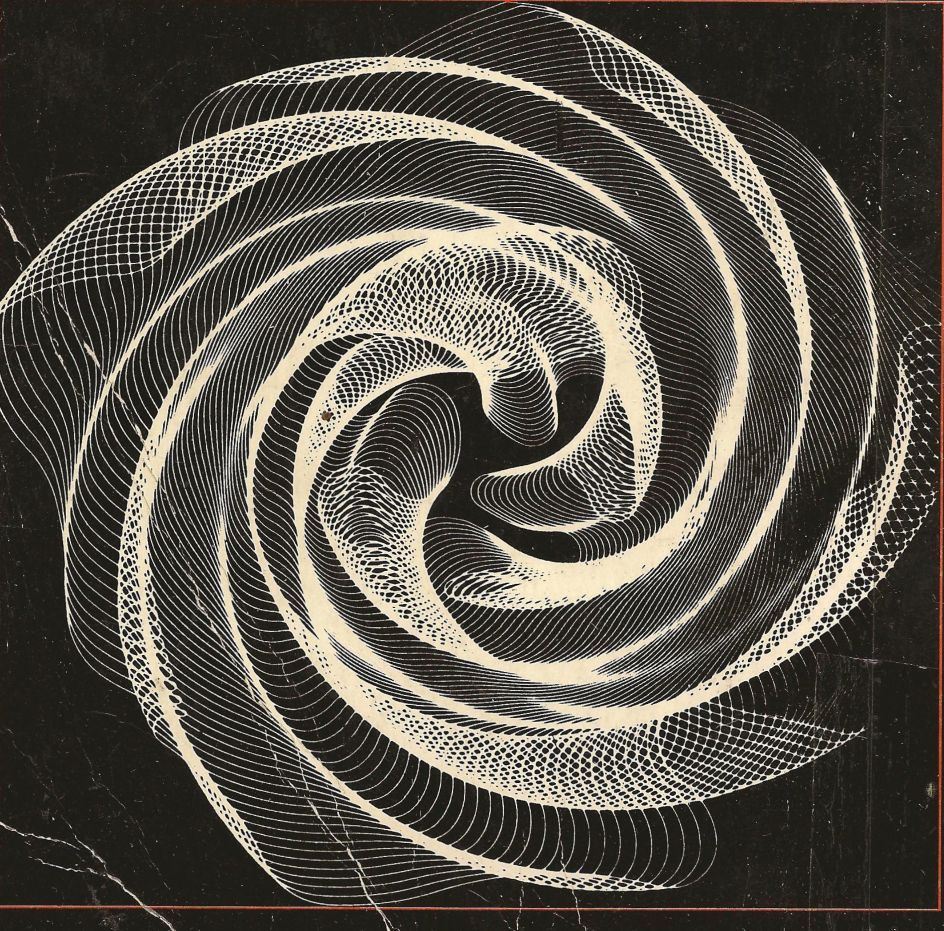
گزیده‌ای از

مسئله‌های دشوار ریاضی

کنستانتین شاخنو

ترجمهٔ پرویز شهریاری



گزیده‌ای از

مسئله‌های دشوار ریاضی

کنستانتین شاخنو

ترجمهٔ پرویز شهریاری

انتشارات انزلی

ارومیه. خیابان امام خمینی، تلفن ۲۸۳۳۸

گزیده‌ای از مسئله‌های دشوار ریاضی

نوشتهٔ کنستانتین شاخنو

ترجمهٔ پرویز شهریاری

چاپ اول

۳۳۰۰ نسخه در سال ۱۳۶۷ در چاپخانه نقش جهان

تهران چاپ شد

فهرست

	مسأله	حل
I. تبدیل عبارت‌های جبری	۵	۱۰۱
II. معادله‌های جبری	۱۷	۱۳۷
III. تشکیل معادله	۳۰	۱۸۲
IV. تصاعدها	۴۰	۲۱۳
V. لگاریتم‌ها	۴۵	۲۲۹
VI. ترکیب دوجمله‌ای نیوتون	۴۹	۲۴۷
VII. تبدیل عبارت‌های مثلثاتی x	۵۲	۲۵۹
VIII. معادله‌های مثلثاتی	۶۳	۳۰۴
IX. نامعادله و نابرابری‌ها	۶۶	۳۳۰
X. عددهای مختلط	۷۳	۳۶۳
XI. استقرای ریاضی	۷۶	۳۷۹
XII. بررسی تابع‌ها و رسم نمودارها x	۷۸	۳۸۹
XIII، مسأله‌هایی از هندسهٔ مسطحه	۸۱	۴۱۳
XIV. مسأله‌هایی از هندسهٔ فضایی	۹۲	۴۸۳

مسأله‌ها

I.

تبدیل عبارت‌های جبری

این عبارت‌ها را به‌ضرب عامل‌های اول تجزیه کنید (۱ تا ۱۵):

۱. $bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$

۲. $a^{2}b^{2}(b-a)+b^{2}c^{2}(c-b)+c^{2}a^{2}(a-c)$

۳. $[(x^{2}+y^{2})(a^{2}+b^{2})+4abxy]^{2}-4[xy(a^{2}+b^{2})+ab(x^{2}+y^{2})]^{2}$

۴. $2a^{2}b+4ab^{2}-a^{2}c+ac^{2}-4b^{2}c+2bc^{2}-4abc$

۵. $y(x-2z)^{2}+8xyz+x(y-2z)^{2}-2z(x+y)^{2}$

۶. $8x^{3}(y+z)-y^{3}(z+2x)-z^{3}(2x-y)$

۷. $x^{4}+y^{4}+z^{4}-2x^{2}y^{2}-2x^{2}z^{2}-2y^{2}z^{2}$

۸. $x^{2}y+xy^{2}+x^{2}z+xz^{2}+y^{2}z+yz^{2}+2xyz$

۹. $x^{2}y+xy^{2}+x^{2}z+xz^{2}+y^{2}z+yz^{2}+3xyz$

۱۰. $x^{3}+5x^{2}+3x-9$

۱۱. $x^{3}+9x^{2}+11x-21$

۱۲. $x^{3}(x^{2}-7)^{2}-36x$

۱۳. $(b-c)^{3}+(c-a)^{3}+(a-b)^{3}$

۱۴. $(x^۲+y^۲)^۳+(z^۲-x^۲)^۳-(y^۲+z^۲)^۳$

۱۵. $(x+y+z)^۳-x^۳-y^۳-z^۳$

۱۶. ثابت کنید: اگر به حاصل‌ضرب چهار عدد درست متوالی یک واحد اضافه کنیم، مجذور یک عدد درست به‌دست می‌آید.

۱۷. ثابت کنید که عدد $۱۳^{۲n}-۱$ بر ۱۶۸ بخش‌پذیر است (n، عددی است طبیعی).

۱۸. ثابت کنید، عدد $۷^{۲۱}-۴۸۷$ بر ۲۸۸ بخش‌پذیر است.

۱۹. ثابت کنید، به‌شرط حقیقی بودن عددهای a، b و c می‌توان از برابری

$$(a-b)^۲+(b-c)^۲+(c-a)^۲=(a+b-۲c)^۲+(b+c-۲a)^۲+$$
$$+(c+a-۲b)^۲$$

نتیجه گرفت: $a=b=c$.

۲۰. ثابت کنید که با شرط $m+n+p=۰$، به‌دست می‌آید:

$$m^۳+n^۳+p^۳=۳mnp$$

۲۱. چندجمله‌ای

$$y^۲x^۲+۲yx+۱+۲yzx^۲+z^۲x^۲+۲zx$$

را بر چندجمله‌ای $yx+xz+۱$ تقسیم کنید.

۲۲. چندجمله‌ای

$$۳ax+a^۳x^۳-۳-۳a+۲x^۲+۴a^۲x-x^۳-a^۲x^۲+۲x-a^۳x^۲$$

را بر چند جمله‌ای $ax-ax^۲+x+x^۲-۳$ تقسیم کنید.

۲۳. ثابت کنید که چندجمله‌ای $x^۳+y^۳+z^۳-۳xyz$ بر چند جمله‌ای $x+y+z$ بخش‌پذیر است.

۲۴. ثابت کنید، حاصل‌ضرب

$$(x^m-۱)(x^{m-۱}-۱)(x^{m+۱}-۱)$$

بر $(x-۱)(x^۲-۱)(x^۳-۱)$ بخش‌پذیر است؛ m، عددی است درست و مثبت.

۲۵. با چه شرطی، عبارت

$$a^{m-۱}+a^{m-۲}+\cdots+a+۱$$

بر عبارت $a^{n-۱}+a^{n-۲}+\ldots+a+۱$ بخش‌پذیر است؟ m و n، عددهایی طبیعی هستند.

۲۶. ثابت کنید که چندجمله‌ای $x^{3k}+x^{32}+x^{28}$ بر $x^{2}+x+1$ بخش‌پذیر است؛ k، عددی طبیعی است.

۲۷. درستی برابری زیر را تحقیق کنید:

$$(1+x)(1+x^{2})(1+x^{4})\cdots(1+x^{2^{n-1}})=1+x+x^{2}+\cdots+x^{2^{n}-1}$$

۲۸. مجموع ضریب‌های چندجمله‌ای را پیدا کنید که بعد از باز کردن پرانتزها در عبارت زیر به‌دست می‌آید:

$$(1+4x-4x^{2})^{175}\cdot(1+2x)^{5}\cdot(1-3x+x^{2}+2x^{3})^{149}$$

۲۹. درستی این برابری را ثابت کنید:

$$a^{2}\cdot\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^{2}\cdot\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^{2}\cdot\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^{2}$$

۳۰. مطلوب است شرط لازم و کافی، برای این‌که کسر $\frac{ax+b}{mx+n}$ بستگی به x نداشته باشد.

۳۱. مطلوب است شرط لازم و کافی، برای این‌که کسر $\frac{ax^{2}+bx+c}{mx^{2}+nx+p}$، مستقل از x باشد.

عبارت‌های زیر را ساده کنید (۳۲ تا ۴۲):

۳۲. $$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^{2}}+\frac{4}{1+x^{4}}+\frac{8}{1+x^{8}}+\frac{16}{1+x^{16}}$$

۳۳. $$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$$

۳۴. $$\frac{a^{2}}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^{2}}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^{2}}{(c-a)(c-b)}$$

۳۵. $$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}+\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

۳۶. $$\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\frac{c+a}{(a-b)(b-c)}$$

۳۷. $$\frac{y^{2}z^{2}}{b^{2}c^{2}}+\frac{(y^{2}-b^{2})(z^{2}-b^{2})}{b^{2}(b^{2}-c^{2})}+\frac{(y^{2}-c^{2})(z^{2}-c^{2})}{c^{2}(c^{2}-b^{2})}$$

۳۸. $\dfrac{(1+ab)[1+ab+(a+b)x]-(a+b)[a+b+(1+ab)x]}{[1+ab+(a+b)x]^2} \times$

$$\times \frac{1}{1-\left[\dfrac{a+b+(1+ab)x}{1+ab+(a+b)x}\right]^2}$$

۳۹. $\dfrac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2}+\dfrac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1}+\dfrac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}$

۴۰. $\dfrac{(x^2-y^2)^3+(y^2-z^2)^3+(z^2-x^2)^3}{(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3}$

۴۱. $\dfrac{\dfrac{a^2(c-b)}{bc}+\dfrac{b^2(a-c)}{ac}+\dfrac{c^2(b-a)}{ab}}{\dfrac{a(c-b)}{bc}+\dfrac{b(a-c)}{ac}+\dfrac{c(b-a)}{ab}}$

۴۲. $\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}+$

$$+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+5)}$$

۴۳. ثابت کنید، به‌شرط $a+b+c=0$، داریم:

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9$$

۴۴. ثابت کنید:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\dots+\frac{1}{2k}$$

۴۵. ثابت کنید که اگر داشته باشیم:

$$a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2=p^2,$$

$$b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2=q^2,$$

$$a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n=pq$$

آن وقت، خواهیم داشت:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{p}{q}$$

(همهٔ مقدارهایی که در این مسأله، با آن‌ها سروکار داریم، حقیقی‌اند).

۴۶. ثابت کنید، به‌شرط $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_n}{b_n}$، داریم:

$$(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2)=(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)^2$$

۴۷. ثابت کنید، کسر $\frac{14n+3}{21n+4}$، برای هرعدد درست n، غیرقابل تحویل است.

۴۸. ثابت کنید، به شرط $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ داریم: $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{c}$

۴۹. می‌دانیم: $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_k}{b_k}$ و در ضمن، c_1، c_2، ...، c_k عددهایی دلخواهند که با هم صفر نیستند. ثابت کنید:

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n=\frac{c_1a_1^n+c_2a_2^n+\dots+c_ka_k^n}{c_1b_1^n+c_2b_2^n+\dots+c_kb_k^n}$$

۵۰. گنگ بودن عدد $\sqrt{2}$ را ثابت کنید.

۵۱. به‌چه مناسبت: $(\sqrt[3]{2})^3=2$؟

۵۲. به‌چه مناسبت: a) $a^0=1$؛ b) $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$؛

c) $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$ $(m>0)$؛ d) $a^1=a$.

۵۳. مقدار حسابی $\sqrt{a^2}$ چقدر است؟

۵۴. چه موقع درست است: a) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=\sqrt{xy}$؛ b) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\sqrt{\frac{x}{y}}$؛

c) $\sqrt{\frac{ac^4}{b^2}}=-\frac{c^2}{b}\sqrt{a}$؛ d) $a\sqrt{b}=-\sqrt{a^2b}$؟

۵۵. ثابت کنید، با شرط $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_n}{b_n}$، داریم:

$$\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}+\dots+\sqrt{a_nb_n}=$$
$$=\sqrt{(a_1+a_2+\dots+a_n)(b_1+b_2+\dots+b_n)}$$

$(a_k>0 \text{ ، } b_k>0 \text{ ؛ } k=1, 2, \ldots, n)$.

عبارت‌های زیر را ساده کنید (۵۶ تا ۱۱۲).

۵۶. $$\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{(x+y)^{\frac{1}{2}}}-\frac{(x+y)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\right]^{-2}-\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}$$

۵۷. $$\frac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}:\left(1-2\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)-a^{\frac{2}{3}}$$

۵۸. $$\frac{\dfrac{a-2b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{4b^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{2a^2b}+\sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{4b^2}+\sqrt[3]{16ab}}}{\dfrac{a\sqrt[3]{a}+b\sqrt[3]{2b}+b\sqrt[3]{a}+a\sqrt[3]{2b}}{a+b}}$$

۵۹. $$\frac{(x-y)^3(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{-3}+2x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+\frac{3(\sqrt{xy}-x)}{x-y}$$

۶۰. $$\left[\frac{\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}-\frac{\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}}{a+b}-\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}-\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)\left(\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}\right)}{\left(\sqrt[3]{a^{-1}}-\sqrt[3]{b^{-1}}\right)(a+b)}\right]^{-1}$$

۶۱. $$\frac{(x^2+y\sqrt{xy}+x\sqrt{xy}+y^2)(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{-2}-\sqrt{xy}}{x-y}+\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

۶۲. $$\frac{\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3y}-x}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x^{-1}}}\right)(\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y})}{x+y-(x\sqrt{x}+y\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt[4]{y})^{-1}}$$

۶۳. $$\left(\frac{\sqrt[4]{ab^3}+\sqrt[4]{a^3b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1-\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right):\left(\frac{a-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}-1}-\frac{a+\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}+1}\right)$$

۶۴. $$\left(\frac{1-\sqrt{a}}{\frac{1-\sqrt[4]{a^3}}{1-\sqrt[4]{a}}-\sqrt{a}}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt[4]{a^{-1}}+\sqrt[4]{a^2}}{1+\sqrt[4]{a^{-1}}}-\sqrt{a}}\right)^5$$

۶۵. $$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt[4]{bx^3}+\sqrt[4]{a^2bx}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}+\sqrt[4]{bx}\right)^2+bx+3}{x(\sqrt{b}+\sqrt{3x^{-1}})^2}$$

۶۶. $$\left(\sqrt[3]{\frac{x^3+2ax^2+a^2x}{x-a}}-\sqrt[3]{\frac{x^3-2ax^2+a^2x}{x+a}}\right)^{-1}\cdot\sqrt[3]{a}+$$
$$+\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{a^{-2}}{x^{-1}}}$$

۶۷. $$b\left[\left(\frac{a\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a^2b^3}}{\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{a^2b}}-\sqrt[4]{ab}\right):(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})-\sqrt[4]{a}\right]^{-4}$$

۶۸. $$\sqrt[3]{a}-\left(\frac{1+a\sqrt[3]{a}+a+\sqrt[3]{a}}{1-\sqrt[3]{a^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{a^{-2}}}\right)\times\frac{\frac{1+a}{\sqrt[3]{a}+1}-\sqrt[3]{a^2}}{a^{-\frac{1}{3}}+\sqrt[3]{a}}$$

۶۹. $$\left(x+a^{\frac{3}{2}}:\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{5}}\left(1-\sqrt{\frac{a}{x}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\right)^{-\frac{1}{5}}\times\sqrt[10]{(x-a)^3}$$

۷۰. $$\left(\frac{\frac{a+\sqrt[3]{2a^2x}}{2x+\sqrt[3]{4ax^2}}-1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{2x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{2x}}\right)^{-6}$$

۷۱.
$$\frac{(a+a\sqrt{x}+x+x\sqrt{x})^{۲}(۱-\sqrt{x})^{۲}}{x+x^{-۱}-۲}-x^{\frac{۳}{۲}}a\sqrt{\frac{a^{۲}}{x}+۴a+۴x}.$$

۷۲.
$$\frac{\left[x\sqrt[۳]{\frac{x+۱}{(x-۱)^{۲}}}-(x+۱)\sqrt[۳]{(x^{۲}-۱)^{-۲}}\right]^{\frac{۳}{۷}}}{\sqrt[۷]{x^{۲}-۱}}$$

۷۳.
$$\frac{x+۲\sqrt{x}+۱+\frac{x-\sqrt{ax}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}-\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}+\frac{(\sqrt[۴]{a}-\sqrt[۴]{x})^{۲}+(\sqrt[۴]{a}+\sqrt[۴]{x})^{۲}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}}$$

۷۴.
$$\left[\sqrt[۳]{\frac{a^{۵}+۲a^{۴}b+۴a^{۳}b^{۲}}{a^{۲}-۴ab+۴b^{۲}}}+\sqrt[۳]{۸b^{۳}-\left(\frac{۱}{a}\right)^{-۳}}\right]:$$
$$:\left(\frac{\sqrt{۲b}}{\sqrt{ab}-b\sqrt{۲}}-\frac{\sqrt{۲b}}{\sqrt{ab}+b\sqrt{۲}}\right)$$

۷۵.
$$\frac{\sqrt[۳]{(b-۳)\sqrt{ab}+(۳-b^{-۱})\sqrt{ab^{-۱}}}}{\sqrt[۳]{b}-\sqrt[۳]{b^{-۲}}}\cdot\sqrt{b\sqrt[۳]{b^{۲}a}}$$

۷۶.
$$\frac{(۵-۴x^{۲})\sqrt{۵}-x\sqrt{(\sqrt{۲}+۱)^{۲}+(\sqrt{۲}-۱)^{۲}-۱۰(-۸x)}}{\sqrt{(۵-۴x^{۲})^{۲}+(۴x\sqrt{۵})^{۲}}}\cdot\frac{\sqrt{۲x}+\sqrt{۲a}}{\sqrt{x^{-۱}}+\sqrt{a^{-۱}}}$$

۷۷.
$$\left[\frac{x+(x^{۲}-۱)^{\frac{۱}{۲}}}{x-\sqrt{x^{۲}-۱}}+\frac{۱-\frac{x}{\sqrt{x^{۲}-۱}}}{x(x^{۲}-۱)^{-\frac{۱}{۲}}+۱}\right]:\frac{\sqrt{x}}{\left(x-\frac{۱}{x}\right)^{-\frac{۱}{۲}}}$$

۷۸.
$$\left\{\left[\frac{(\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b})^{۳}+۲a-b}{(\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b})^{۳}+۲b-a}\right]^{۲}:\sqrt[۱۲]{\left(\frac{b}{a}\right)^{-۲}}\right\}\sqrt{\frac{b}{a}}$$

۷۹.
$$\left(\frac{\sqrt[3]{a^{2}b^{2}}+a\sqrt[3]{a}}{a\sqrt[3]{b}+b\sqrt[3]{a}}-1\right)\left(1+\sqrt[6]{\left(\frac{b}{a}\right)^{-2}}+\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^{2}}\right)$$

۸۰.
$$\left[\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{1-x^{2}}+x-1}\right]\left[\sqrt{x^{-2}-1}-\frac{1}{x}\right],\ x>0$$

۸۱.
$$\left(\frac{a^{-\frac{1}{6}}-\frac{5}{\sqrt[6]{c}}}{a^{-\frac{1}{3}}-c^{-\frac{1}{3}}}-\frac{5\left(a^{-\frac{1}{6}}-c^{-\frac{1}{6}}\right)}{a^{-\frac{1}{3}}-\sqrt[3]{c^{-1}}}\right)^{-1}\cdot\frac{6\sqrt[6]{a}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{c}}$$

۸۲.
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{1+\sqrt{5}+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{5}-1}{1-\sqrt{5}+\sqrt{x}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-4x^{-\frac{1}{2}}+2\right)_{\sqrt{0.2}}$$

۸۳.
$$\left[2\sqrt{\frac{2}{a}}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2a}-\sqrt[4]{b}}+\frac{\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{5}}}{\sqrt[4]{2a}-\sqrt[4]{b}}\right)^{-2}\right]:$$
$$:\left(1+\frac{b}{2a}-2\sqrt{\left(\frac{2a}{b}\right)^{-1}}\right)$$

۸۴.
$$\left[\frac{\sqrt{b}+\frac{b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}{\sqrt{a}-\frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{1}{2}\sqrt[4]{\left(\frac{b}{a}\right)^{-2}}\right]:$$
$$:\left(1+\frac{2\sqrt{ab}+2b}{a-b}\right)$$

۸۵.
$$\left[\frac{1}{2}\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\cdot\sqrt{6-4\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a}-3a-1}\right]:$$
$$:\left[\frac{a-1}{2(\sqrt{a}+1)}+1\right]$$

۸۶. $$9\left(\sqrt[3]{2\sqrt{54}}-\sqrt[3]{3\sqrt{\frac{3}{8}}}\right)^{-4}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}\times$$
$$\times\sqrt[3]{40\sqrt{2}+56}:\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}$$

۸۷. $$\left[\sqrt{\frac{(1-a)\sqrt[3]{1+a}}{a}}\sqrt[3]{\frac{3a^2}{4-8a+4a^2}}\right]^{-1}:\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{1-a^2}}{3a\sqrt{a}}}$$

۸۸. $$\left\{\left[\frac{\sqrt[4]{1-x}}{2\sqrt[4]{(1+x)^3}}+\frac{\sqrt[4]{1+x}\,(1-x)^{-\frac{3}{4}}}{2}\right](1-x)^{-\frac{1}{2}}\right\}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{1}{4}}$$

۸۹. $$x^3\left[\frac{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})^2+(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})^2}{x+\sqrt{xy}}\right]^5\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt{x}}{x^{-1}}}$$

۹۰. $$x\sqrt{\frac{(x^2-y^2)(x-y)^2}{x+y}}+y\sqrt{\frac{(4x^2-9y^2)^2(x-y)}{(2x-3y)^2}}+$$
$$+\frac{2xy}{x-y}\sqrt{\frac{(x^2-y^2)^3}{(x+y)^3}}-(x^2-y^2)\sqrt{\frac{(x+y)^2}{x-y}}$$

۹۱. $$\frac{(\sqrt{a^2+1}+a)\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}-1\right)-\sqrt{(a^2+1}-a)\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}+1\right)}{\sqrt{a^2+1}+a}\times$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{a^2+1}-a}$$

۹۲. $$\sqrt{\left(\frac{p^2+q^2}{p^3-pq^2}+\frac{2q}{p^2-q^2}\right)(p^2+pq)}-$$
$$-\sqrt{\left(\frac{p}{p-q}-\frac{q}{p+q}-\frac{2pq}{p^2-q^2}\right)(p+q)};\quad p>q>0$$

۹۳. $$\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{1+(\sqrt{x}+1)^2(1-\sqrt{x})^{-2}}\left[\frac{1}{2\sqrt[4]{x}(1-\sqrt[4]{x})}-\frac{1}{2\sqrt[4]{x}(1+\sqrt[4]{x})}\right]$$
$$-\frac{1}{2\sqrt{x}-2x\sqrt{x}}$$

۹۴. $\frac{۸-x}{۲+\sqrt[۳]{x}}:\left(۲+\frac{\sqrt[۳]{x^۲}}{۲+\sqrt[۳]{x}}\right)+\left(\sqrt[۳]{x}+\frac{۲\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۳]{x}-۲}\right)\cdot\frac{\sqrt[۳]{x^۲}-۴}{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}}$

۹۵. $\frac{۱-(m+x)^{-۲}}{\left(۱-\frac{۱}{m+x}\right)^{۲}}:\left[۱-\frac{۱-(m^۲+x^۲)}{۲mx}\right]^{-۱}$ (باشرط $x=\frac{۱}{m-۱}$)

۹۶. $\left[\frac{(۱-x^۲)^{-\frac{۱}{۲}}+۱}{۲}\right]^{-\frac{۱}{۲}}+\left[\frac{(۱-x^۲)^{-\frac{۱}{۲}}-۱}{۲}\right]^{-\frac{۱}{۲}}$,

با شرط $k>۱$ و $x=۲k^{\frac{۱}{۲}}(۱+k)^{-۱}$

۹۷. $(۱+x^{-۱})^{-۲}+(۱-x^{-۱})^{-۲}$,

باشرط $x=(۱-n^{-۱})^{\frac{۱}{۲}}(۱+n^{-۱})^{-\frac{۱}{۲}}$

۹۸. $\left[\frac{(a+x)^{-\frac{۱}{۲}}(x+b)^{-\frac{۱}{۲}}+(a-x)^{-\frac{۱}{۲}}(x-b)^{-\frac{۱}{۲}}}{(a+x)^{-\frac{۱}{۲}}(x+b)^{-\frac{۱}{۲}}-(a-x)^{-\frac{۱}{۲}}(x-b)^{-\frac{۱}{۲}}}\right]^{-۲}$,

باشرط $a>b>۰$ و $x=\sqrt{ab}$

۹۹. $\left[(x+a)^{\frac{۱}{۳}}(x-a)^{-\frac{۱}{۳}}+(x+a)^{-\frac{۱}{۳}}(x-a)^{\frac{۱}{۳}}-۲\right]^{\frac{۱}{۲}}$,

با شرط $m>n>۰$ و $x=a\frac{m^۳+n^۳}{m^۳-n^۳}$

۱۰۰. $\left(x^{\frac{1}{m}}+x^{\frac{1}{n}}\right)^{۲}-۴a^۲x^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$,

با شرط $x=(a+\sqrt{a^۲-۱})^{\frac{۲mn}{m-n}}$

۱۰۱. $\left(a+x^{\frac{۱}{۲}}\right)^{-\frac{۱}{۲}}+\left(a-x^{\frac{۱}{۲}}\right)^{-\frac{۱}{۲}}$,

به‌شرط $x=۴(a-۱)$ و ۱) $۱<a<۲$ ؛ ۲) $a<۲$

۱۰۲. $\left[\frac{(x^۲+a^۲)^{-\frac{۱}{۲}}+(x^۲-a^۲)^{-\frac{۱}{۲}}}{(x^۲+a^۲)^{-\frac{۱}{۲}}-(x^۲-a^۲)^{-\frac{۱}{۲}}}\right]^{-۲}$,

با شرط $0<m<n$ و $x=a\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{\frac{1}{2}}$

۱۰۳. $\frac{(m+x)^{\frac{1}{2}}+(m-x)^{\frac{1}{2}}}{(m+x)^{\frac{1}{2}}-(m-x)^{\frac{1}{2}}}$,

باشرط $m>0$، $0<n<1$ و $x=\frac{2mn}{n^2+1}$

۱۰۴. $\left(x^{-2}+a^{-\frac{2}{3}}x^{-\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(a^{-2}+a^{-\frac{4}{3}}x^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$,

با شرط $x=\left(b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

۱۰۵. $\frac{2a(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$ باشرط $b>0$، $a>0$ و $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$،

۱۰۶. x^3+12x باشرط $x=\sqrt[3]{4(\sqrt{5}+1)}-\sqrt[3]{4(\sqrt{5}-1)}$،

۱۰۷. x^3+ax+b

با شرط $x=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}$

۱۰۸. $(x^{-1}+a^{-1})(x+a)^{\frac{1}{n}}-b^{-1}x^{\frac{1}{n}}$

با شرط $x=ab^{\frac{n}{n+1}}\left(a^{\frac{n}{n+1}}-b^{\frac{n}{n+1}}\right)^{-1}$

۱۰۹. $\frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{-38+17\sqrt{5}}-mx}{\sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{-38+17\sqrt{5}}+mx}:\sqrt{\frac{1-nx}{1+nx}}$

با شرط $0<m<n<2m$ و $x=\frac{1}{m}\sqrt{\frac{2m}{n}-1}$

$$\sqrt[n]{x^n+\sqrt[n+1]{a^n x^{n^2}}}+\sqrt[n]{a^n+\sqrt[n+1]{x^n a^{n^2}}}-1$$ ۰۱۱۰

با شرط $x=\left(b^{\frac{n}{n+1}}-a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}$

$$\sqrt[n]{a^k x^{n-k}}+\sqrt[n]{a^{n-k}x^k}-2\sqrt{bx}+b^2,$$ ۱۱۱

با شرط $x=\dfrac{(\sqrt{b}-\sqrt{b-a})^{\frac{2n}{n-2k}}}{a^{\frac{2k}{n-2k}}}$

$$\sqrt[n]{(x+1)^2}+\sqrt[n]{(x-1)^2}-4\sqrt[n]{x^2-1}+1,$$ ۰۱۱۲

با شرط $x=\dfrac{(2+\sqrt{3})^n+1}{(2+\sqrt{3})^n-1}$

درستی برابری‌های زیر را ثابت کنید. (۱۱۳ تا ۱۱۵):

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}=$$ ۰۱۱۳

$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$ (n، عددی طبیعی است)

$$b\sqrt{2}\cdot\frac{2a+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}}=\sqrt{(a+b)^3}-\sqrt{(a-b)^3},\quad (a>|b|)$$ ۰۱۱۴

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2\quad (x\leqslant 2)$$ ۰۱۱۵

·II

معادله‌های جبری

۰۱۱۶ ثابت کنید که معادلهٔ $ax+b=0$، به‌ازای $a\neq 0$، جواب دارد و در ضمن، تنها یك جواب.

۰۱۱۷ ثابت کنید که برای متوافق بودن دومعادلهٔ $a_1x+b_1=0$ و $a_2x+b_2=0$

($a_1\neq 0$، $a_2\neq 0$)، لازم و کافی است داشته باشیم: $a_1b_2-a_2b_1=0$.

آیا این معادله‌ها متوافق‌اند (۱۱۸ تا ۱۲۰)؟

۱۱۸. $x+1=0$ و $x^2+5x+4=0$

۱۱۹. $x^2+x-20=0$ و $x^2-6x+8=0$

۱۲۰. $x^2+ax+1=0$ و $x^2+x+a=0$

آیا این معادله‌ها هم‌ارزند (۱۲۱ تا ۱۲۴)؟

۱۲۱. $2x=x-1$ و $2x+x^2+1=x+x^2$

۱۲۲. $x^2=3x-2$ و $x^2+\frac{1}{x-1}=3x-2+\frac{1}{x-1}$

۱۲۳. $x+1=0$ و $(x+1)\sqrt{x-1}=0$

۱۲۴. $\sqrt{(x-6)(x-1)}=\sqrt{14}$ و $\sqrt{x-6}\cdot\sqrt{x-1}=\sqrt{14}$

این معادله‌ها را حل کنید (۱۲۵ تا ۱۳۴):

۱۲۵. $a^2x=a(x+2)-2$

۱۲۶. $\frac{x-mn}{m+n}+\frac{x-mp}{m+p}+\frac{x-np}{n+p}=m+n+p$

۱۲۷. $\frac{a+b-x}{c}+\frac{a+c-x}{b}+\frac{b+c-x}{a}+\frac{4x}{a+b+c}=1$

a و b و c هم‌علامت‌اند

۱۲۸. $|x-1|=2$

۱۲۹. $|x-1|+|x-2|=1$

۱۳۰. $|x-2|+|x-3|+|2x-8|=9$

۱۳۱. $\frac{|x|-1}{4}-\frac{1}{8}\left(\frac{|x|-5}{4}-\frac{14-2\cdot|x|}{5}\right)=\frac{|x|-9}{2}-\frac{7}{8}$

۱۳۲. $\frac{7x+4}{5}-x=\frac{|3x-5|}{2}$

۱۳۳. $x-\frac{|3x-2|}{5}=3-\frac{2x-5}{3}$

۱۳۴. $\dfrac{(2m-ax)^3+(ax-3n)^3}{(2m-ax)^2+(ax-3n)^2}=2m-3n$

۱۳۵. آیا مجموعهٔ دومعادلهٔ زیر تشکیل یك دستگاه می‌دهند؟

$$7x-2y+5=0$$

$$7x-2y+5=0$$

۱۳۶. با حل دستگاه معادله‌های

$$\frac{3xy}{x+y}=5;\quad \frac{2xz}{x+z}=3;\quad \frac{yz}{y+z}=4$$

معلوم شده است که عددهای زیر درمعادله‌ها صدق می‌کنند:

$$x=\frac{120}{61};\quad y=\frac{120}{11};\quad z=\frac{120}{19}$$

این‌ها، چند جواب معادله‌اند؟

۱۳۷. اگر جواب دستگاهی، جواب دستگاه دیگری هم باشد، آیا این دودستگاه هم‌ارزند؟

۱۳۸. این دستگاه معادله‌ها داده شده است:

$$\begin{cases}A=0\\B=0\end{cases}$$

معادلهٔ اول را در $m_1\neq 0$ ومعادلـهٔ دوم را در $m_2\neq 0$ ضرب و، سپس، نتیجه‌ها را باهم جمع می‌کنیم؛ همین عمل را با مضرب‌هـای $n_1\neq 0$ و $n_2\neq 0$ تکرار می‌کنیم؛ درضمن $n_1\neq m_1$ و $n_2\neq m_2$. به‌این ترتیب به‌دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases}C=0\\D=0\end{cases}$$

آیا دستگاه حاصل، بادستگاه مفروض هم‌ارز است؟

۱۳۹. ثابت‌کنید دو دستگاه

$$\begin{cases}A=0\\B=0\end{cases}\ (*)\quad \text{و}\quad \begin{cases}m_1A+m_2B=0\\n_1A+n_2B=0\end{cases}\ (**)$$

با شرط $m_1n_2-m_2n_1\neq 0$، هم‌ارزند.

۱۴۰. آیا عکس حکم مسالهٔ ۱۳۹ درست است، یعنی اگر دودستگاه این مساله هم‌ارز باشند، آیا $m_1n_2-m_2n_1\neq 0$؟

۱۴۱. دستگاه معادله‌های خطی زیر مفروض است:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$$

با فرض $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$، آن‌را به‌ترتیبی حل کرده‌ایم‌وجواب زیررا به‌دست‌آورده‌ایم:

$$x=\frac{c_2b_1-c_1b_2}{a_1b_2-a_2b_1};\quad y=\frac{a_2c_1-a_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}$$

آیا لازم است جواب را مورد آزمایش قراردهیم و ببینیم x و y در معادله‌های دستگاه صدق می‌کنند یا نه؟

۱۴۲. ثابت کنید که، باشرط $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$، دستگاه زیریك جواب و تنها یك جواب دارد:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$$

۱۴۳. آیا این معادله‌ها هم‌ارزند؟

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0 \quad \text{و} \quad P(x)=0$$

$P(x)$ و $Q(x)$، چند جمله‌ای‌هایی نسبت به x هستند.

۱۴۴. آیا معادله‌های

$$x^m=y^m \quad \text{و} \quad x=y$$

هم‌ارزند؟ m، عددی طبیعی است.

۱۴۵. مقدار a را طوری پیدا کنید که دستگاه زیر متوافق باشد:

$$2x+y=5;\quad 3x-2y=4;\quad ax+5y=11$$

۱۴۶. دستگاه

$$3x-4y=12;\quad 9x+ay=b$$

به‌ازای چه مقدارهایی از a و b ناسازگار (غیر متوافق) و به‌ازای چه‌مقدارهایی از a و b نامعین است؟

۱۴۷. k را طوری پیدا کنید که دستگاه زیر سازگار (متوافق) باشد:

$$x+(1+k)y=0\ ;\ (1-k)x+ky=1+k\ ;$$
$$(1+k)x+(12-k)y=-(1+k)$$

۱۴۸. ثابت کنید که دستگاه زیر یا ناسازگار و یا نامعین است:

$$\begin{cases} 3x+2y=10 \\ mx+(m-1)y=3m+1 \\ 2mx+4y=7m-1 \end{cases}$$

۱۴۹. آیا برابری

$$a(b+c)=ab+c$$

برابری زیر را نقض می‌کند؟

$$a(b+c)=ab+ac$$

دستگاه‌های زیر را حل کنید (۱۵۰ تا ۱۵۴):

۱۵۰. $\begin{cases} |x+1|+|y-1|=5 \\ |x+1|=4y-4 \end{cases}$

۱۵۱. $\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1 \\ y=5+|x-1| \end{cases}$

۱۵۲. $\begin{cases} 3|x|+5y+9=0 \\ 2x-|y|-7=0 \end{cases}$

۱۵۳. $\begin{cases} |x-y|=2 \\ |x|+|y|=4 \end{cases}$

۱۵۴. $\begin{cases} |x+y|=1 \\ |x|+|y|=1 \end{cases}$

۱۵۵. به‌ازای چه مقدارهای درستی از n، جواب دستگاه

$$nx-y=5\ ;\quad 2x+3ny=7$$

با شرط $x>0$ و $y<0$ سازگار است؟

۱۵۶. به‌ازای چه مقدارهایی از a و b، چند جمله‌ای

$$x^4-3x^3+3x^2+ax+b$$

بر x^2-3x+2 بخش‌پذیر است؟

۱۵۷. به‌ازای چه مقدارهایی از a و b، چند جمله‌ای

$$x^4-3x^3+3x^2+ax+b$$

بر x^2-3x+4 بخش‌پذیر است؟

۱۵۸. می‌دانیم، چندجمله‌ای

$$x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$$

در تقسیم بر $x-a$ به‌باقی‌ماندهٔ A و در تقسیم بر $x-b$ به‌باقی‌ماندهٔ B می‌رسد. به‌شرط $a\neq b$، باقی‌ماندهٔ تقسیم این چند جمله‌ای را بر $(x-a)(x-b)$ پیدا کنید.

۱۵۹. از تقسیم چند جمله‌ای

$$x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$$

بر $x-a$، $x-b$ و $x-c$، به‌ترتیب، باقی‌مانده‌های A، B و C به‌دست آمده است. به‌شرط مختلف بودن a، b و c، باقی‌ماندهٔ تقسیم این چند جمله‌ای را بر حاصل‌ضرب‌عبارت $(x-a)(x-b)(x-c)$ پیدا کنید.

۱۶۰. بین p و q چه رابطه‌ای برقرار باشد تا چند جمله‌ای x^3+px+q بر $(x-a)^2$ بخش‌پذیر باشد؟ در این حالت، مقدار a چقدر است؟

۱۶۱. می‌دانیم، چندجمله‌ای $x^4+2x^3+ax^2+2x+b$ مجذور چند جمله‌ای دیگری است. چند جمله‌ای اخیر و مقدارهای a و b را پیدا کنید.

۱۶۲. A، B و C را طوری پیدا کنید که برابری زیر برقرار باشد:

$$\frac{x+3}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

۱۶۳. ثابت کنید دستگاه

$$2x+3y-z+4=0;\quad 7x-4y-5z+4=0$$
$$3x-y+2z-10=0;\quad 8x-8y-2z+5=0$$

متوافق نیست.

۱۶۴. دستگاه زیر داده شده است:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\lambda\left(1+\dfrac{y}{b}\right) \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\lambda}\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\mu\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\mu}\left(1+\dfrac{y}{b}\right) \end{cases}$$

به‌ازای چه مقدارهایی از λ و μ، این دستگاه سازگار است؟ x، y و z را پیدا کنید.

۱۶۵. همهٔ جواب‌های این دستگاه را پیدا کنید:

$$x-2y+4z=0 \ ; \ 2x+y+3z=0$$

این دستگاه‌ها را حل کنید (۱۶۶ تا ۱۷۱):

۱۶۶.

$$\begin{cases} \dfrac{x-a}{(b+c)^2-a^2}=\dfrac{y-b}{(c+a)^2-b^2}=\dfrac{z-c}{(a+b)^2-c^2} \\ x+y+z=k(a+b+c) \end{cases}$$

۱۶۷.

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ (a+b)x-(a+c)y+(b+c)z=0 \\ abx-acy+bcz=1 \end{cases}$$

(a و b و c مختلف‌اند).

۱۶۸.

$$(a+b+c\neq 0) \quad \begin{cases} (b+c)(y+z)-ax=b-c \\ (c+a)(z+x)-by=c-a \\ (a+b)(x+y)-cz=a-b \end{cases}$$

۱۶۹. $$ax+by+cz=bx+cy+az=cx+ay+bz=a+b+c$$

(a و b و c، عددهایی حقیقی‌اند).

۱۷۰.

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{ay+bx}=c \\ \dfrac{zx}{az+cx}=b \\ \dfrac{yz}{bz+cy}=a \end{cases}$$

۱۷۱.

$$\begin{cases} \dfrac{x_1-a_1}{m_1}=\dfrac{x_2-a_2}{m_2}=\dots=\dfrac{x_p-a_p}{m_p} \\ x_1+x_2+\dots+x_p=a \end{cases}$$

۱۷۲. عدد حقیقی a را طوری پیدا کنید که درمعادلهٔ زیر، یکی از ریشه‌ها برابر مجذور ریشهٔ دیگر باشد:

$$4x^2-15x+4a^3=0$$

۱۷۳. معادلهٔ درجهٔ دومی با ضریب‌های حقیقی تشکیل دهید که یکی از ریشه‌های آن برابر $\dfrac{1+i}{1-i}$ باشد $(i=\sqrt{-1})$.

۱۷۴. معادلهٔ زیر، به‌ازای چه مقدارهایی از a، ریشه‌های برابردارد؟

$$(5a-1)x^2-(5a+2)x+3a-2=0$$

۱۷۵. به‌ازای چه‌مقدارهای حقیقی m، عبارت زیر مجذورکامل می‌شود:

$$x^2+m(m-1)x+36$$

۱۷۶. به‌ازای بعضی مقدارهای p، معادلهٔ

$$x^2+3x+3+p(x^2+x)=0$$

ریشه‌های برابر دارد. معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن، این مقدارهای p باشند.

۱۷۷. مقدار q را درمعادلهٔ زیر طوری پیدا کنید که مجذور تفاضل ریشه‌های آن برابر ۱۶ باشد:

$$x^2-2x+q=0$$

۱۷۸. m را طوری پیدا کنید که نسبت ریشه‌های معادلهٔ زیر برابر ۲ باشد:

$$9x^2-18mx-8m+16=0$$

۱۷۹. به‌ازای چه مقدارهای حقیقی m، معادلهٔ زیر دوریشهٔ متفاوت دارد؟

$$2mx^2-2x-3m-2=0$$

۱۸۰. p و q چه عددهایی باشند تا ریشه‌های معادلهٔ زیر برابر p و q شوند؟

$$x^2+px+q=0$$

۱۸۱. برای چه مقداری از m، دومعادلهٔ زیر، ریشهٔ مشترك دارند؟

$$۲x^{۲}-(۳m+۲)x+۱۲=۰$$

$$۴x^{۲}-(۹m-۲)x+۳۶=۰$$

۱۸۲. ثابت کنید که معادلهٔ زیر، به‌ازای هرمقدار حقیقی دلخواه m، دارای دوریشه حقیقی است:

$$(x-۱)(x-۳)+m(x-۲)(x-۴)=۰$$

۱۸۳. اگر a و b و c، سه‌عدد حقیقی باشند، ثابت کنید ریشه‌های معادلهٔ زیر همیشه حقیقی‌اند:

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=۰$$

۱۸۴. برای کدام مقدارهای درست k، ریشه‌های معادلهٔ زیر گویا هستند؟

$$kx^{۲}-(۱-۲k)x+k=۲$$

۱۸۵. ثابت کنید که، برای عددهای فرد p و q، معادلهٔ زیر ریشه‌های گویا ندارد:

$$x^{۲}+px+q=۰$$

۱۸۶. ثابت کنید که معادلهٔ

$$x^{۴}+ax+۱=۰$$

برای عددهای درست a و $|a|\neq ۲$، دارای ریشهٔ گویا نیست.

۱۸۷. ثابت کنید که اگر معادلهٔ

$$x^{m}+a_{۱}x^{m-۱}+a_{۲}x^{m-۲}+\dots+a_{m}=۰$$

به‌شرط درست بودن ضریب‌های $a_{۱}$، $a_{۲}$، …، a_{m} ریشه‌ای گویا داشته باشد، این ریشه عدد درستی است.

۱۸۸. ثابت کنید، اگرکسر ساده‌نشدنی $\frac{p}{q}$، ریشه‌ای از معادلهٔ

$$a_{۰}x^{m}+a_{۱}x^{m-۱}+a_{۲}x^{m-۲}+\dots+a_{m}=۰$$

باشد، به‌شرط درست بودن ضریب‌های $a_{۰}$، $a_{۱}$، $a_{۲}$، …، a_{m}، q مقسوم‌علیهی از $a_{۰}$ و p مقسوم‌علیهی از a_{m} است.

۱۸۹. ثابت کنید، اگر یك معادلهٔ جبری بـا ضریب‌های گویا، ریشه‌ای بـه‌صورت

$a+b\sqrt{c}$ داشته باشد (a و b و c، عددهایی گویا، $b\neq ۰$، $c>۰$ و درضمن، c مجذور یك عدد گویا نیست)، آن‌وقت، این معادله، ریشهٔ دیگری هم به‌صورت $a-b\sqrt{c}$ خواهد داشت.

این معادله‌ها را حل کنید (۱۹۰ تا ۱۹۳):

۱۹۰. $(۶x+۷)^۲(۳x+۴)(x+۱)=۶$

۱۹۱. $x^۲(۱+x)^۲+x^۲=۸(۱+x)^۲$

۱۹۲. $x(x+۱)(x-۱)(x+۲)=۲۴$

۱۹۳. $(x-۲)^۴+(x-۳)^۴=۱$

۱۹۴. مطلوب است حل معادلهٔ

$$x^۳+۲۱x^۲+۱۴۰x-۳۰۰=۰$$

به‌شرطی‌که بدانیم، یکی از ریشه‌های آن دو برابر ریشهٔ دیگری از آن است.

۱۹۵. معادله‌ای جبری با ضریب‌های گویا تشکیل دهید که کمترین درجهٔ ممکن را داشته باشد و دوعدد زیر ریشه‌های آن باشند:

$$۱+\sqrt{۳} \quad \text{و} \quad ۲+\sqrt{۳}$$

دستگاه‌های زیر را حل کنید (۱۹۶ تا ۲۱۰):

۱۹۶. $\begin{cases} x^۲-۳x+۲=۰ \\ x^۲+۵x-۱۴=۰ \end{cases}$

۱۹۷. $\begin{cases} x^۲+xy=۶ \\ y^۲+xy=۳ \end{cases}$

۱۹۸. $\begin{cases} x^۴+۳x^۲y^۲+y^۴=۱۰۹ \\ x^۲+y^۲+xy=۱۳ \end{cases}$

۱۹۹. $\begin{cases} (x+y+۱)^۲+(x+y)^۲=۲۵ \\ x^۲-y^۲=۳ \end{cases}$

۲۰۰. $\begin{cases} x(y+z)=۵ \\ y(z+x)=۸ \\ z(x+y)=۹ \end{cases}$

۲۰۱. $\begin{cases} x+y+z=۱۳ \\ x^۲+y^۲+z^۲=۶۱ \\ ۲yz=x(z+y) \end{cases}$

۲۰۲. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=35 \\ 3x+2y^2-7xz=-14 \\ x(z-1)=4 \end{cases}$ ۲۰۳. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=14 \\ xy+xz-yz=7 \\ x+y+z=6 \end{cases}$

۲۰۴. $$\begin{cases} x^2+y^2=axyz \\ y^2+z^2=byzx \\ z^2+x^2=czxy \end{cases}$$

$$a>b>c>0,\quad b+c>a$$

۲۰۵. $\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ xy+yz+zx=47 \\ (z-x)(z-y)=2 \end{cases}$ ۲۰۶. $\begin{cases} x(x+y+z)=a^2 \\ y(x+y+z)=b^2 \\ z(x+y+z)=c^2 \end{cases}$

$$a>0,\quad b>0,\quad c>0$$

۲۰۷. $$\begin{cases} y+z+yz=a \\ z+x+zx=b \\ x+y+xy=c \end{cases}$$

$$a>-1,\quad b>-1,\quad c>-1$$

۲۰۸. $$\begin{cases} x^2=a+(y-z)^2 \\ y^2=b+(z-x)^2 \\ z^2=c+(x-y)^2 \end{cases}$$

$$a>0,\quad b>0,\quad c>0$$

۲۰۹. $$\frac{yz}{bz+cy}=\frac{zx}{cx+az}=\frac{xy}{ay+bx}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$$

a و b و c، عددهایی حقیقی‌اند.

۲۱۰. $$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2-z^2=20 \\ x^4+y^4-z^4=560 \end{cases}$$

۲۱۱. مطلوب است جواب‌های حقیقی دستگاه

$$\begin{cases} ۲x-y=۱ \\ ۴x+y-۲xy-z^۲=۳ \end{cases}$$

آیا معادله‌های زیر هم‌ارزند؟ (۲۱۲ تا ۲۱۴):

۰۲۱۲ $P(x)=Q(x)$ و $\sqrt{P(x)}=\sqrt{Q(x)}$

۰۲۱۳ $\sqrt{P(x)}\cdot\sqrt{Q(x)}=R(x)$ و $\sqrt{P(x)Q(x)}=R(x)$

۰۲۱۴ $\dfrac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{Q(x)}}=R(x)$ و $\sqrt{\dfrac{P(x)}{Q(x)}}=R(x)$

این معادله‌ها را حل کنید (۲۱۵ تا ۲۳۹):

۰۲۱۵ $\sqrt[۶]{x-۶}+\sqrt{۱۰x+۵}=۲$

۰۲۱۶ $\dfrac{(x-۱)(x-۲)-(x-۳)(x-۴)}{\sqrt{x^۲-۳x+۲}-\sqrt{x^۲-۷x+۱۲}}=\sqrt{۲}$

۰۲۱۷ $x^۲+۳-\sqrt{۲x^۲-۳x+۲}=\frac{۳}{۲}(x+۱)$

۰۲۱۸ $\sqrt[۵]{(۷x-۳)^۳}+۸\sqrt[۵]{(۳-۷x)^{-۳}}=۷$

۰۲۱۹ $\left(۱+\frac{۹}{x}\right)^{\frac{۱}{۲}}+۴\left(\frac{x}{x+۹}\right)^{\frac{۱}{۲}}=۴$

۰۲۲۰ $(a+x)^{\frac{۲}{۳}}+۴(a-x)^{\frac{۲}{۳}}-۵(a^۲-x^۲)^{\frac{۱}{۳}}=۰$

۰۲۲۱ $\sqrt[n]{\dfrac{a-x}{b+x}}+\sqrt[n]{\dfrac{b+x}{a-x}}=۲$

۰۲۲۲ $\sqrt[۳]{x+۴۵}-\sqrt[۳]{x-۱۶}=۱$

۰۲۲۳ $\sqrt{x-\frac{۱}{x}}-\sqrt{۱-\frac{۱}{x}}=\dfrac{x-۱}{x}$

۰۲۲۴ $\sqrt{۱+x}-\dfrac{۱}{\sqrt{۱+x}}=\sqrt{۲+x}$

۲۲۵. $$4x+1+2x\sqrt{2(2x^2+1)}+(2x+1)\sqrt{4x^2+4x+3}=0$$

۲۲۶. $$2\sqrt{2x+\sqrt{x}}=3\sqrt{\frac{x}{2x+\sqrt{x}}}+2\sqrt{2x-\sqrt{x}}$$

۲۲۷. $$\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{b}$$

۲۲۸. $$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}$$

۲۲۹. $$\sqrt[5]{16+\sqrt{x}}+\sqrt[5]{16-\sqrt{x}}=2$$

۲۳۰. $$\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=1$$

۲۳۱. $$\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}=\frac{x}{2}$$

۲۳۲. $$\frac{1+x-\sqrt{2x+x^2}}{1+x+\sqrt{2x+x^2}}=a^3\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}$$

۲۳۳. $$\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=1$$

۲۳۴*. $$\frac{\sqrt[n]{a+x}}{a}+\frac{\sqrt[n]{a+x}}{x}=\frac{\sqrt[n]{x}}{b}$$

۲۳۵. $$\sqrt[n]{x^n+\sqrt[n+1]{a^n x^{n^2}}}+\sqrt[n]{a^n+\sqrt[n+1]{x^n a^{n^2}}}=b \quad (a>0)$$

۲۳۶. $$\sqrt[n]{a^k x^{n-k}}+\sqrt[n]{x^k a^{n-k}}=2\sqrt{bx} \quad (n>k>0 \text{ و } b>a>0)$$

۲۳۷. $$\sqrt[n]{(x+1)^2}+\sqrt[n]{(x-1)^2}=4\sqrt[n]{x^2-1}$$

۲۳۸. $$\frac{\sqrt[n]{a-x}}{x^2}-\frac{\sqrt[n]{a-x}}{a^2}=\sqrt[n]{\frac{x^2}{a+x}}$$

---

*) در تمرین‌های از ۲۳۴ تا ۲۳۹، n عددی است درست و بزرگتر از واحد.

$$\sqrt{\frac{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x^{۲}}}}-\sqrt{\frac{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{a^{۲}}}}=\sqrt[۲n]{x}$$ ۲۳۹.

این دستگاه‌ها را حل کنید (۲۴۰ تا ۲۴۳):

۲۴۰. $$\begin{cases} x-y+\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}=\dfrac{۲۰}{x+y}; \\ x^{۲}+y^{۲}=۳۴ \end{cases}$$

۲۴۱. $$\begin{cases} \dfrac{x-y}{\sqrt[۳]{x^{۲}y}-\sqrt[۳]{xy^{۲}}}=\dfrac{۷}{۲}; \\ \sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{y}=۳ \end{cases}$$

۲۴۲. $$\begin{cases} \dfrac{۱}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x}}{y}=۰/۳۷۵; \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=۷ \end{cases}$$

۲۴۳. $$\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=۲\sqrt{xy}; \\ x+y=۲۰ \end{cases}$$

III.

تشکیل معادله

۲۴۴. جهان‌گرد از روستا به‌طرف ایستگاه بـه‌راه افتاد. در ساعت اول ۳ کیلومتر رفت. ولی حساب کرد، اگر باهمین سرعت ادامه دهد، ۴۰ دقیقه بعد از حرکت قطار به ایستگاه می‌رسد. به‌همین مناسبت، بقیهٔ راه را با سرعت ۴ کیلومتر در ساعت پیمود و ۴۵ دقیقه زودتر از حرکت قطار به‌ایستگاه رسید. فاصلهٔ از روستا تا ایستگاه را پیدا کنید.

۲۴۵. عددی سه‌رقمی به ۳ ختم شده است. اگر این رقم ۳ را ازسمت راست عدد برداریم و درسمت چپ آن بگذاریم، عددی به‌دست می‌آیدکه یك واحد ازسه برابر عدد اصلی بزرگتر است. عدد را پیدا کنید.

۲۴۶. هواپیمـا ابتدا بـا سرعت ۲۲۰ کیلومتر در ساعت حرکت می‌کند. وقتی به‌نقطه‌ای رسیدکه فاصلهٔ او تا مقصد ۳۸۵ کیلومتر کمتر از فاصلهٔ او تا مبداء بود، سرعت

خود را تغییر داد و بقیهٔ راه را با سرعت ۳۳۰ کیلومتر در ساعت پیمود. سرعت متوسط هواپیما در تمامی طول راه ۲۵۰ کیلومتر در ساعت بود. فاصلهٔ مبداء تا مقصد را پیدا کنید.

۲۴۷. وقتی که من به‌سن امروز شما بودم، دو برابر شما سن داشتم؛ وقتی کـه شما به‌سن من برسید، مجموع سال‌های سن من و شما برابر ۶۳ سال می‌شود. سن من و سن شما چقدر است؟

۲۴۸. دو اتومبیل، در یک زمان و در یک جهت، از نقطه‌ای حرکت کـردند: اولی با سرعت ۵۰ کیلومتر در ساعت و دومی با سرعت ۴۰ کیلومتر در ساعت. بعد از نیم ساعت، اتومبیل سوم از همان نقطه حرکت کرد، ابتدا به اتومبیل دوم و ۱/۵ ساعت بعد به اتومبیل اول رسید. اگر حرکت هر سه اتومبیل را یکنواخت بگیریم، سرعت اتومبیل سوم چقدر است؟

۲۴۹. قطار مسافری از A به B می‌رود و بعد از ۵ دقیقه توقف در B، راه خود را ادامه می‌دهد و به‌طرف C می‌رود، ۱۴ دقیقه بعد از حرکت از B، با قطار سریع‌السیر روبه‌رو می‌شود که با سرعتی دو برابر سرعت قطار مسافری در جهت عکس حرکت می‌کند. وقتی که قطار سریع‌السیـر از C حرکت کرد، قطـار مسافری در ۲۵ کیلومتری A بود. به‌جز این می‌دانیم که قطار سریع‌السیر برای پیمودن فـاصلهٔ CB به ۲ ساعت وقت نیاز دارد، و اگر از A بلافاصله برگردد، ۰/۷۵ ساعت دیرتر از قطار مسافری به C می‌رسد. سرعت هریک از قطارها و فاصلهٔ نقطه‌های A، B و C از یکدیگر را پیدا کنید.

۲۵۰. مقداری پول را به n بخش تقسیم کرده‌ایم. بعد $\frac{1}{n}$ از بخش اول را برداشته‌ایم و روی بخش دوم ریخته‌ایم. سپس، $\frac{1}{n}$ بخش دوم را که به این ترتیب به‌دست آمده است جدا کرده‌ایم روی بخش سوم ریخته‌ایم. به همین ترتیب، از پولی که در بخش سوم جمع شده است، به اندازهٔ $\frac{1}{n}$ جدا کرده‌ایم و روی بخش چهارم ریخته‌ایم و غیـره. سرانجام، $\frac{1}{n}$ از بخش nام را (که بعد از عمل قبل از آن به‌دست آمده است) برداشته‌ایم و روی بخش اول ریخته‌ایم. بعد از انجام این عمل‌ها، در هر بخش A ریال وجود دارد. قبل از جا به‌جائی‌ها در هر بخش چند ریال بوده است؟

۲۵۱. دو کارگر، اگر با هم کار کنند، کاری را ۱۲ روزه تمام می‌کنند. بعد از ۸ روز کار مشترک، یکی از کارگرها بیمار شد و دیگری به‌تنهائی بقیهٔ کار را در ۵ روز تمام کرد. هریک از این دو کارگر، به‌تنهائی، در چند روز کار را می‌توانند تمام کنند؟

۲۵۲. دو گروه کارگر با هم، کاری را در ۸ روز به پایان می‌رسانند. ولی اگر $\frac{۲}{۳}$ کارگران گروه اول و ۰/۸ کارگران گروه دوم باهم کار کنند، کار را در $۱۱\frac{۱}{۴}$ روز به پایان می‌رسانند هر گروه به‌تنهائی درچند روز کار را تمام می کند؟

۲۵۳. وقتی که برادر بزرگتر، سن امروز برادر وسط را داشت، برادر کوچکتر ۱۰ ساله بود. وقتی برادروسط به‌سن امروز برادر بزرگتر برسد، برادرکوچکتر ۲۶ساله می‌شود. هریك ازسه برادر چندسال دارند، به شرطی که مجموع سال‌های سن دوبرادر بزرگتر ومتوسط در روز تولد برادر کوچکتر، دوبرابر سن امروزی برادر کوچکتر بوده است ؟

۲۵۴. آلیاژی از دو فلز به‌نسبت ۱:۲ وآلیاژ دیگری ازهمان دوفلز به نسبت ۲:۳ درست شده‌اند. ازهرآلیاژ چند واحد انتخاب کنیم تا به‌کمك آن‌ها آلیاژی به‌دست آید که دوفلز مذکور، درآن، به‌نسبت ۱۷:۲۷ باشند؟

۲۵۵. قطاری در ساعت ۹ از ایستگاه A به‌سمت B حرکت کرد. در ساعت ۱۵، به‌خاطر مسدود بودن راه به‌وسیلهٔ توده‌های برف، متوقف شد. بعد از ۲ ساعت راه پاك شد وراننده‌ٔ قطار برای جبران وقتی‌راکه ازدست داده‌بود، بقیهٔ راه را باسرعتی‌که ۲۰٪بیشتر از سرعت قبلی او بود طی‌کرد. با وجود این، با یك ساعت تأخیر به‌مقصد رسید. قطار روز بعد هم‌که در همان مسیر حرکت می‌کرد، با راه‌بندان توده‌های برف مواجه شد،منتهی درجایی‌که، نسبت به‌قطار اول، ۱۵۰ کیلومتر دورتر از A بود. این‌قطار هم برای جبران ۲ ساعت توقف خود، در بقیه راه، ۲۰٪ به‌سرعت قبلی خود افزود؛ ولی تنها توانست نیم‌ساعت را جبران کند وبا ۱/۵ ساعت تأخیر به B رسید. مطلوب است فاصلهٔ بینAوB.

۲۵۶. دربخشی از رودخانه، از A تا B ، جریان آب چنان‌کند است که می‌توان آن‌را برابر صفر گرفت. دربخش از B تا C ، جریان آب به‌اندازهٔکافی سریع است. قایقی، فاصلهٔ از A تا C را در ۳ ساعت و، برعکس، فاصلهٔ از C تا A را در ۳/۵ ساعت طی می‌کند. اگر وضع جریان‌آب در تمامی فاصلهٔ از A تا C شبیه جریان ازBتا C بود، برای رسیدن قایق ازAبهC، $۲\frac{۳}{۴}$ ساعت وقت لازم بود. با شرط اخیر، زمان لازم برای این‌که قایق از C به A برود، چقدر است؟

۲۵۷. در دفترچه پس‌انداز ۱۶۴۰ روبل گذاشتیم وبعد از یك‌سال ۸۸۲ روبل آن‌را برداشتیم. بازهم بعد ازیك‌سال، معلوم شدکه ۸۸۲ روبل در دفترچه وجود دارد. صندوق پس‌انداز درسال چند درصد به‌پول دفترچه اضافه می کند؟

۲۵۸. دو دروگر گندم‌زاری را برای دروکردن آن در یك روز، انتخاب کردند. در ضمن، هریك از آن‌ها موظف بود نیمی از گندم‌زار را درو کند. اولی کارخود را ۲ ساعت و ۱۶ دقیقه قبل از دومی آغاز کرد. ظهر، که توانسته بودند ۰/۴ مزرعه را درو کنند، برای صرف نهار واستراحت، کار را ۱/۵ ساعت تعطیل کردند. اولی سهم کار خود را درساعت ۷ و ۴۵ دقیقه ودومی درساعت ۸ و ۱۰ دقیقهٔ بعد ازظهر تمام کرد. هریك از این دو کارگر، درچه ساعتی کار خود را آغاز کرده‌اند؟

۲۵۹. دو بنا باهم دیواری را در ۲۰ روز بنا کردند. هرکدام از بناها، درچندروز می‌توانند دیوار را بسازند، به‌شرطی که بدانیم، بنای اول باید ۹ روز بیشتر از بنای دوم کار کند؟

۲۶۰. دوپیادهٔ A و B، در یك لحظه، از نقطه‌های M و N به طرف یکدیگر حرکت کردند. وقتی به‌هم رسیدند، معلوم شدکه A به اندازهٔ ۶ کیلومتر بیشتر از B پیموده است. اگر هردوی آن‌ها، با همان سرعت قبلی خود، راه را ادامه دهند، A، ۴/۵ ساعت بعد ازبرخورد به N، و B، ۸ ساعت بعد ازبرخورد به M می‌رسند. فاصلهٔ بین M و N را پیدا کنید.

۲۶۱. دواتومبیل، دریك لحظه، یکی از A به‌طرف B ودیگری از B به‌طرف A حرکت کردند. بعد از ملاقات، یکی ازآن‌ها ۲ ساعت دیگر ودومی $\frac{۹}{۸}$ ساعت دیگر راه پیمودند تا به‌مقصد رسیدند. اگر فاصلهٔ بین A و B برابر ۲۱۰ کیلومتر باشد، سرعت هراتومبیل را پیدا کنید.

۲۶۲. هرچند کیلوگرم ازآرد گندم درنظر بگیریم، بعد از پخته‌شدن، همان‌قدر درصد به‌وزنش اضافه می‌شود. برای پختن نان سیاه، ۱۰ کیلوگرم بیشترآرد انتخاب کرده‌ایم؛ در این‌جا هم هرچند کیلوگرم آرد داشته باشیم، همان قدر درصد، بعد ازپخته‌شدن، به‌وزنش اضافه می‌شود. از هرنوع آرد، چندکیلوگرم در نظر بگیریم تا ۱۱۲۵ کیلوگرم نان به‌دست آید؟

۲۶۳. لوکوموتیو، بخش اول راه را، درهرساعت ۴ کیلومتر کمتر از وقتی که در بخش دوم ۳۹ کیلومتری حرکت می‌کرد، پیمود. درطول بخش دوم، ۲۰ دقیقه بیشتر ازبخش اول، وقت صرف کرد. سرعت لوکوموتیو در بخش اول راه، چقدر بوده است؟

۲۶۴. روی محیط دایره‌ای به‌طول ۳۶۰ متر، دوجسم حرکت می‌کنند. اولی درهر ثانیه ۴ متر بیشتر ازدومی جلو می‌رود و، به‌همین مناسبت، تمامی محیط دایره را یك ثانیه زودتر از دومی می‌پیماید. سرعت ثانیه‌ای هرجسم چقدر است؟

۲۶۵. محیط دایرهٔ چرخ عقب کالسکه‌ای، ۲ برابر محیط چرخ جلو آن است. اگر

محیط چرخ عقب را یک‌متر کم و محیط چرخ جلو را یک‌متر زیاد کنیم، آن‌وقت، در طول ۶۰ متر راه، چرخ عقب ۳۰ دور بیشتر از چرخ جلو می‌چرخد. محیط هرچرخ چقدر است؟

۲۶۶. خط تراموا ۱۵ کیلومتر طول دارد. اگر سرعت تراموا ۳ کیلومتر درساعت بیشتر بود، برای رفت و برگشت نیم‌ساعت صرفه‌جویی می‌شد. سرعت تراموا و زمانی را که برای رفت و برگشت صرف می‌کند، پیدا کنید.

۲۶۷. برای ترمیم خانه‌ای، نجارها و نقاش‌ها کار می‌کنند. دستمزد نجارها روی‌هم، برابر است با دستمزد همهٔ نقاش‌ها، ولی تعداد نقاش‌ها دونفرکمتر از تعداد نجارهاست و، به‌همین مناسبت، هرنقاش یک‌روبل بیشتر ازنجار می‌گیرد. تعداد نقاش‌ها وتعدادنجارها را پیدا کنید، به‌شرطی که بدانیم، تعداد روبل‌هایی که پرداخت شده است، ۲۶ واحدبیشتر از سه‌برابر تعداد همهٔ کارگران است.

۲۶۸. فاصلهٔ بین مسکو تا لنین‌گراد ۶۵۰ کیلومتر است. قطار مسافری این مسیر را ۱۲ ساعت زودتر ازقطار باری می‌پیماید، زیرا سرعت آن، ۲۴ کیلومتر در ساعت بیشتراز سرعت قطار باری است. سرعت هرقطار را پیدا کنید.

۲۶۹. از خانه تا مدرسه، ۴۰۰ متر است. دانش‌آموزکلاس بالاتر، برای پیمودن این مسیر ۳۰۰ گام کمتر از دانش‌آموزکلاس پایین‌تر برمی‌دارد، زیرا هرگام او، ۳۰ سانتی‌متر بلندتر است. طول گام هریک را پیدا کنید.

۲۷۰. مغازه‌دار یک‌قطعه ماهوت را به ۲۰۰ روبل خرید. ۵ متر از این ماهوت فروش نرفت وبقیه را به ۱۹۰ روبل فروخت؛ در ضمن درهرمتر ۱/۵ روبل سودبرد. در این قطعه، چند متر ماهوت بوده است؟

۲۷۱. دونوع مختلف ازکالایی را خریده‌ایم، درضمن، نوع دوم ۱۵ کیلوگرم بیشتر از نوع اول است. برای نوع دوم ۳۲ روبل وبرای نوع اول ۲۲/۵ روبل پرداخته‌ایم. از هرنوع کالا چندکیلوگرم بوده است، به شرطی که هرکیلوگرم نوع دوم ۱۰ کوپک ارزان‌تر ازهرکیلوگرم نوع اول باشد؟ (روبل = ۱۰۰ کوپک).

۲۷۲. به‌حقوقی که برابر ۱۰۰ روبل است، درصدی اضافه شده است، یکباردیگر به‌حقوق جدید همان‌درصد اضافه شده است؛ مبلغ حقوق جدید به ۱۲۵ روبل و ۴۴کوپک رسیده است. میزان درصدی را پیدا کنیدکه هربار اضافه شده است؟

۲۷۳. در ظرفی ۲۰ لیتر الکل خالص وجود دارد. بخشی ازاین الکل‌را ریخته‌ایم و به‌جای آن‌آب پرکرده‌ایم. دو باره به همان اندازهٔ دفعهٔ اول (یعنی همان‌قدر لیتر) از مخلوط‌آب و الکل را به‌ظرف دیگری ریخته‌ایم وظرف اصلی‌را باآب پرکرده‌ایم. معلوم

شد، مقدار الکل داخل ظرف برابر نصف مقدار آب داخل آن است. بار اول، چندلیتر الکل را ازظرف بیرون ریخته‌ایم. (فرض براین است که از a لیتر الکل و b لیتر آب، $a+b$ لیترآب والکل به‌دست آید.)

۲۷۴. پسربچه‌ای چند سکهٔ دوکوپکی دارد. او باچیدن سکه‌ها در روی یك سطح صاف، یکبار مربع و باردیگر مثلث متساوی‌الاضلاع به‌دست‌آورد. در حالت اخیر، درهر ضلع مثلث ۲ سکه بیشتر از تعداد سکه‌های حالت اول درهرضلع مربع بود. این پسربچه چقدر پول داشته است؟

۲۷۵. دریك مسابقهٔ شطرنج، دونفر، که هرکدام تنها سه‌دور بازی‌کرده بودند، از بازی خارج شدند. به‌همین مناسبت، روی‌هم ۸۴ بازی در مسابقه انجام‌گرفت. چندنفر دراین مسابقه شرکت‌کرده‌اند وآیادونفری که ازبازی‌خارج شده‌اند، باهم بازی‌کرده‌اند؟

۲۷۶. کالائی از دو نوع را به‌مبلغ ۱۵ روبل و ۲۰ کوپك خریده‌ایم. اگر قیمت نوع‌اول‌را درصدی بالا ببریم‌وقیمت نوع‌دوم‌را باهمان‌درصدپایین بیاوریم، آن‌وقت‌قیمت‌نوع اول۱۵روبل‌وقیمت‌نوع‌دوم۲روبل‌و۳۰کوپك می‌شود.قیمت‌کالای‌نوع‌اول‌چقدربوده‌است؟

۲۷۷. قطار باری از تولا به‌طرف ویازما حرکت کرد. ۵ ساعت و ۵ دقیقه بعد، قطار مسافری در همین مسیر از ویازما به‌طرف تولا حرکت‌کرد. دوقطار در یك ایستگاه بینابینی به‌هم رسیدند. از این ایستگاه قطار باری بعد از ۱۲ ساعت و ۵۵ دقیقه به‌ویازما وقطار مسافری بعد از ۴ ساعت و ۶ دقیقه به‌تولا رسید. هریك از قطارها، تمامی مسیر بین تولا و ویازما را درچه مدتی می‌پیمایند؟

۲۷۸. دانشجویان در ایستگاه یك‌قایق‌کرایه‌کردند. آن‌ها ابتدا ۲۰ کیلومتر درجهت جریان آب رودخانه حرکت‌کردند و، سپس، همان راه را تا ایستگاه برگشتند وروی‌هم، برای این تفریح، ۷ ساعت وقت صرف‌کردند. موقع برگشت، در ۱۲ کیلومتری ایستگاه، به‌کلکی برخوردندکه درهمان لحظهٔ آغازگردش، در ایستگاه به‌آب انداخته شده بود. سرعت قایق را درجهت حرکت آب و، همچنین، سرعت جریان‌آب‌را پیداکنید.

۲۷۹. دونامه‌رسان ازدو نقطهٔ مسکونی به‌طرف هم حرکت‌کردند و در نقطه‌ای مثل M_1 به‌هم رسیدند. اگر نامه‌رسان اول یك‌ساعت زودتر ونامه‌رسان دوم نیم ساعت دیرتر حرکت می‌کردند، ۱۸ دقیقه زودتر به‌هم می‌رسیدند. ولی اگر دومی یك ساعت زودتر و اولی نیم‌ساعت دیرتر به راه افتاده بودند، آن‌وقت، در ۵۶۰۰ متری نقطهٔ M_1 به‌هم می‌رسیدند. سرعت هریك ازدونامه‌رسان را پیداکنید.

۲۸۰. چندنفر می‌خواستند مسیری را برای عبور آب بکنند. اگر آن‌ها با هم‌کار می‌کردند، می‌توانستند در ۲۴ ساعت‌کار را تمام‌کنند. ولی‌آن‌ها، یکی بعد از دیگری، با فاصله‌های زمانی برابر، مشغول‌کار شدند، سپس، همهٔ آن‌ها تا پایان،کار را ادامه دادند.

اگر بدانیم، اولی از نظر زمانی، ۵ برابر نفر آخر کار کرده است، درچه مدتی کار کندن جوی آب تمام می‌شود؟

۲۸۱. آلیاژی به‌وزن P کیلوگرم که شامل دوفلز است، در آب غوطه‌ور کرده‌ایم، A کیلوگرم از وزن خود را ازدست می‌دهد. اگر همین وزن از فلز اول یا فلز دوم را درآب غوطه‌ور کنیم، به‌ترتیب B کیلوگرم و C کیلوگرم از وزن خود را از دست می‌دهند. وزن هریك از فلزهای آلیاژ را پیدا کنید و دربارهٔ امکان وجود جواب، در رابطه با مقدارهای P، A، B و C، بحث کنید.

۲۸۲. دوقطعه آلیاژ داریم، به‌وزن‌های m کیلوگرم و n کیلوگرم و با درصدهای متفاوت مس. ازاین‌دوقطعه، تکه‌هایی راجدا کرده‌ایم، به‌نحوی که وزن دوقطعهٔ حاصل باهم برابر شوند. هریك از این قطعه‌های حاصل را با باقی‌ماندهٔ قطعهٔ دیگر باهم ملقمه کرده‌ایم ودر نتیجه، دوآلیاژ جدید، ساخته‌ایم. درصد مقدار مس، دردوآلیاژ جدید، مساوی‌درآمده است. وزن هریك ازقطعه‌های بریده شده چقدر است؟

۲۸۳. حجم A، $\frac{1}{m}$ مجموع حجم‌های B و C؛ و حجم B، $\frac{1}{n}$ مجموع حجم‌های A و C را تشکیل می‌دهند حجم C، چه‌بخشی ازمجموع حجم‌های A و B راتشکیل خواهد داد؟

۲۸۴. دونقطه، باسرعت‌های ثابت، روی‌محیط دایره‌ای به‌طول L حرکت می کنند. اگر حرکت آن‌ها در دوجهت مختلف باشد، بعد ازهر t_1 ثانیه به‌هم می‌رسند. ولی اگر در یك جهت حرکت کنند، یکی از نقطه‌ها، بعد از هر t_2 ثانیه به‌دیگری می‌رسد. سرعت هریك ازنقطه‌ها را پیدا کنید.

۲۸۵. قایقی از A به‌طرف B حرکت کرد. وقتی که قایق l کیلومتر جلورفته بود، یك کشتی از A به طرف B حرکت کرد و t ساعت زودتر از قایق به B رسید. فاصلهٔ بین A و B را پیدا کنید، به‌شرطی که بدانیم سرعت قایق v کیلومتر در ساعت و سرعت کشتی w کیلومتر درساعت است.

۲۸۶. استاد شطرنج، دریك‌زمان، بازی خودرا روی چند صفحهٔ شطرنج آغاز کرد. در پایان دوساعت اول، $p\%$ بازی‌ها را برد و l بازی را باخت. در دو ساعت بعد، $q\%$ بازی‌های باقی‌مانده‌را برد و m بازی را باخت. بقیهٔ n بازی، مساوی تمام شد. بازی‌روی چند صفحهٔ شطرنج انجام گرفته است؟

۲۸۷. در یك‌ظرف a لیتر اسید نیتریك $p\%$ وجود دارد. چندلیتر $q\%$ از محلول همین اسید باید درظرف ریخت تابعد از اضافه‌کردن مقداری آب، حجم محلول به b لیتر برسد واسیدی با غلظت $r\%$ به‌دست آید؟

۲۸۸. در یك‌ظرف a لیتر محلول اسید $p\%$ و در ظرف دیگر b لیتر محلول $q\%$

همان اسید وجود دارد. از هرظرف چند لیتر و به‌مقدار مساوی برداشته‌ایم، سپس، آن‌چه‌را که ازظرف اول برداشته‌ایم در ظرف دوم وآن‌چه را از ظرف دوم برداشته‌ایم در ظرف اول ریخته‌ایم. از هرظرف چندلیتر برداشته‌ایم، به‌شرطی که محلول‌های‌حاصل دردوظرف، غلظت مساوی پیدا کرده باشند؟

۲۸۹. دو دوچرخه‌سوار در یك زمان، با سرعت‌های ثابت و متفاوت با هم، از A به‌طرف B حرکت کردند وبعدازرسیدن به B، بلافاصله به‌طرف A برگشتند. دوچرخه‌سوار اول، در برگشتن ودر فاصلهٔ a کیلومتری B با دوچرخه‌سوار دوم برخورد کرد؛ سپس به A رسید و دوباره به‌طرف B برگشت، وقتی با دوچرخه سوار دوم برخوردکردکه او $\frac{1}{k}$ فاصلهٔ از A تا B را پیموده بود. مطلوب است فاصلهٔ از A تا B.

۲۹۰. در نقطه‌ای ازمیزگرد بیلیارد با شعاع R، در فاصلهٔ a از مرکز آن، توپ بیلیارد قراردارد. توپ را به‌کدام نقطه ازکنارهٔ میز نشانه برویم تابعد از دوبار برخورد باکنارهٔ میز، به‌همان نقطهٔ نخستین خود برگردد. از اندازه‌های توپ بیلیارد صرف‌نظر می‌کنیم.

۲۹۱. بالون‌کروی با دیوارهٔ به‌ضخامت ε، که ازماده‌ای با چگالی d درست‌شده، با مایعی به چگالی δ پرشده است. شعاع داخلی بالون، یعنی R، چقدر باشد تا با غوطه‌ورکردن‌آن در مایعی به‌چگالی Δ، در تعادل قرارگیرد؟ چگالی‌های d، δ و Δ با چه شرطی باید سازگار باشند، تا مسأله جواب داشته‌باشد؟

۲۹۲. درصد اضافه‌رشد جمعیت را ازسالی به‌سال بعد، ثابت می‌گیریم. اگردرصد رشد جمعیت به‌اندازهٔ k زیاد می‌شد، بعد از n سال، جمعیتی دوبرابر حالت عادی پدید می‌آمد. درصد رشد جمعیت را پیداکنید.

۲۹۳. ظرفی را پشت سرهم ازدو مایع به‌چگالی‌های d و D پرکرده‌ایم، به‌ترتیب، وزن‌های q و Q (همراه با وزن ظرف) به‌دست آمده است، وزن ظرف و حجم آن‌را پیداکنید. مسأله با چه شرطی جواب دارد؟

۲۹۴. دو قطار دریك زمان، یکی از A و دیگری از B به طرف یکدیگر حرکت کردند و در p کیلومتری B به‌هم رسیدند. t ساعت بعد ازملاقات دوقطار، قطار دوم از A گذشته بود ودر فاصلهٔ q کیلومتری A قرار داشت؛ در همین لحظه، قطار اول از B گذشته بود وفاصلهٔ او تا قطار دوم به‌اندازهٔ دوبرابر فاصلهٔ از A تا B بود. سرعت‌قطارها وفاصله بین A و B را پیداکنید.

۲۹۵. عدد x برابر است با m برابر تفاضل دوعدد y و z وعدد y برابر است با n برابر تفاضل دوعدد x و z. اگر بدانیم‌که z برابر است با دوبرابر تفاضل x و y،

چه رابطه‌ای بین m و n وجود دارد؟ هیچ کدام از عددهای x، y و z، برابر صفر نیستند.

۲۹۶. ساعتی که تندتر از حد معمول کار می‌کند، در لحظه‌ای، m دقیقه کمتر از زمان واقع را نشان می‌دهد. به‌همین‌مناسبت، بعداز مدتی، زمان درست‌را نشان‌خواهدداد. ولی اگر n دقیقه عقب بود ودر هرشبانه‌روز t دقیقه تندتر ازوضع‌کنونی خودکار می‌کرد، زودتر از حالت قبل، به زمان درست می‌رسید. این ساعت، در هرشبانه‌روز، چنددقیقه جلو می‌رود؟

۲۹۷. بچه‌ها بین خود گردو تقسیم می‌کنند. اولی a گردو به اضافهٔ $\frac{1}{n}$ بقیه را برداشت، دومی $2a$ گردو و $\frac{1}{n}$ بقیهٔ جدید را؛ سومی $3a$ گردو و $\frac{1}{n}$ باقی‌ماندهٔ تازه را و غیره. معلوم شد که، ازاین راه، سهم همهٔ بچه‌ها باهم برابراست. تعداد بچه‌ها را پیدا کنید.

۲۹۸. کلخوز برای تراکتورهای خود a روبل بنزین سنگین و a روبل نفت سفید خرید، روی‌هم n کیلو گرم. چند کیلو گرم بنزین سنگین وچند کیلو گرم نفت سفیدخریده‌اند، به‌شرطی که هر کیلو گرم بنزین سنگین b روبل گران‌تر از هر کیلو گرم نفت‌سفید باشد؟

۲۹۹. ماشین پست از A به‌طرف B حرکت کرد. t دقیقه بعد ازآن، ماشین پست دیگری به‌راه افتاد. ماشین دوم، که با سرعت v کیلومتر در ساعت حرکت می‌کرد، خودرا به‌ماشین اول رسانید، پاکت‌های فراموش‌شده را به‌او داد و برگشت. درهمان لحظه‌ای که ماشین دوم به A رسید، ماشین اول هم به B رسیده بود. سرعت ماشین اول‌را پیدا کنید، به‌شرطی که فاصله بین A و B برابر b کیلومتر باشد.

۳۰۰. دو گروه‌کارگر، دستمزدی برابردریافت‌کردند. درگروه اول، a کارگر کمتر ازگروه دوم بود و، به‌همین مناسبت، هرکارگر گروه دوم b روبل کمتر از هر کارگر گروه اول گرفته است. تعداد روبل‌هایی که هریك از دو گروه گرفته‌اند، به‌اندازهٔ c واحد از مجموع تعدادکارگران دوگروه بیشتر است. درهر گروه، چندکارگر وجود داشته است؟

۳۰۱. دوکارگر خندقی را حفرکردند. آن‌ها به‌نوبت‌کار می‌کردند نه باهم. کارگر اول روی‌هم a روزکارکرد و $\frac{p}{q}$ کار را انجام‌داد. اگرباهم‌کار می‌کردند، تعداد روزهای لازم برای‌حفرخندق، برابر واسطهٔ حسابی بین‌تعداد روزهای‌کارکارگر اول وتعدادروزهای کار کارگر دوم می‌شد. کارگر دوم چندروزکارکرده است؟

۳۰۲. دو متحرك روی محیط دایره‌ای در یك‌جهت حرکت می‌کنند. محیط دایره برابر a متر است. متحرك اول، دایره را، p دقیقه زودتر از متحرك دوم دور می‌زند. هرمتحرك، دقیقه‌ای چندمترحرکت‌می‌کند، به‌شرطی که بدانیم، هر q دقیقه یکبار به‌هم‌می‌رسند.

۳۰۳. دوکارگر بادستمزدهای متفاوت مشغول‌کار شدند. اولی a روبل ودومی، که n روزکمتر از اولی‌کارکـرده بود، c روبل گرفت. اگر اولی بـه‌اندازهٔ دومی، و دومی به‌اندازهٔ روزهای‌کار اولی،کارکرده بودند، آن‌وقت دریافتی دونفر برابر می‌شد.هرکدام چندروزکارکرده‌اند؟

۳۰۴. گروهی‌که به‌گردش جمعی رفته بودند، باید a روبل بابت نهار به‌رستوران بپردازند. ولی b نفر از افراد گروه، پول با خود نداشتند و، به‌همین مناسبت، هرکدام‌از دیگران بازهم c روبل پرداختند. این‌گروه شامل چندنفربوده است؟

۳۰۵. قطار سریع‌السیر را p دقیقه پشت چراغ راهنما متوقف کردند ، به همین مناسبت، برای جبران دیرکرد، مسافت d کیلومتررا باسرعت متوسط v کیلومتر درساعت، بیشتر از سرعت برنامه‌ای خود پیمود. سرعت برنامه‌ای قطار، در این مسافت ، چقدر بوده است ؟

۳۰۶. دونفر ، مبلغ‌هایی برابر در صندوق پس‌اندازگذاشتند. اولی بعد از a مـاه m روبل ودومی بعداز b ماه n روبل دریافت‌کردند. هرکدام چه‌مبلغی به‌صندوق‌سپرده‌اند وصندوق پس‌انداز، چنددرصد سود حساب می‌کند؟

۳۰۷. در سه‌ظرف، به‌مقدارهای مختلف از یك مایع، ریخته شده است. اگر نصف مایع‌یکی‌ازظرف‌ها را (ازنظر حجم) به‌طور مساوی در دوظرف دیگر بریزیم ، سپس بعد از این عمل ، نصف مـایع ظرف دوم را به‌طـور مساوی دردو ظرف دیگر واردکنیم و، بالاخره ، نصف مـایع ظرف سوم را به‌طور مساوی در دو ظرف دیگر بریزیم، آن‌وقت، مقدار مایع درهریك از هرسه‌ظرف برابر ۱۶ لیتر می‌شود. درآغاز، در هرظرف‌چندلیتر مایع بوده است؟ (مسأله را به‌طور حسابی حل کنید.)

۳۰۸. قطارباری، فاصلهٔ بین لنین‌گراد تا مسکو را با سرعت متوسط ۲۰ کیلومتر در ساعت واز مسکو تا لنین‌گراد را با سرعت متوسط ۳۰ کیلومتر در ساعت طی می‌کند. سرعت متوسط قطار را درتمامی راه پیداکنید (زمان توقف درایستگاه مسکو را به‌حساب نیاورید)؟

۳۰۹. ثابت‌کنیدکه تفاضل بین هرعدد و مقلوب آن، بر ۹ بخش‌پذیر است (مقلوب یك‌عدد، عددی است باهمان رقم‌ها، به‌شرطی که درجهت عکس نوشته شود).

VI.

تصاعدها*

۳۱۰. آیا می‌توان با عددهای $\sqrt{3}$، ۲ و $\sqrt{8}$ یك تصاعد حسابی درست کرد؟ (لازم نیست این‌عددها را، جمله‌های متوالی بگیریم.)

۳۱۱. ثابت‌کنید که در تصاعد حسابی $(a_1, a_2, \ldots)$، هرچهار جملهٔ دلخواه a_m، a_n، a_k و a_l، که برای آن‌ها داشته‌باشیم $m+n=k+l$، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$a_m+a_n=a_k+a_l$$

۳۱۲. ثابت کنید که بین جمله‌های a_{n-1}، a_n، a_{n+1} از تصاعد حسابی $(a_1, a_2, \ldots)$ این رابطه برقرار است.

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$$

۳۱۳. مجموع بیست جمله از تصاعد حسابی $(a_1, a_2, \ldots)$ را، با شرط $a_6+a_9+a_{12}+a_{15}=20$، پیدا کنید.

۳۱۴. تصاعد حسابی $(a_1, a_2, \ldots)$ را پیدا کنید، به شرطی که بدانیم: $a_1+a_2+a_3=9$ و $a_1a_2a_3=15$.

۳۱۵. تصاعد حسابی را مشخص‌کنید که برای مجموع n جملهٔ آن داشته باشیم: $S_n=2n^2-3n$.

۳۱۶. مطلوب است جملهٔ دهم از یك‌تصاعد حسابی، به شرطی‌که برای مجموع n جملهٔ آن داشته‌باشیم: $S_n=3n^2-2n$.

۳۱۷. تصاعد حسابی را معین‌کنید‌که مجموع هرچند جملهٔ اول آن، برابر با چهار برابر مجذور تعداد جمله‌های آن باشد.

۳۱۸. تصاعدی حسابی شامل ۱۰ جمله مفروض است. مجموع جمله‌های ردیف زوج برابر ۱۵، ومجموع جمله‌های ردیف فرد برابر ۱۲/۵ است. همهٔ جمله‌های تصاعد را پیدا کنید.

۳۱۹. در یك تصاعد حسابی می‌دانیم: $a_p=q$ و $a_q=p$ (a_n، یعنی جملهٔ n ام تصاعد). مطلوب است a_m.

۳۲۰. می‌دانیم، عددهای a^2، b^2 و c^2 به‌تصاعد حسابی هستند. ثابت‌کنید، عددهای

---

*) در تمام مسأله‌های مربوط به‌تصاعدها، فرض برحقیقی‌بودن جمله‌های آن‌هاست، مگر این‌که برعکس آن تأکید شود.

$$\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$$

هم تشکیل یك تصاعد حسابی می‌دهند.

۳۲۱. مطلوب است مجموع همهٔ کسرهای غیرقابل تحویل بین دوعدد درست m و n $(m<n)$ که دارای مخرجی برابر ۳ باشند.

۳۲۲. ثابت‌کنید، اگر دریك تصاعد حسابی داشته‌باشیم: $S_m = S_n$ (منظور از S_k، مجموع k جملهٔ اول تصاعد است)، آن‌وقت داریم: $S_{m+n} = 0$.

۳۲۳. در یك تصاعد حسابی می‌دانیم:

$$\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$$

ثابت‌کنید که

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$$

۳۲۴. دو ردیف خطهای راست، متوازی‌الاضلاعی را قطع کرده‌اند. هرردیف، از m خط راست موازی با ضلع متوازی‌الاضلاع تشکیل شده است. ازاین خطهای راست، روی‌هم، چند متوازی‌الاضلاع می‌توان تشخیص داد؟

۳۲۵. عددهای

$$3, 5, 9, 15, 23, \ldots$$

چنانندکه تفاضل‌های بین آن‌ها ، یك تصاعد حسابی را تشکیل می‌دهند. nامین جملهٔ این دنبالهٔ عددها را پیداکنید.

۳۲۶. مجموع زیر را محاسبه‌کنید:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{m-1} m^2$$

۳۲۷. کدامیك از دنباله‌های

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots;\ 2, 2, 2, \ldots;\ 3, -3, 3, \ldots;\ 2, 0, 0, \ldots$$

تشکیل یك تصاعد هندسی می‌دهند؟

۳۲۸. آیا عددهای ۱۰، ۱۱، ۱۲ می‌توانند جمله‌هایی از یك تصاعد هندسی باشند؟ (لازم نیست، این عددها، جمله‌های مجاور هم باشند.)

۳۲۹. ثابت کنید، در تصاعد هندسی $(a_1, a_2, \ldots)$، برای هرچهار جملهٔ a_m، a_n، a_k و a_l که برای آن‌ها داشته باشیم: $m+n=k+l$، حتماً خواهیم داشت:
$a_m a_n = a_k a_l$.

۳۳۰. ثابت کنید که سه‌جملهٔ a_{n-1}، a_n، a_{n+1} از یک تصاعد هندسی دررابطهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

۳۳۱. اگر عددهای x و y و z به‌تصاعد هندسی باشند، آن‌وقت

$$(x+y+z)(x-y+z)=x^2+y^2+z^2$$

۳۳۲. مجموع n عدد از دنبالهٔ زیر را پیدا کنید:

$$5, 55, 555, 5555, \ldots$$

۳۳۳. ثابت کنید:

$$\underbrace{11\ldots1}_{k}\underbrace{55\ldots55}_{k-1}6=\underbrace{33\ldots3}_{k-1}4^2$$

۳۳۴. مجموع سه‌جملهٔ اول از یک تصاعد هندسی برابر است با ۳/۵. مجموع مجذورهای همین جمله‌ها برابر است با ۵/۲۵. جملهٔ اول وقدر نسبت تصاعدرا پیدا کنید.

۳۳۵. در یک تصاعد حسابی می‌دانیم: $a_{m+n}=A$ و $a_{m-n}=B$ جمله‌های a_m و a_n را پیدا کنید.

۳۳۶. در یک تصاعد هندسی می‌دانیم: $a_{m+n}=A$ و $a_{m-n}=B$. مطلوب است جمله‌های a_m و a_n.

۳۳۷. ثابت کنید، اگر a و b و c و d به‌تصاعد هندسی باشند، داریم:

$$(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2=(a-d)^2$$

۳۳۸. این مجموع را محاسبه کنید:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+\ldots+\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)^2$$

۳۳۹. ثابت کنید:

$$(1+x+x^2+\ldots+x^n)^2-x^n=$$
$$=(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})(1+x+x^2+\ldots+x^{n+1})$$

۳۴۰. حاصل‌ضرب n جملهٔ اول از یك تصاعد هندسی با جمله‌های مثبت را پیدا کنید، به‌شرطی که مجموع این جمله‌ها برابر S و مجموع معکوس‌های آن‌ها برابر S_1 باشد.

۳۴۱. این مجموع را محاسبه کنید:

$$x+2x^2+3x^3+\dots+nx^n$$

۳۴۲. می‌دانیم، مجموع بی‌نهایت جمله از یك تصاعد هندسی نزولی، برابر است با حد S_n وقتی $n\to\infty$، کــه در آن، S_n عبارت است از مجموع n جملهٔ اول تصاعد. آیا این حکم، نیازی به اثبات دارد؟

۳۴۳. مجموع جمله‌هــای یك تصاعد هندسی نزولی نــامتناهی برابر ۹ و مجموع مجذورهای این جمله‌ها برابر ۴۰/۵ است. جملهٔ اول و قدر نسبت تصاعد را پیدا کنید.

۳۴۴. مجموع بی‌نهــایت جمله از یك تصــاعد هندسی نزولی برابر ۳ و مجموع مکعب‌های این جمله‌هــا برابر $\frac{۱۰۸}{۱۳}$ است. سه جملهٔ اول این تصاعد را پیدا کنید.

۳۴۵. مجموع جمله‌های ردیف فرد از یك تصاعد هندسی نزولی نــامتناهی برابر ۳۶ و مجموع جمله‌های ردیف زوج آن برابر ۱۲ شده است. این تصاعد را پیدا کنید.

۳۴۶. نخستین جمله از یك تصاعد هندسی نزولی نامتناهی برابر است با ۱. هریك از جمله‌های دیگر، $۲\frac{۱}{۶}$ مرتبه از مجموع دو جملهٔ مجاور خود کوچکتر است. مجموع جمله‌های این تصاعد را پیدا کنید.

۳۴۷. مطلوب است تصاعد هندسی نزولی کــه جملهٔ اول آن برابر ۱ و هریك از جمله‌های آن سه برابر مجموع همهٔ جمله‌های بعد از خودش باشد.

۳۴۸. مجموع چهار جملهٔ اول از یك تصاعد هندسی نزولی نامتناهی، برابر است با ۱/۵. مجموع جمله‌های اول و چهارم آن ، ۱/۵ برابر مجموع جمله‌های دوم و سوم آن است. مجموع جمله‌های این تصاعد را پیدا کنید.

۳۴۹. قدر نسبت تصاعد هندسی نزولی نامتناهی را پیدا کنید که مجموع شش جملهٔ اول آن برابر $\frac{۷}{۸}$ مجموع همهٔ جمله‌های آن باشد.

۳۵۰. در یك تصاعد حسابی ۱۱ جمله وجود دارد. جملهٔ اول برابر است بـا ۲۴. جمله‌های اول، پنجم و یازدهم، تشکیل یك تصاعد هندسی می‌دهند. همهٔ جمله‌های این تصاعد حسابی را بنویسید.

۳۵۱. در یك تصاعد حسابی که از ۹ جمله تشکیل شده است، جملهٔ اول برابر ۱ و مجموع همهٔ جمله‌هــا برابر ۳۶۹ است. یك تصاعد هندسی هم شامل ۹ جمله است، در دو

جملهٔ اول و آخر بر جمله‌های متناظر خود در تصاعد حسابی فوق منطبق است. جملهٔ هفتم تصاعد هندسی را پیدا کنید.

۳۵۲. سه‌عدد به‌تصاعد هندسی‌هستند. اگر ۸ واحد به‌جملهٔ دوم اضافه کنیم به‌تصاعدی حسابی تبدیل می‌شوند، ولی اگر به‌جملهٔ سوم هم ۶۴ واحد اضافه کنیم، دوباره یك‌تصاعد هندسی تشکیل می‌دهند. این عددها را پیدا کنید.

۳۵۳. بین عدد ۳ وعدد مجهولی، عددی قرار داده‌ایم، به نحوی که سه عدد تشکیل تصاعد حسابی داده‌اند. اگر ۶ واحد ازعدد وسط این تصاعد کم کنیم، به‌یك تصاعدهندسی می‌رسیم، عدد مجهول را پیدا کنید.

۳۵۴. سه‌عدد به‌مجموع ۱۱۴ را می‌توان همچون سه‌جملهٔ متوالی یك‌تصاعد هندسی، یا همچون جمله‌های اول، چهارم و بیست و پنجم یك‌تصاعد حسابی درنظر گرفت. این‌عددها را پیدا کنید.

۳۵۵. دو متحرك دریك زمان ازنقطه‌های A و B به‌طرف یکدیگر حرکت کردند. اولی در دقیقهٔ اول ۱ متر و در دقیقه‌های بعد، هردقیقه ۰/۵ متر بیشتر از دقیقهٔ قبل جلو رفت. دومی درهردقیقه ۶ متر حرکت کرد. اگر فاصلهٔ بین A و B برابر ۱۱۷ متر باشد، بعد ازچند دقیقه به‌هم می‌رسند؟

۳۵۶. آیا می‌توان سه‌عدد a_1، a_2، a_3 را طوری پیدا کرد که هم سه‌جملهٔ متوالی یك‌تصاعد حسابی وهم سه جملهٔ متوالی یك‌تصاعد هندسی باشند؟

۳۵۷. درچندجمله‌ای $ax^4+bx^3+4x^2+dx+l$، ضریب‌های a و b و ۴ تشکیل یك تصاعد هندسی و ۴ و a و b تشکیل یك‌تصاعد حسابی می‌دهند. چندجمله‌ای بر x^2+x+1 بخش‌پذیر است. خارج قسمت تقسیم چند جمله‌ای اول برچندجمله‌ای دوم را پیدا کنید.

۳۵۸. تصاعد حسابی

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

و تصاعد هندسی

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

مفروض‌اند و می‌دانیم: $a_1=b_1$ و $a_2=b_2$. هردو تصاعد صعودی وهمهٔ جمله‌های آن‌ها مثبت‌اند. ثابت کنید که همهٔ جمله‌های تصاعد حسابی، از a_3 به‌بعد، ازجمله‌های نظیر خود درتصاعد هندسی کوچکترند.

لگاریتم‌ها

a) ویژگی‌های کلی لگاریتم‌ها

۳۵۹. چرا $a^{\log_a x}=x$؟

۳۶۰. کدام بزرگترند: $\log_a ۲$ یا $\log_a ۳$؟

۳۶۱. ثابت کنید: $\log_b a \cdot \log_a b = ۱$.

۳۶۲. ثابت کنید: $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$.

۳۶۳. چه موقع، رابطهٔ $\log a^۲ = ۲\log(-a)$ درست است؟

۳۶۴. اگر داشته‌باشیم: $۱۳ab = ۴a^۲+۹b^۲$، ثابت کنید:

$$\log\frac{۲a+۳b}{۵}=\frac{\log a+\log b}{۲}$$

۳۶۵. اگر داشته‌باشیم: $a^۲+b^۲=۷ab$، ثابت کنید:

$$\log\frac{a+b}{۳}=\frac{۱}{۲}(\log a+\log b)$$

۳۶۶. اگر داشته‌باشیم: $a^۲+b^۲=c^۲$، ثابت کنید:

$$\log_{b+c}a+\log_{c-b}a=۲\log_{b+c}a\log_{c-b}a$$

۳۶۷. اگر بدانیم $\log_{۱۰}۲=a$ و $\log_{۱۰}۷=b$، $\log_۸ ۹/۸$ را محاسبه کنید.

۳۶۸. ثابت کنید: $\frac{\log_a N}{\log_{ab} N}=۱+\log_a b$.

۳۶۹. ثابت کنید: $a^{\frac{\log_b(\log_b a)}{\log_b a}}=\log_b a$.

۳۷۰. ثابت کنید: $\log_b a=\log_{b^n}a^n$.

۳۷۱. کدام بزرگترند: $\log_۴ ۳$ یا $\log_{۱۶} ۹$؟

۳۷۲. اگر بدانیم $\log_{۱۲}۳=a$، مقدار $\log_{\sqrt{۳}}۸$ را محاسبه کنید.

۳۷۳. ثابت کنید:

$$\log_{a_۱a_۲\cdots a_n}x=\frac{۱}{\frac{۱}{\log_{a_۱}x}+\frac{۱}{\log_{a_۲}x}+\cdots+\frac{۱}{\log_{a_n}x}}$$

۳۷۴. می‌دانیم: $y=10^{\frac{1}{1-\log_{10}x}}$ و $z=10^{\frac{1}{1-\log_{10}y}}$، ثابت کنید:

$$x=10^{\frac{1}{1-\log_{10}z}}$$

۳۷۵. ثابت کنید، اگر a و b و c عددهایی نابرابر وجمله‌های متوالی یك تصاعد هندسی باشند، آن‌وقت

$$\frac{\log_a x-\log_b x}{\log_b x-\log_c x}=\frac{\log_a x}{\log_c x}$$

۳۷۶. ثابت کنید اگر $\log_k x$، $\log_m x$، $\log_n x$ به‌تصاعد حسابی باشند، آن‌وقت

$$n^{2}=(kn)^{\log_k m}$$

۳۷۷. ثابت کنید، اگر داشته باشیم: $n^{2}=(kn)^{\log_k m}$، آن‌وقت $\log_k x$ ، $\log_m x$ ، $\log_n x$ یك تصاعد حسابی تشکیل می دهند.

۳۷۸. اشتباه «استدلال» زیر را پیدا کنید: چون‌داریم: $\frac{1}{8}<\frac{1}{4}$ ، پس $\left(\frac{1}{2}\right)^{3}<\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$

و یا

$$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}<\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$$

و از آن‌جا

$$3\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)<2\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)\Rightarrow 3<2$$

b) معادله‌های لگاریتمی ومعادله‌های نمائی

آیا معادله‌های زیر هم‌ارزند (۳۷۹ تا ۳۸۴):

۳۷۹. $\log P(x)=\log Q(x)$ و $P(x)=Q(x)$.

۳۸۰. $\log P(x)+\log Q(x)=R(x)$ و $\log[P(x)\cdot Q(x)]=R(x)$.

۳۸۱. $\log P(x)-\log Q(x)=R(x)$ و $\log\frac{P(x)}{Q(x)}=R(x)$.

۳۸۲. $n\log P(x)=Q(x)$ و $\log[P(x)]^{n}=Q(n)$ ، n عددی است زوج.

۳۸۳. $a^{x}=a^{y}$ و $x=y$؛ $(a>0)$.

۳۸۴. $\log_8(x^{2}-1)=1$ و $\log_8(x-1)+\log_8(x+1)=1$.

۳۸۵. دانش‌آموزی معادله $\log(x-1)^{2}=2\log 3$ را به‌این‌ترتیب حل کرده‌است:

$$۲\log(x-۱)=۲\log ۳ \Rightarrow \log(x-۱)=\log ۳ \Rightarrow x-۱=۳ \Rightarrow x=۴$$

به‌سادگی می توان تحقیق کرد که $x=۴$ درمعادلهٔ مفروض صدق می کند. ولی علاوه برآن، معادلهٔ مفروض دارای ریشهٔ $x=-۲$ هم می‌باشد. چه شد که این ریشه ازدست رفت؟

این معادله‌ها را حل کنید (۳۸۶ تا ۴۰۸)*:

۳۸۶. $(\log_x\sqrt{۵})^۲-\log_x ۵\sqrt{۵}+۱/۲۵=۰$

۳۸۷. $۳\sqrt{\lg x}+۲\lg\sqrt{\frac{۱}{x}}=۲$

۳۸۸. $\sqrt{\log_x ۵\sqrt{۵}+\log_{\sqrt{۵}} ۵\sqrt{۵}}=-\sqrt{۶}\log_x\sqrt{۵}$

۳۸۹. $(\sqrt{x})^{\log_۵ x-۱}=۵$

۳۹۰. $x^{۲\lg^۳ x+۱/۵\lg x}=\sqrt{۱۰}$

۳۹۱. $x^{\lg^۲ x+\lg x^۲+۳}=\dfrac{۲}{\dfrac{۱}{\sqrt{x+۱}-۱}-\dfrac{۱}{\sqrt{x+۱}+۱}}$

۳۹۲. $\sqrt{۲\lg(-x)}=\lg\sqrt{x^۲}$

۳۹۳. $\log_۲\sqrt{x^۲}=۱$

۳۹۴. $\log_۲(x+۱)^۲+\log_۲|x+۱|=۶$

۳۹۵. $x^{\log_x (x-۲)^۲}=۹$

۳۹۶. $x^{\log_{\sqrt{x}}(x-۲)}=۹$

۳۹۷. $x^{\frac{۱}{۲}\log_{\sqrt{x}}(x^۲-x)}=a^{\log_a ۲۴};(a>۰)$

۳۹۸. $\sqrt{\log_x\sqrt{۵x}}\log_۵ x=-۱$

۳۹۹. $۲\log_x ۳\cdot\log_{۳x} ۳=\log_{۹\sqrt{x}} ۳$

۴۰۰. $\sqrt{\log_a\sqrt[۴]{ax}+\log_x\sqrt[۴]{ax}}+\sqrt{\log_a\sqrt[۴]{\frac{x}{a}}+\log_x\sqrt[۴]{\frac{a}{x}}}=a$

* نماد $\lg x$ به‌معنای لگاریتم دهدهی عدد x است.

۴۰۱. $\log_a x \cdot \log_b c \cdot (1+\log_c a)=\log_b x \cdot \log_c x \cdot \log_a c$

۴۰۲. $\log_3 x+\log_{\sqrt{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} x=6$

۴۰۳. $\log_8 x+(\log_8 x)^2+(\log_8 x)^3+\dots=\frac{1}{2}$

۴۰۴. $\dfrac{\log(\sqrt{x+1}+1)}{\log\sqrt[3]{x-40}}=3$

۴۰۵. $4^{-\frac{1}{x}}+6^{-\frac{1}{x}}=9^{-\frac{1}{x}}$

۴۰۶. $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6$

۴۰۷. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=4$

۴۰۸. $27^x+12^x=2\cdot 8^x$

این دستگاه‌ها را حل کنید (۴۰۹ تا ۴۲۴):

۴۰۹. $\begin{cases} lg\sqrt{(x+y)^2}=1 \\ lg\, y-lg|x|=\dfrac{1}{\log_4 100} \end{cases}$

۴۱۰. $\begin{cases} \log_a x-\log_{a^2} y=m \\ \log_{a^2} x-\log_{a^2} y=n \end{cases}$

۴۱۱. $\begin{cases} (\log_a x+\log_a y-2)\log_{\frac{4}{9}} a=-1 \\ x+y-5a=0 \end{cases}$

۴۱۲. $\begin{cases} \log_{\sqrt{10}}(x^2+y^2)=2\log_{10}(2a)+2\log_{100}(x^2-y^2) \\ xy=a^2 \end{cases}$

۴۱۳. $\begin{cases} xy=40 \\ x^{lg y}=4 \end{cases}$

۴۱۴. $\begin{cases} 5^{2x}\cdot 3^y=675 \\ \log_{\sqrt[3]{2}}(x+y)=6 \end{cases}$

۴۱۵. $\begin{cases} y^{x^2+7x+12}=1 \\ x+y=6\ ;\ y>0 \end{cases}$

۴۱۶. $\begin{cases} 8^x=10y \\ 2^x=5y \end{cases}$

۴۱۷. $\begin{cases} x^{x+y}=y^{12} \\ y^{x+y}=x^3 \end{cases}$

۴۱۸. $\begin{cases} x^{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}=y^{\frac{8}{3}} \\ y^{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}=x^{\frac{2}{3}} \end{cases}$

۴۱۹. $\begin{cases} x^m=y^n \\ \log_p\dfrac{x}{y}=\dfrac{\log_p x}{\log_p y} \end{cases}$

۴۲۰. $\begin{cases} x^y=y^x \\ a^x=b^y;(a\neq 1, b\neq 1) \end{cases}$

۴۲۱. $\begin{cases} x^y=y^x \\ x^m=y^n \end{cases}$

۴۲۲. $\begin{cases} (1+y)^x=100 \\ (y^4-2y^2+1)^{x-1}=\dfrac{(y-1)^{2x}}{(y+1)^2} \end{cases}$

۴۲۳. $\begin{cases} x^{\frac{z}{3}}=\sqrt[15]{y^8} \\ y^{\frac{z}{3}}=\sqrt[15]{x^2} \\ 5z=9(\sqrt{x}+\sqrt{y}) \end{cases}$

۴۲۴. $\begin{cases} z=\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y} \\ x^z=y^{\frac{8}{3}} \\ y^z=x^{\frac{2}{3}} \end{cases}$

VI.

ترکیب و دوجمله‌ای نیوتون

۴۲۵. m و n را طوری پیدا کنید که داشته باشیم:

$$C_{n+2}^{m} : C_{n+2}^{m+1} : C_{n+2}^{m+2}=0/6:1:1$$

۴۲۶. ثابت کنید:

$$C_n^{m+1}+C_n^{m-1}+2C_n^m=C_{n+2}^{m+1}$$

۴۲۷. از بین یك جمع ۳۰ نفری که شامل ۲ نفرزن است، چهار نفر برای کار در حوزهٔ انتخاباتی درنظر گرفته شده‌اند. چند حالت‌ممکن است پیش‌آید که هردوزن درمیان

این چهار نفر باشند؟

۴۲۸. می‌خواهیم امتحان شش کلاس را بین سه معلم تقسیم کنیم. اگر قرار باشد به هرمعلم دو کلاس داده شود، به‌چند طریق می‌توان این تقسیم را انجام داد؟

۴۲۹. دریك بخت‌آزمایی، ۵ چیز به‌قرعه گذاشته شده است. کسی که به صندوق نزدیك است، ۵ بلیت از آن بیرون می‌آورد. درچند حالت ممکن است بین این بلیت‌ها، ۳ بلیت برنده وجود داشته باشد؟ درصندوق ۱۰۰ بلیت وجود دارد.

۴۳۰. کسانی که به‌گردش جمعی رفته بودند، برای پیدا کردن دوستان گم شدهٔ خود، به دوگروه تقسیم شدند. بین آن‌ها، تنها چهار نفر وجود داردکه با محل آشنائی دارند. اگر روی هم ۱۶ نفر باشند، به‌چند طریق می‌توان آن‌ها را طوری به دوگروه تقسیم کردکه در هرگروه ۲ نفر ازکسانی که با محل آشنا هستند، وجود داشته باشند؟

۴۳۱. پیش‌آهنگان ازگروه ۲۵ نفری خود، که دربین آن‌ها ۵ رنگ‌کار، ۴ نجار و ۲ گچ‌کار بود، ۵ نفر را برای کمك به‌ساختمان پیش‌آهنگی انتخاب کردند. این ۵ نفر را به‌چند طریق می‌توان انتخاب کرد تا درترکیب آن‌ها، از هرتخصصی، یك نفروجود داشته باشد؟

۴۳۲. $۲n$ بلیت تئاتر راکه مربوط به‌یك ردیف ازصندلی‌هاست (ردیف $۲n$نفری) دردست داریم. این بلیت‌ها را به‌چند طریق‌می‌توان بین n مرد وn زن تقسیم کرد، به‌نحوی که هیچ دو مردی یا هیچ دو زنی درکنار هم نباشند؟

۴۳۳. نه‌کارت از ده‌کارتی را که بین آن‌ها آس دل وجود دارد، بین سه نفر به‌این ترتیب تقسیم کرده‌ایم که اولی ۳ کارت، دومی ۴ کارت و سومی ۲ کارت گرفته است. چند طریق تقسیم وجود دارد تا، ضمن آن، آس دل به‌نفر سوم برسد؟

۴۳۴. چند عدد طبیعی مختلف می‌توان با رقم‌های ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ درست کرد، به شرطی که در هرعدد، هریك از رقم‌های مفروض، بیش از یك‌بار وارد نشده باشد؟

۴۳۵. چند عدد دورقمی مختلف می‌توان با رقم‌های ۰، ۱، ۲ و ۳ درست کرد، به شرطی که رقم‌های ۰، ۱ و۲ بیش ازیك‌بار ورقم ۳ بیش ازدوباردرآن‌ها واردنشده باشند؟

۴۳۶. چند عدد مختلف پنج‌رقمی بزرگتر از ۲۰۰۰۰ می‌توان با رقم‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ درست کرد، به نحوی که در هرعدد از رقم‌های ۲، ۳ و ۴ یك‌بار و از رقم ۱ دوبار استفاده شود؟

۴۳۷. چند عدد پنج رقمی مختلف، بدون تکرار رقم‌ها، می‌توان از رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ درست کرد، به‌نحوی که عددهای زوج درکنار هم قرارنگیرند؟

۴۳۸. بدون نوشتن جمله‌های اضافی، ضریب $x^۴$ را درعبارت زیر پیدا کنید.

$$x(1-x)^4+x^2(1+2x)^8+x^3(1+3x)^{12}$$

۴۳۹. ثابت کنید که $11^{10}-1$ بر ۱۰۰ بخش‌پذیر است.

۴۴۰. ثابت کنید که ضریب x^s در بسط عبارت

$$[(s-2)x^2+nx-s](x+1)^n$$

برابراست با nC_n^{s-2}.

۴۴۱. ثابت کنید:

$$1^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\dots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$$

۴۴۲. در بسط دوجمله‌ای $\left(x\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^n$، ضریب عددی جملهٔ سوم، ۴۴ واحد بیشتر ازضریب جملهٔ دوم شده‌است. جملهٔ مستقل از x را در بسط این دوجمله‌ای پیدا کنید.

۴۴۳. مجموع ضریب‌ها در بسط دو جمله‌ای $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^n$ به‌اندازهٔ ۲۴۰ واحد از مجموع ضریب‌ها در بسط دوجمله‌ای $(a+b)^{2n}$ کمتر شده است. سومین جمله از بسط دوجمله‌ای اول را پیدا کنید.

۴۴۴. در بسط دوجمله‌ای زیر، چند جملهٔ گویا وجود دارد:

$$(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3})^{100}$$

۴۴۵. همهٔ جمله‌های گویا را در بسط $\left(\sqrt[3]{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{20}$ پیدا کنید، بدون این که جمله‌های گنگ آن رابنویسید.

۴۴۶. n را طوری پیدا کنید که، به‌ازای آن، سه‌ضریب متوالی دلخواه از بسط دوجمله‌ای $(x+a)^n$، سه‌جملهٔ متوالی ازیك تصاعد حسابی باشند.

۴۴۷. می‌دانیم، دهمین جمله از بسط دوجمله‌ای $(x+2)^n$، بزرگترین ضریب را دارد. n را پیدا کنید.

۴۴۸. ثابت کنید که، بزرگترین ضریب دربسط دوجمله‌ای $(a+b)^{2n}$، عددی زوج است.

۴۴۹. بزرگترین جمله را دربسط دوجمله‌ای $(1+\sqrt{2})^{50}$ پیدا کنید.

۴۵۰. شمارهٔ جملهٔ بزرگتر را دربسط دوجمله‌ای $(p+q)^n$ پیدا کنید (بسط را برحسب توان‌های نزولی p در نظر بگیرد)، به‌شرطی که بدانیم: $p>0$، $q>0$ و $p+q=1$. با چه‌شرط‌هایی: a) بزرگترین جمله، همان نخستین جمله‌است؟ b) بزرگترین

جمله، آخرین جمله است؟ c) بسط شامل دوجملهٔ متوالی برابر است که از همهٔ جمله‌های دیگر بسط بزرگترند؟

۴۵۱. در بسط $\left(x+1+\frac{2}{x}\right)^6$، جملهٔ مستقل از x را، بدون نوشتن جمله‌های دیگر، پیدا کنید.

۴۵۲. دربسط $(1+x-x^2)^{25}$، جمله‌ای را پیدا کنیدکه درآن، توان x سه‌برابر مجموع تمام ضریب‌های بسط باشد.

۴۵۳. ضریب x^3 را درعبارت زیر پیدا کنید:

$$(1+x)^3+(1+x)^4+(1+x)^5+\dots+(1+x)^{15}$$

۴۵۴. ثابت کنید:

$$(1+x)^n+(1+x)^{n-1}x+(1+x)^{n-2}x^2+\dots+(1+x)x^{n-1}+x^n=$$
$$=(n+1)x^n+\frac{(n+1)n}{1\times 2}x^{n-1}+\frac{(n+1)n(n-1)}{1\times 2\times 3}x^{n-2}+\dots+1$$

(n، عددی طبیعی است).

۴۵۵. این چند جمله‌ای را برحسب توان‌های نزولی $x-2$ بنویسید:

$$x^4-11x^3+43x^2-72x+45$$

.VII

تبدیل عبارت‌های مثلثاتی

درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید (۴۵۶ تا ۴۸۴):

۴۵۶. $\sin 4\alpha+\cos 4\alpha \cot g\, 2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{2\,tg\alpha}$

۴۵۷. $tg\, 3\alpha=tg\alpha\, tg(60°+\alpha)\, tg(60°-\alpha)$

۴۵۸. $tg(35°+\alpha)\, tg(25°-\alpha)=\frac{2\cos(10°+2\alpha)-1}{2\cos(10°+2\alpha)+1}$

۴۵۹. $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=tg\, 2\alpha+\sec 2\alpha$

$$\sin x\left(1+tg\,x\,tg\frac{x}{2}\right)=tg\,x$$ ۴۶۰.

$$tg\,3\alpha-tg\,2\alpha-tg\,\alpha=tg\,\alpha\,tg\,2\alpha\,tg\,3\alpha$$ ۴۶۱.

$$cotg\,\alpha-tg\,\alpha-2tg\,2\alpha-4tg\,4\alpha=8cotg\,8\alpha$$ ۴۶۲.

$$tg\,\alpha\,tg\,\beta+tg\,\beta\,tg\,\gamma+tg\,\gamma\,tg\,\alpha=1,\ \left(\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}\right)$$ ۴۶۳.

$$\sin 2n\alpha+\sin 2n\beta+\sin 2n\gamma=$$ ۴۶۴.

$$=(-1)^{n+1}4\cdot\sin n\alpha\sin n\beta\sin n\gamma,\ (\alpha+\beta+\gamma=\pi,\ n\in Z)$$

$$tg\,n\alpha+tg\,n\beta+tg\,n\gamma=tg\,n\alpha\,tg\,n\beta\,tg\,n\gamma,\ (\alpha+\beta+\gamma=\pi,\ n\in Z)$$ ۴۶۵.

$$\frac{\sin y+\sin x\cos(x+y)}{\cos y-\sin x\sin(x+y)}=tg(x+y)$$ ۴۶۶.

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=\sin^2(\alpha+\beta)$$ ۴۶۷.

$$\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\cos 2\alpha\cos 2\beta=1$$ ۴۶۸.

$$4\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha)=\sin 3\alpha$$ ۴۶۹.

$$16\sin 10^\circ\sin 30^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ\sin 90^\circ=1$$ ۴۷۰.

$$\sin 10^\circ\sin 20^\circ\sin 30^\circ\sin 40^\circ\cos 10^\circ\cos 20^\circ\cos 30^\circ\cos 40^\circ=\frac{3}{256}$$ ۴۷۱.

$$\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}$$ ۴۷۲.

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}=0/125$$ ۴۷۳.

$$\cos 55^\circ\cos 65^\circ\cos 175^\circ=-\frac{1+\sqrt{3}}{8\sqrt{2}}$$ ۴۷۴.

$$\frac{1}{\sin 10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}=4$$ ۴۷۵.

$$\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}$$ ۴۷۶.

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$$ ۴۷۷.

$$\sin ۴۷^\circ + \sin ۶۱^\circ - \sin ۱۱^\circ - \sin ۲۵^\circ = \cos ۷^\circ$$ ۰۴۷۸

$$\cos ۲۴^\circ + \cos ۴۸^\circ - \cos ۸۴^\circ - \cos ۱۲^\circ = \frac{۱}{۲}$$ ۰۴۷۹

$$\sin ۱۰^\circ + \sin ۲۰^\circ + \sin ۳۰^\circ + \sin ۴۰^\circ + \sin ۵۰^\circ = \sin ۲۵^\circ \sin ۳۰^\circ \operatorname{cosec} ۵^\circ$$ ۰۴۸۰

$$tg ۲\alpha \, tg(۳۰^\circ - \alpha) + tg ۲\alpha \, tg(۶۰^\circ - \alpha) + tg(۶۰^\circ - \alpha) tg(۳۰^\circ - \alpha) = ۱$$ ۰۴۸۱

$$۱ + ۲\cos ۷x = \frac{\sin ۱۰/۵x}{\sin ۳/۵x}$$ ۰۴۸۲

$$۴\cos\left(۳۰^\circ - \frac{\alpha}{۲}\right)\sin\left(۶۰^\circ - \frac{\alpha}{۲}\right) = \frac{\sin \frac{۳}{۲}\alpha}{\sin \frac{۱}{۲}\alpha}$$ ۰۴۸۳

$$\sin^۲ a + \sin^۲ \beta + \sin^۲ \gamma = ۲\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma + ۲ \text{،} \quad (\alpha + \beta + \gamma = \pi)$$ ۰۴۸۴

به‌صورتی تبدیل کنید که برای محاسبهٔ لگاریتمی مناسب باشد (۴۸۵ تا ۴۹۲):

$$tg ۳۰^\circ + tg ۴۰^\circ + tg ۵۰^\circ + tg ۶۰^\circ$$ ۰۴۸۵

$$\sin^۲(\alpha + \beta) - \sin^۲ \alpha - \sin^۲ \beta$$ ۰۴۸۶

$$۳ - ۴\cos ۲\alpha + \cos ۴\alpha$$ ۰۴۸۷

$$\cos ۱۱\alpha + ۳\cos ۹\alpha + ۳\cos ۷\alpha + \cos ۵\alpha$$ ۰۴۸۸

$$\sin ۵\alpha \sin ۴\alpha + \sin ۴\alpha \sin ۳\alpha - \sin ۲\alpha \sin \alpha$$ ۰۴۸۹

$$۲\cos ۱۰^\circ \cos ۲۰ - ۲\cos ۳۰^\circ + \sin ۴۰^\circ$$ ۰۴۹۰

$$\cos(\alpha + \beta)\cos\gamma + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - \sin(\alpha + \beta)\sin\gamma$$ ۰۴۹۱

$$\sin ۷۰^\circ + ۸\cos ۲۰^\circ \cos ۴۰^\circ \cos ۸۰^\circ$$ ۰۴۹۲

هریك از برابری‌های زیر، به‌ازای چه‌مقدارهایی از α درست است(۴۹۳تا۵۰۲):

$$\sqrt{tg^۲ \alpha - \sin^۲ \alpha} = tg\,\alpha \sin \alpha$$ ۰۴۹۳

$$\sqrt{۱ + \sin ۲\alpha} = \sin \alpha + \cos \alpha$$ ۰۴۹۴

$$\sqrt{\frac{۱ - \cos\alpha}{۱ + \cos\alpha}} = \operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cosec}\alpha$$ ۰۴۹۵

۴۹۶. $\sqrt{\frac{tg\,\alpha-\sin\alpha}{tg\,\alpha+\sin\alpha}}=cosec\,\alpha-cotg\,\alpha$

۴۹۷. $\sqrt{sec^{2}\alpha+cosec^{2}\alpha}=-tg\,\alpha-cotg\,\alpha$

۴۹۸. $\sqrt{tg^{2}\alpha+cotg^{2}\alpha+2}=sec\,\alpha\,cosec\,\alpha$

۴۹۹. $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}+\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=-2sec\,\alpha$

۵۰۰. $\sqrt{1-\cos\alpha}+\sqrt{1+\cos\alpha}=2\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$

۵۰۱. $\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}=-2\sin\frac{\alpha}{2}$

۵۰۲. $cosec\,\alpha\sqrt{\frac{1}{1+\cos\alpha}+\frac{1}{1-\cos\alpha}-\sqrt{2}}=-\sqrt{2}(cotg^{2}\alpha+2)$

۵۰۳. ثابت کنید، اگر داشته باشیم: $tg\alpha=\frac{1}{7}$ و $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}$، آن وقت $\alpha+2\beta=45^\circ$ (α و β حاده‌اند).

۵۰۴. برابری‌های زیر، به‌ازای چه مقدارهایی از x درست‌اند:

a) $\sin x=\sqrt{1-\cos^{2}x}$؛ b) $tg^{2}x+1=sec^{2}x$؛

c) $cotg\,x=\frac{\sin x}{1-\cos x}$؛ d) $\sin(\pi-x)=\sin x$

۵۰۵. دستور زیر، برای چه‌مقدارهایی از x درست است:

$$\cos\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

۵۰۶. کدام بزرگترند: $\sin\alpha$ یا $tg\,\alpha$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$؟

۵۰۷. کدامیك از تابع‌های مثلثاتی می‌توانند مقدار $\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$ را قبول کنند ($a>0$ و $b>0$)؟

۵۰۸. کدام بزرگترند: $\sin 1$ یا $\sin 1^\circ$؟

۵۰۹. حداقل مقدارعبارت $(tg\alpha+cotg\alpha)^{۲}$ را پیدا کنید.

۵۱۰. کدام بزرگترند: $sin(\alpha+\beta)$ یا $sin\alpha+sin\,\beta$ $\left(۰<\alpha،\ \beta<\frac{\pi}{۲}\right)$؟

۵۱۱. کدام بزرگترند: $tg۲\alpha$ یا $۲tg\alpha$ $\left(۰<\alpha<\frac{\pi}{۴}\right)$؟

۵۱۲. سینوس عدد x، به‌عددی گفته می‌شود که برابرسینوس زاویهٔ x رادیان باشد. این، تعریف سینوس عدد x است. آیا می‌توان قرار گذاشت که سینوس عدد x، به‌معنای عددی برابر با سینوس زاویهٔ x درجه باشد؟

۵۱۳. آیا درست است که اندازه‌گیری با رادیان را انتزاعی بنامیم؟

۵۱۴. تابع $tg\,x$، در چه فاصله‌هایی از تغییر x، صعودی است؟

۵۱۵. برای تانژانت نصف قوس، دستورهای زیر وجود دارد:

$$tg\frac{\alpha}{۲}=\pm\sqrt{\frac{۱-cos\alpha}{۱+cos\alpha}};\quad tg\frac{\alpha}{۲}=\frac{sin\,\alpha}{۱+cos\alpha}$$

دستور دوم را به‌این ترتیب می‌توان به‌دست آورد که صورت و مخرج کسر زیر رادیکال را در دستور اول، در $۱+cos\,\alpha$ ضرب کنیم و، سپس، به‌جای $۱-cos^{۲}\alpha$ قرار دهیم $sin^{۲}\alpha$ وسرانجام اززیر رادیکال بیرون بیاوریم. از این‌راه به‌دست می‌آید:

$$tg\frac{\alpha}{۲}=\pm\frac{sin\,\alpha}{۱+cos\alpha}$$

به‌چه مناسبت، علامت‌های $+$ و $-$ را نمی‌توان درسمت راست نوشت؟

۵۱۶. با استفاده از برابری $sin۳۶^\circ=cos۵۴^\circ$، مقدار $sin۱۸^\circ$ را پیدا کنید.

۵۱۷. مطلوب است محاسبهٔ مجموع

$$sin\alpha+sin۲\alpha+sin۳\alpha+\dots+sin\,n\alpha$$

۵۱۸. مجموع زیر را محاسبه کنید:

$$cos\alpha+cos۲\alpha+cos۳\alpha+\dots+cosn\alpha$$

۵۱۹. ثابت کنید، اگر داشته‌باشیم:

$$A_{۱}=Acos^{۲}\alpha+Bsin\,\alpha\,cos\,\alpha+Csin^{۲}\alpha;$$

$$B_{۱}=۲Csin\,\alpha\,cos\,\alpha+B(cos^{۲}\alpha-sin^{۲}\alpha)-۲Asin\alpha\,cos\,\alpha;$$

$$C_1 = A\sin^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha$$

آن‌گاه داریم:

$$B_1^2 + 4A_1C_1 = B^2 - 4AC$$

۵۲۰. ثابت کنید، باشرط $5\sin\beta = \sin(2\alpha+\beta)$، به‌دست می‌آید:

$$\frac{tg(\alpha+\beta)}{tg\alpha} = \frac{3}{2}$$

۵۲۱. ثابت کنید، برابری

$$a_1\cos(\alpha_1+\varphi) + a_2\cos(\alpha_2+\varphi) + \cdots + {}_n\cos(\alpha_n+\varphi) = 0$$

به‌ازای $\varphi = 0$ وهمچنین به‌ازای $(k\in Z)\varphi = \varphi_0 \neq k\pi$، برقرار است. ثابت کنید، با این شرط‌ها، برابری مفروض، همیشه برقرار است.

۵۲۲. ثابت کنید، با شرط $\frac{\cos x - \cos\alpha}{\cos x - \cos\beta} = \frac{\sin^2\alpha\cos\beta}{\sin^2\beta\cos\alpha}$؛ داریم:

$$tg^2\frac{x}{2} = tg^2\frac{\alpha}{1}\cdot tg^2\frac{\beta}{2}$$

۵۲۳. ثابت کنید، اگر داشته‌باشیم:

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\varphi = \cos\gamma\cos\theta;\ \sin\alpha = 2\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

آن‌وقت داریم:

$$tg^2\frac{\alpha}{2} = tg^2\frac{\beta}{2}tg^2\frac{\gamma}{2};\ \left(\alpha \neq \frac{2k+1}{2}\pi;\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right)$$

۵۲۴. ثابت کنید، اگر داشته‌باشیم:

$$\cos(\theta-\alpha) = a \text{ و } \sin(\theta-\beta) = b$$

آن‌گاه خواهیم داشت:

$$a^2 - 2ab\sin(\alpha-\beta) + b^2 = \cos^2(\alpha-\beta)$$

۵۲۵. ثابت کنید، با شرط

$$\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos(x+\varphi)}{b} = \frac{\cos(x+2\varphi)}{c} = \frac{\cos(x+3\varphi)}{d}$$

خواهیم داشت:

$$\frac{a+c}{b}=\frac{b+d}{c}$$

۵۲۶. مطلوب است محاسبهٔ $cos(\alpha+\beta)$ و $sin(\alpha+\beta)$، به‌شرطی که

$$sin\,\alpha+sin\,\beta=p \text{ و } cos\alpha+cos\beta=q$$

۵۲۷. ثابت کنید، اگر زاویه‌های α ، β و γ از مثلثی با رابطهٔ

$$cos\,\alpha+cos\,\beta-cos(\alpha+\beta)=\frac{۳}{۲}$$

به‌هم مربوط باشند، مثلث مفروض متساوی‌الاضلاع است.

۵۲۸. ثابت کنید، اگر ضلع‌های a، b و c ازمثلثی به‌تصاعد حسابی باشند،آن‌وقت $cotg\frac{A}{۲}$ ، $cotg\frac{B}{۲}$ و $cotg\frac{C}{۲}$ هم تشکیل یك تصاعد حسابی می‌دهند (A ، B و C ، به ترتیب زاویه‌های مقابل به‌ضلع‌های a، b و c از مثلث‌اند).

۵۲۹. مطلوب است رابطهٔ بین زاویه‌های A، B و C، به‌شرطی‌که داشته باشیم:

$$tg\,A+tg\,B+tg\,C=tg\,A\,tg\,B\,tg\,C$$

سپس، با همین شرط، حداقل مقدارهای مثبت زاویه‌ها را، برای حالتی‌که زاویهٔ A برابر نصف مجموع زاویه‌های B و C، و زاویهٔ C برابر مجموع زاویه‌های A و B باشد، پیدا کنید.

۵۳۰. می‌دانیم $A+B+C=\pi$ و $\frac{a}{sin A}=\frac{b}{sin B}=\frac{c}{sin C}$. ثابت کنید:

$$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A$$

۵۳۱. θ را از معادله‌های زیر حذف کنید:

$$cos(\alpha-۳\theta)=m\cos^۳\theta;\ sin(\alpha-۳\theta)=m\sin^۳\theta$$

۵۳۲. θ و φ را از معادله‌های زیر حذف کنید:

$$a\sin^۲\theta+b\cos^۲\theta=۱;\ a\cos^۲\varphi+b\sin^۲\varphi=۱;\ a\,tg\theta=b\,tg\varphi;\ a\neq b$$

۵۳۳. این عبارت را ساده کنید:

$$\frac{cotg^۲x}{sin^۲x}+\frac{tg^۴x}{cos^۲x}+\frac{۶}{cos^۲x}+۴\left(\frac{۱}{sin^۲x}+\frac{tg^۲x}{cos^۲x}\right)$$

۵۳۴. ثابت کنید، اگر برای زاویه‌های جادهٔ α، β و γ داشته‌باشیم:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

آن‌وقت خواهیم داشت: $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

۵۳۵. ثابت کنید که برای گویا بودن $\sin x$ و $\cos x$، لازم و کافی است که $tg\frac{x}{2}$ گویا باشد.

۵۳۶. ثابت کنید، با شرط $0<\alpha,\beta,\gamma<\frac{\pi}{2}$، رابطهٔ

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1$$

وقتی وتنها وقتی برقرار است که داشته باشیم: $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

۵۳۷. با استفاده از رابطه‌های مثلثاتی، ثابت کنید، از برابری‌های

$$a^2+b^2=1\ ,\ \alpha^2+\beta^2=1$$

می‌توان نابرابری $|a\alpha+b\beta|\leqslant 1$ را نتیجه گرفت.

۵۳۸. مقدار اصلی $Arctgx$ را در فاصلهٔ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ می‌گیرند. آیا می‌توان فاصله $(0, \pi)$ را برای آن درنظر گرفت؟

۵۳۹. درستی برابری‌های زیر را ثابت کنید:

a) $arcsinx+arccosx=\frac{\pi}{2}$ ؛ b) $arctgx+arcotgx=\frac{\pi}{2}$

۵۴۰. درستی این برابری‌ها را ثابت کنید:

a) $arccos(-x)=\pi-arccosx$ ؛ b) $arc\,tg(-x)=\pi-arctgx$

۵۴۱. درستی برابری‌های زیر را ثابت کنید:

a) $sin(arccosx)=cos(arcsinx)=\sqrt{1-x^2}$ ؛

b) $sin(arctgx)=cos(arccotgx)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ؛

c) $sin(arc\,cotgx)=cos(arctgx)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ؛

d) $tg(\arcsin x) = cotg(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ؛

e) $tg(\arccos x) = cotg(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ ؛

f) $tg(arccotg\, x) = cotg\, x(arctg\, x) = \frac{1}{x}$.

۵۴۲. درستی این برابری‌ها را ثابت کنید $(x>0)$ ؛

a) $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2} = arctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = arccotg\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ ؛

b) $\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2} = arctg\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = arccotg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ؛

c) $arctg\, x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = arccotg\frac{1}{x}$ ؛

d) $arccotg\, x = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = arctg\frac{1}{x}$ ؛

۵۴۳. $\arccos\left(\cos\frac{6}{5}\pi\right)$ برابر با چیست؟

۵۴۴. $\arcsin(\sin x)$ برابر با چیست ؟

۵۴۵. $arctg(tg\, x)$ برابر چیست ؟

۵۴۶. درستی برابری زیر را ثابت کنید :

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2}$$

۵۴۷. ثابت کنید، با شرط $\frac{\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}$ ، داریم:

$$\arcsin\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{4} - x$$

۵۴۸. ثابت کنید، با شرط $x>1$ ، داریم:

$$2\, arctg\, x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \pi$$

۵۴۹. ثابت کنید :

$$\sin\left(\frac{۳}{۲}\arcsin x\right)=\frac{x(۱+۲\sqrt{۱-x^۲})}{\sqrt{۲(۱+\sqrt{۱-x^۲})}}$$

۵۵۰. ثابت کنید:

$$\cos\left(\frac{۱}{۲}\arcsin x\right)=\frac{|x|}{\sqrt{۲(۱-\sqrt{۱-x^۲})}}$$

۵۵۱. ثابت کنید $\cos(۷\arccos x)$ ، یك چند جمله‌ای درجه ۷ نسبت به x است *.

این برابری‌ها را ثابت کنید (۵۵۲ تا ۵۵۴):

۵۵۲. $\cos(\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y)=\frac{۱-xy}{\sqrt{۱+x^۲}\sqrt{۱+y^۲}}$. برابری بـه ازای چـه مقدارهایی از x و y معنا دارد؟

۵۵۳. $\operatorname{tg}(۲\arcsin x)=\frac{۲x\sqrt{۱-x^۲}}{۱-۲x^۲}$. برابری برای چه مقدارهایی از x معنا دارد؟

۵۵۴. $\sin(۲\operatorname{arctg}x)=\frac{۲x}{۱+x^۲}$. برابری به ازای چه مقدارهای x معنا دارد ؟

۵۵۵. عبارت زیر را محاسبه کنید :

$$\sin\left(۲\operatorname{arctg}\frac{۱}{۳}\right)+\cos(\operatorname{arctg}۲\sqrt{۳})$$

۵۵۶. محاسبه کنید :

$$\sin\left(۲\operatorname{arctg}\frac{۳}{۴}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{۱}{۲}\arcsin\frac{۵}{۱۳}\right)$$

۵۵۷. این برابری را مورد تحقیق قراردهید:

$$\arccos\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\operatorname{arctg}\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}-۱}$$

۵۵۸. مطلوب است محاسبهٔ مجموع

$$\operatorname{arctg}۲+\operatorname{arctg}۳$$

---

*) عبارت به صورت $\frac{۱}{۲^{n-۱}}\cos(n\arccos x)$ (n، عددی طبیعی است) ، که یك چند جمله‌ای نسبت به x است، چند جمله‌ای چبیشف نامیده می‌شود.

۵۵۹. ثابت کنید، با شرط $\frac{۱}{۲}>x^۲$، مجموع زیر به x بستگی ندارد:

$$arcsin x+۳arccos x+arcsin(۲x\sqrt{۱-x^۲})$$

۵۶۰. ثابت کنید:

$$arcsin x+arcsin y=\eta\, arcsin(x\sqrt{۱-y^۲}+y\sqrt{۱-x^۲})+\varepsilon\pi$$

که درآن

با شرط $xy\leqslant ۰$ یا $x^۲+y^۲\leqslant ۱$ داریم: $\eta=۱$ ، $\varepsilon=۰$؛

با شرط $x^۲+y^۲>۱$ و $x<۰$ و $y<۰$ داریم: $\eta=-۱$ ، $\varepsilon=-۱$؛

با شرط $x^۲+y^۲\geqslant ۱$ و $x>۰$ و $y>۰$، داریم: $\eta=-۱$ ، $\varepsilon=۱$.

۵۶۱. ثابت کنید:

$$arcsin\frac{۴}{۵}+arcsin\frac{۵}{۱۳}+arcsin\frac{۱۶}{۶۵}=\frac{\pi}{۲}$$

۵۶۲. با شرط $۱\geqslant x\geqslant\frac{۱}{۲}$ ثابت کنید:

$$arccos x+arccos\left(\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۲}\sqrt{۳-۳x^۲}\right)=\frac{\pi}{۳}$$

۵۶۳. ثابت کنید:

$$arctg x+arctg y=arctg\frac{x+y}{۱-xy}+\varepsilon\pi$$

که درآن، باشرط $xy<۱$ داریم: $\varepsilon=۰$؛ باشرط $xy>۱$ ، $x<۰$ داریم: $\varepsilon=-۱$؛
با شرط $xy>۱$ ، $x>۰$ داریم: $\varepsilon=۱$.

درستی این برابری‌ها را ثابت کنید (۵۶۴ تا ۵۶۹):

۵۶۴. $arcsin\frac{۵}{۱۳}+۲arctg\frac{۲}{۳}=\frac{\pi}{۲}$.

۵۶۵. $arctg\frac{۱}{۳}+arctg\frac{۱}{۵}+arctg\frac{۱}{۷}+arctg\frac{۱}{۸}=\frac{\pi}{۴}$

۵۶۶. $۴arctg\frac{۱}{۵}-arctg\frac{۱}{۲۳۹}=\frac{\pi}{۴}$

۵۶۷. $۲arctg\, ۱۰+arcsin\frac{۲۰}{۱۰۱}=\pi$

$$arctg x=\frac{\pi}{۲}+arctg\frac{۱}{x}, \quad (x>۰.)$$ ۵۶۸.

$$arctg x=-\frac{\pi}{۲}-arctg\frac{۱}{x}, \quad (x<۰.)$$ ۵۶۹.

VIII.

معادله‌های مثلثاتی

این معادله‌ها را حل کنید (۵۷۰ تا ۶۲۸):

۵۷۰. $$sin x\, sin ۲x\, sin ۳x=\frac{۱}{۴}sin ۴x$$

۵۷۱. $$۳(۱-sin x)=۱+cos ۲x$$

۵۷۲. $$tg\frac{۳}{۵}x\, cotg\frac{۵}{۳}x=۱-sec\frac{۳}{۵}x\, cosec\frac{۵}{۳}x$$

۵۷۳. $$sin(x+۲۵^\circ)sin(x-۲۰^\circ)=sin(۷۰^\circ+x)sin(۶۵^\circ-x)$$

۵۷۴. $$tg(x+۳۰^\circ)tg(x-۶۰^\circ)=۱$$

۵۷۵. $$sin ۲x+cos ۲x+sin x+cos x+۱=۰$$

۵۷۶. $$sin x+sin ۲x+sin ۳x=۱+cos x+cos ۲x$$

۵۷۷. $$sin ۳x=cos x-sin x$$

۵۷۸. $$cos ۷x+sin^{۲} ۲x=cos^{۲} ۲x-cos x$$

۵۷۹. $$sin^{۳} x\, cos x-cos^{۳} x\, sin x=\frac{۱}{۴}$$

۵۸۰. $$cos ۵x+cos ۳x+sin ۵x+sin ۳x=۲ cos\left(\frac{\pi}{۴}-۴x\right)$$

۵۸۱. $$sin x+sin ۲x+sin ۳x+sin ۴x=۰$$

۵۸۲. $$sin x\, sin ۳x=\frac{۱}{۲}$$

$co^{۳}x\sin ۳x+\sin^{۳}x\cos ۳x=\frac{۳}{۴}$ ۵۸۳.

$\sin ۲x\sin x+\cos^{۲}x=\sin ۵x\sin ۴x+\sin^{۲}۴x$ ۵۸۴.

$\cos^{۲}x+\cos^{۲}۲x+\cos^{۲}۳x+\cos^{۲}۴x=۲$ ۵۸۵.

$\sin^{۲}x+\sin^{۲}۲x=\sin^{۲}۳x+\sin^{۲}۴x$ ۵۸۶.

$\sin^{۲}x+\sin^{۲}۲x=\sin^{۲}۳x$ ۵۸۷.

$۲\sin^{۲}x+\sin^{۲}۲x=۲$ ۵۸۸.

$\sin^{۴}\frac{x}{۳}+\cos^{۴}\frac{x}{۳}=\frac{۵}{۸}$ ۵۸۹.

$\cos^{۴}x+\sin^{۴}x-۲\sin ۲x+\frac{۳}{۴}\sin^{۲}۲x=۰$ ۵۹۰.

$۲\sin ۲x=۳(\sin x+\cos x)$ ۵۹۱.

$\sin x+\cos x+\sin x\cos x=۱$ ۵۹۲.

$\sin^{۱۰}x+\cos^{۱۰}x=\frac{۲۹}{۱۶}\cos^{۴}۲x$ ۵۹۳.

$\cos^{۲}x\cos ۲x+\cos ۴x+\cos ۳x\cos x+۲\cos^{۴}x=\frac{۱}{۲\sin\frac{x}{۲}}$ ۵۹۴.

$tg\,۵x=tg\,x\,tg(۶۰^{\circ}-x)cotg(۳۰^{\circ}-x)$ ۵۹۵.

$\cos x+\sin x=\frac{\cos ۲x}{۱-\sin ۲x}$ ۵۹۶.

$tg\,x+tg\,۲x-tg\,۳x=۰$ ۵۹۷.

$(۱-tg\,x)(۱+\sin ۲x)=۱+tg\,x$ ۵۹۸.

$tg\,x+tg\,۲x+tg\,۳x+tg\,۴x=۰$ ۵۹۹.

$tg\,x+cotg\,x=\sin x\left(tg\,x\,tg\frac{x}{۲}+۱\right)$ ۶۰۰.

$\sec\sqrt{x}+cosec\sqrt{x}=۲\sqrt{۲}$ ۶۰۱.

$tg(x^{۲}-x)cotg\,۶=۱$ ۶۰۲.

۶۰۳. $|\sin x^2| = 1$

۶۰۴. $\sin|x| = 1$

۶۰۵. $\cos x^2 = 1$

۶۰۶. $tg^2 x = \dfrac{1-\cos|x|}{1-\sin|x|}$

۶۰۷. $\sin 2x \sin 6x = 1$

۶۰۸. $(\sec x + \operatorname{cosec} x)\sqrt{2} = \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x$

۶۰۹. $\sin 3x + \sin 2x = m \sin x$

۶۱۰. $\sin\left(\frac{5}{3}\pi \cos \pi x\right) = \frac{1}{2}$

۶۱۱. $\sin(\pi \cos x) = \cos(\pi \sin x)$

۶۱۲. $tg(\pi\, tg\, x) = cotg(\pi\, cotg\, x)$

۶۱۳. $\sin^2 2^{\sqrt{-x}} = \frac{1}{2}$

۶۱۴. $\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2$

۶۱۵. $x^2 + 2x \sin(xy) + 1 = 0$

۶۱۶. $2 \arccos x = 6/3$

۶۱۷. $arctg \frac{1}{7} + \arcsin x = \frac{\pi}{4}$

۶۱۸. $\arcsin x + \arcsin 2x = \frac{\pi}{3}$

۶۱۹. $2 \arcsin x = \arccos 2x$

۶۲۰. $2 \arccos x = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$

۶۲۱. $\arcsin x = 2 \arcsin x\sqrt{2}$

۶۲۲. $\arccos x - \arcsin x = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$

۶۲۳. $\arccos x = arctg\, x$

۶۲۴. $arctg(x-1) + arctg\, x + arctg(x+1) = arctg\, 3x$

۶۲۵. $\arcsin \frac{2}{3\sqrt{x}} + \arcsin\sqrt{1-x} = \arcsin \frac{1}{3}$

۶۲۶. $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} + arctg \frac{2x}{1-x^2} = \frac{4}{3}\pi$

۶۲۷. $arctg\, x = arctg \frac{a}{b} - arctg \frac{a-b}{a+b}$

۶۲۸. $\arcsin x = \arcsin a + \arcsin b$

این دستگاه‌ها را حل کنید (۶۲۹ تا ۶۳۱):

۶۲۹. $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{۳}{۴} \\ tg x \, tg y = ۳ \end{cases}$

۶۳۰. $\begin{cases} \sin^۲ x + \sin^۲ y = \frac{۳}{۴} \\ x + y = ۷۵^\circ \end{cases}$

۶۳۱. $\begin{cases} \sin x = \sqrt{۲} \sin y \\ tg x = \sqrt{۳} tg y \end{cases}$

IX.

نامعادله‌ها و نابرابری‌ها

این نامعادله‌ها را حل کنید (۶۳۲ تا ۶۴۲):

۶۳۲. $\frac{mx+n}{a+b} - \frac{px+q}{a-b} < \frac{mx-n}{a-b} + \frac{px-q}{a+b}$

۶۳۳. $\frac{۷x-۵}{۸x+۳} > ۴$

۶۳۴. $\frac{x+۱}{x-۲} > \frac{۳}{x-۲} - \frac{۱}{۲}$

۶۳۵. $\frac{۱}{x} < \frac{۱}{۲}$

۶۳۶. $x^۳ + ۵x^۲ + ۳x - ۹ > ۰$

۶۳۷. $۲x^۳ > x + ۱$

۶۳۸. $\frac{(x-۱)(x-۳)}{(x-۲)(x-۴)} > ۰$

۶۳۹. $x^۴ - ۶x^۳ + ۱۱x^۲ - ۶x < ۰$

۶۴۰. $\frac{(x+۱)(x+۲)(x+۳)}{(۲x-۱)(x+۴)(۳-x)} > ۰$

۶۴۱. $\frac{(x^۳-۱)(x+۲)^۲(x-۵)}{x^۲(x^۲-۹)(x^۴+۱)} > ۰$

۶۴۲. $x^۴ + x^۳ - ۷x^۲ + ax + b > ۰$، به‌شرطی که $x = ۱$ و $x = -۳$ ریشه‌های چند جمله‌ای سمت چپ نابرابری باشند.

۶۴۳. k را طوری پیدا کنید که هر دو ریشهٔ معادلهٔ

$$(k-۱)x^۲ - ۲kx + k + ۳ = ۰$$

عددهایی مثبت باشند.

۶۴۴. k را طوری پیدا کنید تا به ازای هر مقدار دلخواه x مقدار سه جمله‌ای

$$(۲k-۱)x^۲+(۷k+۲)x-۳k$$

از مقدار سه جمله‌ای زیر (به ازای همان مقدارهای x) بیشتر باشد:

$$(k+۳)x^۲+۵(k+۱)x-۴(k+۱)$$

۶۴۵. λ چقدر باشد تا به ازای $k>۰$ و هر مقدار دلخواه x نابرابری زیر برقرار شود:

$$\frac{۲kx^۲+۲\lambda x+\lambda}{۴x^۲+۶x+۳}>k$$

۶۴۶. ثابت کنید، اگر a و b و c طول ضلع‌های یك مثلث باشند، برای همهٔ مقدارهای x داریم:

$$bx^۲+(b^۲+c^۲-a^۲)x+c^۲>۰$$

۶۴۷. ثابت کنید (نابرابری بونیا کووسکی):

$$(a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳)^۲\leqslant(a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲)(b_۱^۲+b_۲^۲+b_۳^۲)$$

۶۴۸. a را طوری پیدا کنید که همهٔ ریشه‌های معادلهٔ

$$\frac{x^۲}{x^۲-p^۲}+\frac{x^۲}{x^۲-q^۲}=a$$

حقیقی باشند. درضمن $p\neq ۰$ ، $q\neq ۰$ ، $a\neq ۰$.

این نامعادله‌ها را حل کنید (۶۴۹ تا ۶۵۳):

۶۴۹. $\sqrt{\frac{۳x-۱}{۲-x}}>۱$

۶۵۰. $\sqrt{۳-x}>x-۲$

۶۵۱. $\sqrt{۳x-۵}>\sqrt{x-۴}$

۶۵۲. $\sqrt{x+۶}>\sqrt{x+۱}+\sqrt{۲x-۵}$

۶۵۳. $۴(x-۱)\sqrt{(x+۵)(۳x+۴)}$

این دستگاه‌ها را حل کنید (۶۵۴ تا ۶۵۹):

۶۵۴. $\begin{cases}۳x-۱>x+۳y\\ x(۱-۳x)>۴x-۳x^۲-۲y\end{cases}$

۶۵۵. $\begin{cases}۳x+۲y>۷\\ ۴y+۲x>۳\end{cases}$

۶۵۶. $\begin{cases} ۳x+۲y>۴ \\ x-۶y>-۵ \end{cases}$

۶۵۷. $\begin{cases} ۵x+۳y>۱۲۱ \\ ۷x+۴y=۱۶۸ \end{cases}$

۶۵۸. $\begin{cases} y>x^۲ \\ x>y^۲ \end{cases}$

۶۵۹. $\begin{cases} ۳x+۲y=۶ \\ x^۲+y^۲>۴ \\ xy<۱ \end{cases}$

۶۶۰. ثابت کنید، با شرط $|a|<b$، $-b<a<b$.

۶۶۱. ثابت کنید، با شرط $-b<a<b$ داریم: $|a|<b$.

۶۶۲. ثابت کنید: $|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

۶۶۳. ثابت کنید: $|a-b|\geqslant|a|-|b|$.

۶۶۴. k چقدر باشد تا نابرابری زیر، برای همهٔ مقدارهای x، برقرار باشد:

$$\left|\frac{x^۲-kx-۱}{x^۲+x+۱}\right|<۳$$

۶۶۵. ثابت کنید، برای $a>۰$ و $b>۰$، داریم:

$$\frac{a+b}{۱+a+b}<\frac{a}{۱+a}+\frac{b}{۱+b}$$

۶۶۶. ثابت کنید، برای $a>b>۰$ و $m>n$، داریم:

$$\frac{a^m-b^m}{a^m+b^m}>\frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$$

۶۶۷. ثابت کنید که اگر یک کسر عددی از واحد کوچکتر باشد، با اضافه کردن عددی مثبت به صورت و مخرج آن، بزرگ می‌شود؛ و اگر از واحد بزرگتر باشد، با اضافه‌شدن عددی مثبت به صورت ومخرج آن، کوچك می‌شود.

۶۶۸. ثابت کنید، کسر

$$\frac{a_۱+a_۲+\dots+a_n}{b_۱+b_۲+\dots+b_n}$$

با شرط $b_k>۰$، بین کوچکترین و بزرگترین کسر از کسرهای زیر قرار دارد:

$$\frac{a_۱}{b_۱},\ \frac{a_۲}{b_۲},\dots,\frac{a_n}{b_n}$$

درستی این نابرابری‌ها را ثابت کنید (۶۶۹ تا ۶۷۱):

۶۶۹. $\frac{x^{2}+2}{\sqrt{x^{2}+1}}\geqslant 2$ ۶۷۰. $\left(\frac{x^{2}}{y}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{y^{2}}{x}\right)^{\frac{1}{2}}>\sqrt{x}+\sqrt{y}$؛ $x\neq y$.

۶۷۱. a) $\frac{a_1+a_2}{2}\geqslant\sqrt{a_1a_2}$؛ b) $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\geqslant\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$

($a_1\geqslant 0$، $a_2\geqslant 0$، $a_3\geqslant 0$، $a_4\geqslant 0$).

۶۷۲. عدد مثبت مفروض a را به‌دو بخش چنان تقسیم کنید که حاصل‌ضرب آن‌ها، حداکثر مقدار ممکن شود.

۶۷۳. می‌خواهیم قطعه زمین مستطیل شکلی درنظر بگیریم که از سه طرف به‌وسیلهٔ سیم محصور شود وطرف چهارمش به‌دیوار متصل باشد. اگر ۱۰۰ متر سیم داشته باشیم، ضلع‌های زمین را چه‌اندازه بگیریم تا مساحت آن حداکثر مقدار ممکن شود؟

۶۷۴. از قطاع‌های دایره‌ای با محیط مفروض، قطاعی را پیدا کنید که حداکثر مساحت را داشته باشد.

۶۷۵. پنجره‌ای است به‌شکل مستطیل با نیم‌دایره‌ای در بالای آن. محیط این شکل مفروض است. اندازه‌های آن‌را چگونه انتخاب کنیم تا حداکثر روشنائی را از خود عبور دهد؟

۶۷۶. مخروطی بر کرهٔ مفروض به شعاع R محیط کنید که حجم آن حداقل مقدار ممکن باشد.

۶۷۷. عدد مثبت a را به‌دو عامل مثبت چنان تجزیه کنید که مجموع آن‌ها حداقل مقدارممکن باشد.

۶۷۸. برصفحهٔ کتاب باید متنی چاپ شود که (همراه با فاصله‌های بین سطرها) ۲۱۶ سانتی‌متر مربع را اشغال کند. درکناره‌های بالا و پائین صفحه، ۳ سانتی‌متر و در کناره‌های راست و چپ صفحه ۲ سانتی‌متر جای سفید باید نگه‌داشته شود. اگر تنها به‌صرفه‌جویی کاغذ توجه داشته‌باشیم، چه اندازه‌هایی برای صفحهٔ کتاب، مناسب‌تر است؟

۶۷۹. ثابت کنید ($a، b، c\geqslant 0$):

$$a^{4}+b^{4}+c^{4}\geqslant abc(a+b+c)$$

۶۸۰. اگر a_1، a_2، …، a_n عددهایی غیرمنفی باشند، ثابت کنید:

$$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_3}+\cdots+\sqrt{a_{n-1}a_n}\leqslant\frac{n-1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

۶۸۱. اگر a_1، a_2، …، a_n عددهایی مثبت باشند و داشته باشیم $a_1a_2\cdots a_n=1$،

ثابت کنید:

$$(۱+a_۱)(۱+a_۲)\cdots(۱+a_n)\geqslant ۲^n$$

۶۸۲. باشرط غیرمنفی بودن عددهای $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$، ثابت کنید:

$$\frac{a_۱+a_۲+a_۳}{۳}\geqslant \sqrt[۳]{a_۱a_۲a_۳}$$

۶۸۳. اگر $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n را عددهایی غیرمنفی بگیریم، ثابت کنید:

$$\frac{a_۱+a_۲+\cdots+a_n}{n}\geqslant \sqrt[n]{a_۱a_۲\cdots a_n}$$

۶۸۴. عدد مثبت a را، به مجموع n عدد مثبت چنان تقسیم کنید که حاصل‌ضرب آن‌ها، حداکثر مقدار ممکن باشد.

۶۸۵. در کرهٔ مفروض، استوانه‌ای با حجم حداکثر محاط کنید.

این نابرابری‌ها را ثابت کنید. (۶۸۶ تا ۶۹۱):

۶۸۶. $۲^n>۱+n\sqrt{۲^{n-۱}}$، $(n>۱)$.

۶۸۷. $n!<\left(\frac{n+۱}{۲}\right)^n$، $(n>۱)$.

۶۸۸. $۱+\frac{۱}{۱!}+\frac{۱}{۲!}+\cdots+\frac{۱}{n!}<۳$.

۶۸۹. $۱\times ۱!+۲\times ۲!+\cdots+n.n!<(n+۱)!$.

۶۹۰. $\frac{۱\times ۳\times ۵\times\cdots\times(۲n-۱)}{۲\times ۴\times\cdots\times ۲n}<\frac{۱}{\sqrt{n}}$.

۶۹۱. $\sqrt[n]{۱\times ۲\times ۳\times\cdots\times n}\geqslant\sqrt{n}$.

۶۹۲. حروف‌چین، عددی راکه توان ششم یک عدد طبیعی بود، پخش کرد. رقم‌های این عدد این‌ها بودند: ۰، ۲، ۳، ۴، ۴، ۷، ۸، ۸، ۹. عدد را پیدا کنید.

۶۹۳. a متر مکعب گاز را پشت‌سرهم از n صافی عبور می‌دهیم. هریک از صافی‌ها، $p\%$ حجم کل ناخالصی موجود در گاز را جذب می‌کند. سپس گاز وارد مخزنی می‌شود که در آن b مترمکعب گاز شامل $q\%$ (از نظر حجم) ناخالصی وجود دارد. اگر بخواهیم درصد ناخالصی گاز مخلوط در مخزن از r تجاوز نکند، گاز قبل از تصفیه، چند درصد (از نظر حجم) ناخالصی باید داشته باشد؟

۶۹۴. A روبل با بهرهٔ سالیانهٔ $p\%$ در صندوق پس‌انداز گذشته شده است. صاحب

پس‌انداز در پایان هر سال B روبل برداشت می‌کند. بعد از چندسال، با توجه به برداشت‌های سالیانه، ماندهٔ مبلغ درصندوق پس‌انداز کمتر از سه برابر مبلغ اولیه نیست؟ مسأله با چه شرطهایی جواب دارد؟

۶۹۵. تکه‌ای طلای نشسته، $k\%$ طلای خالص دارد. بعد از هر شست وشو $p\%$ از ناخالصی خود و $q\%$ ازطلای خودرا ازدست می‌دهد. چندبار باید شست‌وشو را ادامه‌داد تا درصد طلای خالص این تکه از r کمتر نباشد؟

۶۹۶. درمخزنی که A لیتر آب دارد، a لیتـر الکل $p\%$ (ازنظر حجم) ریخته‌ایم؛ بعد از راه لولهٔ پایین مخزن، a لیتر ازآمیزه را، که‌کاملاً به‌هم زده‌ایم، خـارج می‌کنیم. این عمل را چندبار تکرار کنیم تا درصد الکل موجود درمخزن، کمتر از $q\%$ نباشد.

۶۹۷. حداقل وحداکثر مقدار این عبارت را پیدا کنید:

$$a\cos x+b\sin x$$

۶۹۸. حداکثر وحداقل مقدار عبارت زیر را پیدا کنید:

$$a\sin^{۲}x+b\sin x\cos x+c\cos^{۲}x \qquad (c\neq a)$$

۶۹۹. اگر A و B و C زاویه‌های یك‌مثلث بازاویه‌های حاده باشند، ثابت‌کنید:

$$\sin^{۲}A+\sin^{۲}B+\sin^{۲}C>۲$$

۷۰۰. نابرابری زیر، برای چه مقدارهایی از x درست است:

$$\frac{\sin ۲x-\cos ۲x+۱}{\sin ۲x+\cos ۲x-۱}>۰$$

۷۰۱. نامعادلهٔ $\sin(\cos x)<۰$ را حل کنید.

۷۰۲. نامعادلهٔ $\lg\sin x\leqslant ۰$ را حل کنید.

۷۰۳. برای چه مقدارهایی از x، مقدار $\cos(\sin x)$ مثبت است؟

۷۰۴. مقدارهایی از x را پیداکنیدکه، به ازای آن‌ها، $\arccos\left(\frac{\pi}{۲}\arcsin x\right)$ معنا داشته باشد.

۷۰۵. نامعادلهٔ $\arcsin\lg x>۰$ را حل کنید.

۷۰۶. مطلوب است حل نامعادلهٔ $\sin\frac{۱}{x^{۲}}>۰$.

۷۰۷. ثابت‌کنید، اگر داشته‌باشیم:

$$۰<\alpha<\frac{\pi}{۲},\ ۰<\beta<\frac{\pi}{۲},\ ۰<\gamma<\frac{\pi}{۲},\ \alpha+\beta+\gamma=\pi$$

آن‌وقت داریم:

$$tg^{۲}\frac{\alpha}{۲}+tg^{۲}\frac{\beta}{۲}+tg^{۲}\frac{\gamma}{۲}\geqslant ۱$$

علامت برابری، درچه حالتی صدق می کند؟

۷۰۸. می‌دانیم : $۰<\alpha, \beta, \gamma<\frac{\pi}{۲}$. ثابت کنید مجموع $\alpha+\beta+\gamma$، وقتی و تنها وقتی حاده است که نابرابری زیر برقرار باشد:

$$tg\,\alpha\, tg\beta+tg\beta\, tg\gamma+tg\,\gamma tg\,\alpha<۱$$

۷۰۹. ثابت کنید، با شرط $۰<\varphi<\pi$، داریم:

$$۱+cotg\,\varphi\leqslant cotg\frac{\varphi}{۲}$$

۷۱۰. α، β و γ زاویه‌های یك مثلث‌اند و γ زاویه‌ای منفرجه است. ثابت کنید:

$$tg\alpha tg\beta<۱$$

۷۱۱. α، β و γ زاویه‌های یك‌مثلث‌اند، ثابت‌کنید:

$$cos^{۲}\alpha+cos^{۲}\beta+cos^{۲}\gamma\geqslant\frac{۳}{۴}$$

۷۱۲. اگر α، β و γ زاویه‌های مثلثی باشند، ثابت کنید:

$$sin\frac{\alpha}{۲}sin\frac{\beta}{۲}\,sin\frac{\gamma}{۲}\leqslant\frac{۱}{۸}$$

۷۱۳. ثابت کنید که ، با شرط $۰<x<\frac{\pi}{۲}$، داریم:

$$sin x<x<tg x$$

۷۱۴. بـا فرض $۰<\alpha<\beta<\frac{\pi}{۲}$، ثابت کنید:

a) $\alpha-sin\alpha<\beta-sin\beta$؛ b) $\alpha-tg\alpha>\beta-tg\beta$.

۷۱۵. باشرط $۰<\alpha<\beta\leqslant\frac{\pi}{۲}$، ثابت کنید:

$$\frac{sin\alpha}{\alpha}>\frac{sin\beta}{\beta}$$

۷۱۶. ثابت کنید که، با فرض $0 < x < \frac{\pi}{2}$، داریم:

$$\sin x > \frac{2}{\pi}x$$

۷۱۷. اگر $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$، ثابت کنید:

$$\frac{tg\,\alpha}{\alpha} < \frac{tg\,\beta}{\beta}$$

X.

عددهای مختلط

۷۱۸. آیا می‌توان گفت: عدد $2+5i$ از عدد $1+4i$ بزرگتر است؟

۷۱۹. آیا عدد $-5i$ منفی است؟

۷۲۰. عدد درست n را طوری پیدا کنید که داشته‌باشیم:

$$(1+i)^n = (1-i)^n$$

۷۲۱. برای چه‌مقدارهای حقیقی x و y، برابری زیر برقرار است:

$$\frac{x+1+(y-3)i}{5+3i} = 1+i$$

۷۲۲. مقدارهای حقیقی x و y را از رابطهٔ زیر پیدا کنید:

$$(x+y)^2 i - \frac{6}{i} - x = -y + 5i(x+y) - 1$$

۷۲۳. جواب‌های حقیقی دستگاه زیر وهمچنین مقدارمختلط پارامتر a را پیدا کنید:

$$\begin{cases} x - i = yi \\ x - i^2 = 2a - y \end{cases}$$

۷۲۴. معادلهٔ $|z| - z = 1 + 2i$ را حل کنید.

۷۲۵. مطلوب است حل معادلهٔ $|z| + z = 2 + i$.

۷۲۶. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

(z_1 و z_2، عددهای مختلط‌اند).

عددهای مختلط زیر را به‌صورت مثلثاتی بنویسید (۷۲۷ تا ۷۲۹):

۷۲۷. $1-\cos\alpha+i\sin\alpha$؛ $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$.

۷۲۸. $1+\sin\alpha+i\cos\alpha$؛ $\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{3\pi}{2}$.

۷۲۹. $1+i\,tg\alpha$؛ $\pi\leqslant\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

نقطه‌های متناظر با عدد مختلط $z=x+iy$، که برای آن‌ها رابطه‌های زیر برقرار باشد، در کجا واقع‌اند (۷۳۰ تا ۳۷۲):

۷۳۰. a) $|z|=2$؛ b) $1<|z|<2$؛

c) $\mathrm{Re}(z^2)=0$*؛ d) $Im(z)>\frac{1}{2}$؛

e) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\leqslant 1$

۷۳۱. a) $arg\,z=\frac{\pi}{3}$؛ b) $\frac{\pi}{3}<arg\,z<\frac{\pi}{2}$.

۷۳۲. a) $x<0$؛ b) $y\geqslant 0$.

۷۳۳. نقطهٔ z، محیط دایرهٔ به شعاع واحد را (روی صفحه)، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌پیماید. دراین‌صورت، نقطهٔ $\bar{z}$ چه مسیری را طی خواهد کرد؟ (z و $\bar{z}$، عددهای مزدوج یکدیگرند.)

۷۳۴. ثابت کنید، قدر مطلق (مدول) حاصل‌ضرب دوعدد مختلط برابر است با حاصل‌ضرب قدر مطلق‌های این‌عددها؛ ولی آوند (آرگومان) حاصل‌ضرب دو عدد مختلط، برابر است با مجموع آوندها.

۷۳۵. ثابت کنید، قدرمطلق خارج قسمت دوعدد مختلط برابر است باخارج قسمت قدرمطلق‌های آن‌ها، ولی آوند خارج قسمت برابر است با تفاضل آوندها.

۷۳۶. دستور مو‌اور را ثابت کنید ($n>0$):

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$$

---

*) نمادهای $Re(z)$، $Im(z)$ و $arg z$، به‌ترتیب به‌معنای بخش حقیقی، بخش موهومی و آرگومان (یا آوند) عدد مختلط z است.

۷۳۷. دستور مواور را برای $n<0$ ثابت کنید:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$$

۷۳۸. قدرمطلق این عدد مختلط را پیدا کنید:

$$\frac{x^2-y^2+2xyi}{xy\sqrt{2}+i\sqrt{x^4+y^4}}$$

با فرض $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$، این عبارت‌ها را محاسبه کنید (۷۳۹ تا ۷۴۱):

۷۳۹. $(a\omega+b\omega^2)(a\omega^2+b\omega)$.

۷۴۰. $(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$.

۷۴۱. $(a+b\omega+c\omega^2)^3+(a+b\omega^2+c\omega)^3$

۷۴۲. $\frac{1}{z^{142}}+z^{142}$ را محاسبه کنید، به‌شرطی که z ریشهٔ معادلهٔ $z+\frac{1}{z}=1$ باشد.

۷۴۳. $\sin(5\arcsin x)$ را برحسب x بیان کنید.

۷۴۴. این مجموع‌ها را پیدا کنید.

(a $\sin x+\sin 2x+\dots+\sin(2n-1)x$

(b $\cos x+\cos 2x+\dots+\cos(2n-1)x$

۷۴۵. ثابت کنید، اگر $\cos\alpha+i\sin\alpha$ جواب معادلهٔ

$$x^n+p_1x^{n-1}+\dots+p_n=0$$

باشد و، درضمن، p_1، p_2، ...، p_n عددهایی حقیقی باشند، آن‌وقت داریم:

$$p_1\sin\alpha+p_2\sin 2\alpha+\dots+p_n\sin n\alpha=0$$

۷۴۶. این مجموع‌ها را محاسبه کنید:

$$S_1=1-C_n^2+C_n^4-C_n^6+\dots;$$
$$S_2=C_n^1-C_n^3+C_n^5-C_n^7+\dots$$

۷۴۷. مطلوب است محاسبهٔ مجموع

$$S=C_n^1-3C_n^3+3^2C_n^5-3^3C_n^7+\dots$$

۷۴۸. ثابت کنید $(k=0, \pm 1, \pm 2,\dots)$:

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{2k\pi+\varphi}{n}+i\sin\frac{2k\pi+\varphi}{n}\right)$$

۷۴۹. ثابت کنید:

$$a)\ \sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{\rho+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\rho-a}{2}}\right);\ b>0$$

$$b)\ \sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{\rho+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\rho-a}{2}}\right);\ b<0$$

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2}$$

۷۵۰. محاسبه کنید: $a)\ \sqrt[3]{i}$ ؛ $b)\ \sqrt{1+i\sqrt{3}}$ ؛ $c)\ \sqrt[5]{1}$.

۷۵۱. ثابت کنید، ریشه‌های معادلهٔ $x^n=1$ را می‌توان این‌طور نوشت:

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ldots,\alpha^{n-1}$$

۷۵۲. ریشه‌های معادلهٔ $x^6=i$ را به‌صورت هندسی نشان دهید.

