای دستگاه زیر را بیابید:

$$\begin{aligned} -x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ + ۴x_۴ &= ۰ \\ ۲x_۱ + x_۲ - x_۳ + x_۴ &= ۱ \end{aligned}$$

۴.در هر یک از مسأله‌های تمرین ۲ از بخش ۶، در صورت وجود، یک رابطهٔ وابستگی خطی (با ضریبهای ناصفر) بیابید.

۵.در هندسهٔ تحلیلی مسطحه روش یافتن معادلهٔ خطی مانند $Ax + By + C = ۰$ که دو نقطهٔ مفروض $(۱,۳)$ و $(-۱,۰)$ جوابهای آن باشند، داده شده است. نشان دهید که این مسأله با حل دستگاه همگن:

$$A\begin{pmatrix} ۳ \\ -۱ \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} = ۰$$

برای یافتن جوابهای ناصفر آن هم‌ارز است. ثابت کنید که اگر $< A', B', C' >$ جواب ناصفر دیگری باشد، آنگاه این جواب مضربی از جواب نخست یعنی $< A, B, C >$ است.

۶.با توجّه به مسألهٔ ۵، گیریم $< \alpha, \beta >$ و $< \gamma, \delta >$ دو نقطهٔ متمایز صفحه باشند. نشان دهید که عددهای حقیقی A، B و C وجود دارند که همه صفر نیستند و هر دو نقطهٔ فوق در معادلهٔ:

$$Ax + By + C = ۰$$

صدق می‌کنند. اگر این دو نقطه در معادلهٔ:

$$A'x + B'y + C' = ۰$$

نیز صدق کنند آنگاه $< A', B', c' >= \lambda < A, B, C >$، λ عددی حقیقی است. در $R_۲$ هر خط بنابر تعریف مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ $Ax + By + C = ۰$ است. ثابت کنید که نتیجهٔ بالا نشان می‌دهد که در $R_۲$ هر دو نقطهٔ متمایز بر یک خط منحصری قرار دارند.

۱۰. خمینه‌های خطی

در این بخش با استفاده از نتیجه‌های بخشهای ۵ تا ۹ مطالب مربوط به خط و صفحه در فضاهای دوبعدی و سه‌بعدی را در R_n تعمیم می‌دهیم.

در R_n هر خط به شکل یک زیرفضای یک بعدی $S(a)$ از R_n یا به‌طور کلی به‌شکل انتقال یک زیرفضای یک بعدی $S(a)$ به‌اندازهٔ بردار b که آن را با $b + S(a)$ نشان می‌دهیم، تعریف می‌شود. بنابراین یک بردار p به‌خط $b + S(a)$ تعلق دارد، هرگاه برای یک مقدار حقیقی λ (شکل ۷.۲) داشته باشیم:

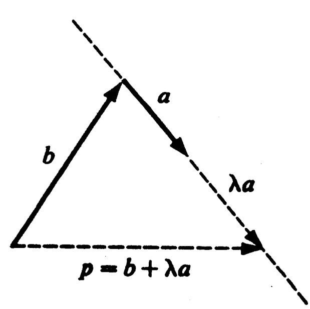
$$p = b + \lambda a$$

به‌همین قیاس می‌توانیم در R_n، صفحه را به‌شکل یک زیرفضای دوبعدی S از R_n یا به‌طورکلیتر، به شکل انتقال $b + S$ از یک زیرفضای دوبعدی S به‌اندازهٔ بردار ثابت b، تعریف کنیم. اگر $\{a_۱, a_۲\}$ پایه‌ای برای S باشد، آنگاه برای اینکه p به $b + S$ تعلق داشته باشد، لازم و کافی است که (شکل ۸.۲ را ببینید):

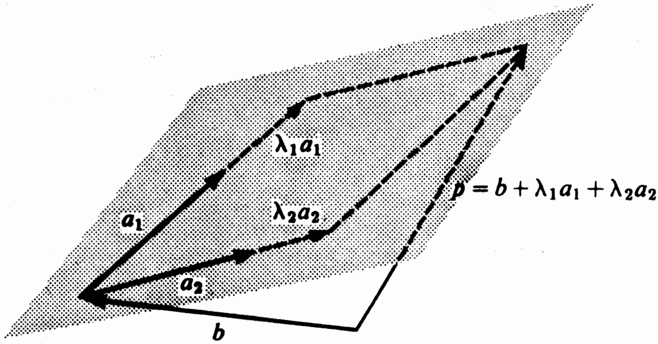
$$p = b + \lambda_۱ a_۱ + \lambda_۲ a_۲, \quad \lambda_i \in R$$

در تعریف زیر تعمیم مفهوم زیرفضا به‌حالت کلی آمده است.

(۱.۱۰) **تعریف.** یک خمینهٔ خطی V از R_n عبارت است از مجموعهٔ همهٔ بردارهای $b + S$ که در آن b برداری ثابت است و S زیرفضایی ثابت از R_n. بنابراین برای اینکه $p \in V$،



شکل ۷.۲



شکل ۸.۲

لازم و کافی است که برای یک بردار $a \in S$ داشته باشیم $p = b + a$. زیرفضای S فضای هادی V نامیده می‌شود. بعد V برابر است با بعد زیرفضای S.

(۲.۱۰) قضیه. گیریم $V = b + S$ خمینه‌ای خطی در R_n باشد. در این‌صورت فضای هادی V مجموعهٔ همهٔ بردارهایی است به‌شکل $p - q$ که $p, q \in V$

برهان. گیریم $p, q \in V$، در این‌صورت بردارهایی مانند $a, a' \in S$ وجود دارند به‌گونه‌ای که:

$$p = b + a, \quad q = b + a'$$

پس:

$$p - q = (b + a) - (b + a') = a - a' \in S$$

از سوی دیگر اگر $a \in S$، آنگاه $a = b - (b - a)$ پس $a = p - q$ که در آن $p = b$ و $q = b - a$ هر دو به V تعلق دارند. یعنی همان چیزی را که می‌خواستیم ثابت کنیم.

این قضیه نشان می‌دهد که فضای هادی $V = b + S$ مستقل از b معین می‌شود.

می‌دانیم که در $R_۲$ و $R_۳$ خط و صفحه نیز به‌شکل مجموعهٔ جوابهای معادله‌هایی خطی تعریف می‌شوند. بنابر تعریف یک خمینهٔ خطی، $V = b + S$ نشان می‌دهد که خمینهٔ خطی را می‌توان در حالت کلّی به‌وسیلهٔ معادله‌هایی بیان کرد. بنابر آنچه در بخش ۸ دیدیم هر بردار متعلق به $b + S$ همان شکلی را دارد که ما برای جوابهای یک دستگاه معادله‌های خطی ناهمگن یافته بودیم، که در آن b جواب ویژه و S فضای جواب دستگاه همگن مربوط است.

برای استفادهٔ حداکثر از این برداشت، می‌خواهیم روش نمایش یک زیرفضای S را به‌وسیلهٔ یک دستگاه از معادله‌های خطی نشان دهیم.

(۳.۱۰) لم. گیریم S یک زیرفضای r بعدی از R_n است. در این‌صورت مجموعه‌ای از $n-r$ معادلهٔ خطی همگن n مجهولی وجود دارد که فضای جواب آن دقیقاً S است.

تبصره. هیچ مجموعه‌ای که تعداد معادله‌های آن از $n-r$ کمتر باشد نمی‌تواند فضای جوابش S باشد. چرا؟

برهان لم (۳.۱۰). گیریم $\{b_۱, \cdots, b_r\}$ یک پایهٔ S است. تنها دستگاه معادله‌هایی که احتمالاً مربوط به مسأله است [با طرز نمایش (۶.۹)] عبارت است از:

$$\begin{aligned} b_۱ \cdot x &= ۰ \\ &\cdots\cdots\cdots \\ b_r \cdot x &= ۰ \end{aligned} \qquad (۴.۱۰)$$

ولی روشن است که این بیان مسأله را حل نمی‌کند، زیرا ممکن است (که معمولاً چنین است) که مثلاً $b_۱ \cdot b_۱ \neq ۰$، پس $b_۱$ در حالت کلی یک بردار جواب (۴.۱۰) نیست. گیریم S^* یک فضای جواب (۴.۱۰) باشد. بنابر (۷.۹) رتبهٔ ماتریسی که سطرهای آن $b_۱$، ... ، b_r هستند برابر r است، از این‌رو بنابر (۴.۹) بعد S^* برابر $n-r$ است. گیریم $\{c_۱, \cdots, c_{n-r}\}$ پایه‌ای برای S^* باشد، و دستگاه معادله‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} c_۱ \cdot x &= ۰ \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n-r} \cdot x &= ۰ \end{aligned}$$

با استدلالی مشابه استدلال بالا، فضای جواب S^{**} این دستگاه دارای بعد r است، روشن است که $S \subset S^{**}$ (چرا؟). چون $\dim S = r$، از تمرین ۳ی بخش ۷ نتیجه می‌شود $S = S^{**}$، و لم ثابت می‌شود.

تبصره. باید توجه داشت که روش محاسبه‌ای بخشهای ۶ تا ۹ را می‌توان در هر یک از مرحله‌های برهان‌لم (۳.۱۰) به‌کار برد. به‌عنوان مثال، گیریم بخواهیم دستگاه معادله‌هایی را بیابیم که فضای جواب آن در $R_۴$ دارای پایه‌ای متشکل از بردارهای $b_۱ =<۱, ۱, ۰, ۱>$ و $b_۲ =<۱, ۰, ۱, ۱>$ باشد. گیریم $x =<x_۱, x_۲, x_۳, x_۴>$، دستگاه زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned} b_۱ \cdot x &= ۰ \\ b_۲ \cdot x &= ۰ \end{aligned} \qquad (۵.۱۰)$$

بردارهای ستونی دستگاه عبارت‌اند از:

$$c_۱ =<۱, ۱>, c_۲ =<۱, ۰>, c_۳ =<۰, ۱>, c_۴ =<۱, ۱>$$

یک پایهٔ فضای جواب دستگاه (۵.۱۰) عبارت است از:

$$< ۱, ۰, ۰, -۱ >$$
$$< -۱, ۱, ۱, ۰ >$$

پس بنابر لم (۳.۱۰) دستگاه معادله‌های مطلوب عبارت است از:

$$\begin{aligned} x_۱ + \quad\quad\quad -x_۴ &= ۰ \\ -x_۱ + x_۲ + x_۳ \quad\quad &= ۰ \end{aligned}$$

با بیان قضیهٔ بعدی تعبیر هندسی دستگاه معادله‌های خطی کامل می‌شود.

(۶.۱۰) قضیه. شرط لازم و کافی برای اینکه یک مجموعه از بردارهای $V \subset R_n$ یک خمینهٔ خطی r بعدی تشکیل دهد، این است که V مجموعهٔ همهٔ جوابهای دستگاهی از $n-r$ معادلهٔ ناهمگن nمجهولی باشد که رتبهٔ ماتریس ضریبهای آن $n-r$ است.

برهان. نخست گیریم:

$$x_۱c_۱ + \cdots + x_nc_n = b,\ c_i \in R_{n-r}$$

دستگاهی از $n-r$ معادلهٔ n مجهولی باشد که رتبهٔ ماتریس ضریبهای آن $n-r$ است. بنابر قضیهٔ (۹.۸) مجموعهٔ Vی همهٔ جوابها خمینه‌ای است خطی به‌شکل $x. + S$ که در آن S فضای جواب دستگاه همگن: $x_۱c_۱ + \cdots + x_nc_n = ۰$ است. بنابر نتیجهٔ (۴.۹)، $\dim S = n - (n-r)$ از این‌رو $\dim V = r$.

به‌وارون، گیریم $V = y + S$ یک خمینهٔ خطی r بعدی باشد. بنابر لم (۳.۱۰) یک دستگاه از $n-r$ معادله وجود دارد که فضای جواب آن S است:

$$x_۱c_۱ + \cdots + x_nc_n = ۰$$

اگر $y =< \eta_۱, \cdots, \eta_n >$، گیریم:

$$b = \eta_۱c_۱ + \cdots + \eta_nc_n$$

پس جوابهای دستگاه ناهمگن فوق درست برابر عناصر مجموعهٔ $V = y + S$ است. و به‌این ترتیب برهان قضیه کامل می‌شود.

برای مثال، گیریم بخواهیم که برای خمینهٔ خطی V یک دستگاه معادله بیابیم که فضای هادی آن S دارای پایهٔ:

$$b_۱ =< ۱, ۱, ۰, ۱ >,\ \ b_۲ =< ۱, ۰, ۱, ۱ >$$

و متضمّن بردار $<\text{۱},\text{۲},\text{۳},\text{۴}>$ باشد. چنان‌که در نخستین مثال این بخش دیدیم، S یک فضای جواب دستگاه زیر است:

$$\begin{aligned} x_۱ \qquad\qquad & -x_۴ = ۰ \\ -x_۱ + x_۲ + x_۳ \qquad & = ۰ \end{aligned}$$

همان‌گونه که در برهان قضیهٔ (۶.۱۰) دیدیم، بردار $<\text{۱},\text{۲},\text{۳},\text{۴}>$ را در این دستگاه می‌گذاریم، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} ۱ \qquad\qquad & -۴ = -۳ \\ -۱+۲+۳ \qquad & = ۴ \end{aligned}$$

پس معادله‌هایی که جوابهای آن یک خمینهٔ خطی V تشکیل می‌دهند بنابر قضیه (۶.۱۰) عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} x_۱ \qquad\qquad & -x_۴ = -۳ \\ -x_۱ + x_۲ + x_۳ \qquad & = ۴ \end{aligned}$$

تمرینها

۱. مجموعه‌ای از معادله‌های خطی همگن بیابید که فضای جواب آن با بردارهای زیر پدید آید:

الف) $<\text{۴},\text{۳},-\text{۱}>, <\text{۰},-\text{۱},\text{۱}>, <-\text{۳},\text{۱},\text{۲}>$

ب) $<\text{۱},\text{۲},\text{۱},\text{۱}>, <\text{۴},\text{۰},\text{۱},-\text{۱}>, <-\text{۱},\text{۱},\text{۱},\text{۲}>$

۲. مجموعه‌ای از معادله‌های همگن بیابید که فضای جواب آن S با بردارهای:

$$<\text{۳},-\text{۱},\text{۱},\text{۲}>, <\text{۴},-\text{۱},-\text{۲},\text{۳}>, <\text{۱۰},-\text{۳},\text{۰},\text{۷}>, (-\text{۱},\text{۱},-\text{۷},\text{۰})$$

پدید آید. دستگاهی از معادله‌های ناهمگن بیابید که مجموعهٔ جوابهای آن یک خمینهٔ خطی با فضای هادی S باشد و از $<\text{۱},\text{۱},\text{۱},\text{۱}>$ بگذرد.

۳. یک ابر صفحه در R_n یک خمینهٔ خطی $n-۱$ بعدی است. ثابت کنید برای اینکه یک خمینهٔ خطی یک ابر صفحه باشد لازم و کافی است که این خمینه مجموعهٔ جوابهای یک معادلهٔ خطی $\alpha_۱ x_۱ + \cdots + \alpha_n x_n = \beta$ باشد که در آن بعضی از α_iها ناصفرند. ثابت کنید که هر خمینهٔ خطی r بعدی درست اشتراک $n-r$ ابر صفحه است.

۴.در R_n هرخط به‌شکل یک خمینهٔ خطی یک بعدی تعریف می‌شود. ثابت کنید که اگر p و q بردارهایی متمایز از خط L باشند، آنگاه L متضمن همهٔ بردارهایی به شکل زیر است:

$$p+\lambda(q-p), \quad \lambda \in R$$

۵.ثابت کنید که در R_n هر خط فصل مشترک $n-۱$ ابر صفحه است. دستگاهی از معادله‌های خطی بیابید که مجموعهٔ جوابهای آن خط گذرنده بر نقطه‌های زیر باشد:

الف) در $R_۲$ $p=<۱,۱>, q=<۲,-۱>$

ب) در $R_۳$ $p=<۱,۱,۲>, q=<-۱,۲,-۱>$

پ) در $R_۴$ $p=<۱,-۱,۰,۲>, q=<۲,۰,۱,۱>$

۶.روی خط L، فصل مشترک ابر صفحه‌های زیر، دو بردار متمایز بیابید:

در $R_۳$ $x_۱+۲x_۲-x_۳=-۱, ۲x_۱+x_۲+۴x_۳=۲$

در $R_۴$ $x_۱+x_۲=۰, x_۲-x_۳=۰, x_۲-۲x_۴=۰$

۷.ثابت کنید اگر بردارهای p و q به‌خمینهٔ خطی V تعلق داشته باشند، آنگاه خط گذرنده از p و q مشمول در V است.

۸.گیریم S و T زیرصفحه‌هائی از R_n باشند که به‌ترتیب به‌صورت فضاهای جواب دستگاههای همگن زیرند:

$$a_۱\cdot x=۰,\cdots,a_r\cdot x=۰$$

و

$$b_۱\cdot x=۰,\cdots,b_s\cdot x=۰$$

ثابت کنید که $S\cap T$ فضای جواب دستگاه زیر است:

$$a_۱\cdot x=۰,\cdots,a_r\cdot x=۰,\ \ b_۱\cdot x=۰,\cdots,b_s\cdot x=۰$$

با استفاده از آن پایه‌ای برای $S\cap T$ بیابید، که در آن S و T زیرفضاهای تمرین ۵ از بخش ۷ باشند.

۹.گیریم در $R_۴$، $S_۱=S(e_۱,e_۲,e_۳)$،که در آن $e_۱=<۱,۰,۰,۰>$، $e_۲=<۰,۱,۰,۰>$ و $e_۳=<۰,۰,۱,۰>$. گیریم $S_۲=S(a_۱,a_۲,a_۳)$ که در آن $a_۱=<۱,۱,۰,۱>$، $a_۲=<۲,-۱,۳,-۱>$ و $a_۳=<-۱,۰,۰,۲>$. مطلوب است تعیین $\dim(S_۱+S_۲)$ و $\dim(S_۱\cap S_۲)$. پایه‌ای برای $S_۱\cap S_۲$ بیابید.

۱۰.در $R_۳$ محل برخورد خط گذرنده بر نقطه‌های $<۱,-۱,۰>$ و $<۱,۱,-۲>$را با صفحهٔ $۳x_۱-x_۲+x_۳-۱=۰$ بیابید.

۳

تبدیلهای خطی و ماتریسها

برای مقایسهٔ دستگاههای مختلف ریاضی هم‌نوع، بررسی نگاشتهایی از یک دستگاه به دستگاه دیگر که عملهای دستگاه را حفظ می‌کنند ضروری است. به عنوان مثال در حساب دیفرانسیل و انتگرال تابعهایی مانند f را که حدیابی را حفظ می‌کنند مورد مطالعه قرار می‌دهیم. یعنی اگر $\lim_{i\to\infty} x_i = x$، آنگاه $\lim_{i\to\infty} f(x_i) = f(x)$. در فضاهای برداری، تابعهایی را جستجو می‌کنیم که عملهای فضاهای برداری یعنی جمع و ضرب در یک عدد را حفظ می‌کنند. این تابعها تبدیلهای خطی نام دارند. در این فصل تبدیلهای خطی و رابطهٔ آنها را با ماتریسها مورد بحث قرار می‌دهیم. قضیّه‌های عمیقتر دربارهٔ تبدیلهای خطی را بعداً خواهیم دید.

۱۱. تبدیلهای خطی

تبدیلهای خطی نوع خاصی از تابعها هستند، پس بجاست در این بخش برخی از تعریفها و اصطلاحاتی را در مورد تابعهایی که روی مجموعه‌ها تعریف شده‌اند، یادآوری کنیم.

(۱.۱۱) **تعریف.** دو مجموعهٔ X و Y را در نظر می‌گیریم. هر تابع $f : X \to Y$ (که گاهی نگاشت نامیده می‌شود) قاعده‌ای است که به‌هر عنصر مجموعهٔ X یک عنصر یکتا از مجموعهٔ Y را مربوط می‌کند. عنصری از Y را که به وسیلهٔ تابع f به‌x مربوط می‌شود با $f(x)$ نشان

می‌دهیم. مجموعهٔ X را حوزه یا حوزهٔ تعریف f می‌گویند. دو تابع f و f' را برابر گویند و می‌نویسند $f = f'$، اگر یک حوزهٔ X داشته باشند و به ازای هر $x \in X$، $f(x) = f'(x)$. می‌گویند تابع f یک‌به‌یک است هرگاه از $x_1 \neq x_2$ در X نتیجه شود $f(x_1) \neq f(x_2)$. [باید توجه داشت که این بیان هم‌ارز است با اینکه از $f(x_1) = f(x_2)$ نتیجه می‌شود $x_1 = x_2$.] تابع f از X به Y را پوشا می‌نامند هرگاه به‌ازای هر $y \in Y$ $x \in X$ای وجود داشته باشد که $y = f(x)$. یک تابع f از X به Y ممکن است پوشا نباشد. هر تابع یک به یک و پوشای f از X به Y را یک تناظر دوسویی بین X و Y می‌نامند.

در حساب دیفرانسیل و انتگرال با مثالهایی از تابعها آشنا شده‌ایم. در اینجا مثالهایی می‌آوریم که نشان دهیم ویژگیهای یک به‌یک و پوشا بودن به یکدیگر بستگی ندارند. برای مثال تابع $f : R \to R$ که با $f(x) = x^2$، $x \in R$، تعریف می‌شود نه یک‌به‌یک است و نه پوشا (چرا؟). تابع $g : R \to R$ که با $g(x) = e^x$ تعریف می‌شود یک‌به‌یک است [زیرا به‌ازای همهٔ مقادیر x، $g'(x) > 0$، پس تابع اکیداً افزایشی است به این معنی که اگر $x_1 < x_2$ آنگاه $g(x_1) < g(x_2)$] ولی g پوشا نیست زیرا به ازای هر مقدار x داریم $g(x) > 0$. تابع $h : R^* \to R$ که با:

$$h(x) = \log_e |x|,\ x \in R^* = \{x \in R, x \neq 0\}$$

تعریف می‌شود پوشاست، ولی یک‌به‌یک نیست، زیرا به ازای هر مقدار x داریم $h(x) = h(-x)$.

اکنون می‌پردازیم به تعریف تبدیل خطی از یک فضای برداری به فضای برداری دیگر. در این بخش F نمایش یک هیأت دلخواه است.

(۲.۱۱) تعریف. گیریم V و W دو فضای برداری روی F باشند. هر تبدیل خطی از V به W تابعی است مانند $T : V \to W$ که به هر بردار $v \in V$ یک بردار یکتای $w = T(v) \in W$ را مربوط می‌کند به‌گونه‌ای که:

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)\ ,\ v_i \in V$$
$$T(\alpha v) = \alpha T(v), \alpha \in F\ , v \in V$$

اغلب به جای $T(v)$ قرار داد Tv را به کار خواهیم برد تا از ازدیاد پرانتزها دوری کنیم. همچنین نمایش پیکانی را در عبارتهایی نظیر «گیریم f تابعی است از V به W یعنی $f : V \to W$» یا «تابع $f : V \to W$، v_1 را به w_1 می‌برد یعنی $v_1 \to w_1$» زیاد به کار می‌بریم.

نخست چند مثال از تبدیلهای خطی می‌آوریم.

مثال الف. تابع $T : R_1 \to R_1$ که به ازای هر عدد $\alpha \in R$ با ضابطهٔ $T(x) = \alpha x$ تعریف می‌شود یک تبدیل خطی است. که با توجّه به تعریف می‌توانیم به آسانی تحقیق کنیم. آنچه روشن نیست این است که اگر $f : R_1 \to R_1$ تبدیل خطی دلخواهی باشد، آیا f همان شکل

بالا را دارد یا نه. برای روشن ساختن موضوع، گیریم $f : R_۱ \to R_۱$ خطی باشد، قرار می‌دهیم $\alpha = f(۱)$. در این صورت بنابر بخش دوم از تعریف یک تبدیل خطی برای هر x، داریم:

$$f(x) = f(x \cdot ۱) = xf(۱) = \alpha x$$

مثال بعدی تعمیم روشنی است از مثال الف به فضای برداری R_n.

مثال ب. هر دستگاه از معادله‌های خطی:

$$\begin{aligned} y_۱ &= \alpha_{۱۱}x_۱ + \cdots + \alpha_{۱n}x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m &= \alpha_{m۱}x_۱ + \cdots + \alpha_{mn}x_n \end{aligned} \tag{۳.۱۱}$$

را، که در آن $\alpha_{ij} \in F$، می‌توان از دو جنبه در نظر گفت. در فصل ۲ فرض کردیم که $\{y_۱, \cdots, y_m\}$ داده شده است و روش حل دستگاه را نسبت به $\{x_۱, \cdots, x_n\}$ خواستیم. ولی این عمل تابع، نیست زیرا $\{x_۱, \cdots, x_n\}$ برحسب $\{y_۱, \cdots, y_m\}$ به‌طور یکتا تعیین نمی‌شود. به عنوان مثال $< ۱, -۱ >$ و $< ۲, -۲ >$ هر دو جوابهای $x_۱ + x_۲ = y$ برای $y = ۰$ هستند. ازسوی دیگر می‌توان برای ماتریس ضریبهای داده شدهٔ $\mathbf{A} = (\alpha_{ij})$، $< y_۱, \cdots, y_m >$ را به عنوان تابعی از $< x_۱, \cdots, x_n >$ در نظر گرفت. بنابراین معادلهٔ

$$x_۱ + x_۲ = y$$

تعریف تابع $R_۲ \to R_۱$ است که همان تابع:

$$T :< \alpha_۱, \alpha_۲ > \to < \alpha_۱ + \alpha_۲ >$$

به عنوان مثال $< ۲, -۳ > \to < -۱ >$، $< ۱, ۱ > \to < ۲ >$ و $< ۱, -۱ > \to < ۰ >$.
به‌طور کلی، دستگاه (۳.۱۱) تابعی مانند T از F_n در F_m را تعریف می‌کند که به هر nتایی $< x_۱, \cdots, x_n >$ از F_n یک mتایی $< y_۱, \cdots, y_m >$ متعلق به F_m را مربوط می‌کند. به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که تابعی که به وسیلهٔ دستگاه(۳.۱۱) با ماتریس ضریبهای ثابتی تعریف می‌شود یک تبدیل خطی از $F_n \to F_m$ است.

مثال پ. گیریم f، روی عددهای حقیقی، یک تابع حقیقی مقدار پیوسته باشد. در این صورت قاعده‌ای که به f انتگرال آن $I(f) = \int_۰^۱ f(t)dt$ را مربوط می‌کند یک تبدیل خطی از فضای برداری $C(R)$ به‌فضای برداری $R_۱$ است. این حقیقت را با قاعده‌های زیر بیان می‌کنیم:

$$I(f_۱ + f_۲) = I(f_۱) + I(f_۲)$$

$$I(\alpha f) = \alpha I(f)$$

برای $f_1, f_2, f \in C(R)$ و $\alpha \in R$.

مثال ت. گیریم $P(R)$ فضای برداری تابعهای چندجمله‌یی باشد که روی R تعریف شده‌اند. در این صورت تابع مشتق D، که به‌هر تابع چندجمله‌یی مشتق آن را مربوط می‌سازد، یک تبدیل خطی از $P(R) \to P(R)$ است. باید بررسی کنیم که مشتق یک تابع چندجمله‌یی باز یک تابع چندجمله‌یی است و شرطهای زیر برای تابعهای چندجمله‌یی f_1،f_2،f و عدد حقیقی α برقرارند:

$$D(f_1 + f_2) = D(f_1) + D(f_2)$$
$$D(\alpha f) = \alpha(Df)$$

این مثالها نشان می‌دهند که بعضی از عملهایی که در نظریهٔ معادله‌های خطی و حساب دیفرانسیل و انتگرال مورد مطالعه قرار می‌گیرند مثالهایی از تبدیلهای خطی هستند.
بخشی از اهمیت تبدیلهای خطی از آنجا ناشی می‌شود که می‌توان این تبدیلها را با بعضی از عملهای جبری ترکیب کرد، و دستگاه جبری حاصل دارای خواص بسیاری است که در دستگاههای جبری دیگری که تاکنون مطالعه کرده‌ایم یافت نمی‌شود.

(۴.۱۱) تعریف. گیریم V و W دو فضای برداری روی هیأت دلخواه F، و S و T دو تبدیل خطی از $V \to W$ باشند. نگاشت $S+T$ از $V \to W$ را با دستور زیر تعریف می‌کنیم:

$$(S+T)v = S(v) + T(v), v \in V$$

در این صورت نگاشت $S+T$ از $V \to W$ را مجموع تبدیلهای خطی S و T می‌نامند.

(۵.۱۱) تعریف. گیریم M،N و P فضاهایی برداری روی F، و S یک تبدیل خطی از $M \to N$ و T یک تبدیل خطی از $N \to P$ باشد. در این صوت نگاشت $TS : M \to P$ که با:

$$(TS)(m) = T[S(m)]$$

تعریف می‌شود، نگاشتی است از $M \to P$ که حاصلضرب تبدیلهای خطی T و S نامیده می‌شود. اگر $\alpha \in F$ و $S : M \to N$، آنگاه αS نگاشتی است از $M \to N$ به‌گونه‌ای که برای هر $m \in M$ با $(\alpha S)(m) = \alpha(S(m))$ تعریف می‌شود.

(۶.۱۱) قضیه. گیریم V و W فضاهایی برداری روی F و $L(V,W)$ نمایش مجموعهٔ همهٔ تبدیلهای خطی از V در W باشند، در این صورت $L(V,W)$ نسبت به عملهای:

$$S+T \;,\; S,T \in L(V,W)$$
$$\alpha S \;,\; \alpha \in F, \quad S \in L(V,W)$$

یک فضای برداری روی F است.

برهان. نخست ثابت می‌کنیم که $S+T$ و αS به $L(V,W)$ تعلق دارند. استدلال بر استفادهٔ کامل از اصلهای فضای برداری مبتنی است. گیریم $v_1, v_2 \in V$، آنگاه:

$$\begin{aligned}(S+T)(v_1+v_2) &= S(v_1+v_2)+T(v_1+v_2)\\ &= [S(v_1)+S(v_2)]+[T(v_1)+T(v_2)]\\ &= [S(v_1)+T(v_1)]+[S(v_2)+T(v_2)]\\ &= (S+T)(v_1)+(S+T)(v_2)\end{aligned}$$

برای $\xi \in F$ داریم:

$$\begin{aligned}(S+T)(\xi v) &= S(\xi v)+T(\xi v)=\xi[S(v)]+\xi[T(v)]\\ &= \xi[S(v)+T(v)]=\xi[(S+T)(v)]\end{aligned}$$

در مورد نگاشت αS داریم:

$$(\alpha S)(v_1+v_2)=\alpha[S(v_1)+S(v_2)]=\alpha S(v_1)+\alpha S(v_2)$$

وبرای $\xi \in F$، چون F نسبت به ضرب جابه‌جایی است، پس:

$$\begin{aligned}(\alpha S)(\xi v) &= \alpha[S(\xi v)]=\alpha[\xi S(v)]\\ &= (\alpha\xi)S(v)=(\xi\alpha)S(v)\\ &= \xi[(\alpha S)(v)]\end{aligned}$$

تبدیل خطی 0، که به هر $v \in V$ بردار صفر را مربوط می‌کند در شرط زیر صدق می‌کند:

$$T+0=T\ ,\ T\in L(V,W)$$

تبدیل$-T$ که با:

$$(-T)v=-T(v)$$

تعریف می‌شود، دارای ویژگی زیر است:

$$T+(-T)=0$$

بررسی سایر اصلها را به عهدهٔ متعلّم می‌گذاریم.

در مجموعهٔ همهٔ تبدیلهای خطی از یک فضای برداری V به خودش سه عمل جمع، ضرب در یک اسکالر، و ضرب تبدیلهای خطی، راه یافته‌اند. ویژگیهای جبری این عملها در قضیهٔ بعدی آمده است.

(۷.۱۱) قضیه. گیریم V یک فضای برداری روی F، و $S,T \in L(V,V)$ و $\alpha \in F$. در این صورت:

$$S+T, ST, \alpha S$$

به $L(V,V)$ تعلق دارند. $L(V,V)$ نسبت به دو عمل $S+T$ و αS یک فضای برداری است. به‌علاوه $L(V,V)$ دارای ویژگی شرکتپذیری، یعنی:

$$S(TU) = (ST)U$$

نیز هست. روی V یک تبدیل خطی ۱ وجود دارد که تبدیل همانی نام دارد و به‌گونه‌ای است که:

$$1v = v \quad , \quad v \in V$$

و

$$1T = T1 = T \ , \ T \in L(V,V)$$

سرانجام $L(V,V)$ دارای ویژگی پخشپذیری است، یعنی:

$$S(T+U) = ST + SU \ , \ (S+T)U = SU + TU$$

برهان. چون ویژگیهای عملهای $S+T$ و αS روی $L(V,V)$، در قضیهٔ پیش مورد بررسی قرار گرفت، پس کافی است که ویژگیهای ST را مورد بررسی قرار دهیم. نخست ثابت می‌کنیم که ST یک تبدیل خطی است. برای $v_1, v_2 \in V$ و $\alpha \in F$ داریم:

$$\begin{aligned}(ST)(v_1+v_2) &= S[T(v_1+v_2)] = S[T(v_1)+T(v_2)] \\ &= S[T(v_1)] + S[T(v_2)] = (ST)v_1 + (ST)v_2\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}(ST)(\alpha v_1) &= S[T(\alpha v_1)] = S[\alpha T(v_1)] \\ &= \alpha\{S[T(v_1)]\} = \alpha[ST(v_1)]\end{aligned}$$

بدین ترتیب ثابت شد که $ST \in L(V,V)$. به‌همین روش ثابت می‌شود که TS که در (۵.۱۱) تعریف شد یک تبدیل خطی است.

اکنون گیریم S، T و U عنصرهای $L(V,V)$ باشند. برای بررسی ویژگیهای شرکتپذیری و پخشپذیری، ثابت می‌کنیم که، به‌عنوان مثال اثر $S(TU)$ و $(ST)U$ روی یک عنصر دلخواه v

همانند است. گیریم $v \in V$، آنگاه:

$$[S(TU)](v) = S[(TU)(v)] = S\{T[U(v)]\}$$

همچنین:

$$[(ST)U](v) = ST[U(v)] = S\{T[U(v)]\}$$

به همین ترتیب:

$$\begin{aligned}[S(T+U)](v) &= S[(T+U)(v)] = S[T(v)+U(v)]\\ &= S[T(v)] + S[U(v)] = (ST+SU)(v)\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}[(S+T)U](v) &= (S+T)U(v) = S[U(v)] + T[U(v)]\\ &= (SU)(v) + (TU)(v) = (SU+TU)(v)\end{aligned}$$

خواص تبدیل همانی ۱ روشن است. به این ترتیب برهان قضیه پایان می‌یابد.

از آنچه گذشت مفهوم کلی زیر نتیجه می‌شود:

(۸.۱۱) تعریف. هر حلقهٔ $\mathcal{R}$ یک دستگاه ریاضی متشکل از یک مجموعهٔ $\mathcal{R} = \{a, b, \cdots\}$ و دو عمل جمع و ضرب تعریف شده روی آن است. هر یک از این دو عمل به هر جفت از عنصرهای a و b متعلق به $\mathcal{R}$ یک عنصر دیگر متعلق به $\mathcal{R}$ نسبت می‌دهد. این عنصر را در حالت جمع با $a+b$ و در مورد ضرب با ab نشان می‌دهیم. این دو عمل برای هر $a, b, c \in \mathcal{R}$ در شرطهای زیر صدق می‌کنند:

۱. $a + b = b + a$

۲. $(a+b)+c = a+(b+c)$

۳. یک عنصر $\circ \in \mathcal{R}$ و یک عنصر $\mathbf{1} \in \mathcal{R}$ وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر $a \in \mathcal{R}$ داریم $a + \circ = a$ و $a\mathbf{1} = \mathbf{1}a = a$

۴. برای هر $a \in \mathcal{R}$ یک عنصر $-a \in \mathcal{R}$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $a + (-a) = \circ$

۵. $(ab)c = a(bc)$

۶. $a(b+c) = ab + ac, (a+b)c = ac + bc$

۷. اگر قانون تعویضپذیری برای ضرب برقرار باشد(یعنی به‌ازای $a, b \in \mathcal{R}$، $ab = ba$) آنگاه $\mathcal{R}$را حلقهٔ تعویضپذیر می‌گویند.

هر هیأت یک حلقهٔ تعویضپذیر است، مجموعهٔ عددهای صحیح Z یک حلقهٔ تعویضپذیر تشکیل می‌دهند که هیأت نیست. در تمرینهای آخر این بخش، نشان داده خواهد شد که در حالت کلی تبدیلهای خطی $L(V,V)$ نسبت به ضرب دارای ویژگی تعویضپذیری نیستند

اکنون می‌توان قضیهٔ(۷.۱۱) را به‌صورت مختصرتری بیان کرد:

(۷'.۱۱) قضیه. $L(V,V)$ یک حلقه است.

لازم است درجهٔ صدق اصول حلقه در $L(V,V)$ را، وقتی اعضای آن تبدیلهای خطّی فرض می‌شوند، مورد بررسی قرار دهیم. برای اینکه این مسأله را به‌طور دقیقتری مطرح کنیم، گیریم $M(V,V)$ مجموعهٔ همهٔ تابعهای $T:V\to V$ باشد و $S+T$ و ST را همانند آنچه در مورد تبدیلهای خطی دیدیم تعریف می‌کنیم. به آسانی دیده می‌شود که همهٔ اصلهای حلقه در $M(V,V)$ صدق می‌کنند به استثنای قانون توزیعپذیری:

$$S(T+U)=ST+SU$$

که برای عنصرهای S، T و Uی متعلق به $M(V,V)$ برقرار نیست.

نگاشت $T:<\alpha,\beta>\to<\beta,۰>$ برای $\alpha,\beta\in R$ یک تبدیل خطی از $R_۲$ است به‌گونه‌ای که $T\neq ۰$ ولی $T^۲=۰$. برای هر T وارون $\hat{T}$ وجود ندارد به‌گونه‌ای که $T\hat{T}=۱$، زیرا از $T\hat{T}=۱$ نتیجه می‌شود:

$$T(T\hat{T})=T\cdot ۱=T$$

در حالی که به‌سبب خاصیت شرکتپذیری:

$$T(T\hat{T})=T^۲\hat{T}=۰\cdot\hat{T}=۰$$

که منجر به تناقص $T=۰$ می‌شود. به سبب این پدیده تعریف زیر لازم می‌آید:

(۹.۱۱) تعریف. تبدیل خطی $T\in L(V,V)$ را وارونپذیر (یاعادی) می‌نامیم هرگاه یک تبدیل خطی $T^{-۱}\in L(V,V)$ (به نام وارون T) وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که:

$$TT^{-۱}=T^{-۱}T=۱$$

همان‌گونه که در تمرینهای آخر این فصل خواهیم دید از $TU=۱$ همواره نتیجه نمی‌شود $UT=۱$، پس اگر T' وارون T باشد باید دو برابری $TT'=۱$ و $T'T=۱$ برقرار باشند.

بعضی از ویژگیهای تبدیلهای وارونپذیر از دید تعریف زیر بهتر تفهیم می‌گردد:

(۱۰.۱۱) تعریف. گروه دستگاهی است ریاضی متشکل از یک مجموعهٔ ناتهی G و یک عمل که به هردو عنصر S و T از G یک عنصر دیگر ST متعلق به G را تخصیص می‌دهد، به‌گونه‌ای که شرایط زیر برقرارند:

۱. $S,T,U \in G$ $(ST)U = S(TU)$

۲. یک عنصر $1 \in G$ وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر $S \in G$ داریم $S1 = 1S = S$

۳. برای هر $S \in G$ یک عنصر $S^{-1} \in G$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $SS^{-1} = S^{-1}S = 1$

(۱۱.۱۱) قضیه. گیریم G معرف مجموعهٔ تبدیلهای وارونپذیر متعلق به $L(V,V)$ باشد؛ در این صورت G نسبت به عمل ضرب که در (۵.۱۱) تعریف شده یک گروه است.

برهان. بنابر تعریف تبدیلهای خطی وارونپذیر و آنچه در مورد $L(V,V)$ ثابت شد، تنها لازم است ثابت کنیم که اگر $S,T \in G$، آنگاه $ST \in G$. داریم:

$$(ST)T^{-1}S^{-1} = S \cdot 1S^{-1} = 1$$
$$T^{-1}S^{-1}(ST) = T^{-1} \cdot 1T = 1$$

پس $ST \in G$ و $T^{-1}S^{-1}$ وارون ST است.

قضیهٔ بعدی در بارهٔ یکتایی T^{-1} در مورد گروههاست که در حالت کلی برقرار است.

(۱۲.۱۱) قضیه. اگر G یک گروه دلخواه باشد، آنگاه معادله‌های:

$$AX = B, XA = B$$

بترتیب دارای جوابهای یکتای $A^{-1}B$ و AB^{-1} هستند. به‌ویژه از $XA = 1$ نتیجه می‌شود $X = A^{-1}$. به همین ترتیب از $XA = 1$، نتیجه می‌شود $X = A^{-1}$.

برهان. داریم:

$$A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = 1B = B$$

و

$$(BA^{-1})A = B(A^{-1}A) = B \cdot 1 = B$$

این رابطه‌ها نشان می‌دهند که جواب معادله‌ها وجود دارند. برای اثبات یکتایی، فرض می‌کنیم $AX' = B$ در این صورت $A^{-1}(AX') = A^{-1}B$ و چون:

$$A^{-1}(AX') = (A^{-1}A)X' = 1 \cdot X' = X'$$

پس $X' = A^{-1}B$. به همین ترتیب از $X'A = B$ نتیجه می‌شود $X' = BA^{-1}$. به این ترتیب برهان قضیه کامل می‌گردد.

در فصل بعد مثالهای مهم دیگری از گروه را خواهیم دید.

اکنون به‌ذکر روشی برای آزمون وارونپذیر بودن یک تبدیل خطی می‌پردازیم.

(۱۳.۱۱) قضیه. شرط لازم و کافی برای وارونپذیر بودن تبدیل $T \in L(V,V)$ این است که T یک‌به‌یک و پوشا باشد.

برهان. نخست فرض می‌کنیم T وارونپذیر است. در این صورت یک تبدیل خطی $T^{-۱}$ وجود دارد به‌گونه‌ای که:

$$TT^{-۱} = T^{-۱}T = ۱$$

اکنون فرض می‌کنیم برای $v_۱, v_۲ \in V$، $T(v_۱) = T(v_۲)$. از اینجا نتیجه می‌شود که:

$$T^{-۱}(T(v_۱)) = T^{-۱}(T(v_۲))$$

در نتیجه $v_۱ = v_۲$ زیرا $T^{-۱}T = ۱$. پس ثابت شد که T یک‌به‌یک است. برای اثبات پوشا بودن T، گیریم $v \in V$. در این صورت:

$$v = ۱(v) = (TT^{-۱})v = T(T^{-۱}(v))$$

پس $v = T(u)$، که در آن $u = T^{-۱}(v)$. بنابراین T پوشاست.

به‌عکس فرض می‌کنیم T یک‌به‌یک و پوشاست. می‌خواهیم نشان دهیم که T وارونپذیر است، برای این منظور باید یک تبدیل خطی $T^{-۱}$ تعریف کنیم. گیریم $v \in V$ چون T پوشاست، یک‌بردار $w \in V$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $T(w) = v$، و چون T یک‌به‌یک است پس‌بردار w یکتاست. لذا یک تابع $T^{-۱} : V \to V$ باقاعدهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$T^{-۱}(v) = w$$

که در آن $T(w) = v$. نخست باید نشان دهیم که $T^{-۱}$ یک تبدیل خطی است. گیریم $v_۱, v_۲ \in V$، و بردارهای $w_۱$،$w_۲$ را چنان می‌یابیم که:

$$T(w_۱) = v_۱, T(w_۲) = v_۲$$

چون T خطی است، پس:

$$T(w_۱ + w_۲) = v_۱ + v_۲$$

پس بنابر تعریف $T^{-۱}$:

$$T^{-۱}(v_۱ + v_۲) = w_۱ + w_۲ = T^{-۱}(v_۱) + T^{-۱}(v_۲)$$

به همین ترتیب،گیریم $T(w) = v$ و $\alpha \in F$. در این صورت $T(\alpha w) = \alpha T(w) = \alpha v$ و داریم:

$$T^{-1}(\alpha v) = \alpha w = \alpha T^{-1}(v)$$

به این ترتیب ثابت شد که $T^{-1} \in L(V,V)$. سرانجام برای تحقیق $TT^{-1} = T^{-1}T = 1$، به‌ازای $v \in V$ یک عنصر w وجود دارد به‌گونه‌ای که $T(w) = v$:

$$TT^{-1}(v) = T(w) = v = 1v$$

و

$$T^{-1}T(w) = T^{-1}(v) = w = 1w$$

چون این رابطه‌ها برای همهٔ بردارهای v و w برقرار است پس نتیجه می‌گیریم که T وارونپذیر است و قضیه ثابت می‌شود.

(۱۴.۱۱) تعریف. تبدیل خطی $T : V \to W$ را یک یکریختی می‌نامند هرگاه T نگاشتی یک‌به‌یک از V روی W باشد. اگر یک یکریختی $T : V \to W$ وجود داشته باشد، دو فضای برداری V و W را یکریخت می‌گویند.

اگر دو فضای برداری یکریخت باشند، ساختار این دو به عنوان فضای برداری یکی است و هر حقیقتی دربارهٔ یکی از دو فضا را می‌توان به حقیقتی دربارهٔ دیگری منتقل کرد. در حقیقت این دلیل اصلی به‌کار بردن کلمهٔ «یکریخت» است. به عنوان مثال، اگر بعد یک فضا ۵ باشد بعد دیگری نیز ۵ است، زیرا یکریختی موجود بین آنها هر پایهٔ یکی را به یک پایهٔ دیگری می‌برد. در حالتی که یک یکریختی $T : V \to W$ وجود داشته باشدیکریختیهای گوناگون دیگری نیز وجود دارند که با T متفاوت‌اند، و در انتقال ویژگیهای V به W باید نشان دهیم که کدام یکریختی مورد استفاده قرار گرفته است.

مثال ث. فرض کنیم V روی R یک فضای برداری سه بعدی باشد. ثابت می‌کنیم که یک یکریختی $T : V \to R_3$ وجود دارد. چون $\dim V = 3$، پس V دارای یک پایهٔ $\{v_1, v_2, v_3\}$ است. در این صورت هر بردار $v \in V$ را می‌توان با ضریبهای $\alpha_i \in R$ به‌شکل:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$$

نوشت. چون $\{v_1, v_2, v_3\}$ به‌طور خطی نابسته‌اند، ضریبهای $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ به‌طور یکتا با بردار v تعیین می‌شوند (چرا؟) بنابراین،قاعدهٔ:

$$T(v) = < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 >$$

معرّف یک تابع $T : V \to R_3$ است. باید نشان دهیم که T خطی، یک‌به‌یک و پوشاست. گیریم v به‌شکل بالا داده شده است و $\alpha \in R$. در این صورت:

$$\alpha v = \alpha(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3) = \alpha\alpha_1 v_1 + \alpha\alpha_2 v_2 + \alpha\alpha_3 v_3$$

بنابراین:

$$T(\alpha v) = <\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2, \alpha\alpha_3> = \alpha <\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3> = \alpha T(v)$$

به همین ترتیب $T(v+v') = T(v) + T(v')$، زیرا ضریبهای $v+v'$ نسبت به پایهٔ داده شده به ترتیب مجموع ضریبهای v و v' هستند. چون هر بردار V یک ترکیب خطی از $\{v_1, v_2, v_3\}$ است، پس T پوشاست. سرانجام، فرض کنیم $T(v) = T(v') = <\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3>$. در این صورت $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = v'$، و T یک‌به‌یک است.

البته، مطلب خاصی دربارهٔ بعد ۳ وجود ندارد، با همان استدلال ثابت می‌شود که هر فضای برداری n بعدی روی R با R_n یکریخت است.

مثال ج. گیریم T و U تبدیلهای خطی $R_2 \to R_2$ هستند که با دستگاههای معادله‌های زیر تعریف شده‌اند:

$$T: \begin{aligned} y_1 &= -x_1 + 2x_2 \\ y_2 &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad U: \begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_1 \end{aligned}$$

دستگاههای معادله‌هایی را که $T+U$ و TU را تعریف می‌کنند پیدا کنید.

داریم

$$T(<\alpha_1, \alpha_2>) = <-\alpha_1 + 2\alpha_2, 0>$$

و

$$U(<\beta_1, \beta_2>) = <\beta_1, \beta_1>$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}(T+U)(<\alpha_1, \alpha_2>) &= T<\alpha_1, \alpha_2> + U<\alpha_1, \alpha_2> \\ &= <-\alpha_1 + 2\alpha_2, 0> + <\alpha_1, \alpha_1> \\ &= <2\alpha_2, \alpha_1>\end{aligned}$$

بنابراین دستگاه معادله‌هایی که $T+U$ را تعریف می‌کنند چنین هستند:

$$y_1 = 2x_2$$

$$y_2 = x_1$$

برای یافتن TU داریم:

$$TU < \alpha_1, \alpha_2 > = T(U < \alpha_1, \alpha_2 >) = T < \alpha_1, \alpha_1 >$$
$$=< -\alpha_1 + 2\alpha_1, 0 >=< \alpha_1, 0 >$$

و دستگاه معادله‌هایی که TU را تعریف می‌کنند عبارت‌اند از:

$$y_1 = x_1$$
$$y_2 = 0$$

مثال چ. ثابت کنید برای این که تبدیل خطی T که با دستگاه معادله‌های:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \ , \ \ i = 1, \cdots, m$$

تعریف می‌شود یک‌به‌یک باشد، لازم و کافی است که دستگاه همگن

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = 0 \ , \ \ i = 1, \cdots, m$$

تنها دارای جواب صفر باشد.

نخست فرض می‌کنیم که تبدیل خطی T یک‌به‌یک است. در این صورت $T(0) = 0$ و اگر $v =< \alpha_1, \cdots, \alpha_n >$ یک جواب دستگاه همگن باشد، آنگاه $T(v) = 0$. چون T یک‌به‌یک است، پس $v = 0$ تنها جواب دستگاه همگن است. به وارون فرض کنیم که دستگاه همگن تنها دارای جواب صفر است و گیریم $T(v) = T(v')$، که در آن:

$$v =< \alpha_1, \cdots, \alpha_n >, v' =< \alpha'_1, \cdots, \alpha'_n >$$

در این صورت $v - v'$ جواب دستگاه همگن است و $v - v' = 0$.

مثال ح. تحقیق کنید که تبدیل خطی $T : R_3 \to R_2$ که با دستگاه معادله‌های

$$y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$y_2 = x_1 + x_3$$

داده شده است یک‌به‌یک هست یا نیست.

بعد فضای جواب دستگاه همگن:

$$x_۱ - ۲x_۲ + x_۳ = ۰$$
$$x_۱ + x_۳ = ۰$$

برابر است با تفاضل ۳ و رتبهٔ $(\mathbf{A})$، که در آن $\mathbf{A}$ ماتریس ضریبهاست. چون رتبهٔ $\mathbf{A}$ برابر ۲ است، پس بعد فضای جواب یک است، در نتیجه دستگاه همگن دارای جواب ناصفر است. پس T یک‌به‌یک نیست.

مثال خ. تبدیل خطی $T : R_n \to R_m$ را که با دستگاه معادله‌های:

$$y_i = \sum_{j=۱}^{n} \alpha_{ij} x_j, \quad i = ۱, \cdots, m$$

تعریف شده است در نظر می‌گیریم. نشان دهید که $w \in R_m$ نگارهٔ $T(v)$ی یک بردار $v \in R_n$ است اگر و تنها اگر w ترکیبی خطی از بردارهای ستونی ماتریس دستگاه باشد.

در فصل ۲ نشان دادیم که اگر $w =< y_۱, \cdots, y_n >$، می‌توان دستگاه معادله‌ها را به شکل زیر نوشت:

$$w = x_۱ c_۱ + \cdots + x_n c_n$$

که در آن $c_۱$، ...، c_n بردارهای ستونی دستگاه هستند. همین حکم مسأله را حل می‌کند.

مثال د. تحقیق کنید که تبدیل مثال (ح) پوشاست یا نه.

بنابرآنچه که در مثال (خ) دیدیم T تنها هنگامی پوشاست که هر بردار $R_۲$ یک ترکیب خطی از بردارهای ستونی ماتریس زیر باشد:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ۱ & -۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

و در این مثال چنین است، زیرا رتبهٔ $\mathbf{A}$ برابر ۲ است، پس تبدیل پوشاست.

تمرینها

۱. در نگاشتهای زیر از $R_۲ \to R_۲$، کدامها تبدیلهای خطی هستند:

الف) $< x_۱, x_۲ > \to < y_۱, y_۲ >$ که در آن $y_۱ = ۳x_۱ - x_۲ + ۱$ و $y_۲ = -x_۱ + ۲x_۲$

ب) $< x_۱, x_۲ > \to < y_۱, y_۲ >$ که در آن $y_۱ = ۳x_۱ + x_۲^۲$ و $y_۲ = -x_۱$

پ) $\langle x_1, x_2 \rangle \to \langle x_2, x_1 \rangle$

ت) $\langle x_1, x_2 \rangle \to \langle x_1 + x_2, x_2 \rangle$

ث) $\langle x_1, x_2 \rangle \to \langle 2x_1, x_2 \rangle$

۲.نشان دهید که تابع $T : F_n \to F_m$، مذکور در مثال (ب) یک تبدیل خطی است.

۳.گیریم T یک تبدیل خطی از $F_2 \to F_2$ است که با دستگاه:

$$\begin{aligned} y_1 &= -3x_1 + x_2 \\ y_2 &= x_1 - x_2 \end{aligned}$$

تعریف شده است و U تبدیلی خطی که با دستگاه:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 \\ y_2 &= x_1 \end{aligned}$$

تعریف شده است. دستگاه معادله‌های خطیی را که تبدیلهای

$$2T, T - U, T^2, TU, UT, T^2 + 2U$$

را تعریف می‌کنند بیابید: آیا تساوی $TU = UT$ برقرار است؟

۴.گیریم D تبدیلی است خطی از تابعهای چند جمله‌یی $P[R]$ که با «$Df = f$ مشتق» تعریف شده است، و M نگاشتی از $P[R] \to P[R]$ که با $(Mf)(x) = xf(x)$ تعریف شده است. آیا M روی $P[R]$ یک تبدیل خطی است؟ تبدیل‌های $M + D$، DM و MD را بیابید. آیا تساوی $MD = DM$ برقرار است؟

۵.گیریم T یک تبدیل خطی از V به W است. ثابت کنید $T(0) = 0$ و برای هر $v \in V$، $T(-v) = -T(v)$. اگر V_1 یک زیر فضای V باشد، ثابت کنید $T(V_1)$، که متشکل از همهٔ بردارهای $\{Ts, s \in V_1\}$است یک زیر فضای W است.

۶.با استفاده از روشهای مثالهای (چ) و(ح)، تبدیلهای خطیی را که با دستگاه معادله‌های زیر تعریف شده‌اند برای یک‌به‌یک بودن بیازمایید:

الف) $$\begin{aligned} y_1 &= 3x_1 - x_2 \\ y_2 &= x_1 + x_2 \end{aligned}$$

ب) $$\begin{aligned} y_1 &= 3x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 &= -x_1 + 2x_3 \end{aligned}$$

پ) $$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2x_2 \\ y_2 &= x_1 - x_2 \\ y_3 &= -2x_1 \end{aligned}$$

ت) $$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - x_3 \\ y_2 &= x_1 + x_3 \\ y_3 &= -x_1 - 3x_2 - 2x_3 \end{aligned}$$

ث) $$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2x_2 + x_3 \\ y_2 &= x_1 + x_2 \\ y_3 &= x_2 + x_3 \end{aligned}$$

۷. با استفاده از مثال (خ)، ثابت کنید هر تبدیل خطی که با یک دستگاه از معادله‌های خطی تعریف شده است R_n را به R_m می‌برد اگر وتنها اگر، رتبهٔ ماتریس ضریبهای دستگاه برابر m باشد.

۸. با استفاده از مثال (خ)، تبدیلهای خطی تمرین ۶ را بیازمایید و تعیین کنید کدام یک R_n را برروی R_m می‌نگارد.

۹. گیریم T یک تبدیل خطی از R_n به R_n است که با دستگاه معادله‌های:

$$y_i = \sum_{j=۱}^{n} \alpha_{ij} x_j, i = ۱, ۲, \cdots, n$$

تعریف شده است. ثابت کنید که احکام زیر در مورد T هم‌ارزند:

الف) T یک‌به‌یک است.

ب) T پوشاست.

پ) T یک یکریختی از F_n روی F_n است.

ت) T یک تبدیل خطی وارونپذیر است.

۱۰. گیریم I یک تبدیل خطی از $P[R] \to P[R]$ است که با:

$$I(f) = \alpha_۰ x + \frac{\alpha_۱ x^۲}{۲} + \cdots + \frac{\alpha_k x^{k+۱}}{k+۱}$$

تعریف شده است که در آن $f(x) = \alpha_۰ + \alpha_۱ x + \cdots + \alpha_k x^k$ یک تابع چند جمله‌یی است. گیریم D عمل مشتق‌گیری در $P[R]$ است. نشان دهید که $DI = ۱$ ولی D و I هیچ یک یکریختی نیستند. آیا D یک‌به‌یک است؟ پوشاست؟ I چطور؟

۱۲. جمع و ضرب ماتریسها

در بخش ۱۱، عملهای جمع، ضرب در یک اسکالر و ضرب تبدیلهای خطی را تعریف کردیم. در این بخش همین عملها را در مورد ماتریسها تعریف می‌کنیم. در بخش ۱۳ رابطهٔ بین تبدیلهای خطی فضاهای برداری دلخواه متناهی-بعد و ماتریسها را خواهیم دید. بخش ۱۲ مقدمه‌ای است بر بخش ۱۳.

در بدو امر تعریف عملهای فضای برداری روی ماتریسها اشکالی ندارد زیرا هر ماتریس $m \times n$ بعدی را به عنوان یک $m \cdot n$تایی در نظر می‌گیریم.

(۱.۱۲) تعریف. گیریم $\mathbf{A} = (\alpha_{ij})$ و $\mathbf{B} = (\beta_{ij})$ دو ماتریس $m \times n$ بعدی باشند که ضریبهای آنها به F تعلق دارند. مجموع $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ مطابق تعریف، عبارت است از یک ماتریس $m \times n$ که عنصر (i, j)ام آن $\alpha_{ij} + \beta_{ij}$ است. اگر $\alpha \in F$، αA یک ماتریس $m \times n$ است که عنصر (i, j)ام آن $\alpha \alpha_{ij}$ است.

اکنون می‌توان قضیه زیر رابیان کرد:

(۲.۱۲) قضیه. مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $m \times n$ که عنصرهایشان به F تعلق دارند نسبت به عملهای مذکور در تعریف (۱.۱۲) روی F یک فضای برداری تشکیل می‌دهند.

برهان این قضیه همانند برهانی است که در مورد فضای برداری بودن F_n انجام شد، به این سبب از تکرار آن خودداری می‌شود.

تعریف ضرب ماتریسها چندان ساده نیست. برای شروع، مسأله‌ای همانند آنچه در مسأله‌های بخش ۱۱ دیدیم در نظر می‌گیریم.

گیریم $T : R_2 \to R_3$ تبدیل خطی:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= x_1 + x_2 \\
y_2 &= -x_1 + x_2 \\
y_3 &= x_1
\end{aligned}
\qquad (3.12)
$$

و $U : R_3 \to R_3$ تبدیل خطی:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -x_1 + x_3 \\
y_2 &= x_1 + x_2 \\
y_3 &= -x_1 + 2x_3
\end{aligned}
$$

است. ماتریسهای مربوط به این تبدیلها عبارت‌اند از:

$$
T \leftrightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, U \leftrightarrow \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}
$$

تبدیل خطی UT، R_2 را در R_3 می‌نگارد. دستگاه معادله‌هایی که آن را تعریف می‌کنند در نظر می‌گیریم.

اگر:

$$T(x) = y, \;\; U(y) = z$$

آنگاه

$$UT(x) = U(y) = z$$

دستگاه مربوط به U که $\{z_1, z_2, z_3\} \to \{y_1, y_2, y_3\}$ می‌برد عبارت است از:

$$
U : \begin{aligned}
z_1 &= -y_1 + y_3 \\
z_2 &= y_1 + y_2 \\
z_3 &= -y_1 + 2y_3
\end{aligned}
\qquad (4.12)
$$

اکنون به جای $\{y_1, y_2, y_3\}$ مقدارش را از (۳.۱۲) قرار می‌دهیم و دستگاه زیر را که مربوط به UT است به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} z_1 &= -(x_1 + x_2) + x_1 = -x_2 \\ z_2 &= (x_1 + x_2) + (-x_1 + x_2) = 2x_2 \\ z_3 &= -(x_1 + x_2) + 2x_1 = x_1 - x_2 \end{aligned} \qquad (5.12)$$

که مربوط است به ماتریس:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

تعریف حاصلضرب ماتریسهای $\mathbf{B}$ و $\mathbf{A}$ با ماتریس $\mathbf{C}$ یک امر طبیعی است. در این صورت حاصلضرب UTی تبدیلهای خطی، مربوط به حاصلضرب $\mathbf{BA}$ی ماتریسهای متناظر با آنهاست.

برای دست یافتن به چگونگی تشکیل حاصلضرب $\mathbf{C} = \mathbf{BA}$، معادله‌های (۳.۱۲) و (۴.۱۲) را به ترتیب به‌شکل زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 \\ y_2 &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 \\ y_3 &= \alpha_{31}x_1 = \alpha_{32}x_2 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} z_1 &= \beta_{11}y_1 + \beta_{12}y_2 + \beta_{13}y_3 \\ z_2 &= \beta_{21}y_1 + \beta_{22}y_2 + \beta_{23}y_3 \\ z_3 &= \beta_{31}y_1 + \beta_{32}y_2 + \beta_{33}y_3 \end{aligned}$$

در این صورت (۵.۱۲) چنین نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} z_1 &= \beta_{11}(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2) + \beta_{12}(\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2) + \beta_{13}(\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2) \\ z_2 &= \beta_{21}(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2) + \beta_{22}(\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2) + \beta_{23}(\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2) \\ z_3 &= \beta_{31}(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2) + \beta_{32}(\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2) + \beta_{33}(\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2) \end{aligned}$$

درایهٔ (۱،۱)ام ماتریس حاصلضرب $\mathbf{BA}$ چنین به‌دست می‌آید که عناصر سطر نخست $\mathbf{B}$ و عناصر ستون نخست $\mathbf{A}$ را نظیر به نظیر درهم ضرب می‌کنیم و نتیجه‌ها را با هم جمع می‌کنیم. سایر درایه‌ها نیز با روش مشابهی به‌دست آمده‌اند.

اینک تعریف رسمی حاصلضرب:

(۶.۱۲) تعریف. گیریم $\mathbf{B} = (\beta_{ij})$ یک ماتریس $q \times n$ (q سطر و n ستون) و $\mathbf{A} = (\alpha_{kl})$ یک ماتریس $n \times m$ باشد که عنصرهای هر دو به F تعلق دارند. در این صورت حاصلضرب $\mathbf{C} = \mathbf{BA}$ یک ماتریس $q \times m$ است که درایهٔ (i, j)ام آن γ_{ij} برابر است با:

$$\gamma_{ij} = \beta_{i1}\alpha_{1j} + \cdots + \beta_{in}\alpha_{nm} = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik}\alpha_{kj}$$

$1 \leq i \leq q$، $1 \leq j \leq m$. به‌طور کلی ضرب یک ماتریس $q \times r$ی $\mathbf{B}$ در یک ماتریس $s \times t$ی $\mathbf{A}$ تنها هنگامی تعریف شده است که $r = s$، و در این حالت نتیجه یک ماتریس $q \times t$ی $\mathbf{BA}$ است که طبق قاعده‌ای که گفته شد به‌دست می‌آید.

عمل ضرب دو ماتریس بسیار ساده‌تر است از آنچه در تعریف آن گفته شد.

برای تعیین حاصلضرب دو ماتریس یعنی $\mathbf{BA}$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱. باید شمارهٔ ستونهای $\mathbf{B}$ با شمارهٔ سطرهای $\mathbf{A}$ برابر باشد، در غیر این صورت حاصلضرب $\mathbf{BA}$ تعریف نشده است.

۲. به فرض این‌که (۱) برقرار باشد، شمارهٔ سطرهای $\mathbf{BA}$ برابر شمارهٔ سطرهای $\mathbf{B}$ و شمارهٔ ستونهای آن برابر شمارهٔ ستونهای $\mathbf{A}$ خواهد بود. برای یافتن درایهٔ واقع در سطر اول و ستون اول ماتریس $\mathbf{BA}$، عناصر سطر اول $\mathbf{B}$ را نظیر به نظیر در عناصر ستون اول $\mathbf{A}$ ضرب می‌کنیم و نتیجه‌ها را جمع می‌کنیم. (این همان قاعده‌ای است که در تعریف بیان شد). برای یافتن درایهٔ واقع در سطر اول و ستون دوم $\mathbf{BA}$، عناصر سطر اول $\mathbf{B}$ را نظیر به نظیر در عناصر ستون دوم $\mathbf{A}$ ضرب می‌کنیم و نتیجه‌ها را جمع می‌کنیم. به‌طور کلی، برای یافتن درایهٔ واقع در سطر iام و ستون jام $\mathbf{BA}$، عناصر سطر iام $\mathbf{B}$ را نظیر به‌نظیر در عناصر ستون jام $\mathbf{A}$ ضرب می‌کنیم و نتیجه‌ها را جمع می‌کنیم.

مثال الف. حاصلضرب ماتریسهای زیر را بیابید:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} \end{pmatrix} \qquad \text{(i)}$$

که درآن

$$\gamma_{۱۱} = (-۱,\ ۰,\ ۱)\begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۱ \end{pmatrix} = ۰$$

$$\gamma_{۱۲} = (-۱,\ ۰,\ ۱)\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} = -۱$$

$$\gamma_{۲۱} = (۱,\ ۱,\ ۱)\begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۱ \end{pmatrix} = ۱$$

$$\gamma_{۲۲} = (۱,\ ۱,\ ۱)\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} = ۲$$

و غیره. به عنوان مثال، به‌جای ضرب نظیر به‌نظیر عناصر و جمع آنها نوشته‌ایم:

$$(۱, ۱, ۱)\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

بنابراین:

$$(۱, ۱, ۱)\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} = ۱\cdot ۱ + ۱\cdot ۱ + ۱\cdot ۰ = ۲$$

در زیر چند مثال دیگر می‌آوریم:

(ii) $\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۲ \end{pmatrix}$ تعریف نشده است

(iii) $\begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}$

$$(۱, -۱)\begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix} = (۲, ۲) \qquad \text{(iv)}$$

قضیهٔ بعدی شاید مفیدترین قضیه دربارهٔ ضرب ماتریسها باشد.

(۷.۱۲) قضیه. ضرب ماتریسها دارای ویژگی شرکتپذیری است. به‌طور دقیق‌تر، گیریم $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ ماتریسهایی باشند که عناصرشان به F تعلق دارد، و فرض می‌کنیم که ضربهای $\mathbf{AB}$ و $\mathbf{BC}$ تعریف شده‌اند. دراین صورت ضربهای $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ و $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ تعریف شده‌اند، و داریم:

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

برهان. گیریم $\mathbf{A} = (\alpha_{\mathbf{ij}})$ یک ماتریس $m \times n$ و $\mathbf{B} = (\beta_{ij})$ یک ماتریس $n \times p$ و $\mathbf{C} = (\gamma_{ij})$ یک ماتریس $p \times q$ باشد. پس درایهٔ (i, j)ام ماتریس $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ برابر است با $\sum\limits_{s=۱}^{p}(\sum\limits_{r=۱}^{n} \alpha_{ir}\beta_{rs})\gamma_{sj}$. درایهٔ (i, j)ام $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ برابر است با $\sum\limits_{t=۱}^{n} \alpha_{it}(\sum\limits_{u=۱}^{p} \beta_{tu}\gamma_{uj})$ و بررسی برابری آنها دشوار نیست.

بااستفاده از ضرب ماتریسها می‌توان دستگاه معادله‌ها را به‌شکل دیگری نوشت. برای مثال می‌توان دستگاه:

$$\begin{aligned} ۲x_۱ - x_۲ &= ۱ \\ x_۱ + x_۲ &= ۰ \end{aligned}$$

را به‌شکل زیر نوشت:

$$\begin{pmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

به‌طور کلی هر دستگاه:

$$\begin{aligned} \alpha_{۱۱}x_۱ + \cdots + \alpha_{۱n}x_n &= \beta_۱ \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{m۱}x_m + \cdots + \alpha_{mn}x_n &= \beta_m \end{aligned} \qquad (۸.۱۲)$$

از m معادلهٔ n مجهولی را می‌توان به‌شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$\mathbf{A}x = b$$

که در آن $\mathbf{A} = (\alpha_{ij})$، و:

$$x = \begin{pmatrix} x_۱ \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \beta_۱ \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

تبدیل خطی را که با (۸.۱۲) تعریف شده است می‌توان به‌شکل:

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \qquad (۹.۱۲)$$

بیان کرد. که در آن $\mathbf{x}$ بردار ستونی با درایه‌های $x_۱$،$\cdots$،x_n است که به عنوان یک ماتریس $n \times ۱$ در نظر گرفته می‌شود و $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ نمایش ضرب ماتریسی است.

با توجه به آنچه گذشت کار با تبدیلهای خطی که با دستگاه معادله‌ها تعریف می‌شوند آسانتر می‌گردد.

مثال ب. گیریم $T : R_n \to R_m$ تبدیل خطی است که با دستگاه معادله‌های (۸.۱۲) تعریف شده است و ماتریس ضریبهای آن $\mathbf{A}$ است، فرض می‌کنیم $U : R_m \to R_p$ با دستگاه معادله‌های دیگری تعریف شده است که ماتریس ضریبهای آن $\mathbf{B}$ است. در این صورت تبدیل خطی $UT : R_n \to R_p$ را می‌توان با استفاده از (۹.۱۲) به شرح زیر حساب کرد. گیریم $\mathbf{x}$ بردار ستونی نمایانگر یک عنصر R_n است. در این صورت:

$$UT(\mathbf{x}) = U(T(\mathbf{x})) = U(\mathbf{Ax}) = \mathbf{B}(\mathbf{Ax})$$

که در آن همهٔ ضربهای سمت راست ضربهای ماتریسی هستند. بنابر قانون شرکتپذیری ضرب ماتریسی داریم:

$$UT(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{Ax}) = (\mathbf{BA})\mathbf{x}$$

که نشان می‌دهد حاصلضرب دو تبدیل خطی با دستگاه معادله‌هایی تعریف می‌شود که ماتریس ضریبهای آن حاصلضرب ماتریسهای ضریبهای متناظر دو تبدیل خطی (به‌همان ترتیب) است.

به‌عنوان یک مثال عددی گیریم T و U با دستگاه معادله‌های زیر تعریف شده‌اند:

$$T: \begin{array}{l} y_۱ = ۳x_۱ - x_۲ \\ y_۲ = -x_۱ + x_۲ \end{array} \qquad U: \begin{array}{l} y_۲ = -x_۱ - x_۲ \\ y_۲ = x_۱ \end{array}$$

در این صورت به فرض $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ داریم:

$$T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$UT(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

پس دستگاه معادله‌هایی که UT را تعریف می‌کنند عبارت‌اند از:

$$y_1 = -2x_1$$
$$y_2 = 3x_1 - x_2$$

در بقیهٔ این بخش چند کاربرد دیگر ضرب ماتریس‌ها را بیان می‌کنیم.

(۱۰.۱۲) **تعریف.** ماتریس یکهٔ $n \times n$ عبارت است از ماتریس:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

که همهٔ عناصر آن صفرند به‌جز عناصر $(1,1)$،$(2,2)$، $\dots$،(n,n) که برابر ۱ می‌باشند به آسانی دیده می‌شود که برای هر ماتریس $n \times n$ داریم:

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$$

یک‌ماتریس $\mathbf{A}$ی $n \times n$ را وارونپذیر می‌گویند هرگاه یک ماتریس $\mathbf{B}$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$.

با استفاده از قانون شرکتپذیری ضرب ماتریسها، و به‌کار بردن برهان قضیهٔ (۱۲.۱۱) نکته‌به‌نکته در مورد ماتریسها می‌توان نشان داد که اگر $\mathbf{A}$ وارونپذیر باشد، در این صورت ماتریس $\mathbf{B}$ به‌گونه‌ای که $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ یکتاست. $\mathbf{B}$ را وارون $\mathbf{A}$ می‌نامیم و با $\mathbf{A}^{-1}$ نشان می‌دهیم. اکنون می‌خواهیم روش محاسبهٔ $\mathbf{A}^{-1}$ را بررسی کنیم.

مثال پ. یافتن وارون یک ماتریس با استفاده از عملهای مقدماتی سطری. در زیر از گفتن جزئیات کامل چشم‌پوشی شده است.

گیریم $\mathbf{I}$ ماتریس یکهٔ $n \times n$ باشد. یک ماتریس مقدماتی را به‌یکی از شکلهای $\mathbf{P}_{ij}$، $\mathbf{B}_{ij}(\lambda)$،$\mathbf{D}_i(\mu)$، $i, j = ۱, \cdots, n$ نشان می‌دهیم که در آن $\lambda, \mu \in F$. این ماتریسها به‌شکل زیر تعریف می‌شوند:

۱. $\mathbf{P}_{ij}$ از $\mathbf{I}$ با تعویض سطرهای iام و jام به‌دست می‌آید.

۲. $\mathbf{B}_{ij}(\lambda)$ از I با افزودن λ برابر سطر jام به سطر iام آن به‌دست می‌آید.

۳. $\mathbf{D}_i(\mu)$ با ضرب سطر iام I در μ به‌دست می‌آید.

برای مثال، در مجموعهٔ ماتریسهای ۲ × ۲ داریم:

$$\mathbf{P}_{۱۲} = ۱\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}, \mathbf{B}_{۱۲}(\lambda) = \begin{pmatrix} ۱ & \lambda \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \mathbf{D}_۲(\mu) = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & \mu \end{pmatrix}$$

اکنون گیریم $\mathbf{A}$ یک ماتریس دلخواه $n \times n$ است.

۱. $\mathbf{P}_{ij}\mathbf{A}$ با تعویض سطرهای iام و jام $\mathbf{A}$ به‌دست می‌آید.

۲. $\mathbf{B}_{ij}(\lambda)\mathbf{A}$ با افزودن λ برابر سطر jام $\mathbf{A}$ به‌سطر iام آن به‌دست می‌آید.

۳. $\mathbf{D}_i(\mu)\mathbf{A}$ از ضرب سطر iام $\mathbf{A}$ در μ به‌دست می‌آید.

همانند فصل ۲ عملهای روی $\mathbf{A}$ که در بالا بیان شدند، عملهای مقدماتی نام دارند و می‌توان آنها را به ترتیب به عنوان عملهای نوع ۱، ۲، و ۳ نامید.

اکنون گیریم $\mathbf{A}$ یک ماتریس دلخواه $n \times n$ است. بنابه قضیهٔ (۱۶.۶) یک دنباله از عملهای مقدماتی نوع ۱، ۲ و ۳ وجود دارند که $\mathbf{A}$ را به ماتریسی به صورت نردبانی تبدیل می‌کنند، و شمارهٔ سطرهای ناصفر آن برابر رتبهٔ $\mathbf{A}$ است.

اکنون گیریم $\mathbf{A}$ وارون‌پذیر است. دراین صورت از $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = ۰$ نتیجه می‌شود $\mathbf{x} = ۰$. پس بعد فضای جواب دستگاه معادله‌های همگن با ماتریس ضریبهای $\mathbf{A}$ برابر صفر است. بنابر نتیجهٔ (۴.۹)، رتبهٔ $\mathbf{A}$ برابر n است. بنابراین ماتریسی که سطرهای آن به‌شکل پلّه‌یی است و در بخش اول استدلال یافتیم به‌شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{۱۱} & \alpha_{۱۲} & \cdots & \alpha_{۱n} \\ ۰ & \alpha_{۲۲} & \cdots & \alpha_{۲n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ۰ & ۰ & ۰۰ & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

که در آن $\alpha_{۱۱}$، $\cdots$، α_{nn} ناصفرند. با به‌کار بردن عملهای مقدماتی نوع ۳ می‌توان فرض کرد که همهٔ $\alpha_{۱۱}$، $\cdots$، α_{nn} برابر یک هستند. در این صورت با افزودن مضرب مناسبی از سطر دوم به‌سطر

اول، می‌توان بدون تعویض $\alpha_{۱۱}$، مقدار $\alpha_{۱۲}$ را به‌صفر تبدیل کرد. همین‌طور، می‌توان با افزودن مضربهایی از سطر سوم به سطرهای اول و دوم، $\alpha_{۱۳}$ و $\alpha_{۲۳}$ را به ۰ تبدیل کرد، بدون این‌که $\alpha_{۱۱}$ یا $\alpha_{۲۲}$ تعویض یابد. با ادامهٔ این روش، $\mathbf{A}$ به ماتریس یکه تبدیل می‌گردد.

بحث بالا نشان می‌دهد که ماتریسهای مقدماتی $\mathbf{E}_۱$،$\cdots$،$\mathbf{E}_s$ از نوعهای ۱،۲و۳ وجود دارند به‌گونه‌ای که:

$$\mathbf{E}_s\mathbf{E}_{s-۱}\cdots\mathbf{E}_۱\mathbf{A}=\mathbf{I}$$

به سبب یکتایی وارون یک ماتریس:

$$\mathbf{A}^{-۱}=\mathbf{E}_s\mathbf{E}_{s-۱}\cdots\mathbf{E}_۱\mathbf{I}$$

پس اگر عملهای مقدماتی که با $\mathbf{E}_۱$،$\cdots$،$\mathbf{E}_s$ تعریف می‌شوند $\mathbf{A}$ را به $\mathbf{I}$ تبدیل کنند، همین تبدیلهای مقدماتی که روی $\mathbf{I}$ انجام شوند آن را به $\mathbf{A}^{-۱}$ تبدیل می‌کنند.

به‌عنوان مثال عددی، وارونپذیری ماتریس زیر را تحقیق و وارون آن $\mathbf{A}^{-۱}$، را در صورت وجود می‌یابیم:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۰ \end{pmatrix}$$

این کار را در دو ستون انجام می‌دهیم؛ در ستون اوّل با تبدیل مقدماتی سطری، $\mathbf{A}$ را به ماتریس یکه تبدیل می‌کنیم، و در ستون دیگر همان عملهای مقدماتی را روی I انجام می‌دهیم:

$$\mathbf{A}\sim\begin{pmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & \frac{۳}{۲} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{I}\sim\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ -\frac{۳}{۲} & ۱ \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} ۱ & -\frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \qquad \sim\begin{pmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ \\ -۱ & \frac{۲}{۳} \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \qquad \sim\begin{pmatrix} ۰ & \frac{۱}{۳} \\ -۱ & \frac{۲}{۳} \end{pmatrix}$$

پس نتیجه می‌گیریم که:

$$\mathbf{A}^{-۱}=\begin{pmatrix} ۰ & \frac{۱}{۳} \\ -۱ & \frac{۲}{۳} \end{pmatrix}$$

از تعبیر ضرب ماتریسها برحسب دستگاه معادله‌ها، کاربرد ضرب ماتریسها در مشتق‌گیری جزئی نتیجه می‌گردد. این مطلب را در یک حالت خاص بیان می‌کنیم.

مثال ت. قاعدهٔ زنجیری مشتق‌گیری جزیی. گیریم $T : R_۲ \to R_۳$ تابعی باشد که اگر $x =< x_۱, x_۲ >$، آنگاه $T(x) = y =< y_۱, y_۲, y_۳ >$، که در آن:

$$y_۱ = F_۱(x_۱, x_۲),$$
$$y_۲ = F_۲(x_۱, x_۲),$$
$$y_۳ = F_۳(x_۱, x_۲)$$

و $F_۱$،$F_۲$،$F_۳$ توابعی هستند که مشتقهای جزیی

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$$

وجود دارند و در هر نقطهٔ x به‌ازای $۱ \leq j \leq ۲$ ،$۱ \leq i \leq ۳$ پیوسته‌اند.

ماتریس ژاکوبی تابع T در نقطهٔ x را به‌شکل ماتریس ۳×۲ زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{J}(T)_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_۱}{\partial x_۱} & \frac{\partial y_۱}{\partial x_۲} \\ \frac{\partial y_۲}{\partial x_۱} & \frac{\partial y_۲}{\partial x_۲} \\ \frac{\partial y_۳}{\partial x_۱} & \frac{\partial y_۳}{\partial x_۲} \end{pmatrix}_x$$

که در آن $(\cdot)_x$ نشان می‌دهد که مشتقها در x حساب شده‌اند. اکنون فرض کنیم تابع $U : R_۳ \to R_۳$ به‌گونه‌ای است که $U(y) = z$ و $z =< z_۱, z_۲, z_۳ >$، و برای $۱ \leq i \leq ۳$، $z_i = z_i(y_۱, y_۲, y_۳)$.
همچنین فرض می‌کنیم که مشتقهای جزیی $\frac{\partial z_i}{\partial y_j}$ وجود دارند و در نقطهٔ y پیوسته‌اند و تشکیل ماتریس ژاکوبی زیر را می‌دهند:

$$\mathbf{J}(U)_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_۱}{\partial y_۱} & \frac{\partial z_۱}{\partial y_۲} & \frac{\partial z_۱}{\partial y_۳} \\ \frac{\partial z_۲}{\partial y_۱} & \frac{\partial z_۲}{\partial y_۲} & \frac{\partial z_۲}{\partial y_۳} \\ \frac{\partial z_۳}{\partial y_۱} & \frac{\partial z_۳}{\partial y_۲} & \frac{\partial z_۳}{\partial y_۳} \end{pmatrix}_y$$

تابع $UT : R_۲ \to R_۳$ به‌شکل:

$$(UT)(x) = U(T(x)) = U(y) = z$$

تعریف می‌شود، و ماتریس ژاکوبی آن برابر است با:

$$\mathbf{J}(UT)_x = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial z_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial z_2}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial z_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial z_3}{\partial x_2} \end{pmatrix}_x$$

به شرط اینکه مشتقهای جزیی وجود داشته باشند. درکتابهای حساب دیفرانسیل توابع چند متغیره ثابت شده است که مشتقهای جزیی $\frac{\partial z_i}{\partial x_j}$ وجود دارند و از قاعده‌های زنجیری مانند:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_1} = \frac{\partial z_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \frac{\partial z_1}{\partial y_3}\frac{\partial y_3}{\partial x_1}$$

به‌دست می‌آیند. نکتهٔ جالب توجه این که همهٔ این قاعده‌های زنجیری را می‌توان به شکل سادهٔ زیر بیان کرد(و به خاطر سپرد):

$$\mathbf{J}(UT)_x = \mathbf{J}(U)_{y=T(x)} \cdot \mathbf{J}(T)_x \qquad (11.12)$$

که در آن ضرب همان ضرب ماتریسی ژاکوبی‌ست.

برای مثال گیریم $T : R_1 \to R_3$ به‌شکل:

$$y = T(x) =< \sin x, \cos x, x >$$

و $U : R_3 \to R_2$ به‌شکل $U(y) = z =< z_1, z_2 >$ تعریف شده است و در آن $z_1 = y_1 y_2$ و $z_2 = y_2 y_3$. داریم:

$$\mathbf{J}(T)_x \begin{pmatrix} \dfrac{dy_1}{dx} \\ \dfrac{dy_2}{dx} \\ \dfrac{dy_3}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \\ 1 \end{pmatrix}$$

به علاوه:

$$\mathbf{J}(U)_y = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial z_1}{\partial y_2} & \dfrac{\partial z_1}{\partial y_3} \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial z_2}{\partial y_2} & \dfrac{\partial z_2}{\partial y_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 & y_1 & 0 \\ 0 & y_3 & y_2 \end{pmatrix}$$

با استفاده از دستور (۱۱.۱۲)، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}(UT)_x &= \begin{pmatrix} y_۲ & y_۱ & ۰ \\ ۰ & y_۳ & y_۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \\ ۱ \end{pmatrix} \\ &= (y_۲ \cos x - y_۱ \sin x, -y_۳ \sin x + y_۲) \\ &= \left(\frac{dz_۱}{dx}, \frac{dz_۲}{dx} \right)\end{aligned}$$

پس، برای مثال:

$$\frac{dz_۱}{dx} = y_۲ \cos x - y_۱ \sin x = (\cos x)^۲ - (\sin x)^۲$$

تمرینها

درهمهٔ مثالهای عددی ماتریسهای مورد بحث ماتریسهایی با عناصر حقیقی هستند.

۱.ضربهای ماتریسی زیر را انجام دهید:

$$\begin{pmatrix} -۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۰ \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۳ \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۳ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{pmatrix}$$

۲.آیا ضرب ماتریسهای $n \times n$ در قانون جابه‌جایی صدق می‌کند، یعنی $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$؟

۳.گیریم $\mathbf{x}$ معّرف یک ماتریس ستونی با اندازهٔ مناسب باشد. معادلهٔ ماتریسی $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ را در هر یک از حالتهای زیر حل کنید. باید توجه داشت که بنابر (۸.۱۲) تا (۹.۱۲) معادلهٔ ماتریسی $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ با یک دستگاه از معادله‌های خطی هم ارز است.

الف) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \mathbf{b}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$

ب) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}, \mathbf{b}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

پ) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$

ت) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}, \mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$

۴.هر ماتریس قطری $\mathbf{D}$ روی F یک ماتریس $n\times n$ است که درایه‌های (i,j)ی آن جز در موارد $i=j$، صفرند. معمولاً یک ،ماتریس قطری را به‌شکل:

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\delta_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_n\end{pmatrix}$$

می‌نویسیم. تأثیر ضرب یک ماتریس دلخواه را، از سمت چپ و راست در یک ماتریس قطری، تعیین کنید.

۵.دو ماتریس $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را جابه‌جایی گویند، هرگاه $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$. ثابت کنید که تنها ماتریسهای $n\times n$ که با همهٔ ماتریسهای قطری $n\times n$ جابه‌جایی هستند خود ماتریسهای قطری هستند.

۶.نتیجهٔ ضرب یک‌ماتریس$\mathbf{A}$ی $n\times n$ را در ماتریسهای مقدماتی $\mathbf{P}_{ij}$،$\mathbf{B}_{ij}(\lambda)$ و $\mathbf{D}_i(\mu)$ که در مثال (پ) گفته شد بررسی کنید.

۷.وارون هریک از ماتریس‌های زیر را در صورت وجود بیابید:

الف) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

پ) $\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$ ت) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

ث) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

۸.نشان دهید که معادلهٔ $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$، که در آن $\mathbf{A}$ یک ماتریس $n\times n$ و $\mathbf{x}$ و $\mathbf{b}$ بردارهای ستونی هستند تنها هنگامی دارای یک جواب یکتاست که ماتریس $\mathbf{A}$ وارونپذیر باشد. در این صورت

نشان دهید که جواب معادله برابر است با $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

۱۳. تبدیلهای خطی و ماتریسها

در بقیهٔ این فصل، V و W معرّف فضاهای برداری متناهی‌ـبعد روی F هستند. نخستین قضیه ادعا می‌کند که هر تبدیل خطی با معلوم بودن اثرش روی یک مجموعه از عناصر پایه کاملاً تعیین می‌شود، به وارون می‌توان هر تبدیل خطی را با تخصیص نگاره‌های دلخواه برای یک مجموعه از عناصر پایه تعریف کرد.

(۱.۱۳) قضیه. گیریم $\{v_1, \cdots, v_n\}$ یک پایهٔ V روی F باشد. اگر S و T عناصر $L(V, W)$ باشند به‌گونه‌ای که $S(v_i) = T(v_i)$، $1 \leq i \leq n$، آنگاه $S = T$. به‌علاوه، گیریم $w_1, \cdots, w_n$ بردارهایی دلخواه در W باشند. در این صورت یک و تنها یک تبدیل خطی $T \in L(V, W)$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $T(v_i) = w_i$.

برهان. گیریم $v = \sum_1^n \xi_i v_i$. لذا از $S(v_i) = T(v_i)$، $1 \leq i \leq n$، نتیجه می‌شود که:

$$S(v) = S(\sum \xi_i v_i) = \sum \xi_i S(v_i) = \sum \xi_i T(v_i) = T(v)$$

چون این تساوی برای هر $v \in V$ برقرار است، پس $S = T$، و نخستین بخش قضیه ثابت می‌شود.

برای اثبات بخش دوم، گیریم $w_1, \cdots, w_n$ داده شده‌اند و نگاشت $T : V \to W$ را با قرار دادن:

$$T(\sum \xi_i v_i) = \sum \xi_i w_i, \quad \xi_i \in F$$

تعریف می‌کنیم. چون $\{v_1, \cdots, v_n\}$ پایه‌ای است برای V، پس‌از $\sum \xi_i v_i = \sum \eta_i v_i$ نتیجه می‌شود $\xi_i = \eta_i$، $1 \leq i \leq n$، و از این‌رو $T(\sum \xi_i v_i) = T(\sum \eta_i v_i)$، یعنی نشان دادیم که T یک تابع است. بنابر تعریف بی‌درنگ نتیجه می‌شود که T یک تبدیل خطی از $V \to W$ می‌باشد، به‌گونه‌ای که $T(v_i) = w_i$، $1 \leq i \leq n$، و یکتایی T از بخش اول قضیه نتیجه و بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود.

اکنون یک پایهٔ ثابت V مانند $\{v_1, \cdots, v_n\}$ روی F در نظر می‌گیریم و برای سادگی فرض می‌کنیم $T \in L(V, V)$. در این صورت برای هر i، $T(v_i)$ یک ترکیب خطی است از $v_1, \cdots, v_n$ و می‌توان با استفاده از ضریبهای آنها، سطرها یا ستونهای یک ماتریس $n \times n$ را تعریف کرد که با پایهٔ $\{v_1, \cdots, v_n\}$ توأماً تبدیل خطی T را، بنابرقضیهٔ پیش، معین می‌کند. از آنجا که حاصلضرب دو تبدیل خطی با حاصلضرب ماتریسهای مربوط به آنها تعریف می‌شود پس $T(v_i)$ سطرها یا ستونهای ماتریس مربوط به T را می‌دهد.

برای مثال، گیریم V یک فضای برداری دوبعدی باشد روی F که پایهٔ آن $\{v_۱, v_۲\}$ است. گیریم S و T، متعلق به $L(V,V)$ چنین تعریف شوند:

$$S(v_۱) = -v_۱ + ۲v_۲,\ T(v_۱) = ۲v_۱ + ۳v_۲$$
$$S(v_۲) = v_۱ + v_۲ \quad ,\ T(v_۲) = \qquad - v_۲$$

در این صورت ST یک تبدیل خطی است که به‌شکل زیر تعریف می‌شود:

$$ST(v_۱) = S(۲v_۱ + ۳v_۲) = ۲(-v_۱ + ۲v_۲) + ۳(v_۱ + v_۲) = v_۱ + ۷v_۲$$
$$ST(v_۲) = S(-v_۲) = -(v_۱ + v_۲) = -v_۱ - v_۲$$

اگر فرض کنیم که $S(v_i)$ سطرهای ماتریس S و غیره هستند، ...، ماتریسهای S،T و ST به ترتیب چنین خواهند شد:

$$\begin{pmatrix} -۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۷ \\ -۱ & -۱ \end{pmatrix}$$

وداریم:

$$\begin{pmatrix} -۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} ۱ & ۷ \\ -۱ & -۱ \end{pmatrix}$$

امّا اگر $S(v_i)$ را ستونهای ماتریس S و غیره بگیریم، ماتریسهای متناظر با S،T و ST به ترتیب چنین می‌شوند:

$$\begin{pmatrix} -۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۳ & -۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۷ & -۱ \end{pmatrix}$$

و در این صورت برقراری تساوی زیر محرز است:

$$\begin{pmatrix} -۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۳ & -۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۷ & -۱ \end{pmatrix}$$

و از آنجا تعریف زیر نتیجه می‌شود:

(۲.۱۳) تعریف. گیریم $\{v_۱, \cdots, v_n\}$ یک پایهٔ V و $T \in L(V,V)$. ماتریس T نسبت به پایهٔ* $\{v_۱, \cdots, v_n\}$ از V ماتریسی است $n \times n$ که ستون iام آن، برای $۱ \leq i \leq n$، مجموعهٔ

* ماتریس T نه تنها به مجموعهٔ بردارهای پایهٔ $\{v_۱, \cdots, v_n\}$، بلکه به‌ترتیب آنها نیز بستگی دارد. معمولا ترتیب عناصر پایه روشن است ولی در حالتهای پیچیده‌تر پایه را مرتب می‌گیریم، یعنی برای عناصر پایه ترتیب خاصی اتخاذ می‌کنیم.

ضریبهایی است که در ترکیب خطی $T(v_i)$ برحسب $v_1, \cdots, v_n$ وجود دارند. پس ماتریس (α_{rs}) تبدیل T با معادله‌های زیر بیان می‌شود:

$$T(v_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} v_j = \alpha_{1i} v_1 + \cdots + \alpha_{ni} v_n$$

به عنوان مثال دیگر، گیریم T یک تبدیل خطی روی یک فضای برداری سه‌بعدی با پایهٔ $\{v_1, v_2, v_3\}$ باشد به‌گونه‌ای که:

$$T(v_1) = 2v_1 - 3v_3$$
$$T(v_2) = v_2 + 5v_3$$
$$T(v_3) = v_1 - v_2$$

در این صورت ماتریس T نسبت به پایهٔ $\{v_1, v_2, v_3\}$ خواهد شد:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

اکنون به بررسی سازگاری تعریف (۲.۱۳) با تعبیری که از ماتریس یک تبدیل خطی، که با یک دستگاه از معادله‌ها داده شده است، می‌پردازیم. به عنوان مثال، گیریم T با دستگاه

$$y_1 = 3x_1 - x_2$$
$$y_2 = x_1 + 2x_2$$

داده شده است، و فرض می‌کنیم:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

در این صورت پس e_1 و e_2 یک پایهٔ R_2 است و می‌توان ماتریس T را بنا بر تعریف **(۲.۱۳)** نسبت به این پایه حساب کرد. با استفاده از نتیجه‌های مثال اخیر بخش پیش، داریم:

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3e_1 + e_2$$

$$T(e_2) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -e_1 + 2e_2$$

پس ماتریس T عبارت است از:

$$\begin{pmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{pmatrix}$$

به‌آسانی می‌توان دید که دریک دستگاه کلی n معادلهٔ n مجهولی با ماتریس $\mathbf{A}$، ماتریس تبدیل خطی متناظر نسبت به پایهٔ $\{e_۱, \cdots, e_n\}$ که در بالا تعریف شد، بنابرتعریف (۲.۱۳) برابر $\mathbf{A}$ است.

اکنون به ذکر چند نتیجهٔ کلی دربارهٔ رابطهٔ بین تبدیلهای خطی و ماتریسها می‌پردازیم. یادآوری می‌کنیم که اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو ماتریس $n \times n$ به ترتیب با ضریبهای (α_{ij}) و (β_{ij}) باشند مجموع و حاصلضرب آنها به‌شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$(\alpha_{ij}) + (\beta_{ij}) = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})$$

$$(\alpha_{ij})(\beta_{ij}) = (\gamma_{ij}),\ \gamma_{ij} = \sum_{k=۱}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kj}$$

اگر یک ماتریس را به عنوان یک $n^۲$تایی در نظر بگیریم، آنگاه تعریف زیر طبیعی است:

$$\alpha(\alpha_{ij}) = (\alpha\alpha_{ij}),\ \alpha \in F$$

اکنون رابطهٔ ساختار جبری $L(V,V)$ را که در بخش پیشین ارائه شد، با ساختار جبری مجموعهٔ $M_n(F)$، یعنی مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $n \times n$ با ضریبهای متعلق به F، بررسی می‌کنیم.

(۳.۱۳) قضیه. گیریم $\{v_۱, \cdots, v_n\}$ یک پایهٔ V روی F باشد. نگاشت $T \rightarrow (\alpha_{ij})$ که به‌هر تبدیل خطی T ماتریس آن (α_{ij}) را نسبت به پایهٔ $\{v_۱, \cdots, v_n\}$ مربوط می‌کند یک نگاشت یک‌به‌یک از $L(V,V)$ به روی $M_n(F)$ است به‌گونه‌ای که اگر $T \rightarrow (\alpha_{ij})$ و $S \rightarrow (\beta_{ij})$ آنگاه:

$$T + S \rightarrow (\alpha_{ij}) + (\beta_{ij})$$

$$TS \rightarrow (\alpha_{ij})(\beta_{ij})$$

$$\alpha T \rightarrow \alpha(\alpha_{ij})$$

برهان. بنابر قضیهٔ (۱.۱۳) روشن است که این نگاشت یک‌به‌یک و پوشاست. بنابه تعریف، $T + S$ وαT ماتریسهای مطلوب را به‌گونه‌ای پوشا می‌نگارند. این نتیجه در مورد TS به‌سبب تعریف ماتریس متناظر T، درست است. ولی باید جزئیات آن‌را بررسی کنیم. داریم:

$$Tv_i = \sum_{j=۱}^{n} \alpha_{ji} v_j,\quad Sv_i = \sum_{j=۱}^{n} \beta_{ji} v_j$$

پس:

$$(TS)v_i = T(Sv_i) = T\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_{ji} v_j\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \beta_{ji} T(v_j) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ji} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} v_k$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}\beta_{ji}\right) v_k$$

بنابراین درایهٔ (k,i)ام ماتریس TS برابر است با $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}\beta_{ji}$ که ،همان خود درایهٔ (k,i)ام حاصلضرب $(\alpha_{ij})(\beta_{ij})$ است، و برهان کامل می‌گردد.

(۴.۱۳) فرع. گیریم $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ ماتریسهای $n \times n$ با ضریبهایی متعلق به F باشند، در این صورت:

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC},\ (\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$$

بنابر قضیه‌های (۳.۱۳) و (۶.۱۱) برهان روشن است و نیازی به‌هیچ‌گونه محاسبه ندارد.

در اینجا ذکر چند نکته در مورد (۳.۱۳) ضروری است. نخست این که در واقع حکم قضیهٔ (۳.۱۳) این است که، $L(V,V)$ و $M_n(F)$ به عنوان یک حلقه و یک فضای برداری روی F یکریخت‌اند، و همهٔ محاسبه‌ها روی $L(V,V)$ را می‌توان در $M_n(F)$ اجرا کرد. به تجربه ثابت شده است که اغلب کوتاهترین و جالبترین راه‌حلهای مسأله‌ها در $L(V,V)$ پیدا می‌شود. ولی گاهی کار با ماتریسها اجتناب ناپذیر است. بنابر قضیهٔ پیش مشکل تناظر بین $L(V,V)$ و $M_n(F)$ در انتخاب پایهٔ V است. اکنون باید این مشکل‌را توضیح دهیم. گیریم $\{v_1,\cdots,v_n\}$ یک پایهٔ V روی F باشد و $\{w_1,\cdots,w_n\}$ مجموعه‌ای از بردارهای V. پس داریم:

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ji} v_j,\ 1 \le i \le n \qquad (۵.۱۳)$$

گوییم برای این که $\{w_1,\cdots,w_n\}$ پایهٔ دیگری برای V باشد لازم وکافی است که ماتریس (μ_{ij}) وارونپذیر باشد [تعریف (۱۰.۱۲)]. برای اثبات آن، نخست فرض می‌کنیم که $\{w_1,\cdots,w_n\}$

یک پایه است. در این صورت می‌توان نوشت:

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} \eta_{ji} w_j$$

که در آن (η_{ji}) یک ماتریس $n \times n$ است. اگر این مقدار را در (۵.۱۳) قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ji} v_j = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ji} \left(\sum_{k=1}^{n} \eta_{kj} w_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \eta_{kj} \mu_{ji} \right) w_k$$

چون $\{w_1, \cdots, w_n\}$ نابسته خطی است، پس:

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_{kj} \mu_{ji} = \begin{cases} 1 & , i = k \quad \text{اگر} \\ 0 & , i \neq k \quad \text{اگر} \end{cases}$$

پس ثابت شد که $(\mu_{ij})(\eta_{ij}) = \mathbf{I}$. به همین ترتیب $(\eta_{ij})(\mu_{ij}) = \mathbf{I}$، پس ثابت شد که ماتریس (μ_{ij}) وارونپذیر است. می‌توان ثابت کرد که اگر (μ_{ij}) وارونپذیر باشد، آنگاه $\{w_1, \cdots, w_n\}$ یک پایه است.

(۶.۱۳) قضیه. گیریم $\{v_1, \cdots, v_n\}$ یک پایهٔ V و $\{w_1, \cdots, w_n\}$ پایهٔ دیگری باشد به‌گونه‌ای که:

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ji} v_j$$

که در آن (μ_{ji}) یک ماتریس وارونپذیر است. گیریم $T \in L(V, V)$، و (α_{ij}) و (α'_{ij}) ماتریسهای T به ترتیب نسبت به پایه‌های $\{v_1, \cdots, v_n\}$ و $\{w_1, \cdots, w_n\}$ باشند پس داریم:

$$(\mu_{ij})(\alpha'_{ij}) = (\alpha_{ij})(\mu_{ij})$$

یا

$$(\alpha'_{ij}) = (\mu_{ij})^{-1}(\alpha_{ij})(\mu_{ij})$$

برهان. داریم:

$$T(w_i)=\sum_{j=1}^{n}\alpha'_{ji}w_j=\sum_{j=1}^{n}\alpha'_{ji}\sum_{k=1}^{n}\mu_{kj}v_k$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\mu_{kj}\alpha'_{ji}\right)v_k$$

از سوی دیگر داریم:

$$T(w_i)=T\left(\sum_{j=1}^{n}\mu_{ji}v_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\mu_{ji}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kj}v_k\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{kj}\mu_{ji}\right)v_k$$

بنابراین:

$$\sum_{j=1}^{n}\mu_{kj}\alpha'_{ji}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{kj}\mu_{ji},\ 1\leq i,k\leq n$$

و قضیه ثابت می‌شود.

(۷.۱۳) تعریف. در $M_n(F)$ دو ماتریس $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را متشابه می‌گویند هرگاه یک ماتریس وارونپذیر $\mathbf{X}$ متعلق به $M_n(F)$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که:

$$\mathbf{B}=\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}$$

بنابر قضیهٔ (۶.۱۳) اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ ماتریسهای $T\in L(V,V)$ نسبت به دو پایهٔ متفاوت باشند، آنگاه $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ متشابه‌اند. می‌توان بررسی کرد که وارون این گفته نیز درست است. بنابراین اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ ماتریسهای متشابه باشند، آنگاه همواره می‌توان $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را به عنوان ماتریسهای یک تبدیل خطی نسبت به پایه‌های متفاوت در نظر گرفت.

