جبر

تی. اس. بلایث ــ ای. اف. رابرتسون

{جبر به روش تمرین}

گروه‌ها

ترجمه : دکتر حمیدرضا میمنی
دکتر علی زعیم‌باشی

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

جبر به روش تمرین
گروه‌ها

نوشتهٔ:

تی. اس. بلایث ـ ای. اف. رابرتسون

ترجمهٔ:

دکتر حمید رضا میمنی ـ دکتر علی زعیم‌باشی

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

Blyth, Thoms Scott
بلایث، تامس اسکات

جبر به روش تمرین: مجموعه‌ای از مسائل در جبر با حل (گروه‌ها) / تألیف اس. بلایس ـ ای. اف. رابرتسون؛ ترجمه حمید رضا میمنی، علی زعیم‌باشی. ـ تهران: دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی، ۱۳۸۳-۱۳xx.

۱۳۶ ص.: مصور.

ISBN: 964-92704-9-3
۱۵۰۰۰ ریال

فهرست‌نویسی بر اساس اطلاعات فیپا.

عنوان اصلی Algebra through practice: a collection of problems in algebra with solutions

فهرست‌نویسی بر اساس جلد پنجم و ششم، ۱۳۸۳.

مندرجات: ج. ۵. گروهها ترجمه حمید رضا میمنی، علی زعیم‌باشی. -- ج. ۶. حلقه، میدانها و مدولها، ترجمه حمیدرضا میمنی.

۱. جبر -- مسائل، تمرینها و غیره. الف. رابرتسون، ادموند Robertson, Edmund F. ب. میمنی، حمید رضا، ۱۳۴۶ - ، مترجم. ج. زعیم‌باشی، علی، ۱۳۴۶ - ، مترجم. د. دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، هـ. عنوان. و. عنوان: مجموعه‌ای از مسائل در جبر با حل.

۲ ج ۸ ب / QA ۱۵۷
ی ۱۳۰۰
۵۱۲/۰۰۷۶

کتابخانه ملی ایران
۸۳-۲۳۶۰۸ م

جبر به روش تمرین

مجموعه‌ای از مسائل در جبر با حل

گروهها

تألیف: تی. اس. بلایث ـ ای. اف. رابرتسون

ترجمه: دکتر حمید رضا میمنی ـ دکتر علی زعیم‌باشی

ویراستار علمی: عبدالرضا اسکوئی

وزیری، ۱۳۶ صفحه، ۲۰۰۰ نسخه، چاپ اوّل، زمستان ۱۳۸۳

امور فنّی و چاپ: مؤسسهٔ چاپ و انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد

بها: ۱۵۰۰۰ ریال

فهرست

پیش گفتار مولفین

هدف این سری از کتابهای حل مسئله ارائه یک دسته از مثالهای کار شده در جبر در جهت پشتیبانی از درس جبر دوره کارشناسی است . در این تمرینات متنوع توجه ما معطوف به توانایی دانشجویان متوسط بوده ، ولی چند تمرین که ورزیدگی بیشتری برای حل آنها نیاز است گنجانده شده است . با وجود اینکه حل کامل مسائل ضمیمه است ولی بهتر است خواننده بعد از توجه کافی به سوالات به این جوابها رجوع کند . در این صورت می‌توان امید داشت که دانشجو به توانایی خود در حل مسائل که ریاضیات چیزی جز آن نیست ، اعتماد پیدا کند .
ترتیب مسائل در فصل ها بر اساس درجه بندی آنها نیست . بنابراین اگر خواننده نتواند مسئله n ام را حل کند ، دلیل آن نخواهد بود که از حل مسئله $(n+1)$ ام ناامید شود .
تعدادی پُرسشهای امتحانی (بدون حل) در انتهای کتاب ارائه شده است که این پُرسشها مبتنی بر مطالب مورد بحث کتاب است .

تی - اس - بلایث
ای – اف - رابرتسون

فصل ۱

زیر گروهها

خواننده باید با قضایای یکریختی و تناظر در گروهها آشنا باشد . قضیه اول یکریختی که می گوید اگر $f: G \to H$ یک همریختی گروهی باشد ، آنگاه $G/_{Kerf} \simeq \operatorname{Im} f$ یک نتیجه اساسی است چرا که یکریختی های دیگری را نتیجه می دهد از قبیل اینکه : اگر $A \le G$ یعنی A زیر گروهی از G است و اگر $N \lhd G$ یعنی N زیر گروه نرمال G است و اگر $K \lhd G$ به طوری که $K \le N$، آنگاه

$$\frac{A}{A \cap N} \simeq \frac{NA}{N} \quad \text{و} \quad G/_N \simeq \frac{(G/_K)}{(N/_K)}$$

قضیه تناظر زیر گروههای $G/_N$ و زیر گروههایی از G شامل N را به هم ربط می دهد .

عناصر $a,b \in G$ را مزدوج گوئیم ، اگر برای $g \in G$ای ، $a = g^{-1}bg$. تزویج یک رابطه هم ارزی در G است و کلاس های متناظر آن را رده های تزویجی می نامیم . زیر مجموعه Gشامل عناصری که رده های تزویجی آنها یک عنصری است زیر گروهی نرمال از G مانند $Z(G)$ را تشکیل می دهند که موسوم به مرکز G است . برای $H \le G$ زیر مجموعه ،

$$\mathrm{N}_G(H) = \{\, g \in G \,|\, (\forall\, h \in H)\; g^{-1}hg \in H \,\}$$

را نرمال ساز H در G می نامیم . $N_G(H)$ بزرگترین زیر گروه G است که H در آن نرمال است . گروه مشتق G زیر گروه G' است که توسط جابجاگرهای، $[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab$ در G تولید می شود و آن کوچکترین زیر گروه نرمال G است که گروه خارج قسمتی آن آبلی است .

مثالهای ساخته شده توسط ماتریس ها (زیر گروه هایی از گروه $GL(n,F)$ متشکل از ماتریس های $n\times n$ وارون پذیر و با درایه در میدان F)، گروه های جایگشتی (زیر گروهی از گروه های متقارن S_n)، گروه هایی با یک مجموعه ای از مولد ها و روابط و حاصلضرب مستقیم (دکارتی) از گروهها ارائه شده است .

یک مثال از نمایش به صورت

$$G=<a\,,b\,\big|\,a^{۲}=b^{۳}=۱\ ,\ a^{-۱}ba=b^{-۱}>$$

می باشد . چون $\big|<b>\big|=۳$ ، $<b>\lhd G$ و $\dfrac{G}{<b>}\simeq C_{۲}$ (گروه دوری از مرتبه ۲)، مشاهده می کنیم که $|G|=۶$. مولدهای a و b را می توان متناظر با جایگشتهای (۱۲) و (۱۲۳) که مولدهای $S_{۳}$ می باشند یا متناظر با ماتریس های

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

که مولد های $SL(۲,\mathrm{Z}_{۲})$ ، گروه ماتریس های ۲×۲ با درایه در میدان $\mathrm{Z}_{۲}$ و دترمینان واحد در نظر گرفت . بنابراین $G\simeq S_{۳}\simeq SL(۲,\mathrm{Z}_{۲})$.

۱-۱- G را یک گروه ، H را زیر گروهی از G ، و K را زیر گروهی از H در نظر بگیرید . ثابت کنید :

$$|G:K|=|G:H|\,|H:K|$$

نتیجه بگیرید که اشتراک تعداد متناهی زیر گروههای با اندیس متناهی زیر گروهی با اندیس متناهی است . آیا اشتراک تعداد نا متناهی زیر گروه با اندیس متناهی ، لزوما زیر گروهی با اندیس متناهی است .

۲-۱- G را یک گروه و H را زیر گروهی از آن در نظر بگیرید . ثابت کنید تنها همدسته چپ H در G که زیر گروه است، خود H است . ثابت کنید که تناظر ،

$$\varphi : xH \to Hx^{-۱}$$

نگاشتی از مجموعه همدسته های چپ H در G به مجموعه همدسته های راست H در G است . نشان دهید که φ یک نگاشت یک به یک است . آیا تناظر

$$\psi : xH \to Hx$$

یک نگاشت از مجموعه همدسته های چپ H در G به مجموعه همدسته های راست H در G را توصیف می کند ؟ اگر چنین است ، آیا ψ یک نگاشت یک به یک است ؟

۳-۱-یک گروه G همراه با زیر گروه های H و K را بگونه ای بیابید که HK یک زیر گروه نباشد .

٤-۱- زیر گروه $H = <(۱۲)>$ را در نظر بگیرید . نشان دهید که همدسته های چپ H ، $S_۳$ را افراز می کنند . همچنین نشان دهید که چگونه همدسته های راست H ، $S_۳$ را افراز می‌کنند . نتیجه بگیرید که H یک زیر گروه نرمال $S_۳$ نمی باشد .

۵-۱- فرض کنید G یک گروه و H یک زیر گروه G باشد . اگر $g \in G$ به گونه ای باشد که $|<g>| = n$ و $g^m \in H$ که در آن m , n نسبت به هم اولند ، آنگاه $g \in H$.

٦-۱- فرض کنید G یک گروه باشد . ثابت کنید که

(i) اگر H یک زیر گروه باشد، آنگاه $HH = H$ ؛

(ii) اگر X یک زیر مجموعه متناهی باشد به گونه‌ای که $X.X = X$، آنگاه X زیر گروهی از G است. نشان دهید که گزاره (ii) برای زیر مجموعه های نامتناهی X درست نمی باشد .

۷-۱- فرض کنید که G یک گروه و K و H زیر گروه های G باشند. برای $x \in G$ همدسته دوگانه HxK را به صورت

$$HxK = \{ hxk \mid h \in H , k \in K \}$$

تعریف می کنیم . اگر yK یک همدسته چپ K باشد، نشان دهید که یا $HxK \cap yK = \phi$ و یا $yK \subseteq HxK$. بنابراین نشان دهید که برای هر $x, y \in K$، یا $HxK \cap HyK = \phi$ یا $HxK = HyK$.

۸-۱- فرض کنید n قوایی از یک عدد اول باشد و C_n را گروه دوری از مرتبه n بگیرید. اگر K و H زیرگروه هایی از C_n باشند، نشان دهید که $H \leq K$ یا $K \leq H$. برعکس فرض کنید C_n یک گروه دوری از مرتبه n با این خاصیت باشد که برای هر دو زیر گروه K و H از C_n یا H زیر گروه K است و یا K زیر گروه H است. آیا n لزوما قوایی از یک عدد اول است؟

۹-۱- فرض کنید G یک گروه باشد. برای زیر گروه H از G تعریف کنید

$$H_G = \bigcap_{g \in G} g^{-1} H g$$

ثابت کنید H_G یک زیر گروه نرمال G بوده و اگر K زیر گروهی از H و نرمال در G باشد، آنگاه K زیر گروهی نرمال از H_G است.
حال قرار دهید $G = GL(2, Q)$ و H را زیرگروه ماتریس های نامنفرد قطری بگیرید. H_G را مشخص کنید. در این حالت H_G با کدام گروه شناخته شده یکریخت است.

۱۰-۱- فرض کنید H زیر مجموعه ای از $Mat_{2\times 2}(C)$ شامل عناصر

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

باشد. ثابت کنید که H یک گروه غیر آبلی تحت عمل ضرب ماتریس ها می باشد (این گروه موسوم به گروه کواترنیون ها می باشد).
کلیه عناصر مرتبه ۲ را در H بیابید. همچنین کلیه زیر گروه های H را بیابید. آیا H دارای یک گروه خارج قسمتی یکریخت با گروه دوری مرتبه ۴ می باشد؟

۱۱-۱- گروه چند وجهی D_n زیر گروهی از $GL(2, Q)$ می باشد که توسط ماتریس های

$$\begin{bmatrix} \cdot & \text{١} \\ \text{١} & \cdot \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} \alpha & \cdot \\ \cdot & \alpha^{-1} \end{bmatrix} \qquad \alpha = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

تولید می شود .

ثابت کنید $|D_{2n}| = 2n$ و D_{2n} شامل زیر گروهی دوری از اندیس ۲ است . فرض کنید G زیر گروهی از $GL(2,n)$ به صورت زیر باشد ،

$$G = \{ \begin{bmatrix} \varepsilon & k \\ \cdot & 1 \end{bmatrix} | \ \varepsilon = \pm 1, k \in Z_n \}$$

ثابت کنید که G یکریخت با D_{2n} است . نشان دهید که برای هرعدد صحیح و مثبت n ، D_{2n} یک گروه خارج قسمتی از زیر گروه D_∞ از $GL(2\,,Z)$ می باشد که به صورت زیر ارائه می شود.

$$D_\infty = \{ \begin{bmatrix} \varepsilon & k \\ \cdot & 1 \end{bmatrix} | \ \varepsilon = \pm 1, k \in Z \}$$

۱-۱۲- فرض کنید Q^+ و R^+ و C^+ به ترتیب گروه های جمعی از اعداد گویا ، اعداد حقیقی و اعداد مختلط باشد و Q^* و R^* و C^* گروه های ضربی نظیر باشد. اگر $U = \{ z \in C \,|\, |z| = 1 \}$ و $Q^+ > 0$ ، $R^+ > 0$ زیر گروه های ضربی از اعداد گویا و اعداد حقیقی باشند، ثابت کنید که

(i) $C^+ / R^+ \simeq R^+$ ؛

(ii) $C^* / R^*_{>0} \simeq U$ ؛

(iii) $C^* / U \simeq R^+_{>0} \simeq R^* / C_2$ ؛

(iv) $R^* / R^*_{>0} \simeq C_2 \simeq Q^* / Q^*_{>0}$ ؛

(v) $Q^* / C_2 \simeq Q^*_{>0}$.

۱-۱۳- p را عدد اول ثابتی در نظر بگیرید . Z_{p^∞} را p^n - امین ریشه های واحد برای کلیه اعداد صحیح مثبت n در نظر بگیرید . در این صورت Z_{p^∞} یک زیرگروه ، گروه اعداد مختلط غیرصفر تحت عمل ضرب است .

نشان دهید که هر زیر گروه سره Z_{p^∞} یک گروه دوری متناهی است و هر گروه خارج قسمتی غیر بدیهی یکریخت با Z_{p^∞} است.
ثابت کنید که Z_{p^∞} و Q^+ در این خاصیت که هر زیر مجموعه متناهی یک گروه دوری را تولید می کند صدق می کند.

۱-۱٤- نشان دهید که اگر هیچ کدام از عناصر ۲- گروه G از مرتبه ۴ نباشد، آنگاه G آبلی است. نشان دهید که گروه های از مرتبه ۸، گروههای چند وجهی و کواترنیون ها تنها گروه های غیر آبلی از مرتبه ۸ هستند. به علاوه نشان دهید این دو گروه یکریخت نیستند.

۱-۱۵- با بکار گیری قضیه لاگرانژ، مرتبه های ممکن برای زیر گروه های S_4 را بدست آورید؟
برای هر نوع ساختار دوری در S_4، یک عنصر با این نوع ساختار دوری را بنویسید و تعداد چنین عناصری را بدست آورید. مرتبه هر عنصر از هر نوع ساختار دوری را بدست آورید.
مرتبه عناصر S_4 چیست و از هر مرتبه چند عنصر وجود دارد؟ چه تعداد زیر گروه های از مرتبه ۲ و ۳ در S_4 وجود دارد؟ کلیه زیر گروه های دوری مرتبه ۴ در S_4 را بیابید.
کلیه زیر گروه های غیر دوری از مرتبه ۴ را بیابید.
کلیه زیر گروه های از مرتبه ۶ و ۸ را بیابید. همچنین یک زیر گروه از مرتبه ۱۲ را ارائه دهید.

یک زیر گروه نرمال آبلی V از S_4 را بیابید. آیا $\frac{S_4}{V}$ یکریخت با یک زیر گروه از S_4 می‌باشد. آیا A_4 زیرگروهی از مرتبه ۶ دارد.

۱-۱٦- زیر گروهی از S_8 که توسط

$$a=(1234)(5678) \qquad \text{و} \qquad b=(1573)(2846)$$

تولید می شود را در نظر بگیرید. مرتبه این گروه را مشخص و نشان دهید که یکریخت با گروه کواترنیون ها می باشد. آیا با زیر گروهی از S_4 از مرتبه ۸، یکریخت می باشد؟

۱۷-۱- فرض کنید p جایگشتی باشد که هر گاه به حاصلضرب دورهای مجزا تجزیه می شود، طول کلیه دورها با هم یکسان باشد. ثابت کنید p قوایی از یک دور v است.

بر عکس، ثابت کنید که اگر $v=(1\,2\cdots m)$ ، آنگاه v^s به حاصلضرب $h.c.f.(m\,,s)$ دور مجزا به طول $\dfrac{m}{h.c.f.(m\,,s)}$ تجزیه می شود.

۱۸-۱- فرض کنید $SL(2\,,p)$ گروه ماتریس های 2×2 با دترمینان واحد و درایه در میدان Z_p (جاییکه p عدد اول است) باشد.

نشان دهید که $SL(2\,,p)$ شامل $p^2(p-1)$ عنصر به فرم

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad a\neq 0$$

می باشد. همچنین نشان دهید که $SL(2,p)$ شامل $p(p-1)$ عنصر به فرم

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

می‌باشد. نتیجه بگیرید که $\left|SL(2,p)\right|=p(p-1)(p+1)$. اگر Z مرکز $SL(2,p)$ باشد قرار دهید

$$PSL(2,p)=\frac{SL(2,p)}{Z}.$$

نشان دهید که اگر $p\neq 2$ ، آنگاه

$$\left|PSL(2,p)\right|=\frac{1}{2}p(p-1)(p+1).$$

به طور کلی گروه $SL(n,p)$ را متشکل از ماتریسهای $n\times n$ با دترمینان ۱ و درایه در میدان Z_p در نظر بگیرید.

با استفاده ازاین واقعیت که سطرهای یک ماتریس منفرد مستقل خطی هستند، ثابت کنید که

$$\left|SL(n,p)\right|=\frac{1}{p-1}\prod_{i=0}^{n-1}(p^n-p^i).$$

۱۹-۱- فرض کنید که F یک میدان باشد به طوری که $1+1\neq 0$ و گروه $SL(2,F)$ را متشکل از کلیه ماتریس های 2×2 با دترمینان واحد و درایه در F در نظر بگیرید. ثابت

کنید که اگر $A\in SL(2,F)$، آنگاه $A^2=-I_2$ اگر و فقط اگر $tr(A)=0$ ($tr(A)$ اثر A می باشد که جمع درایه های قطری A است) .

فرض کنید $PSL(2,F)$ گروه $\dfrac{SL(2,F)}{Z(SL(2,F))}$ باشد و $\overline{A}$ را تصویر $A\in SL(2,F)$ تحت ریختار طبیعی $\eta: SL(2,F)\to PSL(2,F)$ بگیرید . نشان دهید که $\overline{A}$ از مرتبه ۲ است اگر و فقط اگر $tr(A)=0$.

۱-۲۰- نشان دهید که $C_2\times C_2$ یک گروه غیر دوری از مرتبه ۴ است . ثابت کنید که اگر G یک گروه غیردوری از مرتبه ۴ باشد ، آنگاه $G\simeq C_2\times C_2$.

۱-۲۱- اگر p و q اعداد اول باشند ، نشان دهید که تعداد زیر گروه های محض و غیر بدیهی $C_p\times C_q$ بزرگتر یا مساوی ۲ است و تساوی صدق می کند اگر و فقط اگر $p\neq q$.

۱-۲۲- اگر G و H گروه های ساده باشند ، نشان دهید که $G\times H$ دقیقا دو زیر گروه غیر بدیهی و محض و نرمال دارد ، مگر آنکه $|H|=|G|$ و یک عدد اول باشد .

۱-۲۳- آیا حاصلضرب دکارتی دو گروه متناوب یک گروه متناوب است ؟ آیا حاصضرب دکارتی دو گروه بدون تاب ، یک گروه بدون تاب است .

۱-۲٤- فرض کنید که G یک گروه و A و B زیر گروه های نرمال G باشند ، بگونه ای که $G=AB$. اگر $A\cap B=N$ ، ثابت کنید که

$$\frac{G}{N}\simeq\frac{A}{N}\times\frac{B}{N}.$$

نشان دهید که این نتیجه در حالتی که $G=AB$ و A زیر گروه نرمال و B زیر گروه غیر نرمال G است نادرست می باشد .

۱-۲۵- فرض کنید $f:G\to H$ یک ریختار گروهی و A یک زیرگروه نرمال G باشد به طوری که تحدید f به A یک تکریختی از A بتوی H است. ثابت کنید که

$$G\simeq A\times Kerf.$$

آیا این نتیجه با حذف شرط نرمال بودن A برقرار است ؟

نتیجه بگیرید که (با استفاده از نمادهای در سوال ۱۲-۱)

(i) $C^+ \simeq R^+ \times R^+$ ؛

(ii) $Q^* \simeq Q^*_{>0} \times C_2$ ؛

(iii) $R^* \simeq R^*_{>0} \times C_2$ ؛

(iv) $C \simeq R^*_{>0} \times U$ ؛

۱-۲۶- کلیه زیر گروه های $C_2 \times C_2$ را بیابید . دیاگرام هس زیر گروه ها را رسم کنید .
ثابت کنید که اگر G گروهی باشد که دیاگرام هس آن با $C_2 \times C_2$ یکسان باشد ، آنگاه $G \simeq C_2 \times C_2$.

۱-۲۷- کلیه زیر گروه های $C_2 \times C_2 \times C_2$ و دیاگرام هس مربوطه را رسم کنید .

۱-۲۸- مجموعه اعداد صحیح n که $1 \leq n \leq 21$ و نسبت به عدد ۲۱ اولند را در نظر بگیرید.
نشان دهید که این مجموعه همراه با عمل ضرب به پیمانه ۲۱ تشکیل یک گروه می دهد و این گروه یکریخت با $C_2 \times C_6$ است . آیا این گروه دوری است .
آیا مجموعه $\{ n \in Z \mid 1 \leq n \leq 12 ,$ n و ۱۲ نسبت به هم اولند $\}$ یک گروه دوری تحت عمل ضرب به هنگ ۱۲ می باشد .

۱-۲۹- مشخص کنید کدام یک از گروه های زیر به حاصلضرب دکارتی زیر گروه های غیر بدیهی قابل تجزیه است .

$$S_4 , S_5 , A_4 , A_5 , R^* , C_6 , C_8 , C^+ , Z_{p^\infty} .$$

۱-۳۰- فرض کنید G یک گروه آبلی و H زیر گروهی از آن باشد . فرض کنید که برای $h \in H$ و $n \in N$ معادله $x^n = h$ دارای یک جواب در G است اگر و فقط اگر دارای یک جواب در H باشد . نشان دهید که برای هر xH یک $y \in xH$ وجود دارد به طوری که مرتبه y در G و مرتبه xH در G/H یکسان است . نتیجه بگیرید که اگر G/H دوری باشد ، آنگاه زیر گروه K در G وجود دارد که

$$G \simeq H \times K .$$

۱-۳۱- فرض کنید که G یک گروه آبلی باشد. اگر $x, y \in G$ به ترتیب از مرتبه m و n باشند، نشان دهید که xy از مرتبه حداکثر mn است. همچنین نشان دهید که اگر $z \in G$ دارای مرتبه mn بوده به طوری که m و n نسبت به هم اول باشند، آنگاه $z = xy$ می باشد به طوری که $x, y \in G$ و $x^m = y^n = 1$. نتیجه بگیرید که x و y به ترتیب از مرتبه m و n می باشند. این نتیجه را به حالتی که z از مرتبه $m_1 m_2 \dots m_k$ بوده و $m_1, \dots, m_k$ دوبدو نسبت به هم اولند توسیع دهید. بنابراین نتیجه بگیرید که اگر G گروه آبلی متناهی از مرتبه

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

بوده به طوری که $p_1, \dots, p_k$ اعداد اول متمایزند، آنگاه

$$G \cong H_1 \times H_2 \times \dots \times H_k$$

جائیکه $H_i = \{x \in G \mid x^{p_i^{\alpha_i}} = 1\}$ برای $i = 1, 2, \dots, k$. همچنین نشان دهیدکه اگر r، $|G|$ را عاد کند، آنگاه G دارای زیر گروهی از مرتبه r است.

۱-۳۲- فرض کنید H زیر گروهی از G باشد. ثابت کنید اشتراک کلیه مزدوج های H یک زیر گروه نرمال G است. اگر $x \in G$، آیا ممکن است که

$$A = \{g^{-1}xg \mid g \in G\}$$

یک زیر گروه G باشد؟ آیا A زیرگروه نرمال می تواند باشد؟ آیا A می تواند زیر گروه غیر نرمال باشد؟

۱-۳۳- آیا کلیه زیر گروه های مرتبه ۲ در S_4 مزدوجند؟ درباره زیرگروه های مرتبه ۳ چه می توان گفت؟ آیا عناصر (۱۲۳) و (۲۳۴) در A_4 مزدوجند؟

۱-۳۴- نشان دهید که زیر گروه H از گروه G نرمال است اگر و فقط اگر اجتماعی از رده‌های تزویجی باشد. از هررده تزویجی در S_4 عنصری را ارائه دهید و تعداد عناصر در هر رده را بدست آورید. نتیجه بگیرید که تنها مرتبه های ممکن برای زیر گروه های نرمال غیر بدیهی S_4، ۴ و ۱۲ هستند. همچنین نشان دهید که S_4 دارای زیر گروه های نرمال ۴ و ۱۲ می‌باشد.

فصل ۲

خود ریختی ها و تئوری سیلو

یک یکریختی $f:G\to G$ ، یک خود ریختی نامیده می شود . خودریختی های گروه G همراه با عمل ترکیب نگاشت ها یک گروه است که با $AutG$ نمایش داده می دهیم. تزویج توسط یک عنصر ثابت $g\in G$ نگاشت $\rho_g:G\to G$ با ضابطه $x\to\rho_g(x)=g^{-1}xg$ می باشد که یک خود ریختی روی G است . گروه خود ریختی داخلی $InnG=\{\rho_g \mid g\in G\}$ یک زیر گروه نرمال $AutG$ است و گروه خارج قسمتی $AutG/InnG$ را گروه خود ریختی خارجی G می نامیم . به عنوان مثال گروه دوری C_n (که آبلی است) دارای گروه خودریختی داخلی بدیهی است و $\vartheta:C_n\to C_n$ با ضابطه $\vartheta(g)=g^{-1}$ یک خودریختی (خارجی) از مرتبه ۲ است . زیر گروه H از گروه G نرمال است اگر و فقط اگر $\vartheta(H)\subseteq H$ برای هر $\vartheta\in InnG$. زیرگروه H مشخصه نامیده می شود، اگر $\vartheta(H)\subseteq H$ برای هر $\vartheta\in AutG$.

برای گروه های متناهی عکس قضیه لاگرانژ برقرار نمی باشد . با این وجود یک بخشی از عکس قضیه لاگرانژ توسط قضایای سیلو به دست می آید . گروه P را یک p - گروه گوییم ، هر گاه مرتبه هر عنصر آن قوایی از عدد ثابت و اول p باشد . در این حالت P متناهی است و $|P|$ قوایی از p است . اگر G یک گروه باشد که $|G|=p^nk$ جاییکه k و p نسبت به هم

اولند،آنگاه یک زیر گروه از مرتبه p^n را یک p - زیرگروه سیلو می نامند . در این حالت نتایج زیر را داریم که فرض بر این است که خواننده با آنها آشناست .

(a) G دارای زیر گروهی از مرتبه p^m برای هر $m \le n$ است ؛

(b) هر p - زیر گروه G مشمول در یک p - زیر گروه سیلو است ؛

(c) هر دو p - زیر گروه سیلو در G مزدوجند ؛

(d) تعداد p - زیر گروه های سیلوی G همنهشت با ۱ به هنگ p بوده و $|G|$ را عاد می کند .

۲-۱- فرض کنید p یک عدد اول باشد . با استفاده از معادله رده ای نشان دهید که هر p - گروه متناهی دارای یک مرکز غیر بدیهی است . نتیجه بگیرید که کلیه گروه های از مرتبه p^2 آبلی هستند.
کلیه گروه های از مرتبه ۹ را بنویسید .

۲-۲- فرض کنید G یک گروه و $v \in AutG$. اگر A و B زیرگروه هایی از G باشند ثابت کنید که $v(A \cap B)$ زیر گروهی از $v(A) \cap v(B)$ می باشد . آیا لزوما تساوی $v(A \cap B) = v(A) \cap v(B)$ برقرار است ؟

۲-۳- فرض کنید که G یک گروه و $InnG$ گروه خودریختی‌های داخلی G باشد . ثابت کنید $InnG$ زیر گروه نرمال $AutG$ است و

$$InnG \simeq G/Z(G)$$

دو گروه غیر آبلی مرتبه ۸، یکی گروه چند وجهی D_8 با نمایش

$$D_8 = \langle a,b \mid a^2 = 1, b^4 = 1, a^{-1}ba = b^{-1} \rangle$$

و دیگری گروه کواترنیون ها Q_8 با نمایش

$$Q_8 = \langle x,y \mid x^4 = 1, x^2 = y^2, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$$

می باشند . نشان دهید $Z(D_8) = <b^2> \simeq C_2$ و $Z(Q_8) = <x^2> \simeq C_2$ نتیجه بگیرید که $InnD_8 \simeq InnQ_8$.

۲-۴- فرض کنید که G یک گروه با این خاصیت باشد که نتوان آن را به صورت حاصلضرب مستقیم دو زیر گروه غیر بدیهی اش تجزیه کرد . آیا هر زیر گروه G این خاصیت را دارد ؟ آیا هر گروه خارج قسمتی آن این خاصیت را دارد ؟

۲-۵- اگر G یک گروه بوده به طوری که $G/Z(G)$ دوری باشد، آنگاه ثابت کنید که G آبلی است. نتیجه بگیرید که یک گروه با گروه خودریختی های دوری لزوما آبلی است .

۲-۶- کلیه خود ریختی های گروه متقارن $S_۳$ را بیابید .

۲-۷- ثابت کنید $C_۲\times C_۲$ و $S_۳$ دارای گروه خودریختی های یکریخت هستند .

۲-۸- فرض کنید G یک گروه بوده که $Z(G)=\{۱\}$. ثابت کنید $Z(AutG)=\{۱\}$.
آیا عکس آن به طور کلی برقرار است ؟

۲-۹- Z_p را میدان اعداد صحیح به هنگ p جاییکه p یک عدد اول است در نظر بگیرید و همچنین Z_p^n را فضای برداری n- بعدی روی Z_p بگیرید . ثابت کنید که گروه جمعی Z_p^n یکریخت با گروه $C_p\times\cdots\times C_p$ مشتمل بر n کپی از C_p می باشد .
نشان دهید که هر عنصر $AutG$ متناظر با یک تبدیل خطی وارون پذیر روی Z_p^n است .
نتیجه بگیرید که

$$AutG\simeq GL(n,p).$$

۲-۱۰- کلیه گروه های G با $AutG\simeq\{۱\}$ را بیابید .

۲-۱۱- یک زیر گروه H از G را کاملا پایا گوییم، اگر برای هر ریختار گروهی $\vartheta:G\to G$ داشته باشیم $\vartheta(H)\subseteq H$. کدام یک گزاره های زیر صحیح است ؟

(a) گروه مشتق یک زیر گروه کاملا پایا است ؛

(b) مرکز یک گروه کاملا پایا است ؛

(c) $A_۴$ دارای زیر گروه نرمال است که کاملا پایا نمی باشد ؛

(d) $G^n=\langle g^n \mid g\in G\rangle$ یک زیر گروه کاملا پایای G است ؛

(e) $G_n = \left\langle \, g \in G \,\middle|\, g^n = 1 \, \right\rangle$ یک زیر گروه کاملا پایای G است .

۲-۱۲- فرض کنید G یک گروه و C یک رده تزویجی در G باشد . اگر $\alpha \in AutG$ ، ثابت کنید که $\alpha(C)$ نیز یک رده تزویجی است . فرض کنید K مجموعه رده های تزویجی G باشد و تعریف کنید

$$N = \{ \alpha \in AutG \,|\, (\forall C \in K) \;\; \alpha(C) = C \}$$

ثابت کنید N یک زیر گروه نرمال از $AutG$ است .

۲-۱۳- فرض کنید G یک گروه و N یک زیرگروه نرمال G باشد. قرار دهید $A = AutN$ و $I = InnN$. اگر C مرکز ساز N در G باشد ، ثابت کنید که NC زیرگروه نرمال G است و G/NC یکریخت با یک زیر گروه خودریختی بیرونی A/I از N است .
همچنین نشان دهید که $NC/C \simeq I$.
ثابت کنید که اگر گروه خودریختی بیرونی N بدیهی و $Z(N) = \{1\}$باشد، آنگاه $G = N \times C$. نتیجه بگیرید که گروه G شامل گروه S_3 به عنوان یک زیرگروه نرمال است اگر و فقط اگربرای زیرگروه نرمال C از G ، $G = S_3 \times C$.

۲-۱۴- ثابت کنید که اگر G یک گروه باشد ، آنگاه

(a) زیر گروه H مشخصه در G است اگر و فقط اگر $\vartheta(H) = H$ برای هر $\vartheta \in AutG$ ؛

(b) اشتراک هر خانواده از زیرگروه های مشخصه G یک زیرگروه مشخصه G است ؛

(c) اگر H و K زیرگروه های مشخصه G باشند ، آنگاه HK چنین است ؛

(e) اگر H و K زیرگروه های مشخصه G باشند ، آنگاه $[H,K]$ چنین است ؛

(f) اگر H زیر گروه نرمال G و K زیر گروه مشخصه H باشد ، آنگاه K زیر گروه نرمال G است .

۲-۱۵- فرض کنید G یک گروه متناهی و H زیر گروهی نرمال از G باشد به طوری که $|H|$ و $[G:H]$ نسبت به هم اول باشند . ثابت کنید که H زیر گروه مشخصه G است .

۲-۱۶- فرض کنید G یک گروه و F را زیر مجموعه ای از عناصر x از G بگیرید که شامل تعداد متناهی مزدوج در G هستند. ثابت کنید F یک زیر گروه G است. آیا F زیر گروه نرمال است؟ آیا F زیر گروه مشخصه در G است؟

۲-۱۷- اگر $t \in Q/\{0\}$، ثابت کنید $\vartheta_t : Q^+ \to Q^+$ که با ضابطه $\vartheta_t(r) = t_r$ داده شده است، یک خودریختی از گروه (جمعی) Q^+ است. نتیجه بگیرید که تنها زیر گروه مشخصه Q^+ عبارتند از $\{1\}$ و Q^+.

۲-۱۸- فرض کنید G یک گروه متناهی و H زیر گروهی از G است. نشان دهید که هر p- زیر گروه H مشمول در یک p- زیرگروه سیلو می باشد. همچنین ثابت کنید که هیچ زوج از p- زیر گروه های متمایز H نمی تواند در یک p- زیرگروه سیلو یکسان G قرار گیرند.