۷۵۳. معادلهٔ $x^2+(2i-1)x-7-i=0$ را حل کنید.

۷۵۴. مطلوب است حل معادلهٔ $x^2-(3+i)x+3i=0$.

۷۵۵. این معادله را حل کنید:

$$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$$

۷۵۶. مطلوب است مجموع توان‌های p ام همهٔ ریشه‌های معادلهٔ $x^n-1=0$ (p عددی درست و n عدد طبیعی است).

۷۵۷. این معادله را حل کنید:

$$(x+i)^n+(x-i)^n=0$$

(n، عددی درست ومثبت است).

۷۵۸. اگر n عددی درست و مثبت باشد، این معادله را حل کنید:

$$\left(\frac{1+xi}{1-xi}\right)^n=\frac{1+i\,tg\alpha}{1-i\,tg\alpha}$$

XI.

استقرای ریاضی

۷۵۹. ثابت کنید، درتصاعد حسابی با جملهٔ عمومی a_n وقدرنسبت d داریم:

$$a_n=a_۱+d(n-۱)$$

۷۶۰. ثابت کنید در تصاعد هندسی با جملهٔ عمومی a_n و قدرنسبت q داریم:

$$a_n=a_۱q^{n-۱}$$

درستی این برابری‌ها را ثابت کنید (۷۶۱ تا ۷۶۸):

۷۶۱. $A_m^n=m(m-۱)\cdots(m-n+۱)$

۷۶۲. $P_n=۱\cdot۲\cdot۳\cdots n=n!$

۷۶۳. $C_m^n=\dfrac{m(m-۱)\cdots(m-n+۱)}{۱\cdot۲\cdot۳\cdots n}$

۷۶۴. $(a_۱+a_۲+\cdots+a_n)^۲=a_۱^۲+a_۲^۲+\cdots+a_n^۲+$

$$+۲(a_۱a_۲+a_۱a_۳+\cdots+a_{n-۱}a_n)$$

۷۶۵. $\dfrac{۱^۲}{۱\cdot۳}+\dfrac{۲^۲}{۳\cdot۵}+\cdots+\dfrac{n^۲}{(۲n-۱)(۲n+۱)}=\dfrac{n(n+۱)}{۲(۲n+۱)}$

۷۶۶. $۱^۴+۲^۴+\cdots+n^۴=\dfrac{۱}{۳۰}n(n+۱)(۲n+۱)(۳n^۲+۳n-۱)$

۷۶۷. $۱^۵+۲^۵+\cdots+n^۵=\dfrac{۱}{۱۲}n^۲(n+۱)^۲(۲n^۲+۲n-۱)$

۷۶۸. $tg\,x+\dfrac{۱}{۲}tg\dfrac{x}{۲}+\cdots+\dfrac{۱}{۲^n}tg\dfrac{x}{۲^n}=\dfrac{۱}{۲^n}cotg\dfrac{x}{۲^n}-۲cotg\,۲x$

۷۶۹. $\sqrt{\underbrace{۴+\sqrt{۴+\sqrt{۴+\cdots+\sqrt{۴}}}}_{n\text{ بار}}}<۳$

۷۷۰. $(۱+a)^n>۱+na$ ؛ $a>-۱$، $a\neq۰$ و n عددی طبیعی و بزرگتر از واحد.

۷۷۱. ثابت کنید که ضلع منتظم محاط در دایرهٔ به‌شعاع R را می‌توان با این رابطه بیان کرد:

$$a_{۲^n}=R\sqrt{۲-\sqrt{۲\underbrace{+\sqrt{۲}+\cdots+\sqrt{۲}}_{(n-۲)\text{ بار عدد ۲}}}}$$

۷۷۲. ثابت کنید n خط راست واقع بر یك صفحه که از یك نقطه گذشته‌اند، این صفحه را به $۲n$ بخش تقسیم می‌کنند.

۷۷۳. ثابت کنید، مجموع همهٔ جمله‌های هرسطر افقی از جدول

۱										
۲	۳	۴								
۳	۴	۵	۶	۷						
۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰				
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

برابر است با مجذور یك عدد فرد.

۷۷۴. n خط راست مختلف در یك صفحه قرار دارند و آن را به چند بخش تقسیم کرده‌اند. ثابت کنید این بخش‌های صفحه را می‌توان با رنگ‌های قرمز و آبی طوری رنگ کرد که هیچ دو بخش مجاور (یعنی دو بخشی که در یك پاره‌خط مشترك‌اند) به یك رنگ نباشند.

.XII

بررسی تابع‌ها و رسم نمودارها

حوزهٔ تعریف (یا دامنهٔ) هریك از تابع‌های زیر را پیدا کنید (۷۷۵ تا ۷۸۱):

۷۷۵. a) $y=\sqrt{۲-x^۲}$ ؛ b) $y=\sqrt{x^۲-۴}$ ؛ c) $y=\sqrt{\frac{x+۱}{x+۳}}$ ؛

d) $y=\sqrt{x(x+۲)(x-۳)(x-۴)}$ ؛ e) $y=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+۱}-\sqrt{x-۱}}$ ؛

f) $y=\sqrt{x-۲\sqrt{x-۱}}$.

۷۷۶. a) $y=\sqrt{۲-۲^{-x}}$ ؛ b) $y=\frac{۱}{۱+۳^{\frac{۱}{x-۱}}}$ ؛ c) $y=x^x$ ؛

d) $y=x^{-\pi}$

۷۷۷. a) $y=log(x^۲-۱)$ ؛ b) $y=log(x+۱)+log(x-۱)$ ؛

c) $y=\log(x^2-3x+2)$؛ d) $y=\sqrt{\log_2(x-1)}$.

۷۷۸. a) $y=\begin{cases} x\log x & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$؛ b) $y=\begin{cases} \frac{1}{2}x\log x^2 & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$؛

۷۷۹. a) $y=\frac{1}{\sin^2 x}$؛ b) $y=\sqrt{\sin 4x}$؛ c) $y=\sin\frac{1}{x^2}$؛
d) $y=\sqrt{tg^2 x-(\sqrt{3}+1)tg x+\sqrt{3}}$.

۷۸۰. a) $y=\sqrt{\log_a \sin x}$؛ b) $y=lg\, lg\, tg\, x$؛
c) $y=\cos(1/5+\sin x+\cos x)$.

۷۸۱. a) $y=arc\cos\frac{3}{x}$؛ b) $y=arc\sin\frac{2x}{1+x^2}$؛
c) $y=arc\sin(arc\sin x)$.

دورهٔ تناوب این تابع‌ها را پیدا کنید (۷۸۲ تا ۷۸۳):

۷۸۲. a) $y=\sin 3x$؛ b) $y=\cos\frac{x}{4}$؛ c) $y=tg 3x+2\, cotg\, 2x$؛
d) $y=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{3}$؛ e) $y=\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}$.

۷۸۳. a) $y=\sin 2\pi x$؛ b) $y=\sin\sqrt{2x}+\cos\sqrt{3x}$.

این تابع‌ها را بررسی و نمودارآن‌ها را رسم کنید (۷۸۴ تا ۸۱۲):

۷۸۴. $y=x^4-2x^2+2$

۷۸۵. $y=(x-k)^2, k-1\leqslant x\leqslant k+1$ و $k=0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots$

۷۸۶. $y=|x|$ ۷۸۷. $y=|x+2|$

۷۸۸. $y=|x-1|+|x-2|$ ۷۸۹. $y=-x|x|$

۷۹۰. $y=|x^2-1|$ ۷۹۱. $y=|x^2-3x+2|$

۷۹۲. $y=\frac{1}{1+x^2}$ ۷۹۳. $y=\frac{x}{1+x^2}$

۷۹۴. $y=\log_2(-x)$ ۷۹۵. $y=\log_2|x|$

۷۹۶. $y=|\log_2 x|$ ۷۹۷. $y=2\sin 2x$

۷۹۸. $y=-\sin\frac{x}{۲}$ ۸۹۹. $y=\sin۴x+\cos۴x$

۸۰۰. $y=\sin|x|$

۸۰۱. $y=|\sin x|$ ۸۰۲. $y=x+\sin x$

۸۰۳. $y=arc\sin(\sin x)$ ۸۰۴. $y=arc\cos(\cos x)$

۸۰۵. $y=Arc\cos(\cos x)$ ۸۰۶. $y=arc\,tg(tg x)$

۸۰۷. $\left(\frac{۲\pi-۱}{۲}\pi\right)$ $y=\frac{۲x-۱}{۲}-\frac{۱}{\pi}arc\,tg$، به شرطی که x عدد درستی نباشدو $y=x$، به‌شرطی که x عدد درستی باشد.

۸۰۸. $y=arc\sin\sqrt{۱-x}+arc\sin\sqrt{x}$.

۸۰۹. $y=arc\,tg\,x-arc\,cotg\frac{۱}{x}$.

۸۱۰. $y+arc\,tg x+arc\,tg\frac{۱-x}{۱+x}$. ۸۱۱. $y=arc\cos\frac{۱-x^{۲}}{۱+x^{۲}}$.

۸۱۲. $y=arc\cos(۲x^{۲}-۱)+۲\,arc\sin x$

۸۱۳. اگر نمودار تابع $y=f(x)$ در اختیار باشد، نمودار تابع $y=|f(x)|$ را چگونه می‌توان به‌دست‌آورد؟

۸۱۴. به‌شرطی که نمودارتابع $y=f(x)$ معلوم باشد، نمودارتابع $y=(f|x|)$ را چگونه می‌توان به‌دست‌آورد؟

نقطه‌هایی از صفحه را پیدا کنید که مختصات آن‌ها در معادله‌های زیر صدق کنند (۸۱۵ تا ۸۱۸):

۸۱۵. $xy=۰$. ۸۱۶. $|x-۲|=۱$. ۸۱۷. $x^{۲}=y^{۲}$.

۸۱۸. $|۲y-۱|+|۲y+۱|+\frac{۴}{\sqrt{۳}}|x|=۴$.

نقطه‌هائی از صفحه را پیدا کنیدکه مختصات آن‌ها در نامعادله‌های زیرصدق کنند (۸۱۹ تا ۸۲۸):

۸۱۹. $x>\frac{۱}{۲}$ ۸۲۰. $|x|<۳$

۸۲۱. $x+y+1>0$

۸۲۲. $\begin{cases} y-2x+1<0 \\ y-x-3>0 \end{cases}$

۸۲۳. $\begin{cases} 2x+y-2>0 \\ x-y<0 \\ 2y-x-2<0 \end{cases}$

۸۲۴. $|x+y|\leqslant 1$

۸۲۵. $|x|+|y|\leqslant 1$

۸۲۶. $\big||x+1|-|y-1|\big|<1$

۸۲۷. $y^2-x^2<0$

۸۲۸. $\begin{cases} y-x^2>0 \\ y-x<0 \end{cases}$

به کمك نمودار، تعداد ریشه‌های حقیقی این معادله‌ها را پیدا کنید (۸۲۹ تا ۸۳۳):

۸۲۹. $\sin x = x$

۸۳۰. $2^x = x+2$

۸۳۱. $2x^3-6x^2+1=0$

۸۳۲. $tg\, x = x$

۸۳۳. $\sin x = \frac{1}{x}$

۸۳۴. این دستگاه را به کمك نمودار حل کنید:

$$x^2+y=10 \text{ ،} \quad x+y^2=4$$

.XIII

مساله‌هایی از هندسهٔ مسطحه

این قضیه‌ها را ثابت کنید (۸۳۵ تا ۸۶۹):

۸۳۵. مثلثی که دو ارتفاع برابر داشته باشد، متساوی‌الساقین است.

۸۳۶. مثلثی که دومیانهٔ برابر داشته باشد، متساوی‌الساقین است.

۸۳۷. مثلثی که دونیمساز برابر داشته باشد، متساوی‌الساقین است.

۸۳۸. اگر یکی از نیمسازهای مثلث منطبق برمیانهٔ آن باشد، مثلث مفروض متساوی‌الساقین است.

۸۳۹. اگر یك زاویه، ضلع مجاور به این زاویه ومجموع دوضلع دیگر از مثلثی با جزءهای نظیر خود درمثلث دیگری برابر باشند، دومثلث باهم برابرند.

۸۴۰. اگر در دومثلث محیط و دوزاویه از یکی با محیط و دو زاویه ازدیگری برابر باشند، دومثلث برابرند.

۸۴۱. ذوذنقه‌ای که دوقطر برابر داشته باشد، متساوی الساقین است.

۸۴۲. اگردریك شش‌ضلعی،هردوضلع رو به‌رومساوی وموازی باشند، آن‌وقت، سه‌قطری که رأس‌های روبه‌رو را به‌هم وصل می‌کنند، ازیك نقطه می‌گذرند.

۸۴۳. مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ دلخواه ازمحیط دایره تا دوضلع نزدیك به آن ازمثلث متساوی‌الاضلاع محاط دراین دایره، برابر است با فاصلهٔ همین نقطه تا ضلع سوم مثلث.

۸۴۴. اگر پای ارتفاع‌های یك مثلث با زاویه‌های حاده را به‌هم وصل کنیم، مثلثی به دست می‌آید (مثلث ارتفاعیه) که نیمسازهای زاویه‌های آن، همان ارتفاع‌های مثلث مفروض‌اند.

۸۴۵. ازبین همهٔ مثلث‌هائی که در یك ضلع و زاویهٔ روبه‌روی به‌آن ضلع، برابر باشند، مثلث متساوی‌الساقین دارای محیط بزرگتری است.

۸۴۶. اگر در یك شش‌ضلعی، هر دوضلع روبه‌رو موازی و سه قطری که راس‌های روبه‌رورا به‌هم وصل می‌کنند، برابرباشند، آن‌وقت می‌توان این شش ضلعی را دریك دایره محاط کرد.

۸۴۷. دو دایره‌ای که هر یك ازآن‌ها از محل برخورد ارتفاع‌ها و دو راس یك مثلث عبورکرده باشند، قطرهایی برابر دارند.

۸۴۸. خط راستی که‌پای دوارتفاع ازمثلث با زاویه‌های حاده‌را به‌هم وصل‌می‌کند، از مثلث مفروض، مثلثی متشابه با آن جدا می‌کند.

۸۴۹. مثلث‌های با ضلع‌های متناظر موازی، باهم متشابهند.

۸۵۰. نسبت شعاع‌های دودایره‌ای که بر دومثلث متشابه محیط شده‌اند، برابر نسبت دوضلع متناظر مثلث‌هاست.

۸۵۱. اگر از نقطهٔ C خط‌راستی بگذرانیم که دایرهٔ مفروض را درنقطه‌های A و B قطع کند و پاره‌خط CD چنان باشد که نقطهٔ D روی محیط دایره قرار گیرد و درضمن داشته باشیم: $CA \cdot CB = CD^۲$، آن‌وقت، خط‌راست CD بردایرهٔ مفروض مماس است.

۸۵۲. اگر از نقطه‌ای به فاصلهٔ a از یك خط‌راست، دو مایل طوری رسم کنیم که تصویرهای آن‌ها برخط راست برابر $۲a$ و $۳a$ شود، آن‌وقت، مجموع دوزاویه‌ای که این مایل‌ها با تصویرهای خود تشکیل می‌دهند، برابر ۴۵ درجه می‌شود.

۸۵۳. اگر دریك چهارضلعی، وسط دوضلع نـاموازی را به وسیلهٔ پاره‌خطی به‌هم وصل کنیم و بدانیم که طول این پاره‌خط برابر است با نصف مجموع طول‌های دو ضلع دیگر چهارضلعی، آن‌وقت، این چهارضلعی یك ذوزنقه است.

۸۵۴. اگر وسط قاعدهٔ مثلثی را بـه‌وسط پاره‌خطی از ارتفاع که درفاصلهٔ رأس تا محل برخورد ارتفاع‌ها قرار دارد، وصل کنیم، پاره‌خطی برابر باشعاع دایرهٔ محیطی مثلث به‌دست می‌آید.

۸۵۵. مماس‌هایی که از راس‌های یك مستطیل، بردایرهٔ محیطی مستطیل رسم کنیم، تشکیل یك لوزی می‌دهند.

۸۵۶. خط راستی که از پای دوارتفاع از مثلثی عبور می‌کند، برخط راستی که از رأس سوم و مرکز دایرهٔ محیطی همان مثلث عبورکند، عمود است.

۸۵۷. نیمسازهای دوزاویـه‌ای کـه از ادامهٔ ضلع‌های روبـه‌رو دریك چهارضلعی محاطی به‌دست می‌آیند، برهم عمودند.

۸۵۸. قطر دایرهٔ محاط دریك مثلث قائم‌الزاویه، برابر است با تفاضل بین مجموع دو ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه و وتر آن.

۸۵۹. وسط‌دوقاعدهٔ ذوزنقه ومحل برخورد قطرهای‌آن، بریك‌خط راست واقع‌اند.

۸۶۰. اگر ازنقطهٔ P، واقع دربیرون دایـره، دومماس PA و PB را براین دایره رسم‌کنیم (A و B، نقطه‌های تماس‌اند)، آن‌وقت، پاره‌خط عمود AC، که ازنقطهٔ A برقطر BD رسم شده‌است، پاره‌خط PD را نصف می‌کند. نقطهٔ C، پای عمود ونقطهٔ D، نقطه‌ای ازمحیط دایره است.

۸۶۱. فاصلهٔ هرنقطه ازمحیط دایره تاوتری ازآن دایره، برابراست‌با واسطهٔ هندسی فاصله‌های همین نقطه تا دومماسی که از دوانتهای وتر بردایره رسم شده‌اند.

۸۶۲. مرکزدایرهٔ محیطی‌مثلث، نقطهٔ برخورد ارتفاع‌های‌آن ومرکزثقل (گرانیگاه) مثلث، روی یك خط‌راست قراردارند.

۸۶۳. اگـرخط‌راست موازی بـا دوقاعدهٔ ذوزنقه‌ای ازمحل برخورد قطرهای آن بگذرد، آن‌وقت، پاره‌خطی ازاین خط راست که به‌وسیله دوساق ذوزنقه‌جدا شده است، در نقطه برخورد خود با قطرها، نصف می‌شود.

۸۶۴. نقطه‌های وسط قطرهای یك چهارضلعی محیطی و مرکز دایرهٔ محاطی آن، بر یك خط راست واقع‌اند.

۸۶۵. ازبین همهٔ‌مثلث‌هایی که دریك ضلع وزاویهٔ روبه‌روی به‌آن‌ضلع برابرباشند، مثلث متساوی‌الساقین، دارای حداکثرمساحت است.

۸۶۶. اگر درمثلث متساوی‌الساقین ABC، نیم‌دایره‌ای را محاط‌کنیم که قطرآن بر

قاعدهٔ AC قرار گیرد، و اگر خط راستی مماس بر این نیم دایره رسم کنیم تا ضلع‌های AB و BC را به‌ترتیب در نقطه‌های M و N قطع کند، آن‌وقت، حاصل‌ضرب $AM \cdot CN$، مقداری است ثابت.

۸۶۷. اگر نقطه‌های A و B، محل برخورد دو دایره، دو قاطع MAN و PBQ را رسم کنیم، به‌نحوی که یکی از دایره‌ها را در نقطه‌های M و P و دایرهٔ دیگر را در نقطه‌های N و Q قطع کنند، آن‌وقت، خط‌های راست MP و NQ باهم موازی‌اند.

۸۶۸. حاصل‌ضرب قطرهای یك چهارضلعی محاطی، برابراست با مجموع حاصل‌ضرب‌های ضلع‌های روبه‌رو.

۸۶۹*. در هرمثلث قائم‌الزاویه، مکعب وتر بزرگتر است ازمجموع مکعب‌های دو ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه.

۸۷۰. اگر شعاع‌های دودایرهٔ محیطی و محاطی یك مثلث، به‌ترتیب برابر R و r باشند ($R>r$)، مطلوب است فاصلهٔ بین مرکزهای این دودایره.

۸۷۱. ثابت کنید، طول شعاع دایرهٔ محاطی یك مثلث، از نصف طول شعاع دایرهٔ محیطی همین مثلث، تجاوز نمی‌کند.

۸۷۲. مرکز دایرهٔ محاطی یك مثلث، به‌کدام یك از راس‌های آن نزدیك‌تر است؟

۸۷۳. کدام میانهٔ مثلث، کوچکترین است؟

۸۷۴. آیا یك چندضلعی محاطی که دارای ضلع‌های برابر باشد، منظم است؟

۸۷۵. آیا یك چندضلعی محیطی که ضلع‌های برابر داشته باشد، منظم است؟

۸۷۶. با کدام چندضلعی‌های منظم مساوی، می‌توان صفحه را فرش کرد؟

۸۷۷. رأس B ازمثلث ABC را طوری جابه‌جا می‌کنیم که‌طول میانهٔ AD بی‌تغییر بماند؛ ضلع AC هم ثابت است. مکان هندسی نقطهٔ B را پیدا کنید.

۸۷۸. A و B دونقطهٔ ثابت از محیط یك دایره و M نقطهٔ متحرکی از محیط همان دایره است. روی امتداد پاره‌خط AM و در بیرون دایره، پاره‌خط $MN=MB$ را جدا می‌کنیم. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ N.

۸۷۹. مطلوب است مکان هندسی رأس‌زاویهٔ قائمه ازمثلث‌های قائم‌الزاویهٔ برابری که دورأس دیگر آن روی ضلع‌های زاویهٔ قائمه ثابت دیگری می‌لغزند.

۸۸۰. دایره‌ای درنقطهٔ A برخط راستی مماس است. دایرهٔ دیگری برهمین خط راست درنقطهٔ B و بردایرهٔ اول درنقطهٔ M مماس است مکان هندسی نقطهٔ M را پیدا کنید.

۸۸۱. مطلوب است مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دوخط راست مفروض، مقدار ثابتی باشد.

۸۸۲. از نقطه‌ای واقع دربیرون دایره، یك قاطع، و از نقطه‌های برخورد آن با دایره، دومماس رسم کرده‌ایم. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ برخورد دومماس.

۸۸۳. از نقطهٔ D واقع بر ضلع BC از مثلث ABC، همهٔ خط‌های راستی را رسم کرده‌ایم که ضلع‌های AC و AB و یا امتداد آن‌ها را به‌ترتیب در نقطه‌های E و F قطع کنند. مطلوب است مکان هندسی نقطه‌های برخورد دایره‌های محیطی دومثلث CDE و BDF.

۸۸۴. روی ضلع‌هـای زاویهٔ قائمهٔ بـه‌رأس O، پاره‌خط‌های OA و OB را برابر یکدیگر جدا کرده‌ایم. از نقطه‌های A و B، دوخط راست موازی با دوخط راست مفروض عمود برهم رسم کرده‌ایم تا یکدیگر را در M قطع کنند. اگر زاویهٔ قائمه دورنقطه O، یعنی رأس خودش، دوران کند، مکان هندسی نقطهٔ M را پیدا کنید.

۸۸۵. یك شش‌ضلعی منتظم، دردایره‌ای محاط شده است. تنها بااستفاده ازخط‌کش، $\frac{1}{n}$ شعاع دایره، R، را پیدا کنید؛ n را برابر ۲، ۳، ۴ و ۵ بگیرید.

۸۸۶. روی خط راست مفروض، نقطه‌ای پیدا کنید که مجموع فاصله‌های آن تا دو نقطهٔ مفروض، حداقل مقدار ممکن باشد.

۸۸۷. دونقطهٔ A و B و، بین آن‌هـا، دو خط راست موازی MN و PQ داده شده است. بین دوخط موازی و درجهت مفروض، پاره‌خط CD را طوری رسم کنید که‌مجموع $AC+CD+DB$، حداقل مقدار ممکن باشد.

۸۸۸. نقطه‌ای در درون زاویهٔ حاده‌ای داده شده است. مثلثی رسم کنید که یك راس آن درنقطهٔ مفروض و دوراس دیگرش روی دوضلع زاویهٔ مفروض بـاشد وکمترین محیط را داشته باشد.

۸۸۹. ازسه‌نقطهٔ مفروض، خط‌های راستی موازی باهم، به‌نحوی رسم کنید که فاصلهٔ بین آن‌ها، باهم برابر باشد.

۸۹۰. روی امتداد قطر یك دایره، نقطه‌ای پیدا کنید که اگرازآن‌جا مماسی بردایره رسم کنیم، طولی برابر قطر داشته باشد.

۸۹۱. سه دایره به‌مرکز هریك از سه‌راس مثلث طوری رسم کنید که هرکدام ازآن بردوتای دیگر، مماس بیرونی باشد.

۸۹۲. مثلثی را رسم کنید که ازآن، ضلع c، ارتفاع h_b و میانهٔ m_a داده شده باشد.

۸۹۳. مثلثی را رسم کنید که پای سه ارتفاع آن داده شده است.

۸۹۴. دو دایرهٔ هم مـرکز مفروض‌اند. قاطعی چنان رسم کنید که از دایرهٔ بزرگتر، وتری دوبرابر وتر دایرهٔ کوچکتر جدا کند.

۸۹۵. روی ضلع زاویـهٔ مفروض، نقطه‌ای پیدا کنید کـه ازضلع دوم زاویه و نقطهٔ مفروضی واقع دردرون زاویه، به‌یك فاصله باشد.

۸۹۶. دریك قطعه دایره، مربعی محاط کنید که یك ضلع آن بروتر (یعنی قاعدهٔقطعه)

واقع باشد.

۸۹۷. پاره خطی موازی با قاعدهٔ ذوزنقه طوری رسم کنید که به وسیلهٔ قطرها، به سه قسمت برابر تقسیم شود.

۸۹۸. دایـره‌ای رسم کنید که از دونقطهٔ مفروض بگذرد و برخط راست مفـروض مماس باشد.

۸۹۹. ذوزنقه‌ای را، تنها با استفاده از خط کش، به دوبخش هم‌ارز تقسیم کنید.

۹۰۰. تنها با استفاده از خط کش، متوازی‌الاضلاع مفروض را، بـه دو بخش چنان تقسیم کنید که نسبت مساحت‌های آن‌ها، برابر ۲ : ۱ باشد.

۹۰۱. مثلث مفروضی را به مثلث دیگری هم ارز آن تبدیل کنید، به نحوی که قاعدهٔ آن مفروض ویکی از زاویه‌هـای مجاور به قاعده‌اش، با زاویـهٔ نظیر در مثلث مفـروض برابر باشد.

۹۰۲. روی خط راست مفروض، نقطه‌ای را چنان پیدا کنید کـه قدر مطلق تفاضل فاصله‌های آن از دونقطهٔ مفروض واقع دریك طرف خط راست، حداقل مقدار ممکن باشد؛ همچنین نقطه‌ای پیدا کنید که برای آن، این تفاضل، حداکثر مقدار ممکن باشد.

۹۰۳. طول قاعده‌های ذوزنقه‌ای، برابر است با a و b. پاره خطی را رسم کنید که طول آن برابر با فاصلهٔ بین وسط‌های دوقطر باشد.

۹۰۴. در مثلثی که طول ضلع‌های آن a ، b و c می‌باشد، دایره‌ای محاط کرده‌ایم ازنقطه‌ای واقع برمحیط دایره، مماسی برآن رسم کرده‌ایم تـا دوضلع اول را قطع کند و مثلث را به یك مثلث ویك چهار ضلعی تقسیم کند. مطلوب است محیط این مثلث.

۹۰۵. درمثلثی دایره‌ای محاط شده است. نقطه‌های تماس این دایره با دوضلع مثلث این ضلع‌ها را به‌نسبت‌های $\frac{m}{n}$ و $\frac{p}{q}$ تقسیم کرده است. مطلوب است نسبت ضلع‌های مثلث.

۹۰۶. روی یك پاره خط و روی دوبخش نابرابر آن، نیم دایره‌هایی دریك طرف ساخته‌ایم. اگر شعاع نیم دایره‌های کوچکتر، به ترتیب، R و r باشد، مطلوب است شعاع دایره‌ای که براین سه نیم دایره مماس است.

۹۰۷. مساحت‌مثلث ABC برابراست با S. نقطه‌های M ، N و P را روی‌ضلع‌های AB ، BC و CA طوری انتخاب کرده‌ایم که داریم:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{۱}{۴};\quad \frac{BN}{NC}=\frac{۱}{۴};\quad \frac{CP}{PA}=\frac{۱}{۴}$$

مطلوب است‌مساحت مثلثی که به‌پاره خط‌های راست AN ، BP و CM محدود شده‌باشد.

۹۰۸. در مثلث به ضلع‌های a ، b و c ، دایره‌ای محاط کرده‌ایم. نقطه‌های تماس این دایره با ضلع‌های مثلث را به هم وصل کرده‌ایم تا مثلث جدیدی به دست آید. طول ضلع‌های مثلث جدید را پیدا کنید.

۹۰۹. پای ارتفاع‌های مثلث به ضلع‌های a ، b و c را به هم وصل کرده‌ایم تا مثلث تازه‌ای به دست آید. مطلوب است محیط مثلث جدید. ثابت کنید، محیط برابر است با $\frac{8S^2}{abc}$؛ S ، مساحت مثلث مفرض است.

۹۱۰. اگر شعاع دایرهٔ محیطی یك مثلث قائم‌الزاویه برابر R و مساحت این مثلث برابر S باشد، مطلوب است شعاع دایرهٔ محاطی مثلث.

۹۱۱. درمثلث با ضلع‌های k ، l و m دایره‌ای محاط کرده‌ایم. مماسی بر دایره رسم کرده‌ایم که طول پاره‌خطی از آن که بین نقطه‌های برخورد مماس با دوضلع اول قرار دارد، برابر a شده است . مطلوب است مساحت مثلثی که این مماس از مثلث مفروض جدا کرده است.

۹۱۲. با رسم خط راستی که از رأس زاویهٔ قائمه گذشته و بروتر مثلث قائم‌الزاویه عمود شده است، مثلث مفروض را به دومثلث تقسیم کرده‌ایم. دراین دومثلث، دایره‌هایی به شعاع‌های r_1 ، r_2 محاط کرده‌ایم. مطلوب است شعاع دایرهٔ محاطی مثلث مفروض.

۹۱۳. دودایره به‌شعاع‌های R و r مفروض‌اند. مماس‌های مشترك داخلی این دودایره برهم عمودند. مطلوب است مساحت مثلثی که این مماس‌ها، با یکی از مماس‌های مشترك خارجی دودایره تشکیل می‌دهند.

۹۱۴. ضلع‌های ناموازی ذوزنقه‌ای را امتداد داده‌ایم تا به هم برسند و از نقطهٔ برخورد، خط راستی موازی با قاعدهٔ ذوزنقه گذرانده‌ایم. مطلوب است طول پاره‌خطی از خط راست اخیر که به وسیلهٔ امتداد دوقطر محدود می‌شود. طول دوقاعدهٔ ذوزنقه برابر است با a و b.

۹۱۵. از نقطهٔ برخورد قطرهای ذوزنقه‌ای با قاعده‌های a و b، خط راستی موازی با دوقاعده کشیده‌ایم. طول پاره خطی از این خط راست را پیدا کنید که به وسیلهٔ دوساق ذوزنقهٔ محدود شده است.

۹۱۶. قطاعی با زاویهٔ قائمه وشعاع R را به وسیلهٔ کمانی با همین شعاع وبه مرکز انتهای کمان قطاع تقسیم کرده‌ایم. مطلوب است شعاع دایره‌ای که در بخش کوچکتر از این دوبخش، محاط شده است.

۹۱۷. دودایره به شعاع‌های r_1 و r_2 درنقطهٔ C بر هم مماس‌اند. خط راست AB، مماس مشترك خارجی آن‌ها را رسم کرده‌ایم (A و B، نقطه‌های تماس‌اند). طول ضلع‌های

مثلث ABC را پیدا کنید.

۹۱۸. دودایرهٔ به‌شعاع‌های Rوr، مماس خارجی‌اند. مطلوب است فاصلهٔ نقطهٔ‌تماس تا خط راست مماس مشترك خارجی آن‌ها.

۹۱۹. دودایرهٔ به شعاع‌های R و r مماس خارجی‌اند. شعاع دایره‌ای را پیدا کنید که براین دودایره و مماس مشترك خارجی آن‌ها مماس باشد.

۹۲۰. سه دایره به شعاع‌های a ، b و c، دو به دو وازبیرون برهم مماس‌اند.مطلوب است طول وتری ازدایرهٔ سوم که به‌وسیلهٔ مماس مشترك داخلی دو دایرهٔ اول پدید می‌آید.

۹۲۱. دایره‌ای را برمربعی به ضلع a محیط وسپس، دریکی ازقطعه‌هایی‌که به‌دست می‌آید مربعی محاط کرده‌ایم. طول ضلع مربع جدید را پیداکنید.

۹۲۲. دودایرهٔ به شعاع‌های R و r از بیرون درنقطهٔ M برهم مماس‌اند. ازنقطهٔ M، قطر دایره به شعاع r را رسم می‌کنیم وانتهای دیگر آن را N می‌نامیم. از N مماسی بر دایره r رسم می‌کنیم. مطلوب است شعاع دایره‌ای‌که بر دودایرهٔ مفروض و مماس درنقطهٔ N مماس است.

۹۲۳. قطاع AOB با زاویهٔ قائمه و شعاع R داده شده است. خطی راستی موازی با وتر AB وبه فاصلهٔ m ازآن‌رسم کرده‌ایم تا امتداد شعاع‌های AO و OB را درنقطه‌های C و D وکمان قطاع را درنقطه‌های E و F قطع‌کند. ازنقطهٔ E، نزدیك به C، عمود EM را بر CD رسم می‌کنیم تا OA را در M قطع کند. ثابت‌کنید، طول پاره خط DM به‌m بستگی ندارد ومقدار آن را به دست‌آورید.

۹۲۴. با معلوم‌بودن دو ضلع a و b از مثلثی، مطلوب است ضلع سوم‌آن، به‌شرطی که بدانیم، میانه‌های وارد بر این دوضلع، برهم عمودند.

۹۲۵. دایره‌ای از یك نقطهٔ واقع برمحیط، دووتر به طول‌های a و b رسم‌کرده‌ایم ومی‌دانیم‌که فاصلهٔ نقطهٔ وسط وتر اول، تا وتـر دوم ، برابر است با d. شعاع دایـره را پیداکنید.

۹۲۶. از مرکزهای دودایرهٔ مساوی و مماس برهم به شعاع r دایرهٔ دیگری به‌شعاع ۲r گذرانده‌ایم. ازنقطه‌ای واقع برمحیط دایرهٔ اخیر، دایره‌ای بگذرانید کـه بر دودایرهٔ اول مماس باشند. شعاع این دایره را پیداکنید.

۹۲۷. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، به رأس زاویهٔ قائمهٔ A، مفروض است. از A عمود AK را بر وتر، و از K عمودهای KP و KT را برضلع‌های AB و AC رسم کرده‌ایم. می‌دانیم: $BP=m$ و $CT=n$. طول وتر را پیدا کنید.

۹۲۸. مساحت مثلث ABC برابر S_1 ومساحت مثلث AHB (H، محل برخـورد

ارتفاع‌ها) برابر S_2 است. مطلوب است مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ ABL، به شرطی که نقطهٔ L، بر پاره‌خط CH یا امتداد آن واقع باشد.

۹۲۹. دوضلع از مثلث با زاویه‌های حاده‌ای، به ترتیب ۲۰ سانتی‌متر و ۲۳/۲ سانتی‌متر است. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث برابر است با ۱۴/۵ سانتی‌متر. شعاع دایره محاطی مثلث را پیدا کنید.

۹۳۰. ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمه ازمثلث قائم‌الزاویه‌ای برابرند با ۳ و ۴. از وسط ضلع کوچکتر و وسط وتر، دایره‌ای مماس بر وتر گذرانده‌ایم. مساحت این دایره را پیدا کنید.

۹۳۱. دودایرهٔ برابر، با شعاع‌های r، یکدیگر را قطع کرده‌اند. دربخش مشترك دو دایره، مربعی محاط کرده‌ایم. مطلوب است طول ضلع این مربع، به شرطی که فاصلهٔ بین مرکزهای دو دایره برابر r باشد.

۹۳۲. مربعی به ضلع $2a$ مفرض است. دونیم دایره روی دوضلع مجاور این مربع و درحوزهٔ بیرون مربع رسم کرده‌ایم و، سپس، دو مماس براین نیم دایره‌ها، موازی با قطر خودشان کشیده‌ایم. مطلوب است شعاع دایره‌ای که بردونیم دایره و این دو خط مماس، مماس باشد.

۹۳۳. از دورأس مجاور یك مربعی، دایره‌ای چنان رسم کرده‌ایم که طول مماسی که از رأس سوم مربع برآن رسم شود، برابر با دوبرابر طول ضلع مربع باشد. مطلوب است شعاع این دایره، به شرطی که مساحت مربع برابر با ۱۰ باشد.

۹۳۴. دایره‌ای برضلع بزرگتر مجاور به زاویهٔ قائمه مماس است، از رأس زاویهٔ حادهٔ مقابل به این ضلع می‌گذرد ومرکز آن، روی وتر قرار دارد. اگرضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمه برابر ۳ و ۴ باشند، طول شعاع این دایره را پیداکنید.

۹۳۵. مرکزدایره‌ای به‌شعاع ۳ برمحیط دایرهٔ دیگری به‌شعاع ۵ قراردارد. ازمرکز O دایرهٔ اخیر، قطری مماس بردایرهٔ اول می‌گذرانیم. ازنقطهٔ تماس، شعاعی از دایرهٔ اول را می‌گذرانیم تا وتر مشترك دودایره را در K قطع کند. طول پاره خط OK را پیداکنید.

۹۳۶. هر دو رأس مقابل مربعی به‌ضلع a، رأس‌های یك لوزی را تشکیل می‌دهند؛ این دولوزی باهم برابرند. مطلوب است مساحت بخش مشترك این دولوزی، به شرطی که مساحت هریك از آن‌ها، برابر با نصف مساحت مربع باشد.

۹۳۷. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC با ضلع‌های مجاور به زوایهٔ قائمهٔ a و b را به وسیله خط راست MN، عمود بر وتر AB، به دو بخش هم ارز AMN و $BCMN$ تقسیم کرده‌ایم. مطلوب است شعاع دایرهٔ محیطی چهارضلعی $BCMN$.

۹۳۸. بر دو دایرهٔ به شعاع‌های R و r که از بیرون برهم مماس‌اند، دومماس‌مشترك را رسم کرده‌ایم. مطلوب است مساحت ذوزنقه‌ای که از این دومماس و وترهای واصل بین نقطه‌های تماس درست شده است.

۹۳۹. در زاویه‌ای، دایره‌ای به شعاع r محاط شده است؛ طول وتری از دایره که نقطه‌های تماس را به هم وصل می‌کند، برابر است با a. اگردومماس موازی با این وتر، بر دایره رسم کنیم، ذوزنقه‌ای به دست می‌آید که باید مساحت آن را پیدا کنید.

۹۴۰. درمثلث به‌ضلع‌های a ، b و c، نیم دایره‌ای محاط کرده‌ایم که قطر آن برضلع c واقع است. قطر این نیم دایره را پیدا کنید.

۹۴۱. مطلوب است مساحت مثلثی که نقطه تماس دایره محاطی با یکی از ضلع‌های آن، پاره خط‌هایی به طول‌های m و n روی این ضلع جدا کرده باشد و ، درضمن ، زاویهٔ روبه‌روی این ضلع برابر ۶۰ درجه باشد.

۹۴۲. قاعدهٔ بزرگتر ذوزنقه $AB=a$ و قاعدهٔ کوچکتر آن $CD=b$ است. نقطهٔ M را بر امتداد قاعدهٔ کوچکتر طوری پیدا کنید که خط راست AM، ذوزنقه را به دو بخش هم‌ارز تقسیم کند.

۹۴۳. خط راستی‌موازی‌با قاعدهٔ مثلث، مساحت آن را نصف‌می‌کند. این خط راست، دوضلع مثلث را به چه نسبتی قطع می‌کند؟

۹۴۴. خط راستی موازی با دو قاعدهٔ ذوزنقه،آن را به دوشکل هم ارز تقسیم کرده است. اگر طول قاعده‌های ذوزنقه، برابر a و b باشد، طول این پاره‌خط را پیدا کنید.

۹۴۵. خط راستی موازی با قاعده‌های ذوزنقه، مساحت آن را به نسبت ۲:۷ تقسیم کرده است (مساحت بخش مجاور به قاعدهٔ بزرگتر، بزرگتر است). مطلوب است طول پاره خطی از این خط راست که به دوساق ذوزنقه محدود شده است، به‌شرطی که دو قاعدهٔ ذوزنقه، به ترتیب برابر ۵ و ۳ باشند.

۹۴۶. مساحت‌های مثلث‌هایی که از دو قطر و دوقاعدهٔ ذوزنقه‌ای تشکیل شده‌اند، برابرند با S_1 و S_2. مساحت ذوزنقه را پیدا کنید.

۹۴۷. ازنقطه‌ای واقع دردرون مثلث سه خط راست، به‌ترتیب، موازی با ضلع‌های مثلث رسم کرده‌ایم. این خط‌های راست، مساحت مثلث را به شش بخش تقسیم می‌کنند که در بین آن‌ها سه مثلث به مساحت‌های S_1 ، S_2 و S_3 وجود دارد. مساحت مثلث مفروض را پیدا کنید.

۹۴۸. خط راستی موازی با قاعدهٔ مثلثی به مساحت S، مثلث دیگری به مساحت S_1 را از آن جدا می‌کند. مساحت چهار ضلعی را پیدا کنید که سه رأس آن سه رأس مثلث

کوچکتر و رأس چهارم آن واقع بر قاعدهٔ مثلث بزرگتر باشد.

۹۴۹. دو دایرهٔ به‌شعاع‌های ۳ و ۱ از بیرون و در نقطهٔ A بر هم مماس‌اند، BC مماس مشترك بیرونی آن‌ها را رسم کرده‌ایم. مطلوب است مساحت شکل ABC که محدود به دایره‌ها ومماس بیرونی است.

۹۵۰. اگرسه ارتفاع مثلثی برابر $h_۱$، $h_۲$ و $h_۳$ باشند، مساحت S مثلث راپیدا کنید.

۹۵۱. سه میانهٔ یك‌مثلث برابرند با $m_۱$، $m_۲$ و $m_۳$. مساحت S مثلث رامحاسبه‌کنید.

۹۵۲. مساحت یك‌چهارضلعی برابراست با S. مطلوب‌است مساحت‌متوازی‌الاضلاعی که ضلع آن، با قطرهای این چهارضلعی موازی و برابر باشند.

۹۵۳. درذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی، طول پاره‌خط واصل بین وسطهای دوساق برابر d است. اگرقطرهای این ذوزنقه برهم عمود باشند، مساحت ذوزنقه را محاسبه‌کنید.

۹۵۴. دو دایره که‌نسبت به‌هم مماس خارج‌اند، درزاویه‌ای محاط کرده‌ایم. وترهایی از دودایره که نقطه‌های تماس آن‌ها بـا ضلع زاویه را بـه هم وصل می‌کنند، بـه ترتیب، برابرند با $۲a$ و $۲b$. زاویه را معین کنید.

۹۵۵. درمثلث متساوی‌الساقینی، دودایرهٔ مماس برهم، کـه یکی روی دیگری قرار دارد، به شعاع‌های R و r محاط کرده‌ایم. زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ مثلث را پیدا کنید.

۹۵۶. نقطهٔ D در درون دایره‌ای به‌شعاع R و بـه فاصلهٔ a از مرکز قراردارد. از نقطهٔ D، قطردایره و دو وتر عمود بر هم را طوری رسم کرده‌ایم که یکی از آن‌ها با قطر زاویه‌ای برابر α می‌سازد. مساحت چهارضلعی محاط دردایره را، که این وترها قطرهای آن باشند، پیدا کنید.

۹۵۷. دایره‌های به‌شعاع‌های R و r درنقطهٔ A بر خط راست AD مماس‌اند و یك طرف خط راست AD واقع‌اند. خط راستی‌موازی با AD، محیط دودایره را درنقطه‌های B و C، واقـع دریك طرف خط المرکزین، قطع کرده است. مطلوب است محاسبه شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC.

۹۵۸. مربعی به ضلع a مفروض است. دایره‌هایی به مرکز هریك از رأس‌ها و بـه شعاع a رسم کرده‌ایم. مطلوب است مساحت بخش مشترك چهاردایره.

۹۵۹. خط راستی درنقطهٔ A بردایره مماس است. خط راست دیگری، مـوازی با خطراست‌اول، دایره‌رادرنقطه‌های B و C قطع کرده است. B و C را به A وصل‌می‌کنیم. مساحت مثلث ABC را به‌عنوان تابعی از فاصلهٔ بین دوخط راست پیدا کنید. شعاع دایره را R بگیرید.

۹۶۰. ازبین همهٔ مستطیل‌های به‌مساحت S، مستطیلی را پیدا کنیدکه‌محیط آن‌حداقل مقدار ممکن باشد.

۹۶۱. مثلث ABC به مساحت S و زاویه α در رأس A مفروض است. نقطهٔ M از ضلع AC را به نقطهٔ N از ضلع AB وصل کرده‌ایم و، بـه این ترتیب، دو شکل هم‌ارز AMN و $CMNB$ را به دست آورده‌ایم. مطلوب است محیط شکل AMN، بـه‌شرطی که طول MN حداقل مقدار ممکن باشد.

۹۶۲. سه عدد مثبت a، b و c، با رابطهٔ

$$a^2=b^2+c^2$$

به هم مربوط‌اند. آیا براین اساس، می‌توان حکم کرد که: این سه عدد می‌توانند ضلع‌های یک مثلث باشند و، درضمن، چنین مثلثی قائم‌الزاویه است؟

XIV.

مساله‌هایی از هندسهٔ فضایی

این قضیه‌ها را ثابت کنید (۹۶۳ تا ۹۷۱):

۹۶۳. در هر چهاروجهی منظم، مجموع فاصله‌های هرنقطهٔ درونی تـا چهار وجه، مقداری است ثابت.

۹۶۴. اگر تعدادی متناهی خط راست چنان باشند که هر دوتا از آن‌ها یکدیگر را قطع کرده باشند، یا همهٔ آن‌ها از یک‌نقطه می‌گذرند، ویا همهٔ آن‌ها دریک صفحه‌قراردارند.

۹۶۵. هر کنج چهاروجهی محدب را می‌توان با صفحه چنان قطع کرد که، درمقطع، یک متوازی‌الاضلاع به دست‌آید.

۹۶۶. مکعب را می‌توان با صفحه‌ای چنان قطع کرد کـه، درمقطع، یک شش ضلعی منظم به دست‌آید.

۹۶۷. دریک متوازی‌السطوح، سه‌یالی را درنظر بگیرید که ازیک رأس گذشته‌اند؛ سپس، از سه نقطهٔ انتهای دوم این یال‌هـا صفحه‌ای عبوردهید. از برخورد این صفحه بـا متوازی‌السطوح، مثلثی به‌دست می‌آید. قطرهایی از متوازی‌السطوح که از رأس مشترک سه یال فوق می‌گذرند، درمرکز ثقل این مثلث، به هم می‌رسند.

۹۶۸. اگر همهٔ فرجه‌های یک‌کنج سه وجهی حاده باشند، آن وقت، همهٔ زاویه‌های مسطحهٔ کنج هم حاده خواهند بود.

۹۶۹. اگر هـرمقطع دلخواهـی از یک سطح باصفحه، محیط یک دایـره باشد، آن وقت، این سطح یک‌کره است.

۹۷۰. چندوجهی وجود ندارد که تعداد وجه‌های آن فرد باشد و هر وجه آن دارای تعداد فردی ضلع باشد.

۹۷۱. درهر کنج چهار وجهی، هر زاویهٔ مسطحه، از مجموع سه زاویهٔ مسطحهٔ دیگر کوچکتر است.

۹۷۲. مطلوب است مکان هندسی تصویرهای یك نقطهٔ مفروض، برهمهٔ صفحه‌هایی که از نقطهٔ مفروض دیگری می گذرند.

۹۷۳. مطلوب است مکان هندسی مرکزمقطع‌های سطح کروی مفروض با صفحه‌هایی که از نقطهٔ مفروضی می گذرند.

۹۷۴. ثابت کنید، از هرخط راستی می‌توان صفحه‌ای موازی با هرخط راست دیگر رسم کرد، تنها به شرطی که این دوخط راست متقاطع نباشند.

۹۷۵. عمود مشترك دوخط متنافر را رسم کنید.

۹۷۶. خط راستی‌رسم کنید که باخط راست‌مفروض موازی و دوخط راست‌مفروض دیگر را قطع کند.

۹۷۷. پاره خطی به‌طول مفروض وموازی با صفحهٔ مفروض طوری رسم کنید که دو انتهای آن بردو خط راست مفروض واقع باشد.

۹۷۸. چهار رأس مکعب را طوری انتخاب کنید که هیچ دوتای آن‌ها روی یك یال واقع نباشند. از هر سه رأس ازاین چهار رأس، یك صفحه عبور دهید. مطلوب است حجم جسمی که محدود به این صفحه‌هاست. یال مکعب را برابر a بگیرید.

۹۷۹. مکعبی به ضلع a مفروض است، هرسه یالی را درنظر بگیرید که ازیك‌رأس گذشته‌اند و از سه انتهای این سه یال صفحه‌ای بگذرانید. به این ترتیب، شش صفحه به دست می‌آید. مطلوب است حجم جسم محدود به این شش صفحه.

۹۸۰. منشور قائمی با قاعدهٔ مربعی مفروض است. صفحه‌ای را از قطر قاعدهٔ پایین ویکی از رأس‌های قاعدهٔ بال گذرانده‌ایم. هرمی به دست آمده است که مساحت کل آن برابر است با S. مطلوب است مساحت کل منشور، به شرطی که زاویهٔ رأس مثلثی که در مقطع به دست می‌آید، برابر α باشد.

۹۸۱. زاویه‌های مسطحهٔ رأس متوازی‌السطوح با هم برابر و مساوی ۴۵ درجه‌اند. طول یال‌هایی که به‌یك‌رأس منتهی می‌شوند، برابرند با a، b و c. حجم متوازی‌السطوح را پیدا کنید.

۹۸۲. در متوازی‌السطوح، طول سه یالی که دریك رأس به هم می‌رسند، برابرند با a، b و c. دویال اول برهم عمودند وسومی با هریك ازآن‌ها زاویه‌ای برابر α می‌سازد.

مطلوب است حجم متوازی‌السطوح.

۹۸۳. زاویه‌های مسطحهٔ یك کنج سه وجهی برابرند با زاویه‌های حادهٔ α، β و γ. مطلوب است محاسبهٔ زاویه‌های دو وجهی این کنج.

۹۸۴. طول یال‌هایی ازیك متوازی‌السطوح که ازیك رأس خارج شده‌اند، برابرند با l، m و n؛ و زاویه‌های مسطحهٔ همین رأس، برابرند بازاویه‌های حادهٔ α، β و γ. حجم متوازی‌السطوح را پیدا کنید.

۹۸۵. از وسط ارتفاع هرم منتظم با قاعدهٔ مثلثی، صفحه‌ای موازی با وجه جانبی آن رسم کرده‌ایم. مطلوب است مساحت مقطعی که به دست می‌آید. سطح جانبی هرم را برابر S بگیرید.

۹۸۶. از مرکز قاعدهٔ هرم منتظم با قاعدهٔ مثلث، صفحه‌ای موازی با دویال متقاطع آن رسم کرده‌ایم. مساحت مقطع حاصل را پیدا کنید، به شرطی که طول یال جانبی هرم برابر l و طول یال قاعده برابر a باشد.

۹۸۷. شیب وجه‌های جانبی هرمی با قاعدهٔ ذوزنقهٔ متساوی الساقین، نسبت به صفحه قاعده، یکسان است. از رأس هرم، عمودهایی برساق‌های ذوزنقه فرود می‌آوریم وپای عمودها را به‌هم وصل می‌کنیم. زاویهٔ رأس مقطع مثلثی حاصل برابر α ومساحت این‌مقطع برابر S است. حجم هرم را پیدا کنید.

۹۸۸. ذوزنقه‌ای با قاعده‌های a و b $(a>b)$ و ارتفاع h، قاعدهٔ یك هرم را تشکیل داده است. وجه جانبی هرم که از قاعدهٔ کوچکتر ذوزنقه می‌گذرد، بر صفحهٔ قاعده عمود است، و وجه مقابل آن، مثلث متساوی‌الساقینی است که زاویهٔ رأس آن (در رأس هرم) برابر است با α. از رأس هرم ونقطهٔ برخورد قطرهای ذوزنقه، صفحه‌ای موازی با قاعده‌های ذوزنقه رسم کرده‌ایم. مساحت مثلثی که روی این‌صفحه پدید می‌آید، پیدا کنید.

۹۸۹. ازضلع قاعدهٔ یك منشورقائم، که قاعده‌های آن مثلث‌های متساوی‌الاضلاع‌اند، صفحه‌ای گذرانده‌ایم که باصفحهٔ قاعده، زاویه‌ای برابر α بسازد. مساحت مقطع مثلثی را پیدا کنید که به‌این ترتیب به‌دست می‌آید. می‌دانیم، حجم هرمی که با این صفحه ازمنشور جدا می‌شود، برابر است با V.

۹۹۰. وجه‌های یك هرم مثلث القاعده، عبارتند از مثلث‌های متساوی‌الساقین مساوی باهم. درهر یك از این مثلث‌ها، طول قاعده برابر با a و زاویهٔ روبه روی آن برابر با α است. حجم هرم را پیدا کنید.

۹۹۱. قاعدهٔ یك منشور قائم، عبارت است از لوزی $KBCD$ به ضلع برابر a و

زاویهٔ برابر ۶۰ درجه. دو انتهای B_1 و D_1 از قطر قاعدهٔ بالای منشور را با خطهای راست B_1E و D_1F به وسط ضلع‌های KD و KB از قاعدهٔ پایین وصل کردایم. از برخورد این خطهای راست، زاویهٔ B_1OD_1، برابر با α، به‌وجود آمده است. حجم منشور را پیدا کنید.

۹۹۲. در قاعدهٔ یك منشور قائم، مثلث متساوی‌الساقینی قرار دارد که محیط آن برابر $2p$ وهریك از دوزاویهٔ برابر آن، برابر α است. از قاعدهٔ این مثلث و انتهای یال مقابل به آن در منشور صفحه‌ای گذرانده‌ایم. زاویهٔ مجاور به قاعده، درمثلث مقطع، برابر است با β. حجم منشور را پیداکنید.

۹۹۳. حجم هرم منتظمی که قاعدهٔ آن، مثلثی متساوی‌الاضلاع است، برابر V و زاویهٔ بین هر وجه جانبی با قاعدهٔ آن، برابر α است. مساحت کل هرم را پیدا کنید.

۹۹۴. قاعدهٔ یك هرم، عبارت است از یك مستطیل؛ طول هر یك از یال‌های جانبی هرم برابر m است. زاویه‌های مسطحه در کنج‌های سه وجهی مجاور قاعدهٔ هرم، عبارتند از α، β و 90°. حجم هرم را پیداکنید.

۹۹۵. هرم منظمی داریم با قاعدهٔ مربع شکل به ضلع برابر a. هر زاویهٔ دو وجهی مجاور به‌قاعدهٔ این هرم برابراست با α. از یکی از‌ضلع‌های قاعده، صفحه‌ای‌گذرانده‌ایم که با صفحهٔ قاعده، زاویهٔ β بسازد. مساحت مقطع حاصل را پیدا کنید.

۹۹۶. هرم منظمی داریم باقاعدهٔ مثلث متساوی‌الاضلاع. ارتفاع هرم‌برابر h وزاویهٔ دو وجهی مجاور به قاعدهٔ آن برابر 2α است، مطلوب است حجم هرم.

۹۹۷. هرم منظمی داریم‌که قاعدهٔ آن را یك n ضلعی تشکیل می‌دهد. طول ضلع n ضلعی قاعده برابر $2a$ واندازهٔ زاویهٔ دووجهی مجاور به‌قاعدهٔ هرم برابر 2α است. حجم هرم را پیداکنید.

۹۹۸. هرم منظمی با قاعدهٔ مثلث‌متساوی‌الاضلاع مفروض است. هرم را با صفحه‌ای که از رأس قاعده و وسط دو یال جانبی‌گذشته است، قطع کرده‌ایم. مطلوب است نسبت سطح جانبی هرم به‌مساحت قاعدهٔ‌آن، به شرطی‌که بدانیم، صفحهٔ مقطع بریکی ازوجه‌های جانبی عمود است. (برکدام وجه؟)

۹۹۹. قاعدهٔ یك هرم را ذوزنقه‌ای تشکیل می‌دهد که هریك از دو ساق وقاعدهٔ کوچکتر آن، برابر با a وزاویهٔ حادهٔ آن برابر با α است. هریك از وجه‌های جانبی با صفحهٔ قاعده، زاویه‌ای برابر φ ساخته‌اند. حجم هرم را پیداکنید.

۱۰۰۰. هرم منظمی داریم با قاعدهٔ مربعی. از وسط ارتفاع عمودی بر یال جانبی

وعمودی دیگر بر وجه جانبی فرود آورده‌ایم، طول این دو عمود، به ترتیب، برابر h و a شده است مطلوب است حجم هرم.

۱۰۰۱ • مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع q، قاعدهٔ یك هرم منظم را تشکیل می‌دهد. از یکی از ضلع‌های قاعده صفحه‌ای عمود بریال جانبی مقابل به‌آن ضلع رسم کرده‌ایم. این صفحه، یال را به‌نسبت $m:n$ قطع کرده است. سطح کل هرم را پیدا کنید.

۱۰۰۲ • یك چندضلعی، با مجموع زاویه‌های داخلی $90n$ درجه، قاعدهٔ هرم منظمی به ارتفاع h را تشکیل می‌دهد. نسبت سطح جانبی هرم به‌مساحت قاعدهٔ آن برابر است با k. حجم هرم را پیدا کنید.

۱۰۰۳ • هرم منظم $SABCDE$ باقاعدهٔ پنج‌ضلعی را با صفحه‌ای که از رأس‌های A و C قاعده و وسط یال‌های SD و SE گذاشته است، قطع کرده‌ایم. مطلوب است مساحت مقطع، به‌شرطی که طول ضلع قاعدهٔ هرم برابر q وطول یال جانبی آن برابر b باشد.

۱۰۰۴ • هرم منظمی داریم با قاعدهٔ n ضلعی. از رأس هرم و دو رأس n ضلعی قاعده، صفحه‌ای گذرانیده‌ایم که با صفحهٔ قاعده، زاویه‌ای برابر α تشکیل داده است. این صفحه، قاعده را به‌دو چندضلعی تقسیم کرده است که، به‌ترتیب، دارای $(r+2)$ و $(n-r)$ رأس هستند $\left(r<\frac{n-2}{2}\right)$. مطلوب است حجم هرم، به شرطی که طول ضلع مشترك این دوچندضلعی، برابر b باشد.

۱۰۰۵ • یال‌های جانبی و دوضلع از قاعدهٔ هرم مثلث‌القاعده‌ای با هم برابرند و طول هریك ازآن‌ها برابر است با b. زاویهٔ بین دوضلع برابر قاعدهٔ هرم، برابر است با α. حجم هرم را پیدا کنید.

۱۰۰۶ • مثلث ABC قاعدهٔ هرم $SABC$ است و در آن، زاویهٔ بین AB و AC برابر α است ودر ضمن داریم: $AB=AC=a$. وجه ABC برصفحهٔ قاعده عمود است و وجه‌های SBA و SCA با صفحهٔ قاعده، زاویه‌ای برابر φ می‌سازند. سطح جانبی این هرم را پیدا کنید.

۱۰۰۷ • دوهرم منظم، ارتفاع‌هایی مشترك دارند؛ رأس هرهرم برمرکز قاعدهٔ هرم دیگر واقع است؛ یال‌های جانبی یکی، یال‌های جانبی دیگری را قطع می‌کنند. یال جانبی به‌طول l از هرم اول با ارتفاع زاویه‌ای برابر α ویال جانبی هرم دوم با ارتفاع زاویه‌ای برابر β می‌سازند. حجم بخش مشترك دوم هرم را پیدا کنید.

۱۰۰۸ • هشت وجهی منظمی را با صفحه‌ای چنان بریده‌ایم که در مقطع، یك شش-

ضلعی منظم به‌دست آید. همهٔ رأس‌های این‌شش ضلعی را به یکی از رأس‌های هشت‌وجهی منظم وصل کرده‌ایم. اگر حجم هشت‌وجهی مفروض برابر V باشد، حجم جسم حاصل را پیدا کنید.

۱۰۰۹ . هرم ناقص منظمی با قاعده‌های مربع شکل داده شده است. صفحه‌ای از دو رأس مقابل به‌موازات قطر قاعده رسم کرده‌ایم. مطلوب است مساحت مقطع، به‌شرطی که ارتفاع هرم h وضلع‌های قاعده‌ها a و b باشد.

۱۰۱۰ . یك لوزی به ضلع a و زاویهٔ حادهٔ α، قاعدهٔ یك هرم را تشکیل می‌دهد. هریك از زاویه‌های دو وجهی مجاور به‌قاعده، برابر است با φ. حجم کرهٔ محاط در این هرم را پیدا کنید.

۱۰۱۱ . دو هرم منظم مساوی داده شده است. این دوهرم را طوری قرار می‌دهیم که قاعده‌های مربع شکل آن‌ها، برهم منطبق شود ورأس‌های دوهرم در دو طرف قاعدهٔ مشترك قرار گیرند. در هشت‌وجهی که به‌این‌ترتیب به‌دست می‌آید، یك کره محاط کرده‌ایم. مطلوب است شعاع این کره، به شرطی که ضلع قاعدهٔ هریك از هرم‌ها برابر a و زاویهٔ مسطحهٔ رأس هرکدام ازآن‌ها برابر α باشد.

۱۰۱۲ . سطح کروی برسه یال مکعب که از یك رأس گذشته‌اند، وبرسه وجه‌مکعب که در رأس مقابل رأس قبلی به‌هم رسیده‌اند، مماس است. مطلوب است محاسبهٔ بخشی از سطح کره که در بیرون مکعب قرار دارد، به‌شرطی که طول یال مکعب برابر a باشد.

۱۰۱۳ . کره‌ای در یك منشور قائم محاط شده است. هریك از قاعده‌های منشور، یك مثلث قائم‌الزاویه است. ارتفاع وارد از رأس زاویهٔ قائمه بروتر این مثلث طولی برابر h دارد و با یکی ازضلع‌های مجاور به‌زاویهٔ قائمه، زاویه‌ای برابر α می‌سازد. مطلوب است محاسبهٔ حجم منشور.

۱۰۱۴ . یال یك‌چهار وجهی منظم برابر است با a. شعاع کره‌ای را پیدا کنید که سطح آن برهمهٔ یال‌های چهاروجهی مماس است.

۱۰۱۵ . هرم منظمی داریم با قاعدهٔ مربعی‌شکل. زاویهٔ دو وجهی مجاور با یال جانبی هرم برابر α وشعاع کرهٔ محاط درهرم برابر R است. سطح کل هرم را پیدا کنید.

۱۰۱۶ . در مخروط دوار قائم به‌حجم V، هرم مثلث‌القاعده‌ای محاط کرده‌ایم که زاویه‌های مسطح مجاور رأس‌آن، برابر α ، β و γ هستند. مطلوب است حجم این هرم.

۱۰۱۷ . از نقطه‌های واقع برسطح کره، سه‌وتر برابر رسم کرده‌ایم که دو به‌دو با هم زاویه‌ای برابر ۲α می‌سازند. اگر شعاع کره برابر R باشد، طول این وترها را پیدا کنید.

۱۰۱۸ . هرم منظمی با قاعدهٔ مربع شکل مفروض است. طول ضلع قاعدهٔ هرم برابر a و زاویهٔ مسطحهٔ رأس آن برابر α است . نیم کره‌ای در این هرم محاط کرده‌ایم که صفحهٔ دایرهٔ عظیمهٔ آن برقاعدهٔ هرم قرار گرفته است. مطلوب است حجم چندوجهی که چهار رأس آن برچهار نقطهٔ تماس کره با وجه‌های جانبی هرم ورأس پنجم آن برمرکز نیم کره واقع است.

۱۰۱۹ . ضلع‌های یك ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین بریك استوانهٔ دوار مماس‌اند ؛ محور استوانه برضلع موازی ذوزنقه عمود است. زاویه‌ای راکه محور استوانه با صفحهٔ ذوزنقه تشکیل می‌دهد به‌دست آورید. دوقاعده ذوزنقه، برابر a و b و ارتفاع آن برابر h است.

۱۰۲۰ . از مقطع محوری مخروط، دوخط راست عمود برهم به‌دست می‌آید. روی یکی از مولدهای مخروط ، دونقطهٔ A و B به‌فاصلهٔ a ازیکدیگر انتخاب می‌کنیم. روی سطح مخروط هم ، دو نقطهٔ C و D را طوری در نظر می‌گیریم که $ABCD$ یك چهاروجهی منظم ازآب درآید . مطلوب است فاصلهٔ رأس مخروط تا یال CD از این چهاروجهی.

۱۰۲۱ . استوانه‌ای را دریك چهاروجهی منظم محاط کرده‌ایم، به‌نحوی که‌ارتفاع چهاروجهی، محور استوانه باشد ؛ دایرهٔ یکی از قاعده‌های استوانه برصفحهٔ قاعدهٔ چهاروجهی منطبق و دایرهٔ قاعدهٔ دوم بربقیهٔ یال‌های چهاروجهی مماس شود و، در ضمن، محیط دایرهٔ اخیر بادو ارتفاع دیگر چهاروجهی برخورد داشته‌باشد، اگر یال‌چهاروجهی برابر l باشد، حجم استوانه را پیداکنید.

۱۰۲۲ . شعاع قاعدهٔ مخروطی برابر R وزاویهٔ بین مولد مخروط با صفحهٔ قاعده برابر α است. دراین مخروط، صفحه‌ای گذرانده‌ایم که از رأس آن بگذرد و با ارتفاع مخروط زاویه‌ای برابر φ بسازد. مساحت مقطع حاصل‌را به‌دست‌آورید.

۱۰۲۳ . دومخروط ارتفاعی مشترك دارند، ولی رأس‌های آن‌ها در دو انتهای مختلف این ارتفاع واقع‌اند. مولد مخروط اول‌برابر l وزاویهٔ رأس‌آن درمقطع محوری برابر ۲α است. زاویهٔ رأس مخروط دوم درمقطع‌محوری برابر است با ۲β. حجم‌بخش مشترك دومخروط را پیداکنید.

۱۰۲۴ . در ذوزنقه‌ای یکی ازساق‌ها برابر b، و زاویه بین‌آن با قاعدهٔ بزرگتر که طولی برابر $۲a$ دارد، برابر است با α. طول قاعدهٔ کوچکتر برابر a است. مطلوب است حجم جسمی که از دوران این ذوزنقه دور ساق مفروض به‌دست می‌آید.

۱۰۲۵ . زاویه بین مولد مخروطی به‌طول a با قاعدهٔ آن، برابر است با α .

هرمی را بر این مخروط محیط کرده‌ایم که قاعدهٔ آن یك لوزی با زاویهٔ حادهٔ β است. حجم این هرم را پیدا کنید.

۱۰۲۶ ۰ هرم مثلث‌القاعده‌ای را برمخروط محیط کرده‌ایم؛ در ضمن، سطح جانبی مخروط به‌وسیلهٔ خط‌های مماس به سه بخش با نسبت‌های ۵:۶:۷ تقسیم شده است. مطلوب است نسبت بین بخش‌هایی ازسطح جانبی هرم، که به‌خط‌های مماس محدود شده‌اند.

۱۰۲۷ ۰ سه مخروط‌مساوی که رأس‌های‌مشترك‌دارند، روی‌صفحه‌ای قرار گرفته‌اند. هریك از مخروط‌ها، بردو مخروط دیگر مماس است. زاویهٔ رأس هرمخروط را در مقطع محوری خود پیدا کنید.

۱۰۲۸ ۰ کره‌ای به قطر یك مخروط رسم کرده‌ایم. حجم بخشی از کره را که در اخل مخروط قرار دارد، پیدا کنید، به‌شرطی که ارتفاع مخروط برابر h وزاویهٔ رأس آن در مقطع محوری برابر 2α باشد.

۱۰۲۹ ۰ زاویهٔ بین‌محور ومولد مخروطی برابر α وشعاع قاعدهٔ آن برابر r است. سطح کروی‌را درنظر بگیرید که مرکزآن در رأس مخروط قرار گرفته باشد. اگر این‌سطح کروی حجم مخروط را به‌دو نیمهٔ برابر تقسیم کرده باشد، شعاع کره را پیدا کنید.

۱۰۳۰ ۰ درهرم منظمی با قاعدهٔ n ضلعی، کره‌ای محاط کرده‌ایم. اگرطول ضلع قاعدهٔ هرم برابر q وطول یال جانبی آن برابر a باشد، شعاع کره را پیدا کنید.

۱۰۳۱ ۰ هرم منظمی با قاعدهٔ مربع شکل، به‌ارتفاع h است. عمودی‌که از مرکز کرهٔ محیطی هرم، بریکی از وجه‌های جانبی فرود آورده‌ایم، با ارتفاع هرم، زاویه‌ای برابر α ساخته است. حجم کره را پیدا کنید.

۱۰۳۲ ۰ از مرکز کرهٔ محاطی یك مخروط قائم دوار، صفحه‌ای عمود برمحور مخروط گذرانده‌ایم. اگر بدانیم دوبخش حاصل درمخروط، حجمی برابر دارند، زاویهٔ بین مولد مخروط باصفحهٔ قاعدهٔ آن را پیدا کنید.

۱۰۳۳ ۰ در مخروط قائم دواری که زاویهٔ رأس آن در مقطع محوری برابر α است، کره‌ای به‌شعاع r محاط کرده‌ایم و، سپس، صفحهٔ شامل دایرهٔ تماس سطح مخروطی با سطح کره راگذرانده‌ایم. حجم مخروط ناقص حاصل را پیدا کنید.

۱۰۳۴ ۰ در قاعدهٔ هرمی یك مستطیل قرار داردکه زاویهٔ بین قطرهای‌آن برابر α است. هریال‌جانبی هرم‌باقاعدهٔ‌آن، زاویه‌ای برابر φ ساخته است. حجم هرم‌را پیداکنید، به‌شرطی که شعاع کرهٔ محیطی هرم برابر R باشد.

۱۰۳۵ ۰ کره‌ای‌به‌شعاع r درمخروط محاط شده است مطلوب است حجم‌مخروط، به‌شرطی‌که بدانیم، فاصلهٔ بین صفحهٔ تماس‌کره تا عمودی‌که از رأس بریکی ازمولدهای

مخروط اخراج می‌شود، برابر است با d.

۱۰۳۶ . در کره‌ای به شعاع R، استوانه‌ای محاط کرده‌ایم. حجم استوانه را به‌عنوان تابعی از شعاع قاعدهٔ آن پیدا کنید.

۱۰۳۷ . آیا می‌توان منشور را به‌عنوان یك چندوجهی تعریف کرد که دو وجه آن چندضلعی‌های مساوی با ضلع‌های متناظر موازی باشند و بقیهٔ وجه‌های آن، به‌صورت متوازی‌الاضلاع‌هایی درآمده باشند.

حل

I. تبدیل عبارت‌های جبری*

۱.
$$A=c(b^2+bc+ac-a^2)-ab(a+b)=c(b^2-a^2)+$$
$$+c^2(b+a)-ab(a+b)=(a+b)(bc-ac+c^2-ab)=$$
$$=(a+b)[(bc-ab)+(c^2-ac)]=(a+b)[b(c-a)+c(c-a)]=$$
$$=(a+b)(b+c)(c-a)$$

۲.
$$A=b^2(a^2b-a^3+c^3-c^2b)+c^2a^2(a-c)=b^2[(a^2b-c^2b)-$$
$$-(a^3-c^3)[+a^2c^2(a-c)=b^3(a^2-c^2)-b^2(a^3-c^3)+a^2c^2(a-c)=$$
$$=(a-c)(b^3a+b^3c-b^2a^2-b^2ac-b^2c^2+a^2c^2)=(a-c)[b^2a(b-c)+$$
$$+b^2c(b-c)-a^2(b^2-c^2)]=(a-c)(b-c)(b^2a+b^2c-a^2b-a^2c)=$$
$$=(a-c)(b-c)[ab(b-a)+c(b^2-a^2)]=$$
$$=(a-c)(b-c)(b-a)(ab+bc+ca)$$

۳. عبارت داخل کروشهٔ اول را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$(ax+by)^2+(ay+bx)^2$$

و دومی را به‌صورت زیر

$$4(ay+bx)^2(ax+by)^2$$

سپس، با استفاده از تبدیل تفاضل دومجذور کامل، به‌ضرب دوعبارت مزدوج، خواهیم داشت:

*) دراین بخش، معمولاً عبارت‌هایی را که باید ساده شوند، با حرف A نام گذاشته‌ایم.

$$A=[(ax+by)^۲+(ay+bx)^۲]^۲-۴(ay+bx)^۲(ax+by)^۲=$$
$$=[(ax+by)^۲+(ay+bx)^۲-۲(ay+bx)(ax+by)][(ax+by)^۲+$$
$$+(ay+bx)^۲+۲(ay+bx)(ax+by)]=[(ax+by)-(ay+bx)]^۲\times$$
$$\times[(ax+by)+(ay+bx)]^۲=[(a-b)(x-y)]^۲[(a+b)(x+y)]^۲=$$
$$=(a-b)^۲(a+b)^۲(x-y)^۲(x+y)^۲$$

۴. $$A=۲a^۲b+۴ab^۲-a^۲c-۲abc+ac^۲+۲bc^۲-۴b^۲c-۲abc=$$
$$=۲ab(a+۲b)-ac(a+۲b)+c^۲(a+۲b)-۲bc(a+۲b)=$$
$$=(a+۲b)(۲ab-ac+c^۲-۲bc)=(a+۲b)[a(۲b-c)-c(۲b-c)]=$$
$$=(a+۲b)(۲b-c)(a-c)$$

۵. $$A=y(x-۲z)^۲+۸xyz+xy^۲-۴xyz+۴xz^۲-۲zx^۲-$$
$$-۴zxy-۲zy^۲=y(x-۲z)^۲+(xy^۲-۲zy^۲)-(۲zx^۲-۴xz^۲)=$$
$$=(x-۲z)(yx-۲yz+y^۲-۲xz)=(x-۲z)[x(y-۲z)+y(y-۲z)]=$$
$$=(x-۲z)(y-۲z)(x+y)$$

۶. $$A=۸x^۳(y+z)-y^۳z-۲y^۳x-۲xz^۳+z^۳y=۸x^۳(y+z)-$$
$$-yz(y^۲-z^۲)-۲x(y^۳+z^۳)=(y+z)[۸x^۳-yz(y-z)-۲x(y^۲-yz+$$
$$+z^۲)]=(y+z)(۸x^۳-y^۲z+yz^۲-۲xy^۲+۲xyz-۲xz^۲)=(y+z)\times$$
$$\times[(۸x^۳-۲xy^۲)+(۲xyz-y^۲z)-(۲xz^۲-yz^۲)]=(y+z)[۲x(۴x^۲-$$
$$-y^۲)+yz(۲x-y)-z^۲(۲x-y)]=(y+z)(۲x-y)(۴x^۲+۲xy+yz-$$
$$-z^۲)=(y+z)(۲x-y)[(۴x^۲-z^۲)+(۲xy+yz)]=$$
$$=(y+z)(۲x-y)[(۲x+z)(۲x-z)+y(۲x+z]=$$
$$=(y+z)(۲x-y)(۲x+z)(۲x-z+y)$$

۷. $$A=(x^۴+y^۴-۲x^۲y^۲)-۲(x^۲-y^۲)z^۲+z^۴-۴y^۲z^۲=$$
$$=(x^۲-y^۲)^۲-۲(x^۲-y^۲)z^۲+z^۴-۴y^۲z^۲=[(x^۲-y^۲)-z^۲]^۲-(۲yz)^۲=$$
$$=(x^۲-y^۲-z^۲-۲yz)(x^۲-y^۲-z^۲+۲yz)=[x^۲-(y+z)^۲][x^۲-$$

$$-(y-z)^2]=(x+y+z)(x-y-z)(x+y-z)(x-y+z)$$

۸. $A=(x^2y+xy^2)+(xz^2+yz^2)+(x^2z+y^2z+2xyz)=$

$$=xy(x+y)+z^2(x+y)+z(x+y)^2=(x+y)(xy+z^2+zx+zy)=$$

$$=(x+y)[x(y+z)+z(y+z)]=(x+y)(y+z)(z+x)$$

یادداشت. عبارت مفروض، نسبت بـه سه حرف x، y و z متقارن است، یعنی اگر حرف‌های x، y و z را به ترتیب بـه حرف‌های y، z و x تبدیل کنیم، تغییری درعبارت پدید نمی‌آیـد. بنابراین، اگر شامل عامل $x+y$ باشد ، حتماً شامل عامل‌هـای $y+z$ و $z+x$ هم خواهد بود. به این ترتیب، بعد از به‌دست‌آمدن عامل $x+y$، لزومی ندارد دو عامل دیگر $y+z$ و $z+x$ را جست‌وجو کنیم.

۹. $A=(x^2y+xy^2+xyz)+(x^2z+xz^2+xyz)+(y^2z+yz^2+$

$$+xyz)=xy(x+y+z)+xz(x+y+z)+yz(x+y+z)=$$

$$=(x+y+z)(xy+yz+zx)$$

۱۰. $A=(x^3-1)+(5x^2-5)+(3x-3)=(x-1)(x^2+x+1)+$

$$+5(x-1)(x+1)+3(x-1)=(x-1)(x^2+x+1+5x+5+3)=$$

$$=(x-1)(x^2+6x+9)=(x-1)(x+3)^2$$

۱۱. $A=(x^3-1)+(9x^2-9)+(11x-11)=(x-1)(x^2+x+$

$$+1+9x+9+11)=(x-1)(x^2+10x+21)=(x-1)(x+3)(x+7)$$

۱۲. $A=x[x^2(x^2-7)^2-36]=x[x(x^2-7)-6][x(x^2-7)+6]=$

$$=x(x^3-7x-6)(x^3-7x+6)=x[(x^3+1)-7(x+1)][(x^3-1)-$$

$$-7(x-1)]=x(x+1)(x-1)(x^2-x-6)(x^2+x-5)=$$

$$=x(x+1)(x-1)(x-3)(x+2)(x+3)(x-2)$$

۱۳. اگـر از دستور $(m+n)^3=m^3+3mn(m+n)+n^3$ برای تبدیل جملهٔ اول عبارت مفروض استفاده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$A=[(b-a)+(a-c)]^3+(c-a)^3+(a-b)^3=(b-a)^3+$$

$$+3(b-a)(a-c)[(b-a)+(a-c)]+(a-c)^3-(a-c)^3-$$

$$-(b-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$$

۱۴. $A=3(y^2+z^2)(x^2+y^2)(x-z)(x+z)$

راهنمائی. شبیه مسالهٔ ۱۳ حل کنید.

۱۵. $A=[(x+y+z)^3-x^3]-(y^3+z^3)=[(x+y+z)-x][(x+$

$$+y+z)^2+(x+y+z)x+x^2]-(y+z)(y^2-yz+z^2)=$$

$$=(y+z)[(x+y+z)^2+(x+y+z)x+x^2-y^2+yz-z^2]$$

به‌جای این‌که، برای جست‌وجوی عامل‌های دیگر، ازعمل‌های طولانی وخسته‌کننده استفاده کنیم، یادداشت مسالهٔ ۸ را مورد توجه قرارمی‌دهیم. از آن‌جاکه عبارت مفروض نسبت به x، y و z متقارن است، بنا براین، درکنارعامل $y+z$، عامل‌های $z+x$ و $x+y$ هم وجود دارد. بنا براین، می‌توان عبارت را به‌این صورت نوشت:

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=(x+y)(y+z)(z+x)B$$

که در آن، B عبارت است ازخارج‌قسمت عبارت مفروض بـرحاصل‌ضرب سه عاملی کـه به‌دست آورده‌ایم. اگردرهردوطرف برابری اخیر، عبارت‌ها را همچون چند جمله‌ای‌هایی نسبت به x درنظر بگیریم و به این نکته توجه کنیم که در هراتحاد، باید ضریب توان‌های برابر x دردوطرف برابری، یکسان باشد، با مقایسهٔ ضریب x^2 در دوطرف، معلوم‌می‌شود که $B=3$. بنا براین

$$A=3(x+y)(y+z)(z+x)$$

۱۶. n را عددی درست می گیریم. دراین‌صورت داریم:

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1=$$

$$=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1=(n^2+3n+1)^2$$

۱۷. $13^{2n}-1=169^n-1=168(169^{n-1}+169^{n-2}+\ldots+1)$

۱۸. $7^{21}-487=7\times 49^{10}-7-480=7(49^{10}-1)-480=$

$$=7\times 48(49^9+49^8+\ldots+1)-48\times 10=$$

$$=48[7(49^9+49^8+\ldots+1)-10]$$

چون $49=8\times 6+1$، بنا براین $49^k=6m+1$ و عبارت داخل کروشه به این صورت درمی آید:

$$7(6n+10)-10=7\times 6n+60=6(7n+10)$$

به‌این ترتیب

$$7^{21}-487=48\times 6(7n+10)=288(7n+10)$$

۱۹. بخش سمت چپ برابری مفروض را A می‌نامیم؛ داریم:

$$A=(a+b-2c)^2+(b+c-2a)^2+(c+a-2b)^2=[(a-c)+$$
$$+(b-c)]^2+[(b-a)+(c-a)]^2+[(c-b)+(a-b)]^2=2(a-c)^2+$$
$$+2(b-c)^2+2(b-a)^2+2(a-c)(b-c)+2(b-a)(c-a)+$$
$$+2(c-b)(a-b)=2A+[(a-c)(b-c)+(b-a)(c-a)]+$$
$$+[(a-c)(b-c)+(c-b)(a-b)]+[(b-a)(c-a)+$$
$$+(c-b)(a-b)]=2A+(a-c)^2+(b-c)^2+(a-b)^2=2A+A=3A$$

به‌این ترتیب به‌دست می‌آید $A=3A$، یا $A=0$، یعنی

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$

وازآن‌جا $a=b=c$.

۲۰. از رابطهٔ $m+n+p=0$ نتیجه می‌شود: $m=-n-p$ وبنا براین

$$m^3+n^3+p^3=(-n-p)^3+n^3+p^3=-n^3-3np(n+p)-$$
$$-p^3+n^3+p^3=-3np(n+p)=3mnp$$

(مسالهٔ ۲۳ را هم ببینید).

۲۱.

$$\begin{array}{r|l}
(y^2+2yz+z^2)x^2+2(y+z)x+1 & (y+z)x+1 \\
-\ (y^2+2yz+z^2)x^2+(y+z)x & \overline{(y+z)x+1} \\
\hline
(y+z)x+1 & \\
-\ (y+z)x+1 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

۲۲. ابتدا مقسوم‌علیه را برحسب توان‌هـای نزولی x منظم می‌کنیم و، سپس، عمل تقسیم را انجام دهیم:

$$\begin{array}{r|l}
(a^3-1)x^3-(a^3+a^2-2)x^2+(4a^2+3a+2)x-3a-3 & \\
-\ (a^3-1)x^3-(a^3-1)x^2+3(a^2+a+1)x & (a-1)x^2-(a-1)x+3 \\
\hline
-(a^2-1)x^2+(a^2-1)x-3(a+1) & (a^2+a+1)x-(a+1) \\
-\ -(a^2-1)x^2+(a^2-1)x-3(a+1) & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

۲۳. در عبارت مفروض، به جای x، مقدار $-y-z$ را قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آید:

$$(-y-z)^{3}+y^{3}+z^{3}-3(-y-z)yz=$$
$$=-(y+z)^{3}+y^{3}+z^{3}+3y^{2}z+3yz^{2}=-(y+z)^{3}+(y+z)^{3}=0$$

از این‌جا (بنا بر قضیهٔ بزو) معلوم می‌شود که چندجمله‌ای $x^{3}+y^{3}+z^{3}-3xyz$ بر $x-(-y-z)$، یعنی بر $x+y+z$ بخش‌پذیر است.

۲۴. در بین سه‌عدد طبیعی پشت‌سرهم، حتماً یك یادوعدد زوج و یك‌عدد بخش‌پذیر بر ۳ وجود دارد. از بین دوجمله‌ای‌های به‌صورت $x^{k}-1$ $(k=m+1, m-1, m)$، دوجمله‌ای که در آن k زوج است بر $x^{2}-1$، دوجمله‌ای که در آن k مضربی است از ۳ بر $x^{3}-1$ و آخرین دوجمله‌ای که در آن k عددی طبیعی است بر $x-1$ بخش‌پذیر است.

۲۵. اگر عبارت‌های مفروض را به صورت $\frac{a^{m}-1}{a-1}$ و $\frac{a^{n}-1}{a-1}$ بنویسیم، مسأله به‌این‌جا منجر می‌شود که معیار بخش‌پذیری $a^{m}-1$ بر $a^{n}-1$ را پیدا کنیم. روشن‌است که برای این‌منظور بایدداشته‌باشیم: $m\geqslant n$. فرض کنید $m=n\cdot p+q$. به‌دست می‌آید:

$$\frac{a^{m}-1}{a^{n}-1}=\frac{a^{np+q}-1}{a^{n}-1}=\frac{a^{np}a^{q}-a^{q}+a^{q}-1}{a^{n}-1}=$$

$$=a^{q}\cdot\frac{(a^{n})^{p}-1}{a^{n}-1}+\frac{a^{q}-1}{a^{n}-1}$$

از این‌جا دیده می‌شود که برای بخش‌پذیربودن، لازم و کافی است داشته‌باشیم: $q=0$. یعنی m باید مضربی از n باشد.

۲۶. ریشه‌های x_{1} و x_{2} از سه‌جمله‌ای $x^{2}+x+1$ باید در رابطه‌های زیر صدق کنند:

$$x_{i}^{2}+x_{i}+1=0 \text{ و } x_{i}^{3}=1 \quad (i=1, 2)$$

از این‌جا می‌توان نوشت:

$$x_{i}^{3k}+x_{i}^{32}+x_{i}^{28}=(x_{i}^{3})^{k}+(x_{i}^{3})^{10}\cdot x_{i}^{2}+(x_{i}^{3})^{9}\cdot x_{i}=1+x_{i}^{2}+x_{i}=0$$

یعنی چندجمله‌ای مفروض، بر $x-x_{1}$ و $x-x_{2}$ و بنا براین برحاصل‌ضرب آن $(x-x_{1})(x-x_{2})$، یعنی $x^{2}+x+1$ بخش‌پذیر است.

۲۷. اگر سمت چپ برابری مفروض را در $x-۱$ ضرب و بر آن تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{(۱-x)(۱+x)(۱+x^۲)\dots(۱+x^{۲n-۱})}{۱-x}=\frac{۱-x^{۲n}}{۱-x}=$$

$$=۱+x+x^۲+\dots+x^{۲n-۱}$$

۲۸. حاصل‌ضرب سه چند جمله‌ای مفروض، منجر به‌یك چندجمله‌ای می‌شود که درجهٔ آن چنین است:

$$۲\times ۱۷۵+۱\times ۵+۳\times ۱۴۹=۸۰۲$$

بنابراین، می‌توان نوشت:

$$(۱+۴x-۴x^۲)^{۱۷۵}(۱+۲x)^۵(۱-۳x+x^۲+۲x^۳)^{۱۴۹}=$$

$$=A_۱x^{۸۰۲}+A_۲x^{۸۰۱}+\dots+A_{۸۰۲}$$

که اگردر این برابری فرض کنیم $x=۱$، به‌دست‌می‌آید:

$$A_۱+A_۲+\dots+A_{۸۰۲}=۱^{۱۷۵}\times ۳^۵\times ۱^{۱۴۹}=۲۴۳$$

۲۹. این برابری را می‌توان با ساده‌کردن سمت‌چپ آن، ثابت کرد. ولی، برای این منظور، باید عمل‌های زیادی انجام داد. اثبات را می‌توان با روش ساده‌تری انجام داد. می‌دانیم، اگر دوچند جمله‌ای $f(x)$ و $\varphi(x)$ از درجهٔ n، به‌ازای $n+۱$ مقدارمختلف x، برابردرآیند، آن‌وقت، برابری $f(x)=\varphi(x)$ یك اتحادمی‌شود. دراین‌جاداریم: $n=۲$. در دوطرف برابری x را به‌ترتیب برابر a، b و c می گیریم، برای هردوطرف به‌مقدارهای $a^۲$، $b^۲$ و $c^۲$ می‌رسیم. یعنی این برابری، یك‌اتحاد است.

۳۰. *I*. شرط‌لازم‌است. فرض کنید: $\frac{ax+b}{mx+n}=k$، که‌درآن، k بستگی به‌x ندارد. از این‌برابری نتیجه می‌شود:

$$ax+b=kmx+kn$$

و چون این برابری بـاید یك اتحاد باشد، بنابراین ضریب‌های توان‌های برابر x، در دو طرف، باهم برابرند. یعنی

$$a=km \text{ و } b=kn \Rightarrow \frac{a}{m}=\frac{b}{n}$$

در حالتی که m (یا n) برابر صفر باشد، تناسب را باید به‌صورت $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$ (یا $\frac{b}{a}=\frac{n}{m}$) نوشت. حالت $m=n=0$، کسر مفروض را بی‌معنی می‌کند.

II. شرط کافی است. فرض کنید داشته باشیم: $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=k$. دراین‌صورت

$$a=mk;\quad b=nk;\quad \frac{ax+b}{mx+n}=\frac{mkx+nk}{mx+n}=k\cdot\frac{mx+n}{mx+n}=k$$

۳۱. اگر شبیه مسألهٔ ۳۰ عمل کنیم، شرط لازم و کافی موردنظر، به‌این صورت به‌دست می‌آید:

$$\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p}$$

۳۲. $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}=\frac{2}{1-x^2};$

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}=\frac{4}{1-x^4}$$

واگر کسر چهارم را به‌این نتیجه اضافه کنیم، و سپس، کسر پنجم و کسر ششم، سرانجام به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}=\frac{32}{1-x^{32}}$$

۳۳. کسرها را به‌یك مخرج تحویل می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{(a-b)(b-c)(a-c)}[(b-c)+(c-a)+(a-b)]=0$$

۳۴. بعد از تبدیل کسرها به‌یك مخرج به‌دست می‌آید:

$$\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

صورت کسر را به‌ضرب عامل‌ها تجزیه می‌کنیم:

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=a^2(b-c)+(b^2c-c^2b)+$$
$$+(c^2a-b^2a)=a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b^2-c^2)=$$
$$=(b-c)(a^2+bc-ab-ac)=(b-c)[(a^2-ab)+(bc-ac)]=$$
$$=(b-c)[a(a-b)-c(a-b)]=(a-b)(b-c)(a-c)$$

وبنابراین، حاصل کسر برابر واحد است.

۳۵. دوکسر اول را باهم ودوکسر آخر را باهم جمع می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$A=\frac{(a-b)(b+c)+(b-c)(a+b)}{(a+b)(b+c)}+$$

$$+\frac{(c-a)[(a+b)(b+c)+(a-b)(b-c)]}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{ab-b^۲+ac-bc+ab-ac+b^۲-bc}{(a+b)(b+c)}+$$

$$+\frac{(c-a)(ab+b^۲+ac+bc+ab-b^۲-ac+bc)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=$$

$$=\frac{۲ab-۲bc}{(a+b)(b+c)}+\frac{(c-a)(۲ab+۲bc)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{۲b(a-c)}{(a+b)(b+c)}+$$

$$+\frac{۲b(a+c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{۲b(a-c)}{(a+b)(b+c)}-\frac{۲b(a-c)}{(a+b)(b+c)}=۰$$

۳۶. اگر مقدار عبارت مفروض را A بگیریم، بعد از تبدیل به‌یك مخرج به‌دست می‌آید:

$$A=\frac{۱}{(a-b)(b-c)(c-a)}[(a^۲-b^۲)+(b^۲-c^۲)+(c^۲-a^۲)]=۰$$

۳۷. $$A=\frac{y^۲z^۲}{b^۲c^۲}+\frac{c^۲(y^۲-b^۲)(z^۲-b^۲)-b^۲(y^۲-c^۲)(z^۲-c^۲)}{b^۲c^۲(b^۲-c^۲)}=$$

$$=\frac{y^۲z^۲}{b^۲c^۲}+$$

$$+\frac{c^۲y^۲z^۲-c^۲b^۲z^۲-c^۲y^۲b^۲+c^۲b^۴-b^۲y^۲z^۲+b^۲c^۲z^۲+b^۲y^۲c^۲-b^۲c^۴}{b^۲c^۲(b^۲-c^۲)}=$$

$$=\frac{y^۲z^۲}{b^۲c^۲}+\frac{c^۲y^۲z^۲-b^۲y^۲z^۲+c^۲b^۴-b^۲c^۴}{b^۲c^۲(b^۲-c^۲)}=\frac{y^۲z^۲}{b^۲c^۲}+$$

$$+\frac{y^۲z^۲(c^۲-b^۲)+c^۲b^۲(b^۲-c^۲)}{b^۲c^۲(b^۲-c^۲)}=\frac{y^۲z^۲}{b^۲c^۲}+\frac{(b^۲-c^۲)(-y^۲z^۲+b^۲c^۲)}{b^۲c^۲(b^۲-c^۲)}=$$

$$=\frac{y^2z^2}{b^2c^2}+\frac{-y^2z^2+b^2c^2}{b^2c^2}=\frac{y^2z^2}{b^2c^2}-\frac{y^2z^2}{b^2c^2}+\frac{b^2c^2}{b^2c^2}=1$$

۳۸. $$A=\frac{(1+ab)[1+ab+(a+b)x]-(a+b)[a+b+(1+ab)x]}{[1+ab+(a+b)x]^2-[a+b+(1+ab)x]^2}=$$

$$=\frac{(1+ab)^2+(1+ab)(a+b)x-(a+b)^2-(a+b)(1+ab)x}{(1+ab)^2-(1+ab)^2x^2+(a+b)^2x^2-(a+b)^2}=$$

$$=\frac{(1+ab)^2-(a+b)^2}{(1+ab)^2(1-x^2)-(a+b)^2(1-x^2)}=$$

$$=\frac{(1+ab)^2-(a+b)^2}{(1-x^2)[(1+ab)^2-(a+b)^2]}=\frac{1}{1-x^2}$$

۳۹. $$A=\frac{(x^2-x+1)(x^2+x-1)}{(x^2+1-x)(x^2+1+x)}+\frac{(x-x^2+1)(x+x^2-1)}{(x^2+x-1)(x^2+x+1)}+$$

$$+\frac{(x^2-x-1)(x^2-x+1)}{(x^2-x-1)(x^2+x+1)}=\frac{x^2+x-1}{x^2+x+1}+\frac{x-x^2+1}{x^2+x+1}+$$

$$+\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}=\frac{x^2+x-1+x-x^2+1+x^2-x+1}{x^2+x+1}=$$

$$=\frac{x^2+x+1}{x^2+x+1}=1$$

۴۰. اگر مجموع دو جملهٔ اول صورت کسر را همچون مجموع دو مکعب کامل بگیریم، و یا شبیه مسألهٔ ۱۳ عمل کنیم، عبارت زیررا برای صورت کسر به‌دست‌می‌آوریم:

$$3(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)$$

به‌همین ترتیب، برای مخرج کسر هم به‌دست می‌آید:

$$3(x-y)(y-z)(z-x)$$

ازآن‌جا، حاصل عبارت مفروض چنین می‌شود:

$$A=\frac{3(x^2-y^2)(y^2-z^2(z^2-x^2)}{3(x-y)(y-z)(z-x)}=(x+y)(y+z)(z+x)$$

۴۱. $$A=\frac{a^3(c-b)+b^3(a-c)+c^3(b-a)}{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)}=\frac{M}{N};$$

$$M=a^3(c-b)+(b^3a-c^3a)+(-b^3c+c^3b)=a^3(c-b)-$$
$$-a(c^3-b^3)+bc(c^2-b^2)=(c-b)(a^3-ac^2-abc-ab^2+$$
$$+bc^2+b^2c)=(c-b)[(a^3-ab^2)+(-ac^2+bc^2)+(-abc+$$
$$+b^2c)]=(c-b)[a(a^2-b^2)-c^2(a-b)-bc(a-b)]=$$
$$=(c-b)(a-b)(a^2+ab-c^2-bc)=(c-b)(a-b)[(a^2-c^2)+$$
$$+(ab-bc)]=(c-b)(a-b)(a-c)(a+c+b)$$

با همین روش، برای مخرج به‌دست می‌آید:

$$N=(c-b)(a-b)(a-c)$$

(این تبدیل را درمسألهٔ ۳۴ هم دیدید). به‌این ترتیب

$$A=\frac{M}{N}=\frac{(c-b)(a-b)(a-c)(a+b+c)}{(c-b)(a-b)(a-c)}=a+b+c$$

۴۲. با توجه به‌این که: $\frac{1}{(x+k)(x+k+1)}=\frac{1}{x+k}-\frac{1}{x+k+1}$ داریم:

$$A=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+5}=\frac{5}{x(x+5)}$$

۴۳. حاصل‌ضرب پرانتز اول را درجملهٔ اول پرانتز دوم درنظر می‌گیریم:

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\frac{c}{a-b}=1+\frac{c}{a-b}\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)=$$
$$=1+\frac{c}{a-b}\cdot\frac{b^2-bc+ac-a^2}{ab}=1+\frac{c}{a-b}\cdot\frac{c(a-b)-(a^2-b^2)}{ab}=$$
$$=1+\frac{c}{a-b}\cdot\frac{(a-b)[c-(a+b)]}{ab}=1+\frac{c}{ab}[c-(a+b)]=1+\frac{2c^2}{ba}$$

(درآخرین عمل، ازبرابری $c=-(a+b)$ استفاده کرده‌ایم). به‌همین ترتیب، حاصل‌ضرب پرانتز اول در جمله‌های دوم وسوم پرانتز دوم، به‌ترتیب، برابر $1+\frac{2a^2}{bc}$ و $1+\frac{2b^2}{ca}$

می‌شود. ضمن جمع این سه‌عبارت، از نتیجهٔ مسألهٔ ۲۰ استفاده می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$۱+\frac{۲c^۲}{ab}+۱+\frac{۲a^۲}{bc}+۱+\frac{۲b^۲}{ca}=۳+\frac{۲(a^۳+b^۳+c^۳)}{abc}=$$

$$=۳+\frac{۲\times ۳abc}{abc}=۳+۶=۹$$

.۴۴ $$۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\dots+\frac{۱}{۲k-۱}-\frac{۱}{۲k}=$$

$$=۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\dots+\frac{۱}{۲k-۱}+\frac{۱}{۲k}-۲\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\dots+\frac{۱}{۲k}\right)=$$

$$=۱+\frac{۱}{۲}+\dots+\frac{۱}{k}+\frac{۱}{k+۱}+\frac{۱}{k+۲}+\dots+\frac{۱}{۲k-۱}+\frac{۱}{۲k}-$$

$$-\left(۱+\frac{۱}{۲}+\dots+\frac{۱}{k}\right)=\frac{۱}{k+۱}+\frac{۱}{k+۲}+\dots+\frac{۱}{۲k}$$

.۴۵ برابری اول را در $q^۲$، دومی را در $p^۲$، سومی را در $-۲pq$ ضرب و نتیجه‌ها را باهم جمع می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(a_۱q-b_۱p)^۲+(a_۲q-b_۲p)^۲+\dots+(a_nq-b_np)^۲=۰$$

بنابراین

$$a_۱q-b_۱p=a_۲q-b_۲p=\dots=a_nq-b_np=۰$$

که از آن‌جا برابری مطلوب به‌دست می‌آید.

.۴۶ برابری‌های مفروض را تبدیل واز ویژگی نسبت‌های مساوی استفاده می‌کنیم:

$$\frac{a_۱b_۱}{b_۱^۲}=\frac{a_۲b_۲}{b_۲^۲}=\dots=\frac{a_nb_n}{b_n^۲}=\frac{a_۱b_۱+a_۲b_۲+\dots+a_nb_n}{b_۱^۲+b_۲^۲+\dots+b_n^۲} \qquad (۱)$$

از آن‌جا

$$a_۱b_۱+a_۲b_۲+\dots+a_nb_n=\frac{a_۱}{b_۱}(b_۱^۲+b_۲^۲+\dots+b_n^۲) \qquad (۲)$$

به‌همین ترتیب، می‌توان به‌دست آورد:

$$a_۱b_۱+a_۲b_۲+\dots+a_nb_n=\frac{b_۱}{a_۱}(a_۱^۲+a_۲^۲+\dots+a_n^۲) \qquad (۳)$$

از ضرب دو رابطهٔ (۲) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$(a_۱b_۱+a_۲b_۲+\dots+a_nb_n)^۲=(a_۱^۲+\dots+a_n^۲)(b_۱^۲+\dots+b_n^۲)$$

۴۷. همهٔ مقسوم‌علیه‌های مشترک صورت و مخرج کسر، باید مقسوم‌علیهی از عبارت $a(۱۴n+۳)+b(۲۱n+۴)$ هم باشند (a و b عددهایی درست‌اند). ولی به‌ازای $a=۳$ و $b=-۲$ به‌دست می‌آید:

$$۳(۱۴n+۳)-۲(۲۱n+۴)=۱$$

بنابراین، تنها $+۱$ یا -۱ می‌توانند مقسوم‌علیه مشترک صورت ومخرج باشند، یعنی کسر مفروض قابل ساده‌شدن نیست.

۴۸. چون $\frac{a^۲}{b^۲}=\frac{b^۲}{c^۲}$، پس $\frac{a^۲+b^۲}{b^۲+c^۲}=\frac{b^۲}{c^۲}$. ولی از تناسب مفروض داریم: $b^۲=ac$. اگر دربخش راست تناسبی که به‌دست آورده‌ایم، از این برابری استفاده کنیم، معلوم می‌شود:

$$\frac{a^۲+b^۲}{b^۲+c^۲}=\frac{ac}{c^۲}=\frac{a}{c}$$

۴۹. از تناسب‌های مفروض به‌دست می‌آید*:

$$\frac{c_۱a_۱^n}{c_۱b_۱^n}=\frac{c_۲a_۲^n}{c_۲b_۲^n}=\dots=\frac{c_ka_k^n}{c_kb_k^n}$$

که با استفاده از ویژگی نسبت‌های برابر، نتیجه می‌شود:

$$\frac{c_۱a_۱^n+c_۲a_۲^n+\dots+c_ka_k^n}{c_۱b_۱^n+c_۲b_۲^n+\dots+c_kb_k^n}=\frac{c_۱a_۱^n}{c_۱b_۱^n}=\left(\frac{a_۱}{b_۱}\right)^n$$

۵۰. ثابت می‌کنیم که هیچ کسر گویایی مثل $\frac{m}{n}$ (m و n، عددهایی طبیعی‌اند)، برابر $\sqrt{۲}$ نیست. از برهان خلف استفاده می‌کنیم وفرض می کنیم $\frac{m}{n}=\sqrt{۲}$ یا $\frac{m^۲}{n^۲}=۲$. اگر

---

*) اگر بعضی از c_m ها برابرصفر باشند، برای تشکیل این نسبت‌ها، تنها از c_m هایی استفاده می‌کنیم که برابر صفر نیستند.

کسر $\frac{m}{n}$ را ساده‌نشدنی بگیریم، یعنی m و n نسبت به‌هم اول باشند، کسر $\frac{m^2}{n^2}$ هم قابل ساده‌شدن نیست. از رابطهٔ $\frac{m^2}{n^2}=2$ به‌دست می‌آید $m^2=2n^2$ و این، به‌معنای آن است که m عددی زوج است. فرض می‌کنیم $m=2p$، در نتیجه به‌برابری $4p^2=2n^2$ یا $n^2=2p^2$ می‌رسیم. ولی دراین‌جا، n باید عددی زوج باشد که ممکن نیست، زیرا m و n را نسبت به‌هم اول فرض کرده بودیم.

۵۱. بنابر تعریف ریشهٔ سوم عدد.

۵۲. a) بنابر تعریف توان صفر عدد $a \neq 0$؛ b) بنابر تعریف توان کسری یک عدد؛ c) بنابر تعریف توان منفی یک‌عدد $(a \neq 0)$؛ d) بنابر تعریف توان یکم یک عدد.

۵۳. $\sqrt{a^2}=|a|$. به زبان دیگر، برای $a \geqslant 0$: $\sqrt{a^2}=a$ و برای $a \leqslant 0$: $\sqrt{a^2}=-a$.

۵۴. a) $x \geqslant 0$، $y \geqslant 0$؛ b) $x \geqslant 0$، $y > 0$؛ c) $a \geqslant 0$، $b < 0$ و c هرعدد حقیقی دلخواه؛ d) $a \leqslant 0$، $b \geqslant 0$.

۵۵. با استفاده از ویژگی نسبت‌های برابر، به‌دست می‌آید:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\frac{a_1}{b_1}$$

که اگر از دوطرف، ریشهٔ دوم بگیریم، حاصل می‌شود:

$$\frac{\sqrt{a_1+a_2+\cdots+a_n}}{\sqrt{b_1+b_2+\cdots+b_n}}=\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{b_1}} \qquad (1)$$

از طرف دیگر، از نسبت‌های مفروض به دست می‌آید:

$$\frac{a_1b_1}{b_1^2}=\frac{a_2b_2}{b_2^2}=\cdots=\frac{a_nb_n}{b_n^2}$$

واز آن جا

$$\frac{\sqrt{a_1b_1}}{b_1}=\frac{\sqrt{a_2b_2}}{b_2}=\cdots=\frac{\sqrt{a_nb_n}}{b_n}.$$

وسرانجام

$$\frac{\sqrt{a_1 b_1}+\sqrt{a_2 b_2}+\cdots+\sqrt{a_n b_n}}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\frac{\sqrt{a_1 b_1}}{b_1}=\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{b_1}}. \quad (2)$$

اگر رابطه‌های (۱) و (۲) را با هم مقایسه کنیم، به سادگی برابری مورد نظر به دست می‌آید.

۵۶ تا ۱۱۵. راهنمائی: برای حل این مساله‌ها، باید به‌یاد داشت که در همهٔ آن‌ها، با ریشهٔ حسابی سروکارداریم. بنابراین، هرجاکه لازم است، برای به دست‌آوردن نتیجهٔ یك عبارت، به شرط‌های محدودکننده‌ای که لازم است، توجه کنید.

۵۶.

$$A=\left[\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-(\sqrt{x+y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})\sqrt{x+y}}\right]^{-2}-\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}=$$

$$=\left[\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})\sqrt{x+y}}{x+2\sqrt{xy}+y-x-y}\right]^2-\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2(x+y)}{(2\sqrt{xy})^2}-$$

$$-\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}=\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}\left(\frac{x+2\sqrt{xy}+y}{2\sqrt{xy}}-1\right)=$$

$$=\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}\cdot\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}=\frac{(x+y)^2}{4xy}$$

۵۷.

$$A=\frac{\sqrt[3]{a}(a-8b)}{\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{ab}+4\sqrt[3]{b^2}}:\frac{\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}}-\sqrt[3]{a^2}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{a}[(\sqrt[3]{a})^3-(2\sqrt[3]{b})^3]}{(\sqrt[3]{a})^2+(\sqrt[3]{a})(2\sqrt[3]{b})+(2\sqrt[3]{b})^2}\cdot\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{a^2}=$$

$$=\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a^2}=0$$

۵۸.

$$A=\left[\frac{(\sqrt[3]{a})^3-(\sqrt[3]{2a})^3}{(\sqrt[3]{a})^2-(\sqrt[3]{2b})^2}+\frac{\sqrt[3]{2ab}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2b})}{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2b})^2}\right]:$$

$$:\frac{(a+b)(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2b})}{a+b}=\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{2ab}+\sqrt[3]{4b^2}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2b}}+\frac{\sqrt[3]{2ab}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2b}}\right):$$

$$:(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{۲b})=\frac{\sqrt[3]{a^۲}+۲\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{۲b}+\sqrt[3]{۴b^۲}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{۲b}}\cdot\frac{۱}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{۲b}}=$$

$$=\frac{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{۲b})^۲}{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{۲b})^۲}=۱$$

۵۹.
$$A=\frac{(\sqrt{x^۲}-\sqrt{y^۲})^۳(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{-۳}+۲x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+$$

$$+\frac{۳\sqrt{x}(\sqrt{y}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^۲-(\sqrt{y})^۲}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^۳+۲x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}-$$

$$-\frac{۳\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x^۳}-۳x\sqrt{y}+۳y\sqrt{x}-\sqrt{y^۳}+۲x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}-\frac{۳\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=$$

$$=\frac{۳x\sqrt{x}-۳x\sqrt{y}+۳y\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}-\frac{۳\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{۳\sqrt{x}(x-\sqrt{xy}+y)}{(\sqrt{x})^۳+(\sqrt{y})^۳}-$$

$$-\frac{۳\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{۳\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\frac{۳\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=۰$$

۶۰.
$$A=\left[\frac{\sqrt[3]{b}(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})}{(\sqrt[3]{a})^۲-(\sqrt[3]{b})^۲}-\frac{\sqrt[3]{a^۲b}-\sqrt[3]{ab^۲}}{a+a}-\right.$$

$$\left.-\frac{(\sqrt[3]{b^۲}-\sqrt[3]{a^۲})(\sqrt[3]{a^۲}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^۲})}{(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a})[(\sqrt[3]{a})^۳+(\sqrt[3]{b})^۳]}\right]^{-۱}=$$

$$=\left[\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\frac{\sqrt[3]{a^۲b}-\sqrt[3]{ab^۲}}{(\sqrt[3]{a})^۳+(\sqrt[3]{b})^۳}-۱\right]^{-۱}=$$

$$=\left[\frac{\sqrt[3]{b}(\sqrt[3]{a^۲}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^۲}-\sqrt[3]{a^۲}+\sqrt[3]{ab})}{a+b}-۱\right]^{-۱}=$$

$$=\left(\frac{b}{a+b}-۱\right)^{-۱}=\left(\frac{-a}{a+b}\right)^{-۱}=-\frac{a+b}{a}$$

.۶۱

$$A=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x\sqrt{x}+y\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{-2}-\sqrt{xy}}{x-y}+\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2}-\sqrt{xy}+\sqrt{y^2}-\sqrt{xy}}{x-y}+\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{\sqrt{x^2}-\sqrt{y^2}}+\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=1$$

.۶۲

$$A=\frac{[\sqrt[4]{x^3}(\sqrt[4]{y}-\sqrt[4]{x}):(\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{y^2})+\sqrt[4]{x}]\sqrt[4]{y}(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})}{x+y-(x-\sqrt{xy}+y)}=$$

$$=\frac{(-\sqrt[4]{x^3}:(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})+\sqrt{x})\sqrt[4]{y}(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})}{\sqrt{xy}}=$$

$$=\frac{-\sqrt[4]{x^3y}+\sqrt{x}\sqrt[4]{y}(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})}{\sqrt{xy}}=\frac{-\sqrt[4]{x^3y}+\sqrt[4]{x^3y}+\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}=\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}=1$$

.۶۳

$$A=\left[\frac{\sqrt[4]{ab}\,(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1-\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right]:\left[\frac{\sqrt[3]{a}\,(\sqrt[3]{a^2}-1)}{\sqrt[3]{a}-1}-\frac{\sqrt[3]{a_2}(\sqrt[3]{a}+1)}{\sqrt[3]{a}+1}\right]=$$

$$=\left(\sqrt[4]{ab}+\frac{1-\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right):\left[\sqrt[3]{a}(\sqrt[3]{a}+1)-\sqrt[3]{a^2}\right]=\frac{1}{\sqrt[4]{ab}}:\sqrt[3]{a}=\frac{1}{\sqrt[12]{a^7b^3}}$$

.۶۴

$$A=\left[\frac{1-\sqrt{a}}{(1+\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a^2})-\sqrt{a}}\cdot\frac{1}{(1+\sqrt[4]{a^3}):(\sqrt[4]{a}+1)-\sqrt{a}}\right]^5=$$

$$=\left(\frac{1-\sqrt[4]{a^2}}{1+\sqrt[4]{a}}\cdot\frac{1}{1-\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a^2}-\sqrt{a}}\right)^5=\left(\frac{1-\sqrt[4]{a}}{1-\sqrt[4]{a}}\right)^5=1$$

.۶۵

$$A=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}[\sqrt[4]{bx}(\sqrt{x}+\sqrt{a}):(\sqrt{x}+\sqrt{a})+\sqrt[4]{bx}]^2+bx+3}{(\sqrt{bx}+\sqrt{3})^2}=$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}(\sqrt[۴]{bx}+\sqrt[۴]{bx})^{۲}+bx+۳}{(\sqrt{bx}+\sqrt{۳})^{۲}}=\frac{۲\sqrt{۳}\sqrt{bx}+bx+۳}{(\sqrt{bx}+\sqrt{۳})^{۲}}=\frac{(\sqrt{bx}+\sqrt{۳})^{۲}}{(\sqrt{xb}+\sqrt{۳})^{۲}}=۱$$

۶۶.

$$A=\left[\sqrt[۳]{\frac{x(x+a)^{۲}}{x-a}}-\sqrt[۳]{\frac{x(x-a)^{۲}}{x+a}}\right]^{-۱}\sqrt[۳]{a}+$$

$$+\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{\frac{۱}{x}-\frac{x}{a^{۲}}}=\left[\sqrt[۳]{\frac{x(x+a)^{۳}}{x^{۲}-a^{۲}}}-\sqrt[۳]{\frac{x(x-a)^{۳}}{x^{۲}-a^{۲}}}\right]^{-۱}\sqrt[۳]{a}+$$

$$+\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{\frac{a^{۲}-x^{۲}}{a^{۲}x}}=\left[\sqrt[۳]{\frac{x}{x^{۲}-a^{۲}}}\,(x+a-x+a)\right]^{-۱}\sqrt[۳]{a}-$$

$$-\frac{۱}{۲a}\sqrt[۳]{\frac{(x^{۲}-a^{۲})a}{x}}=\left(۲a\sqrt[۳]{\frac{x}{x^{۲}-a^{۲}}}\right)^{-۱}\sqrt[۳]{a}-$$

$$-\frac{۱}{۲a}\sqrt[۳]{\frac{(x^{۲}-a^{۲})a}{x}}=\frac{۱}{۲a}\sqrt[۳]{\frac{(x^{۲}-a^{۲})a}{x}}-\frac{۱}{۲a}\sqrt[۳]{\frac{(x^{۲}-a^{۲})a}{x}}=۰$$

۶۷.

$$A=b\left\{\left[\frac{\sqrt[۴]{a^{۲}}\,(\sqrt[۴]{a^{۳}}+\sqrt[۴]{b^{۳}})}{\sqrt[۴]{a^{۲}}(\sqrt[۴]{a}+\sqrt[۴]{b})}-\sqrt[۴]{ab}\right]:(\sqrt[۴]{a}-\sqrt[۴]{a})-\sqrt[۴]{a}\right\}^{-۴}=$$

$$=b\left[(\sqrt[۴]{a^{۲}}-\sqrt[۴]{ab}+\sqrt[۴]{b^{۲}}-\sqrt[۴]{ab}):(\sqrt[۴]{a}-\sqrt[۴]{b})-\sqrt[۴]{a}\right]^{-۴}=$$

$$=b\left[(\sqrt[۴]{a}-\sqrt[۴]{b})^{۲}:(\sqrt[۴]{a}-\sqrt[۴]{b})-\sqrt[۴]{a}\right]^{-۴}=$$

$$=b(\sqrt[۴]{a}-\sqrt[۴]{b}-\sqrt[۴]{a})^{-۴}=b(-\sqrt[۴]{b})^{-۴}=b\cdot\frac{۱}{b}=۱$$

۶۸.

$$A=\sqrt[۳]{a}-\left[\frac{(۱+a)(۱+\sqrt[۳]{a})}{۱-\sqrt[۳]{a^{۲}}}+\sqrt[۳]{a^{۲}}\right]\times$$

$$\times\frac{(۱+\sqrt[۳]{a^{۳}}):(\sqrt[۳]{a}+۱)-\sqrt[۳]{a^{۲}}}{۱+\sqrt[۳]{a^{۲}}}\sqrt[۳]{a}=\sqrt[۳]{a}-$$

$$-\left(\frac{1+a}{1-\sqrt[3]{a}}+\sqrt[3]{a^2}\right)\frac{1-\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a^2}}{1+\sqrt[3]{a^2}}\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{a}-$$

$$-\frac{1+a+\sqrt[3]{a^2}-a}{1-\sqrt[3]{a}}\cdot\frac{1-\sqrt[3]{a}}{1+\sqrt[3]{a^2}}\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a}=0$$

۶۹. $$A=\left(\frac{x\sqrt{x}+a\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{5}}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\right)^{-\frac{1}{5}}\sqrt[10]{(x-a)^3}=$$

$$=\left(\frac{x\sqrt{x}+a\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{5}}\left[\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2+\sqrt{ax}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{a})}\right]^{-\frac{1}{5}}\sqrt[10]{(x-a)^3}=$$

$$=\left[\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{a^3}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{a})}{x-\sqrt{xa}+a}\right]^{\frac{1}{5}}(x-a)^{\frac{3}{10}}=$$

$$=[(\sqrt{x}+\sqrt{a})(\sqrt{x}-\sqrt{a}]^{\frac{1}{5}}(x-a)^{\frac{3}{10}}=(x-a)^{\frac{1}{5}}(x-a)^{\frac{3}{10}}=$$

$$=(x-a)^{\frac{1}{1}}=\sqrt{x-a}$$

۷۰. $$A=\left\{\frac{\sqrt[3]{a^2}\,(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2x}):[\sqrt[3]{4x^2}\,(\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{a})]-1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{2x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{2x}}\right\}^{-6}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}:\sqrt[3]{4x^2}-1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{2x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{2x}}\right)^{-6}=$$

$$=\left[\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{4x^2}}{\sqrt[3]{4x^2}\,(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{2x})}-\frac{1}{\sqrt[3]{2x}}\right]^{-6}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2x}}{\sqrt[3]{4x^2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{2x^2}}\right)^{-6}\left(\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2x}-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt[3]{4x^2}}\right)^{-6}=\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{4x^2}}\right)^{-6}=\frac{16x^2}{a^2}$$

۷۱. $$A=\frac{[(a+x)(1+\sqrt{x})]^2(1-\sqrt{x})^2}{x^2-2x+1}x-ax\sqrt{a^2+4ax+4x^2}=$$

$$=\frac{(a+x)^2(1-x)^2}{(x-1)^2}x-ax\sqrt{(a+2x)^2}=$$

$$=(a+x)^2x-ax(a+2x)^*=x^3$$

۷۲.

$$A=\left[x\sqrt[3]{\frac{x+1}{(x-1)^2}}-\sqrt[3]{\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}}\right]^{\frac{3}{7}}:\sqrt[7]{x^2-1}=$$

$$=\left[x\sqrt[3]{\frac{x+1}{(x-1)^2}}-\sqrt[3]{\frac{x+1}{(x-1)^2}}\right]^{\frac{3}{7}}:\sqrt[7]{x^2-1}=\left[\sqrt[3]{\frac{x+1}{(x-1)^2}}(x-1)\right]^{\frac{3}{7}}:$$

$$:\sqrt[7]{x^2-1}=(\sqrt[3]{x^2-1})^{\frac{3}{7}}:\sqrt[7]{x^2-1}=\sqrt[7]{x^2-1}:\sqrt[7]{x^2-1}=1$$

۷۳.

$$A=\frac{(\sqrt{x}+1)^2+\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{a}):(\sqrt{x}-\sqrt{a})-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+2(\sqrt[4]{a^2}+\sqrt[4]{x^2}):(\sqrt{a}+\sqrt{x})}=$$

$$=\frac{(\sqrt{x}+1)^2+\sqrt{x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+2}=\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{2(\sqrt{x}+1)}=\frac{\sqrt{x}+1}{2}$$

۷۴.

$$A=\left[\sqrt[3]{\frac{a^2(a^2+2ab+4b^2)}{(a-2b)^2}}+\sqrt[3]{8b^3-a^3}\right]:\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}-\sqrt{2b}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}+\sqrt{2b}}\right)=$$

$$=\left[\sqrt[3]{\frac{a^3(a^3+8b^3)}{(a-2b)^3}}-\sqrt[3]{a^3-8b^3}\right]:\frac{\sqrt{2}(\sqrt{a}+\sqrt{2b}-\sqrt{a}+\sqrt{2b})}{a-2b}=$$

$$=\sqrt[3]{a^3-8b^3}\left(\frac{a}{a-2b}-1\right):\frac{2\sqrt{2}\sqrt{2b}}{a-2b}=$$

$$=\sqrt[3]{a^3-8b^3}\,\frac{2b}{a-2b}\cdot\frac{a-2b}{4\sqrt{b}}=\frac{1}{2}\sqrt{b}\sqrt[3]{a^3-8b^3}$$

۷۵.

$$A=\frac{\sqrt[3]{(b^3-3b^2)\sqrt{ab}+(3b-1)\sqrt{ab}}}{\sqrt[3]{b^3}-1}\sqrt[6]{b^5a}=$$

---

*) با فرض $a+2x\geqslant 0$.

$$=\frac{\sqrt[3]{\sqrt{ab}(b-1)^3}}{b-1}\sqrt[6]{b^5a}=\sqrt[6]{ab}\sqrt[6]{b^5a}=\sqrt[6]{a^2b^6}=b\sqrt[3]{a}$$

۷۶. $$A=\frac{(5-4x^2)\sqrt{5}+8\sqrt{5}x^2}{\sqrt{(5+4x^2)^2}}\cdot\frac{\sqrt{2}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}\sqrt{ax}=$$

$$=\frac{(5+4x^2)\sqrt{5}}{5+4x^4}\sqrt{2ax}=\sqrt{10ax}$$

۷۷. $$A=\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{x+\sqrt{x^2-1}}\right):\sqrt{x^2-1}=$$

$$=\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2-(x-\sqrt{x^2-1})^2}{[x^2-(x^2-1)]\sqrt{x^2-1}}=\frac{4x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}=4x$$

۷۸. $$A=\left\{\left[\frac{a+3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}+b+2a-b}{a+3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}+b+2b-a}\right]^2:\sqrt[12]{\frac{a^2}{b^2}}\right\}\sqrt{\frac{b}{a}}=$$

$$=\left[\frac{3\sqrt[3]{a}\,(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{3\sqrt[3]{b}\,(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}\right]^2\sqrt[6]{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{b}{a}}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}\right)^2\sqrt[6]{\frac{b}{a}\cdot\frac{b^3}{a^3}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{b^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}}=1$$

۷۹. $$A=\left[\frac{\sqrt[3]{a^2}\,(\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{a^2})}{\sqrt[3]{ab}\,(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})}-1\right]\left(1+\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}\right)=$$

$$=\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}-1\right)\left(1+\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}\right)=\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)^3-1=\frac{a}{b}-1=\frac{a-b}{b}$$

۸۰. از عبارت مفروض و از شرط $x>0$ معلوم می‌شود، مقدارهای قابل قبول برای x، عبارتند از عددهایی که در شرط $0<x<1$ صدق کنند. ازاین‌جا نتیجه می‌شود که $\sqrt{x^2}=x$ و $\sqrt{(x-1)^2}=1-x$. با توجه به‌این‌نکته، عبارت را تبدیل می کنیم:

$$A=\left[\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{(\sqrt{1-x})^2}{\sqrt{1-x^2}-(\sqrt{1-x})^2}\right]\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x^2}}-\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right)\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}=\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}{(1+x)-(1-x)}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}=$$

$$=\frac{2+2\sqrt{1-x^2}}{2x}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}=\frac{(\sqrt{1-x^2})^2-1}{x^2}=\frac{-x^2}{x^2}=-1$$

۰۸۱
$$A=\left(\frac{a^{-\frac{1}{6}}-5c^{-\frac{1}{6}}-5a^{-\frac{1}{6}}-5c^{-\frac{1}{6}}}{a^{-\frac{1}{3}}-c^{-\frac{1}{3}}}\right)^{-1}\frac{6\sqrt[6]{a}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{c}}=$$

$$=\left(\frac{-4a^{-\frac{1}{6}}}{a^{-\frac{1}{3}}-c^{-\frac{1}{3}}}\right)\frac{6\sqrt[6]{a}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{c}}=\frac{a^{-\frac{1}{3}}-c^{-\frac{1}{3}}}{-4a^{-\frac{1}{6}}}\cdot\frac{6\sqrt[6]{a}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{c}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{c}}{4\sqrt[3]{ac}}\cdot\sqrt[6]{a}\cdot\frac{6\sqrt[6]{a}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{c}}=\frac{3\sqrt[6]{a^2}}{2\sqrt[3]{ac}}=\frac{3\sqrt[3]{c^2}}{2c}$$

۰۸۲
$$A=\frac{(\sqrt{5}+1)(1-\sqrt{5}+\sqrt{x})+(\sqrt{5}-1)(1+\sqrt{5}+\sqrt{x})}{2[(1+\sqrt{x})^2-(\sqrt{5})^2]}\times$$

$$\times\frac{x+2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}\sqrt{5}}=\frac{1-5(\sqrt{5}+1)\sqrt{x}+5-1+(\sqrt{5}-1)\sqrt{x}}{2(x+2\sqrt{x}-4)}\times$$

$$\times\frac{x+2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{5}}{2\sqrt{x}\sqrt{5}}=1$$

۰۸۳ چون داریم:

$$\sqrt[4]{(9-4\sqrt{5})}\sqrt{2+\sqrt{5}}=\sqrt[4]{(9-4\sqrt{5})(2+\sqrt{5})^2}=$$

$$=\sqrt[4]{(9-4\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})}=\sqrt[4]{(9^2-(4\sqrt{5})^2}=\sqrt[4]{81-80}=1$$

بنا براین

$$A=\left[2\sqrt{\frac{2}{a}}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2a}-\sqrt[4]{b}}+\frac{1}{\sqrt[4]{2a}+\sqrt[4]{b}}\right)^{-2}\right]:$$

$$:\left(1-2\sqrt{\frac{b}{2a}}+\frac{b}{2a}\right)=\left[2\sqrt{\frac{2}{a}}\left(\frac{2\sqrt[4]{2a}}{\sqrt[4]{4a^2}-\sqrt[4]{b^2}}\right)^{-2}\right]:$$

$$:\left(1-\sqrt{\frac{b}{2a}}\right)^2=2\sqrt{\frac{2}{a}}\left(\frac{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}{2\sqrt[4]{2a}}\right)^2:\left(\frac{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}{\sqrt{2a}}\right)^2=$$

$$=2\sqrt{\frac{2}{a}}\cdot\frac{(\sqrt{2a}-\sqrt{b})^2}{4\sqrt{2a}}\cdot\frac{2a}{(\sqrt{2a}-\sqrt{b})^2}=\sqrt{\frac{2}{a}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2a}}\cdot a=1$$

۸۴.
$$A=\left[\frac{\sqrt{ab}-b+b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(a+\sqrt{ab}-a)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\right]:$$

$$:\left[1+\frac{2\sqrt{b}\,(\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}}\right]=\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}\right):$$

$$:\left(1+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)=\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}\right):\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}}{2\sqrt{ab}}\right)\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=1+$$

$$+\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2\sqrt{ab}}=\frac{2\sqrt{ab}+a-2\sqrt{ab}+b}{2\sqrt{ab}}=\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$$

۸۵. از آن جا که

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\,\sqrt{6-4\sqrt{2}}=\sqrt[6]{(20+14\sqrt{2})^2(6-4\sqrt{2})^3}=$$

$$=\sqrt[6]{2^2(10+7\sqrt{2})^2\cdot 2^3(3-2\sqrt{2})^3}=\sqrt[6]{2^5(198+140\sqrt{2})(99-70\sqrt{2})}=$$

$$=\sqrt[6]{2^6(99+70\sqrt{2})(99-70\sqrt{2})}=$$

$$=2\sqrt[6]{99^2-(70\sqrt{2})^2}=2\sqrt[6]{9801-9800}=2$$

بنا براین

$$A=\left(1+\frac{1}{2}\sqrt[3]{a\sqrt{a}-3a+3\sqrt{a}-1}\right):$$

$$:\left[\frac{\sqrt{a^۲}-۱}{۲(\sqrt{a}+۱)}+۱\right]=\left[۱+\frac{\sqrt[۳]{(\sqrt{a}-۱)^۳}}{۲}\right]:\left(\frac{\sqrt{a}-۱}{۲}+۱\right)=$$

$$=\left(۱+\frac{\sqrt{a}-۱}{۲}\right):\frac{\sqrt{a}+۱}{۲}=\frac{\sqrt{a}+۱}{۲}:\frac{\sqrt{a}+۱}{۲}=۱$$

۸۶. $$A=۹\left(\sqrt[۶]{۴\cdot ۵۴}-\sqrt[۶]{۹\cdot\frac{۳}{۸}}\right)^{-۴}-$$

$$-\sqrt[۶]{(۳-۲\sqrt{۲})^۳\cdot ۸^۲(۵\sqrt{۲}+۷)^۲}:\sqrt[۳]{۸}=۹\left(\sqrt[۶]{۸\cdot ۲۷}-\sqrt[۶]{\frac{۲۷}{۸}}\right)^{-۴}-$$

$$-۲\sqrt[۶]{(۹۹-۷۰\sqrt{۲})(۹۹+۷۰\sqrt{۲})}:۲=$$

$$=۹\left(\sqrt{۶}-\sqrt{\frac{۳}{۲}}\right)^{-۴}-\sqrt[۶]{۹۹^۲-(۷۰\sqrt{۲})^۲}=۹\left(\frac{۱}{۲}\sqrt{۶}\right)^{-۴}-$$

$$-\sqrt[۶]{۹۸۰۱-۹۸۰۰}=۹\left(\frac{۲}{\sqrt{۶}}\right)^۴-۱=۹\cdot\frac{۲^۴}{۶^۲}-۱=۹\cdot\frac{۲^۲}{۳^۲}-۱=۴-۱=۳$$

۸۷. $$A=\left[\sqrt[۶]{\frac{(۱-a)^۳(۱+a)}{a^۳}\cdot\frac{۹a^۴}{۱۶(۱-a)^۴}}\right]^{-۱}:\sqrt[۶]{\frac{۴(۱-a^۲)}{۹a^۳}}=$$

$$=\sqrt[۶]{\frac{۱۶(۱-a)}{۹a(۱+a)}}\cdot\sqrt[۶]{\frac{۹a^۳}{۴(۱-a^۲)}}=\sqrt[۶]{\frac{۱۶(۱-a)}{۹a(۱+a)}\cdot\frac{۹a^۳}{۴(۱-a^۲)}}=$$

$$=\sqrt[۶]{\frac{۴a^۲}{(۱+a)^۲}}=\sqrt[۳]{\frac{۲a}{۱+a}}$$

۸۸. $$A=\left[\frac{\sqrt[۴]{۱-x}}{۲\sqrt[۴]{(۱+x)^۳}}+\frac{\sqrt[۴]{۱+x}}{۲\sqrt[۴]{(۱-x)^۳}}\right]\cdot\frac{۱}{\sqrt{۱-x}}\cdot\sqrt[۴]{\frac{۱-x}{۱+x}}=$$

$$=\frac{۱-x+۱+x}{۲\sqrt[۴]{(۱+x)^۳(۱-x)^۳}}\cdot\frac{۱}{\sqrt{۱-x}}\cdot\frac{\sqrt[۴]{۱-x}}{\sqrt[۴]{۱+x}}=$$

$$=\frac{2\sqrt[4]{1-x}}{2\sqrt[4]{(1+x)^4(1-x^3)}\sqrt{1-x}}=\frac{1}{(1+x)\sqrt[4]{(1+x)^2\sqrt{1-x}}}=\frac{1}{1-x^2}$$

۸۹. $$A=x^3\left[\frac{2(\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{y^2})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\right]^5\sqrt[3]{x\sqrt{x}}=$$

$$=x^3\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^5\sqrt[6]{x^3}=x^3\cdot\frac{32}{x^2\sqrt{x}}\sqrt{x}=32x$$

۹۰. $$A=x(x-y)\sqrt{x-y}+y(2x+3y)\sqrt{x-y}+$$

$$+2xy\sqrt{x-y}-(x+y)^2\sqrt{x-y}=(x^2-xy+2xy+$$

$$+3y^2+2xy-x^2-2xy-y^2)\sqrt{x-y}=y(x+2y)\sqrt{x-y}$$

۹۱.

$$A=\frac{(a+\sqrt{1+a^2})(a-\sqrt{1+a^2})-(\sqrt{1+a^2}-a)(\sqrt{1+a^2}+a)}{\sqrt{1+a^2}(\sqrt{1+a^2}+a)(\sqrt{1+a^2}-a)}$$

$$=\frac{(a+\sqrt{1+a^2})(2a-2\sqrt{1+a^2})}{\sqrt{1+a^2}(a+\sqrt{1+a^2}(\sqrt{1+a^2}-a)}=-\frac{2}{\sqrt{1+a^2}}$$

۹۲. $$A=\sqrt{\frac{(p+q)^2}{p(p^2-q^2)}p(p+q)}-\sqrt{\frac{(p-q)^2}{p^2-q^2}(p+q)}=$$

$$=\sqrt{\frac{(p+q)^2}{p-q}}-\sqrt{\frac{(p-q)^2}{p-q}}$$

چون $p>q>0$، $\sqrt{(p+q)^2}=p+q$ و $\sqrt{(p-q)^2}=p-q$، بنابراین

$$A=\frac{p+q}{\sqrt{p-q}}-\frac{p-q}{\sqrt{p-q}}=\frac{2q}{\sqrt{p-q}}$$

۹۳. $$A=\frac{(1-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}[(1-\sqrt{x})^2+(1+\sqrt{x})^2]}\left[\frac{1+\sqrt[4]{x}-1+\sqrt[4]{x}}{2\sqrt[4]{x}(1-\sqrt{x^2})}\right]^2-$$

$$-\frac{۱}{۲\sqrt{x}(۱-x)}=\frac{(۱-\sqrt{x})^۲}{۲\sqrt{x}(۱+x)}\cdot\frac{۱}{(۱-\sqrt{x})^۲}-\frac{۱}{۲\sqrt{x}(۱-x)}=$$

$$=\frac{۱}{۲\sqrt{x}(۱+x)}-\frac{۱}{۲\sqrt{x}(۱-x)}=\frac{-۲x}{۲\sqrt{x}(۱-x^۲)}=\frac{\sqrt{x}}{x^۲-۱}$$

۹۴. $$A=\frac{۸-x}{۲+\sqrt[۳]{x}}:\frac{۴+۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲}}{۲+\sqrt[۳]{x}}+\frac{\sqrt[۳]{x^۲}-۲\sqrt[۳]{x}+۲\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۳]{x}-۲}\cdot\frac{\sqrt[۳]{x^۲}-۴}{\sqrt[۳]{x}(\sqrt[۳]{x}+۲)}=$$

$$=\frac{۸-x}{۲+\sqrt[۳]{x}}\cdot\frac{۲+\sqrt[۳]{x}}{۴+۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲}}+\sqrt[۳]{x}=۲-\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x}=۲$$

۹۵. $$A=\frac{(m+x)^۲-۱}{(m+x-۱)^۲}:\left(\frac{۲mx-۱+m^۲+x^۲}{۲mx}\right)^{-۱}=$$

$$=\frac{m+x+۱}{m+x-۱}\cdot\frac{(m+x)^۲-۱}{۲mx}=\frac{(m+x+۱)^۲}{۲mx}=$$

$$=\frac{(m-۱)^۲(m+x+۱)^۲}{۲m(m-۱)^۲x}=\frac{[m^۲-۱+(m-۱)x]^۲}{۲m(m-۱)^۲x}$$

ولی $x(m-۱)=۱$، بنابراین

$$A=\frac{(m^۲-۱+۱)^۲}{۲m(m-۱)}=\frac{m^۴}{۲m(m-۱)}=\frac{m^۳}{۲(m-۱)}$$

۹۶. چون $k>۱$، پس

$$(۱-x^۲)^{-\frac{۱}{۲}}=\left[۱-\frac{۴k}{(۱+k)^۲}\right]^{-\frac{۱}{۲}}=\sqrt{\frac{(۱+k)^۲}{(۱-k)^۲}}=\frac{k+۱}{k-۱}$$

بنابراین

$$\frac{۱}{۲}[(۱-x^۲)^{-\frac{۱}{۲}}+۱]=\frac{۱}{۲}\left(\frac{k+۱}{k-۱}+۱\right)=\frac{k}{k-۱}$$

$$\frac{۱}{۲}[(۱-x^۲)^{-\frac{۱}{۲}}-۱]=\frac{۱}{k-۱}$$

از آن جا

$$A=\left(\frac{k}{k-۱}\right)^{-\frac{۱}{۲}}+\left(\frac{۱}{k-۱}\right)^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{\sqrt{k-۱}}{\sqrt{k}}+\sqrt{k-۱}=\sqrt{k-۱}\left(۱+\frac{۱}{\sqrt{k}}\right)$$

۹۷. $A=\left(\frac{x+1}{x}\right)^{-2}+\left(\frac{x-1}{x}\right)^{-2}=\frac{x^2}{(x+1)^2}+\frac{x^2}{(x-1)^2}=$

$$=x^2\cdot\frac{(x-1)^2+(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)^2}=\frac{2x^2(1+x^2)}{(x^2-1)^2}=\frac{2(n+1)^2x^2(1+x^2)}{(n+1)^2(x^2-1)^2}=$$

$$=\frac{2(n+1)x^2[(n+1)+(n+1)x^2]}{[(n+1)x^2-(n+1)]^2}$$

ولی $x^2=\frac{1-n^{-1}}{1+n^{-1}}$ و یا $x^2(n+1)=n-1$. بنابراین

$$A=\frac{2(n-1)[(n+1)+(n-1)]}{[(n-1)-(n+1)]^2}=\frac{2(n-1)\cdot 2n}{4}=n(n-1)$$

۹۸. چون $a>0$ و $b>0$، پس $\sqrt{a^2}=a$ و $\sqrt{b^2}=b$ و داریم:

$$(a+x)(b+x)=(\sqrt{a^2}+\sqrt{ab})(\sqrt{b^2}+\sqrt{ab})=$$

$$=\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2,a(a-x)(x-b)=\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$$

چون $a>b$، پس

$$\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

بنابراین

$$A=\left[\frac{\sqrt{(a-x)(x-b)}-\sqrt{(a+x)(x+b)}}{\sqrt{(a-x)(x-b)}+\sqrt{(a+x)(x+b)}}\right]^2=$$

$$=\left[\frac{\sqrt[4]{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{a}-\sqrt[4]{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt[4]{ab}\,(\sqrt{a}-\sqrt{b})+\sqrt[4]{ab}\,(\sqrt{a}+\sqrt{b})}\right]^2=$$

$$=\left[\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})-(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})+(\sqrt{a}+\sqrt{b})}\right]^2=\left(\frac{-2\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}\right)^2=\frac{b}{a}$$

۹۹. $x+a=a\frac{m^3+n^2}{m^3-n^3}+a=a\frac{m^3+n^3+m^3-n^3}{m^3-n^3}=$

$$=\frac{۲m^۳a}{m^۳-n^۳};\ x-a=\frac{۲n^۳a}{m^۳-n^۳};\ \frac{x+a}{x-a}=\frac{m^۳}{n^۳}$$

بنا براین، برای عبارت مفروض:

$$A=\left(\sqrt[۳]{\frac{x+a}{x-a}}+\sqrt[۳]{\frac{x-a}{x+a}}-۲\right)^{-\frac{۱}{۲}}=\left(\sqrt[۳]{\frac{m^۳}{n^۳}}+\sqrt[۳]{\frac{n^۳}{m^۳}}-۲\right)^{-\frac{۱}{۲}}=$$

$$=\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}-۲\right)^{-\frac{۱}{۲}}=\left(\frac{m^۲+n^۲-۲mn}{mn}\right)^{-\frac{۱}{۲}}=\sqrt{\frac{mn}{(m-n)^۲}}$$

ولی $m>n$ و $\sqrt{(m-n)^۲}=m-n$، بنا براین

$$A=\frac{\sqrt{mn}}{m-n}$$

۱۰۰. بعد ازبیرون آوردن $x^{\frac{۲}{m}}$ ازعبارت، به دست می‌آید:

$$x^{\frac{۲}{m}}\left[\left(۱+x^{\frac{m-n}{mn}}\right)^۲-۴a^۲x^{\frac{m-n}{mn}}\right]=x^{\frac{۲}{m}}\cdot M.$$

ازطرف دیگرداریم:

$$x^{\frac{m-n}{mn}}=(a+\sqrt{a^۲-۱})^۲ \text{ و } ۱+x^{\frac{m-n}{mn}}=۱+$$

$$+(a+\sqrt{a^۲-۱})^۲=۲a^۲+۲a\sqrt{a^۲-۱}=۲a(a+\sqrt{a^۲-۱})$$

بنا براین

$$M=[۲a(a+\sqrt{a^۲-۱})]^۲-۴a^۲(a+\sqrt{a^۲-۱})^۲=۰$$

و در نتیجه: $x^{\frac{۲}{m}}\cdot M=۰$

۱۰۱. $$(a+x^{\frac{۱}{۲}})^{-\frac{۱}{۲}}=(a+\sqrt{x})^{-\frac{۱}{۲}}=(a+۲\sqrt{a-۱})^{-\frac{۱}{۲}}=$$

$$=[(a-۱)+۲\sqrt{a-۱}+۱]^{-\frac{۱}{۲}}=[(\sqrt{a-۱}+۱)^۲]^{-\frac{۱}{۲}}=$$

$$=(\sqrt{a-۱}+۱)^{-۱}=\frac{۱}{\sqrt{a-۱}+۱}$$

به همین ترتیب

$$(a-x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}=(a-\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}=[(\sqrt{a-1}-1)^2]^{-\frac{1}{2}}$$

همچنین ۱) $\sqrt{a-1}<1$ و $1<a<2$

$$\sqrt{(\sqrt{a-1}-1)^2}=1-\sqrt{a-1},(a-x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=(1-\sqrt{a-1})^{-1}=\frac{1}{1-\sqrt{a-1}}$$

بنابراین، برای عبارت مفروض داریم:

$$A=\frac{1}{\sqrt{a-1}+1}+\frac{1}{1-\sqrt{a-1}}=\frac{1}{2-a}$$

همچنین ۲) $\sqrt{a-1}>1$ و $a>2$

$$\sqrt{(\sqrt{a-1}-1)^2}=\sqrt{a-1}-1,(a-x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}=(\sqrt{a-1}-1)^{-1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a-1}-1}\ ;A=\frac{1}{\sqrt{a-1}+1}+\frac{1}{\sqrt{a-1}-1}=\frac{2\sqrt{a-1}}{a-2}$$

۱۵۲. $$A=\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}-\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{x^2+a^2}}\right)^2=$$

$$=\left[\frac{(\sqrt{x^2-a^2}-\sqrt{x^2+a^2})^2}{(x^2-a^2)-(x^2+a^2)}\right]^2=\left[\frac{2x^2-2\sqrt{(x^2+a^2)(x^2-a^2)}}{-2a^2}\right]^2=$$

$$=\frac{1}{a^4}\left[x^2-\sqrt{(x^2+a^2)(x^2-a^2)}\right]^2$$

ولی

$$x^2=a^2.\frac{m^2+n^2}{2mn},\ (x^2+a^2)(x^2-a^2)=$$

$$=\left(a^2\cdot\frac{m^2+n^2}{2mn}+a^2\right)\left(a^2\cdot\frac{m^2+n_2}{2m}-a^2\right)=$$

$$=a^4\cdot\frac{(m+n)^2(m-n)^2}{4m^2n^2}=a^4\cdot\frac{(m^2-n^2)^2}{4m^2n^2},\ \sqrt{(x^2+a^2)(x^2-a^2)}=$$

$$=a^2\cdot\frac{n^2-m^2}{2mn}\qquad(n>m>0)$$

و بنابراین

$$\sqrt{(m^2-n^2)^2}=n^2-m^2,\ \mathrm{a}\sqrt{m^2n^2}=mn.$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$A=\frac{1}{a^4}\left(a^2\cdot\frac{m^2+n^2}{2mn}-a\cdot\frac{n^2-m^2}{2mn}\right)^2=\left(\frac{2m^2}{2mn}\right)^2=\frac{m^2}{n^2}$$

۱۰۳.

$$A=\frac{(\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x})^2}{(\sqrt{m+x})^2-(\sqrt{m-x})^2}=\frac{2m+2\sqrt{m^2-x^2}}{2x}=$$

$$=\frac{m}{x}+\sqrt{\left(\frac{m}{x}\right)^2-1}$$

وقتی‌که x را زیر رادیکال ببریم، $\sqrt{x^2}$ را x به‌حساب می‌آوریم، زیرا بنابرشرط $x>0$.
از آن‌جا که $\frac{m}{x}=\frac{n^2+1}{2n}$، بنابراین

$$A=\frac{n^2+1}{2n}+\sqrt{\left(\frac{n^2+1}{2n}\right)^2-1}=\frac{n^2+1}{2n}+\sqrt{\left(\frac{n^2-1}{2n}\right)^2}$$

می‌دانیم $0<n<1$، بنابراین

$$\sqrt{\left(\frac{n^2-1}{2n}\right)^2}=\frac{1-n^2}{2n}$$

و سرانجام به دست می‌آید:

$$A=\frac{n^2+1}{2n}+\frac{1-n^2}{2n}=\frac{1}{n}$$

۱۰۴.

$$A=[x^{-\frac{4}{3}}(x^{-\frac{2}{3}}+a^{-\frac{2}{3}})]^{-\frac{1}{2}}+$$

$$+[a^{-\frac{4}{3}}(a^{-\frac{2}{3}}+x^{-\frac{2}{3}})]^{-\frac{1}{2}}=x^{\frac{2}{3}}(x^{-\frac{2}{3}}+a^{-\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}+$$

$$+a^{\frac{2}{3}}(x^{-\frac{2}{3}}+a^{-\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}=(x^{-\frac{2}{3}}+a^{-\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}})=$$

$$=(x^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}$$

چون

$$x^{\frac{1}{3}}=(b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}},\ x^{\frac{2}{3}}=b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}},\ x^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}=b^{\frac{2}{3}}$$

بنا براین

$$A=(b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}(b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}(b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$$

۱۰۵. $$A=\frac{2a\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}-x)}{(\sqrt{1+x^2})^2-x^2}=2a\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}-x)$$

ولی

$$x=\frac{a-b}{2\sqrt{ab}};\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+\left(\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\right)^2}=\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$$

بنا براین

$$A=2a\cdot\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}-\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}\right)=\frac{a(a+b)}{\sqrt{ab}}\cdot\frac{2b}{2\sqrt{ab}}=a+b$$

۱۰۶. مقدار x را درعبارت x^3+12x قرار می‌دهیم و از دستور

$$(m-n)^3=m^3-3mn(m-n)-n^3$$

استفاده می کنیم، به دست می آید:

$$A=[\sqrt[3]{4(\sqrt{5}+1)}]^3-3\sqrt[3]{4(\sqrt{5}+1)}\sqrt[3]{4(\sqrt{5}-1)}\,x-$$

$$-[\sqrt[3]{4(\sqrt{5}-1)}]^3+12x=4\sqrt{5}+4-3\sqrt[3]{64}x-$$

$$-4\sqrt{5}+4+12x=8-12x=8$$

۱۰۷. مقدار x را درعبارت x^3+ax+b قرار می‌دهیم و از دستور

$$(m+n)^3=m^3+3mn(m+n)+n^3$$

استفاده می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$A=\left(\sqrt[۳]{-\frac{b}{۲}+\sqrt{\frac{b^۲}{۴}+\frac{a^۳}{۲۷}}}\right)^۳+$$

$$+۳\sqrt[۳]{-\frac{b}{۲}+\sqrt{\frac{b^۲}{۴}+\frac{a^۳}{۲۷}}}\sqrt[۳]{-\frac{b}{۲}-\sqrt{\frac{b^۲}{۴}+\frac{a^۳}{۲۷}}}x+$$

$$+\left(\sqrt[۳]{-\frac{b}{۲}-\sqrt{\frac{b^۲}{۴}+\frac{a^۳}{۲۷}}}\right)^۳+ax+b=-b+$$

$$+۳\sqrt[۳]{\left(-\frac{b}{۲}\right)^۲-\left(\frac{b^۲}{۴}+\frac{a^۳}{۲۷}\right)}x+ax+b=$$

$$=۳\sqrt[۳]{-\frac{a^۳}{۲۷}}x+ax=-ax+ax=۰$$

۱۰۸. $x^{\frac{۱}{n}}$ را به‌فاکتور می‌گذاریم، به‌دست‌می‌آید:

$$A=x^{\frac{۱}{n}}\left[\frac{a+x}{ax}\cdot\frac{(a+x)^{\frac{۱}{n}}}{x^{\frac{۱}{n}}}\right]=$$

$$=x^{\frac{۱}{n}}\left[\frac{۱}{a}\left(\frac{a}{x}+۱\right)\left(\frac{a}{x}+۱\right)^{\frac{۱}{n}}-\frac{۱}{b}\right]=$$

$$=x^{\frac{۱}{n}}\left[\frac{۱}{a}\left(\frac{a}{x}+۱\right)^{\frac{n+۱}{n}}-\frac{۱}{b}\right]=x^{\frac{۱}{n}}\cdot M$$

ازطرف دیگر داریم:

$$x=ab^{\frac{n}{n+۱}}:\left(a^{\frac{n}{n+۱}}-b^{\frac{n}{n+۱}}\right);\quad \frac{a}{x}=\left(a^{\frac{n}{n+۱}}-b^{\frac{n}{n+۱}}\right):b^{\frac{n}{n+۱}}=$$

$$=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+n}}-۱;\quad ۱+\frac{a}{x}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+۱}}$$

که درنتیجه، سرانجام به دست می‌آید:

$$M=\frac{۱}{a}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+۱}}\right]^{\frac{n+۱}{n}}-\frac{۱}{b}=\frac{۱}{a}:\frac{a}{b}-\frac{۱}{b}=۰;$$

$$A=x^{\frac{۱}{n}}\cdot M=۰$$

۱۰۹. از آن‌جا که داریم:

$$\sqrt{۲+\sqrt{۵}}\sqrt[۶]{-۳۸+۱۷\sqrt{۵}}=\sqrt[۶]{(۲+\sqrt{۵})^۳(-۳۸+۱۷\sqrt{۵})}=$$

$$=\sqrt[۶]{(۳۸+۱۷\sqrt{۵})(-۳۸+۱۷\sqrt{۵})}=\sqrt[۶]{(۱۷\sqrt{۵})^۲-۳۸^۲}=۱$$

بنابراین، عبارت مفروض، به‌این صورت درمی‌آید:

$$A=\frac{۱-mx}{۱+mx}\cdot\sqrt{\frac{۱+nx}{۱-nx}}$$

اکنون، هربخش را به‌طورجداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{۱-mx}{۱+mx}=\frac{۱-\sqrt{\frac{۲m}{n}-۱}}{۱+\sqrt{\frac{۲m}{n}-۱}}=\frac{\left(۱-\sqrt{\frac{۲m}{n}-۱}\right)^۲}{۱-\left(\frac{۲m}{n}-۱\right)}=$$

$$=\frac{\frac{۲m}{n}-۲\sqrt{\frac{۲m}{n}-۱}}{۲-\frac{۲m}{n}}=\frac{m-n\sqrt{\frac{۲m}{n}-۱}}{n-m};$$

$$\frac{۱+nx}{۱-nx}=\frac{۱+\frac{n}{m}\sqrt{\frac{۲m}{n}-۱}}{۱-\frac{n}{m}\sqrt{\frac{۲m}{n}-۱}}=\frac{m+n\sqrt{\frac{۲m}{n}-۱}}{m-n\sqrt{\frac{۲m}{n}-۱}}=$$

$$=\frac{\left(m+n\sqrt{\frac{۲m}{n}-۱}\right)^۲}{m^۲-n^۲\left(\frac{۲m}{n}-۱\right)}=\frac{\left(m+n+\sqrt{\frac{۲m}{n}-۱}\right)^۲}{(m-n)^۲};$$

$$\sqrt{\frac{۱+nx}{۱-nx}}=\frac{m+n+\sqrt{\frac{۲m}{n}-۱}}{n-m};$$

(چون طبق شرط داریم $m<n$؛ بنابراین $\sqrt{(m-n)^{۲}}=n-m$). به این ترتیب

$$A=\frac{m-n\sqrt{\frac{۲m}{n}-۱}}{n-m}\ \frac{m+n\sqrt{\frac{۲m}{n}-۱}}{n-m}=$$

$$=\frac{m^{۲}-n^{۲}\left(\frac{۲m}{n}-۱\right)}{(n-m)^{۲}}=\frac{(m-n)^{۲}}{(m-n)^{۲}}=۱$$

۱۱۰.

$$A=\sqrt[n]{x^{\frac{n^{۲}}{n+۱}}\left(x^{\frac{n}{n+۱}}+a^{\frac{n}{n+۱}}\right)}+\sqrt[n]{a^{\frac{n^{۲}}{n+۱}}\left(a^{\frac{n}{n+۱}}x+^{\frac{n}{n+۱}}\right)}-۱=$$

$$=\sqrt[n]{x^{\frac{n}{n+۱}}+a^{\frac{n}{n+۱}}}\left(\sqrt[n]{x^{\frac{n^{۲}}{n+۱}}}+\sqrt[n]{a^{\frac{n^{۲}}{n+۱}}}\right)-۱=$$

$$=\left(x^{\frac{n}{n+۱}}+a^{\frac{n}{n+۱}}\right)^{\frac{۱}{n}}\left(x^{\frac{n}{n+۱}}+a^{\frac{n}{n+۱}}\right)-۱=\left(x^{\frac{n}{n+۱}}+a^{\frac{n}{n+۱}}\right)^{\frac{n+۱}{n}}-۱$$

ولی

$$x^{\frac{n}{n+۱}}=b^{\frac{n}{n+۱}}-a^{\frac{n}{n+۱}},\ a\ x^{\frac{n}{n+۱}}+a^{\frac{n}{n+۱}}=b^{\frac{n}{n+۱}}$$

بنابراین

$$A=\left(b^{\frac{n}{n+۱}}\right)^{\frac{n+۱}{n}}-۱=b-۱$$

۱۱۱.

$$A=\sqrt[n]{a^{n-k}x^{k}}\left(\sqrt[n]{\frac{a^{k}x^{n-k}}{a^{n-k}x^{k}}}+۱-۲\sqrt{b}\sqrt[۲n]{\frac{x^{n}}{a^{۲n-۲k}x^{۲k}}}\right)+b^{۲}=$$

$$=\sqrt[n]{a^{n-k}x^{k}}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n-۲k}{n}}-۲\sqrt{\frac{b}{a}}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n-۲k}{۲n}}+۱\right]+b^{۲}$$

ولی

$$\frac{x}{a}=\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{b-a})^{\frac{۲n}{n-۲k}}}{a^{\frac{n}{n-۲k}}};\quad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n-۲k}{۲n}}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{b-a}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{b}{a}-۱}$$

بنابراین

$$A=\sqrt[n]{a^{n-k}x^{k}}\left[\left(\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{b}{a}-۱}\right)^{۲}-۲\sqrt{\frac{b}{a}}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sqrt{\frac{b}{a}-۱}\right)+۱\right]+b^{۲}=\left(\frac{b}{a}-۲\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{b}{a}-۱}+\right.$$

$$\left.+\frac{b}{a}-۱-۲\cdot\frac{b}{a}+۲\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{b}{a}-۱}+۱\right)+b_{۲}=b_{۲}$$

۱۱۲. چون $\frac{x+۱}{x-۱}=(۲+\sqrt{۳})^{n}$، بنابـراین

$$A=\sqrt[n]{(x-۱)^{۲}}\left[\left(\sqrt[n]{\frac{x+۱}{x-۱}}\right)^{۲}+۱-۴\sqrt[n]{\frac{x+۱}{x-۱}}\right]+۱=$$

$$=\sqrt[n]{(x-۱)^{۲}}[(۲+\sqrt{۳})^{۲}+۱-۴(۲+\sqrt{۳})]+۱=$$

$$=\sqrt[n]{(x-۱)^{n}}(۴+۴\sqrt{۳}+۳+۱-۸-۴\sqrt{۳})+۱=۱$$

۱۱۳.

$$\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n}+\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n-۱}-\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n}-$$

$$-\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n-۱}=\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n-۱}\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}+۱\right)-$$

$$-\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n-۱}\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}+۱\right)=\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n-۱}\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}-$$

$$-\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n-۱}\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}=\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n-۱}\frac{(۱+\sqrt{۵})^{۲}}{۴}-$$

$$-\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n-۱}\frac{(۱-\sqrt{۵})^{۲}}{۴}=\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n+۱}-\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n+۱}$$

۱۱۴. برای تبدیل مخرج سمت چپ برابری، از این دستور استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

به دست می‌آید:

$$\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{b^2}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{b^2}}{2}}=\sqrt{\frac{b+|b|}{2}}+\sqrt{\frac{a-|b|}{2}}$$

اگر بخش سمت چپ برابری را A بنامیم، با توجه بـه عبارتی‌که بـرای مخرج به دست آورده‌ایم، خواهیم داشت:

$$A=b\sqrt{2}\cdot\frac{2a+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{\frac{a+|b|}{2}}+\sqrt{\frac{a-|b|}{2}}}=2b\cdot\frac{2a+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+|b|}+\sqrt{a-|b|}}=$$

$$=2b\cdot\frac{(2a+\sqrt{a^2-b^2})(\sqrt{a+|b|}-\sqrt{a-|b|})}{(a+|b|)-(a-|b|)}=$$

$$=\frac{b}{|b|}[a+|b|+\sqrt{(a+|b|)(a-|b|)}+a-|b|](\sqrt{a+|b|}-\sqrt{a-|b|})=$$

$$=\frac{b}{|b|}[(\sqrt{a+|b|})^3-(\sqrt{a-|b|})^3$$

اگر داشته باشیم $a>|b|$، همهٔ ایـن عمل‌ها درست است، زیرا همه‌جا بـا ریشهٔ حسابی سروکار داریم. عبارت حاصل باسمت راست برابری فرض، یکی است، زیـرا بـه ازای $0<b<a$ داریم $|b|=b$ وحکم روشن است. درحالتی که b منفی باشد، داریم $|b|=-b$ وعبارت بالا چنین می‌شود:

$$-[(\sqrt{a-b})^3-(\sqrt{a+b})^3]=\sqrt{(a+b)^3}-\sqrt{(a-b)^3}$$

یعنی بازهم برابری فرض درست است.

۱۱۵. با استفاده از دستور تبدیل رادیکال‌های مرکب، به دست می‌آید:

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-4(x-1)}}{2}}=$$

$$=2\sqrt{\frac{x+\sqrt{(x-2)^2}}{2}}=2\sqrt{\frac{x+2-x}{2}}=2$$

(چون $x \geqslant ۲$، مقدار $\sqrt{(x-۲)^۲}$ را برابر $x-۲$ گرفتیم).

II. معادله‌های جبری

۱۱۶. وجود تنها جواب $x=-\frac{b}{a}$ در معادلهٔ $ax+b=۰$، به‌ازای $a\neq ۰$، ناشی از یک‌ارزشی بودن عمل تقسیم، درهرحوزهٔ عددی است.

۱۱۷. شرط لازم است. معادله‌های مفروض را منطبق می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم، مقداری برای x وجود دارد که هم در معادلهٔ اول وهم درمعادلهٔ دوم صدق کند. از آن‌جا که هریک از این معادله‌ها تنها یک جواب دارند واین جواب‌ها عبارتند از $x=-\frac{b_۱}{a_۱}$ و $x=-\frac{b_۲}{a_۲}$، بنابراین به‌دست می‌آید:

$$-\frac{b_۱}{a_۱}=-\frac{b_۲}{a_۲} \Rightarrow a_۱b_۲-a_۲b_۱=۰$$

شرط کافی است. اگر رابطهٔ $a_۱b_۲-a_۲b_۱=۰$ را مفروض بگیریم، از آن نتیجه می‌شود:

$$\frac{b_۱}{a_۱}=\frac{b_۲}{a_۲} \Rightarrow -\frac{b_۱}{a_۲}=-\frac{b_۲}{a_۲}$$

ولی $-\frac{b_۱}{a_۱}$، $-\frac{b_۲}{a_۲}$، به‌ترتیب، جواب معادلهٔ اول وجواب معادلهٔ دوم‌اند و می‌توان با قراردادن آن‌ها در معادلهٔ مربوط، به‌این امر قانع شد. به‌این ترتیب، دومعادله دارای‌ریشهٔ مشترک‌اند، یعنی برهم منطبق‌اند.

۱۱۸. دومعادله برهم منطبق‌اند. $x=-۱$ ریشهٔ مشترک آن‌هاست.

۱۱۹. برهم منطبق‌اند. $x=۴$ ریشهٔ مشترک دومعادله است.

۱۲۰. معادلهٔ دوم را از معادلهٔ اول کم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(a-۱)(x-۱)=۰$$

بنابراین $a=۱$ یا $x=۱$. $x=۱$ را در معادلهٔ دوم قرار می‌دهیم، به‌نتیجهٔ $a=-۲$ می‌رسیم. بنابراین، دومعادله درحالت‌های $a=۱$ و $a=-۲$ برهم منطبق‌اند.

۱۲۱. دومعادله هم‌ارزند، زیرا دومی را می‌توان از اولی، با اضافه‌کردن $x^{۲}+۱$ به‌هردوطرف، به‌دست آورد.

۱۲۲. دومعادله هم‌ارز نیستند. اولی دارای ریشه‌های ۱ و ۲ است، در حالی‌که دومی تنها ریشهٔ ۲ را دارد.

۱۲۳. هم‌ارز نیستند. اولی تنها یك‌ریشه دارد: $x=-۱$؛ دومی هم تنها یك‌ریشه دارد: $x=۱$. عدد ۱ ــ ریشهٔ معادلهٔ دوم، درحوزهٔ عددهای حقیقی نیست، زیرا $\sqrt{x-۱}$ به‌ازای آن بی‌معنی می‌شود.

۱۲۴. در حوزهٔ‌عددهای‌حقیقی،هم‌ارزنیستند. معادلهٔ اول دوریشهٔ $x=۸$ و $x=-۱$ را دارد، درحالی‌که معادلهٔ دوم تنها یك‌ریشه دارد: $x=۸$.

۱۲۵. داریم: $a(a-۱)x=۲(a-۱)$. باشرط $a\neq ۰$ و $a\neq ۱$ خواهیم‌داشت: $x=\frac{۲}{a}$. درحالت $a=۰$، معادلهٔ مفروض جواب ندارد. درحالت $a=۱$، معادلهٔ مفروض به اتحاد تبدیل می‌شود، یعنی هرمقدار x درآن صدق می‌کند.

۱۲۶. به‌ترتیب داریم:

$$\left(\frac{x-mn}{m+n}-p\right)+\left(\frac{x-pm}{p+m}-n\right)+\left(\frac{x-np}{n+p}-m\right)=۰;$$

$$\frac{x-(mn+np+pm)}{m+n}+\frac{x-(mn+np+pm)}{p+m}+\frac{x-(mn+np+pm)}{n+p}=۰;$$

$$\left(\frac{۱}{m+n}+\frac{۱}{p+m}+\frac{۱}{n+p}\right)[x-(mn+np+pm)]=۰;$$

اگر $\frac{۱}{m+n}+\frac{۱}{p+m}+\frac{۱}{n+p}\neq ۰$، آن‌وقت: $x=mn+np+pm$.

اگر $\frac{۱}{m+n}+\frac{۱}{p+m}+\frac{۱}{n+p}=۰$، آن‌وقت ، هرمقدار دلخواه x در معادله صدق می‌کند.

۱۲۷. داریم:

$$\left(\frac{a+b-x}{c}+۱\right)+\left(\frac{b+c-x}{a}+۱\right)+\left(\frac{c+a-x}{b}+۱\right)-$$

$$-\left(۴-\frac{۴x}{a+b+c}\right)=۰;$$

$$(a+b+c-x)\left(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}-\frac{۴}{a+b+c}\right)=۰$$

پرانتز دوم نمی‌تواند برابر صفر باشد، زیرا اگر مثلاً فرض کنیم $a\geqslant b\geqslant c>۰$ (حالتی که a و b و c منفی باشند، به‌سادگی به‌همین حالت منجر می‌شود)، آن‌وقت داریم:

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}-\frac{۴}{a+b+c}=\frac{۱}{a+b+c}\left(\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\right.$$

$$\left.+\frac{a+b+c}{c}-۴\right)=\frac{۱}{a+b+c}\left[\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\left(\frac{a+b}{c}-۱\right)\right]\neq ۰$$

زیرا همهٔ جمله‌های داخل کروشه مثبت‌اند $\left(\frac{a+b}{c}\geqslant\frac{c+c}{c}=۲\right)$. به‌این‌ترتیب، جواب معادله، چنین است:

$$x=a+b+c$$

۱۲۸. چون برای $a\geqslant ۰$ داریم: $|a|=a$ و برای $a\leqslant ۰$ داریم: $|a|=-a$، بنابراین معادلهٔ مفروض، در حالت $x\geqslant ۱$، به‌صورت $x-۱=۲$ و در حالت $x<۱$ به‌صورت $-(x-۱)=۲$ درمی‌آید. ازمعادلهٔ اول $x_۱=۳$ وازمعادلهٔ دوم $x_۲=-۱$ حاصل می‌شود.

۱۲۹. سه‌حالت درنظر می‌گیریم: ۱) $x\leqslant ۱$. دراین‌حالت معادلهٔ مفروض به‌صورت $۱-x+۲-x=۱$ درمی‌آید که از آن‌جا به‌دست می‌آید $x=۱$. ۲) $۱<x\leqslant ۲$. دراین‌حالت، معادلهٔ مفروض به‌صورت $۱=۱$ درمی‌آید که همیشه برقرار است و، بنابراین، همهٔ عددهای $۱<x\leqslant ۲$ در معادله صدق می‌کنند. ۳) $x>۲$. معادله به صورت $x-۱+x-۲=۱$ درمی‌آید که برای $x>۲$ جواب ندارد. به‌این ترتیب، همهٔ عددهای واقع درفاصلهٔ $[۱،۲]$ درمعادلهٔ مفروض صدق می‌کنند: $۱\leqslant x\leqslant ۲$.

۱۳۰. اگر شبیه مسألهٔ ۱۲۹ (منتهی درچهار حالت) حل کنیم، به‌دستگاه‌های مختلط زیر (یعنی دستگاه‌هایی که هرکدام شامل یك برابری ویك نابرابری است) می‌رسیم:

$$۱)\quad ۲-x+۳-x+۸-۲x=۹،\ x\leqslant ۲;$$

$$۲)\quad x-۲+۳-x+۸-۲x=۹،\ ۲<x\leqslant ۳;$$

$$۳)\quad x-۲+x-۳+۸-۲x=۹،\ ۳<x\leqslant ۴;$$

$$۴)\quad x-۲+x-۳+۲x-۸=۹،\ x>۴$$

که با حل آن‌ها، تنها دوجواب برای معادلهٔ مفروض به‌دست می‌آید: $x_1 = 1$ و $x_2 = \frac{11}{2}$.

۱۳۱. به‌ترتیب داریم:

$$40(|x|-1)-5(|x|-5)+4(14-2|x|)=80(|x|-9)-140;$$

$$53|x|=901;\ |x|=17;\ x_1=17,\ x_2=-17$$

۱۳۲. بعد از تبدیل‌های ساده، به‌معادلهٔ $4x+8=5|3x-5|$ می‌رسیم، که حل آن ساده است و جواب‌های $x_1=3$ و $x_2=\frac{17}{19}$ به‌دست می‌آید.

۱۳۳. اگر شبیه مسألهٔ قبل حل کنیم، به‌جواب $x=4$ می‌رسیم. دراین‌جا برخلاف مسألهٔ قبل، تنها یك جواب به‌دست می‌آید، زیرا حالت $3x-2=|2-3x|$، منجر به‌تناقض می‌شود.

۱۳۴. صورت کسر را با استفاده از دستور مربوط به‌مجموع توان‌های سوم دومقدار، تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{(2m-3n)[(2m-ax)^2-(2m-ax)(ax-3n)+(ax-3n)^2]}{(2m-ax)^2+(ax-3n)^2}=2m-3n$$

درحالت $2m-3n\neq 0$، می‌توان دوطرف معادله را به $2m-3n$ ساده کرد و، سپس، بعد از عمل‌های ساده، به‌معادله

$$(2m-ax)(ax-3n)=0$$

رسید که، از آن‌جا، جواب‌های $x_1=\frac{2m}{a}$ و $x_2=\frac{3n}{a}$ به دست می‌آید. در حالت $2m-3n=0$، معادله با هر مقداری از x که برابر با $\frac{2m}{a}$ نباشد، سازگار است.

۱۳۵. بله، این‌معادله‌ها، تشکیل یك دستگاه می‌دهند.

۱۳۶. یك جواب و نه، آن‌طور که گاهی برخی از دانش‌آموزان تصور می‌کنند، سه‌جواب. بنا بر تعریف، جواب‌دستگاه عبارت‌است ازمجموعهٔ مقدارهای عددی مجهول‌ها، که درهمهٔ معادله‌های دستگاه صادق باشند.

۱۳۷. ممکن است هم‌ارز باشند یا هم‌ارز نباشند. مثلاً، دستگاه‌های

$$\begin{cases}3x-y-2=0\\6x-2y-4=0\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}x+y-2=0\\x-3y+2=0\end{cases}$$

درجواب $x=y=1$ مشترك‌اند، درحالی‌که هم‌ارز نیستند.

۱۳۸. ممکن است هم‌ارز باشند یا نباشند. مثلاً با فرض $m_1=1$، $m_2=2$، $n_1=2$ و $n_2=4$، از دستگاه

$$\begin{cases} x+2y-4=0 \\ 2x-3y-1=0 \end{cases}$$

به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} 5x-4y-\ 6=0 \\ 10x-8y-12=0 \end{cases}$$

وروشن است‌که این دودستگاه هم‌ارز نیستند.

۱۳۹. روشن است‌که، به‌ازای هرمقدار m_1، m_2، n_1 و n_2، هرجواب دستگاه(*)، جوابی از دستگاه(**) است. اکنون، جوابی از دستگاه (**) را درنظر می‌گیریم. اگر این جواب را در معادله‌های این‌دستگاه قراردهیم. هرمعادله، به‌یك اتحاد عددی تبدیل می‌شود. از این‌اتحادهای عددی، اولی را در n_2 ودومی را در m_2 ضرب و نتیجهٔ دومی رااز نتیجهٔ اولی کم می‌کنیم؛ به‌دست می‌آید:

$$(m_1n_2-m_2n_1)A=0$$

ولی $m_1n_2-m_2n_1\neq0$، بنابراین $A=0$. واین به‌معنای آن‌است‌که جواب‌دستگاه(**)، جوابی از معادلهٔ اول دستگاه(*) است. به‌همین‌ترتیب، می‌توان ثابت‌کردکه این‌جواب، در معادلهٔ $B=0$ هم‌صدق می‌کند.

اگر دستگاه (*) جواب نداشته‌باشد، دستگاه (**) هم جواب نخواهد داشت.

۱۴۰. نه، درست نیست. به‌عنوان مثال، می‌توان دستگاه زیر را در نظر گرفت، که برای آن این‌حکم درست نیست:

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ ax+by+c=0 \end{cases} \qquad (1)$$

درحالی‌که اگر در دستگاه اول مسألهٔ ۱۳۹ داشته باشیم: $a_1b_2-a_2b_1\neq0$، آن‌وقت، حکم مسألهٔ ۱۴۰ درست است.

۱۴۱. اگر قبلاً قضیه‌ای را که در مسألهٔ ۱۳۹ تنظیم کرده‌ایم، ثابت نکرده باشیم، این‌آزمایش لازم است. درواقع، دستگاه

$$\begin{cases} x=\dfrac{c_2b_1-c_1b_2}{a_1b_2-a_2b_1} \\ \\ y=\dfrac{a_2c_1-a_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1} \end{cases} \qquad (1)$$

نتیجه‌ای از دستگاه مفروض است و روشن است که، به ازای مقدارهایی از x و y که در معادلهٔ مفروض صدق می‌کنند، برقرار است. ولی این‌که، آیا چنین عددهایی وجود دارند، به‌زبان دیگر، آیا دستگاه مفروض جواب دارد یا نه، ازجواب حاصل نتیجه نمی‌شود. بنابراین تنها می‌توان حکم کرد که، اگر دستگاه مفروض جواب داشته‌باشد، این جواب با رابطه‌های (۲) داده شده است. وجود جواب وقتی ثابت می‌شود که مقدارهای (۱) را در دستگاه مفروض مورد آزمایش قراردهیم.

