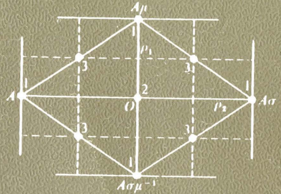
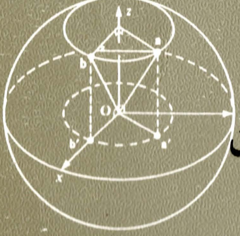
گروهها، راهی به هندسه

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



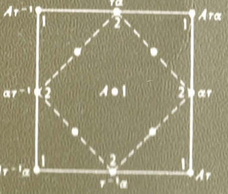


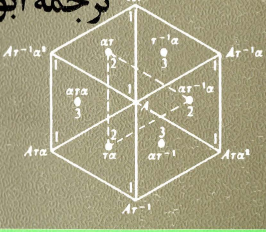
ر.پ.برن

$$\begin{aligned} \det(A-I) &= \det(A-AA^T) \\ &= \det A(I-A^T) \\ &= \det A \cdot \det(I-A^T) \\ &= \det(I-A^T) \\ &= \det(I-A) \\ &= (-1)^3 \det(A-I). \end{aligned}$$

Deduce finally that $\det(A-I)=0$.

ترجمهٔ ابوالقاسم لاله





Burn, R. P. برن، ۱۹۳۴ -
گروه‌ها، راهی به هندسه / ر. پ. برن؛ ترجمه ابوالقاسم لاله. ـ تهران: شرکت انتشارات علمی و فرهنگی، ۱۳۷۹.
ISBN 964-445-250-X شانزده، ۳۳۷ ص.: مصور، نمودار.
فهرستنویسی براساس اطلاعات فیپا.
عنوان اصلی: Groups, a path to geometry.
واژه‌نامه. کتابنامه: ص. [۳۱۵] - ۳۱۸.
۱. نظریه گروهها. ۲. گروههای تبدیل. ۳. هندسه. الف. لاله، ابوالقاسم، مترجم. ب. شرکت انتشارات علمی و فرهنگی. ج. عنوان. د. عنوان: راهی به هندسه.
۴گ ۴ ب / QA ۱۷۱ ۵۱۲/۲
۱۳۷۹
کتابخانه ملی ایران ۱۰۴۵ - ۷۹ م

گروه‌ها، راهی به هندسه

نویسنده : ر. پ. برن

مترجم : ابوالقاسم لاله

چاپ اول : ۱۳۷۹؛ شمار : ۱۵۰۰ نسخه

آماده‌سازی و چاپ : شرکت انتشارات علمی و فرهنگی

حق چاپ محفوظ است.

شرکت انتشارات علمی و فرهنگی

○ **اداره فروش و فروشگاه مرکزی**: خیابان افریقا، چهارراه حقانی (جهان کودک)، کوچهٔ کمان، پلاک ۴، کدپستی ۱۵۱۷۸؛ صندوق‌پستی ۳۶۶ـ۱۵۱۷۵؛ تلفن : ۷۱ـ۸۷۷۴۵۶۹؛ فاکس: ۸۷۷۴۵۷۲

○ **فروشگاه یک**: خیابان انقلاب ـ روبروی دراصلی دانشگاه تهران؛ تلفن : ۶۴۰۰۷۸۶

○ **فروشگاه دو**: خیابان انقلاب ـ نبش خیابان ۱۶ آذر؛ تلفن : ۶۴۹۸۴۶۷

○ **فروشگاه سه**: خیابان افریقا ـ کوچهٔ گلفام، پلاک ۱؛ تلفن : ۲۰۵۰۳۲۶

○ **چاپخانه**: خیابان آزادی، نبش زنجان جنوبی، محوطه سازمان میراث فرهنگی کشور؛ تلفن: ۶۰۱۳۵۲۱ـ۶۰۱۴۲۸۳

MATH75.IR

فهرست مطالب

MATH75.IR

تشکر

از دکتر آلن بیردون[1] به خاطر مشارکت در طرح درس خاصی که این کتاب به عنوان مرجع آن نگاشته شد و از همکارم باب هال[2] برای صرف وقت زیاد جهت بحث درباره سؤالهای واقعی و جوابهای آن بسیار متشکرم. از دکتر پ. نیومن[3] و پروفسور ب. ل. وندروردن[4] برای مکاتبه دربارهٔ موضوعهای تاریخی تشکر می‌کنم. اگر نقایصی درکتاب وجود داشته باشد به عهدهٔ من است.

کالج هومرتون کیمبریج جولای ۱۹۸۴

ر. پ. برن

1) Alan Beardon 2) Bob Hall 3) P. Neumann 4) B. L. Van der Waerden

MATH75.IR

پیشگفتار

این کتاب حاوی یک درس مقدماتی در نظریهٔ گروه‌ها با حفظ دقت مرسوم است. سه وجه تمایز در ارائه مطلب وجود دارد.

اول این که کتاب مشتمل بر زنجیره‌ای با بیش از ۸۰۰ مسئله است. این مطلب امکان ارائه درس را به صورت سمینار فراهم می‌سازد. ریاضیات آن چیزی است که انجام می‌دهیم نه آنچه می‌آموزیم و در اغلب اوقات ارائه درسها به روش مرسوم تأثیر مخالف به همراه دارد.

دوم این که در ابتدا گروه‌های مورد بحث گروه‌های تبدیلها هستند، و این مطابق با منشاء تاریخی نظریه است. این کار زمینه‌ای را فراهم می‌آورد که اثبات قانون شرکت‌پذیری را فوری می‌سازد و بدین جهت بررسی مجموعه‌هایی با تنها یک عمل تعریف شده را به روشنی ارزشمند می‌سازد. برای گالوا[1] (۱۸۳۵)، ژوردان[2] (۱۸۷۰)، و حتی کلاین[3] در درسهایی دربارهٔ بیست وجهی [4] (۱۸۸۴) گروه‌ها با یک اصل بستار تعریف شده بودند. بقیهٔ اصلها در مضمون بحثهای آنها ــ گروه‌های متناهی تبدیلها ــ مطرح می‌شدند. کار ما روی گروه‌های مجرد در فصل ۶ شروع می‌شود.

سوم این که هندسهٔ دو و سه بعدی مضمون اغلب گروه‌هایی هستند که در این کتاب

---

1) E. Galois 2) Jordan 3) F. Klein 4) *Lectures on the Icosahedron*

ساخته می‌شوند و نیز مبحث اصلی کاربرد نظریهٔ گروه‌ها در فصلهای ۷ و ۱۷ تا ۲۳ است. هندسه بهترین زمینه‌ای است که می‌توان مفهوم مزدوج بودن را درک کرد و گروه‌های خطی و مستوی از ساده‌ترین مباحثی هستند که کارآیی همریختیها را به‌طور مؤثر نشان می‌دهند. گرایش هندسی کتاب، نظریه گروه‌ها را با آنالیز مختلط، جبر خطی و بلورنگاری پیوند می‌دهد و زمینهٔ مفیدی را برای فردی که مایل به مطالعهٔ این رشته‌هاست فراهم می‌آورد.

معلومات ریاضی که برای این درس لازم است دانستن ریاضیات دبیرستانی است. در چندجا استدلال به‌وسیلهٔ استقرا انجام می‌گیرد و یک جا نیز قاعدهٔ کسینوس‌ها به کار می‌رود. آشنایی با گروه‌ها و با ماتریس‌ها و با اعداد مختلط در سطح دبیرستان مسلماً مفید خواهد بود هرچند کتاب در مورد این مطالب خودکفاست. هرچند این کتاب در مقایسه با کتاب قبلی[5] معلومات کمتری را می‌خواهد اما دنبالهٔ سؤالهای دربارهٔ گروه‌های هندسی برای دانشجوی تک‌رو ممکن است پیچیدگی بیشتری به وجود بیاورد. توسعهٔ چشمگیر مفاهیم این رشته بسیار زیاد است. به منظور جبران موضعی این مطلب، ایده‌های مورد نیاز از خارج از نظریهٔ گروه‌ها به نحوی ملموس و با کمترین میزان تجرید توسعه یافته‌اند. مثلاً فضاهای برداری مجرد در این کتاب تعریف نشده‌اند: تنها فضاهای $n-$ تایی‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند. برای راحتی خیال دانشجو باید متذکر شویم نتایج فصلهای ۷، ۱۸، ۱۹ در بقیه کتاب به کار برده نمی‌شوند.

اغلب نتایج به دست آمده در این کتاب طی بیست سال گذشته توسط معلمان مدرسه ادعا و نقل شده‌اند اما بیشتر اثباتها در دسترس نبوده‌اند. امیدوارم در این کتاب نه تنها اثباتها بلکه دیدگاهی را که امروزه در مدارس انگلستان دربارهٔ هندسهٔ تبدیل رایج است فراهم آورده باشم. این کتاب برای دانشجوی کارشناسی، پایهٔ ملموسی را برای تعمیم و تجرید در مطالعات بیشتر به وجود می‌آورد.

---

5) *Pathway to Number Theory*

MATH75.IR

۱

توابع

طی قرن نوزدهم نظریهٔ گروه‌ها به بررسی جایگشتها و جایگزینها می‌پرداخت. معمولاً اعضای گروه به عنوان «عمل‌ها» مورد مراجعه بودند که امروزه تبدیلهای (دوسوییهای) یک مجموعه به خود نامیده می‌شوند. این تلقی از گروه‌ها کاملاً باب میل هندسه‌دانها است و ما آن را برای بخش اعظم این کتاب می‌پذیریم.

در این فصل به‌ویژگیهایی از تبدیلها می‌پردازیم که مجموعه‌های تبدیلها را تحت ترکیب آنها به گروه‌ها مبدل می‌کند و این کار را با ابزار دقیق نظریهٔ مجموعه‌ها که در قرن نوزدهم ناشناخته بودند انجام می‌دهیم. این فصل مجردترین فصل کتاب است و اگر دانشجو در رابطه با آن با مشکل رو به روست می‌تواند از فصل ۲ شروع کند به شرطی که نتایج سؤالهای آخر فصل اول را بپذیرد.

چون یک تعریف صوری از تابع را در این فصل ارائه می‌کنیم زمینه‌ای برای اصطلاحهای یکریختی، همریختی، و تناظر یک به یک فراهم می‌آید همهٔ این اصطلاحها نوع خاصی از توابع را توصیف می‌کنند که مورد استفادهٔ نظریهٔ گروه‌هاست و معمولاً خودشان به عنوان اعضای گروه در نظر گرفته نمی‌شوند.

مطالعهٔ همزمان: فصل ۳ کتاب گرین.[1]

توابع $\mathbf{N} \to \mathbf{L}$

نمودار

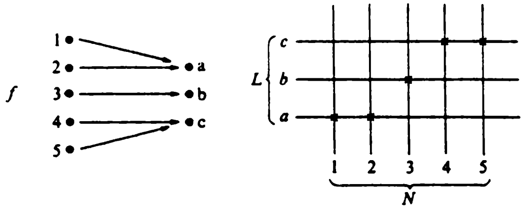
نمودار پیکانی

$L =$ حروف

$N =$ اعداد

1) Green

$$۱f = a$$
$$۲f = a$$
$$۳f = b$$
$$۴f = c$$
$$۵f = c$$

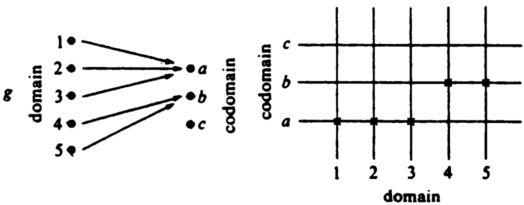


$$f = \{(۱, a), (۲, a), (۳, b), (۴, c), (۵, c)\}$$

$L =$ حروف

$N =$ اعداد

$$۱g = a$$
$$۲g = a$$
$$۳g = a$$
$$۴g = b$$
$$۵g = b$$

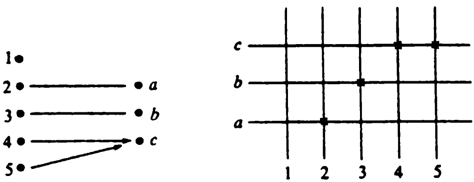


$$g = \{(۱, a), (۲, a), (۳, a), (۴, b), (۵, b)\}$$

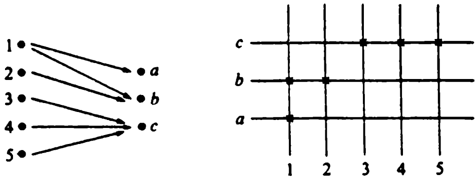
$L = \{a, b, c\}$, همدامنه , $N = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ دامنه. هم f و هم g مثالهای توابع از N به L هستند.

$$f : N \to L, \qquad g : N \to L$$

مثالی از $N \to L$ که تابع نیست



مثالی از $L \to N$ که تابع نیست



۱. با استفاده از نمودارهای قبل و ضابطه‌های آنها جملهٔ زیر را کامل کنید.

یک تابع $f : N \to L$ وقتی تعریف می‌شود که به‌ازای هر عضو n از مجموعهٔ $N \cdots$ وجود داشته باشد.

۲. با استفاده از نمودارهای قبل و ضابطه‌های آنها جملهٔ زیر را کامل کنید.

آرایش مستطیلی به کار رفته برای نمودارهای توابع صفحهٔ قبل حاصلضرب دکارتی $N \times L$ را نمایش می‌دهد. هر عضو $N \times L$ یک جفت مرتب (n, x) است که n متعلق به N و x متعلق به L است. نمودار یک تابع $L \to N$ متشکل از زیر مجموعه‌ای از $N \to L$ است با دقیقاً یک عضو (n, x) به ازای هر...

۳. کدام یک از ضابطه‌های زیر یک تابع از اعداد حقیقی $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تعریف می‌کند؟

(یک) $x \mapsto x^۲$

(دو) $x^۲ \mapsto x$

(سه) $x \mapsto \frac{۱}{x}$

(چهار) $x \mapsto \sin x$

(پنج) $x \mapsto \tan x$.

۴. اگر $A = \{۰, ۱\}$ چند تابع متفاوت $A \to A$ وجود دارد؟

توابع یک به یک

۵. نمودارهای توابع $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ که با ضابطه‌های زیر داده شده‌اند را بکشید.

یک) $x \mapsto x^۳$

دو) $x \mapsto x^۲$

آیا $x^۳ = y^۳$ نتیجه می‌دهد $x = y$؟

آیا $x^۲ = y^۲$ نتیجه می‌دهد $x = y$؟

این تمایز ما را به مفهوم یک به یک بودن $\alpha : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ که با ضابطهٔ $\alpha : x \mapsto x^{۳}$ تعریف می‌شود می‌رساند. تابع $\beta : x \mapsto x^{۲}$ روی $\mathbb{R}$ یک به یک نیست.

۶. فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$.

یک) نمودار یک تابع یک به یک $A \to A$ را نمایش دهید.

دو) نمودار یک تابع $A \to A$ که یک به یک نیست را نمایش دهید.

سه) چند تابع $A \to A$ وجود دارد؟

۷. فرض کنید $\mathbb{N}$ مجموعهٔ اعداد طبیعی $\{۱, ۲, ۳, \ldots\}$ را نمایش دهد. جزئی از نمودار تابع $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ که باضابطهٔ $n \mapsto n^{۲}$ تعریف می‌شود را بکشید. آیا این تابع یک به یک است؟

۸. دربارهٔ سطرهای نمودار یک تابع در صورتی که بدانیم تابع یک به یک است چه می‌توانیم بگوییم؟

توابع پوشا

۹. نمودارهای توابع $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را باضابطه‌های زیر بکشید.

یک) $\alpha : x \mapsto e^{x}$ و

دو) $\beta : x \mapsto x + ۱$.

آیا همیشه می‌توانیم یک عدد حقیقی x بیابیم که به‌ازای هر عدد حقیقی y داشته باشیم $x\alpha = y$ ؟

آیا همیشه می‌توانیم یک عدد حقیقی x بیابیم که به ازای هر عدد حقیقی y داشته باشیم $x\beta = y$؟

این تمایز ما را به مفهوم پوشا بودن β و پوشا نبودن α می‌رساند.

۱۰. فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$. نمودار یک تابع $A \to A$ را نمایش دهید که

یک) پوشاست،

دو) پوشا نیست.

۱۱. جزئی از نمودار تابع $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ تعریف شده با

$n \mapsto ۲n$ اعداد زوج

$n \mapsto ۲n - ۱$ اعداد فرد

را نمایش دهید. آیا این تابع یک به یک است؟ آیا این تابع پوشاست؟

۱۲. در بارهٔ سطرهای نمودار یک تابع پوشا چه می‌توان گفت؟
۱۳. فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$.
آیا می‌توانید یک تابع $A \to A$ بسازید که یک به یک است اما پوشا نیست؟
آیا می‌توانید یک تابع $A \to A$ بسازید که پوشاست اما یک به یک نیست؟
۱۴. آیا می‌توانید یک تابع $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ بسازید که یک به یک باشد اما پوشا نباشد؟
آیا می‌توانید یک تابع $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$بسازید که پوشا باشد اما یک به یک نباشد؟
۱۵. شرطی روی یک مجموعهٔ دلخواه A بگذارید که هر تابع یک به یک $A \to A$ پوشا باشد و هر تابع پوشای $A \to A$ یک به یک باشد. حدس خود را با کمک سؤالهای ۸ و ۱۲ توجیه کنید.

یک تابع یک به یک که پوشا نیز باشد یک دوسویی نام دارد. وقتی با توابعی که دامنه و همدامنهٔ آنها مجموعهٔ متناهی یکسانی است کار می‌کنیم در واقع توابع یک به یک، پوشا و دوسویی قابل تمیز نیستند.

۱۶. مثالهایی از توابع $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ارائه کنید که
یک) یک به یک و پوشا هستند (دوسوییها)،
دو) یک به یک هستند اما پوشا نیستند،
سه) پوشا هستند اما یک به یک نیستند،
چهار) نه یک به یک هستند و نه پوشا.
۱۷. اگر یک تابع یک به یک $A \to A$ وجود داشته باشد که پوشا نیست، در بارهٔ مجموعهٔ A چه می‌توان گفت؟

ترکیب توابع

۱۸. اگر β, α توابع $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ هستند که با ضابطه‌های

$$\alpha : x \mapsto ۲x, \beta : x \mapsto x + ۱$$

تعریف می‌شوند آنگاه $\alpha\beta : x \mapsto ۲x + ۱$ را تعریف می‌کنیم.

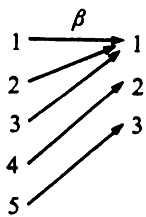
$$x \overset{\alpha}{\mapsto} ۲x \overset{\beta}{\mapsto} ۲x + ۱$$

این مفهوم را به صورت $(x)\alpha\beta = (۲x)\beta = ۲x + ۱$ می‌نویسیم.

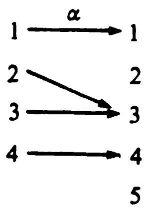
با استفاده از همین تعریف $\beta\alpha(x)$ را مشخص کنید.

۱۹. اگر $\alpha : A \rightarrow B$ و $\beta : B \rightarrow C$ تابع هستند یک تعریف صوری برای $\beta\alpha : A \rightarrow C$ با مشخص کردن $\alpha\beta(x)$ ارائه کنید (نگارهٔ x تحت تابع $\alpha\beta$: ابتدا α سپس β) . تابع $\alpha\beta$ ترکیب تابع α و β نام دارد.

۲۰. اگر



و



$\alpha\beta$ را نمایش دهید.

۲۱. چه شرط صوری‌یی $\alpha : A \rightarrow B$ را به یک تابع یک به یک مبدّل می‌کند؟

۲۲. اگر $\alpha : A \rightarrow B$ و $\beta : B \rightarrow C$ یک به یک باشند دربارهٔ $\alpha\beta : A \rightarrow C$ چه می‌توان گفت؟

۲۳. فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳\}$ و $B = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $\alpha : A \rightarrow B$ تابعی یک به یک است.

آیا می‌توانید تابعی مانند $\beta : B \rightarrow A$ بسازید که

یک) $\beta\alpha$ تابع همانی $B \rightarrow B$ باشد،

دو) $\alpha\beta$ تابع همانی $A \rightarrow A$ باشد؟

(تحت تابع همانی روی یک مجموعه هر نقطه به خود نگاشته می‌شود.)

توابع وارون

۲۴. فرض کنید A و B مجموعه‌های دلخواه و $\alpha : A \rightarrow B$ تابعی یک به یک است. نشان دهید چگونه $\beta : B \rightarrow A$ را تعریف کنیم که $\alpha\beta$ تابع همانی روی A باشد. تابع β یک وارون راست α نام دارد. بنابراین توابع یک به یک وارونهای راست دارند.

۲۵. چه شرط صوری‌یی $\alpha : A \to B$ را به یک تابع پوشا مبدّل می‌سازد؟

۲۶. اگر $\alpha : A \to B$ و $\beta : B \to C$ توابع پوشا هستند دربارهٔ تابع مرکب $\alpha\beta : A \to C$ چه می‌توان گفت؟

۲۷. فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $B = \{۱, ۲, ۳\}$ و $\alpha : A \to B$ یک تابع پوشاست.

یک) آیا می‌توانید تابعی مانند $\beta : B \to A$ بسازید که $\alpha\beta$ روی A همانی باشد؟

دو) آیا می‌توانید تابعی مانند $\beta : B \to A$ بسازید که $\beta\alpha : B \to B$ روی B همانی باشد؟

۲۸. فرض کنید A و B مجموعه‌های دلخواه و $\alpha : A \to B$ یک تابع پوشاست. نشان دهید چگونه تابعی مانند $\beta : B \to A$ تعریف کنیم که $\beta\alpha$ روی B تابع همانی باشد.

تابع β یک وارون چپ α نام دارد. بنابراین توابع پوشا وارونهای چپ دارند.

۲۹. فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳\}$. فهرستی از توابع دوسویی $A \to A$، یا به عبارت دیگر جایگشتهای A بنویسید.

برای هر دوسویی یک وارون چپ بیابید.

برای هر دوسویی یک وارون راست بیابید.

۳۰. به ازای هر تابع دوسویی $\alpha : A \to B$ یک دوسویی مانند $\beta : B \to A$ چنان تعریف کنید که $\alpha\beta$ تابع همانی $I : A \to A$ و $\beta\alpha$ تابع همانی $B \to B$ باشد.

ثابت کنید یا $\alpha\beta = I : A \to A$ یا $\beta\alpha = I : B \to B$ تابع α را به طور یکتا مشخص می‌کند.

این گونه دوسوییها وارونهای دوطرفه دارند.

بستار

۳۱. اگر هم α و هم β دوسوییهای $A \to A$ باشند دربارهٔ $\alpha\beta : A \to A$ چه می‌توان گفت؟

شرکت‌پذیری

۳۲. فرض کنید $\alpha : A \to B$، $\beta : B \to C$ و $\gamma : C \to D$ تابع هستند. با

استفاده از تعریف سؤال ۱۹ نشان دهید به ازای هر نقطهٔ x از A

$$(x)[(\alpha\beta)\gamma] = (x)[\alpha(\beta\gamma)],$$

به نحوی که دو تابع $A \to D$ یعنی $(\alpha\beta)\gamma$ و $\alpha(\beta\gamma)$ از هم قابل تمیز نیستند.

قضیهٔ $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ قانون شرکت‌پذیری برای توابع تحت عمل ترکیب نام دارد.

۳۳. با استفاده از قانون شرکت‌پذیری ثابت کنید به ازای چهار تابع $\alpha : A \to B$، $\beta : B \to C$، $\gamma : C \to D$ و $\delta : D \to E$ داریم $\alpha[\beta(\gamma\delta)] = [(\alpha\beta)\gamma]\delta$.

گروه متقارن

۳۴. فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ دوسوییهای $A \to A$ باشد. هر یک از ادعاهای زیر را توجیه کنید.

یک) اگر α و β در S هستند آنگاه $\alpha\beta$ نیز در S است (بستار).

دو) اگر α، β و γ در S هستند آنگاه $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$. (شرکت‌پذیری)

سه) تابع $I : A \to A$ که به ازای همه xها در A با ضابطهٔ $I : x \mapsto x$ تعریف می‌شود در S است (همانی). به ازای همه αها در S داریم $I\alpha = \alpha I = \alpha$.

چهار) به ازای هر α در S تابعی مانند β وجود دارد که $\alpha\beta = \beta\alpha = I$ (وارونها).

این چهار قضیه در یک حکم خلاصه می‌شوند که دوسوییهای یک مجموعه به روی خود تحت عمل ترکیب یک گروه تشکیل می‌دهند. این گروه به گروه متقارن A موسوم است و با S_A نمایش داده می‌شود.

خلاصهٔ مطالب

تعریف سؤال ۱	یک تابع $\alpha : A \to B$ با دامنهٔ A و همدامنهٔ B وقتی تعریف می‌شود که به ازای هر $a \in A$ یک $b \in B$ یکتا وجود داشته باشد که $a\alpha = \alpha(a) = b$.
تعریف سؤال ۸	تابع $\alpha : A \to B$ یک به یک است اگر به ازای هر $a_1, a_2 \in A$،

$a_1\alpha = a_2\alpha$ نتیجه دهد $a_1 = a_2$.

تعریف
سؤال ۱۲
تابع $\alpha : A \to B$ پوشا است اگر به ازای هر $b \in B$ عضوی مانند $a \in A$ وجود داشته باشد که $a\alpha = b$.

تعریف
سؤال ۱۹
ترکیب $\alpha\beta$ از دو تابع $\alpha : A \to B$ و $\beta : B \to C$ با $(a)\alpha\beta = (a\alpha)\beta$ تعریف می‌شود.

قضیه
سؤال ۲۲
ترکیب دو تابع یک به یک ترکیب‌پذیر، تابعی یک به یک است.

قضیه
سؤال ۲۴
هر تابع یک به یک وارونی راست دارد.

قضیه
سؤال ۲۶
ترکیب دو تابع پوشای ترکیب‌پذیر، تابعی پوشاست.

قضیه
سؤال ۲۸
هر تابع پوشا وارونی چپ دارد.

قضیه
سؤال ۳۰
هر تابع دوسویی (تابعی که یک به یک و پوشاست) یک وارون دوطرفهٔ یکتا دارد.

قضیه
سؤال ۳۲
ترکیب توابع شرکت‌پذیر است.

قضیه
سؤال ۳۴
مجموعهٔ دوسوییهای از یک مجموعه به خودش تحت عمل ترکیب یک گروه تشکیل می‌دهد. اگر این مجموعه A باشد گروه مزبور گروه متقارن A نام دارد و با S_A نمایش داده می‌شود.

یادداشت تاریخی

مفهوم جدید تابع، با دامنه و همدامنه اصولاً همان تعریف پ. ج. ل. دریکله[2] (۱۸۳۷) است. زبان و سبکی که امروزه از توابع به کار می‌روند عمدتاً مدیون مشارکت ریاضیدانان فرانسوی قرن بیستم، ن. بورباکی[3]، است.

2) P.G. L. Dirichlet 3) N. Bourbaki

جوابهای فصل ۱

۱. یک تابع L : $N \to L$ f وقتی تعریف می‌شود که به ازای هر عضو $n \in N$ عضو یکتای $l \in l$ با شرط $nf = l$ وجود داشته باشد.

۲. با دقیقاً یک عضو (n, x) به ازای هر $n \in N$.

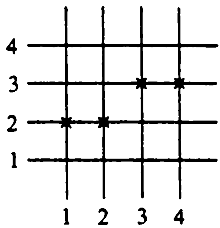
۳. (یک) بله، (دو) نگارهٔ یکتایی ندارد، (سه) 0 نگاره ندارد، (چهار) بله، (پنج) $\frac{۱}{۲}\pi$ نگاره ندارد.

۴. چهار.

۵. $x^۳ = y^۳ \Rightarrow x = y$. $x^۲ = y^۲ \Rightarrow x = \pm y$.

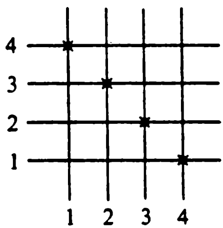
۶.

(یک)



(دو)

(سه) $۴^۴$

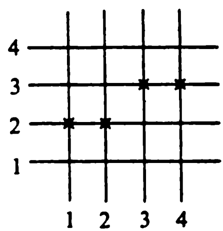


۷. بله.

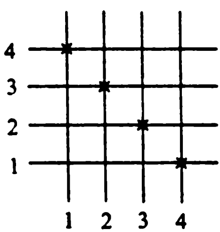
۸. هر سطر حداکثر یک عضو دارد.

۹. (یک) اگر $y = e^x$، y باید مثبت باشد. (دو) اگر $y = ۱ + x$، همهٔ yها امکان دارد.

۱۰. (یک)



(دو)



۱۱. پوشاست، اما یک به یک نیست.

۱۲. هر سطر حداقل یک عضو دارد.

۱۳. نه، نه.

۱۴. بله در سؤال ۷.

بله در سؤال ۱۱.

۱۵. A باید متناهی باشد. در این حالت تعداد اعضا در نمودار برابر با تعداد سطرهاست. این شرط که هر سطر دست کم شامل یک عضو است هم ارز با این شرط است که هر سطر حداکثر شامل یک عضو است.

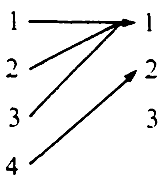
۱۶. (یک) $x \mapsto x + ۱$ ، (دو) $x \to e^x$ ، (سه) $x \mapsto x^۳ - x$ ، (چهار) $x \mapsto \sin x$.

۱۷. A نامتناهی است.

۱۸. $(x)\beta\alpha = ۲x + ۲$. این قرارداد از چپ به راست که پذیرفتیم توسط بسیاری از جبردانها ترجیح داده می‌شود. آن مزیتهای هندسی در جبر ماتریس‌ها دارد.

۱۹. $\alpha\beta : A \to C$ را با ضابطهٔ $(x)\alpha\beta = (x\alpha)\beta$ تعریف می‌کنیم.

۲۰.



۲۱. $\alpha x = \alpha y \Rightarrow x = y$.

۲۲. $x\alpha\beta = y\alpha\beta \Rightarrow \alpha x = \alpha y$ ، زیرا β یک به یک است و $x = y$، زیرا α یک به یک است. لذا $\alpha\beta$ یک به یک است.

۲۳. (یک) نه، زیرا یک نقطه از B وجود دارد که یک نگاره تحت α نیست. (دو) بله. ۱α ، ۲α،۳α خوش تعریف و متمایز هستند. فرض کنید b عضو چهارم B باشد. به ازای $a = ۱, ۲, ۳$ تعریف می‌کنیم $(a\alpha)\beta = a$ و $b\beta = ۱$.

۲۴. به ازای $a \in A$ تعریف می‌کنیم $(a\alpha)\beta = a$. به ازای $b \in B$ و به ازای هر a، $b \neq \alpha a$ ، تعریف می‌کنیم $b\beta = a_۱ \in A$.

۲۵. به ازای $b \in B$ مفروض $a \in A$ وجود دارد که $a\alpha = b$.

۲۶. به ازای $c \in C$ مفروض $b \in B$ وجود دارد که $b\beta = c$ و $a \in A$ وجود دارد که $a\alpha = b$ بنابراین $(a\alpha)\beta = c$ و $\alpha\beta$ تابعی پوشاست.

۲۷. (یک) نه، زیرا یک نقطه از A در نگاره‌ای تحت β نیست. (دو) به ازای هر $b \in B$ دست کم یک $a \in A$ وجود دارد که $a\alpha = b$ به ازای هر $b \in B$، βb را برابر با یک عضو $a \in A$ تعریف کنید که $a\alpha = b$.

۲۸. مانند قسمت دوم سؤال ۲۷.

۲۹. نگاره‌های (۱, ۲, ۳) عبارتند از (۱, ۲, ۳)، (۲, ۳, ۱)، ، (۳, ۱, ۲)، (۱, ۳, ۲)، (۳, ۲, ۱)، (۲, ۱, ۳). دوسوییهای اول، چهارم، پنجم و ششم وارون خود هستند. دوسوییهای دوم و سوم وارونهای یکدیگر هستند.

۳۰. به ازای هر $b \in B$ عضو یکتای $a \in A$ وجود دارد که $a\alpha = b$. تعریف کنید $b\beta = a$. اگر $\alpha\beta = I$ آنگاه $a\alpha\beta = a$ بنابراین $(a\alpha)\beta = a$. اگر $\beta\alpha = I$ آنگاه به ازای عضو یکتایی مانند $a \in A$، $b\beta\alpha = b = a\alpha$. اکنون α یک به یک است بنابراین $b\beta = a$، مانند قبل $a\alpha\beta = a$.

۳۱. بنا به سؤال ۲۲ و سؤال ۲۶ تابع $\alpha\beta$ دوسویی است.