حال فرض کنید H نرمال در G بوده و P یک p- زیرگروه سیلو ی G باشد. ثابت کنید که $H \cap P$ یک p- زیر گروه سیلوی H است و همچنین HP/H یک p- زیر گروه سیلوی G/H است. اگر شرط نرمال بودن H در G را حذف کنیم، آیا $H \cap P$ یک p- زیر گروه سیلوی H خواهد شد؟

۲-۱۹- ثابت کنید یک p- زیر گروه نرمال در گروه متناهی G مشمول در هر p- زیر گروه سیلو است. فرض کنید برای هر عدد اول p که $|G|$ را عاد کند، G دارای یک p- زیر گروه سیلوی نرمال باشد. ثابت کنید G حاصلضرب مستقیم p- زیر گروه های سیلو است.

۲-۲۰- ساختار p- زیر گروه های سیلو A_5 را مشخص نمایید و برای هر عدد اول p، تعداد p- زیرگروه های سیلوی آن را بیابید.

۲-۲۱- فرض کنید G یک گروه متناهی و K زیرگروهی نرمال از آن باشد. فرض کنید که P یک p- زیرگروه سیلوی K باشد. نشان دهید برای کلیه عناصر $g \in G$، $g^{-1}Pg$ یک p- زیر گروه سیلوی K است. از این واقعیت که این دو p- زیر گروه سیلو در

K مزدوجند استفاده کرده و نتیجه بگیرید که $G = N(P)K$. بعلاوه نتیجه بگیرید که اگر $\overline{P}$ یک p - زیرگروه سیلوی G باشد و $N(\overline{P}) \leq H \leq G$، آنگاه $N(H) = H$.

۲-۲۲- فرض کنید G یک گروه متناهی با این خاصیت باشد که هر زیرگروه سیلوی آن دوری است . نشان دهید که هر زیرگروه G دارای این خاصیت است . ثابت کنید که هر دو p - زیر گروه G از یک مرتبه مزدوجند . فرض کنید H و N زیر گروه های G بوده و N نرمال در G باشد . نشان دهید که

$$|N \cap H| = h.c.f.(|N|, |H|)$$

$$|HN| = l.c.m.(|N|, |H|)$$

نتیجه بگیرید که هر زیر گروه نرمال G مشخصه است .

۲-۲۳- از قضایای سیلو استفاده کرده و ثابت کنید که

(a) هر گروه از مرتبه ۲۰۰ دارای یک ۵ - زیر گروه سیلو نرمال است ؛

(b) گروه ساده از مرتبه ۴۰ وجود ندارد ؛

(c) گروه ساده از مرتبه ۵۶ وجود ندارد ؛

(d) هر گروه از مرتبه ۳۵ دوری است .

۲-۲۴- از قضایای سیلو استفاده و ثابت کنید که

(a) هر گروه از مرتبه ۸۵ دوری است ؛

(b) اگر p و q اعداد اول متمایز باشند ، آنگاه گروه از مرتبه p^2q ساده نمی باشد.

۲-۲۵- G را گروهی از مرتبه pq که p و q اعداد اول متمایزند و $q \not\equiv 1$ (هنگ p) در نظر بگیرید . ثابت کنید که G دارای یک p - زیرگروه سیلوی نرمال است . نشان دهید که این نتیجه در حالت $q \equiv 1$ (هنگ p) درست نمی باشد. نشان دهید که اگر $|G| = pq$ جاییکه p و q اعداد اول متمایزند، آنگاه G ساده نمی باشد . بعلاوه نتیجه بگیرید که اگر p و q اعداد اول متمایز باشند که $q \not\equiv 1$ (هنگ p) و (هنگ q) $p \not\equiv 1$ ، آنگاه هر گروه از مرتبه pq دوری است .

۲-۲۶- فرض کنید G یک گروه با این خاصیت باشد که هر گاه n ، $|G|$ را عاد کند ، آنگاه G زیر گروهی از مرتبه n دارد . آیا هر زیر گروه G این خاصیت را دارد ؟

۲-۲۷- فرض کنید G یک گروه متناهی و P یک p - گروه سیلوی آن باشد . فرض کنید $x , y \in Z(P)$ در G مزدوج باشند . ثابت کنید x و y در $N(P)$ مزدوجند .

۲-۲۸- فرض کنید G یک گروه و H زیرگروهی از اندیس n در G باشد . نشان دهید که بزرگترین زیر گروه نرمال K از G و مشمول در Hوجود دارد به طوری که G/K یکریخت با زیر گروهی از S_n است .

نتیجه بگیرید که اگر G گروهی ساده از مرتبه ۶۰ باشد (دقیقا یک زیر گروه اینچنینی یعنی A_5 وجود دارد ، اما خواسته ما این واقعیت نمی باشد)، آنگاه G دارای زیرگروهی از مرتبه ۱۵ ، ۲۰ یا ۳۰ نمی باشد .

۲-۲۹- فرض کنید G گروهی ساده بوده و $|G| = ۱۶۸$. ثابت کنید که G دارای ۸ ، ۷- زیر گروه سیلو است . نشان دهید که اگر P یک ۷- زیر گروه سیلوی G باشد، آنگاه $|N_G(P)| = ۲۱$. نتیجه بگیرید که G شامل یک زیر گروه از مرتبه ۱۴ نمی باشد .

فصل ۳

سری ها

برای زیر گروه های A و B از G ، زیر گروه

$$[A,B]=\langle\, [a,b] \mid a\in A ,b\in B \,\rangle$$

را در نظر بگیرید . در حالت خاص $[G\,,\,G]$ زیر گروه مشتق G است . سری مشتق با خارج قسمتهای (عامل های) آبلی به صورت زیر تعریف می شود

$$G^{(\cdot)}=G \quad \text{و} \quad (\forall i\geq 1)\ \ G^{i} =[G^{(i-1)},G^{(i-1)}]$$

G را حلپذیر از طول مشتق n نامیم ، هرگاه n کوچکترین عدد صحیح باشد که $G^{(n)}=\{1\}$. مشابها سری های مرکزی به طور سریع نزولی و سوی های مرکزی به طور سریع صعودی، سری‌های مرکزی پایینی وسری های مرکزی بالایی هستندکه بترتیب به صورت زیرتعریف می‌شوند

$$\Gamma_1(G)=G \quad \text{و} \quad (\forall i\geq 1)\ \ \Gamma_{i+1}(G)=[\Gamma_i(G)\,,\,G]،$$

$$Z_{\cdot}=\{1\} \quad \text{و} \quad (\forall i\geq 1)\ \ {Z_i}/{Z_{i-1}}=Z({G}/{Z_{i-1}}).$$

سری مرکزی پایینی در تعداد متناهی مرحله به $\{1\}$ می رسد اگر و فقط اگر سری مرکزی بالایی در تعداد متناهی مرحله به G برسد . در این حالت G را پوچتوان می نامیم و تعداد عاملها در هر کدام ازسری ها را کلاس G می نامیم،

هر زیر گروه H از گروه پوچ توان G زیر نرمال است ، بدین معنی که یک سری

$$H = H_0 \lhd H_1 \lhd H_2 \ldots \lhd H_r = G$$

وجود دارد .

آخرین نوع سری که ما فرض می کنیم خواننده با آن آشنایی دارد سری ترکیبی نام دارد . آن یک سری زیرنرمال از $\{1\}$ بوده به طوری که هیچ جمله ای را به طور محض نمی‌توان در بین جملات آن درج کرد .

۳-۱- فرض کنید که G یک گروه باشد . نتایج زیر را درباره جابجا گرها ثابت کنید .

(a) اگر $S \leq G$ و $T \leq G$ ، آنگاه $[S,T]=[T,S]$ ؛

(b) اگر $H \lhd G$ و $K \lhd G$ ، آنگاه $[H,K] \leq H \cap K$ هرگاه $H \cap K = \{1\}$.

این بیانگر چیست ؟

(c) اگر $x,y \in G$ ، آنگاه

$$[xy,z] = y^{-1}[x,z]y[y,z]$$

نتیجه بگیرید که اگر H ، K و L زیرگروه های نرمال G باشند ، آنگاه

$$[HL,K]=[H,K][L,K]$$

(d) تعریف کنید $[a,b,c]=[[a,b],c]$. ثابت کنید که

$$[a,bc]=[a,c][a,b][a,b,c]$$

و همچنین

$$[ab,c]=[a,c][a,c,b][b,c]$$

۳-۲- سری های مرکزی بالایی و پایینی $G=Q_8 \times C_2$ را یافته و نشان دهید که آنها یکسان نیستند . با این وجود نشان دهید که سری های مرکزی بالایی و پایینی Q_8 یکسان هستند .

۳-۳- ثابت کنید که اگر G توسط زیر گروه های زیر نرمال آبلی خودش تولید شود ، آنگاه هر گروه خارج قسمتی G توسط زیرگروهای زیرنرمال آبلی خودش تولید می شود .

نشان دهید که هرزیرگروه یک گروه پوچتوان زیرنرمال است . نتیجه بگیرید که هر گروه پوچتوان توسط زیرگروه های زیر نرمال آبلی خودش تولید می شود .

۴-۳- اگر A و B و C زیر گروه های گروه G بوده که $B \lhd A$ ، ثابت کنید که

$$\frac{A\cap B}{B\cap C}\simeq\frac{B(A\cap C)}{B}$$

بعلاوه اگر $C \lhd G$ ، ثابت کنید که

$$\frac{AC}{BC}\simeq\frac{A}{B(A\cap C)}$$

از نتیجه فوق استفاده کنید و نشان دهید که اگر H گروه حلپذیر باشد ، آنگاه هر زیر گروه و هر گروه خارج قسمتی آن حلپذیر است .

ثابت کنید که اگر K یک گروه بوده به طوری که $H \lhd K$ و هردو H و K/H حلپذیر باشند ، آنگاه K حلپذیر است .

فرض کنید G یک گروه با زیر گروه های زیر نرمال A و B باشد به طوری که G/A و G/B حلپذیر باشند . نشان دهید که $A/A\cap B$ حلپذیر است و نتیجه بگیرید که $G/A\cap B$ نیز حلپذیر است .

۵-۳- کدامیک از گزاره های زیر درست است ؟ اثباتی برای آنهایی که درست می باشند ارائه دهید و برای آن دسته که نادرستند یک مثال نقض بیاورید .

(a) فرض کنید G یک گروه و H و K زیر گروه های نرمال و حلپذیر G باشند .در این صورت HK زیر گروه نرمال و حلپذیر G است ؛

(b) فرض کنید G یک گروه و H و K زیر گروه های نرمال و آبلی G باشند . در این صورت HK زیر گروه نرمال و آبلی G است ؛

(c) فرض کنید G یک گروه و H و K، p - زیر گروه های نرمال G باشند . در این صورت HK یک p - زیرگروه نرمال است .

۶-۳- فرض کنید G یک گروه متناهی پوچتوان غیر بدیهی باشد . با استفاده از استقراء روی $|G|$ ثابت کنید که هر زیرگروه محض G زیر مجموعه سره نرمال ساز خودش است . نتیجه بگیرید که هر زیرگروه سیلوی G نرمال است . (راهنمایی : از سوال ۲۱-۲ استفاده کنید) .

۷-۳- فرض کنیدکه G یک گروه با خواص زیر باشد

(a) G حلپذیر از رده ۳ است ؛

(b) $|G|=16$ ؛

ثابت کنید G شامل یک زیرگروه منحصر به فرد دوری از مرتبه ۸ است . یک مثال از چنین گروهی ارائه دهید .

۸-۳- گروه G را پوچتوان مانده ای گوییم ، اگر دارای یک سری از زیر گروه های

$$G=H_1\geq H_2\geq\cdots\geq H_i\geq\cdots$$

باشد به طوری که $[H_i,G]\leq H_{i+1}$ و $\bigcap_{i=1}^{\infty}H_i=\{1\}$.

نشان دهید که یک گروه متناهی، پوچتوان مانده ای است اگر و فقط اگر پوچ توان باشد . مثالی از یک گروه پوچ توان مانده ای ارائه دهید که پوچتوان نباشد .

ثابت کنید که هر زیر گروه یک گروه پوچتوان مانده ای ، پوچتوان مانده ای است . نشان دهید که خارج قسمت یک گروه پوچتوان مانده ای لزوما پوچتوان مانده ای نمی باشد .

۹-۳- تساوی $[xy,z]=y^{-1}[x,z]y[y,z]$ را ثابت کنید . سپس نشان دهید که اگر A زیر گروهی از G باشد ، آنگاه $[G,A]$ در G نرمال است .

ثابت کنید اگر G گروهی باشد که دارای زیر گروه غیر بدیهی A بوده به طوری که $A=[A,G]$ ، آنگاه G نمی تواند پوچ توان باشد .

یک زیر گروه مینیمال نرمال یک گروه ، یک زیر گروه غیر بدیهی نرمال بوده به طوری که به طور محض شامل زیر گروه غیر بدیهی نرمال از گروه نباشد. با استفاده از نتیجه فوق نتیجه بگیرید که هر زیرگروه نرمال از یک گروه پوچتوان مشمول در مرکز گروه است .

۱۰-۳- فرض کنید p یک عدد اول باشد . ثابت کنید هر p - گروه متناهی پوچ توان است .
قرار دهید $G = H \times K$ ، جائیکه $|H| = p^2$ و $|K| = p^3$. ثابت کنید که اگر G غیر آبلی باشد ، آنگاه G پوچ توان از رده ۲ بوده و $|Z(G)| = p^3$.

۱۱-۳- G را گروه ضربی $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| a,b,c \in Z \right\}$ بگیرید . مرکز G و گروه مشتق G را بیابید . ثابت کنید G پوچ توان است و سری های مرکزی بالایی و پایینی آن یکسان هستند . t_{12} و t_{13} و t_{23} را بترتیب ماتریس های

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بگیرید . ثابت کنید که

$$G = \langle t_{12}, t_{13}, t_{23} \rangle .$$

یک سری زیر نرمال برای هر یک از زیرگروه های $\langle t_{12} \rangle$ ، $\langle t_{13} \rangle$ و $\langle t_{23} \rangle$ بیابید .

۱۲-۳- فرض کنید X و Y و Z زیرگروه های ، گروه G بوده و قرار دهید

$$A = [X, Y, Z] \quad , \quad B = [Y, Z, X] \quad , \quad C = [Z, X, Y]$$

ثابت کنید که اگر N زیرگروه نرمال G باشد به طوری که شامل دو تا از زیرگروه های A و B و C باشد ، آنگاه N شامل سومی است .
[راهنمایی: از تساوی $[x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x = 1$ استفاده کنید]
نتیجه بگیرید که اگر G دارای زیرگروه های H و K باشد به طوری که

$$H = H_0 \geq H_1 \geq \cdots$$

یک سری از زیر گروه های نرمال H بوده که برای هر $i \geq 0$ ، $[H_i, K] \leq H_{i+1}$ ، آنگاه برای هر $n \in N$ ، $[H_i, \Gamma_n(K)] \leq H_{i+n}$ ، که در آن $\Gamma_n(K)$ ، n امین جمله سری مرکزی پایینی K است .

فرض کنید که G دارای سری مرکزی پایینی $G = \Gamma_1 \geq \Gamma_2 \geq \cdots$ و سری مرکزی بالایی $\{1\} = Z_0 \leq Z_1 \leq \cdots$ و سری مشتق $G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq \ldots$ باشد . ثابت کنید که

(a) $[\Gamma_m, \Gamma_n] \leq \Gamma_{m+n}$ ؛

(b) $[Z_m, \Gamma_n] \leq Z_{m-n}$ ؛

(c) $[Z_m, \Gamma_m] = \{1\}$ ؛

(d) $G^{(r)} \leq \Gamma_{2^r}$ ؛

(e) اگر $G = G^{(1)}$ ، آنگاه $Z_1 = Z_2$.

۱۳-۳- فرض کنید G یک گروه بوده و $\left|G/Z(G)\right| = p^n$. $x \in Z_2(G)$ و $N = \langle [x,g] \mid g \in G \rangle$ را در نظر بگیرید . ثابت کنید که $|N| \leq p^n$. از استقراء استفاده و ثابت کنید که G' یک p- گروه از مرتبه حداکثر $p^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ است .

۱۴-۳- G را یک گروه متناهی و Φ را اشتراک زیر گروه های ماکسیمال G بگیرید . ثابت کنبد که اگر H زیر گروهی از G باشد که $G = \Phi H$ ، آنگاه $H = G$.

فرض کنید T یک p- زیر گروه سیلوی Φ بوده و $g \in G$. با در نظر گرفتن T و T^g ، ثابت کنید که $g \in N_G(T)\Phi$. نتیجه بگیرید که هر p- زیر گروه سیلوی Φ نرمال است .

۱۵-۳- یک گروه G در شرط ماکزیمال برای زیرگروه ها صدق می کند ،هرگاه برای هر زنجیر از زیر گروه ها مانند

$$H_1 \leq H_2 \leq \cdots \leq H_n \leq \cdots$$

عدد صحیح n وجود داشته باشد که $H_m = H_n$ $(\forall m \geq n)$.

ثابت کنید یک گروه G در شرط ماکزیمال برای زیر گروه ها صدق می کند اگر و فقط اگر هر زیر گروه از G متناهی - مولد باشد .

یک گروه G را چند دوری نامیم ، اگر G دارای یک سری

$$G = H_0 \geq H_1 \geq \cdots \geq H_r = \{1\}$$

باشد به گونه ای که برای $i = 1,\ldots,r$ ، $H_i \lhd H_{i-1}$ و H_{i-1}/H_i دوری باشند .

ثابت کنید که گروه G چند دوری است اگر و فقط اگر G حلپذیر بوده و در شرط ماکزیمال برای زیر گروه ها صدق کند.

۳-۱۶- فرض کنید A و B زیر گروه های آبلی گروه G بوده به طوری که $G = AB$. با استفاده از رابطه

$$[xy,z] = y^{-1}[x,z]y[y,z]$$

ثابت کنید که اگر $a_1 , a_2 \in A$ و $b_1 , b_2 \in B$ ، آنگاه

$$(a_2b_2)^{-1}[a_1 ,b_1]a_2b_2 = (b_2a_2)^{-1}[a_1 ,b_1]b_2a_2 .$$

نتیجه بگیرید که $[A,B]$ آبلی است. ثابت کنید که G حلپذیر ازطول مشتق حداکثر ۲ است.

۳-۱۷- فرض کنید G یک گروه متناهی پوچ توان باشد. ثابت کنید هر زیرگروه ماکزیمال G نرمال است. S را یک p- زیر گروه سیلوی G بگیرید و فرض کنید $N_G(S)$ به طور محض مشمول در G باشد. M را یک زیر گروه ماکسیمال G شامل $N_G(S)$ بگیرید. نشان دهید که اگر $g \in G$ ، آنگاه S و $g^{-1}Sg$ ، p- زیر گروه های سیلوی M هستند و تناقض $g \in M$ را به دست آورید. بنابراین نتیجه بگیرید که $N_G(S) = G$ و اینکه G دقیقا برای هر شمارنده اول p از مرتبه اش دقیقا یک p- زیرگروه سیلو دارد. همچنین ثابت کنید که G حاصضرب مستقیم زیر گروه های سیلوی خودش می باشد.

۳-۱۸- فرض کنید M یک زیر گروه ماکسیمال گروه متناهی و حل پذیر G باشد. K را اشتراک کلیه زیر گروه های G که مزدوج M هستند بگیرید. ثابت کنید که K بزرگترین زیر گروه نرمال G مشمول در M است.

H/K را یک زیر گروه نرمال G/K بگیرید. ثابت کنید که $G = HM$ و نتیجه بگیرید که $H \cap M = K$.

ثابت کنید که اندیس M در G برابر با مرتبه H/K است.

۳-۱۹- گروه G را متاسیکلیک گوییم، اگر دارای یک زیر گروه نرمال N باشد به طوری که N و G/N دوری باشند.

ثابت کنید که هر زیر گروه و هر گروه خارج قسمتی یک گروه متاسیکلیک نیز یک گروه متاسیکلیک می باشد. نشان دهید که گروهی که توسط

$$\left\langle a,b \,\middle|\, a^2 = 1, b^8 = 1, aba = b^7 \right\rangle$$

توصیف می شود یک گروه متاسیکلیک است .

۲۰-۳- F را یک میدان بگیرید . اگر $a \in F$ و $1 \leq i \leq j \leq n$ ، $t_{ij}(a)$ را ماتریس غیر همانی در $GL(n,F)$ بگیرید که مولفه (i,j) آن a است . قرار دهید

$$T_n(F) = \left\langle t_{ij}(a) \,\middle|\, 1 \leq i \leq j \leq n, a \in F \right\rangle$$

ثابت کنید که $T_n(F)$ زیرگروهی از $GL(n,F)$ است که شامل کلیه ماتریس های $n \times n$ بالا مثلثی روی F به فرم

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

می باشد . برای $1 \leq k \leq n-1$ ، قرار دهید $H_k = \left\langle t_{ij}(a) \,\middle|\, j-i \geq k \,, a \in F \right\rangle$.

ثابت کنید که $T_n(F) = H_1 \geq H_2 \geq \cdots \geq H_{n-1} \geq \{1\}$ یک سری مرکزی برای $T_n(F)$ است . اگر برای عدد اولی مانند p ، $F = Z_p$ ، نشان دهید که $T_n(F)$ یک p - زیرگروه سیلوی $SL(n,F)$ است .

۲۱-۳- نشان دهید که گروه های S_3 و S_4 و S_5 دارای سری ترکیبی منحصر به فردی هستند . برای هر کدام از این گروه ها یک سری ترکیبی بیابید . درباره سری ترکیبی S_n هرگاه $n \geq 5$ چه می توان گفت ؟

۲۲-۳- G را گروهی از مرتبه $q^r p^s$ بگیرید که در آن p و q اعداد متمایزند . فرض کنید G دارای سری های ترکیبی

$$G = A_1 > A_2 > \cdots > A_{r+s+1} = \{1\}$$

$$G = B_1 > B_2 > \cdots > B_{r+s+1} = \{1\}$$

باشد به طوری که $|A_{r+1}| = q^s$ و $|B_{s+1}| = p^r$. نشان دهید که A_{r+1} و B_{s+1} زیر گروه‌های نرمال G بوده و نتیجه بگیرید که G حاصلضرب مستقیم این زیر گروه‌هاست.

فصل ٤

نمایش

گروه آبلی G با نمایش

$$\left\langle x_1,\ldots,x_n \;\middle|\; r_1=1, r_2=1,\ldots,r_m=1 \right\rangle$$

داده شده است . ماتریس روابط این نمایش یک ماتریس $m\times n$ ، $A=\left[a_{ij}\right]$ می باشد که در آن a_{ij} جمع توان های x_j در رابطه $r_i=1$ است . A را می توان با اعمال سطری و ستونی مقدماتی که ضرب‌ها فقط در اعداد صحیح می‌باشند، به ماتریس قطری $D=diag\{d_1,\ldots,d_t\}$ که در آن $t=\min\{n,m\}$ است تبدیل کرد . این معادل با یافتن ماتریس های وارون پذیر P و Q است که $PAQ^{-1}=D$. می توان فرض کرد که $d_k,\ldots,d_2,d_1$ غیر صفر بوده و $d_t,\ldots,d_{k+1}$ صفر هستند . بنابراین اگر C حاصلضرب مستقیم $n-k$ کپی از C_∞ باشد ، آنگاه

$$G\simeq C_{d_1}\times C_{d_2}\times\cdots\times C_{d_k}\times C \quad .$$

اگر G یک گروه باشد ، آنگاه G/G' آبلی است . G را تام گویند ، هرگاه G/G' گروه بدیهی باشد . اگر G دارای نمایش $\langle X\mid R\rangle$ باشد ، آنگاه G/G' دارای نمایش $\langle X\mid R,C\rangle$ است که در آن

$$C=\left\{[x_i,x_j] \;\middle|\; x_i,x_j\in X\right\}$$

این حالت خاصی از قضیه ون دایک (Von Dyck's) است که نشان می دهد که اضافه کردن روابط به‌نمایش‌یک گروه مارا به گروه‌خارج قسمتی هدایت می کند. در واقع قضیه ون دایک پیشرو روشی است که نشان می‌دهدیک نمایش داده شده چگونه یک گروه خاص را بیان می کند.

۱-۴- فرض کنید G گروه آبلی

$$\langle a,b,c \mid a^{37}b^{27}c^{47} = a^{52}b^{37}c^{67} = a^{59}b^{44}c^{74} = 1,\ ab = ba, ac = ca, cb = bc \rangle$$

باشد. G را به عنوان حاصلضربی مستقیم از گروه های دوری نمایش دهید.
با اضافه کردن رابطه $a^3b^2c^4$ به دیگر روابط G نشان دهید که $a^3b^2c^4$ عنصر همانی در G نمی باشد. نتیجه بگیرید که $a^3b^2c^4$ عنصری از مرتبه ۵ در G است.
یک عنصر مرتبه ۷ و یک عنصر مرتبه ۳۵ را در G بیابید.

۲-۴- هر کدام از گروه های زیر را به صورت حاصلضربی مستقیم از گروه های دوری بنویسید.

(a) $\langle a,b,c \mid a^2b^3c^6 = a^4b^9c^4 = 1,\ ab = ba,\ bc = cb,\ ca = ac \rangle$ ؛

(b) $\langle a,b,c \mid a^2b^3c^6 = a^4b^1c^4 = a^3b^3c^2 = 1,\ ab = ba,\ bc = cb,\ ca = ac \rangle$.

۳-۴- فرض کنید G یک گروه با نمایش

$$G = \langle a,b \mid abab^2 = 1 \rangle$$

باشد. نشان دهید که G آبلی است. ساختار G را شرح دهید.

۴-۴- فرض کنید G یک گروه آبلی باشد. نشان دهید که عناصر مرتبه متناهی G تشکیل یک زیر گروه T می دهند. فرض کنید Q شامل عناصر مرتبه نامتناهی به همراه عنصر همانی باشد. شرط لازم و کافی بیابید که Q یک زیر گروه G شود.
Π را مجموعه اعداد اول گرفته و G را به صورت زیر تعریف می کنیم
قرار دهید $X = \bigcup_{p\in\Pi} Z_p$ و G را مجموعه نگاشت های $f:\Pi \to X$ بگیرید به طوری که برای هر $p \in \Pi$ ، $f(p) \in Z_p$. برای $f,g \in G$ ، $f+g:\Pi \to Z$ را به صورت زیر تعریف کنید

$$(\forall p \in \Pi) \quad (f+g)(p) = f(p) + g(p)$$

نشان دهید که G یک گروه آبلی است که برای هر عدد اول شامل عنصری از مرتبه این عدد اول است و همچنین عناصری از مرتبه نامتناهی دارد. ثابت کنید که زیر گروه T در این حالت شامل کلیه نگاشت های $f \in G$ است با این خاصیت که فقط تعداد متناهی $p \in \Pi$ وجود دارد که $f(p) \neq 0$.

۴-۵- G را گروهی با نمایش

$$G=\langle\, a,b,c \mid a^n b^m c^m = a^m b^n c^m = a^m b^m c^n = 1 \,\rangle$$

بگیرید. ثابت کنید G/G' نامتناهی است اگر و فقط اگر $n = m$ یا $2m = -n$.
بعلاوه نشان دهید که G تام است اگر و فقط اگر G گروه بدیهی باشد.

۴-۶- اگر n عدد صحیح باشد که نسبت به ۶ اول است نشان دهید که عدد صحیح k چنان وجود دارد که گروه

$$\langle x, y \mid x^2 = (xy)^3 ,\left(xy^4 xy^{\frac{1}{2}(n+1)} \right)^2 y^n x^{2k} = 1 \rangle$$

تام است.

۴-۷- هر گاه n عدد صحیح فرد بوده و G به صورت

$$\langle a,b \mid a^n = 1, b^2 = (ab)^3 ,\left(a^{\frac{1}{2}(n+1)} ba^4 b \right)^2 = 1 \rangle$$

باشد، G/G' را بیابید.

۴-۸- G را گروهی بگیرید که توسط R, S, T, U, V, W و X همراه با روابط

$$\begin{aligned}
&R^x = S^a T^b U^c \quad ,\\
&SVR^y = 1 \quad ,\\
&V^y T^a U^d = 1 \quad ,\\
&T^{-1} W V^z = 1 \quad ,\\
&W^{-z} U^a = 1 \quad ,\\
&U X^{-1} W^t = 1 \quad ,\\
&X^t = 1 \quad ,
\end{aligned}$$

تولید شود. نمایش G را با مولدهای R ، S ، T و V بیابید.

نشان دهید که متناهی بودن G/G' تنها بستگی به x ، y ، z ، t و a دارد . شرایط دقیقی برای آنکه G/G' آبلی باشد ارائه دهید . مقادیر a ، b ، c ، d ، x ، y ، z و t را بگونه ای بیابید که

(a) G تام باشد ،

(b) $G/G' \simeq C_{16}$ ،

(c) $G/G' \simeq C_2 \times C_4 \times C_8$.

۴-۹- G را گروهی با نمایش

$$< a_1, \dots, a_{2m} \mid a_i = a_{i+2}a_{i+m+1}, a_{i+2} = a_{i+1}a_i \ (i = 1, \dots, 2m) >$$

بگیرید که در آن اندیسها برابر باقیمانده به هنگ $2m$ (که بین ۱ تا $2m$ قرار دارند) می باشند . ثابت کنید که $G =< a_1, a_2 >$.

دنباله فیبوناچی به صورت

$$f_1 = 1, f_2 = 1 \text{ ، } f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \qquad (\forall n \geq 1)$$

تعریف می شود . ثابت کنید که

$$(\forall n \geq 2) \ \ f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$$

اگر $g_n = f_{n-1} + f_{n+1}$ نشان دهید که

$$\left|G/G'\right| = \begin{cases} 2 + g_m & \text{اگر } m \text{ زوج باشد} \\ g_m & \text{اگر } m \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

۴-۱۰- فرض کنید G توسط

$$G =< a,b \mid a^{2^{n-1}} = 1, bab^{-1} = a^{-1}, \ b^2 = a^{2^{n-2}} >$$

و H توسط

$$H =< a,b \mid a^{2^{n-2}} = b^2 = (ab)^2 >$$

تعریف شود . با نشان دادن اینکه روابط G روابط H را بدست می دهد و برعکس ، ثابت کنید که $G \simeq H$.

۱۱-۴- نشان دهید که گروههای :

$$G = < a,b \mid a^{۴} = ۱,\ a^{۲} = b^{۲},\ ab = ba^{۳} >$$

$$H = < a,b \mid a = bab, b = aba >$$

$$K = < a,b,c \mid ab = c,\ bc = a, ca = b >$$

یکریخت هستند . نشان دهید که :

$$a = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad b = \begin{bmatrix} ۰ & i \\ i & ۰ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad c = \begin{bmatrix} i & ۰ \\ ۰ & -i \end{bmatrix}$$

در نمایش های فوق صدق می کنند و گروه ضربی تولید شده توسط a و b گروه کواترنیون است . نتیجه بگیرید که کلیه نمایش های فوق نمایش هایی از گروه کواترنیون هستند .

۱۲-۴- فرض کنید G یک گروه بوده و $G = < a_{۱},\dots,a_n >$. اگر $a_n \in G' \cap Z(G)$ ، ثابت کنید که $G = < a_{۱},\dots,a_{n-۱} >$.

نتیجه بگیرید که اگر $H/A \simeq Q_{۸}$ که $A \leq Z(H) \cap H'$ ، آنگاه $H \simeq Q_{۸}$.

۱۳-۴- G را گروهی با نمایش

$$G = < x, y \mid x^{۲}y = y^{۲}x,\ x^{۸} = ۱ >$$

بگیرید و ثابت کنید که $(xy)^{۴} = ۱$ و $y^{۸} = ۱$.

۱۴-۴- فرض کنید G یک گروه با نمایش

$$G = < a,b \mid a^{۷} = (a^{۲}b)^{۳} = (a^{۳}b)^{۲} = (ab^{۵})^{۲} = ۱ >$$

باشد . ثابت کنید که G همچنین دارای نمایش به صورت

$$< x, y \mid x^{۲} = y^{۳} = (xy)^{۷} = ((y^{-۱}xyx)^{۴}y^{-۱}x)^{۲} = ۱ >$$

است .

۱۵-۴- G را گروهی با نمایش

$$< a,b,c,d,e \mid ab=c,\ bc=d,\ cd=e,\ de=a,\ ea=b >$$

باشد . با حذف e,d,c نشان دهید که

(۱) $a = babab^{2}ab$ ،

(۲) $b = ab^{2}aba$.

با نمایش a در عبارت (۲) به وسیله نمایش (۱) ، نشان دهید که $b^{5} = a^{-2}$. نتیجه بگیرید که با ضرب a از راست در (۱) و استفاده از (۲) داریم $a = b^{-8}$. نتیجه بگیرید که $G \simeq C_{11}$.

۱۶-۴- نشان دهید که گروه $G =< a,b \mid ab = b^{2}a,\ ba = a^{2}b >$ گروه بدیهی است .
به علاوه به طور کلی گروه $G_n =< a,b \mid ab^{n} = b^{n+1}a,\ ba^{n} = a^{n+1}b >$ را در نظر بگیرید . با استقرا روی i ثابت کنید

$$a^{i}b^{n^{i}}a^{-i} = b^{(n+1)^{i}}$$

با استفاده ازروابط و قراردادن $i=n$ و $i=n+1$ نتیجه بگیرید که G_n گروه بدیهی است.

۱۷-۴- $SL(2,7)$ را گروه ماتریس های 2×2 با دترمینان یک و درایه در Z_7 بگیرید. قرار دهید

$$PSL(2,7) = \frac{SL(2,7)}{\mathrm{Z}(SL(2,7))}.$$

$\varphi : SL(2,7) \to PSL(2,7)$ را نگاشت طبیعی گرفته و قرار دهید

$$a = \varphi\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{و} \qquad b = \varphi\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

نشان دهید که $< a,b >$ گروه چند وجهی مرتبه ۸ است .

۱۸-۴- $GL(2,3)$ را گروه ماتریس های 2×2 نامنفرد با درایه در Z_3 بگیرید. نشان دهید که $|GL(2,3)| = 48$. ثابت کنید $SL(2,3)$ گروه مشتق $GL(2,3)$ است .

گروه کواترنیون Q_8 نمایشی به صورت

$$Q_8 = < a,b,c \mid ab = c, bc = a, ca = b >$$

دارد . از این نمایش به وضوح مشخص می شود که Q_8 یک خودریختی ν از مرتبه ۳ دارد که جایگشتی از a,b,c به‌طور دوری است . H را یک توسیع Q_8 بوسیله خودریختی ν از مرتبه ۳ بگیرید . نشان دهید H یکریخت با $SL(2,3)$ است . بنابراین نشان دهید که $GL(2,3)$ دارای مشتق به طول ۴ است .

۱۹-۴- فرض کنید H یک گروه با نمایش

$$< a,b \mid a^2 = b^3 = 1,\ (ab)^n = (ab^{-1}ab)^k >$$

باشد . نشان دهید که H توسط ab , $ab^{-1}ab$ تولید می شود . نتیجه بگیرید که $<(ab)^n>$ مشمول در مرکز H است . همچنین ثابت کنید که $<(ab)^n>$ مشمول در گروه مشتق H است .

۲۰-۴- فرض کنید G یک گروه با دو مولد a,b با روابط $x^3 = 1$ برای هر $x \in G$ باشد . نشان دهید که $[a,b]$ به مرکز G تعلق دارد . نتیجه بگیرید که G متناهی است .