۱۴۲. اگر معادلهٔ اول‌را در b_2 ومعادلهٔ دوم‌را در $-b_1$ ضرب و، سپس،معادله‌های حاصل را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(a_1b_2-a_2b_1)x+c_1b_2-c_2b_1=0$$

اگر معادلهٔ اول دستگاه مفروض را در $-a_2$ و معادلهٔ دوم را در a_1 ضرب و، سپس، دو معادلهٔ حاصل را باهم جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(a_1b_2-a_2b_1)y+c_2a_1-c_1a_2=0$$

چون $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$، بنابراین دستگاه جدید که هم‌ارز دستگاه مفروض است (مسألهٔ ۱۳۹)، یك‌جواب منحصر دارد.

۱۴۳. اگر $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ قابل ساده‌شدن نباشد، یعنی اگر $P(x)$ و $Q(x)$، مقسوم‌علیه مشترکی نداشته باشند، آن وقت معادله‌های $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=0$ و $P(x)=0$ هم‌ارزند. درحالت کلی، این‌دو معادله هم‌ارز نیستند.

۱۴۴. روشن است که ریشه‌های معادلهٔ دوم، درضمن ریشه‌های معادلهٔ اول‌اند. ولی هرریشه‌ای از معادلهٔ اول ممکن است ریشهٔ معادلهٔ دوم نباشد. بنابراین، در حالت کلی، هم‌ارز نیستند.

۱۴۵. اگر دو معادلهٔ اول دستگاه را در نظر بگیریم، به‌جواب $x=2$ ، $y=1$ می‌رسیم. اکنون اگر این مقدارها را در معادلهٔ سوم دستگاه قراردهیم، به‌دست می‌آید: $a=3$.

۱۴۶. می‌دانیم که دستگاه

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

به شرط $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ بدون جواب و باشرط $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ نامعین‌است. باتوجه به این مطلب ، معلوم می‌شود که دستگاه مفروض بـرای $a=-12$ و $b=36$ نامعین و برای $a=-12$ و $b\neq 36$ بدون جواب است.

۱۴۷. دومعادلهٔ اول‌را درنظرمی‌گیریم ونسبت به x و y حل می کنیم، به‌دست‌می‌آید:

$$x=-\frac{(k+1)^2}{k^2+k-1};\ y=\frac{k+1}{k^2+k-1}$$

که اگر این مقدارها را به‌جای x و y درمعادلهٔ سوم قراردهیم، به‌معادلهٔ زیر برای تعیین k می‌رسیم:

$$-\frac{(k+1)^3}{k^2+k-1}+\frac{(12-k)(k+1)}{k^2+k-1}=-(1+k)$$

که باحل آن به‌دست می‌آید: $k_1=-1$ ، $k_2=5$.

۱۴۸. به‌ازای $m\neq 3$، ازدومعادلهٔاول دستگاه به‌دست می‌آید: $x=4$، $y=-1$. به ازای $m=3$ ، معادلهٔ دوم دستگاه هم، به همـان صورت معادلهٔ اول درمی‌آید. اگر $x=4$، $y=-1$ را درمعادلهٔ سوم دستگاه قراردهیم، به‌دست‌می‌آید: $m=3$. بنابراین، دستگاه مفروض، به‌ازای $m=3$، سازگار ولی نـامعین است، زیـرا به‌دستگاه زیر منجر می‌شود:

$$\begin{cases} 3x+2y=10 \\ 3x+2y=10 \\ 6x+4y=20 \end{cases}$$

۱۴۹. متناقض نیستند. اولی به ازای $c=0$ وهرمقدار دلخواه a و b، یا $a=1$ وهرمقدار دلخواه b و c برقرار و، بنابراین، معادله است. دومی به‌ازای هرمقداردلخواه a، b و c برقرار و، بنابراین، اتحاد است.

۱۵۰. از معـادلهٔ دوم دیـده می‌شودکـه $y-1=\frac{1}{4}|x+1|\geqslant 0$؛ بنـا بـراین $|y-1|=y-1$ ودستگاه به‌این صورت درمی‌آید:

$$\begin{cases}|x+۱|+y-۱=۵\\|x+۱|=۴y-۴\end{cases}$$

که باحذف $|x+۱|$ به‌دست می‌آید. $y=۲$ را در معادلهٔ اول قرار می‌دهیم. به‌معادلهٔ $|x+۱|=۴$ می‌رسیم. ازآن‌جا $x+۱=\pm۴$ و $x=-۵$ یا $x=۳$.

به‌این ترتیب، دستگاه مفروض دوجواب دارد: $(-۵، ۲)$ و $(۳، ۲)$.

۱۵۱. از معادلهٔ دوم معلوم می‌شود که $y-۵=|x-۱|\geqslant ۰$ و بنابراین $|y-۵|=y-۵$. به‌دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases}|x-۱|+y-۵=۰\\|x-۱|+۵-y=۰\end{cases}$$

پاسخ: $\left(\frac{۱۱}{۲}، \frac{۳}{۲}\right)$ و $\left(\frac{۱۱}{۲}، \frac{۱}{۲}\right)$.

۱۵۲. از معادلهٔ اول به‌دست می‌آید: $۵y=-۳|x|-۹$، یعنی $y<۰$ وبنابراین $|y|=-y$. از معادلهٔ دوم داریم: $۲x=|y|+۷$، یعنی $x>۰$ و $|x|=x$ و به‌دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases}۳x+۵y+۹=۰\\۲x+y-۷=۰\end{cases}$$

پاسخ: $x=\frac{۴۴}{۷}$، $y=-\frac{۳۹}{۷}$.

۱۵۳. این دستگاه را می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{cases}x-y=\pm۲\\\pm x\pm y=۴\end{cases}$$

در معادلهٔ دوم‌کافی است تنها علامت‌های بالا یا تنها علامت‌های پایین را درنظر گرفت. (درغیراین‌صورت، دستگاه حاصل بدون‌جواب است). ازچهاردستگاهی که به‌دست‌می‌آید، به‌چهار جواب می‌رسیم: $(۳، ۱)$، $(۱، ۳)$، $(-۳، -۱)$، $(-۱، -۳)$.

۱۵۴. ۱) $y\geqslant ۰$. دراین‌حالت داریم: $|y|=y$ واز معادلهٔ دوم به‌دست می‌آید: $y=۱-|x|$. اگر این‌مقدار y را درمعادلهٔ اول دستگاه قراردهیم، به‌دست می‌آید:

$$|x+۱-|x||=۱ \Rightarrow x+۱-|x|=\pm۱$$

اگر درطرف دوم، علامت منفی‌را بگیریم، به‌جواب $x=-1$ می‌رسیم که منجر به $y=0$ می‌شود. ولی، اگر علامت مثبت را انتخـاب کنیم، به‌معادلهٔ $x-|x|=0$ یا $|x|=x$ می‌رسیم که به‌ازای همهٔ مقدارهای $x\geqslant 0$ صدق می‌کند. دراین‌حالت، دستگاه به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$$

۲) $y\leqslant 0$. اگر شبیه حالت قبل عمل کنیم، به‌جواب $x=1$، $y=0$ و یا دستگاه زیر (برای $x\leqslant 0$) می‌رسیم:

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ x+y=-1 \end{cases}$$

پاسخ‌را می‌توان به‌این‌ترتیب تنظیم کرد: هرزوج عدد غیرمنفی که مجموعی‌برابر ۱، یا هرزوج عدد غیرمثبت کـه مجموعی برابر ۱ — داشته بـاشد، جواب دستگاه مفروض است.

۱۵۵. با حل دستگاه به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{15n+7}{3n^2+2};\ y=\frac{7n-10}{3n^2+2}$$

ازآن‌جا کـه مخرج هردوکسر مثبت است، شرط لازم وکافی بـرای این‌که داشته‌بـاشیم: $x>0$ ، $y<0$، برقراری نابرابری‌های زیر است:

$$15n+7>0\ ,\ 7n-10<0$$

که از آن‌جـا به‌دست می‌آید: $-\frac{7}{15}<n<\frac{10}{7}$ وروشن است که در این فـاصله، تنها دو عدد درست ۰ و ۱ قرار دارد.

۱۵۶. برای این‌که چند جمله‌ای مفروض بر x^2-3x+2 بخش‌پذیر باشد، لازم و کافی است که بـر $x-1$ و $x-2$ بخش‌پذیر بـاشد. به‌این ترتیب، باید چندجمله‌ای مفروض به‌ازای $x=1$ و $x=2$ برابر صفر شود که ما را به‌این دستگاه می‌رساند.

$$a+b=-1,\ 2a+b=-4$$

وازآن‌جا: $a=-3$، $b=2$.

۱۵۷. ریشه‌های سه‌جمله‌ای $x^۲-۳x+۴$، عددهایی مختلط‌اند و، بنابراین، اگر بخواهیم این مسأله‌را با روش مسألهٔ ۱۵۶ حل کنیم، منجر به‌محاسبه‌های طولانی با عددهای مختلط می‌شود. به‌همین مناسبت، از روش دیگری استفاده می‌کنیم چندجمله‌ای مفروض را، بنابر قاعدهٔ تقسیم، برسه جمله‌ای تقسیم می‌کنیم و باقی‌ماندهٔ تقسیم را به‌دست می‌آوریم. این باقی‌مانده برابر $(a-۳)x+b+۴$ می‌شود. برای بخش‌پذیر بودن چند جمله‌ای مفروض به‌سه‌جمله‌ای، باید باقی‌مانده، نسبت به x، متحد باصفر باشد، یعنی داشته‌باشیم:

$$a=۳=۰\ ،\ b+۴=۰ \Rightarrow a=۳،\ b=-۴$$

روشن است که مسألهٔ ۱۵۶ را هم می‌توانستیم باهمین روش حل کنیم.

۱۵۸. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای بـر $(x-a)(x-b)$، یك‌عبارت درجهٔ اول نسبت به x است. این باقی‌مانده را $mx+n$ وخود چندجمله‌ای را $f(x)$ می‌نامیم. باید داشته‌باشیم:

$$f(x)=(x-a)(x-b)\varphi(x)+mx+n$$

$\varphi(x)$ را خارج قسمت تقسیم گرفته‌ایم. اگردربرابری‌فوق یکبار $x=a$ وباردیگر $x=b$ قراردهیم، به‌دستگاه زیر برای تعیین m و n می‌رسیم.

$$\begin{cases} A=ma+n \\ B=mb+n \end{cases}$$

که با حل آن به‌دست می‌آید: $m=\dfrac{A-B}{a-b}$ و $n=\dfrac{aB-bA}{a-b}$ و، بنابراین، باقی‌ماندهٔ مطلوب، چنین است:

$$mx+n=\frac{A-B}{a-b}x+\frac{aB-bA}{a-b}=A\cdot\frac{x-b}{a-b}+B\cdot\frac{x-a}{b-a}$$

شکل اخیر باقی‌مـانده را می‌توان بدون محاسبه، بـا درنظرگرفتن قضیه‌ای که در مسألهٔ ۲۹ ثابت‌کردیم، نوشت.

۱۵۹. دراین‌جا، باقی‌ماندهٔ تقسیم، درحالت کلی، یك‌سه‌جمله‌ای درجه دوم به‌صورت $mx^۲+nx+p$ است. اگـر شبیه مسألهٔ ۱۵۸ عمل‌کنیم، به‌دستگاه زیر، برای محـاسبهٔ m، n و p می‌رسیم.

$$\begin{cases} A=ma^۲+na+p \\ B=mb^۲+nb+p \\ C=mc^۲+nc+p \end{cases}$$

پاسخ: باقی‌ماندهٔ تقسیم، به‌این‌صورت است:

$$mx^۲+nx+p=A\cdot\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+$$

$$+B\cdot\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+C\cdot\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

۱۶۰. اگر چندجمله‌ای $x^۳+px+q$ را بر چندجمله‌ای $x^۲-۲ax+a^۲$ تقسیم کنیم، به باقی‌ماندهٔ $(p+۳a^۲)x-۲a^۳+q$ می‌رسیم. چون باقی‌مانده باید متحد با صفر باشد، به‌دست می‌آید:

$$p+۳a^۲=۰\ ,\ -۲a^۳+q=۰$$

ازاولی به‌دست می‌آید: $a^۲=-\frac{p}{۳}$ یا $a^۶=-\frac{p^۳}{۲۷}$؛ وازدومی $a^۳=\frac{q}{۲}$ یا $a^۶=\frac{q^۲}{۴}$. با مقایسهٔ دومقداری که برای $a^۶$ به‌دست آمده است، رابطهٔ موردنظر بین p و q به‌دست می‌آید: $\frac{p^۳}{۲۷}+\frac{q^۲}{۴}=۰$. برای محاسبهٔ مقدار a ، می‌توان مقدار $a^۳$ را برمقدار $a^۲$ تقسیم کرد که درنتیجه: $a=-\frac{۳q}{۲p}$.

۱۶۱. ازآن‌جاکه بزرگترین جملهٔ چندجمله‌ای برابر $x^۴$ است، چندجمله‌ای‌مطلوب باید به‌صورت $x^۲+px+q$ باشد. ازآن‌جا، به‌اتحاد زیر می‌رسیم:

$$x^۴+۲x^۳+ax^۲+۲x+b=(x^۲+px+q)^۲$$

و یا

$$x^۴+۲x^۳+ax^۲+۲x+b=x^۴+۲px^۳+(p^۲+۲q)x^۲+۲pqx+q^۲$$

ضریب‌های توان‌های برابر را دردوطرف برابری، مساوی قرار می‌دهیم:

$$۲=۲p;\ a=p^۲+۲q;\ ۲=۲pq;\ b=q^۲$$

که ازآن‌جا، به‌سادگی به‌دست می‌آید: $p=۱$، $q=۱$، $a=۳$، $b=۱$. چندجمله‌ای مطلوب عبارت است از $x^۲+x+۱$.

۱۶۲. اگر برابری را از مخرج آزادکنیم، به‌اتحاد زیر می‌رسیم:

$$(A+B)x^۲+(B+C)x+A+C=x+۳$$

که با مساوی قراردادن ضریب‌های توان‌های مشابه در دو طرف برابری به‌دست می‌آید:

$$A+B=0;\ B+C=1;\ A+C=3$$

و از آن‌جا:

$$A=1 ،\ B=-1 ،\ C=2$$

۱۶۳. اگر دستگاه شامل سه معادلهٔ اول را حل کنیم، به دست می‌آید: $x=1$، $y=-1$، $z=3$. ولی این سه‌عدد درمعادلهٔ چهارم صدق نمی‌کنند. بنابراین، دستگاه مفروض، ناسازگار است.

به‌ترتیب دیگری هم می‌توان به‌این نتیجه رسید: معادلهٔ اول را از مجموع دومعادلهٔ دوم وسوم کم می‌کنیم، به‌معادلهٔ $8x-8y-2z-10=0$ می‌رسیم که بامعادلهٔ چهارم متناقض است.

۱۶۴. اگر سمت‌چپ معادله‌های اول وسوم را برابر قراردهیم، به‌دست می‌آید:

$$\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right)=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right) \Rightarrow (\lambda+\mu)\frac{y}{b}=\mu-\lambda$$

که باشرط $\lambda+\mu\neq 0$ یا $\lambda\neq-\mu$ به‌دست می‌آید: $y=b.\frac{\mu-\lambda}{\mu+\lambda}$. اگر این مقدار y را در معادله‌های اول ودوم قراردهیم، به‌دستگاه زیر، برای محاسبهٔ x و z می‌رسیم:

$$\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\frac{2\lambda\mu}{\mu+\lambda}\\ \\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{2}{\mu+\lambda}\end{cases}$$

که ازآن‌جا، به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$x=a.\frac{\lambda\mu+1}{\mu+\lambda};\ z=c.\frac{\lambda\mu-1}{\mu+\lambda}$$

اگر مقدارهای x، y و z را درمعادلهٔ چهارم (که ازآن هیچ‌استفاده‌ای نکرده‌ایم) قراردهیم، به‌یك اتحاد می‌رسیم.

۱۶۵. $x=-2t$، $y=t$، $z=t$؛ که درآن‌ها، t عددی دلخواه است.

۱۶۶. دومعادلهٔ اول دستگاه را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{x-a}{(a+b+c)(b+c-a)}=\frac{y-b}{(a+b+c)(c+a-b)}=\frac{z-c}{(a+b+c)(a+b-c)}$$

که بعداز ساده‌کردن واستفاده از ویژگی نسبت‌های برابر، به دست می‌آید:

$$\frac{x-a}{c+b-a}=\frac{y-b}{c+a-b}=\frac{z-c}{a+b-c}=\frac{(x+y+z)-(a+b+c)}{a+b+c}=$$

$$=\frac{(k-1)(a+b+c)}{a+b+c}=k-1$$

واز این‌جا، x،yوz محاسبه می‌شود:

$$x=a+(k-1)(c+b-a);\quad y=b+(k-1)(a+c-b);$$

$$z=c+(k-1)(a+b-c)$$

۱۶۷. معادلهٔ اول را در $-a^2$، معادلهٔ دوم را درa ومعادلهٔ سوم را در ۱− ضرب و، سپس، معادله‌های حاصل را باهم جمع کنید، به دست می‌آید:

$$[-a^2+a(b+c)-bc]\,z=-1\Rightarrow z=\frac{1}{(a-b)(a-c)}$$

اکنون معادلهٔ اول را در $-c^2$، معادلهٔ دوم را در c و معادلهٔ سوم را در ۱− ضرب و، سپس، با هم جمع کنید، به دست می‌آید:

$$x=\frac{1}{(a-c)(b-c)}$$

باقراردادن مقدارهای x و z درمعادلهٔ اول، مقدار y به‌دست می‌آید:

$$y=\frac{1}{(a-b)(b-c)}$$

۱۶۸. اگر سه معادلهٔ دستگاه را باهم جمع کنیم، به دست می‌آید:

$$(a+b+c)(x+y+z)=0$$

از آن‌جاکه $a+b+c\neq 0$، باید داشته باشیم: $x+y+z=0$ از معادلهٔ اخیر به دست می‌آید: $y+z=-x$؛ به‌جای $y+z$ درمعادلهٔ اول قرارمی‌دهیم، به معادلهٔ زیرمی‌رسیم:

$$-(b+c)x-ax=b-c\Rightarrow x=\frac{c-b}{a+b+c}$$

به همین ترتیب:

$$z=\frac{b-a}{a+b+c},\ y=\frac{a-c}{a+b+c}$$

۱۶۹. ۱) اگر $a+b+c\neq ۰$ و بین a، b و c، دست‌کم دوعدد مختلف وجودداشته باشد، دستگاه دارای جواب‌منحصر $x=y=z=۱$ است. برای به‌دست‌آوردن این جواب می‌توان مثلاً سه معادله را جمع کرد و به دست آورد: $x+y+z=۳$ و، سپس، به کمك این معادله و دو معادلهٔ اول دستگاه، با روش حذف مجهول‌ها، به نتیجه رسید.

۲) $a+b+c\neq ۰$ و $a=b=c$. دراین حالت، دستگاه به‌این صورت درمی‌آید:

$$\begin{cases} x+y+z=۳ \\ x+y+z=۳ \\ x+y+z=۳ \end{cases}$$

یعنی هر سه عدد دلخواه به مجموع ۳ دردستگاه مفروض صدق می‌کند.

۳) $a+b+c=۰$، اگر هر سه عدد a، b و c برابرصفر نباشند (درحالتی که‌هر سه عدد a، b و c برابر صفر باشند، هرسه عدد دلخواه را می‌توان برای x، yو z انتخاب کرد). دراین حالت، با استفاده از برابری $a+b+c=۰$، می‌توان دستگاه مفروض را این طور نوشت:

$$\begin{cases} ax+by-(a+b)z=۰ \\ bx-(a+b)y+az=۰ \\ -(a+b)x+ay+bz=۰ \end{cases}$$

معادلهٔ سوم این دستگاه، نتیجه‌ای از دومعادلهٔ اول است وهرسه‌عددی که باهم برابرباشند، جواب دستگاه است.

یادداشت. اگر عددهای a، b و c را، مقدارهای مختلط به حساب آوریم: آن وقت یك حالت دیگر را هم باید مورد بررسی قراردهیم. این حالت، موردی است که به طور هم زمان داشته باشیم:

$$a+b+c=۰ \quad \text{و} \quad a^۲+ab+b^۲=۰$$

در این‌حالت، دو معادلهٔ دستگاه، نتیجه‌ای از معادلهٔ سوم می‌شوند. برای قانع شدن به این مطلب، مثلاً درمعادلهٔ اول فرض کنید: $c=-(a+b)$، به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$ax+by-(a+b)z=۰$$

دوطرف آن را در b ضرب کنید و به جای $b^۲$ قراردهید $-ab-a^۲$ و به جای $ab+b^۲$

قرار دهید $-a^{2}$؛ به معادلهٔ

$$bx-(a+b)y+az=0$$

می‌رسید که همان معادلهٔ دوم است $(a+b=-c)$. به‌همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که معادلهٔ سوم هم، نتیجه‌ای از معادلهٔ اول است. در این حالت، هر سه عددی که درمعادلهٔ $ax+by+cz=0$ صدق کند، جواب دستگاه است.

۱۷۰. چون x، y و z برابر صفر نیستند، دستگاه مفروض، با دستگاه زیر هم‌ارز است:

$$\frac{ay+bx}{xy}=\frac{1}{c}\,;\quad \frac{az+cx}{zx}=\frac{1}{b}\,;\quad \frac{bz+cy}{yz}=\frac{1}{a}$$

ویا به‌صورتی دیگر

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{1}{c}\,;\ \frac{a}{x}+\frac{c}{z}=\frac{1}{b}\,;\ \frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{1}{a}$$

اگر سه معادلهٔ اخیر را با هم جمع کنیم، به دست می‌آید:

$$2\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\,;$$

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

این معادله، همراه با سه معادلهٔ مفروض، دستگاهی را تشکیل می‌دهد که با دستگاه مفروض هم‌ارز است. اگر در این دستگاه جدید، معادلهٔ سوم را از معادلهٔ چهارم کم کنیم، مقدار x و، سپس، با همین روش، مقدارهای y و z به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{2a^{2}bc}{ac+ab-bc}\ ;\ y=\frac{2b^{2}ca}{ab+bc-ca}\ ;\ z=\frac{2c^{2}ab}{bc+ca-ab}$$

۱۷۱. نسبت‌های برابر را با حرف t نشان می‌دهیم، در این صورت؛ به این دستگاه می‌رسیم:

$$x_1=a_1+m_1t\ ;\ x_2=a_2+m_2t\ ;\ \dots\ ;\ x_p=a_p+m_pt\ ;$$

$$x_1+x_2+\dots+x_p=a \qquad (1)$$

اگر درمعادلهٔ آخراین دستگاه؛ مقدارهای x_1،x_2،...،x_p را از p معادلهٔ اول قرار دهیم،

به دست می‌آید:

$$t(m_1+m_2+\dots+m_p)=a-a_1-a_2-\dots-a_p$$

فرض‌می‌کنیم: $m_1+m_2+\dots+m_p=A$ و $a-a_1-a_2-\dots-a_p=B$. دراین‌صورت داریم: $At=B$، یعنی با شرط $A\neq 0$ به دست می‌آید:

$$t=\frac{B}{A}=\frac{a-a_1-a_2-\dots-a_p}{m_1+m_2+\dots+m_p}$$

اگر این مقدار t را در p معادلهٔ اول دستگاه (۱) قرار دهیم، تنها جواب دستگاه به دست می‌آید.

درحالت $A=0$ ، $B\neq 0$، معادلهٔ $At=B$ ودرنتیجه، دستگاه مفروض جواب‌ندارد.
در حالت $A=0$ و $B=0$، معادلهٔ $At=B$ به‌اتحاد تبدیل می‌شود. دراین حالت، دستگاه بی‌نهایت جواب دارد. این جواب‌ها را می‌توان از معادله‌های $x_1=a_1+m_1t$، $x_2=a_2+m_2t$،...، $x_p=a_p+m_pt$، با اختیار مقدار دلخواهی برای t به‌دست آورد.

۱۷۲. بنا بر فرض وطبق رابطه‌های بین ریشه‌ها وضریب‌ها (رابطه‌های ویت) داریم:

$$x_2=x_1^2;\ \ x_1\cdot x_1^2=a^3;\ \ x_1+x_1^2=\frac{15}{4}$$

که از آن نتیجه می‌شود: $a=\frac{3}{2}$ یا $a=-\frac{5}{2}$.

۱۷۳. می‌دانیم، اگر یك معادلهٔ جبری دارای ریشهٔ مختلط $a+bi$ $(b\neq 0)$ باشد، $a-bi$ (مزدوج $a+bi$) هم ریشهٔ آن خواهد بود. چون

$$x_1=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{1-i^2}=i$$

بنابراین، ریشهٔ دوم معادله عبارت است از $x_2=-i$ با دردست داشتن دوریشه (واستفاده از رابطه‌های ویت) معادله درجه دوم مطلوب به دست می‌آید: $x^2+1=0$.

۱۷۴. معادلهٔ درجهٔ دوم، وقتی وتنها وقتی، دوریشهٔ برابر دارد که مبین آن برابر صفر شود؛ یعنی

$$(5a+2)^2-4(5a-1)(3a-2)=0\ \Rightarrow a_1=2،\ a_2=\frac{2}{35}$$

۱۷۵. برای این‌که یك سه جمله‌ای درجهٔ دوم، مجذورکامل باشد، لازم وکافی است که دوریشهٔ آن با هم برابر شوند، یعنی مبین آن برابر صفر باشد:

$$[m(m-۱)]^۲-۴\times ۳۶=۰ \Rightarrow m(m-۱)=\pm ۱۲$$

واز آن‌جا: $m_۱=۴$، $m_۲=-۳$ (معادلهٔ $m^۲-m=-۱۲$، ریشه‌های موهومی دارد).

۱۷۶. مبین این معادله باید برابر صفر باشد. یعنی

$$(۳+p)^۲-۴\times ۳(۱+p)=۰ \Rightarrow p^۲-۶p-۳=۰$$

واین، همان معادلهٔ مطلوب است.

۱۷۷. داریم:

$$(x_۱-x_۲)^۲=۱۶;\ (x_۱-x_۲)^۲=(x_۱+x_۲)^۲-۴x_۱x_۲;$$

$$(x_۱+x_۲)^۲-۴x_۱x_۲=۱۶;\ ۲^۲-۴q=۱۶;\ q=-۳$$

۱۷۸. در معادله‌های $x_۱+x_۲=۲m$ و $x_۱ x_۲=\frac{۱۶-۸m}{۹}$ قـرار می‌دهیـم :

$x_۱=۲x_۲$؛ به دست می‌آید:

$$x_۲=\frac{۲}{۳}m\ ,\quad x_۲^۲=\frac{۸-۴m}{۹}$$

که از مقایسهٔ آن‌ها، به معادلهٔ $\left(\frac{۲}{۳}m\right)^۲=\frac{۸-۴m}{۹}$ می‌رسیم: $m_۱=۱$، $m_۲=-۲$.

۱۷۹. برای این‌که، معادلهٔدرجهٔ دوم دارای دوریشهٔ مختلف باشد،لازم وکافی است که مبین‌آن برابر صفر شود.به این ترتیب، به دست می‌آید:

$$۱+۲m(۳m+۲)\neq ۰ \Rightarrow ۶m^۲+۴m+۱\neq ۰$$

ولی این معادله، ریشه‌های حقیقی ندارد و، بنابراین، به ازای هیچ مقدار حقیقی m، برابر صفرنمی‌شود؛ یعنی معادلهٔ مفروض، برای هرمقدار حقیقی m، دارای دوریشهٔ مختلف است.

۱۸۰. برای این منظور، باید داشته باشیم:

$$p+q=-p\ ,\ pq=q$$

ازمعادلهٔ دوم این‌دستگاه نتیجه می‌شود: $q(p-۱)=۰$، یعنی $q=۰$ یا $p=۱$. ازمعادلهٔ اول، به‌ازای $q=۰$ به‌دست می‌آید $p=۰$ و، به‌ازای $p=۱$ به‌دست‌می‌آید: $q=-۲$. به این ترتیب، دومعادلهٔ $x^۲=۰$ یا $x^۲+x-۲=۰$ دارای ویژگی مورد نظر مساله‌اند.

۱۸۱. فرض می‌کنیم، دومعادله دارای ریشهٔ مشترك a باشند. دراین صورت، بایـد داشته باشیم:

$$\begin{cases} ۲a^۲-(۳m+۲)a+۱۲=۰ \\ ۴a^۲-(۹m-۲)a+۳۶=۰ \end{cases}$$

برابری اول را دو برابر می‌کنیم و اختلاف نتیجه را با برابری دوم به دست می‌آوریم، به‌دست می‌آید:

$$(۳m-۶)a-۱۲=۰ \Rightarrow a=\frac{۴}{m-۲}$$

این مقدار a باید درهریك از برابری‌ها صدق کند؛ آن را در برابری اول قرارمی‌دهیم:

$$۲\times\frac{۱۶}{(m-۲)^۲}-\frac{(۳m+۲)۴}{m-۲}+۱۲=۰\ ;$$

$$-۸m+۲۴=۰ \Rightarrow m=۳$$

وبه سادگی می‌توان تحقیق کردکه، درواقع هم، دو معادلـه به‌ازای $m=۳$، دارای ریشهٔ مشترك $a=۴$ هستند.

۱۸۲. مبین معادله را محاسبه و به‌صورت زیر تبدیل می‌کنیم:

$$(۲+۳m)^۲-(۱+m)(۳+۸m)=m^۲+m+۱=\left(m+\frac{۱}{۲}\right)^۲+\frac{۳}{۴}$$

می‌بینیم که مبین به‌صورت مجموع دومقدار مثبت (درواقع، یکی غیرمنفی ودیگری مثبت) درآمده است و، بنابراین، همیشه مثبت است.

۱۸۳. برای این منظور، باید ثابت کنیم که مبین معادله غیر منفی است، یعنی

$$\Delta=۴(a+b+c)^۲-۱۲(ab+bc+ca)\geqslant ۰$$

این نابرابری را ثابت می‌کنیم:

$$\Delta=۲(۲a^۲+۲b^۲+۲c^۲-۲ab-۲bc-۲ac)=$$

$$=۲[(a^۲-۲ab+b^۲)+(b^۲-۲bc+c^۲)+(c^۲-۲ac+a^۲)]=$$

$$=۲[(a-b)^۲+(b-c)^۲+(c-a)^۲]\geqslant ۰$$

۱۸۴. برای این منظور، لازم وکافی است، مبین معادله، یعنی $۴k+۱$، مجذورکامل باشد؛ یعنی داشته باشیم: $۴k+۱=m^۲$ (m، عـددی است درست). از این برابری بـه دست می‌آید:

$$k=\frac{m^2-1}{4}=\frac{(m-1)(m+1)}{4}$$

روشن است که هر دوعامل صورت کسر، باید عددهایی زوج باشند. فرض می‌کنیم $m-1=2n$ و $m+1=2n+2$. دراین صورت

$$k=n(n+1)\ ;\ n=0\ ,\ \pm1, \pm2, \dots$$

۱۸۵. چون p عددی فرداست، بنابراین مبین معادله، یعنی p^2-4q هم، عددی‌فرد می‌شود. بنابراین، اگر معادله دارای ریشهٔ گویا باشد، باید داشته باشیم:

$$p^2-4q=(2m+1)^2$$

فرض می‌کنیم $p=2k+1$ و $q=2l+1$، به‌دست می‌آید:

$$(2k+1)^2-(2m+1)^2=4(2l+1)$$

بخش سمت چپ را تبدیل می‌کنیم:

$$(2k+1)^2-(2m+1)^2=4(k+m+1)(k-m)$$

این عدد بر ۸ بخش پذیر است، زیرا مجموع دوعامل $k+m+1$ و $k-m$ برابر عدد فرد $2k+1$ می‌شود و، بنابراین، یکی از این دوعامل، عددی زوج است. ولی بخش سمت راست، یعنی $4(2l+1)$ بر ۸ بخش پذیر نیست. وجود این تناقض، درستی حکم را ثابت می‌کند.

۱۸۶. فرض می‌کنیم، معادله دارای ریشهٔ کسری و گویای $\frac{m}{n}$ باشد، که در آن m و n عددهایی درست و بدون مقسوم علیه مشترك و $|n|\neq1$. آن را به جای x درمعادله قرار می‌دهیم، به دست می‌آید:

$$\frac{m^4}{n^4}+a\cdot\frac{m}{n}+1=0 \Rightarrow \frac{m^4}{n^3}+am+n=0$$

ولی، این ممکن نیست، زیرا $\frac{m^4}{n^3}$ کسری ساده نشدنی و $am+n$ عددی درست است.

اکنون فرض می‌کنیم، معادله دارای ریشهٔ درست m باشد. دراین صورت، باید داشته باشیم:

$$m^4+am+1=0 \Rightarrow m^3+a+\frac{1}{m}=0$$

ولی اگر $|m|\neq ۱$، آن وقت، این برابری ناممکن می‌شود، زیرا $m^۳+a$ عددی درست، درحالی که $\frac{1}{m}$ عددی کسری است. در حالت $m=\pm ۱$، به‌دست می‌آید: $a=\pm ۲$ که بنا بر فرض ممکن نیست. حکم ثابت شد.

۱۸۷. فرض می‌کنیم، معادله دارای ریشهٔ $\frac{p}{q}$ باشد، که در آن، p و q نسبت به‌هم اول و $|q|\neq ۱$. دراین صورت، باید داشته باشیم:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^m+a_۱\left(\frac{p}{q}\right)^{m-۱}+\dots+a_m=\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{p^m}{q}+a_۱q^{m-۱}+a_۲p^{m-۲}q+\dots+a_mq^{m-۱}=\circ$$

ولی این برابری ممکن‌نیست، زیرا نخستین‌جملهٔ آن، عددی‌نادرست وهمهٔ جمله‌های دیگر، عددهایی درست‌اند.

۱۸۸. اگر $\frac{p}{q}$ ریشه‌ای از معادله باشد، مثل مسالهٔ ۱۸۷ باید دوبرابری زیر را داشته باشیم:

$$a_\circ\frac{p^m}{q}+a_۱p^{m-۱}+a_۲p^{m-۲}q+\dots+a_mq^{m-۱}=\circ$$

$$a_\circ p^{m-۱}+a_۱p^{m-۲}q+a_۲p^{m-۳}q^۲+\dots+a_m\frac{q^m}{p}=\circ$$

در برابری اول، چون همهٔ جمله‌های بعداز جملهٔ اول، عددهایی درست‌اند، برای این که برابری ممکن باشد، باید جملهٔ اول‌هم عددی درست بشود. بنابراین، $a_\circ$ باید بر q، بخش‌پذیر باشد. به‌همین ترتیب، از برابری دوم نتیجه می‌شود که p، مقسوم‌علیهی از a_m است.

۱۸۹. معادله را به‌صورت $P(x)=\circ$ در نظر بگیرید. چند جمله‌ای (Px) را بر حاصل ضرب

$$(x-a-b\sqrt{c})(x-a+b\sqrt{c})=(x-a)^۲-b^۲c$$

تقسیم می‌کنیم. خارج قسمت را $Q(x)$ وباقی ماندهٔ تقسیم را (که نسبت به x، از درجهٔ اول تجاوز نمی‌کند) $Ax+B$ می‌نامیم:

$$P(x)=Q(x)[(x-a)^۲-b^۲c]+Ax+B \qquad (*)$$

$x=a+b\sqrt{c}$، ریشهٔ معادله است، آن را در دو طـرف برابری (*) قرار می‌دهیم، بـه دست می‌آید:

$$0=Q(x)\cdot 0+A(a+b\sqrt{c})+B$$

عدد $A(a+b\sqrt{c})+B$ عبارت‌است ازمجموع‌عددگویای $Aa+B$ وعددگنگ $Ab\sqrt{c}$. بنابراین، تنها وقتی می‌تواند برابر صفرشودکه هرکدام از این دو بخش به طور جداگانه برابر صفر باشند. به‌این ترتیب

$$Ab\sqrt{c}=0 \quad \text{و} \quad Aa+B=0$$

چون، بنابر شرط $b\neq 0$ و $c\neq 0$، از اولی $A=0$ واز دومی $B=0$ حاصل می‌شود، بـه این ترتیب، معلوم می‌شود کـه چند جمله‌ای $P(x)$ بر $(x-a)^2-b^2c$ و در نتیجه بـر $x-(a-b\sqrt{c})$ بخش‌پذیر است. واین، به معنای آن است که عدد $a-b\sqrt{c}$ هم‌ریشه‌ای از معادلهٔ مفروض است.

۱۹۰. معادلهٔ مفروض را می‌توان این طور نوشت:

$$(6x+7)^2\cdot\frac{1}{12}(6x+8)(6x+6)=6$$

$y=6x+7$ می‌گیریم. دراین صورت، به دست می‌آید:

$$y^2(y+1)(y-1)=72 \Rightarrow y^4-y^2-72=0$$

که از آن جا خواهیم داشت: $y^2=9$ و $y^2=-8$:

$$a)\ (6x+7)^2=9 \Rightarrow 6x+7=\pm 3 \Rightarrow x_1=-\frac{2}{3},\ x_2=-\frac{5}{3}$$

$$b)\ (6x+8)^2=-8 \Rightarrow 6x+7=\pm 2\sqrt{2}i \Rightarrow x_{3,4}=\frac{-7\pm 2\sqrt{2}i}{6}$$

۱۹۱. به ترتیب داریم:

$$x^2(1+x)^2+x^2+2x(1+x)x=8(1+x)^2+2x^2(1+x);$$

$$[x(1+x)+x]^2=2(1+x)[4(1+x)+x^2];$$

$$[x(x+2)]^2=2(1+x)(x+2)^2;$$

$$x^2(x+2)^2-2(1+x)(x+2)^2=0;\ (x+2)^2(x^2-2x-2)=0\ ;$$

$$x_{1,2}=-2,\ x_{3,4}=1\pm\sqrt{3}$$

۱۹۲.
$$(x^2+x)(x^2+x-2)=24;$$
$$[(x^2+x-1)+1][(x^2+x-1)-1]=24;$$
$$(x^2+x-1)^2-1=24;\ (x^2+x-1)^2=25$$
$$x^2+x-1=\pm5 \Rightarrow x_1=2,\ x_2=-3,\ x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}$$

۱۹۳. داریم: $\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]^4+\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{2}\right]^4=1$ $y=x-\frac{5}{2}$

می‌گیریم، بـه معادلهٔ $\left(y+\frac{1}{2}\right)^4+\left(y-\frac{1}{2}\right)^4=1$ می‌رسیم. این‌معادله، بعداز باز کردن پرانتزها و ساده‌کردن، چنین می‌شود:

$$2y^4+3y^2-\frac{7}{8}=0 \Rightarrow y^2=\frac{1}{4},\ -\frac{7}{4};$$
$$y_1=\frac{1}{2},\ y_2=-\frac{1}{2},\ y_{3,4}=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}i$$

که با استفاده از رابطهٔ $y=x-\frac{5}{2}$، مقدارهای x به‌دست می‌آید:

$$x_1=3,\ x_2=2,\ x_{3,4}=\frac{5\pm\sqrt{7}i}{2}$$

از این روش، برای حل هر معادله‌ای که به صورت زیر باشد، می‌توان استفاده کرد:

$$(x-a)^4+(x-b)^4=c$$

۱۹۴. یکی از ریشه‌ها را x و دیگری را $x_1=2x$ می‌گیریم. اگر درمعادله $2x$ را به جای x قراردهیم، به‌دست می‌آید:

$$8x^3-84x^2+280x-300=0$$

این معادله، با معادلهٔ مفروض، دستگاهی را تشکیل می‌دهد که می‌توان، از آن، مقدار x را به دست آورد. معادلهٔ مفروض را در ۲ ضرب، معادلـهٔ اخیر را بر ۴ تقسیم و، سپس، دو معادلهٔ حاصل را از هم کم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$21x^2-210x+525=0 \Rightarrow (x-5)^2=0 \Rightarrow x=5,\ x_1=10$$

با دردست داشتن دوریشه از معادلهٔ درجهٔ سوم، به سادگی می‌توان ریشهٔ سوم را هم پیدا کرد. برای این منظور می‌توان، مثلاً، از رابطهٔ مجموع ریشه‌ها استفاده کرد:

$$x+x_1+x_2=21 \Rightarrow x_3=6$$

۱۹۵. اگرمعادله‌ای با ضریب‌های گویا، دارای ریشه‌های برابر $1+\sqrt{3}$ و $2+\sqrt{3}$ باشد، حتماً $1-\sqrt{3}$ و $2-\sqrt{3}$ هم، دو ریشه از این معادله خواهند بود (مسالهٔ ۱۸۹ را ببینید). بنابراین، معادلهٔ مطلوب، به این صورت است

$$(x-1-\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})=0$$

ویا، بعد از ساده کردن:

$$x^4-6x^3+7x^2+6x-2=0$$

۱۹۶. اگر هریك از معادله‌های درجه دوم را بـه طور جداگانـه حل کنیم، روشن می‌شود که دستگاه، تنها یك جواب دارد: $x=2$.

۱۹۷. از معادله‌های دستگاه مفروض، معلوم می‌شود کـه x، y و $x+y$ برابرصفر نیستند. معادلهٔ اول را بر معادلهٔ دوم تقسیم و، سپس، کسر سمت چپ را بـه $x+y$ ساده می‌کنیم، به معادلهٔ $x=2y$ می‌رسیم. هرجوابی از دستگاه، دراین معادله هم صدق می‌کند و، بنابراین، آن را می‌توان یکی از معادلـه‌های دستگاه بـه‌حساب آورد. از این‌جا نتیجه می‌شود که دستگاه

$$\begin{cases} x=2y \\ y^2+xy=3 \end{cases}$$

با دستگاه مفروض هم‌ارز است. اگر $x=2y$ را بـه جای x درمعادلهٔ دوم قراردهیم، بـه دست می‌آید $y=\pm 1$ و دراین صورت $x=\pm 2$. درضمن، از معادلهٔ $x=2y$ روشن است که x و y هم علامت‌اند. بنابراین، جواب‌های دستگاه $(2،1)$ و $(-2 و -1)$ است.

۱۹۸. از آن‌جا کـه معادلهٔ اول دستگاه را می‌تـوان به‌صورت

$$(x^2+y^2)^2+x^2y^2=109$$

نوشت، بنابراین، دستگاه مفروض، چنین صورتی دارد:

$$u^2+v^2=109،\ u+v=13$$

که در آن $u=x^2+y^2$، $u.v=xy$ را از معادلهٔ دوم، درمعادلهٔ اول قرار می‌دهیم:

$$(13-v)^2+v^2=109;\ v^2-13v+30=0;\ v_1=10،\ v_2=3$$

واز آن‌جا: $u_1 = ۳$، $u_2 = ۱۰$. بنابراین، دستگاه مفروض، به دودستگاه زیرمنجر می‌شود:

$$\begin{cases} x^2+y^2=۱۰ \\ xy=۳ \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} x^2+y^2=۳ \\ xy=۱۰ \end{cases}$$

برای حل دستگاه اول، دو برابر معادلهٔ دوم را یکبار با معادلهٔ اول جمع ویکبار از آن کم می‌کنیم:

$$\begin{cases} (x+y)^2=۱۶ \\ (x-y)^2=۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=\pm ۴ \\ x-y=\pm ۲ \end{cases}$$

که جواب‌های آن چنین است:

$$\left| \begin{array}{l} x_1=۱ \\ y_1=۳ \end{array} \right. ; \quad \left| \begin{array}{l} x_2=-۳ \\ y_2=-۱ \end{array} \right. ; \quad \left| \begin{array}{l} x_3=۳ \\ y_3=۱ \end{array} \right. ; \quad \left| \begin{array}{l} x_4=-۱ \\ y_4=-۳ \end{array} \right.$$

دستگاه دوم هم به همین ترتیب حل می‌شود. جواب‌های آن چنین است:

$$\left| \begin{array}{l} x_5=\dfrac{\sqrt{۲۳}+i\sqrt{۱۷}}{۲} \\ y_5=\dfrac{\sqrt{۲۳}-i\sqrt{۱۷}}{۲} \end{array} \right. ; \quad \left| \begin{array}{l} x_6=\dfrac{-\sqrt{۲۳}-i\sqrt{۱۷}}{۲} \\ y_6=\dfrac{-\sqrt{۲۳}+i\sqrt{۱۷}}{۲} \end{array} \right. ;$$

$$\left| \begin{array}{l} x_7=\dfrac{\sqrt{۲۳}-i\sqrt{۱۷}}{۲} \\ y_7=\dfrac{\sqrt{۲۳}+i\sqrt{۱۷}}{۲} \end{array} \right. ; \quad \left| \begin{array}{l} x_8=\dfrac{-\sqrt{۲۳}+i\sqrt{۱۷}}{۲} \\ y_8=\dfrac{-\sqrt{۲۳}-i\sqrt{۱۷}}{۲} \end{array} \right.$$

۱۹۹. $$[(x+y)+۱]^2+(x+y)^2=۲۵;$$

$$۲(x+y)^2+۲(x+y)-۲۴=0;\; x+y=-۴, ۳$$

به‌این ترتیب، دستگاه مفروض، با مجموعهٔ دودستگاه زیر هم‌ارز است:

$$\begin{cases} x+y=-۴ \\ x^2-y^2=۳ \end{cases} , \quad \begin{cases} x+y=۳ \\ x^2-y^2=۳ \end{cases}$$

که به سادگی حل می‌شوند: $\left(-\frac{۱۳}{۸}, -\frac{۱۹}{۸}\right)$ و $(۲, ۱)$.

۲۰۰. اگر معادلهٔ سوم را، ازمجموع دومعادلهٔ اول کم کنیم، به دست می‌آید: $xy=۲$. به‌همین ترتیب، می‌توان به‌معادله‌های $yz=۶$ و $xz=۳$ رسید. به‌این ترتیب به‌دستگاه

$$xy=۲ \text{ ، } yz=۶ \text{ ، } xz=۳$$

می‌رسیم که هم‌ارز با دستگاه مفروض‌است. ازضرب‌سه معادلهٔ دستگاه اخیر، به‌دست‌می‌آید $x^۲y^۲z^۲=۳۶$ یا $xyz=\pm۶$، که می‌توان آن را یکی از معادله‌های دستگاه به‌حساب آورد، دستگاه چنین می‌شود:

$$xy=۲\text{، } yz=۶\text{، } xz=۳\text{، } xyz=\pm۶$$

که البته، با دستگاه مفروض هم ارز است. اگر در معادلهٔ آخر این دستگاه، به ترتیب، از سه معادلهٔ اول استفاده‌کنیم، zوxوy به‌دست آید. به‌این نکته هم‌توجه کنیم که از سه‌معادلهٔ اول دستگاه نتیجه می‌شود: $xy>۰$ ، $yz>۰$ و $zx>۰$ جواب‌های دستگاه مفروض، چنین‌اند:

$$x_۱=۱\text{، } y_۱=۲\text{، } z_۱=۳\text{؛ } x_۲=-۱\text{، } y_۲=-۲\text{، } z_۲=-۳$$

۲۰۱. معادلهٔ اول دستگاه را مجذور وسپس، به مجموع معادله‌های دوم وسوم را از نتیجهٔ آن کم می‌کنیم. به معادلهٔ

$$xy+xz=۳۶ \Rightarrow x(y+z)=۳۶$$

می‌رسیم که نتیجه‌ای از معادله‌های دستگاه مفروض است. این معادله را هم به معادله‌های دستگاه اضافه می‌کنیم و، بنا براین، دستگاهی شامل چهار معادله به دست می‌آید که با دستگاه مفروض هم‌ارز است. از معادلهٔ چهارم به دست می‌آید: $y+z=\frac{۳۶}{x}$ که اگر به جای $y+z$ درمعادلهٔ اول قرار دهیم، به معادلهٔ درجهٔ دوم زیر، نسبت به x، می‌رسیم:

$$x^۲-۱۳x+۳۶=۰ \Rightarrow x_۱=۴\text{، } x_۲=۹$$

با استفاده ازاین‌مقدارهای x، به کمك دومعادلهٔ‌سوم وچهارم دستگاه، به‌دودستگاه‌زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} y+z=۹ \\ yz=۱۸ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} y+z=۴ \\ yz=۱۸ \end{cases}$$

به این ترتیب، جواب‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$\left| \begin{array}{l} x_۱=۴ \\ y_۱=۶ \\ z_۱=۳ \end{array} \right. ; \quad \left| \begin{array}{l} x_۲=۴ \\ y_۲=۳ \\ z_۲=۶ \end{array} \right. ; \quad \left| \begin{array}{l} x_۳=۹ \\ y_۳=۲+i\sqrt{۱۴} \\ z_۳=۲-i\sqrt{۱۴} \end{array} \right. ; \quad \left| \begin{array}{l} x_۴=۹ \\ y_۴=۲-i\sqrt{۱۴} \\ z_۴=۲+i\sqrt{۱۴} \end{array} \right.$$

۲۰۲. معادلهٔ اول را در ۲، دومی را در ۱ــ، سومی را در ۳ــ ضرب ونتیجه‌ها را با هم جمع می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$۲x^۲+۲y^۲+۲z^۲-۳x-۲y^۲+۷xz-۳xz+۳x=۷۰+۱۴-۱۲;$$

$$۲x^۲+۲z^۲+۴xz=۷۲;\ (x+z)^۲=۳۶;\ x+z=\pm ۶$$

اگرهریك ازدومعادلهٔ $x+z=۶$ و $x+z=-۶$ را به‌طورجداگانه به‌سه‌معادلهٔ دستگاه اضافه‌کنیم، به‌مجموعهٔ دودستگاه (هرکدام شامل‌چهارمعادله) می‌رسیم که با دستگاه‌مفروض هم‌ارز است. اگر درهریك از این دودستگاه، معادله‌های سوم وچهارم را درنظر بگیریم، به دستگاه‌هایی برای تعیین xوz می‌رسیم.

$$a)\begin{cases} x+z=۶ \\ x(z-۱)=۴ \end{cases} \Rightarrow x(۶-x-۱)=۴ \Rightarrow x^۲-۵x+۴=۰ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} x_۱=۱ \\ z_۱=۵ \end{array}\right. ,\ \left|\begin{array}{l} x_۲=۴ \\ z_۲=۲ \end{array}\right.$$

$$b)\begin{cases} x+z=-۶ \\ x(z_۱)=۴ \end{cases} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x_{۳,۴}=\dfrac{-۷\pm\sqrt{۳۳}}{۲} \\ z_{۳,۴}=\dfrac{-۵\pm\sqrt{۳۳}}{۲} \end{array}\right.$$

اگر بین دومعادلهٔ دوم وسوم دستگاه، xz را حذف‌کنیم، به‌دست می‌آید: $y^۲=۷+۲x$، که از آن‌جا، با دردست داشتن x مقدارهای y تعیین می‌شود:

$$y_۱=\pm۳،\ y_۲=\pm\sqrt{۱۵}،\ y_۳=\pm\sqrt[۴]{۳۳}،\ y_۴=\pm i\sqrt[۴]{۳۳}$$

به این ترتیب، دستگاه مفروض، دارای ۸ جواب است.

۲۰۳. اگر مجموع معادلهٔ اول ودو برابر معادلهٔ دوم را از مجذور معادلهٔ سوم کم کنیم، به‌دست می‌آید: $yz=۲$ که می‌توان آن را به دستگاه اضافه‌کرد و به‌عنوان معادلهٔ چهارم آن به‌حساب آورد. درمعادلهٔ دوم به‌جای yz عدد ۲ را قرار می‌دهیم و معادلهٔ حاصل، یعنی $xy+xz=۹$ را، بامعادلهٔ سوم درنظر می‌گیریم:

$$x(y+z)=۹\ ،\ x+(y+z)=۶$$

که از آن به سادگی به‌دست می‌آید: $x=۳$ و $y+z=۳$. اکنون، مقدارهای y وz، از این دستگاه پیدا می‌شوند:

$$y+z=3 \text{ و } yz=2$$

دستگاه، دو جواب دارد:

$$x_1=3,\ y_1=1,\ z_1=2;\ x_2=3,\ y_2=2,\ z_2=1$$

۲۰۴. معادلهٔ دوم را از مجموع دومعادلهٔ اول و سوم کم می‌کنیم، به‌دست‌می‌آید:

$$2x^2=(a-b+c)xyz \Rightarrow x=0 \text{ و } 2=x(a-b+c)yz$$

از $x_1=0$ به‌دست می‌آید: $x_1=0$، $z_1=0$.

با تبدیل‌های مشابهی می‌توان به‌دست‌آورد:

$$2y=(b+a-c)zx \text{ و } 2z=(c+b-a)xy$$

و به‌دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases}2x=(a+c-b)yz\\2y=(b+a-c)zx\\2z=(c+b-a)xy\end{cases}$$

اگر دو معادلهٔ اول یعنی دستگاه را درهم ضـرب و، سپس، نتیجـه را بر $xy\neq 0$ تقسیم کنیم (جواب $x, y, z=0$ را قبلاً کنار گذاشته‌ایم) به‌معادلهٔ

$$(a+c-b)(b+a-c)z^2=4$$

می‌رسیم و، به‌همین ترتیب، دو معادلهٔ زیرهم به‌دست می‌آید:

$$(b+a-c)(c+b-a)x^2=4 \text{ و } (c+b-a)(a+c-b)y^2=4$$

که ازآن‌ها x و y و z محاسبه می‌شود:

$$x=\frac{\pm 2}{\sqrt{(b+a-c)(c+b-a)}},\ y=\frac{\pm 2}{\sqrt{(c+b-a)(a+c-b)}},$$

$$z=\frac{\pm 2}{\sqrt{(a+c-b)(b+a-c)}}$$

ولی از صورت دستگاه پیداست که x و y و z، یا هر سه مثبت و یا یکی مثبت و دوتای دیگـر منفی است. به ایـن ترتیب، با به‌حساب آوردن جواب $x=y=z=0$، دستگاه مفروض، پنج جواب دارد.

شرط‌های مربوط به a، b و c، حقیقی بودن جواب‌ها را تضمین می‌کنند.

۲۰۵. سه معادلهٔ دستگاه را باهم جمع می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(x+y)^{۲}=۴۹ \Rightarrow x+y=\pm ۷$$

دو برابر معادلهٔ دوم را با معادلهٔ اول جمع می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(x+y)^{۲}+۲z(x+y)=۹۴+z^{۲}$$

از معادلهٔ حاصل و معادلهٔ اول دستگاه مفروض، دستگاه تازه‌ای به‌دست می‌آید که هم‌ارز دستگاه مفروض است:

$$\begin{cases} x+y=\pm ۷ \\ (x+y)^{۲}+۲z(x+y)=۹۴+z^{۲} \\ x^{۲}+y^{۲}=z^{۲} \end{cases}$$

که از آن، به‌کمك دو معادلهٔ اول، مقدار z و سپس، با در دست داشتن z، به‌کمك دومعادلهٔ اول و سوم، مقدارهای x و y به‌دست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} x_{۱}=۴ \\ y_{۱}=۳ \\ z_{۱}=۵ \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} x_{۲}=۳ \\ y_{۲}=۴ \\ z_{۲}=۵ \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} x_{۳}=-۴ \\ y_{۳}=-۳ \\ z_{۳}=-۵ \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} x_{۴}=-۳ \\ y_{۴}=-۴ \\ z_{۴}=-۵ \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} x_{۵}=\dfrac{۷-\sqrt{۱۱۳}}{۲} \\ y_{۵}=\dfrac{۷+\sqrt{۱۱۳}}{۲} \\ z_{۵}=۹ \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} x_{۶}=\dfrac{۷+\sqrt{۱۱۳}}{۲} \\ y_{۶}=\dfrac{۷-\sqrt{۱۱۳}}{۲} \\ z_{۶}=۹ \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} x_{۷}=\dfrac{-۷-\sqrt{۱۱۳}}{۲} \\ y_{۷}=\dfrac{-۷+\sqrt{۱۱۳}}{۲} \\ z_{۷}=-۹ \end{vmatrix};$$

$$x_{۸}=\frac{-۷+\sqrt{۱۱۳}}{۲},\ y_{۸}=\frac{-۷-\sqrt{۱۱۳}}{۲},\ z_{۸}=-۹$$

۲۰۶. سه معادلهٔ دستگاه مفروض را جمع می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(x+y+z)^{۲}=a^{۲}+b^{۲}+c^{۲} \Rightarrow x+y+z=\pm\sqrt{a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}}$$

که اگر از آن، در معادلهٔ اول دستگاه استفاده کنیم، مقدار x پیدا می‌شود:

$$x=\frac{a^{۲}}{\pm\sqrt{a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}}}$$

و به‌همین ترتیب

$$y=\frac{b^۲}{\pm\sqrt{a^۲+b^۲+c)^۲}},\ z=\frac{c^۲}{\pm\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}$$

از معادله‌های دستگاه دیده می‌شود کـه x، y و z باید هم‌علامت باشند. بنابراین، دستگاه دارای دو جواب است.

۲۰۷. اگر در هر یك از معادله‌های دستگاه، بـه‌دو طرف یك واحد اضافه کنیم، به‌دستگاه زیر می‌رسیم که با دستگاه مفروض، هم‌ارز است:

$$\begin{cases}(۱+y)(۱+z)=a+۱\\(۱+z)(۱+x)=b+۱\\(۱+x)(۱+y)=c+۱\end{cases}\qquad(*)$$

اگر حاصل‌ضرب دومعادلهٔ اول این دستگاه را برمعادلهٔ سوم آن تقسیم کنیم، به‌دست‌می‌آید:

$$(۱+z)^۲=\frac{(a+۱)(b+۱)}{c+۱}\Rightarrow z=\pm\sqrt{\frac{(a+۱)(b+۱)}{c+۱}}-۱$$

و به‌همین ترتیب

$$y=\pm\sqrt{\frac{(c+۱)(a+۱)}{b+۱}}-۱,\ x=\pm\sqrt{\frac{(b+۱)(c+۱)}{a+۱}}-۱$$

از دستگاه (*) دیده می‌شود که باید علامت‌های جلو رادیکال‌ها را، یا همه مثبت و یا همه منفی گرفت. بنابراین، دستگاه دو جواب دارد.

۲۰۸. در هر سه معادله، جملهٔ دوم سمت راست را به سمت چپ می‌بریم، بعد از تبدیل‌های ساده، به‌دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases}(x+y-z)(x+z-y)=a\\(y+z-x)(y+x-z)=b\\(z+x-y)(z+y-x)=c\end{cases}\qquad(*)$$

حاصل‌ضرب دومعادلهٔ دستگاه اخیر را برمعادلهٔ سوم تقسیم می‌کنیم، به‌دست‌می‌آید:

$$(x+y-z)^۲=\frac{ab}{c}\Rightarrow x+y-z=\pm\sqrt{\frac{ab}{c}}$$

و به همین تـرتیب، می‌تـوان دو معادلهٔ دیگـر را هم بـه دست آورد و دستگاه زیر را

تشکیل داد:

$$\begin{cases} x+y-z=\pm\sqrt{\dfrac{ab}{c}} \\ y+z-x=\pm\sqrt{\dfrac{bc}{a}} \quad (**) \\ z+x-y=\pm\sqrt{\dfrac{ac}{b}} \end{cases}$$

اگرعلامت جلو رادیکال‌ها را درهرسه‌معادله، یکسان بگیریم دستگاه (**) بادستگاه (*) و، بنا براین، بادستگاه مفروض هم‌ارزمی‌شود (یکسان‌بودن علامت جلو رادیکال‌ها را، می‌توان از (*) نتیجه گرفت).

از جمع دو به‌دوی معادله‌های دستگاه (**)، x و y و z به‌دست می‌آید:

$$x=\pm\frac{\sqrt{abc}}{۲}\left(\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}\right),\ y=\pm\frac{\sqrt{abc}}{۲}\left(\frac{۱}{c}+\frac{۱}{a}\right),\ z=\pm\frac{\sqrt{abc}}{۲}\left(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}\right)$$

۲۰۹. از دستگاه دیده می‌شود که هیچ کدام از مجهول‌ها برابر صفر نیستند. در واقع، اگر مثلاً $x=۰$، آن وقت $yz=۰$ و $x^۲+y^۲+z=۰$؛ و این، تنها برای $x=y=z=۰$ ممکن است که، در این صورت، نسبت‌های دستگاه، معنای عددی خودرا از دست می‌دهند. بنا براین، اگر همهٔ نسبت‌ها را معکوس کنیم، به‌دستگاهی هم‌ارز دستگاه مفروض می‌رسیم. دستگاه تازه به‌این صورت است:

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{c}{z}+\frac{a}{x}=\frac{a^۲+b^۲+c^۲}{x^۲+y^۲+z^۲}$$

یادآوری می‌کنیم که هیچ‌کدام از عددهای a، b و c برابر صفر نیستند. در واقع، اگر داشته باشیم $a=۰$، از دستگاه اخیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{b}{y}=\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{c}{z}\Rightarrow b=۰,\ c=۰$$

ولی، این ممکن نیست، زیرا در این حالت، نسبت‌های دستگاه مفروض، معنای خود را از دست می‌دهند.

همهٔ معادله‌های دستگاه اخیر را جمع و، سپس، به‌نوبت، هر یك از معادله‌ها را از نتیجهٔ جمع، کم می‌کنیم، به‌دستگاه زیر هم‌ارز با دستگاه مفروض می‌رسیم:

$$\frac{c}{z}=\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{۱}{۲}\cdot\frac{a^۲+b^۲+c^۲}{x^۲+y^۲+z^۲}$$

و یا $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=t$، که در آن $t\neq ۰$.

از برابری‌های اخیر به‌دست می‌آید: $x=at$، $y=bt$، $z=ct$، که اگر در رابطهٔ $\frac{b}{y}=\frac{۱}{۲}\cdot\frac{a^۲+b^۲+c^۲}{x^۲+y^۲+z^۲}$ قرار دهیم، حاصل می‌شود:

$$\frac{b}{bt}=\frac{۱}{۲}\cdot\frac{a^۲+b^۲+c^۲}{(a^۲+b^۲+c^۲)t^۲}\Rightarrow\frac{۱}{t}=\frac{۱}{۲t^۲}\Rightarrow t=\frac{۱}{۲}$$

به‌این ترتیب، تنها جواب دستگاه چنین است:

$$x=\frac{a}{۲},\ y=\frac{b}{۲},\ z=\frac{c}{۲}$$

۲۱۰. دستگاه مفروض را، این طور می‌نویسیم:

$$\begin{cases}z=-(x+y)\\(x+y)^۲-۲xy=z^۲+۲۰\\(x^۲+y^۲)^۲-۲x^۲y^۲=z^۴+۵۶۰\end{cases}$$

اگر $x+y=-z$ را از معادلهٔ اول، درمعادلهٔ دوم قرار دهیم، سرانجام به‌دست می‌آید: $xy=-۱۰$. اکنون در معادلهٔ سوم، بــه جای $x^۲+y^۲$، مقدارش $z^۲+۲۰$ و به جای xy، مقدارش -۱۰ را می‌گذاریم، به‌دست می‌آید:

$$(z^۲+۲۰)^۲-۲(-۱۰)^۲=z^۴+۵۶۰\Rightarrow z^۲=۹\Rightarrow z=\pm۳$$

و برای محاسبهٔ x و y، این دستگاه را داریم:

$$\begin{cases}x+y=\pm۳\\xy=-۱۰\end{cases}$$

برای دستگاه، ۴ جواب به‌دست می‌آید.

$$\left|\begin{array}{l}x_۱=۵\\y_۱=-۲\\z_۱=-۳\end{array}\right.;\quad\left|\begin{array}{l}x_۲=-۲\\y_۲=۵\\z_۲=-۳\end{array}\right.;\quad\left|\begin{array}{l}x_۳=-۵\\y_۳=۲\\z_۳=۳\end{array}\right.;\quad\left|\begin{array}{l}x_۴=۲\\y_۴=-۵\\z_۴=۳\end{array}\right.$$

۲۱۱. $y=۲x-۱$ را (از معادلهٔ اول)، در معادلهٔ دوم قرار می‌دهیم، به دست می‌آید:

$$۴x^۲-۸x+۴+z^۲=۰;\ \ ۴(x-۱)^۲+z^۲=۰$$

که تنها بـه‌ازای $x=۱$ و $z=۰$ برقرار است (ریشه‌ها باید حقیقی باشند). ولی در این صورت $y=۱$. دستگاه، همین یك جواب را دارد.

۲۱۲ تا ۲۴۳. راهنمائی: در ریاضیات مقدماتـی، وقتی با رادیکال‌هایی سروکار داشته باشیم که فرجهٔ آن‌ها زوج است، مقدار حسابی آن‌ها را در نظر دارند. وقتی هم با رادیکال‌های به‌فرجهٔ فرد برخورد شود، تنها ریشهٔ حقیقی آن‌ها را در نظر می‌گیرنـد. این مطلب، باید در مورد معادله‌های گنگ هم رعایت شود. در حـل معادله‌های گنگ، معمولاً دو طرف برابری را به‌توانی می‌رسانندکـه معادله را از وجود رادیکال آزاد کند. گاهی، برای رسیدن به‌چنین نتیجه‌ای، لازم است عمل بـه‌توان رساندن را تکرار کنیم. ولی این عمل، درحوزهٔ عددهای حقیقی، ممکن است منجر به‌معادله‌ای شود که هم‌ارز معادلهٔ مفروض نباشد. به‌همین مناسبت، وقتی معادله یادستگاهی را با روش حذف رادیکال‌ها حل می‌کنیم، باید جواب یا جواب‌های حاصل را، در معادله یا معادله‌های مفروض مورد آزمایش قرار دهیم، و جواب یا جواب‌هایی را کـه صدق نمی‌کنند، بـه عنوان جـواب خارجی، کنار بگذاریم. در حالتی که دو طرف معادله‌ای را به‌توان فرد می‌رسانیم، به‌معادله‌ای می‌رسیم که هم‌ارز با معادلهٔ مفروض است و، بنابراین، نیازی به‌آزمایش جواب ندارد.

۲۱۲. در معادلهٔ اول باید داشته باشیم $P(x)\geqslant ۰$ و $Q(x)\geqslant ۰$، در حالی که در معادلهٔ دوم چنین شرطی لازم نیست. بنابراین، در حالت کلی، ایـن دو معادله هم ارز نیستند.

۲۱۳ و ۲۱۴. در معادلهٔ اول باید داشته باشیم: $P(x)\cdot Q(x)\geqslant ۰$، درحالی که در معادلهٔ دوم باید شرط‌های $P(x)\geqslant ۰$ و $Q(x)\geqslant ۰$ برقرارباشند. دو معادله، درحالت کلی، هم‌ارز نیستند (مساله ۱۲۴ را ببینید).

۲۱۵. چون سمت چپ برابری از ۲ بزرگتر است، معادله جواب ندارد.

۲۱۶. به‌ترتیب داریم:

$$\frac{(x^۲-۳x+۲)-(x^۲-۷x+۱۲)}{\sqrt{x^۲-۳x+۲}-\sqrt{x^۲-۷x+۱۲}}=\sqrt{۲}\ ;$$

$$\sqrt{x^۲-۳x+۲}+\sqrt{x^۲-۷x+۱۲}=\sqrt{۲}\ ;$$

$$(\sqrt{x^۲-۳x+۲})^۲+(\sqrt{۲}\sqrt{x^۲-۷x+۱۲})^۲\ ;$$

$$\sqrt{2x^2-14x+24}=6-2x\ ;\quad 2x^2-14x+24=36-24x+4x^2\ ;$$

$$2x^2-10x+12=0\ ;\ x_1=2,\ x_2=3$$

و با آزمایش معلوم می‌شود که هر دو ریشه قابل قبول‌اند.*

۰۲۱۷

$$2x^2+6-3(x+1)-2\sqrt{2x^2-3x+2}=0,$$

$$2x^2-3x+2-2\sqrt{2x^2-3x+2}+1=0$$

که با فرض $\sqrt{2x^2-3x+2}=y$، به دست می آید:

$$y^2-2y+1=0\ ;\ y=1\ ;\ \sqrt{2x^2-3x+2}=1\ ;\ 2x^2-3x+2=1\ ;$$

$$2x^2-3x+1=0\ ;\ x_1=1,\ x_2=\frac{1}{2}$$

۰۲۱۸ داریم: $\sqrt[5]{(7x-3)^3}-\dfrac{8}{\sqrt[5]{(7x-3)^3}}=7$. با فرض $\sqrt[5]{(7x-2)^3}=y$

به‌دست می آید:

$$y^2-7y-8=0 \Rightarrow y_1=-1,\ y_2=8$$

$$\sqrt[5]{(7x-3)^2}=-1\ ;\ 7x-3=-1\ ;\ x_1=\frac{2}{7}\ ;$$

$$\sqrt[5]{(7x-3)^3}=8\ ;\ 7x-3=32\ ;\ x_2=5$$

۰۲۱۹ به‌ترتیب داریم:

$$\sqrt{\frac{x+9}{x}}+\frac{4}{\sqrt{\frac{x+9}{x}}}=4$$

با فرض $\sqrt{\dfrac{x+9}{x}}=y$ به‌معادلهٔ $y+\dfrac{4}{y}=4$ و یا $y^2-4y+4=0$ می‌رسیم، که از آن جا: $y=2$.

---

*) از این به‌بعد، موضوع آزمایش جواب‌ها را، در هر مساله تکرار نمی‌کنیم و تنها هر جا جواب‌خارجی به‌دست‌آید، یادآور می‌شویم.

$$\sqrt{\frac{x+۹}{x}}=۲\ ;\ \frac{x+۹}{x}=۴\ ;\ x=۳$$

۲۲۰. همهٔ جمله‌های معادله را بر $(a-x)^{\frac{۲}{۳}}$ تقسیم می‌کنیم، به‌معادلهٔ زیر می‌رسیم که با معادلهٔ مفروض هم‌ارز است ($x=a$ جواب معادله نیست و بنابراین $a-x\neq ۰$):

$$\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{۲}{۳}}-۵\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{۱}{۳}}+۴=۰$$

که نسبت به $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{۱}{۳}}$ از درجهٔ دوم است و به‌دست می‌آید:

$$\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{۱}{۳}}=\frac{۵\pm۳}{۲}=۱,۴$$

دنبالهٔ کار روشن است: $x_۱=۰$، $x_۲=\frac{۶۳}{۶۵}a$ (آزمایش مقدارهای x، لازم نیست).

۲۲۱. $\sqrt[n]{\frac{a-x}{b+x}}=y$ می‌گیریم، به‌معادلهٔ $y+\frac{۱}{y}=۲$ می‌رسیم که از آن جا $y=۱$.

$$\sqrt[n]{\frac{a-x}{b+x}}=۱\Rightarrow\frac{a-x}{b+x}=۱\Rightarrow a-x=b+x\Rightarrow x=\frac{a-b}{۲}$$

۲۲۲. به‌ترتیب داریم:

$$\sqrt[۳]{x+۴۵}=۱+\sqrt[۳]{x-۱۶}\ ;\ (\sqrt[۳]{x+۴۵})^۳=(۱+\sqrt[۳]{x+۱۶})^۳;$$

$$\sqrt[۳]{(x-۱۶)^۲}+\sqrt[۳]{x-۱۶}-۲۰=۰\ ;\ \sqrt[۳]{x-۱۶}=۴,\ -۵$$

$$\sqrt[۳]{x-۱۶}=۴\Rightarrow x_۱=۸۰\ ;\ \sqrt[۳]{x-۱۶}=-۵\Rightarrow x_۲=-۱۰۹$$

۲۲۳. ازمعادله دیده می‌شود که تنها مقدارهایی از x قابل قبول‌اند که با دو شرط زیر سازگار باشند:

$$x-\frac{۱}{x}\geqslant ۰,\ ۱-\frac{۱}{x}\geqslant ۰\Rightarrow x\geqslant ۱ \text{ یا } -۱\leqslant x<۰$$

بنابراین $\frac{1}{x}-1$ را می‌توان به‌صورت $\sqrt{\left(\frac{x-1}{x}\right)^2}$ نوشت و معادله زیر را که هم‌ارز معادلهٔ مفروض است، در نظر گرفت:

$$\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}-\sqrt{\frac{x-1}{x}}=\sqrt{\left(\frac{x-1}{x}\right)^2}$$

که به‌صورت زیر قابل تجزیه است:

$$\sqrt{\frac{x-1}{x}}\left(\sqrt{x+1}-1-\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)=0\,;$$

$$a)\ \sqrt{\frac{x-1}{x}}=0;\ \frac{x-1}{x}=0;\ x_1=1$$

$$b)\ \sqrt{x+1}-1=\sqrt{\frac{x-1}{x}};\ (\sqrt{x+1}-1)^2=\frac{x-1}{x};$$

$$x^2-2x\sqrt{x+1}+x+1=0;\qquad (x-\sqrt{x+1})^2=0;$$

$$x=\sqrt{x+1};\ x^2=x+1;\ x_{2,3}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

۲۲۴. این معادله جواب ندارد، زیرا

$$\sqrt{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+x}}<\sqrt{1+x}<\sqrt{2+x}$$

۲۲۵. $$[4x+1+2x\sqrt{2(2x^2+1)}]^2=[-(2x+1)\sqrt{4x^2+4x+3}]^2;$$

$$(4x+1)^2+4x(4x+1)\sqrt{2(2x^2+1)}+16x^4+8x^2=$$
$$(4x^2+4x+1)(4x^2+4x+3);$$

$$(4x+1)^2+4x(4x+1)\sqrt{2(2x^2+1)}+16x^4+8x^2=$$

$$=(4x+1)(4x^2+4x+3)+16x^4+16x^3+12x^2;$$

$$(4x+1)^2+4x(4x+1)\sqrt{2(2x^2+1)}=$$
$$=(4x+1)(4x^2+4x+3)+4x^2(4x+1);$$

$$4x(4x+1)\sqrt{2(2x^2+1)}=(4x+1)(4x^2+4x+3+4x^2-4x-1);$$

$$4x(4x+1)\sqrt{2(2x^2+1)}=(4x+1)(8x^2+2);$$

که از آن جا: اولاً $4x+1=0$ و $x=-\frac{1}{4}$؛ ثانیاً

$$2x\sqrt{4x^2+2}=4x^2+1 \Rightarrow 16x^4+8x^2=16x^4+8x^2+1$$

که ممکن نیست. به‌این ترتیب، معادلهٔ تنها یك جواب $x=-\frac{1}{4}$ را دارد.

۲۲۶. $$\left(2\sqrt{2x+\sqrt{x}}-3\sqrt{\frac{x}{2x+\sqrt{x}}}\right)^2=\left(2\sqrt{2x-\sqrt{x}}\right)^2;$$

$$4(2x+\sqrt{x})-12\sqrt{x}+\frac{9x}{2x+\sqrt{x}}=4(2x-\sqrt{x});\frac{9}{2x+\sqrt{x}}=4\sqrt{x}$$

چون $x\neq 0$، به $\sqrt{x}$ ساده می‌کنیم، می‌شود: $\frac{9}{2\sqrt{x}+1}=4$. از آن جا $x=\frac{25}{64}$.

۲۲۷. دو طرف را مکعب می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$a+\sqrt{x}+3\sqrt[3]{(a+\sqrt{x})(a-\sqrt{x})}\times\sqrt[3]{b}+a-\sqrt{x}=b;$$

$$2a+3\sqrt[3]{a^2-x}\,.\,\sqrt[3]{b}=b$$

از این معادله دیده می‌شود که $b=0$ و $a\neq 0$ نمی‌تواند باشد. در حالت $a=b=0$، معادله به‌اتحاد تبدیل می‌شود. و با توجه به‌وجود $\sqrt{x}$ در معادلهٔ مفروض، x می‌تواند هر مقدار غیرمنفی را اختیار کند.

اکنون فرض می‌کنیم $b\neq 0$، به‌دست می‌آید:

$$3\sqrt[3]{a^2-x}\,.\,\sqrt[3]{b}=b-2a;\sqrt[3]{a^2-x}=\frac{b-2a}{3\sqrt[3]{b}};\ a^2-x=\frac{(b-2a)^3}{27b};$$

$$x=a^2-\frac{(b-2a)^3}{27b}\quad(*)$$

اگر $a^2-\frac{(b-2a)^3}{27b}\geqslant 0$، آن وقت معادله یك جواب منحصر دارد که با رابطهٔ (*) بیان می‌شود. در حالت $a^2-\frac{(b-2a)^3}{27b}<0$، معادله‌جواب ندارد. مثلاً، به‌ازای

$a=0$ و $b\neq 0$، رابطهٔ (*) به‌صورت $x=-\dfrac{b^2}{27}$ درمی‌آید که منفی است و دربیرون حوزهٔ مقدارهای قابل قبول قرار دارد.

۲۲۸. شبیه مساله ۲۲۷ عمل می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$x+3\sqrt[3]{x(2x-3)}\cdot\sqrt[3]{12(x-1)}+2x-3=12(x-1);$$

$$x-1+\sqrt[3]{x(2x-3)\,12\,(x-1)}=4(x-1);$$

$$12x(x-1)(2x-3)=27(x-1)^3;\ (x-1)(x-3)^2=0;\ x=1,\ 3$$

ازآن‌جاکه برای حل معادله، دوطرف را به‌توان فرد رساندیم، جواب خارجی وارد معادله نشده است و، در نتیجه، نیازی به‌آزمایش جواب نیست.

۲۲۹. فرض می‌کنیم: $u=\sqrt[5]{16+\sqrt{x}}$ و $v=\sqrt[5]{16-\sqrt{x}}$. معادله به صورت $u+v=2$ درمی‌آید. دوطرف را به‌توان پنج می‌رسانیم، به‌دست آید:

$$u^5+v^5+5uv(u^3+v^3)+10u^2v^2(u+v)=32;$$

$$u^5+v^5+5uv(u+v)(u^2-uv+v^2)+10u^2v^2(u+v)=32;$$

$$u^5+v^5+5uv[(u+v)^2-3uv](u+v)+10u^2v^2(u+v)=32$$

با توجه به‌این‌که $u+v=2$ و $u^5+v^5=32$، خواهیم داشت:

$$32+5uv(4-3uv)\times 2+20u^2v^2=32;\ \ uv(4-uv)=0$$

وازآن‌جا

a) $u=0;\ \sqrt[5]{16+\sqrt{x}}=0;\ 16+\sqrt{x}=0$ (غیرممکن)

b) $v=0;\ \sqrt[5]{16-\sqrt{x}}=0;\ x=256$ (یکی از ریشه‌ها)

c) $4-uv=0;\ uv=4$

که با توجه به $u+v=2$، به‌دست می‌آید: $u=1\pm i\sqrt{3}$، درحالی‌که u، طبق فرض، عددی حقیقی است.

۲۳۰. $\sqrt{x-4}=y>0$ می‌گیریم. دراین‌صورت خواهیم داشت: $x=y^2+4$ ومعادلهٔ مفروض، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\sqrt{y^2-2y+1}+\sqrt{y^2-4y+4}=1\ \Rightarrow\ |y-1|+|y-2|=1$$

درحالت $1 \leqslant y \leqslant 0$، معادلهٔ اخیر به‌صورت $1-y+2-y=1$ یا $y=1$ درمی‌آید. درحالت $1<y<2$، معادله به‌صورت $0=0$ درمی‌آید، یعنی هرمقداری از y، در فاصلهٔ $1<y<2$، درآن صدق می‌کند. درحالت $y \geqslant 2$، به‌دست می‌آید: $y=2$. بداین‌ترتیب داریم:

$$1 \leqslant y \leqslant 2;\ 1 \leqslant \sqrt{x-4} \leqslant 2;\ 1 \leqslant x-4 \leqslant 4;\ 5 \leqslant x \leqslant 8$$

مجموعهٔ جواب در معادلهٔ مفروض، یک‌مجموعهٔ نامتناهی است.

۲۳۱. به‌ترتیب داریم:

$$\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})^2}{(x+2)-(x-2)}=\frac{x}{2};\ x+2-2\sqrt{x^2-4}+x-2=2x;$$

$$\sqrt{x^2-4}=0;\ x^2-4=0;\ x_1=2 \text{ و } x_2=-2$$

$x=2$ ریشهٔ معادله است، ولی $x=-2$ ریشه خارجی است، زیرا درحوزهٔ مقدارهای قابل‌قبول x قرار ندارند ($x-2$ منفی می‌شود).

۲۳۲. مقدارهای قابل‌قبول، برای مجهول این معادله، عبارت است از $x \geqslant 0$. صورت ومخرج کسر سمت‌چپ را دوبرابر وازرابطه‌های مجذور تفاضل دوجمله و مجذور مجموع دوجمله استفاده می‌کنیم:

$$\frac{2(1+x-\sqrt{2x+x^2})}{2(1+x+\sqrt{2x+x^2})}=\frac{2+x-2\sqrt{2+x}\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}+x}{2+x+2\sqrt{2+x}\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}+x}=$$

$$=\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{x})^2}{(\sqrt{2+x}+\sqrt{x})^2}$$

و معادلهٔ مفروض، چنین می‌شود:

$$\left(\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}\right)^2=a^3\cdot\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}$$

ویا

$$\left(\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}\right)^3=a^3$$

وازآنجا

$$\frac{\sqrt{۲+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{۲+x}+\sqrt{x}}=a \quad (*)$$

عمل‌هایی که تا این‌جا انجام داده‌ایم (وشامل کعب گرفتن بود)، نه‌ریشه‌ای از معادله را حذف ونه ریشه‌ای به‌آن اضافه می‌کند؛ بنا براین، معادلهٔ (*) با معادلهٔ مفروض هم‌ارز است. در ضمن، از معادلهٔ (*) نتیجه می‌شود: $۱ \geqslant a > ۰$. در واقع، صورت و مخرج کسر سمت‌چپ معادله، هردو مثبت‌اند وصورت کسر نمی‌تواند ازمخرج بزرگتر شود.

اگر مخرج کسر سمت‌چپ معادلهٔ (*) را گویا کنیم، به‌معادله‌ای هم‌ارزآن می‌رسیم:

$$\sqrt{۲+x}(۱-a)=\sqrt{x}(۱+a)$$

چون $a \leqslant ۱$، پس هردوطرف معادلهٔ اخیر مثبت‌اند وبا مجذورکردن آن‌ها، به معادله‌ای هم‌ارز معادلهٔ مفروض می‌رسیم:

$$(۲+x)(۱-a)^۲=x(۱+a)^۲ \Rightarrow x=\frac{(۱-a)^۲}{۲a}$$

بنا براین، معادلهٔ مفروض، به‌ازای $۱ \geqslant a > ۰$، یك جواب منحصر دارد و به‌ازای سایر مقدارهای a، بدون جواب است.

یادداشت. در این‌جا، با وجودی‌که ضمن عمل‌ها، از مجذورکردن دوطرف برابری استفاده‌کردیم، نیازی به‌آزمایش جواب نداریم.

درواقع،شرط‌هایی که‌درنظر گرفتیم($x \geqslant ۰$، $۱ \geqslant a > ۰$)،همه‌جا مارا به‌معادله‌هایی هم‌ارز معادلهٔ مفروض رسانید. بایدیادآوری کرد که، درحل معادله‌های گنگ شامل‌پارامتر، انتخاب چنین راه‌حلی، همیشه ساده‌تر وراحت‌تر از آن است‌که‌کار را منجر به‌آزمایش جواب کنیم، زیرابرای‌چنین آزمایشی،اغلب باید به‌عمل‌های طولانی وبغرنجی متوسل‌شویم.

۲۳۳. ازآن‌جا که تنها با ریشه‌های حسابی سروکار داریم، باید داشته‌باشیم:

$$\frac{۱+bx}{۱-bx}>۰ \text{ ، } (۱+bx)(۱-bx)>۰; \; x^۲<\frac{۱}{b^۲}$$

چون ریشهٔ حسابی، عددی غیرمنفی (و در حالت موردنظر ما، تنها مثبت) است، بنا براین لازم است (ولی البته، کافی نیست) که داشته‌باشیم:

$$\frac{۱-ax}{۱+ax}>۰ \; ; \; ۱-a^۲x^۲>۰ \; ; \; x^۲<\frac{۱}{a^۲}$$

اگر این شرط‌ها برقرار نباشند، معادله بدون جواب می‌ماند. اگر این شرط‌ها برقرار

باشند، هردوطرف برابری، عددهایی مثبت می‌شوند و بامجذور کردن دوطرف، به‌معادله‌ای هم‌ارز معادلهٔ مفروض می‌رسیم:

$$\left(\frac{۱-ax}{۱+ax}\right)^{۲}\cdot\frac{۱+bx}{۱-bx}=۱;\ (۱-ax)^{۲}(۱+bx)=(۱+ax)^{۲}(۱-bx);$$

$$a^{۲}bx^{۳}=(۲a-b)x;\ x_{۱}=۰,\ x_{۲}=\sqrt{\frac{۲a-b}{a^{۲}b}},\ x_{۳}=-\sqrt{\frac{۲a-b}{a^{۲}b}}$$

روشن است که $x=۰$ در معادلهٔ مفروض صدق می‌کند. اما $x_{۲}$ و $x_{۳}$ وقتی قابل قبول‌اند که داشته‌باشیم:

$\frac{۲a-b}{a^{۲}b}\geqslant ۰$ (جواب‌ها باید حقیقی باشند)

$x^{۲}<\frac{۱}{a^{۲}}$ (وقتی سمت‌راست معادلهٔ مفروض مثبت است، باید سمت‌چپ آن هم مثبت باشد).

$x^{۲}<\frac{۱}{b^{۲}}$ (مقدار رادیکال سمت‌چپ معادله، حقیقی است)

این شرط‌ها را ساده می‌کنیم. از شرط اول به‌دست می‌آید:

$$\frac{۲a-b}{a^{۲}b}\geqslant ۰;\ \frac{۲a-b}{b}\geqslant ۰;\ \frac{۲a}{b}-۱\geqslant ۰;\ \frac{a}{b}\geqslant\frac{۱}{۲}$$

اگر دوشرط اول ودوم را درنظر بگیریم:

$$x^{۲}=\frac{۲a-b}{a^{۲}b}<\frac{۱}{a^{۲}};\ \frac{۲a-b}{b}<۱;\ \frac{a}{b}<۱$$

اگر این دونتیجه را، باهم درنظر بگیریم، باید داشته‌باشیم:

$$\frac{۱}{۲}\leqslant\frac{a}{b}<۱$$

شرط $x^{۲}<\frac{۱}{b^{۲}}$ به‌خودی خود برقرار است. درواقع

$$x^{۲}-\frac{۱}{b^{۲}}=\frac{۲a-b}{a^{۲}b}-\frac{۱}{b^{۲}}=-\frac{(a-b)^{۲}}{a^{۲}b^{۲}}<۰\quad(a\neq b)$$

۲۳۴. اگر n عددی زوج باشد، مقدارهای قابل‌قبول x ، باید با شرطهای $x>0$ ، $a+x>0$ سازگار باشند. درحالت فردبودن عدد n، چنین محدودیتی برای x وجود ندارد. روشن است که عددهای a، b و x نمی‌توانند برابر صفر باشند.

در سمت چپ معادله، از $\sqrt[n]{a+x}$ فاکتور می‌گیریم:

$$\sqrt[n]{a+x}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{x}\right)=\frac{\sqrt[n]{x}}{b};\ \sqrt[n]{a+x}\cdot\frac{a+x}{ax}=\frac{\sqrt[n]{x}}{b}$$

و بالاخره $\frac{a}{b}=\sqrt[n]{\left(\frac{a+x}{x}\right)^{n+1}}$. سمت‌چپ برابری اخیر، همیشه مثبت است،

بنابراین باید داشته‌باشیم: $\frac{a}{b}>0$. سپس، داریم:

$$\left(\frac{a+x}{x}\right)^{\frac{n+x}{n}}=\frac{a}{b};\ \frac{a+x}{x}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}};\ \frac{a}{x}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}-1$$

وازآنجا $a=x\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}-1\right]$. ضریب x ، در اینجا، وقتی مخالف صفر است که داشته‌باشیم: $a\neq b$. دراین‌صورت

$$x=\frac{a}{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}-1}\qquad (*)$$

درحالت‌فردبودن n، رابطهٔ (*) جواب معادله‌است(به‌شرط‌هم‌علامت بودن a و b و $a\neq b$). در این‌حالت، یعنی وقتی n عددی فرد باشد، اگر در مخرج کسر (*)، جلو عبارت $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}$، علامت منفی هم بگذاریم، بازهم جوابی ازمعادله است.

در حالت زوج بودن n، علاوه برشرطهای $ab>0$ و $a\neq b$ ، در ضمن باید داشته‌باشیم: $x>0$ و $a+x>0$. ازرابطهٔ (*) دیده می‌شود که x وقتی مثبت است که:

الف) $a>0$ و $\frac{a}{b}>1$ ، که به نابرابری $a>b>0$ منجر می‌شوند ؛ یا

ب) $a<0$ و $0<\frac{a}{b}<1$، که منجر به نابرابری $0>a>b$ می‌شوند. از طرف دیگر، $a+x$ همیشه مثبت است (به‌ازای $x>0$): زیر داریم:

$$a+x=x\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+۱}}$$

به‌این ترتیب، درحالت‌زوج‌بودن n، مقدار x، به‌شرط $a>b>۰$ یا $۰>a>b$، تنها جواب معادلهٔ مفروض‌است. اگر بین a و b، رابطهٔ دیگری برقرار باشد، معادلهٔمفروض جواب ندارد.

۲۳۵. اگر n عددی فرد باشد، $n^۲$ هم عددی فرد می‌شود و به‌ازای $x<۰$، ریشهٔ $n+۱$ام از $x^n.a^{n^۲}$ واز $x^{n^۲}.a^n$، مقداری موهومی می‌شود. بنابراین، مقدارهای قابل‌قبول مجهول، در حالت فردبودن n، عبارت است از $x\geqslant ۰$ وقتی‌که n عددی زوج باشد، x می‌تواند هرمقدار حقیقی را اختیار کند. پارامتر b، در هردوحالت، باید مقداری مثبت باشد، زیرا در سمت چپ برابری، مجموع دوریشهٔ حسابی وجود داردکه، دست‌کم، یکی از آن‌ها به‌سمت صفر میل نمی‌کند. برای حل، ابتدا n را عددی فرد و، بنابراین، x را غیرمنفی می‌گیریم. اگر از رادیکال اول، عامل $x^{\frac{n}{n+۱}}$ واز رادیکال دوم، عامل $a^{\frac{n}{n+۱}}$ را بیرون بیاوریم، به‌دست می‌آید:

$$x^{\frac{n}{n+۱}}\sqrt[n]{x^{\frac{n}{n+۱}}+a^{\frac{n}{n+۱}}}+a^{\frac{n}{n+۱}}\sqrt[n]{a^{\frac{n}{n+۱}}+x^{\frac{n}{n+۱}}}=b;$$

$$\sqrt[n]{x^{\frac{n}{n+۱}}+a^{\frac{n}{n+۱}}}\left(x^{\frac{n}{n+۱}}+a^{\frac{n}{n+۱}}\right)=b;$$

$$\left(x^{\frac{n}{n+۱}}+a^{\frac{n}{n+۱}}\right)^{\frac{n+۱}{n}}=b;\ x^{\frac{n}{n+۱}}+a^{\frac{n}{n+۱}}=b^{\frac{n}{n+۱}};$$

$$x^{\frac{n}{n+۱}}=b^{\frac{n}{n+۱}}-a^{\frac{n}{n+۱}};\ x=\left(b^{\frac{n}{n+۱}}-a^{\frac{n}{n+۱}}\right)^{\frac{n+۱}{n}}$$

که برای $b\geqslant a$، جواب معادله است.

از همین جواب معلوم می‌شودکه، اگر n عددی زوج باشد، معادله؛ برای $b>a$، دوجواب پیدا می‌کند:

$$x_{۱,۲}=\pm\left(b^{\frac{n}{n+۱}}-a^{\frac{n}{n+۱}}\right)^{\frac{n+۱}{n}}$$

درحالتی‌که $b=a$ باشد، جواب معادله $x=۰$ است.

۲۳۶. چون $n>k>۰$، بنابراین معادله دارای ریشهٔ $x_۱=۰$ است. از این به‌بعد $x\neq ۰$ می‌گیریم. همهٔ جمله‌های معادله را بر $\sqrt[n]{a^{n-k}x^k}$ تقسیم می‌کنیم، به معادلهٔ درجهٔ دوم زیر می‌رسیم:

$$\sqrt{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n-2k}{n}}-2\sqrt{b}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n-2k}{2n}}+\sqrt{a}=0;$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n-2k}{2n}}=\frac{\sqrt{b}\pm\sqrt{b-a}}{\sqrt{a}};\ \frac{x}{a}=\left(\frac{\sqrt{b}\pm\sqrt{b-a}}{\sqrt{a}}\right)^{\frac{2n}{n-2k}};$$

$$x_{2,3}=a^{\frac{2k}{2k-n}}(\sqrt{b}\pm\sqrt{b-a})^{\frac{2n}{n-2k}}$$

با وجود این، به‌ازای $n=2k$ ، محاسبه‌ها بی‌معنی می‌شود؛ ولی $x=0$ در این حالت هم، به‌قوت خود باقی است. دوجواب دیگر معادله، درحالت $n=2k$، از گردونه خارج می‌شوند، زیرا در این‌حالت، معادلهٔ مفروض، به‌صورت $\sqrt{ax}=\sqrt{bx}$ درمی‌آید و، در ضمن، می‌دانیم $a\neq b$. این‌را هم یادآوری کنیم که، با توجه به‌سمت راست معادلهٔ مفروض، معلوم است که حوزهٔ مقدارهای قابل‌قبول مجهول ، عبارت است از $x\geqslant 0$. از همین مطلب، برای محاسبه استفاده کردیم. شرط $b>a$، حقیقی‌بودن x_2 و x_3 را تضمین می‌کند.

۲۳۷. اگر n عددی فرد باشد ، x می‌تواند هرمقدار حقیقی را اختیار کند؛ ولی درحالت زوج‌بودن n، بایدشرط $|x|\geqslant 1$ برقرار باشد: دوطرف معادله‌را بر $\sqrt[n]{(x-1)^2}$ تقسیم می‌کنیم ($x\neq 1$). به‌دست می‌آید:

$$\left(\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}}\right)^2-4\left(\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}}\right)+1=0;\ \sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}}=2\pm\sqrt{3}$$

که درحالت زوج‌بودن n، این‌جواب‌ها باید باشرط $|x|>1$ سازگار باشند. از برابری اخیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{x+1}{x-1}=(2\pm\sqrt{3})^n \Rightarrow x_{1,2}=\frac{(2\pm\sqrt{3})^n+1}{(2\pm\sqrt{3})^n-1}$$

که در آن، علامت جلو $\sqrt{3}$ را باید درصورت ومخرج یکسان گرفت. چه در حالت فرد بودن n وچه درحالت زوج بودن‌آن، این‌ها جواب‌های معادله‌اند، زیرا روشن است که $|x_1|>1$ و $|x_2|>1$.

۲۳۸. دوطرف معادله را در $\sqrt[n]{\frac{a+x}{x^2}}$ ضرب می‌کنیم. به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{x^2}\sqrt[n]{\frac{a^2-x^2}{x^2}}-\frac{1}{a}\sqrt[n]{\frac{a^2-x^2}{x^2}}=1;\ \frac{a^2-x^2}{a^2x^2}\cdot\sqrt[n]{\frac{a^2-x^2}{x^2}}=1;$$

$$\left(\frac{a^2-x^2}{x^2}\right)^{\frac{n+1}{n}}=a^2;\ \frac{a^2-x^2}{x^2}=a^{\frac{2n}{n+1}};\ x=\pm\frac{a}{\sqrt{1+a^{\frac{2n}{n+1}}}} \qquad (*)$$

هردو جواب، ریشه‌های معادله‌اند؛ البته در حالت زوج‌بودن n، برای هرمقدار دلخواه a قابل‌قبول نیستند. برای این‌که در این مورد قانع شویم، باید ببینیم، باچه شرطهایی ، معادلهٔ مفروض، ضمن عمل‌های انجام‌شده، به‌معادله‌های هم‌ارز خود تبدیل می‌شود و، سپس، ثابت کنیم که این شرطها برقرارند. ابتدا، n را زوج می‌گیریم. دراین حالت ، از آن‌جا که با ریشه‌های حسابی سروکار داریم ، باید داشته باشیم: $a-x\geqslant 0$ و $a+x>0$. بنابراین، باید شرط $-a<x\leqslant a$ و $a>0$ برقرار باشد . با این شرطها ، همهٔ عمل‌های انجام‌شده، برگشت‌پذیرند، یعنی می‌توان آن‌ها را در جهت عکس هم انجام‌داد و همین‌مطلب، هم‌ارزی معادلهٔ مفروض را بامعادله‌های حاصل از آن ، تضمین می‌کند. به‌این ترتیب، معادلهٔ مفروض ، بامعادلهٔ (*) هم‌ارز است (البته ، با شرط $-a<x\leqslant a$ یا $|x|<a$). ولی این شرط همیشه برقرار است ، زیرا داریم: $\sqrt{1+a^{\frac{2n}{n+1}}}>1$.

درحالت فردبودن n، به‌سادگی دیده می‌شود که بازهم معادلهٔ(*) با معادلهٔ مفروض هم‌ارز است، ولی لزومی به شرط $a>0$ نیست وکافی است داشته باشیم: $a\neq 0$.

۲۳۹. به ترتیب داریم:

$$\sqrt{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{x}}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{x}}-\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right)=\sqrt[2n]{x};$$

$$\sqrt{\frac{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}}\cdot\frac{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}}}=\sqrt[n]{a};\ \left(\frac{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}}\right)^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{1}{n}};$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}}=a^{\frac{2}{3n}};\ \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{x}}-1=a^{\frac{2}{3n}};\ \sqrt[n]{x}\left(1+a^{\frac{2}{3n}}\right)=\sqrt[n]{a};$$

$$a=x\left[1+a^{\frac{2}{3n}}\right]^n;\ x=a:\left[1+a^{\frac{2}{3n}}\right]^n$$

اگرشبیه‌آن چه درحل مسالهٔ ۲۳۸ داشتیم، استدلال کنیم، ثابت می‌شود که این، تنها جواب معادله است.

۲۴۰. چون داریم:

$$\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\sqrt{\frac{x^۲-y^۲}{(x+y)^۲}}=\frac{\sqrt{x^۲-y^۲}}{|x+y|}$$

معادلهٔ اول دستگاه مفروض، با معادلهٔ زیرهم‌ارز است:

$$x-y+\frac{\sqrt{x^۲-y^۲}}{|x+y|}=\frac{۲۰}{x+y}$$

که اگرداشته باشیم: $x+y>۰$، به این صورت درمی‌آید:

$$x^۲-y^۲+\sqrt{x^۲-y^۲}-۲۰=۰\Rightarrow\sqrt{x^۲-y^۲}=۴,\ -۵$$

ازجواب ۵− (به خاطرمنفی‌بودن آن) باید صرف‌نظر کرد. به‌این‌ترتیب، دستگاه مفروض با دستگاه زیرهم‌ارز است:

$$\sqrt{x^۲-y^۲}=۴,\ x^۲+y^۲=۳۴ \text{ یا } x^۲-y^۲=۱۶,\ x^۲+y^۲=۳۴$$

که ازآن‌جا به دست می‌آید: $x=\pm۵$، $y=\pm۳$؛ که از آن‌ها، تنها (۵، ۳) و (۵، ۳−) جواب‌های دستگاه هستند. ازجواب‌های (۵−، ۳±) باید صرف نظر کرد، زیرا به ازای آن‌ها داریم: $x+y<۰$.

درحالت $x+y<۰$، با روش مشابهی به‌دست می‌آید. $\left(-\sqrt{\frac{۵۹}{۲}},\ \pm\sqrt{\frac{۹}{۲}}\right)$.

۲۴۱. اگرمعادلهٔ اول را به $\sqrt[۳]{xy}$ ساده کنیم، با فرض $\sqrt[۳]{\frac{x}{y}}=z$، به‌دست‌می‌آید:

$$z+۱+\frac{۱}{z}=\frac{۷}{۲}\Rightarrow ۲z^۲-۵z+۲=۰\Rightarrow z_۱=۲,\ z_۲=\frac{۱}{۲}$$

به این ترتیب، حل دستگاه مفروض، منجربه حل دو دستگاه زیرمی‌شود:

$$a)\quad \sqrt[۳]{x}=۲\sqrt[۳]{y}\ ،\ \sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{y}=۳;$$

$$b)\quad \sqrt[۳]{x}=\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{y} \text{ و } \sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{y}=۳$$

که بعد ازحل آن‌ها، جواب‌های دستگاه مفروض به‌دست می‌آیند:

$(x_1 = ۲۱۶ ، y_1 = ۲۷)$ و $(x_2 = -۲۷ ، y_2 = -۲۱۶)$

۲۴۲. درسمت چپ معادلهٔ اول، مخرج کسر را گویا می‌کنیم. دستگاه مفروض، به این صورت درمی‌آید:

$$\sqrt{x} = \frac{۳}{۱۶}y ، \sqrt{x} + \sqrt{y} = ۷$$

که حل آن مشکل نیست: $x = ۹$، $y = ۱۶$.

۲۴۳. $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = (۲\sqrt{xy})^2$ و درنتیجه $x + y - ۲\sqrt{xy} = ۴xy$، که با استفاده ازمعادلهٔ دوم دستگاه به دست می‌آید:

$$۲۰ - ۲\sqrt{xy} = ۴xy \Rightarrow ۲xy + \sqrt{xy} - ۱۰ = ۰$$

ازآنجا $xy = ۴$. اکنون ازدومعادلهٔ $x + y = ۲۰$ و $xy = ۴$، مقدارهای x و y به‌دست می‌آید:

$$x = ۱۰ \pm ۴\sqrt{۶} \text{ و } y = ۱۰ \mp ۴\sqrt{۶}$$

ولی $x - y = ۲\sqrt{xy} > ۰$، یعنی $x > y$. بنابراین ازجواب‌های حاصل، تنها یك‌جواب قابل‌قبول‌است: $x = ۱۰ + ۴\sqrt{۶}$، $y = ۱۰ - ۴\sqrt{۶}$. آزمایش‌نشان‌می‌دهد که،این‌مقدارها، در دستگاه مفروض‌صدق می‌کنند. ولی، با وجودی که‌ازمجذور کردن‌معادله استفاده کرده‌ایم، می‌توان از آزمایش صرف نظرکرد، زیرا با شرط‌های $x > ۰$، $y > ۰$ و $x > y$ سروکار داریم که برگشت‌پذیری عمل‌ها را تضمین می‌کنند.

III. تشکیل‌معادله‌ها

۲۴۴. فاصلهٔ روستا تا ایستگاه را x کیلومترمی گیریم. اگرمسافر درتمام مدت با سرعت ۳ کیلومتر درساعت حرکت می‌کرد، $\frac{x}{۳}$ ساعت در راه معطل می‌شدکه $\frac{۲}{۳}$ ساعت بیشتراز زمان موردنظر او بود. بنابراین، برای این‌که درست به‌ساعت حرکت قطار برسد، باید به اندازهٔ $\left(\frac{x}{۳} - \frac{۲}{۳}\right)$ ساعت در راه باشد. او در واقع، تنها یك ساعت با سرعت ساعتی ۳ کیلومترحرکت کرده است وبقیهٔ راه را از سرعت ۴ کیلومتر درساعت استفاده

می‌کند و، بنابراین، $\left(1+\frac{x-3}{4}\right)$ ساعت در راه است از آن جا که $\frac{3}{4}$ ساعت زودتر از حرکت قطار می‌رسد، باید داشته باشیم:

$$\frac{x}{3}-\frac{2}{3}=1+\frac{x-3}{4}+\frac{3}{4}$$

که از آن‌جا به دست می‌آید: $x=20$ (کیلومتر).

۲۴۵. تعداد دهگان عدد را x می‌نامیم، در این صورت، عدد مطلوب برابر $10x+3$ می‌شود. عددی که با جابه‌جایی رقم‌ها به‌دست می‌آید، برابر $300+x$ خواهد شد. بنابراین، به این معادله می‌رسیم:

$$300+x=3(10x+3)+1 \Rightarrow x=10$$

و عدد مطلوب، برابراست با ۱۰۳.

۲۴۶. مسافتی را که هواپیما پرواز می‌کند، x کیلومتر می‌گیریم. هواپیما بخشی از مسیر را که $\frac{385}{2}$ کیلومتر بیشتر از نصف آن است، یعنی $\frac{x+385}{2}$ کیلومتر را، با سرعت ساعتی ۲۲۰ کیلومتر طی می‌کند و، برای آن، $\frac{x+385}{440}$ ساعت وقت صرف می‌کند. بقیهٔ راه، یعنی $\frac{x-385}{2}$ کیلومتر را، با سرعت ۳۳۰ کیلومتر در ساعت می‌رود و $\frac{x-385}{660}$ ساعت وقت صرف می‌کند. چون هواپیما، سرعت متوسطی برابر ۲۵۰ کیلومتر در ساعت داشته است، بنابراین، به اندازهٔ $\frac{x}{250}$ ساعت در راه بوده است. از آن‌جا

$$\frac{x+385}{440}+\frac{x-385}{660}=\frac{x}{250} \Rightarrow x=1375 \text{ (کیلومتر)}$$

۲۴۷. سن کوچکتر را x و سن بزرگتر را $x+y$ می‌نامیم. در این صورت، x و y از دستگاه معادله‌های زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x+y=2(x-y) \\ x+y+x+2y=63 \end{cases}$$

و از آن‌جا: $x=21$، $x+y=28$.

۲۴۸. سرعت اتومبیل سوم را x کیلومتر در ساعت و زمان لازم برای رسیدن این

اتومبیل به دومی را y ساعت می‌گیریم . درلحظه‌ای که سومی به دومی می‌رسد، اتومبیل اول $50(y+0/5)$ کیلومتر، اتومبیل دوم $40(y+0/5)$ کیلومتر و اتومبیل سوم xy کیلومترمسافت را طی‌کرده‌اند. دراین لحظه، دومی وسومی، مسافتی برابر را پیموده‌اند که منجربه معادلهٔ $xy=40(y+0/5)$ می‌شود؛ ولی اولی به اندازهٔ

$$50(y+0/5)-40(y0+/5)=10y+5$$

کیلومتر، ازدومی و سومی، فاصله دارد. ازآن‌جا که اتومبیل سوم، این فاصله را در ۱/۵ ساعت وهرساعت $(x-50)$ کیلومتربیشتراز اولی طی می‌کند، به معادلهٔ زیرمی‌رسیم:

$$10y+5=1/5(x-50)\Rightarrow 3x-20y-160=0$$

ازدومعادلهٔ دو مجهولی حاصل، نتیجه می‌شود: $x=60$.

۲۴۹. سرعت قطارمسافربری را x کیلومتردرساعت و سرعت قطارسریع‌السیر را y کیلومتر درساعت می‌گیریم. چون $y=2x$، بنابراین، درهمان زمانی که قطار مسافری فاصلهٔ از A تا C را طی می‌کند، قطارتندرو می‌تواند از A به C برود وهمین مسیر را از C به A برگردد. ولی قطار مسافری، از نقطهٔ A، به اندازهٔ $\frac{25}{x}$ ساعت زودتر اززمان حرکت قطارتندرو از C، به راه افتاده است،و، به همین مناسبت، با وجود پنج دقیقه‌توقف در B، $\frac{3}{4}$ ساعت زودتر ازقطارتندرو به C رسیده است. ازآن‌جا، به این معادله می‌رسیم:

$$\frac{25}{x}=\frac{3}{4}+\frac{5}{60}$$

که‌ازآن‌به‌دست‌می‌آید: $x=30$ بنابراین $y=60$ و $BC=120$ (کیلومتر). اکنون AB را محاسبه می‌کنیم.

قطار مسافری، فاصلهٔ از B تا برخورد با قطار تندرو را در ۱۴ دقیقه طی می‌کند و، سپس، بعدازاین‌زمان، به‌اندازهٔ $30\times\frac{14}{60}$، یعنی ۷ کیلومترمی‌رود. بنابراین، قطارتندرو، ازلحظهٔ بیرون آمدن از C تا لحظهٔ برخورد با قطارمسافربری، به اندازهٔ $120-7$، یعنی ۱۱۳ کیلومترمی‌رود و برای این فاصله، $\frac{113}{60}$ ساعت وقت صرف می‌کند . قطار مسافری هم، بعدازآن‌که ۲۵ کیلومتر از A دورمی‌شود، تا لحظهٔ برخورد با قطارتندرو، ۵ دقیقه کمتراز این فاصلهٔ زمانی، در راه بوده است، یعنی به اندازهٔ $\frac{113}{60}-\frac{5}{60}$ یا $\frac{27}{15}$ ساعت . دراین مدت، به اندازهٔ $30\times\frac{27}{15}$، یعنی ۵۴ کیلومتر رفته است؛ درضمن، ۷ کیلومتر تا

B فاصله دارد. بنابراین، داریم:

$$AB=۲۵+۵۴-۷=۷۲ \text{ (کیلومتر)}$$

۲۵۰. مقدار پول را درهریك از n بخش، قبل‌ازهرگونه جابه‌جایی، به‌ترتیب، $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n و مقدار پول بخش nام را، بعد از انتقال قسمتی از بخش $(n-۱)$ام به آن، ولی قبل از انتقال قسمتی از بخش nام به بخش اول، y می‌نامیم. بعد از آن‌که $\frac{۱}{n}$ بخش اول را به بخش دوم منتقل کنیم، دربخش اول پولی برابر $\frac{n-۱}{n}x_۱$ باقی می‌ماند؛ ولی بعد از آن که $\frac{۱}{n}$ بخش nام‌را روی‌بخش‌اول بریزیم، مقدار پول بخش‌اول برابر $\frac{n-۱}{n}x_۱+\frac{۱}{n}y$ ومقدار پول بخش nام برابر $\frac{n-۱}{n}y$ می‌شود. بعد ازنخستین انتقال، مقدارپول بخش دوم، برابر $x_۲+\frac{۱}{n}x_۱$ وبعد از انتقال دوم ($\frac{۱}{n}$ بخش ۲ به بخش۳)، مقدار پول بخش دوم برابر $\frac{n-۱}{n}\left(x_۲+\frac{۱}{n}x_۱\right)$ می‌شود. به همین ترتیب، می‌توان روشن‌کرد که دربخش ۳، بعد ازهمهٔ جابه‌جایی‌ها، به اندازهٔ $\frac{n-۱}{n}\left[x_۳+\frac{۱}{n}\left(x_۲+\frac{۱}{n}x_۱\right)\right]$ پول می‌ماند وغیره. از آن‌جا که درپایان‌کار، درهربخش A ریال وجود دارد، به دستگاه معادله‌های زیرمی‌رسیم:

$$\begin{cases}\frac{n-۱}{n}x_۱+\frac{۱}{n}y=A\\[2mm] \frac{n-۱}{n}\left(x_۲+\frac{۱}{n}x_۱\right)=A\\[2mm] \frac{n-۱}{n}\left[x_۳+\frac{۱}{n}\left(x_۲+\frac{۱}{n}x_۱\right)\right]=A\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \frac{n-۱}{n}y=A\end{cases}$$

ازمعادلهٔ آخر، مقدار y و، سپس، به کمك معادلهٔ اول، مقدار $x_۱$ به دست می‌آید. محاسبهٔ $x_۲$، $x_۳$، ...، x_n، به دشواری زیادی برنمی‌خورد. درنتیجه، به‌دست می‌آید:

$$x_1=\frac{n(n-۲)}{(n-۱)^۲}A; \qquad x_۲=\frac{n_۲-۲n+۲}{(n-۱)^۲}A;$$

$$x_۳=x_۴=\dots=x_n=A$$

۳۵۱. فرض کنید، یکی از کارگرها بتواند کار را در x روز و دیگری در y روز انجام دهد. بنابراین، اولی به تنهایی درهر روز $\frac{1}{x}$ و دومی به تنهایی درهر روز $\frac{1}{y}$ کار را تمام می کنند. درنتیجه

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{۱۲} \qquad (۱)$$

بعد از ۸ روز کارمشترك، $\frac{۸}{۱۲}$، یعنی $\frac{۲}{۳}$ تمامی‌کار را انجام می‌دهند و دومی بقیهٔ کار را پنج روزه به پایان می‌رساند، یعنی

$$\frac{۲}{۳}+\frac{۵}{y}=۱ \qquad (۲)$$

با حل دستگاه شامل دومعادلهٔ (۱) و (۲)، x و y به‌دست می‌آید: $x=۶۰$، $y=۱۵$.

۳۵۲. فرض می‌کنیم، یکی از گروه‌ها بتواند کاررا در x روز ودیگری در y روز تمام کند. به این‌ترتیب، گروه اول هر روز $\frac{1}{x}$ کار وگروه دوم هر روز $\frac{1}{y}$ کار را انجام می‌دهند. چون با کارمشترك، تمامی کاردر ۸ روزتمام می‌شود، بنابراین

$$\frac{۸}{x}+\frac{۸}{y}=۱$$

ولی $\frac{۲}{۳}$ کارگران گروه اول درهر روز $\frac{۲}{۳x}$ تمام کار، و ۰/۸ کارگـران گروه دوم، $\frac{۰/۸}{y}$ تمامی‌کار را انجام می‌دهند. برای انجام کار، با این روش، $۱۱\frac{۱}{۴}$ روزلازم است. بنابراین

$$۱۱\frac{۱}{۴}\left(\frac{۲}{۳x}+\frac{۰/۸}{y}\right)=۱$$

با حل دستگاه، به دست می‌آید: $x=۱۲$، $y=۲۴$.

۳۵۳. سن برادربزرگتر، برادرمتوسط و برادرکوچکتر را، درحال حاضر، x، y و z می گیریم. $(x-y)$ سال قبل، برادرکوچکتر ۱۰ سال داشت، بنابراین

$$z-(x-y)=۱۰$$

بعد از $(x-y)$ سال، برادر کوچکتر، ۲۶ ساله می‌شود:

$$z+(x-y)=۲۶$$

درلحظهٔ تولد برادر کوچکتر، برادر بزرگتر $(x-z)$ ساله و برادرمتوسط $(y-z)$ ساله ومجموع سال‌های سن آن‌ها برابر $۲z$ بوده است:

$$(x-z)+(y-z)=۲z$$

با حل دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی حاصل، به‌دست می‌آید: $x=۴۰$، $y=۳۲$، $z=۱۸$.

۲۵۴. فرض می‌کنیم از آلیاژاولی x واحد وازآلیاژدومی y واحد انتخاب کرده باشیم. بنابراین درآلیاژجدید، ازفلز اول $\frac{۱}{۳}x+\frac{۲}{۳}y$ و ازفلزدوم $\frac{۲}{۳}x+\frac{۳}{۵}y$ وجود دارد. چون نسبت این فلزها درآلیاژ جدید برابر۲۷ : ۱۷ است، بنابراین به معادلهٔ زیرمی‌رسیم:

$$\left(\frac{۱}{۳}x+\frac{۲}{۳}y\right):\left(\frac{۲}{۳}x+\frac{۳}{۵}y\right)=۱۷:۲۷$$

اگر $z=\frac{x}{y}$ بگیریم، این معادله، به صورت زیر درمی‌آید:

$$(۵z+۶):(۱۰z+۹)=۱۷:۲۷\Rightarrow z=\frac{۹}{۳۵}$$

یعنی باید از آلیاژ اول ۹ واحد و از آلیاژدوم ۳۵ واحد انتخاب کنیم، به زبان دیگر، نسبت دوآلیاژ مفروض، باید برابر ۳۵ : ۹ باشد.

۲۵۵. فاصلهٔ مجهول را x کیلومتر وسرعت قطار را y کیلومتردرساعت‌می گیریم. قطاراول، تا ایستگاه اجباری ۶ساعت درحرکت بوده است وضمن آن مسافتی برابر $۶y$ کیلومترمی‌پیماید. بقیه راه، یعنی $(x-۶y)$کیلومتر را با سرعت $۱/۲y$ کیلومتردرساعت طی می‌کند و برای آن $\frac{x-۶y}{۱/۲y}$ ساعت وقت صرف مـی‌کند. قطار، بـا درنظرگرفتن ۲ ساعت توقف اجباری، روی هم به‌اندازهٔ $۶+۲+\frac{x-۶y}{۱/۲y}$ ساعت در راه بـوده است.

این زمان، باید ۱ ساعت از زمان معمول حرکت او، یعنی $\frac{x}{y}$، بیشترباشد، یعنی

$$۶+۲+\frac{x-۶y}{۱/۲y}=\frac{x}{y}+۱$$

بااستدلال مشابهی برای قطار دوم، به معادلهٔ زیرمی‌رسیم:

$$۶+\frac{۱۵۰}{y}+۲+\frac{x-۶y-۱۵۰}{۱/۲y}=\frac{x}{y}+۱/۵$$

که با حل دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی، به دست می‌آید: $x=۶۰۰$.

۲۵۶. سرعت قایق را (درساعت) درآب ساکن برابر $v_۱$، سرعت جریان‌آب را درفاصلهٔ BC برابر $v_۲$، فاصلهٔ AC را برابر S وفاصلهٔ AB را برابر x مـی گیریم. S و x با یك واحد طول بیان شداه‌اند و بـرای بیان سرعت‌های $v_۱$ و $v_۲$، هم ، از همین واحد استفاده کرده‌ایم.

قایق‌ران درحرکت بـه طرف پایین رودخانه، ۳ساعت صرف کرده است، درضمن بخشی ازاین زمان را درفاصلهٔ AB و به اندازهٔ $\frac{x}{v_۱}$ ساعت و بخش دیگر را درفاصلهٔ BC و به انـدازهٔ $\frac{S-x}{v_۱+v_۲}$ ساعت صرف کرده است، ازاین‌جا

$$\frac{x}{v_۱}+\frac{S-x}{v_۱+v_۲}=۳$$

درحرکت به طرف بالا، قایق‌ران درفاصلهٔ BC به اندازهٔ $\frac{S-x}{v_۱-v_۲}$ ساعت،درفاصلهٔ AB، همان $\frac{x}{v_۱}$ ساعت، و درتمام مسیر AC، ۳/۵ ساعت وقت صرف کرده است؛ یعنی

$$\frac{x}{v_۱}+\frac{S-x}{v_۱-v_۲}=۳/۵$$

اگرسرعت جریان آب، درتمامی مسیر AC، شبیه قطعهٔ BC بود، برای حرکت به‌طرف پایین، درمسیر AC، $\frac{S}{v_۱+v_۲}$ ساعت‌لازم بود، کـه بنابرفـرض مساله، برابر $۲\frac{۳}{۴}$ ساعت شده است، درنتیجه

$$\frac{S}{v_۱+v_۲}=۲\frac{۳}{۴}$$

اگر معادله‌های حاصل را ساده کنیم، سرانجام به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} xv_2+Sv_1=3v_1(v_1+v_2) \\ -2xv_2+2Sv_1=7v_1(v_1-v_2) \qquad (*) \\ 4S=11(v_1+v_2) \end{cases}$$

دو برابر معادلهٔ اول را با معادلهٔ دوم جمع می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$4Sv_1=v_1(13v_1-v_2)$$

که با تقسیم آن بر v_1 $(v_1\neq 0)$ و، سپس، کم‌کردن آن از معادلهٔ سوم دستگاه $(*)$، به‌دست می‌آید: $2v_1-12v_2=0$ یا $v_1=6v_3$؛ که اگر آن را در معادلهٔ سوم دستگاه $(*)$ قرار دهیم: $v_2=\frac{4S}{77}$.

بنابراین داریم: $v_2=\frac{4S}{77}$، $v_1=\frac{24S}{77}$، $v_1-v_2=\frac{20S}{77}$. از اینجا، زمان مطلوب t به‌دست می‌آید:

$$t=\frac{S}{v_1-v_2}=\frac{77S}{20S}=\frac{77}{20}\ (\text{ساعت})=3(\text{ساعت})51(\text{دقیقه})$$

۲۵۷. درصد مجهول را x می‌گیریم. موجودی دفترچهٔ پس‌انداز، در پایان سال اول، برابر $\left(1640+\frac{1640}{100}x\right)$ می‌شود. بنابراین، با توجه به برداشت پایان سال اول، مبلغی که برای سال دوم می‌ماند، برابر $758+\frac{1640}{100}x$ می‌شود. به این مبلغ، در انتهای سال دوم، بـه اندازهٔ $\frac{x}{100}\cdot\left(758+\frac{1640}{100}x\right)$ اضافه می‌شود و، بعد از آن، مبلغ موجـودی دفترچهٔ پس‌انداز برابر ۸۸۲ می‌شود. یعنی

$$758+\frac{1640}{100}x+\left(758+\frac{1640}{100}x\right)\cdot\frac{x}{100}=882$$

که از آن به دست می‌آید:

$$41x^2+5995x-31000=0\Rightarrow x=5$$

۲۵۸. تعداد ساعت‌های کار کارگر دوم را x می‌گیریم. کارگر اول، ۲ ساعت و ۱۶ دقیقه زودتر کار خود را آغاز و ۱۶ دقیقه قبل از او تمام کرده است. یعنی، کارگر اول، روی هم $(x+2)$ ساعت کار کرده است. کارگر اول، بعد از قطع کار، به اندازهٔ

$$(\text{ساعت})\,\text{۸}\,(\text{ساعت})\,\text{۱۰}\,(\text{دقیقه}) - \text{۱}\,(\text{ساعت})\,\text{۳۰}\,(\text{دقیقه}) = \text{۶}\,(\text{ساعت})\,\text{۴۰}\,(\text{دقیقه}) = \text{۶}\tfrac{\text{۲}}{\text{۳}}\,(\text{ساعت})$$

وقبل ازقطع کار، $\left(x - ۶\frac{۲}{۳}\right)$ ساعت کار کرده است. از آن‌جا که دومی نصف تمام کار را در x ساعت تمام می‌کند (نصف دیگر، به عهدهٔ اولی است)، بنابراین درهرساعت $\frac{۱}{۲x}$ کار،و روی‌هم تا پیش‌ازظهر، $\frac{x-۶\frac{۲}{۳}}{۲x}$ کاررا انجام‌می‌دهد. کارگراول، بعدازقطع کار، به‌اندازهٔ

$$(\text{ساعت})\,\text{۷}\,(\text{ساعت})\,\text{۵۴}\,(\text{دقیقه}) - \text{۱}\,(\text{ساعت})\,\text{۳۰}\,(\text{دقیقه}) = \text{۶}\,(\text{ساعت})\,\text{۲۴}\,(\text{دقیقه}) = \text{۶}\tfrac{\text{۲}}{\text{۵}}\,(\text{ساعت})$$

و قبل از آن $\left(x + ۲ - ۶\frac{۲}{۵}\right)$ ساعت کار کرده است. از آن‌جا که اولی، درهرساعت $\frac{۱}{۲(x+۲)}$ کار را انجام می‌دهد، بنابراین قبل‌ازظهر توانسته است $\frac{x+۲-۶\frac{۲}{۵}}{۲(x+۲)}$ کار را انجام می‌دهد. ولی می‌دانیم که هردوکارگر، تاقبل ازظهر، ۰/۴ کار را به پایان رسانده‌اند. بنابراین

$$\frac{x-۶\frac{۲}{۳}}{۲x} + \frac{x+۲-۶\frac{۲}{۵}}{۲(x+۲)} = ۰/۴$$

و ازآن‌جا

$$۹x^۲ - ۸۰x - ۱۰۰ = ۰ \Rightarrow x = ۱۰$$

(ریشهٔ منفی معادله راکنارگذاشته‌ایم، زیرا باشرطهای مساله‌سازگارنیست). به‌این ترتیب، کارگر دوم، قبل ازنهار به اندازهٔ

$$(\text{ساعت})\,\text{۱۰} - \text{۶}\tfrac{\text{۲}}{\text{۳}}\,(\text{ساعت}) = \text{۳}\,(\text{ساعت})\,\text{۲۰}\,\text{دقیقه}$$

کار کرده است، یعنی‌کار اودرساعت ۸ و ۴۰ دقیقه آغازشده است. اولی ، کارخود را در ساعت ۶ و ۲۴ دقیقه آغاز کرده بود.

۲۵۹. فرض‌می‌کنیم، بنای دوم بتواندکار را در x روزانجام دهد. دراین‌صورت، اولی برای انجام این‌کار، به $(x+۹)$ روزنیاز دارد. اولی، هر روز $\frac{۱}{x+۹}$ کار، دومی

$\frac{1}{x}$ کار و هردونفر با هم $\frac{1}{20}$ کار را انجام می‌دهند، یعنی

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+9}=\frac{1}{20};\ x^2-31x-180=0;\ x=36$$

به این ترتیب، اولی می‌تواند کار را ۴۵ روزه و دومی ۳۶ روزه انجام دهد.

۲۶۰. مسافت مجهول را x کیلومتر می‌گیریم. روشن است که A و B درجایی به‌هم رسیده‌اند کـه ۳کیلومتر با وسط دونقطهٔ M و N فاصله داشته است، یعنی در لحظهٔ ملاقات، پیادهٔ A به اندازهٔ $3+\frac{x}{2}$ کیلومتر و پیادهٔ B به اندازهٔ $\frac{x}{2}-3$ کیلومترطی کرده‌اند. پیادهٔ A، بقیه راه، یعنـی $\left(\frac{x}{2}-3\right)$ کیلومتر را در ۴/۵ ساعت طـی کرده است، یعنی سرعت A برابراست با $\left(\frac{x}{2}-3\right):4/5$ کیلومتردرساعت. به همین ترتیب، سرعت پیادهٔ B برابراست با $\left(\frac{x}{2}+3\right):8$ کیلومتردرساعت. بـا در دست داشتن سرعت‌ها، می‌توانیم فاصلهٔ زمانی ازآغازحرکت تا لحظهٔ ملاقات را پیداکنیم. برای پیادهٔ A، این‌زمان برابر است با:

$$\left(\frac{x}{2}+3\right):\left[\left(\frac{x}{2}-3\right):4/5\right]\ (\text{ساعت})$$

و برای پیادهٔ B:

$$\left(\frac{x}{2}-3\right):\left[\left(\frac{x}{2}+3\right):8\right]\ (\text{ساعت})$$

ازبرابرقراردادن این دوعبارت، معادلهٔ لازم برای تعیین x به‌دست می‌آید:

$$\left(\frac{x}{2}+3\right):\left[\left(\frac{x}{2}-3\right):4/5\right]=\left(\frac{x}{2}-3\right):\left[\left(\frac{x}{2}+3\right):8\right];$$

$$\left(\frac{x}{2}+3\right)^2\cdot\frac{9}{2}=\left(\frac{x}{2}-3\right)^2\cdot 8\ ;\ \left(\frac{x}{2}+3\right)\cdot 3=\pm\left(\frac{x}{2}-3\right)\cdot 4\ ;$$

$$3x+18=\pm(4x-24)\ ;\ x_1=42\ ،\ x_2=\frac{6}{7}$$

ریشهٔ دوم با شرط‌های مساله نمـی‌سازد (فاصلـهٔ بین M و N از ۶ کیلومتر بیشتراست).

بنا براین فاصلهٔ از M تا N برابراست با ۴۲ کیلومتر.

۲۶۱. سرعت یکی از اتـومبیل‌ها را x کیلومتردرساعت می گیریم. این اتومبیل، بعد ازبرخورد، ۲ ساعت دیگر به حرکت‌خود ادامه داده است‌و، بنا براین، بعد ازبرخورد، $۲x$ کیلومتر راه رفته است. اتومبیل دیگر، بعدازبـرخورد، $(۲۱۰-۲x)$ کیلومتر را در $\frac{۹}{۸}$ ساعت پیموده است، بنا براین سرعت این اتـومبیل برابر است با $(۲۱۰-۲x):\frac{۹}{۸}$ کیلومتودرساعت. دواتومبیل با هم‌حرکت کرده‌اند و، بنا براین،فاصلهٔ زمانی حرکت آن‌ها، تا لحظهٔ ملاقات، یکسان است. اگراین فاصلهٔ زمانی را برای هریك ازاتومبیل‌ها محاسبه و، سپس برابر قرار دهیم، به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$\frac{۲۱۰-۲x}{x}=\frac{۲x}{(۲۱۰-۲x):\frac{۹}{۸}}\Rightarrow(۲۱۰-۲x)^{۲}=\frac{۹}{۴}x^{۲};$$

$$۲۱۰-۲x=\pm\frac{۳}{۲}x;\ x_{۱}=۶۰،\ x_{۲}=۲۴۰$$

چون تمامی راه برابر ۲۱۰ کیلومتراست، باید از ریشهٔ دوم معادله صرف نظر کنیم، زیرا بخشی از راه را که برابر$۲x$ است، ازتمامی راه بیشترنشان می‌دهد. پس، سرعت یکی‌از اتومبیل‌ها برابر ۶۰ کیلومتردرساعت و سرعت دیگری برابر $\frac{۹}{۸}:(۲۱۰-۱۲۰)$،یعنی‌۸۰ کیلومتردرساعت است.

۲۶۲. فرض کنید، x کیلوگـرم آرد گندم برداشته باشیم. دراین صورت ازنوع دیگرآرد $(x+۱۰)$ کیلو گـرم می‌شود. آرد گندم به اندازهٔ $\frac{x^{۲}}{۱۰۰}$ وآرد نـوع دوم بـه اندازهٔ $\frac{(x+۱۰)^{۲}}{۱۰۰}$ ورمی‌آید. مجموع آردها، بعداز ورآمـدن، ۱۱۲/۵ کیلوگرم شده است. بنا براین

$$x+\frac{x^{۲}}{۱۰۰}+x+۱۰+\frac{(x+۱۰)^{۲}}{۱۰۰}=۱۱۲/۵\Rightarrow x^{۲}-۱۱۰x-۵۰۷۵=۰$$

که اگر ازجـواب منفی صرف نـظر کنیم، مقدارآرد گندم برابر۳۵ کیلو گرم و، درنتیجه، مقدارنوع دیگرآرد برابر ۱۰+۳۵، یعنی ۴۵ کیلوگرم می‌شود.

۲۶۳. اگرسرعت کشتی رادرقطعهٔ اول، x کیلومتردرساعت بگیریم، آن وقت، زمان

لازم برای عبور از ایـن قطعه، برابر $\frac{24}{x}$ ساعت می‌شود. درقطعهٔ دوم، سرعت کشتی برابر است با $(x+4)$ کیلومتر درساعت و، بنابرایـن، زمان لازم بـرای عبور از آن، برابر $\frac{39}{x+4}$ ساعت می‌شود. ولی می‌دانیم که کشتی، برای عبوراز قطعهٔ دوم، ۲۰ دقیقه، یعنی $\frac{1}{3}$ ساعت، بیشتراز زمان عبورازقطعهٔ اول، وقت صرف کرده است. درنتیجه

$$\frac{39}{x+4}-\frac{24}{x}=\frac{1}{3}\Rightarrow x^2-41x+288=0\Rightarrow x_1=32,\ x_2=9$$

هردوجواب، با شرطهای مساله سازگارند.

۲۶۴. فرض کنیم، یکی ازجسمها، درهر ثـانیه x مترحرکت کند. دراین صورت، جسم دیگر ثانیه‌ای $(x+4)$ مترحرکت خواهدکرد. اولـی دایره را در $\frac{360}{x}$ ثانیه‌ودومی در $\frac{360}{x+4}$ ثانیه دورمی‌زند. ولی‌دومی یك‌ثانیه زودترازاولی دایره را می‌پیماید، بنابراین

$$\frac{360}{x}-\frac{360}{x+4}=1\Rightarrow x^2+4x-1440=0;\ x=36,\ x+4=40$$

۲۶۵. محیط دایرهٔ چرخ جلو را xمترمی گیریم، دراین صورت محیط دایرهٔ چرخ عقب برابر $2x$ مترمی‌شود. وقتی کـه محیط چرخ جلو را ۱ متر بیشتر ومحیط چرخ عقب را ۱ متر کمتر بگیریم، در ۶۰ متر، چرخ جلو $\frac{60}{x+1}$ دور وچرخ عقب $\frac{60}{2x-1}$ دور می‌زند. ازاین‌جا، با توجه به فرض مساله، به معادلهٔ زیرمی‌رسیم:

$$\frac{2}{2x-1}-\frac{2}{x+1}=1\Rightarrow 2x^2+3x-5=0\Rightarrow x=1$$

طول محیط دایرهٔ چرخ جلو برابر ۱ متر وطول محیط دایرهٔ چرخ عقب برابر ۲ متراست.

۲۶۶. زمان‌مجهول‌را x ساعت‌می‌گیریم. سرعت‌واقعی‌تراموادرمسافت ۳۰ کیلومتری، برابراست با $\frac{30}{x}$ کیلومتردرساعت. ولی بعد از آن‌که زمان حرکت خود را ۰/۵ ساعت کاهش مـی‌دهد، سرعت آن برابر $\frac{30}{x-0/5}$ کیلومتر درساعت می‌شود. بنابراین، با توجه به شرط مساله، باید داشته باشیم:

$$\frac{۳۰}{x}+۳=\frac{۳۰}{x-۰/۵}\Rightarrow ۲x^۲-x-۱۰=۰\Rightarrow x=۲/۵$$

سرعت حرکت تراموا برابر ۱۲ کیلومتردرساعت است.

۲۶۷. تعداد نجارها را x می‌گیریم. دراین صورت، تعداد نقاش‌ها $(x-۲)$ نفر وتعدادکل کارگران $(۲x-۲)$ نفرمی‌شود. بـه همهٔ کارگران $۳(۲x-۲)+۲۶$ روبل پرداخت شده است. می‌دانیم سهم گروه نقاش‌ها، با سهم گروه نجارها برابراست، بنابراین به هرنجار $\frac{۳(۲x-۲)+۲۶}{۲x}$ روبل و به هر نقاش $\frac{۳(۲x-۲)+۲۶}{۲(x-۲)}$ روبـل رسیده است؛ و بنا برفرض مساله، باید داشته باشیم:

$$\frac{۳(۲x-۲)+۲۶}{۲x}+۱=\frac{۳(۲x-۲)+۲۶}{۲(x-۲)}\Rightarrow x^۲-۸x-۲۰=۰\Rightarrow x=۱۰$$

گروه نجارها از ۱۰ نفر و گروه نقاش‌ها از ۸ نفرتشکیل شده است.

۲۶۸. سرعت قطار باری را، x کیلومتر درساعت می‌گیریم؛ با این سرعت، $\frac{۶۵۰}{x}$ ساعت‌لازم داردتا فاصلهٔ ازمسکوتا لنین‌گراد را طی کند. سرعت‌قطارمسافربری $(x+۲۴)$ کیلومتردرساعت می‌شود و همین فاصله را در $\frac{۶۵۰}{x+۲۴}$ ساعت‌طی‌می‌کند. بنابراین، باتوجه به فرض مساله، باید داشته باشیم:

$$\frac{۶۵۰}{x}-\frac{۶۵۰}{x+۲۴}=۱۲\Rightarrow x^۲+۲۴x-۱۳۰۰=۰;\ x=۲۶،\ x+۲۴=۵۰$$

۲۶۹. اگرطول هرگام دانش‌آموز کوچکتر x متر بـاشد. فاصلهٔ ۴۰۰ متر را با $\frac{۴۰۰}{x}$ قدم طی می‌کند. هرگام دانش‌آموزبزرگتر، ۰/۳ متر بیشتر است و، بنابراین،۴۰۰ متر را با $\frac{۴۰۰}{x+۰/۳}$ قدم می‌پیماید. به این ترتیب، داریم:

$$\frac{۴۰۰}{x}-\frac{۴۰۰}{x+۰/۳}=۳۰۰\Rightarrow ۱۰x^۲+۳x-۴=۰\Rightarrow x=۰/۵،\ x+۰/۳=۰/۸$$

۲۷۰. اگرتوپ پارچه x مترباشد، قیمت خرید هرمتر برابر $\frac{۲۰۰}{x}$ روبل و قیمت

فروش هرمتر آن $\left(\frac{200}{x}+1/5\right)$ روبل می‌شود. چون $(x-5)$ متر به مبلغ ۱۹۰ روبل فروخته شده است، می‌توان نوشت:

$$\left(\frac{200}{x}+1/5\right)(x-5)=190\Rightarrow 3x^2+5x-2000=0\Rightarrow x=25$$

۲۷۱. اگرازنوع اول x کیلوگرم خریده شده باشد، ارزش یك کیلوگرم این‌نوع برابر $\frac{22/5}{x}$ روبل و ارزش هر کیلوگرم ازنوع دوم برابر $\frac{32}{x+15}$ روبـل مـی‌شود. بنابراین

$$\frac{32}{x+15}+0/1=\frac{22/5}{x}\Rightarrow x^2+110x-3375=0\Rightarrow x=25،\ x+15=40$$

۲۷۲. درصد مجهول را x می‌گیریم دراین صورت، با اولین اضافه حقوق، هر ۱۰۰ روبل به $(x+100)$ روبل تبدیل می‌شود، وقتی‌که دوباره به حقوق اضافه شود، به مبلغ $\left(100+x+\frac{100+x}{100}x\right)$ روبل می‌رسد. بنابراین

$$100+x+\frac{100+x}{100}.\,x=125/44\Rightarrow x^2+200x-2544=0\Rightarrow x=12$$

۲۷۳. اگربار اول x لیترالکل را بریزیم، درظـرف $(20-x)$ لیترالکل باقی می‌ماند، ولی چون ظرف را با آب پرمی‌کنیم، درهرلیترمخلوط $\frac{20-x}{20}$ لیترالکل وجود خواهد داشت. بنابراین، در x لیتر ازاین مخلوط، به اندازهٔ $x.\frac{20-x}{20}$ لیترالکل‌خالص پیدا می‌شود. بعد ازجابه‌جایی دوم، به اندازهٔ $\left(20-x-\frac{20-x}{20}.\,x\right)$ لـیتـر الکل درظرف می‌ماند ولی، این مقدار باید برابر $\frac{1}{4}$ مقداراولیه، یعنی ۵ لیترباشد:

$$20-x-\frac{20-x}{20}.\,x=5\Rightarrow x^2-40x+300=0\Rightarrow x=10$$

۲۷۴. تعداد سکه‌ها را درهرضلع مربـع، برابر x می‌گیریم. روشن است‌که، در این صورت، درتمام سطح مربع، x^2 سکه وجود دارد. برای این‌که سکه‌ها طوری چیده

شود که یك مثلث متساوی‌الاضلاع به دست آید، باید درقاعدهٔ آن $x+۲$ سکه، روی آن $x+۱$ سکه، روی آن x سکه وغیره قـراردارد تا سرانجام در راس مثلث یك سکه قرار گیرد. بنا براین باید داشته باشیم:

$$(x+۲)+(x+۱)+\cdots+۲+۱=x^۲ \Rightarrow \frac{(x+۳)(x+۲)}{۲}=x^۲ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^۲--۵x-۶=۰$$

که ازآن‌جا $x=۶$ به‌دست می‌آید. تعداد همهٔ سکه‌ها برابراست با $x^۲=۳۶$.

۲۷۵. تعداد مجهول شرکت‌کنندگان را x می‌گیریم. تنها $(x-۲)$ نفردرمسابقه شرکت‌کرده‌اند (دونفرازبازی خارج شده‌اند). بنا براین، تعداد بازی‌ها برابراست با

$$(x-۳)+(x-۴)+\cdots+۲+۱=\frac{(x-۲)(x-۳)}{۲}$$

اگردونفری‌که ازدورخارج شده‌اند، بین خودشان بازکرده باشند، تعداد بازی‌های مختلف آن‌ها برابر ۵ (و نه ۶) می‌شود و دراین حالت باید داشته باشیم:

$$\frac{(x-۲)(x-۳)}{۲}+۵=۸۴$$

ولی اگراین دونفر، باهم بازی نکرده باشند، تعداد بازهای آن‌ها برابر۶ می‌شود و، برای تعیین x، باید داشته باشیم:

$$\frac{(x-۲)(x-۳)}{۲}+۶=۸۴$$

حالت اول، به معادلهٔ $x^۲-۵x-۵۲=۰$ منجرمی‌شودکه ریشهٔ گویا ندارد. معادلهٔ دوم به $x^۲-۵x-۱۵۰=۰$ می‌رسد که ریشهٔ آن، $x=۱۵$، جواب مساله‌است. به این‌ترتیب، تعداد شرکت‌کنندگان درمسابقه، ۱۵ نفربوده است و، درضمن، دونفری‌که ازدور خارج شده‌اند، با هم بازی نکرده‌اند.

۲۷۶. ارزش نوع اول را x روبل می‌گیریم. بنابـراین، وقتی‌که قیمت آن را y درصد اضافه کنیم ، به $x+\frac{xy}{۱۰۰}$ می‌رسد. بنا براین

$$x+\frac{xy}{۱۰۰}=۱۵$$

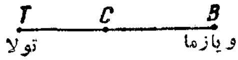
ارزش اولیهٔ نوع دوم $(۱۲/۵-x)$ روبل است وبعد از آن‌که y درصد ازآن کم‌کنیم،

به مبلغ $\left(۱۵/۲-x-\frac{۱۵/۲-x}{۱۰۰}y\right)$ روبل می‌رسد. یعنی باید داشته باشیم:

$$۱۵/۲-x-\frac{۱۵/۲-x}{۱۰۰}y=۲/۴$$

دستگاه شامل این دومعادله، به‌معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲-۴۳x+۲۲۸=۰$ منجر می‌شود و از آن‌جا $x_۱=۱۲$، $x_۲=۹/۵$.

۲۷۷. فرض‌کنیم قطارها، درنقطه‌ای مثل C به هم برسند (شکل ۱). زمانی را که قطارباری برای پیمودن مسافت TC لازم دارد با x (ساعت) وسرعت آن را با y (کیلومتر درساعت) نشان می‌دهیم. زمانی که قطارمسافربری، برای طی کردن مسافت BC صرف کرده است، برابر $\left(x-۵\frac{۱}{۱۲}\right)$ ساعت می‌شود. سرعت قطارمسافری را z کیلومتردرساعت می گیریم. روشن است که می‌توان نوشت: $TC=xy$ و $TC=۴\frac{۱}{۱۰}z$. از این‌جا، به معادلهٔ $xy=۴\frac{۱}{۱۰}z$ می‌رسیم.



شکل ۱

به همین ترتیب، داریم:

$$BC=\left(x-۵\frac{۱}{۱۲}\right)z \text{ و } BC=۱۲\frac{۱۱}{۱۲}y$$

یعنی: $\left(x-۵\frac{۱}{۱۲}\right)z=۱۲\frac{۱۱}{۱۲}y$. اگردومعادلهٔ‌حاصل رادرهم‌ضرب کنیم، به‌دست‌می آید.

$$xy\left(x-۵\frac{۱}{۱۲}\right)z=۴\frac{۱}{۱۰}z\cdot ۱۲\frac{۱۱}{۱۲}y \Rightarrow ۲۴x^۲-۱۲۲x-۱۲۷۱=۰$$

از آن‌جا $x=۱۰\frac{۱}{۴}$ (جواب منفی معادله، با شرط‌های مساله نمی‌سازد). به این ترتیب، قطارباری، درفاصلهٔ TC به اندازهٔ ۱۰ ساعت و ۱۵ دقیقه و درتمامی مسیر ۲۳ ساعت و ۱۰ دقیقه‌وقت صرف می کند. قطارمسافری درفاصلهٔ BC، ۵ ساعت و ۱۰ دقیقه و درتمامی مسیر ۹ ساعت و ۱۶ دقیقه وقت لازم دارد.

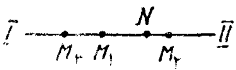
۲۷۸. سرعت قایق‌ران را درآب ساکن، x کیلومتردرساعت و سرعت جریان آب (و درنتیجه، سرعت کلک) را y کیلومتر درساعت می گیریم. بنابراین، سرعت قایق درجهت جریان آب $x+y$ ودرخلاف جریان آب $x-y$، زمان‌حرکت‌قایق درجهت جریان $\frac{۲۰}{x+y}$

درخلاف جریان $\frac{20}{x-y}$ می‌شود. بنا براین

$$\frac{20}{x+y}+\frac{20}{x-y}=7 \quad و \quad \frac{20}{x+y}+\frac{8}{x-y}=\frac{12}{y}$$

ازمعادلهٔ دوم به دست می‌آید: $7xy=2x^2$ وچون $x\neq 0$، درنتیجه $x=\frac{7}{3}y$. x و y دیگر به سادگی به‌دست می‌آیند: $x=7$، $y=3$. به این ترتیب، سرعت قایق برابر ۱۰ کیلومتردرساعت و سرعت جریان آب، برابر ۳ کیلومتر درساعت است.

۲۷۹. محل اولین، دومین وسومین ملاقات نامه‌رسان‌ها را، به ترتیب، M_1، M_2 و M_3 می‌نامیم (شکل ۲). سرعت نامه‌رسان اول را v_1 کیلومتر درساعت وسرعت‌نامه‌رسان دوم را v_2 کیلومتر درساعت می‌گیریم.



شکل ۲

اگرحالت دوم حرکت را درنظربگیریم، نامه‌رسان اول، به‌اندازهٔ (۱۸ دقیقه — ۱ساعت)، یعنی ۰/۷ ساعت دیرترازحالت واقعی با نامه‌رسان دوم ملاقات می‌کرد؛ بنابراین ۰/۷v_1 کیلومتر بیشتر می‌رود. نامه‌رسان دوم، درحالت فرضی، نیم‌ساعت و ۱۸ دقیقه، یعنی ۰/۸ ساعت، کمترازحالت واقعی در راه است تا به نامه‌رسان اول می‌رسد و، بنا براین، ۰/۸v_2 کیلومتر کمترمی‌رود. درنتیجه، به معادلهٔ $0/7v_1=0/8v_2$ یا $7v_1=8v_2$ می‌رسیم.

درحالت سوم حرکت، نامه‌رسان دوم ۱/۵ ساعت دیرتر به‌نامه‌رسان اولی می‌رسد و، بنابراین، ۱/۵v_2 کیلومتر بیشتر راه می‌رود. در همین‌حالت، نامه‌رسان اول، در ۵/۶ کیلومتری M_1 نامه‌رسان دوم را ملاقات می‌کند و، بنا براین، تا لحظهٔ ملاقات، $\frac{5/6}{v_1}$ساعت کمتر صرف‌می‌کند. به‌این‌ترتیب، مسیر ۱/۵v_2 کیلومتری که نامه‌رسان دوم در ۱/۵ ساعت آخر طی‌می‌کند تا به‌نامه‌رسان اول برسد، تشکیل‌شده است ازمسیر M_1M_3(۵/۶ کیلومتر) ومسیر NM_1، برای‌رسیدن به M_1، به‌شرطی‌که به‌اندازه زمان نامه‌رسان اول حرکت‌کرده باشد، یعنی $\frac{5/6}{v_1}$ ساعت کمتر حرکت حالت اول. به‌زبان دیگر:

$$M_3N=1/5v_2،\quad M_3M_1=5/6،\quad M_1N=\frac{5/6}{v_1}\cdot v_2$$

وچون $M_3N=M_3M_1+M_1N$، بنا براین

$$1/5v_2=5/6+\frac{5/6}{v_1}\cdot v_2$$

از معادلۀ اول به‌دست می‌آید: $\frac{v_2}{v_1}=\frac{7}{8}$ که، با توجه به‌معادلۀ دوم، به‌دست می‌آید:

$$1/5v_2=5/6+5/6\times\frac{7}{8}=10/5 \Rightarrow v_2=7,\ v_1=8$$

۲۸۰. فرض می‌کنیم، آخرین‌کارگر x ساعت وکارگـر یکی مانده به‌آخر $x+y$ ساعت‌کار کرده باشند؛ تعدادکارگران را هم z می‌گیریم. تعداد ساعت‌های‌کار، برای‌انجام آن، روی‌هم چنین است:

$$x+(x+y)+(x+2y)+\dots+[x+(z-1)y]=xz+y\cdot\frac{z(z-1)}{2}$$

بنا بر فرض مسأله، این تعداد ساعت‌ها، باید برابر $24z$ باشد، یعنی

$$xz+y\cdot\frac{z(z-1)}{2}=24z \Rightarrow 2x+y(z-1)=48$$

ولی می‌دانیم که‌کارگر اول، ۵ برابرکارگر آخرکار کرده است؛ یعنی

$$x+(z-1)y=5x$$

اگر این معادله را از معادلۀ قبل کم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$x=48-5x \Rightarrow x=8$$

ازآن‌جاکه قول انجام تمامی‌کار، برابر است باتعداد ساعت‌های‌کارکارگر اول، بنابراین، کارگران‌کار را در ۴۰ ساعت تمام می‌کنند.

یادداشت. بعضی از دانش‌آموزان، ممکن است، برای حل این مسأله، از این فرض آغاز کنند که طول‌کار کارگر آخر برابر است بافاصلۀ زمانی که، در جریان‌آن،کارگراول به‌تنهائی‌کار می‌کند. دراین‌صورت، تعدادکارگران، برابر ۵ می‌شود ومسأله راه‌حل‌ساده‌ای پیدا می‌کند. ولی چنین فرضی، مسأله ما را به‌مسألۀ دیگری تبدیل می‌کند، زیرا این فرض را نمی‌توان ازشرط‌های مسأله نتیجه گرفت. درواقع، طول زمانی‌کارکارگر اول به‌تنهائی، مقدار متغیری است و به‌تعدادکارگران بستگی دارد. همین مطلب ازمعادلۀ $(z-1)y=32$ دیده می‌شود. اگر با ۲ کارگر سروکار داشته باشیم، این طول زمانی برابر ۳۲ می‌شود و اگر تعدادکارگران را برابر ۳ بگیریم، به‌عدد ۱۶ می‌رسیم وغیره.

۲۸۱. فرض کنید وزن فلز اول داخل در آلیاژ به‌وزن P، برابر x کیلوگرم باشد؛ در این‌صورت، وزن فلز دوم برابر $(P-x)$ کیلوگرم می‌شود. هر کیلوگرم از فلز اول، ضمن غوطه‌ورشدن در آب $\frac{B}{P}$ کیلوگرم و هر کیلوگرم فلز دوم، $\frac{C}{P}$ کیلوگرم از وزن خود را از دست می‌دهند. بنابراین، به‌معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$\frac{xB}{P}+\frac{(P-x)C}{P}=A$$

که با حل آن به‌دست می‌آید:

$$P-x=P\cdot\frac{B-A}{B-C}\,,\; x=P\cdot\frac{A-C}{B-C}$$

برای قابل قبول بودن جواب، باید x و $P-x$ مثبت باشند، یعنی $C<A<B$ یا $B<A<C$.

۲۸۲. وزن قطعه‌ای را که جدا شده است با x و مقدار درصد مس را در قطعه‌های اول ودوم، به‌ترتیب، با y و z نشان می‌دهیم. در این‌صورت، در قطعه‌ای که از آلیاژ اولی جدا کرده‌ایم $\frac{xy}{100}$ کیلوگرم مس ودر قطعه‌ای که از آلیاژ دوم جدا کرده‌ایم $\frac{xz}{100}$ کیلوگرم مس وجود دارد ودر قطعه‌های باقی‌مانده، به‌ترتیب $\frac{(m-x)y}{100}$ و $\frac{(n-x)z}{100}$ کیلوگرم مس. در آلیاژهای تازه‌ای که ساخته‌ایم، به‌ترتیب

$$\frac{xy}{100}+\frac{(n-x)z}{100} \text{ و } \frac{xz}{100}+\frac{(m-x)y}{100}$$

کیلوگرم مس وجود خواهد داشت می‌دانیم آلیاژ جدید اولی n کیلوگرم و آلیاژ جدید دومی m کیلوگرم وزن دارند ودرصد مس آن‌ها، یکی است. بنابراین

$$\frac{\frac{xy}{100}+\frac{(n-x)z}{100}}{n}\cdot 100=\frac{\frac{xz}{100}+\frac{(m-x)y}{100}}{m}\cdot 100$$

که از آن‌جا، بعد از تبدیل‌های ساده، به‌معادلهٔ $mx+nx=mn$ و یا $x=\frac{mn}{m+n}$ می‌رسیم.

۲۸۳. اگر نسبت حجم C به‌مجموع حجم‌های A و B را $\frac{۱}{x}$ بنـامیم، به‌این‌دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} Am=B+C \\ Bn=A+C \\ Cx=A+B \end{cases}$$

اگر به‌دوطرف معادلهٔ اول، A را اضافه‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$A(m+۱)=A+B+C \Rightarrow \frac{۱}{m+۱}=\frac{A}{A+B+C}$$

و به‌همین ترتیب

$$\frac{۱}{n+۱}=\frac{B}{A+B+C} \text{ و } \frac{۱}{x+۱}=\frac{C}{A+B+C}$$

ازمجموع سه معادلهٔ اخیر، نتیجه می‌شود:

$$\frac{۱}{m+۱}+\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{x+۱}=\frac{A+B+C}{A+B+C}=۱$$

و از آن‌جا

$$\frac{۱}{x+۱}=۱-\frac{۱}{m+۱}-\frac{۱}{n+۱};\ \frac{۱}{x+۱}=\frac{mn-۱}{(m+۱)(n+۱)};$$

$$x+۱=\frac{(m+۱)(n+۱)}{mn-۱};\ x=\frac{(m+۱)(n+۱)}{mn-۱}-۱=\frac{m+n+۲}{mn-۱}$$

یعنی، نسبت حجم C به‌مجموع حجم‌های A و B، برابر است با $\frac{mn-۱}{m+n+۲}$

۲۸۴. فـرض کنید ، این‌دو متحرك ، از یك نقطهٔ محیط دایره، در جهت‌های مختلف حرکت کنند . اگر سرعت اولی را دردقیقه برابر x وسرعت دومی را در دقیقه برابر y بگیریم ، بعد از زمان $t_۱$، اولی به‌اندازهٔ $xt_۱$ و دومی بـه‌اندازهٔ $yt_۱$ حرکت می‌کنند. مجموع این‌دومقدار، باید برابر L، یعنی محیط دایره باشد:

$$xt_۱+yt_۱=L \Rightarrow x+y=\frac{L}{t_۱}$$

اکنون، فرض کنید دومتحرك ازیك نقطه و دریك جهت حرکت کنند. اولی در زمان t_2، فاصلهٔ xt_2 ودومی درهمین مدت، فاصلهٔ yt_2 را می‌پیمایند . $x>y$ می گیریم. اگر بعد از t_2 ثانیه، اولی (که تندتر حرکت می‌کند) به‌دومی برسد، باید داشته‌باشیم:

$$xt_2-yt_2=L \Rightarrow x-y=\frac{L}{t_2}$$

از دومعادلهٔ حاصل، x و y به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{L(t_1+t_2)}{2t_1t_2},\ y=\frac{L(t_2-t_1)}{2t_1t_2} \qquad (t_2>t_1)$$

۲۸۵. فاصلهٔ بین A و B را x کیلوگرم می گیریم. قایق این‌فاصله را در $\frac{x}{v}$ ساعت وکشتی در $\frac{x}{w}$ ساعت طـی می‌کنند . ولی قـایق t ساعت دیرتر ازکشتی به B می‌رسد؛ علاوه بر آن، وقتی‌کشتی آغاز به‌حرکت می‌کند، قایق $\frac{l}{v}$ سـاعت در راه بـوده است . بنابراین باید داشته‌باشیم:

$$\frac{x}{v}-\frac{x}{w}=t+\frac{l}{v} \Rightarrow x=\frac{w(vt+l)}{w-v} \qquad (w>v)$$

۲۸۶. تعداد مجهول صفحه‌هـای شطرنج را x می گیریم. استاد دردو ساعت اول $\frac{xp}{100}$ بازی را می‌برد و l بـازی را می‌بازد. در دوساعت بعد، روی $\left(x-\frac{xp}{100}-l\right)$ صفحه بازی می‌کند. او ازهمهٔ این بازی‌ها،

$$\left(x-\frac{xp}{100}-l\right)\times\frac{q}{100}$$

بازی را می‌برد، m بازی را می‌بازد و n بـازی را مساوی می‌کند. ازآن‌جاکه، در این دو ساعت اخیر ، تعداد کل بـازی‌ها، برابر است بـا مجموع تعداد بردهـا ، بـاخت و مساوی‌ها، بنابراین

$$x-\frac{xp}{100}-l=\left(x-\frac{xp}{100}-l\right)\frac{q}{100}+m+n$$

واز آن‌جا

$$x=\frac{10000(m+n)+100l(100-q)}{(100-p)(100-q)}$$

۲۸۷. در ظرف $\frac{ap}{100}$ لیتر اسید خـالص وجود دارد. اگر در ظرف، x لیتر $q\%$ محلول اسید بریزیم، مقدار اسید خالص تا $\left(\frac{ap}{100}+\frac{xq}{100}\right)$ لیتـر می‌رسد. ولی بعد از آن که آب اضافه کنیم، محلول شامل $\frac{br}{100}$ لیتر الکل خالص خواهد بود. بنابراین

$$\frac{ap}{100}+\frac{xq}{100}=\frac{br}{100} \Rightarrow x=\frac{br-ap}{q}$$

۲۸۸. فرض کنید، از هر ظرف x لیتر ریخته باشیم. در ظرف اول $\frac{(a-x)p}{100}$ لیتـر و در ظرف دوم $\frac{(b-x)q}{100}$ لیتر اسید خالص می‌ماند. به‌جز آن، به اولی $\frac{xq}{100}$ لیتر و به‌دومی $\frac{xp}{100}$ لیتر اضافه شده است. از آن‌جـا که آمیزه‌هـای جدید، غلظت یکسانی دارند، بـاید داشته باشیم:

$$\frac{1}{a}\left[\frac{(a-x)p}{100}+\frac{xq}{100}\right]=\frac{1}{b}\left[\frac{(b-x)q}{100}+\frac{xp}{100}\right];$$

$$bp(a-x)+bqx=aq(b-x)+apx;$$

$$x(a+b)(q-p)=ab(q-p)$$

که با فرض $p\neq q$، به‌دست می‌آید: $x=\frac{ab}{a+b}$.

درحالت $p=q$، مسأله دارای بی‌نهایت جواب است.

۲۸۹. فاصلهٔ مجهول را x کیلومتر، سرعت دوچرخه‌سوار اول را y کیلومتر در ساعت و سرعت دوچـرخه‌سوار دوم را z کیلومتر در ساعت می‌گیریم. قبل از نخستین ملاقـات، دوچرخه‌سوار اول $(x+a)$ کیلومتر را در $\frac{x+a}{y}$ ساعت و دوچرخه‌سوار دوم $(x-a)$ کیلومتر را در $\frac{x-a}{z}$ ساعت طی کرده‌اند. بنابراین، باید داشته‌باشیم:

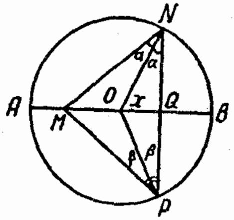
$$\frac{x+a}{y}=\frac{x-a}{z} \Rightarrow \frac{x+a}{x-a}=\frac{y}{z}$$

تا لحظهٔ دومین ملاقات، دوچرخه‌سوار اول $\left(2x+\frac{x}{k}\right)$ کیلومتر و دوچرخه‌سوار دوم $\left(2x-\frac{x}{k}\right)$ کیلومتر پیموده‌اند و بنابراین

$$\frac{2x+\frac{x}{k}}{y}=\frac{2x-\frac{x}{k}}{z} \Rightarrow \frac{2k+1}{2k-1}=\frac{y}{z}$$

که از آن‌جا، به‌معادلهٔ زیر برای تعیین x می‌رسیم:

$$\frac{x+a}{x-a}=\frac{2k+1}{2k-1} \Rightarrow x=2ka$$



شکل ۳

۲۹۰. فرض می‌کنیم، توپ بیلیارد، درلحظهٔ نخست، در نقطهٔ M واقع باشد (شکل ۳) . چون زاویهٔ فرود بازاویهٔ برگشت برابر است، داریم:

$$\widehat{MNO}=\widehat{ONP}=\widehat{NPO}=\widehat{OPM};\ \alpha=\beta;\ 2\alpha=2\beta$$

و مثلث NMP متساوی‌الساقین است. بنابراین $MQ \perp NP$ و موضع نقطه N با فاصلهٔ $OQ=x$ معین می‌شود. بنابرویژگی نیمساز زاویهٔ داخلی مثلث داریم:

$$\frac{OQ}{MO}=\frac{NQ}{NM} \Rightarrow \frac{OQ^2}{MO^2}=\frac{NQ^2}{NM^2}$$

که منجر به‌معادلهٔ زیر می‌شود:

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{R^2-x^2}{a^2+R^2+2ax} \Rightarrow (a+x)(2ax^2+R^2x-R^2a)=0$$

چون $a+x\neq 0\ (x>0,\ a>0)$، بنابراین $2ax^2+R^2x-R^2a=0$ و

$$x=\frac{-R^2+\sqrt{R^4+8a^2R^2}}{4a}=\frac{R}{4a}\left(\sqrt{8a^2+R^2}-R\right)$$

۲۹۱. وزن کل بالون پر تشکیل شده است از وزن پوستهٔ آن، یعنی $\left[\frac{4}{3}\pi(R+\varepsilon)^3-\frac{4}{3}\pi R^3\right]d$ ووزن مایع درون آن، یعنی $\frac{4}{3}\pi R^3\delta$. وزن مایعی که بالون در آن غوطه‌ور شده برابر است با $\frac{4}{3}\pi(R+\varepsilon)^3\Delta$. همهٔ وزن‌ها، با یك واحد اندازه‌گیری شده‌اند. چون جسم شناور درحال تعادل است، باید داشته باشیم:

$$\left[\frac{4}{3}\pi(R+\varepsilon)^3-\frac{4}{3}\pi R^3\right]d+\frac{4}{3}\pi R^3\delta=\frac{4}{3}\pi(R+\varepsilon)^3\Delta$$

این معادله را حل می‌کنیم:

$$(R+\varepsilon)^3(d-\Delta)=R^3(d-\delta);\ \left(\frac{R+\varepsilon}{R}\right)^3=\frac{d-\delta}{d-\Delta};$$

$$\frac{R+\varepsilon}{R}=\sqrt[3]{\frac{d-\delta}{d-\Delta}};\ 1+\frac{\varepsilon}{R}=\sqrt[3]{\frac{d-\delta}{d-\Delta}};\ R=\frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{\frac{d-\delta}{d-\Delta}}-1}$$

مساله وقتی جواب دارد که R مثبت باشد، یعنی $\frac{d-\delta}{d-\Delta}>1$. در حالت مثبت بودن $d-\Delta$ به‌دست می‌آید: $d-\delta>d-\Delta$، $\Delta>\delta$ و $d>\Delta$، یعنی $d>\Delta>\delta$. درحالت $d-\Delta<0$ به‌دست می‌آید: $\delta>\Delta>d$.

۲۹۲. درصد رشد سالیانهٔ جمعیت را x می‌گیریم. اگر میزان جمعیت در ابتدای سال اول A نفر باشد، در ابتدای سال دوم برابر $A_1=A+\frac{Ax}{100}$ یا $A\left(1+\frac{x}{100}\right)$، در ابتدای سال سوم برابر $A_2=A_1\left(1+\frac{x}{100}\right)$ یا $A\left(1+\frac{x}{100}\right)^2$ وغیره خواهد شد. روشن است که در ابتدای سال n ام، میزان جمعیت برابر $A\left(1+\frac{x}{100}\right)^{n-1}$ و در انتهای آن برابر $A\left(1+\frac{x}{100}\right)^n$ می‌شود. اگر درصد رشد سالیانه برابر $(x+k)$ باشد، میزان جمعیت در پایان سال nام به $A\left(1+\frac{x+k}{100}\right)^n$ نفر می‌رسد. بنابراین، طبق فرض مساله باید داشته باشیم:

$$A\left(1+\frac{x+k}{100}\right)^n=2A\left(1+\frac{x}{100}\right)^n\Rightarrow x=\frac{k}{\sqrt[n]{2}-1}-100$$

مساله، برای مقدارهایی از n و k جواب دارد، کــه به ازای آن‌ها، برای x مقدار مثبتی به‌دست آید.

۲۹۳. اگــر وزن ظرف را p و حجم آن را v بگیریم، آن وقت، همراه با مـایع اول به وزن کل $(vd+p)$ کیلوگرم و همراه با مایع دوم بــه وزن $(vD+p)$ کیلوگرم می‌شود. به‌این ترتیب، به‌دستگاه زیر می‌رسیم:

$$vd+p=q;\ vD+p=Q$$

که از آن به‌دست می‌آید:

$$p=\frac{Dq-dQ}{D-d} \text{ و } v=\frac{Q-q}{D-d}$$

مساله وقتی جواب قـابـل قبول دارد که مقدارهای p و v مثبت باشند. برای این منظور باید داشته باشیم:

$$\frac{D}{d}>\frac{Q}{q}>۱ \text{ یا } \frac{D}{d}<\frac{Q}{q}<۱$$

اگر دست‌کم یکی از کسرهای جواب غیر مثبت، یا اگــر $D=d$ و $Q\neq d$ باشد، مساله جواب ندارد. اگــر داشته باشیم: $D=d$ و $Q=q$، آن وقت q و u تنهـا با یك رابطهٔ $vd+p=q$ به‌هم مربوط می‌شوند و مساله بی‌نهایت جواب دارد.

۲۹۴. سرعت قطار اول را $v_۱$ کیلومتر در ساعت، سرعت قطار دوم را $v_۲$ کیلومتر در ساعت و فاصلهٔ بین A و B را x کیلومتر می‌گیریم. وقتی کــه t ساعت بعد از ملاقات در جهت مخالف یکدیگر حرکت کنند، به‌فاصلهٔ $۲x$ کیلومتری از یکدیگر می‌رسند. قبل از ملاقات، دو قطار روی هم، به‌اندازهٔ x کیلومتر، یعنی نصف طول مسیر بعد از ملاقات را طی کرده‌اند. بنابراین، لحظهٔ ملاقات، $\frac{t}{۲}$ ساعت بعد از آغاز حرکت دوقطار، پیش آمده است. در نتیجه، به‌دستگاه زیر می‌رسیم:

$$x-p=\frac{۱}{۲}tv_۱;\ p=\frac{۱}{۲}tv_۲;\ x-p+q=v_۲t$$

از معادلهٔ دوم به دست می‌آید: $v_۲=\frac{۲p}{t}$؛ کــه اگر در معادلهٔ سوم قــرار دهیم، به دست می‌آید: $x=۳p-q$ و، سپس، از معادلهٔ اول نتیجــه می‌شود: $v_۱=\frac{۲(۲p-q)}{t}$.

۲۹۵. بنابر فرض مساله، عددهای x، y و z باید در معادله‌های دستگاه زیر صدق کنند:

$$x=m(y-z);\ \ y=n(x-z);\ \ z=2(x-y)$$

اگر دستگاه شامل دو معادلهٔ اول را نسبت به x و y حل کنیم، به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{(m+mn)z}{mn-1},\ y=\frac{(n+mn)z}{mn-1}$$

که اگر به‌جای x و y در معادلهٔ سوم قرار دهیم، سرانجام به‌این رابطه می‌رسیم:

$$mn-2m+2n-1=0$$

۲۹۶. فرض کنیم ساعت، در هر شبانه روز، x دقیقه جلو بیفتد. بنابراین، برای این‌که وقت درست را نشان دهد، باید $\frac{m}{x}$ شبانه‌روزکار کند. اگر این ساعت، در هر شبانه‌روز $(x+t)$ دقیقه جلو می‌افتاد و n دقیقه عقب بود، بعد از $\frac{n}{x+t}$ شبانه‌روز به‌وقت درست می‌رسید. بنابراین، طبق فرض مساله باید داشته باشیم:

$$\frac{m}{x}-1=\frac{n}{x+t};\ \ x^2+(t+n-m)x-mt=0;$$

$$x=\frac{m-n-t+\sqrt{(m-n-t)^2+4mt}}{2}$$

ریشهٔ دوم معادله منفی است و، بنابراین، باید کنار گذاشته شود.

۲۹۷. تعداد بچه‌ها را x می‌گیریم. به آخرین نفر، یعنی xامین نفر، ax گردو به‌اضافهٔ $\frac{1}{n}$ بقیه رسیده است. ولی، اگر این، آخرین نفر است و، در ضمن، همهٔ گردوها بین بچه‌ها تقسیم شده است، باید باقی‌مانده‌ای وجود نداشته باشد: به‌این ترتیب، سهم هر نفر برابر است با ax گردو و تعداد کل گردوها: $ax \cdot x=ax^2$. سهم اولی، ازیك طرف برابر ax و از طرف دیگر برابر $a+\frac{ax^2-a}{n}$ گردو است. بنابراین

$$ax=a+\frac{ax^2-a}{n};\ \ x^2-nx+n-1=0;\ \ x_1=n-1,\ x_2=1$$

۲۹۸. نوع اول سوخت خریداری شده را x کیلوگرم می‌گیریم. در این صورت،

وزن نوع دوم سوخت $(n-x)$ کیلوگرم می‌شود. قیمت هر کیلوگرم نوع اول $\frac{a}{x}$ روبل

و قیمت هر کیلوگرم نوع دوم $\frac{x}{n-x}$ روبل است؛ بنابراین باید داشته باشیم:

$$\frac{a}{x}-\frac{a}{n-x}=b \Rightarrow bx^{۲}-(۲a+bn)x+an=۰$$

و از آن جا: $x=\frac{۲a+bn\pm\sqrt{۴a^{۲}+b^{۲}n^{۲}}}{۲b}$. علامت مثبت جلو رادیکال، مناسب نیست، زیرا در این حالت، x از n بزرگتر می‌شود، زیرا

$$\frac{۲a\times bn}{۲b}>\frac{bn}{۲b}=\frac{n}{۲} \text{ و } \frac{\sqrt{۴a^{۲}+b^{۲}n^{۲}}}{۲b}>\frac{\sqrt{b^{۲}n^{۲}}}{۲b}=\frac{n}{۲}$$

به‌این ترتیب، وزن هر یك از دو نوع سوخت، برحسب کیلوگرم، چنین است:

$$\frac{۲a+bn-\sqrt{۴a^{۲}+b^{۲}n^{۲}}}{۲b} \text{ و } \frac{bn-۲a+\sqrt{۴a^{۲}+b^{۲}n^{۲}}}{۲b}$$

۲۹۹. سرعت مجهول را x کیلومتر در ساعت می‌گیریم. اتومبیل اول، فاصلهٔ d کیلومتری را در $\frac{d}{x}$ ساعت و دومی در $\left(\frac{d}{x}-\frac{t}{۶۰}\right)$ ساعت طی می‌کنند. ماشین دوم، نیمی از کل مسیر حرکت خود، یعنی v $\frac{۱}{۲}\left(\frac{d}{x}-\frac{t}{۶۰}\right)$ کیلومتر را، برای رسیدن به‌ماشین‌اول طی کرده است. ماشین اولی در همان لحظه‌ای به B رسیده است که ماشین دوم به A برگشته است، یعنی ماشین اول، برای رسیدن به B به‌همان اندازهٔ $\frac{۱}{۲}\left(\frac{d}{x}-\frac{t}{۶۰}\right)$ ساعت وقت صرف کرده است. بنابرایـن ماشین اول، از لحظهٔ خروج از A تا لحظهٔ دریافت نامه‌های فراموش شده، به‌اندازهٔ

$$\frac{d}{x}-\frac{۱}{۲}\left(\frac{d}{x}-\frac{t}{۶۰}\right)=\frac{۱}{۲}\left(\frac{d}{x}+\frac{t}{۶۰}\right) \text{ (ساعت)}$$

وقت صرف کرده و، در این مدت، به‌اندازهٔ $x\left(\frac{d}{x}+\frac{t}{۶۰}\right)\frac{۱}{۲}$ کیلومتـر راه رفته است. در نتیجه، به‌این معادله می‌رسیم:

$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{d}{x}-\frac{t}{۶۰}\right)v=\frac{۱}{۲}\left(\frac{d}{x}+\frac{t}{۶۰}\right)x$$

که با حل آن به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{-(۶۰d+tv)\pm\sqrt{(۶۰d+tv)^۲+۲۴۰dvt}}{۲t}$$

و چون، سرعت تنها می‌تواند مثبت باشد، به‌دست می‌آید:

$$\frac{-(۶۰d+tv)\pm\sqrt{(۶۰d+tv)^۲+۲۴۰dtv}}{۲t}$$ کیلومتر در ساعت

۳۰۰. تعدادکارگران گروه اول را x می‌گیریم. بنابراین، در گروه دوم $x+a$ و در دو گروه روی هم $۲x+a$ کارگر وجود دارد. به‌این ترتیب، کارمزد هر یك از گروه‌ها برابر $۲x+a+c$ روبل، کارمزد هرکارگر گروه اول $\frac{۲x+a+c}{x}$ روبل وکارمزد هر کارگر گروه دوم $\frac{۲x+a+c}{x+a}$ روبل می‌شود. به‌این ترتیب، باید داشته باشیم:

$$\frac{۲x+a+c}{x+a}+b=\frac{۲x+a+c}{x}\Rightarrow bx^۲+(ab-۲a)x-a(a+c)=۰\ ;$$

$$x=\frac{۲a-ab\pm\sqrt{(۲a-ab)^۲+۴ab(a+c)}}{۲b}$$

از علامت منفی جلو رادیکال باید صرف‌نظر کرد، زیرا، به‌ازای آن، مقدار x منفی می‌شود، زیرا

$$|۲a-ab|<\sqrt{(۲a-ab)^۲+۴ab(a+c)}$$

و به‌این ترتیب

$$x=\frac{۲a-ab+\sqrt{(۲a-ab)^۲+۴ab(a+c)}}{۲b}$$

۳۰۱. فرض کنیم کارگر دوم، x روزکارکرده باشد. قبل از آن‌که کارگر دوم به‌کار مشغول شود، اولی به‌تنهائی در جریان a روز به‌اندازه $\frac{p}{q}$ تمامی‌کار را انجام داده است. بنابراین، کارگر اول می‌تواند در هر روز به‌اندازهٔ $\frac{q}{pa}$ از تمامی‌کار را انجام دهد. کارگر

دوم، بقیهٔ کار، یعنی $1-\frac{p}{q}$ یا $\frac{q-p}{q}$ کار را انجام داده است. یعنی دومی می‌تواند در هر روز به‌اندازهٔ $\frac{q-p}{qx}$ از تمامی کار را انجام دهد. ولی می‌دانیم. اگر دوکارگر با هم کار کنند، می‌توانند تمامی کار را در $\frac{a+x}{2}$ روز به‌پایان برسانند. بنابراین

$$\frac{p}{qa}\cdot\frac{a+x}{2}+\frac{q-p}{qx}\cdot\frac{a+x}{2}=1$$

که از آن جا به‌دست می‌آید:

$$px^2-aqx+a^2(q-p)=0 \Rightarrow x=\frac{aq\pm(aq-2ap)}{2p};$$

$$x_1=\frac{a}{p}(q-p),\ x_2=a$$

هر دو جواب با شرط‌های مساله سازگارند $(q>p)$.