برای این‌که کاربرد قضیهٔ (۶.۱۳) را در حالتهای خاص بدانیم شاید بهتر باشد آن را به‌شکل دیگری بیان کنیم.

(۶.۱۳) قضیه. گیریم V یک فضای برداری روی F با پایهٔ اوّلیهٔ:

$$\{v_1,\cdots,v_n\}$$

باشد، گیریم $T \in L(V, V)$ نسبت به پایهٔ اوّلیه دارای ماتریس $\mathbf{A}$ باشد. اکنون گیریم:

$$\{w_۱, \cdots, w_n\}$$

پایهٔ جدیدی است برای V و ماتریس T نسبت به این پایه را $\mathbf{B}$ می‌نامیم. دراین صورت:

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-۱}\mathbf{A}\mathbf{S}$$

که در آن $\mathbf{S}$ ماتریسی است که پایهٔ جدید را برحسب پایهٔ اصلی می‌دهد:

$$\mathbf{S} = (\mu_{ij}),\ w_i = \sum_{j=i}^{n} \mu_{ji} v_j$$

مثال الف. برای روشن ساختن قضیهٔ پیش، گیریم $T \in L(R_۲, R_۲)$ به‌شکل زیر تعریف شده باشد:

$$T(e_۱) = e_۱ - e_۲,$$
$$T(e_۲) = e_۱ + ۲e_۲$$

که در آن $e_۱ =< ۱, ۰ >$ و $e_۲ =< ۰, ۱ >$. ماتریس $\mathbf{A}$ی تبدیل T نسبت به پایهٔ $\{e_۱, e_۲\}$ برابر است با:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{pmatrix}$$

برای یافتن $\mathbf{B}$، ماتریس T نسبت به پایهٔ $\{u_۱ = e_۱ + e_۲, u_۲ = e_۱ - e_۲\}$، داریم:

$$T(u_۱) = T(e_۱) + T(e_۲) = ۲e_۱ + e_۲$$
$$T(u_۲) = T(e_۱) - T(e_۲) = -۳e_۲$$

برای اینکه $T(u_۱)$ و $T(u_۲)$ را به صورت ترکیبهای خطی از $u_۱$ و $u_۲$ بیان کنیم باید $e_۱$ و $e_۲$ را برحسب $u_۱$ و $u_۲$ بنویسیم. داریم:

$$e_۱ = \frac{۱}{۲}(u_۱ + u_۲), \quad e_۲ = \frac{۱}{۲}(u_۱ - u_۲)$$

و

$$T(u_۱) = \frac{۳}{۲}u_۱ + \frac{۱}{۲}u_۲,$$
$$T(u_۲) = -\frac{۳}{۲}u_۱ + \frac{۳}{۲}u_۲$$

ماتریس $\mathbf{B}$ی T، نسبت به پایهٔ $\{u_۱, u_۲\}$ برابر است با:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{۳}{۲} & -\frac{۳}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \end{pmatrix}$$

برای یافتن ماتریس وارونپذیر $\mathbf{S}$ به‌گونه‌ای که $\mathbf{S}^{-۱}\mathbf{AS} = \mathbf{B}$، از معادله‌هایی که پایهٔ جدید $\{u_۱, u_۲\}$ را بر حسب پایهٔ اولیّهٔ $\{e_۱, e_۲\}$ بیان کنند استفاده می‌کنیم. $\mathbf{S}$ برابر ماتریس زیر است:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{pmatrix}$$

در پایان این بخش، نتیجه‌های اساسی بخش ۷ دربارهٔ پایه و بُعد را توأم با نتیجه‌های این بخش به‌کار می‌بریم تا چند قضیهٔ مفید دربارهٔ تبدیلهای خطی به‌دست آوریم. نخست گیریم V و W فضاهای برداری متناهی-بعد روی F باشند و $T \in L(V, W)$. در این صورت به‌آسانی می‌توان ثابت کرد که زیر مجموعه‌های:

$$T(V) = \{w \in W | w = T(v), v \in V\}$$

و

$$n(T) = \{v \in V | T(v) = ۰\}$$

به ترتیب زیر فضاهای W و V هستند.(می‌توان اثبات آن را به‌عنوان تمرین انجام داد.) این زیر فضاها به‌مقدار زیادی بستگی به‌رفتار T دارند. نخست تعریف رسمی زیر را بیان می‌کنیم:

(۸.۱۳) تعریف. گیریم $T \in L(V, W)$. $T(V)$ و $n(T)$ به ترتیب زیر فضاهای W و V هستند که در بالا تعریف شده‌اند. در این صورت زیر فضای $T(V)$ از W را دامنهٔ T و بعد آن را رتبهٔ T می‌نامند. زیر فضای $n(T)$ از V را صفر ـ فضای T و بعد آن را هیچهٔ T می‌نامند.

قضیهٔ بعد یقیناً مفیدترین و مهمترین قضیهٔ تبدیلهای خطی است که تاکنون داشته‌ایم.

(۹.۱۳) قضیهٔ اساسی. گیریم $T \in L(V, W)$. در این صورت:

$$\dim T(V) + \dim n(T) = \dim V$$

به گفتهٔ دیگر، بعد V برابر است با مجموع رتبهٔ T و هیچهٔ T.

برهان. گیریم $\{v_۱, \cdots, v_k\}$ پایه‌ای برای صفر ـ فضای $n(T)$ باشد [بنا برقرارداد اگر $n(T) = ۰$، این مجموعه تهی است]. بنابر قضیهٔ (۴.۷)، در V بردارهای $\{v_k + ۱, \cdots, v_n\}$

وجود دارند به‌گونه‌ای که $\{v_1, \cdots, v_k, \cdots, v_n\}$ پایه‌ای برای V باشد. کافی است ثابت کنیم که $\{T(v_{k+1}), \cdots, T(v_n)\}$ پایه‌ای است برای $T(V)$. نخست داریم:

$$T(\sum_{i=1}^{n} \xi_i v_i) = \sum_{i=k+1}^{n} \xi_i T(v_i),\ \xi_i \in F$$

زیرا برای $1 \leq i \leq k$، $T(v_i) = 0$. سرانجام فرض کنیم برای یک مقدار $\eta_i \in F$ داریم:

$$\sum_{i=k+1}^{n} \eta_i T(v_i) = 0$$

در این صورت:

$$T(\sum_{i=k+1}^{n} \eta_i v_i) = 0$$

و $\sum_{i=k+1}^{n} \eta_i v_i \in n(T)$ $\therefore$ به‌سبب روش انتخاب پایهٔ $\{v_i\}$ برای V، همهٔ $\{\eta_i\}$ها صفرند، و قضیه ثابت می‌شود.

آخرین قضیهٔ این بخش کاربرد مهمّ قضیهٔ اساسی پیشین است.

(۱۰.۱۳) قضیه. گیریم $T \in L(V, V)$ که در آن V یک فضای برداری متناهی-بعد روی F است. دراین صورت حکمهای زیر هم‌ارزند:

۱. T وارونپذیر است.
۲. T یک‌به‌یک است.
۳. T پوشاست.

برهان. ثابت می‌کنیم که (۱) مستلزم (۲) است و (۲) مستلزم (۳) و (۳) مستلزم (۱).
نخست گیریم (۱) درست است. در این صورت $T^{-1} \in L(V, V)$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $TT^{-1} = T^{-1}T = 1$. فرض کنیم $T(v_1) = T(v_2)$. از اثر دادن T^{-1} نتیجه می‌شود $T^{-1}T(v_1) = T^{-1}T(v_2)$ یا $v_1 = v_2$. پس (۲) از (۱) نتیجه می‌شود.
اکنون گیریم (۲) درست است. در این صورت $n(T) = 0$. بنابر قضیهٔ (۹.۱۳) داریم $T(V) = n$، پس $T(V) = V$ یعنی T پوشاست.
سرانجام گیریم T پوشاست. بنابر قضیهٔ (۹.۱۳)، T یک‌به‌یک است. پس اگر $\{v_1, \cdots, v_n\}$ یک پایهٔ V باشد، آنگاه $\{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$ نیز یک پایه است بنابر قضیهٔ (۱.۱۳) یک تبدیل خطی U وجود دارد به‌گونه‌ای که $UT(v_i) = v_i$، $i = 1, \cdots, n$. باز بنابر (۱.۱۳)، داریم $UT = 1$. از سوی دیگر، $TU(Tv_i) = Tv_i$، $i = 1, \cdots, n$ و چون $\{Tv_i, \cdots, Tv_n\}$ یک پایه است، پس $TU = 1$. بنابراین T وارونپذیر است و قضیه ثابت می‌شود.

تمرینها

در همهٔ تمرینهای زیر همهٔ فضاهای برداری مورد نظر دارای پایه‌های متناهی‌اند و می‌توان هیأت F را در مسأله‌های عددی، هیأت اعداد حقیقی گرفت.

۱.گیریم $S, T, U \in L(V, V)$ به‌شکل زیر داده شده باشند:

$$S(u_۱) = u_۱ - u_۲,\ T(u_۱) = u_۲,\ U(u_۱) = ۲u_۱$$
$$S(u_۲) = u_۱ \qquad,\ T(u_۲) = u_۱,\ U(u_۲) = -۲u_۲$$

که در آن $\{u_۱, u_۲\}$ یک پایهٔ V است. ماتریسهای T،S و U را نسبت به‌پایهٔ $\{u_۱, u_۲\}$ و نسبت به‌پایهٔ جدید $\{w_۱, w_۲\}$ با:

$$w_۱ = ۳u_۱ - u_۲,\ w_۲ = u_۱ + u_۲$$

بیابید. ماتریس وارونپذیر $\mathbf{X}$ را در هرحالت به‌گونه‌ای بیابید که $\mathbf{X}^{-۱}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{A}'$ که در آن $\mathbf{A}$ ماتریس تبدیل نسبت به‌پایهٔ قبلی و $\mathbf{A}'$ ماتریس آن نسبت به‌پایهٔ جدید باشد.

۲.گیریم تبدیلهای خطی T،S و U به‌گونه‌ای باشند که:

$$S(u_۱) = u_۱ + u_۲,$$
$$S(u_۲) = -u_۱ - u_۲,$$
$$T(u_۱) = u_۱ - u_۲,$$
$$T(u_۲) = ۲u_۲,$$
$$U(u_۱) = u_۱ + u_۲ - u_۳,$$
$$U(u_۲) = u_۲ - ۳u_۳,$$
$$U(u_۳) = -u_۱ - ۳u_۲ - ۲u_۳$$

(به‌فرض این که $\{u_۱, u_۲\}$ یا $\{u_۱, u_۲, u_۳\}$ پایهٔ فضاهای برداری باشند)

الف) رتبه و هیچهٔ T،S و U را بیابید.

ب) کدام یک از این تبدیلهای خطی وارونپذیرند؟

پ) پایهٔ صفر-فضاهای T،S و U را پیدا کنید.

ت) پایهٔ فضاهای دامنهٔ T،S و U را به‌دست آورید.

۳.گیریم V فضای همهٔ چند جمله‌ییهای به‌شکل $f(x) = \alpha_۰ + \alpha_۱ x + \cdots + \alpha_k x^k$ که در آن k ثابت و ضریبهای α_h حقیقی‌اند، باشد. نشان دهید که تبدیل مشتق یعنی D که در مثال ت از بخش۱۱ تعریف شد، V را در V می‌نگارد. ماتریس V نسبت به پایهٔ $\{۱, x, \cdots x^k\}$ چیست؟ رتبهٔ $D : V \to V$ چیست؟ هیچهٔ آن را تعیین کنید.

۴.ثابت کنید رتبهٔ $\mathbf{A} = \dim T(V)$، که $\mathbf{A}$ ماتریس $T \in L(V,V)$ نسبت به یک پایهٔ اختیاری V است.

۵.گیریم V یک فضای برداری n بعدی روی R و $f : V \to R_۱$ یک تبدیل خطی ناصفر از V به فضای یک بعدی $R_۱$ باشد. ثابت کنید که:

$$\dim n(f) = n - ۱$$

۶.گیریم V و f همانند تمرین ۵ باشند و α یک عدد حقیقی ثابت باشد. ثابت کنید که مجموعهٔ:

$$\{v \in V | f(v) = \alpha\}$$

در V یک ابر صفحه، یعنی یک خمینهٔ خطی از بعد ۱ − n در V است، همان‌گونه که در بخش ۱۰ تعریف شده است.

۷.گیریم $T \in L(V,V)$. ثابت کنید برای این که $T^۲ = ۰$، لازم و کافی است که:

$$T(V) \subset n(T)$$

۸.مثالی از یک تبدیل خطی $T : V \to V$ بیاورید که نشان دهد:

$$T(V) \cap n(T) \neq ۰$$

امکان دارد.

۹.گیریم $T \in L(V,V)$. ثابت کنید که یک تبدیل خطی ناصفر $S \in L(V,V)$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $TS = ۰$، اگر و تنها اگر یک بردار ناصفر $v \in V$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $T(v) = ۰$.

۱۰.گیریم $T \in L(V,V)$ و S به‌گونه‌ای باشند که $ST = ۱$. ثابت کنید $TS = ۱$. (تمرین ۱۰ از بخش ۱۱ نشان می‌دهد که این نتیجه تنها در موردی که بعد V محدود باشد درست است.)

۱۱.بیان کنید که آیا یک تبدیل خطّی $T : R_۴ \to R_۲$ وجود دارد که تساویهای زیر را بدهد یا نه:

$T < ۱,۱,۱,۲ > = < ۳,۱ >, T < ۱,۲,۱,۱ > = < ۱,۲ >, T < ۰,۱,۱,۱ > = < ۲,۰ >$
$.T < ۲,۱,۰,۱ > = < ۲,۳ >$

۱۲.گیریم $T \in L(V,W)$، که در آن $\dim V = m$ و $\dim W = n$. گیریم $\{v_۱, \cdots, v_m\}$ یک پایهٔ V و $\{w_۱, \cdots, w_n\}$ یک پایهٔ W باشد. ماتریس $\mathbf{A}$ی T نسبت به پایه‌های $\{v_i\}$ و $\{w_j\}$ را به‌شکل ماتریس $n \times m$، $\mathbf{A} = (\alpha_{ij})$ تعریف می‌کنیم که در آن:

$$Tv_i = \sum_{j=۱}^{n} \alpha_{ji} w_j, ۱ \leq i \leq m, ۱ \leq j \leq n$$

فضاهای برداری V و W توسط پایه‌های $\{v_i\}$ و $\{w_j\}$ به ترتیب با فضاهای F_m و F_n یکریخت‌اند. (بخش۱۱ تمرین ث.) نشان دهید که اگر $\mathbf{x} \in F_m$ بردار ستونی متناظر با بردار $x \in V$ از راه یکریختی باشد، آنگاه $\mathbf{Ax}$ بردار ستونی F_n متناظر با T_x است. به‌عبارت دیگر، تناظر بین تبدیلهای خطی و ماتریس به‌گونه‌ای است که عمل T روی بردار x توسط ضرب ماتریسی $\mathbf{Ax}$ تحقق می‌یابد.

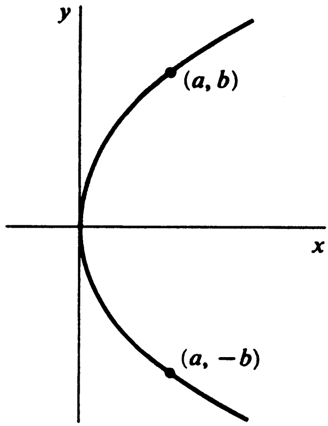
۴

فضاهای برداری مجهز به ضرب داخلی

این فصل را با بخشی غیر ضروری دربارهٔ تقارن شکلهای مسطح شروع می‌کنیم که نشان می‌دهد چگونه مسأله‌های طبیعی هندسی به مطالعهٔ مسأله‌هایی در مورد تبدیلهای خطی، که طول را ثابت نگه می‌دارند، منجر می‌گردد. مفهوم طول در یک فضای برداری کلی روی اعداد حقیقی در بخش بعدی ارائه خواهد شد، در آنجا نشان داده می‌شود که چگونه طول به یک ضرب داخلی بستگی دارد. مفهوم پایه‌های یکا قائم و تبدیلهای متعامد با مثالهایی از هندسه و آنالیز شروع و بسط داده می‌شود. علاوه بر این واقعیت که عددهای حقیقی یک هیأت تشکیل می‌دهند، در این بخش از نظریهٔ نابرابریها و قدر مطلق‌ها استفادهٔ فراوانی خواهد شد. همچنین می‌پذیریم که هر عدد حقیقی $a \geq 0$ یک ریشهٔ دوم یکتا دارد که با $\sqrt{a}$ نشان داده می‌شود.

۱۴. مفهوم تقارن

همه کم و بیش با کلمهٔ تقارن آشنایی داریم. هر فرد آشنا با مجسمه‌سازی و نقاشی، از اهمیت تقارن برای هنرمندان آگاه است و می‌داند که چگونه بعضی جنبه‌های متمایز معماری و تزیینات به کمک تقارن ایجاد می‌شوند. زمین‌شناس می‌داند که بلورها بنابر ویژگی تقارن‌شان رده‌بندی شده‌اند، طبیعی‌دان وجود تقارن را در شکل نباتها، صدفها و ماهیها می‌داند. شیمیدان می‌داند که ویژگی تقارن مولکولها به ویژگی شیمیایی آنها بستگی دارد. در این بخش مفهوم ریاضی تقارن را بررسی

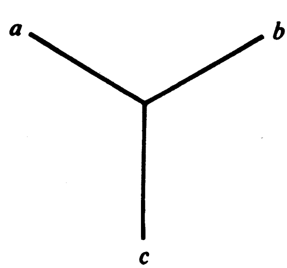


شکل ۱.۴

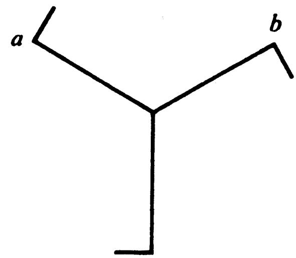
می‌کنیم، که دید جالبی از همهٔ مثالهای پیش به ما می‌دهد.

با مثال ساده‌ای از هندسهٔ تحلیلی، شکل ۱.۴ شروع می‌کنیم. معنی این جمله که سهمی $y^۲ = x$ نسبت به محور xها متقارن است چیست؟ یک طریق نگریستن به آن این است که بگوییم اگر صفحه را در حول محور xها تا کنیم دو نیمهٔ خم $y^۲ = x$ روی هم می‌افتند. ولی این مطلب اندکی مبهم است. توصیف دقیقتر از این مشاهده ناشی می‌شود که عمل تا کردن صفحه معرف یک تبدیل T از نقاط صفحه است که به هر نقطهٔ (a, b) نقطهٔ $(a, -b)$ را مربوط می‌کند که پس از تا کردن صفحه روی هم می‌افتند. اکنون تقارن سهمی چنین بیان می‌شود که اگر (a, b) نقطه‌ای روی سهمی باشد نقطهٔ $(a, -b)$ مبدل آن نیز روی سهمی است. این نوع تقارن را تقارن دو سویی می‌گویند.

اکنون مثال یک سه‌راهی، شکل ۲.۴ را در نظر می‌گیریم، این شکل چه نوع تقارنی دارد؟ روشن است که این شکل نسبت به هر یک از سه خط واصل بین مرکز و هر یک از سه نقطهٔ a، b و c تقارن دوسویی دارد. این سه‌راهی یک نوع تقارن جدید دیگر دارد به‌نام تقارن دورانی. اگر



شکل ۲.۴



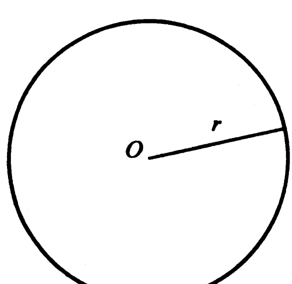
شکل ۳.۴

نقاط صفحه را حول مرکز ثابت به اندازه ۱۲۰° دوران دهیم، یعنی مرکز را ثابت نگهداریم، سه‌راهی بر خود منطبق می‌گردد. آیا این سه‌راهی همان ویژگیهای تقارن سه‌راهی بالدار شکل ۳.۴ را دارد؟ روشن است که چنین نیست؛ سه‌راهی بالدار تنها دارای تقارن دورانی است و تقارن دوسویی ندارد. به این ترتیب می‌بینیم که می‌توان از ویژگیهای تقارن اشکال جهت تمایز آنها استفاده کرد.

هنوز به تعریف دقیق تقارن نرسیده‌ایم. یک مثال دیگر درونمایهٔ اساسی آن را نشان می‌دهد. دایرهٔ به مرکز O، شکل ۴.۴ همهٔ انواع تقارنی را که تاکنون نام بردیم دارد. با این همه می‌توان به تقارن دایره از دیدگاه دیگری نگاه کرد. دایره با هر تبدیلی که فاصله را حفظ کند و مرکز را ثابت نگه دارد به روی خودش برده می‌شود. زیرا دایره مکان هندسی نقاطی است مانند p که فاصله‌های آنها از O برابر مقدار ثابت r است، و اگر T تبدیلی باشد که فاصله را حفظ کند و مرکز دایره را ثابت نگه دارد، آنگاه فاصلهٔ $T(p)$ از O باز هم برابر r و در نتیجه $T(p)$ روی دایره واقع خواهد شد. از اینجا تعریف زیر نتیجه می‌شود:

(۱.۱۴) **تعریف.** هر شکل X مجموعهٔ نقاطی از صفحه است. هر تقارن شکل X تبدیلی است مانند T از صفحه به خودش به‌گونه‌ای که:

i) $T(X) = X$، یعنی T هر نقطه از X را به نقطهٔ دیگری از X می‌برد و هر نقطهٔ X



شکل ۴.۴

نگارهٔ یک نقطهٔ دیگر آن بر اثر T است.

ii) T فاصله را حفظ می‌کند، یعنی اگر $d(p,q)$ نمایش فاصلهٔ دو نقطهٔ دلخواه p و q از X باشد، آنگاه به‌ازای هر دو نقطهٔ p و q:

$$d[T(p),T(q)]=d(p,q)$$

(۲.۱۴) قضیه. مجموعهٔ Gی کلیهٔ تقارنهای شکل X یک گروه G تشکیل می‌دهند به‌نام گروه تقارن شکل [$\leftarrow$ تعریف ۱۰.۱۱].

برهان. نخست نشان می‌دهیم که اگر $S,T\in G$، آنگاه حاصلضرب ST که با:

$$ST(p)=S[T(p)]$$

تعریف می‌شود به G تعلق دارد. داریم:

$$ST(X)=S[T(X)]=S(X)=X$$

و

$$d(ST(p),ST(q))=d(S[T(p)],S[T(q)])=d(T(p),T(q))=d(p,q)$$

و از این‌رو $ST\in G$. همچنین باید ثابت کنیم که:

$$S(TU)=(ST)U\ ,\quad S,T,U\in G$$

که نتیجه‌ای است از این واقعیت که هر دو نگاشت نقطهٔ p را به نقطهٔ $S\{T[U(p)]\}$ می‌برند. روشن است که تبدیل ۱ به‌گونه‌ای که برای هر p، $1(p)=p$، به G تعلق دارد و در برابری زیر صدق می‌کند:

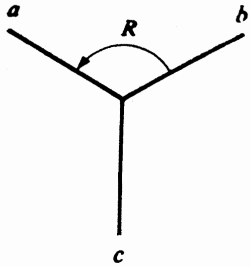
$$S\cdot 1=1\cdot S=S\quad ,\quad S\in G$$

سرانجام، اگر $S\in G$، یک تقارن S^{-1} روی X وجود دارد که عملی در خلاف جهت S انجام می‌دهد (خواننده می‌تواند برهان قویتری ارائه دهد) به‌گونه‌ای که:

$$SS^{-1}=S^{-1}S=1$$

بدین ترتیب برهان قضیه پایان می‌یابد.

اکنون پرسش مبهم «چه نوع تقارنهایی یک شکل می‌تواند داشته باشد؟» جای خود را به پرسش دقیق ریاضی «گروههای تقارن ممکن کدامها هستند؟» می‌دهد. در این بخش حالت ساده‌ای از این مسأله را بررسی می‌کنیم. نخست مثالهایی از گروههای تقارن می‌آوریم.



شکل۵.۴

گروه تقارن سه راهی شکل ۵.۴، متشکل از سه تقارن دوسویی نسبت به بازوها و سه دوران به زاویه‌های °۱۲۰، °۲۴۰ و °۳۶۰ می‌باشد. به کمک عمل گروهی می‌توان نشان داد که همهٔ تقارنهای سه‌راهی را می‌توان از دو تا از آنها ساخت. به‌عنوان مثال، گیریم R دورانی به‌زاویهٔ °۱۲۰ در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت و S یک تقارن دوسویی نسبت به بازوی a باشد.

می‌توان تحقیق کرد که گروه تقارن G ی سه‌راهی متشکل از تقارنهای زیر است:

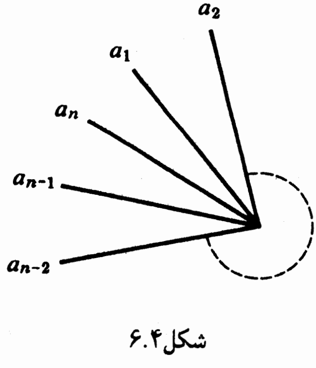
$$\{1, R, R^2, S, SR, SR^2\}$$

همچنین می‌توان نشان داد که $S^2 = 1$، $R^3 = 1$ و $SR = R^{-1}S$ و این قاعده‌ها برای ضرب عناصر دلخواه G کافی هستند.

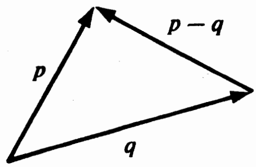
گروه تقارن سه‌راهی بالدار درست متشکل از تقارنهای زیر است:

$$\{1, R, R^2\}$$

به‌طور کلیتر، گیریم X شکلی با n بازو، شکل ۶.۴، S تقارن دو سویی نسبت به بازوی a_1، و R



شکل۶.۴



شکل۷.۴

دورانی باشد که $a_1 \to a_2$. در این‌صورت گروه X درست متشکل از تقارنهای زیر است:

$$\{1, R, R^2, \cdots, R^{n-1}, S, SR, \cdots, SR^{n-1}\} \qquad (۳.۱۴)$$

و این تقارنها طبق قاعده‌های زیر ضرب شده‌اند:

$$R^n = 1,\ S^2 = 1,\ SR = R^{-1}S$$

گروه تقارن شکل بالدار متناظر، درست متشکل از دورانهای زیر است:

$$\{1, R, R^2, \cdots, R^{n-1}\} \qquad (۴.۱۴)$$

گروه (۳.۱۴) را گروه دووجهی D_n، گروه (۴.۱۴) را گروه دوری C_n می‌نامند. نشان می‌دهیم که این دو گروه تنها گروههای متناهی و متقارن شکلهای مسطح هستند.

نخست چند نکتهٔ کلی را یادآور می‌شویم. صفحه را از این پس با فضای برداری R_2 متشکل از جفتهای عددهای حقیقی $<\alpha, \beta>$ یکی می‌گیریم. اگر p نمایش بردار $<\alpha, \beta>$ باشد، طول p یعنی $\|p\|$، با $\|p\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ تعریف می‌شود و فاصلهٔ p تا q (شکل ۷.۴) با $d(p, q) = \|p - q\|$. همچنین می‌دانیم که برای اینکه بردار $p =< \alpha, \beta >$ بر بردار $q =< \gamma, \delta >$ عمود باشد (که در این‌صورت می‌نویسیم: $p \perp q$) لازم و کافی است که $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$.

(۵.۱۴) هر تبدیل فاصله نگهدار T در R_2 که عنصر صفر را ثابت نگه دارد یک تبدیل خطی است.

برهان. می‌توان نشان داد که هر نقطهٔ p در صفحه به‌وسیلهٔ فاصله‌اش از 0، و بردارهای $e_1 =< 1, 0 >$ و $e_2 =< 0, 1 >$ کاملاً مشخص می‌شود. بنابراین $T(p)$ کاملاً به‌وسیلهٔ $T(e_1)$ و $T(e_2)$ تعیین می‌گردد، زیرا $T(0) = 0$. بنابر آنچه در فصل ۳ دیدیم می‌توانیم یک تبدیل $\widetilde{T}$ به‌گونه‌ای تعریف کنیم که:

$$T(e_1) = \widetilde{T}(e_1)\ ,\ T(e_2) = \widetilde{T}(e_2)$$

چون T و $\tilde{T}$ هر دو با اثرشان روی $e_۱$ و $e_۲$ تعیین می‌شوند پس $T = \tilde{T}$.

اکنون به اثبات یک ویژگی مشخصهٔ تبدیلهای فاصله نگهدار می‌پردازیم.

(۶.۱۴) شرط لازم و کافی برای اینکه تبدیل T فاصله نگهدار باشد این است که

$$\|T(e_۱)\| = \|T(e_۲)\| = ۱ \text{ و } T(e_۱) \perp T(e_۲) \qquad (۷.۱۴)$$

برهان. اگر T فاصله را حفظ کند، روشن است که (۷.۱۴) برقرار است. به وارون، گیریم T تبدیلی است خطی که برای آن (۷.۱۴) برقرار است. برای اینکه ثابت کنیم T فاصله را حفظ می‌کند، کافی است ثابت کنیم که برای هر بردار p:

$$\|T(p)\| = \|p\|$$

زیرا در این‌صورت:

$$d[T(p), T(q)] = \|T(p) - T(q)\| = \|T(p-q)\| = \|p-q\| = d(p,q)$$

اکنون گیریم $p = \xi e_۱ + \eta e_۲$ و $T(e_۱) = <\alpha, \beta>$ و $T(e_۲) = <\gamma, \delta>$. پس از (۷.۱۴) نتیجه می‌شود:

$$\alpha^۲ + \beta^۲ = \gamma^۲ + \delta^۲ = ۱ \ , \ \ \alpha\gamma + \beta\delta = ۰$$

پس:

$$\begin{aligned}
\|T(p)\|^۲ &= \|\xi T(e_۱) + \eta T(e_۲)\|^۲ = \| <\xi\alpha + \eta\gamma, \xi\beta + \eta\delta> \|^۲ \\
&= (\xi\alpha + \eta\gamma)^۲ + (\xi\beta + \eta\delta)^۲ \\
&= \xi^۲\alpha^۲ + ۲\xi\alpha\eta\gamma + \eta^۲\gamma^۲ + \xi^۲\beta^۲ + ۲\xi\beta\eta\delta + \eta^۲\delta^۲ \\
&= \xi^۲(\alpha^۲ + \beta^۲) + \eta^۲(\gamma^۲ + \delta^۲) + ۲\xi\eta(\alpha\gamma + \beta\delta) \\
&= \xi^۲ + \eta^۲ = \|p\|^۲
\end{aligned}$$

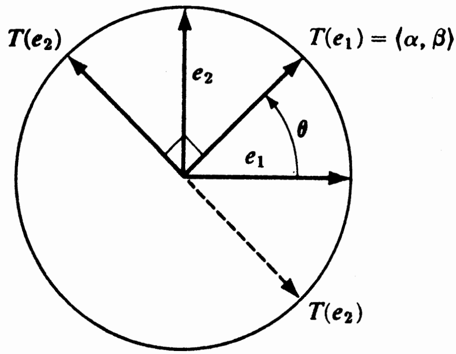
که اثبات (۶.۱۴) پایان می‌پذیرد.

اکنون گیریم T تبدیلی است فاصله نگهدار که مبدأ را ثابت نگه می‌دارد، و فرض می‌کنیم $T(e_۱) = <\alpha, \beta>$. پس $T(e_۲)$ نقطه‌ای است روی دایرهٔ یکه که بردار شعاعی آن بر $T(e_۱)$ عمود است، شکل ۸.۴. از اینجا نتیجه می‌شود که یکی از دو برابری زیر برقرار است:

$$T(e_۲) = <-\beta, \alpha>$$

یا

$$T(e_۲) = <\beta, -\alpha>$$



شکل ۸.۴

در حالت اول ماتریس T نسبت به $\{e_۱, e_۲\}$ برابر است با:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

در حالی که در حالت بعدی ماتریس برابر است با:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$$

در حالت اول T دورانی است به زاویهٔ θ به‌گونه‌ای که $\cos\theta = \alpha$، در حالی که در حالت دوم T تقارنی است دو سویی نسبت به خطی که با $e_۱$ زاویه‌ای برابر $\frac{۱}{۲}\theta$ می‌سازد. باید توجه داشت که در حالت دوم ماتریس $T^۲$ برابر است با:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^۲ + \beta^۲ & ۰ \\ ۰ & \alpha^۲ + \beta^۲ \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

پس $T^۲ = ۱$. تبدیل نوع دوم راتقارن‌محوری و نوع اول را دوران می‌نامیم.

در قضیهٔ بعدی چگونگی ترکیب تقارن محوری و دوران بیان می‌شود، و می‌توان آن را به‌عنوان تمرین ثابت کرد.

(۸.۱۴) گیریم S و T تبدیلهای خطی فاصله نگهدار باشند، در این‌صورت:

۱. اگر S و T دوران باشند، آنگاه ST دوران است.

۲. اگر S و T تقارن محوری باشند، آنگاه ST تقارن محوری‌است.

۳. اگر یکی از دو تبدیل S و T دوران و دیگری تقارن محوری باشد، آنگاه ST یک تقارن محوری است.

اثبات این قضیه به‌عنوان تمرین به‌عهدهٔ خواننده گذاشته می‌شود.

اکنون می‌توانیم همهٔ گروههای متقارن متناهی شکلهای مسطح را پیدا کنیم. این گروه را G می‌نامیم و همهٔ عناصر آن را تبدیلهای خطی (که مبدأ را ثابت نگه می‌دارند) فرض می‌کنیم. تعیین یک گروه به این معنی است که نشان دهیم این گروه با گروهی که قبلاً تعیین شده‌یکریخت است. بدین معنی بین این دو گروه، یک تناظر یک‌به‌یک برقرار است که قانونهای ضرب دو گروه را حفظ می‌کند.

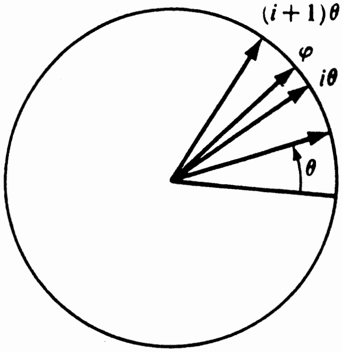
(۹.۱۴) قضیه. گیریم G گروه متناهی تبدیلهای خطی فاصله نگهدار باشد در این‌صورت G با یکی از گروههای زیر یکریخت است:

۱. گروه دوری $C_n = \{۱, R, R^۲, \cdots, R^{n-۱}\}$، $R^n = ۱$، متشکل از توانهای یک دوران ساده.

۲. گروه دووجهی $D_n = \{۱, R, \cdots, R^{n-۱}, S, SR, \cdots, SR^{n-۱}\}$ که در آن R یک دوران، S یک تقارن محوری است و $R^n = ۱$، $S^۲ = ۱$، $SR = R^{-۱}S$.

برهان. می‌توان فرض کرد $G \neq \{۱\}$. نخست فرض می‌کنیم که همهٔ عنصرهای G دوران هستند و R دورانی است متعلق به G با کوچکترین زاویهٔ مثبت ممکن. توانهای R یعنی $\{۱, R, R^۲, \cdots\}$ را در نظر می‌گیریم. چنانکه خواهیم دید، مجموعهٔ این توانها تمامی G است. برای نشان دادن آن فرض می‌کنیم $T \in G$ دوارنی است متمایز از همهٔ توانهای R. اگر φ و θ به ترتیب زاویه‌های T و R باشند، آنگاه به‌ازای یک عدد i داریم $i\theta < \varphi < (i+۱)\theta$، شکل ۹.۴. در این صورت G شامل TR^{-i} است که دورانی است متعلق به G به زاویهٔ $\varphi - i\theta$ کوچکتر از θ، و این مخالف فرض است، بنابراین G متشکل از توانهای R و یک گروه دوری است.

اکنون‌فرض می‌کنیم G شامل یک تقارن محوری S باشد. گیریم H مجموعهٔ همهٔ دورانهایی باشد که به G تعلق دارند. در این‌صورت H یک گروه است و بنابر قسمت اول برهان، دورانی مانند



شکل۹.۴

R متعلق به H وجود دارد به‌گونه‌ای که:

$$H = \{1, R, R^2, \cdots, R^{n-1}\}\ ,\ R^n = 1$$

اکنون گیریم $X \in G$. در این‌صورت یا $X \in H$، یا X یک تقارن محوری است. در حالت اخیر SX یک دوران است. از این‌رو یک مقدار i وجود دارد به‌گونه‌ای که $SX = R^i$ و چون $S^2 = 1$، پس:

$$X = S(SX) = SR^i$$

و ثابت کردیم که:

$$G = \{1, R, \cdots, R^{n-1}, S, SR, \cdots, SR^{n-1}\}$$

سرانجام، SR یک تقارن محوری است، از این‌رو $(SR)^2 = 1$ یا $SRSR = 1$، و داریم $SR = R^{-1}S$. از اینجا نتیجه می‌شود که G با یک گروه دووجهی یکریخت است، و اثبات قضیه پایان می‌یابد.

گروههای تقارن در فضای ۳ بعدی در بخش ۳۳ بررسی خواهد شد. برای بحث بیشتر در این‌باره توصیه می‌شود به کتابهای وایل و بنسن‌گروو، که در کتابنامه آمده است، رجوع شود.

تمرینها

همهٔ تمرینهای این مجموعه در مورد فضای برداری R_2 هستند. در بیشتر تمرینها برای روشن شدن موضوع باید شکل مربوطه رسم شود.

۱. برای دو بردار $a = < \alpha_1, \alpha_2 >$ و $b = < \beta_1, \beta_2 >$، حاصلضرب داخلی را به‌صورت $(a, b) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$ تعریف می‌کنیم: نشان دهید که حاصلضرب داخلی دارای ویژگیهای زیر است:

الف) $(a, b) = (b, a)$

ب) $(a, b + c) = (a, b) + (a, c)$

پ) به‌ازای هر $\lambda \in R$، $(\lambda a, b) = \lambda(a, b)$

ت) $\|a\| = \sqrt{(a, a)}$

ث) $a \perp b$، اگر و تنها اگر، $(a, b) = 0$

ج) $a \perp b$، اگر و تنها اگر، $\|a - b\| = \|a + b\|$ (شکلی برای نشان دادن این حکم رسم کنید.)

۲. در R_2 هر خط L عبارت است از مجموعهٔ همهٔ بردارهایی به شکل $p + x$ که در آن p برداری است ثابت، و x یک زیر فضای یک بعدی S از R_2 را می‌پیماید. پس اگر $S = S(a)$، خط L

متشکل از همهٔ بردارهایی است به شکل $p+\lambda a$ که در آن $\lambda \in R$. خط L را که در بالا شرح دادیم با $p+S$ نشان می‌دهیم.*

الف) گیریم $p+S$ و $q+S$ دو خط در یک زیر فضای یک بعدی S باشند. نشان دهید که $p+S$ و $q+S$ یا بر هم منطبق‌اند یا بردار مشترکی ندارند. در حالت دوم می‌گویند که دو خط موازی‌اند.

ب) نشان دهید که تنها یک خط L وجود دارد که شامل دو بردار متمایز p و q است و شامل همهٔ بردارهایی است به شکل $p+\lambda(q-p)$، $\lambda \in R$.

پ) نشان دهید برای اینکه سه بردار p، q و r بر یک خط قرار گیرند لازم و کافی است که $S(q-p)=S(q-r)$.

ت) نشان دهید که دو خط متمایز یا موازی‌اند یا در یک نقطه متقاطع.

۳. گیریم خط L شامل دوبردار متمایز p و q باشد و r برداری غیر واقع بر L. نشان دهید که بردار u واقع بر L به گونه‌ای که $(u-r)\perp(q-p)$، یک جواب دستگاه معادله‌های زیر است:

$$(u-r, q-p)=0$$
$$u=p+\lambda(q-p), \quad \lambda \in R$$

نشان دهید که مقدار یکتایی برای λ وجود دارد که به‌ازای آن این معادله‌ها برقرارند. دستوری برای فاصلهٔ یک نقطه از یک خط بیابید و آن را با چند مثال عددی بیازمایید.

۴. گیریم:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}$$

یک ماتریس 2×2 با درایه‌های حقیقی باشد. دترمینان $\mathbf{A}$ را با $D(\mathbf{A})$ نشان می‌دهیم و چنین تعریف می‌کنیم:

$$D(\mathbf{A})=\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}$$

الف) نشان دهید که اگر $\mathbf{A}$ ماتریس یک تبدیل خطی فاصله نگهدار T از R_2 باشد، آنگاه $D(\mathbf{A})=\pm 1$؛ و $D(\mathbf{A})=+1$، اگر و تنها اگر $\mathbf{A}$ یک دوران باشد و $D(\mathbf{A})=-1$، اگر و تنها اگر $\mathbf{A}$ یک تقارن محوری باشد.

ب) برای دو ماتریس 2×2ی $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$، نشان دهید، $D(\mathbf{AB})=D(\mathbf{A})D(\mathbf{B})$

پ) حکمهای (۱)، (۲) و (۳) شمارهٔ (۸.۱۴) را نتیجه بگیرید.

* این تعریف خط با تعریفی که در بخش ۱۰ دیدیم یکی است. ولی برای انجام حل این مسأله‌ها به هیچ مطلبی از بخش ۱۰ نیاز نیست.

۱۵. ضرب داخلی

گیریم V فضایی است برداری روی هیأت اعداد حقیقی R.

(۱.۱۵) تعریف. یک ضرب داخلی در V تابعی است که به هر جفت بردار u و v متعلق به V یک عدد حقیقی مانند (u,v) را تخصیص می‌دهد که در شرطهای زیر صدق می‌کند:

i) $(u.v)$ یک تابع دو خطی است، یعنی به‌ازای $u,v,w \in V$ و هر $\alpha \in R$، داریم:

$$(u+v,w) = (u,w) + (v,w)$$
$$(u,v+w) = (u,v) + (u,w)$$
$$(\alpha u,v) = (u,\alpha v) = \alpha(u,v)$$

ii) تابع (u,v) متقارن است، یعنی:

$$(u,v) = (v,u)\ ,\ u,v \in V$$

iii) تابع معین مثبت است، یعنی $(u,u) \geq ۰$، و $(u,u) = ۰$، اگر و تنها اگر $u = ۰$.

مثالها i) گیریم $\{e_۱, \cdots, e_n\}$ یک پایهٔ فضای برداری V روی R باشد و:

$$(u,v) = \sum_{i=۱}^{n} \xi_i \eta_i$$

که در آن $u = \sum \xi_i e_i$ و $v = \sum \eta_i e_i$.

ii) فرض می‌کنیم V یک زیر فضای برداری $C(R)$ یعنی فضای تابعهای پیوسته روی R باشد و (f,g) را چنین تعریف می‌کنیم:

$$(f,g) = \int_۰^۱ f(t)g(t)dt, \qquad f,g \in V$$

در هر یک از این دو مثال می‌توان تحقیق کرد که تابعی که به این‌صورت تعریف شد یک ضرب داخلی است.

در $R_۲$ ضرب داخلی که در مثال (i) تعریف شد به‌عنوان زاویهٔ بین دو بردار u و v شناخته شده است. در واقع اگر طولهای دو بردار u و v برابر ۱ باشند، آنگاه $(u,v) = \cos\theta$، که در آن θ زاویهٔ بین دو بردار است. بنابراین اگر طولهای u و v برابر ۱ باشند، آنگاه $|(u,v)| \leq ۱$. اکنون نشان می‌دهیم که این نامساوی در حالت کلی برقرار است.

(۲.۱۵) تعریف. گیریم (u,v) یک ضرب داخلی روی V باشد. طول بردار $u \in V$ را با $\|u\|$ نشان می‌دهیم و چنین تعریف می‌کنیم:

$$\|u\| = \sqrt{(u,u)}$$

بنابر قسمت (۳) از تعریف (۱.۱۵) داریم:

$$\|u\| \geq 0 ، \|u\| = 0 \text{ اگر و تنها اگر } u = 0$$

به علاوه، داریم،

$$\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\|$$

که در آن $|\alpha|$ قدر مطلق $\alpha \in R$ است.

اکنون نامساوی مهمی را ثابت می‌کنیم:

(۳.۱۵) لم. اگر $\|u\| = \|v\| = 1$، آنگاه $|(u,v)| \leq 1$.

برهان. داریم

$$(u-v,\ u-v) \geq 0$$

از آنجا نتیجه می‌شود:

$$(u,u) + (v,v) - 2(u,v) \geq 0$$

و چون $(u,u) = (v,v) = 1$، پس $(u,v) \leq 1$. به همین ترتیب، از $(u+v,\ u+v) \geq 0$ نتیجه می‌شود $-(u,v) \leq 1$. از این دو نامساوی نتیجه می‌شود $|(u,v)| \leq 1$.

(۴.۱۵) قضیه. (نامساوی کوشی-شوارتس). برای دو بردار دلخواه $u, v \in V$ داریم:

$$|(u,v)| \leq \|u\| \cdot \|v\| \qquad (۵.۱۵)$$

برهان. اگر یکی از دو مقدار $\|u\|$ و $\|v\|$ صفر باشد، قضیهٔ بدیهی است. فرض می‌کنیم $\|u\| \neq 0$ و $\|v\| \neq 0$. در این‌صورت:

$$\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}$$

بردارهایی به‌طول ۱ هستند، و بنا بر لم (۳.۱۵) داریم:

$$\left| \left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|} \right) \right| \leq 1$$

پس $|(u,v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ و (۵.۱۵) ثابت می‌شود.

یک نتیجهٔ این لم نامساوی مثلثی است که تعمیم نامساوی زیر است:

$$|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta| \ , \quad \alpha,\beta \in R$$

(۶.۱۵) فرع. (نامساوی مثلثی) برای هر بردار $u,v \in V$ داریم:

$$\|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|$$

برهان. بنابر نامساوی کوشی-شوارتس و نامساوی مثلثی در $R_۱$ داریم:

$$\begin{aligned} \|u+v\|^۲ &= |(u+v,u+v)| = |(u,u)+(v,v)+۲(u,v)| \\ &\leq |(u,u)|+|(v,v)|+۲|(u,v)| \\ &\leq \|u\|^۲+\|v\|^۲+۲\|u\|\cdot\|v\| = (\|u\|+\|v\|)^۲ \end{aligned}$$

بنابراین

$$(\|u\|+\|v\|)^۲ - \|u+v\|^۲ \geq ۰$$

که پس از تجزیه خواهیم داشت

$$(\|u\|+\|v\|-\|u+v\|)\,(\|u\|+\|v\|+\|u+v\|) \geq ۰$$

از اینجا نتیجه می‌شود که یا هر دو عامل نامنفی یا هر دو نامثبت‌اند. اگر هر دو نامنفی باشند، آنگاه:

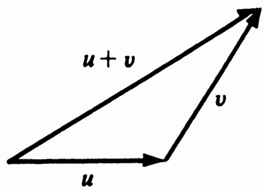
$$\|u\|+\|v\|-\|u+v\| \geq ۰$$

اگر هر دو نامثبت باشند، آنگاه به‌ویژه داریم:

$$\|u\|+\|v\|+\|u+v\| \leq ۰$$

و چون $\|u\|$، $\|v\|$ و $\|u+v\|$ همه نامنفی‌اند، پس $\|u\| = \|v\| = ۰$ لذا بنابر تعریف (۱.۱۵)، $u = v = ۰$، و در این حالت نیز فرع برقرار است.

نامساوی مثلثی در یک فضای برداری کلی، تعمیم این واقعیت از هندسهٔ دبیرستانی است که در هر مثلث طول هر ضلع از مجموع طولهای دو ضلع دیگر کوچکتر است. برای تعبیر آن بردارهای u و v را به‌عنوان پاره‌خطهای جهت‌دار در نظر می‌گیریم، پس $u+v$ نمایش ضلع سوم مثلثی است که دو ضلع آن u و v است [← شکل (۱۰.۴)].



شکل ۱۰.۴

با توجه به هندسهٔ مسطحه حقیقت مهم دیگری به ذهن القا می‌شود بنا بر قانون کسینوسها در مثلثات مسطحه، مربع طول یک ضلع در هر مثلث برابر است با مجموع مربعهای طولهای دو ضلع دیگر و تفاضل دو برابر حاصلضرب طولهای آن دو ضلع در کسینوس زاویهٔ بین آن دو. برای اینکه ببینیم این قضیّه در یک فضای برداری کلی چه شکلی پیدا می‌کند شکل ۱۱.۴ را در نظر می‌گیریم.

بنا بر قانون کسینوسها داریم:

$$\|u-v\|^{۲} = \|u\|^{۲} + \|v\|^{۲} - ۲\|u\|\,\|v\|\cos\theta$$

با توجه به اینکه $\|u\|^{۲} = (u, u)$ و غیره، این دستور چنین نوشته می‌شود:

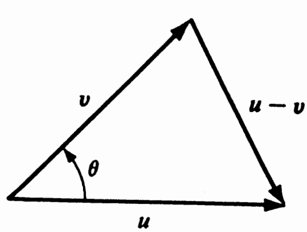
$$(u-v, u-v) = (u, u) + (v, v) - ۲\|u\|\,\|v\|\cos\theta$$

یا پس از ساده کردن آنها:

$$-۲(u, v) = -۲\|u\|\,\|v\|\cos\theta$$

بنابراین قانون کسینوسها در صفحه هم‌ارز است با این حکم که کسینوس زاویهٔ بین دو بردار ناصفر u و v برابر است با:

$$\cos\theta = \frac{(u, v)}{\|u\|\,\|v\|}$$



شکل ۱۱.۴

از اینجا تعریف زیر در مورد بردارهای یک فضای برداری کلی V با یک ضرب داخلی به‌دست می‌آید.

(۷.۱۵) تعریف. گیریم $u, v \in V$ · θ یعنی زاویهٔ بین u و v را به‌شکل:

$$\cos\theta = \frac{(u, v)}{\|u\| \, \|v\|} \qquad \circ \leq \theta \leq \pi$$

تعریف می‌کنیم [باید توجه داشت که بنابر ۵.۱۵، $|\cos\theta| \leq ۱$]. بردارهای u و v را متعامد گویند هرگاه $(u, v) = \circ$، یا به گفتهٔ دیگر، اگر کسینوس زاویهٔ بین آنها صفر باشد. هر پایهٔ $\{u_۱, \cdots, u_n\}$ در یک فضای برداری متناهی-بعد V با یک ضرب داخلی یک پایهٔ یکا قائم نامیده می‌شود هر گاه:

۱. $\|u_i\| = ۱ \, , \; ۱ \leq i \leq n$

۲. $(u_i, u_j) = \circ \, , \; i \neq j$

یک مجموعهٔ یکا قائم از بردارها، مجموعه‌ای است مانند $\{u_۱, \cdots, u_k\}$ که در شرطهای (۱) و (۲) صدق می‌کند.

(۸.۱۵) لم. هر مجموعه از بردارهای یکا قائم یک مجموعهٔ نابسته خطی است.

برهان. گیریم $\{u_۱, \cdots, u_k\}$ یک مجموعهٔ یکا قائم باشد، و فرض می‌کنیم:

$$\lambda_۱ u_۱ + \cdots + \lambda_k u_k = \circ \, , \; \lambda_i \in R$$

اگر ضرب داخلی هر دو طرف را در $u_۱$ تشکیل دهیم، با توجه به خواص دو خطی بودن ضرب داخلی، خواهیم داشت:

$$\lambda_۱(u_۱, u_۱) + \cdots + \lambda_k(u_k, u_۱) = \circ$$

بنابر شرطهای (۱) و (۲) داریم $\lambda_۱ = \circ$. با تشکیل ضرب داخلی دو طرف به ترتیب در $u_۲$، $\cdots$، u_k نتیجه می‌شود، $\lambda_۲ = \cdots = \lambda_k = \circ$ و به این ترتیب ثابت می‌شود که $\{u_۱, \cdots, u_k\}$ یک مجموعهٔ نابسته خطی است.

مثال الف. (I) ساده‌ترین مثال از یک مجموعه بردارهای یکا قائم، مجموعهٔ آشنای بردارهای که در R_n یعنی:

$$e_۱ < ۱, \circ, \cdots, \circ > \quad , \quad e_۲ =< \circ, ۱, \circ, \cdots, \circ >, \cdots ,$$
$$e_n =< \circ, \cdots, \circ, ۱ >$$

است، که در آن ضرب داخلی برای بردارهای $u =< \alpha_1, \cdots, \alpha_n >$ و $v =< \beta_1, \cdots, \beta_n >$ با $(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i$ داده شده است. بردارهای یکه نسبت به این ضرب داخلی یک پایهٔ یکا قائم در R_n تشکیل می‌دهند.

(II) ثابت می‌کنیم که تابعهای $f_n(x) = \sin nx$، $n = 1, 2, \cdots$، در فضای برداری تابعهای حقیقی پیوسته، $C(R)$، که در آن ضرب داخلی برای هر دو تابع پیوستهٔ $f, g \in C(R)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f, g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

یک مجموعهٔ یکا قائم تشکیل می‌دهند. این حکم که تابعهای $\{f_n\}$ یک مجموعهٔ یکاقائم تشکیل می‌دهند هم ارز با اثبات فرمول زیر است

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

نخست برای $n = m$ با استفاده از اتحاد:

$$\cos 2\theta = (\cos \theta)^2 - (\sin \theta)^2 = 1 - 2(\sin \theta)^2$$

داریم:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin nx)^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2nx)dx$$

پس

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2nx)dx = 1 - [\frac{1}{2n\pi} \sin 2nx]_{-\pi}^{\pi} = 1$$

برای $n \neq m$ با استفاده از دستور جمع برای $\cos(A + B)$ و $\cos(A - B)$، برای یافتن دستوری برای $\sin A \sin B$ داریم:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n - m)x - \cos(n + m)x]dx$$

نتیجهٔ انتگرالگیری فوق چنین می‌شود

$$\frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{n - m} \sin(n - m)x\right]_{-\pi}^{\pi} - \left[\frac{1}{n + m} \sin(n + m)x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

برای کاربردهای این دستورها در معادله‌های دیفرانسیل و سریهای فوریه به کتاب بویس و دپریما، که در کتابنامه آمده‌اند، رجوع شود.

در قضیهٔ زیر یک روش استقرایی برای ساختن یک پایهٔ یکا قائم از یک مجموعه از بردارهای پایه داده می‌شود.

(۹.۱۵) قضیه. (روش ساختن دستگاه یکاقائم گرام‌ـاشمیت) گیریم V یک فضای برداری متناهی‌ـبعد با یک ضرب داخلی (u,v) باشد و $\{w_۱,\cdots,w_n\}$ یک پایه. فرض کنیم $\{u_۱,\cdots.u_۲\}$ یک پایهٔ یکاقائم برای زیر فضای $S(w_۱,\cdots,w_r)$ باشد. قرار می‌دهیم:

$$u_{r+۱}=\frac{w}{\|w\|}$$

که در آن

$$w=w_{r+۱}-\sum_{i=۱}^{r}(w_{r+۱},u_i)u_i$$

در این‌صورت $\{u_۱,\cdots,u_{r+۱}\}$ یک پایهٔ یکاقائم برای $S(w_۱,\cdots,w_{r+۱})$ است.

برهان. باید سه مطلب را ثابت کنیم: نخست اینکه طول $u_{r+۱}$ برابر یک است، دوم اینکه برای $۱\le i\le r$، $(u_{r+۱},u_i)=۰$، و سوم اینکه:

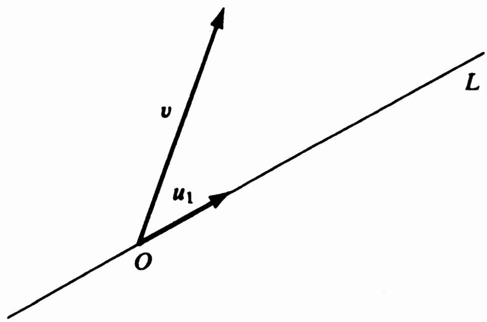
$$S(w_۱,\cdots,w_{r+۱})=S(u_۱,\cdots,u_{r+۱})$$

(از حکم اخیر برمی‌آید که $\{u_۱,\cdots,u_{r+۱}\}$ یک مجموعهٔ نابسته خطی است). چون:

$$S(u_۱,\cdots,u_r)=S(w_۱,\cdots,w_r)$$

پس روشن است که $w=w_{r+۱}-\sum_۱^r(w_{r+۱},u_i)u_i$ مخالف صفر است. در این‌صورت طول $u_{r+۱}=w/\|w\|$ برابر ۱ است. برای اینکه ثابت کنیم به‌ازای $۱\le j\le r$، $(u_{r+۱},u_j)=۰$، کافی است ثابت کنیم که $(w,u_j)=۰$. داریم:

$$\begin{aligned}(w,u_j)&=\left(w_{r+۱}-\sum_{i=۱}^{r}(w_{r+۱},u_i)u_i,u_j\right)\\&=(w_{r+۱},u_j)-\sum_{i=۱}^{r}(w_{r+۱},u_i)(u_i,u_j)\\&=(w_{r+۱},u_j)-(w_{r+۱},u_j)=۰\end{aligned}$$



شکل۴.۱۲

سرانجام روشن است که $u_{r+1} \in S(w_1, \cdots, w_{r+1})$ و $w_{r+1} \in S(u_1, \cdots, u_{r+1})$. چون بنابر فرض $S(w_1, \cdots, w_r) = S(u_1, \cdots, u_r)$، داریم:

$$S(u_1, \cdots, u_{r+1}) = S(w_1, \cdots, w_{r+1})$$

یعنی اثبات آنچه که می‌خواستیم.

فرع. هر فضای برداری متناهی‌ـبعد V با یک ضرب داخلی، یک پایهٔ یکا قائم دارد.

برهان. گیریم $\{v_1, \cdots, v_n\}$ یک پایهٔ V باشد. روش گرام‌ـاشمیت با استقرای ریاضی نشان می‌دهد که هر زیر فضای $S(v_1, v_2, \cdots . v_r)$، $r \leq n$، از V یک پایهٔ یکا قائم دارد. به‌ویژه $V = S(v_1, \cdots, v_n)$ چنین پایه‌ای دارد.

مثال ب. می‌توان به روش گرام‌ـاشمیت از دیدگاه مسالهٔ یافتن فاصلهٔ یک نقطه از یک خط، که در تمرین ۳ از بخش ۱۴ در نظر گرفتیم، نگاه کرد. (و نیز به تمرین ۱۳ مراجعه کنید)

برای سادگی، فرض می‌کنیم، L در R_2 خطی گذرنده از مبدأ و u_1 برداریکه‌ای روی آن است [شکل ۴.۱۲]. گیریم v برداری است غیر واقع بر L. نخستین گام روش گرام‌ـاشمیت تعیین بردار $w = v - (v, u_1)u_1$ است، به‌گونه‌ای که $(w, u_1) = 0$. از لحاظ هندسی، با این‌کار v را در امتداد L و خط عمود بر آن تجزیه می‌کنیم [شکل ۴.۱۳]:

$$v = (v, u_1)u_1 + w = (v, u_1)u_1 + (v - (v, u_1)u_1)$$

فاصلهٔ انتهای v تا خط L برابر است با طول تصویر w:

$$\|w\| = \|v - (v, u_1)u_1\|$$

هنگام استفاده این دستور باید به خاطر داشت که u_1 برداری است یکه.

اکنون یک مثال عددی می‌آوریم. می‌خواهیم فاصلهٔ نقطهٔ (۵ و ۱) را از خط گذرنده بر (۱و۱) و (۰و۲−) بیابیم. بردار یکهٔ خط برابر است با $u_۱ = u/\|u\|$ که در آن $u =< -۳, -۱ >$. پس

$$u_۱ = \frac{۱}{\sqrt{۱۰}} < -۳, -۱ >$$

برای استفاده از روش تصویری مذکور که هم اکنون بیان کردیم، نقطهٔ (۱و۱) را به‌عنوان مبدأ می‌گیریم [شکل ۱۴.۴]. در این‌صورت v برداری است که با پاره خط جهت‌دار از نقطهٔ (۱و۱) تا (۵و۱) نشان داده می‌شود. از این‌رو

$$v =< ۰, ۴ >$$

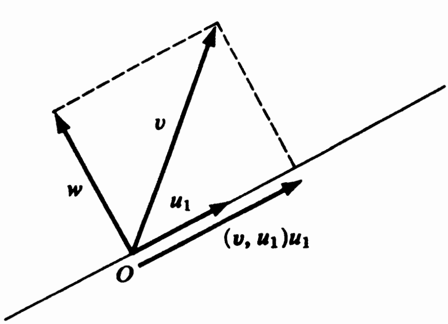
تصویر قائم v بر این خط با بردار زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} w &= v - (v, u_۱)u_۱ \\ &=< ۰, ۴ > - \frac{۱}{\sqrt{۱۰}}(-۴) \cdot \frac{۱}{\sqrt{۱۰}} < -۳, -۱ > \\ &=< -\frac{۶}{۵}, \frac{۱۸}{۵} > \end{aligned}$$

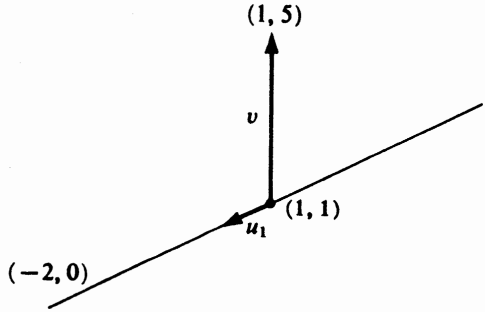
پس فاصلهٔ مطلوب چنین است:

$$\|w\| = \frac{۱}{۵}(۳۶ + ۳۲۴)^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۵}\sqrt{۳۶۰}$$

اکنون برمی‌گردیم به مفهوم تبدیلهای طول نگهدار در یک فضای برداری کلی با یک ضرب داخلی. مثالهائی از این تبدیلها (دورانها و تقارنها در $R_۲$) را در بخش پیش به‌طور مفصل مورد بحث قرار دادیم.



شکل ۱۳.۴



شکل ۱۴.۴

(۱۰.۱۵) تعریف. گیریم V یک فضای برداری با ضرب داخلی (u, v) باشد. هر تبدیل خطی $T \in L(V, V)$ یک تبدیل متعامد نامیده می‌شود، هرگاه T طول نگهدار باشد، یعنی برای هر $u \in V$، $\|T(u)\| = \|u\|$.*

(۱۱.۱۵) قضیه. گیریم V یک فضای برداری متناهی‌ـبعد و $T \in L(V, V)$ باشد. حکمهای زیر در مورد T هم‌ارزند.

۱. T یک تبدیل متعامد است.

۲. برای هر $u, v \in V$، $(T(u), T(v)) = (u, v)$.

۳. برای یک پایهٔ یکای قائم V مانند $\{u_۱, \cdots, u_n\}$ بردارهای $\{T(u_۱). \cdots, T(u_n)\}$ نیز یک مجموعهٔ یکای قائم است.

۴. $\mathbf{A}$، ماتریس T نسبت به یک پایهٔ یکا قائم در شرط $^t\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$ صدق می‌کند که در آن $^t\mathbf{A}$ ماتریسی است که از $\mathbf{A}$ با تعویض جای سطرها و ستونها به‌دست می‌آید و ترانهادهٔ $\mathbf{A}$ نامیده می‌شود.

برهان. از (۱) حکم (۲) نتیجه می‌شود. می‌دانیم که به‌ازای هر $u \in V$، داریم $\|T(u)\| = \|u\|$. از اینجا نتیجه می‌شود که به‌ازای هر بردار u، $(T(u), T(u)) = (u, u)$. با قرار دادن $u + v$ به جای u داریم:

$$(T(u+v)\ ,\ T(u+v)) = (u+v, u+v)$$

اکنون دو طرف تساوی اخیر را با استفاده از خواص تقارن و دوخطی بودن ضرب داخلی بسط می‌دهیم:

$$(T(u), T(u)) + ۲(T(u), T(v)) + (T(v), T(v)) = (u, u) + ۲(u, v) + (v, v)$$

---

* در ارتباط با این تعریف به مسأله ۱۲، در آخر این بخش مراجعه کنید.

چون $(T(u),T(u))=(u,u)$ و $(T(v),T(v))=(v,v)$، از معادلهٔ اخیر نتیجه می‌شود که برای هر u و v داریم $(T(u),T(v))=(u,v)$.

حکم (۲) مستلزم حکم (۳) است. گیریم $\{u_۱,\cdots,u_n\}$ یک پایهٔ یکا قائم V باشد؛ در این صورت:

$$(u_i,u_i)=۱\ ,\ \ (u_i,u_j)=\circ\ ,\ i\neq j$$

بنا بر حکم(۲) داریم:

$$(T(u_i),T(u_i))=۱\ ,\ \ (T(u_i),T(u_j))=\circ, i\neq j$$

و $\{T(u_۱),\cdots,T(u_n)\}$ یک مجموعهٔ یکا قائم است.

حکم (۳) حکم (۱) را ایجاب می‌کند. فرض کنیم که برای یک پایهٔ یکا قائم V مانند $\{u_۱,\cdots,u_n\}$ بردارهای تصویر $\{T(u_۱),\cdots,T(u_n)\}$ یک مجموعهٔ یکا قائم تشکیل می‌دهند. گیریم:

$$v=\xi_۱u_۱+\cdots+\xi_nu_n$$

یک بردار دلخواه V باشد. در این‌صورت:

$$\|v\|^۲=(v,v)=(\xi_۱u_۱+\cdots+\xi_nu_n,\xi_۱u_۱+\cdots+\xi_nu_n)=\sum_۱^n\xi_i^۲$$

زیرا $\{u_۱,\cdots,u_n\}$ یک مجموعهٔ یکا قائم است. به‌همین ترتیب داریم:

$$\|T(v)\|^۲=(T(v),T(v))=(\sum_۱^n\xi_iT(u_i),\sum_۱^n\xi_iT(u_i)=\sum_۱^n\xi_i^۲$$

پس حکم (۱) و همچنین هم‌ارزی سه حکم اول ثابت شد.

سرانجام ثابت می‌کنیم که حکمهای (۳) و (۴) هم‌ارزند. فرض کنیم که حکم (۳) برقرار باشد و $\{u_۱,\cdots,u_n\}$ یک پایهٔ یکا قائم V باشد. گیریم:

$$T(u_i)=\sum_{j=۱}^n\alpha_{ji}u_j$$

چون $\{T(u_۱),\cdots,T(u_n)\}$ یک مجموعهٔ یکا قائم است، داریم:

$$(T(u_i),T(u_i))=(\sum_{j=۱}^n\alpha_{ji}u_j,\ \sum_{j=۱}^n\alpha_{ji}u_j)=\sum_{j=۱}^n\alpha_{ji}^۲=۱$$

و اگر $i \neq j$، آنگاه:

$$(T(u_i), T(u_j)) = (\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} u_k, \sum_{k=i}^{n} \alpha_{kj} u_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\alpha_{kj} = 0$$

از این معادله‌ها نتیجه می‌شود که $^t\mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{I}$، زیرا عنصر (i,k) ام $^t\mathbf{A}$ برابر α_{ki} است. به وارون، $^t\mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ ایجاب می‌کند که معادله‌های بالا برقرار باشند، و از این‌رو $\{T(u_1), \cdots, T(u_n)\}$ یک مجموعهٔ یکا قائم است. به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

(۱۲.۱۵) تعریف. ماتریس $\mathbf{A} \in M_n(R)$ را یک ماتریس متعامدگویند هرگاه $^t\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}$؛ در این‌صورت $\mathbf{A}$ صرفاً ماتریس یک تبدیل متعامد نسبت به یک پایهٔ یکا قائم V است.

تمرینها

در همهٔ تمرینها، V نمایش یک فضای برداری متناهی‌ـبعد روی R با یک ضرب داخلی است.

۱. برای زیر فضاهایی از R_4 که با هر یک از مجموعه‌های زیر پدید می‌آیند یک پایهٔ یکا قائم به کمک روش گرام‌ـاشمیت یا روش دیگر بیابید. به فرض اینکه ضرب داخلی R_4 همان ضرب داخلی معمولی باشد، یعنی:

$$(<\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4>, <\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4>) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \beta_i$$

الف) $<1,1,1,0>$, $<-1,1,2,1>$

ب) $<1,1,0,0>, <0,1,1,0>, <0,0,1,1>$

پ) $<-1,1,1,1>, <1,-1,1,1>, <1,1,-1,1>$

۲. برای زیر فضایی از $C(R)$ که با تابعهای $\{1, x, x^2\}$ پدید می‌آیند، پایه‌ای یکا قائم نسبت به ضرب داخلی $(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ بیابید.

۳. به کمک روش گرام‌ـاشمیت در هر یک از حالتهای زیر همانند مثال (ب) فاصلهٔ هر نقطه را از خط متناظرش بیابید:

الف) نقطهٔ $(0,0)$ از خط گذرنده بر $(1,1)$ و $(3,0)$.

ب) نقطهٔ $(-10,)$ و خط $y = x$.

پ) نقطهٔ $(1,1)$ از خط گذرنده بر $(-1,-1)$ و $(-2,0)$

۴. به کمک روش مثال الف نشان دهید که تابعهای $g_n(x) = \cos nx$، $n = 1, 2, \cdots$ در $C(R)$ نسبت به ضرب داخلی داده شده در مثال (الف):

$$(f,g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

یک مجموعهٔ یکا قائم هستند.

۵.گیریم $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ یک پایهٔ یکا قائم برای V باشد.

الف) نشان دهید که اگر $v = \sum \xi_i u_i$ و $w = \sum \eta_i u_i$، آنگاه $(v, w) = \sum \xi_i \eta_i$.

ب) نشان دهید که هر بردار $v \in V$ را می‌توان به‌طور یکتا به‌صورت زیر نوشت:

$$v = \sum_{i=1}^{n} (v, u_i) u_i$$

۶.گیریم u برداری است متعلق به R_n به‌گونه‌ای که (نسبت به ضرب داخلی معمولی) $\|u\| = 1$. ثابت کنید که یک ماتریس متعامد $n \times n$ وجود دارد که سطر اولش u است.

۷.گیریم $O(V)$ نمایش مجموعهٔ همهٔ تبدیلهای متعامد روی V است. ثابت کنید که $O(V)$ نسبت به عمل ضرب یک گروه است.

۸.دو فضای برداری V و W، به ترتیب با دو ضرب داخلی (v_1, v_2) و $[w_1, w_2]$ را طولپای گویند، هرگاه یک تبدیل خطی یک به یک T از V روی W وجود داشته باشد، به گونه‌ای که به‌ازای هر مقدار $v_1, v_2 \in V$، $[Tv_1, Tv_2] = (v_1, v_2)$. یک چنین تبدیل خطی را طولپای گویند. گیریم V یک فضای برداری متناهی‌ـبعد با یک ضرب داخلی (u, v)، و $\{v_1, \cdots, v_n\}$ یک پایهٔ یکا قائم آن باشد. ثابت کنید که نگاشت:

$$T : \sum_{i=1}^{n} \xi_i v_i \to < \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n >$$

یک طولپایی از V روی R_n است که در آن R_n همانند مثال (i) در آغاز این بخش، به ضرب داخلی معمولی مجهز است.

۹.گیریم V یک فضای برداری با یک ضرب داخلی و W زیر فضایی از آن است. گیریم $W^\perp$ مجموعهٔ بردارهای $v \in V$ است به‌گونه‌ای که برای هر $w \in W$، $(v, w) = 0$. ثابت کنید $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim V$.

۱۰.ثابت کنید که اگر W_1 و W_2 زیر فضاهای V باشند به‌گونه‌ای که $\dim W_1 = \dim W_2$، آنگاه یک تبدیل متعامد T وجود دارد به‌گونه‌ای که $T(W_1) = W_2$.

۱۱.همهٔ بردارهای این مسأله به R_3 که به ضرب داخلی معمولی مجهز است تعلق دارند. هر صفحه یک مجموعهٔ P از بردارهایی است به‌شکل $p + w$، $w \in W$، که در آن W یک زیرفضای دو بعدی است. بنابر فصل ۲ می‌دانیم که هر مجموعهٔ بردارهای R_3 یک صفحه تشکیل می‌دهند اگر و تنها اگر، این مجموعه متشکل از همهٔ جوابهای معادلهٔ خطی:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 = 0 \ , \ \alpha_i \in R$$

باشد که در آن همهٔ α_1، α_2 و α_3ها همزمان صفر نیستند. زیرفضای دو بعدی Wی مربوط به این صفحه مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ همگن زیر است:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$$

باید توجه داشت که اگر $n =< \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 >$، آنگاه برای هر $w \in W$، $(n, w) = 0$، و (n, p) برای هر $p \in P$ یک ثابت است. بردار n را بردار قائم بر صفحه می‌نامند.

الف) گیریم n بردار ناصفری در R_3 و α یک عدد حقیقی ثابت باشد. نشان دهید که مجموعهٔ بردارهای p به‌گونه‌ای که $(p, n) = \alpha$، صفحه‌ای عمود بر بردار n و یک زیرفضای دو بعدی $S(n)^\perp$ است.

ب) یک بردار قائم n و یک پایه برای $S(n)^\perp$ برای صفحهٔ زیر بیابید:

$$3x_1 - x_2 + x_3 - 1 = 0$$

پ) معادلهٔ صفحه‌ای را بیابید که بر بردار $n =< 1, -1, 2 >$ عمود و شامل بردار $p =< -1, 1, 0 >$ باشد. معادلهٔ این صفحه را به هر یک از دو صورت زیر بنویسید:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \beta$$

و

$$(n, p) = \alpha$$

ت) نشان دهید برای اینکه بردار x در صفحهٔ عمود بر n و مارّ بر p باشد، لازم و کافی است که $(x - p, n) = 0$.

ث) فرض می‌کنیم $a =< 2, 0, 1 >$ و $b =< 1, 1, 0 >$. بردار $c \neq 0$ را به‌گونه‌ای بیابید که

$$(c, a) = (c, b) = 0$$

[راهنمایی: نشان دهید که c جواب یک دستگاه از معادله‌های همگن است.]

ج) معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که بر نقطه‌های $< 1, 1, 1 >$ ، $< 2, 0, -1 >$ و $< 1, 0, 0 >$ بگذرد. [راهنمایی: به کمک نتیجهٔ جزء ث بردار قائم را بیابید.]

چ) گیریم P یک صفحه و u برداری غیر واقع بر آن باشد. نشان دهید که یک بردار یکتای p_0 روی P وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر $x \in P$:

$$(p_0 - x, p_0 - u) = 0$$

[راهنمایی: فرض کنید که معادلهٔ صفحهٔ P چنین است:

$$(x-p,n)=\circ$$

که در آن $p \in P$ و n یک بردار قائم است. در این صورت $p_\circ$ به‌ازای مقداری مانند $\lambda \in R$ در معادله‌های:

$$(p_\circ - p, n)=\circ\ ,\ p_\circ - u = \lambda n$$

صدق می‌کند. در این صورت لازم است λ را بیابیم]

ح) فاصلهٔ نقطهٔ $<۱,۱,۲>$ را از صفحهٔ $x_۱+x_۲-x_۳+۱=\circ$ به کمک نتیجهٔ جزء چ بیابید.

۱۲. تبدیلهای قائم یک فضای برداری متناهی‌ـبعد V روی R با ضرب داخلی، از راه طول تعریف شده است نه از راه تعامد. گیریم T تبدیلی است که تعامد را حفظ می‌کند، به این معنی که هر گاه $(v,w)=\circ$ آنگاه $(Tv,Tw)=\circ$. ثابت کنید که T مضربی عددی از یک تبدیل متعامد است.

۱۳. گیریم $v_۱،\cdots،v_m$ یک مجموعهٔ یکا قائم در V، و v برداری باشد به‌گونه‌ای که $v \notin S(v_۱,\cdots,v_m)$. نشان دهید که از میان همهٔ بردارهای به شکل $v-x$، $x \in S(v_۱,\cdots,v_n)$ بردار $v' = v-\sum_{i=۱}^{n}(v,v_i)v_i$، که با روش گرام‌ـاشمیت داده می‌شود، کوچکترین طول را دارد.

۵

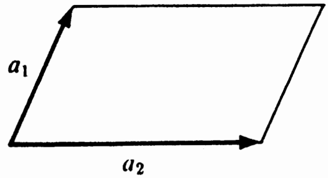
دترمینانها

در حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌توان رفتار تابع $f: R \to R$ را در نقطهٔ x با محاسبهٔ مشتق آن $f'(x)$ بررسی کرد. به‌عنوان مثال اگر f' در یک بازهٔ $[a, b]$ مثبت باشد، تابع f در آن بازه یک‌به‌یک است و غیره. دترمینان نقش مشابهی در جبر خطی دارد. دترمینان قاعده‌ای است که به هر تبدیل خطی $T: V \to V$ عددی را مربوط می‌کند که چیزی در مورد رفتار T بیان می‌کند (← بخش ۱۸). می‌توان دترمینان را به‌عنوان تابعی از بردارهای سطری یک تبدیل T نسبت به یک پایه دانست. اگر ماتریس T دارای ضریبهای حقیقی باشد، دترمینان (با تقریب علامت ± 1) حجم یک چندوجهی است که یالهای آن سطرهای ماتریس‌اند.

۱۶. تعریف دترمینانها

تابع $A(a_۱, a_۲)$ را که به یک جفت بردار $a_۱, a_۲ \in R_۲$ مساحت متوازی‌الاضلاعی به اضلاع $a_۱$ و $a_۲$ را تخصیص می‌دهد، (شکل ۱.۵)، در نظر می‌گیریم. به‌جای یافتن دستوری برحسب مؤلفه‌های $a_۱$ و $a_۲$ برای این تابع، ویژگیهای کلی تابع A را بررسی می‌کنیم. نخست:

$$\text{اگر} \quad e_۱ =< ۱, ۰ >, \; e_۲ =< ۰, ۱ > \text{، آنگاه} \quad A(e_۱, e_۲) = ۱ \tag{۱.۱۶}$$



شکل۱.۵

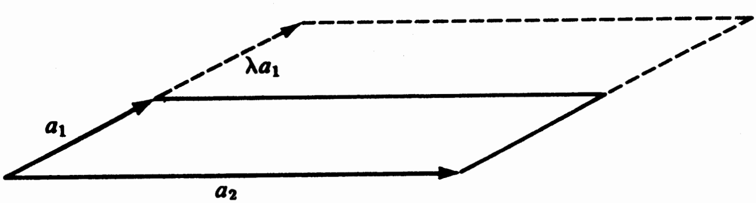
دوم، اگر یکی از بردارها را در عدد مثبت λ ضرب کنیم A نیز در λ ضرب می‌شود، زیرا مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصلضرب طول قاعده در ارتفاع (شکل ۲.۵) و طول $\lambda a_۱$ برابر است با λ برابر طول $a_۱$.*

برحسب تابع A داریم:

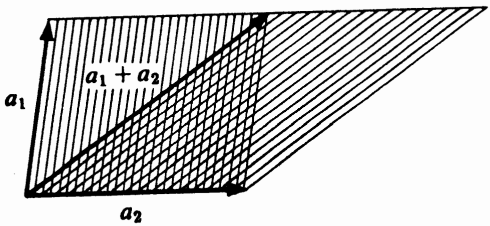
$$A(\lambda a_۱, a_۲) = A(a_۱, \lambda a_۲) = \lambda A(a_۱, a_۲)\ ,\ \lambda > ۰ \qquad (۲.۱۶)$$

سرانجام قاعده و ارتفاع متوازی‌الاضلاعی به اضلاع $a_۱$ و $a_۲$ با قاعده و ارتفاع متوازی‌الاضلاعی به اضلاع $a_۱ + a_۲$ و $a_۲$ برابر است (شکل ۳.۵)، بنابراین داریم:

$$A(a_۱ + a_۲, a_۲) = A(a_۱, a_۲) = A(a_۱, a_۲ + a_۱) \qquad (۳.۱۶)$$



شکل۲.۵



شکل۳.۵

* مانند فصل ۴، طول بردار $a =< \alpha_۱, \alpha_۲ >$ را با $\sqrt{\alpha_۱^۲ + \alpha_۲^۲}$ تعریف می‌کنیم.

صبر کنید! ممکن است تصور شود که همهٔ خواص اساسی تابع مساحت ذکر نشده‌اند. ولی، ما ثابت می‌کنیم که تنها یک تابع است که به هر جفت از بردارهای $R_۲$ یک عدد حقیقی نامنفی مربوط می‌کند که در شرطهای (۱.۱۶) و (۲.۱۶) صدق می‌کنند. همچنین باید توجه داشت که تابع A ویژگی دیگری هم دارد:

(۴.۱۶) شرط لازم و کافی برای اینکه $A(a_۱, a_۲) \neq ۰$، این است که $a_۱$ و $a_۲$ نابسته خطی باشند.

حکم (۴.۱۶) شاید یکی از مهمترین و جالب‌توجه‌ترین ویژگیهای تابع مساحت باشد. بنابراین ویژگی، برای اینکه دو بردار وابسته خطی باشند لازم و کافی است که مساحت متوازی‌الاضلاعی که روی آنها ساخته می‌شود صفر باشد. به‌عبارت دیگر، محاسبهٔ یک عدد تنها (یعنی مساحت)، آزمونی است برای وابستگی خطی.

به‌سبب فایدهٔ روشن آزمونی از نوع (۴.۱۶) است که تابعی با ویژگیهای مشابه تابع مساحت را در مقامی تاحد ممکن کلی، تعریف می‌کنیم.

نخست تابعی روی مجموعه‌ای از بردارهای F_n تعریف می‌کنیم که به‌ازای یک مقدار دلخواه $\lambda \in F$ در اصلهای (۱.۱۶)، (۲.۱۶) و (۳.۱۶) صدق کند. در این بخش نتایجی از این اصول استخراج می‌کنیم و اثبات وجود چنین تابعی را به بخش بعدی می‌گذاریم. باید توجه داشت که منطقاً هیچ چیز خطایی در این روش وجود ندارد، به‌عنوان مثال، این کار مشابه کاری است که در هندسهٔ اقلیدسی انجام می‌دهیم یعنی، نتایجی از اصلها پیش از ساختن اشیایی که در آنها صدق کنند، استخراج می‌کنیم. در بخش ۱۹ رابطهٔ این تابع را با مساحت و حجم بررسی می‌کنیم.

(۵.۱۶) تعریف. گیریم F یک هیأت دلخواه باشد. دترمینان، تابعی است که به هر nتایی $\{a_۱, \cdots, a_n\}$ از بردارهای F_n عنصری از F مانند $D = D(a_۱, \cdots, a_n)$ را مربوط می‌کند به‌گونه‌ای که در شرطهای زیر صدق می‌کند:

i) $D(a_۱, \cdots, a_{i-۱}, a_i + a_j, a_{i+۱}, \cdots, a_n) = D(a_۱, \cdots, a_n)$، $j \neq i$، $۱ \leq i \leq n$

ii) $D(a_۱, \cdots, a_{i-۱}, \lambda a_i, a_{i+۱}, \cdots, a_n) = \lambda D(a_۱, \cdots, a_n), \lambda \in F$

iii) $D(e_۱, \cdots, e_n) = ۱$، اگر e_i بردار یکهٔ iام باشد، $< ۰, \cdots, ۰, ۱, ۰, \cdots, ۰ >$.

اکنون نتایج این تعریف را بیان می‌کنیم:

(۶.۱۶) قضیه. گیریم D یک تابع دترمینان روی F_n باشد. در این‌صورت حکمهای زیر معتبرند:

الف) اگر جای دو بردار a_i و a_j، $(i \neq j)$ را عوض کنیم $D(a_۱, \cdots, a_n)$ در -۱ ضرب می‌شود.

ب) اگر دو بردار a_i و a_j برابر باشند، آنگاه $D(a_۱, \cdots, a_n) = ۰$

پ) اگر به‌جای a_i مقدار $a_i + \sum_{j\neq i} \lambda_j a_j$ را به‌ازای یک مقدار دلخواه $\lambda_j \in F$ بگذاریم D تغییر نمی‌کند.

ت) اگر $\{a_1, \cdots, a_n\}$ وابسته خطی باشد، آنگاه $D(a_1, \cdots, a_n) = 0$

ث)
$$D(a_1, \cdots, a_{i-1}, \lambda a_i + \mu a'_i, a_{i+1}, \cdots, a_n)$$
$$= \lambda D(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n) + \mu D(a_1, \cdots, a'_i, \cdots, a_n)$$

به‌ازای $1 \leq i \leq n$، به‌ازای عناصر λ و μی هیأت دلخواه، و به‌ازای بردارهای $a_i, a'_i \in F_n$.

برهان. (الف) برای اینکه نشان دهیم عنصر iام تابع دترمینان، a و jامین عنصر آن b است از طرز نمایش زیر استفاده می‌کنیم:

$$D(\cdots, \underset{i}{a}, \cdots, \underset{j}{a}, \cdots)$$

در این‌صورت برای i و jی دلخواه داریم:

$$D(\cdots, \underset{i}{a_i}, \cdots, \underset{j}{a_j}, \cdots)$$

$$= -D(\cdots, \underset{i}{-a_i}, \cdots, \underset{j}{a_j}, \cdots) \qquad \text{بنابر ویژگی (ii)}$$

$$= -D(\cdots, \underset{i}{-a_i}, \cdots, \underset{j}{-a_i + a_j}, \cdots) \qquad \text{بنابر ویژگی (i)}$$

$$= D(\cdots, \underset{i}{-a_i}, \cdots, \underset{j}{+a_i - a_j}, \cdots) \qquad \text{بنابر ویژگی (ii)}$$

$$= D(\cdots, \underset{i}{-a_j}, \cdots, \underset{j}{a_i - a_j}, \cdots) \qquad \text{بنابر ویژگی (i)}$$

چون
$$-a_i + (a_i - a_j) = -a_j$$

$$= -D(\cdots, \underset{i}{-a_j}, \cdots, \underset{j}{-a_i + a_j}, \cdots) \qquad \text{بنابر ویژگی (ii)}$$

$$= -D(\cdots, \underset{i}{-a_j}, \cdots, \underset{j}{-a_i}, \cdots) \qquad \text{بنابر ویژگیهای (i) و (ii)}$$

$$= -D(\cdots, \underset{i}{a_j}, \cdots, \underset{j}{a_i}, \cdots)$$

ب) اگر برای $i \neq j$، $a_i = a_j$ آنگاه بنابر (الف) داریم:

$$\begin{aligned} D(a_۱, \cdots, a_n) &= D(\cdots, \underset{i}{a_j}, \cdots, \underset{j}{a_i}, \cdots) \\ &= D(\cdots, ۲a_i, \cdots, a_i, \cdots) \\ &= -۲D(\cdots, -a_i, \cdots, a_i, \cdots) \\ &= -۲D(\cdots, ۰, \cdots, a_i, \cdots) = ۰ \end{aligned}$$

و حکم (ب) ثابت می‌شود.

پ) گیریم $i \neq j$ و $\lambda \in F$. می‌توان فرض کرد $\lambda \neq ۰$. در این‌صورت:

$$D(\cdots, \underset{i}{a_i}, \cdots, \underset{j}{a_j}, \cdots)$$

$$= \lambda^{-۱} D(\cdots, \underset{i}{a_i}, \cdots, \underset{j}{\lambda a_j}, \cdots) \qquad \text{(ii) بنابر ویژگی}$$

$$= \lambda^{-۱} D(\cdots, \underset{i}{a_i + \lambda a_j}, \cdots, \underset{j}{\lambda a_j}, \cdots) \qquad \text{(i) بنابر ویژگی}$$

$$= D(\cdots, a_i + \lambda a_j, \cdots, a_j, \cdots)$$

با تکرار این استدلال، حکم (پ) ثابت می‌شود.

ت) اگر $a_۱$، $\cdots$، a_n وابسته خطی باشند، در این‌صورت یک a_i را می‌توان به‌عنوان ترکیب خطی از بردارهای دیگر بیان کرد:

$$a_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j a_j$$

بنابر گزارهٔ (پ) داریم:

$$\begin{aligned} D(a_۱, \cdots, a_n) &= D(\cdots, \underset{i}{a_i - \sum_{j \neq i} \lambda_j a_j}, \cdots) \\ &= D(\cdots, \underset{i}{۰}, \cdots) \\ &= ۰ D(\cdots, \underset{i}{۰}, \cdots) \qquad \text{(ii) بنابر ویژگی} \\ &= ۰ \end{aligned}$$

ث) بنابر ویژگی (ii)، کافی است، مثلاً، ثابت کنیم که:

$$D(a_۱ + a'_۱, a_۲, \cdots, a_n) = D(a_۱, a_۲, \cdots, a_n) + D(a'_۱, a_۲, \cdots, a_n) \qquad (۷.۱۶)$$

می‌توان فرض کرد که $\{a_۲, \cdots, a_n\}$ نابسته خطی است [وگرنه بنابر حکم (ت) هر دو طرف (۷.۱۶) صفرند و چیزی برای اثبات وجود ندارد]. بنابر (۴.۷) مجموعهٔ $\{a_۲, \cdots, a_n\}$ را می‌توان کامل کرد و یک پایهٔ R_n مانند $\{\overline{a}_۱, a_۲, \cdots, a_n\}$ از آن به‌دست آورد. در این‌صورت بنابر حکم (پ) و اصل (ii) داریم:

$$D(\lambda_۱\overline{a}_۱ + \sum_{i>۱}\lambda_i a_i, a_۲, \cdots, a_n) = \lambda_۱ D(\overline{a}_۱, a_۲, \cdots, a_n) \quad \textbf{(۸.۱۶)}$$

به‌ازای هر انتخاب $\lambda_۱$، $\cdots$، λ_n.

اینک گیریم:

$$a_۱ = \lambda_۱\overline{a}_۱ + \lambda_۲ a_۲ + \cdots + \lambda_n a_n$$
$$a'_۱ = \mu_۱\overline{a}_۱ + \mu_۲ a_۲ + \cdots + \mu_n a_n$$

پس:

$$a_۱ + a'_۱ = (\lambda_۱ + \mu_۱)\overline{a}_۱ + (\lambda_۲ + \mu_۲)a_۲ + \cdots + (\lambda_n + \mu_n)a_n$$

بنابر (۸.۱۶) داریم:

$$D(a_۱ + a'_۱, a_۲, \cdots, a_n) = (\lambda_۱ + \mu_۱)D(\overline{a}_۱, a_۲, \cdots, a_n)$$
$$D(a_۱, a_۲, \cdots, a_n) = \lambda_۱ D(\overline{a}_۱, a_۲, \cdots, a_n)$$
$$D(a'_۱, a_۲, \cdots, a_n) = \mu_۱ D(\overline{a}_۱, a_۲, \cdots, a_n)$$

بنابر قانون پخشپذیری در R، (۷.۱۶) به‌دست می‌آید و برهان قضیه پایان می‌پذیرد.

تبصره. بسیاری از مؤلفان در تعریف دترمینان به‌جای اصل (i) از حکمهای (ث) و (الف) استفاده می‌کنند. نکته‌ای که در تعریف بالا [در استفاده از اصل (i)] وجود دارد این است که حکمهای کمتری داریم و می‌توانیم قانون بنیادی (ث) را بااستفاده از نتیجهٔ نسبتاً ژرف (۴.۷) مربوط به مجموعه‌های بردارهای نابسته خطی در F_n ثابت کنیم.

اکنون نشان می‌دهیم که ویژگیهای دترمینانها که هم‌اکنون یافتیم، روش سریع و کارایی برای محاسبهٔ مقدارهای یک تابع دترمینان در حالتهای ویژه به ما می‌دهد.

منظور ما بیان این نکته است که ویژگیهای $D(a_۱, \cdots, a_n)$ که در تعریف (۵.۱۶) و قضیهٔ (۶.۱۶) گفتیم رابطهٔ نزدیکی با انجام عملیات سطری در ماتریسی دارد که سطرهای آن $\{a_۱, \cdots, a_n\}$ است.

برای روشن‌ساختن مطالب بالا، دترمینان $D(a_۱, \cdots, a_n)$ را با $D(\mathbf{A})$ نشان می‌دهیم که در آن $\{a_۱, \cdots, a_n\}$ سطرهای ماتریس $n \times n$ ی $\mathbf{A}$ است. اگر:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

اغلب دترمینان آن را چنین نمایش می‌دهیم:

$$D(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

این طرز نمایش دترمینان برای انجام محاسبات بسیار مناسبتر است، ولی خاطرنشان می‌سازیم که استفاده از آن دارای این نقص است که برای ماتریسها و دترمینانهای مختلف از یک علامت باید استفاده کنیم.

قضیهٔ بعدی کلید محاسبهٔ عملی دترمینانهاست. این قضیه برحسب عملهای مقدماتی سطری مذکور در تعریف (۹.۶) بیان می‌شود.

(۹.۱۶) قضیه. گیریم $\mathbf{A}$ یک ماتریس $n \times n$ با سطرهای $\{a_1, \cdots, a_n\}$ باشد.

الف) گیریم $\mathbf{A}'$ از روی $\mathbf{A}$ با یک عمل مقدماتی سطری از نوع I در تعریف (۹.۶)، *(تعویض جای دو سطر)* به‌دست آمده باشد. در این‌صورت

$$D(\mathbf{A}') = -D(\mathbf{A})$$

ب) گیریم $\mathbf{A}$ از روی $\mathbf{A}$ با یک عمل مقدماتی سطری از نوع II *(تعویض سطر a_i با $a_i + \lambda a_j$ که در آن $\lambda \in F$، و $i \neq j$)* به‌دست آمده باشد. در این‌صورت $D(\mathbf{A}') = D(\mathbf{A})$.

پ) گیریم $\mathbf{A}'$ از $\mathbf{A}$ با یک عمل مقدماتی سطری از نوع III *(جانشین کردن μa_i به‌جای a_i که در آن $\mu \neq 0$ به F تعلق دارد)* به‌دست آمده باشد. در این‌صورت

$$D(\mathbf{A}') = \mu D(\mathbf{A})$$

برهان. جزء (الف) بیان دیگری از قضیهٔ (۶.۱۶) (الف) است. جزء (ب) صورت دیگری از قضیهٔ (۶.۱۶) (پ) است. سرانجام، جزء (پ) همان اصل (ii) در تعریف (۵.۱۶) است.

مثال الف. دترمینان زیر را حساب کنید:

$$\begin{vmatrix} -۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & ۱ & ۰ \end{vmatrix}$$

بنابر بخشهای ۶ و ۱۲ می‌دانیم که می‌توانیم نخست با عملهای مقدماتی سطری، ماتریسی مانند $\mathbf{A}'$ هم‌ارز سطری ماتریس مفروض:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

به‌دست آوریم به‌گونه‌ای که سطرهای ناصفر $\mathbf{A}'$ به‌شکل پلّه‌یی باشند. از اینجا می‌خواهیم ببینیم که سطرهای $\mathbf{A}$ نابسته خطی هستند یا نه. اگر سطرهای $\mathbf{A}$ وابسته خطی باشند، آنگاه بنابر قضیهٔ (۶.۱۶) (ت)، $D(\mathbf{A}) = ۰$. اگر سطرهای $\mathbf{A}$ نابسته خطی باشند، آنگاه همهٔ سطرهای $\mathbf{A}'$ مخالف صفر خواهند بود و بنابر بخش ۱۲ مثال (پ) می‌توانیم به‌کمک عملهای مقدماتی سطری $\mathbf{A}'$ را به ماتریس یکه تبدیل کنیم. بنابر قضیهٔ (۹.۱۶) می‌توانیم در هر مرحله مقدار دترمینان را حفظ کنیم و باتوجه به اینکه بنابر تعریف (۵.۱۶) (۳)، دترمینان ماتریس یکه برابر ۱ است محاسبه پایان خواهد یافت.

اگر این نکته‌ها را برای ماتریس خود به‌کار بریم، خواهیم داشت:

$$\begin{vmatrix} -۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & ۱ & ۰ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۲ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & ۱ & ۰ \end{vmatrix}$$

(با قراردادن $a_۲ + ۲a_۱$ به‌جای $a_۲$)

$$= \begin{vmatrix} -۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۲ & ۲ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & -۱ \end{vmatrix}$$

(با قراردادن $a_۳ + a_۱$ به‌جای $a_۳$ و $a_۴ - a_۱$ به‌جای $a_۴$)

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -5+\frac{8}{3} \end{vmatrix}$$
(دو عمل سطری از نوع II برای دو سطر آخر به‌کار بسته‌شده است)

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} \end{vmatrix}$$
(اعمال سطری دیگر از نوع II، مثل بخش ۱۲)

$$= (-1)(-1)6(-\frac{7}{3}) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
(عملیّات مقدّماتی سطری از نوع III)

$$= -\frac{42}{3} = -14$$

باید توجه داشت که در این روش یافتن اشتباههای محاسبه‌یی بسیار ساده است.

تمرینها

۱.دترمینان ماتریسهای زیر را حساب کنید:

الف) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ پ) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

ت) ماتریسهای تمرین ۷ از بخش ۱۲.

۲.گیریم $\mathbf{A}$ ماتریس مثلثی (که عنصرهای زیر قطر آن صفرند)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & * \\ 0 & \alpha_2 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

باشد. ثابت کنید $D(\mathbf{A}) = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$.

۳.گیریم $\mathbf{A}$ ماتریسی است بلوکی-مثلثی:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1 & & *\\ 0 & \mathbf{A}_2 & \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & \cdots & \mathbf{A}_r\end{pmatrix}$$

که در آن $\mathbf{A}_i$ها ماتریسهایی مربع، محتملاً با اندازه‌های متفاوت‌اند. ثابت کنید:

$$D(\mathbf{A})=D(\mathbf{A}_1)D(\mathbf{A}_2)\cdots D(\mathbf{A}_r)$$

۴.گیریم $D^*(a_1,\cdots,a_n)$ تابعی از بردارهای a_1، $\cdots$، a_n از R_n در R باشد، به‌گونه‌ای که برای هر $a_j,a_i',a_i''\in R_n$:

الف) $D^*(e_1,\cdots,e_n)=1$، که در آن e_iها بردارهای یکه‌اند.

ب) $D^*(a_1,\cdots,\lambda a_i,\cdots,a_n)=\lambda D^*(a_1,\cdots,a_n), \lambda\in R$

پ)
$$\begin{aligned}D^*(a_1,\cdots,a_i'+a_i'',\cdots,a_n)&=D^*(a_1,\cdots,a_i',\cdots,a_n)\\&\quad+D^*(a_1,\cdots,a_i'',\cdots,a_n)\end{aligned}$$

ت) $D^*(a_1,\cdots,a_n)=0$، اگر برای $i\neq j$، $a_i=a_j$. ثابت کنید که D^* یک تابع دترمینان روی R_n است.

۱۷. وجود و یکتایی دترمینانها

اکنون باید ببینیم یک تابع D که در شرطهای تعریف (۵.۱۶) صدق می‌کند وجود دارد یا نه. در این بخش نخست ثابت می‌کنیم که حداکثر یک چنین تابعی وجود دارد و سپس روش ساختن آن را بیان می‌کنیم. در جریان این بحث ویژگیهای مفید دیگر دترمینانها را نیز به‌دست می‌آوریم.

(۱.۱۷) قضیه. گیریم D و D' دو تابعی باشند که در شرطهای (i) و (ii)ی تعریف (۵.۱۶) صدق می‌کنند، در این‌صورت برای همهٔ a_1، $\cdots$، a_n متعلق به F_n داریم:

$$D(a_1,\cdots,a_n)=D'(a_1,\cdots,a_n)$$

برهان. تابع Δ را که به‌شکل زیر تعریف می‌شود در نظر می‌گیریم:

$$\Delta(a_1,\cdots,a_n)=D(a_1,\cdots,a_n)-D'(a_1,\cdots,a_n)$$

در این‌صورت، چون هر دو تابع D و D' در شرطهای (۵.۱۶) و (۶.۱۶) صدق می‌کنند، Δ دارای ویژگیهای زیر است:

$$\Delta(e_1, \cdots, e_n) = 0 \qquad \textbf{(۲.۱۷)}$$

(۳.۱۷) مقدار $\Delta(a_1, \cdots, a_n)$ با تعویض دو بردار a_i و a_j تغییر علامت می‌دهد، و اگر به‌ازای $i \neq j$، $a_i = a_j$، آنگاه $\Delta(a_1, \cdots, a_n) = 0$

$$\Delta(\cdots, \lambda a_i, \cdots) = \lambda \Delta(\cdots, a_i, \cdots), \lambda \in F \qquad \textbf{(۴.۱۷)}$$

$$\Delta(\cdots, a_i + a_i', \cdots) = \Delta(\cdots, a_i, \cdots) + \Delta(\cdots, a_i', \cdots) \qquad \textbf{(۵.۱۷)}$$

اکنون گیریم a_1، $\cdots$، a_n بردارهای دلخواهی از F_n باشند. کافی است ثابت کنیم که $\Delta(a_1, \cdots, a_n) = 0$، و نشان می‌دهیم که این نتیجه‌ای است از ویژگیهای (۲.۱۷) و (۵.۱۷). چون e_1، $\cdots$، e_n یک پایهٔ F_n است می‌توانیم بنویسیم:

$$a_i = \lambda_{i1} e_1 + \cdots + \lambda_{in} e_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} e_j$$

بااستفاده از (۴.۱۷) و (۵.۱۷) در مورد اولین عنصر و سپس در مورد دومین عنصر و غیره، داریم:

$$\begin{aligned}
\Delta(a_1, \cdots, a_n) &= \Delta\Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{1j} e_j, a_2, \cdots, a_n\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \lambda_{1j} \Delta(e_j, a_2, \cdots, a_n) \\
&= \sum_{j_1=1}^{n} \lambda_{1j_1} \Delta\Big(e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} \lambda_{2j_2} e_{j_2}, a_3, \cdots, a_n\Big) \\
&= \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \lambda_{1j_1} \lambda_{2j_2} \Delta(e_{j_1}, e_{j_2}, a_3, \cdots, a_n) \\
&= \cdots = \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \cdots \sum_{j_n=1}^{n} \lambda_{1j_1} \lambda_{2j_2} \cdots \lambda_{nj_n} \Delta(e_{j_1}, \cdots, e_{j_n}) \\
&= \sum_{j_1, \cdots, j_n=1}^{n} \lambda_{1j_1} \cdots \lambda_{nj_n} \Delta(e_{j_1}, \cdots, e_{j_n})
\end{aligned}$$

که در آن آخرین مجموع شامل n^n جمله است و با تغییر $j_۱$، $\cdots$، j_n به‌طور نابسته از ۱ تا n به‌دست می‌آید. از (۲.۱۷) و (۳.۱۷) به‌آسانی نتیجه می‌شود که برای هر انتخاب $j_۱$، $\cdots$، j_n داریم $\Delta(e_{j_۱}, \cdots, e_{j_n}) = ۰$. بنابراین $\Delta(a_۱, \cdots, a_n) = ۰$، و بخش یکتایی قضیه ثابت می‌شود.