۲۱-۴- برای هر عدد صحیح a,b, c گروه G را به صورت

$$G = < x, y \mid x^2 = 1,\ xy^a xy^b xy^c = 1 >$$

تعریف کنید . ثابت کنید که $y^a(xy^{b-c}x)y^{-b} = xy^{a-c}x$ و دو رابطه مشابه که a,b,c به طور دوری جایگشت می کنند را بیابید .

۲۲-۴- فرض کنید G گروه

$$< x,t \mid xt^{m+1} = t^2x^2,\ xt^2xtx^2t = 1 >$$

باشد. ثابت کنید که

(a) $xt^{2m+2}x^{-1} = tx^{-2}t^{-1}$ ؛

(b) $[t^2, xtx] = 1$ ؛

(c) $xt^2x^{-1} = t^{2m+1}x^{-2}t^{-1}$ ؛

(d) $xt^{2m}x^{-1}=t^{-2m}$ ؛

نتیجه بگیرید که $t^{2m}\in Z(G)$ و $t^{4m}=1$.

۲۳-۴- $SL(2,Z)$ را گروه ماتریس‌های 2×2 با دترمینان یک و درایه در Z بگیرید قرار دهید.

$$s=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad t=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

ثابت کنید که اگر $\begin{bmatrix}a & b\\ c & 0\end{bmatrix}\in SL(2,Z)$ ، آنگاه $\begin{bmatrix}a & b\\ c & 0\end{bmatrix}\in\langle s,t\rangle$.

به وسیله فرضیات استقرا ثابت کنید که $\begin{bmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{bmatrix}\in SL(2,Z)$ با $|d|<|d'|$ ایجاب می کند که $\begin{bmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{bmatrix}\in\langle s,t\rangle$. اگر

$$m=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in SL(2,Z)$$

با در نظر گرفتن $ts^n m$ جائیکه $|b+nd|<|d|$ ، ثابت کنید که $m\in\langle s,t\rangle$.نتیجه بگیرید که $SL(2,Z)=\langle s,t\rangle$.

حال قرار دهید $u=st$ و $\bar{t},\bar{u}$ را تصویرهای u و t تحت نگاشت طبیعی $\varphi:SL(2,Z)\to PS(2,Z)$ بگیرید . از نتایج فوق استفاده کرده و نشان دهید که $PSL(2,Z)=\langle\bar{u},\bar{t}\rangle$. همچنین نشان دهید که $\bar{u}^3=\bar{t}^2=\bar{I}$ عنصر همانی $PSL(2,Z)$ خواهند شد . فرض کنید بعضی از کلمات

$$\ldots\bar{u}^{\pm 1}\bar{t}\bar{u}^{\pm 1}\bar{t}\bar{u}^{\pm 1}\bar{t}\ldots$$

در صورت امکان برابر $\bar{I}$ در $PSL(2,Z)$ باشند . نشان دهید یک کلمه به فرم

$$w=u^{\pm 1}tu^{\pm 1}\ldots tu^{\pm 1}t$$

وجود دارد که برابر با $\pm I$ در $SL(2,Z)$ است و با در نظر گرفتن رد w یک تناقض بدست آورید . در پایان نشان دهید که

$$PSL(2,Z)\simeq\langle a,b\mid a^2=b^3=1\rangle \;\cdot$$

حل مسائل فصل ۱

۱-۱- فرض کنید G توسط مجموعه $\{Hx_\alpha | \alpha \in A\}$ از همدسته های H افراز و H توسط مجموعه $\{Ky_\beta | \beta \in B\}$ از همدسته های K افراز شود . $g \in G$ را در نظر بگیرید . بنابراین برای $\alpha \in A$ای ، $g \in Hx_\alpha$ و بنابراین برای $h \in H$ای (و منحصر به فرد) $g = hx_\alpha$. اما $h \in \mathrm{K}y_\beta$ برای $\beta \in \mathrm{B}$ای و بنابراین برای $k \in K$ای ، $g = ky_\beta x_\alpha$. در این صورت مشاهده می‌کنیم که هر عنصر G برای $\beta \in \mathrm{B}$ای و $\alpha \in A$ای به یک همدسته $Ky_\beta x_\alpha$ تعلق دارد. حال نتیجه از این بدست می‌آید که اگر $Ky_\beta x_\alpha = Ky_{\beta'} x_{\alpha'}$، آنگاه چون طرف سمت چپ مشمول در همدسته Hx_α و طرف سمت راست مشمول در همدسته $Hx_{\alpha'}$ است لزوما $x_\alpha = x_{\alpha'}$ که ایجاب می‌کند $Ky_\beta = Ky_{\beta'}$ و بنابراین $y_\beta = y_{\beta'}$.

حال مشاهده می‌کنیم که برای کلیه زیرگروههای H و K از G ، $(H \cap K)x = Hx \cap Kx$. بنابراین اگر K, H دارای اندیس متناهی باشند این حقیقت که تعداد متناهی همدسته Hx و Kx وجود دارد ایجاب می‌کند که تعداد متناهی همدسته $H \cap K$ وجود دارد و بنابراین $H \cap K$ از اندیس متناهی است . نتیجه برای اشتراک تعداد متناهی زیر گروه با استقرا بدست می‌آید .

نتیجه برای اشتراک تعداد نامتناهی زیر گروه که هر کدام با اندیس متناهی هستند درست نمی‌باشد . به عنوان مثال گروه جمعی Z را در نظر بگیرید . زیر گروه nZ دارای اندیس n است اما $\bigcap_{n \geq 1} nZ = \{0\}$ که دارای اندیس متناهی در Z نمی‌باشد .

۲-۱- اگر xH زیر گروهی از G باشد، آنگاه $1 \in xH$ که نتیجه می‌دهد $x^{-1} \in x^{-1}xH = H$ و بنابراین $x \in H$ و در نتیجه $xH = H$.

اینکه φ یک نگاشت است (یا به گفته بعضی ها خوش تعریف است) از مشاهده اینکه

$$xH = yH \Rightarrow y^{-1}x \in H$$
$$\Rightarrow Hy^{-1}x = H$$
$$\Rightarrow Hy^{-1} = Hx^{-1}$$

به دست می‌آید . به وضوح φ یک به یک است .

از طرف دیگر ψ یک نگاشت نمی‌باشد . برای مشاهده آن به عنوان مثال قرار دهید $G = GL(2,Q)$ و

$$H = \{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} | \, a,b,c \in Q \, , ac \neq 0\}$$

داریم
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} H$$

که فورا نتیجه می گیریم که اگر

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

آنگاه $A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in H$. با این وجود

$$H\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq H\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

زیرا تساوی تناقض زیر را به همراه دارد

$$BA^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \in H$$

۳-۱- زیر گروههای K و H از گروه $G = GL(2, Q)$ که به صورت زیر داده شده اند را در نظر بگیرید .

$$H=\left\{\begin{bmatrix} ۱ & b \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \mid b\in Q\right\} \quad ، \quad K=\left\{\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ a & ۰ \end{bmatrix} \mid a\in Q\right\} .$$

به سادگی مشاهده می‌کنیم که

$$HK=\left\{\begin{bmatrix} ۱+ab & b \\ a & ۱ \end{bmatrix} \mid a,b\in Q\right\}$$

اما HK یک زیر گروه G نمی‌باشد ، به عنوان مثال ماتریس های

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad و \quad \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

در HK می‌باشند . اما حاصلضرب آنها یعنی ،

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

در HK نمی‌باشند .

۴-۱- همدسته های راست عبارتند از :

$$H(۱)=\{(۱),(۱۲)\}$$

$$H(۱۳)=\{(۱۳),(۱۳۲)\}$$

$$H(۲۳)=\{(۲۳),(۱۲۳)\}$$

همدسته های چپ عبارتند از

$$(۱)H=\{(۱),(۱۲)\}$$

$$(۱۳)H=\{(۱۲),(۱۲۳)\}$$

$$(۲۳)H=\{(۲۳),(۱۳۲)\}$$

به وضوح مشاهده می‌کنیم که H در G نرمال نمی‌باشد .

۵-۱- چون m و n نسبت به هم اولند ، اعدادصحیح b,a چنان موجودند که $am+bn=۱$.

بنابراین با استفاده از این واقعیت که $g^n=۱$ داریم

$$g=g^۱=g^{am+bn}=g^{am}g^{bn}=(g^m)^a(g^n)^b=(g^m)^a$$

چون $g^m\in H$ نتیجه می‌دهد که $(g^m)^a\in H$ ، بنابراین $g\in H$.

۱-۶- (i)اگر H زیر گروهی از G باشد ، آنگاه به وضوح $HH \subseteq H$ و چون هر زیر گروه شامل عنصر همانی می‌باشد داریم $H = 1H \subseteq HH$.

(ii) برای $x \in X$ داریم $xX \subseteq XX = X$. چون نگاشت $y \mapsto xy$ یک نگاشت یک به یک است (با قانون حذف) ، نتیجه می گیریم که $|xX| = |X|$ و بنابراین چون X متناهی است داریم $xX = X$. در نتیجه برای $e \in X$ ای ، $x = xe$. قانون حذف نتیجه می‌دهد که $e = 1$ وبنابراین $1 \in X$. حال از $1 \in xX$ مشاهده می کنیم که برای $y \in X$ ای، $1 = xy$. پس $x^{-1} = y \in X$. حال از این واقعیت که $XX \subseteq X$ نتیجه می گیریم که X زیر گروهی از Gاست .

(iii) در حالتی که X نامتناهی است ، ممکن است برقرار نباشد . به عنوان مثال G را گروه جمعی اعداد صحیح و X را مجموعه اعداد صحیح نامنفی بگیرید .

۱-۷- فرض کنید $t \in HxK \cap yK \neq \phi$. بنابراین داریم $t = hxk$ و $t = yk_1$. حال اگر $s \in yK$ ، آنگاه

$$s = yk_2 = tk_1^{-1}k_2 = hxkk_1^{-1}k_2 \in Hxk$$

و بنابراین $yK \subseteq HxK$.

حال فرض کنید که $t \in HxK \cap HyK \neq \phi$. بنابراین $t = h_1xk_1$ و $t = h_2yk_2$. اگر $s \in HxK$ ، آنگاه

$$s = hxk = h(h_1^{-1}tk_1^{-1})k = hh_1^{-1}(h_2yk_2)k_1^{-1}k \in Hyk$$

بنابراین $HxK \subseteq HyK$. مشابها $HyK \subseteq HxK$.

۱-۸- قرار دهید $C_n = <a>$ ، که $n = p^m$ و p یک عدد اول است . اگر Hو K زیر گروههایی از C_n باشند ، آنگاه $H = <a^s>$ و $K = <a^t>$. حال می‌توان فرض کرد که $s = p^u$ و $t = p^v$ که در آن $0 \leq u \leq m$ و $0 \leq v \leq m$. زیرا اگر $s = kp^u$ با $h.c.f.(k,p) = 1$ ، آنگاه اعداد صحیح y,x چنان موجودند که $xk + yp^m = 1$.

بنابراین $(a^{kp^u})^x \in H$ و $(a^{p^m})^{yp^u} \in H$ زیرا $a^{p^m} = 1$. بنابراین

$$a^{xkp^u + p^{m+u}y} = a^{p^u} \in H$$

و بنابراین $H = < a^{p^u} >$. این نتیجه می‌دهد که اگر $u \le v$ ، آنگاه $K \subseteq H$. در حالی که اگر $v \le u$ ، آنگاه $H \subseteq K$.

عکس آن نیز برقرار است . فرض کنید $n = pq$ که $h.c.f.(p,q) = ۱$. بنابراین اگر $C_n = < a >$ ، آنگاه $|< a^p >| = q$ و $|< a^q >| = p$. چون p و q نسبت به هم اولند داریم $< a^p > \cap < a^q > = \{۱\}$. اما با توجه به فرض که برای هردو زیر گروه H و K داریم $K \subseteq H$ یا $H \subseteq K$ ، تناقض حاصل می‌شود .

۹-۱- چون برای هر $g \in G$ ، $g^{-۱}Hg$ زیر گروهی از G است بنابراین $H_G = \bigcap_{g \in G} g^{-۱}Hg$ زیر گروهی از G است . فرض کنید $x \in H_G$. چون برای هر $g \in G$ ، $x \in g^{-۱}Hg$ بنابراین برای هر $g \in G$ داریم

$$y^{-۱}xy \in y^{-۱}g^{-۱}Hgy = (gy)^{-۱}Hgy$$

که این نشان می‌دهد که $y^{-۱}xy \in H_G$. بنابراین مشاهده می‌کنیم که H_G زیر گروه نرمال G است . حال فرض کنید K زیر گروهی نرمال از G مشمول در H باشد . بنابراین اگر $k \in K$ ، آنگاه برای هر $g \in G$، $gkg^{-۱} \in K$ و بنابراین $k \in g^{-۱}Kg \subseteq g^{-۱}Hg$ که این نشان می‌دهد

$$k \in \bigcap_{g \in G} g^{-۱}Hg = H_G \, .$$

درحالتی که $G = GL(۲, Q)$ و H زیر گروهی از ماتریس های نامنفرد و قطری به صورت

$$H = \{ \begin{bmatrix} a & \cdot \\ \cdot & b \end{bmatrix} \mid a,b \in Q \mid ab \neq \cdot \}$$

می‌باشد. زیر مجموعه K از H را به صورت

$$K = \{ \begin{bmatrix} a & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \mid a \in Q - \{\cdot\} \}$$

در نظر بگیرید . به وضوح K یک زیر گروه نرمال G است و بنا به بالا داریم $K \subseteq H_G$.

اما اگر $x=\begin{bmatrix} a & \cdot \\ \cdot & b \end{bmatrix} \in H_G$، آنگاه از

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ \cdot & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & \cdot \\ \cdot & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ \cdot & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & a-b \\ \cdot & b \end{bmatrix} \in H_G \subseteq H$$

نتیجه می‌گیریم که $a-b=\cdot$. بنابراین $x \in K$ و در نتیجه $H_G = K$. K یکریخت با گروه اعداد گویای غیر صفر تحت عمل ضرب می‌باشد .

۱۰-۱- H یک زیرگروه از دورانهاست. تنها عنصر مرتبه ۲ آن عنصر $\begin{bmatrix} -۱ & \cdot \\ \cdot & -۱ \end{bmatrix}$ است .

کلیه زیرگروههای دوری از مرتبه ۴ عبارتند از :

$$\left\langle\begin{bmatrix} \cdot & ۱ \\ -۱ & \cdot \end{bmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{bmatrix} \cdot & -۱ \\ ۱ & \cdot \end{bmatrix}\right\rangle \simeq C_۴$$

$$\left\langle\begin{bmatrix} \cdot & i \\ i & \cdot \end{bmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{bmatrix} \cdot & -i \\ -i & \cdot \end{bmatrix}\right\rangle \simeq C_۴$$

$$\left\langle\begin{bmatrix} -i & \cdot \\ \cdot & i \end{bmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{bmatrix} i & \cdot \\ \cdot & -i \end{bmatrix}\right\rangle \simeq C_۴$$

و $\left\langle\begin{bmatrix} -۱ & \cdot \\ \cdot & -۱ \end{bmatrix}\right\rangle \simeq C_۲$ و تنها زیرگروههای دیگر آن عبارتند از H و $\{۱\}$ زیرا اگر K زیرگروهی از H باشد، آنگاه مرتبه K , $|H|=۸$ را عاد می‌کند. بنابراین $|K|$ برابر با ۱، ۲، ۴ یا ۸ است. زیرگروههای مرتبه ۱ و ۸ به ترتیب $\{۱\}$ و H هستند .

تنها یک زیرگروه از مرتبه ۲ وجود دارد زیرا تنها یک عنصر مرتبه ۲ وجود دارد. اگر $|K|=۴$ ، آنگاه یا K دوری است (که در بالا ارائه شده‌اند) یا هر عنصر غیر بدیهی K از مرتبه ۲ هستند(زیرا مرتبه عناصر باید مرتبه گروه را عاد کند). این غیر ممکن است زیرا تنها یک عنصر از مرتبه ۲ وجود دارد. کلیه این زیرگروهها نرمال هستند(با وجود اینکه گروه آبلی نمی‌باشد) . H نمی‌تواند دارای گروه خارج قسمت یکریخت با $C_۴$ باشد زیرا اگر $H/K \simeq C_۴$ ، آنگاه $K \simeq C_۲$ و بنابراین

$$K=\left\langle\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}\right\rangle$$

اما توان دوم هر عنصر غیر همانی برابر با $\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$ است ، بنابراین هر همدسته غیر بدیهی xK دارای مرتبه ۲ است در نتیجه $H/K \not\cong C_۴$.

۱-۱۱- قرار دهید $a=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}\alpha & ۰\\ ۰ & \alpha^{-۱}\end{bmatrix}$ جائیکه $\alpha=e^{۲\pi i/n}$. بنابراین بوضوح a از مرتبه ۲ و b از مرتبه n است.

بعلاوه

$$a^{-۱}ba=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha & ۰\\ ۰ & \alpha^{-۱}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\alpha^{-۱} & ۰\\ ۰ & \alpha\end{bmatrix}$$
$$=b^{-۱}$$

بنابراین $\langle b\rangle$ یک زیرگروه نرمال D_{2n} است. حال

$$D_{2n}/\langle b\rangle=\{\langle b\rangle, a\langle b\rangle\}$$

وبنابراین $۲=\left|D_{۲n}/\langle b\rangle\right|$ و $\left|D_{۲n}\right|=۲n$. زیرگروه $<b>$ دوری بوده و از اندیس ۲ است.
مشاهده می‌کنیم که $|G|=۲n$ ، زیرا ε دو مقدار ممکن را اختیار می‌کند و k ، n مقدار را اختیار می‌کند. حال به سادگی دیده می‌شود که تناظر

$$b\mapsto\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\qquad a\mapsto\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

یک یکریختی بین $D_{۲n}$ و یک زیرگروه G که توسط

$$\left\{\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\right\}$$

تولید می‌شود برقرار می‌کند . چون این زیرگروه دارای مرتبه $۲n$ است که همان مرتبه گروه G است ، پس با G برابر بوده و G یکریخت با $D_{۲n}$ می‌باشد .

حال نگاشت $D_{\infty} \to D_{۲n}$ که توسط تناظر

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & k \\ \cdot & ۱ \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \varepsilon & k \\ \cdot & ۱ \end{bmatrix} \quad (k \text{ به هنگ } n)$$

توصیف می‌شود را در نظر بگیرید . به وضوح این یک ریختار گروهی است . چون به روشنی پوشا می‌باشد ، با قضیه اول یکریختی نتیجه می‌شود که $D_{۲n}$ یک گروه خارج قسمتی D_{∞} می‌باشد .

۱۲-۱- (i) $f: C^{+} \to R^{+}$ به صورت $f(a+ib)=a$ را تعریف کنید. در این صورت f یک ریختار گروهی است که پوشا می‌باشد. چون

$$\ker f = \left\{ a+ib \in C^{+} \,\middle|\, a=\cdot \right\} \simeq R^{+} \quad ،$$

نتیجه با قضیه اول یکریختی بدست می‌آید.

(ii) $f: C^{*} \to U$ با ضابطه

$$a+ib \mapsto \frac{a}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}} + i\frac{b}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}$$

را تعریف کنید. بنابراین f یک ریختار گروهی پوشاست به طوری که

$$\ker f = \left\{ a+ib \in C^{+} \,\middle|\, b=\cdot , \frac{a}{\sqrt{a^{۲}}}=۱ \right\} \simeq R^{*}_{>\cdot} \, .$$

نتیجه مطلوب با استفاده از قضیه اول یکریختی بدست می‌آید .

(iii) $f: C^{*} \to R^{*}_{>\cdot}$ با ضابطه $a+ib \mapsto \sqrt{a^{۲}+b^{۲}}$ و $g: R^{*} \to R^{*}_{>\cdot}$ با ضابطه $a \mapsto |a|$ را تعریف کنید .

بنابراین f و g ریختار گروهی پوشا بوده و نتیجه مطلوب با مشاهده‌اینکه

$$\ker f = \left\{ a+ib \in C^{*} \,\middle|\, \sqrt{a^{۲}+b^{۲}}=۱ \right\} \simeq U \quad ,$$

$$\ker g = \{۱,-۱\} \simeq C_{۲}$$

بدست می‌آید .

(iv) $f : R^* \to C_2$ با ضابطه

$$f(a) = \begin{cases} 1 & a > 0 \text{ اگر} \\ \\ -1 & a < 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

را تعریف کنید. بنابراین f یک ریختار گروهی پوشا با $\ker f = R^*_{>}$ است.

همچنین $g : Q^* \to C_2$ با ضابطه

$$g(a) = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases}$$

را تعریف کنید. بنابراین g یک ریختار گروهی پوشا با $\ker g = Q^*_{>}$ است.

(v) نگاشت $f : Q^* \to Q^*_{>}$ با ضابطه $a \mapsto |a|$ را تعریف کنید .

۱۳-۱- زنجیر گروهها به صورت

$$\{1\} \subseteq C_{p^1} \subseteq C_{p^2} \subseteq \ldots \subseteq C_{p^n} \subseteq \ldots \subseteq Z_{p^\infty}$$

که در آن $Z_{p^\infty} = \bigcup_{n \geq 1} C_{p^n}$ را داریم . در اینجا زیرگروه دوری C_{p^n} توسط ریشه n ام اولیه واحد تولید می‌شود . برای مشاهده اینکه هر زیرگروه محض Z_{p^∞} دوری است، توجه داشته باشید که برای هر زیرمجموعه X از Z_{p^∞} کوچکترین عضو زنجیر وجود دارد که شامل X است (این عضو ممکن است Z_{p^∞} باشد) . حال اگر X متناهی باشد ، به وضوح این کوچکترین عضو برای nای برابر با C_{p^n} است . اما اگر X نامتناهی باشد ، برای n به دلخواه بزرگ X شامل این ریشه واحد است و X، Z_{p^∞} را تولید می کند .

برای اینکه نشان دهیم $Z_{p^\infty}/C_{p^n} \simeq Z_{p^\infty}$، نگاشت $f : Z_{p^\infty} \to Z_{p^\infty}$ که توسط

$$z \mapsto z^{p^n}$$

تعریف می‌شود را در نظر بگیرید. به سادگی دیده می‌شود که f ریختار گروهی پوشا با $\ker f = C_{p^n}$ است. بنابراین نتیجه مطلوب از قضیه اول یکریختی بدست می‌آید .

برای Q^+ فرض کنید

$$X = \{ p_1/q_1, p_2/q_2, \ldots, p_n/q_n \} .$$

بنابراین بوضوح داریم

$$X \subseteq \langle 1/q_1 q_2 \ldots q_n \rangle$$

که یک گروه دوری است. بنابراین $\langle X \rangle$ زیرگروه یک گروه دوری است و بنابراین خود نیز یک گروه دوری است .

۱۴-۱- اگر هیچ عنصر G از مرتبه ۴ نباشد،آنگاه هر عنصر آن از مرتبه ۱ یا ۲ است و بنابراین برای هر $x \in G$ ، $x^2 = 1$. اما $(xy)^2 = 1$ نتیجه می‌دهد که

$$xy = (xy)^{-1} = y^{-1} x^{-1} = y^2 y^{-1} x^{-1} x^2 = yx$$

در نتیجه گروه آبلی است.

از اینکه گروه G یک گروه غیر آبلی از مرتبه ۸ است ، نتیجه می‌شود که G شامل عنصری از مرتبه ۴ است . فرض کنید این عنصر a باشد. بوضوح $\{1, a, a^2, a^3\}$ دارای اندیس ۲ در G بوده و بنابراین نرمال است . فرض کنید $b \neq a^2$ از مرتبه ۲ در G باشد. بنابراین $b^{-1}ab \neq a$ (در غیر این صورت G آبلی است) و بنابراین $b^{-1}ab$ از مرتبه ۴ در $\langle a \rangle$ است و بنابراین برابر با a^3 است. در نتیجه G برابر است با

$$\langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$$

که ازمرتبه ۸ است.

اگر G شامل عنصر دیگری از مرتبه ۲ نباشد می‌توان عنصر $b \notin \langle a \rangle$ از مرتبه ۴را انتخاب کرد. بنابراین b^2 از مرتبه ۲ بوده و در نتیجه $b^2 = a^2$. مشابه آنچه در فوق دیدیم $b^{-1}ab \neq a$ و بنابراین $b^{-1}ab = a^3$ و G گروه کواترنیون

$$\langle a, b \mid a^4 = b^4 = 1, a^2 = b^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$$

می‌باشد . این گروهها یکریخت نیستند زیرا تعداد عناصر مرتبه ۲ آنها متفاوت است .

۱۵-۱- مرتبه‌های ممکن شمارنده‌های ۲۴ یعنی ۱، ۲، ۳، ۴، ۶ ، ۸، ۱۲ و ۲۴ هستند .

مرتبه ۱	۱ عنصر	(۱)
مرتبه ۲	۶ عنصر	(۱۲)
مرتبه ۳	۸ عنصر	(۱۲۳)

مرتبه ۴ ۶ عنصر (۱۲۳۴)

مرتبه ۲ ۳ عنصر (۳۴)(۱۲)

یک عنصر مرتبه ۱؛ نُه عنصر مرتبه۲ ؛ هشت عنصر مرتبه ۳ ؛ شش عنصر مرتبه ۴ وجود دارد. نُه زیرگروه مرتبه ۲ ، چهار زیرگروه مرتبه۳ (هر کدام شامل ۲ عنصر مرتبه ۳ می‌باشند) وجود دارد .

زیرگروه های دوری مرتبه ۴ عبارتند از

$$\{(۱),(۱۲)(۳۴),(۱۳)(۲۴),(۱۴)(۳۲)\}$$
$$\{(۱),(۱۳۲۴),(۱۲)(۳۴),(۱۴۲۳)\}$$
$$\{(۱),(۱۲۴۳),(۱۴)(۲۳),(۱۳۴۲)\}$$

زیرگروههای غیر دوری مرتبه ۴ $\simeq (C_۲ \times C_۲)$ عبارتند از

$$\{(۱),(۱۲۳۴),(۱۳)(۲۴),(۱۴۳۲)\}$$
$$\{(۱),(۱۳),(۲۴),(۱۳)(۲۴)\}$$
$$\{(۱),(۱۴),(۲۳),(۱۴)(۲۳)\}$$
$$\{(۱),(۱۲),(۳۴),(۱۲)(۳۴)\}$$

زیرگروه های مرتبه ۶ آنهایی هستند که یک عنصر از عناصر ۱، ۲، ۳ و یا ۴ را ثابت نگه می‌دارند. بنابراین چهار زیرگروه بدین صورت وجود دارد. برای مثال اگر ۴ ثابت باشد ، آنگاه

$$\{(۱),(۱۲),(۱۳),(۲۳),(۱۲۳),(۱۳۲)\}$$

یکی از این زیرگروه ها ست .

۳ زیرگروه از مرتبه ۸ وجود دارد. اینها عبارتند از

$$\{(۱),(۱۳),(۲۴),(۱۳)(۲۴),(۱۲)(۳۴),(۱۴)(۲۳),(۱۲۳۴),(۱۴۳۲)\},$$
$$\{(۱),(۱۲),(۳۴),(۱۲)(۳۴),(۱۳)(۲۴),(۱۴)(۲۳),(۱۳۲۴),(۱۴۲۳)\},$$
$$\{(۱),(۱۴),(۲۳),(۱۴)(۲۳),(۱۲)(۳۴),(۱۳)(۲۴)(۱۲۴۳),(۱۳۴۲)\} .$$

$A_۴$ یک زیرگروه $S_۴$ از مرتبه ۱۲ است

یک زیرگروه آبلی نرمال عبارت است از

$$V = \{(۱),(۱۲)(۳۴),(۱۳)(۲۴),(۱۴)(۲۳)\} .$$

$S_۴/V$ دارای مرتبه ۶ بوده و یکریخت با $S_۳$ است (که یک زیرگروه $S_۴$ است) .

یک زیرگروه A_4 لزوماً یک زیرگروه S_4 است . بنابراین اگر A_4 دارای یک زیرگروه H با $|H| = 6$ باشد ، آنگاه H باید یکی از زیرگروههای مرتبه ۶، S_4 باشد. اما هیچ کدام از آن ها شامل فقط جایگشتهای زوج نمی‌باشد . بنابراین A_4 شامل زیرگروه مرتبه ۶ نمی‌باشد . این اتفاق نشان می‌دهد که عکس قضیه لاگرانژ برقرار نمی‌باشد .

۱۶-۱- داریم

$$a = (1234)(5678)$$
$$a^2 = (13)(24)(57)(68)$$
$$a^3 = (1432)(5876)$$
$$a^4 = (1)$$
$$b = (1537)(2846)$$
$$b^2 = (13)(57)(24)(86) = a^2$$
$$b^3 = (1735)(2648)$$
$$b^4 = (1) = a^4$$

$$ab = (1836)(2745)$$
$$ba = (1638)(2547)$$
$$(ab)^2 = (13)(86)(24)(75) = a^2$$
$$(ab)^3 = (1638)(2547) = ba$$

تناظر ،

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mapsto (1234)(5678)$$
$$\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \mapsto (1537)(2846)$$

را به یکریختی زیر توسیع می‌دهیم

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \mapsto (۱)$$

$$\begin{bmatrix} ۰ & i \\ i & ۰ \end{bmatrix} \mapsto (۱۵۳۷)(۲۸۴۶)$$

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \mapsto (۱۳)(۲۴)(۵۷)(۶۸)$$

$$\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} \mapsto (۱۷۳۵)(۲۶۴۸)$$

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} \mapsto (۱۲۳۴)(۵۶۷۸)$$

$$\begin{bmatrix} -i & ۰ \\ ۰ & i \end{bmatrix} \mapsto (۱۶۳۸)(۲۵۴۷)$$

$$\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \mapsto (۱۴۳۲)(۵۸۷۶) \quad .$$

$$\begin{bmatrix} i & ۰ \\ ۰ & i \end{bmatrix} \mapsto (۱۸۳۶)(۲۷۴۵)$$

به سادگی مشاهده می‌شود که گروه کواترنیون با هیچ کدام از زیرگروههای مرتبه ۸، S_4، یکریخت نمی‌باشد. زیرا در گروه کواترنیون تنها یک عنصر مرتبه ۲ وجود دارد در حالی که زیرگروههای مرتبه ۸ در $S_۴$ دارای ۵ عنصر مرتبه ۲ هستند. کلیه زیرگروههای مرتبه ۸ در $S_۴$ یکریخت با $D_۸$ می‌باشند. در واقع، تنها دو گروه غیرآبلی مرتبه ۸ وجود دارد (به سئوال ۱۴-۱ نگاه کنید).

۱۷-۱- فرض کنید که

$$p = (a_{۱۱} \ldots a_{۱m})(a_{۲۱} \ldots a_{۲m})(a_{r۱} \ldots a_{rm}).$$

بنابراین داریم $p = v^r$ جائیکه

$$v = (a_{۱۱} \ldots a_{r۱} a_{۱۱} a_{۱۲} \ldots a_{r۲} \ldots).$$

برعکس ، فرض کنید که $v = (۱,۲,\ldots,m)$. بنابراین

$$\begin{aligned} v^s = &(۱ \quad s+۱ \quad ۲s+۱ \ . \ . \ . \ (k-۱)s+۱) \\ &\circ(۲ \quad s+۲ \ . \ . \ . \ (k-۱)s+۲) \\ &\circ\ldots \\ &\circ(m/k \quad s+m/k \ . \ . \ . \ (k-۱)s+m/k) \end{aligned}$$

جائیکه k کوچکترین عدد صحیح است که ks توسط m عاد می‌شود. بنابراین $k = m/h.c.f.(m,s)$ و دورها دارای طول $m/h.c.f.(m,s)$ می‌باشند. همچنین $m/k = h.c.f.(m,s)$ دور در تجزیه داده شده وجود دارد.

۱۸-۱- a را به $p-1$ طریق می‌توان انتخاب کرد زیرا Z_p شامل $p-1$ عنصر غیر صفر است. عناصر c,b دلخواه بوده در حالی که d منحصراً توسط شرط $ad-bc=1$ انتخاب می‌شود (در واقع $d=a^{-1}(1+bc)$). بنابراین $p^2(p-1)$ عنصر به این فرم وجود دارد.

حال عنصر $\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. d دلخواه بوده و به p طریق می‌توان آن را انتخاب کرد.

چون $-bc=1$ عنصر b باید غیر صفر بوده و بنابراین به $p-1$ طریق می‌توان آن را اختیار کرد. بنابراین $c=-b^{-1}$ را به طور منحصر به فرد می‌توان انتخاب کرد. در نتیجه $p(p-1)$ عنصر به این فرم وجود دارد. در نتیجه داریم

$$\left|SL(2,p)\right| = p^2(p-1)+p(p-1)=p(p-1)(p+1)$$

Z مرکز $SL(2,p)$ عبارت است از

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}$$

بنابراین اگر $p \neq 2$، داریم $\left|\mathrm{Z}\right|=2$ و در نتیجه

$$\left|\frac{SL(2,p)}{\mathrm{Z}}\right| = \frac{1}{2}p(p-1)(p+1)$$

چون $SL(2,2)$ گروهی از مرتبه ۶ و غیر آبلی است باید گروه متقارن S_3 باشد.

ماتریس های $n\times n$ با درایه در Z_p که دارای سطرهای مستقل خطی هستند را می‌شماریم. سطر اول هر n تایی غیر صفر می‌تواند باشد. بنابراین p^n-1 انتخاب ممکن برای سطر اول داریم. حال سطر اول دارای p مضرب بوده و سطر دوم غیر از این مضارب می‌تواند باشد. پس برای سطر دوم p^n-p انتخاب ممکن است. مجددا p^2 ترکیب خطی از دو سطر اول وجود دارد و سطر سوم هر انتخابی بجز این p^2 ترکیب خطی می‌تواند باشد. پس برای سطر سوم p^n-p^2 انتخاب ممکن است. با شمارش بدین صورت مشاهده می کنیم که

$$\prod_{i=0}^{n-1}(p^n - p^i)$$

چنین ماتریس هایی وجود دارد .

نهایتا ریختار از این گروه از ماتریس ها به گروه ضربی عناصر غیر صفر Z_p که توسط نگاشت دترمینان توصیف می‌شود را در نظر بگیرید . نتیجه مطلوب از این حقیقت که $SL(n,p)$ هسته این ریختار است بدست می‌آید .

۱۹-۱- فرض کنید $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $trA=0$ ، یعنی $d=-a$. بنابراین چون

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \in SL(2.F)$$

داریم که $-a^2-bc=1$. در نتیجه

$$A^2=\begin{bmatrix} a^2+bc & 0 \\ 0 & bc+a^2 \end{bmatrix}=-I_2$$

برعکس ، فرض کنید که $A\in SL(2,F)$ به طوری که $A^2=-I_2$. بنابراین اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، داریم $ad-bc=1$ و

$$\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

فرض کنید که $a+d\neq 0$. بنابراین چون $(a+d)b=0$ و $(a+d)c=0$ داریم $b=c=0$. از $ad-bc=1$ ، داریم $ad=1$. اما $a+d\neq 0$ بنابراین $a^2+ad=a(a+d)\neq 0$. این تناقض $a^2=-1$ و $ad=1$ را بدست می‌دهد . در نتیجه $a+d=0$ بدست می‌آید .