۳۰۴. سرعت یکی از جسم‌ها را، x متر در دقیقه می‌گیریم. این جسم، محیط دایره را در $\frac{a}{x}$ دقیقه طی می‌کند. فرض کنیم، جسم دوم، سرعت کمتری داشته باشد، دراین صورت، این جسم دوم، محیط دایره را در $\left(\frac{a}{x}+p\right)$ دقیقه خواهد پیمود و سرعت آن برابر $\frac{a}{\frac{a}{x}+p}$ متر در دقیقه می‌شود. در q دقیقه، اولی xq متر و دومی $\frac{aq}{\frac{a}{x}+q}$ متر حرکت می‌کند ولی در این q دقیقه، اولی a متر بیشتر از دومی حرکت کرده است، زیرا بعد از این مدت، به‌دومی رسیده است. در نتیجه

$$\frac{aq}{\frac{a}{x}+p}+a=qx \Rightarrow x=\frac{ap\pm\sqrt{a^2p^2+4a^2pq}}{2pq}$$

روشن است که از جواب منفی باید صرف‌نظر کرد، به‌این ترتیب، سرعت‌های دو جسم چنین می‌شوند.

$$a\cdot\frac{p+\sqrt{p^2+4pq}}{2pq}\ (\text{متر})\quad \text{و}\quad a\cdot\frac{\sqrt{p^2+4pq}-p}{2pq}\ (\text{متر})$$

۳۰۳. فرض‌کنیم، اولی x روز و، در نتیجه، دومی $(x-n)$ روزکار کرده باشند. اولی بابت هر روز کار $\frac{a}{x}$ روبل و دومی بابت هر روزکار $\frac{c}{x-n}$ روبل دریافت می کنند. اگر اولی $(x-n)$ روز و دومی x روزکار می کردند، آن‌وقت، اولی $\frac{a}{x}(x-n)$ روبل و دومی $x\frac{c}{x-n}$ روبل می گرفتند. ولی می‌دانیم، در این حالت، کار مزد آن‌ها برابر است، بنابراین

$$\frac{a}{x}(x-n)=\frac{c}{x-n}\cdot x \Rightarrow \sqrt{a}(x-n)=\pm x\sqrt{c}$$

سمت چپ این برابری مثبت است $(x>n)$، بنابرایـن باید از علامت منفی سمت راست صرف‌نظر کرد. در نتیجه:

$$x=\frac{n\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{c}} \text{ و } x-n=\frac{n\sqrt{c}}{\sqrt{a}-\sqrt{c}} \quad (a>c)$$

۳۰۴. تعداد شرکت‌کنندگان را x می‌گیریم. هریك از آن‌ها باید $\frac{a}{x}$ روبل بپردازد. ولی به‌دلیل این‌که b نفر پول نداشتند، $(x-b)$ نفر دیگر، هرکدام $\left(\frac{a}{x}+c\right)$ روبـــل پرداختند، بنابراین، کل پرداختی برابر $\left(\frac{a}{x}+c\right)(x-b)$ می‌شود و باید داشته باشیم:

$$\left(\frac{a}{x}+c\right)(x-b)=a \Rightarrow x=\frac{cb\pm\sqrt{c^2b^2+4abc}}{2c}$$

علامت منفی جلو رادیکال را باید حذف کرد، زیرا بـه ازای آن، جـواب منفی می‌شود $(cb<\sqrt{c^2b^2+4abc})$.

۳۰۵. سرعت مجهول را x کیلومتر در ساعت می گیریـم. سرعت واقعی، برابر $(x+v)$ کیلومتر در ساعت می‌شود. زمان حرکت قطار، طبق برنامه، برابر $\frac{d}{x}$ ساعـت و زمان واقعی حرکت برابر $\frac{d}{x+c}$ ساعت است. بنابراین

$$\frac{d}{x}-\frac{d}{x+v}=\frac{p}{۶۰} \Rightarrow x=\frac{-pv \pm \sqrt{p^۲v^۲+۲۴۰\,pvd}}{۲p}$$

علامت منفی جلو رادیکال را باید کنار گذاشت، زیرا در این جواب، به جوابی منفی می‌رسیم.

۳۰۶. اگر مبلغ سپرده x روبل و بهرهٔ آن y% باشد، به‌دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\frac{xya}{۱۲۰۰}=m-x،\ \frac{xyb}{۱۲۰۰}=n-x$$

معادلهٔ اول را بر معادلهٔ دوم تقسیم، سپس، دو معادله را ازهم کم می‌کنیم، به‌دستگاه زیر هم‌ارز دستگاه بالا می‌رسیم:

$$\frac{m-x}{n-x}=\frac{a}{b}\ ,\ \frac{xy(a-b)}{۱۲۰۰}=m-n$$

و ازآن جا: $x=\dfrac{an-bm}{a-b}\,,\ y=\dfrac{۱۲۰۰(m-n)}{an-bm}$.

با توجه به این‌که x و y باید مثبت باشند، می‌توان به سادگی شرط وجود جواب را پیدا کرد. برای این منظور باید داشته باشیم:

$$\frac{a}{b}>\frac{m}{n}>۱ \quad \text{یا} \quad ۰<\frac{a}{b}<\frac{m}{n}<۱$$

۳۰۷. چون در ظرف سوم، مثل دو ظرف دیگر، بعد از سومین جا به‌جایی، ۱۶ لیتر وجود دارد، بنابراین بعد از جا به‌جایی دوم دارای ۳۲ لیتر بوده است که ۱۶ لیتر آن را به طور مساوی در ظرف‌های اول و دوم ریخته‌ایم. از این جا معلوم می‌شود که از ظرف سوم، ۸ لیتر در ظرف اول ریخته‌ایم. از ظرف دوم چقدر درآن ریخته شده است؟ بعد از جا به‌جایی سوم، وقتی‌که ۸ لیتر، ازظرف سوم به‌ظرف دوم ریختیم، شامل ۱۶ لیتر شده است. بنابراین قبل از جا به‌جایی سوم، یعنی در جا به‌جایی دوم ۸ لیتر از ظرف دوم به‌ظرف‌های اول و سوم، و هرکدام ۴ لیتر، ریخته شده است. از این جا نتیجه می‌شود که از ظرف‌های سوم و دوم، به‌ترتیب ۸ لیتر و ۴ لیتر، یعنی روی هم ۱۲ لیتر در ظرف اول ریخته شده است. از این جا معلوم می‌شود که بعد از نخستین جا به‌جایی، در ظرف اول ۱۲ — ۱۶، یعنی ۴ لیتر و قبل ازآن ۸ لیتر مایع وجود داشته است. درظرف دوم، ۸ لیتر از ظرف سوم و ۲ لیتر ازظرف اول ریخته شده است، درعوض ۸ لیتر ازآن به‌ظرف‌های اول و سوم ریخته شده است. بنابراین، در ابتدا ۱۴ لیتر مایع داشته است. روی هم در

سه ظرف ۴۸ لیتر مایع وجود دارد، بنابراین در ظرف سوم، در ابتدا، ۲۶ لیتر مایع بوده است.

۳۰۸. اگر فاصلهٔ لنین‌گراد تا مسکو S کیلومتر، زمان حرکت قطار در رفت $t_۱$ ساعت و در برگشت $t_۲$ ساعت باشد، آن وقت، سرعت مجهول از رابطهٔ $v=\frac{۲S}{t_۱+t_۲}$ به‌دست می‌آید. ولی

$$t_۱=\frac{S}{۲۰},\ t_۲=\frac{S}{۳۰},\ v=\frac{۲S}{\frac{S}{۲۰}+\frac{S}{۳۰}}=۲۴$$

۳۰۹. عدد n رقمی و به‌صورت $\overline{a_۱a_۲\cdots a_n}$ در نظر می‌گیریم. مقلوب آن به‌صورت $\overline{a_na_{n-۱}\cdots a_۱}$ درمی‌آید. می‌دانیم، هر عدد برابر است با مجموع رقم‌های آن به‌اضافهٔ مضربی از ۹. بنابراین

$$\overline{a_۱a_۲\cdots a_{n-۱}a_n}=۹A+a_۱+a_۲+\cdots+a_{n-۱}+a_n,$$

$$\overline{a_na_{n-۱}\cdots a_۲a_۱}=۹B+a_n+a_{n-۱}+\cdots+a_۲+a_۱$$

و در نتیجه

$$\overline{a_۱a_۲\cdots a_{n-۱}a_n}-\overline{a_na_{n-۱}\cdots a_۱}=۹A-۹B=۹(A-B)$$

یعنی تفاضل دو عدد بر ۹ بخش‌پذیر است.

یادداشت. از همین اثبات می‌توان نتیجه گرفت که، اگر دو عدد دوم را با همان رقم‌های عدد اول، ولی به‌ردیفی دلخواه درست کنیم، بازهم تفاضل دو عدد بر ۹ بخش‌پذیر خواهد بود.

IV. تصاعدها

۳۱۰. ممکن نیست، زیرا اگر داشته باشیم: $a_k=\sqrt{۳}$، $a_l=۲$ و $a_m=\sqrt{۸}$ و برای مشخص بودن وضع فرض کنیم: $k<l<m$، به‌دست می‌آید:

$$۲=\sqrt{۳}+(l-k)d\ ،\ \sqrt{۸}=\sqrt{۳}+(m-k)d$$

و از آن جا $\frac{۲-\sqrt{۳}}{\sqrt{۸}-\sqrt{۳}}=\frac{l-k}{m-k}$.

ولی این ممکن نیست، زیرا سمت چپ برابری عدد گنگ و سمت راست آن عدد گویا است.

۳۱۱. از رابطهٔ $a_n = a_۱ + d(n-۱)$ استفاده می‌کنیم ($a_۱$ جملهٔ اول و d قدر نسبت تصاعد است) به‌دست می‌آید:

$$a_m + a_n = a_۱ + d(m-۱) + a_۱ + d(n-۱) = ۲a_۱ + d(m+n-۲) =$$
$$= ۲a_۱ + d(k+l-۲) = a_۱ + d(k-۱) + a_۱ + d(l-۱) = a_k + a_l$$

۳۱۲. عددهای $a_{n-۱}$، a_n و $a_{n+۱}$، سه جملهٔ متوالی تصاعد حسابی هستند، بنابراین

$$a_n - a_{n-۱} = a_{n+۱} - a_n \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-۱} + a_{n+۱}}{۲}$$

۳۱۳. $a_۶ + a_{۱۵} = a_۹ + a_{۱۲} = a_۱ + a_{۲۰}$، زیرا $a_۶$ و $a_{۱۵}$ و ، همچنین، $a_۹$ و $a_{۱۲}$، از دو انتهای تصاعد به‌یك فاصله‌اند. بنابراین

$$۲(a_۱ + a_{۲۰}) = ۲۰;\ a_۱ + a_{۲۰} = ۱۰;\ S_{۲۰} = \frac{(a_۱ + a_{۲۰})۲۰}{۲} = ۱۰۰$$

۳۱۴. بنابرویژگی تصاعد حسابی داریم : $a_۱ + a_۳ = ۲a_۲$. بنابراین خواهیم داشت: $۳a_۲ = ۹$، $a_۲ = ۳$ و $a_۱ + a_۳ = ۶$. مقدار $a_۲$ را در معادلهٔ دوم قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آید: $۳a_۱a_۳ = ۱۵$ یا $a_۱a_۳ = ۵$. دنبالهٔ کار روشن است. دو تصاعد به دست می‌آید:

$$۱,\ ۳,\ ۵,\ ۷,\ \cdots;$$
$$۵,\ ۳,\ ۱,\ -۱,\ \cdots$$

۳۱۵. در رابطهٔ S_n، ابتدا n را برابر ۱ وسپس برابر ۲ می‌گیریم. به‌دست می‌آید:

$$S_۱ = a_۱ = -۱,\ \ S_۲ = a_۱ + a_۲ = ۲$$

از آن جا $a_۲ = ۳$ و $d = ۴$ می‌شود. تصاعد مطلوب چنین است:

$$-۱,\ ۳,\ ۷,\ ۱۱, \cdots$$

۳۱۶. $a_{۱۰} = S_{۱۰} - S_۹ = ۲۸۰ - ۲۲۵ = ۵۵$.

۳۱۷. شرط مساله را می‌توان به صورت $S_k = ۴k^۲$ نوشت، که در آن، k تعداد جمله‌ها و S_k مجموع این k جمله از تصاعد است. در این رابطه، ابتدا $k = ۱$ و سپس $k = ۲$ می‌گیریم:

$$S_۱ = a_۱ = ۴ \times ۱^۲ = ۴,\ S_۲ = a_۱ + a_۲ = ۱۶$$

از این جا به‌سادگی به‌دست می‌آید: $a_1=4$، $a_2=12$ و $d=8$. جمله‌های نخست این تصاعد، چنین‌اند:

$$4,\ 12,\ 20,\ 28,\ \cdots$$

۳۱۸. روشن است که، اگر d قدرنسبت تصاعد باشد، داریم:

$$a_2-a_1=a_4-a_3=\cdots=a_{10}-a_9=d$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$a_2+a_4+\cdots+a_{10}-a_1-a_3-\cdots-a_9=(a_2-a_1)+$$
$$+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{10}-a_9)=5d=15-12/5=2/5$$

درنتیجه $d=0/5$. اکنون می‌توان جملهٔ اول تصاعد را ازمجموع دوجملهٔ آن پیدا کرد:

$$S_{10}=15+12/5=27/5=\frac{2a_1+9\times 0/5}{2}\times 10=5(2a_1+4/5);$$

$$2a_1+4/5=5/5;\ \ a_1=0/5$$

و تصاعد مطلوب، چنین است:

$$0/5,\ 1,\ 1/5,\ 2,\ 2/5,\ 3,\ 3/5,\ 4,\ 4/5,\ 5$$

۳۱۹. چون بنا برفرض داریم: $a_p=q$ و $a_q=p$، بنابراین $a_p-a_q=q-p$.
از طرف دیگر، اگر d را قدرنسبت تصاعد بگیریم، داریم:

$$a_p-a_q=a_1+d(p-1)-a_1-d(q-1)=d(p-q)$$

واز برابری $(p-q=d(p-q))$ به‌دست‌می‌آید: $d=-1$. ولی $a_m-a_p=(m-p)d$،
پس

$$a_m=a_p+(m-p)d=q-m+p$$

۳۲۰. کافی است ثابت کنیم:

$$\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+c}=\frac{1}{a+c}-\frac{1}{a+b} \qquad (1)$$

a^2، b^2 و c^2، که به‌تصاعد حسابی هستند، با رابطهٔ $a^2-b^2=b^2-c^2$ به‌هم مربوط‌اند.
تفاضل‌های دو طرف رابطهٔ (۱) را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}=\frac{a-b}{(b+c)(a+c)}=\frac{a^2-b^2}{(a+b)(b+c)(c+a)};$$

$$\frac{۱}{a+c}-\frac{۱}{a+b}=\frac{b-c}{(a+c)(a+b)}=\frac{b^۲-c^۲}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

در کسرهای حاصل، مخرج‌ها یکی و صورت‌ها باهم برابر هستند. بنابراین برابری (۱) درست است.

۳۲۱. کسرهایی‌که باید مجموع S آن‌ها را پیدا کنیم، در بین کسرهای زیرند:

$$m=\frac{۳m}{۳},\ \frac{۳m+۱}{۳},\ \frac{۳m+۲}{۳},\dots,\frac{۳n-۱}{۳},\ \frac{۳n}{۳}=n$$

این دنباله، یك تصاعد حسابی متناهی است با جملهٔ اول m و قدرنسبت $d=\frac{۱}{۳}$. تعداد جمله‌های این تصاعد، یعنی k را می‌توان از برابری زیر به‌دست‌آورد:

$$n=m+\frac{۱}{۳}(k-۱)\Rightarrow k=۳n-۳m+۱$$

بنابراین، مجموع این کسرها، چنین می‌شود:

$$S_۱=\frac{(m+n)(۳n-۳m+۱)}{۲}$$

ولی درمجموع $S_۱$، کسرهای $\frac{۳m}{۳}$، $\frac{۳m+۳}{۳}$، ...، $\frac{۳n-۳}{۳}$، $\frac{۳n}{۳}$ هم به حساب‌آمده‌اند که‌کسرهایی‌ساده نیستند وقابل ساده شدن هستند. درواقع، این‌کسرها رامی‌توان به‌صورت m، $m+۱$، ...، $n-۱$، n نوشت. تعداد این عددها برابراست با $n-m+۱$ وتشکیل یك تصاعد حسابی می‌دهند. مجموع آن‌ها چنین است:

$$S_۲=\frac{(m+n)(n-m+۱)}{۲}$$

اکنون دیگرمی‌توان مجموع مطلوب را به‌دست‌آورد:

$$S=S_۱-S_۲=\frac{(m+n)(۳n-۳m+۱)}{۲}-\frac{(m+n)(n-m+۱)}{۲}=n^۲-m^۲$$

۳۲۲. ازبرابری $S_m=S_n$ به دست می‌آید:

$$\frac{۲a_۱+d(m-۱)}{۲}\cdot m=\frac{۲a_۱+d(n-۱)}{۲}\cdot n\ ;$$

$$۲a_۱(m-n)+d(m^۲-m-n^۲+n)=۰\ ;$$

$$(m-n)[2a_1+d(m+n-1)]=0$$

$$2a_1+d(m+n-1)=0 \quad (m\neq n)$$

بنابراین

$$S_{m+n}=\frac{2a_1+d(m+n-1)}{2}(m+n)=0$$

۳۲۳. براساس رابطهٔ $S_k=\frac{2a_1+d(k-1)}{2}.k$ وشرط مساله به‌دست می‌آید:

$$\frac{[2a_1+d(m-1)]m}{[2a_1+d(n-1)]n}=\frac{m^2}{n^2};$$

$$[2a_1+d(m-1)]n=[2a_1+d(n-1)]m;$$

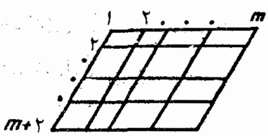
$$2a_1(m-n)+d[(n-1)m-(m-1)n]=0;$$

$$2a_1(m-n)-d(m-n)=0 \Rightarrow d=2a_1 \ (m\neq n)$$

اکنون، می‌توان نوشت:

$$\frac{a_m}{a_n}=\frac{a_1+d(m-1)}{a_1+d(n-1)}=\frac{a_1+2a_1(m-1)}{a_1+2a_1(n-1)}=\frac{2m-1}{2n-1}$$

۳۲۴. هر ردیف از m خط موازی، همراه با دو ضلع موازی با آنها از متوازی‌الاضلاع، ردیفی از $(m+2)$ خط راست موازی تشکیل می‌دهند. آنها را از ۱ تا $m+2$ شماره‌گذاری می‌کنیم و ازبالا به‌پایین، اولین، دومین، ...، $(m+2)$ امین در ردیف قائم و از چپ به‌راست، اولین، دومین، ...، $(m+2)$ امین از ردیف افقی می‌نامیم.



شکل ۴

نخستین خط‌راست در ردیف قائم، با هریك ازخطهای راست‌بعدی (یعنی‌دومین،سومین، ...، $(m+2)$امین خط راست از ردیف قائم) یك متوازی‌الاضلاع و روی هم $(m+1)$ متوازی‌الاضلاع درست می‌کند (شکل ۴). در این حالت، فرض را بر این‌گرفتیم‌که خطهای راست‌افقی، هنوز رسم نشده‌اند. دومین خط راست از ردیف قائم، با همهٔ خطهای راست بعد از خودش، روی هم m متوازی‌الاضلاع درست می‌کند (متوازی‌الاضلاعی را که باخط‌راست اول از ردیف قائم درست می‌کند، قبلاً به‌حساب آورده‌ایم). سومین خط راست از ردیف قائم، با همهٔ خطهای راست بعد از خودش در همین ردیف، روی هم $(m-1)$

متوازی‌الاضلاع می‌سازد. بالاخره $(m+1)$امین خط راست از ردیف قائم با تنها خط راست بعد ازخودش، یك متوازی‌الاضلاع تشکیل می‌دهد. به‌این‌ترتیب، اگر تنها خطهای راست ردیف قائم را به‌حساب آوریم، برای محاسبهٔ تعداد متوازی‌الاضلاع‌های تشکیل شده، باید مجموع جمله‌های $m+1$، m، $m-1$، ...، ۲، ۱ را، که به‌تصاعد حسابی هستند، به‌دست آوریم، که چنین می‌شود:

$$\frac{(m+1)+1}{2}(m+1)=\frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

توجه کنیم که متوازی‌الاضلاع مفروض هم، دراین مجموع، به‌حساب آمده است. اکنون، m خط راست افقی را رسم می‌کنیم. اگر استدلال بالا را تکرار کنیم، معلوم می‌شود که این m خط‌راست افقی، درهریك ازمتوازی‌الاضلاع‌های‌قبلی به‌تعداد $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ متوازی‌الاضلاع می‌سازند. بنابراین، تعدادکل متوازی‌لاضلاع‌ها، چنین می‌شود:

$$\left[\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right]^2=\frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}$$

۳۲۵. تفاضل‌های هردوجملهٔ متوالی ازدنبالهٔ مفروض را محاسبه می‌کنیم:

$$b_1=5-3=2;\ b_2=9-5=4;\ b_3=15-9=6;\ \dots$$

عددهای ۲، ۴، ۶، ... یك‌تصاعد حسابی با قدر نسبت $d=2$ تشکیل می‌دهند. بنابراین، هرجمله ازدنبالهٔ مفروض برابر است با جملهٔ قبل ازخودش در دنباله، به اضافهٔ جمله‌ای از این تصاعد حسابی که شماره‌اش یك‌واحدکمتر از شمارهٔ جملهٔ مفروض در دنباله باشد، یعنی

$$a_k=a_{k-1}+b_{k-1}$$

به‌این‌ترتیب، خواهیم داشت:

$$a_n=a_{n-1}+b_{n-1}=a_{n-2}+b_{n-2}+b_{n-1}=\dots=a_1+b_1+$$
$$+b_2+\dots+b_{n-1}=3+2+4+\dots+(2n-2)=$$
$$=3+2(1+2+\dots+n-1)=3+n(n-1)=n^2-n+3$$

۳۲۶. اگر m عددی زوج باشد، مجموع مطلوب چنین می‌شود:

$$S_m=(1^2-2^2)+(3^2-4^2)+\dots+[(m-1)^2-m^2]=$$
$$=-3-7-\dots-(2m-1)=$$

$$=-\frac{(3+2m-1)\cdot\frac{m}{2}}{2}=-\frac{m(m+1)}{2}$$

واگر m عددی فرد باشد:

$$S_m=S_{m-1}+m^2=-\frac{(m-1)m}{2}+m^2=\frac{m(m+1)}{2}$$

۳۲۷. هرچهار دنباله، به‌تصاعد هندسی هستند. قدرنسبت‌های این تصاعد، به‌ترتیب برابرند با: $q_1=-\frac{1}{2}$، $q_2=1$، $q_3=-1$، $q_4=0$.

۳۲۸. ممکن نیست. برای این‌که این‌ها، جمله‌هایی از یك تصاعد هندسی باشند، باید عدد q وعددهای طبیعی m و n وجود داشته‌باشند، به‌نحوی که در برابری‌های زیرصدق کنند:

$$11=10q^m;\ \ 12=10q^n$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $\left(\frac{11}{10}\right)^n=\left(\frac{12}{10}\right)^m$ یا $11^n=12^m\times 10^{n-m}$، که به‌روشنی غیرممکن است.

۳۲۹. اگر جملهٔ اول تصاعد را a_1 وقدرنسبت آن‌را q بگیریم، داریم:

$$a_m\cdot a_n=a_1q^{m-1}\cdot a_1q^{n-1}=a_1^2q^{m+n-2}=a_1^2q^{k+l-2}=$$
$$=a_1q^{k-1}\cdot a_1q^{l-1}=a_k\cdot a_l$$

۳۳۰. عددهای a_{n-1}، a_n، a_{n+1} جمله‌های متوالی تصاعد هندسی‌اند و، بنابراین،

$$a_n:a_{n-1}=a_{n+1}:a_n\ \Rightarrow\ a_n^2=a_{n-1}\cdot a_{n+1}$$

در استدلال، فرض براین است که q، قدر نسبت تصاعد، مخالف صفر باشد. اثبات این برابری، برای حالت $q=0$، روشن است.

۳۳۱. اگر پرانتزهای سمت چپ را باز و از رابطهٔ $y^2=xz$ استفاده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(x+z+y)(x+z-y)=(x+z)^2-y^2=x^2+2xz+z^2-y^2=$$
$$=x^2+2y^2+z^2-y^2=x^2+y^2+z^2$$

۳۳۲. مجموع موردنظر را می‌توان این‌طور نوشت:

$$5\left(\frac{10-1}{9}+\frac{10^2-1}{9}+\ldots+\frac{10^n-1}{9}\right)$$

چون جمله‌های اول صورت کسرها، یک‌تصاعد هندسی بـا قدر نسبت ۱۰ تشکیل می‌دهند، بنابراین، عبارت اخیر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{5}{9}\left(10\times\frac{10^n-1}{9}-n\right)$$

۳۳۳. به‌ترتیب داریم:

$$\underbrace{11\ldots1}_{k}\underbrace{55\ldots5}_{k-1}6=(10^{2k-1}+10^{2k-2}+\ldots+10+1)+$$

$$+4(10^{k-1}+10^{k-2}+\ldots+10+1)=\frac{10^{2k}-1}{10-1}+$$

$$+4\times\frac{10^k-1}{10-1}+1=\frac{1}{9}(10^{2k}-1+4\times10^k-4+9)=$$

$$=\frac{1}{9}(10^{2k}+2\times10^k\times2+2^2)=\left(\frac{10^k+2}{3}\right)^2=\left(\frac{10^k-1}{3}+1\right)^2=$$

$$=\left[\frac{3(10^k-1)}{9}+1\right]^2=\left[\frac{3(10^k-1)}{10-1}+1\right]^2=$$

$$=[3(10^{k-1}+10^{k-2}+\ldots+10+1)+1]^2=$$

$$=(3\times10^{k-1}+3\times10^{k-2}+\ldots+3\times10+4)^2=\underbrace{33\ldots3}_{k-1}4^2$$

۳۳۴. جملهٔ اول تصاعد را x وقدرنسبت‌آن‌را y می‌گیریم. در این‌صورت، برای این سه‌جملهٔ x، xy و xy^2، براساس شرط مسأله، می‌توان نوشت:

$$x+xy+xy^2=3/5\ ,\ x^2+x^2y^2+x^2y^4=5/25$$

معادلهٔ اول را مجذور و، سپس، برمعادلهٔ دوم تقسیم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{x^2(1+y+y^2)^2}{x^2(1+y^2+y^4)}=\frac{12/25}{5/25}$$

که با توجه به $x\neq0$، خواهیم داشت:

$$\frac{(1+y+y^2)^2}{1+y^2+y^4}=\frac{7}{3};\ 3(1+y+y^2)^2=7[(1+y^2)^2-y^2];$$

$$3(1+y+y^2)^2=7(1+y^2+y)(1+y^2-y);$$
$$(1+y+y^2)[3(1+y+y^2)-7(1+y^2-y)]=0$$
ولی $1+y+y^2=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد و ، بنـابراین، قدر نسبت تصاعد، از معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:
$$3(1+y+y^2)-7(1+y^2-y)=0 \Rightarrow 2y^2-5y+2=0$$
که از آن‌جا: $y_1=2$ و $y_2=\frac{1}{2}$. x_1 و x_2 هم به‌سادگی پیدا می‌شوند:
$$x_1=\frac{3/5}{1+y_1+y_1^2}=\frac{3/5}{7}=0/5;\ \ x_2=2$$
مسأله، دوجواب دارد، ولی در واقع، هردوجواب یکی است:
$$\left(\frac{1}{2},1,2\right) \text{ و } \left(2,1,\frac{1}{2}\right)$$
۳۳۵. a_n را نخستین جملهٔ تصـاعد حسابی می‌گیـریـم . در ایـن صورت، a_{m+n}،$(m+1)$امین جملهٔ این تصاعد می‌شود وداریم: $a_{m+n}=a_n+md$. به‌همین‌ترتیب، اگر a_m را جملهٔ اول تصاعد حسابی درنظر بگیریم، به‌دست می‌آید: $a_{m+n}=a_m+nd$. بالاخره ، a_{m-n} را نخستین جملهٔ تصـاعد فرض می‌کنیم ؛ در این‌حالت، a_{m+n}، جملهٔ $(2n+1)$ام آن‌می‌شود وبه‌دست می‌آید: $a_{m+n}=a_{m-n}+2nd$. درهمهٔ این برابری‌ها، d قدرنسبت تصاعد است. از این سه معادله نتیجه می‌شود:
$$a_m=a_{m+n}-nd=A-nd;\ a_n=a_{m+n}-md=A-md;$$
$$d=\frac{a_{m+n}-a_{m-n}}{2n}=\frac{A-B}{2n}$$
مقدار d را در دو معادلهٔ اول می‌گذاریم، حاصل می‌شود:
$$a_m=A-n\cdot\frac{A-B}{2n}=A-\frac{A-B}{2}=\frac{A+B}{2};$$
$$a_n=A-m\cdot\frac{A-B}{2n}=\frac{2nA-mA+mB}{2n}=\frac{(2n-m)A+mB}{2n}$$
۳۳۶. اگر a_m را جملهٔاول تصاعد هندسی درنظر بگیریم، a_{m+n}، جملهٔ$(n+1)$ام

آن می‌شود وداریم: $a_{m+n}=a_m q_n$ یا $a_m=Aq^{-n}$. به همین‌ترتیب، اگر a_n را جملهٔ اول تصاعد فرض کنیم. به‌دست می‌آید: $a_n=Aq^{-m}$. بالاخره، اگر a_{m-n} جملهٔ اول تصاعد باشد، به‌دست می‌آید:

$$a_{m+n}=a_{m-n}\cdot q^{2n} \Rightarrow A=Bq^{2n}$$

در همهٔ این برابری‌ها، q را قدرنسبت تصاعد هندسی مفروض گرفته‌ایم. از معادلهٔ اخیر به‌دست می‌آید:

$$q=\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2n}}$$

که اگرآن‌را در دومعادلهٔ اول ودوم قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$a_m=A\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{-n}{2n}}=A\left(\frac{A}{B}\right)^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{AB}\ ;\ a_n=A\left(\frac{A}{B}\right)^{-\frac{m}{2n}}$$

۳۳۷. جملهٔ اول این تصاعد را a وقدرنسبت‌آن را q می‌گیریم. دراین صورت

$$b=aq\ ;\ c=aq^2\ ;\ d=aq^3$$

با استفاده از این رابطه‌ها داریم:

$$(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2=(aq-aq^2)^2+(aq^2-a)^2+$$
$$+(aq^3-aq)^2=a^2(1-q)^2[q^2+(q+1)^2+q^2(q+1)^2]=$$
$$=a^2(1-q)^2[q^2+2q(1+q^2)+(1+q^2)^2]=$$
$$=a^2(1-q)^2(q+1+q^2)^2=a^2(1-q^3)^2=(a-aq^3)^2=(a-d)^2$$

۳۳۸. عبارت مفروض را S می‌نامیم واز رابطهٔ مجذور دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$S=\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x^4+2+\frac{1}{x^4}\right)+\dots+$$

$$+\left(x^{2n}+2+\frac{1}{x^{2n}}\right)=\frac{1}{x^{2n}}+\frac{1}{x^{2n-2}}+\dots+\frac{1}{x^2}+$$

$$+1+x^2+x^4+\dots+x^{2n}+2n-1=\frac{1}{x^{2n}}\cdot\frac{(x^2)^{2n+1}-1}{x^2-1}+$$

$$+2n-1=\frac{x^{4n+2}-1}{x^{2n}(x^2-1)}+2n-1$$

۳۳۹. به ترتیب داریم:

$$(1+x+x^2+\dots+x^n)^2-x^n=\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)^2-x^n=$$

$$=\frac{(x^{n+1}-1)^2-x^n(1-x)^2}{(x-1)^2}=\frac{x^{2n+2}-2x^{n+1}+1-x^n+2x^{n+1}-x^{n+2}}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{x^n-1}{x-1}\cdot\frac{x^{n+2}-1}{x-1}=(1+x+x^2+\dots+x^{n-1})(1+$$

$$+x+x^2+\dots+x^{n+1})$$

۳۴۰. می‌دانیم: $S=a_1+a_2+\dots+a_n$ و $S_1=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}$.

می‌خواهیم $\sigma=a_1a_2\dots a_n$ را پیدا کنیم. از این مطلب استفاده می‌کنیم که، درهر تصاعد هندسی متناهی، حاصل ضرب دوجمله‌ای که از دو طرف به یك فاصله باشند، برابر است با حاصل دوجملهٔ اول و آخر (مسالهٔ ۳۲۹). داریم:

$$\sigma^2=(a_1a_2\cdots a_n)^2=(a_1a_n)(a_2a_{n-1})\cdots(a_na_1)=(a_1a_n)^n$$

از طرف دیگر، براساس همان ویژگی می‌توان نوشت:

$$S=a_1+a_2+\dots+a_n=\frac{a_1a_n}{a_n}+\frac{a_2a_{n-1}}{a_{n-1}}+\dots+\frac{a_na_1}{a_1}=$$

$$=a_1a_n\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n-1}}+\dots+\frac{1}{a_1}\right)=a_1a_nS_1$$

بنابراین

$$a_1a_n=\frac{S}{S_1}\ ;\ \sigma^2=\left(\frac{S}{S_1}\right)^n\ ;\ \sigma=\left(\frac{S}{S_1}\right)^{\frac{n}{2}}$$

۳۴۱. به ترتیب داریم:

$$S=x+(x^2+x^2)+(x^3+2x^3)+\dots+[x^n+(n-1)x^n]=$$

$$=x+x^2+x^3+\dots+x^n+x(x+2x^2+\dots+nx^n)-nx^{n+1};$$

$$S=\frac{x(x^n-1)}{x-1}+Sx-nx^{n+1};$$

$$(x-1)S=\frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{x-1};$$

$$S=\frac{x}{(x-1)^2}[nx^{n+1}-(n+1)x^n+1]$$

۳۴۲. لازم نیست. این، تعریف مجموع جمله‌های تصاعد هندسی نزولی نامتناهی است. و تعریف را، ثابت نمی‌کنند.

۳۴۳. اگر دنبالهٔ عددهای a_1، a_2، a_3، ... تشکیل یك تصاعد هندسی با قدر نسبت q بدهد، آن وقت، دنبالهٔ عددهای a_1^2، a_2^2، a_3^2، ... هم تشکیل یك تصاعد هندسی با قدر نسبت q^2 می‌دهند. بنا براین، به کمك رابطهٔ مجموع در تصاعد هندسی نزولی نامتناهی، می‌توان این دومعادله را نوشت:

$$\frac{a_1}{1-q}=9;\ \frac{a_1^2}{1-q^2}=40/5$$

a_1 را از معادلهٔ اول محاسبه می‌کنیم و به جای a_1 درمعادلهٔ دوم قرار می‌دهیم:

$$\frac{81(1-q)^2}{1-q^2}=40/5;\quad \frac{2(1-q)}{1+q}=1;\ q=\frac{1}{3},\ a_1=6$$

۳۴۴. اگر a_1، a_2، a_3، ... به تصاعد هندسی با قدر نسبت q باشند، a_1^3، a_2^3، a_3^3، ... به تصاعد هندسی با قدر نسبت q^3 خواهند بود. این دومعادله را خواهیم داشت:

$$\frac{a_1}{1-q}=3;\ \frac{a_1^3}{1-q^3}=\frac{108}{13}$$

مقدار a_1 را از معادلهٔ اول در معادلهٔ دوم قرار می‌دهیم:

$$\frac{27(1-q)^3}{1-q^3}=\frac{108}{13};\ \frac{(1-q)^2}{1+q+q^2}=\frac{4}{13};\ 3q^2-10q+3=0;$$

$$q=\frac{1}{3},\ a_1=2$$

برای q جواب ۳ هم به‌دست می‌آید که با توجه به نزولی بودن تصاعد قابل قبول نیست.

۳۴۵. اگر دنبالهٔ عددهای a_1، a_2، a_3، a_4، ... یك تصاعد هندسی نزولی نامتناهی

با قدرنسبت q تشکیل دهند، آن وقت، دنباله‌های a_1، a_3،... و a_2، a_4،... هم تصاعدهای هندسی نزولی نامتناهی با قدر نسبت q^2 خواهند بود. به این ترتیب داریم:

$$\frac{a_1}{1-q^2}=36;\ \frac{a^2}{1-q^2}=12$$

اگر a_1 را از معادلهٔ اول در معادلهٔ دوم قرار دهیم، با توجه به رابطهٔ $a_2=a_1q$ به دست می‌آید:

$$36q=12;\ q=\frac{1}{3};\ a_1=36(1-\frac{1}{9})=32$$

جمله‌های تصاعد مطلوب چنین است: ۳۲، $\frac{32}{3}$، $\frac{32}{9}$،...

۳۴۶. اگر قدر نسبت تصاعدی راکه می‌خواهیم مجموع آن را پیداکنیم، q بنامیم، آن وقت تصاعد به صورت زیر درمی‌آید:

$$1،\ q،\ q^2،\ q^3،\ \ldots$$

چون جملهٔ دوم $2\frac{1}{6}$ بارکوچکتر از مجموع دوجملهٔ مجاور آن است، به‌دست می‌آید:

$$1+q^2=\frac{13}{6}q \Rightarrow q_1=\frac{2}{3},\ q_2=\frac{3}{2}$$

جواب دوم قابل قبول نیست، زیرا به‌ازای آن، تصاعد نزولی بـه دست نمی‌آید. مجموع جمله‌های تصاعد، چنین‌است: $S=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3$.

۳۴۷. قدر نسبت تصاعد مجهول را q می گیریم. بنا برفرض، هرجملهٔ تصاعد، برابر است با ۳ برابر مجموع همهٔ جمله‌های بعد از آن. بنا برایـن، جملهٔ اول هم برابر است با سه برابر مجموع جمله‌های تصاعـد، بدون جمله اول ولـی تصاعد مطلوب ، بـه صورت زیر است:

$$1،\ q،\ q^2،\ \ldots$$

مجموع جمله‌های این تصاعد، بدون توجه به جملهٔ اول آن، برابر است با $\frac{q}{1-q}$. ازاین جا، به معادلهٔ $\frac{3q}{1-q}=1$ می‌رسیم، که با حل آن به دست می‌آید: $q=\frac{1}{4}$.

۳۴۸. چهار جملهٔ اول تصاعد را $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، $a_۴$، و قدر نسبت آن را q می‌نامیم. داریم:

$$a_۲=a_۱q،\ a_۳=a_۱q^۲،\ a_۴=a_۱q^۳$$

از فرض مساله استفاده می‌کنیم:

$$a_۱+a_۴=۱/۵(a_۲+a_۳) \Rightarrow a_۱+a_۱q^۳=۱/۵(a_۱q+a_۱q^۲)$$

$a_۱$ مخالف صفر است، زیرا درصورت $a_۱=۰$، همهٔ جمله‌های تصاعد برابر صفر می‌شوند، درحالی که می‌دانیم مجموع چهار جملهٔ اول آن برابر صفر نیست. بنابراین خواهیم‌داشت:

$$۱+q^۳=۱/۵q(۱+q);\ ۲(۱+q^۳)=۳q(۱+q);$$
$$(۱+q)(۲q^۲-۵۶+۲)=۰$$

ولی $۱+q\neq ۰$ (زیرا، تصاعد باید نزولی باشد). بنابراین $q=\frac{۱}{۲}$ (جواب $q=۲$ هم قابل قبول نیست). از شرط مساله می‌دانیم: $a_۱+a_۲+a_۳+a_۴=۱۵$. از این جا $a_۱$ به دست می‌آید:

$$S_۴=\frac{a_۱(۱-q^۴)}{۱-q}=\frac{۱۵}{۸}a_۱=۱۵ \Rightarrow a_۱=۸$$

و مجموع مطلوب: $S=\frac{۸}{۱-\frac{۱}{۲}}=۱۶$.

۳۴۹. بنابر شرط مساله داریم: $S_۶=\frac{۷}{۸}S$. جملهٔ اول تصاعد را $a_۱\neq ۰$ وقدر نسبت آن را q می‌گیریم، برابری شرط به این صورت درمی‌آید:

$$\frac{a_۱(۱-q^۶)}{۱-q}=\frac{۷}{۸}\ \frac{a_۱}{۱-q} \Rightarrow ۱-q^۶=\frac{۷}{۸} \Rightarrow q=\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

۳۵۰. قدرنسبت تصاعد حسابی را d می‌گیریم. آن وقت، جمله‌های اول، پنجم و یازدهم این تصاعد به صورت ۲۴، $۲۴+۴d$، $۲۴+۱۰d$ درمی‌آید. از آن جا که این جمله‌ها، به تصاعد هندسی‌اند، باید داشته باشیم:

$$(۲۴+۴d)^۲=۲۴(۲۴+۱۰d) \Rightarrow d_۱=۰،\ d_۲=۳$$

به این ترتیب، دو تصاعد به دست می‌آید:

۲۴، ۲۴، ۲۴، ۲۴، ۲۴، ۲۴، ۲۴، ۲۴، ۲۴، ۲۴، ۲۴

۲۴، ۲۷، ۳۰، ۳۳، ۳۶، ۳۹، ۴۲، ۴۵، ۴۸، ۵۱، ۵۴

۳۵۱. جملهٔ نهم a_9 از تصاعد حسابی، از رابطهٔ $۳۶۹ = ۹.\frac{۱+a_9}{۲}$ به‌دست‌می‌آید: $a_9 = ۸۱$. قدرنسبت q مربوط به‌تصاعد هندسی ازبرابری $۸۱ = ۱ \times q^8$ به‌دست می‌آید: $q^2 = ۳$. وجملهٔ هفتم تصاعد هندسی: $a_7 = a_1 q^6 ۲۷$.

۳۵۲. عددهای اول، دوم وسوم را a_1،a_2 و a_3 می‌گیریم. این سه عدد به تصاعد هندسی هستند و بنا براین: $a_2^2 = a_1 a_3$. عددهای a_1،$a_2+۸$ وa_3 تشکیل یك‌تصاعد حسابی می‌دهند و بنا براین $a_2+۸ = \frac{a_1+a_3}{۲}$. بالاخره a_1، $a_2+۸$ و $a_3+۶۴$ بـه تصاعد هندسی‌اند و بنا براین $(a_2+۸)^2 = a_1(a_3+۶۴)$. بـه این ترتیب، دستگاهی شامل سه معادله به دست می‌آید. درمعادلهٔ سوم، عمل‌ها را انجام می‌دهیم:

$$a_2^2 + ۱۶a_2 + ۶۴ = a_1 a_3 + ۶۴a_1$$

دراین معادله به‌جای a_2^2، ازمعادلهٔ اول، $a_1 a_3$ را می‌گذاریم، به معادلهٔ

$$۱۶a_2 + ۶۴ = ۶۴a_1 \Rightarrow a_1 = ۴a_2 - ۴$$

می‌رسیم. مقدار a_2 را ازمعادلهٔ اخیر، درمعادلهٔ دوم دستگاه می‌گذاریم، به دست‌می‌آید:

$$۴a_1 - ۴ + ۸ = \frac{a_1+a_3}{۲} \Rightarrow a_3 = ۸ + ۷a_1$$

عبارت‌های a_2 و a_3 را، که برحسب a_1 به‌دست آمده‌اند، درمعادلهٔ اول دستگاه می‌گذاریم، به‌دست می‌آید:

$$(۴a_1 - ۴)^2 = a_1(۸ + ۷a_1);\ \ ۹a_1^2 - ۴۰a_1 + ۱۶ = ۰;\ \ a_1 = ۴،\ \frac{۴}{۹}$$

دنبالهٔ کارروشن است. برای مساله دوجواب پیدا می‌شود:

$$۱)\ ۴،\ ۱۲،\ ۳۶؛\ \ ۲)\ \frac{۴}{۹}،\ -\frac{۲۰}{۹}،\ \frac{۱۰۰}{۹}$$

۳۵۳. عدد مجهول را x، وعدد دیگری را کـه بین عددهای ۳ و x قراردارد، y می‌نامیم. عددهای ۳، yو x به‌تصاعد حسابی هستند، یعنی $y = \frac{۳+x}{۲}$. عـددهـای ۳، $y-۶$و x تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند، یعنی $۳x = (y-۶)^2$. ازاین دومعادله، x و y به‌دست می‌آید: $x_1 = ۲۷$، $x_2 = ۳$. درحالت دوم، سه عدد با هم برابرمی‌شوند، به‌نحوی که یك تصاعد حسابی با قدرنسبت صفر می‌سازند. وقتی که ۶ واحد از عدد دوم کم کنیم،

به‌عددهای ۳، ۳− و ۳ می‌رسیم که یک تصاعد هندسی با قدر نسبت برابر ۱− تشکیل می‌دهند.

۳۵۴. سه عدد را به‌ترتیب، x،yوz می‌گیریم. بنا بر شرط مساله باید داشته باشیم: $x+y+z=114$؛ وچون این عددها به‌تصاعدهندسی‌هستند، داریم: $xz=y^2$. ازطرف دیگر، از آن‌جا که این عددها، جمله‌های اول، چهارم و بیست و پنجم یك تصاعد حسابی هستند، اگر قدر نسبت تصاعد را d بگیریم، داریم: $y=x+3d$ و $z=x+24d$. این مقدارهای yوz را در دومعادلهٔ قبلی قرار می‌دهیم:

$$x+(x+3d)+(x+24d)=114,\ \ (x+3d)^2=x(x+24d)$$

با حل این دستگاه، نسبت به مجهول‌های xوd، به دست می‌آید:

$$x_1=38,\ d_1=0;\ \ x_2=2,\ d_2=4$$

به این ترتیب، مساله دوجواب دارد: ۱)۳۸، ۳۸، ۳۸؛ ۲)۲، ۱۴، ۹۸.

۳۵۵. تعداد دقیقه‌های مجهول را x می‌گیریم. متحرك دوم، در این مدت، $6x$ متر حرکت می‌کند. مسافتی که متحرك اول، دراین x دقیقه طی می‌کند برابر است با مجموع جمله‌های یك تصاعد حسابی x جمله‌ای کـه جملهٔ اول آن برابر ۱ وقدر نسبت آن برابر ۰/۵ است، یعنی $\frac{2+0/5(x-1)}{2}.x$ متر. بنابراین باید داشته باشیم:

$$6x+\frac{2+0/5(x-1)}{2}.x=117 \Rightarrow x^2+27x-468=0;\ x=12$$

۳۵۶. بنا بر ویژگی تصاعد حسابی باید داشته باشیم: $a_2=\frac{a_1+a_3}{2}$ و بنابر ویژگی تصاعد هندسی: $a_2^2=a_1a_3$. از آن‌جا به دست می‌آید:

$$\left(\frac{a_1+a_3}{2}\right)^2=a_1a_3;\ (a_1-a_3)^2=0;\ a_1=a_3$$

ولی دراین‌صورت $a_2=\frac{a_1+a_3}{2}=a_1=a_3$. یعنی تنها وقتی، این امکان وجود داردکه قدر نسبت تصاعد حسابی برابر صفر وقدر نسبت تصاعد هندسی برابر واحد باشد.

ولی اگر این‌عددها، جمله‌های اول، دوم وسوم تصاعد حسابی؛ وجمله‌های‌اول، سوم و دوم تصاعد هندسی را تشکیل دهند، بـرای a_1، a_2، a_3، عـددهای نابرابر هم به دست می‌آید. مثلاً

$$\div 2,\ \frac{1}{2},\ -1\left(d=-\frac{3}{2}\right);\ \div\div 2,\ -1,\ \frac{1}{2}\left(q=-\frac{1}{2}\right)$$

۳۵۷. باید داشته باشیم: $b^۲=۴a$ و $۲a=b+۴$. از این دو معادله بدست می‌آید: ۱) $a=b=۴$؛ ۲) $a=۱$، $b=-۲$. در حالت $a=b=۴$، مقسوم به این صورت در می‌آید:

$$۴x^۴+۴x^۳+۴x^۲+dx+l=۴x^۲(x^۲+x+۱)+dx+l$$

بنابراین، برای بخش‌پذیر بودن بر $x^۲+x+۱$ باید داشته باشیم: $d=l=۰$. در این حالت، خارج قسمت برابر است با $۴x^۲$. به ازای $a=۱$ و $b=-۲$، مقسوم به صورت $x^۴-۲x^۳+۴x^۲+dx+l$ درمی‌آید و خارج قسمت تقسیم آن بر $x^۲+x+۱$ عبارت درجهٔ دومی به صورت $x^۲+mx+n$ خواهد شد. یعنی

$$x^۴-۲x^۳+۴x^۲+dx+l=(x^۲+x+۱)(x^۲+mx+n)=$$
$$=x^۴+(m+۱)x^۳+(m+n+۱)x^۲+(m+n)x+n$$

که با برابرقراردادن ضریب‌های توان مساوی x، در دو طرف اتحاد، m و n به‌دست‌می‌آید: $m=-۳$، $n=۶$. در این‌حالت، خارج قسمت‌تقسیم به‌صورت $x^۲-۳x+۶$ درمی‌آید.

۳۵۸. هر دو تصاعد صعودی‌اند، یعنی $d=a_۲-a_۱>۰$ ، $q=\frac{a_۲}{a_۱}>۱$. باید ثابت کنیم. $a_n<b_n$ $(n>۲)$.

اثبات. داریم:

$$a_n=a_۱+d(n-۱)=a_۱+(a_۲-a_۱)(n-۱)=a_۱\left[۱+\left(\frac{a_۲}{a_۱}-۱\right)(n-۱)\right]=$$
$$=a_۱[۱+(q-۱)(n-۱)]=a_۱[۱+(q-۱)(\underbrace{۱++۱\cdots+۱}_{n-۱})]<$$
$$<a_۱[۱+(q-۱)(q^{n-۲}+q^{n-۳}+\cdots+q+۱)]=$$
$$=a_۱[۱+(q^{n-۱}-۱)]=a_۱q^{n-۱}=b_n$$

V. لگاریتم‌ها

a) ویژگی‌های کلی لگاریتم

۳۵۹. بنابر تعریف لگاریتم.

۳۶۰. اگر $a>۱$ ، آن وقت، عدد بزرگتر لگاریتم بزرگتری دارد ، یعنی $\log_a ۲<\log_a ۳$. اگر $۰<a<۱$، آن وقت ، عدد بزرگتر لگاریتم کمتری دارد ، یعنی $\log_a ۲<\log_a ۳$.

۳۶۱. فرض کنید: $log_b a = x$. در این صورت، بنا بر تعریف لگاریتم: $a = b^x$. از دو طرف این برابری لگاریتم می‌گیریم: $x log_a b = log_a a$. چون $x = log_b a$ و $log_a a = ۱$، پس

$$log_b a \cdot log_a b = ۱$$

۳۶۲. فرض کنید: $log_b a = x$ و $log_c a = y$. بنا بر تعریف لگاریتم داریم: $a = b^x$، $a = c^y$، درنتیجه $b^x = c^y$. ازدوطرف لگاریتم‌می گیریم: $x log_c b = y log_c c = y$، به‌جای x و y مقدارهایشان را قرار می‌دهیم:

$$log_b a \cdot log_c b = log_c a \Rightarrow log_b a = \frac{log_c a}{log_c b}$$

۳۶۳. ازآن‌جاکه لگاریتم مقدارمثبت معنی دارد، رابطهٔ $log a^۲ = ۲ log(-a)$ تنها وقتی درست‌است که‌داشته باشیم: $a < ۰$. باید توجه‌داشت که رابطهٔ $log a^۲ = ۲ log a$ هم تنها برای $a > ۰$ درست است. فقط رابطهٔ $log a^۲ = ۲ log|a|$ برای همهٔ مقدارهای $a \neq ۰$ درست است.

۳۶۴. ازشرط $۱۳ab = ۴a^۲ + ۹b^۲$ نتیجه می‌شود:

$$\left(\frac{۲a + ۳b}{۵}\right)^۲ = ab$$

ازدوطرف برابری اخیرلگاریتم می‌گیریم:

$$۲ log \frac{۲a + ۳b}{۱} = log a + log b$$

که ازآن‌جا، برابری موردنظر به‌دست می‌آید.

۳۶۵. از برابری $a^۲ + b^۲ = ۷ab$ نتیجه می‌شود:

$$(a+b)^۲ = ۹ab \Rightarrow \left(\frac{a+b}{۳}\right)^۲ = ab$$

اگرازدوطرف رابطهٔ اخیرلگاریتم بگیریم، به‌برابری مورد نظر می‌رسیم.

۳۶۶. چون $a^۲ = (c+b)(c-b)$، اگرازدوطرف یکبار درمبنای $c+b$ و بار دیگر درمبنای $c-b$ لگاریتم بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$۲ log_{c+b} a = ۱ + log_{c+b}(c-b); \quad ۲ log_{c-b} a = ۱ + log_{c-b}(c+b)$$

دو رابطهٔ حاصل را درهم ضرب وتبدیل‌های لازم را انجام می‌دهیم:

$$۴\log_{c+b}a\cdot\log_{c-b}a=۱+\log_{c+b}(c-b)+\log_{c-b}(c+b)+$$
$$+\log_{c+b}(c-b)\log_{c-b}(c+b)=[۱+\log_{c+b}(c-b)]+$$
$$+[۱+\log_{c-b}(c+b)]=۲\log_{c-b}a+۲\log_{c+b}a$$

۳۶۷. با استفاده از رابطهٔ $\log_b a=\dfrac{\log_c a}{\log_b b}$ (مسالهٔ ۳۶۲ را ببینید)، به‌دست می‌آید

$$\log_۸ ۹/۸=\frac{\log_{۱۰}۹/۸}{\log_{۱۰}۸}=\frac{\log_{۱۰}(۴۹\times ۰/۲)}{۳\log_{۱۰}۲}=\frac{۲\log_{۱۰}۷+\log_{۱۰}۲-۱}{۳\log_{۱۰}۲}=$$
$$=\frac{۲b+a-۱}{۳a}$$

۳۶۸. داریم:

$$\frac{\log_a N}{\log_{ab}N}=\frac{\log_a N}{\dfrac{\log_a N}{\log_a(ab)}}=\log_a(ab)=۱+\log_a b$$

۳۶۹. با استفاده از رابطهٔ $\log_a b=\dfrac{۱}{\log_b a}$ (مسالهٔ ۳۶۱ را ببینید) و $a^{\log_a x}=x$ (مسالهٔ ۳۵۹)، به‌دست می‌آید:

$$a^{\frac{\log_b(\log_b a)}{\log_b a}}=\left(a^{\frac{۱}{\log_b a}}\right)^{\log_b(\log_b a)}=$$
$$=(a^{\log_a b})^{\log_b(\log_b a)}=b^{\log_b(\log_b a)}=\log_b a$$

۳۷۰. فرض می‌کنیم: $\log_b a=x$. بنا بر تعریف لگاریتم داریم $b^x=a$. برابری اخیر را به توان n می‌رسانیم: $b^{nx}=a^n$ یا $(b^n)^x=a^n$. و این به معنای آن است که $\log_{b^n}a^n=x$ و چون $x=\log_b a$، پس $\log_{b^n}a^n=\log_b a$.

۳۷۱. $\log_۴ ۳=\log_{۴^۲}۳^۲=\log_{۱۶}۹$ (مسالهٔ ۳۷۰ را ببینید).

۳۷۲. با استفاده از رابطه‌هایی که در مساله‌های ۳۷۰ و ۳۶۱ ثابت کردیم، به‌دست می‌آید:

$$\log_{\sqrt{۳}}۸=\log_۳ ۶۴=\log_۳ ۴^۳=۳\log_۳ ۴=۳\log_۳\frac{۱۲}{۳}=$$
$$=۳(\log_۳ ۱۲-\log_۳ ۳)=۳\left(\frac{۱}{\log_{۱۲}۳}-۱\right)=۳\left(\frac{۱}{a}-۱\right)=\frac{۳(۱-a)}{a}$$

۳۷۳. با استفاده از رابطهٔ $log_b a=\frac{1}{log_a b}$، به‌دست می‌آید:

$$log_{a_1a_2\cdots a_n}x=\frac{1}{log_x(a_1a_2\cdots a_n)}=\frac{1}{log_x a_1+log_x a_2+\cdots+log_x a_n}=$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{log_{a_1}x}+\frac{1}{log_{a_2}x}+\cdots+\frac{1}{log_{a_n}x}}$$

۳۷۴. با لگاریتم گرفتن از برابری‌های مفروض، به‌دست می‌آید:

$$(1-log_{10}x)log_{10}y=1\ ;\ (1-log_{10}y)log_{10}z=1$$

از آن جا

$$log_{10}x=1-\frac{1}{log_{10}y}=1-\frac{1}{1-\frac{1}{log_{10}z}}=\frac{1}{1-log_{10}z}$$

و به‌این‌ترتیب: $x=10^{\frac{1}{1-log_{10}z}}$.

۳۷۵. چون $log_b a=\frac{1}{log_a b}$ و $b=\sqrt{ac}$، پس

$$log_b x=\frac{1}{log_x b}=\frac{1}{log_x\sqrt{ac}}=\frac{2}{log_x a+log_x^c}=\frac{2\,log_a x\,log_c x}{log_a x+log_c x}$$

این مقدار $log_b x$ را در سمت چپ برابری مطلوب قرار می‌دهیم؛ به دست می‌آید:

$$\frac{log_a x-log_b x}{log_b x-log_c x}=\frac{log_a x(log_a x+log_c x)-2\,log_a x\,log_c x}{2\,log_a x\,log_c x-log_c x(log_a x+log_c x)}=$$

$$=\frac{(log_a x)^2-log_a x\,log_c x}{log_a x\,log_c x-(log_c x)^2}=\frac{log_a x(log_a x-log_c x)}{log_c x(log_a x-log_c x)}=\frac{log_a x}{log_c x}$$

۳۷۶. بنابر تعریف تصاعد حسابی می‌توان نوشت:

$$log_m x-log_k x=log_n x-log_m x$$

که با استفاده از رابطهٔ $log_b a=\frac{log_c a}{log_c b}$، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\frac{log_k x}{log_k m}-log_k x=\frac{log_k x}{log_k n}-\frac{log_k x}{log_k m}$$

که اگر دوطرف را به $log_k x$ ساده‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{۲}{log_k m}=۱+\frac{۱}{log_k n}\ ;\quad ۲log_k n=log_k m(log_k n+۱);$$

$$log_k n^۲=log_k m log_k(nk)\ ;\quad log_k n^۲=log_k(nk)^{log_k m}\ ;\quad n^۲=(nk)^{log_k m}$$

درحالتی‌که داشته باشیم $log_k x=۰$، یعنی $x=۱$، آن‌وقت $log_k x$، $log_m x$ و $log_n x$ به‌صورت تصاعد حسابی ۰، ۰، ۰ درمی‌آیند (برای هرمقدار دلخواه k، m و n) و، بنابراین، رابطهٔ مطلوب دراین حالت، به‌دست نمی‌آید.

۳۷۷. اگر $x=۱$، آن‌وقت عددهای $log_k x$، $log_m x$، $log_n x$، به‌ازای هرمقداردلخواه k و m و n، تصاعد حسابی ۰، ۰، ۰ را تشکیل می‌دهند. اکنون فرض می‌کنیم $x\neq۱$. از برابری مفروض لگاریتم می‌گیریم:

$$log_k(kn)^{log_k m}=log_k n^۲\ ;\quad log_k m(۱+log_k n)=۲log_k n\ ;$$

$$\frac{۱+log_k n}{log_k n}=\frac{۲}{log_k m}\ ;\ \frac{۱}{log_k n}+۱=\frac{۲}{log_k m}$$

دو طرف رابطهٔ اخیر را در $log_k x\neq۰$ ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{log_k x}{log_k n}+log_k x=۲\times\frac{log_k x}{log_k m}$$

که با استفاده از رابطهٔ $log_b a=\frac{log_c a}{log_c b}$، نتیجه می‌شود:

$$log_n x+log_k x=۲\,log_m x$$

واین، حکم را ثابت می‌کند.

۳۷۸. ضمن تقسیم نابرابری $۳log_{۱۰}\frac{۱}{۲}<۲log_{۱۰}\frac{۱}{۲}$ بر $log_{۱۰}\frac{۱}{۲}$ باید جهت نابرابری را عوض کرد، زیرا $log_{۱۰}\frac{۱}{۲}$ عددی منفی است.

b) معادله‌های لگاریتمی و نمائی

۳۷۹ تا ۳۸۱. درمعادله‌های اول، $P(x)$ و $Q(x)$ باید مثبت باشند، در حالی‌که در معادله‌های دوم، می‌توانند هم علامت باشند (در مسالهٔ ۳۷۹، حتی می‌توانند برابر صفر شوند). بنابراین، این زوج معادله‌ها، درحالت کلی هم‌ارز نیستند.

۳۸۲. در معادلهٔ اول باید داشته باشیم: $P(x)>۰$، درحالی‌که در معادلهٔ دوم، $P(x)$ می‌تواند هرعدد حقیقی مخالف صفر باشد. درحالت کلی، دومعادله هم‌ارز نیستند.

۳۸۳. اگر $y = x$، آن‌وقت $a^x = a^y$. ولی این برابری برای $x \neq y$ هم، به‌ازای $a = 1$ برقرار است. به‌این ترتیب، برای $a \neq 1$، دومعادلهٔ $a^x = a^y$ و $x = y$ هم‌ارزند.

۳۸۴. معادلهٔ اول را حل می‌کنیم: $x^2 - 1 = 8$. در نتیجه: $x_1 = 3$، $x_2 = -3$. اکنون $x = 3$ و $x = -3$ را در معادلهٔ دوم قرار می‌دهیم، معلوم می‌شود که $x = -3$ در آن صدق نمی‌کند. معادله‌ها هم‌ارز نیستند.

۳۸۵. معادلهٔ $2\log(x-1) = 2\log 3$ با معادلهٔ مفروض هم‌ارز نیست، زیرا

$$\log(x-1)^2 = 2\log|x-1|$$

این معادله، تنها وقتی با معادلهٔ مفروض هم‌ارز است که داشته باشیم: $x > 1$ و برای $x < 1$ باید به‌این صورت باشد:

$$2\log(1-x) = 2\log 3$$

جواب معادلهٔ اخیر چنین است: $x = 2$.

۳۸۶ تا ۴۲۴. راهنمائی. *I.* ضمن حل معادله‌های لگاریتمی و نمائی، اغلب لازم می‌شود که از دوطرف معادله، لگاریتم یا آنتی‌لگاریتم بگیریم. چنین عمل‌هایی ممکن است ما را به‌معادله‌ای برساند که هم‌ارز معادلهٔ مفروض نباشد. باید مراقب بود که جوابی را از دست ندهیم و یا جواب اضافی به‌دست نیاوریم. لگاریتم گرفتن، ممکن است موجب از دست رفتن جواب و آنتی‌لگاریتم گرفتن موجب پیدایش جواب خارجی بشود. (مسأله‌های ۳۷۹ تا ۳۸۵ را ببینید). جواب خارجی و اضافی را می‌توان با آزمایش پیدا کرد برای این‌که جوابی را از دست ندهیم، باید مواظب باشیم و عمل‌هایی را انجام دهیم که یا معادلهٔ مفروض را به‌معادله‌ای هم‌ارز آن تبدیل کند و یا، دست‌کم، جواب‌های معادلهٔ مفروض در بین جواب‌های معادلهٔ حاصل وجود داشته باشد.

II. درحالتی که مجهول، هم در پایه و هم در توان وجود دارد (مثل x^x، $(x+1)^{\log y}$ وغیره)، مقدارهای قابل قبول، به‌ازای مثبت بودن پایه به‌دست می‌آیند. در حالتی که توان منفی نباشد، پایه می‌تواند به‌سمت صفر هم میل کند. مثلاً درعبارت $(y+1)^x$ باید داشته باشیم $y > -1$؛ و درحالت $x > 0$: $y \geqslant -1$.

۳۸۶. به‌ترتیب داریم:

$$\left(\frac{1}{2}\log_x 5\right)^2 - \frac{3}{2}\log_x 5 + \frac{5}{4} = 0\ ;\quad \log_x^2 5 - 6\log_x 5 + 5 = 0;$$

$$\log_x 5 = 3 \pm 2\ ;\ \log_x 5 = 1\ ;\ x_1 = 5\ ;\ \log_x 5 = 5\ ;\ x_2 = \sqrt[5]{5}$$

۳۸۷. $\text{۳}\sqrt{lg\,x}-lg\,x=\text{۲}\,;\ lg\,x-\text{۳}\sqrt{lg\,x}+\text{۲}=\text{۰}\,;$

$$\sqrt{lg\,x}=\text{۲}\text{،}\text{۱}\,;\ x_1=10^4\text{،}\ x_2=10$$

هر دوریشه درمعادلهٔ مفروض، صدق می‌کنند.

۳۸۸. ازآن جاکه سمت چپ معادلـه مثبت است، سمت راست آن هم باید مثبت باشد؛ واین وقتی ممکن است کـه داشته باشیم: $\log_x\sqrt{5}>0$ یا $1>x>0$. بـا توجه به‌این شرط، دوطرف معادله را مجذور می‌کنیم:

$$\frac{3}{2}\log_x 5+3=\frac{3}{2}\log_x^2 5\,;\ \log_x^2 5-\log_x 5-2=0;$$

که همراه با شرط $1>x>0$، با معادلهٔ مفروض هم‌ارزاست. آن را حل می‌کنیم:

$$\log_x 5=-1\text{،}\ 2\,;\ x_1=\frac{1}{5}\text{،}\ x_2=\sqrt{5}$$

ریشهٔ دوم، بایدکنار گذاشته شود، زیرا $\sqrt{5}>1$.

۳۸۹. از دوطرف معادله‌لگاریتم می‌گیریم. به‌معادلهٔ زیر،که هم‌ارز معادلهٔ مفروض است، می‌رسیم:

$$(\log_5 x-1)\log_5\sqrt{x}=\log_5 5\,;\ \log_5^2 x-\log_5 x-2=0\,;$$

$$\log_5 x=2\text{،}-1\,;\ x_1=25\text{،}\ x_2=\frac{1}{5}$$

یادداشت. هم‌ارزی معادلهٔ مفروض، با معادله‌ای‌که از لگاریتم گرفتن به‌دست‌آوردیم، ازاین‌جا نتیجه می‌شود که $\sqrt{x}$، که درپایه قرار گرفته است، مقداری مثبت است. به طور کلی، معادلهٔ $u^v=w$، با شرط $u>0$، هم‌ارز است با معادلهٔ $v\log u=\log w$.

۳۹۰. از دوطرف معادله‌لگاریتم می‌گیریم؛ به‌معادلهٔ هم‌ارز معادلهٔ مفروض می‌رسیم (مسالهٔ ۳۸۹ را ببینید):

$$(2\,lg^3 x-1/5\,lg\,x)lg\,x=lg\sqrt{10}\,;\ 2\,lg^4 x-\frac{3}{2}lg^2 x-\frac{1}{2}=0\,;$$

$$lg^2 x=1\,;\ lg\,x=\pm 1\,;\ x_1=10\text{،}\ x_2=\frac{1}{10}$$

۳۹۱. ابتدا تبدیل‌های جبری‌لازم را درسمت راست معادله‌انجام می‌دهیم و، سپس، از دوطرف لگاریتم می‌گیریم:

$$x^{lg^۲ x+۳ lg x+۳}=\frac{۲}{\frac{\sqrt{۱+x}+۱}{x}-\frac{\sqrt{۱+x}-۱}{x}}=x\ ;$$

$$(lg^۲x+۳\,lg\,x+۳)\,lg\,x=lg\,x\ ;\ lg\,x(lg^۲\,x(lg^۲x+۳lgx+۲)=۰$$

این معادله، با معادلهٔ مفروض هم‌ارز است (یادداشت حل مسالهٔ ۳۸۹ را ببینید). از این معادله به‌دست می‌آید:

$$lg\,x=۰،\ \ lg\,x=-۱،\ \ lg\,x=-۲;$$

$$x_۱=۱،\ \ x_۲=۰/۱،\ \ x_۳=۰/۰۱$$

۳۹۲. از آن جا که باید داشته باشیم $x<۰$، بنابراین $\sqrt{x^۲}=-x$، و معادلهٔ مفروض با معادلهٔ زیر هم‌ارز می‌شود:

$$\sqrt{۲\,lg(-x)}=lg(-x)\ ;\ ۲\,lg(-x)=lg^۲(-x)\,;$$

$$lg(-x)=۰،۲\ \ ;\ \ x_۱=-۱،\ \ x_۲=-۱۰۰$$

هر دو ریشه درمعادلهٔ مفروض صدق می‌کنند.

۳۹۳. معادلهٔ مفروض با معادلهٔ $log_۲|x|=۱$ هم‌ارز است. ازآن‌جا $x=\pm۲$.

۳۹۴. معادلهٔ مفروض، با معادلهٔ زیر هم‌ارز است:

$$۲log_۲|x+۱|+log_۲|x+۱|=۶\ ;\ log_۲|x+۱|=۲\ ;$$

$$|x+۱|=۴\ ;\ x+۱=\pm۴\ ;\ x_۱=۳\ ،\ x_۲=-۵$$

۳۹۵. چون $a^{log_a z}=z$ بنابراین، معادلهٔ مفروض هم‌ارز است با معادلهٔ

$$(x-۲)^۲=۹\qquad(\text{با شرط}\ \ x>۰\ \text{و}\ x\neq۲)$$

ازآن جا $x-۲=۳$ و $x=۵$.

۳۹۶. از رابطهٔ $log_b a=log_{b^n}a^n$ استفاده می‌کنیم (مسألهٔ ۳۷۰)، به‌دست می‌آید:

$$x^{log_{\sqrt{x}}(x-۲)}=x^{log_x(x-۲)^۲}=۹$$

که همان معادلهٔ مسألهٔ ۳۹۵ است: $x=۵$.

۳۹۷. چون $a^{log_a ۲۴}=a^{log_a ۲}=۲$، پس

$$x^{\frac{۱}{۲}log_{\sqrt{x}}(x^۲-x)}=x^{log_{\sqrt{x}}\sqrt{x^۲-x}}=x^{log_x(x^۲-x)}=x^۲-x$$

ومعادلهٔ مفروض، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$۲=x^۲-x؛\ x^۲-x-۲=۰؛\ x=۲$$

$x=-۱$، جواب خارجی است.

۳۹۸. از آن‌جا که سمت راست، عددی منفی و رادیکال سمت چپ، عددی مثبت است، باید داشته باشیم: $log_۵x<۰$. با این شرط، دوطرف معادله را مجذور می‌کنیم، به‌معادلهٔ زیر که هم‌ارز معادلهٔ مفروض است. می‌رسیم:

$$log_x\sqrt{۵x}\cdot log_۵^۲x=۱$$

با استفاده از رابطهٔ $log_ba\cdot log_ab=۱$، سمت‌چپ معادلهٔ اخیر را تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۲}(log_x۵+log_xx)log_۵^۲x=۱؛\ (log_x۵+۱)log_۵^۲x=۲؛$$

$$log_x۵\cdot log_۵^۲x+log_۵^۲x=۲؛\ log_۵^۲x+log_۵x-۲=۰؛$$

$$log_۵x=\frac{-۱-۳}{۲}=-۲؛\ x=\frac{۱}{۲۵}$$

۳۹۹. ضمن استفاده از رابطهٔ $log_ba=\frac{۱}{log_ab}$، دوطرف معادله را تبدیل می‌کنیم:

$$۲\cdot\frac{۱}{log_۳x}\cdot\frac{۱}{log_۳(۳x)}=\frac{۱}{log_۳(۹\sqrt{x})}؛\ ۲log_۳(۹\sqrt{x})=$$

$$=log_۳x\cdot log_۳(۳x)؛\ ۲(log_۳۹+log_۳\sqrt{x})=log_۳x(log_۳۳+log_۳x)؛$$

$$log_۳^۲x=۴؛\ log_۳x=\pm۲؛\ x_۱=۹،\ x_۲=\frac{۱}{۹}$$

همهٔ این عمل‌ها برگشت‌پذیرند، یعنی هم‌ارزی همهٔ معادله‌های حاصل به‌معادلهٔ مفروض تضمین شده است. بنابراین، لزومی به آزمایش جواب‌ها نیست. ضمن عمل‌ها، ریشه‌ای هم از دست نرفته است.

۴۰۰. با استفاده از رابطهٔ $log_ba=\frac{۱}{log_ab}$، معادله را تبدیل می‌کنیم:

$$\sqrt{\frac{۱}{۴}(۱+log_ax)+\frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{log_ax}+۱\right)}+\sqrt{\frac{۱}{۴}(log_ax-۱)+\frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{log_ax}-۱\right)}=a؛$$

$$\sqrt{\frac{(log_ax+۱)^۲}{۴log_ax}}+\sqrt{\frac{(log_ax-۱)^۲}{۴log_ax}}=a؛$$

چون صورت کسرها در زیر رادیکال مثبت‌اند، باید مخرج آن‌ها هم مثبت باشد، یعنی $log_a x > 0$. بنابراین، معادلهٔ اخیر، چنین می‌شود:

$$\frac{log_a x + 1}{2\sqrt{log_a x}} + \frac{|log_a x - 1|}{2\sqrt{log_a x}} = a$$

که از آن نتیجه می‌شود: $a > 1$. در واقع، جملهٔ دوم سمت‌چپ، مقداری مثبت و جملهٔ اول آن، بزرگتر از واحد است، زیرا

$$\frac{log_a x + 1}{2\sqrt{log_a x}} = \frac{2\sqrt{log_a x} + (\sqrt{log_a x} - 1)^2}{2\sqrt{log_a x}} =$$

$$= 1 + \frac{(\sqrt{log_a x} - 1)^2}{2\sqrt{log_a x}} > 1$$

بنابراین، معادلهٔ مفروض، در حالت $a < 1$ جواب ندارد. با شرط $log_a x > 1$، معادله به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\frac{log_a x + 1 + log_a x - 1}{2\sqrt{log_a x}} = a;\ \sqrt{log_a x} = a;\ log_a x = a^2;\ x_1 = a^{a^2}$$

در حالت $0 < log_a x < 1$، معادله به‌صورت $log_a x = \frac{1}{a^2} < 1$ درمی‌آید و از آن‌جا $x_2 = a^{\frac{1}{a^2}}$. روشن است که x_1 و x_2 در معادلهٔ مفروض صدق می‌کنند و معادله، ریشهٔ دیگری ندارد.

۴۰۱. با استفاده از رابطهٔ $log_b a = \frac{log_c a}{log_c b}$ (مسألهٔ ۳۶۲)، داریم:

$$log_a x \cdot \frac{log_a c}{log_a b}\left(1 + \frac{1}{log_a c}\right) = \frac{log_a x}{log_a b} \cdot \frac{log_a x}{log_a c} \cdot log_a c;$$

$$log_a x(log_a c + 1) = (log_a x)^2;\ \ a)\ log_a x = 0;\ x_1 = 1;$$

$$b)\ \ log_a c + 1 = log_a x;\ \ log_a x = log_a(ac);\ \ x_2 = ac$$

۴۰۲. براساس رابطهٔ $log_b a = log_{b^n} a^n$، می‌توان نوشت:

$$log_3 x + log_3 x^2 + log_3 x^{-1} = 6;$$

$$log_{۳}x+۲log_{۳}x-log_{۳}x=۶;\ \ log_{۳}x=۳;\ \ x=۲۷$$

۴۰۳. جمله‌های مجموع $log_{۸}x$ و $(log_{۸}x)^{۲}+(log_{۸}x)^{۳}+\dots$ یك تصاعد هندسی نامتناهی، با جملهٔ اول و قدر نسبت $log_{۸}x$ را تشکیل می‌دهند. از آن‌جا که، بنا بر شرط مسأله، این مجموع برابر مقداری محدود است، بنا براین باید یك تصاعد هندسی نزولی باشد. از رابطهٔ مجموع، در تصاعد هندسی نزولی نامتناهی استفاده می‌کنیم:

$$\frac{log_{۸}x}{۱-log_{۸}x}=\frac{۱}{۲};\ log_{۸}x=\frac{۱}{۳};\ \ x=۸^{\frac{۱}{۳}}=۲$$

۴۰۴. $\sqrt{x+۱}=y\geqslant ۰$ می‌گیریم وساده می‌کنیم:

$$log(y+۱)=log(y^{۲}-۴۱);\ \ y+۱=y^{۲}-۴۱;$$

$$y^{۲}-y-۴۲=۰;\ y_{۱}=۷،\ y_{۲}=-۶$$

جواب منفی را باید کنار بگذاریم. از $y=۷$ به‌دست می‌آید: $\sqrt{x+۱}=۷$ یا $x=۴۸$، که درمعادلهٔ مفروض صدق می‌کند.

۴۰۵. همهٔ جمله‌های معادله را بر $۹^{-\frac{۱}{x}}$ تقسیم می‌کنیم:

$$\left(\frac{۴}{۹}\right)^{-\frac{۱}{x}}+\left(\frac{۶}{۹}\right)^{-\frac{۱}{x}}=۱؛\left[\left(\frac{۲}{۳}\right)^{-\frac{۱}{x}}\right]^{۲}+\left(\frac{۲}{۳}\right)^{-\frac{۱}{x}}-۱=۰;$$

$$\left(\frac{۲}{۳}\right)^{-\frac{۱}{x}}=\frac{-۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$$

ولی علامت منفی جلو رادیکال به‌درد نمی‌خورد، بنا براین

$$\left(\frac{۲}{۳}\right)^{-\frac{۱}{x}}=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲};\ \left(\frac{۳}{۲}\right)^{\frac{۱}{x}}=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲};$$

$$\frac{۱}{x}log\frac{۳}{۲}=log\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲};\ x=\frac{log۳-log۲}{log(\sqrt{۵}-۱)-log۲}$$

۴۰۶. $x+\sqrt{x^{۲}-۲}=y$ می‌گیریم. معادله به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$۴^{y}-۵\times ۲^{y-۱}=۶;\ \ ۲\times ۲^{۲y}-۵\times ۲^{y}-۱۲=۰;$$

$$۲^{y}=۴;\ \ y=۲;\ \ x+\sqrt{x^{۲}-۲}=۲;\ \ x=\frac{۳}{۲}$$

۴۰۷. از آن‌جا که داریم:

$$\sqrt{۲-\sqrt{۳}}=\frac{۱}{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}$$

بنا براین، معادلهٔ مفروض با معادلهٔ زیر هم‌ارز است:

$$(\sqrt{۲+\sqrt{۳}})^x+\frac{۱}{(\sqrt{۲+\sqrt{۳}})^x}=۴;$$

$$(\sqrt{۲+\sqrt{۳}})^{۲x}-۴(\sqrt{۲+\sqrt{۳}})^x+۱=۰\ ;\ (\sqrt{۲+\sqrt{۳}})^x=۲\pm\sqrt{۳}$$

$$a)(\sqrt{۲+\sqrt{۳}})^x=۲+\sqrt{۳};\ (۲+\sqrt{۳})^{\frac{x}{۲}}=۲+\sqrt{۳};\ x_۱=۲$$

$$b)\ (\sqrt{۲+\sqrt{۳}})^x=۲-\sqrt{۳};\ (۲+\sqrt{۳})^{\frac{x}{۲}}=(۲+\sqrt{۳})^{-۱};\ x_۲=-۲$$

۴۰۸. اگـر دو طرف را بر ۸^x تقسیم کنیم، بـه معادله‌ای هم‌ارز معادلهٔ مفروض می‌رسیم:

$$\left(\frac{۳}{۲}\right)^{۳x}+\left(\frac{۳}{۲}\right)^x=۲;\ y^۳+y-۲=۰;(y-۱)(y^۲+y+۲)=۰;$$

بنا براین $y=۱$ (عبارت‌درجهٔ دوم، ریشهٔ‌حقیقی‌ندارد). از آن‌جا $\left(\frac{۳}{۲}\right)^x=۱$، یعنی $x=۰$.

۴۰۹. بـا استفاده از رابطهٔ $log_b a=\frac{۱}{log_a b}$ و آنتی لگاریتم گرفتن، به‌دستگاه زیر هم‌ارز دستگاه مفروض، می‌رسیم:

$$|x+y|=۱۰\ ;\ y=۲|x|$$

چون $y=۲|x|>۰$، بنا براین $x+y=x+۲|x|>۰$ و درنتیجه $|x+y|=x+y$ و دستگاه، منجر به‌دو دستگاه زیر می‌شود:

$$a)\ x+y=۱۰،\ y=۲x;\ b)\ x+y=۱۰،\ y=-۲x;$$

$$x_۱=\frac{۱۰}{۳}،\ y_۱=\frac{۲۰}{۳};\ x_۲=-۱۰,\ y_۲=۲۰$$

۴۱۰. بـا استفاده از رابطهٔ $log_b a=log_{b^n}a^n$ و آنتی‌لگاریتم گـرفتن، به‌دستگاه هم‌ارز دستگاه مفروض می‌رسیم:

$$x:\sqrt{y}=a^m,\ \sqrt{x}:\sqrt[۳]{y}=a^n\Rightarrow x^۲:y=a^{۲m},\ x^۳:y^۲=a^{۶n};$$

$$x=a^{2(2m-3n)},\ y=a^{6(m-2n)}$$

۴۱۱. می‌دانیم: $\log_{\frac{4}{9}}a=\dfrac{1}{\log_a\frac{4}{9}}$. از معادلهٔ اول آنتی لگاریتم می‌گیریم، به‌دستگاه زیر می‌رسیم:

$$4xy=9a^2,\ x+y=5a$$

که با دستگاه مفروض هم‌ارز است و نتیجه می‌دهد:

$$x_1=\frac{1}{2}a,\ y_1=\frac{9}{2}a;\ \ x_2=\frac{9}{2}a,\ y_2=\frac{1}{2}a$$

۴۱۲. از رابطهٔ $\log_b a=\log_{b^n}a^n$ استفاده می‌کنیم، لگاریتم‌های معادلهٔ اول را به‌مبنای ۱۰ می‌بریم و، سپس، آنتی‌لگاریتم می‌گیریم:

$$(x^2+y^2)^2=4a^2(x^2-y^2),\ xy=a^2$$

معادلهٔ را می‌توان، به‌ترتیب، با استفاده از معادلهٔ دوم، این‌طور نوشت:

$$(x^2-y^2)^2+4x^2y^2=4a^2(x^2-y^2);$$

$$(x^2-y^2)^2-4a^2(x^2-y^2)+4a^4=0;$$

$$[(x^2-y^2)-2a^2]^2=0;\ \ x^2-y^2=2a^2$$

بنابراین، به‌دستگاه زیرمی‌رسیم که، به‌ازای $x^2>y^2\geqslant 0$، بادستگاه مفروض‌هم‌ارز است:

$$x^2-y^2=2a^2,\ xy=a^2$$

که حل آن دشوار نیست: $x_{1,2}=\pm a\sqrt{1+\sqrt{2}}$; $y_{1,2}=\pm a\sqrt{\sqrt{2}-8}$.

۴۱۳. چون در این جا $x>0$ و $y>0$، با لگاریتم گرفتن از هر دو معادله، به‌دستگاهی هم‌ارز دستگاه مفروض می‌رسیم:

$$lgx+lgy=lg4+1,\ lgx\cdot lgy=lg4$$

که ازآن‌جا lgx و lgx و، سپس، x و y به‌دست می‌آید:

$$x_1=4,\ y_1=10;\ x_2=10,\ y_2=4$$

۴۱۴. از معادلهٔ دوم به‌دست می‌آید:

$$x+y=(\sqrt[3]{2})^6;\ \ x+y=4;\ \ y=4-x$$

که اگر در معادلهٔ اول قرار دهیم:

$$5^{2x}\cdot 3^{4-x}=5^2\cdot 3^3;\quad 3^4\cdot 25^x\cdot 3^{-x}=25\times 3^3;$$

$$\left(\frac{25}{3}\right)^x=\frac{25}{3};\quad x=1,\ y=3$$

۴۱۵. از معادلهٔ اول معلوم می‌شود که باید داشته باشیم: $x^2+7x+12=0$ یا $y=1$.

بنابراین، دستگاه مفروض به مجموعهٔ دو دستگاه زیر، که هم ارز آن است، تبدیل می‌شود:

$$a)\ x^2+7x+12=0,\ x+y=6;\quad b)\ y=1,\ x+y=6$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$x_1=-3,\ y_1=9,\ x_2=-4,\ y_2=10;\ x_3=5,\ y_3=1$$

۴۱۶. با حذف y به‌دست می‌آید:

$$8^x=2+2^x\Rightarrow 2^{3x}=2^{x+1}\Rightarrow 3x=x+1\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

که اگر در معادلهٔ دوم قرار دهیم، مقدار y به‌دست می‌آید:

$$y=\frac{1}{5}\times 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{5}\sqrt{2}$$

۴۱۷. از معادلهٔ اول به دست می‌آید: $y=x^{\frac{x+y}{12}}$؛ آن را در معادلهٔ دوم قرار می‌دهیم:

$$x^{\frac{(x+y)^2}{12}}=x^3\Rightarrow x=1 \quad \text{یا} \quad \frac{(x+y)^2}{12}=3$$

به‌ازای $x=1$، از معادلهٔ اول به دست می‌آید: $y=1$. در حالت $\frac{(x+y)^2}{12}=3$ به‌دست می‌آید $x+y=6$ (x و y مثبت‌اند). در نتیجه، از یکی از معادله‌های دستگاه پیدا می‌شود $x=y^2$؛ که اگر در معادلهٔ $x+y=6$ قرار دهیم، به‌معادلهٔ $y^2+y=6$ می‌رسیم. از آن جا به‌دست می‌آید: $x=4$، $y=2$. دستگاه دو جواب دارد.

۴۱۸. باید داشته باشیم: $x>0$ و $y>0$. از معادلهٔ دوم به‌دست می‌آید:

$$x=y^{\frac{3}{2}\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)}$$

در معادلهٔ اول قرار می‌دهیم. به‌دست می‌آید:

$$y^{\frac{۳}{۲}(\sqrt[۴]{x}+\sqrt[۴]{y})^۲}=y^{\frac{۸}{۳}}$$

در نتیجه، یا $y=۱$ و یا

$$\frac{۳}{۲}(\sqrt[۴]{x}+\sqrt[۴]{y})^۲=\frac{۸}{۳}\Rightarrow\sqrt[۴]{x}+\sqrt[۴]{y}=\frac{۴}{۳}$$

به‌این ترتیب، به‌دو دستگاه می‌رسیم:

$$a)\ \ y=۱,\ y^{\sqrt[۴]{x}+\sqrt[۴]{y}}=x^{\frac{۲}{۳}}$$

$$b)\ \sqrt[۴]{x}+\sqrt[۴]{y}=\frac{۴}{۳},\ y^{\sqrt[۴]{x}+\sqrt[۴]{y}}=x^{\frac{۲}{۳}}$$

که جواب‌های آن‌ها، همان جواب‌های دستگاه مفروض است. برای حل دستگاه a)، اگر $y=۱$ را در معادلهٔ دوم قرار دهیم، به‌دست می‌آید: $x=۱$. برای حل دستگاه b)، اگر در معادلهٔ دوم، به جای $\sqrt[۴]{x}+\sqrt[۴]{y}$، مقدارش $\frac{۴}{۳}$ را قرار دهیم، به‌دست می‌آید: $x=y^۲$؛ و برای تعیین y به‌معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$\sqrt[۴]{y^۲}+\sqrt[۴]{y}-\frac{۴}{۳}=۰\Rightarrow\sqrt[۴]{y}=-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۶}\sqrt{۵۷}$$

($\sqrt[۴]{y}$ باید مثبت باشد). بنابراین

$$y_۲=\left(-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۶}\sqrt{۵۷}\right)^۴,\ x_۲=\left(-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۶}\sqrt{۵۷}\right)^۸$$

۴۱۹. چون دراین جا، x و y مثبت‌اند، می‌توان از دوطرف معادلهٔ اول لگاریتم گرفت و به‌معادلهٔ $m\log_p x=n\log_p y$ رسید، که با آن هم‌ارز است. چون $y\neq۱$ (معادلهٔ دوم دستگاه را ببینید)، معادلهٔ اخیر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\log_p x:\log_p y=n:m \qquad (\text{با شرط } m\neq۰)$$

از مقایسهٔ این معادله، با معادلهٔ دوم دستگاه، به‌دست می‌آید:

$$\log_p\frac{x}{y}=\frac{n}{m}\Rightarrow m\log_p x-m\log_p y=n$$

به‌این ترتیب، برای $m\neq۰$، دستگاه مفروض، با دستگاه زیر هم‌ارز است:

$$m\log_p x - n\log_p y = 0, \quad m\log_p x - m\log_p y = n$$

معادلهٔ اول را از معادلهٔ دوم کم می‌کنیم:

$$(n-m)\log_p y = n$$

و با فرض $m \neq n$ خواهیم داشت:

$$\log_p y = \frac{n}{n-m}, \log_p x = \frac{n}{m}\log_p y = \frac{n^2}{m(n-m)}$$

بنابراین، دراین حالت، دستگاه مفروض، یك جواب منحصردارد:

$$x = p^{\frac{n^2}{m(n-m)}}, \quad y = p^{\frac{n}{n-m}}$$

در حالت $n = m \neq 0$، مناسبت مثبت‌بودن x و y از معادلهٔ اول نتیجه می‌شود: $x = y$، که ممکن نیست، زیرا به ازای $x = y$، سمت چپ معادلهٔ دوم برابر صفر می‌شود و سمت راست‌آن برابر ۱. یعنی، دستگاه مفروض، به‌ازای $m = n \neq 0$ جواب ندارد. اگر $m = 0$ ، $n \neq 0$، آن‌وقت ازمعادلهٔ اول به‌دست می‌آید: $y = 1$. اما $y = 1$ جزومقدارهای قابل قبول برای معادلهٔ دوم نیست. یعنی دستگاه، برای $m = 0$ و $n \neq 0$ هم جواب ندارد. سرانجام، به ازای $m = n = 0$ ، معادلهٔ اول به اتحاد تبدیل می‌شود. از معادلهٔ دوم به دست می‌آید:

$$\log_p x = (\log_p x - \log_p y)\log_p y; \quad (\log_p y - 1)\log_p x = \log_p^2 y$$

بنابراین، دراین حالت، هردوعددی که با شرطهای زیر سازگار باشند، جوابی ازدستگاه را تشکیل می‌دهند:

$$y \neq p, \quad x = p^{\frac{\log_p^2 y}{\log_p y - 1}}$$

۴۲۰. باید داشته باشیم: $x > 0$ و $y > 0$. ازاین مطلب وازمعادلهٔ دوم نتیجه‌می‌شود که یا $a > 1$ و $b > 1$ و یا $0 < a < 1$ و $0 < b < 1$. در حالت $0 < a < 1$ و $b > 1$ یا $a > 1$ و $0 < b < 1$، دستگاه بی‌جواب است.

اکنون فرض می‌کنیم $a > 1$ و $b > 1$ (یا $0 < a < 1$ و $0 < b < 1$). ازهردو معادله، درمبنای دلخواه، لگاریتم می‌گیریم، به دستگاه زیر که هم ارز با دستگاه مفروض است، می‌رسیم:

$$y\log x = x\log y \ ; \ \ x\log a = y\log b$$

دومعادله را درهم ضرب و به $xy>0$ ساده می‌کنیم:

$$\log a \log x = \log b \log y \ ; \ \ x\log a = y\log b$$

این دستگاه هم، با دستگاه مفروض هم‌ارزاست. ازمعادلهٔ اول دستگاه اخیر به دست می‌آید:

$$\log x = \frac{\log b}{\log a}\log y \Rightarrow x = y^{\frac{\log b}{\log a}}$$

این مقدار x را درمعادلهٔ دوم دستگاه قرار می‌دهیم:

$$y^{\frac{\log b}{\log a}}.\log a = y\log b \ ; \ \ y^{\frac{\log b - \log a}{\log a}} = \frac{\log b}{\log a}$$

از آن‌جا، با شرط $\log b - \log a \neq 0$، به دست می‌آید:

$$y = \left(\frac{\log b}{\log a}\right)^{\frac{\log a}{\log b - \log a}} \ ; \ x = \left(\frac{\log b}{\log a}\right)^{\frac{\log b}{\log b - \log a}}$$

درحالت $\log b - \log a = 0$، یعنی $a = b$، از معادلهٔ دوم بـه‌دست می‌آید: $x = y$. دراین حالت، هردو عدد مثبت برابر، در دستگاه صدق می‌کند.

۴۲۱. دراین‌جا هم، مقدارهای قابل قبول عبارتند از $x>0$ و $y>0$. از معادلهٔ‌اول به دست می‌آید: $x = y^{\frac{x}{y}}$، که اگر درمعادلهٔ دوم قراردهیم، $y^{\frac{mx}{y}} = y^n$ بـه دست می‌آید.

ولی این برابری تنهاوقتی ممکن است که داشته باشیم: $y = 1$ یا $\frac{mx}{y} = n$.

اگر $y_1 = 1$ باشد، آن را درمعادلهٔ $x^m = y^n$ قرار می‌دهیم، که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $x_1 = 1$.

در حالت $\frac{mx}{y} = n$، معادلهٔ $x^m = y^n$ به این صورت درمی‌آید:

$$x^m = \left(\frac{mx}{n}\right)^n; \ \ x^m = \left(\frac{m}{n}\right)^n x^n; \ \ x^{m-n} = \left(\frac{m}{n}\right)^n$$

که با فرض $m - n \neq 0$ خواهیم داشت:

$$x_2 = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m-n}} , \ y_2 = \frac{mx_2}{n} = \frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m-n}} = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{m-n}}$$

درحالت $m-n=0$ یا $m=n$، از معادلهٔ دوم دستگاه به دست می‌آید: $y=x$.
در این حالت، هرحالت، هردوعدد مثبت و برابر، در دستگاه مفروض صدق می‌کند.

۴۲۲. دراین‌جا، x می‌تواند هر عدد حقیقی دلخواه باشد، ولی $y>1$. معادلهٔ دوم را تبدیل می‌کنیم:

$$(y^2-1)^{2x-2}=\frac{(y-1)^{2x}}{(y+1)^2}\ ;\ (y-1)^{2x-2}(y+1)^{2x-2}=\frac{(y-1)^{2x}}{(y+1)^2}\ ;$$

$$(y-1)^{2x-2}(y+1)^{2x}=(y-1)^{2x}\ ;\ (y-1)^{2x-2}[(y+1)^{2x}-(y-1)^2]=0$$

به این ترتیب، دستگاه مفروض؛ با مجموعهٔ دو دستگاه زیر، هم‌ارز می‌شود:

$a)\ (y-1)^{2x-2}=0\ ,\ (1+y)^x=100$ (با شرط $2x-2>0$)

$b)\ (y+1)^{2x}-(y-1)^2=0\ ,\ (1+y)^x=100$

از معادلهٔ اول دستگاه a) به دست می‌آید $y=1$ ، کـه با قراردادن در معادلهٔ دوم همان دستگاه، به دست می‌آید: $2^x=100$ یا $x=log_2 100>1$. به این ترتیب:

$$x_1=log_2 100\ ,\ y_1=1$$

از معادلهٔ اول دستگاه b) به دست می‌آید: $(1+y)^x=y-1$، که با استفاده از معادلهٔ دوم خواهیم داشت:

$$y-1=100\ ;\ y=101\ ;\ 102^x=100\ ;\ x=log_{102}100$$

به این ترتیب: $x_2=log_{102}100$، $y_2=101$.

۴۲۳. مقدارهای قابل قبول بـرای مجهول‌ها عبارت است از $x>0$، $y>0$ و z هرعددحقیقی دلخواه؛ ولی ازمعادلهٔ سوم دستگاه نتیجه می‌شود مقدار z هم باید مثبت باشد. از معادلهٔ اول دستگاه، x را برحسب y و z پیدا می‌کنیم و در معادلـهٔ سوم دستگاه قـرار می‌دهیم؛ به‌دست می‌آید:

$$y^{\frac{z}{3}}=y^{\frac{16}{75z}}\Rightarrow y=1 \text{ یا } \frac{z}{3}=\frac{16}{75z}$$

در حالت $y=1$، از معادلهٔ دوم $x=1$ ، از معادلهٔ سوم $z=\frac{18}{5}$ به‌دست می‌آید:

$$x_1=1,\ y_1=1,\ z_1=\frac{18}{5}$$

در حالت $\frac{16}{75z}=\frac{z}{3}$، به دست می‌آید:

$$z=\frac{4}{5}\ ;\ x=y^{\frac{8}{5z}}=y^2$$

که اگر $x=y^2$ را درمعادلهٔ سوم قرار دهیم:

$$y+\sqrt{y}=\frac{4}{4}\ ;\ \sqrt{y}=\frac{1}{3}\ ;\ y=\frac{1}{9}\ ،\ x=\frac{1}{81}$$

درنتیجه:

$$x_2=\frac{1}{81}\ ،\ y_2=\frac{1}{9}\ ،\ z_2=\frac{4}{5}$$

۴۲۴. پاسخ:

$$x_1=1\ ،\ y_1=1\ ،\ z_1=2\ ;$$

$$x_2=\frac{1}{256}\left(\sqrt{\frac{19}{3}}-1\right)^8\ ،\ y_2=\frac{1}{16}\left(\sqrt{\frac{19}{3}}-1\right)^4\ ،\ z_2=\frac{4}{3}$$

راه حل شبیه راه حل مسالهٔ ۴۲۳ است.

VI. ترکیب و دوجمله‌ای نیوتون

۴۲۵. با استفاده از رابطهٔ $C_k^l=\frac{k-l+1}{l}\cdot C_k^{l-1}$، برابری مفروض را این‌طور می‌نویسیم:

$$C_{n+2}^m:\frac{n+2-m}{m+1}\cdot C_{n+2}^m:\frac{n-m+1}{m+2}\cdot\frac{n-m+2}{m+1}\cdot C_{n+2}^m=0/6:1:1$$

که از آن‌جا، سرانجام به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases}1:\dfrac{n-m+2}{m+1}=\dfrac{3}{5}\\[2mm] 1:\dfrac{n-m+1}{m+2}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5(m+1)=3(n-m+2)\\[2mm] m+2=n-m+1\end{cases}$$

و با حل آن به دست می‌آید: $n=5$، $m=2$.

۴۲۶. اثبات اول. دو عنصر دلخواه از $(n+2)$ عنصر مفروض را جدا می‌کنیم. دراین صورت، ترکیب‌های $(m+1)$ از $(n+2)$ عنصر، به ۴ گروه قابل تقسیم‌اند: a) شامل این دوعنصر نیستند؛ b) شامل هر دوعنصرند؛ c) شامل نخستین عنصرهستند، ولی عنصر دوم درآن‌ها وجود ندارد؛ d) عنصردوم در آن‌ها وجود دارد، ولی شامل عنصر اول نیستند. روشن است که تعداد ترکیب‌ها، دراین چهار گروه، به‌ترتیب برابر است با

$$C_n^{m+1},\ C_n^{m-1},\ C_n^m+C_n^m$$

که از آن‌جا، اتحاد مطلوب ثابت می‌شود.

اثبات دوم. به ترتیب داریم:

$$C_n^{m+1}+C_n^{m-1}+2C_n^m=\frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}+\frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!}+$$

$$+2\times\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{n!}{(m-1)!(n-m-1)!}\left[\frac{1}{m(m+1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(n-m)(n-m+1)}+\frac{2}{m(n-m)}\right]=$$

$$=\frac{n!}{(m-1)!(n-m-1)!}\left[\frac{1}{m(m+1)}+\frac{2n-m+2}{(n-m)(n-m+1)m}\right]=$$

$$=\frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!}\cdot\frac{n^2+3n+2}{m(m+1)(n-m+1)(n-m)}=$$

$$=\frac{n!(n+1)(n+2)}{(m+1)!(n-m+1)!}=\frac{(n+2)!}{(m+1)!(n-m+1)!}=C_{n+2}^{m+1}$$

۴۲۷. روشن است که تعداد حالت‌ها، برابر است با

$$C_{30-2}^2=C_{28}^2=\frac{28\times 27}{1\times 2}=378$$

۴۲۸. معلم اول می‌تواند دوکلاس برای خود انتخاب کند؛ تعداد روش‌های انتخاب او برابر است با C_6^2. بعد از آن‌که اولی دوکلاس را انتخاب کرد، دومی می‌تواند از بین چهار کلاس باقی مانده، دوکلاس را، با C_4^2 روش، انتخاب کند وقتی که دومعلم اول، کلاس‌های‌خود را انتخاب کنند، تنها دوکلاس دیگر باقی می‌ماند و، بنابراین، معلم سوم، حقی برای انتخاب ندارد. به این ترتیب، تعدادکل روش‌های ممکن، عبارت است از

$$C_6^2 \cdot C_4^2 = \frac{6 \times 5}{1 \times 2} \cdot \frac{4 \times 3}{1 \times 2} = 90$$

۴۲۹. سه بلیت برنده را به C_5^3 طریق می‌توان ازبین پنج بلیت موجود، بیرون آورد. دوبلیت بازنده را هم به C_{100-5}^2 یعنی C_{95}^2 طریق می‌توان بیرون آورد. چون هریك از سه بلیت برنده را می‌توان با هریك از دوبلیت بازنده در نظر گرفت، بنابراین، تعدادکل حالت‌هایی‌که ازپنج بلیت خارج شده، سه بلیت برنده وجود داشته باشد، چنین است:

$$C_5^3 \cdot C_{95}^2 = \frac{5 \times 4}{1 \times 2} \cdot \frac{95 \times 94}{1 \times 2} = 44650$$

۴۳۰. چهار نفری راکه با محل آشنا هستند، به C_4^2 طریق می‌توان به دو گروه دو نفری تقسیم‌کرد. به هریك ازاین گروه‌های دونفری می‌توان شش نفراز ۱۲ نفرباقی مانده را به C_{12}^6 طریق اضافه‌کرد. بنابراین، تعداد روش‌های تقسیم موردنظر مساله چنین است:

$$\frac{1}{2} C_4^2 C_{12}^6 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \times 3}{1 \times 2} \cdot \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} = 2772$$

۴۳۱. هررنگ‌کار به‌پنج طریق می‌تواند درترکیب گروه وارد شود و به‌چهارطریق می‌توان نجار را به‌آن اضافه‌کرد. بنابراین، تعداد روش‌هایی‌که به‌کمك‌آن‌ها می‌توان یك رنگ‌کار و یك نجار را جداکرد، برابر است با ۴ × ۵. روشن‌است، تعدادکل روش‌های تقسیم سه‌فردمتخصص (رنگ‌کار،نجار،گچ‌کار) برابراست با ۲ × ۴ × ۵. چون بقیهٔ افراد گروه (یعنی دونفرباقی مانده برای گروه پنج نفری) را می‌توان به‌هرترتیبی ازبین ۱۴ نفر بدون تخصص (۱۴ = ۱۱ − ۲۵) انتخاب‌کرد، تعداد روش‌های این انتخاب برابراست‌با

$$C_{14}^2 = \frac{14 \times 13}{1 \times 2} = 91$$

به این ترتیب، تعداد روش‌های موردنظر مساله، برابراست با ۹۱ × ۲ × ۴ × ۵، یعنی ۳۶۴۰.

۴۳۲. صندلی‌های ردیف را با عددهای ۱، ۲، ۳، ...، $2n$ شماره‌گذاری می‌کنیم. اگرمردها در ردیف‌های فرد نشسته باشند، آن وقت، برای هرحالتی ازاستقرارمردها، زن‌ها می‌توانند به $n!$ طریق در ردیف‌های زوج بنشینند. البته، مردها هم به نوبهٔ خود، به $n!$ طریق می‌توانند در ردیف‌های فرد قرار گیرند. بنابراین، اگرمردها، ردیف‌های فردرا اشغال‌کنند، روی به $n! \cdot n!$ طریق، یعنی $(n!)^2$ طریق، می‌توان تمامی افراد را جا داد. ولی

مردها در ردیف‌های زوج هم می‌توانند قرار گیرند، درنتیجه $(n!)^2$ طریق هم ازاین راه به‌دست می‌آید. به‌این ترتیب، تعداد کل روش‌های تقسیم صندلی‌ها، بین n مرد و n زن، به‌نحوی درهیچ موردی، دومرد یا دو زن پهلوی یکدیگرنباشند، برابراست با $2(n!)^2$.

۴۳۳. روشن است کـه تعداد روش‌های تقسیم، ارتباطی به ردیف تقسیم ندارد. فرض می‌کنیم، ابتدا نفرسوم دوکارت خود را دریافت کند. یکی ازاین دوکارت باید آس دل باشدوکارت دوم،یکی ازنه‌طریق ممکن. بعدازآن‌که نفرسوم ۲کارت خود را برداشت، ۸ کارت باقی می‌ماند، کـه آس دل دربین آن‌ها نیست ونفردوم، به C_8^4 طریـق می‌تواند چهارکارت خود را ازبین آن‌ها انتخاب کند. به این ترتیب، اگربخواهیم سومی دوکارت را دربین آن‌ها آس دل وجود داشته بـاشد و دومی چهارکارت را انتخاب کند، روی هم $9C_8^4$ طریق ممکن است. درهریك ازاین حالت‌ها، نفراول باید سه‌کارت ازبین چهارکارت را انتخاب کند، و این، بـه C_4^3، یعنی ۴ طریق ممکن است. بنابراین، تعداد کل روش‌های تقسیم، برابر است با $4\times 9C_8^4$، یعنی ۲۵۲۰.

۴۳۴. تعداد عددهای یك رقمی مختلف، به جز صفر، برابراست با $A_4^1=4$. اگر بین این رقم‌ها، عدد صفروجود نداشت، تعداد عددهای دو رقمی که می‌شد با آن‌ها درست کرد، برابر C_5^2 می‌شد. ولی، یکی از ایـن پنج رقم، بعضی ازعددهایی‌که با دوتا ازاین رقم‌هادرست می‌شوند، یك‌رقمی ازآب درمی‌آیند (آن‌هایی‌که با صفرآغازشده‌اند). تعداد این‌گونه عددها برابراست با A_4^1، یعنی ۴. به‌این ترتیب، تعداد عددهای دورقمی مختلف، برابر $A_5^2-A_4^1$، یعنـی ۱۶ می‌شود. بـه همین ترتیب، می‌توان تعداد عددهای مختلف سه رقمی، چهاررقمی و پنج‌رقمی را پیداکرد، که به ترتیب برابرند با

$$A_5^3-A_4^2=48;\qquad A_5^4-A_4^3=96;\qquad A_5^5-A_4^4=96$$

و تعداد کل عددهای حاصل، برابرمی‌شود با

$$4+16+48+96+96=260$$

۴۳۵. تعداد عددهای دو رقمی که می‌توان با چهار رقم ۰، ۱، ۲، و ۳ ساخت، به نحوی که درهر کدام ازآن‌ها، از هررقم یکباراستفاده شده باشد، برابراست با $A_4^2-A_3^1$، یعنی ۹. ولی اگر رقم۳ بتواند دریك عـدد دوبارتکرارشود، باید عـدد ۳۳ را هم جزو عددهای دورقمی قبلی به حساب آورد. درنتیجه، روی هم ۱۰ عدد به‌دست می‌آید.

۴۳۶. با پنج عنصرمی‌توان روی هم به‌اندازهٔ $P_5=5!$ تبدیل (یاجایگشت) مختلف درست کرد. دراین مساله، عنصرها عبارتنداز رقم‌های ۱، ۱، ۲، ۳، ۴ و، بنابراین، هرتبدیل باید یك عـدد پنج رقمی باشد. درهریك ازاین عـددهای پنج‌رقمی، دوبار رقم ۱ ویکبار

رقم‌های ۲، ۳ و ۴ وارد شده‌اند. ولی بین آن‌ها، عددهای برابر و، همچنین، عددهای کوچکتر از ۲۰۰۰۰ وجود دارد. ابتدا ببینیم، چند عدد مختلف پیدا می‌شود. اگر در یك عدد، جای دو رقم را با هم عوض کنیم، تبدیل جدیدی به‌دست می‌آید، ولی اگر این دو رقم برابر باشند، عدد جدیدی به‌دست نمی‌آید. درهرعدد از رقم ۱ دوبار استفاده شده است که اگر جای آن‌ها را با هم عوض کنیم، درعدد تغییری پدید نمی‌آید (اگرچه تبدیل جدیدی از پنج عنصر است). بنابراین، تعداد عددهای متفاوت پنج رقمی برابر است با

$$\frac{۱}{۲}P_{۵}=\frac{۱}{۲}\times ۵!=۶۰$$

در بین این ۶۰ عدد، آن‌هایی که با رقم ۱ آغاز شوند، از ۲۰۰۰۰ کوچکترند. تعداد این‌گونه عددها را محاسبه می‌کنیم. رقم اول سمت چپ را کنار می‌گذاریم. آن وقت، از بقیهٔ چهار رقم ۱، ۲، ۳، ۴، می‌توان $P_{۴}$، یعنی ۲۴ عدد چهار رقمی درست کرد. اگر به سمت چپ هریك از این عددهای چهار رقمی، رقم ۱ را اضافه کنیم، عددهای مختلف پنج رقمی کوچکتر از ۲۰۰۰۰ به دست می‌آید. همهٔ دیگر عددهای پنج رقمی، با ۲، ۳ یا ۴ آغاز می‌شوند و، بنابراین، از ۲۰۰۰۰ بزرگترند. به‌این ترتیب، تعداد عددهای موردنظر مساله، برابر است با ۲۴ — ۶۰، یعنی ۳۶.

۴۳۷. با رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ می‌توان $P_{۵}=۵!$ عدد پنج رقمی مختلف، بدون تکرار رقم‌ها، درست کرد. در بین این‌ها، عددهایی وجود دارند که، در آن‌ها، دو رقم زوج ۲ و ۴ در کنارهم واقع شده‌اند. تعداد این‌گونه عددها را محاسبه می‌کنیم. برای این‌منظور، چهار عنصر زیر را درنظر می‌گیریم: ۱، ۲۴، ۳ و ۵. با این چهار عنصر می‌توان به تعداد $P_{۴}=۴!$ عدد پنج رقمی درست کرد که، در آن‌ها، رقم‌های ۲ و ۴ در کنارهم و، در ضمن، اوّل ۲ و بعد ۴ قرار گرفته‌اند. به همین ترتیب، روشن می‌شود که $P_{۴}$ عدد پنج‌رقمی هم وجود دارد که، در آن‌ها، رقم‌های ۴ و ۲ در کنارهم و، درضمن، اول ۴ و بعد ۲ قرار گرفته‌اند. عددهای پنج رقمی دیگری که، در آن‌ها، دو رقم زوج در کنارهم باشند، وجود ندارند. بنابراین، تعداد موردنظر عددها، برابر است با

$$۵!-۲\times ۴!=۷۲$$

۴۳۸. از آن‌جا که دوجمله‌ای اول در x، دوجمله‌ای دوم در $x^{۲}$ و دوجمله‌ای سوم در $x^{۳}$ ضرب شده است، باید در بسط دوجمله‌ای اول، ضریب $x^{۳}$، در بسط دوجمله‌ای دوم، ضریب $x^{۲}$ و بالاخره در بسط دوجمله‌ای سوم، ضریب x را پیدا کرد. این جمله‌ها، بعد از ضرب در عامل‌های جلو دوجمله‌ای‌ها، چنین‌اند:

$$-xC_4^3x^3+x^2C_8^2(2x)^2+x^3C_{12}^1(3x)$$

و درنتیجه، ضریب مطلوب، برابر است با

$$-C_4^3+4C_8^2+3C_{12}^1=-4+4\times 28+3\times 12=144$$

۴۳۹. چون داریم:

$$11^{10}-1=(10+1)^{10}-1=10^{10}+10\times 10^9+\frac{10\times 9}{1\times 2}\times 10^8+$$

$$+\dots+10\times 10+1-1=10^2(10^8+10^8+45\times 10^6+\dots+1)=100A$$

که درآن، A عددی است طبیعی.

۴۴۰. چون داریم:

$$(1+x)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+\dots+C_n^sx^s+\dots+x^n$$

بنابراین، ضریب x^s درحاصل‌ضرب $(1+x)^n$ درسه جمله‌ای مفروض، برابراست با

$$A_s=(s-2)C_n^{s-2}+nC_n^{s-1}-sC_n^s$$

ولی $C_n^k=C_n^{k-1}.\frac{n-k+1}{k}$، بنابراین

$$A_s=(s-2)C_n^{s-2}+nC_n^{s-1}-sC_n^{s-1}.\frac{n-s+1}{s}=(s-2)C_n^{s-2}+$$

$$+C_n^{s-2}(n-n+s-1)=(s-2)C_n^{s-2}+(s-1)C_n^{s-1}=(s-2)C_n^{s-2}+$$

$$+(s-1)C_n^{s-2}.\frac{n-s+2}{s-1}=C_n^{s-2}(s-2+n-s+2)=nC_n^{s-2}$$

۴۴۱. C_{2n}^n عبارت است از ضریب x^n دربسط دوجمله‌ای $(1+x)^{2n}$. از طرف دیگر

$$(1+x)^{2n}=(1+x)^n.(x+1)^n$$

و همان ضریب را می‌توان به عنوان ضریب x^n درحاصلضرب زیردرنظرگرفت:

$$(1+C_n^1x+C_n^2x^2+\dots+C_n^nx^n)(x^n+C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+\dots+1)$$

ازاین‌جاست که نتیجه می‌شود:

$$1^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\dots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$$

۴۴۲. ضریب جملهٔ سوم برابر $C_n^۲$ وضریب جملهٔ دوم برابر $C_n^۱$ است. بنا بر شرط باید داشته باشیم:

$$C_n^۲-C_n^۱=۴۴;\quad \frac{n(n-۱)}{۲}-n=۴۴;\quad n^۲-۳n-۸۸=۰;\quad n=۱۱$$

جملهٔ مستقل از x را پیدا می‌کنیم:

$$T_{k+۱}=C_{۱۱}^k(x\sqrt{x})^{۱۱-k}\cdot\left(-\frac{۱}{x^۴}\right)^k=(-۱)^kC_{۱۱}^kx^{\frac{۳۳-۱۱k}{۲}}$$

برای این‌که چنین جمله‌ای مستقل از x باشد، باید توان x برابر صفر شود:

$$\frac{۳۳-۱۱k}{۲}=۰=k=۳$$

یعنی جملهٔ چهارم به x بستگی ندارد و مقدار آن برابر است با $-C_{۱۱}^۳$ یا ۱۶۵ —.

۴۴۳. مجموع ضریب‌های بسط اولی برابر ۲^n و مجموع ضریب‌های بسط دومی برابر $۲^{۲n}$ است بنا برفرض باید داشته باشیم:

$$۲^{۲n}-۲^n=۲۴۰;\quad ۲^n=\frac{۱\pm۳۱}{۲};\quad ۲^n=۱۶=۲^۴;\quad n=۴$$

جملهٔ سوم بسط را پیدا می‌کنیم:

$$T_۳=C_۴^۲(\sqrt{x})^۲\left(\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}\right)^۲=۶\sqrt[۳]{x}$$

۴۴۴. داریم

$$T_{n+۱}=C_{۱۰۰}^n(\sqrt{۲})^{۱۰۰-n}(\sqrt[۳]{۳})^n=C_{۱۰۰}^n۲^{\frac{۱۰۰-n}{۲}}\times۳^{\frac{n}{۳}}$$

باید مقدار توان‌های $\frac{۱۰۰-n}{۲}$ و $\frac{n}{۳}$ عددهایی درست باشند، تا مقدار این جمله گویا شود، یعنی n باید هم بر ۳ و هم بر ۲، یعنی بر ۶ بخش‌پذیر باشد. ولی $۰\leqslant n\leqslant۱۰۰$ و، بنابراین، عددهای مضرب ۶ در این فاصله عبارتند از ۰، ۶، ۱۲، ...، ۹۶. اگر تعداد این گونه عددها را m بگیریم، داریم:

$$۹۶=۰+۶(m-۱);\ m-۱=۱۶;\ m=۱۷$$

۴۴۵. جملهٔ عمومی دوجمله‌ای مفروض را می‌نویسیم:

$$T_{n+۱}=C_{۲۰}^{n}(\sqrt[۳]{۲})^{۲۰-n}\left(-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)^{n}=(-۱)^{n}C_{۲۰}^{n}\times ۲^{\frac{۴۰-۵n}{۶}}$$

و برای گویا بودن این جمله، باید داشته باشیم (m را عدد درستی گرفته‌ایم):

$$\frac{۴۰-۵n}{۶}=m;\ ۵n=۴۰-۶m;\ n=۸-m-\frac{۱}{۵}m$$

یعنی باید m را طوری انتخاب کرد که: اولاً مضربی از ۵ باشد، ثانیاً برای n عددی به دست آید که از فاصلهٔ بین ۰ و ۲۰ تجاوز نکند. اگر m را برابر ۱۰−، ۵−، ۰ و ۵ بگیریم، به‌ترتیب، برای n عددهای ۲۰، ۱۴، ۸ و ۲ به‌دست می‌آید. جمله‌های مطلوب چنین‌اند:

$$T_{۲۱}=۲^{-۱۰};\ T_{۱۵}=C_{۲۰}^{۱۴}\times ۲^{-۵}=C_{۲۰}^{۶}\times ۲^{-۵};\ T_{۹}=C_{۲۰}^{۸};\ T_{۳}=C_{۲۰}^{۲}\times ۲^{۵}$$

۴۴۶. بنابرشرط داریم:

$$C_n^k-C_n^{k-۱}=C_n^{k+۱}=C_n^{k+۱}-C_n^k$$

اگر از رابطهٔ $C_n^k=\frac{A_n^k}{P_n}$ استفاده کنیم، بعد از تبدیل‌های لازم، به‌این معادله می‌رسیم:

$$n^{۲}-(۴k+۱)n+۴k^{۲}-۲=۰\ \Rightarrow\ n=\frac{۴k+۱\pm\sqrt{۸k+۹}}{۲}$$

چون $۴k+۱$ عددی فرد و n عددی طبیعی است، باید عدد $\sqrt{۸k+۹}$ عددی فرد باشد، یعنی

$$۸k+۹=(۲m+۱)^{۲};\ \ k=\frac{(m-۱)(m+۲)}{۲};$$

$$n=\frac{۲(m-۱)(m+۲)+۱\pm(۲m+۱)}{۲};\ n_۱=m^{۲}-۲،\ n_۲=(m+۱)^{۲}-۲$$

دوجواب $n_۱$ و $n_۲$ را می‌توان با یك رابطهٔ $n=m^{۲}-۲$ نشان‌داد. چون داریم:

$$۰\leqslant k-۱<k<k+۱\leqslant n \ \text{و}\ k=\frac{(m-۱)(m+۲)}{۲}$$

بنابراین به‌دست می‌آید: $m=۳،۴،۵،\ldots$. در واقع، به‌ازای $m=۱$ داریم $k=۰$ که ممکن نیست، زیرا $k-۱$ منفی می‌شود. به‌ازای $m=۲$ به‌دست می‌آید: $k=n=۲$ که نابرابری $k+۱\leqslant n$ را نقض می‌کند.

۴۴۷. چون $T_{k+1}=C_n^k x^{n-k}\times ۲^k$، پس باید داشته باشیم:

$$C_n^۹\times ۲^۹>C_n^۸\times ۲^۸ \text{ و } C_n^۹\times ۲^۹>C_n^{۱۰}\times ۲^{۱۰}$$

ولی $C_n^k=C_n^{k-۱}.\dfrac{n-k+۱}{k}$. بنابراین، نابرابری‌های فوق به‌صورت زیردرمی‌آیند:

$$\frac{n-۸}{۹}\times ۲>۱ \text{ و } ۱>\frac{n-۹}{۱۰}\Rightarrow ۱۲/۵<n<۱۴\Rightarrow n=۱۳$$

۴۴۸. بزرگترین ضریب در بسط $(a+b)^{۲n}$، عبارت است از ضریب $C_{۲n}^n$ در $(n+۱)$امین جمله. ثابت می‌کنیم که، این‌ضریب، عدد زوجی است:

$$C_{۲n}^n=\frac{۲n(۲n-۱)(۲n-۲)\cdots(۲n-n+۱)}{۱\times ۲\times ۳\times\cdots\times(n-۱)\times n}=$$

$$=\frac{۲n}{n}.\frac{(۲n-۱)(۲n-۲)\cdots(۲n-۱-n+۲)}{۱\times ۲\times\cdots\times(n-۱)}=۲C_{۲n-۱}^{n-۱}$$

۴۴۹. جملهٔ عمومی در بسط دوجمله‌ای $(۱+\sqrt{۲})^{۵۰}$ چنین است:

$$T_{n+۱}=C_{۵۰}^n(\sqrt{۲})^n$$

ضریب $C_{۵۰}^n$ با صعودی بودن n از ۰ تا ۲۶، بزرگ می‌شود و سپس نزول می‌کند. عامل $(\sqrt{۲})^n$، مرتباً وبا بزرگ‌شدن n، بزرگ می‌شود. بنابراین، وقتی‌که n از ۰ تا ۲۶ را اختیارکند، جمله‌های دوجمله‌ای مرتباً بزرگ وبزرگتر می‌شوند، یعنی بیست وهفتمین جمله، بزرگترین جمله دربین‌جمله‌های اول تابیست وهفتمین است.وقتی‌که n بزرگتر از ۲۶ باشد، ضریب $C_{۵۰}^n$ مرتباً کوچکتر می‌شود، درحالی‌که عامل $(\sqrt{۲})^n$، با بزرگ‌شدن n، مرتباً بزرگتر می‌شود و، در نتیجه، معلوم نیست که جمله‌های بسط دوجمله‌ای کوچکتر می‌شوند یا بزرگتر. برای روشن‌کردن این ابهام، نسبت جملهٔ $(n+۱)$ام‌را به‌جملهٔ nام، یعنی $T_{n+۱}:T_n$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. همان‌طورکه دیدیم، این نسبت در ابتدا از واحد بزرگتر است. چه‌موقع، این نسبت،کوچکتر از واحد می‌شود؟ داریم:

$$\frac{T_{n+۱}}{T_n}=\frac{C_{۵۰}^n\cdot(\sqrt{۲})^n}{C_{۵۰}^{n-۱}\cdot(\sqrt{۲})^{n-۱}}=\frac{۵۱-n}{n}\cdot\sqrt{۲}$$

نامعادلهٔ $\dfrac{۵۱-n}{n}\cdot\sqrt{۲}<۱$ را حل می‌کنیم.

$$\frac{51}{n}-1<\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{51}{n}<\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}};\ n>51(2-\sqrt{2})$$

کوچکترین عدد درستی را پیدا می‌کنیم که ازعدد $51(2-\sqrt{2})$ بزرگتر باشد؛ مقدارهای $\sqrt{2}$ را تا یک‌هزارم تقریب نقصانی و یک‌هزارم تقریب نقصانی و یک هزارم تقریب اضافی محاسبه می‌کنیم:

$$1)\ \sqrt{2}=1/414;\ 2-\sqrt{2}=0/586:\ 51(2-\sqrt{2})=29/886;$$

$$2)\ \sqrt{2}=1/415;\ 2-\sqrt{2}=0/585;\ 51(2-\sqrt{2})=29/835$$

به‌این ترتیب، کوچکترین عدد درستی که از $51(2-\sqrt{2})$ بزرگتر باشد، برابر است با ۳۰. یعنی با آغاز از $n=30$، نسبت $T_{n+1}:T_n$، از واحد کوچکتر می‌شود و بنابراین $T_{31}<T_{30}$. برای $n<30$ داریم: $T_{n+1}:T_n>1$. از همهٔ این‌ها، این نتیجه به‌دست می‌آید که T_{30} بزرگترین جملهٔ بسط است:

$$T_{30}=C_{50}^{29}(\sqrt{2})^{29}=C_{50}^{21}(\sqrt{2})^{29}$$

۴۵۰. ثابت می‌کنیم، در بسط $(p+q)^n$، که در آن، $p>0$، $q>0$ و $p+q=1$، بزرگترین جمله وجود دارد و شمارهٔ آن‌را پیدا می‌کنیم. اگر T_k را بزرگترین جملهٔ این بسط بگیریم، باید داشته‌باشیم: $T_k\geqslant T_{k-1}$ و $T_k\geqslant T_{k+1}$. اگر از رابطهٔ

$$T_k=C_n^{k-1}\cdot p^{n-k+1}q^{k-1}$$

استفاده کنیم، نابرابری‌ها به‌این‌صورت درمی‌آیند:

$$\frac{(n-k+2)q}{(k-1)p}\geqslant 1 \quad \text{و} \quad \frac{kp}{(n-k+1)q}\geqslant 1$$

با حل این دونامعادله، نسبت به k، وتوجه به $p+q=1$، به‌دست می‌آید:

$$(n+1)q\leqslant k\leqslant(n+1)q+1$$

اگر $(n+1)q$ عددی درست باشد، $(n+1)q+1$ هم عددی درست خواهد بود وچون هردوی آن‌ها در رابطهٔ مربوط به k صدق می‌کنند، بنابراین، این دوعدد، شمارهٔ بزرگترین جمله‌های بسط را به‌ما می‌دهند. به‌این ترتیب، در این‌حالت، دوجملهٔ بزرگترین خواهیم داشت. روشن است، برای این‌که یکی از این جمله‌ها نخستین یا آخرین جملهٔ بسط باشند ($k=1$ یا $k=n+1$)، باید داشته باشیم: $(n+1)q=1$ یا $n+1=(n+1)q+1$.

درحالتی که $(n+1)q$ عددی درست نباشد، ازآن‌جاکه k نمی‌تواند برابر عدد

نادرست $(n+1)q$ بشود، از آن بزرگتر است و، به‌همین ترتیب، چون k نمی‌تواند برابر عدد نادرست $(n+1)q+1$ بشود، از آن کوچکتر است. در این‌حالت، تنها یك عدد درست برای k به‌دست‌می‌آید وعبارت است از $[(n+1)q+1]$، یعنی بخش‌درست عدد $(n+1)q+1$. به‌این ترتیب، در این‌حالت، بایك جملهٔ بزرگترین سروکار داریم. برای این‌که، این جمله، نخستین یا آخرین باشد، بایك داشته باشیم:

$$(n+1)q<1 \quad \text{یا} \quad n+1<(n+1)q+1$$

۴۵۱. اگر $\left(x+1+\frac{2}{x}\right)^6$ را به‌صورت $\left[1+\left(x+\frac{2}{x}\right)\right]^6$ در نظر بگیریم، جملهٔ عمومی بسط آن چنین می‌شود:

$$T_{k+1}=C_6^k\left(x+\frac{2}{x}\right)^k$$

که درآن، k، مقدارهای از ۰ تا ۶ را اختیار می‌کند. جملهٔ عمومی بسط دوجمله‌ای $\left(x+\frac{2}{x}\right)^k$، به‌این‌صورت است:

$$T'_{m+1}=C_k^m\cdot x^{k-m}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^m=C_k^m\cdot 2^m\cdot x^{k-2m}$$

به‌این ترتیب، جملهٔ عمومی بسط $\left(x+1+\frac{2}{x}\right)^6$، به‌صورت زیر است:

$$C_6^k\cdot C_k^m\cdot 2^m\cdot x^{k-2m}$$

در این‌جا، m، مقدارهای ۰، ۱، ...، k را قبول می‌کند. از جملهٔ عمومی روشن است که جملهٔ مستقل از x، با شرط $k-2m=0$ به‌دست می‌آید، یعنی وقتی که داشته‌باشیم: $m=\frac{k}{2}$. یعنی k می‌تواند یکی از مقدارهای ۰، ۲، ۴ یا ۶ باشد؛ یعنی وقتی که m یکی ازمقدارهای ۰، ۱، ۲ یا ۳ را قبول کند. جملهٔ مستقل از x در بسط موردنظر، چنین‌می‌شود:

$$1+C_6^2\cdot C_2^1\cdot 2+C_6^4\cdot C_4^2\cdot 2^2+C_6^6\cdot C_6^3\cdot 2^3=$$

$$=1+60+360+160=581$$

۴۵۲. مجموع ضریب‌های بسط این سه‌جمله‌ای برابر است با ۱. یعنی باید جملهٔ A_3x^3 را پیداکرد. چون

$$(1+x-x^2)^{25}=[1+x(1-x)]^{25}$$

می‌توان جملهٔ عمومی آن‌را این‌طور نوشت:

$$T_{k+1}=C_{۲۵}^{k}\cdot x^{k}(۱-x)^{k}$$

ازطرف دیگر، برای $(۱-x)^{k}$، جملهٔ عمومی چنین است:

$$T'_{l+۱}=C_{k}^{l}\cdot(-x)^{l}$$

بنابراین، به‌دست می‌آید:

$$T_{k+۱}=C_{۲۵}^{k}\cdot C_{k}^{l}\cdot(-۱)^{l}\cdot x^{k+l}$$

دراین‌جا، $۰\leqslant k\leqslant ۲۵$، $۰\leqslant l\leqslant k$، $k+l=۳$، $l=۳-k$. از این‌جا معلوم می‌شود که k تنها می‌تواند برابر ۳ یا ۲ و ، متناظر با آن، مقدار l برابر ۰ یا ۱ باشد (k باید بزرگتر از l باشد). یادآوری می‌کنیم که $C_{k}^{۰}$ به‌معنای واحد است. به‌این ترتیب:

$$A_{۳}x^{۳}=(C_{۲۵}^{۳}\cdot C_{۳}^{۰}-C_{۲۵}^{۲}\cdot C_{۲}^{۱})x^{۳}=۱۷۰۰x^{۳}$$

۴۵۳. این عبارت ، یك تصاعد هندسی است با جملهٔ اول $(۱+x)^{۳}$ وقدر نسبت $x+۱$. بنابراین داریم:

$$(۱+x)^{۳}+(۱+x)^{۴}+\dots+(۱+x)^{۱۵}=$$

$$=\frac{(۱+x)^{۳}[(۱+x)^{۱۳}-۱]}{۱+x-۱}=\frac{۱}{x}[(۱+x)^{۱۶}-(۱+x)^{۳}]$$

چون در مخرج، x وجود دارد ، بـاید جملهٔ شامل $x^{۴}$ را درصورت پیداکرد. این جمله تنها در بسط $(۱+x)^{۱۶}$ به‌دست می‌آید وضریب آن چنین است:

$$C_{۱۶}^{۴}=\frac{۱۶\times ۱۵\times ۱۴\times ۱۳}{۱\times ۲\times ۳\times ۴}=۱۸۲۰$$

۴۵۴. عبارت سمت‌چپ این برابری، یك‌تصاعد هندسی به‌قدر نسبت $\frac{x}{۱+x}$ است. اگر ابتدا از رابطهٔ مجموع جمله‌های تصاعد و ، سپس، از رابطهٔ بسط دوجمله‌ای استفاده کنیم، به‌دست می‌آید :

$$\frac{(۱+x)^{n}\left[\left(\frac{x}{۱+x}\right)^{n+۱}-۱\right]}{\frac{x}{۱+x}-۱}=(x+۱)^{n+۱}-x^{n+۱}=(n+۱)x^{n}+$$

$$+\frac{(n+۱)n}{۱\times ۲}x^{n-۱}+\frac{(n+۱)n(n-۱)}{۱\times ۲\times ۳}x^{n-۲}+\dots+۱$$

۴۵۵. x را به $(x-2)+2$ تغییر می‌دهیم:

$$x^4-11x^3+43x^2-72x+45=[(x-2)+2]^4-11[(x-2)+2]^3+$$
$$+43[(x-2)+2]^2-72[(x-2)+2]+45$$

اکنون اگر کروشه‌ها را، با استفاده از رابطهٔ دوجمله‌ای باز کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(x-2)^4-3(x-2)^3+(x-2)^2+1$$

با روش ضریب‌های نـامعین هم می‌توان این مسأله را حل کرد. برای این منظور، باید عبارت مفروض را با عبارت

$$A(x-2)^4+B(x-2)^3+C(x-2)^2+D(x-2)+E$$

متحد قرارداد و، سپس ، بـا برابر قـراردادن ضریب‌های توان‌های مساوی در دوطرف، مقدارهای A تا E را به‌دست آورد.

VII. تبدیل عبارت‌های مثلثاتی

یادداشت. وقتی که‌در بارهٔ اتحاددوعبارت ریاضی صحبت می‌کنیم، معمولاً به‌بررسی مقدارهایی ازحرف‌ها نمی‌پردازیم، که به‌ازای آن‌ها، دست کم، یکی ازعبارت‌های مفروض، معنای خود را ازدست می‌دهد.

۴۵۶. $$\sin 4\alpha+\cos 4\alpha \cot g\, 2\alpha=\sin 4\alpha+\cos 4\alpha\cdot\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=$$
$$=\frac{\sin 4\alpha \sin 2\alpha+\cos 4\alpha\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{\cos(4\alpha-2\alpha)}{\sin 2\alpha}=\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=$$
$$=\cot g\, 2\alpha=\frac{1}{tg\, 2\alpha}=\frac{1-tg^2\alpha}{2\,tg\,\alpha}$$

۴۵۷. $$tg\, 3\alpha=\frac{tg\,\alpha+tg\, 2\alpha}{1-tg\,\alpha\, tg\, 2\alpha}=\frac{tg\,\alpha+\dfrac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}}{1-tg\,\alpha\cdot\dfrac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}}=$$
$$=\frac{3\,tg\,\alpha-tg^3\alpha}{1-3\,tg^2\alpha}=tg\,\alpha\cdot\frac{3-tg^2\alpha}{1-3\,tg^2\alpha}=tg\,\alpha\cdot\frac{tg^2 60^\circ-tg^2\alpha}{1-tg^2 60^\circ tg^2\alpha}=$$
$$=tg\,\alpha\cdot\frac{tg\,60^\circ+tg\,\alpha}{1-tg\,60^\circ tg\,\alpha}\cdot\frac{tg\,60^\circ-tg\,\alpha}{1+tg\,60^\circ tg\,\alpha}=tg\,\alpha\, tg(60^\circ+\alpha)\, tg(60^\circ-\alpha)$$

۴۵۸. $$tg(۳۵^\circ+\alpha)tg(۲۵^\circ-\alpha)=\frac{\sin(۳۵^\circ+\alpha)\sin(۲۵^\circ-\alpha)}{\cos(۳۵^\circ+\alpha)\cos(۲۵^\circ-\alpha)}=$$

$$=\frac{\frac{۱}{۲}[\cos(۱۰^\circ+۲\alpha)-\cos۶۰^\circ]}{\frac{۱}{۲}[\cos(۱۰^\circ+۲\alpha)+\cos۶۰^\circ]}=\frac{\cos(۱۰^\circ+۲\alpha)-\frac{۱}{۲}}{\cos(۱۰^\circ+۲\alpha)+\frac{۱}{۲}}=\frac{۲\cos(۱۰^\circ+۲\alpha)-۱}{۲\cos(۱۰^\circ+۲\alpha)+۱}$$

۴۵۹. $$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^۲}{\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha}=$$

$$=\frac{\cos^۲\alpha+۲\sin\alpha\cos\alpha+\cos^۲\alpha}{\cos۲\alpha}=\frac{۱+\sin۲\alpha}{\cos۲\alpha}=tg۲\alpha+\sec۲\alpha$$

۴۶۰. $$\sin x\left(۱+tg x\, tg\frac{x}{۲}\right)=\sin x\cdot\frac{\cos x\cos\frac{x}{۲}+\sin x\sin\frac{x}{۲}}{\cos x\cos\frac{x}{۲}}=$$

$$=\sin x\cdot\frac{\cos\left(x-\frac{x}{۲}\right)}{\cos x\cos\frac{x}{۲}}=\sin x\cdot\frac{\cos\frac{x}{۲}}{\cos x\cos\frac{x}{۲}}=\frac{\sin x}{\cos x}=tg x$$

۴۶۱. $$tg۳\alpha-tg۲\alpha-tg\alpha=tg۳\alpha-\frac{tg۲\alpha+tg\alpha}{۱-tg۲\alpha\, tg\alpha}(۱-tg۲\alpha\, tg\alpha)=$$

$$=tg۳\alpha-tg۳\alpha(۱-tg۲\alpha\, tg\alpha)=tg\alpha\, tg۲\alpha\, tg۳\alpha$$

۴۶۲. $$cotg\alpha-tg\alpha-۲tg۲\alpha-۴tg۴\alpha=\frac{\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}-$$

$$-۲tg۲\alpha-۴tg۴\alpha=\frac{۲\cos۲\alpha}{\sin۲\alpha}-\frac{۲\sin۲\alpha}{\cos۲\alpha}-۴tg۴\alpha=$$

$$=\frac{۲(\cos^۲۲\alpha-\sin^۲۲\alpha)}{\sin۲\alpha\cos۲\alpha}-۴tg۴\alpha=\frac{۴\cos۴\alpha}{\sin۴\alpha}-\frac{۴\sin۴\alpha}{\cos۴\alpha}=$$

$$=\frac{۴(\cos^۲۴\alpha-\sin^۲۴\alpha)}{\sin۴\alpha\cos۴a}=\frac{۸\cos۸\alpha}{\sin۸\alpha}=۸cotg۸\alpha$$

۴۶۳. $$tg\alpha\, tg\beta+tg\gamma(tg\alpha+tg\beta)=tg\alpha\, tg\beta+$$

$$+tg\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right](tg\alpha+tg\beta)=tg\alpha tg\beta+cotg(\alpha+\beta)(tg\beta+$$

$$+tg\beta)=tg\alpha tg\beta+\frac{1-tg\alpha tg\beta}{tg\alpha+tg\beta}(tg\alpha+tg\beta)=tg\alpha tg\beta+1-tg\alpha tg\beta=1$$

۴۶۴. $$\sin 2n\alpha+\sin 2n\beta+\sin 2n\gamma=\sin 2n(\alpha+\beta)\cos n(\alpha-\beta)+$$

$$+2\sin n\gamma\cos n\gamma=2\sin n(\pi-\gamma)\cos n(\alpha-\beta)+2\sin n\gamma\cos n[\pi-(\alpha+\beta)]=$$

$$=2\sin(n\pi-n\gamma)\cos n(\alpha-\beta)+2\sin n\gamma\cos[n\pi-n(\alpha+\beta)]=$$

$$=2\cdot(-1)^n\sin(-n\gamma)\cos n(\alpha-\beta)+2\cdot(-1)^n\sin n\gamma\cos n(\alpha+\beta)=$$

$$2\cdot(-1)^n\sin n\gamma[\cos n(\alpha+\beta)-\cos n(\alpha-\beta)]=$$

$$=2\cdot(-1)^n\sin n\gamma(-2\sin n\alpha\sin n\beta)=(-1)^{n+1}4\sin n\alpha\sin n\beta\sin n\gamma$$

۴۶۵. $$tgn\alpha+tgn\beta+tgn\gamma=tgn\alpha+$$

$$+\frac{tgn\beta+tgn\gamma}{1-tgn\beta tgn\gamma}(1-tgn\beta tgn\gamma)=tgn\alpha+tgn(\gamma+\beta)(1-tgn\beta tgn\gamma)=$$

$$=tgn\alpha+tgn(\pi-\alpha)(1-tgn\beta tgn\gamma)=tgn\alpha-tgn\alpha(1-tgn\beta tgn\gamma)=$$

$$=tgn\alpha tgn\beta tgn\gamma$$

۴۶۶. $$\frac{\sin y+\sin x\cos(x+y)}{\cos y-\sin x\sin(x+y)}=\frac{\sin y+\frac{1}{2}[\sin(2x+y)-\sin y]}{\cos y-\frac{1}{2}[\cos y-\cos(2x+y)]}=$$

$$=\frac{\sin y+\sin(2x+y)}{\cos y+\cos(2x+y)}=\frac{2\sin(x+y)\cos x}{2\cos(x+y)\cos x}=tg(x+y)$$

۴۶۷. $$\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}+$$

$$+\frac{1+\cos 2\beta}{2}-[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\cos(\alpha+\beta)=$$

$$=1+\frac{\cos 2\alpha+\cos 2\beta}{2}-[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\cos(\alpha+\beta)=$$

$$=1+\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)-$$

$$-\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)=1-\cos^2(\alpha+\beta)=\sin^2(\alpha+\beta)$$

۴۶۸. $$\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\cos 2\alpha\cos 2\beta=\frac{1+\cos 2(\alpha+\beta)}{2}+$$

$$+\frac{1+\cos 2(\alpha-\beta)}{2}-\frac{1}{2}[\cos(2\alpha+2\beta)+\cos(2\alpha-2\beta)]=1+$$

$$+\frac{\cos 2(\alpha+\beta)+\cos 2(\alpha-\beta)}{2}-\frac{\cos 2(\alpha+\beta)+\cos 2(\alpha-\beta)}{2}=1$$

۴۶۹. $$4\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha)=4\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}(\cos 2\alpha-\cos 120^\circ)=$$

$$=2\sin\alpha\cos 2\alpha-2\sin\alpha\cos 120^\circ=\sin 3\alpha-\sin\alpha+\sin\alpha=\sin 3\alpha$$

۴۷۰. $$16\sin 10^\circ\sin 30^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ\sin 90^\circ=8\sin 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ=$$

$$\frac{4\cdot 2\sin 10^\circ\cos 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ}{\cos 10^\circ}=\frac{4\sin 20^\circ\cos 20^\circ\sin 50^\circ}{\cos 10^\circ}=$$

$$=\frac{2\sin 40^\circ\cos 40^\circ}{\cos 10^\circ}=\frac{\sin 80^\circ}{\sin 80^\circ}=1$$

۴۷۱. عبارت سمت چپ اتحاد مفروض را A می‌گیریم، خواهیم داشت:

$$A=\frac{1}{32}\sin 20^\circ\sin 40^\circ\cdot\sqrt{3}\sin 80^\circ=\frac{\sqrt{3}}{64}(\cos 20^\circ-\cos 60^\circ)\sin 80^\circ=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{64}\left(\sin 80^\circ\cos 20^\circ-\frac{1}{2}\sin 80^\circ\right)=\frac{\sqrt{3}}{127}(\sin 100^\circ+\sin 60^\circ-\sin 80^\circ)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{128}\left(\sin 80^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin 80^\circ\right)=\frac{3}{256}$$

۴۷۲. $$\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{1}{4}$$

۴۷۳. $$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$= -\frac{\sin\frac{۲\pi}{۷}\cos\frac{۲\pi}{۷}\cos\frac{۴\pi}{۷}}{۲\sin\frac{\pi}{۷}} = -\frac{\sin\frac{۴\pi}{۷}\cos\frac{۴\pi}{۷}}{۴\sin\frac{\pi}{۷}} = -\frac{\sin\frac{۸\pi}{۷}}{۸\sin\frac{\pi}{۷}} =$$

$$= -\frac{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{۷}\right)}{۸\sin\frac{\pi}{۷}} = \frac{\sin\frac{\pi}{۷}}{۸\sin\frac{\pi}{۷}} = \frac{۱}{۸} = ۰/۱۲۵$$

۴۷۴. $$\cos ۵۵^\circ \cos ۶۵^\circ \cos ۱۷۵^\circ = -\frac{۱}{۲}(\cos ۱۲۰^\circ + \cos ۱۰^\circ)\cos ۵^\circ =$$

$$= -\frac{۱}{۲}\left(-\frac{۱}{۲}\cos ۵^\circ + \cos ۱۰^\circ \cos ۵^\circ\right) = -\frac{۱}{۴}(-\cos ۵^\circ + \cos ۱۵^\circ + \cos ۵^\circ) =$$

$$= -\frac{۱}{۴}\cos ۱۵^\circ = -\frac{۱}{۴}\cos(۴۵^\circ - ۳۰^\circ) =$$

$$= -\frac{۱}{۴}(\cos ۴۵^\circ \cos ۳۰^\circ + \sin ۴۵^\circ \sin ۳۰^\circ) = -\frac{\sqrt{۳}+۱}{۸\sqrt{۲}}$$

۴۷۵. $$\frac{۱}{\sin ۱۰^\circ} - \frac{\sqrt{۳}}{\cos ۱۰^\circ} = ۲ \cdot \frac{\cos ۱۰^\circ - tg ۶۰^\circ \sin ۱۰^\circ}{\sin ۲۰^\circ} =$$

$$= ۲ \cdot \frac{\cos ۶۰^\circ \cos ۱۰^\circ - \sin ۶۰^\circ \sin ۱۰^\circ}{\sin ۲۰^\circ \cos ۶۰^\circ} = ۲ \cdot \frac{\cos ۷۰^\circ}{\sin ۲۰^\circ \cos ۶۰^\circ} =$$

$$= ۲ \cdot \frac{\sin ۲۰^\circ}{\sin ۲۰^\circ \cos ۶۰^\circ} = ۴$$

۴۷۶. $$\cos\frac{\pi}{۵} - \cos\frac{۲\pi}{۵} = ۲\sin\frac{\pi}{۱۰}\sin\frac{۳\pi}{۱۰} = \frac{۲\sin\frac{\pi}{۱۰}\cos\frac{\pi}{۱۰} \cdot ۲\sin\frac{۳\pi}{۱۰}\cos\frac{۳\pi}{۱۰}}{۲\cos\frac{\pi}{۱۰}\cos\frac{۳\pi}{۱۰}} =$$

$$\frac{\sin\frac{۲\pi}{۱۰}\sin\frac{۶\pi}{۱۰}}{۲\sin\left(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۱۰}\right)\sin\left(\frac{\pi}{۲}-\frac{۳\pi}{۱۰}\right)} = \frac{\sin\frac{\pi}{۵}\sin\frac{۳\pi}{۵}}{۲\sin\frac{۳\pi}{۵}\sin\frac{\pi}{۵}} = \frac{۱}{۲}$$

.۴۷۷

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+\right.$$

$$\left.+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{6\pi}{7}\right)=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\right.$$

$$\left.-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{7\pi}{7}-\sin\frac{5\pi}{7}\right)=\frac{\sin\pi-\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{2}$$

.۴۷۸

$$\sin 47^\circ+\sin 61^\circ-\sin 11^\circ-\sin 25^\circ=2\sin 54^\circ\cos 7^\circ-$$

$$-2\sin 18^\circ\cos 7^\circ=2\cos 7^\circ(\sin 54^\circ-\sin 18^\circ)=4\cos 7^\circ\sin 18^\circ\cos 36^\circ=$$

$$=\cos 7^\circ\cdot\frac{4\sin 18^\circ\cos 18^\circ\cos 36^\circ}{\cos 18^\circ}=\cos 7^\circ\cdot\frac{2\sin 36^\circ\cos 36^\circ}{\cos 18^\circ}=$$

$$=\cos 7^\circ\cdot\frac{\sin 72^\circ}{\sin 72^\circ}=\cos 7^\circ$$

.۴۷۹

$$\cos 24^\circ+\cos 48^\circ-\cos 84^\circ-\cos 12^\circ=2\cos 36^\circ\cos 12^\circ-$$

$$-2\cos 48^\circ\cos 36^\circ=2\cos 36^\circ(\cos 12^\circ-\cos 48^\circ)=4\cos 36^\circ\sin 18^\circ\sin 30^\circ=$$

$$=\frac{2\cos 18^\circ\sin 18^\circ\cos 36^\circ}{\cos 18^\circ}=\frac{2\sin 36^\circ\cos 36^\circ}{2\cos 18^\circ}=\frac{\sin 72^\circ}{2\sin 72^\circ}=\frac{1}{2}$$

.۴۸۰

$$\frac{1}{2\sin 5^\circ}(2\sin 5^\circ\sin 10^\circ+2\sin 5^\circ\sin 20^\circ+\dots+2\sin 5^\circ\sin 50^\circ)=$$

$$=\frac{1}{2\sin 5^\circ}(\cos 5^\circ-\cos 15^\circ+\cos 15^\circ-\cos 25^\circ+\cos 25^\circ-\cos 35^\circ+$$

$$+\cos 35^\circ-\cos 45^\circ+\cos 45^\circ-\cos 55^\circ)=\frac{\cos 5^\circ-\cos 55^\circ}{2\sin 5^\circ}=$$

$$=\frac{2\sin 30^\circ\sin 25^\circ}{2\sin 5^\circ}=\sin 25^\circ\sin 30^\circ\operatorname{cosec} 5^\circ$$

.۴۸۱

$$tg 2\alpha[tg(30^\circ-\alpha)+tg(60^\circ-\alpha)]+tg(60^\circ-\alpha)tg(30^\circ-\alpha)=$$

$$=tg۲\alpha\cdot\frac{tg(۳۰^\circ-\alpha)+tg(۶۰-\alpha)}{۱-tg(۳۰^\circ-\alpha)tg(۶۰^\circ-\alpha)}[۱-tg(۳۰^\circ-\alpha)tg(۶۰^\circ-\alpha)]+$$

$$+tg(۶۰^\circ-\alpha)tg(۳۰^\circ-\alpha)=$$

$$=tg۲\alpha tg(۹۰^\circ-۲\alpha)[۱-tg(۳۰^\circ-\alpha)tg(۶۰^\circ-\alpha)]+$$

$$+tg(۶۰^\circ-\alpha)tg(۳۰^\circ-\alpha)=tg۲\alpha cotg۲\alpha[۱-tg(۳۰^\circ-$$

$$-\alpha)tg(۶۰^\circ-\alpha)]+tg(۶۰^\circ-\alpha)tg(۳۰^\circ-\alpha)=$$

$$=۱-tg(۳۰^\circ-\alpha)tg(۶۰^\circ-\alpha)+tg(۶۰^\circ-\alpha)tg(۳۰^\circ-\alpha)=۱$$

۰۴۸۲ $$۱+۲\cos۷x=۱+\frac{۲\cos۷x\sin۷x}{\sin۷x}=۱+\frac{\sin۱۴x}{\sin۷x}=$$

$$=\frac{\sin۷x+\sin۱۴x}{\sin۷x}=\frac{۲\sin۱۰/۵x\cos۳/۵x}{۲\sin۳/۵x\cos۳/۵x}=\frac{\sin۱۰/۵x}{\sin۳/۵x}$$

۰۴۸۳ $$۴\cos\left(۳۰^\circ-\frac{\alpha}{۲}\right)\sin\left(۶۰^\circ-\frac{\alpha}{۲}\right)=۲[\sin(۹۰^\circ-\alpha)+\sin۳۰^\circ]=$$

$$=۲\left(\cos\alpha+\frac{۱}{۲}\right)=۱+۲\cos\alpha=۱+\frac{۲\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}=۱+\frac{\sin۲\alpha}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\sin\alpha+\sin۲\alpha}{\sin\alpha}=\frac{۲\sin\frac{۳}{۲}\alpha\cos\frac{\alpha}{۲}}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}=\frac{\sin\frac{۳}{۲}\alpha}{\sin\frac{۱}{۲}\alpha}$$

۰۴۸۴ $$\sin^۲\alpha+\sin^۲\beta+\sin^۲\gamma=\frac{۱-\cos۲\alpha}{۲}+\frac{۱-\cos۲\beta}{۲}+$$

$$+۱-\cos^۲\gamma=۲-\frac{\cos۲\alpha+\cos۲\beta}{۲}-\cos^۲\gamma=$$

$$=۲-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos^۲[\pi-(\alpha+\beta)]=$$

$$=۲-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos^۲(\alpha+\beta)=$$

$$=۲-\cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]=$$

$$=۲-\cos(\pi-\gamma)\cdot۲\cos\alpha\cos\beta=۲+۲\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

۴۸۵.
$$(tg30^\circ+tg60^\circ)+(tg40^\circ+tg50^\circ)=\frac{\sin90^\circ}{\cos30^\circ\cos60^\circ}+$$
$$+\frac{\sin90^\circ}{\cos40^\circ\cos50^\circ}=\frac{1}{\cos30^\circ\sin30^\circ}+\frac{1}{\cos40^\circ\sin40^\circ}=$$
$$=\frac{2}{\sin60^\circ}+\frac{2}{\sin80^\circ}=\frac{2(\sin80^\circ+\sin60^\circ)}{\sin60^\circ\sin80^\circ}=$$
$$=\frac{4\sin70^\circ\cos10^\circ}{\cos30^\circ\cos10^\circ}=\frac{4\cos20^\circ}{\cos30^\circ}$$

۴۸۶.
$$\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2\alpha-\sin^2\beta=1-\cos^2(\alpha+\beta)-$$
$$-\frac{1-\cos2\alpha}{2}-\frac{1-\cos2\beta}{2}=-\cos^2(\alpha+\beta)+$$
$$+\frac{\cos2\alpha+\cos2\beta}{2}=-\cos^2(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=$$
$$=\cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]=2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\beta$$

۴۸۷.
$$1+\cos4\alpha-4\cos2\alpha+2=2\cos^2 2\alpha-4\cos2\alpha+2=$$
$$=2(\cos^2 2\alpha-2\cos2\alpha+1)=2(1-\cos2\alpha)^2=8\sin^4\alpha$$

۴۸۸.
$$(\cos11\alpha+\cos5\alpha)+3(\cos9\alpha+\cos7\alpha)=$$
$$=2\cos8\alpha\cos3\alpha+6\cos8\alpha\cos\alpha=2\cos8\alpha(\cos3\alpha+3\cos\alpha)=$$
$$=2\cos8\alpha(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha+3\cos\alpha)=8\cos8\alpha\cos^3\alpha$$

۴۸۹.
$$\sin5\alpha\sin4\alpha+\sin4\alpha\sin3\alpha-\sin2\alpha\sin\alpha=\sin5\alpha\sin4\alpha+$$
$$+\frac{1}{2}(\cos\alpha-\cos7\alpha)-\frac{1}{2}(\cos\alpha-\cos3\alpha)=\sin5\alpha\sin4\alpha+$$
$$+\frac{\cos3\alpha-\cos7\alpha}{2}=\sin5\alpha\sin4\alpha+\sin5\alpha\sin2\alpha=$$
$$=\sin5\alpha(\sin4\alpha+\sin2\alpha)=2\sin5\alpha\sin3\alpha\cos\alpha$$

۴۹۰.
$$2\cdot\frac{1}{2}(\cos30^\circ+\cos10^\circ)-2\cos30^\circ+\sin40^\circ+$$
$$=\cos10^\circ-\cos30^\circ+\sin40^\circ=2\sin20^\circ\sin10^\circ+$$

$$+۲\sin ۲۰^\circ \cos ۲۰^\circ = ۲\sin ۲۰^\circ (\sin ۱۰^\circ + \sin ۷۰^\circ) =$$

$$= ۴\sin ۲۰^\circ \sin ۴۰^\circ \cos ۳۰^\circ = ۲\sqrt{۳}\sin ۲۰^\circ \sin ۴۰^\circ$$

۴۹۱. $$[\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma - \sin(\alpha+\beta)\sin\gamma] + \cos\alpha + \cos\beta +$$

$$+\cos\gamma = [\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos\alpha] + (\cos\beta+\cos\gamma) =$$

$$= ۲\cos\left(\alpha+\frac{\beta+\gamma}{۲}\right)\cos\frac{\beta+\gamma}{۲} + ۲\cos\frac{\beta+\gamma}{۲}\cos\frac{\beta-\gamma}{۲} =$$

$$= ۲\cos\frac{\beta+\gamma}{۲}\left[\cos\left(\alpha+\frac{\beta+\gamma}{۲}\right)+\cos\frac{\beta-\gamma}{۲}\right] =$$

$$= ۴\cos\frac{\beta+\gamma}{۲}\cos\frac{\gamma+\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha+\beta}{۲}$$

۴۹۲. $$\sin ۷۰^\circ + ۴(\cos ۶۰^\circ + \cos ۲۰^\circ)\cos ۸۰^\circ = \sin ۷۰^\circ +$$

$$+ ۲\cos ۸۰^\circ + ۴\cos ۲۰^\circ \cos ۸۰^\circ = \sin ۷۰^\circ + ۲\cos ۸۰^\circ +$$

$$= ۲\cos ۶۰^\circ + ۲\cos ۱۰۰^\circ = \cos ۲۰ + ۲\cos ۸۰^\circ + ۱ -$$

$$- ۲\cos ۸۰^\circ = ۱ + \cos ۲۰^\circ = ۲\cos^۲ ۱۰^\circ$$

۴۹۳. $$\sqrt{tg^۲\alpha - \sin^۲\alpha} = \sqrt{\frac{\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha} - \sin^۲\alpha} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sin^۲\alpha(۱-\cos^۲\alpha)}{\cos^۲\alpha}} = \sqrt{tg^۲\alpha \sin^۲\alpha} = |tg\alpha \sin\alpha|$$

ولی درحالت $\cos\alpha > ۰$ داریم: $tg\alpha\sin\alpha = \frac{\sin^۲\alpha}{\cos\alpha} \geqslant ۰$ و درنتیجه به‌دست می‌آید:

$$\frac{(۴k-۱)\pi}{۲} < \alpha < \frac{(۴k+۱)\pi}{۲}, \ \alpha = (۲k+۱)\pi$$

۴۹۴. $$\sqrt{۱+\sin ۲\alpha} = \sqrt{\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha + ۲\sin\alpha\cos\alpha} =$$

$$= \sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^۲} = |\sin\alpha+\cos\alpha|.$$

ولی وقتی داریم: $\sin\alpha+\cos\alpha = |\sin\alpha+\cos\alpha|$ ، که داشته باشیم:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{۲}\cos\left(\frac{\pi}{۴}-\alpha\right) \geqslant ۰$$

ازآن‌جا

$$\frac{(4k-1)\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{4}-\alpha \leqslant \frac{(4k+1)\pi}{2} \text{ یا } \frac{(8k-1)\pi}{4} \leqslant \alpha \leqslant \frac{(8k+3)\pi}{4}$$

۴۹۵. $$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}}=\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}}=$$

$$=\left|\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right|=|\operatorname{cosec}\alpha-\operatorname{cotg}\alpha|$$

ولی وقتی داریم: $|\operatorname{cosec}\alpha-\operatorname{cotg}\alpha|=\operatorname{cotg}\alpha-\operatorname{cosec}\alpha$، که داشته باشیم:

$$\operatorname{cosec}\alpha-\operatorname{cotg}\alpha=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}<0 \Rightarrow \sin\alpha<0 \Rightarrow (2k-1)\pi<\alpha<2k\pi$$

۴۹۶. $$\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=|\operatorname{cosec}\alpha-\operatorname{cotg}\alpha|$$

ولی به‌شرطی $|\operatorname{cosec}\alpha-\operatorname{cotg}\alpha|=\operatorname{cosec}\alpha-\operatorname{cotg}\alpha$، که داشته باشیم:

$$\operatorname{cosec}\alpha-\operatorname{cotg}\alpha=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}>0 \Rightarrow \sin\alpha>0 \Rightarrow 2k\pi<\alpha<(2k+1)\pi$$

ولی برخلاف مسالهٔ ۴۹۵، دراین جا، برابری مورد نظر، نه تنها بـه‌ازای $\alpha=k\pi$، بلکه در ضمن به‌ازای $\alpha=\frac{(2k+1)\pi}{2}$ هم معنای خود را ازدست می‌دهد. بنابراین، سرانجام به‌دست می‌آید:

$$2k\pi<\alpha<\frac{(4k+1)\pi}{2}\ ;\ \frac{(4k+1)\pi}{2}<\alpha<(2k+1)\pi$$

۴۹۷. $$\sqrt{\sec^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha}=\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+1+\operatorname{cotg}^2\alpha+1}=$$

$$=\sqrt{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha)^2}=|\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha|$$

و وقتی داریم: $|\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha|=-\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{cotg}\alpha$، که داشته باشیم:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha=\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}<0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha<0 \Rightarrow \frac{(2k+1)\pi}{2}<\alpha<(k+1)\pi$$

۴۹۸. $$\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{cotg}^2\alpha+2}=\sqrt{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}}=|\sec\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha|$$

و بنابراین، باید داشته باشیم:

$$\sec\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha} > 0 \Rightarrow \sin 2\alpha > 0$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $k\pi < \alpha < \frac{(2k+1)\pi}{2}$.

۴۹۹. $$\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}} +$$

$$+\sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}} = \frac{1+\sin\alpha}{|\cos\alpha|} + \frac{1-\sin\alpha}{|\cos\alpha|} = \frac{2}{|\cos\alpha|} = 2|\sec\alpha|$$

ولی به شرطی $|\sec\alpha| = -\sec\alpha$، که داشته باشیم: $\sec\alpha < 0$ و از آن‌جا

$$\frac{(4k+1)\pi}{2} < \alpha < \frac{(4k+3)\pi}{2}$$

۵۰۰. $$\sqrt{1-\cos\alpha} + \sqrt{1+\cos\alpha} = \sqrt{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} +$$

$$+\sqrt{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{2}\left(\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| + \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|\right)$$

چون داریم: $\sqrt{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$، بنابراین، برابری مفروض وقتی و تنها وقتی درست است که داشته باشیم:

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sin\frac{\alpha}{2} \quad \text{و} \quad \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = -\cos\frac{\alpha}{2}$$

یعنی وقتی که $\sin\frac{\alpha}{2} \geqslant 0$ و $\cos\frac{\alpha}{2} \leqslant 0$. از نابرابری اول معلوم می‌شود که انتهای کمان $\frac{\alpha}{2}$ باید درربع اول یا ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی باشد؛ ونابرابری دوم به این معناست که انتهای کمان $\frac{\alpha}{2}$ باید در ربع دوم یا سوم دایرهٔ مثلثاتی باشد. به‌این ترتیب روشن می‌شود که انتهای کمان $\frac{\alpha}{2}$ باید درربع دوم دایرهٔ مثلثاتی قرارگیرد؛ یعنی

$$\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi \leqslant \frac{\alpha}{2} \leqslant (2k+1)\pi \Rightarrow (4k+1)\pi \leqslant \alpha \leqslant (4k+2)\pi$$

۵۰۱. اگر سمت چپ اتحاد مفروض را به‌صورت

$$\sqrt{۱+\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)}+\sqrt{۱-\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)}$$

بنویسیم، به‌همان صورت عبارت سمت‌چپ مسالهٔ ۵۰۰ درمی‌آید. علاوه براین، اگرفر کنیم: $\frac{\pi}{۲}-\alpha=\varphi$، یعنی $\frac{\alpha}{۲}=\frac{\pi}{۴}-\frac{\varphi}{۲}$، برابری مفروض به‌صورت‌زیر درمی‌آید:

$$\sqrt{۱+\cos\varphi}+\sqrt{۱-\cos\varphi}=۲\sin\left(\frac{\varphi}{۲}-\frac{\pi}{۴}\right)$$

واین برابری، به‌جز نام حرف مربوط بـه آن، هیچ تفاوتی با برابری مسالهٔ ۵۰۰ ندا بنابراین، با استفاده از جواب مسالهٔ ۵۰۰، باید داشته باشیم:

$$(۴k+۱)\pi\leqslant\varphi=\frac{\pi}{۲}-\alpha\leqslant(۴k+۲)\pi$$

که از آن‌جا به‌دست‌می‌آید:

$$\left(۴k-\frac{۳}{۲}\right)\pi\leqslant\alpha\leqslant\left(۴k-\frac{۱}{۲}\right)\pi$$

۵۰۲. ازآن‌جا که داریم:

$$\sqrt{\frac{۱}{۱+\cos\alpha}+\frac{۱}{۱-\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{۲}{۱-\cos^۲\alpha}}=\frac{\sqrt{۲}}{|\sin\alpha|}$$

برای سمت چپ برابری به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sqrt{۲}}{|\sin\alpha|}-\sqrt{۲}=-\sqrt{۲}\left(۱-\frac{۱}{\sin\alpha|\sin\alpha|}\right)$$

بـرای این کـه مقدار داخل پرانتز بـرابـر $۲+\cot g^۲\alpha$ بشود، بـایـد داشته بـاش $|\sin\alpha|=-\sin\alpha$، یعـنـی $\sin\alpha<۰$. ولـی در ایـن صـورت، خـواهـیـم داش $(۲k+۱)\pi<\alpha<(۲k+۲)\pi$.

۵۰۳. $$tg\beta=\frac{\sin\beta}{\sqrt{۱-\sin^۲\beta}}=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}\sqrt{۱-\frac{۱}{۱۰}}}=\frac{۱}{۳}$$

$$tg۲\beta=\frac{۲tg\beta}{۱-tg^۲\beta}=\frac{۲}{۳\left(۱-\frac{۱}{۹}\right)}=\frac{۳}{۴};$$

$$tg(\alpha+۲\beta)=\frac{\frac{۱}{۷}+\frac{۳}{۴}}{۱-\frac{۱}{۷}\times\frac{۳}{۴}}=۱$$

از آن‌جا: $(k\in Z)\alpha+۲\beta=۴۵^\circ+۳۶۰^\circ k$. از آن‌جا که $۰<\alpha<۴۵^\circ$ و $۰<\beta<۴۵^\circ$ و، بنابراین $۰<\alpha+۲\beta<۱۳۵^\circ$، بنابراین باید $k=۰$ گرفت: $\alpha+۲\beta=۴۵^\circ$.

۵۰۴. (a) به‌ازای $۲k\pi\leqslant x\leqslant(۲k+۱)\pi$. (b) به ازای همهٔ مقدارهای x به جز $x=\frac{۲k+۱}{۲}\pi$. (c) به‌ازای همهٔ مقدارهای x به‌جز $x=۲k\pi$. (d) به‌ازای همهٔ‌مقدارهای x.

۵۰۵. به ازای مقدارهایی از x که، برای آن‌ها، داشته باشیم $cos\frac{x}{۲}\geqslant ۰$؛ یعنی

$$۲k\pi-\frac{\pi}{۲}\leqslant\frac{x}{۲}\leqslant۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \quad \text{یا} \quad (۴k-۱)\pi\leqslant x\leqslant(۴k+۱)\pi$$

۵۰۶. $tg\alpha>sin\alpha$. در واقع

$$tg\alpha=\frac{sin\alpha}{cos\alpha}=sin\alpha\cdot\frac{۱}{cos\alpha}>sin\alpha$$

۵۰۷. می‌دانیم، واسطهٔ حسابی دو عدد، از واسطهٔ هندسی آن‌ها کوچکتر نیست، یعنی $\frac{a+a}{۲}\geqslant\sqrt{ab}$. در ضمن، علامت برابری، وقتی و تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم: $a=b$. بنابراین $\frac{a+b}{۲\sqrt{ab}}\geqslant۱$. برای $a\neq b$، مقدار $\frac{a+b}{۲\sqrt{ab}}>۱$ را می‌توان برای تانژانت، کتانژانت، سکانت و کسکانت انتخاب کرد و، برای $a=b$، همهٔ تابع‌های مثلثاتی ساده را.

۵۰۸. سینوس واحد از سینوس یك درجه بیشتر است، زیرا بنابر تعریف، سینوس واحد یعنی سینوس یك رادیان: و سینوس یك رادیان از سینوس یك درجه بیشتر است.

۵۰۹. $$(tg\alpha+cotg\alpha)^۲=\frac{۱}{sin^۲\alpha cos^۲\alpha}=\frac{۴}{sin^۲ ۲\alpha}\geqslant۴$$

و این مقدار حداقل را به‌ازای $\alpha=\frac{(۲k+۱)\pi}{۴}$ به‌دست می‌آورد.

۵۱۰. چون α و β زاویه‌هایی حاده هستند، بنابراین $۰<cos\alpha<۱$ و

$1 > \cos\beta > 0$. در نتیجه

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta < \sin\alpha + \sin\beta$$

۵۱۱. $tg\,2\alpha > 2\,tg\,\alpha$. در واقــع، چون $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$، بنابــرایــن $0 < tg\alpha < 1$، $0 < tg^2\alpha < 1$، $0 < 1 - tg^2\alpha < 1$ و $\frac{1}{1-tg^2\alpha} > 1$. بنابراین

$$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha} = 2\,tg\,\alpha \cdot \frac{1}{1-tg^2\alpha} > 2\,tg\,\alpha$$

۵۱۲. می‌تــوان. ولی چنین تعریفی از سینوس عدد، نسبت به‌تعریف معمول، منجر به‌رابطه‌های بغرنج‌تر در آنالیز ریاضی می‌شود.

۵۱۳. درست نیست. رادیان زاویه‌ای است که به عنوان واحد رادیانی زاویه قبول شده است، همان‌طور کــه درجهٔ زاویه‌ای بــه عنوان واحد اندازه‌گیری درجه‌های زاویه است. به‌همان ترتیب که در اندازه‌گیری درجه‌ای، زاویه‌ها را با عدد بیان می‌کنند (تعداد درجه‌ها)، در اندازه‌گیری رادیانی هم، زاویه‌ها با عدد بیان می‌شوند (تعداد رادیان‌ها).

۵۱۴. درهــر بازه‌ای که این تابع، در آن، تعریف شده است. مثلاً tgx در بازه‌های $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ و $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ صعودی است، ولی نمی‌توان گفت که tgx در بازهٔ $(0, \pi)$ صعودی است.

۵۱۵. سینوس و کسینوس مفــروض، کاملاً انتهای کمان را معین می‌کنند. همچنین می‌توان از دو رابطهٔ زیر آغاز کرد:

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}},\ \ \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

به‌ترتیب دیگری هم، می‌توان استدلال کرد. $\sin\alpha$ و $tg\frac{\alpha}{2}$ همیشه هم‌علامت‌اند و، بنابراین، در رابطهٔ $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$، به‌دلیل مثبت بودن $1 + \cos\alpha$، نباید علامت منفی را در جلو کسر قرار داد.