۳۲.

$$x[(\alpha\beta)\gamma] = [x(\alpha\beta)]\gamma = [(x\alpha)\beta]\gamma = (x\alpha)(\beta\gamma) = x[\alpha(\beta\gamma)]$$

۳۳. $[(\alpha\beta)\gamma]\delta = (\alpha\beta)(\gamma\delta) = \alpha[\beta(\gamma\delta)]$ این نوع استدلال را می‌توان به هر تعداد متناهی از توابع توسعه داد که نشان می‌دهد مقدار آن مستقل از مکان کروشه‌هاست.

۳۴. (یک) بنا به سؤال ۳۱، (دو) بنا به سؤال ۳۲، (سه) واضح است، (چهار) بنا به سؤال ۳۰.

MATH75.IR

۲

جایگشتهای یك مجموعهٔ متناهی

مطالعهٔ همزمان: بخشهای ۴ و ۵ کتاب فرالی[1].

۱. فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳\}$ و $B = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$. دوسویی $\alpha : A \to A$ با نمودار پیکانی را می‌توان با $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}$ نمایش داد و دو سویی $\beta : B \to B$ با نمودار پیکانی

β

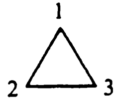
را می‌توانیم با $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۴ & ۱ \end{pmatrix}$ نمایش دهیم.

با استفاده از این نمادگذاری شش عضو S_A را بنویسید. با استفاده از این نمادگذاری شش عضو S_B را نیز بنویسید که هر یک از آنها ۱ را به ۲ بنگارد.

(به ازای هر مجموعهٔ A) یک دوسویی $A \to A$ غالباً یک جایگشت A نام دارد.

1) Fraleigh

۲. وقتی $A = \{۱, ۲, ۳, \cdots, n\}$ آنگاه گروه S_A معمولاً با S_n نمایش داده می‌شود. وقتی $n = ۳$ اگر رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع را با ۱، ۲ و ۳ شماره‌گذاری کنیم توصیفی هندسی از اعضای $S_۳$ به دست می‌آید. آنگاه جایگشت $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{pmatrix}$ با یک انعکاس مثلث و جایگشت $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{pmatrix}$ با یک تقارن دورانی به اندازهٔ ۱۲۰° تناظر می‌یابد. مشابه‌های هندسی جایگشتهای دیگر $S_۳$ را توصیف کنید.



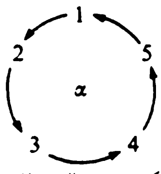
نمادگذاری دوری

۳. اگر $\alpha = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۱ \end{pmatrix}$ جایگشت $\alpha.\alpha$ را که با $\alpha^۲$ و جایگشت $\alpha^۲.\alpha$ را که با $\alpha^۳$ و جایگشت $\alpha^۳.\alpha$ را که با $\alpha^۴$ و جایگشت $\alpha^۴.\alpha$ را که با $\alpha^۵$ و جایگشت $\alpha^۵.\alpha$ را که با $\alpha^۶$ نمایش می‌دهیم بنویسید.

توصیفی ساده از $\alpha^۵$ و $\alpha^۶$ ارائه کنید.

نگاره‌های ۱ تحت جایگشتهای α، $\alpha^۲$، $\alpha^۳$، $\cdots$ را بنویسید و از آنجا دنبالهٔ ۱، ۱α، $۱\alpha^۲$، $۱\alpha^۳$ $\cdots$ را ثبت کنید. دنبالهٔ ۲، ۲α ، $۲\alpha^۲$، $۲\alpha^۳$، $\cdots$ و دنبالهٔ ۳، ۳α ، $۳\alpha^۲$، $۳\alpha^۳$، $\cdots$ را نیز ثبت کنید.

چون هر یک از این دنباله‌ها تناوبی است و با ترتیب یکسان هر پنج رقم را طی می‌کند جایگشت α معمولاً با (۱۲۳۴۵) یا معادلاً با (۲۳۴۵۱) یا (۳۴۵۱۲) یا (۴۵۱۲۳) یا (۵۱۲۳۴) بر حسب نمادگذاری دوری نمایش داده می‌شود.



۴. اگر $\alpha = (۱۲۳۴۵)$ جایگشتهای $\alpha^۲$، $\alpha^۳$، $\alpha^۴$ را برحسب نمادگذاری دوری بنویسید.

گرچه این نمادگذاری تنها نوع نسبتاً خاصی از جایگشت را توصیف می‌کند اما مفهوم رسانایی و فشردگی آن در بیشتر چهارچوبهای کلی مفید هستند.

۵. اگر $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix} = (۱۳۴)(۲۵)$ آنگاه a، b، c،d و e را بیابید.

۶. اگر $(۱ab)(۳c) = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۵ & ۱ & ۴ & ۳ & ۲ \end{pmatrix}$ آنگاه a، b و c را بیابید.

۷. برای هر جایگشت α تعریف می‌کنیم $\alpha = \alpha^۱$، $\alpha.\alpha = \alpha^۲$، $\alpha^۲.\alpha = \alpha^۳$ و به ازای هر عدد صحیح و مثبت n، $\alpha^{n+۱} = \alpha^n.\alpha$. با استفاده از استقرا روی m می‌توانیم ثابت کنیم $\alpha^{n+m} = \alpha^n.\alpha^m$ و به ازای همهٔ اعداد صحیح و مثبت m و n نیز می‌توانیم ثابت کنیم $(\alpha^n)^m = \alpha^{mn}$. اکنون $\alpha^۰$ را جایگشت همانی و $\alpha^{-۱}$ را وارون (دوطرفهٔ) α و به ازای اعداد صحیح و مثبت n، $\alpha^{-n} = (\alpha^{-۱})^n$ تعریف می‌کنیم. با استفاده از این تعریفهای اضافی به ازای هر عدد صحیح n و m می‌توانیم ثابت کنیم $\alpha^{n+m} = \alpha^n.\alpha^m$ و $(\alpha^n)^m = \alpha^{nm}$. آیا مستقیماً با استفاده از قانون شرکتپذیری می‌توانید ثابت کنید $\alpha^n \cdot \alpha^m = \alpha^m \cdot \alpha^n$؟

۸. اگر $\alpha = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۳ & ۵ & ۴ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}$ دنباله‌های

$$\begin{array}{l} ۱, ۱\alpha, ۱\alpha^۲, ۱\alpha^۳, \cdots \\ ۲, ۲\alpha, ۲\alpha^۲, ۲\alpha^۳, \cdots \\ ۳, ۳\alpha, ۳\alpha^۲, ۳\alpha^۳, \cdots \\ ۴, ۴\alpha, ۴\alpha^۲, ۴\alpha^۳, \cdots \\ ۵, ۵\alpha, ۵\alpha^۲, ۵\alpha^۳, \cdots \end{array}$$

را نمایش دهید و a،b، c، d، e، f، p،q وr را مشخص کنید اگر

$$\alpha = (۱ab)(۲c) = (۳de)(۵f) = (۲p)(۱qr)$$

دو جایگشت دوری (۱۳۴)و(۲۵) مجزا نام دارند زیرا رقم مشترکی ندارند.

۹. جایگشتهای

(یک) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۳ & ۴ & ۵ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}$ (دو) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ \\ ۷ & ۶ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \end{pmatrix}$

(سه) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \\ ۶ & ۲ & ۵ & ۷ & ۸ & ۱ & ۳ & ۴ \end{pmatrix}$ را به صورت حاصلضربهایی از جایگشتهای دوری مجزا بنویسید.

۱۰. شش عضو $S_۳$ را بر حسب نمادگذاری دوری بنویسید. وقتی $۱\alpha = ۱$ جایگشت دوری (۱) غالباً از نمایش جایگشت α به صورت حاصلضربی از جایگشتهای دوری حذف می‌شود.

۱۱. بیست‌چهار عضو $S_۴$ را بر حسب نمادگذاری دوری بنویسید.

۱۲. اگر $\alpha = (۱۲۳۴۵۶)$ جایگشتهای $\alpha^۲$، $\alpha^۳$، $\alpha^۴$ و $\alpha^۵$ را به صورت حاصلضربهایی از جایگشتهای دوری مجزا بنویسید.

۱۳. حاصلضرب $(۱۲)(۱۳)$ را به صورت یک جایگشت دوری تنها بنویسید. حاصلضرب $(۱۳)(۱۲)$ را به صورت یک جایگشت دوری تنها بنویسید. آیا $(۱۲)(۱۳) = (۱۳)(۱۲)$؟

۱۴. آیا $(۱۲)(۳۴) = (۳۴)(۱۲)$؟

اگر به ازای هر i یا هر j، $a_i \neq a_j$ آیا می‌توانید مطمئن باشید که

$$(a_۱ a_۲ \cdots a_r)(b_۱ b_۲ \cdots b_s) = (b_۱ b_۲ \cdots b_s)(a_۱ a_۲ \cdots a_r)$$

ویژگیی را که در اینجا به‌دست آوردیم معمولاً با این عبارت توصیف می‌شود که جایگشتهای دوری مجزا تعویض پذیرند.

یک جایگشت دوری $(a_۱ a_۲ \cdots a_n)$ یک دور با طول n نام دارد.

جایگشتهای دوری با طول ۱ غالباً نوشته نمی‌شوند.

جایگشتهای دوری با طول ۲ ترانهش نام دارند.

جایگشتهای دوری با طول n، $n-$ دور نام دارند.

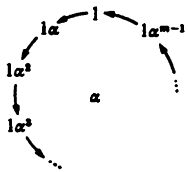
۱۵. برای اثبات این که هر جایگشت در S_n را می‌توان به صورت حاصلضربی از جایگشتهای دوری مجزا نوشت یک جایگشت دلخواه $\alpha \in S_n$ را در نظر می‌گیریم و سعی می‌کنیم یکی از جایگشتهایی که تشکیل دهندهٔ α است را با توجه به دنبالهٔ

$۱, ۱\alpha, ۱\alpha^۲, ۱\alpha^۳ \cdots$

به دست می‌آوریم. چگونه می‌دانید که رقمهای واقع در این دنباله همگی نمی‌توانند متفاوت باشند؟ آیا می‌توانید مطمئن شوید که تکراری در این دنباله قبل از جملهٔ $۱\alpha^n$ واقع می‌شود؟ فرض کنید $۱\alpha^m$ اولین جمله‌ای است که تکراری است از یکی از جمله‌های قبل دنباله و در واقع $۱\alpha^k = ۱\alpha^m$ با $m > k \geq ۰$. آنگاه $۱\alpha^{k-۱} = ۱\alpha^{m-۱}$ و این مطلب متناقض با اولین تکرار بودن $۱\alpha^m$ است مگر این که $k = ۰$.

نتیجه‌گیری کنید این دنباله دقیقاً m رقم دارد و این m رقم دائماً در ترتیبی یکسان تکرار می‌شوند.

این m رقم یکی از دورهای جایگشتی α را تشکیل می‌دهند.



۱۶. قدم بعدی، اثبات این مطلب است که به ازای هر $\alpha \in S_n$ دورهای جایگشتی تشکیل شده در سؤال ۱۵ یا یکی هستند یا مجزایند. فرض کنید a و b هر دو رقمی از ۱، ۲، ۳، $\cdots$، n باشند و دو دنبالهٔ

$a, a\alpha, a\alpha^۲, \cdots$
$b, b\alpha, b\alpha^۲, \cdots$

را در نظر بگیرید. فرض کنید این دنباله‌ها مجزا نیستند و بخصوص $a\alpha^i = b\alpha^j$. اگر $i \geq j$ آنگاه دنبالهٔ دوم را درون دنباله اول و با استفاده از سؤال ۱۵ دنبالهٔ اول را درون دنبالهٔ دوم شناسایی کنید.

۱۷. با استفاده از سؤالهای ۱۵ و ۱۶ ثابت کنید که هر جایگشت S_n حاصلضربی از جایگشتهای دوری مجزاست.

نشان

اکنون جایگشتها را به صورت حاصلضربهایی از ترانهشها به دست می‌آوریم.

۱۸. حاصلضربهای زیر را به صورت جایگشتهای دوری بنویسید:

$$(۱۲)(۱۳), (۱۲)(۱۳)(۱۴), (۱۲)(۱۳)(۱۴)(۱۵), (۱۲)(۱۳)(۱۴)\cdots(۱n).$$

۱۹. هر یک از جایگشتهای زیر را به صورت حاصلضربی از ترانهشها بنویسید:

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ & ۹ \\ ۶ & ۹ & ۸ & ۳ & ۱ & ۵ & ۷ & ۴ & ۲ \end{pmatrix}, (۱۲)(۳۴۵)(۶۷۸۹), (۱۳۵۷۹), (۲۴۶۸), (۲۳۴)$$

۲۰. چگونه می‌توانید مطمئن شوید که هر جایگشت S_n را می‌توان به صورت حاصلضربی از ترانهشها نوشت؟ آیا می‌توانید جایگشت همانی را این گونه بنویسید؟

۲۱. به سه طریق متفاوت ۳ ـ دور (۱۲۳) را به صورت حاصلضربی از دو ترانهش بنویسید. همین ۳ ـ دور را به صورت حاصلضربی از چهار ترانهش بنویسید.

سؤالهای زیر به این نتیجه منجر می‌شوند که یک جایگشت، حاصلضرب تعدادی زوج ترانهش است یا حاصلضرب تعدادی فرد ترانهش است اما نه هر دو.

۲۲. جایگشت $(۱\ ۲\ ۳\ ۴\ ۵\ ۶\ ۷\ ۸\ ۹)(۱۶)$ را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

۲۳. جایگشت $(a_۱a_۲\cdots a_rb_۱b_۲\cdots b_s)(a_۱b_۱)$ را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

۲۴. جایگشت $(۱\ ۲\ ۳)(۴\ ۵\ ۶\ ۷\ ۸)(۱۴)$ را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

۲۵. جایگشت $(a_۱a_۲\cdots a_r)(b_۱b_۲\cdots b_s)(a_۱b_۱)$ را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

۲۶. اگر α جایگشتی از S_n باشد که حاصلضربی از c جایگشت دوری مجزا است (جایگشتهای تک عضوی نیز محاسبه می‌شوند) و τ ترانهشی در S_n باشد ثابت کنید $\alpha\tau$ یا حاصلضربی از $c+۱$ یا $c-۱$ جایگشت دوری مجزا است.

۲۷. اگر $\tau_۱$ یک ترانهش S_n است بررسی کنید $\tau_۱$ متشکل از $n-۱$ جایگشت دوری و $n-۱$ برطبق این که $n+۱$ زوج یا فرد باشد زوج یا فرد است. اگر $\tau_۱، \tau_۲، \cdots، \tau_m$ ترانهشهای S_n باشند با استقرا روی m ثابت کنید هرگاه حاصلضرب $\tau_۱\tau_۲\cdots\tau_m$ به صورت جایگشتهای دوری مجزا نوشته شود برطبق این که $n+m$ زوج یا فرد است تعداد جایگشتهای دوری مجزا زوج یا فرد است.

۲۸. اگر τ_1 ، τ_2، $\cdots$ ، τ_m، σ_1،σ_2 ، $\cdots$، σ_k همگی ترانهشهای S_n باشند و $\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k = \tau_1\tau_2\cdots\tau_m$ ثابت کنید m و k یا هر دو زوج‌اند یا هر دو فرد.

۲۹. یک عضو S_n که به صورت حاصلضرب تعدادی زوج ترانهش نوشته شود یک جایگشت زوج نام دارد. یک عضو S_n که به صورت حاصلضرب تعدادی فرد ترانهش نوشته شود یک جایگشت فرد نام دارد. نشان یک جایگشت زوج ۱+ و نشان یک جایگشت فرد ۱− است. ثابت کنید اگر $\alpha, \beta \in S_n$ آنگاه نشان $\alpha\beta$ برابر است با (نشان β)×(نشان α).

۳۰. نشان (۴ ۳ ۲ ۱) و (۵ ۴ ۳ ۲ ۱) چیست؟ نشان (n $\cdots$ ۳ ۲ ۱)چیست؟

۳۱. نشان اعضای S_4 را مشخص کنید.

۳۲. اعضای گروه تولید شده به وسیلهٔ (۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱) را بنویسید و نشان هر عضو را مشخص کنید.

۳۳. اعضای گروه تولید شده به وسیلهٔ (۵ ۴ ۳ ۲ ۱) را بنویسید و نشان هر عضو را مشخص کنید.

گروه متناوب

۳۴. مجموعهٔ جایگشتهای زوج S_n با A_n نمایش داده می‌شود.

ثابت کنید حاصلضرب دو عضو A_n عضوی از A_n است.

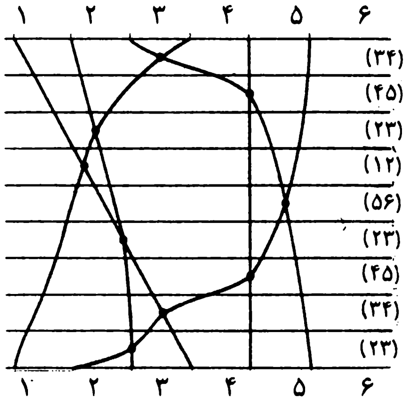
در حالت مجموعه‌های متناهی جایگشتها مطلب فوق برای تضمین برقراری چهار ویژگی سؤال ۱. ۳۴ برای A_n که گروه متناوب نام دارد کافی است.

۳۵. اعضای A_3 و A_4 را فهرست کنید.

۳۶. مجموعهٔ جایگشتهای فرد S_n را با B_n نمایش دهید. نشان دهید تابع از S_n به خودش که با (۱۲). $\alpha \mapsto \alpha$ داده می‌شود یک دوسویی است و نتیجه بگیرید تعداد اعضای A_n برابر با تعداد اعضای B_n است.

۳۷. آیا

$$(۲۳)(۳۴)(۴۵)(۲۳)(۵۶)(۱۲)(۲۳)(۴۵)(۳۴) = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ \\ ۴ & ۳ & ۶ & ۱ & ۵ & ۲ \end{pmatrix}$$



زیرگروه‌های S_n

هر زیر مجموعهٔ از S_A که در چهار شرط سؤال ۳۴.۱ صدق کند یک گروه نام دارد و یک زیرگروه S_A است. یک راه یافتن زیرگروه‌ها انتخاب یک ویژگی یا ساختار در A و در نظر گرفتن زیرمجموعه‌ای از S_A است که این ویژگی را حفظ کند.

۳۸. اعضایی از $S_۴$ را فهرست کنید که در آنها ۴ $\mapsto$ ۴. این مجموعه را می‌توانیم به صورت $\{\alpha \mid \alpha \in S_۴, ۴\alpha = ۴\}$ تعریف کنیم که پایدارساز عدد ۴ نامیده می‌شود. این مجموعه را با $S_۳$ مقایسه کنید و موارد تشابه را مشخص کنید.

۳۹. اعضایی از $S_۳$ را که به ترتیب ۱ ، ۲ و ۳ را پایدار نگاه می‌دارند فهرست کنید. این سه فهرست مجموعه‌های

$$\{\alpha \mid \alpha \in S_۳, ۱\alpha = ۱\}, \{\alpha \mid \alpha \in S_۳, ۲\alpha = ۲\}, \{\alpha \mid \alpha \in S_۳, ۳\alpha = ۳\}$$

را تشکیل می‌دهند. آیا هر یک از این مجموعه‌ها چهار ویژگی یک گروه را چنان که در سؤال ۳۴.۱ مطرح شد برقرار می‌کنند.؟

۴۰. فرض کنید a عضوی از مجموعهٔ A است و

$$T = \{\alpha \mid \alpha \in S_A, a\alpha = a\}\cdot$$

آیا T در چهار ویژگی یک گروه صدق می‌کند؟ نتیجه می‌گیریم که T یک زیر گروه S_A است که پایدارساز a نام دارد.

۴۱. اعضای $S_۴$ را که تحت آنها مجموعهٔ $\{۱,۲,۳\}$ به خودش نگاشته می‌شود بیابید.

۴۲. آیا می‌توانید اعضای مجموعهٔ T در سؤال ۴۰ را با اعضای $S_{A-\{a\}}$ جور کنید؟

۴۳. توابعی در $S_۴$ را که هم ۳ و هم ۴ را پایدار نگاه می‌دارند فهرست کنید، یعنی اعضای مجموعهٔ

$$\{\alpha \mid \alpha \in S_۴, ۳\alpha = ۳, ۴\alpha = ۴\}\cdot$$

آیا این مجموعه در چهار ویژگی یک گروه صدق می‌کند؟ چگونه این مجموعه به پایدارساز ۳ و پایدارساز ۴ در $S_۴$ ربط می‌یابد؟

۴۴. اگر T پایدارساز a در S_A و R پایدارساز b در S_A است آیا $T \cap R$ در چهار شرط یک گروه صدق می‌کند نامی برای مجموعهٔ $T \cap R$ پیشنهاد کنید.

۴۵. آیا می‌توانید اعضای مجموعهٔ $T \cap R$ در سؤال ۴۴ را با اعضای $S_{A-\{a,b\}}$ جور کنید؟

۴۶. اعضایی از $S_۴$ را فهرست کنید که مجموعهٔ $\{۱,۳\}$ را بروی خودش بنگارند؛ یعنی اعضایی که یا هم ۱ و هم ۳ را پایدار نگاه دارند یا این دو رقم را تعویض کنند.

رأسهای یک لوزی را با اعداد ۱, ۲, ۳, ۴ شماره‌گذاری کنید و تقارنهای هندسی لوزی را که متناظر با این اعضای فهرست شدهٔ $S_۴$ هستند نام ببرید.

این اعضای $S_۴$ مجموعهٔ $\{۱,۳\}$ را ثابت نگاه می‌دارند. باید توجه کنیم که آنها لزوماً یا ۱ یا ۳ را پایدار نگاه نمی‌دارند. اگر $B = \{۱,۳\}$ می‌توانیم این اعضا را با تشکیل دادن مجموعهٔ

$$\{\alpha \mid \alpha \in S_۴, B\alpha = B\}\cdot$$

توصیف کنیم.

۴۷. فرض کنید B زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ A باشد و

$$T = \{\alpha \mid \alpha \in S_A, B\alpha = B\}\cdot$$

آیا T در چهار شرط گروه صدق می‌کند؟ انتظار داریم T یک گروه باشد، زیرگروهی از S_A که B را ثابت نگاه دارد.

۴۸. اگر $\alpha = (۱\ ۲\ ۳\ ۴)$ آنگاه $\{۱,۳\}\alpha = \{۱\alpha, ۳\alpha\} = \{۲,۴\}$ و $\{۲,۴\}\alpha = \{۲\alpha, ۴\alpha\} = \{۳,۱\}$. اگر $\beta = (۱\ ۲\ ۳)$ آنگاه $\{۱,۳\}\beta = \{۱\beta, ۳\beta\} = \{۲,۱\}$ و $\{۲,۴\}\beta = \{۲\beta, ۴\beta\} = \{۴,۳\}$. در نتیجه α افراز $\{۱,۲,۳,۴\}$ را به $\{۱,۳\}$ و $\{۲,۴\}$ حفظ می‌کند در صورتی که β حفظ نمی‌کند. همهٔ اعضای $S_۴$ را که این افراز را حفظ می‌کنند بیابید. آیا این جایگشتها یک گروه تشکیل می‌دهند؟

۴۹. رأسهای یک مربع را با اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ شماره‌گذاری کنید جایگشتهای $S_۴$ که در سؤال ۴۸ به دست می‌آیند تقارنهای هندسی مربع نام دارند، آنها را بیابید.

۵۰. اگر $x_۱$، $x_۲$،$x_۳$ ، $x_۴$ اعداد حقیقی باشند صرفنظر از این که چه اعدادی به $x_۱$، $x_۲$،$x_۳$، $x_۴$ نسبت داده می‌شوند به ازای چه عناصر α از $S_۴$ داریم $x_۱x_۳ + x_۲x_۴ = x_{۱\alpha}x_{۳\alpha} + x_{۲\alpha}x_{۴\alpha}$. این جایگشتها حفظ کننده مقدار $x_۱x_۳ + x_۲x_۴$ نامیده می‌شوند. آیا آنها یک گروه تشکیل می‌دهند؟

۵۱. کدام یک از اعضای $\alpha \in S_۳$ این ویژگی را دارند که به ازای اعداد حقیقی متمایز $x_۱$،$x_۲$ و $x_۳$ رابطهٔ

$$(x_۱-x_۲)(x_۱-x_۳)(x_۲-x_۳) = (x_{۱\alpha}-x_{۲\alpha})(x_{۱\alpha}-x_{۳\alpha})(x_{۲\alpha}-x_{۳\alpha})$$

را برقرار کنند؟

نسبت غیر توافقی

۵۲. اگر $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$ و $x_۴$ اعداد حقیقی متمایز باشند، چهار عضو $\alpha \in S_۴$ را بیابید که

$$\frac{x_۳ - x_۱}{x_۳ - x_۲}\bigg/\frac{x_۴ - x_۱}{x_۴ - x_۲} = \frac{x_{۳\alpha} - x_{۱\alpha}}{x_{۳\alpha} - x_{۲\alpha}}\bigg/\frac{x_{۴\alpha} - x_{۱\alpha}}{x_{۴\alpha} - x_{۲\alpha}}$$

تابعی که در اینجا مطالعه می‌کنیم نسبت غیر توافقی چهار عدد $x_۱$ ، $x_۲$، $x_۳$ و $x_۴$ نام دارد.

۵۳. رأسهای یک مستطیل را با اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ شماره‌گذاری کنید جایگشتهای به دست آمده در سؤال ۵۲ تقارنهای هندسی مستطیل نام دارند، آنها را بیابید.

خلاصهٔ مطالب

تعریف یک دوسویی $A \to A$ یک جایگشت A نام دارد.
سؤال ۱

نمادگذاری اگر $A = \{۱, ۲, \cdots, n\}$ آنگاه S_A با S_n نمایش داده می‌شود.
سؤال ۲

قضیه هر جایگشت یک مجموعهٔ متناهی را می‌توان به صورت حاصلضربی از جایگشتهای دوری مجزا نوشت.
سؤال ۱۷

قضیه هر جایگشت یک مجموعهٔ متناهی را می‌توان به صورت حاصلضربی از ترانهشها نوشت. نمایش ترانهشها و تعداد آنها یکتا نیستند. جایگشتی را که بتوان به صورت حاصلضرب تعدادی زوج ترانهش نوشت نمی‌توان به صورت حاصلضربی از تعداد فرد ترانهش نوشت.
سؤالهای ۲۰، ۲۹

تعریف جایگشتی را که بتوان به صورت حاصلضربی از تعدادی زوج ترانهش نوشت یک جایگشت زوج نام دارد. جایگشتی را که بتوان به صورت حاصلضربی از تعدادی فرد ترانهش نوشت یک جایگشت فرد نام دارد.
سؤال ۲۹

تعریف نشان یک جایگشت را که می‌توان به صورت حاصلضربی از n ترانهش نوشت برابر است با $(-۱)^n$.
سؤال ۲۹

تعریف مجموعهٔ جایگشتهای زوج S_n با A_n نمایش داده می‌شود و گروه متناوب نام دارد.
سؤال ۳۴

تعریف اگر $a \in A$، زیر مجموعه‌ای از S_A متشکل از اعضایی که a را ثابت نگاه می‌دارند پایدارساز a نام دارد و زیر گروهی از S_A است.
سؤال ۴۰

یادداشت تاریخی

در سال ۱۷۷۰ ج. ل. لاگرانژ[2] گروه‌های $S_۲$، $S_۳$ و $S_۴$ را در رابطه با جوابهای معادله‌های درجهٔ ۲، ۳ و ۴ مطالعه کرد. در سال ۱۷۹۹ پ. رافینی[3] با استقرا ثابت کرد که تعداد جایگشتهای S_n برابر با $n!$ است. در سال ۱۸۱۲ اِ.ل. کوشی[4] وقتی روی دترمینان‌ها کار می‌کرد نشان یک جایگشت را با استفاده از تابع $\prod_{۱\leq i<j\leq n}(x_i - x_j)$ تعریف کرد. نمادگذاری جایگشتهای دوری و اصطلاح ترانهش از جمله کارهای کوشی است و نیز وی در سال ۱۸۱۵ بین جایگشتهای زوج و فرد تمایزگذاشت به همان طریقی که ما در سؤالهای ۱۸ — ۳۳ انجام دادیم و گروه‌های متناوب را شناسایی کرد. ا. گالوا در سال ۱۸۳۵ تشخیص داد که پایدارسازها زیرگروه‌هایی را به دست می‌دهند.

---

2) J.L.Lagrange 3) P.Ruffini 4) A.L. Cauchy

جوابهای فصل ۲

۱. $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{pmatrix}$ ،
$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۴ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۱ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۳ & ۴ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۴ & ۳ & ۱ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۳ & ۱ & ۴ \end{pmatrix}$.

۲. $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}$ انعکاس هستند و $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}$ دوران است.

۳. $\alpha^۲ = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۳ & ۴ & ۵ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}$، $\alpha^۳ = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۴ & ۵ & ۱ & ۲ & ۳ \end{pmatrix}$،
$\alpha^۴ = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۵ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{pmatrix}$، $\alpha^۵ = I$، $\alpha^۶ = \alpha$،

به‌ازای $i = ۰, ۱, ۲, \cdots$ ، $۱\alpha^i = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۱, ۲, \cdots$ ،
$۲\alpha^i = ۲, ۳, ۴, ۵, ۱, ۲, ۳, \cdots$ ،
$۳\alpha^i = ۳, ۴, ۵, ۱, ۲, ۳, ۴, \cdots$.

۴. $\alpha^۲ = (۱۳۵۲۴)$، $\alpha^۳ = (۱۴۲۵۳)$، $\alpha^۴ = (۱۵۴۳۲)$.

۵. $a = ۳$، $b = ۵$، $c = ۴$، $d = ۱$، $e = ۲$.

۶. $a = ۵$، $b = ۲$، $c = ۴$.

۷.

$$\underbrace{(\alpha\alpha\cdots\alpha)}_{n \text{ مرتبه}}\underbrace{(\alpha\alpha\cdots\alpha)}_{m \text{ مرتبه}} = \underbrace{(\alpha\alpha\cdots\alpha)}_{m \text{ مرتبه}}\underbrace{(\alpha\alpha\cdots\alpha)}_{n \text{ مرتبه}}$$

۸. $\alpha = (۱۳۴)(۲۵) = (۳۴۱)(۵۲) = (۲۵)(۱۳۴)$.

۹. (یک) (۱۳۵۲۴)، (دو) $(۱۷۵۳)(۲۶۴)$، (سه) $(۱۶)(۲)(۳۵۸۴۷)$.

۱۰. $(۱)(۲)(۳), (۱۲۳), (۱۳۲), (۱)(۲۳), (۱۳)(۲), (۱۲)(۳)$

۱۱. $(۱), (۱۲), (۱۳), (۱۴), (۲۳), (۲۴), (۳۴), (۱۲۳), (۱۳۲), (۱۲۴),$

$(۱۴۲), (۱۳۴), (۱۴۳), (۲۳۴), (۲۴۳), (۱۲۳۴), (۱۴۳۲), (۱۳۲۴), (۱۴۲۳),$
$(۱۲۴۳), (۱۳۴۲), (۱۲)(۳۴), (۱۳)(۲۴), (۱۴)(۲۳)$.

.۱۲

$$\alpha^۲ = (۱۳۵)(۲۴۶), \alpha^۳ = (۱۴)(۲۵)(۳۶), \alpha^۴ = (۱۵۳)(۲۶۴), \alpha^۵ = (۱۶۵۴۳۲)$$

.۱۳ (۱۲۳)، (۱۳۲)، نه .

.۱۴ بله، بله.

.۱۵ تنها n رقم جایگشتی وجود دارند. با توجه به $۱\alpha^n$، $n+۱$ نگاره واقع می‌شوند. $۱, ۱\alpha, \cdots, ۱\alpha^{m-۱}$ همگی متمایزاند، اما $۱ = ۱\alpha^m$ بنابراین $۱\alpha^{m+i} = ۱\alpha^i$.

.۱۶ اگر $a\alpha^i = b\alpha^j$ آنگاه $a\alpha^{i-j} = b$ و $a\alpha^{i-j+k} = b\alpha^k$. اگر $a\alpha^m = a$ آنگاه $b\alpha^{j-i+m} = a$.

.۱۷ بنابه سؤال ۱۵ هر رقم در یک جایگشت دوری قرار دارد. بنابه سؤال ۱۶ جایگشتهای دوری یکسان یا مجزا هستند.

.۱۸ (۱۲۳)، (۱۲۳۴)،(۱۲۳۴۵)، $(۱۲۳\cdots n)$.

.۱۹ $(۶۹)(۶۸)(۶۷)(۳۵)(۳۴)(۱۲), (۱۹)(۱۷)(۱۵)(۱۳), (۲۸)(۲۶)(۲۴)$
$(۳۴)(۳۸)(۲۹)(۱۵)(۱۶) = (۷)(۳۸۴)(۲۹)(۱۶۵), (۲۴)(۲۳)$.

.۲۰ بنابه سؤال ۱۷ هر جایگشت حاصلضربی از جایگشتهای دوری است. مانند سؤال ۱۸ هر جایگشت دوری حاصلضربی از ترانهشهاست.

.۲۱ $(۱۳)(۱۳)(۱۳)(۱۲) = (۳۲)(۳۱) = (۲۱)(۲۳) = (۱۳)(۱۲)$.