حال اگر $tr(A)=0$ ، آنگاه $A^2=-I_2$ و بنابراین $\overline{A}^2$ همانی است زیرا

$$\mathrm{Z}(SL(2,F))=\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\}.$$

برعکس ، اگر $\overline{A}^{2}$ عنصر همانی $PSL(2,F)$ باشد ، آنگاه یا $A^{2}=I_{2}$ و یا $A^{2}=-I_{2}$. اگر $A^{2}=-I_{2}$ ، آنگاه $trA=0$ که همان مطلوب ما می‌باشد . اگر $A^{2}=I_{2}$ ، آنگاه به سادگی می‌توان دید که $A=I_{2}$ یا $A=-I_{2}$ و درهر دو حالت $\overline{A}$ عنصر همانی $PSL(2,F)$ می‌باشد که بنابراین عنصری از مرتبه ۲ نیست .

۱-۲۰- هر عنصر $C_{2}\times C_{2}$ دارای مرتبه ۲ است بنابراین چون $|C_{2}\times C_{2}|=4$ ، نتیجه می‌شود که $C_{2}\times C_{2}$ دوری نمی‌باشد . حال فرض کنید G غیر دوری از مرتبه ۴ باشد . بنابراین هر عنصر G دارای مرتبه ۲ بوده و جدول آن به طور منحصر به فرد مشخص می‌شود. چون جدول آن مشابه $C_{2}\times C_{2}$ است نتیجه حاصل می‌شود .

۱-۲۱- اگر $p\neq q$ ، آنگاه $C_{p}\times C_{q}=C_{pq}$ و چون هر گروه دوری از هر مرتبه تنها یک زیر گروه دارد و مرتبه یک زیر گروه مرتبه گروه را عاد می‌کند ، آنگاه C_{pq} تنها دو زیر گروه بجز $\{1\}$ و C_{pq} دارد .

با این وجود $C_{p}\times C_{p}$ بیش از ۲ زیر گروه غیر بدیهی دارد ، به عنوان مثال $\{1\}\times C_{p}$, $C_{p}\times\{1\}$ و $<(a,b)>$ (جائیکه a و b غیر بدیهی هستند) یکریخت با C_{p} هستند .

۱-۲۲- فرض کنید K یک زیر گروه نرمال $G\times H$ با $K\neq\{(1,1)\}$ باشد . فرض کنید $(x,1)\in K$ برای $x\in G$ای و $x\neq 1$. بنابراین چون K نرمال است برای هر $g\in G$ داریم

$$(g^{-1}xg,1)=(g^{-1},1)(x,1)(g,1)\in K \quad .$$

حال $<(g^{-1}xg,1)|g\in G>$ یک زیر گروه K است و $<g^{-1}xg|g\in G>$ یک زیر گروه نرمال G است . بنابراین $<g^{-1}xg|g\in G>=G$ (زیرا $x\neq 1$) و در نتیجه $G\times\{1\}$ یک زیر گروه K است . حال

$$\frac{G\times H}{G\times\{1\}}\simeq H$$

و K متناظر با زیر گروهی نرمال از H تحت یکریختی است . بنابراین $K = G \times H$ یا $K = G \times \{1\}$.

مشابها اگر $(1, y) \in K$ که $y \neq 1$، آنگاه $\{1\} \times H$ زیر گروهی از K بوده و بنابراین $K = \{1\} \times H$ یا $K = G \times H$.

تنها حالتی که باقیمانده است در نظر گرفتن حالتی است که K فقط شامل $(1,1)$ و عناصر به فرم (x,y) که $x, y \neq 1$ می‌باشد . اما اگر $g \in G$ ، آنگاه عنصر $h \in H$ وجود دارد که $(g,h) \in K$ زیرا نگاشتی که توسط $(x,y) \mapsto (x,1)$ توصیف می‌شود یک ریختار است که تصویر آن اگر $g \in G$ در اعضا K ظاهر نشود ، یک زیر گروه نرمال محض غیر بدیهی خواهد بود .

حال G یا آبلی است یا $g, x \in G$ وجود دارد که $g^{-1}xg \neq x$.بنابراین $(g,h) \in K$ نتیجه می‌دهد

$$(x^{-1}gx, h) = (x^{-1},1)(g,h)(x,1) \in K.$$

قرار دهید $g' = x^{-1}gx \neq g$. بنابراین $(g'^{-1}, h^{-1})(g,h) \in K$ نتیجه می‌دهد که $(g'^{-1}g,1) \in K$ که یک تناقض است . بنابراین G و H آبلی هستند و در نتیجه دوری از مرتبه عدد اول هستند . به وضوح با توجه به سوال ۲۱-۱ ، $|G| = |H|$.

۲۳-۱- فرض کنید G و H متناوب باشند . اگر $(g,h) \in G \times H$ ، آنگاه $g \in G$ بنابراین $g^n = 1$ و $h \in H$ ، پس $h^m = 1$. در نتیجه داریم $(g, h)^{mn} = (1,1)$ و $G \times H$ نیز متناوب است .

حال فرض کنید G و H بدون تاب باشند . اگر $(g,h)^n = (1,1)$ ، آنگاه $g^n = 1$ و $h^n = 1$ که یک تناقض است . بنابراین $G \times H$ نیز بدون تاب می‌باشد .

۲۴-۱- فرض کنید $G = AB$ که در آن A و B زیر گروههای نرمال G بوده و $A \cap B = N$.یکریختی $G/N \simeq A/N \times B/N$ از مشاهدات زیر نتیجه می‌شود

(i) A/N و B/N زیر گروههای نرمال G/N هستند ؛

(ii) اگر $gN \in G/N$ ، آنگاه $gN = aN.bN$ جائیکه $g = ab$ ؛

(iii) اگر $xN \in A/N \cap B/N$ ، آنگاه $xN = aN = bN$ نتیجه می‌دهد $a^{-1}b \in N$.

پس $b = an \in A$ و بنابراین $b \in A \cap B = N$. در نتیجه $xN = bN = N$.

S_3 و زیرگروه های $A =<(123)>$ ، $B =<(12)>$ را در نظر بگیرید . داریم

$S_3 = AB$ و $A \cap B = \{1\}$ اما S_3 یکریخت با $C_2 \times C_3$ نیست .

۱-۲۵- از مشاهدات زیر نتیجه $G = A \times \ker f$ به دست می‌آید .

(a) A و $\ker f$ زیر گروههای نرمال G هستند ؛

(b) اگر $g \in G$ ، آنگاه $f(g) \in H$. بنابراین عنصر $a \in A$ وجود دارد که $f(a) = f(g)$. بنابراین $g = a(a^{-1}g)$ که در آن $a \in A$ و $a^{-1}g \in Kerf$.

(c) اگر $g \in A \cap \ker f$،آنگاه $f_A(g) = f(g) = 1$ و بنابراین چون $f_A : A \to H$ یک یکریختی است ، آنگاه $g = 1$ ؛

این نتیجه اگر A نرمال نباشد ، برقرار نمی‌باشد . به عنوان مثال نگاشت $f : S_3 \to C_2 = \{1, a\}$ (که در آن $a^2 = 1$) با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x = 1 \\ a & \text{اگر } x \text{ از مرتبه ۲ باشد} \\ 1 & \text{اگر } x \text{ از مرتبه ۳ باشد} \end{cases}$$

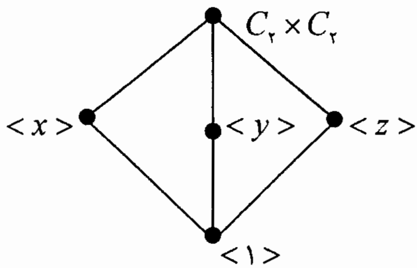
را در نظر بگیرید .

به سادگی مشاهده می‌شود که f یک ریختار است با $Kerf =<(123)> \simeq C_3$. زیر گروه $A = \{(1), (12)\}$ از S_3 در S_3 نرمال نمی‌باشد و تحدید f به A یک یکریختی بتوی C_2 است . با این وجود S_3 یکریخت با $C_2 \times C_3$ نمی‌باشد . یکریختی های بیان شده در (i) و(ii) و (iii) و(iv) از ریختارهای در سوال ۱.۱۲ به دست می‌آید .

۱-۲۶- فرض کنید که $C_2 \times C_2$ توسط x y تولید شود . بنابراین زیر گروه های $C_2 \times C_2$ عبارتند از

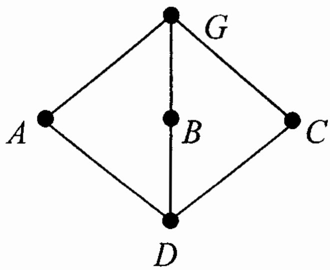
$$\{1\}, < x >, < y > , < xy >, C_2 \times C_2 \quad .$$

دیاگرام هس زیر گروهها به صورت



می‌باشد .

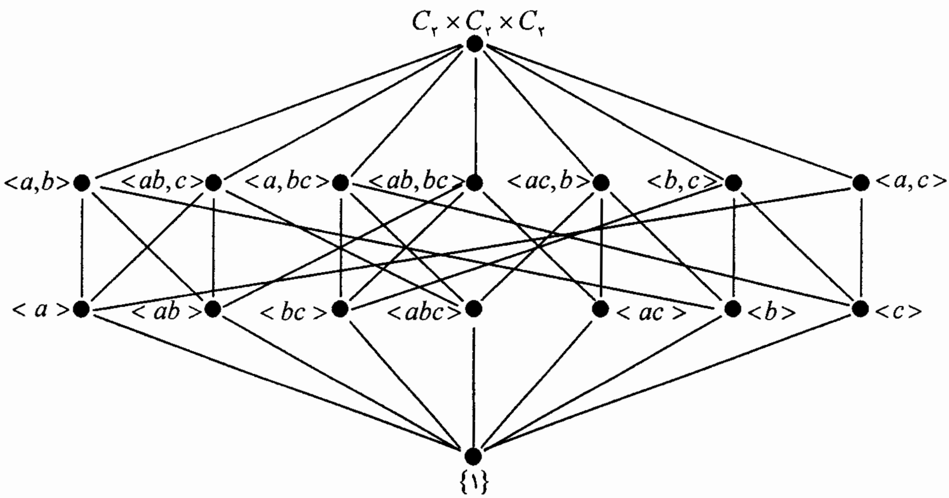
حال فرض کنید G یک گروه و دیاگرام هس زیر گروه های آن به صورت



باشد .به روشنی $D = \{1\}$ و A ، B ، C باید دوری و از مرتبه عدد اول باشند زیرا شامل هیچ زیرگروه محض بجز $\{1\}$ نمی‌باشند . قرار دهید $A =< a >$ و $B =< b >$. ابتدا نشان می‌دهیم که $G \simeq A \times B$. برای این گزاره مشاهده می‌کنیم که B, A نرمال در G هستند . بنابراین $< ab >$ تمامی G نمی‌باشد . (زیرا در غیر این صورت A و B باید نرمال باشند) و بنابراین اجبارا $< ab >= C$ (زیرا $< ab > = A$ و $< ab > = B$ یک تناقض بدست می‌دهد) . حال $< b^{-1}ab >$ را در نظر بگیرید . این زیر گروه نمی‌تواند B، C ، G یا D باشد پس باید با A برابر باشد . مشابها $< a^{-1}ba > = B$. حال G توسط a ، b تولید می‌شود (در غیر این صورت $< a,b >$ به طور محض مشمول در G است) بنابراین A و B در G نرمال بوده و اشتراک آنها $\{1\}$ است و $G = A \times B$.

باقی می‌ماند که ثابت کنیم $A \simeq B \simeq C_۲$. برای این مطلب $<ab^{-1}>$ را در نظر بگیرید. بوضوح این زیر گروه باید C باشد . چون سایر حالتها فورا یک تناقض بدست می‌دهد . حال چون G آبلی است داریم $a^۲ = abab^{-۱} \in C$. اما $a^۲ \in A$ و بنابراین $a^۲ \in A \cap C = \{۱\}$. به طریق مشابه داریم $b^۲ = ۱$. در نتیجه $G \simeq C_۲ \times C_۲$.

۱-۲۷- $C_۲ \times C_۲ \times C_۲$ دارای ۱۶ زیر گروه است . فرض کنید که توسط c,b,a تولید شود . دیاگرام هس زیر گروه ها به صورت زیر است .



۱-۲۸- زیر گروه های

$$H = <۲> = \{۱,۲,۴,۸,۱۱,۱۶\} \simeq C_۶$$

$$K = <۱۳> = \{۱,۱۳\} \simeq C_۲$$

را در نظر بگیرید . داریم

(i) H و K زیر گروه نرمال G هستند ؛

(ii) $G = HK$ (این به سادگی قابل تحقیق است : مثلا $۵ = ۲\times۱۳$, $۱۰ = ۴\times۱۳$ و غیره)؛

(iii) $H \cap K = \{۱\}$.

در نتیجه $G \simeq C_۲ \times C_۶$. این گروه دوری نمی‌باشد زیرا ۲ نسبت به ۶ اول نمی‌باشد .

مجموعه اعداد صحیح n که $۱ \leq n \leq ۱۲$ و نسبت به ۱۲ اول است عبارت است از $\{۱,۵,۷,۱۱\}$. چون

$$۵^۲ \equiv ۱ \ (۱۲ \text{ هنگ}) \text{ و } ۷^{۱۲} \equiv ۱ \ (۱۲ \text{ هنگ}) \text{ و } ۱۱^۲ \equiv ۱ \ (۱۲ \text{ هنگ})$$

می‌بینیم که هر عنصر غیر همانی آن مرتبه ۲ است . بنابراین گروه $C_۲ \times C_۲$ است و غیر دوری است .

۱-۲۹ - تنها زیر گروه های نرمال $S_۴$ بجز $\{۱\}$, $S_۴$ عبارتند از

$$V = \{(۱),(۱۲)(۳۴),(۱۳)(۲۴),(۱۴)(۲۳)\}$$

و $A_۴$ که $V \subseteq A_۴ \subseteq S_۴$.

تنها زیر گروه نرمال $S_۵$ ، $A_۵$ است .

تنها زیر گروه نرمال $A_۴$ ، V بیان شده در بالا است .

گروه $A_۵$ ساده است .

در نتیجه $S_۴$, $S_۵$, $A_۴$, $A_۵$ تجزیه ناپذیرند .

$R^* \simeq R^*_{>۰} \times C_۲$ (در سوال ۲۵-۱ مشاهده کردیم) و $C_۶ \simeq C_۲ \times C_۳$.

$C_۸$ تجزیه ناپذیر است زیرا اگر H , K زیر گروههای $C_۸$ باشند ، آنگاه $H \subseteq K$ یا $K \subseteq H$ (سوال ۸-۱ را ببینید) .

$\mathbb{C}^+ \simeq R^+ \times R^+$ (سوال ۱.۲۵ را ببینید) .

Z_{p^∞} تجزیه ناپذیر است زیرا اگر H,K زیر گروههای آن باشند ، آنگاه $H \subseteq K$ یا $K \subseteq H$.

۱-۳۰ - اگر xH دارای مرتبه n باشد ، آنگاه $x^n = h \in H$ و بنابراین با توجه به فرض، $h' \in H$ وجود دارد که $h'^n = h$. حال قرار دهید $y = xh'^{-۱}$. داریم که $y^n = ۱$.

اگر G/H دوری باشد ، xH را مولد آن بگیرید و قرار دهید $K = \langle y \rangle$. بنابراین داریم

(i) H و K زیر گروه های نرمال G هستند ؛

(ii) yH ، G/H را تولید می‌کند . بنابراین برای $g\in G$ ، mای وجود دارد که $g\in y^m H$ و در نتیجه $g=y^m h$

(iii) اگر $t\in H\cap K$ ، آنگاه $t=y^m$ برای $m<n$ ای . اما $y^m\notin H$ بنابراین باید داشته باشیم $t=1$. در نتیجه $G\simeq H\times K$.

۱-۳۱- فرض کنید x از مرتبه m و y از مرتبه n باشد . بنابراین داریم $(xy)^{mn}=1$ ، در نتیجه xy از مرتبه حداکثر mn است . حال فرض کنید $z^{mn}=1$ که در آن m و n نسبت به هم اولند . بنابراین اعداد صحیح b,a' چنان موجودند که $am+bn=1$ و در نتیجه $z=z^{bn}z^{am}=xy$ جائیکه $x=z^{bn}$ و $y=z^{am}$. این نتیجه می‌دهد که $x^m=z^{bmn}=1$ و $y^n=z^{amn}=1$. مرتبه های xوy به ترتیب m و n می‌باشند زیرا اگر مرتبه آنها کمتر باشد مثلا m' و n' ، آنگاه z دارای مرتبه حداکثر $m'n'$ است که یک تناقض است .

یک بحث مشابه نتیجه را به حالتی که z از مرتبه $m_1m_2\cdots m_k$ بوده و m_1، m_2، ...، m_k دوبدو نسبت به هم اولند توسیع می‌دهد . در این حالت m_1 نسبت به $\prod_{i=2}^{k} m_i$ اول بوده و بنابراین بنا به قسمت اول داریم $z=xy$ به طوری که x دارای مرتبه m_1 , y دارای مرتبه $\prod_{i=2}^{k} m_i$ می‌باشد .

حال نتیجه با استقرا روی k بدست می‌آید .

برابری $G=H_1\times\cdots\times H_k$ از مشاهدات زیر حاصل می‌شود

(i) هر H_i یک زیر گروه نرمال G است ؛

(ii) $G=H_1H_2\ldots H_k$ (با توجه به بالا)

(iii) اگر $x\in H_i$ ، آنگاه $x^{p_i^{\alpha_i}}$ که نشان می‌دهد که x به حاصلضرب $H_1H_2\cdots H_{i-1}H_{i+1}\cdots H_k$ تعلق ندارد .

نهایتا اگر r ، $|G|$ را عاد کند ، آنگاه r لزوما به فرم

$$r=p_1^{\beta_1}\cdots p_k^{\beta_k} \qquad 0\le\beta_i\le\alpha_i$$

است . اگر $K_i=\{x\in G \mid x^{p_i^{\beta_i}}=1\}$ ، آنگاه G دارای زیر گروهی از مرتبه r است که همان حاصلضرب زیرگروههای K_i می‌باشد .

۱-۳۲- قرار دهید $I=\bigcap_{x\in G} x^{-1}Hx$. اگر $t\in I$ ، آنگاه برای هر $x\in G$ ، $t\in x^{-1}Hx$. $g\in G$ داده شده است . بنابراین برای $t\in (xg^{-1})^{-1}Hxg^{-1}$ داریم $g^{-1}tg\in x^{-1}Hx$. در نتیجه $g^{-1}tg\in I$ و بنابراین I زیر گروه نرمال G است .اگر $A=\{g^{-1}xg \mid g\in G\}$ زیر گروهی از G باشد ، آنگاه شامل عنصر همانی است . پس برای $g\in G$ ای ، $g^{-1}xg=1$ که نتیجه می‌دهد $x=1$. بنابراین می‌بینیم که A زیر گروه G است اگر و اگر فقط $A=1$ که در این حالت می‌بینیم که نرمال است .

۱-۳۳- زیر گروههای $\{(1),(12)\}$ و $\{(1),(12)(34)\}$ از S_4 مزدوج نیستند . کلیه عناصر مرتبه ۳ در S_4 مزدوج هستند . بنابراین کلیه زیر گروههای مرتبه ۳ مزدوجند . عناصر (123) و (234) در A_4 مزدوج نیستند زیرا عنصر $g\in A_4$ وجود ندارد که $g(123)g^{-1}=(234)$. در S_4 سه عنصر g به صورت

(14) ، (1324) ، (1234)

وجود دارد که باعث می‌شوند (123) و (234) مزدوج شوند .

۱-۳۴- $\{C_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ را مجموعه رده های تزویج G بگیرید . فرض کنید H زیر گروهی باشد که اجتماعی از کلاس های تزویج به صورت $H=\bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} C_\lambda$ باشد که $\Lambda_1\subseteq\Lambda$. اگر $h\in H$ ، آنگاه $h\in C_\lambda$ برای $\lambda\in\Lambda_1$ ای . بنابراین $g^{-1}hg\in C_\lambda\subseteq H$. بنابراین مشاهده می کنیم که H زیرگروه نرمال G است .برعکس ، اگر H زیر گروه نرمال G باشد ، آنگاه به وضوح هر مزدوج $h\in H$ مشمول در H است و H شامل رده تزویجی G شامل h است. بنابراین H اجتماعی از رده های تزویجی است .

در S_4 رده های تزویجی عبارتند از :

دارای یک عضو است	(۱)
دارای ۶ عضو است	(۱۲)
دارای ۸ عضو است	(۱۲۳)
دارای ۶ عضو است	(۱۲۳۴)
دارای ۳ عضو است	(۱۲)(۳۴) .

یک زیر گروه نرمال اجتماعی از رده های تزویجی شامل رده {۱} با یک عنصر است . با توجه به قضیه لاگرانژ و مرتبه یک زیر گروه باید ۲۴ را عاد کند . تنها امکانات موجود ۳+۱ , ۸+۳+۱ می‌باشند ، پس تنها مرتبه های ممکن برای یک زیر گروه نرمال غیر بدیهی ۴ و ۱۲ هستند .

گروه $S_۴$ دارای زیر گروه نرمال $A_۴$ با $|A_۴| = ۱۲$ است . توجه داشته باشید که $A_۴$ شامل کلیه جایگشتهای زوج است و حالت ۸+۳+۱ فوق است . حالت ۳+۱ ، زیر گروه

$$\{(۱),(۱۲)(۳۴),(۱۳)(۲۴),(۱۴)(۲۳)\}$$

را به دست می‌دهد . برای مشاهده اینکه این زیر گروه نرمال است کافی است تحقیق کنیم که یک زیر گروه است و این مطلب از این واقعیت که $(۱۲)(۳۴).(۱۳)(۲۴) = (۱۴)(۲۳)$ (و بقیه) بدست می‌آید .

۳۵-۱- رده های تزویجی به شرح زیر هستند :

زوج	۱ عنصر از مرتبه ۱	(۱)
فرد	۱۰ عنصر از مرتبه ۲	(۱۲)
زوج	۲۰ عنصر از مرتبه۳	(۱۲۳)
فرد	۳۰ عنصر از مرتبه ۴	(۱۲۳۴)
زوج	۲۴ عنصر از مرتبه ۵	(۱۲۳۴۵)
زوج	۱۵ عنصر از مرتبه ۲	(۱۲)(۳۴)
فرد	۲۰ عنصر از مرتبه ۶	(۱۲)(۳۴۵)

تنها زیرگروه نرمال S_5 , A_5 است (با استفاده از روشی که در سوال قبلی عنوان شد). رده‌های تزویجی A_5 آن رده هایی هستند که در بالا با زوج بر چسب خورده اند با این تفاوت که ۲۴ عنصر از مرتبه ۵ به دو رده تزویجی ۱۲ عنصری یکی شامل (۱۲۳۴۵) و دیگری شامل (۱۳۵۲۴) تقسیم می‌شود.

۱-۳۶- گزاره اول نتیجه ای از این مشاهده است که دو عنصر مزدوج $x^{-1}ax$ و $y^{-1}ay$ برابرند اگر و فقط اگر $(xy^{-1})^{-1}axy^{-1}=a$ و این معادل با این است که $xy^{-1}\in \mathrm{N}_G(a)$. که این حالت برقرار است اگر وفقط اگر $\mathrm{N}_G(a)x=\mathrm{N}_G(a)y$. حال رده تزویجی یک دور به طول n در S_n شامل کلیه دورهای به طول n است . بنابراین شامل $(n-1)!$ عنصر است . بنابراین برای یک دور a اندیس $\mathrm{N}_G(a)$ در S_n برابر با $(n-1)!$ است . چون $|S_n|=n!$ نتیجه می‌شود که $|\mathrm{N}_G(a)|=n$. چون a دارای n توان مختلف است که با آن جابجا می‌شوند بنابراین هیچ عنصر دیگری وجود ندارد که با a جابجا شود .
فرض کنید که n فرد باشد و $n\geq 3$. دورهای به طول n جایگشتهای زوج می‌باشند و بنابراین در A_n می‌باشند . فرض کنید a دوری به طول n باشد . n توان از a در $\mathrm{N}_{S_n}(a)$ قرار دارد (با بحث فوق) و بنابراین رده تزویجی a شامل $\frac{1}{2}\times\frac{n!}{n}=\frac{1}{2}(n-1)!$ عنصر است . چون $(n-1)!$ دور به طول n وجود دارد پس دو رده تزویجی هر کدام شامل $\frac{1}{2}\times(n-1)!$ وجود دارد .
حال فرض کنید که n زوج است با $n\geq 4$. در این صورت $n-1$ فرد است . بنابراین دور به طول $n-1$ زوج است و در نتیجه به A_n تعلق دارد . $n(n-2)!$ دور به طول $n-1$ وجود دارد . فرض کنید a یک چنین دوری باشد . بنابراین در S_n ، رده تزویجی a شامل $n(n-2)!$ عنصر است و بنابراین $|\mathrm{N}_{S_n}(a)|=n-1$. اما اگر $x\in \mathrm{N}_{S_n}(a)$ ، آنگاه چون $n-1$ فرد است ، x یک جایگشت زوج است و بنابراین $x\in A_n$. بنابراین $\mathrm{N}_{S_n}(a)=\mathrm{N}_{A_n}(a)$ و در نتیجه رده تزویجی a در A_n شامل $\frac{1}{2}\times\frac{n!}{n-1}=\frac{1}{2}n(n-2)!$ عنصر است . در این صورت دو رده تزویجی از دورها به طول $n-1$ در A_n که هر کدام شامل $\frac{1}{2}n(n-2)!$ عنصر است وجود دارد .

۱-۳۷- $x \in G$ با $a \in G$ جابجا می‌شود اگر و فقط اگر با a^{-1} جابجا می‌شود . بنابراین $\mathrm{N}_G(a) = \mathrm{N}_G(a^{-1})$. بنابراین تعداد مزدوج های a ، اندیس $\mathrm{N}_G(a)$ در G ، باید برابر با تعداد مزدوج های a^{-1} باشد .

فرض کنید $|G|$ زوج باشد و ۱ تنها عنصر G باشد که مزدوج با وارون خودش باشد . برای هر رده تزویجی A_i , B_i را رده تزویجی شامل وارون آن بگیرید . بنابراین داریم که

$$G = \{1\} \cup A_1 \cup \cdots \cup A_k \cup B_1 \cup \cdots \cup B_k$$

که از آن بدست می‌آوریم که

$$\begin{aligned} |G| &= 1 + |A_1| + \cdots + |A_k| + |B_1| + \cdots |B_k| \\ &= 1 + 2|A_1| + \cdots + 2|A_k| \end{aligned}$$

زیرا برای هر i ، $|B_i| = |A_i|$. این تناقض با این است که $|G|$ زوج است . بنابراین نتیجه می‌گیریم که حداقل یک عنصر $a \neq 1$ وجود دارد که a مزدوج با a^{-1} است .

۱-۳۸- D_{2n} را با دو مولد b,a به طوری $a^2 = b^n = 1$ و $aba = b^{-1}$ در نظر بگیرید . عناصر D_{2n} عبارتند از

$$\{1, b, b^2, \cdots, b^{n-1}, a, ab, \cdots, ab^{n-1}\} \quad .$$

حال چون

$$b^{-1}(ab^i)b = b^{-1}ab^{i+1} = abb^{i+1} = ab^{i+2}$$

مشاهده می‌کنیم که برای هر i $ab^{i+2} = ab^i$ است . همچنین چون $ab^i a = b^{-i}$ می‌بینیم که b^i مزدوج b^{-i} است .

فرض کنید n فرد باشد . در این صورت رده های تزویجی عبارتند از

$$\{1\} \quad \text{و} \quad \{a, ab, \ldots, ab^{n-1}\} \quad \text{و} \quad \{b^i, b^{-i}\}$$

جائیکه $1 \leq i \leq \frac{1}{2}(n-1)$.

اگر n زوج باشد رده های تزویجی عبارتند از

$\{b^i, b^{-i}\}$ ، $\{b^{\frac{1}{2}n}\}$ ، $\{ab, ab^3, \dots, ab^{n-1}\}$ ، $\{a, ab^2, \dots, ab^{n-2}\}$ و $\{1\}$

جائیکه $1 \le i \le \frac{1}{2}(n-2)$.

۱-۳۹- فرض کنید که $K = x^{-1}Hx$. نشان می‌دهیم که $N_G(K) = x^{-1}N_G(H)x$. برای این گزاره قرار دهید $a \in N_G(K)$. برای اینکه نشان دهیم $a \in x^{-1}N_G(H)x$، باید نشان دهیم که $xax^{-1} \in N_G(H)$. بنابراین $h \in H$ و عنصر $(xax^{-1})^{-1}hxax^{-1} = xa^{-1}x^{-1}hxax^{-1}$ را در نظر بگیرید . حال $x^{-1}hx = k \in K$ زیرا $x^{-1}Hx = K$ و $a^{-1}ka = k' \in K$ زیرا $a \in N_G(K)$. بنابراین

$$(xax^{-1})^{-1}hxax^{-1} = xk'x^{-1} = h' \in H$$

زیرا $xKx^{-1} = H$. بنابراین $xax^{-1} \in N_G(H)$ که همان مطلوب می‌باشد .

۱-۴۰- قرار دهید $H = \{1, h\}$. برای هر $g \in G$ ، داریم $g^{-1}hg \in H$ و بنابراین $g^{-1}hg = 1$ یا $g^{-1}hg = h$ که اولی یک تناقض بدست می‌دهد . بنابراین $g^{-1}hg = h$ و $H \subseteq Z(G)$.

اینکه H لزوما یک زیر گروه ، گروه مشتق G نمی‌باشد می‌توان با قرار دادن $G = C_2$ مشاهده کرد . در اینجا C_2 یک زیر گروه نرمال C_2 است اما گروه مشتق C_2برابر با $\{1\}$ است .

فرض کنید که x تنها عنصر مرتبه ۲ در G باشد . قرار دهید $g \in G$ و مثلا $g^{-1}xg = y$ را در نظر بگیرید . داریم $y^2 = g^{-1}x^2g = 1$ و $g^{-1}xg \neq 1$ (زیرا در غیر این صورت $x = 1$) . بنابراین y یک عنصر مرتبه ۲ است و در نتیجه بنا به فرض $y = x$. درنتیجه $g^{-1}xg = x$ و $x \in Z(G)$.

۱-۴۱- قرار دهید $n \in N$ و $g \in G$. بنابراین $[n, g] = n^{-1}g^{-1}ng \in G'$. چون N زیر گروه نرمال G است داریم $n^{-1}(g^{-1}ng) \in N$. در نتیجه $[n, g] \in N \cap G' = \{1\}$. نتیجه می‌شود که $[n, g] = 1$ و بنابراین $n \in Z(G)$.

به وضوح اگر $z \in Z(G)$ ، آنگاه

$$zN.gN = zgN = gN.zN$$

و بنابراین $\frac{Z(G)}{N} \subseteq Z(G/N)$. برای بدست آوردن عکس شمول مشاهده می‌کنیم که

$$\begin{aligned} zN \in Z(G/N) &\Rightarrow (\forall g \in G) \quad zN.gN = gNzN \\ &\Rightarrow (\forall g \in G) \quad z^{-1}g^{-1}zgN = N \\ &\Rightarrow (\forall g \in G) \quad [g,z] \in N \\ &\Rightarrow (\forall g \in G) \quad [g,z] \in G' \cap N = 1 \\ &\Rightarrow z \in Z(G) \end{aligned}$$

حل مسائل فصل ۲

۱-۲- فرض کنید $|G| = p^{\alpha}$. با توجه به معادله رده‌ای داریم

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{g'_\lambda} |G : N(g'_\lambda)|$$

که در آن $g'_\lambda \in C_\lambda$ و $|C_\lambda| > 1$. حال p، $|G|$ و $|G : N(g'_\lambda)|$ را عاد می‌کندبنابراین p ، $|Z(G)|$ را عاد می‌کند پس $|Z(G)|$ غیربدیهی است .

حال فرض کنید $|G| = p^{2}$. چون $|Z(G)|$ غیربدیهی است پس $|Z(G)| = p$ یا $|Z(G)| = p^{2}$. اگر $|Z(G)| = p$، آنگاه $\left|G/Z(G)\right| = p$ بنابراین $G/Z(G)$ دوری است. فرض کنید $aZ(G)$ یک مولد از $G/Z(G)$ باشد . بنابراین دو عضو دلخواه G به صورت $a^m x$ و $a^n y$ می‌باشند که در آن x و y در $Z(G)$ هستند. اما $a^m x a^n y = a^n y a^m x$.چون x و y در $Z(G)$ است ، بنابراین G آبلی است و همچنین $|G| = |Z(G)| = p$ که یک تناقض است. پس باید داشته باشیم $|Z(G)| = p^{2} = |G|$. بنابراین G آبلی است .

گروههای مرتبه ۹ ، $C_3 \times C_3$ و C_9 می‌باشند .

۲-۲- اگر $x \in A \cap B$، آنگاه $v(x) \in v(A)$ و $v(x) \in v(B)$ در نتیجه مشاهده می‌شود که $v(A \cap B) \leq v(A) \cap v(B)$.

حال v^{-1} یک خودریختی بوده و $v^{-1}(X \cap Y) \leq v^{-1}(X) \cap v^{-1}(Y)$. حال قرار دهید $X = v(A)$ و $Y = v(B)$ بدست می‌آوریم $v^{-1}\left[v(A) \cap v(B)\right] \leq A \cap B$ ، بنابراین $v(A) \cap v(B) \leq v(A \cap B)$ در نتیجه تساوی $v(A \cap B) = v(A) \cap v(B)$ بدست می‌آید.

۳-۲- فرض کنید $\varphi_x \in InnG$ خودریختی داخلی $\varphi_x : g \mapsto x^{-1}gx$ باشد. فرض کنید $v \in AutG$ ، نشان می‌دهیم که $v^{-1}\varphi_x v \in InnG$. حال

$$v^{-1}\varphi_x v : g \mapsto v^{-1}(x^{-1}v(g)x) = v^{-1}(x^{-1})gv^{-1}(x)$$

ولی اگر $v^{-1}(x) = y$ ، آنگاه $v^{-1}(x^{-1}) = y^{-1}$ و داریم

$$v^{-1}\varphi_x v : g \mapsto y^{-1}gy$$

بنابراین $v^{-1}\varphi_x v \in InnG$. برای نشان دادن $G/Z(G) \simeq InnG$ نگاشت $\psi : G \to InnG$ با ضابطه $\psi(x) = \varphi_{x^{-1}} : g \mapsto xgx^{-1}$ را تعریف می‌کنیم. بنابراین

$$\psi(xy) = \varphi_{(xy)^{-1}} = \varphi_{y^{-1}x^{-1}} : g \mapsto xygy^{-1}x^{-1} = \psi(x)\psi(y)$$

بوضوح ψ پوشاست و

$$x \in Ker\psi \Rightarrow (\forall g \in G)\ \ xgx^{-1} = g \Rightarrow x \in Z(G)$$

بنابراین $Ker\psi = Z(G)$ و $InnG = \mathrm{Im}\psi \simeq G/Ker\psi = G/Z(G)$.

بوضوح $b^{2} \in Z(D_8)$. چون $a^{-1}b^{2}a = (a^{-1}ba)^{2} = (b^{-1})^{2} = b^{2}$.