اکنون وجود دترمینان را ثابت می‌کنیم. در حالت کلی برهان ساده‌ای برای این قسمت وجود ندارد. فهمیدن برهانی که در اینجا می‌آوریم مستلزم صرف وقت و دقت و احتمالاً شکیبایی است. ولی این جنبهٔ جبران‌کننده را دارد که گذشته از اثبات وجود دترمینان، خیلی چیزهایی دیگر ازجمله دستور مهمّی برای بسط ستونی دترمینان به‌صورت (۷.۱۷) به‌دست می‌دهد.

(۶.۱۷) قضیه. یک تابع $D(a_۱, \cdots, a_n)$ وجود دارد که در شرطهای تعریف(۵.۱۶) صدق می‌کند.

برهان. برهان را با استقراء روی n انجام می‌دهیم.* به‌ازای $n = ۱$ تابع $D(\alpha) = \alpha$، $\alpha \in F$ در شرطهای مطلوب صدق می‌کند. اکنون فرض می‌کنیم که D تابعی است روی $F_{n-۱}$ که در شرطهای تعریف (۵.۱۶) صدق می‌کند. اندیس j، $۱ \leq j \leq n$، را ثابت می‌گیریم، و فرض می‌کنیم بردارهای $a_۱$، $\cdots$، a_n متعلق به F_n به‌شکل زیر داده شده باشند:

$$a_i = (\alpha_{i۱}, \cdots, \alpha_{in}), \qquad \alpha_{ik} \in F, ۱ \leq i \leq n$$

اکنون D را به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$D(a_۱, \cdots, a_n) = (-۱)^{۱+j}\alpha_{۱j}D_{۱j} + \cdots + (-۱)^{n+j}\alpha_{nj}D_{nj} \tag{۷.۱۷}$$

که در آن به‌ازای $۱ \leq i \leq n$، D_{ij} دترمینان بردارهای $a_۱^{(i)}$، $\cdots$، $a_{n-۱}^{(i)}$ متعلق به $F_{n-۱}$ است که از $n - ۱$ بردار $a_۱$، $\cdots$، $a_{i-۱}$، $a_{i+۱}$، $\cdots$، a_n با حذف مؤلفهٔ jام در هر حالت به‌دست آمده است.

ثابت می‌کنیم که تابع D که با (۷.۱۷) تعریف شده است در اصول دترمینان صدق می‌کند. بنابر قضیهٔ یکتایی (۱.۱۷)، نتیجه می‌شود که بسط (۷.۱۷) برای jهای گوناگون برابرند، که حقاً نتیجهٔ مهمی است.

اکنون (۷.۱۷) را به‌دقت مورد بررسی قرار می‌دهیم. بنابر این دستور $D(a_۱, \cdots, a_n)$ به این ترتیب به‌دست آمده است که ضریبهای ستون jام ماتریس $\mathbf{A}$ با سطرهای $a_۱$، $\cdots$، a_n را گرفته‌ایم و هریک را در توانی از (-۱) برابر دترمینان بردارهایی متشکل از سطرهای ماتریسی ضرب کرده‌ایم که از ماتریس $\mathbf{A}$ با حذف ستون jام و یکی از سطرها به‌دست آمده است.

---

* آنچه که باید از راه استقراء ثابت شود این است که یا $\Delta(e_{j_۱}, \cdots, e_{j_n}) = ۰$ (اگر دوتا از jها مساوی باشند) یا $\Delta(e_{j_۱}, \cdots, e_{j_n}) = \pm\Delta(e_۱, \cdots, e_n)$ (اگر jها متمایز باشند).

نخست گیریم e_1، $\cdots$، e_n بردارهای یکهٔ F_n باشند، پس ماتریس $\mathbf{A}$ برابر است با:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

که در آن جاهای خالی با ۰ها پر می‌شوند. در این‌صورت در ستون jام تنها یک عنصر مخالف صفر وجود دارد که همان $\alpha_{jj} = 1$ است. ماتریسی که از آن سطرهای D_{jj} حساب می‌شود، ماتریس $(n-1) \times (n-1)$ زیر است:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

از این‌رو (۷.۱۷) چنین می‌شود:

$$D(e_1, \cdots, e_n) = (-1)^{j+j} \alpha_{jj} D_{jj} = 1$$

زیرا $\alpha_{jj} = 1$، و چون بنابر اصول دترمینان F_{n-1}، $D_{jj} = 1$.

اکنون به‌ازای یک مقدار $\lambda \in F$، λa_i را جانشین a_i می‌کنیم. در این‌صورت ماتریس $\mathbf{A}'$ که سطرهای آن a_1، $\cdots$، a_{i-1}، λa_i، a_{i+1}، $\cdots$، a_n هستند عبارت است از:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{i-1,1} & \cdots & \alpha_{i-1,j} & \cdots & \alpha_{i-1,n} \\ \lambda\alpha_{i1} & \cdots & \lambda\alpha_{ij} & \cdots & \lambda\alpha_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nj} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

در این‌صورت (۷.۱۷) چنین می‌شود:

$$\begin{aligned} D(\cdots, \lambda a_i, \cdots) = (-1)^{1+j} \alpha_{1j} D'_{1j} + \cdots + (-1)^{i+j} \lambda \alpha_{ij} D'_{ij} \\ + \cdots + (-1)^{n+j} \alpha_{nj} D'_{nj} \quad (8.17) \end{aligned}$$

که در آن D'_{ij} برای $\mathbf{A}'$ همان‌گونه تعریف شده است که D_{ij} برای $\mathbf{A}$. از این تعریف و ویژگیهای D روی F_{n-1} به‌ازای $k \neq i$ داریم $D'_{kj} = \lambda D_{kj}$ و $D'_{ij} = D_{ij}$. در این‌صورت از (۸.۱۷) نتیجه می‌شود:

$$D(\cdots, \lambda a_i \cdots) = \lambda D(a_1, \cdots, a_n)$$

سرانجام، گیریم $i \neq k$ و دترمینان بردارهای:

$$\underbrace{a_1, \cdots, a_i + a_k, \cdots, a_k, \cdots, a_n}_{i}$$

را در نظر می‌گیریم. در این‌صورت ماتریس $\mathbf{A}''$ که سطرهایش این بردارها هستند برابر است با:

$$\mathbf{A}'' = \begin{array}{r} \\ \\ i \\ \\ k \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{i1} + \alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{in} + \alpha_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{array} \right)$$

لذا (۷.۱۷) چنین می‌شود:

$$\begin{aligned} D'' &= D(\cdots, \underset{i}{a_i + a_k} \cdots, \underset{k}{a_k}, \cdots, \cdots, a_n) \\ &= (-1)^{1+j}\alpha_{1j}D''_{1j} + \cdots + (-1)^{i+j}(\alpha_{ij} + \alpha_{kj})D''_{ij} \\ &+ \cdots + (-1)^{k+j}\alpha_{kj}D''_{kj} + \cdots + (-1)^{n+j}\alpha_{nj}D''_{nj} \end{aligned} \tag{۹.۱۷}$$

که در آن D''_{ij}ها مانند (۷.۱۷) از برای بردارهایی که سطرهای $\mathbf{A}''$ را تشکیل می‌دهند تعریف می‌شود. بنابر فرض استقراء:

$$D(\cdots, \underset{i}{a'_i + a'_s}, \cdots) = D(a'_1, \cdots, a'_{n-1}), F_{n-1} \text{ در } i \neq s$$

داریم:

(۱۰.۱۷) $\quad D''_{sj} = D_{sj}$ ، برای $1 \leq s \leq n$ و $s \neq i, k$

از بررسی $\mathbf{A}''$ همچنین نتیجه می‌شود

$$D''_{ij} = D_{ij}$$

ولی D''_{kj} نیز چندان آسان به‌دست نمی‌آید. بردارهایی که D''_{kj} را تشکیل می‌دهند از روی $\mathbf{A}''$ با حذف سطر kام و ستون jام به‌دست می‌آیند. چون سطر iام $\mathbf{A}''$ مجموع $a_i + a_j$ است، بااستفاده از حکم (ث)ی (۶.۱۶)، D''_{kj} را به‌شکل مجموع دو دترمینان بیان می‌کنیم، که نخستین آنها D_{kj} و دومی $\pm D_{ij}$ است که در آن علامت $\pm$ بنابر حکم (الف) (۶.۱۶) تعیین می‌شود که با استدلال استقرایی برابر است با $(-۱)^{|k-i|+۱}$. بنابراین داریم:

$$D''_{kj} = D_{kj} + (-۱)^{|k-i|+۱} D_{ij}$$

همچنین باید توجه داشت که به‌ازای هر مقدار درست a و b داریم $(-۱)^a = (-۱)^{|a|}$ و $(-۱)^a = (-۱)^{a+۲b}$. با جایگذاری در (۹.۱۷) نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} D'' &= (-۱)^{۱+j}\alpha_{۱j}D_{۱j} + \cdots + (-۱)^{i+j}(\alpha_{ij} + \alpha_{kj})D_{ij} \\ &\quad + \cdots + (-۱)^{k+j}\alpha_{kj}[D_{kj} + (-۱)^{|k-i|+۱}D_{ij}] \\ &\quad + \cdots + (-۱)^{n+j}\alpha_{nj}D_{nj} \\ &= D(a_۱, \cdots, a_n) + [(-۱)^{i+j} + (-۱)^{k+j+|k-i|+۱}]\alpha_{kj}D_{ij} \end{aligned}$$

اگر بتوانیم نشان دهیم که ضریب $\alpha_{kj}D_{ij}$ برابر صفر است برهان پایان می‌یابد. داریم:

$$\begin{aligned} (-۱)^{i+j} + (-۱)^{k+j+|k-i|+۱} &= (-۱)^{i+j} + (-۱)^{k+j}(-۱)^{k-i}(-۱) \\ &= (-۱)^{i+j} + (-۱)^{j-i+۱} = (-۱)^{i+j} + (-۱)^{j+i+۱} = ۰ \end{aligned}$$

به‌این ترتیب برهان قضیه کامل می‌شود.

در این بخش ثابت شد که یک تابع دترمینان $D(a_۱, \cdots, a_n)$ از n بردار $a_۱$، $\cdots$، a_n متعلق به F_n وجود دارد. اگر این بردارها به‌شکل زیر داده‌شده باشند:

$$\begin{aligned} a_۱ &= \alpha_{۱۱}e_۱ + \cdots + \alpha_{۱n}e_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n &= \alpha_{n۱}e_۱ + \cdots + \alpha_{nn}e_n \end{aligned}$$

به‌عبارت دیگر اگر این بردارها را سطرهای ماتریس زیر فرض کنیم:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{۱۱} & \cdots & \alpha_{۱n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n۱} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

آنگاه در اثبات قضیهٔ (۱.۱۷) نشان داده‌ایم که:

$$D(a_1, \cdots, a_n) = \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_n=1}^{n} \alpha_{1j_1} \cdots \alpha_{nj_n} D(e_{j_1}, \cdots, e_{j_n}) \qquad (۱۱.۱۷)$$

که در آن عمل جمع روی n^n انتخاب ممکن $(j_1, \cdots, j_n)$ انجام می‌شود. چون وقتی دو درایه برابر باشند، آنگاه $D(e_{j1}, \cdots, e_{jn}) = 0$، می‌توان (۱۱.۱۷) را به‌شکل زیر نوشت:

$$D(a_1, \cdots, a_n) = \sum_{j_1, \cdots, j_n} \alpha_{1j_1} \cdots \alpha_{nj_n} D(e_{j_1}, \cdots, e_{j_n}) \qquad (۱۲.۱۷)$$

که در آن عمل جمع روی $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ انتخاب ممکن $\{j_1, \cdots, j_n\}$ است که در آن همهٔ j_iها متمایزند. دستور (۱۲.۱۷) را بسط کامل دترمینان می‌نامند. اگر دترمینان $D(a_1, \cdots, a_n)$ را به‌عنوان تابع $D(\mathbf{A})$ از ماتریسی که سطرهای آن a_1، $\cdots$، a_n هستند بگیریم، آنگاه بسط کامل نشان می‌دهد که چون $D(e_{j1}, \cdots, e_{jn})$ برابر ± 1 است، دترمینان مجموع حاصل‌ضربهای عنصرهای ماتریس $\mathbf{A}$ (با ضریبهای ± 1) است. اگر عنصرهای ماتریس $\mathbf{A}$ حقیقی باشند، و آن را به‌عنوان نقطه‌ای در فضای n^2 بعدی بدانیم، آنگاه (۱۲.۱۷) نشان می‌دهد که $D(\mathbf{A})$ تابع پیوسته‌ای است از $\mathbf{A}$.

اندیشهٔ گرفتن دترمینان $D(a_1, \cdots, a_n)$ به‌عنوان تابعی از ماتریس $\mathbf{A}$ با سطرهای a_1،$\cdots$،a_n مسألهٔ دیگری را پیش می‌آورد. گیریم c_1، $\cdots$، c_n ستونهای $\mathbf{A}$ باشند. در این‌صورت می‌توان $D(c_1, \cdots, c_n)$ را تشکیل داد و رابطهٔ آن را با $D(a_1, \cdots, a_n)$ بررسی کرد.

(۱۳.۱۷) قضیه. گیریم $\mathbf{A}$ یک ماتریس $n \times n$ با سطرهای a_1، $\cdots$، a_n و ستونهای c_1،$\cdots$،c_n باشد، آنگاه:

$$D(a_1, \cdots, a_n) = D(c_1, \cdots, c_n)$$

برهان. از بسط کامل (۱۲.۱۷) استفاده می‌کنیم و (۱۲.۱۷) را برای تعریف تابع جدید زیر به‌کار می‌بریم:

$$D^*(c_1, \cdots, c_n) = \sum_{j_1, \cdots, j_n} \alpha_{1j_1} \cdots \alpha_{nj_n} D(e_{j_1}, \cdots, e_{j_n}) \qquad (۱۴.۱۷)$$
$$= D(a_1, \cdots, a_n)$$

ثابت می‌کنیم که $D^*(c_1, \cdots, c_n)$ در اصل‌های تابع دترمینان صدق می‌کند، سپس از قضیهٔ (۱.۱۷) نتیجه می‌شود:

$$D^*(c_1, \cdots, c_n) = D(c_1, \cdots, c_n)$$

نخست c_1، $\cdots$، c_n را بردارهای یکهٔ e_1، $\cdots$، e_n می‌گیریم. در این‌صورت بردارهای سطری a_1، $\cdots$، a_n نیز بردارهای یکه‌اند و داریم:

$$D^*(e_1, \cdots, e_n) = D(e_1, \cdots, e_n) = 1$$

از تساوی (۱۴.۱۷) دیده می‌شود که چون هر جمله در مجموع، درست یک درایه از یک ستون مفروض دارد، پس:

$$D^*(\cdots, \underset{i}{\lambda c_i}, \cdots) = \lambda D^*(\cdots, c_i, \cdots)$$

سرانجام، تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$D^*(\cdots, c_i \underset{i}{+} c_k, \cdots), \ k \neq i$$

این تابع نشان می‌دهد که برای $1 \leq r \leq n$، $\alpha_{ri} + \alpha_{rk}$ جانشین α_{ri} شده است. اگر این جایگذاری را در (۱۴.۱۷) انجام دهیم می‌توانیم $D^*(\cdots, c_i + c_k, \cdots)$ را به‌صورت یک مجموع:

$$D^*(\cdots, c_i + c_k, \cdots) = D^*(\cdots, \underset{i}{c_i}, \cdots) + D^*(\cdots, \underset{i}{c_k}, \cdots)$$

تجزیه کنیم و اگر نشان دهیم که هرگاه به‌ازای $r \neq s$ دو بردار c_r و c_s برابر باشند، آنگاه $D^*(c_1, \cdots, c_n) = 0$، اثبات قضیه پایان می‌یابد. در (۱۴.۱۷) جملهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\alpha_{1j_1} \cdots \alpha_{kj_k} \cdots \alpha_{lj_l} \cdots \alpha_{nj_n} D(e_{j_1}, \cdots, e_{j_k}, \cdots, e_{j_l}, \cdots, e_{j_n})$$

به‌گونه‌ای که $j_k = r$ و $j_i = s$. در (۱۴.۱۷) جمله‌ای نیز به‌شکل زیر خواهد بود:

$$\alpha_{1j_1} \cdots \alpha_{kj_l} \cdots \alpha_{ij_k} \cdots \alpha_{nj_n} D(e_{j_1}, \cdots, e_{j_l}, \cdots, e_{j_k}, \cdots, e_{j_n})$$

و چون $c_r = c_s$، پس مجموع این دوجمله صفر است، و:

$$D(\cdots, e_{j_k}, \cdots, e_{j_l}, \cdots) = -D(\cdots, e_{j_l}, \cdots, e_{j_k}, \cdots)$$

از این‌رو هر جملهٔ $D^*(c_1, \cdots, c_n)$ از یک جملهٔ دیگر حذف شده است و ثابت کرده‌ایم که اگر برای $r \neq s$، $c_r = c_s$، آنگاه $D^*(c_1, \cdots, c_n) = 0$. نشان دادیم که D^* در اصول تابع دترمینان صدق می‌کند. بنابر قضیهٔ (۱.۱۷) نتیجه می‌گیریم که:

$$D(a_1, \cdots, a_n) = D(c_1, \cdots, c_n)$$

و قضیهٔ (۱۳.۱۷) ثابت می‌شود.

اکنون می‌توان برای هر ماتریس Aی $n \times n$ بدون ابهام از $D(\mathbf{A})$ گفتگو کرد و می‌دانیم که این $D(\mathbf{A})$ به‌عنوان تابعی از هر سطر یا ستون ماتریس در اصلهای تابع دترمینان صدق می‌کند. هرگاه:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

اغلب از طرز نمایش:

$$D(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

استفاده می‌کنیم. قضیهٔ (۱۳.۱۷) را می‌توان به‌شکل زیر نیز بیان کرد:

$$D(\mathbf{A}) = D({}^t\mathbf{A}) \qquad (۱۵.۱۷)$$

که در آن ${}^t\mathbf{A}$ را ترانهادهٔ ماتریس $\mathbf{A}$ می‌نامند و از $\mathbf{A}$ با تعویض جای سطرها و ستونها به‌دست می‌آید. از این‌رو اگر α_{ij} عنصر (i,j)ام $\mathbf{A}$ باشد آنگاه α_{ji} عنصر (i,j)ام ${}^t\mathbf{A}$ است.

تمرینها

۱. ثابت کنید که اگر در R_2، $a_1 = < \xi, \eta >$ و $a_2 = < \lambda, \mu >$، آنگاه:

$$D(a_1, a_2) = \xi\mu - \eta\lambda$$

۲. ثابت کنید که اگر $a = < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 >$، $b = < \beta_1, \beta_2, \beta_3 >$ و $c = < \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 >$، آنگاه:

$$D(a,b,c) = \alpha_1(\beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3) - \alpha_2(\beta_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_1) + \alpha_3(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)$$

۱۸. قضیهٔ حاصلضرب دترمینانها

اکنون مهمترین ویژگی دترمینان را که در بخشهای بعدی کتاب مورد استفاده قرار خواهد گرفت بررسی می‌کنیم. تعریفی که برای دترمینان دادیم تا حدّی بدین‌سبب بوده است که سهولتی در اثبات این قضیه به‌وجود می‌آورد.

یک سؤال طبیعی که می‌شود مطرح کرد سؤال زیر است. فرض کنیم $\mathbf{A} = (\alpha_{ij})$ و $\mathbf{B} = (\beta_{ij})$ ماتریسهای $n \times n$ باشند؛ پس $\mathbf{AB}$ یک ماتریس $n \times n$ است. آیا رابطه‌ای بین $D(\mathbf{AB})$، $D(\mathbf{A})$، $D(\mathbf{B})$ وجود دارد؟ (در مورد ماتریسهای ۲ × ۲ در تمرین ۴ از بخش ۱۴ به این سؤال پاسخ داده شد.)

نخست لم زیر را ثابت می‌کنیم:

(۱.۱۸) لم. گیریم $f(a_1, \cdots, a_n)$ تابعی از n بردار $a_i \in F_n$ با مقادیر متعلق به F باشد، که در اصلهای (i) و (ii)ی تعریف *(۵.۱۶)* تابع دترمینان صدق می‌کند. در این‌صورت به‌ازای همهٔ بردارهای a_1، $\cdots$، a_n متعلق به F_n داریم:

$$f(a_1, \cdots, a_n) = D(a_1, \cdots, a_n) f(e_1, \cdots, e_n)$$

که e_iها بردارهای یکه و D تابع دترمینان روی F_n است.

برهان. اگر $f(e_1, \cdots, e_n) \neq 1$، آنگاه بنابر قضیهٔ (۱.۱۷)، $f = D$، و لم ثابت است.

اکنون فرض کنیم $f(e_1, \cdots, e_n) = 1$، و تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$D'(a_1, \cdots, a_n) = \frac{D(a_1, \cdots, a_n) - f(a_1, \cdots, a_n)}{1 - f(e, \cdots, e_n)} \quad (۲.۱۸)$$

روشن است که D' در اصلهای (i)، (ii) و (iii)ی تعریف (۵.۱۶) صدق می‌کند. از این‌رو بنابر قضیهٔ (۱.۱۷)، $D' = D$ و از حل (۲.۱۸) نسبت به $f(a_1, \cdots, a_n)$ نتیجه به‌دست می‌آید.

پیش از اثبات قضیهٔ اصلی، باید به مطلبی در مورد تبدیلهای خطی روی F_n اشاره کنیم. در بخش ۱۲ نشان دادیم که هر ماتریس Aی $n \times n$، معرّف یک تبدیل خطی U از F_n در F_n است، که در آن اثر U روی یک بردار $x = < \xi_1, \cdots, \xi_n >$ با ضرب ماتریس $\mathbf{A}$ در x به‌عنوان یک بردار ستونی، داده شده است:

$$x \to U(x) = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

در جریان اثبات قضیهٔ بعد، به‌موجب این تعریف، برای تعریف یک تبدیل خطی روی F_n از یک ماتریس $\mathbf{A}$ استفاده شده است.

اکنون می‌توانیم قضیهٔ ضرب را بیان کنیم:

(۳.۱۸) قضیه. گیریم $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو ماتریس $n \times n$ باشند، در این‌صورت $D(\mathbf{AB}) = D(\mathbf{A})D(\mathbf{B})$.

برهان. گیریم $\mathbf{A}=(\alpha_{ij})$، $\mathbf{B}=(\beta_{ij})$ و U تبدیل خطی $U(a)=\mathbf{B}a$ باشد، که در آن a به‌عنوان یک بردار ستونی $n\times ۱$ در نظر گرفته می‌شود. تابع f را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(a_۱,\cdots,a_n)=D[U(a_۱),\cdots,U(a_n)], a_i\in F_n$$

بنابر اصول (i) و (ii)ی (۵.۱۶) برای D، روشن است که f در اصلهای (i) و (ii) صدق می‌کند. بنابر لم (۱.۱۸) داریم:

$$f(a_۱,\cdots,a_n)=D(a_۱,\cdots,a_n)f(e_۱,\cdots,e_n)$$

از این‌رو:

$$D[U(a_۱),\cdots,U(a_n)]=D(a_۱,\cdots,a_n)D[U(e_۱),\cdots,U(e_n)] \qquad \textbf{(۴.۱۸)}$$

اکنون گیریم $a_۱$، $\cdots$، a_n ستونهای ماتریس $\mathbf{A}$ باشند. در این‌صورت به‌ازای $۱\le i\le n$، $U(a_i)$ را حساب می‌کنیم.

چون $a_i=<\alpha_{۱i},\cdots,\alpha_{ni}>$، $U(a_i)$ بردار زیر خواهد شد:

$$\left\langle \sum_{k=۱}^{n}\beta_{۱k}\alpha_{ki},\cdots,\sum_{k=۱}^{n}\beta_{nk}\alpha_{ki}\right\rangle$$

که ستون iام ماتریس $\mathbf{BA}$ است. به‌همین روش:

$$U(e_i)=<\beta_{۱i},\beta_{۲i},\cdots,\beta_{ni}>$$

که ستون iام ماتریس $\mathbf{B}$ است. پس از معادلهٔ (۴.۱۸) نتیجه می‌شود.

$$D(\mathbf{BA})=D(\mathbf{A})D(\mathbf{B})$$

و چون $D(\mathbf{A})D(\mathbf{B})=D(\mathbf{B})D(\mathbf{A})$ قضیه ثابت می‌شود. (برای برهانی نسبتاً ساده‌تر به تمرین ۴ انتهای این بخش مراجعه کنید).

به‌عنوان نخستین کاربرد قضیهٔ ضرب، قضیهٔ زیر را ثابت می‌کنیم:

(۵.۱۸) قضیه. گیریم $\mathbf{A}$ یک ماتریس $n\times n$ باشد. در این‌صورت رتبهٔ $\mathbf{A}$ برابر n است، اگر و تنها اگر $D(\mathbf{A})\neq ۰$.

برهان. بنابر بخش (ت) از قضیهٔ (۶.۱۶) اگر رتبهٔ $\mathbf{A}$ کمتر از n باشد، آنگاه $D(\mathbf{A})=۰$. پس باید ثابت کنیم که اگر رتبهٔ $\mathbf{A}$ برابر n باشد، آنگاه $D(\mathbf{A})\neq ۰$ (برای برهان دیگر ← تمرین

۳ از بخش ۸). گیریم $\{a_1, \cdots, a_n\}$ بردارهای سطری $\mathbf{A}$ باشند. چون رتبهٔ $\mathbf{A}$ برابر n است، پس $\{a_1, \cdots, a_n\}$ یک پایهٔ F_n است. بنابراین برای هر i، $1 \leq i \leq n$، می‌توان بردار یکهٔ e_i را به‌صورت ترکیبی خطی از $\{a_1, \cdots, a_n\}$، یعنی به‌صورت زیر نوشت:

$$e_i = \beta_{i1}a_1 + \cdots + \beta_{in}a_n \qquad (6.18)$$

گیریم $\mathbf{B}$ نمایش ماتریس (β_{ij}) باشد، آنگاه از (۶.۱۸) نتیجه می‌شود که ماتریسی که سطرهای آن $\{e_1, \cdots, e_n\}$ هستند برابر ماتریس حاصلضرب $\mathbf{BA}$ است. چون $D(e_1, \cdots, e_n) = 1$، بنابه قضیهٔ (۳.۱۸) داریم:

$$1 = D(\mathbf{BA}) = D(\mathbf{B})D(\mathbf{A})$$

و همان‌طورکه می‌خواستیم $D(\mathbf{A}) \neq 0$.

اکنون می‌توانیم تعریف مهم زیر را عرضه کنیم:

(۷.۱۸) تعریف. گیریم T یک تبدیل خطی از یک فضای برداری متناهی‌ـبعد روی یک هیأت دلخواه باشد. در این‌صورت دترمینان T یعنی $D(T)$ با $D(\mathbf{A})$ تعریف می‌شود، که در آن $\mathbf{A}$ ماتریس T نسبت به یک پایه از فضای برداری است.

لازم است بررسی کنیم که اگر $\mathbf{A}'$ ماتریس T نسبت به یک پایهٔ دیگر باشد، آنگاه $D(\mathbf{A}) = D(\mathbf{A}')$. بنابر قضیهٔ (۶.۱۳) یک ماتریس وارونپذیر $\mathbf{X}$ وجود دارد به گونه‌ای که

$$\mathbf{A}' = \mathbf{XAX}^{-1}$$

در این‌صورت بنابر قضیهٔ (۳.۱۸) داریم:

$$\begin{aligned} D(\mathbf{A}') &= D(\mathbf{X})D(\mathbf{A})D(\mathbf{X}^{-1}) \\ &= D(\mathbf{X})D(\mathbf{X}^{-1})D(\mathbf{A}) \\ &= D(\mathbf{XX}^{-1})D(\mathbf{A}) \\ &= D(\mathbf{I})D(\mathbf{A}) \\ &= D(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

که در آن $\mathbf{I}$ یک ماتریس یکهٔ $n \times n$ است.

اکنون قضیهٔ (۱۰.۱۳) را به‌شکل بهتر زیر بیان می‌کنیم:

(۸.۱۸) قضیه. گیریم $T \in L(V, V)$، که در آن V یک فضای برداری متناهی‌ـبعد روی F است. در این‌صورت حکمهای زیر هم‌ارزند:

۱. T وارونپذیر است.
۲. T یک به یک است.
۳. T پوشاست.
۴. $D(T) \neq ۰$
برهان. هم‌ارزی (۱)، (۲) و (۳) قبلاً ثابت شد. بنابر تمرین ۴ از بخش ۱۳:

$$\dim T(V) = (\mathbf{A}) \text{ رتبهٔ}$$

که در آن $\mathbf{A}$ ماتریس T نسبت به یک پایه است. اگر $n = \dim V$، آنگاه برای آن‌که $T(V) = V$، لازم و کافی است که رتبهٔ $\mathbf{A}$ برابر n باشد. بنابر قضیهٔ (۵.۱۸)، رتبهٔ $\mathbf{A}$ برابر n است اگر و تنها اگر $D(\mathbf{A}) \neq ۰$. از ترکیب این دو حکم، می‌بینیم که (۳) و (۴) هم‌ارزند، و قضیه ثابت است.

تمرینها

۱. $D(\mathbf{AB})$ را از راه ضرب ماتریسها و همچنین بااستفاده از قضیهٔ (۳.۱۸) حساب کنید: که در آن

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & -۲ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۲ \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} ۳ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۲ & ۰ \\ ۳ & ۲ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

۲. گیریم $\mathbf{A}$ یک ماتریس وارونپذیر $n \times n$ باشد. نشان دهید که:

$$D(\mathbf{A}^{-۱}) = D(\mathbf{A})^{-۱}$$

۳. دترمینانهای ماتریسهای مقدماتی $\mathbf{P}_{ij}$، $\mathbf{B}_{ij}(\lambda)$ و $\mathbf{D}_i(\mu)$ را که در مثال (پ) از بخش ۱۲ تعریف شده‌اند حساب کنید. نشان دهید که هر ماتریس وارونپذیر $n \times n$ مانند $\mathbf{A}$ حاصلضرب ماتریسهای مقدماتی است، و بنابراین $D(\mathbf{A}) \neq ۰$. به‌این ترتیب برهان دیگری برای بخشی از قضیهٔ (۸.۱۸) به‌دست می‌آید.

۴. در زیر مرحله‌های برهان دیگری برای قضیهٔ مهم (۳.۱۸) بیان می‌شود. این مراحل را به‌تفصیل انجام دهید. باید توجه داشت که در این برهان نیازی به‌استفاده از لم (۱.۱۸) نیست.

الف) نخست فرض کنیم که $\mathbf{A}$ یا $\mathbf{B}$ وارونپذیر نیستند. ثابت می‌کنیم که $\mathbf{AB}$ وارونپذیر نیست، از این‌رو $D(\mathbf{AB}) = D(\mathbf{A})D(\mathbf{B})$ زیرا هر دو طرف برابر صفرند.

ب) به‌کمک تمرین ۳ و ویژگیهای اساسی تابع دترمینان که در بخش ۱۶ بیان شد، نشان دهید که اگر $\mathbf{E}$ یک ماتریس مقدماتی باشد، آنگاه برای هر ماتریس $\mathbf{B}$ داریم $D(\mathbf{EB}) = D(\mathbf{E})D(\mathbf{B})$

پ) فرض کنیم $\mathbf{A}$ وارونپذیر است. $\mathbf{A}$ را به‌شکل حاصلضرب ماتریسهای مقدماتی به‌شکل $\mathbf{A} = \mathbf{E}_۱ \cdots \mathbf{E}_s$ بنویسید. به‌کمک بخش ب نشان دهید که:

$$D(\mathbf{A}) = D(\mathbf{E}_۱) \cdots D(\mathbf{E}_s)$$

و

$$D(\mathbf{AB}) = D(\mathbf{E}_۱) \cdots D(\mathbf{E}_s) D(\mathbf{B}) = D(\mathbf{A}) D(\mathbf{B})$$

۵.گیریم T یک تبدیل قائم روی یک فضای برداری متناهی-بعد V روی عددهای حقیقی با یک ضرب داخلی باشد. نشان دهید $D(T) = \pm ۱$.

۶.نشان دهید که اگر $u_۱، \cdots، u_n$ بردارهای یکا قائم (← ۷.۱۵) در R_n باشند، آنگاه $D(u_۱, \cdots, u_n) = \pm ۱$.

۱۹. ویژگیهای دیگر دترمینانها

در این بخش چند موضوع خیلی خاص از نظریهٔ دترمینانها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

بسطهای سطری و ستونی، و ماتریسهای وارونپذیر

گیریم $\mathbf{A} = (a_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ باشد. همسازهٔ (i, j)ام یعنی A_{ij} را به‌شکل $A_{ij} = (-۱)^{i+j} D_{ij}$ تعریف می‌کنیم، که در آن D_{ij} دترمینان یک ماتریس $(n-۱) \times (n-۱)$ است، که از ماتریس $\mathbf{A}$ با حذف سطر iام و ستون jام به‌دست می‌آید. در این صورت می‌توان دستور (۷.۱۷) را به‌شکل زیر بیان کرد:

$$D(\mathbf{A}) = \sum_{k=۱}^{n} \alpha_{kj} A_{kj}, \qquad j = ۱, ۲, \cdots, n \qquad (۱.۱۹)$$

این دستور را بسط $D(\mathbf{A})$ نسبت به ستون jام می‌نامیم. یک دستور وابسته به آن عبارت است از:

$$\sum_{k=۱}^{n} \alpha_{kj} A_{kl} = ۰, \qquad j \neq l \qquad (۲.۱۹)$$

که از آن (۱.۱۹) به‌آسانی به‌شکل زیر به‌دست می‌آید. ماتریس $\mathbf{A}'$ را که از $\mathbf{A}$ با جانشین‌کردن ستون lام $\mathbf{A}$ با ستون jام آن $j \neq l$، به‌دست می‌آید در نظر می‌گیریم. پس دو ستون $\mathbf{A}'$ برابرند، از این‌رو $D(\mathbf{A}') = ۰$ زیرا تابع دترمینان بنابر برهان قضیهٔ (۱۳.۱۷) به‌عنوان تابعی از بردارهای سطری یا ستونی در شرطهای (i)، (ii)، (iii)ی (۵.۱۶) صدق می‌کند. از بسط $D(\mathbf{A}')$ برحسب ستون lام رابطهٔ (۲.۱۹) به‌دست می‌آید.

گیریم ${}^t\mathbf{A}$ ترانهادهٔ $\mathbf{A}$ باشد، در این‌صورت بسط ستونی $D({}^t\mathbf{A})$ بسط سطری زیرین $D(\mathbf{A})$ را می‌دهد، چون بنابر (۱۵.۱۷) $D(\mathbf{A}) = D({}^t\mathbf{A})$.

$$\sum_{k=۱}^{n} \alpha_{jk} A_{jk} = D(\mathbf{A}), \qquad j = ۱, ۲, \cdots, n \tag{۳.۱۹}$$

$$\sum_{k=۱}^{n} \alpha_{jk} A_{lk} = ۰, \qquad j \neq l \tag{۴.۱۹}$$

این دستورها به‌خصوص وقتی جالب هستند که آنها را از نظر ضرب ماتریسها در نظر بگیریم. گیریم $\mathbf{A}^*$ ماتریسی باشد که عنصر (i,j)ام آن A_{ij} و $\mathbf{I}$ ماتریسی باشد که سطر iام آن بردار یکهٔ e_i است ($\mathbf{I}$ ماتریس یکه است). برای هر ماتریس $\mathbf{A} = (\alpha_{ij})$، $\lambda\mathbf{A}$ ماتریسی است که عنصر (i,j)ام آن $\lambda\alpha_{ij}$ است. در این‌صورت دستورهای (۱.۱۹) و (۲.۱۹) چنین می‌شوند:

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A} = D(\mathbf{A})\mathbf{I} \tag{۵.۱۹}$$

در حالی‌که (۳.۱۹) و (۴.۱۹) چنین خواهند شد:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = D(\mathbf{A})\mathbf{I} \tag{۶.۱۹}$$

می‌دانیم که ماتریس $\mathbf{I}$ همان نقش ۱ را در دستگاه عددهای حقیقی دارد، یعنی برای هر ماتریس $\mathbf{A}$ داریم

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$$

بار دیگر مسألهٔ وجود وارون ماتریس $\mathbf{A} \neq ۰$ یعنی $\mathbf{A}^{-۱}$ را نسبت به ضرب در نظر می‌گیریم، به‌گونه‌ای که $\mathbf{A}^{-۱}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-۱} = \mathbf{I}$. تعریف زیر را مجدداً یادآوری می‌کنیم:

(۷.۱۹) تعریف. هر ماتریس $n \times n$ مانند $\mathbf{A}$ وارونپذیر است، هرگاه یک ماتریس $n \times n$ مانند $A^{-۱}$ به‌نام وارون $\mathbf{A}$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-۱} = \mathbf{A}^{-۱}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

(۸.۱۹) قضیه. برای اینکه ماتریس $\mathbf{A}$ی $n \times n$ وارونپذیر باشد، لازم و کافی است که $D(\mathbf{A}) \neq ۰$. اگر $D(\mathbf{A}) \neq ۰$، آنگاه $\mathbf{A}^{-۱}$ برابر است با

$$D(\mathbf{A})^{-۱}\mathbf{A}^*$$

که در آن $\mathbf{A}^*$ ماتریسی است که عنصر (j,i)ام آن $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ است.

برهان. اگر $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$، آنگاه با گذاردن $\mathbf{A}^{-1} = D(\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^*$ بنابر دستورهای (۵.۱۹) و (۶.۱۹) خواهیم داشت $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$. به‌این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

مثال الف. برای روشن ساختن قضیهٔ (۸.۱۹)، برای $\mathbf{A}^{-1}$ دستور مفید زیر را در حالتی که $\mathbf{A}$ ماتریس 2×2 با دترمینان ۱ است به‌دست می‌آوریم:

گیریم

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

و فرض می‌کنیم $D(\mathbf{A}) = \alpha\delta - \beta\gamma = 1$. آنگاه $A_{11} = +\delta$، $A_{12} = -\gamma$، $A_{21} = -\beta$، $A_{22} = +\alpha$ و بنابر قضیهٔ (۸.۱۹) چون $D(\mathbf{A}) = 1$، پس:

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}$$

دترمینانها و دستگاه معادله‌ها

اکنون نتیجه‌های خود را جمع‌بندی می‌کنیم تا دترمینانها را با مسأله‌هایی که در فصل ۲ در مورد دستگاه معادله‌های خطی و رتبهٔ ماتریسها مطالعه کردیم مربوط کنیم. نخستین رابطه دستور صریحی است برای حل یک دستگاه n معادلهٔ ناهمگن n مجهولی که در موارد نظری مفید است. این دستور از روش مذکور فصل ۲ برای محاسبهٔ عملی جوابهای یک دستگاه خاص کاراتر نیست و نمی‌تواند در مورد دستگاهی که ماتریس ضریبهای آن مربع نیست مورداستفاده قرار گیرد.

(۹.۱۹) قضیه. (دستور کرامر). برای آن که یک دستگاه ناهمگن از n معادلهٔ n مجهولی:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1n}x_n &= \beta_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1}x_1 + \cdots + \alpha_{nn}x_n &= \beta_n \end{aligned} \qquad (10.19)$$

دارای یک جواب یکتا باشد، لازم و کافی است که دترمینان ماتریس ضریبهای آن یعنی $D(\mathbf{A})$ مخالف صفر باشد. در این‌صورت جواب دستگاه برابر است با:

$$x_i = \frac{D(c_1, \cdots, c_{i-1}, b, c, \cdots, c_n)}{D(\mathbf{A})}, \qquad 1 \le i \le n$$

که در آن c_1، $\cdots$، c_n ستونهای $\mathbf{A}$ و $b = < \beta_1, \cdots, \beta_n >$.

برهان. بنابر (۵.۱۸) برای آن‌که $D(\mathbf{A}) \neq ۰$، لازم و کافی است که $c_۱$، $\cdots$، c_n نابسته خطی باشند، بنابراین، حکم مربوط به وجود جواب یکتا از قضیه‌های بخشهای ۸ و ۹ نتیجه می‌شود (چرا؟). سرانجام، گیریم $D(\mathbf{A}) \neq ۰$ و $x =< x_۱, \cdots, x_n >$ یک جواب است. در این‌صورت

$$x_۱ c_۱ + \cdots + x_n c_n = b$$

و داریم:

$$\begin{aligned} D(c_۱, \cdots, c_{i-۱}, b, c_{i+۱}, \cdots, c_n) &= D(c_۱, \cdots, c_{i-۱}, \sum_{j=۱}^{n} x_j c_j, c_{i+۱}, \cdots, c_n) \\ &= \sum_{j=۱}^{n} x_j D(c_۱, \cdots, c_{i-۱}, c_j, c_{i+۱}, \cdots, c_n) \\ &= x_i D(c_۱, \cdots, c_n) = x_i D(A) \end{aligned}$$

که قضیه را ثابت می‌کند.

یک نتیجهٔ مهم این دستور این است که وقتی $D(\mathbf{A}) \neq ۰$، جواب $< x_۱, \cdots, x_n >$ دستگاه (۱۰.۱۹) با ضریبهای حقیقی به‌طور پیوسته به ماتریس ضریبهای $\mathbf{A}$ بستگی دارد.

در بخشهای ۸ و ۹ رتبهٔ یک ماتریس $m \times n$ را تعریف و ثابت کردیم که رتبه‌های سطری و ستونی برابرند. در (۵.۱۸) نشان دادیم که برای یک ماتریس $n \times n$ نظیر $\mathbf{A}$، برای اینکه رتبه برابر n باشد، لازم و کافی است که $D(\mathbf{A}) \neq ۰$. بااستفاده از این نتیجه می‌توان رابطه‌ای بین دترمینانها و رتبهٔ ماتریسهای دلخواه به‌دست آورد. نخست دترمینان مینور r سطری $\mathbf{A}$ را به‌شکل دترمینان یک ماتریس $r \times r$ تعریف می‌کنیم که از حذف سطرها و ستونهای $\mathbf{A}$ به‌دست می‌آید. به‌عنوان مثال مینورهای ماتریس دوسطری:

$$\begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{pmatrix}$$

برابرند با:

$$\begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix}$$

(۱۱.۱۹) قضیه. رتبهٔ یک ماتریس $m \times n$ی $\mathbf{A}$ برابر s است، اگر و تنها اگر، یک مینور ناصفر s سطری وجود داشته باشد و همهٔ مینورهای $(s+k)$ سطری به‌ازای $k = ۱, ۲, \cdots$ برابر صفر باشند.

برهان. عدد s را که در حکم قضیه تعریف شد رتبهٔ دترمینان $\mathbf{A}$ می‌نامیم. نخست ثابت می‌کنیم که از برابری رتبهٔ $\mathbf{A}$ با r نتیجه می‌شود که رتبهٔ دترمینان $\mathbf{A}$ کوچکتر از r نیست. بنابر بخش ۹، از برابر بودن رتبهٔ $\mathbf{A}$ با r نتیجه می‌شود که یک ماتریس $r \times r$ از رتبهٔ r وجود دارد که از حذف سطرها و ستونهای $\mathbf{A}$ به‌دست می‌آید. در این‌صورت از (۵.۱۸) نتیجه می‌شود رتبهٔ دترمینان $\mathbf{A}$ کوچکتر از r نیست یعنی رتبهٔ $\mathbf{A} \leq r$.

به وارون اگر رتبهٔ دترمینان $\mathbf{A}$ برابر s باشد، آنگاه $\mathbf{A}$ دارای s سطر نابسته خطی است، از این‌رو رتبهٔ $\mathbf{A}$ کوچکتر از s نیست یعنی رتبهٔ $\mathbf{A} \leq s$. از ترکیب این نابرابریها نتیجه می‌شود که دترمینان رتبهٔ $\mathbf{A}$ برابر رتبهٔ $\mathbf{A}$ است، و قضیه ثابت می‌شود.

دترمینان و حجم

این فصل را با تعبیر دترمینان در فضای nبعدی به‌عنوان یک تابع حجم پایان می‌دهیم. هر تابع حجم V در R_n تابعی است که به هر nتایی از بردارهای $\{a_۱, \cdots, a_n\}$ متعلق به R_n یک عدد حقیقی $V(a_۱, \cdots, a_n)$ مربوط می‌کند به‌گونه‌ای که:

$$V(a_۱, \cdots, a_n) \geq ۰$$
$$V(\cdots, a_i + a_k, \cdots) = V(a_۱, \cdots, a_n), i \neq k$$
$$V(\cdots, \lambda a_i, \cdots) = |\lambda| V(a_۱, \cdots, a_n), \lambda \in R$$
$$V(e_۱, \cdots, e_n) = ۱ \quad , \quad e_i = \text{بردارهای یکه}$$

چنین تابعی را می‌توان به‌عنوان حجم یک متوازی‌السطوح nبعدی با یالهای $a_۱$، $\cdots$، a_n دانست، که متشکل از بردارهایی است به‌شکل $x = \sum \lambda_i a_i$، به‌ازای $۰ \leq \lambda_i \leq ۱$. در قضیهٔ زیر رابطهٔ بین تابع حجم و دترمینان بیان می‌شود:

(۱۲.۱۹) قضیه. تنها یک تابع حجم $V(a_۱, \cdots, a_n)$ در R_n وجود دارد که به‌شکل زیر تعریف می‌شود:

$$V(a_۱, \cdots, a_n) = |D(a_۱, \cdots, a_n)|$$

برهان. روشن است که $|D(a_۱, \cdots, a_n)|$ یک تابع حجم است. اکنون گیریم V یک تابع حجم است و تعریف می‌کنیم:

$$V^*(a_۱, \cdots, a_n) = \begin{cases} \dfrac{V(a_۱, \cdots, a_n) D(a_۱, \cdots, a_n)}{|D(a_۱, \cdots, a_n)|}, D \neq ۰ \\ ۰, \quad D(a_۱, \cdots, a_n) = ۰ \quad \text{اگر} \end{cases}$$

در این‌صورت به‌آسانی دیده می‌شود که V^* در اصلهای مربوط به تابع دترمینان صدق می‌کند، از این‌رو به‌ازای هر a_1، $\cdots$، a_n متعلق به R_n داریم:

$$V^*(a_1, \cdots, a_n) = D(a_1, \cdots, a_n)$$

در این‌صورت از تعریف V^* نتیجه می‌شود که $V(a_1, \cdots, a_n) = |D(a_1, \cdots, a_n)|$ و قضیه ثابت می‌شود.

تعریف استقرایی حجم kبعدی یک متوازی‌السطوح kبعدی در R_n بر این مبناست که مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصلضرب قاعدهٔ آن در ارتفاعش که در بخش ۳ از فصل ۱۰ کتاب بیرکاف مک‌لین ($\leftarrow$ کتابنامه) داده شده است. با استدلال جالبی در این کتاب نشان داده شده است که حجم kبعدی در R_n با یک دترمینان مشخص می‌شود.

به‌سبب تعبیر قدرمطلق تابع دترمینان به‌عنوان یک حجم، نتیجهٔ زیر تقریباً از لحاظ شهودی روشن است، به‌شرط اینکه بدانیم هندسهٔ nبعدی مشکلتر از هندسهٔ R_2 و R_3 نیست. برهان چندان ساده نیست و برای آن هم به قضیهٔ ضرب نیاز است و هم به نظریهٔ تبدیلهای متعامد از بخش ۱۵.

(۱۳.۱۹) قضیه. (نابرابری آدامار). گیریم $\{a_1, \cdots, a_n\}$ بردارهایی در R_n باشند. در این‌صورت:

$$|D(a_1, \cdots, a_n)| \leq ||a_1|| \cdots ||a_n||$$

که در آن $||a_i||$ طول بردار $a_i =< \alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{in} >$ در R_n با:

$$||a_i|| = (\alpha_{i1}^2 + \cdots + \alpha_{in}^2)^{\frac{1}{2}}$$

تعریف می‌شود.

تبصره. بنابراین قضیه حجم متوازی‌السطوحی به یالهای a_1، $\cdots$، a_n بزرگتر ازحاصلضرب طولهای یالهای آن است.

برهان. می‌توان فرض کرد که همهٔ بردارها ناصفرند وگرنه هر دو طرف نابرابری صفر می‌شود و مطلبی برای اثبات نمی‌ماند. اکنون نشان می‌دهیم که کافی است قضیه را در حالت $||a_i|| = 1$، $1 \leq i \leq n$ ثابت کنیم. فرض کنیم که قضیه در این حالت ثابت شده باشد. در این‌صورت در حالت کلی:

$$\begin{aligned}|D(a_1, \cdots, a_n)| &= ||a_1|| \cdots ||a_n|| D\left(\frac{a_1}{||a_1||}, \cdots, \frac{a_n}{||a_n||}\right)\\ &\leq ||a_1|| \cdots ||a_n||\end{aligned}$$

زیرا به‌ازای $1 \leq i \leq n$ طول $a_i/||a_i||$ برابر یک است.

اکنون گیریم u_1، ...، u_n بردارهایی به‌طول ۱ باشند؛ باید ثابت کنیم که $|D(u_1, \cdots, u_n)| \leq 1$. اگر T تبدیل متعامد دلخواهی از R_n باشد، آنگاه دستور (۴.۱۸) در برهان قضیهٔ (۳.۱۸) نشان می‌دهد که:

$$|D(T(u_1), \cdots, T(u_n))| = |D(T)||D(u_1, \cdots, u_n)|$$

چون T یک تبدیل متعامد است، داریم $|D(T)| = 1$ (← تمرین ۵ از بخش ۱۸). پس:

$$|D(T(u_1), \cdots, T(u_n))| = |D(u_1, \cdots, u_n)|$$

می‌توان فرض کرد که $\{u_1, \cdots, u_n\}$ یک مجموعهٔ نابسته خطی است وگرنه $|D(u_1, \cdots, u_n)| = 0$، و نابرابری روشن است. بنابر تمرین ۱۰ از بخش ۱۵ یک تبدیل متعامد T از R_n وجود دارد به‌گونه‌ای که به‌ازای $i = 2, \cdots, n$ داریم $T(u_i) \in S(e_2, \cdots, e_n)$ که در آن $\{e_1, \cdots, e_n\}$ بردارهای یکهٔ R_nاند. در این‌صورت ماتریسی که سطرهای آن $\{T(u_1), \cdots, T(u_n)\}$ هستند به‌شکل زیر می‌باشد:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ 0 & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

به‌علاوه، چون به‌ازای $1 \leq i \leq n$، $||T(u_i)|| = 1$، می‌دانیم که مجموع مجذورات عنصرهای هر سطر برابر یک است. از بسط $D(\mathbf{X})$ نسبت به ستون اول داریم:

$$|D(\mathbf{X})| = |\lambda_{11}| \begin{vmatrix} \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{nn} \end{vmatrix}$$

می‌توان به‌عنوان فرض استقراء فرض کرد که قدرمطلق دترمینان سمت راست iبزرگتر از یک است. زیرا سطرهای ماتریس مربوط به‌شکل ماتریس $\mathbf{X}$ در R_{n-1} بردارهایی به‌طول یک هستند. چون $|\lambda_{11}| \leq 1$، پس:

$$|D(u_1, \cdots, u_n)| = |D(\mathbf{X})| \leq 1$$

و قضیه ثابت می‌شود.

جایگشتهای زوج و فرد

در این قسمت از این بخش نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان از قضیهٔ ضرب دترمینانها نتیجه‌های مهمی دربارهٔ جایگشتها به‌دست آورد.

(۱۴.۱۹) تعریف. گیریم X مجموعهٔ متشکل از عددهای درست و مثبت $\{۱, ۲, \cdots, n\}$ است. هر جایگشت X نگاشتی است یک به یک و پوشا مانند σ از X در X. مجموعهٔ همهٔ جایگشتهای X را با $P(X)$ نشان می‌دهیم. هر جایگشت σ را اغلب با نماد زیر نشان می‌دهند:

$$\sigma = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & \cdots & n \\ j_۱ & j_۲ & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

که در آن $\sigma(۱) = j_۱$، $\sigma(۲) = j_۲$، $\cdots$، $\sigma(n) = j_n$.

به‌عنوان مثال:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}$$

نمایش جایگشتی است که در آن $\sigma(۱) = ۳$، $\sigma(۲) = ۱$، $\sigma(۳) = ۲$.

(۱۵.۱۹) قضیه. مجموعهٔ جایگشتهای $P(X)$ تحت عمل $\sigma\tau$ که با:

$$\sigma\tau(x) = \sigma(\tau(x)), \qquad x \in X, \sigma, \tau \in P(X)$$

تعریف می‌شود یک گروه تشکیل می‌دهند.

برهان. تعریف گروه را در بخش ۱۱ [تعریف (۱۰.۱۱)] دیدیم. باید ثابت کنیم که حکمهای زیر درست‌اند:

الف) $\sigma\tau \in P(X)$ برای هر $\sigma, \tau \in P(X)$

ب) $(\rho\sigma)\tau = \rho(\sigma\tau)$ برای $\rho, \sigma, \tau \in P(X)$ (قانون شرکتپذیری)

پ) یک عنصر $۱ \in P(X)$ وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر $\sigma \in P(x)$، داریم $۱\sigma = \sigma۱ = \sigma$

ت) به‌ازای هر $\sigma \in P(X)$ یک عنصر $\tau \in P(X)$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $\sigma\tau = \tau\sigma = ۱$.

اثبات این احکام تقریباً همانند اثباتی است که در مورد گروه بودن مجموعهٔ تبدیلهای خطی روی یک فضای برداری دیدیم. می‌توان جزئیات اثبات از (الف) تا (ت) را باتوجه به بحث بخش ۱۱ به‌عنوان تمرین انجام داد.

ضرب جایگشتها را می‌توان عملاً بااستفاده از طرز نمایش آنها انجام داد. برای مثال جایگشتهای

$X = \{۱, ۲, ۳\}$ عبارت‌اند از:

$$۱ = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{pmatrix}, \quad \sigma_۱ = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}, \quad \sigma_۲ = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{pmatrix},$$
$$\sigma_۳ = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{pmatrix}, \quad \sigma_۴ = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}, \quad \sigma_۵ = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{pmatrix}$$

بنابر تعریف $\sigma\tau(x) = \sigma(\tau(x))$ می‌توان نشان داد که جدول ضرب گروه $P(X)$ برابر است با:

	۱	$\sigma_۱$	$\sigma_۲$	$\sigma_۳$	$\sigma_۴$	$\sigma_۵$
۱	۱	$\sigma_۱$	$\sigma_۲$	$\sigma_۳$	$\sigma_۴$	$\sigma_۵$
$\sigma_۱$	$\sigma_۱$	۱	$\sigma_۵$	$\sigma_۴$		
$\sigma_۲$						
$\sigma_۳$			و غیره			
$\sigma_۴$						
$\sigma_۵$						

که در آن درایه‌های جدول به‌شکل زیر حساب شده‌اند:

$$\sigma_۱\sigma_۲ = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{pmatrix} = \sigma_۵$$
$$\sigma_۱\sigma_۳ = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{pmatrix} = \sigma_۴$$

اکنون گیریم V یک فضای برداری روی R باشد که پایهٔ آن $\{v_۱, \cdots, v_n\}$ است. به‌ازای هر جایگشت $\sigma \in P(X)$ یک تبدیل خطی $T_\sigma \in L(V, V)$ را با قاعدهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$T_\sigma(v_i) = v_{\sigma(i)} \quad , \quad i = ۱, ۲, \cdots, n$$

در این‌صورت به‌ازای هر $\sigma, \tau \in P(X)$ خواهیم داشت $T_\sigma T_\tau = T_{\sigma\tau}$. زیرا:

$$(T_\sigma T_\tau)v_i = T_\sigma(v_{\tau(i)}) = T_{\sigma(\tau(i))} = T_{\sigma\tau(i)}$$
$$= T_{\sigma\tau}v_i, i = ۱, ۲, \cdots, n$$

(۱۶.۱۹) تعریف. نشان $\varepsilon(\sigma)$ی یک جایگشت σ با دستور $\varepsilon(\sigma) = D(T_\sigma)$ تعریف می‌شود، که در آن T_σ تبدیل خطی تعریف‌شده در بالاست.

(۱۷.۱۹) قضیه. به‌ازای هر $\sigma \in (X)$، $\varepsilon(\sigma) = \pm ۱$. بعلاوه به‌ازای هر $\sigma, \tau \in P(X)$:

$$\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\dot{\sigma})\varepsilon(\tau)$$

برهان. گیریم $\mathbf{A}_\sigma$ ماتریس T_σ نسبت به پایهٔ $\{v_۱, \cdots, v_n\}$ باشد. در این‌صورت داریم:

$$\varepsilon(\sigma) = D(T_\sigma) = D(\mathbf{A}_\sigma)$$

و از تعریف T_σ نتیجه می‌شود که ستونهای $\mathbf{A}_\sigma$ اصلاً از تغییر ترتیب ستونهای ماتریس یکهٔ $\mathbf{I}$ به‌دست می‌آیند. بنابراین، چون تعویض دو ستون $\mathbf{A}_\sigma$ علامت دترمینان را عوض می‌کند، داریم:

$$D(\mathbf{A}_\sigma) = \pm D(\mathbf{I}) = \pm ۱$$

حکم دوم یعنی $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ از قضیهٔ (۳.۱۸) نتیجه می‌شود، زیرا:

$$\begin{aligned}\varepsilon(\sigma\tau) &= D(T_{\sigma\tau}) = D(\mathbf{A}_{\sigma\tau}) = D(\mathbf{A}_\sigma\mathbf{A}_\tau)\\ &= D(\mathbf{A}_\sigma)D(\mathbf{A}_\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)\end{aligned}$$

و به‌این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

(۱۸.۱۹) تعریف. هر ترانهش $\sigma = (ij)$ تبدیلی است که $\sigma(i) = j$ و $\sigma(j) = i$، به‌ازای یک جفت عدد درست متمایز i و j، و $\sigma(x) = x$ به‌ازای هر x مخالف با i یا j.

(۱۹.۱۹) قضیه. هر جایگشت $\sigma \in P(X)$ مساوی حاصلضرب چند ترانهش است.

برهان. گیریم $X = \{۱, ۲, \cdots, n\}$. به‌عنوان فرض استقراء گیریم هر جایگشت $\{۱, ۲, \cdots, n - ۱\}$ حاصلضرب چند ترانهش است. بررسی درستی فرض استقراء در حالتهای نخستین بسیار ساده است و از بازگویی آن چشم می‌پوشیم. گیریم $\sigma \in P(X)$. اگر $\sigma(n) = n$، آنگاه می‌توان σ را به‌عنوان یک جایگشت $\{۱, ۲, \cdots, n - ۱\}$ در نظر گرفت و بنابر فرض استقراء می‌توان فرض کرد که σ حاصلضرب چند ترانهش است. اکنون فرض کنیم $\sigma(n) = i \neq n$. در این‌صورت:

$$[(in)\sigma](n) = (in)\sigma(n) = (in)(i) = n$$

بنابر فرض استقراء، $(in)\sigma$ حاصلضرب چند ترانهش است. چون

$$(in)[(in)\sigma] = \sigma$$

پس σ نیز حاصلضرب چند ترانهش است.

به‌عنوان مثال اگر $X = \{۱, ۲, ۳\}$، ترانهشها عبارت خواهند بود از:

$$\sigma_۲ = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}, \quad \sigma_۳ = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{pmatrix}, \quad \sigma_۴ = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{pmatrix}$$

و به‌آسانی دیده می‌شود که $\sigma_۵$ و $\sigma_۶$ حاصلضرب دو ترانهش هستند.

(۲۰.۱۹) تعریف. هر جایگشت $\sigma \in P(X)$ زوج است هرگاه $\varepsilon(\sigma) = ۱$، و فرد است هرگاه $\varepsilon(\sigma) = -۱$.

(۲۱.۱۹) قضیه. برای اینکه جایگشت σ زوج باشد، لازم و کافی است که بتوان σ را دست‌کم به یک طریق به حاصلضرب عدهٔ زوجی ترانهش تجزیه کرد. اگر σ یک ترانهش باشد، آنگاه σ فرد است. تبدیلهای زوج و فرد به شکل زیر ضرب می‌شوند:

$$\text{زوج} = (\text{زوج})(\text{زوج})$$
$$\text{فرد} = (\text{فرد})(\text{زوج})$$
$$\text{زوج} = (\text{فرد})(\text{فرد})$$

برهان. نخست می‌بینیم که اگر σ یک ترانهش $\sigma(ij)$ باشد، آنگاه $\varepsilon(\sigma) = -۱$. زیرا اگر $\sigma = (ij)$، آنگاه ماتریس $\mathbf{A}_\sigma$ی تبدیل T_σ از ماتریس یکه از تعویض ستونهای iام و jام به‌دست می‌آید.

اکنون گیریم σ بنابر قضیهٔ (۱۹.۱۹) به حاصلضرب چند ترانهش تجزیه‌شده است:

$$\sigma = \tau_۱\tau_۲\cdots\tau_k$$

که در آن τ_i یک ترانهش است، بنابر قضیهٔ (۱۷.۱۹) داریم:

$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau_۱)\varepsilon(\tau_۲)\cdots\varepsilon(\tau_k) = (-۱)^k$$

لذا برای این که σ زوج (یعنی $\varepsilon(\sigma) = +۱$) باشد لازم و کافی است که k زوج باشد.

حکمهای مربوط به چگونگی ضرب جایگشتها از دستور $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ روشن و قضیه ثابت می‌شود.

ممکن است معرفی نشان $\varepsilon(\sigma)$ برای جایگشتهای زوج و فرد بیجا به‌نظر آید. ولی اشکال در اینجاست که اگر یک تبدیل زوج σ را به‌صورت حاصلضرب شمارهٔ زوجی ترانهش تعریف کنیم، آنگاه نمی‌توان به‌راحتی مستقیماً نشان داد که σ نمی‌تواند به‌صورت حاصلضرب تعداد فردی ترانهش (به‌شکل دیگری) باشد. نظریهٔ نشان $\varepsilon(\sigma)$ ناظر به این مسأله است.

سرانجام، می‌توان از نظریهٔ گروه جایگشتی $P(X)$ در یافتن دستوری برای بسط کامل یک دترمینان که در بخش ۱۷ داده‌شده استفاده کرد.

(۲۲.۱۹) قضیه. گیریم $\mathbf{A} = (\alpha_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ با عنصرهایی متعلق به هیأت F باشد. در این‌صورت:

$$D(\mathbf{A}) = \sum_{\sigma \in P(X)} \varepsilon(\sigma)\alpha_{۱\sigma(۱)}\alpha_{۲\sigma(۲)}\cdots\alpha_{n\sigma(n)}$$

برهان. این قضیّه با توجه به دستور (۱۲.۱۷) و تعریف $\varepsilon(\sigma)$ بدیهی است.

دستور $D(\mathbf{A})$ که در بالا داده شد از این جهت مفید است که می‌توان از آن برای تعریف دترمینان ماتریسی با عنصرهای متعلق به یک حلقهٔ جابه‌جایی استفاده کرد ($\leftarrow$ جیکوبسن، که در کتابنامه آمده است).

تمرینها

۱.روشهایی را که برای یافتن وارون یک ماتریس می‌دانید نام ببرید. ماتریسهای زیر را از نظر وارونپذیری بیازمایید و اگر وارونپذیرند وارون آنها را پیدا کنید:

$$\begin{pmatrix} ۳ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۲ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ۲ & -۱ \\ -۲ & ۱ \end{pmatrix}$$

۲.جواب دستگاه زیر را از دستور کرامر و روش فصل ۲ بیابید:

$$\begin{aligned} ۳x_۱ + x_۲ \quad &= ۱ \\ x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ &= ۲ \\ - x_۲ + ۲x_۳ &= -۱ \end{aligned}$$

۳.رتبهٔ ماتریسهای زیر را بااستفاده از دترمینان بیابید:

$$\begin{pmatrix} -۱ & ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۳ & ۰ \\ -۱ & ۲ & ۴ & ۱ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ -۱ & ۲ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

۴.نشان دهید که معادلهٔ خط گذرنده بر دو انتهای بردارهای متمایز $<\alpha, \beta>$ و $<\gamma, \delta>$ در $R_۲$ برابر است با:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \\ \gamma & \delta & 1 \end{vmatrix} = 0$$

۵.نشان دهید که معادلهٔ صفحهٔ گذرنده بر سه انتهای بردارهای غیرواقع بر یک خط $< \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 >$، $< \beta_1, \beta_2, \beta_3 >$ و $< \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 >$ متعلق به R_3 عبارت است از:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

۶.نشان دهید که تبدیل خطی $T : a \to T(a)$ از $R_2 \to R_2$ که $a =< x_1, x_2 >$ را به $T(a) =< y_1, y_2 >$ با معادلات:

$$y_1 = 3x_1 - x_2$$
$$y_2 = x_1 + 2x_2$$

می‌برد، مربع متشکل از نقاط P با شرط $\overrightarrow{OP} = \lambda e_1 + \mu e_2$، $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$، را به یک متوازی‌الاضلاع تبدیل می‌کند. نشان دهید مساحت این متوازی‌الاضلاع برابر است با قدرمطلق دترمینان ماتریس تبدیل T، یعنی:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

۷.نشان دهید که مساحت مثلث واقع در صفحه به رأسهای (α_1, α_2)، (β_1, β_2) و (γ_1, γ_2) برابر است با قدرمطلق:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{vmatrix}$$

۸.نشان دهید که حجم چهاروجهی به رأسهای $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$، $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$، $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ و $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ برابر است با قدرمطلق:

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 1\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 1\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 1\\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & 1\end{vmatrix}$$

۹.گیریم p_1، ...، p_n بردارهایی از R_n باشند و $p_i = <\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{in})$، $1 \le i \le n$. ثابت کنید که p_1، ...، p_n بر یک خمینهٔ خطی به‌بعد کوچکتر از $n-1$ واقع است، اگر و تنها اگر به‌ازای هر x_1، ...، x_n متعلق به R داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix}x_1 & \cdots & x_n & 1\\ \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} & 1\end{vmatrix} = 0$$

ثابت کنید اگر p_1، ...، p_n بر خمینه‌ای خطی از بعد کوچکتر از $n-1$ واقع نباشند، p_1،...،p_n بر یک ابرصفحهٔ یکتا واقع‌اند که معادلهٔ آن با دستور بالا داده می‌شود.

۱۰.دستور زیر را برای دترمینان واندرموند ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix}1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \cdots & \xi_1^{n-1}\\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & \cdots & \xi_2^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & \xi_n & \xi_n^2 & \cdots & \xi_n^{n-1}\end{vmatrix} = \pm\prod_{i<j}(\xi_i - \xi_j)$$

(راهنمایی: فرض کنید c_1، c_2، ...، c_n ستونهای ماتریس و اندرموند باشند، نشان دهید که:

$$D(c_1, \cdots, c_n) = D(c_1, c_2 - \xi_1 c_1, \cdots, c_{n-1} - \xi_1 c_{n-2}, c_n - \xi_1 c_{n-1})$$

$$= \begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & \xi_2 - \xi_1 & \xi_2^2 - \xi_1\xi_2 & \cdots & \xi_2^{n-1} - \xi_1\xi_2^{n-2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & \xi_n - \xi_1 & \xi_n^2 - \xi_1\xi_n & \cdots & \xi_n^{n-1} - \xi_1\xi_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

سپس‌بسط‌سطری آن‌را برحسب سطر اول بگیرید و آن را به‌طرز مناسبی فاکتورگیری و از استقراء استفاده نمایید.)

۱۱.نشان دهید که اگر $\{a_1, \cdots, a_n\}$ بردارهای ناصفر و دو به دو متعامد متعلق به R_n باشند،آنگاه:

$$|D(a_1, \cdots, a_n)| = ||a_1||\ ||a_2|| \cdots ||a_n||$$

۶

چندجمله‌ییها و عددهای مختلط

یک پیشنیاز مهم، برای درک قضیه‌های سنگینتر تبدیلهای خطی، آگاهی از تجزیهٔ چند جمله‌ییها به حاصلضرب چندجمله‌ییهای اول است. بررسی این موضوع از ابتدا در این فصل با مطالبی دربارهٔ عددهای مختلط که در فصلهای بعدی مورد نیاز است، شروع می‌شود.

۲۰. چندجمله‌ییها

همه با مفهوم چندجمله‌ییهای $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n$ که در آن α_i ها عددهای حقیقی هستند آشنایی دارند. ولی پرسشهایی وجود دارند که باید پاسخ گفته شوند. آیا یک چندجمله‌یی یک تابع است، و اگر نیست، چه هست؟ x چیست؟ آیا x یک متغیر، یک عدد نامعین، یا یک عدد است؟

در این بخش نحوهٔ نگرش خود به چندجمله‌ییها را با عبارتی بیان می‌کنیم که پاسخگوی پرسشهای بالا باشد و قضیهٔ تجزیهٔ چندجمله‌ییها به حاصلضرب عاملهای اول را برای فصل بعد می‌گذاریم.

(۱.۲۰) تعریف. گیریم F یک هیأت دلخواه است. هر چندجمله‌یی با ضریبهای متعلق به F بنابر تعریف عبارت است از یک دنبالهٔ:

$$f = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots\}, \quad \alpha_i \in F$$

به‌گونه‌ای که به‌ازای یک عدد درست و مثبت M وابسته به f تساویهای $\alpha_M = \alpha_{M+1} = \cdots = 0$ برقرار باشند. اکنون به بیان تعریف زیر می‌پردازیم. اگر:

$$g = \{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \cdots\}$$

آنگاه برای برقراری تساوی $f = g$، لازم و کافی است که $\alpha_0 = \beta_0$، $\alpha_1 = \beta_1$، $\alpha_2 = \beta_2$، $\cdots$.

جمع چندجمله‌ییها را مانند جمع برداری تعریف می‌کنیم:

$$f + g = \{\alpha_0 + \beta_0, \alpha_1 + \beta_1, \cdots\}$$

ضرب را با دستور $fg = \{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \cdots\}$ تعریف می‌کنیم که در آن به‌ازای هر k:

$$\gamma_k = \sum_{i+j=k} \alpha_i \beta_j = \alpha_0 \beta_k + \alpha_1 \beta_{k-1} + \cdots + \alpha_k \beta_0$$

روشن است که $f + g$ و fg هر دو چندجمله‌یی هستند، یعنی به‌ازای یک عدد خیلی بزرگ M، $\alpha_M + \beta_M$ و γ_M صفرند.

برای مثال، گیریم F هیأت عددهای حقیقی، و:

$$f = \{0, 1, 0, 0, 0, 0, \cdots\}$$

$$g = \{1, 1, -1, 0, 0, 0, \cdots\}$$

آنگاه:

$$f + g = \{1, 2, -1, 0, 0, 0, \cdots\}$$

$$\begin{aligned} f.g = \{&0 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1, 0 \cdot -1, +1 \cdot 1 + 0 \cdot 1, 0 \cdot 0 + 1 \cdot -1 \\ &+ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1, 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot -1 + 0 \cdot 0, 0, 0, \cdots\} \\ = \{&0, 1, 1, -1, 0, 0, \cdots\} \end{aligned}$$

محاسبه‌های مورد استفاده در این تعریفها بسیار خسته‌کننده هستند و پس از قضیهٔ بعد عبارت آشناتر و مناسبتری برای چندجمله‌ییها به‌دست می‌آوریم.

(۲.۲۰) **قضیه.** چندجمله‌ییهایی که ضریبهای آنها متعلق به F هستند در همهٔ اصلهای مربوط به حلقهٔ تعویضپذیر [تعریف (۸۰۱۱)] صدق می‌کنند.

برهان. چون جمع چندجمله‌ییها مانند جمع برداری تعریف شده است، روشن است که همهٔ اصلهای مربوط به جمع صادق‌اند.

قانون تعویضپذیری ضرب بنابر (۱.۲۰) روشن است. برای بررسی شرکتپذیری، گیریم:

$$h = \{\delta_0, \delta_1, \delta_2, \cdots\}$$

پس ضریب k ام $(fg)h$ برابر است با:

$$\sum_{r+s=k}\left(\sum_{i+j=r}\alpha_i\beta_j\right)\delta_s = \sum_{i+j+s=k}(\alpha_i\beta_j)\delta_s$$

در حالی که ضریب k ام $f(gh)$ برابر است با:

$$\sum_{i+t=k}\alpha_i\left(\sum_{j+s=t}\beta_j\delta_s\right) = \sum_{i+j+s=k}\alpha_i(\beta_j\delta_s)$$

و به سبب قانون توزیعپذیری در F هر دو عبارت برابرند. سرانجام ثابت می‌کنیم که قانون ضرب توزیعپذیر است. ضریب k ام در $f(g+h)$ برابر است با:

$$\sum_{i+j=k}\alpha_i(\beta_j + \delta_j)$$

در حالی که ضریب k ام در $fg + fh$ برابر است با:

$$\sum_{i+j=k}\alpha_i\beta_j + \sum_{i+j=k}\alpha_i\delta_j$$

و این عبارتها به‌سبب قانون توزیعپذیری ضرب در F برابرند. بدین ترتیب برهان کامل می‌شود.

روشن است که نگاشت $\alpha \to \{\alpha, 0, 0, \cdots\} = \alpha'$ از F در چندجمله‌ییها یک به یک است به‌گونه‌ای که:

$$(\alpha+\beta)' = \alpha' + \beta',\ (\alpha\beta)' = \alpha'\beta'$$

اگر مجموعهٔ همهٔ چندجمله‌ییهای α' را که بدین ترتیب تعریف می‌شوند، با F' نشان دهیم، آنگاه F' هیأتی است یکریخت با F و عنصرهای F را با چند جمله‌ییهایی که به آنها مربوطند یکی می‌گیریم، یعنی می‌نویسیم:

$$\alpha = \{\alpha, 0, 0, \cdots\}$$

اکنون گیریم x یک چندجمله‌یی باشد که با دنبالهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$x = \{۰, ۱, ۰, \cdots\}$$

آنگاه

$$x^۲ = \{۰, ۰, ۱, ۰, \cdots\}$$

و (با توجه به‌این که اندیس‌گذاری ضریبها را از ۰ شروع می‌کنیم) به‌طور کلی:

$$x^i = \{۰, ۰, \cdots, \underset{i}{۱}, \cdots\}$$

به‌علاوه به آسانی دیده می‌شود که:

$$\alpha x^i = \{\alpha, ۰, \cdots\}\{۰, \cdots, \underset{i}{۱}, \cdots\} = \{۰, \cdots, \underset{i}{\alpha}, \cdots\} \quad \alpha \in F, i = ۱, ۲, \cdots$$

بنابر این یک چندجمله‌یی دلخواه:

$$f = \{\alpha_۰, \alpha_۱, \alpha_۲, \cdots\}$$

را می‌توان به‌طور یکتا به‌شکل زیر نوشت:

$$f = \alpha_۰ + \alpha_۱ x + \alpha_۲ x^۲ + \cdots + \alpha_r x^r \qquad (۳.۲۰)$$

مجموعهٔ چندجمله‌ییهای با ضریبهای متعلق به F را با $F[x]$ نشان می‌دهیم.

مثال الف. مطلوب است محاسبهٔ:

$$(۳ - x + x^۲)(۲ + ۲x + x^۲ - x^۳)$$

دیده می‌شود که بالاترین جمله با ضریب مخالف صفر در این حاصلضرب $x^۵$ است. در این صورت حاصلضرب را با محاسبهٔ ضریبهای $x^۰, x^۱, \cdots, x^۵$ می‌یابیم. پس حاصلضرب برابر است با:

$$(۳ \cdot ۲) + (۳ \cdot ۲ - ۲ \cdot ۱)x + (۳ - ۲ + ۲)x^۲ + (-۳ - ۱ + ۲)x^۳$$
$$+(۱ + ۱)x^۴ - x^۵ = ۶ + ۴x + ۳x^۲ - ۲x^۳ + ۲x^۴ - x^۵$$

(۴.۲۰) تعریف. گیریم $f = \alpha_۰ + \alpha_۱ x + \alpha_۲ x^۲ + \cdots$ یک چندجمله‌یی متعلق به $F[x]$ باشد. f را از درجهٔ r گویند و می‌نویسند $\deg f = r$، اگر $\alpha_r \neq ۰$ و $\alpha_{r+۱} = \alpha_{r+۲} = \cdots = ۰$ چندجمله‌یی $\ldots + ۰x^۲ + ۰x + ۰ = ۰$ را چندجمله‌یی بی درجه می‌نامند.

(۵.۲۰) قضیه. گیریم f و g چندجمله‌ییهای ناصفر متعلق به $F[x]$ باشند، در این صورت:

$$\deg(f+g) \leq \max\{\deg f, \deg g\}, \quad f+g \neq 0 \quad \text{اگر}$$
$$\deg fg = \deg f + \deg g$$

برهان. گیریم:

$$f = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_r x^r, \quad \alpha_r \neq 0$$
$$g = \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_s x^s, \quad \beta_s \neq 0$$

در این صورت:

$$f+g = (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)x + \cdots + (\alpha_t + \beta_t)x^t$$

که در آن $t = \max\{r, s\}$ ، و حکم اول ثابت می‌شود. برای اثبات حکم دوم، می‌بینیم که به‌ازای $fg, i > r+s$ جملهٔ ناصفر $\gamma_i x^i$ ندارد و ضریب x^{r+s} درست $\alpha_r \beta_s$ است که ناصفر است، زیرا حاصلضرب دو عنصر ناصفر یک هیأت، یک عنصر ناصفر است (چرا؟). به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

(۶.۲۰) فرع. اگر $f, g \in F[x]$، آنگاه از $fg = 0$ نتیجه می‌شود $f = 0$ یا $g = 0$. اگر $fg = hg$، و $g \neq 0$، آنگاه $f = h$.

برهان. اگر هم $f \neq 0$ و هم $g \neq 0$، آنگاه بنابر(۵.۲۰)، $\deg fg \geq 0$ و از این رو $fg \neq 0$. برای اثبات بخش دوم گیریم $fg = hg$. در این صورت $(f-h)g = 0$ و چون $g \neq 0$، پس بنابر بخش نخست $f - h = 0$.

(۷.۲۰) فرع. گیریم $f \neq 0$ یک چندجمله‌یی متعلق به $F[x]$ باشد، در این صورت یک چند جمله‌یی $g \in F[x]$ وجود دارد به‌گونه‌ای که برای برقراری تساوی $fg = 1$ لازم و کافی است که $\deg f = 0$. در نتیجه $F[x]$ یقیناً یک هیأت نیست.

برهان. اگر $\deg f = 0$، آنگاه $f = \alpha \in F$ و بنابر اصلهای یک هیأت داریم $\alpha\alpha^{-1} = 1$. در نتیجه اگر برای یک $g \in F[x]$، تساوی $fg = 1$ برقرار باشد، آنگاه بنابر (۵.۲۰) داریم:

$$\deg f + \deg g = \deg 1 = 0$$

چون $\deg f$ یک عدد درست نامنفی است از این معادله نتیجه می‌شود $\deg f = 0$ و (۷.۲۰) ثابت می‌شود.

(۸.۲۰) قضیه. (عمل تقسیم). گیریم f و g چند جمله‌ییهایی متعلق به $F[x]$ باشند، به‌گونه‌ای که $g \neq \circ$ آنگاه چندجمله‌ییهای معین و یکتایی مانند Q و R وجود دارند که به ترتیب خارج قسمت و باقیمانده نامیده می‌شوند به‌گونه‌ای که:

$$f = Qg + R$$

که در آن یا $R = \circ$ یا $\deg R < \deg g$.

برهان. اگر $f = \circ$، آنگاه می‌توان گرفت $Q = R = \circ$. اکنون گیریم:

$$f = \alpha_\circ + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_r x^r, \quad \alpha_r \neq \circ, r \geq \circ$$

(۹.۲۰)

$$g = \beta_\circ + \beta_1 x + \cdots + \beta_s x^s, \quad \beta_s \neq \circ, s \geq \circ$$

برای اثبات وجود Q و R از استقراء روی r استفاده می‌کنیم. نخست گیریم $r = \circ$. اگر $s > \circ$، آنگاه

$$f = \circ \cdot g + f$$

در شرطهای ما صدق می‌کند، در حالی که اگر $s = \circ$، آنگاه بنابر (۷.۲۰) خواهیم داشت $gg^{-1} = 1$ و می‌توان نوشت

$$f = (fg^{-1})g + \circ$$

اکنون فرض می‌کنیم $r > \circ$ و وجود Q و R برای چندجمله‌ییهای از درجهٔ نابزرگتر از $r - 1$ ثابت شده باشد. f و g را همانند (۹.۲۰) می‌گیریم. اگر $s > r$، آنگاه $f = \circ \cdot g + f$ در شرطهای ما صدق می‌کند و چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند.سرانجام، گیریم $r \leq s$. در این صورت، با استفاده از قانون توزیعپذیری $F[x]$ به‌دست می‌آوریم:

$$\alpha_r \beta_s^{-1} x^{r-s} g = \beta'_\circ + \beta'_1 x + \cdots + \alpha_r x^r + \circ x^{r+1} + \cdots$$

که در آن $\beta'_r = \alpha_r$ ، با ضریبهای $\beta'_i \in F$. چندجمله‌یی:

$$f_1 = f - \alpha_r \beta_s^{-1} x^{r-s} g \qquad (۱۰.۲۰)$$

از درجهٔ نابزرگتر از $r - 1$ است، زیرا ضریبهای x^r حذف شده‌اند. بنابر فرض استقراء چندجمله‌ییهایی مانند Q و R وجود دارند که یا $R = \circ$، یا $\deg R < \deg g$ به‌گونه‌ای که

$$f_1 = Qg + R$$

با گذاردن (۱۰.۲۰) در این دستور نتیجه می‌شود:

$$f = (Q + \alpha_r \beta_s^{-1} x^{r-s})g + R$$

و بخش وجودی قضیه ثابت می‌شود.

برای اثبات یکتایی، گیریم:

$$f = Qg + R = Q'g + R'$$

که در آن R و R' در شرطهای قضیه صدق می‌کنند. نخست نشان می‌دهیم $R = R'$. اگر چنین نباشد، آنگاه $R - R' \neq 0$، و داریم:

$$R - R' = (Q' - Q)g$$

که بنابر (۵.۲۰) داریم $\deg(R - R') < \deg g$ ، در حالی که:

$$(Q' - Q)g = \deg(Q' - Q) + \deg g \geq \deg g$$

که بیانگر یک تناقض است، پس باید $R = R'$. در این صورت داریم

$$g \neq 0 ، (Q - Q')g = 0$$

و بنابر (۶.۲۰) داریم $Q - Q' = 0$. بدین ترتیب اثبات قضیه پایان می‌یابد.

مثال ب. برای روشن ساختن عمل تقسیم، گیریم:

$$f = 3x^3 + x^2 - x + 1$$
$$g = x^2 + 2x - 1$$

در این صورت

$$f - 3xg = -5x^2 + 2x + 1$$
$$-5x^2 + 2x + 1 + 5g = 12x - 4$$

چون $\deg(12x - 4) < \deg g$، تقسیم پایان می‌یابد و داریم:

$$f = (3x - 5)g + 12x - 4$$

لذا

$$Q = 3x - 5, \quad R = 12x - 4$$

اکنون به مفهوم اساسی تابع چندجمله‌یی می‌پردازیم.

(۱۱.۲۰) **تعریف.** گیریم $f = \sum \alpha_i x^i \in F[x]$ و $\xi \in F$. هر عنصر $f(\xi) \in F$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(\xi) = \sum \alpha_i \xi^i$$

$f(\xi)$ را مقدار چندجمله‌یی f به‌ازای $x = \xi$ می‌نامیم. به‌ازای یک چندجمله‌یی ثابت $f \in F[x]$ تابع چندجمله‌یی $f(x)$ دستوری است که به‌هر $\xi \in F$ عنصر $f(\xi) \in F$ را مربوط می‌کند* صفر یک چندجمله‌یی f، یک عنصر $\xi \in F$ است به‌گونه‌ای که $f(\xi) = 0$. هر صفر f را یک جواب یا یک ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = 0$ نیز می‌نامند.

دو قضیهٔ بعدی کلید یافتن صفرهای یک چندجمله‌یی و تجزیهٔ آن است. نخست به‌لم مهم زیر نیازمندیم.

(۱۲.۲۰) **لم.** گیریم $f, g \in F[x]$ و $\xi \in F$؛ پس $(f \pm g)(\xi) = f(\xi) \pm g(\xi)$ و $(fg)(\xi) = f(\xi)g(\xi)$.

برهان. گیریم $f = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_r x^r$ و $g = \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_s x^s$ پس:

$$\begin{aligned}(f+g)(\xi) &= (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)\xi + (\alpha_2 + \beta_2)\xi^2 + \cdots \\ &= (\alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2 + \cdots) + (\beta_0 + \beta_1\xi + \beta_2\xi^2 + \cdots) \\ &= f(\xi) + g(\xi)\end{aligned}$$

به‌همین ترتیب، $(f - g)(\xi) = f(\xi) - g(\xi)$. بعد داریم:

$$\begin{aligned}(fg)(\xi) &= \alpha_0\beta_0 + (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0)\xi + (\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0)\xi^2 + \cdots \\ &= (\alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2 + \cdots)(\beta_0 + \beta_1\xi + \beta_2\xi^2 + \cdots) \\ &= f(\xi)g(\xi)\end{aligned}$$

بدین ترتیب اثبات لم پایان می‌یابد.

(۱۳.۲۰) **قضیهٔ باقیمانده.** گیریم $f \in F[x]$ و $\xi \in F$؛ در این صورت باقیماندهٔ حاصل ازخارج‌قسمت f بر $x - \xi$ برابر $f(\xi)$ است:

$$f = Q(x - \xi) + f(\xi)$$

---

* برای نمایش یک چندجمله‌یی f اغلب از نماد $f(x)$ استفاده می‌کنند. این نماد، وجه تمایز بین توابع چندجمله‌یی و چندجمله‌ییها را [که دنباله هستند] نشان نمی‌دهد. نیاز به این تمایز از اینجا ناشی می‌شود که برای هیأتهای متناهی F، دو چندجمله‌یی متفاوت در $[F(x)]$ ممکن است به یک تابع چندجمله‌یی مربوط باشند. مثلاً فرض کنید F هیأت دو عنصری ←[بخش ۲، تمرین ۴] باشد. پس $x^2 - x = 0$ و 0 چندجمله‌ییهای متمایزی هستند که معرّف یک تابع چندجمله‌یی هستند.

برهان. بنابر عمل تقسیم داریم:

$$f = Q(x-\xi) + r$$

که در آن r یا برابر ۰ یا عنصری از F است. با گذاردن ξ به‌جای x از (۱۲.۲۰) نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید: $r = f(\xi)$.

(۱۴.۲۰) قضیهٔ عاملها. گیریم $f \in F[x]$ و $\xi \in F$؛ در این صورت تساوی $f = (x-\xi)Q$ برقرار است اگر و فقط اگر به‌ازای یک مقدار $Q \in F[x]$، داشته باشیم $f(\xi) = 0$.

بنابر قضیهٔ باقیمانده، برهان بدیهی است.

اکنون گیریم A یک حلقهٔ تعویضپذیر باشد (در واقع اینجا منظور ما حلقهٔ مخصوص $A = F[x]$ است). اگر $r, s \in A$ آنگاه گوییم $r|s$ (و می‌خوانیم «r عدد s را می‌شمارد» یا «s مضربی است از r» یا «r یکی از عاملهای s است») اگر برای یک مقدار $t \in A$ داشته باشیم $s = rt$. عنصر u متعلق به A را عنصر یکا می‌گویند هرگاه $u|۱$. برای اینکه عنصری یکا باشد لازم و کافی است که این عنصر یکی از عاملهای هر عنصر A باشد، از این رو از نظر تجزیه جالب توجه نیست. چون هر عنصر ناصفر در یک هیأت یک یکا است، بررسی تجزیه در یک هیأت جالب نیست. عنصر $p \in A$ را اول* گویند هرگاه p برابر ۰ یا یکا نباشد، و هنگامی که $p = ab$، از آن نتیجه شود که a یا b واحدند. دو عنصر متمایز را نسبت به‌هم اول گویند هرگاه تنها مقسوم علیه‌های مشترکشان یکاها باشند. عنصر $d \in A$ را بزرگترین مقسوم علیه مشترک $r_۱, r_۲, \cdots, r_k \in A$ می‌نامند هرگاه برای $۱ \leq i \leq k$، $d|r_i$ و اگر d' به‌گونه‌ای باشد که برای $۱ \leq i \leq k$، $d'|r_i$، آنگاه $d'|d$.

اکنون می‌خواهیم این مفاهیم را برای حلقهٔ چندجمله‌ییهای $F[x]$ بررسی کنیم. بحث تقریباً مشابهی در مورد حلقهٔ عددهای درست Z وجود دارد و ذکر تفصیلی این کاربرد مفید است.

نخست دیده می‌شود که مجموعهٔ یکاهای $F[x]$ با چندجمله‌ییهای «ثابت» $\alpha \in F$ ، که در آن $\alpha \neq 0$ ، یعنی با چندجمله‌ییهای درجهٔ ۰ منطبق است.

(۱۵.۲۰) قضیه. گیریم $f_۱، \cdots، f_k$ چندجمله‌ییهای ناصفر متعلق به $F[x]$ باشند، دراین صورت:

۱. عنصرهای $f_۱، \cdots، f_k$ دست کم یک مقسوم علیه مشترک d دارند.

۲. این بزرگترین مقسوم علیه مشترک d به‌طور یکتا با تقریب یک عامل یکا تعیین می‌شود و می‌توان آن را برای چندجمله‌ییهای مخصوص $\{h_i\}$ از $F[x]$ چنین نوشت:

$$d = h_۱ f_۱ + \cdots + h_k f_k$$

---

* چندجمله‌ییهای اوّل در $F, F(x)$ یک هیأت، را اغلب چندجمله‌ییهای تحویلناپذیر می‌نامند.

برهان. S یعنی مجموعهٔ چندجمله‌ییهای به‌شکل

$$\sum_{i=1}^{k} g_i f_i$$

را، که در آن $\{g_i\}$ چندجمله‌ییهای دلخواه‌اند، در نظر می‌گیریم، در این صورت S شامل مجموعهٔ چندجمله‌ییهای $\{f_1, \cdots, f_k\}$ است و دارای این ویژگی است که اگر $p \in S$ و $h \in F[x]$، آنگاه $ph \in S$. چون درجهٔ عنصرهای ناصفر S به $N \cup \{0\}$ متعلق است، بنابر اصل خوش ترتیبی (۵.۲ ب) می‌توان یک چندجمله‌یی ناصفری مانند:

$$d = h_1 f_1 + \cdots + h_k f_k \in S$$

یافت به‌گونه‌ای که برای هر عنصر ناصفر $d' \in S$، $\deg d \leq \deg d'$.

نخست ثابت می‌کنیم که برای $1 \leq i \leq k$، $d|f_i$. بنابر عمل تقسیم برای $1 \leq i \leq k$ داریم

$$f_i = dq_i + r_i$$

که در آن یا $r_i = 0$ یا $\deg r_i < \deg d$ و:

$$r_i = f_i - dq_i \in S$$

به‌سبب گزینش d به‌عنوان یک چندجمله‌یی با کمترین درجهٔ S، داریم $r_i = 0$ ، از این رو d هر f_i ، $1 \leq i \leq k$ را می‌شمارد.

اکنون گیریم d' یک مقسوم علیه مشترک دیگر $f_1, \cdots, f_k$ باشد. در این صورت چندجمله‌ییهای g_i وجود دارند به‌گونه‌ای که $f_i = d'g_i$ ، $1 \leq i \leq k$ و:

$$d = \sum h_i f_i = \sum h_i d' g_i = d'(\sum h_i g_i)$$

بنابر این $d'|d$ و d بزرگترین مقسوم علیه مشترک $\{f_1, \cdots, f_k\}$ است.

سرانجام، گیریم e یک مقسوم علیه مشترک دیگر $\{f_1, \cdots, f_k\}$ باشد. در این صورت $d|e$ و $e|d$. بنابر این چندجمله‌ییهایی مانند u و v وجود دارند به‌گونه‌ای که $e = du$ و $d = ev$. در این صورت $e = euv$ و $e(1 - uv) = 0$. بنابر (۶.۲۰) داریم $1 - uv = 0$، پس u و v یکااند. به‌این ترتیب برهان قضیه کامل می‌گردد.

(۱۶.۲۰) فرع. گیریم $r_1, \cdots, r_k$ متعلق به $F[x]$ باشند که عامل مشترکی به غیراز یکاها ندارند، در این صورت عنصرهای $x_1, \cdots, x_k$ متعلق به $F[x]$ وجود دارند به‌گونه‌ای که:

$$x_1 r_1 + \cdots + x_k r_k = 1$$

(۱۷.۲۰) **فرع.** گیریم p در $F[x]$ اول و $p|ab$، دراین‌صورت $p|a$ یا $p|b$.

برهان. اگر p، a را نشمارد، آنگاه a و p نسبت به‌هم اول‌اند و بنابر (۱۵.۲۰) برای $u, v \in F[x]$ داریم، $au + pv = ۱$. در این صورت $abu + pvb = b$ و چون $p|ab$ پس بنابر قانون توزیعپذیر در $F[x]$ داریم $p|b$.

(۱۸.۲۰) **قضیهٔ یکتایی تجزیه.** گیریم $a \neq ۰$ یک عنصر $F[x]$ باشد، در این صورت یا a یک یکاست . و یا $a = p_۱ \cdots p_s$ ،$s \geq ۱$، که در آن $p_۱$، $\cdots$، p_s اول‌اند.بعلاوه:

$$p_۱ \cdots p_s = q_۱ \cdots q_t \qquad (۱۹.۲۰)$$

که در آن $\{p_i\}$ و $\{q_j\}$ اول‌اند، ایجاب می‌کند $s = t$، و برای یک اندیس گذاری مناسب pها و qها داریم:

$$p_۱ = \varepsilon_۱ q_۱, \cdots, p_t = \varepsilon_t q_t$$

که در آن ε_iها یکاهستند.

برهان. وجود دست کم یک تجزیهٔ a به عاملهای اول از راه استقراء روی درجهٔ a روشن است.

برای بخش یکتایی، استقراء روی s را به‌کار می‌بریم. اگر $s = ۱$، نتیجه درست است. با داشتن (۱۹.۲۰) با استفاده از (۱۷.۲۰) نتیجه می‌شود که $p_۱$ یکی از q_j ها را می‌شمارد و می‌توان فرض کرد $j = ۱$. در این صورت برای یک یکای $\varepsilon_۱$، $q_۱ = p_۱ \varepsilon_۱$. پس (۱۹.۲۰) چنین می‌شود:

$$p_۱ \cdots p_s = \varepsilon_۱ p_۱ q_۲ \cdots q_t$$

بنابر قانون حذف داریم:

$$p_۲ \cdots p_s = \varepsilon_۱ q_۲ \cdots q_t = q'_۲ q_۳ \cdots q_t$$

که در آن $q'_۲ = \varepsilon_۱ q_۲$. اکنون با استفاده از فرض استقراء، نتیجه به‌دست می‌آید.

در برخورد با قضیهٔ یکتایی تجزیه، بدین علت نظریهٔ بزرگترین مقسوم علیه مشترک را دنبال کرده‌ایم که از این نظریه در فصل ۷ استفاده خواهیم کرد. باید توجه داشت که قضیهٔ یکتایی تجزیه را می‌توان تنها با استفاده از اصل خوشترتیبی مجموعهٔ عددهای طبیعی و ساده‌ترین حقایق دربارهٔ درجهٔ چندجمله‌ییها ثابت کرد، بی‌آنکه فرایند تقسیم و یا نظریهٔ بزرگترین مقسوم علیه مشترک هیچیک مورد نیاز باشد.

برهان زیر در ۱۹۶۰ توسط چارلز گیفن هنگامی که در دانشگاه **ویسکانسین** **دانشجوی دورهٔ** لیسانس بود کشف گردید.

فرض کنیم که یکتایی تجزیه در $F[x]$ نادرست باشد. در این صورت بنابر اصل خوش ترتیبی یک چندجمله‌یی از کمترین درجه مانند:

$$f = p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s \qquad (۲۰.۲۰)$$

با دو تجزیهٔ متفاوت، وجود دارد که در آن $\{p_i\}$ و $\{q_j\}$ اول‌اند. می‌توان فرض کرد $r > 1$ و $s > 1$ و هیچ یک از p_iها با q_jها برابر نیستند، زیرا در غیر این صورت می‌توان p_i و q_j را حذف کرد و یک چندجمله‌یی از درجهٔ کمتر با دو تجزیهٔ متمایز به‌دست آورد. همچنین می‌توان فرض کرد که ضریب بزرگترین درجهٔ p_i و q_j برابر یک است. در صورت لزوم با تعویض جای pها و qها می‌توان ترتیبی داد که $\deg p_r \leq \deg q_s$. در این صورت به‌ازای توان مناسبی از x مانند x^i ضریب $x^{\deg q_s}$ در چندجمله‌یی $q_s - x^i p_r$ حذف خواهد شد و خواهیم داشت $0 \leq \deg(q_s - x^i p_r) < \deg q_s$. اکنون چندجمله‌یی زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$f_1 = f - q_1 \cdots q_{s-1}(x^i p_r)$$

بنابر (۲۰.۲۰) داریم:

$$f_1 = q_1 \cdots q_{s-1}(q_s - x^i p_r) \qquad (۲۱.۲۰)$$

پس بنابر آنچه گفته شد $f_1 \neq 0$ و $\deg f_1 < \deg f$. ولی با توجه به شکل f_1 ملاحظه می‌کنیم که $p_r | f_1$، و چون تجزیه به‌عاملهای اول برای چندجمله‌ییهای از درجهٔ کوچکتر از $\deg f$ یکتاست، بنابر (۲۱.۲۰) نتیجه می‌گیریم که $p_r | (q_s - x^i p_r)$، زیرا p_r از همهٔ عاملهای اول $q_1, \cdots, q_{s-1}$ متمایز است. در این صورت:

$$q_s - x^i p_r = h p_r$$
$$q_s = p_r(h + x^i)$$

که یک تناقض است و برهان یکتایی تجزیه ثابت می‌شود.*

این بخش را با بیان این حقیقت پایان می‌دهیم که گر چه $F[x]$ یک هیأت نیست ولی می‌توانیم آن را در هیأتی بنشانیم به‌همان شکلی که عددهای درست را در هیأت عددهای گویا نشاندیم. از بیان جزییات خودداری می‌کنیم.

---

* توجه کنید که همین استدلال، اثبات یکتایی تجزیه در حلقهٔ اعداد صحیح Z نیز هست. با شرح جزئیات، اگر یکتایی تجزیه در Z برقرار نباشد، کوچکترین عدد صحیح مثبتی چون $m = p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$ موجود خواهد بود که اساساً دو تجزیهٔ متفاوت دارد. در این صورت می‌توانیم فرض کنیم که هیچ p_i با هیچ q_j منطبق نیست و r و s بزرگتر از یک هستند. همچنین می‌توانیم فرض کنیم که $p_r < q_s$ و تساوی $m_1 = m - q_1 \cdots q_{s-1} p_r$ را تشکیل می‌دهیم. در این صورت $m_1 < m$ و $p_r | m_1$. چون $m_1 = q_1 \cdots q_{s-1}(q_s - p_r)$، پس نتیجه می‌شود که $p_r | (q_s - p_r)$، که یک تناقض است. این استدلال برای نخستین بار در کتاب کورانت و رابینز تحت عنوان «ریاضیّات چیست؟» (←کتابنامه) توجه نویسنده را جلب کرد.

همهٔ جفتهای (f, g) را که در آنها $g, f \in F[x]$ و $g \neq 0$، درنظر می‌گیریم. می‌گوییم دو جفت (f, g) و (h, k) هم ارزند، هرگاه $fk = gh$؛ در این حالت می‌نویسیم $(f, g) \sim (h, k)$. پس رابطهٔ $\sim$ دارای ویژگیهای زیر است:

۱. $(f, g) \sim (f, g)$

۲. $(f, g) \sim (h, k) \Longrightarrow (h, k) \sim (f, g)$

۳. $(f, g) \sim (h, k), (h, k) \sim (p, q) \Longrightarrow (f, g) \sim (p, q)$

[برای اثبات ویژگی (۳) به‌قانون حذف (۶.۲۰) نیازمندیم.] اکنون کسر f/g، $g \neq 0$ را به‌شکل، همهٔ جفتهای (h, k)، $k \neq 0$ تعریف می‌کنیم به‌گونه‌ای که $(f, g) \sim (h, k)$. در این صورت می‌توان گفت:

۴. هرجفت (f, g) تنها و تنها به‌یک کسر f/g تعلق دارد.

۵. برای انطباق دو کسر f/g و r/s لازم و کافی است که $fs = gr$.

حال تعریف می‌کنیم:

۶. $f/g + r/s = (fs + gr)/gs$

۷. $(f/g)(r/s) = fr/gs$

قبل از همه می‌توان ثابت کرد که عملهای جمع و ضرب کسرها مستقل از نماینده‌های کسرها هستند. به عبارت دیگر باید نشان دهیم که اگر $f/g = f_1/g_1$ و $r/s = r_1/s_1$، آنگاه:

$$\frac{fs + gr}{gs} = \frac{f_1 s_1 + g_1 r_1}{g_1 s_1}.$$

و مشابه این حکمها در مورد ضرب برقرار است.

اکنون قضیهٔ زیر را بدون اثبات بیان می‌کنیم و اثبات آن را به‌عنوان تمرین واگذار می‌کنیم:

(۲۲.۲۰) قضیه. مجموعهٔ کسرهای f/g، $g \neq 0$ نسبت به عملهای جمع و ضرب که پیش از این تعریف شدند، یک هیأت $F(x)$ می‌سازد. نگاشت $f \to fg/g = \varphi(f)$ که در آن $f \in F[x]$، یک نگاشت یک‌به‌یک از $F[x]$ در $F(x)$ است، به‌گونه‌ای که به‌ازای $f, h \in F[x]$، $\varphi(f + h) = \varphi(f) + \varphi(h)$ و $\varphi(fh) = \varphi(f)\varphi(h)$.

هیأت $F(x)$ که این گونه ساخته شد هیأت تابعهای گویا از یک متغیر با ضریبهای متعلق به F نامیده می‌شود. این هیأت را هیأت خارج قسمت حلقهٔ چندجمله‌ییهای $F[x]$ می‌نامند. اگر چندجمله‌ییهای $f \in F[x]$ را با تابع گویای $\varphi(f) = fg/g$، $g \neq 0$ یکی بگیریم، آنگاه می‌توانیم بگوییم که هیأت $F(x)$ شامل چندجمله‌ییهای هیأت $F[x]$ است.

مثال پ. بزرگترین مقسوم علیه مشترک چندجمله‌ییهای:

$$f = x^۲ - x - ۲,\quad g = x^۳ + ۱$$

را در $R[x]$ بیابید. با توجه به قضیهٔ (۱۵.۲۰) دیده می‌شود که گرچه وجود بزرگترین مقسوم علیه مشترک d بنابر این قضیه، محرز است ولی در برهان هیچ‌گونه اشاره‌ای به‌روش یافتن آن نشده است. نشان می‌دهیم چگونه با استفاده از قضیهٔ تجزیه به‌عاملهای اول f و g در $R[x]$ می‌توان d را یافت. در تمرین ۸ روش دیگری برای محاسبهٔ بزرگترین مقسوم علیه مشترک داده می‌شود که در آن چندجمله‌ییهای a و b ارائه می‌شوند، به‌گونه‌ای که $d = af + bg$.