.۲۲ $(۶۷۸۹)(۱۲۳۴۵)$.

.۲۳ $(a_۱\cdots a_r)(b_۱\cdots b_s)$.

.۲۴ (۱۲۳۴۵۶۷۸).

.۲۵ $(a_۱a_۲\cdots a_rb_۱b_۲\cdots b_s)$.

.۲۶ فرض کنید $\tau = (ab)$. آنگاه یا a و b در جایگشت دوری یکسانی مانند α قرار دارند و شبیه سؤال ۲۳ تعداد جایگشتهای دوری در $\alpha\tau$ برابر با $c+۱$ است یا a و b در جایگشتهای دوری متفاوتی.با α قرار دارند و مانند سؤال ۲۵ تعدادهای جایگشتهای دوری در $\alpha\tau$ برابر با $c-۱$ است.

.۲۷ فرض کنید تعداد جایگشتهای دوری مجزا در $\tau_۱\tau_۲\cdots\tau_m$ برطبق این که $n+m$

زوج یا فرد است زوج یا فرد باشد آنگاه بنابه سؤال ۲۶، $\tau_۱\tau_۲\cdots\tau_m\tau_{m+۱}$ یک جایگشت دوری، بیشتر یا کمتر دارد و بنابراین تعداد جایگشتهای دوری مجزا برطبق این که $n+m+۱$ زوج یا فرد باشد زوج یا فرد است.

۲۸. بنا به سؤال ۲۷، $n+m$ و $n+k$ هر دو زوج یا هر دو فرد هستند.

۲۹. اگر α حاصلضربی از m ترانهش است نشان α برابر است با $(-۱)^m$.

۳۰. $sgn(۱۲۳۴) = sgn(۱۲)(۱۳)(۱۴) = (-۱)^۳ = -۱.$
$sgn(۱۲۳۴۵) = sgn(۱۲)(۱۳)(۱۴)(۱۵) = (-۱)^۴ = +۱.$
$.sgn(۱۲\cdots n) = sgn(۱۲)(۱۳)\cdots(۱n) = (-۱)^{n-۱}$

۳۱. ۱+ برای همانی، ۳− دورها و جفتهای ترانهشها. ۱− برای ترانهشها و ۴− دورها.

۳۲. ۱+ برای همانی، (۲۴۶)(۱۳۵) و (۲۶۴)(۱۵۳). ۱− برای (۱۲۳۴۵۶)، (۳۶)(۲۵)(۱۴) و (۱۶۵۴۳۲).

۳۳. همگی جایگشتهای زوج هستند.

۳۴. از سؤال ۲۹ نتیجه می‌شود.

۳۵. $A_۳$ عبارت است از همانی و دو ۳− دور. $A_۴$ عبارت است از همانی، هشت ۳− دور و سه جفت ترانهش.

۳۶. $\alpha(۱۲) = \beta(۱۲) \Rightarrow \alpha = \beta$. بنابراین تابع، یک دوسویی است. زوج بودن α نتیجه می‌دهد $\alpha(۱۲)$ فرد است و فرد بودن α نتیجه می‌دهد $\alpha(۱۲)$ زوج است بنابراین دوسویی مزبور مجموعه‌های A_n و B_n را تعویض می‌کند.

۳۷. بله.

۳۸. پایدارساز ۴ در $S_۴$ عبارت است از (۴)(۳)(۲)(۱)، (۴)(۱۲۳)، (۴)(۱۳۲)، (۴)(۲۳)(۱)، (۴)(۳)(۱۲)، (۴)(۲)(۱۳) که به جز (۴) در هر جایگشت همان $S_۳$ است.

۳۹. بله.

۴۰. $a\alpha = a$ و $a\beta = a$ نتیجه می‌دهند $a\alpha\beta = a$. $aI = a$ همیشه برقرار است و اگر $a\alpha = a$، $a\alpha\alpha^{-۱} = a\alpha^{-۱}$ بنابراین $a\alpha^{-۱} = a$.

۴۱. پایدارساز ۴.

۴۲. بله.

۴۳. مانند سؤال ۴۰ استدلال کنید. پایدارساز ۴ ,۳ برابر است با اشتراک پایدارسازهای ۳ و ۴.

۴۴. بله، مانند سؤال ۴۰ استدلال کنید.

۴۵. بله.

۴۶. (۴)(۳)(۲)(۱)،(۲۴)(۳)(۱)،(۴)(۲)(۱۳)،(۲۴)(۱۳). همانی، دو انعکاس و نیمدور.

۴۷. بله مانند سؤال ۴۰ استدلال کنید.

۴۸. (۱)،(۱۳)،(۲۴)،(۲۴)(۱۳)،(۱۲۳۴)،(۳۴)(۱۲)،(۱۴۳۲)،(۲۳)(۱۴).

۴۹. چهار دوران، از جمله همانی، و چهار بازتاب.

۵۰. همان مجموعهٔ سؤال ۴۸.

۵۱. تنها (۱)، (۱۲۳) و(۱۳۲) .

۵۲. (۱)، (۳۴)(۱۲)، (۲۴)(۱۳)، (۲۳)(۱۴).

۵۳. همانی، نیمدور و دو بازتاب.

MATH75.IR

۳

گروه‌های جایگشتهای $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$

طولپاییهای صفحه

در این فصل توجهمان از مجموعه‌های متناهی فصل ۲ را به هندسهٔ خط و صفحه معطوف می‌کنیم. مجموعهٔ اعداد حقیقی که با $\mathbb{R}$ نمایش داده می‌شود یک دستگاه صوری ریاضی است که مجموعهٔ نقاط یک خط راست نامتناهی مدل هندسی آن است. جمع اعداد حقیقی متناظر با انتقال در مدل هندسی است و ضرب اعداد حقیقی متناظر با بزرگسازی (یا کوچکسازی) در مدل هندسی است.

نقاط صفحهٔ اقلیدسی معمولاً با جفتهای مرتب (x, y) از اعداد حقیقی نمایش داده می‌شوند. هرگاه این جفتهای مرتب با جمع به صورت

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

و با ضرب به صورت

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

مجهز شدند جبر این جفتهای مرتب دقیقاً همان جبر اعدادی به صورت $x + iy$ است که $i^2 = -1$. اعدادی به این صورت اعداد مختلط نام دارند و می‌نویسیم $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. مجموعهٔ اعداد مختلط دستگاه صوری ریاضی است که مجموعهٔ نقاط یک صفحه مدل هندسی آن است.

چون مجموعه‌های $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ نامتناهی هستند امکان ندارد فهرست کاملی از اعضای $S_{\mathbb{R}}$ و $S_{\mathbb{C}}$ ارائه دهیم. اما اعضایی از این گروه‌ها وجود دارند که به سادگی می‌توان آنها

را به صورت جبری توصیف کرد و در نتیجه می‌توانیم زیرگروه‌هایی را مشخص کنیم که برخی از ساختارهای روی یک خط یا روی یک صفحه را حفظ می‌کنند. بخش عمدهٔ این فصل را به زیرگروهی از $S_{\mathbb{C}}$ اختصاص می‌دهیم که نگاشتهای فاصله‌نگهدار صفحه را به دست می‌دهد. یک تابع α فاصله‌نگهدار نام دارد هرگاه به ازای هر دو نقطهٔ a و b فاصلهٔ $a\alpha$ تا $b\alpha$ برابر با فاصلهٔ a تا b باشد.

* هرگاه دامنه و همدامنهٔ یک تابع، هندسی باشند تابع را می‌توان یک تبدیل تلقی کرد.

مطالعهٔ همزمان: فصلهای ۱،۲ ، و۳ کتاب لدرمن[1]؛ فصلهای ۱ و ۲ کتاب ناپ[2]، فصل ۵ کتاب په‌دوئه[3]؛ فصلهای ۳ـ۹ و ۱۳ کتاب مارتین[4]؛ فصلهای ۱ و ۱۴ کتاب لاکوود[5] و مک میلان[6].

خط حقیقی $\mathbb{R}$

هرگاه مجموعهٔ A نامتناهی است نمادگذاری دوری را که در فصل ۲ توسعه دادیم به‌طور کلی برای توصیف اعضای S_A در دسترس نیست، مثلاً این مطلب را با قرار دادن $A = \mathbb{R}$ و سعی در نوشتن جایگشتهای دوری برای جایگشت $x \mapsto x + ۱$ می‌توانیم ببینیم. اما با اینحال می‌توانیم زیرگروه‌های $S_{\mathbb{R}}$ را با جستجوی زیر مجموعه‌هایی که یک ویژگی خاص یا ساختار را حفظ می‌کنند بیابیم.

۱. تابع $x \mapsto x + ۱$ را به صورت نگاشتی از خط حقیقی در نظر بگیرید. اگر به ازای عدد حقیقی مفروضی مانند a، $\alpha : x \mapsto x + a$ عضوی از $S_{\mathbb{R}}$ باشد ثابت کنید به ازای هر دو عدد حقیقی x و y، $x - y = x\alpha - y\alpha$. تحت تبدیل α پاره خط از x تا y همطول و همسو با پاره خط از $x\alpha$ تا $y\alpha$ است و چنین تبدیلی یک انتقال $\mathbb{R}$ نام دارد. اگر

$$T = \{\alpha \mid \alpha \in S_{\mathbb{R}}, x - y = x\alpha - y\alpha\}$$

آیا T باید زیرگروهی از $S_{\mathbb{R}}$ باشد؟ یعنی آیا T باید در شرایط سؤال ۳۴.۱ صدق کند؟ اگر

---

1) Ledermann 2) Knopp 3) Pedoe 4) Martin 5) Lockwood 6) Macmillan

T متشکل از انتقالهاست و $\alpha \in T$ و $a = \circ\alpha$ ثابت کنید $x\alpha = x + a$ به نحوی که هر انتقال $\mathbb{R}$ به این صورت است.

۲. تابع $x \mapsto -x + ۲$ را به صورت نگاشتی از خط حقیقی در نظر بگیرید. اگر به ازای عدد حقیقی مفروضی مانند a، $\alpha : x \mapsto -x + a$ عضوی از $S_{\mathbb{R}}$ است ثابت کنید به ازای هر دو عدد حقیقی x و y، $-(x-y) = x\alpha - y\alpha$ ـ تحت تبدیل α پاره خط از x تا y همطول با پاره‌خط از $x\alpha$ تا $y\alpha$ است اما با سوی مقابل. چنین عضوی از $S_{\mathbb{R}}$ یک نیمدور $\mathbb{R}$ نام دارد. نقاط ثابت α را بیابید. هم نیمدورها و هم انتقالهای $\mathbb{R}$ قدرمطلق طولها را حفظ می‌کنند. مجموعهٔ همهٔ تبدیلهایی که قدرمطلق طولها را حفظ می‌کنند مجموعهٔ طولپاییهای $\mathbb{R}$ است. اگر

$$M = \{\alpha \mid \alpha \in S_{\mathbb{R}}, | x - y |=| x\alpha - y\alpha |\}$$

آیا M باید زیرگروهی از $S_{\mathbb{R}}$ باشد؟ آیا M شامل گروه انتقالهای $\mathbb{R}$ و همهٔ نیمدورهای $\mathbb{R}$ است؟ حال نشان می‌دهیم که M شامل چیز دیگری نیست. اگر $\alpha \in M$ و $\circ\alpha = ۵$ آنگاه $x\alpha, ۲\alpha$ چه هستند؟ اگر $\alpha \in M$ و $\circ\alpha = a$ ثابت کنید $x\alpha = \pm x + a$. اگر به ازای تبدیل مفروضی مانند α، $x\alpha = x + a$ و $y\alpha = -y + a$ آنگاه ثابت کنید $| x + y |=| x - y |$ و نتیجه بگیرید که یا $x = \circ$ یا $y = \circ$ به نحوی که یا α یک انتقال است یا یک نیمدور.

۳. تابع $x \mapsto ۲x + ۱$ را به صورت نگاشتی از اعداد حقیقی در نظر بگیرید. نقاط ثابت آن را بیابید. چنین نگاشتی یک بزرگسازی با مرکز ۱ـ و عامل مقیاس ۲ نام دارد. اگر $\alpha : x \mapsto ax + b$ نگاشتی از اعداد حقیقی است و $a \neq \circ, ۱$ ، نقاط ثابت (یا مرکز) α را بیابید و تبدیل را از نظر هندسی توصیف کنید. به ازای هر سه عدد حقیقی متمایز x، y و z نسبت $\frac{x-y}{x-z}$ را با نسبت $\frac{x\alpha - y\alpha}{x\alpha - z\alpha}$ مقایسه کنید. مجموعهٔ همهٔ تبدیلهایی که نسبتهای طولها روی خط حقیقی را حفظ می‌کنند مجموعهٔ تبدیلهای مستوی یا تشابه‌های خط حقیقی نام دارد. اگر

$$A = \{\alpha \mid \alpha \in S_{\mathbb{R}}, \frac{x - y}{x - z} = \frac{x\alpha - y\alpha}{x\alpha - z\alpha}, x, y, z \text{ به ازای اعداد حقیقی متمایز}\}$$

آیا A زیرگروهی از $S_{\mathbb{R}}$ است؟ آیا A شامل همهٔ تبدیلها و نیمدورهای $\mathbb{R}$ است؟ اگر $\alpha \in A$، $\circ\alpha = ۵$ و $۱\alpha = ۷$ مقدار $y\alpha$ را بیابید. اگر $\alpha \in A$ و $\circ\alpha = b$ و $۱\alpha = a + b$ با

$a \neq ۰$ ثابت کنید $y\alpha = ay + b$ به نحوی که همهٔ تبدیلهای مستوی یا تشابه‌های خط حقیقی به صورت $\alpha : x \mapsto ax + b$ با $a \neq ۰$ هستند.

۴. اگر $x' = ax + b$ و $a \neq ۰$، x را بر حسب x' بیابید و وارون نگاشت $\alpha : x \mapsto ax + b$ را به‌دست آورید.

۵. صورت جبری اعضای پایدارساز ۰ (سؤال ۲، ۴۰ را ببینید) در زیرگروه تشابه‌های $\mathbb{R}$ را ارائه دهید. این اعضا بزرگسازیهایی با مرکز ۰ نام دارند.

۶. (اختیاری) فرض کنید $\mathbb{Q}$ مجموعهٔ اعداد گویا را نمایش دهد. تبدیلهای $\mathbb{Q}$ که ساختار جمع را حفظ می‌کنند تبدیلهای خطی $\mathbb{Q}$ هستند و مجموعه‌ای به صورت

$$L = \{\alpha \mid \alpha \in S_{\mathbb{Q}}, (x+y)\alpha = x\alpha + y\alpha\}$$

را تشکیل می‌دهند. آیا L زیرگروهی از $S_{\mathbb{Q}}$ است.
اگر $\alpha \in L$ ثابت کنید:
(یک) $۰\alpha = ۰$
(دو) $(-x)\alpha = -(x\alpha)$.
به‌علاوه نشان دهید اگر $۱\alpha = a$ آنگاه به ازای همهٔ اعداد صحیح n، $n\alpha = na$ و نتیجه‌گیری کنید به ازای هر عدد گویای x، $x\alpha = ax$.

صفحهٔ حقیقی $\mathbb{R}^۲$، صفحهٔ گاوس یا نمودار آرگان $\mathbb{C}$

در سؤالهای ۷ − ۱۲ به قدر نیاز جبر اعداد مختلط را مطرح می‌کنیم تا هدفهای هندسی ما را از سؤال ۱۳ به بعد برآورده سازد.

۷. اگر نگاشت $(x, y) \mapsto x + iy$ را برای مشخص کردن نقاط $\mathbb{R}^۲$ با اعداد مختلط $\mathbb{C}$ به کار می‌گیریم محور x محور حقیقی و محور y محور موهومی نام دارد. قدر مطلق عدد مختلط $x + iy$ را عدد حقیقی $\sqrt{(x^۲ + y^۲)}$ تعریف می‌کنیم و آن را با $\mid x + iy \mid$ نمایش می‌دهیم. قدر مطلق $x + iy$ را در یک نمودار نمایش دهید و آن را به طور هندسی توصیف کنید. اگر اعداد z و w اعداد مختلط باشند ثابت کنید $\mid zw \mid = \mid z \mid . \mid w \mid$.

۸. اگر $z = x + iy$ و $z \neq ۰$ در یک نمودار یک زاویه θ را چنان نشان دهید که $\cos\theta = x / \mid z \mid, \sin\theta = y / \mid z \mid$. به ازای $۰ \leq \theta < ۲\pi$ زاویهٔ θ را شناسهٔ z،

$arg z$، تعریف می‌کنیم به نحوی که اگر $\theta = arg z$،

$$z = |z|.(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ثابت کنید (به پیمانه 2π) $arg zw = arg z + arg w$.

۹. $|\cos\theta + i\sin\theta|$ را بیابید و همهٔ اعداد مختلط با قدر مطلق برابر با ۱ را مشخص کنید.

۱۰. آیا هر عدد مختلط به‌طور یکتا توسط قدر مطلق و شناسهٔ خود مشخص می‌شود؟

۱۱. اگر بنویسیم $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$، به ازای اعداد حقیقی θ و ϕ، $e^{i\theta}\cdot e^{i\phi}$ را بیابید.

۱۲. اگر $z = x + iy$ که y, x اعداد حقیقی هستند، تعریف می‌کنیم $\bar{z} = x - iy$ و $\bar{z}$ را مزدوج z می‌نامیم. ثابت کنید $z + \bar{z}$ عددی حقیقی است (حقیقی محض) و $\bar{z} - z$ برابر با i برابر عددی حقیقی است (موهومی محض) و $|z| = |\bar{z}|$. نگاشت از $\mathbb{R}^2$ که با $z \mapsto \bar{z}$ داده می‌شود را نمایش دهید. ثابت کنید $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ و با استفاده از نگاشت $z \mapsto \bar{z}$ این مطلب را نشان دهید. همچنین ثابت کنید $\overline{zw} = \bar{z}.\bar{w}$.

طولپاییها یا تقارنهای صفحه

مطالعهٔ طولپاییها یک صورت پویای مطالعهٔ همنهشتی (قابلیت انطباق) اقلیدسی است. ما روی حفظ فاصله اصرار می‌کنیم، زیرا حفظ فاصله حفظ زاویه را نتیجه می‌دهد. روش ما ساختن فرمول جبری برای برخی طولپاییهای مشهور است و آنگاه نشان می‌دهیم ترکیبهای این طولپاییهای مشهور همهٔ امکانها را به دست می‌دهند.

۱۳. هر تبدیل فاصله نگهدار یک طولپایی نام دارد. مطالعه دربارهٔ طولپاییهای صفحه را با یک حالت خاص شروع می‌کنیم. $\alpha : z \mapsto z + 2 + i$ را به صورت تبدیلی از $\mathbb{R}^2$ نمایش دهید. به ازای هر دو نقطهٔ z و w از صفحه مقادیر $z\alpha - w\alpha, z - w$ را مقایسه کنید. نتایج هندسی این برابری چیست؟ اعداد مختلط و نمادگذاری مطرح شده در سؤال ۷ را برای توصیف فاصلهٔ بین نقاط z و w به کار برید. آیا α یک طولپایی است؟

۱۴. اگر $\alpha : z \mapsto z + c$ عضوی از $S_{\mathbb{C}}$ است ثابت کنید به ازای هر دو عدد مختلط z و w داریم $z - w = z\alpha - w\alpha$. چنین عضوی از $S_{\mathbb{C}}$ یک انتقال $\mathbb{R}^2$ نام دارد. اگر

$$T = \{\alpha | \alpha \in S_{\mathbb{C}}, z - w = z\alpha - w\alpha\}$$

آیا T باید زیرگروهی از $S_{\mathbb{C}}$ باشد؟ اگر $\alpha \in T$ و $c = \circ\alpha$، ثابت کنید $z\alpha = z + c$ و بنابراین T متشکل از همهٔ انتقالهای $\mathbb{R}^{۲}$ است و گروه انتقال صفحه نام دارد.

۱۵. نگاشت $\alpha : z \mapsto e^{i\theta}z$ را به صورت نگاشتی از $\mathbb{R}^{۲}$ نمایش دهید. این نگاشت یک دوران به اندازهٔ θ حول مرکز ∘ است. بررسی کنید $|z - w| = |z\alpha - w\alpha|$ بنابراین دورانهای حول ∘ طولپاییهای صفحه هستند.

۱۶. اگر

$$E = \{\alpha | \alpha \in S_{\mathbb{C}}, |z - w| = |z\alpha - w\alpha|\}$$

آیا E زیرگروهی از $S_{\mathbb{C}}$ است؟ آیا E شامل گروه انتقال است؟ E گروه طولپاییها یا گروه اقلیدسی $\mathbb{R}^{۲}$ نام دارد.

۱۷. آیا $\alpha : z \mapsto \bar{z}$ یک طولپایی است؟ خط نقاط ثابت α را مشخص کنید و یک نقطه و نگارهٔ آن را تحت α در رابطه با خط نقاط ثابت توصیف کنید. تبدیل $z \mapsto \bar{z}$ یک بازتاب نسبت به محور حقیقی نام دارد. بازتاب $z \mapsto \bar{z}$ و نگاشت هماتی هر دو طولپاییهایی هستند که نقاط ∘ و ۱ را ثابت نگاه می‌دارند. در سؤال بعد بررسی می‌کنیم این دو تنها طولپاییهایی با این ویژگی هستند.

۱۸. فرض کنید α طولپایی باشد که هر دو نقطهٔ ∘ و ۱ را ثابت نگاه می‌دارد. فرض کنید z نقطه‌ای از صفحه متمایز با ∘ و ۱ باشد. دایرهٔ به مرکز 0 وگذرنده از z و دایرهٔ به مرکز ۱ وگذرنده از z را در نظر بگیرید. آیا α باید این دایره‌ها را به یکدیگر بفرستد؟ نگاره‌های ممکن z چه هستند؟ نتیجه‌گیری کنید که هر نقطهٔ محور حقیقی توسط α ثابت نگاه داشته می‌شود. اگر $z\alpha = \bar{z} \neq z$ و $w\alpha = w$ نتیجه‌گیری کنید که $|z - w| = |\bar{z} - w|$ و بنابراین w روی عمودمنصف z و $\bar{z}$ قرار دارد و w حقیقی است. نتیجه‌گیری کنید به ازای همه zها یا $z\alpha = z$ یا $z\alpha = \bar{z}$.

۱۹. حال از همه معلوماتمان دربارهٔ طولپاییهای ثابت نگاه دارندهٔ ∘ و ۱ (سؤال ۱۸) و طولپاییهای ثابت نگاه دارندهٔ∘ (سؤال ۱۵) استفاده می‌کنیم تا طولپاییهای ثابت نگاه دارندهٔ ∘ را کاملاً مشخص کنیم.

فرض کنید α یک طولپایی ثابت نگاه دارندهٔ ∘ است. ثابت کنید $|۱\alpha| = ۱$. ثابت کنید به ازای عددی مانند θ داریم $۱\alpha = e^{i\theta}$. اگر $\beta : z \mapsto e^{i\theta}z$ نشان دهید $\alpha\beta^{-۱}$ هم ∘ و هم ۱ را ثابت نگاه می‌دارد و نتیجه‌گیری کنید که $\alpha : z \mapsto e^{i\theta}z$ یا $\alpha : z \mapsto e^{i\theta}\bar{z}$.

۲۰. از قبل می‌دانیم $z \mapsto e^{i\theta}z$ دورانی حول ۰ است. طولپایی $z \mapsto e^{i\theta}\bar{z}$ را با نگاهی هندسی بررسی می‌کنیم. به ازای هر عدد حقیقی r نگارهٔ عدد مختلط $re^{\frac{1}{2}i\theta}$ تحت طولپایی $\alpha : z \mapsto e^{i\theta}\bar{z}$ را بیابید و خط نقاط ثابت α را مشخص کنید. نگارهٔ عدد مختلط $re^{i\phi}$ را تحت α بیابید و یک نقطه و نگارهٔ آن را تحت α در رابطه با خط نقاط ثابت α توصیف کنید.

هرگاه یک طولپایی یک خط نقاط ثابت داشته باشد که عمودمنصف خط واصل هر نقطهٔ دیگر و نگاره‌اش است، یک بازتاب (تقارن) نام دارد. خط نقاط ثابت، محور بازتاب نام دارد. α^2 چیست؟

۲۱. دوران $z \mapsto e^{i\theta}z$ را به صورت حاصلضربی از دو بازتاب با محورهای گذرنده از مرکز دوران بنویسید. رابطهٔ بین زاویهٔ دوران و زاویهٔ محورها چیست؟ حاصلضرب این دو بازتاب با ترتیب مخالف با آنچه $z \mapsto e^{i\theta}z$ را حاصل کرد چیست؟

۲۲. حالا با استفاده از همهٔ معلوماتمان دربارهٔ طولپاییهای ثابت نگاه دارندهٔ ۰ (سؤال ۱۹) و طولپاییهایی که ۰ را ثابت نگاه نمی‌دارند (سؤال ۱۴) همهٔ طولپاییها را مشخص می‌کنیم.
اگر α یک طولپایی دلخواه باشد که $c = \alpha 0$ و τ انتقال $z \mapsto z + c$ باشد با استفاده از سؤال ۱۹ نشان دهید که $\alpha\tau^{-1}$ یا $z \mapsto e^{i\theta}z$ یا $z \mapsto e^{i\theta}\bar{z}$ است و نتیجه‌گیری کنید یا $\alpha : z \mapsto e^{i\theta}z + c$ یا $\alpha : z \mapsto e^{i\theta}\bar{z} + c$.

۲۳. حال انواع طولپاییهای به‌دست آمده از سؤال ۲۲ را بررسی می‌کنیم برای این منظور از طولپایی $\alpha : z \mapsto e^{i\theta}z + c$ شروع می‌کنیم.
هرگاه $e^{i\theta} = 1$ طولپایی α را نام ببرید.
اگر $e^{i\theta} \neq 1$ یک نقطهٔ ثابت α مانند p را بیابید و ثابت کنید $z\alpha - p = e^{i\theta}(z - p)$. این معادله را از نظر هندسی بررسی کنید و تبدیل α را توصیف کنید. سؤال ۴ را به‌کار برید و α^{-1} را بیابید. اگر $\alpha : z \mapsto e^{i\theta}z + c$ و $\beta : z \mapsto e^{i\phi}z + d$ آنگاه $\alpha\beta$ را محاسبه کنید.

ترکیب دو دوران را از نظر هندسی توصیف کنید و تعیین کنید چه وقت این ترکیب یک انتقال است.

۲۴. اگر ABC یک مثلث باشد بازتاب نسبت به BC را با α و بازتاب نسبت به CA را با β و بازتاب نسبت به AB را با γ نمایش می‌دهیم. با استفاده از ایدهٔ

سؤال ۲۱ تبدیلهای $\beta\gamma$ و $\gamma\alpha$ را به طور هندسی توصیف کنید. با استفاده از معادلهٔ $(\beta\gamma)(\gamma\alpha) = \beta\alpha$ حکم آخر سؤال ۲۳ را ثابت کنید.

عجالتاً این مطلب بررسی ما از تبدیل $z \mapsto e^{i\theta}z + c$ و دورانها و انتقالها را کامل می‌کند.

۲۵. اگر $\alpha : z \mapsto e^{i\theta}\bar{z} + c$ شرطی روی $e^{i\theta}$ و c بیابید که $\alpha^۲$ همانی شود.

۲۶. فرض کنید $\alpha : z \mapsto e^{i\theta}\bar{z} + c$

(یک) اگر α یک نقطهٔ ثابت داشته باشد ثابت کنید که $e^{i\theta}\bar{c} + c = ۰$.

(دو) اگر $e^{i\theta}\bar{c} + c = ۰$ ثابت کنید وسط ۰ و ۰α توسط α ثابت نگاه داشته می‌شود.

(سه) اگر $(\frac{۱}{۲}c)\alpha = \frac{۱}{۲}c$ ثابت کنید به ازای همهٔ اعداد حقیقی r داریم $(\frac{۱}{۲}c + re^{\frac{۱}{۲}i\theta})\alpha = \frac{۱}{۲}c + re^{\frac{۱}{۲}i\theta}$.

(چهار) اگر $e^{i\theta}\bar{c} + c = ۰$ نشان دهید بازتاب $z \mapsto e^{i\theta}\bar{z}$ محوری عمود بر انتقال $z \mapsto z + c$ دارد.

۲۷. اگر طولپایی α یک خط نقاط ثابت داشته باشد ایده‌های سؤال ۱۸ را به کار برید و ثابت کنید یا α همانی است یا یک بازتاب است که محور آن خط نقاط ثابت است.

۲۸. با کشیدن یک مثلث و نگارهٔ آن طولپایی $z \mapsto \bar{z} + ۱$ را نمایش دهید. آیا این تبدیل یک انتقال، یک دوران یا یک بازتاب است؟ آیا یک خط از صفحه وجود دارد که توسط این تبدیل بروی خود نگاشته می‌شود؟ آیا تنها یک چنین خطی وجود دارد؟ اگر $\alpha : z \mapsto \bar{z} + ۱$ آیا یک انتقال τ وجود دارد که روی این خط ثابت نگاه داشته شده با α برابر باشد؟ نقاط ثابت $\alpha\tau^{-۱}$ چه هستند؟ $\alpha\tau^{-۱}$ چه نوع طولپایی است؟ دربارهٔ مکان هندسی وسط z و $z\alpha$ چه می‌توانید بگویید؟

۲۹. به ازای چه عدد مختلطی مانند c تبدیل $z \mapsto z + c$ و بازتاب $z \mapsto \bar{z}$ تعویض‌پذیرند (سؤال ۲۹.۶ را ببینید).

۳۰. هرگاه یک طولپایی حاصلضرب یک بازتاب و یک انتقال در جهت محور بازتاب باشد یک لغزه نام دارد. فرض کنید $\alpha : z \mapsto e^{i\theta}\bar{z} + c$ یک بازتاب نیست.

(یک) ثابت کنید $\alpha^۲$ یک انتقال است.

(دو) اگر τ یک انتقال است که $\tau^۲ = \alpha^۲$ ثابت کنید $\tau\alpha = \alpha\tau$.

(سه) ثابت کنید مرتبهٔ $\alpha\tau^{-۱}$ برابر با ۲ است (از (دو)).

(چهار) به ازای بازتابی مانند ϱ ثابت کنید $\alpha = \varrho\tau$ (از سؤالهای ۲۵، ۲۶ و ۲۷) و

$.\tau\varrho = \varrho\tau$

(پنج) ثابت کنید اگر A یک نقطهٔ ثابت ϱ است، آنگاه $A\tau$ نیز نقطهٔ ثابت ϱ است و α یک لغزه است.

(شش) اگر ϱ یک بازتاب و τ یک انتقال باشد که $\alpha = \tau\varrho = \varrho\tau$ با بررسی α^2 ثابت کنید τ و ϱ به نحو یکتا توسط α تعریف می‌شوند.

حالا اثبات اینکه هر طولپایی صفحه یا یک انتقال، یک دوران، یک بازتاب یا یک «لغزه» است را کامل کردیم. در سؤال ۳۱ چهار نوع طولپایی را بر حسب نقاط ثابت آنها و در سؤالهای ۳۲ـ۳۸ برحسب اثر آنها روی زاویه‌ها تجزیه و تحلیل می‌کنیم.

۳۱. (یک) چه طولپاییهایی نقطهٔ ثابت ندارند.

(دو) چه طولپاییهایی تنها یک نقطهٔ ثابت دارند.

(سه) چه طولپاییهایی بیش از یک نقطهٔ ثابت دارند.

۳۲. اگر z و w نقاط غیر صفر متمایز باشند $arg(z/w)$ را نمایش دهید.

۳۳. اگر z و w و t رأسهای یک مثلث باشند $z - w$ و $z - t$ و $arg(\frac{z-w}{z-t})$ را نمایش دهید.

۳۴. اگر $\alpha : z \mapsto e^{i\theta}z + c$ نشان دهید به ازای هر سه عدد مختلط متمایز z، w و t

$$arg\frac{z-w}{z-t} = arg\frac{z\alpha - w\alpha}{z\alpha - t\alpha}.$$

۳۵. اگر $z \neq ۰$ رابطهٔ بین $arg z$ و $arg\bar{z}$ چیست؟

۳۶. اگر $\alpha : z \mapsto e^{i\theta}\bar{z} + c$ نشان دهید به ازای هر سه عدد مختلط متمایز z، w و t

$$arg\frac{z-w}{z-t} = ۲\pi - arg\frac{z\alpha - w\alpha}{z\alpha - t\alpha}\cdot$$

۳۷. با استفاده از نمادگذاری سؤال ۱۶ تعریف می‌کنیم

$$D = \{\alpha | \alpha \in E, arg\frac{z-w}{z-t} = arg\frac{z\alpha - w\alpha}{z\alpha - t\alpha}\}.$$

آیا D زیرگروهی از E است؟ اعضای D را مشخص کنید. D به‌عنوان گروه طولپاییهای مستقیم صفحه شناخته می‌شود. چه حکمی دربارهٔ حاصلضرب یک دوران و یک انتقال می‌توانید بکنید؟

۳۸. اگر $\alpha : z \mapsto e^{i\theta}\bar{z} + c$ آنگاه α به‌عنوان یک طولپایی متقابل شناخته می‌شود. انواع طولپاییهای متقابل صفحه را توصیف کنید و ثابت کنید حاصلضرب هر دو طولپایی متقابل، مستقیم است.