حال داریم $D_8 = \{1, b, b^2, b^{-1}, a, ab, ab^2, ab^{-1}\}$ و a و b در $Z(D_8)$ نمی‌باشند، چون دراین‌صورت D_8 آبلی خواهد شد . بنابراین $b^{-1} \notin Z(D_8)$. چون $b^2 \in Z(D_8)$ و $a \notin Z(D_8)$ پس داریم $ab^2 \notin Z(D_8)$. همچنین ab ، ab^{-1} با a جابجا می‌شوند

اگر و تنها اگر b با a جابجا شود . پس ab و ab^{-1} در $Z(D_8)$ نمی‌باشند .
بنابراین $Z(D_8)=<b^2>\simeq C_2$ ،

$$D_8/Z(D_8)\simeq <a,b \mid a^2=1, b^4=1, a^{-1}ba=b^{-1}, b^2=1>$$
$$=<a,b \mid a^2=1, b^2=1, ab=ba>$$
$$\simeq C_2\times C_2$$

به طریق مشابه $Z(Q_8)=<x^2>\simeq C_2$ و $Q_8/Z(Q_8)\simeq C_2\times C_2$.

۴-۲- پاسخ هر دو سئوال منفی است . همان گروه یعنی گروه دو وجهی از مرتبه ۸ مثالهای نقض را تأمین می‌کنند. فرض کنید $D_8=<a,b \mid a^2=1, b^4=1, (ab)^2=1>$. اگر D_8 ضرب مستقیمی از دو زیرگروه غیربدیهی بود، یکی از آنها باید از مرتبه ۴ و دیگری از مرتبه ۲ باشد. ولی یک زیرگروه نرمال از مرتبه ۲ در مرکز است. بنابراین $D_8=A\times B$ که $|A|=4$ و $B=Z(D_8)=<b^2>$. حال $b\notin A$ چون $A\cap B=\{1\}$، پس $Ab\in D_8/A\simeq C_2$. بنابراین $(Ab)^2=Ab^2=A$ که نشان می‌دهد $b^2\in A$. پس $B\subseteq A$ که یک تناقض با $A\cap B=\{1\}$ است. بنابراین D_8 تجزیه‌ناپذیر است .
به هر حال یک زیرگروه و یک گروه خارج قسمتی از D_8 وجود دارد که هر یک با $C_2\times C_2$ یکسان است . زیرگروه $<a,b^2>$ (یا $<ab,b^2>$) درنظر می‌گیریم) و توجه کنید که $Q_8/Z(Q_8)\simeq C_2\times C_2$ چون $Z(D_8)=<b^2>$.

۵-۲- چون $G/Z(G)$ دوری است ، هر عضو آن توانی از $aZ(G)$ می‌باشد . بنابراین برای $g\in G$ برای یک $z\in Z(G)$ و $n\in Z$ می‌توان نوشت $g=a^nz$. اگر $g_1,g_2\in G$، آنگاه با یک نماد گذاری ساده داریم :

$$g_1g_2=a^{n_1}z_1a^{n_2}z_2=a^{n_1+n_2}z_1z_2$$

چون z_2 مرکزی است و

$$g_2g_1=a^{n_2}z_2a^{n_1}z_1=a^{n_1+n_2}z_1z_2$$

چون z_1 و z_2 مرکزی هستند. بنابراین G آبلی است .

فرض کنید $AutG$ دوری باشد. در این صورت $InnG$ هم دوری است .
ولی $InnG \simeq G/Z(G)$ ، بنابراین $G/Z(G)$ دوری است . پس G آبلی است .

۲-۶- اگر $\alpha \in AutS_3$ ، آنگاه α باید نگاشتی باشد که یک عضو از مرتبه ۲ در S_3 را به یک عضو از مرتبه ۲ ببرد . بنابراین α مجموعه $A = \{(12),(23),(13)\}$ را حرکت می‌دهد .
اگر α همه این سه عضو را ثابت نگه دارد، آنگاه چون عناصر مرتبه۲، S_3 را تولید می‌کنند α باید نگاشت همانی باشد. بنابراین اگر $\alpha,\beta \in AutS_3$ جایگشتهایی از A باشند ، آنگاه $\alpha\beta^{-1}$ عناصر A را ثابت نگه می‌دارد بنابراین $\alpha\beta^{-1} = id$ و $\alpha = \beta$. پس $|AutS_3| \le 6$.

حال چون $Z(S_3) = \{1\}$ و $S_3/Z(S_3) \simeq InnS_3$ ، پس S_3 دارای شش خودریختی داخلی است پس

$$6 = |\, InnS_3 \,| \le |\, AutS_3 \,| \le 6$$

که نتیجه می‌دهد $InnS_3 = AutS_3$ بنابراین $AutS_3 \simeq S_3/Z(S_3) = S_3$ بدست می‌آید.

۲-۷- فرض کنید $C_2 \times C_2 =< a,b \mid a^2 = b^2 = a^{-1}b^{-1}ab = 1 >$. پس داریم $C_2 \times C_2 = \{1, a, b, ab\}$ و هر عضو از مجموعه $\{a,b,ab\}$ از مرتبه ۲ است .
اگر $\alpha \in Aut(C_2 \times C_2)$ ، آنگاه α ، ۱ را ثابت نگه داشته و a,b,ab را حرکت می‌دهد بنابراین بطور کلی α با عمل خود روی $\{a,b,ab\}$ مشخص می‌شود. در نتیجه $Aut(C_2 \times C_2) \le S_3$. برای نشان دادن $Aut(C_2 \times C_2) = S_3$ باقی می‌ماند که نشان دهیم هر جایگشت روی $\{a,b,ab\}$ ازیک خودریختی از $C_2 \times C_2$ بدست می‌آید. این ساده است که حاصلضرب هر دو عضو متمایز از $\{a,b,ab\}$ عضو سوم را بدست می‌دهد و این خاصیت تحت یک دوسویی حفظ می‌گردد . همانطوری که در ۲.۶ نشان داده شد $AutS_3 = S_3$. بنابراین $C_2 \times C_2$ و S_3 گروه خودریختی گروهی یکسانی دارند .

۲-۸- اگر $v \in Z(AutG)$ و φ_g خودریختی داخلی داده شده با $\varphi_g(x) = g^{-1}xg$ باشد، آنگاه باید داشته باشیم $v\varphi_g = \varphi_g v$. بنابراین برای هر $x \in G$ داریم

$$v(g^{-1})v(x)v(g) = v(g^{-1}xg) = g^{-1}v(x)g .$$

بنابراین $gv(g^{-1})v(x) = v(x)gv(g^{-1})$. چون v پوشاست ، مشاهده می‌شود که $gv(g^{-1}) \in Z(G) = \{1\}$ و بنابراین $v(g) = g$. چون این برای هر $g \in G$ برقرار است پس $v = id$ را ایجاب می کند.

برای نشان دادن اینکه عکس مطلب غلط است توجه کنید که $S_3 = Aut(C_2 \times C_2)$ (بنا به ۷-۲) و $Z(S_3) = \{1\}$، با وجود این $Z(C_2 \times C_2) = C_2 \times C_2 \neq \{1\}$.

۲-۹- واضح است که گروه جمعی فضای برداری Z_p^n یکسان با $C_p \times C_p \times \ldots \times C_p$ (n بار) است . فرض کنید v یک خودریختی از گروه جمعی Z_p^n باشد . برای نشان دادن اینکه v یک نگاشت خطی روی Z_p^n است کافی است مشاهده کنیم که :

$$v[(a_1,\ldots,a_n)+(b_1,\ldots,b_n)] = v(a_1,\ldots a_n)+v(b_1,\ldots,b_n)$$

که نتیجه می‌دهد

$$v([m(a_1,\ldots,a_n)]) = v(ma_1,\ldots,ma_n) = mv(a_1,\ldots,a_n)$$

بنابراین v یک نگاشت خطی معکوس پذیر است. این نشان می‌دهد که $AutG$ یکسان با گروه نگاشت‌های خطی معکوس‌پذیر روی فضای برداری Z_p^n می‌باشد . حال یک پایه B از Z_p^n را ثابت نگه می‌داریم. پس نگاشتی که هر نگاشت خطی معکوس‌پذیر روی Z_p^n را به ماتریسی $n \times n$ وابسته به B ببرد، بوضوح یک یکریختی برو به $GL(n,p)$ است .

۲-۱۰- اگر $AutG = \{1\}$ ، آنگاه G باید آبلی باشد . برای $g \in G$ داده شده خودریختی داخلی از تزویج توسط g بدیهی است اگر و تنها اگر $g \in Z(G)$. بنابراین $G = Z(G)$ و در نتیجه G آبلی است .

فرض کنید G شامل یک عضو g از مرتبه بزرگتر از ۲ باشد . چون G آبلی است، نگاشت توصیف شده با ضابطه $v: x \mapsto x^{-1}$ یک ریختار گروهی است. چون $v(g) = g^{-1} \neq g$ مشاهده می‌شود که v عضو غیربدیهی از $AutG$ است و این یک تناقض است ، بنابراین هر عضو از G باید از مرتبه ۲ باشد. حال G را یک فضای برداری روی Z_2 بگیرید . اگر بعد این فضای برداری بزرگتر از یک باشد، آنگاه هر جایگشت غیربدیهی از عناصر پایه یک خودریختی غیربدیهی روی G است. بنابراین بعد حداکثر یک می‌باشد . در نتیجه $G \simeq C_2$ یا G بدیهی است .

۲-۱۱- (a) درست است. فرض کنید $v: G \to G$ یک ریختار گروهی باشد. پس برای $a,b \in G$ داریم :

$$v([a,b]) = v(a^{-1}b^{-1}ab) = v(a)^{-1}v(b)^{-1}v(a)v(b)$$
$$= [v(a).v(b)] \in G'$$

بنابراین $v(G') \subseteq G'$.

(b) غلط است. $C_2 \times S_3$ که $C_2 = <a>$ را در نظر بگیرید . $Z(C_2 \times S_3)$ زیرگروه $<(a,1)>$ است . نگاشت $v: C_2 \times S_3 \to C_2 \times S_3$ به صورت زیر داده شده است را در نظر می گیریم :

$$(\forall \pi \in S_3) \qquad \begin{cases} v(a,\pi) = (1,(12)) \\ v(1,\pi) = (1,1) \end{cases} .$$

پس v یک ریختار گروهی است ولی $v(Z(C_2 \times S_3)) \not\subset Z(C_2 \times S_3)$.

(c) غلط است . A_4 شامل فقط یک زیرگروه نرمال حقیقی غیربدیهی $V \simeq C_2 \times C_2$ است. فرض کنید $v: A_4 \to A_4$ یک ریختار گروهی باشد . بنابراین $Kerv$ باید $\{1\}$، V یا A_4 باشد و نتیجه می‌شود که V کاملا پایا می‌باشد .

(d) درست است. اگر $v: G \to G$ یک ریختار گروهی باشد ، آنگاه از $v(g^n) = [v(g)]^n$ بدست می‌آوریم $v(G^n) \subseteq G^n$.

(e) درست است. اگر $v: G \to G$ یک ریختار گروهی باشد ، آنگاه

$$g^n = 1 \Rightarrow \nu(g^n) = 1 \Rightarrow [\nu(g)]^n = 1$$

که بدست می‌آوریم $\nu(G_n) \subseteq G_n$.

۲-۱۲- کافی است نشان دهیم که x مزدوج با y است اگر و تنها اگر $\alpha(x)$ مزدوج با $\alpha(y)$ باشد. ولی

$$x = g^{-1}yg \Leftrightarrow \alpha(x) = \alpha(g^{-1}yg) = [\alpha(g)]^{-1}\alpha(y)\alpha(g)$$

بنابراین نتیجه حاصل می‌شود.

برای نشان دادن اینکه N نرمال در $AutG$ است باید نشان دهیم که اگر $\beta \in AutG$ و $\alpha \in N$ ، آنگاه $(\beta^{-1}\alpha\beta)(c) = c$. ولی $\beta(c)$ یک کلاس تزویجی با توجه قسمت اول سئوال است . بنابراین بنا به تعریف α ، $\alpha[\beta(c)] = \beta(c)$. بنابراین $(\beta^{-1}\alpha\beta)(c) = \beta^{-1}[\beta(c)] = c$ بدست می‌آید .

۲-۱۳- برای نشان دادن $NC \lhd G$ کافی است نشان دهیم که $C \lhd G$، زیرا N نرمال می‌باشد . پس فرض کنید $g \in G$ و $c \in C$. برای $n \in N$، $n' \in N$ای وجود دارد به طوری که $gn = n'g$ و همچنین چون C مرکزساز N است

$$g^{-1}cgn = g^{-1}cn'g = g^{-1}n'cg = ng^{-1}cg \quad .$$

برای $g \in G$ داریم $\psi_g \in A$ که در آن $\psi_g : n \mapsto gng^{-1} \in N$. $\psi : G \to A$ با ضابطه $\psi(g) = \psi_g$ تعریف می‌کنیم . توجه کنید که $Ker\psi = C$. نشان می‌دهیم که $\psi(NC) \subseteq I$. که ψ یک ریختار از G/NC به A/I را القاء می‌کند. حال $\psi(C) \subseteq I$ چون $Ker\psi = C$ و اگر $n \in N$ ، آنگاه $\psi(n) = \psi_n \in I$. بنابراین $\psi(N) \subseteq I$ که $\psi(NC) \subseteq I$. برای نشان دادن اینکه نگاشت القائی بوسیله ψ از G/NC به A/I یک به یک است باید نشان دهیم که $\{g \in G \mid \psi(g) \in I\} = NC$. ولی این بوضوح از این حقیقت که $\psi(N) = I$ و $Ker\psi = C$ بدست می‌آید.

همچنین ، چون $N/Z(N) \simeq I$ و $Z(N) = N \cap C$ داریم

$$I \simeq N/N \cap C \simeq NC/C$$

اگر $Z(N)=\{1\}$ ، آنگاه $N\cap C=\{1\}$. همچنین چون A/I بدیهی است ، پس G/NC نیز چنین است . بنابراین $G=NC$ و بنابراین $G=N\times C$.

چون $Z(S_3)=\{1\}$ داریم $InnS_3 \simeq S_3/Z(S_3) \simeq S_3$. ولی $AutS_3=S_3$ (بنا به ۲.۶) پس هر خودریختی از S_3 داخلی است . بنابراین S_3 در شرایط زیرگروه N صدق می‌کنند و نتیجه حاصل می‌گردد .

۱۴-۲- (a) اگر $v(H)\le H$ و $v(H)^{-1}\le H$ ، آنگاه از قبل داریم که $H\le v(H)$ ، بنابراین تساوی حاصل می‌گردد.

(b) اگر $x\in\cap H_\lambda$ که هر H_λ مشخصه است ، آنگاه برای هر $v\in AutG$ و هر λ داریم $v(x)\in H_\lambda$. بنابراین $v(x)\in\cap H_\lambda$.

(c) اگر $x\in HK$ ،آنگاه $x=hk$ ایجاب می‌کند $v(x)=v(h)v(k)\in HK$.

(d) فرض کنید $c\in C=[H,K]$. پس $c=t_1t_2\cdots t_n$ که در آن $t_i\in[h_i,k_i]^{\varepsilon_i}$ با $\varepsilon_i=\pm 1$ می‌باشد. بنابراین

$$v(c)=v(t_1)v(t_2)\cdots v(t_n)$$

که در آن

$$v(t_i)=v[h_i,k_i]^{\varepsilon_i}=[v(h_i),v(k_i)]^{\varepsilon_i}$$

(e) H در G نرمال است . بنابراین اگر φ یک خودریختی داخلی از G باشد ، آنگاه $\varphi(H)\le H$. ولی اگر φ_H تحدید φ به H باشد ، داریم $\varphi_H(K)\le K$ و مطمئناً φ_H یک خودریختی (نه لزوماً داخلی) و K مشخصه در H است . ولی $\varphi(K)=\varphi_H(K)$ ، بنابراین $\varphi(K)\le K$ ایجاب می‌کند $K\lhd G$.

۱۵-۲- فرض کنید $v\in AutG$ و $K=v(H)$. باید نشان دهیم که $K\subseteq H$. فرض کنید $|H|=n$ و $|G/H|=m$. چون $HK/H\le G/H$ ، آنگاه $|HK/H|$ ، m را عاد می‌کند ولی می‌دانیم که $HK/H\simeq K/H\cap K$. بنابراین $|HK/H|$ ، n را عاد

می‌کند، ولی بنا به فرض $h.c.f.(m,n)=1$ پس $\left|HK/H\right|=1$. بنابراین $HK=H$ و $K\le H$ بدست می‌آید .

۲-۱۶- اگر $a\in F$ ، آنگاه $a^{-1}\in F$ زیرا $(g^{-1}ag)^{-1}=g^{-1}a^{-1}g$. ولی اگر $a,b\in F$، داریم $ab\in F$ زیـــرا $g^{-1}abg=g^{-1}agg^{-1}bg$. بنابراین $F\le G$. حال F مشخصه در G می باشد . برای مشاهده این فرض کنید $a\in F$ و $v\in AutG$. می‌نویسیم $g=v(g')$، داریم $g^{-1}v(a)g=v(g'^{-1}ag')$ و بنابراین فقط تعداد متناهی مزدوج از $v(a)$ وجود دارد. بنابراین $v(a)\in F$.

۲-۱۷- v_t بوضوح یک ریختار گروهی جمعی است چون $t\neq 0$ یک به یک است. چون $v_t(t^{-1}x)=x$ دیده می‌شود که v_t همچنین پوشاست. بنابراین v_t یک خودریختی است. فرض کنید H یک زیرگروه مشخصه غیربدیهی از Q^+ باشد. برای هر $t\in Q\setminus\{0\}$ داریم $v_t(H)=H$. نشان می‌دهیم که $H=Q^+$. چون H غیربدیهی است ، $0\neq x\in H$ انتخاب می‌کنیم و فرض می‌کنیم $y\in Q\setminus\{0\}$. بنابراین برای $t=yx^{-1}\neq 0$ داریم

$$y=tx=v_t(x)\in v_t(H)=H$$

بنابراین $H=Q^+$ نتیجه می‌شود .

۲-۱۸- یک p - زیرگروه سیلو از H ، یک p - زیرگروه از G است که مشمول در یک p - زیرگروه سیلو است. فرض کنید P_2 و P_1 ، p - زیرگروه سیلوی H باشد. فرض کنید $P_1<P$ و $P_2<P$ که P یک p - زیرگروه سیلو از G است . بنابراین $H\cap P$ یک p - زیر گروه H است و $P_1\le H\cap P$ و $P_2\le H\cap P$ ایجاب می‌کند که $P_1=H\cap P=P_2$. حال فرض کنید $H\lhd G$ و P یک p - زیرگروه سیلوی G باشد. بنابراین $H\cap P$ یک p - زیرگروه سیلوی از H است و بنابراین مشمول در p - زیرگروه سیلو P_1 از H است . حال $P_1\le\overline{P}$ که $\overline{P}$ یک p - زیرگروه سیلو از G است بنابراین برای $g\in G$ ای، $\overline{P}=g^{-1}Pg$ زیرا p - زیرگروه سیلوهای G مزدوج هستند.
حال چون $H\lhd G$ داریم

$$P_1 = \overline{P} \cap H = g^{-1}Pg \cap H = g^{-1}(P \cap H)g$$

بنابراین $|P \cap H| = |P_1|$ و چون $P \cap H \le P_1$ نتیجه می‌شود که $P \cap H = P_1$.
فرض کنید $|G| = p^n k$. بنابراین $|P| = p^n$. فرض کنید $|H| = p^m t$ پس $|H \cap P| = p^m$. حال $\left|G/H\right| = p^{n-m}s$ که در آن $st = k$ و

$$\left|\frac{HP}{H}\right| = \frac{|P|}{|H \cap P|} = p^{n-m}$$

بنابراین HP/H یک p - زیرگروه سیلو از G/H است .
حال فرض کنید که شرط نرمال بودن H در G را حذف کرده ایم . $G = S_3$ و $H =<(12)>$ را در نظر بگیرید . $P =<(13)>$ یک ۲- زیرگروه سیلو از S_3 است ولی $|H| = 2$ و $H \cap P = \{1\}$.

۱۹-۲- فرض کنید H یک p - زیرگروه نرمال از G باشد. بنابراین $H \le P$ که در آن P یک p - زیرگروه سیلوی از G است . ولی هر p - زیرگروه سیلو از G به شکل $g^{-1}Pg$ برای یک $g \in G$ است و $H \le P$ ایجاب می‌کند که $H = g^{-1}Hg \le g^{-1}Pg$ زیرا $H \lhd G$. فرض کنید $H_1, H_2, \ldots, H_n$ ، p- زیرگروه‌های سیلوی متمایز G باشند . چون یک p - زیرگروه سیلوی نرمال منحصربفرد است ، هر عنصر که مرتبه‌اش توانی از p باشد مشمول در این p - زیرگروه سیلو است.
حال مشاهده می‌شود که

(a) بنا به فرض $H_1, \ldots, H_n$ در G نرمالند .

(b) $G = H_1 \cdots H_n$ و این از این واقعیت بدست می‌آید که در واقع برای $i \neq j$ ، $H_i \cap H_j = \{1\}$ و $|H_1 \cdots H_n| = |H_1| \cdots |H_n| = |G|$.

(c) $H_i \cap H_1 \cdots H_{i-1}H_{i+1} \cdots H_n = \{1\}$ و در واقع اگر $a \in H_i$ و $b \in H_j$ که $i \neq j$ ، آنگاه $[a,b] \in H_i \cap H_j = \{1\}$.

بنابراین می‌بینیم که G حاصلضرب مستقیم p - زیرگروه‌های سیلویش است .

۲-۲۰- داریم $|A_5| = 60 = 5\times3\times2^2$. بنابراین ۵- زیرگروههای سیلوی آن C_5، ۳- زیرگروههای سیلوی آن C_3 و ۲- زیرگروههای سیلوی آن $C_2\times C_2$ (چون A_5 هیچ عضوی از مرتبه ۴ ندارد) می‌باشند .

$5k+1$ ، ۵- زیرگروه سیلووجود دارد که در آن $5k+1$ ، ۶۰ را عاد می‌کند . بنابراین شش ۵- زیرگروه سیلو وجود دارد .$3k+1$ ، ۳- زیرگروه سیلو که $3k+1$ عدد ۶۰ را عاد می‌کند وجود دارد . پس چهار یا ده، ۳- زیرگروه سیلو وجود دارد . در واقع ده ، ۳- زیرگروه سیلو وجود دارد که با کمی محاسبه بدست می‌آید . $2k+1$ ، ۲- زیرگروه سیلو که $2k+1$ ، ۶۰ را عاد می‌کند وجود دارد بنابراین سه، پنج یا پانزده ۲- زیرگروه سیلو وجود دارد که در واقع با کمی محاسبه پنج ، ۲- زیرگروه سیلو بدست می‌آید .

۲-۲۱- فرض کنید $g\in G$. بنابراین $g^{-1}Pg \le g^{-1}Kg = K$ چون $K \lhd G$. بنابراین چون $|g^{-1}Pg| = |P|$ ، آنگاه $g^{-1}Pg$ نیز یک p - زیرگروه سیلوی K است . پس با قضیه سیلو ، P و $g^{-1}Pg$ مزدوج در K هستند . بنابراین وجود دارد یک $k\in K$ که $g^{-1}Pg = k^{-1}Pk$. در این صورت $(gk^{-1})^{-1}P(gk^{-1}) = P$ و $gk^{-1}\in N(P)$، بنابراین $g\in N(P)K$. چون برای هر $g\in G$ این برقرار است ، داریم $G = N(P)K$.
فرض کنید $N(\overline{P}) \le H \le G$. چون $\overline{P} \le H \le G$ ، آنگاه $\overline{P}$ یک p - زیرگروه سیلو از H است. فرض کنید $L = N(H)$. بنا به قسمت اول مسئله $L = N_L(\overline{P})H$ که در آن $N_L(\overline{P})$ نرمال ساز $\overline{P}$ در L است . ولی $N_L(\overline{P}) \le N(\overline{P}) \le H$ ، بنابراین تساوی $L = H$ را بدست می‌آید .

۲-۲۲- فرض کنید $S \le G$ و P یک p - زیرگروه سیلوی S باشد. باید نشان دهیم که P دوری است . P یک p - زیرگروه سیلو از G است بنابراین برای یک p - زیرگروه سیلو $\overline{P}$ از G ، $P \le \overline{P}$ که چون $\overline{P}$ دوری است پس P نیز چنین است

فرض کنید $P_۲$ و $P_۱$ ، p - زیرگروه های از G با $|P_۱| = |P_۲|$ باشد. داریم $P_۲ \le \overline{P}_۲$ و $P_۱ \le \overline{P}_۱$ که $\overline{P}_۲$ و $\overline{P}_۱$ ، p - زیرگروه های سیلوی G هستند . ولی $\overline{P}_۱$ با $\overline{P}_۲$ مزدوج هستند ، بنابراین وجود دارد $g \in G$ که $g^{-۱}\overline{P}_۱ g = \overline{P}_۲$. ولی $g^{-۱}P_۱ g \le \overline{P}_۲$ و $|P_۱| = |P_۲| = |g^{-۱}P_۱ g|$ ، بنابراین $g^{-۱}P_۱ g$ و $P_۲$ زیرگروههای از یک مرتبه در گروه دوری $\overline{P}_۲$ هستند. بنابراین $g^{-۱}P_۱ g = P_۲$ حاصل می‌شود .

مطمئناً $|H \cap N|$ ، $|H|$ و $|N|$ را عاد می‌کند . بنابراین $h.c.f.(|N|,|H|)$ را عاد می‌کند . فرض کنید p عدد اولی باشد که $(|N|,|H|)$ را عاد کند و p^n بزرگترین توانی از p باشد که آن را عاد می‌کند . بنابراین p^n ، $|N|$ و $|H|$ را عاد می‌کند. پس وجود دارد $P_۱$ ، $P_۲$ که $P_۱ \le N$ ، $P_۲ \le H$ و $|P_۱| = p^n = |P_۲|$. حال $P_۱$ با $P_۲$ مزدوج هستند و چون $N \lhd G$ باید داشته باشیم $P_۲ \le N$. بنابراین $P_۲ \le H \cap N$ و $|H \cap N|$ قابل قسمت به p^n است . بنابراین $|H \cap N| = h.f.c.(|N|,|H|)$ و از یکریختی $HN/N \simeq H/H \cap N$ خواهیم داشت

$$|HN| = \frac{|H||N|}{|H \cap N|} = \frac{|H||N|}{h.c.f.(|H|,|N|)} = \text{ک.م.م}(|H|,|N|)$$

بالأخره فرض کنید $N \lhd G$ و $v \in AutG$. در این صورت $|v(N)| = |N|$.بنابراین

$$|v(N) \cap N| = h.c.f.(|v(N)|,|N|) = |N|$$

که تساوی $v(N) = N$ را ایجاب می‌کند .

۲-۲۳- (a) $۲۰۰ = ۵^۲ \times ۲^۳$. بنابراین G شامل k ، ۵- زیرگروه سیلو از مرتبه ۲۵ است که در آن $k = ۱ + ۵x$ و k ، ۲۰۰ را عاد می‌کند . چون $(k,۵) = ۱$ پس k عدد ۸ را عاد می‌کند و بنابراین $x = ۰$. پس G یک ۵- زیرگروه سیلو منحصربفرد دارد که نرمال است.

(b) $۴۰ = ۵ \times ۲^۳$ بنابراین G شامل k ، ۵- زیرگروه سیلو است که $k = ۱ + ۵x$ و k عدد ۴۰ را عاد می‌کند . دوباره داریم $x = ۰$ و بنابراین G شامل یک ۵- زیرگروه سیلو منحصربفرد است که نرمال می‌باشد . بنابراین G ساده نیست .

(c) $۵۶ = ۷ \times ۲^۳$. $۱+۷k$، ۱، ۷- زیرگروه سیلو که $۱+۷k$ عدد ۵۶ را عاد می‌کند وجود دارد . اگر گروه ساده باشد ، آنگاه باید هشت ۷- زیرگروه سیلو با ۴۹ عضو متمایز داشته باشیم. همچنین باید هفت ، ۲- زیرگروه سیلو داشته باشیم و گروه بیش از ۵۶ عضو دارد .

(d) $۳۵ = ۷ \times ۵$. تعداد ۵- زیرگروه های سیلو همنهشت با یک به پیمانه ۵ است و ۳۵ را عاد می‌کند ، بنابراین فقط یک ۵- زیرگروه سیلو که نرمال است وجود دارد . بنا به همان بحث، فقط یک ۷- زیرگروه سیلوی نرمال وجود دارد . فرض کنید H، ۵- زیرگروه سیلو و K، ۷- زیرگروه سیلو باشند. در زیر نشان می‌دهیم که $G \simeq H \times K$.

(i) H ، $K \lhd G$ که قبلاً نشان داده شده است .

(ii) $|HK| = \dfrac{|H||K|}{|H \cap K|} = \dfrac{۵ \times ۷}{۱} = ۳۵$ بنابراین $HK = G$.

(iii) $H \cap K = \{۱\}$ زیرا $h.c.f.(|H|،|K|) = ۱$.

بنابراین $G \simeq H \times K \simeq C_۵ \times C_۷ \simeq C_{۳۵}$ به دست می‌آید .

۲-۲۴- (a) اگر $|G| = ۸۵ = ۵ \times ۱۷$ ،آنگاه تعداد ۵- زیرگروه های سیلو همنهشت با یک به پیمانه ۵ است . پس یکی از اعداد ۱، ۶، ۱۱، ۱۶، ۲۱، ۲۶، ... است . ولی تعداد ۵- زیرگروه های سیلو ۸۵ را عاد می‌کند ، بنابراین G فقط یک ۵- زیرگروه سیلو دارد که آن را H می‌نامیم و آن نرمال می‌باشد. به طور مشابه یک ۱۷- زیرگروه سیلو منحصربفرد که آن را K می‌نامیم وجود دارد . حال

(i) H ،$K \lhd G$

(ii) $G = HK$ زیرا $|HK| = \dfrac{|H||K|}{|H \cap K|} = \dfrac{۵ \times ۱۷}{۱} = ۸۵$ ؛

(iii) $H \cap K = \{۱\}$ چون $h.c.f.(|H|,|K|) = ۱$.

بنابراین $G \simeq H \times K \simeq C_۵ \times C_{۱۷} \simeq C_{۸۵}$.

(b) G را یک گروه از مرتبه $p^۲q$ در نظر بگیرید و فرض کنید G ساده باشد. G دارای n_p، p- زیرگروه سیلو و n_q، q- زیرگروه سیلو است. بنابراین $۱ < n_p$ ، $n_q > ۱$ ،

چون n_p ، q را عاد می‌کند باید $n_p = q$ ، همچنین $n_p \equiv ۱$ (پیمانه p) بنابراین $q > p$.
دوباره n_q، $p^۲$ را عاد می‌کند ، بنابراین n_q یا p یا $p^۲$ است .
پس باید $n_q(q-۱)$ عضو متمایز از مرتبه q داشته باشیم بنابراین اگر $n_q = p^۲$ ، آنگاه $p^۲q - p^۲(q-۱) = p^۲$ عضو از مرتبه مخالف q وجود دارد ولی چون p - زیرگروه سیلوی G دارای مرتبه p^2 است داریم $n_p = ۱$ ، که یک تناقض است . بنابراین باید داشته باشیم $n_q = p$. ولی $n_q \equiv ۱$ (پیمانه q) و بنابراین $p > q$ که یک تناقض است .
که نتیجه می‌گیریم که G نمی‌تواند ساده باشد .

۲-۲۵- بنا به قضیه سیلو تعداد p - زیرگروه های سیلوی متمایز G یعنی n ، q را عاد می‌کند و $n \equiv ۱$ (پیمانه p) . چون q اول است پس $n = ۱$ یا $n = q$. چون $q \not\equiv ۱$ (پیمانه p) پس $n = ۱$. بنابراین G یک p - زیرگروه سیلو منحصربفرد P دارد که $P \lhd G$.
$S_۳$را در نظر بگیرید ، داریم $|S_۳| = ۲\times ۳$ و $۳ \equiv ۱$ (پیمانه۲) . در این حالت نتیجه غلط است زیرا $S_۳$ هیچ ۲- زیرگروه نرمال ندارد .
برای نشان دادن اینکه G ساده نیست وقتی که $|G| = pq$ ، می‌توان فرض کرد که $p > q$، بنابراین $q - ۱$ بر p قابل تقسیم نمی‌باشد . بنابراین G یک q- زیرگروه سیلو نرمال دارد و در نتیجه نمی‌تواند ساده باشد.
حال فرض کنید $|G| = pq$ که $p \not\equiv ۱$ (پیمانه q) و $q \not\equiv ۱$ (پیمانه p) . بنابراین G دارای یک p - زیر گروه سیلوی نرمال P و یک q- زیرگروه سیلوی نرمال Q است.
چون Q و P دارای مرتبه‌های اول هستند پس دوری می‌باشند . فرض کنید $P = \langle x\rangle$، $Q = \langle y\rangle$. حال $P \cap Q = \{۱\}$ بنابراین $xy = yx$. بنابراین xy دارای مرتبه pq و $G = \langle xy\rangle$ دوری است .

۲-۲۶- جواب منفی است و گروه متقارن $S_۴$ مثال آن است. ابتدا باید نشان دهیم که S_4 شامل یک زیرگروه از مرتبه n برای هر مقسوم علیه n از ۲۴ است . حالت $n = 1$ و $n = ۲۴$ واضح است . برای زیر گروههای از مرتبه ۱۲ و ۸ و ۶ و ۴ و ۳ و ۲ داریم :

(۱) $|<(12)>| = 2$ ؛

(۲) $|<(123)>| = 3$ ؛

(۳) $|<(1234)>| = 4$ ؛

(۴) $S_3 \subset S_4$ و $|S_3| = 6$ ؛

(۵) $24 = 3 \times 8$ ، بنابراین یک ۲- سیلو زیرگروه از S_4 دارای مرتبه ۸ است ؛

(۶) A_4 دارای مرتبه ۱۲ است .

زیر گروه A_4 را در نظربگیرید . ادعا می‌کنیم که زیرگروه از مرتبه ۶ ندارد . برای مشاهده این مطلب فرض کنید که H یک زیرگروه از مرتبه ۶ باشد . بنابراین H نمی‌تواند آبلی باشد (چون S_4 دارای هیچ عضوی از مرتبه ۶ نیست) و بنابراین $H \simeq S_3$ ولی هر زیرگروه S_3 در S_4 یک نقطه را ثابت نگه داشته و شامل جایگشت فرد است . بنابراین چنین زیرگروه Hی نمی‌تواند وجود داشته باشد .

۲-۲۷- برای یک $g \in G$ فرض کنید $y = g^{-1}xg$. بنابراین $y \in P$ و $y \in g^{-1}Pg$. چون $y \in Z(P)$ و $y \in Z(g^{-1}Pg)$ پس P و $g^{-1}Pg$ هر دو در مرکزساز y هستند . بنابراین

$$\langle P, g^{-1}Pg \rangle \leq N_G(y)$$

ولی P و $g^{-1}Pg$ زیرگروه های سیلوی G هستند . بنابراین p- زیرگروه های سیلوی $N_G(y)$ هستند. بنابراین برای یک $c \in N_G(y)$ ، $P = c^{-1}g^{-1}Pgc$. حال $gc \in N_G(y)$ و

$$(gc)^{-1}x(gc) = c^{-1}g^{-1}xgc = c^{-1}yc = y$$

بنابراین x و y در $N(P)$ مزدوج هستند .