(۲۳.۲۰) قضیه. گیریم f و g چندجمله‌ییهای ناصفر متعلق به $F[x]$ باشند، و:

$$f = p_۱^{a_۱} \cdots p_r^{a_r},\quad g = p_۱^{b_۱} \cdots p_r^{b_r}$$

که در آن $p_۱، \cdots، p_r$ عددهای اول و نماهای $a_i, b_i \geq ۰$ (با صفر گرفتن نماها، می‌توان f و g را بر حسب یک مجموعه از عددهای اول $\{p_۱, \cdots, p_r\}$ نوشت). در این صورت بزرگترین مقسوم علیه مشترک f و g یعنی d (با تقریب یک عامل یکا) برابر است با:

$$d = p_۱^{c_۱} \cdots p_r^{c_r}$$

که در آن به‌ازای هر i، c_i آن یک از دو نمای a_i و b_i است که کوچکتر است.

برهان. روشن است که $d|f$ و $d|g$. اکنون گیریم $d'|f$ و $d'|g$. بنابر قضیهٔ یکتایی تجزیه، نتیجه می‌شود $d' = \varepsilon p_۱^{d_۱} \cdots p_r^{d_r}$ که در آن ε یک یکا است، و برای $۱ \leq i \leq r$، $d_i \leq a_i$ و $d_i \leq b_i$. پس $d'|d$ و قضیه ثابت می‌شود.

برای استفاده از این قضیه در مورد مثال بالا، باید f و g را به‌عاملهای اول‌شان در $R[x]$ تجزیه کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} f &=(x-۲)(x+۱), \\ g &=(x+۱)(x^۲-x+۱) \end{aligned}$$

روشن است که همهٔ چندجمله‌ییهای درجهٔ اول در $R[x]$ اول‌اند. چندجمله‌یی $x^۲ - x + ۱$ ریشهٔ حقیقی ندارد، زیرا $۰ > ۳- = ۴ - ۱$، و از این رو، بنابر قضیهٔ تجزیه (۱۴.۲۰)، $x^۲ - x + ۱$ اول است. اکنون می‌توان قضیهٔ (۲۳.۲۰) را به‌کار برد و نتیجه گرفت که $x + ۱$ بزرگترین مقسوم علیه مشترک f و g است.

تمرینها

۱.با استفاده از روش اثبات قضیهٔ (۸.۲۰) خارج قسمت Q و ماندهٔ R را چنان بیابید که:

$$f = Qg + R$$

که در آن:

$$f = ۲x^۴ - x^۳ + x - ۱,$$
$$g = ۳x^۳ - x^۲ + ۳$$

۲.ثابت کنید که تعداد صفرهای متمایز یک چندجمله‌یی $f \in F[x]$ حداکثر برابر $\deg f$ در F است، که در آن F یک هیأت دلخواه است.

۳.گیریم $f = ax^۲ + bx + c$، که a، b و c اعداد حقیقی و $a \neq ۰$. ثابت کنید، برای این که f در $R[x]$ اول باشد، لازم و کافی است که $b^۲ - ۴ac < ۰$. ثابت کنید که اگر $b^۲ - ۴ac = D \geq ۰$، آنگاه:

$$f = a\left(x - \frac{-b+\sqrt{D}}{۲a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{D}}{۲a}\right)$$

۴.گیریم F یک هیأت و $f \in F[x]$ یک چندجمله‌یی از درجهٔ نابزرگتر از ۳ باشد. ثابت کنید که برای اینکه f در $F[x]$ اول باشد، لازم و کافی است که یا دارای درجهٔ ۱ باشد یا این که در F صفری نداشته باشد. آیا این نتیجه برای $\deg f > ۳$ درست است؟

۵.ثابت کنید که اگر عدد گویای m/n، به‌ازای دو عدد نسبت به‌هم اول m و n، ریشهٔ معادلهٔ چندجمله‌یی:

$$a_۰x^r + a_۱x^{r-۱} + \cdots + a_r = ۰$$

باشد که، $a_i \in Z$، آنگاه $n|a_۰$ و $m|a_r$.* با استفاده از این نتیجه ریشه‌های گویای ممکن معادله‌های زیر را بنویسید:

$$۲x^۳ - ۶x^۲ + ۹ = ۰$$
$$x^۳ - ۸x^۲ + ۱۲ = ۰$$

۶.ثابت کنید که اگر m عددی درست مثبت که در Z مربع نیست باشد، آنگاه $\sqrt{m}$ گنگ است (از تمرین ۵ استفاده کنید).

---

* این استدلال دلالت بر این دارد که قانون یکتایی تجزیه برای اعداد درست Z، چنان‌که در پانوشت برهان گیفن برای یکتایی تجزیه در $F[x]$ اشاره کردیم، نیز صادق است.

۷.هر یک از چندجمله‌ییهای زیر را در $Q[x]$ و $R[x]$ به‌عاملهای اول تجزیه کنید:

الف) $2x^3 - x^2 + x + 1$

ب) $3x^3 + 2x^2 - 4x + 1$

پ) $x^6 + 1$

ت) $x^4 + 16$

۸.گیریم برای $a, b \neq 0$، $a, b \in F[x]$. با استفاده از فرایند تقسیم رابطه‌های زیر را به‌دست آورید:

$$a = bq_0 + r_0$$

$$b = r_0 q_1 + r_1, \ \deg r_1 < \deg r_0$$

$$r_0 = r_1 q_2 + r_2, \ \deg r_2 < \deg r_1$$

$$\dots$$

$$r_i = r_{i+1} q_{i+2} + r_{i+2}, \ \deg r_{i+2} < \deg r_{i+1}$$

نشان دهید که به‌ازای مقداری مانند i_0، $r_{i_0} \neq 0$ و $r_{i_0+1} = 0$. ثابت کنید که $r_{i_0} = (a, b)$، که (a, b) معرّف بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b است.

۹.بزرگترین مقسوم علیه مشترک هر جفت از چندجمله‌ییهای زیر را در حلقهٔ $R[x]$ بیابید و آن را به‌صورت یک ترکیب خطی مثل جزء ۲ی (۱۵.۲۰) بیان کنید.

الف) $4x^3 + 2x^2 - 2x - 1, \ 2x^3 - x^2 + x + 1$

ب) $x^3 - x + 1, \ 2x^4 + x^2 + x - 5$

۱۰.گیریم F هیأت دو عنصری که در تمرین ۴ بخش ۲ تعریف شده است باشد. چند جمله‌ییهای زیر را در $F[x]$ تجزیه کنید:

الف) $x^2 + x + 1$

ب) $x^3 + 1$

پ) $x^4 + x^2 + 1$

ت) $x^4 + 1$

۱۱.بزرگترین مقسوم علیه مشترک:

$$x^3 + x^2 + x + 1 \quad \text{و} \quad x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

را در $F[x]$ بیابید، که F هیأت تمرین ۱۰ است.

۲۱. عددهای مختلط

هیأت عددهای حقیقی R دارای این نقص است که هر معادلهٔ درجهٔ دوم با ضریبهای متعلق به R در آن دارای ریشه نیست. این حقیقت را ریاضیدانان سده‌های ۱۸ و ۱۹ با این فرض که معادلهٔ

$x^۲ + ۱ = ۰$ یک جواب i دارد، سرانجامی بخشیدند و ویژگیهای دستگاه جدید اعداد انگاری حاصل از عددهای حقیقی و این عدد جدید i را مورد رسیدگی قرار دادند. گرچه امروز دیگر اعداد مختلط را انگاری‌تر از عددهای حقیقی نمی‌دانیم، ولی ریاضیدانانی نظیر اویلر عدد انگاری i را با تردید به‌کار می‌بردند، زیرا این عدد از عددهای حقیقی با روش روشنی ساخته نشده بود.

ویژگیهای دستگاه اعداد جدید هر چه بود، ریاضیدانان سده‌های ۱۸ و ۱۹ تلاش می‌کردند که عددهای جدید از قانونهای جبری عددهای حقیقی تبعیّت کنند. به‌ویژه آنها استدلال می‌کردند که دستگاه عددهای جدید شامل همهٔ عبارتهایی به‌شکل:

$$\alpha + \beta i + \gamma i^۲ + \cdots$$

هستند که در آنها α، β، γ، $\cdots$ عددهای حقیقی‌اند، چون $i^۲ = -۱$ و $i^۳ = -i$ و غیره، هر عبارت نظیر آن را می‌توان به‌شکل عبارت $\alpha + \beta i$، $\alpha, \beta \in R$ ساده کرد. به آسانی دیده می‌شود که قانونهای ترکیب این عددها عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i) &= (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta) i\\ (\alpha + \beta i)(\gamma + \delta i) &= \alpha\gamma + \beta\delta i^۲ + \alpha\delta i + \beta i \gamma\\ &= (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma) i\end{aligned}$$

این قانونها هنگامی پدید آمدند که ریاضیدان ایرلندی و. ر. همیلتن در ۱۸۴۰ به عددهای مختلط علاقه‌مند شد. او نخست دریافت که اگر عددهای انگاری را با روش دقیقی از عددهای حقیقی بسازند این عددها چندان انگاری نیستند. ما نحوهٔ ساختن او را در اینجا می‌آوریم.

(۱.۲۱) تعریف. دستگاه عددهای مختلط C یک فضای برداری دو بعدی $R_۲$ روی عددهای حقیقی R است که در آن دو عمل جمع و ضرب تعریف شده است. عمل جمع همان جمع برداری در $R_۲$ است و عمل ضرب چنین تعریف می‌شود:

$$< \alpha, \beta >< \gamma, \delta >=< \alpha\gamma - \beta\delta, \alpha\delta + \beta\gamma >$$

(۲.۲۱) قضیه. عددهای مختلط یک هیأت تشکیل می‌دهند.

برهان. اصلهای یک هیأت [تعریف (۱.۲)] که تنها جمع را در بردارد برقرارند، زیرا در C، جمع همان جمع برداری جفتهای اعداد حقیقی است. اکنون باید قانونهای توزیعپذیری و شرکتپذیری، وجود ۱، وجود وارون نسبت به ضرب را بررسی کنیم. می‌توان قانونهای شرکتپذیری و تعویضپذیری را برای ضرب و قانون توزیعپذیری را به‌عنوان تمرین انجام داد. عنصر $< ۱, ۰ > = ۱$ دارای این ویژگی است که به‌ازای هر $z \in C$، $۱z = z۱ = z$. سرانجام، گیریم $z =< \alpha, \beta > \neq ۰$.

می‌خواهیم نشان دهیم که عنصری مانند $w =< x, y >$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $zw = ۱$. یعنی باید دستگاه زیر را نسبت به x و y حل کنیم:

$$\alpha x - \beta y = ۱$$
$$\beta x + \alpha y = ۰$$

ماتریس ضریبها عبارت است از:

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

که دترمینان آن برابر است با $\alpha^۲ + \beta^۲$. چون α و β عددهای حقیقی‌اند، و هر دو صفر نیستند، پس $\alpha^۲ + \beta^۲ > ۰$، و می‌توان معادله‌ها را حل کرد. پس $z^{-۱}$ وجود دارد و C یک هیأت است.

نگاشت $\alpha \rightarrow< \alpha, ۰ >= \alpha'$ از $R \rightarrow C$ یک به‌یک است، به‌گونه‌ای که:

$$(\alpha + \beta)' = \alpha' + \beta', \ \ (\alpha\beta)' = \alpha'\beta'$$

بدین تعبیر می‌گوییم R در C گنجیده است و می‌نویسیم $\alpha =< \alpha, ۰ >$.

اکنون دیگر در معادلهٔ $x^۲ + ۱ = ۰$ چیز شگفت‌آوری وجود ندارد. با توجه به‌این که $< ۱, ۰ >= ۱$ می‌بینیم که $\pm < ۰, ۱ >$ جوابهای معادله‌اند، پس اگر i را با تساوی $i =< ۰, ۱ >$ تعریف کنیم، آنگاه $i^۲ = -۱$. برای هر $\beta =< \beta, ۰ >\in R$ داریم $\beta i =< ۰, \beta >$، و از این رو هر عدد مختلط $z =< \alpha, \beta >$ را می‌توان چنین نوشت:

$$z =< \alpha, \beta >=< \alpha, ۰ > + < ۰, \beta >= \alpha \cdot ۱ + \beta i$$

α را بخش حقیقی و β را بخش انگاری z می‌نامند. بعلاوه برای برقراری تساوی $\alpha + \beta i = \gamma + \delta i$ لازم و کافی است که $\alpha = \gamma$ و $\beta = \delta$.

نکتهٔ دیگری که همیلتن یافت این بود که نه تنها i، بلکه هر عدد مختلط $z = \alpha + \beta i$ نیز ریشهٔ یک معادلهٔ درجهٔ دوم با ضریبهای حقیقی است. برای یافتن این معادله، عدد:

$$z^۲ = (\alpha^۲ - \beta^۲) + (۲\alpha\beta)i$$

را با $z = \alpha + \beta i$ مقایسه می‌کنیم، نتیجه می‌شود:

$$z^۲ - ۲\alpha z = -\alpha^۲ - \beta^۲$$

پس معادله‌ای که $z = \alpha + \beta i$ یک ریشهٔ آن است عبارت است از:

$$z^۲ - ۲\alpha z + (\alpha^۲ + \beta^۲) = ۰ \qquad (۳.۲۱)$$

می‌دانیم که این معادله ریشهٔ دیگری هم دارد که برابر است با

$$\overline{z} = \alpha - \beta i$$

چون به‌کمک قضیهٔ تجزیه دیده می‌شود که جملهٔ ثابت B حاصلضرب صفرهای $z^{2} + Az + B$ آن است، پس:

$$z\overline{z} = \alpha^{2} + \beta^{2}$$

اگر قرار دهیم $|z| = \sqrt{\alpha^{2} + \beta^{2}}$ ، آنگاه $|z|$ طول بردار $< \alpha, \beta >$ است و آن را قدر مطلق z می‌نامند. نشان دادیم که:

$$z\overline{z} = |z|^{2} \tag{۴.۲۱}$$

از این دستور، اگر $z \neq 0$، دستور ساده‌ای برای z^{-1} به‌شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^{2}} \tag{۵.۲۱}$$

عدد مختلط $\overline{z}$ را مزدوج z می‌نامند و آن ریشهٔ دیگر معادله درجهٔ دومی با ضریبهای حقیقی است که z، ریشهٔ آن است. عمل مزدوج گیری ویژگیهای زیر را دارد:

$$\overline{z_{1} + z_{2}} = \overline{z}_{1} + \overline{z}_{2}, \quad \overline{z_{1}z_{2}} = \overline{z}_{1}\overline{z}_{2}$$

بنابر این $z \rightarrow \overline{z}$ یک یکریختی از C روی C است، و می‌گوییم که این یک خودریختی C است. با استفاده از این خودریختی، می‌توان دستور $|z_{1}z_{2}| = |z_{1}||z_{2}|$ را یافت، زیرا:

$$|z_{1}z_{2}|^{2} = z_{1}z_{2}\overline{z_{1}z_{2}} = z_{1}z_{2}\overline{z}_{1}\overline{z}_{2} = (z_{1}\overline{z}_{1})(z_{2}\overline{z}_{2}) = |z_{1}|^{2}|z_{2}|^{2}$$

اگر $z_{1} = \alpha + \beta i$ و $z_{2} = \gamma + \delta i$، آنگاه اتحاد جالب زیر بین عددهای حقیقی به‌دست می‌آید:

$$(\alpha\gamma - \beta\delta)^{2} + (\alpha\delta + \beta\gamma)^{2} = (\alpha^{2} + \beta^{2})(\gamma^{2} + \delta^{2})$$

که بیان می‌کند حاصلضرب دو مجموع از دو مجذور را می‌توان به‌شکل مجموع دو مجذور نوشت.*

اکنون نمایش قطبی عددهای مختلط را بیان می‌کنیم. گیریم $z =< \alpha, \beta >$ آنگاه با قرار دادن $|z| = \sqrt{\alpha^{2} + \beta^{2}} = \rho$ می‌توان نوشت:

$$\alpha = \rho\cos\theta, \quad \beta = \rho\sin\theta$$

---

* برای بحث دربارهٔ این دستور و دستورهای مشابه آن برای مجموعهای چهار و هشت مربّع، ← بخش ۳۵.

که در آن θ زاویهٔ حاصل از وصل مبدأ به نقاط $(۰\ ,\ ۱)$ و (α, β) است. بنابر این:

$$z = \alpha + \beta i = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

که در آن:

$$|z| = |\rho|, \quad |\cos\theta + i\sin\theta| = ۱$$

اگر $w = |w|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ، آنگاه:

$$\begin{aligned} zw &= |z||w|(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= |zw|[(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) + i(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi)] \end{aligned}$$

با استفاده از قضیهٔ جمع تابعهای سینوس و کسینوس، این دستور چنین می‌شود:

$$zw = |z||w|[\cos(\theta + \varphi) + i\sin(\theta + \varphi)] \qquad \textbf{(۶.۲۱)}$$

تعبیر هندسی این رابطه این است که برای ضرب دو عدد مختلط باید قدر مطلقهای آنها را در هم ضرب و زاویه‌های آنها با محور حقیقی را با هم جمع کنیم.

یک کاربرد مهم (۶.۲۱) قضیهٔ زیر است:

(۷.۲۱) قضیهٔ دموآور. برای هر عدد مثبت و درست n:

$$(\cos + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

قضیهٔ دموآور کاربردهای مهم فراوانی دارد. اگر برای عدد ثابت n، $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ را با استفاده از دستور دو جمله‌یی بسط دهیم و بخشهای حقیقی و موهومی دو طرف (۷.۲۱) را مقایسه کنیم آنگاه $\cos n\theta$ و $\sin n\theta$ را بر حسب چندجمله‌ییهای $\sin\theta$ و $\cos\theta$ به‌دست می‌آوریم.

کاربرد دیگر آن یافتن ریشه‌های واحد است.

(۸.۲۱) قضیه. به‌ازای هر عدد مثبت n معادلهٔ $x^n = ۱$ درست دارای n ریشهٔ متمایز $z_۱، z_۲، \cdots، z_n$ است، که برابرند با:

$$z_۱ = \cos\frac{۲\pi}{n} + i\sin\frac{۲\pi}{n}, \cdots, z_k = z_۱^k = \cos\frac{۲\pi k}{n} + i\sin\frac{۲\pi k}{n}$$

$$k = ۱, \cdots, n$$

برهان آن به‌عنوان تمرین، به‌عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود.

اکنون مهمترین ویژگی هیأت عددهای مختلط را از نظر جبری بیان می‌کنیم.

(۹.۲۱) **تعریف.** یک هیأت F را جبری- بسته گوییم هرگاه هر چندجمله‌یی $f \in F[x]$ از درجهٔ مثبت دست کم یک صفر در F داشته باشد.

قضیهٔ بعدی را گاهی قضیهٔ اساسی جبر می‌نامند و در جبر جدید نیز یک قضیهٔ اساسی در **هیأت عددهای مختلط** است.

(۱۰.۲۱) **قضیه.** هیأت عددهای مختلط جبری -بسته است.

برای این قضیه برهانهای گوناگونی وجود دارد که همه به‌اصل تمامیّت عددهای مختلط یا بعضی ویژگیهای توپولوژیکی عددهای حقیقی که هم ارز اصل تمامیّت هستند متکی می‌باشند. می‌توان برهانی خیلی متناسب با این کتاب در کتاب شرایر و اشپرنر، و براهین دیگری در کتاب بیرکاف و مکلین ($\leftarrow$ کتابنامه) یا در هر کتاب دیگر مربوط به تابعهای یک متغیر مختلط پیدا کرد.

(۱۱.۲۱) **قضیه.** گیریم هیأت F جبری- بسته باشد. در این صورت هر چندجمله‌یی اول در $F[x]$ (با تقریب یک ضریب یکا) به شکل $x-a$، $a \in F$ است. هر چندجمله‌یی $f \in F[x]$ را می‌توان به‌شکل زیر تجزیه کرد:

$$\prod_{i=۱}^{n}(x-a_i), \quad a_i \in F$$

برهان. گیریم F جبری- بسته و $p \in F[x]$ یک چندجمله‌یی اول باشد. بنابر تعریف (۹.۲۱) عنصری مانند $a \in F$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $p(a)=۰$. بنابر قضیهٔ تجزیه (۱۴.۲۰)، $x-a$ یک عامل p است. چون p اول است p مضرب ثابتی است از $x-a$ و حکم نخست ثابت می‌شود. بنابر حکم نخست حکم دومی روشن است.

نقص این قضیه این است که گر چه در این قضیه وجود صفرهای یک چندجمله‌یی تأیید می‌شود ولی هیچ‌گونه آگاهی از وابستگی آنها به‌ضریبهای چندجمله‌یی f داده نمی‌شود. این مسأله به نظریهٔ گالوا ($\leftarrow$ وان در وردن، جلد I فصل ۵، کتابنامه) مربوط است.

این بخش را با کاربردی از قضیهٔ (۱۱.۲۱) در مورد چندجمله‌ییها پایان می‌دهیم.

(۱۲.۲۱) **قضیه.** گیریم $f=\alpha_۰+\alpha_۱x+\cdots+\alpha_nx^n \in R[x]$. اگر $u \in C$ یک صفر f باشد، آنگاه $\overline{u}$ نیز صفر f است. اگر $u \neq \overline{u}$ ، آنگاه:

$$(x-u)(x-\overline{u})=x^۲-(u+\overline{u})x+u\overline{u}$$

یک عامل f است.

برهان. اگر u یک صفر f باشد، آنگاه:

$$\alpha_۰+\alpha_۱u+\cdots+\alpha_nu^n=۰$$

با گرفتن مزدوج طرف چپ معادله، با توجه به‌این که $u \to \overline{u}$ یک خودریختی C است و این که به‌ازای $\alpha \in R$ تساوی $\overline{\alpha} = \alpha$ برقرار است خواهیم داشت:

$$\alpha_۰ + \alpha_۱\overline{u} + \cdots + \alpha_n\overline{u}^n = ۰$$

که برهان حکم نخست قضیه است. حکم دوم فوراً از قضیهٔ تجزیه به‌دست می‌آید.

یک نتیجهٔ مهم قضیهٔ بالا چنین است:

(۱۳.۲۱) فرع. هر چندجمله‌یی اول در $R[x]$ به شکل (با تقریب یک عامل یکا) زیر است:

$$x - \alpha \text{ یا } x^۲ + \alpha x + \beta,\ \ \alpha^۲ - ۴\beta < ۰$$

برهان. گیریم $f \in R[x]$ یک چندجمله‌یی اول باشد، پس f دارای یک صفر $u \in C$ است. اگر $u = \alpha \in R$، آنگاه برای یک مقدار $\xi \in R$ داریم $f = \xi(x - \alpha)$. اگر $u \notin R$، آنگاه $u \neq \overline{u}$ و بنابر (۱۲.۲۱) داریم:

$$(x - u)(x - \overline{u}) = x^۲ - (u + \overline{u})x + u\overline{u}$$

که یک عامل f است. چون $u + \overline{u}$ و $u\overline{u}$ به R تعلق دارند پس f (با تقریب یک عامل یکا) برابر است با $x^۲ + \alpha x + \beta$. شرط $\alpha^۲ - ۴\beta < ۰$ از آنجا ناشی می‌شود که اگر $u = \gamma + \delta i$، آنگاه:

$$(u + \overline{u})^۲ - ۴u\overline{u} = (u - \overline{u})^۲ = ۴\delta^۲ i^۲$$

تمرینها

۱. عبارتهای زیر را به‌شکل $\alpha + \beta i$ بنویسید:

$$(۳ + i)(-۲ + ۴i),\ \ \frac{۱}{۳ + ۲i},\ \ \frac{۲ + i}{۲ - i}$$

۲. $\cos ۳\theta$ و $\sin ۳\theta$ را بر حسب $\cos\theta$ و $\sin\theta$ بنویسید.

۳. همهٔ جوابهای معادلهٔ $x^۵ = ۲$ را بیابید.

۴. گیریم:

$$a_۰ + a_۱x + \cdots + a_{r-۱}x^{r-۱} + x^r = (x - u_۱)(x - u_۲)\cdots(x - u_r)$$

یک چندجمله‌یی در $C[x]$ باشد که ضریب بزرگترین جمله‌اش $a_r = 1$، و صفرهای آن $u_1, \cdots, u_r$ در C هستند. ثابت کنید که:

$$a_0 = \pm u_1 u_2 \cdots u_r, a_{r-1} = -(u_1 + u_2 + \cdots + u_r)$$

۵.ثابت کنید که هیأت عددهای مختلط C با مجموعهٔ ماتریسهای 2×2 با عنصرهای حقیقی به‌شکل:

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in R$$

یکریخت* است. در مجموعهٔ ماتریسها عملها همان جمع و ضرب** ماتریسها هستند.

۶.ثابت کنید که عددهای مختلط با قدر مطلق ۱ نسبت به‌عمل ضرب یک گروه تشکیل می‌دهند.

۷.ثابت کنید که نگاشت:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \to \cos\theta + i\sin\theta$$

یک یکریختی بین گروه دورانهای صفحه و گروه ضربی عددهای مختلط با قدر مطلق ۱ است.

۸.گیریم $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_r x^r$ یک چندجمله‌یی درجهٔ r با ضریبهای $\alpha_i \in Q$ باشد که در آن Q هیأت عددهای گویاست؛ گیریم $u \in C$ یک صفر f باشد. همچنین گیریم $Q[u]$ مجموعهٔ عددهای مختلط به‌شکل زیر باشد:

$$z = \beta_0 + \beta_1 u + \cdots + \beta_{r-1}\, u^{r-1},\ \beta_i \in Q$$

ثابت کنید که اگر $z, w \in Q[u]$، آنگاه $z \pm w, zw \in Q[u]$. ثابت کنید که $Q[u]$ یک هیأت است به‌شرط اینکه f در $Q[x]$ یک چندجمله‌یی اول باشد. [راهنمایی: در حالتی که $f(x)$ اول است مشکل عمده اثبات این است که اگر:

$$z = \beta_0 + \beta_1 u + \cdots + \beta_{r-1} u^{r-1} \neq 0$$

آنگاه یک $w \in Q[u]$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $zw = 1$. چون $z \neq 0$، در $Q[x]$ داریم:

$$g(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_{r-1} x^{r-1} \neq 0$$

---

* دو هیأت F و F' یکریخت گفته می‌شوند هرگاه یک نگاشت یک به یک $\alpha \to \alpha'$ از F به‌روی F' وجود داشته باشد به‌طوری که برای همهٔ مقادیر $\beta, \alpha \in F$، $(\alpha + \beta)' = \alpha' + \beta'$ و $(\alpha\beta)' = \alpha' + \beta'$.

** برای تعریفها و ویژگیهای جمع و ضرب ماتریسها← بخش ۱۲.

چون $\deg f(x) = r$، پس $f(x)$ و $g(x)$ نسبت به‌هم اول‌اند. بنابر این چندجمله‌ییهای $a(x)$ و $b(x)$ وجود دارند، به‌گونه‌ای که:

$$a(x)g(x) + b(x)f(x) = ۱$$

با گذاردن u به‌جای x، نتیجه می‌شود:

$$a(u)g(u) = ۱$$

و چون $z = g(u)$، پس وارونی برای z به‌دست آوردیم].

۹.با توجه به بخش ۲ که هیأت F را وقتی هیأت مرتب می‌گویند که یک زیر مجموعهٔ P از F (به‌نام مجموعهٔ عنصرهای مثبت) وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که (الف) مجموع و حاصلضرب عنصرهای P به P تعلق داشته باشند و (ب) به‌ازای هر α متعلق به F، تنها و تنها یکی از رابطه‌های $\alpha \in P$، $\alpha = ۰$، $-\alpha \in P$ برقرار باشند.ثابت کنید که هیأت عددهای مختلط هیأت مرتب نیست.

۷

نظریهٔ یک تبدیل خطی تنها

موضوع عمدهٔ این فصل درآمدی است بر نظریهٔ یک تبدیل خطی تنها روی یک فضای برداری. هدف یافتن پایه‌ای برای فضای برداری است به‌گونه‌ای که ماتریس تبدیل خطی نسبت به این پایه تا حد امکان ساده باشد. چون نتیجهٔ نهایی هنوز قدری پیچیده است، ریاضیدانان برگردانهای گوناگونی از آنچه که [به زعم آنها] مطلوبترین یا مفیدترین صورتی است که ماتریس آنها باید داشته باشد، به‌دست داده‌اند. در این فصل چند تا از این قضیه‌ها را بیان خواهیم کرد.

۲۲. مفهومهای اساسی

در این بخش بعضی از مفهومهای اساسی مورد نیاز برای جستجوی ساختار یک تبدیل خطی تنها را معرفی می‌کنیم. این مفهومها، چندجمله‌ییهای مینیمال یک تبدیل خطی و مفهومهای ریشه‌های مشخصه (یا ویژه مقدارها) و بردارهای مشخصه (یا ویژه بردارها) هستند.

در سرتاسر این مبحث، F نمایش یک هیأت دلخواه، و V یک فضای برداری متناهی‌ـبعد روی F است. در بخش ۱۱ دیدیم که $L(V,V)$ روی F یک فضای برداری است. قضیهٔ (۳.۱۳) می‌گوید که اگر یک پایهٔ $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ برای V برگزینیم، نگاشتی که به $T \in L(V,V)$ ماتریس آن را نسبت به پایهٔ $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ تخصیص می‌دهد، یک یکریختی است از فضای برداری $L(V,V)$ به روی فضای برداری $M_n(F)$ از همهٔ ماتریسهای n در n، که به‌عنوان یک

فضای برداری $n^۲$ تاییها نگریسته می‌شود. بنابر بخش ۵، $M_n(F)$ یک فضای برداری $n^۲$ بعدی است. اگر $\{\mathbf{A}_۱, \cdots, \mathbf{A}_{n^۲}\}$ پایه‌ای برای $M_n(F)$ روی F باشد، تبدیلهای خطی $T_۱, \cdots, T_{n^۲}$ که ماتریسهایشان نسبت به $\{v_۱, \cdots, v_n\}$ به ترتیب $\mathbf{A}_۱, \cdots, \mathbf{A}_{n^۲}$ هستند، پایه‌ای برای $L(V,V)$ روی F می‌سازند. به ویژه، ماتریسهایی که در یک جا ۱ و در سایر جاها صفر دارند پایه‌ای برای $M_n(F)$ تشکیل می‌دهند، بنابراین تبدیلهای خطی $T_{ij} \in L(V,V)$ که با

$$T_{ij}(v_j) = v_i \ , \qquad T_{ij}(v_k) = ۰, \qquad\qquad k \neq j$$

تعریف می‌شوندپایه‌ای برای $L(V,V)$ روی F تشکیل می‌دهند.

در بقیهٔ این بخش T را یک تبدیل خطی مشخص روی V می‌گیریم. چون $L(V,V)$ روی F دارای بعد $n^۲$ است، $n^۲ + ۱$ توان T،

$$۱, T, T^۲, \cdots, T^{n^۲}$$

وابسته‌ـخطّی‌اند. این بدان معنی است که عضوهایی از F مانند $\xi_۰$، $\xi_۱$، ...، $\xi_{n^۲}$، که همه صفر نیستند، وجود دارند به‌گونه‌ای که

$$\xi_۰ ۱ + \xi_۱ T + \xi_۲ T^۲ + \cdots + \xi_{n^۲} T^{n^۲} = ۰$$

به‌عبارت دیگر، چندجمله‌یی ناصفری مانند

$$f(x) = \xi_۰ + \xi_۱ x + \cdots + \xi_{n^۲} x^{n^۲} \in F[x]$$

وجود دارد به گونه‌ای که $f(T) = ۰$.

همان‌گونه که خواهیم دید بررسی این معادلهٔ چندجمله‌یی راهگشای بسیاری از ویژگیهای ژرفتر تبدیل T است.

اینک مفهوم جایگذاری یک تبدیل خطی در یک چندجمله‌یی را به‌طور کاملاً دقیق بررسی می‌کنیم.

(۱.۲۲) تعریف. گیریم $f(x) = \lambda_۰ + \lambda_۱ x + \cdots + \lambda_r x^r \in F[x]$ و $T \in L(V,V)$؛ در این‌صورت $f(T)$ نمایش تبدیل خطی

$$f(T) = \lambda_۰ \cdot ۱ + \lambda_۱ T + \cdots + \lambda_r T^r$$

است، که در آن ۱ تبدیل همانی روی V است. به‌روش مشابه می‌توانیم $f(\mathbf{A})$ را که در آن $\mathbf{A}$ یک ماتریس n در n روی F است تعریف کنیم و به‌جای ۱ ماتریس یکهٔ $\mathbf{I}$ بگذاریم.

(۲.۲۲) لم. گیریم $T \in L(V,V)$، و $f, g \in F[x]$؛ در این‌صورت

الف) $f(T)T = Tf(T)$
ب) $(f \pm g)(T) = f(T) \pm g(T)$
پ) $(fg)(T) = f(T)g(T)$

البته همین لم برای ماتریسها نیز برقرار است. برهان، همانند برهان (۱۲.۲۰) است که از آوردن آن خودداری می‌شود.

(۳.۲۲) قضیه. گیریم $T \in L(V,V)$، در این صورت $1, T, T^2, \cdots, T^{n^2}$ در $L(V,V)$ وابسته خطی‌اند. بنابراین یک عدد درستی مانند $r \le n^2$ وجود دارد که به‌طور یکتا معین می‌شود و به گونه‌ای است که

$1, T, T^2, \cdots, T^{r-1}$ نابسته خطی‌اند

$1, T, T^2, \cdots, T^{r-1}, T^r$ وابسته خطی‌اند

در این‌صورت داریم

$$T^r = \xi_0 1 + \xi_1 T + \cdots + \xi_{r-1} T^{r-1}, \quad \xi_i \in F$$

گیریم $m(x) = x^r - \xi_{r-1}x^{r-1} - \cdots - \xi_0 \cdot 1 \in F[x]$. در این صورت $m(x)$ دارای ویژگیهای زیر است:

۱. در $f[x]$، $m(x) \neq 0$ و $m(T) = 0$

۲. اگر $f(x)$ یک چندجمله‌یی دلخواه در $F(x)$ باشد به‌گونه‌ای که $f(T) = 0$، آنگاه $m(x)|f(x)$ در $F(x)$.

برهان. وجود چندجمله‌یی $m(x)$ و حکم (۱) مربوط به آن، از تبصره‌های مقدماتی این بخش نتیجه می‌شوند. اینک گیریم $F(x)$ چندجمله‌یی دلخواهی در $F(x)$ است به‌گونه‌ای که $f(T) = 0$. به‌سبب نابستگی خطی $1, T, \cdots, T^{r-1}$، یک چندجمله‌یی $R(x) \neq 0$ از درجهٔ کوچکتر از r وجود ندارد به‌گونه‌ای که $R(T) = 0$. اکنون عمل تقسیم $f(x)$ بر $m(x)$ را در نظر می‌گیریم، و به‌دست می‌آوریم

$$f(x) = m(x)Q(x) + R(x)$$

که در آن یا $R(x) = 0$ و یا درجهٔ $R(x)$ از درجهٔ $m(x)$ یعنی r، کوچکتر است. بنابر لم (۲.۲۲) داریم

$$R(T) = (f - mQ)(T) = f(T) - m(T)Q(T) = 0$$

و بنا بر تبصرهٔ پیش، در $F(x)$ داریم $R(x) = 0$. که ثابت می‌کند $m(x)|f(x)$، و قضیه ثابت می‌شود.

(۴.۲۲) تعریف. گیریم $T \in L(V,V)$. چندجمله‌یی $m(x) \in F[x]$، که در قضیهٔ (۳.۲۲) تعریف شد، چندجمله‌یی مینیمال T نامیده می‌شود؛ $m(x)$ به‌عنوان چندجمله‌یی ناصفر باکوچکترین درجه به‌گونه‌ای مشخص می‌شود که $m(T) = \circ$، و این چندجمله‌یی با تقریب یک ضریب ثابت به‌طور یکتا تعیین می‌شود.

تبصره‌های مربوط به یکتایی $m(x)$ بنا بر جزء (۲) از قضیهٔ (۳.۲۲) آشکار است. برای روشن کردن آن گیریم $m(x)$ و $m'(x)$ دو چندجمله‌یی ناصفر از درجهٔ r باشند به‌گونه‌ای که $m(T) = m'(T) = \circ$. در این صورت بنابر برهان جزء (۲) از قضیهٔ، (۳.۲۲) داریم $m(x)|m'(x)$ و $m'(x)|m(x)$. از بحث مذکور در بخش ۲۰ نتیجه می‌شود که $m(x)$ و $m'(x)$ در $F[x]$ در یک عامل یکه اختلاف دارند، و چون یکاها در $F[x]$ اصلاً چندجمله‌ییهای ثابت هستند، پس یکتایی $m(x)$ ثابت می‌شود.

توجه می‌کنیم که قضیهٔ (۳.۲۲) برای هر ماتریس $\mathbf{A} \in M_n(F)$ نیز برقرار است. اگر $T \in L(V,V)$ نسبت به پایهٔ $\{v_1, \cdots, v_n\}$ از V دارای ماتریس $\mathbf{A}$ باشد، از قضیهٔ (۳.۱۳) چنین برمی‌آید که T و $\mathbf{A}$ دارای یک چندجمله‌یی مینیمال هستند.

درک کامل تعریف و ویژگیهای چندجمله‌یی مینیمال برای بقیهٔ این فصل کاملاً ضروری است.

مثال الف. اطلاع از وجود چندجمله‌یی مینیمال یک چیز است و محاسبهٔ آن در یک حالت خاص چیزی دیگر. به‌عنوان نخستین مثال، ماتریس ۲ در ۲

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in F$$

را در نظر می‌گیریم. داریم

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \alpha\beta + \beta\delta \\ \gamma\alpha + \gamma\delta & \gamma\beta + \delta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \beta(\alpha + \delta) \\ \gamma(\alpha + \delta) & \gamma\beta + \delta^2 \end{pmatrix}$$

بنابر قضیهٔ (۳.۲۲)، باید انتظار داشته باشیم که پس از محاسبهٔ $\mathbf{A}^3$، $\mathbf{A}^4$، بتوانیم یک رابطهٔ خطی بین $\{\mathbf{A}^4، \mathbf{A}^3، \mathbf{A}^2، \mathbf{A}، \mathbf{I}\}$ بیابیم. ولی چیز شگفت‌انگیزی رخ می‌دهد. از دستورهای موجود برای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{A}^2$ داریم

$$\mathbf{A}^2 - (\alpha + \delta)\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \beta\gamma - \alpha\delta & \circ \\ \circ & \beta\gamma - \alpha\delta \end{pmatrix}$$

بنابراین

$$\mathbf{A}^2 - (\alpha + \delta)\mathbf{A} - (\beta\gamma - \alpha\delta)I = \circ \qquad (۵.۲۲)$$

نشان دادیم که $\mathbf{A}$ در معادلهٔ

$$F(x) = x^۲ - (\alpha + \delta)x + (\alpha\delta - \beta\gamma) = ۰$$

صدق می‌کند. بنابر قضیهٔ (۳.۲۲)، اگر $m(x)$ چندجمله‌یی مینیمال $\mathbf{A}$ باشد، داریم،

$$m(x) | F(x)$$

این بدان معنی است که درجهٔ $m(x)$ برابر ۱ یا ۲ است. اگر درجهٔ $m(x)$ برابر ۱ باشد، آنگاه $\mathbf{A}$ در معادلهٔ

$$\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I} = ۰$$

صدق می‌کند، و $\mathbf{A}$ اصلاً یک مضرب عددی از ماتریس یکه است. محاسبهٔ ما نشان می‌دهد که در سایر حالتها، چندجمله‌یی مینیمال همان چندجمله‌یی $F(x)$ است که در بالا داده شده است.

به‌عنوان مثال تعدادی چندجمله‌یی مینیمال از ماتریسهای ۲ در ۲ با عنصرهای متعلق به R را در زیر می‌نویسیم:

چندجمله‌یی مینیمال	ماتریس
$x - ۳$	$\begin{pmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{pmatrix}$
$x^۲ - ۹$	$\begin{pmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & -۳ \end{pmatrix}$
$x^۲ - ۴x + ۵$	$\begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{pmatrix}$

مثال ب. اکنون توجه خود را به ماتریسهای ۳ در ۳ معطوف می‌داریم. برای ماتریسهای مراتب بالاتر، باید کوشش کنیم تا توانهای $\mathbf{A}$ را به طریقی روشن، همانگونه که محاسبهٔ زیر نشان می‌دهد، (یا با روشی بهتر!) حساب کنیم. گیریم

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \xi \end{pmatrix}$$

در این‌صورت

$$\mathbf{A}^{۲} = \begin{pmatrix} \alpha^{۲}+\beta\delta+\gamma\eta & \alpha\beta+\beta\varepsilon+\gamma\theta & \alpha\gamma+\beta\zeta+\gamma\xi \\ \alpha\delta+\delta\varepsilon+\zeta\eta & \zeta\beta+\varepsilon^{۲}+\xi\theta & \delta\gamma+\varepsilon\zeta+\xi\zeta \\ \alpha\eta+\theta\delta+\xi\eta & \eta\beta+\varepsilon\theta+\xi\theta & \eta\gamma+\theta\zeta+\xi^{۲} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{۳} = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha^{۲}+\beta\delta+\gamma\eta)+\beta(\alpha\delta+\delta\varepsilon+\zeta\eta)+\gamma(\alpha\eta+\theta\delta+\xi\eta) & \text{وغیره ,} \\ \delta(\alpha^{۲}+\beta\delta+\gamma\eta)+\varepsilon(\alpha\delta+\delta\varepsilon+\zeta\eta)+\zeta(\alpha\eta+\theta\delta+\xi\eta) & \text{وغیره ,} \\ \eta(\alpha^{۲}+\beta\delta+\gamma\eta)+\theta(\alpha\delta+\delta\varepsilon+\zeta\eta)+\xi(\alpha\eta+\theta\delta+\xi\eta) & \text{وغیره ,} \end{pmatrix}$$

یک محاسبهٔ مستقیم ولی طولانی نشان می‌دهد که

$$\mathbf{A}^{۳}-(\alpha+\varepsilon+\xi)\mathbf{A}^{۲}+(\varepsilon\alpha+\xi\alpha+\xi\varepsilon-\delta\beta-\gamma\eta-\zeta\theta)\mathbf{A}-D(\mathbf{A})=۰ \tag{۶.۲۲}$$

از این نتیجه برای محاسبهٔ چندجمله‌یی مینیمال یک ماتریس دلخواه ۳ در ۳ استفاده خواهد شد. یا چندجمله‌یی که توسط (۶.۲۲) داده شده یک چندجمله‌یی مینیمال است، یا $\mathbf{A}$ در یک معادلهٔ چندجمله‌یی از درجهٔ یک یا دو صدق می‌کند. باید توجه داشت که همانند حالت ماتریسهای ۲ در ۲، درجهٔ چندجمله‌یی مینیمال در این حالت نابزرگتر است از شمارهٔ سطرها (یا ستونها)ی $\mathbf{A}$. چند مثال می‌آوریم

ماتریس	چندجمله‌یی مینیمال
$\begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$	$x^{۳}-۲x^{۲}-۲x+۳$
$\begin{pmatrix} ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{pmatrix}$	$x^{۳}-۲x^{۲}$
$\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$	$x^{۲}$

هنگام استفاده از دستورهایی از قبیل (۵.۲۲) و (۶.۲۲) برای یافتن چندجمله‌یی مینیمال $\mathbf{A}$، باید تحقیق شود که $\mathbf{A}$ در هیچ چندجمله‌یی از درجهٔ کمتر صدق نمی‌کند. در مورد سومین مثال بالا، این تحقیق نشان می‌دهد که $x^{۲}$ در واقع چندجمله‌یی مینیمال است.

محاسبه‌هایی که به (۶.۲۲) منجر شد، باید خواننده را قانع کرده باشد که به سرحد روش تجربی

رسیده‌ایم، مگر در حالتهای خاص. یکی از هدفهای این فصل دستیابی به یک بینش نظری در حالت کلی است.

نخستین مثالی که ممکن است انتظار داشته باشیم اطلاعات بیشتری به ما بدهد، مطالعهٔ نه تنها چندجمله‌یی $f(x)$ است به‌گونه‌ای که $f(T)$ همهٔ فضای برداری V را به صفر ببرد، بلکه بررسی چندجمله‌ییهایی از T است که بردارهای منفردی را نیز به صفر ببرند. ساده‌ترین مورد، حالت چندجمله‌یی $x - \alpha$ است. در این‌صورت برای یک مقدار مفروض $\alpha \in F$ باید دنبال بردارهای $v \in V$ بگردیم به‌گونه‌ای که $(T - \alpha)v = 0$. این مسأله به تعریف مهم زیر منجر می‌شود.

(۷.۲۲) تعریف. گیریم $T \in L(V, V)$. عنصر $\alpha \in F$ یک ریشهٔ مشخصه (یا ویژه مقدار یا مقدار ویژه) T نامیده می‌شود هر گاه یک بردار $v \neq 0$ در V موجود باشد به‌گونه‌ای که $T(v) = \alpha v$. هر بردار ناصفر v به‌گونه‌ای که $T(v) = \alpha v$، یک بردار مشخصه (ویژه بردار، یا بردار ویژه) مربوط به ریشهٔ مشخصهٔ α نامیده می‌شود.

ممکن است ویژه بردارهای زیادی مربوط به یک ویژه مقدار موجود باشند. برای مثال، تبدیل خطی همانی ۱ روی V دارای تنها ویژه مقدار $1 \in F$ است، ولی هر بردار ناصفر در V یک ویژه بردار مربوط به این ویژه مقدار است.

می‌توانیم ویژه مقدارها و ویژه بردارها را برای ماتریسها تعریف کنیم.

′(۷.۲۲) گیریم $\mathbf{A}$ یک ماتریس n در n با عناصر متعلق به F است. عنصر $\alpha \in F$ یک ویژه مقدار $\mathbf{A}$ نامیده می‌شود هر گاه یک بردار ستونی ناصفر $\mathbf{x}$ در F_n موجود باشد به گونه‌ای که $\mathbf{Ax} = \alpha\mathbf{A}$، چنین بردار $\mathbf{x}$ یک ویژه بردار متعلق به α نامیده می‌شود.

تناظر بین تبدیلهای خطی و ماتریسها نشان می‌دهد که α یک ویژه مقدار $T \in L(V, V)$ است، اگر و تنها اگر α یک ویژه مقدار ماتریس T نسبت به یک پایهٔ دلخواه فضای برداری باشد.

مثال پ. اکنون تعبیری از ویژه مقدارها در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیدا می‌کنیم. گیریم V زیر فضای فضای برداری $\mathcal{F}(R)$،از همهٔ تابعهای $f : R \to R$ متشکل از تابعهای مشتق‌پذیر باشند. در این‌صورت عمل مشتقگیری d در زیر، معرف یک تبدیل خطی است

$$d : V \to \mathcal{F}(R)$$

منظور ما از این که تابع $\mathcal{F} \in V$ یک ویژه بردار d* است چیست؟ معنی آن این است که $f \neq 0$، و برای مقداری مانند $\alpha \in R$ تساوی

$$df = \alpha f$$

برقرار است. آیا چنین تابعی را می‌شناسید؟ تابعهای نمایی $\{e^{\alpha t}\}$ همه ویژه بردارهای d هستند، و نظریهٔ معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول نشان می‌دهد که اینها تنها ویژه بردارهای d هستند (← بخش ۳۴).

* در این بخش، d را برای عمل مشتقگیری و D را طبق معمول برای دترمینان به کار می‌بریم.

این بخش را با دو قضیهٔ کلیتر، که روشن‌کنندهٔ مثالهای گذشته هستند خاتمه می‌دهیم.

(۸.۲۲) قضیه. گیریم $v_1، v_2، \cdots، v_r$ ویژه بردارهای مربوط به ویژه مقدارهای متمایز $\alpha_1، \alpha_2، \cdots، \alpha_r$ تبدیل $T \in L(V, V)$ باشند. در این صورت مجموعهٔ $\{v_1، \cdots، v_r\}$ بردارهای نابسته خطی‌اند.

برهان. از استقراء روی r استفاده می‌کنیم. برای $r = 1$ نتیجه آشکار است، پس فرض استقراء را می‌پذیریم که هر مجموعهٔ کمتر از r عنصری $\{v_i\}$ یک مجموعهٔ نابسته خطی است. فرض می‌کنیم

$$\eta_1 v_1 + \eta_2 v_2 + \cdots + \eta_r v_r = 0 \qquad \eta_i \in F \qquad (9.22)$$

می‌خواهیم ثابت کنیم که همهٔ η_iها برابر صفرند. فرض می‌کنیم که یک $\eta_i \neq 0$، ثابت می‌کنیم که این ناقض فرض استقراء است. می‌توانیم فرض کنیم همهٔ η_iها مخالف صفرند، وگرنه با فرض استقراء به تناقض می‌رسیم. با اثردادن T بر (۹.۲۲)، به‌دست می‌آوریم

$$\eta_1 \alpha_1 v_1 + \eta_2 \alpha_2 v_2 + \cdots + \eta_r \alpha_r v_r = 0$$

از ضرب (۹.۲۲) در α_1 و کاستن از آن از رابطهٔ بالا به‌دست می‌آوریم

$$\eta_1(\alpha_1 - \alpha_1)v_1 + \eta_2(\alpha_2 - \alpha_1)v_2 + \cdots + \eta_r(\alpha_r - \alpha_1)v_r = 0$$

جملهٔ شامل v_1 حذف می‌شود. چون $\{\alpha_i\}$ها متمایزند، ضریبهای $\{v_2, \cdots, v_r\}$ صفر نیستند، و با فرض استقراء به تناقض می‌رسیم، که پایان بخش اثبات قضیه است.

مثال ت. تابعهای $\{e^{\alpha_1 t}, e^{\alpha_2 t}, \cdots, e^{\alpha_s t}\}$ متعلق به $\mathcal{F}(R)$ با α_iهای متمایز را از لحاظ بستگی خطی بیازمایید. انجام این‌کار مستقیماً چندان آسان نیست. ولی فضای برداری پدید آمده از تابعهای

$$V = S(e^{\alpha_1 t}, \cdots, e^{\alpha_s t})$$

را در نظر می‌گیریم. در این‌صورت مشتق $d \in L(V, V)$ (چرا؟). به‌علاوه، تابعهای $e^{\alpha_1 t}، \ldots، e^{\alpha_s t}$ ویژه بردارهای d هستند که بنابر مثال پ به‌ویژه مقدارهای متمایز تعلق دارند. لذا، این تابعها بنابر قضیهٔ (۸.۲۲) نابسته خطی‌اند.

قضیهٔ بعد یکی ازکاربردهای مهم دترمینان را در یافتن ویژه مقدارهای تبدیلهای خطی به‌دست می‌دهد.

(۱۰.۲۲) قضیه. گیریم T، تبدیلی خطی بر یک فضای برداری متناهی-بعد روی F باشد و $\alpha \in F$. در این‌صورت α یک ویژه مقدار T است اگر و تنها اگر دترمینان $D(T - \alpha 1) = 0$، که در آن ۱ تبدیل همانی روی V است.

برهان. نخست فرض می‌کنیم α یک ویژه مقدار T باشد. در این‌صورت بنا بر تعریف، یک بردار ناصفر $v \in V$ وجود دارد به‌گونه‌ای که

$$Tv = \alpha v$$

در این‌صورت

$$(T - \alpha 1)v = 0$$

و چون $v \neq 0$، $T - \alpha 1$ یک‌به‌یک نیست. پس بنابر قضیهٔ (۸.۱۸)، $D(T - \alpha 1) = 0$.

به وارون، فرض می‌کنیم $D(T - \alpha_1) = 0$. بنا بر قضیهٔ (۸.۱۸)، $T - \alpha 1$ یک‌به‌یک نیست. پس بردارهایی چون v_1 و v_2، با $v_1 \neq v_2$ وجود دارند به‌گونه‌ای که

$$(T - \alpha 1)(v_1) = (T - \alpha 1)(v_2)$$

در این‌صورت، با فرض $v = v_1 - v_2$، داریم $v \neq 0$ و

$$(T - \alpha 1)(v) = 0$$

که ثابت می‌کند α یک ویژه مقدار T است.

مثال ث. برای تبدیل خطی $T : \mathbf{x} \to \mathbf{Ax}$ از R_2، که در آن

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

یک ویژه مقدار α و یک ویژه بردار مربوط به آن را بیابید. نخست نشان می‌دهیم که $\mathbf{A}$ ماتریس T نسبت به پایهٔ

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

از R_2 است. با محاسبهٔ $\mathbf{Ae}_1$ و $\mathbf{Ae}_2$ می‌بینیم که

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = -3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$$

$$T(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$$

بنابراین $\mathbf{A}$ ماتریس T نسبت به پایهٔ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ است. بنابر قضیهٔ (۱۰.۲۲)، α یک ویژه مقدار T است اگر و تنها اگر

$$D(T - \alpha 1) = D(\mathbf{A} - \alpha I) = 0$$

داریم

$$D(\mathbf{A}-\alpha I)=\begin{vmatrix}-۳-\alpha & -۲\\ ۲ & ۲-\alpha\end{vmatrix}=(-۳-\alpha)(۲-\alpha)+۴$$
$$=\alpha^{۲}+\alpha-۲=(\alpha+۲)(\alpha-۱)$$

بنابراین ۲− و ۱ ویژه مقدارها هستند.

اکنون برای ویژه مقدار ۲− یک ویژه بردار پیدا می‌کنیم. این بدان معنی است که باید معادلهٔ

$$T\mathbf{x}=-۲\mathbf{x} \qquad (۱۱.۲۲)$$

را حل کنیم. داریم

$$T\mathbf{x}=\begin{pmatrix}-۳ & -۲\\ ۲ & ۲\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_۱\\ x_۲\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-۳x_۱-۲x_۲\\ ۲x_۱+۲x_۲\end{pmatrix}$$

بنابراین بردار x در (۱۱.۲۲) صدق می‌کند اگر و تنها اگر

$$-۳x_۱-۲x_۲=-۲x_۱$$
$$۲x_۱+۲x_۲=-۲x_۲$$

یا

$$-x_۱-۲x_۲=۰$$
$$۲x_۱+۴x_۲=۰$$

یک ریشهٔ ناصفر برابر $<۲,-۱>$ است. از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}۲\\ -۱\end{pmatrix}$$

یک ویژه بردار T برای ویژه مقدار ۲− است.

تمرینها

۱.گیریم $T\in L(V,V)$ و $f,g\in F[x]$. ثابت کنید $f(T)g(T)=g(T)f(T)$.

۲.گیریم V و W دو فضای برداری روی F به ترتیب با بعدهای m و n هستند. پایه‌ای برای $L(V,W)$ بیابید.

۳.چندجمله‌ییهای مینیمال ماتریسهای

$$\begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۳ & -۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

را بیابید.

۴.الف) گیریم $T \in L(V, V)$، و $\{v_۱, \cdots, v_n\}$ پایه‌ای برای V متشکل از ویژه بردارهای T به ترتیب متعلق به ویژه مقدارهای $\xi_۱$،...،ξ_n باشند. در این‌صورت $Tv_i = \xi_i v_i$، $i = ۱, \cdots, n$.
ثابت کنید که $f(T) = ۰$، که در آن

$$f(x) = (x - \xi_۱)(x - \xi_۲) \cdots (x - \xi_n)$$

ب) ثابت کنید که چندجمله‌یی مینیمال T برابر $\Pi(x - \xi_j)$ است، که در آن ξ_jها ویژه مقدارهای متمایز T هستند.

پ) نشان دهید که ماتریسهای

$$\begin{pmatrix} -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} ۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \end{pmatrix}$$

چندجمله‌ییهای مینیمال واحدی دارند.

۵.ثابت کنید که اگر $T \in L(V, V)$، آنگاه T وارونپذیر است اگر و تنها اگر جملهٔ ثابت چندجمله‌یی مینیمال T صفر نباشد. روش محاسبهٔ $T^{-۱}$ را از روی چندجمله‌یی مینیمال بیان کنید. به‌ویژه، نشان دهید که $T^{-۱}$ همواره می‌تواند به‌وسیلهٔ یک چندجمله‌یی از T به‌صورت $f(T)$ بیان شود.

۶.الف) گیریم T روی V یک تبدیل خطی وارونپذیر است. نشان دهید که α یک ویژه مقدار T است اگر و تنها اگر $\alpha \neq ۰$ و $\alpha^{-۱}$ یک ویژه‌مقدار $T^{-۱}$ باشد.

ب) گیریم $T \in L(V, V)$ تبدیلی دلخواه باشد. ثابت کنید که برای هر چندجمله‌یی $f \in F[x]$، اگر α یک ویژه مقدار T باشد، $f(\alpha)$ یک ویژه مقدار $f(T)$ است.

۷.نشان دهید $v \neq ۰$ در V یک ویژه بردار T (متعلق به یک ویژه مقدار) است اگر و تنها اگر $T(W) \subset W$، که در آن $W = S(v)$.

۸.نشان دهید که ماتریسهای متشابه دارای یک ویژه مقدارند.

۹.ویژه مقدارها، و ویژه بردارهای متناظر آنها را برای هر یک از ماتریسهای زیر (با عنصرهای در

R) بیابید.

پ) $\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & -۲ \end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix} -۳ & -۲ \\ ۲ & ۱ \end{pmatrix}$ الف) $\begin{pmatrix} ۴ & ۵ \\ -۱ & -۲ \end{pmatrix}$

۱۰. گیریم $T \in L(V,V)$ یک تبدیل خطی باشد به‌گونه‌ای که برای مقداری مانند $m > ۰$، تساوی $T^m = ۰$ برقرار باشد. ثابت کنید که همهٔ ویژه مقدارهای T صفرند.

۱۱. نشان دهید که یک تبدیل خطی $T \in L(V,V)$ حداکثر $n = \dim V$ ویژه مقدار متمایز دارد.

۱۲. نشان دهید که اگر $T \in L(V,V)$ حداکثر دارای تعداد $n = \dim V$ ویژه مقدار متمایز باشد، آنگاه پایه‌ای برای V متشکل از این ویژه بردارها وجود دارد. ماتریس T نسبت به چنین پایه‌ای چه خواهد بود؟

۲۳. زیرفضاهای پایا

گیریم $T \in L(V,V)$. یک بردار ناصفر $v \in V$ یک ویژه بردار T است، اگر و تنها اگر زیرفضای یک بعدی $S = S(v)$ نسبت به T پایا باشد به این معنی که برای هر $s \in S$، داشته باشیم $T(s) \in S$ (← بخش ۲۲). جستجوی زیرفضاهای پایا راهگشای ویژگیهای ژرفتر یک تبدیل خطی تنهاست.

به‌عنوان مثالی عملی، گیریم T تبدیلی از $R_۲$ است به‌گونه‌ای که برای یک پایهٔ $\{v_۱, v_۲\}$ از $R_۲$ داریم

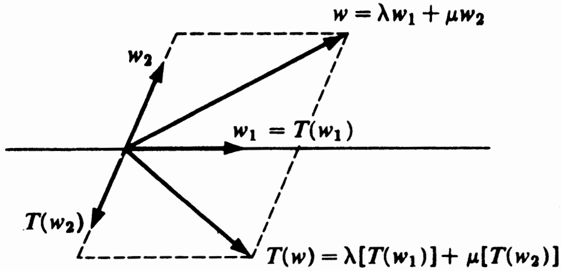
$$T(v_۱) = v_۲$$
$$T(v_۲) = v_۱$$

وقتی ویژه بردارهای T را بیابیم، رفتار هندسی T آشکار می‌شود. این بردارها برابرند با $w_۱ = v_۱ + v_۲$ و $w_۲ = v_۱ - v_۲$. ماتریس T نسبت به پایهٔ $\{w_۱, w_۲\}$ چنین است:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$$

اینک می‌توانیم ببینیم که T همان قرینه‌یابی نسبت به خط ماربر مبدأ در امتداد بردار $w_۱$ است، این تبدیل هر بردار در $S(w_۱)$ را به خودش می‌برد و $w_۲$ را به $-w_۲$ یعنی به نگارهٔ آینه‌یی (یا قرینهٔ) آن نسبت به $S(w_۱)$ بدل می‌سازد. شکل ۱.۷ نشان می‌دهد که نگارهٔ $T(w)$ی یک بردار دلخواه w چگونه می‌تواند به‌طور هندسی بیان شود.

حقیقتی که در اینجا نشان داده شد، ساده‌ترین مورد مفهوم اساسی زیرین است.



شکل ۱.۷

(۱.۲۳) تعریف. گیریم $T \in L(V,V)$، زیرفضای W از V نسبت به T یک زیرفضای پایا (یا به‌طور ساده یک زیرفضای Tـپایا، یا Tـزیرفضا) نامیده می‌شود هرگاه برای همهٔ $w \in W$ها داشته باشیم $T(w) \in W$.

یادآوری می‌کنیم که هر مولد $v \neq ۰$ از یک زیرفضای یک بعدی Tـپایا یک ویژه بردار T نامیده می‌شود. اگر برای $\xi \in f$، تساوی $Tv = \xi v$ برقرار باشد، ξ یک ویژه مقدار T و v ویژه بردار متناظر با این ویژه مقدار ξ نامیده می‌شود.

لم زیر راهی را برای ساختن زیرفضاهای Tـپایا در اختیار ما قرار می‌دهد.

(۲.۲۳) لم. گیریم $T \in L(V,V)$ و $f(x) \in F[x]$؛ در این‌صورت مجموعهٔ همهٔ بردارهای $v \in V$ به‌گونه‌ای که $f(T)v = ۰$ [یعنی، صفرـفضای $f(T)$]، یک زیرفضای Tـپایاستـ که با $n[f(T)]$ نموده می‌شود.

برهان. چون $f(T) \in L(V,V)$، صفرـفضای $n[f(T)]$ یک زیرفضای V است. باید ثابت کنیم که اگر $w \in n[f(T)]$، آنگاه $T(w) \in n[f(T)]$. داریم

$$f(T)[T(w)] = [f(T)T](w) = [Tf(T)](w) = T[f(T)(w)] = ۰$$

زیرا در $L(V,V)$ تساوی $f(T)T = Tf(T)$ برقرار است، و لم ثابت می‌شود.

در مثال قرینه‌یابی فوق مشاهده می‌کنیم که بردار پایهٔ $w_۱$ صفرـفضای تبدیل $T - ۱$ و $w_۲$ صفرـفضای تبدیل $T + ۱$ را پدید می‌آورد. چندجمله‌ییهای $x + ۱$ و $x - ۱$ درست همان عاملهای اول چندجمله‌یی مینیمال $x^۲ - ۱$ مربوط به تبدیل T هستند. نتیجهٔ مهم این بخش تعمیمی با نتایج زیاد از این مثال است.

(۳.۲۳) تعریف. گیریم $V_۱، \cdots، V_s$ زیرفضاهای V باشند. فضای V را مجموع مستقیم $\{V_۱, \cdots, V_s\}$ می‌نامند (با نمادگذاری $V = V_۱ \oplus \cdots \oplus V_s$) هر گاه، اولاً هر بردار $v \in V$

بتواندِ به‌صورت یک مجموع

$$v = v_1 + \cdots + v_s\ , \qquad v_i \in V_i\ , 1 \le i \le s \qquad (۴.۲۳)$$

بیان شود، و هرگاه، ثانیاً، عبارت (۴.۲۳) یکتا باشد به این معنی که اگر

$$v_1 + \cdots + v_s = v'_1 + \cdots + v'_s, \qquad v_i, v'_i \in V_i, \quad 1 \le i \le s$$

آنگاه
$$v_i = v'_i, \qquad 1 \le i \le s$$

(۵.۲۳) لم. گیریم V_1، $\cdots$، V_s زیرفضاهایی از V باشند؛ در این‌صورت V مجموع مستقیم $V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ است اگر و تنها اگر:

الف) $V = V_1 + \cdots + V_s$، یعنی هر بردار $v \in V$ بتواند دست کم به‌یک طریق به‌صورت یک مجموع

$$v = v_1 + \cdots + v_s, \qquad v_i \in V_i, \qquad 1 \le i \le s$$

بیان شود.

ب) اگر $v_i \in V_i$، برای $1 \le i \le s$، بردارهایی باشند به‌گونه‌ای که

$$v_1 + \cdots + v_s = 0$$

آنگاه

$$v_1 = v_2 = \cdots = v_s = 0$$

برهان. اگر V مجموع مستقیم $V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ باشد، آنگاه جزء (الف) برقرار است.

اگر
$$v_1 + \cdots + v_s = 0, \qquad v_i \in V_i$$

آنگاه داریم

$$v_1 + \cdots + v_s = 0 + \cdots + 0, \qquad v_i, 0 \in V_i, \quad 1 \le i \le s$$

و بنابر جزء دوم تعریف (۳.۲۳) داریم $v_1 = \cdots = v_s = 0$، همان‌گونه که می‌خواستیم.

اکنون فرض می‌کنیم که شرطهای (الف) و (ب)ی لم برقرارند. برای اثبات $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ کافی است که حکم یکتایی تعریف (۳.۲۳) را ثابت کنیم. اگر

$$v_1 + \cdots + v_s = v'_1 + \cdots + v'_s, \qquad v_i, v'_i \in V_i, \qquad 1 \le i \le s$$

آنگاه می‌توانیم این برابری را به‌صورت

$$(v_1 - v_1') + \cdots + (v_s - v_s') = 0, \qquad v_i - v_i' \in V_i, \qquad 1 \leq i \leq s$$

بنویسیم. بنابر شرط (ب) برای $1 \leq i \leq s$ داریم $v_i - v_i' = 0$ و از این‌رو برای همهٔ iها $v_i = v_i'$ که برهان لم کامل می‌شود.

لم بعد محک مفیدی برای این‌که یک فضای برداری به‌صورت یک مجموع مستقیم بیان شود، به‌دست می‌دهد.

(۶.۲۳) لم. گیریم V یک فضای برداری روی F باشد، و فرض می‌کنیم تبدیلهای خطی ناصفری چون $\{E_1, \cdots, E_s\}$ در $L(V,V)$ وجود داشته باشند به‌گونه‌ای که شرطهای زیر برقرار باشند:

الف) $1 = E_1 + \cdots + E_s$

ب) $E_iE_j = E_jE_i = 0$ اگر $i \neq j$، $1 \leq i, j \leq s$

در این‌صورت داریم $E_i^2 = E_i$، $1 \leq i \leq s$. بعلاوه، V مجموع مستقیم $V = E_1V \oplus \cdots \oplus E_sV$ است، و هر زیرفضای E_iV صفر نیست.

برهان. بنابر (الف) و (ب) داریم

$$E_i = E_i \cdot 1 = E_i(E_1 + \cdots + E_s) = E_i^2 + \sum_{j \neq i} E_iE_j = E_i^2$$

که حکم نخست را ثابت می‌کند. برای اثبات حکم دوم می‌بینیم که E_iV برای $1 \leq i \leq s$ یک زیرفضای ناصفر است، زیرا E_i یک تبدیل خطی ناصفر است. گیریم $v \in V$؛ در این‌صورت

$$v = 1v = E_1v + \cdots + E_sv$$

که ثابت می‌کند $V = E_1V + \cdots + E_sV$. اینک فرض می‌کنیم $v_1 \in E_1V$، ...، $v_s \in E_sV$، و $v_1 + \cdots + v_s = 0$ در این‌صورت

$$E_i(v_1 + \cdots + v_s) = 0, \qquad 1 \leq i \leq s \qquad (۷.۲۳)$$

بعلاوه، $E_iv_j = 0$، اگر $i \neq j$، زیرا $v_j \in E_jV$، $E_iE_j = 0$. سرانجام $E_iv_i = v_i$، زیرا $v_i = E_iv$ برای برداری مانند $v \in V$، و با استفاده از این حقیقت که $E_i^2 = E_i$، $1 \leq i \leq s$، داریم $E_iv_i = E_i^2v = E_iv = v_i$. برابری (۷.۲۳) ایجاب می‌کند که $v_1 = \cdots = v_s = 0$، و این لم از لم (۵.۲۳) نتیجه می‌شود.

(۸.۲۳) تعریف. تبدیل خطی $E \in L(V,V)$ که در $E^2 = E \neq 0$ صدق می‌کند یک تبدیل خطی خود توان نامیده می‌شود.

سرانجام، برای بیان قضیهٔ اصلی خود آماده‌ایم. این قضیه می‌تواند به شکل شهودی زیر بیان شود. گیریم $T \in L(V,V)$، و $m(x)$ چندجمله‌یی مینیمال T باشد. بنا بر قضیه‌های بخش ۲۰، $m(x)$ می‌تواند در $F[x]$ به عوامل اول، مانند

$$m(x) = p_{۱}(x)^{e_{۱}} \cdots p_s(x)^{e_s}$$

که در آن $\{p_i\}$ها عوامل اول متمایز و e_iها عددهای درست مثبت هستند، تجزیه شود. بنابر لم (۲.۲۳) صفرـفضاهای

$$n(p_i(T)^{e_i}), \qquad ۱ \leq i \leq s$$

Tـ زیرفضاهای V هستند. این قضیه اساساً حکم می‌کند که V برابر مجموع مستقیم آنهاست. همان‌گونه که خواهیم دید، گرچه این قضیه به هیچ وجه، بهترین قضیه‌ای نیست که می‌توان در این راستا ثابت کرد، ولی در مسألهٔ یافتن پایه‌ای برای V به‌گونه‌ای که ماتریس T نسبت به این پایه تا حد ممکن ساده باشد کمک مهمی می‌کند. این قضیه اغلب قضیهٔ اصلی تجزیه نامیده می‌شود.

(۹.۲۳) قضیه. گیریم $T \in L(V,V)$، و

$$m(x) = p_{۱}(x)^{e_{۱}} \cdots p_s(x)^{e_s}$$

چندجمله‌یی مینیمال T باشد که به توانهای اول متمایز $p_i(x) \in F[x]$ تجزیه شده است. در این‌صورت چندجمله‌یهایی مانند $\{f_{۱}(x), \cdots, f_s(x)\}$ در $F(x)$ وجود دارند به‌گونه‌ای که تبدیل خطی $E_i = f_i(T)$، $۱ \leq i \leq s$، در

$$E_i \neq ۰, \qquad ۱ \leq i \leq s,$$
$$۱ = E_{۱} + \cdots + E_s,$$
$$E_iE_j = E_jE_i = ۰, \qquad i \neq j,$$

صدق می‌کند، و $E_iV = n(p_i(T)^{e_i})$، صفرـفضای $p_i(T)^{e_i}$، $۱ \leq i \leq s$ است. زیرفضاهای $n(p_i(T)^{e_i})$، $۱ \leq i \leq s$، زیرفضاهای Tـ پایا هستند، و داریم

$$V = n(p_{۱}(T)^{e_{۱}}) \oplus \cdots \oplus n(p_s(T)^{e_s})$$

برهان. گیریم

$$q_i(x) = \frac{m(x)}{p_i(x)^{e_i}}, \qquad ۱ \leq i \leq s$$

پس $\{q_i(x)\}$ها چندجمله‌ییهایی در $F(x)$ هستند که عامل مشترک ندارند. از این‌رو بنابر نتیجهٔ (۱۶.۲۰) چندجمله‌ییهایی نظیر $a_i(x)$، $1 \leq i \leq s$ وجود دارند، به‌گونه‌ای که

$$1 = q_1(x)a_1(x) + \cdots + q_s(x)a_s(x)$$

با گذاردن T به جای x، بنا بر لم (۲.۲۲) نتیجهٔ زیر را داریم

$$1 = q_1(T)a_1(T) + \cdots + q_s(T)a_s(T)$$

اینک، گیریم $f_i(x) = q_i(x)a_i(x)$، $1 \leq i \leq s$، و $E_i = f_i(T)$، قبلاً ثابت کردیم که

$$1 = E_1 + \cdots + E_s$$

بعد، می‌بینیم که اگر $i \neq j$،

$$E_iE_j = q_i(T)a_i(T)q_j(T)a_j(T) = 0$$

زیرا $m(x)|q_i(x)q_j(x)$، اگر $i \neq j$، و از این‌رو $q_i(T)q_j(T) = 0$
برای هر $v \in V$، داریم

$$p_i(T)^{e_i}E_iv = p_i(T)^{e_i}q_i(T)a_i(T)v = m(T)a_i(T)v = 0$$

که ثابت می‌کند $E_iV \subset n(p_i(T)^{e_i})$. بعلاوه باتوجه به آنچه ثابت شده است داریم $V = E_1V + \cdots + E_sV$. اگر برای مقداری از i، $E_iV = 0$، آنگاه $V = \sum_{j\neq i} E_jV$، و $q_i(T)V = \sum_{j\neq i} q_i(T)E_j(V) = 0$، چون $m(x)|q_i(x)q_j(x)$، پس

$$q_i(T)E_j = q_i(T)q_j(T)a_j(T) = 0$$

در این‌صورت $q_i(T) = 0$، که ناقض این فرض است که $m(x)$ چندجمله‌یی مینیمال T است. بنابراین $E_iV \neq 0$ به‌ازای $1 \leq i \leq s$. بنابر لم (۶.۲۳)، داریم $V = E_1V \oplus \cdots \oplus E_sV$. بعلاوه، هر زیرفضای E_iV، Tـ پایاست، زیرا

$$TE_iV = Tf_i(T)V = f_i(T)TV \subset E_iV, \qquad 1 \leq i \leq s$$

تنها حکمی که اثبات آن مانده است این است که $E_iV = n(p_i(T)^{e_i})$. قبلاً نشان دادیم که $E_iV \in n(p_i(T)^{e_i})$. اکنون گیریم $v \in n(p_i(T)^{e_i})$، و v را برای مقداری از $v_i \in V$ به شکل $v = E_1v_1 + \cdots + E_sv_s$ بیان می‌کنیم. پس

$$p_i(T)^{e_i}v = p_i(T)^{e_i}E_1v_1 + \cdots + p_i(T)^{e_i}E_sv_s = 0$$

و چون V مجموع مستقیم زیرفضاهای Tـ پایای E_iV است، داریم

$$p_i(T)^{e_i}E_1v_1 = \cdots = p_i(T)^{e_i}E_sv_s = 0$$

برای $i \neq j$، داریم

$$p_i(T)^{e_i}E_jv_j = p_j(T)^{e_j}E_jv_j = 0$$

چون $p_i(x)$ و $p_j(x)$ عاملهای اول متمایزند، چندجمله‌ییهایی چون $a(x)$ و $b(x)$ وجود دارند به‌گونه‌ای که

$$1 = a(x)p_i(x)^{e_i} + b(x)p_j(x)^{e_j}$$

با گذاشتن T به جای x و اعمال هر دوطرف بر E_jv_j داریم

$$E_jv_j = a(T)p_i(T)^{e_i}E_jv_j + b(T)p_j(T)^{e_j}E_jv_j = 0$$

بنابراین

$$v = E_1v_1 + \cdots + E_sv_s = E_iv_i \in E_iV$$

و قضیه ثابت می‌شود.

به‌عنوان نخستین کاربرد این قضیه، این سؤال که چه زمانی می‌توان پایه‌ای برای V متشکل از ویژه بردارهای T برگزید، را در نظر می‌گیریم.

(۱۰.۲۳) تعریف. یک تبدیل خطی $T \in L(V,V)$ قطری شدنی نامیده می‌شود هر گاه برای V پایه‌ای متشکل از ویژه‌بردارهای T وجود داشته باشد. هر ماتریس T نسبت به یک پایه از ویژه بردارها یک ماتریس قطری نامیده می‌شود. این ماتریس دارای شکل

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}, \qquad \alpha_i \in F$$

است که عناصر آن در همه جا صفر است به جز در جاهای (i,i)، $1 \le i \le n$.

(۱۱.۲۳) قضیه. یک تبدیل خطی $T \in L(V,V)$ قطری شدنی است اگر و تنها اگر چندجمله‌یی مینیمال T دارای شکل

$$m(x) = (x-\xi_1)\cdots(x-\xi_s)$$

با صفرهای متمایز $\xi_۱, \cdots, \xi_s$ در F باشد.

برهان. نخست فرض می‌کنیم T قطری شدنی است و $\{v_۱, \cdots, v_n\}$ یک پایهٔ T متشکل از ویژه بردارهای مربوط به ویژه مقدارهای $\xi_۱, \cdots, \xi_n$ در F است. فرض می‌کنیم v_iها طوری شماره‌گذاری شده‌اند که $\xi_۱, \cdots, \xi_s$ متمایزند و هر ویژه مقدار ξ_j بر یکی از ξ_iها منطبق باشد به‌گونه‌ای که $۱ \leq i \leq s$. گیریم

$$m(x) = (x - \xi_۱) \cdots (x - \xi_s)$$

چون $T(v_i) = \xi_i v_i$، $۱ \leq i \leq s$، داریم

$$(T - \xi_i \cdot ۱)v_i = ۰$$

و از این‌رو

$$m(T)v_i = ۰, \qquad ۱ \leq i \leq n$$

بنابراین $m(T) = ۰$، و بنا بر لم (۳.۲۲) چندجمله‌یی مینیمال عاملی است از $m(x)$. ولی آشکار است که اگر هر عامل اول $m(x)$را حذف کنیم یک چندجمله‌یی $m^*(x)$ به‌دست می‌آوریم به‌گونه‌ای که $m^*(T) \neq ۰$. به‌عنوان مثال، اگر $m^*(x) = (x - \xi_۱) \cdots (x - \xi_{s-۱})$، آنگاه

$$\begin{aligned} m^*(T)v_s &= (T - \xi_۱) \cdots (T - \xi_{s-۱})v_s \\ &= (\xi_s - \xi_۱) \cdots (\xi_s - \xi_{s-۱})v_s \neq ۰ \end{aligned}$$

از اینجا برمی‌آید که $m(x)$ چندجمله‌یی مینیمال T است.

اکنون فرض می‌کنیم که چندجمله‌یی مینیمال به شکل

$$m(x) = (x - \xi_۱) \cdots (x - \xi_s)$$

با $\{\xi_i\}$های متمایز در F باشند. بنابر قضیهٔ (۹.۲۳) داریم

$$V = n(T - \xi_۱ \cdot ۱) \oplus \cdots \oplus n(T - \xi_s \cdot ۱)$$

گیریم $\{v_{۱۱}, \cdots, v_{۱d_۱}\}$ پایه‌ای برای $n(T - \xi_۱ \cdot ۱)$، و $\{v_{۲۱}, \cdots, v_{۲d_۲}\}$ پایه‌ای برای $n(T - \xi_۲ \cdot ۱)$، و غیره، باشد. در این‌صورت چون V مجموع مستقیم زیرفضاهای $n(T - \xi_i \cdot ۱)$ است، نتیجه می‌شود که

$$\{v_{۱۱}, \cdots, v_{۱d_۱}, v_{۲۱}, \cdots, v_{۲d_۲}, \cdots\}$$

پایه‌ای برای V است. سرانجام، $w \in n(T - \xi_۱ \cdot ۱)$ ایجاب می‌کند که $(T - \xi_i \cdot ۱)w = ۰$ یا $T(w) = \xi_i \cdot w$، پس اگر $w \neq ۰$، w یک ویژه بردار T است. بنابراین همهٔ بردارهای پایهٔ v_{ij} ویژه بردارهای T هستند. و قضیه ثابت می‌شود.

بجاست که قضیه‌های مربوط به تبدیلهای خطی را به قضایای مربوط به ماتریسها ترجمه کنیم. داریم:

(۱۲.۲۳) نتیجه. گیریم $\mathbf{A} \in M_n(F)$. در این‌صورت $\mathbf{A}$ با یک ماتریس قطری $\mathbf{D}$ مشابه است اگر و تنها اگر چندجمله‌یی مینیمال $\mathbf{A}$ به شکل

$$m(x) = (x - \xi_۱) \cdots (x - \xi_s)$$

با ξ_iهای متمایز متعلق به F باشد. اگر این شرط برقرار باشد، آنگاه $\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-۱}\mathbf{AS}$، که در آن $\mathbf{D}$ و $\mathbf{S}$ به شکل زیر تشریح شده‌اند: $\mathbf{D}$ دارای عضوهای $\{\xi_۱, \cdots, \xi_n\}$ است که به‌وسیلهٔ ویژه مقدارهای $\mathbf{A}$ و در صورت لزوم مکرر، داده می‌شوند؛ $\mathbf{S}$ ماتریس وارونپذیر است که ستونهای آن مجموعهٔ نابسته‌ای از ویژه بردارها هستند که به ترتیب متناظر با $\{\xi_۱, \cdots, \xi_n\}$ هستند ($\leftarrow$ '(۶.۱۳)).

(۱۳.۲۳) قضیه. گیریم $\{S_۱, S_۲, \cdots, S_K\}$ مجموعه‌ای از تبدیلهای خطی قطری شدنی V باشد، به گونه‌ای که $S_iS_j = S_jS_i$، برای $۱ \leq i, j \leq k$. در این‌صورت یک پایهٔ V وجود دارد به‌گونه‌ای که بردارهای پایه، ویژه بردارهای همزمان برای تبدیلهای خطی $S_۱$، $\cdots$، S_k هستند.

برهان. از استقراء روی بعد V استفاده می‌کنیم، اگر بعد V برابر ۱ باشد نتیجه آشکار است. نخست فرض می‌کنیم که هر S_i دارای تنها یک ویژه مقدار باشد؛ در این‌صورت $S_i = \alpha_i ۱$، $۱ \leq i \leq k$، و هر پایهٔ V متشکل از ویژه بردارهای $\{S_۱, \cdots, S_k\}$ خواهد بود. اکنون می‌توانیم فرض کنیم که مثلاً $S_۱$ بیش از یک ویژه مقدار دارد، و قضیه برای مجموعه‌های تبدیلهای خطی که روی فضاهای برداری با بعد کمتر اثر می‌کنند و در فرض قضیه صادق هستند، درست است. گیریم

$$m(x) = (x - \alpha_۱) \cdots (x - \alpha_r), \qquad r > ۱$$

چندجمله‌یی مینیمال $S_۱$ است. در این‌صورت بنا بر قضیهٔ (۹.۲۳)

$$V = V_۱ \oplus \cdots \oplus V_r,\ V_i = n(S_۱ - \alpha_i ۱), \qquad ۱ \leq i \leq r$$

که در آن، هیچ یک از زیرفضاها صفر نیست و نسبت به $S_۱$ پایاست. ثابت می‌کنیم که چون این $\{S_i\}$ها تعویضپذیرند، هر زیر فضای V_i نسبت به همهٔ S_iها، $۱ \leq i \leq k$، پایاست. بنابر قضیهٔ (۹.۲۳)، داریم $V_i = E_iV$، که در آن برای یک چندجمله‌یی $f_i(x) \in F[x]$ داریم $E_i = f_i(s_۱)$. در این‌صورت تساوی $S_iS_j = S_jS_i$ تساوی $S_jE_i = E_iS_j$ را ایجاب می‌کند. و از این‌رو $S_jV_i = S_jE_iV = E_iS_jV \subset E_iV = V_i$، برای $۱ \leq i \leq r$، $۱ \leq j \leq k$.

هر زیرفضای V_i دارای بعدی کمتر از بعد V است، زیرا $r > ۱$ و $V_i \neq ۰$ بعلاوه، هر S_j روی V_i به‌عنوان یک تبدیل خطی قطری شدنی اثر می‌کند، زیرا چندجمله‌یی مینیمال هر S_j که بر V_i اثر می‌کند چندجمله‌یی مینیمال S_j روی V را عاد می‌کند، پس شرطهای قضیهٔ (۱۱.۲۳) برای تبدیلهای $\{S_j\}$ که بر V_i، $r \leq i \leq ۱$، اثر می‌کنند برقرارند. بنابرفرض استقراء هر زیرفضای $\{V_i\}$، $r \leq i \leq ۱$، دارای پایه‌ای است متشکل از بردارهایی که برای همهٔ $\{S_j\}$ها ویژه بردارند. این پایه‌ها روی‌هم پایه‌ای از V را با ویژگی مطلوب تشکیل می‌دهند، و قضیه ثابت می‌شود.

تمرینها

۱.ماتریسهای زیر را بیازمایید تا تعیین شود که آیا با ماتریسهای قطری در $M_۲(R)$ مشابه هستند یا نیستند. در صورت مثبت بودن پاسخ، ماتریسهای $\mathbf{D}$ و $\mathbf{S}$ مذکور در (۱۲.۲۳) را، بیابید.

$$\begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & -۲ \\ ۱ & -۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۳ & -۲ \\ ۲ & -۱ \end{pmatrix}$$

۲.نشان دهید که ماتریسهای

$$\begin{pmatrix} ۱ & -۲ \\ ۱ & -۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

با ماتریسهای قطری در $M_۲(C)$، ولی نه در $M_۲(R)$، مشابهند، C هیأت اعداد مختلط است. در هر حالت، ماتریسهای $\mathbf{D}$ و $\mathbf{S}$ در $M_۲(C)$ را همانند (۱۲.۲۳) بیابید.

۳.نشان دهید که ماتریس

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

با یک ماتریس قطری در $M_۳(C)$، ولی نه در $M_۳(R)$ مشابه است.

۴.نشان دهید که تبدیل دیفرانسیل‌گیری $D : P_n \to P_n$ قطری شدنی نیست. (یادآوری می‌شود که P_n برای نمایاندن مجموعهٔ چندجمله‌ییهای $\alpha_۰ + \alpha_۱ x + \cdots + \alpha_n x^n$ با $\alpha_i \in R$، به‌کار رفته است.)

۵.گیریم $V_۱$ و $V_۲$ زیرفضاهای ناصفر یک فضای برداری V هستند. ثابت کنید $V = V_۱ \oplus V_۲$، اگر و تنها اگر $V = V_۱ + V_۲$ و $V_۱ \cap V_۲ = \{o\}$.

۶.گیریم تبدیل خطی $T \in L(V, V)$ به‌گونه‌ای است که $T^۲ = ۱$. ثابت کنید $V = V_+ \oplus V_-$، که در آن $V_+ = \{v \in V | T(v) = v\}$ و $V_- = \{v \in V | T(v) = -v\}$.

۷.نشان دهید که وارون زیر از لم (۶.۲۳) برقرار است. گیریم V یک مجموع مستقیم، $V = V_۱ \oplus \cdots \oplus V_s$ از زیرفضاهای ناصفر V_i است. نشان دهید که تبدیلهایی خطی مانند $E_۱, \cdots, E_s$ وجود دارند به‌گونه‌ای که $\sum E_i = ۱$، $E_iE_j = E_jE_i = ۰$، $i \neq j$، و $V_i = E_iV$، $۱ \leq i \leq s$. (راهنمایی: اگر $v = \sum v_i$ و $v_i \in V_i$، قرار دهید $E_iv = v_i$.)

۸.گیریم $T \in L(V,V)$ دارای چندجمله‌یی مینیمال $m(x) \in F[x]$ است. و $f(x)$ یک چندجمله‌یی دلخواه در $F[x]$. ثابت کنید که

$$n[f(T)] = n[d(T)]$$

که در آن $d(x)$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $f(x)$ و $m(x)$ است.

۲۴. قضیهٔ شکل مثلثی

دو حالت وجود دارد که در آنها یک تبدیل خطی T نمی‌تواند قطری شدنی باشد. یکی حالتی است که چندجمله‌یی مینیمال آن $m(x)$ نمی‌تواند در $F(x)$ به عاملهای خطی تجزیه شود (برای مثال، اگر در $R[x]$، R هیأت اعداد حقیقی، $m(x)$ به‌صورت $m(x) = x^۲ + ۱$ باشد) دیگری حالتی است که $m(x)$ بهازای $e_i > ۱$، به‌صورت $m(x) = (x-\xi_۱)^{e_۱} \cdots (x-\xi_s)^{e_s}$ باشد. در حالت اخیر، مطلوب داشتن قضیه‌ای است که در مورد همهٔ تبدیلهای خطی به‌کار رود و تا حد امکان به قضیهٔ شکل قطری (۱۱.۲۳) نزدیک باشد.

قضیهٔ اصلی قضیهٔ زیر است.

(۱.۲۴) قضیه. (قضیهٔ شکل مثلثی). گیریم $T \in L(V,V)$، که V فضای برداری متناهی-بعدی روی یک هیأت دلخواه F است، و فرض کنیم چندجمله‌یی مینیمال T به‌صورت زیر باشد

$$m(x) = (x-\alpha_۱)^{e_۱} \cdots (x-\alpha_s)^{e_s}$$

که در آن $\{e_i\}$ها عددهای درست مثبت و $\{\alpha_i\}$ها عنصرهای متمایز F، هستند. در این‌صورت یک پایهٔ V وجود دارد به‌گونه‌ای که ماتریس $\mathbf{A}$ی T نسبت به این پایه به شکل

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_۱ & & & ۰ \\ & \mathbf{A}_۲ & & \\ & & \ddots & \\ ۰ & & & \mathbf{A}_s \end{pmatrix}$$

است، که در آن هر $\mathbf{A}_i$ یک بلوک d_i در d_i به‌ازای یک عدد درست مثبت $d_i \geq e_i$ است،

$s \geq i \geq ۱$، و هر $\mathbf{A}_i$ می‌تواند به‌شکل

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & & * \\ & \ddots & \\ ० & & \alpha_i \end{pmatrix}$$

نوشته شود. که در $\mathbf{A}_i$ درایه‌های زیر قطر اصلی همه صفرند، و درایه‌های بالای آن ممکن است عنصرهای ناصفر $(*)$ باشند. همهٔ درایه‌های دیگر $\mathbf{A}$ که در یکی از بلوکهای $\{\mathbf{A}_i\}$ نیستند، صفرند. برای بیان همهٔ این مطالب به‌صورتی دیگر، وقتی یک ماتریس مربع $\mathbf{B}$ با چندجمله‌یی مینیمال $m(x)$، داده شده باشد، ماتریس وارونپذیری مانند $\mathbf{S}$ وجود دارد که $\mathbf{SBS}^{-۱} = \mathbf{A}$، که در آن $\mathbf{A}$ دارای شکل داده شدهٔ بالاست.

تبصره. یک نکتهٔ بسیار مهم این است که فرض قضیهٔ (۱.۲۴)ـ که چندجمله‌یی مینیمال T می‌تواند به عاملهای خطی تجزیه شود، همواره صادق است به شرط این‌که F جبری‌ـبسته باشد ($\leftarrow$ بخش ۲۱). عادیترین مثال از یک هیأت جبری‌ـبسته (و تنها مثالی که شرح داده‌ایم) هیأت عددهای مختلط است.

برهان. گیریم V_i صفرـفضای $(T - \alpha_i \cdot ۱)^{e_i}$ برای $s \geq i \geq ۱$ و d_i بعد V_i باشد. اگر برای هر یک از زیرفضاهای $V_۱$،$V_۲$،$\cdots$،V_s به‌طور جداگانه پایه‌ای برگزینیم، همان‌گونه که در برهان قضیهٔ (۱۱.۲۳) خاطر نشان ساختیم، همهٔ عنصرهای این پایه‌ها روی هم، پایه‌ای برای V تشکیل می‌دهند زیرا بنا بر قضیهٔ (۹.۲۳)، V مجموع مستقیم زیرفضاهای $\{V_i\}$ است. پس پایه‌ای برای V ترتیب می‌دهیم که نخستین $d_۱$ عنصر آن پایه‌ای برای $V_۱$، $d_۲$ عنصر بعدی آن پایه‌ای برای $V_۲$ وقس‌علی‌هذا تشکیل دهند. چون هر زیرفضای V_i، نسبت به T پایاست، آشکار است که ماتریس T نسبت به این پایه به شکل

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_۱ & & ० \\ & \ddots & \\ ० & & \mathbf{A}_s \end{pmatrix}$$

است. اینک تنها چیزی که باید ثابت کنیم این است که بلوکهای $\mathbf{A}_i$ می‌توانند طوری انتخاب شوند که شکل مطلوب را داشته باشند و نابرابریهای $d_i \geq e_i$ برای $s \geq i \geq ۱$ برقرار باشند.

هر فضای V_i صفرـفضای $(T - \alpha_i \cdot ۱)^{e_i}$ است. به دیگر سخن، اگر بگیریم $N_i = T - \alpha_i \cdot ۱$، آنگاه $N_i \in L(V_i, V_i)$ و داریم $N_i^{e_i} = ०$.

اکنون این نکتهٔ مهم را با یک تعریف رسمی بیان می‌کنیم.

تعریف. یک تبدیل خطی $T \in L(V, V)$ صفرـتوان نامیده می‌شود هرگاه برای یک عدد درست مثبت k، تساوی $T^k = ०$ برقرار باشد.

با بازگشت به وضع قبلی خود، نشان داده‌ایم که T از دیدگاه یک تبدیل خطی روی V_i، مجموع تعداد ثابتی از تبدیلات همانی، $\alpha_i \cdot 1$، و یک تبدیل صفر-توان N_i است.

اکنون یک حکم کلی دربارهٔ تبدیلهای صفر-توان ذکر می‌کنیم که به مسألهٔ ما سروصورتی می‌دهد.

(۲.۲۴) لم. گیریم N یک تبدیل صفر-توان روی یک فضای برداری متناهی-بعد W باشد؛ در این‌صورت W دارای یک پایهٔ $\{w_1, \cdots, w_t\}$ است به‌گونه‌ای که

$$Nw_1 = 0, \qquad N(w_2) \in S(w_1), \cdots, N(w_i) \in S(w_1, \cdots, w_{i-1})$$

برای $2 \le i \le t$.

بعداً برهانی برای لم (۲.۲۴) ارائه می‌دهیم. توجه داریم که ماتریس N نسبت به پایهٔ $\{w_1, \ldots, w_t\}$ به شکل زیر (برای $t = 4$) است.

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

پس این لم حالت ویژه‌ای از قضیهٔ شکل مثلثی است. نکتهٔ مهم اینجاست که این حالت ویژه، کل قضیه را ایجاب می‌کند. لم (۲.۲۴) را به استقراء ثابت می‌کنیم. نخست $w_1 \neq 0$ را به‌گونه‌ای می‌یابیم که داشته باشیم $Nw_1 = 0$. هر برداری می‌تواند w_1 باشد، به شرط این‌که $N = 0$ و، اگر $N^k \neq 0$ و $N^{k+1} = 0$، آنگاه می‌گیریم $w_1 = N^k(w) \neq 0$. لذا $N(w_1) = N^{k+1}(w) = 0$.

فرض می‌کنیم (به‌عنوان فرض استقراء) که بردارهای نابسته-خطی $\{w_1, \cdots, w_i\}$ را یافته‌ایم که در شرطهای لم صدق می‌کنند، و قرار می‌دهیم $S = S(w_1, \cdots, w_i)$. اگر $S = W$، چیزی برای اثبات وجود ندارد. اگر $S \neq W$ و $N(W) \subset S$، آنگاه هر بردار که در S نیست می‌تواند به‌جای w_{i+1} گرفته شود. اینک فرض می‌کنیم $N(W) \not\subset S$. در این‌صورت یک عدد درست مثبت u وجود دارد به‌گونه‌ای که $N^u(W) \not\subset S$، $N^{u+1}(W) \subset S$. $w_{i+1} \in N^u(W)$ را می‌یابیم به‌گونه‌ای که $w_{i+1} \notin S$. پس $\{w_1, \cdots, w_{i+1}\}$ یک مجموعهٔ نابسته خطی است و $N(w_{i+1}) \in S$. که پایان برهان لم است.

اینک لم (۲.۲۴) را برای گزینش پایه‌ای مناسب برای زیرفضای V_iی V به‌کار می‌بریم. چون $N_i = T - \alpha_i \cdot 1$ روی V_i صفر-توان است، این لم ایجاب می‌کند که V_i پایه‌ای داشته باشد مانند $\{v_{i,1}, \cdots, v_{i,d_i}\}$ به‌گونه‌ای که برای $2 \le k \le d_i$

$$N_i(v_{i,1}) = 0, N_i(v_{i,2}) \in S(v_{i,1}), \cdots, N_i(v_{i,k}) \subset S(v_{i,1}, \cdots, v_{i,k-1})$$

چون $N_i = T - \alpha_i \cdot ۱$، از این برابریها، دستورهای زیر نتیجه می‌شوند

$$(T - \alpha_i \cdot ۱)v_{i,۱} = ۰, \cdots, (T - \alpha_i \cdot ۱)v_{i,k} \in S(v_{i,۱}, \cdots, v_{i,k-۱})$$

که $۲ \leq k \leq d_i$ که این روابط به نوبهٔ خود، نتیجه می‌دهند

$$\begin{aligned} Tv_{i,۱} &= \alpha_i v_{i,۱} \\ Tv_{i,۲} &= \alpha_{۱۲} v_{i,۱} + \alpha_i v_{i,۲} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Tv_{i,k} &= \alpha_{۱k} v_{i,۱} + \cdots + \alpha_{k-۱,k} v_{i,k-۱} + \alpha_i v_{i,k} \end{aligned} \qquad (۳.۲۴)$$

و لذا نشان دادیم که، ماتریس T روی فضای V_i نسبت به این پایه دارای شکل مطلوب است.

اینک باید نابرابریهای $d_i \geq e_i$، $۱ \leq i \leq r$، را ثابت کنیم. از لم (۲.۲۴) برمی‌آید که $N_i^{di} = ۰$، که d_i بعد V_i است. چون تساوی $T = \alpha_i \cdot ۱ + N_i$ روی V_i برقرار است، پس روی V_i داریم $(T - \alpha_i \cdot ۱)^{d_i} = ۰$، و چون V مجموع مستقیم زیرفضاهای V_i است، داریم

$$(T - \alpha_۱ \cdot ۱)^{d_۱} \cdots (T - \alpha_r \cdot ۱)^{d_r} = ۰ \qquad (۴.۲۴)$$

بنابراین، چندجمله‌یی مینیمال $m(x) = \Pi(x - \alpha_i)^{e_i}$ چندجمله‌یی $\Pi(x - \alpha_i)^{di}$ را عاد می‌کند، و بنابر نظریهٔ یکتایی تجزیه در $F[x]$ داریم $d_i \geq e_i$، که پایان برهان قضیه است.

این قضیه دارای نتیجه‌های مهم زیادی است. نخستین آنها نشان می‌دهد که درجهٔ چندجمله‌یی مینیمال بزرگتر از بعد V نیست، چنان که در مثالهای الف و ب ی بخش ۲۲ به چنین انتظاری رسیدیم.

(۵.۲۴) نتیجه. گیریم T یک تبدیل خطی روی یک فضای برداری متناهی-بعد V، روی یک هیأت جبری-بستهٔ F، باشد؛ در این‌صورت درجهٔ $m(x)$، یعنی چندجمله‌یی مینیمال T، از بعد V بیشتر نیست.

یادآور می‌شویم که عنصر $\alpha \in T$ یک ویژه مقدار T نامیده می‌شود اگر بردار ناصفری مانند $v \in V$ موجود باشد به‌گونه‌ای که $Tv = \alpha v$، یا به دیگر سخن، اگر $(T - \alpha \cdot ۱)v = ۰$. بنابر قضیهٔ (۱۰.۲۲)، α یک ویژه مقدار T است اگر و تنها اگر تساوی $D(\mathbf{A} - \alpha \mathbf{I}) = ۰$، که در آن $\mathbf{A}$ یک ماتریس T نسبت به یک پایه است، برقرار باشد. این حقیقت ما را به تعریف زیر هدایت می‌کند.

(۶.۲۴) تعریف. گیریم $T \in L(V, V)$ و $\mathbf{A}$ ماتریس T نسبت به یک پایهٔ V است؛ در این صورت ماتریس $x\mathbf{I} - \mathbf{A}$ درایه‌هایی در هیأت خارج قسمت* (← بخش ۲۰) حلقهٔ چندجمله‌ییهای $F[x]$ دارد و دترمینان آن $h(x) = D(x\mathbf{I} - \mathbf{A})$ چندجمله‌یی مشخصهٔ T نامیده می‌شود.

* ماتریس $x\mathbf{I} - \mathbf{A}$ در واقع دارای عضوهایی در $F[x]$ است؛ این حکم دربارهٔ هیأت خارج‌قسمت ضروری است زیرا دترمینان یک ماتریس تنها برای ماتریسهایی با عضوهایی در یک هیأت تعریف می‌شود.

نخست چندحکم شامل این تعریف را ثابت می‌کنیم.

گزاره. چندجمله‌یی مشخصهٔ $h(x)$ به $F[x]$ متعلّق، و مستقل از گزینش ماتریس T است. مجموعهٔ صفرهای متمایز $h(x)$ با مجموعهٔ ویژه مقدارهای متمایز T یکی است.

برهان. گیریم $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ ماتریسهای T نسبت به دوپایهٔ متفاوت باشند. در این‌صورت برای یک ماتریس وارونپذیر $\mathbf{S}$ ، $\mathbf{B} = \mathbf{SAS}^{-1}$ و داریم:

$$\begin{aligned} D(x\mathbf{I} - \mathbf{B}) &= D(x\mathbf{I} - \mathbf{SAS}^{-1}) \\ &= D[\mathbf{S}(x\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{S}^{-1}] \\ &= D(\mathbf{S})D(x\mathbf{I} - \mathbf{A})D(\mathbf{S})^{-1} \qquad [\text{بنابر } (3.18)] \\ &= D(x\mathbf{I} - \mathbf{A}) \end{aligned}$$

این حکم دربارهٔ صفرهای چندجمله‌یی مشخصه، بنابر تبصره‌های مقدماتی آشکار است. حقیقت این‌که $D(x\mathbf{I} - \mathbf{A}) \in F[x]$ از دستور مربوط به بسط کامل $D(x\mathbf{I} - \mathbf{A})$ که در بخش ۱۷ داده شده است نتیجه می‌شود.

اینک فرع اساسی زیر مربوط به قضیهٔ (۱.۲۴) را داریم.

(۷.۲۴) فرع. گیریم V یک فضای برداری روی یک هیأت جبری‌ـبستهٔ F باشد. گیریم $T \in L(V,V)$، و $m(x)$ چندجمله‌یی مینیمال T و $h(x)$ چندجمله‌یی مشخصهٔ آن باشد؛ در این صورت

۱. $m(x) | h(x)$

۲. هر صفر $h(x)$ یک صفر $m(x)$ است.

۳. $h(T) = 0$

(حکم آخر، قضیهٔ کیلی‌ـهمیلتن نامیده می‌شود.)

برهان. گیریم $\mathbf{A}$ ماتریس T باشد که در قضیهٔ (۱.۲۴) داده شده است. در این‌صورت

$$x\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{array}{c} \uparrow \\ d_1 \\ \downarrow \\ \uparrow \\ d_2 \\ \downarrow \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc|c} x - \alpha_1 & * & & & \\ & \ddots & & & \\ 0 & x - \alpha_1 & & & \\ \hline & & x - \alpha_2 & * & \\ & & & \ddots & \\ & & 0 & x - \alpha_2 & \\ \hline & & & & \ddots \end{array}\right)$$

بنابراین چندجمله‌یی مشخصه برابر است با

$$h(x) = D(x\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \Pi(x - \alpha_i)^{d_i}$$

از سوی دیگر، چندجمله‌یی مینیمال برابر است با

$$m(x) = \Pi(x - \alpha_i)^{e_i}$$

بنابر قضیهٔ (۱.۲۴)، $d_i \geq e_i$ برای همهٔ iها. همهٔ حکمهای این نتیجه از این اشاره‌ها نتیجه می‌شوند.