گروه‌های دوری و دو وجهی

در سؤال ۱۹ دیدیم که پایدارساز ۰ درگروه اقلیدسی از دورانهای به صورت $z \mapsto e^{i\theta}z$ و بازتابهایی به صورت $z \mapsto e^{i\theta}\bar{z}$ متشکل است. در سؤالهای ۳۹ـ۴۷ چند زیر گروه متناهی مهم را بررسی می‌کنیم.

۳۹. به ازای چه مقادیری از θ، $e^{i\theta} = ۱$ یا $e^{i\theta} = -۱$.

۴۰. همهٔ طولپاییهای مستقیم را بیابید که نقطهٔ ۰ را ثابت نگاه دارند و مجموعهٔ $\{۱, -۱\}$ را بروی خود بنگارند. گروهی که به این صورت تشکیل می‌شود مثالی از گروه دوری $C_۲$ است.

۴۱. همهٔ طولپاییهایی را بیابید که نقطهٔ ۰ را ثابت نگاه دارند و مجموعهٔ $\{۱, -۱\}$ را بروی خود بنگارند. گروهی که به این صورت تشکیل می‌شود مثالی از گروه دو وجهی $D_۲$ است.

۴۲. اگر $w = -\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}i\sqrt{۳}$ آنگاه $w^۲$ و $w^۳$ را بیابید. به ازای چه مقادیری از θ داریم $e^{i\theta} = w$ یا $e^{i\theta} = w^۲$ یا $e^{i\theta} = w^۳$؟

۴۳. همهٔ طولپاییهای مستقیم که نقطهٔ ۰ را ثابت نگاه می‌دارند و مجموعهٔ $\{۱, w, w^۲\}$ را بروی خود می‌نگارند بیابید. گروهی که به این صورت تشکیل می‌شود مثالی از گروه دوری $C_۳$ است.

۴۴. همهٔ طولپاییهایی را بیابید که نقطهٔ ۰ را ثابت نگاه می‌دارند و مجموعهٔ $\{۱, w, w^۲\}$ را بروی خود می‌نگارند. گروهی که به این صورت تشکیل می‌شود مثالی از گروه دو وجهی $D_۳$ است. اگر w را ۲ و $w^۲$ را ۳ بنامیم $D_۳$ را با گروه جایگشتهای $S_۳$ مقایسه کنید. سؤال ۲.۲ را ببینید.

۴۵. به ازای چه مقادیری از θ، $e^{i\theta}$ برابر است با i، $i^۲$، $i^۳$ یا $i^۴$.

۴۶. همهٔ طولپاییهای مستقیم را بیابید که نقطهٔ ۰ را ثابت نگاه دارند و مجموعهٔ $\{۱, i, -۱, -i\}$بروی خود بنگارند. گروهی که به این صورت تشکیل می‌شود مثالی از گروه دوری $C_۴$ است.

۴۷. همهٔ طولپاییهایی را بیابید که نقطهٔ ۰ را ثابت نگاه دارند و مجموعهٔ $\{۱, i, -۱, -i\}$ را بروی خود بنگارند. گروهی که به این صورت تشکیل می‌شود مثالی از گروه دو وجهی $D_۴$ است. نقطهٔ i را ۲ و نقطهٔ ۱- را ۳ و نقطهٔ $-i$ را ۴ بنامید، زیرگروهی از $S_۴$ بیابید که مانند $D_۴$ است. سؤال ۴۹.۲ را ببینید.

تشابه‌ها

هر طولپایی یک مثلث را به مثلثی همنهشت می‌نگارد و به عکس اگر دو مثلث همنهشت هستند یک طولپایی وجود دارد که یکی را بروی دیگری می‌نگارد. اگر حالا از شرط فاصله نگهداری خاطر جمع هستیم می‌توانیم بپرسیم چه تبدیلهایی یک مثلث را به مثلثی متشابه می‌نگارد. چنین تبدیلی را یک تشابه می‌نامیم و متذکر می‌شویم که اگر تحت چنین تبدیلی،$A \mapsto A'$، $B \mapsto B'$ و $C \mapsto C'$ آنگاه $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$.

۴۸. با بررسی مثلث با رئوس ۰، ۲، i و نگاره‌اش اثر تبدیل $z \mapsto ۲iz - ۱$ را توصیف کنید.

۴۹. اگر $\alpha : z \mapsto az + b$ عضوی از $S_{\mathbb{C}}$ است ثابت کنید به ازای هر سه عدد مختلط متمایز z، w و t

$$\frac{z-w}{z-t} = \frac{z\alpha - w\alpha}{z\alpha - t\alpha}.$$

چنین عضوی از $S_{\mathbb{C}}$ یک تشابه مستقیم نام دارد.

۵۰. اگر

$$S = \{\alpha | \alpha \in S_{\mathbb{C}}, \frac{z-w}{z-t} = \frac{z\alpha - w\alpha}{z\alpha - t\alpha}\},$$

آیا S زیرگروهی از $S_{\mathbb{C}}$ است؟

اگر $\alpha \in S$ که $۰\alpha = c$ و $۱\alpha = a + c$، چرا $a \neq ۰$ و ثابت کنید $t\alpha = at + c$ که α یک تشابه مستقیم است.

۵۱. تبدیل $z \mapsto ۲iz$ حاصلضرب یک بزرگسازی $z \mapsto ۲z$ با مقیاس ۲ و یک دوران $z \mapsto iz$ است.

هرگاه بزرگسازی و دوران مرکز یکسانی دارند، چنین تبدیلی یک تشابه مارپیچی نام دارد. اگر $|a| = ۰, ۱$ آیا $z \mapsto az$ یک تشابه مارپیچی است؟

۵۲. نقطهٔ ثابت $z \mapsto ۲iz - ۱$ را بیابید. آیا این تبدیل یک تشابه مارپیچی است؟

۵۳. اگر $|a| \neq ۰$ یا ۱ یک نقطهٔ یکتای p را بیابید که توسط تشابه مستقیم $\alpha : z \mapsto az + c$ ثابت نگاه داشته شود. ثابت کنید $z\alpha - p = a(z - p)$. این معادله را نمایش دهید و نتیجه‌گیری کنید α یک تشابه مارپیچی است. صورتهای ممکن تشابه مستقیم را نام ببرید و از نظر جبری آنها را از هم تمیز دهید.

تبدیلهایی از نوع $z \mapsto a\bar{z} + c$ تشابه‌های متقابل نام دارند و به همراه تشابه‌های مستقیم مجموعهٔ تشابه‌های صفحه کامل می‌شود.

گروه‌های ترایای تبدیلها

در مطالعهٔ گروه‌های جایگشت کلمهٔ ترایایی برای توصیف یک درجهٔ آزادی به منظور حرکت دادن نقاط یا حرفهای مربوط توسط تبدیلهای گروه مورد بحث به کار می‌رود.

۵۴. اگر a و b اعداد مختلط هستند آیا می‌توانید انتقالی بیابید که a را به b بنگارد؟ اگر موفق شوید می‌توانیم بگوییم گروه انتقال روی نقاط صفحه ترایا است. اگر τ و σ انتقالهایی هستند که $a = ۰\tau$ و $b = ۰\sigma$ آیا می‌توانید τ و σ را برای تعریف انتقالی که a را به b می‌نگارد به کار برید.

۵۵. به ازای اعداد مختلط متمایز a و b یک تشابه مستقیم α بسازید که $۰\alpha = a$ و $۱\alpha = b$. به ازای اعداد مختلط c و d یک تشابه مستقیم γ بیابید که $۰\gamma = c$ و $۱\gamma = d$. α و γ را برای ساختن یک تشابه مستقیم σ که $a\sigma = c$ و $b\sigma = d$ به کار برید. اگر موفق شوید می‌توانیم بگوییم گروه تشابه‌های مستقیم روی نقاط صفحه ترایای دوگانه است.

۵۶. ثابت کنید گروه انتقال روی نقاط صفحه ترایای دوگانه نیست.

۵۷. آیا گروه اقلیدسی روی نقاط صفحه

(یک) ترایاست؟

(دو) ترایای دوگانه است؟

۵۸. با استفاده از سؤال ۳ مشخص کنید آیا گروه مستوی روی $\mathbb{R}$

(یک) ترایاست؟
(دو) ترایای دوگانه است؟

۵۹. اگر r عددی حقیقی مخالف ۰ یا ۱ باشد نقطهٔ ثابت یکتای تبدیل $\delta : z \mapsto rz + c$ را بیابید و اگر این نقطهٔ ثابت p است آنگاه نشان دهید $z\delta - p = r(z - p)$. این معادله را از نظر هندسی توصیف کنید و δ را نام ببرید. در واقع اعضای α از $S_{\mathbb{C}}$ که $arg(z - w) = arg(z\alpha - w\alpha)$ به ازای عدد حقیقی $r \neq ۰$ همگی به صورت $z \mapsto rz + c$ هستند و گروه انبساط صفحه را تشکیل می‌دهند. آیا این گروه انبساط روی نقاط صفحه (یک) ترایاست؟ (دو) ترایای دوگانه است؟

خلاصهٔ مطالب

تعریف گروه انتقال روی $\mathbb{R}$ متشکل از اعضای $S_{\mathbb{R}}$ به صورت $x \mapsto x + a$ است.
سؤال ۱

تعریف گروه مستوی روی $\mathbb{R}$ متشکل از اعضای $S_{\mathbb{R}}$ به صورت $x \mapsto ax + b$، $a \neq ۰$ است.
سؤال ۳

تعریف گروه انتقال صفحهٔ اقلیدسی متشکل از آن اعضایی از $S_{\mathbb{C}}$ به صورت $z \mapsto z + c$ است.
سؤال ۱۴

تعریف اعضای فاصله نگهدار $S_{\mathbb{C}}$گروه طولپاییهای صفحه را تشکیل می‌دهند.
سؤال ۱۶

قضیه همهٔ طولپاییهای صفحه یا به صورت $z \mapsto e^{i\theta}z + c$ هستند که طولپاییهای مستقیم نام دارند یا به صورت $z \mapsto e^{i\theta}\bar{z} + c$ هستند که طولپاییهای متقابل نام دارند.
سؤالهای ۲۲، ۳۷، ۳۸

قضیه طولپاییهای مستقیم یا انتقالها هستند یا دورانها.
سؤال ۲۳

قضیه
سؤالهای ۳۰،۲۷،۲۵
طولپاییهای متقابل یا بازتابها هستند یا لغزه‌ها.

تعریف
سؤالهای ۴۹، ۵۰
گروه تشابه‌های مستقیم صفحهٔ اقلیدسی متشکل از اعضای $S_{\mathbb{C}}$ به صورت $z \mapsto az+c$ است که $a \neq 0$ و a و c اعداد مختلط هستند.

تعریف
سؤال ۵۴
یک زیرگروه S_A روی A ترایا نام دارد هرگاه به ازای هر جفت نقاط $a, a' \in A$ عضوی از زیر گروه وجود داشته باشد که a را به a' بنگارد.

تعریف
سؤال ۵۵
یک زیرگروه S_A روی A ترایای دوگانه نام دارد هرگاه به ازای هر دو نقطهٔ متمایز $a, b \in A$ و هر دو نقطهٔ متمایز $a', b' \in A$ یک عضو از زیرگروه وجود داشته باشد که a را به a' و b را به b' بنگارد.

تعریف
سؤال ۵۹
گروه انبساط صفحه اقلیدسی متشکل از اعضای $S_{\mathbb{C}}$ به صورت $z \mapsto rz+c$ است که r یک عدد حقیقی غیر صفر است.

یادداشت تاریخی

اعداد مختلط ابتدا در اواخر قرن هفدهم توسعه یافتند. فرمول $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ در صورت لگاریتمی به کوتس[۷] (۱۷۱۰) و فرمول $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ به دموآور[۸] (۱۷۳۰) تعلق داشتند. طریقهٔ نمایش اعداد مختلط با نقاط صفحه توسط ک. وسل[۹] (۱۷۹۷)، ک.ف. گاوس[۱۰] (۱۷۹۹) و ج. ر. آرگان[۱۱] (۱۸۰۶) توصیف شد. گاوس قضیهٔ اصلی جبر که هر معادلهٔ چند جمله‌ای یک ریشهٔ مختلط دارد را در رسالهٔ دکترای خود ثابت کرد. ک.ف. گاوس (۱۸۳۱) و و.ر. هامیلتون[۱۲] (۱۸۳۷) اولین توصیفهای صوری اعداد مختلط را بر حسب جفتهای مرتب اعداد حقیقی ارائه دادند و اولین تعریف صوری به صورت توسیعی جبری از اعداد حقیقی به ا.ل.

7) Cotes 8) De Moivre 9) C. Wessel 10) C.F. Gauss
11) J.R.Argand 12) W.R. Hamilton

کوشی (۱۸۴۷) متعلق است. استفاده از اعداد مختلط در توصیف تبدیلهای صفحه از سال ۱۸۵۱ توسط گ.ف.ب. ریمان[۱۳] وسیعاً توسعه یافتند هر چند کار وی خصوصاً با طولپاییها ارتباط نداشت.

عجیب این که تجزیه و تحلیل طولپاییهای سه بعدی به انتقالها، دورانها، پیچها و حاصلضربهای این سه نوع تبدیل با یک بازتاب مدتها قبل از تجزیه و تحلیل دو بعدی متناظر که در کار م. چسلز[۱۴] (۱۸۳۱) ظاهر شدند توسط ل. اویلر[۱۵] (۱۷۷۶) مطرح شده بودند.

13) G.F.B. Riemann 14) M. Chasles 15) L. Euler

جوابهای فصل ۳

۱. اگر $\alpha : x \mapsto x + ۱$ جایگشت دوری با نقطهٔ شروع ۰ شامل همهٔ اعداد طبیعی است. T یک زیرگروه است. اگر $\alpha, \beta \in T$ آنگاه $x\alpha\beta - y\alpha\beta = x\alpha - y\alpha = x - y$ و بنابراین $\alpha\beta \in T$ همچنین $x\alpha^{-۱} - y\alpha^{-۱} = x\alpha^{-۱}\alpha - y\alpha^{-۱}\alpha = x - y$ بنابراین $\alpha^{-۱} \in T$.

۲. $\frac{۱}{۲}a$ نقطهٔ ثابت $x \mapsto -x + a$ است. M یک زیرگروه است مانند سؤال ۱ استدلال کنید.

۳. $\frac{b}{۱-a}$ نقطهٔ ثابت $x \mapsto ax + b$ است. A یک زیرگروه است مانند سؤال ۱ استدلال کنید. اگر $۰\alpha = ۵$ و $۱\alpha = r$ با قرار دادن $x = ۰$ و $z = ۱$ خواهیم داشت $y\alpha = ۲y + ۵$. اگر $۰\alpha = b$ و $۱\alpha = a + b$ قرار دهید، $x = ۰$ و $z = ۱$.

۴. $x = (x' - b)/a$ بنابراین $\alpha^{-۱} : x \mapsto \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$.

۵. $x \mapsto ax$.

۶. L یک زیرگروه است مانند سؤال ۱ استدلال کنید. با استقرا ثابت کنید $n\alpha = na$. اگر p و q اعداد صحیح باشند فرض کنید $(p/q)\alpha = r'$
آنگاه $(q.\frac{p}{q})\alpha = q.r' = p\alpha = pa$ بنابراین $r' = (p/q)a$.

۹. اگر $z = x + iy$ و $|z| = ۱$ آنگاه $x^۲ + y^۲ = ۱$ و به ازای عددی مانند θ، $z = \cos\theta + i\sin\theta$.

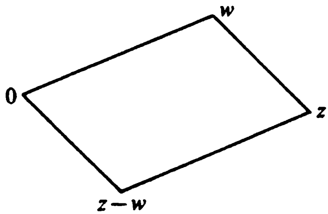
۱۰. بله مانند سؤال ۸.

۱۱. بنا به سؤال ۸، $e^{i\theta}.e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}$.

۱۲. $z + \bar{z} = ۲x$، $z - \bar{z} = ۲iy$، $|z| = \sqrt{x^۲ + y^۲} = |\bar{z}|$. $z \mapsto \bar{z}$ یک بازتاب نسبت به محور حقیقی و نگارهٔ متوازی الاضلاع ۰، z، w، $z + w$ دوباره یک متوازی الاضلاع است چنان که $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$. با استفاده از $z\bar{z} = |z|^۲$ ثابت کنید $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$

۱۳. $z\alpha - w\alpha = z - w$.

اگر دو عدد مختلط برابر باشند آنگاه آنها یک نقطه را نمایش می‌دهند. حال ۰، w، z، $z - w$ یک متوازی الاضلاع را تشکیل می‌دهند بنابراین $|z - w| =$ فاصلهٔ نقاط z و w. لذا α یک طولپایی است، زیرا $|z\alpha - w\alpha| = |z - w|$.



۱۴. $z\alpha - w\alpha = (z+c) - (w+c) = z - w$. T یک زیرگروه است. مانند سؤال ۱ استدلال کنید.

۱۵.
$$|z\alpha - w\alpha| = |e^{i\theta}z - e^{i\theta}w| = | e^{i\theta}(z-w) | = |e^{i\theta}|.|z-w| = |z-w|.$$

۱۶. E یک زیرگروه است مانند سؤال ۱ استدلال کنید. $T \subset E$.

۱۷. $x + iy = x - iy \Leftrightarrow y = \circ$ بنابراین نقاط محور حقیقی ثابت باقی می‌مانند. اگر $z\alpha \neq z$ آنگاه محور حقیقی عمودمنصف $zz\alpha$ است.

۱۸. اگر یک طولپایی α نقطهٔ ۰ را ثابت نگاه دارد هر دایره به مرکز ۰ بروی خودش نگاشته می‌شود. اگر z نقطهٔ اشتراک دو دایره باشد $z\alpha$ نیز یک نقطهٔ اشتراک این دایره‌هاست. خط واصل مرکزها (محور حقیقی) عمودمنصف وتر مشترک است. بنابراین $z\alpha = z$ یا $z\alpha = \bar{z}$. اگر z روی محور حقیقی است دو دایره در z تلاقی می‌کنند و z یک نقطهٔ ثابت است.

۱۹. اگر $\circ\alpha = \circ$ آنگاه $|\text{۱}\alpha - \circ\alpha| = \text{۱} - \circ$ بنابراین $|\text{۱}\alpha| = \text{۱}$. بنا به سؤال ۹ به ازای عددی مانند θ، $\text{۱}\alpha = e^{i\theta}$. بنا به سؤال ۱۸، $\alpha\beta^{-\text{۱}} : z \mapsto z$ یا $\alpha\beta^{-\text{۱}} : z \mapsto \bar{z}$.

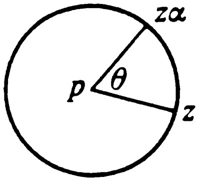
۲۰. $re^{i\phi}\alpha = re^{i(\theta-\phi)}$. حال $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}[\phi + (\theta - \phi)] = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\theta$ بنابراین هر نقطه و نگارهٔ آن توسط خط نقاط ثابت نصف می‌شوند.

۲۱. اگر $\alpha : z \mapsto \bar{z}$ و $\beta : z \mapsto e^{i\theta}\bar{z}$ آنگاه $\alpha\beta : z \mapsto e^{i\theta}z$ و $\beta\alpha : z \mapsto e^{-i\theta}z$. زاویهٔ بین محورهای α و β برابر با $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\theta$ است.

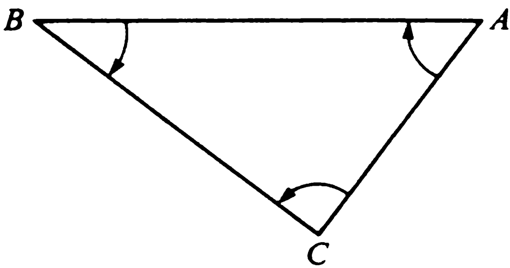
۲۲. $\circ\alpha\tau^{-\text{۱}} = c\tau^{-\text{۱}} = \circ$.

۲۳. هرگاه $e^{i\theta} = \text{۱}$ تبدیل $z \mapsto e^{i\theta}z + c$ یک انتقال است (سؤال ۱۴ را ببینید). هرگاه $e^{i\theta} \neq \text{۱}$، $z = e^{i\theta}z + c \Leftrightarrow z = \frac{c}{\text{۱}-e^{i\theta}} = p$. طولپایی α دورانی به مرکز p و

زاویهٔ θ است. $\alpha^{-1} : z \mapsto ze^{-i\theta} - ce^{-i\theta}$. $\alpha\beta : z \mapsto e^{i(\theta+\phi)}z + ce^{i\phi} + d$ دورانی به زاویهٔ $\theta + \phi$ است مگر این که $\theta + \phi = 0$ که در این حالت $\beta\alpha$ یک انتقال است.



۲۴. $\beta\gamma$ دورانی حول نقطهٔ B به زاویهٔ $2B$ است. $\gamma\alpha$ دورانی حول نقطهٔ A به زاویهٔ $2A$ است. $\beta\alpha$ دورانی حول C به زاویهٔ $2C$ است. حاصلضرب دو دوران یک دوران است، $2A + 2B = 2\pi - 2C$ مگر این که دو ضلع این «مثلث» موازی باشند.



۲۵. $\alpha^2 = 1 \Leftrightarrow e^{i\theta}\bar{c} + c = 0$.

۲۶. (یک) اگر w یک نقطهٔ ثابت α است،

$$w = e^{i\theta}\bar{w} + c$$

بنابراین

$$\bar{w} = \bar{e}^{i\theta}(e^{i\theta}\bar{w} + c) + \bar{c} = \bar{w} + \bar{e}^{i\theta}c + \bar{c}.$$

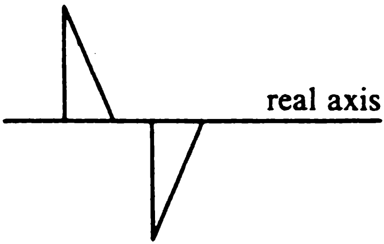
و

$$e^{-i\theta}c + \bar{c} = ۰.$$

(دو) $c = ۰\alpha$ بنابراین وسط ۰ و ۰α نقطهٔ $\frac{۱}{۲}c$ است.
(سه) اگر $\frac{۱}{۲}c = (\frac{۱}{۲}c)\alpha$ آنگاه بنا به (یک) $e^{i\theta}\bar{c} + c = ۰$. بنابراین مرتبه α برابر با ۲ است اگر و تنها اگر α یک محور نقاط ثابت داشته باشد.
(چهار) c و $\bar{c}e^{i\theta}$ به‌وسیلهٔ بازتاب مبادله می‌شوند و $c = -\bar{c}e^{i\theta}$.

۲۷. دایره‌هایی با مراکز واقع بر خط نقاط ثابت بکشید.

۲۸. یک انتقال، یک دوران یا یک بازتاب نیست. محور حقیقی تنها به خودش نگاشته می‌شود. $\tau : z \mapsto z + ۱$. تبدیل $\alpha\tau^{-۱}$ یک بازتاب نسبت به محور حقیقی است. اگر $z\alpha = \bar{z} + ۱$، $\frac{۱}{۲}(z + z\alpha) = \frac{۱}{۲}(z + \bar{z} + ۱)$ که حقیقی است.

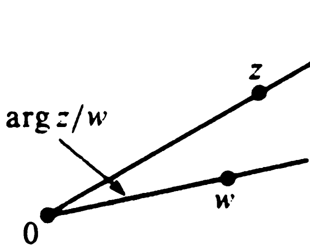


۲۹. انتقال $z \mapsto z + c$ هرگاه $c = \bar{c}$ با $z \mapsto \bar{z}$ تعویض‌پذیر است. بنابراین عدد مختلط c عددی حقیقی است و انتقال موازی با محور بازتاب است.

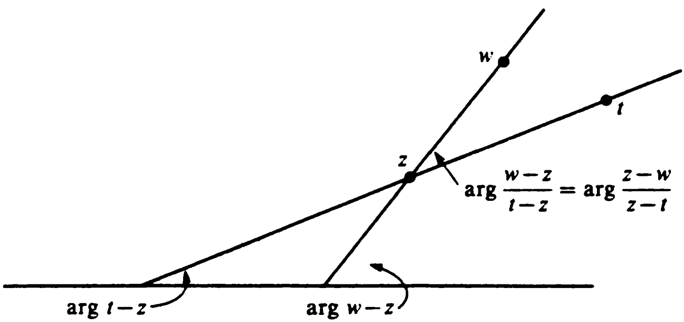
۳۰. (یک) اگر α یک بازتاب نیست بنا به سؤال ۲۵، $e^{i\theta}\bar{c} + c \neq ۰$. بنابراین $\alpha^۲ : z \mapsto e^{i\theta}\bar{c} + c$ یک انتقال است.
(دو) $\tau : z \mapsto z + \frac{۱}{۲}(e^{i\theta}\bar{c} + c)$.
(سه)

$$\tau\alpha = \alpha\tau \Rightarrow \alpha\tau^{-۱} = \tau^{-۱}\alpha \Rightarrow (\alpha\tau^{-۱})^۲ = \alpha\tau^{-۱}\alpha\tau^{-۱} = \alpha^۲\tau^{-۲} = ۱$$

(چهار) $\alpha = \varrho\tau$ را در $\tau\alpha = \alpha\tau$ جایگزین کنید.
(پنج) $A\varrho = A \Rightarrow A\varrho\tau = A\tau \Rightarrow A\tau\varrho = A\tau$.
(شش) $\alpha^2 = (\varrho\tau)^2 = \varrho\tau\varrho\tau = \varrho\varrho\tau\tau = \tau^2$ بنابراین τ به‌طور یکتا تعریف می‌شود و $\varrho = \alpha\tau^{-1}$.
۳۱. (یک) انتقالها و لغزه‌ها.
(دو) دورانها.
(سه) بازتابها و همانی.
۳۲.



۳۳.



۳۴. $\frac{z\alpha - w\alpha}{z\alpha - t\alpha} = \frac{z-w}{z-t}$.

۳۵. $Arg z = 2\pi - arg \bar{z}$.

۳۶. $\frac{z\alpha - w\alpha}{z\alpha - t\alpha} = \frac{\bar{z}-\bar{w}}{\bar{z}-\bar{t}}$.

۳۷. مانند سؤال ۱ استدلال کنید، D یک زیرگروه است. بنا به سؤالهای ۳۴ و ۳۶ زیرگروه D متشکل از دورانها و انتقالهاست. آن دورانی با همان زاویه است.

۳۸. بازتابها و لغزه‌ها تنها طولپاییهای متقابل صفحه هستند.

۳۹. اگر $\theta = 0$ آنگاه $e^{i\theta} = 1$. اگر $\theta = \pi$ آنگاه $e^{i\theta} = -1$.

۴۰. $z \mapsto z$ و $z \mapsto -z$.

۴۱. $z \mapsto z$، $z \mapsto -z$، $z \mapsto \bar{z}$ و $z \mapsto -\bar{z}$.

۴۲. $w^2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$، $w^3 = 1$. $\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 0$.

۴۳. $z \mapsto z$، $z \mapsto wz$، $z \mapsto w^2 z$.

۴۴. $z \mapsto z$، $z \mapsto wz$، $z \mapsto w^2 z$، $z \mapsto \bar{z}$، $z \mapsto w\bar{z}$، $z \mapsto w^2\bar{z}$.

۴۵. $\theta = \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi, 0$.

۴۶. $z \mapsto z$، $z \mapsto iz$، $z \mapsto -z$ و $z \mapsto -iz$.

۴۷. $z \mapsto \pm z$، $z \mapsto \pm iz$، $z \mapsto \pm\bar{z}$، $z \mapsto \pm i\bar{z}$.

۴۸. آن با زاویهٔ $\frac{1}{2}\pi$ دوران یافته و با ضریب ۲ بزرگ شده است.

۵۰. S یک زیرگروه است مانند سؤال ۳ استدلال کنید.

۵۱. $a = re^{i\theta}$ بنابراین $z \mapsto az$ ترکیب بزرگسازی $z \mapsto rz$ و دوران $z \mapsto e^{i\theta}z$ است.

۵۲. $-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i = \frac{1}{(2i-1)}$. اگر α یک ربع ـ دور حول این نقطه باشد. $\alpha z = iz - \frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$ اگر β یک بزرگسازی با ضریب ۲ از این مرکز است $z\beta = 2z + \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ و $z\alpha\beta = 2iz - 1$ بنابراین $z \mapsto 2iz - 1$ یک تشابه مارپیچی است.

۵۳. $p = \frac{c}{1-a}$ ⇔ $p = ap + c$. تبدیل α یک تشابه مستقیم است که حاصلضرب یک دوران و یک بزرگسازی با مرکز p است. $a = 1$ یک انتقال را به دست می‌دهد. $a = e^{i\theta}$ یک دوران به دست می‌دهد. $|a| \neq 1$ یک تشابه مارپیچی به دست می‌دهد.

۵۴. $z \mapsto z + b - a$. $\tau^{-1}\sigma$.

۵۵. $\alpha : z \mapsto (b-a)z + a$؛ $\gamma : z \mapsto (d-c)z + c$؛ $\sigma = \alpha^{-1}\gamma$.

۵۶. یک انتقال با نگارهٔ مبدأ به‌طور یکتا تعریف می‌شود.

۵۷. (یک) ترایایی زیرا آن شامل گروه انتقال است.

(دو) با یک طولپایی نمی‌توان ۰ $\mapsto$ ۰ و ۲ $\mapsto$ ۱ نگاشت.

۵۸. (یک) بله، (دو) بله.

۵۹. $p = \frac{c}{۱-r}$. δ یک بزرگسازی با مقیاس r و مرکز p است.

(یک) ترایا، زیرا آن شامل گروه انتقال است.

(دو) با یک انبساط نمی‌توان ۰ $\mapsto$ ۰ و $i \mapsto$ ۱ نگاشت.

MATH75.IR

۴

گروه موبیوس

برای ادامهٔ بررسی تبدیلهای صفحه از گروه تشابه در فصل ۳ (با تبدیلهایی به صورت $z \mapsto az + b$) به گروه موبیوس با تبدیلهایی به صورت $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$، باید $z \mapsto \frac{1}{z}$ را به‌عنوان تبدیلی از صفحه به صفحه به حساب آوریم و اگر یک نقطهٔ '∞' را به صفحه اضافه کنیم می‌توانیم این کار را انجام دهیم. این 'صفحهٔ کامل شده' مانند رویهٔ یک کره است در معنایی که بعداً با تصویر گنجنگاری در نظر خواهیم گرفت.

به منظور رسیدن به ایدهٔ یک «صفحهٔ کامل شده» این فصل را با در نظر گرفتن یک خط حقیقی که یک «نقطه در بینهایت» به آن اضافه شده است شروع می‌کنیم. این «خط کامل شده تشابهی با محیط یک دایره دارد و می‌توانیم برخی تبدیلهای جبری خط کامل شده را به تبدیلهای هندسی دایره مربوط سازیم.

نماد «∞» ویژگیهایی را که به آن می‌دهیم خواهد داشت و ویژگی دیگری برای آن فرض نمی‌گیریم. این نماد یک عدد حقیقی یا مختلط را هر قدر بزرگ هم که باشد نمایش نمی‌دهد.

مطالعهٔ همزمان: فصلهای ۳، ۴، و ۵ کتاب ناپ؛ فصل ۶ کتاب په‌دوئه؛ فصلهای ۱ و ۲ کتاب فورد[1].

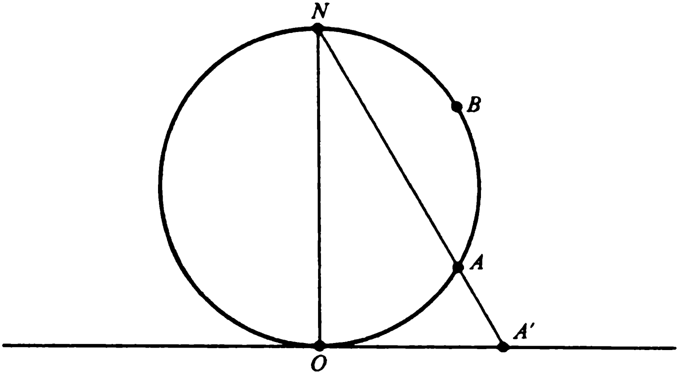
خط کامل شده، $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$

۱. فرض کنید ON یک پاره خط با طول واحد و $\sum$ دایره‌ای به قطر ON باشد.

1) Ford

یک تابع π را از $\sum-\{N\}$ به خط مماس بر آن در O توسط $\pi: A \mapsto A'$ تعریف می‌کنیم که NAA' همخط هستند. آیا π تابعی یک به یک، پوشا، دوسوییِ است؟ تابع π تصویر از N نام دارد.