۲-۲۸- فرض کنید $\Omega = \{ aH \mid a \in G \}$ و برای هر $g \in G$ جایگشت روی Ω به صورت

$$\overline{g} : aH \mapsto gaH$$

را تعریف کنید. پس $\varphi: G \to S_\Omega$ با ضابطه $\varphi(g) = \bar{g}$ به راحتی یک ریختار گروهی است. حال $g \in Ker\varphi$ اگر و تنها اگر $aH = gaH$ برای هر $a \in G$. که این حالت بر قرار است اگر و تنها اگر برای هر $a \in G$ ، $g \in aHa^{-1}$. بنابراین دیده می‌شود که $Ker\varphi = \bigcap_{a\in G} a^{-1}Ha$. براحتی دیده می‌شود که این بزرگترین زیرگروه نرمال از G است که مشمول در H است. بنا به قضیه اول یکریختی

$$G/Ker\varphi \simeq \operatorname{Im}\varphi \le S_n.$$

حال فرض کنید G ساده و $|G| = ۶۰$ باشد. اگر H یک زیرگروه با $|H| = ۱۵$ باشد، آنگاه H داری اندیس ۴ است. ولی $K = \{۱\}$ چون G ساده است و $G/K = G$ (بنا به بالا) باید یکسان با زیرگروهی از $S_۴$ باشد. با این وجود ۶۰ بر ۲۴ بخشپذیر نیست و بنابراین این یک تناقض است. به روش مشابه می‌توان نشان داد G که دارای زیرگروهی از مرتبه ۲۰ یا ۳۰ نیست.

۲-۲۹- تعداد ۷- زیرگروه های سیلو یعنی n باید بگونه ای باشد که $n \equiv ۱$ (پیمانه۷) و n ، ۱۶۸ را عاد می‌کند. حال $n \neq ۱$ ، چون در غیر این صورت G دارای یک ۷- زیرگروه سیلوی منحصربفرد است که نرمال می‌باشد. نیز مقسوم علیه دیگر ۱۶۸ که همنهشت با ۱ به پیمانه ۷ است ۸ می‌باشد. بنابراین G دارای هشت ۷- زیرگروه سیلو است. چون $N_G(P)$ باید دارای اندیس هشت باشد داریم $|N_G(P)| = ۲۱$.

فرض کنید $H \le G$ و $|H| = ۱۴$. ما در زیر به یک تناقض می‌رسیم. m تعداد ۷- زیرگروه‌های سیلوی H را در نظر بگیرید. $m \equiv ۱$ (پیمانه۷) باید ۱۴ را عاد کند. بنابراین $m = ۱$ و H دارای یک ۷- زیرگروه سیلو نرمال K است. با این وصف $|K| = ۷$ و بنابراین K باید ۷- زیرگروه سیلوی از G باشد.

حال چون K نرمال در H است باید داشته باشیم $H \le N_G(K)$. این نشان می‌دهد که $|H| = ۱۴$ عاد می‌کند $|N_G(K)| = ۲۱$ و این یک تناقض است.

حل مسائل فصل ۳

۱-۳- (a)فرض کنید $[s,t]\in[S,T]$. داریم $[s,t]^{-1}=[t,s]\in[T,S]$. بنابراین $[S,T]\subset[T,S]$ و بطور مشابه عکس شمول را می‌توان نتیجه گرفت.

(b)داریم که $h^{-1}k^{-1}hk=h^{-1}h'\in H$ زیرا $H\lhd G$ و $h^{-1}k^{-1}hk=k'k\in K$ چون $K\lhd G$،بنابراین $[H,K]\leq H\cap K$. در حالت $H\cap K=\{1\}$ داریم $[H,K]=\{1\}$ و عناصر H با عناصر K جابجا می‌شوند.

(c)قسمت اول از $[xy,z]=y^{-1}x^{-1}z^{-1}xyz$ و

$$y^{-1}[x,z]y[y,z]=y^{-1}x^{-1}z^{-1}xzyy^{-1}z^{-1}yz$$

بدست می‌آید بوضوح $[H,K]\leq[HL,K]$ و $[L,K]\leq[HL,K]$ بنابراین

$$[H,K][L,K]\leq[HL,K]$$

اما $[hl,k]=l^{-1}[h,k]l[l,k]\in[H,K][L,K]$ زیرا $[H,K]\lhd G$. بنابراین تساوی بدست می‌آید.

(d) این فوراً از بسط دادن جابجاگرها بدست می‌آید.

۲-۳-فرض کنید $Q_8=\langle a,b \mid a^2=b^2=(ab)^2\rangle$ و $C_2=\langle c \mid c^2=1\rangle$. پس $Z(G)=\langle a^2,c\rangle$ و سری مرکزی بالایی به صورت

$$\{1\} < \left\langle a^2, c \right\rangle < G$$

است . مشتق G به صورت $G' = \langle a^2 \rangle$ است و سری مرکزی پایینی به صورت

$$G > \left\langle a^2 \right\rangle > \{1\}$$

است . بنابراین G پوچ توان از کلاس دو است و سری مرکزی بالایی و پایینی منطبق بر هم نمی‌باشند . Q_8 دارای گروه مشتق $\langle a^2 \rangle$ و $Z(Q_8) = \langle a^2 \rangle$ است . بنابراین سری‌های مرکزی بالایی و پایینی از Q_8 هر دو برابر با

$$Q_8 > \left\langle a^2 \right\rangle > \{1\}$$

هستند .

۳-۳- فرض کنید G با زیرگروههای آبلی زیر نرمالش تولید شود. پس

$$G = \left\langle G_\lambda \middle| \ \text{زیرنرمال آبلی است } G_\lambda \right\rangle$$

حال چون G_λ در G زیرنرمال بوده، سری

$$G_\lambda = R_0 \le R_1 \le \cdots \le R_n = G$$

که در آن برای $0 \le i \le n-1$، R_i در R_{i+1} نرمال است وجود دارد . ولی اگر H زیرگروه خارج قسمت از G باشد ، آنگاه $H \simeq \dfrac{G}{K}$ و بنابراین

$$\frac{G_\lambda K}{K} = \frac{G_k R_0}{K} \le \frac{G_\lambda R_1}{K} \le \cdots \le \frac{G_\lambda R_n}{K} = \frac{G}{K}$$

یک سری از زیرگروه ها ست که $\dfrac{G_\lambda R_i}{K}$ نرمال در $\dfrac{G_\lambda R_{i+1}}{K}$ برای $0 \le i \le n-1$ است.

حال

$$\frac{G_\lambda K}{K} \simeq \frac{G_\lambda}{G_\lambda \cap K}$$

آبلی است زیرا G_λ آبلی است. بنابراین

$$\frac{G}{K} = \left\langle \frac{G_\lambda K}{K} \middle| \ \text{زیرنرمال آبلی در } \frac{G}{K} \text{ است } \frac{G_\lambda K}{K} \right\rangle$$

بنابراین $H \simeq \frac{G}{K}$ با زیرگروههای آبلی زیرنرمالش تولید می‌شود. فرض کنید G یک گروه پوچ توان و $H \leq G$ باشد. فرض کنید

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_r = \{1\}$$

یک سری مرکزی برای G باشد. سری زیر را در نظر بگیرید

$$H = HG_r \leq HG_{r-1} \leq \cdots \leq HG_1 \leq HG_0 = G$$

حال $HG_i \lhd HG_{i-1}$ چون برای $h, h' \in H$ ، $g_i \in G_i$ ، $g_{i-1} \in G_{i-1}$ داریم

$$(h'g_{i-1})^{-1} hg_i h'g_{i-1} = g_{i-1}^{-1} h'^{-1} hg_i h'g_{i-1} \quad .$$

ولی برای هر $x \in G$ ، $xg_{i-1} = g_{i-1}xg_i'$ ، برای یک $g_i' \in G_i$ ، بنابراین $g_{i-1}^{-1} h'^{-1} hg_i h'g_{i-1} \in HG_i$ حاصل می‌شود. چون هر گروه با زیرگروه‌های آبلی (زیرگروه های دوری با اعضایشان تولید می‌شوند) تولید می‌شود، پس یک گروه پوچ توان، با زیرگروه‌های آبلی زیرنرمالش تولید می‌شود.

۴-۳- با استفاده از قضیه اساسی یکریختی که می گوید

$$\frac{H}{H \cap K} \simeq \frac{HK}{K} \quad ،$$

در حالتی که $G = A$ ، $H = A \cap C$ و $K = B$ ، به دلیل اینکه $B \lhd A$ بدست می آوریم

$$\frac{A \cap C}{B \cap C} \simeq \frac{(A \cap C)B}{B}$$

حال با استفاده از قضیه اساسی یکریختی (یکسانی) در حالتی که $G = AC$ ، $H = A$ و $K = BC$ بدست می‌آوریم:

$$\frac{A}{A \cap BC} \simeq \frac{A(BC)}{BC} \quad .$$

ولی $A \cap BC = B(A \cap C)$ و $A(BC) = AC$ و نتیجه حاصل می‌شود.

فرض کنید G یک گروه حل پذیری با سری

MATH75.IR

$$\{1\} = G_0 \le G_1 < \cdots < G_n = G$$

باشد به طوری که که هر $\frac{G_i}{G_{i-1}}$ آبلی است. فرض کنید $H \le G$ و سری زیر را در نظر بگیرید :

$$\{1\} = G_0 \cap H \le G_1 \cap H \le \cdots \le G_n \cap H = H$$

داریم

$$\frac{G_i \cap H}{G_{i-1} \cap H} \simeq \frac{G_{i-1}(G_i \cap H)}{G_{i-1}} \le \frac{G_i}{G_{i-1}}$$

و بنابراین $\frac{G_i \cap H}{G_{i-1} \cap H}$ آبلی (یک زیرگروه از یک گروه آبلی است) است. همچنین اگر $K \lhd G$، آنگاه

$$\frac{K}{K} = \frac{G_0 K}{K} \le \frac{G_1 K}{K} \le \cdots \le \frac{G_n K}{K} = \frac{G}{K} \quad .$$

حال داریم

$$\frac{G_i K / K}{G_{i-1} K / K} \simeq \frac{G_i K}{G_{i-1} K} \simeq \frac{G_i}{G_{i-1}(G_i \cap K)}$$

که یک گروه خارج قسمتی از $\frac{G_i}{G_{i-1}}$ است . بنابراین $\frac{G_i K / K}{G_{i-1} K / K}$ آبلی (زیرگروه خارج قسمت از یک گروه آبلی است) است .

اگر $H \lhd K$ و هر دو H و $\frac{K}{H}$ حل پذیر باشند ، آنگاه داریم

$$\frac{K}{H} = \frac{K_0}{H} \ge \frac{K_1}{H} \ge \cdots \ge \frac{K_r}{H} = \frac{H}{H}$$

و $H = H_0 \ge H_1 \ge \cdots \ge H_s = \{1\}$، بنابراین

$$K = K_0 \ge K_1 \ge \cdots \ge K_r = H = H_0 \ge H_1 \ge \cdots \ge H_s = \{1\}$$

یک سری برای K با عوامل آبلی است .

برای قسمت آخر، فرض کنید $\frac{G}{A}$ و $\frac{G}{B}$ حل‌پذیر باشند . پس

$$\frac{A}{A\cap B}\simeq\frac{AB}{B}\leq\frac{G}{B}$$

و بنابراین $\frac{A}{A\cap B}$ حل‌پذیر است. در نتیجه $\frac{G}{A}$ و $\frac{A}{A\cap B}$ حل‌پذیرند و بنابراین $\frac{G}{A\cap B}$ حل‌پذیر خواهد شد .

۳-۵- (a) درست است . داریم $\frac{HK}{K}\simeq\frac{H}{H\cap K}$ که حل‌پذیر است ، زیرا یک زیرگروه خارج قسمت از گروه حل‌پذیر H است . اما $\frac{HK}{K}$ و K حل‌پذیر هستند ، بنابراین HK حل‌پذیر است .

(b) غلط است . برای مثال در نظر بگیرید

$$G=Q_۸=<a,b \mid a^۲=b^۲=(ab)^۲> \quad .$$

$H=<a>$ و $K=<b>$ زیرگروه‌های دوری نرمال هستند ولی $HK=Q_۸$ ناآبلی است.

(c) درست است . بنا به همان بحثی که در (a) گفته شد .

۳-۶- فرض کنید H یک زیرگروه محض از G باشد . اگر $Z(G)\not\subset H$ ، آنگاه $Z(G)H$ در نرمالساز H قرار دارد و نتیجه حاصل می‌گردد . پس فرض کنید $Z(G)\subset H$. با استفاده از استقراء فرض کنید که نتیجه برای گروه‌هایی که مرتبه آنها کمتر از $|G|$ است برقرار است . چون $Z(G)\neq\{۱\}$ ، می‌توان از فرض استقراء برای $\frac{H}{Z(G)}$ که یک زیرگروه از $\frac{G}{Z(G)}$ است استفاده کرد . این نشان می‌دهد که $\frac{H}{Z(G)}$ به طور محض مشمول در نرمالسازش است ، که آن را $\frac{K}{Z(G)}$ می‌نامیم . پس H در K نرمال است و به طور محض مشمول در K می‌باشد .

فرض کنید P یک زیرگروه سیلوی G باشد . با استفاده از نتیجه مسئله ۲۱ − ۲ ، $N(P)$ برابر با نرمالساز خودش در G است و بنابراین با استفاده از قسمت اول مسئله ، $N(P)$ زیرگروه محض G نمی‌باشد . بنابراین $N(P)=G$ و P در Gنرمال است .

۷-۳- اگر $|Z(G)|>2$ ، آنگاه $\left|\frac{G}{Z(G)}\right|\leq 4$ و بنابراین $\frac{G}{Z(G)}$ آبلی است. این متناقض با این است که کلاس G از مرتبه سه است . بنابراین داریم $|Z(G)|=2$ و $\left|\frac{G}{Z(G)}\right|=8$.

حال $\frac{G}{Z(G)}$ باید دارای یک عضو $xZ(G)$ از مرتبه چهارباشد ، در غیر این صورت $\frac{G}{Z(G)}$ آبلی می‌شود . فرض کنید $H=\langle x,Z(G)\rangle$. پس H یک زیرگروه آبلی از G با $|H|=8$ است. ابتدا نشان می‌دهیم که H دوری است. فرض کنید H دوری نباشد ، بنابراین $H=\langle x\rangle\times Z(G)$. زیرگروه $\langle x^2\rangle$ را در نظر بگیرید . باید $g\in G$ای وجود داشته باشد به طوری که $[x^2,g]\neq 1$ ، زیرا در غیر این صورت $x^2\in Z(G)$. حال عضو غیربدیهی $x^{-2}g^{-1}x^2g$ را در نظر بگیرید . چون H در G نرمال است ، $g^{-1}xg\in H$ و $g^{-1}x^2g$ یک مربع غیربدیهی عنصری از H است . این نتیجه می‌دهد که $g^{-1}x^2g=x^2$ و بنابراین $[x^2,g]=1$ که یک تناقض است .

حال فرض کنید H و K دو زیرگروه دوری از مرتبه هشت با $H\neq K$ باشند. پس $G=HK$ و بنابراین $H\cap K\leq Z(G)$. با این وصف این نتیجه می‌دهد که $|H\cap K|\leq 2$ که متناقض با

$$|HK||H\cap K|=|H||K|$$

است . بنابراین نتیجه می‌گیریم $H=K$.

یک مثال ازچنین گروهی، گروه دو وجهی D_{16} است .

۸-۳- اگر G گروه پوچ توان متناهی باشد ، آنگاه دارای یک سری مرکزی است که در شرایطی که موجب می‌شود که G پوچ توان مانده ای شود صدق می‌کند . برعکس اگر G متناهی

و پوچ توان مانده ای باشد ، آنگاه H_i نمی‌تواند به طور محض شامل H_{i+1} بجز برای تعدادی متناهی i باشد. بنابراین $H_i = H_{i+1}$ برای هر $i \geq N$ ، ولی چون

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} H_i = \bigcap_{i=1}^{N} H_i = H_N \quad ،$$

داریم $H_N = \{1\}$ و بنابراین G پوچ توان است .

گروه $D_\infty = < a,b \,|\, b^2 = 1, bab = a^{-1} >$ پوچ توان مانده ای است . زیرا ، با در نظر گرفتن $H_i = < a^{2^i} >$ ، داریم $[H_i, G] \leq H_{i+1}$ و $\bigcap_{i=1}^{\infty} H_i = \{1\}$. ولی D_∞ پوچ توان نیست. برای مشاهده این مطلب قرار دهید $K = < a^3 >$ و مشاهده می کنیم که

$$\frac{D_\infty}{K} \simeq \left\langle a,b \,\middle|\, a^3 = b^2 = 1 \ , \ bab = a^{-1} \right\rangle \simeq S_3$$

که پوچ توان نیست.

اگر H یک زیرگروه از گروه پوچ توان مانده ای G باشد ، آنگاه اشتراک سری G با H نشان می‌دهد که H پوچ توان مانده ای است (بحث تعمیمی از اثبات معمولی یک زیرگروه از یک گروه پوچ توان، پوچ توان است می‌باشد) . دوباره D_∞ را در نظر بگیرید، در بالا دیدیم که S_3 یک گروه خارج قسمتی است. ولی چون S_3 متناهی بوده و پوچ توان نمی‌باشد ، پس پوچ توان مانده‌ای نمی‌باشد (بنا به قسمت اول مسئله). بنابراین دیدیم که گروه خارج قسمت از یک گروه پوچ توان مانده ای لازم نیست که پوچ توان مانده ای باشد. (در واقع، هر گروه یک گروه خارج قسمتی از یک گروه پوچ توان مانده ای است).

۳-۹- بسادگی با بسط جابجاگرها دیده می‌شود که

$$[xy, z] = y^{-1}[x, z]y[y, z] \quad .$$

حال $[G, A]$ با $[g, a]$ که $g \in G$ و $a \in A$ تولید می‌شود. بنابراین کافی است تحقیق شود که برای هر $x, g \in G$ و $a \in A$ داریم $x^{-1}[g, a]x \in [G, A]$. ولی

$$x^{-1}[g, a]x = [gx, a][x, a]^{-1} \in [G, A]$$

پس $[G, A] \lhd G$.

فرض کنید $A=[A,G]$ و G پوچ توان از کلاس n باشد. بنابراین داریم

$$A=\Big[A,\underbrace{G,G,\dots,G}_{n}\Big]=\{1\}$$

پس اگر $A\neq\{1\}$ ، آنگاه نمی‌تواند پوچ توان باشد .

فرض کنید A یک زیرگروه نرمال می‌نیمال از یک گروه پوچ توان G باشد. پس $[G,A]\leq A$ و بنابراین چون $[G,A]\lhd G$ باید یا $[G,A]=A$ یا $[G,A]=\{1\}$، اولی امکان پذیر نیست چون G پوچ توان است . بنابراین $[G,A]=\{1\}$ و A در مرکز G قرار می گیرد .

۱۰-۳- فرض کنید G یک p - گروه متناهی باشد. ابتدا نشان می‌دهیم که مرکز G غیر بدیهی است . توجه کنید که یک کلاس تزویجی دارای یک عضو است اگر و تنها اگر اعضای کلاس در مرکز باشند. حال G اجتماعی از کلاس‌های تزویجی‌اش می‌باشد و $\{1\}$ یک کلاس تزویجی است . هر کلاس تزویجی شامل بیش از یک عضو دارای k عضو است که $p|k$. بنابراین G دارای بیش از یک کلاس تزویجی شامل یک عضو است بنابراین $Z(G)\neq\{1\}$.

فرض کنید $\frac{Z_2(G)}{Z(G)}$ مرکز $\frac{G}{Z(G)}$ باشد . با ادامه این روش ما سری زیر را بدست می‌آوریم :

$$\{1\}\leq Z(G)\leq Z_2(G)\leq\cdots\leq G$$

و چون G متناهی است برای یک n داریم $Z_n(G)=G$. پس G پوچ توان است. فرض کنید $G=H\times K$ که $|H|=p^2$ و $|K|=p^3$. حال داریم $Z(G)=Z(H)\times Z(K)$ و $Z(H)=H$ چون یک گروه از مرتبه p^2 آبلی است . در نتیجه $|Z(G)|=p^2|Z(K)|$. این نتیجه می‌دهد که $|Z(K)|$ ، p یا p^2 یا p^3 است ، زیرا به دلیل آنکه K یک p - گروه است داریم $|Z(K)|\neq\{1\}$. اگر

$|Z(K)|=p^{۲}$، آنگاه $\left|\frac{K}{Z(K)}\right|=p$ و بنابراین $\frac{K}{Z(K)}$ دوری است . قرار دهید $\frac{K}{Z(K)}=\langle aZ(K)\rangle$. در این صورت $k\in K$ ایجاب می‌کند $k=a^{i}z$ برای $z\in Z(K)$ای . پس هر دو عضو از K با هم جابجا می‌شوند، که نتیجه می‌شود $|Z(K)|=p^{۳}$ که تناقض با فرض $|Z(K)|=p^{۲}$ می‌باشد. حال $|Z(K)|$ باید p باشد زیرا در غیر این‌صورت G آبلی می‌شود. بنابراین باید $|Z(K)|=p$ که نتیجه می‌دهد $|Z(G)|=p^{۳}$ و $\left|\frac{G}{Z(G)}\right|=p^{۲}$.دوباره با استفاده از این واقعیت که یک گروه از مرتبه $p^{۲}$ آبلی است می‌بینیم که

$$G>Z(G)>\{۱\}$$

یک سری مرکزی بالایی از G است و بنابراین G پوچ توان از کلاس ۲ است .

۳-۱۱- ماتریسهای زیر را در نظر بگیرید :

$$x=\begin{bmatrix} ۱ & a & b\\ ۰ & ۱ & c\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix} \quad ، \quad y=\begin{bmatrix} ۱ & d & e\\ ۰ & ۱ & f\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

که در آن $a,b,c,d,e,f\in Z$. بنابراین $[x,y]$ به صورت زیر است :

$$\begin{bmatrix} ۱ & -a & ac-b\\ ۰ & ۱ & -c\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -d & df-e\\ ۰ & ۱ & -f\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & a & b\\ ۰ & ۱ & c\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & d & e\\ ۰ & ۱ & f\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

که ساده شده آن به صورت زیر است :

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & af-dc\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}.$$

حال اگر x در مرکز باشد، آنگاه برای هر $y \in G$، $[x,y]=I_۳$ که نتیجه می‌دهد برای هر $d,f \in Z$ داریم $af-dc=۰$، پس $a=c=۰$. بنابراین مرکز G به صورت زیر می‌شود :

$$Z=\left\{\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & b \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \middle| b \in \mathrm{Z} \right\} \quad .$$

گروه مشتق G به صورت $<[x,y] \mid x,y \in G>$ است. با محاسبه بالا از $[x,y]$ به راحتی دیده می‌شود که گروه مشتق G برابر Zاست. برای نشان دادن اینکه G پوچ توان است، نشان می‌دهیم که $[Z,G]=\{I_۳\}$. دوباره این با محاسبه بالا بدست می‌آید. سری مرکزی بالایی به صورت

$$\{I_۳\}<Z<G$$

است زیرا نشان داده‌ایم که Z مرکز G است و $\frac{G}{Z}$ آبلی است چون Z گروه مشتق G است . با این محاسبات دیده می‌شود که این سری همچنین سری مرکزی پایینی نیز می‌باشد . بنابراین سری مرکزی بالایی و پایینی G بر هم منطبقند .

برای ماتریسهای داده شده داریم :

$$t_{۱۲}^n=\begin{bmatrix} ۱ & n & ۰ \\ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad t_{۱۳}^n=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & n \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad t_{۲۳}^n=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & n \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

حال چون

$$\begin{bmatrix} ۱ & a & b \\ ۰ & ۱ & c \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & a & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & c \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & b-ac \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

داریم $G=<t_{۱۲},t_{۱۳},t_{۲۳}>$.

یک سری زیرنرمال برای $<t_{۱۲}>$ به صورت زیر است

$$<t_{۱۲}> \lhd <t_{۱۲}, t_{۱۳}> \lhd G \quad .$$

یک سری زیرنرمال برای $<t_{۲۳}>$ به صورت زیر است

$$<t_{۲۳}> \lhd <t_{۲۳}, t_{۱۳}> \lhd G \quad .$$

یک سری زیرنرمال برای $<t_{۱۳}>$ به صورت زیر است

$$<t_{۱۳}> \lhd G \quad .$$

۱۲-۳- فرض کنید $N \lhd G$ و $A \le N$، $B \le N$. در این صورت برای هر $x \in X$، $y \in Y$، $z \in Z$ داریم:

$$[x, y^{-1}, z]^y \in N \qquad \text{و} \qquad [y, z^{-1}, x]^z \in N \quad .$$

پس $[z, x^{-1}, y]^y \in N$ و بنابراین $[z, x^{-1}, y] \in N$ که نتیجه می‌دهد که $[z, x^{-1}]$ با y به پیمانه N جابجا می‌شود، پس $[Z, X]$ با هر عضو Y به پیمانه N جابجا می‌شود و در نتیجه $C \le N$.

برای قسمت بعد از استقراء استفاده می‌کنیم. نتیجه برای $n = 1$ بوضوح درست است. فرض کنید $[H_i, \Gamma_{n-1}(K)] \le H_{i+n-1}$.قرار دهید:

$$X = \Gamma_{n-1}(K) \quad , \quad Y = K \quad , \quad Z = H_i \quad , \quad N = H_{i+n}$$

در این صورت داریم

$$A = [\Gamma_{n-1}(K), K, H_i] = [\Gamma_n(K), H_i]$$
$$B = [K, H_i, \Gamma_{n-1}(K)] \le [H_{i+1}, \Gamma_{n-1}(K)] \le H_{i+n} = N$$
$$C = [H_i, \Gamma_{n-1}(K), K] \le [H_{i+n-1}, K] \le H_{i+n} = N$$

و این $A \le N$ را ایجاب می‌کند.

برای آخرین قسمت قرار دهید $G = H = K$ و سری ها را سری مرکزی پایینی در نظر بگیرید . در این صورت

(a) و (b) فوراً نتیجه می‌شوند ؛

(c) از (b) با قرار دادن $m = n$ نتیجه می‌شود ؛

(d) با استقراء ثابت می‌شود. داریم $G^{(0)} = \Gamma_1$. فرض کنید $G^{(r-1)} \le \Gamma_{2^{r-1}}$ ، در این صورت بنا به (a)

$$G^{(r)} = \left[G^{(r-1)}, G^{(r-1)}\right] \le \left[\Gamma_{2^{r-1}}, \Gamma_{2^{r-1}}\right] \le \Gamma_{2^r}$$

(e) $\left[Z_2, \Gamma_2\right] = \{1\}$ و بنابراین $\left[Z_2, G\right] = \{1\}$ ایجاب می‌کند که $Z_2 \le Z_1$ و از آنجا $Z_2 = Z_1$.

۱۳-۳- چون $x \in Z_2(G)$ داریم $\left[x, g\right] \in Z(G)$ ، پس $N \le Z(G)$. حال در این حالت داریم

$$\begin{aligned}\left[x, g_1\right]\left[x, g_2\right] &= x^{-1} g_1^{-1} x g_1 x^{-1} g_2^{-1} x g_2 \\ &= x^{-1} g_2^{-1} x x^{-1} g_1^{-1} x g_1 g_2 \\ &= \left[x, g_1 g_2\right]\end{aligned}$$

و بنابراین

$$N = \left\{ \left[x, g\right] \mid g \in G \right\}.$$

حال

$$\begin{aligned}\left[x, g_1\right] = \left[x, g_2\right] &\Leftrightarrow g_1^{-1} x g_1 = g_2^{-1} x g_2 \\ &\Leftrightarrow N(x) g_1 = N(x) g_2 \quad .\end{aligned}$$

این نتیجه می‌دهد که $|N| = |G : N(x)|$. با این وجود $Z(G) \le N(x)$ و $x \notin Z(G)$ ، $x \in N(x)$ و بنابراین $Z(G)$ به طور محض مشمول در $N(x)$ است پس $|N| < p^n$.

اگر $n = 1$ ، آنگاه G آبلی و $G' = \{1\}$ پس نتیجه برقرار است. فرض کنید با استفاده از روش استقراء نتیجه برای تمام گروه‌های H که $\left[H : Z(H)\right] = p^k$ و $k < n$ برقرار باشد . $Z\left(\frac{G}{N}\right)$ را در نظر می‌گیریم . مطمئنا $\frac{Z(G)}{N} \le Z\left(\frac{G}{N}\right)$. اما $xN \in Z\left(\frac{G}{N}\right)$ چون $\left[x, G\right] \subseteq N$. پس $Z\left(\frac{G}{N}\right)$ به طور محض شامل $\frac{Z(G)}{N}$ است. بنابراین

$$\left|\frac{G}{N}:Z\left(\frac{G}{N}\right)\right|=p^k$$

برای یک $k<n$ و با استفاده از فرض استقراء

$$\left|\frac{G'}{N}\right|\le p^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$$

ولی $|N|\le p^{n-1}$ که $|G'|<p^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ را ایجاب می کند .

۱۴-۳- فرض کنید H یک زیرگروه از G با $G=\Phi H$ باشد . در این صورت اگر $H\neq G$ ، آنگاه H مشمول در یک زیرگروه ماکزیمال M از G است، بنابراین $G=\Phi H\le \Phi M$ و در نتیجه $G=\Phi M$. ولی $\Phi\le M$ زیرا Φ اشتراک همه زیرگروه‌های ماکزیمال G است . بنابراین $G=\Phi M\le M$ که یک تناقض است . پس تساوی $H=G$ ایجاب می‌شود .

چون $T\le\Phi$ داریم $T^g\le\Phi^g$. ابتدا نشان می‌دهیم که Φ نرمال در G است . اگر M زیر گروه ماکزیمال در G باشد ، آنگاه $g^{-1}Mg$ نیز ماکزیمال است . چون در غیر این صورت برای یک زیرگروه K ، $g^{-1}Mg<K<G$. پس $M<g^{-1}Kg<G$ که یک تناقض است . حال فرض کنید $x\in\Phi$. اگر $g^{-1}xg\notin\Phi$ ،آنگاه برای یک زیرگروه ماکزیمال M، $g^{-1}xg\notin M$. پس $x\notin gMg^{-1}$ که یک تناقض است. بنابراین $T^g\le\Phi^g=\Phi$. پس T و T^g ، p - زیرگروه سیلو از Φ هستند. بنابراین برای یک $h\in\Phi$ بنا به قضیه سیلو داریم $T^g=\mathrm{T}^h$. حال نتیجه می گیریم که $T^{gh^{-1}}=T$.

پس $gh^{-1}\in N_G(T)$ ، بنابراین $g\in N_G(T)\Phi$. بنابراین می‌بینیم که $N_G(T)\Phi=G$ و بنا به قسمت اول مسئله $N_G(T)=G$. بنابراین T در G نرمال است و در نتیجه در Φ هم نرمال می‌باشد . بنابراین هر p - زیرگروه سیلوی Φ نرمال است .

۳-۱۵- فرض کنید G در شرط ماکزیمال برای زیرگروه‌ها صدق کند و فرض کنید H یک زیرگروه از G باشد. $x_1 \in H$ را انتخاب و قرار دهید $H_1 =< x_1 >$. $x_2 \in H \setminus H_1$ را انتخاب می‌کنیم و قرار دهید $H_2 =< x_1, x_2 >$. این روند را ادامه می‌دهیم تا زنجیری از زیرگروه‌ها به صورت زیر بدست آوریم

$$H_1 < H_2 < \cdots < H_n < H_{n+1} < \cdots$$

که بنا به شرط ماکزیمال برای یک r داریم $H_r = H$. بنابراین $H = H_r = \langle x_1, \ldots, x_r \rangle$ متناهی- مولد است.

برعکس، اگر G در شرط ماکزیمال صدق نکند ، انگاه شامل یک زنجیر نامتناهی از زیرگروه‌های متمایز

$$H_1 < H_2 < \cdots < H_n < H_{n+1} < \cdots$$

است . فرض کنید $H = \bigcup_{i \geq 1} H_i$ متناهی- مولد باشد. اگر $H = \langle x_1, \ldots, x_r \rangle$ ، آنگاه داریم

$$x_1 \in H_{s_1} \quad ، \quad x_2 \in H_{s_2} \quad ، \ldots ، \quad x_r \in H_{s_r}$$

و در نتیجه هر $x_i \in H_s$ که در آن $s = \max_{1 \leq i \leq r} s_i$. پس نتیجه می‌شود که $H = H_s$ که یک تناقض است ، بنابراین H نمی‌تواند متناهی – مولد باشد.

فرض کنید G یک گروه حل پذیر باشد که در شرط ماکزیمال برای زیرگروه‌ها صدق می‌کند. فرض کنید

$$G = H_0 \geq H_1 \geq \cdots \geq H_r = \{1\}$$

یک سری برای G با خارج قسمتهای آبلی H_{i-1}/H_i باشد . حال H_{i-1} یک زیرگروه از G و متناهی - مولد است . بنابراین H_{i-1}/H_i هم چنین است . بنابراین بین H_i و H_{i-1} تعداد متناهی زیرگروه می‌توان درج کرد که یک سری که خارج قسمت‌های از اعضای متوالی آن دوری هستند را بدست می‌آوریم. بنابراین G چند دوری است .

برعکس ، اگر G چند دوری باشد ،آنگاه

$$G = H_{0} \geq H_{1} \geq \cdots \geq H_{r} = \{1\}$$

را یک سری که هر خارج قسمت H_{i-1}/H_i آن دوری است در نظر بگیرید . پس اگر $K \leq G$ ، با در نظر گرفتن $K_i = H \cap H_i$، سری

$$K = K_{0} \geq K_{1} \geq \cdots \geq K_{r} = \{1\}$$

که خارج قسمت‌های متوالی آن دوری هستند به دست می‌آید . فرض کنید $K_i a_{i-1}$ یک مولد از K_{i-1}/K_i باشد . پس نتیجه می گیریم که

$$K = \langle a_{0}, a_{1}, \ldots, a_{r-1} \rangle$$

و بنابراین K متناهی – مولد خواهد شد .

۱۶-۳- با بازنویسی رابطه داده شده به شکل

$$y^{-1}[x,z]y = [xy,z][y,z]^{-1} \quad (1)$$

می‌بینیم که، برای تمام $y,x \in A$ و همه $z \in B$ داریم

$$y^{-1}[x,z]y \in [A,B]$$

و بنابراین A در نرمالساز $[A,B]$ قرار دارد . بطریق مشابه B در نرمالساز $[A,B]$ است و بنابراین $[A,B]$ در G نرمال است .