اینک بیان دیگری از قضیهٔ کیلی‌ـهمیلتن برای ماتریسها را می‌آوریم.

(۸.۲۴) قضیهٔ (کیلی‌ـهمیلتن). گیریم F هیأتی است مشمول در هیأت عددهای مختلط C و $\mathbf{A}$ یک ماتریس n در n است با ضریبهایی در F. در این‌صورت $\mathbf{A}$ در معادلهٔ مشخصهٔ خود

$$D(x\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

صدق می‌کند. به دیگر سخن، اگر قرار دهیم $h(x) = D(x\mathbf{I} - \mathbf{A})$، خواهیم داشت $h(\mathbf{A}) = 0$.

برهان. چون $F \subset C$، $\mathbf{A}$ معرّف یک تبدیل خطی T روی یک فضای برداری n بعدی روی C است به‌گونه‌ای که $\mathbf{A}$ ماتریس T نسبت به یک پایهٔ این فضای برداری است. چون هیأت اعداد مختلط جبری‌ـبسته است، بنابر بخش (۳)ی فرع (۷.۲۴)، $h(T) = 0$. بنابراین $h(\mathbf{A}) = 0$ و برهان کامل می‌گردد.

قضیهٔ کیلی‌ـهمیلتن در مورد ماتریسها روی یک هیأت دلخواه نیز برقرار است (← تمرین ۳ از بخش ۲۵).

این بخش را با دو کاربرد دیگر قضیهٔ (۱.۲۴) خاتمه می‌دهیم.

(۹.۲۴) قضیه (تجزیهٔ ژوردان). گیریم $T \in L(V, V)$، که در آن V یک فضای برداری متناهی‌ـبعد روی یک هیأت جبری‌ـبستهٔ F است. تبدیلهایی خطی مانند D و N روی V وجود دارند به گونه‌ای که

الف) $T = D + N$

ب) D قطری شدنی و N صفرـتوان است.

پ) چندجمله‌ییهای $f(x)$ و $g(x)$ متعلق به $F[X]$ وجود دارند به‌گونه‌ای که $D = f(T)$ و $N = g(T)$.

تبدیلهای D و N به‌طور یکتا تعیین می‌شوند، بدین معنی که اگر D' و N' به ترتیب، تبدیلهای قطری شدنی و صفرـتوان باشند، به‌گونه‌ای که $T = D' + N'$ و $D'N' = N'D'$، آنگاه $D' = D$ و $N' = N$.

برهان. چون F جبری‌ـبسته است، چندجمله‌یی مینیمال T به شکل زیر است

$$m(x) = (x-\alpha_1)^{e_1} \cdots (x-\alpha_s)^{e_s}$$

که در آن α_1، $\cdots$، α_s ویژه مقدارهای متمایز هستند. بنابر قضیهٔ (۹.۲۳) چندجمله‌ییهای $f_1(x)$، $\cdots$، $f_s(x)$ وجود دارند به‌گونه‌ای که اگر $E_i = f_i(T)$، $1 \le i \le s$، آنگاه

$$V = E_1 V \oplus \cdots \oplus E_s V$$

و

$$E_i V = n((T - \alpha_i 1)^{ei})$$

گیریم

$$D = \alpha_1 E_1 + \cdots + \alpha_s E_s$$

در این‌صورت به‌ازای یک چندجمله‌یی $f(x)$ داریم $D = f(T)$. بعلاوه D یک تبدیل خطی قطری شدنی است. اگر $v_i \in V_i = E_i V$، $1 \le i \le s$، با قراردادن $v_i = E_i v$ داریم

$$\begin{aligned} Dv_i &= (\alpha_1 E_1 + \cdots + \alpha_s E_s) E_i v \\ &= \alpha_i E_i E_i v = \alpha_i E_i v = \alpha_i v_i \end{aligned}$$

با استفاده از ویژگیهای تبدیلهای $\{E_i\}$، مذکور در قضیهٔ (۹.۲۳)، نتیجه می‌شود که D قطری شدنی است. اینک گیریم

$$N = T - D$$

در این‌صورت برای چندجمله‌یی $g(x) = x - f(x)$ داریم $N = g(T)$. ثابت می‌کنیم که N صفرـتوان است. کافی است ثابت کنیم که برای $v_i \in V_i$، $1 \le i \le s$، و برای یک مقدار بسیار بزرگ k داریم $N^k v_i = 0$. با قرار دادن $v_i = E_i v$، برای $v \in V$، داریم:

$$N v_i = (T - D) v_i = (T - \alpha_i) v_i$$

زیرا بنابر محاسبات قبلی $Dv_i = \alpha_i v_i$. در این‌صورت

$$N^{e_i} v_i = (T - \alpha_i)^{e_i} v_i = 0$$

چون $v_i \in n((T - \alpha_i 1)^{e_i})$، از این رو N صفرـتوان است.

اینک می‌پردازیم به قسمت یکتایی قضیه. فرض می‌کنیم $T = D' + N'$، و N', D' در فرض آخرین جزء قضیه صدق می‌کنند. چون $D'N' = N'D'$، داریم $TD' = D'T$ و $TN' = N'T$. بنابراین $D'D = DD'$ و $N'N = NN'$، چون N و D چندجمله‌ییهایی در T هستند. از

$$T = D' + N' = D + N$$

به‌دست می‌آوریم

$$D' - D = N - N'$$

چون N و N' تعویضپذیرند، می‌توانیم با استفاده از قضیهٔ دو جمله‌یی نشان دهیم که

$$(N - N')^k = N^k - \binom{k}{۱} N^{k-۱}N' + \cdots + (-۱)^k (N')^k$$

یک جملهٔ نمونه از این نوع $N^i(N')^j$ است با $i + j = k$. اگر k به قدر کافی بزرگ باشد، آنگاه نتیجه می‌شود که یا $N^i = ۰$ یا $(N')^j = ۰$، و از این‌رو $N - N'$ صفر-توان است. از سوی دیگر، بنابر قضیهٔ (۱۳.۲۳)، یک پایهٔ V متشکل از ویژه بردارهای D و D'، و بنابر این متشکل از ویژه بردارهای $D' - D$ وجود دارد. ماتریس $D' - D$ نسبت به این پایه دارای شکل زیر است

$$\begin{pmatrix} \beta_۱ & & & ۰ \\ & \beta_۲ & & \\ & & \ddots & \\ ۰ & & & \beta_n \end{pmatrix}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که چون $D' - D = N - N'$ صفر-توان است، هر توانی از β_i برابر صفر است. بنابراین $\beta_۱ = \cdots = \beta_n = ۰$، و $D' - D = N - N' = ۰$ که برهان قضیه را کامل می‌سازد.

البته، فرض جبری-بسته بودن F، عملاً مورد استفاده قرار نگرفت- تنها چیز مورد نیاز، تعلق همهٔ ویژه مقدارهای T به F است.

تجزیهٔ ژوردان یک تبدیل خطی T برای محاسبهٔ توانهای T مفید است. توانهای T را می‌توان با استفاده از قضیهٔ دو جمله‌یی برحسب D و N محاسبه کرد، زیرا تبدیلهای D و N تعویضپذیرند. بنابراین، اگر $T = D + N$،

$$T^۲ = D^۲ + ND + DN + N^۲ = D^۲ + ۲ND + N^۲$$

و در حالت کلی

$$T^k = D^k + \binom{k}{۱} D^{k-۱}N + \cdots + \binom{k}{k-۱} DN^{k-۱} + N^k$$

توانهای D با محاسبهٔ توانهای عناصر قطری ماتریس متناظر D محاسبه می‌شود، در حالی که همهٔ توانهای N بعد از توان معینی صفرند. از این یادداشتها در بخش ۳۴ در محاسبهٔ توان یک ماتریس استفاده خواهد شد.

سرانجام قضیهٔ زیر را داریم.

(۱۰.۲۴) قضیه. گیریم T یک تبدیل خطی، روی فضای برداری n بعدی V بر یک هیأت جبری‌ـبستهٔ F، است. در این صورت $h(x)$، چندجمله‌یی مشخصهٔ T، می‌تواند به شکل زیر تجزیه شود

$$h(x) = (x-\alpha_۱)^{d_۱} \ldots (x-\alpha_s)^{d_s}$$

که در آن $\{\alpha_۱, \cdots, \alpha_s\}$ ویژه مقدارهای متمایز T هستند. گیریم

$$h(x) = x^n - \gamma_۱ x^{n-۱} + \cdots + (-۱)^n \gamma_n, \qquad \gamma_i \in F$$

بسط $h(x)$ برحسب توانهای x باشد، داریم

$$\gamma_۱ = d_۱\alpha_۱ + \cdots + d_s\alpha_s \ , \ \gamma_n = \alpha_۱^{d_۱} \ldots \alpha_s^{d_s}$$

بعلاوه، اگر $\mathbf{B} = (B_{ij})$ ماتریس T نسبت به پایهٔ دلخواه این فضای برداری باشد، آنگاه

$$\gamma_۱ = \sum_{i=۱}^{n} \beta_{ii} \qquad \text{و} \qquad \gamma_n = D(\mathbf{B})$$

برهان. اثبات تجزیه‌پذیری $h(x)$ به‌صورت

$$h(x) = (x-\alpha_۱)^{d_۱} \cdots (x-\alpha_s)^{d_s}$$

در فرع (۷.۲۴) ثابت شد. دستورهای

$$\gamma_۱ = \sum_{i=۱}^{s} d_i\alpha_i \qquad , \qquad \gamma_n = \prod_{i=۱}^{s} \alpha_i^{d_i}$$

از بسط طرف راست دستور مربوط به $h(x)$ و مقایسهٔ ضریبها حاصل شده‌اند.

اینک گیریم $\mathbf{B} = (\beta_{ij})$ ماتریس T نسبت به یک پایهٔ دلخواه است. نشان داده‌ایم که چندجمله‌یی مشخصه مستقل از انتخاب پایه است. بنابراین

$$h(x) = \begin{vmatrix} x-\beta_{11} & -\beta_{12} & \cdots & -\beta_{1n} \\ -\beta_{21} & x-\beta_{22} & \cdots & -\beta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\beta_{n1} & \cdots & & x-\beta_{nn} \end{vmatrix}$$

جملهٔ ثابت γ_n در $h(x)$ برابر است با $h(0) = (-1)^n D(\mathbf{B})$. یک روش به‌دست آوردن تساوی $\gamma_{n-1} = \beta_{11} + \cdots + \beta_{nn}$ استفاده از بسط کامل دترمینان است ← [(۱۲.۱۷) یا (۲۲.۱۹)]. جملات این بسط کامل حاصلضرب عناصری از سطر اول، ستون j_1ام، سطر دوم، ستون j_2ام، و غیره ضرب در $D(e_{j_1}, \ldots, e_j)$ هستند. برای اینکه یک جملهٔ ناصفر داشته باشیم، باید همهٔ ستونها متفاوت باشند. تنها جملهٔ ناصفر در بسط کامل $h(x)$ که می‌تواند در ضریب x^{n-1} شرکت کند، برابر

$$(x-\beta_{11})(x-\beta_{22})\cdots(x-\beta_{nn})$$

است. علامت مربوط به این جمله برابر $D(e_1, \cdots, e_n) = 1$ است. ضریب x^{n-1} در $(x-\beta_{11})\cdots(x-\beta_{nn})$ برابر $-(\beta_{11} + \cdots + \beta_{nn})$ است، که برهان قضیه را کامل می‌کند.

آخرین جزء قضیهٔ قبل اهمیت تابع عددی‌ـمقدار از یک ماتریس را علاوه بر دترمینان نشان می‌دهد.

(۱۱.۲۴) تعریف. گیریم T یک تبدیل خطی روی یک فضای برداری متناهی‌ـبعد V است. اثر T، یعنی $\mathrm{Tr}(T)$، با مجموع عناصر قطری یعنی $\sum \beta_{ii}$ از ماتریس $\mathbf{B}$ی T نسبت به یک پایهٔ دلخواه این فضای برداری تعریف می‌شود. اثر $\mathrm{Tr}(T)$ نابسته به انتخاب ماتریس $\mathbf{B}$ است. اگر $\mathbf{B} = (\beta_{ij})$ یک ماتریس n در n باشد، آنگاه اثر $\mathbf{B}$ یعنی $\mathrm{Tr}(\mathbf{B})$ با $\mathrm{Tr}(\mathbf{B}) = \sum \beta_{ii}$ تعریف می‌شود.

قضیهٔ پیش نشان‌می‌دهد که $\mathrm{Tr}(T)$ نابسته به انتخاب ماتریس $\mathbf{B}$ است، زیرا $\mathrm{Tr}(T)$ ضریب توانی از x در چندجمله‌یی مشخصهٔ T است که قبلاً نابستگی آن به ماتریس $\mathbf{B}$ نشان داده شده است.

مثال الف. گیریم V یک فضای برداری سه بعدی روی هیأت مختلط C با پایهٔ $\{v_1, v_2, v_3\}$ است و گیریم $T \in L(V, V)$ با معادله‌های زیر تعریف شود

$$\begin{aligned} Tv_1 &= -v_1 \qquad + 2v_3 \\ Tv_2 &= 3v_1 + 2v_2 + v_3 \\ Tv_3 &= \qquad\qquad -v_3 \end{aligned}$$

ماتریس T نسبت به پایهٔ $\{v_1, v_2, v_3\}$ چنین است

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

نشان خواهیم داد که چگونه پایه‌ای برای V بیابیم که ماتریس T نسبت به آن به شکل مذکور در قضیهٔ (۱.۲۴) باشد.

مرحلهٔ ۱. ویژه مقدارهای متمایز $\mathbf{A}$ را می‌یابیم. این کار را می‌توان یا با یافتن عاملهای اول چندجمله‌یی مشخصه $h(x)$ یا با تعیین چندجمله‌یی مینیمال $m(x)$ و یافتن صفرهای آن انجام داد، زیرا بنابر فرع (۷.۲۴)، $m(x)$ و $h(x)$ دارای یک مجموعه از صفرهای متمایزند.

چندجمله‌یی مشخصه $h(x)$ برابر است با

$$h(x) = D(x\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} x+1 & -3 & 0 \\ 0 & x-2 & 0 \\ -2 & -1 & x+1 \end{vmatrix} = (x+1)^2(x-2)$$

در اینجا با توجه به فرع (۷.۲۴) می‌دانیم که ویژه مقدارهای متمایز T برابر $\{2, -1\}$ و چندجمله‌یی مینیمال T برابر است با

$$(1+x)(2-x) \qquad \text{یا} \qquad (1+x)^2(2-x)$$

مرحلهٔ ۲. صفر‌ـفضاهای $T+1$، $(T+1)^2$، و $T-2$ را پیدا می‌کنیم. اگر V برابر مجموع مستقیم صفر‌ـفضاهای $T+1$، $T-2$ باشد، آنگاه چندجمله‌یی مینیمال برابر $(x+1)(x-2)$ است (چرا؟) وگرنه چندجمله‌یی مینیمال برابر $(x+1)^2(x-2)$ خواهد بود و باید صفر‌ـفضای $(T+1)^2$ را بیابیم.

داریم

$$\begin{aligned} (T+1)v_1 &= \phantom{3v_1 + 3v_2 +{}} 2v_3 \\ (T+1)v_2 &= 3v_1 + 3v_2 + v_3 \\ (T+1)v_3 &= \phantom{3v_1 + 3v_2 +{}} 0 \end{aligned}$$

اینک می‌توان رتبهٔ $T+1$ را با تعیین ماکزیمم تعداد بردارهای نابسته خطی بین $\langle 0,0,2\rangle$، $\langle 3,3,1\rangle$، $\langle 0,0,0\rangle$، به‌دست آورد. در این حالت این تعداد آشکارا برابر دو است، و بنا بر قضیهٔ (۹.۱۳) بعد صفر‌ـفضای $T+1$ برابر $3-2=1$ است.

با روش مشابه، داریم

$$\begin{aligned}(T-۲)v_۱ &= -۳v_۱ \quad +۲v_۳\\ (T-۲)v_۲ &= ۳v_۱ \quad +v_۳\\ (T-۲)v_۳ &= \quad -۳v_۳\end{aligned}$$

و پیدا می‌کنیم که رتبهٔ $(T-۲)$ برابر ۲ است، پس بعد صفر-فضای $T-۲$ برابر ۱ است.

تا اینجا دیدیم که V مجموع مستقیم $n(T+۱)$ و $n(T-۲)$ نیست. می‌توانیم نتیجه بگیریم که چندجمله‌یی مینیمال برابر

$$m(x)=(x+۱)^۲(x-۲)$$

است و بنابر قضیهٔ (۱۱.۲۳)، یافتن پایه‌ای برای V که نسبت به آن T دارای ماتریس قطری باشد امکانپذیر نیست.

اکنون صفر-فضاهای $(T+۱)^۲$ و $T-۲$ را می‌یابیم. از محاسبات مربوط به $T+۱$ داریم

$$\begin{aligned}(T+۱)^۲v_۱ &= (T+۱)(۲v_۳)=۰\\ (T+۱)^۲v_۲ &= (T+۱)(۳v_۱+۳v_۲+v_۳)=۹v_۱+۹v_۲+۹v_۳\\ (T+۱)^۲v_۳ &= ۰\end{aligned}$$

بنابراین $\{v_۱, v_۳\}$ یک پایهٔ صفر-فضای $(T+۱)^۲$ است.

برای یافتن صفر-فضای $T-۲$، می‌توانیم فرض کنیم $v=\xi_۱v_۱+\xi_۲v_۲+\xi_۳v_۳\in n(T-۲)$ و $\xi_۱$، $\xi_۲$، $\xi_۳$ را بیابیم. داریم

$$(T-۲)v=\xi_۱(-۳v_۱+۲v_۳)+\xi_۲(۳v_۱+v_۳)+\xi_۳(-۳v_۳)=۰$$

و دستگاه معادلات همگن زیر را داریم که باید نسبت به ξها حل شوند

$$\begin{aligned}-۳\xi_۱+۳\xi_۲&=۰\\ ۲\xi_۱+\xi_۲-۳\xi_۳&=۰\end{aligned}$$

بردار جواب این دستگاه $<۱,۱,۱>$ است. زیرا با تجسس درمی‌یابیم که $v_۱+v_۲+v_۳$ در $n(T-۲)$ است و چون بعد $n(T-۲)$ برابر یک است، پس $v_۱+v_۲+v_۳$ فضای $n(T-۲)$ را پدید می‌آورد.

مرحلهٔ ۳.ماتریس T را نسبت به پایهٔ جدید پیدا می‌کنیم. بنابر قضیهٔ (۱.۲۴) باید یک پایهٔ $\{w_۱, w_۲\}$ برای $n[(T+۱)^۲]$ بدست آوریم به‌گونه‌ای که $(T+۱)w_۱ = ۰$ و $(T+۱)w_۲ \in S(w_۱)$، و فرض می‌کنیم $w_۳$ یک پایهٔ $n(T-۲)$ است. دیدیم که باید داشته باشیم

$$w_۱ = v_۳, \qquad w_۲ = v_۱, \qquad w_۳ = v_۱ + v_۲ + v_۳$$

$$T(w_۱) = -w_۱, \qquad T(w_۲) = -w_۲ + ۲w_۱, \qquad T(w_۳) = ۲w_۳$$

ماتریسی که ستونهای آن پایه‌های جدید را برحسب پایه‌های اصلی بیان می‌کند (← ′ (۶.۱۳)) برابر است با

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

و ماتریس T نسبت به $\{w_۱, w_۲, w_۳\}$ بنابر معادلات بالا چنین است

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{pmatrix}$$

اکنون باید توجه کنیم که $\mathbf{SB} = \mathbf{AS}$ یا $\mathbf{BS} = \mathbf{SA}$ (به خاطر سپردن اینکه کدام یک از این دو حالت برقرار است بسیار دشوار است!) با بررسی این ضربها می‌بینیم که

$$\mathbf{SB} = \mathbf{AS}$$

یا

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-۱}\mathbf{AS}$$

مثال ب. تجزیهٔ ژوردانِ تبدیل خطی T مذکور در مثال ج را بیابید.

با توجه به برهان قضیهٔ (۹.۲۴)، فرض می‌کنیم $\mathbf{B}$ ماتریس T نسبت به $\{w_۱, w_۲, w_۳\}$ مذکور در بالا باشد. در این‌صورت

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

با فرض اینکه D و N تبدیلات خطی هستند که ماتریسهایشان نسبت به پایهٔ $\{w_۱, w_۲, w_۳\}$ به

ترتیب برابر

$$\begin{pmatrix}-۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix}۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{pmatrix}$$

هستند، داریم $T = D + N$، که در آن D و N به ترتیب قطری شدنی و صفر-توان هستند، و $DN = ND$. بنابر جزء یکتایی قضیهٔ (۹.۲۴)، D و N تجزیهٔ ژوردان T هستند.

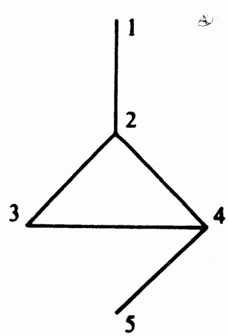
اینک دو مثال می‌آوریم که نشان می‌دهند چگونه تابع اثر در سایر قسمتهای ریاضیات مورد استفاده قرار می‌گیرند.

مثال پ. ماتریسهای وقوع و گرافها. هر گراف مجموعه‌ای است از اشیاء به نام رأس (یا گره)، توأم با یک مجموعهٔ زوجهای E از رأسها $\{(v, v')\}$. فرض می‌شود که مجموعهٔ E در شرایط زیر صدق می‌کند

$$(v, v') \in E \quad \text{ایجاب می‌کند که} \quad v \neq v'$$
$$(v, v') \in E \quad \text{ایجاب می‌کند که} \quad (v', v) \in E$$

زوجهای نقاط در E یالهای گراف نامیده می‌شوند. یک رأس v و یک یال (v', v'') واقع بر هم خوانده می‌شوند اگر $v = v'$ یا $v = v''$.

هر گراف را می‌توان با یک نمودار نشان داد. برای مثال، شکل زیر نمایش یک گراف با ۵ رأس و ۵ یال $\{(۱, ۲), (۲, ۳), (۳, ۴), (۲, ۴), (۴, ۵)\}$ است. (درج سایر زوجهای $(۲, ۱)$، $(۳, ۲)$ و غیره غیر ضروری است، زیرا از فرضهای ما چنین برمی‌آید که $(۲, ۱) \in E$ اگر و تنها اگر $(۱, ۲) \in E$)



با هر گراف می‌توان یک ماتریس وقوع $\mathbf{M} = (m_{ij})$ به شرح زیر مربوط ساخت. فرض می‌کنیم که رأسها به صورت $\{۱, ۲, \cdots, n\}$ شماره‌گذاری شده‌اند. در این‌صورت $\mathbf{M}$ ماتریسی n در n است که درایهٔ آن در وضع (i, j) برابر ۱ است هرگاه (i, j) یک یال گراف باشد و در غیر این‌صورت برابر صفر است. ماتریس وقوع برای گراف بالا چنین است

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

به‌عنوان آزمایش چند توان $\mathbf{M}$ را حساب می‌کنیم

$$\mathbf{M}^۲ = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}^۳ = \begin{pmatrix} ۰ & ۳ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۴ & ۵ & ۱ \\ ۱ & ۴ & ۲ & ۴ & ۱ \\ ۱ & ۵ & ۴ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۳ & ۰ \end{pmatrix}$$

به فرض $\mathbf{M} = (m_{ij})$ داریم

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{M}^۲) = \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=۱}^{n} m_{ij} m_{ji}$$
$$\mathrm{Tr}(\mathbf{M}^۳) = \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=۱}^{n} \sum_{k=۱}^{n} m_{ij} m_{jk} m_{ki}$$

با استفاده از تعریف ماتریس وقوع می‌دانیم که

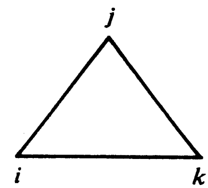
$$m_{ij} m_{ji} \neq ۰$$

اگر و تنها اگر (i, j) یک یال گراف باشد و در این‌صورت $m_{ij}m_{ji} = ۱$. در حالت $m_{ij}m_{ji} = ۱$، همچنین داریم $m_{ji}m_{ij} = ۱$. بنابراین

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{M}^۲) = ۲e$$

که در آن e تعداد یالها درگراف است. در مثال ما $\mathrm{Tr}(\mathbf{M}^۲) = ۱۰$ و ۵ یال وجود دارد.

با بررسی $\mathbf{M}^۳$، می‌بینیم که تنها موقعی حکم $m_{ij}m_{jk}m_{ki} \neq ۰$ برقرار است که درگراف مثلثی موجود باشد، که در آن (i, j, k) یک مثلث تشکیل دهند هرگاه (ij)، (jk) و (ki) همه یالهایی در این گراف باشند. به آسانی می‌توان بررسی کرد که



برای هر چنین مثلثی باید داشته باشیم $\mathrm{Tr}\mathbf{M}^۳ = ۶$. بنابراین

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{M}^۳) = ۶t$$

که در آن t شمارهٔ مثلثهاست. در مثال ما

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{M}^۳) = ۶$$

و درست یک مثلث وجود دارد.

مثال ت. گیریم V یک فضای برداری روی هیأت اعداد حقیقی با پایهٔ $\{v_۱, \cdots, v_n\}$ است. فرض کنیم σ یک جایگشت از $\{۱, ۲, \cdots, n\}$ و $\mathbf{A}_\sigma$ ماتریس تبدیل خطی T_σ (با تعریف در بخش ۱۹) است،

$$T_\sigma(v_i) = v_\sigma(i)$$

این بار $\mathrm{Tr}(\mathbf{A}_\sigma)$ برابر تعداد بردارهای v_iی پایه است به‌گونه‌ای که $v_{\sigma(i)} = v_i$. به‌عبارت دیگر، $\mathrm{Tr}(\mathbf{A}_\sigma)$ شمارهٔ نقاط ثابت تبدیل σ را تعیین می‌کند، که در آن یک نقطهٔ ثابت با یک عدد ثابت i، $۱ \leq i \leq n$، تعریف می‌شود به گونه‌ای که $\sigma(i) = i$.

مثالهای (پ) و (ت) مفید بودن تابع اثر را برای شمارش در حالاتی نشان می‌دهند که داده‌ها می‌توانند به‌صورت ماتریس داده شوند.

تمرینها

۱.گیریم T یک تبدیل خطی در یک فضای برداری بر اعداد مختلط است به‌گونه‌ای که

$$T(v_۱) = -v_۱ - v_۲$$
$$T(v_۲) = v_۱ - ۳v_۲$$

در آن $\{v_۱, v_۲\}$ یک پایهٔ فضای برداری است.

الف) چندجمله‌یی مشخصهٔ T کدام است؟

ب) چندجمله‌یی مینیمال T کدام است؟

پ) ویژه مقدارهای T کدامند؟

ت) آیا پایه‌ای برای این فضای برداری وجود دارد به‌گونه‌ای که هر بردار پایه یک ویژه بردار T باشد؟ توضیح دهید.

ث) یک ویژه بردار T را بیابید.

ج) یک ماتریس مثلثی $\mathbf{B}$ و یک ماتریس وارونپذیر $\mathbf{S}$ بیابید به‌گونه‌ای که $\mathbf{AS} = \mathbf{SB}$ که در آن $\mathbf{A}$ ماتریس T نسبت به پایهٔ $\{v_۱, v_۲\}$ باشد.

چ) تجزیهٔ ژوردان T را بیابید.

۲.به پرسشهای مذکور در تمرین ۱ در مورد تبدیل خطی $T \in L(C_۲, C_۲)$ که با معادلات

$$T(v_۱) = v_۱ + iv_۲$$
$$T(v_۲) = -iv_۱ + v_۲$$

تعریف شده است، پاسخ دهید، $\{v_۱, v_۲\}$ یک پایهٔ $C_۲$ است.

۳.گیریم V یک فضای برداری دوبعدی روی اعداد حقیقی R است و $T \in L(V, V)$ با

$$T(v_۱) = -\alpha v_۲$$
$$T(v_۲) = \beta v_۱$$

تعریف شده است، که α و β اعداد حقیقی مثبت هستند. آیا برای V پایه‌ای متشکل از ویژه بردارهای T وجود دارد؟ توضیح دهید.

توجه: در تمرینهای ۴ تا ۸، V نمایش یک فضای برداری متناهی‌ـبعد روی اعداد مختلط C است.

۴.گیریم $T \in L(V, V)$ یک تبدیل خطی است که همهٔ ویژه مقدارهای آن برابر صفرند. ثابت کنید که T صفرـتوان است، یعنی $T^n = ۰$، برای مقداری از n.

۵.گیریم $T \in L(V, V)$ یک تبدیل خطی است به‌گونه‌ای که $T^۲ = T$. دربارهٔ وجود یا عدم وجود پایه‌ای برای V متشکل از ویژه بردارهای T بحث کنید.

۶.به پرسش تمرین ۵ در مورد یک تبدیل T، به گونه‌ای که تساوی $T^r = 1$، برای یک عدد درست مثبت r، برقرار باشد، پاسخ دهید.

۷.گیریم T یک تبدیل خطی از رتبهٔ ۱ باشد، یعنی $\dim T(V) = 1$. پس تساوی $T(V) = S(v_0)$ برای برداری مانند $v_0 \neq 0$ برقرار است. به‌ویژه، $T(v_0) = \lambda v_0$ برای یک مقدار $\lambda \in C$. ثابت کنید

$$T^2 = \lambda T$$

آیا برای V پایه‌ای متشکل از ویژه بردارهای T وجود دارد؟ توضیح دهید.

۸.گیریم $T = D + N$ تجزیهٔ ژوردان یک تبدیل خطی $T \in L(V, V)$ باشد. ثابت کنید که تبدیل خطی $X \in L(V, V)$ با T تعویضپذیر است، یعنی $XT = TX$، اگر و تنها اگر X با D و N تعویضپذیر باشد.

۹.الف) نشان دهید که اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو ماتریس n در n با ضرایب متعلق به یک هیأت دلخواه F باشند، آنگاه

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{BA})$$

ب) با استفاده از (الف) نشان دهید که اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو ماتریس متشابه باشند، آنگاه $\mathrm{Tr}(\mathbf{A}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{B})$.

پ) نشان دهید که ماتریسهای با اثر صفر یک زیرفضای $M_n(F)$ به بعد $n^2 - 1$ درست می‌کنند.[راهنمایی: نگاشت $\mathrm{Tr} : M_n(F) \to F$ یک تبدیل خطی است.]

ت) ثابت کنید که زیرفضای $M_n(F)$ مذکور در (پ) با ماتریسهای $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$، $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$ متعلق به $M_n(F)$ تولید می‌شوند.

۱۰.یک تبدیل خطی $T \in L(V, V)$ که در آن V یک فضای برداری متناهی‌ـبعد روی یک هیأت جبری بستهٔ F است، تکتوان نامیده می‌شود اگر $T - 1$ صفرـتوان باشد.

الف) نشان دهید که T تکتوان است اگر و تنها اگر ۱ تنها ویژه مقدار T باشد.

ب) فرض می‌کنیم $T \in L(V, V)$ وارونپذیر باشد. ثابت کنید که تبدیلاتی خطی مانند D و U وجود دارند به‌گونه‌ای که $T = DU$، D قطری، U تکتوان بوده و هم D و هم U را می‌توان به‌صورت چندجمله‌ییهایی از T بیان کرد.

پ) ثابت کنید که D و Uی مذکور در (ب) به‌طور یکتا تعیین می‌شوند، بدین معنی که اگر $T = D'U'$، D' قطری، U' تکتوان و $D'U' = U'D'$، آنگاه $D = D'$ و $U = U'$.

۲۵. صورتهای گویا و صورتهای کانونی ژوردان

یک پرسش اساسی در مورد ماتریسها پرسش زیر است. دو ماتریس n در n، $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ که ضرایب آنها در F، هستند داده شده‌اند. چگونه می‌توانیم تعیین کنیم که $\mathbf{A}$ با $\mathbf{B}$ متشابه است یا نیست؟

مثال الف. مثالهای زیر برخی از مشکلات موجود در این پرسش را نشان می‌دهند.

i) ماتریسهای

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{pmatrix}$$

هر دو دارای یک چندجمله‌یی مینیمال $(x-۱)(x-۲)$ هستند ولی متشابه نیستند.

ii) ماتریسهای

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

هر دو دارای یک چندجمله‌یی مشخصه‌اند ولی متشابه نیستند.

در این بخش راه‌حلی برای مسألهٔ تعیین متشابه بودن دو ماتریس ارائه می‌دهیم. اثبات قضیهٔ اصلی که قضیهٔ مقسوم علیه مقدماتی نامیده می‌شود، اندکی دشوار است، و آن را تا بخش ۲۹ به تعویق می‌اندازیم. در این بخش توجه خود را به اثبات چند قضیه که به بیان قضیهٔ اصلی و کاربردهای آن در حالات خاص منجر می‌شود، معطوف می‌کنیم.

گیریم V یک فضای برداری متناهی‐بعد بر هیأت دلخواه F باشد، و فرض می‌کنیم T یک تبدیل خطی ثابتی در $L(V,V)$ است. به منظور کنار گذاردن حالات بدیهی فرض می‌کنیم $V \neq ۰$. همچنین باید تأکید کنیم که دربارهٔ F هیچ فرضی نمی‌کنیم. پس این بحث نه تنها در مورد یک هیأت جبری‐بسته همان‌گونه که در ابتدای این فصل گفتیم، بلکه دربارهٔ فضاهای برداری روی اعداد گویای Q یا اعداد حقیقی R نیز به کار می‌رود.

اندیشه‌ای که کل بحث بر آن مبتنی است، مفهوم یک زیرفضای دوری V نسبت به T است.

(۱.۲۵) تعریف. یک زیرفضای Tـپایای $V_۱$ از V نسبت به T دوری نامیده می‌شود هرگاه $V_۱ \neq ۰$، و یک بردار $v_۱ \in V_۱$ موجود باشد به گونه‌ای که $V_۱$ به‌ازای مقداری مانند k، به‌وسیلهٔ $\{v_۱, Tv_۱, T^۲v_۱, \cdots, T^kv_۱\}$ تولید شود.

(۲.۲۵) لم. یک زیر فضای $V_۱ \subset V$ نسبت به T دوری است هر گاه به‌ازای برداری مانند $v_۱ \in V_۱$، $v_۱ \neq ۰$، هر بردار در $V_۱$ بتواند به‌ازای یک چندجمله‌یی $f \in F[x]$ به شکل $f(T)v_۱$ بیان شود.

برهان. اگر $V_۱$ دوری باشد، هر بردار $v \in V_۱$ می‌تواند به‌صورت ترکیبی خطی به‌صورت

$$\begin{aligned} v &= \alpha_۰ v_۱ + \alpha_۱(Tv_۱) + \cdots + \alpha_k(T^kv_۱) \\ &= f(T)v_۱ \end{aligned}$$

بیان شود، که در آن $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_k x^k$. به وارون، فرض می‌کنیم $v_1 \in V_1$ به‌گونه‌ای است که هر $v \in V_1$ می‌تواند به‌ازای یک $f \in F[x]$ به شکل $f(T)v_1$ بیان شود، در این‌صورت V_1 به‌وسیلهٔ $\{v_1, Tv_1, T^2v_1, \cdots\}$ بیان می‌شود، و به علت ویژگی تناهی-بعد، یک عدد k وجود دارد به‌گونه‌ای که V_1 به‌وسیلهٔ $\{v_1, Tv_1, \cdots, T^k v_1\}$ تولید می‌شود، همان‌گونه که می‌خواستیم.

(۳.۲۵) تعریف. گیریم $v \in V$، $v \neq 0$، و فرض کنیم V_1 معرف زیرفضای V متشکل از همهٔ بردارهای $\{f(T)v\}$ باشد، که در آن f یک چندجمله‌یی دلخواه در $F[x]$ است. در این‌صورت V_1 زیرفضای دوری تولید شده توسط v نامیده شده و با $< v >$ نشان داده می‌شود.

اشاره می‌کنیم که V_1 یک زیرفضای V است و بنابر لم (۲.۲۵) یک زیرفضای دوری است، و در ضمن کوچکترین زیرفضای T-پایای شامل v است که به‌طور یکتا تعیین می‌شود (چرا؟)

(۴.۲۵) لم. فرض می‌کنیم $v \in V$، $v \neq 0$. یک چندجمله‌یی ناصفر با ضریب پیشرو ۱ مانند

$$m_v(x) = x^d - \alpha_{d-1}x^{d-1} - \cdots - \alpha_0 \qquad \alpha_i \in F$$

در $F[x]$ موجود است به گونه‌ای که $m_v(T)v = 0$، و به‌ازای هر چند جمله‌یی $f \in F[x]$،

$$f(T)v = 0 \text{ ایجاب می‌کند که } \qquad m_v(x) | f(x)$$

برهان. بنابر ویژگی تناهی-بعد، یک عدد صحیح $d \geq 0$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $\{v, Tv, \cdots, T^{d-1}v\}$ نابسته-خطی است (با این توضیح که اگر $d = 0$، این مجموعه به $\{v\}$ تبدیل می‌شود)، و $\{v, T(v), \cdots, T^d(v)\}$ وابسته-خطی است. در این‌صورت عناصری مانند α_0، ...، α_{d-1} در F موجودند به‌گونه‌ای که

$$T^d v = \alpha_0 v + \alpha_1 Tv + \cdots + \alpha_{d-1}T^{d-1}v$$

با فرض

$$m_v(x) = x^d - \alpha_{d-1}x^{d-1} - \cdots - \alpha_0$$

داریم $m_v T(v) = 0$. اینک فرض می‌کنیم $f \in F[x]$ به‌گونه‌ای است که $f(T)v = 0$. بنا بر الگوریتم تقسیم،

$$f(x) = m_v(x)g(x) + r(x)$$

که در آن یا $r(x) = 0$ و یا $\deg r(x) < \deg m_v(x)$. در این دستور به جای x، T قرار می‌دهیم و آن را بر v اثر می‌دهیم تا به‌دست آوریم

$$f(T)v = m_v(T)g(T)v + r(T)v$$

چون $f(T)v = 0$ و $m_v(T)v = 0$، داریم $r(T)v = 0$. اگر $r(x) \neq 0$، معادلهٔ $r(T)v = 0$ ایجاب می‌کند که بردارهای $\{v, Tv, \cdots, T^{d-1}v\}$ وابسته‌ـخطی باشند که مخالف فرض است و لم ثابت می‌شود.

(۵.۲۵) تعریف. گیریم $v \in V$، $v \neq 0$. چندجمله‌یی یکتای $m_v(x)$ که در شرایط لم (۴.۲۵) صدق می‌کند مرتبهٔ v نامیده می‌شود. این چندجمله‌یی به‌گونه‌ای یکتا به‌صورت چندجمله‌یی $q(x)$ با ضریب پیشرو ۱، با کوچکترین درجه به‌گونه‌ای تعیین می‌شود که $q(T)v = 0$.

اثبات این حقیقت که $m_v(x)$ به‌صورت یک چندجمله‌یی یکتای $q(x)$ با کوچکترین توان به گونه‌ای تعیین می‌شود که $q(T)v = 0$، به شرح زیر است. اگر $q(T)v = 0$، آنگاه $m_v(x)|q(x)$. اگر $q(x)$ کوچکترین درجه را بین چندجمله‌ییهای $f(x)$ داشته باشد به‌گونه‌ای که $f(T)v = 0$، آنگاه باید داشته باشیم $m_v(x) = \deg q(x)$. بنابراین به‌ازای مقداری مانند $\alpha \in F$ ، داریم $q(x) = \alpha m_v(x)$. چون هم $q(x)$ و هم $m_v(x)$ دارای ضریب پیشرو ۱ هستند باید $\alpha = 1$.

هم اکنون خواننده ممکن است این احساس نامطلوب را پیدا کرده باشد که مرتبهٔ $m_v(x)$ به نحوی به چندجمله‌یی مینیمال T، مذکور در بخش ۲۲، بستگی دارد. لم زیر به این پرسش پاسخ می‌دهد.

(۶.۲۵) لم. گیریم $< v >$ یک زیرفضای دوری ناصفر V و $T_{<v>}$ تحدید * T به زیرفضای $< v >$ باشد. در این‌صورت $m_v(x)$، مرتبهٔ v، برابر است با چندجمله‌یی مینیمال $T_{<v>}$ (با تقریب یک ضریب ثابت).

برهان. هر چندجمله‌یی $f(x) \in F[x]$ دارای این ویژگی است که $f(T)v = 0$ اگر و تنها اگر $f(T_{<v>}) = 0$، زیرا $< v >$ به‌وسیلهٔ $< v, Tv, T^2v, \cdots >$ تولید شده و $f(T)T = Tf(T)$. بعلاوه، $f(T)v = f(T_{<v>})v$. به فرض اینکه $q(x)$ چندجمله‌یی مینیمال $T_{<v>}$ باشد، روی $< v >$ داریم $m_v(T) = 0$، و بنابراین $q(x)|m_v(x)$. به وارون، $q(T)v = 0$، پس $m_v(x)|q(x)$، لذا $m_v(x)$ و $q(x)$ در یک ضریب ثابت با هم تفاوت دارند. که برهان لم را کامل می‌سازد.

نکتهٔ جالب دیگر نکتهٔ زیر است.

(۷.۲۵) لم. گیریم $m(x)$ چندجمله‌یی مینیمال T روی V باشد. برای هر بردار ناصفر $v \in V$، $m_v(x)|m(x)$.

برهان. روی V داریم $m(T) = 0$، از این‌رو $m(T)v = 0$. حالا نتیجه از لم (۴.۲۵) حاصل می‌شود.

اکنون می‌توان مهمترین قضیهٔ این بخش را بیان کرد.

---

* تحدید T_Wی یک تبدیل خطی T به یک زیر فضای Tـپایای W تبدیل خطی $T_W \in L(W, W)$ است که با $T_W w = T_W$، $w \in W$ تعریف می‌شود.

(۸.۲۵) قضیه (قضیهٔ مقسوم علیه مقدماتی). گیریم $T \in L(V, V)$، که V یک فضای برداری متناهی-بعد روی یک هیأت دلخواه است، و $V \neq \circ$. در این‌صورت بردارهای ناصفر $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ در V وجود دارند که مرتبه‌های آنها توانهای چند جمله‌ییهای اول در $F[x]$، یعنی $\{p_1(x)^{e_1}, \cdots, p_r(x)^{e_r}\}$ بوده و به گونه‌ای هستند که V حاصل‌جمع مستقیم زیرفضاهای دوری $\{< v_i >, 1 \leq i \leq r\}$ است، یعنی

$$V =< v_1 > \oplus < v_2 > \oplus \cdots \oplus < v_r >$$

شمارهٔ عوامل جمع r به‌طور یکتا تعیین می‌شود، و مرتبه‌های $\{p_i(x)^{e_i}\}$ از بردارهای $\{v_i\}$ با تقریب یک ترتیب به‌طور یکتا تعیین می‌شوند.

برهان قضیه در بخش ۲۹ داده خواهد شد. بقیهٔ این بخش را به بیان معنی و مفهوم این قضیه و کاربرد آن تخصیص می‌دهیم.

نخست توجه می‌کنیم که ممکن است مرتبه‌های $\{p_1(x)^{e_1}, p_2(x)^{e_2}, \cdots\}$ تکراری باشند. بخش یکتایی قضیه با جزئیات بیشتر، بیان می‌کند که اگر تساوی $V =< v'_1 > \oplus \cdots \oplus < v'_s >$ به‌ازای بردارهای ناصفر دیگر $\{v'_i\}$، بامرتبه‌های توانهای اول $\{q_1(x)^{f_1}, \cdots, q_s(x)^{f_s}\}$ برقرار باشد، آنگاه $r = s$، و مجموعه‌های توانهای اول

$$\{p_1(x)^{e_1}, \cdots, p_r(x)^{e_r}\}, \qquad \{q_1(x)^{f_1}, \cdots, q_r(x)^{f_r}\}$$

با یک اختلاف آرایش یکی هستند.

(۹.۲۵) تعریف. همانند قضیهٔ بالا، فرض می‌کنیم $T \in L(V, V)$. مجموعهٔ توانهای اول $\{p_1(x)^{e_1}, \cdots, p_r(x)^{e_r}\}$، در صورت لزوم با تکرار، مجموعهٔ مقسوم علیه‌های مقدماتی T نامیده می‌شود.

به‌عنوان مثال، منظور از بیان این که T دارای مقسوم علیه‌های مقدماتی $\{x - 1، x + 1، x + 1، x^2 + 1\}$ روی هیأت R است، این است که برای هر فضای برداری V روی R، $T \in L(V, V)$ و V مجموع مستقیم زیرفضاهای دوری

$$V =< v_1 > \oplus < v_2 > \oplus < v_3 > \oplus < v_4 >$$

است، که در آن مرتبه‌های $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ برابر $\{x - 1, x + 1, x + 1, x^2 + 1\}$ است. همان‌گونه که بعداً خواهیم دید، مقسوم‌علیه‌های مقدماتی، ماتریس T نسبت به یک پایه را کامل و بدون ابهام توصیف می‌کنند.

اینک به استخراج شکل ماتریس یک تبدیل خطی T نسبت به یک مجموعه از مقسوم‌علیه‌های مقدماتی داده شده می‌پردازیم. ماتریس حاصل شکل متعارف گویای T نامیده می‌شود.

(۱۰.۲۵) لم. گیریم $p(x)=x^d-\alpha_{d-1}x^{d-1}-\cdots-\alpha_0$، $\alpha_i\in F$، یک چندجمله‌یی اول در $F[x]$ است، و فرض می‌کنیم که $<v>$ یک زیرفضای دوری V، و v از مرتبهٔ $p(x)$ است. در این‌صورت ماتریس $T_{<v>}$ نسبت به پایهٔ $\{v,Tv,\ldots,T^{d-1}v\}$ از $<v>$ برابر است با

$$\mathbf{A}_{p(x)}=\begin{pmatrix} 0 & & & \cdots & \alpha_0\\ 1 & 0 & & \cdots & \alpha_1\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots\\ & & & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_{d-1}\end{pmatrix}$$

برهان. بنابر برهان لم (۴.۲۵)، یک پایهٔ $<v>$ با $\{v,Tv,\cdots,T^{d-1}v\}$ داده می‌شود، و داریم

$$T(T^{d-1}v)=\alpha_0v+\alpha_1(Tv)+\cdots+\alpha_{d-1}(T^{d-1}v)$$

شکل ماتریس از این ملاحظات روشن می‌شود.

(۱۱.۲۵) تعریف. ماتریس $\mathbf{A}_{p(x)}$ ماتریس همراه چندجمله‌یی $p(x)$ نامیده می‌شود.

مثال ب. ماتریس همراه، چندجمله‌یی x^2+1، روی هیأت گویا کدام است؟ x^2+1 را باید چنین بنویسیم

$$x^2+1=x^2-0x-(-1)$$

در این‌صورت ماتریس همراه برابر است با

$$\mathbf{A}_{x^2+1}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

(۱۲.۲۵) لم. گیریم $p(x)=x^d-\alpha_{d-1}x^{d-1}-\cdots-\alpha_0$، $\alpha_i\in F$، و $<v>$ یک زیرفضای دوری است به‌گونه‌ای که مرتبهٔ v به‌ازای یک عدد صحیح مثبت e، برابر $p(x)^e$ است. در این صورت ماتریس $T_{<v>}$ نسبت به پایهٔ

$$\{p(T)^{e-1}v,Tp(T)^{e-1}v,\cdots,T^{d-1}p(T)^{e-1}v,p(T)^{e-2}v,Tp(T)^{e-2}v,\\ \cdots,T^{d-1}p(T)^{e-2}v,\cdots,v,Tv,\cdots,T^{d-1}v\}$$

عبارت است از

$$e \text{ بلوک } \updownarrow \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \mathbf{B} \\ \circ & & & \cdots & \mathbf{A} \end{pmatrix}$$

که در آن $\mathbf{A}$ ماتریس همواره $\mathbf{A} = \mathbf{A}_p(x)$ و $\mathbf{B}$ ماتریس d در dی زیر است:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \circ & \cdots & \circ & ١ \\ \vdots & & & \circ \\ \vdots & & & \vdots \\ \circ & \cdots & & \circ \end{pmatrix}$$

برهان. شمارهٔ بردارهای مذکور در حکم این لم برای عناصر پایهٔ $< v >$ برابر است با $\deg\ p(x)^e = de$. پس این بردارها وقتی یک پایه‌برای $< v >$ می‌شوند که نشان دهیم نابسته‌ـخطی‌اند، ولی هر رابطهٔ نابستگی خطی یک چندجمله‌یی ناصفر $g(x)$ پدید می‌آورد به‌گونه‌ای که $g(T)v = \circ$ و $\deg\ g(x) < \deg\ p(x)^e$، که خلاف این فرض است که مرتبهٔ v برابر $p(x)^e$ است، اینک ماتریس $T_{<v>}$ را نسبت به این پایه حساب می‌کنیم. می‌بینیم که T هر بردار پایه را بر بردار دیگری می‌نگارد جز برای بردارهای پایهٔ

$$T^{d-١}p(T)^{e-١}v, T^{d-١}p(T)^{e-٢}v, \cdots, T^{d-١}v$$

برای این بردارها داریم

$$T(T^{d-١}p(T)^{e-١}) = \alpha_\circ p(T)^{e-١}v + \cdots + \alpha_{d-١}T^{d-١}p(T)^{e-١}v$$

چون:

$$p(T)p(T)^{e-١}v = \circ$$

پس

$$T(T^{d-١}p(T)^{e-٢}v) = \alpha_\circ p(T)^{e-٢}v + \cdots + \alpha_{d-١}T^{d-١}p(T)^{e-٢}v + p(T)^{e-١}v$$

زیرا $p(T)p(T)^{e-٢}v = p(T)^{e-١}v$ و غیره. بخشی از ماتریس که در سرستونهای آنها

$$p(T)^iv, \cdots, T^{d-١}p(T)^iv, p(T)^{i-١}v, \cdots, T^{d-١}p(T)^{i-١}v$$

نوشته شده است به تفصیل به شرح زیر است

		$p(T)^i v \cdots T^{d-1}p(T)^i v$	$p(T)^{i-1}v \cdots T^{d-1}p(T)^{i-1}v$
		$\vdots$	$\vdots$
$p(T)^i v$ $\vdots$ $T^{d-1}p(T)^i v$	$\vdots$	$\begin{matrix} 0 & & \cdots & \alpha_0 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & 1 & \alpha_{d-1} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & \\ & & & 0 \end{matrix}$
$p(T)^{i-1}v$ $\vdots$ $T^{d-1}p(T)^{i-1}v$	$\vdots$	$\vdots$	$\begin{matrix} 0 & & \cdots & \alpha_0 \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & 1 & \alpha_{d-1} \end{matrix}$

که با این جدول برهان لم کامل می‌شود.

(۱۳.۲۵) تعریف. ماتریس de در deی مذکور در لم (۱۲.۲۵) ماتریس همراه چندجمله‌یی $p(x)^e$ نامیده می‌شود.

توجه داریم که چندجمله‌یی $p(x)$ باید به شکل

$$x^d - \alpha_{d-1}x^{d-1} - \cdots - \alpha_0$$

نوشته شود تا فرمولهای مربوط به ماتریسها معتبر باشند.

مثال پ. ماتریس همراه $(x^2+1)^2$ روی هیأت گویا کدام است؟ با نوشتن x^2+1 به شکل مطلوب، داریم

$$x^2 + 1 = x^2 - 0x - (-1)$$

بنابر لم (۱۲.۲۵) ماتریس همراه آن چنین است

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

با قبول درستی قضیهٔ مقسوم علیه مقدماتی، اینک می‌توانیم دومین قضیهٔ مهم این بخش را بیان کنیم. نخست به دو تعریف دیگر نیازمندیم.

(۱۴.۲۵) تعریف. گیریم $\mathbf{A}$ یک ماتریس n در n با ضرایب متعلق به F است. مقسوم‌علیه‌های مقدماتی $\mathbf{A}$ به‌صورت مقسوم علیه‌های مقدماتی یک تبدیل خطی روی یک فضای برداری n بعدی تعریف می‌شود که ماتریس آن نسبت به یک پایه برابر $\mathbf{A}$ است.

(۱۵.۲۵) تعریف. گیریم برای یک فضای برداری n بعدی V روی F، $T \in L(V, V)$، و فرض می‌کنیم که مقسوم علیه‌های مقدماتی T برابرند با

$$\{p_1(x)^{e_1}, \cdots, p_r(x)^{e_r}\}$$

(در صورت لزوم با تکرار). فرض می‌کنیم $V = <v_1> \oplus \cdots \oplus <v_r>$، که در آن مرتبهٔ v_i برابر $p_i(x)^{e_i}$، $1 \leq i \leq r$، است. برای V پایه‌ای برمی‌گزینیم متشکل از پایه‌های زیرفضاهای $<v_i>$، $1 \leq i \leq r$، همان‌گونه که در لم‌های (۱۰.۲۵) و (۱۲.۲۵) دیدیم. شکل متعارف گویای T برابر ماتریس $\mathbf{C}$ی T نسبت به این پایه است:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \mathbf{C}_r \end{pmatrix}$$

که در آن $\mathbf{C}_i$، $1 \leq i \leq r$، ماتریس همراه مقسوم علیه مقدماتی $p_i(x)^{e_i}$ است. شکل متعارف گویای یک ماتریس n در n، $\mathbf{A}$ روی F با شکل متعارف گویای یک تبدیل خطی T در یک فضای برداری n بعدی روی F تعریف می‌شود، که ماتریس آن نسبت به یک پایه برابر $\mathbf{A}$ است.

توجه داریم که جز برای ترتیب بردارهای پایه، هر درایهٔ $\mathbf{C}$ با اطلاعی از $\{p_i(x)^{e_i}\}$ تعیین می‌شود.

(۱۵.۲۵)′ قضیه. دو ماتریس n در n، $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ با ضرایب واقع در F متشابه‌اند، اگر و تنها اگر دارای یک شکل متعارف گویا (با تقریب یک آرایش از بلوکهای واقع بر قطر) باشند.

برهان. گیریم $\mathbf{C}$ شکل متعارف گویای مشترک $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ است. چون $\mathbf{A}$ و $\mathbf{C}$ ماتریسهای تبدیل خطی نسبت به پایه‌های متفاوت هستند، پس متشابه‌اند. بنابراین برای یک ماتریس n در n وارونپذیر $\mathbf{X}$،

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{C}\mathbf{X}^{-1}$$

به روش مشابه برای یک ماتریس n در n وارونپذیر $\mathbf{Y}$،

$$\mathbf{B} = \mathbf{Y}\mathbf{C}\mathbf{Y}^{-1}$$

در این صورت

$$\mathbf{X}^{-۱}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{Y}^{-۱}\mathbf{B}\mathbf{Y}$$

و

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{Y}^{-۱}\mathbf{B}(\mathbf{X}\mathbf{Y}^{-۱})^{-۱}$$

که متشابه بودن $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را ثابت می‌کند.

(۱۶.۲۵) قضیه. شکل متعارف گویای هر تبدیل خطی $T \in L(V, V)$ با تقریب یک تجدید آرایش از بلوکهای واقع بر قطر، به‌طور یکتا تعیین می‌شود.

برهان. بنا بر قضیهٔ مقسوم علیه مقدماتی، مقسوم‌علیه‌های مقدماتی T با تقریب یا تجدید آرایش به‌طور یکتا تعیین می‌شود. براهین لم‌های (۱۰.۲۵) و (۱۲.۲۵) نشان می‌دهند که ماتریسهای همراه مقسوم‌علیه‌های مقدماتی توسط ضرایب چندجمله‌ییها به‌طور یکتا تعیین می‌شوند. بدین‌ترتیب برهان کامل می‌شود. شاید مفیدترین شکل قضیه‌های قبل شکل زیر است.

فرع. دو ماتریس n در n با درایه‌های واقع در F متشابه‌اند اگر و تنها اگر دارای یک مجموعه از مقسوم‌علیه‌های مقدماتی باشند.

اثبات آن بنابر قضیه‌های (۱۵.۲۵) و (۱۶.۲۵) روشن است.

(۱۷.۲۵) تعریف. شکل نرمال ژوردان (یا شکل متعارف ژوردان) یک تبدیل خطی (یا ماتریس) در حالتی که همهٔ ویژه مقدارها به هیأت F تعلق داشته باشند، مطابق تعریف، شکل متعارف گویای آن است. در این حالت همهٔ مقسوم علیه‌های مقدماتی به شکل $(x-\alpha_i)^e$ هستند، که در آن $\alpha_i \in F$، و ماتریس همراه $(x-\alpha_i)^e$ ماتریس e در eی زیر است

$$\begin{pmatrix} \alpha_i & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & \alpha_i & ۱ & & \\ \vdots & & \ddots & & ۱ \\ ۰ & & \cdots & & \alpha_i \end{pmatrix}$$

تنها قسمتی از این تعریف که باید تحقیق شود دارا بودن شکل $(x-\alpha_i)^e$ در همهٔ مقسوم علیه‌های مقدماتی است. بنابر لم (۷.۲۵) همهٔ مقسوم علیه‌های مقدماتی، چندجمله‌یی مینیمال را عاد می‌کنند، و بنابر بخش ۲۴ عاملهای اول چندجمله‌یی مینیمال به شکل $x-\alpha_i$ هستند که در آن α_i یک ویژه مقدار است.لذا حکم، از یکتایی تجزیهٔ چندجمله‌ییها نتیجه می‌شود.

مثال ت. شکل متعارف گویای ماتریسی با ضرایب گویا و مقسوم‌علیه‌های مقدماتی

$$(x-۱)^۲, \qquad x^۲+۱$$

کدام است؟

شکل متعارف گویا متشکل از دو بلوک قطری است، که به ترتیب ماتریسهای همراه $(x-۱)^۲$ و $x^۲+۱$ هستند. این ماتریس با استفاده از مثال پ برای یافتن ماتریس همراه $x^۲+۱$، چنین است

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}.$$

مثال ث. شکل متعارف گویا یا شکل متعارف ژوردان تبدیل خطی T در فضای برداری سه‌بعدی روی C را، که در مثال (الف) از بخش ۲۴ داده شده و ماتریس آن نسبت به یک پایه ماتریس

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -۱ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۱ & -۱ \end{pmatrix}$$

است، به‌دست آورید. چون C جبری‌ـبسته است، همهٔ ویژه مقدارها در C قرار دارند، و شکل متعارف ژوردان را در این حالت محاسبه می‌کنیم. در آن مثال نشان داده شده بود که چند جمله‌یی مینیمال $\mathbf{A}$ برابر $(x-۲)(x+۱)^۲$ است. همچنین نشان داده شده بود که فضای برداری زیربنایی، مجموع مستقیم صفرـفضاهای $(T+۱)^۲$ و $T-۲$ است. اثبات دوری بودن این دو زیر فضا نسبت به T به عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود. از اینجا نتیجه می‌شود که مقسوم‌علیه‌های مقدماتی T عبارت‌اند از

$$x-۲ \qquad \text{و} \qquad (x+۱)^۲$$

بنابراین شکل متعارف ژوردان چنین است

$$\begin{pmatrix} -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{pmatrix}.$$

تمرینها

۱. شکلهای متعارف گویای تبدیلات خطی روی یک فضای برداری بر هیأت اعداد گویای Q را بیابید که مقسوم علیه‌های مقدماتی آنها به شرح زیر هستند:

الف) $(x-1)^2$، x^2-x+1
ب) $x+1$، $(x^2+x+1)^2$
پ) x^2، $(x+1)^3$

۲. شکلهای متعارف گویای ماتریسهای

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

را روی هیأت اعداد گویا* بیابید.

۳. شکلهای متعارف گویای ماتریسهای تمرین ۲ را روی هیأت اعداد حقیقی بیابید.

۴. شکلهای متعارف ژوردان ماتریسهای تمرین ۲ را روی هیأت اعداد مختلط به‌دست آورید.

۵. ثابت کنید که V نسبت به تبدیل خطی $T \in L(V,V)$ دوری است اگر و تنها اگر چندجمله‌یی مینیمال T برابر چندجمله‌یی مشخصه باشد.

۶. شکلهای متعارف ژوردان ماتریسهای زیر روی C را بیابید. کدام یک از جفت ماتریسهای زیر متشابه‌اند؟

الف) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

ب) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

پ) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

۷. نشان دهید که دو ماتریس قطری n در n با ضرایب واقع در F متشابه‌اند اگر و تنها اگر عناصر قطری هر ماتریس یک تجدید آرایش عناصر قطری دیگری باشد.

۸. گیریم F یک هیأت دلخواه باشد.

الف) گیریم $\mathbf{A}_{p(x)}$ ماتریس همراه یک چندجمله‌یی اول $p(x) \in F[x]$ است. ثابت کنید

$$D(x\mathbf{I} - \mathbf{A}_{p(x)}) = p(x)$$

(راهنمایی: این دترمینان را برحسب عناصر آخرین ستون بسط دهید.)

* شکل متعارف گویای یک ماتریس $\mathbf{A}$ روی هیأت F همان شکل متعارف گویای یک تبدیل خطی متناظر $\mathbf{A}$ روی یک فضای برداری بر F است.

ب) گیریم $\mathbf{A}$ یک ماتریس بلوکی به شکل مثلثی زیر است

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & & * \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathbf{A}_r \end{pmatrix}$$

که در آن ماتریسهای $\mathbf{A}_1$، $\mathbf{A}_2$، ...، $\mathbf{A}_r$ ماتریسهای مربعی هستند. ثابت کنید

$$D(x\mathbf{I} - \mathbf{A}) = D(x\mathbf{I} - \mathbf{A}_1) \cdots D(x\mathbf{I} - \mathbf{A}_r)$$

پ) گیریم $\mathbf{A}$ ماتریس همراه یک توان اول $p(x)^e \in F[x]$ باشد. ثابت کنید

$$D(x\mathbf{I} - \mathbf{A}) = p(x)^e$$

ت) گیریم $\mathbf{A}$ ماتریسی با مقسوم‌علیه‌های مقدماتی زیر است

$$\{p_1(x)^{e_1}, \cdots, p_r(x)^{e_r}\}$$

ثابت کنید

$$D(x\mathbf{I} - \mathbf{A}) = p_1(x)^{e_1} \cdots p_r(x)^{e_r}$$

ث) قضیهٔ کیلی-همیلتن را برای ماتریسهایی با ضرایب در F ثابت کنید: اگر $h(x) = D(x\mathbf{I} - \mathbf{A})$، آنگاه $h(\mathbf{A}) = 0$.

۸

فضاهای برداری دوگان و جبر چندخطی

این فصل با دو بخش دربارهٔ چند ساختمان مهم روی فضاهای برداری آغاز و به فضاهای خارج قسمت و دوگان منتهی می‌شود. بخش مربوط به فضاهای دوگان بر پایهٔ مفهوم یک صورت دوخطی که بر یک جفت فضای برداری تعریف شده، مبتنی است. بخش بعدی شامل ساختمان حاصلضرب تانسوری دو فضای برداری است و مقدمه‌ای برای موضوعی خواهد بود که جبر چندخطی نامیده می‌شود. آخرین بخش شامل کاربرد نظریهٔ فضاهای برداری دوگان در اثبات قضیهٔ مقسوم‌علیه مقدماتی است که در بخش ۲۵ بیان شد.

۲۶. فضاهای خارج‌قسمت و فضاهای برداری دوگان

بهتر است بحث خود را با مفاهیمی از نظریهٔ مجموعه‌ها آغاز کنیم. گیریم X یک مجموعه است. هر رابطه روی X مجموعهٔ دلخواهی است از جفتهای مرتب $\mathcal{R} = \{(a,b)\}$، $a,b \in X$، که منظور از جفت مرتب این است که (a,b) و (a',b') را تنها هنگامی یکی می‌گیریم که $a = a'$ و $b = b'$. برای مثال جفتهای مرتب $(۱, ۲)$ و $(۲, ۱)$ برابر نیستند. مثالی از یک رابطه مجموعهٔ جفتهای مرتب اعداد صحیح و مثبت $\mathcal{R} = \{(a,b)\}$ است، که فقط و فقط زمانی $(a,b) \in \mathcal{R}$ که $a < b$. گاهی استفاده از نماد $a\mathcal{R}b$ به‌معنی $(a,b) \in \mathcal{R}$ مناسبتر است.

(۱.۲۶) تعریف. رابطهٔ $\mathcal{R}$ روی X یک رابطهٔ هم‌ارزی نامیده می‌شود به شرط اینکه

i) $a\mathcal{R}a$ برای همهٔ $a \in X$ (ویژگی بازتابی)
ii) $a\mathcal{R}b$ ایجاب کند $b\mathcal{R}a$ (ویژگی تقارنی)
iii) $a\mathcal{R}b$ و $b\mathcal{R}c$ ایجاب کند $a\mathcal{R}c$ (ویژگی ترایایی)

رابطهٔ برابری، $a = b$، مثالی از یک رابطهٔ هم‌ارزی است. مثال زیر مثال جالبتری است. گیریم X یک مجموعه و $f : X \to Y$ نگاشتی از X در Y باشد. بعد روی X رابطهٔ $\mathcal{R}$ را به‌شرح زیر تعریف می‌کنیم

$$a\mathcal{R}b \quad \text{اگر} \quad f(a) = f(b)$$

تحقیق رابطهٔ هم‌ارزی بودن $\mathcal{R}$ را به خواننده واگذار می‌کنیم.

ویژگی عمدهٔ یک رابطهٔ هم‌ارزی این است که مجموعه را به زیرمجموعه‌های نامتداخلی به‌نام رده‌های هم‌ارزی، افراز می‌کند. در بحث خود از این حقیقت و حقایق دیگر مناسب است که برای نشان‌دادن مجموعهٔ همهٔ عناصر X واجد ویژگی P از قرارداد نمادگذاری (که در بخش ۲ ارائه شد) یعنی

$$\{a \in X | \text{است } P \text{ دارای ویژگی } a\}$$

استفاده کنیم.

(۲.۲۶) قضیه. گیریم X یک مجموعه و $\mathcal{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی آن باشد. برای هر $a \in X$، گیریم $[a]$ زیرمجموعه‌ای از X باشد که با

$$[a] = \{b \in X | b\mathcal{R}a\}$$

تعریف شده است. در این‌صورت مجموعه‌های $\{[a], a \in X\}$ رده‌های هم‌ارزی نامیده می‌شوند، و مجموعهٔ X اجتماع همهٔ رده‌های هم‌ارزی است. به دیگر سخن، هر عضو X دست‌کم به یک ردهٔ هم‌ارزی تعلق دارد. بعلاوه اگر دو ردهٔ هم‌ارزی $[a]$ و $[a']$ دست‌کم یک عضو مشترک داشته باشند، با هم قابل‌انطباق‌اند، یعنی $[a] = [a']$.

برهان. ویژگی بازتابی $\mathcal{R}$ حکم می‌کند که برای هر $a \in X$، $a\mathcal{R}a$. بنابراین $a \in [a]$، و نخستین حکم را که X اجتماع رده‌های هم‌ارزی $[a]$ است اثبات کرده‌ایم. اینک فرض می‌کنیم $b \in [a] \cap [a']$. باید ثابت کنیم $[a] = [a']$. نخست گیریم $c \in [a]$. پس $c\mathcal{R}a$. چون $b \in [a]$، داریم $b\mathcal{R}a$ و از این‌رو بنابر ویژگی تقارنی، $a\mathcal{R}b$. بااستفاده از ویژگی ترایایی، $c\mathcal{R}a$ و $a\mathcal{R}b$ ایجاب می‌کند $c\mathcal{R}b$. سرانجام باردیگر بنابر ترایایی $c\mathcal{R}b$ و $b\mathcal{R}a'$ ایجاب می‌کند $c\mathcal{R}a'$، یعنی $c \in [a']$ در نتیجه $[a] \subset [a']$. استدلالی مشابه با تعویض جای a و a' نشان می‌دهد که $[a'] \subset [a]$. بنابراین $[a] = [a']$، و قضیه ثابت می‌شود.

برای مثال، اگر $\mathcal{R}$ رابطهٔ تساوی باشد، ردهٔ هم‌ارزی $[a]$ از عنصر تنهای a تشکیل می‌شود.
اگر $f : X \to Y$ یک تابع و $\mathcal{R}$ ردهٔ هم‌ارزی تعریف شده در بالا با ضابطهٔ

$$f(a) = f(b), \text{اگر}\ a\mathcal{R}b$$

باشد، آنگاه ردهٔ هم‌ارزی $[a]$ مجموعهٔ همهٔ $b \in X$هایی است که به‌وسیلهٔ f بر همان عنصر a نگاشته می‌شوند، یعنی $[a] = \{b \in X | f(b) = f(a)\}$.

(۳.۲۶) تعریف. گیریم $\mathcal{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ X است. مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی $\{[a]\}$، $a \in X$، را مجموعهٔ خارج‌قسمت X بر $\mathcal{R}$ نامیده و با $X/\mathcal{R}$ می‌نمایانیم.
اینک می‌توانیم از این ساختمان در فضاهای برداری استفاده کنیم.

(۴.۲۶) قضیه. گیریم V یک فضای برداری روی هیأت F، و Y زیرفضایی از V است. در این‌صورت رابطهٔ $\mathcal{R}$ روی V، که با

$$v\mathcal{R}v' \quad \text{اگر} \quad v - v' \in Y$$

تعریف می‌شود یک ردهٔ هم‌ارزی است. مجموعهٔ خارج‌قسمت $V/\mathcal{R}$ متشکل از همهٔ رده‌های هم‌ارزی $\{[v] | v \in V\}$ یک فضای برداری روی F است با جمع و ضرب در اسکالر که به‌ترتیب زیر تعریف شده‌اند

$$[v] + [v'] = [v + v'],\ v, v' \in V$$
$$\alpha[v] = [\alpha v],\ v \in V, \alpha \in F$$

اگر V متناهی‌ـبعد باشد، بعد $V/\mathcal{R}$ نیز متناهی است و داریم

$$\dim V = \dim Y + \dim V/\mathcal{R}$$

برهان. نخست نشان می‌دهیم که $\mathcal{R}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است. $v\mathcal{R}v$ برای هر v برقرار است، زیرا $v - v = 0 \in Y$، چون Y یک زیرفضاست. اگر $v\mathcal{R}v'$، آنگاه $v - v' \in Y$. چون Y یک زیرفضاست، پس $-(v - v') = v' - v \in Y$ در نتیجه $v'\mathcal{R}v$. سرانجام اگر $v\mathcal{R}v'$ و $v'\mathcal{R}v''$ آنگاه $v - v' \in Y$ و $v' - v'' \in Y$. در این‌صورت باز بااستفاده از زیرفضابودن Y داریم $v - v'' \in Y$.
نخستین چیزی که برای اثبات زیرفضا بودن $V/\mathcal{R}$ باید تحقیق کنیم، معنی‌دار بودن تعریف عملهاست. این بدان معنی است که اگر $[v_1] = [v]$، و $[v_1'] = [v']$، آنگاه $[v + v'] = [v_1 + v_1']$.
بنابر فرض داریم $v - v_1 \in Y$، $v' - v_1' \in Y$، و از این‌رو

$$(v - v_1) + (v' - v_1') = v + v' - (v_1 + v_1') \in Y$$

و $[v_1+v'_1]=[v+v']$. اینک گیریم $[v]=[v']$، و $\alpha\in F$. باید نشان دهیم که $[\alpha v]=[\alpha v']$. در این‌صورت $v-v'\in Y$، و چون Y یک زیرفضاست، پس $\alpha(v-v')=\alpha v-\alpha v'\in Y$. بنابراین $[\alpha v]=[\alpha v']$. تحقیق درستی اصول فضای برداری بااستفاده از تعریفها به‌آسانی انجام و به‌عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود.

سرانجام، فرض می‌کنیم V متناهی‌ـبعد است. در این‌صورت نگاشت

$$T:v\to[v]$$

یک تبدیل خطی از V بر $V/\mathcal{R}$ است. بنابر قضیهٔ (۹.۱۳)

$$\dim T(V)+\dim n(T)=\dim V$$

که در آن $n(T)$ صفرـفضای T است. داریم $T(V)=V/\mathcal{R}$، و

$$n(T)=\{v|[v]=[0]\}=\{v|v-0\in Y\}=Y$$

از قراردادن آن در دستور (۹.۱۳) داریم

$$\dim V/\mathcal{R}+\dim Y=\dim V$$

و قضیه ثابت می‌شود.

(۵.۲۶) تعریف. گیریم V یک فضای برداری روی F و Y یک زیرفضای آن باشد. فضای برداری $V/\mathcal{R}$ که در قضیهٔ (۴.۲۶) تعریف شد، فضای خارج‌قسمت V بر Y نام دارد و با V/Y نشان داده می‌شود.

اینک ببینیم که این ساختمان برحسب تبدیلات خطی و ماتریسها چه معنایی دارد.

(۶.۲۶) تعریف. گیریم $T\in L(V,V)$، و Y زیرفضایی از V باشد که نسبت به T، پایاست. $T(Y)\subset Y$، گیریم

$$T_Y:Y\to Y$$

نگاشتی باشد که با

$$T_Y(y)=T(y),\qquad y\in Y$$

تعریف شده است. گیریم

$$T_{V/Y}:V/Y\to V/Y$$

با

$$T_{V/Y}([v]) = [Tv]$$

تعریف شود. در این‌صورت $T_Y \in L(Y,Y)$ و $T_{V/Y} \in L(V/Y, V/Y)$. تبدیل T_Y تحدید I به Y نامیده می‌شود، در حالی‌که $T_{V/Y}$ تبدیل روی V/Y نامیده می‌شود که بر اثر T القا شده است.

در این تعریف باید دو نکته مورد تحقیق قرار گیرد. آشکار است که $T_Y \in L(Y,Y)$، زیرا Y نسبت به T پایاست. اینک باید نشان دهیم که تعریف $T_{V/Y}$ قابل‌توجیه است، به دیگر سخن $[v] = [v']$ ایجاب می‌کند $[Tv] = [Tv']$. ولی $[v] = [v']$ ایجاب می‌کند $v - v' \in Y$ و $T(v - v') \in Y$. در این‌صورت $Tv - Tv' \in Y$ و $[Tv] = [Tv']$. برای اثبات $T_{V/Y} \in L(V/Y, V/Y)$، داریم

$$\begin{aligned} T([v_1] + [v_2]) &= T([v_1 + v_2]) = [T(v_1 + v_2)] = [Tv_1 + Tv_2] \\ &= [Tv_1] + [Tv_2] = T[v_1] + T[v_2] \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} T(\alpha[v]) &= T([\alpha v]) = [T(\alpha v)] = [\alpha(Tv)] = \alpha[Tv] \\ &= \alpha(T[v]) \end{aligned}$$

(۷.۲۶) قضیه. گیریم Y یک زیرفضای ناصفر از یک فضای برداری متناهی‌ـبعد V باشد که نسبت به تبدیل خطی $T \in L(V,V)$ پایاست. گیریم $\{v_1, \cdots, v_n\}$ پایه‌ای برای V باشد به‌گونه‌ای که $\{v_1, \cdots, v_k\}$ پایه‌ای برای Y باشد. اگر $Y \neq V$، آنگاه $k < n$ و $[v_{k+1}]$ ، ... ، $[v_n]$ پایه‌ای برای V/Y است. گیریم $\mathbf{A} = (\alpha_{ij})$ ماتریس T نسبت به پایهٔ $\{v_1, \cdots, v_n\}$ باشد. در این‌صورت $\mathbf{A}$ به‌شکل

$$\begin{array}{cc} & \overset{\leftarrow k \rightarrow}{\phantom{\mathbf{A}_1}} \; | \; \overset{\leftarrow n-k \rightarrow}{\phantom{\mathbf{A}_3}} \\ \mathbf{A} = \begin{array}{c} \updownarrow k \\ \updownarrow n-k \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_3 \\ \hline 0 & \mathbf{A}_2 \end{array}\right) \end{array}$$

است که در آن $\mathbf{A}_1$، $\mathbf{A}_2$ و $\mathbf{A}_3$ به‌ترتیب ماتریسهای k در k، $(n-k)$ در $(n-k)$ و k در $(n-k)$ هستند. در این‌صورت $\mathbf{A}_1$ ماتریس T_Y نسبت به پایهٔ $\{v_1, \cdots, v_k\}$ و $\mathbf{A}_2$ ماتریس $T_{V/Y}$ نسبت به پایهٔ $\{[v_{k+1}], \cdots, [v_n]\}$ خواهد بود.

برهان. نخست نشان می‌دهیم که $\{[v_{k+1}], \cdots, [v_n]\}$ پایه‌ای است برای V/Y. گیریم $[v] \in V/Y$؛ در این‌صورت

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

و

$$\begin{aligned} [v] &= \alpha_1[v_1] + \cdots + \alpha_k[v_k] + \alpha_{k+1}[v_{k+1}] + \cdots + \alpha_n[v_n] \\ &= \alpha_{k+1}[v_{k+1}] + \cdots + \alpha_k[v_n] \end{aligned}$$

چون در V/Y، تساویهای $[v_1] = \cdots = [v_k] = 0$ برقرارند، بنابراین V/Y به‌وسیلهٔ $\{[v_{k+1}], \cdots, [v_n]\}$ تولید می‌شود. اینک فرض کنید:

$$\beta_{k+1}[v_{k+1}] + \cdots + \beta_n[v_n] = 0, \qquad \beta_i \in F$$

در این‌صورت

$$\beta_{k+1}v_{k+1} + \cdots + \beta_n v_n \in Y$$

و از این‌رو

$$\beta_{k+1}v_{k+1} + \cdots + \beta_n v_n = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$$

برای برخی از $\alpha_i \in F$. چون $\{v_1, \cdots, v_n\}$ نابسته خطی‌اند، داریم

$$\beta_{n+1} = \cdots = \beta_n = 0$$

حال می‌خواهیم ماتریس T را نسبت به پایهٔ $\{v_1, \cdots, v_n\}$ حساب کنیم. چون Y نسبت به T پایاست، پس $T(v_i) \in Y$، برای $1 \le i \le k$. بنابراین داریم

$$T(v_1) = \alpha_{11}v_1 + \alpha_{21}v_2 + \cdots + \alpha_{k1}v_k$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$T(v_k) = \alpha_{1k}v_1 + \alpha_{2k}v_2 + \cdots + \alpha_{kk}v_k$$

بقیهٔ معادلات بدین قرارند:

$$T(v_{k+1}) = \alpha_{1,k+1}v_1 + \cdots + \alpha_{k,k+1}v_k + \alpha_{k+1,k+1}v_{k+1} + \cdots + \alpha_{n,k+1}v_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$T(v_n) = \alpha_{1n}v_1 + \cdots + \alpha_{kn}v_k + \alpha_{k+1,n}v_{k+1} + \cdots + \alpha_{nn}v_n$$

در این صورت

$$T_{V/Y}([v_{k+1}]) = \alpha_{k+1,k+1}[v_{k+1}] + \cdots + \alpha_{n,k+1}[v_n]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$T_{V/Y}([v_n]) = \alpha_{k+1,n}[v_{k+1}] + \cdots + \alpha_{nn}[v_n].$$

گیریم

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{kk} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{k+1,k+1} & \cdots & \alpha_{k+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n,k+1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} \alpha_{1,k+1} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{k,k+1} & \cdots & \alpha_{kn} \end{pmatrix}.$$

نشان دادیم که ماتریس $\mathbf{A}$ی T نسبت به پایهٔ $\{v_1, \cdots, v_n\}$ دارای شکل مذکور در قضیه است، و $\mathbf{A}_1$ و $\mathbf{A}_2$ به‌ترتیب ماتریسهای T_Y و $T_{V/Y}$ هستند. که در نتیجه برهان قضیه کامل می‌شود.

مثال الف. گیریم $\mathbf{A}$ ماتریس

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

و V یک فضای برداری روی R با پایهٔ $\{v_1, \cdots, v_4\}$ باشد. گیریم $T \in L(V, V)$ تبدیلی خطی باشد که ماتریس آن نسبت به این پایه برابر $\mathbf{A}$ است. بنابر قضیهٔ (۷.۲۶)

$$Y = S(v_1, v_2)$$

نسبت به T پایا و ماتریسهای T_Y و $T_{V/Y}$ نسبت به پایه‌های $\{v_1, v_2\}$ و $\{[v_3], [v_4]\}$ به‌ترتیب

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

هستند.

اینک به مفهوم مهم فضای برداری دوگان بازمی‌گردیم. اندیشه‌ای که در پس این ساختمان نهفته، این است که برای هر فضای برداری V و هر تبدیل خطی $T \in L(V, V)$ یک فضای

برداری V^* به‌نام دوگان V وجود دارد که نوعی آینه برای V است، و یک تبدیل خطی T^* روی V^* وجود دارد که رفتار T را منعکس می‌سازد.

(۸.۲۶) تعریف. گیریم V یک فضای برداری متناهی‌ـبعد روی F باشد. V^* یعنی فضای دوگان V به‌صورت فضای برداری $L(V, F)$ تعریف می‌شود، که در آن F با فضای برداری یک‌ـتاییها روی F یکی گرفته می‌شود. عناصر V^* همان توابع f از V در F هستند به‌گونه‌ای که $f(v_۱ + v_۲) = f(v_۱) + f(v_۲)$، $v_۱, v_۲ \in V$ و $f(\alpha v) = \alpha f(v)$، $\alpha \in F, v \in V$. عناصر V^* توابع خطی روی V نامیده می‌شوند.

(۹.۲۶) لم. گیریم $\{v_۱, \cdots, v_n\}$ پایه‌ای برای V روی F باشد. در این‌صورت توابع خطی $\{f_۱, \cdots, f_n\}$ وجود دارند به‌گونه‌ای که برای هر i

$$f_i(v_i) = ۱, \qquad f_i(v_j) = ۰, \qquad j \neq i$$

توابع خطی $\{f_۱, \cdots, f_n\}$ پایه‌ای برای V^* روی F تشکیل می‌دهند، که پایهٔ دوگان برای $\{v_۱, \cdots, v_n\}$ خوانده می‌شود.

برهان. قبل از همه، به‌موجب قضیهٔ (۱.۱۳) این توابع خطی وجود دارند که به ما اجازه می‌دهند تبدیلاتی خطی را که عناصر پایهٔ یک فضای برداری را بر بردارهای دلخواه در فضای نگاره، می‌نگارند تعریف کنیم. سپس نشان می‌دهیم که $\{f_۱, \cdots, f_n\}$ نابسته‌ـخطی‌اند. فرض کنیم که

$$\alpha_۱ f_۱ + \cdots + \alpha_n f_n = ۰, \qquad \alpha_i \in F$$

در این‌صورت از تأثیر دو طرف برابری بر $v_۱$، بااستفاده از تعریف عملیات روی فضای برداری V^* داریم

$$\alpha_۱ f_۱(v_۱) + \alpha_۲ f_۲(v_۱) + \cdots + \alpha_n f_n(v_۱) = ۰$$

بنابراین $\alpha_۱ = ۰$ زیرا $f_۱(v_۱) = ۱$ و $f_۲(v_۱) = \cdots = f_n(v_۱) = ۰$ به‌روش مشابه ثابت می‌شود $\alpha_۲ = \cdots = \alpha_n = ۰$.

سرانجام نشان می‌دهیم که $\{f_۱, \cdots, f_n\}$ یک مجموعه از مولدهای V^* را تشکیل می‌دهند. گیریم $f \in V^*$، و $f(v_i) = \alpha_i$، $i = ۱, ۲, \cdots, n$. در این‌صورت با اثر هر دو طرف تساوی به‌نوبت بر عناصر پایهٔ $\{v_۱, \cdots, v_n\}$ به‌آسانی دیده می‌شود که

$$f = \alpha_۱ f_۱ + \cdots + \alpha_n f_n$$

که برهان لم را کامل می‌سازد.

(۱۰.۲۶) قضیه. گیریم $T \in L(V,V)$. نگاشت $T^* : V^* \to V^*$ را با قاعدهٔ

$$(T^*f)(x) = f(Tx), \qquad x \in V$$

برای همهٔ $f \in V^*$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $T^* \in L(V^*, V^*)$، و ترانهادهٔ تبدیل خطی T نامیده می‌شود.

برهان. چندین حکم هستند که باید صحت آنها را تحقیق کنیم. قبل از همه، T^*f یک تابع خطی است، زیرا برای همهٔ $v_1, v_2 \in V$ و $f \in V^*$ داریم

$$\begin{aligned}(T^*f)(v_1 + v_2) &= f[T(v_1 + v_2)] = f[T(v_1)] + f[T(v_2)] \\ &= (T^*f)(v_1) + (T^*f)(v_2)\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}(T^*f)(\alpha v) &= f[T(\alpha v)] = f[\alpha(Tv)] = \alpha f(Tv) \\ &= \alpha[T^*f(v)], \qquad v \in V, \alpha \in F\end{aligned}$$

بعد باید تحقیق کنیم که $T^* \in L(V^*, V^*)$. برای $f_1, f_2 \in V^*$ داریم

$$\begin{aligned}[T^*(f_1 + f_2)](v) &= (f_1 + f_2)(Tv) = f_1(Tv) + f_2(Tv) \\ &= (T^*f_1 + T^*f_2)(v)\end{aligned}$$

بعلاوه برای هر $v \in V$ و هر $\alpha \in F$ داریم

$$\begin{aligned}[T^*(\alpha f)](v) &= (\alpha f)(Tv) = f[\alpha(Tv)] = f[T(\alpha v)] \\ &= (T^*f)(\alpha v) = [\alpha(T^*f)](v)\end{aligned}$$

توجه به چگونگی استفاده از خطی‌بودن T و f و عملیات فضای برداری روی V^*، در این بررسی، جالب است.

(۱۱.۲۶) قضیه. گیریم $T \in L(V,V)$ و $\{v_1, \cdots, v_n\}$ پایه‌ای برای V، و $\{f_1, \cdots, f_n\}$ پایهٔ دوگان برای V^*، به‌معنای لم (۹.۲۶) است. گیریم $\mathbf{A}$ ماتریس T نسبت به پایهٔ $\{v_1, \cdots, v_n\}$ باشد. در این‌صورت ماتریس T^* نسبت به پایهٔ $\{f_1, \cdots, f_n\}$ ترانهادهٔ ماتریس ${}^t\mathbf{A}$ است. (یادآوری می‌کنیم که اگر α_{ij} عنصر واقع در سطر iام و ستون jام $\mathbf{A}$ باشد، آنگاه عنصر واقع در سطر iام و ستون jام ${}^t\mathbf{A}$ برابر α_{ji} است).

برهان. داریم

$$Tv_i = \sum_{j=۱}^{n} \alpha_{ji} v_j$$

فرض کنید

$$T^* f_i = \sum_{j=۱}^{n} \beta_{ji} f_j$$

که در آن $\{f_۱, \cdots, f_n\}$ پایهٔ دوگان V^* نسبت به پایهٔ $\{v_۱, \cdots, v_n\}$ از V است. باید نشان دهیم که برای هر i و j داریم $\beta_{ji} = \alpha_{ij}$. از اثر هر دو طرف برابری دوم بر یک بردار پایهٔ دلخواه v_k از V به‌دست می‌آوریم

$$T^* f_i(v_k) = \sum_{j=۱}^{n} \beta_{ji} f_j(v_k)$$

سمت چپ برابر است با

$$\begin{aligned} T^* f_i(v_k) &= f_i(Tv_k) = f_i\left(\sum_{j=۱}^{n} \alpha_{jk} v_j\right) \\ &= \sum_{j=۱}^{n} \alpha_{jk} f_i(v_j) = \alpha_{ik} \end{aligned}$$

طرف سمت راست برابر است با

$$\sum_{j=۱}^{n} \beta_{ji} f_j(v_k) = \beta_{ki} \quad .$$

و نشان دادیم که برای هر i و k داریم $\alpha_{ik} = \beta_{ki}$، که برهان قضیه را کامل می‌سازد.

تمرینها

۱.نشان دهید که مفهومهای زیر رابطه‌های هم‌ارزی هستند:

الف) هم‌ارزی جفتهای مرتب نقطه‌ها در صفحه (← مثالهای الف تا پ از بخش ۳)، یعنی $(A, B) \sim (C, D)$، اگر $B - A = D - C$.

ب) هم‌ارزی سطری ماتریسها (از بخش ۶)

پ) تشابه ماتریسها.

۲.گیریم Y زیرفضایی از فضای برداری متناهی‌ـبعد V باشد، و برای یک فضای Y'، $V = Y \oplus Y'$. ثابت کنید که دو فضای برداری Y' و V/Y یکریخت‌اند [$\leftarrow$ تعریف (۱۴.۱۱)]. با آوردن مثالی نشان دهید که یک زیرفضای داده شدهٔ Y از V می‌تواند بیش از یک زیرفضای مکمل Y' داشته باشد به‌گونه‌ای که $V = Y \oplus Y'$.

۳.گیریم V یک فضای برداری متناهی‌ـبعد روی F است و $T \in L(V, V)$، و فرض می‌کنیم Y یک زیرفضای Tـپایاست، با $Y \neq 0$، $Y \neq V$.

الف) ثابت کنید که چندجمله‌ییهای مینیمال تحدید T_Y و نگاشت القایی $T_{V/Y}$، چندجمله‌یی مینیمال T را عاد می‌کنند.

ب) باتوجه به قسمت (الف)، آیا چندجمله‌یی مینیمال T با حاصلضرب چندجمله‌ییهای مینیمال T_Y و $T_{V/Y}$ برابرند؟

۴.گیریم V، Y و T همانهایی باشند که در تمرین ۳ آمده‌اند. نشان دهید که اگر تساویهای $T_Y = 0$ و $T_{V/Y} = 0$ هر دو برقرار باشند، آنگاه T صفرـتوان است، و در حقیقت $T^2 = 0$.

۵.گیریم V و W دو فضای برداری روی F هستند و $T \in L(V, W)$. اگر Y یک زیرفضای V باشد، نشان دهید که

$$[v] \to Tv, \qquad [v] \in V/Y$$

معرف یک تبدیل خطی از V/Y به W است اگر و تنها اگر $Y \subset n(T)$.

۶.گیریم V، W، T و Y همانهایی هستند که در تمرین ۵ آمده‌اند. نشان دهید که اگر $n(T) = Y$، آنگاه تبدیل خطی القایی $T_{V/Y}$ یک یکریختی از V/Y بر روی برد $T(V)$ از T است.

۷.گیریم $T_1, T_2 \in L(V, V)$. نشان دهید که

$$(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$$

۸.ثابت کنید که چندجمله‌یی مینیمال $T \in L(V, V)$ با چندجمله‌یی مینیمال T^* برابر است.

۲۷. صورتهای دوخطی و دوگانی

این بخش را با نگرشی متفاوت و کلیتر به رابطهٔ بین یک فضای برداری و دوگان آن، آغاز می‌کنیم.

(۱.۲۷) تعریف. هر صورت دوخطی روی یک جفت از فضاهای برداری V و V' روی F، تابعی است مانند B که به هر جفت مرتب (v, v')، با $v \in V$، $v' \in V'$، یک عضو معین و یکتای $B(v, v')$ از F را مربوط می‌سازد، به‌گونه‌ای که شرطهای زیر، برای $v, v_1, v_2 \in V$ و $v', v'_1, v'_2 \in V'$، $\alpha \in F$، برقرار باشند

$$B(v_1 + v_2, v') = B(v_1, v') + B(v_2, v')$$

$$B(v, v'_1 + v'_2) = B(v, v'_1) + B(v, v'_2)$$

$$B(\alpha v, v') = B(v, \alpha v') = \alpha B(v, v')$$

مثال الف. گیریم V یک فضای‌برداری روی F، و V^* فضای برداری دوگان آن است، $V^* = L(V, F)$. فرض می‌کنیم

$$B(v, f) = f(v)\,, \qquad f \in V^*\,, \qquad v \in V$$

در این‌صورت B یک صورت دوخطی روی دو فضای برداری (V, V^*) است.
برهان آن در بخش پیشین آمده است. خواننده باید توجه کند که عملهای فضای برداری روی V^* به‌گونه‌ای تعریف شده‌اند که نگاشت $(v, f) \to f(v)$ اجباراً یک صورت دوخطی باشد.

مثال ب. فرض کنیم V و W فضاهایی برداری روی F، به‌ترتیب با پایه‌های متناهی $\{v_1, \cdots, v_n\}$ و $\{w_1, \cdots, w_n\}$ باشند. فرض کنیم $\mathbf{A} = (\alpha_{ij})$ یک ماتریس مشخص m در n با ضرایب متعلق به F است، فرض کنیم

$$v = \xi_1 v_1 + \cdots + \xi_m v_m \in V$$

$$w = \eta_1 w_1 + \cdots + \eta_n w_n \in W$$

و تعریف می‌کنیم

$$B(v, w) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_i \eta_j$$

در این‌صورت $B(v, w)$ معرف یک صورت دوخطی روی (V, W) است. تحقیق درستی این حقیقت به‌عنوان تمرین واگذار می‌شود.

(۲.۲۷) تعریف. هر صورت دوخطی $B : (V, V') \to F$ ناتبهگون نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای هر $v' \in V'$ تساوی $B(v, v') = 0$ تساوی $v = 0$ را ایجاب کند، و به‌ازای هر $v \in V$ تساوی $B(v, v') = 0$ تساوی $v' = 0$ را ایجاب کند.
زیرا کاربرد استدلالهای معمولی بااستفاده از اصول موضوعهٔ فضاهای برداری در صورتهای دوخطی، نشان می‌دهد که برای هر v، v' به‌ترتیب در V و V':

$$B(0, v') = B(v, 0) = 0$$

و شرط ناتبهگونی حکم می‌کند که معادلهٔ $B(v, v') = \circ$ برای همهٔ v'ها، فقط در حالت منحصربه‌فردی که برقراری آن اجباری است، یعنی وقتی $v = \circ$، برقرار باشد.

(۳.۲۷) قضیه. گیریم (V, W) دو فضای برداری متناهی‌ـبعد، و $B(v, w)$ یک صورت دوخطی ناتبهگون روی $F \leftarrow (V, W)$ باشند. برای بردار مشخص $w \in W$ نگاشت $\varphi_w : V \to F$ را با

$$\varphi_w(v) = B(v, w) \ , \qquad v \in V$$

تعریف می‌کنیم. در این‌صورت نگاشت φ_w به V^* تعلق دارد، و نگاشت

$$\Phi : W \to V^*$$

که با تساوی

$$\Phi(w) = \varphi_w$$

تعریف می‌شود یک یکریختی است از W به‌روی V^*. به‌طریق مشابه V با W^* یکریخت است.

برهان. تعریف یک صورت دوخطی ایجاب می‌کند که برای هر $w \in W$، φ_w به فضای دوگان V^* تعلق داشته باشد، و نگاشت

$$w \to \Phi(w) = \varphi_w$$

یک تبدیل خطی از W در V^* باشد. (جزئیات بررسی درستی این احکام قبلاً چندین بار در سایر مباحث ارائه شده و این‌بار از ذکر آن خودداری می‌شود.) برای اینکه نشان دهیم Φ یک یکریختی است، باید نشان دهیم که Φ یک‌به‌یک و پوشاست. نخست فرض می‌کنیم $\Phi(w) = \Phi(w')$؛ در این‌صورت برای هر $v \in V$،

$$B(v, w) = B(v, w')$$

به‌سبب دوخطی‌بودن B، نتیجه می‌شود که برای هر $v \in V$

$$B(v, w - w') = \circ$$

و بنابر ناتبهگونی B، داریم $w = w'$. پس Φ یک‌به‌یک است، و از آنجا نتیجه می‌شود که

$$\dim V^* \geq \dim W$$

تاکنون تنها از نصف تعریف ناتبهگونی استفاده کردیم. بااستفاده از نیم دیگر با استدلالی مشابه، یک تبدیل خطی یک‌به‌یک از V در W^* به‌دست می‌آوریم، بنابراین

$$\dim W^* \geq \dim V$$

بااستفاده از نتیجهٔ بخش پیش مبنی بر اینکه $\dim W = \dim W^*$ و غیره، داریم

$$\dim V^* \geq \dim W = \dim W^* \geq \dim V$$

از آنجا نتیجه می‌شود

$$\dim V^* = \dim W$$

و چون $\Phi(W) \subset V^*$ و $\dim \Phi(W) = \dim V^*$،نتیجه می‌گیریم که Φ پوشاست. بنابراین Φ یک یکریختی است و قضیه ثابت می‌شود.

(۴.۲۷) نتیجه. گیریم V، W، و B همانهایی باشند که در قضیه آمده بودند. در این‌صورت $\dim V = \dim W$.

این قضیه تعریف زیر را اندکی طبیعی جلوه‌گر می‌سازد.

(۵.۲۷) تعریف. دو فضای برداری متناهی‌ـبعد V و W، نسبت به صورت دوخطی $B : (V, W) \to F$ دوگان نامیده می‌شوند به‌شرط اینکه B ناتبهگون باشد.

به‌عبارت دیگر، V و W نسبت به B دوگان یکدیگرند، هرگاه به‌موجب قضیهٔ قبل، هر فضای برداری با فضای دوگان دیگری، از راه نگاشتهایی که توسط B تعریف می‌شود، یکریخت باشد.

(۶.۲۷) تعریف. گیریم V و V' فضاهای برداری متناهی‌ـبعدی هستند که نسبت به یک صورت دوخطی B دوگان‌اند. فرض می‌کنیم $T \in L(V, V)$ و $T' \in L(V', V')$، در این‌صورت T و T' ترانهادهٔ همدیگر نامیده می‌شوند به‌شرط اینکه برای هر $v \in V$ و $v' \in V'$؛

$$B(v, T'(v')) = B(T(v), v')$$

(۷.۲۷) قضیه. گیریم V و V' دو فضای برداری متناهی‌ـبعد باشند که نسبت به صورت دوخطی B دوگان یکدیگرند. اگر $T \in L(V, V)$، آنگاه یک تبدیل خطی معین یکتای $T' \in L(V', V')$ وجود دارد به‌گونه‌ای که T و T' ترانهادهٔ یکدیگرند. به‌همین نحو هر تبدیل خطی $S \in L(V', V')$ در $L(V, V)$ یک ترانهادهٔ یکتا دارد.

برهان. به‌علت تقارن موجود،کافی است تنها حکم نخست را ثابت کنیم.گیریم $T \in L(V, V)$؛ باید نشان دهیم که برای هر $v' \in V'$ یک عضو یکتای $v'_1 \in V'$ وجود دارد به‌گونه‌ای که

$$B(v, v'_1) = B(T(v), v), \qquad v \in V \qquad (۸.۲۷)$$

پس می‌توانیم $T'(v')$ را همان v'_1 تعریف کنیم. چون T یک تبدیل خطی است، نگاشت

$$v \to B(T(v), v')$$

عضوی از فضای دوگان V است. بنابر قضیهٔ (۳.۲۷) یک عضو یکتای $v'_1 \in V'$ وجود دارد به‌گونه‌ای که (۸.۲۷) برقرار است. اینک $T' : V' \to V'$ را به‌صورت $T'(v') = v'_1$ تعریف می‌کنیم. در این‌صورت برای هر $v \in V$ و $v' \in V$ داریم:

$$B(v, T'(v')) = B(T(v), v') \qquad (۹.۲۷)$$

باید ثابت کنیم که $T' \in L(V', V')$. برهان این حقیقت توضیح خوبی برای چگونگی استفاده از فضاهای برداری دوگان است. باید نشان دهیم که برای هر $\alpha, \beta \in F$ و $v'_1, v'_2 \in V'$،

$$T'(\alpha v'_1 + \beta v'_2) = \alpha T'(v'_1) + \beta T'(v'_2) \qquad (۱۰.۲۷)$$

نحوهٔ تفکر ما برای اثبات، این است که نشان دهیم برای هر $v \in V$

$$B(v, T'(\alpha v'_1 + \beta v'_2)) = B(v, \alpha T'(v'_1) + \beta T'(v'_2))$$

و سپس از ناتبهگونی این‌صورت برای نتیجه‌گیری (۱۰.۲۷) استفاده کنیم. از (۹.۲۷) داریم

$$\begin{aligned} B(v, T'(\alpha v'_1 + \beta v'_2)) &= B(Tv, \alpha v'_1 + \beta v'_2) \\ &= \alpha B(Tv, v'_1) + \beta B(Tv, v'_2) \\ &= \alpha B(v, T'(v'_1)) + \beta B(v, T'(v'_2)) \\ &= B(v, \alpha T'(v'_1) + \beta T'(v'_2)) \end{aligned}$$

همان‌گونه که می‌خواستیم. اینک که وجود یک ترانهاده را ثابت کردیم، تنها اثبات یکتایی آن باقی می‌ماند. ولی اگر تبدیلهای T' و T'' در $L(V', V')$ موجود باشند چنان‌که برای همهٔ $v \in V$ها، $v' \in V'$ها در

$$B(Tv, v') = B(v, T'(v')) = B(v, T''(v'))$$

صدق کنند، آنگاه از ناتبهگونی B نتیجه می‌شود $T' = T''$، که اثبات قضیه را کامل می‌کند.

به یک معنی، ما در حقیقت از مفهوم دوگان یک فضای برداری و ترانهادهٔ یک تبدیل خطی فراتر نرفته‌ایم. ولی زبان فضاهای دوگان در بعضی کاربردها ساده‌تر و مناسبتر است، همان‌گونه که بعداً در این فصل خواهیم دید.

(۱۱.۲۷) تعریف. گیریم V و V'، دو فضای برداری دوگان روی F نسبت به یک‌صورت دوخطی ناتبهگون B باشند. گیریم V_1 و V'_1 به‌ترتیب زیرفضاهای V و V' باشند. $V_1^{\perp}$ پوچساز V_1 (نسبت به B) را به‌صورت زیرفضایی از V' متشکل از همهٔ v'هایی تعریف می‌کنیم که برای هر $v_1 \in V_1$ تساوی، $B(v_1, v') = 0$ یا به‌طور ساده تساوی $B(V_1, v') = 0$ برقرار باشد. به‌روش مشابه تعریف می‌کنیم:

$$(V'_1)^{\perp} = \{v \in V | B(v, V'_1) = 0\}$$

توجه می‌کنیم که $V_1^{\perp}$ و $(V'_1)^{\perp}$، به دلیل این واقعیت که B یک‌صورت دوخطی است، در حقیقت دو زیرفضا هستند. ناتبهگونی B هم‌ارز با حکمهای $V^{\perp} = 0$ و $(V')^{\perp} = 0$ است. همچنین توجه می‌کنیم که کاربرد یک نماد $\perp$ برای پوچسازهای زیرفضاهای V و V' هیچ اشتباهی را سبب نمی‌شود، زیرا معنی آن در هر مورد آشکار است.