۵۱۶. به‌ترتیب داریم:

$$\sin 36^\circ = \sin(2 \times 18^\circ) = 2\sin 18^\circ \cos 18^\circ;$$

$$\cos 54^\circ = \cos(3 \times 18^\circ) = 4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ;$$

$$2\sin 18^\circ \cos 18^\circ = 4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ;$$

$$2\sin 18^\circ = 4(1 - \sin^2 18^\circ) - 3;\quad 4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1 = 0$$

که با توجه به‌مثبت بودن $\sin 18^\circ$ به‌دست می‌آید: $\sin 18^\circ = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

۵۱۷. عبـارت مفروض را در $2\sin\frac{\alpha}{2}$ ضرب و بر آن تقسیم می‌کنیم. اگر مجموع مفروض را S بنامیم، داریم:

$$S = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin 2\alpha + \ldots + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin n\alpha\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{3\alpha}{2} + \cos\frac{3\alpha}{2} - \cos\frac{5\alpha}{2} + \ldots + \cos\frac{2n-1}{2}\alpha - \cos\frac{2n+1}{2}\alpha\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}\alpha\right) = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

۵۱۸. اگـر عبارت مفروض را یکبار در $2\sin\frac{\alpha}{2}$ ضرب و یکبار بر آن تقسیم کنیم، با تبدیل‌هایی شبیه مسالهٔ ۵۱۷، به‌دست می‌آید:

$$S = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

۵۱۹. بـا استفاده از رابطه‌هـای تبدیـل بـه سینوس و کسینوس کمان دو برابر، A_1، B_1 و C_1 را تبدیل می‌کنیم:

$$A_1 = A\cdot\frac{1+\cos 2\alpha}{2} + B\cdot\frac{\sin 2\alpha}{2} + C\cdot\frac{1-\cos 2\alpha}{2} =$$

$$= \frac{A+C}{2} + \frac{B}{2}\sin 2\alpha + \frac{A-C}{2}\cos 2\alpha;$$

$$B_1 = C\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha - A\sin 2\alpha = B\cos 2\alpha - (A-C)\sin 2\alpha;$$

$$C_1 = \frac{A+C}{2} - \frac{B}{2}\sin 2\alpha - \frac{A-C}{2}\cos 2\alpha;$$

$$B_1^2 - 4A_1C_1 = [B\cos 2\alpha - (A-C)\sin 2\alpha]^2 - 4\left[\frac{A+C}{2} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{B}{2}\sin 2\alpha + \frac{A-C}{2}\cos 2\alpha\right)\right]\left[\frac{A+C}{2} - \left(\frac{B}{2}\sin 2\alpha + \frac{A-C}{2}\cos 2\alpha\right)\right] =$$

$$= B^2\cos^2 2\alpha - 2B(A-C)\sin 2\alpha\cos 2\alpha + (A-C)^2\sin^2 2\alpha -$$

$$-[(A+C)^2 - (B\sin 2a + (A-C)\cos 2\alpha)^2] =$$

$$= B^2(\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha) + (A-C)^2(\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha) - (A+C)^2 =$$

$$B^2 + (A-C)^2 - (A+C)^2 = B^2 - 4AC$$

۵۲۰.
$$\frac{tg(\alpha+\beta)}{tg\alpha} = \frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\sin(2\alpha+\beta) + \sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta) - \sin\beta} = \frac{6\sin\beta}{4\sin\beta} = \frac{3}{2}$$

۵۲۱. برای $\varphi = 0$، برابری مفروض، به‌این صورت درمی‌آید:

$$a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 + \cdots + \alpha_n\cos\alpha_n = 0$$

و برای $\varphi = \varphi_0 \neq k\pi$ می‌توان آن را این طور نوشت:

$$(a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 + \cdots + a_n\cos\alpha_n)\cos\varphi_0 -$$

$$-(a_1\sin\alpha_1 + a_2\sin\alpha_2 + \cdots + a_n\sin\alpha_n)\sin\varphi_0 = 0$$

با توجه به‌رابطهٔ اول و این‌که $\sin\varphi_0 \neq 0$، به‌این برابری می‌رسیم:

$$a_1\sin\alpha_1 + a_2\sin\alpha_2 + \cdots + a_n\sin\alpha_n = 0$$

اکنون، اگر اولی را در $\cos\varphi$ و آخری را در $\sin\varphi$ ضرب و سپس، نتیجه دومی را از نتیجهٔ اولی کم کنیم، به‌دست می‌آید (φ، عدد دلخواهی است):

$$a_1\cos(\alpha_1+\varphi) + a_2\cos(\alpha_2+\varphi) + \cdots + a_n\cos(\alpha_n+\varphi) = 0$$

۵۲۲. $\cos x$ را از برابری مفروض به‌دست می‌آوریم:

$$\cos x = \frac{\sin^2\beta\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\beta}{\sin^2\beta\cos\alpha - \sin^2\alpha\cos\beta} =$$

$$= \frac{(1-\cos^2\beta)\cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha)\cos^2\beta}{(1-\cos^2\beta)\cos\alpha - (1-\cos^2\alpha)\cos\beta} =$$

$$= \frac{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}{(\cos\alpha - \cos\beta)(1+\cos\alpha\cos\beta)} = \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}$$

اکنون، با استفاده از رابطهٔ $tg^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ به‌دست می‌آید:

$$tg^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha - \cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha + \cos\beta} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta} = tg^2\frac{\alpha}{2}\cdot tg^2\frac{\beta}{2}$$

۵۲۳. $$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - 4\sin^2\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} =$$

$$= 1 - (1-\cos\varphi)(1-\cos\theta) = \cos\varphi + \cos\theta - \cos\varphi\cos\theta =$$

$$= \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} + \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} - \frac{\cos^2\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}$$

که اگر دو طرف را به $\cos\alpha \neq 0$ ساده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\cos\alpha = \frac{\cos\beta + \cos\gamma}{1+\cos\beta\cos\gamma}$$

تنها این می‌ماند که، شبیه مسالهٔ ۵۲۲، از رابطهٔ $tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$ استفاده کنیم.

۵۲۴. برابری‌های مفروض را، می‌توان این طور نوشت:

$$\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha = a;\ \ \sin\theta\cos\beta - \cos\theta\sin\beta = b$$

برابری اول را در $\sin\beta$ و دومی را در $\cos\alpha$ ضرب و نتیجه‌ها را جمع می‌کنیم؛ دوباره همان برابری اول را در $\cos\beta$ و دومی را در $\sin\alpha$ ضرب و نتیجه‌ها را ازهم کم می‌کنیم؛ به‌این دو رابطه می‌رسیم:

$$\sin\theta\cos(\alpha-\beta) = a\sin\beta + b\cos\alpha;$$

$$\cos\theta\cos(\alpha-\beta) = a\cos\beta - b\sin\alpha$$

اکنون، این دو رابطه را از مجذور و، سپس، باهم جمع می‌کنیم:

$$\cos^2(\alpha-\beta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=(a\sin\beta+b\cos\alpha)^2+(a\cos\beta-b\sin\alpha)^2;$$

$$\cos^2(\alpha-\beta)=a^2(\sin^2\beta+\cos^2\beta)-2ab(\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha)+$$

$$+b^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha);\quad \cos^2(\alpha-\beta)=a^2-2ab\sin(\alpha-\beta)+b^2$$

۵۲۵. به‌ترتیب داریم:

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{\cos x+\cos(x+2\varphi)}{\cos(x+\varphi)+\cos(x+3\varphi)}=\frac{2\cos(x+\varphi)\cos\varphi}{2\cos(x+2\varphi)\cos\varphi}$$

$$=\frac{\cos(x+\varphi)}{\cos(x+2\varphi)}=\frac{b}{c}$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $\dfrac{a+c}{b}=\dfrac{b+d}{c}$

۵۲۶. $2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=q$ ؛ $2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=p$.

از آن‌جا $\dfrac{p}{q}=tg\dfrac{\alpha+\beta}{2}$. اکنون از رابطه‌های $\sin 2x=\dfrac{2tg x}{1+tg^2x}$ و $\cos 2x=\dfrac{1-tg^2x}{1+tg^2x}$ استفاده می‌کنیم به‌دست می‌آید:

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2qp}{p^2+q^2}\ \text{و}\ \cos(\alpha+\beta)=\frac{q^2-p^2}{q^2+p^2}$$

۵۲۷. از آن‌جا که داریم: $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ و $\cos(\alpha+\beta)=2\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}-1$، برابری مفروض را می‌توان، به‌این ترتیب تبدیل کرد:

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}=0;$$

$$\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{1}{4}=0;$$

$$\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=0;$$

$$\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=0$$

مجموع دو مقدار منفی وقتی و تنها وقتی، برابر صفر می‌شود که هر دوی آنها برابر صفر باشند. یعنی:

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0\quad\text{و}\quad\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=0$$

از اولی، با توجه به این که α و β زاویه‌های یك مثلث‌اند، به دست می آید: $\alpha=\beta$. ولی دراین صورت، برابری دوم به صورت $\cos\alpha-\frac{۱}{۲}=۰$ درمی‌آید؛ که از آن‌جا: $\alpha=\frac{\pi}{۳}$.

در نتیجه $\alpha=\beta=\frac{\pi}{۳}$ و برای زاویهٔ سوم مثلث هم، $\frac{\pi}{۳}$ باقی‌می‌ماند. مثلث، متساوی‌الاضلاع است.

۵۲۸. از آن‌جا که ضلع‌های a، b و c به تصاعد حسابی‌اند، داریم:

$$a-b=b-c$$

وچون، ضلع‌های مثلث با سینوس زاویه‌های مقابل به آن‌ها، متناسب‌اند:

$$\sin A-\sin B=\sin B-\sin C$$

وسپس

$$۲\sin\frac{A-B}{۲}\cos\frac{A+B}{۲}=۲\sin\frac{B-C}{۲}\cos\frac{B+C}{۲};$$

$$\sin\left(\frac{A}{۲}-\frac{B}{۲}\right)\cos\frac{\pi-C}{۲}=\sin\left(\frac{B}{۲}-\frac{C}{۲}\right)\cos\frac{\pi-A}{۲};$$

$$\left(\sin\frac{A}{۲}\cos\frac{B}{۲}-\cos\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\right)\sin\frac{C}{۲}=\left(\sin\frac{B}{۲}\cos\frac{C}{۲}-\cos\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}\right)\sin\frac{A}{۲}$$

دوطرف برابری اخیر را برمقدار مثبت $\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}$ تقسیم‌می‌کنیم، به‌دست‌می‌آید:

$$\cot g\frac{B}{۲}-\cot g\frac{A}{۲}=\cot g\frac{C}{۲}-\cot g\frac{B}{۲}$$

۵۲۹. ازبرابری مفروض، tgA را پیدا می‌کنیم:

$$tgA=-\frac{tgB+tgC}{۱-tgBtgC}=-tg(B+C)=tg(-B-C)$$

ازاین‌جا، به دست می آید:

$$A=k\pi+(-B-C)\Rightarrow A+B+C=k\pi\ (k\in z)$$

کوچکترین زاویه‌های مثبتی که با شرط‌های مساله سازگار باشند، ازدستگاه زیر به دست می آیند:

$$A+B+C=2\pi, \qquad 2A=B+C, \qquad C=A+B$$

که با حل آن نتیجه می‌شود: $A=\frac{2\pi}{3}$، $B=\frac{\pi}{3}$، $C=\pi$. به ازای $k=1$، به‌دست می‌آید: $C=\frac{\pi}{2}$، که به ازای آن، اتحاد مفروض، معنای خود را ازدست می‌دهد.

۵۳۰. $sinA=sin(\pi-B-C)=sin(B+C)=sinB\,cosC+cosB\,sinC$

با فرض $\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}=t$ داریم:

$$sinA=\frac{a}{t},\ sinB=\frac{a}{t},\ sinC=\frac{c}{t}$$

که اگردر رابطهٔ قبلی قراردهیم و به t ساده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$a=b\cos C+c\cos B$$

و به همین ترتیب: $b=c\cos A+a\cos C$ و $c=a\cos B+b\cos A$. اولی را در a، دومی را در b وسومی را در c ضرب و ازنتیجهٔ اولی، دونتیجهٔ دومی وسومی را کم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$a^2-b^2-c^2=-2bc\cos A \text{ یا } a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

۵۳۱. ازبرابری مفروض به دست می‌آید:

$$\cos\alpha\cos 3\theta+\sin\alpha\sin 3\theta=m\cos^3\theta;$$
$$\sin\alpha\cos 3\theta-\cos\alpha\sin 3\theta=m\sin^3\theta$$

اولی را در $\cos 3\theta$ و دومی را در $\sin 3\theta$ ضرب و ازهم کم می‌کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\cos\alpha=m(\cos^3\theta\cos 3\theta-\sin^3\theta\sin 3\theta)$$

که با استفاده از رابطه‌های سینوس و کسینوس کمان سه‌برابر، می‌شود:

$$\cos\alpha=m[4(\sin^6\theta+\cos^6\theta)-3(\sin^4\theta+\cos^4\theta)]$$

اگربرابری‌های مفروض را، مجذور وسپس با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\sin^6\theta+\cos^6\theta=\frac{1}{m^2} \qquad (*)$$

ازطرف دیگر، داریم:

$$\sin^4\theta+\cos^4\theta=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta;$$

$$\frac{1}{m^2}=\sin^6\theta+\cos^6\theta=1-3\sin^2\theta\cos^2\theta;$$

$$\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{m^2}\right);$$

$$\sin^4\theta+\cos^4\theta=1-\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{m^2}\right) \qquad (**)$$

اکنون با توجه به رابطه‌ای که برای $\cos\alpha$ به دست آوردیم، و رابطه‌های (*) و (**)، خواهیم داشت:

$$m^2+m\cos\alpha=2$$

۵۳۲. برابری اول را بر $\cos^2\theta$ ، برابری دوم را بر $\cos^2\varphi$ تقسیم و از رابطهٔ $\sec^2 x=1+tg^2x$ استفاده می‌کنیم:

$$(a-1)tg^2\theta=1-b; \qquad (b-1)tg^2\varphi=1-a$$

و از آن‌جا

$$\frac{tg^2\theta}{tg^2\varphi}=\left(\frac{1-b}{1-a}\right)^2$$

ولی از برابری سوم به دست می‌آید: $\frac{tg^2\theta}{tg^2\varphi}=\frac{b^2}{a^2}$. بنابراین

$$\frac{b^2}{a^2}=\left(\frac{1-b}{1-a}\right)^2\Rightarrow\pm\frac{b}{a}=\frac{1-b}{1-a}\Rightarrow a=b \text{ یا } a+b=2ab$$

ولی بنابرشرط مساله $a\neq b$؛ بنابراین رابطهٔ مطلوب چنین است: $a+b=2ab$.

۵۳۳.
$$\frac{\cos^2x}{\sin^4x}+\frac{\sin^4x}{\cos^6x}+\frac{6}{\cos^2x}+\frac{4}{\sin^2x}+\frac{4\sin^2x}{\cos^4x}=$$

$$=\frac{1}{\sin^4x\cos^6x}(\cos^8x+\sin^8x+6\cos^4x\sin^4x+4\cos^6x\sin^2x+$$

$$+4\cos^2x\sin^6x)=\frac{(\sin^2x+\cos^2x)^4}{\sin^4x\cos^6x}=\frac{1}{\sin^4x\cos^6x}$$

۵۳۴. همهٔ جمله‌های برابرمفروض را به سمت چپ می‌بریم و، سپس، سمت‌چپ را قابل محاسبهٔ لگاریتمی می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=$$

$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin^2\frac{\gamma}{2}-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=$$

$$=2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}-\sin^2\frac{\gamma}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)=$$

$$=2\left[\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}-\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right)^2\right]=2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\right.$$

$$\left.+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}\right)=$$

$$=2\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}\right)=0$$

عامل اول، با توجه به شرطهای $0<\alpha, \beta, \gamma<\frac{\pi}{2}$ مثبت است، بنابراین باید داشته باشیم:

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\frac{\gamma}{2}\Rightarrow\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)$$

ولی $0<\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$ و $0<\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}<\frac{\pi}{2}$، بنابراین

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\Rightarrow\alpha+\beta+\gamma=\pi$$

۵۳۵. شرط کافی است. اگر $tg\frac{x}{2}$ گویا باشد، آن وقت حتماً $\sin x$ و $\cos x$ هم گویا خواهند بود، زیرا داریم:

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \quad \text{و} \quad \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

شرط لازم است. اگر $\sin x$ و $\cos x$ گویا باشند، حتماً $tg\frac{x}{2}$ هم گویا است. زیرا داریم:

$$tg\frac{x}{۲}=\frac{sin x}{۱+cos x}$$

درضمن روشن است که مقدارهایی از x را در نظر داریم که، برای آن‌ها، $tg\frac{x}{۲}$ معنا داشته باشد، یعنی $x\neq(۲k+۱)\pi$.

۵۳۶. باید دوقضیهٔ زیر را ثابت کنیم:

I. بافرض $۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}$، $۰<\beta<\frac{\pi}{۲}$، $۰<\gamma<\frac{\pi}{۲}$ و $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ ثابت کنید:

$$cos^۲\alpha+cos^۲\beta+cos^۲\gamma+۲cos\alpha cos\beta cos\gamma=۱$$

II. با فرض $۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}$، $۰<\beta<\frac{\pi}{۲}$، $۰<\gamma<\frac{\pi}{۲}$ و

$$cos^۲a+cos^۲\beta+cos^۲\gamma+۲cos\alpha cos\beta cos\gamma=۱$$

ثابت کنید: $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

اثبات I. به ترتیب داریم:

$$cos^۲\alpha+cos^۲\beta+cos^۲\gamma+۲cos\alpha cos\beta cos\gamma=\frac{۱+cos۲\alpha}{۲}+\frac{۱+cos۲\beta}{۲}+$$

$$+cos^۲\gamma+[cos(\alpha-\beta)+cos(\alpha+\beta)]cos\gamma=۱+cos(\alpha+\beta)cos(\alpha-\beta)+$$

$$+cos(\alpha+\beta)cos\gamma+cos(\alpha-\beta)cos\gamma+cos^۲\gamma=۱+$$

$$+cos(\alpha+\beta)[cos(\alpha-\beta)+cos\gamma]+cos\gamma[cos(\alpha-\beta)+cos\gamma]=$$

$$=۱+[cos(\alpha-\beta)+cos\gamma][cos(\alpha+\beta)+cos\gamma]=۱+[cos(\alpha-\beta)+$$

$$+cos\gamma][cos(\pi-\gamma)+cos\gamma]=۱+[cos(\alpha-\beta)+cos\gamma](-cos\gamma+cos\gamma)=۱$$

اثبات II. برابری مفروض را مثل معادلهٔ درجهٔ دومی نسبت به $cos\alpha$ در نظر می‌گیریم و $cos\alpha$ را به‌دست می‌آوریم:

$$cos\alpha=-cos\beta cos\gamma\pm\sqrt{cos^۲\beta cos^۲\gamma-cos^۲\beta-cos^۲\gamma+۱}=$$

$$=-cos\beta cos\gamma\pm\sqrt{cos^۲\beta(cos^۲\gamma-۱)+۱-cos^۲\gamma}=$$

$$=-cos\beta cos\gamma\pm\sqrt{(۱-cos^۲\gamma)(۱-cos^۲\beta)}=$$

$$=-cos\beta cos\gamma\pm\sqrt{sin^۲\gamma sin^۲\beta}=-cos\beta cos\gamma\pm sin\beta sin\gamma$$

ولی باید ازعلامت منفی درجلوجملهٔ دوم صرف نظر کرد، زیرا با شرط $0<\alpha,\beta,\gamma<\frac{\pi}{2}$
$cos\alpha$ مثبت است، درحالی که $-sin\beta cos\gamma - sin\beta sin\gamma$ مقداری منفی می‌شود. بنابراین، می‌توان نوشت:

$$cos\alpha = -cos\beta cos\gamma + sin\beta sin\gamma = -cos(\beta+\gamma) = cos[\pi-(\beta+\gamma)]$$

چـون $\gamma<\frac{\pi}{2}$ ، $0<\beta$ ، پـس $0<\beta+\gamma<\pi$ ، $0>(\beta+\gamma)->-\pi<-(\beta+\gamma)<0$ و

$\pi>(\beta+\gamma)-\pi>0$. چون، علاوه برآن $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$، از برابری کسینوس‌هـای α و $\pi-(\beta+\gamma)$ به دست می‌آید:

$$\alpha=\pi-(\beta+\gamma)\Rightarrow\alpha+\beta+\gamma=\pi$$

۵۳۷. ازبـرابـری‌های مـفروض، مـی‌توان فـرض کرد: $a=cosx$، $b=sinx$، $\alpha=cosy$، $\beta=siny$. ولی در این صورت

$$|a\alpha+b\beta|=|cosx cosy+sinx siny|=|cos(x-y)|\leqslant 1$$

۵۳۸ تا ۵۶۹. راهنمائی. برخی از تعریف‌هـا و رابطه‌های مربـوط به تابع‌های معکوس مثلثاتی را یادآوری می‌کنیم. درتابع‌مثلثاتی $y=sinx$، زاویهٔ x (یا عدد x)متغیر و x تابع آن است. نقش تابع و متغیر را عوض می‌کنیم. دراین صورت، تـابع جدیدی به دست می‌آیدکه همان تابع معکوس تابع مفروض است. درضمن، تابع جدید را هم با y و متغیر آن را با x نشان می‌دهیم . در این صورت ، برای تابع جدید به‌دست می‌آید: $x=siny$. تابع جدید را آرك سینوس می‌نامیم و این‌طور نشان می‌دهیم:

$$y=Arc\, sinx$$

ضابطه‌های $y=Arc\, sinx$ و $x=siny$ هم‌ارزند و، بنابراین، می‌توان گفت: آرك‌سینوس x عبارت است‌از زاویه‌ای (یا عددی) که سینوس آن برابر x باشد. به‌جای واژهٔ «زاویه»، اغلب از واژهٔ «کمان» استفاده می‌کنند.

ازآن‌جاکه x عبـارت است از سینوس، بنـابراین مقدارهای قابل‌قبول برای آن عبارتند از $-1\leqslant x\leqslant 1$.

بـا معلوم‌بودن سینوس، می‌توان، نه یك زاویه، بلکه بی‌نهایت زاویه به‌دست‌آورد. به‌همین مناسبت می‌گویند که، تابع $y=Arc\, sinx$ بی‌نهایت ارزشی است. مقدار y_1 که متناظر با مقدار x_1 سازگار با شرط $-\frac{\pi}{2}\leqslant y_1\leqslant\frac{\pi}{2}$ باشد، مقدار اصلی تابع $Arcsinx$

و اگــر، y_1 زاویه بــاشد، زاویهٔ اصلی نــامیده می‌شود . مجموعهٔ همهٔ مقدارهای اصلی $Arcsin\,x$، که متناظر با همهٔ مقدارهای x از ۱ — تا ۱+ هستند، شاخهٔ اصلی $Arc\,sin x$ نام دارد و به‌صورت $arcsin x$ نشان داده می‌شود. تابع $y = arc\,sin x$، یك‌ارزشی و در حوزهٔ تعریف خود، یعنی دربازهٔ $[-1, 1]$ صعودی است.

به همین تــرتیب $Arc\,cos x$ ، $Arc\,tg\,x$ و $Arc\,cotg x$ و مقدارهــای اصلی آن‌ها $arccos x$، $arc\,tg x$ و $arc\,cotg x$ تعریف می‌شوند.

تابع $y = arc\,cos x$ معین، یك‌ارزشی ودر بــازهٔ $[-1, 1]$ نزولی است. تــابع $y = arc\,tg x$ معین ، یــك ارزشی و در بــازهٔ $(-\infty, +\infty)$ صعودی است. تــابع $y = arc\,cotg x$ معین، یك‌ارزشی و دربازهٔ $(-\infty, +\infty)$ نزولی است.

برای تابع‌های معکوس مثلثاتی، بستگی‌های زیر وجود دارد:

$$Arc\,sin\,x = k\pi + (-1)^k\,arc\,sin x\,; \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant arc\,sin x \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$Arc\,cos x = 2k\pi \pm arc\,cos\,x, \quad 0 \leqslant arc\,cos x \leqslant \pi;$$

$$Arc\,tg x = k\pi + arctg x, \quad -\frac{\pi}{2} < arc\,tg x < \frac{\pi}{2};$$

$$Arc\,cotg x = k\pi + arc\,cotg x, \quad 0 < arc\,cotg x < \pi;$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$sin(arc\,sin x) = x; \quad cos(arc\,cos x) = x;$$

$$tg(arc\,tg x) = x; \quad cotg(arc\,cotg\,x) = x$$

اگر داشته‌بــاشیم: $sin\alpha = sin\beta$، در ضمن، α و β مقدارهای اصلی متغیر باشند ، آن‌وقت حتماً $\alpha = \beta$. این مطلب، ناشی از یك ارزشی‌بودن تابع $arcsin x$ است. همین مطلب، درمورد بقیهٔ تابع‌های مثلثاتی هم درست است.

۵۳۸. می‌توان. ولی دراین‌صورت، تابع و نمودارآن، ناپیوسته می‌شوند.

۵۳۹. a) فرض‌می‌کنیم: $arcsin x = \alpha$. دراین‌صورت $sin\alpha = x$ و $cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = x$.

چون‌طبق‌تعریف داریم: $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ ، پس $-\frac{\pi}{2} \leqslant -\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ و $0 \leqslant \frac{\pi}{2} - \alpha \leqslant \pi$. از طرف دیگر، همیشه می‌توان نوشت: $x = cos(arc\,cos x)$. به‌این‌ترتیب

$$\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=\cos(arc\cos x) \quad (۰\leqslant arc\cos x\leqslant\pi)$$

چون کسینوس‌های دومقدار اصلی با هم برابرند، باید داشته‌باشیم:

$$\frac{\pi}{۲}-\alpha=arc\cos x؛\ \alpha+arc\cos x=\frac{\pi}{۲}$$

$$arc\sin x+arc\cos x=\frac{\pi}{۲}$$

برابری b) هم به‌همین‌ترتیب ثابت می‌شود.

۵۴۰. a) فرض می‌کنیم $arc\cos(-x)=\alpha$. در این صورت $\cos\alpha=-x$ و $\cos(\pi-\alpha)=x$. چون بنا بر تعریف $۰\leqslant\alpha\leqslant\pi$، پس $۰\leqslant-\alpha\leqslant-\pi$ و $-\pi\leqslant\pi-\alpha\leqslant۰$.
از طرف دیگر داریم: $x=\cos(arc\cos x)$. یعنی

$$\cos(\pi-\alpha)=\cos(arc\cos x)\ ،\ ۰\leqslant arc\cos x\leqslant\pi$$

واز آن‌جا $\pi-\alpha=arc\cos x$، $\alpha=\pi-arc\cos x$ و بالاخره

$$arc\cos(-x)=\pi-arc\cos x$$

برابری b) هم، به‌همین‌ترتیب ثابت می‌شود.

۵۴۱. a) داریم:

$$\sin(arc\cos x)=\sqrt{۱-\cos^۲(arc\cos x)}=\sqrt{۱-x^۲}$$

به‌این جهت علامت جلو رادیکال‌را مثبت گرفته‌ایم که $۰\leqslant arc\cos x\leqslant\pi$. به‌همین‌ترتیب، می‌توان بقیهٔ رابطه‌های این مسأله را هم نتیجه گرفت. مثلاً رابطهٔ d) را ثابت می‌کنیم. می‌نویسیم:

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{۱-\sin^۲\alpha}}$$

قرار می‌دهیم $\alpha=arc\sin x$ و از رابطهٔ $\sin(arc\sin x)=x$ استفاده می‌کنیم. به‌دست می‌آید:

$$tg(arc\sin x)=\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}$$

علامت جلو رادیکال را به‌این جهت مثبت گرفته‌ایم که، برای $-\frac{\pi}{۲}<\alpha<\frac{\pi}{۲}$ ، دو مقدار

$tg\,x$ و $sin\,x$ هم‌علامت‌اند. برای به‌دست آوردن رابطهٔ دیگری که در d) وجود دارد، باید از رابطهٔ $cotg\alpha = \frac{cos\alpha}{\sqrt{1-cos^2\alpha}}$ استفاده کرد، در آن قرار داد $\alpha = arc\,sin\,x$ و رابطهٔ $cos(arccos\,x) = x$ را به‌کار برد.

به‌خودی خود روشن است که، هریك از این رابطه‌ها، حوزهٔ تعریف خودشان را، برای مقدارهای x، دارند. مثلاً، در a داریم $-1 \leqslant x \leqslant 1$ ودر b) و c) همهٔ مقدارهای حقیقی x.

۵۴۲. به‌عنوان نمونه، رابطهٔ c) را ثابت می‌کنیم. برای بقیهٔ رابطه‌ها هم می‌توان به‌همین‌روش اثبات کرد.

I. $sin(arctg\,x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (مسألهٔ ۱۴۱، b) را ببینید). زاویهٔ $arc\,tg\,x$، بین $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ قراردارد وسینوس آن برابر $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ است. ولی درفاصلهٔ از $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{\pi}{2}$، به‌دلیل یك‌ارزشی‌بودن تابع آرك سینوس، تنها یك‌زاویه وجود داردکه سینوس آن برابر $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ است. این زاویه عبارت است از $arc\,sin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. به‌این ترتیب: $arc\,tg\,x = arc\,sin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. این‌رابطه، برای هرمقداری از x، ومنجمله $x>0$، درست است.

II. $cos(arc\,tg\,x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (مسألهٔ ۵۴۱، c) را ببینید). زاویهٔ $arc\,tg\,x$، برای $x \geqslant 0$، در فاصلهٔ بین 0 و $\frac{\pi}{2}$ قرار دارد وکسینوس آن برابر است با $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. ولی در فاصلهٔ از 0 تا $\frac{\pi}{2}$، با توجه به‌یك‌ارزشی‌بودن آرك‌کسینوس، تنها یك زاویه پیدا می‌شود که کسینوس آن برابر $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ است. این زاویه برابر است با $arc\,cos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. به‌این ترتیب، برای $x \geqslant 0$ داریم: $arctg\,x = arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

III. $cotg(arc\,tg\,x) = \frac{1}{x}$. زاویهٔ $arctg\,x$، برای $x>0$، بین 0 و $\frac{\pi}{2}$ قرار دارد

وکتانژانت‌آن برابر $\frac{1}{x}$ است. ولی درفاصلهٔ ۰ تا $\frac{\pi}{2}$، بنـابر یك‌ارزشی بـودن تابع آرك کتانژانت، تنها یك‌زاویه پیدا می‌شود که‌کتانژانت آن برابر $\frac{1}{x}$ است. این‌زاویه‌عبارت‌است از $arc\ cotg\frac{1}{x}$. به این‌ترتیب $arctg\,x = arccotg\frac{1}{x}$.

شرط $x>0$، شکل نوشته را مشروط می‌کند و نقش دیگری نـدارد. مثلاً، اگر رابطه‌های c) به‌صورت برابری‌های پیوسته به هـم نباشند وجدا از یکدیگر در نظرگرفته شوند،ازسه‌برابری که‌دراین‌جامورد‌بررسی‌قراردادیم،تنها برای‌برابری $arctg = arc\ cotg\frac{1}{x}$ شرط $x>0$ لازم است و دو رابطه دیگر در حوزه‌های وسیع‌تـر درست‌اند: رابطهٔ اول برای همهٔ مقدارهای x، ورابطهٔ دوم، برای $x \geqslant 0$.

۵۴۳. داریم:

$$arc\ cos\left(cos\frac{6}{5}\pi\right) = arc\ cos\left[cos\left(2\pi - \frac{6}{5}\pi\right)\right] = arc\ cos\left(cos\frac{4}{5}\pi\right) = \frac{4}{5}\pi$$

درست نیست، اگر بنویسیم:

$$arc\ cos\left(cos\frac{6}{5}\pi\right) = \frac{6}{5}\pi$$

برابری $arccos(cos\alpha) = \alpha$، تنها وقتی درست است‌که زاویهٔ α بین ۰ و π باشد. اگر زاویهٔ α، دربازهٔ $[0, \pi]$ نباشد، آن‌وقت تنها به‌عنوان یکی از مقدارهای $Arc\ cos(cos\alpha)$ به‌حساب می‌آید.

۵۴۴. چـون $-\frac{\pi}{2} \leqslant arc\ sin(sin\,x) \leqslant \frac{\pi}{2}$، پس: ۱) اگـــر داشته بـــاشیم: $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$، داریم: $arcsin(sin\,x) = x$؛ ۲) اگر $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$، آن‌وقت

$$arc\ sin(sin\,x) = arc\ sin[sin(\pi - x)] = \pi - x$$

زیرا دراین‌حالت $-\frac{\pi}{2} \leqslant \pi - x \leqslant \frac{\pi}{2}$؛ ۳) اگـر $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{2}$، آن‌وقت

$$arc\ sin(sin\,x) = arc\ sin[sin(x - 2\pi)] = x - 2\pi$$

زیـرا $-\frac{\pi}{2} \leqslant x - 2\pi \leqslant \frac{\pi}{2}$. به‌طورکلی، اگر $\frac{2k-1}{2}\pi \leqslant x \leqslant \frac{2k+1}{2}\pi$، و یـا

به زبان دیگر، $k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{2}$، آن‌وقت

$$arc\,sin(sin x)=(-1)^{k-1}(k\pi-x)$$

زیرا در این‌حالت

$$sin[(-1)^{k-1}(k\pi-x)]=(-1)^{k-1}sin(k\pi-x)=$$

$$=(-1)^{k-1}.(-1)^{k}\,sin(-x)=-(-1)^{2k-1}sin x=sin x\,;$$

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant(-1)^{k-1}(k\pi-x)\leqslant\frac{\pi}{2}$$

۵۴۵. چون $-\frac{\pi}{2}<arc\,tg(tg\,x)<\frac{\pi}{2}$، بنابراین: ۱) اگر $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$، آن‌وقت $arctg(tgx)=x$ ؛ ۲) اگر $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$، آن‌وقت

$$arc\,tg(tgx)=arctg[tg(x-\pi)]=x-\pi$$

زیرا $-\frac{\pi}{2}<x-\pi<\frac{\pi}{2}$ ؛ ۳) اگر $\frac{3\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{2}$، آن‌وقت

$$arc\,tg(tgx)=arc\,tg[tg(x-2\pi)]=x-2\pi$$

زیرا $-\frac{\pi}{2}<x-2\pi<\frac{\pi}{2}$ ؛ ۴) اگر $-\frac{3\pi}{2}<x<-\frac{\pi}{2}$، آن‌وقت

$$arctg(tgx)=arctg[tg(x+\pi)]=x+\pi$$

زیرا $-\frac{\pi}{2}<x+\pi<\frac{\pi}{2}$. به‌طور کلی، اگر $\frac{2k-1}{2}\pi<x<\frac{2k+1}{2}\pi$، آن‌وقت

$$arc\,tg(tgx)=arc\,tg[tg(x-k\pi)]=x-k\pi$$

زیرا $-\frac{\pi}{2}<x-k\pi<\frac{\pi}{2}$.

۵۴۶. *I*. راه‌حل اول مسأله، براساس استفاده از رابطهٔ

$$sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{1+sin\alpha}-\sqrt{1-sin\alpha}}{2}$$

قرار دارد، که برای $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ درست است. این‌رابطه را ثابت می‌کنیم.

$$\sqrt{1+\sin\alpha}=\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\pm\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

و یا

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{1+\sin\alpha}$$

به‌همین ترتیب به‌دست می‌آید:

$$\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{1-\sin\alpha}$$

ولی با توجه به‌شرط $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$، داریم:

$$\cos\frac{\alpha}{2}\pm\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\mp\frac{\alpha}{2}\right)\geqslant 0$$

یعنی، باید علامت مثبت را در جلو رادیکال‌ها در نظر گرفت. بنابراین به‌دست می‌آید:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}}{2}$$

اگر در این رابطه، فرض کنیم: $\alpha=\arcsin x$ و برابری $\sin(\arcsin x)=x$ را در نظر بگیریم، نتیجه می‌شود:

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2}$$

II. از رابطهٔ $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ استفاده می‌کنیم و همچنین از رابطهٔ

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

فرض کنید $\alpha=\arcsin x$. در این صورت $\cos\alpha=\sqrt{1-x^2}$. و

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}=\frac{\pm\sqrt{1+\sqrt{1-(1-x^2)}}-\sqrt{1-\sqrt{1-(1-x^2)}}}{2}=$$

$$=\pm\frac{\sqrt{1+\sqrt{x^2}}-\sqrt{1-\sqrt{x^2}}}{2}=\pm\frac{\sqrt{1+|x|}-\sqrt{1-|x|}}{2}$$

در حالت $x \geqslant 0$ داریم: $|x| = x$ و $\sqrt{1+x} \geqslant \sqrt{1-x}$ و $x \geqslant 0$. بنابراین، در سمت راست، باید جلو کسر، علامت مثبت را در نظر گرفت:

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{2}$$

در حالت $x < 0$ داریم: $|x| = -x$، $\sqrt{1+x} < \sqrt{1-x}$ و $\alpha < 0$. بنابراین، در سمت راست، باید در جلو کسر، علامت منفی را در نظر گرفت:

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right) = -\frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{2} = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{2}$$

۵۴۷. به‌ترتیب داریم:

$$\arcsin\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} = \arcsin\frac{\sin x - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}{\sqrt{2}} =$$

$$= \arcsin\frac{\sin\frac{3\pi}{4}\sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}} = \arcsin\left[\sin\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)\right] = \frac{3\pi}{4} - x$$

زیر با شرط $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$، داریم: $-\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{4} - x < \frac{\pi}{2}$ (مسالهٔ ۵۵۴).

۵۴۸. $\arctg x = \alpha$ و $\arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \beta$ می‌گیریم و تانژانت سمت چپ برابری مورد اثبات را محاسبه می‌کنیم. به‌دست می‌آید:

$$tg(2\alpha + \beta) = \frac{tg 2\alpha + tg\beta}{1 - tg 2\alpha\, tg\beta};$$

$$tg\alpha = x,\ tg 2\alpha = \frac{2 tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{2x}{1 - x^2};$$

$$\sin\beta = \frac{2x}{1+x^2},\ \cos\beta = \sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\ (x > 1);$$

$$tg\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$tg2\alpha+tg\beta=\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2x}{x^2-1}=0;\ tg(2\alpha+\beta)=0$$

از این‌جا به‌دست می‌آید: $2\alpha+\beta=k\pi$. چون $x>1$، پس $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$، $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ و $0<2\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$. بنابراین نتیجه می‌شود که $k=1$ و $2\alpha+\beta=\pi$.

۵۴۹. از این رابطه استفاده می‌کنیم:

$$sin\frac{3}{2}\alpha=3sin\frac{\alpha}{2}-4sin^3\frac{\alpha}{2}=sin\frac{\alpha}{2}\left(3-4sin^2\frac{\alpha}{2}\right)=sin\frac{\alpha}{2}(1+2cos\alpha)$$

که در آن $\alpha=arcsinx$ می‌گیریم. از آن جا $sin\alpha=x$ و چون $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$، بنابراین $cos\alpha=\sqrt{1-x^2}$. برای محاسبهٔ $sin\frac{\alpha}{2}$، داریم:

$$sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}=\pm\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}}$$

وقتی‌که داشته باشیم $x\geqslant 0$، خواهیم داشت $\alpha\geqslant 0$، به‌نحوی‌که در سمت راست، باید در جلو کسر، علامت مثبت را انتخاب کرد. ازطرف دیگر، برای $x\geqslant 0$ داریم $\sqrt{x^2}=x$ و رابطه به‌این صورت درمی‌آید:

$$sin\frac{\alpha}{2}=\frac{x}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}} \qquad (1)$$

در حالت $x<0$ داریم $\alpha<0$ و در سمت راست برابری، باید در جلو کسر علامت منفی را انتخاب کرد. ولی در این حالت $\sqrt{x^2}=-x$ ودوباره به‌همان رابطهٔ (۱) می‌رسیم. اگر مقدارهای $cos\alpha$ و $sin\frac{\alpha}{2}$ را در رابطهٔ مربوط به $sin\frac{3}{2}\alpha$ قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$sin\left(\frac{3}{2}arcsinx\right)=\frac{x(1+2\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}}$$

۵۵۰. $\alpha=ascsinx$ می‌گیریم، که در آن $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. با این شرط‌ها داریم:

$$\cos\frac{\alpha}{۲}=\sqrt{\frac{۱+\cos\alpha}{۲}};\ \cos\alpha=\sqrt{۱-x^۲}$$

بنا براین

$$\cos\left(\frac{۱}{۲}\arcsin x\right)=\cos\frac{\alpha}{۲}=\sqrt{\frac{۱+\cos\alpha}{۲}}=\sqrt{\frac{۱+\sqrt{۱-x^۲}}{۲}}=$$

$$=\sqrt{\frac{۱-(۱-x^۲)}{۲(۱-\sqrt{۱-x^۲})}}=\frac{|x|}{\sqrt{۲(۱-\sqrt{۱-x^۲})}}$$

۵۵۱. فرض می‌کنیم: $\cos(n\ arc\ \cos x)=T_n$. در رابطهٔ $\cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱$ قرار می‌دهیم: $\alpha=arc\cos x$. در این صورت، با در نظر گرفتن $\cos(arc\cos x)=x$، به‌دست می‌آید: $T_۲=۲x^۲-۱$؛ به‌همین ترتیب، از رابطهٔ $\cos ۳\alpha=۴\cos^۳\alpha-۳\cos\alpha$، به‌دست می‌آید: $T_۳=۴x^۳-۳x$. اکنون، اگر رابطهٔ

$$\cos(n+۱)\alpha=۲\cos n\alpha\cos\alpha-\cos(n-۱)\alpha$$

را در نظر بگیریم، و در آن $\alpha=arc\cos x$ به‌حساب آوریم، به‌این برابری می‌رسیم:

$$T_{n+۱}=۲T_n\cdot x-T_{n-۱}$$

که اگر درآن، n را برابر ۳، ۴، ۵ و ۶ بگیریم و از مقدارهای $T_۲$ و $T_۳$ استفاده کنیم، به‌ترتیب به‌دست می‌آید:

$$T_۴=۸x^۴-۸x^۲+۱;\ T_۵=۱۶x^۵-۲۰x^۳+۵x;$$

$$T_۶=۳۲x^۶-۴۸x^۴+۱۸x^۲-۱;$$

$$T_۷=\cos(۷arc\cos x)=۶۴x^۷-۱۱۲x^۵+۵۶x^۳-۷x$$

۵۵۲. با استفاده از رابطه‌های مسالهٔ ۵۴۱، به‌دست می‌آید:

$$\cos(arctgx+arctgy)=(arctgx)\cdot\cos(arctgy)-$$

$$-\sin(arctgx)\cdot\sin(arctgy)=\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}\cdot\frac{۱}{\sqrt{۱+y^۲}}-$$

$$-\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}\cdot\frac{y}{\sqrt{۱+y^۲}}=\frac{۱-xy}{\sqrt{۱+x^۲}\cdot\sqrt{۱+y^۲}}$$

این رابطه، برای هر مقدار x و y، معنا دارد.

راه حل دیگر این مساله را، در یادداشت مسالهٔ ۵۵۵ ببینید.

۵۵۳. $$tg(۲arcsin x)=\frac{۲tg(arcsin x)}{۱-tg^۲(arcsin x)}=\frac{\frac{۲x}{\sqrt{۱-x^۲}}}{۱-\frac{x^۲}{۱-x^۲}}=\frac{۲x\sqrt{۱-x^۲}}{۱-۲x^۲}$$

در این جا، از رابطه‌های مسالهٔ ۵۴۱ استفاده کردیم. برابری وقتی معنا دارد که داشته باشیم: $-۱\leqslant x\leqslant ۱$ و $x\neq\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ (یادداشت مسالهٔ ۵۵۵ را هم ببینید).

۵۵۴. $$sin(۲arctg x)=۲sin(arctg x)\cdot cos(arctg x)=$$

$$=۲\cdot\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}\cdot\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}=\frac{۲x}{۱+x^۲}$$

این برابری برای همهٔ مقدارهای x معنا دارد (یادداشت مسالهٔ ۵۵۵ را هم ببینید).

۵۵۵. فرض می‌کنیم: $arctg\frac{۱}{۳}=x$ و $arctg۲\sqrt{۳}=y$. با استفاده از تعریف آرك تانژانت، می‌توان نوشت:

$$tg x=\frac{۱}{۳}\text{ ، }tg y=۲\sqrt{۳}$$

بنابراین به دست می‌آید:

$$cos x=\frac{۱}{\sqrt{۱+tg^۲x}}=\frac{۳}{\sqrt{۱۰}};\ sin x=tg x\cdot cos x=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}};$$

$$cos y=\frac{۱}{\sqrt{۱+(۲\sqrt{۳})^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۱۳}}$$

درضمن، علامت جلو رادیکال‌ها را مثبت اختیار کرده‌ایم، زیرا مقدارهای اصلی زاویه‌ها، تانژانت مثبت دارند (این زاویه‌ها، بین ۰ و $\frac{\pi}{۲}$ هستند). حالا می‌توانیم بنویسیم:

$$sin\left(۲arctg\frac{۱}{۳}\right)+cos(arctg۲\sqrt{۳})=sin۲x+cos y=$$

$$=۲sin x cos x+cos y=\frac{۳}{۵}+\frac{۱}{\sqrt{۱۳}}$$

یادداشت. حل این مساله، با استفاده از رابطه‌های مسالهٔ ۵۴۱ ساده‌تر می‌شود. ولی برای استفاده از این رابطه‌ها، یا باید آن‌ها را به خاطر داشت ویـا به‌آن‌ها مراجعه کرد. همهٔ مساله‌های ۵۵۲ تـا ۵۵۴ را با استفاده از رابطه‌هـای مسالهٔ ۵۴۱ حل کردیم، ولـی می‌توان آن‌ها را، با استفاده از روشی که در این‌جا آوردیم، حل کرد.

۵۵۶. $arctg\frac{۳}{۴}=x$ ، $arcsin\frac{۵}{۱۳}=y$ می‌گیریم. بـا استفاده از تعریف‌هـای آرك تانژانت و آرك سینوس می‌توان نوشت:

$$tg\,x=\frac{۳}{۴} ، sin\,y=\frac{۵}{۱۳}$$

به این ترتیب، خواهیم داشت:

$$cos\,x=\frac{۱}{\sqrt{۱+tg^{۲}x}}=\frac{۴}{۵}\ ;\ \ sin\,x=tg\,x\cdot cos\,x=\frac{۳}{۵}\ ;$$

$$cos\,y=\sqrt{۱-sin^{۲}y}=\frac{۱۲}{۱۳}$$

از آن‌جا که $\circ<x,y<\frac{\pi}{۲}$، علامت جلو رادیکال‌ها را مثبت گرفته‌ایم. اکنون داریم:

$$sin\left(۲\,arctg\frac{۳}{۴}\right)+tg\left(\frac{۱}{۲}arcsin\frac{۵}{۱۳}\right)=sin\,۲x+tg\frac{y}{۲}=$$

$$=۲\,sin\,x\,cos\,x+\frac{sin\,y}{۱+sin\,y}=\frac{۲۴}{۲۵}+\frac{۵}{۲۵}=\frac{۲۹}{۲۵}$$

۵۵۷. $arccos\frac{۱}{\sqrt{۲}}=x=\frac{\pi}{۴}$ ، $arctg\frac{۱}{\sqrt{۲}}=y$ مـی‌گیریـم، یعـنی $tg\,x=۱$ و $tg\,y=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$. اکنون تانژانت سمت چپ برابری مفروض را محاسبه می‌کنیم:

$$tg\left(arccos\frac{۱}{\sqrt{۲}}+arctg\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=tg(x+y)=\frac{tg\,x+tg\,y}{۱-tg\,x\,tg\,y}=\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}-۱}$$

بنابراین: $x+y=k\pi+arctg\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}-۱}$، که درآن k عددی درست یا صفراست.ولی می‌دانیم: $x=\frac{\pi}{۴}$ ، $\circ<y<\frac{\pi}{۴}$؛ بنابراین $\circ<x+y<\frac{\pi}{۲}$ ، در نتیجه ، k تنها می‌تواند

برابر صفر شود. به این ترتیب $x+y=arctg\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}-۱}$.

۵۵۸. تانژانت عبارت مفروض را محاسبه می کنیم. داریم:

$$tg(arctg۲+arctg۳)=\frac{tg(arctg۲)+tg(arctg۳)}{۱-tg(arctg۲)\cdot tg(arctg۳)}=-۱$$

یعنی $arctg۲+arctg۳=k\pi-\frac{\pi}{۴}$؛ k عددی است درست یا صفر. ولی

$$\frac{\pi}{۴}<arctg۲<\frac{\pi}{۲}\ ,\ \frac{\pi}{۴}<arctg۳<\frac{\pi}{۲};$$

$$\frac{\pi}{۲}<arctg۲+arctg۳<\pi$$

و بین $\frac{\pi}{۲}$ و π، تنها يك عدد وجود داردکـه، تانژانت آن، برابر ۱ — است: $\frac{۳\pi}{۴}$. درنتیجه

$$arctg۲+arctg۳=\frac{۳\pi}{۴}$$

۵۵۹. $arcsinx=y$ می گیریم، یعنی $siny=x$ و $sin۲y=۲x\sqrt{۱-x^۲}$

$$۲y=k\pi+(-۱)^k arcsin۲x\sqrt{۱-x^۲}$$

k عددی است درست یا صفر. ولی از شرط $x^۲<\frac{۱}{۲}$ نتیجه می‌شود:

$$-\frac{۱}{\sqrt{۲}}<x<\frac{۱}{\sqrt{۲}};\ -\frac{\pi}{۴}<y<\frac{\pi}{۴};\ -\frac{\pi}{۲}<۲y<\frac{\pi}{۲}$$

و بنابراین $k=۰$. از این‌جا به دست می‌آید:

$$۲y=۲arcsinx=arcsin۲x\sqrt{۱-x^۲}$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$arcsinx+۳arc\times x+arcsin۲x\sqrt{۱-x^۲}=۳(arcsinx+arccosx)=\frac{۳\pi}{۴}$$

این مساله را به‌کمك رابطهٔ مسألهٔ ۵۶۰ هم می‌توان حل‌کرد.

۵۶۰. $arcsinx=\alpha$ و $arcsiny=\beta$ می گیریم. یعنی

$$\sin\alpha = x\ ;\ \cos\alpha = \sqrt{1-x^2}\ ;\ \sin\beta = y\ ;\ \cos\beta = \sqrt{1-y^2}$$

علامت جلو رادیکال‌ها را به‌این دلیل مثبت گرفته‌ایم که α و β بین $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ هستند و کسینوس چنین زاویه‌هایی مثبت است. اکنون از رابطهٔ سینوس مجموع دو زاویه استفاده می‌کنیم:

$$\sin(\arcsin x + \arcsin y) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\ ;$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$\alpha+\beta = k\pi + (-1)^k \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$$

k عددی است درست یا صفر. ولی

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\ ,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$$

و $\alpha+\beta$ دریکی از رابطه‌های زیر صدق می‌کند:

$$1)\ -\pi \leqslant \alpha+\beta < -\frac{\pi}{2}\ ;\ \ 2)\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha+\beta \leqslant \frac{\pi}{2}\ ;$$

$$3)\ \frac{\pi}{2} < \alpha+\beta \leqslant \pi$$

به‌سادگی می‌توان روشن کرد که، مقدار k، برای حالت‌های ۱)، ۲)و۳)، به ترتیب برابر است با ۱ —، ۰، ۱. به نحوی که خواهیم داشت.

$$I.\ \ \alpha+\beta = -\pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2});$$

$$II.\ \ \alpha+\beta = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2});$$

$$III.\ \ \alpha+\beta = \pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

این سه رابطه را می‌توان با یك رابطهٔ زیر نشان داد:

$$\arcsin x + \arcsin y = \eta \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) + \varepsilon\pi$$

درضمن $\eta = 1$، $\varepsilon = 0$ برای‌رابطهٔ II؛ $\eta = -1$، $\varepsilon = -1$ برای رابطهٔ I؛ $\eta = -1$، $\varepsilon = 1$ برای رابطهٔ III. ببینیم چه رابطه‌ای بین xوy وجود داشته باشد تا این رابطه‌ها برقرار باشند.

a) به‌ازای $\eta=1$، $\varepsilon=0$، یعنی برقرار بودن رابطهٔ ۲)، داریم: $\cos(\alpha+\beta)\geqslant 0$
عکس این حکم هم درست است: اگر $\cos(\alpha+\beta)\geqslant 0$، آن وقت رابطهٔ ۲) برقرار است و، بنابراین، $\eta=1$، $\varepsilon=0$. ولی

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}-xy$$

بنابراین، برای این‌که داشته باشیم $\cos(\alpha+\beta)\geqslant 0$ لازم و کافی است که

$$\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}-xy\geqslant 0 \qquad (*)$$

در حالت $xy\leqslant 0$، این نابرابری همیشه برقرار است. درحالت $xy>0$ وقتی برقرار است که داشته باشیم: $1-x^2-y^2\geqslant 0$، یعنی $x^2+y^2\leqslant 1$. این بحث وقتی روشن می‌شود که نابرابری (*) را این طور بنویسیم:

$$\sqrt{1-x^2-y^2+x^2y^2}\geqslant xy$$

b) اکنون فرض می‌کنیم: $\eta=-1$، $\varepsilon=-1$ یا $\eta=-1$، $\varepsilon=1$، یعنی رابطه‌های ۱) یا ۳) برقرار باشند. برای این منظور، لازم وکافی است داشته باشیم $\cos(\alpha+\beta)<0$ یا

$$\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}-xy<0$$

در این‌جا $xy>0$. اگر نابرابری را به این صورت بنویسیم:

$$\sqrt{1-x^2-y^2+x^2y^2}<xy$$

قانع می‌شویم که باید $1-x^2-y^2<0$ یعنی $x^2+y^2>1$ باشد. اگر توجه کنیم که رابطهٔ ۱) تنها وقتی برقرار است که α و β و، درنتیجه، x و y منفی باشند؛ و رابطهٔ ۳) برای α و β و درنتیجه x و y مثبت برقرار است، آن وقت می‌توان گفت که $\eta=-1$، $\varepsilon=-1$ برای $x^2+y^2>1$ و $x<0$ و $y<0$؛ و $\eta=-1$، $\varepsilon=1$ برای $x^2+y^2>1$ و $x>0$ و $y>0$ صدق می‌کنند.

۵۶۱. برای ساده کردن عبارت $\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}$ از رابطهٔ ۵۶۰ استفاده می‌کنیم. چون داریم: $\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{5}{13}\right)^2<1$، باید درآن رابطه $\eta=1$ ، $\varepsilon=0$ بگیریم. به این ترتیب

$$\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}=$$

$$=arcsin\left(\frac{۴}{۵}\sqrt{۱-\frac{۲۵}{۱۶۹}}+\frac{۵}{۱۳}\sqrt{۱-\frac{۱۶}{۲۵}}\right)=arcsin\frac{۶۳}{۶۵}$$

آرك سینوس حاصل را به آرك کسینوس تبدیل می کنیم. این کار را می توان به کمك رابطه‌ای که درمسالهٔ ۵۴۲ به دست آوردیم، یعنی $arcsin x = arc\cos\sqrt{۱-x^۲}$ انجام داد $\left(\frac{۶۳}{۶۵}>۰\right)$. به دست می آید:

$$arcsin\frac{۶۳}{۶۵}=arccos\sqrt{۱-\left(\frac{۶۳}{۶۵}\right)^۲}=arccos\frac{۱۶}{۶۵}$$

به این ترتیب داریم:

$$arcsin\frac{۴}{۵}+arcsin\frac{۵}{۱۳}+arcsin\frac{۱۶}{۶۵}=arccos\frac{۱۶}{۶۵}+arcsin\frac{۱۶}{۶۵}=\frac{\pi}{۲}$$

یادداشت ۱. این که برای جمع دو آرك سینوس، می‌توان از رابطهٔ

$$arcsin x+arcsin y=arcsin(x\sqrt{۱-y^۲}+y\sqrt{۱-x^۲})$$

استفاده کرد، برمبنای دیگری هم قابل اثبات است. رابطهٔ اخیر وقتی درست که داشته‌باشیم:

$$-\frac{\pi}{۲}\leqslant arcsin x+arcsin y\leqslant\frac{\pi}{۲}$$

در مساله ما داریم:

$$arcsin\frac{۴}{۵}<arcsin\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\pi}{۳}\ ;\ arcsin\frac{۵}{۱۳}<arcsin\frac{۱}{۲}=\frac{\pi}{۶}$$

و بنابراین:

$$arcsin\frac{۵}{۴}+arcsin\frac{۵}{۱۳}<\frac{\pi}{۲}$$

یادداشت ۲. به خودی خود روشن است که این مساله را می توانستیم، بدون یاری گرفتن از رابطهٔ ۵۶۰، وتنها با استفاده از تعریف تابع‌های معکوس مثلثاتی ومقدار اصلی آن‌ها، حل کنیم. برای این منظور، می‌توان این طورعمل کرد: فرض می کنیم:

$$arcsin\frac{۴}{۵}=\alpha\ ;\ arcsin\frac{۵}{۱۳}=\beta$$

سپس $sin\alpha$، $cos\alpha$، $sin\beta$، $cos\beta$ را پیدا می کنیم و در رابطهٔ سینوس مجموع دوکمان قرار

می‌دهیم. از این راه به دست می آید:

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{۶۳}{۶۵}\Rightarrow \alpha+\beta=k\pi+(-۱)^k\arcsin\frac{۶۳}{۶۵}$$

که با توجه به شرط $۰<\alpha+\beta<\frac{\pi}{۲}$ معلوم می‌شود: $k=۰$. اکنون ، با همین روش $\arcsin\frac{۶۳}{۶۵}$ را با $\arcsin\frac{۱۶}{۶۵}$ جمع می کنیم و به نتیجهٔ اثبات اتحاد می‌رسیم.

مسالهٔ ۵۴۸ را با همین روش حل کردیم.

۵۶۲. با استفاده از رابطهٔ $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{۲}$ می‌توان نوشت :

$$\arccos x+\arccos\left(\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۲}\sqrt{۳-۳x^۲}\right)=\pi-\arcsin x-\arcsin\left(\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۲}\sqrt{۳-۳x^۲}\right)$$

از رابطهٔ مسالهٔ ۵۶۰ استفاده می کنیم. برای روشن کردن مقدارهای η و ε، مجموع مجذورهای متغیرها را محاسبه می کنیم:

$$x^۲+\left(\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۲}\sqrt{۳-۳x^۲}\right)^۲=\frac{۳}{۴}+\frac{x^۲}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}x\sqrt{۱-x^۲}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{۳}{۴}+\frac{x^۲}{۲}+\frac{۱}{۲}(۱-x^۲)=\frac{۵}{۴}>۱$$

زیرا از $x\geqslant\frac{۱}{۲}$ نتیجه می‌شود: $۴x^۲\geqslant۱$ ، $۳x^۲\geqslant۱-x^۲$ ، $\sqrt{۳}x\geqslant\sqrt{۱-x^۲}$

و بالاخره

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲}x\sqrt{۱-x^۲}\geqslant\frac{۱}{۲}(۱-x^۲)$$

چون، علاوه‌براین، متغیرها، مقدارهایی مثبت‌اند، بنابراین $\eta=-۱$ و $\varepsilon=۱$. به‌این‌ترتیب

$$\arcsin x+\arcsin\left(\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۲}\sqrt{۳-۳x^۲}\right)=\pi-$$

$$-\arcsin\left[x\sqrt{۱-\left(\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۲}\sqrt{۳-۳x^۲}\right)^۲}+\sqrt{۱-x^۲}\left(\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۲}\sqrt{۳-۳x^۲}\right)\right]$$

ولی $۱-\left(\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۲}\sqrt{۳-۳x^۲}\right)^۲=\frac{۱}{۴}(\sqrt{۳}x-\sqrt{۱-x^۲})^۲$ و چون $\sqrt{۳}x\geqslant\sqrt{۱-x^۲}$،

پس $\frac{1}{2}(\sqrt{3}x-\sqrt{1-x^2})$ $=\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right)^2}$.

بنا براین

$$arcsin x + arcsin\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right)=$$

$$=\pi - arcsin\left[\frac{x}{2}(\sqrt{3}x-\sqrt{1-x^2})+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right)\sqrt{1-x^2}\right]=\pi-arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

و در نتیجه

$$arccos x + arccos\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right)=\pi-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$$

یادداشت: راه حل کوتاه‌تری هم وجود دارد که، در آن، لزومی به کمک گرفتن از رابطهٔ مسالهٔ ۵۶۰ نیست. در واقع توجه می‌کنیم که:

$$sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}،\ cos(arccos x)=x،\ sin(arccos x)=\sqrt{1-x^2}$$

می‌توان نوشت:

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2}=cos\left(\frac{\pi}{3}-arccos x\right);$$

$$arccos x+arccos\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right)=arccos x+$$

$$+arccos\left[cos\left(\frac{\pi}{3}-arccos x\right)\right]=arccos x+\frac{\pi}{3}-arccos x=\frac{\pi}{3}$$

زیرا $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$، $0\leqslant arccos x\leqslant\frac{\pi}{3}$ و $0<\frac{\pi}{3}-arccos x<\frac{\pi}{3}$.

حل مسلهٔ ۵۴۳ را هم ببینید.

۵۶۳. $arctg x=\alpha$ و $arctg y=\beta$ فرض می‌کنیم، یعنی $tg\alpha=x$ و $tg\beta=y$. با استفاده از تانژانت مجموع دو زاویه، به‌دست می‌آید:

$$tg(arctgx+arctg\,y)=tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}=\frac{x+x}{1-xy}$$

ازاین‌جا نتیجه می‌شود:

$$\alpha+\beta=k\pi+arctg\frac{x+y}{1-xy}$$

k عددی است درست یا صفر. ولی $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ و $-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$، پس مجموع $\alpha+\beta$ با یکی ازسه‌حالت زیرسازگاراست:

$$1)\quad -\pi<\alpha+\beta<-\frac{\pi}{2}\,;\quad 2)\ -\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}\,;\ 3)\quad \frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$$

به‌سادگی‌معلوم‌می‌شود که حالت‌های ۱)، ۲) و۳) متناظرندبا $k=-1$، $k=0$ و $k=1$.
به این رابطه‌ها می‌رسیم:

$$I.\ \ \alpha+\beta=-\pi+arctg\frac{x+y}{1-xy};\quad II.\ \ \alpha+\beta=arctg\frac{x+y}{1-xy};$$

$$III.\ \ \alpha+\beta=\pi+arctg\frac{x+y}{1-xy}$$

این سه رابطه را می‌توان، به‌صورت یك رابطه نوشت:

$$arctgx+arctg\,y=arctg\frac{x+y}{1-xy}+\varepsilon\pi$$

درضمن، $\varepsilon=0$ برای رابطهٔ ۲)؛ $\varepsilon=1$ برای رابطهٔ ۱)؛ $\varepsilon=1$ بـرای رابطهٔ ۳). ببینیم، چه رابطه‌ای بین x و y باشد، تا این رابطه‌ها برقرار باشند.

$a)$ $\varepsilon=0$ مـی گیریم، یـعنی فرض می کنیم رابطهٔ ۲) برقرار باشد. درایـن صورت $cos(\alpha+\beta)>0$. عکس‌این‌حکم هم درست است، یعنی اگر $cos(\alpha+\beta)>0$، آن‌وقت، رابطهٔ ۲) هم برقراراست و بنابراین $\varepsilon=0$. ولی

$$cos(\alpha+\beta)=cos\alpha cos\beta-sin\alpha sin\beta$$

وچون $tg\alpha=x$ ،$tg\beta=y$، بنابراین

$$cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+x_2}};\quad sin\alpha=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}};\quad cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}};\quad sin\beta=\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$

و در نتیجه $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}}$.

به این‌ترتیب، برای برقراری نابرابری $\cos(\alpha+\beta)>0$، لازم وکافی است داشته باشیم:

$$\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}}>0 \Rightarrow xy<1$$

یادآوری‌می‌کنیم که ضمن محاسبهٔ $\cos\alpha$ و $\cos\beta$، جلو رادیکال را بـا علامت مثبت انتخاب‌کردیم، زیرا $-\frac{\pi}{2}<\alpha$ و $\beta<\frac{\pi}{2}$، و دراین فاصله، مقدارکسینوس مثبت است.

b) اکنون $\varepsilon=-1$ یا $\varepsilon=1$ می‌گیریم؛ یعنی رابطهٔ ۱) یا رابطهٔ ۳) برقرار باشد. به‌سادگی دیده می‌شودکه، برای این منظور، لازم وکافی است داشته باشیم:

$$\cos(\alpha+\beta)<0 \Rightarrow \frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}}<0 \Rightarrow xy>1$$

اگر به‌این نکته توجه کنیم که رابطهٔ ۱) وقتی وتنها وقتی برقراراست کـه α و β ودرنتیجه x و y منفی باشند؛ همچنین رابطهٔ ۳) وقتی وتنها وقتی بـرقراراست که α و β و درنتیجه x و y مثبت باشند، آن وقت می‌توان گفت که با شرط $xy>1$ و $x<0$ داریم $\varepsilon=-1$ وبا شرط $xy>1$ و $x>0$ داریم $\varepsilon=1$.

۵۶۴. در رابطهٔ مسالهٔ ۵۶۳ فرض می‌کنیم: $x=y=\frac{2}{3}$ و توجه می‌کنیم که، در این حالت، $xy<1$. به دست می‌آید: $2\,arc\,tg\frac{2}{3}=arc\,tg\frac{12}{5}$، ولی

$$arc\,tg\frac{12}{5}\,arc\cos\frac{1}{\sqrt{1+\frac{144}{25}}}=arc\cos\frac{5}{13} \qquad \text{(مسالهٔ ۵۴۲، c)}$$

بنابراین

$$arc\sin\frac{5}{13}+2\,arc\,tg\,\frac{2}{3}=arc\sin\frac{5}{13}+arc\cos\frac{5}{13}=\frac{\pi}{2}$$

یادداشت. ایـن مساله را بـدون استفاده از رابطهٔ مجموع آرك تانـژانت‌هـا هم

می‌توان حل کرد. برای این منظور، کافی است ثابت کنیم: $sin(\alpha+۲\beta)=۱$، که در آن، $\alpha=arc\,sin\frac{۵}{۱۳}$ و $\beta=arc\,tg\frac{۲}{۳}$. ازاین‌جا می‌توان نتیجه گرفت: $\alpha+۲\beta=\frac{\pi}{۲}$.

۵۶۵. اگر در رابطهٔ مسالهٔ ۵۶۳ فرض کنیم: $x=\frac{۱}{۳}$، $y=\frac{۱}{۵}$ و توجه کنید که $xy<۱$ به‌دست می‌آید:

$$arc\,tg\frac{۱}{۳}+arc\,tg\frac{۱}{۵}=arc\,tg\frac{\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}}{۱-\frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{۵}}=arc\,tg\frac{۴}{۷}$$

این مقدار را به $arc\,tg\frac{۱}{۷}$ می‌افزاییم و دوباره ازهمان رابطه استفاده می‌کنیم ($x=\frac{۴}{۷}$ و $y=\frac{۱}{۷}$):

$$arc\,tg\frac{۴}{۷}+arc\,tg\frac{۱}{۷}=arc\,tg\frac{۷}{۹}$$

بالاخره، این مقدار را با $arctg\frac{۱}{۸}$ جمع می‌کنیم؛ نتیجهٔ کار چنین‌است:

$$arc\,tg\frac{۱}{۳}+arc\,tg\frac{۱}{۵}+arc\,tg\frac{۱}{۷}+arc\,tg\frac{۱}{۸}=arc\,tg\frac{۷}{۹}+arc\,tg\frac{۱}{۸}=arctg\,۱=\frac{\pi}{۴}$$

یادداشت. مساله را می‌توان، بدون استفاده از رابطهٔ مربوط به‌مجموع آرک‌تانژانت‌ها، وبا استفاده از روش حل مسالهٔ ۵۵۸ حل کرد.

۵۶۶. سه بار از رابطهٔ مجموع آرک تانژانت‌ها، برای حالت $xy<۱$، استفاده می‌کنیم:

$$۴\,arctg\frac{۱}{۵}=۲\left(arc\,tg\frac{۱}{۵}+arc\,tg\frac{۱}{۵}\right)=۲arc\,tg\frac{۵}{۱۲}=$$

$$=arc\,tg\frac{۵}{۱۲}+arc\,tg\frac{۵}{۱۲}=arc\,tg\frac{۱۲۰}{۱۱۹};$$

$$۴\,arc\,tg\frac{۱}{۵}-arc\,tg\frac{۱}{۲۳۹}=arc\,tg\frac{۱۲۰}{۱۱۹}=arc\,tg\left(-\frac{۱}{۲۳۹}\right)=arc\,tg\,۱=\frac{\pi}{۴}$$

۵۶۷. $۲arctg۱۰$ را، بنابر رابطهٔ مجموع آرک تانژانت‌ها. ($x=y=۱۰$، $xy>۱$، $x>۰$) تبدیل و $arc\,sin\frac{۲۰}{۱۰۱}$ را، به کمك رابطهٔ مسالهٔ ۵۴۲، a)، به آرك تانژانت تبدیل می کنیم:

$$۲arc\,tg۱۰+arcsin\frac{۲۰}{۱۰۱}=\left(\pi+arc\,tg\frac{۲۰}{-۹۹}\right)+arc\,tg\frac{۲۰}{۹۹}=$$

$$=\pi-arctg\frac{۲۰}{۹۹}+arc\,tg\frac{۲۰}{۹۹}=\pi$$

یادداشت. مساله را می‌توان به‌این ترتیب حل کرد که ثابت کنیم: $sin(۲\alpha+\beta)=۰$ که‌در آن‌داریم: $\alpha=arctg۱۰$ و $\beta=arcsin\frac{۲۰}{۱۰۱}$. از آن‌جا نتیجه‌می شود: $۲\alpha+\beta=k\pi$ وتنها این باقی می‌ماندکه ثابت کنیم: $k=۱$.

۵۶۸. براساس رابطهٔ $arctg\,x+arccotg\,x=\frac{\pi}{۲}$، به‌دست می آید:

$$arctgx=\frac{\pi}{۲}-arccotgx$$

چون دراین‌جا $x>۰$، پس $arc\,cotgx=arctg\frac{۱}{x}$ و داریم:

$$arctgx=\frac{\pi}{۲}-arccotgx=\frac{\pi}{۲}-arc\,tg\frac{۱}{x}$$

۵۶۹. داریم: $arctgx=\frac{\pi}{۲}-arc\,cotgx$. ولی $arccotgx=\pi-arc\,cotg(-x)$ (مسالهٔ ۵۴۰، b) و $arc\,cotg(-x)=arctg\frac{۱}{-x}$ (مسالهٔ ۵۴۲، d)، زیرا $x<۰$ و بنابراین $-x>۰$. اکنون دیگرداریم:

$$arctgx=\frac{\pi}{۲}-arccotg\,x=\frac{\pi}{۲}-[\pi-arc\,cotg(-x)]=$$

$$=\frac{\pi}{۲}-\pi+arc\,tg\frac{۱}{-x}=-\frac{\pi}{۲}-arc\,tg\frac{۱}{x}$$

۵۷۰. به ترتیب داریم:

$$sin x sin ۲x sin ۳x = \frac{۱}{۲} sin ۲x cos ۲x;$$

$$sin ۲x(۲ sin x sin ۳x - cos ۲x) = ۰;$$

$$sin ۲x(cos ۲x - cos ۴x - cos ۲x) = ۰; \quad sin ۲x cos ۴x = ۰$$

$$a)\ sin ۲x = ۰;\ ۲x = k\pi;\ x_۱ = \frac{۱}{۲}k\pi$$

$$b)\ cos ۴x = ۰;\ ۴x = \frac{۲k+۱}{۲}\pi;\ x_۲ = \frac{۲k+۱}{۸}\pi$$

۵۷۱. $۳(۱ - sin x) = ۲ cos^۲ x;\ ۳(۱ - sin x) = ۲(۱ - sin^۲ x)$;

$$(۱ - sin x)(۱ - ۲ sin x) = ۰$$

$$a)\ ۱ - sin x = ۰;\ sin x = ۱;\ x_۱ = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} = \frac{۴k+۱}{۲}\pi;$$

$$b)\ ۱ - ۲ sin x = ۰;\ sin x = \frac{۱}{۲}; \quad x_۲ = k\pi + (-۱)^k \cdot \frac{\pi}{۶}$$

۵۷۲. $$\frac{sin\frac{۳}{۵}x\, cos\frac{۵}{۳}x}{cos\frac{۳}{۵}x\, sin\frac{۵}{۳}x} = ۱ - \frac{۱}{cos\frac{۳}{۵}x\, sin\frac{۵}{۳}x};$$

$$cos\frac{۳}{۵}x\, sin\frac{۵}{۳}x - sin\frac{۳}{۵}x\, cos\frac{۵}{۳}x = ۱;$$

$$sin\left(\frac{۵}{۳}x - \frac{۳}{۵}x\right) = sin\frac{۱۶}{۱۵}x = ۱; \quad \frac{۱۶}{۱۵}x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲};$$

$$\frac{۱۶}{۱۵}x = \frac{۴k+۱}{۲}\pi،\ x = \frac{۱۵}{۳۲}(۴k+۱)\pi$$

۵۷۳. $$sin(x - ۲۰^\circ)cos[۹۰^\circ - (x + ۲۵^\circ)] =$$

$$= cos[۹۰^\circ - (۷۰^\circ + x)]sin(۶۵^\circ - x);$$

$$\sin(x-20^\circ)\cos(65^\circ-x)-\cos(x-20^\circ)\sin(65^\circ-x)=0;$$

$$\sin(2x-85^\circ)=0; 2x-85^\circ=180^\circ k;$$

$$2x=180^\circ k+85^\circ; \quad x=90^\circ k+42/5^\circ$$

۵۷۴. داریم $tg(x+30^\circ)tg(x-60^\circ)=cotg(60^\circ-x)\cdot tg(x-60^\circ)=-1$

و روشن است که این معادله، جواب ندارد.

۵۷۵. $$\sin 2x+\sin x+1+\cos 2x+\cos x=0;$$

$$2\sin x\cos x+\sin x+2\cos^2 x+\cos x=0;$$

$$\sin x(2\cos x+1)+\cos x(2\cos x+1)=0;$$

$$(2\cos x+1)(\sin x+\cos x)=0;$$

$$a)\ 2\cos x+1=0; \quad \cos x=-\frac{1}{2}; \quad x_1=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3};$$

$$b)\ \sin x+\cos x=0; \quad tg x=-1; \quad x_2=k\pi-\frac{\pi}{4}$$

۵۷۶. $$\sin 2x+2\sin 2x\cos x=\cos x+2\cos^2 x;$$

$$\sin 2x(1+2\cos x)=\cos x(1+2\cos x);$$

$$\cos x(1+2\cos x)(2\sin x-1)=0;$$

$$a)\ 1+2\cos x=0, \quad x_1=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3};$$

$$b)\ \cos x=0, \quad x_2=\frac{2k+1}{2}\pi;$$

$$c)\ 2\sin x-1=0, \quad x_3=k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}$$

۵۷۷. $$\sin 3x+\sin x-\cos x=0; \quad 2\sin 2x\cos x-\cos x=0;$$

$$\cos x(2\sin 2x-1)=0$$

$$a)\ \cos x=0; \quad x_1=\frac{2k+1}{2}\pi;$$

$$b)\ \ ۲\sin x - ۱ = ۰;\ \ \sin ۲x = \frac{۱}{۲};\ \ x_۲ = \frac{۱}{۲}k\pi + (-۱)^k \cdot \frac{\pi}{۱۲}$$

$$\cos ۷x + \cos x - (\cos^۲ ۲x - \sin^۲ ۲x) = ۰;$$ ۵۷۸.

$$۲\cos ۴x \cos ۳x - \cos ۴x = ۰;\ \ \cos ۴x(۲\cos ۳x - ۱) = ۰;$$

$$a)\ \ \cos ۴x = ۰;\ \ x_۱ = \frac{۲k+۱}{۸}\pi;$$

$$b)\ \ ۲\cos ۳x - ۱ = ۰;\ \ x_۲ = \frac{۲}{۳}k\pi \pm \frac{\pi}{۹}$$

$$\sin x \cos x(\sin^۲ x - \cos^۲ x) = \frac{۱}{۴};\ \ \ -\frac{۱}{۲}\sin ۲x \cos ۲x = \frac{۱}{۴};$$ ۵۷۹.

$$\sin ۴x - ۱;\ \ ۴x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲};\ x = \frac{۴k-۱}{۸}\pi$$

$$۲\cos ۴x \cos x + ۲\sin ۴x \cos x = ۲\Big(\cos\frac{\pi}{۴}\cos ۴x +$$ ۵۸۰.

$$+\sin\frac{\pi}{۴}\sin ۴x\Big);\ \ \cos x(\cos ۴x + \sin ۴x) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos ۴x + \sin ۴x);$$

$$(\cos ۴x + \sin ۴x)\left(\cos x - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = ۰$$

$$a)\ \ \cos ۴x + \sin ۴x = ۰،\ \ \ tg ۴x = -۱;\ \ \ x_۱ = \frac{۴k-۱}{۱۶}\pi;$$

$$b)\ \ \ \cos x - \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰;\ \ \ x_۲ = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۴} = \frac{۸k\pm۱}{۴}\pi$$

$$(\sin x + \sin ۳x) + (\sin ۲x + \sin ۴x) = ۰;$$ ۵۸۱.

$$۲\sin ۲x \cos x + ۲\sin ۳x \cos x = ۰;\ \ \cos x(\sin ۲x + \sin ۳x) = ۰;$$

$$۲\cos x \sin\frac{۵x}{۲}\cos\frac{x}{۲} = ۰$$

$$a)\ \ \cos x = ۰;\ \ x_۱ = \frac{۲k+۱}{۲}\pi;$$

$$b)\ \sin\frac{۵x}{۲}=۰;\ \ x_۲=\frac{۲}{۵}k\pi;$$

$$c)\ \cos\frac{x}{۲}=۰;\ \ x_۳=(۲k+۱)\pi$$

$$\frac{۱}{۲}(\cos ۲x-\cos ۴x)=\frac{۱}{۲};\ \ \cos ۲x-\cos ۴x-۱=۰;$$ ۵۸۲.

$$\cos ۲x-۲\cos^۲ ۲x=۰;\ \ \cos ۲x(۱-۲\cos ۲x)=۰;$$

$$a)\cos ۲x=۰;\ \ x_۱=\frac{۲k+۱}{۴}\pi;$$

$$b)\ ۱-۲\cos ۲x=۰;\ \ x_۲=\frac{۶k\pm ۱}{۶}\pi$$

$$\cos^۲ x\cos x\sin ۳x+\sin^۲ x\sin x\cos ۳x=\frac{۳}{۴};$$ ۵۸۳.

$$\frac{۱}{۲}\cos^۲ x(\sin ۴x+\sin ۲x)+\frac{۱}{۲}\sin^۲ x(\sin ۴x-\sin ۲x)=\frac{۳}{۴};$$

$$\sin ۴x(\cos^۲ x+\sin^۲ x)+\sin ۲x(\cos^۲ x-\sin^۲ x)=\frac{۳}{۲};$$

$$\sin ۴x+\frac{۱}{۲}\sin ۴x=\frac{۳}{۲};\ \ \sin ۴x=۱;\ \ x=\frac{۴k+۱}{۸}\pi$$

$$\frac{۱}{۲}(\cos x-\cos ۳x)+\frac{۱}{۲}(۱+\cos ۲x)=\frac{۱}{۲}(\cos x-\cos ۹x)+$$ ۵۸۴.

$$+\frac{۱}{۲}(۱+\cos ۸x);\ \ \cos ۲x-\cos ۳x+\cos ۹x-\cos ۸x=۰;$$

$$۲\sin ۵x\sin ۳x-۲\sin ۶x\sin ۳x=۰;\ \ ۲\sin ۳x\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{۱۱x}{۲}=۰;$$

$$a)\ \sin ۳x=۰;\ \ x_۱=\frac{۱}{۳}k\pi;$$

$$b)\ \cos\frac{x}{۲}=۰;\ \ x_۲=۲k\pi;$$

$$c)\ \cos\frac{11x}{2}=0;\ x_3=\frac{2k+1}{11}\pi$$

ولی اگر $k=6n$ بگیریم، برای x_1 به‌دست‌می‌آید: $x_1=2n\pi$. بنا بر این جواب‌های x_3 دربین جواب‌های x_1 پیدا می‌شوند وهمهٔ جواب‌ها را می‌توان این طورنوشت:

$$x_2=\frac{2k+1}{11}\pi\ \text{و}\ x_1=\frac{1}{3}k\pi$$

$$\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos 4x}{2}+\frac{1+\cos 6x}{2}+\frac{1+\cos 8x}{2}=2;\quad .585$$

$$\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+\cos 8x=0;$$

$$2\cos 3x\cos x+2\cos 7x\cos x=0;\quad 2\cos x\cos 2x\cos 5x=0;$$

$$a)\ \cos 5x=0;\ x_1=\frac{2k+1}{10};$$

$$b)\ \cos 2x=0;\ x_2=\frac{2k+1}{4}\pi;$$

$$c)\ \cos x=0;\ x_3=\frac{2k+1}{2}\pi$$

ولی به‌ازای $k=5n+2$ به دست می‌آید: $x_1=\frac{2n+1}{2}\pi=x_3$ و ، بنا براین، همهٔ جواب‌های معادله‌را می‌توان این‌طور نوشت: $x_1=\frac{2k+1}{10}\pi$ و $x_2=\frac{2k+1}{4}\pi$.

$$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{1-\cos 6x}{2}+\frac{1-\cos 8x}{2};\quad .586$$

$$\cos 2x+\cos 4x=\cos 6x+\cos 8x;\quad 2\cos 3x\cos x=2\cos 7x\cos x;$$

$$\cos x(\cos 3x-\cos 7x)=0;\quad 2\cos x\sin 2x\sin 5x=0$$

$$a)\ \sin 5x=0;\ x_1=\frac{1}{5}k\pi,\ b)\sin 2x=x_2=\frac{1}{2}k\pi.$$

$$c)\ \cos x=0;\ x_3=\frac{2k+1}{2}\pi$$

ولی به‌ازای $k=۲n+۱$ داریم: $x_۳=\frac{۲n+۱}{۲}\pi=x_۲$. به جز این، $x_۲$ هم به ازای $k=۲n$، به همان مقدارهای $x_۱$ به‌ازای $k=۵n$ می‌رسد. بنابراین:

$$x_۱=\frac{k\pi}{۵} \text{ و } x_۲=\frac{۲k+۱}{۲}\pi.$$

۵۸۷. $$\frac{۱}{۲}(۱-\cos ۲x)+\sin^۲ ۲x=\frac{۱}{۲}(۱-\cos ۶x);$$

$$\sin^۲ ۲x-\frac{\cos ۲x-\cos ۶x}{۲}=۰;\quad \sin^۲ ۲x-\sin ۲x\sin ۴x=۰;$$

$$\sin ۲x(\sin ۴x-\sin ۲x)=۰;\quad ۲\sin ۲x\sin x\cos ۳x=۰$$

$$a)\ \sin ۲x=۰;\ x_۱=\frac{۱}{۲}k\pi;\qquad b)\ \cos ۳x=۰;\ x_۲=\frac{۲k+۱}{۶}\pi.$$

$$c)\ \sin x=۰;\ x_۳=k\pi$$

به ازای $k=۲n$ داریم: $x_۳=n\pi=x_۱$. به ازای $k=۲n+۱$؛ مقدار $x_۱$ با مقدار $x_۲$ به‌ازای $k=۳n+۱$ برابرمی‌شود همهٔ جواب‌های معادله چنین‌اند: $x_۱=\frac{۲k+۱}{۶}\pi$ و $x_۲=k\pi$.

۵۸۸. $$\sin^۲ ۲x=۲-۲\sin^۲ x;\ ۴\sin^۲ x\cos^۲ x=۲\cos^۲ x;$$

$$\cos^۲ x(۲\sin^۲ x-۱)=۰;\ \cos^۲ x\cos ۲x=۰$$

$$a)\cos^۲ x=۰،\ x_۱=\frac{۲k+۱}{۲}\pi.\qquad b)\ \cos ۲x=۰;\ x_۲=\frac{۲k+۱}{۴}\pi$$

۵۸۹. $$\sin^۴\frac{x}{۳}+\cos^۴\frac{x}{۳}+۲\sin^۲\frac{x}{۳}\cos^۲\frac{x}{۳}-۲\sin^۲\frac{x}{۳}\cos^۲\frac{x}{۳}=\frac{۵}{۸};$$

$$\left(\sin^۲\frac{x}{۳}+\cos^۲\frac{x}{۳}\right)^۲-\frac{۱}{۲}\sin^۲\frac{۲x}{۳}=\frac{۵}{۸};\ \sin^۲\frac{۲x}{۳}=\frac{۳}{۴};\ \sin^۲\frac{۲x}{۳}=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲};$$

$$\frac{۲x}{۳}=k\pi\pm\frac{\pi}{۳};\ x=\frac{۳k\pm۱}{۲}\pi$$

$$(\cos^۲ x+\sin^۲ x)^۲-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x-۲\sin ۲x+\frac{۳}{۴}\sin^۲ ۲x=۰;$$ ۵۹۰.

$$\sin^۲ ۲x-۸\sin ۲x+۴=۰;\quad \sin ۲x=۴-۲\sqrt{۳}\quad (۴+۲\sqrt{۳}>۱);$$

$$x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{۱}{۲}(-۱)^k \arcsin(۴-۲\sqrt{۳})$$

$$۲(\sin ۲x-۱+۱)=۳(\sin x+\cos x);$$ ۵۹۱.

$$۲(۲\sin x\cos x+\sin^۲ x+\cos^۲ x-۱)=۳(\sin x+\cos x);$$

$$۲[(\sin x+\cos x)^۲-۱]=۳(\sin x+\cos x);$$

$$۲(\sin x+\cos x)^۲-۳(\sin x+\cos x)-۲=۰;\quad \sin x+\cos x=-\frac{۱}{۲};$$

$$\sqrt{۲}\sin\left(\frac{\pi}{۴}+x\right)=-\frac{۱}{۲};\quad \sin\left(\frac{\pi}{۴}+x\right)=-\frac{۱}{۲\sqrt{۲}};$$

$$x=k\pi-(-۱)^k\arcsin\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}-\frac{\pi}{۴}$$

برای $\sin x+\cos x$، جواب ۲ هم به‌دست می‌آید که قابل قبول نیست، زیرا

$$\left|\sin x+\cos x\right|=\sqrt{۲}\left|\sin\left(\frac{\pi}{۴}+x\right)\right|\leqslant\sqrt{۲}<۲$$

$$\sin x+\cos x+\frac{۱}{۲}(۲\sin x\cos x+۱-۱)=۱;$$ ۵۹۲.

$$(\sin x+\cos x)^۲+۲(\sin x+\cos x)-۳=۰;\quad \sin x+\cos x=۱ \text{ و } -۳$$

$\sin x+\cos x=-۳$ جواب ندارد، زیرا $|\sin x+\cos x|\leqslant\sqrt{۲}$. از $\sin x+\cos x=۱$ به دست می‌آید:

$$\sqrt{۲}\cos\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)=۱;\quad \cos\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{۱}{\sqrt{۲}};\quad x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۴};$$

$$x_۱=۲k\pi،\quad x_۲=\frac{۴k+۱}{۲}$$

$$\left(\frac{۱-\cos ۲x}{۲}\right)^۵+\left(\frac{۱+\cos ۲x}{۲}\right)^۵=\frac{۲۹}{۱۶}\cos^۴ ۲x;$$ ۵۹۳.

$$\frac{2+20\cos^2 2x+10\cos^4 2x}{32}=\frac{29}{16}\cos^4 2x;$$

$$24\cos^4 2x-10\cos^2 2x-1=0;\quad \cos^2 2x=\frac{1}{2};\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x=\frac{1}{2};$$

$$\cos 4x=0;\quad 4x=\frac{2k+1}{2}\pi;\quad x=\frac{2k+1}{8}\pi$$

۵۹۴. سمت چپ معادله را تبدیل می‌کنیم:

$$\cos^2 x\cos 2x+\cos 4x+\cos 3x\cos x+2\cos^4 x=\cos^2 x\cos 2x+\cos 4x+$$

$$+\cos 3x\cos x+\cos^2 x(1+\cos 2x)=\cos x(2\cos x\cos 2x+\cos 3x+\cos x)+$$

$$+\cos 4x=\cos x(\cos 3x+\cos x+\cos 3x+\cos x)+\cos 4x=$$

$$=2\cos x(\cos 3x+\cos x)+\cos 4x=2\cos x\cos 3x+2\cos^2 x+\cos 4x=$$

$$=\cos 4x+\cos 2x+1+\cos 2x+\cos 4x=1+2(\cos 2x+\cos 4x)=$$

$$=1+4\cos 3x\cos x$$

اکنون، معادلهٔ مفروض به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$1+4\cos 3x\cos x=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$$

دوطرف معادله را در $\sin x$ ضرب می‌کنیم. به‌دست می‌آید:

$$\sin x+4\sin x\cos x\cos 3x=\cos\frac{x}{2};\ \sin x+2\sin 2x\cos 3x=\cos\frac{x}{2};$$

$$\sin x+\sin 5x-\sin x=\cos\frac{x}{2};\ \left(\cos\frac{\pi}{2}-5x\right)=\cos\frac{x}{2};$$

$$\frac{\pi}{2}-5x+2k\pi\pm\frac{x}{2};\quad x_1=\frac{4\pi+1}{11}\pi,\ x_2=\frac{4k+1}{9}\pi$$

ولی از آن‌جا که دوطرف معادله را در $\sin x$ ضرب کرده‌ایم، ممکن است جواب‌های خارجی‌مربوط به $\sin x=0$، یعنی $x=k\pi$ درمعادله وارد شده‌باشند. ازجواب‌های x_1وx_2 دیده‌می‌شود که، درآن‌ها، جوابی به‌صورت $2m\pi$ وجودندارد. بنا براین،جواب‌های خارجی، اگروجود داشته باشند، باید به‌صورت $(2m+1)\pi$ باشند اگر $(2m+1)\pi$ راابتدا با

x_1 وسپس با x_2 برابر قراردهیم، به‌دست می‌آید: $k=\frac{11m+5}{2}$ و $k=\frac{9m+4}{2}$.

بنابـراین، در رابطهٔ مربوط به x_1: $k\neq\frac{11m+5}{2}$ و در رابطهٔ مـربوط به x_2:

$k\neq\frac{9m+4}{2}$؛ در ضمن درحالت اول، m عدد فرد ودرحالت دوم، زوج است.

۵۹۵. سمت راست معادله را تبدیل می‌کنیم:

$$tgx\,tg(60^\circ-x)cotg(30^\circ-x)=tgx\cdot\frac{\sqrt{3}-tgx}{1+\sqrt{3}tgx}\cdot\frac{\sqrt{3}+tgx}{1-\sqrt{3}tgx}=$$

$$=\frac{3tgx-tg^3x}{1-3tg^2x}=tg3x$$

به‌این‌ترتیب، معادلهٔ مفروض، به‌صورت $tg5x=tg3x$ درمی‌آید

$$5x=k\pi+3x\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{2}k\pi$$

ولی به‌ازای $k=2m+1$ ، هردو طرف معادله، مفهوم خود را از دست می‌دهد. بنابراین باید $k=2m$ و $x=m\pi$ به‌حساب آورد.

۵۹۶. $$cosx+sinx=\frac{cos^2x-sin^2x}{cos^2x+sin^2x-2sinx\,cosx};$$

$$cosx+sinx=\frac{cos^2x-sin^2x}{(cosx-sinx)^2};\ cos\,x+sin\,x=\frac{cosx+sinx}{cosx-sinx};$$

$$(cosx+sinx)(cosx-sinx-1)=0$$

$$a)\ cosx+sinx=0;\ tgx=-1;\ x_1=k\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{4k-1}{4}\pi;$$

$$b)\ cosx-sinx=1;\ \sqrt{2}cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1;\ cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$x_2=2k\pi,\ x_3=\frac{4k-1}{2}\pi$$

۵۹۷. $$tgx+tg2x=tg3x;\ \frac{tgx+tg2x}{1-tgx\,tg2x}(1-tgx\,tg2x)=tg3x;$$

$$tg3x(1-tgx\,tg2x)=tg3x;$$

$$tg3x-tgx\,tg2x\,tg3x=tg3x;\ tgx\,tg2x\,tg3x=0$$

$$a)\ tgx=0;\ x_1=k\pi.\quad b)\ tg2x=0\ ;\ x_2=\frac{1}{2}k\pi.\quad c)\ tg3x=0; x_3=\frac{1}{3}k\pi$$

ولی به‌ازای $k=3n$ داریم: $x_3=n\pi=x_1$. علاوه بـر آن، مقدار x_2 به ازای $k=2n$، همان مقدار x_3 بـه‌ازای $k=3n$ می‌شود. اگر توجه کنیم که $x=\frac{2n-1}{2}\pi$ نمی‌تواند جواب معادله باشد، می‌توانیم همهٔ جواب‌هـای معادله را بـا رابطهٔ $x=\frac{1}{3}k\pi$ نشان‌دهیم.

۵۹۸. $$\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}(\cos^2x+\sin^2x+2\sin x\cos x)=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x};$$

$$(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)^2=\cos x+\sin x;$$

$$(\cos x+\sin x)(\cos^2x-\sin^2x-1)=0;\ (\cos x+\sin x)(\cos 2x-1)=0$$

$$a)\ \cos x+\sin x=0,\ x_1=\frac{4k-1}{4}\pi;\ b)\ \cos 2x-1=0,\ x_2=k\pi$$

۵۹۹. سمت‌چپ معادله را تبدیل می‌کنیم:

$$(tgx+tg4x)+(tg2x+tg3x)=\frac{\sin 5x}{\cos x\cos 4x}+$$

$$+\frac{\sin 5x}{\cos 2x\cos 3x}=\frac{\sin 5x(\cos 2x\cos 3x+\cos x\cos 4x)}{\cos x\cos 2x\cos 3x\cos 4x}=$$

$$=\frac{\sin 5x[\cos 2x(4\cos^3x-3\cos x)+\cos x\cos 4x]}{\cos x\cos 2x\cos 3x\cos 4x}=$$

$$=\frac{\sin 5x[\cos 2x(4\cos^2x-3)+\cos 4x]}{\cos 2x\cos 3x\cos 4x}=$$

$$=\frac{\sin 5x(4\cos^2 2x-\cos 2x-1)}{\cos 2x\cos 3x\cos 4x}$$

به‌این ترتیب، به‌معادلهٔ زیر، هم‌ارز با معادلهٔ مفروض، می‌رسیم:

$$\sin 5x(4\cos^2 2x-\cos 2x-1)=0$$

$$a)\ \sin 5x=0,\ x_1=\frac{1}{5}k\pi;\quad b)\ 4\cos^2 2x-\cos 2x-1=0;$$

$$\cos 2x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{8},\ x_2=k\pi\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1\pm\sqrt{17}}{8}$$

۶۰۰. سمت راست معادله را تبدیل می کنیم:

$$\sin x\left(tg x\, tg\frac{x}{2}+1\right)=\sin x\cdot\frac{\sin x\sin\frac{x}{2}+\cos x\cos\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}}=$$

$$=\sin x\cdot\frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin x}{\cos x}=tg x$$

به‌این ترتیب، معادلهٔ مفروض بامعادلهٔ $tg x+cotg x=tg x$ و یا $cotg x=0$ هم‌ارز است. از این‌جا به‌دست می آید: $x=\frac{2k+1}{2}\pi$. ولی به ازای این مقدارهای x ، هردو طرف معادلهٔ مفروض،مفهوم‌خودرا ازدست‌می‌دهند. بنابراین، معادلهٔ مفروض جواب‌ندارد.

۶۰۱. $$\frac{1}{\cos\sqrt{x}}+\frac{1}{\sin\sqrt{x}}=2\sqrt{2};\ \sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}=$$

$$=2\sqrt{2}\sin\sqrt{x}\cos\sqrt{x};\ \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\sqrt{x}\right)=\sqrt{2}\cos 2\sqrt{x};$$

$$\sin 2\sqrt{x}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\sqrt{x}\right)$$

$$a)\ 2\sqrt{x}=2k\pi+\frac{\pi}{4}+\sqrt{x},\ \sqrt{x_1}=\frac{8k+1}{4}\pi;$$

$$b)\ 2\sqrt{x}=(2k+1)\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\sqrt{x}\right),\ \sqrt{x_2}=\frac{8k+3}{12}\pi$$

ولی به‌ازای $k=3n$ داریم: $\sqrt{x_1}=\frac{8n+1}{4}\pi\sqrt{x_2}$. به‌این ترتیب،همهٔ‌جواب‌های معادلهٔ مفروض را می‌توان به‌این‌صورت نشان‌داد:

$$x=\frac{(۸k+۳)^۲}{۱۴۴}\pi^۲$$

در ضمن، k تنها می‌تواند مقدارهای غیرمنفی، یعنی ۰، ۱، ۲،... را قبول کند.

۶۰۲. $tg(x^۲-x)=tg۶;\ x^۲-x=۶+k\pi;$

$$x^۲-x-(۶+k\pi)=۰;\ x=\frac{۱\pm\sqrt{۲۵+۴k\pi}}{۲}\quad (k=۰،\pm۱،...)$$

x می‌تواند موهومی باشد، زیرا $x^۲-x$ به‌ازای این مقدارهای x، حقیقی می‌شوند.

۶۰۳. معادلهٔ $|sin\,x^۲|=۱$ هم‌ارز است با مجموعهٔ دومعادلهٔ $sin\,x^۲=۱$ و $sin\,x^۲=-۱$ یا یك معادلهٔ $sin^۲x^۲=۱$. از معادلهٔ اخیر به دست می‌آید: $\frac{۱-cos۲x^۲}{۲}=۱$ یا $cos۲x^۲=-۱$. بنابراین

$$۲x^۲=(۲k+۱)\pi،\ x=\pm\sqrt{\frac{۲k+۱}{۲}\pi}\quad (k=۰،\pm۱،\pm۲،...)$$

۶۰۴. $|x|=\frac{۴k+۱}{۲}\pi$ یا $x=\pm\frac{۴k+۱}{۲}\pi$، که در آن: $k=۰،۱،۲،...$.

۶۰۵. $x^۲=۲k\pi$ یا $x=\pm\sqrt{۲k\pi}$؛ $(k=۰،\pm۱،\pm۲،...)$.*

۶۰۶. چون $tg^۲x=tg^۲|x|$، بنابراین معادله را می‌توان چنین نوشت:

$$tg^۲|x|=\frac{۱-cos|x|}{۱-sin|x|}$$

آن‌را حل می‌کنیم. به‌ترتیب داریم:

$$\frac{۱-cos^۲|x|}{۱-sin^۲|x|}=\frac{۱-cos|x|}{۱-sin|x|};\ ۱-cos^۲|x|=(۱-cos|x|)(۱+sin|x|);$$

$$(۱-cos|x|)(cos|x|-sin|x|)=۰$$

$$a)\ ۱-cos|x|=۰;\ |x|=۲k\pi(k=۰،۱،۲،...);$$

$$x=\pm۲k\pi\Rightarrow x_۱=۲k\pi(k=۰،\pm۱،\pm۲،...)$$

*) در این‌جا هم، مثل مسألهٔ ۶۰۲، x می‌تواند عددی مختلط باشد، تنها باید $x^۲$ عددی حقیقی شود.

$b)\quad \cos|x|-\sin|x|=0;\ tg|x|=1;\ |x|=k\pi+\frac{\pi}{4}(k=0, 1, 2,...);$

$$\pm x=k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x_2=\frac{4k+1}{4}\pi ، x_3=\frac{-4k-1}{4}\pi(k=0,1,2,...)$$

۶۰۷. معادله جواب ندارد. در واقع، چون $|\sin\alpha|\leqslant 1$ ، بنابراین ، حاصل‌ضرب دو سینوس، تنها وقتی می‌تواند برابر واحد باشد ، که : $a)$ $\sin 2x=1$ ، $\sin 6x=1$ ؛ $b)$ $\sin 2x=-1$ ، $\sin 6x=-1$. حالت اول را در نظر می گیریم. به‌دست می آید: $x=\frac{4k+1}{4}\pi$ ، $x=\frac{4k'+1}{12}\pi$. اگر این دومقدار x را مقایسه‌کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\frac{4k+1}{4}\pi=\frac{4k'+1}{12}\pi\Rightarrow 6k=2k'-1$$

ولی عدد زوج نمی‌تواند برابر با عدد فرد باشد ، بنابراین ، حالت اول ممکن نیست. به‌همین‌ترتیب، می‌توان ثابت کرد که حالت دوم هم غیرممکن است.

همین مسأله را به‌طریق دیگری هم می‌توان حل کرد.

$$1-\sin 2x\sin 6x=0;\ 1-\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 8x)=0;$$

$$2-\cos 4x+\cos 8x=0;\ (1-\cos 4x)+(1+\cos 8x)=0;$$

$$\sin^2 2x+\cos^2 4x=0$$

وبرابری اخیر، تنها وقتی برقرار است که داشته‌باشیم:

$$\sin 2x=0 \text{ و } \cos 4x=0$$

از این دو معادله به‌دست می آید : $x=\frac{k\pi}{2}$ و $x=\frac{2k'+1}{8}\pi$. از آن‌جا

$$\frac{k\pi}{2}=\frac{2k'+1}{8}\pi\Rightarrow 4k=2k'+1$$

که ممکن نیست (عدد زوج نمی‌تواند باعدد فرد برابر باشد).

۶۰۸. $$\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}\sqrt{2}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x};$$

$$\sqrt{2}(\sin x+\cos x)\sin x\cos x=1;\ \sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cdot\sin 2x=0$$

و این برابری تنها وقتی ممکن است که داشته باشیم:

$$a)\ \sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sin 2x=1 \quad \text{یا} \quad b)\ \sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sin 2x=-1$$

درحالت اول به‌دست می‌آید:

$$\frac{\pi}{4}+x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x_1=2k\pi+\frac{\pi}{2};\ 2x=2n\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x_2=n\pi+\frac{\pi}{4}$$

چون به‌ازای مقدارهای زوج n، x_2 با x_1 برابر می‌شود، بنابراین $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$ جواب معادله است.

درحالت دوم به‌دست می‌آید: $x_3=\frac{8k-3}{4}\pi$ و $x_4=\frac{4n-1}{4}\pi$. ولی این دومقدار x_3 و x_4 نمی‌توانند باهم‌برابر شوند، زیرا پس‌ازبرابرقراردادن به‌تساوی $2n=4k-1$ می‌رسیم که ممکن نیست. بنابراین، درحالت دوم، جوابی برای معادله به‌دست نمی‌آید و تمامی جواب معادله همان $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$ است.

۶۰۹. $$\sin 3x+\sin 2x-m\sin x=0;$$

$$\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x+\sin 2x-m\sin x=0;$$

$$\sin x(4\cos^2 x+2\cos x-m-1)=0$$

$$a)\ \sin x=0 \Rightarrow x=k\pi$$

$$b)\ 4\cos^2 x+2\cos x-m-1=0 \Rightarrow \cos x=\frac{-1\pm\sqrt{4m+5}}{2}$$

برای حقیقی بودن $\cos x$ باید داشته باشیم: $m\geqslant-\frac{5}{4}$. بـه‌این ترتیب، بـه‌ازای $m<-\frac{5}{4}$، معادلهٔ $4\cos^2 x+2\cos x-m-1=0$ جواب ندارد، درحالت $m\geqslant\frac{5}{4}$هم باید مقدار m را طوری پیداکرد که، به‌ازای آن، قدرمطلق $\cos x$ از واحد بزرگتر نشود. یعنی باید داشته باشیم:

$$\alpha)\left|\frac{-1+\sqrt{4m+5}}{4}\right|\leqslant 1;\ \beta)\left|\frac{-1-\sqrt{4m+5}}{4}\right|\leqslant 1$$

ابتدا به‌حالت α) می‌پردازیم. به‌ترتیب باید داشته باشیم:

$$|-1+\sqrt{4m+5}|\leqslant 4;\ -4\leqslant -1+\sqrt{4m+5}\leqslant 4;\ -3\leqslant\sqrt{4m+5}\leqslant 5$$

نابرابری سمت چپ، همیشه برقرار است (عدد منفی از عدد غیرمنفی کوچکتر است). از نابرابری سمت راست به‌دست می‌آید:

$$4m+5\leqslant 25\Rightarrow m\leqslant 5$$

بنابراین، دراین حالت باید نابرابری مضاعف $-\frac{5}{4}\leqslant m\leqslant 5$ برقرار باشد.

به‌سراغ حالت β) می‌رویم. دراین حالت، با روشی شبیه حالت قبل، به‌جواب $m\leqslant 1$ می‌رسیم، یعنی باید نابرابری مضاعف $-\frac{5}{4}\leqslant m\leqslant 1$ برقرار باشد.

به‌این ترتیب، معادلهٔ مفروض، دارای این جواب‌هاست:

۱) در حالت $m<-\frac{5}{4}$: $x=k\pi$؛

۲) در حالت

$-\frac{5}{4}\leqslant m\leqslant 1$: $x_1=k\pi$ و $x_2=2k\pi\pm arc\cos\frac{-1+\sqrt{4m+5}}{4}$؛

۳) در حالت

$1\leqslant m\leqslant 5$: $x_1=k\pi$ و $x_2=2k\pi\pm arc\cos\frac{-1+\sqrt{4m+5}}{4}$؛

۴) درحالت $m>5$، $x=k\pi$.

۶۱۰. $\frac{5}{3}\cos\pi x=k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}$ و یا $\cos\pi x=\frac{3}{5}k+\frac{(-1)^k}{10}$، چون $|\cos\pi x|\leqslant 1$، بنابراین، k تنها می‌تواند مقدارهای ۱ ــ، ۰ و ۱ را اختیار کند. همهٔ مقدارهای دیگر k، برای $|\cos\pi x|$ مقداری بزرگتر از واحد می‌دهند. برای $k=-1$ داریم:

$$\cos\pi x=-\frac{7}{10}\Rightarrow x_1=2n\pm\frac{1}{\pi}arc\cos\left(-\frac{7}{10}\right);$$

و برای $k=0$:

$$\cos\pi x=\frac{1}{10}\Rightarrow x_2=2n\pm\frac{1}{\pi}arc\cos\frac{1}{10}$$

وبالاخره برای $k=1$:

$$\cos\pi x=\frac{1}{2}\Rightarrow x_3=2n\pm\frac{1}{3}$$

۶۱۱. معادله را می‌توان به صورت $sin(\pi cos x)=sin\left(\frac{\pi}{2}-\pi sin x\right)$ نوشت. بنابراین

$$a)\quad \pi cos x=2k\pi+\frac{\pi}{2}-\pi sin x \Rightarrow sin x+cos x=\frac{4k+1}{2};$$

$$b)\quad \pi cos x=(2k+1)\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\pi sin x\right) \Rightarrow cos x-sin x=\frac{4k+1}{2}$$

برای حل معادلهٔ اول داریم:

$$\sqrt{2}cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4k+1}{2},\quad cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4k+1}{2\sqrt{2}}$$

برای این‌که $\frac{2k+1}{2\sqrt{2}}$، ازلحاظ قدرمطلق، کوچکتر از واحد باشد، تنها می‌توان $k=0$ گرفت. بنابراین

$$cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x_1=2n\pi\pm arc\cos\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}$$

معادلهٔ دوم به‌صورت $cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4k+1}{2\sqrt{2}}$ درمی‌آید. دراین‌جا هم، مثل حالت قبل تنها $k=0$ به‌درد می‌خورد:

$$cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x_2=2n\pi\pm arc\cos\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}$$

مجموعهٔ جواب معادلهٔ مفروض را می‌توان این‌طور نوشت:

$$x=2n\pi\pm arc\cos\frac{1}{2\sqrt{2}}\pm\frac{\pi}{4}$$

۶۱۲. معادله را به‌صورت $tg(\pi tg x)=tg\left(\frac{\pi}{2}-\pi cotg x\right)$ می‌نویسیم به دست می‌آید:

$$\pi tg x=k\pi+\frac{\pi}{2}-\pi cotg x \Rightarrow tg x=k+\frac{1}{2}-cotg x \qquad (*)$$

باید توجه داشت، ریشه‌هایی از معادلهٔ (*) که برای تانژانت مقدارهایی به‌صورت

یا برای کتانژانت مقدارهایی به‌صورت m بدهند (m عددی است درست) $\frac{۲m+۱}{۲}$
ـ اگر چنین جواب‌هایی پیدا شود- جواب معادلهٔ مفروض نیستند، زیرا به‌ازای $tgx=\frac{۲m+۱}{۲}$ یا $cotgx=m$ یا سمت چپ و یا سمت راست معادلهٔ مفروض، بی‌معنی می‌شود. اگر چنین جواب‌هایی برای معادلهٔ (*) پیدا شد، باید از آن صرف‌نظر کرد.
معادلهٔ (*) با معادلهٔ زیر هم‌ارز است:

$$tgx=k+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{tgx}\Rightarrow tg^{۲}x-\left(k+\frac{۱}{۲}\right)tgx+۱=۰$$

$$tgx=\frac{۲k+۱\pm\sqrt{(۲k+۱)^{۲}+۱۶}}{۴}$$

برای حقیقی‌بودن tgx، باید داشته باشیم:

$$(۲k+۱)^{۲}\geqslant ۱۶\Rightarrow |۲k+۱|\geqslant ۴$$

بنابراین، k نمی‌تواند برابر ۰، ۱± یا ۲− باشد. به‌جز این، باید مقدارهایی از k را حذف کرد که، به‌ازای آن‌ها، tgx برابر $\frac{۲m+۱}{۲}$ می‌شود. برای این که داشته باشیم: $tgx=\frac{۲m+۱}{۲}$، باید عبارت زیررادیکال برابرمجذور یك عدد فرد باشد، یعنی

$$(۲k+۱)^{۲}-۱۶=(۲l+۱)^{۲}\Rightarrow (k+l+۱)(k-l)=۴$$

اگر فرض کنیم $u=k+l+۱$ و $v=k-l$ باید ریشه‌های درست معادلهٔ $u\cdot v=۴$ را به‌دست آوریم. درضمن چون $u+v=۲k+۱$، بنابراین از u و v، یکی فرد و دیگری زوج است. چهارجواب به‌دست می‌آید:

$$\begin{vmatrix}u_{۱}=۱\\v_{۱}=۴\end{vmatrix};\quad\begin{vmatrix}u_{۲}=۴\\v_{۲}=۱\end{vmatrix};\quad\begin{vmatrix}u_{۳}=-۱\\v_{۳}=-۴\end{vmatrix};\quad\begin{vmatrix}u_{۴}=-۴\\v_{۴}=-۱\end{vmatrix}$$

برای دوجواب اول داریم $u+v=۵$ و برای دو جواب دوم: $u+v=-۵$. درحالت اول $k=۲$ و در حالت دوم $k=-۳$ به دست می‌آید. در حالت $k=۲$ داریم $tgx=\frac{۵\pm۳}{۲}$، که جواب $\frac{۱}{۲}$ را باید کنار گذاشت، زیرا برای $tgx=\frac{۱}{۲}$، سمت چپ معادلهٔ مفروض، معنای خود را از دست می‌دهد. $tgx=۲$، منجر به‌جواب

$$x=n\pi+arc\,tg۲$$

می‌شود، در حالت $k=-3$ داریم: $tgx=\frac{-5\pm3}{4}$ کـه جواب $tgx=-\frac{1}{2}$ را باید کنار گذاشت. $tgx=-2$، منجر به جواب زیر می‌شود:

$$x=n\pi-arc\,tg2$$

به‌این‌ترتیب، معادلهٔ مفروض، دارای این جواب‌هاست:

$$x_1=n\pi\pm arc\,tg2,\ x_2=n\pi+arc\,tg\frac{2k+1\pm\sqrt{(2k+1)^2-16}}{4}$$

$$(k=3,\ \pm4,\ \pm5\ldots;\ n=0\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$$

۶۱۳.
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos2\times2^{\sqrt{-x}}=\frac{1}{2};\ \cos2\times2^{\sqrt{-x}}=0;$$

$$2^{\sqrt{-x}}=\frac{2k+1}{2}\pi;\ \sqrt{-x}=\log_2\frac{2k+1}{4}\pi;$$

$$\sqrt{-x}=\log_2(2k+1)\pi-2;\ x=-[\log_2(2k+1)\pi-2]^2$$

چون $\sqrt{-x}$ مثبت است، بنابراین $2^{\sqrt{-x}}>1$، یعنی $\frac{2k+1}{4}\pi>1$. واین به‌معنای آن است کـه k، عـددی است درست و نمی‌توانـد بـرابـر صفـر یا عـددی منفـی باشد $(k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$.

۶۱۴.
$$\log_{\cos x}\sin x+\frac{1}{\log_{\cos x}\sin x}-2=0;$$

$$(\log_{\cos x}\sin x)^2-2\log_{\cos x}\sin x+1=0;$$

$$(\log_{\cos x}\sin x-1)^2=0;\ \ \log_{\cos x}\sin x=1;\ \cos x=\sin x;$$

$$tgx=1\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{8k+1}{4}\pi$$

در این جا، نمی‌توان $x=kn+\frac{\pi}{4}$ گرفت، زیرا $\sin x$ و $\cos x$ بـه عنوان مبنای لگاریتم انتخاب شده‌اند و باید مقدارهایی مثبت باشند.

۶۱۵.
$$x^2+2x\sin(xy)+\sin^2(xy)+\cos^2(xy)=0;$$

$$[x+\sin(xy)]^2+\cos^2(xy)=0$$

بنا براین باید داشته باشیم: $cos(xy)=0$ و $x+sin(xy)=0$. از معادلهٔ اولی به دست می‌آید: $xy=k\pi+\frac{\pi}{2}$ و از دومی $x=-sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$.

اگر $k=2n+1$، به دست می‌آید: $x_1=1$ و $y_1=2n\pi+\frac{3\pi}{2}$؛ و اگر $k=2n$: $x_2=-1$ و

$$y_2=2n\pi-\frac{\pi}{2}=2m\pi+\frac{3\pi}{2}(-n=m+1)$$

۶۱۶ تا ۶۲۷. راهنمائی: برای حل معادله‌هایی که، در آن‌ها، مقدارهای مجهول زیر علامت تابع‌های معکوس مثلثاتی قرار دارند، اغلب از دو طرف برابری، سینوس (یا کسینوس و غیره) می‌گیرند. دراین مورد باید توجه داشت که معادلهٔ حاصل، درحالت کلی، با معادلهٔ مفروض هم‌ارز نیست. مثلاً $A=B$ و $sin A=sin B$، در حالت کلی، هم‌ارز نیستند. در مورد دو معادلهٔ $A=B$ و $tgA=tgB$ و غیره هم همین مطلب را می‌توان گفت.

۶۱۶. جواب ندارد، زیرا $0\leqslant arccos x\leqslant \pi$ و در این جا

$$arccos x=\frac{6/3}{2}=3/15>\pi$$

۶۱۷. داریم: $arcsin x=\frac{\pi}{4}arctg\frac{1}{7}$. از این جا

$$x=sin(arcsin x)=sin\left(\frac{\pi}{4}-arctg\frac{1}{7}\right)=sin\frac{\pi}{4}cos\left(arctg\frac{1}{7}\right)-$$

$$-cos x sin\left(arctg\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{49}}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{7\sqrt{1+\frac{1}{49}}}=\frac{3}{5}$$

آزمایش جواب را می‌توان به‌کمك این قضیه انجام داد: اگر $sin\alpha=sin\beta$ و α و β مقدارهای اصلی زاویه‌ها باشند، درآن صورت $\alpha=\beta$. در این جا

$$arcsin\frac{3}{5}=\alpha, \frac{\pi}{4}-arctg\frac{1}{7}=\beta$$

چون $0<arcsin\frac{3}{5}<\frac{\pi}{2}$ و $0<\frac{\pi}{4}-arctg\frac{1}{7}<\frac{\pi}{2}$، یعنی $0<\alpha$ و $\beta<\frac{\pi}{2}$، علاوه

بر آن ثابت کردیم: $sin\alpha = sin\beta$، پس $\alpha = \beta$ و یا به‌زبان دیگر

$$arcsin\frac{۳}{۵} = \frac{\pi}{۴} - arctg\frac{۱}{۷}$$

۶۱۸. با استفاده از رابطه‌های مسالهٔ ۵۴۱، از دو طرف کسینوس می‌گیریم، به‌دست می‌آید:

$$cos(arcsin x + arcsin ۲x) = cos\frac{\pi}{۳};$$

$$cos(arcsin x)cos(arcsin ۲x) - sin(arcsin x)sin(arcsin ۲x) = \frac{۱}{۲};$$

$$\sqrt{۱-x^۲}\cdot\sqrt{۱-۴x^۲} - ۲x^۲ = \frac{۱}{۲};\ (۱-x^۲)(۱-۴x^۲) = \left(۲x^۲+\frac{۱}{۲}\right)^۲;$$

$$۷x^۲ = \frac{۳}{۴};\ x_۱ = \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۳}{۷}},\ x_۲ = -\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۳}{۷}}$$

مقدار $x_۲ < ۰$ در معادلهٔ مفروض صدق نمی‌کند، زیرا در این حالت، سمت چپ معادله منفی و سمت راست آن مثبت می‌شود. برای این که جواب $x_۱ > ۰$ را آزمایش کنیم، فرض می‌کنیم $arcsin x_۱ = \alpha$ و $arcsin ۲x_۱ = \beta$. چون $۰ < \alpha$ و $\beta < \frac{\pi}{۲}$ و $۰ < \alpha + \beta < \pi$ و زاویهٔ $\frac{\pi}{۳}$ هم در بازهٔ $(۰, \pi)$ واقع است، بنابراین از برابری $cos(\alpha+\beta) = cos\frac{\pi}{۳}$ نتیجه می‌شود: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{۳}$.

یادداشت: دراین جا از قضیهٔ زیر استفاده کرده‌ایم: اگر $cos\alpha = cos\beta$ و، درضمن، α و β مقدارهای اصلی باشند، آن وقت $\alpha = \beta$.

۶۱۹. از دو طرف معادله کسینوس می‌گیریم، به‌دست می‌آید:

$$cos(۲arcsin x) = cos(arccos ۲x);\ cos^۲(arcsin x) - sin^۲(arcsin x) = ۲x;$$

$$(۱-x^۲) - x^۲ = ۲x;\ ۲x^۲ + ۲x - ۱ = ۰;\ x_۱ = \frac{\sqrt{۳}-۱}{۲},\ x_۲ = -\frac{\sqrt{۳}+۱}{۱}$$

جواب دوم، خارجی است $(|x| > ۱)$. برای آزمایش $x_۱ > ۰$، فرض می‌کنیم: $arcsin x_۱ = \alpha$ و $arccos ۲x_۱ = \beta$. چون $۰ < ۲\alpha < \pi$ و $۰ < \beta < \pi$، بنابراین از

برابری $\cos 2\alpha = \cos\beta$ نتیجه می‌شود: $2\alpha=\beta$ (یادداشت مسالهٔ ۶۱۸ را ببینید).

۶۲۰. از دو طرف معادله سینوس می گیریم، به‌دست می آید:

$$\sin(2\arccos x)=\sin[\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})];\ \ 2\sin(\arccos x)\cdot\cos(\arccos x)=$$
$$=2x\sqrt{1-x^2};\ \ 2x\sqrt{1-x^2}=2x\sqrt{1-x^2}$$

برابری حاصل یك اتحاد است، ولی این، هنوز به‌معنای آن نیست که هر مقدار دلخواه x، با شرط $|x|\leqslant 1$، درمعادله صدق می کند. چون $\arccos x$ همیشه غیرمنفی است، آن‌وقت، همان طور که از معادله دیده می‌شود:

$$0\leqslant 2x\sqrt{1-x^2}\leqslant\frac{\pi}{2}$$

از این جا به‌دست می آید: $0\leqslant 2\arccos x\frac{\pi}{2}$ و $0\leqslant\arccos\leqslant\frac{\pi}{4}$. بنا براین $\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant 1$.

۶۲۱. $$\sin(\arcsin x)=\sin(2\arcsin x\sqrt{2});$$

$$x=2\sin(\arcsin x\sqrt{2})\cos(\arcsin x\sqrt{2});\ \ x=2x\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-2x^2}$$

با حل این معادلهٔ گنگ به دست می آید: $x_1=0$، $x_2=\frac{\sqrt{7}}{4}$، $x_3=-\frac{\sqrt{7}}{4}$، روشن است که x_1 در معادلهٔ مفروض صدق می‌کند. x_2 را آزمایش می کنیم. داریم:

$$0<\arcsin x_2<\frac{\pi}{2};\ \ \arcsin x_2\sqrt{2}=\arcsin\left(\frac{\sqrt{7}}{4},\ \sqrt{2}\right)>\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4};$$

$$2\arcsin x_2\sqrt{2}>\frac{\pi}{2}$$

به این ترتیب معلوم می‌شود که، به‌ازای $x=x_2$، مقدار عددی سمت چپ معادله کمتر از $\frac{\pi}{2}$، و مقدار سمت راست آن بیشتر از $\frac{\pi}{2}$ است. یعنی x_2 جواب معادلهٔ مفروض نیست. به سادگی می‌توان روشن کرد که x_3 هم در معادله صدق نمی‌کند. معادلهٔ مفروض، تنها یك جواب دارد: $x=0$.

۶۲۲. معادله را به صورت $\arccos x-\arcsin x=\frac{\pi}{3}$ می‌نویسیم. از طرف دیگر داریم: $\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x$ (مسالهٔ ۵۳۹ راببینید). این مقداررا درمعادلهٔ قبلی‌قرار

می‌دهیم، به‌دست می‌آید:

$$arccos x-\left(\frac{\pi}{2}-arccos x\right)=\frac{\pi}{6} \Rightarrow arccos x=\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

۶۲۳. به‌ترتیب داریم:

$$tg(arccos x)=tg x(arctg x); \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=x; \quad x^4+x^2-1=0$$

معادلهٔ اخیر، دو جواب حقیقی دارد: $x_1=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ و $x_2=-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$، جواب $x_2<0$ در معادلهٔ مفروض صدق نمی‌کند، زیرا $arccos x_2>0$ و $arctg x_2<0$. مقدار $x=x_1$ در معادله صدق می‌کند، زیرا

$$0<arccos x_1<\frac{\pi}{2} \text{ و } 0<arctg x_1<\frac{\pi}{2}$$

۶۲۴. جملهٔ دوم سمت چپ معادله را به سمت راست منتقل می‌کنیم و از دو طرف معادله، تانژانت می‌گیریم:

$$\frac{x-1+x+1}{1-(x-1)(x+1)}=\frac{3x-x}{1-3x\cdot x} \Rightarrow 2x(4x^2-1)=0;$$

$$x_1=0,\ x_2=\frac{1}{2},\ x_3=-\frac{1}{2}$$

و با تحقیق ساده‌ای معلوم می‌شود که هر سه جواب در معادله صدق می‌کنند.

۶۲۵. اگر از دو طرف معادله سینوس بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{2}{3\sqrt{x}}\sqrt{1-(\sqrt{1-x})^2}+\sqrt{1-\left(\frac{2}{3\sqrt{x}}\right)^2}\cdot\sqrt{1-x}=\frac{1}{3};$$

$$\frac{2}{3}+\sqrt{1-\frac{4}{9x}}\cdot\sqrt{1-x}=\frac{1}{3}$$

و این معادله، بــه روشنی خودش را نقض مــی‌کند (سمت چپ از سمت راست بزرگتر است): معادلهٔ مفروض، جواب ندارد.

۶۲۶. از دوطرف معادله کسینوس می‌گیریم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{1-x^2}{1+x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2}}-\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2}}\cdot\frac{2x}{1-x^2}=-\frac{1}{2};$$

$$\frac{(1-x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}}{(1+x^2)^2}-\frac{4x\sqrt{x^2}\sqrt{(1-x^2)^2}}{(1+x^2)^2(1-x^2)}=-\frac{1}{2} \qquad (*)$$

چون $0\leqslant arc\cos\frac{1-x^2}{1+x^2}\leqslant\pi$ و $-\frac{\pi}{2}<arc\,tg\frac{2x}{1-x^2}<\frac{\pi}{2}$، بنابراین، برای این که سمت چپ معادلهٔ مفروض برابر $\frac{4\pi}{3}>\pi$ باشد، باید داشته باشیم:

$$arc\cos\frac{1-x^2}{1+x^2}>\frac{\pi}{2} \text{ و } arc\,tg\frac{2x}{1-x^2}>0$$

از این‌جا $\frac{1-x^2}{1+x^2}<0$ و $\frac{2x}{1-x^2}>0$ و بنابراین $x^2>1$ و $x<0$، ($x<-1$).

به‌معادلهٔ (*) برمی‌گردیم، با توجه به‌شرطی که‌پیدا کردیم: $\sqrt{(1-x^2)^2}=x^2-1$ و $\sqrt{x^2}=-x$. معادلهٔ (*) به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$-\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}=-\frac{1}{2}$$

ولی، این برابری، متناقض است، زیــرا سمت چپ برابر -1 وسمت راست برابر $-\frac{1}{2}$ شده است: معادلهٔ مفروض جواب ندارد.

۶۲۷. اگر از دوطرف معادله تانژانت بگیریم، بعد از کمی تبدیل، به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{\frac{a}{b}-\frac{a-b}{a+b}}{1+\frac{a}{b}\cdot\frac{a-b}{a+b}}=\frac{a^2+b^2}{b^2+a^2}=1$$

مقدارحاصل x را آزمایش می‌کنیم. سمت‌چپ معادله، به‌ازای $x=1$، برابر $\frac{\pi}{4}$ می‌شود.

ببینیم، آیا مقدار سمت راست هم ، برابر $\frac{\pi}{۴}$ خواهد شد؟ اگر از شرط برابری تانژانت‌ها استفاده کنیم، می‌توانیم بنویسیم:

$$arc\ tg\frac{a}{b}-arc\ tg\frac{a-b}{a+b}=\frac{\pi}{۴}+k\pi$$

با توجه به این که b مخالف صفر است (در غیر این صورت، معادله بی‌معنی می‌شود)، می‌توان نوشت:

$$arc\ tg\frac{a}{b}+arc\ tg\frac{۱-\frac{a}{b}}{۱+\frac{a}{b}}=\frac{\pi}{۴}+k\pi$$

ویا:

$$arc\ tg\,y+arc\ tg\frac{۱-y}{۱+y}=\frac{\pi}{۴}+k\pi \quad \left(y=\frac{a}{b}\right)$$

چون $-\frac{\pi}{۲}<arc\ tg\,y<\frac{\pi}{۲}$ و $-\frac{\pi}{۲}<arc\ tg\frac{۱-y}{۱+y}<\frac{\pi}{۲}$ ، به‌دست می‌آید:

$$-\pi<arc\ tg\,y+arc\ tg\frac{۱-y}{۱+y}<\pi$$

و بنابراین، k تنها می‌تواند برابر ۰ یا ۱– باشد. به‌این‌ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$arc\ tg\,y+arc\ tg\frac{۱-y}{۱+y}=\frac{\pi}{۴} \quad \text{یا} \quad arc\ tg\,y+arc\ tg\frac{۱-y}{۱+y}=-\frac{۳\pi}{۴}$$

اگر $۱+y<۰$، آن‌وقت روشن است که

$$-\frac{\pi}{۲}<arc\ tg\,y<۰ \quad \text{و} \quad -\frac{\pi}{۲}<arc\ tg\frac{۱-y}{۱+y}<۰$$

و در نتیجه:

$$-\pi<arc\ tg\,y+arc\ tg\frac{۱-y}{۱+y}<۰$$

وروشن است که، در این حالت، سمت‌راست برابر $-\frac{۳\pi}{۴}$ می‌شود و، بنابراین، $x=۱$ جواب معادله نیست.

اگر $1+y>0$. آن‌وقت $arc\,tg\,y$ و $arc\,tg\frac{1-y}{1+y}$ درفاصلهٔ $0\leqslant y\leqslant 1$ غیر-منفی و مجموع آن‌ها، تنها می‌تواند مثبت باشد؛ درفاصله‌های $-1<y<0$ و $1<y<+\infty$، این آرك تانژانت‌ها، علامت‌های متفاوتی دارند ومجموع آن‌ها درفاصلهٔ $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ می‌افتد. دراین حالت

$$arc\,tg\,y+arc\,tg\frac{1-y}{1+y}=arc\,tg\frac{a}{b}-arc\,tg\frac{a-b}{a+b}=\frac{\pi}{4}$$

به‌این ترتیب، معادلهٔ مفروض به‌ازای $\frac{a}{b}>-1$، دارای جواب منحصر $x=1$ است و دردیگر موردها جواب ندارد.

۶۲۸. از دوطرف معادله سینوس می گیریم:

$$x=a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}$$

برای آزمایش جواب، آن را درمعادله قرارمی‌دهیم:

$$arc\sin(a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2})=arc\sin a+arc\sin b$$

این برابری، وقتی اتحاد است که داشته باشیم: $ab\leqslant 0$ یا $a^2+b^2\leqslant 1$ (مسالهٔ ۵۶۰ را ببینید). البته، به‌جزاین، فرض می‌شود: $|a|\leqslant 1$ و $|b|\leqslant 1$. بااین محدودیت‌ها برای a و b، جواب حاصل، تنها جواب معادلهٔ مفروض است. درحالتی که a و b با این شرط‌ها سازگار نباشند، معادله بدون جواب است.

۶۲۹. با استفاده از معادلهٔ اول، حاصل‌ضرب $\cos x\cos y$ را از معادلهٔ دوم پیدا می‌کنیم: $\cos x\cos y=\frac{1}{4}$. درنتیجه، دستگاه مفروض، هم‌ارز دستگاه زیراست:

$$\cos x\cos y=\frac{1}{4}\ ,\ \sin x\sin y=\frac{3}{4}$$

که اگر این دومعادله را، یکبار باهم جمع و باردیگر ازهم کم‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\cos(x-y)=1\ ,\ \cos(x+y)=-\frac{1}{2};$$

$$x-y=2m\pi\ ,\ x+y=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3};$$

$$x=(n+m)\pi\pm\frac{\pi}{3}\text{،}\quad y=(n-m)\pi\pm\frac{\pi}{3}(n\cdot m=0\text{،}\pm1\text{،}\ldots)$$

۶۳۰. $$\sin^2x+\sin^2y=\frac{3}{4};\quad \frac{1-\cos2x}{2}+\frac{1-\cos2y}{2}=\frac{3}{4};$$

$$\cos2x+\cos2y=\frac{1}{2};\ \cos(x+y)\cdot\cos(x-y)=\frac{1}{4};$$

$$\cos75^\circ\cdot\cos(x-y)=\frac{1}{4}\ ;\ \cos(x-y)=\frac{1}{4\cos75^\circ}=\frac{1}{4\sin15^\circ}=$$

$$=\frac{\cos15^\circ}{4\sin15^\circ\cos15^\circ}=\frac{\cos15^\circ}{2\sin30^\circ}=\cos15^\circ$$

به‌این ترتیب

$$x-y=360^\circ n\pm15^\circ\text{،}\ x+y=75^\circ$$

$$\left|\begin{array}{l}x_1=180^\circ n+45^\circ=(4n+1)45^\circ\\ y_1=-180^\circ n+30=(-6n+1)30^\circ\end{array}\right.;\quad\left|\begin{array}{l}x_2=(6n+1)30^\circ\\ y_2=(-4n+1)45^\circ\end{array}\right.$$

۶۳۱. معادلهٔ دوم را برحسب سینوس و کسینوس می‌نویسیم و، سپس، مقدار $\sin x$ را ازمعادلهٔ اول در آن قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{\sqrt{2}\sin y}{\cos x}=\frac{\sqrt{3}\sin y}{\cos y}\ ;\ \sin y(\sqrt{2}\cos y-\sqrt{3}\cos x)=0;$$

$$a)\ \sin y=0\ ;\ y_1=k\pi\ ;\ x_1=n\pi$$

$$b)\ \sqrt{2}\cos y-\sqrt{3}\cos x=0\ ;\ \sqrt{2}\cos y=\pm\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-\sin^2x}\,;$$

$$\sqrt{2}\cos y=\pm\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-2\sin^2y}\ ;\ 2\cos^2y=3(1-2\sin^2y)\ ;$$

$$\cos^2y=\frac{3}{4};\ \cos y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2};\ y_2=m\pi\pm\frac{\pi}{6}$$

که اگر درمعادلهٔ اول دستگاه قراردهیم:

$$\sin x=\pm\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2};\ x_2=l\pi\pm\frac{\pi}{4}$$

ازآن جا که دوطرف معادله را، درجای خود، مجذور کرده‌ایم، باید مقدارهای x_2

و $y_۲$ را مورد آزمایش قراردهیم. درمعادلهٔ دوم دستگاه می گذاریم:

$$tg\left(l\pi\pm\frac{\pi}{۴}\right)=\sqrt{۳}\ tg\left(m\pi\pm\frac{\pi}{۶}\right)$$

و چون، دورهٔ گردش تانژانت برابر است با π، بنابراین

$$tg\left(\pm\frac{\pi}{۴}\right)=\sqrt{۳}\ tg\left(\pm\frac{\pi}{۶}\right)\ ;\ \pm۱=\sqrt{۳}\left(\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)$$

به‌این ترتیب، اگر علامت‌های بالا یا علامت‌های پایین را به‌طور هم‌زمان انتخاب کنیم، جواب در معادله صدق می کند. جواب را در معادلهٔ اول دستگاه می گذاریم:

$$\sin\left(l\pi\pm\frac{\pi}{۴}\right)=\sqrt{۲}\ \sin\left(m\pi\pm\frac{\pi}{۶}\right)$$

اگر علامت‌های بالا را با هم، یا علامت‌های پایین را با هم بگیریم، برابری بالا را می‌توان چنین نوشت:

$$\cos l\pi\cdot\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}\cos m\pi\cdot\frac{۱}{۲};\ \cos l\pi=\cos m\pi\ ;\ (-۱)^l=(-۱)^m$$

ازاین‌جا نتیجه می‌شود که l و m را باید باهم زوج و یا باهم فرد گرفت. بنابراین، برای جواب دستگاه داریم:

$$x_۱=n\pi ،\ y_۱=k\pi\ ;\ x_۲=l\pi+\frac{\pi}{۴} ،\ y_۲=m\pi+\frac{\pi}{۶};$$

$$x_۳=l\pi-\frac{\pi}{۴} ،\ y_۳=m\pi-\frac{\pi}{۶}\quad (m, n, l, k=۰, \pm۱, \pm۲, \ldots)$$

درضمن l و m، یا هردو زوج و یا هردو فردند.

IX. نابرابری‌ها

۶۳۲. بعد از تبدیل به‌یك مخرج، به‌دست می آید:

$$\frac{(mx+n)(a-b)-(px+q)(a+b)}{a^۲-b^۲}<\frac{(mx-n)(a+b)+(px-q)(a-b)}{a^۲-b^۲}$$

درحالت $a^2-b^2>0$، بعد از تبدیل‌های لازم به‌دست می‌آید:

$$(mb+pa)x>na-qb$$

ودرحالت $a^2-b^2<0$: $(mb+pa)x<na-qb$

ازاین جا به‌دست می‌آید:

باشرط $(a^2-b^2)(mb+pa)>0$: $x>\frac{na-qb}{mb+pa}$؛

وباشرط $(a^2-b^2)(mb+pa)<0$: $x<\frac{na-qb}{mb+pa}$.

۶۳۳. $\frac{4(8x+3)-(7x-5)}{8x+3}<0;\ \frac{25x+17}{8x+3}<0;$

$$a)\ 25x+17>0 \text{ و } 8x+3<0 \Rightarrow -\frac{17}{25}<x<-\frac{3}{8};$$

$$b)\ 25x+17<0 \text{ و } 8x+3>0 \Rightarrow \text{غیرممکن}$$

۶۳۴. $\frac{2x+2-6+x-2}{x-2}>0;\ \frac{3x-6}{x-2}>0\ ;\ 3>0$

نابرابری به‌ازای همهٔ مقدارهای $x\neq 2$ برقرار است.

۶۳۵. پاسخ: $x<0$.

۶۳۶. نابرابری به $(x-1)(x+3)^2>0$ منجر می‌شود: $x>1$.

۶۳۷. $2x^3-x-1>0\ ;\ (2x^3-2x^2)+(2x^2-2x)+(x-1)>0;$

$$(x-1)(2x^2+2x+1)>0\ ;\ (x-1)\left[2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]>0;\ x>1$$

۶۳۸. نامعادلهٔ مفروض، به‌این صورت قابل تبدیل است:

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)>0$$

ریشه‌های چند جمله‌ای سمت چپ، عبارتند از۱، ۲، ۳ و ۴. بازه‌های $(-\infty, 1)$، $(1, 2)$، $(2, 3)$، $(3, 4)$ و $(4, +\infty)$ را درنظر می گیریم.* وقتی که x از یك فاصله

*) اگر a و b دوعدد حقیقی دلخواه و درضمن $a<b$ باشد، طبق تعریف
۱) بازه یا فاصلهٔ (a, b)، بـه‌مجموعهٔ همهٔ عددهـای حقیقی x گفته می‌شودکـه در نابرابری

به فاصلهٔ مجاور بعد از خودش برود، چند جمله‌ای تغییرعلامت می‌دهد، زیرا عددهای مرزی فاصله‌ها، ریشه‌های چند جمله‌ای‌اند. به‌این ترتیب، اگر علامت چند جمله‌ای را در نخستین فاصله پیدا کنیم، علامت آن در فاصله‌های بعدی، پیدا خواهد شد. علامت چند جمله‌ای در نخستین فاصله مثبت است (مثلاً به‌ازای $x=0$) و بنابراین، جواب نامعادله چنین است:

$$x<1, \qquad 2<x<3, \qquad x>4$$

۶۳۹. $$(x^4-x^3)-(5x^3-5x^2)+(6x^2-6x)<0;$$

$$x(x-1)(x-2)(x-3)<0 \Rightarrow 0<x<1\ ,\ 2<x<3$$

۶۴۰. نامعادلهٔ مفروض با نامعادلهٔ زیر هم‌ارز است:

$$-2(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)>0$$

پاسخ: $-4<x<-3$، $-2<x<-1$، $\frac{1}{2}<x<3$.

۶۴۱. نامعادلهٔ مفروض، هم‌ارز با نامعادلهٔ زیر است:

$$\frac{(x-1)(x-5)}{(x+3)(x-3)}>0$$

و یا
$$(x+3)(x-1)(x-3)(x-5)>0$$

پاسخ: $x<-3$، $1<x<3$، $x>5$.

۶۴۲. باقی ماندهٔ تقسیم چند جمله‌ای مفروض را بر $x-1$ و بر $x+3$ (طبق قضیهٔ بزو) پیدا می‌کنیم و برابر صفر قرار می‌دهیم، به دست می‌آید:

$$a+b-5=0, \quad -3a+b-9=0$$

$a<x<b$ صدق کند؛ دراین حالت، آن را بازه یا فاصلهٔ بازگویند.

۲) بازه یا فاصلهٔ $[a\ ,b]$، مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی x است که درنابرابری $a\leqslant x\leqslant b$ صدق کنند. دراین حالت، بازه یا فاصله را بسته گویند.

۳) بازه $[a\ ,b)$ شامل مجموعهٔ مقدارهایی از x است که درنابرابری $a\leqslant x<b$ صدق کنند (بازه یا فاصلهٔ نیم بسته).

۴) بازهٔ $(a\ ,b]$ شامل مجموعه مقدارهایی از x است که درنابرابری $a<x\leqslant b$ صدق کنند (بازه یا فاصلهٔ نیم‌باز).

از آن‌جا: $a=-1$ و $b=6$. اکنون، اگر چندجمله‌ای مفروض را، به‌ازای این مقدارهای a و b، بر $(x-1)(x+3)$ تقسیم کنیم، خارج قسمت برابر x^2-x-2 می‌شود و، بنابراین، می‌توان نوشت:

$$(x-1)(x+3)(x-2)(x+1)>0$$

پاسخ: $x<-3$، $-1<x<1$، $x>2$.

۶۴۳. برای این‌منظور، باید نابرابری‌های زیر، به‌طور هم‌زمان، برقرار باشند:

$$b^2-4ac\geqslant 0,\quad \frac{b}{a}<0,\quad \frac{c}{a}>0$$

(a، b و c، ضریب‌های معادلهٔ مفروض‌اند). نامعادله‌های زیر را خواهیم داشت:

$$-2k+3\geqslant 0 \text{ و } k(k-1)>0,\quad (k-1)(k+3)>0$$

پاسخ: $1<k\leqslant\frac{3}{2}$ و $k<-3$.

۶۴۴. تفاضل دوسه جمله‌ای را پیدا می‌کنیم. به دست می‌آید:

$$(k-4)x^2+(2k-3)x+k+4$$

این سه جمله‌ای، باید به‌ازای همهٔ مقدارهای x مثبت باشد. می‌دانیم، یك سه جمله‌ای درجه دوم، وقتی همیشه مثبت است که: اولاً مبین آن منفی، ثانیاً ضریب درجهٔ دوم آن مثبت باشد. به این ترتیب، به دستگاه دو نامعادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$-12k+73<0,\quad k-4>0\Rightarrow k>\frac{73}{12}$$

۶۴۵. چون مبین سه جمله‌ای $4x^2+6x+3$، عددی منفی است، بنابراین به‌ازای همهٔ مقدارهای x، با ضریب x^2 هم علامت، یعنی مثبت می‌شود. به این ترتیب، نامعادله را می‌توان این طور نوشت:

$$2kx^2+2\lambda x+\lambda>4kx^2+6kx+3k\Rightarrow 2kx^2+2(3k-\lambda)x+3k-\lambda<0$$

ولی سه جمله‌ای سمت چپ نمی‌تواند، به ازای همهٔ مقدارهای x، منفی باشد، زیرا ضریب x^2، یعنی $2k$، مثبت است. بنابراین، نامعادلهٔ مفروض جواب ندارد.

۶۴۶. نابرابری مفروض، وقتی به ازای همهٔ مقدارهای x برقرار است که مبین سه جمله‌ای مفروض منفی باشد، یعنی

$$(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2<0 \Rightarrow -16p(p-a)(p-b)(p-c)<0$$

که درآن، p نصف محیط است. درستی نابرابری اخیرهم واضح است.

۶۴۷. برای اثبات، این نابرابری را درنظرمی‌گیریم:

$$(a_1+b_1x)^2+(a_2+b_2x)^2+(a_3+b_3x)^2 \geqslant 0$$

که برای همهٔ مقدارهای x برقرار است. سمت چپ این نابرابری یك سه جمله‌ای درجه دوم نسبت به xاست، بنابراین، برای این‌که همیشه مثبت باشد، باید مبینی‌منفی داشته‌باشد. ازاین جا درستی نابرابری بونیاکووسکی ثابت می‌شود.

۶۴۸. معادله را ازمخرج آزاد می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(a-2)x^4-(a-1)(p^2+q^2)x^2+ap^2q^2=0$$

برای این‌که همهٔ ریشه‌های این معادلهٔ دومجذوری حقیقی باشند، لازم وکافی است که مجذور ریشه‌های آن، یعنی x_1^2 و x_2^2 حقیقی وغیرمنفی باشند. یعنی دستگاه نامعادله‌های زیر را داشته باشیم:

$$\Delta \geqslant 0,\ \frac{b}{a}<0,\ \frac{c}{a}\geqslant 0$$ (a و b و c، ضریب‌های معادله‌اند)

که ما را به دستگاه زیر می‌رساند:

$$(a-1)^2(p^2+q^2)^2-4(a-2)ap^2q^2 \geqslant 0 \text{ و } (a-2)ap^2q^2 \geqslant 0,$$
$$(a-2)(a-1)(p^2+q^2) \geqslant 0$$

نابرابری اول همیشه برقرار است، در واقع، اگربه حساب آوریم:

$$(a-2)a=[(a-1)-1][(a-1)+1]=(a-1)^2-1$$

آن وقت، این نابرابری، به صورت زیردرمی‌آید:

$$(a-1)^2(p^2-q^2)^2+4p^2q^2>0$$

دونابرابری آخر را هم، باتوجه به‌مثبت‌بودن p^2q^2 و p^2+q^2 می‌توان این‌طور نوشت:

$$(a-2)a \geqslant 0\ ,\ (a-2)(a-1) \geqslant 0$$

پاسخ: $a>2$ و $a<0$.

۶۴۹. نامعادلهٔ مفروض، هم‌ارزاست با نامعادلهٔ زیر:

$$\frac{3x-1}{2-x}>1 \Rightarrow \frac{4x-3}{2-x}>0 \Rightarrow \frac{3}{4}<x<2$$

۶۵۰. باید داشته باشیم: $3-x\geqslant 0$ یا $x\leqslant 3$. به شرط $x<2$، یعنی $x-2<0$، نامعادله برقرار است، زیرا $\sqrt{3-x}$ مثبت است. درحالت $2\leqslant x<3$، با مجذور کردن نامعادله به‌دست می‌آید:

$$3-x>x^2-4x+4;\quad x^2-3x+1<0\Rightarrow\frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

که اگر شرط $2\leqslant x<3$ را هم به حساب آوریم، به جواب $2\leqslant x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ می‌رسیم.

اگر جواب قبلی را هم در نظر بگیریم، جواب نامعادله به صورت $x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ درمی‌آید.

۶۵۱. قبل ازهمه، باید این نابرابری‌ها برقرار باشند:

$$x-4\geqslant 0,\ 3x-5\geqslant 0\Rightarrow x\geqslant 4$$

با این شرط، دوطرف نامعادله را مجذورمی‌کنیم:

$$3x-5>x-4\Rightarrow x>\frac{1}{2}$$

که با توجه به شرط، همان جواب $x\geqslant 4$ حاصل می‌شود.

۶۵۲. ابتدا باید داشته باشیم:

$$x+6\geqslant 0,\quad x+1\geqslant 0,\quad 2x-5\geqslant 0\Rightarrow x\geqslant\frac{5}{2}$$

با توجه به این شرط، دوطرف نامعادله را مجذورمی‌کنیم:

$$\sqrt{(x+1)(2x-5)}<5-x$$

بنابراین باید داشته باشیم $x<5$ (زیرا سمت چپ نامعادله، مثبت است). فرض می‌کنیم، این شرط هم برقرارباشد و دوباره، دوطرف نامعادله را مجذور می‌کنیم:

$$x^2+7x-30<0\Rightarrow -10<x<3$$

که با توجه به شرط‌های قبلی، یعنی $\frac{5}{2}\leqslant x<5$، جواب نامعادلهٔ مفروض، به صورت $\frac{5}{2}\leqslant x<3$ درمی‌آید.

۶۵۳. چون باید داشته باشیم: $0 \leqslant (x+5)(3x+4)$، بنابراین $x \leqslant -5$ یا $x \geqslant -\frac{4}{3}$. اگر، به جزاین داشته باشیم: $x < 1$، سمت‌چپ و، بنابراین، نابرابری برقرار می‌شود. به‌این ترتیب $x \leqslant -5$ و $-\frac{4}{3} \leqslant x < 1$ جواب نامعادله‌اند. در حالت $x \geqslant 1$ می‌توان دوطرف نامعادله را مجذور کرد و به دست‌آورد:

$$13x^2 - 51x - 4 < 0 \Rightarrow -\frac{1}{13} < x < 4$$

که با توجه به‌شرط $x > 1$ خواهد شد: $1 \leqslant x < 4$ اگر جواب حاصل را تلفیق کنیم، جواب‌های نامعادلهٔ مفروض به دست می‌آید: $x \leqslant -5$، $-\frac{4}{3} \leqslant x < 4$.

۶۵۴. دستگاه به این صورت درمی‌آید:

$$3y - 2x < -1، \quad 2y - 3x > 0$$

از این دونامعادله به دست می‌آید: $y < \frac{2x-1}{3}$ و $y > \frac{3x}{2}$؛ بنابراین

$$\frac{3x}{2} < y < \frac{2x-1}{3} \Rightarrow \frac{3x}{2} < \frac{2x-1}{3} \Rightarrow x < -\frac{2}{5}$$

به این ترتیب داریم: $x < -\frac{2}{5}$ و $\frac{3x}{2} < y < \frac{2x-1}{3}$.

۶۵۵. هردو نامعادله را نسبت به x حل می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$y > \frac{3-2x}{4} \text{ و } y > \frac{7-3x}{2}$$

اگر دونامعادله را نسبت به x هم حل کنیم، مثل بالا، جواب‌هایی یکسان (دریك جهت) به دست می‌آید. این نابرابری‌ها نشان می‌دهند که x را می‌توان دلخواه انتخاب کرد و، سپس، y را بزرگتراز بزرگترین مقدار از بین دوعدد $\frac{7-3x}{2}$ و $\frac{3-2x}{4}$ درنظر گرفت.

برای این‌که معلوم کنیم، کدامیك ازاین دومقدار بزرگترند، نامعادلهٔ $\frac{7-3x}{2} \geqslant \frac{3-2x}{4}$

را حل می‌کنیم که به جواب $x \geqslant \frac{11}{4}$ می‌رسد. ازاین‌جا معلوم می‌شود: ۱) $y > \frac{7-3x}{2}$ بـه شرط $x < \frac{11}{4}$؛ ۲) $y > \frac{3-2x}{4}$ به شرط $x > \frac{11}{4}$.

۶۵۶. از دو نامعادله به دست می‌آید:

$$y > \frac{4-3x}{2} \text{ و } y < \frac{x+5}{6} \Rightarrow \frac{4-3x}{2} < y < \frac{x+5}{6}$$

بنابراین $\frac{4-3x}{2} < \frac{x+5}{6}$ و از آن جا $x > \frac{7}{10}$. بنابراین جواب دستگاه چنین است:

$$x > \frac{7}{10} \text{ و } \frac{4-3x}{2} < y < \frac{x+5}{6}$$

۶۵۷. مقدار y را از معادله پیدا می‌کنیم و در نامعادله قـرار می‌دهیم ، به دست می‌آید :

$$5x + 3 \times \frac{168-7x}{4} > 121;\quad x < 20$$

بنابراین جواب چنین است: $x < 20$ و $y = \frac{168-7x}{4}$.

می‌تـوانستیم x را از معادله ، در نامعادلـه قرار دهیم. در ایـن صورت به‌دست می‌آمد :

$$y > 7 \text{ و } x = \frac{168-4y}{7}$$

۶۵۸. چون $0 \leqslant y^2 < x$، دستگاه مفروض هم‌ارزاست با دستگاه

$$y > x^2,\ \ y < \sqrt{x} \Rightarrow x^2 < y < \sqrt{x}$$

برای این منظور، باید داشته باشیم: $x^2 < \sqrt{x}$ یا $x^4 < x$ و ازآن‌جا $0 < x < 1$. به‌این ترتیب، جواب دستگاه چنین است:

$$0 < x < 1,\ \ x^2 < y < \sqrt{x}$$

۶۵۹. y را ازمعادله پیدا می‌کنیم و در دونامعادله می‌گذاریـم و، سپس، دستگاه دونامعادله را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^{۲}+\dfrac{(۶-۳x)^{۲}}{۴}>۴ \\ x \quad \dfrac{۶-۳x}{۶}<۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱۳x^{۲}-۳۶x+۲۰>۰ \\ ۳x^{۲}-۶x+۲>۰ \end{cases}$$

پاسخ: a) $x<\frac{۳-\sqrt{۳}}{۳}$، $y=\frac{۶-۳x}{۲}$؛ b) $x>۲$، $y=\frac{۶-۳x}{۲}$.

۶۶۰. a) درحالت $ax\geqslant ۰$، داریم $|a|=a$ ونابرابری‌مفروض به صورت $a<b$ درمی‌آید. به‌جزاین $-b<۰$، وعددمثبت‌یا صفرازعددمنفی بزرگتراست، یعنی $-b<a$. به این ترتیب، درحالت $a\geqslant ۰$ داریم: $-b<a<b$.

b) درحالت $a<۰$ داریم. $|a|=-a$ و از نامعادلهٔ مفروض به دست می‌آید: $-a<b$ یا $-b<a$. به جزاین $b>۰$، و عدد منفی ازعدد مثبت کوچکتراست، یعنی $a<b$. به این ترتیب، دراین حالت هم: $-b<a<b$.

۶۶۱. اگر $-b<a<b$، آن‌وقت $-a<b$ و $a<b$ یا $a+b>۰$ و $a-b<۰$. ولی دراین صورت داریم: $(a+b)(a-b)<۰$ یا $a^{۲}-b^{۲}<۰$. از آن جا $a^{۲}<b^{۲}$ و $|a|<b$.

۶۶۲. a و b را دوعددحقیقی دلخواه می‌گیریم. روشن‌است که $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$ و $-|b|\leqslant b\leqslant|b|$، که‌ازجمع آن‌ها به‌دست‌می‌آید:

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|$$

ولی دراین‌صورت $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ (مسالهٔ ۶۶۱ را ببینید).

۶۶۳. توجه می‌کنیم که $a=(a-b)+b$ را می‌توان این طورنوشت:

$$|a|=|(a-b)+b|\leqslant|a-b|+|b| \qquad \text{(مساله ۶۶۲)}$$

ازآن‌جا: $|a-b|\geqslant|a|-|b|$.

۶۶۴. نابرابری مفروض، با دستگاه نابرابری‌های زیرهم‌ارزاست:

$$-۳<\frac{x^{۲}-kx+۱}{x^{۲}+x+۱}<۳$$

که اگرآن‌ها راازمخرج آزادکنیم ($x^{۲}+x+۱>۰$)، به دستگاه زیرمی‌رسیم:

$$۲x^{۲}+(۳+k)x+۲>۰,\quad ۴x^{۲}-(k-۳)x+۴>۰$$

برای این‌که این دونابرابری، به ازای همهٔ مقدارهای x، برقرارباشند، لازم وکافی

است که مبین سه‌جمله‌ای‌های سمت چپ، منفی شود:

$$\begin{cases}(۳+k)^۲-۱۶=(k+۷)(k-۱)<۰\\(k-۳)^۲-۶۴=(k+۵)(k-۱۱)<۰\end{cases}$$

پاسخ: $-۵<k<۱$.

۶۶۵. $\frac{a+b}{۱+a+b}=\frac{a}{۱+a+b}+\frac{b}{۱+a+b}<\frac{a}{۱+a}+\frac{b}{۱+b}$.

۶۶۶. چون $a\neq ۰$، پس نابرابری مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{۱-\left(\frac{b}{a}\right)^m}{۱+\left(\frac{b}{a}\right)^m}>\frac{۱-\left(\frac{b}{a}\right)^n}{۱+\left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

ولی $۱>\frac{b}{a}>۰$ و $n<m$، بنابراین

$$\left(\frac{b}{a}\right)^m<\left(\frac{b}{a}\right)^n ;۱-\left(\frac{b}{a}\right)^m>۱-\left(\frac{b}{a}\right)^n ; ۱+\left(\frac{b}{a}\right)^m<۱+\left(\frac{b}{a}\right)^n$$

ازدونابرابری اخیر، می‌توان به سادگی، نابرابری مطلوب را پیدا کرد.

۶۶۷. فرض کنیم، $\frac{a}{b}$ کسری کوچکتر از واحد، $k>۰$، $a>۰$ و $b>۰$ باشد.

باید ثابت کنیم: $\frac{a+k}{b+k}>\frac{a}{b}$. چون $\frac{a}{b}$ کسری کوچکتراز واحد است، پس $b>a$. اگر دوطرف این، نابرابری را درعدد مثبت k ضرب و، سپس، به دوطرف، مقدار ab را اضافه کنیم، به‌دست می‌آید:

$$ab+bk>ab+ak\Rightarrow b(a+k)>a(b+k)$$

اکنون دوطرف نابرابری را برمقدارمثبت $b(b+k)$ تقسیم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{a+k}{b+k}>\frac{a}{b}$$

اگر $\frac{a}{b}$ کسری بزرگتر از واحد و $k>۰$، $a>۰$ و $b>۰$، آن وقت، با روش

مشابهی ثابت می‌شود:

$$\frac{a+k}{b+k}<\frac{a}{b}$$

۶۶۸. کوچکترین کسر از بین کسرهای $\frac{a_1}{b_1}$، $\frac{a_2}{b_2}$، ...، $\frac{a_n}{b_n}$ را m و بزرگترین آن‌ها را M می‌گیریم. در این صورت می‌توان نوشت:

$$m\leqslant\frac{a_1}{b_1}\leqslant M;\ m\leqslant\frac{a_2}{b_2}\leqslant M;\ \ldots;\ m\leqslant\frac{a_n}{b_n}\leqslant M$$

چون b_1، b_2، ...، b_n مقدارهایی مثبت‌اند، به‌دست می‌آید:

$$mb_1\leqslant a_1\leqslant Mb_1,$$

$$mb_2\leqslant a_2\leqslant Mb_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$mb_n\leqslant a_n\leqslant Mb_n$$

ازجمع این نابرابری‌ها، به‌دست می‌آید:

$$m(b_1+b_2+\cdots+b_n)\leqslant a_1+b_2+\cdots+a_n\leqslant M(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$

و از آن‌جا

$$m\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\leqslant M$$

۶۶۹.

$$\frac{(x^2+1)+1}{\sqrt{x^2+1}}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-2+2=$$

$$=\left(\sqrt[4]{x^2+1}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+1}}\right)^2+2\geqslant 2$$

۶۷۰.

$$\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}}{\sqrt{xy}}=(\sqrt{x}+\sqrt{y})\cdot\frac{\sqrt{x^2}-\sqrt{xy}+\sqrt{y^2}}{\sqrt{xy}}=$$

$$=(\sqrt{x}+\sqrt{y})\,\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}=$$

$$=(\sqrt{x}+\sqrt{y})\cdot\left[1+\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{\sqrt{xy}}\right]>\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

۶۷۱. (a به ترتیب داریم:

$$\frac{a_1+a_2}{2}=\frac{\sqrt{a_1^2}+\sqrt{a_2^2}-2\sqrt{a_1a_2}+2\sqrt{a_1a_2}}{2}=$$

$$=\frac{(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2+2\sqrt{a_1a_2}}{2}\geqslant\frac{2\sqrt{a_1a_2}}{2}=\sqrt{a_1a_2}$$

علامت برابری، تنها برای حالت $a_1=a_2$ برقرار است.

b) از نابرابری که هم اکنون ثابت کردیم، استفاده می‌کنیم. به‌دست می‌آید:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}=\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2}\geqslant\frac{\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}}{2}\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt{\sqrt{a_1a_2}\cdot\sqrt{a_3a_4}}=\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$$

علامت برابری، تنها برای $a_1=a_2=a_3=a_4$ برقرار است.

۶۷۲. x و y را دوعدد مثبت به‌مجموع a فرض می‌کنیم. چون واسطهٔ حسابی دوعدد مثبت، ازواسطهٔ هندسی آن‌ها کوچکتر نیست، بنا براین: $\frac{a}{2}\geqslant\sqrt{xy}$ یا $xy\leqslant\left(\frac{a}{2}\right)^2$. حاصل ضرب x و y، هرگز از $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ تجاوز نمی‌کند. از طرف دیگر، برای $x=y=\frac{a}{2}$، این حاصل ضرب برابر $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ می‌شود. بنابراین، حداکثر حاصل ضرب x و y، درحالت $x=y$ پیش می‌آید و درحالت $x\neq y$ داریم: $xy<\left(\frac{a}{2}\right)^2$.

۶۷۳. ضلعی ازقطعه‌زمین‌را که بردیوارعموداست، برابرxمی‌گیریم. دراین‌صورت، ضلع موازی دیوار برابر $100-2x$ و مساحت قطعه زمین برابر $S=x(100-2x)$ می‌شود. باید مقداری از x را پیدا کنیم که، به ازای آن، این مساحت حداکثر شود. اگر بنویسیم: $2S=2x(100-2x)$، با حاصل ضرب دومقدارمثبت سروکار پیدامی‌کنیم که مجموع آن‌ها مقدارثابتی است (زیرا مجموع $2x$ و $100-2x$ برابر ۱۰۰ می‌شود). درنتیجه، این حاصل‌ضرب وقتی به حداکثر مقدار خود می‌رسد که داشته باشیم:

$$2x=100-2x\Rightarrow x=25 \qquad \text{(مسالهٔ ۶۷۲)}$$

۶۷۴. اگر طول کمان قطاع را l، شعاع آن را r، محیط آن را $2p$ و مساحت آن

را S بگیریم، داریم:

$$S=\frac{1}{2}rl\ ;\ 2r+l=2p\ ;\ r=\frac{1}{2}(2p-l)$$

بنا بر این $S=\frac{1}{4}(2p-l)\cdot l$. برای این که S به‌حداکثر مقدار خود برسد، باید حاصل‌ضرب $(2p-l)\cdot l$ حداکثر باشد. وچون مجموع این دومقدار مثبت، برابر عدد ثابت $2p$ است، حداکثر حاصل‌ضرب وقتی حاصل می‌شود که داشته باشیم:

$$2p-l=l \Rightarrow l=p\ ,\ r=\frac{1}{2}p \text{ یا } l=2r$$

۶۷۵. ارتفاع مستطیل را x، قاعدهٔ آن وقطر نیم دایره را $2y$ می‌گیریم. اگر محیط تمامی شکل برابر $2p$ (مقدار مفروض) ومساحت آن S باشد، داریم:

$$S=2xy+\frac{1}{2}\pi y^2;\ 2x+2y+\pi y=2p;\ 2x=2p-2y-\pi y$$

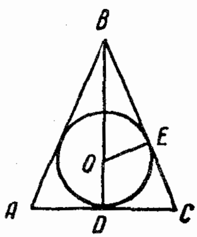
وبنا براین

$$S=y(2p-2y-\pi y)+\frac{1}{2}\pi y^2=y\left[2p-\frac{4+\pi}{2}y\right]$$

ویا $\frac{4+\pi}{2}S=\frac{4+\pi}{2}y\left[2p-\frac{4+\pi}{2}y\right]$. پنجره وقتی حداکثر نور را از خود عبور می‌دهد که مساحت آن، حداکثر مقدار ممکن باشد؛ برای این منظور باید داشته باشیم:

$$\frac{4+\pi}{2}y=2p-\frac{4+\pi}{2}y \Rightarrow y=\frac{2p}{4+\pi};\ x=\frac{4p}{4+\pi}$$

۶۷۶. ABC، یعنی مقطع محوری مخروط را در نظر می‌گیریم (شکل ۵). فرض کنید، ارتفاع $BD=h$ و شعاع قاعدهٔ $BD=r$. در این صورت، برای حجم مخروط خواهیم داشت: $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$. چون



شکل ۵

$$BE=\sqrt{OB^2-OE^2}=\sqrt{(h-R)^2-R^2}=\sqrt{h(h-2R)}$$

بنا براین، از تشابه دو مثلث BCD و BOE به دست می‌آید:

$$\frac{r}{h}=\frac{R}{\sqrt{h(h-۲R)}} \; ; \; r^۲=\frac{R^۲h}{h-۲R}$$

در نتیجه

$$V=\frac{۱}{۳}\pi R^۲\cdot\frac{h^۲}{h-۲R}=\frac{۱}{۳}\pi R^۲V_۱\left(V_۱=\frac{h^۲}{h-۲R}\right)$$

مقدار V، همراه با $V_۱$، به حداقل خود می‌رسد. $V_۱$ هم وقتی به حداقل خود می‌رسد که $\frac{۱}{V_۱}$ حداکثر مقدار ممکن باشد.

$$\frac{۱}{V_۱}=\frac{h-۲R}{h^۲}=\frac{۱}{۲R}\cdot\frac{۲R}{h}\left(۱-\frac{۲R}{h}\right)$$

مجموع دو عامل مثبت $\frac{۲R}{h}$ و $۱-\frac{۲R}{h}$ مقداری است ثابت، بنابراین، حاصل ضرب آن‌ها وقتی حداکثر خواهد بود که داشته باشیم:

$$\frac{۲R}{h}=۱-\frac{۲R}{h} \; ; \; h=۴R \;،\; r=\frac{Rh}{\sqrt{h(h-۲R)}}=R\sqrt{۲} \; ;$$

$$V=\frac{۱}{۳}\pi R^۲\cdot۸R=۲\times\frac{۴}{۳}\pi R^۳=\text{دو برابر حجم کره}$$

۶۷۷. x و y را دو عدد مثبت به حاصل ضرب a می‌گیریم. داریم: $\frac{x+y}{۲}\geqslant\sqrt{a}$ (واسطهٔ حسابی از واسطهٔ هندسی دوعدد کمتر نیست). از آن‌جا $x+y\geqslant۲\sqrt{a}$. یعنی دوعدد مثبت x و y را، هرجور انتخاب کنیم، مجموع آن‌ها از $۲\sqrt{a}$ کمتر نمی‌شود. ازطرف دیگر، به‌ازای $x=y=\sqrt{a}$، این‌مجموع برابر $۲\sqrt{a}$ است. بنابراین، حداقل‌مقدار $x+y$، به‌ازای $x=y$ به‌دست می‌آید. وروشن است که، برای $x\neq y$، داریم: $x+y>۲\sqrt{a}$.

یادداشت. درمجموع $x+y$، داریم: $y=\frac{a}{x}$. بنابراین، نتیجهٔ حاصل را، می‌توان این طور بیان کرد: مقدار $u=x+\frac{a}{x}$، که در آن $a>۰$ و $x>۰$، به ازای $x=\sqrt{a}$، و تنها به ازای همین مقدار x، به حداقل مقدار خود می‌رسد.

۶۷۸. عرض بخش چاپی صفحه را x وطول آن را y می گیریم. در این صورت، عرض صفحه $x+4$، طول آن $y+6$، ومساحت آن $S=(x+4)(y+6)$ می‌شود. با توجه به شرط $xy=216$، پرانتزها را باز می کنیم:

$$S=216+6x+4y+24=240+6x+4\times\frac{216}{x}$$

باید مقدارهایی از x را پیدا کرد که، به ازای آن‌ها، S، حداقل مقدار ممکن باشد. ولی داریم: $S=240+6\left(x+\frac{144}{x}\right)$ و $u=x+\frac{144}{x}$ هم، به ازای همان مقدارهای x، به حداقل خود می‌رسد. وبنابراین، به دست می‌آید: $x=\sqrt{144}=12$ (یادداشت مسالهٔ ۶۷۷ را ببینید). ازاین‌جا عرض صفحه ۱۶ سانتی‌متر وطول‌آن ۲۴ سانتی می‌شود.

۶۷۹. بااستفاده از رابطهٔ بین‌واسطهٔ‌حسابی وواسطهٔ هندسی دوعدد غیرمنفی، داریم:

$$a^4+b^4+c^4=\frac{a^4+b^4}{2}+\frac{b^4+c^4}{2}+\frac{c^4+a^4}{2}\geqslant\sqrt{a^4a^4}+\sqrt{b^4c^4}+$$

$$+\sqrt{c^4a^4}=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=a^2\cdot\frac{b^2+c^2}{2}+b^2\cdot\frac{c^2+a^2}{2}+$$

$$+c^2\cdot\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant a^2\sqrt{b^2c^2}+b^2\sqrt{c^2a^2}+c^2\sqrt{a^2b^2}=$$

$$=abc(a+b+c)$$

۶۸۰. با استفاده از رابطهٔ $\sqrt{mn}\leqslant\frac{m+n}{2}$ داریم:

$$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_3}+\dots+\sqrt{a_{n-1}a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_1+a_3}{2}+$$

$$+\dots+\frac{a_{n-1}+a_n}{2}=\frac{n-1}{2}(a_1+a_2+\dots+a_n)$$

۶۸۱. چون $\frac{1+a_k}{2}\geqslant\sqrt{a_k}$ یا $1+a_k\geqslant2\sqrt{a_k}$، بنابراین

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)\geqslant2\sqrt{a_1}\cdot2\sqrt{a_2}\dots2\sqrt{a_n}=$$

$$=2^n\sqrt{a_1a_2\dots a_n}=2^n$$

۶۸۲. فرض‌می کنیم: $a_1=x^3$، $a_2=y^3$، $a_3=z^3$. درآن‌صورت،نابرابری‌مفروض

به صورت $\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\geqslant xyz$ درمی‌آید وکافی است ثابت کنیم:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz\geqslant 0$$

ولی، بنابر اتحاد معروف داریم:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=$$
$$=(x+y+z)\left[\frac{1}{2}(x-y)^2+\frac{1}{2}(y-z)^2+\frac{1}{2}(z-x)^2\right]$$

به این ترتیب: $x^3+y^3+z^3-3xyz\geqslant 0$.

۶۸۳. درستی این نابرابری را، برای $n=2$، در مسالهٔ **۶۷۱** ثابت کردیم. فرض می‌کنیم، نابرابری برای $n=k$ درست باشد، ثابت می‌کنیم که، دراین صورت، برای $n=2k$ هم درست است. درواقع

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2k-1}+a_{2k}}{2k}=$$

$$=\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}+\cdots+\frac{a_{2k-1}+a_{2k}}{2}}{k}\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt[k]{\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}\cdots\frac{a_{2k-1}+a_{2k}}{2}}\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt[k]{\sqrt{a_1a_2}\cdot\sqrt{a_3a_4}\cdots\sqrt{a_{2k-1}a_{2k}}}=\sqrt[2k]{a_1a_2\cdots a_{2k}}$$

به این ترتیب، اگر نابرابری، برای $n=k$ درست باشد، برای $n=2k$ هم درست است وچون درستی آن را برای $n=2$ ثابت کرده‌ایم، بنابراین، برای $n=4$، $n=8$ وبه طور کلی، برای $n=2^m$ درست است.

اکنون فرض می‌کنیم، n برابر توانی از ۲ نباشد. عدد p را به‌عدد n اضافه‌می کنیم، به نحوی که داشته باشیم: $n+p=2^m$ و فرض می‌کنیم:

$$a_{n+1}=a_{n+2}=\cdots=a_{n+p}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

در این صورت، خواهیم داشت:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}}{n+p}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+pa_{n+1}}{n+p}\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt[n+p]{a_1a_2\cdots a_na_{n+1}^p}$$

از طرف دیگر داریم:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+pa_{n+1}}{n+p}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+p\cdot\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}}{n+p}=$$

$$=\frac{(n+p)(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{n(n+p)}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

و همچنین

$$\sqrt[n+p]{a_1a_2\cdots a_na^p{}_{n+1}}=\sqrt[n+p]{a_1\cdots a_n\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^p}=$$

$$=\sqrt[n+p]{a_1a_2\cdots a_n}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^{\frac{p}{n+p}}$$

و در نتیجه

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n+p]{a_1a_2\cdots a_n}\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^{\frac{p}{n+p}}$$

و یا

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^{\frac{n}{n+p}}\geqslant\sqrt[n+p]{a_1a_2\cdots a_n}$$

که اگر دو طرف نابرابری اخیر را به توان $\frac{n+p}{n}$ برسانیم، سرانجام به دست می‌آید:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

۲۸۴. x_1، x_2، ...، x_n را عددهای مثبتی به‌مجموع a می‌گیریم. چون واسطهٔ عددی

n عدد مثبت از واسطهٔ هندسی آن‌ها کوچکتر نیست، می‌توان نوشت:

$$\frac{a}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \Rightarrow x_1 x_2 \cdots x_n \leqslant \left(\frac{a}{n}\right)^n$$

به این ترتیب، حاصل ضرب عددهای x_1، x_2، ...، x_n نمی‌تواند بزرگتر $\left(\frac{a}{x}\right)^n$ شود. از طرف دیگر، با شرط

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{a}{n}$$

به حاصل ضرب $\left(\frac{a}{n}\right)^n$ می‌رسیم. بنابراین، حداکثر مقدار حاصل ضرب $x_1 x_2 \cdots x_n$ به ازای $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ به دست می‌آید.

به روشنی معلوم است که، این جواب، منحصر به فرد است، یعنی اگر بین عددهای x_1، x_2، ...، x_n، دست کم دو عدد نابرابر وجود داشته باشد، حاصل ضرب این n عدد، از $\left(\frac{a}{n}\right)^n$ کمتر خواهد شد.