۲. اگر A و B نقاط $\sum$ باشند که AB موازی ON اما متمایز از آن است، نشان دهید زاویهٔ ONA+ زاویه ONB= یک قائمه. قضیهٔ اقلیدس دربارهٔ زاویه در یک نیمدایره را به کار برید.



۳. اگر زاویهٔ $ONA = \theta$، فاصلهٔ OA' چقدر است؟

۴. اگر $B' = B\pi$، $OA'.OB'$ چقدر است؟

۵. اگر نقاط روی خط مماس در O به‌وسیلهٔ فاصله‌های مستقیم آنها از O نشاندار شوند و نقاط $\sum-\{N\}$ نشانهای نگاره‌های آنها را تحت π بدهند، اگر نشان نقطهٔ A، x است (که x برابر با ۰ نیست) نشان B چیست؟ با استفاده از این نشانها یک بازتاب $\sum$ را نسبت به قطر عمود بر ON توصیف کنید. ابتدا نقاط O و N را در نظر نگیرید و سپس توصیف کنید برای آنها جداگانه چه اتفاقی می‌افتد. حال N را با نماد ∞ نشاندار می‌کنیم با استفاده از توصیف جبری $x \mapsto \frac{1}{x}$ تبدیل همهٔ محیط دایره را توصیف کنید.

۶. تحت دورانی پادساعتگرد به اندازهٔ α حول مرکز $\sum$ نشان دهید نگارهٔ نقطه‌ای از $\sum$ که $\tan\theta$ را در سؤال ۵ نشاندار کرده بود نقطه‌ای است که $\tan(\theta+\frac{1}{2}\alpha)$ را نشاندار

خواهد کرد. از این قضیهٔ اقلیدس استفاده کنید که زاویهٔ مرکزی دایره دو برابر زاویه‌ای با رأس بر محیط و مقابل به همان قوس است. نتیجه‌گیری کنید که به ازای همهٔ نقاط دایره به جز نقطهٔ $x = \tan(\frac{۱}{۲}\pi - \frac{۱}{۲}\alpha) = \frac{۱}{\tan\frac{۱}{۲}\alpha}$ ، این دوران را می‌توانیم به صورت

$$x \mapsto \frac{x+a}{۱-xa}$$

بنویسیم که $a = \tan\frac{۱}{۲}\alpha$. نگارهٔ ∞ تحت این دوران چیست؟ ∞ نگارهٔ چه نقطه‌ای تحت این دوران است؟ آیا می‌توانید این نقاط را از عبارت جبری

$$\frac{x+a}{۱-xa}$$

تشخیص دهید؟ (تصور این که وقتی x بزرگ می‌شود چه اتفاقی برای این عبارت می‌افتد و به ازای چه مقادیری از x این عبارت بزرگ می‌شود از نظر شهودی مفید است).

۷. اگر قطر ON به اندازهٔ α حول مرکز دایره دوران کند و نگارهٔ ON تحت این دوران را d بنامیم با استفاده از نشان‌گذاری سؤال ۵ نشان دهید تبدیل نقاط روی محیط دایره با $\tan\theta \mapsto -\tan(\theta-\alpha)$ داده می‌شود. عبارتی جبری برای تبدیل شبیه عبارت انتهای سؤال ۶ ارائه دهید. نگاره و پیشنگارهٔ ∞ برای این تبدیل چیست؟

۸. بررسی کنید هیچ عدد حقیقی x وجود ندارد که

$$\frac{ax+b}{cx+a} = \frac{a}{c}$$

فرض کنید $c \neq ۰$ و $ad - bc \neq ۰$. ثابت کنید که اگر عدد حقیقی r برابر با a/c نباشد آنگاه یک عدد حقیقی یکتای x وجود دارد که

$$\frac{ax+b}{cx+d} = r.$$

کدام عدد حقیقی x تحت تبدیل

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

نگاره‌ای حقیقی ندارد؟ اگر تابع

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

در $S_{\mathbb{R}\cup\{\infty\}}$ باشد و $c \neq \text{۰}$ نگاره و پیشنگارهٔ ∞ را به‌دست آورید.

۹. اگر $c = \text{۰}$ و $ad - bc \neq \text{۰}$ بررسی کنید.

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

یک تبدیل مستوی از $\mathbb{R}$ است (سؤال ۳.۳ را ببینید). اگر این تابعی در $S_{\mathbb{R}\cup\{\infty\}}$ باشد نگاره و پیشنگارهٔ ∞ چیست؟

۱۰. بررسی کنید

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ay+b}{cy+d} \Leftrightarrow (ad-bc)(x-y) = \text{۰}.$$

که $ad - bc \neq \text{۰}$ شرط لازم برای یک به یک بودن

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

است. اگر $c \neq \text{۰}$ آنگاه حاصلضرب توابع

$$x \mapsto cx+d,$$
$$x \mapsto \frac{\text{۱}}{x},$$
$$x \mapsto \frac{bc-ad}{c}x,$$

و

$$x \mapsto x + a/c$$

را محاسبه کنید و نتیجه‌گیری کنید

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

در $S_{\mathbb{R}\cup\{\infty\}}$ است مشروط بر این که $ad - bc \neq \text{۰}$.

نسبت غیر توافقی

حال بررسی می‌کنیم تبدیلهای سؤال ۱۰ دقیقاً آنهایی هستند که ساختار خاصی را روی خط تصویری حفظ می‌کنند و از این رو یک گروه تشکیل می‌دهند.

۱۱. اگر

$$\alpha : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}, ad-bc \neq 0,$$

بررسی کنید به ازای اعداد حقیقی متمایز x، y، z و t

$$\frac{z-x}{z-y}\Big/\frac{t-x}{t-y} = \frac{z\alpha - x\alpha}{z\alpha - y\alpha}\Big/\frac{t\alpha - x\alpha}{t\alpha - y\alpha}$$

با این فرض که $x\alpha$، $y\alpha$، $z\alpha$ یا $t\alpha$ برابر با ∞ نیستند.

$$\frac{z-x}{z-y}\Big/\frac{t-x}{t-y}$$

نسبت غیرتوافقی $R(x,y;z,t)$ تعریف می‌شود و اگر علاوه بر این تعریف کنیم

$$R(\infty,y;z,t) = \frac{t-y}{z-y} \quad , \quad R(x,\infty;z,t) = \frac{z-x}{t-x},$$
$$R(x,y;\infty,t) = \frac{t-y}{t-x} \quad , \quad R(x,y;z,\infty) = \frac{z-x}{z-y},$$

مجموعهٔ

$$T = \{\alpha | \alpha \in S_{\mathbf{R}\cup\{\infty\}}, R(x,y;z,t) = R(x\alpha, y\alpha; z\alpha, t\alpha)\}.$$

را در نظر بگیرید آیا T یک زیرگروه $S_{\mathbf{R}\cup\{\infty\}}$ است؟

اگر $\alpha \in T$ و $0\alpha = a_1$، $1\alpha = a_2$ و $\infty\alpha = a_3$ آنگاه

$$R(x,0;1,\infty) = R(x\alpha, a_1; a_2, a_3).$$

نتیجه‌گیری کنید

$$x\alpha = \frac{a_3(a_2-a_1)x + a_1(a_3-a_2)}{(a_2-a_1)x + (a_3-a_2)}.$$

گروه تبدیلهای حافظ نسبت غیر توافقی خط کامل شده گروه تصویری روی خط نام دارد. فصل ۱۸ را ببینید. خط کامل شده به خط تصویری نیز موسوم است.

ترایایی سه‌گانه

۱۲. اگر a_1، a_2، a_3 و b_1، b_2، b_3 دو سه‌تایی متمایز از نقاط خط تصویری حقیقی هستند یک تبدیل حافظ نسبت غیر توافقی مانند α وجود دارد که $a_1 = 0\alpha$، $a_2 = 1\alpha$ و $a_3 = \infty\alpha$ و یک تبدیل حافظ نسبت غیر توافقی مانند β وجود دارد که $b_1 = 0\beta$، $b_2 = 1\beta$ و $b_3 = \infty\beta$. یک تبدیل حافظ نسبت غیرتوافقی مانند γ بیابید که $a_1\gamma = b_1$، $a_2\gamma = b_2$ و $a_3\gamma = b_3$.

این ویژگی گروه تصویری روی خط حقیقی را ترایایی سه‌گانه می‌سازد.

تبدیل موبیوس، صفحهٔ موبیوس

۱۳. تا اینجا در این فصل با اعداد حقیقی کارکرده‌ایم. اگر a، b، c و d اعداد مختلط هستند و

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

یک دو سویی از $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ به خودش است آنگاه این دو سویی یک تبدیل موبیوس نام دارد. گاهی مجموعهٔ $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ خط تصویری مختلط نامیده می‌شود اما عموماً به آن صفحهٔ موبیوس می‌گویند. اگر

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

یک تبدیل موبیوس است نگاره و پیشنگارهٔ ∞ را (یک) هرگاه $c = 0$، (دو) هرگاه $c \neq 0$ بیابید.

۱۴. فرض کنید که $c \neq ۰$ حاصلضرب چهار تبدیل

$$z \mapsto cz + d,$$
$$z \mapsto ۱/z,$$
$$z \mapsto \frac{bc - ad}{c} z,$$
$$z \mapsto z + a/c$$

از صفحهٔ موبیوس را بیابید. کدام یک از این چهار تبدیل لزوماً موبیوس است. شرط لازم و کافی برای این که حاصلضرب آنها یک تبدیل موبیوس باشد چیست؟ هرگاه حاصلضرب مزبور یک تبدیل موبیوس باشد تبدیل اول و سوم و چهارم را به صورت تبدیلهایی از صفحه گاوس یا نمودار آرگان توصیف کنید.

۱۵. اگر نسبت غیر توافقی چهار عضو از صفحهٔ موبیوس به روشی کاملاً مشابه با سؤال ۱۱ تعریف شود آیا هر تبدیل موبیوس حافظ نسبت غیر توافقی است؟

۱۶. با استدلالی شبیه سؤال ۱۱ نشان دهید هر تبدیل حافظ نسبت غیر توافقی از $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ یک تبدیل موبیوس است.

گروه تبدیلهای حافظ نسبت غیر توافقی صفحهٔ موبیوس، گروه موبیوس نام دارد.

۱۷. آیا یک تبدیل موبیوس توسط نگاره‌های ۰، ۱ و ∞ به طریق یکتا مشخص می‌شود؟

آیا گروه موبیوس روی صفحهٔ موبیوس ترایایی سه‌گانه است؟

در سؤالهای ۱۳ـ۱۷ دیدیم چگونه جبر اعداد حقیقی سؤالهای ۸ـ۱۲ را می‌توان به جبر اعداد مختلط توسیع کرد حال توسیع هندسی متناظر از بُعد یک را به بُعد دو مطرح می‌کنیم.

۱۸. اگر تصویر مطرح در سؤال ۱ را با قرار دادن شکل مزبور در فضای سه بُعدی و دوران آن به اندازهٔ ۳۶۰° حول ON توسیع کنیم خط حقیقی که در O مماس است به یک صفحهٔ حقیقی توسیع می‌یابد. $\sum - \{N\}$ به چه چیزی توسیع می‌یابد؟ اگر صفحه حقیقی مماس را به $\mathbb{C}$ نشان دهیم تصویر مزبور چه مدلی از $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ را نتیجه می‌دهد؟

این واقعیت که تبدیلهای موبیوس نسبتهای غیر توافقی مختلط را حفظ می‌کند برای

نگاره‌های خطهای مستقیم و دایره‌ها نتایج جالب هندسی دارد.

۱۹. به ازای هر عدد حقیقی y نشان دهید

$$\left|\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۱ + iy}\right| = \frac{۱}{۲}$$

نگارهٔ خط مستقیم $\{z|z = ۱ + iy, y \in \mathbb{R}\}$ تحت تبدیل موبیوس $z \mapsto \frac{۱}{z}$ چیست؟ نگارهٔ دایرهٔ $\{z||z - \frac{۱}{۲}| = \frac{۱}{۲}\}$ تحت این تبدیل موبیوس چیست؟

۲۰. با استفاده از سؤال ۳.۳۳

$$arg\frac{z - w}{z - t}$$

را به ازای اعداد مختلط z، w و t متناظر با رأسهای یک مثلث در صفحهٔ گاوس بر حسب زاویه‌های zw و zt نسبت به محور حقیقی توصیف کنید. اگر

$$arg\frac{z - w}{z - t} = arg\frac{c - w}{c - t}$$

دربارهٔ چهار نقطهٔ z، w، t و c چه می‌توان گفت؟

نسبتهای غیر توافقی را می‌توان برای مشخص کردن نقاط همدایره و همخط به‌کار برد.

۲۱. اگر z،w، t و c نقاط همدایره هستند مقدار

$$arg\frac{z - w}{z - t}/\frac{c - w}{c - t}$$

چیست و این مقدار دربارهٔ عدد مختلط

$$\frac{z - w}{z - t}/\frac{c - w}{c - t}$$

چه نتیجه‌ای می‌دهد؟

۲۲. اگر z، w،t و c نقاط همخط هستند مقدار

$$arg\frac{z - w}{z - t}/\frac{c - w}{c - t}$$

چیست؟

۲۳. اگر z، w، t و c نقاط همخط هستند مقدار $argR(\infty, t; z, c)$، $argR(w, \infty; z, c)$، $argR(w, t; \infty, c)$ و $argR(w, t; z, \infty)$ چیست؟

۲۴. اگر z، w،t اعداد مختلط متمایز هستند زیرمجموعهٔ $\{c|argR(w, t; z, c) = \text{۰ یا } \pi\}$ از صفحهٔ موبیوس را توصیف کنید.

(یک) هرگاه $w, t, z \in \mathbb{C}$ و رأسهای یک مثلث در صفحهٔ گاوس را نمایش دهند،

(دو) هرگاه $w, t, z \in \mathbb{C}$ و نقاط همخط در صفحهٔ گاوس را نمایش دهند. این مجموعه را نیز هرگاه یکی از نقاط w , t و z برابر با ∞ است توصیف کنید.

۲۵. نگاره‌های ممکن یک دایره در صفحهٔ گاوس تحت یک تبدیل موبیوس چه هستند؟

۲۶. نگاره‌های ممکن یک خط مستقیم با ∞ تحت یک تبدیل موبیوس چه هستند؟

۲۷. دو خط مستقیم در صفحه مفروض‌اند آیا می‌توان یک تبدیل موبیوس یافت که یکی را به دیگری بنگارد؟

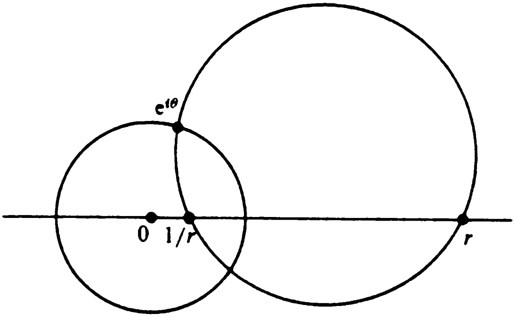
۲۸. یک دایره و یک خط مستقیم در صفحهٔ مفروض‌اند آیا می‌توان یک تبدیل موبیوس یافت که دایره را بروی خط با ∞ بنگارد؟ (ترایایی سه گانه را به کار برید.)

تبدیل $z \mapsto \frac{1}{z}$

۲۹. نگارهٔ $e^{i\theta}$ تحت $z \mapsto \frac{1}{z}$ را نمایش دهید. نگارهٔ $z = ۲$ تحت $z \mapsto \frac{1}{z}$ چیست؟ نگارهٔ دایرهٔ $|z| = ۲$ تحت این تبدیل چیست؟ نگارهٔ خط حقیقی تحت $z \mapsto \frac{1}{z}$ چیست؟ نگارهٔ خط گذرنده از مبدأ $\{re^{i\theta}|r \in \mathbb{R}\}$ تحت $z \mapsto \frac{1}{z}$ چیست؟

۳۰. هرگاه r عددی حقیقی متفاوت با ۰، ۱ و ۱− است و $\text{۰} < \theta < \pi$ نگارهٔ مجموعهٔ $\{r, \frac{1}{r}, e^{i\theta}\}$ تحت تبدیل $z \mapsto \frac{1}{z}$ چیست؟ فرض کنید c دایرهٔ گذرنده از نقاط r، $\frac{1}{r}$ و $e^{i\theta}$ را نمایش دهد. با استفاده از قضیهٔ خط قاطع که اگر PQ و RS وترهای یک دایره هستند که در A متقاطع‌اند آنگاه $AP.AQ = AR.AS$، ثابت کنید خط واصل ۰ به $e^{i\theta}$ مماس بر C است.

هرگاه شعاعی از یک دایره مماس بر دایرهٔ دیگری در نقطهٔ تقاطعشان باشد متعامداً متقاطع نامیده می‌شوند. از این رو $|z| = ۱$ و C متعامداً متقاطع‌اند. اگر C' نگارهٔ C تحت $z \mapsto \frac{1}{z}$ است C' چه ویژگیهایی دارد؟



۳۱. اگر یک دایرهٔ $\sum$ با شعاع a و مرکز o یک دایرهٔ C را متعامداً قطع کند و AB کمانی از C باشد که از O می‌گذرد با در نظر گرفتن این که T نقطهٔ تقاطع $\sum$ و C است ثابت کنید $OA.OB = a^۲$.

۳۲. اگر O، A، B سه نقطه با همین ترتیب روی یک خط باشند و $OA.OB = a^۲$ ثابت کنید دایره به مرکز O و شعاع a متعامد بر هر دایرهٔ گذرنده از دو نقطه A و B است.

۳۳. اگر $\sum$ یک دایرهٔ متعامد بر $|z| = ۱$ است و $\sum$ محور حقیقی را در نقاط r و s قطع کند مقدار rs چقدر است؟ نگاره‌های r و s تحت تبدیل موبیوس $z \mapsto \frac{۱}{z}$ چه هستند؟ نگارهٔ دایرهٔ $\sum$ تحت تبدیل $z \mapsto \frac{۱}{z}$ چیست؟

انعکاس $\mathbf{z} \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$

برای بررسی ویژگیهای حافظ زاویهٔ $z \mapsto \frac{۱}{z}$ و لذا همهٔ تبدیلهای موبیوس، تبدیل $z \mapsto \frac{۱}{z}$ را به حاصلضرب بازتاب $z \mapsto \bar{z}$ و تبدیل $z \mapsto \frac{۱}{\bar{z}}$ که هنوز بررسی نشده تجزیه می‌کنیم.

۳۴. اگر $re^{i\theta}$ و $se^{i\phi}$ روی یک خط گذرنده از مبدأ قرار گیرند رابطهٔ بین θ و ϕ چیست؟ به‌علاوه اگر یک دایرهٔ گذرنده از $re^{i\theta}$ و $se^{i\phi}$ بر دایرهٔ $|z| = ۱$ عمود باشد رابطهٔ بین اعداد حقیقی r و s چیست؟ آیا $re^{i\theta}.\overline{se^{i\theta}}$ مستقل از r، s، θ و ϕ است.

۳۵. اگر نمودار سؤال ۱ را در فضای سه بعُدی حول محور ON دوران دهیم به نحوی

که دایره به قطر ON یک کره را تولید کند و مماس در نقطهٔ O یک صفحهٔ مماس را تولید کند تصویر از N کره (بدون در نظر گرفتن N) به صفحهٔ مماس تصویر گنجنگاری نام دارد. اگر وارون تصویر گنجنگاری را برای نگاشتن صفحهٔ مماس بروی کره (بدون N) به کار رود و اعداد مختلط برای نشاندار کردن نقاط کره (به‌جز برای N) استفاده شوند و N نیز با ∞ نشاندار شود یک دو سویی از صفحهٔ موبیوس به رویهٔ کره ساخته می‌شود. قطر کره را برابر با ۱ و مرکز آن را O بگیرید چه نگاشتی از $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ با یک بازتاب از کره نسبت به یک صفحهٔ استوایی موازی با صفحهٔ مماس تناظر می‌یابد؟

۳۶. با در نظر گرفتن حاصلضرب (ترکیب) تبدیلهای $z \mapsto \bar{z}$ و $z \mapsto \frac{1}{z}$ از صفحهٔ موبیوس نگارهٔ مجموعهٔ دایره‌ها و خطهای صفحهٔ موبیوس تحت تبدیل $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ را مشخص کنید. این تبدیل انعکاس در دایرهٔ $|z| = 1$ نام دارد.

۳۷. اگر $\sum$ دایره‌ای متعامد بر $|z| = 1$ است نگارهٔ $\sum$ تحت انعکاس $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ چیست؟

۳۸. فرض کنید C دایره‌ای است که از مبدأ نمی‌گذرد و P نقطه‌ای روی آن است. فرض کنید C' و P' به ترتیب نگاره‌های C و P تحت انعکاس $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ باشند. دربارهٔ هر دایرهٔ گذرنده از نقاط P و P' در رابطه با دایرهٔ $|z| = 1$ چه می‌توان گفت؟ فرض کنید S دایرهٔ گذرنده از P و P' را نمایش دهد که با C در P تماس دارد. بررسی کنید که چون S و C در یک نقطه متقاطع‌اند S و C' نیز تنها در یک نقطه می‌توانند متقاطع باشند (به کمک تناقض). لذا S در نقطه P' با C' تماس دارد.

۳۹. فرض کنید C_1 و C_2 دو دایرهٔ متقاطع در $P \neq 0$ باشند. فرض کنید C'_1، C'_2 و P' به ترتیب نگاره‌های C_1، C_2 و P تحت انعکاس $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ باشند. فرض کنید S_1 دایرهٔ گذرنده از P و P' است که با C_1 تماس دارد و S_2 دایرهٔ گذرنده از P و P' است که با C_2 تماس دارد. چرا زاویهٔ تقاطع C_1 و C_2 برابر با زاویهٔ تقاطع S_1 و S_2 است و چرا این زاویه برابر با زاویهٔ تقاطع C'_1 و C'_2 است؟ البته در اینجا قدرمطلق اندازه‌ها را در نظر می‌گیریم در واقع مقادیر جهتدار معکوس می‌شوند. فرض کنید که همواره $P \neq P'$.

۴۰. دربارهٔ محفوظ ماندن زاویه‌های تقاطع دایره‌ها تحت انعکاس $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ بررسی کنید.

(یک) هرگاه یک یا هر دو 'دایره' یک خط مستقیم است.

(دو) هرگاه دایره‌ها در ۰ متقاطع هستند.

۴۱. اگر دو دایره یک نقطهٔ مشترک روی $|z| = 1$ دارند چرا زاویهٔ تقاطع آنها باید برابر با زاویهٔ تقاطع نگارهٔ آنها تحت انعکاس $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ باشد؟

۴۲. با تجزیهٔ یک تبدیل موبیوس دلخواه مانند سؤالهای ۱۴ و ۳۶ نشان دهید زاویه‌های تقاطع دایره‌ها و خطها تحت هر تبدیل موبیوس حفظ می‌شوند.

با این مطلب بررسی ما دربارهٔ ویژگیهای هندسی که توسط تبدیلهای موبیوس حفظ می‌شوند کامل می‌شود.

پایدارسازها

۴۳. در گروه موبیوس

(یک) پایدارساز ∞،

(دو) پایدارساز 0،

(سه) پایدارساز 1،

(چهار) پایدارساز 0 و ∞،

(پنج) پایدارساز 1 و ∞،

(شش) پایدارساز 0 و 1

را به صورت جبری نمایش دهید.

۴۴. ثابت کنید هر تبدیل موبیوس به جز همانی همیشه ۱ یا ۲ نقطهٔ ثابت دارد.

۴۵. اگر یک تبدیل موبیوس سه نقطهٔ متمایز را ثابت نگاه دارد آیا همانی است؟ با استفاده از سؤال ۱۷ نشان دهید تنها یک تبدیل موبیوس وجود دارد که سه نقطهٔ متمایز را به سه نگارهٔ مفروض می‌نگارد. اگر $z \mapsto z'$ یک تبدیل موبیوس است و

$$\frac{z-a}{z-b} \cdot \frac{c-b}{c-a} = \frac{z'-a'}{z'-b'} \cdot \frac{c'-b'}{c'-a'}$$

نگاره‌های a، b و c چه هستند؟

۴۶. یک شرط جبری لازم و کافی روی a، b، c و d بیابید که

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

یک نقطهٔ ثابت یکتا داشته باشد.

۴۷. بررسی کنید تبدیلهای موبیوس که تنها نقطهٔ ∞ را ثابت نگاه می‌دارند همراه با همانی گروه تشکیل می‌دهند.

زیرگروه ثابت نگاه دارندهٔ نیمصفحهٔ بالا

۴۸. نشان دهید هر تبدیل موبیوس ثابت نگاه دارندهٔ خط حقیقی را می‌توان به صورت

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

نوشت که a، b، c و d اعداد حقیقی هستند.

۴۹. هرگاه x و y اعداد حقیقی هستند و $z = x + iy$ می‌نویسیم $Im(z) = y$.
اگر a، b، c، و d اعداد حقیقی هستند آنگاه ثابت کنید

$$Im\left(\frac{az+b}{cz+a}\right) = \frac{Im(z).(ad-bc)}{|cz+d|^{۲}}$$

نشان دهید هر تبدیل موبیوس ثابت نگاه دارندهٔ نیمصفحهٔ بالا $\{z|Im(z) > ۰\}$ را می‌توان به صورت

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

نوشت که a، b، c و d اعداد حقیقی هستند و $ad - bc > ۰$. فرض کنید ثابت نگاه داشتن نیمصفحه ثابت نگاه داشتن مرز آن را نتیجه می‌دهد.

زیرگروه ثابت نگاه دارندهٔ دایرهٔ واحد

۵۰. با استفاده از سؤال ۳۲ نشان دهید هر دایرهٔ گذرنده از دو نقطهٔ w و $\frac{۱}{\bar{w}}$ دایرهٔ $|z| = ۱$ را متعامداً قطع می‌کند. اگر α یک تبدیل موبیوس باشد که دایرهٔ $|z| = ۱$ را بروی خودش بنگارد دربارهٔ یک دایرهٔ گذرنده از $w\alpha$ و $(\frac{۱}{\bar{w}})\alpha$ چه می‌توان گفت؟ نتیجه‌گیری کنید $w\alpha$ و $(\frac{۱}{\bar{w}})\alpha$ توسط انعکاس $z \mapsto \frac{۱}{\bar{z}}$ مبادله می‌شوند.

۵۱. هرگاه یک تبدیل α دایرهٔ $|z| = ۱$ را بروی خودش بنگارد و نقطه ۰ را ثابت نگاه دارد توصیف کنید چرا α باید ∞ را نیز ثابت نگاه دارد و لذا به ازای عددی مانند θ به صورت $z \mapsto e^{i\theta}z$ باشد.

۵۲. اگر تبدیل موبیوس

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

دایرهٔ واحد $|z| = 1$ را به خودش بنگارد با استفاده از سؤال ۵۰ ثابت کنید به ازای همهٔ اعداد مختلط z

$$\frac{bz+a}{dz+c} = \frac{\bar{c}z+\bar{d}}{\bar{a}z+\bar{b}}.$$

با قرار دادن مقادیر ۰، $-\frac{a}{b}$، ∞ به جای z نشان دهید $a/\bar{d} = b/\bar{c} = c/\bar{b} = d/\bar{a}$ و نتیجه‌گیری کنید به ازای عددی مانند θ داریم $d = e^{i\theta}\bar{a}$ و $c = e^{i\theta}\bar{b}$. با چند انتخاب مناسب نشان دهید هر تبدیل ثابت نگاه دارندهٔ دایرهٔ واحد $|z| = 1$ را می‌توان به صورت

$$z \mapsto \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}},$$

نوشت و هر تبدیل به این صورت دایرهٔ واحد را ثابت نگاه می‌دارد.

۵۳. نشان دهید هر تبدیل ثابت نگاه دارندهٔ دایرهٔ واحد $|z| = 1$ مانند سؤال ۵۲ درون دایره را ثابت نگاه می‌دارد اگر و تنها اگر $a\bar{a} - b\bar{b} > 0$.

خلاصهٔ مطالب

تعریف مجموعهٔ $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ صفحهٔ موبیوس نام دارد.
سؤال ۱۳

تعریف یک تبدیل موبیوس تبدیلی از صفحهٔ موبیوس به صورت
سؤال ۱۳

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

است که $ad - bc \neq 0$ و اگر $c = 0$ آنگاه $\infty \mapsto \infty$ و در غیر این صورت $\frac{a}{c} \mapsto \infty \mapsto -\frac{d}{c}$.

تعریف نسبت غیر توافقی $R(z_1, z_2; z_3, z_4)$ از چهار نقطهٔ متمایز صفحهٔ موبیوس
سؤالهای ۱۱، ۱۵

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \Big/ \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$$

است با توجیه مناسب هرگاه یک نقطه ∞ است.

قضیه گروه موبیوس گروه کامل تبدیلهای حافظ نسبت غیرتوافقی صفحهٔ موبیوس است.
سؤالهای ۱۵، ۱۶

قضیه یک تبدیل موبیوس به‌طور یکتا توسط نگاره‌های سه نقطه مشخص می‌شود.
سؤالهای ۱۷، ۴۵

قضیه چهار نقطهٔ صفحهٔ موبیوس همدایره یا همخط است اگر و تنها اگر نسبت غیر توافقی آنها حقیقی باشد.
سؤالهای ۲۱تا۲۴

قضیه مجموعهٔ دایره‌ها و خطها توسط یک تبدیل موبیوس به خودشان نگاشته می‌شوند اگر قرارداد افزودن ∞ را به هر خط بپذیریم.
سؤالهای ۲۵، ۲۶

تعریف اگر ON قطر کرهٔ $\sum$ است و $\prod$ صفحه مماس در O باشد آنگاه تصویر از $\{N\}-\sum$ از N بروی $\prod$ تصویر گنجنگاری نام دارد.
سؤال ۳۵

تعریف تبدیل $\frac{1}{\bar{z}} \mapsto z$ از صفحهٔ موبیوس که ۰ و ∞ را مبادله می‌کند انعکاس در دایرهٔ واحد $|z| = ۱$ نام دارد.
سؤال ۳۶

قضیه اگر دو نقطه توسط انعکاس در دایرهٔ واحد مبادله شوند آنگاه هر دایرهٔ گذرنده از آن دو نقطه توسط این انعکاس بروی خودش نگاشته می‌شود.
سؤالهای ۳۴، ۳۷

قضیه (قدرمطلق) زاویهٔ بین دو دایره برابر با زاویهٔ بین نگاره‌های آنها تحت $\frac{1}{\bar{z}} \mapsto z$
سؤالهای ۳۹تا۴۱

است.

قضیه سؤال ۴۲ زاویهٔ بین دو دایره برابر است با زاویهٔ بین نگاره‌های آنها تحت هر تبدیل موبیوس.

قضیه سؤال ۴۷ زیرگروهی ازگروه موبیوس که نیمصفحهٔ بالا را ثابت نگاه می‌دارد شامل همهٔ تبدیلهای به صورت

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

است که a، b، c، d اعداد حقیقی هستند و $ad - bc > 0$ و نه غیر اینها.

قضیه سؤال ۵۳ زیرگروهی ازگروه موبیوس که درون قرص واحد را ثابت نگاه می‌دارد شامل همهٔ تبدیلهای به صورت

$$z \mapsto \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$$

است که $a\bar{a} - b\bar{b} > 0$ و نه غیر اینها.

یادداشت تاریخی

اولین استفاده از معادلهٔ

$$z' = \frac{az+b}{cz+d}$$

توسط ل.اویلر (۱۷۷۷) بود. ب.ریمان (۱۸۵۴) اولین کسی بود که '∞' را به یک صفحه افزود تا $z \mapsto \frac{1}{z}$ را به تبدیلی پیوسته بدل سازد. مفهوم تبدیلهای حافظ نسبت غیر توافقی متعلق به م. چسلز (۱۸۳۷) است که نسبت غیر توافقی طولهای پاره‌خطهای خط حقیقی را بررسی کرد. اولین کاربرد اعداد مختلط در توصیف تبدیلهای تصویری توسط فون اشتوت[2] (۱۸۵۶) انجام گرفت.

2) von Staudt

مطالعهٔ منظم تبدیلهای حفظ کنندهٔ دایره با استفاده از روشهای ترکیبی توسط ا.ف. موبیوس[۳] (۱۸۵۲ـ۱۸۵۶) پیگیری می‌شد. تعبیر نتایج موبیوس با استفاده از اعداد مختلط و تبدیل

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

به ف. کلاین (۱۸۷۵) و دیگران تعلق دارد.

تصویر گنجنگاری توسط بطلمیوس (۱۴۰.م) مورد استفاده قرار گرفت: استفاده از آن در نشانگذاری نقاط کره با $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ و کاربرد آن در ارتباط دادن تبدیلهای کره با تبدیلهای صفحه به ف. کلاین تعلق دارد که در کتاب درسهایی دربارهٔ بیست وجهی (۱۸۸۴) مورد بحث قرار داده است.