قضیهٔ زیر قضیهٔ عمده‌ای دربارهٔ پوچسازهاست. در صورت آن به فضاهای خارج‌قسمت و تبدیلهای خطی القایی (که در بخش ۲۶ معرفی شده) اشاره شده است.

(۱۲.۲۷) قضیه. گیریم V و V' فضاهای برداری متناهی‌ـبعد باشند که نسبت به یک‌صورت دوخطی ناتبهگون B دوگان یکدیگرند، و گیریم V_1 و V'_1 به‌ترتیب زیرفضاهای V و V' باشند.

الف) $\dim V_1 + \dim V_1^{\perp} = \dim V, \dim (V'_1)^{\perp} + \dim V'_1 = \dim V'$

ب) $(V_1^{\perp})^{\perp} = V_1, ((V'_1)^{\perp})^{\perp} = V'_1$

پ) نگاشت $V_1 \to V_1^{\perp}$ نگاشتی است یک‌به‌یک از مجموعهٔ زیرفضاهای برداری V بر مجموعهٔ زیرفضاهای برداری V'، به‌گونه‌ای که برای همهٔ زیرفضاهای V_1 و V_2 از V شرط $V_1 \subset V_2$ مستلزم برقراری شرط $V_1^{\perp} \supset V_2^{\perp}$ است.

ت) اگر $V = V_1 \oplus V_2$، آنگاه $V' = V_1^{\perp} \oplus V_2^{\perp}$

ث) فضاهای برداری V_1 و $V'/V_1^{\perp}$، نسبت به‌صورت دوخطی ناتبهگون B_1 که با

$$B_1(v_1, [v']) = B(v_1, v'), \ v_1 \in V_1, \ [v'] \in V'/V_1^{\perp}$$

تعریف شده، دوگان یکدیگرند.

ج) فرض می‌کنیم $T \in L(V, V)$ و $T' \in L(V', V')$ نسبت به B ترانهادهٔ یکدیگر باشند، و فرض می‌کنیم V_1 یک زیرفضای Tـپایای V باشد. در این‌صورت $V_1^{\perp}$ نسبت به T' پایاست

و تحدید $T_{V_۱}$ و تبدیل خطی القایی $(T')_{V'/V_۱^{\perp}}$، نسبت به صورت دوخطی $B_۱$ که در قسمت (ث) تعریف شده، ترانهادهٔ همدیگرند.

برهان. الف) گیریم $\{v_۱, \cdots, v_k\}$ یک پایهٔ $V_۱$ است و آن را به یک پایهٔ $\{v_۱, \cdots, v_n\}$ از V گسترش می‌دهیم. چون V' با فضای دوگان V بنابر (۳.۲۷) یکریخت است، می‌توانیم یک پایهٔ $\{v'_۱, \cdots, v'_n\}$ از V' را متناظر با پایهٔ دوگان V^* نسبت به $\{v_۱, \cdots, v_n\}$ (از بخش ۲۶) بیابیم. به دیگر سخن یک پایهٔ $\{v'_۱, \cdots, v'_n\}$ از V' وجود دارد به‌گونه‌ای که:

$$B(v_i, v'_j) = \begin{cases} ۰ & i \neq j \\ ۱ & i = j \end{cases} \qquad (۱۳.۲۷)$$

حکم می‌کنیم که $\{v'_{k+۱}, \cdots, v'_n\}$ پایه‌ای است برای $V_۱^{\perp}$. روشن است که همهٔ این عضوها بنابر (۱۳.۲۷) به $V_۱^{\perp}$ تعلق دارند. اینک گیریم $v' = \xi_۱ v'_۱ + \cdots + \xi_n v'_n \in V_۱^{\perp}$. چون $B(v_۱, v') = \cdots = B(v_k, v') = ۰$ بنابر (۱۳.۲۷) داریم $\xi_۱ = \cdots = \xi_k = ۰$، و حکم ثابت می‌شود. ثابت کردیم که $\dim V_۱^{\perp} = \dim V - \dim V_۱$.برهان نیمهٔ دیگر (الف) درست به همین روش صورت می‌گیرد و از ذکر آن صرفنظر می‌شود.

ب) از تعریف پوچسازها داریم $V_۱ \subset (V_۱^{\perp})^{\perp}$. از قسمت (الف) داریم

$$\begin{aligned} \dim(V_۱^{\perp})^{\perp} &= \dim V' - \dim(V_۱^{\perp}) \\ &= \dim V' - (\dim V - \dim V_۱) \\ &= \dim V_۱, \end{aligned}$$

زیرا بنابر نتیجهٔ (۴.۲۷) $\dim V' = \dim V$. چون $V_۱ \subset (V_۱^{\perp})^{\perp}$، پس آنها برابرند. قسمت دوم (ب) درست به روش مشابه ثابت می‌شود.

پ) تعریف پوچساز ایجاب می‌کند که از $V_۱ \subset V_۲$ نتیجه شود $V_۱^{\perp} \supset V_۲^{\perp}$. برای ویژگی یک‌به‌یک، فرض می‌کنیم $V_۱^{\perp} = V_۲^{\perp}$. بااستفاده از (ب) داریم

$$V_۱ = (V_۱^{\perp})^{\perp} = ((V_۲)^{\perp})^{\perp} = V_۲$$

اثبات اینکه برای یک زیرفضای $V_۱$ از V هر زیرفضای V' به‌شکل $V_۱^{\perp}$ است، به خواننده واگذار می‌شود. [راهنمایی: از حکم دوم (ب) استفاده کنید.]

ت) از (الف) نتیجه می‌شود $\dim V_۱^{\perp} + \dim V_۲^{\perp} = \dim V'$. کافی است ثابت کنیم که $V_۱^{\perp} \cap V_۲^{\perp} = ۰$. گیریم $v' \in V_۱^{\perp} \cap V_۲^{\perp}$. چون $V = V_۱ \oplus V_۲$، بنابر ناتبهگونی B، داریم $v' \in V^{\perp} = \{۰\}$.

ث) نخست باید نشان دهیم که $B_۱$ به‌خوبی تعریف شده است، به دیگر سخن، اگر در $V_۱$، $v_۱ = w_۱$ و در $V'/V_۱^{\perp}$، $[v'] = [w']$، آنگاه باید نشان دهیم که $B(v_۱, v') = B(w_۱, w')$.

چون $[w'] = [v']$، برای $z' \in V_1^\perp$ داریم $v' = w' + z'$. در این‌صورت

$$B(v_1, v') = B(w_1, w' + z') = B(w_1, w')$$

زیرا $w_1 \in V_1$ و $z' \in V_1^\perp$. اینک دوخطی‌بودن B_1 بی‌درنگ از دوخطی‌بودن B نتیجه می‌شود، و آوردن برهان این حقیقت را به خواننده واگذار می‌کنیم. اکنون باید ناتبهگونی B_1 را ثابت کنیم. فرض می‌کنیم که برای $v_1 \in V_1$، $B_1(v_1, V'/V_1^\perp) = 0$. در این‌صورت بنابر تعریف B_1، $B(v_1, V') = 0$ و بنابر ناتبهگونی B، $v_1 = 0$. اکنون فرض می‌کنیم که برای $v' \in V'$ داریم $B_1(V_1, [v']) = 0$. در این‌صورت بنابر تعریف V_1، $B(V_1, v') = 0$ و لذا $v' \in V_1^\perp$. بنابراین $[v'] = 0$ در $V'/V_1^\perp$، و قسمت (ث) ثابت می‌شود.

ج) نخست باید ثابت کنیم $T'(V_1^\perp) \subset V_1^\perp$. گیریم $v' \in V_1^\perp$، و $v_1 \in V_1$. در این‌صورت

$$B(v_1, T'(v')) = B(T(v_1), v') = 0$$

زیرا $T(V_1) \subset V_1$، و داریم $T'(V_1^\perp) \subset V_1^\perp$. اینک کافی است ثابت کنیم که برای $v_1 \in V_1$ و $v' \in V'$:

$$B_1(T_{V_1}(v_1), [v']) = B_1(v_1, T'_{V'/V_1^\perp}([v']))$$

باتوجه به تعریف T_{V_1} و $T'_{V/V_1^\perp}$ این حکم هم‌ارز است با

$$B_1(T(v_1), [v']) = B_1(v_1, [T'v']) \tag{14.27}$$

تعریف B_1 می‌گوید که (۱۴.۲۷) هم‌ارز است با

$$B(T(v_1), v') = B(v_1, T'v')$$

که به‌طور دقیق شرط ترانهاده‌بودن T و T' نسبت به یکدیگر است. در نتیجه برهان قضیه کامل می‌شود.

تمرینها

۱.درستی حکم مذکور در مثال ب را مبنی بر اینکه

$$B(v, w) = \sum \sum \alpha_{ij} \xi_i \eta_j$$

معرف یک صورت دوخطی روی یک جفت فضای برداری (V, W) است، بررسی نمایید.

۲.گیریم V و W دو فضای برداری nبعدی روی F هستند، و B یک‌صورت دوخطی روی (V, W) است که با ماتریس $\mathbf{A}$ی $n \times n$، مذکور در مثال ب، تعریف شده است. نشان دهید که B ناتبهگون است اگر و تنها اگر رتبهٔ $\mathbf{A}$ برابر n باشد.

۳.یک‌صورت دوخطی $B : (V, V) \to F$ روی فضای برداری V با خودش، متقارن نامیده می‌شود اگر برای هر v و v' در V، $B(v, v') = B(v', v)$، و متقارن چپ گفته می‌شود هرگاه برای هر v و v' ، $B(v, v') = -B(v', v)$. ثابت کنید که هر صورت دوخطی B روی (V, V) متقارن است اگر و تنها اگر ماتریس آن $\mathbf{A} = (\alpha_{ij})$ [که در آن $\alpha_{ij} = B(v_i, v_j)$، برای یک پایهٔ ثابت $\{v_i\}$ از V] در $\mathbf{A} = {}^t\mathbf{A}$ صدق کند، و متقارن چپ است اگر و تنها اگر $-\mathbf{A} = {}^t\mathbf{A}$.

۴.گیریم V یک فضای برداری روی هیأت اعداد حقیقی، و B یک‌صورت دوخطی ناتبهگون متقارن چپ روی (V, V) است. ثابت کنید که بعد V زوج است: برای یک عدد درست مثبت m، $\dim V = ۲m$. [راهنمایی: فرض کنید $\mathbf{A}$ همانند تمرین ۳، ماتریس B باشد: در این‌صورت بنابر تمرین۲، $-\mathbf{A} = {}^t\mathbf{A}$، و $D(\mathbf{A}) \neq ۰$. این حکمها چه چیزی را ایجاب می‌کنند؟]

۵.گیریم B یک‌صورت دوخطی روی (V, V) است، که در آن V یک فضای برداری روی اعداد حقیقی است. ثابت کنید که B متقارن چپ است اگر و تنها اگر برای همهٔ بردارهای $v \in V$، $B(v, v) = ۰$.

۶.گیریم V یک فضای برداری، و V^* فضای برداری دوگان آن است. ثابت کنید که برای $v \in V$، نگاشت $\lambda_v : f \to f(v)$، $f \in V^*$، یک عضو $(V^*)^*$ است. ثابت کنید که اگر V متناهی-بعد باشد، آنگاه $v \to \lambda_v$ یک یکریختی از V بر $(V^*)^*$ است.

۷.گیریم V و V' فضاهای برداری دوگان نسبت به صورت دوخطی B هستند، و فرض می‌کنیم T و T' نسبت به B ترانهادهٔ همدیگرند. نشان دهید که T و T' دارای یک رتبه‌اند.

۸.گیریم V، V'، T، T' همانهایی باشند که در تمرین ۷ بودند. نشان دهید که α یک ویژه‌مقدار T است اگر و تنها اگر α ویژه‌مقدار T باشد.

۲۸. حاصلجمعهای مستقیم و حاصلضربهای تانسوری

از فصل ۷ با حاصلجمعهای مستقیم فضاهای برداری آشنا هستیم. در این بخش از دیدگاه متفاوتی به حاصلجمعهای مستقیم می‌پردازیم، تا روشی برای مفهوم مشکلتر حاصلضرب تانسوری فراهم آوریم.

(۱.۲۸) **تعریف.** گیریم X و Y دو مجموعه باشند. حاصلضرب دکارتی $X \times Y$ مجموعهٔ همهٔ زوجهای مرتب (x, y) است، با $x \in X$ و $y \in Y$. دو زوج مرتب (x, y) و (x', y') بنابر تعریف مساوی هستند اگر و فقط اگر $x = x'$ و $y = y'$.

(۲.۲۸) تعریف. گیریم U و V دو فضای برداری روی F هستند. مجموع مستقیم (خارجی) $U\dot{+}V$ فضایی است برداری که مجموعهٔ زیربنایی آن حاصلضرب دکارتی $U \times V$ است، با عملهای فضای برداری که برای همهٔ بردارها و اسکالرها با

$$(u, v) + (u_1, v_1) = (u + u_1, v + v_1)$$
$$\alpha(u, v) = (\alpha u, \alpha v)$$

تعریف شده است.

به آسانی تحقیق می‌شود (و ما جزئیات را حذف می‌کنیم) که $U\dot{+}V$ فضایی است برداری. زحمت زیادی کشیدیم تا $U\dot{+}V$ را از مفهوم حاصلجمع مستقیم (درونی) $U \oplus V$، که در فصل ۷ تعریف شد، از هم متمایز سازیم، گرچه به تعبیری این دو، درست روشهای مختلف نگاه‌کردن به یک چیز است، چنانکه قضیهٔ زیر نشان می‌دهد.

(۳.۲۸) قضیه. گیریم U و V دو فضای برداری متناهی‌-بعد با پایه‌های به‌ترتیب $\{u_1, \cdots, u_k\}$، $\{v_1, \cdots, v_l\}$ باشند. در این‌صورت

الف) $\{(u_1, 0), \cdots, (u_k, 0), (0, v_1), \cdots, (0, v_l)\}$ پایه‌ای است از $U\dot{+}V$

ب) $\dim(U\dot{+}V) = \dim U \dot{+} \dim V$

پ) به‌فرض اینکه U_1 و V_1 به‌ترتیب نمایش مجموعه‌های $\{(u, 0) | u\in U\}$ و $\{(0, v) | v \in V\}$ باشند، U_1 و V_1 زیرفضاهای $U\dot{+}V$ هستند و $U\dot{+}V$ حاصلجمع مستقیم (درونی)، $U_1 \oplus V_1$ است.

ت) گیریم $S \in L(U, U)$ و $T \in L(V, V)$ و A و B به‌ترتیب ماتریسهای S و T نسبت به پایه‌های $\{u_1, \cdots, u_k\}$ و $\{v_1, \cdots, v_l\}$ باشند. در این‌صورت $S\dot{+}T : U\dot{+}V \to U\dot{+}V$ که با

$$(S\dot{+}T)(u, v) = (S(u), T(v))$$

تعریف می‌شود یک تبدیل خطی از $U\dot{+}V$ است، و ماتریس آن نسبت به پایهٔ مذکور در (الف) با

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{B} \end{array}\right)$$

داده می‌شود.

برهان. تنها طرح مختصری از اثبات را ارائه می‌دهیم و شرح جزئیات را به خواننده واگذار می‌کنیم.

الف) نخست، نشان می‌دهیم که این بردارها نابسته خطی‌اند. اگر

$$\alpha_1(u_1, 0) + \cdots + \alpha_k(u_k, 0) + \beta_1(0, v_1) + \cdots + \beta_l(0, v_l) = 0$$

آنگاه

$$(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k, \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_l v_l) = 0$$

و

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k = 0, \qquad \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_l v_l = 0$$

چون $\{u_i\}$ و $\{v_i\}$ مجموعه‌های نابسته خطی در U و V هستند، داریم $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_1 \cdots = \beta_l = 0$ اینک گیریم $(u,v) \in U\dot{+}V$. در این صورت $u = \sum \alpha_i u_i$، $v = \sum \beta_j v_j$ و از این‌رو $(u,v) = \sum \alpha_i(u_i, 0) + \sum \beta_j(0, v_j)$ و قسمت (الف) ثابت می‌شود.

ب) از قسمت (الف) نتیجه می‌شود.

پ) اثبات زیرفضا بودن U_1 و V_1 حذف می‌شود. برای اینکه نشان دهیم $U\dot{+}V$ حاصلجمع مستقیم آنهاست، باید بررسی کنیم که هر بردار در $U\dot{+}V$ مجموعی از بردارهای U_1 و V_1 است، و $U_1 \cap V_1 = 0$. نخست $(u,v) = (u,0) + (0,v) \in U_1 \dot{+} V_1$. دیگر اینکه $(u,v) \in U_1 \cap V_1$ ایجاب می‌کند که $u = 0$ و $v = 0$، و از این‌رو $(u,v) = 0$.

ت) اثبات خطی‌بودن تبدیل $S\dot{+}T$ و دارابودن ماتریس اشاره‌شده، به‌عنوان تمرین واگذار می‌شود.

با ساختن حاصلجمع مستقیم که هم‌اکنون دیدیم، طبیعی است که خواهان یک فضای برداری باشیم که از U و V ساخته شود و بعد آن برابر حاصلضرب $(\dim U)(\dim V)$ باشد، در صورتی‌که هر دو عامل متناهی باشند، نخستین چیزی که به‌نظر ضروری می‌رسد اصلاً در نظرگرفتن فضایی است برداری با پایه‌ای متشکل از همهٔ «حاصلضربهای» $u_i \times v_j$، که در آن u_i و v_j به‌ترتیب پایه‌های U و V باشند. در این‌صورت می‌توانیم برای رفتار عناصر پایه، مثلاً، چگونگی تعبیر $u_i \times \alpha v_j$ قیدهایی قائل شویم. از لحاظ تاریخی، این نخستین شیوهٔ نزدیک‌شدن به حاصلضرب تانسوری بود. بعدها ساختمانهای گوناگونی یافت شدند که از گزینش پایه‌های U و V مستقل‌اند. برای مثال، حاصلضرب تانسوری $U \otimes V$ می‌تواند به‌صورت $L(U^*, V)$ تعریف شود، که در آن U^* فضای دوگان U است، یا به‌صورت $B(U,V)^*$، که فضای دوگان فضای برداری $B(U,V)$ی صورتهای دوخطی روی U و V است. ثابت می‌شود که همهٔ این تعریفها هم‌ارزند، و یک فضای برداری با همان خواص اساسی فراهم می‌آورند. شیوهٔ تعریف حاصلضرب تانسوری برحسب این خواص اساسی را در نظر می‌گیریم، و ساختمانی از این حاصلضرب تانسوری می‌دهیم که با فضای برداری توابع روی مجموعهٔ حاصلضرب دکارتی $U \times V$ شروع می‌شود. در این‌صورت تعبیرهای دیگری از فضای حاصلضرب تانسوری، و نیز کاربردهای این مفهوم در تبدیلهای خطی و ماتریسها به‌آسانی نتیجه می‌شود.

براهین قضیه‌های عمده تااندازه‌ای طولانی هستند، و شاید برای خواننده بهتر باشد احکام تعریفهای (۴.۲۸)، (۹.۲۸)، قضیهٔ (۵.۲۸)، و تبصرهٔ (الف) را که پس از تعریف (۹.۲۸) آمده، پیش از پرداختن به اثبات قضیهٔ (۵.۲۸)، مطالعه کند.

(۴.۲۸) تعریف. گیریم U، V، W فضاهای برداری روی F هستند. یک تابع دوخطی $\lambda : U \times V \to W$ نگاشتی است که به هر جفت مرتب $(u, v) \in U \times V$ یک عنصر یکتای $\lambda(u, v)$ در W را نسبت می‌دهد، به‌گونه‌ای که برای همهٔ uها در U و vها در V و αها در F شرطهای زیر برقرار باشند:

$$\lambda(u_1 + u_2, v) = \lambda(u_1, v) + \lambda(u_2, v),\ \lambda(u, v_1 + v_2) = \lambda(u, v_1) + \lambda(u, v_2)$$
$$\lambda(\alpha u, v) = \lambda(u, \alpha v) = \alpha\lambda(u, v)$$

مثالهایی از توابع دوخطی را قبلاً دیده‌ایم. صورتهای دوخطی، توابعی دوخطی هستند که در آنها فضای برداری سوم W، فضای برداری یک‌بعدی F است. مثالهای دیگر به‌قرار زیرند.

مثال الف. گیریم V یک فضای برداری روی F، و $\lambda : L(V, V) \times L(V, V) \to L(V, V)$ نگاشت $\lambda(T_1, T_2) = T_1T_2$ است که در آن T_1T_2 حاصلضرب تبدیلهای خطی T_1 و T_2 در $L(V, V)$ است. ویژگیهای ضرب تبدیلهای خطی نشان می‌دهند که λ تابعی است دوخطی.

مثال ب. گیریم V یک فضای برداری و V^* دوگان آن باشد. برای $f \in V^*$ و $v \in V$ نگاشت $f \times v : V \to V$ را با

$$(f \times v)(u) = f(u)v, \qquad u, v \in V, \qquad f \in V^*$$

تعریف می‌کنیم. در این‌صورت خواننده می‌تواند نشان دهد که برای هر f و v، (الف) $f \times v \in L(V, V)$؛ و (ب) نگاشت $(f, v) \to f \times v$ یک نگاشت دوخطی از $V^* \times V \to L(V, V)$ است.

می‌خواهیم نشان دهیم که برای هر جفت از فضاهای برداری U و V، یک فضای برداری $U \otimes V$ به‌نام حاصلضرب تانسوری آنها وجود دارد با این ویژگی که برای هر نگاشت دوخطی $\lambda : U \times V \to W$ یک تبدیل خطی $L : U \otimes V \to W$ وجود دارد که به تعبیری هم‌ارز تابع دوخطی λ است. برای دقیقتر ساختن این اندیشه، قرارداد $f \circ g$ را برای ترکیب دو نگاشت از مجموعه‌های $g : X \to Y$، $f : Y \to Z$، که با

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

تعریف شده است وارد می‌کنیم. این همان اندیشهٔ «تابع تابع» معمولی از حساب دیفرانسیل و انتگرال است، و قبلاً در فصل ۳ برای تعریف حاصلضرب تبدیلها مورد استفاده قرار گرفته است.

(۵.۲۸) قضیه. گیریم U و V دو فضای برداری روی هیأت F هستند. یک فضای برداری روی F به‌نام $U\otimes V$، و یک نگاشت دوخطی $t : U\times V \to U\otimes V$ موجود است به‌گونه‌ای که $U\otimes V$ با عناصر $t(u,v)$، $u\in U$ و $v\in V$ تولید می‌شود.* بعلاوه برای هر نگاشت دوخطی $\lambda : U\times V\to W$ یک تبدیل خطی $L : U\otimes V\to W$ موجود است، به‌گونه‌ای که

$$\lambda = L\circ t$$

به دیگر سخن، هر نگاشت دوخطی $\lambda : U\times V\to W$، به حاصلضرب یک نگاشت دوخطی ثابت $t : U\times V\to U\otimes V$ از $U\times V$ در فضای برداری ثابت $U\otimes V$ تجزیه می‌شود، که به‌دنبال یک تبدیل خطی $L : U\otimes V\to W$ می‌آید.

برهان. گیریم $\mathcal{F}(U\times V)$ مجموعهٔ همهٔ توابع $f : U\times V\to F$ است به‌گونه‌ای که جز برای تعداد متناهی از جفتهای $\{(u,v)\}$ تساوی $f(u,v)=\circ$ برقرار است. در این‌صورت $\mathcal{F}(U\times V)$ یک فضای برداری روی F است، اگر مجموع $f+f'$ و ضرب در اسکالر αf را با قاعده‌های

$$(f+f')(u,v)=f(u,v)+f'(u,v)$$
$$(\alpha f)(u,v)=\alpha(f(u,v))$$

تعریف کنیم. آشکار است که اگر f و f' هر دو، جز برای تعدادی متناهی از جفتهای (u,v) صفر شوند، آنگاه $f+f'$ و αf نیز صفر خواهند شد.

گیریم $u*v$ نمایش تابعی در $\mathcal{F}(U\times V)$ باشد به‌گونه‌ای که

$$(u*v)(u_۱,v_۱)=\begin{cases}۱ & (u_۱,v_۱)=(u,v) \quad \text{اگر}\\ \circ & (u_۱,v_۱)\neq(u,v) \quad \text{اگر}\end{cases}$$

ثابت می‌کنیم که هر تابع دلخواه f در $\mathcal{F}(U\times V)$ ترکیبی است خطی از توابع $u*v$. فرض می‌کنیم $f(u,v)=\circ$ جز برای $(u,v)\in\{(u_۱,v_۱),\cdots,(u_k,v_k)\}$؛ در این‌صورت

$$f=f(u_۱,v_۱)(u_۱*v_۱)+\cdots+f(u_k,v_k)(u_k*v_k)$$

همان‌گونه که از اثردادن هر دو طرف به نوبت بر $(u_۱,v_۱)$، $\cdots$، (u_k,v_k)، و استفاده از تعریف u_i*v_i دیده می‌شود. بعلاوه ضرایب در چنین ترکیب خطی به‌طور یکتا تعیین می‌شوند، زیرا اگر

$$\alpha_۱(u_۱*v_۱)+\cdots+\alpha_k(u_k*v_k)=\alpha'_۱(u_۱*v_۱)+\cdots+\alpha'_k(u_k*v_k)$$

---

* یک فضای برداری به‌وسیلهٔ مجموعه‌ای از بردارهای $T=\{t\}$، که ممکن است نامتناهی باشد، تولید می‌شود، هرگاه هر بردار v یک ترکیب خطی به‌صورت $\alpha_۱t_۱+\cdots+\alpha_rt_r$، برای یک مجموعهٔ متناهی $\{t_i\}$ در T باشد، که به v بستگی دارد.

آنگاه از اثردادن دو طرف بر $(u_۱, v_۱)$، $(u_۲, v_۲)$، و غیره، می‌بینیم که $\alpha_۱ = \alpha'_۱$، $\alpha_۲ = \alpha'_۲$، و غیره.

اینک آمادهٔ تعریف $U \otimes V$ هستیم. گیریم Y زیرفضای $\mathcal{F}(U \times V)$ باشد که به‌وسیلهٔ همهٔ توابع

$$(u_۱ + u_۲) * v - u_۱ * v - u_۲ * v$$

$$u * (v_۱ + v_۲) - u * v_۱ - u * v_۲$$

$$\alpha u * v - \alpha(u * v)$$

$$u * \alpha v - \alpha(u * v)$$

برای $u, u_۱, u_۲ \in U$، $v, v_۱, v_۲ \in V$ و $\alpha \in F$ تولید شده است. اینک $U \otimes V$ را با فضای خارج‌قسمت $\mathcal{F}(U \times V)/Y$ (همان‌گونه که در بخش ۲۶ تعریف شد) تعریف می‌کنیم. در این‌صورت $U \otimes V$ متشکل از همهٔ رده‌های هم‌ارزی $[f]$ است، برای $f \in \mathcal{F}(U \otimes V)$. چون هر f یک ترکیب خطی از توابع $u * v$ است، از اینجا نتیجه می‌شود که هر عضو $U * V$ یک ترکیب خطی

$$\alpha_۱[u_۱ * v_۱] + \cdots + \alpha_k[u_k * v_k]$$

است: با $\alpha_i \in F$ و $u_i \in U$، $v_i \in V$.

حال یک تابع دوخطی $t : U \times V \to U \otimes V$ را با قراردادن

$$t(u, v) = [u * v] \tag{۶.۲۸}$$

برای همهٔ بردارهای $u \in U$، $v \in V$ تعریف می‌کنیم. برای اینکه نشان دهیم t دوخطی است، با این حقیقت آغاز می‌کنیم که چون $U \otimes V = \mathcal{F}(U, V)/Y$، برای هر $y \in Y$ در $U \otimes V$ داریم $[y] = ۰$. به‌موجب تعریف Y، برای همهٔ بردارها و اسکالرها داریم

$$[(u_۱ + u_۲) * v] - [u_۱ * v] - [u_۲ * v] = ۰$$

$$[u * (v_۱ + v_۲)] - [u * v_۱] - [u * v_۲] = ۰$$

$$[\alpha u * v] - [\alpha(u * v)] = [u * \alpha v] - [\alpha(u * v)] = ۰$$

این معادلات به دستورهای

$$t(u_۱ + u_۲, v) = t(u_۱, v) + t(u_۲, v)$$

$$t(u, v_۱ + v_۲) = t(u, v_۱) + t(u, v_۲)$$

$$t(\alpha u, v) = \alpha t(u, v) = t(u, \alpha v)$$

بدل می‌شوند که دقیقاً بیانگر دوخطی‌بودن تابع t هستند.

بعلاوه، چون هر $f \in \mathcal{F}(U \times V)$ یک ترکیب خطی از توابع $u * v$ است، نتیجه می‌شود که $U \otimes V$ توسط عناصر $t(u, v)$، $u \in U$، $v \in V$، تولید می‌شود.

سرانجام باید بررسی کنیم که توابع دوخطی می‌توانند به روش مطلوب تجزیه شوند. گیریم $\lambda : U \times V \to W$ یک تابع دوخطی دلخواه است. در این‌صورت می‌توانیم یک تبدیل خطی $\lambda_۱ : \mathcal{F}(U \times V) \to W$ را با قراردادن

(۷.۲۸)
$$\begin{aligned}\lambda_۱(\alpha_۱(u_۱ * v_۱) + \cdots + \alpha_k(u_k * v_k)) \\ = \alpha_۱\lambda(u_۱, v_۱) + \cdots + \alpha_k\lambda(u_k, v_k)\end{aligned}$$

برای هر $\alpha_i \in F$ و $u_i \in U$، $v_i \in V$، تعریف کنیم. تعریف $\lambda_۱$ قانونی است زیرا نشان دادیم که هر عنصر $\mathcal{F}(U \times V)$ یک ترکیب خطی از توابع $u_i * v_i$ است، و ضرایب در چنین ترکیب خطی به‌طور یکتا تعیین می‌شوند. بررسی تبدیل خطی‌بودن $\lambda_۱$، از این پس امری است عادی، و از ذکر جزئیات آن خودداری می‌کنیم.

نکتهٔ مهمی که باید توجه کنیم این است که چون λ دوخطی است، زیرفضای Y مشمول صفر-فضای $\lambda_۱$ است. برای مثال، بااستفاده از تعریف $\lambda_۱$ داریم

$$\begin{aligned}&\lambda_۱((u_۱ + u_۲) * v - u_۱ * v - u_۲ * v) \\ &\qquad = \lambda(u_۱ + u_۲, v) - \lambda(u_۱, v) - \lambda(u_۲, v) = ۰\end{aligned}$$

زیرا λ دوخطی است. به روش مشابه مولدهای دیگر Y به صفر-فضای $\lambda_۱$ تعلق دارند.

اینک می‌توانیم یک تبدیل خطی $L : U \otimes V \to W$ را با قراردادن

(۸.۲۸)
$$L([f]) = \lambda_۱(f), \qquad f \in \mathcal{F}(U \times V)$$

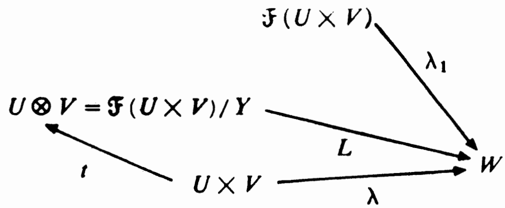
تعریف کنیم. تعریف L به این دلیل توجیه می‌شود که اگر $[f] = [f']$، آنگاه $f - f' \in Y$ و از این‌رو $\lambda_۱(f - f') = \lambda_۱(f) - \lambda_۱(f') = ۰$. بررسی خطی‌بودن L آسان است. (← تمرین ۵، بخش ۲۶).

اینک باید تحقیق کنیم که

$$L \circ t = \lambda$$

برای $u \in U$، $v \in V$ بنابر (۶.۲۸)، (۷.۲۸) و (۸.۲۸) داریم

$$\begin{aligned}(L \circ t)(u, v) &= L([u * v]) = \lambda_۱(u * v) \\ &= \lambda(u, v)\end{aligned}$$



شکل۱.۸

و قضیه ثابت می‌شود.

شکل ۱.۸ مراحل گوناگون برهان را نشان می‌دهد. این نوع برهان گاهی برهان از راه «کلاً خلاف منطقی» نامیده می‌شود، که بدین معنی است که این برهان کاربردی است از اندیشه‌ها و ساختهای کلّی که انجام دادیم و بیان آنها به‌وسیلهٔ مثالهای عددی آسان نیست. اینک به‌پیداکردن ضابط ملموستری در $U\otimes V$ می‌پردازیم.

(۹.۲۸) تعریف. هر فضای برداری $U\otimes V$ که در شرطهای قضیهٔ پیش صدق کند، یک حاصلضرب تانسوری U و V نامیده می‌شود. نگاشت دوخطی

$$t : U\times V\to U\otimes V$$

با

$$t(u,v)=u\otimes v$$

نشان داده خواهد شد.

تبصره. توجه می‌کنیم که حاصلضرب $u\otimes v$ دارای ویژگیهای زیر است، که همه از برهان قضیه استخراج شده‌اند.

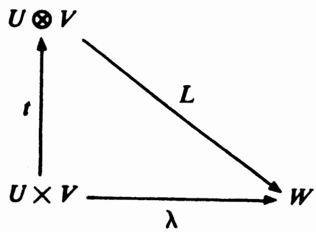
الف) $u\otimes v$ دوخطی است:

$$(\alpha u+\beta u')\otimes v=\alpha(u\otimes v)+\beta(u'\otimes v)$$
$$u\otimes(\alpha v+\beta v')=\alpha(u\otimes v)+\beta(u\otimes v')$$

برای همهٔ بردارها و اسکالرهای موجود در آنها.

ب) عناصر $u\otimes v$، فضای $U\otimes V$ را تولید می‌کنند: هر عنصر $U\otimes V$ می‌تواند به‌صورت یک ترکیب خطی

$$\alpha_1(u_1\otimes v_1)+\cdots+\alpha_k(u_k\otimes v_k),\ u_i\in U, v_i\in V$$



شکل۲.۸

بیان شود.

پ) برای هر تابع دوخطی $\lambda : U \times V \to W$، یک تبدیل خطی $L : U \otimes V \to W$ موجود است به‌گونه‌ای که

$$L(u \otimes v) = \lambda(u, v)$$

برای هر $u \in U$، $v \in V$ (←شکل (۲.۸)

قضیهٔ بعد ویژگیهای اساسی $U \otimes V$ را در حالتی که U و V فضاهای متناهی‌ـبعد هستند، به‌دست می‌دهد.

(۱۰.۲۸) قضیه. گیریم U و V دوفضای برداری متناهی‌ـبعد روی F، به‌ترتیب با پایه‌های $\{u_1, \ldots, u_m\}$ و $\{v_1, \ldots, v_n\}$ هستند.

الف) $\{u_i \otimes v_j\}$ برای $1 \le i \le m$ و $1 \le j \le n$ پایه‌ای اَست برای $U \otimes V$

ب) $\dim(U \otimes V) = (\dim U)(\dim V)$

پ) گیریم $S \in L(U, U)$، و $T \in L(V, V)$، و فرض کنیم $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ به‌ترتیب ماتریسهای S و T نسبت به‌پایه‌های $\{u_i\}$ و $\{v_j\}$ باشند. دراین‌صورت یک تبدیل خطی

$$S \otimes T : U \otimes V \longrightarrow U \otimes V$$

موجود است، به‌گونه‌ای که برای هر $u \in U$ و $v \in V$

$$(S \otimes T)(u \otimes v) = S(u) \otimes T(v)$$

ماتریس $\mathbf{C}$ی $S \otimes T$ نسبت به پایهٔ مرتب

$$\{u_1 \otimes v_1, \ldots, u_1 \otimes v_n, u_2 \otimes v_1, \ldots, u_2 \otimes v_n, \ldots, u_m \otimes v_1, \ldots, u_m \otimes v_n\}$$

به شکل زیر داده می‌شود:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\mathbf{B} & \alpha_{12}\mathbf{B} & \alpha_{1n}\,\mathbf{B} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1}\mathbf{B} & \alpha_{m2}\mathbf{B} & \alpha_{mn}\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

بنابراین $\mathbf{C}$ یک ماتریس mn در mn است که از m سطر و ستون از بلوکهای n در n تشکیل شده است، که بلوک واقع در بلوک سطر iام و بلوک ستون jام با $\alpha_{ij}\mathbf{B}$ داده می‌شود. ماتریس $\mathbf{C}$ با

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \dot{\times} \mathbf{B}$$

نشان داده می‌شود و حاصلضرب تانسوری (یا حاصلضرب کرونکر) $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ نامیده می‌شود.

برهان. الف) گیریم $u = \sum \alpha_i u_i \in U, v = \sum \beta_j v_j \in V$ دراین‌صورت، بنابر دو خطی بودن $u \otimes v$،

$$u \otimes v = (\sum \alpha_i u_i) \otimes (\sum \beta_j v_j) = \sum \alpha_i \beta_j (u_i \otimes v_j)$$

و ثابت کردیم که بردارهای $\{u_i \otimes v_j\}$، $U \otimes V$ را تولید می‌کنند. برای اثبات اینکه بردارهای $\{u_i \otimes v_j\}$ نابسته‌ـخطی‌اند، کافی است ثابت کنیم که $\dim U \otimes V \geq mn$ (چرا؟). این مطلب وقتی نتیجه می‌شود که بتوانیم یک تبدیل خطی L از $U \otimes V$ بر یک فضای برداری W از بعد mn بیابیم. این شیوهٔ غیرمستقیم به این سبب لازم است که همهٔ آنچه دربارهٔ $U \otimes V$ می‌دانیم این است که می‌توانیم تحت شرایطی تبدیلهایی خطی در $L(U \otimes V, W)$ به‌دست آوریم. در ساختن L توان کامل نظریهٔ فضاهای برداری دوگان، از بخش ۲۷ مورد استفاده قرار می‌گیرد.

گیریم U^* فضای دوگان U، و $B(u, u^*)$ صورت دوخطی ناتبهگون روی $U \times U^* \to F$، است که با رابطهٔ

$$B(u, u^*) = u^*(u), \qquad u \in U, u^* \in U^*$$

داده می‌شود. گیریم $u \in U$ ، $v \in V$، و یک تبدیل خطی $u \times v \in L(U^*, V)$ را با

$$(u \times v)(u^*) = B(u, u^*)v$$

تعریف می‌کنیم. بررسی اینکه $u \times v$ در حقیقت یک تبدیل خطی است، بعلاوه، نگاشت

$$\lambda : (u, v) \to u \times v$$

یک نگاشت خطی از $U \times V \to L(U^*, V)$ است، به خواننده واگذار می‌شود. بنا بر قضیهٔ (۵.۲۸) یک تبدیل خطی

$$L : U \otimes V \longrightarrow L(U^*, V)$$

وجود دارد به‌گونه‌ای که

$$L(u \otimes v) = u \times v$$

اینک کافی است ثابت کنیم که L، $U \otimes V$ را بر $L(U^*, V)$ می‌نگارد، زیرا $\dim L(U^*, V) = mn$. گیریم $T \in L(U^*, V)$ و $\{v_۱, \ldots, v_n\}$ پایه‌ای از V است. در این‌صورت برای $u^* \in V^*$، داریم

$$T(u^*) = \sum_{i=۱}^{n} \xi_i v_i,$$

با ضرایب $\xi_i \in F$ که به‌طور یکتا تعیین می‌شوند. ضریبهای ξ_i تابعهایی از u^* هستند،

$$T(u^*) = \sum_{i=۱}^{n} \xi_i(u^*) v_i$$

در حقیقت تابعهای خطی روی U^*اند، زیرا برای مثال

$$\begin{aligned} T(u_۱^* + u_۲^*) &= \sum_{i=۱}^{n} \xi_i(u_۱^* + u_۲^*) v_i \\ &= T(u_۱^*) + T(u_۲^*) = \sum \xi_i(u_۱^*) v_i + \sum \xi_i(u_۲^*) v_i \end{aligned}$$

دراین‌صورت

$$\sum \xi_i(u_۱^* + u_۲^*) v_i = \sum (\xi_i(u_۱^*) + \xi_i(u_۲^*)) v_i$$

و از مقایسهٔ ضریبها (چون $\{v_i\}$ها نابسته‌ـخطی‌اند)، داریم

$$\xi_i(u_۱^* + u_۲^*) = \xi_i(u_۱^*) + \xi_i(u_۲^*), \qquad ۱ \leq i \leq n$$

استدلالی مشابه نشان می‌دهد

$$\xi_i(\alpha u^*) = \alpha \xi_i(u^*), \qquad u^* \in U^* \quad \alpha \in F$$

اینک می‌توانیم قضیهٔ (۳.۲۷) را برای به‌دست آوردن عناصر $\{u_۱, \ldots, u_m\}$ در U به‌گونه‌ای که

$$B(u_i, u^*) = \xi_i(u^*) \quad \text{برای} \qquad ۱ \leq i \leq n$$

به‌کار بریم و از این رو

$$T(u^*) = \sum_{i=۱}^{n} \xi_i(u^*) v_i = \sum_{i=۱}^{n} B(u_i, u^*) v_i$$

بنابراین

$$T = \sum_{i=1}^{n} u_i \times v_i$$

پس

$$L(\sum u_i \otimes v_i) = \sum u_i \times v_i = T$$

و ثابت کردیم که L پوشاست. چون $\dim L(U^*, V) = mn$، داریم $\dim(U \otimes V) \geq mn$ و نتیجه می‌شود که بردارهای $\{u_i \otimes v_j\}$ نابسته‌ـخطّی‌اند. این برهان قسمت (الف) را کامل می‌کند.

ب) بخش (ب) نتیجهٔ بیدرنگ قسمت (الف) است.

پ) نخست از این حقیقت که S و T خطی هستند و $u \otimes v$ یک تابع دوخطی است، استفاده می‌کنیم تا نشان دهیم که تابع

$$\mu : (u, v) \to S(u) \otimes T(v), \qquad u \in U, \ \ v \in V$$

یک نگاشت دوخطی از $U \times V \to U \otimes V$ است. بنابر قضیهٔ (۵.۲۸) یک تبدیل خطی در $L(U \otimes V,\ U \otimes V)$ هست که با $S \otimes T$ نشان می‌دهیم، به‌گونه‌ای که

$$(S \otimes T)(u \otimes v) = S(u) \otimes T(v)$$

اینک باید ماتریس $S \otimes T$ را نسبت به پایهٔ داده شده حساب کنیم. داریم

$$S(u_i) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ki} u_k, \qquad T(v_j) = \sum_{l=1}^{n} \beta_{lj} v_l$$

که در آن $\mathbf{A} = (\alpha_{ij})$، $\mathbf{B} = (\beta_{kl})$ ماتریسهای S و T نسبت به پایه‌های داده شده هستند. دراین‌صورت

$$(S \otimes T)(u_i \otimes v_j) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \alpha_{ki} \beta_{lj} (u_k \otimes v_l)$$

برای یافتن ماتریس $S \otimes T$ نسبت به پایهٔ مرتب $U \otimes V$ یعنی

$$\{u_1 \otimes v_1, \ldots, u_1 \otimes v_n, u_2 \otimes v_1 \ldots u_2 \otimes v_n, \text{و غیره}\}$$

به‌طور ساده ستون ماتریس $S \otimes T$ را می‌نویسیم که $(S \otimes T)(u_i \otimes v_j)$ را به‌طور مرتب برحسب پایهٔ انتخابی برای $U \otimes V$ به‌دست می‌دهد. این در شکل (۳.۸) نشان داده شده است.

	$u_i \otimes v_j$
$u_1 \otimes v_1$	$\alpha_{1i}\beta_{1j}$
$\vdots$	$\vdots$
$u_1 \otimes v_n$	$\alpha_{1i}\beta_{nj}$
$u_2 \otimes v_1$	$\alpha_{2i}\beta_{1j}$
$\vdots$	$\vdots$
$u_2 \otimes v_n$	$\alpha_{2i}\beta_{nj}$
$\vdots$	$\vdots$
$u_m \otimes v_1$	$\alpha_{mi}\beta_{1j}$
$\vdots$	$\vdots$
$u_m \otimes v_n$	$\alpha_{mi}\beta_{nj}$

شکل ۳.۸

این یادداشتها نشان می‌دهند که ماتریس $S \otimes T$ دارای شکل مطلوب است و برهان قضیه کامل می‌شود.

برای استفاده از ضرب تانسوری، لازم نیست که جزئیات برهانهای دو قضیهٔ اخیر را، که بدون شک برای خواننده‌های صبور خسته‌کننده هستند، به تفصیل به‌خاطر آوریم. همهٔ حقایق اصلی در صورتهای این قضیه‌ها و تبصرهٔ (الف) پس از قضیهٔ (۵.۲۸) درج شده است.

اکنون چند حقیقت ساده ولی مهم، دربارهٔ حاصلضرب تانسوری تبدیلات خطی را بیان می‌کنیم.

(۱۱.۲۸) قضیه. فرض می‌کنیم U و V فضاهای برداری متناهی-بعد روی F هستند.

الف) گیریم $S_1, S_2 \in L(U,U)$ و $T_1, T_2 \in L(V,V)$. پس

$$(S_1 \otimes T_1)(S_2 \otimes T_2) = S_1 S_2 \otimes T_1 T_2$$

ب) گیریم $\mathbf{A}_1$ و $\mathbf{A}_2$ ماتریسهای m در m و $\mathbf{B}_1$ و $\mathbf{B}_2$ ماتریسهای n در n هستند. در این صورت

$$(\mathbf{A}_1 \dot{\times} \mathbf{B}_1)(\mathbf{A}_2 \dot{\times} \mathbf{B}_2) = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \dot{\times} \mathbf{B}_1\mathbf{B}_2$$

پ) گیریم $S \in L(U,U)$ و $T \in L(V,V)$. دراین‌صورت اثر $S \otimes T$ با تساوی

$$\mathrm{Tr}(S \otimes T) = (\mathrm{Tr}S)(\mathrm{Tr}T)$$

داده می‌شود.

برهان. الف) چون بردارهای $u \otimes v$، $U \otimes V$ را پدید می‌آورند، کافی است ثابت کنیم که وقتی دوطرف تساوی را بر $u \otimes v$ اثر دهیم، معادله برقرار است. بااستفاده از تعریفهای $S_1 \otimes T_1$، $S_2 \otimes T_2$ از قضیهٔ(۱۰.۲۸) ، داریم

$$\begin{aligned}(S_1 \otimes T_1)(S_2 \otimes T_2)(u \otimes v) &= (S_1 \otimes T_1)(S_2(u) \otimes T_2(v)) \\ &= S_1S_2(u) \otimes T_1T_2(v)\end{aligned}$$

همان چیزی که می‌خواستیم.

بخش (ب) از (الف) نتیجه می‌شود، زیرا $\mathbf{A}_1 \dot{\times} \mathbf{B}_1$، $\mathbf{A}_2 \dot{\times} \mathbf{B}_2$، و $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \dot{\times} \mathbf{B}_1\mathbf{B}_2$ ماتریسهای $S_1 \otimes T_1$، $S_2 \otimes T_2$ و $S_1S_2 \otimes T_1T_2$ نسبت به یک پایهٔ $U \otimes V$ هستند. (خواننده باید توجه کند که در اینجا یک حقیقت تازه و جالبی را دربارهٔ ماتریس حاصلضرب ثابت کرده‌ایم.)

برای اثبات (پ)، از این حقایق استفاده می‌کنیم که (i) اثر تبدیل خطیِ $S \otimes T$ همان اثر ماتریس $\mathbf{A} \dot{\times} \mathbf{B}$ متناظر با تبدیل خطی نسبت به یک پایه است، و (ii) اثر هر ماتریس، بنابر بخش ۲۴، برابر است با مجموع عناصر قطری. از بخش (پ)ی قضیهٔ(۱۰.۲۸)، بلوکهای قطری $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ برابرند با

$$\alpha_{11}\mathbf{B}, \ldots, \alpha_{mm}\mathbf{B}$$

بنابراین عناصر قطری $\mathbf{A} \dot{\times} \mathbf{B}$ برابرند با

$$\alpha_{11}\beta_{11}, \ldots, \alpha_{11}\beta_{nn}, \alpha_{22}\beta_{11}, \ldots, \alpha_{22}\beta_{nn}, \ldots, \alpha_{mm}\beta_{11}, \ldots, \alpha_{mm}\beta_{nn}$$

که مجموع آنها برابر است با

$$(\alpha_{11} + \cdots + \alpha_{mm})(\beta_{11} + \cdots + \beta_{nn}) = (\mathbf{Tr}\mathbf{A})(\mathbf{Tr}\mathbf{B})$$

همان‌گونه که می‌خواستیم، نشان دهیم. لذا برهان قضیه کامل می‌شود.

مقدمهٔ خود بر حاصلضربهای تانسوری را با یک کاربرد مهم پایان می‌دهیم. کاربردها و مثالهای دیگر در تمرینها داده شده‌اند. شرح و تفصیل در بقیهٔ این بخش بسیار متراکمتر از معمول خواهد بود، و چند مرحله از این بحث به عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود.

(۱۲.۲۸) قضیه. (شرکتپذیری حاصلضرب تانسوری). گیریم V_1، V_2 و V_3 فضاهای برداری متناهی-بعدی روی F هستند. یک یکریختی از فضاهای برداری بین $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ و $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ وجود دارد، که برای هر $v_1 \in V_1$، $v_2 \in V_2$، $v_3 \in V_3$،

$v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3) \to (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$

برهان. گیریم $\{v_{1i}\}$ پایه‌ای است برای V_1، $\{v_{2j}\}$ پایه‌ای برای V_2، و $\{v_{3k}\}$ پایه‌ای برای V_3. بنابر قضیه (۱۰.۲۸)، بردارهای $\{v_{1i} \otimes (v_{2j} \otimes v_{3k})\}$ پایه‌ای برای $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ تشکیل می‌دهند، درحالی‌که بردارهای $\{(v_{1i} \otimes v_{2j}) \otimes v_{3k}\}$ پایه‌ای برای $(V_1 \otimes V_2) \times V_3$ تشکیل می‌دهند. یک تبدیل خطی T وجود دارد که $v_{1i} \otimes (v_{2j} \otimes v_{3k})$ را، برای هر i، j، k، به‌روی $(v_{1i} \otimes v_{2j}) \otimes v_{3k}$ می‌برد، و T یک یکریختی از فضاهای برداری است. این حقیقت که این یکریختی، $v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)$ را ، برای هر $v_1 \in V_1$، $v_2 \in V_2$، و $v_3 \in V_3$، به‌روی $(v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$ می‌برد، با بسط v_1، v_2، v_3 به‌صورت ترکیبهای خطی به‌ترتیب از عناصر پایه‌های $\{v_{1i}\}$، $\{v_{2j}\}$ و $\{v_{3k}\}$ به‌آسانی بررسی می‌شود.

ما $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ را با $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ یکی می‌گیریم و آن را فضای برداری $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ (بدون پرانتز) خواهیم نامید. همچنین عناصر $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ متناظر با $v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)$ را به‌صورت $v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$ خواهیم نوشت. البته دربارهٔ ضرب تانسوری سه‌فضای برداری چیز خاصی وجود ندارد، به‌خوبی می‌توانیم ضرب تانسوری فضای برداری $V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_m$ از m فضای برداری V_1، ...،V_mرا تشکیل دهیم. عناصر$V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_m$ مجموعهای

$$\sum v_{1i_1} \otimes v_{2i_2} \otimes \ldots \otimes v_{mi_m}$$

با

$$v_{1i_1} \in V_1,\ v_{2i_2} \in V_2 \ldots, v_{mi_m} \in V_m$$

هستند.

(۱۳.۲۸) تعریف. گیریم V یک فضای برداری متناهی-بعد و k عددی است صحیح مثبت. حاصلضرب تانسوری kتایی $\otimes_k(V)$ (یا فضای برداری تانسورهای k تایی روی V) فضای برداری $\underbrace{V \otimes V \otimes \ldots \otimes V}_{k}$ (k عامل) است. عناصر $\otimes_k(V)$ تانسورهای kتایی نامیده می‌شوند و مجموعهایی هستند به‌صورت

$$t = \sum_{(i)} v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \ldots \otimes v_{i_k}, \qquad v_{i_j} \in V$$

که در آن مجموع روی مجموعه‌ای از k-تاییهای $(i) = (i_1, \ldots, i_k)$ گرفته می‌شود، که برای فهرست کردن بردارهای V که در تانسور t هستند، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

اینک چگونگی تعریف عملهای تقارن را روی فضای تانسوری $\otimes_k(V)$ نشان می‌دهیم. گیریم σ جایگشتی است از مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,k\}$ ($\leftarrow$ بخش ۱۹). یک تبدیل خطی $S_\sigma \in L(\otimes_k V, \otimes_k V)$ وجود دارد به گونه‌ای که برای همهٔ مقادیر $\{v_{i_۱},\ldots,v_{i_k}\} \in V$

$$S_\sigma(v_{i_۱}\otimes\ldots\otimes v_{i_k}) = v_{i_{\sigma(۱)}}\otimes\ldots\otimes v_{i_{\sigma(k)}}$$

توجه کنید که S_σ مجموعهٔ بردارهای $\{v_{i_۱},\ldots,v_{i_k}\}$ را درتانسور $v_{i_۱}\otimes\ldots\otimes v_{i_k}$ عوض نمی‌کند؛ تنها ترتیب آرایش آنها را عوض می‌کند. برای مثال، در $\otimes_۲ V$، گیریم $\sigma = (۱۲)$، در این صورت

$$S_\sigma(v\otimes w) = w\otimes v$$

برای همهٔ بردارهای $v, w \in V$. به‌ویژه $S_\sigma(v\otimes v) = v\otimes v$. وجود S_σ به‌آسانی با تعریف S_σ روی یک پایهٔ $\otimes_k V$ نشان داده می‌شود.

(۱۴.۲۸) تعریف. تانسور $t\in\otimes_k V$ متقارن نامیده می‌شود اگر برای همهٔ جایگشتهای σ از $\{۱,۲,\ldots,k\}$، $S_\sigma t = t$، و متقارن چپ نامیده می‌شود اگر $S_\sigma t = \varepsilon(\sigma)t$، که در آن $\varepsilon(\sigma)$ علامت σ است [$\leftarrow$ تعریف (۱۶.۱۹)].

مثال الف. در $\otimes_۲ V$، تانسورهایی به شکل $\{v\otimes v | v\in V\}$ متقارن هستند، در حالی‌که تانسورهای به شکل $\{v\otimes w - w\otimes v | v, w\in V, v\neq w\}$ متقارن چپ هستند.

هدف ما مطالعهٔ فضای تانسورهای متقارن چپ در $\otimes_k V$ است. خواهیم دید که این تانسورها جنبه‌هایی دارند که بسط‌دهندهٔ مهمترین ویژگیهای تابع دترمینان هستند.

(۱۵.۲۸) قضیه. الف) مجموعهٔ تانسورهای متقارن چپ در $\otimes_k V$ زیر فضایی تشکیل می‌دهند، که با $\wedge_k(V)$ (بخوانید: حاصلضرب گووِیی kتایی V) نشان داده خواهد شد.

ب) گیریم $v_۱$، ...، v_k بردارهایی در V هستند. دراین‌صورت

$$v_۱\wedge\ldots\wedge v_k = \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)(v_{\sigma(۱)}\otimes\ldots\otimes v_{\sigma(k)})$$

برای همهٔ مقادیر $\{v_i\}$ در V، عضوی از $\wedge_k(V)$ است.

پ) حاصلضرب گووِیی $v_۱\wedge\ldots\wedge v_k$ دارای ویژگیهای زیر است:

i) $v_۱\wedge\ldots\wedge v_k$ خطی است، وقتی به‌عنوان تابعی از هر عامل نگریسته شود، برای مثال،

$$(\alpha v_۱ + \beta v_۱')\wedge v_۲\wedge\ldots\wedge v_k = \alpha(v_۱\wedge v_۲\wedge\ldots\wedge v_k) + \beta(v_۱'\wedge v_۲\wedge\ldots\wedge v_k)$$

ii)

$$\underbrace{v_۱\wedge\ldots\wedge v_i\wedge\ldots\wedge v_j\wedge\ldots\wedge v_k}_{i \qquad j} = -\underbrace{v_۱\wedge\ldots\wedge v_j\wedge\ldots\wedge v_i\wedge\ldots\wedge v_k}_{i \qquad j}$$

(به شباهت با ویژگیهای تابع دترمینان توجه کنید.)

ت) $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \neq ۰$، اگر و تنها اگر بردارهای v_1، ...، v_k نابسته‌ـخطی باشند.

ث) گیریم $\{v_1, \ldots, v_n\}$ پایه‌ای برای V است. در این‌صورت بردارهای

$$\{v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_k} \ , \ i_1 < i_2 < \cdots < i_n\}$$

پایه‌ای برای $\wedge_k V$ هستند.

تبصره. پیش از بیان برهان، خاطر نشان می‌سازیم که (ت) موجب توسیع گستردهٔ این مفهوم می‌شود که سرانجام به‌تابع‌ـترمینان منجر می‌شود. دترمینان، آزمونی برای نابستگی خطی مجموعه‌ای از n بردار در یک فضای برداری n بعدی به‌دست می‌دهد. قسمت (ت) آزمون مشابهی به‌دست می‌دهد که در مورد k بردار، $k = ۱, ۲, \ldots$، در یک فضای nبعدی به‌کار می‌رود.

برهان. الف) این واقعیت که تانسورهای متقارن چپ از $\otimes_k V$ یک زیر فضا تشکیل می‌دهند بی‌درنگ از این حقیقت که عملگرهای متقارن S_σ، تبدیلهای خطی هستند نتیجه می‌شود.

ب) گیریم τ جایگشتی از $\{۱, ۲, \ldots, k\}$ است. دراین‌صورت

$$\begin{aligned} S_\tau(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) &= \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)(v_{\sigma\tau(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma_\tau(k)}) \\ &= \varepsilon(\tau) \sum_\sigma \varepsilon(\sigma\tau)(v_{\sigma\tau(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma\tau(k)}) \\ &= \varepsilon(\tau)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) \end{aligned}$$

زیرا بنا بر بخش ۱۹، $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$، نگاشت $\sigma \to \sigma\tau$ اصلاً تجدید آرایشی از جایگشتهای $\{۱, ۲, \ldots k\}$ است.

پ) ویژگی (i) واضح است، و ویژگی (ii) از تأثیر S_σ، که σ ترانهش (ij) است، بر $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$ نتیجه می‌شود.

ت) اگر v_1، ...، v_k نابسته‌ـخطّی باشند، آنگاه بنابر قسمت (پ) و عیناً استدلال مذکور در بخش ۱۶ برای اثبات نتیجهٔ مشابهی در مورد دترمینانها، $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k = ۰$.

اینک فرض می‌کنیم v_1، ...، v_k نابسته‌ـخطّی‌اند. بردارهای v_{k+1}، ...، v_n را به گونه‌ای می‌یابیم که $\{v_1, \ldots, v_n\}$ پایه‌ای برای V باشد. دراین‌صورت بردارهایی که در مجموع معرّف $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$ وجود دارند متمایزند و قسمتی از پایهٔ $\otimes_k V$ را تشکیل می‌دهند. ازاین‌رو $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \neq ۰$.

ث) بردارهای $\{v_{j_1} \otimes \ldots \otimes v_{j_k} | ۱ \leq j_1, \ldots, j_k \leq n\}$ پایه‌ای برای $\otimes_k V$ تشکیل می‌دهند. گیریم

$$t = \sum \alpha_{j_1} \ldots {}_{j_k}(v_{j_1} \otimes \ldots \otimes v_{j_k}), \qquad \alpha_{j_1 \ldots j_k} \in F$$

یک تانسور دلخواه متقارن چپ است، و فرض می‌کنیم که برای مجموعه‌ای از اندیسهای $(j_1, \ldots, j_k)$ داشته باشیم $\alpha_{j_1,\ldots,j_k} \neq 0$. از تعریف تانسورهای متقارن چپ، و مقایسهٔ ضریبها، نتیجه می‌شود که برای همهٔ جایگشتهای σ از $\{1, 2, \ldots, k\}$

$$\alpha_{j_{\sigma(1)}\ldots j_{\sigma(k)}} = \varepsilon(\sigma)\alpha_{j_1\ldots j_k}$$

بنابراین

$$t \pm \alpha_{j_1\ldots j_k}(v_{j_1} \wedge \ldots \wedge v_{j_k})$$

یک تانسور متقارن چپ است با عاملهای جمع ناصفری که تعداد آنها کمتر از t است. از ادامه به‌روش استقراء، نتیجه می‌شود که t ترکیبی است خطی از بردارهایی به شکل $\{v_{j_1} \wedge \ldots \wedge v_{j_k}\}$. چون $v_{j_1} \wedge \ldots \wedge v_{j_k}$ برابر $\pm v'_{j_1} \wedge \ldots \wedge v'_{j_k}$ است با $j'_1 < j'_2 < \cdots < j'_k$، از اینجا نتیجه می‌شود که بردارهای به شکل مطلوب، $\wedge_k(V)$ را تولید می‌کنند. سرانجام آشکار است که بردارهای $\{v_{j_1} \wedge \ldots \wedge v_{j_k} | j_1 < \cdots < j_k\}$ نابسته‌ـخطّی‌اند، زیرا شامل مجموعه‌های متفاوتی از بردارهای پایهٔ $\otimes_k(V)$ هستند. بدین ترتیب برهان قضیه کامل می‌شود.

تمرینها

در همهٔ این تمرینها فضاهای برداری موجود متناهی‌ـبعد فرض می‌شوند.

۱. $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{B}_1$، $\mathbf{A}_2 \times \mathbf{B}_2$ و $(\mathbf{A}_1 \times \mathbf{B}_1)(\mathbf{A}_2 \times \mathbf{B}_2)$ را حساب کنید، که در آن

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

نشان دهید که نتیجهٔ نهایی با $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \times \mathbf{B}_1\mathbf{B}_2$ یکی است.

۲. گیریم $\{u_1, \ldots, u_k\}$ بردارهایی نابسته‌ـخطّی در U و $\{v_1, \ldots, v_k\}$ بردارهایی دلخواه در V هستند. نشان دهید که $\sum u_i \otimes v_i = 0$ در $U \otimes V$ مستلزم تساوی $v_1 = \cdots = v_k = 0$ است.

۳. گیریم $S \in L(U, U)$، $T \in L(V, V)$، و α و β به‌ترتیب ویژه مقدارهای S و T، متناظر با ویژه بردارهای $u \in U$ و $v \in V$ باشند. ثابت کنید که در $U \otimes V$ (مثلاً با استفاده از تمرین ۲)، $u \otimes v \neq 0$ و $u \otimes v$ یک ویژه بردار $S \otimes T$ متعلق ویژه مقدار $\alpha\beta$ است.

۴.فرض می‌کنیم $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ ماتریسهایی پایین مثلثی (با صفر در بالای قطر) باشند. نشان دهید که $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ نیز پایین مثلثی است، و از این رو هر ویژه مقدار $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ را می‌توان به شکل $\alpha\beta$ بیان کرد، که در آن α ویژه مقدار $\mathbf{A}$ و β ویژه مقدار $\mathbf{B}$ است.

۵.گیریم $S \in L(U,U)$، $T \in L(U,U)$ و فرض می‌کنیم که هیأت پایه جبری-بسته است. ثابت کنید که هر ویژه مقدار $S \otimes T$ را می‌توان به شکل $\alpha\beta$ بیان کرد که در آن α و β به‌ترتیب ویژه مقدارهای S و T هستند.

۶.الف) ثابت کنید که هر تبدیل خطی $T \in L(U,V)$ می‌تواند به شکل $\sum f_i \times v_i$ با $\{f_i\}$ در U^* و $\{v_i\}$ در V بیان شود، که در آن $f \times v$ تبدیلی است خطی در $L(U,V)$ که با $(f \times v)(u) = f(u)v$، $u \in U$، $f \in U^*$، $v \in V$ تعریف می‌شود. [راهنمایی: برهان قضیهٔ (۱۰.۲۸) را دنبال کنید.]

ب) گیریم $X \in L(U,V)$ بنابر قسمت (الف) به‌صورت $\sum f_i \times v_i$، $f_i \in U^*$، $v_i \in V$ بیان شود. فرض می‌کنیم $S \in L(U,U)$، $T \in L(V,V)$. نشان دهید که

$$(\sum f_i \times v_i)S = \sum S^* f_i \times v_i$$

که در آن S^* ترانهادهٔ S است. همچنین نشان دهید که

$$T(\sum f_i \times v_i) = \sum f_i \times Tv_i$$

پ) ثابت کنید که $U^* \otimes V$ با $L(U,V)$ یکریخت است، و $\sum f_i \otimes v_i \to \sum f_i \times v_i$ این یکریختی را می‌دهد. با فرض S، T، همانگونه که در قسمت (ب) بودند. $S^* \otimes T$ روی $L(U,V)$ از طریق یکریختی $L(U,V)$ با $U^* \otimes V$ به‌روش زیر عمل می‌کند

$$(S^* \otimes T)(\sum f_i \times v_i) = \sum S^* f_i \times Tv_i = T(\sum f_i \times v_i)S$$

ت) ثابت کنید که هر $T \in L(U,V)$ می‌تواند به شکل $\sum f_i \times v_i$، که $\{v_i\}$ نابسته خطی است، بیان شود، و در این حالت رتبهٔ T برابر شمارهٔ عوامل جمع ناصفر در $\sum f_i \times v_i$ است.

ث) گیریم $T \in L(U,V)$ به شکل $\sum f_i \times v_i$ بیان شود. ثابت کنید که اثر T با $\sum f_i(v_i)$ داده می‌شود.

۷.گیریم $S \in L(U,U)$ و $T \in L(V,V)$ و فرض می‌کنیم هیأت‌پایه جبری-بسته است و S و T وارونپذیرند. ثابت کنید که در $L(U,V)$ یک تبدیل خطی $X \neq ۰$ موجود است به‌گونه‌ای که $XS = TX$، در این حالت S و T ویژه مقدار مشترکی دارند. [راهنمایی با استفاده از تمرین ۶، X را به شکل $X = \sum f_i \times v_i$، $f_i \in U^*$، $v_i \in V$ بگیرید. دراین‌صورت $XS = TX$ ایجاب می‌کند $T^{-۱}XS = X$. لذا، بنابر قسمت (پ) از ۵،

$$(S^* \otimes T^{-1})X = X$$

و $S^* \otimes T^{-۱}$ دارای ویژه مقداری برابر ۱ است. با استفاده از تمرین ۵، و ویژگیهای ویژه مقدارهای S^* و $T^{-۱}$، نشان دهید که ویژه مقدارهای αئی از S و βئی از T وجود دارند به‌گونه‌ای که $\alpha\beta^{-۱} = ۱$.]

۸.گیریم $V \otimes W$ و $V \otimes' W$ دو فضای برداری هستند که هر دو در تعریف حاصلضرب تانسوری فضاهای برداری V و W، به ترتیب نسبت به‌نگاشتهای دوخطی $t : V \times W \to V \otimes W$ و $t' : V \times W \to V \otimes' W$، صدق می‌کنند.

الف) ثابت کنید که تبدیلهای خطی $S : V \otimes W \to V \otimes' W$ و $T : V \otimes' W \to V \otimes W$ موجودند به‌گونه‌ای که $ST = ۱$ و $TS = ۱$.

ب) ثابت کنید که S و T هر دو یکریختیهای فضای برداری هستند. (این مسأله نشان می‌دهد که حاصلضرب تانسوری فضای برداری با ویژگیهای معرّفش به‌طور یکتا تعریف می‌شود.)

۹.الف) گیریم Vو W دو فضای برداری روی F باشند و $B(V, W)$ مجموعهٔ همهٔ صورتهای دو خطی به شکل $f : V \times W \to F$ باشد. نشان دهید که $B(V, W)$ زیر فضایی از فضای برداری تابعهای $\mathcal{F}(V \times W)$ است.

ب) ثابت کنید که فضای دوگان $B(V, W)^*$، نسبت به نگاشت دوخطی

$$b : V \times W \to B(V, W)^*$$

که با تساوی

$$b(v, w)(f) = f(v, w), \ f \in B(V, W), v \in V, w \in W$$

تعریف می‌شود، در تعریف حاصلضرب تانسوری صدق می‌کند.

۱۰.گیریم $\wedge_k(V)$ حاصلضرب گووه‌یی kتایی از V است و $\dim V = n$. ثابت کنید که $\dim \wedge_k(V) = \binom{n}{k}$ (ضریب دو جمله‌یی).

۱۱.گیریم $T \in L(V, V)$. قضیهٔ (۱۰.۲۸) را تعمیم دهید تا ثابت کنید که یک تبدیل خطی $T^{(k)}$ از $\otimes_k(V)$ وجود دارد به‌گونه‌ای که برای همهٔ $v_i \in V$ها

$$T^{(k)}(v_۱ \otimes \ldots \otimes v_k) = T(v_۱) \otimes \ldots \otimes T(v_k)$$

ثابت کنید که برای هر $T \in L(V_۱, V)$، $\wedge_k(V)$ یک زیر فضای پایا نسبت به $T^{(k)}$ است.

۱۲.گیریم $\dim V = n$، و $(v_۱, \ldots, v_n)$ پایه‌ای برای V است. ثابت کنید که تانسور $v_۱ \wedge \ldots \wedge v_n$ پایه‌ای است برای $\wedge_n(V)$. گیریم $T \in L(V, V)$. ثابت کنید که برای هر $T \in L(V, V)$،

$$T^{(n)}(v_۱ \wedge \ldots \wedge v_n) = D(T)(v_۱ \wedge \ldots \wedge v_n)$$

(راهنمایی: از یکتایی تابع دترمینان، که در بخش ۱۷ ثابت شد، استفاده کنید.)

۲۹. برهانی برای قضیهٔ مقسوم علیه مقدماتی

قضیه‌ای که می‌خواهیم ثابت کنیم [قضیهٔ (۸.۲۵)] بیان می‌کند که اگر $T \in L(V,V)$ مخالف صفر و V یک فضای برداری متناهی‌ـبعد روی هیأت دلخواه F باشد، قضیه‌های زیر برقرارند.

(۱.۲۹) بردارهای $\{v_1, \ldots, v_r\}$ وجود دارند، که مرتبه‌های آنها توانهای اوّل $\{p_1(x)^{e_1}, \ldots, p_r(x)^{e_r}\}$ در $F[x]$ و به گونه‌ای هستند که V مجموع مستقیم زیرفضاهای دوری نسبت به T است که توسط $\{v_1, \ldots, v_r\}$ تولید شده‌اند.

(۲.۲۹) فرض می‌کنیم

$$V =< v_1 > \otimes \ldots \otimes < v_r >=< v'_1 > \otimes \ldots \otimes < v'_s >$$

که در آن $\{v_i\}$ و $\{v'_i\}$ به‌ترتیب دارای مرتبه‌های توان اوّل

$$\{p_1(x)^{e_1}, \ldots, p_r(x)^{e_r}\} \quad \text{و} \quad \{q_1(x)^{f_1}, \ldots, q_s(x)^{f_s}\}$$

هستند. دراین‌صورت $r = s$، و چندجمله‌ییهای

$$\{p_1(x)^{e_1}, \ldots, p_r(x)^{e_r}\} \quad \text{و} \quad \{q_1(x)^{f_1}, \ldots, q_s(x)^{f_s}\}$$

با تقریب یک تجدید آرایش، یکی هستند.

نخست چند قضیهٔ ابتدایی را که منجر به اثبات (۱.۲۹) می‌شود ثابت می‌کنیم. گیریم

$$m(x) = h_1(x)^{c_1} \ldots h_m(x)^{c_m}$$

چندجمله‌یی مینیمال T است، که در $F[x]$ به‌صورت حاصلضرب توانهای چندجمله‌ییهای اول $\{h_1(x)^{c_1}, \ldots, h_m(x)^{c_m}\}$ تجزیه شده است. بنابر قضیهٔ (۹.۲۳)

$$V = V_1 \otimes \ldots \otimes V_m \qquad \textbf{(۳.۲۹)}$$

که در آن هر زیر فضای V_i مخالف صفر و صفرـفضای $h_i(T)^{c_i}$، $1 \le i \le m$، است. بعلاوه، هر V_i نسبت به T پایاست. اگر T_i معرّف تحدید T نسبت به زیرفضای V_i باشد، روی V_i داریم $h_i(T_i)^{c_i} = 0$. بنابراین $h_i(x)^{b_i}$ چندجمله‌یی مینیمال T_i برای $b_i \le c_i$ است. فرض کنید که بتوانیم (۱.۲۹) را برای هر یک از تبدیلهای خطی T_i، $1 \le i \le m$، ثابت کنیم، پس

$$V_i =< v_{ij} > \oplus \cdots \oplus < v_{ik} >, \qquad 1 \le i \le m$$

در این صورت هر T_iـفضای دوری $< v_{ij} >$ نیز نسبت به T یک زیرفضای دوری است که مرتبهٔ مولد آن v_{ij} توانی از $h_i(x)$ است. از روی هم گذاردن این قضیه‌ها به‌نوبهٔ خود برای فضاهای

$\{V_{1}, \cdots, V_m\}$ و استفاده از (۳.۲۹) قضیه (۱.۲۹) را به‌دست می‌آوریم. نشان داده‌ایم که کافی است (۱.۲۹) را برای یک تبدیل خطی $T \in L(V, V)$، که چندجمله‌یی مینیمال آن توانی از یک اول است، ثابت کنیم.

(۴.۲۹) تعریف. یک زیرفضای Tـپایای ناصفر W از V، تجزیه‌ناپذیر نامیده می‌شود به شرط اینکه نتوان W را به‌صورت یک مجموع مستقیم زیرفضاهای Tـپایا نوشت.

(۵.۲۹) لم. گیریم V یک فضای برداری متناهی‌ـبعد مخالف صفر باشد، و $T \in L(V, V)$. در این صورت V یک مجموع مستقیم زیرفضاهای Tـپایاست.

برهان. از استقراء روی $\dim(V)$ استفاده می‌کنیم. اگر V از اول تجزیه‌ناپذیر باشد که حرفی نداریم. اگر نباشد، پس $V = V_{1} \oplus V_{2}$، که در آن V_{1} و V_{2} زیرفضاهای Tـپایای ناصفرند. با فرض اینکه T_{1} و T_{2} به‌ترتیب نمایش تحدیدهای T به زیرفضاهای V_{1} و V_{2} هستند و باتوجه به $\dim(V_{1}) < \dim(V)$ و $\dim(V_{2}) < \dim(V)$، می‌توانیم فرض استقراء را به‌کار برده و نتیجه بگیریم که

$$V_{1} = V_{11} \oplus \cdots \oplus V_{1k}, \qquad V_{2} = V_{21} \oplus \cdots \oplus V_{2k'}$$

که در آن زیرفضاهای V_{1i}، $1 \leq i \leq k$، تجزیه‌ناپذیر و نسبت به T_{1} پایا و زیرفضاهای V_{2j}، $1 \leq j \leq k'$، تجزیه‌ناپذیر و نسبت به T_{2} پایا هستند. همهٔ زیرفضاهای $\{V_{ij}\}$ تجزیه‌ناپذیر و نسبت به T پایا بوده و مجموع مستقیم آنها V است، در نتیجه برهان لم کامل می‌شود.

اینک به‌موجب لم (۵.۲۹) و تبصره‌های بالا، اثبات (۱.۲۹) به اثبات قضیهٔ زیر تبدیل می‌شود.

(۶.۲۹) قضیه. گیریم V یک فضای برداری متناهی‌ـبعد، مخالف صفر، روی هیأت دلخواه F است و فرض می‌کنیم $T \in L(V, V)$ تبدیلی است خطی که چندجمله‌یی مینیمال آن یک توان اول $p(x)^a$ و به‌گونه‌ای است که V نسبت به T تجزیه‌ناپذیر است. در این‌صورت V نسبت به T دوری است.

برهان. نخست می‌گوییم که یک بردار $v_{1} \in V$ وجود دارد که مرتبهٔ آن با چندجمله‌یی مینیمال $p(x)^a$ از T برابر است. اگر چنین نباشد، آنگاه برای هر $v \neq 0$ در V، بنابر لم (۷.۲۵)، مرتبهٔ v باید $p(x)^b$ برای $b < a$ باشد، و باید داشته باشیم $p(T)^{a-1}V = 0$، که مخالف تعریف چندجمله‌یی مینیمال است.

اثبات قضیهٔ (۶.۲۹) بدین‌ترتیب صورت می‌گیرد که نشان می‌دهیم اگر زیرفضای دوری $< v_{1} >$ نسبت به T برابر V نباشد، آنگاه V مجموع مستقیم زیر است

$$V = < v_{1} > \oplus W$$

که W یک زیرفضای Tـپایای غیرصفر است، و این مغایر با فرض تجزیه‌ناپذیر بودن V نسبت به

T است. این برهان در واقع، یکی از کاربردهای نظریهٔ فضاهای برداری دوگان است. (بخشهای ۲۶ و ۲۷).

گیریم V^* فضای دوگان V است؛ پس V و V^* فضاهای برداری دوگان نسبت به‌صورت دوخطی ناتباهیدهٔ $B(v,v^*)$ هستند، که در آن $B(v,v^*)$ برابر مقدار تابع خطی $v^* \in V^*$ متناظر با بردار $v \in V$ است، یعنی:

$$B(v,v^*) = v^*(v)$$

گیریم T^* ترانهادهٔ T نسبت به (v,v^*) است. در این‌صورت برای همهٔ چندجمله‌ییهای $f(x) \in F[x]$ و برای هر $v \in V$ و $v^* \in V^*$ داریم:

$$B(f(T)v,v^*) = (v, f(T^*)v^*)$$

بنابراین چندجمله‌یی مینیمال T^* نیز $p(x)^a$ است.

اینک گیریم $< v_1 >^\perp$ یک پوچساز $< v_1 >$ در V^* است. بنابر بخش ۲۷، $< v_1 >^\perp$ نسبت به T^* پایاست، و فضاهای $< v_1 >$ و $V^*/ < v_1 >^\perp$ نسبت به صورت دوخطی

$$B_\circ(v,[v^*]) = B(v,v^*)$$

برای $v \in < v_1 >$ و $[v^*] \in V^*/ < v_1 >^\perp$، دوگان یکدیگرند. بعلاوه تبدیلهای خطی $T_{<v_1>}$ و $T^*_{V^*/<v_1>^\perp}$، بنابر قضیهٔ (۱۲.۲۷)، نسبت به صورت دوخطی $B_\circ$ ترانهادهٔ یکدیگرند. چندجمله‌یی مینیمالِ تحدید $T_{<v_1>}$، بنابر لم (۶.۲۵)، برابر مرتبهٔ v_1 و لذا بنابر گزینش v_1، برابر $p(x)^a$ است. به‌موجب تبصره‌ای دربارهٔ چندجمله‌یی مینیمال یک ترانهاده، تبدیل القایی $T_1^* = T_{V^*/<v_1>^\perp}$ نیز دارای چندجمله‌یی مینیمال $p(x)^a$ است. بنابر قسمت اول برهان، یک بردار $[v_1^*]$ در $V^*/ < v_1 >^\perp$ وجود دارد که مرتبه‌اش $p(x)^a$ است. گیریم W^* زیرفضایی در V^* باشد که توسط $\{v_1^*, \cdots, (T^*)^{d-1}v_1^*\}$ تولیدشده است،

$$W^* = S(v_1^*, T^*v_1^*, \cdots, (T^*)^{d-1}v_1^*)$$

که در آن $d = \deg p(x)^a$. در این‌صورت W^* دارای ویژگیهای زیر است:

الف) $\dim W^* = d$

ب) $W^* \cap < v_1 >^\perp = \circ$

پ) $T^*(W^*) \subset W^*$

حکمهای (الف) و (ب) از اینجا نتیجه می‌شوند که رابطهٔ

$$\alpha_1 v_1^* + \alpha_2(T^*v_1^*) + \cdots + \alpha_{d-1}(T^*)^{d-1}v_1^* \in < v_1 >^\perp$$

در $V^*/<v_1>^\perp$ ایجاب می‌کند که

$$\alpha_1[v_1^*]+\alpha_2T_1^*[v_1^*]+\cdots+\alpha_{d-1}(T_1^*)^{d-1}[v_1^*]=0$$

و از این‌رو $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{d-1}=0$، زیرا مرتبهٔ $[v_1^*]$ همان مرتبهٔ $p(x)^a$ است. حکم (پ) بدین دلیل برقرار است که T^* دارای چندجمله‌یی مینیمال $p(x)^a$ از درجهٔ d است، و از این‌رو $T^*(T^*)^{d-1}v_1^*$ ترکیبی است خطی از $\{v_1^*,T^*v_1^*,\cdots,(T^*)^{d-1}v_1^*\}$.

اما چون $\dim<v_1>^\perp=\dim V^*-d$، حکمهای (الف) تا (پ) ایجاب می‌کنند که

$$V^*=W^*\oplus<v_1>^\perp$$

و W^* نسبت به T^* پایا باشد. در این‌صورت بنابر قضیهٔ (۱۲.۲۷)

$$V=(W^*)^\perp\oplus(<v_1>^\perp)^\perp=(W^*)^\perp\oplus<v_1>$$

زیرا $<v_1>^{\perp\perp}=<v_1>$. **بعلاوه** $(W^*)^\perp$ نسبت به ترانهادهٔ T^* یعنی T پایاست، و ثابت کرده‌ایم که V مجموع مستقیم دو زیرفضای Tـپایاست، که این مطلب، برهان قسمت اول قضیهٔ مقسوم‌علیه مقدماتی را کامل می‌کند.

اینک آماده‌ایم که قسمت یکتایی (۲.۲۹)ی قضیهٔ مقسوم‌علیه مقدماتی را ثابت کنیم. گیریم

$$m(x)=h_1(x)^{c_1}\cdots h_t(x)^{c_t}$$

چندجمله‌یی مینیمال T است، که در آن $\{h_i(x)\}$ اول‌هایی در $F[x]$ هستند، و می‌توانیم فرض کنیم که $m(x)$ و همهٔ $h_i(x)$ها دارای ضریبهای پیشرو یک هستند. مرتبه‌های عنصرهای v_i و v_i' نیز دارای ضریبهای پیشرو یک هستند، و نتیجه می‌شود که هر $p_i(x)$ یا $q_j(x)$ برابر (نه به‌عنوان مضرب اسکالری از) یکی از $h_i(x)$هاست. بنابر قضیهٔ (۹.۲۳)

$$V=n(h_1(T)^{c_1})\oplus\cdots\oplus n(h_t(T)^{c_t})$$

و هر v_i یا v_i' که مرتبهٔ آن توانی از $h_j(x)$ است مشمول در $n(h_j(T)^{c_j})$ است. از اینجا نتیجه می‌شود که برای هر j، $1\le j\le t$،

$$n(h_j(T)^{c_j})=<v_{j_1}>\oplus\cdots\oplus<v_{ja_j}>=<v_{k_1}'>\oplus\cdots\oplus<v_{kb_j}'>$$

که در آن $\{v_{j_1},\cdots,v_{ja_j}\}$ و $\{v_{k_1}',\cdots,v_{kb_j}'\}$ به‌ترتیب مولدهایی از زیرفضاهای دوری در (۲.۲۹) هستند که مرتبه‌های آنها توانهایی از $h_j(x)$ هستند. بنابراین کافی است (۲.۲۹) را برای حالتی ثابت کنیم که در آن V به دوطریق مختلف به‌صورت مجموع مستقیم زیرفضاهای دوری بیان شده است

$$V=<v_1>\oplus\cdots\oplus<v_r>=<v_1'>\oplus\cdots\oplus<v_s'>,$$

و مرتبه‌های مولدهای $\{v_i\}$ و $\{v'_i\}$ همه توانهایی از اول منفرد هستند که آن را $p(x)$ خواهیم نامید. فرض می‌کنیم که مرتبه‌های $\{v_i\}$ برابر $\{p(x)^{a_1}, \cdots, p(x)^{a_r}\}$ با $a_i > 0$ باشند، و مرتبه‌های $\{v'_i\}$ را با $\{p(x)^{b_1}, \cdots, p(x)^{b_s}\}$ نشان می‌دهیم با هر $b_j > 0$. برای اثبات جزء یکتایی قضیه، کافی است که نخست ثابت کنیم $r = s$، سپس ثابت کنیم که شمارهٔ aها و bهای برابر یک برابرند، سپس شمارهٔ aها و bهای برابر ۲ برابرند، و همین‌طور الی آخر.

با محاسبهٔ $n(p(T))$، بااستفاده از هر یک از دو تجزیه، آغاز می‌کنیم. گیریم

$$v = f_1(T)v_1 + \cdots + f_r(T)v_r \in < v_1 > \oplus \cdots \oplus < v_r >$$

که در آن $f_i(x) \in F[x]$. فرض می‌کنیم $v \in n(p(T))$. پس

$$p(T)f_1(T)v_1 + \cdots + p(T)f_r(T)v_r = 0$$

و به‌سبب مجموع مستقیم داریم

$$p(T)f_1(T)v_1 = \cdots = p(T)f_r(T)v_r = 0$$

بنابراین

$$p(x)^{a_1}|p(x)f_1(x), \cdots, p(x)^{a_r}|p(x)f_r(x),$$

از یکتایی تجزیه در $F[x]$ داریم

$$p(x)^{a_1-1}|f_1(x), \ldots, p(x)^{a_r-1}|f_r(x)$$

از اینجا نتیجه می‌شود که اگر $a_i = 1$، آنگاه با قراردادن $p(T)^{a_i-1} = 1$ داریم

$$n(p(T)) = < p(T)^{a_1-1}v_1 > \oplus \cdots \oplus < p(T)^{a_r-1}v_r >,$$

و بُعدِ $n(p(T))$ برابر rd است، که d درجهٔ $p(x)$ است. محاسبهٔ مشابهی بااستفاده از زیرفضاهای $< v'_i >$ نشان می‌دهد که بعد $n(p(T))$ برابر sd است و نتیجه می‌گیریم که $r = s$.

اکنون گیریم x_1 معرف تعداد a_iهای برابر یک، x_2 معرف تعداد a_iهای برابر دو، و غیره، است. به‌روش مشابه گیریم y_1 برابر تعداد b_jهای برابر یک، y_2 برابر تعداد b_jهای برابر دو و غیره.

اینک به‌منظور یافتن $n(p(T)^2)$ از همان استدلالی استفاده می‌کنیم که برای محاسبهٔ $n(p(T))$ استفاده کردیم و به‌دست می‌آوریم

$$n(p(T^2)) = \sum_{a_i=1} < v_i > + \sum_{a_i \geqq 2} < p_i(T)^{a_i-2}v_i > \qquad \text{(جمع مستقیم)}$$
$$= \sum_{b_j=1} < v'_j > + \sum_{b_j \geqq 2} p_j(T)^{b_j-2}v'_j > \qquad \text{(جمع مستقیم)}$$

برای محاسبهٔ بعد $n(p(T^{۲}))$ بااستفاده از این حقیقت که بعد $< v_i >$ برابر d است اگر $a_i = ۱$، و بعد $< p_i(T)^{a_i - ۲} v_i >$ برابر $۲d$ است اگر $a_i \geq ۲$، داریم

$$x_۱ d + (r - x_۱) ۲d = y_۱ d + (r - y_۱) ۲d$$

این معادله ایجاب می‌کند که $x_۱ - y_۱ = ۲(x_۱ - y_۱)$ و از این‌رو $x_۱ - y_۱ = ۰$. با ادامهٔ این روش می‌توانیم نشان دهیم که $x_۲ = y_۲$، و غیره و قضیه ثابت می‌شود.

تمرینها

۱.ثابت کنید که اگر $\mathbf{A}$ یک ماتریس n در n با ضرایبی در یک هیأت دلخواه F باشد، $\mathbf{A}$ با ${}^t\mathbf{A}$ مشابه است. [راهنمایی: بااستفاده از روشهای این فصل ثابت کنید که اگر $T \in L(V, V)$، مقسوم‌علیه‌های مقدماتی T و T^* یکی هستند.]

۲.گیریم $T \in L(V, V)$. ثابت کنید که V نسبت به T تجزیه‌ناپذیر است اگر و تنها اگر V دوری و چندجمله‌یی مینیمال T یک توان اول $p(x)^a$ برای یک اول $p(x) \in F[x]$ باشد. [← قضیهٔ (۶.۲۹)]

۳.گیریم $T \in L(V, V)$، V نسبت به T تحویلناپذیر نامیده می‌شود، به‌شرط اینکه تنها زیرفضاهای پایا، V و $\{۰\}$ باشند. ثابت کنید که هر فضای برداری ناصفر V نسبت به T تحویلناپذیر است اگر و تنها اگر V دوری باشد و چندجمله‌یی مینیمال T در $F[x]$ اول باشد.

۴.گیریم $T \in L(V, V)$، V نسبت به T کاملاً تحویلناپذیر نامیده می‌شود به‌شرط اینکه V یک مجموع مستقیم، $V = \sum V_i$، از زیرفضاهای پایای V_i باشد، به‌گونه‌ای که هر زیرفضای V_i نسبت به تحدید $T|_{V_i}$ از T به V_i تحویلناپذیر باشد. فرض کنید $\{۰\} \neq V$. ثابت کنید که گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

الف) V نسبت به T کاملاً تحویلناپذیر است.

ب) چندجمله‌یی مینیمال T حاصلضربی از تک‌جمله‌ییهای عاملهای اول متمایز در $F[x]$ است.

پ) همهٔ مقسوم‌علیه‌های ابتدایی T، چندجمله‌یی هستند. [توجه دارید که این نتیجه تعمیمی از قضیهٔ (۱۱.۲۳) است.]

ت) برای هر زیرفضای Tـپایای V'، یک زیرفضای Tـپایای دیگر V'' هست به‌گونه‌ای که $V = V' \oplus V''$.

۹

تبدیلهای متعامد و یکانی

در فصلهای ۷ و ۸ قضیه‌های کلی در مورد ساختار یک تبدیل خطی تنها به انضمام تجزیهٔ ژوردان، قضیهٔ مقسوم علیه مقدماتی، و صورتهای گویا و نرمال ژوردان را ثابت کردیم. برای برخی از انواع تبدیلهای خطی روی فضاهای برداری بر هیأت اعداد حقیقی یا مختلط، آگاهی بیشتری از ماهیّت ویژه مقدارها، و قضیه‌های دقیقتری دربارهٔ ساختار تبدیلها، می‌توان به‌دست داد. این فصل شامل دو بخش دربارهٔ تبدیلهای متعامد و صورتهای درجهٔ دوم روی فضاهای برداری بر هیأت عددهای حقیقی است. بخش آخر به فضاهای برداری بر اعداد مختلط، و نظریهٔ تبدیلهای نرمال، ارمیتی و یکانی اختصاص داده شده است. این فصل مستقل از فصل ۸ است و می‌تواند بلافاصله پس از فصل ۷ خوانده شود.

۳۰. ساختار تبدیلهای متعامد (یا قائم)

در بخش ۱۴ نشان دادیم که هر تبدیل قائم در صفحه، یک دوران یا تقارن محوری است. در این بخش می‌خواهیم برای تبدیلهای متعامد روی یک فضای برداری حقیقی n بعدی V با یک حاصلضرب درونی (u,v)، یک توصیف هندسی بیابیم. از نقطه‌نظر فصل ۷، وقتی یک تبدیل متعامد T داده شود، در جستجوی پایه‌ای یکاقائم از V خواهیم بود که ماتریس T نسبت به‌آن، تا اندازهٔ ممکن ساده باشد.

ماتریس

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\frac{۲\pi}{۳} & -\sin\frac{۲\pi}{۳} \\ \sin\frac{۲\pi}{۳} & \cos\frac{۲\pi}{۳} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{۱}{۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲} \end{pmatrix}$$

یک ماتریس متعامد است به گونه‌ای که $\mathbf{A}^۳ = \mathbf{I}$. چندجمله‌یی مینیمال آن

$$x^۲ + x + ۱$$

است که در حلقهٔ چندجمله‌ییهای $R[x]$ یک چندجمله‌یی اوّل است. پس، بنابر قضیهٔ (۱۱.۲۳)، روی هیأت حقیقی، $\mathbf{A}$ نمی‌تواند قطری شود، و حتی نمی‌تواند به شکل مثلثی درآید، زیرا به‌آسانی می‌توان نشان داد که هر ماتریس متعامد مثلثی ۲ × ۲ باید قطری باشد. بنابراین روشهای فصل ۷، حتی در این حالت ساده، اطلاّعات تازهٔ کمتری می‌دهند.

اشکال در اینجاست که هیأت حقیقی جبری-بسته نیست. در اینجاست که، به گفتهٔ هرمان‌وایل، اقلیدس وارد صحنه می‌شود و خط‌کش و پرگار خود را پهن می‌کند. مفاهیم لازم برای پرداختن به تبدیلهای متعامد روی یک فضای برداری حقیقی، مسأله‌های مطرح شده در فصل ۷ را نیز روشنتر می‌سازند. وجود حاصلضرب داخلی موجب می‌شود که اطلاّعاتی دربارهٔ چندجمله‌ییهای مینیمال، و غیره به‌دست آوریم، که تنها با روشهای فصل ۷ تقریباً ناممکن به‌نظر می‌رسید. مطلب را با چند تعریف و قضیهٔ کلی آغاز می‌کنیم.

(۱.۳۰) **تعریف.** گیریم $T \in L(V,V)$ یک تبدیل خطّی روی یک فضای برداری متناهی-بعد V بر هیأت دلخواه F باشد. یک زیر فضای پایای ناصفر $W \subset V$ (نسبت به T) تجزیه‌ناپذیر نامیده می‌شود، هرگاه تنها زیر فضاهای T-پایای مشمول W، فضاهای $\{۰\}$ و W باشند.

(۲.۳۰) **قضیه.** (الف) اگر V یک فضای برداری روی یک هیأت جبری-بستهٔ F باشد، هر زیر فضای تحویلناپذیر پایای W نسبت به $T \in L(V,V)$ دارای بعد ۱ است. (ب) اگر V یک فضای برداری روی هیأت حقیقی R و W یک زیرفضای تحویلناپذیر پایا نسبت به $T \in L(V,V)$ باشند، بعد W برابر ۱ یا ۲ است.

برهان. الف) گیریم W یک زیر فضای تحویلناپذیر پایا نسبت به T باشد. پس T معرف یک تبدیل خطی T_W از W به خود W است، که درآن

$$T_W(w) = T(w),\ w \in W$$

بنابر بخش ۲۴، W شامل یک ویژه بردار w نسبت به T است، در این صورت $S(w)$ یک

زیرفضای پایای مشمول W است، و از این رو $W = S(w)$، زیرا W تحویلناپذیر است. پس قسمت (الف) ثابت شد.

ب) گیریم W یک زیرفضای تحویلناپذیر پایا نسبت به T و $m(x)$ چندجمله‌یی مینیمال T_W باشند. به‌موجب قضیهٔ (۹.۲۳) داریم $m(x) = p(x)^e$، که $p(x)$ یک چندجمله‌یی اول در $R[x]$ است؛ وگرنه W مجموع مستقیم زیر فضاها خواهد بود، که مخالف فرض تحویلناپذیری W است. اگر $m(x) = p(x)^e$ چندجمله‌یی مینیمال T_W باشد، آنگاه $e = ۱$، وگرنه صفر-فضای $p(T)^{e-۱}$ یک زیرفضای پایایی غیر از $\{۰\}$ و W خواهد بود. پس بنابر قضیّهٔ (۱۳.۲۱) داریم

$$m(x) = x - \alpha \quad \text{یا} \quad m(x) = x^۲ + \alpha x + \beta \text{،} \quad \alpha^۲ - ۴\beta < ۰$$

گیریم w برداری ناصفر از W باشد. در این‌صورت اگر $m(x) = x - \alpha$، w بردار مشخصهٔ T است، و همانند بخش (الف) $W = S(w)$. اگر $m(x) = x^۲ + \alpha x + \beta$ برای $\alpha^۲ - ۴\beta < ۰$، آنگاه $S[w, T(w)]$ یک زیرفضای پایاست، و از این رو $W = S[w, T(w)]$. بنابراین W دارای بعد ۱ یا ۲ است و قضیه ثابت می‌شود.

اینک این قضیه را به‌شکل زیر در مورد تبدیلهای متعامد به‌کار می‌بریم.

(۳.۳۰) قضیه. فرض می‌کنیم T یک تبدیل متعامد روی یک فضای برداری حقیقی V با یک ضرب داخلی باشد، و W یک زیر فضای برداری پایا و تجزیه‌ناپذیر نسبت به T باشد؛ در این صورت یکی از دو حکم زیر برقرار است،

الف) $\dim W = ۱$، و اگر w مخالف صفر در W باشد، آنگاه $T(w) = \pm w$.

ب) $\dim W = ۲$، و یک پایهٔ یکاقائم $\{w_۱, w_۲\}$ برای فضای W وجود دارد به‌طوری که ماتریس T نسبت به پایهٔ $\{w_۱, w_۲\}$ به‌صورت زیر است

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

به‌عبارت دیگر، T_W یک دوران در فضای دو بعدی W است ($\longleftarrow$بخش ۱۴).

برهان. بااستفاده از (۲.۳۰) بعد W یا برابر با ۱ و یا برابر با ۲ است. در حالت (الف) قضیه، برای مقداری از $\lambda \in R$، $T(w) = \lambda w$ و رابطهٔ

$$||T(w)|| = ||w||$$

ایجاب می‌کند که $|\lambda| = ۱$. بنابراین $\lambda = \pm ۱$ و $T(w) = \pm w$.

اگر $\dim W = ۲$، چندجمله‌یی مینیمال T به‌صورت زیر است

$$x^۲ + \alpha x + \beta, \qquad \alpha^۲ - ۴\beta < ۰.$$

فرض می‌کنیم $\{w_1, w_2\}$ یک پایهٔ یکاقائم برای W باشد و قرار می‌دهیم

$$T(w_1) = \lambda w_1 + \mu w_2.$$

پس $\lambda^2 + \mu^2 = 1$، و چون $(T(w_1), T(w_2)) = 0$، پس یا $T(w_2) = -\mu w_1 + \lambda w_2$، و یا $T(w_2) = \mu w_1 - \lambda w_2$. در حالت اول ماتریس T چنین است

$$\begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$$

و می‌توانیم زاویهٔ θ را طوری پیدا کنیم که $\cos\theta = \lambda$، $\sin\theta = \mu$، زیرا $\lambda^2 + \mu^2 = 1$. در حالت دوّم ماتریس به‌صورت

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & -\lambda \end{pmatrix}$$

است که در معادلهٔ $x^2 - 1 = 0$ صدق می‌کند. چون $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ اول نیست، پس این حالت نمی‌تواند پیش آید و اثبات قضیه کامل می‌شود.

این قضیه وقتی جالب می‌شود که با قضیّه زیر تلفیق شود.

(۴.۳۰) قضیه. فرض می‌کنیم T تبدیلی متعامد در یک فضای برداری حقیقی V مجهز به یک حاصلضرب داخلی باشد؛ در این صورت V جمع مستقیم زیر فضاهای پایای تجزیه‌ناپذیر $\{W_1, \cdots, W_s\}$ به‌ازای $s \geq 1$ است، به‌طوری که بردارهای متعلق به زیرفضاهای متمایز W_i و W_j برهم عمودند.

برهان. قضیه را با استقرا روی $\dim V$ اثبات می‌کنیم. قضیه در مورد $\dim V = 1$ آشکار است. فرض می‌کنیم قضیّه برای زیر فضاهایی که بعد آنها از $\dim V$ کوچکتراست درست باشد. اگر T تبدیل متعامدی روی V باشد، و W_1 یک زیر فضای غیر صفر پایا با کمترین بعد، آنگاه W_1 زیرفضایی است تجزیه‌ناپذیر. فرض می‌کنیم $W_1^\perp$ زیرفضای متشکّل از بردارهای عمود بر W_1 باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$W = W_1 \oplus W_1^\perp$$

آشکار است که $W_1 \cap W_1^\perp = \{0\}$، زیرا $(w, w) \neq 0$ اگر $w \neq 0$. اکنون قرار می‌دهیم $w \in W$ و فرض می‌کنیم $\{w_1, \cdots, w_s\}$ یک پایهٔ یکاقائم برای W_1 باشد، که در آن یا $s = 1$ یا $s = 2$. پس

$$w = \sum_{i=1}^{s} (w, w_i) w_i + \left(w - \sum_{i=1}^{s} (w, w_i) w_i \right)$$

و چون $\sum_{۱}^{s}(w,w_i)w_i \in W_{۱}$ و $w-\sum_{۱}^{s}(w,w_i)w_i \in W_{۱}^{\perp}$، خواهیم داشت $W = W_{۱} + W_{۱}^{\perp}$ و این مطلب همراه با این نتیجه که $W_{۱} \cap W_{۱}^{\perp} = \{۰\}$، ایجاب می‌کند که $W = W_{۱} \oplus W_{۱}^{\perp}$.

اکنون‌ما این‌قضیهٔ کلیدی را که $W_{۱}^{\perp}$ نیز زیر فضایی است پایا ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم $w' \in W_{۱}^{\perp}$. چون T متعامد است، $T(W_{۱}) = W_{۱}$، و

$$(W_{۱}, w') = (T(W_{۱}), T(w')) = (W_{۱}, T(w')) = ۰$$

بنابراین $T(w')$ نیز بر همه‌ی بردارهای موجود در $W_{۱}$ عمود است.

چون $T(W_{۱}^{\perp}) \subset W_{۱}^{\perp}$، T یک تبدیل متعامد روی $W_{۱}^{\perp}$ است و به‌موجب اصل استقراء $W_{۱}^{\perp}$ جمع مستقیم زیر فضاهای پایا و غیرقابل تجزیهٔ دو به دو عمود بر هم است. چون $V = W_{۱} \oplus W_{۱}^{\perp}$ پس همین حکم در مورد V نیز برقرار است و قضیّه ثابت می‌شود.

از ترکیب قضیه‌های (۳.۳۰) و (۴.۳۰) ماتریس یک تبدیل متعامد به‌صورت زیر مشخص می‌شود.

(۵.۳۰) قضیه. فرض می‌کنیم T تبدیلی متعامد در یک فضای برداری حقیقی V با یک حاصلضرب داخلی باشد؛ در این صورت یک‌پایهٔ یکا قائم برای V وجود دارد به‌طوری که ماتریس T در این پایه به‌صورت زیر است

$$\begin{pmatrix}
۱ & & & & & & & & & & ۰\\
& \ddots & & & & & & & & & \\
& & ۱ & & & & & & & & \\
& & & -۱ & & & & & & & \\
& & & & \ddots & & & & & & \\
& & & & & -۱ & & & & & \\
& & & & & & \cos\theta_{۱} & -\sin\theta_{۱} & & & \\
& & & & & & \sin\theta_{۱} & \cos\theta_{۱} & & & \\
& & & & & & & & \cos\theta_{۲} & -\sin\theta_{۲} & \\
& & & & & & & & \sin\theta_{۲} & \cos\theta_{۲} & \\
۰ & & & & & & & & & & \ddots
\end{pmatrix}$$

که همه‌جا صفر است غیر از بلوکهای ۱×۱ و یا بلوکهای ۲×۲ بر روی قطر.