در (۱) با قرار دادن z بجای zt بدست می‌آوریم

$$[xy,zt] = [x,zt]^{y}[y,zt] \quad .$$

با این وصف $[x,zt] = [zt,x]^{-1}$ و $[y,zt] = [zt,y]^{-1}$. پس دوباره از (۱) استفاده کرده $[xy,zt]$ را به صورت حاصلضرب مزدوجهای جابجاگرهایی بشکل $[a,b]$ که $a,b \in \{x,y,z,t\}$ بیان می کنیم . پس اگر $x,z \in A$ و $y,t \in B$ ، آنگاه با استفاده از این حقیقت که $[A,B]$ در G نرمال است و اینکه $[x,z] = 1 = [y,t]$ می‌بینیم که $[xy,zt] \in [A,B]$. بنابراین $G' \subseteq [A,B]$. پس $[A,B] \subseteq [AB,AB] = G'$ در نتیجه $G' = [A,B]$ چون $AB = BA$ برای $a_{3},a_{4} \in A$ و $b_{3},b_{4} \in B$. داریم

$$b_1^{a_2} = a_3 b_3 \qquad , \qquad a_1^{b_2} = b_4 a_4$$

حال

$$[a_1, b_1]^{a_2 b_2} = [a_1^{a_2}, b_1^{a_2}]^{b_2} = [a_1, a_3 b_3]^{b_2} =$$
$$= [a_1^{b_2}, b_3] = [b_4 a_4, b_3] = [a_4, b_3]$$

بطریق مشابه می‌توان نشان داد که

$$[a_1, b_1]^{b_2 a_2} = [a_4, b_3]$$

و بنابراین تساوی $[a_1, b_1]^{a_2 b_2} = [a_1, b_1]^{b_2 a_2}$ را ایجاب می کند. حال نتیجه می گیریم که

$$[a_1, b_1]^{[b_2, a_2]} = [a_1, b_1].$$

پس $[A, B]$ آبلی است .

سری مشتق برای G به صورت :

$$G \geq [A, B] \geq \{1\}$$

است . پس G حل پذیر از طول مشتق حداکثر دو می‌باشد .

۳-۱۷- فرض کنید M یک زیرگروه ماکزیمال G باشد . در این صورت M زیرنرمال در G (به مسئله ۳.۳ رجوع کنید) است . پس داریم

$$M \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_r \lhd G \quad .$$

ولی $M < H_1 < G$ که غیرممکن است ، پس $M \lhd G$.

S یک p - زیرگروه سیلو و M یک زیرگروه ماکزیمال از G با

$$N_G(S) \leq M < G$$

است. فرض کنید $g \in G$. در این صورت $g^{-1}Sg \leq g^{-1}Mg$. ولی $g^{-1}Mg = M$ چون M نرمال است . بنابراین S و $g^{-1}Sg$ ، p - زیرگروه‌های سیلو از M هستند. حال با استفاده از قضایای سیلو ، S و $g^{-1}Sg$ در M مزدوج هستند. پس $m \in M$ ای وجود دارد که $g^{-1}Sg = m^{-1}Sm$. این نشان می‌دهد که $mg^{-1}Sgm^{-1} = S$ و بنابراین $(gm^{-1})^{-1}Sgm^{-1} = S$ پس $gm^{-1} \in N_G(S)$. حال نتیجه می گیریم که $gm^{-1} \in M$،

بنابراین $g \in M$ چون $m \in M$. بوضوح این غیرممکن است چون به تناقض $M = G$ می‌رسیم. پس $N_G(S) = G$ و S در G نرمال است .

حال فرض کنید $\bar{S}$ یک p – زیرگروه سیلو از G باشد. پس بنا به قضیه سیلو برای یک $g \in G$ ای ، $\bar{S} = g^{-1}Sg$. بنابراین $\bar{S} = g^{-1}Sg$ چون $S \lhd G$ و بنابراین S منحصربفرد است. فرض کنید $S_1, \dots, S_r$ زیرگروههای سیلو باشند که در تناظر با هر عدد اول متمایز که $|G|$ را عاد می‌کند هستند . چون S_i تنها زیرگروه سیلو متناظر با یک عدد اول است ، داریم $S_i \lhd G$. بوضوح اگر $i \neq j$ ، آنگاه $S_i \cap S_j = \{1\}$ چون $h.c.f.(|S_i|, |S_j|) = 1$. بنابراین

$$G = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_r.$$

۳-۱۸- فرض کنید $k \in K$. پس $k \in g^{-1}Mg$ برای $g \in G$ ای . اگر $x \in G$ ، داریم

$$(\forall g \in G) \qquad x^{-1}kx \in (gx)^{-1}Mgx$$

و بنابراین $x^{-1}kx$ به هر مزدوج M متعلق است. پس $x^{-1}kx \in K$ و بنابراین $K \lhd G$.

اگر $N \lhd G$ و $N \leq M$ ، آنگاه برای هر $g \in G$ داریم

$$N = g^{-1}Ng \leq g^{-1}Mg$$

که $N < K$ را نتیجه می‌دهد .

چون H/K یک زیرگروه نرمال می‌نیمال از G/K است داریم $H \lhd G$ و $K \subset H$، پس $H \not\leq M$. بنابراین $G = MH$ زیرا M ماکزیمال و $G \geq MH > M$ است .

حال $H \cap M$ در M نرمال است. پس $\frac{H \cap M}{K}$ در M/K نرمال است . ولی $\frac{H \cap M}{K}$ در H/K نرمال است زیرا H/K زیرگروه نرمال می‌نیمال از یک گروه حل پذیر است و بنابراین آبلی است . پس هر زیرگروه از H/K نرمال است .

حال $\frac{H \cap M}{K}$ توسط M/K نرمال می‌شود و همچنین توسط H/K نرمال می‌شود .

پس $H/K . M/K$ در نرمالساز $\frac{H \cap M}{K}$ می‌باشد ، ولی

$$H/K . M/K = MH/K = G/K$$

در نتیجه $\dfrac{H \cap M}{K}$ نرمال در G/K است و نتیجه می‌گیریم $H \cap M$ در G نرمال است.

حال $H \cap M \leq M$ و $H \cap M \lhd G$ نتیجه می‌دهد که $H \cap M \leq K$. ولی $K \leq H$ و $K \leq M$ پس $H \cap M = K$.

بالاخره $|MH : M| = |H : H \cap M|$ نتیجه می‌دهد $|G : M| = |H : K|$.

۱۹-۳- فرض کنید G متاسیکلیک و $N \lhd G$ به طوری که N و G/N دوری باشند. فرض کنید $H \leq G$. پس $H \cap N \lhd H$ و $H \cap N$ دوری (چون زیرگروهی از گروه دوری N می‌باشد) است. همچنین

$$\frac{H}{H \cap N} \simeq \frac{HN}{N} \leq G/N$$

بنابراین $\dfrac{H}{H \cap N}$ دوری است (چون یکریخت با زیرگروه یک گروه دوری G/N است)

بنابراین H متاسیکلیک است.

فرض کنید $N \lhd G$ باشد. داریم $K \lhd NK$ و $NK/K \simeq N/(N \cap K)$ که دوری می‌باشد (زیرا گروه خارج قسمت از گروه دوری N می‌باشد). همچنین

$$\frac{G/K}{NK/K} \simeq \frac{G}{NK} \simeq \frac{G/N}{NK/N}$$

که یک گروه دوری است (زیرا یک گروه خارج قسمت از گروه دوری G/N است).

بنابراین $NK/N \lhd G/K$ که NK/K و $\dfrac{G/K}{NK/K}$ دوری می‌باشند. بنابرین G/K متاسیکلیک می‌باشد.

اگر $G=<a,b \mid a^2=1, b^8=1, aba=b^7>$، آنگاه داریم $a^{-1}ba=b^{-1}$. بنابراین $G \rhd <b>$ چون برای هر عدد صحیح i، $a^{-1}b^ia=b^{-i}$. اما

$$G/_{<b>} = <a,b \mid a^2=1=b>$$

و بنابراین $G/_{<b>} \simeq C_2$. همچنین $\langle b \rangle \simeq C_8$ پس G متاسیکلیک است.

۲۰-۳- ماتریس‌های زیر را در نظر بگیرید (هر درایه که نوشته نشده است صفر می‌باشد):

$$A_0=\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 1 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & 1 & \cdots & a_{3n} \\ & & & \cdots & \vdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1=\begin{bmatrix} 1 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A_{n-1}=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & -a_{n-1,n} \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

به راحتی مشاهده می‌شود که $A_{\cdot}A_{1}\dots A_{n-1}=I_n$. همچنین :

$$\begin{bmatrix} 1 & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = t_{12}(-a_{12})t_{13}(-a_{13})\dots t_{1n}(-a_{1n}) \ .$$

بسط دیگر ماتریس‌ها به طور مشابه $T_n(F)$ را توصیف می‌کند .

بحث مشابه نشان می‌دهد که H مجموعه تمام ماتریس‌های بالا مثلثی روی F به شکل زیر است

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{1,i+1} & a_{1,i+2} & \dots & a_{1n} \\ & 1 & a_{2,i+2} & \dots & a_{2n} \\ & & & \ddots & \\ & & \ddots & & \\ & & & & 5 \end{bmatrix}$$

نشان می‌دهیم که :

$$T_n(F)=H_1 \geq H_2 \geq \dots \geq H_{n-1} \geq \{1\}$$

یک سری مرکزی برای $T_n(F)$ است، ابتدا توجه کنید که اگر $I_n+A\in T_n(F)$ که :

$$A=\begin{bmatrix} \cdot & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \cdot \end{bmatrix}$$

آنگاه $I_n+A^2\in H_2$ ، $I_n+A^3\in H_3$، ...، $I_n+A^n=I_n$. همچنین

$$(I_n+A)^{-1}=I_n-A+A^2-A^3+\dots+(-1)^{n-1}A^{n-1} \ .$$

حال فرض کنید $I_n+B\in H_i$. بنابراین داریم

$$\begin{aligned}[I_n+A,I_n+B]&=(I_n+A)^{-1}(I_n+B)^{-1}(I_n+A)(I_n+B)\\ &=(I_n-A+\dots)(I_n-B+\dots)(I_n+A)(I_n+B)\end{aligned}$$

بالاترین توان های از A و B + $= I_n + AB +$

$\in H_{i+1}$.

$T_n(Z_p)$شامل تمام ماتریس‌های بالا مثلثی با درایه‌های قطر اصلی ۱ است به طوری که عناصر دلخواه از Z_p در $n(n-۱)/۲$ درایه بالای قطر اصلی قرار می‌گیرند. فوراً نتیجه می‌شود که $\left|T_n(Z_p)\right| = p^{1/2n(n-1)}$. اما می‌دانیم که

$$\left|SL(n,p)\right| = \left(\frac{۱}{p-۱}\right)\prod_{i=۰}^{n-۱}(p^n - p^i)$$

(به مسئله ۱۸-۱ مراجعه کنید) و بالاترین توانی از p که $\left|SL(n,p)\right|$ را عاد می‌کند $p^{1/2n(n-1)}$ است. بنابراین $T_n(Z_p)$ یک p - زیرگروه سیلو از $SL(n,p)$ است .

۲۱-۳- $S_۳$ فقط می‌تواند زیرگروه‌های محض از مرتبه ۲ یا ۳ داشته باشد. فقط ۳- زیرگروه سیلوی $<(۱۲۳)>$ نرمال است و بنابراین فقط سری ترکیبی زیر را داریم :

$$S_۳ > \langle(۱۲۳)\rangle > \{۱\} \quad .$$

زیر گروه های سیلوی $S_۴$ نرمال نیستند . همچنین زیر گروه های از مرتبه ۲ آن نرمال نیستند . پس تنها امکان برای زیرگروه‌های نرمال غیربدیهی زیر گروه های از مرتبه‌های۴، ۶، ۱۲ است. ولی یک زیرگروه‌های از مرتبه ۶ شامل یک ۳- زیرگروه سیلو است و بنابراین اگر نرمال باشد شامل همه چهار ، ۳- زیرگروه‌های سیلو است که غیر ممکن می‌باشد. زیرا ۴، عدد ۶ را عاد نمی‌کند. هر زیرگروه از مرتبه ۱۲ شامل تمام ۳- زیرگروه های سیلوست پس $A_۴$ است . (مشاهده کرده‌ایم که A_n توسط دورهای به طول ۳ تولید می‌شود) همینطور $A_۴$ دارای اندیس ۲ می‌باشد که نرمال است. به سادگی دیده می‌شود که تنها زیرگروه نرمال از مرتبه ۴ برابر است با

$$V = \{(۱),(۱۲)(۳۴),(۱۳)(۲۴),(۱۴)(۲۳)\}.$$

بنابراین $S_۴ > A_۴ > V > \{۱\}$ تنها سری ترکیبی است.

$S_۵$ تنها یک زیرگروه نرمال غیربدیهی محض دارد پس

$$S_5 > A_5 > \{1\}$$

تنها سری ترکیبی است. برای مشاهده این مطالب دوباره از نظریه سیلو استفاده می‌کنیم. اگر $\{1\} \neq N \lhd S_5$ و ۵ عدد $|N|$ را عاد کند، آنگاه N شامل ۵- زیرگروه‌های سیلوی S_5 است. پس $|N|$، ۳۰، ۶۰ یا ۱۲۰ است، ولی هر یک از اینها بدین معنی است که N شامل یک و بنابراین کلیه ۳- زیرگروه های سیلوی از S_5 بوده و بنابراین شامل A_5 می‌باشد. بنابراین N، یا A_5 یا S_5 است. حال اگر ۳ و ۵ مرتبه N را عاد نکنند، آنگاه N شامل عضوی از مرتبه دو می‌باشد. ولی با مزدوج گیری شامل حداقل ۱۵ عضو از مرتبه ۲ است. بنابراین A_5 تنها امکان N است. بحث بالا را برای زیرگروه‌های از A_5 بکار می‌بریم که نتیجه می‌دهد A_5 ساده است و S_5 فقط یک سری ترکیبی دارد.

اگر $n \geq 5$، آنگاه تنها سری ترکیبی از S_n به صورت $S_n > A_n > \{1\}$ است.

۳-۲۲- همان طور که A_{r+1} یک q- زیرگروه سیلوی A_r است و $A_{r+1} \lhd A_r$، مشاهده می‌شود که A_r فقط یک q- زیرگروه سیلو دارد. با استقراء روی i نشان می‌دهیم که A_{r-i} دارای فقط یک q- زیرگروه سیلو است که آن را A_{r+1} می‌نامیم. فرض کنید A_{r-i+1} تنها q- زیرگروه سیلو A_{r+1} باشد. پس $A_{r-i+1} \lhd A_{r-i}$ نتیجه می‌دهد که اگر $g \in A_{r-i}$، آنگاه $g^{-1}A_{r+1}g \leq g^{-1}A_{r-i+1}g = A_{r-i+1}$. پس با استفاده از فرض $g^{-1}A_{r+1}g = A_{r+1}$. بنابراین $A_{r+1} \lhd A_{r-i}$. پس تنها q- زیرگروه سیلوی A_{r-i} است. بنابراین بنا به استقراء $A_{r+1} \lhd A_1 = G$. پس A_{r+1} و بطور مشابه B_{s+1} زیرگروه‌های نرمال G هستند.

برای $g \in A_{r+1}$ و $h \in B_{s+1}$ داریم:

$$g^{-1}h^{-1}gh \in A_{r+1} \cap B_{s+1} = \{1\}.$$

بنابراین A_{r+1}، B_{s+1} ضرب مستقیم‌شان را تولید می‌کنند و با بدست آوردن مرتبه نتیجه می‌شود که $B_{s+1}A_{r+1} = G$.

حل مسائل فصل ٤

۱-۴- قسمت اول با انجام تقلیل استاندارد ماتریس از اعمال سطری مقدماتی به صورت زیر بدست می‌آید :

(a) اضافه کردن مضرب صحیحی از یک سطر یا ستون به دیگری ؛

(b) تعویض دو سطر یا دو ستون ؛

(c) ضرب یک سطر یا یک ستون در ۱- ؛

در این حالت تقلیل شروع و پایانی به صورت زیر است :

$$\begin{bmatrix} ۳۷ & ۲۷ & ۴۷ \\ ۵۲ & ۳۷ & ۶۷ \\ ۵۹ & ۴۴ & ۷۴ \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

این نشان می‌دهد که :

$$G \simeq \left\langle x, y, z \,\middle|\, x = ۱,\ y^{۳۵} = ۱,\ z^{۰} = ۱ \right\rangle \simeq C_{۳۵} \times C_{\infty}$$

اگر ما رابطه $a^{۳}b^{۲}c^{۴} = ۱$ را به G اضافه کنیم یک ماتریس تقلیل متناظر بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} ۳۷ & ۲۷ & ۴۷ \\ ۵۲ & ۳۷ & ۶۷ \\ ۵۹ & ۴۴ & ۷۴ \\ ۳ & ۲ & ۴ \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۷ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین اضافه کردن رابطه $a^۳b^۲c^۴ = ۱$ به روابط G، G را به گروه $C_۷ \times C_\infty$ تغییر می‌دهد . پس رابطه $a^۳b^۲c^۴ = ۱$ در G نمی‌تواند برقرار باشد .هر چند فوراً از دو رابطه ابتدایی G نتیجه می‌شود که $a^{۱۵}b^{۱۰}c^{۲۰} = ۱$ و بنابراین مرتبه $a^۳b^۲c^۴$، ۵ را عاد می کند . از آنجا که مرتبه ۱ نیست باید ۵ باشد .

از روابط دوم و سوم واضح است که $(abc)^۷ = ۱$ ، پس مرتبه abc، ۱ یا ۷ می‌باشد . با اضافه کردن رابطه $abc = ۱$ به G ماتریسی که تقلیل یافته است بدست می‌آوریم :

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

که متناظر با گروه $C_۵ \times C_\infty$ است. پس می‌بینیم که در G، $abc \neq ۱$ و در نتیجه مرتبه abc، ۷ است . حال در یک گروه آبلی اگر x دارای مرتبه m و y دارای مرتبه n باشد، آنگاه xy دارای مرتبه کوچکترین مضرب مشترك (m,n) است. بنابراین نتیجه می گیریم که عنصر

$$a^۴b^۳c^۵ = a^۳b^۲c^۴.abc$$

دارای مرتبه $۷ \times ۵ = ۳۵$ است .

۲-۴- (a)ماتریس رابطه برای G به صورت زیر تقلیل می‌یابد :

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۶ \\ ۴ & ۹ & ۴ \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

در نتیجه $C_۲ \times C_\infty \simeq <x,y,z \mid x = y^{-۲} = z^{۰} = ۱> \simeq G$.

(b) ماتریس رابطه برای G به صورت زیر تقلیل می‌یابد :

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۶ \\ ۴ & ۹ & ۴ \\ ۳ & ۳ & ۲ \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۶۶ \end{bmatrix}$$

در نتیجه $G \simeq C_{۶۶}$.

۴-۳- از $abab^{۲}=۱$ داریم $bab=b^{-۱}a^{-۱}$ پس $abbab=۱$ و بنابراین $bab^{-۱}a^{-۱}=۱$ ، پس G آبلی می‌شود. G گروه دوری متناهی است. در واقع یک ماتریس رابطه برای گروه آبلی G به صورت :

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

است . متناوباً، بسادگی دیده می‌شود که $G=\langle ab \rangle$ زیرا $b=(ab)^{-۲}$ و $a=(ab)^{۳}$.

٤-٤- فرض کنید $g,h \in G$ به ترتیب دارای مرتبه‌های m و n باشند . پس $g^{-۱}$ دارای مرتبه m و gh دارای مرتبه‌ای است که mn را عاد می‌کند . بنابراین زیرمجموعه غیرتهی T تحت ضرب بسته و شامل معکوس عناصر است ، پس یک زیرگروه از G است .

اگر $g \in Q$ و $h \in T \setminus \{۱\}$، آنگاه $gh \in Q$. بنابراین اگر Q یک زیرگروه باشد داریم $h=g^{-۱}gh \in Q$. یک شرط لازم برای اینکه Q یک زیرگروه باشد این است که $T=\{۱\}$. این شرط نتیجه می‌دهد که $Q=G$ و بنابراین کافی نیز می‌باشد .

عدد اول p داده شده است ، عضو f از G را با تعریف $f(p)=۱$ و $f(q)=۰$ برای $q \in \Pi \setminus \{p\}$ یک عنصر از مرتبه p است .

عضو g از G با تعریف $g(q)=۱$ برای هر $q \in \Pi$ ، دارای مرتبه نامتناهی است . فرض کنید $f \in G$ به طوری که برای تعداد متناهی $p \in \Pi$، $f(p) \neq ۰$ باشد . فرض کنید $\{p_۱,\dots,p_n\}$ زیرمجموعه متناهی از Π باشد که f روی آن صفر نباشد . بنابراین اگر $P=p_۱p_۲\dots p_n$ دیده می‌شود که مرتبه f، P را عاد می‌کند (در واقع برابر با P است) پس P دارای مرتبه متناهی است .

برعکس ، فرض کنید $f \in G$ دارای مرتبه n باشد مثلا $nf=۰$ ، بنابراین نشان می‌دهیم که اگر برای $p \in \Pi$، $f(p) \neq ۰$، آنگاه p باید n را عاد کند. این اثبات را کامل می‌کند، زیرا n فقط تعداد متناهی و شمارنده اول متمایز دارد. حال $f(p) \neq ۰$ و $f(p) \in Z_p$ نتیجه می‌دهد که $f(p)$ دارای مرتبه p است. ولی چون $nf=۰$ داریم $nf(p)=۰$ و بنابراین p ، n را عاد می‌کند .

۴-۵- ماتریس رابطه برای G برابر $\begin{bmatrix} n & m & m \\ m & n & m \\ m & m & n \end{bmatrix}$ است . و این به ماتریس زیر قابل‌تبدیل است :

$$\begin{bmatrix} n & m & m \\ m & n & m \\ m & m & n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} n & m-n & m-n \\ m & n-m & \cdot \\ m & \cdot & n-m \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} ۲m+n & \cdot & \cdot \\ m & n-m & \cdot \\ m & \cdot & n-m \end{bmatrix}.$$

دترمینان صفر است اگر و تنها اگر $m=n$ و $۲m=-n$ که نتیجه حاصل می‌گردد .

اگر G تام باشد ، آنگاه $۲m+n=۱$ و $n-m=۱$ و بنابراین $m=۰$ و $n=۱$. بنابراین

$$G=<a,b,c \mid a=۱, b=۱, c=۱>$$

که گروه بدیهی است.

۴-۶- ماتریس رابطه برای G برابر $\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۴+۲k & ۲n+۹ \end{bmatrix}$ است . در صورتی که G تام باشد ایجاب می‌کند که دترمینان این ماتریس ±۱ باشد. حال دترمینان برابر است با :

$$\Delta = ۲n+۹-۳(۴+۲k) = ۲n-۳-۶k\,.$$

چون بنا به فرض n نسبت به ۶ اول است ، دو حالت را در نظر می‌گیریم :

(a) $n=۶m+۱$. در این حالت $\Delta = ۱۲m+۲-۳-۶k$ و می‌توان $k=۲m$ را انتخاب کرد و تا $\Delta=-۱$ را بدست می‌آوریم .

(b) $n=۶m-۱$. در این حالت $\Delta = ۱۲m-۵-۶k$ و می‌توان $k=۲m-۱$ را انتخاب کرد و $\Delta=۱$ را بدست آوریم.

۴-۷- ماتریس رابطه برابر است با :

$$\begin{bmatrix} n & \cdot \\ ۳ & ۱ \\ n+۹ & ۴ \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} n & \cdot \\ ۳ & ۱ \\ n & ۱ \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} n & \cdot \\ ۳ & \cdot \\ \cdot & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین G/G' دوری از مرتبه $h.c.f.(۳,n)$ است. بنابراین $G/G' \simeq C_۳$، اگر ۳، n را عاد کند و بدیهی است اگر n نسبت به ۳ اول باشد .

۸-۴- داریم ،

$$V = S^{-1}R^{-y}$$
$$W = TV^{-z} = T(R^{y}S)^{z}$$
$$X = W^{t}U = (T(R^{y}S)^{z})^{t}U$$

و بنابراین

$$G = < R,S,T,U \mid R^{x} = S^{a}T^{b}U^{c}, (R^{y}S)^{y} = T^{a}U^{d}, (T(R^{y}S)^{z})^{z} = U^{a}, ((T(R^{y}S)^{z})^{t}U)^{t} = 1 >$$

ماتریس رابطه برای G/G' برابر است با :

$$M = \begin{bmatrix} x & -a & -b & -c \\ y^{2} & y & -a & -d \\ yz^{2} & z^{2} & z & -a \\ yzt^{2} & zt^{2} & t^{2} & t \end{bmatrix}.$$

ما می‌توانیم این ماتریس رابطه را با اعمال سطری یا ستونی مقدماتی روی Z ساده کنیم. $y-$ برابر ستون دو را به ستون یک اضافه می‌کنیم ، سپس $z-$ برابر ستون ۳ را به ستون ۲، $t-$ برابر ستون ۴ را به ستون ۳ اضافه کرده و بدست می‌آوریم :

$$M \sim \begin{bmatrix} x+ay & -a+bz & -b+ct & -c \\ 0 & y+az & -a+dt & -d \\ 0 & 0 & z+at & -a \\ 0 & 0 & 0 & t \end{bmatrix}.$$

حال $\left|G/G'\right| = \det M = (x+ay)(y+az)(z+at)t$. بنابراین G/G' متناهی است اگر و تنها اگر

$$(x+at)(y+az)(z+at)t \neq 0$$

(a) $\left|G/G'\right| = 1$ ایجاب می کند که

$$x+ay = \pm 1, y+az = \pm 1, z+at = \pm 1, t = \pm 1$$

بنابراین ما می‌توانیم به عنوان مثال قرار دهیم $t = x = y = z = 1 , a = 0$

(b) به عنوان مثال قرار دهید $t = 16, x = y = z = 1 , a = b = c = d = 0$

(c) به عنوان مثال قرار دهید $t = 2, z = 4 , y = 8 , x = 1 , a = b = c = d = 0$

۹-۴- برای مشاهده اینکه $G = < a_1, a_2 >$، از استقراء استفاده می‌کنیم. فرض کنید برای کلیه $i < n$، $a_i \in < a_1, a_2 >$. تساوی $a_n = a_{n-1}a_{n-2}$ نشان می‌دهد که $a_n \in < a_1, a_2 >$. چون $a_2 \in < a_1, a_2 >$، a_1، پس برای $1 \le i \le 2m$ ، $a_i \in < a_1, a_2 >$ و بنابراین $G = < a_1, a_2 >$.

برای مشاهده اینکه $f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$ دوباره از استقراء استفاده می‌کنیم. نتیجه برای $n = 2$ به راحتی دیده می‌شود. حال

$$\begin{aligned}
f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 &= f_{n-1}(2f_{n-1} + f_{n-2}) - (f_{n-2} + f_{n-1})^2 \\
&= 2f_{n-1}^2 + f_{n-1}f_{n-2} - f_{n-2}^2 - f_{n-1}^2 - 2f_{n-2}f_{n-1} \\
&= f_{n-1}^2 - f_{n-2}(f_{n-2} + f_{n-1}) \\
&= f_{n-1}^2 - f_{n-2}f_n \\
&= -(-1)^{n-1} \\
&= (-1)^n
\end{aligned}$$

برابری ماقبل آخری نتیجه ای از فرض استقراء است. حال در G/G' رابطه $a_{i+2} = a_{i+1}a_i$ به ما اجازه می‌دهد که بنویسیم

$$a_i = a_1^{f_{i-2}} a_2^{f_{i-1}} .$$

با جانشینی مقدار a_i در $a_i = a_{i+2}a_{i+m+1}$ ، فقط دو رابطه بدست می‌آوریم. از $i = 1$ بدست می‌آوریم $a_1^{f_m} a_2^{1+f_{m+1}} = 1$ و از $i = 2$ بدست می‌آوریم $a_1^{1+f_{m+1}} a_2^{1+f_{m+2}} = 1$.

بنابراین ماتریس رابطه G/G' به صورت زیر می‌شود

$$\begin{bmatrix} f_m & 1+f_{m+1} \\ 1+f_{m+1} & 1+f_{m+2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} f_m & 1+f_{m+1} \\ 1+f_{m-1} & f_m \end{bmatrix}$$

در نتیجه تساوی

$$\left|G/G'\right| = \left|f_m^2 - (1+f_{m+1})(1+f_{m-1})\right|$$

با استفاده از نتایج تساوی‌های زیر بدست می‌آید :

$$f_{m+1}f_{m-1} - f_m^2 = (-1)^m \qquad \text{و} \qquad g_m = f_{m+1} + f_{m-1}$$

۴-۱۰- چون $b^2 = a^{2^{n-2}}$ رابطه‌ای برای هر دو گروه G و H است ، لازم است که فقط نشان دهیم رابطه $(ab)^2 = b^2$ در G برقرار است ، زیرا دیده می‌شود که روابط در G روابط در H را در برمی‌گیرد. ولی بوضوح $bab^{-1} = a^{-1}$ نتیجه می‌دهد $abab^{-1} = 1$ ، یعنی $(ab)^2 = b^2$. برای مشاهده آنکه روابط در H نتیجه‌ای از روابط G هستند ، لازم است فقط نشان دهیم که $bab^{-1} = a^{-1}$ و $a^{2^{n-1}} = 1$ در H برقرارند . حال $(ab)^2 = b^2$ فوراً نتیجه می‌دهد $bab^{-1} = a^{-1}$. رابطه $bab^{-1} = a^{-1}$ را به توان 2^{n-2} می‌رسانیم . بدست می‌آوریم

$$ba^{2^{n-2}}b^{-1} = a^{-2^{n-2}}$$

ولی چون $b^2 = a^{2^{n-2}}$ می‌بینیم که $a^{2^{n-2}}$ با b جابجا می‌شود . بنابراین $a^{2^{n-2}} = a^{-2^{n-2}}$ یعنی $a^{2^{n-1}} = 1$.

۴-۱۱- براحتی دیده می‌شود که H و K یکریخت هستند . زیرا حذف c از نمایش K با قرار دادن $c = ab$ نمایشی برای H را می‌دهد . حال نشان می‌دهیم که روابط H از روابط G نتیجه می‌شود . در واقع :

$$\begin{aligned} bab &= b^2a^3 && \text{زیرا } ab = ba^3 \\ &= a^2a^3 && \text{زیرا } b^2 = a^2 \\ &= a && \text{زیرا } a^4 = 1 \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned} aba &= ba^3a && \text{زیرا } ab = ba^3 \\ &= b && \text{زیرا } a^4 = 1 \end{aligned}$$

نشان می‌دهیم که روابط در G می‌توانند از روابط در H نتیجه شوند. در واقع

$$a^{2} = abab \qquad (\text{چون } a = bab)$$
$$= b^{2} \qquad (\text{چون } aba = b)$$

و

$$ab = bab^{2} \qquad (\text{چون } a = bab)$$
$$= ba^{3} \qquad (\text{چون } b^{2} = a^{2})$$

بالاخره، $b = aba = ba^{3}a = ba^{4}$ که $a^{4} = 1$ را ایجاب می‌کند.

به دلیل اینکه ماتریس‌های

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

یک گروه از مرتبه ۸ را تولید می‌کنند، قسمت آخر مسئله روشن است.

۱۲-۴- فرض کنید $K = < a_1, \ldots, a_{n-1} >$. پس با قرار دادن $L = < a_n >$ داریم $G = KL$ و چون $L \le Z(G)$ باید نشان دهیم K نرمال در G است. حال $G/K \simeq L$ یک گروه آبلی است، پس $G' \le K$. ولی چون $a_n \in G'$ داریم $L \le K$. بنابراین $KL = K$ که $G = K$ را ایجاب می‌کند.

نمایشی برای Q_8 مانند $< a,b \mid a^{4} = 1, a^{2} = b^{2}, ab = ba^{3} >$ را در نظر بگیرید. چون $H/A \simeq Q_8$ و $A \le Z(H) \cap H'$، باتوجه به نتیجه بالا داریم $H = < \alpha, \beta >$ و $\alpha^{4} \in A$، $\alpha^{2}\beta^{-2} \in A$، $\alpha\beta^{-1}\alpha\beta \in A$. حال $[\alpha, \beta] = \alpha^{-2}a$ که $a \in A$ و بنابراین $[\alpha, \beta]$ با α جابجا می‌شود زیرا $a \in Z(H)$. ولی $\alpha^{2}\beta^{-2} \in A$ بنابراین $[\alpha, \beta] = \beta^{-2}a'$ که $a' \in A$ و بنابراین $[\alpha, \beta]$ با β جابجا می‌شود. بنابراین $H' = < [\alpha, \beta] >$. به هرحال α^{2} با β جابجا می‌شود چون $\alpha^{2}\beta^{-2} \in A \le Z(H)$ و بنابراین داریم

$$\begin{aligned}[\alpha,\beta]^{2} &= [\alpha,\beta]\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta \\ &= \alpha^{-1}[\alpha,\beta]\beta^{-1}\alpha\beta \\ &= \alpha^{-2}\beta^{-1}\alpha^{2}\beta \\ &= 1 \quad .\end{aligned}$$

بنابراین $H' \simeq C_2$. ولی $A \leq H'$ و بنابراین چون $H/A \simeq Q_8$ داریم $H/H' \simeq C_2 \times C_2$ که ایجاب می‌کند $|H| = 8$ و $A = \{1\}$.

۴-۱۳- رابطه $x^2 = y^2xy^{-1}$ را داریم و همچنین

$$1 = x^8 = (y^2xy^{-1})^4 = (yyxy^{-1})^4 = y(yx)^4y^{-1}$$

بنابراین $(yx)^4 = 1$ و در نتیجه $(xy)^4 = 1$.

بعلاوه $y^2 = x^2yx^{-1}$ بنابراین

$$y^8 = (xxyx^{-1})^4 = x(xy)^4x^{-1} = xx^{-1} = 1.$$

۴-۱۴- فرض کنید $x = a^3b$ و $y = (a^2b)^{-1}$. بنابراین چون $xy = a$ واضح است که y و x، G را تولید می‌کنند.

با نوشتن $a = xy$، $b = (xy)^{-3}x = y^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}$ بدست می‌آوریم

$$G = \langle x, y \mid (xy)^7 = y^3 = x^2 = (xy(y^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1})^5)^2 = 1 \rangle.$$

حال رابطه نهایی را می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم

$$(xyy^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}(y^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1})^4)^2 = 1.$$

معکوس این را بگیریم بدست می‌آوریم

$$((yxyxy)^4yxy)^2 = 1.$$

حال با مزدوج گیری بوسیله y بدست می‌آوریم

$$((y^2xyx)^4y^2x)^2 = 1.$$

چون $y^3 = 1$ داریم $y^2 = y^{-1}$ و فرم خواسته شده بدست می‌آید.

۱۵-۴- با جایگذاری

$$c = ab$$
$$d = bc = bab$$
$$e = cd = ab^{2}ab$$

در روابط G، (۱) و(۲) بدست می‌آیند .

حال

$$b = ab^{2}aba$$
$$= ab^{2}ab^{2}abab^{2}ab \qquad \text{بنابر (۱)}$$
$$= ab^{5}ab \qquad \text{بنابر (۲)}$$

پس داریم $b^{5} = a^{-2}$. بعلاوه

$$a^{2} = babab^{2}aba$$
$$= bab^{2} \qquad \text{بنا بر (۲)}$$

بنابراین $b^{-5} = a^{2} = bab^{2}$ و بنابراین $a = b^{-8}$ را ایجاب می‌کند .
با جایگذاری کردن a با b^{-8} در (۱) و (۲) بدست می‌آوریم $b^{11} = 1$ ، $b^{22} = 1$. بنابراین G گروه دوری C_{11} است .