زیرگروهی از گروه موبیوس که نیمصفحهٔ بالا را ثابت نگاه می‌دارد گروه طولپاییهای مستقیم صفحهٔ نااقلیدسی است که خطهای این صفحه نیمدایره‌های با مرکز واقع بر خط حقیقی اختیار می‌شوند. زیرگروهی از گروه موبیوس که درون دایرهٔ واحد را ثابت نگاه می‌دارد گروه طولپاییهای مستقیم صفحه نااقلیدسی است که خطهای این صفحه کمانهای مستدیر متعامد دایرهٔ واحد اختیار می‌شوند. این دو مدل صفحهٔ هذلولوی به هـ. پوآنکاره[۴] (۱۸۸۱) تعلق دارند. اولین مرجع اصلی که کل این مبحث را می‌پوشاند به ر.فرایک[5] و ف. کلاین (۱۸۹۷) تعلق دارد.

---

3) A.F. Möbius   4) H.Poincaré   5) R. Fricke

جوابهای فصل ۴

۱. π یک دوسویی است.

۲. $NOB = NAB = ONA$.

۳. $\tan\theta$.

۴. $ONB = \frac{۱}{۲}\pi - ONA$ بنابراین $OB' = \cot\theta$ و $OA'.OB' = ۱$.

۵. B با $\frac{۱}{x}$ نشاندار می‌شود. $x \mapsto \frac{۱}{x}$.

۶. $\tan\theta \mapsto \tan(\theta + \frac{۱}{۲}\alpha)$ عبارت است از

$$x \mapsto \frac{x+a}{۱-xa}$$
$$\frac{۱}{a} \mapsto \infty \mapsto -\frac{۱}{a}$$

۷. $\tan\theta \mapsto -\tan(\theta - \alpha)$ عبارت است از

$$x \mapsto \frac{a-x}{۱+ax}$$
$$-\frac{۱}{a} \mapsto \infty \mapsto -\frac{۱}{a}$$

۸. $c(ax+b) = a(cx+d) \Leftrightarrow ad - bc = ۰$.

$$x = \frac{dr-b}{-cr+a}$$

$-d/c$ نگارهٔ حقیقی ندارد. $-d/c \mapsto \infty \mapsto a/c$.

۹. $\infty \mapsto \infty$.

۱۰. به شرطی که $ad - bc \neq ۰$. هر چهار تابع جایگشتهای $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ هستند.

۱۱. بنا به استدلال سؤال ۱.۳، T یک زیرگروه است.

لذا یک تبدیل از $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ نسبت غیر توافقی را حفظ می‌کند اگر و تنها اگر به صورت

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

باشد.

۱۲. $\gamma = \alpha^{-1}\beta$.

۱۳. (یک) $\infty \mapsto \infty$.

(دو) $-d/c \mapsto \infty \mapsto a/c$.

۱۴. همهٔ آنها به جز

$$z \mapsto \frac{bc - ad}{c} z$$

که مستلزم $bc - ad \neq 0$ است.

تبدیلهای اول و سوم تشابه‌های مستقیم هستند و چهارمی یک انتقال است.

۱۵. بله.

۱۷. عملیات جبری سؤال ۱۱ را به کار برید.

۱۸. رویهٔ کره با ∞ در N.

۱۹. دایرهٔ به مرکز $\frac{1}{2}$ و شعاع $\frac{1}{2}$.

تبدیل $z \mapsto \frac{1}{z}$ نقاط را چنان مبادله می‌کند که دایره به خط نگاشته می‌شود.

۲۰. z و c روی دایرهٔ گذرنده از w و t قرار دارند.

۲۱. 0 یا π بنابراین عدد مزبور حقیقی است.

۲۲. 0 یا π.

۲۳. 0 یا π.

۲۴. (یک) دایرهٔ گذرنده از z، t و w.

(دو) خط گذرنده از z، t و w و نقطهٔ ∞.

۲۵. چون تبدیلهای موبیوس نسبت غیر توافقی را حفظ می‌کنند آنها نسبتهای غیر توافقی حقیقی را حفظ می‌کنند بنابراین نگارهٔ یک دایره یا یک دایره یا یک خط با ∞ است.

۲۶. مانند سؤال ۲۵ نگاره یا یک دایره یا یک خط با ∞ است.

۲۷. اگر آنها موازی هستند یک انتقال کافی است. اگر آنها متقاطع‌اند یک دوران کافی است. هر طولپایی مستقیم یک تبدیل موبیوس است.

۲۸. سه نقطهٔ a، b، c را روی دایره و سه نقطهٔ a'، b'، c' را روی خط انتخاب کنید آنگاه بنا به سؤالهای ۱۲ و ۱۷ یک تبدیل موبیوس وجود دارد که $a \mapsto a'$. $b \mapsto b'$، $c \mapsto c'$ و بنا به سؤال ۲۵ دایره را بروی خط با ∞ می‌نگارد.

۲۹. $e^{i\theta} \mapsto e^{-i\theta}$. $۲ \mapsto \frac{۱}{۲}$. $|z| = ۲$ به $|z| = \frac{۱}{۲}$ نگاشته می‌شود.
$\mathbb{R} - \{۰\} \mapsto \mathbb{R} - \{۰\}$.

خط مزبور نسبت به محور حقیقی منعکس می‌شود اما نه نقطه‌ای.

۳۰. $\{\frac{۱}{r}, r, e^{-i\theta}\} \to \{r, \frac{۱}{r}, e^{i\theta}\}$. اگر خط مزبور ۰ را به $e^{i\theta}$ وصل کند دوباره دایره را در z قطع می‌کند و $r.(\frac{۱}{r}) = |z|.۱$ بنابراین $|z| = ۱$ و $z = e^{i\theta}$. C' بازتاب C نسبت به محور حقیقی است. C' دایره‌ها $|z| = ۱$ را متعامداً قطع می‌کند.

۳۳. $rs = ۱$. s, r مبادله می‌شوند. $\sum$ به بازتاب خود نسبت به محور حقیقی نگاشته می‌شود.

۳۴. $\theta = \phi$، $rs = ۱$. $re^{i\theta}.\overline{se^{i\theta}} = ۱$.

۳۵. $z \mapsto \frac{۱}{\bar{z}}$. در هر صفحهٔ گذرنده از ON بازتاب مانند تبدیل حقیقی $x \mapsto \frac{۱}{x}$ عمل می‌کند.

۳۶. $z \mapsto \frac{۱}{\bar{z}}$ دایره‌ها و خطها را به دایره‌ها و خطها می‌نگارد.

۳۷. $\sum$ به خودش نگاشته می‌شود اما نه نقطه‌ای.

۳۸. هر دایرهٔ گذرنده از P و P' متعامد بر $|z| = ۱$ است بنابراین هرچنین دایره‌ای تحت $z \mapsto \frac{۱}{\bar{z}}$ به خودش نگاشته می‌شود. در نتیجه $S \to S$. لذا $S \cap C \mapsto S \cap C'$. چون $S \cap C$ یک نقطهٔ تنها است بنابراین $S \cap C'$ نیز یک نقطه است.

۳۹. $C_۱$ و $S_۱$ مماس مشترکی در P، $C_۲$ و $S_۲$ مماس مشترکی در P دارند بنابراین زاویهٔ بین $C_۱$ و $C_۲$ برابر است با زاویهٔ بین $S_۱$ و $S_۲$.

۴۰. (یک) استدلال سؤالهای ۳۸ و ۳۹ تا وقتی که $P \neq P'$ و $P \neq ۰$ برقرار است.
(دو) نگارهٔ دایره موازی با مماس در ۰ است.

۴۱. استدلال سؤالهای ۳۸ و ۳۹ را برای نقطهٔ اشتراک خارج از $|z| = ۱$ به کار برید.

۴۲. $z \mapsto cz + d$، $z \mapsto \bar{z}$، $z \mapsto \frac{۱}{\bar{z}}$، $z \mapsto \frac{bc-ad}{c}z$، $z \mapsto z + a/c$ همهٔ اینها زاویهٔ تقاطع را حفظ می‌کنند و حاصلضرب (ترکیب) آنها

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

است.

۴۳. (یک) $z \mapsto az + b$،
(دو) $z \mapsto \frac{az}{cz+d}$،

(سه) $z \mapsto \frac{az+c+d-a}{cz+d}$،
(چهار) $z \mapsto az$،
(پنج) $z \mapsto az + ۱ - a$،
(شش) $z \mapsto \frac{az}{cz+a-c}$.
مجموعهٔ همهٔ تبدیلهای با صورت داده شده در هر حالت پایدارساز را تشکیل می‌دهند.

۴۴. اگر z یک نقطهٔ ثابت است،

$$z = \frac{az+b}{cz+d}$$

بنابراین $cz^۲ + (d-a)z - b = ۰$. این معادلهٔ درجهٔ دوم ۱ یا ۲ ریشه دارد. اگر $c = ۰$ آنگاه ∞ و $\frac{b}{d-a}$ ثابت نگاه داشته می‌شوند.

۴۵. تنها تبدیل همانی سه نقطه را ثابت نگاه می‌دارد. اگر دو تبدیل α، β سه نقطه را به یک طریق بنگارند آنگاه $\alpha\beta^{-۱}$ سه نقطه را ثابت نگاه می‌دارد و $\alpha\beta^{-۱} = ۱$. $a \mapsto a'$، $b \mapsto b'$، $c \mapsto c'$.

۴۶. بنا به سؤال ۴۴، ریشه‌ها برابراند هرگاه $(d-a)^۲ + ۴bc = ۰$.

۴۷. $z \mapsto az + b$، ∞ را ثابت نگاه می‌دارد و اگر $a = ۱$ آنگاه نقطهٔ دیگری را ثابت نگاه نمی‌دارد.

۴۸. اگر خط حقیقی ثابت نگاه داشته شود آنگاه $a_۱ \mapsto ۰$، $a_۲ \mapsto ۱$، $a_۳ \mapsto \infty$ که بنا به سؤالهای ۱۱ و ۱۷، $a_۱$ $a_۲$ و $a_۳$ حقیقی هستند.

۴۹. $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ نیمصفحهٔ بالا را ثابت نگاه می‌دارد اگر $Im(z) > ۰$ نتیجه دهد $Im\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) > ۰$.

۵۰. ۰، w، $\frac{1}{\bar{w}}$، همخط هستند. حاصلضرب فاصله‌های از ۰ برابر با ۱ است. هر دایرهٔ گذرنده از w و $\frac{1}{\bar{w}}$ دایرهٔ $|z| = ۱$ را متعامداً قطع می‌کند لذا بنابر ویژگی حفظ زاویه هر دایرهٔ گذرنده از $w\alpha$ و $\left(\frac{1}{\bar{w}}\right)\alpha$ دایرهٔ $|z| = ۱$ را متعامداً قطع می‌کند. خط گذرنده از $w\alpha$ و $\left(\frac{1}{\bar{w}}\right)\alpha$ دایرهٔ $|z| = |$ را متعامداً قطع می‌کند و لذا از ۰ می‌گذرد. $\gamma : z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$، $w\alpha\gamma = w\gamma\alpha$.

۵۱. با γ مانند سؤال ۵۰، $۰\alpha = ۰$ بنابراین $\infty = ۰\gamma = ۰\alpha\gamma = ۰\gamma\alpha = \infty\alpha$. $۰ \mapsto ۰$، $\infty \mapsto \infty$ و $۱ \mapsto e^{i\theta}$:

۵۲. با γ مانند سؤال ۵۰، $z\gamma\alpha = z\alpha\gamma$. $d\bar{d} = a\bar{a}$ نتیجه می‌دهد $|d| = |a|$ بنابراین $|a/\bar{d}| = 1$ و (مثلاً) $\frac{d}{\bar{a}} = e^{i\theta}$.

$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+b}{\bar{b}e^{i\theta}z + \bar{a}e^{i\theta}}$. حال

صورت و مخرج را در $e^{-\frac{1}{2}i\theta}$ ضرب کنید.

۵۳. $\frac{b}{a} \mapsto 0$. $a\bar{a} - b\bar{b} > 0 \Leftrightarrow |b| < |\bar{a}| \Leftrightarrow 1 > \left|\frac{b}{a}\right|$.

اگر w نقطه‌ای درونی است آنگاه یک دایرهٔ گذرنده از ۰ و w وجود دارد که $|z| = 1$ را قطع نمی‌کند. نگارهٔ این دایره نمی‌تواند $|z| = 1$ را قطع کند.

MATH75.IR

۵

اجسام فضایی

در فصل ۳ گروه طولپاییهای صفحهٔ حقیقی و برخی از زیرگروه‌های آن را یافتیم. در این فصل سه گروه متناهی طولپاییهای فضای سه‌بُعدی حقیقی را بررسی خواهیم کرد. این گروه‌ها به ترتیب گروه‌های چهار وجهی منتظم، مکعب، و بیست وجهی منتظم خواهند بود. اینها را به‌عنوان اجسام فضایی منتظم می‌توانیم در یک کره محاط کنیم و آنگاه هر تقارن هر یک از این اجسام مرکز کره را ثابت نگاه می‌دارد و رویهٔ کره را بروی خودش می‌نگارد. بعداً در فصل ۲۰ ثابت خواهیم کرد که دورانها تنها طولپاییهای مستقیم فضای سه‌بُعدی هستند که یک نقطه را ثابت نگاه می‌دارند.

مهم است مدلهای پیشنهادی در سؤالهای ۱، ۲، و ۳ را بسازید که وقتی تقارنهای دورانی آنها را بررسی می‌کنید عملاً این کار انجام گیرد.

مطالعهٔ همزمان: کتاب کاکستر[1] (۱۹۶۹)، صفحه ۱۵۱؛ کتاب اشتاینهاوس[2] صفحه‌های ۲۰۸، ۲۱۶؛ کتاب هیلبرت[3] و کوهن ـ وسن[4] صفحه‌های ۸۹ـ۹۳؛ کتاب مارتین فصل ۱۷؛ کتاب کلاین فصل ۱.

۱. یک جسم فضایی منتظم یک چندوجهی سه‌بُعدی است که هر وجه آن یک چند ضلعی منتظم است. هر دو وجه و هر دو رأس را می‌توان به‌وسیلهٔ یک طولپایی جور کرد.

اگر تعداد کافی از یالها را ببریم تا چندوجهی به صورت همبند در یک صفحه گسترده شود آنگاه طرحی که بدین نحو تشکیل می‌شود شبکهٔ جسم فضاییِ نام دارد. با بررسی

1) Coxeter 2) Steinhaus 3) Hilbert 4) Cohn-Vossen

شبکه‌های ممکن مشخص کنید آیا می‌توان یک جسم فضایی منتظم ساخت که همهٔ وجه‌های آن مثلث متساوی الاضلاع باشد و ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ یا چند وجه آن در یک رأس مشترک باشند.

اجسام فضایی منتظم با وجه‌های مثلث متساوی‌الاضلاع بسازید که با توجه به ملاحظات نظری امکان پذیراند. (چهار وجهی، هشت وجهی و بیست وجهی.)

۲. بررسی کنید آیا می‌توان یک چندوجهی منتظم ساخت که همهٔ وجه‌های آن مربع باشند و ۲، ۳، ۴ یا چندوجه آن در یک رأس مشترک باشند.

یک جسم فضایی منتظم بسازید که با توجه به ملاحظات نظری امکان‌پذیر است. (مکعب)

۳. بررسی کنید آیا می‌توان یک چندوجهی منتظم ساخت که همهٔ وجه‌های آن پنج‌ضلعی منتظم باشند و ۲، ۳، ۴ یا چند وجه آن در یک رأس مشترک باشند.

یک جسم فضایی منتظم بسازید که با توجه به ملاحظات نظری امکان‌پذیر است (دوازده وجهی.)

۴. بررسی کنید آیا می‌توان یک جسم فضایی منتظم ساخت که وجه‌های آن شش ضلعی منتظم باشند.

۵. اگر وسط وجه‌های (یک) یک چهار وجهی،
(دو) یک مکعب،
(سه) یک هشت وجهی،
(چهار) یک دوازده وجهی،
(پنج) یک بیست وجهی را به‌عنوان رأس بگیریم چه شکلی تشکیل می‌شود؟

۶. چند تقارن دورانی یک چهار وجهی منتظم یک رأس را پایدار می‌سازند و نیز تعداد نگاره‌های متمایزی که آن رأس تحت گروه تقارنهای دورانی چهاروجهی دارد را بشمارید، نشان دهید تعداد تقارنهای دورانی یک چهار وجهی منتظم نمی‌تواند بیش از ۱۲ باشد.

۷. وجه‌های یک چهار وجهی منتظم را با ۱، ۲، ۳، ۴ (یا در صورت ترجیح رأسهای آن را) نشانه‌گذاری کنید همهٔ تقارنهای دورانی چهاروجهی را که می‌توانید به صورت جایگشتی از S_4 بیابید توصیف کنید. آیا می‌توانید هر ۱۲ تقارن را بیابید؟ آیا آنها زیرگروه آشنایی از S_4 تشکیل می‌دهند؟

۸. با استفاده از نشانه‌گذاری سؤال ۷ تقارنهای بازتابی چهار وجهی را توصیف کنید.

آیا غیر از دورانها و بازتابها اعضای دیگری از $S_۴$ وجود دارند که با تقارنهای چهار وجهی تناظر یابند؟

۹. چند تقارن دورانی مکعب یک رأس را ثابت نگاه می‌دارند و نیز با شمارش تعداد نگاره‌های متمایز آن رأس نشان دهید تعداد تقارنهای دورانی مکعب بیش از ۲۴ نیست. آیا با شمارش تقارنهای دورانی ثابت نگاه دارندهٔ یک وجه و تعداد نگاره‌های یک وجه همان عدد به دست می‌آید؟

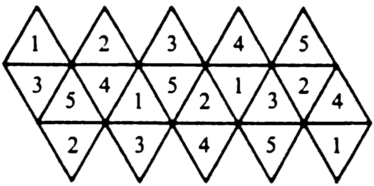
۱۰. تقارنهای دورانی مکعب را با نشانه‌گذاری جفتهای رأسهای متقابل مکعب (یا قطرهای مکعب) با اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ به صورت عضوی از $S_۴$ توصیف کنید. آیا مکعب ۲۴ تقارن دورانی دارد؟

۱۱. جفتهای وجه‌های متقابل یک هشت وجهی منتظم را با ۱، ۲، ۳، ۴ نشانه‌گذاری کنید تقارنهای دورانی هشت وجهی را به صورت اعضای $S_۴$ توصیف کنید و در هر حالت زاویهٔ دوران متناظر را به دست آورید.

۱۲. با استفاده از سؤال ۵ ارتباط بین نتایج سؤالهای ۱۰ و ۱۱ را توصیف کنید.

۱۳. چند تقارن دورانی بیست وجهی منتظم یک رأس را ثابت نگاه می‌دارند و نیز با شمارش تعداد نگاره‌های متمایز آن رأس تحت گروه تقارنهای دورانی بیست وجهی نشان دهید تعداد تقارنهای دورانی بیش از ۶۰ نیست. آیا با شمارش تقارنهای دورانی ثابت نگاه دارندهٔ یک وجه و تعداد نگاره‌های متفاوت یک وجه همان عدد به دست می‌آید؟

۱۴. اگر وجه‌های یک بیست وجهی به صورت زیر نشانه‌گذاری شوند چه اعضایی از $S_۵$ با تقارنهای دورانی بیست وجهی به اندازهٔ $\pm ۷۲^\circ$ (۱۲)، $\pm ۱۴۴^\circ$ (۱۲)، $\pm ۱۲۰^\circ$ (۲۰) و ۱۸۰° (۱۵) تناظر می‌یابند؟ آیا اینها جایگشتهای زوج‌اند؟ آیا آنها یک گروه تشکیل می‌دهند؟



۱۵. دربارهٔ تقارنهای دورانی یک دوازده وجهی چه می‌توانید بگویید.

این واقعیت که مجموعه‌های متناهی دورانهایی که بررسی کرده‌ایم یک گروه تشکیل می‌دهند وقتی ثابت کنیم حاصلضرب دو دوران در فضای سه‌بُعدی، با یک نقطهٔ ثابت مشترک، دوباره یک دوران است نتیجه خواهد شد. برای انجام این منظور مشابه سه‌بُعدی سؤال ۲۱.۳ را به کار می‌بریم. در سؤال ۲۱.۳ نشان دادیم که اگر دو خط در یک صفحه با یکدیگر زاویهٔ $\frac{1}{2}\theta$ بسازند و در نقطهٔ O تلاقی کنند آنگاه دورانی از صفحه حول نقطهٔ O به اندازهٔ θ را می‌توان به صورت حاصلضرب بازتابهایی نسبت به هر یک از خطها نوشت.

۱۶. فرض کنید OA، OB و OC خطهایی در فضای سه‌بُعدی با سوهای متفاوت و A، B و C نقاطی روی کره‌ای به مرکز O باشند. فرض کنید α بازتاب نسبت به صفحهٔ OBC و β بازتاب نسبت به صفحهٔ OCA و γ بازتاب نسبت به صفحهٔ OAB را نمایش دهند. تعبیر معادلهٔ $\gamma\beta = (\alpha\beta)(\gamma\alpha)$ چیست؟ اگر دورانهای نسبت به محورهای OB و OC مفروض باشند بگویید چگونه نقطهٔ A را بیابیم که معادلهٔ اخیر حاصلضربشان را مشخص کند.

خلاصهٔ مطالب

قضیه سؤالهای ۱ تا ۴	پنج جسم فضایی منتظم وجود دارند.
قضیه سؤالهای ۷، ۸	گروه تقارنهای دورانی یک چهار وجهی منتظم برابر با A_4 است. گروه کامل تقارنهای یک چهار وجهی منتظم برابر با S_4 است.
قضیه سؤالهای ۱۰، ۱۱	گروه تقارنهای دورانی یک مکعب یا یک هشت وجهی منتظم برابر با S_4 است.
قضیه سؤالهای ۱۴، ۱۵	گروه تقارنهای دورانی یک بیست وجهی منتظم یا یک دوازده وجهی منتظم برابر با A_5 است.

یادداشت تاریخی

یکتایی پنج جسم فضایی منتظم و طول شعاعهای کره‌های محیطی آنها در کتاب اصول اقلیدس[5] $XIII$ (۳۰۰ ق م) بررسی شده‌اند. کتابهای بعدی اقلیدس XIV و XV[6] (۳۰۰ م) از یک طرف ماهیت دوگانی مکعب و هشت وجهی را و از طرف دیگر بیست وجهی و دوازده وجهی را بررسی می‌کند. گروه‌های تقارن این اجسام فضایی توسط ج.ف.ک.هسل[7] (۱۸۳۰) و ا.براویس[8] (۱۸۴۹) در رده‌بندیهای ساختارهای بلوری توصیف شدند. یکریختیهای گروه‌های دوران آنها با گروه‌های جایگشتی $A_۴$، $S_۴$ و $A_۵$ در ۱۸۷۴ توسط ف.کلاین شناخته شدند و آنها را در فصل اول کتاب خود تحت عنوان درسهایی دربارهٔ بیست وجهی (۱۸۸۴) به تفصیل شرح داده است.

---

5) *Euclid Book XIII* 6) *Euclid XIV* and *XV* 7) J.F.C. Hessel
8) A.Bravais

جوابهای فصل ۵

۱. هیچ جسم صلبی نمی‌تواند تنها دو وجهش در یک رأس مشترک باشند. $n \cdot ۶۰^\circ < ۳۶۰^\circ \Longleftarrow n = ۳, ۴, ۵$.

۲. $n \cdot ۹۰^\circ < ۳۶۰^\circ \Longleftarrow n = ۳$.

۳. $n \cdot ۱۰۸ < ۳۶۰^\circ \Longleftarrow n = ۳$.

۴. $n \cdot ۱۲۰^\circ < ۳۶۰^\circ \Longleftarrow n < ۳$، تناقض است.

۵. (یک) چهار وجهی،
(دو) هشت وجهی،
(سه) مکعب،
(چهار) بیست وجهی،
(پنج) دوازده وجهی.

۶. سه دوران یک رأس را پایدار نگاه می‌دارند. هر رأس چهار نگاره دارد. حداکثر ۱۲=۳.۴ دوران در کل.

۷. $A_۴$.

۸. شش ترانهش بازتابها را می‌دهند. ۴- دورها نه بازتابها را می‌دهند و نه دورانها را.

۹. سه دوران یک رأس را پایدار نگاه می‌دارند. هر رأس هشت نگاره دارد. حداکثر ۲۴ = ۳.۸ دوران در کل. چهار دوران یک وجه را پایدار نگاه می‌دارند. هر وجه شش نگاره دارد. ۲۴ = ۴.۶.

۱۰. بله

۱۱. ۴- دورها، ۹۰°. ۳- دورها، ۱۲۰°. ترانهشها یا جفتها، ۱۸۰°.

۱۲. هر تقارن دورانی یک مکعب تقارن دورانی هشت وجهی محاطی آن است و به عکس.

۱۳. پنج دوران یک رأس را پایدار نگاه می‌دارند. هر رأس ۱۲ نگاره دارد. سه دوران یک وجه را پایدار نگاه می‌دارند. هر وجه ۲۰ نگاره دارد.

۱۴. $\pm ۷۲^\circ$: (۱۲۳۴۵)، (۱۵۴۳۲)، (۱۲۵۳۴)، (۱۴۳۵۲)، (۱۳۴۲۵)، (۱۵۲۴۳)، (۱۳۲۵۴)، (۱۴۵۲۳)، (۱۴۲۳۵)، (۱۵۳۲۴)، (۱۲۴۵۳)، (۱۳۵۴۲). $\pm ۱۴۴^\circ$: (۱۳۵۲۴)، (۱۴۲۵۳)، (۱۵۴۲۳)، (۱۵۴۲۳)، (۱۳۲۴۵)، (۱۴۵۳۲)، (۱۲۳۵۴)، (۱۵۳۴۲)، (۱۲۵۴۳)، (۱۳۴۵۲)، (۱۴۳۲۵)، (۱۵۲۳۴). $\pm ۱۲۰^\circ$: همهٔ ۳- دورها.

$\pm 180^\circ$: همهٔ ترانهشها. A_5.

۱۵. با استفاده از سؤال ۵ می‌توان تقارنهای دورانی یک بیست وجهی را شناخت.

۱۶. شبیه سؤال ۲۴.۳ استدلال کنید. $\gamma\alpha$ دورانی حول OB است؛ $\alpha\beta$ دورانی حول OC است؛ $\gamma\beta$ دورانی حول OA است. A را چنان تعیین کنید که زاویهٔ بین صفحه‌های OAB و OBC نصف زاویهٔ دوران حول OB و زاویهٔ بین صفحه‌های OBC و OAC نصف زاویهٔ دوران حول OC است.

MATH75.IR

۶

گروه‌های مجرد

این فصل را با مجرد کردن ویژگیهای S_A آغاز می‌کنیم که در سؤال ۳۴.۱ آن را مورد توجه قرار دادیم، این ویژگیها را برای تعریف گروهی به کار می‌بریم که ربطی به جایگشتها و هندسه ندارد و لزومی ندارد اعضای گروه حتی تابع باشند. برای دو تابع ترکیب روش آمیختن آنها در نظر گرفته می‌شود. به ازای دو عدد جمع یا ضرب روشهای ممکن آمیختن هستند. کلاً اصطلاح، 'عمل دوتایی' برای توصیف آمیختن دو عضو است تا یک عضو به دست آوریم. برخی از نتایج فوری اصول گروه در سؤالهای ۵ـ۹ بررسی می‌شوند.

مطالعهٔ همزمان: کتاب گرین فصلهای ۴ و ۵، کتاب فرالی بخشهای ۲، ۳، ۶ و ۷.

اصول

هر گروهی را که تاکنون در نظر گرفته‌ایم زیرگروهی از یک گروه متقارن بوده است. حالا تعریف یک گروه را چنان وسعت می‌دهیم تا شامل مجموعه‌های G با عمل دوتایی (.)، نه صرفاً ترکیب توابع، شوند که چهار شرط

بستار یعنی اگر a و $b \in G$، آنگاه $a.b \in G$.

شرکت‌پذیری یعنی اگر $a, b, c \in G$ آنگاه $(a.b).c = a.(b.c)$.

همانی یعنی $e \in G$ وجود دارد که به ازای همهٔ $a \in G$ داریم $a.e = e.a = a$.

وارون‌ها یعنی به ازای هر $a \in G$ عضو a^{-1} وجود دارد که $a.a^{-1} = a^{-1}.a = e$.

که در گروه‌های متقارن روی آنها تأکید کردیم را برقرار می‌کنند.

۱. چند مجموعه از اعداد را نام ببرید که تحت عمل دوتایی جمع برطبق تعریف بالا گروه تشکیل دهند.

۲. چند مجموعه از اعداد را نام ببرید که تحت عمل دوتایی ضرب برطبق تعریف بالا گروه تشکیل دهند.

۳. به ازای چه اعدادی $a-(b-c)=(a-b)-c$؟ آیا همهٔ مجموعه‌های انتخابی شما در سؤال ۱ تحت عمل تفریق گروه تشکیل می‌دهند؟

۴. به ازای چه اعدادی $a/(b/c)=(a/b)/c$ ؟ آیا همهٔ مجموعه‌های انتخابی شما در سؤال ۲ تحت عمل تقسیم گروه تشکیل می‌دهند؟

۵. اگر e و f اعضای یک گروه $(G,.)$ باشند و به ازای هر عضو a در G داشته باشیم، $a.e=e.a=a=a.f=f.a$ ثابت کنید $e=f$. [عضو همانی یکتاست.]

۶. اگر $(a^l).a=e$ عضو a^l یک وارون چپ a نام دارد. اگر $a.(a^r)=e$ عضو a^r یک وارون راست a نام دارد. با در نظر گرفتن $a^l.a.a^r$ ثابت کنید هر وارون چپ برابر با هر وارون راست است و از این رو وارون عضو a یکتاست.

۷. اگر $(G,.)$ یک گروه با اعضای مفروض b,a است ثابت کنید یک x یکتا در G وجود دارد که $a.x=b$ و یک y یکتا در G وجود دارد که $y.a=b$. وارون a^{-1} چیست؟

۸. نشان دهید هر گروه $(G,.)$ دارای عضو یکتایی مانند a است که $a^2=a.a=a$.

۹. اگر b,a اعضای یک گروه $(G,.)$ هستند $(ab)(b^{-1}a^{-1})$ را بیابید و نتیجه‌گیری کنید $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$. مثالی ارائه کنید که در آن $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$ نادرست است.

زیرگروه‌ها

هرگاه زیر مجموعهٔ H از $(G,.)$ این ویژگی را داشته باشد که خود $(H,.)$ یک گروه باشد آنگاه H یک زیرگروه G نام دارد. هرگاه $H\neq G$ آنگاه H یک زیرگروه سره نام دارد. کوچکترین زیرگروه شامل یک عضو مفروض a با $<a>$ نمایش داده می‌شود و زیرگروه تولید شده به وسیلهٔ a نام دارد. این گونه زیرگروه‌های تولید شده به وسیلهٔ یک عضو در تجزیه و تحلیل ساختار گروه‌ها مفیدند و دوری نام دارند. گروه‌های دوری متناهی مفهوم مرتبهٔ یک عضو را به دست می‌دهند. برای هر عضو a مرتبهٔ آن کوچکترین عدد

صحیح مثبت n است که $a^n = e$.

۱۰. چند زیرگروه $(\mathbb{C}, +)$ و چند زیرگروه $(\mathbb{C} - \{0\}, \times)$ را نام ببرید.

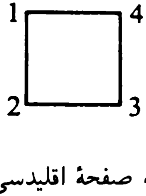
۱۱. اگر H یک زیرگروه G است با استفاده از سؤال ۸ نشان دهید این دو گروه عضو همانی یکسان دارند. نتیجه‌گیری کنید وارون یک عضو H وارون همان عضو G است.

۱۲. اگر H و K هر دو زیرگروه‌های G هستند آنگاه ثابت کنید $H \cap K$ نیز زیرگروهی از G است. با ارائهٔ مثالهایی از گروه‌های D_2 و S_3 نشان دهید لزومی ندارد $H \cup K$ زیرگروهی از G باشد.

۱۳. اگر گروه $(H, +)$ یک زیرگروه $(\mathbb{R}, +)$ که ۱ به آن تعلق دارد را در برگیرد چه اعضایی از $\mathbb{R}$ مطمئناً به H تعلق دارند؟ آیا اعداد صحیح به H تعلق دارند؟ (با توجه به این سؤال $(\mathbb{Z}, +)$ زیرگروه $(\mathbb{R}, +)$ تولید شده به وسیلهٔ ۱ نامیده می‌شود و برحسب نمادها این مطلب به صورت $(\mathbb{Z}, +) =< 1 >$ نوشته می‌شود.)

۱۴. اگر $(\mathbb{Z}, +)$ شامل یک زیرگروه باشد که ۲ به H تعلق دارد چه اعضایی از $\mathbb{Z}$ مطمئناً در H هستند؟ (زیرگروه تولید شده به وسیلهٔ ۲ در $(\mathbb{Z}, +)$ یعنی $< 2 >$ مشتمل بر اعداد صحیح زوج است.)