برهان. اثبات، باتوجه به قضیهٔ (۳.۳۰) و (۴.۳۰) سرراست است. زیرا می‌توانیم پایه‌های

یکاقائمی را برای هر یک از زیر فضاهای W_i در قضیهٔ (۴.۳۰) انتخاب کنیم، که وقتی باهم گرفته می‌شوند یک پایهٔ یکاقائم برای V تشکیل دهند.

تمرینها

۱. ثابت کنید که اگر T تبدیل متعامدی در $R_۲$ باشد به‌گونه‌ای که $D(T) = -۱$، یک پایهٔ یکاقائم در $R_۲$ وجود دارد به طوری که ماتریس T در این پایه برابر است با

$$\begin{pmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

۲. یک تبدیل متعامد T در $R_۳$ را یک دوران می‌نامیم اگر $D(T) = ۱$. ثابت کنید که اگر T دورانی در $R_۳$ باشد، یک پایهٔ یکاقائم در $R_۳$ وجود دارد به‌طوری که ماتریس T در این پایه به‌صورت زیر است:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \cos\theta & -\sin\theta \\ ۰ & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

که θ عددی است حقیقی.

۳. ثابت کنید که یک تبدیل متعامد T در R_m دارای یک‌ویژه مقدار ۱ است اگر $D(T) = ۱$ و m عدد فرد باشد. در موردی که m زوج است چه حکمی می‌توان کرد؟

۳۱. قضیهٔ محورهای اصلی

در هندسهٔ تحلیلی مسألهٔ زیر مطرح می‌شود. فرض می‌کنیم

$$f(x_۱, x_۲) = ax_۱^۲ + bx_۱x_۲ + cx_۲^۲ + dx_۱ + ex_۲ + f = ۰$$

یک معادلهٔ درجه دوم از $x_۱$ و $x_۲$ باشد. مطلوب یافتن یک دستگاه مختصات جدید

$$X_۱ = (\cos\theta)x_۱ + (\sin\theta)x_۲ + c_۱$$
$$X_۲ = (-\sin\theta)x_۱ + (\cos\theta)x_۲ + c_۲$$

حاصل از یک دوران و یک انتقال دستگاه اصلی است به‌طوری که چندجمله‌یی فوق در دستگاه جدید به یکی از صورتهای زیر تبدیل شود

$$f(X_۱, X_۲) = AX_۱^۲ + BX_۲^۲ + C = ۰ \qquad (۱.۳۱)$$

$$f(X_۱, X_۲) = AX_۲^۲ - DX_۱ = ۰ \qquad (۲.۳۱)$$

در این صورت نمودار $f(X_1, X_2) = 0$ را می‌توان به‌صورت یک دایره، بیضی، هذلولی، سهمی و غیره رده‌بندی کرد. روشن است که اگر در ابتدا بتوانیم دوران محورهایی به‌صورت

$$X_1 = (\cos\theta)x_1 + (\sin\theta)x_2$$
$$X_2 = (-\sin\theta)x_1 + (\cos\theta)x_2$$

پیدا کنیم که $ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$ را به

$$AX_1^2 + BX_2^2 \qquad (۳.۳۱)$$

تبدیل کند در این صورت معادلهٔ جدید به‌صورت

$$f(X_1, X_2) = AX_1^2 + BX_2^2 + CX_1 + DX_2 + D = 0$$

در می‌آید، و می‌توانیم به‌وسیلهٔ یک انتقال محورها $X_1' = X_1 + c_1$ و $X_2' = X_2 + c_2$ یکی‌از صورتهای (۱.۳۱) و یا (۲.۳۱) را به‌دست آوریم.

مسأله‌ای که‌در این بخش بررسی می‌کنیم تعمیم مسألهٔ پیدا کردن دوران محورهاست به‌گونه‌ای که معادلهٔ درجه دوّم $f(x_1, x_2)$ را به‌صورت (۳.۳۱) درآورد.

(۴.۳۱) **تعریف.** فرض می‌کنیم V یک فضای برداری n بعدی روی هیات اعداد حقیقی R باشد. یک صورت درجه دوّم روی V تابعی است مانند Q که به هر بردار a متعلق به V یک عدد حقیقی $Q(a)$ را نظیر می‌کند که در آن تساوی

$$Q(a) = B(a, a)$$

به‌ازای یک‌صورت دوخطی متقارن B روی V برقرار است. یادآوری می‌کنیم که یک صورت دو خطی B روی V به هر یک از بردارهای b, a از V یک‌عدد حقیقی $B(a, b)$ تخصیص می‌دهد به‌طوری که:

$$B(a_1 + a_2, b) = B(a_1, b) + B(a_2, b), \quad B(a, b_1 + b_2) = B(a, b_1) + B(a, b_2)$$

و برای هر $\alpha \in R$ و $a, b \in V$ داریم

$$B(\alpha a, b) = B(a, \alpha b) = \alpha B(a, b)$$

صورت دوخطی B متقارن‌است اگر به‌ازای هر دو بردار a و b در V تساوی $B(a, b) = B(b, a)$ برقرار باشد.

به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که یک صورت درجهٔ دوم Q در شرط $Q(\alpha a) = \alpha^۲ Q(a)$ به‌ازای هر $\alpha \in R$ و $a \in V$ صدق می‌کند و یک صورت دو خطی متقارن به‌وسیلهٔ Q به‌صورت یکتای:

$$B(a,b) = \frac{۱}{۲}[Q(a+b) - Q(a) - Q(b)], \quad a,b \in V.$$

معین می‌شود.

(۵.۳۱) قضیه. فرض می‌کنیم Q یک صورت درجهٔ دوّم روی V باشد و $\{e_۱, \cdots, e_n\}$ یک پایهٔ V روی هیأت R. یک ماتریس $n \times n$، $\mathbf{S} = (\sigma_{ij})$، را با قرار دادن

$$\sigma_{ij} = B(e_i, e_j), \qquad ۱ \leq i, \;\; j \leq n,$$

تعریف می‌کنیم، که درآن $\mathbf{B}$ یک صورت دو خطی مطابق با تعریف (۴.۳۱) است. در این صورت داریم $^t\mathbf{S} = \mathbf{S}$ و برای هر $a = \sum \alpha_i e_i \in V$ داریم

$$Q(a) = B(a,a) = \sum_{i,j=۱}^{n} \alpha_i \alpha_j \sigma_{ij} = \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i^۲ \sigma_{ii} + ۲ \sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j \sigma_{ij} \quad (۶.۳۱)$$

و به وارون، فرض می‌کنیم $\mathbf{S} = (\sigma_{ij})$ یک ماتریس حقیقی دلخواه $n \times n$ باشد به‌طوری که $^t\mathbf{S} = \mathbf{S}$. در این صورت $\mathbf{S}$ معرّف یک صورت دو خطی متقارن B است به‌طوری که $B(e_i, e_j) = \sigma_{ij}$، و همین‌طور یک صورت درجهٔ دوّم $Q(a) = B(a,a)$ مانند (۴.۳۱) تعریف می‌شود.

تبصره. با فرض درستی قضیّه، تابع

$$f(x_۱, x_۲) = ax_۱^۲ + bx_۱x_۲ + cx_۲^۲$$

معرّف یک صورت درجهٔ دوم روی $R_۲$ است به‌طوری که اگر $\{x_۱, x_۲\}$ مؤلفه‌های یک بردار x نسبت به پایهٔ $\{e_۱, e_۲\}$ باشد، آنگاه ماتریس f که در قضیّه تعریف شده است چنین خواهد شد

$$\begin{pmatrix} a & \frac{۱}{۲}b \\ \frac{۱}{۲}b & c \end{pmatrix}$$

برهان قضیهٔ (۵.۳۱). قسمت اول بااستفاده از تعریف (۴.۳۱) آشکار است. برای اثبات عکس آن، فرض می‌کنیم که $\mathbf{S} = {}^t\mathbf{S}$ برقرار است. یک تابع

$$B(a,b) = \sum_{i,j=۱}^{n} \alpha_i \beta_j \sigma_{ij}$$

را به‌ازای $a = \sum \alpha_i e_i, b = \sum \beta_i e_i$ تعریف می‌کنیم. در این صورت به‌روشنی می‌توان بررسی کرد که B یک صورت دوخطی متقارن روی V و طوری است که $B(e_i, e_j) = \sigma_{ij}$، و یک صورت درجهٔ دوم همانند تعریف (۴.۳۱)، با $Q(a) = B(a, a)$ تعریف می‌شود.

(۷.۳۱) تعریف. یک ماتریس $\mathbf{S}$، $n \times n$، را متقارن می‌نامند اگر $^t\mathbf{S} = \mathbf{S}$. ماتریس $\mathbf{S} = (\sigma_{ij})$ یک صورت درجهٔ دوم Q نسبت به پایهٔ $\{e_۱, \cdots, e_n\}$ چنینِ تعریف می‌شود

$$\sigma_{ij} = B(e_i, e_j)$$

که درآن

$$B(a, b) = \frac{۱}{۲}[Q(a + b) - Q(a) - Q(b)]$$

صورت دو خطی وابسته به Q است.

(۸.۳۱) قضیه. فرض می‌کنیم Q یک صورت درجهٔ دوم روی V باشد، که ماتریس آن در پایهٔ $\{e_۱, \cdots, e_n\}$ ماتریس $\mathbf{S} = (\sigma_{ij})$ است. فرض می‌کنیم $\{f_۱, \cdots, f_n\}$ یک‌پایهٔ دیگر V باشد به‌طوری که

$$f_i = \sum_{j=۱}^{n} \gamma_{ji} e_j, \qquad ۱ \leq i \leq n.$$

در این صورت، ماتریس Q نسبت به پایهٔ $\{f_۱, \cdots, f_n\}$ با رابطهٔ

$$\mathbf{S}' = {}^t\mathbf{C}\mathbf{S}\mathbf{C}$$

داده می‌شود که در آن $\mathbf{C} = (\gamma_{ij})$.

برهان. فرض می‌کنیم $\mathbf{S}' = (\sigma'_{ij})$. در این صورت داریم

$$\begin{aligned}
\sigma'_{ij} = B(f_i, f_j) &= B\left(\sum_{k=۱}^{n} \gamma_{ki} e_k, \sum_{l=۱}^{n} \gamma_{lj} e_l\right) \\
&= \sum_{k=۱}^{n} \sum_{l=۱}^{n} \gamma_{ki} \gamma_{lj} B(e_k, e_l) \\
&= \sum_{k=۱}^{n} \sum_{l=۱}^{n} \gamma_{ki} \sigma_{kl} \gamma_{lj}
\end{aligned}$$

و بدین ترتیب قضیّه ثابت می‌شود.

حال می‌توانیم قضیّهٔ اصلی این بخش را مطرح کنیم.

(۹.۳۱) قضیهٔ محورهای اصلی*. فرض می‌کنیم V یک فضای برداری حقیقی مجهز به یک ضرب داخلی (a,b) باشد، و فرض می‌کنیم $\{e_1,\cdots,e_n\}$ یک پایهٔ یکاقائم V باشد. فرض می‌کنیم که Q یک صورت درجهٔ دوّم روی V باشد که ماتریس آن نسبت به پایهٔ $\{e_1,\cdots,e_n\}$ به‌صورت $\mathbf{S}=(\sigma_{ij})$ است. در این صورت یک پایهٔ یکاقائم $\{f_1,\ldots,f_n\}$ وجود دارد به‌طوری که ماتریس Q در پایهٔ $f_1,\ldots,f_n$ چنین است:

$$\mathbf{S}'=\begin{pmatrix}\sigma_1 & & & 0\\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_n\end{pmatrix}$$

که درآن σ_iها ویژه مقدارهای $\mathbf{S}$ هستند. اگر

$$f_i=\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ji}e_j,\qquad 1\le i\le n,$$

آنگاه $\mathbf{C}=(\gamma_{ij})$ یک ماتریس قائم است. اگر $a\in V$ در پایهٔ جدید $\{f_1,\cdots,f_n\}$ با عبارت $a=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i$ بیان شود، آنگاه، خواهیم داشت $Q(a)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\sigma_i$. بردارهای $f_1,\cdots,f_n$ را محورهای اصلی Q می‌نامند.

(۱۰.۳۱) تعریف. یک تبدیل خطی T روی یک فضای برداری حقیقی مجهز به یک ضرب داخلی (a,b) را یک تبدیل متقارن می‌نامند اگر

$$(Ta,b)=(a,Tb),\qquad a,b\in V.$$

(۱۱.۳۱) فرض می‌کنیم که $\{e_1,\cdots,e_n\}$ یک پایهٔ یکاقائم V باشد. یک تبدیل T متعلق به $L(V,V)$، که ماتریس آن در پایهٔ $\{e_1,\cdots,e_n\}$ برابر با $\mathbf{S}=(\sigma_{ij})$ است، متقارن است اگر و تنها اگر، ماتریس آن متقارن باشد.

اثبات این‌مطلب شبیه به‌اثبات قسمت (۴) قضیهٔ (۱۱.۱۵) است که‌از دادن آن صرف‌نظر می‌کنیم.

(۱۲.۳۱) قضیه. فرض می‌کنیم که T یک تبدیل متقارن روی فضای برداری حقیقی V باشد؛ در این صورت یک پایهٔ یکاقائم وجود دارد که از ویژه بردارهای V تشکیل شده است.

اول می‌خواهیم ثابت کنیم که قضیهٔ (۱۲.۳۱) مستلزم قضیهٔ (۹.۳۱) است و سپس قضیهٔ (۱۲.۳۱) را اثبات خواهیم کرد.

---

* برای یک برهان دیگر و کاربرد این قضیه درمکانیک، ⟵ کتاب Synge و Griffith، صفحهٔ ۳۱۸ (که درکتابنامه فهرست شده است).

برهان اینکه قضیهٔ (۱۲.۳۱) مستلزم قضیهٔ (۹.۳۱) است. با درنظرگرفتن نمادگذاریهای قضیهٔ(۹.۳۱) فرض می‌کنیم Q یک صورت درجه دوّم روی V و $\mathbf{S}$ ماتریس آن در پایهٔ یکاقائم $\{e_۱, \cdots, e_n\}$ باشد. بااستفاده از قضیّه‌های (۸.۳۱) و (۵.۳۱) و نتایج بخش ۱۵ کافی است، ماتریس قائمی مانند $\mathbf{C}$ به‌دست آوریم به‌طوری که

$$ {}^t\mathbf{CSC} = \begin{pmatrix} \sigma_۱ & & ۰ \\ & \ddots & \\ ۰ & & \sigma_n \end{pmatrix} $$

که درآن $\sigma_۱$،$\cdots$،σ_n ویژه مقدارهای S هستند. در یک ماتریس قائم $\mathbf{C}$ داریم ${}^t\mathbf{C} = \mathbf{C}^{-۱}$ و بنابراین کافی است ماتریس قائم $\mathbf{C}$ طوری یافت شود که

$$ \mathbf{C}^{-۱}\mathbf{SC} = \begin{pmatrix} \sigma_۱ & & ۰ \\ & \ddots & \\ ۰ & & \sigma_n \end{pmatrix} $$

این مسأله‌ای است مربوط به تبدیل خطی T که ماتریس آن نسبت به پایهٔ $\{e_۱, \cdots, e_n\}$ برابر با $\mathbf{S}$ است. به‌موجب (۱۱.۳۱)، تبدیل T متقارن است و بنابر نتایج بخش ۱۵ پیداکردن $\mathbf{C}$ درست منطبق بر مسألهٔ مذکور در قضیّهٔ (۱۲.۳۱) است.

برهان قضیهٔ (۱۲.۳۱). نخست ثابت می‌کنیم که V حاصل‌جمع مستقیم زیرفضاهای پایا و تجزیه‌ناپذیر دو به‌دو متعامد نسبت به T است. روش اثبات مانند روش اثبات قضیّهٔ (۴.۳۰) است؛ فقط باید تحقیق کنیم که‌اگر W نسبت به T پایا باشد، زیر فضای $W^\perp$ نیز نسبت به T پایاست. فرض می‌کنیم $w' \in W^\perp$ و $w \in W$؛ در این صورت

$$ (w, Tw') = (Tw, w') = ۰ $$

زیراکه $Tw \in W$ و $w' \in W^\perp$. حال می‌توانیم نتیجه بگیریم که V حاصل‌جمع مستقیم زیرفضاهای تجزیه‌ناپذیر دو به دو متعامد $\{W_۱, \cdots, W_s\}$است.

اکنون کافی است که نشان دهیم برای هر i، $۱ \leq i \leq s$، $\dim W_i = ۱$. زیرا بعد W_i برابر با ۱ یا ۲ است، وکافی است که ثابت کنیم تبدیل متقارن T در یک فضای برداری حقیقی و دوبعدی W همیشه دارای یک ویژه ـ بردار است. فرض می‌کنیم که $\{w_۱, w_۲\}$ یک پایهٔ یکاقائم برای W باشد؛ در این صورت تبدیل T نسبت به‌پایهٔ $\{w_۱, w_۲\}$ دارای یک ماتریس متقارن به‌صورت

$$ \begin{pmatrix} \lambda & \xi \\ \xi & \mu \end{pmatrix}, \qquad \lambda, \mu, \xi \in R $$

است. این ماتریس در معادلهٔ

$$x^{2} - (\lambda + \mu)x + (\lambda\mu - \xi^{2}) = 0$$

صدق می‌کند.

فرض می‌کنیم که $A = -(\lambda + \mu)$ و $B = \lambda\mu - \xi^{2}$، و برای هر λ،μ،ξ داریم:

$$\begin{aligned} A^{2} - 4B &= (\lambda + \mu)^{2} - 4(\lambda\mu - \xi^{2}) \\ &= \lambda^{2} - 2\lambda\mu + \mu^{2} + 4\xi^{2} = (\lambda - \mu)^{2} + 4\xi^{2} \geq 0 \end{aligned}$$

بنابراین چندجمله‌یی $x^{2} + Ax + B$ در $R[x]$ به حاصلضرب دو چندجمله‌یی خطی قابل تجزیه است، و از بخش ۲۴ نتیجه می‌شود که W دارای یک ویژه بردار است و لذا اثبات قضیه کامل می‌شود.

تمرینها

۱.ماتریس متقارن

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

را درنظر می‌گیریم.

الف) ویژه مقدارهای $\mathbf{X}$ را حساب کنید.

ب) یک تبدیل متقارن T در R_3 تعریف کنید که ماتریس آن نسبت به پایهٔ یکاقائم $\{e_1, e_2, e_3\}$ ماتریس $\mathbf{X}$ باشد. بااستفاده از روشهای فصل ۷، یک پایهٔ R_3 متشکل از ویژه بردارهای تبدیل T به‌دست آورید [می‌دانیم که به‌موجب قضیهٔ (۱۲.۳۱) می‌توان این کار را کرد]. با تغییر این پایه یک پایهٔ یکاقائم $\{f_1, f_2, f_3\}$ متشکل از ویژه بردارها به دست‌آورید. فرض می‌کنیم

$$f_i = \sum_{j=1}^{3} \mu_{ji} e_j$$

و

$$Tf_i = \alpha_i f_i, \qquad \alpha_i \in R, \qquad i = 1, 2, 3$$

در این صورت $\mathbf{M} = (\mu_{ij})$ یک ماتریس متعامد است، به‌طوری که $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{M}$ یک ماتریس قطری است. چون $\mathbf{M}$ متعامد است، $\mathbf{M}^{-1} = {}^{t}\mathbf{M}$، لذا این شیوهٔ محاسباتی را می‌توان برای پیدا کردن محورهای اصلی یک فضای برداری نسبت به یک صورت درجهٔ دوم به‌کار برد.

۲.پایهٔ یکاقائمی از $R_۲$ به‌دست آورید که محورهای اصلی صورتهای درجهٔ دوم زیر را نشان دهند:
الف) $۸x_۱^۲ + ۸x_۱x_۲ + ۲x_۲^۲$
ب) $x_۱^۲ + ۶x_۱x_۲ + x_۲^۲$

۳.یک پایهٔ یکاقائم از $R_۴$ پیدا کنید که محورهای اصلی صورت درجه دوم $x_۱x_۲ + x_۳x_۴$ را نشان دهند.

۴.یک صورت درجه دوم $Q(x)$ را مثبت معیّن می‌نامیم اگر برای هر بردار $x \neq ۰$ داشته باشیم $Q(x) > ۰$. نشان دهید که Q مثبت معیّن است اگر و تنها اگر همهٔ ویژهٔ مقدارهای ماتریس $\mathbf{S}$ مربوط به Q مثبت باشند. صورت درجهٔ دوم منفی معیّن را تعریف کنید و نتیجهٔ مشابه آن را بیان و ثابت کنید.

۵.فرض کنیم V یک فضای برداری روی هیأت اعداد حقیقی و Q یک صورت درجهٔ دوم روی V، و B صورت دو خطی وابسته به Q باشد. نشان دهید که زیر فضاهای V_+، V_-، و $V_۰$ وجود دارند به‌طوری که $B(V_+, V_-) = B(V_+, V_۰) = B(V_-, V_۰) = ۰$ و $V = V_+ \oplus V_- \oplus V_۰$ و صورتهای درجهٔ دوم Q_+، Q_- و $Q_۰$ وجود دارند که به ترتیب روی V_+، V_-، و $V_۰$ با قاعدهٔ، $Q_+(x) = Q(x)$، $x \in V_+$ ، و غیره تعریف می‌شوند و به‌ترتیب مثبت معیّن، منفی معیّن و متحد با صفر هستند. ($\leftarrow$ مثال ۴ برای تعریف صورتهای درجهٔ دوم مثبت معیّن و منفی معیّن).

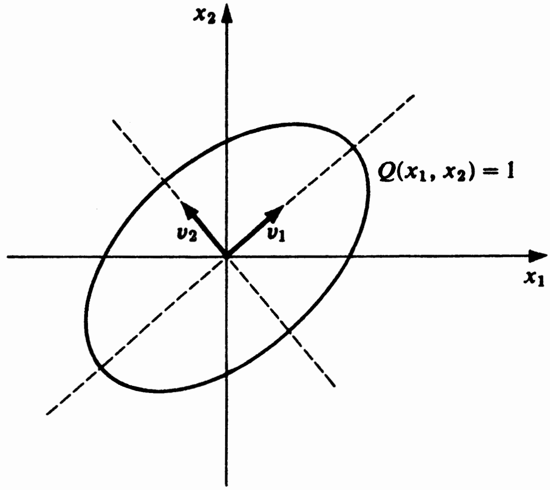
۶.فرض کنیم Q یک صورت درجهٔ دوم روی V، و $V = V_+ \oplus V_- \oplus V_۰$ تجزیهٔ V مطابق باتمرین ۵ باشد. نشان دهید که $V_۰$ مجموعهٔ همه بردارهای $v \in V$ است به‌طوری که $B(v, V) = ۰$، که در آن B صورت دوخطی وابسته به Q است.

۷.فرض کنیم Q یک صورت درجهٔ دوم روی V باشد و فرض کنیم $V = V_+ \oplus V_- \oplus V_۰$ و $V = V'_+ \oplus V'_- \oplus V'_۰$ دو تجزیهٔ V باشند که در شرطهای تمرین ۵ صدق می‌کنند. نشان دهید که $\dim V_+ = \dim V'_+$، $\dim V_- = \dim V'_-$ و $V_۰ = V'_۰$ [راهنمایی: با توجه به تمرین ۶ داریم $V_۰ = V'_۰$. یک تبدیل خطی $T : V_+ \to V'_+$ را به صورت زیر تعریف کنید. برای هر $v \in V_+$ فرض کنید $v = v'_+ + v'_- + v'_۰$ تجزیهٔ بردار v در تجزیهٔ فضای برداری v بر طبق تجزیهٔ دوّم باشد ($v = v'_+ \oplus v'_- \oplus v'_۰$). قرار دهید $T(v) = v'_+$. فرض کنید v به صفر-فضای T متعلق باشد. نشان دهید که $Q(v) \geq ۰$ و $Q(v) \leq ۰$، به‌طوری که $v = ۰$ و نتیجه بگیرید که $\dim V_+ \leq \dim V'_+$ و غیره.]

۸.فرض می‌کنیم Q یک صورت درجهٔ دوم روی V باشد و $V = V_+ \oplus V_- \oplus V_۰$ تجزیهٔ V باشد که در شرطهای تمرین ۵ صدق می‌کند. نشان دهید که $\dim V_+$ برابر است با تعداد ویژه مقدارهای ماتریس Q که مثبت هستند، و $\dim V_-$ برابر است با تعداد ویژه مقدارهای ماتریس Q که منفی هستند و $\dim V_۰$ برابر است با تعداد ویژه مقدارهای ماتریس Q که برابر با صفرند.

۹.*. فرض کنیم Q یک صورت درجه دوم روی V باشد که $Q(x_۱, \cdots, x_n)$ را به‌صورت یک تابع از متغیرهای $x_۱$، $\cdots$، x_n درنظر می‌گیریم. مجموعهٔ نقطه‌های $x =< x_۱, \cdots, x_n >$

* حل تمرینهای ۹ و ۱۰ نیاز به حسابان توابع چند متغیره دارد.



شکل۱.۹

به‌طوری که $Q(x_۱, \cdots, x_n) = ۱$ معرّف یک سطح در R_n است. فرض می‌کنیم که Q مثبت معیّن باشد وهمه ویژهٔ مقدارهای ماتریس Q متمایز باشند. نشان دهید که‌اگر $(v_۱, \cdots, v_n)$ یک مجموعه از محورهای اصلی Q باشند، آنگاه هر یک‌از v_iها بر سطح $Q(x) = ۱$ در نقطهٔ $(Q(\nu_i))_{v_i}^{-۱/۲}$ عمودند (← شکل ۱.۹).

[راهنمایی: ابتدا حالت $Q(x_۱, \ldots, x_n) = \sum \alpha_i x_i^۲$. را درنظر بگیرید. یک بردار $v =< \xi_۱, \ldots, \xi_n >$ در نقطهٔ x بر سطح عمود است اگر و تنها اگر برابر با یک مضرب عددی از $< \partial Q/\partial x_۱, \ldots, \partial Q/\partial x_n >$ باشد، که در نقطهٔ x محاسبهٔ شده است. این مطلب را برای تحقیق حکم در حالت مفروض به‌کار برید، و حالت کلی را با تعویض متغیرها به وسیلهٔ یک‌تبدیل متعامد ثابت کنید.]

۱۰. فرض کنیم Q، مانند تمرین قبلی، تابعی از n متغیر حقیقی درنظر گرفته شود. نشان دهید که اگر $Q(x_۱, \cdots, x_n)$ یک صورت درجهٔ دوم مثبت و معیّن با ماتریس S باشد، در این صورت داریم

$$I = \int_۰^\infty \cdots \int_۰^\infty e^{-Q(x_۱, \cdots, x_n)} dx_۱ dx_۲ \cdots dx_n = ۲^{-n} \sqrt{\frac{\pi^n}{\det \mathbf{S}}}$$

[راهنمایی: ابتدا نشان دهید که اگر $۰ < \lambda$، خواهیم داشت

$$\int_۰^\infty e^{-\lambda x^۲} = \left(\frac{\pi}{۴\lambda}\right)^{۱/۲}$$

(R.C.Buck, *Advanced Calculus*, 2nd ed., McGraw-Hill, 1965, Chap.3. ←)

و سپس از قضیهٔ محورهای اصلی برای یافتن یک ماتریس متعامد $\mathbf{C}$ که تبدیل

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} y_j, \quad \mathbf{C} = (\gamma_{ij}),$$

صورت $Q(x_1, \cdots, x_n)$ را به‌صورت $\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$، λ_iها مثبت و ویژه‌مقدارهای $\mathbf{S}$ هستند، در می‌آورد استفاده کنید. بعد بااستفاده‌از تعویض متغیر در انتگرالهای چندگانه (ـــ همان‌کتاب $\cdots$,R.C. Buck) نشان دهید که

$$I = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-(\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2)} |J| dy_1 \cdots dy_n$$

که درآن J عبارت است از ژاکوبین تبدیل و برابر با ± 1 است. و انتگرال را می‌توان با انتگرالگیری به حالت تابع یک متغیره حساب کرد].

۳۲. تبدیلهای یکانی و قضیّهٔ طیفی

دراین بخش $V = \{u, v, \cdots\}$ معرّف یک فضای برداری متناهی‌ـبعد روی هیات اعداد مختلط $C = \{a, b, \ldots\}$ و $R = \{\alpha, \beta, \cdots\}$ معرّف هیات اعداد حقیقی است. و هر عدد مختلط a متعلق به C را می‌توان به‌صورت $a = \alpha + \beta i$ نوشت، $\alpha, \beta \in R$، و $i^2 = -1$. برای هر عدد $a = \alpha + \beta i \in C$ قرار می‌دهیم $\bar{a} = \alpha - \beta i$ که مزدوج عدد مختلط a نامیده می‌شود.

باتوجه به بخش ۲۱، یادآوری می‌کنیم که هر عدد مختلط a، برداری است از R_2 که طول آن باعبارت $|a| = \sqrt{a\bar{a}}$ داده می‌شود. ما با استفاده از این قرارداد مفهوم طول یک بردار را در فضاهای برداری مختلط وارد می‌کنیم.

ابتدا فضای برداری روی C متشکّل از n ـ تاییهای مرتب را با $V = C_n$ نشان می‌دهیم.

(۱.۳۲) قضیه. فرض می‌کنیم $u = < a_1, \cdots, a_n >$ و $v = < b_1, \ldots, b_n >$ به فضای برداری $V = C_n$ متعلق باشند. حاصلضرب داخلی u و v را چنین تعریف می‌کنیم

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{b}_i$$

در این صورت ضرب داخلی (u, v) دارای ویژگیهای زیر است

الف) برای همهٔ بردارهای u, v متعلق به V و $a \in C$،

$$(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v),$$

$$(u, v_1 + v_2) = (u, v_1) + (u, v_2),$$

$$(au, v) = a(u, v), \qquad (u, av) = \bar{a}(u, v), \qquad (u, v) = \overline{(v, u)},$$

ب) برای هر $u \in V$ عدد (u,u) حقیقی و غیرمنفی است. بعلاوه $(u,u)=0$، اگر و تنها اگر $u=0$. برای هر $u \in V$ طول $||u||$ را با عبارت زیر تعریف می‌کنیم

$$||u|| = \sqrt{(u,u)}.$$

برهان. در مورد رفتار (u,v) تا آنجا که مربوط به جمع است هیچ نوع اشکالی وجود ندارد. و داریم

$$(au,v) = \sum (aa_i)\bar{b}_i = a(\sum a_i\bar{b}_i) = a(u,v)$$

و

$$\begin{aligned}(u,av) &= \sum a_i(\overline{ab_i}) = \sum a_i\bar{a}\bar{b}_i = \bar{a}\sum a_i\bar{b}_i\\ &= \bar{a}(u,v),\end{aligned}$$

با توجه به بخش ۲۱ می‌دانیم که $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$. بالاخره داریم

$$(v,u) = \sum b_i\bar{a}_i = \overline{(u,v)}$$

زیرا برای هر $a \in C$ داریم $\bar{\bar{a}} = a$.

در مورد اثبات (ب) داریم

$$(u,u) = \sum a_i\bar{a}_i$$

و با توجه به بخش ۲۱، $a_i\bar{a}_i$ یک عدد حقیقی و نامنفی است. لذا (u,u) نیز حقیقی و نامنفی است. اگر $(u,u)=0$، آنگاه چون همهٔ $a_i\bar{a}_i \geq 0$، داریم $a_i\bar{a}_i = 0$، و درنتیجه، برای هر i، $a_i = 0$. بنابراین $(u,u)=0$، اگر و فقط اگر $u=0$، و قضیه ثابت می‌شود.

خواننده باید توجه کند که ویژگی $(u,av) = \bar{a}(u,v)$ نشان می‌دهد که تابع (u,v) روی فضای برداری V دوخطی نیست.

(۲.۳۲) تعریف. فرض می‌کنیم که V یک فضای برداری دلخواه روی C باشد. یک نگاشت (u,v) که به هر جفت بردار $\{u,v\}$ عدد مختلط (u,v) را نظیر می‌کند حاصلضرب داخلی ارمیتی (به‌افتخار شارل ارمیت، ریاضیدان فرانسوی) نامیده می‌شود اگر (u,v) در شرطهای (الف) و (ب) قضیهٔ (۱.۳۲) صدق کند. یک مجموعهٔ $\{u_1, \cdots, u_s\}$ از بردارهای V پایهٔ یکاقائم [نسبت به (u,v)] نامیده می‌شود اگر برای هر i تساوی $||u_i|| = 1$ برقرار باشد، و برای $i \neq j$ تساوی $(u_i,u_j) = 0$. دو بردار u و v متعامد نامیده می‌شوند اگر $(u,v) = 0$.

(۳.۳۲) قضیه. فرض می‌کنیم (u, v) حاصلضرب داخلی ارمیتی روی V باشد. هر زیر فضای $W \neq ۰$ از V دارای یک پایهٔ یکاقائم است. اگر $\{u_۱, \cdots, u_s\}$ یک پایهٔ یکاقائم برای W باشد و $v = \sum a_i v_i$ و $w = \sum b_i v_i$ دو بردار دلخواه از W باشند، در این صورت

$$(v, w) = \sum a_i \bar{b}_i$$

برهان. ما روش گرام‌ـاشمیت را که در فصل ۴ در مورد فضاهای برداری حقیقی با ضرب داخلی گفته شده‌است، دنبال می‌کنیم. اگر $\dim W = ۱$ و $W = S(w)$، $w \neq ۰$، آنگاه بردار $w_۱ = ||w||^{-۱} w$ دارای طول ۱ است و یک‌پایهٔ یکاقائم از W است. اکنون قرار می‌دهیم $W = S(w_۱, \cdots, w_s)$، و فرض می‌کنیم مانند فرض استقراء، که $S(w_۱, \cdots, w_{s-۱})$ دارای یک پایهٔ یکاقائم $\{u_۱, \cdots, u_{s-۱}\}$ باشد. فرض می‌کنیم که $w_s \notin S(w_۱, \cdots, w_{s-۱})$، و قرار می‌دهیم

$$w = w_s - \sum_{i=۱}^{s-۱} (w_s, u_i) u_i$$

پس داریم $w \neq ۰$، و برای هر $۱ \leq j \leq s - ۱$،

$$\begin{aligned}(w, u_j) &= (w_s, u_j) - \sum_{i=۱}^{s-۱} ((w_s, u_i) u_i, u_j) \\ &= (w_s, u_j) - (w_s, u_j) = ۰\end{aligned}$$

با قرار دادن $u_s = ||w||^{-۱} w$، خواهیم داشت $||u_s|| = ۱$ و برای هر $۱ \leq j \leq s - ۱$، داریم $(u_s, u_j) = ۰$. چون داریم $(u, v) = \overline{(u, v)}$، پس برای هر j، $۱ \leq j \leq s - ۱$، داریم $(u_j, u_s) = ۰$ و قسمت اول قضیّه ثابت می‌شود.

اکنون فرض می‌کنیم که $v = \sum a_i u_i$ و $w = \sum b_i u_i$ دو بردار از W باشند، که برحسب مبنای یکاقائم $\{u_۱, \cdots, u_s\}$ نوشته شده‌اند. در این صورت خواهیم داشت

$$\begin{aligned}(v, w) &= (\sum a_i u_i, \sum b_j u_j) = \sum a_i \bar{b}_j (u_i, u_j) \\ &= \sum a_i \bar{b}_i\end{aligned}$$

همان چیزی را که می‌خواستیم. بدین ترتیب اثبات قضیه کامل می‌شود.

(۴.۳۲) تعریف. گیریم (u, v) یک حاصلضرب داخلی ارمیتی روی V باشد. فرض می‌کنیم W یک‌زیر فضای برداری V باشد و $W^{\perp} = \{v \in V | (v, w) = ۰, \forall w \in W\}$ در این صورت $W^{\perp}$ یک زیر فضای برداری V است و فضای متمم قائم W نامیده می‌شود.

توجه داریم که چون تساوی $(v,w)=\circ$ مستلزم تساوی $(w,v)=\circ$ است، تعریف $W^{\perp}$ می‌تواند به‌صورت

$$W^{\perp}=\{v\in V|(w,v)=\circ \quad \forall w\in W\}$$

نیز بیان شود. ویژگیهای (u,v) ایجاب می‌کنند که $W^{\perp}$ یک زیرفضا باشد. چون $W^{\perp}$ به‌صورت حاصلضرب داخلی ویژه‌ای در V تعریف شده است، خطر اشتباه با پوچسازهای $V_1^{\perp}$، که در فصل ۸ دربارهٔ صورتهای دوخطی روی یک جفت فضای برداری گفته شده است، وجود ندارد.

(۵.۳۲) قضیه. نگاشت $W\longrightarrow W^{\perp}$ از مجموعهٔ زیر فضاهای یک فضای برداری V با حاصلضرب داخلی ارمیتی، دارای ویژگیهای زیر است.

الف) $W_1\subset W_2$ ایجاب می‌کند که $W_1^{\perp}\supset W_2^{\perp}$.

ب) $W^{\perp\perp}=W$.

پ) $V=W\oplus W^{\perp}$، برای هر زیرفضای W از V.

برهان. باتوجه به تعریف $W^{\perp}$ حکم (الف) روشن است. حکم (پ) با همان روشی که در اثبات قضیهٔ (۴.۳۰) در مورد قضیهٔ متناظر با همین مطلب دربارهٔ فضاهای حقیقی به‌کار رفته ثابت می‌شود و ما جزئیات آن را تکرار نمی‌کنیم. درمورد قسمت (ب) چنین داریم

$$\dim W^{\perp}=\dim V-\dim W$$

و بنابراین

$$\dim W^{\perp\perp}=\dim W$$

چون $W\subset W^{\perp\perp}$ (باتوجه به تعریف $W^{\perp}$)، نتیجه می‌شود که $W=W^{\perp\perp}$ و قسمت(ب) ثابت، و اثبات قضیه کامل می‌شود.

(۶.۳۲) تعریف. فرض می‌کنیم V یک فضای برداری با یک حاصلضرب داخلی ارمیتی (u,v) باشد. یک تبدیل خطی $U\in L(V,V)$ را یک تبدیل یکانی می‌نامیم اگر برای هر $v\in V$ داشته باشیم $||U(v)||=||v||$.

تبدیلهای یکانی در فضاهای برداری مختلط با ضرب داخلی ارمیتی همتای تبدیلهای متعامد در فضاهای برداری حقیقی با حاصلضرب داخلی هستند. این تبدیلها، تبدیلهای طول نگهدارند

(۷.۳۲) قضیه. فرض کنیم V یک فضای برداری مختلط با حاصلضرب داخلی ارمیتی (u,v) باشد. یک تبدیل خطی $U\in L(V,V)$ تبدیل یکانی است اگر و تنها اگر شرطهای هم ارز زیر برقرار باشند:

الف) برای هر $u,v\in V$، $(U(u),U(v))=(u,v)$.

ب) U پایه‌های یکاقائم V را به پایه‌های یکاقائم تبدیل کند، به‌عبارت دیگر چنانچه $\{v_1, \cdots, v_n\}$ یک پایهٔ یکاقائم باشد، $\{U(v_1), \cdots, U(v_n)\}$ نیز یک پایهٔ یکاقائم باشد.

پ) فرض کنیم $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ماتریس U نسبت به پایهٔ یکاقائم $\{v_1, \cdots, v_n\}$ باشد. پس داریم $Uv_i = \sum a_{ji}v_j$. دراین صورت $\mathbf{A}$ دارای ویژگی زیر است

$$\mathbf{A}.\overline{{}^t\mathbf{A}} = \mathbf{I}$$

که در آن $\overline{{}^t\mathbf{A}}$ ماتریسی است که درآن درایهٔ (i, j)ام برابر با $\overline{a_{ji}}$ است. هر ماتریس $\mathbf{A}$ را که در شرط (پ) صدق کند ماتریس یکانی می‌نامند.

برهان. باز اثبات ما شبیه به قضیّهٔ نظیر به آن در مورد تبدیلات متعامد است. ابتدا فرض می‌کنیم که U یکانی باشد. استفاده‌از شرط $||Uv|| = ||v||$ در مورد بردارهای $v + w$ و $v + iw$ به‌دست می‌دهد که

$$(Uv, Uw) + (Uw, Uv) = (v, w) + (w, v)$$

و

$$(iU(w), U(v)) + (Uv, iU(w)) = (iw, v) + (v, iw).$$

با توجه به $\bar{i} = -i$ معادلهٔ دوم نتیجه می‌دهد که

$$i(U(w), U(v)) - i(U(v), U(w)) = i(w, v) - i(v, w)$$

پس از حذف i، می‌توانیم معادلات را جمع کنیم و به دست آوریم

$$(U(v), U(w)) = (v, w).$$

که همان شرط (الف) است.

اکنون فرض می‌کنیم که (الف) برقرار باشد. اگر $\{v_1, \cdots, v_n\}$ یک پایهٔ یکاقائم V فرض شود، آنگاه (الف) ایجاب می‌کند که $\{U(v_1), \cdots, U(v_n)\}$ یک مجموعهٔ یکاقائم، و در نتیَجه یک پایهٔ یکاقائم باشد، زیرا بردارهای یک مجموعهٔ یکاقائم نابسته خطی‌اند. بنابراین (الف) مستلزم (ب) است.

اکنون فرض می‌کنیم که (ب) برقرار باشد و فرض می‌کنیم که $\{v_1, \cdots, v_n\}$ یک‌پایهٔ یکا قائم

باشد. اگر فرض کنیم که $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ماتریس U نسبت به این پایه باشد، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}(U(v_i), U(v_j)) &= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} v_k, \sum_{l=1}^{n} a_{lj} v_l\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ki}\overline{a_{lj}}(v_k, v_l) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\overline{a_{kj}} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i = j \\ 0 & \text{اگر } i \neq j \end{cases}\end{aligned}$$

این معادله‌ها نشان می‌دهند که ماتریس $\mathbf{A}$ در شرط (پ) صدق می‌کند.

و سرانجام اگر معادله‌های مربوط به $(U(v_i), U(v_j))$ را برحسب ضریبهای $\mathbf{A}$ درنظر بگیریم این معادلات نشان می‌دهند که اگر تساوی $\mathbf{A}^t\mathbf{A} = \mathbf{I}$ برقرار باشد، بردارهای $\{U(v_1), \cdots, U(v_n)\}$ یک پایهٔ یکاقائم‌اند و بنابراین U یکانی است و اثبات قضیه کامل می‌شود.

(۸.۳۲) قضیه. فرض می‌کنیم $U \in L(V, V)$ یک‌تبدیل یکانی باشد. دراین‌صورت ویژه‌مقدارهای U دارای قدرمطلقی برابر با ۱ هستند. بعلاوه یک پایهٔ یکاقائم وجود دارد که از ویژه بردارها تشکیل شده است.

برهان. نخست فرض می‌کنیم v یک‌ویژه بردار متناظر به ویژه مقدار a از U باشد. دراین‌صورت $Uv = av$ نتیجه می‌دهد که

$$(Uv, Uv) = (v, v) = a\bar{a}(v, v)$$

وبنابراین $a\bar{a} = 1$، که ثابت می‌کند $|a| = 1$. قسمت دوم قضیه را با استقراء روی بعد V ثابت می‌کنیم، نتیجه برای حالت $\dim V = 1$ آشکار است. فرض می‌کنیم که $\dim V > 1$. چون هیأت C جبری-بسته است، یک‌ویژه بردار v_1 متناظر به یکی از ویژه مقدارهای U وجود دارد، و می‌توانیم فرض کنیم که $\|v_1\| = 1$. قرارمی‌دهیم $W = S(v_1)$؛ در این صورت باتوجه به قضیهٔ (۵.۳۲) داریم $V = W \oplus W^\perp$ و $\dim W^\perp = \dim V - 1$. اگر بتوانیم نشان دهیم که $W^\perp$ نسبت به U پایاست، در این صورت تحدید U به $W^\perp$ یک تبدیل یکانی $W^\perp$ خواهد شد و قضیّه از فرض استقرا نتیجه خواهد شد. فرض می‌کنیم که $(v_1, w) = 0$، و باید نشان دهیم که $(v_1, U(w)) = 0$. چون تساوی $Uv_1 = av_1$ برای مقداری از $a \neq 0$ برقرار است، خواهیم داشت

$$0 = (v_1, w) = (U(v_1), U(w)) = (av_1, U(w)) = a(v_1, U(w))$$

و $(v_1, U(w)) = 0$، همان چیزی را که می‌خواستیم.

(۹.۳۲) فرع. فرض کنیم $\mathbf{A}$ یک ماتریس یکانی $n\times n$ باشد یعنی $\mathbf{A}^t\bar{\mathbf{A}}=\mathbf{I}$. دراین‌صورت یک‌ماتریس یکانی $\mathbf{B}$ وجود دارد به‌طوری که $\mathbf{BAB}^{-۱}$ ماتریس قطری است که درایه‌های واقع در روی قطر آن اعداد مختلط با قدرمطلق ۱ هستند.

برهان. فرض می‌کنیم که V یک فضای n بعدی با حاصلضرب داخلی ارمیتی (به‌عنوان مثال C_n) باشد و فرض می‌کنیم که $\{v_۱,\cdots,v_n\}$ یک پایهٔ یکاقائم V باشد و U تبدیلی که ماتریس آن نسبت به پایهٔ $\{v_۱,\cdots,v_n\}$ ماتریس $\mathbf{A}$ باشد. به‌موجب قضیهٔ (۷.۳۲)، U یک تبدیل یکانی است. قضیهٔ (۸.۳۲) را برای به‌دست‌آوردن یک پایهٔ یکاقائم $\{w_۱,\cdots,w_n\}$ به‌کار می‌بریم به‌طوری که ماتریس مربوطه‌اش قطری و درایه‌های واقع بر قطر دارای قدرمطلق برابر ۱ باشند. پس این ماتریس قطری برابر با $\mathbf{BAB}^{-۱}$ است که درآن $\mathbf{B}$ ماتریسی است که یک پایهٔ یکاقائم را بر پایهٔ یکاقائم دیگری تبدیل می‌کند. و بازهم بنابر قضیّهٔ (۷.۳۲) $\mathbf{B}$ یک ماتریس یکانی‌است و فرع ثابت می‌شود.

اکنون می‌خواهیم مشابه ترانهادهٔ یک تبدیل خطی را در مورد فضاهای برداری با حاصلضرب داخلی ارمیتی معرفی کنیم (←(۶.۲۷)).

(۱۰.۳۲) تعریف. فرض کنیم V یک فضای برداری با یک حاصلضرب داخلی ارمیتی (u,v) باشد. قرار می‌دهیم $T\in L(V,V)$. یک تبدیل خطی $T'\in L(V,V)$ را الحاقی T می‌نامیم اگر برای هر v,u متعلق به V داشته باشیم

$$(Tu,v)=(u,T'v)$$

قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد که این الحاقی همواره وجود دارد و یکتاست.

(۱۱.۳۲) قضیه. فرض می‌کنیم که $T\in L(V,V)$. در این صورت T دارای یک الحاقی یکتای T' است. اگر $\mathbf{A}$ ماتریس T نسبت به یک‌پایهٔ یکاقائم باشد، آنگاه ماتریس T' برابر با ${}^t\bar{\mathbf{A}}$ است و تساویهای

$$(aT)'=\bar{a}T',\qquad (T_۱+T_۲)'=T'_۱+T'_۲$$
$$(T_۱T_۲)'=T'_۲T'_۱,\qquad \text{و}\qquad T''=T$$

برای همهٔ تبدیلهای خطی $T_۲$،$T_۱$،T و $a\in C$ برقرار است.

برهان. اثبات وجود T' را به‌وسیلهٔ روشهای بخش ۲۷ می‌توان نشان داد. به‌جای آن، ما با استفاده از ماتریسها یک روش عملی‌تری به‌دست می‌دهیم. فرض کنیم $\mathbf{A}=(a_{ij})$ ماتریس T نسبت به یک پایهٔ یکاقائم $\{v_۱,\cdots,v_n\}$ باشد و T'. تبدیل خطیّی باشد که ماتریس آن نسبت

به این پایه ${}^t\bar{\mathbf{A}}$ باشد. در این صورت

$$Tv_i = \sum_k a_{ki} v_k, \qquad T'v_j = \sum_k \bar{a}_{jk} v_k,$$

و

$$(Tv_i, v_j) = \left(\sum_k a_{ki} v_k, v_j\right) = \sum_k a_{ki}(v_k, v_j) = a_{ji}$$

در حالی‌که داریم

$$(v_i, T'v_j) = (v_i, \sum \bar{a}_{jk} v_k) = \sum_k a_{jk}(v_i, v_k) = a_{ji}.$$

بنابراین T' الحاقی T است و دارای ماتریس ${}^t\bar{\mathbf{A}}$ نسبت به پایهٔ داده شده‌است. یکتایی T' از اینجا نتیجه می‌شود که اگر T'' الحاقی دیگری باشد، برای همهٔ بردارهای v و w خواهیم داشت

$$(v, (T' - T'')w) = \circ$$

و بنابراین $T' = T''$. اثبات فرمولهای $(aT)'$، $(T_\backslash + T_\Upsilon)'$، $(T_\backslash T_\Upsilon)'$ و T'' مستقیماً از یکتایی الحاقی نتیجه می‌شود و به‌عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود، و بدین ترتیب اثبات قضیه کامل می‌شود.

(۱۲.۳۲) تعریف. یک تبدیل خطی $T \in L(V, V)$ را خود_الحاقی یا ارمیتی می‌نامند اگر $T = T'$؛ و چنانچه $TT' = T'T$ در این صورت T را نرمال می‌گویند.

مثال الف. فرض کنیم $\mathbf{A}$ یک ماتریس متقارن حقیقی باشد و T یک‌تبدیل خطی که ماتریس آن نسبت به یک پایهٔ یکاقائم برابر $\mathbf{A}$ باشد. در این صورت T یک تبدیل خود_الحاقی است.

تبدیلهای خود_الحاقی همیشه نرمال هستند. نمونه‌های تبدیلهایی که نرمال هستند ولی در حالت کلّی خود_الحاقی نیستند تبدیلهای یکانی هستند.

قضیهٔ اصلی این بخش این‌است که هر تبدیل نرمال همواره قطری شدنی است و ویژه ـ بردارهای یک تبدیل نرمال متناظر با ویژه مقدارهای متمایز بر هم عمودند. ما نخست چند قضیّهٔ مقدماتی را ثابت خواهیم کرد. و قضیهٔ اصلی به‌صورت زیباتر و مفیدتری به‌نام قضیّهٔ طیفی بیان خواهد شد که نمایشگر ارتباط بین طیف T است، که بنابر تعریف، مجموعهٔ ویژه مقدارهای T و عمل T بر روی فضای بردار V است.

(۱۳.۳۲) لم. فرض می‌کنیم T یک‌تبدیل نرمال روی V باشد. برای T و T' ویژه بردارهای مشترکی وجود دارند. برای یک چنین بردار v داریم $Tv = av$ و $T'v = \bar{a}v$.

برهان. چون C جبری_بسته است، یک ویژه مقدار a برای T وجود دارد. فرض می‌کنیم $V_\backslash$ مجموعهٔ همه بردارهای $v \in V$ باشد به‌طوری که $Tv = av$. اگر $v \in V_\backslash$، با توجه به‌این‌که

$TT' = T'T$، نتیجه می‌شود که $TT'v = T'Tv = aT'v$، پس V_1 نسبت به تبدیل T' پایا می‌شود. اکنون در V_1 ویژه برداری برای T' به‌دست می‌آوریم، این بردار ویژگی مطلوب را خواهد داشت.

حال قرار می‌دهیم $Tv = av$ و $T'v = bv$. در این صورت

$$a(v, v) = (Tv, v) = (v, T'v) = (v, bv) = \bar{b}(v, v)$$

و بدین ترتیب چون $(v, v') \neq 0$، خواهیم داشت $a = \bar{b}$. و اثبات قضیه کامل می‌شود.

(۱۴.۳۲) لم. فرض می‌کنیم T یک تبدیل نرمال باشد و v و v' همزمان ویژه بردارهای T و T' باشند به‌طوری که v و v' به ویژه مقدارهای متمایز T متعلق باشند. در این صورت $(v, v') = 0$.

برهان. قرار می‌دهیم $Tv = av$ و $Tv' = bv'$، $a \neq b$. چون v و v' در فرض لم (۱۳.۳۲) صدق می‌کنند، خواهیم داشت $T'v = \bar{a}v$، $T'v' = \bar{b}v'$. بنابراین

$$\begin{aligned} a(v, v') &= (Tv, v') = (v, T'v') = (v, \bar{b}v') \\ &= b(v, v') \end{aligned}$$

چون $a \neq b$، پس $(v, v') = 0$.

(۱۵.۳۲) لم. فرض می‌کنیم $\{E_1, \cdots, E_s\}$ مجموعه‌ای از تبدیلهای خطی V باشند به‌طوری که $\sum E_i = 1$ و $E_iE_j = 0$، اگر $i \neq j$. در این صورت برای هر i، $1 \leq i \leq s$، $\{E_i\}$ خود‌ـالحاقی است، اگر و تنها اگر زیرفضاهای $\{E_iV\}$ دوبه‌دو متعامد باشند.

برهان. نخست فرض می‌کنیم که $\{E_i\}$ها خود‌ـالحاقی باشند. در این صورت قرار می‌دهیم $v = E_i(w)$ و $v' = E_j(w')$، برای $i \neq j$، خواهیم داشت

$$(v, v') = (E_i(w), E_j(w')) = (w, E_iE_j(w')) = 0$$

زیرا $E_i' = E_i$ و $E_iE_j = 0$.

به‌وارون، فرض می‌کنیم‌که $(E_iV, E_jV) = 0$ اگر $i \neq j$. دراین صورت $(V, E_i'E_jV) = 0$، و بنابراین $E_i'E_j = 0$، اگر $i \neq j$. با استفاده از قضیهٔ (۱۱.۳۲)، همچنین داریم

$$1 = E_1' + \cdots + E_s' \ , \ \ E_i'E_j' = 0, \qquad i \neq j$$

پس

$$E_i = 1E_i = (E_1' + \cdots + E_s')E_i = E_i'E_i$$

و

$$E_i' = E_i' \cdot 1 = E_i'(E_1 + \cdots + E_s) = E_i'E_i$$

بنابراین $E_i = E'_i$، و لم ثابت می‌شود.

اکنون آمادهٔ بیان قضیهٔ اصلی دربارهٔ تبدیلهای نرمال هستیم.

(۱۶.۳۲) قضیه. (قضیّهٔ طیفی برای تبدیلهای نرمال). فرض می‌کنیم T تبدیلی نرمال روی یک فضای برداری مختلط V مجهز به یک حاصلضرب داخلی ارمیتی باشد، و فرض می‌کنیم $\{a_1, \cdots, a_s\}$ ویژه مقدارهای متمایز T باشند. در این صورت چند جمله‌ییهای $\{f_1(x), \cdots, f_s(x)\}$ در $C[x]$ وجود دارند به‌طوری که تبدیلهای $\{E_i = f_i(T)\}$، $1 \le i \le s$، خود ـ الحاقی هستند و در شرطهای $E_1 + \cdots + E_s = 1$، و $E_iE_j = 0$ صدق می‌کنند اگر $i \neq j$. بعلاوه T را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد

$$T = \alpha_1 E_1 + \cdots + \alpha_s E_s.$$

این گونه تجزیهٔ T تجزیهٔ طیفی T نامیده می‌شود.

برهان. نخست بااستفاده از استقراء روی $\dim V$، ثابت می‌کنیم که T قطر شدنی است. این حکم برای $\dim V = 1$ روشن است، و می‌توانیم فرض کنیم که $\dim V > 1$. به‌موجب لم (۱۳.۳۲)، یک ویژه بردار مشترک w برای T و T' وجود دارد. فرض می‌کنیم W زیر فضای $S(w)$ تولید شده به‌وسیلهٔ w باشد. بنابر قضیهٔ (۵.۳۲)، $V = W \oplus W^\perp$. ثابت می‌کنیم که $W^\perp$ نسبت به T و T' پایاست. فرض می‌کنیم $v \in W^\perp$. پس $(w, Tv) = (w, T'v) = 0$، زیرا w یک ویژه بردار هم برای T و هم برای T' است، و بنابراین $Tv \in W^\perp$ و $T'v \in W^\perp$. به‌آسانی ثابت می‌شود که تحدید T به $W^\perp$ نرمال است (جزئیات اثبات به‌عنوان تمرین به‌عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود). بااستفاده از اصل استقراء، نتیجه می‌شود که T قطری شدنی است.

ماا‌کنون می‌توانیم از قضیّهٔ (۹.۲۳) برای یافتن چندجمله‌ییهای $\{f_1(x), \cdots, f_s(x)\}$ در $C[x]$ به‌قسمی که تبدیلهای $E_i = f_i(T)$، $1 \le i \le s$، در شرطهای

$$1 = \sum E_i, E_iE_j = 0 \quad \text{برای} \quad i \neq j$$

و

$$T = a_1 E_1 + \cdots + a_s E_s.$$

صدق می‌کنند، استفاده نماییم. بعلاوه حاصل‌جمع مستقیم $V = E_1V \oplus \cdots \oplus E_sV$ است و $E_iV = \{v \in V | Tv = a_i v\}$، برای $1 \le i \le s$. آنچه برای اثبات باقی می‌ماند خود_الحاقی بودن E_iهاست. برای این منظور کافی است، بنابر لم (۱۵.۳۲)، نشان دهیم که زیرفضاهای E_iV دوبه‌دو متعامدند. چون T و T' تعویضپذیرند، هر یک از زیرفضاهای E_iV، هم نسبت به T و هم نسبت به T' پایا هستند. و بنابراین تحدید T' به E_iV نرمال است و قطری شدنی در E_iV. بعلاوه همهٔ ویژه مقدارهای T' در E_iV، بنابر لم (۱۳.۳۲)، برابر با $\bar{a}_i$ هستند. پس هر بردار غیر صفر در E_iV یک ویژه بردار هم برای T و هم برای T' است. و حالا می‌توانیم لم (۱۴.۳۲) را به‌کار بریم و نتیجه بگیریم که $(E_iV, E_jV) = 0$، اگر $i \neq j$، و قضیه ثابت می‌شود.

(۱۷.۳۲) فرع. فرض می‌کنیم T یک تبدیل نرمال روی V باشد. یک پایهٔ یکاقائم از V وجود دارد که از ویژه بردارهای T تشکیل شده است.

این قضیه اساساً در قضیهٔ (۱۶.۳۲) اثبات شده است و اثبات این فرع به‌عنوان تمرین گذاشته می‌شود.

این بخش را با یک‌مورد استعمال جالب قضیهٔ طیفی تمام و یادآوری می‌کنیم که هر عدد مختلط $z = \alpha + \beta i \neq 0$ را می‌توان به‌صورت قطبی $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ بیان کرد، که درآن r یک‌عدد حقیقی مثبت، و $\cos\theta + i\sin\theta$ یک عدد مختلط با یک قدرمطلق ۱ است. مورد استعمال، تعمیمی است بانتایجی وسیع از اعداد مختلط در تبدیلهای یک فضای برداری با حاصلضرب داخلی ارمیتی. یک تبدیل یکانی به‌طور قطع نظیر یک‌عدد مختلط با قدرمطلق یک است. ما اکنون نظیر آن را برای یک عدد حقیقی مثبت تعریف می‌کنیم:

(۱۸.۳۲) تعریف. یک تبدیل خطی T روی V را مثبت می‌نامیم اگر T خود الحاقی و برای همهٔ بردارهای $v \neq 0$ عدد (Tv, v) عددی حقیقی و مثبت باشد.

(۱۹.۳۲) لم. همهٔ ویژه مقدارهای یک‌تبدیل خود_الحاقی T حقیقی‌اند. T مثبت است اگر و تنهااگر همهٔ این ویژه‌مقدارها مثبت باشند.

برهان. فرض کنیم T خود_الحاقی و a یک ویژه مقدار T متعلّق به ویژه بردار v باشد. در این صورت

$$(Tv, v) = (v, Tv) = (\overline{Tv, v})$$

بنابراین (Tv, v) یک عدد حقیقی است. بعلاوه $Tv = av$ ایجاب می‌کند داشته باشیم $(Tv, v) = a(v, v)$ و

$$a = \frac{(Tv, v)}{(v, v)}$$

حقیقی است. اگر T مثبت باشد، فرمول بالا نشان‌می‌دهد که a مثبت است. به‌وارون فرض می‌کنیم که همهٔ ریشه‌های مشخصهٔ یک تبدیل خود ـ الحاقی T مثبت باشند. به‌موجب قضیهٔ طیفی (۱۶.۳۲) خواهیم داشت

$$T = \sum a_i E_i$$

که درآن a_iها حقیقی و مثبت‌اند. فرض می‌کنیم که $v \in V$ به‌ازای برداری مثل $v_i \in V$ به‌صورت

$$v = \sum E_i v_i$$

بیان شده و $v \neq \circ$ باشد. دراین‌صورت

$$(Tv, v) = \sum a_i (E_i v_i, E_j v_j) > \circ$$

زیرا $v \neq \circ$ و $(E_i v_i, E_j v_j) = \circ$ اگر $i \neq j$.

اکنون می‌توانیم مورد استعمال قضیهٔ طیفی را بیان‌کنیم. دقت شود که در این برهان، قضیهٔ طیفی را برای تعیین جذر یک تبدیل به‌کار می‌بریم. و از این واقعیّت استفاده می‌کنیم که‌اگر $T = \sum \alpha_i E_i$ تجزیهٔ T برطبق قضیهٔ (۱۶.۳۲) باشد، آنگاه به‌دلیل ویژگیهای E_i داریم: $T^{۲} = \sum \alpha_i^{۲} E_i$ و $T^{۳} = \alpha_i^{۳} E_i$ و ...

(۲۰.۳۲) قضیه. (تجزیهٔ قطبی). فرض کنیم T یک تبدیل خطی وارونپذیر در یک فضای برداری مختلط V با حاصلضرب داخلی ارمیتی باشد. در این صورت T را می‌توان به‌صورت $T = US$ بیان کرد، که در آن U یک تبدیل یکانی و S مثبت است.

برهان. چون T وارونپذیر است، برای هر $v \neq \circ$، عدد (Tv, Tv) حقیقی و مثبت است. پس $(T'Tv, v) = (Tv, Tv)$ نیز برای هر $v \neq \circ$ حقیقی و مثبت است، و چون بنابر قضیهٔ (۱۱.۳۲) داریم $(T'T)' = T'T'' = T'T$، لذا $T'T$ یک تبدیل مثبت است. بنابراین، مطابق با لم (۱۹.۳۲)، تجزیهٔ طیفی $T'T$ به‌صورت

$$T'T = \sum a_i E_i$$

انجام خواهد شد، که ویژه بردارهای $\{a_i\}$ حقیقی و مثبت‌اند. قرار می‌دهیم

$$S = \sum \sqrt{a_i} E_i$$

چون $E_i^{۲} = E_i$ و برای $i \neq j$ داریم $E_i E_j = \circ$، پس به‌دست می‌آوریم $S^{۲} = T'T$. بعلاوه روشن است که S خود‌ـالحاقی و مثبت است. زیرا که ویژه مقدارهای آن $\{\sqrt{a_i}\}$ها هستند و $\{E_i\}$ها خود‌ـالحاقی. چون همهٔ ویژه مقدارهای S مخالف با صفرند، S وارونپذیر است. قرار می‌دهیم $U = TS^{-۱}$. پس $T = US$. که درآن S مثبت است. بعلاوه

$$U'U = (S^{-۱})'T'TS^{-۱} = S^{-۱}S^{۲}S^{-۱} = ۱$$

زیرا $S^{-۱}$ نیز خود‌ـالحاقی است و $S^{۲} = T'T$. بنابراین U یکانی است (⟵تمرین ۵ در زیرا) و قضیه ثابت می‌شود.

تمرینها

در سراسر تمرینهای زیر، V یک فضای برداری متناهی‌ـبعد روی C با حاصلضرب داخلی ارمیتی (u, v) است.

۱.ثابت کنید که تبدیلهای یکانی روی V نسبت به عمل ضرب یک‌گروه تشکیل می‌دهند.
۲.نشان دهید که یک ماتریس یکانی بالا مثلثی (که عناصر زیر قطر اصلی صفرند) باید به‌صورت قطری باشد.
۳.نشان دهید که

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

یک ماتریس یکانی است. یک ماتریس یکانی مانند $\mathbf{B}$ پیدا کنید که $\mathbf{BAB}^{-1}$ یک ماتریس قطری باشد.
۴.فرض کنیم V^* فضای دوگان V باشد. نشان دهید که اگر $f \in V^*$، آنگاه یک بردار یکتای $w \in V$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $v \in V$ داریم $f(v) = (v, w)$.
۵.نشان دهید که $U \in L(V, V)$ یکانی است اگر و تنها اگر $UU' = 1$، که درآن U' الحاقی تبدیل U است.
۶.نشان دهید که اگر $T \in L(V, V)$ نرمال باشد، آنگاه W یک‌زیر فضای Tـپایای V است اگر و تنها اگر $W^\perp$ یک زیر فضای T' ـپایا باشد.
۷.نشان دهید که اگر T تبدیلی نرمال با تجزیهٔ طیفی $T = \sum \alpha_i E_i$ طبق قضیهٔ (۱۶.۳۲) باشد، آنگاه $T' = \sum \bar{\alpha}_i E_i$ یک تجزیهٔ طیفی T' است.
۸.نشان دهید که اگر U یک تبدیل یکانی باشد، نرمال است.
۹.نشان دهید که تبدیل نرمال T با تجزیهٔ طیفی $T = \sum \alpha_i E_i$ یکانی است اگر و تنها اگر برای همهٔ ویژه مقدارهای مشخصهٔ α_iی تبدیل T داشته باشیم $|\alpha_i| = 1$.
۱۰. نشان دهید که اگر $T = \sum \alpha_i E_i$ تجزیهٔ طیفی یک تبدیل نرمال T باشد، آنگاه برای هر چندجمله‌یی $f(x) \in C[x]$، تابع خطی $f(T)$ یک تبدیل نرمال و با تجزیهٔ طیفی $f(T) = \sum f(\alpha_i) E_i$ است.
۱۱.فرض کنیم T یک تبدیل نرمال با تجزیهٔ طیفی $T = \sum \alpha_i E_i$ باشد. نشان دهید که یک تبدیل خطی $X \in L(V, V)$ با T تعویضپذیر است اگر و تنها اگر X با همهٔ خود توانهای E_i تعویضپذیر باشد.
۱۲.فرض کنیم $(u, v)_1$ یک حاصلضرب داخلی ارمیتی دیگری روی V باشد. نشان دهید که یک تبدیل مثبت T نسبت به حاصلضرب داخلی داده شدهٔ (u, v) وجود دارد که برای هر u, v متعلق به V، در تساوی زیر صدق می‌کند:

$$(u, v)_1 = (Tu, v)$$

۱۰

برخی از کاربردهای جبر خطی

در این فصل سه کاربرد جبر خطی را که هر یک مربوط به‌بخشهای متفاوتی از ریاضی است ارائه خواهیم داد. اولی در مسألهٔ هندسی طبقه‌بندی گروههای متقارن متناهی در فضای سه‌بعدی است، که تا حدّی مکمّل کاری است که در بخش ۱۴ دربارهٔ گروههای متقارن در صفحه شروع کرده بودیم. دومی نشان خواهد داد که چگونه زبان‌بردارها و ماتریسها در آنالیز برای تبدیل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول با ضرایب ثابت به یک معادلهٔ دیفرانسیل تک‌برداری مورد استفاده قرار می‌گیرد و سپس از راهی ظریف، با استفاده از تابع‌نمایی یک ماتریس، حل می‌شود. سرانجام، کاربردی را برای یک مسأله در جبر کلاسیک در مورد مجموع مربعات ارائه خواهیم داد.

۳۳. گروههای متقارن متناهی در فضای سه‌بعدی

کار خود را ضمن ملاحظاتی چند دربارهٔ تبدیلات متعامد برروی یک فضای برداری حقیقی nبعدی V با حاصلضرب داخلی (u,v) شروع می‌کنیم. اگر $S\subset V$، مجموعهٔ همهٔ بردارهای $v\in V$ را که برای هر $s\in S$ تساوی $(s,v)=\circ$ برقرار باشد، با $S^{\perp}$ نمایش می‌دهیم. بنابراین $S^{\perp}$ همواره یک زیر فضاست و همان‌طور که در بخش ۳۰ نشان داده‌ایم، اگر S یک زیر فضا باشد، آنگاه:

$$V = S\otimes S^{\perp}$$

به‌ویژه، اگر x برداری غیر صفر باشد، $(x)^{\perp}$ زیر فضایی خواهد بود $(n-۱)$ بعدی که

$$V = S(x) \otimes (x)^{\perp}$$

با بیان بخش ۱۰، $(x)^{\perp}$ ابر صفحه‌ای است که از مبدأ می‌گذرد. شاید ساده‌ترین نوع تبدیل خطی متعامد در V تبدیل T است که برای بردار غیر صفری مانند x تساویهای

$$\begin{aligned} Tx &= -x \\ Tu &= u \qquad u \in (x)^{\perp} \end{aligned}$$

را برقرار کند. اگر H معرّف ابر صفحهٔ $(x)^{\perp}$ باشد، T یک تقارن نسبت به H نامیده می‌شود.* از لحاظ هندسی، T هر نقطه از V را برروی قرینهٔ آن نسبت به H می‌برد به‌طوری‌که عناصر H ثابت می‌مانند. ماتریس تقارن T نسبت به‌پایه‌ای که شامل پایه‌ای برای ابرصفحه‌ای است که بر اثر T و یک بردار عمود بر این ابر صفحه ثابت می‌ماند، به‌صورت زیر ارائه می‌شود

$$\begin{pmatrix} ۱ & & & & ۰ \\ & ۱ & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & ۱ & \\ ۰ & & & & -۱ \end{pmatrix}$$

لذا، برای همهٔ تقارنهای T نسبت به یک ابر صفحه داریم:

$$T^{۲} = ۱, \qquad D(T) = -۱$$

اولین نتیجهٔ مهم ما قضیهٔ زیر است، که آ. کارتان و ژ. دیودونه داده‌اند، و بیان می‌دارد که هر تبدیل متعامد حاصلضرب چند تقارن است.

(۱.۳۳) قضیه. هر تبدیل متعامد برروی فضای برداری nبعدی V با حاصلضرب داخلی، حاصلضرب حداکثر n تقارن است.

برهان. ** از استقراء برروی n استفاده می‌کنیم، نتیجه برای $n = ۱$ واضح است، زیرا تنها تبدیلهای متعامد در فضای یک بعدی، ± ۱ هستند. فرض کنید بعد (V) بزرگتر از ۱ باشد و قضیه برای تبدیلهای متعامد برروی فضای $(n-۱)$ بعدی صحیح باشد. گیریم T تبدیل متعامد مفروضی برروی V باشد و $x \neq ۰$ برداری در V.

* مسألهٔ یکتایی قرینه نسبت به یک ابر صفحهٔ مفروض در تمرینها مطرح شده است.

** برهان کلیّتر این قضیه از آن آرتین است (که در کتابنامه آمده است).

حالت ۱. فرض کنید $Tx = x$؛ پس اگر $u \in H = (x)^\perp$، داریم:

$$(Tu, x) = (Tu, Tx) = (u, x) = ۰$$

بنابراین $Tu \in H$ و T معرّف یک تبدیل متعامد برروی فضای $(n - ۱)$ بعدی H است. بنابر فرض استقراء، تقارنهای $T_۱$، ...، T_s از H، برای $s \leq n - ۱$،وجود دارند به‌طوری‌که

$$Tu = T_۱ \dots T_s u, \ u \in H \tag{۲.۳۳}$$

هر کدام از T_iها را به یک تبدیل خطی T'_i برروی V با تعریف $T'_i x = x$ و $T'_i u = T_i u$ برای هر $u \in H$ و $i = ۱, \dots, s$، توسیع می‌دهیم. نشان می‌دهیم‌که هر T'_i یک تقارن برروی V است. یک زیر فضای $n - ۲$ بعدی $H_i \subset H = (x)^\perp$ وجود دارد که عناصرش بر اثر T_i ثابت می‌ماند، پس T'_i بردارهای ابر صفحهٔ $H'_i = H_i + S(x)$ از V را ثابت نگاه می‌دارد. علاوه بر این اگر x_i مولد $H_i^\perp$ در H باشد، آنگاه $x_i \in (H'_i)^\perp$ و $T'_i x_i = T_i x_i = -x_i$. این ملاحظات نشان می‌دهند که T'_i تقارنی است نسبت به H'_i. بالاخره، از تعریف تبدیلهای T'_i و (۲.۳۳) نتیجه می‌شود که:

$$T = T'_۱ \dots T'_s$$

بنابراین نشان دادیم که هر تبدیل متعامدی که یک بردار را ثابت نگاه دارد حاصلضرب حداکثر $n - ۱$ تقارن است.

حالت ۲. فرض کنید $Tx \neq x$؛ پس $u = Tx - x \neq ۰$. فرض کنید $H = (x)^\perp$ و U یک تقارن نسبت به H باشد. داریم.

$$(Tx + x, Tx - x) = (Tx, Tx) + (x, Tx) - (Tx, x) - (x, x) = ۰$$

زیرا T متعامد است و صورت بالا متقارن. بنابراین $Tx + x \in H = (u)^\perp$ که $u = Tx - x$، داریم:

$$U(Tx + x) = Tx + x$$

چون U یک تقارن نسبت به $H = (Tx - x)^\perp$ است، داریم:

$$U(Tx - x) = -(Tx - x)$$

از جمع معادلات بالا، چنین به‌دست می‌آوریم:

$$۲UT(x) = ۲x$$

و در نتیجه

$$UT(x) = x$$

طبق حالت ۱، $s \leq n - ۱$ تقارن $T_۱$، ...، T_s، وجود دارند که

$$UT = T_۱ \dots T_s$$

از آنجا که $U^۲ = ۱$، داریم:

$$T = U(UT) = UT_۱ \dots T_s$$

که حاصلضرب حداکثر n تقارن است، که برهان را کامل می‌کند.

به‌عنوان یک فرع، یک برداشت هندسی در فرع زیر به‌دست می‌آوریم، که به طریق دیگر در تمرینهای بخش ۳۰ اثبات شده است.

(۳.۳۳) فرع. فرض کنید T تبدیل متعامدی از یک فضای برداری حقیقی سه‌بعدی باشد به‌طوری‌که $D(T) = +۱$. بنابراین یک بردار غیر صفر $v \in V$ وجود دارد به‌طوری‌که $Tv = v$.

برهان. فرض می‌کنیم $T \neq ۱$. طبق قضیه(۱.۳۳)، T حاصلضربی است از یک، دو یا سه تقارن با دترمینان -۱. از اینجا نتیجه می‌شود T حاصلضربی از دقیقاً ۲ تقارن است، $T = T_۱T_۲$، که T_i تقارنی است نسبت به فضای دوبعدی H_i برای $i = ۱, ۲$. طبق قضیهٔ(۵.۷)،

$$\dim(H_۱ + H_۲) + \dim(H_۱ \cap H_۲) = \dim H_۱ + \dim H_۲ = ۴$$

و چون $\dim(H_۱ + H_۲) \leq ۳$، پس داریم $\dim(H_۱ \cap H_۲) \geq ۱$. فرض کنید x بردار غیر صفری در $H_۱ \cap H_۲$ باشد، پس $Tx = x$ و فرع ثابت می‌شود.

دوران در فضای سه‌بعدی را به‌عنوان یک تبدیل متعامد با دترمینان $+۱$ تعریف می‌کنیم. پس این فرع گویای آن است که هر دوران در فضای سه‌بعدی دورانی است حول یک محور، این محور خطی است که توسط برداری که ثابت مانده مشخص می‌شود. این واقعیّت اهمیّت اساسی در مکانیک دارد و توسط اویلر* با استفاده از استدلال هندسی جالبی اثبات شده است، و خواهیم دید که همچنین مفتاحی برای طبقه‌بندی گروههای متقارن متناهی در $R_۳$ است. طرح این مطلب بر اساس بحث مقدّمهٔ بخش ۱۴ صورت گرفته است و برهان قضیهٔ اصلی از کتاب (وایل ← به کتابنامه) برگرفته شده است. علاوه بر جالب‌بودن از لحاظ هندسی، برهان وایل مقدمهٔ مؤثری برای نظریهٔ گروههای متناهی است.

بیاییم مسأله را دقیق بررسی کنیم. منظور از یک گروه متقارن متناهی در فضای سه‌بعدی، گروه متناهی تبدیلهای متعامد در $R_۳$ است. برای سادگی، گروههای متناهی دوران را در $R_۳$ تعریف

* سینگ و گریفیث صفحات ۲۷۹ـ۲۸۰ (در کتابنامه آمده است).

می‌کنیم و ارتباط آن را با مسألهٔ کلّی در تمرینها نشان می‌دهیم. اجازه دهید مطلب را با ذکر چند مثال از گروههای متناهی دوران در R_3 شروع کنیم. منظور از مرتبهٔ یک گروه متناهی تعداد اعضای آن است. گروه دوری $\mathcal{C}_n$ از مرتبهٔ n و گروه دووجهی $\mathcal{D}_n$ از مرتبهٔ ۲n، که در بخش ۱۴ بحث شد، از نخستین مثالهاست.

برای رسانیدن منظور خود، در این بخش بهتر است $\mathcal{D}_n$ را گروه متقارن یک nضلعی منتظم تلقی کنیم. تبدیل S در $\mathcal{D}_n$، که قرینهٔ چندضلعی را نسبت به خط تقارن پیدا می‌کند، اگر چه معرف یک قرینه‌یابی است وقتی به‌عنوان یک تبدیل در صفحه انگاشته شود ولی، وقتی به‌عنوان یک تبدیل در R_3 نگریسته شود معرّف یک دوران خواهد بود.

مثال دیگر، گروههای متقارنِ چند وجهیهای منتظم در R_3 است. دقیقاً ۵ تا از این چندوجهیها وجود دارند که در جدول زیر همراه با تعداد رئوس V، تعداد یالهای E و تعداد وجوه F آورده شده‌اند.

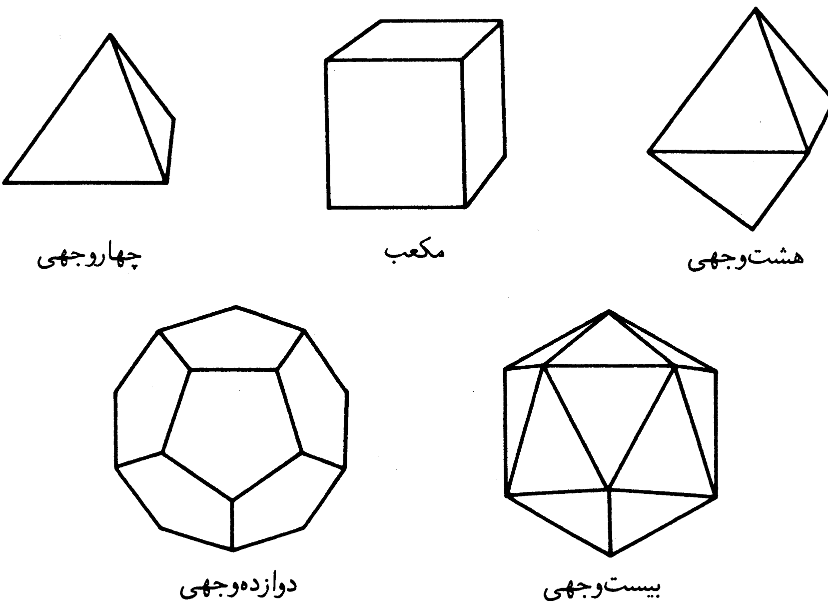
	F	E	V
چهاروجهی	۴	۶	۴
مکعب	۶	۱۲	۸
هشت‌وجهی	۸	۱۲	۶
دوازده‌وجهی	۱۲	۳۰	۲۰
بیست‌وجهی	۲۰	۳۰	۱۲

(برای استخراج این فهرست، براساس فرمول اویلر برای چندوجهی «بدون سوراخ»، $F-E+V=۲$، به‌کتاب کورانت و رابینز و همچنین کتابهایی که وایل و کاکستر نوشته‌اند، و درکتابشناسی ذکر شده‌اند مراجعه کنید.) وجوه در حالت چهاروجهی مثلثهای متساوی الاضلاع، در حالت مکعب مربع، در حالت هشت وجهی مثلثهای متساوی الاضلاع، در حالت دوازده وجهی پنج ضلعی، و در حالت بیست وجهی مثلثهای متساوی الاضلاع هستند، ← شکل (۱.۱۰).

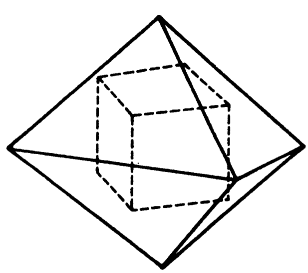
واضح است که می‌توانیم ۵ گروه دوران متفاوت از این شکلها به‌دست آوریم، این گروه در هر حالت مجموعهٔ تمام دورانهایی است که شکل را برروی خودش برمی‌گرداند. در بررسی نزدیکتر، می‌بینیم که مسأله چیز دیگری است. به‌عنوان مثال مکعب و هشت‌وجهی دوگان یکدیگرند بدین تعبیر که اگر یک شکل را گرفته مراکز وجوه آن را با پاره خطهایی به هم وصل کنیم، این پاره‌خطها یالهای چندوجهی دیگر می‌شوند، ← شکل (۲.۱۰). بنابراین، هر دورانی که مکعب را به روی خود ببرد، تقارنی از هشت‌وجهی خواهد بود، و برعکس. همچنین ۱۲ وجهی و ۲۰ وجهی دوگان یکدیگرند. در نتیجه، از چندوجهیهای منتظم، فقط سه‌گروه دیگر به‌دست می‌آوریم: گروه $\mathcal{T}$ یا گروه دورانهای ۴ وجهی، گروه $\mathcal{O}$ یا گروه دورانهای هشت‌وجهی، و گروه $\mathscr{I}$ یا گروه دورانهای ۲۰ وجهی.

اکنون می‌توانیم قضیهٔ اصلی خود را بیان کنیم.

(۴.۳۳) قضیه. فرض کنید $\mathcal{G}$ یک گروه متناهی از دورانها در R_3 باشد؛ پس $\mathcal{G}$ با یکی از



شکل ۱.۱۰



شکل ۲.۱۰

گروههای مذکور در زیر یکریخت است.

$$\mathcal{C}_n \qquad n = ۱, ۲, \ldots$$

$$\mathcal{D}_n \qquad n = ۱, ۲, \ldots$$

$\mathcal{T}, \mathcal{O},$ یا $\mathscr{I}$

برهان. فرض کنید S کرهٔ واحد در $R_۳$، متشکل از همهٔ نقاط* $x \in R_۳$ باشد به‌طوری‌که $\|x\| = ۱$. اگر $T \in \mathcal{G}$، آنگاه $Tx \in S$ برای هر $x \in S$، و T براثر عمل آن برروی اعضای کرهٔ S کاملاً مشخص شود، زیرا که S شامل یک پایه برای $R_۳$ است. هر $T \in \mathcal{G}$، به‌شرطی‌که $T \neq ۱$، به‌موجب فرع (۳.۳۳)، نقاط متقاطر برروی کره، و فقط این نقاط را، ثابت نگاه می‌دارد. این نقاط قطبهای T نامیده می‌شوند. از آنجا که $\mathcal{G}$ متناهی است، مجموعهٔ همهٔ قطبهای همهٔ اعضای T از $\mathcal{G}$ به‌طوری‌که $T \neq ۱$ مجموعه‌ای است متناهی از نقاط کرهٔ S؛ این مجموعه را به تفصیل مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فرض کنید p قطبی بر S باشد. روشن است که مجموعهٔ همهٔ اعضای T از $\mathcal{G}$ به‌طوری‌که p یک قطب T باشد، همراه با عضو همانی ۱، یک زیر گروه $\mathcal{G}$ است، یعنی زیرمجموعه‌ای است از $\mathcal{G}$ که تحت عمل تعریف شده بر $\mathcal{G}$ خود یک گروه تشکیل می‌دهد. رتبهٔ این زیر گروه، رتبهٔ قطب p نام دارد و با v_p نمایش داده می‌شود.

سپس دو قطب p و p' را هم‌ارز می‌نامیم و می‌نویسیم $p \sim p'$، اگر و فقط اگر $p = Tp'$ برای برخی از $T \in \mathcal{G}$. مجموعهٔ همهٔ قطبهای هم‌ارز با p ردهٔ هم‌ارزی p نامیده می‌شود. ثابت می‌کنیم که هر قطب به یک و فقط یک ردهٔ هم‌ارزی تعلق دارد. از آنجا که $۱ \in \mathcal{G}$ و $p = ۱p$، لذا p به ردهٔ هم‌ارزی p تعلق می‌گیرد. حالا باید نشان دهیم که اگر قطب p به رده‌های هم‌ارزی p' و p'' تعلق گرفت، آنگاه این رده‌های هم‌ارزی برهم منطبق‌اند. فرض کنید q به ردهٔ هم‌ارزی p' متعلق باشد؛ پس $q \sim p'$، و $q = Tp'$ برای مقداری از $T \in \mathcal{G}$. از آنجا که $p \sim p'$ و $p \sim p''$، داریم $p = T'p'$ و $p = T''p''$ برای $T'' \in \mathcal{G}$ و T'، و در نتیجه $p' = (T')^{-۱}T''p''$. پس $q = T(T')^{-۱}T''p''$ و لذا $q \sim p''$. ما نشان دادیم که ردهٔ هم‌ارزی p' مشمول در ردهٔ هم‌ارزی p'' است، و استدلال مشابهی شمول معکوس را برقرار می‌سازد. این برهان، استدلال تعلق داشتن یک قطب به یک و فقط یک ردهٔ هم‌ارزی را کامل می‌کند.

(۵.۳۳) لم. قطبهای هم‌ارز یک مرتبه دارند.

برهان. فرض کنید $p \sim p'$ و $\mathcal{H}$ زیر گروهی است از $\mathcal{G}$ شامل همانی ۱ همراه با اعضایی که شامل p به‌عنوان قطب هستند، و فرض کنید $\mathcal{H}'$ زیر گروه متناظر برای p' باشد. فرض کنید $p = Tp'$. دراین‌صورت یک بررسی ساده نشان می‌دهد که نگاشت $X \to TXT^{-۱}$ یک نگاشت یک به یک از $\mathcal{H}'$ به‌روی $\mathcal{H}$ است، که لِم بالا را ثابت می‌کند.

(۶.۳۳) لم. فرض کنید p قطبی از مرتبهٔ v_p و n_p تعداد قطبهای هم‌ارز با p باشد؛ پس $v_p n_p = N$، که N مرتبهٔ $\mathcal{G}$ است.

برهان. فرض کنید $\mathcal{H}$ زیرگروه مربوط به p باشد، برای $X \in G$ فرض کنید $X\mathcal{H}$ معرف مجموعهٔ همهٔ اعضای $Y \in \mathcal{G}$ باشد به‌طوری‌که $Y = XT$، برای برخی از $T \in \mathcal{H}$. ابتدا ملاحظه می‌کنیم، که برای هر $X \in \mathcal{G}$، Xp یک قطب است و قطبهای Xp و $X'p$ یکی هستند اگر و فقط

* در این مبحث ازاعضای $R_۳$ به‌عنوان نقاط صحبت می‌کنیم.

اگر $X' \in X\mathcal{H}$. بنابراین تعداد قطبهای هم‌ارز برابر با تعداد مجموعه‌هایی مجزا به‌شکل $X\mathcal{H}$ است. مجموعهٔ $X\mathcal{H}$ هممجموعهٔ چپ $\mathcal{H}$ شامل X نامیده می‌شود. حالا نشان می‌دهیم که هر عضوی از $\mathcal{G}$ متعلق به یک و فقط یک هممجموعهٔ چپ است و تعداد اعضاء در هر هممجموعهٔ چپ برابر v_p است. اگر $X \in \mathcal{G}$، آنگاه $X \in X\mathcal{H}$ زیرا $X = X.۱$، $۱ \in \mathcal{H}$. حالا فرض کنید $X \in X'\mathcal{H} \cap X''\mathcal{H}$، نشان می‌دهیم که $X'\mathcal{H} = X''\mathcal{H}$؛ داریم، برای $Y \in X'\mathcal{H}$، $Y = X'T$ برای برخی از مقادیر $T \in \mathcal{H}$. علاوه بر این $X \in X'\mathcal{H} \cap X''\mathcal{H}$ ایجاب می‌کند که $X = X'T' = X''T''$ برای T' و T'' متعلق به $\mathcal{H}$. پس $Y = X'T = X(T')^{-۱}T = X''T''(T')^{-۱}T \in X''\mathcal{H}$. بنابراین $X'\mathcal{H} \subset X''\mathcal{H}$، و همچنین، $X''\mathcal{H} \subset X'\mathcal{H}$. بنابراین $X'\mathcal{H} = X''\mathcal{H}$، و ثابت کردیم که هر عضو $\mathcal{G}$ به هممجموعهٔ چپ واحدی متعلق است. حال فرض کنید $X\mathcal{H}$ یک هممجموعهٔ چپ باشد. بنابراین نگاشت $T \to XT$، یک نگاشت یک به یک از $\mathcal{H}$ به‌روی $X\mathcal{H}$ است، و هر هممجموعهٔ چپ دارای v_p عضو است که v_p مرتبهٔ $\mathcal{H}$ است.

نشان دادیم که تعداد قطبهای هم‌ارز p با تعداد هممجموعه‌های چپ $\mathcal{H}$ در $\mathcal{G}$ برابر است. طبق آنچه نشان داده شد، این تعداد برابر با N/v_p است، و لِم ثابت می‌شود.

اکنون می‌توانیم برهان قضیهٔ (۴.۳۳) را به پایان برسانیم. مجموعهٔ همهٔ جفتهای (T, p) را که در آن $T \in \mathcal{G}$، $T \neq ۱$، و p یک قطب T است درنظر می‌گیریم. با شمارش جفتها از دو راه متفاوت* به دست می‌آوریم

$$۲(N - ۱) = \sum_p (v_p - ۱)$$

و با گردآوری جملات طرف سمت راست برطبق رده‌های هم‌ارزی قطبها، C، داریم

$$۲(N - ۱) = \sum n_C(v_C - ۱)$$

که n_C تعداد قطبها در ردهٔ هم‌ارزی C، و v_C مرتبهٔ یک قطب معمولی در C است [← لِم (۵.۳۳)]، و عمل جمع برروی رده‌های مختلف هم‌ارزی قطبها گرفته شده است. با استفاده از (۶.۳۳)، داریم:

$$۲(N - ۱) = \sum_C (N - n_C) = \sum_C (N - \frac{N}{v_C})$$

از تقسیم بر N، خواهیم داشت:

$$۲ - \frac{۲}{N} = \sum_C (۱ - \frac{۱}{v_C}) \qquad (۷.۳۳)$$

* ما ابتدا از این واقعیت استفاده می‌کنیم که $T \neq ۱$ مربوط به دو قطب است و سپس هر قطب مربوط به $(v \dot{-} ۱)$ عضو $T \neq \mathcal{G}$ است، به‌طوری‌که $T \neq ۱$.

سمت چپ بزرگتر از ۱ و کوچکتر از ۲ است؛ بنابراین حداقل دو ردهٔ C و حداکثر سه ردهٔ C وجود دارد. بقیّهٔ استدلال، مطالعهٔ حسابی معادلهٔ (۷.۳۳) است.

حالت ۱. دو رده قطب از مرتبه‌های $v_۱$ و $v_۲$ وجود دارند. پس(۷.۳۳) به‌دست می‌دهد

$$\frac{۲}{N} = \frac{۱}{v_۱} + \frac{۱}{v_۲}, \qquad ۲ = \frac{N}{v_۱} + \frac{N}{v_۲}$$

و داریم $N/v_۱ = N/v_۲ = ۱$. این حالت فقط و فقط وقتی اتّفاق می‌افتد که $\mathcal{G}$ دوری باشد.

حالت ۲. سه‌رده قطب از مرتبه‌های $v_۱$، $v_۲$، $v_۳$ وجود دارند، که فرض می‌کنیم $v_۱ \leq v_۲ \leq v_۳$. پس (۷.۳۳) ایجاب می‌کند که

$$۲ - \frac{۲}{N} = (۱ - \frac{۱}{v_۱}) + (۱ - \frac{۱}{v_۲}) + (۱ - \frac{۱}{v_۳})$$

یا

$$۱ + \frac{۲}{N} = \frac{۱}{v_۱} + \frac{۱}{v_۲} + \frac{۱}{v_۳}$$

همگی v_iها نمی‌توانند بزرگتر از ۲ باشند، پس $v_۱ = ۲$ و داریم

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۲}{N} = \frac{۱}{v_۲} + \frac{۱}{v_۳}$$

هر دو $v_۲$ و $v_۳$ نمی‌توانند ≤ ۴ باشند، پس ۳ یا $۲ = v_۱$.

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۲}{N} = \frac{۱}{v_۲} + \frac{۱}{v_۳}$$

حالت ۲ الف: $v_۱ = ۲$، $v_۲ = ۲$. بنابراین $v_۳ = \frac{N}{۲}$ و در این حالت $\mathcal{G}$ گروه دووجهی است

حالت ۲ ب: $v_۱ = ۲$، $v_۲ = ۳$. بنابراین داریم

$$\frac{۱}{v_۳} = \frac{۱}{۶} + \frac{۲}{N}$$

و ۵ یا ۴ و $۳ = v_۳$. برای هر امکان $v_۳$ داریم:

$v_۱ = ۲, v_۲ = ۳, v_۳ = ۳$. بنابراین $N = ۱۲$ و $\mathcal{G}$ گروه ۴وجهی $\mathcal{T}$ است.

$v_۱ = ۲, v_۲ = ۳, v_۳ = ۴$. بنابراین $N = ۲۴$ و $\mathcal{G}$ گروه هشت وجهی $\mathcal{O}$ است.

$v_۱ = ۲, v_۲ = ۳, v_۳ = ۵$، بنابراین $N = ۶۰$ و $\mathcal{G}$ گروه بیست‌وجهی $\mathcal{I}$ است.

تمرینها

۱.فرض کنید V یک فضای برداری با حاصلضرب داخلی باشد:

الف) ثابت کنید که، اگر T_1 و T_2 تقارنهایی نسبت به یک ابر صفحهٔ H باشند، آنگاه $T_1 = T_2$.

ب) ثابت کنید که اگر T تبدیل متعامدی باشد که تمامی اعضای ابرصفحهٔ H را ثابت نگاه دارد، آنگاه یا $T = 1$، و یا T تقارنی نسبت به H است.

ج) فرض کنید T تقارنی نسبت به H باشد و فرض کنید $x_0 \in H^\perp$. ثابت کنید که T توسط فرمول زیر داده می‌شود:

$$T(x) = x - 2\frac{(x, x_0)}{(x_0, x_0)}x_0, \qquad x \in V$$

۲.فرض کنید $\mathcal{G}$ گروه تبدیلهای متعامد متناهی و $\mathcal{H}$ دورانی شامل $\mathcal{G}$ باشد. ثابت کنید که $\mathcal{H}$ یک زیرگروه $\mathcal{G}$ است و اگر $\mathcal{H} \neq \mathcal{G}$، آنگاه برای هر عضو $X \in \mathcal{G}$ و $X \notin \mathcal{H}$، داریم

$$\mathcal{G} = \mathcal{H} \cup X\mathcal{H}, \qquad \mathcal{H} \cap X\mathcal{H} = \varnothing$$

۳.فرض کنید $\mathcal{G}$ گروه متناهی مفروضی از تبدیلهای خطی معکوس‌پذیر برروی R_2 باشد. ثابت کنید که یک حاصلضرب داخلی $((x, y))$ بر R_2 وجود دارد به‌طوری‌که $T_i \in \mathcal{G}$ها تبدیلهایی متعامد نسبت به حاصلضرب داخلی $((x, y))$ باشند. [راهنمایی: فرض کنید (x, y) حاصلضرب داخلی معمولی در R_2 باشد. $((x, y))$ را با تساوی

$$((x, y)) = \sum_{T_i \in \mathcal{G}} (T_i(x), T_i(y))$$

تعریف و ثابت کنید که $((x, g))$ ویژگیهای مطلوب را دارد. یادآوری می‌کنیم که همین استدلال را می‌توان برای گروههای متناهی معکوس‌پذیر تبدیلهای خطی در R_n برای عدددلخواه n نیز به‌کار برد].

۴.فرض کنید $\mathcal{G}$ مجموعهٔ تبدیلهای خطی روی C_2 باشد و C هیأت مختلطی باشد که ماتریسهای آن نسبت به یک پایه به‌صورتهای زیر باشند:

$$\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ثابت کنید که $\mathcal{G}$ یک گروه متناهی تشکیل می‌دهد و پایه‌ای برای C_2 وجود ندارد که ماتریسهای اعضای $\mathcal{G}$ نسبت به پایهٔ جدید همگی دارای ضرایب حقیقی باشند (راهنمایی: اگر چنین پایه‌ای وجود می‌داشت، آنگاه به‌موجب تمرین ۳ و قضایای بخش ۱۴، $\mathcal{G}$ بایستی یا با یک گروه دوری و یا با یک گروه دووجهی یکریخت می‌شد).

۳۴. کاربرد در معادله‌های دیفرانسیل

در این بخش دستگاه معادله‌های دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اوّلی با ضرایب ثابت و توابع مجهول $y_1(t)$، . . .، $y_n(t)$ را که در آنها t متغیر حقیقی و $y_i(t)$ها توابع حقیقی‌ـمقدارند در نظر می‌گیریم. به عبارت دیگر معادله‌های دیفرانسیلی به‌صورت زیر داده شده‌اند

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \alpha_{11}y_1 + \cdots + \alpha_{1n}y_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_n}{dt} &= \alpha_{n1}y_1 + \cdots + \alpha_{nn}y_n \end{aligned} \tag{۱.۳۴}$$

که $\mathbf{A} = (\alpha_{ij})$ ماتریس ثابتی است n در n با درایه‌های حقیقی. مسألهٔ یافتن مجموعهٔ جوابهای $y_1(t)$، . . .، $y_n(t)$ را که با مجموعهٔ شرایط اولیهٔ $y_1(0)$، . . .، $y_n(0)$ مشخص می‌شوند مورد بحث قرار خواهیم داد. مثلاً، اگر t زمان و $y_1(t)$، . . .، $y_n(t)$ معرّف حرکت یک دستگاه مکانیکی باشند، می‌خواهیم چگونگی حلّ این معادله‌های حرکت را نشان دهیم مشروط به اینکه این توابع در لحظهٔ $t = 0$ مقادیر مشخصی اختیار کنند.

ساده‌ترین حالت چنین دستگاهی، حالت یک معادلهٔ:

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y$$

است و در این حالت از آشنایی که با حسابان مقدماتی داریم می‌دانیم که تابع

$$y(t) = y(0)e^{\alpha t}$$

جواب این معادلهٔ دیفرانسیل است که مقدار اولیهٔ $y(0)$ را در $t = 0$ اختیار می‌کند.

نشان خواهیم داد که چگونه نظریّهٔ ماتریسها می‌تواند برای حل یک دستگاه کلّی (۱.۳۴) به همان سادگی مورد استفاده قرارگیرد. به این نکته نیز اشاره می‌کنیم که بحث ما متضمّن یک حالت خاص مسألهٔ حل معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبه n با ضرایب ثابت است

$$\alpha_0 \frac{d^n y}{dt^n} + \alpha_1 \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + \alpha_{n-1}\frac{dy}{dt} + \alpha_n y = 0, \qquad \alpha_0 \neq 0 \tag{۲.۳۴}$$

که α_iها ضرایب حقیقی هستند. به‌جای این معادله می‌توان دستگاهی به شکل (۱.۳۴) قرار داد به شرطی که $y(t)$ را به عنوان تابع مجهول $y_1(t)$ بگیریم و مشتقات را به‌صورت زیر نامگذاری کنیم:

$$\frac{d^i y}{dt^i} = y_{i+1}(t), \qquad 1 \leq i \leq n-1$$

بنابراین توابع $y_1(t)$ در دستگاه زیر صدق می‌کنند

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= y_2\\ \frac{dy_2}{dt} &= y_3\\ &\vdots\\ \frac{dy_n}{dt} &= -\frac{\alpha_n}{\alpha_0}y_1 - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_0}y_2 - \cdots - \frac{\alpha_1}{\alpha_0}y_n\end{aligned} \qquad (۳.۳۴)$$

و، برعکس، هر مجموعه از جوابهای دستگاه (۳.۳۴) یک جواب $y_1(t) = y(t)$ از معادلهٔ اولیهٔ (۲.۳۴) را نیز خواهد داد. شرایط اولیه در این حالت مقادیری هستند که $y(t)$ و $n-1$ مشتق اولیه را در $t = 0$ مشخص می‌کنند.

حالا به اصل مبحث می‌پردازیم. توابع $y_1(t)$، ...، $y_n(t)$ را به شکل برداری (یا به صورت ماتریس $n \times 1$) نمایش می‌دهیم:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t)\\ \vdots \\ y_n(t)\end{pmatrix}$$

در اینجا، اگر بخواهیم به‌طور مجرّد به آن نگاه کنیم، تابعی داریم که به هر مقدار حقیقی t یک بردار $y(t) \in R_n$ را تخصیص می‌دهد. حدود چنین توابعی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{t\to t_0} y_1(t)\\ \vdots \\ \lim\limits_{t\to t_0} y_n(t)\end{pmatrix}$$

به‌شرطی که همهٔ حدود $\lim_{t\to t_0} y_i(t)$ وجود داشته باشند.

بهتر است که همهٔ اینها را اندکی تعمیم دهیم. توابع:

$$t \to \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) \dots a_{1r}(t)\\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}(t) \dots a_{sr}(t)\end{pmatrix}$$

را که به هر عدد حقیقی t یک ماتریس $s \times r$ ی $\mathbf{A}(t)$ را مربوط می‌کند که درایه‌هایش مقادیر مختلط $a_{ij}(t)$ هستند، درنظر می‌گیریم. برای تابع ماتریسی 1×1، می‌توان به‌ازای مقداری از

عدد مختلط u چنین تعریف کرد:

$$\lim_{t\to t_\circ} a(t) = u$$

به‌شرطی‌که برای هر $\varepsilon > \circ$ یک $\delta > \circ$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که رابطهٔ $\circ < |t - t_\circ| < \delta$ رابطهٔ $|a(t) - u| < \varepsilon$ را ایجاب کند که $|a(t) - u|$ معرّف فاصلهٔ بین نقاط $a(t)$ و u در صفحهٔ مختلط است. با استفاده از این حقیقت (که در بخش ۱۵ اثبات شده است) که برای اعداد مختلط u و v داریم:

$$|u+v| \leq |u| + |v|$$

به آسانی می‌توان نشان داد که قضایای معمولی حد در حسابان مقدماتی برای توابع مختلط‌ـمقدار برقرار است. سپس، همان‌گونه که در مورد تابع برداری $\mathbf{y}(t)$ تعریف کردیم، می‌توانیم حدّ $\lim_{t\to t_\circ} \mathbf{A}(t)$ را تعریف کنیم:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{h\to\circ} \frac{\mathbf{A}(t+h) - \mathbf{A}(t)}{h} = \begin{pmatrix} \dfrac{da_{۱۱}}{dt} \cdots \dfrac{da_{۱r}}{dt} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{da_{s۱}}{dt} \cdots \dfrac{da_{sr}}{dt} \end{pmatrix}$$

و

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} a_{۱۱}^{(n)}(t) \ldots \lim\limits_{n\to\infty} a_{۱r}^{(n)}(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_{s۱}^{(n)}(t) \ldots \lim\limits_{n\to\infty} a_{sr}^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

که $\{\mathbf{A}_n(t)\}$ یک دنباله از توابع ماتریسی‌ـمقدار $\mathbf{A}_n(t) = (a_{ij}^{(n)}(t))$ است.