۶۸۵. شعاع قاعدهٔ استوانه را r، ارتفاع آن را h، وشعاع کرهٔ مفروض را R می‌گیریم. اگر مقطع محوری مخروط را در نظر بگیریم، به سادگی روشن می‌شود که:

$$h = \sqrt{(2R)^2 - (2r)^2} = 2\sqrt{R^2 - r^2}$$

و بنابراین، برای حجم استوانه به دست می‌آید:

$$V = \pi r^2 h = 2\pi r^2 . \sqrt{R_2 - r^2}$$

باید مقداری از r را پیدا کرد که، به‌ازای آن، مقدار حجم، به‌حداکثر خود برسد. ولی V و V_2، با هم، یعنی به‌ازای یك مقدار r، حداکثر خود را پیدا می‌کنند و، همچنین، برای

$$\frac{1}{2\pi^2} V^2 = 2r^4 (R^2 - r^2) = r^2 . r^2 . (2R^2 - 2r^2)$$

مجموع عامل‌های r^1، r^2 $2r^2 - 2R^2$ مقداری‌ثابت و برابر $2R^2$ است، بنابراین، حاصل‌ضرب آن‌ها، وقتی به حداکثر مقدار خود می‌رسد که، این عامل‌ها، باهم برابر باشند:

$$r^2 = 2R^2 - 2r^2 \Rightarrow r = R\sqrt{\frac{2}{3}}$$

که به ازای آن، استوانه دارای حداکثر حجم می‌شود.

۶۸۶. $$1+(2^n-1)=1+(2-1)(2^{n-1}+2^{n-2}+\dots+2+1)>$$

$$>1+n\sqrt[n]{2^{n-1}\cdot 2^{n-2}\dots 2\cdot 1}=1+n\sqrt[n]{2^{\frac{(n-1)n}{2}}}=1+n\sqrt{2^{n-1}}$$

۶۸۷. $$n!=\sqrt{(n!)^2}=\sqrt{(1\times n)[2(n-1)][3(n-2)]\dots(n\times 1)}=$$

$$=\sqrt{1\times n}\cdot\sqrt{2(n-1)}\cdot\sqrt{3(n-2)}\dots\sqrt{n\times 1}>$$

$$>\frac{1+n}{2}\cdot\frac{2+(n-1)}{2}\cdot\frac{3+(n-2)}{2}\dots\frac{n+1}{2}=\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

۶۸۸. $$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{2\times 3\times 4}+\dots+\frac{1}{2\times 3\times\dots\times n}<$$

$$<1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=$$

$$=1+2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3$$

۶۸۹. $$(2-1)\cdot 1!+(3-2)\cdot 2!+\dots+[(n+1)-n]\cdot n!=$$

$$=(2!-1!)+(3!-2!)+\dots+[(n+1)!-n!]=(n+1)!-1<(n+1)!$$

۶۹۰. $$A=\frac{1\times 3\times 5\times\dots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\dots\times 2n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\dots\frac{2n-1}{2n}<$$

$$<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\dots\frac{2n}{2n+1}=\frac{1}{\frac{1\times 3\times 5\times\dots\times(2n-1)(2n+1)}{2\times 4\times 6\times\dots\times 2n}}=$$

$$=\frac{1}{A(2n+1)}<\frac{1}{A\times 2n}<\frac{1}{An}$$

بنابراین

$$A<\frac{۱}{An} \Rightarrow A^{۲}<\frac{۱}{n} \Rightarrow A<\frac{۱}{\sqrt{n}}$$

۶۹۱. $$\sqrt[n]{۱\times ۲\times ۳\times \cdots \times n}=\sqrt[n]{\frac{(۱\times ۲\times ۳\times \cdots \times n)^{۲}}{۱\times ۲\times ۳\times \cdots \times n}}=$$

$$=\sqrt[n]{\frac{(۱\times n)\cdot[۲\cdot(n-۱)]\cdots[k\cdot(n-k+۱)]\cdots(n\times ۱)}{۱\times ۲\times ۳\times \cdots \times n}}$$

از طرف دیگر داریم:

$$k(n-k+۱)=kn-k(k-۱)=kn-n-k(k-۱)+n=$$
$$=(k-۱)(n-k)+n$$

به‌این ترتیب دیده می‌شود که ، برای هرمقدار k که با شرط $۱\leqslant k\leqslant n$ سازگار باشد، داریم:

$$k(n-k+۱)\geqslant n$$

از این‌جا به‌دست می‌آید:

$$\sqrt[n]{۱\times ۲\times ۳\times \cdots \times n}\geqslant \sqrt[n]{\frac{n^{n}}{۱\times ۲\times \cdots \times n}}=\frac{n}{\sqrt[n]{۱\times ۲\times \cdots \times n}}$$

به‌این ترتیب

$$\sqrt[n]{(۱\times ۲\times ۳\times \cdots \times n)^{۲}}\geqslant n \Rightarrow \sqrt[n]{۱\times ۲\times \cdots \times n}\geqslant \sqrt{n}$$

علامت برابری برای $n=۲$ است ودرحالت $n>۲$ داریم: $\sqrt[n]{۱\times ۲\times \cdots \times n}>\sqrt{n}$

۶۹۲. عدد مطلوب نه‌رقمی است. بنابراین، اگر آن را $x^{۶}$ بنامیم، باید داشته‌باشیم:

$$۱۰^{۸}<x^{۶}<۱۰^{۹} \Rightarrow ۲۰<x<۳۲$$

ولی مجموع رقم‌های عدد ، برابر است با ۴۵ ؛ یعنی عدد مطلوب و ، بنابراین x ، بر ۳ بخش‌پذیر است . به این ترتیب، x، یکی از چهار عدد ۲۱ ، ۲۴ ، ۲۷ و ۳۰ است. با آزمایش معلوم می‌شود که x باید برابر ۲۷ باشد وعدد مطلوب

$$x^{۶}=۲۷^{۶}=۳۸۷۴۲۰۴۸۹$$

۶۹۳. عدد درصد مجهول را x می‌نامیم، بنابراین، بعد از عبور گاز ازصافی اول، از کل $\frac{ax}{100}$ متر مکعب ناخالصی، به‌اندازهٔ $\frac{axp}{100^2}$ مترمکعب جذب می‌شود، یعنی به‌اندازهٔ $\frac{ax}{100}\left(1-\frac{p}{100}\right)$ مترمکعب باقی می‌ماند. بعد ازعبور ازصافی دوم $\frac{ax}{100}\left(1-\frac{p}{100}\right)^2$ مترمکعب و بعد از عبور ازصافی nام $\frac{ax}{100}\left(1-\frac{p}{100}\right)^n$ متر مکعب باقی می‌ماند. اکنون در مخزنی که به‌اندازهٔ

$$a-\frac{ax}{100}+\frac{ax}{100}\left(1-\frac{p}{100}\right)^n$$

مترمکعب گاز وجوددارد، b مترمکعب شامل $\frac{bq}{100}$ مترمکعب ناخالصی افزوده‌ایم، به‌نحوی که درگاز داخل مخزن به‌اندازهٔ

$$\frac{ax}{100}\left(1-\frac{p}{100}\right)^n+\frac{bq}{100}$$

مترمکعب ناخالصی وجود دارد. این مقدار، نباید از $r\%$ کل حجم گاز مخزن بیشتر باشد. بنابراین باید داشته باشیم:

$$\frac{ax}{100}\left(1-\frac{p}{100}\right)^n+\frac{bq}{100}\leqslant\frac{r}{100}\left[b+a-\frac{ax}{100}+\frac{ax}{100}\left(1-\frac{p}{100}\right)^n\right]$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$ax\left[\left(1-\frac{r}{100}\right)\left(1-\frac{p}{100}\right)^n+\frac{r}{100}\right]\leqslant (a+b)r-bq$$

از آن‌جاکه عبارت سمت چپ نابرابری مقداری مثبت است، بنابراین به ازای $(a+b)r<bq$، نابرابری و در نتیجه، مسألهٔ ما، بدون جواب می‌شود. در حالت $(a+b)r>bq$ خواهیم داشت:

$$x\leqslant\frac{(a+b)r-bq}{a\left[\left(1-\frac{r}{100}\right)\left(1-\frac{p}{100}\right)^n+\frac{r}{100}\right]}$$

۶۹۴. در پایان سال اول، به‌سپرده A روبل، $\frac{Ap}{100}$ روبل اضافه می‌شود و صاحب سپرده B روبل برمی‌دارد. بنابراین، در ابتدای سال دوم، در دفترچهٔ پس‌انداز مبلغی برابر

$$A_1 = A\left(1+\frac{p}{100}\right) - B \text{ (روبل)}$$

باقی می‌ماند. در پایان سال دوم هم، با انجام همین عمل‌ها، به‌اندازهٔ مبلغ زیر در دفترچه می‌ماند:

$$A_2 = A_1\left(1+\frac{p}{100}\right) - B = A\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 - B\left[1+\left(1+\frac{p}{100}\right)\right]$$

ودر پایان سال سوم، مبلغ

$$A_2\left(1+\frac{p}{100}\right) - B = A\left(1+\frac{p}{100}\right)^3 - B\left[1+\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{p}{100}\right)^2\right]$$

وروشن است که مبلغ دفترچهٔ پس‌انداز، در پایان سال xام، برحسب روبل، چنین می‌شود:

$$A\left(1+\frac{p}{100}\right)^x - B\left[1+\left(1+\frac{p}{100}\right)+\left(1+\frac{p}{100}\right)^2+\dots+\left(1+\frac{p}{100}\right)^{x-1}\right]$$

عبارت داخل کروشه، x جملهٔ متوالی از یک تصاعد هندسی به‌جملهٔ اول ۱ و قدر نسبت $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ است. بنابراین، برای موجودی دفترچهٔ پس‌انداز خواهیم داشت:

$$A\left(1+\frac{p}{100}\right)^x - B\cdot\frac{\left(1+\frac{p}{100}\right)^x}{1+\frac{p}{100}-1} = A\left(1+\frac{p}{100}\right)^x -$$

$$-\frac{100B}{p}\left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^x - 1\right] = \frac{Ap-100B}{p}\left(1+\frac{p}{100}\right)^x + \frac{100B}{p}$$

ولی، بنابرصورت مسأله، این مبلغ کمتر از $3A$ نیست. بنابراین باید داشته باشیم:

$$\frac{Ap-100B}{p}\left(1+\frac{p}{100}\right)^x + \frac{100B}{p} \geqslant 3A$$

که با حل آن به‌دست می‌آید:

$$x \geqslant \frac{tg(3Ap-100B) - tg(Ap-100B)}{tg(100+p) - 2}$$

ازآن‌جاکه $p>0$، $A>0$، $B>0$ و، به‌جزآن $Ap > 100B$ (مبلغ پس‌انداز،

روبه‌افزایش است)؛ بنابراین همهٔ عبارت‌های جلو علامت لگاریتم مثبت‌اند و، در نتیجه، عبارت مربوط به x، معنا دارد. البته، درحالت $Ap\leqslant 100B$، مسأله بدون‌جواب می‌ماند.

۶۹۵. فرض کنید، x بار شست‌وشو لازم باشد. هرواحد طلای نشسته، شامل $\frac{k}{100}$ واحد طلای خالص و $\left(1-\frac{k}{100}\right)$ واحد، ناخالصی است. بعد از یک شست‌وشو ازیک واحد خاک طلا، $\frac{k}{100}\left(1-\frac{q}{100}\right)$ واحد باقی می‌ماند که ناخالصی آن برابر $\left(1-\frac{k}{100}\right)\left(1-\frac{p}{100}\right)$ است. روشن است که بعد از دوشست وشو از واحد خاک‌طلا، مقدار طلا و ناخالصی، چنین است:

$$\frac{k}{100}\left[1-\frac{q}{100}-\frac{q}{100}\left(1-\frac{q}{100}\right)\right]=\frac{k}{100}\left(1-\frac{q}{100}\right)^2 \text{ و }$$

$$\left(1-\frac{k}{100}\right)\left(1-\frac{p}{100}\right)^2$$

و بعد از x شست وشو:

$$\frac{k}{100}\left(1-\frac{q}{100}\right)^x \text{ و } \left(1-\frac{k}{100}\right)\left(1-\frac{p}{100}\right)^x$$

چون درصد طلا، بعد از x شست وشو، از r کمتر نیست، بنابراین باید داشته باشیم:

$$\frac{k}{100}\left(1-\frac{q}{100}\right)^x\geqslant\frac{r}{100}\left[\frac{k}{100}\left(1-\frac{q}{100}\right)^x+\left(1-\frac{k}{100}\right)\left(1-\frac{p}{100}\right)^x\right]$$

این‌نامعادله را، نسبت به‌مجهول x، حل می‌کنیم:

$$\frac{k}{100}\left(1-\frac{r}{100}\right)\left(1-\frac{q}{100}\right)^x\geqslant\frac{r}{100}\left(1-\frac{k}{100}\right)\left(1-\frac{p}{100}\right)^x;$$

$$k(100-r)(100-q)^x\geqslant r(100-k)(100-p)^x;$$

$$\left(\frac{100-q}{100-p}\right)^x\geqslant\frac{r(100-k)}{k(100-r)}$$

از دوطرف، در مبنایی بزرگتر از ۲، لگاریتم می‌گیریم. برای $q<p$ داریم:

$$x \geqslant \frac{\log \frac{r(100-k)}{k(100-r)}}{\log \frac{100-q}{100-p}}$$

و برای $q>p$:

$$x \leqslant \frac{\log \frac{r(100-k)}{k(100-r)}}{\log \frac{100-q}{100-p}}$$

درحالت $q=p$ ، x برابر با هرعدد طبیعی دلخواه می‌شود ، یعنی بـا هرچندبار شست وشو، درصد مقدار طلا تغییر نمی‌کند. روشن است‌که، در این‌حـالت ، تنها به‌ازای $r \geqslant k$ جواب خواهیم داشت.

۶۹۶. بار اول، $\frac{ap}{100}$ لیتر الکل خالص درظرف ریخته می‌شود. ولی بعد ازآن‌که a لیتر آمیزه را ازآن برداریم، به‌اندازهٔ $\frac{ap}{100}\cdot\frac{A}{A+a}$ لیتـر الکل خـالص ، در ظرف باقی‌می‌ماند. تکرار این عمل، به‌معنای آن است‌که مقدار الکل خالص ظرف، برحسب‌لیتر، چنین می‌شود:

$$\left(\frac{ap}{100}+\frac{A}{A+a}+\frac{ap}{100}\right)\frac{A}{A+a}=\frac{ap}{100}\left[\frac{A}{A+a}+\left(\frac{A}{A+a}\right)^2\right]$$

بعد از x بار انجام این عمل، مقدار الکل خالص ظرف، برحسب لیتر، برابر می‌شود با

$$\frac{ap}{100}\left[\frac{A}{A+a}+\left(\frac{A}{A+a}\right)^2+\dots+\left(\frac{A}{A+a}\right)^x\right]$$

حجم کل آمیزه، همچنان A لیتر است . چون درصد الکل،کمتر از q نیست، بنـابراین باید داشته‌باشیم:

$$\frac{ap}{100}\left[\frac{A}{A+a}+\left(\frac{A}{A+a}\right)^2+\dots+\left(\frac{A}{A+a}\right)^x\right]\geqslant\frac{Aq}{100}$$

که بعد از تبدیل‌های لازم، به‌دست می‌آید:

$$p\left[1-\left(\frac{A}{A+a}\right)^{x}\right]\geqslant q \Rightarrow x\geqslant \frac{lg\frac{p-q}{p}}{lg\frac{A}{A+a}}\ (p>q)$$

درحالت $p\leqslant q$، مسأله جواب ندارد.

۶۹۷. $$a\cos x+b\sin x=a\left(\cos x+\frac{b}{a}\sin x\right)=$$

$$=a(\cos x+tg\varphi\sin x)=\frac{a}{\cos\varphi}\cos(x-\varphi)=\sqrt{a^{2}+b^{2}}\cos(x-\varphi)$$

به‌این ترتیب $|a\cos x+b\sin x|=\sqrt{a^{2}+b^{2}}|\cos(x-\varphi)|\leqslant\sqrt{a^{2}+b^{2}}$ و یا

$$-\sqrt{a^{2}+b^{2}}\leqslant a\cos x+b\sin x\leqslant\sqrt{a^{2}+b^{2}}$$

۶۹۸. $$a\sin^{2}x+b\sin x\cos x+c\cos^{2}x=a\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+$$

$$+b\cdot\frac{\sin 2x}{2}+c\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{c+a}{2}+\frac{1}{2}[(c-a)\cos 2x+b\sin 2x]=$$

$$=\frac{c+a}{2}+\frac{c-a}{2}\left[\cos 2x+\frac{b}{c-a}\sin 2x\right]=\frac{c+a}{2}+$$

$$+\frac{c-a}{2}\left(\cos 2x+tg\varphi\sin 2x\right)=\frac{c+a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{b^{2}+(c-a)^{2}}\cos(2x-\varphi)$$

برای $\cos(2x-\varphi)=1$ حداکثر و برای $\cos(2x-\varphi)=-1$ حداقل عبارت مفروض به‌دست می‌آید که، به‌ترتیب، چنین‌اند:

$$\frac{c+a}{2}+\frac{\sqrt{b^{2}+(c-a)^{2}}}{2}\ \text{و}\ \frac{c+a}{2}-\frac{\sqrt{b^{2}+(c-a)^{2}}}{2}$$

نتیجهٔ حاصل، برای $a=c$ هم، درست است.

۶۹۹. چون داریم (مسألهٔ ۴۸۴ را ببینید):

$$\sin^{2}A+\sin^{2}B+\sin^{2}C=2\cos A\cos B\cos C+2$$

ودر ضمن $2\cos A\cos B\cos C>0$ (A، B و C، زاویه‌هایی حاده‌اند)، پس

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C>2$$

۷۰۰. $$\frac{\sin 2x-\cos 2x+1}{\sin 2x+\cos 2x-1}=\frac{2\sin x\cos x+2\sin^2 x}{2\sin x\cos x-2\sin^2 x}=$$

$$=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}=\frac{1+tg x}{1-tg x}$$

بنا براین، نامعادلهٔ مفروض، با نامعادلهٔ زیر هم‌ارز است:

$$\frac{1+tg x}{1-tg x}>0 \Rightarrow (1+tg x)(1-tg x)>0 \quad (x=k\pi)$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$tg^2 x<1 \Rightarrow -1<tg x<1;$$

$$k\pi-\frac{\pi}{4}<x<k\pi \;,\; k\pi<x<k\pi+\frac{\pi}{4}$$

۷۰۱. باید نابرابری $\cos x<0$ برقرار باشد ودر نتیجه

$$2k\pi+\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{3\pi}{2}$$

۷۰۲. چون $|\sin x|\leqslant 1$ ومبنای لگاریتم‌ها بزرگتر ازواحد است (لگاریتم‌دهدهی)، نامعادلهٔ مفروض هم‌ارز با $\sin x>0$ می‌شود و بنا براین

$$2k\pi<x<(2k+1)\pi$$

۷۰۳. برای هرمقدار x داریم: $\cos(\sin x)>0$، زیرا $-1\leqslant \sin x\leqslant 1$ وانتهای کمان بین -1 رادیان و 1 رادیان، در یکی از مربع‌های چهارم و اول دایرهٔ مثلثاتی است و، بنا براین، کسینوس آن مثبت است.

۷۰۴. باید داشته باشیم: $-1\leqslant\frac{\pi}{2}\,arc\sin x\leqslant 1$ یا $-\frac{2}{\pi}\leqslant arc\sin x\leqslant\frac{2}{\pi}$. از آن‌جا

$$-\sin\frac{2}{\pi}\leqslant x\leqslant \sin\frac{2}{\pi}$$

۷۰۵. باید داشته‌باشیم: $0<lg x\leqslant 1$، یعنی $1<x\leqslant 10$.

۷۰۶. باید داشته باشیم: $۲k\pi \leqslant \frac{۱}{x^۲} < (۲k+۱)\pi$ ، که در آن k برابر صفر یا عدد درست مثبتی است. به‌ازای $k=\circ$ ، به‌دست می‌آید: $\frac{۱}{x^۲}<\pi$ یا $x^۲>\frac{۱}{\pi}$ و یا $|x|>\frac{۱}{\sqrt{\pi}}$ و این به معنای آن است که: $a)\ x>\frac{۱}{\sqrt{۸}}$ و $b)\ x<-\frac{۱}{\sqrt{\pi}}$. اگر $k=۱,۲,\ldots$، آن‌وقت

$$\frac{۱}{(۲k+۱)\pi}<x^۲<\frac{۱}{۲k\pi} \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{(۲k+۱)\pi}}<|x|<\frac{۱}{\sqrt{۲k\pi}}$$

و این وقتی ممکن است که:

$$c)\ \frac{۱}{\sqrt{(۲k+۱)\pi}}<x<\frac{۱}{\sqrt{۲k\pi}}\ (x>\circ,\ |x|=x)$$

$$d)\ -\frac{۱}{\sqrt{۲k\pi}}<x<-\frac{۱}{\sqrt{(۲x+۱)\pi}}(x<\circ,\ |x|=-x)$$

۷۰۷. چون $tg\frac{\alpha}{۲}$، $tg\frac{\beta}{۲}$ و $tg\frac{\gamma}{۲}$ ، عددهایی مثبت‌اند، با استفاده از این‌که واسطهٔ حسابی دوعدد مثبت از واسطهٔ هندسی آن‌ها کوچکتر نیست، می‌توان نوشت:

$$tg^۲\frac{\alpha}{۲}+tg^۲\frac{\beta}{۲}+tg^۲\frac{\gamma}{۲}=\frac{۱}{۲}\left(tg^۲\frac{\alpha}{۲}+tg^۲\frac{\beta}{۲}\right)+$$

$$+\frac{۱}{۲}\left(tg^۲\frac{\beta}{۲}+tg^۲\frac{\gamma}{۲}\right)+\frac{۱}{۲}\left(tg^۲\frac{\gamma}{۲}+tg^۲\frac{\alpha}{۲}\right)\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt{tg^۲\frac{\alpha}{۲}tg^۲\frac{\beta}{۲}}+\sqrt{tg^۲\frac{\beta}{۲}tg^۲\frac{\gamma}{۲}}+\sqrt{tg^۲\frac{\gamma}{۲}tg^۲\frac{\alpha}{۲}}=$$

$$=tg\frac{\alpha}{۲}tg\frac{\beta}{۲}+tg\frac{\beta}{۲}tg\frac{\gamma}{۲}+tg\frac{\gamma}{۲}tg\frac{\alpha}{۲}=tg\frac{\alpha}{۲}tg\frac{\beta}{۲}++tg\frac{\gamma}{۲}\left(tg\frac{\beta}{۲}+tg\frac{\alpha}{۲}\right)=$$

$$=tg\frac{\alpha}{۲}tg\frac{\beta}{۲}+tg\frac{\gamma}{۲}\cdot\frac{tg\frac{\beta}{۲}+tg\frac{\alpha}{۲}}{۱-tg\frac{\alpha}{۲}tg\frac{\beta}{۲}}\left(۱-tg\frac{\alpha}{۲}tg\frac{\beta}{۲}\right)=tg\frac{\alpha}{۲}tg\frac{\beta}{۲}+$$

$$+tg\frac{\gamma}{۲}tg\frac{\alpha+\beta}{۲}\left(۱-tg\frac{\alpha}{۲}tg\frac{\beta}{۲}\right)=tg\frac{\alpha}{۲}tg\frac{\beta}{۲}+tg\frac{\gamma}{۲}tg\frac{\pi-\gamma}{۲}\left(۱-tg\frac{\alpha}{۲}tg\frac{\beta}{۲}\right)=$$

$$=tg\frac{\alpha}{۲}tg\frac{\beta}{۲}+tg\frac{\gamma}{۲}\,cotg\frac{\gamma}{۲}\left(۱-tg\frac{\alpha}{۲}tg\frac{\beta}{۲}\right)=tg\frac{\alpha}{۲}tg\frac{\beta}{۲}+۱-tg\frac{\alpha}{۲}tg\frac{\beta}{۲}=۱$$

برای این که برابری $tg^{۲}\frac{\alpha}{۲}+tg^{۲}\frac{\beta}{۲}+tg^{۲}\frac{\gamma}{۲}=۱$ برقرار باشد، لازم و کافی است که داشته باشیم: $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{۳}$. در واقع این برابری را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{۱}{۲}\left(tg^{۲}\frac{\alpha}{۲}+tg^{۲}\frac{\beta}{۲}\right)+\frac{۱}{۲}\left(tg^{۲}\frac{\beta}{۲}+tg^{۲}\frac{\gamma}{۲}\right)+\frac{۱}{۲}\left(tg^{۲}\frac{\gamma}{۲}+tg^{۲}\frac{\alpha}{۲}\right)=$$

$$=tg\frac{\alpha}{۲}tg\frac{\beta}{۲}+tg\frac{\beta}{۲}tg\frac{\gamma}{۲}+tg\frac{\gamma}{۲}tg\frac{\alpha}{۲}$$

و یا $$\frac{۱}{۲}\left(tg\frac{\alpha}{۲}-tg\frac{\beta}{۲}\right)^{۲}+\frac{۱}{۲}\left(tg\frac{\beta}{۲}-tg\frac{\gamma}{۲}\right)^{۲}+\frac{۱}{۲}\left(tg\frac{\gamma}{۲}-tg\frac{\alpha}{۲}\right)^{۲}=۰$$

و این برابری وقتی برقرار است که داشته‌باشیم:

$$tg\frac{\alpha}{۲}=tg\frac{\beta}{۲}=tg\frac{\gamma}{۲}\ \Rightarrow\ \alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{۳}$$

۷۰۸. باید دو قضیه را ثابت کنیم:

I. می‌دانیم $۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}$، $۰<\beta<\frac{\pi}{۲}$، $۰<\gamma<\frac{\pi}{۲}$ و $\alpha+\beta+\gamma<\frac{\pi}{۲}$. باید ثابت کنیم:

$$tg\alpha tg\beta+tg\beta tg\gamma+tg\gamma tg\alpha<۱$$

II. می‌دانیم $۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}$، $۰<\beta<\frac{\pi}{۲}$، $۰<\gamma<\frac{\pi}{۲}$ و

$$tg\alpha tg\beta+tg\beta tg\gamma+tg\gamma tg\alpha<۱$$

می‌خواهیم ثابت کنیم $۰<\alpha+\beta+\gamma<\frac{\pi}{۲}$.

اثبات قضیهٔ *I*. داریم:

$$۰<\gamma<\frac{\pi}{۲}-\alpha(+\beta)<\frac{\pi}{۲}$$

بنا براین

$$tg\gamma < tg\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right] = cotg(\alpha+\beta) = \frac{1-tg\alpha tg\beta}{tg\alpha+tg\beta}$$

دوطرف نـابرابری $tg\gamma < \dfrac{1-tg\alpha tg\beta}{tg\alpha+tg\beta}$ را در $tg\alpha+tg\beta > 0$ ضرب می‌کنیم:

$$tg\gamma(tg\alpha+tg\beta) < 1-tg\alpha tg\beta) \Rightarrow tg\alpha tg\beta + tg\beta tg\gamma + tg\gamma tg\alpha < 1$$

اثبات قضیهٔ *II*. نابرابری مفروض را، این‌طور می‌نویسیم:

$$tg\gamma(tg\alpha+tg\beta) < 1-tg\alpha tg\beta$$

از این‌جا معلوم می‌شود که $1-tg\alpha tg\beta > 0$، اکنون اگر دوطرف نابرابری را برمقدار مثبت $(1-tg\alpha tg\beta)tg\gamma$ تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta} < \frac{1}{tg\gamma} = cotg\,\gamma = tg\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg(\alpha+\beta) < tg\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right) \qquad (1)$$

چون $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$، $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ و $tg(\alpha+\beta)>0$، بنابراین $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$ و از نابرابری (۱) به‌دست می‌آید:

$$\alpha+\beta < \frac{\pi}{2}-\gamma \Rightarrow 0 < \alpha+\beta+\gamma < \frac{\pi}{2}$$

۷۰۹. $$1+cotg\,\varphi = 1+\frac{1-tg^2\frac{\varphi}{2}}{2\,tg\frac{\varphi}{2}} = \frac{2-\left(tg\frac{\varphi}{2}-1\right)^2}{2\,tg\frac{\varphi}{2}} =$$

$$= cotg\,\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}\,cotg\frac{\varphi}{2}\left(tg\frac{\varphi}{2}-1\right)^2 \leqslant cotg\frac{\varphi}{2}$$

زیرا با توجه به‌شرط $0<\varphi<\pi$ داریم: $\frac{1}{2}\,cotg\frac{\varphi}{2}\left(tg\frac{\varphi}{2}-1\right)^2 \geqslant 0$

۷۱۰. چون زاویهٔ γ منفرجه است، پس $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$ و

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2}-\beta<\frac{\pi}{2} \Rightarrow tg\alpha < tg\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \frac{1}{tg\beta}$$

یعنی $tg\alpha\frac{1}{tg\beta}$ و چون $tg\beta>0$، پس $tg\alpha tg\beta<1$.

۷۱۱. سمت‌چپ نابرابری را A می‌نامیم. داریم:

$$A=\cos^2\alpha+\frac{1+\cos 2\beta}{2}+\frac{1+\cos 2\gamma}{2}=\cos^2\alpha+1+$$
$$+\cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)=\cos^2\alpha+\cos(\pi-\alpha)\cos(\beta-\gamma)+1=$$
$$=\cos^2\alpha-\cos(\beta-\gamma)\cos\alpha+1$$

و یا به‌زبان دیگر:
$$\cos^2\alpha-\cos(\beta-\gamma)\cos\alpha+1-A=0$$

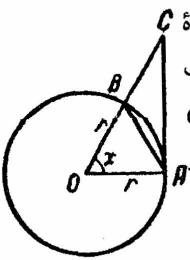
این برابری را همچون معادلهٔ درجه دومی، نسبت بـه $\cos\alpha$، در نظر می‌گیریم. برای این که $\cos\alpha$ حقیقی باشد، باید مبین معادله غیرمنفی باشد، یعنی

$$\cos^2(\beta-\gamma)-4(1-A)\geqslant 0\Rightarrow 4(1-A)\leqslant\cos^2(\beta-\gamma)\leqslant 1;$$

$$1-A\leqslant\frac{1}{4}\Rightarrow A\geqslant\frac{3}{4}$$

از همین‌جا می‌توان نتیجه گرفت که علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم: $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$.

۷۱۲.
$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\pi-\gamma}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}-\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left[-\left(\sin^2\frac{\gamma}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-\left(\sin\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\right]\leqslant\frac{1}{8}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\leqslant\frac{1}{8}$$



۷۱۳. زاویهٔ حادهٔ AOB، وتر AB ومماس AC در نقطهٔ A بر دایرهٔ به‌مرکز O وشعاع r رارسم می‌کنیم (شکل ۶). روشن‌است که مساحت مثلث OAB از مساحت قطاع OAB و مساحت اخیر از مساحت مثلث OAC کوچکتر است. اگر اندازهٔ زاویهٔ AOB را برحسب رادیان بـرابـر x بگیریم، آن وقت، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}r^2 \sin x < \frac{1}{2}r^2 x < \frac{1}{2}r^2 tg x \Rightarrow \sin x < x < tg x$$

باید توجه کرد که نابرابری $\sin x < x$ برای هر مقدار $x > 0$ و نابرابری $|\sin x| < |x|$ برای هر مقدار دلخواه x، درست است.

۷۱۴. a) داریم: $\sin\beta - \sin\alpha = 2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\beta+\alpha}{2} < 2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$ (زیرا $1 > \cos\frac{\beta+\alpha}{2} > 0$). ولی می‌دانیم که، برای $x > 0$، داریم: $\sin x < x$. بنابراین

$$2\sin\frac{\beta-\alpha}{2} < 2\times\frac{\beta-\alpha}{2} = \beta-\alpha \quad (\beta-\alpha > 0)$$

بنابراین

$$\sin\beta - \sin\alpha < \beta - \alpha \Rightarrow \alpha - \sin\alpha < \beta - \sin\beta$$

b) داریم: $tg(\beta-\alpha) = \frac{tg\beta - tg\alpha}{1+tg\beta\, tg\alpha} < tg\beta - tg\alpha$ (زیرا $1 > \frac{1}{1+tg\beta\, tg\alpha} > 0$).

ولی اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$، آن وقت $tg x > x$. بنابراین

$$tg\beta - tg\alpha > tg(\beta-\alpha) > \beta-\alpha \Rightarrow \alpha - tg\alpha > \beta - tg\beta$$

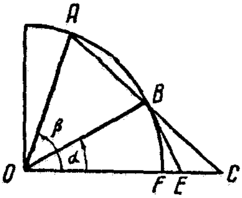
۷۱۵. I. فرض می کنیم: $\beta - \alpha = \delta > 0$. دراین صورت

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} - \frac{\sin\beta}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta}(\beta\sin\alpha - \alpha\sin\beta) =$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta}[(\alpha+\delta)\sin\alpha - \alpha\sin(\alpha+\delta)] = \frac{1}{\alpha\beta}[\alpha\sin\alpha + \delta\sin\alpha -$$

$$-\alpha\sin\alpha\cos\delta - \alpha\cos\alpha\sin\delta) = \frac{1}{\alpha\beta}\Big[\alpha\sin\alpha(1-\cos\delta) +$$

$$+\alpha\delta\cos\alpha\Big(\frac{tg\alpha}{\alpha} - \frac{\sin\delta}{\delta}\Big)\Big]$$



شکل ۷

ولی هر دو جملهٔ داخل کروشه، مثبت‌اند: مثبت بودن جملهٔ اول روشن است و به‌مثبت بودن جملهٔ دوم، می‌توان با توجه به نابرابری‌های $\sin x < x < tg x$، برای $0 < x < \frac{\pi}{2}$، قانع شد،

زیرا از این نابرابری‌ها نتیجه می‌شود: $1 > \frac{tg\alpha}{\alpha}$ و $1 < \frac{sin\delta}{\delta} < 0$. به این ترتیب، به دست می‌آید:

$$\frac{sin\alpha}{\alpha} - \frac{sin\beta}{\beta} > 0 \Rightarrow \frac{sin\alpha}{\alpha} > \frac{sin\beta}{\beta}$$

II. نابرابری را به کمک هندسه ثابت می‌کنیم. از مثلث‌های OCB و OCA (شکل ۷)، بر اساس قضیهٔ سینوس‌ها، به‌دست می‌آید:

$$\frac{AC}{sin\beta} = \frac{OA}{sinC}; \frac{BC}{sin\alpha} = \frac{OB}{sinC} = \frac{OA}{sinC}$$

بنابراین: $\frac{AC}{sin\beta} = \frac{BC}{sin\alpha}$ و یا

$$\frac{sin\beta}{sin\alpha} = \frac{AC}{BC} = \frac{BC + AB}{BC} = 1 + \frac{AB}{BC}$$

اگر شعاع دایره را واحد بگیریم، می‌توان نوشت: $\widehat{AF} = \beta$ و $\widehat{BF} = \alpha$. بنابراین

$$AB < \widehat{AB} = \beta - \alpha; \quad BC > BE = tg\alpha > \alpha$$

به برابری $\frac{sin\beta}{sin\alpha} = 1 + \frac{AB}{BC}$ برمی‌گردیم. اگر در این برابری، AB را به $\beta - \alpha$ و BC را به α تبدیل کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{sin\beta}{sin\alpha} < 1 + \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow \frac{sin\beta}{\beta} < \frac{sin\,\alpha}{\alpha}$$

۷۱۶. x دلخواه را، سازگار با شرط $0 < x < \frac{\pi}{2}$، درنظر می‌گیریم. در نابرابری مسالهٔ ۷۱۵، فرض می‌کنیم: $\alpha = x$ و $\beta = \frac{\pi}{2}$، به دست می‌آید: $\frac{sin\,x}{x} > \frac{sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}$ یا $sin\,x > \frac{2}{\pi}x$.

۷۱۷. *I*. $\beta - \alpha = \delta > 0$ می‌گیریم. در این صورت

$$\frac{tg\beta}{\beta}-\frac{tg\alpha}{\alpha}=\frac{1}{\alpha\beta}(\alpha tg\beta-\beta tg\alpha)=\frac{1}{\alpha\beta}[\alpha tg(\alpha+\delta)-$$

$$-(\alpha+\delta)tg\alpha]=\frac{1}{\alpha\beta}\{\alpha[tg(\alpha+\delta)-tg\alpha]-\delta tg\alpha\}=$$

$$=\frac{1}{\alpha\beta}\left(\frac{\alpha sin\delta}{cos(\alpha+\delta)cos\alpha}-\delta tg\alpha\right)>\frac{1}{\alpha\beta}\left(\frac{\alpha sin\delta}{cos\alpha}-\frac{\delta sin\alpha}{cos\alpha}\right)=\frac{\delta}{\beta cos\alpha}\left(\frac{sin\delta}{\delta}-\frac{sin\alpha}{\alpha}\right)$$

a) اگر $\alpha>\delta$، آن وقت $\frac{sin\delta}{\delta}-\frac{sin\alpha}{\alpha}>0$ (مسالهٔ ۷۱۵) وبنابراین $\frac{tg\beta}{\beta}>\frac{tg\alpha}{\alpha}$.

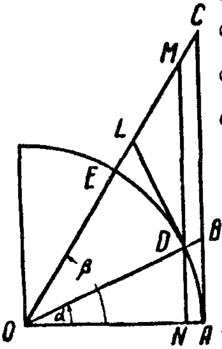
b) اگر $\alpha\leqslant\delta$، آن وقت بین عددهای α و β، می‌توان عددهای γ_1، γ_2، ...، γ_k را چنان در نظر گرفت که داشته باشیم:

$$0<\alpha<\gamma_1<\gamma_2<\ldots<\gamma_k<\beta<\frac{\pi}{2}$$

و تفاضل‌های $\gamma_1-\alpha$، $\gamma_2-\gamma_1$، ...، $\beta-\gamma_k$ کوچکتر از α باشند. در این صورت، با توجه به‌حالت a) به‌دست می‌آید:

$$\frac{tg\beta}{\beta}>\frac{tg\gamma_k}{\gamma_k}>\ldots>\frac{tg\gamma_1}{\gamma_1}>\frac{tg\alpha}{\alpha}$$

II. اثبات هندسی آن را می‌آوریم. AD و AE را کمان‌هائی از دایرهٔ به‌شعاع واحد و به‌مرکز O، به ترتیب، برابر با زاویه‌های α و β می‌گیریم (شکل ۸). B و C را نقطه‌های مماس بردایره در نقطهٔ A باشعاع‌های OD و OE فرض می‌کنیم. از نقطهٔ D، خط راست MN را موازی AC رسم می‌کنیم و M و N را نقطه‌های برخورد آن با خط‌های راست OC و OA می‌گیریم. در این صورت داریم:



شکل ۸

$$\frac{tg\beta}{tg\alpha}=\frac{AC}{AB}=\frac{MN}{DN}=\frac{DN+DM}{DN}=1+\frac{DM}{DN}\quad(*)$$

در نقطهٔ D، مماس LD را بر دایره رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن را با امتداد شعاع DE، L می‌گیریم. روشن است که

$$DM>DL=tg(\beta-\alpha)>\beta-\alpha,\ DN=sin\alpha<\alpha=\widehat{DA}$$

بنا براین $\frac{DM}{DN}>\frac{\beta-\alpha}{\alpha}$. در این صورت از برابری (*) به‌دست می‌آید:

$$\frac{tg\beta}{tg\alpha}>۱+\frac{\beta-\alpha}{\alpha};\quad \frac{tg\beta}{tg\alpha}>\frac{\beta}{\alpha};\quad \frac{tg\beta}{\beta}>\frac{tg\alpha}{\alpha}$$

X. عددهای مختلط

۷۱۸. نمی‌شود. مفهوم‌های «بزرگتر» و «کوچکتر» را نمی‌توان در مورد عددهای مختلط به‌کار برد.

۷۱۹. عدد منفی، عددی است حقیقی که از صفر کوچکتر باشد؛ ولی در مورد عددهای مختلط، نمی‌توان از مفهوم «کوچکتر» استفاده کرد. بنابراین، عدد $۵i-$ را نمی‌توان منفی نامید.

۷۲۰. معادلهٔ مفروض را به صورت $\left(\frac{۱+i}{۱-i}\right)^n=۱$ می‌نویسیم. ولی

$$\frac{۱+i}{۱-i}=\frac{(۱+i)^۲}{۱-i^۲}=\frac{۱+۲i-۱}{۱+۱}=\frac{۲i}{۲}=i$$

بنابراین داریم: $i^n=۱$، از آن جا $n=۴k$، که در آن $k\in Z$.

۷۲۱. اگر مخرج را از بین ببریم، به‌دست می‌آید:

$$(x+۱)+(y-۳)i=۲+۸i$$

دو عدد مختلط وقتی برابرند که عددهای حقیقی و، همچنین، عددهای موهومی آن‌ها برابر باشند. بنابراین داریم:

$$x+۱=۲,\ y-۳=۸\Rightarrow x=۱,\ x=۱۱$$

۷۲۲. دو طرف معادله را در $i-$ ضرب می‌کنیم. به‌دست می‌آید:

$$(x+y)^۲+۶+xi=yi+۵(x+y)+i$$

بخش‌های حقیقی و موهومی دو طرف را برابر قرار می‌دهیم، به‌دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases}(x+y)^۲-۵(x+y)+۶=۰\\ x-y=۱\end{cases}$$

که منجر به‌مجموعهٔ دو دستگاه زیر می‌شود:

$$\begin{cases} x-y=۱ \\ x+y=۳ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x-y=۱ \\ x+y=۲ \end{cases}$$

پاسخ: $x_۱=۲$، $y_۱=۱$؛ $x_۲=\frac{۳}{۲}$، $y_۲=\frac{۱}{۲}$.

۷۲۳. از معادلهٔ اول به‌دست می‌آید: $x=۰$، $y=-۱$. اگر این مقدارهای x و y را در معادلهٔ دوم قرار دهیم، نتیجه می‌شود: $a=۰$.

۷۲۴. معادلهٔ مفروض را می‌توان این طور نوشت:

$$\sqrt{x^۲+y^۲}-(x+iy)=۱+۲i$$

و از آن جا: $\sqrt{x^۲+y^۲}-x=۱$ و $-y=۲$. با حل این دستگاه به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{۳}{۲},\ y=-۲,\ z=\frac{۳}{۲}-۲i$$

۷۲۵. $$\sqrt{x^۲+y^۲}+(x+iy)=۲+i;$$

$$\sqrt{x^۲+y^۲}+x=۲,\ y=۱ \Rightarrow x=\frac{۳}{۴}, y=۱, z=\frac{۳}{۴}+i$$

۷۲۶. اگر فرض کنیم: $z_۱=x_۱+iy_۱$ و $z_۲=x_۲+iy_۲$، آن وقت

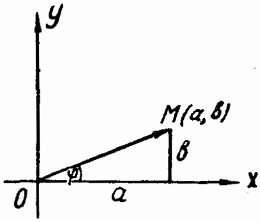
$$z_۱+z_۲=x_۱+x_۲+i(y_۱+y_۲);\ z_۱-z_۲=x_۱-x_۲+i(y_۱-y_۲)$$

بنابراین

$$|z_۱+z_۲|^۲+|z_۱-z_۲|^۲=(x_۱+x_۲)^۲+(y_۱+y_۲)^۲+(x_۱-x_۲)^۲+$$
$$+(y_۱-y_۲)^۲=۲x_۱^۲+۲y_۱^۲+۲x_۲^۲+۲y_۲^۲=۲(x_۱^۲+y_۱^۲)+$$
$$+۲(x_۲^۲+y_۲^۲)=۲(|z_۱|^۲+|z_۲|^۲)$$

۷۲۷ تا ۷۵۸. راهنمائی. در این مساله‌ها، اغلب از شکل مثلثاتی عددهای مختلط و نمایش هندسی آن‌ها استفاده می‌شود. به‌یاد می‌آوریم که هر عدد مختلط $\alpha=a+bi\neq۰$ را می‌توان به صورت $\alpha=\rho(cos\varphi+isin\varphi)$ نشان داد، که آن را شکل مثلثاتی عددمختلط α گویند. عدد $\rho=\sqrt{a^۲+b^۲}$ را قدرمطلق (یا مدول یا کالبد) عدد مختلط α و زاویهٔ φ را، آوند (یا آرگومان یا شناسهٔ) آن می‌نامند. آوند را می‌توان از رابطه‌های $cos\varphi=\frac{a}{\rho}$،

$sin\varphi=\frac{b}{\rho}$ پیدا کرد. قدرمطلق ρ غیرمنفی است و آوند φ می‌تواند مجموعه‌ای نامتناهی از مقدارها را اختیار کند، زیرا اگر φ را به‌اندازهٔ $2k\pi$ $(k\in Z)$ تغییر دهیم، مقدارهای $sin\varphi$ و $cos\varphi$ تغییر نمی‌کنند. معمولاً برای φ می‌توان یك مقدار پیدا کرد که، از لحاظ قدرمطلق، حداقل مقدار را داشته باشد، یعنی به نحوی که $-\pi<\varphi\leqslant\pi$. این مقدار را، مقدار اصلی آوند گویند.



شکل ۹

برای نمایش هندسی عدد مختلط $\alpha=a+bi$، طبق قرارداد، نقطهٔ M از صفحهٔ محورهای مختصات را به‌طول a و عرض b در نظر می‌گیرند. به‌همین دلیل، محور طول را محور حقیقی و محور عرض را محور موهومی می‌نامند (شکل ۹). عدد مختلط را با بردار OM هم، یعنی پاره خط راست جهت‌داری که با ابتدا و انتهای خود محدود شده است، می‌توان نشان داد. برداری را که ابتدای آن O و انتهای آن M باشد، به‌صورت $\overrightarrow{OM}$ نشان می‌دهند. بنابراین، عدد مختلط $\alpha=a+bi$ به‌وسیلهٔ برداری نشان داده می‌شود که ابتدای آن در مبداء مختصات و انتهای آن در نقطهٔ $M(a,b)$ است.

طول بردار، یعنی طول پاره‌خط OM، معرف نمایش هندسی مقدار قدر مطلق عدد مختلط، و زاویه‌ای که با محور طول می‌سازد، یعنی زاویهٔ XOM، معرف آوند عدد مختلط است. روشن است که هرعدد حقیقی متناظر با نقطه‌ای از محور حقیقی و هر عدد موهومی متناظر با نقطه‌ای از محور موهومی است.

۷۲۷. $$\rho=\sqrt{(1-cos\alpha)^2+sin^2\alpha}=\sqrt{4\,sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$=2\left|sin\frac{\alpha}{2}\right|=2sin\frac{\alpha}{2};\ cos\varphi=\frac{1-cos\varphi}{2\,sin\frac{\alpha}{2}}=sin\frac{\alpha}{2}=cos\frac{\pi-\alpha}{2};$$

$$sin\varphi=\frac{sin\,\alpha}{2\,sin\frac{\alpha}{2}}=cos\frac{\alpha}{2}=sin\frac{\pi-\alpha}{2}$$

مقدار اصلی آوند $\varphi=\frac{\pi-\alpha}{2}$ و عدد مفروض چنین است:

$$z=2\,sin\frac{\alpha}{2}\left(cos\frac{\pi-\alpha}{2}+isin\frac{\pi-\alpha}{2}\right)$$

۰۷۲۸ $\rho=\sqrt{(1-\sin\alpha)^2+\cos^2\alpha}=\sqrt{4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}=$

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right);\ \cos\varphi=\frac{1+\sin\alpha}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right);$$

$$\sin\varphi=\frac{\cos\alpha}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$$

مقدار اصلی آوند $\varphi=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$ و خود عدد چنین است:

$$z=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

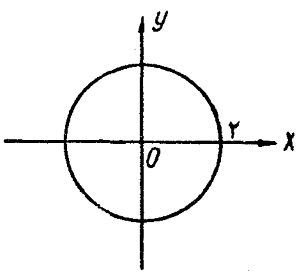
۰۷۲۹ $\rho=\sqrt{1+tg^2\alpha}=|\sec\alpha|=-\sec\alpha;$

$$\cos\varphi=\frac{1}{-\sec\alpha}=-\cos\alpha=\cos(\alpha-\pi);$$

$$\sin\varphi=\frac{tg\alpha}{-\sec\alpha}=-\sin\alpha=\sin(\alpha-\pi);$$

$$1+itg\alpha=-\sec\alpha[\cos(\alpha-\pi)+i\sin(\alpha-\pi)]$$

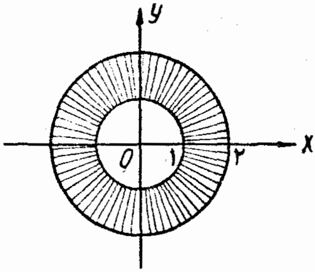
۰۷۳۰ a) قدرمطلق عدد مختلط z، از نظر هندسی، متناظر است با فاصلهٔ نقطه‌ای از صفحه که معرف عدد z است تا مبداء مختصات: دراین حالت، این فاصله برابر است با ۲. بنابراین، رابطهٔ $|z|=2$ متناظر است با نقطه‌های محیط دایره‌ای به‌مرکزمبداء مختصات و شعاع برابر۲ (شکل ۱۰).



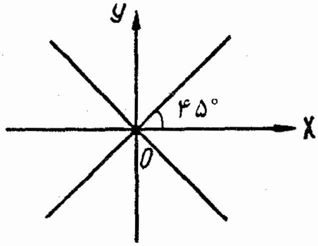
شکل ۱۰

b) چون برابری $|z|=2$ متناظراست با نقطه‌های محیط دایرهٔ به‌شعاع ۲ ومرکزمبداء مختصات، بنابراین، نابرابری $|z|<2$ متناظر است با نقطه‌های درونی این دایره (به‌جز نقطه‌های واقع برمحیط آن) به‌همین‌ترتیب، عددهای $|z|>1$ متناظرند با نقطه‌های بیرونی‌دایره‌ای به‌شعاع ۱ ومرکزمبداء مختصات (بـه‌جز نقطه‌های واقع بر محیط آن). بـه ایـن ترتیب، عدد z کـه در رابطهٔ $1<|z|<2$ صدق می‌کند، متناظر با نقطه‌های حلقه‌ای است که بین دو دایرهٔ هم مرکز،

به‌شعاع‌های ۱ و ۲ و به‌مرکز مبداء مختصات قرار دارند (به‌استثنای نقطه‌های واقع بر محیط این دایره‌ها) (شکل ۱۱).



شکل ۱۱



شکل ۱۲

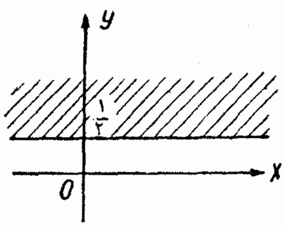
c) چون داریم، $z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi$، بنابراین

$$R(z^2)=x^2-y^2=(x-y)(x+y)$$

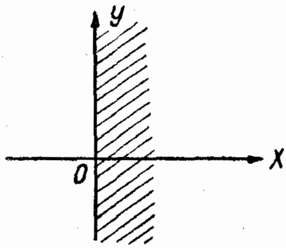
بنابراین، برابری $R(z^2)=0$، به‌معنای $x-y=0$ و $x+y=0$ است. و این‌ها، معادله‌های نیمسازها در دستگاه محورهای مختصات هستند. به‌این ترتیب، نقطه‌های متناظر با رابطهٔ $R(z^2)=0$ عبارتند از نقطه‌های واقع بر نیمسازهای زاویه‌های مختصات (شکل ۱۲).

d) چون $Im(z)=y$، پس نابرابری مفروض را، می‌توان به‌صورت $y>\frac{1}{2}$ نوشت.

این نابرابری هم متناظر است با نقطه‌های واقع بر بالای خط راست $y=\frac{1}{2}$ (شکل ۱۳).



شکل ۱۳



شکل ۱۴

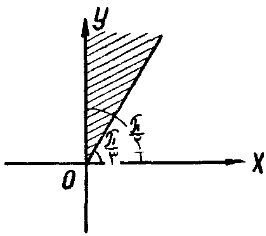
e) به‌ترتیب داریم:

$$|z-1|\leqslant|z+1|;\quad |z-1|^2\leqslant|z+1|^2;\quad (x-1)^2+y^2\leqslant(x+1)^2+y^2;$$

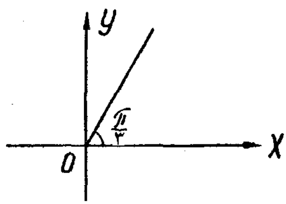
$$x^2-2x+1+y^2\leqslant x^2+2x+1+y^2;\quad 4x\geqslant 0;\quad x\geqslant 0$$

بنابراین، نقطه‌های متناظر با نـابرابری مفروض، در سمت راست محور عرض (همراه با نقطه‌های خود این محور) قرار دارند (شکل ۱۴).

۷۳۱. a) آوند یك عدد مختلط برابر است با زاویه‌ای که نیم‌خط OM (یعنی نیم‌خطی که از مبداء مختصات و نقطهٔ معرف z می‌گذرد) با جهت مثبت محور طول می‌سازد. بنابراین، برابری $arg\, z=\frac{\pi}{۳}$ متناظر است بـا نقطه‌هـای واقع برنیم خطی کـه از مبداء مختصات می‌گذرد و باجهت مثبت محور طول (محورحقیقی)، زاویه‌ای برابر $\frac{\pi}{۳}$ می‌سازد. (شکل ۱۵).



شکل ۱۶



شکل ۱۵

b) باتوجه به آن‌چه در a) گفتیم، معلوم می‌شود، عددهایی که آوند آن‌ها دررابطهٔ $\frac{\pi}{۳}<arg\, z<\frac{\pi}{۲}$ صدق می‌کنند، متناظرند بـا نقطه‌هایی از صفحه‌که درون زاویه‌ای قرار گرفته‌اند که ضلع‌های آن را دونیم خط تشکیل می‌دهند: یکی نیم خطی کـه باجهت مثبت محور طول، زاویه‌ای برابر $\frac{\pi}{۳}$ می‌سازد و دیگری نیم‌خط Oy. درضمن، این نقطه‌ها، شامل نقطه‌های واقع برضلع‌های زاویه نمی‌شوند (شکل ۱۶).

۷۳۲. a) در ربع دوم و سوم زاویه‌های مختصات، به جز نقطه‌های واقع برمحور عرض (شکل ۱۷).

b) درربع اول‌ودوم زاویه‌های‌مختصات، همراه بانقطه‌های محورطول (شکل ۱۸).

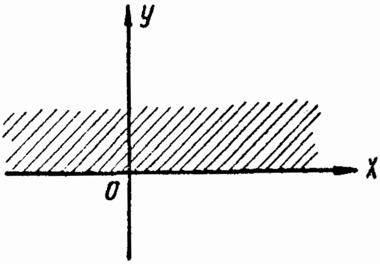
۷۳۳. محیط دایره‌ای به‌شعاع ۱ ودرخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت. مرکز این دایره، قرینهٔ مرکز دایرهٔ مفروض، نسبت به‌محور طول است.

۷۳۴.

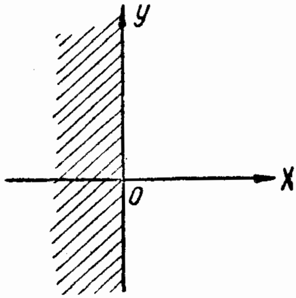
$$z_۱z_۲=\rho_۱(cos\varphi_۱+i\,sin\varphi_۱)\rho_۲(cos\varphi_۲+i\,sin\varphi_۲)=$$

$$=\rho_۱\rho_۲[(cos\varphi_۱\,cos\varphi_۲-sin\varphi_۱\,sin\varphi_۲)+i(sin\varphi_۱\,cos\varphi_۲+cos\varphi_۱\,sin\varphi_۲)]=$$

$$=\rho_۱\rho_۲[cos(\varphi_۱+\varphi_۲)+i\,sin(\varphi_۱+\varphi_۲)]$$



شکل ۱۸



شکل ۱۷

۷۳۵. $$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2}=$$

$$=\frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)[\cos(-\varphi_2)+i\sin(-\varphi_2)]=$$

$$=\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$$

۷۳۶. چون $z^n=\underbrace{z\cdot z\cdots z}_{n}$ و آوند حاصل‌ضرب برابر است با مجموع آوندهای عامل‌ها (مسالهٔ ۷۳۴)، می‌توان رابطهٔ مووار را نتیجه گرفت.

۷۳۷. چون $z^{-k}=\frac{1}{z^k}$، با فرض $n=-m\ (m>0)$ به‌دست می‌آید:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{-m}=\frac{1}{(\cos\varphi+i\sin\varphi)^m}=$$

$$=\frac{1}{\cos m\varphi+i\sin m\varphi}=\cos m\varphi-i\sin m\varphi=$$

$$=\cos(-m)\varphi+i\sin(-m)\varphi=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$$

۷۳۸. قدرمطلق صورت کسر برابر است با

$$\sqrt{(x^2-y^2)^2+(2xy)^2}=\sqrt{(x^2+y^2)^2}=x^2+y^2$$

و قدرمطلق مخرج برابر است با

$$\sqrt{(xy\sqrt{2})^2+(\sqrt{x^4+y^4})^2}=\sqrt{(x^2+y^2)^2}=x^2+y^2$$

چون قدرمطلق خارج قسمت برابر است با خارج قسمت قدرمطلق‌ها، بنابراین

$$\left|\frac{x^۲-y^۲+۲xyi}{xy\sqrt{۲}+i\sqrt{x^۴+y^۴}}\right|=\frac{x^۲+y^۲}{x^۲+y^۲}=۱$$

۷۳۹. $(a\omega+b\omega^۲)(a\omega^۲+b\omega)=a^۲\omega^۳+ab\omega^۲+ab\omega^۴+b^۲\omega^۳$

از طرف دیگر

$$\omega^۳=\left(\cos\frac{۲\pi}{۳}+i\sin\frac{۲\pi}{۳}\right)^۳=\cos ۲\pi+i\sin ۲\pi=۱;$$

$$\omega^۲+\omega=-۱$$

بنابراین، عبارت مفروض

$$A=a^۲+ab\omega^۲+ab\omega+b^۲=a^۲+ab(\omega^۲+\omega)+b^۲=a^۲-ab+b^۲$$

۷۴۰. چون $\omega^۳=۱$ و $\omega^۲+\omega=-۱$ (مسالهٔ ۷۳۹)، بنابراین

$$(a+b+c)[a^۲+ab(\omega^۲+\omega)+ac(\omega^۲+\omega)+bc(\omega^۲+\omega\cdot\omega^۳)+$$
$$+b^۲\omega^۳+c^۲\omega^۳]=(a+b+c)(a^۲+b^۲+c^۲-ab-ac-bc)=$$
$$=a^۳+b^۳+c^۳-۳abc$$

۷۴۱. این مساله را می‌توان بـه‌طور مستقیم، وبا انجام عمل ضرب، حل کرد. ولی این، راهی طولانی و خسته‌کننده است. ازراه دیگری می‌رویم، ازتبدیل مجموع دومکعب و رابطهٔ $\omega^۲+\omega=-۱$ استفاده می‌کنیم. اگر عبارت مفروض را A بنامیم، داریم:

$$A=(a+b\omega+c\omega^۲+a+b\omega^۲+c\omega)\varphi_۱\,,$$

که درآن، $\varphi_۱$ عبارت است از عامل دوم تجزیه. ازآن‌جا

$$A=(۲a-b-c)\varphi_۱$$

ولی عبارت A، نسبت‌به a و b و c، یك عبارت دوری است، یعنی باتبدیل a به b، b به c و c به a تغییر نمی‌کند. در واقع، اگر A را با استفاده از $\omega^۳=۱$ تبدیل کنیم، به دست می‌آید:

$$A=(a\omega^۳+b\omega+c\omega^۲)^۳+(a\omega^۳+b\omega^۲+c\omega^۴)^۳=\omega^۳(b+c\omega+a\omega^۲)^۳+$$
$$+\omega^۶(b+c\omega^۲+a\omega)^۳=(b+c\omega+a\omega^۲)^۳+(b+c\omega^۲+a\omega)^۳$$

به‌همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد:

$$A=(c+a\omega+b\omega^{۲})^{۳}+(c+a\omega^{۲}+b\omega)^{۳}$$

با توجه به‌دوری بودن A، باید درعبارت A، عامل‌های $(۲b-c-a)$ و $(۲c-a-b)$ هم وجود داشته باشد، یعنی

$$A=(۲a-b-c)(۲b-c-a)(۲c-a-b)\varphi_{۲}$$

ضریب بزرگترین درجهٔ a در A برابر است با ۲، بنابراین درسمت راست برابری، هم باید ضریب بزرگترین درجهٔ a برابر ۲ باشد. ازاین جا معلوم می‌شود که: $\varphi_{۲}=۱$. به‌این ترتیب:

$$A=(۲a-b-c)(۲b-c-a)(۲c-a-b)$$

۷۴۲. $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$ می گیریم. دراین صورت به‌دست می آید:

$$z^{۱۴۲}+\frac{۱}{z^{۱۴۲}}=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{۱۴۲}+(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{-۱۴۲}=$$

$$=\cos۱۴۲\alpha+i\sin۱۴۲\alpha+\cos۱۴۲\alpha-i\sin۱۴۲\alpha=۲\cos۱۴۲\alpha$$

از معادلهٔ $z+\frac{۱}{z}=۱$ داریم:

$$z^{۲}-z+۱=۰\ ;\ z=\frac{۱}{۲}\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}i=\cos\left(\pm\frac{\pi}{۳}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{۳}\right)$$

بنابراین

$$z^{۱۴۲}+\frac{۱}{z^{۱۴۲}}=۲\cos\frac{۱۴۲\pi}{۳}=۲\cos\frac{۴\pi}{۳}=-۲\cos\frac{\pi}{۳}=-۱$$

۷۴۳. اگردررابطهٔ مووار $n=۵$ بگیریم، به‌دست می آید:

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{۵}=\cos۵\alpha+i\sin۵\alpha$$

و یا

$$\cos^{۵}\alpha+۵i\cos^{۴}\alpha\sin\alpha-۱۰\cos^{۳}\alpha\sin^{۲}\alpha-۱۰i\cos^{۲}\alpha\sin^{۳}\alpha+$$

$$+۵\cos\alpha\sin^{۴}\alpha+i\sin^{۵}\alpha=\cos۵\alpha+i\sin۵\alpha$$

اگر بخش‌های موهومی دوطرف را، با فرض $\alpha=\arcsin x$، برابر قرار دهیم، به‌دست می آید:

$$\sin(۵\arcsin x)=۵\cos^{۴}(\arcsin x)\cdot\sin(\arcsin x)-$$

$$-10\cos^2(\arcsin x)\cdot\sin^3(\arcsin x)+\sin^5(\arcsin x)=$$

$$=5(\sqrt{1-x^2})^4\cdot x-10(\sqrt{1-x^2})^2\cdot x^3+x^5=5(1-x^2)^2x-$$

$$-10(1-x^2)x^3+x^5$$

و از آن‌جا:

$$\sin(5\arcsin x)=16x^5+20x^3+5x$$

۷۴۴. مجموع سینوس‌هـا را A ومجموع کسینوس‌ها را B بگیریم و، سپس، فرض کنیم: $z=\cos x+i\sin x$، به‌دست می‌آید:

$$B+Ai=(\cos x+i\sin x)+(\cos 3x+i\sin 3x)+\dots+$$

$$+[\cos(2n-1)x+i\sin(2n-1)x]=z+z^3+\dots+z^{2n-1}=$$

$$=\frac{z(z^{2n}-1)}{z^2-1}=\frac{(\cos x+i\sin x)(\cos 2nx+i\sin 2nx-1)}{\cos 2x+i\sin 2x-1}=$$

$$=\frac{(\cos x+i\sin x)(-2\sin^2 nx+2i\sin nx\cos nx)}{-2\sin^2 x+2i\sin x\cos x}=$$

$$=\frac{(\cos x+i\sin x)\cdot 2i\sin nx(\cos nx+i\sin x)}{2i\sin x(\cos x+i\sin x)}=\frac{\sin nx}{\sin x}(\cos nx+i\sin nx)$$

و به‌این ترتیب

$$B+iA=\frac{\sin nx}{\sin x}\cos nx+i\frac{\sin nx}{\sin x}\sin nx$$

و از آن‌جا

$$B=\frac{\sin nx}{\sin x}\cos nx=\frac{\sin 2nx}{2\sin x}\ ;\ A=\frac{\sin^2 nx}{\sin x}$$

روشن است که این مساله را، با روش حل مسالهٔ ۵۱۷ هم می‌توان حل کرد.

۷۴۵. دوطرف معادلهٔ مفروض را در x^{-n} ضرب ودر نتیجهٔ حاصل، فرض می‌کنیم:

$$x^{-k}=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{-k}=\cos k\alpha-\sin k\alpha$$

از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$1+p_1x^{-1}+p_2x^{-2}+\dots+p_nx^{-n}=0\ ;\ 1+p_1(\cos\alpha-i\sin\alpha)+$$

$$+p_2(\cos 2\alpha-i\sin 2\alpha)+\dots+p_n(\cos n\alpha-i\sin n\alpha)=0$$

چون p_1، p_2، ...، p_n، عددهایی حقیقی هستند، بنابراین

$$p_1 \sin\alpha + p_2 \sin 2\alpha + \dots + p_n \sin n\alpha = 0$$

۷۴۶. از آن جا که داریم:

$$S_1 + iS_2 = (1+i)^n ; \ (1+i)^n = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n$$

بنابراین، با استفاده از رابطهٔ مووار می‌توان نوشت:

$$S_1 + iS_2 = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

اکنون اگـر بخش‌های حقیقی دوطرف و، سپس، بخش‌های مـوهومی دوطرف را برابر قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$S_1 = 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4} , \ S_2 = 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}$$

۷۴۷. ثابت می‌کنیم که بخش موهومی عبارت $(1+i\sqrt{3})^n$ برابر است با $S\sqrt{3}$. در واقع

$$(1+i\sqrt{3})^n = 1 + C_n^1 i\sqrt{3} + C_n^2 (i\sqrt{3})^2 + C_n^3 (i\sqrt{3})^3 + \dots =$$
$$= 1 - C_n^2 \cdot 3 + C_n^4 \cdot 3^2 + \dots + i\sqrt{3}\,(C_n^1 - C_n^3 \cdot 3 + C_n^5 \cdot 3^2 - \dots)$$

از طرف دیگر، با استفاده از رابطهٔ مووار، می‌توان نوشت:

$$(1+i\sqrt{3})^n = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^2 = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$$

و از آن‌جا: $S = \frac{2^n}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}$.

جالب است یادآوری کنیم که اگر از بسط دوجمله‌ای $(-1+i\sqrt{3})^n$ آغاز کنیم، جواب چنین می‌شود:

$$S = (-1)^{n-1} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{3}}\sin\frac{2\pi n}{3}$$

از خواننده می‌خواهیم، یکی بودن این دومقدار S را ثابت کند.

۷۴۸. عدد ω را ریشهٔ n ام عدد z می‌نامیم و به $\sqrt[n]{z}$ نشان می‌دهیم، بـه شرطی کـه

داشته باشیم: $z=\omega^n$. فرض کنید:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=R(\cos\Phi+i\sin\Phi)$$

براساس تعریف ریشه و استفاده از رابطهٔ مووار، خواهیم داشت:

$$R^n(\cos n\Phi+i\sin n\Phi)=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

اگر دوعدد مختلط برابر باشند، اولاً قدرمطلق‌های آن‌ها برابرند و ثانیاً آوندهای آن‌ها به‌اندازهٔ $۲k\pi$ باهم اختلاف دارند $(k\in Z)$. به‌این ترتیب

$$R^n=\rho\ ,\ \Phi=\varphi+۲k\pi$$

ازآن‌جا

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+۲k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+۲k\pi}{n}\right)$$

در ضمن، باید به‌مقدار حسابی $\sqrt[n]{\rho}$ توجه داشت.

لزومی ندارد، همهٔ مقدارهای ممکن k را به‌حساب آوریم؛ کافی است k را برابر ۰، ۱، ۲،...، $n-۱$ بگیریم. درواقع، اگر $k\geqslant n$ یا $k<۰$، آن‌وقت، با جدا کردن بخش درست q از کسر $\frac{k}{n}$، به‌دست می‌آید: $k=qn+r$، که در آن، باقی‌ماندهٔ $r<n$، مثبت است. ولی دراین صورت

$$\frac{\varphi+۲k\pi}{n}=\frac{\varphi+۲(qn+r)\pi}{n}=۲q\pi+\frac{\varphi+۲r\pi}{n}$$

و مقدار کسینوس یا سینوس، با توجه به‌تناوب آن‌ها، منجر به‌همان مقداری می‌شود که به‌ازای یکی ازمقدارهای $(k=۰،۱،...،n-۱)$ به‌دست می‌آید.

از طرف دیگر، به‌ازای مقدارهای مختلف k از عددهای ۰، ۱، ۲،...، $n-۱$، مقدارهای مختلفی برای ریشه به‌دست می‌آید. درواقع، اگر به‌ازای $k_۱$ و $k_۲$، که برای آن‌ها $n-۱\geqslant k_۲$ و $k\geqslant ۰$، ریشه‌های برابر به‌دست آید باید داشته باشیم:

$$\frac{\varphi+۲k_۱\pi}{n}-\frac{\varphi+۲k_۲\pi}{n}=۲m\pi\Rightarrow k_۱-k_۲=m\pi$$

که‌تنها برای $m=۰$ ممکن‌است (m، عددی است‌درست). ولی دراین‌صورت: $k_۱=k_۲$.

بنابراین، هرعددمختلط، دارای n ریشهٔ n ام، وفقط n ریشهٔ n ام، مختلف است. تنها $z=۰$

استثنا است. دراین حالت، همهٔ مقدارهای ریشه‌ها باهم برابر، و برابر صفرند.

۷۴۹. اگر فرض کنیم: $\sqrt{a+bi}=x+yi$، به‌دست می‌آید:

$$a+bi=(x+yi)^{2}=x^{2}-y^{2}+2xyi$$

که از آن‌جا به‌دستگاه $x^{2}-y^{2}=a$، $2xy=b$ می‌رسیم. $y=\frac{b}{2x}$ را، ازمعادلهٔ دوم، در معادلهٔ اول قرار می‌دهیم:

$$4x^{4}-4ax^{2}-b^{2}=0\ ;\ x^{2}=\frac{2a+\sqrt{4a^{2}+4b^{2}}}{4}=$$

$$=\frac{a+\sqrt{a^{2}+b^{2}}}{2}=\frac{a+\rho}{2}\ ;\ \ x=\pm\sqrt{\frac{a+\rho}{2}}$$

(مقدار $\frac{a-\rho}{2}$ منفی است و، به‌همین مناسبت، از آن صرف‌نظر کردیم). دراین صورت

$$y=\frac{b}{2x}=\frac{b}{\pm\sqrt{2(a+\rho)}}=\pm\sqrt{\frac{\rho-a}{2}}$$

و درنتیجه

$$\sqrt{a+bi}=\pm\sqrt{\frac{\rho+a}{2}}\pm i\sqrt{\frac{\rho-a}{2}}$$

از برابری $2xy=b$ معلوم می‌شود که باید علامت جلو رادیکال‌ها را، در حالت $b>0$ یکسان و درحالت $b<0$ مختلف گرفت.

۷۵۰. $$a)\quad z=\sqrt[3]{i}=\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\cos\frac{4k+1}{6}\pi+i\sin\frac{4k+1}{6}\pi\ ;\ k=0,1,2$$

$$z_{1}=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2};$$

$$z_{2}=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\ ;\ z_{3}=\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6}=-i$$

$$b)\quad \sqrt{1+\sqrt{3}i}=\pm\left(\sqrt{\frac{2+1}{6}}+i\sqrt{\frac{2-1}{6}}\right)=\pm\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}}$$

$$c)\quad \sqrt[5]{1}=\sqrt[5]{\cos 0+i\sin 0}=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5};\ (k=0,1,2,3,4)$$

۷۵۱. ریشه‌های معادلهٔ $x^n=1$ عبارتند از

$$\alpha_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n};\ k=0,1,2,\dots,n-1$$

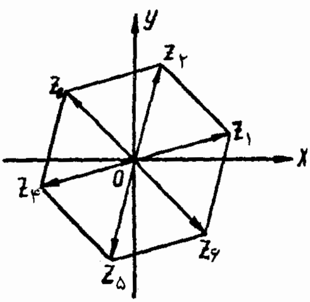
از آن‌جا

$$\alpha_0=1;\ \alpha_1=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n};\dots;\ \alpha_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}=$$

$$=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k=\alpha_1^k$$

اگر $\alpha_1=\alpha$ بگیریم، این ریشه‌ها را می‌توان به‌صورت 1، α، α^2، …، α^{n-1} گرفت.

۷۵۲. از رابطهٔ $z=\sqrt[6]{i}=\cos\frac{4k+1}{12}\pi+i\sin\frac{4k+1}{12}\pi$ دیده می‌شود که برای مقدار $z_1=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$ داریم: $\rho=1$ و $\varphi=\frac{\pi}{12}$. بقیهٔ ریشه‌های z_2، z_3، …، z_6 هم قدر مطلقی برابر واحد دارند و آوند هریک از آن‌ها، به‌اندازهٔ $\frac{\pi}{3}$ بزرگتر از آوند ریشهٔ قبلی است. بنابراین، از نظر هندسی، ریشه‌های z_1، z_2، …، z_6، به‌ترتیب، درراس‌های یك شش‌ضلعی منتظم قرار گرفته‌اند (شکل ۱۹ را ببینید).



شکل ۱۹

۷۵۳.
$$x=\frac{-(2i-1)\pm\sqrt{(2i-1)^2+4(7+i)}}{2}=$$

$$=\frac{-(2i-1)\pm 5}{2};\ x_1=3-i,\ x_2=-2-i$$

$$x=\frac{۳+i\pm\sqrt{(۳+i)^۲-۱۲i}}{۲}=\frac{۳+i\pm(۳-i)}{۲};$$ **۷۵۴.**

$$x_۱=۳\ ,\ x_۲=i$$

۷۵۵. دوطرف معادلــه را در $x-۱$ ضرب می‌کنیم؛ معادلــه بـه‌صورت $x^۷=۱$ درمی‌آید. ریشه‌های این معادله چنین‌اند:

$$x_k=cos\frac{۲k\pi}{۷}+isin\frac{۲k\pi}{۷}$$

به‌ازای $k=\circ$، به جواب $x=۱$ می‌رسیم که برای معادلهٔ مفروض، جواب خارجی است. بنابراین، درعبارت مفروض، باید k را برابر ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ گرفت.

۷۵۶. ریشه‌های معادلــهٔ $x^n-۱=\circ$، عبارتند از ۱، α، $\alpha^۲$،...، $\alpha^{n-۱}$، که در آن داریم: $\alpha=cos\frac{۲\pi}{n}+isin\frac{۲\pi}{n}$ (مسالهٔ ۷۵۱ را ببینید). بنابراین،مجموع مطلوب چنین است:

$$S=۱+\alpha^p+\alpha^{۲p}+\dots+\alpha^{(n-۱)p}=۱+\alpha^p+(\alpha^p)^۲+\dots+(\alpha^p)^{n-۱}$$

اگر p بر n بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت $a^p=۱$ ومجموع برابر n می‌شود اگر p بر n بخش‌پذیر نباشد، آن وقت $a^p\neq۱$ و بـایــد از رابطهٔ مجموع در تصاعد هندسی استفاده کرد. در این‌حالت، برای‌مجموع مفروض به‌دست می‌آید:

$$\frac{\alpha^{pn}-۱}{\alpha-۱}=\frac{(\alpha^n)^p-۱}{\alpha-۱}=\frac{۱-۱}{\alpha-۱}=\circ$$

۷۵۷. معادله را به‌صورت $\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^n=-۱$ می‌نویسیم $(x\neq i)$. از آن جا

$$\frac{x+i}{x-i}=cos\frac{۲k+۱}{n}\pi+isin\frac{۲k+۱}{n}\pi(k=\circ,۱,\dots,n-۱)$$

از دوطرف یك واحدکم و، سپس، دوطرف را بر i بخش می‌کنیم:

$$\frac{۲}{x-i}=sin\frac{۲k+۱}{n}\pi+i\left(-۱+cos\frac{۲k+۱}{n}\pi\right)=$$

$$=۲sin\frac{۲k+۱}{۲n}\pi cos\frac{۲k+۱}{۲n}\pi\mp۲isin^۲\frac{۲k+۱}{۲n}\pi=$$

$$\frac{۲}{x-i}=۲sin\frac{۲k+۱}{۲n}\pi\left(cos\frac{۲k+۱}{۲n}\pi\mp isin\frac{۲k+۱}{۲n}\pi\right)$$

از آن‌جا

$$x-i=\frac{1}{\sin\frac{2k+1}{2n}\pi\left(\cos\frac{2k+1}{2}\pi+i\sin\frac{2k+1}{2n}\pi\right)}=$$

$$=\frac{\cos\frac{2k+1}{2n}\pi-i\sin\frac{2k+1}{2n}\pi}{\sin\frac{2k+1}{2n}\pi}=cotg\frac{2k+1}{2n}\pi-i;$$

$$x=cotg\frac{2k+1}{2n}\pi\ (k=0,1,2,\dots,n-1)$$

۷۵۸. چون داریم:

$$\frac{1+itg\alpha}{1-itg\alpha}=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha-i\sin\alpha}=\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha$$

بنابراین، معادلهٔ مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$\left(\frac{1+xi}{1-xi}\right)^n=\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha$$

و اگر از دوطرف، ریشهٔ n ام بگیریم:

$$\frac{1+xi}{1-xi}=\cos\frac{2(\alpha+k\pi)}{n}+i\sin\frac{2(\alpha+k\pi)}{n}$$

با اضافه‌کردن یك واحد به دوطرف برابری، به‌دست می‌آید:

$$\frac{2}{1-xi}=1+\cos\frac{2(\alpha+k\pi)}{n}+i\sin\frac{2(\alpha+k\pi)}{n}=2\cos^2\frac{\alpha+k\pi}{n}+$$

$$+2i\sin\frac{\alpha+k\pi}{n}\cos\frac{\alpha+k\pi}{n}=2\cos\frac{\alpha+k\pi}{n}\left(\cos\frac{\alpha+k\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+k\pi}{n}\right)$$

از آن‌جا

$$1-xi=\frac{1}{\cos\frac{\alpha+k\pi}{n}\left(\cos\frac{\alpha+k\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+k\pi}{n}\right)}=$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha+k\pi}{n} - i\sin\frac{\alpha+k\pi}{n}}{\cos\frac{\alpha+k\pi}{n}} = 1 - i\,tg\frac{\alpha+k\pi}{n}$$

و بنابراین

$$x = tg\frac{\alpha+k\pi}{n}\,;\, k = 0,\, 1,\, 2, \ldots, n-1$$

XI. استقرای ریاضی

۷۵۹ تا ۷۷۴. راهنمائی. اگرحکمی برای‌عدد ۱درست باشد و، درضمن، به‌شرط درست بودن حکم برای عــددی دلخواه، برای عدد بلافاصله بعد از آن هم درست باشد، آن‌وقت، این حکم برای هرعدد دلخواهی درست است.

گزاره‌ای را که به این ترتیب تنظیم کردیم، اصل استقرای ریاضی می‌نامند. روشی از اثبات که برمبنای استفاده از اصل استقرای ریاضی باشد، روش استقرای ریاضی نامیده می‌شود.

بــرای استفاده از روش استقرای ریاضی باید: ۱) درستی حکم را بــرای $n=1$ آزمایش کنیم؛ ۲) فرض کنیم، حکم برای $n=k$ درست است؛ ۳) ثابت کنیم که می‌توان ازحکم درستی قضیه برای $n=k$، درستی آن را برای $n=k+1$ نتیجه گرفت.

دربرخی موردهــا ممکن است، بــه‌جای آزمایش برای $n=1$، لازم باشد از عدد دیگری مثل $n=m$ آغاز کنیم. مثلاً، اگر بخواهیم خاصیتی را برای چندوجهی‌ها ثابت کنیم، به ناچار باید از $n=4$ آغاز کرد. ولی این وضع، لطمه‌ای بــه‌کلی بودن ساختار بالا نمی‌زند، زیــرا همیشه‌ می‌توان $n=r+m-1$ گرفت و فرایند اثبات را از $r=1$ آغاز کرد.

۷۵۹. رابطه‌ای برای $n=1$ درست است، زیرا منجر به رابطهٔ $a_1=a_1$ می‌شود. فرض می‌کنیم، رابطه برای $n=k$ درست باشد:

$$a_k = a_1 + d(k-1)$$

دراین صورت خواهیم داشت:

$$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + d(k-1) + d = a_1 + dk$$

بنا براین، رابطهٔ $a_n=a_1+d(n-1)$، برای همهٔ مقدارهای n، درست است.

۷۶۰. رابطهٔ $a_n=a_1q^{n-1}$، بـرای $n=1$ ، درست است. فـرض می‌کنیم برای $n=k$ درست‌باشد، یعنی $a_k=a_1q^{k-1}$؛ دراین‌صورت داریم: $a_{k+1}=a_k\cdot q=a_1q^k$. بنا براین، رابطهٔ $a_n=a_1q^{n-1}$، برای همهٔ مقدارهای n، درست است.

۷۶۱. یادآوری می‌کنیم کـه ترتیب m حرف n بـه n به‌چنان ترکیب‌هایی از m حرف مفروض گفته می‌شود کـه اولاً، درهـرکدام از آن‌ها n حرف وجود داشته باشد و ثانیاً، این ترکیب‌ها یـا ازنظر خود حرف‌ها ویا ازنظر ردیف قرارگرفتن آن‌ها، بـا هم اختلاف داشته باشند. فرض‌کنید، از m عنصر a_1، a_2،...،a_m بخواهیم ترتیب‌های مختلفی درست‌کنیم که، هرکدام، شامل تنها یك عنصر باشند. روشن است‌که تعداد این ترتیب‌ها، برابر m می‌شود. بنا براین، رابطهٔ

$$A_m^n=m(m-1)\dots(m-n+1) \qquad (*)$$

برای $n=1$ درست است.

اکنون فـرض می‌کنیم رابطهٔ $(*)$ بـرای $n=k$ درست باشد، ثابت می‌کنیم کـه، دراین صورت، رابطهٔ $(*)$ برای $n=k+1$ هم درست است. یعنی

$$A_m^{k+1}=m(m-1)\dots(m-k)$$

برای اثبات، یکی ازترتیب‌های شامل k عنصر (از m عنصر) را درنظرمی‌گیریم، مثلاً

$$a_1, a_2, \dots, a_k$$

و درانتهای آن، هـریك از $(m-k)$ عنصر دیگر را قـرار می‌دهیم، یعنی درانتهای این ترتیب، به‌نوبت و هربـار یکی از عنصرهـای a_{k+1}، a_{k+2}،...، a_m را اضافـه می‌کنیم. $(m-k)$ ترتیب وهرکدام شامل $(k+1)$ عنصر بـه‌دست می‌آید. اگر درمورد هرکدام از ترتیب‌های k عنصری، بـه‌همین شکل عمل‌کنیم، هـربـار $(m-k)$ ترتیب $(k+1)$ عنصری به‌دست می‌آید. ازاین راه، به‌اندازهٔ

$$(m-k)A_m^k=m(m-1)\dots(m-k)$$

ترتیب $(k+1)$ عنصری پیدا می‌شود. باید روشن کنیم که، آیا این عبارت معرف A_m^{k+1} هست یا نه، آیا دربین‌این ترتیب‌ها، ترتیب‌های یکسان وجود ندارد، وآیا همهٔ ترتیب‌های مختلف به‌حساب آمده است؟

فرض‌کنیم، دربین ترتیب‌های حاصل، دوترتیب یکسان وجود داشته باشد. آن‌ها را A_1 و A_2 می‌نامیم. چون، درترتیب یکسان از عنصرهای مشابه تشکیل شده‌اند و، درضمن،

ردیف این عنصرها هم دردو ترتیب، یکسان است، بنا بـراین فرض می کنیم، درانتهای این دوترتیب، عنصر a_l قرارگرفته باشد. a_l را از A_1 و A_2 کنار می گذاریم. دوترتیب یکسان $\bar{A}_1$ و $\bar{A}_2$ به‌دست می‌آید که هرکدام شامل k عنصرند. ولی، این ممکن نیست، زیرا برای تشکیل ترتیب‌های $(k+1)$ عنصری، از هرترتیب k عنصری، تنها یکبار استفاده‌کردیم.

اکنون‌فرض می کنیم که، ترتیبی مثل A که شامل $(k+1)$ عنصراز m عنصر مفروض است، درروش ما، به‌دست نیامده باشد. آخرین عنصر این ترتیب را، a_l می گیریم. a_l در مکان دیگری ازاین ترتیب پیدا نمی‌شود، زیرا درهرترتیب، از هرعنصر، تنها یکباراستفاده می‌شود. a_l را از A کنار می گذاریم. به‌ترتیب $\bar{A}$ می‌رسیم که شامل k عنصر است. یعنی، برای بـه‌دست آوردن A، کافی است درانتهای ترتیب $\bar{A}$، عنصر a_l را، کـه در $\bar{A}$ وجود ندارد، قراردهیم. بنابراین، ترتیب A ازترتیب $\bar{A}$ و بـا قرار دادن عنصر a_l درانتهای آن به‌دست می‌آید و نمی‌تواند دربین ترتیب‌های قبلی $(k+1)$ عنصری نباشد.

ثابت‌شد که $A_m^{k-1}=m(m-1)...(m-k)$، به‌شرطی که‌رابطهٔ (*) برقرار باشد. درضمن، دیدیم کـه رابطهٔ (*) برای $n=1$ درست است. بنابراین، رابطهٔ (*)، برای هر مقدار n درست است.

۷۶۲. تبدیل یا جایگشت m عنصر، بـه‌ترکیب‌هایی گفته می‌شود که شامل m عنصر باشند واختلاف آن‌ها، درردیف قرارگرفتن این عنصرها باشد.

واضح‌است که ازیك عنصر، تنها یك تبدیل می‌توان ساخت، یعنی $P_1=1$. بنابراین، رابطهٔ $P_n=n!$، بـرای $n=1$ درست است. اکنون فـرض می کنیم، ایـن رابطه، برای $n=k$ درست باشد، یعنی داشته باشیم $P_k=k!$ وثابت می کنیم که، دراین صورت، برای $n=k+1$ هم درست است، یعنی $P_{k+1}=(k+1)!$.

برای اثبات، از $(k+1)$ عنصرمفروض a_1، a_2،...، a_k، a_{k+1}، k عنصردلخواه را انتخاب می کنیم وتبدیـل‌های آن‌ها را تشکیل مـی‌دهیم. یکی ازایـن تبدیل‌ها را درنظر می گیریم و عنصر$(k+1)$ام را، ابتداقبل‌ازعنصراول، سپس، قبل‌ازعنصردوم،... وبالاخره قبل ازعنصرk و سرانجام بعدازعنصرk قرارمی‌دهیم. بنابراین، ازهرتبدیل شامل k عنصر، $(k+1)$ تبدیل شامل $(k+1)$ عنصر به‌دست می‌آید. چون، طبق فرض، $P_k=k!$، تعداد تبدیل $(k+1)$ عنصری‌که با ایـن روش بـه دست مـی‌آید، برابربا $k!(k+1)$، یعنی $(k+1)!$ می‌شود. اکنون ثابت می کنیم‌که آن چه به‌دست آورده‌ایم، همان P_{k+1} است، یعنی دربین‌آن‌ها، دوتبدیل‌یکسان وجود ندارد و، درضمن، تبدیلی هم ازقلم نیفتاده است.

فرض می کنیم، درتبدیل‌های به‌دست آمده، دوتبدیل‌یکسان وجود داشته باشد. آن‌ها را p_1 و p_2 می‌نامیم. ازآن‌جا که دوتبدیـل یکسان، ازعنصرهای یکسان و در ردیف‌های

یکسان تشکیل شده‌اند، بنا براین، عنصری مثل a_l، هم‌در p_1 وهم در p_2، دریك مکان قرار دارد. فرض کنید، این مکان، آخریـن، یعنی $(k+1)$ امین مکان باشد. a_l را از p_1 و p_2 کنار می‌گذاریم. دو تبدیل یکسان $\bar{p}_1$ و $\bar{p}_2$ از k عنصر به دست می‌آید. ولی، این ممکن نیست، زیرا در هرتبدیل k عنصری، عنصر $(k+1)$ام را تنها یکبار در ردیف آخرقرار داده بودیم.

اکنون فرض می‌کنیم، تبدیلی مثل p از $(k+1)$ عنصر با روش بالا به دست نیامده باشد. فرض کنیم، عنصر a_l، دراین تبدیل، درجای آخرباشد. a_l را از p کنارمی‌گذاریم. تبدیل $\bar{p}$ از k عنصربه دست می‌آیـد. یعنی، برای به‌دست آوردن تبدیل p، باید تبدیل $\bar{p}$ را درنظر گرفت و عنصر a_l را به انتهای آن اضافه‌کرد. ولی ما همهٔ انواع تبدیل‌های p عنصری، و از آن جمله تبدیـل $\bar{p}$، کـه شامل عنصر a_l نبودند، بـه حساب آورده بـودیم. بنابراین، تبدیل p نمی‌تواند دربین تبدیل‌های $(k+1)$ عنصری وجود نداشته باشد.

به ایـن ترتیب، با فرض درستی رابـطهٔ $P_k=k!$، ثابت شد: $P_{k+1}=(k+1)!$. علاوه برآن، ثابت کردیم که رابطهٔ $P_n=n!$، برای هرمقدار n درست است.

۷۶۳. منظور ازترکیب n به n از m عنصر، ردیف‌هایی از n عنصراست‌که دست‌کم دریکی ازعنصرهای خود، با هم فرق داشته باشند.

اگر بخواهیم ازعنصر a_1، a_2،...، a_m، ترکیب‌هـای مختلفی درست‌کنیم‌که، درهر کدام از آن‌ها، تنها یك عنصروجود داشته‌باشد، روشن‌است‌که تعداد آن‌ها برابر mمی‌شود. بنابراین، رابطهٔ

$$C_m^n=\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1\times 2\times\dots\times n} \qquad (*)$$

برای $n=1$ درست است.

فرض‌می‌کنیم، رابطهٔ (*) برای $n=k$ درست باشد،ثابت‌می‌کنیم که، دراین‌صورت رابطهٔ (*) برای $n=k+1$ هم درست است، یعنی

$$C_m^{k+1}=\frac{m(m-1)\dots(m-k)}{1\times 2\times\dots\times(k+1)}$$

برا اثبات، ترکیبی از m عنصر راکه شامل k عنصرباشد، درنظرمی‌گیریم، مثلاً

$$a_1\,,\,a_2\,,\,\dots\,,\,a_k$$

و هریك از $(m-k)$ عنصرباقی مانده را، تنها یکبار، بـه عنوان عنصر $(k+1)$ام به‌آن اضافه می‌کنیم. بـه این ترتیب، از هرتـرکیب k عنصری، $(m-k)$ ترکیب $(k+1)$ عنصری به دست می‌آید. بنابراین، تعداد کل ترکیب‌های $(k+1)$ عنصری که با این‌روش

به‌دست می آید، برابراست با

$$\frac{m(m-۱)\dots(m-k+۱)}{۱\times۲\times\dots\times k}(m-k)$$

به سادگی معلوم می‌شودکه، دربین این ترکیب‌ها، ترکیب‌های یکسان وجود دارد. یکی ازترکیب‌های $(k+۱)$ عنصری و مثلاً

$$a_۱,\ a_۲,\ a_۳,\ \dots,\ a_{k+۱} \qquad (c)$$

رادرنظرمی گیریم وعنصر $a_۱$ را ازآن کنارمی گذاریم. ترکیب $c_۱$ به‌دست‌می‌آیدکه از k عنصر

$$a_۲,\ a_۳,\ \dots,\ a_{k+۱}$$

تشکیل شده است و دربین عنصرهای آن، $a_۱$ وجود ندارد، سپس از $c_۱$، عنصر $a_۲$ راکنار می گذاریم، به ترکیب $c_۲$ می‌رسیم که ازعنصرهای

$$a_۱,\ a_۳,\ \dots,\ a_{k+۱}$$

تشکیل شده است وعنصر $a_۲$ دربین آن‌ها وجود ندارد. اگربه همین ترتیب، هرباریکی از عنصرهای c را کناربگذاریم، سرآخر نوبت به عنصر $a_{k+۱}$ می‌رسد،که‌باکنار گذاشتن آن، ترکیب $c_{k+۱}$ شامل k عنصر به دست می‌آیدکه $a_{k+۱}$ دربین عنصرهای آن وجود ندارد. درابتدا، درهرترکیب k عنصری، یکی‌از$(m-k)$ عنصرباقی‌مانده را اضافه‌کرده‌بودیم تا ترکیب‌های$(k+۱)$ عنصری به‌دست آید. ولی‌وقتی که به $c_۱$ عنصر $a_۱$، یا به $c_۲$ عنصر $a_۲$،...، یا بالاخره به $c_{k+۱}$ عنصر $a_{k+۱}$ را اضافه‌کنیم، درهرحال، همان‌ترکیب c به دست‌می‌آید. از این جا معلوم می‌شود کــه، هرترکیب $(k+۱)$ عنصری را، $(k+۱)$ بار به حساب آورده‌ایم و، بنابراین، تعداد به دست‌آمده را باید بر $(k+۱)$ تقسیم‌کنیم، یعنی

$$\frac{m(m-۱)\dots(m-k+۱)(m-k)}{۱\times۲\times\dots\times k\times(k+۱)}$$

و روشن است‌که دیگر، دربین‌این‌ها، ترکیب‌های‌یکسان وجود ندارد و، درضمن، ترکیبی هم ازقلم نیفتاده است به ایــن ترتیب ثابت شدکــه به فرض درست بــودن رابطهٔ (*) برای $n=k$ داریم:

$$C_m^{k+۱}=\frac{m(m-۱)\dots(m-k)}{۱\times۲\times\dots\times(k+۱)}$$

علاوه براین، ثابت‌کـردیم‌که رابطهٔ (*) بـــرای $n=۱$ هم درست است. بنابراین، رابطهٔ

(*) برای هرمقدار n درست است.

۷۶۴. چون $(a_1+a_2)^2=a_1^2+a_2^2+2a_1a_2$، بنابراین، رابطهٔ مطلوب برای $n=2$ درست است، فرض می‌کنیم، این رابطه برای $n=k$ درست باشد، یعنی

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2+2S$$

که در آن، S عبارت است ازمجموع همهٔ حاصل‌ضرب‌های دو به‌دوی a_1، a_2، …،a_k؛ و ثابت می‌کنیم که رابطه، برای $n=k+1$ هم درست است، داریم:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1})^2=[(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1}]^2=$$
$$=(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2+2(a_1+a_2+\cdots+a_k)a_{k+1}+a_{k+1}^2=$$
$$=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2+2S+2(a_1a_{k+1}+a_2a_{k+1}+\cdots+$$
$$+a_ka_{k+1})+a_{k+1}^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{k+1}^2+2S_1$$

که در آن، S_1 عبارت است ازمجموع همهٔ حاصل ضرب‌های دوبه‌دوی جمله‌های a_1، a_2،…، a_{k+1}. به این ترتیب، رابطهٔ مجذور n جمله‌ای، برای هرمقدار n ثابت باشد.

۷۶۵. سمت چپ برابری را S_n می‌نامیم. با استفاده از روش استقراری ریاضی داریم:

$$1)\quad S_1=\frac{1^2}{1\times 3}=\frac{1}{3}\,;\quad \frac{1(1+1)}{2\times(2\times 1+1)}=\frac{1\times 2}{2\times 3}=\frac{1}{3}$$

برابری به ازای $n=1$ درست است.

۲) فرض می‌کنیم: $S_k=\dfrac{k(k+1)}{2(2k+1)}$.

۳) ثابت می‌کنیم:

$$S_{k+1}=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2[2(k+1)+1]}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$$

در واقع داریم:

$$S_{k+1}=S_k+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=$$
$$=\frac{(k+1)[k(2k+3)+2(k+1)]}{2(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(2k^2+5k+2)}{2(2k+1)(2k+3)}=$$

$$=\frac{(k+1)(2k+1)(k+2)}{2(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$$

۷۶۶. سمت چپ رابطه را S_n می‌نامیم. رابطه، به‌ازای $n=1$ درست است. فرض می کنیم. رابطهٔ مفروض، به‌ازای $n=k-1$ درست باشد و ثابت می کنیم که، دراین‌صورت برای $n=k$ هم درست است:

$$S_k=S_{k-1}+k^4=\frac{1}{30}(k-1)k(2k-1)(3k^2-3k-1)+k^4=$$

$$=\frac{k}{30}[(k-1)(2k-1)(3k^2-3k-1)+30k^3]=$$

$$=\frac{k}{30}[(k-1)(2k-1)(3k^2+3k-1)-6k(k-1)(2k-1)+$$

$$+30k^3]=\frac{k}{30}[(k-1)(2k-1)(3k^2+3k-1)+$$

$$+6k(3k^2+3k-1)]=\frac{k}{30}(3k^2+3k-1)[(k-1)(2k-1)+$$

$$+6k]=\frac{k}{30}(3k^2+3k-1)(2k^2+3k+1)=$$

$$=\frac{1}{30}k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)$$

۷۶۷. بخش سمت چپ برابری را S_n می گیریم. برابری، به ازای $n=1$، برقرار است. فرض مـی کنیم که برابری، به ازای $n=k-1$ درست بـاشد وثابت می کنیم که، دراین صورت، به ازای $n=k$ هم درست است:

$$S_k=S_{k-1}+k^5=\frac{1}{12}(k-1)^2k^2[2(k-1)^2+2(k-1)-1]+k^5=$$

$$=\frac{1}{12}k^2[(k-1)^2(2k^2-2k-1)+12k^3]=\frac{1}{12}k^2[(k-1)^2(2k^2+2k-1)-$$

$$-4k(k-1)^2+12k^3]=\frac{1}{12}k^2[(k-1)^2(2k^2+2k-1)+4k(2k^2+$$

$$+2k-1)]=\frac{1}{12}k^2(2k^2+2k-1)[(k-1)^2+4k]=$$

$$=\frac{k^2(k+1)^2(2k^2+2k-1)}{12}$$

۷۶۸. سمت‌چپ برابری را S_n می‌نامیم. برابری برای $n=1$ درست است. درواقع

$$S_1=tgx+\frac{1}{2}tg\frac{x}{2}=\frac{sinx}{cosx}+\frac{1-cosx}{2sinx}=$$

$$=\frac{2sin^2x+cosx-cos^2x}{2sinx\,cosx}=\frac{cosx+cos^2x+2sin^2x-2cos^2x}{2sinx\,cosx}=$$

$$=\frac{cosx(1+cosx)-2cos2x}{2sinx\,cosx}=\frac{cosx(1+cosx)}{2sinx\,cosx}-\frac{2cos2x}{sin2x}=$$

$$=\frac{1+cosx}{2sinx}-2cotg2x=\frac{1}{2}cotg\frac{x}{2}-2cotg2x$$

فرض می‌کنیم، برابری به‌ازای $n=k-1$ درست باشد و ثابت می‌کنیم که، دراین‌صورت، به ازای $n=k$ هم درست است:

$$S_k=S_{k-1}+\frac{1}{2^k}tg\frac{x}{2^k}=\frac{1}{2^{k-1}}cotg\frac{x}{2^{k-1}}-2cotg2x+\frac{1}{2^k}tg\frac{x}{2^k}=$$

$$=\frac{1}{2^k}\left(2cotg\frac{x}{2^{k-1}}+tg\frac{x}{2^k}\right)-2cotg2x$$

ولی با فرض $a=\frac{x}{2^k}$، عبارت داخل پرانتز چنین می‌شود:

$$2cotg2a+tga=cotg2a+(cotg2a+tga)=$$

$$=cotg2a+\frac{cos2a\,cosa+sin2a\,sina}{sin2a\,cosa}=cotg2a+\frac{cos(2a-a)}{sin2a\,cosa}=$$

$$=\frac{cos2a}{sin2a}+\frac{1}{sin2a}=\frac{1+cos2a}{sin2a}=cotga=cotg\frac{x}{2^k}$$

که به این ترتیب، به دست می‌آید:

$$S_k=\frac{1}{2^k}cotg\frac{x}{2^k}-2cotg2x$$

۰۷۶۹ ۱) نابرابری به ازای $n=1$ درست است، زیرا $\sqrt{4}<3$.

۲) اگر نابرابری بـه ازای $n=k$ درست باشد، حتماً بـه ازای $n=k+1$ هم درست است. در واقع، اگر سمت چپ نابرابری را S_n فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$S_{k+1}=\sqrt{4+S_k}<\sqrt{4+3}=\sqrt{7}<3$$

۰۷۷۰ ۱) نابرابری به ازای $n=2$ درست است، زیرا

$$(1+a)^2=1+2a+a^2>1+2a$$

۲) فرض می‌کنیم، نابرابری برای $n=k$ درست باشد. ثابت می‌کنیم کـه، دراین صورت، به ازای $n=k+1$ هم درست است. درواقع

$$(1+a)^{k+1}=(1+a)^k(1+a)>(1+ka)(1+a)>1+(k+1)a$$

۰۷۷۱ در این‌جا، باید $n\geqslant 2$ گرفت. بـه ازای $n=2$، مربع به دست می‌آیـد و برای آن داریم: $a_4=R\sqrt{2}$، یعنی برابری برای $n=2$ برقـرار است. فرض می‌کنیم، رابطه برای $n=k$ درست باشد وثابت می‌کنیم که، دراین صورت، برای $n=k+1$ هم درست است. داریم:

$$a_{2^{k+1}}=\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{1}{4}a_{2^k}^2}}=$$

$$=\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{1}{4}\left(R\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{k-2}}\right)^2}}=$$

$$=\sqrt{2R^2-R^2\sqrt{4-\left(2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{k-2}\right)}}=$$

$$=R\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{k-1}}$$

۰۷۷۲ ۱) حکم برای $n=1$ درست‌است، زیرا خط راستی‌که برصفحه واقع باشد، این صفحه را به دوبخش تقسیم می‌کند.

۲) فرض کنیم، حکم برای $n=k$ درست باشد، یعنی صفحه، به وسیلهٔ k خط راستی که از یك نقطه می‌گذرند و بر صفحه واقع‌اند، بـه $۲k$ بخش تقسیم شود؛ در این صورت، وقتی که خط راست $(k+۱)$ام را از همان نقطهٔ بگذرانیم، هرکدام از دو بخش صفحه‌را که بین دوخط راست قبلی مجاور به خط راست اخیر قراردارند، به دو بخش جدید تقسیم می‌کند. یعنی، صفحه به $(۲k+۲)$ بخش تقسیم می‌شود.

۷۷۳. ۱) حکم بـه ازای $n=۱$ درست است. فرض می‌کنیم، بـه ازای $n=k$، داشته باشیم: $S_k=(۲k-۱)^۲$. توجه می‌کنیم کـه نخستین جمله از سطر k ام برابر k، تعداد جمله‌هـای این سطر برابر $(۲k-۱)$ وجملهٔ آخر آن برابر $(۳k-۲)$ است. سطر $(k+۱)$ام را می‌توان از سطر kام به دست آورد، به شرطی که به هر جملهٔ سطـر k ام یك واحد اضافه‌کنیم و، سپس، درسمت راست جمله‌ها، دوجملهٔ بعدی رابنویسیم. بنابراین، به دست می‌آید:

$$S_{k+۱}=S_k+(۲k-۱)+۳k+۳k+۱=(۲k-۱)^۲+۸k=(۲k+۱)^۲$$

۷۷۴. فرض کنیم، درصفحهٔ M، خط‌راست AB رارسم کرده باشیم. این خط‌راست، صفحهٔ M را به‌دونیم صفحهٔ $M_۱$ و $M_۲$ تقسیم می‌کند. می‌توان یکی از این بخش‌ها را با قرمز ودیگری را با آبی رنگ کرد. بنابراین، حکم برای $n=۱$ درست است.

فرض می‌کنیم، حکم برای $n=k$ درست باشد، یعنی با رسم k خط راست مختلف درصفحهٔ M، بتوانیم بخش‌های حاصل را با قرمزوآبی چنان رنگ‌کنیم، که هیچ دوبخش مجاوری، به یك رنگ نباشند. اکنون، خط راست $(k+۱)$ ام را رسم می‌کنیم و آن را CD می‌نامیم. خط‌راست CD، صفحهٔ M را به‌دونیم صفحهٔ $N_۱$ و $N_۲$ تقسیم می‌کند. نیم‌صفحهٔ $N_۲$ را طوری رنگ می‌کنیم که، همهٔ آن جاهایی که تا قبل از رسم CD بـه رنگ آبی بودند، به رنگ قرمز درآیند وهمه آن جاهایی که قبل از رسم CD بـه رنگ قرمز بودند، بـه رنگ آبی درآیند. در نیم‌صفحهٔ $N_۱$، همان رنگ‌های قبلی را نگه می‌داریم. اکنون، دوبخش مجاور دلخواه $P_۱$و$P_۲$ را درنظر می گیریم. بخش‌های $P_۱$و$P_۲$ می‌توانند در دو طرف یا در یك طرف خط راست CD واقع باشند. در حالت اول، $P_۱$و$P_۲$ بعد از رسم k خط راست و قـبل از رسم خط راست $(k+۱)$ام CD، یـك بخش را تشکیـل می‌دادند و، بنابراین، بـه یك رنگ بودنـد. بعد از رسم خط راست CD، بخشی از آن ($P_۱$ یا $P_۲$) که درنیم صفحهٔ $N_۱$ قراردارد به همان رنگ قبلی باقی مانـده وبخش دیگر آن ($P_۲$ یا $P_۱$) که درنیم صفحهٔ $N_۲$ قراردارد، تغییررنگ داده است. بنابراین، بخش‌های مجاور $P_۱$و$P_۲$، درحالت اول، با دو رنگ مختلف خواهند بود. درحالت دوم، یعنی وقتی که $P_۱$و$P_۲$ دریك طرف CD باشند، دوبخش $P_۱$و$P_۲$ بعد از رسم k خط راست وقبل از

رسم خط راست CD دورنگ مختلف داشته‌اند و بعد از رسم CD، بازهم رنگ‌های مختلفی خواهند داشت: اگر این دوبخش درنیم صفحهٔ N_1 باشند، جایی که ما رنگ‌ها را تغییر نداده‌ایم، با همان دورنگ مختلف قبل از رسم خط راست CD باقی می‌مانند واگر این دوبخش درنیم صفحهٔ N_2 باشند، قبل از رسم CD به دورنگ مختلف بوده‌اند واکنون که قرمزها را به آبی وآبی‌ها را به قرمز تبدیل کرده‌ایم، باز هم به دو رنگ مختلف‌اند. به این ترتیب، با فرض درست بودن حکم برای $n=k$، برای $n=k+1$ هم درست است. یعنی حکم، برای هرمقدار n درست است.

XII. بررسی تابع‌ها و رسم نمودارها

۷۷۵ تا ۷۸۱. راهنمائی. حوزهٔ تعریف یادامنهٔ تعریف تابع با یك‌متغیر، به‌مجموعهٔ همهٔ‌مقدارهای قابل‌قبول این متغیر گفته می‌شود. برای تابع‌های مقدماتی، یعنی تابع‌هایی که به‌وسیلهٔ عبارت‌های ریاضی تعریف شده‌اند، مقدارهایی از متغیر را قابل قبول به حساب می‌آورند که اولاً حقیقی باشند وثانیاً، به ازای آن‌ها، عمل‌های ریاضی وارد در عبارت، معنا داشته باشد. و ثالثاً، مقدارحاصل از این عمل‌ها، برای عبارت، مقداری حقیقی باشد.
برای پیداکردن دامنهٔ تعریف تابع‌های مقدماتی، باید به این نکته‌ها توجه‌کرد:

۱) مخرج کسرهایی‌که درعبارت وجود دارند، نباید برابر صفر شوند؛

۲) عبارت‌هایی‌که درزیررادیکال‌های بافرجهٔ زوج قراردارند، باید غیرمنفی باشند؛

۳) عبارتی‌که توان آن گنگ است ویا عبارتی که درتوان آن متغیر وجود دارد، باید مثبت باشد ودرحالتی‌که توان عبارت مثبت است، باید خود عبارت غیرمنفی باشد؛

۴) عبارت‌هایی‌که زیر علامت لگاریتم قراردارند، باید مثبت باشند؛

۵) عبارت‌هایی‌که زیر علامت آرك سینوس قراردارند، باید از لحاظ قدرمطلق، کوچکتر از واحد باشند؛

۶) عبارت‌هایی‌که زیرعلامت‌تانژانت یا سکانت قراردارند، نبایدبرابر $\frac{۲k+۱}{۲}\pi$ شوند $(k\in Z)$؛

۷) عبارت‌هایی‌که زیر علامت کتانژانت یاکسکانت قراردارند، باید مخالف $k\pi$ باشند$(k\in Z)$؛

۸) پایه وتوان عبارت n^v، نباید به طور هم زمان برابر صفر شود.

۷۷۵. $a)$ $۲-x^۲\geqslant ۰$ یا $-\sqrt{۲}\leqslant x\leqslant\sqrt{۲}$. دامنهٔ تعریف عبارت است از

فاصلهٔ $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

b) $x^2-4\geqslant 0$ یا $|x|>2$. دامنهٔ تعریف شامل دو فاصلهٔ $(-\infty,-\sqrt{2}]$ و $[\sqrt{2},+\infty)$ است.

c) $\frac{x+1}{x+3}\geqslant 0$، یعنی $x<-3$ و $x\geqslant -1$.

d) $x(x+2)(x-3)(x-4)\geqslant 0$، یعنی $x\leqslant -2$، $0\leqslant x\leqslant 3$ و $x\geqslant 4$. دامنهٔ تعریف، شامل سه‌فاصله است: $(-\infty,-2]$، $[0,3]$، $[4,+\infty)$.

e) $x\geqslant 0$ و $x-1\geqslant 0$، از آن‌جا $x\geqslant 1$.

f) $x-1\geqslant 0$ و $x-2\sqrt{x-1}\geqslant 0$. نابرابری اخیر را می‌توان به صورت $(\sqrt{x-1}-1)^2\geqslant 0$ نوشت، که در آن، باید داشته باشیم: $x\geqslant 1$. بنابراین، دامنهٔ تعریف عبارت است از فاصلهٔ $[1,+\infty)$.

۷۷۶. a) $2-2^{-x}\geqslant 0$، $2^{-x}\leqslant 2$، یعنی $-x\leqslant 1$ یا $x\geqslant -1$.

b) $x-1\neq 0$. دامنهٔ تعریف، شامل دو فاصلهٔ $(-\infty,1)$ و $(1,+\infty)$ است.

c) و d) دامنهٔ تعریف، عبارت است از مجموعهٔ همهٔ عددهای مثبت.

۷۷۷. a) $x^2-1>0$ یا $|x|>1$. دامنه تعریف، از دو فاصلهٔ $(-\infty,-1)$ و $(1,+\infty)$ تشکیل شده است.

b) $x+1>0$ و $x-1>0$، یعنی $x>1$.

c) $x^2-3x+2>0$، یعنی $x<1$ و $x>2$.

d) $\log_3(x-1)\geqslant 0$، یعنی $x-1\geqslant 1$ یا $x\geqslant 2$.

۷۷۸. a) همهٔ عددهای غیرمنفی، یعنی فاصلهٔ $[0,+\infty)$.

b) همهٔ عددهای حقیقی، یعنی فاصلهٔ $(-\infty,+\infty)$.

۷۷۹. a) $\sin x\neq 0$، یعنی $x\neq k\pi\ (k\in Z)$؛ یعنی مجموعهٔ همهٔ فاصله‌های به‌صورت $(k\pi,(k+1)\pi)\ (k\in Z)$.

b) $\sin 4x\geqslant 0$ یا $2k\pi\leqslant 4x\leqslant (2k+1)\pi$ یا $\frac{k\pi}{2}\leqslant x\leqslant \frac{2k+1}{6}\pi\ (k\in Z)$.

c) مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی، به‌جز $x=0$.

d) باید داشته باشیم:

$$tg^2x-(\sqrt{3}+1)tgx+\sqrt{3}\geqslant 0\Rightarrow(tgx-1)(tgx-\sqrt{3})\geqslant 0$$

که از آنجا به‌دست می‌آید:

$$k\pi-\frac{\pi}{۲}<x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{۴} \text{ و } k\pi+\frac{\pi}{۳}\leqslant x<k\pi+\frac{\pi}{۲}(k\in Z)$$

۷۸۰. a) باید داشته باشیم: $log_a sin\,x \geqslant ۰$. درحالت $a>۱$، این‌نابرابری منجر به $sin\,x \geqslant ۱$ می‌شود. ولی $sin\,x$ نمی‌تواند از واحد بزرگتر باشد و وقتی برابر واحد است که داشته باشیم: $x=\frac{۴k+۱}{۲}\pi$. به این ترتیب، دامنهٔ تعریف دراین حالت، عبارت‌است

ازمجموعهٔ همهٔ مقدارهای π $x=\frac{۴k+۱}{۴}(k\in Z)$.

درحالت $۰<a<۱$، باید نابرابری‌های $۰<sin\,x\leqslant ۱$ برقرار باشند، یعنی $sin\,x>۰$. دراین حالت، دامنهٔ تعریف عبارت است از همهٔ فاصله‌های به صورت $(k\in Z)$ $(۲k\pi,\ ۲k\pi+\pi)$

b) باید داشته باشیم: $log\,tgx>۰$. از آن‌جا که مبنای لگاریتم، بزرگتر از واحد است، نابرابری به صورت $tgx>۱$ درمی‌آید. از آن‌جا

$$(k\in Z)k\pi+\frac{\pi}{۴}<x<k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

c) چون $|sin\,x+cos\,x|\leqslant\sqrt{۲}<۱/۵$ (حل مسالهٔ ۶۹۷ را ببینید)، بنابراین، دامنهٔ تعریف عبارت است ازهمهٔ عددهای حقیقی.

۷۸۱. a) باید داشته باشیم: $\left|\frac{۳}{x}\right|\leqslant ۱$، یعنی $|x|\geqslant ۳$ یا $x\leqslant -۳$ و $x\geqslant ۳$.

b) باید داشته باشیم: $\frac{۲|x|}{۱+x^۲}\leqslant ۱$. ولی این نابرابری همیشه برقرار است، زیرا منجر به‌نابرابری $(|x|-۱)^۲\geqslant ۰$ می‌شود. بنابراین، دامنهٔ تعریف. عبارت‌است ازمجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی.

c) باید داشته باشیم: $-۱\leqslant arcsin\,x\leqslant ۱$، یعنی $-sin\,۱\leqslant x\leqslant sin\,۱$.

۷۸۲. a) دورهٔ تناوب برابراست با $\omega=\frac{۲\pi}{۳}$، زیرا

$$y=sin\,۳x=sin(۳x+۲\pi)=sin\,۳\left(x+\frac{۲\pi}{۳}\right)$$

b) $\omega=۸\pi$، زیرا $cos\frac{x+۸\pi}{۴}=cos\left(\frac{x}{۴}+۲\pi\right)=cos\frac{x}{۴}$.

c) دورهٔ تناوب جملهٔ اول برابر $\frac{\pi}{3}$ و دورهٔ تناوب جملهٔ دوم برابر $\frac{\pi}{2}$ است. دورهٔ تناوب مجموع دوجمله، باید به تعداد درستی از $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{2}$ درخودداشته باشد. کوچکترین عددی که درتقسیم بر $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{2}$ به عدد درستی‌می‌رسد، برابراست با π. بنابراین، $\omega=\pi$.

d) با استدلالی شبیه حالت c)، معلوم می‌شود که: $\omega=12\pi$.

e) چون $y=\frac{1}{4}\sin x+\frac{1}{8}\sin 2x$، بنابراین دورهٔ تناوب برابر است با 2π.

۷۸۳. a) دورهٔ تناوب برابراست با $1=\frac{2\pi}{2\pi}$.

b) دورهٔ تناوب $\sin\sqrt{2}x$ برابر است با $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$ و دورهٔ‌تناوب $\cos\sqrt{3}x$ برابر با $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

دورهٔ تناوب تابع $\sin\sqrt{2}x+\cos\sqrt{3}x$ باید عددی باشد که هم در تقسیم بر $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$ وهم‌در تقسیم بر $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ به عدد درستی برسد. به این ترتیب، این دورهٔ تناوب باید، ازیك طرف به صورت $\omega=\frac{2k\pi}{\sqrt{2}}$ و از طرف دیگر به صورت $\omega=\frac{2k'\pi}{\sqrt{3}}$ باشد، که درآن‌ها، k و k' عددهای درستی هستند. ولی دراین صورت، باید داشته باشیم:

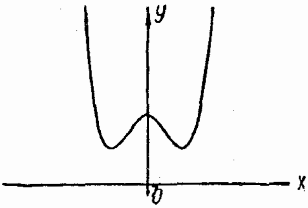
$$\frac{2k\pi}{\sqrt{2}}=\frac{2k'\pi}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{k'}{k}$$

که ممکن نیست، زیرا درسمت چپ برابری، عددی گنگ و درسمت راست آن، عددی گویا قراردارد. بنابراین، تابع مفروض غیرمتناوب است.

۷۸۴ تا ۸۱۲. راهنمائی. برای رسم نمودار یك تابع، باید آن را مورد بررسی قرار داد و ویژگی‌های آن را پیدا کرد. رسم نمودار، تنها به‌کمك «نقطه‌یابی» و بدون درنظرگرفتن ویژگی وخصلت‌های آن، ممکن است منجر به اشتباه‌های زیادی بشود. برای رسم نمودار، قبل از هر چیز، باید دامنهٔ تعریف تابع را پیداکرد. سپس باید روشن کرد که آیا نسبت به‌محور Oy یا مبداء مختصات متقارن است یا نه! درصورت امکان، حداکثر و حداقل مقدار تابع را درمرزهای دامنهٔ تعریف به‌دست آورد. بعد ازاین مرحله‌هاست که می‌توان، برای دقیق‌ترشدن رسم، برخی ازنقطه‌های آن، وبه‌خصوص نقطه‌های برخورد

با محورها را، بـه دست آورد. اگـر تابع متناوب باشد، کافی است برای رسم، خود را به‌فاصله‌ای مثل $a\leqslant x<b$ محدود کنیم، کـه در آن، $\omega=b-a$ و ω دورهٔ تناوب تـابع است. بدنیست یادآوری کنیم کـه اگر تابع زوج باشد، یعنی $f(x)=f(-x)$، محور عرض‌محور تقارن نمودار آن است؛ همچنین اگر تابع فرد باشد، یعنی $f(-x)=-f(x)$، آن‌وقت، مبداء مختصات مرکز تقارن تابع است.[1]

۸۷۴. دامنهٔ تعریف تابع، عبارت‌است ازمجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی. محورعرضی، محور تقارن نمودار تابع است، زیرا



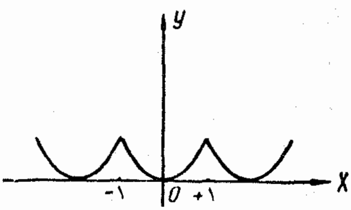
شکل ۲۰

$$(-x)^{۴}-۲(-x)^{۲}+۲=x^{۴}-۲x^{۲}+۲$$

بنابراین، کافی است نمودار را ، برای $x\geqslant ۰$ رسم کنیم. تابع‌را می‌توان به‌صورت $y=(x^{۲}-۱)^{۲}+۱$ نوشت. بـرای $x=۱$ داریم : $y=۱$. این حداقل مقدار تـابـع است. اگـر $x\to+\infty$، آن وقت $y\to+\infty$. اگر $x=۰$، آن‌وقت $y=۲$؛ واین، نقطهٔ برخورد نمودار بامحورعرض‌است. نمودار بـامحور طول برخورد نـدارد، زیرا $y=(x^{۲}-۱)^{۲}+۱>۰$. اگر نقطه‌های اضافی، برای $x=\frac{۱}{۲}$ و $x=۲$ را به‌دست آوریم، به جدول زیر می‌رسیم (شکل ۲۰):

x	۰	۰/۵	۱	۲	$\to+\infty$
y	۲	~۱/۵	۱	۱۰	$\to+\infty$

۷۸۵. دامنهٔ تعریف تـابع، عبارت است از همهٔ عددهای حقیقی. اگر به x دوواحد اضافه‌کنیم، به k هم دو واحد اضافه می‌شود و، بنابراین، مقدار تابع تغییر نمی‌کند؛ یعنی بـا تابعی متناوب سروکار داریم که دورهٔتناوب آن برابر است با ۲. بنابراین، کافی است نمودار تابع را درفاصلهٔ $-۱\leqslant x\leqslant ۱$ رسم‌کنیم کـه متناظر است با $\mathrm{k}=۰$. دراین حالت،



شکل ۲۱

---

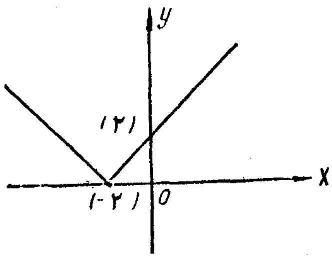
۱. مؤلف، همهٔ تمرین‌هـای این فصل را، به‌طور مستقیم، وبـدون استفاده از مشتق حل کرده است. به‌همین مناسبت، می‌تواند برای دانش‌آموزان ما بسیار آموزنده باشد (م.)

داریم: $y=x^{2}$ (شکل ۲۱).

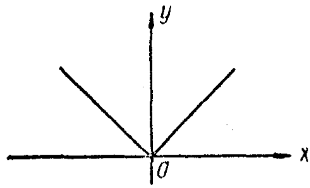
۷۸۶. چون برای $x\geqslant 0$ داریم $|x|=x$ و برای $x\leqslant 0$ داریم: $|x|=-x$،
پس

$$y=\begin{cases} x & (x\geqslant 0) \\ -x & (x\leqslant 0)\end{cases}$$

پس نمودار تابع، از نیمسازهای ربع‌های اول ودوم زاویه‌های مختصات تشکیل شده است (شکل ۲۲).



شکل ۲۳



شکل ۲۲

۷۸۷. داریم:

$$y=\begin{cases} x+۲ & (x\geqslant -۲) \\ -x-۲ & (x\leqslant -۲)\end{cases}$$

نمودار از دونیم‌خطی تشکیل شده است که مبداء مشترك آن‌ها، نقطهٔ $(-۲,\circ)$ است وهر دو در بالای محور طول قرار دارند (شکل ۲۳).

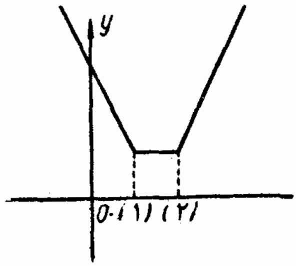
۷۸۸. a) $x\leqslant ۱$. دراین‌حالت داریم: $y=-۲x+۳$. نمودارآن‌نیم‌خطی است به‌مبداء $(۱\ ,\ ۱)$که از نقطهٔ $(۳\ ,\ \circ)$ می‌گذرد.

b) $۱\leqslant x\leqslant ۲$. دراین حالت به‌دست می‌آید: $y=۱$. نمودار پاره‌خطی است موازی محورطول وبین دونقطهٔ $(۱\ ,\ ۱)$ و $(۲\ ,\ ۱)$.

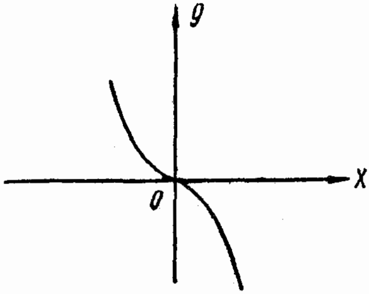
c) $x\geqslant ۲$. به‌دست می‌آید $y=۲x-۳$. نمودارآن، نیم‌خطی‌است به‌مبداء $(۲,۱)$ و درجهت yهای مثبت نمودار تابع درشکل ۲۴ داده شده است.

۷۸۹. داریم:

$$y=-x|x|=\begin{cases} -x^{۲} & (x\geqslant \circ) \\ x^{۲} & (x\leqslant \circ)\end{cases}$$



شکل ۲۴

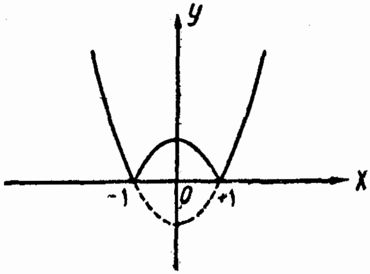


شکل ۲۵

نمودارتابع شامل دونیم سهمی است: سهمی $y=x^2$ باشرط $x\leqslant 0$ وسهمی $y=-x^2$ باشرط $x\geqslant 0$ (شکل ۲۵).

۷۹۰. داریم:

$$y=\begin{cases} x^2-1 & (|x|\geqslant 1)\\ -x^2+1 & (|x|\leqslant 1)\end{cases}$$



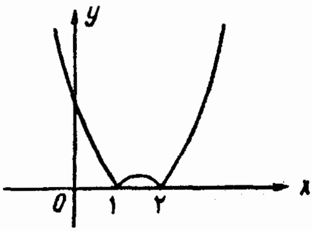
شکل ۲۶

نمودار تابع، درشکل ۲۶ داده شده است.

۷۹۱. نمودار تابع مفروض را می‌توان از روی نمودار تابع

$$y=x^2-3x+2 \qquad (1)$$

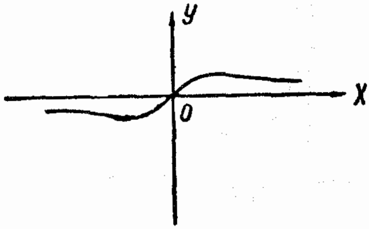
به‌دست آورد، به‌این ترتیب که‌قرینهٔ بخشی ازنمودار تابع (۱) راکه در زیر محور طول قرار دارد ($y<0$)، نسبت به محور طول به‌دست آوردیم (شکل ۲۷).



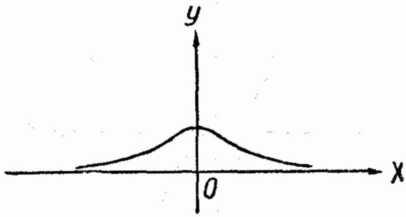
شکل ۲۷

۷۹۲. حوزهٔ تعریف تابع، عبارت است از مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی، یعنی $(-\infty, +\infty)$. منحنی نمودار نسبت به محورعرض متقارن و تمامی آن دربالای محورطول قرار دارد. تابع، به‌ازای $x=0$، به‌حداکثرخود $y=1$ می‌رسد. تابع، برای $x>1$ نزولی است* و اگر $x\to\infty$، داریم $y\to 0$ (شکل ۲۸).

*) تابع $f(x)$ را درفاصله‌ای نزولی (صعودی) گویند. وقتی‌که اولاً دراین فاصله معین باشد (یعنی، این فاصله به‌دامنهٔ تعریف تابع تعلق داشته باشد، ثانیاً برای هردوعدد x_1 و x_2 از این فاصله، به‌شرط $x_1<x_2$ داشته باشیم: $f(x_1)>f(x_2)$ $[f(x_1)>f(x_2)]$.



شکل ۲۹



شکل ۲۸

۷۹۳. تابع برای همهٔ عددهای حقیقی x، معین است. منحنی نمودار تابع، نسبت به مبداء مختصات: متقارن است. چون

$$y=\frac{x}{1+x^{2}}=\frac{x}{1+x^{2}-2x+2x}=\frac{x}{(x-1)^{2}+2x}=\frac{1}{\frac{(x-1)^{2}}{x}+2}$$

بنابراین، به‌ازای $x=1$، به حداکثر مقدار خود، یعنی $y=\frac{1}{2}$ می‌رسد.

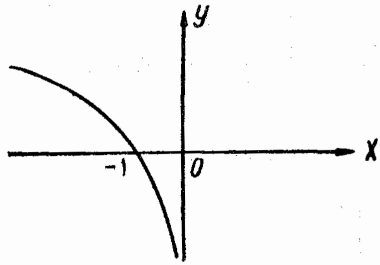
به‌ازای $x=0$ داریم $y=0$. تابع در فاصلهٔ $0<x<1$ صعودی و برای $x>1$ نزولی است. درضمن داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^{2}}}=0$$

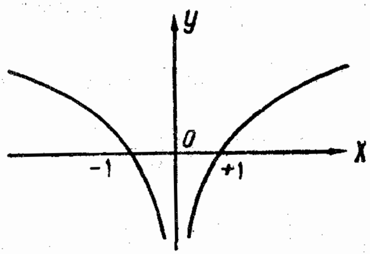
منحنی نمودار تابع درشکل ۲۹ رسم شده است.

۷۹۴. تابع $y=\log_{2}(-x)$، برای $x<0$ معین است. مقدار آن به‌ازای $x=-a$ ($a>0$)، برمقدار تابع $y=\log_{2}x$ به ازای $x=a$ منطبق است. بنابراین، نمودارهای دو تابع $y=\log_{2}(-x)$ و $y=\log_{2}x$، نسبت به‌محور عرض، قرینهٔ یکدیگرند. ولی نمودار تابع $y=\log_{2}x$ برهمه معلوم است؛ بنابراین، نمودار تابع $y=\log_{2}(-x)$ به‌صورتی است که درشکل ۳۰ نشان داده شده است.

۷۹۵. دامنهٔ تعریف تابع، عبارت است ازهمهٔ عددهای حقیقی، به جز صفر. منحنی نمودار، نسبت به‌محور عرض، متقارن است، زیرا $\log_{2}|x|=\log_{2}|-x|$. ولی برای $x>0$ داریم: $y=\log_{2}|x|=\log_{2}x$. بنابراین، نمودار تابع مفروض تشکیل شده است از نمودار تابع $y=\log_{2}x$ وقرینهٔ آن نسبت به‌محور عرض (شکل ۳۱).

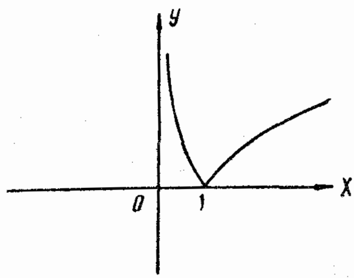


شکل ۳۰

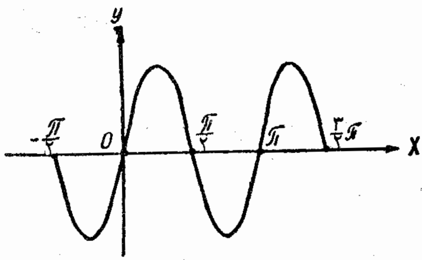


شکل ۳۱

۷۹۶. نمودار این تـابع، درفاصلهٔ $(1, +\infty)$ برنمودار تابع $y=\log_2 x$ منطبق است؛ ولی در فاصلهٔ $(0, 1)$ ، قرینهٔ نمودار تابع $y=\log_2 x$ نسبت بـه محور طول است (شکل ۳۲).



شکل ۳۲

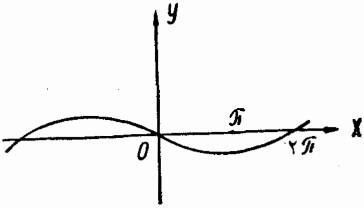


شکل ۳۳

۷۹۷. تابع درفاصلهٔ $(-\infty, +\infty)$ معین است، ولی بـرای رسم نمودار، کافی است فاصلهٔ $[0, \pi]$ را در نظر بگیریم، زیـرا $y=2\sin 2x$ دارای دورهٔ تناوب $\omega=\pi$ است. تابع بهازای $x=\frac{\pi}{4}$ به حداکثر مقدار خود $y=2$ و بـهازای $x=\frac{3\pi}{4}$ به حداقل مقدار خود $y=-2$ می‌رسد. برای $y=0$ بهدست می‌آید: $x_1=0$ ، $x_2=\frac{\pi}{2}$ و $x_3=\pi$.
تابع درفاصلهٔ $0<x<\frac{\pi}{4}$ صعودی، در فاصلهٔ $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$ نـزولـی و در فـاصـلـهٔ $\frac{3\pi}{4}<x<\pi$ دوباره صعودی است (شکل ۳۳).

۷۹۸. تابع دارای دورهٔ تناوب $\omega=4\pi$ است و، بنا بـراین، کافی است آن را در فاصلهٔ $[0, 4\pi]$ رسم کنیم. بررسی کاملاً شبیه آنچه در مسالهٔ ۷۹۷ دیدیم انجام می‌شود.

نمودار تابع، درشکل ۳۴ داده شده است.

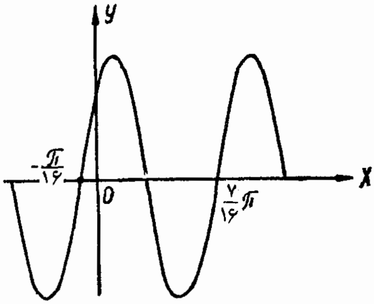


شکل ۳۴

۷۹۹. دورهٔ تناوب تابع، $\omega=\frac{\pi}{2}$ است. تابع مفروض را، می‌توان به‌این صورت نوشت:

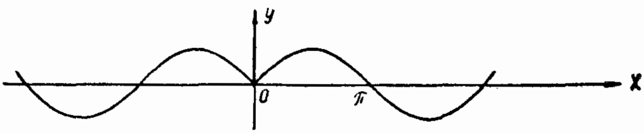
$$y=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+4x\right)$$

بررسی تابع، در فاصلهٔ $\left[-\frac{\pi}{16}, \frac{7\pi}{16}\right]$، شبیه تابع مسالهٔ ۷۹۷ انجام می‌گیرد. نمودار تابع در شکل ۳۵ داده شده است.



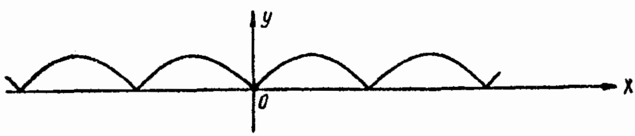
شکل ۳۵

۸۰۰. نمودار تابع، نسبت به محور عرض، متقارن است. نمودار این تابع، برای $x\geqslant 0$، بر نمودار تابع $y=\sin x$ منطبق است (شکل ۳۶).



شکل ۳۶

۸۰۱. برای همهٔ مقدارهایی از x، که به‌ازای آن‌ها داشته باشیم $\sin x\geqslant 0$، نمودار تابع مفروض برنمودار تابع $y=\sin x$ منطبق است. برای همهٔ مقدارهایی از x، که به‌ازای آن‌ها داشته باشیم $\sin x\leqslant 0$، نمودار تابع $y=\sin x$، نسبت به‌محور طول، قرینهٔ یکدیگرند (شکل ۳۷).

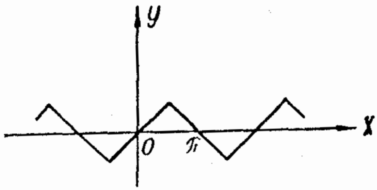


شکل ۳۷

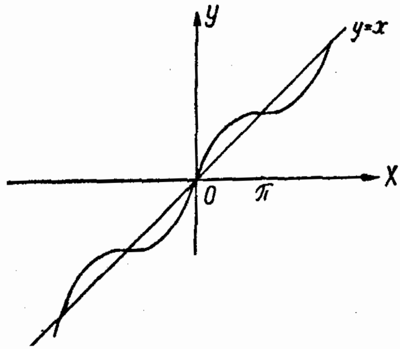
۸۰۲. نمودار، ازراه مجموع عرض‌های نمودارهای دوتابع $y=x$ و $y=\sin x$ (به‌ازای هرمقدار x) به‌دست‌می‌آید. منحنی نمودار، نسبت به‌مبداء مختصات متقارن است، زیرا

$$(-x)+\sin(-x)=-(x+\sin x)$$

نمودار تابع درشکل ۳۸ داده شده است.



شکل ۳۹



شکل ۳۸

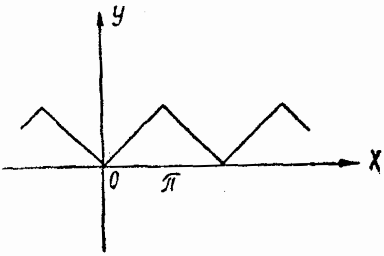
۸۰۳. دامنهٔ تعریف تـابـع عبارت است از $(-\infty\,,+\infty)$. تابع دارای دورهٔ تناوبی برابر ۲π است. بنابراین، کافی است منحنی را تنها درفاصلهٔ $\left[-\frac{\pi}{۲}\,,\,\frac{۳\pi}{۲}\right]$ رسم کنیم. درضمن داریم:

$$-\frac{\pi}{۲}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{۲}\Rightarrow y=arc\sin(\sin x)=x\ ;$$

$$\frac{\pi}{۲}\leqslant x\leqslant\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow y=arc\sin(\sin x)=\pi-x$$

بنابراین، نمودار تـابع، مفروض، درفاصلهٔ $\left[-\frac{\pi}{۲}\,,\,\frac{۳\pi}{۲}\right]$، ازدوپاره‌خط راست‌تشکیل شده است (شکل ۳۹).

۸۰۴. دامنهٔ تعریف تـابـع، عبارت است از همهٔ عـددهای حقیقی. تـابع مفروض، دارای دورهٔ تناوب $\omega=۲\pi$ است، بنابراین، کافی است، نمودار آن را، تنها درفاصلهٔ $[۰\,,\,۲\pi]$ رسم کنیم. در ضمن داریم:



شکل ۴۰

$$۰\leqslant x\leqslant\pi\Rightarrow y=arc\cos(\cos x)=x؛$$

$$\pi\leqslant x\leqslant۲\pi\Rightarrow y=arc\cos(\cos x)=$$

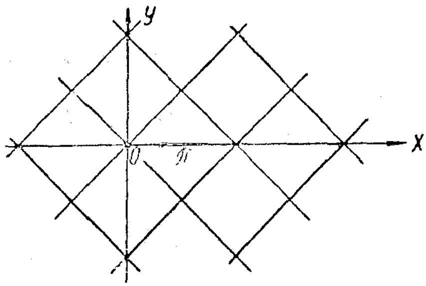
$$=arc\cos[\cos(۲\pi-x)]=۲\pi-x$$

زیرا داریم: $\pi \leqslant x - 2\pi \leqslant 0$. ازاین‌جا معلوم می‌شود که نمودار تابع مفروض، درفاصلهٔ $[0, 2\pi]$، از دوپاره‌خط راست تشکیل شده است (شکل ۴۰).

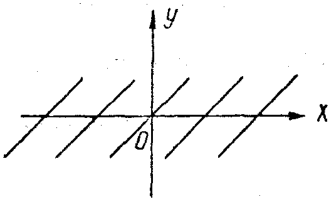
۸۰۵. برابری $y = Arc\cos(\cos x)$ با برابری $\cos y = \cos x$ هم‌ارز است. در این صورت، به‌دست می‌آید:

$$y = 2k\pi \pm x \quad (k \in Z)$$

یعنی $y = Arc\cos(\cos x)$ یك تابع بی‌نهایت ارزشی است. نمودارتابع، شامل دوخانواده از خطهای راست موازی است. خطهای راست یکی ازاین خانواده‌ها با محور طول زاویهٔ ۴۵ درجه وخطهای راست خانوادهٔ دیگر باهمین محورزاویهٔ ۱۳۵ درجه می‌سازند. فاصلهٔ بین هر دوخط راست مجاورازیك خانواده، برابر $\pi\sqrt{2}$ است (شکل ۴۱).



شکل ۴۱



شکل ۴۲

۸۰۶. دامنهٔ تعریف تابع عبارت است ازهمهٔ عددهای حقیقی، به استثنای عددهای به صورت $\frac{2k+1}{2}\pi$ $(k \in Z)$. چون تابع مفروض متناوب و دورهٔ تناوب آن $\omega = \pi$ است، بنابراین کافی است نمودار آن را، تنها در فاصلهٔ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ رسم کنیم، درضمن

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = arc\,tg(x) = x$$

نمودارتابع، دراین فاصله، پاره‌خطی است با دوانتهای به‌مختصات $(-1, -1)$ و $(1, 1)$ (شکل ۴۲).

۸۰۷. دامنهٔ تعریف تابع، عبارت است ازمجموعهٔ همهٔ مقدارهای حقیقی x. تابع را مورد بررسی قرارمی‌دهیم. فرض کنید: $k \leqslant x < k+1$ (k را عددی درست گرفته‌ایم). به ازای $x = k$ داریم: $y = k$. اکنون فرض می‌کنیم $x = k + \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$. به‌دست

می آید:

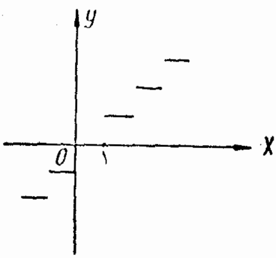
$$y=\frac{۲(k+\alpha)-۱}{۲}-\frac{۱}{\pi}arc\ tg\left[tg\frac{۲(k+\alpha)-۱}{۲}\pi\right]=k+\frac{۲\alpha-۱}{۲}-$$

$$-\frac{۱}{\pi}arc\ tg\left(tg\frac{۲\alpha-۱}{۲}\pi\right)=k+\frac{۲\alpha-۱}{۲}-\frac{۱}{\pi}\cdot\ \frac{۲\alpha-۱}{۲}\pi=$$

$$=k+\frac{۲\alpha-۱}{۲}-\frac{۲\alpha-۱}{۲}=k$$

زیرا داریم: $-\frac{\pi}{۲}<\frac{۲\alpha-۱}{۲}\pi<\frac{\pi}{۲}$ وبنا براین

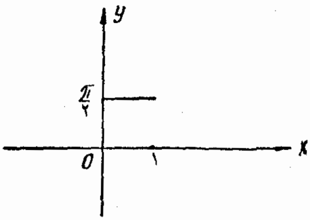
$$arc\ tg\left(tg\frac{۲\alpha-۱}{۲}\pi\right)=\frac{۲\alpha-۱}{۲}\pi$$



شکل ۴۳

به این ترتیب، بهازای $k\leqslant x<k+۱$ داریم: $y=k$. روشن است که، به ازای $k+۱\leqslant x<k+۲$ خواهیم داشت $y=k+۱$. به این ترتیب، نمودار تابع مفروض، درفاصلهٔ $[k\ ،\ k+۱)$، پاره خط راستی است موازی محورطول به طول k و به فاصلهٔ k ازمحور طول (شکل ۴۳).

۸۰۸. دامنهٔ تعریف تابع، ازدستگاه دونامعادلهٔ $۱-x\geqslant ۰$ و $x\geqslant ۰$ به‌دست می‌آید، یعنی $۰\leqslant x\leqslant ۱$. بنا براین، نمودار تابع مفروض‌را، باید تنها درفاصلهٔ $[۰\ ,\ ۱]$ رسم کرد. عبارت مفروض را تبدیل می‌کنیم. از دو طرف برابری مفروض، سینوس می‌گیریم. به دست می‌آید.



شکل ۴۴

$$\sin y=\sin(arc\ \sin\sqrt{۱-x}+arc\ \sin\sqrt{x})=$$

$$=\sin(arc\ \sin\sqrt{۱-x})\cdot\ \cos(arc\ \sin\sqrt{x})+$$

$$+\cos(arc\ \sin\sqrt{۱-x})\cdot\ \sin(arc\ \sin\sqrt{x})=$$

$$=\sqrt{۱-x}\cdot\sqrt{۱-x}+\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=$$

$$=۱-x+x=۱$$

ولی چون $\sqrt{x}\geqslant ۰$ و $\sqrt{۱-x}\geqslant ۰$، پس

$$۰ \leqslant arc\,\sin\sqrt{۱-x} \leqslant \frac{\pi}{۲} \quad و \quad ۰ \leqslant arc\,\sin\sqrt{x} \leqslant \frac{\pi}{۲}$$

و درنتیجه: $۰ \leqslant y \leqslant \pi$. به این ترتیب، از برابری $\sin y = ۱$ نتیجه می‌شود $y = \frac{\pi}{۲}$.

همین نتیجه را، براساس مسالهٔ ۵۶۰ هم می‌توان به دست آورد. به هرترتیب، نمودارتابع مفروض عبارت است از پاره خط راستی محدود به دونقطهٔ $\left(\frac{\pi}{۲}, ۰\right)$ و $\left(\frac{\pi}{۲}, ۱\right)$ (شکل ۴۴).

۸۰۹. همهٔ عددهای حقیقی، به‌استثنای صفر، دامنهٔ تعریف تابع را تشکیل می‌دهند. با استفاده از رابطه‌های مساله‌های ۵۶۸، ۵۳۹ و ۵۶۹، عبارت واقع درسمت راست برابری را تبدیل می‌کنیم. اگر $x > ۰$، آن‌گاه

$$y = arc\,tg x - arc\,cotg\frac{۱}{x} = \frac{\pi}{۲} - arc\,tg\frac{۱}{x} - arc\,cotg\frac{۱}{x} =$$

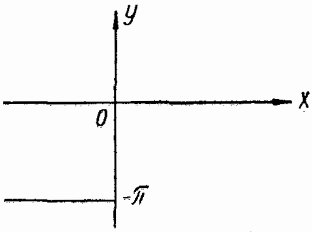
$$= \frac{\pi}{۲} - \left(arc\,tg\frac{۱}{x} + arc\,cotg\,\frac{۱}{x}\right) = \frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۲} = ۰$$

اگر $x < ۰$، آن‌گاه

$$y = arc\,tg x - arc\,cotg\frac{۱}{x} = -\frac{\pi}{۲} - arc\,tg\frac{۱}{x} - arc\,cotg\frac{۲}{x} = -\frac{\pi}{x} -$$

$$-\left(arc\,tg\frac{۱}{x} + arc\,cotg\frac{۱}{x}\right) = -\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۲} = -\pi$$

به این ترتیب، نمودار تابع مفروض، برابر $x < ۰$، نیم خط راستی موازی محور طول و به فاصلهٔ $-\pi$ از آن است (شکل ۴۵).



شکل ۴۵

۸۱۰. همهٔ عددهای حقیقی، به جز ۱ −، دامنهٔ تعریف تابع را تشکیل می‌دهند. برابری مفروض را تبدیل می‌کنیم. ازدوطرف برابری تانژانت می‌گیریم، به دست می‌آید:

$$tg\,y = tg\left(arc\,tg x + arc\,tg\frac{۱-x}{۱+x}\right) =$$

$$=\frac{tg(arc\,tg x)+tg\left(arc\,tg\frac{1-x}{1+x}\right)}{1-tg(arc\,tg x)\cdot tg\left(arc\,tg\frac{1-x}{1+x}\right)}=\frac{x+\frac{1-x}{1+x}}{1-x\cdot\frac{1-x}{1+x}}=1$$

بنابراین: $y=k\pi+\frac{\pi}{4}$. درضمن چون

$$-\frac{\pi}{2}<arc\,tg x<\frac{\pi}{2} \text{ و } -\frac{\pi}{2}<arc\,tg\frac{1-x}{1+x}<\frac{\pi}{2}$$

پس
$$-\pi<arc\,tg x+arc\,tg\frac{1-x}{1+x}<\pi$$

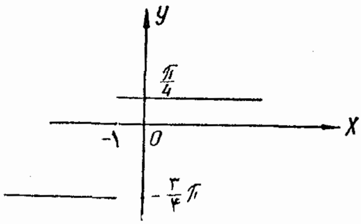
و k تنها می‌تواند برابر ۰ یا ۱ — شود. به‌این ترتیب:

$$y=\frac{\pi}{4} \text{ یا } y=-\frac{3\pi}{4}$$

اگر $1+x<0$، آن وقت $-\frac{\pi}{2}<arc\,tg x<0$، $-\frac{\pi}{2}<arc\,tg\frac{1-x}{1+x}<0$ و $-\pi<y<0$. روشن است که، دراین‌حالت، $y=-\frac{3\pi}{4}$. اگر $1+x>0$، آن وقت $arc\,tg x$ و $arc\,tg\frac{1-x}{1+x}$، برای $0<x<1$، مثبت و بنابراین، مجموع آن‌ها، عددی مثبت است؛ و برای $-1<x<0$ یا $1<x<+\infty$، علامت‌های مختلف دارند و، بنابراین، مجموع آن‌ها بین $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ قرارمی‌گیرد. از این‌جا نتیجه می‌شود که، برای $x>-1$ داریم: $y=\frac{\pi}{4}$ و برای $x<-1$: $y=-\frac{3\pi}{4}$. نمودار تابع، شامل دونیم‌خط موازی محور طول است: یکی ازنقطهٔ $\left(-1, \frac{\pi}{4}\right)$ آغازمی‌شود ودرجهت مثبت‌محور طول ادامه پیدا می‌کند، و دیگری ازنقطهٔ $\left(-1, -\frac{3\pi}{4}\right)$ آغازمی‌شود و درجهت منفی محور طول جلو می‌رود. خود نقطه‌های $\left(-1, \frac{\pi}{4}\right)$ و $\left(-1, -\frac{3\pi}{4}\right)$، جزو نمودار تابع نیستند (شکل ۴۶).

۸۱۱. دامنهٔ تعریف، عبارت است ازهمهٔ مقدارهـای حقیقی x، زیرا به ازای همهٔ مقدارهای x داریم: $\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| \leqslant 1$. نمودار تابع، نسبت بـه محورعرض، متـقارن است. بنا براین کافی است تنها $x \geqslant 0$ را در نظر بگیریم. از برابری مفروض، به‌دست می آید:

$$\cos y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

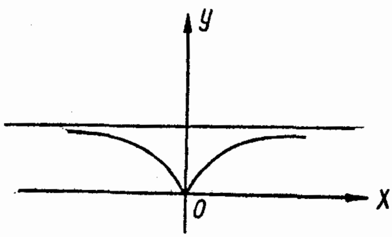


شکل ۴۶

این رابطه، بیان کسینوس یـك زاویـه را برحسب تانـژانت نصف آن زاویه بـه خاطر می آورد. طبعاً به سراغ $tg\frac{y}{2}$ می‌رویم، به دست می آید:

$$tg\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos y}{1+\cos y}} = \sqrt{x^2} = x$$

ازاین جهت، جلو رادیکال را با علامت مثبت انتخاب کرده‌ایم که داریم: $0 \leqslant y < \pi$ و در نتیجه $0 \leqslant \frac{y}{2} < \frac{\pi}{2}$ که از آن جا نتیجه می‌شود: $tg\frac{y}{2} \geqslant 0$. از برابری $tg\frac{y}{2} = x$ حاصل می‌شود: $y = 2\,arctgx$. نمودارتـابـع را بـرای $x \geqslant 0$، می‌تـوان از روی نمودار $y = arc\,tgx$ و بـا دو برابر کردن عرض‌های آن بـه دست آورد (شکل ۴۷).



شکل ۴۷

۸۱۲. تابع، در فاصلهٔ $-1 \leqslant x \leqslant 1$ معین است. فرض می کنیم:

$$arc\cos(2x^2-1) = z \Rightarrow \cos z = 2x^2-1$$
$$(0 \leqslant z \leqslant \pi)$$

رابطهٔ $\cos z = 2x^2-1$، رابطهٔ کسینوس یك زاویه برحسب کسینوس نصف آن‌زاویه را به یاد می‌آورد. بنا براین، طبیعی است که $\cos\frac{z}{2}$ را محاسبه کنیم. به دست می آید:

$$\cos\frac{z}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos z}{2}} = \sqrt{x^2} = |x|$$

بنا براین

$$z = \begin{cases} 2\,arc\cos x \ (x \geqslant 0) \\ 2\,ar\cos(-x)\ (x \leqslant 0) \end{cases}$$

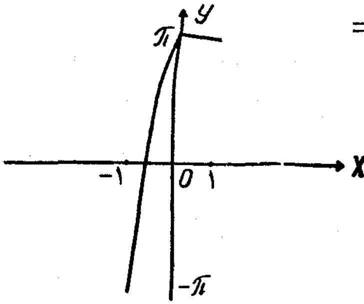
درنتیجه، برای $\circ \leqslant x$ داریم:

$$y = ۲arc\cos x + ۲arc\sin x = \pi$$

و برای $x \leqslant \circ$

$$y = ۲arc\cos(-x) + ۲arc\sin x = ۲\left[\frac{\pi}{۲} - arc\sin(-x)\right] + ۲arc\sin x =$$

$$= \pi + ۴arc\sin x$$



شکل ۴۸

نمودارتابع، برای $\circ \leqslant x$، با توجه به شرط $x \leqslant ۱$، پاره خطی است موازی محور طول با مختصات دو انتهای آن: $(\circ, \pi)$و$(۱, \pi)$؛ و برای $-۱ \leqslant x \leqslant \circ$، از نمودار $y = arcsin x$، با چهار برابر کردن عرض‌های آن و ، سپس ، افزودن π به آن به‌دست می‌آید (شکل ۴۸).

۸۱۳. اگر برای همهٔ مقدارهای x، از دامنهٔ تعریف تابع، داشته باشیم $f(x) \geqslant \circ$، آن‌وقت، نمودارتابع $y = |f(x)|$، همان نمودار تابع $y = f(x)$ است. ولی اگر $f(x)$، درفاصله‌ای از دامنهٔ تعریف، منفی باشد، نمودار $y = |f(x)|$ دراین‌فاصله، قرینهٔ نمودار $y = f(x)$ نسبت به‌محورطول ودربقیهٔ فاصله‌ها، منطبق برنمودار $y = f(x)$ خواهدبود(مثلاً، مساله‌های ۷۸۶، ۷۸۷، ۷۹۰، ۷۹۱، ۷۹۶ و ۸۰۱ را ببینید).

۸۱۴. نمودارتابع $y = f(|x|)$ نسبت بـه محورعرض متقارن است، درضمن، به‌ازای $x > \circ$، ایـن نـمودار، بـرنمودارتابع $y = f(x)$ منطبق است درحالتـی‌که تابع $y = f(x)$، تنها بـرای $x < \circ$ معین است (مثلاً $f(x) = \sqrt{-x}$)، عبـارت $f(|x|)$ بی‌معنی می‌شود.

۸۱۵. معادلهٔ $xy = \circ$ هم‌ارزبا دومعادلهٔ $x = \circ$ و $y = \circ$ است. بنابـراین، معادلهٔ $xy = \circ$، درصفحهٔ، متناظراست با همهٔ نقطه‌های واقع برمحورهای مختصات.

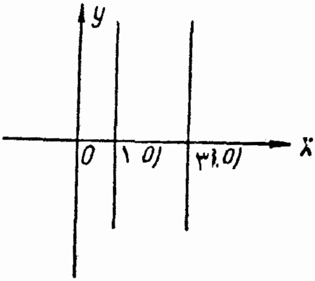
۸۱۶. اگر $x \geqslant ۲$:

$$|x - ۲| = x - ۲ = ۱ \Rightarrow x = ۳$$

اگر $x < ۲$:

$$|x - ۲| = ۲ - x = ۱ \Rightarrow x = ۱$$

بنابراین، معادلهٔ $|x-۲|=۱$ ، در صفحهٔ محورهای مختصات، متناظر است با همهٔ نقطه‌های واقع برخطهای راست $x=۳$ و $x=۱$ (شکل ۴۹).



شکل ۴۹

۸۱۷. معادلهٔ $x^{۲}=y^{۲}$، بـه دومعادلـهٔ مستقل $y=x$ و $y=-x$ تجزیه می‌شود. بنابراین،معادلهٔ $x^{۲}=y^{۲}$، درصفحـه، متناظراست بـا همهٔ نقطه‌های واقع برنیمسازهای‌چهار زاویهٔ‌مختصات (شکل ۵۰).

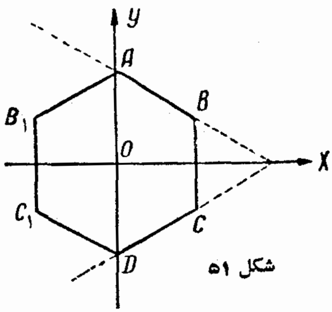
۸۱۸. a) اگر $x\geqslant ۰$ و $۲y-۱\geqslant ۰$، آن‌وقت

$$|۲y-۱|=۲y-۱\ ,\ |۲y+۱|=۲y+۱$$

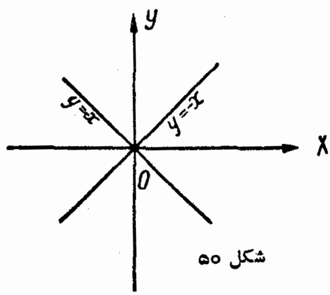
ومعادله به این صورت درمی‌آید:

$$۲y-۱+۲y+۱+\frac{۴}{\sqrt{۳}}x=۴\Rightarrow y=-\frac{۱}{\sqrt{۳}}x+۱$$

این معادله متناظراست با خط راستی‌که از نقطه $(۰\ ,۱)$ می‌گذرد و با محورطول زاویه‌ای برابر ۱۵۰ درجه می‌سازد (شکل ۵۱). ولی از آن جا که $x\geqslant ۰$ و $y\geqslant\frac{۱}{۲}$، بنابراین باید



شکل ۵۱



شکل ۵۰

پاره‌خطـی سروکارداریم کـه مختصات ابتدای و انتـهای آن $A(۰\ ,۱)$ و $B\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\ ,\ \frac{۱}{۲}\right)$ است.

b) $x\geqslant ۰$ و $۲y+۱\leqslant ۰$. دراین حالت داریم:

$$|۲y-۱|=۱-۲y \text{ و } |۲y+۱|=-۱-۲y$$

ومعادله به این صورت درمی‌آید:

$$۱-۲y-۱-۲y+\frac{۴}{\sqrt{۳}}x=۴\Rightarrow y=x\frac{x}{\sqrt{۳}}-۱$$

و این، معادلهٔ خط راستی است که از نقطهٔ $D\ (0\ ,\ -1)$ می‌گذرد و با محورطول زاویه‌ای برابر ۳۰ درجه می‌سازد. ولی با توجه به شرط‌های $x\geqslant 0$ و $y\leqslant -\frac{1}{2}$، پاره خطی محدود به دو نقطهٔ $D\ (0\ ,\ -1)$ و $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ -\frac{1}{2}\right)$ به دست می‌آید.

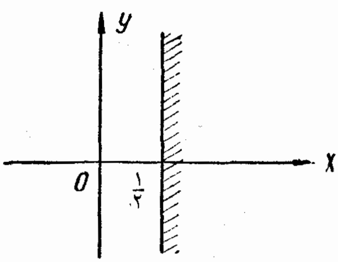
c) $x\geqslant 0$، $2y-1\leqslant 0$ و $2y+1\geqslant 0$. دراین حالت، به این معادله می‌رسیم:

$$1-2y+2y+1+\frac{4}{\sqrt{3}}x+4=0\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

که با توجه به شرط $-\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$، پاره خطی موازی محور عرض و محدود به دو نقطهٔ $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\frac{1}{2}\right)$ و $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ -\frac{1}{2}\right)$ به‌دست می‌آید.

به‌این ترتیب، به‌ازای $x\geqslant 0$، نقطه‌هایی از صفحهٔ محورهای مختصات که مختصات آن‌ها درمعادلهٔ مفروض‌صدق می کنند، متناظرند با نقطه‌های واقع برخط شکستهٔ $ABCD$. از آن‌جاکه باتبدیل x به $-x$، تغییری درمعادله پدیدنمی‌آید، بنابراین به‌ازای $x\leqslant 0$، قرینهٔ همین خط شکسته نسبت به‌محورعرض‌به دست می‌آید. نمودار کلی، عبارت است ازمحیط شش‌ضلعی منتظم $ABCDC_1B_1$ (شکل ۵۱).

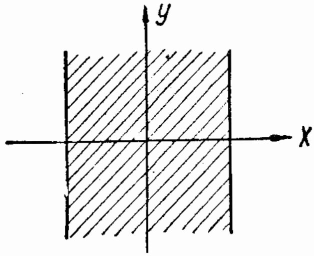
۸۱۹. چون معادلهٔ $x=\frac{1}{2}$ متناظراست با خط راستی موازی محورعرض، که از نقطه $\left(\frac{1}{2}\ ,\ 0\right)$ می‌گذرد، بنابراین نقطه‌هایی که مختصات آن‌ها در نامعادلهٔ $x>\frac{1}{2}$ صدق می‌کنند، متناظرند با نقطه‌های واقع بر نیم صفحهٔ سمت راست این خط، به استثنای نقطه‌های واقع برخود آن (شکل ۵۳).


شکل ۵۲

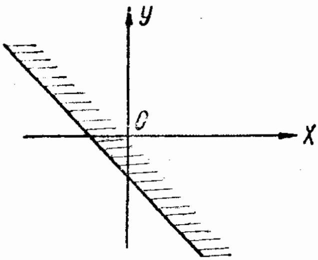
۸۲۰. چون رابطهٔ $-3<x<3$ برقرار است، بنابراین، نقطه‌هایی‌که مختصات آن‌ها دراین رابطه صدق می‌کنند، عبارتند از نقطه‌های واقع بر نواری که بین خط‌های راست $x=3$ و $x=-3$ قرار دارد، به استثنای نقطه‌های واقع برخود این خط‌های راست (شکل ۵۳).

۸۲۱. نقطه‌های واقع برنیم صفحهٔ بالای‌خط راست $x+y+1=0$ (شکل ۵۴).

۸۲۲. بالای خط راست $y-x-3=0$ و، درعین حال، زیرخط راست



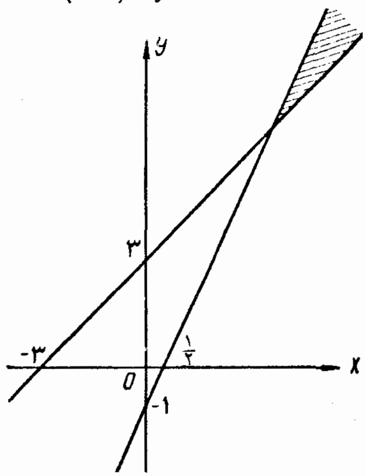
شکل ۵۳



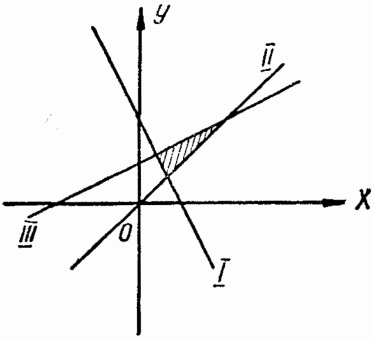
شکل ۵۴

$y-2x+1=0$ (شکل ۵۵).

۸۲۳. بالای خط‌های راست $(I)\ 2x+y-2=0$ و $(II)\ x-y=0$ و زیرخط راست $(III)\ 2y-x-2=0$، به طور هم زمان (شکل ۵۶).



شکل ۵۵

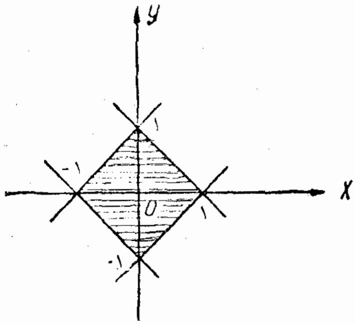


شکل ۵۶

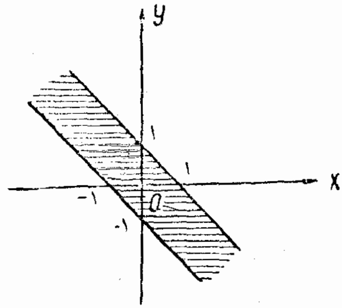
۸۲۴. نامعادلهٔ مفروض، با نامعادله‌های $-1\leqslant x+y\leqslant 1$ هم‌ارز است (مسالهٔ ۶۶۰ را ببینید). بنابراین، نقطه‌های مطلوب بر نواری قرار دارند که بین دو خط راست $x+y-1=0$ و $x+y+1=0$ و بر خود این دو خط راست واقع شده‌اند (شکل ۵۷).

۸۲۵. اگر $x\geqslant 0$ و $y\geqslant 0$، داریم: $0\leqslant x+y\leqslant 2$. در این حالت، نقطه‌ها بر مثلث قائم‌الزاویه‌ای قرار دارند که خط راست $x+y=1$، از ربع اول جدا می‌کند و همچنین روی محیط این مثلث (شکل ۵۸). درحالت‌های $x\leqslant 0$ و $y\leqslant 0$، $x\geqslant 0$ و $y\leqslant 0$، $x\leqslant 0$ و $y\geqslant 0$، به ترتیب، به دست می‌آید:

$$-1\leqslant x+y\leqslant 0\ ,\ 0\leqslant x-y\leqslant 1\ ,\ -1\leqslant x-y\leqslant 0$$



شکل ۵۸



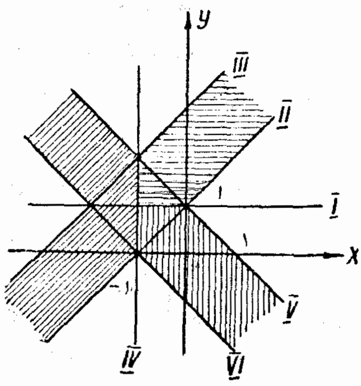
شکل ۵۷

و روشن است که نقطه‌های متناظر با هرچهارحالت، در داخل و روی محیط مربعی قرار گرفته‌اند که به‌وسیلهٔ خط‌های راست $x+y=۱$، $x-y=-۱$ و $x-y=۱$ تشکیل می‌شود.

۸۲۶. نامعادله را می‌توان این طور نوشت (مسالهٔ ۶۶۰ را ببینید):

$$-۱<|x+۱|-|y-۱|<۱$$

a) $x+۱\geqslant ۰$ و $y-۱\geqslant ۰$. دراین‌حالت داریم: $-۱<x-y+۲<۱$. در نتیجه، نقطه‌های واقع در بالای خط راست $y=۱$ (I)، بالای خط راست $x-y+۱=۰$ (II)، زیر خط راست $x-y+۳=۰$ (III) وطرف راست خط $x=-۱$ (IV)، به دست می‌آیند. روی شکل ۵۹، این بخش را با هاشور افقی مشخص کرده‌ایم.



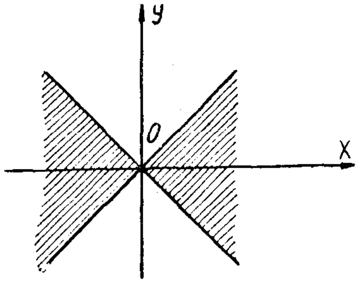
شکل ۵۹

b) $x+۱\geqslant ۰$ و $y-۱\leqslant ۰$، بنابراین $-۱<x+y<۱$. از آن جا، نقطه‌های زیرخط راست $y=۱$ (I)، زیرخط‌راست $x+y-۱=۰$ (V)، بالای خط راست $x+y+۱=۰$ (VI) و طرف راست خط $x=-۱$ (IV) به‌دست می‌آیند. روی شکل ۵۹، این بخش را با هاشورعمودی مشخص کرده‌ایم.

c) حالت $x+۱\leqslant ۰$ و $y-۱\geqslant ۰$ منجربه‌نابرابری $-۱<x+y<۱$ وحالت $x+۱\leqslant ۰$ و $y-۱\leqslant ۰$، منجربه نابرابری $-۱<x-y+۲<۱$ می‌شود. روشن است، نقطه‌های متناظراین دوحالت، عبارتند ازقرینهٔ نقطه‌های با هاشور افقی وقائم، نسبت به خط راست $x=-۱$ (هاشورمایل).

۸۲۷. نابرابری‌مفروض، هم‌ارزاست با نابرابری $|x|<|y|$ که منجربه نابرابری-

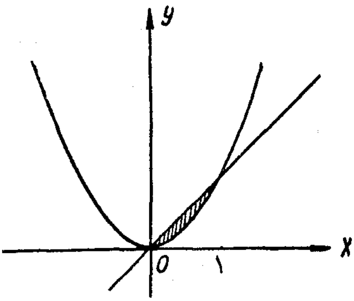
های $-|x|<y<|x|$ می‌شود. اگر $x>0$، آن‌وقت $-x<y<x$ و نقطه‌های مطلوب، زیر خط راست $y=x$ و بالای خط راست $y=-x$ قرار دارند. اگر $x<0$، آن وقت $x<y<-x$ و نقطه‌های مطلوب، زیر خط راست $y=-x$ و بالای خط راست $y=x$ قرار دارند. بنابراین، نقطه‌هایی که مختصات آن‌ها، در نابرابری مفروض صدق کنند، بین زاویه‌های سمت راست و سمت چپی قرار دارند که دو خط راست $y=x$ و $y=-x$ با هم می‌سازند (شکل ۶۰).



شکل ۶۰

۸۲۸. در قطعه‌ای که خط راست $y=x$ از سهمی $y=x^2$ جدا می‌کند (شکل ۶۱).

۸۲۹ تا ۸۳۴. راهنمائی. ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $f(x)=0$ را می‌توان به عنوان طول نقطه‌های برخورد نمودار تابع $y=f(x)$ با محور طول، از نظر هندسی، تعبیر کرد. بنابراین، تعداد این نقطه‌ها، برابر است با تعداد ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $f(x)=0$. ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $f_1(x)=f_2(x)$ را می‌توان به عنوان طول نقطه‌های برخورد نمودارهای دو تابع $y=f_1(x)$ و $y=f_2(x)$ تعبیر کرد. بنابراین، تعداد نقطه‌های برخورد، معرف تعداد ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $f_1(x)=f_2(x)$ است.

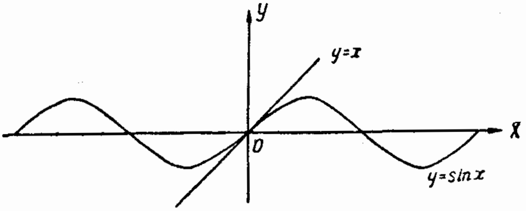


شکل ۶۱

به‌این ترتیب، با رسم نمودار تابع $y=f(x)$ و با توجه به مقیاسی که برای رسم این نمودار در نظر گرفته‌ایم، می‌توان ریشه‌های تقریبی معادلهٔ $f(x)=0$ را به دست آورد. به‌همین ترتیب، مقدارهای تقریبی ریشه‌های معادلهٔ $f_1(x)=f_2(x)$ هم قابل محاسبه است. این روش را، حل نموداری معادله گویند. درجهٔ دقت حل نموداری معادله، بستگی به مقیاسی دارد که برای رسم نمودار درنظر گرفته‌ایم. هرچه نمودار را در نزدیکی نقطه‌های برخورد آن با محور طول، با مقیاس بزرگتری رسم کنیم، دقت ریشه‌های تقریبی معادله، بیشتر خواهد شد.

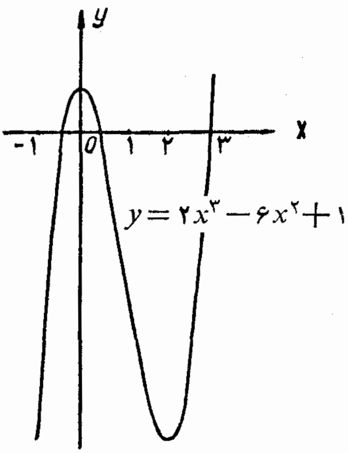
۸۲۹. نمودارهای دو تابع $y=\sin x$ و $y=x$ را رسم می‌کنیم. این دو نمودار، تنها یک نقطهٔ برخورد دارند (شکل ۶۲). بنابراین، معادلهٔ مفروض تنها یک ریشه دارد: $x=0$.

۸۳۰. نمودارهای دو تابع $y=2^x$ و $y=x+2$ را رسم می‌کنیم. در شکل دیده

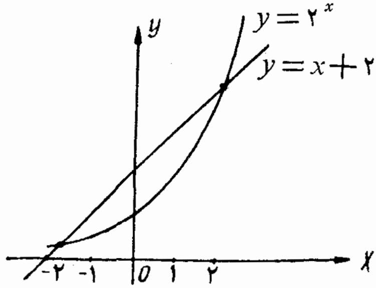


شکل ۶۲

می‌شود که نمودارها در دونقطه یکدیگر را قطع می‌کنند. بنا بر این، معادلهٔ مفروض، دوریشه دارد، که یکی از آن‌ها $x=۲$ است. ریشهٔ دوم، همان طــور که روی شکل دیده می‌شود، درفاصلهٔ $(-۲\,,\,-۱)$ واقع است. این نتیجه را بـا محاسبه هم می‌توان تحقیق کرد. در واقع، اگردر $f(x)=۲^x-x-۲$، ابتدا $x=-۲$ وسپس $x=-۱$ قرار دهیم، به‌دست می‌آید: $f(-۲)>۰$ و $f(-۱)<۰$. بنا بر این، $f(x)$ درفاصلهٔ $(-۲\,,\,-۱)$، درجایی، برابر صفر می‌شود.