۱۵. اگر $\alpha = (1234)$ و $\beta = (12)(34)$ تقارنهای یک مربع توصیف شده به وسیله جایگشتهای رأسهای آن باشد α^2، α^3، $\beta\alpha$، $\beta\alpha^2$ و $\beta\alpha^3$ را به صورت جایگشتهای رأسها بنویسید و آنها را به صورت هندسی به عنوان تقارنهای مربع توصیف کنید. این مثالی از گروه دو وجهی D_4 است. کوچکترین زیرگروه شامل α یعنی $< \alpha >$، زیرگروه تولید شده به وسیلهٔ α چیست؟ به ترتیب زیرگروه‌های $< \alpha^2 >$، $< \alpha^3 >$، $< \beta >$، $< \beta\alpha >$، $< \beta\alpha^2 >$، $< \beta\alpha^3 >$ و $< I >$ را بیابید.



مرتبه

۱۶. اگر α یک بازتاب نسبت به صفحهٔ اقلیدسی باشد مثلاً $\alpha : z \mapsto \bar{z}$ آنگاه $\alpha^2 = I$ یعنی تابع همانی است و گوئیم α مرتبهٔ ۲ دارد. بازتاب α زیرگروه $\{\alpha, I\}$ از $S_{\mathbb{C}}$ را تولید می‌کند.

اگر β یک دوران 120° در صفحهٔ اقلیدسی باشد مثلاً $\beta : z \mapsto e^{2\pi i/3}$، کوچکترین

توان مثبت n برای β را بیابید که $\beta^n = I$ (آنگاه n مرتبهٔ β نامیده می‌شود) و زیرگروهی از $S_{\mathbb{C}}$ را که به وسیلهٔ β تولید می‌شود مشخص کنید.

۱۷. اعضای S_3 را فهرست کنید و مرتبهٔ هر یک را مشخص کنید. زیرگروهی از S_3 که به‌وسیلهٔ (۱۲۳) تولید می‌شود چیست؟

۱۸. مرتبهٔ اعضای D_4 که در سؤال ۱۵ ارائه شده بیابید.

گروه‌های دوری: گروه‌های تولید شده به وسیلهٔ یک عضو

۱۹. برای هر عضو g در یک گروه $(G, .)$ تعریف می‌کنیم $g^0 = e$، $g^1 = g$ و آنگاه به ازای هر عدد صحیح مثبت n بر طبق سؤال ۷.۲، $g^{n+1} = g^n.g$. فرض کنید نتایج ۷.۲ در این مضمون کلی‌تر به کار می‌رود. نشان دهید مجموعهٔ $\{g^r | r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ یک زیرگروه G است. آیا هر زیرگروه G که شامل عضو g است باید همهٔ این مجموعه را در بر گیرد؟ مانند قبل این زیرگروه را با $< g >$ نمایش می‌دهیم.

۲۰. یک زیرگروه به‌صورت $< g >$ در هر گروه یعنی یک زیرگروه تولید شده به وسیلهٔ یک عضو به یک زیرگروه دوری موسوم است.

یک زیرگروه دوری S_5 را بیابید که دقیقاً پنج عضو داشته باشد.

یک زیرگروه دوری S_6 را بیابید که دقیقاً شش عضو داشته باشد.

۲۱. هرگاه a عضوی با مرتبهٔ ۵ از یک گروه است چند عضو متمایز در $< a >$ وجود دارند؟ مرتبهٔ هر یک از این اعضا چیست؟

۲۲. هرگاه a عضوی با مرتبهٔ ۶ از یک گروه است چند عضو متمایز در $< a >$ وجود دارند؟ مرتبهٔ هر یک از این اعضا چیست؟

۲۳. هرگاه a عضوی با مرتبهٔ ۶ از یک گروه است همهٔ زیرگروه‌های $< a >$ را بیابید. آیا همهٔ این زیرگروه‌ها دوری هستند؟

۲۴. هرگاه a و b اعضای یک گروه دوری باشند آیا باید داشته باشیم $ab = ba$.

۲۵. هرگاه a عضوی با مرتبهٔ n از یک گروه است دربارهٔ مرتبهٔ a^{-1} چه می‌توان گفت؟

۲۶. گروه $(\mathbb{Z}, +)$ یک گروه دوری تولید شده به وسیلهٔ ۱ است. هرگاه $(H, +)$ زیرگروهی از $(\mathbb{Z}, +)$ و a کوچکترین عدد صحیح مثبت در H باشد ثابت کنید H تنها شامل اعضای $< a >$ است و نتیجه بگیرید هر زیرگروه $(\mathbb{Z}, +)$ دوری است.

۲۷. هرگاه G یک گروه دوری نامتناهی است ثابت کنید هر زیرگروه G دوری است.

۲۸. هرگاه G یک گروه دوری تولید شده به وسیلهٔ یک عضو g با مرتبهٔ n است بنا به سؤال ۱۹ می‌دانیم $G =< g >= \{g^r | r \in \mathbb{Z}\}$. ثابت کنید $G =< g >= \{g^r | ۰ \leq r < n\}$ و n عضو این مجموعه متمایز هستند. فرض کنید H زیرگروهی از G است و از میان همهٔ اعضای H، g^a عضوی با کوچکترین نمای مثبت باشد. ثابت کنید اگر k یک عدد صحیح مثبت کوچکتر از a است آنگاه هیچ عضو به صورت g^{la+k} نمی‌تواند در H باشد. نتیجه بگیرید $H =< g^a >$.

گروه‌های تولید شده به وسیلهٔ دو عضو

اگر یک گروه شامل اعضای a و b باشد آنگاه به روشنی شامل $< a >$ و $< b >$ است. در ارتباط با رابطهٔ بین اعضای a و b چه اعضای دیگری را باید داشته باشد. کوچکترین زیرگروه شامل a و b زیرگروه تولید شده به وسیلهٔ a و b نام دارد و با $< a, b >$ نمایش داده می‌شود. مثلاً ساده‌ترین رابطه بین a و b هرگاه آنها جایگشتهای دوری مجزا از یک گروه جایگشت باشند معادلهٔ $ab = ba$ است. هرگاه چنین معادله‌ای برقرار باشد می‌گوئیم a و b تعویض‌پذیرند یا در قانون تعویض‌پذیری صدق می‌کنند.

۲۹. هرگاه a و b اعضای یک گروه باشند و $ab = ba$ با استقرا روی n ثابت کنید $a^n b = ba^n$. به‌علاوه هرگاه عضو مفروض b مرتبهٔ ۲ داشته باشد با پُر کردن جدول ضرب

	a^i	ba^l
a^m		
ba^n		

ثابت کنید مجموعهٔ $\{a^n, ba^n | n \in \mathbb{Z}\}$ بسته است و آنگاه اثبات زیرگروه $< a, b >$ بودن آن را کامل کنید.

۳۰. هرگاه a و b اعضای یک گروه باشند و $ab = ba$ ثابت کنید $a^n b^۲ = b^۲ a^n$. (نیازی به استقرا نیست تنها لازم است سؤال ۲۹ را به کار برید).

به‌علاوه هرگاه عضو b مرتبهٔ ۳ داشته باشد با پُر کردن جدول ضرب

	a^i	ba^j	$b^۲a^k$
a^l			
ba^m			
$b^۲a^n$			

ثابت کنید مجموعهٔ $\{a^n, ba^n, b^۲a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ بسته است و آنگاه اثبات زیرگروه $< a, b >$ بودن آن را کامل کنید.

۳۱. اگر a و b اعضای یک گروه باشند و $ab = ba$ ثابت کنید به ازای همهٔ اعداد صحیح m و n داریم $a^m b^n = b^n a^m$. (سؤال ۲۹ و استقرا روی n را به کار برید.) نتیجه بگیرید $\{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ زیرگروهی از $< a, b >$ است.

۳۲. هرگاه a و b اعضای یک گروه باشند و $(ab)^۲ = a^۲b^۲$ ثابت کنید $ab = ba$.

۳۳. هرگاه a و b اعضای یک گروه باشند و $ab = ba$ ثابت کنید به ازای همهٔ اعداد صحیح $(ab)^n = a^n b^n$.

۳۴. هرگاه $a = (۱۲)$ و $b = (۳۴۵)$ مرتبهٔ ab چیست؟

۳۵. هرگاه $a = (۱۲)$ و $b = (۳۴۵۶۷)$ مرتبهٔ ab چیست؟

۳۶. هرگاه $a = (۱۲۳۴)$ و $b = (۵۶۷۸۹۰)$ مرتبهٔ ab چیست؟

۳۷. هرگاه a و b جایگشتهای دوری متمایز به ترتیب با طول m و n باشند و بزرگترین عامل مشترک m و n برابر با k باشد مرتبهٔ ab چیست؟

۳۸. با ارائهٔ مثالی نشان دهید اگر a و b اعضای یک گروه هستند و مرتبهٔ a برابر با ۶ و مرتبهٔ b برابر با ۱۰ است، آنگاه مرتبهٔ ab لزوماً ۳۰ نیست حتی‌اگر $ab = ba$.

هرگاه به ازای هر دو عضو a، b از یک گروه $(G, .)$ داشته باشیم $ab = ba$ آنگاه $(G, .)$ آبلی نام دارد.

گروه‌های دو وجهی

رابطهٔ دیگری که ممکن است بین دو عضو a و b از یک گروه برقرار باشد $ab = ba^{-۱}$ است و در این حالت نیز می‌توانیم توصیف کاملی از اعضای گروه $< a, b >$ ارائهٔ دهیم. ما تنها گروه‌هایی از این نوع را که مرتبهٔ b برابر با ۲ است بررسی می‌کنیم.

۳۹. هرگاه $a = (۱۲۳)$، $b = (۲۳)$ به‌طوری که $a^{۳} = b^{۲} = e$ بررسی کنید $ab = ba^{-۱}$ و با فهرست کردن جایگشتهای $a^{۲}$، ba و $ba^{۲}$ ثابت کنید $S_{۳} =< a, b >$.

۴۰. هرگاه $a = (۱۲۳۴)$ و $b = (۱۲)(۳۴)$ به‌طوری که $a^{۴} = b^{۲} = e$ بررسی کنید $ab = ba^{-۱}$ و با فهرست کردن جایگشتهای $a^{۲}$، $a^{۳}$، ba، $ba^{۲}$ و $ba^{۳}$ ثابت کنید $< a, b >$ گروه تقارنهای یک مربع مانند سؤال ۱۵ است.

۴۱. هرگاه $a = (۱۲۳۴۵)$ و $b = (۲۵)(۳۴)$ به‌طوری که $a^{۵} = b^{۲} = e$ بررسی کنید $ab = ba^{-۱}$ و با فهرست جایگشتهای $a^{۲}$، $a^{۳}$، $a^{۴}$، ba، $ba^{۲}$، $ba^{۳}$ و $ba^{۴}$ و با نشان‌گذاری رأسهای یک پنج ضلعی منتظم به ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ تقارنهای هندسی متناظر با این جایگشتها را نام ببرید.

۴۲. هرگاه a و b اعضای یک گروه باشند و مرتبهٔ b برابر با ۲ باشد و $ab = ba^{-۱}$ ثابت کنید $bab = a^{-۱}$. حاصلضرب $(bab)(bab)$ را به دو طریق ارزیابی کنید و ثابت کنید $ba^{۲}b = a^{-۲}$ و در نتیجه $a^{۲}b = ba^{-۲}$. این روش را برای اثبات $a^n b = ba^{-n}$ به ازای هر عدد صحیح n تعمیم دهید. با پُر کردن جدول ضرب

	a^k	ba^l
a^m		
ba^n		

ثابت کنید مجموعهٔ $\{a^n, ba^n | n \in \mathbb{Z}\}$ بسته است و آنگاه اثبات زیرگروه $< a, b >$ بودن آن را کامل کنید.

۴۳. یک گروه G به‌وسیلهٔ یک عضو a با مرتبهٔ n و یک عضو b با مرتبهٔ ۲ با رابطهٔ $ab = ba^{-۱}$ تولید می‌شود. ثابت کنید G شامل $۲n$ عضو است و مرتبهٔ هر عضو به صورت ab^r برابر با ۲ است. این مطلب تعریف مجرد گروه دو وجهی D_n است. نام دو وجهی از این واقعیت ناشی می‌شود که گروه تقارنهای یک n ضلعی منتظم در صفحه از این نوع است. سؤالهای ۴۱.۳ـ۴۷.۳ را ببینید.

گروه‌های تولید شده به‌وسیلهٔ مجموعه‌های بزرگتر

۴۴. هر عضو $S_{۳}$ را به صورت حاصلضرب ترانهشها بنویسید. این واقعیت را می‌توان با نوشتن $S_{۳} =< (۱۲), (۱۳), (۲۳) >$ توصیف کرد.

۴۵. با استفاده از سؤال ۲.۲۰ نشان دهید مجموعهٔ ترانهشهای S_n گروه S_n را تولید می‌کند.

۴۶. جایگشت $(۱a)(۱b)(۱a)$ را بیابید و نتیجه‌گیری کنید مجموعهٔ ترانهشتهای $\{(۱۲), (۱۳), \ldots, (۱n)\}$ گروه S_n را تولید می‌کند.

۴۷. جایگشت $(۱۳)(۱۲)$ را بیابید و جایگشت $(۱۳۲)(۱۳۴)$ را به صورت حاصلضربی از جایگشتهای دوری مجزا بنویسید و نتیجه‌گیری کنید که هر جایگشت زوج را می‌توان به صورت حاصلضربی از ۳ـ دورهای نوشت. به عبارت دیگر ۳ـ دورها A_n را تولید می‌کنند.

۴۸. چگونه یک انتقال را به صورت حاصلضرب دو بازتاب می‌توان نوشت و چگونه می‌توان یک دوران را به صورت حاصلضرب دو بازتاب نوشت. این مطلب نشان می‌دهد که هر تبدیل به صورت $z \mapsto e^{i\theta}z + c$ حاصلضرب دو بازتاب است. نتیجه‌گیری کنید که هر تبدیل به صورت $z \mapsto e^{i\theta}\bar{z} + c$ حاصلضربی از حداکثر سه بازتاب است و لذا مجموعهٔ بازتابها گروه اقلیدسی را تولید می‌کند.

۴۹. چون هر عضو گروه طولپاییهای مستقیم حاصلضرب دو بازتاب است نتیجه‌گیری کنید که حاصلضرب هر چهار بازتاب یا حاصلضرب هر تعداد زوج بازتابها برابر با حاصلضرب دو بازتاب است. همچنین ثابت کنید حاصلضرب هر تعداد فرد بازتابها یا برابر با یک بازتاب تنها یا حاصلضرب سه بازتاب است.

یکریختی

چه وقت می‌توانیم بگوییم دو گروه یکسان‌اند؟ در برخی حالتها بررسی این مطلب واضح است. مثلاً هرگاه اعضا و رابطه‌های بین آنها را با استفاده از حروف رومی می‌نویسیم همان گروه را خواهیم داشت اگر آنها با استفاده از حروف یونانی نوشته شده بودند. در سؤالهای ۲.۴۹ و ۳.۴۷ و سؤال ۴۰ راههای گوناگون نمایش گروه یکسان تقارنها را یافتیم. حالا این نوع امکان را بررسی می‌کنیم.

۵۰. هرگاه رأسهای یک مستطیل $D_۲$ را با اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ نشان‌گذاری کنیم گروه تقارنهای آن زیرگروهی از $S_۴$ است. سؤال ۲.۵۳ را ببینید.

گروه هندسی یکسانی را بیابید که گروه تقارنهای آن زیرگروه متفاوتی از $S_۴$ باشد که از نشان‌گذاری رأسهای یک لوزی به دست می‌آید. سؤال ۲.۴۶ را ببینید.

دوباره هر یک از اعضای این گروه هندسی را می‌توان به صورت یک طولپایی در $S_{\mathbb{C}}$ یا یک نگاشت از جفتهای مختصات (x, y) نوشت. سؤال ۴۱.۳ را ببینید.

۵۱. گروه تقارنهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع $D_۳$ را به صورت
(یک) یک زیرگروه $S_۳$ به وسیلهٔ نشان‌گذاری رأسها با ۱، ۲، ۳؛
(دو) زیرگروهی از $S_۶$ به وسیلهٔ نشان‌گذاری نقاط به فاصلهٔ یک سوم از هر رأس در امتداد اضلاع مثلث نمایش دهید.

دو فهرست از اعضای این گروه‌ها ارائه دهید که به سادگی اعضای دو گروه را با هم جور کند.

۵۲. اگر یک تناظر یک به یک از اعضای گروه G با اعضای گروه G' وجود داشته باشد که g را از G با g' از G' جور کند آنگاه تابع $G \mapsto G'$ تعریف شده با $g \mapsto g'$ یک یکریختی نام دارد و گروه‌های G و G' یکریخت نامیده می‌شوند به شرطی که به ازای هر جفت اعضای a، b در G داشته باشیم $(ab)' = a'b'$. در این صورت می‌نویسیم $G \cong G'$.

اگر $a = (۱۲۳)$ و $\alpha : z \mapsto e^{\frac{۲}{۳}\pi i}z$ برای هر یک از گروه‌های $\{e, a, a^۲\}$ و $\{I, \alpha, \alpha^۲\}$ جدولهای ضرب را بیابید و بگوئید برای یکریختی بین این دو گروه، چگونه اعضا باید تناظر یابند.

۵۳. با استفاده از این قرارداد که حاصلضرب ab در سطری قرار می‌گیرد که a سمت چپ و b در بالای آن باشد عمل دوتایی روی یک مجموعهٔ متناهی را می‌توان به وسیلهٔ یک جدول ضرب نمایش داد.

$$\begin{array}{c|c} & b \\ \hline a & ab \end{array}$$

برای جدولی که در زیر ارائه می‌شود بگویید چگونه عضو همانی را خواهید یافت. ویژگی بستاری را بررسی کنید و یک وارون برای هر عضو بیابید.

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

با استفاده از سؤال ۷ شرح دهید چرا اعضای یک سطر (یا یک ستون) جدول یک گروه باید متفاوت باشند.

۵۴. چون جدول ضرب یا جدول کیلی برای یک گروه، حاصلضربها را نمایش می‌دهد تناظر دو جدول کیلی تحقیقی برای ویژگی حافظ ساختار بودن $(ab)' = a'b'$ است.

کدام یک از جدولهای کیلی زیر برای یک گروه را می‌توان چنان تجدید آرایش کرد که یک یکریختی با گروه نمایش داده شده در سؤال ۵۳ نشان دهد.

	I	l	m	n
I	I	l	m	n
l	l	m	n	I
m	m	n	I	l
n	n	I	l	n

	p	I	q	r
p	I	p	r	q
I	p	I	q	r
q	r	q	I	p
r	q	r	p	I

۵۵. جدول کیلی

۰	۱	۲	۳
۱	۱	۲	۳
۲	۲	۳	۱
۳	۳	۱	۲

جدول یک گروه مانند G است.

یک جدول کیلی برای گروه جایگشت $\{(۱), (۱۲۳), (۱۳۲)\}$ تشکیل دهید و بررسی کنید G تحت عمل تناظر $(۱) \mapsto ۱$، $(۱۲۳) \mapsto ۲$، $(۱۳۲) \mapsto ۳$ با $A_۳$ یکریخت است. توابع $x \mapsto x \cdot ۱$ ، $x \mapsto x \cdot ۲$ و $x \mapsto x \cdot ۳$ از G را نمایش دهید. دربارهٔ تناظر $a \mapsto [x \mapsto x.a]$ چه می‌توانید بگویید؟

۵۶. برای هر یک از گروه‌های با جدول کیلی

	۱	۲	۳	۴
۱	۱	۲	۳	۴
۲	۲	۱	۴	۳
۳	۳	۴	۱	۲
۴	۴	۳	۲	۱

	۱	۲	۳	۴
۱	۱	۲	۳	۴
۲	۲	۳	۴	۱
۳	۳	۴	۱	۲
۴	۴	۱	۲	۳

چهار جایگشت $x \mapsto x \cdot ۱$، $x \mapsto x \cdot ۲$، $x \mapsto x \cdot ۳$، و $x \mapsto x \cdot ۴$ را بسازید. آیا تناظر $a \mapsto [x \mapsto x.a]$ در هر حالت یک یکریختی است؟

۵۷. برای هر گروه $(G, .)$ ثابت کنید مجموعهٔ توابع به صورت $x \mapsto x.a$ یک زیرگروه از S_G را تشکیل می‌دهند. با استفاده از متناظر کردن تابع $x \mapsto x.a$ با عضو a نشان دهید این زیرگروه S_G با $(G, \circ)$ یکریخت است.

به کمک این قضیه (کیلی، ۱۸۷۸) است که می‌توانیم نشان دهیم نقطهٔ شروع ما در فصل اول برای ارائه دادن یک نگارهٔ همریخت از هر گروهِ ممکن، به قدر کافی کلی بود.

۵۸. ثابت کنید گروه انتقالهای $\mathbb{R}$ با $(\mathbb{R}, +)$ یکریخت است.

۵۹. ثابت کنید گروه انتقالهای $\mathbb{C}$ با $(\mathbb{C}, +)$ یکریخت است.

۶۰. در گروه تبدیلهای حافظ نسبت $\mathbb{R}$ ثابت کنید پایدارساز ۰ با $(\mathbb{R} - \{۰\}, \times)$ یکریخت است.

۶۱. در گروه موبیوس با استفاده از این واقعیت که پایدارساز ∞ گروه تشابه‌های مستقیم است ثابت کنید پایدارساز ۰ و ∞ با $(\mathbb{C} - \{۰\}, \times)$ یکریخت است.

۶۲. با استفاده از تابع لگاریتمی ثابت کنید گروه ضربی اعداد حقیقی مثبت با $(\mathbb{R}, +)$ یکریخت است.

۶۳. اگر یک گروه دوری شامل n عضو متمایز باشد دربارهٔ مرتبهٔ یکی از مولدهای آن چه می‌توان گفت؟

۶۴. اگر دو گروه دوری هر یک n عضو متمایز داشته باشند ثابت کنید آنها یکریخت‌اند. نماد C_n برای توصیف این‌گونه گروه‌ها در حد یکریختی به کار می‌رود.

۶۵. نشان دهید دو گروه دوری نامتناهی یکریخت هستند.

۶۶. هرگاه $\alpha : G \mapsto G'$ یک یکریختی است و e عضو همانی G و e' عضو همانی G' است ثابت کنید $e\alpha = e'$.

۶۷. هرگاه $\alpha : G \mapsto G'$ یک یکریختی است و $g \in G$ ثابت کنید $(g^{-۱})\alpha$ وارون $g\alpha$ در G' است. به عبارت دیگر $(g^{-۱})\alpha = (g\alpha)^{-۱}$.

۶۸. هرگاه $\alpha : G \mapsto G'$ یک یکریختی است و g یک عضو مرتبهٔ n در G است ثابت کنید $g\alpha$ عضوی از مرتبهٔ n در G' است.

۶۹. مشخص کنید آیا گروه تمام تقارنهای یک مکعب مستطیل با طول و عرض و ارتفاع نابرابر یا گروه تمام تقارنهای صلیب شکستهٔ سه‌بُعدی با $D_۴$ یکریخت است.

خلاصهٔ مطالب

تعریف مجموعه‌ای مانند G که یک عمل دوتایی «.» روی آن تعریف شده است یک گروه نام دارد هرگاه

(یک) به ازای همهٔ $a, b \in G$، $a.b \in G$ (بستار)،

(دو) به ازای همهٔ $a, b, c \in G$، $a.(b.c) = (a.b).c$ (شرکت‌پذیری)،

(سه) عضوی مانند $e \in G$ وجود دارد که به ازای همهٔ $a \in G$، $a.e = e.a = a$ (همانی)،

(چهار) به ازای هر $a \in G$، عضوی مانند $a^{-۱} \in G$ وجو د دارد که $a.a^{-۱} = a^{-۱}.a = e$ (وارون).

قضیه عضو همانی در هر گروه یکتاست. عضو وارون هر عضو گروه یکتاست.

سؤالهای ۵،۶،۷ جوابهای x در معادله‌های $a.x = b$ و $x.a = b$ یکتا هستند.

تعریف اگر H یک زیرمجموعهٔ گروه $(G, \circ)$ و $(H, \circ)$ یک گروه

سؤال ۱۰

باشد آنگاه H یک زیرگروه G نام دارد.

قضیه
سؤال ۱۲
اشتراک دو زیرگروه یک زیرگروه است.

تعریف
سؤال ۱۳
هرگاه $h \in G$، کوچکترین زیرگروه G که h را در بر دارد یا اشتراک همهٔ زیرگروه‌های G که h را در بر دارند زیرگروهی از G است که با $< h >$ نمایش داده می‌شود و زیرگروه تولید شده به وسیلهٔ h نام دارد.

تعریف
سؤال ۲۰
یک گروه یا زیرگروه که به وسیلهٔ یک عضو تنها تولید شود دوری نامیده می‌شود.

قضیه
سؤالهای ۲۷، ۲۸
هر زیرگروه یک گروه دوری، دوری است.

تعریف
سؤال ۴۳
یک گروه تولید شده به وسیلهٔ دو عضو a و b که b مرتبهٔ ۲ دارد یک گروه دو وجهی نام دارد هرگاه $ab = ba^{-1}$.

تعریف
سؤال ۵۲
هرگاه $\alpha : G \mapsto G'$ یک دو سویی گروه‌ها باشد و به ازای هر $a, b \in G$، $(a.b)\alpha = (a\alpha).(b\alpha)$ گروه‌های G و G' یکریخت نامیده می‌شوند و α یک یکریختی نام دارد.

قضیه
سؤالهای ۶۶تا ۶۸
اگر $\alpha : G \mapsto G'$ یک یکریختی و e عضو همانی G باشد آنگاه $e\alpha$ عضو همانی G' است. اگر a^{-1} وارون a در G است آنگاه $a^{-1}\alpha$ وارون $a\alpha$ در G' است. اگر a در G مرتبهٔ n دارد آنگاه $a\alpha$ در G' مرتبهٔ n دارد.

یادداشت تاریخی

اصطلاح گروه را مدیون ا. گالوا (۱۸۳۰) هستیم، ک.ژوردان[1] (۱۸۷۰) و ف. کلاین (۱۸۸۴) تنها اصل بستار را برای تعریف کردن یک گروه به کار بردند. بقیهٔ اصول در کار آنها به نحو ضمنی مطرح شدند، زیرا مجموعه‌های متناهی جایگشتها یا تبدیلها را مورد بررسی قرار دادند. ا.کیلی[2] (۱۸۵۴) در مقاله‌ای نیاز به قانون شرکت‌پذیری و وجود عضو همانی را صریحاً مطرح کرد و وی یک گروه را با استفاده از نمادهای مجرد به صورت یک جدول ضرب یا مجموعه‌ای از رابطه‌های معرف تعریف کرد. در سال ۱۸۸۲ هم و. دیک[3] و هم هـ. وبر[4] اصول جدید برای یک گروه را مطرح کردند و بعد از انتشار کتاب وبر در ۱۸۸۶ وسیعاً مورد استفاده قرار گرفت.

ا.ل.کوشی در ۱۸۱۵ مرتبهٔ یک عضو گروه را تعریف کرد.

نیاز به مفهومی مانند یکریختی در کتابی[5] توسط ک.ف گاوس (۱۸۰۱) همراه با انواع زیادی گروه آبلی مطرح شده (گروه‌های جمعی و ضربی به پیمانهٔ n، ریشهٔ nام واحد، ترکیب صورتهای درجهٔ دوم با مبین یکسان) و در واقع مفهوم یکریختی با اسمهای گوناگون درکار اکثر ریاضیدانان رشتهٔ گروه‌ها در قرن نوزدهم ظاهر شد. در اثر منطقی ا.ن. وایتهد[6] و ب. راسل[7] (۱۹۱۰) آن صورت معین کنندهٔ «یکسانی» را به خود می‌گیرد.

---

1) C. Jordan 2) A. Cayley 3) W. Dyck 4) H.Weber
5) *Disquisitiones Arithmeticae* 6) A.N.Whitehead 7) B.Russell

جوابهای فصل ۶

۱. $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$، $\mathbb{C}$.

۲. $\mathbb{Q}-\{0\}$، $\mathbb{R}-\{0\}$، $\mathbb{C}-\{0\}$.

۳. $a-(b-c)\neq(a-b)-c$ مگر این که $c=0$. بنابراین مجموعهٔ تک عضوی $\{0\}$ تنها گروه تحت عمل تفریق است.

۴. $a/(b/c)\neq(a/b)/c$ مگر این که $c=\pm 1$. بنابراین $\{\pm 1\}$ و $\{1\}$ تنها گروه‌ها تحت عمل تقسیم هستند.

۵. $e=e.f=f$.

۶. $a^l=a^l(a.a^r)=(a^l.a)a^r=a^r$.

۷. $ax=b\Rightarrow a^{-1}(ax)=a^{-1}b\Rightarrow x=(a^{-1})b.a(a^{-1}b)=b.(a^{-1}b)^{-1}=a.$

۸. $e.e=e$ بنابراین یک چنین عضوی وجود دارد.
$a.a=a\Rightarrow a^{-1}(a.a)=a^{-1}a\Rightarrow a=e$

۹. $(ab)(b^{-1}a^{-1})=[(ab)b^{-1}]a^{-1}=aa^{-1}=e$. عضو $b^{-1}a^{-1}$ جواب یکتای $(ab)x=e$ است. اگر $a=(12)$ و $b=(13)$ آنگاه $(ab)^{-1}\neq a^{-1}b^{-1}$.

۱۰. $(\mathbb{Z},+)$، $(\mathbb{Q},+)$ و $(\mathbb{R},+)$ زیرگروه‌های $(\mathbb{C},+)$ هستند.

۱۱. جواب یکتای $a^2=a$ در H در واقع جوابی در G است. اگر e عضو همانی مشترک باشد و $a\in H$ آنگاه $ax=e$ جوابی یکتا در H و در G دارد.

۱۲. وجود همانی، وارونها و ویژگی بستار را بررسی کنید.

۱۳. ۱، ۱ + ۱، ۱ + ۱ + ۱، و غیره و وارونهای آنها.

۱۴. ۲، ۲ + ۲، ۲ + ۲ + ۲، و غیره و وارونهای آنها.

۱۵. $\alpha^2=(13)(24)$، نیم‌دور. $\beta\alpha=(13)$، بازتاب. $<\alpha>=\{I,\alpha,\alpha^2,\alpha^3\}$.

۱۶. ۳ ، $<\beta>=\{I,\beta,\beta^2\}$.

۱۷. مرتبهٔ ۱ : (۱)؛ مرتبهٔ ۲: (۱۲)، (۱۳)، (۲۳)؛ مرتبهٔ ۳: (۱۲۳)، (۱۳۲).

۱۸. مرتبهٔ ۱: I؛ مرتبهٔ ۲: α^2، β، $\beta\alpha$، $\beta\alpha^2$، $\beta\alpha^3$؛ مرتبهٔ ۴: α، α^3.

۱۹. به روشنی بسته است. g^0 همانی است. $g^{-n}=(g^n)^{-1}$. بله.

۲۰. $\alpha=(12345)$. $<\alpha>$ پنج عضو دارد.

۲۱. پنج عضو. مرتبهٔ ۱: I، مرتبهٔ ۵: a، $a^۲$، $a^۳$، $a^۴$.
۲۲. شش عضو. مرتبهٔ ۱: I؛ مرتبهٔ ۲: $a^۳$؛ مرتبهٔ ۳: $a^۲$، $a^۴$؛ مرتبهٔ ۶: a، $a^۵$.
۲۳. $\{I\}$، $\{I, a^۳\}$، $\{I, a^۲, a^۴\}$، $\{I, a, a^۲, a^۳, a^۴, a^۵\}$. همگی دوری هستند.
۲۴. اگر $a = g^n$ و $b = g^m$ آنگاه $ab = g^{n+m} = g^{m+n} = ba$.
۲۵. چون $a^i(a^{-۱})^i = I$، $(a^{-۱})^n = I$، و نه توان کمتر.
۲۶. اگر $b \in H$، $b \neq ka$ آنگاه به ازای برخی مقادیر k، $ka < b < (k+۱)a$ و $۰ < b - ka < a$ یک عضو مثبت کوچکتر متعلق به H را می‌دهد.
۲۷. اگر $G =< g >$ آنگاه هر زیرگروه آن عضوی مانند g^a با کوچکترین توان مثبت دارد. سپس شبیه سؤال ۲۶ استدلال کنید.
۲۸. اگر $g^n = I$ آنگاه $g^r = g^{r+kn}$ بنابراین هر عضو $< g >$ در مجموعهٔ مورد نظر است. اگر $۰ \leq r, s < n$ و $g^r = g^s$ آنگاه $I = g^{s-r} = g^{r-s}$ بنابراین یا $r = s$ یا مرتبهٔ g کمتر از n است. H زیرگروه $< g^a >$ را در بر دارد و بنابراین شامل g^{la} است. اگر H شامل g^{la+k} باشد H شامل g^k خواهد بود که تناقض است.
۲۹. به ازای $n = ۱$ داده شده است. فرض کنید $a^n b = ba^n$. آنگاه

$$a^{n+۱}b = (a^n.a)b = a^n(ab) = a^n(ba) = (a^n b)a = (ba^n)a = ba^{n+۱}$$

مثلاً $a^m ba^l = a^{m+l}b$ و $(ba^n)(ba^l) = a^{n+l}$. بسته است عضو همانی $a^۰$ است و وارون ba^n برابر ba^{-n} است.
۳۳. $n = ۱$ بدیهی است. فرض کنید $(ab)^n = a^n b^n$ آنگاه بنا به سؤال ۲۹

$$(ab)^{n+۱} = (ab)^n(ab) = a^n b^n(ab) = a^n ab^n b.$$

۳۴. ۶.
۳۵. ۱۰.
۳۶. ۱۲.
۳۷. mn/k.
۳۸. $a = (۱۲)(۳۴۵)$، $b = (۱۲)(۶۷۸۹۰)$.
۴۲. $a^{-۱}.a^{-۱} = babbab = baab = ba^۲b$. به همین نحو $ba^n b = a^{-n}$.
۴۳. $G = \{a^i, ba^j | ۰ \leq i, j < n\}$.