حالا می‌توانیم دستگاه معادلات دیفرانسیل اولیهٔ (۱.۳۴) را به‌صورت فشرده‌تر زیر بیان کنیم:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y} \qquad (۴.۳۴)$$

که

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_۱(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

تابعی است برداری ـمقدار و $\mathbf{Ay}$ معرّف حاصلضرب ماتریس ثابت $\mathbf{A}$ی $n \times n$ در ماتریس $\mathbf{y}(t)$ی $n \times ۱$ است.

موضوع قابل توجه این که معادلهٔ (۴.۳۴) را می‌توان دقیقاً همانند حالت یک بعدی حل کرد. برای روشن ساختن موضوع تعریف زیر را درنظر می‌گیریم:

(۵.۳۴) تعریف. فرض کنید $\mathbf{B}$ ماتریس $n \times n$ با ضرایب مختلط (β_{ij}) باشد. دنباله‌های ماتریسها را به‌صورت

$$\mathbf{E}^{(n)} = \mathbf{I} + \mathbf{B} + \frac{۱}{۲}\mathbf{B}^{۲} + \cdots + \frac{۱}{n!}\mathbf{B}^{n}, \qquad n = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

و ماتریس نمایی را به‌صورت

$$e^{\mathbf{B}} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} (\mathbf{I} + \mathbf{B} + \frac{۱}{۲}\mathbf{B}^{۲} + \cdots + \frac{۱}{n!}\mathbf{B}^{n})$$

تعریف می‌کنیم. البته قبل از همه بایستی وجود $e^{\mathbf{B}}$، به‌عبارت دیگر وجود حد دنبالهٔ $\{\mathbf{E}^{(n)}\}$ تحقیق شود. فرض کنید ρ یک حد بالایی برای $\{|\beta_{ij}|\}$ باشد؛ پس برای همهٔ (i,j)ها $\rho \leq |\beta_{ij}|$ فرض کنید $(\beta_{ij}^{(n)}) = \mathbf{B}^{n}$. پس مؤلفهٔ (i,j) مربوط‌به $\mathbf{E}^{(n)}$ عبارت است از:

$$\beta_{ij}^{(۰)} + \beta_{ij}^{(۱)} + \frac{۱}{۲}\beta_{ij}^{(۲)} + \cdots + \frac{۱}{n!}\beta_{ij}^{(n)}$$

و بایستی نشان دهیم که این دنباله به سمت حدی میل می‌کند. معنی آن این است که نشان دهیم سری نامتناهی زیر همگراست:

$$\sum_{k=۰}^{\infty} \frac{۱}{k!}\beta_{ij}^{(k)}$$

و این را می‌توان با یک آزمون مقایسه‌ای ساده به‌صورت زیر بررسی کرد: با استقراء برروی k، ابتدا نشان می‌دهیم که برای $k = ۱, ۲, \ldots$ داریم:

$$|\beta_{ij}^{(k)}| \leq n^{k-۱}\rho^{k}, \qquad ۱ \leq i,j \leq n$$

بنابراین هر جملهٔ سری

$$\sum_{k=۰}^{\infty} \frac{۱}{k!}\beta_{ij}^{(k)}$$

از لحاظ قدر مطلق از هر جملهٔ متناظرش در سری با جمله‌های مثبت زیر کوچکتر است

$$\sum_{k=۰}^{\infty} \frac{۱}{k!}n^{k-۱}\rho^{k}$$

و این سری برای تمام ρها به‌موجب آزمون نسبت همگراست. این مطلب اثبات وجود $e^{\mathbf{B}}$ را برای همهٔ ماتریسهای $\mathbf{B}$ کامل می‌کند.

حالا برخی از ویژگیهای تابع $\mathbf{B} \to e^{\mathbf{B}}$ را در زیر درج می‌کنیم و اثبات آنها را به‌عنوان تمرین به‌خواننده می‌سپاریم،

(۶.۳۴) $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}$ درصورتی‌که $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$

(۷.۳۴) برای همهٔ ماتریسهای $\mathbf{B}$ی $n \times n$ $\frac{d}{dt}e^{t\mathbf{B}} = \mathbf{B}e^{t\mathbf{B}}$

(۸.۳۴) برای هر ماتریس معکوس‌پذیر $\mathbf{S}$، $\mathbf{S}^{-1}e^{\mathbf{A}}\mathbf{S} = e^{\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS}}$

جواب (۴.۳۴) را حالا به‌صورت زیر می‌آوریم:

(۹.۳۴) قضیه. معادلهٔ دیفرانسیل برداری

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{Ay}$$

که در آن $\mathbf{A}$ ماتریس ثابت دلخواهی با ضریبهای حقیقی است، دارای جواب زیر است:

$$\mathbf{y}(t) = e^{t\mathbf{A}}.\mathbf{y}_0$$

که مقدار اولیهٔ $\mathbf{y}_0$ را در $t = 0$ اختیار می‌کند.

برهان. واضح است که $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ ، و می‌ماند تحقیق کنیم که $\mathbf{y}(t)$ حقیقتاً جواب این معادلهٔ دیفرانسیل است. ابتدا اشاره کنیم که، اگر $\mathbf{A}(t)$ یک تابع ماتریسی باشد و $\mathbf{B}$ یک بردار ثابت، آنگاه

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{A}(t)\mathbf{B}] = \frac{d\mathbf{A}}{dt}.\mathbf{B}$$

از مشتقگیری از $\mathbf{y}(t) = e^{t\mathbf{A}}.\mathbf{y}_0$ و استفاده از (۷.۳۴)، داریم

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = (\frac{d}{dt}e^{t\mathbf{A}}).\mathbf{y}_0 = (\mathbf{A}e^{t\mathbf{A}})\mathbf{y}_0 = \mathbf{Ay}(t)$$

که برهان قضیه را کامل می‌کند.

قضیهٔ (۹.۳۴) مسألهٔ مذکور درابتدای این بخش را حل می‌کند، اما این راه حل باز از اهمیت عملی زیادی برخوردار نیست زیرا محاسبهٔ ماتریس $e^{t\mathbf{A}}$ مشکل است. حالا نشان می‌دهیم که چگونه قضیه(۹.۲۴) در به‌دست‌دادن یک روش کلّی برای محاسبهٔ ماتریس $e^{t\mathbf{A}}$ می‌تواند، در صورت معلوم‌بودن ریشه‌های مختلط چندجمله‌یی مینیمال ماتریس $\mathbf{A}$ مورد استفاده قرار گیرد، فرض کنید

$$m(x) = (x - \alpha_1)^{e_1} \ldots (x - \alpha_s)^{e_s}, \qquad e_i > 0$$

چندجمله‌یی مینیمال $\mathbf{A}$ باشد. بنابراین ماتریس معکوس‌پذیر $\mathbf{S}$، محتملاً با ضریبهای مختلط، وجود دارد که طبق قضیهٔ (۹.۲۴)،

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{D} + \mathbf{N}$$

که

$$\mathbf{D} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} \alpha_1 & & 0 & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ 0 & & \alpha_1 & & & & \\ \hline & & & \alpha_2 & & 0 & \\ & 0 & & & \ddots & & \\ & & & 0 & & \alpha_2 & \\ \hline & & & & & & \\ & & & & & & \end{array}\right)$$

یک ماتریس قطری، و $\mathbf{N}$ پوچتوان است و $\mathbf{DN} = \mathbf{ND}$. بعلاوه، $\mathbf{S}$، $\mathbf{D}$، و $\mathbf{N}$ را می‌توان با روشهای بخش ۲۴ حل کرد. پس

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}(\mathbf{D} + \mathbf{N})\mathbf{S}^{-1}$$

و، طبق (۶.۳۴) و (۸.۳۴)، داریم

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} = e^{t\mathbf{S}(\mathbf{D}+\mathbf{N})\mathbf{S}^{-1}} &= \mathbf{S}(e^{t\mathbf{D}+t\mathbf{N}})\mathbf{S}^{-1} \\ &= \mathbf{S}e^{t\mathbf{D}}e^{t\mathbf{N}}\mathbf{S}^{-1} \end{aligned}$$

نکتهٔ جالب در تمامی اینها این است که $e^{t\mathbf{D}}$ و $e^{t\mathbf{N}}$ هر دو به راحتی قابل محاسبه‌اند؛ $e^{t\mathbf{D}}$ فقط یک ماتریس قطری به‌صورت زیر است:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} e^{\alpha_1 t} & & 0 & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ 0 & & e^{\alpha_1 t} & & & & \\ \hline & & & e^{\alpha_2 t} & & 0 & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & 0 & & e^{\alpha_2 t} & \\ \hline & & & & & & \\ & & & & & & \end{array}\right)$$

در حالی‌که $e^{t\mathbf{N}} = \mathbf{I} + t\mathbf{N} + \frac{t^۲\mathbf{N}^۲}{۲} + \cdots + \frac{t^{r-۱}\mathbf{N}^{r-۱}}{(r-۱)!}$ اگر $\mathbf{N}^r = ۰$. بردار جواب $\mathbf{y}(t) = \mathbf{S}e^{t\mathbf{D}}e^{t\mathbf{N}}\mathbf{S}^{-۱}\mathbf{y}_۰$ است.

مثال الف. معادلهٔ دیفرانسیل برداری

$$\left(\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y}\right) \quad \text{با} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} ۲ & ۲ \\ -۲ & -۳ \end{pmatrix}$$

را درنظر می‌گیریم. یک جواب $\mathbf{y}$ از معادلهٔ دیفرانسیل را که در شرط اولیهٔ $\mathbf{y}(۰) = \mathbf{y}_۰$ نیز صدق می‌کند محاسبه می‌کنیم. چندجمله‌یی مینیمال $\mathbf{A}$، $x^۲ + x - ۲$ است و مشاهده می‌کنیم که $\mathbf{A}$ قطری شدنی است (چرا؟). ویژه مقدارهای $\mathbf{A}$، اعداد ۲− و ۱ هستند با ویژه بردارهای متناظر،

$$\begin{pmatrix} ۲ \\ -۱ \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} ۱ \\ -۲ \end{pmatrix}$$

بنابراین $\mathbf{AS} = \mathbf{SD}$، که

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ -۲ & -۱ \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

داریم $\mathbf{A} = \mathbf{SDS}^{-۱}$، پس

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{S}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{S}^{-۱}$$

که

$$e^{\mathbf{D}t} = \begin{pmatrix} e^{-۲t} & ۰ \\ ۰ & e^t \end{pmatrix}$$

یک جواب $\mathbf{y}$ از معادلهٔ دیفرانسیل که در شرط اولیهٔ $\mathbf{y}(۰) = \mathbf{y}_۰$ صدق می‌کند، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{S}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{S}^{-۱}\mathbf{y}_۰$$

مثال ب. $e^{\mathbf{A}t}$ را در حالتی که $\mathbf{A}$ ماتریس زیر است محاسبه کنید

$$\begin{pmatrix} -۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$$

در این حالت $\mathbf{A}$ قطری شدنی نیست (چرا؟). مطابق تجزیهٔ ژوردان [قضیهٔ (۹.۲۴)] ماتریس $\mathbf{A}$ به‌صورت زیر در می‌آید

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{N}$$

که

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

از آنجا که $\mathbf{ND} = \mathbf{DN}$، داریم

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{D}t} e^{\mathbf{N}t}$$

که

$$e^{\mathbf{N}t} = \begin{pmatrix} ۱ & t \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad e^{\mathbf{D}t} = \begin{pmatrix} e^{-t} & ۰ \\ ۰ & e^{-t} \end{pmatrix}$$

تمرینها

۱.فرض کنید

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

نشان دهید که $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. $e^{\mathbf{A}}$، $e^{\mathbf{B}}$، $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$ را محاسبه کنید و نشان دهید که $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} \neq e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}}$. بنابراین (۶.۳۴) بدون فرضهایی نظیر $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ برقرار نیست.

۲.نشان دهید که $D(e^{\mathbf{A}}) = e^{\Sigma \alpha i}$، که $\{\alpha_i\}$ ویژه مقدارهای $\mathbf{A}$ هستند [راهنمایی: از قضیهٔ صورت مثلثی (۱.۲۴) همراه با (۸.۳۴) استفاده کنید].

۳.نشان دهید که $e^{\mathbf{A}}$ همواره معکوس‌پذیر است و برای هر $\mathbf{A} \in M_n(C)$ تساوی $(e^{\mathbf{A}})^{-۱} = e^{-\mathbf{A}}$ برقرار است.

۴.فرض کنید $\mathbf{y}(t)$ جوابی برای معادلهٔ دیفرانسیل $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{Ay}$ باشد به‌طوری‌که $\mathbf{y}(۰) = \mathbf{y}_۰$. ثابت کنید که

$$\frac{d}{dt}(e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{y}) = ۰$$

و بنابراین $\mathbf{y} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}_۰$. پس جواب معادلهٔ دیفرانسیل $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{Ay}$ که در شرط اولیهٔ داده شده صدق کند به‌طوریکتا مشخص می‌شود.

۵.ثابت کنید که ${}^t(e^{\mathbf{A}}) = e^{{}^t\mathbf{A}}$، که ${}^t\mathbf{A}$ ترانهادهٔ $\mathbf{A}$ است.

۶.ماتریس $\mathbf{A}$ را پاد متقارن گویند اگر ${}^t\mathbf{A} = -\mathbf{A}$، برای مثال ماتریس

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

پادمتقارن است. نشان دهید اگر $\mathbf{A}$ یک‌ماتریس پادمتقارن باشد، آنگاه $e^{\mathbf{A}}$ ماتریسی است متعامد با دترمینانِ ۱+.

۷. با استفاده از روشهای این بخش اثبات کنید که معادلهٔ دیفرانسیل (مذکور در بخش ۱)

$$\frac{d^{2}y}{dt^{2}} + m^{2}y = 0, \qquad m \text{ یک ثابت مثبت}$$

جواب یکتایی به شکل $A\sin mt + B\cos mt$ دارد به‌طوری‌که $y(0) = 0$ و $y'(0) = 1$.

۸. دستگاه زیر را حل کنید

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -y_1 + y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -y_1 - 3y_2 \end{cases} \qquad y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$$

۹. $e^{\mathbf{A}t}$ را درحالتی‌که $\mathbf{A}$ هر یک از ماتریسهای زیر باشد محاسبه کنید

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

۱۰. فرض کنید $\mathbf{A}$ ماتریس ضرایب معادلهٔ دیفرانسیل برداری هم‌ارز با

$$\alpha_0 \frac{d^{n}y}{dt^{n}} + \alpha_1 \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + \alpha_n y = 0$$

باشد. ثابت کنید که چندجمله‌یی مشخصهٔ $\mathbf{A}$ به‌صورت زیر است

$$\alpha_0 x^{n} + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_n$$

۱۱. (اختیاری) مشتقگیری زیر از یک جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل برداری «غیر همگن» را تحقیق کنید

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{f}(t)$$

که $\mathbf{f}(t)$ تابع برداری پیوستهٔ مفروضی است از t. سعی کنید یک جواب به شکل $\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c}(t)$ پیدا کنید، که $\mathbf{c}(t)$ یک تابع برداری است که باید مشخص شود. مشتق بگیرید تا به‌دست آورید

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c}(t) + e^{\mathbf{A}t}\frac{d\mathbf{c}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{f}(t)$$

از آنجا که $\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c}(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}$، به‌دست می‌آوریم [از آنجا که $(e^{\mathbf{A}t})^{-1} = e^{-\mathbf{A}t}$]

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{f}(t)$$

پس $\mathbf{c}(t)$ یک انتگرال نامعین از $e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{f}(t)$ است و می‌توان آن را به‌صورت زیر بیان کرد

$$\mathbf{c}(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{f}(s)ds$$

پس $\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}t}\int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{f}(s)ds = \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{f}(s)ds$. سرانجام تحقیق کنید که $\mathbf{y}(t)$ یک جواب این معادلهٔ دیفرانسیل است.

۳۵. مجموع مربعات و قضیهٔ هورویتس

در بخش ۲۱ هیأت اعداد مختلط را با تعریف ضرب در R_2 بنا کردیم. دقیقتر بگوییم وقتی $z_1 =< \alpha, \beta >$ و $z_2 =< \gamma, \delta >$ در R_2، داده شده بود تعریف کردیم

$$z_1z_2 =< \alpha\gamma - \beta\delta, \alpha\delta + \beta\gamma >$$

و ثابت کردیم که این عمل همراه با جمع‌برداری، در اصل موضوعهای یک هیأت صدق می‌کند. همچنین نشان دادیم که عمل ضرب رابطهٔ جالب زیر را با طول بردارها در R_2 دارد:

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2| \qquad (۱.۳۵)$$

برای همهٔ z_1ها و z_2ها در R_2، که $|z_1| = (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}$، وقس علی‌هذا ...

اعداد مختلط در بسیاری از بخشهای ریاضیات (از جمله جبر خطی!) چنان مفیدند، که طبیعی است سؤال شود که آیا انواع دیگر «اعداد مختلط»، هم وجود دارند که از ضرب بردارها در R_3، R_4، ... به‌دست آمده باشند و بتوانند بامشابه‌های خود در R_2 ارزش مساوی داشته باشند؟ ما در این بخش یکی از مراحل مهّم در جهت جستجوی پاسخ رضایتبخش به این سؤال اساسی را بررسی خواهیم کرد.

اجازه بدهید کار خود را با بررسی نزدیکتر برخی ویژگیهای ضرب در R_2، که در بالا تعریف کردیم، شروع کنیم: اول از همه، این ضرب دوخطی است، بدین معنی که نگاشت

$$(z_1, z_2) \to z_1z_2$$

نگاشتی است دوخطی در $R_2 \times R_2 \to R_2$. اثبات این حقیقت که بلافاصله از تعریف حاصل می‌شود به عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود. ثانیاً، قانون جالب (۱.۳۵) نیز وجود دارد. البته ویژگیهای

دیگر هم وجود دارند، اما این دو به نحو شگفت‌انگیزی توانا هستند. برای مثال، تنها با استفاده از دوخطی‌بودن ضرب و (۱.۳۵)، ثابت خواهیم کرد که اگر $z \neq \circ$، آنگاه معادلهٔ $zx = z'$ برای هر z' در $R_۲$ یک جواب دارد. این مطلب هم‌ارز با این حکم است که ضرب از چپ L_z، که با $L_z(u) = zu$ تعریف می‌شود، برای $u \in R_۲$، $R_۲$ را برروی خودش می‌نگارد. دوخطی‌بودن ضرب مستلزم تبدیل خطّی‌بودن L_z در $R_۲$ است. همانی (۱.۳۵) ایجاب می‌کند که صفر-فضای L_z، اگر $z \neq \circ$، $\{\circ\}$ باشد، پس در نتیجه، برد L_z، همان‌طور که می‌خواستیم، تمامی $R_۲$ است.

مسأله‌ای را که در این بخش بررسی می‌کنیم، مسألهٔ زیر است. ما از نماد $|x|$ برای طول یک بردار مفروض $x = <x_۱, \ldots, x_n>$ در R_n، $(x_۱^۲ + \cdots + x_n^۲)^{\frac{۱}{۲}}$، استفاده می‌کنیم:

مسأله I. برای چه مقادیر n یک نگاشت دوخطی $(x, y) \to x * y$ از $R_n \times R_n \to R_n$ وجود دارد که تساوی

$$|x * y| = |x||y|$$

برای همهٔ x و yها در R_n برقرار باشد؟

برهان مذکور در بالا، در حالت $R_۲$، نشان می‌دهد که اگر مسألهٔ I برای یک عدد صحیح n جواب داشته باشد، آنگاه $z * x = z'$ و $x * z = z'$، برای $z \neq \circ$، برای هر z' در R_n، جواب دارد. پس R_n، بر اثر جمع برداری و عمل ضرب $*$، در تمامی ویژگیهای یک هیأت، بجز احتمالاً در قوانین تعویض‌پذیری و شرکتپذیری و وجود عضو همانی برای ضرب، صدق خواهد کرد.

اولین کار ما بیان این مسألهٔ I به‌شکلی است آسانتر که بتوان با آن کار کرد. فرض کنید مسألهٔ I جوابی برای مقداری از n داشته باشد و $e_۱, \cdots, e_n$ پایه‌ای یکا قائم برای R_n باشد. پس عددهای $\{\gamma_{pq}^{(i)}\}$ وجود دارند، که به‌طور یکتا توسط ضرب $*$ تعریف می‌شوند، و در تساوی

$$e_p * e_q = \sum_{i=۱}^{n} \gamma_{pq}^{(i)} e_i$$

برای $۱ \leq p, q \leq n$، صدق می‌کنند. ضرب بردارهای دلخواه را حالا می‌توان برحسب عددهای $\{\gamma_{pq}^{(i)}\}$، به‌شرح زیر، محاسبه کرد. فرض کنید $x = \sum x_p e_p$ و $y = \sum y_q e_q$ بردارهایی در R_n باشند، که به‌صورت ترکیبهای خطی از بردارهای پایه بیان می‌شوند. لذا دوخطی‌بودن نگاشت ایجاب می‌کند که:

$$\begin{aligned} x * y &= (\sum x_p e_p) * (\sum y_q e_q) = \sum_{p=۱}^{n}\sum_{q=۱}^{n} x_p y_q (e_p * e_q) \\ &= \sum_{p=۱}^{n}\sum_{q=۱}^{n}\sum_{i=۱}^{n} x_p y_q \gamma_{pq}^{(i)} e_i \\ &= \sum z_i e_i \end{aligned}$$

که

$$z_i = \sum_{p,q=1}^{n} \gamma_{pq}^{(i)} x_p y_q$$

از آنجا که، $|x|$، $|y|$ و $|x * y|$ جذرهای مجموع مربعات مؤلفه‌هایشان هستند، مسألهٔ I را حالا می‌توان به‌صورت زیر دوباره بیان کرد

مسألهٔ II. برای چه مقادیری از n، یک همانی به‌صورت

$$(x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2) = (z_1^2 + \cdots + z_n^2)$$

وجود دارد که برای هر انتخابی از اعداد حقیقی $\{x_i\}$ و $\{y_i\}$ برقرار باشد، به‌طوری‌که

$$z_i = \sum_{p,q=1}^{n} \gamma_{pq}^{(i)} x_p y_q$$

و ماتریسهای $\mathbf{C}^{(i)} = (\gamma_{pq}^{(i)})$، $1 \leq i \leq n$، ماتریسهایی ثابت (مستقل از x و y) با درایه‌های حقیقی باشند؟

مثال الف. در همانی برای مجموع دومربع، داریم:

$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = (x_1 y_1 - x_2 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2$$

پس

$$z_1 = 1x_1y_1 + 0x_1y_2 + 0x_2y_1 - 1x_2y_2$$

و

$$z_2 = 0x_1y_1 + 1x_1y_2 + 1x_2y_1 + 0x_2y_2$$

ماتریسهای $\mathbf{C}_1$ و $\mathbf{C}_2$ در این حالت عبارت‌اند از

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

اولین موفقیت در مسألهٔ II را اویلر به‌دست آورد. او نشان داد که مسأله هنگامی‌که $n = 4$، جواب دارد، یعنی

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)\,(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 \quad (2.35)$$

که

$$z_۱ = x_۱y_۱ - x_۲y_۲ - x_۳y_۳ - x_۴y_۴$$
$$z_۲ = x_۱y_۲ + x_۲y_۱ + x_۳y_۴ - x_۴y_۳$$
$$z_۳ = x_۱y_۳ - x_۲y_۴ + x_۳y_۱ + x_۴y_۲$$
$$z_۴ = x_۱y_۴ + x_۲y_۳ - x_۳y_۲ + x_۴y_۱$$

ماتریسها در این حالت عبارت‌اند از

$$\mathbf{C}_۱ = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_۲ = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_۳ = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_۴ = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

خوانندهٔ شکاک می‌تواند، اگر بخواهد، درستی تساوی (۲.۳۵) را امتحان کند.

اتحاد (۲.۳۵) را اویلر برای اثبات قضیهٔ لاگرانژ که، هر عدد صحیح مثبت مجموع مربعات ۴ عدد صحیح است، به‌کار برد. اتحاد (۲.۳۵) نشان می‌دهد که کافی است ثابت کنیم هر عدد اول مجموع ۴ مربع است، زیرا که هر عدد صحیح مثبت حاصلضرب چند عدد اول است.

اتحاد (۲.۳۵) در سدهٔ نوزدهم توسط همیلتن، از راه حاصلضرب کواترنیونهایی که کشف کرده بود، مجدداً کشف شد. یک جواب مسأله برای $n = ۸$ را آرثر کیلی در ۱۸۴۵ به‌دست آورد. این مسأله همین‌طور ماند تا اینکه در ۱۸۹۸ هورویتس قضیهٔ زیر را اثبات کرد

(۳.۳۵) قضیه. (هورویتس، ۱۸۹۸). مسائل هم‌ارز I و II دربارهٔ ترکیب مجموع مربعات فقط وقتی می‌تواند جواب داشته باشد که $n = ۱, ۲, ۴, ۸$.

برهانی که در اینجا می‌آوریم تقریباً از روی برهان اولیهٔ هورویتس با بعضی اصلاحاتی که توسط دیکسن انجام گرفته، برداشته شده است. بحث تاریخی مفصلتر و برهان متفاوت دیگر، توسط کرتیس در اولین کتاب مندرج در کتابنامه ارائه‌شده است.

تا قبل از ارائهٔ برهان هورویتس، به‌بعضی حقایق اولیه درمورد ماتریسهای متقارن و پادمتقارن احتیاج داریم.

(۴.۳۵) تعریف. ماتریس $\mathbf{A}$ی n در n با درایه‌های حقیقی را متقارن می‌نامیم اگر $\mathbf{A} = {}^t\mathbf{A}$ و، پادمتقارن اگر $-\mathbf{A} = {}^t\mathbf{A}$، که ${}^t\mathbf{A}$ معرّف ترانهادهٔ $\mathbf{A}$ است.

(۵.۳۵) لم. الف) هر ماتریس $\mathbf{A}$ی n در n را می‌توان به‌صورت

$$\mathbf{A} = \frac{۱}{۲}(\mathbf{A} + {}^t\mathbf{A}) + \frac{۱}{۲}(\mathbf{A} - {}^t\mathbf{A})$$

یعنی به‌صورت مجموع یک ماتریس متقارن $\frac{۱}{۲}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^t)$ و یک ماتریس پادمتقارن $\frac{۱}{۲}(\mathbf{A} - {}^t\mathbf{A})$. بیان کرد. بعلاوه، اگر $\mathbf{A} = \mathbf{S}_۱ + \mathbf{S}_۲$، و $\mathbf{S}_۱$ ماتریس متقارن و $\mathbf{S}_۲$ ماتریس پادمتقارن باشد، آنگاه $\mathbf{S}_۱ = \frac{۱}{۲}(\mathbf{A} + {}^t\mathbf{A})$ و $\mathbf{S}_۲ = \frac{۱}{۲}(\mathbf{A} - {}^t\mathbf{A})$.

ب) فرض کنید $\mathbf{S}$ ماتریس معکوس‌پذیر $n \times n$ پادمتقارنی باشد. در این صورت n زوج است، $n = ۲m$، برای هر m.

برهان. ابتدا متقارن بودن $\frac{۱}{۲}(\mathbf{A} + {}^t\mathbf{A})$ و پادمتقارن بودن $\frac{۱}{۲}(\mathbf{A} - {}^t\mathbf{A})$ را بررسی می‌کنیم. داریم

$${}^t[\frac{۱}{۲}(\mathbf{A} + {}^t\mathbf{A})] = \frac{۱}{۲}({}^t\mathbf{A} + {}^{tt}\mathbf{A}) = \frac{۱}{۲}(\mathbf{A} + {}^t\mathbf{A})$$

و

$${}^t[\frac{۱}{۲}(\mathbf{A} - {}^t\mathbf{A})] = \frac{۱}{۲}({}^t\mathbf{A} - {}^{tt}\mathbf{A}) = -\frac{۱}{۲}(\mathbf{A} - {}^t\mathbf{A})$$

همان‌طور که می‌خواستیم. این حقیقت که $\mathbf{A}$ مجموع دو ماتریس مورد بحث است، واضح است. حالا فرض کنید

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}_۱ + \mathbf{S}_۲ = \mathbf{T}_۱ + \mathbf{T}_۲$$

که $\mathbf{S}_۱$ و $\mathbf{T}_۱$ متقارن هستند و $\mathbf{S}_۲$ و $\mathbf{T}_۲$ پادمتقارن. پس

$$\mathbf{S}_۱ - \mathbf{T}_۱ = \mathbf{T}_۲ - \mathbf{S}_۲$$

که هم متقارن است و هم پاد متقارن، و فقط چنین ماتریسی، ماتریس صفر است. پس برهان قسمت (الف) کامل شد.

برای برهان (ب) طبق فصل ۵، داریم.

$$\mathbf{D}(\mathbf{S}) = \mathbf{D}({}^t\mathbf{S}) = \mathbf{D}(-\mathbf{S}) = (-۱)^n\mathbf{D}(\mathbf{S})$$

از آنجا که طبق فرض $\mathbf{D}(\mathbf{S}) \neq ۰$، داریم

$$(-۱)^n = ۱$$

و n زوج است.

برهان قضیهٔ (۳.۳۵). ما از فرض مسأله این نتیجه را می‌گیریم که یک همانی نظیر مسألهٔ II برای جمیع مقادیر x و y برقرار است. می‌توانیم فرض کنیم که $n > 1$.

ابتدا برای مجموعه‌ای از xهای داده شده قرار می‌دهیم:

$$\alpha_{ij} = \sum_{p=1}^{n} \gamma_{pj}^{(i)} x_p \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

پس معادلهٔ $\sum z_i^2 = (\sum x_i^2)(\sum y_i^2)$، که

$$z_i = \sum_{p,q=1}^{n} \gamma_{pq}^{(i)} x_p y_q$$

به‌صورت زیر در می‌آید

$$(x_1^2+\ldots+x_n^2)\,(y_1^2+\ldots+y_n^2) = (\sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} y_j)^2 + \ldots + (\sum_{j=1}^{n} \alpha_{nj} y_j)^2 \quad \text{(۶.۳۵)}$$

برای مجموعهٔ ثابتی از xها این همانی برای هر y برقرار است. بنابراین می‌توانیم هر y_j را برابر یک قرار دهیم و بقیه را برابر صفر، تا معادله‌های زیر حاصل شوند

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \cdots + \alpha_{n1}^2$$

....

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \alpha_{1n}^2 + \alpha_{2n}^2 + \cdots + \alpha_{nn}^2$$

از حذف جمله‌های شامل y_i^2 از دو طرف معادلهٔ (۶.۳۵)، خواهیم داشت

$$0 = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (\alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj}) y_i y_j$$

حال قرار می‌دهیم $y_i = y_j = 1$، و بقیّهٔ yها را صفر می‌گیریم تا به‌دست آوریم:

$$0 = 2(\alpha_{1i}\alpha_{1j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj})$$

برای $1 \leq i, j \leq n$: معادله‌های به‌دست آمده را می‌توان به‌شکل فشرده‌تری نوشت:

$$^{t}\mathbf{A}(\mathbf{A}) = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)\mathbf{I} \qquad \text{(۷.۳۵)}$$

که $\mathbf{A}$ ماتریس (α_{ij})ی n در n است.

حالا از این حقیقت که (۷.۳۵) یک همانی برحسب xهاست، استفاده می‌کنیم. طبق تعریف ماتریس ضرایب $\{\alpha_{ij}\}$، می‌توانیم بنویسیم:

$$\mathbf{A} = x_۱\mathbf{A}_۱ + x_۲\mathbf{A}_۲ + \cdots + x_n\mathbf{A}_n$$

که $\mathbf{A}_۱$، $\mathbf{A}_۲$، ...، $\mathbf{A}_n$ ماتریسهای ثابتی و مستقل از x و y هستند.

مثلاً برای درک چگونگی کار این فرایند، برای $n = ۲$ داریم

$$\begin{pmatrix} ۳x_۱ + ۲x_۲ & x_۱ \\ ۰ & -x_۱ + x_۲ \end{pmatrix} = x_۱ \begin{pmatrix} ۳ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix} + x_۲ \begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

از گذاردن عبارت حاصل برای $\mathbf{A}$ در فرمول (۷.۳۵) داریم

$$(x_۱{}^t\mathbf{A}_۱ + \cdots + x_n{}^t\mathbf{A}_n)\,(x_۱\mathbf{A}_۱ + \cdots + x_n\mathbf{A}_n) = (\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲)\mathbf{I} \quad (۸.۳۵)$$

از مقایسه ضرایب $x_i^۲$ در دو طرف (همان کاری را که برای yها انجام دادیم)، به‌دست می‌آوریم

$${}^t\mathbf{A}_i\mathbf{A}_i = \mathbf{I} \qquad\qquad ۱ \leq i \leq n$$

و بنابراین $(\mathbf{A}_i)({}^t\mathbf{A}_i) = \mathbf{I}$، $۱ \leq i \leq n$.

حالا $\mathbf{B}_i$ را به‌صورت $\mathbf{B}_i = {}^t\mathbf{A}_n\mathbf{A}_۱$، $i = ۱, ۲, \ldots, n-۱$، تعریف می‌کنیم. پس (۸.۳۵) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$(x_۱{}^t\mathbf{A}_۱ + \cdots + x_n{}^t\mathbf{A}_n)(\mathbf{A}_n{}^t\mathbf{A}_n)(x_۱\mathbf{A}_۱ + \cdots + x_n\mathbf{A}_n) = (\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲)\mathbf{I}$$

و بنابراین با استفاده از این حقیقت که ${}^t\mathbf{A}_i\mathbf{A}_n = {}^t\mathbf{B}_i$ داریم

$$(x_۱{}^t\mathbf{B}_۱ + \cdots + x_{n-۱}{}^t\mathbf{B}_{n-۱} + x_n\mathbf{I})(x_۱\mathbf{B}_۱ + \cdots + x_{n-۱}\mathbf{B}_{n-۱} + x_n\mathbf{I})$$
$$= (\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲)\mathbf{I} \quad (۹.۳۵)$$

اکنون می‌توانیم از مقایسهٔ ضرایب $x_i^۲$ در دو طرف (۹.۳۵) به‌دست آوریم:

$${}^t\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i = \mathbf{I}, \qquad\qquad ۱ \leq i \leq n-۱$$

با حذف این جمله‌ها و قرار دادن $x_i = x_j = ۱$ برای $i \neq j$، و صفر قراردادن بقیه xها، داریم:

$$ {}^t\mathbf{B}_i + \mathbf{B}_i = ۰, \qquad ۱ \leq i \leq n - ۱ $$

و

$$ {}^t\mathbf{B}_i\mathbf{B}_j + {}^t\mathbf{B}_j\mathbf{B}_i = ۰, \quad ۱ \leq i,j \leq n-۱, i \neq j $$

در اینجا نشان داده‌ایم که اگر مسألهٔ ترکیب مجموع مربعات برای یک n مفروض جواب داشته باشد، آنگاه $n - ۱$ ماتریس پادمتقارن $\mathbf{B}_۱$، ...، $\mathbf{B}_{n-۱}$ وجود دارند که در معادلات زیر صدق می‌کنند:

$$ \mathbf{B}_i^۲ = -\mathbf{I}, \quad \mathbf{B}_i\mathbf{B}_j = -\mathbf{B}_j\mathbf{B}_i \qquad (۱۰.۳۵) $$

برای هر i و j، با $i \neq j$.

حالا ثابت خواهیم کرد که این مجموعه از ماتریسها فقط برای ۸ یا $n = ۲, ۴$ می‌توانند وجود داشته باشند.

اول از همه، معادلهٔ (۱۰.۳۵) نشان می‌دهد که ماتریسهای $\mathbf{B}_i$ پادمتقارن معکوس‌پذیرند، و در نتیجه طبق لم (۵.۳۵) n زوج است. اشاره کنیم که حالا نشان داده‌ایم که مسأله در اوّلین حالت حل نشدهٔ $n = ۳$، جواب ندارد.

حالا فرض می‌کنیم n زوج است و مجموعهٔ تمام حاصلضربهای:

$$ \{\mathbf{B}_{i_۱}\mathbf{B}_{i_۲}\ldots\mathbf{B}_{i_r},\ ۱ \leq i_۱,\ldots,i_r \leq n-۱,\ r \geq ۱\} $$

را که می‌تواند از $\mathbf{B}_i$ها تشکیل یابد، درنظر می‌گیریم. اشاره کنیم که در چنین حاصلضربی، اگر $\mathbf{B}_۱$ پیدا شود آن را می‌توان طبق (۱۰.۳۵) به پشت $\mathbf{B}_i$ها تا به اولین مکان برد، در غیر این صورت حاصلضرب بجز، علامت $\pm$ در جلو آن تغییر نمی‌کند. با ادامهٔ این روش برای دیگر موارد $\mathbf{B}_۱$ و سپس $\mathbf{B}_۲$، و غیره می‌توانیم حاصلضرب دلخواهی از $\mathbf{B}$ها را به شکل زیر بنویسیم

$$ \pm\mathbf{B}_۱^{p_۱}\ldots\mathbf{B}_{n-۱}^{p_{n-۱}}, \qquad p_j \geq ۰ $$

سرانجام، چون $\mathbf{B}_i^۲ = -\mathbf{I}$، $۱ \leq i \leq n$، چنین حاصلضربی را می‌توان به‌شکل زیر نوشت

$$ \pm\mathbf{B}_۱^{e_۱}\cdots\mathbf{B}_{n-۱}^{e_{n-۱}}, \quad e_i = ۰ \text{ یا } ۱ $$

$۲^{n-۱}$ حاصلضرب ممکن وجود دارند. حالا بستگی خطی این حاصلضربها را تحقیق می‌کنیم.

(۱۱.۳۵) لم. حداقل نیمی از $(۲^{n-۲})$ ماتریسهای $\{\mathbf{B}_۱^{e_۱}\cdots\mathbf{B}_{n-۱}^{e_{n-۱}} | e_i = ۰ \text{ یا } ۱\}$ نابسته خطی هستند.

برهان. ابتدا باید تشخیص دهیم که کدامیک از ماتریسها متقارن است و کدامیک پادمتقارن. فرض کنید

$$\mathbf{M}=\mathbf{B}_{i_1}\mathbf{B}_{i_2}\cdots\mathbf{B}_{i_r},\qquad r\leq n-1,\qquad i_1<i_2<\cdots<i_r \tag{۱۲.۳۵}$$

پس، بااستفاده از (۱۰.۳۵)، داریم:

$$\begin{aligned}{}^t\mathbf{M} &={}^t(\mathbf{B}_{i_1}\cdots\mathbf{B}_{i_r})={}^t\mathbf{B}_{i_r}\cdots{}^t\mathbf{B}_{i_1}\\ &=(-1)^r\mathbf{B}_{i_r}\cdots\mathbf{B}_{i_1}\\ &=(-1)^{r+(r-1)}\mathbf{B}_{i_1}\mathbf{B}_{i_r}\cdots\mathbf{B}_{i_2}\\ &=(-1)^{r+(r-1)+(r-2)}\mathbf{B}_{i_1}\mathbf{B}_{i_2}\mathbf{B}_{i_r}\cdots\mathbf{B}_{i_3}\\ &=(-1)^{r+(r-1)+\cdots+1}\mathbf{B}_{i_1}\mathbf{B}_{i_2}\cdots\mathbf{B}_{i_r}\\ &=(-1)^{r(r+1)/2}\mathbf{B}_{i_1}\cdots\mathbf{B}_{i_r}=(-1)^{r(r+1)/2}\mathbf{M}\end{aligned}$$

بنابراین $\mathbf{M}$ متقارن است اگر و فقط اگر $\frac{1}{2}r(r+1)$ زوج باشد، یا $r(r+1)$ بر ۴ بخشپذیر باشد. این حالت هنگامی اتفاق می‌افتد که یا r و یا $r+1$ بر ۴ بخشپذیر باشند.

فرض کنید رابطهٔ بستگی خطی

$$\alpha_1\mathbf{M}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{M}_k=0 \tag{۱۳.۳۵}$$

را بین ماتریسهای به‌شکل (۱۲.۳۵) داریم، که فرض می‌کنیم همهٔ $\alpha_i\neq 0$. چنین رابطه‌ای را رابطهٔ تحویلناپذیر بستگی خطی می‌نامند اگر همهٔ زیرمجموعه‌های سره $\{\mathbf{M}_1,\cdots,\mathbf{M}_k\}$ نابسته خطی باشند. به‌دلیل قسمت اول لِم (۵.۳۵)، نتیجه می‌گیریم که در یک رابطهٔ تحویلناپذیر بستگی خطی همهٔ ماتریسها یا متقارن و یا همگی پادمتقارن هستند.

حالا فرض کنید (۱۳.۳۵) یک رابطهٔ تحویلناپذیر بستگی خطی باشد. از ضرب در $\alpha_1^{-1}\mathbf{M}_1^{-1}$، می‌توانیم فرض کنیم که رابطه شکل زیر را دارد:

$$\mathbf{I}=\beta_1\mathbf{M}_1+\cdots+\beta_{k-1}\mathbf{M}_{k-1} \tag{۱۴.۳۵}$$

که تمام ماتریسهای $\mathbf{M}_i$ متقارن هستند. فرض کنید، $\mathbf{M}_1$ کوچکترین عدّهٔ عاملها، r، را داشته باشد، و $r<n-1$. اگر r بر ۴ بخشپذیر باشد، و

$$\mathbf{M}_1=\mathbf{B}_i\cdots\mathbf{B}_{ir} \tag{۱۵.۳۵}$$

آنگاه می‌توانیم، با انتخاب $j\neq i_1,\cdots,i_r$ و ضرب در $\mathbf{B}_j$، به‌دست آوریم:

$$\mathbf{B}_j=\beta_1\mathbf{M}_1\mathbf{B}_j+\cdots+\beta_{k-1}\mathbf{M}_{k-1}\mathbf{B}_j$$

که $\mathbf{B}_j$ پادمتقارن و $\mathbf{M}_1\mathbf{B}_j$ متقارن است، که با فرضی که در شروع برای یک رابطهٔ تحویلناپذیر کردیم متناقض است. به‌عبارت دیگر، اگر $r+1$ بر ۴ تقسیم‌پذیر باشد، آنگاه طرفین را می‌توان در $\mathbf{B}_{i_1}$ ضرب کرد، به‌طوری که دوباره $\mathbf{B}_{i_1}\mathbf{M}_1$ متقارن شود، در حالی‌که $\mathbf{B}_{i_1}$ پادمتقارن است، و دوباره با فرضی که در مورد یک رابطهٔ تحویلناپذیر بستگی خطی کردیم متناقض می‌شود. پس تنها رابطهٔ تحویلناپذیر ممکن شکل (۱۴.۳۵) به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{I} = a\mathbf{B}_1 \cdots \mathbf{B}_{n-1}$$

برهان فوق نشان می‌دهد که n بایستی بر ۴ بخشپذیر باشد.

بنابراین تمام ماتریسهای $\mathbf{M}$ در (۱۲.۳۵) نابسته خطی هستند اگر n زوج باشد ولی بخشپذیر بر ۴ نباشد. حالا فرض کنید n بر ۴ بخشپذیر باشد. می‌گوییم که مجموعهٔ تمام حاصلضربها از حداکثر $\frac{1}{2}(n-2)$ عامل نابسته خطی هستند. تعداد این‌گونه ماتریسها، طبق قضیهٔ دوجمله‌یی به‌قرار زیر است:

$$1 + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \cdots + \binom{n-1}{\frac{1}{2}(n-2)} = \frac{1}{2}2^{n-1} = 2^{n-2}$$

دلیل نابستگی خطی بودن این است که اگر یک رابطهٔ تحویلناپذیرِ بستگی خطی در میان آنها وجود داشته باشد، آنگاه از ضرب در حاصلضرب حداقل $\frac{1}{2}(n-2)$ عامل، می‌توان یک جمله را برابر $\mathbf{I}$ کرد، اما به‌دست‌آوردن $\mathbf{B}_1\cdots\mathbf{B}_{n-1}$ برای جملهٔ دیگر غیرممکن است. پس برهان لِم کامل می‌شود.

حال به اثبات قضیه برمی‌گردیم، ما مجموعه‌ای از 2^{n-2} ماتریس n در n نابسته خطی ساخته‌ایم و در نتیجه نامساوی زیر را داریم

$$2^{n-2} \le n^2$$

که برای $n=10$ غلط است (و برای $n=2,4,6,8$ صحیح است). از آنجا که $2^{n-2} > n^2$ ایجاب می‌کند که

$$2^{n+1-2} = 2\cdot 2^{n-2} > 2n^2 > (n+1)^2$$

اگر $n>3$، تنها مقادیر ممکن برای n، اعداد ۲، ۴، ۶ یا ۸ هستند.

بالاخره حالت خاص $n=6$ را در نظر می‌گیریم. در این حالت همهٔ $32 = 2^5$ ماتریس $\mathbf{M}$ در (۱۲.۳۵) نابسته خطی هستند. در میان اینها تعداد

$$\binom{5}{1} + \binom{5}{2} + 1 = 16$$

ماتریس پادمتقارن وجود دارد.

اما ما می‌توانیم مستقیماً ثابت کنیم (← تمرین) که دقیقاً

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ = ۱۵$$

ماتریس پادمتقارن نابسته خطی در میان ماتریسهای ۶ در ۶ وجود دارد. بنابراین حالت $n = ۶$ غیرممکن است. بدین‌ترتیب اثبات قضیهٔ هورویتس کامل می‌شود.

تمرین: ثابت کنید که مجموعهٔ ماتریسهای متقارن در $M_n(R)$ زیرفضایی به بعد

$$۱ + ۲ + \cdots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

تشکیل می‌دهند و ماتریسهای پادمتقارن زیرفضایی به بعد

$$۱ + ۲ + \cdots + n - ۱ = \frac{n(n-۱)}{۲}$$

می‌سازند.

مراجع

Albert, A. A. (ed.), *Studies in Mathematics*, Vol. II: *Studies in Modern Algebra* (Buffalo: Mathematical Association of America, 1963).

Artin, E., *Geometric Algebra* (New York: Interscience, 1957).

Benson, C. T., and L. C. Grove, *Finite Reflection Groups* (Tarrytown-on Hudson, N.Y.: Bogden and Quigley, 1971).

Birkhoff, G., and S. MacLane, *Survey of Modern Algebra*, rev. ed. (New York: Macmillan, 1953).

Bourbaki, N., *Algèbre*, Chapitre 2, "Algèbre linéaire," 3rd ed. (Paris: Hermann, Actualités et Industrielles, no. 1144).

Boyce, W. E., and R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (New York: John Wiley, 1969).

Courant, R., and H. Robbins, *What is Mathematics*? (New York: Oxford University Press, 1941).

Gruenberg, K., and A. Weir, *Linear Geometry* (Princeton: Van Nostrand, 1967).

Halmos, P. R., *Finite Dimensional Vector Spaces*, 2nd ed. (Princeton: Van Nostrand, 1958).

Jacobson, N., *Lectures in Abstract Algebra*, Vol. II: *Linear Algebra* (Princeton: Van Nostrand, 1953).

Kaplansky, I., *Linear Algebra and Geometry* (Boston: Allyn and Bacon, 1969).

MacLane, S., and G. Birkhoff, *Algebra* (New York: Macmillan, 1967).

Noble, B., *Applied Linear Algebra* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1969).

Noble, B., *Applications of Undergraduate Mathematics in Engineering* (New York: The Mathematical Association of America and The Macmillan Company, 1967).

Polya, G., *How to Solve It* (Princeton: Princeton University Press, 1945).

Schreier, O., and E. Sperner, *Modern Algebra and Matrix Theory*, English translation (New York: Chelsea, 1952).

Smith, K. T., *Primer of Modern Analysis* (Tarrytown-on Hudson, N.Y.: Bogden & Quigley, 1971).

Synge, J. L., and B. A. Griffith, *Principles of Mechanics* (New York: McGraw-Hill, 1949).

Van der Waerden, B. L., *Modern Algebra*, Vols. I and II, English translation (New York: Ungar, 1949 and 1950).

Weyl, H., *Symmetry* (Princeton: Princeton University Press, 1952).

جوابهای تمرینهای انتخابی

برای مسائل عددی که نیاز به یک بررسی ساده بوده است، هیچگونه پاسخی داده نشده است. در مسائل نظری، توضیحات یا راهنمائیهایی برای یک روش حل داده شده، ولی تمام جزئیات ذکر نشده است. البته معمولاً طرق صحیح زیادی برای حل یک مسأله خاص وجود دارد، و یک راه‌حلّ صحیح ممکن است همیشه با یکی از راه‌حلهای داده‌شده در زیر موافق نباشد.

بخش ۲

۱. الف) حکم برای $k = ۱$ برقرار است. فرض کنید برای $k \geq ۱$ برقرار باشد. پس

$$
\begin{aligned}
۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲k - ۱) + [۲(k + ۱) - ۱] \\
= k^۲ + ۲(k + ۱) - ۱ = (k + ۱)^۲
\end{aligned}
$$

۲. الف) $u = \alpha/\beta$ و $v = \gamma/\delta$ به‌ترتیب جوابهای معادله‌های $\beta u = \alpha$ و $\delta v = \gamma$ هستند. این معادله‌ها را در δ و β ضرب و باهم جمع کنید. تا به‌دست آورید $\beta\delta(u + v) = \alpha\delta + \beta\gamma$.

۳. فرض کنید برای مقداری از n،

$$(\alpha + \beta)^n = \binom{n}{۰}\alpha^n + \binom{n}{۱}\alpha^{n-۱}\beta + \cdots + \binom{n}{n}\beta^n$$

پس

$$
\begin{aligned}
(\alpha + \beta)^{n+۱} = (\alpha + \beta)^n(\alpha + \beta) = \binom{n}{۰}\alpha^{n+۱} + \binom{n}{۱}\alpha^n\beta + \cdots \\
+ \binom{n}{n}\alpha\beta^n + \binom{n}{۰}\alpha^n\beta + \cdots + \binom{n}{n}\beta^{n+۱}
\end{aligned}
$$

جمله‌ها را با هم جمع و از تعریف $\binom{n+۱}{k}$ استفاده کنید تا اثبات کامل شود.

بخش ۳

۱. الف) $<۱,۴,-۲>$

ب) $<-۲,۴,۲>+<-۲,-۱,۳>+<۰,۱,۰>=<-۴,۴,۵>$

ت) $<-\alpha+۲\beta, ۲\alpha+\beta+\gamma, \alpha-۳\beta>$

۲. جوابهای خود را با گذاشتن در معادلات امتحان کنید

۶. چون $\overrightarrow{AB}=B-A$، و $\overrightarrow{CD}=D-C$، پس $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ ایجاب می‌کند که $B-A=D-C$. بردار $X=C-A=D-B$ همان‌طورکه می‌خواهیم رفتار خواهد کرد. به‌عکس، اگر $C=A+X$، $D=B+X$، آنگاه $C-D=(A+X)-(B+X)=A-B$، که از آنجا نتیجه می‌شود $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ که از ضرب طرفین در -۱ حاصل شده است.

۷. الف) $<۱,\frac{۱}{۲}>$. ب) $<۲,\frac{۱}{۲}>$

۸. الف) و پ) رئوس متوازی‌الاضلاع هستند. ب) نیست

بخش ۴

۱. الف) زیرفضا نیست؛ ب) زیرفضاست؛ پ) زیرفضاست؛ ت) زیرفضا نیست؛ ث) زیرفضاست؛ ج) این مجموعه زیرفضاست اگر و فقط اگر $B=۰$؛ چ) زیرفضا نیست.

۳. الف) زیرفضاست؛ ب) زیرفضا نیست؛ پ) زیرفضاست؛ ت) زیرفضا نیست؛ ث) زیرفضاست؛ ج) زیرفضاست؛ چ) زیرفضاست؛ ح) این مجموعه زیرفضاست اگر و فقط اگر g تابع صفر باشد: به‌ازای جمع مقادیر x، $g(x)=۰$.

۴. الف) نابسته خطی؛ ب) وابسته خطی، $-۳<۱,۱>+<۲,۱>+<۱,۲>=۰$ پ) نابسته خطی؛ ت) وابسته خطی، $\beta<۰,۱>+\alpha<۱,۰>-<\alpha,\beta>=۰$؛ ث) وابسته خطی، $<۱,۱,۲>-'<۳,۱,۲>-۲<-۱,۰,۰>=۰$؛ ج) نابسته خطی؛ چ) وابسته خطی.

۵. $\{<۱,۱,۰>,<۰,۱,۱>\}$ یک جواب مسأله است.

۶. فرض کنید $f_۱,\cdots,f_n$ مجموعه‌ای متناهی از توابع چندجمله‌یی باشند. فرض کنید x^n بزرگترین توان x باشد که در هریک از چندجمله‌ییهای $\{f_i\}$ با ضریب غیرصفر ظاهر می‌شود. پس هر ترکیب خطی از $f_۱,\cdots,f_n$ شکل $\alpha_۰+\alpha_۱x+\cdots+\alpha_nx^n$ را دارد. اما قطعاً چندجمله‌ییهایی مانند $x^{n+۱}$ وجود دارند که نمی‌توانند به این شکل بیان شوند. برای اطمینان در این امر، ملاحظه می‌کنیم که با $n+۱$ بار مشتق گرفتن، تمام ترکیبات خطی $f_۱,\cdots,f_n$ صفر می‌شوند، در حالی‌که چندجمله‌ییهایی وجود دارند که $(n+۱)$امین مشتق آنها مخالف صفر است.

۷. بله. فرض کنید S و T زیرفضا باشند، و $a,b\in S\cap T$. پس $a+b\in S$ و $a+b\in T$ بنابراین $a+b\in S\cap T$. همچنین، اگر $a\in S\cap T$ و $\alpha\in F$ و $\alpha a\in S\cap T$.

۸. نه. برای مثال، در $R_۲$، فرض کنید $S = S(<۱,۰>)$، $T = S(<۰,۱>)$. پس $<۱,۱> = <۱,۰> + <۰,۱> \notin S \cup T$

بخش ۵

۱. فرض کنید برای مثال، $b_۱ = ۰$. پس $۱.b_۱ + ۰.b_۲ + \cdots + ۰.b_r = ۰$ و بردارهای $\{b_۱, \cdots, b_r\}$ نابسته خطی هستند.

۴. اگر df/dt متحد باصفر باشد، آنگاه f ثابت است. و $f = cf_۰$، که $f_۰$ تابعی در همه‌جا برابر ۱ است. بعد زیرفضای شامل همهٔ fهای با مشتق صفر، برابر ۲ است.

۵. فرض کنید $\alpha_۱a_۱ + \cdots + \alpha_ma_m = \alpha'_۱a_۱ + \cdots + \alpha'_ma_m$. پس $(\alpha_۱ - \alpha'_۱)a_۱ + \cdots + (\alpha_m - \alpha'_m)a_m = ۰$. به دلیل نابسته خطی بودن $a_۱$،...،a_m، داریم $\alpha_۱ = \alpha'_۱, \cdots, \alpha_m = \alpha'_m$.

بخش ۶

۲ و ۳. الف) وابسته خطی (رابطهٔ بستگی خطی خود را در این مسأله و مسائل بعدی امتحان کنید) پایه‌ها: $<-۱,۱>$ و $<۰,۳>$؛ ب) وابسته خطی، پایه‌ها: $<۱,۲>$ و $<۲,۰>$؛ پ) وابسته خطی، پایه‌ها: $<۳,۴,۱>$، $<۰,۳,۲>$؛ ت) وابسته خطی، پایه‌ها: $<۰,۰,۱>$، $<۰,۱,۰>$، $<۱,۰,۰>$؛ ث) وابسته خطی؛ ج) وابسته خطی.

۵. الف) وابسته خطی؛ ب) نابسته خطی.

بخش ۷

۱. تعلق ندارد. زیرفضای تولید شده توسط $<۱,۳,۴>$، $<۱,۰,۴>$، و $<۲,۱,۳>$ دارای یک پایهٔ $<۱,۳,۴>$، $<۰,۴,۵>$ است. هر ترکیب خطی دلخواه از این بردارها به‌شکل $<\alpha, ۳\alpha + ۴\beta, ۴\alpha + ۵\beta>$ است. اگر $<۱,۱,۱>$ یکی از این ترکیبهای خطی باشد، آنگاه $\alpha = ۱$، $۳ + ۴\beta = ۱$، $\beta = -\frac{۱}{۲}$ و $۴\alpha + ۵\beta = ۴ - \frac{۵}{۲} \neq ۱$.

۲. تعلق دارد. یک پایهٔ پلّه‌یی شکل برای زیرفضا، $<۱,-۱,۱,۰>$، $<۰,۲,۱,-۱>$، $<۰,۰,-\frac{۷}{۲},-\frac{۱}{۲}>$ است. عضو نمادین این زیرفضا $<\alpha, -\alpha+۲\beta, \alpha+\beta-\frac{۷}{۲}\gamma, -\beta-\frac{۱}{۲}\gamma>$ است. از مقایسه با $<۲,۰,-۴,-۲>$، $\alpha = ۲$، $\beta = ۱$، $\gamma = ۲$ را به‌دست می‌آوریم.

۳. فرض کنید $\{t_۱, \cdots, t_m\}$ پایه‌ای برای T باشد و $S \subset T$. پس طبق قضیهٔ (۱.۵)، هر مجموعه‌ای از $m + ۱$ بردار در S وابسته خطی است. فرض کنید $\{s_۱, \cdots, s_k\}$ مجموعه‌ای از بردارهای نابسته خطی در S باشد به‌طوری‌که هر مجموعه از $k + ۱$ بردار وابسته خطی باشد. طبق لِم (۱.۷)، هر بردار در S ترکیب خطی از $\{s_۱, \cdots, s_k\}$ است. بنابراین $\{s_۱, \cdots, s_k\}$

پایه‌ای برای S است و $\dim S \leq \dim T$. سرانجام، فرض کنید $\dim S = \dim T$ و $S \subset T$ و همچنین $\{s_۱, \cdots , s_m\}$ پایه‌ای برای S باشد. پس طبق قضیهٔ (۱.۵)، $\{s_۱, \ldots , s_m, t\}$ برای هر $t \in T$ وابسته خطی است، زیرا $\dim T = m$. دوباره طبق لِم (۱.۷)، $t \in S$ و $S = T$.

۴. $\dim(S+T) \leq ۳$. بنابراین طبق قضیهٔ (۵.۷)،

$$\dim(S \cap T) = \dim S + \dim T - \dim(S+T) \geq ۱$$

۵. $\dim S = \dim T = ۳$، $\dim(S+T) = ۴$، $\dim(S \cap T) = ۲$.

۶. ۴ بردار در V وجود دارند، ۳ زیرفضای یک‌بعدی، و ۳ پایهٔ متفاوت.

بخش ۸

۱. الف) حلپذیر؛ ب) حلپذیر؛ پ) حلپذیر؛ ت) حلپذیر؛ ث) حلپذیر؛ ج) حلپذیر نیست؛ چ) حلپذیر نیست.

۲. یک جواب وجود دارد اگر و فقط اگر $\alpha \neq ۱$.

۳. کافی است ثابت کنیم که بردارهای ستونی ماتریس m در n، با $n > m$، وابسته خطی است. بردارهای ستونی متعلق به R_m هستند، و چون nتا از این بردارها وجود دارند، طبق قضیهٔ (۱.۵) وابسته خطی هستند.

۴. این قضیه نیز نتیجه‌ای است از قضیهٔ (۱.۵).

بخش ۹

۱. بعد فضای جواب ۲ است. فرض کنید $c_۱$، $c_۲$، $c_۳$، $c_۴$ بردارهای ستونی باشند. پس $c_۱ + ۳c_۲ - ۴c_۳ = ۰$ و $c_۱ + c_۲ - ۲c_۴ = ۰$. بنابراین $< ۱, ۳, -۴, ۰ >$ و $< -۲ , ۰ , ۱ , ۱ >$ یک پایه برای فضای جواب است.

۲. ابعاد فضاهای جواب به‌صورت زیر هستند. جوابهای حقیقی بایستی امتحان شوند:

الف)صفر ب) یک پ) دو ت) یک ث) دو ج) یک چ) صفر

۳. طبق قضیهٔ (۹.۸)، هر جواب به‌شکل $x_۰ + x$ است که $x_۰$ جواب دستگاه غیرهمگن و x یک جواب دستگاه همگن است. بعد فضای جواب دستگاه همگن دو است، و جوابهای حقیقی به‌دست آمده را بایستی با قراردادن در معادله امتحان کرد.

۵. A، B، و C بایستی در معادله‌های زیر صدق کنند:

$$۳A + B + C = ۰$$
$$-A \qquad + C = ۰$$

یا

$$A\begin{pmatrix} ۳ \\ -۱ \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} = ۰$$

بعد فضای جواب دستگاه برابر یک است، بنابراین هر دو جواب غیرصفر مضربی از یکدیگرند.

۶. بایستی جواب غیرصفر دستگاه زیر را به‌دست آوریم:

$$A\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} = ۰$$

رتبهٔ ماتریس حداکثر ۲ است، بنابراین قطعاً یک جواب غیرصفر وجود دارد. برای اینکه نشان دهیم چنین دوجوابی متناسب‌اند، بایستی نشان دهیم که رتبهٔ آنها ۲ است. اگر رتبه یک باشد، آنگاه $\alpha = \gamma$ و $\beta = \delta$، و نقاط، برخلاف فرض، متمایز نیستند.

بخش ۱۰

۳. قضیه طبق قضیهٔ (۶.۱۰) بلافاصله اثبات می‌شود.

۴. از آنجا که L تک‌ـبعدی است، $L = p + V$، که V فضای هادی است و $p \in L$. طبق (۲.۱۰) $q - p \in V$، و چون $\dim V = ۱$، V متشکل از مضارب عددی $q - p$ است.

۵. این قضیّه از تعریف ابرصفحه در تمرین ۳، و قضیهٔ (۶.۱۰) حاصل می‌شود.

۶. برای مثال، در مورد مسألهٔ اول، جواب متضمن به‌دست‌آوردن دو جواب مجزای دستگاه $x_۱ + ۲x_۲ - x_۳ = -۱$ و $۲x_۱ + x_۲ + ۴x_۳ = ۲$ است. این عمل با روشهای بخشهای قبلی انجام می‌یابد.

۷. خطی که از p و q می‌گذرد، طبق تمرین ۴، همهٔ بردارهای $p + \lambda(q - p)$ را شامل می‌شود. طبق (۲.۱۰)، $q - p$ متعلق به فضای هادی V است، و بنابراین $p + \lambda(q - p) \in V$، برای هر λ.

۹. $\dim(S_۱ + S_۲) = ۴$ و $\dim(S_۱ \cap S_۲) = \dim S_۱ + \dim S_۲ - \dim(S_۱ + S_۲) = ۲$.

۱۰. طبق تمرین ۴، یک نقطهٔ معمولی بر روی خط دارای شکل $x = p + \lambda(q - p)$ است، که $p =< ۱, -۱, ۰ >$ و $q =< -۲, ۱, ۱ >$. مختصات x را در معادلهٔ صفحه بگذارید و معادله را نسبت به λ حل کنید.

بخش ۱۱

۱. نگاشتهای قسمتهای (پ)، (ت)، (ث) تبدیلهای خطی هستند، و بقیه نیستند

۳.
$$2T : y_1 = 6x_1 + 2x_2$$
$$y_2 = 2x_1 - 2x_2$$
$$T - U : y_1 = -4x_1$$
$$y_2 = -x_2$$
$$T^2 : y_1 = 10x_1 - 4x_2$$
$$y_2 = -4x_1 + 2x_2$$

برای یافتن دستگاهی برای TU، فرض می‌کنیم $U :< x_1, x_2 > \to < y_1, y_2 >$، که $y_1 = x_1 + x_2$، $y_2 = x_1$; $T :< y_1, y_2 > \to < z_1, z_2 >$، که $z_1 = -3y_1 + y_2$، $z_2 = y_1 - y_2$. بنابراین $TU :< x_1, x_2 > \to < z_1, z_2 >$ که $z_1 = -2x_1 - 3x_2$ $z_2 = x_2$. $TU \neq UT$.

۴.
$$(DM)f(x) = D[xf(x)] = xf'(x) + f(x)$$
$$MD\ f(x) = (Mf')(x) = xf'(x).\ DM \neq MD$$

۵. از $0 = 0 + 0$، به‌دست می‌آوریم $T(0) = T(0) + T(0)$، پس $T(0) = 0$. از $v + (-v) = 0$، به‌دست می‌آوریم $T(v) + T(-v) = T(0) = 0$، پس $T(-v) = -T(v)$.

۶. تبدیلهای خطی که در (الف) و (پ) تعریف شده‌اند، یک‌به‌یک هستند، ولی بقیه نیستند.

۸. تبدیلهای خطی که در (الف) و (ب) تعریف شده‌اند پوشا هستند، ولی بقیه نیستند.

۹. فرض کنید T یک‌به‌یک باشد. پس دستگاه معادله‌های همگن که با قراردادن همهٔ y_iها برابر صفر تعریف می‌شود، فقط جواب بدیهی (0) دارد. بنابراین رتبهٔ ماتریس ضرایب n است، و از بخش ۸ نتیجه می‌شود که T پوشاست. به‌عکس، اگر T پوشا باشد، رتبهٔ ماتریس ضرایب n خواهد بود، با توجه به بخش ۹، دستگاه همگن فقط جواب بدیهی (0) دارد. بنابراین T یک‌به‌یک است. این ملاحظات، هم‌ارزی قسمتهای (الف)، (ب) و (پ) را نشان می‌دهند. هم‌ارزی با (ت) در قضیهٔ (۱۳.۱۱) ثابت شده است.

۱۰. D چندجمله‌ییهای ثابت را به صفر می‌نگارد، پس D یک‌به‌یک است. I هیچ چندجمله‌یی را روی چندجمله‌یی ثابت مخالف صفر نمی‌نگارد، پس I پوشا نیست. معادله $DI = 1$ ایجاب می‌کند که D پوشا و I یک‌به‌یک باشد.

بخش ۱۲

۱.
$$\begin{pmatrix} -۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۷ & -۴ \\ ۴ & ۰ \end{pmatrix}, (۱, ۱, ۲)\begin{pmatrix} -۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{pmatrix} = (۱)$$

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & -۲ & -۱ \\ ۲ & ۲ & ۶ \end{pmatrix}$$

۴. ضرب $\mathbf{DA}$ هم‌ارز است با ضرب iامین سطر $\mathbf{A}$ در δ_i، در حالی‌که از ضرب $\mathbf{AD}$، iامین ستون $\mathbf{A}$ در δ_i ضرب می‌شود.

۵. اگر $(\alpha_{ij}) = \mathbf{A}$ با همهٔ ماتریسهای قطری $\mathbf{D}$ تعویض‌پذیر باشد، آنگاه طبق مسألهٔ ۵، برای هر δ_i و δ_j در F داریم $\delta_i\alpha_{ij} = \alpha_{ij}\delta_j$. اگر $i \neq j$، نتیجه می‌شود $\alpha_{ij} = ۰$.

۷. ماتریسهای (ب)، (پ)، (ت) و (ث) معکوس‌پذیرند. (الف) عکس‌پذیر نیست. فرمول معکوس را از راه ضرب ماتریسی امتحان کنید.

۸. هر تبدیل خطی در فضای بردارهای ستونی، برای یک ماتریس $n \times n$ دلخواه $\mathbf{B}$، شکل $\mathbf{x} \to \mathbf{B.x}$ را دارد. تبدیل خطی $\mathbf{x} \to \mathbf{A.x}$ معکوس‌پذیر است، اگر و فقط اگر یک ماتریس $\mathbf{B}$ وجود داشته باشد که برای هر $\mathbf{x}$، $\mathbf{B(A.x)} = \mathbf{A(B.x)} = \mathbf{x}$. طبق قانون شرکتپذیری (تمرین ۳)، این معادلات با $\mathbf{(BA)x} = \mathbf{(AB)x} = \mathbf{x}$ برای هر $\mathbf{x}$ هم‌ارزند. سپس نشان دهید که برای یک ماتریس $\mathbf{C}$ی n در n، $\mathbf{Cx} = \mathbf{x}$، برای هر $\mathbf{x}$ با $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ هم‌ارز است. پس معادلات فقط نشان می‌دهند که $\mathbf{A}$ معکوس‌پذیر است. اگر $\mathbf{A}$ معکوس‌پذیر باشد، آنگاه $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-۱}\mathbf{b}$ یک جواب معادلهٔ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ خواهد بود، زیرا که طبق قانون شرکتپذیری $\mathbf{A(A^{-۱}b)} = \mathbf{(AA^{-۱})b} = \mathbf{Ib} = \mathbf{b}$. اگر $\mathbf{x}'$ یک جواب دیگر باشد، آنگاه $\mathbf{Ax} = \mathbf{Ax}'$، و از ضرب در $\mathbf{A}^{-۱}$، به‌دست می‌آوریم $\mathbf{A^{-۱}(Ax)} = \mathbf{A^{-۱}(Ax)}$. نتیجه می‌دهد که $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$.

بخش ۱۳

۱. این ماتریسها نسبت به پایهٔ $\{u_1, u_2\}$ چنین‌اند

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ماتریس S نسبت به پایهٔ جدید $\{w_1, w_2\}$، چنین است.

$$\mathbf{S}' = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{SX} \quad , \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

۲.

	الف	ب	پ	ت
S	رتبهٔ ۱، هیچهٔ ۱	معکوس‌پذیر نیست	$u_1 + u_2$	$u_1 + u_2$
T	رتبهٔ ۲، هیچهٔ ۰	معکوس‌پذیر است	$-$	$-$
U	رتبهٔ ۳، هیچهٔ ۰	معکوس‌پذیر است	$-$	$-$

۳. رتبه$=k$، هیچه$=1$،
$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 2 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & k \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

۴. رتبهٔ T، بعد $T(V)$ است. یک پایه برای $T(V)$ را می‌توان از میان بردارهای $T(v_i)$، $i = 1, \cdots, n$، انتخاب کرد. از آنجا که $T(v_i) = \sum_j \alpha_{ji} w_j$، زیرمجموعهٔ بردارهای $\{T(v_i)\}$ یک پایه برای $T(V)$ تشکیل می‌دهد، اگر و فقط اگر ستونهای متناظر ماتریس A از T یک پایه برای فضای ستونی A تشکیل دهند. بنابراین رتبهٔ $(A) = \dim T(V)$.

۵. چون $\dim R_1 = 1$، رتبهٔ T یک است. بنابراین طبق قضیهٔ (۹.۱۳) $n(f) = n - 1$.

۶. فرض کنید $V_1 = n(f)$، پس طبق تمرین ۵، $\dim V_1 = n - 1$. فرض کنید v_0 جواب ثابت معادلهٔ $f(v) = \alpha$ باشد (چرا یک جواب وجود دارد؟). پس مجموعهٔ همهٔ جوابها $v_0 + V_1$ است، و یک خمینهٔ خطی با بعد $n - 1$ است.

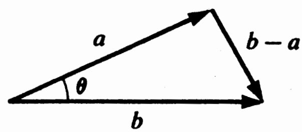
۹. اگر برای $S \neq 0$، تساوی $TS = 0$ برقرار باشد، آنگاه برای یک $v \in V$ $v_1 = S(v) \neq 0$، و $Tv_1 = 0$. به‌عکس، فرض کنید برای یک بردار غیرصفر v_1، $T(v_1) = 0$. یک پایهٔ $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ از V که با v_1 شروع می‌شود، وجود دارد. S را بر روی این پایه با قراردادن $S(v_1) = v_1, S(v_2) = \cdots = S(v_n) = 0$ تعریف می‌کنیم. بنابراین $S \neq 0$ و $TS = 0$.

۱۰. فرض کنید $ST = 1$ و $\{v_1, \cdots, v_n\}$ پایه‌ای برای V باشد. چون $ST = 1$، از اینجا نتیجه می‌شود که $\{Tv_1, \cdots, Tv_n\}$ نیز یک پایه برای V است. بر روی هر یک از اجزای پایه، $TS(Tv_i) = Tv_i$، پس TS با تبدیل همانی بر روی یک پایه سازگار است. بنابراین $TS = 1$.

بخش ۱۴

۱.ث) دو بردار بر یکدیگر عمودند اگر و فقط اگر کسینوس زاویهٔ بین آنها صفر باشد. بنابر قانون کسینوسها، داریم:

$$||b-a||^۲ = ||a||^۲ + ||b||^۲ - ۲||a||\,||b||\cos\theta.$$



چون

$$||b-a||^۲ = (b-a, b-a) = ||a||^۲ + ||b||^۲ - ۲(a,b)$$

داریم:

$$\cos\theta = \frac{(a,b)}{||a||\,||b||}$$

بنابراین $a \perp b$، اگر و فقط اگر $(a,b) = ۰$

ج) $||a-b|| = ||a+b||$ اگر و فقط اگر $(a-b, a-b) = (a+b, a+b)$، این عبارت برقرار است اگر و فقط اگر $(a,b) = ۰$.

۲. الف) اگر x هم به $p+S$ متعلق باشد و هم به $q+S$، آنگاه $x = p + s_۱ = q + s_۲$، $s_۱, s_۲ \in S$. از اینجا نتیجه می‌شود که $p \in q+S$ و $q \in p+S$، و بنابراین $p+S = q+S$.

ب) به‌راحتی می‌توان نشان داد که مجموعهٔ $L = p+S$ از همهٔ بردارهایی به‌شکل $\{p + \lambda(q-p)\}$، خطی است شامل p و q. فرض کنید $L' = p+S'$ خطی شامل p و q باشد. پس $q - p \in S'$ و چون S و S' یک‌بعدی هستند، $S = S'$. چون خطوط L و L' همدیگر را قطع می‌کنند و دارای یک زیرفضای یک‌بعدی هستند، طبق (الف) $L = L'$.

پ) p،q،r همخط‌اند اگر به یک خط $L = p+S$ متعلق باشند. در این حالت $q - p \in S$ و $q - r \in S$ و چون S یک بعدی است، $S(q-r) = S(q-p)$. به‌عکس، اگر $S(q-p) = S(q-r)$، خطوطی که با نقاط p و q، و q و r مشخص می‌شوند دارای زیر فضاهای یک بعدی واحدی هستند. پس طبق (الف) برهم منطبق‌اند.

ت) فرض کنید $L = p+S$ و $L' = p'+S'$ خطوط مفروض باشند. طبق قسمتهای (الف) و (ب) می‌توانیم فرض کنیم $S \neq S'$. چون $\dim S = \dim S' = ۱$، پس، $S \cap S' = ۰$ اگر

x_1 و x_2 متعلق به $L \cap L'$ باشند، آنگاه $S \cap S'$، $x_1 - x_2 \in$، پس $x_1 = x_2$. برای اینکه نشان دهیم که $L \cap L'$ تهی نیست، فرض کنید $S = S(s)$، $S' = S(s')$؛ پس باید λ و λ' را طوری به‌دست آوریم که $p + \lambda s = p' + \lambda' s'$، و این امر صحیح است زیرا هر ۳ بردار در R_2 وابسته خطی هستند.

.۳
$$\lambda = \frac{-(p-r, q-p)}{||q-p||^2}$$

فاصله عمودی چنین است:

$$||u-r|| = \left|\left|p - r - (p-r, q-p)\frac{q-p}{||q-p||^2}\right|\right|$$

بخش ۱۵

۱. الف) $\frac{1}{\sqrt{3}} < 1, 1, 1, 0 >$، $\frac{1}{\sqrt{51}} < 5, -1, -4, -3 >$

۲. ۱، $\sqrt{12}(x - \frac{1}{2})$ و $a(x^2 - x + \frac{1}{6})$
که a طوری انتخاب می‌شود که $||f|| = 1$.

۳. فاصله توسّط عبارت $||v - (v, u_1)u_1||$ داده می‌شود، که v و u_1 به صورتهای زیرند:

الف) $v =< -1, -1 >$، $u_1 =< 2, -1 > / \sqrt{5}$

ب) $v =< 1, 0 >$، $u_1 =< 1, 1 > / \sqrt{2}$

پ) $v =< 2, 2 >$، $u_1 =< 1, -1 > / \sqrt{2}$

۵. الف) $(v, w) = \sum_{i,j} \xi_i \eta_j (u_i, u_j) = \sum \xi_i \eta_i$

ب) فرض کنید $v = \sum_{i=1}^n \xi_i u_i$. پس $(v, u_k) = \sum_{i=1}^n \xi_i (u_i, u_k) = \xi_k$

۶. طبق قضیهٔ گرام‌ـاشمیت، یک پایهٔ یکا قائم $\{u_1, \ldots, u_n\}$ از R_n وجود دارد که با u_1 شروع می‌شود. ماتریسی که سطرهای آن u_1، ...، u_n هستند ویژگیهای مطلوب را دارد.

۹. فرض می‌کنیم $\{v_1, \ldots, v_n\}$ پایهٔ یکا قائمی از V باشد، و فرض می‌کنیم:

$$w_1 = \alpha_{11} v_1 + \cdots + \alpha_{1n} v_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$w_d = \alpha_{d1} v_1 + \cdots + \alpha_{dn} v_n$$

پایه‌ای برای W باشد. بردار $x = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$ به $W^\perp$ متعلق است اگر و فقط اگر

$(x, w_1) = \cdots = (x, w_d) = 0$. پس x_1، ...، x_n بایستی جواب دستگاه همگن زیر باشند:

$$\alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_{d1}x_1 + \cdots + \alpha_{dn}x_n = 0$$

حالا طبق فرع (۹.۴) نتیجه بلافاصله حاصل می‌شود.

۱۰. می‌توان نشان داد که پایه‌های یکا قائمی مثل $\{v_i\}$ و $\{w_i\}$ از V وجود دارند که $\{v_1, \ldots, v_d\}$ پایه‌ای است برای W_1، و $\{w_1, \ldots, w_d\}$ پایه‌ای برای W_2. طبق قضیهٔ (۱۱.۱۵)، تبدیل متعامدی چون T وجود دارد که برای هر i، $Tv_i = w_i$. بنابراین $T(W_1) = W_2$.

۱۱. طبق تمرین ۷، $\dim S(n)^\perp = 2$. کافی است نشان دهیم که مجموعهٔ P از همهٔ pها به‌طوری‌که $(p, n) = \alpha$، مجموعهٔ جوابهای یک معادلهٔ خطی است. فرض کنید $\{v_1, v_2, v_3\}$ یک پایهٔ یکا قائم برای R_3 باشد و فرض کنید $n = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$. پس $x = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$ در $(p, n) = \alpha$ صدق می‌کند، اگر و فقط اگر $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \alpha$. این رابطه نشان می‌دهد که مجموعهٔ همهٔ pها به‌طوری‌که $(p, n) = \alpha$، یک صفحه است. با استفاده از نتایج بخش ۱۰، می‌توانیم بگوییم که $P = p_0 + S(n)^\perp$، که p_0 یک جواب تثبیت شدهٔ $(p, n) = \alpha$ است.

ب) بردار نرمال: $< 3, -1, 1 >$

پ) $x_1 - x_2 + x_3 = -2$، یا $(n, p) = -2$

ت) صفحهٔ شامل بردار نرمال n، که از p می‌گذرد، مجموعهٔ همهٔ بردارهای x است به‌طوری‌که $(x, n) = (p, n)$، یا $(x - p, n) = 0$

ج) بردار نرمال n بایستی طبق (ت) بر $< 1, 1, 1 > - < 1-, 0, 2, >$ و $< 1, 0, 0 > -$ بر $< 1-, 0, 2 >$ عمود باشد. بنابراین از روش قسمت (ث) استفاده کنید.

چ) به‌طوری‌که در راهنمایی اشاره کرده بودیم، معادلهٔ دوم را به شکل $p_0 - p = \lambda n + (u - p)$ می‌نویسیم. از ضرب آن در n به‌طور داخلی، به‌دست می‌آید:

$$\lambda(n, n) + (u - p, n) = 0$$

ح) داریم:

$$n = < 1, 1, -1 >, \quad p = < 0, 0, 1 >, \quad u = < 1, 1, 2 >$$

پس

$3\lambda + (u - p, n) = 0$ و $\lambda = -\frac{1}{3}$. پس فاصله برابر است؛ $\|p_0 - u\| = \frac{1}{3}\|n\|$.

بخش ۱۶

۱. (الف) ۲؛ (ب) ۰؛ (پ) ۰؛ (ت) دترمینانها در اینجا برابرند با (الف) ۰، (ب) ۱، (پ) ۱۳، (ت) ۲−، (ث) ۳

۲. با استفاده از ویژگیهای تابع دترمینان، داریم $D(\mathbf{A}) = \alpha_1 \dots \alpha_n D(\mathbf{A}')$ که

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

سپس با انجام عملیات سطری مقدماتی بر روی $\mathbf{A}'$ نشان دهید که، به‌دست می‌آوریم:

$$D(\mathbf{A}') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & * & * \\ & 1 & * & * \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

۳. نشان دهید که با انجام عملیات سطری فقط از نوع ۲ ←[تعریف (۹.۶)] روی سطرهای شامل $\mathbf{A}_1$، به‌دست می‌آوریم

$$D(\mathbf{A}) = \left|\begin{array}{ccc|c|c|c} \alpha_{11} & * & * & & & \\ \vdots & & & * & & \\ 0 & \cdots & \underset{\alpha_{1d_1}}{*} & & & \\ \hline & \mathbf{O} & & \mathbf{A}_2 & & \\ \hline & \mathbf{O} & & \mathbf{O} & \ddots & \mathbf{A}_r \end{array}\right|$$

برای عددهای $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1d_1}$ (که $\mathbf{A}_1$ یک ماتریس d_1 در d_1 است) و $D(\mathbf{A}_1) = \alpha_{11} \dots \alpha_{1d_1}$.
به‌طور مشابه می‌توان عملیات سطری مقدماتی را برروی سطرهای شامل $\mathbf{A}_2$ انجام داد، و به‌دست آورد:

$$D(\mathbf{A}) = \left|\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix}\alpha_{11} & * & * \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & \overset{*}{\alpha_{1d_1}}\end{matrix} & * & \\ \hline \mathbf{O} & \begin{matrix}\alpha_{21} & * & * \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & \overset{*}{\alpha_{2d_2}}\end{matrix} & \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{O} & \ddots \end{array}\right|$$

که $D(\mathbf{A}_2) = \alpha_{21} \ldots \alpha_{2d_2}$. با ادامهٔ این روش $\mathbf{A}$ به‌شکل مثلثی در می‌آید. با اعمال تمرین ۲، نتیجه نهایی را به‌دست می‌آوریم.

۴. آنچه که بایستی اثبات شود، این است که

$$D^*(a_1, \ldots, a_n) = D^*(a_1, \ldots, a_i + a_j, \ldots, a_n)$$

و این نتیجه طبق مفروضات (پ) و (ت) دربارهٔ D^* بلافاصله حاصل می‌شود.

بخش ۱۷

۱. با استفاده از تعریف و قضیهٔ (۶.۱۶) داریم

$$D(<\xi, \eta>, <\lambda, \mu>) = D(<\xi, 0>, <\lambda, 0>)$$
$$+ D(<\xi, 0>, <0, \mu>) + D(<0, \eta>, <\lambda, 0>)$$
$$+ D(<0, \eta>, <0, \mu>) = \xi\mu - \eta\lambda$$
$$D(<\xi, 0>, <\lambda, 0>) = 0$$

زیرا که بردارهای آن وابسته خطی هستند. $D(<\xi, 0>, <0, \mu>) = \xi\mu D(e_1, e_2)$، در حالی‌که $D(<0, \eta>, <\lambda, 0>) = -D(<\lambda, 0>, <0, \eta>) = -\lambda\eta$

بخش ۱۸

۲. $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$. قضیهٔ (۳.۱۸) را برای این معادله به‌کار برید.

۳. $D(\mathbf{P}_{ij}) = -1; D(B_{ij}(\lambda)) = 1; D(\mathbf{D}_i(\mu)) = \mu$
این حقیقت که $\mathbf{A}$ حاصلضرب ماتریسهای مقدماتی است، در بخش ۱۲ نشان داده شده است.
۵. فرض کنید T تبدیل متعامد باشد. اگر $\mathbf{A}$ ماتریس T نسبت به یک پایهٔ یکا قائم باشد، آنگاه $\mathbf{A}^t\mathbf{A} = \mathbf{I}$، و چون $D(\mathbf{A}) = D(^t\mathbf{A})$ داریم $D(\mathbf{A})^2 = 1$.

بخش ۱۹

۴. از بسط دترمینان برحسب سطر اوّل، مشاهده می‌کنیم که شکل $Ax_1 + Bx_2 + C$ به‌دست می‌آید. ازگذاشتن (α, β) یا (γ, δ) به‌جای (x_1, x_2) دو سطر دترمینان برابر می‌شوند، و در نتیجه نقطه‌های (α, β) و (γ, δ) در $Ax_1 + Bx_2 + C = 0$ صدق می‌کنند.
۶. نگارهٔ مربع، متوازی الاضلاع $\{\lambda T(e_1) + \mu T(e_2) : 0 \leq \lambda, \mu \leq 1\}$ است. مساحت متوازی‌الاضلاع برابر $|D(T(e_1), T(e_2))|$ است، که $T(e_1)$ و $T(e_2)$ ستونهای ماتریس T نسبت به پایهٔ $\{e_1, e_2\}$ از R_2 هستند.
۷. چون

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \beta_1 - \alpha_1 & \beta_2 - \alpha_2 & 0 \\ \gamma_1 - \alpha_1 & \gamma_2 - \alpha_2 & 0 \end{vmatrix}$$

دترمینان برابر است با

$$\begin{vmatrix} \beta_1 - \alpha_1 & \beta_2 - \alpha_2 \\ \gamma_1 - \alpha_1 & \gamma_2 - \alpha_2 \end{vmatrix}$$

که برابر با مساحت متوازی‌الاضلاعی است به یالهای $< \beta_1, \beta_2 > - < \alpha_1, \alpha_2 >$ و $< \gamma_1, \gamma_2 > - < \alpha_1, \alpha_2 >$. مساحت مثلث نصف مساحت این متوازی‌الاضلاع است.
۱۱. یک تبدیل متعامد T وجود دارد به‌طوری‌که $T(a_1/||a_1||) = e_1$، ...، $T(a_n/||a_n||) = e_n$، که $\{e_1, \ldots, e_n\}$ بردارهای واحدند. بنابراین

$$D(a_1, \ldots, a_n) = |D(T)|D(e_1, \ldots, e_n)||a_1|| \ldots ||a_n|| = ||a_1|| \ldots ||a_n||$$

بخش ۲۰

۱. $Q = \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}, R = -\frac{1}{9}x^2 - x - \frac{2}{3}$
۲. فرض کنید α_1، ...، α_k صفرهای متمایز f باشند. بنابراین $f = (x - \alpha_1)g_1$. چون $\alpha_1 \neq \alpha_2$، لذا $x - \alpha_2$ یک چندجمله‌یی اول است که f را عاد می‌کند اما $x - \alpha_1$ را عاد نمی‌کند. بنابراین

$x - \alpha_۲$، $g_۱$ را عاد می‌کند و $f = (x - \alpha_۱)(x - \alpha_۲)g_۲$. با ادامهٔ این طریق به‌دست می‌آوریم $f = (x - \alpha_۱)\dots(x - \alpha_k)g$، و در نتیجه $\deg f \geq k$.

۴. اگر درجهٔ f دو یا سه باشد، هر عاملگیری غیر ساده شامل یک عامل خطی خواهد بود، و در نتیجه یک صفر f است. این نتیجه غلط است اگر $\deg f > ۳$. برای مثال $f = (x^۲ + ۱)^۲$ هیچ صفری در R ندارد، اما در $R[x]$ اول نیست.

۵. فرض کنید m/n در معادله صدق می‌کند. از ضرب معادلهٔ حاصل در n^r به‌دست می‌آوریم:

$$a_۰ m^r + a_۱ m^{r-۱} n + \cdots + a_r n^r = ۰$$

بنابراین n، $a_۰ m^r$ را عاد می‌کند، و از آنجا که n، m^r را عاد نمی‌کند، $n|a_۰$. همچنین $m|a_r$.

۷. در $Q[x]$ عاملهای اول عبارت‌اند از(الف) $(۱+x)(x^۲-x+۱)(۲x+۱)$؛(پ) $(x^۲+۱)(x^۴-x^۲+۱)(۱+x)$.

در $R[x]$ عاملهای اول عبارت‌اند از: (الف) $(۱ + x)(x^۲ - x + ۱)(۲x + ۱)$؛ (پ) $(x^۲ + ۱)(x^۲ + \sqrt{۳}x + ۱)(x^۲ - \sqrt{۳}x + ۱)$.

۸. این فرایند بایستی خاتمه یابد، در غیر این صورت دنبالهٔ نامتناهی نزولی از اعداد صحیح نامنفی داریم، که مغایر اصل خوش‌ـترتیبی است. حالا فرض کنید $r_{i_۰} \neq ۰$ و $r_{i_۰+۱} = ۰$. با توجه به نحوهٔ تعریف r_iها، $r_{i_۰}|r_{i_۰-۱}$. طبق معادلهٔ قبل مشاهده می‌کنیم که $r_{i_۰}|r_{i_۰-۲}$. با ادامهٔ این طریق به‌دست می‌آوریم $r_{i_۰}|a$ و $r_{i_۰}|b$. از طرف دیگر، با شروع از بالا، اگر $d|a$ و $d|b$، آنگاه $d|r_۰$. طبق معادلهٔ بعدی داریم $d|r_۱$. با ادامهٔ این عمل سرانجام به‌دست می‌آوریم $d|r_{i_۰}$. بنابراین $r_{i_۰} = (a, b)$

۹. الف) $۲x + ۱$

بخش ۲۱

۱. $-۱۰ + ۱۰i, \frac{۱}{۱۳}(۳ - ۲i), \frac{۱}{۵}(۳ + ۴i)$

۲. $\cos ۳\theta = (\cos\theta)^۳ - ۳\cos\theta(\sin\theta)^۲$، که از مساوی قراردادن قسمت حقیقی هر دو طرف در دستور $(\cos\theta + i\sin\theta)^۳ = \cos ۳\theta + i\sin ۳\theta$ به‌دست آمده است.

۳. $\lambda(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$ که λ ریشهٔ پنجم حقیقی عدد ۲ است و $\theta_k = ۲\pi k/۵$، $k = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴$

۵. نگاشت یک به یکی که این یکریختی را تولید می‌کند عبارت است از

$$\alpha + i\beta \longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

۹. معادلهٔ $x^۲ = -۱$ در هیأت اعداد مختلط یک جواب دارد اما در یک هیأت مرتب نمی‌تواند جوابی داشته باشد.

بخش ۲۲

۲. فرض کنید $\{v_1, \ldots, v_m\}$ پایه‌ای برای V باشد و $\{w_1, \ldots, w_n\}$ پایه‌ای برای W. برای هر جفت (i,j)، فرض کنید E_{ij} تبدیلی خطی باشد که $E_{ij}v_j = w_i$ و $E_{ij}v_k = 0$ اگر $k \neq j$. پس mn تبدیل خطی $\{E_{ij}\}$ پایه‌ای برای $L(V,W)$ تشکیل می‌دهند.

۳. چندجمله‌ییهای مینیمال به‌ترتیب $(x-2)(x+1)$، $x^3 - 1$، $x^2 + x - 1$ و x^3 هستند.

۴. الف) برای هر v_i، $f(T)v_i = (T-\xi_1)\ldots(T-\xi_n)v_i = 0$ زیرا که عاملهای $T - \xi_k$ تعویضپذیرند، و $(T-\xi_i)v_i = 0$.

ب) فرض کنید $m(x) = \prod(x-\xi_j)$، که ξ_i ویژه مقدارهای متمایز T هستند. طبق استدلال قسمت (الف)، $m(T) = 0$. بنابراین چندجمله‌یی مینیمال T، $m(x)$ را عاد می‌کند. کافی است نشان دهیم که اگر $m'(x) = \prod_{\xi_j \neq \xi_k}(x-\xi_j)$ آنگاه $m'(T) \neq 0$. داریم:

$$m'(T)x_k = \prod_{\xi_j \neq \xi_n} (\xi_k - \xi_j)x_k \neq 0$$

و قضیّه ثابت می‌شود.

۵. فرض کنید T معکوس‌پذیر باشد، و $m(x) = x^r + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ چندجمله‌یی مینیمال باشد. فرض کنید $\alpha_0 = 0$. بنابراین $m(x) = xm_1(x)$. بعلاوه، $m_1(T) \neq 0$، زیرا $m(x)$ چندجمله‌یی مینیمال است. پس $m(T) = Tm_1(T) = 0$ که مغایر با معکوس‌پذیر بودن T است. به‌عکس، فرض کنید $\alpha_0 \neq 0$. بنابراین $m(x) = m_1(x).x + \alpha_0$ برای یک چندجمله‌یی $m_1(x)$، و $m_1(T)T = -\alpha_0 1$. بنابراین $-\alpha_0^{-1}m_1(T) = T^{-1}$.

۶. الف) فرض کنید α یک ویژه مقدار T باشد. بنابراین برای مقداری از $v \neq 0$، $Tv = \alpha v$. پس $\alpha \neq 0$ (چرا؟) و $T^{-1}Tv = \alpha T^{-1}v$. در نتیجه $T^{-1}v = \alpha^{-1}v$. استدلال عکس، عین همین است.

ب) فرض کنید $Tv = \alpha v$. بنابراین $f(T)v = f(\alpha)v$.

۸. این نتیجه از این حقیقت ناشی می‌شود که ماتریسهای متشابه را می‌توان ماتریسهای یک تک-تبدیل خطی نسبت به پایه‌های متفاوت تلقّی کرد و ویژه مقدارهای آنها ویژه مقدارهای تبدیل خطی هستند. برهان مستقیم را می‌توان به صورت زیر آورد. فرض کنید برای یک ماتریس معکوس‌پذیر $\mathbf{S}$ داشته باشیم $\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{BS}$ اگر $\mathbf{x} \neq 0$ و $\mathbf{Ax} = \alpha\mathbf{x}$، آنگاه $\mathbf{B}(\mathbf{Sx}) = \alpha(\mathbf{Sx})$ و $\mathbf{Sx} \neq 0$.

۹. ویژه مقدارها به‌صورت زیر هستند:

الف) $3, -1$؛ ب) $1-, 1-$؛ پ) $1, 2-$

ویژه بردارها از حل معادلهٔ زیر به‌دست می‌آیند:

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

که $\mathbf{A}$ ماتریس داده شده و α یک ویژه مقدار $\mathbf{A}$ است. برای اطمینان خاطر نتایج خود را امتحان کنید.

۱۰. فرض کنید $Tv = \alpha v$، برای $\alpha \neq 0$. بنابراین $0 = T^m = \alpha^m v$، و در نتیجه $\alpha = 0$.

۱۱ و ۱۲. هر دو نتایج سادهٔ قضیهٔ (۸.۲۲) هستند.

بخش ۲۳

۲. چندجمله‌یی مینیمال $\left(\begin{smallmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{smallmatrix}\right)$، $x^2 + 1$ است، که می‌توان به عاملهای خطی متمایز در $C[x]$، اما نه در $R[x]$، تجزیه کرد.

۳. چندجمله‌یی مینیمال، $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ است. استدلال، از اینجا به بعد عین تمرین ۲ است.

۴. x^{n+1}، چندجمله‌یی مینیمال D است.

۸. زیرا $d(x)|f(x)$ و $n[d(T)] \subset n[f(T)]$. به‌عکس، فرض کنید $f(T)v = 0$. از آنجا که $d(x) = a(x)m(x) + b(x)f(x)$، برای چندجمله‌ییهای $a(x)$ و $b(x)$، داریم

$$d(T)v = a(T)m(T)v + b(T)f(T)v = 0$$

زیرا $f(T)v = 0$ و $m(x)$ چندجمله‌یی مینیمال است، پس $n[f(T)] \subset n[d(T)]$ و قضیه به اثبات می‌رسد.

بخش ۲۴

۱. الف) $(x+2)^2$

ب) $(x+2)^2$

پ) -2 (که در چندجمله‌ییهای مینیمال و مشخصه ۲ بار ظاهر می‌شود)

ت) نه. زیرا چندجمله‌یی مینیمال حاصلضرب عاملهای خطی متمایز نیست.

ث) فرض کنید $v = x_1 v_1 + x_2 v_2$ برداری با ضرایب مجهول باشد به‌طوری‌که $(T+2)v = 0$. استفاده از تعریف T، منجر به دستگاه معادلات همگن با جواب غیر بدیهی $(1, -1)$ می‌شود. بنابراین $v_1 - v_2$ بردار مشخصهٔ T است.

ج) پایه‌ای که ماتریس T را به ماتریس مثلثی شکل می‌برد، $w_1 = v_1 - v_2$ و $w_2 = v_2$ است. بنابراین $\mathbf{SB} = \mathbf{AS}$ ، که

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

چ) تجزیهٔ ژوردان T، $T = D + N$ است، که D و N تبدیلهای خطی هستند که ماتریسهای آنها نسبت به پایهٔ $\{w_1, w_2\}$، $-2\mathbf{I}$ و $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ هستند.

۳. چندجمله‌یی مینیمال T، $x^2 + \alpha\beta$ است، که $\alpha\beta > 0$. چندجمله‌یی مینیمال حاصلضرب عاملهای خطی متمایز در $R[x]$ نیست و جواب سؤال نه است.

۴. از قضیهٔ شکل مثلثی استفاده کنید.

۵. چندجمله‌یی مینیمال T، $x^2 - x$ را عاد می‌کند و در نتیجه دارای عاملهای خطی متمایز در $C[x]$ است. یک پایه از V که شامل بردارهای مشخصه است وجود دارد.

۶. چندجمله‌یی مینیمال، $x^r - 1$ را که دارای عاملهای خطی متمایز یعنی عاملهای $x - (\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$، $k = 0, \ldots, r-1$، $\theta_k = 2\pi k/r$، در $C[x]$ است، عاد می‌کند.

بخش ۲۵

۱. الف)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & \mathbf{O} & \\ 0 & 1 & & \\ \hline & & 0 & -1 \\ \mathbf{O} & & 1 & 1 \end{array}\right)$$

ب)

$$\left(\begin{array}{c|cc|cc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{O} & & \mathbf{O} & 0 & -1 \\ & & & 1 & -1 \end{array}\right)$$

۲. شکلهای متعارف گویا به‌ترتیب عبارت‌اند از:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

۳. صورتهای متعارف گویا بر روی R به‌ترتیب عبارت‌اند از:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

۴. صورتهای متعارف بر روی C به‌ترتیب عبارت‌اند از:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{-3}}{2} \end{pmatrix}$$

۵. فرض کنید $\{v, Tv, \ldots, T^{d-1}v\}$ پایه‌ای برای V باشد و

$$T^d v = \alpha_0 v + \alpha_1 Tv + \cdots + \alpha_{d-1}T^{d-1}v$$

ماتریس T نسبت به این پایه عبارت است از:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \alpha_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & & \cdots & \alpha_{d-1} \end{pmatrix}$$

بنابراین $D(\mathbf{A}-x\mathbf{I}) = \pm(x^d-\alpha_{d-1}x^{d-1}-\cdots-\alpha_0)$. از سوی دیگر $x^d-\alpha_{d-1}x^{d-1}-\cdots-\alpha_0$ طبق لم (۶.۲۵) چندجمله‌یی مینیمال T است.

۶. ماتریسها در هر سه حالت برروی C متشابه‌اند.

فهرست قسمتی از نمادهائی که به‌کار رفته‌اند

هیأت اعداد حقیقی	R
عضویت در مجموعه	$a \in A$
شمول مجموعه	$\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$
تابع (یا نگاشت) از $\mathbf{A}$ به $\mathbf{B}$	$f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$
برداری با مؤلفه‌های $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$	$< \alpha_1, \cdots, \alpha_n >$
مجموع	$\sum x_i$
حاصلضرب	$\prod u_i$
فضای برداری که توسط $\{v_1, \cdots, v_n\}$ تولید (یا تنیده) شده است	$S(v_1, \cdots, v_n)$
فضای برداری همهٔ توابع حقیقی-مقدار برروی R	$\mathcal{F}(R)$
توابع پیوستهٔ حقیقی-مقدار برروی R	$C(R)$
توابع چندجمله‌یی برروی R	$P(R)$
تبدیل خطی از V به W	$L(V, W)$
ماتریسها (که با دست به‌صورت $\underset{\sim}{\mathrm{a}}$ و $\underset{\sim}{\mathrm{A}}$ نوشته می‌شوند)	$\mathbf{A}, \mathbf{a}$
هم‌ارزی سطری ماتریسها	$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$
ترانهادهٔ ماتریس $\mathbf{A}$ و ترانهادهٔ تبدیل خطی T	${}^t\mathbf{A}, {}^tT$
قدرمطلق	$\|\alpha\|$
حاصلضرب داخلی	(u, v)
طول بردار u	$\\| u \\|$
دترمینانهای یک مجموعه بردار، یک ماتریس، یک تبدیل خطی	$D(u_1, \cdots, u_n), D(\mathbf{A}), \det\mathbf{A}, D(T)$
اثر ماتریس $\mathbf{A}$ یا اثر تبدیل خطی T	$\mathrm{Tr}(\mathbf{A}), \mathrm{Tr}(T)$
صفر-فضا، برد یک تبدیل خطی $T : V \to W$	$n(T), T(v)$
چندجمله‌ییهایی که ضرایب آنها در هیأت F هستند	$F[x]$
مزدوج عدد مختلط z	$\overline{z}$
جمع مستقیم فضاهای برداری	$V_1 \oplus V_2$

چندجمله‌یی در یک تبدیل خطی T	$f(T)$
مجموعهٔ بردارهای متعامد بر بردارها در S	$\mathrm{S}^{\perp}$
توان یک ماتریس $\mathbf{A}$	e^{A}
فضای‌ـدوگان V	V^{*}
حاصلضرب دکارتی V و W	$V \times W$
حاصلضرب تانسوری فضاهای برداری، تبدیلهای خطی و ماتریسها	$V \otimes W, T \otimes U, \mathbf{A} \dot{\times} \mathbf{B}$
حاصلضرب گوه‌یی فضاهای برداری، بردارها	$\wedge^{k} V, v \wedge w$
الحاقی یک تبدیل خطی	T'

فهرست راهنما

مرکز نشر دانشگاهی

۱۱۰۰۰ ریال

شابِك: ۸ـ۰۷۷۷ـ۰۱ـ۹۶۴