شکل ۶۴



شکل ۶۳

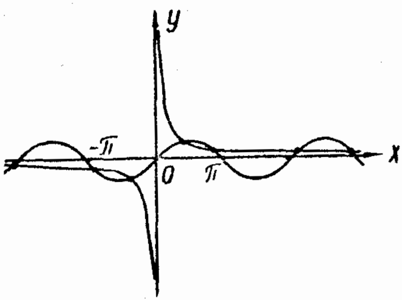
۸۳۱. نمودار تابع $y=۲x^۳-۶x^۲+۱$ را رسم می‌کنیم. روی شکل ۶۴ دیــده می‌شود که، این نمودار، درسه نقطه با محورطول برخورد دارد. بنا بر این، معادلهٔ مفروض، دارای سه ریشهٔ حقیقی است. ازشکل پیداست کــه ایــن‌سه ریشه، به ترتیب، درفاصله‌های $(-۱\,,۰)$، $(۰\,,\,۱)$ و $(۲\,,۳)$ واقع‌اند، که با محاسبه هم قابل تحقیق است (حل مسالهٔ ۸۳۰ را ببینید).

۸۳۲. نمودارهای دوتابع $y=tgx$ و $y=x$ را رسم می‌کنیم. به دلیل فرد بودن این دوتابع، هر ریشهٔ مثبت معادله، متناظر است با ریشهٔ دیگری ازمعادله که قرینهٔ ریشهٔ اول

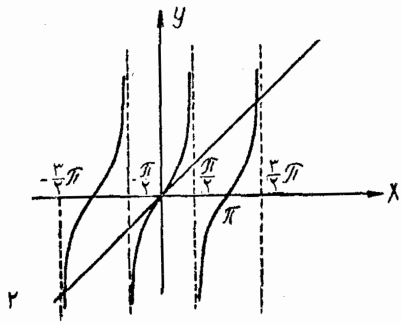
است. بنابراین،کافی است، درجست وجوی ریشه‌های غیرمنفی باشیم. روی شکل ۶۵ دیده می‌شود که معادله دارای ریشهٔ $x=0$ است. علاوه بر آن، ریشه‌های مثبتی دارد که در این فاصله‌ها قرار گرفته‌اند:

$$\left(\pi , \frac{3\pi}{2}\right) , \left(2\pi , \frac{5\pi}{2}\right) ,\dots, \left(k\pi , \frac{2k+1}{2}\pi\right),\dots$$

با بزرگ شدن k، مقدار ریشه به‌مقدار $\frac{2k+1}{2}\pi$ نزدیک می‌شود. بـه‌این ترتیب، معادلهٔ مفروض، دارای ریشهٔ $x=0$ و مجموعه‌ای نامتناهی از ریشه‌های مثبت ومنفی است.

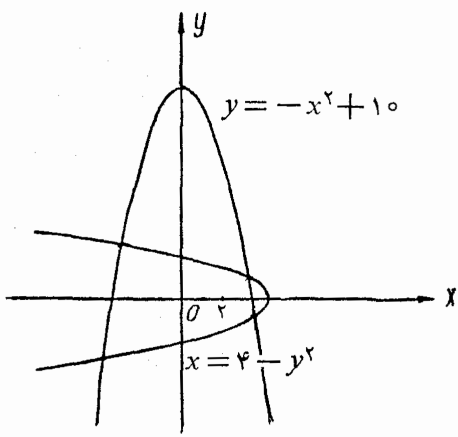


شکل ۶۶



شکل ۶۵

۸۳۳. نمودارهـای دوتـابع $y=\sin x$ و $y=\frac{1}{x}$ را رسم مـی‌کنیم. روی شکل



شکل ۶۷

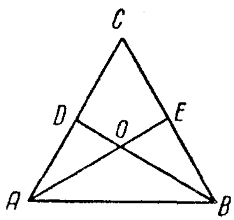
۶۶ دیده می‌شود که معادله، دارای مجموعه‌ای نامتناهی ریشه است (هم مثبت وهم منفی). نخستین ریشهٔ مثبت، درفاصلهٔ $\left(\circ, \frac{\pi}{۲}\right)$ وریشه‌های مثبت بعدی، نزدیك به‌مقدارهای π، ۲π، ۳π،... هستند. باتوجه به‌فرد بودن تابع‌های $y=sinx$ و $y=\frac{1}{x}$، در برابر هرریشهٔ مثبت، یك ریشهٔ منفی وجود داردکه قرینهٔ آن است.

۸۳۴. نمودارهـای دوسهمی $y=-x^۲+۱۰$ و $x=۴-y^۲$ را رسم می‌کنیم (شکل ۶۷) وطول و عرض نقطه‌های برخورد آن‌ها را اندازه می‌گیریم. به‌دست می‌آید:

$$x_۱=۳\ ,\ y_۱=۱\ ;\ x_۲\approx ۳/۳\ ,\ y_۲\approx -\circ/۷\ ;\ x_۳\approx -۳/۶\ ,$$
$$y_۳\approx -۲/۹\ ;\ x_۴\approx -۲/۸\ ,\ y_۴\approx ۲/۶$$

XIII. مساله‌هایی از هندسهٔ مسطحه

۸۳۵. می‌دانیم درمثلث ABC: $AE\perp CB$، $BD\perp AC$ و $BD=AE$؛ باید ثابت کنیم: $AC=CB$ (شکل ۶۸). دومثلث قائم‌الزاویهٔ ABD و ABE برابرند، زیرا در وتر مشترك‌اند و، بنابـر فرض ضلع‌های AE و BD بـا هم برابرند. بنابـرایـن، دوزاویـهٔ DAB و EBA و، درنتیجه، ضلع‌های روبه‌رو بـه‌آن‌هـا، با هم برابر می‌شوند، یعنی $AC=CB$ بـه‌ایـن تـرتیـب، مثلث ABC، متساوی‌الساقین است.

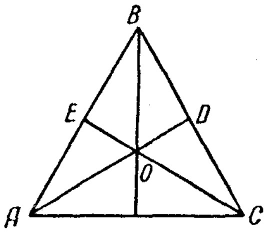


شکل ۶۸

۸۳۶. می‌دانیم درمثلث ABC: $AD=DC$، $BE=EC$ و $AE=BD$؛ باید ثابت کنیم: $AC=BC$ (شکل ۶۸). نقطهٔ بـرخورد میانه‌ها، نقطهٔ ثلث آن‌هـاست، یعنی $AO=\frac{۲}{۳}AE$ و $BO=\frac{۲}{۳}BD$. پس $AO=BO$ و مثلث AOB متساوی‌الساقیـن است. از آن‌جا دوزاویهٔ DBA و EAB باهم برابر و، بنابراین، دومثلث DBA و EAB باهم برابر می‌شوند (در دوضلع و زاویهٔ بین‌آن‌هـا). در این صورت $AD=BE$. ولی AD نصف AC و BE نصف BC است، درنتیجه $AC=BC$.

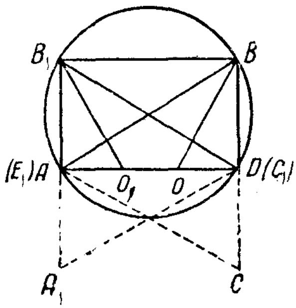
۸۳۷. دواثبات ازاین قضیه می‌آوریم.

اثبات ۱. فرض کنید، درمثلث ABC، دونیمسازداخلی AD و CE برابرباشند. باید



شکل ۶۹

ثـابـت کنیم، مثلث ABC متسـاوی الساقیـن است (شکل ۶۹). O را نقطهٔ برخورد نیمسازها می‌گیریم و نیمساز سوم BO را رسم می‌کنیم. نمونـهٔ دومی از همین مثلث انتخاب می‌کنیم و نقطه‌های متناظر آن را بـاهمین حرف‌هـا، منتهی همراه بـا اندیس ۱، می‌نامیم. مثلث ABC را بـرمثلث $A_1B_1C_1$ طوری قرار می‌دهیم که راس C_1 برنقطهٔ D، نیمساز C_1E_1 بر DA وراس‌های B و B_1 دریك طرف خط‌راست مشترك این نیمسازها قرار گیرند (شکل ۷۰). با توجه بـه برابری دو زاویهٔ B و B_1 نتیجه می‌گیریم که $ADBB_1$ یك چهارضلعی‌محاطی است، یعنی از چهار راس آن می‌تـوان یـك دایـره عبور داد. ثـابت می‌کنیم ، AD بـا BB_1 موازی است.



شکل ۷۰

درهر مثلث، هر زاویهٔ خارجی، برابر است با مجموع دو زاویهٔ غیرمجاور خود، یعنی

$$\widehat{BOD}=\widehat{BAD}+\widehat{OBA}$$

ولی $\widehat{BAD}=\widehat{BB_1D}$ (دوزاویهٔ محاطی روبه‌رو به یك کمان) و $\widehat{OBA}=\widehat{O_1B_1D}$ (نصف دوزاویهٔ برابر B و B_1). بنابراین، به‌دست می‌آید: $\widehat{BOD}=\widehat{BB_1O_1}$ ویا

$$\widehat{BB_1O}+\widehat{BOO_1}=۲d$$

به‌این ترتیب، برچهارضلعی OBB_1O_1 می‌توان دایره‌ای محیط کرد وچون وترهای O_1B_1 و OB دراین دایره با هم برابرند (بـه‌عنوان نیمسازهای زاویهٔ B)، بنابراین OO_1 موازی BB_1 درمی‌آید؛ یعنی $AD\|BB_1$. به‌این‌ترتیب، چهارضلعی $ADBB_1$، یك ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محاط دردایـره است. ولی درذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، دوقطر بـرابـرند: $AB=B_1D$. ازاین‌جا نتیجه‌می‌شود $AB=BC$، یعنی مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

یادداشت. دراین اثبات، تنها ازشرط $AD=CE$ استفاده کردیم و به‌این حقیقت‌که AD و CE نیمسازهای مثلث‌اند،کاری نداشتیم. بنابراین، نه‌تنها قضیهٔ موردنظرمساله، بلکه قضیهٔ کلی‌تری را ثابت کردیم. این قضیهٔ کلی چنین‌است: اگر ازدو راس مثلث، به‌ضلع‌های روبه‌روی آن‌ها، دو پاره‌خط رسم‌کنیم که روی نیمساز راس سوم به‌هم رسیده باشند؛ وقتی

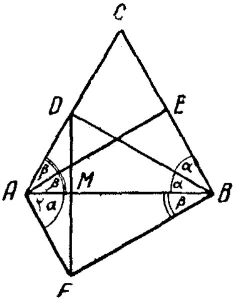
که این دوپاره‌خط برابر باشند، حتماً مثلث اصلی متساوی‌الساقین است.

اثبات II. می‌دانیم دونیمساز AE و BD ازمثلث ABC با هم برابرند (شکل ۷۱).
باید ثابت کنیم: $AC=BC$.

BF را موازی AE و AF را موازی BE رسم می‌کنیم و فرض می‌کنیم:

$$\widehat{DBA}=\alpha \text{ و } \widehat{EAB}=\beta$$

اکنون، دو مثلث ABD و ABF را درنظر می‌گیریم. در این دومثلث، ضلع AB مشترك و $BF=BD$ (هر دو، برابر AE هستند). اگر فرض کنیم $\widehat{DBA}=\widehat{ABF}$، یعنی $\alpha>\beta$ (زاویهٔ ABF برابر زاویه EAB، یعنی β است)، آن‌وقت، ضلع AD بزرگتر از ضلع AF می‌شود، زیرا اگر دوضلع از مثلثی با دوضلع از مثلث دیگر، برابر و زاویهٔ بین آن‌ها دریکی، بزرگتر از زاویهٔ بین‌آن‌ها در دیگری باشد، ضلع سوم ازمثلث اول، بزرگتر است از ضلع سوم درمثلث دوم. به این ترتیب، با شرط $\alpha>\beta$، داریم: $AD>AF$.



شکل ۷۱

مثلث ADF را درنظر می‌گیریم که AD و AF، دو ضلع آن را تشکیل می‌دهند. دراین مثلث زاویهٔ ADF از زاویهٔ AFD بزرگتر است. درواقع داریم:

$$\widehat{ADF}=180^\circ-2\beta-\widehat{AMD}=180^\circ-2\beta-(\alpha+\widehat{BDF})=$$
$$=180^\circ-\alpha-\widehat{BDF}-\beta-\beta;$$
$$\widehat{AFD}=180^\circ-\widehat{MAF}-\widehat{AMF}=180^\circ-2\alpha-(\beta+\widehat{BFD})=$$
$$=180^\circ-2\alpha-\beta-\widehat{BFD}=180^\circ-\alpha-\widehat{BFD}-\beta-\alpha$$

ولی دوزاویهٔ BDF و BFD باهم برابرند ($BD=BF$). اگر به جزاین، فرض $\alpha>\beta$ را درنظر بگیریم، نتیجه می‌شود: $\widehat{ADF}>\widehat{AFD}$. ولی دریك مثلث، زاویهٔ روبه‌رو به‌ضلع بزرگتر، اززاویهٔ روبه‌رو به‌ضلع کوچکتر، بزرگتراست، یعنی $AF>AD$. واین، متناقض با نابرابری $AD>AF$ است، که قبلاً به‌دست آوردیم.

به‌این ترتیب، α نمی‌تواند از β بزرگتر باشد. به‌همین ترتیب، ثابت می‌شود که α کوچکتر از β نیست. یعنی $\alpha=\beta$ و $2\alpha=2\beta$ و، بنابراین $AC=CB$.

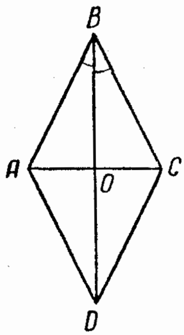
یادداشت. دراثبات II، قضیه‌را باروش برهان‌خلف ثابت‌کردیم. این روش اثبات،

از این جهت هم بر روش اثبات I برتری دارد که، در آن، از آگاهی کمتری (از هندسهٔ دبیرستانی) استفاده کرده‌ایم: در این اثبات، تنها از قضیه‌های مربوط به‌برابری ونابرابری درمثلث‌ها و از قضیهٔ مربوط بــه خطهای موازی استفاده شده است. استفادهٔ از زاویه‌های محاطی وامکان محاط کردن یك چهارضلعی دردایره، که‌دراثبات I مورد استفاده بود، دراین جا لازم نیست.

شبیه اثبات I، در این جا هم می‌توان قضیه را تعمیم داد. این قضیهٔ عام‌تــر، چنین است: اگر پاره‌خطهای AE و BD (شکل ۷۱) که از راس‌های A و B درمثلث ABC به ضلع‌های روبه‌رو رسم شده‌اند، درداخل مثلث یکدیگر را قطع کنند وبا هم برابر باشند و، درضمن، زاویه‌هــای A و B را طــوری تقسیم کنند کــه داشته بــاشیم: $\hat{B}=\alpha_1+\alpha_2$ و $\hat{A}=\beta_1+\beta_2$ (α_1 و β_1 دارای ضلع مشترك AB هستند)، آن‌وقت، یــا $\alpha_1\geqslant\beta_1$ و $\alpha_2\leqslant\beta_2$، یا $\alpha_1\leqslant\beta_1$ و $\alpha_2\geqslant\beta_2$.

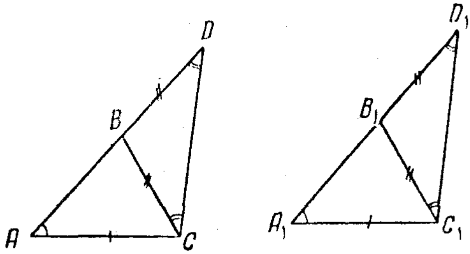
اثبات این قضیه، هیچ تفاوتی بــا اثبات II ندارد، تنها بــایــد در نظر داشت که زاویه‌های مجاور به‌قاعدهٔ مثلث، نه 2α و 2β، بلکه $\alpha_1+\alpha_2$ و $\beta_1+\beta_2$ هستند.

۸۳۸. در مثلث ABC می‌دانیم: $AO=OC$ و $\widehat{ABO}=\widehat{OBC}$. بــایــد ثابت کنیم: $AB=BC$ (شکل ۷۲). BO را بــه اندازهٔ $OD=OB$ امتداد مــی‌دهیم و نقطهٔ D را بــه نقطه‌هــای A و C وصل می‌کنیم. چون بنا برشرط $AO=OC$ وبنا برساختمان $OB=OD$، پس چهارضلعــی $ABCD$ مــتــوازی‌الاضلاع است. ولی $\widehat{ABO}=\widehat{OBC}$ و ، بنا بــراین، این متوازی‌الاضلاع، یك لــوزی است و از آن‌جــا $AB=BC$.


شکل ۷۲

۸۳۹. در دومــثــلــث ABC و $A_1B_1C_1$ مــی‌دانــیــم: $\hat{A}=\hat{A_1}$، $AC=A_1C_1$ و $AB+BC=A_1B_1+B_1C_1$ (شکل ۷۳). باید ثابت کنیم، دومثلث برابرند. ضلع AB را بــه‌اندازهٔ پاره‌خط $BD=BC$ امتداد می‌دهیم و B را بــه C وصل می‌کنیم. در مثلث متساوی‌الساقین CBD داریم: $\hat{D}=\widehat{DCB}$. مجموع این دو زاویــه برابر است بــا زاویهٔ ABC (زاویــهٔ خارجی مثلث BCD) و بنا براین: $\widehat{ABC}=2\hat{D}$. به همین ترتیب، ثابت می‌شود: $\widehat{A_1B_1C_1}=2\widehat{D_1}$. ولی دومثلث ADC و $A_1D_1C_1$ برابرند، درنتیجه $\hat{D}=\widehat{D_1}$ و $\widehat{ABC}=\widehat{A_1B_1C_1}$. درنتیجه، زاویهٔ سوم دومثلث مفروض هم، برابر می‌شوند، یعنی دو

زاویهٔ ACB و $A_1C_1B_1$. به‌این ترتیب، دومثلث ABC و $A_1B_1C_1$، در دو زاویه و ضلع بین آن‌ها، نظیر به‌نظیر برابرند، یعنی خود دومثلث برابرند.



شکل ۷۳

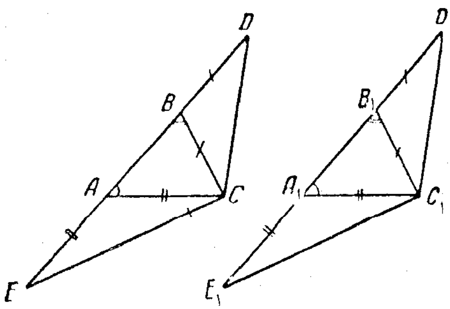
۸۴۰. در دومثلث ABC و $A_1B_1C_1$ می‌دانیم:

$$\widehat{ABC}=\widehat{A_1B_1C_1}\ ,\ \widehat{BAC}=\widehat{B_1A_1C_1}\ ,$$

$$AB+BC+AC=A_1B_1+B_1C_1+A_1C_1$$

باید ثابت کنیم، این دومثلث برابرند (شکل ۷۴). ضلع AB را ازطرف B به‌اندازهٔ $BD=BC$ وازطرف A به‌اندازهٔ پاره‌خط $AE=AC$ امتداد می‌دهیم ونقطه‌های D و E را به C وصل می‌کنیم. درمثلث متساوی‌الساقین BCD، دوزاویهٔ DوDCB با هم برابرند ومجموع آن‌ها برابراست بازاویهٔ بیرونی ABC. بنابراین $\widehat{D}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}$. به‌همین‌ترتیب ثابت می‌شود: $\widehat{E}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

اگرهمین‌ساختمان را روی‌مثلث $A_1B_1C_1$ دنبال کنیم، به‌دست‌می‌آید: $\widehat{D_1}=\frac{1}{2}\widehat{A_1B_1C_1}$

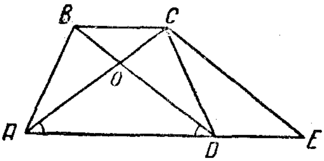


شکل ۷۴

و $\widehat{D}=\widehat{D_1}$ بنابراین باتوجه به‌شرط‌های مساله نتیجه می‌شود: $\widehat{E_1}=\frac{1}{2}\widehat{B_1A_1C_1}$ و

$\widehat{E}=\widehat{E_1}$. به‌جز این $ED=E_1D_1=2p$ و، بنابراین، دو مثلث DEC و $D_1E_1C_1$ برابرند. از برابری این مثلث‌ها نتیجه می‌گیریم $DC=D_1C_1$؛ یعنی دومثلث متساوی‌الساقین CBD و $C_1B_1D_1$ باهم برابرند. اکنون، برای دومثلث ABC و $A_1B_1C_1$ داریم: $BC=B_1C_1$ (ساق‌ها در مثلث‌های متساوی‌الساقین مساوی)، $\widehat{ABC}=\widehat{A_1B_1C_1}$ (بنا بر شرط) و $\widehat{ACB}=\widehat{A_1C_1B_1}$ (وقتی دوزاویه ازمثلثی با دوزاویه از مثلث دیگر برابرباشند، زاویهٔ سوم دومثلث هم برابر یکدیگرمی‌شوند). به‌این‌ترتیب، مثلث‌های ABC و $A_1B_1C_1$ برابرند.

۸۴۱. در ذوزنقهٔ $ABCD$ می‌دانیم: $AC=BD$. باید ثابت کنیم: $AB=CD$ (شکل ۷۵). از راس C خط راستی موازی BD رسم می‌کنیم تا امتداد قاعدهٔ AD را در E قطع کند. در مثلث ACE داریم: $AC=CE=BD$، بنابراین، مثلثی متساوی‌الساقین است و $\widehat{CEA}=\widehat{CAE}$ و

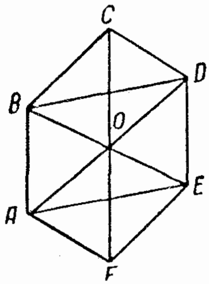


شکل ۷۵

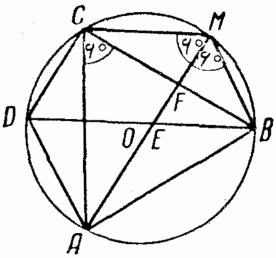
چون، از طرف دیگر، $\widehat{BDA}=\widehat{CEA}$، پس $\widehat{CAD}=\widehat{BDA}$. پس دومثلث ABD و ACD با هم برابر می‌شود (دریك ضلع مشترك‌اند) و داریم: $AB=CD$.

۸۴۲. فرض کنید AB و DE موازی و مساوی باشند (شکل ۷۶). A را به E و B را به D وصل می‌کنیم. در چهارضلعی $ABDE$، دوضلع روبه‌رو موازی و مساوی‌اند و، بنابراین، این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. قطرهای متوازی‌الاضلاع، یکدیگر را نصف می‌کنند؛ به‌این ترتیب، نقطهٔ O وسط هریك ازدوقطر AD و BE است. اکنون اگر چهارضلعی $AFDC$ را در نظر بگیریم، به‌همین ترتیب ثابت می‌شودکه نقطهٔ O وسط قطر CF است. در نتیجه، قطرهای AD، BE و CF، اولاً از نقطهٔ O می‌گذرند، ثانیاً دراین نقطه نصف می‌شوند.

۸۴۳. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را محاط در دایرهٔ به‌مرکز O درنظر می‌گیریم (شکل ۷۷). نقطهٔ M را روی کمان BC انتخاب می‌کنیم. باید ثابت کنیم: $MB+MC=MA$؛ BD را موازی CM رسم می‌کنیم ونقطهٔ برخورد خط‌های راست BD و AM را E می‌گیریم. ثابت می‌کنیم: $MB=ME$. هریك از زاویه‌های مثلث ABC برابر ۶۰ درجه است و، بنابراین، زاویهٔ AMB هم (که با زاویهٔ ACB روبه‌روی



شکل ۷۶



شکل ۷۷

به‌یک کمان از دایرهٔ O قرار دارد) برابر ۶۰ درجه می‌شود. همچنین $\widehat{CMA}=60^\circ$ (با زاویهٔ CBA روبه‌روی به‌یک کمان‌اند). باتوجه بـه دوخط راست موازی CM و DB و وقاطع AM، زاویهٔ MEB برابر با زاویهٔ CMA، یعنی ۶۰ درجه می‌شود. به‌این‌ترتیب مثلث MBE، متساوی‌الاضلاع خواهد بـود (دو زاویـهٔ آن، هـر کدام برابر ۶۰ درجه شده‌اند) وخواهیم داشت: $MB=ME$. اکنون، ثابت می‌کنیم: $MC=EA$؛ D را به A وصل می‌کنیم. مثلث DEA متساوی‌الاضلاع است، زیرا زاویهٔ DEA بازاویهٔ MEB روبه‌رو و بنا براین، برابر ۶۰ درجه است. زاویهٔ ADB هم بازاویهٔ ACB روبه‌روی به‌یک کمان و، بنا براین، برابر ۶۰ درجه‌است. ازمتساوی‌الاضلاع بودن مثلث DEA نتیجه‌می‌شود: $DE=AE$.

اکنون، اگر D را به C وصل کنیم، چهارضلعی $EDCM$ به‌دست می‌آید که متوازی‌الاضلاع است، زیرا از برابری دوزاویهٔ CDB و CAB (هر کدام برابر ۶۰ درجه‌اند) به برابری دو زاویهٔ CDB و DEA می‌رسیم کـه به‌معنای موازی بودن دو خط راست CD و AM است (اگر قاطع DB را نسبت بـه‌این دو خط در نظر بگیریم، زاویـه‌های متبادل داخل برابرند). DE و CM هم، طبق رسم باهم موازی بودند. درنتیجه، چهارضلعی $CMED$ متوازی‌الاضلاع است و داریم: $CM=DE=EA$. و سرانجام:

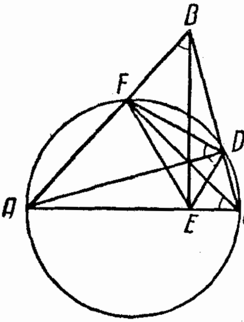
$$AM=AE+EM=CM+BM$$

۸۴۴. AD، BE و CF را ارتـفـاع‌های مثلث ABC می‌گیریم (شکل ۷۸). باید ثابت کنیم، AD، BE و CF، نیمسازهای مثلث DEF هستند. به عنوان نمونـه، ثابت مـی‌کنیم: $\widehat{EDA}=\widehat{ADF}$. چون $\widehat{AFC}=\widehat{ADC}=90^\circ$ ، بنا براین می‌توان از چهـار راس چهارضلعی $AFDC$ یك دایره گذراند. دراین‌صورت خواهیم داشت: $\widehat{ADF}=\widehat{ACF}$ به‌همین ترتیب، ثابت می‌شود: $\widehat{EDA}=\widehat{EBA}$ ولـی از مثلث‌های قائم‌الزاویـهٔ ABE و

ACF بــه دست می‌آید:

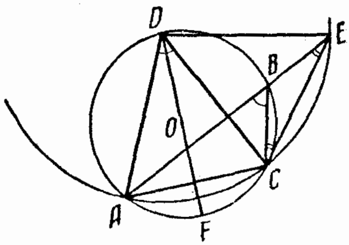
$$\widehat{ABE}=۹۰^\circ-\widehat{BAC}=\widehat{ACF}$$

بنابراین $\widehat{EDA}=\widehat{ADF}$.



شکل ۷۸

۸۴۵. روی قاعدهٔ مفروض $AC=a$ ، کمان درخور زاویهٔ مفروض را رسم می‌کنیم (شکل ۷۹). هر نقطهٔ دلخواه B ازاین کمان‌را به A و C وصل کنیم، مثلث ABC باقاعدهٔ مفروض و زاویهٔ راس مفروض به‌دست می‌آید. اکنون، قطر DE عمود بر AC را رسم می‌کنیم ودایرهٔ به‌مرکز D وشعاع DA رامی‌سازیم. با فرض این‌کــه D غیر از B باشد، AB را امتداد می‌دهیم تــا دایرهٔ اخیر را در E قطع کند و، سپس، E را به C و D را به A و C و E وصل می‌کنیم. ثــابت مــی‌کنیم: $AE=BC$. درواقــع، داریــم: $\widehat{ADC}=\widehat{ABC}$ (زاویه‌های محاطی روبه‌روی به‌یك کمان) و $\widehat{ADC}=۲\widehat{AEC}$ (اولی زاویهٔ مــرکزی و دومی زاویه محاطی در دایرهٔ به مرکز D ، و هر دو روبه‌روی به یك‌کمان). ولی در این صورت



شکل ۷۹

$$\widehat{BCE}=\widehat{ABC}-\widehat{AEC}=\widehat{ADC}-\widehat{AEC}=۲\widehat{AEC}-\widehat{AEC}=\widehat{AEC}$$

بنابراین، مثلث CBE متساوی‌الساقین می‌شود و داریم: $BC=BE$. ازاین‌جا

$$AB+BC=AB+BE=AE$$

و چون B بر مــرکز D منطبق نیست ، AE وتر دایره است و برای هــر انتخابی از B داریم:

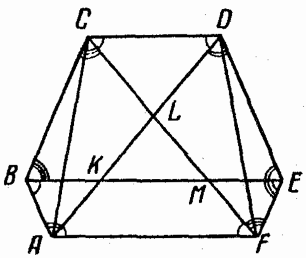
$$AE<AD+DE \quad (AD+DE=\text{قطر})$$

اگر توجه کنیم که $DC=DE$ (شعاع‌های دایرهٔ به‌مرکز D)، به‌دست می‌آید

$$AD+DC>AB+BC$$

یعنی، مثلث مطلوب، متساوی‌الساقین است.

۸۴۶. در ذوزنقهٔ $ACDF$ (شکل ۸۰) $AD=CF$ و، بنابراین، ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین است (مسالهٔ ۸۴۱). از آن‌جا $\widehat{LCO}=\widehat{LDC}$. از طرف دیگر



شکل ۸۰

$$\widehat{LAF}=\widehat{LDC} \text{ و } \widehat{AFL}=\widehat{DCL}$$

و بنابراین

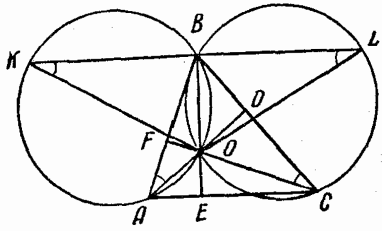
$$\widehat{LCD}=\widehat{LDC}=\widehat{LAF}=\widehat{LFA}$$

به‌همین ترتیب ثابت می‌شود:

$$\widehat{KBA}=\widehat{KAB}=\widehat{KED}=\widehat{KDE} \text{ و } \widehat{MCB}=\widehat{MBC}=\widehat{MEF}=\widehat{MFE}$$

اکنون بادرنظر گرفتن چهارضلعی $BCDE$، می‌بینیم که، درآن، مجموع زاویه‌های روبه‌رو، برابرند و، بنابراین، ازچهار نقطهٔ B، C، D و E یك دایره، می‌گذرد این دایره با توجه به‌برابری زاویه‌های CBE و CFE از راس F و، باتوجه به برابری زاویه‌های DCF و DAF، از راس A می‌گذرد. قضیه ثابت شد.

۸۴۷. AD، BE و CF را ارتفاع‌های مثلث ABC می‌گیریم (شکل ۸۱). O را نقطهٔ برخورد این ارتفاع‌ها و OK و OL را قطر دایره‌هایی فرض می‌کنیم که، به‌ترتیب، اولی از A و B و O و دومی از B و C و O گذشته باشد. مثلاً ثابت می‌کنیم $OK=OL$.



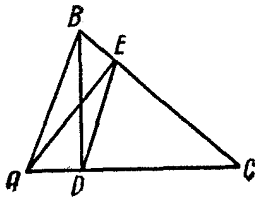
شکل ۸۱

از L و K به B وصل می‌کنیم. چون هریك از زاویه‌های OBK و OBL برابر ۹۰ درجه است، بنابراین BL، امتداد KB است. ولی، زاویه‌های OKB و OAB برابرند (زاویه‌های محاطی روبه‌رو به یك کمان). و به‌همین ترتیب، دو زاویهٔ OLB و OCB هم برابر می‌شوند. از طرف دیگر

$$\widehat{OAB}=90^\circ-\widehat{ABD}=\widehat{OCB}$$

بنا براین: $\widehat{OKB}=\widehat{OLB}$ و مثلث OKL متساوی‌الساقین است، یعنی $OK=OL$.

۸۴۸. فرض کنید $AE\perp BC$ و $BD\perp AC$ (شکل ۸۲). مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ CBD و CAE، که درزاویهٔ ACB مشترک‌اند، باهم متشابه‌اند و درنتیجه $\frac{CD}{CE}=\frac{BC}{AC}$. بنا براین دو مثلث CDE و ABC، که درزاویهٔ ACB مشترك و در دو ضلع مجاور به‌این زاویه‌متناسب‌اند، متشابه‌می‌شوند.

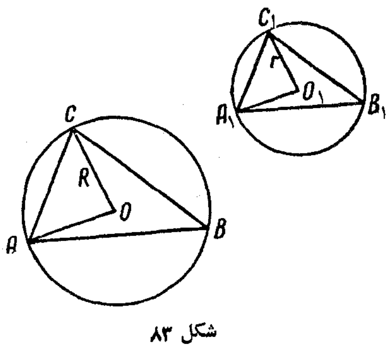


شکل ۸۲

۸۴۹. می‌دانیم دوزاویه‌ای که ضلع‌های موازی داشته باشند، یا برابرند و یا مکمل یکدیگر.

اگر فرض کنیم هر یك از زوج زاویه‌های متناظر دو مثلث مکمل یکدیگر باشند، آن‌وقت، مجموع زاویه‌های دو مثلث روی‌هم، برابر شش قائمه می‌شودکه ممکن نیست. اگر تنها یك زوج زاویهٔ متناظر از دومثلث برابر باشند، آن‌وقت، مجموع شش زاویهٔ دو مثلث از چهار قائمه بیشتر می‌شود، که بازهم ممکن نیست. تنها این فرض می‌ماندکه دوزاویه از یك مثلث را با دوزاویهٔ نظیر خود درمثلث دیگر برابر بگیریم که، دراین صورت، دومثلث متشابه می‌شوند.

۸۵۰. می‌دانیم دومثلث ABC و $A_1B_1C_1$ متشابه و R و r شعاع‌های دایره‌های محیطی این دومثلث‌اند؛ می‌خواهیم ثابت کنیم: $R:r=AC:A_1C_1$ (شکل ۸۳). مرکز

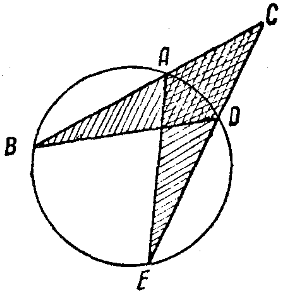


شکل ۸۳

دایرهٔ O را به نقطه‌های A و C وصل می‌کنیم. در مثلث AOC داریم: $AO=OC=R$ و $\widehat{AOC}=2\widehat{ABC}$ (AOC زاویهٔ مرکزی و ABC زاویهٔ محاطی روبه‌رو به‌یك کمان‌اند). به‌همین ترتیب، اگر مرکز دایرهٔ O_1 را به دو نقطهٔ A_1 و C_1 وصل کنیم، به‌مثلث متساوی‌الساقین $A_1O_1C_1$ می‌رسیم که زاویهٔ $A_1O_1C_1$ ازآن، دوبرابر زاویهٔ $A_1B_1C_1$ است. از

برابری دوزاویهٔ ABC و $A_۱B_۱C_۱$ (بنا به تشابه دومثلث ABC و $A_۱B_۱C_۱$)، برابری دو زاویهٔ AOC و $A_۱O_۱C_۱$ نتیجه می‌شود. بنابراین دومثلث متساوی‌الساقین AOC و $A_۱O_۱C_۱$ متشابه‌اند وداریم:

$$OC : O_۱C_۱ = AC : A_۱C_۱ \Rightarrow R : r = AC : A_۱C_۱$$

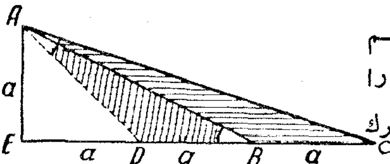


شکل ۸۴

۸۵۱. فرض کنید CD مماس نباشد (شکل ۸۴)؛ در این صورت، دایره را در نقطهٔ دیگری مثل E قطع می‌کند. مثلث‌های AEC و DBC را درنظر می‌گیریم. این دومثلث متشابه‌اند، زیرا زاویهٔ C در آن‌ها مشترك و زاویه‌های CBD و CEA برابرند. (زاویه‌های محاطی روبه‌رو به یك کمان)، از تشابه دومثلث، نتیجه می‌شود:

$$CA \cdot CB = CD \cdot CE \neq CD^۲$$

زیرا $CE = CD - DE$ و بنابراین $CE \neq CD$؛ واین، با شرط مساله متناقض است. بنابراین، CD مماس است.



شکل ۸۵

۸۵۲. میانهٔ AD از مثلث ABE را رسم می‌کنیم (شکل ۸۵) و دو مثلث ADB و ADC را درنظر می‌گیریم. زاویهٔ D دراین دومثلث مشترك است. علاوه برآن، دراین دو مثلث، نسبت ضلع‌هایی که این زاویهٔ مشترك را در برگرفته‌اند، برابر است. در واقع

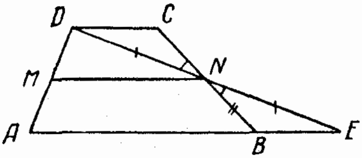
$$DB : AD = a : a\sqrt{۲} = ۱ : \sqrt{۲};$$

$$AD : DC = a\sqrt{۲} : ۲a = ۱ : \sqrt{۲}$$

بنابراین، دومثلث ADB و ADC متشابه‌اند و، بنابراین، دوزاویهٔ ABD و DAC برابر می‌شوند. ولی

$$\widehat{ABD} + \widehat{ACD} = \widehat{DAC} + \widehat{ACD} = \widehat{ADC} \Rightarrow \widehat{ABD} + \widehat{ACD} = ۴۵^\circ$$

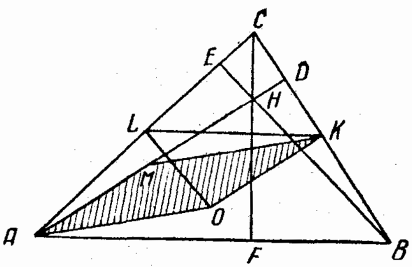
۸۵۳. در چهار ضلعی $ABCD$ می‌دانیم: $AM = MD$ ، $BN = NC$ و $MN = \frac{AB + DC}{۲}$ (شکل ۸۶). باید ثابت کنیم، چهارضلعی مفروض، ذوزنقه‌است.



شکل ۸۶

D را بـه N وصل مـی کنیم و بـه انـدازهٔ $NF=DN$ ادامه می‌دهیم. E را بـه‌نقطهٔ A وصل می‌کنیم. مثلث ADE به‌دست می‌آیـد کـه، درآن، MN برابر است با $\frac{AE}{۲}$ (MN، پاره‌خطی است که وسط دوضلع مثلث را بـه‌هم وصل کرده‌است). اکنون، E را بـه B وصل می‌کنیم. مثلث NEB به‌دست می‌آید که با مثلث DNC برابر است (در دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌هـا). بنابـراین $BE=CD$ و ازآن‌جا $MN=\frac{AB+BE}{۲}$. اگر برابری اخیر را با برابری $MN=\frac{AE}{۲}$ (که قبلاً به‌دست‌آوردیم) مقایسه کنیم، نتیجه می‌شود: $AB+BE=AE$. ولی این، تنها وقتی ممکن‌است که AB و BE روی یك‌خط راست‌باشند. چون $BE\|CD$، بنابراین قضیه ثابت است.

۸۵۴. O را مرکزدایرهٔ محیطی مثلث ABC؛ AD، BE و CF را ارتفاع‌های آن؛ H را نقطهٔ برخورد ارتفاع‌ها؛ M، K و L را، به‌ترتیب، وسط پاره‌خط‌های AH، BC و AC می گیریم (شکل ۸۷). بایـد ثابت‌کنیم: $KM=AO$. دو مثلث OKL و ABH، به‌دلیل موازی بودن ضلع‌های متناظر آن‌ها، متشابه‌اند؛ و چون $KL=\frac{۱}{۲}AB$، پس $OK=\frac{۱}{۲}AH$ یـا $OK=AM$. بـه‌این ترتیب، چهارضلعی $AOKM$ متوازی‌الاضلاع است (دوضلع‌روبه‌روی آن، موازی و مساوی یکدیگرند). درنتیجه: $KM=OA$.

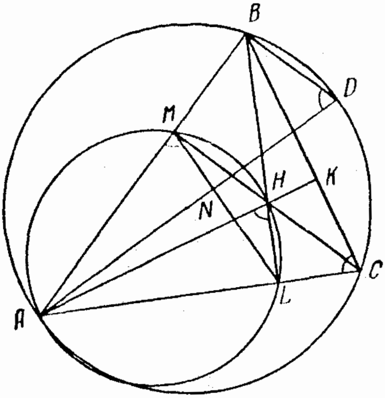


شکل ۸۷

۸۵۵. ضلع‌هـای روبـه‌رو در چهار ضلعی محیطی، دوبه‌دو موازی‌اند، زیرا هـردوتای آن‌ها، بریك قطرمستطیل‌عمودند. بنابراین، این چهارضلعی، متوازی‌الاضلاعی‌می‌شود که‌ارتفاع‌های برابردارد. چنین متوازی‌الاضلاعی، یك لوزی‌است (این مطلب را می‌توان، مثلاً ازمقایسه دوعبارت برای مساحت، یعنی $ah_a=bh_b$ نتیجه گرفت).

۸۵۶. نقطهٔ برخورد AK، BL و CM ، ارتفاع‌های مثلث ABC را H می گیریم (شکل ۸۸). نقطه‌های K ، L ، M روی ضلع‌های مثلث قرار دارند. قطر AD از دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم و نقطه‌های M و L را به‌هم وصل می کنیم. باید ثابت‌کنیم: $ML\perp AD$.

دایرهٔ محیطی‌چهارضلعی $ALHM$ را می‌کشیم. چنین‌دایره‌ای را می‌توان رسم کرد،

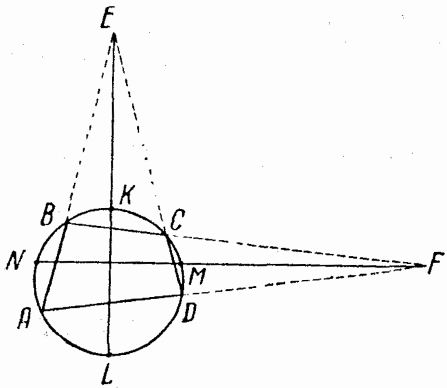


شکل ۸۸

زیرا $\widehat{ALH}=\widehat{AMH}=d$. دراین صورت داریم: $\widehat{AHL}=\widehat{AML}$ (زاویه‌های محاطی روبه‌رو به‌یك کمان). علاوه براین، دو زاویهٔ AHL و BCA هم با یکدیگر برابرند (ضلع‌هایی عمود بر هم دارند)؛ همچنین دو زاویهٔ ADB و ACB (زاویه‌های محاطی روبه‌رو به‌کمان AB) . پس $\widehat{AML}=\widehat{ADB}$. نقطهٔ برخورد AD و ML را N می‌نامیم. در مثلث‌های AMN و ABD ، دو زاویه از یکی ، با دو زاویه از دیگری برابرند ، بنابراین

$$\widehat{ANM}=\widehat{ABD}=d \Rightarrow ML \perp AD$$

۸۵۷. نقطهٔ برخورد امتداد ضلع‌های AB و CD ازچهارضلعی محاطی $ABCD$ را E و نقطهٔ برخورد امتداد ضلع‌های BC و AD را F می‌نامیم (شکل ۸۹). فرض کنید، نیمساز زاویهٔ E، دایره را درنقطه‌های K و L، ونیمساز زاویهٔ F، دایره را درنقطه‌های



شکل ۸۹

M و N قطع کنند. با توجه به اندازهٔ زاویه‌ای که راس آن دربیرون دایره است، می‌توان نوشت:

$$\overset{\frown}{AN}-\overset{\frown}{DM}=\overset{\frown}{BN}-\overset{\frown}{CM};$$

$$\overset{\frown}{AL}-\overset{\frown}{KB}=\overset{\frown}{DL}-\overset{\frown}{CK}$$

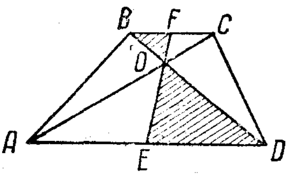
اگراین دوبرابری را با هم جمع و، سپس، تبدیل‌های لازم را انجام دهیم، به‌دست می‌آید:

$$\overset{\frown}{KN}+\overset{\frown}{ML}=\overset{\frown}{LN}+\overset{\frown}{MK}$$

که قضیه را ثابت می‌کند.

۸۵۸. راهنمائی. مثلثی که یکی از راس‌های آن برراس زاویهٔ قائمهٔ مثلث مفروض و دو راس دیگر آن برمرکزدایره ونقطهٔ تماس دایره با ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه، منطبق باشد، یك مثلث متساوی‌الساقین است.

۸۵۹. محل برخورد قطرهای AC و BD از ذوزنقهٔ $ABCD$ را O و نقطهٔ E را وسط قاعدهٔ بزرگتر آن فرض می‌کنیم (شکل ۹۰). EO را رسم می‌کنیم وامتداد می‌دهیم تا قاعدهٔ کوچکتر BC را در F قطع کند. ثابت می‌کنیم، Fوسط قاعدهٔ BC است. دومثلث DEO و BOF را درنظرمی‌گیریم. این دو مثلث متشابه‌اند، زیرا $\widehat{BOF}=\widehat{DOE}$ و $\widehat{FBO}=\widehat{EDO}$. بنابراین: $\frac{BF}{ED}=\frac{OF}{OE}$. ولی دومثلث CFO و AEO هم، به روشنی متشابه یکدیگرند، یعنی $\frac{FC}{AE}=\frac{FO}{OE}$ و درنتیجهٔ $\frac{BF}{ED}=\frac{FC}{AE}$. وچون $ED=AE$، پس $BF=FC$.



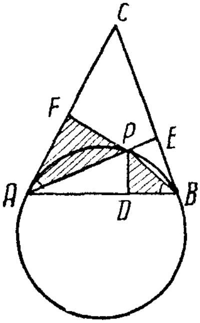
شکل ۹۰

۸۶۰. نقطهٔ D را به نقطهٔ A ونقطهٔ P را به‌مرکزدایرهٔ O وصل می‌کنیم (شکل ۹۱). نقطه برخورد AC و PD را E می‌نامیم. چون دومثلث DEC و DPB متشابه‌اند، داریم:

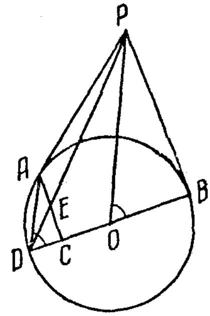
$$EC:PB=DC:DB$$

همچنین ازتشابه دومثلث ADC و POB به دست می‌آید:

$$PB:AC=OB:DC$$



شکل ۹۲



شکل ۹۱

ازضرب این دوتناسب دریکدیگر، نتیجـه می‌شود: $EC=\frac{۱}{۲}AC$.

۸۶۱. AB را وتر، AC و BC را مماس‌ها، P را نقطه‌ای از دایره و PD، PE و PF را عمودهای وارد از P بر AB، BC و AC فرض می کنیم (شکل ۹۲). ازتشابه دو مثلث PDB و APF به‌دست می آید:

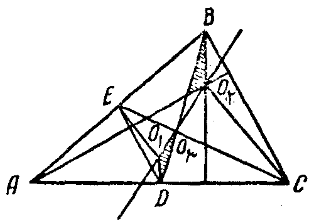
$$PD:PB=PF:AP$$

به همین ترتیب، ازتشابه مثلث‌های PAD و PBE:

$$PD:AP=PE:PB$$

ازضرب این دوتناسب دریکدیگر، نتیجه می‌شود: $PD^{۲}=PF\cdot PE$.

۸۶۲. $O_۱$ را مرکزدایـرهٔ محیطی مثلث، $O_۲$ را نقطهٔ برخورد ارتفاع‌ها و $O_۳$ را گرانیگاه مثلث می‌گیریـم (شکل ۹۳). $O_۱$ و $O_۳$ و، همچنین $O_۳$ و $O_۲$ را به هم وصل می‌کنیم. ثابت می‌کنیم، $O_۱O_۳$ و $O_۳O_۲$ روی یـك خط راست، واقع‌اند. مثلث‌های $O_۱O_۳D$ و $O_۲O_۳B$ متـشـابـه‌انـد. در واقـع، $\widehat{O_۱DO_۳}=\widehat{O_۲BO_۳}$ ($BO_۲$ و $O_۱D$ بر AC عمودو،



شکل ۹۳

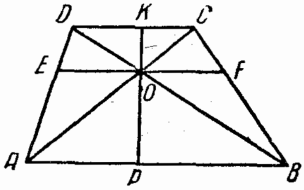
بنابراین، موازی‌اند) و درضمن، بنابه ویژگی گرانیگاه مثلث $O_۳D:O_۳B=۱:۲$ و

$$DO_۱:BO_۲=DE:BC=۱:۲$$

.یرا ED پاره‌خطی است که‌وسط دوضلع مثلث ABC را به‌هم‌وصل کرده است ومثلث‌های $EO_۱L$ و $CO_۲B$، بـه خاطرموازی بـودن ضلع‌های آن‌ها، متشابه‌اند. درنتیجه، دو زاویهٔ

BO_3O_2 و DO_3O_1 برابر و پاره‌خط‌های O_1O_3 و O_3O_2 بریك امتدادند. دراثبات، فرض را براین گرفتیم که میانه برارتفاع منطبق نیست. حالت اخیر، به معنای متساوی‌الساقین‌بودن مثلث است که درستی حکم قضیه درمورد آن واضح است.

۸۶۳. باید ثابت کنیم $EO = OF$ (شکل ۹۴). ارتفاعی از ذوزنقه را که ازنقطهٔ O، محل برخورد قطرها، می‌گذرد، رسم می کنیم و آن را KP می‌نامیم. چون $EF \| AB$، پس دو مثلث COF و CAB متشابه‌اند. در دومثلث متشابه، نسبت ضلع‌ها برابراست با نسبت ارتفاع‌ها و بنا براین، در از دومثلث متشابه اول و دومثلث‌متشابه دوم، به ترتیب، به دست می‌آید:

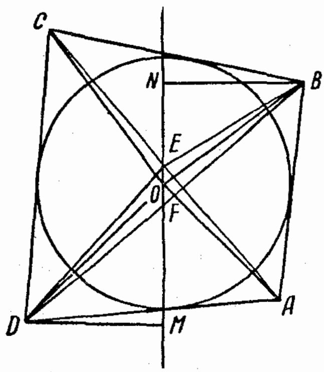


شکل ۹۴

$$\frac{OF}{AB} = \frac{KO}{KP} \text{ و } \frac{EO}{AB} = \frac{KO}{KP}$$

(روشن است که KP برابرارتفاع وارد از راس C درمثلث ABC و برابرارتفاع وارد از راس D درمثلث ADB است، به همین ترتیب، KO برای دومثلث OCF و ODE). ازمقایسهٔ دوتناسب، نتیجه می‌شود: $OF = EO$.

۸۶۴. O رامرکز دایرهٔ محاطی چهارضلعی $ABCD$ و E را وسط قطر AC ازاین چهارضلعی می گیریم (شکل ۹۵). باید ثابت کنیم، خط راست OE، قطردوم BD را در وسط آن قطع می کند.



شکل ۹۵

نقطهٔ برخورد OE و BD را F می‌نامیم. شعاع دایره را r ومحیط ومساحت چهارضلعی را، به ترتیب، $2p$ و S می گیریم. برای چهارضلعی داریم:

$$AB + DC = AD + BC = p \text{ و } S = pr$$

بنابراین، می‌توان نوشت:

$$S_{AOD}+S_{BOC}=\frac{۱}{۲}r(AD+BC)=\frac{۱}{۲}pr=\frac{۱}{۲}S \qquad (۱)$$

ازطرف دیگر داریم:

$$S_{BCE}+S_{DAE}=\frac{۱}{۲}S_{ABC}=\frac{۱}{۲}S_{ADC}=\frac{۱}{۲}S \qquad (۲)$$

ازمقایسهٔ دو رابطهٔ (۱) و (۲) به دست می‌آید:

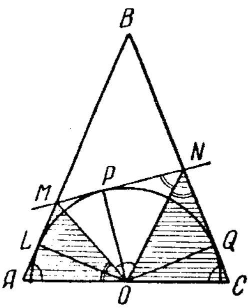
$$S_{BCE}+S_{DAE}=S_{AOD}+S_{BOC}\Rightarrow S_{BOC}-S_{BCE}=S_{DAE}-S_{AOD}$$

ویا بالاخره $S_{BOE}+S_{OEC}=S_{AOE}+S_{DOE}$. ولی $S_{OEC}=S_{AOE}$ و بنابراین: $S_{BOE}=S_{DOE}$.
ازبرابری اخیر به‌دست می‌آید: $BN=DM$.

اکنون، مثلث‌های BFN و DMF را درنظرمی‌گیریم. این دومثلث، در وتر و یک زاویهٔ حاده با هم برابرند. بنابراین: $FB=DF$.

۸۶۵. راهنمائی: دورترین‌نقطهٔ محیط دایره‌از وترمفروض،محل برخورد محیط دایره با قطرعمود براین وتراست.

۸۶۶. اگربتوانیم تشابه‌دومثلث AOM و CNO را ثابت‌کنیم، درستی حکم‌قضیه، بلافاصله ثابت خواهد شد (O مرکز نیم‌دایره است؛ شکل ۹۶). دراین مثلث‌ها، دو زاویهٔ A و C برابرند (زاویه‌های مجاور به قاعده درمثلث متساوی‌الساقین). ثابت می‌کنیم دو زاویهٔ MOA و ONC هم برابرند. L، P و Q را نقطه‌های تماس خط‌های داست AB، MN و BC با نیم دایره می‌گیریم. چون OL بر AB و OQ بر BC عمودند، خواهیم داشت: $\widehat{LOQ}=۱۸۰^\circ-\widehat{B}$.
ازطرف دیگر



شکل ۹۶

$$۱۸۰^\circ-\widehat{B}=\widehat{A}+\widehat{C}=۲\widehat{A}\Rightarrow\widehat{LOQ}=۲\widehat{A}$$

ولی MO نیمساز زاویهٔ LOP و NO نیمساز زاویهٔ QOP هستند. بنابراین

$$\widehat{LOQ}=۲\,\widehat{MON}=۲\widehat{A} \text{ و } \widehat{MON}=\widehat{A}$$

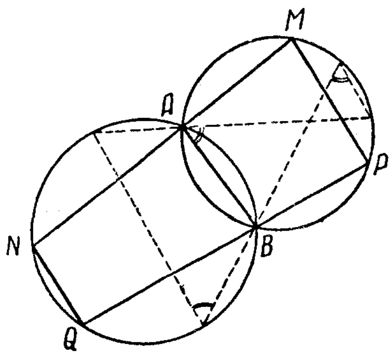
توجه می‌کنیم که درمثلث‌های AOM و ONM داریم: $\widehat{AMO}=\widehat{NMO}$، درنتیجه دو زاویهٔ MOA و MNO برابرند وچون زاویه‌های MNO و ONC هم برابرند، پس

و دو مثلث AOM و CNO متشابه‌اند. از تشابه این دو مثلث به دست $\widehat{MOA}=\widehat{ONC}$ می آید:

$$AM:AO=OC:NC\Rightarrow AM\cdot NC=AO\cdot OC=AO^{۲}=\left(\frac{AC}{۲}\right)^{۲}$$

۸۶۷. دوحالت درنظرمی‌گیریم: a) خطهای راست MAN و PBQ در بیرون دایره‌های مفروض یکدیگر را قطع می‌کنند؛ b) این خطهای راست، در درون یکی از دو دایره به هم می‌رسند (روی شکل ۹۷، حالت دوم را با نقطه‌چین نشان داده‌ایم). تنها به حالت اول می‌پردازیم. بنابرویژگی چهارضلعی‌های محاطی داریم:

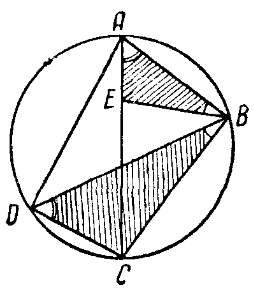
$$\hat{N}+\widehat{ABQ}=۱۸۰^{\circ} \text{ و } \hat{M}+\widehat{ABP}=۱۸۰^{\circ}$$



شکل ۹۷

و بنابر ویژگی زاویه‌های مجانب: $\widehat{ABQ}+\widehat{ABP}=۱۸۰^{\circ}$. اگر دوبرابری اول را جمع کنیم، با استفاده از برابری اخیر، به دست آید: $\hat{M}+\hat{N}=۱۸۰^{\circ}$؛ یعنی $NQ\|MP$.

۸۶۸. $ABCD$ را یك چهارضلعی محاطی با قطرهای AC و BD می‌گیریم (شکل ۹۸). فرض می‌کنیم، زاویهٔ ABD کمتراز زاویهٔ DBC نباشد. خط راست BE را طوری رسم می‌کنیم‌که داشته باشیم: $\widehat{ABE}=\widehat{DBC}$. چون در مثلث‌های ABE و BDC، به‌جزاین زاویه‌های‌برابر، دو زاویهٔ BAE و BDC هم، که زاویه‌هایی محاطی ومقابل به‌یك‌کمان‌اند، برابرهستند، بنابراین درمثلث ABE و BDC متشابه‌اند، یعنی



شکل ۹۸

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AE}\Rightarrow DB\cdot AE=DC\cdot AB \qquad (*)$$

مثلث‌های BCE و ABD هم متشابه‌اند، زیرا $\widehat{ABD}=\widehat{CBE}$ (به‌عنوان‌زاویه‌های‌برابر) و $\widehat{ADB}=\widehat{ACB}$ (به عنوان زاویه‌های محاطی رو به‌رو به‌کمان AB). بنابراین

$$\frac{DB}{AD}=\frac{BC}{CE}\Rightarrow DB\cdot CE=AD\cdot BC$$

که اگر آن را با برابری (*) جمع کنیم، به دست می‌آید:

$$DB\cdot AE+DB\cdot EC=DC\cdot AB+AD\cdot BC;$$

$$DB(AE+EC)=DC\cdot AB+AD\cdot BC\ ;\ DB\cdot AC=DC\cdot AB+AD\cdot BC$$

۸۶۹. فرض کنید، طول ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمه برابر a و b و طول وتر برابر c باشد. بنابر قضیهٔ فیثاغورث داریم: $c^2=a^2+b^2$. دو طرف برابری را در c ضرب می‌کنیم: $c^3=c\cdot a^2+c\cdot b^2$. ولی $a<c$ و $b<c$. بنابراین،

$$c^3=ca^2+cb^2>a\cdot a^2+b\cdot b^2=a^3+b^3\Rightarrow c^3>a^3+b^3$$

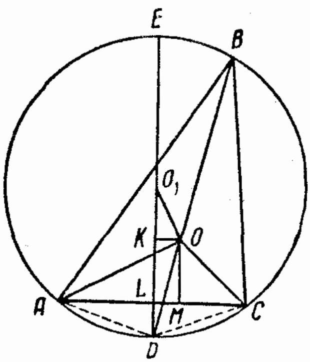
۸۷۰. O_1 را مرکز دایرهٔ محیطی و O را مرکز دایرهٔ محاطی مثلث می‌گیریم (شکل ۹۹) B را به O وصل می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن را با دایرهٔ محیطی، D می‌نامیم. قطر $DE=2R$ این دایره را رسم می‌کنیم. چون BD نیمساز زاویهٔ ABC است، پس $AD=DC$ و بنابراین $ED\perp AC$. با رسم OK عمود بر ED، ازمثلث OO_1D به دست می‌آید:

$$OO_1^2=O_1D^2+OD^2-2O_1D\cdot KD$$

ولی $O_1D=R$ و

$$KD=KL+LD=OM+LD=r+LD$$

که در آن، $OM\perp AC$. بنابراین



شکل ۹۹

$$OO_1^2=R^2+OD^2-2R(r+LD)=R^2-$$
$$-2Rr+OD^2-2R\cdot LD=R^2-2Rr+OD^2-AD^2$$

ثابت می‌کنیم $OD=AC$. برای این منظور، مثلث AOD را درنظرمی‌گیریم. چون AO نیمساز زاویهٔ BAC و دو زاویهٔ CAD و DBC برابرند، بنابراین

$$\widehat{DAO}=\widehat{DAC}+\widehat{CAO}=\widehat{DBC}+\widehat{OAB}=\widehat{DBA}+\widehat{OAB}$$

ولی درضمن $\widehat{AOD}=\widehat{DBA}+\widehat{OAB}$، زیرا AOD، زاویهٔ خارجی مثلث ABO است. از برابری زاویه‌های AOD و DAO نتیجه می‌شود: $AD=OD$. یعنی

$$OO_1^2=R^2-2Rr;\ OO_1=\sqrt{R^2-2Rr}$$

یادداشت. حل مساله را، روی نمونهٔ مثلث با زاویه‌های حاده آوردیم. ولی نتیجهٔ حاصل، برای هرمثلثی درست است. درحالت مثلث متساوی‌الاضلاع، روشن است که این فاصله برابر صفرمی‌شود. به این ترتیب، دراین حالت هم، رابطهٔ حاصل درست است.

۸۷۱. *I*. بنا بر مسالهٔ ۸۷۰، مجذورفاصلهٔ بین مرکزهای دو دایرهٔ محیطی ومحاطی هرمثلث، برابراست با R^2-2Rr، که درآن، R و r، به‌ترتیب، شعاع دایره‌های محاطی و محیطی‌اند، بنابراین، باید داشته باشیم:

$$R^2-2Rr\geqslant 0;\ 2Rr\leqslant R^2;\ r\leqslant \frac{1}{2}R$$

علامت برابری، تنها درمورد مثلث متساوی‌الاضلاع برقراراست.

II. ضلع‌های مثلث را، a، b و c، وزاویه‌های متناظر روبه‌رو به‌آن‌ها را α، β و γ می‌گیریم. براساس رابطه‌های $S=pr$ (S و p، به‌ترتیب، مساحت ونصف محیط مثلث‌اند)، $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$ و همچنین $a=2R\sin\alpha$، $b=2R\sin\beta$ و $c=2R\sin\gamma$ (قضیهٔ سینوس‌ها درمثلث)، می‌توانیم نسبت شعاع دایرهٔ محاطی به شعاع دایرهٔ محیطی را پیدا کنیم:

$$\frac{r}{R}=\frac{S}{pR}=\frac{ab\sin\gamma}{R(a+b+c)}=$$

$$=\frac{2R\sin\alpha\cdot 2R\sin\beta\cdot\sin\gamma}{2R^2(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)}=\frac{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma} \qquad (1)$$

مخرج کسر را تبدیل می‌کنیم:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=$$

$$=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2}=$$

$$=2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

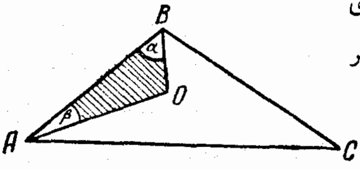
ازطرف دیگر، برای صورت کسر (۱) داریم:

$$۲\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = ۱۶\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}\sin\frac{\beta}{۲}\cos\frac{\beta}{۲}\sin\frac{\gamma}{۲}\cos\frac{\gamma}{۲}$$

و بنا براین (مسلهٔ ۷۱۲ را ببینید):

$$\frac{r}{R} = ۴\sin\frac{\alpha}{۲}\sin\frac{\beta}{۲}\sin\frac{\gamma}{۲} \leqslant ۴\times\frac{۱}{۸} = \frac{۱}{۲}$$

۸۷۲. فرض کنید، درمثلث ABC داشته باشیم: $\widehat{ABC} > \widehat{CAB}$ (شکل ۱۰۰).
نقطهٔ O، مرکزدایرهٔ محاطی مثلث را به راس‌های A و B وصل می‌کنیم و مثلث ABO را در نظر می‌گیریم. داریم:



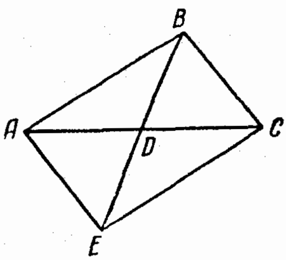
شکل ۱۰۰

$$\alpha = \frac{۱}{۲}\widehat{ABC} \text{ و } \beta = \frac{۱}{۲}\widehat{CAB}$$

ولی دراین صورت $\beta < \alpha$ و بنا براین $OB < OA$.
از این‌جا نتیجه می‌شود که، مرکزدایرهٔ محاطی مثلث، به راسی از مثلث نزدیک‌تراست که زاویهٔ آن بزرگتر باشد.

۸۷۳. درمثلث ABC (شکل ۱۰۱) میانهٔ BD را رسم می‌کنیم وبه اندازهٔ خودش تا نقطهٔ E ادامه می‌دهیم و E را به A و C وصل می‌کنیم. چهارضلعی $ABCE$ متوازی‌الاضلاع است، زیرا قطرهای آن، یکدیگر را نصف کرده‌اند؛ بنا براین

$$AB = CE,\ AE = BC \text{ و } (۲BD)^۲ + AC^۲ = ۲AB^۲ + ۲BC^۲$$



شکل ۱۰۱

از این برابری، با فرض $AB = c$، $BC = a$، $AC = b$ و $BD = m_b$ به‌دست می‌آید:

$$m_b^۲ = \frac{۲c^۲ + ۲a^۲ - b^۲}{۴}$$

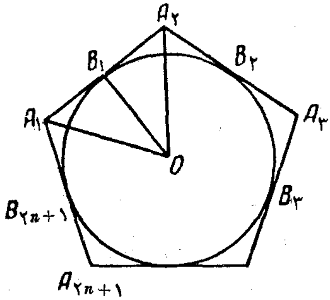
این رابطه نشان می‌دهد که، کوتاه ترین میانه، به بزرگترین ضلع وارد می‌شود.

۸۷۴. بله، زیرا همهٔ زاویه‌های آن محاطی و روبه روی به کمان‌های برابرند و وقتی چندضلعی ضلع‌های برابر و زاویه‌های برابر داشته باشد، منتظم است.

۸۷۵. لوزی را می‌توان نمونه‌ای از یك‌چند ضلعی دانست که ضلع‌های برابردارد:

ولی منتظم نیست. باوجود این، اگر تعداد ضلع‌های چند ضلعی، فرد باشد، منتظم خواهد بود. این‌حکم را ثابت می کنیم.

چند ضلعی را با $2n+1$ ضلع درنظرمی گیریم و راس‌های آن را A_1، A_2، A_3،...، A_{2n+1} و نقطه‌های تماس ضلع‌های آن را با دایره B_1، B_2، B_3،...، B_{2n+1} می‌نامیم (شکل ۱۰۲). روشن‌است که $A_2B_1 = A_2B_2$. ولی دراین‌صورت، با استفاده از برابری ضلع‌ها، به‌دست می‌آید:



شکل ۱۰۲

$$A_1B_1 = A_3B_2 = A_1B_{2n+1} = A_3B_3$$

یعنی پاره‌خط‌های دو ضلع مجاور چند ضلعی که از راس A_1 آغازشده‌اند (درفاصلهٔ راس تانقطهٔ تماس)، برابرند با پاره‌خط‌های مشابه خود در ضلع‌هایی که از A_3 آغازشده‌اند. به‌همین‌ترتیب‌ثابت می‌شود که،این‌پاره‌خط‌ها، برابرند باپاره‌خط‌هایی که از راس‌های A_5، A_7،...، A_{2n+1} آغازمی‌شوند. به این ترتیب، پاره‌خط‌هایی ازضلع‌ها که متصل به راس‌های A_1 و A_{2n+1} هستند، برابرند، یعنی $A_{2n+1}B_{2n+1} = A_1A_{2n+1}$. بنابراین، ضلع A_1A_{2n+1} به وسیلهٔ نقطهٔ تماس، نصف می‌شود. به همین ترتیب، می‌توان ثابت کردکه برای هرکدام ازضلع‌ها، نقطهٔ تماس در وسط ضلع قراردارد. نقطه‌های A_1، B_1 و A_2 رابه‌مرکز O وصل می کنیم. روشن است که دومثلث OA_1B_1 و OA_2B_1 برابرند و بنابراین دو زاویهٔ OA_1A_2 و OA_2B_2 برابرمی‌شوند. چون OA_1 و OA_2 نیمسازهای زاویه‌های A_1 و A_2 هستند، بنابراین، زاویه‌های چند ضلعی در راس‌های A_1 و A_1 ، و در نتیجه درهمهٔ راس‌ها ، با هم برابرند. ولی یك چند ضلعی با ضلع‌ها و زاویه‌های برابر، منتظم است.

۸۷۶. اگر بتوان بایك چند ضلعی منتظم، صفحه‌ای را فرش‌کرد، به‌معنای این است که باچند بارتکرار زاویهٔ داخلی این چندضلعی، باید بتوان به‌۳۶۰ درجه رسید. ازآن‌جا که مقدار هرزاویهٔ داخلی یك n ضلعی منتظم برحسب درجه، برابراست با $\frac{180(n-2)}{n}$، بنابراین باید حاصل $\frac{180(n-2)}{n} : 360$، عددی طبیعی باشد. مقدار n را ازاین شرط پیدا می کنیم. داریم:

$$\frac{360n}{180(n-2)} = \frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2} = 2 + k$$

که‌در آن، $k=\frac{۴}{n-۲}$، بنابراین

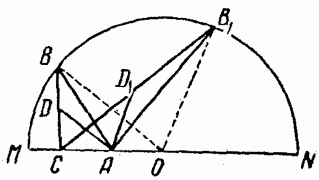
$$k(n-۲)=۴ \Rightarrow n=\frac{۴}{k}+۲$$

از آن‌جا که k، عددی درست ومثبت و، درضمن، کوچکتراز ۴ است، برای آن‌که n عددی درست باشد، تنها می‌تواند برابر ۱ یا ۲ یا ۴ شود. این عددها، برای n مقدارهای ۶، ۴ و ۳ را می‌دهد.

به‌این ترتیب، بـرای پوشاندن صفحه، تنها می‌تـوان از شش ضلعی منتظم، مربع و مثلث متساوی‌الاضلاع استفاده‌کرد. ثابت می‌کنیم که، این شرط،کافی‌هم‌هست، یعنی بااین‌گونه چندضلعی‌ها، می‌توان صفحه را پوشانید. اگر خطهای راست موازی وهم فاصله را رسم و، سپس، همین گـونـه خطهای راست را عمود برآن‌ها رسم‌کنیم، پارکتی به‌دست می‌آید که‌از مربع‌ها تشکیل شده‌است. اگر دستگاهی ازخطهای راست موازی وهم فاصله رسم‌کنیم وآن‌ها را با دستگاهی ازهمین‌گونه‌خطهای راست، بازاویهٔ ۶۰ درجه‌قطع کنیم، سپس، درهریك‌ازلوزی‌هایی که به‌این‌ترتیب به‌دست‌می‌آیند، قطرکوچکتررا بکشیم، پارکتی ازمثلث‌ها به‌دست می‌آید. اگردرهمین پارکت، هرشش مثلث را به‌هم‌پیوند دهیم، پارکتی باشش‌ضلعی‌های منتظم حاصل می‌شود.

۸۷۷ تا ۸۸۴. راهنمائی. مکان هندسی‌نقطه‌هایی بایك‌ویژگی، به‌معنای مجموعهٔ‌همهٔ نقطه‌هایی‌است‌که دارای این ویژگی باشند. برای این‌که ثابت‌کنیم، شکل l، مکان هندسی نقطه‌هایی باویژگی مفروض است،کافی است دوقضیه را ثابت‌کنیم: ۱) نقطه‌ای‌که دارای این ویژگی است برشکل l قراردارد؛ ۲) اگر نقطه‌ای متعلق به‌شکل l باشد، حتماً دارای ویژگی مفروض است.

به‌عنوان نمونه‌ای ازحل مساله‌های مربوط به‌مکان هندسی، بـااین روش، می‌توانید به‌حل مسالهٔ ۸۷۷ مراجعه‌کنید.



شکل ۱۰۳

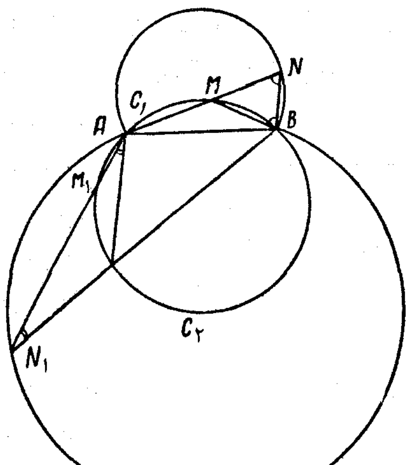
۸۷۷. I. BOرا مـوازی AD رسم می‌کنیم تاامتداد ضلع AC را در O قطع‌کند (شکل ۱۰۳). نقطهٔ O، پاره‌خط AC را، از بیرون، به‌نسبت ۱ : ۲ تقسیم می‌کند. در واقع باتوجه به‌میانه بودن AD و دوخط موازی AD و OB، داریم:

$$\frac{OC}{OA}=\frac{BC}{BD}=\frac{۲}{۱}=۲$$

بنابراین، نقطهٔ O، برای هر وضع نقطهٔ B، ثابت است. علاوه براین، $\frac{BO}{AD}=\frac{BC}{CD}=۲$. به‌این ترتیب، دیده می‌شود که، راس B، در هر وضعی از مثلث، از نقطهٔ ثابت O به‌فاصلهٔ $BO=۲AD$ است. بنابراین، راس B برمحیط دایره‌ای به‌شعاع $r=۲AD$ و به‌مرکز نقطهٔ O – واقع براِمتداد ضلع CA و به فاصلهٔ $OC=OA$ – قراردارد.

II. نقطهٔ $B_۱$ را برمحیط دایره‌ای که به‌دست آوردیم، درنظر می گیریم، به‌نحوی که با نقطه‌های M و N فرق داشته باشد، سپس، آن را به‌نقطه‌های A، C و O وصل می کنیم. اگر $AD_۱$ را موازی $OB_۱$ رسم کنیم، پاره‌خط $AD_۱$ میانهٔ مثلث $AB_۱A$ خواهد بود. (خط راستی که ازوسط ضلع OC از مثلث $OB_۱C$ موازی قاعدهٔ $OB_۱$ رسم کنیم، از وسط ضلع $CB_۱$ می گذرد). از طرف دیگر، این میانه برابر است با نصف $OB_۱$، یعنی $AD_۱=AD$ و مثلث $AB_۱C$ یکی از مثلث‌های موردنظر است. بنابراین، محیط دایرهٔ به‌مرکز O، به استثنای نقطه‌های M و N، مکان هندسی مطلوب است.

۸۷۸. وتر AB، محیط دایره را به دو کمان $C_۱$ و $C_۲$ تقسیم می کند (شکل ۱۰۴).



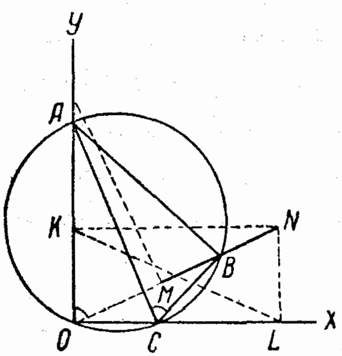
شکل ۱۰۴

برای نقطهٔ M، که برکمان $C_۱$ انتخاب شده است، مکان هندسی N عبارت است از کمان دایرهٔ دیگری که دوانتهای آن بر A و B قرار دارد و درهمان طرفی از وتر AB واقع است که $C_۱$ قراردارد. اگر زاویه‌ای را درنظر بگیریم که راس آن براین کمان واقع باشد و ضلع‌های آن از A و B بگذرد، مقدار آن، نصف زاویهٔ مشابهی خواهد شد که راس آن

بر C_1 واقع است. اگر نقطهٔ M_1 را بر کمان C_2 انتخاب کنیم، مکان مطلوب، کمان دایره‌ای است که دوانتهای آن بر A و B قراردارندودرهمان طرف C_2، نسبت به وتر AB واقع‌است و زاویهٔ محاطی آن‌که از دو نقطهٔ A و B بگذرد، نصف زاویهٔ محاطی مشابه خود درکمان C_2 است.

۸۷۹. a) فرض کنید، راس O از زاویهٔ قائمهٔ مفروض XOY و راس زاویهٔ قائمهٔ B ازمثلث قائم‌الزاویهٔ متحرك ABC، دردوطرف وتر AC واقع‌باشند (شکل ۱۰۵). چون

$$\widehat{ABC}+\widehat{AOC}=180^\circ$$



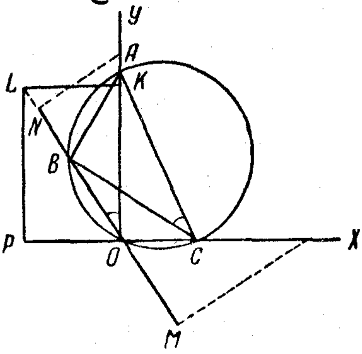
شکل ۱۰۵

چهارضلعی $ABCO$، يك چهار ضلعی محاطی است. با رسم این دایره می‌بینیم که، ضمن حرکت مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، مقدار زاویهٔ AOB بی‌تغییر می‌ماند، زیرا دوزاویهٔ AOB و ACB باهم برابرند (زاویه‌های محاطی روبه‌رو به‌کمان AB). بنابراین، نقطهٔ B، برخط راست ON قرار داردکه از راس زاویهٔ قائمه مفروض می‌گذرد و با ضلع OY از این زاویه، زاویهٔ BOY را برابر زاویهٔ ACB ازمثلث می‌سازد. نزديك‌ترین موضع نقطهٔ B به O، عبارت است از نقطهٔ M، یعنی وقتی‌که وتر برخط راست OY قرارگیرد. دورترین موضع راس B ازنقطهٔ O، موضع N است که، در آن، ضلع‌های مجاوربه‌زاویهٔ قائمه ازمثلث ABC باضلع‌های زاویهٔ XOY موازی می‌شوند. به‌این‌ترتیب، به‌ازای هرموضع مثلث ABC، ضمن لغزش دونقطهٔ A و C برضلع‌های زاویهٔ XOY، راس B از زاویهٔ قائمهٔ آن، روی پاره‌خط MN واقع است. عکس این حکم هم درست است، یعنی هرنقطهٔ B که برپاره‌خط MN انتخاب شود، راسی ازمثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، در یکی از حالت‌های آن است. اثبات این حکم را می‌توان به سادگی، و با رسم دایره‌ای به‌شعاع برابر نصف وتر مثلث مفروض که از نقطه‌های B و O می‌گذرد، به‌دست آورد.

به‌این‌ترتیب، مکان هندسی مطلوب، پاره‌خطی ازقطر ON درمستطیل $OKNL$ است، که ضلع‌های KN و NL آن، به‌ترتیب، برابر با ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمهٔ AB و BC ازمثلث و، درضمن، موازی ضلع‌های OX و OY از زاویهٔ XOY باشند.

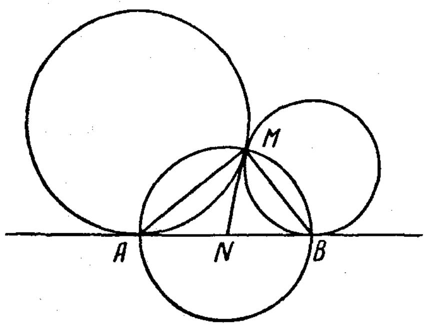
b) فرض کنید، راس O از زاویهٔ قائمهٔ مفروض XOY و راس زاویهٔ قائمهٔ B از مثلث متحرك ABC، دريك طرف وتر AC واقع باشند (شکل ۱۰۶). با استدلالی شبیه

حالت قبل، معلوم می‌شود که، مکان هندسی راس B از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، عبارت است از پاره‌خط MN. این پاره‌خط روی امتداد قطر مستطیلی قرار دارد که ضلع‌های آن، KL و LP، برابرند با ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمهٔ AB و BC از مثلث ABC و موازی با ضلع‌های OX و OY از زاویهٔ XOY. این مستطیل در داخل زاویهٔ مجانب زاویهٔ مفروض قراردارد. پاره‌خط MN از راس O زاویهٔ مفروض می گذرد و به دونقطهٔ M و N محدود است. این دو نقطهٔ متناظر با حالت‌هایی از وضع مثلث ABC هستند که، در آن‌ها، وتر مثلث بر ضلع‌های OX و OY از زاویهٔ XOY واقع شده باشد.



شکل ۱۰۶

۸۸۰. M، نقطهٔ تماس دو دایره را به‌نقطه‌های A و B وصل و MN، مماس مشترك دودایره را رسم می کنیم که، درآن، N، نقطهٔ برخورد خط راست MN به AB است (شکل ۱۰۷). چون در مثلث AMB، پاره‌خطهای AN، NM و NB برابرند



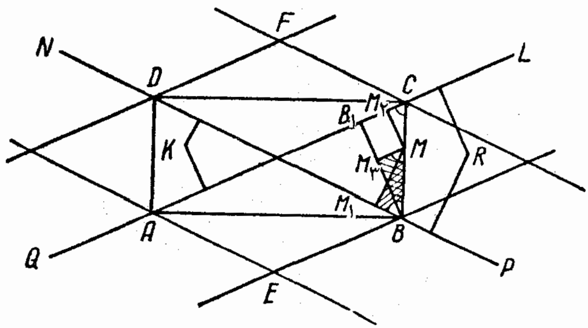
شکل ۱۰۷

(مماس‌هایی که از یك نقطه بردایره رسم شوند، طولی برابر دارند)، نقطهٔ N مرکز دایرهٔ محیطی مثلث AMB است. بنابراین، برای هر دودایره‌ای که با شرطهای مساله سازگار باشند، نقطهٔ M بر محیط دایرهٔ به‌مرکز N وشعاع برابر NM قراردارد. عکس این حکم هم، به‌سادگی قابل اثبات است، یعنی هرنقطهٔ M ازمحیط دایرهٔ به‌شعاع برابر $\frac{1}{2}AB$ ومرکز N (وسط AB)، به‌استثنای خود نقطه‌های A و B، نقطهٔ تماس دودایره‌ای است که یکی از آن‌هامماس برخط راست AB درنقطهٔ A، ودیگری مماس برخط راست AB درنقطهٔ B باشد.

۸۸۱. a) اگر خطهای راست موازی باشند وفاصلهٔ بین آن‌ها، a، بیشتر از مقدار

ثابت مفروض b باشد، چنین نقطه‌هایی وجود ندارند. درحالت $a=b$، همهٔ نقطه‌های بین این خطهای راست همراه با نقطه‌های واقع براین خطها، مکان هندسی مطلوب را تشکیل می‌دهند. درحالت $b>a$، مکان هندسی مطلوب، عبارت است از نقطه‌های واقع بر دوخط راستی که موازی‌خطهای راست مفروض‌اند و ازهر کدام‌از آن‌ها، به‌فاصلهٔ $\frac{b+a}{2}$ و $\frac{b-a}{2}$ قرار گرفته‌اند.

b) حالتی را درنظرمی گیریم که دوخط راست متقاطع باشند. آن‌ها را NP و QL می‌نامیم (شکل ۱۰۸) و خطهای راست AE و CF را موازی NP و به‌فاصلهٔ مقدار مفروض b از آن، رسم می کنیم؛ سپس، خطهای راست BE و DF را موازی خط‌راست QL و به‌فاصلهٔ b از آن، می کشیم. به‌سادگی دیده‌می‌شود که مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ K، واقع در درون مستطیل $ABCD$، کوچکتر از b، ومجموع فاصله‌های هر نقطهٔ R، واقع در



شکل ۱۰۸

بیرون مستطیل، بزرگتر از b است. ولی مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ واقع برمحیط مستطیل $ABCD$، برابر است با b. مثلاً، نقطهٔ M را بر ضلع BC از مستطیل انتخاب می کنیم. MM_1 و MM_2 را فاصله‌های نقطهٔ M تا خطهای راست مفروض NP و QL می گیریم. اگر BB_1 را عمود بر QL و MM_3 را عمود بر BB_1 رسم کنیم، داریم:

$$MM_1+MM_2=MM_1+M_3B_1$$

ولی دومثلث MM_1B و MM_3B برابرند، زیرا قائم‌الزاویه، دروتر MB مشترك و در زاویه‌های MBM_1 و BMM_3 مساوی‌اند (هرکدام از این دو زاویه با زاویهٔ BCB_1 برابر است). بنابراین $MM_1=M_3B$ ودرنتیجه

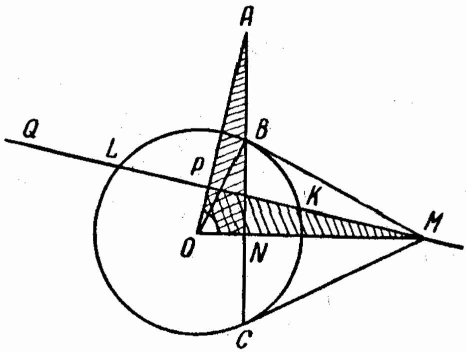
$$MM_1+MM_2=M_3B+M_3B_1=BB_1=b$$

اگر نقطه را بریکی دیگر ازضلع‌های مستطیل درنظربگیریم، بازهم به‌همین طریق، ثابت

می‌شود که مجموع فاصله‌های آن تا دو خط راست مفروض، برابر است با b. از آن‌جا که، برای هیچ نقطه‌ای در خارج محیط مستطیل، مجموع فاصله‌ها برابر b نیست، بنابراین، مکان هندسی مطلوب، عبارت است از نقطه‌های واقع برمحیط مستطیل $ABCD$.

۸۸۲. ABC را قاطع دلخواهی نسبت به‌دایرهٔ مفروض می گیریم که از نقطهٔ مفروض A گذشته است (شکل ۱۰۹) ودر نقطه‌های B و C، دایرهٔ مفروض را قطع کرده است. MB و MC را مماس‌های بردایره فرض می کنیم. MP را عمود بر AO رسم و B و M را به O وصل می‌کنیم. نقطهٔ برخورد MO و AC را N می‌نامیم. روشن است که دومثلث OMP و ONA متشابه‌اند. بنابراین، داریم:

$$OP:OM=ON:OA \Rightarrow OP=\frac{OM\cdot ON}{OA}$$



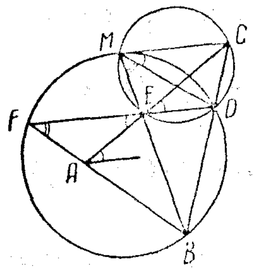
شکل ۱۰۹

ولی ازمثلث OBM به‌دست‌می آید: $OM\cdot ON=OB^2$. بنابراین، $OP=\frac{OB^2}{ON}$. چون OB و OA مقدارهای مفروضی هستند، پس هرنقطهٔ M، در تصویر برخط راست مفروض OA، به‌همین نقطهٔ P می‌رسد. درنتیجه، نقطهٔ M، روی خط‌راستی قرار دارد که بر OA عمود است وفاصلهٔ آن از مرکز دایرهٔ مفروض، برابر است با $OP=\frac{OB^2}{OA}$.

اکنون نقطهٔ M را دربیرون دایرهٔ مفروض، طوری انتخاب می کنیم که برخط‌راستی عمود بر OA و به‌فاصلهٔ $OP=\frac{OB^2}{OA}$ از مرکز دایرهٔ مفروض، واقع باشد. از نقطهٔ M، مماس‌های MB و MC را بردایره رسم و ثابت می‌کنیم که خط‌راست BC، از نقطهٔ A می گذرد. فرض می کنیم، خط‌راست BC، خط‌راست OA را درنقطه‌ای‌مثل A_2 وخط‌راست

OM را درنقطه‌ای مثل N_1 قطع کند. دراین صورت، باتوجه به تشابه مثلث‌های OA_1N_1 و OMP واستدلالی شبیه استدلال بخش اول حل، به‌دست می‌آید: $OP=\frac{OB^2}{OA_1}$. درنتیجه باید داشته باشیم. $OA=OA_1$، واین، به‌معنای آن است که نقطه‌های A و A_1 برهم‌منطبق‌اند و خط‌راست BC از A می‌گذرد. بـه‌این ترتیب، مکان هندسی مطلوب، عبارت است از دو نیم‌خط KM و LQ، واقع برخط‌راست‌عمودبرخط‌راست‌مفروض و به‌فاصلهٔ $OP=\frac{OB^2}{OA}$ از مرکز دایرهٔ مفروض؛ درضمن، نقطهٔ P روی پاره‌خط OA قراردارد ونه دربیرون آن.

۸۷۳. دایرهٔ محاطی مثلث ABC، بـه‌استثنای نقطه‌های B و C.



شکل ۱۱۰

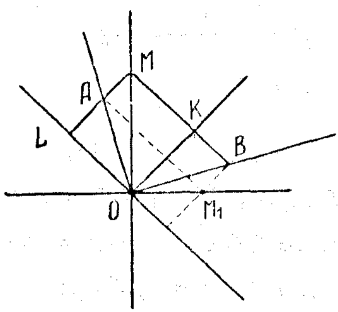
راهنمائی. فـرض‌کنید نقطهٔ M، متعلق به‌مکان مطلوب باشد (شکل ۱۱۰). ثابت می‌کنیم که زاویهٔ BMC مقداری ثابت و برابر زاویـهٔ CAB است. درواقع

$$\widehat{BMC}=\widehat{BMD}+\widehat{DMC}\ ;\ \widehat{BMD}=\widehat{BFD};$$

$$\widehat{DMC}=\widehat{BEC}\ ;\ \widehat{CED}=\widehat{FEA}\ ;\ \widehat{CAB}=\widehat{DFB}+\widehat{FEA}$$

بنابراین، $\widehat{CAB}=\widehat{BMC}$ واین، به‌معنای آن‌است کـه نقطهٔ M بـر محیط دایرهٔ محیطی مثلث ABC قرار دارد. البته، نقطه‌هـای E و F می‌توانند چنان باشند که زاویهٔ BMC، به‌جای این‌که زاویهٔ CAB باشد، مکمل آن شود، ولی دراین حالت هم، نقطهٔ M برمحیط همان دایره قرار می‌گیرد.

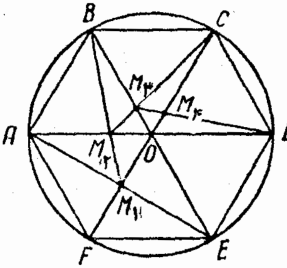
۸۸۴. دوخـط راست مـوازی نیمسازهـای زاویه‌های مجانبی‌که دوخط‌راست‌مفروض می‌سازند واز نقطهٔ O می‌گذرند (شکل ۱۱۱).



شکل ۱۱۱

راهنمائی. خط‌های راست OK و OL را از نقطهٔ O، موازی دوخط راست مفروض عمود بـرهم رسم مـی‌کنیم. AM را مـوازی OK و BM را موازی OL می‌کشیم تا در نقطهٔ M به‌هم برسند. K را نقطهٔ برخورد BM و OK و L را نقطهٔ برخورد AM و OL می‌گیریم. مثلث‌هـای OAL و OKB

برابرند (دو زاویهٔ AOL و KOB، ضلع‌هایی عمود برهم دارند). بنابراین، $OL=OK$ و نقطهٔ M برنیمساز زاویهٔ LOK واقع است. درضمن، اگر AM_1 را موازی OL و BM_1 را موازی OK رسم کنیم، نقطهٔ M برنیمساز زاویهٔ مجانب LOK واقع می‌شود.

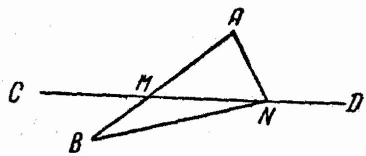


شکل ۱۱۲

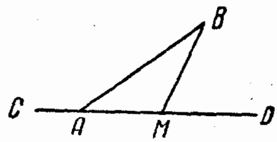
۸۸۵. $ABCDEF$ راشش‌ضلعی‌مفروض و O را مرکز دایره می‌گیریم (شکل ۱۱۲). AD، BE، CF و AE را رسم می‌کنیم. نقطهٔ M_1، شعاع OF را نصف می‌کند. BM_1 را رسم می‌کنیم. M_2 شعاع OA را به نسبت ۲ : ۱ تقسیم می‌کند (دومثلث BM_1C و M_2M_1O متشابه‌اند). به‌این ترتیب، $OM_2=\frac{1}{3}R$. CM_2 را رسم می‌کنیم، خواهیم داشت $OM_3=\frac{1}{4}R$ (تشابه دومثلث CM_2D و M_3M_2O را درنظر بگیرید). M_3 را به D وصل می‌کنیم، نقطهٔ M_4 به دست می‌آید و داریم: $OM_4=\frac{1}{5}R$ وغیره.

۸۸۶. a) اگر نقطه‌های مفروض A و B بر خط راست مفروض CD واقع باشند، آن‌وقت، هرنقطهٔ M واقع برپاره‌خط AB، یکی از نقطه‌های مطلوب است.

b) اگر نقطهٔ A روی خطراست CD ونقطهٔ B بیرون آن باشد (شکل ۱۱۳)، آن‌وقت، خود نقطهٔ A جواب مساله است. درواقع، برای هرنقطهٔ M ازخط راست CD (که غیر از A باشد)، داریم: $MA+MB>AB$.



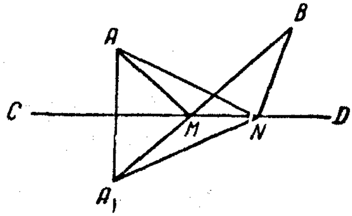
شکل ۱۱۴



شکل ۱۱۳

c) اگر A و B در دوطرف مختلف از خط راست CD واقع باشند (شکل ۱۱۴)، آن‌وقت، نقطهٔ M، محل برخورد AB با CD، نقطهٔ مطلوب است. درواقع، برای هرنقطهٔ دیگر N ازخط راست CD داریم: $NA+NB>AB=MA+MB$.

d) اگر نقطه‌های A و B دریك طرف خطراست AB واقع باشند (شکل ۱۱۵)، باید نقطهٔ A_1، قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به‌خطراست CD را پیدا کنیم؛ نقطهٔ M، محل برخورد A_1B با CD، نقطهٔ موردنظر است. روشن است که، برای هر نقطهٔ دیگری مثل N ازخط

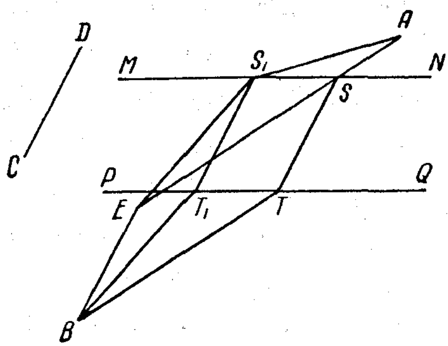


شکل ۱۱۵

راست CD، خواهیم داشت:

$$NA+NB=NA_1+NB>A_1B=A_1M+MB=MA+MB$$

۸۸۷. فرض کنید نقطهٔ A (شکل ۱۱۶)، به MN نزدیک‌تر باشد تا به PQ. از نقطهٔ B، پاره‌خط BE را موازی ومساوی CD رسم می‌کنیم. E را به A وصل می‌کنیم و نقطهٔ برخورد EA را با MN، S می‌نامیم. ST را موازی‌ومساوی CD رسم می‌کنیم (T نقطهٔ



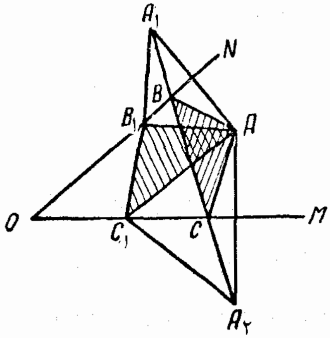
شکل ۱۱۶

برخورد ST با PQ است). معلوم می‌شود که $AS+ST+TB$ حداقل است و، بنا براین، موضع ST ازپاره‌خط CD، مطلوب ماست. درواقع، برای هروضع دیگر S_1T_1، مجموعی بزرگتر به‌دست می‌آید:

$$AS_1+S_1T_1+T_1B=AS_1+BE+ES_1=BE+(ES_1+S_1A)>$$
$$>BE+EA=BE+ES+SA=ST+TB+AS$$

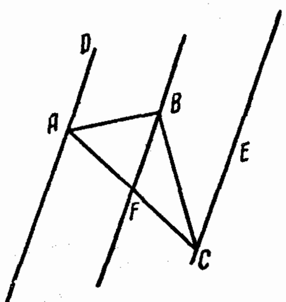
یادداشت. ST باید تنها موازی با امتداد CD باشد و، بنابرین، اندازهٔ آن، بستگی به فاصلهٔ بین دو خط موازی MN و PQ و امتداد CD دارد. بنابرایـن، باید ابتدا خط راست دلخواهی موازی امتداد CD رسم کرد تا اندازهٔ CD به‌دست آید، سپس، ازنقطهٔ B، خط راست BE را موازی ومساوی آن رسم کرد. م.

۸۸۸. فرض کنید دو راس B_1 و C_1 ازمثلث AB_1C_1 (شکل ۱۱۷)، روی‌ضلع‌های ON و OM از زاویهٔ MON و راس‌سوم آن، در نقطهٔ‌مفروض A باشد. قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت به ON و OM به‌دست آمی‌وریم وآن‌ها را، به‌ترتیب، A_1 و A_2 می‌نامیم. A_1 را بـه B_1 و A_2 را بـه C_1 وصل مـی کنیم. محیـط مثلث AB_1C_1 برابراست باطول‌خط‌شکستهٔ $A_1B_1C_2A_2$. طول این‌خط شکسته‌و، بنا براین، محیط مثلث AB_1C_1 ازطول پاره‌خط A_1A_2 بزرگتراست. ازاین‌جا نتیجه می‌شود که، کمترین مقدار محیط، برای مثلث ABC بـه‌دست می آیـد، کـه در آن، B و C، بـه‌ترتیب، نقطه‌های بـرخورد خـط راست A_1A_2 بـا خطهای راست ON و OM هستند. از روش ساختمان، معلوم است که، مساله، تنها یك جواب دارد.



شکل ۱۱۷

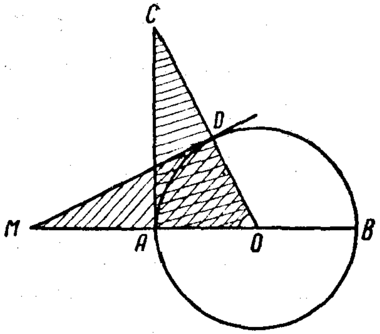
۸۸۹. a) فرض کنید، نقطه‌های مفروض A، B و C بریك خط راست واقع نباشند (شکل ۱۱۸). مساله را حل شده می گیریم و فرض می کنیم، خطهای راست AD و BF و CE، خطهای راست موازی موردنظر باشند. چون BF باید فاصلهٔ بین دو خط راست AD و CE را نصف کند، بنا براین، BF باید از نقطهٔ F وسط AC بگذرد. به این ترتیب، یکی ازخط‌های‌راست‌مطلوب را باید درامتدادمیانهٔ BF ازمثلث ABC رسم کرد. روشن است که دوخط راست دیـگر، ازنقطه‌های A و C موازی با BF خواهند بود.



شکل ۱۱۸

b) اگرسه نقطه بریك خـط راست واقـع و دوتای آن‌ها نسبت به سومی قرینهٔ هم باشند، آن وقت، هرسه خـط راست دلخواه موازی با هم، که از این سه نقطه رسم کنیم، جواب مساله است. درحالتی که سه نقطهٔ بریك خط راست واقع باشند وفاصله‌های نقطه‌های مجاور، با هم برابر نباشند، مساله جواب ندارد.

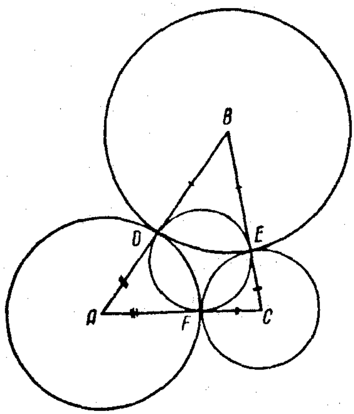
۸۹۰. AB را قطر دایره و O را مرکز آن می گیریم (شکل ۱۱۹). AC را عمود بـر AB رسم و AC را برابر AB جـدا می کنیم. C را به O وصل می کنیم. اگر D، نقطهٔ بـرخورد CO با دایره باشد، ممـاس MD بر دایـره در نقطهٔ D، امتـداد BA را در نقطهٔ موردنظر M قطع می کند. در واقع دومثلث OCA و OMD برابرند، و بنا براین،



شکل ۱۱۹

$.DM = AC = AB$

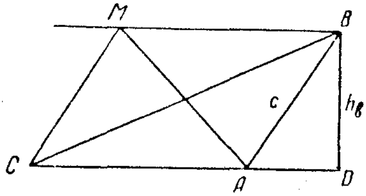
۸۹۱. دایرهٔ مجهول باید ضلع‌های مثلث را، به وسیلهٔ نقطه‌های تماس D، E و F، به پاره‌خط‌های $AD = AF$، $BD = BE$ و $CE = CF$ تقسیم کند. اگر درنظر بگیریم که طول مماس‌های وارد ازیك نقطه بر دایره، با هم برابرند، نتیجه می گیریم که‌نقطه‌های D،



شکل ۱۲۰

E و F همان‌نقطه‌های‌تماس ضلع‌های مثلث با دایرهٔ‌محاطی‌آن است. ازاین‌جا، به سادگی، و با رسم دایرهٔ محاطی مثلث ABC، مساله حل می‌شود.

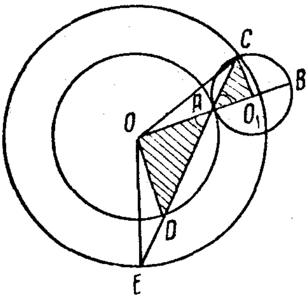
۸۹۲. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD را با وتر $AB = c$ وضلع مجاور بـه زاویهٔ قائمهٔ $BD = h_b$ می‌سازیم (شکل۱۲۱). BM راموازی AD رسم ونقطهٔ M را بارسم دایره‌ای به مرکز A و شعاع $AM = ۲m_a$ جدا می‌کنیم. از نقطهٔ M، MC را موازی AB رسم



شکل ۱۲۱

می‌کنیم تا AD را در نقطهٔ C قطع کند. نقطهٔ C، راس سوم مثلث مجهول ABC است. اگر داشته باشیم: $۲m_a = h_b$ یا $۲m_a = c$ مساله جواب منحصر به‌فرد دارد. اگر $۲m_a > h_a$، ولی $۲m_a \neq c$، مساله دوجواب دارد. اگر $۲m_a < h_b$ یا $c \leqslant h_b$، آن‌وقت، مساله جواب ندارد.

۸۹۳. سه‌نقطهٔ مفروض (یعنی، پای ارتفاع‌ها) را به‌هم وصل ونیمسازهای داخلی مثلث حاصل را رسم می‌کنیم. ازهرراس این مثلث، عمودی برنیمساز زاویهٔ همان راس می‌کشیم. سه خط راستی که به‌این ترتیب رسم شود، در برخورد با هم، مثلثی پدید می‌آورند که همان مثلث مطلوب است (مسالهٔ ۸۴۴ را ببینید).



شکل ۱۲۲

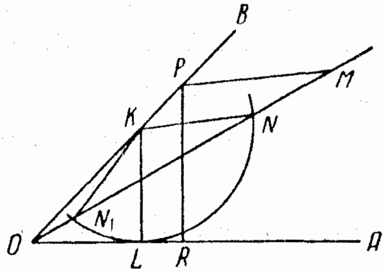
۸۹۴. روی امتداد شعاع OA از دایرهٔ کوچکتر، پاره‌خط AB را مساوی OA جدا می‌کنیم. دایره‌ای به قطر AB رسم می‌کنیم ویکی ازنقطه‌های برخوردآن را با دایرهٔ بزرگتر، C می‌نامیم. قاطع CA، جواب‌مساله‌است. در واقع، ازتشابه مثلث‌های O_1CA و OAD به دست می‌آید: $AC = \frac{1}{۲}AD$، و ازبرابری مثلث‌های OCA و OED: $AC = ED$.

اگرشعاع دایرهٔ بزرگتراز قطر دایرهٔ کوچکتر، بیشترباشد، مساله جواب ندارد.

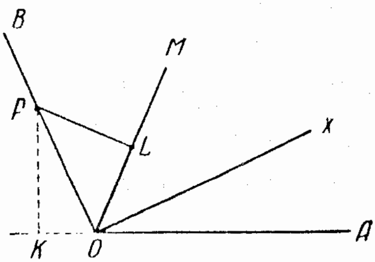
۸۹۵. ازنقطهٔ مفروض M، خط راست OM را، که از راس زاویهٔ مفروض AOB می‌گذرد، می‌کشیم. روی ضلع OB، نقطهٔ دلخواه K را انتخاب، ازآن‌جا، عمود KL را بر OA وبه مرکز K، کمان دایرهٔ به شعاع KL را رسم می‌کنیم. کمان اخیر، خطراست OM را درنقطهٔ N قطع می‌کند. اکنون اگر MPرا موازی NK رسم‌کنیم تا OB را در نقطهٔ P قطع کند، نقطهٔ P، همان نقطهٔ موردنظر مساله است. در واقع، اگر PR را عمود بر OA رسم‌کنیم، داریم:

$$OP{:}OK = PR{:}KL = PM{:}KN$$

وچون $KL = KN$، پس $PR = PM$. روی همین ضلع، نقطهٔ دیگری هم وجود دارد که با شرط‌های مساله سازگاراست. این نقطه، عبارت است ازمحل برخورد ضلع OB، با خط راستی که از M می‌گذرد و باخط راست KN_1 موازی است.



شکل ۱۲۳

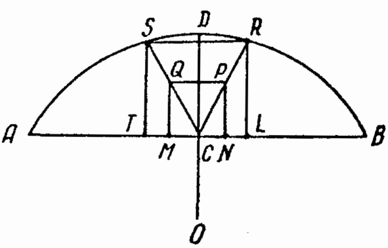


شکل ۱۲۴

درحالتی که زاویهٔ مفروض، قائمه یا منفرجه باشد، نقطهٔ P به این ترتیب پیدا می‌شود: راس O از زاویهٔ مفروض AOB را به نقطهٔ M وصل می‌کنیم، LP را عمود بر OM، از نقطهٔ L وسط OM، می‌کشیم. نقطهٔ P، محل برخورد خط‌های راست OB و LP، همان نقطهٔ موردنظر است. درحالت زاویهٔ قائمهٔ، تنها یك نقطه برضلع OB پیدا می‌شود. وقتی که زاویه منفرجه باشد، یا تنها یك نقطه به‌دست می‌آید ویا اصلاً نقطه‌ای پیدا نمی‌شود. حالت اخیر، وقتی پیش می‌آید که نقطهٔ M در داخل زاویهٔ AOX واقع باشد (OX عمود بر OB است، شکل ۱۲۴).

یادداشت. فاصلهٔ نقطهٔ P تا نیم خط OA، عبارت است ازطول پاره خط OP، نه طول پاره خط PK که برخط راست OA عمود است. طول PK، فاصلهٔ P تا خط راست OA است، نه تا نیم خط OA.

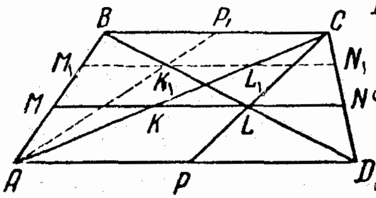
۸۹۶. شعاع OD را، عمود بر وتر AB (قاعدهٔ قطعه دایره) رسم می‌کنیم (شکل ۱۲۵). نقطهٔ برخورد OD و AB را C می‌نامیم. مربع دلخواه $MNPQ$ را طوری رسم می‌کنیم که نسبت به OD متقارن باشد و ضلع MN از آن، بر AB قرارگیرد. خط راست CQ را رسم می‌کنیم ونقطهٔ برخورد آن باکمان قطعه را S می‌نامیم. به همین ترتیب، محل برخورد خط راست CP باکمان قطعه را R می‌گیریم. ازنقطه‌های S و R عمودهایی بر AB رسم می‌کنیم وپای عمودها را T و L می‌نامیم. نقطه‌های S، R، L و T، راس‌های مربع مورد نظرند. اگر سه زوج مثلث متشابه CST و CQM، CRL و CPN و CSR و CQP را درنظربگیریم، درستی حکم به سادگی ثابت می‌شود.



شکل ۱۲۵

درحالت $\alpha \leqslant 270^\circ$، مساله یك جواب دارد ودرحالت $\alpha > 270^\circ$، جواب ندارد.

۸۹۷. فرض کنید، در ذوزنقهٔ $ABCD$، پاره خط MN را موازی AD طوری رسم کرده باشیم که $MK=KL=LN$. خط راست CL را رسم می کنیم ونقطهٔ برخورد آن را با قاعدهٔ بزرگتر P می‌نامیم. چون $KN=2LN$، پس $AD=2PD$، یعنی P وسط پاره خط AD است. ازاین جا نتیجه می‌شود که، برای رسم پاره‌خط مطلوب، کافی است از انتهای یکی از دوقاعده به وسط قاعدهٔ دیگر ذوزنقه وصل و از نقطهٔ برخورد آن با قطر ذوزنقه، خط راستی موازی قاعده‌ها رسم کنیم. توجه کنیم، مساله دوجواب دارد (خطهای راست نقطه‌چین را روی شکل ۱۲۶ ببینید).



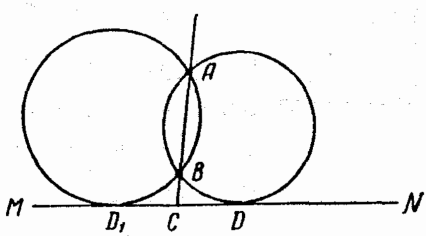
شکل ۱۲۶

۸۹۸. A و B را نقطه‌های مفروض و MN را خط راست مفروض می گیریم.

a) اگر نقطه‌های A و B در دوطرف یا روی خط راست MN باشند، مساله جواب ندارد.

b) درحالتی که AB موازی MN باشد، مساله تنها یك جواب دارد. دراین حالت، دایرهٔ مطلوب ازپای عمود وارد ازوسط AB بر NM می گذرد.

c) اگر A و B دریك طرف MN قرارگیرند و، درضمن، خط راست AB، خط راست MN را در C قطع کند، آن‌وقت، دایرهٔ مورد نظراز نقطهٔ D واقع بر MN هم می گذرد، به نحوی که CD، واسطهٔ هندسی بین دوپارهٔ خط CA و CB باشد (مسالهٔ ۸۵۱ را ببینید). دراین حالت، مساله دارای دو جواب است (شکل ۱۲۷).

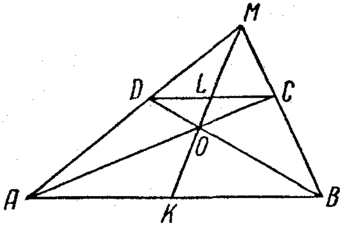


شکل ۱۲۷

d) اگر تنها یکی از دونقطهٔ A و B برخط راست MN واقع باشد، مساله تنها یك جواب دارد.

۸۹۹. ساق‌های AD و BC (شکل ۱۲۸) از ذوزنقهٔ مفروض $ABCD$ را امتداد می‌دهیم تا درنقطهٔ M به‌هم برسند، سپس، از M به نقطهٔ O، محل برخورد قطرها، وصل

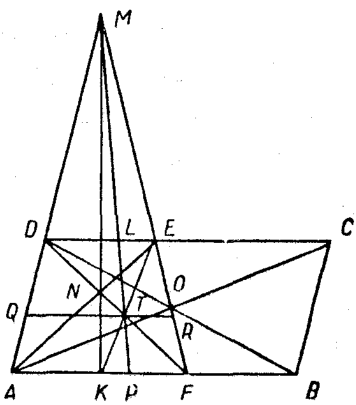
می کنیم و نقطه‌های برخورد آن را با دو قاعدهٔ ذوزنقه، L و K می‌نامیم. این خط راست، ذوزنقه را به دو بخش هم‌ارز تقسیم می‌کند. در واقع، خط راست MK، دو قاعدهٔ ذوزنقهٔ را در نقطه‌های L و K نصف می‌کند که از آن‌جا، به‌سادگی، می‌توان هم‌ارزی ذوزنقه‌های $ADLK$ و $KLCB$ را روشن کرد.



شکل ۱۲۸

برای اثبات این مطلب که، نقطه‌های L و K، وسط قاعده‌های ذوزنقه‌اند، میانهٔ مثلث AMB را که از راس M می‌گذرد، در نظر می‌گیریم. این میانه، قاعدهٔ DC را هم نصف می‌کند. ولی، خط راستی که از وسط دو قاعدهٔ ذوزنقه بگذرد، از نقطهٔ برخورد قطرهای آن هم عبور می‌کند (مسالهٔ ۸۵۹ را ببینید). بنابراین، میانه‌ای که رسم کرده‌ایم، بر خط راست MK منطبق است و نقطه‌های L و K، قاعده‌های ذوزنقه را نصف می‌کنند.

۹۰۰. خط راست MF را از نقطهٔ برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع $ABCD$ می‌گذرانیم، به‌نحوی که با ضلع‌های آن موازی نباشد (شکل ۱۲۹). این خط راست، متوازی‌الاضلاع را به دو ذوزنقه هم‌ارز $ADEF$ و $FECB$ تقسیم می‌کند (E و F نقطه‌های برخورد خط راست MF با دو ضلع روبه‌رو در متوازی‌الاضلاع‌اند). ضلع AD از متوازی‌الاضلاع را ادامه می‌دهیم تا خط راست MF را در M قطع کند، سپس، از M به N، محل برخورد قطرهای ذوزنقهٔ $ADEF$، وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا AB را در K قطع کند. محل برخورد KE و DF را T می‌نامیم و MT را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن را با AB، به P نشان می‌دهیم. خط راست MP، مساحت متوازی‌الاضلاع را به‌نسبت ۱:۲ تقسیم می‌کند. برای اثبات، پاره‌خط



شکل ۱۲۹

QR را از نقطهٔ T، موازی AB رسم می‌کنیم (Q و R، نقطه‌های برخورد آن، با ساق‌های ذوزنقهٔ $ADEF$ است). چون K، وسط پاره خط AF است (مساله ۸۹۹)، پس $QT:TR=۲:۱$ (مسالهٔ ۸۹۷) و، بنابراین $AP:PF=DL:LE=۲:۱$. ولی در این صورت، مساحت ذوزنقهٔ $ADLP$ برابر است با $\frac{۲}{۳}$ مساحت ذوزنقهٔ $ADEF$ یا $\frac{۱}{۳}$

متوازی‌الاضلاع $ABCD$.

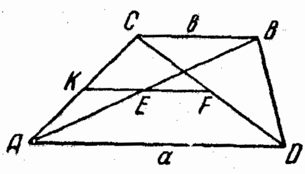
۹۰۱. روی قاعدهٔ AC ازمثلث مفروض ABC، پاره‌خط AD را برابر قاعدهٔ مفروض مثلث مجهول، جدا می کنیم. CK را موازی BD می کشیم تا AB را درنقطهٔ K قطع کند. همین نقطه، راس مثلث‌مجهول است. اثبات، از برابری مساحت‌های‌دومثلث KBD و BCD به‌دست می آید.

۹۰۲. a) اگرخط راست AB،که ازنقطه‌های مفروض A و B می گذرد، موازی با خط راست مفروض CD ویا عمود برآن نباشد، آن وقت، برای نقطهٔ برخورد خط راست CD با عمود منصف AB، مقدار $|MA-MB|$ حداقل وبرابرصفراست؛ وبرای نقطهٔ برخورد خط راست AB با خط راست CD، این مقدارحداکثر و برابر طول پاره خط AB است.

b) اگرخط راست AB، موازی CD باشد، بازهم، برای نقطهٔ M، محل برخورد عمودمنصف پاره خط AB با خط راست CD، مقدار $|MA-MB|$ حداقل و برابرصفر است، دراین حالت، نمی‌توان روی خط راست CD، نقطه‌ای پیدا کرد که، برای‌آن، مقدار $|MA-MB|$ حداکثرباشد.

c) اگر AB بر CD عمودباشد، حداکثر مقدار $|MA-MB|$، برای نقطهٔ‌برخورد AB و CD به‌دست‌می‌آید که برابراست باطول پاره‌خط AB. روی خط راست CD، چنان نقطه‌ای مثل M وجود نداردکه، برای آن، $|MA-MB|$ به حداقل مقدارخود برسد.

۹۰۳. E و F را وسط قطرهای AB و CD می گیریم (شکل ۱۳۰). ازنقطهٔ F،خط راستی‌موازی با قاعدهٔ ذوزنقه رسم می کنیم تا ساق AC را در K قطع کند. روشن است‌که K وسط AC خواهد بود (به مثلث ACD توجه کنید) و ، بنابراین ، FK از وسط AB هم می گذرد (به مثلث ABC توجه کنید) و داریم:



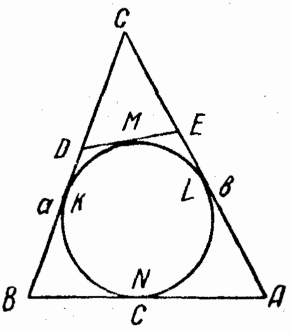
شکل ۱۳۵

$$EF=KF-KE=\frac{AD}{۲}-\frac{BC}{۲}=\frac{a-b}{۲}$$

۹۰۴. بایـد محیط مثلث DCE را پیداکرد (شکل ۱۳۱). داریـم: $AL=AN$، $BK=BN$، $EM=EL$ و $DM=DK$. ومقدار محیط مورنظر، چنین می‌شود:

$$۲p=CD+DE+CE=CD+DM+ME+CE=$$
$$=CD+(DK+EL)+CE=CK+CL=(CB-BK)+$$

$$+(CA-AL)=CB+CA-(BK+AL)=a+b-$$
$$-(BN+AN)=a+b-c$$



شکل ۱۳۱

۹۰۵. فرض می‌کنیم (شکل ۱۳۲):

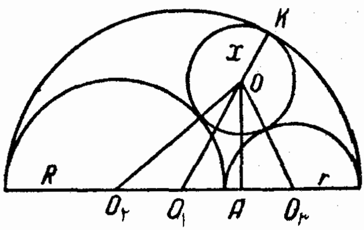
$$AD=mx,\ DB=nx,$$
$$CE=py,\ BE=qy,$$

دراین صورت، خواهیم داشت:

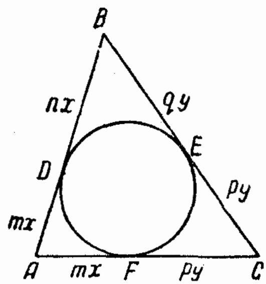
$$AB:BC:CA=(mx+nx):$$
$$:(py+qy):(mx+py)$$

ولی، مماس‌هایی که ازیك نقطه بردایره رسم شوند، با هم برابرند: $DB=BE$ یا $nx=qy$. از آن جا $\frac{x}{q}=\frac{y}{n}$ و بنابراین

$$AB:BC:CA=(mq+nq):(pn+qn):(mq+pn)=$$
$$=q(m+n):n(p+q):(mq+pn)$$



شکل ۱۳۲



شکل ۱۳۳

۹۰۶. شعاع دایرهٔ موردنظر را $OK=x$ می‌گیریم (شکل ۱۳۳). ازمثلث‌های O_2O_1O و O_1OO_3، با استفاده ازقضیهٔ مربوط به مجذورضلع مثلث، به‌دست می‌آید:

$$(R+x)^2=(R+r-x)^2+r^2+2ry;$$
$$(r+x)^2=(R+r-x)^2+R^2-2Ry$$

که در آن، $y=OA$، تصویرضلع مشترك، برپاره‌خط مفروض است. اگرمعادلهٔ اول را در R

ومعادلهٔ دوم را در r ضرب ونتیجه‌ها را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(R+x)^2R+(r+x)^2r=(R+r-x)^2(R+r)+r^2R+rR^2;$$

$$R^3+2(R^2+r^2)x+(R+r)x^2+r^3=(R+r)^3-2(R+r)^2x+$$

$$+(R+r)x^2+rR(R+r);$$

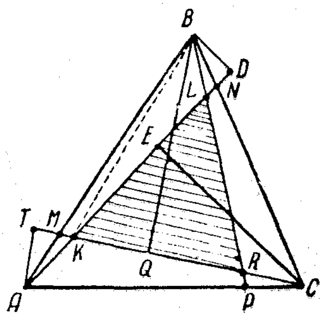
$$2x[r^2+R^2+(R+r)^2]=(R+r)^3-R^3-r^3+rR(R+r);$$

$$4x(R^2+Rr+r^2)=4Rr(R+r);$$

$$x=\frac{Rr(R+r)}{R^2+Rr+r^2}$$

۹۵۷. مساحت مجهول مثلث KLR را S_1 می‌گیریم (شکل ۱۳۴). B را به K وصل می‌کنیم ونسبت مساحت‌های دومثلث CKB و AKC را (که به ترتیب، S_2 و S_3 می‌نامیم)، تشکیل می‌دهیم. به‌دست می‌آید:

$$S_2:S_3=(KC\cdot QB):(KC\cdot AT)=BQ:AT$$



شکل ۱۳۴

ولی مثلث‌های BQM و ATM متشابه‌اند و بنابراین

$$BQ:AT=BM:MA=4:1$$

از آن‌جا $S_2:S_3=4:1$. مساحت‌مثلث AKB را S_4 می‌نامیم ونسبت مساحت‌های S_4 و S_3 را پیدا می‌کنیم:

$$S_4:S_3=(BD\cdot AK):(CE\cdot AK)=BD:CE$$

وچون $BD:CE=BN:NC=1:4$ (با توجه به‌تشابه دومثلث BDN و CEN)، بنابراین

$S_4:S_3=1:4$. دو رابطهٔ $\frac{S_2}{S_3}=4$ و $\frac{S_4}{S_3}=\frac{1}{4}$ را با هم جمع می‌کنیم، و، سپس، به‌دوطرف برابری جدید، یك واحد می‌افزاییم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{S_2+S_3+S_4}{S_3}=4+\frac{1}{4}+1;\ \frac{S}{S_3}=\frac{21}{4};\ S_3=\frac{4}{21}S$$

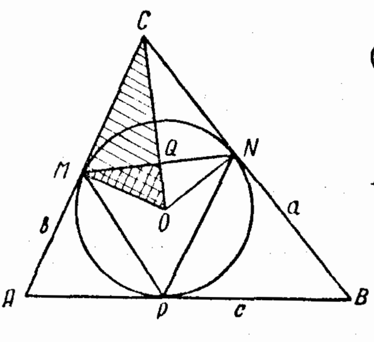
ولی استدلالی را که درمورد مثلث AKC به کار بردیم، می‌توان درمورد مثلث‌های CRB و ALB هم به‌کاربرد، به نحوی که مساحت مثلث‌های اخیرهم، برابر $\frac{4}{21}S$ مـی‌شود. از آن جا

$$S_1=S-3\times\frac{4}{21}S=S-\frac{4}{7}S=\frac{3}{7}S$$

۹۰۸. دومثلث MOC و QOM، قائم‌الزاویه و دوزاویهٔ MOQ مشترك‌انـد (شکل ۱۳۵). درنتیجه، این مثلث‌ها متشابه‌اند ومی‌توان نوشت:

$$\frac{MQ}{MO}=\frac{MC}{OC}\Rightarrow MN=2MQ=2\times\frac{MC.MO}{OC}$$

ولی $MO=R$ (شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC) است و داریم:



شکل ۱۳۵

$$MC=\frac{MC+CN}{2}=\frac{b-AM+a-NB}{2}=$$

$$=\frac{a+b-(AM+NB)}{2}=$$

$$=\frac{a+b-(AP+PB)}{2}=\frac{a+b-c}{2}=$$

$$=\frac{(a+b+c)-2c}{2}=\frac{2p-2c}{2}=p-c$$

(p، نصف محیط مثلث ABC است):

$$OC=\sqrt{OM^2+MC^2}=\sqrt{R^2+(p-c)^2}$$

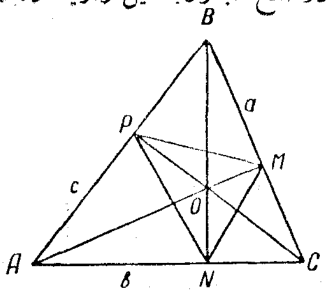
وبنابراین

$$MN=\frac{2R(p-c)}{\sqrt{R^2+(p-c)^2}};R=\frac{abc}{4S}=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}};$$

به همین ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$MP=\frac{2R(p-a)}{\sqrt{R^2+(p-a)^2}};\ NP=\frac{2R(p-b)}{\sqrt{R^2+(p-b)^2}}$$

۹۵۹. MNP را مثلثی می‌گیریم که می‌خواهیم مساحت آن‌را محاسبه کنیم (شکل ۱۳۶). از ضلع MN آغاز می‌کنیم. برای این منظور، دو مثلث MNC و ABC را درنظر می‌گیریم. این دو مثلث متشابه‌اند، زیرا زاویهٔ C در آن‌ها مشترك و دو ضلع مجاور به این زاویه، در دو مثلث، متناسب‌اند. تناسب اخیر از تشابه مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ AMC و BNC به‌دست می‌آید، به‌نحوی که $\frac{MC}{NC}=\frac{AC}{BC}$. از تشابه مثلث‌های MNC و ABC داریم:



شکل ۱۳۶

$$MN:R_1=c:R\Rightarrow MN=cR_1:R$$

R_1 و R، شعاع دایره‌های محیطی مثلث‌ها هستند.

شعاع R را می‌توانیم مفروض بگیریم، زیرا از رابطهٔ $R=\frac{abc}{4S}$ به‌دست می‌آید ودرضمن $R_1=\frac{1}{2}OC$، زیرا دایرهٔ محیطی مثلث MNC از نقطهٔ O می‌گذرد (مجموع دو زاویهٔ OMC و ONC برابراست با ۱۸۰ درجه)؛ و OC قطراست. به این ترتیب

$$MN=\frac{cR_1}{R}=\frac{c\cdot OC}{2R}=\frac{c(PC-PO)}{2R}=\frac{c\cdot PC-c\cdot PO}{2R}=$$

$$=\frac{2S-2S_1}{2R}=\frac{S-S_1}{R}$$

که درآن، S_1 مساحت مثلث ABO است. به‌همین‌ترتیب

$$NP=\frac{S-S_2}{R}\ \text{و}\ PM=\frac{S-S_3}{R}$$

(S_2 و S_3، به‌ترتیب، مساحت مثلث‌های BCO و ACO هستند). بنابراین

$$۲p=MN+Np+PM=\frac{۳S-(S_۱+S_۲+S_۳)}{R}=$$

$$=\frac{۳S-S}{R}=\frac{۲S}{R}=\frac{۸S^۲}{abc}$$

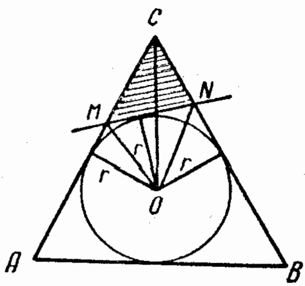
۹۱۰. فرض می کنیم $AC=a$ و $BC=b$ (شکل ۱۳۷). به‌دست می‌آید:

$$۲r=CD+CE=AC-AD+CB-BE=AC-AF+CB-BF=$$

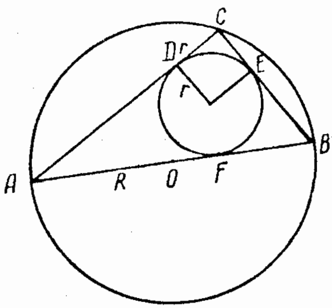
$$=a+b-(AF+FB)=a+b-۲R=\sqrt{(a+b)^۲}-۲R=$$

$$=\sqrt{a^۲+b^۲+۲ab}-۲R=\sqrt{۴R^۲+۴S}-۲R$$

و از آن‌جا: $r=\sqrt{R^۲+S}-R$.



شکل ۱۳۸



شکل ۱۳۷

۹۱۱. باید مساحت S ازمثلث MCN را پیداکنیم (شکل ۱۳۸). بادردست‌داشتن ضلع‌های مثلث ABC، می‌توان طول شعاع دایرهٔ محاطی درآن را به‌دست‌آورد. به همین مناسبت، این شعاع را مفروض می گیریم وبا r نشان می‌دهیم. ازشکل دیده می‌شود:

$$S=S_{MCO}+S_{NCO}-S_{MNO}=\frac{۱}{۲}MC\cdot r+\frac{۱}{۲}NC\cdot r-\frac{۱}{۲}MN\cdot r=$$

$$=\frac{۱}{۲}(MC+NC-MN)r=\frac{۱}{۲}(MC+NC+MN-۲MN)r=$$

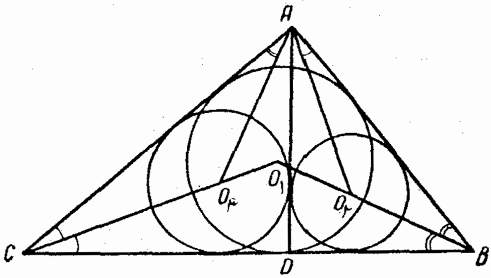
$$=\frac{۱}{۲}(۲p-۲a)r=(p-a)r$$

$۲p$، محیط مثلث MCN است. این محیط $۲p=a+b-c$ (حل مسالهٔ ۹۰۴ را ببینید).

یادداشت. دایرهٔ محاطی‌مثلث ABC را، نسبت به‌مثلث MCN، دایرهٔ‌محاطی بیرونی

گویند. برای هرمثلث، سه‌دایرهٔ محاطی بیرونی وجود دارد. اگر طول ضلع‌های مثلث را a و b و c وطول شعاع‌های دایره‌های محاطی بیرونی را r_a و r_b و r_c بگیریم، از حل مسالهٔ ۹۱۱ معلوم می‌شود که:

$$S=(p-a)r_a=(p-b)r_b=(p-c)r_c$$



شکل ۱۳۹

۹۱۲. O_1، O_2 و O_3 را مرکز دایره‌های محاطی مثلث‌های ABC، ABD و CDA می‌گیریم (شکل ۱۳۹)؛ D، پـای عمود وارد ازراس A برضلع BC است. از تشابه دو مثلث ABO_2 و BCO_2 و دومثلث BCO_1 و ACO_3 به‌دست می‌آید:

$$r_1 : R = AB : BC \text{ و } r_2 : R = AC : CB$$

از آن‌جا

$$\frac{r_1^2}{R^2}=\frac{AB^2}{AC^2}\ ;\ \frac{r_2^2}{R^2}=\frac{AC^2}{BC^2} \Rightarrow \frac{r_1^2+r_2^2}{R^2}=\frac{AB^2+AC^2}{BC^2}=1$$

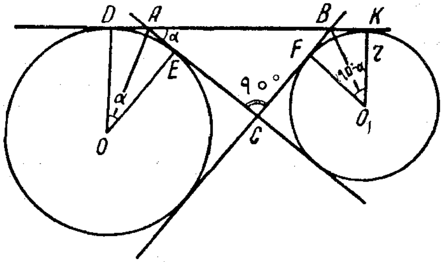
به این ترتیب: $R^2=r_1^2+r_2^2$ یا $R=\sqrt{r_1^2+r_2^2}$.

۹۱۳. مساحت مثلث ABC را S می‌نـامیم (شکل ۱۴۰). مرکزهـای O و O_1 را به‌نقطه‌هـای تماس وصل می‌کنیم و زاویهٔ DOE را α می‌گیریم. توجه می‌کنیم که زاویهٔ FO_1K برابر $90^\circ-\alpha$ می‌شود. به‌این ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot CB=\frac{1}{2}(R+AE)(r+BF)=$$

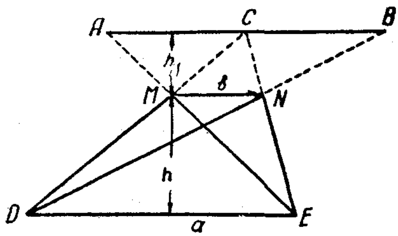
$$=\frac{1}{2}\left(R+Rtg\frac{\alpha}{2}\right)\left[r+rtg\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}Rr\left(1+tg\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\frac{1-tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg\frac{\alpha}{2}}\right)=Rr$$



شکل ۱۴۰

۹۱۴. مثلث DME با AMC، مثلث DNE با CNB و مثلث MNF با ACE متشابه‌اند (شکل ۱۴۱). از آن‌جا به‌دست می‌آید:



شکل ۱۴۱

$$\frac{AC}{a}=\frac{h_1}{h}\ ;\ \frac{CB}{a}=\frac{h_1}{h}\ ;\ \frac{AC}{b}=\frac{h_1+h}{h}\ ;\ \frac{AC}{b}-\frac{AC}{a}=$$

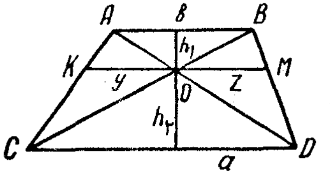
$$=\frac{h_1+h}{h}-\frac{h_1}{h}=1\ ;\ AC=\frac{ab}{a-b}$$

وچون $\frac{AC}{a}=\frac{h_1}{h}$ و $\frac{BC}{a}=\frac{h_1}{h}$، پس $AC=BC$ و بنابراین

$$AB=AC+BC=2AC=\frac{2ab}{a-b}$$

۹۱۵. از تشابه دومثلث ACD و AKO به‌دست می‌آید $\frac{y}{a}=\frac{h_1}{h_1+h_2}$ (شکل ۱۴۲) واز تشابه مثلث‌های ACB و KCO: $\frac{y}{b}=\frac{h_2}{h_1+h_2}$. از آن‌جا

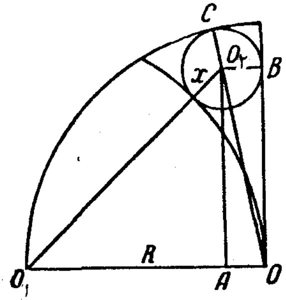
$$\frac{y}{a}+\frac{y}{b}=1 \Rightarrow y=\frac{ab}{a+b}$$



شکل ۱۴۲

به‌همین ترتیب: $z=\frac{ab}{a+b}$ و $KM=\frac{2ab}{a+b}$.

۹۱۶. شعاع مجهول را x مـی گیریم (شکل ۱۴۳). داریم:



شکل ۱۴۳

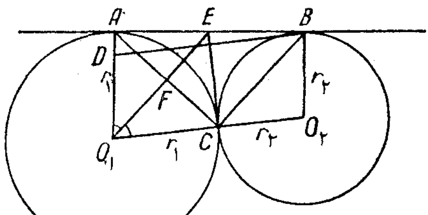
$$O_1O_2^2=O_1A^2+O_2A^2\,;$$
$$(R+x)^2=(R-x)^2+O_2A^2\,;$$
$$O_2A^2=(R+x)^2-(R-x)^2=4Rx$$

به‌همین ترتیب

$$OO_2^2=O_2B^2+OB^2=O_2B^2+O_2A^2\,;$$
$$(R-x)^2=x^2+4Rx\,;\ x=\frac{1}{6}R$$

۹۱۷. درمثلث ABD (شکل ۱۴۴)، داریم:

$$AB^2=BD^2-AD^2=(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2=4r_1r_2$$



شکل ۱۴۴

مماس‌مشترك دودایره را درنقطهٔ C رسم می‌کنیم ونقطهٔ برخوردآن رابا AB، E می‌نامیم. E را به O_1 وصل می‌کنیم. چون

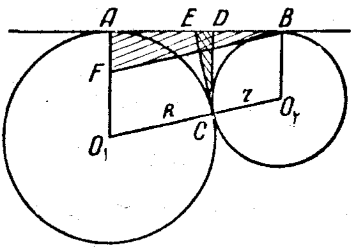
$$AE=EC=EB=\sqrt{r_1r_2}$$

بنابراین دومثلث O_1AE وO_1EC و، درنتیجه، دوزاویهٔ AO_1E وCO_1E برابرند. به‌این ترتیب، دومثلث قائم‌الزاویهٔ O_1AF وO_1EG متشابه می‌شوند؛ یعنی، باتوجه‌به $AO_1=r_1$، $EC=\sqrt{r_1r_2}$ و $O_1E=\sqrt{r_1^2+r_2^2}$، به‌ترتیب داریم:

$$\frac{AF}{AO_۱}=\frac{EC}{O_۱E}; \ AF=AO_۱\cdot\frac{EC}{O_۱E}=r_۱\cdot\frac{\sqrt{r_۱r_۲}}{\sqrt{r_۱^۲+r_۱r_۲}}=$$

$$=r_۱\cdot\sqrt{\frac{r_۲}{r_۱+r_۲}}; \ AC=۲AF=۲r_۱\sqrt{\frac{r_۲}{r_۱+r_۲}}$$

به‌همین ترتیب $BC=۲r_۲\sqrt{\frac{r_۱}{r_۱+r_۲}}$. قبلاً هم به‌دست آوردیم: $AB=۲\sqrt{r_۱r_۲}$.



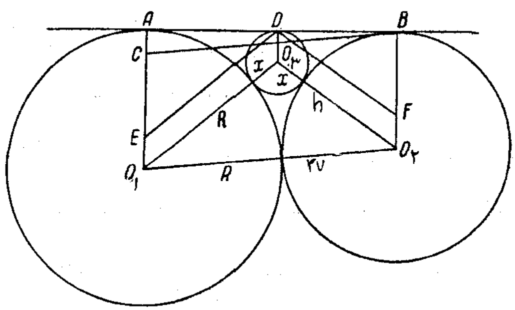
شکل ۱۴۵

۹۱۸. CD را عمود بر AB، OF را موازی $O_۱O_۲$ و EC را عمود بر $O_۱O_۲$ رسم کنیم (شکل ۱۴۵). مثلث‌های متشابه ABF و DEC به‌دست می‌آید. (ضلع‌های دو مثلث، نظیر به‌نظیر، برهم عمودند). داریم: $\frac{CD}{CE}=\frac{AB}{BF}$. ولی $AB=۲\sqrt{Rr}$، $CE=\sqrt{Rr}$ (حل مسالهٔ ۹۱۷ را ببینید) و $BF=R+r$. درنتیجه

$$CD=CE\cdot\frac{AB}{BF}=\sqrt{Rr}\cdot\frac{۲\sqrt{Rr}}{R+r}=\frac{۲Rr}{R+r}$$

۹۱۹. BC را موازی $O_۱O_۲$ رسم می‌کنیم (شکل ۱۴۶). درمثلث ABC داریم:

$$AB=\sqrt{BC^۲-AC^۲}=\sqrt{(R+r)^۲-(R-r)^۲}=۲\sqrt{Rr}$$



شکل ۱۴۶

BE را موازی $O_۱O_۳$ می‌کشیم. از مثلث قائم‌الزاویهٔ ADE به‌دست می‌آید:

$$AD=\sqrt{ED^۲-AE^۲}=\sqrt{(R+x)^۲-(R-x)^۲}=۲\sqrt{Rx}$$

x، شعاع دایرهٔ موردنظر است. سرانجام، اگر DF را موازی O_2O_3 رسم کنیم، داریم:

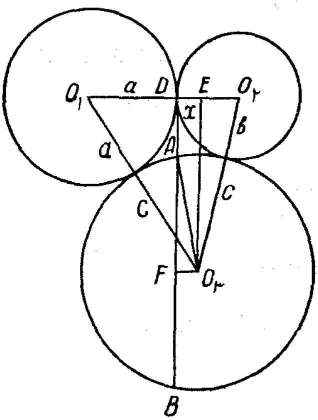
$$DB=\sqrt{DF^2-BF^2}=\sqrt{(r+x)^2-(r-x)^2}=2\sqrt{rx}$$

ولی $AB=AD+DB$ یا $2\sqrt{Rr}=2\sqrt{Rx}+2\sqrt{rx}$، بنابراین

$$\sqrt{x}=\frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R}+\sqrt{r}}\Rightarrow x=\frac{Rr}{(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2}$$

دایرهٔ دیگری هم مماس بر دایره‌های مفروض (از پایین) و خط راست AB وجود دارد که شعاع آن $x=\dfrac{Rr}{(\sqrt{R}-\sqrt{r})^2}$ است.

۹۲۰. O_3E را عمود بر O_1O_2 و O_3F را عمود بر AB می‌گیریم و O_3 را به انتهای A از پاره‌خط مجهول AB وصل می‌کنیم (شکل ۱۴۷). روشن است که



شکل ۱۴۷

$$AB=2AF=2\sqrt{AO_3^2-FO_3^2}=2\sqrt{c^2-x^2}$$

که در آن $x=O_3F=DE$. برای پیداکردن x، مثلث‌های O_1O_3E و O_2O_3E را درنظر می‌گیریم که در ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ O_3E مشترک‌اند. داریم:

$$O_3E^2=O_3O_1^2-O_1E^2=O_3O_2^2-O_2E^2$$

و از آن‌جا

$$(c+a)^2-(a+x)^2=(b+c)^2-(b-x)^2;$$

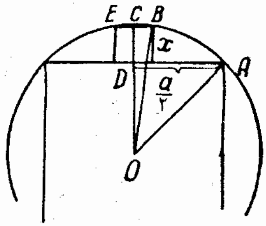
$$(a+x)^2-(b-x)^2=(a+c)^2-(b+c)^2;$$

$$(a+b)(a-b+2x)=(a+b+2c)(a-b);$$

$$a^2-b^2+2x(a+b)=a^2-b^2+2c(a-b);$$

$$x=c\cdot\frac{a-b}{a+b};\ AB=2\sqrt{c^2-x^2}=4c\cdot\frac{\sqrt{ab}}{a+b}$$

۹۲۱. OC را عمود بر BE رسم می‌کنیم (O، مرکز دایره است) و ازنقطهٔ O به‌راس A ازمربع مفروض و به‌راس B ازمربع محاطی وصل می‌کنیم (شکل ۱۴۸). ضلع مجهول را x می‌گیریم. درمثلث قائم‌الزاویهٔ OBC داریم:



شکل ۱۴۸

$$OB^۲=BC^۲+OC^۲=BC^۲+(OD+DC)^۲=\left(\frac{x}{۲}\right)^۲+\left(\frac{a}{۲}+x\right)^۲$$

ولی $OA=OB$ و ازمثلث قائم‌الزاویهٔ OAD به‌دست می‌آید:

$$AO^۲=OD^۲+DA^۲=\frac{a^۲}{۴}+\frac{a^۲}{۴}=\frac{a^۲}{۲}$$

بنابراین

$$\frac{a^۲}{۲}=\left(\frac{x}{۲}\right)^۲+\left(\frac{a}{۲}+x\right)^۲\Rightarrow x=\frac{a}{۵}$$

۹۲۲. ازاین‌گونه دایره‌ها، سه‌تا وجود دارد (در شکل ۱۴۹، یکی از آن‌ها، دایرهٔ $O_۳$ و دوتای دیگر، دایره‌های نقطه‌چین‌اند). شعاع دایرهٔ مجهول را x و مرکزهای دایره‌های مفروض را $O_۱$ و $O_۲$ می‌گیریم. $O_۳$ را به $O_۱$ و $O_۲$ وصل می‌کنیم واز $O_۳$ عمود $O_۳A$ را برخط‌راست $O_۱O_۲$ فرود می‌آوریم. به‌مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ $O_۱O_۳A$ و $O_۲O_۳A$، که درضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه $O_۳A$ مشترك‌اند، توجه می‌کنیم. داریم:

$$O_۳A^۲=O_۱O_۳^۲-O_۱A^۲=O_۲O_۳^۲-O_۲A^۲;$$

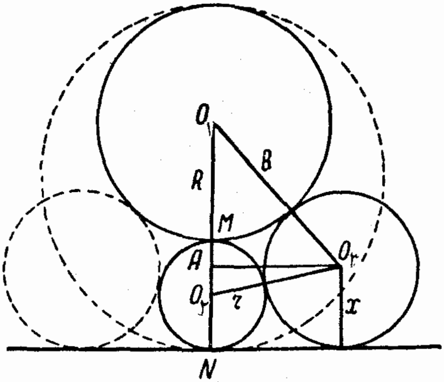
$$(R+x)^۲-(R+۲r-x)^۲=(r+x)^۲-(x-r)^۲$$

با حل این معادله به‌دست می‌آید: $x=\frac{r}{R}(R+r)$.

به‌سادگی معلوم می‌شود که شعاع هریك از دودایرهٔ دیگر چنین است:

$$\frac{۲R+۲r}{۲}=R+r \text{ و } \frac{r}{R}(R+r)$$

۹۲۳. همان‌طور که ازشکل ۱۵۰ دیده می‌شود:



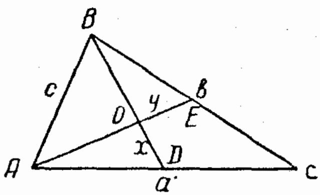
شکل ۱۴۹

$$DM=\sqrt{DE^2+ME^2}=\sqrt{(DL+LE)^2+EC^2}=$$

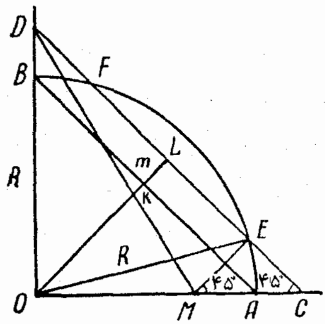
$$=\sqrt{(OL+LE)^2+(LC-EL)^2}=\sqrt{(OL+LE)^2+(OL-LE)^2}=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{OL^2+LE^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{OE^2}=\sqrt{2}OE=R\sqrt{2}$$

چون طول پاره‌خط DM شامل m نیست، بنابراین، به m بستگی ندارد.



شکل ۱۵۱



شکل ۱۵۰

۹۲۴. ضلع مجهول را با حرف c نشان می‌دهیم (شکل ۱۵۱). چون مثلث‌های AOB، BOE و AOD قائم‌الزاویه‌اند، به‌دست می‌آید:

$$AO^2+OD^2=AD^2;\ BO^2+OE^2=BE^2;\ BO^2+AO^2=AB^2$$

نقطهٔ O هریك ازمیانه‌ها را به‌نسبت ۲ : ۱ تقسیم‌می کند. بنابراین، اگر فرض کنیم $OD=x$ و $OE=y$، آن‌وقت $AO=2y$ و $BO=2x$. چون به‌جزاین، $BE=\frac{b}{2}$، $AD=\frac{a}{2}$ و

$AB=c$، برابری‌های فوق به‌این صورت درمی‌آیند:

$$۴y^{۲}+x^{۲}=\frac{a^{۲}}{۴};\ ۴x^{۲}+y^{۲}=\frac{b^{۲}}{۴};\ ۴x^{۲}+۴y^{۲}=c^{۲}$$

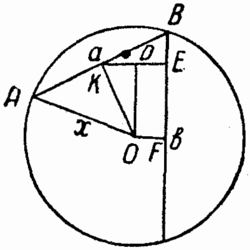
از مجموع دومعادلهٔ اول به‌دست می‌آید:

$$۵x^{۲}+۵y^{۲}=\frac{a^{۲}+b^{۲}}{۲}\Rightarrow ۴x^{۲}+۴y^{۲}=\frac{a^{۲}+b^{۲}}{۵}$$

وبا استفاده از معادلهٔ سوم، خواهیم داشت:

$$c=\sqrt{\frac{a^{۲}+b^{۲}}{۵}}$$

شعاع مجهول را x می‌نامیم (شکل ۱۵۲). چون زاویهٔ AKO قائمه است، ازمثلث AOK به‌دست می‌آید: $x=AO=\sqrt{AK^{۲}+KO^{۲}}$. $AK=\frac{a}{۲}$ و طول OK ازتشابه مثلث‌های OKD و KBE به‌دست می‌آید (ضلع‌های مثلث‌های اخیر برهم عمودند):



شکل ۱۵۲

$$KO:OD=KB:KE$$

ولی $KB=\frac{a}{۲}$؛ $KE=d$ و

$$BE=\sqrt{KB^{۲}-KE^{۲}}=\sqrt{\frac{a^{۲}}{۴}-d^{۲}};$$

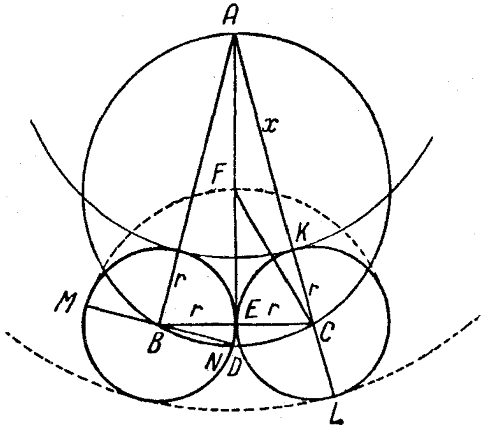
$$OD=EF=BF-BE=\frac{b}{۲}\sqrt{\frac{a^{۲}}{۴}-d^{۲}};$$

$$KO=OD\cdot\frac{KB}{KE}=\left(\frac{b}{۲}-\sqrt{\frac{a^{۲}}{۴}-d^{۲}}\right)\frac{a}{۲d}$$

و به‌این ترتیب

$$x=\frac{a}{۴d}\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۲b\sqrt{a^{۲}-۴d^{۲}}}$$

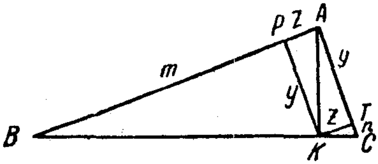
۹۲۶. چهار دایره ازاین‌گونه وجود داردکه دوتا ازآن‌ها به‌مرکز A ودوتای دیگر به‌مرکز D هستند. ازبین این چهار دایره، دایرهٔ بـه‌مرکز A وشعاع $AK=x$ را بررسی می‌کنیم (شکل ۱۵۳). روی ساختمانی‌که از شکل ۱۵۳ روشن است، مثلث‌های ACE و



شکل ۱۵۳

FCE را درنظر می‌گیریم. بنابرقضیهٔ فیثاغورث داریم:

$$AC^{۲}=AE^{۲}+EC^{۲}=(AF+FE)^{۲}+CE^{۲}$$



شکل ۱۵۴

ولی

$$AC=AK+KC=x+r\,;\ AF=۲r\,;$$

$$EF=\sqrt{FC^{۲}-EC^{۲}}=\sqrt{۴r^{۲}-r^{۲}}=r\sqrt{۳}\,;$$

$$(x+r)^{۲}=(۲r+r\sqrt{۳})^{۲}+r^{۲}\,;$$

$$(x+r)^{۲}=۸r^{۲}+۴\sqrt{۳}r^{۲}\,;$$

$$x=-r+۲r\sqrt{۲+\sqrt{۳}}=r(\sqrt{۶}+\sqrt{۲}-۱)$$

شعاع‌های دایره‌های دیگر (دوتا از آن‌ها، بانقطه‌چین نشان داده‌شده است)، چنین‌اند

$$AL=r(\sqrt{۶}+\sqrt{۲}+۱)\,;\ DN=r(\sqrt{۶}-\sqrt{۲}-۱)\,;\ DM=r(\sqrt{۶}-\sqrt{۲}+۱)$$

جواب را می‌توان، به‌این‌صورت کلی نوشت:

$$r(\sqrt{۶}\pm\sqrt{۲}\pm۱)$$

۹۲۷. $KP=y$ و $KT=z$ می‌گیریم (شکل ۱۵۴). بااستفاده ازخاصیت ارتفاع وارد بروتر درمثلث قائم‌الزاویه، داریم: $y^{۲}=mz$، $z^{۲}=ny$ وبنابراین

$$z=\frac{y^{۲}}{m}\,;\ \frac{y^{۴}}{m^{۲}}=ny\,;\ y^{۳}=m^{۲}n\,;\ y=\sqrt[۳]{m^{۲}n}\,;\ \ z=\sqrt[۳]{mn^{۲}}$$

اکنون، وتر را بااستفاده از قضیهٔ فیثاغورث، محاسبه می‌کنیم:

$$BC^{۲}=AB^{۲}+AC^{۲}=(m+z)^{۲}+(n+y)^{۲}=(m+\sqrt[۳]{mn^{۲}})^{۲}+(n+\sqrt[۳]{m^{۲}n})^{۲}=$$

$$=\sqrt[۳]{m^{۲}}(\sqrt[۳]{m^{۲}}+\sqrt[۳]{n^{۲}})^{۲}+\sqrt[۳]{n^{۲}}(\sqrt[۳]{n^{۲}}+\sqrt[۳]{m^{۲}})^{۲}=(\sqrt[۳]{m^{۲}}+\sqrt[۳]{n^{۲}})^{۳}$$

اگر $BC=x$ فرض کنیم، سرانجام داریم:

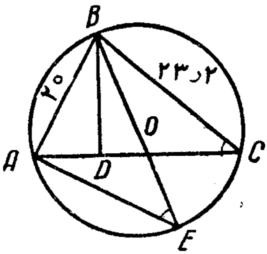
$$x^{\frac{۲}{۳}}=m^{\frac{۲}{۳}}+n^{\frac{۲}{۳}}\Rightarrow x=(m^{\frac{۲}{۳}}+n^{\frac{۲}{۳}})^{\frac{۳}{۲}}$$

۹۲۸. $LK^{۲}=AK\cdot KB$ (شکل ۱۵۵)، که در آن، K تصویر C بر AB است. ولی دومثلث AHK و CKB متشابه‌اند (ضلع‌های متناظر عمود برهم)، بنابراین

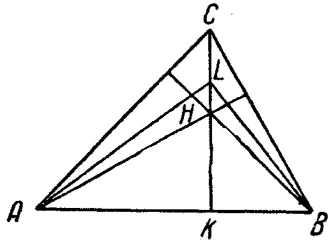
$$AK:HK=CK:KB\Rightarrow AK\cdot KB=CK\cdot HK;$$

$$LK^{۲}=CK\cdot HK;\ LK=\sqrt{CK\cdot HK};\ S=\frac{۱}{۲}AB\cdot LK=$$

$$=\frac{۱}{۲}AB\sqrt{CK\cdot HK}=\sqrt{\frac{۱}{۲}AB\cdot CK\cdot\frac{۱}{۲}AB\cdot HK}=\sqrt{S_{۱}S_{۲}}$$



شکل ۱۵۶



شکل ۱۵۵

۹۲۹. این شعاع را می‌توان به کمک رابطهٔ $r=\frac{S}{p}$ به‌دست آورد، به شرطی که بتوانیم ضلع سوم مثلث را پیدا کنیم (شکل ۱۵۶). مثلث با ضلع‌های مفروض را، ABC می‌گیریم. دایرهٔ محیطی آن، ارتفاع BD و قطر BE را رسم می‌کنیم. E را به‌راس A از مثلث وصل می‌کنیم، مثلث قائم‌الزاویهٔ ABE به‌دست می‌آید که با مثلث CBD متشابه است وداریم:

$$\frac{BD}{AB}=\frac{BC}{BE};\ BD=AB\cdot\frac{BC}{BE}=۲۰\times\frac{۲۳\frac{۱}{۵}}{۲۹}=۱۶;$$

$$AC=AD+DC=\sqrt{AB^۲-BD^۲}+\sqrt{BC^۲-BD^۲}=\sqrt{۲۰^۲-۱۶^۲}+$$

$$+\sqrt{\left(\frac{۱۱۶}{۵}\right)^۲-۱۶^۲}=۱۲+\frac{۸۴}{۵}=\frac{۱۴۴}{۵};$$

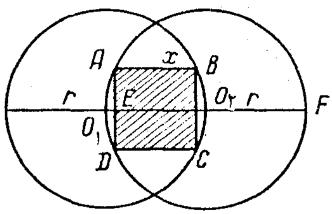
$$S=\frac{۱}{۲}AC\cdot BD=\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱۴۴}{۵}\cdot ۱۶=\frac{۱۱۵۲}{۵};$$

$$p=\frac{۱}{۲}\left(۲۰+\frac{۱۱۶}{۵}+\frac{۱۴۴}{۵}\right)=۳۶\,;\, r=\frac{۱۱۵۲}{۵\times ۳۶}=۶/۴$$

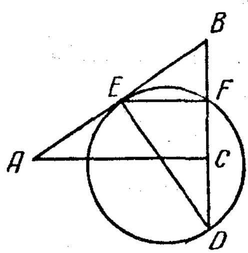
۹۳۰. نقطهٔ E وسط وتررا به‌نقطهٔ F وسط ضلع وصل می کنیم (شکل ۱۵۷). EF موازی AC و، بنابراین، عمود بر BC است. یعنی زاویهٔ DFE، زاویه‌ای قائمه ومحاطی است. به‌این ترتیب، عمود ED بروتر درنقطهٔ تماس وتر بادایره، امتداد ضلع BC را در نقطه D واقع برمحیط دایـره قطع می کند، یعنی ED قطر دایره است. دومثلث EBD و ABC متشابه‌اند، زیرا قائم‌الزاویه و دریك زاویهٔ حاده مشترك‌اند. داریم:

$$\frac{ED}{BE}=\frac{AC}{BC}\,;\, BE=\frac{۱}{۲}AB=\frac{۱}{۲}\sqrt{AC^۲+BC^۲}=\frac{۵}{۲};$$

$$ED=۲r=BE\cdot\frac{AC}{BC}=\frac{۵}{۲}\cdot\frac{۴}{۳}=\frac{۱۰}{۳}\,;\, r=\frac{۵}{۳};\, S=\frac{۲۵}{۹}\pi$$



شکل ۱۵۸



شکل ۱۵۷

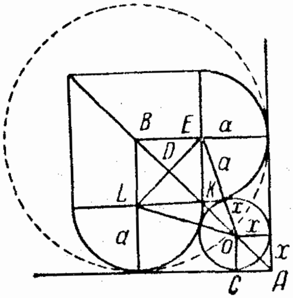
۹۳۱. ضلع مجهول را x و خودمربع را $ABCD$ می‌نامیم (شکل۱۵۸). به‌سادگی روشن می‌شودکه AD بر $O_۱O_۲$ عمود است و بـراساس قضیهٔ مربوط به عمودی‌که ازیك نقطهٔ محیط دایره برقطر رسم کنیم، داریم:

$$AE^۲=O_۱E\cdot EF\left(AE=\frac{x}{۲};\, O_۱E=\frac{r-x}{۲};\; EF=\right.$$

$$\left.=O_۱F-O_۱E=۲r-\frac{r-x}{۲}=\frac{۳r+x}{۲}\right);$$

$$\left(\frac{x}{۲}\right)^۲=\frac{r-x}{۲}\cdot\frac{۳r+x}{۲};\ x=\frac{r(\sqrt{۷}-۱)}{۲}$$

۹۳۲. مرکز دایرهٔ مجهول را O (دایرهٔ دومی را که می‌توان رسم کرد، با نقطه‌چین نشان داده‌ایم) و شعاع مجهول را x می‌گیریم (شکل ۱۵۹). ساختمان‌های لازم را، که روی شکل معلوم است، انجام می‌دهیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ EDO داریم:



شکل ۱۵۹

$$EO^۲=ED^۲+DO^۲=ED^۲+$$
$$+(AB-BD-OA)^۲$$

از طرف دیگر

$$EO=a+x;\ ED=\frac{۱}{۲}EL=\frac{۱}{۲}\sqrt{EK^۲+KL^۲}=$$

$$=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+a^۲}=\frac{a\sqrt{۲}}{۲};\ AB=۲EL=۲a\sqrt{۲};$$

$$BD=\frac{۱}{۲}EL=\frac{a\sqrt{۲}}{۲};\ OA=\sqrt{OC^۲+AC^۲}=x\sqrt{۲}$$

و درنتیجه خواهیم داشت:

$$(a+x)^۲=\left(\frac{a\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲+\left(۲a\sqrt{۲}-\frac{a\sqrt{۲}}{۲}-x\sqrt{۲}\right)^۲$$

با حل این معادله به‌دست می‌آید: $x=۲(۲-\sqrt{۳})a$.

شعاع دایرهٔ نقطه‌چین برابراست با $۲a$.

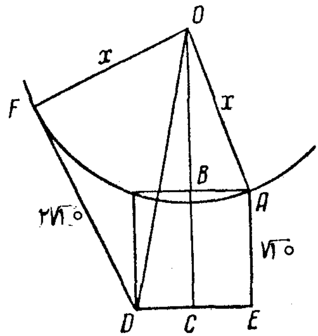
۹۳۳. شعاع مجهول را x می‌گیریم (شکل ۱۶۰). به‌مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ OAB و ODF توجه می‌کنیم. داریم:

$$OA^۲=OB^۲+AB^۲=(OC-CB)^۲+AB^۲=AB^۲+(\sqrt{OD^۲-DC^۲}-$$
$$-CB)^۲=AB^۲+(\sqrt{OF^۲+FD^۲-DC^۲}-CB)^۲$$

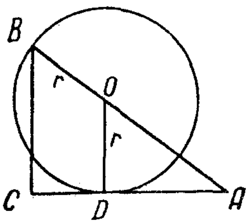
ازطرف دیگر

$$OA=x;\ OF=x;\ FD=۲\sqrt{۱۰};\ DC=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰};\ CB=\sqrt{۱۰}$$

که اگر در برابری فوق قرار دهیم، به معادله‌ای برحسب x می‌رسیم و به دست می‌آید: $x=۵$.



شکل ۱۶۰



شکل ۱۶۱

۹۳۴. شعاع مجهول را r می‌نامیم (شکل ۱۶۱). ازمرکزدایره به نقطهٔ تماس آن با ضلع بزرگترمجاور به‌زاویهٔ قائمه‌وصل‌می‌کنیم. چون OD موازی BC است، دومثلث OAD و BAC متشابه‌اند ومی‌توان نوشت: $\frac{OD}{OA}=\frac{BC}{BA}$. ولی

$$OD=r,\ BC=۳,\ AB=\sqrt{۹+۱۶}=۵,\ OA=۵-r$$

وتناسب به صورت $\frac{r}{۵-r}=\frac{۳}{۵}$ درمی‌آید. ازآن‌جا $r=\frac{۱۵}{۸}$.

۹۳۵. درمثلث‌های قائم‌الزاویهٔ $AO_۱B$، AOB و $COO_۱$ (شکل ۱۶۲) داریم:

$$AO_۱^۲-O_۱B^۲=AO^۲-BO^۲;\ ۹-O_۱B^۲=۲۵-(۵-O_۱B)^۲;$$

$$O_۱B=\frac{۹}{۱۰};\ CO=\sqrt{OO_۱^۲-O_۱C^۲}=۴$$

ازتشابه مثلث‌های $O_۱KB$ و $O_۱CO$ به‌دست می‌آید:

$$KB:O_۱B=CO:O_۱C;\ KB=O_۱B\cdot\frac{OC}{O_۱C}=\frac{۹}{۱۰}\cdot\frac{۴}{۳}=\frac{۶}{۵};$$

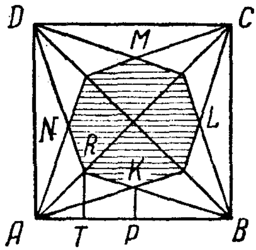
$$OB=OO_۱-O_۱B=۵-\frac{۹}{۱۰}=\frac{۴۱}{۱۰}$$

و ازآن‌جا، با توجه به قضیهٔ فیثاغورث

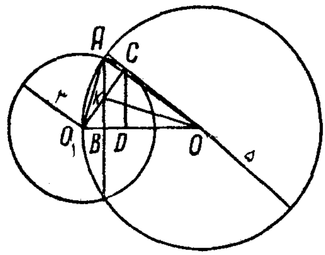
$$OK=\sqrt{KB^{۲}+OB^{۲}}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۷۳}$$

۹۳۶. روشن است که مساحت مجهول S، برابر است با مجموع مساحت‌های مثلث‌های AKB، BLC، CMD و DNA (شکل ۱۶۳). ولی این مثلث‌ها برابرند و، بنابراین، می‌توان نوشت:

$$S=۴S_{AKB}=۴\times\frac{۱}{۲}AB\cdot KP=۴+\frac{۱}{۲}a\cdot KP$$



شکل ۱۶۳



شکل ۱۶۲

باید طول KP را محاسبه کنیم. از تشابه دو مثلث KPB و PTB به‌دست می‌آید:

$$KP:RT=PB:TB\Rightarrow KP=RT\cdot\frac{PB}{TB}$$

چون مساحت لوزی برابر است با نصف مساحت مربع و، درضمن، لوزی و مربع در یک قطر مشترک‌اند، بنابراین، قطر دیگر لوزی برابر نصف قطر مربع می‌شود. به این ترتیب، به‌سادگی به‌دست می‌آید:

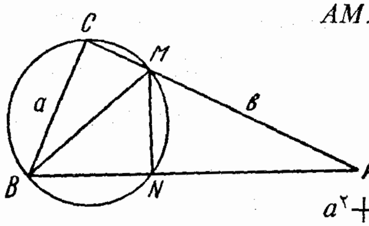
$$RT=\frac{۱}{۴}CB=\frac{۱}{۴}a;\quad BT=\frac{۳}{۴}AB=\frac{۳}{۴}a$$

اما، علاوه براین، داریم: $PB=\frac{۱}{۲}a$. به این ترتیب

$$KP=RT\cdot\frac{BP}{BT}=\frac{a}{۶};\quad S=۴\times\frac{۱}{۲}a\times\frac{a}{۶}=\frac{a^{۲}}{۳}$$

۹۳۷. روشن است که شعاع این دایره، برابر است با $\frac{۱}{۲}BM$ (شکل ۱۶۴). بنابر قضیه فیثاغورث داریم:

$$BM^۲=BC^۲+CM^۲=a^۲+CM^۲;\ CM=AC-AM=b-AM$$



شکل ۱۶۴

ومقدار AM را از تشابه مثلث‌های ABC و AMN به‌دست می‌آوریم. در واقع داریم:

$$\frac{AB^۲}{AM^۲}=\frac{S_{ABC}}{S_{AMN}}=۲;\ AB^۲=a^۲+b^۲;$$

$$\frac{a^۲+b^۲}{AM^۲}=۲;\ AM^۲=\frac{a^۲+b^۲}{۲};$$

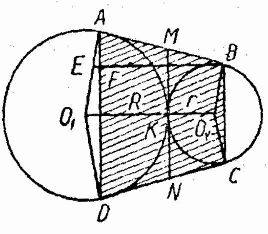
$$CM=b-AM=b-\sqrt{\frac{a^۲+b^۲}{۲}};$$

$$BM^۲=a^۲+CM^۲=a^۲+\left(b-\sqrt{\frac{a^۲+b^۲}{۲}}\right)^۲=a^۲+b^۲-$$

$$-۲b\sqrt{\frac{a^۲+b^۲}{۲}}+\frac{a^۲+b^۲}{۲}=\frac{۳}{۲}(a^۲+b^۲)-b\sqrt{۲(a^۲+b^۲)}$$

ومساحت مطلوب چنین می‌شود:

$$S=\pi\cdot\frac{BM^۲}{۴}=\frac{\pi}{۸}[۳(a^۲+b^۲)-۲b\sqrt{۲(a^۲+b^۲)}]$$



شکل ۱۶۵

۹۳۸. مماس مشترک MN (شکل ۱۶۵)، نسبت به دو دایرهٔ مفروض، پاره خطی است که وسط دوساق ذوزنقهٔ $ABCD$ را به هم وصل می‌کند. بنابراین، برای مساحت مجهول، داریم:

$$S=MN\cdot BF=AB\cdot BF=AB\cdot\frac{AB^۲}{BE}=\frac{AB^۳}{BE}$$

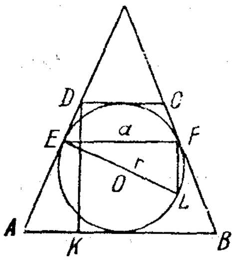
ازطرف دیگرداریم:

$$BE=O_۲O_۱=R+r,\ AE=R-r;$$

$$AB=\sqrt{BE^۲-AE^۲}=\sqrt{(R+r)^۲-(R-r)^۲}=۲\sqrt{Rr}$$

و درنتیجه $S=\dfrac{۸Rr\sqrt{Rr}}{R+r}$.

۹۳۹. مساحت مجهول را با حرف S نشان می‌دهیم (شکل ۱۶۶). DK عمود بر AB، قطر EL و خط راست FL را رسم می کنیم. بنا به خاصیت چهارضلعی محیطی، داریم:



شکل ۱۶۶

$$DC+AB=AD+CB$$

و برای مساحت

$$S=\frac{AB+DC}{۲}\cdot DK=\frac{AD+CB}{۲}\cdot DK=AD\cdot DK=AD\cdot ۲r$$

زیرا ذوزنقه، با توجه به برابری زاویه‌های DAB و CBA، متساوی‌الساقین است. مقدار AD را هم، می‌توان از تشابه مثلث‌های ADK و ELF به‌دست آورد (این دو مثلث، ضلع‌های عمود برهم دارند). داریم:

$$\frac{AD}{EL}=\frac{DK}{EF};\ \frac{AD}{۲r}=\frac{۲r}{a};\ AD=\frac{۴r^۲}{a};\ S=AD\cdot ۲r=\frac{۸r^۳}{a}$$

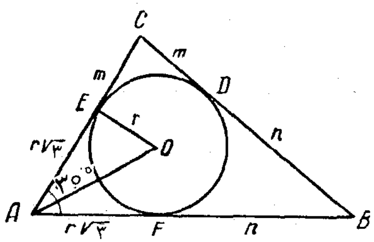
۹۴۰. با استفاده از رابطهٔ هرون، مساحت مثلث به‌دست می آید:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

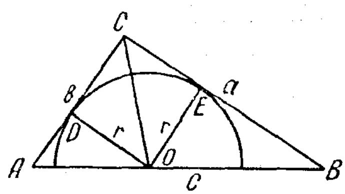
اکنون مرکز O از نیم‌دایرهٔ محاطی را به راس C ازمثلث وصل می‌کنیم (شکل ۱۶۷) و مساحت مثلث ABC را به عنوان مجموع مساحت‌های مثلث‌های AOC و BOC محاسبه می کنیم؛ به‌دست می آید:

$$S=\frac{۱}{۲}AC\cdot OD+\frac{۱}{۲}BC\cdot OE=\frac{۱}{۲}br+\frac{۱}{۲}ar=$$

$$=\frac{r}{۲}(a+b);\ r=\frac{۲S}{a+b};\ ۲r=\frac{۴S}{a+b}$$



شکل ۱۶۸



شکل ۱۶۷

۹۴۱. شعاع دایرهٔ محاطی مثلث را r می نامیم. درمثلث OEA (شکل ۱۶۸) داریم $AO=2r$ (وتر دوبرابرضلع روبه‌روی به زاویهٔ ۳۰ درجه است). بنا براین

$$AE=\sqrt{AO^2-OE^2}=2\sqrt{3}=AF$$

با توجه به این‌که $EC=m$ و $BF=n$، مساحت مثلث را، طبق رابطهٔ $S=pr$ و، سپس، طبق رابطهٔ هرون، محاسبه می کنیم. درحالت اول به دست می‌آید:

$$S=pr=(m+n+r\sqrt{3})r,$$

و درحالت دوم

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{(m+n+r\sqrt{3})mnr\sqrt{3}}$$

ازمقایسهٔ دو مقدار S، خواهیم داشت:

$$(m+n+r\sqrt{3})^2\cdot r^2=(m+n+r\sqrt{3})mnr\sqrt{3};$$

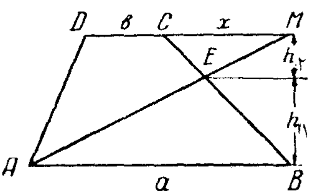
$$(m+n+r\sqrt{3})r=mn\sqrt{3};\ S=mn\sqrt{3}$$

۹۴۲. $CM=x$ وارتفاع‌های مثلث‌های ABE و CME را، به ترتیب، h_1 و h_2 می گیریم (شکل ۱۶۹). بنا برشرط مساله داریم:

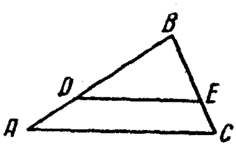
$$ah_1=\frac{1}{2}(a+b)(h_1+h_2)\Rightarrow\frac{2a}{a+b}=\frac{h_1+h_2}{h_1}=1+\frac{h_2}{h_1}$$

ولی، ازتشابه دومثلث ABE و CME به‌دست می‌آید: $\frac{x}{a}=\frac{h_2}{h_1}$. از آن جا

$$\frac{2a}{a+b}=1+\frac{x}{a};\ \frac{x}{a}=\frac{a-b}{a+b};\ x=a.\ \frac{a-b}{a+b}$$



شکل ۱۶۹



شکل ۱۷۰

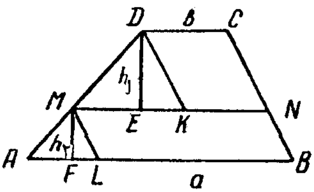
۹۴۳. دومثلث ABC و DBE متشابه‌اند (شکل ۱۷۰) ونسبت مساحت‌ها، برابراست با نسبت مجذورضلع‌های متناظر، پس

$$\frac{AD+DB}{DB}=\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\frac{۱}{۲}S}}=\sqrt{۲}$$

از آن‌جا: $\frac{AD}{DB}+۱=\sqrt{۲}$ و $\frac{AD}{DB}=\frac{CE}{BE}=\sqrt{۲}-۱$.