۱۶-۴- از $ab = b^{2}a = b.ba = b.a^{2}b = ba.ab$ رابطه $ba = 1$ بدست می‌آید. بنابراین $a = b^{-1}$ و با جایگذاری در $ab = b^{2}a$ رابطه $b = 1$ را بدست می‌آوریم . حال $b = 1$ را در $ba = a^{2}b$ قرار داده و رابطه $a = 1$ را بدست می‌آوریم. بنابراین G گروه بدیهی است .
حال G_n را در نظر بگیرید . رابطه

$$a^{i}b^{n^{i}}a^{-i} = b^{(n+1)^{i}}$$

برای $i = 1$ برقرار است. بعلاوه فرض کنید تساوی زیر را داریم

$$a^{i+1}b^{n^{i+1}}a^{-(i+1)} = a(a^i b^{n^i} a^{-i})^n a^{-1}$$
$$= ab^{n(n+1)^i} a^{-1}$$
$$= (ab^n a^{-1})^{(n+1)^i}$$

$$= (b^{n+1})^{(n+1)^i}$$
$$= b^{(n+1)^{i+1}}$$

که از آنجا نتیجه را با استفاده از استقرا بدست می‌آوریم .

با قرار دادن $i = n$ از بالا بدست می‌آوریم

$$a^n b^{n^n} a^{-n} = b^{(n+1)^n}$$

و به دنبال آن داریم

$$ba^n b^{n^n} a^{-n} b^{-1} = b^{(n+1)^n}$$

و بنابراین

$$a^{n+1} b^{n^n} a^{-(n+1)} = b^{(n+1)^n} \quad (1)$$

با قرار دادن $i = n+1$ بدست می‌آوریم :

$$a^{n+1} b^{n^{n+1}} a^{-(n+1)} = b^{(n+1)^{n+1}}$$

و همچنین، در بالا (۱) را به توان n می‌رسانیم بدست می‌آوریم :

$$b^{n(n+1)^n} = b^{(n+1)^{n+1}} \quad ،$$

که از آنجا $b^{(n+1)^n} = 1$ بدست می‌آید . با جایگزینی این در (۱) رابطه $b^{n^n} = 1$ را بدست می‌آوریم . چون n^n با $(n+1)^n$ متباین هستند پس داریم $b = 1$، بنابراین $a = 1$ و G_n بدیهی می‌شود .

۱۷-۴- فرض کنید $H = \langle a, b \rangle$. پس H آبلی نیست . برای مشاهده این مطلب قرار دهید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

پس داریم

$$ab = \varphi(A) \qquad ba = \varphi(B)$$

حال $\varphi(A) \neq \varphi(B)$ چون در غیر این صورت باید داشته باشیم $AB^{-1} = \pm I_2$ که نادرست است . یک محاسبه ساده نشان می‌دهد که

$$a^2 = b^4 = (ab)^2 = \varphi\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

که $\varphi\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ در $PS(2,7)$ همانی است . بنابراین با استفاده از قضیه ون داک H یک تصویر از

$$D_8 =< a,b \mid a^2 = b^4 = (ab)^2 = 1 >$$

است. با وجود این هر تصویر محض از D_8 دارای مرتبه ۱، ۲ یا ۴ است و بنابراین آبلی می‌باشد. این نشان می‌دهد که $H \simeq D_8$.

۴-۱۸- بنا بر مسئله ۱.۱۸ ،$SL(2,3)$ دارای مرتبه ۲۴ است. اعضای $GL(2,3)$ دارای دترمینان ۱ یا ۲ هستند و همان شمارش اعضای با دترمینان ۱ بوضوح نشان می‌دهد که ۲۴ عضو با دترمینان ۲ وجود دارد . بنابراین $|GL(2,3)| = 48$. چون $SL(2,3)$ دارای اندیس ۲ در $GL(2,3)$ است ، باید نرمال و شامل گروه مشتق باشد . ولی

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

حال مستقیماً می‌توان بررسی کرد که

$$SL(2,3) =< \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} >$$

و بنابراین $SL(2,3)$ ، گروه مشتق از $GL(2,3)$ است .

حال ما داریم

$$H = \left\langle a,b,c,v \,\middle|\, ab = c, bc = a, ca = b, v^3 = 1, v^{-1}av = b, v^{-1}bv = c, v^{-1}cv = a \right\rangle$$

با کمی آزمایش و خطا تناظر یک به یک زیر را بدست می‌آوریم :

$$a \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad b \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$c \leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad v \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

این نشان می‌دهد که $H \simeq SL(2,3)$ چون هر کدام دارای مرتبه ۲۴ هستند .

نمایش H را با استفاده از روابط پنجم وششم با حذف b و c ساده می‌کنیم تا بدست آوریم

$$H = \langle a, v \mid vava^{-1}va^{-1} = 1, v^3 = 1 \rangle \quad .$$

حال $H/H' \simeq C_3$ و با v تولید می‌شود . بنابراین $H' \simeq Q_8$ و گروه مشتق Q_8 برابر با $C_2 \simeq \langle a^2 \rangle$ با گروه خارج قسمتی $C_2 \times C_2$ می‌باشد .

سری مشتق از $GL(2,3)$ به صورت زیر می‌باشد :

$$\begin{tikzcd}
\bullet\, GL(2,3) \arrow[d, dash, "C_2"'] \\
\bullet\, SL(2,3) = H \arrow[d, dash, "C_3"'] \\
\bullet\, H' = Q_8 \arrow[d, dash, "C_2 \times C_2"'] \\
\bullet\, C_2 \arrow[d, dash] \\
\bullet\, \{1\}
\end{tikzcd}$$

۴-۱۹-فرض کنید $T=\langle ab,ab^{-1}ab\rangle \le H$. بنابراین $ab^{-1}=ab^{-1}ab(ab^{-1})\in T$ و در نتیجه $b=b^{-2}=(ab)^{-1}ab^{-1}\in T$ و $a=ab.b^{-1}\in T$. بنابراین $T=H$ و H با ab و $ab^{-1}ab$ تولید می‌شود.

فرض کنید $M=\langle (ab)^n\rangle \le H$. ابتدا نشان می‌دهیم که M در H مرکزی است. چون $H=\langle ab,ab^{-1}ab\rangle$، کافی است برای این مقصود نشان دهیم که $[(ab)^n,ab]=1$ و $[(ab)^n,ab^{-1}ab]=1$. اولین رابطه واضح است و دومین رابطه با جانشین کردن $(ab^{-1}ab)^k$ بجای $(ab)^n$ بدست می‌آید. همچنین چون

$$(ab)^n=(ab^{-1}ab)^k=(a^{-1}b^{-1}ab)^k\in H'$$

دیده می‌شود که $M\le H'$.

۴-۲۰- برای نشان دادن اینکه جابجاگر $[a,b]$ در مرکز G است، کافی است ثابت کنیم که آن با هر یک از b ، a جابجا می‌شود. حال

$$a^{-1}[a,b]a=a^{-1}(a^{-1}b^{-1}ab)a$$

$$=a(b^{-1}a)ba \qquad \text{چون } a^3=1 \text{ نتیجه می‌دهد } a^{-2}=a$$

$$=a(a^{-1}ba^{-1}b)ba \qquad \text{چون } (b^{-1}a)^3=1 \text{ نتیجه می‌دهد } b^{-1}a=(a^{-1}b)^2$$

$$=ba^{-1}b^{-1}a \qquad \text{چون } b^2=b^{-1}$$

$$=b(baba)a \qquad \text{چون } a^{-1}b^{-1}=(ba)^2$$

$$=b^{-1}aba^{-1} \qquad \text{چون } a^2=a^{-1},b^2=b^{-1}$$

$$=a^{-1}ba^{-1}bba^{-1} \qquad \text{چون } b^{-1}a=(a^{-1}b)^2$$

$$=a^{-1}ba^{-1}b^{-1}a^{-1} \qquad \text{چون } b^2=b^{-1}$$

$$=a^{-1}bbabaa^{-1} \qquad \text{چون } a^{-1}b^{-1}=(ba)^2$$

$$-a^{-1}b^{-1}ab \qquad \text{چون } b^2=b^{-1}$$

$$=[a,b]$$

وبنابراین $[a,b]$ با a جابجامی‌شود. اثباتی‌مشابه نشان می‌دهد که $[a,b]$ با b جابجا می‌شود.

چون جابجاگر $[a,b]$ در $Z(G)$ است ، بنابراین $Z/Z(G)$ آبلی و $Z(G)$ آبلی است. ولی یک گروه آبلی باید متناهی باشد وقتی که با تعداد متناهی عضو تولید می‌شود . پس برای هر x یک عدد ثابت n وجود دارد به طوری که $x^n=1$. بنابراین $Z(G)$ متناهی و $Z/Z(G)$ متناهی هستند ، پس G متناهی است .

۴-۲۱- داریم $y^a xy^b = xy^{-c}x$ و $y^{-c}xy^{-b} = xy^a x$. بعلاوه

$$y^a(xy^{b-c}x)y^{-b} = xy^{-c}x.xy^a x = xy^{a-c}x \qquad (1)$$

به طور مشابه

$$y^b(xy^{c-a}x)y^{-c} = xy^{b-a}x \qquad (2)$$

و

$$y^c(xy^{a-b}x)y^{-a} = xy^{c-b}x \qquad (3)$$

از (۱) و (۳) داریم

$$y^{2a}(xy^{b-a}x)y^{-b-c} = xy^{a-c}x \quad .$$

و با استفاده از (۲) بدست می‌آوریم

$$y^{2a+b}(xy^{c-a}x)y^{-b-2c} = xy^{a-c}x \quad .$$

بنابراین

$$y^{2a+b}(y^{b+2c}xy^{a-c}xy^{-2a-b})y^{-b-2a} = xy^{a-c}x$$

و بنابراین $\left[y^{2(a+b+c)}, xy^{a-c}x\right]=1$. به طور مشابه $\left[y^{2(a+b+c)}, xy^{c-b}x\right]=1$.

اگر $h.c.f.(a-c,c-b)=1$ داریم $\lambda(a-c)+\mu\ (c-a)=1$ و آنگاه

$$\left[y^{2(a+b+c)}, (xy^{a-c}x)^{\lambda}(xy^{c-b}x)^{\mu}\right]=1$$

و بنابراین $\left[y^{2(a+b+c)}, xyx\right]=1$. اما

$$(xyx)^a = xy^a x = y^{-c}xy^{-b}$$

پس $\left[y^{2(a+b+c)}, y^{-c}xy^{-b}\right]=1$ ، $\left[y^{2(a+b+c)}, x\right]=1$ بدست خواهد آمد.

۴-۲۲ $xt^{m+1} = t^2x^2$ را رابطه(۱)و $xt^2xtx^2t = 1$ را رابطه(۲) می‌نامیم. از (۱) بدست می‌آوریم

$$xt^{m+1}x^{-1} = t^2x\,.$$

بنابراین با مربع کردن و استفاده از رابطه (۲) داریم

$$xt^{2m+2}x^{-1} = t^2xt^2x = tx^{-2}t^{-1}\,.$$

این (a) را تائید می‌کند.

از (۲) داریم $t^{-2} = (xtx)^2$. بنابراین $[t^2, xtx] = 1$ که (b) می‌باشد.

از (۱) و (b) داریم

$$t^m = t^{-1}x^{-1}t^2x^2 = (xt^2x^{-1}t^{-1}x^{-1})x^2$$

بنابراین

$$\begin{aligned} xt^2x^{-1} &= t^mx^{-1}t \\ &= t^{2m+1}x^{-2}t^{-1} && \text{بنا به (۱)} \\ &= t^{2m}tx^{-2}t^{-1} \\ &= t^{2m}(xt^{2m+2}x^{-1}) && \text{بنا به } (a) \end{aligned}$$

این (c) و (d) را تائید می‌کند.

بالاخره

$$\begin{aligned} t^{2m} &= t^{2m}(xt^{m+1}x^{-2}t^{-2}) \\ &= (xt^{m+1})t^{-2m}(x^{-2}t^{-2}) \\ &= (xt^{m+1}x^{-2}t^{-2})t^{-2m} \end{aligned}$$

پس $t^{4m} = 1$ و بنابراین با استفاده از (d) ، $[t^{2m}, x] = 1$ که نشان می‌دهد $t^{2m} \in Z(G)$.

۴-۲۳ - چون $\begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \in SL(2, Z)$ داریم $bc = -1$ و بنابراین $b = \pm 1$. فرض کنید $b = -1$. پس داریم

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = s^at \in \langle s, t \rangle \quad .$$

حال فرض کنید $b=1$. پس اگر

$$m=\begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

بنا به بالا داریم

$$t^2m=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -a & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\in\langle s,t\rangle$$

در نتیجه $m\in\langle s,t\rangle$.

حال n ای را انتخاب می‌کنیم که $|b+nd|<|d|$. پس اگر

$$m=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

داریم

$$s^nm=\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+nc & b+nd \\ c & d \end{bmatrix}$$

و بنابراین

$$ts^nm=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a+nc & b+nd \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -c & -d \\ a+nc & b+nd \end{bmatrix}.$$

حال بنا به استقراء $ts^nm\in<s,t>$ ، پس $m\in<s,t>$.

می‌نویسم

$$u=st=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

داریم

$$u^3=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad t^2=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

و بنابراین $\bar{u}^3=\bar{t}^2=\bar{I}$ در $PSL(2,Z)$ است.

برای نشان دادن اینکه ما w را می‌توانیم به شکل داده شده در نظر بگیریم، توجه کنید که مزدوج آن تبدیل به کلماتی با شروع یا پایان متفاوت از این شکل می‌شود.

تساوی $ut=-s$ از یک ضرب ساده ماتریسی بدست می‌آید. پس قرار می‌دهیم $v=u^{-1}t$. داریم

$$w=u^{\pm 1}tu^{\pm 1}\dots u^{\pm 1}t=\pm\dots s^{n_i}v^{n_{i+1}}s^{n_{i+2}}v^{n_{i+3}}\dots$$

که $\dots,n_i,n_{i+1},\dots$ اعداد صحیح مثبت هستند. ولی

$$s^{\alpha}=\begin{bmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{bmatrix}\qquad\qquad v^{\beta}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \beta & 1\end{bmatrix}$$

پس هر حاصلضرب از شکل بالا یک ماتریس است که همه درایه‌های آن غیر منفی بوده و به شرط آنکه هر دو s,t رخ دهد، آنگاه دارای اثر (رد) بزرگتر از ۲ می‌باشد و بنابراین $w\neq\pm I$ و بنابراین

$$PSL(2,Z)=\left\langle \bar{u},\bar{t}\;\middle|\;\bar{u}^{3}=\bar{t}^{2}=\bar{I}\right\rangle$$

چون نشان داده‌ایم که هیچ رابطه‌ای غیر بدیهی دیگری صدق نمی‌کند .

امتحان اول

وقت: ۳ ساعت

(هر سئوال ۲۰ امتیاز دارد)

۱- ثابت کنید که مرکز یک گروه از مرتبه p^n غیر بدیهی است. فرض کنید K یک گروه متناهی و H یک زیرگروه از K باشد . اگر P_1 یک $p-$ زیرگروه سیلو از H باشد. شرح دهید که چرا برای یک $p-$ زیرگروه سیلوی P_2 از K، $P_1 \le P_2$. حال فرض کنید H در این شرط که اگر $h \in H$ و $h \neq 1$ ، آنگاه $N_K(h) \le H$ صدق کند. با در نظر گرفتن مرکز P_2 (یا به هر صورت دیگر) نشان دهید که $P_1 = P_2$.

نتیجه بگیرید $h.c.f.(|H|,|K:H|) = 1$

۲- فرض کنید که گروه کواترنیون Q_8 با نمایش زیر داده شده باشد :

$$Q_8 = < a,b \mid a^4 = 1 , a^2 = b^2 , aba = b >$$

نشان دهید که نگاشت‌های α و β با ضابطه تعریف :

$$\alpha(a) = ab \qquad \alpha(b) = a$$
$$\beta(a) = b \qquad \beta(b) = a$$

به خود ریختی از Q_8 توسعه می‌یابد.

فرض کنید $G = \langle \alpha, \beta \rangle$. ثابت کنید که G یک گروه از مرتبه ۲۴است که یکریخت با S_4 می باشد. همچنین نشان دهید که $G \simeq AutQ_8$.

۳- فرض کنید A یک مجموعه از مولدهای گروه G باشد و H یک زیرگروه محض از G باشد. عضو a از A که به H تعلق ندارد را در نظر بگیرید . فرض کنید B مجموعه بدست آمده از A با جایگزین کردن هر $x \in A \cap H$ با ax باشد . نشان دهید B یک مجموعه از مولدهای از G است. اگر A متناهی و دارای n عضو باشد، نشان دهید که B دارای حداکثر n عضو است .

نتیجه بگیرید که

(i) اگر G دارای n مولد باشد، آنگاه دارای n مولد است که خارج از یک زیرگروه محض می باشد .

(ii)اگر H یک زیرگروه محض از G باشد ، آنگاه $G \setminus H$، Gرا تولید می کند .

۴- (a) ثابت کنید که هر زیرگروه H از یک گروه (جمعی) دوری G دوری است و نشان دهید که اگر a یک مولد از G و H دارای شاخص n باشد ، آنگاه na یک مولد از H است. اگر مرتبه G، m باشد نشان دهید که b نیز یک مولد از G است اگر و فقط اگر برای اعداد صحیحی چون r,s که نسبت به m اولند $b = ra$ و $a = sb$. نتیجه بگیرید که اگر G یک $p-$ گروه و d مولدی از H باشد ، آنگاه یک مولد c از G وجود دارد به طوریکه $nc = d$.

(b)فرض کنید p یک عدد اول ثابت باشد. فرض کنید G یک گروه آبلی جمعی با این خاصیت باشد که شامل دقیقاً یک زیرگروه H_α از مرتبه p^α برای هر α است و هیچ زیرگروه دیگری ندارد . نشان دهید که $H_\alpha \subseteq H_{\alpha+1}$ و H_α دوری است.

با استفاده از (a) نتیجه بگیرید که وجود دارد مولدهای $x_\circ = \circ , x_1,\dots,x_\alpha,\dots$ از $H_\circ = \{\circ\}$، H_1 ،...، $H_\alpha,\dots$ به طوری که $px_{\alpha+1} = x_\alpha$ برای هر α .

گروه جمعی

$$Q = \left\{ \beta \big/ p^\alpha \mid \beta,\alpha \in Z \, , \alpha \geq \cdot \right\}$$

از اعداد گویا را در نظر بگیرید. نشان دهید که $\beta x_\alpha \leftarrow {}^{\beta}\!/_{p^\alpha}$ یک ریختار گروهی از Q به G است و نتیجه بگیرید که $G \simeq {}^{Q}\!/_{Z}$.

۵- نشان دهید که گروه آبلی

$$G = < x, y, z \mid x^۶ y^۶ z^۹ = x^۲ y^۴ z^۳ = x^۴ y^۴ z^۶ \ , xy = yx \ , yz = zy \ , zx = xz >$$

جمع مستقیمی از گروه‌های دوری است.

فرض کنید α یک ریختار از G باشد به طوری که $\operatorname{Im}\alpha$ از مرتبه فرد باشد. نشان دهید که $\operatorname{Im}\alpha$ دوری است. فرض کنید H یک گروه باشد به طوری که برای هر $g \in H$، $g^۲ = ۱$. نشان دهید که H آبلی است. اگر مرتبه H متناهی باشد، نشان دهید که برای یک عدد صحیح مثبت n مرتبه آن ۲^n است.

امتحان دوم

وقت : ۳ ساعت

(هر سئوال ۲۰ امتیاز دارد)

۱- فرض کنید G یک گروه متناهی از مرتبه $p^m n$ باشد که p عددی اول بوده و نسبت به n اول است . قضیه سوم سیلو در مورد p – زیرگروه‌های G چه می‌گوید؟

با استفاده از استقراء روی مرتبه یا هر به صورت دیگر نشان دهید که هرزیرگروه ماکزیمال از یک p – گروه متناهی P در P نرمال است .

فرض کنید که G دارای حداقل سه p – زیرگروه سیلو P_1, P_2, P_3 است که $P_1 \cap P_2, P_2 \cap P_3$ زیرگروه‌هایی ماکزیمال از شاخص p در P_2 باشند . نشان دهید که $P_1 = (hk)^{-1} P_3 hk$ که در آن $h \in N_G(P_2 \cap P_3)$ و $k \in N_G(P_1 \cap P_2)$

۲- ثابت کنید که هر زیرگروه از یک گروه پوچ توان زیرنرمال است و نتیجه بگیرید که یک زیرگروه ماکزیمال از یک گروه پوچ توان نرمال است .

فرض کنید G یک گروه است به طوری که هر زیرگروه متناهی - مولد آن پوچ توان است و فرض کنید M یک زیرگروه ماکزیمال از G باشد. فرض کنید M نرمال در G نباشد. ثابت کنید که عضو x از G' وجود دارد که $x \notin M$. می‌نویسیم $x = \prod_{i=1}^{n} [y_i, x_i]$ ، ثابت کنید $\{x_i, y_i, z_i \mid i = 1,2,3,\ldots,n\}$ مشمول در زیرگروه H از G است که در آن

$$H = \langle x, a_1, \ldots, a_m \mid a_i \in M , i = 1,2,3,\ldots,m \rangle .$$

فرض کنید $A = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle$ و L ماکزیمال در H باشد با این خاصیت که $A \le L$ و $x \notin L$. نشان دهید که L یک زیرگروه ماکزیمال H است به طوری که $x \in H'$

و $H' \leq L$. از بالا نتیجه بگیرید که یک زیرگروه ماکزیمال از یک گروه که هر زیرگروه متناهی- مولد آن پوچ توان است نرمال می‌باشد .

۳- جایگشت‌های $x, y \in A_5$ با $x^2 = 1, y^3 = 1, (xy)^5 = 1$ را بیابید.

نشان دهید که A_5 دارای نمایشی به صورت

$$\langle x, y \mid x^2 = y^3 = (xy)^5 = 1 \rangle$$

است .

با در نظر گرفتن ماتریس‌های

$$X = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

در $SL(2,11)$ ، زیرگروهی از $PSL(2,11)$ که با A_5 یکریخت است را بیابید .

۴- گروه جمعی (یا ضربی) آبلی G را بخش پذیر می‌نامیم، اگر برای هر $x \in G$ و هر عدد صحیح غیر صفر n، $y \in G$ وجود داشته باشد که $ny = x$ (یا $y^n = x$) .

نشان دهید که گروه جمعی اعداد گویا بخش پذیر است و همچنین گروه ضربی اعداد مختلط با قدر مطلق یک نیز چنین است .

نشان دهید که هیچ زیرگروه محضی از اعداد گویا بخش پذیر نیست .

۵- نشان دهید که گروه K با نمایش

$$\langle a,b,c,d \mid ab = d \,,\, bc = a \,,\, cd = b \,,\, da = c \rangle$$

دوری از مرتبه ۵ است . مرتبه گروه با نمایش

$$L = \langle a,b,c,d \mid ab = d \,,\, ad = c \,,\, bc = a \,,\, cd = b \,,\, da = c \rangle$$

را بیابید.

نشان دهید که گروه M با نمایش

$$\langle a,b,c \mid abcabc = a \,,\, bcabca = b \,,\, cabcab = c \rangle$$

دوری و مرتبه آن را تعیین کنید .

امتحان سوم

وقت : ۳ ساعت

(هر سئوال ۲۰ امتیاز دارد)

۱- فرض کنید G یک گروه متناهی و p یک عددی اول است که مرتبه G را عاد می‌کند. فرض کنید $P_1,\ldots,P_r$، p - زیرگروه‌های سیلوی G باشند. نشان دهید که نگاشت v_g از $\{P_1,\ldots,P_r\}$ به خودش با ضابطه $v_g(P_i)=gP_ig^{-1}$ دو سویی است. نشان دهید که نگاشت θ از G به گروه نگاشت‌های دو سویی روی $\{P_1,\ldots,P_r\}$ با ضابطه $\theta(g)=v_g$ یک ریختار است که هسته آن بزرگترین زیرگروه نرمال از G است که مشمول در نرمالساز یک p - سیلو زیرگروه از G است .

فرض کنید G یک گروه از مرتبه ۱۶۸ است که هیچ زیرگروه نرمال محض غیربدیهی ندارد. نشان دهید که G نمی‌تواند نمایشی غیربدیهی از گروه جایگشت‌ها با کمتر از هفت حرف داشته باشد. نشان دهید که G نمایشی از گروه جایگشتها با هشت حرف می‌تواند داشته باشد .

۲- فرض کنید که G یک گروه پوچ توان و H زیرگروه نرمال آبلی از G با این خاصیت باشد که H بطور محض شامل در هیچ زیرگروه نرمال آبلی از G نمی‌باشد . ثابت کنید

$$H=\{g\in G \mid (\forall h\in H)\ [g,h]=1\}.$$

نتیجه بگیرید که H بطور محض شامل در هیچ زیرگروه آبلی از G نیست و $AutG$ شامل یک زیرگروه یکسان با G/H است .

۳- نشان دهید که اگر p یک عدد اول باشد، آنگاه $\varphi : Z \to Z/pZ$ یک ریختار از $G^* = SL(۲,Z)$ به گروه $G^* = SL(۲,Z_p)$ القاء می‌کند . مرکز هر دو گروه G^* و G^*_p زیرگروه تولید شده توسط $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ می‌باشد . توضیح دهید که چرا ریختار بالا ریختار زیر را القاء می کند

$$v_p : G^*/Z(G^*) \to G^*_p/Z(G^*_p)$$

نشان دهید که مزدوج گیری با عضو $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ یک خود ریختی r از مرتبه ۲ از $Kerv_p$ القاء می کند. همچنین ثابت کنید که

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} \notin Kerv_p$$

و $r(x) = x$ ایجاب می کند که $x = ۱$. با در نظر گرفتن ماتریس‌های

$$\begin{bmatrix} ۱ & p \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ p & ۱ \end{bmatrix}$$

نشان دهید که $Kerv_p$ آبلی نیست .

فرض کنید G یک گروه متناهی و r یک خودریختی از G باشد به طوری که $r^۲ = ۱$ و اگر $r(x) = x$ آنگاه $x = ۱$. نشان دهید که اگر $x^{-۱}r(x) = y^{-۱}r(y)$ ، آنگاه $x = y$. نتیجه بگیرید که r هر عضوی از G را معکوس می کند . پس ثابت کنید که G یک گروه آبلی از مرتبه فرد است.

۴- ثابت کنید که هر گروه خارج قسمتی از یک گروه پوچ توان، پوچ توان است. و هر $p-$ گروه متناهی پوچ توان است .

مرتبه گروه $G_n = < a,b \mid a^{۲^n} = b^۲ = (ab)^۲ = ۱ >$ را بیابید .

ثابت کنید که $G_n / Z(G_n) \simeq G_{n-1}$. بنابراین نشان دهید که G_n پوچ توان از کلاس n است.

۵- نشان دهید که گروه آبلی

$$< a,b,c \mid a^{14}b^{2}c^{11} = a^{8}b^{-3}c^{11} = a^{2}b^{3} = 1, ab = ba , bc = cb , ca = ac >$$

ضرب مستقیمی از گروه‌های دوری است . نشان دهید که زیرگروهی که از اعضای مرتبه متناهی تشکیل شده است دوری است و مولد آن را بیابید.

امتحان چهارم

وقت : ۳ ساعت

(هر سئوال ۲۰ امتیاز دارد)

۱- اگر G یک گروه متناهی و H و K زیرگروه‌هایی از G باشند نشان دهید که

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}.$$

اگر G یک گروه از مرتبه ۴۸ با بیش از یک ۲- زیرگروه سیلو باشد ، تعداد ۲- زیرگروه‌های سیلوی آن را بیابید . اگر P_1 و P_2 ، ۲- زیرگروه‌های سیلوی متمایز باشند ، ثابت کنید که $|P_1 \cap P_2| = 8$. نشان دهید که $P_1P_2 \subseteq N_G(P_1 \cap P_2)$. با در نظر گرفتن $|N_G(P_1 \cap P_2)|$ نشان دهید که $P_1 \cap P_2$ یک زیرگروه نرمال از G است . بنابراین نشان دهید که هر گروه از مرتبه ۴۸ دارای یک زیرگروه نرمال غیربدیهی محض است .

۲- نشان دهید که تعداد اعضای یک رده هم‌ارزی در یک p - گروه متناهی توانی از p است. نتیجه بگیرید که یک p - گروه متناهی غیربدیهی دارای مرکز غیربدیهی است. نشان دهید که اگر P یک p - گروه متناهی غیربدیهی باشد ، آنگاه P شامل زیرگروه‌ها $P_1,\dots,P_k$ است به طوری که

$$P = P_1 \supset P_2 \supset \cdots \supset P_k = \{1\}$$

و هر P_i یک زیرگروه نرمال از P است و $[P_i : P_{i+1}] = p$ ، برای $i = 1,2,3,\dots,k-1$.

۳- فرض کنید که G یک گروه باشد به طوری که $G' \le Z(G)$. ثابت کنید که برای هر $x, y \in G$ و همه اعداد صحیح $n \ge ۱$

$$x^n y^n = (xy)^n [x, y]^{\frac{۱}{۲}n(n-۱)}.$$

فرض کنید که $G =< x, y >$. ثابت کنید که اگر $g \in G$ ، آنگاه $g = x^a y^b [x, y]^c$ برای اعداد صحیح a,b,c.

نتیجه بگیرید که اگر H زیرگروه از $SL(۳,Z)$ به صورت زیر باشد

$$\left\{ \begin{bmatrix} ۱ & b & c \\ ۰ & ۱ & a \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \middle| \; a,b,c \in Z \right\}$$

آنگاه $v : H \to G$ با ضابطه

$$v\begin{bmatrix} ۱ & b & c \\ ۰ & ۱ & a \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = x^a y^b [x, y]^c$$

یک ریختار گروهی پوشاست . نتیجه بگیرید که G یک گروه خارج قسمت از H است .

۴- اگر H و K گروه‌های پوچ توان باشند، ثابت کنید که $H \times K$ نیز چنین است.
کلاس $H \times K$ برحسب کلاسهای H و K چیست ؟

فرض کنید N, M زیرگروه‌های نرمال از گروه G باشند. ثابت کنید که نگاشت $G \to G/N \times G/M$ با ضابطه $g \mapsto (gN, gM)$ یک ریختار است. بنابراین نشان دهید که اگر $G/N, G/M$ پوچ توان باشند ، آنگاه $G/N \cap M$ نیز چنین است .

در مورد کلاس $G/N \cap M$ بر حسب از کلاسهای $G/N, G/M$ چه می‌توان گفت ؟

۵- نشان دهید که گروه آبلی :

$$G = \left\langle a,b,c \;\middle|\; a^{۲}b^{۲}c^{۶} = a^{۴}b^{۶}c^{۴} = a^{۶}b^{۴}c^{۴} = ۱ , ab = ba , bc = cb , ca = ac \right\rangle$$

یک ضرب مستقیم از گروه‌های دوری است.

تعداد عضوهای از مرتبه ۱۱ در G را بیابید. نشان دهید که هر عضو از مرتبه ۱۱ در G به فرم $a^{۲\alpha}b^{۲\beta}c^{۲\gamma}$ برای اعداد صحیح α,β,γ می‌باشد. یک عضو از مرتبه ۱۱ در G بیابید و آن را بر حسب مولدهای a,b,c بنویسید .

مراجع

دروس جبر مجرد در محتوا و شکل بسیار متفاوت می باشند . همانطور کتابهای توصیه شده برای این دروس نه تنها از نقطه نظر علامتها و تشریح مفاهیم بلکه از نظر سطح تحقیقاتی نیز از تفاوتهای عمده ای بهره می برند . در اینجا فهرستی از کتب اصلی که به طور وسیعی مورد استفاده قرار می گیرند ، جهت آنکه خواننده بعنوان پیش نیاز می تواند به آنها رجوع کند ارائه شده است . مطالب این کتابها ، مطالب هر شش کتاب جبر به روش تمرین را پوشش داده و در بعضی از موردها حاوی مطالب بیشتری نیز می باشند . برای راحتی خواننده ، فهرستی مربوط به اینکه چه قسمتی از این کتابها به کدام فصل از این کتاب مربوط می شود نیز ارائه شده است .

[1] I.T . Adamson , *Introduction to Field Theory* , Cambridge University Press , 1982 .

[2] F . Ayres , Jr , *Modern Algebra* , Schaum's Outline Series , McGraw – Hill , 1965 .

[3] D . Burton , A *first course in rings and ideals* , Addison – Wesley, 1970

[4] P . M Cohn , *Algebra* Vol . I , Wiley , 1982 .

[5] D . T . Finkbeiner II , *introduction to Matrices and Linear Transformations* , Freeman , 1978 .

[6] R . Godement , *Algebra* , Kershaw , 1983 .

[7] J . A . Green , *Sets and Groups* , Routledge and Kegan Paul, 1965 .

[8] I . N . Herstein , *Topics in Algebra* , Wiley , 1977 .

[9] K . Hoffman and R . Kunze , *Linear Algebra* , Prentice Hall, 1971

[10] S . Lang , *Introduction to linear Algebra* , Addison – Wesley , 1970.

[11] S . Lipschuts , *Linear Algebra* , Schaum's Outline Series , McGraw - Hill , 1974 .

[12] I . D . Macdonald , *The Thoery of Groups* , Oxford University Press , 1968 .

[13] S. MacLane and G . Birkhoff , *Algebra* , Macmillan , 1968 .

[14] N . H . McCoy , *introduction to Modern Algebra* , Allyn and Bacon , 1975 .

[15] J.J . Rotman , *The Theory of Groups* : An Introduction , Allyn and Bacon , 1973 .

[16] I. Stewart , *Galois Theory* , Chapman and Hall , 1975 .

[17] I . Stewart and D . Tall , *The Foundations of Mathematics* , Oxford University Press , 1977 .

References useful for Book 5

1: Subgroups [4 , Sections 9.1 , 9.6] , [6 , Chapter 7] ,[8 , Sections 2.1 , 2.11] . [12 , Chapters 1-6] , [13 , Sections 13.1 , 13.4] , [15 Chapters 1- 4] .

2: Amutomorphisms and Sylow theory [4 , Sections 9.4 , 9.8] , [8 , Section 2.12] , [12 , Chapter 7] , [13 , Section 13.5] , [15 , Chapter 5] .

3: Series [4 , Sections 9.2 , 9.5] , [12 Chapter 9.10] , [13 , Sections 13.6 – 13.8] , [15 , Chapter 6] .

4: Presentations [4 , Section 9.9] , [12 , Chapter 8],[15 , Chapter 11] .

In [8] morphisms are written on the left but permutations are written as mappings on the right. In [4] and [12] all mappings (including permutations) are written as mappings on the right .

In American texts ' solvable ' is used where we have used ' soluble' .

Algebra through practice

A collection of problems in algebra , with solution

Groups

T.S.BLYTH ∘ E.F.ROBERTSON

Algebra Throuogh Practice

Groups

T.S. Blyth - E.F.Robertson

A Collection of Problems in Algebra,
With Solutions

Translated by:
Dr. H. R. Meymany
Dr. A. Zaiembashi