۹۴۴. DK و ML را موازی BC رسم می‌کنیم (شکل ۱۷۱). اگر ارتفاع‌های مثلث‌های DMK و MAL را، که به ترتیب از راس‌های D و M گذشته‌اند، $h_۱$ و $h_۲$، و طول مجهول را x بگیریم، آن وقت، برابری مساحت‌های $MNCD$ و $ABNM$ را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{x+b}{۲}\cdot h_۱=\frac{a+x}{۲}\cdot h_۲$$



شکل ۱۷۱

ازطرف دیگر، دومثلث AML و MDK متشابه‌اند و بنا بر این

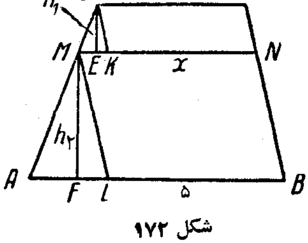
$$\frac{MK}{h_۱}=\frac{AL}{h_۲}\Rightarrow\frac{x-b}{h_۱}=\frac{a-x}{h_۲}$$

اگر برابری‌های حاصل‌را درهم ضرب کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{x+b}{۲}\cdot h_۱\cdot\frac{x-b}{h_۱}=\frac{a+x}{۲}\cdot h_۲\cdot\frac{a-x}{h_۲}\Rightarrow x=\sqrt{\frac{a^۲+b^۲}{۲}}$$

۹۴۵. شبیه مسالهٔ ۹۴۴ حل می‌شود. DK و ML را موازی BC رسم می‌کنیم (شکل ۱۷۲). $MN=x$، $DE=h_۱$ و $MF=h_۲$ می گیریم. چون

$$S_{ABNM}:S_{MNCD}=۷:۲$$



شکل ۱۷۲

پس

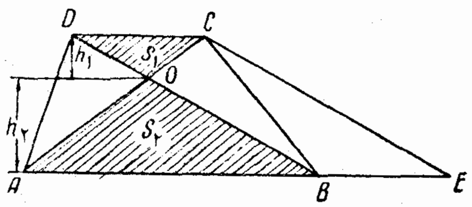
$$\frac{5+x}{2}h_2 : \frac{x+3}{2}h_1 = 7:2 \Rightarrow 2(5+x)h_2 = 7(x+3)h_1$$

از تشابه مثلث‌های AML و MDK داریم: $\frac{5-x}{h_2}=\frac{x-3}{h_1}$. دو برابری حاصل را درهم ضرب می‌کنیم:

$$2(25-x^2)=7(x^2-9) \Rightarrow x=\frac{1}{3}\sqrt{113}$$

۹۴۶. CE را موازی DB رسم می‌کنیم و ارتفاع مثلث‌های CDO و ABO را h_1 و h_2 می‌نامیم (شکل ۱۷۳). روشن است که مساحت مجهول S، برابر است با مساحت ACE. بنابراین، ضمن استفاده از تشابه مثلث‌های CDO و ACE می‌توان نوشت:

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}=\frac{h_1}{h_1+h_2}$$



شکل ۱۷۳

به‌همین ترتیب، با توجه به تشابه مثلث‌های ABO و AEC داریم:

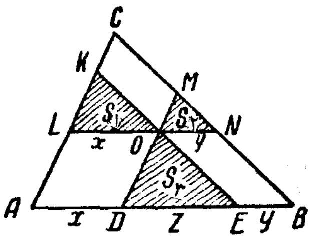
$$\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}=\frac{h_2}{h_1+h_2}$$

ازمجموع این دو برابری به‌دست می‌آید:

$$\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}=\frac{h_1+h_2}{h_1+h_2}=1; \sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}=\sqrt{S};$$

$$S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$$

۹۴۷. مساحت مجهول را S و طول پاره‌خط‌های AD ، BE و DE را x، y و z می‌گیریم (شکل ۱۷۴). چون هریك ازمثلث‌های حاصل، بنا برموازی‌بودن ضلع‌ها، با مثلث اصلی متشابه‌اند، می‌توان نوشت.



شکل ۱۷۴

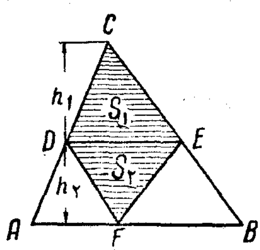
$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1}}=\frac{x}{x+y+z};\ \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}=\frac{y}{x+y+z};$$

$$\frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=\frac{z}{x+y+z}$$

و ازمجموع این برابری‌ها ، به دست می‌آید:

$$\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=\frac{x+y+z}{x+y+z}=1\Rightarrow S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$$

۹۴۸. مساحت مجهول را Q و ارتفاع‌های مثلث‌های DCE و ADF را، از راس‌های C و D گذشته‌اند، h_1 و h_2 می‌نامیم (شکل ۱۷۵). روشن است که $Q=S_1+S_2$. در ضمن، به دلیل موازی‌بودن DE و AB، مقدار S_2 به‌جای نقطهٔ F در روی قاعدهٔ AB بستگی ندارد. چون DE، قاعدهٔ مشترك دومثلث DCE و FDE است، بنا براین



شکل ۱۷۵

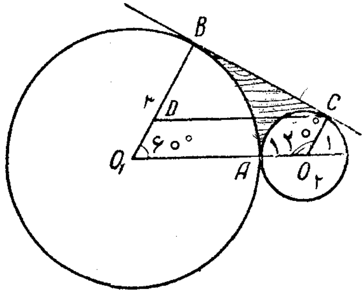
$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{h_2}{h^{1}};\ \frac{S_2}{S_1}+1=\frac{h_2}{h_1}+1;$$

$$\frac{S_2+S_1}{S_1}=\frac{h_2+h_1}{h_1};\ \frac{Q}{S_1}=\frac{h_2+h_1}{h_1}$$

از تشابه دومثلث DCE و ACB داریم: $\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}=\frac{h_1}{h_1+h_2}$. اکنون، ازضرب دوبرابری حاصل، نتیجه می‌شود:

$$\frac{Q}{S_1}\cdot\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}=\frac{h_2+h_1}{h_1}\cdot\frac{h_1}{h_1+h_2}=1;\ \frac{Q}{\sqrt{S\cdot S_1}}=1;\ \ Q=\sqrt{S\cdot S_1}$$

۹۴۹. مرکزدایره‌ها را O_1 و O_2، و نقطه‌های تماس مماس مشترك بیرونی دو دایره را B و C می‌گیریم (شکل ۱۷۶). CD را موازی O_1O_2 می‌کشیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ



شکل ۱۷۶

از مثلث BCD داریم:

$$BD = BO_۱ - O_۱D = BO_۱ - CO_۲ = ۳ - ۱ = ۲;\ CD = O_۱O_۲ = ۳ + ۱ = ۴$$

ولی، وقتی که وتردو برابر یکی ازضلع‌ها باشد، به معنای آن است که

$$\widehat{BCD} = ۳۰°;\ \widehat{BDC} = \widehat{BO_۱A} = ۶۰°;\ \widehat{CO_۲O_۱} = ۱۲۰°$$

مساحت مجهول S، به این ترتیب به‌دست می‌آید که مجموع مساحت‌های دوقطاع $AO_۱B$ و $AO_۲C$ را ازمساحت‌ذوزنقهٔ $O_۱O_۲CB$ کم کنیم. قاعده‌های ذوزنقهٔ برابر ۳ و ۱، وارتفاع آن

$$BC = \sqrt{CD^۲ - BD^۲} = \sqrt{۱۶ - ۴} = ۲\sqrt{۳}$$

بنابراین

$$S = \frac{۳+۱}{۲}\cdot ۲\sqrt{۳} - \left(\frac{\pi\cdot ۳^۲\cdot ۶۰}{۳۶۰} + \frac{\pi\cdot ۱^۲\cdot ۱۲۰}{۳۶۰}\right) = ۴\sqrt{۳} - \frac{۱۱}{۶}\pi =$$
$$= \frac{۲۴\sqrt{۳} - ۱۱\pi}{۶}$$

۹۵۰. در رابطهٔ هرون قرار می‌دهیم:

$$a = \frac{۲S}{h_۱};\ b = \frac{۲S}{h_۲};\ c = \frac{۲S}{h_۳}$$

به‌دست می‌آید:

$$S = \frac{۱}{\sqrt{\left(\frac{۱}{h_۱}+\frac{۱}{h_۲}+\frac{۱}{h_۳}\right)\left(\frac{۱}{h_۱}+\frac{۱}{h_۲}-\frac{۱}{h_۳}\right)\left(\frac{۱}{h_۲}+\frac{۱}{h_۳}-\frac{۱}{h_۱}\right)\left(\frac{۱}{h_۳}+\frac{۱}{h_۱}-\frac{۱}{h_۲}\right)}}$$

۹۵۱. یکی ازمیانه‌های مثلث را، ازطرف قاعده، به اندازهٔ $\frac{1}{3}$ میانه امتداد می‌دهیم. انتهای این پاره‌خط ومحل برخورد میانه‌ها را، به‌انتهای قاعده وصل می کنیم؛ مثلثی باضلع‌های $\frac{2}{3}m_1$، $\frac{2}{3}m_2$، $\frac{2}{3}m_3$ به‌دست می‌آید که، مساحت آن، یك سوم مساحت مثلث مجهول است. اکنون، با استفاده از رابطهٔ هرون، نتیجه می‌شود:

$$S=\frac{1}{3}\sqrt{(m_1+m_2+m_3)(m_1+m_2-m_3)(m_2+m_3-m_1)(m_3+m_1-m_2)}$$

۹۵۲. با محاسبه، به‌سرعت به‌دست می‌آید. اگرطول قطرها را l_1 و l_2 و زاویهٔ بین آن‌ها را α بگیریم، مساحت چهارضلعی

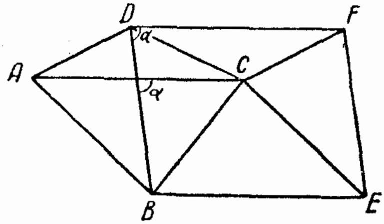
$$S=\frac{1}{2}l_1 l_2 \sin\alpha$$

ومساحت متوازی‌الاضلاع

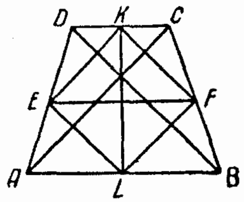
$$Q=l_1 l_2 \sin\alpha$$

که ازآن‌جا به‌دست می‌آید: $Q=2S$. ولی، این نتیجه را با هندسهٔ خالص هم می‌توان به‌دست آورد. چهارضلعی $ABCD$ را مفروض می‌گیریم (شکل ۱۷۷). چون $ACFD$، $ABEC$ و $BEFD$ متوازی‌الاضلاع‌اند، پس دو مثلث ABD و CEF، همچنین دو مثلث BCE و ACB وبالاخره دومثلث ADC و DCF برابرند. درنتیجه

$$Q=S_{CDF}+S_{BCE}+S_{CEF}+S_{BCD}=(S_{ACD}+S_{ABC})+(S_{ABD}+S_{BCD})=$$
$$=S+S=2S$$



شکل ۱۷۷



شکل ۱۸۸

۹۵۳. EF را پاره‌خطی می‌گیریم که وسط دوساق ذوزنقه را به‌هم وصل کرده‌است ارتفاع KL ذوزنقه را، که ازنقطهٔ برخورد قطرهای آن می‌گذرد، رسم می‌کنیم. ازآن‌جا که‌ذوزنقه متساوی‌الساقین است، نقطه‌های K و L در وسط قاعده‌ها خواهند بود. نقطه‌های

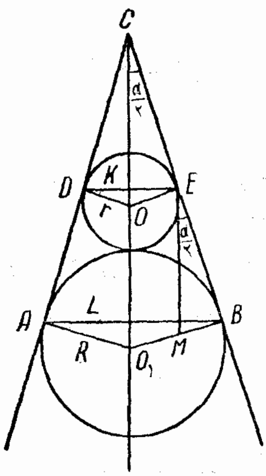
E، K، F و L را، به همین ترتیب، به هم وصل می‌کنیم. مربع $EKFL$ به‌دست می‌آید. در واقع، EK، وسط دو ضلع از مثلث ADC را بـه‌هم وصل کرده است و ، بنابـراین $EK=\frac{1}{2}AC$. به همین ترتیب

$$FL=\frac{1}{2}AC,\ KF=\frac{1}{2}DB,\ EL=\frac{1}{2}DB$$

ولی در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، قطرها برابرند و درنتیجه

$$EK=KF=FL=LE$$

یعنی چهارضلعی $EKFL$ یك لوزی است؛ ولی قطرهای ذوزنقه برهم عمودند، بنابراین، زاویهٔ EKF برابر ۹۰درجه وچهارضلعی $EKFL$ یك‌مربع‌می‌شود. ازاین‌جانتیجه‌می گیریم: $KL=EF=d$ وبنابراین $S=EF\cdot KL=d^2$.



شکل ۱۷۹

۹۵۴. زاویهٔ مجهول ACB را α و شعاع‌های دایره‌ها را r و R مـی گیریم (شکـل ۱۷۹). CO_1 نیمساز زاویه و EM موازی CO_1 را رسم می‌کنیم. روشن است کـه هـر کدام از زاویـه‌های BEM و ECK برابرند با $\frac{\alpha}{2}$. چون بنا بـه شرط $DE=2a$ و $AB=2b$، بنابراین با فرض $R>r$ داریم:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{MB}{ME}=\frac{R-r}{R+r}$$

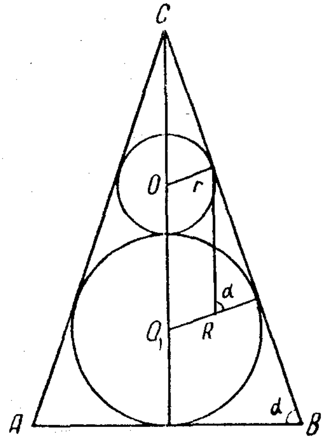
ولی دومثلث AO_1B و DOE متشابه‌اند، بنابراین

$$\frac{O_1B}{OE}=\frac{AB}{DE};\ \frac{R}{r}=\frac{2b}{2a}=\frac{b}{a};\ \frac{R-r}{R+r}=\frac{b-a}{b+a};$$

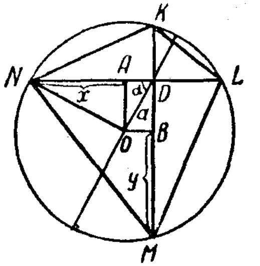
$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{b-a}{b+a}$$

۹۵۵. اگر زاویهٔ مجهول CBA را α بگیریم (شکل ۱۸۰) وشبیه مسالهٔ ۹۵۴ عمل کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\cos\alpha=\frac{R-r}{R+r}$$



شکل ۱۸۰



شکل ۱۸۱

۹۵۶. باید مساحت چهارضلعی $NKLM$ را محاسبه کرد (شکل ۱۸۱). این مساحت را S وقطرهای NL و KM را ۲x و ۲y می‌نامیم. تکمیل رسم از روی شکل ۱۸۱ معلوم است. ازمثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ODA و OAN داریم:

$$۲x = NL = ۲NA = ۲\sqrt{NO^۲ - OA^۲} = ۲\sqrt{NO^۲ - (OD\sin\alpha)^۲} =$$

$$= ۲\sqrt{R^۲ - a^۲\sin^۲\alpha}$$

به همین ترتیب، برای قطر دیگر

$$۲y = KM = ۲\sqrt{R^۲ - a^۲\cos^۲\alpha}$$

از آن‌جا

$$S = \frac{۱}{۲} \cdot ۲x \cdot ۲y = ۲\sqrt{(R^۲ - a^۲\sin^۲\alpha)(R^۲ - a^۲\cos^۲\alpha)} =$$

$$= ۲\sqrt{R^۴ - a^۲R^۲ + \frac{a^۲}{۴}\sin^۲ ۲\alpha}$$

۹۵۷. زاویهٔ CAB را α و زاویهٔ BAF را β می‌نامیم (شکل ۱۸۲). دراین صورت داریم:

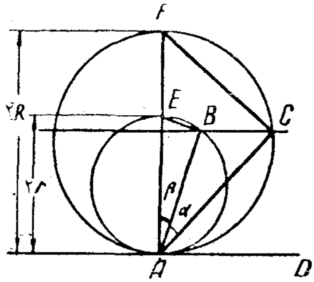
$$\widehat{ACB} = ۹۰^\circ - (\alpha + \beta), \widehat{ABC} = ۱۸۰^\circ - (۹۰^\circ - \beta) = ۹۰^\circ + \beta$$

شعاع مجهول x، بنابر قضیهٔ سینوس‌ها، از رابطهٔ $x = \frac{AC}{۲\sin\alpha}$ معین می‌شود. طبق‌همین‌قضیه، می‌توان نوشت:

$$\frac{BC}{\sin\alpha}=\frac{AC}{\sin(۹۰^\circ+\beta)}=\frac{AB}{\sin[۹۰^\circ-(\alpha+\beta)]}$$

و یا
$$\frac{BC}{\sin\alpha}=\frac{AC}{\cos\beta}=\frac{AB}{\cos(\alpha+\beta)}$$

از مثلث‌های ACF و ABC به‌دست می‌آید:



شکل ۱۸۲

$$AC=۲R\cos(\alpha+\beta)\ ,\ AB=۲r\cos\beta$$

وبا درنظرگرفتن رابطه‌هایی که به‌دست آوردیم:

$$\frac{۲R\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta}=\frac{۲r\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)};\quad \frac{\cos^۲(\alpha+\beta)}{\cos^۲\beta}=\frac{r}{R};\quad \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\beta}=\sqrt{\frac{r}{R}}$$

(α و $\alpha+\beta$، زاویه‌هایی حاده‌اند). ازآن‌جا

$$\frac{BC}{\sin\alpha}=\frac{۲R\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta}=۲R\sqrt{\frac{r}{R}}=۲\sqrt{Rr}$$

و درنتیجه
$$x=\frac{BC}{۲\sin\alpha}=\sqrt{Rr}$$

۹۵۸. برای مساحت مجهول (شکل ۱۸۳) داریم:

$$S=۸S_{OMN}=۸(S_{AMN}-S_{AMO})$$

چون در مثلث قائم‌الزاویهٔ AMT داریم: $AT=\frac{a}{۲}$ و $AM=a$، پس

$$\widehat{AMT}=\frac{\pi}{۶}\ ,\ \widehat{MAT}=\frac{\pi}{۳}\ ,\ \widehat{MAO}=\frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۴}=\frac{\pi}{۱۲}$$

بنا براین

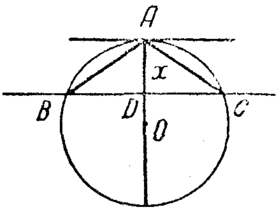
$$S_{AMN}=\frac{۱}{۲}a^{۲}\cdot\frac{\pi}{۱۲}=\frac{\pi a^{۲}}{۲۴};\ S_{AMO}=\frac{۱}{۲}AM\cdot OM\sin\frac{\pi}{۶}=$$

$$=\frac{۱}{۴}a\cdot OM=\frac{۱}{۴}a(MT-OT)=\frac{a}{۴}\left(AM\sin\frac{\pi}{۳}-\frac{a}{۲}\right)=$$

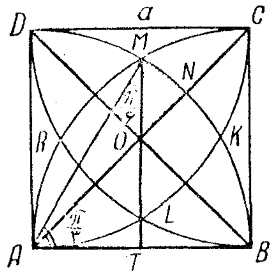
$$=\frac{a^{۲}}{۴}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{۱}{۲}\right)=\frac{\sqrt{۳}-۱}{۸}a^{۲}$$

و از آن‌جا

$$S=۸\left(\frac{\pi a^{۲}}{۲۴}-\frac{\sqrt{۳}-۱}{۸}a^{۲}\right)=\frac{a^{۲}}{۳}(\pi+۳-۳\sqrt{۳})$$



شکل ۱۸۴



شکل ۱۸۳

۹۵۹. فاصلهٔ AD، بین خط‌های راست موازی را x، ومساحت مثلث ABC را y می گیریم (شکل ۱۸۴). بااستفاده از قضیهٔ مربوط به‌وترهایی که یکدیگررا دردرون دایره قطع می‌کنند، داریم:

$$BD\cdot DC=BD^{۲}=x(۲R-x),\ BD=\sqrt{x(۲R-x)}$$

و بنا براین

$$y=\frac{۱}{۲}BC\cdot AD=\frac{۱}{۲}\cdot۲BD\cdot AD=BD\cdot AD=x\sqrt{x(۲R-x)}$$

۹۶۰. اگر ضلع‌های مستطیل را x و y بگیریم، مساحت آن $S=xy$ و محیط آن $P=۲x+۲y$ می‌شود. با استفاده ازبرابری $xy=S$، عبارت مربوط به‌محیط را تبدیل می‌کنیم:

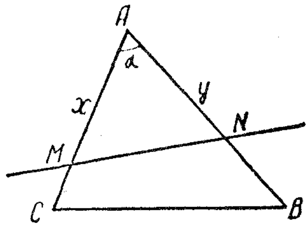
$$P=۲x+۲y=۲x+۲\times\frac{S}{x}=۲\times\frac{x^{۲}+S}{x}=$$

$$=۲\times\frac{x^۲-۲x\sqrt{S}+S+۲x\sqrt{S}}{x}=۲\times\frac{(x-\sqrt{S})^۲}{x}+۴\sqrt{S}$$

دیده می‌شود که حداقل مقدار P، به‌ازای $x=\sqrt{S}$ به‌دست می آید و، این حداقل، برابر است با $۴\sqrt{S}$. ولی دراین صورت، برای y هم، همان مقدار $\sqrt{S}$ به‌دست می‌آید.

۰۹۶۱ $x=AM$ و $AN=y$ می گیریم (شکل ۱۸۵). در این صورت، بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها

$$MN^۲=x^۲+y^۲-۲xy\cos\alpha$$



شکل ۱۸۵

و چون $\frac{۱}{۲}xy\sin\alpha=\frac{۱}{۲}S$، یعنی $y=\frac{S}{x\sin\alpha}$، پس

$$MN^۲=x^۲+\frac{S^۲}{x^۲\sin^۲\alpha}-۲S\cot g\alpha=\left(x-\frac{S}{x\sin\alpha}\right)^۲+\frac{۲S}{\sin\alpha}-۲\cot g\alpha$$

مقدار $MN^۲$ وهمراه با آن، مقدار MN، وقتی به‌حداقل خود می‌رسدکه داشته باشیم:

$$x-\frac{S}{x\sin\alpha}=۰\ ;\ x^۲=\frac{S}{\sin\alpha}\ ;\ x=\sqrt{\frac{S}{\sin\alpha}}$$

و دراین حالت

$$y=\frac{S}{x\sin\alpha}=\sqrt{\frac{S}{\sin\alpha}}\ ;\ MN=\sqrt{\frac{۲S}{\sin\alpha}-۲S\cot g\alpha}=۲\sqrt{\frac{S}{\sin\alpha}}\cdot\sin\frac{\alpha}{۲}$$

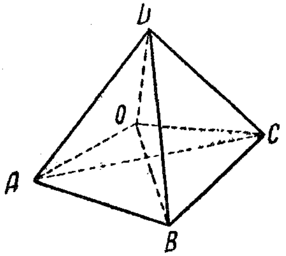
و محیط مجهول

$$۲p=۲x+MN=۲\sqrt{\frac{S}{\sin\alpha}}\left(۱+\sin\frac{\alpha}{۲}\right)=۴\sqrt{\frac{S}{\sin\alpha}}\cos^۲\frac{\pi-\alpha}{۴}$$

۰۹۶۲ براساس عکس قضیه‌های زیر: ۱) مجموع هردو ضلع مثلث، از ضلع سوم،

بزرگتر است؛ ۲) فیثاغورث.

XIV. مساله‌هایی ازهندسهٔ فضایی



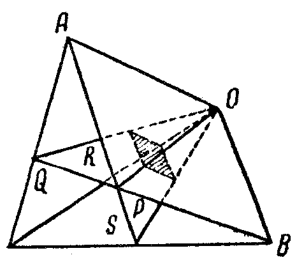
۱۸۶

۹۶۳. نقطهٔ O را درون چهاروجهی منتظم $ABCD$ انتخاب می‌کنیم (شکل ۱۸۶). اگرنقطهٔ O را بــه‌همهٔ راس‌هــای چهاروجهی وصل کنیم، چهار هرم $ABCO$ ، $BCDO$ ، $CADO$ و $ABDO$ به دست می‌آید. روشن است که حجم هرم مفروض، برابراست بــا مجموع حجم‌هــای این چهار هــرم. مساحت وجه‌هــای چهاروجهی را S، ارتفاع آن را h و فاصلهٔ O تا وجه‌ها را (کــه ارتفاع‌هــای چهار هرم حاصل را تشکیل می‌دهند) h_1، h_2، h_3 و h_4 می‌نامیم. داریم:

$$\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}Sh_1+\frac{1}{3}Sh_2+\frac{1}{3}Sh_3+\frac{1}{3}Sh_4 \Rightarrow h_1+h_2+h_3+h_4=h$$

۹۶۴. اگرهمهٔ خط‌های راست دریك نقطه‌به‌هم رسیده باشند، حالت‌اول را تشکیل می‌دهند. درحالتی کــه، خط‌راست مفروضی از نقطهٔ بــرخورد دوخط راست دیگر نگذشته باشد، دراین صورت، درصفحه‌ای قراردارد کــه از دوخط راست اخیر می‌گذرد، زیرا دو نقطه ازاین خط راست، برصفحهٔ مذکور قــراردارد (دونقطهٔ برخورد آن با این دوخط). به‌همین ترتیب، می‌توان روشن کرد که، هرخط راست دیگری (از مجموعهٔ متناهی خط‌های راست مفروض)، برهمین صفحه قراردارد.

۹۶۵. a) وجه‌های روبه‌رو را درکنج چهار وجهی P، Q و R، S می‌نامیم (شکل ۱۸۷). فصل مشترك دووجه اول را OA وفصل مشترك دو وجه دوم را OB می گیریم. هر



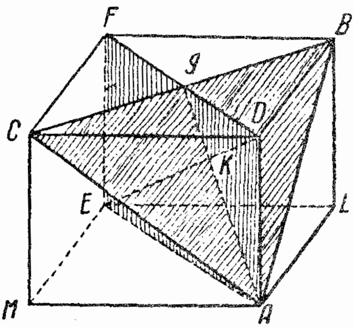
شکل ۱۸۷

صفحه‌ای کـه وجه‌های کنج را قطع کند و موازی صفحه‌ای باشد که از OA و OB گذشته است، درمقطع، یك متوازی‌الاضلاع پدیدمی‌آورد. درواقع، فصل‌مشترك صفحه‌ای که رسم کرده‌ایم، با دوصفحهٔ P و Q، بـا OA موازی است؛ همچنین فصل مشترك این صفحه بـا صفحه‌های R و S، با OB موازی است.

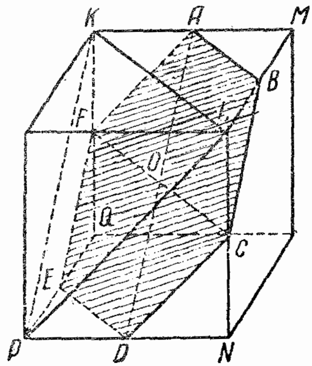
b) اگر صفحهٔ P موازی صفحهٔ Q (یـا صفحهٔ R موازی صفحهٔ S) باشد، آن‌وقت، هرصفحه‌ای که به‌موازات خط‌راست OB (ویا درحالت دیگر، به‌موازات خط‌راست OA) وجه‌های کنج‌را قطع کند، یك متوازی‌الاضلاع به‌وجود می‌آورد.

c) اگرهم صفحهٔ P موازی Q و هم صفحهٔ R موازی S باشد، هرصفحهٔ دلخواهی که وجه‌های کنج را قطع کند، درمقطع، یك متوازی‌الاضلاع به‌وجود می‌آورد.

۹۶۶. ازراس‌های K، L و P درمکعب مفروض، یك صفحه و ازنقطهٔ A وسط یال KM، صفحهٔ دیگری موازی با صفحهٔ اول می‌گذرانیم (شکل ۱۸۸). مقطع مکعب باصفحهٔ دوم، شش‌ضلعی مسطح $ABCDEF$ است. این شش‌ضلعی، منتظم است، زیرا همهٔ ضلع‌های آن با هم برابر، و برابرنصف قطر هـروجه مکعب‌اند. هرزاویهٔ این شش‌ضلعی هم، برابر ۱۲۰ درجه‌است، زیرا ضلع‌های آن‌ها، باضلع‌های مثلث‌متساوی‌الاضلاع KLP، موازی‌اند.



شکل ۱۸۹

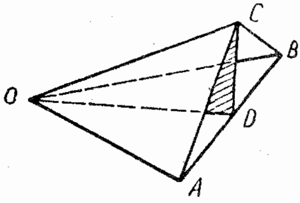


شکل ۱۸۸

۹۶۷. صفحه‌ای که ازیال AD ویال موازی آن EF بگذرد، ضلع مثلث ABC را در نقطهٔ g، وسط BC قطع می‌کند (شکل ۱۸۹). بنابراین، قطر ED از متوازی‌السطوح، صفحهٔ مثلث ABC را، درنقطهٔ K، واقع بـرمیانهٔ Ag، قطع می‌کند. به‌همین ترتیب، اگر صفحه‌ای ازیال‌های BD و ME عبور دهیم، ثابت می‌شود که همین قطر ازمیانهٔ دوم مثلث ABC می‌گذرد، یعنی به‌ناچار، از نقطهٔ برخورد میانه‌ها.

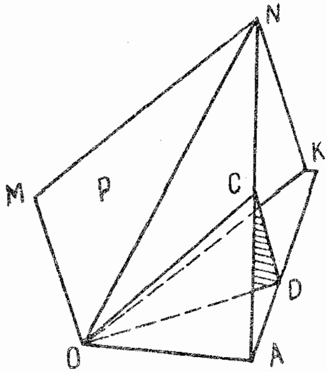
۹۶۸. کنج سه‌وجهی $OABC$ را مفروض می‌گیریم (شکل ۱۹۰). چون زاویه‌های

دووجهی این کنج، با یال‌های OA و OB، حاده‌اند، بنابراین، تصویر OD از یـال OC بر صفحهٔ OAB، بین خطهای راست OA و OB قرار دارد. ولی،هر زاویـهٔ مسطحهٔ کنج سه وجهی از ۱۸۰ درجه کمتر است. در واقع، اگر بزرگتر یـا برابر ۱۸۰ درجه باشد، آن‌وقت، باتوجه به این کـه مجموع دوزاویهٔ کنج سه وجهی بایـد از زاویهٔ سوم بزرگتر باشد،



شکل ۱۹۰

برای مجموع سه زاویـهٔ مسطحهٔ کنج، مقداری بیشتر از ۳۶۰ درجه بـه دست می‌آید که ممکن نیست. بنابـراین، دست‌کم، یکی از دو زاویـهٔ AOD و DOB، حاده‌اند. فـرض می‌کنیم که، مثلاً، زاویهٔ AOD کمتر از ۹۰ درجه بـاشد. صفحهٔ P را عمود بر OA رسم می‌کنیم (شکل ۱۹۱). چون زاویـهٔ AOD کمتر از ۹۰ درجه و زاویـهٔ AOK برابر ۹۰

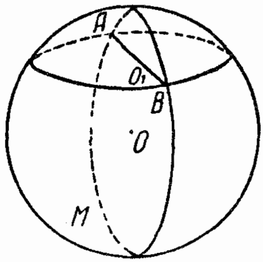


شکل ۱۹۱

درجه است، پس زاویهٔ AOD درداخل زاویهٔ AOK قراردارد و، بنابراین، کنج سه‌وجهی $OADC$ در داخـل زاویـهٔ دووجهی (قائمهٔ) $AOKM$ واقع است. وجه OAC را ادامه می‌دهیم تـا صفحهٔ P را قطع کند. از بـرخورد این دوصفحه، خط‌راست ON، عمود بر OA به دست می‌آید. به‌این ترتیب، زاویهٔ AON برابر ۹۰ درجه، و زاویهٔ AOD، بخشی اززاویهٔ AON می‌شود. درنتیجه، زاویهٔمسطحهٔ AOD ازکنج سه‌وجهی مفروض،کوچکتر از ۹۰ درجه، یعنی زاویه‌ای حاده است. به‌همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد کـه زاویه‌های مسطحهٔ AOB و BOC هم، زاویه‌هایی حاده‌اند.

۹۶۹. فرض کنید، مقطع این سطح باصفحه، دایره‌ای به‌مرکز O_1 باشد (شکل ۱۹۲). ازنقطهٔ O_1، صفحه‌ای عمود برصفحهٔ دایرهٔ حاصل رسم می‌کنیم. این صفحه، دایره را روی

قطر AB و سطح را روی دایرهٔ دیگری، که از نقطه‌های A و B می‌گذرد، قطع می‌کند. مرکز و شعاع این دایرهٔ دوم را، مرکز و شعاع کره‌ای می‌گیریم و آن را رسم می‌کنیم. هر نقطهٔ M از این کره، برسطح مورد بررسی قرار دارد. در واقع، اگر صفحه‌ای را از این نقطه و از مرکزهای دو دایرهٔ رسم شده، بگذرانیم، هریك از دایره‌ها را در دو نقطه، و کره را در دایرهٔ تازه‌ای قطع می‌کند. دایرهٔ اخیر، که با سطح دارای سه نقطه (وحتی چهار نقطهٔ) مشترك است، بر سطح قرار دارد و، بنابراین، نقطهٔ انتخابی از سطح کره هم، بر این سطح واقع است. از طرف دیگر، هر نقطه‌ای که برسطح این کره واقع نباشد، برسطح مورد بررسی قرار ندارد، زیرا اگر متعلق به‌آن باشد، آن‌وقت، این نقطه و دو نقطهٔ برخورد کره با خط راستی که مرکز کره را به‌این نقطه وصل می‌کند، برمحیط یك دایره قرارمی‌گیرند که ممکن نیست. قضیه ثابت شد.



شکل ۱۹۲

۹۷۰. فرض می‌کنیم، این چند وجهی وجود دارد و دارای m وجه است. تعداد ضلع‌های وجه‌ها را، به‌ترتیب، n_1، n_2، ...، n_m می‌گیریم. تعداد یال‌های این چند وجهی را محاسبه می‌کنیم. روشن است که تعداد ضلع‌های همهٔ وجه‌ها، دوبرابر تعداد یال‌های چند‌وجهی است، زیرا هریال، ضلع مشترك دووجه مجاور است. بنابراین، تعداد یال‌های چند‌وجهی چنین است:

$$l=\frac{n_1+n_2+\cdots+n_m}{2}$$

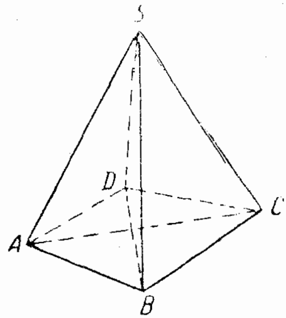
ولی هریك ازعددهای n_1، n_2، ...، n_m فرد وتعداد m آن‌ها هم، عددی فرد است، بنابراین، مجموع عددهای صورت کسر، عددی فرد می‌شود و بر ۲ بخش‌پذیر نیست؛ یعنی، چنین چندوجهی وجود ندارد.

۹۷۱. فرض کنید، درکنج چهار وجهی $SABCD$، بزرگترین زاویهٔ مسطحه ASB باشد (شکل ۱۹۳). صفحه‌ای از خطهای راست SD و SB می‌گذرانیم. چون هر زاویهٔ مسطحهٔ کنج سه‌وجهی کمتر از مجموع دوزاویهٔ دیگر آن است، بنابراین

$$\widehat{ASB}<\widehat{ASD}+\widehat{DSB}\ ,\ \widehat{DSB}<\widehat{DSC}+\widehat{BSC}$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

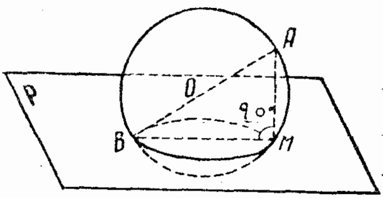
$$\widehat{ASB}<\widehat{ASD}+\widehat{DSC}+\widehat{BSC}$$



شکل ۱۹۳

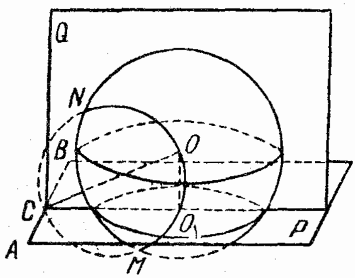
اثبات را درمورد کنج محدب آوردیم. ولی حکم قضیه وروش اثبات، برای هر کنج چهاروجهی درست است.

۹۷۲. صفحهٔ دلخواه P را درنظر می‌گیریم، به‌نحوی که از نقطهٔ مفروض B بگذرد، ولی نقطهٔ مفروض دوم A بر آن واقع نباشد (شکل ۱۹۴). AM را عمود بر صفحهٔ P می‌گیریم. B را به A و M وصل می‌کنیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ AMB به‌دست می‌آید. از این جا روشن است که، نقطهٔ M بر کرهٔ به‌قطر $AB = 2R$ و مرکز نقطهٔ O (وسط پاره‌خط AB) قراردارد. عکس حکم هم، به‌سادگی ثابت می‌شود: هرنقطه ازاین کره، تصویری ازنقطهٔ A بریکی از صفحه‌هایی است که از B گذشته است. به‌این ترتیب، این کره، مکان هندسی مطلوب است.



شکل ۱۹۴

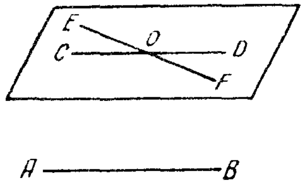
۹۷۳. صفحهٔ P را از خط راست مفروض AB می‌گذرانیم (شکل ۱۹۵). این صفحه، سطح کروی مفروض به مرکز O را، دردایره‌ای به مرکز O_1 قطع می‌کند. O را به O_1 وصل می‌کنیم (OO_1 برصفحهٔ P عمود است) و از O، صفحهٔ Q را عمود بر AB می‌گذرانیم، که AB را درنقطهٔ C قطع می‌کند. مثلث OO_1C قائم‌الزاویه است و برصفحهٔ Q قرار دارد. اگر صفحهٔ P دور AB دوران کند، درهرحال، مثلث OO_1C قائم‌الزاویه باقی می‌ماند و، درضمن، درصفحهٔ Q قرار می‌گیرد. بنابراین، اگر AB نقطه‌های مشترکی با کره نداشته باشد، مکان هندسی نقطهٔ O_1، بخشی از محیط دایرهٔ به‌قطر OC خواهد بود، که درداخل کرهٔ مفروض واقع است. اگر AB بر کره



شکل ۱۹۵

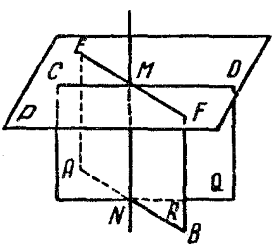
مماس باشد. آن‌وقت، مکان هندسی، دایره‌ای خواهد بود که شعاع آن نصف شعاع کره است. وقتی که AB کره‌را قطع کند، مکان هندسی نقطهٔ O_1، محیط دایرهٔ به‌قطر OC خواهد بود. درهرحال، مرکز مکان، درنقطهٔ وسط پاره‌خط OC است.

۹۷۴. فرض کنید بخواهیم، صفحه‌ای ازخط راست EF عبوردهیم که موازی باخط راست AB باشد (شکل ۱۹۶). دو حالت پیش می‌آید: a) EF موازی AB است. در این حالت، هر صفحه‌ای که از EF بگذرد، ولی از AB عبور نکند، با AB موازی است، زیرا اگر صفحه‌ای ازخط راستی موازی خط‌راست مفروض عبور کند، با آن خط موازی می‌شود. b) EF با AB متناظر است. روی EF نقطهٔ دلخواه O را انتخاب و، از آن جا، خط راست CD را موازی AB رسم می‌کنیم که، بنا بر اصل توازی، رسم آن ممکن است و، در ضمن، تنها یك خط از این گونه وجود دارد. از دو خط راست متقاطع EF و CD، می‌توان یك صفحه، وتنها یك صفحه، عبور داد. این صفحه با AB موازی است، زیرا ازخط راست CD موازی AB می‌گذرد. ثابت می‌کنیم که صفحهٔ دیگری وجود ندارد که از EF بگذرد وبا AB موازی باشد. از برهان خلف استفاده می‌کنیم، یعنی فرض می‌کنیم، صفحهٔ دیگری هم وجود داشته باشد که از EF بگذرد و با AB موازی باشد. صفحه‌ای از خط راست AB ونقطهٔ O می‌گذرانیم؛ این صفحه وجود دارد و، در ضمن، منحصر به‌فرد است. صفحهٔ اخیر، دو صفحهٔ اول را در دو خط راست مختلف قطع می‌کند که هر دو ازنقطهٔ O گذشته‌اند و با خط‌راست AB موازی‌اند. ولی این، ممکن نیست. بنا براین، صفحه‌ای که‌از EF بگذرد وبا AB موازی باشد منحصر-به‌فرد است.



شکل ۱۹۶

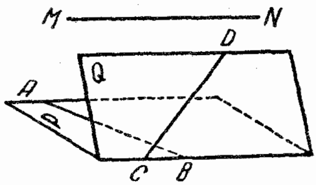
۹۷۵. AB و CD را دوخط راست متناظر فرض می‌کنیم (شکل ۱۹۷). از خط راست CD، صفحهٔ P را موازی خط‌راست AB (مسالهٔ ۹۷۴) وصفحهٔ Q را عمود برصفحهٔ P می‌گذرانیم. همچنین، از خط‌راست AB، صفحهٔ R را عمود برصفحهٔ P رسم می‌کنیم تا P را درخط راست EF قطع کند. صفحهٔ P، که بر دوصفحهٔ Q و R عمود است، برخط راست فصل مشترك دوصفحهٔ اخیر، یعنی MN، عمود می‌شود. بنا براین، MN بر CD و EF عمود است. ولی EF موازی AB است و MN



شکل ۱۹۷

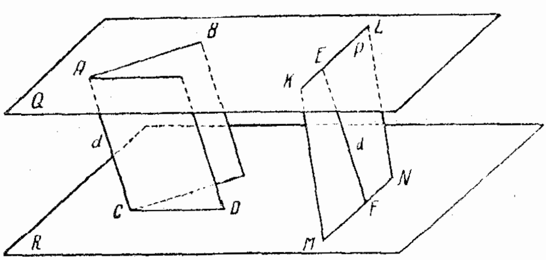
درصفحهٔ خطهای راست EF و AB قراردارد؛ درنتیجه، MN بر AB عمود است. به‌این ترتیب، MN، عمود مشترك خطهای راست AB و CD می‌شود.

۹۷۶. AB و CD را دو خط راست متناظـر می گیریم و فرض می کنیم کـه هیچ کدام ازآن‌ها با خط‌راست مفروض سوم MN موازی نباشند (شکل ۱۹۸) . از AB، صـفـحـهٔ P را مـوازی MN می گذرانیم (مساله ۹۷۴). این صفحه ، منحصر به‌فرد است. صفحهٔ Q را طوری رسم می کنیم کـه از CD بگذرد وبا MN موازی‌باشد. این صفحه هم‌منحصر‌به‌فرد است. CB، فصل مشترك دوصفحهٔ P و Q، همـان خـط‌راست مجهول است. ممکن است حالتی پیش آید کـه دو صفحهٔ P و Q موازی باشند. این حالت وقتی پیش می‌آید که خطهای راست AB، CD و MN، مـوازی با یك صفحه باشند. دراین حالت، مساله جواب ندارد. درحالتی هم که‌خط‌راست AB، یا خط‌راست CD، یا هردوی آن‌ها موازی با MN باشند، مساله بـدون جواب است. وقتی AB و CD، واقع بر یك صفحه باشند، ولی هردوی آن‌ها به‌طور هم‌زمان موازی MN نباشند، آن‌وقت، در حالتی کـه صفحهٔ P ـ که‌خطهای راست AB و CD بر آن‌واقع‌اند ـ موازی MN باشد، مساله دارای بی‌نهایت جواب است؛ ولی وقتی که این صفحهٔ P موازی خط‌راست MN نباشد، تنها یك جواب وجود دارد (به‌شرطی که AB و CD متقاطع باشند) ویا جوابی وجود ندارد (به‌شرطی که خطهای راست AB و CB موازی باشند ویا هر سه‌خط راست، ازیك نقطه بگذرند).



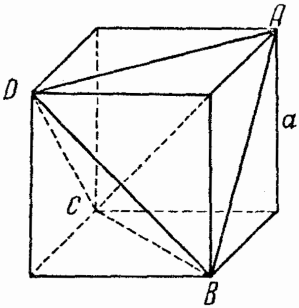
شکل ۱۹۸

۹۷۷. صفحه، خطهای‌راست وطول پاره‌خط‌مفروض را P، AB، CD و d می گیریم (شکل ۱۹۹). ازخط‌راست AB، صفحهٔ Q را موازی CD، وازخط‌راست CD، صفحهٔ R را موازی AB رسم می کنیم. روشن است که صفحه‌های Q و R موازی‌اند وصفحهٔ P را روی خطهـای راستی مثل KL و MN، کـه بـاهم موازی‌انـد، قطع می کنند. پاره‌خط



شکل ۱۹۹

$EF=d$ را طوری می‌سازیم که نقطه‌های E و F، به‌ترتیب، بر KL و MN واقع باشند. اکنون اگر خط راست AC را طوری رسم کنیم که باخط راست EF موازی باشد وخط‌های راست AB و CD را قطع کند (مسالهٔ ۹۷۶)، آن‌وقت، پاره‌خطی از آن که بین نقطه‌های برخورد A و C قراردارد، همان پاره‌خط مجهول مساله است. ممکن است وضع صفحهٔ P، خطهای راست AB و CD و پاره‌خط d ، و همچنین طول مفروض پاره‌خط، طوری باشد که مساله جواب نداشته باشد، یا دو جواب پیدا کند و یا مجموعهٔ جواب، نامتناهی باشد.



شکل ۲۰۰

۹۷۸. شکل حاصل، چهاروجهی منتظم $ABCD$ است (شکل ۲۰۰) با یال $AB=a\sqrt{۲}$. حجم آن چنین است:

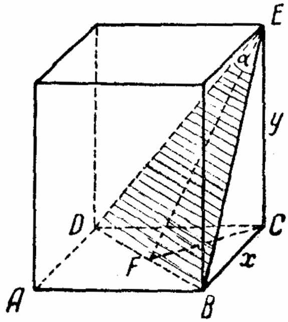
$$V=a^{۳}-۴\times\frac{a^{۳}}{۶}=\frac{a^{۳}}{۳}$$

۹۷۹. شکل، یك هشت وجهی منتظم، با یال

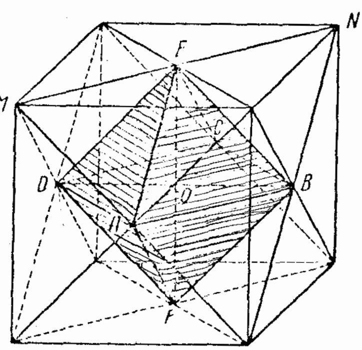
$$AB=\frac{۱}{۲}MN=\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$

است (شکل ۲۰۱). این هشت‌وجهی از دوهرم منتظم مساوی $EABCD$ و $FABCD$ با ارتفاع $EO=\frac{۱}{۲}EF=\frac{a}{۲}$ تشکیل شده است. بنا براین، حجم آن‌چنین است:

$$V=۲V_{ABCDE}=۲\times\frac{۱}{۳}\left(\frac{a\sqrt{۲}}{۲}\right)^{۲}\cdot\frac{a}{۲}=\frac{a^{۳}}{۶}$$



شکل ۲۰۲



شکل ۲۰۱

۹۸۵. یال قاعده را x ویال جانبی را y می‌گیریم (شکل ۲۰۲). دراین صورت

$$S=\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}DB\cdot EF$$

سطح کل منشور $S_n=2x^2+4xy$. برابری اول را ۴ برابرمی‌کنیم، ازمقایسه برابری حاصل با برابری اخیر به‌دست می‌آید: $S_n=4S-2DB\cdot EF$. ازطرف دیگرداریم:

$$DB=BC\sqrt{2}=x\sqrt{2};\ EF=FB\,cotg\frac{\alpha}{2}=\frac{x\sqrt{2}}{2}\,cotg\frac{\alpha}{2}$$

y را برحسب x بیان می‌کنیم:

$$y=EC=\sqrt{EF^2-FC^2}=\sqrt{\frac{x^2}{2}cotg^2\frac{\alpha}{2}-\frac{x^2}{2}}=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}-1}=\frac{x\sqrt{\cos\alpha}}{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$$

اکنون می‌توان x را پیداکرد:

$$S=\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}DB\cdot EF=\frac{1}{2}x^2+\frac{x^2\sqrt{\cos\alpha}}{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}+$$

$$+\frac{1}{2}x\sqrt{2}\cdot\frac{x\sqrt{2}}{2}cotg\frac{\alpha}{2}=\frac{x^2}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2\cos\alpha}+\cos\frac{\alpha}{2}\right);$$

$$x=\sqrt{\frac{2S\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2\cos\alpha}+\cos\frac{\alpha}{2}}}$$

وبرای سطح کل مجهول داریم:

$$S_n=4S-2x\sqrt{2}\cdot\frac{x\sqrt{2}}{2}cotg\frac{\alpha}{2}=4S-2x^2\,cotg\frac{\alpha}{2}=$$

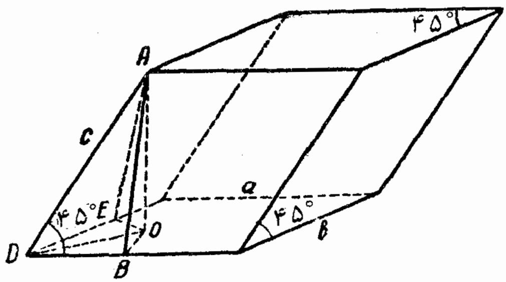
$$=4S-\frac{4S\sin\frac{\alpha}{2}cotg\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2\cos\alpha}+\cos\frac{\alpha}{2}}=4S\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2\cos\alpha}+\cos\frac{\alpha}{2}}$$

۹۸۱. ازمثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ADO، DOB و DAB (شکل ۲۰۳) داریم:

$$AO^2 = AD^2 - DO^2 = c^2 - \left(\frac{DB}{\cos 22^\circ 30'}\right)^2 = c^2 - \left(\frac{c\cdot\cos 45^\circ}{\cos 22^\circ 30'}\right)^2 =$$

$$= c^2 \cdot \frac{\cos^2 22^\circ 30' - \cos^2 45^\circ}{\cos^2 22^\circ 30'} = c^2 \cdot \frac{\frac{1+\cos 45^\circ}{2} - \frac{1}{2}}{\cos^2 22^\circ 30'} =$$

$$= \frac{c^2}{2\sqrt{2}\cdot\cos^2 21^\circ 30'};\quad AO = \frac{c}{\sqrt{2\sqrt{2}}\cos 22^\circ 30'}$$



شکل ۲۰۳

به این ترتیب، حجم مجهول، چنین می‌شود:

$$V = Sh = S\cdot AO = ab\sin 45^\circ \cdot \frac{c}{\sqrt{2\sqrt{2}}\cos 22^\circ 30'} = \frac{abc}{2\sqrt[4]{2}\cos 22^\circ 30'}$$

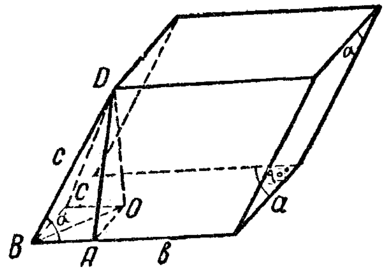
۹۸۲. برای حجم‌مجهول داریم: $V = ab.DO$ (شکل ۲۰۴). ازل D، عمودهای DA و DC را بریال‌های مجاور قاعده فرود می آوریم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ DAB و DCB برابرند(وترمشترك دارند ودریك زاویهٔ حاده برابرند)، پس $AB = BC$ ومستطیل $AOCB$ یك مربع است. اکنون دیگرارتفاع متوازی‌السطوح، به‌سادگی پیدا می‌شود:

$$DO = \sqrt{DB^2 - OB^2} = \sqrt{DB^2 - (AB^2 + AO^2)} = \sqrt{DB^2 - 2AB^2} =$$

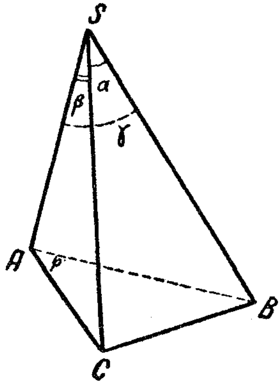
$$= \sqrt{c^2 - 2c^2\cos^2\alpha} = c\sqrt{1 - 2\cos^2\alpha} = c\sqrt{-\cos 2\alpha}$$

وازآن‌جا $$V = abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$$

یادداشت. $\cos 2\alpha < 0$، زیرا $2\alpha > 90^\circ$ (هرزاویهٔ مسطحهٔ کنج‌سه‌وجهی،ازمجموع دو زاویهٔ دیگر کوچکتراست).



شکل ۲۰۴



شکل ۲۰۵

۹۸۳. ازنقطهٔ A به فاصلهٔ واحد از راس S کنج سه‌وجهی مفروض $SABC$، صفحه‌ای عمود بر یال SA رسم می‌کنیم. چون دو زاویهٔ β و γ حاده‌اند، بنابراین، این صفحه، یال‌های دیگر کنج را هم قطع می‌کند. در مقطع، مثلث ABC به‌دست می‌آید؛ که در آن، زاویهٔ BAC مجهول است. BAC را برابر φ می‌گیریم. برای پیدا کردن مقدار φ، $BC^۲$ را به کمك قضیهٔ کسینوس‌ها، برحسب ضلع‌های دومثلث ABC و SBC بیان، و رابطه‌های حاصل را مقایسه می‌کنیم. داریم:

$$AC^۲+AB^۲-۲AC\cdot AB\cos\varphi=SC^۲+SB^۲-۲SC\cdot SB\cos\alpha;$$

$$۲AC\cdot AB\cos\varphi=۲SC\cdot SB\cos\alpha-(SC^۲-AC^۲)-(SB^۲-AB^۲)$$

ولی درمثلث‌های ASC و ASB داریم: $AC=tg\beta$، $AB=\gamma$، $SC=\frac{۱}{\cos\beta}$، $SB=\frac{۱}{\cos\gamma}$، $SC^۲-AC^۲=SB^۲-AB^۲=۱$. بنابراین

$$۲\,tg\beta\,tg\gamma\cos\varphi=\frac{۲\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}-۲;\ \cos\varphi=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$$

با توجه به برابری حقوق زاویه‌های α، β و γ، برای دو زاویهٔ دووجهی دیگر به دست می‌آید:

$$\frac{\cos\beta-\cos\gamma\cos\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha},\quad\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

۹۸۴. با استفاده ازشکل ۲۰۶، برای حجم مجهول می‌توان نوشت:

$$V=lm\sin\gamma\cdot BD=lm\sin\gamma\cdot BC\sin\varphi=lm\sin\gamma\cdot AB\sin\beta\sin\varphi=$$
$$=lmn\sin\beta\sin\gamma\sin\varphi$$

تنها درعبارت اخیر، $\sin\varphi$ نامعلوم است. ولی

$$\cos\varphi=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}\qquad (\text{مسالهٔ ۹۸۳})$$

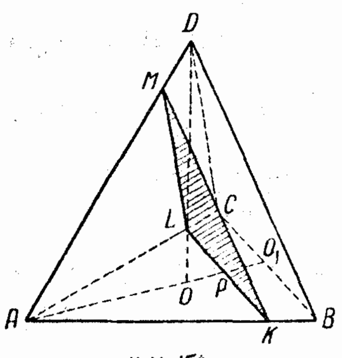
$$۱+\cos\varphi=\frac{\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}=\frac{۱}{\sin\beta\sin\gamma}[\cos\alpha-\cos(\beta+\gamma)]=$$
$$=\frac{۲}{\sin\beta\sin\gamma}\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{۲}\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{۲}$$

به همین ترتیب

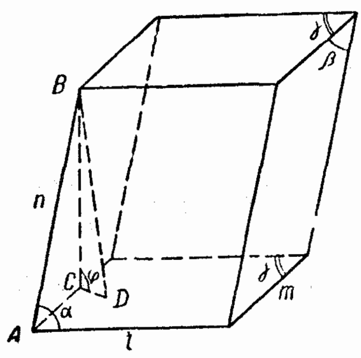
$$۱-\cos\varphi=\frac{۲}{\sin\beta\sin\gamma}\sin\frac{\gamma+\alpha-\beta}{۲}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{۲}$$

اکنون دیگر، $\sin\alpha$ به‌سادگی پیدا می‌شود: (براساس رابطهٔ $\sin\alpha=\sqrt{۱+\cos\alpha}\cdot\sqrt{۱-\cos\alpha}$)
و درنتیجه

$$V=۲lmn\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{۲}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{۲}\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{۲}\sin\frac{\gamma+\alpha-\beta}{۲}}$$



شکل ۲۰۷



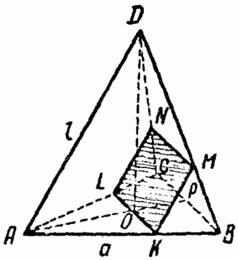
شکل ۲۰۶

۹۸۵. مساحت مجهول مثلث MKL را σ مـی‌نامیم (شکل ۲۰۷). براساس قضیهٔ مربوط به خاصیت‌های مقطع‌های موازی هرم، داریم:

$$\frac{\sigma}{S}=\frac{AP^{۲}}{AO_{۱}^{۲}}=\frac{\left(AO+\frac{۱}{۲}OO_{۱}\right)^{۲}}{AO_{۱}^{۲}}=\frac{\left(\frac{۲}{۳}AO_{۱}+\frac{۱}{۶}AO_{۱}\right)^{۲}}{AO_{۱}^{۲}}=\frac{۲۵}{۳۶}$$

از آن‌جا: $\sigma=\frac{۲۵}{۳۶}S$.

۹۸۶. برای این‌که صفحه‌ای از O، مرکـز قاعده، مـوازی با یال‌های BC و AD رسم کنیم، کافـی است از O خط راست LK را موازی BC، از L، محل برخورد LK با یال AC، خط راست LN را مـوازی AD رسم کنـیم و، سپـس، ازخط‌هـای راسـت LK و LN صفحه‌ای را بگذرانیم. و این، همان صفحه‌ای است که در مساله، از آن صحبت شده است. مقطع $LNMK$، مستطیل است. در واقـع، صفحه‌ای که رسم کـردیم، با یال CB موازی است و، بنابراین، وجه‌های جانبی را، که از این یال می‌گذرند، درخـط راستی موازی CB قطع می‌کند؛ یعنی $MN \| LK$. بـه‌همین‌ترتیب موازی بودن LN و MK هم ثابت می‌شود؛ به نحوی که چهارضلعی $LNMK$ متوازی‌ـ الاضلاع است. علاوه براین، بنا بـرقضیهٔ سه عمود، BC بـر AD عمود است و، بنابراین، $LNMK$ یك مستطیل است. روشن است که



شکل ۲۰۸

$$KL=\frac{۲}{۳}CB=\frac{۲}{۳}a;\ KM=\frac{۱}{۳}AD=\frac{۱}{۳}l$$

و برای مساحت مجهول: $S=\frac{۲}{۳}a\cdot\frac{۱}{۳}l=\frac{۲}{۹}al$.

۹۸۷. چون شیب وجـه‌های هرم نسبت به قاعـده، یکسان است، بنابراین، می‌توان دایره‌ای درقاعده محاط کرد، به‌نحوی که تصویر راس هـرم برقاعده، روی نقطهٔ O، مرکز این دایره، قرار گیرد (شکل ۲۰۹). برای حجم مجهول داریم:

$$V=\frac{۱}{۳}S_{ABCD}\cdot MO$$

ارتفاع $MO=\sqrt{EM^{۲}-EO^{۲}}$ را محاسبه می‌کنیم. از روی شکـل مـربوط به قاعدهٔ $ABCD$ دیده می‌شود:

$$h=BK=۲EO\Rightarrow EO=\frac{۱}{۲}h$$

اکنون EM را ازمثلث EMF به‌دست می آوریم. اگر مساحت آن را S بگیریم، داریم:

$$S=\frac{۱}{۲}ME^{۲}\sin\alpha,\ ME=\sqrt{\frac{۲S}{\sin\alpha}}$$

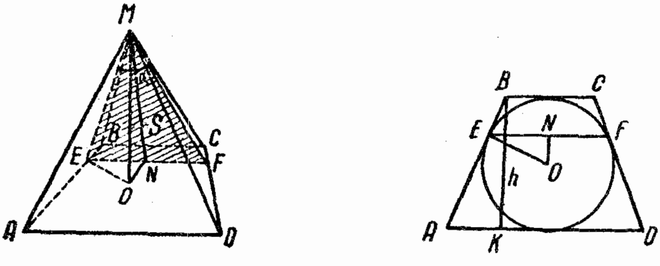
ازآن جا $MO=\sqrt{\frac{۲S}{\sin\alpha}-\frac{۱}{۴}h^{۲}}$. برای مساحت قاعده داریم:

$$S_{ABCD}=\frac{AD+BC}{۲}\cdot BK=AB\cdot BK=AB\cdot h$$

(با توجه به محیطی بودن چهارضلعی داریم: $AD+BC=AB+CD$ و با توجه به متساوی‌الساقین بودن ذوزنقه: $AB=AD$) باید به سراغ محاسبهٔ AB برویم. ازتشابه دو مثلث ABK و ENO داریم : $AB:BK=EO:EN$. ولی $BK=h$ و $ED=\frac{۱}{۲}h$،

بنابراین

$$AB=BK\cdot\frac{EO}{EN}=\frac{h^{۲}}{۲EN}$$



شکل ۲۰۹

ازمثلث EMN به‌دست می آید:

$$EN=EM\sin\frac{\alpha}{۲}=\sqrt{\frac{۲S}{\sin\alpha}}\cdot\sin\frac{\alpha}{۲}=\sqrt{\frac{۲S\cdot\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}}=\sqrt{S\cdot tg\frac{\alpha}{۲}}$$

و ازآن‌جا

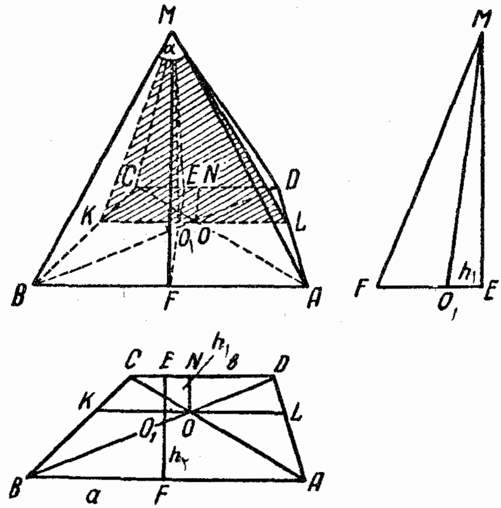
$$AB=\frac{h^۲}{۲\sqrt{S\cdot tg\frac{\alpha}{۲}}};\ S_{ABCD}=\frac{h^۳}{۲\sqrt{S\cdot tg\frac{\alpha}{۲}}}$$

و برای حجم مجهول

$$V=\frac{h^۳}{۶\sqrt{S\cdot tg\frac{\alpha}{۲}}}\cdot\sqrt{\frac{۲S}{\sin\alpha}-\frac{h^۲}{۴}}=\frac{h^۳}{۱۲\sqrt{۲S}\sin\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{۸S-h^۲\sin\alpha}$$

۹۸۸. مقطعی، که مساحت S آن را باید پیدا کنیم، KLM می‌نامیم (شکل ۲۱۰). قاعدهٔ KL این مثلث را می‌توان، با توجه به تشابه دومثلث OKB و DCB وهمچنین تشابه دومثلث KOC و BAC پیدا کرد. داریم:

$$KO:b=h_۲:h;\ KO:a=h_۲:h$$



شکل ۲۱۰

ازمجموع این دو برابری به‌دست می‌آید:

$$\frac{KO}{b}+\frac{KO}{a}=\frac{h_۲+h_۱}{h}=۱\Rightarrow KO=\frac{ab}{a+b}$$

به همین ترتیب، خواهیم داشت: $OL=OK=\frac{ab}{a+b}$، به‌نحوی که $KL=\frac{۲ab}{a+b}$. برای

ارتفاع مثلث مقطع داریم:

$$MO_1=\sqrt{ME^2+h_1^2}=\sqrt{MF^2-FE^2+h_1^2}$$

ولی $MF=FB\,cotg\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}cotg\frac{\alpha}{2}$؛ $EF=h$؛ h_1 هم ازرابطه‌ای که قبلاً پیدا کردیم، یعنی $\frac{OK}{a}=\frac{h_1}{h}$ به‌دست می‌آید: $h_1=\frac{h}{a}OK=\frac{bh}{a+b}$. به این ترتیب

$$S=\frac{1}{2}KL\cdot MO_1=\frac{ab}{a+b}\sqrt{\frac{a^2}{4}cotg^2\frac{\alpha}{2}-h^2+\frac{b^2h^2}{(a+b)^2}}$$

۹۸۹. مساحت مجهول را S ومساحت مثلث ABD را S_1 می‌گیریم (شکل ۲۱۱). می‌دانیم که مساحت‌تصویر یك شکل‌مسطح، برابراست بامساحت خودشکل‌ضرب‌در کسینوس زاویهٔ بین صفحهٔ تصویروصفحهٔ شکل: $S_1=S\cos\alpha$.

از آن جا

$$S=\frac{S_1}{\cos\alpha}\left(S_1=\frac{AB^2\sin 60^\circ}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2\right)$$

طبـق شرط داریـم: $\frac{1}{3}S_1\cdot CD=V$. ولی چون

$$CD=DE\cdot tg\alpha=AB\sin 60^\circ tg\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}AB\,tg\alpha$$

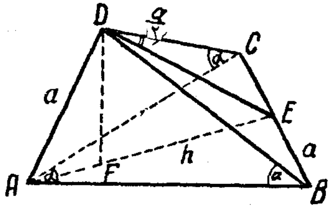
پس

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}AB\,tg\alpha=\frac{1}{8}AB^3tg\alpha \quad و \quad AB=2\sqrt[3]{V\cdot cotg\alpha}$$

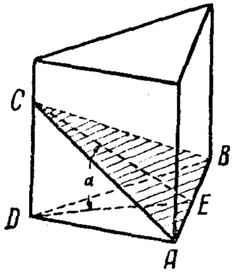
به‌این ترتیب، مساحت مجهول، چنین می‌شود:

$$S=\frac{S_1}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt[3]{V^2cotg^2\alpha}\cdot\sqrt{3}}{\cos\alpha}$$

۹۹۰. $DABC$ را هرم مفروض مـی‌گیریـم (شکل ۲۱۲). ارتفاع DE از وجه DCB و ارتفاع DF ازهـرم را رسم می‌کنیم. روشن است کـه نقطه‌های E و F ــ پای ارتفاع‌ها ــ برارتفاع AE درمثلث ABC قرارمی‌گیرند. فرض‌می‌کنیم: $x=AE=DE$.
حجم مجهول V را می‌توان چنین نوشت:



شکل ۲۱۲



شکل ۲۱۱

$$V=\frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{۲}CB\cdot AE\cdot DF=\frac{۱}{۶}ax\cdot DF=$$

$$=\frac{۱}{۶}ax\sqrt{AD^{۲}-AF^{۲}}=\frac{۱}{۶}ax\sqrt{a^{۲}-AF^{۲}}$$

برای محاسبهٔ $AF=y$، مقدار $DF^{۲}$ را در دومثلث ADF و EDF محاسبه می‌کنیم و، سپس برابرقرار می‌دهیم. به‌دست می‌آید:

$$a^{۲}-y^{۲}=x^{۲}-(x-y)^{۲}\Rightarrow a^{۲}=۲xy\Rightarrow y=\frac{a^{۲}}{۲x}$$

که در آن، مقدار x، چنین است:

$$x=DE=CE\,cotg\frac{\alpha}{۲}=\frac{a}{۲}cotg\frac{\alpha}{۲}$$

بنابراین

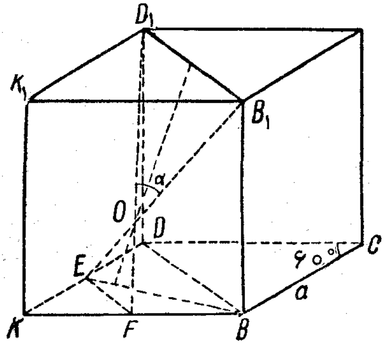
$$V=\frac{۱}{۶}ax\sqrt{a^{۲}-\frac{a^{۴}}{۴x^{۲}}}=\frac{a^{۲}}{۱۲}\sqrt{۴x^{۲}-a^{۲}}=\frac{a^{۲}}{۱۲}\sqrt{a^{۲}cotg^{۲}\frac{\alpha}{۲}-a^{۲}}=$$

$$=\frac{a^{۳}}{۱۲}\sqrt{\frac{cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}-sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}}{sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}}}=\frac{a^{۳}\sqrt{cos\alpha}}{۱۲\,sin\frac{\alpha}{۲}}$$

۹۹۱. مساحت قاعده وارتفاع منشور را S و H می‌گیریم، یعنی برای حجم مجهول V داریم:

$$V=S\cdot H=a^{۲}sin۶۰^{\circ}\cdot H=\frac{a^{۲}H\sqrt{۳}}{۲}$$

از مثلث $B_{۱}EB$ (شکل ۲۱۳) به‌دست می‌آید:



شکل ۲۱۳

$$H=BB_۱=\sqrt{B_۱E^۲-BE^۲}$$

که درآن

$$BE=KB\sin ۶۰^\circ=\frac{a\sqrt{۳}}{۲} \text{ و } B_۱E=B_۱O+OE$$

مثلث‌های KDB و $K_۱D_۱B_۱$ متساوی‌الاضلاع‌اند، بـه ضلع برابر a؛ و EF پاره‌خطی است که وسط دوضلع مثلث KDB را به‌هم وصل کرده است، بنابراین

$$B_۱E=\frac{a}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}}+\frac{a}{۴\sin\frac{\alpha}{۲}}=\frac{۳a}{۴\sin\frac{\alpha}{۲}}$$

به‌این ترتیب

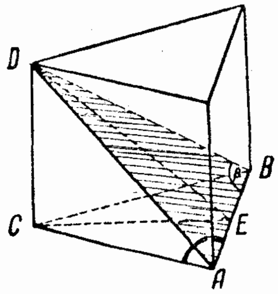
$$H=\sqrt{\frac{۹a^۲}{۱۶\sin^۲\frac{\alpha}{۲}}-\frac{۳}{۴}a^۲}=\frac{a\sqrt{۳}}{۲\sin\frac{a}{۲}}\sqrt{\frac{۳}{۴}-\sin^۲\frac{\alpha}{۲}}=$$

$$=\frac{a\sqrt{۳}}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\sin^۲۶۰^\circ-\sin^۲\frac{\alpha}{۲}}=\frac{a\sqrt{۳}}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\frac{\cos\alpha-\cos۱۲۰^\circ}{۲}}=$$

$$=\frac{a\sqrt{۳}}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\sin\left(۶۰^\circ+\frac{\alpha}{۲}\right)\sin\left(۶۰^\circ-\frac{\alpha}{۲}\right)};$$

$$V=\frac{۳a^۳}{۴\sin\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\sin\left(۶۰^\circ+\frac{\alpha}{۲}\right)\sin\left(۶۰^\circ-\frac{\alpha}{۲}\right)}$$

۹۹۲. ضلع AB قاعده را x می‌نامیم (شکل ۱۲۴). حجم مطلوب چنین است:



شکل ۲۱۴

$$V=S_{ABC}\cdot CD=\frac{۱}{۲}AB\cdot CE\cdot CD=\frac{۱}{۲}AB\cdot AE tg\alpha\cdot CD=$$

$$=\frac{۱}{۲}x\cdot\frac{x}{۲}tg\alpha\cdot CD=\frac{۱}{۴}x^{۲}tg\alpha\cdot CD$$

اکنون CD را برحسب x محاسبه می‌کنیم:

$$CD=\sqrt{DE^{۲}-EC^{۲}}=\sqrt{\left(\frac{x}{۲}tg\beta\right)^{۲}-\left(\frac{x}{۲}tg\alpha\right)^{۲}}=\frac{x}{۲}\sqrt{tg^{۲}\beta-tg^{۲}\alpha}=$$

$$=\frac{x\sqrt{sin^{۲}\beta cos^{۲}\alpha-sin^{۲}\alpha cos^{۲}\beta}}{۲\,cos\alpha cos\beta}=\frac{x\sqrt{sin(\beta+\alpha)sin(\beta-\alpha)}}{۲\,cos\alpha cos\beta}$$

برای محاسبهٔ x، مثلاً مثلث ABC را درنظر می‌گیریم. داریم:

$$۲p=AB+BC+CA=AB+۲CA=x+\frac{۲x}{۲\,cos\alpha}=$$

$$=x\cdot\frac{۱+cos\alpha}{cos\alpha}=\frac{۲x\,cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}}{cos\alpha}$$

و از آن جا $x=\dfrac{p\,cos\alpha}{cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}}$ و

$$V=\frac{۱}{۴}x^{۲}tg\alpha\cdot CD=\frac{x^{۳}tg\alpha}{۸}\cdot\frac{\sqrt{sin(\beta+\alpha)sin(\beta-\alpha)}}{cos\alpha cos\beta}=$$

$$=\frac{p^{۳}cos^{۳}\alpha tg\alpha}{۸cos^{۶}\frac{\alpha}{۲}cos\alpha cos\beta}\sqrt{sin(\beta+\alpha)sin(\beta-\alpha)}=$$

$$=\frac{p^3\sin 2\alpha\sqrt{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}}{16\cos^6\frac{\alpha}{2}\cos\beta}$$

۹۹۳. S، سطح کل هرم را بـرحسب ضلع قاعدهٔ $x=DB$ محاسبه می‌کنیم (شکل ۲۱۵). مساحت قاعدهٔ هرم را S_1 می‌گیریم و ازمساحت تصویری یك‌شکل مستوی استفاده می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

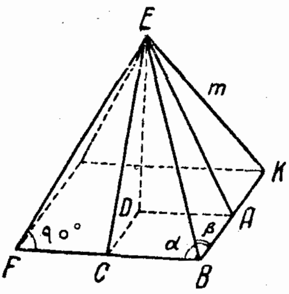
$$S=S_1+\frac{S_1}{\cos\alpha}=S_1\cdot\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2S_1\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}=\frac{x^2\sqrt{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\alpha};$$

$$V=\frac{1}{3}S_1\cdot AO=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2\sqrt{3}}{3}\cdot OE\cdot tg\alpha=\frac{x^2\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{1}{3}CE\cdot tg\alpha=$$

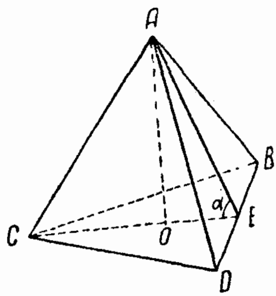
$$=\frac{x^2\sqrt{3}}{36}\cdot x\sin 60^\circ tg a=\frac{x^3}{24}tg\alpha \quad \text{و} \quad x=2\sqrt[3]{3V\,cotg\alpha}$$

واگر این مقدار x را درعبارت S قراردهیم:

$$S=\frac{2\sqrt{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt[3]{9V^2cotg^2\alpha}}{\cos\alpha}$$



شکل ۲۱۶



شکل ۲۱۵

۹۹۴. ازمثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ECB، EAB و EDC (شکل ۲۱۶) به‌دست‌می‌آید:

$$FB=2CB=2BE\cos\alpha=2m\cos\alpha;$$

$$KB=2AB=2BE\cos\beta=2m\cos\beta;\quad EC=EB\sin\alpha=m\sin\alpha;$$

$$ED=\sqrt{EC^2-CD^2}=\sqrt{EC^2-AB^2}=\sqrt{m^2(\sin^2\alpha-\cos^2\beta)}=$$

$$= m\sqrt{-\frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2}} = m\sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$$

وحجم مجهول چنین می‌شود:

$$V = \frac{1}{3} FB \cdot BK \cdot ED = \frac{4}{3} m^3 \cos\alpha \cos\beta \sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$$

یادداشت. $\cos(\alpha+\beta) < 0$، زیرا $\alpha+\beta > \frac{\pi}{2}$ (مجموع دوزاویهٔ کنج سه‌وجهی بزرگتر از سومی است).

۹۹۵. برای مساحت مجهول داریم: $S = \frac{AB+CD}{2} \cdot KL$ (شکل ۲۱۷). از قضیهٔ کسینوس‌ها درمثلث KFL استفاده می‌کنیم:

$$\frac{KL}{\sin\alpha} = \frac{KF}{\sin\beta} = \frac{FL}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}$$

بنا براین

$$KL = \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}; \; KF = \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

با توجه به تشابه دومثلث MNE و DCE داریم:

$$CD : MN = KE : EF; \Big(NM = a\,;\, EF = \frac{FD}{\cos\alpha} = \frac{a}{2\cos\alpha};$$

$$KE = EF - KF = \frac{a}{2\cos\alpha} - \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)} \Big)$$

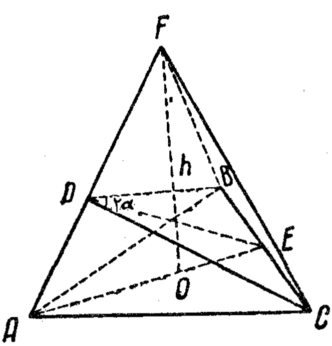
و ازآن‌جا

$$CD = MN \cdot \frac{KE}{EF} = a \cdot \frac{a\sin(\alpha-\beta) \cdot 2\cos\alpha}{2\cos\alpha\sin(\alpha+\beta) \cdot a} = \frac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

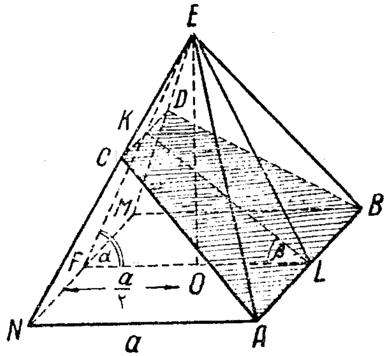
و در نتیجه

$$S = \frac{AB+CD}{2} \cdot KL = \frac{1}{2}\left[a + \frac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\right] \cdot \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} =$$

$$= a \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{2\sin(\alpha+\beta)} \cdot \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a^2 \sin^2\alpha \cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}$$



شکل ۲۱۸



شکل ۲۱۷

۹۹۶. CB، یعنی ضلع قاعده را x می گیریم (شکل ۲۱۸). برای حجم مجهول داریم:

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}BC^2\sin 60^\circ\cdot FO=\frac{x^2}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}h=\frac{x^2\sqrt{3}}{12}h$$

از تشابه دومثلث AFO و ADE به‌دست می‌آید: $AE:DE=AF:FO$. ولی

$$AE=AC\cdot\sin 60^\circ=\frac{x\sqrt{3}}{2};\ DE=CE\,\mathrm{cotg}\,\alpha=\frac{x}{2}\mathrm{cotg}\,\alpha;$$

$$OF=h;\ AF=FO\cdot\frac{AE}{DE}=\sqrt{3}\cdot h\cdot \mathrm{tg}\,\alpha$$

درمثلث AFO داریم: $AF^2=AO^2+OF^2$ وچون

$$AO=\frac{2}{3}AE=\frac{\sqrt{3}}{3}x;\ OF=h;\ AF=h\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

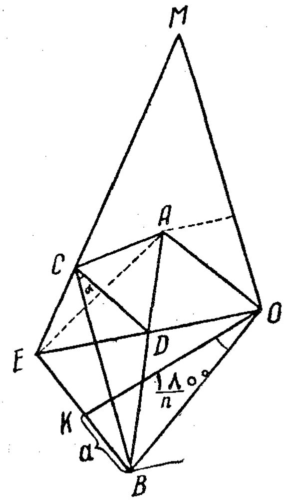
بنا براین، به‌ترتیب خواهیم داشت:

$$(h\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2+h^2;\ 3h^2\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{3}x^2+h^2;$$

$$\frac{1}{3}x^2=3h^2\mathrm{tg}\,\alpha-h^2;\ x^2=9h^2(\mathrm{tg}^2\alpha-\mathrm{tg}^2 30^\circ)=\frac{12\sin(\alpha+30^\circ)\sin(\alpha-30^\circ)}{\cos^2\alpha}h^2$$

و به این ترتیب: $V=\frac{x^2\sqrt{3}}{12}\cdot h=\frac{\sqrt{3}h^3\sin(\alpha+30^\circ)\sin(\alpha-30^\circ)}{\cos^2\alpha}$.

۹۹۷. روی شکل ۲۱۹، بخشی ازهرم با قاعدهٔ n ضلعی نشان داده شده است.



شکل ۳۱۹

$\widehat{ACB}=2\alpha$، زاویهٔ دووجهی مربوط بـه‌یال جانبی است. مساحت قاعده را پیدا می‌کنیم:

$$S=n\cdot S_{OBE}=n\cdot\frac{1}{2}BE\cdot OK=n\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot a\cdot cotg\frac{180^\circ}{n}=n\cdot a^2 cotg\frac{180^\circ}{n}$$

OM، ارتفاع هرم را پیدا می‌کنیم. از تشابه مثلث‌های OME و CDE داریم:

$$OM:CD=EO:EC$$

ازطرف دیگر

$$OE=OB=\frac{KB}{\sin\frac{180^\circ}{n}}=\frac{a}{\sin\frac{180^\circ}{n}};\ CD=BD\cdot cotg\alpha=$$

$$=BE\cdot\cos(DBE)\cdot cotg\alpha=2a\cos\frac{180^\circ}{n}cotg\alpha;\ \widehat{DBE}=\widehat{KOB}.$$

$$EC=\sqrt{ED^2-CD^2}=\sqrt{\left(EB\sin\frac{180^\circ}{n}\right)^2-CD^2}=$$

$$=\sqrt{\left(2a\sin\frac{180^\circ}{n}\right)^2-\left(2a\cos\frac{180^\circ}{n}cotg\alpha\right)^2}=$$

$$=\frac{2a}{\sin\alpha}\sqrt{\sin^2\frac{180^\circ}{n}\sin^2\alpha-\cos^2\frac{180^\circ}{n}\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{۲a}{\sin\alpha}\sqrt{-\cos\left(\frac{۱۸۰^\circ}{n}+\alpha\right)\cos\alpha\left(\frac{۱۸۰^\circ}{n}-\alpha\right)}$$

بنا براین، برای حجم مجهول خواهیم داشت:

$$V=\frac{۱}{۳}\cdot S\cdot OM=\frac{۱}{۳}S\cdot C\cdot D\,\frac{EO}{EC}=$$

$$=\frac{۱}{۳}\cdot\frac{na^۲\cot g\frac{۱۸۰^\circ}{n}\cdot ۲a\cos\frac{۱۸۰^\circ}{n}\cdot\cot g\alpha\frac{a}{\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}}}{\frac{۲a}{\sin\alpha}\sqrt{-\cos\left(\frac{۱۸۰^\circ}{n}+\alpha\right)\cos\left(\frac{۱۸۰^\circ}{n}-\alpha\right)}}=$$

$$=\frac{na^۳\cos\alpha\cdot\cot g^۲\frac{۱۸۰^\circ}{n}}{۳\sqrt{-\cos\left(\frac{۱۸۰^\circ}{n}+\alpha\right)\cos\left(\frac{۱۸۰^\circ}{n}-\alpha\right)}}$$

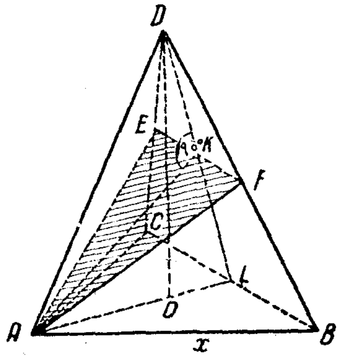
یادداشت. $\cos\left(\frac{۱۸۰^\circ}{n}+\alpha\right)<۰$، زیرا $\frac{۱۸۰^\circ}{n}+\alpha>\frac{\pi}{۲}$. در واقع، زاویهٔ EBD (که برابر $\frac{۱۸۰^\circ}{n}$ است) از زاویهٔ CBD بزرگتراست، زیرا داریم:

$$tg(EBD)=\frac{ED}{BD}>\frac{CD}{BD}=tg(CBD)$$

از آنجا

$$\frac{۱۸۰^\circ}{n}+\alpha>\widehat{CBD}+\widehat{BCD}=۹۰^\circ$$

۹۹۸. روشن است که صفحهٔ مقطع AEF (شکل ۲۲۰) نمی‌تواند بر وجه ADC عمود باشد، زیرا دراین صورت، اگر از راس D عمودهایی بر AE و AF رسم کنیم، دو عمود برابرمی‌شوند، که ممکن نیست، زیرا اولی برصفحه عمود است، درحالی‌که دومی، نسبت به صفحه، مایل است. این مطلب از ویژگی‌های تقارن هم روشن است: عمود بودن برصفحه ADC، به‌معنای عمود بودن برصفحهٔ ADB است. بنا براین، صفحهٔ مقطع، برصفحهٔ BDC عمود است. ضلع قاعده‌را x می‌نامیم؛ ومساحت قاعده‌وسطح جانبی هرم‌را برحسب



شکل ۲۲۵

آن بیان می‌کنیم:

$$S_1=\frac{1}{2}AB^2\sin 60^\circ=\frac{x^2\sqrt{3}}{4};$$

(S_1، مساحت قاعده است) و

$$S_2=3\cdot\frac{1}{2}BC\cdot DL$$

(S_2، سطح جانبی است). دراین‌جا $BC=x$، و DL ازتشابه مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ DOL و KAL به‌دست می‌آید: $DL:AL=OL:KL$. ولی

$$AL=\frac{x\sqrt{3}}{2};OL=\frac{1}{3}AL=\frac{x\sqrt{3}}{6};KL=\frac{1}{2}DL$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$DL\cdot KL=OL\cdot AL;DL\cdot\frac{1}{2}DL=\frac{x\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{x\sqrt{3}}{2};$$

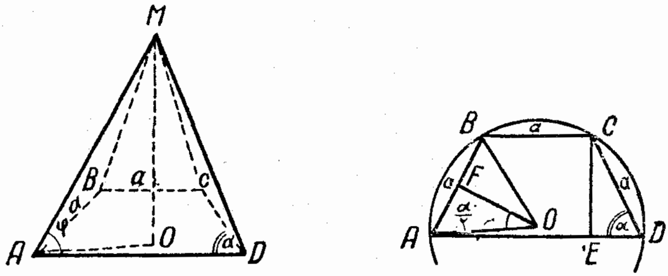
$$DL=\frac{x}{\sqrt{2}} \text{ و } S_2=\frac{3x^2}{2\sqrt{2}};\frac{S_2}{S_1}=\frac{3x^2\cdot 4}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}x^2}=\sqrt{6}$$

۹۹۹. داریم (شکل ۲۲۱):

$$V=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot OM;\ S_{ABCD}=\frac{AD+BC}{2}\cdot CE=$$

$$=\frac{BC+۲DE+BC}{۲}\cdot CE=(BC+DE)\cdot CE=$$

$$=(a+a\cos\alpha)a\sin\alpha=a^۲(۱+\cos\alpha)\sin\alpha=۲a^۲\sin\alpha\cos^۲\frac{\alpha}{۲}$$



شکل ۲۲۱

برای تعیین ارتفاع OM هرم، توجه می‌کنیم که، به دلیل شیب یکسان یال‌ها نسبت به‌قاعده، تصویر راس‌هرم برقاعده، روی مرکز دایرهٔ محیطی‌قاعده می‌افتد؛ مرکز این‌دایره O، و شعاع آن AO است. این شعاع رامحاسبه می‌کنیم. دایرهٔ محیطی ذوزنقه رارسم می‌کنیم؛ چون وترهای AB، BC و CD برابرند، کمان‌های متناظر آن‌ها هم، برابرمی‌شوند. ازاین جا نتیجه می‌گیریم $\widehat{AOB}=\alpha$ $\left(\text{زیرا } \overset{\frown}{AB}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AC}\right)$. اکنون از مثلث OFA به‌دست می‌آید:

$$AO=\frac{AF}{\sin\frac{\alpha}{۲}}=\frac{a}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}}$$

و ازمثلث MOA:

$$MO=AO\cdot tg\varphi=\frac{a}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}}tg\varphi$$

و در نتیجه

$$V=\frac{۱}{۳}\cdot ۲a^۲\sin\alpha\cos^۲\frac{\alpha}{۲}\cdot\frac{a}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}}\cdot tg\,\varphi=\frac{۲}{۳}a^۳\cos^۳\frac{\alpha}{۲}tg\varphi$$

۱۰۰۰. $KN=h$ و $KL=a$ می گیریم (شکل ۲۲۲). اگر ارتفاع MO برابر H باشد، داریم: $MK=\frac{1}{2}H$. درضمن

$$MN=\sqrt{MK^2-KN^2}=\sqrt{\frac{1}{4}H^2-h^2}$$ و

$$ML=\sqrt{MK^2-KL^2}=\sqrt{\frac{1}{4}H^2-a^2}$$

مثلث‌های MOB و MKN و، همچنین، مثلث‌های MOP و MKL متشابه‌اند. برای اولی‌ها داریم:

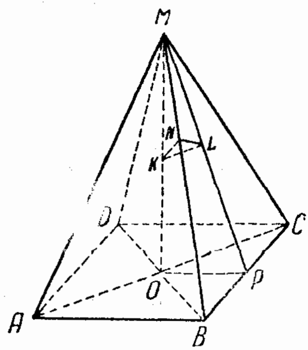
$$\frac{KN}{BO}=\frac{MN}{MO}\Rightarrow BO=MO\cdot\frac{KN}{MN}=H\cdot\frac{h}{\sqrt{\frac{1}{4}H^2-h^2}}$$

و ازمثلث‌های متشابه دوم

$$\frac{OP}{KL}=\frac{MO}{ML}\Rightarrow OP=KL\cdot\frac{MO}{ML}=a\cdot\frac{H}{\sqrt{\frac{1}{4}H^2-a^2}}$$

ولی چون $OP=PB$، بنابراین $OB^2=OP^2+PB^2=2OP^2$. از آن‌جا

$$\left(\frac{Hh}{\sqrt{\frac{1}{4}H^2-h^2}}\right)^2=2\left(\frac{Ha}{\sqrt{\frac{1}{4}H^2-a^2}}\right)^2;$$



شکل ۲۲۲

$$h^2\left(\frac{1}{4}H^2-a^2\right)=2a^2\left(\frac{1}{4}H^2-h^2\right)H=\frac{2ah}{\sqrt{2a^2-h^2}}$$

ضلع قاعده را محاسبه می‌کنیم:

$$BC=2BP=2OP=2\times\frac{aH}{\sqrt{\frac{1}{4}H^2-a^2}}=$$

$$=2\times\frac{a}{\sqrt{\frac{a^2h^2}{2a^2-h^2}-a^2}}\cdot\frac{2ah}{\sqrt{2a^2-h^2}}=\frac{2\sqrt{2}ah}{\sqrt{h^2-a^2}}$$

و بنا بر این

$$V=\frac{1}{3}BC^2\cdot MO=\frac{16a^3h^3}{3(h^2-a^2)\sqrt{2a^2-h^2}}$$

۱۰۰۱. برای سطح کل داریم: $S=S_{ABC}+3S_{CMB}$ (شکل ۲۲۳). ولی

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot CB\sin 60^\circ=\frac{q^2\sqrt{3}}{4};S_{CMB}=\frac{1}{2}CB\cdot MF=$$

$$=\frac{1}{2}q\sqrt{CM^2-CF^2}=\frac{1}{2}q\sqrt{CM^2-\frac{q^2}{4}}$$

اکنون، باید CM را پیدا کنیم. فرض می‌کنیم: $CD=my$، $MD=ny$. از تشابه دومثلث MCO و ECD، به‌دست می‌آید $CE:CD=CM:CO$. ولی

$$CE=CB\sin 60^\circ=\frac{q\sqrt{3}}{2};\ CO=\frac{2}{3}CE=\frac{q}{3}\sqrt{3};\ CM=(m+n)y$$

از آنجا نتیجه می‌شود:

$$CE\cdot CO=CD\cdot CM;\frac{q\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{q}{3}\sqrt{3}=my(m+n)y;\ y=\frac{q}{\sqrt{2m(m+n)}};$$

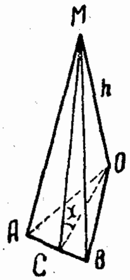
$$CM=(m+n)y=\frac{(m+n)q}{\sqrt{2m(m+n)}}=\frac{q}{2m}\sqrt{2m(m+n)}$$

به این ترتیب

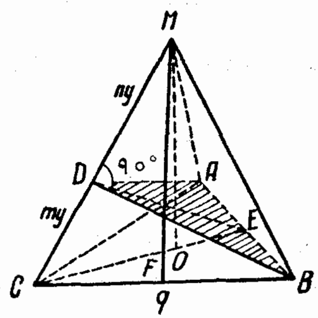
$$S_{CMB}=\frac{1}{2}q\sqrt{CM^2-\frac{1}{4}q^2}=\frac{1}{2}q\sqrt{\frac{q^2(m+n)}{2m}-\frac{1}{4}q^2}=$$

$$=\frac{1}{4}q^2\sqrt{\frac{2m+2n-m}{m}}=\frac{q^2}{4m}\sqrt{(m+2n)m};$$

$$S=\frac{q^2\sqrt{3}}{4}+3q^2\frac{\sqrt{(m+2n)m}}{4m}=\frac{q^2\sqrt{3}}{4}[m+\sqrt{3m(m+2n)}]$$



شکل ۲۲۴



شکل ۲۲۳

۱۰۰۲. برای مجموع زاویه‌های داخلی چند ضلعی داریم:

$$180^\circ(m-2)=90^\circ n;\quad 2(m-2)=n;\quad m=\frac{n}{2}+2$$

زاویهٔ MCO را x می‌گیریم (شکل ۲۲۴، که در آن، $\frac{1}{m}$ همهٔ هرم نشان داده شده است).

بنابرشرط مساله داریم: $\frac{S_{\text{جانبی}}}{S_{\text{قاعده}}}=k$. بنابراین

$$\frac{m\cdot\frac{1}{2}\cdot AB\cdot MC}{m\cdot\frac{1}{2}\cdot AB\cdot OC}=k;\ \frac{MC}{OC}k;\ \cos x=\frac{OC}{MC}=\frac{1}{k}$$

اکنون مساحت قاعده را پیدا می‌کنیم:

$$S_{\text{قاعده}}=m\cdot\frac{1}{2}AB\cdot OC=m\cdot AC\cdot OC=m\cdot OC\,tg\frac{360^\circ}{2m}\cdot OC=m\cdot OC^2 tg\frac{360^\circ}{n+4}$$

ازمثلث MOC به‌دست می‌آید:

$$OC = OM \cdot cotgx = hcotgx = \frac{hcosx}{\sqrt{1-cos^2x}} = \frac{h}{\sqrt{h^2-1}}$$

و بنابراین

$$S_{\text{قاعده}} = \frac{mh^2}{k^2-1} \cdot tg\frac{360^\circ}{n+4} ;V = \frac{(n+4)h^3}{6(k^2-1)} \cdot tg\frac{360^\circ}{n+4}$$

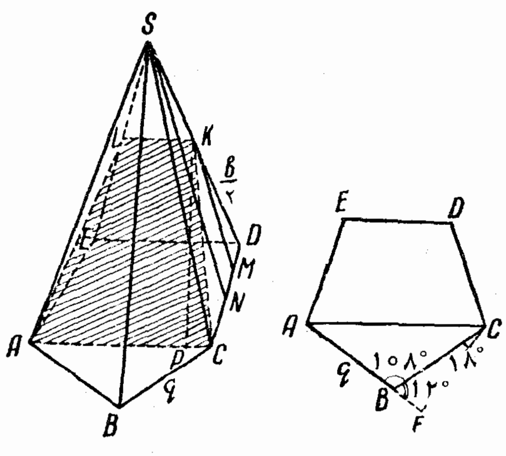
یادداشت. OC را، بدون استفاده از مثلثات هم می‌توان محاسبه‌کرد. در واقـع، از برابری $\frac{CM}{OC} = k$ به‌دست می‌آید: $CM = k \cdot OC$؛ و ازمثلث MOC؛ نتیجه می‌شود:

$$(k \cdot OC)^2 = OC^2 + h^2 \Rightarrow OC = \frac{h}{\sqrt{k^2-1}}$$

۱۰۰۳. طول‌های KL، AC و KP را (شکل ۲۲۵)، کـه برای محاسبـهٔ مساحت مجهول ذوزنقهٔ $ALKC$ لازم است، پیدا می‌کنیم. دو مثلث SLK و SED متشابـه‌اند و داریم:

$$\frac{LK}{ED} = \frac{SK}{SD} = \frac{1}{2} \Rightarrow LK = \frac{1}{2}ED = \frac{q}{2}$$

برای پیدا کردن AC، به شکلی که برای قاعده رسم کرده‌ایم، مراجعه می‌کنیم. چون زاویهٔ



شکل ۲۲۵

ABC برابر ۱۰۸ درجه است، پس

$$\widehat{CBF}=۱۸۰^\circ-۱۰۸^\circ=۷۲^\circ;\ \widehat{BCF}=۱۸^\circ$$

بنابراین، BF برابراست با نصف ضلع ده ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع q. یعنی

$$BF=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۴}q \text{ و } AC^۲=AB^۲+BC^۲+۲AB\cdot BF=q^۲\cdot\frac{۲\sqrt{۵}+۶}{۴};$$

$$AC=\frac{q}{۲}\sqrt{۲\sqrt{۵}+۶}=\frac{q}{۲}(\sqrt{۵}+۱)$$

مقدار AC را به طریق مثلثاتی هم می‌توان به‌دست آورد:

$$AC=۲AB\cos ۳۶^\circ=۲q\times\frac{\sqrt{۵}+۱}{۴}=\frac{q}{۲}(\sqrt{۵}+۱)$$

برای ارتفاع KP داریم: $KP=\sqrt{KC^۲-PC^۲}$. ولی

$$PC=\frac{۱}{۲}(AC-LK)=\frac{۱}{۲}\left[\frac{q}{۲}(\sqrt{۵}+۱)-\frac{۱}{۲}q\right]=\frac{q\sqrt{۵}}{۴}$$

$$KC^۲=KD^۲+CD^۲-۲CD\cdot DM=\left(\frac{b}{۲}\right)^۲+q^۲-۲q\cdot\frac{q}{۴}$$

زیرا ازتشابه مثلث‌های SND و KMD نتیجه می‌شود:

$$MD=\frac{۱}{۲}ND=\frac{۱}{۴}CD=\frac{۱}{۴}q$$

بنابراین $KC^۲=\frac{b^۲+۲q^۲}{۴}$ ودر نتیجه

$$KP=\sqrt{\frac{b^۲+۲q^۲}{۴}-\frac{۵q^۲}{۱۶}}=\frac{۱}{۴}\sqrt{۴b^۲+۳q^۲}$$

ازآن‌جا

$$Q=\frac{AC+KL}{۲}\cdot KP=\frac{q}{۱۶}(\sqrt{۵}+۲)\sqrt{۴b^۲+۳q^۲}$$

۱۰۰۴. AMB را صفحه‌ای می‌گیریم که موجب تقسیم قاعدهٔ هرم به دوچندضلعی می‌شود (شکل ۲۲۶). حجم مجهول

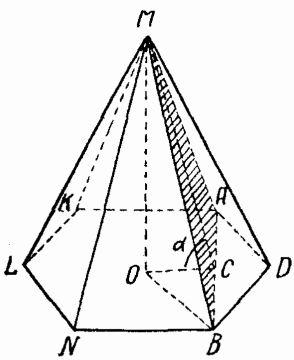
$$V=\frac{1}{3}S\cdot H=\frac{1}{3}n\cdot\frac{1}{2}OB^2\cdot \sin\frac{360^\circ}{n}\cdot OM=$$

$$=\frac{n}{6}\left(\frac{CB}{\sin(COB)}\right)^2 \sin\frac{360^\circ}{n}\cdot OC\cdot tg\alpha=\frac{n}{6}\left[\frac{b}{2\sin\frac{180^\circ(r+1)}{n}}\right]^2\times$$

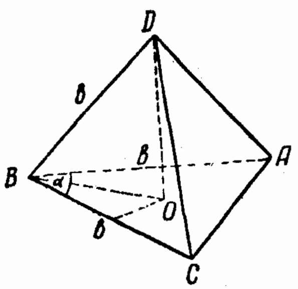
$$\times OC\cdot tg\alpha\cdot \sin\frac{360^\circ}{n}=\frac{n}{6}\cdot\frac{b^2}{4\sin^2\frac{180^\circ(r+1)}{n}}\cdot\frac{b}{2}cotg\frac{180^\circ(r+1)}{n}\times$$

$$\times \sin\frac{360^\circ}{n}\cdot tg\alpha=\frac{nb^2\cos\frac{180^\circ(r+1)}{n}\cdot \sin\frac{360^\circ}{n}\cdot tg\alpha}{48\sin^3\frac{180^\circ(r+1)}{n}}$$

یادداشت. از شرط $r<\frac{n-2}{2}$ نتیجه می‌شود: $r+2<\frac{n}{2}+1$؛ یعنی $n-r>\frac{n}{2}+1$، بنابراین $r+2<n-r$ و زاویهٔ AOB (شکل ۲۲۶)، متناظر با چندضلعی با تعداد ضلع‌های کمتر، همیشه از ۱۸۰ درجه کوچکتر است.



شکل ۲۲۶



شکل ۲۲۷

۱۰۰۵. مساحت قاعدهٔ هرم را S وارتفاع آن را H می‌گیریم و، با استفاده ازشکل ۲۲۷، به‌دست می‌آوریم:

$$S=\frac{۱}{۲}AB\cdot BC\sin\alpha=\frac{۱}{۲}b^{۲}\sin\alpha;$$

$$H=DO=\sqrt{BD^{۲}-BO^{۲}}=\sqrt{b^{۲}-\left(\frac{b}{۲\cos\frac{\alpha}{۲}}\right)^{۲}}=$$

$$=\frac{b}{\cos\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}-\frac{۱}{۴}}=\frac{b}{\cos\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}-\cos^{۲}۶۰^{\circ}}=$$

$$=\frac{b}{\cos\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\sin\left(۶۰^{\circ}+\frac{\alpha}{۲}\right)\cdot\sin\left(۶۰^{\circ}-\frac{\alpha}{۲}\right)};$$

$$V=\frac{۱}{۳}S\cdot H=\frac{۱}{۳}\cdot\frac{b^{۲}\sin\alpha}{۲}\cdot\frac{b}{\cos\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\sin\left(۶۰^{\circ}+\frac{\alpha}{۲}\right)\cdot\sin\left(۶۰^{\circ}-\frac{\alpha}{۲}\right)}=$$

$$=\frac{۱}{۳}b^{۳}\sin\frac{\alpha}{۲}\sqrt{\sin\left(۶۰^{\circ}+\frac{\alpha}{۲}\right)\cdot\sin\left(۶۰^{\circ}-\frac{\alpha}{۲}\right)}$$

۱۰۰۶. چون مساحت مثلث SAC با مساحت مثلث SAB برابراست (شکل ۲۲۸)، بنابراین، برای سطح جانبی مطلوب داریم:

$$Q=\frac{۱}{۲}BC\cdot SD+۲\times\frac{۱}{۲}AB\cdot SE$$

از طرف دیگر داریم:

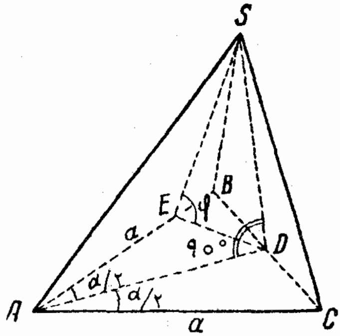
$$AB=a;\ BC=۲BD=۲AB\sin\frac{\alpha}{۲}=۲a\sin\frac{\alpha}{۲};$$

$$SE=\frac{ED}{\cos\varphi}=\frac{AD\sin\frac{\alpha}{۲}}{\cos\varphi}=\frac{AB\cos\frac{\alpha}{۲}\sin\frac{\alpha}{۲}}{\cos\varphi}=\frac{a\sin\alpha}{۲\cos\varphi};$$

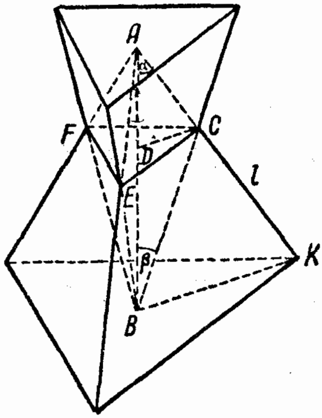
$$SD=SE\cdot\sin\varphi=\frac{a\sin\alpha}{۲\cos\varphi}\sin\varphi;$$

و بنابراین

$$Q=\frac{۱}{۲}\cdot۲a\sin\frac{\alpha}{۲}\cdot\frac{a\sin\alpha}{۲\cos\varphi}\sin\varphi+a\cdot\frac{a\sin\alpha}{۲\cos\varphi}=\frac{a^{۲}\sin\alpha}{۲\cos\varphi}\left(\sin\frac{\alpha}{۲}\sin\varphi+۱\right)$$



شکل ۲۲۸



شکل ۲۲۹

۱۰۰۷. حجم مجهول V، از دوهرم تشکیل شده است که در قاعدهٔ ECF مشترك‌اند و ارتفاع‌های آن AD و DB است (شکل ۲۲۹). مساحت قاعده را S می گیریم. داریم:

$$V=\frac{۱}{۳}S\cdot AD+\frac{۱}{۳}S\cdot DB=\frac{۱}{۳}S(AD+DB)=\frac{۱}{۳}S\cdot AB$$

که درآن: $AB=AK\cdot cos\alpha=l\,cos\alpha$. برای این که مساحت S، مثلث متساوی‌الاضلاع را پیدا کنیم، به‌سراغ شعاع CD، دایرهٔ محیطی آن، می‌رویم:

$$AB=l\,cos\alpha=AD+DB=CD\cdot cotg\alpha+CD\cdot cotg\beta=$$

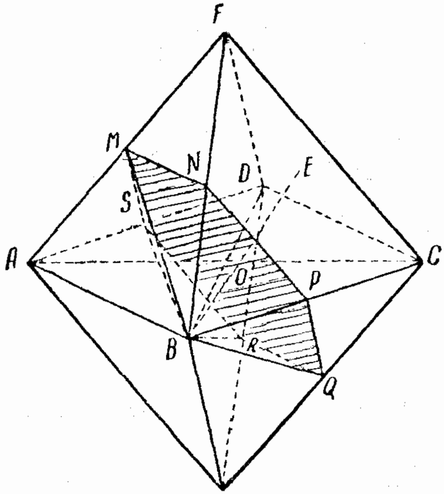
$$=CD(cotg\alpha+cotg\beta)=CD\cdot\frac{sin(\alpha+\beta)}{sin\alpha sin\beta}\Rightarrow CD=\frac{l\,cos\alpha sin\alpha sin\beta}{sin(\alpha+\beta)}$$

و ازآن‌جا

$$V=\frac{۱}{۳}S\cdot AB=\frac{۱}{۳}EC^{۲}\cdot\frac{sin\,۶۰^\circ}{۲}\cdot AB=$$

$$=\frac{۱}{۳}(CD\sqrt{۳})^{۲}\cdot\frac{\sqrt{۳}}{۴}AB=\frac{\sqrt{۳}l^{۳}sin^{۲}\alpha cos^{۳}\alpha sin^{۲}\beta}{۴sin^{۲}(\alpha+\beta)}$$

۱۰۰۸. صفحهٔ $MNPQRS$ را از مرکز هشت‌وجهی، موازی یکی ازوجه‌ها، و مثلاً CFD، رسم می‌کنیم (شکل ۲۳۰). مقطع این صفحه با هشت‌وجهی، یك شش‌ضلعی است، که راس‌های آن، M، N، P، Q، R و S، دروسط شش‌یال هشت‌وجهی قراردارند. این شش ضلعی، منتظم است، زیرا هرضلع آن برابراست با نصف یال هشت‌وجهی، و هر



شکل ۲۳۵

زاویهٔ بین دوضلع مجاور آن برابر است بـا ۱۲۰ درجه (زیرا ضلع‌هـای شش‌ضلعی، با ضلع‌های مثلث‌متساوی‌الاضلاع CDF، موازی‌اند). همهٔ راس‌های این چندضلعی را به‌راس B از هشت‌وجهی وصل می‌کنیم؛ هرمی به‌دست می‌آید با ارتفاع

$$BO=\frac{۱}{۲}BE=\frac{۱}{۲}h$$

که در آن، h عبارت است از ارتفاع هـرم $BCDF$. مساحت چندضلعی $MNPQRS$ را σ وحجم هرم $BCDF$ را $V_۲$ می‌نامیم. دراین صورت، برای حجم مجهول $V_۱$ داریم:

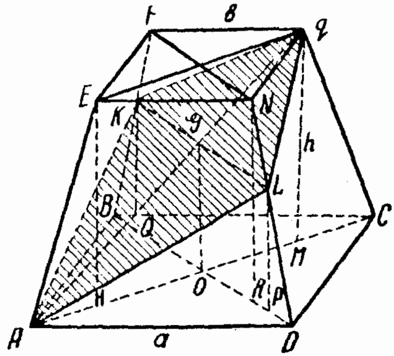
$$V_۱=\frac{۱}{۳}\sigma\cdot\frac{۱}{۲}h=\frac{۱}{۳}\times۶\times\left(\frac{a}{۲}\right)^۲\frac{\sqrt{۳}}{۴}\cdot\frac{h}{۲}$$

که در آن، a، یال هشت‌وجهی است. به‌این ترتیب

$$V_۱=\frac{۳}{۴}\cdot\frac{۱}{۳}\cdot\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}h=\frac{۳}{۴}V_۲=\frac{۳}{۱۶}V$$

۱۰۰۹. باتوجه‌به‌تقارن هرم روشن است که $Kq=Lq$ و $AK=AL$ (شکل ۲۳۱).

بنا بـراین، LK بـر Aq عمود است؛ و سطح مجهول : $S=\frac{۱}{۲}KL\cdot Aq$. ازمثلث قـائم‌الزاویهٔ AqM به‌دست می‌آید:



شکل ۲۳۱

$$Aq=\sqrt{AM^{۲}+qM^{۲}};\ (qM=h\ ,\ AM=AC-CM=$$

$$=AC-\frac{AC-Eq}{۲}=\frac{AC+Eq}{۲}=\frac{a\sqrt{۲}+b\sqrt{۲}}{۲}=\frac{a+b}{\sqrt{۲}});$$

$$Aq=\sqrt{\left(\frac{a+b}{\sqrt{۲}}\right)^{۲}+h^{۲}}=\sqrt{\frac{(a+b)^{۲}}{۲}+h^{۲}}$$

برای محاسبهٔ پاره‌خط KL، توجه می‌کنیم که KL با BE موازی است، زیرا KL و BD برصفحهٔ $BDMF$ قرار دارند و، درضمن، BD باصفحهٔ $ALqK$ موازی است. ازروی شکل روشن است که

$$KL=BD-PD-PD=BD-۲PD=a\sqrt{۲}-۲PD$$

بنابراین، باید PD را محاسبه کنیم. دومثلث NRD و LPD متشابه‌اند، یعنی

$$PD:LP=RD:NR$$

ولی $NR=h$ و

$$RD=MC=\frac{AC-Eq}{۲}=\frac{a\sqrt{۲}-b\sqrt{۲}}{۲}=\frac{a-b}{\sqrt{۲}};\ LP=OG$$

و OG هم از تشابه مثلث‌های qAM و GAO به‌دست می‌آید:

$$\frac{GO}{AO}=\frac{qM}{AM};\ OG=\frac{qM}{AM}\cdot AO=\frac{h\sqrt{۲}}{a+b}\cdot\frac{a\sqrt{۲}}{۲}=\frac{ah}{a+b}=LP$$

و بنابراین

$$PD=LP\cdot\frac{RD}{NR}=\frac{ah}{a+b}\cdot\frac{a-b}{\sqrt{۲}h}=\frac{(a-b)a}{(a+b)\sqrt{۲}};$$

$$KL=a\sqrt{۲}-۲PD=a\sqrt{۲}-\frac{۲(a-b)a}{(a+b)\sqrt{۲}}=\frac{۲\sqrt{۲}ab}{a+b}$$

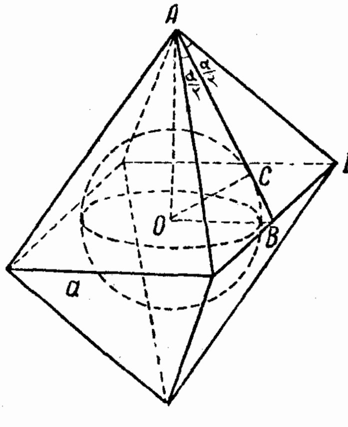
و سرانجام به‌دست می‌آید:

$$S=\frac{۱}{۲}KL\cdot Aq=\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۲\sqrt{۲}ab}{a+b}\sqrt{\frac{(a+b)^{۲}}{۲}+h^{۲}}=\frac{\sqrt{۲}ab}{a+b}\sqrt{\frac{(a+b)^{۲}}{۲}+h^{۲}}$$

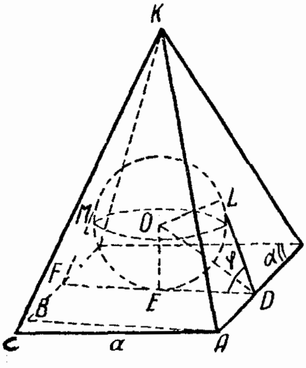
۱۰۱۰. صفحهٔ LDE را از نقطه‌های L و E (نقطه‌های تماس کره با دووجه هرم) ونقطهٔ O (مرکز کره) می‌گذرانیم (شکل ۲۳۲). این‌صفحه، که از OE و OL، دو خط عمود بر این وجه‌ها، می‌گذرد، بردو وجه و، بنابراین، بـرفصل مشترك آن‌ها عمود است. بنابراین: $\widehat{LDE}=\varphi$. صفحهٔ LDE، CF را درنقطهٔ F تحت زاویهٔ قائمه قطع می‌کند. از آن‌جا روشن است که پاره‌خط FD، که برابربا ارتفاع لوزی‌است، به‌وسیلهٔ نقطهٔ تماس E نصف می‌شود. درنتیجه، می‌توان نوشت:

$$r=DE\cdot tg\frac{\varphi}{۲}=\frac{۱}{۲}DF\cdot tg\frac{\varphi}{۲}=\frac{AC}{۲}sin\alpha tg\frac{\varphi}{۲}=$$

$$=\frac{a}{۲}sin\alpha tg\frac{\varphi}{۲};\;\; V=\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}=\frac{\pi a^{۳}}{۶}sin^{۳}\alpha tg^{۳}\frac{\varphi}{۲}$$



شکل ۲۳۳



شکل ۲۳۲

۱۰۱۱. عمود AO را برصفحهٔ قاعدهٔ هرم رسم می‌کنیم (شکل ۲۳۳). روشن است

که این عمود، ازمرکـز کره می‌گذرد. AB، سهم هـرم را می‌کشیم. این سهم برسطح کره مماس است. نقطهٔ O، پای ارتفاع AO را به نقطهٔ B، پای سهم AB، وصل می‌کنیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB به‌دست می‌آید، که از آن، شعاع کره را محاسبه می‌کنیم:

$$r=OC=OB\cdot\sin(CBO)=\frac{a}{۲}\sin(CBO)=\frac{a}{۲}\sqrt{۱-\cos^{۲}(CBO)}=$$

$$=\frac{a}{۲}\sqrt{۱-\left(\frac{OB}{AB}\right)^{۲}}=\frac{a}{۲}\sqrt{۱-\left(\frac{BD}{AB}\right)^{۲}}=\frac{a}{۲}\sqrt{۱-tg^{۲}\frac{\alpha}{۲}}=$$

$$=\frac{a}{۲}\sqrt{\frac{\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}-\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}}{\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}}}=\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{۲\cos\frac{\alpha}{۲}}$$

۱۰۱۲. سطح مجهول S از سه‌قطعهٔ مساوی ازسطح کره تشکیل شده است. درشکل ۲۳۴، این قطعه‌ها، درجلو مکعب، پایین آن و سمت‌چپ آن قرار گرفته‌اند. سطح کره، بر یال‌هایی‌که درراس E به‌هم رسیده‌اند و بروجه‌هایی‌که درراس F به‌هم رسیده‌اند، مماس است. شعاع کره (یعنی OA، OL یا OB) را r می‌گیریم و از رابطهٔ مربوط به سطح قطعهٔ کره استفاده می‌کنیم:

$$S=۳\times ۲\pi r\cdot CD=۶\pi r\cdot MB=۶\pi r(AB-AM)=۶\pi r(۲r-a)$$

برای محاسبهٔ r، مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین OKL را درنظر می‌گیریم. از به‌دست‌می‌آید: $OL=OK\sqrt{۲}$ وچون $OL=r$ و $OK=OM=AM-OA=a-r$، پس

$$r=(a-r)\sqrt{۲}\ ;\ r=\frac{a\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}+۱}=a(۲-\sqrt{۲})$$

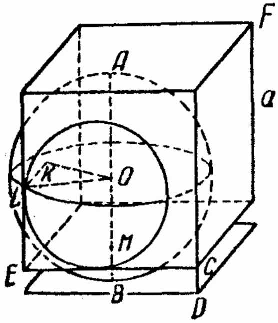
بنابراین

$$S=۶\pi r(۲r-a)=۶\pi a^{۲}(۲-\sqrt{۲})(۳-۲\sqrt{۲})=۶\pi a^{۲}(۱۰-۷\sqrt{۲})$$

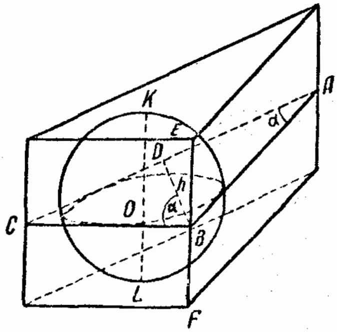
۱۰۱۳. داریم (شکل ۲۳۵):

$$V=S\cdot H=\frac{۱}{۲}AB\cdot BC\cdot EF=\frac{۱}{۲}\cdot\frac{DB}{\sin\alpha}\cdot\frac{DB}{\cos\alpha}\cdot EF=$$

$$=\frac{h^{۲}\cdot EF}{۲\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{h^{۲}}{\sin ۲\alpha}\cdot EF$$



شکل ۲۳۴



شکل ۲۳۵

بنابراین، باید ارتفاع EF را محاسبه کنیم. این ارتفاع برابر است با KL، قطر دایرهٔ محاطی مثلث ABC. این قطر را، می‌توان ازروی رابطهٔ $2r=\frac{2S}{p}$ به‌دست آورد. برای این منظور، AC را به‌دست می‌آوریم:

$$AC=\frac{AB}{\cos\alpha}=\frac{DB}{\cos\alpha\sin\alpha}=\frac{h}{\cos\alpha\sin\alpha};\ 2p=AB+BC+AC=$$

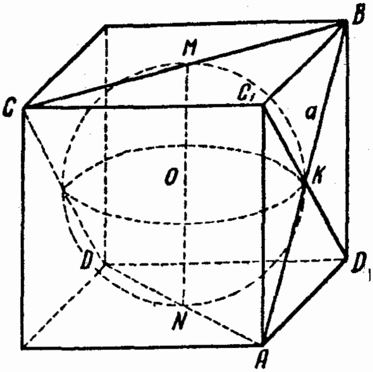
$$=\frac{h}{\cos\alpha}+\frac{h}{\sin\alpha}+\frac{h}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha+1}{\sin\alpha\cos\alpha}\cdot h=$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}\cdot h=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}\cdot h=$$

$$=\frac{h\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha};\ EF=2r=\frac{2S}{p}=\frac{2h^2\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}{\sin 2\alpha\cdot h\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}h\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cos a}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}h}{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)};$$

$$V=\frac{h^2}{\sin 2\alpha}\cdot EF=\frac{\sqrt{2}h^3}{2\sin 2\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}$$



شکل ۲۳۶

۱۰۱۴. $ABCD$ را، چهاروجهی مفروض مـی گیریم (شکل ۲۳۶). از یال AB، صفحه‌ای موازی با یال مقابل آن، CD، می‌گذرانیم. این صفحه، منحصربه‌فرد است و برای ساختن آن، می‌توان به این ترتیب، عمل کرد: نقطهٔ A را بر AB انتخاب و ازآن‌جا، خط راست C_1D_1 را موازی CD رسم می‌کنیم. صفحه‌ای که از AB و C_1D_1 بگذرد، همان صفحهٔ موردنظر است. به‌همین ترتیب، صفحهٔ دیگری رسم می‌کنیم که از یال CD بگذرد و با یال مقابل آن، AB، موازی باشد. این دوصفحه موازی‌اند. اگر به‌همین‌ترتیب، برای هر دویال مقابل هرم، دوصفحهٔ موازی رسم کنیم، یك چندوجهی به‌دست می‌آید، این چندوجهی، به‌روشنی، مکعبی است کـه قطر هروجه آن، برابراست با a. کره‌ای‌که بریال‌های هرم مماس باشد، کرهٔ محاطی این‌مکعب است و، درضمن، قطرآن برابربا یال مکعب است. بنابراین، برای شعاع مجهول داریم:

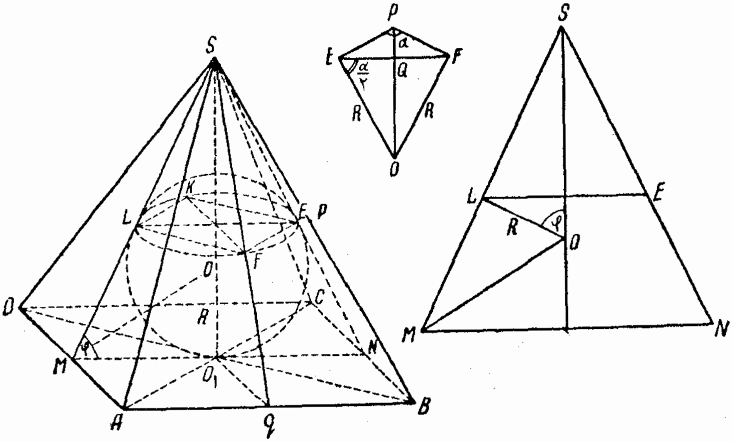
$$R=\frac{۱}{۲}MN=\frac{۱}{۲}\cdot\frac{a}{\sqrt{۲}}=\frac{a\sqrt{۲}}{۴}$$

۱۰۱۵. زاویهٔ O_1MS مجاوریال قاعدهٔ هرم مفروض را φ می‌نامیم (شکل ۲۳۷). برای سطح کل مجهول داریم:

$$S=S_{\text{جانبی}}+S_{\text{قاعده}}=AB^{۲}+\frac{AB^{۲}}{\cos\varphi}=AB^{۲}\cdot\frac{۱+\cos\varphi}{\cos\varphi}=$$

$$=MN^{۲}\cdot\frac{۱+\cos\varphi}{\cos\varphi}=\left(۲R\cot g\frac{\varphi}{۲}\right)^{۲}\cdot\frac{۱+\cos\varphi}{\cos\varphi}=$$

$$=4R^2 cotg^2\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{1+cos\varphi}{cos\varphi}=4R^2\cdot\frac{(1+cos\varphi)^3}{sin^2\varphi cos\varphi}$$



۲۳۷

باید $sin\varphi$ و $cos\varphi$ را پیدا کنیم. صفحهٔ OEF را از نقطه‌های E و F (نقطه‌های تماس کره با دو وجه جانبی مجاور) و نقطهٔ O (مرکز کره) می گذرانیم. این صفحه بر دووجهی که E و F روی آن‌ها قراردارند، عمود است و، بنابراین، برفصل مشترك آن‌ها، یعنی یال SB عمود می‌شود. درنتیجه $\widehat{EPF}=\alpha$ (P، نقطهٔ برخورد یال SB با صفحه‌ای است که ساخته‌ایم). از چهارضلعی $OEPF$ به دست می‌آید:

$$EF=2EQ=2Rcos\frac{\alpha}{2}$$

از طرف دیگر، چهارضلعی $EFLK$ مربع است (L و K، نقطه‌های تماس کره، با دووجه دیگر هرم است)، بنابراین

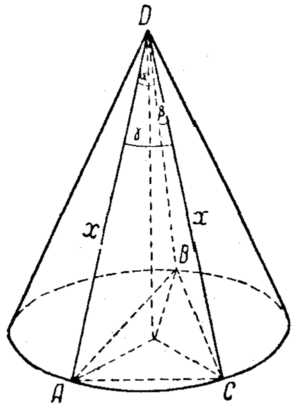
$$EF=\frac{1}{2}LF\sqrt{2}=\sqrt{2}Rsin\varphi=2Rcos\frac{\alpha}{2}$$

از آن جا

$$sin\varphi=\sqrt{2}cos\frac{\alpha}{2}\ ;\ cos\varphi=\sqrt{1-sin^2\varphi}=\sqrt{1-2cos^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\sqrt{-cos\alpha};S=2R^2\cdot\frac{(1+\sqrt{-cos\alpha})^3}{\sqrt{-cos\alpha}\cdot cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

۱۰۱۶. چون یال‌های جانبی DA، DB و DC از هرم مفروض، برابرند، بنابراین، تصویر ارتفاع DO بر نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC، قرار می‌گیرد (شکل ۲۳۸).



شکل ۲۳۸

برای حجم مجهول، داریم: $V_1 = \frac{1}{3} S \cdot DO$، که در آن، S مساحت مثلث ABC است.

بنا به‌شرط مساله داریم: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot DO$، که در آن، R شعاع قاعدهٔ مخروط است. از آن جا $DO = \frac{3V}{\pi R^2}$ و $V_1 = \frac{VS}{\pi R^2}$. یال جانبی هرم‌را xمی گیریم. دراین‌صورت، می توان نوشت

$$AB = 2x\sin\frac{\alpha}{2}\ ;\ BC = 2x\sin\frac{\beta}{2}\ ;\ AC = 2x\sin\frac{\gamma}{2}$$

اکنون، اگر از رابطه‌های

$$R = \frac{abc}{4S}\ ;\ S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

استفاده کنیم، به‌دست می آید:

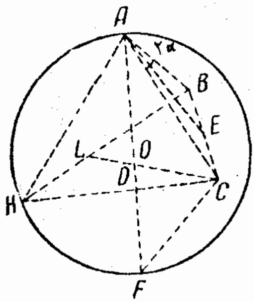
$$V_1 = \frac{V}{\pi \cdot AB^2 \cdot AC^2 \cdot BC^2} \cdot 16S^3 = \frac{V}{4\pi} cosec^2\frac{\alpha}{2} cosec^2\frac{\beta}{2} \times$$

$$\times\, cosec^2\frac{\gamma}{2}\sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right)^3} \times$$

$$\times\sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\right)^3 \cdot \left(\sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)^3} \times$$

$$\times\sqrt{\left(\sin\frac{\gamma}{۲}+\sin\frac{\alpha}{۲}-\sin\frac{\beta}{۲}\right)^{۳}}$$

۱۰۱۷. اگر نقطه‌های B و C و H، انتهای این وترها را، به‌هم وصل کنیم (شکل ۲۳۹)، یك هرم منتظم به‌دست می‌آید که در کرهٔ به‌شعاع R محاط شده است و زاویه‌های



شکل ۲۳۹

مسطحهٔ کنار راس هروجه جانبی آن، برابر ۲α است. باید طول AC، یال جانبی این هرم را پیدا کنیم. اگر AF را، کــه از نقطهٔ D مرکز قاعده می‌گذرد، رسم و، سپس، F را به C وصل کنیم، یك مثلث قائم‌الزاویه به‌دست می‌آید. اگر $x = AC$ بگیریم، داریم:

$$x^{۲}=AF\cdot AD=۲R\sqrt{AC^{۲}-CD^{۲}}=۲R\sqrt{x^{۲}-\left(\frac{۲}{۳}CL\right)^{۲}}=$$

$$=۲R\sqrt{x^{۲}-\left(\frac{۲}{۳}\cdot CB\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^{۲}}=۲R\sqrt{x^{۲}-\left(\frac{۲}{\sqrt{۳}}AC\sin\alpha\right)^{۲}}=$$

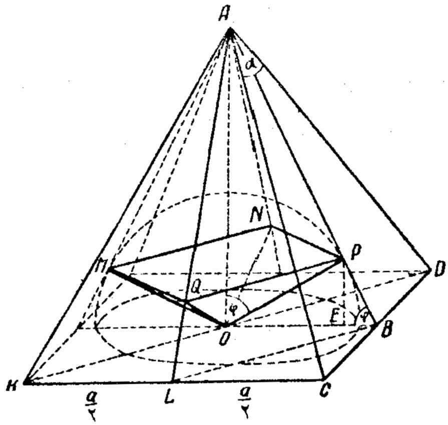
$$=۲R\sqrt{x^{۲}-\left(\frac{۲x}{\sqrt{۳}}\sin\alpha\right)^{۲}}=\frac{۴Rx}{\sqrt{۳}}\sqrt{\frac{۳}{۴}-\sin^{۲}\alpha}$$

و به این ترتیب

$$x=\frac{۴R}{\sqrt{۳}}\sqrt{\frac{۳}{۴}-\sin^{۲}\alpha}=\frac{۴R}{\sqrt{۳}}\sqrt{\sin^{۲}۶۰^{\circ}-\sin^{۲}\alpha}=$$

$$=\frac{۴R}{\sqrt{۳}}\sqrt{\sin(۶۰^{\circ}+\alpha)\cdot\sin(۶۰^{\circ}-\alpha)}$$

۱۰۱۸. چند وجهی که باید V، حجم آن را به‌دست‌آورد، یك هرم است. راس‌های M، N، P و Q ازقاعدهٔ ایــن هرم، روی سهم‌های هرم مفروض قراردارند (شکل ۲۴۰).



شکل ۲۴۰

برای اثبات ایـن‌حکم، صفحـه‌ای را از ارتفاع AO هرم مفروض وشعاع OP از نیم کره می گذارانیم (P، نقطهٔ تماس نیم کره با وجه ACD است). چون AO برصفحهٔ قاعدهٔ هرم و OP برصفحهٔ وجه جانبی عمودند، پس صفحه‌ای که رسم کرده‌ایم، برهردو صفحهٔ مذکور و، بنا براین، برفصل مشترك آن‌ها، CD، عمود است. واین، به‌معنای آن است که AB، یعنی فصل مشترك صفحهٔ رسم شده با صفحهٔ CAD، بر CD عمود است و، به‌این‌ترتیب، AB، که نقطهٔ تماس P روی آن قرار دارد، یك سهم است. برای حجم داریم:

$$V=\frac{1}{3}PQ^{2}\cdot PE$$

برای تعیین PQ ازتشابه دومثلث APQ و ABL استفاده می کنیم. درایـن مثلث‌ها داریم: $\frac{PQ}{LB}=\frac{AP}{AB}$. ولی $LB=\frac{1}{2}KD=\frac{a\sqrt{2}}{2}$؛ وبرای پیدا کردن نسبت $\frac{AP}{AB}$، هریـك از دو زاویهٔ برابر AOP و PBE را φ می گیریم. داریم:

$$AP=AO\sin\varphi=AB\sin^{2}\varphi;\ \frac{AP}{AB}=\sin^{2}\varphi=1-\cos^{2}\varphi=1-\left(\frac{OB}{OA}\right)^{2}=$$

$$=1-\left(\frac{BD}{AB}\right)^{2}=1-tg^{2}\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos\alpha}{\cos^{2}\frac{\alpha}{2}}$$

وبنا براین

$$PQ=LB\cdot \frac{AP}{AB}=\frac{a\sqrt{2}\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}};\ PE=PB\sin\varphi=$$

$$=OB\cos\varphi\sin\varphi=\frac{a}{2}\cdot\frac{OB}{AB}\sin\varphi=\frac{a}{2}\cdot\frac{BD}{AB}\sin\varphi=$$

$$=\frac{a}{2}tg\frac{\alpha}{2}\sin\varphi=\frac{a}{2}tg\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sqrt{\cos\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

بنا براین

$$V=\frac{1}{3}\left(\frac{a\sqrt{2}\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)^2\cdot\frac{a}{2}tg\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sqrt{\cos\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{a^3\cos^2\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}{12\cos^6\frac{\alpha}{2}}$$

۱۰۱۹. ذوزنقهٔ $ABCD$ را برمحوراستوانه تصویرمی کنیم (شکل ۲۴۱). درصفحهٔ تصویر، ذوزنقه $A_1B_1C_1D_1$ به‌دست می‌آید. چون درآن، می‌توان دایره‌ای محاط کرد و، درضمن، متساوی‌الساقین هم می‌باشد، پس

$$B_1C_1=(A_1B_1+C_1D_1):2=\frac{1}{2}(a+b)$$

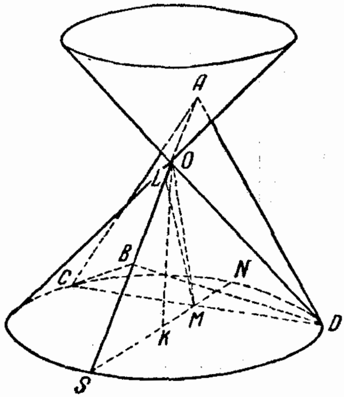
زیرا $A_1B_1=AB=b$ و $C_1D_1=CD=a$. ارتفاع ذوزنقه را محاسبه می کنیم:

$$A_1E=\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}=\sqrt{ab}$$

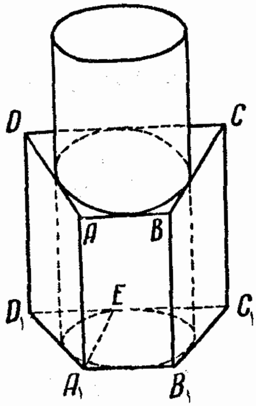
ازاین‌جا، اگر زاویهٔ مجهول را x بگیریم ، داریم: $\sin x=\frac{\sqrt{ab}}{h}$. درضمن، باید داشته باشیم: $ab\leqslant h^2$.

۱۰۲۰. نقطهٔ L، وسط پاره خط AB را به نقطهٔ M وسط پاره‌خط CD وصل می‌کنیم (شکل۲۴۲). پاره‌خط LM میانهٔ مشترك مثلث‌های متساوی‌الساقین ومساوی CLD و AMB است؛ بنابراین، LM عمود مشترك یال‌های AB و CD ازچهاروجهی است. طول آن را پیدا می کنیم:

$$LM=\sqrt{BM^2-BL^2}=\sqrt{\frac{3}{4}a^2-\frac{1}{4}a^2}=\frac{a}{\sqrt{2}}$$



شکل ۲۴۱



شکل ۲۴۲

از یال CD صفحه‌ای می‌گذرانیم که برمحور مخروط عمود باشد. چون مقطع محوری مخروط عبارت است از دو خط راست عمود برهم، بنابراین، زاویهٔ بین مولد AB بـا صفحه‌ای که رسم کرده‌ایم، برابر ۴۵ درجه است. یعنی

$$LS=LM=\frac{a}{\sqrt{۲}};\ SM=LM\sqrt{۲}=a$$

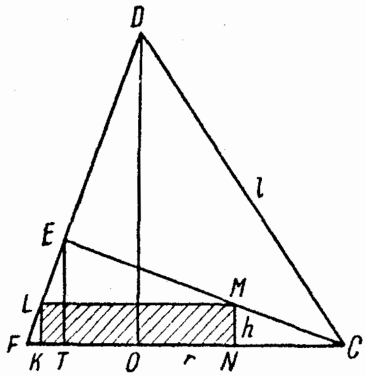
ولی $CM^{۲}=SM\cdot MN$، یا $\frac{a^{۲}}{۴}=a\cdot MN$ و از آن جا $NM=\frac{a}{۴}$ و

$$OK=SK=\frac{۱}{۲}(SM+MN)=\frac{۱}{۲}\left(a+\frac{a}{۴}\right)=\frac{۵a}{۸};\ OK\perp SM;$$

$$KM=KN-MN=SK-MN=\frac{۵}{۸}a-\frac{۱}{۴}a=\frac{۳a}{۸}$$

و بنابراین $OM=\sqrt{OK^{۲}+KM^{۲}}=\frac{a\sqrt{۳۴}}{۸}$.

۱۰۲۱. CDE را مقطع چهار وجهی با صفحه‌ای می گیریم که از ارتفاع DO و یال جانبی DC (ازچهار وجهی) گذشته باشد. مستطیل هاشورخوردهٔ $KLMN$، متناظر است با بـرش استوانه‌ای کـه می‌خواهیم حجم آن، V، را تعییـن کنیم. درایـن‌جا $CD=l$ و $CF=DF=\frac{l\sqrt{۳}}{۲}$ (ارتفاع وجه‌چهاروجهی‌منتظم). ارتفاع استوانه‌را $MN=h$ وشعاع



شکل ۲۴۳

قاعدهٔ آن را $ON=r$ می‌گیریم. از تشابه مثلث‌های ECT و MNC به‌دست می‌آید:

$$NC:MN=TC:ET \Rightarrow \frac{OC-r}{h}=\frac{TC}{TE} \quad (*)$$

ازطرف دیگرداریم:

$$OC=\frac{۲}{۳}CF=\frac{\sqrt{۳}}{۳}l;\ ET^{۲}=FT\cdot TC;\ FT=\frac{FE^{۲}}{FC}=$$

$$=\frac{\left(\frac{۱}{۳}FC\right)^{۲}}{FC}=\frac{۱}{۹}FC=\frac{\sqrt{۳}}{۱۸}l;\ TC=FC-FT=\frac{\sqrt{۳}}{۲}l-\frac{\sqrt{۳}}{۱۸}l=$$

$$=\frac{۴\sqrt{۳}}{۹}l;\ ET=\sqrt{\frac{\sqrt{۳}}{۱۸}l\cdot\frac{۴\sqrt{۳}}{۹}l}=\frac{\sqrt{۶}}{۹}l$$

به این ترتیب، برابری (*) را می‌توان چنین نوشت:

$$\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}l-r\right)\frac{\sqrt{۶}}{۹}l=h\cdot\frac{۴\sqrt{۳}}{۹}l \Rightarrow h+\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}r=\frac{۱}{۲\sqrt{۶}}l$$

از تشابه دومثلث LKF و ETF داریم:

$$FK:KL=FT:ET \Rightarrow \frac{OF-r}{h}=\frac{FT}{ET}$$

ولی $OF=\frac{۱}{۳}FC=\frac{\sqrt{۳}}{۶}l$، بنابراین

$$\left(\frac{\sqrt{۳}}{۶}l-r\right)\frac{\sqrt{۶}}{۹}l=h.\frac{\sqrt{۳}}{۱۸}l\Rightarrow h+۲\sqrt{۲}r=\frac{۲}{\sqrt{۶}}l$$

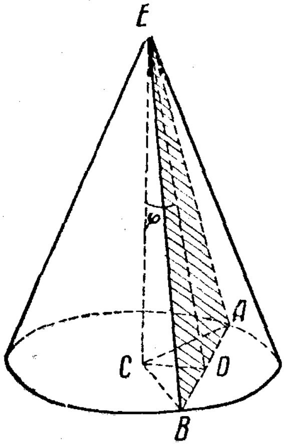
با حل دستگاه دومعادله‌ای که برای r و h به‌دست آوردیم، نتیجه می‌شود:

$$r=\frac{\sqrt{۳}}{۷}l\ ,\ h=\frac{\sqrt{۶}}{۲۱}l$$

و از آن‌جا

$$V=\pi r^{۲}h=\pi\left(\frac{\sqrt{۳}}{۷}l\right)^{۲}\cdot\frac{\sqrt{۶}}{۲۱}l=\frac{\pi\sqrt{۶}}{۳۴۳}l^{۳}$$

۱۰۲۲. نقطهٔ C، مرکز دایره را بـه نقطهٔ D، وسط وتر AB، و همچنین، نقطهٔ D را به نقطهٔ E، راس مخروط وصل مـی کنیم (شکل ۲۴۴). چـون CD بر AB عمود است و



شکل ۲۲۴

$tg(DEC)=\frac{CD}{EC}$ بنابراین، زاویهٔ DEC، در بین همهٔ زاویـه‌هایی که خط راست EC بـا خط‌های راست مختلف واقع برصفحهٔ مفروض که از E می گذرند، می‌سازد، کوچکترین زاویه است. بنابراین، خط راست ED، تصویرخط راست EC براین صفحه است وداریم $\widehat{DEC}=\varphi$. بادرنظر گرفتن این موضوع، طول پاره‌خط‌های ED و AB را محاسبه‌می کنیم و، سپس، S، مساحت مطلوب را به‌دست می آوریم. داریم:

$$ED=\frac{CE}{\cos\varphi}=\frac{Rtg\alpha}{\cos\varphi};\ AB=2AD=2\sqrt{AC^2-CD^2}=2\sqrt{R^2-(CEtg\varphi)^2}=$$

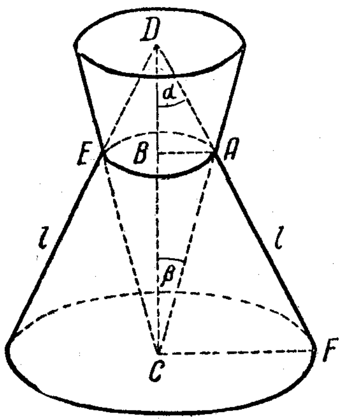
$$=2\sqrt{R^2-(Rtg\alpha tg\varphi)^2}=2R\sqrt{1-tg^2\alpha tg^2\varphi}=$$

$$=\frac{2R}{\cos\alpha\cos\varphi}\sqrt{\cos(\alpha+\varphi)\cdot\cos(\alpha-\varphi)}$$

و درنتیجه، برای مساحت مطلوب S، داریم:

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot ED=\frac{R^2tg\alpha}{\cos\alpha\cos^2\alpha}\sqrt{\cos(\alpha+\varphi)\cdot\cos(\alpha-\varphi)}$$

۱۰۲۳. حجم مورد نظر V، برابر است با مجموع حجم‌های دومخروط ADE و ACE (شکل ۲۴۵). بنابراین



شکل ۲۴۵

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot AB^2\cdot BD+\frac{1}{3}\pi\cdot AB^2\cdot BC=\frac{1}{3}\pi\cdot AB^2(DB+BC)=\frac{1}{3}\pi\cdot AB^2\cdot DC$$

ولی $DC=DF\cos\alpha=l\cos\alpha$. ازطرف دیگر

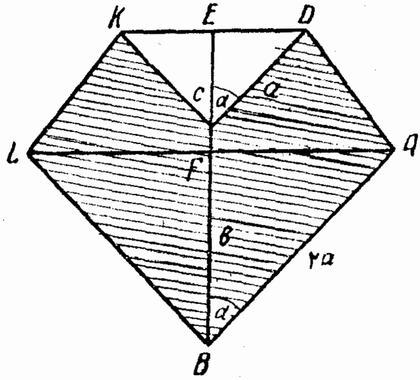
$$DC=DB+BC=AB\cot g\alpha+AB\cot g\beta;$$

$$l\cos\alpha=AB(\cot g\alpha+\cot g\beta)=AB\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

ازآن جا $AB=\frac{l\cos\alpha\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. اگرمقدارهای AB و DC را، که به‌دست‌آورده‌ایم،

در رابطهٔ حجم قـراردهیم، به‌دست می‌آید: $V=\frac{\pi l^3 \cos^3\alpha \sin^2\alpha \sin^2\beta}{3\sin^2(\alpha+\beta)}$.

۱۰۲۴. در شکل ۲۴۶ ، مقطع محـور جسم دوار (شکل هاشورخورده) نشان داد



شکل ۲۴۶

شده است. برای محاسبهٔ حجم‌مجهول V، باید حجم مخروط DCK را ازمجموع حجم‌های مخروط ABL ومخروط ناقص $LKDA$ کم کرد. داریم:

$$V=\frac{\pi}{3}[AF^2\cdot BF+(AF^2+AF\cdot DE+DE^2)\cdot EF-DE^2\cdot EC]=$$

$$=\frac{\pi}{3}[AF^2(BF+FE)+DE^2(FE-EC)+AF\cdot DE\cdot EF]=$$

$$=\frac{\pi}{3}(AF^2\cdot BE+DE^2\cdot FC+AF\cdot DE\cdot EF)=\frac{\pi}{3}[AF^2(BC+CE)+$$

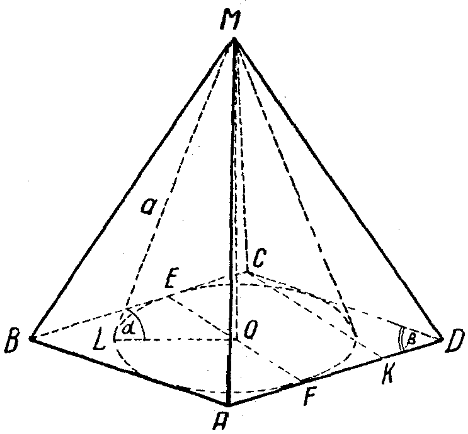
$$+DE^2(BC-FB)+AF\cdot DE(BC+CE-BF)]=$$

$$=\frac{\pi}{3}[(2a\sin\alpha)^2(b+a\cos\alpha)+(a\sin\alpha)^2(b-2a\cos\alpha)+$$

$$+2a\sin\alpha\cdot a\sin\alpha(b+a\cos\alpha-2a\cos\alpha)]=\frac{\pi a^2\sin^2\alpha}{3}(4b+4a\cos\alpha+$$

$$+b-2a\cos\alpha+2b-2a\cos\alpha)=\frac{7\pi a^2 b\sin^2\alpha}{3}$$

۱۰۲۵. داریم (شکل ۲۴۷):



شکل ۲۴۷

$$V=\frac{۱}{۳}Sh=\frac{۱}{۳}AD\cdot CD\sin\beta\cdot OM=\frac{۱}{۳}CD^{۲}\cdot OM\sin\beta$$

ولی $MO=ML\sin\alpha=a\sin\alpha$ و

$$CD=\frac{CK}{\sin\beta}=\frac{EF}{\sin\beta}=\frac{۲OL}{\sin\beta}=\frac{۲LM\cos\alpha}{\sin\beta}=\frac{۲a\cos\alpha}{\sin\beta}$$

و بنابراین

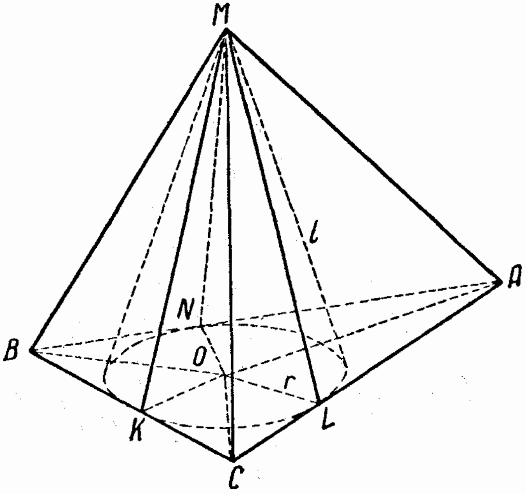
$$V=\frac{۱}{۳}\left(\frac{۲a\cos\alpha}{\sin\beta}\right)^{۲}\cdot a\sin\alpha\sin\beta=\frac{۲a^{۳}\sin ۲\alpha\cos\alpha}{۳\sin\beta}$$

۱۰۲۶. شعاع قاعدهٔ مخروط را r و مولد آن را l می‌گیریم (شکل ۲۴۸). سطح جانبی مخروط با مولدهای MK، ML و MN (که درطول آن‌ها، سطح مخروطی باهرم محیطی مخروط مماس است، به بخش‌های $\frac{۵}{۱۸}\pi rl$ ، $\frac{۶}{۱۸}\pi rl$ و $\frac{۷}{۱۸}\pi rl$ تقسیم شده است. از آن جا

$$\widehat{KL}=\frac{۱۰}{۱۸}\pi r;\ \widehat{LN}=\frac{۱۲}{۱۸}\pi r;\ \widehat{NK}=\frac{۱۴}{۱۸}\pi r$$

و بنابراین $\widehat{KL}:\widehat{LN}:\widehat{NK}=۵:۶:۷$، به‌نحوی که

$$\widehat{KOL}=۱۰۰^\circ,\ \widehat{LON}=۱۲۰^\circ,\ \widehat{NOK}=۱۴۰^\circ$$



شکل ۲۴۸

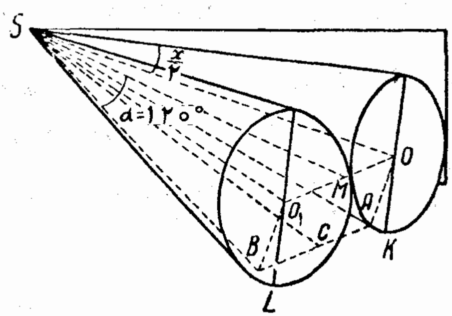
مساحت بخش‌هایی از سطح جانبی هرم را، کـه به‌وسیلهٔ مولـدهای MK، ML و MN تقسیم می‌شود، با $S_۱$، $S_۲$ و $S_۳$ نشان می‌دهیم. روشن است که

$$S_۱ = ۲S_{MCL} = CL \cdot l = OL \cdot tg(LOC) \cdot l = rltg۵۰^\circ$$

و به‌همین ترتیب $S_۲ = rltg۶۰^\circ$ و $S_۳ = rltg۷۰^\circ$. به‌این ترتیب، داریم:

$$S_۱ : S_۲ : S_۳ = rltg۵۰^\circ : rltg۶۰^\circ : rltg۷۰^\circ = tg۵۰^\circ : tg۶۰^\circ : tg۷۰^\circ$$

۱۰۲۷. تصویری که درشکل ۲۴۹ داده شده است، باجواب متن مساله، کاملاً تطبیق



شکل ۲۴۹

نمی‌کند. ولی این «تحریف» به‌ما امکان می‌دهد تا به رابطه‌هـای لازم برای جواب، بهتر توجه کنیم. SO و $SO_۱$ را ارتفاع‌های دو مخروط مجاور، SK و SL را مولدهای آن‌ها (که مخروط‌ها روی آن‌ها برصفحه مماس‌اند و A و B را تصویرهای O و $O_۱$ (مرکزهای

قاعده‌های دومخروط) روی این مولدها، می‌گیریم. نقطهٔ M محل برخورد OO_1 با مولدی است که، درمخروط درطول آن برهم مماس‌اند. روشن است که زاویهٔ OMS قائمه است. ازمثلث OMS به‌دست می‌آید:

$$AB = OO_1 = 2OM = 2OS \cdot \sin(OSM) = 2OS \cdot \sin\frac{x}{2}$$

x را، زاویهٔ مجهول درنظر گرفته‌ایم. ازمثلث SAC داریم:

$$AB = 2AC = 2SA \cdot \sin 60^\circ = 2SO \cdot \cos\frac{x}{2}\sin 60^\circ$$

مقایسهٔ دو رابطهٔ حاصل، به‌ما می‌دهد:

$$2OS \cdot \sin\frac{x}{2} = 2OS \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \sin 60^\circ ;$$

$$tg\frac{x}{2} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} ; \; x = 2 \, arctg\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۰۲۸. همان‌طورکه از شکل ۲۵۰ دیده می‌شود، برای حجم موردنظر داریم:

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 \cdot KF + \frac{1}{3}\pi FD^2 \cdot AF - \frac{1}{3}\pi FD^2 \cdot OF =$$

$$= \frac{\pi}{3}[2r^2 \cdot KF + FD^2(AF - OF)] = \frac{\pi}{3}(2r^2 \cdot KF + FD^2 \cdot r) =$$

$$= \frac{\pi r}{3}(2rKF + FD^2)$$

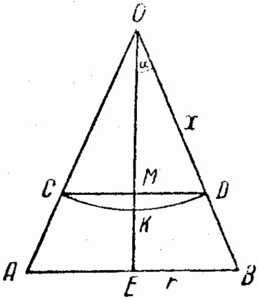
که درآن $r = \frac{h}{2}$، $KF = KD \cdot \sin\alpha = 2r\sin^2\alpha = h\sin^2\alpha$ و

$$FD = OD\sin 2\alpha = r\sin 2\alpha = \frac{h}{2}\sin 2\alpha$$

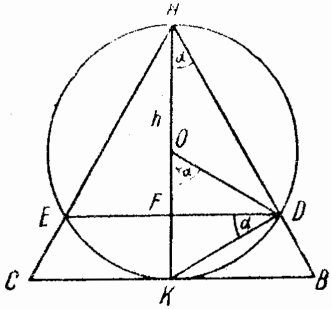
به‌این ترتیب

$$V = \frac{\pi h}{6}\left(h^2\sin^2\alpha + \frac{h^2}{4}\sin^2 2\alpha\right) = \frac{\pi h^3}{6}(1 + \cos^2\alpha)\sin^2\alpha$$

۱۰۲۹. شعاع مجهول را $x = OD$، حجم مخروط را V_1 وحجم قطاع کروی واقع در داخل مخروط را V_2 می‌گیریم (شکل ۲۵۱). بنابرشرط مساله داریم: $V_1 = 2V_2$؛ V_1 و



شکل ۲۵۱



شکل ۲۵۰

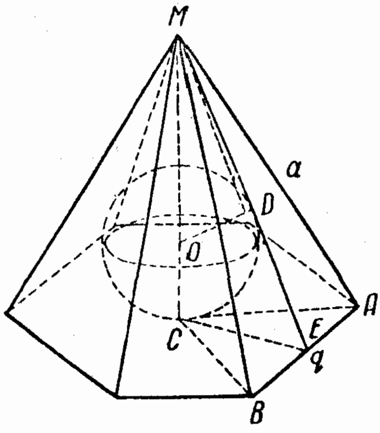
$V_۲$ را برحسب r و α و x بیان می‌کنیم:

$$V_۱ = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ \cdot OE = \frac{۱}{۳}\pi r^۳ cotg\alpha \, ; \, V_۲ = \frac{۲}{۳}\pi x^۲ \cdot KM =$$

$$= \frac{۲}{۳}\pi x^۲(OK - OM) = \frac{۲}{۳}\pi x^۲(x - x\cos\alpha) = \frac{۴}{۳}\pi x^۳ \sin^۲\frac{\alpha}{۲}$$

که اگر این مقدارهای $V_۱$ و $V_۲$ را در رابطهٔ $V_۱ = ۲V_۲$ قرار دهیم، سرانجام به‌دست می‌آید:

$$x^۳ = \frac{r^۳ cotg\alpha}{۸\sin^۲\frac{\alpha}{۲}}; \quad x = \frac{r}{۲}\sqrt[۳]{\frac{cotg\alpha}{\sin^۲\frac{\alpha}{۲}}}$$



شکل ۲۵۲

۱۰۳۰. صفحه‌ای از ارتفاع MC و سهم ME از هرم می‌گذرانیم (شکل ۲۵۲). مثلث‌های MCE و MOD، که از این راه به‌دست می‌آیند، متشابه‌اند و داریم:

$CE:OD=ME:MO$. ولی

$$CE=BE\cdot cotg(ECB)=\frac{q}{2}cotg\frac{180^\circ}{n}\ ;\ OD=R(\text{مجهول});$$

$$ME=\sqrt{MB^2-BE^2}=\sqrt{a^2-\frac{1}{4}q^2};\ MC=\sqrt{ME^2-CE^2}=$$

$$=\sqrt{a^2-\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{4}q^2cotg^2\frac{180^\circ}{n}}=\sqrt{a^2-\frac{1}{4}q^2cosec^2\frac{180^\circ}{n}}=$$

$$=\sqrt{a^2-\frac{q^2}{4}\cdot\frac{1}{sin^2\frac{180^\circ}{n}}}=\frac{1}{2\,sin\frac{180^\circ}{n}}\sqrt{4a^2sin^2\frac{180^\circ}{n}-q^2};$$

$$MO=MC-CO=MC-R$$

از تناسبی که درابتدای حل داشتیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{CE}{R}=\frac{ME}{MC-R};\ CE(MC-R)=ME\cdot R;$$

$$R=\frac{CE\cdot MC}{CE+ME}=\frac{q\cdot cotg\frac{180^\circ}{n}\sqrt{4a^2sin^2\frac{180^\circ}{n}-q^2}}{2\left(q\cos\frac{180^\circ}{n}+\sqrt{4a^2-q^2}\cdot sin\frac{180^\circ}{n}\right)}$$

۱۰۳۱. ارتفاع CB و سهم CK از هرم را رسم وانتهای آن‌ها، B و K را به‌هم وصل می‌کنیم (شکل ۲۵۳). درمثلث CBK، که به‌این ترتیب به‌دست می‌آید، داریم:

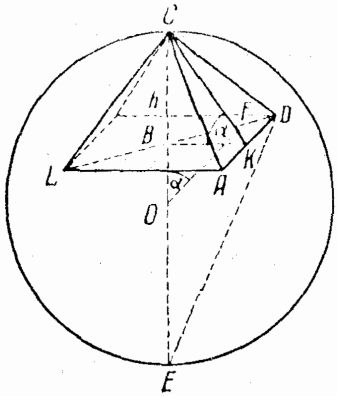
$$\widehat{CKB}=\widehat{COF}=\alpha$$

قطر LD قاعده را رسم ونقطهٔ D را به‌انتهای E ازقطر CE وصل می‌کنیم. درمثلث قائم‌الزاویهٔ CDE داریم: $BD^2=CB\cdot BE$. ولی از طرف دیگر

$$BD=\frac{1}{2}LD=\sqrt{AD^2+AL^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}AD=\sqrt{2}\cdot DK=\sqrt{2}\cdot BK=$$

$$=\sqrt{2}\cdot CB\cdot cotg\alpha=\sqrt{2}\,h\,cotg\alpha\ ;\ CB=h\ ;\ BE=2R-h$$

اکنون به‌دست می‌آید:



شکل ۲۵۳

$$۲h^۲ \cdot cotg^۲\alpha = h(۲R-h)\,;\ R = \frac{h}{۲}(۱+۲\,cotg^۲\alpha);$$

$$V = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ = \frac{۱}{۶}\pi h^۳(۱+۱\,cotg^۲\alpha)^۳$$

۱۰۳۲. مقطع محوری مخروط ABC را درنظر مـی گیریـم (شکل ۲۵۴). زاویهٔ مجهول BCD را x می‌گیریم. اگر مرکز کره، O را به‌نقطهٔ C انتهای مولد BC و به‌نقطهٔ F، نقطهٔ تماس مولد BC با کره، وصل کنیم، دیده می‌شود که

$$\widehat{BOF} = \widehat{BCD} = x\,;\ \widehat{OEF} = \widehat{BCD} = x$$

بنا برشرط مساله: $V_۲ = \frac{۱}{۲}V_۱$ ($V_۱$ حجم مخروط مفروض و $V_۲$، حجم بخشی از مخروط که به‌وسیلهٔ صفحه، از طرف رأس مخروط مفروض جدا می‌شود). شعاع کره را r می‌گیریم و $V_۱$ و $V_۲$ را برحسب r و x بیان می‌کنیم:

$$V_۱ = \frac{۱}{۳}\pi \cdot CD^۲ \cdot BD = \frac{\pi}{۳}(OD \cdot cotg(OCD))^۲ \cdot CD \cdot tg(BCD) =$$

$$= \frac{\pi}{۳}r^۲ cotg^۲\frac{x}{۲} \cdot r cotg\frac{x}{۲} \cdot tg x = \frac{\pi}{۳}r^۳ cotg^۳\frac{x}{۲} tg x\,;$$

$$V_۲ = \frac{\pi}{۳} \cdot OE^۲ \cdot OB = \frac{\pi}{۳}\left(\frac{OF}{sin(FEO)}\right)^۲ \cdot \frac{OS}{cos(BOF)} = \frac{\pi r^۳}{۳\,sin^۲ x\,cos x}$$

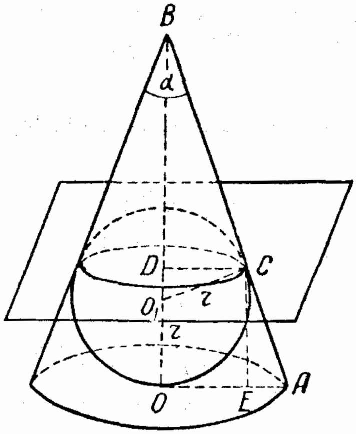
که اگر مقدارهای حاصل را، دررابطهٔ $V_۲=\frac{۱}{۲}V_۱$ قراردهیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{sin^۲ x\, cos x}=\frac{۱}{۲}cotg^۳\frac{x}{۲}\ tg x\ ;\ sin^۲ x\, cos x\, cotg^۳\frac{x}{۲}\ tg x=۲;$$

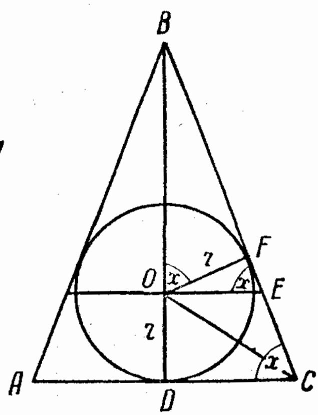
$$sin^۳ x\, cotg^۳\frac{x}{۲}=۲\ ;\ sin x\, cotg\frac{x}{۲}=\sqrt[۳]{۲}\ ;$$

$$۲\, sin\frac{x}{۲}cos\frac{x}{۲}\cdot\frac{cos\frac{x}{۲}}{sin\frac{x}{۲}}=\sqrt[۳]{۲}\ ;\ cos^۲\frac{x}{۲}=\frac{\sqrt[۳]{۲}}{۲}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴}};$$

$$cos\frac{x}{۲}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}\ ;\ x=۲\ arccos\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}$$



شکل ۲۵۵



شکل ۲۵۴

۱۰۳۳. BO را ارتفاع مخروط می‌گیریم (شکل ۲۵۵). این ارتفاع از $O_۱$، مرکز کره، و O، مرکز قاعده، می‌گذرد. از C، نقطهٔ تماس کره با مولد AB، عمود CD را بر ارتفاع BO فرود می‌آوریم و نقطهٔ $O_۱$، مرکز کره را، به نقطهٔ C وصل می‌کنیم؛ زاویهٔ $DBO_۱$ به‌دست می‌آید که ضلع‌های آن برضلع‌های زاویهٔ ABO عمود و، بنابراین، برابر $\frac{\alpha}{۲}$ است. از نقطهٔ C، عمود CE را برصفحهٔ قاعدهٔ مخروط رسم می‌کنیم. در ضمن به‌دست

می آید :

$$\widehat{ACE}=\widehat{ABO}=\frac{\alpha}{۲}$$

حجم مجهول چنین است:

$$V=\frac{۱}{۳}\pi(CD^{۲}+CD\cdot OA+OA^{۲})\cdot DO$$

پاره‌خطهایی را که دراین رابطه وجود دارد، محاسبه می‌کنیم:

$$CD=O_{۱}C\cdot\cos(DCO_{۱})=r\cos\frac{\alpha}{۲}$$

$$DO=DO_{۱}+O_{۱}O=O_{۱}C\cdot\sin(DCO_{۱})+r=r\left(۱+\sin\frac{\alpha}{۲}\right)؛$$

$$OA=AC=\frac{CE}{\cos(ACE)}=\frac{DO}{\cos\frac{\alpha}{۲}}=\frac{r\left(۱+\sin\frac{\alpha}{۲}\right)}{\cos\frac{\alpha}{۲}}$$

این مقدارها را دررابطهٔ مربوط به‌حجم قرارمی‌دهیم:

$$V=\frac{\pi}{۳}\left[\left(r\cos\frac{\alpha}{۲}\right)^{۲}+r\cos\frac{\alpha}{۲}\cdot\frac{r\left(۱+\sin\frac{\alpha}{۲}\right)}{\cos\frac{\alpha}{۲}}+\right.$$

$$\left.+\frac{r^{۲}\left(۱+\sin\frac{\alpha}{۲}\right)^{۲}}{\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}}\right]r\left(۱+\sin\frac{\alpha}{۲}\right)=\frac{\pi r^{۳}\left(۱+\sin\frac{\alpha}{۲}\right)}{۳}\times$$

$$\times\left[۱-\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}+۱+\sin\frac{\alpha}{۲}+\frac{\left(۱+\sin\frac{\alpha}{۲}\right)^{۲}}{۱-\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}}\right]=$$

$$=\frac{۱}{۳}\pi r^{۳}\left(۱+\sin\frac{\alpha}{۲}\right)^{۲}\left(۱-\sin\frac{\alpha}{۲}+۱+\frac{۱}{۱-\sin\frac{\alpha}{۲}}\right)=$$

$$=\frac{۱}{۳}\pi r^{۳}\left(۱+\sin\frac{\alpha}{۲}\right)^{۲}\cdot\frac{۳-۳\sin\frac{\alpha}{۲}+\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}}{۱-\sin\frac{\alpha}{۲}}=$$

$$=\frac{۲}{۳}\pi r^{۳}\cdot\frac{\cos^{۴}\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{\alpha}{۴}\right)}{\sin^{۲}\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{\alpha}{۴}\right)}\cdot\left(۳-۳\sin\frac{\alpha}{۲}+\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}\right)$$

۱۰۳۴. بنابرقضیهٔ سینوس‌ها داریم: (شکل ۲۵۶):

$$AB=۲R\sin(ACB)=۲R\sin(۱۸۰^{\circ}-۲\varphi)=۲R\sin ۲\varphi$$

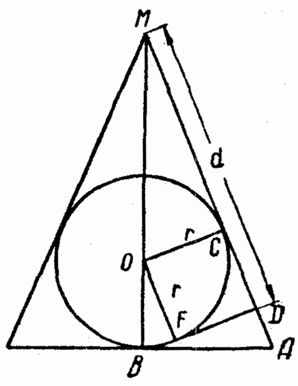
وبرای ارتفاع هرم

$$CD=AD\cdot tg\varphi=\frac{۱}{۲}AB\cdot tg\varphi=R\sin ۲\varphi tg\varphi$$

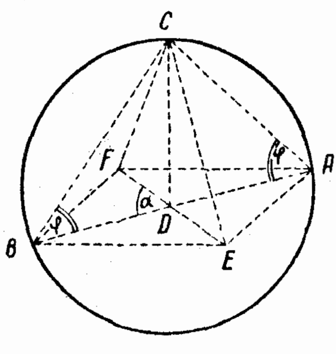
وبنا براین، حجم مجهول، چنین می‌شود:

$$V=\frac{۱}{۳}S\cdot H=\frac{۱}{۶}AB\cdot EF\cdot\sin\alpha\cdot CD=\frac{۱}{۶}AB^{۲}\cdot\sin\alpha\cdot CD=$$

$$=\frac{۱}{۶}\cdot ۴R^{۲}\cdot\sin^{۲}۲\varphi\sin\alpha\cdot R\cdot\sin ۲\varphi tg\varphi=\frac{۲}{۳}R^{۳}\sin^{۳}۲\varphi tg\varphi\sin\alpha$$



۲۵۷



شکل ۲۵۶

۱۰۳۵. مولدی ازمخروط را درنظـرمی گیریم که صفحهٔ مماس برکره، برآن عمود

باشد و، سپس، صفحه‌ای از این مولد ومحورمخروط صفحه‌ای می‌گذرانیم تا مقطع مخروط به‌دست آید (شکل ۲۵۷). اثر این صفحه، در روی شکل، متناظر با خط راست DF است. نقطهٔ O، مرکز کره را، به C، نقطهٔ تماس کره با مولد MA، و به نقطهٔ F، نقطهٔ تماس کره با صفحه‌ای که رسم کردیم، وصل می‌کنیم. روشن است که چهارضلعی $COFD$، مربعی است به ضلع r. برای ارتفاع مخروط داریم:

$$MB=OB+OM=OB+\sqrt{OC^۲+CM^۲}=OB+$$
$$+\sqrt{OC^۲+(MD-CD)^۲}=r+\sqrt{r^۲+(d-r)^۲}$$

AB، یعنی شعاع قاعدهٔ مخروط را، از تشابه مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABM و OCM، به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{AB}{OC}=\frac{MB}{MC};\ AB=OC\cdot\frac{MB}{MC}=r.\ \frac{r+\sqrt{r^۲+(d-r)^۲}}{d-r}$$

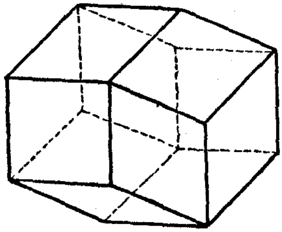
و بنابراین، برای حجم مخروط داریم:

$$V=\frac{۱}{۳}\pi\cdot AB^۲\cdot MB=\frac{۱}{۳}\pi r^۲.\ \frac{[r+\sqrt{r^۲+(d-r)^۲}]^۳}{(d-r)^۲}$$

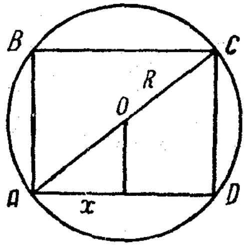
یادداشت: صفحهٔ مماس دیگری هم (به‌جز آن چه درشکل نشان داده شده است) وجود دارد. این صفحه، به فاصلهٔ $۲r$ ازصفحه‌ای که ساخته‌ایم قرار دارد. دراین حالت، حجم مخروط، چنین می‌شود:

$$V=\frac{\pi r^۲}{۳}.\ \frac{[r+\sqrt{r^۲+(d+r)^۲}]^۳}{(d+r)^۲}$$

۱۰۳۶. مقطع محوری استوانه را درنظرمی گیریم (شکل ۲۵۸). اگرشعاع استوانه را x و حجم آن را y بگیریم، می‌توان نوشت: $y=\pi x^۳$. CD. ولی ازمثلث قائم‌الزاویهٔ



شکل ۲۵۹



شکل ۲۵۸

CDA داریم:

$$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{4R^2-4x^2}=2\sqrt{R^2-x^2}$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$y=2\pi x^2\sqrt{R^2-x^2}$$

۱۰۳۷. بله می‌توان. ولی دراین‌صورت، باید چند وجهی‌هایی را که نمی‌توان‌منشور نامید، از آن استثنا کرد. مثلاً هشت‌وجهی با وجه‌های لوزی شکل (شکل ۲۵۹).