۴۴. (۱۲)(۱۲) = (۱)، (۱۳)(۱۲) = (۱۲۳)، (۱۲)(۱۳) = (۱۳۲).

۴۷. (۱۲۳) = (۱۳)(۱۲). (۱۲)(۳۴) = (۱۳۲)(۱۳۴). در رشتهٔ ترانهشها هر جفت مجاور را می‌توان یا به صورت یک ۳ـ دور (اگر عضو مشترک داشته باشند) یا به صورت حاصلضربی از دو ۳ـ دور (اگر آنها متمایزند) نوشت.

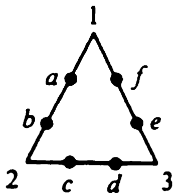
۴۸. هر انتقال حاصلضرب دو بازتاب با محورهای موازی است. طول انتقال دو برابر فاصلهٔ محورهاست سؤال ۲۱.۳ را ببینید.

۴۹. سؤال ۳۷.۳ را ببینید.

۵۰.

$(x,y) \mapsto (x,y)$	$z \mapsto z$	(۱)	(۱)
$(x,y) \mapsto (x,-y)$	$z \mapsto \bar{z}$	(۱۳)	(۱۲)(۳۴)
$(x,y) \mapsto (-x,y)$	$z \mapsto -\bar{z}$	(۲۴)	(۱۴)(۲۳)
$(x,y) \mapsto (-x,-y)$	$z \mapsto -z$	(۱۳)(۲۴)	(۱۳)(۲۴)

۵۱.



مثلاً $(af)(be)(cd) \leftrightarrow$ (۲۳) و $(ace)(bdf) \leftrightarrow$ (۱۲۳).

۵۲. $e \leftrightarrow I$، $a \leftrightarrow \alpha$، $a^2 \leftrightarrow \alpha^2$.

۵۳. دو عضو در یک سطر عبارت‌اند ax و ay و $ax = ay \Rightarrow x = y$.

۵۴. $\{I, p, q, r\}$.

۵۵. $x \mapsto x \cdot 2$ برابر (۱۲۳) است. $a \mapsto [x \mapsto x.a]$ یک یکریختی است.

۵۷. اگر $\alpha : x \mapsto x.a$ و $\beta : x \mapsto x.b$ آنگاه $\alpha\beta : x \mapsto (x.a).b = x.(ab)$

که یک یکریختی است.

۶۲. $xy \mapsto \log xy = \log x + \log y$.

۶۳. هر یک مرتبهٔ n دارد.

۶۴. $a^i \leftrightarrow b^i$.

۶۵. هرگاه a و b مولد هستند و $a^i \leftrightarrow b^i$، $a^m.a^n = a^{m+n} \leftrightarrow b^{m+n} = b^m b^n$.

۶۶. $a.e = e.a = a$ بنابراین $(a.e)\alpha = (e.a)\alpha = a\alpha$ لذا $a\alpha \cdot e\alpha = e\alpha \cdot a\alpha = a\alpha$ و $e\alpha$ همانی است.

۶۷. $g.g^{-۱} = g^{-۱}.g = e$ بنابراین $(g.g^{-۱})\alpha = (g^{-۱}.g)\alpha = e\alpha$ لذا همانی $= g\alpha.g^{-۱}\alpha = g^{-۱}\alpha.g\alpha = e\alpha$.

۶۸. $g^i\alpha = (g\alpha)^i.g^n = e \Rightarrow (g\alpha)^n = e\alpha$ بنابراین $g\alpha$ مرتبهٔ n یا کمتر دارد. اما $(g\alpha)^m = e\alpha \Rightarrow g^m\alpha = e\alpha$ و α یک به یک است بنابراین $g^m = e$. یعنی اعضای با مرتبهٔ یکسان تحت یک یکریختی باید با هم جور شوند.

۶۹.

تعداد اعضای از مرتبهٔ	۱	۲	۴
مکعب مستطیل	۱	۷	
صلیب شکستهٔ سه‌بُعدی	۱	۳	۴
$D_۴$	۱	۵	۲

بنابراین هیچ یکریختی‌یی امکان ندارد، زیرا اعضای با مرتبهٔ یکسان بنا به سؤال ۶۸ باید جور شوند.

MATH75.IR

۷

انعکاسهای صفحهٔ موبیوس و تصویر گنجنگاشتی

در این فصل یک مثال از یک گروه تولید شده به وسیلهٔ همهٔ انعکاسها را که گروه موبیوس را به‌عنوان یک زیرگروه در بر دارد با جزئیات شرح می‌دهیم و یک یکریختی خاص را بررسی می‌کنیم. در واقع گروه تولید شده به وسیلهٔ انعکاسها گروه تمام تبدیلهای حافظ دایره در صفحه است، به هر حال ما این برهان را کامل نمی‌کنیم، زیرا آن به این واقعیت بستگی دارد که تابع همانی تنها تابع $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ است که هم یک یکریختی از گروه جمعی اعداد حقیقی و هم یک یکریختی از گروه ضربی اعداد حقیقی است. یکریختی مورد بررسی ما، بین گروه تمام تبدیلهای حافظ دایرهٔ صفحهٔ موبیوس و یک گروه از تبدیلهایی رویهٔ یک کره است. یکریختی مزبور استفاده از تصویر گنجنگاشتی را مطرح می‌کند و فایدهٔ این یکریختی حفظ ساختار هندسی است.

مطالعهٔ همزمان: صفحه‌های ۱۹ـ۲۹ کتاب فوردر[1]؛ صفحه‌های ۲۴۸ـ۲۶۸ کتاب هیلبرت و کوهن ـ وسن؛ صفحه‌های ۵۵ـ۵۷ کتاب یاگلوم[2]؛ فصلهای ۳، ۴، و ۵ کتاب ناپ؛ صفحه‌های ۳۸ـ۴۱، ۴۶ـ۵۸ کتاب هیلی[3]؛ فصل ۲ کتاب کلاپن.

انعکاس

۱. هرگاه $\sum$ دایره‌ای به مرکز O و شعاع a و S دایره‌ای باشد که $\sum$ را متعامداً قطع کند و به‌علاوه یک قطر $\sum$ دایره S را در نقاط A و B قطع می‌کند مقدار $OA.OB$ برابر

1) Forder 2) Yaglom 3) Hille

با چیست؟ (سؤال ۳۱.۴ را ببینید)

۲. اگر $\sum$ دایره‌ای به مرکز O و شعاع a و A، B دو نقطه روی یک شعاع $\sum$ باشند که $OA.OB = a^۲$ آنگاه A و B نقاط منعکس نسبت به $\sum$ نامیده می‌شوند. هرگاه $A \neq B$ آیا هر دایرهٔ گذرنده از A و B، $\sum$ را متعامداً قطع می‌کند؟

۳. هرگاه $\sum$ یک دایره و A، B دو نقطه در صفحهٔ $\sum$ باشند که هر دایرهٔ گذرنده از A و B دایرهٔ $\sum$ را متعامداً قطع کند آیا لزوماً A و B نقاط منعکس نسبت به $\sum$ هستند؟ هرگاه α یک تبدیل موبیوس باشد دربارهٔ $A\alpha$ و $B\alpha$ در رابطه با $\sum\alpha$ چه می‌توانید بگویید؟ هرگاه $\sum\alpha$ یک خط مستقیم باشد چه اتفاقی می‌افتد؟

۴. برای هر دایرهٔ $\sum$ از صفحه، یک انعکاس نسبت به $\sum$ را به صورت تبدیلی از صفحهٔ موبیوس که هر جفت نقاط منعکس و نیز ∞ را با مرکز $\sum$ مبادله می‌کند تعریف می‌کنیم. در حالتی که $\sum$ دایرهٔ $|z| = ۱$ است. آیا این تعریف با سؤال ۳۶.۴ یکی است؟ نقاط ثابت یک انعکاس نسبت به $\sum$ چه هستند؟

۵. هرگاه دایرهٔ S بر $\sum$ عمود باشد نگارهٔ S تحت انعکاس نسبت به $\sum$ چیست؟

۶. هرگاه L قطری از $\sum$ باشد نگارهٔ L تحت انعکاس نسبت به $\sum$ چیست؟

۷. هرگاه z و z' نقاط منعکس نسبت به دایرهٔ $|z| = a$ باشند با استفاده از سؤال ۳۴.۴ نشان دهید اگر $z = re^{i\theta}$ آنگاه $z' = (a^۲/r)e^{i\theta}$.

۸. هرگاه دو دایره مرکز یکسان و شعاعهای متمایز a و b داشته باشند مرکز را به‌عنوان مبدأ بگیرید و حاصلضرب دو انعکاس متوالی در دو دایره را محاسبه کنید. توصیفی هندسی از تبدیل مرکب ارائه دهید.

۹. ثابت کنید هر تشابه مستقیم را می‌توان به صورت حاصلضرب دو بازتاب و دو انعکاس نوشت.

۱۰. از این واقعیت که $z \mapsto \frac{۱}{z}$ حاصلضرب یک بازتاب و یک انعکاس است (مانند سؤال ۳۶.۴) استفاده کرده و ثابت کنید هر تبدیل موبیوس حاصلضربی از جمعاً تعدادی زوج بازتاب و انعکاس است.

۱۱. تشابه‌ها و شباهتهای هندسی بین یک بازتاب و یک انعکاس نسبت به یک دایره را توصیف کنید. هرگاه اصطلاح «انعکاس نسبت به خط مستقیم» را به معنای بازتاب به کاربریم چگونه گروه تبدیلهای صفحهٔ موبیوس تولید شده به وسیلهٔ انعکاسها به S_M و گروه موبیوس مربوط می‌شود.

۱۲. هرگاه z, z' نقاط منعکس نسبت به دایره‌ای به مرکز s و شعاع R هستند، نشان دهید اگر $z - s = re^{i\theta}$ آنگاه $z' - s = (R^۲/r)e^{i\theta}$ و نتیجه بگیرید انعکاس نسبت به این دایره به صورت $z \mapsto R^۲/\overline{(z-s)} + s$ است. ثابت کنید به ازای انتخابی مناسب از a، b، c و d این انعکاس را می‌توان به صورت

$$z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

با $ad - bc \neq ۰$ نوشت.

۱۳. نشان دهید حاصلضرب دو انعکاس یک تبدیل موبیوس است.

۱۴. دربارهٔ یک تبدیل که حاصلضربی از تعدادی زوج انعکاس است چه می‌توان گفت؟

۱۵. صورت کلی جبری هر تبدیلی را که می‌توان به صورت حاصلضربی از تعدادی فرد انعکاس نوشت ارائه کنید.

۱۶. آیا هر تبدیل در گروه تولید شده به وسیلهٔ انعکاسها باید یا یک تبدیل موبیوس یا حاصلضربی از یک تبدیل موبیوس و یک بازتاب باشد و از این رو مجموعهٔ خطها و دایره‌های صفحهٔ موبیوس را حفظ می‌کند؟ هر چنین تبدیلی یک تبدیل مستدیر نام دارد و در واقع گروه تمام تبدیلهای مستدیر به وسیلهٔ انعکاسها تولید می‌شود، هرچند ما این مطلب را ثابت نمی‌کنیم.

۱۷. در نمودار سؤال ۱.۴ ثابت کنید $NA.NA' = NO^۲$. نگارهٔ دایرهٔ به قطر ON را تحت یک انعکاس نسبت به دایره‌ای به مرکز N و شعاع NO را بیابید.

۱۸. هرگاه A و B نقاط روی محیط یک دایرهٔ $\sum$ باشند نگارهٔ خط AB تحت انعکاس نسبت به $\sum$ چیست؟

۱۹. هرگاه $\sum$ دایره‌ای به مرکز O باشد و خط l دایرهٔ $\sum$ را قطع نکند فرض کنید A پای عمود از O بر l و B نقطهٔ دیگری از l باشد. فرض کنید A' منعکس A و B' منعکس B نسبت به $\sum$ است. نشان دهید B' روی دایرهٔ به قطر OA' قرار دارد. منعکس l نسبت به $\sum$ چیست؟

تصویر گنجنگاشتی

سؤالهای ۲۰_۲۸ نشان می‌دهند که نگارهٔ یک دایره تحت تصویر گنجنگاشتی یا یک

دایره یا یک خط مستقیم است. روش اثبات در نظرگرفتن تصویر گنجنگاشتی به صورت جزئی از یک انعکاس سه‌بُعدی است.

۲۰. هرگاه $\sum$ کره‌ای به مرکز O و شعاع a باشد و انعکاس نسبت به $\sum$ را به صورت نگاشتی از فضای حقیقی سه‌بُعدی که به‌آن نقطهٔ ∞ افزوده شده تعریف می‌کنیم که دو نقطه A و B روی یک شعاع $\sum$ مبادله می‌شوند هرگاه $OA.OB = a^۲$ و O با ∞ مبادله می‌شود، با استفاده از سؤال ۱۷ نگارهٔ یک صفحهٔ مماس بر $\sum$ را تحت انعکاسی نسبت به $\sum$ بیابید.

۲۱. با استفاده از نمودار سؤال ۱.۴ و تعریف سؤال ۴. ۳۵ و مفهوم انعکاس نسبت به یک کره تصویر گنجنگاشتی را توصیف کند.

۲۲. با استفاده از سؤالهای ۱۸ و ۱۹ نگارهٔ یک صفحه (غیر از یک صفحهٔ مماسی) را تحت انعکاس نسبت به یک کره بیابید.

۲۳. نگارهٔ یک کره تحت انعکاس نسبت به یک کره چیست؟

۲۴. در فضای حقیقی سه‌بُعدی فرض کنید $\sum$ رویهٔ یک کره به مرکز O و شعاع a و P پای عمود از O بر یک صفحهٔ Π را نمایش دهد.

ماهیت $\sum \cap \Pi$ را مشخص کنید هرگاه

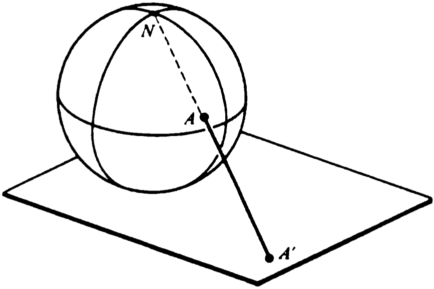
(یک) $OP > a$،

(ب) $OP = a$،

(سه) $OP < a$.

۲۵. آیا هر دایرهٔ روی یک کره مقطع یک صفحه با آن کره است؟

۲۶. تصویر گنجنگاشتی را به صورت تحدید یک انعکاس سه‌بُعدی در نظر بگیرید سپس نگارهٔ یک دایره را تحت تصویر گنجنگاشتی بیابید.



۲۷. نمادگذاری سؤال ۳۵.۴ را به کار برید و نگارهٔ یک دایرهٔ گذرنده از N تحت تصویر گنجنگاشتی را بیابید.

۲۸. نگارهٔ مجموعهٔ همهٔ دایره‌های روی یک کره تحت تصویر گنجنگاشتی چیست؟

بررسی این که تحت تصویر گنجنگاشتی دایره‌ها بروی دایره‌ها یا خطهای مستقیم نگاشته می‌شوند انجام شد، یک ویژگی اصلی دیگر از تصویر گنجنگاشتی یعنی حفظ کردن زاویه‌های تقاطع را باید ثابت کنیم. استفاده از یک کرهٔ شفاف یا سیمی می‌تواند مفید باشد.

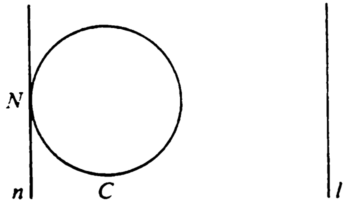
۲۹. هرگاه دو خط مستقیم در صفحه یکدیگر را در نقطهٔ P قطع کنند و P' تصویر گنجنگاشتی P باشد دربارهٔ خمهای روی کره که بروی دو خط مستقیم مفروض نگاشته می‌شوند چه می‌توان گفت؟

اگر دو خم هموار یکدیگر را در نقطهٔ P قطع کنند آنگاه زاویهٔ بین خمها زاویهٔ بین مماسهای بر خمها در P تعریف می‌شود.

۳۰. قدم اول در نشان دادن این که تصویر گنجنگاشتی زاویه‌ها را حفظ می‌کند برابر گرفتن زاویهٔ بین دو خط در صفحهٔ نگاره با زاویهٔ بین دو خط گذرنده از نقطهٔ تصویر است.

فرض کنید NS قطر یک کرهٔ $\sum$ و $\prod_N$ و $\prod_S$ به ترتیب صفحه‌های مماس بر $\sum$ در N و S باشند به نحوی که $\sum$ مانند یک گوی بین دو تختهٔ $\prod_N$ و $\prod_S$. آیا $\prod_N$ و $\prod_S$ موازی هستند؟

فرض کنید l خطی در صفحهٔ $\prod_S$ و صفحه‌ای که شامل نقطهٔ N و خط l است صفحه $\prod_N$ را در n قطع می‌کند. چرا خطهای l و n باید موازی باشند؟ هرگاه l تصویر گنجنگاشتی دایره C روی $\sum$ است چرا n باید بر C مماس باشد؟



۳۱. هرگاه l_1 و l_2 خطهایی در صفحهٔ $\prod_S$ باشند دو خط متناظر n_1 و n_2 در $\prod_N$ را مانند سؤال ۳۰ تعریف می‌کنیم چرا زاویهٔ بین l_1 و l_2 برابر با زاویهٔ بین n_1 و n_2 است؟

هرگاه خطهای l_1 و l_2 تصویرهای گنجنگاشتی دایره‌های C_1 و C_2 باشند چرا زاویهٔ بین l_1 و l_2 برابر با زاویهٔ تقاطع C_1 و C_2 است؟ چه نقطه‌ای از کره به نقطهٔ تقاطع l_1 و l_2 نگاشته می‌شود؟

بنا به سؤال ۳۱ حفظ زاویه‌ها تحت تصویر گنجنگاشتی فوراً نتیجه می‌شود. قدم بعدی به کار بردن این دو نتیجه یعنی حفظ دایره‌ها و حفظ زاویه‌ها تحت تصویر گنجنگاشتی در مورد نگارهٔ دایره‌های متعامد تحت تصویر گنجنگاشتی است و از این رو تبدیلی از کره که در تناظر با تبدیلی از انعکاس در صفحه است مشخص می‌شود.

۳۲. هرگاه دو دایره روی یک کره متعامداً یکدیگر را قطع کنند دربارهٔ نگاره‌های آنها تحت تصویر گنجنگاشتی چه می‌توان گفت؟

۳۳. هرگاه یک دایرهٔ S و دو نقطهٔ A و B روی یک کره تحت تصویر گنجنگاشتی به ترتیب نگاره‌های S'، A'، B' داشته باشند و A' و B' نسبت به S' منعکس باشند دربارهٔ دایره‌های گذرنده از A' و B' در صفحه چه می‌توان گفت (سؤال ۲ را ببینید)؟ دربارهٔ دایره‌های گذرنده از A و B روی کره چه می‌توان گفت؟

۳۴. تجسم دایره‌های متعامد روی یک کره ساده نیست مگر این که برای هر دایرهٔ روی کره یک مخروط مماس یکتا را مشخص کنیم. هرگاه P نقطه‌ای روی یک دایرهٔ S باشد که روی یک کرهٔ $\sum$ قرار دارد چند خط گذرنده از P وجود دارند که در P بر کرهٔ $\sum$ مماس‌اند و بر S عمودند؟

۳۵. هرگاه $\sum$ کره‌ای به مرکز O و شعاع a و S دایره‌ای واقع بر روی $\sum$ با مرکز B و شعاع b باشد یک نقطهٔ V روی خط OB را مشخص کنید که هر مماس از V بر $\sum$ دایرهٔ S را قطع کند. نقطهٔ V رأس مخروط مماس بر S نام دارد.

۳۶. هرگاه C و S دایره‌هایی روی کره $\sum$ باشند که یکدیگر را متعامداً در دو نقطهٔ P و Q قطع کنند دربارهٔ مماسهای بر C در نقاط P و Q چه می‌توان گفت؟ چه نقطهٔ دیگری باید در صفحهٔ دایرهٔ C قرار گیرد.

۳۷. هرگاه هر دایرهٔ روی یک کره از نقاط A و B بگذرد و دایرهٔ C روی کره را متعامداً قطع کند چگونه A و B به رأس مخروط مماس بر S مربوط می‌شوند؟

۳۸. هرگاه دایرهٔ S' در صفحه، تصویر گنجنگاشتی دایرهٔ S روی کره باشد چه تبدیلی از رویهٔ کره به انعکاس نسبت به S' در صفحه تناظر می‌یابد.

۳۹. هرگاه دایرهٔ S یک دایرهٔ عظیمه، یعنی، استوای کره باشد جواب سؤال ۳۸ چگونه

باید تعدیل شود؟

۴۰. با استفاده از مشابه سه‌بُعدی سؤال ۲۱.۳ دربارهٔ تبدیلی در صفحه که با دورانی از کره حول یک قطر تناظر می‌یابد چه می‌توان گفت؟

کرهٔ ریمان

حالا فرض می‌کنیم ON قطر کره $\sum$ برابر با واحد باشد و صفحهٔ مماس در O یک صفحه گاوس با مبدأ در O باشد و نقاط $\sum - \{N\}$ را با مجموعهٔ $\mathbb{C}$ نشان‌گذاری می‌کنیم، در واقع نگاره‌های نقاط کره تحت تصویر گنجنگاشتی از N را به عنوان نشان به کار می‌بریم. به‌علاوه N را با ∞ نشان گذاری می‌کنیم و کره‌ای که به این نحو نشان‌گذاری شده را کرهٔ ریمان می‌نامیم.

۴۱. بررسی کنید یک بازتاب کرهٔ ریمان نسبت به صفحهٔ قطری عمود بر ON نگاشت $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ است.

۴۲. چرا هر دوران کرهٔ ریمان باید یک تبدیل موبیوس باشد؟

۴۳. نقاط z، $\bar{z}$، $-z$، $-\bar{z}$، $\frac{1}{\bar{z}}$، $\frac{1}{z}$، $-\frac{1}{\bar{z}}$، $-\frac{1}{z}$ چگونه روی کرهٔ ریمان قرار می‌گیرند.

۴۴. نقطهٔ متقاطر با z روی کرهٔ ریمان چیست؟

۴۵. هرگاه α دورانی از کرهٔ ریمان باشد چرا $\alpha(-\frac{1}{\bar{z}}) = -\frac{1}{\overline{(z\alpha)}}$؟

۴۶. هرگاه

$$\alpha : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

یک دوران کره ریمان باشد با در نظر گرفتن نگاره‌های ۰ و ∞ ثابت کنید $\bar{a}b + \bar{c}d = 0$ و نتیجه‌گیری کنید

$$c\bar{c}(\frac{bc-ad}{bc}) = a\bar{a} + c\bar{c}$$

و

$$b\bar{b}(\frac{bc-ad}{bc}) = b\bar{b} + d\bar{d}$$

با در نظر گرفتن نگاره‌های ۱ و ۱- ثابت کنید $a\bar{a} + c\bar{c} = b\bar{b} + d\bar{d}$ و نتیجه بگیرید $b\bar{b} = c\bar{c}$ و $a\bar{a} = d\bar{d}$. چون $|d| = |a|$ می‌توانیم قرار دهیم $d = \bar{a}e^{i\theta}$. حالا نتیجه

بگیرید $-b = \bar{c}e^{i\theta}$ به نحوی که

$$\alpha : z \mapsto \frac{az+b}{-\bar{b}e^{i\theta}z + \bar{a}e^{i\theta}}$$

با ضرب صورت و مخرج در یک عدد مناسب نشان دهید هر دوران کرهٔ ریمان به صورت

$$z \mapsto \frac{az+b}{-\bar{b}z+\bar{a}}$$

است.

۴۷. فرض کنید α تبدیل کرهٔ ریمان را نمایش دهد.

$$\alpha : z \mapsto \frac{az+b}{-\bar{b}z+\bar{a}}$$

(یک) ثابت کنید نگارهٔ یک جفت از نقاط متناظر روی کره ریمان تحت α یک جفت نقطهٔ متقاطر است، یعنی α قطرها را حفظ می‌کند.
(دو) با استفاده از سؤال ۲۵.۴ و سؤال ۲۸ (حفظ دایره‌ها) نتیجه بگیرید نگارهٔ یک دایرهٔ عظیمه تحت α دایره‌ای عظیمه است.
(سه) با استفاده از سؤال ۴۴.۴ ثابت کنید α یک جفت نقاط متقاطر مثلاً C، D را ثابت نگاه می‌دارد.
(چهار) آیا نگارهٔ یک دایرهٔ گذرنده از C و D تحت α باید دایره‌ای گذرنده از C و D باشد؟
(پنج) یک دایرهٔ عظیمهٔ یکتای متعامد بر همهٔ دایره‌های گذرنده از C و D بیابید. با استفاده از سؤالهای ۴۲.۴ و ۳۱ نشان دهید این دایره به وسیلهٔ α ثابت نگاه داشته می‌شود.
(شش) نگارهٔ دایرهٔ (پنج) تحت یک دوران کره حول قطر CD چیست؟
(هفت) با استفاده از این واقعیت که زاویهٔ بین دو دایرهٔ عظیمهٔ گذرنده از C و D برابر است با زاویهٔ بین نگاره‌های آنها تحت α نشان دهید α با دورانی در C و D و روی دایرهٔ حالت (پنج) یکی است.
(هشت) فرض کنید P و Q دو نقطهٔ دلخواه روی کرهٔ ریمان باشند که متقاطر نیستند و S مرکز کره باشد. اگر AB قطر عمود بر صفحهٔ SPQ باشد با توجه به حفظ دایره‌های عظیمه و زاویه‌ها تحت α مثلث کروی APQ و $A\alpha P\alpha Q\alpha$ را مقایسه کنید و نتیجه بگیرید که طول کمان PQ دایرهٔ عظیمه برابر است با طول کمان دایرهٔ عظیمهٔ $P\alpha Q\alpha$ به نحوی که α روی کرهٔ ریمان به صورت یک طولپایی عمل می‌کند.

۴۸. اگر σ تصویر گنجنگاشتی از کره به صفحه را نمایش دهد تابعی را بیابید که یک یکریختی بین تبدیلهای مستدیر صفحهٔ موبیوس و تبدیلهای حافظ دایره از کره را به دست دهد.

خلاصهٔ مطالب

تعریف **سؤال ۲** دو نقطهٔ A و B نسبت به یک دایره به مرکز O و شعاع a منعکس یکدیگرند هرگاه آنها روی یک شعاع گذرنده از O قرار گیرند و $OA.OB = a^2$. همچنین O و ∞ نقاط منعکس هستند.

قضیه **سؤال ۳** دو نقطهٔ متمایز A و B نسبت به یک دایرهٔ $\sum$ منعکس‌اند اگر و تنها اگر هر دایرهٔ گذرنده از A و B دایرهٔ $\sum$ را متعامداً قطع کند.

تعریف **سؤال ۴** یک انعکاس صفحهٔ موبیوس نسبت به یک دایرهٔ مفروض جفتهای نقاط منعکس نسبت به دایرهٔ مفروض و نیز مرکز دایره و ∞ را مبادله می‌کند.

قضیه **سؤال ۱۴** هر تبدیل موبیوس حاصلضربی از تعدادی زوج انعکاس است.

قضیه **سؤال ۱۶** گروه تولید شده به وسیلهٔ انعکاسها، مجموعه دایره‌ها و خطها را بروی مجموعهٔ دایره‌ها و خطها می‌نگارد.

قضیه **سؤال ۲۸** مجموعهٔ دایره‌های روی کره تحت تصویر گنجنگاشتی بروی مجموعهٔ دایره‌ها و خطهای صفحهٔ موبیوس نگاشته می‌شود.

قضیه **سؤال ۳۱** تحت تصویر گنجنگاشتی زاویهٔ بین دو خم حفظ می‌شود.

قضیه **سؤال ۳۸** یک تصویر مخروطی روی کره با انعکاسی از صفحه تحت تصویر گنجنگاشتی تناظر می‌یابد.

یادداشت تاریخی

بررسی ا.ف. موبیوس دربارهٔ تبدیلهای تولید شده به وسیلهٔ انعکاسها (۱۸۵۲_۱۸۵۶) در برگیرندهٔ فهرست کاملی از تبدیلهای حافظ دایره از صفحه بود.

ارتباط بین تبدیلهای صفحه و تبدیلهای رویهٔ کره در سال ۱۸۷۵ توسط ف. کلاین بررسی شد و وی آن را در کتاب درسهایی دربارهٔ بیست وجهی (۱۸۸۴) کاملاً مورد بررسی قرار داد.

جوابهای فصل ۷

۱. a^2.

۲. بله، سؤال ۳۲.۴ را ببینید.

۳. تبدیلهای موبیوس دایره‌ها (سؤال ۲۵.۴) و تعامد (سؤال ۴۲.۴) را حفظ می‌کنند بنابراین $A\alpha$ و $B\alpha$ نسبت به $\sum\alpha$ نقاط منعکس هستند. اگر $\sum\alpha$ یک خط مستقیم باشد عمودمنصف $A\alpha B\alpha$ است.

۴. نقاط روی محیط $\sum$.

۵. S به خود نگاشته می‌شود.

۶. L به خود نگاشته می‌شود و مرکز و ∞ مبادله می‌شوند.

۸. $z \mapsto (\frac{b^2}{a^2})z$، یک بزرگسازی.

۹. هرگاه $a = re^{i\theta}$، $z \mapsto az + b$ ترکیب $z \mapsto rz$ و $z \mapsto e^{i\theta}z + b$ است. $z \mapsto rz$ حاصلضرب دو انعکاس از سؤال ۸ است.$z \mapsto e^{i\theta}z + b$ حاصلضرب دو انعکاس از سؤال ۴۸.۶ است.

۱۰. سؤال ۱۴.۴ را به‌کار برید.

۱۱. هر دو مرتبهٔ ۲ دارند. هر دو دایره‌ها و خطها را به دایره‌ها و خطها می‌نگارند و قدر مطلق زاویه‌های تقاطع را حفظ می‌کنند. انعکاسها یک زیرگروه از S_M را تولید می‌کنند. حاصلضرب تعدادی زوج انعکاس گروه موبیوس را به دست می‌دهد.

۱۲. $a = s$، $b = R^2 - s\bar{s}$، $c = 1$، $d = -\bar{s}$.

۱۳. فرض کنید

$$\alpha : z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \quad , \beta : z \mapsto \frac{A\bar{z} + B}{C\bar{z} + D}$$

$\alpha\beta$ را محاسبه کنید.

۱۴. آن در گروه موبیوس است.

۱۵. $z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ با $ad - bc \neq 0$.

۱۶. بله.

۱۷. $NA = ON\cos\theta$، $NA' = ON\sec\theta$. $A \leftrightarrow A'$، بنابراین $\sum$ به مماس در O نگاشته می‌شود.

۱۸. یک دایرهٔ گذرنده از A، B و مرکز $\sum$.

۱۹. دایرهٔ گذرنده از $AA'B$ عمود بر $\sum$ است و لذا OB را در B' قطع می‌کند. منعکس l دایرهٔ به قطر OA' است.

۲۰. صفحهٔ مماس در N به کرهٔ با قطر ON نگاشته می‌شود.

۲۱. تصویر گنجنگاشتی تحدید انعکاس نسبت به کره‌ای به مرکز N و شعاع NO به کرهٔ به قطر NO است.

۲۲. کرهٔ گذرنده از مرکز انعکاس.

۲۳. سؤال ۱۶ را به حالت سه‌بُعدی توسعه دهید. نگارهٔ یک کره، یک کره یا یک صفحه است.

۲۴. (یک) هرگاه $OP > a$، $\sum \cap \Pi = \phi$.

(دو) هرگاه $OP = a$، $\sum \cap \Pi = \{$یک نقطه$\}$.

(سه) هرگاه $OP < a$، دایره‌ای به مرکز $P = \sum \cap \Pi$.

۲۵. بله، زیرا دایره یک شکل مسطح است.

۲۶. یک دایره روی $\sum$ نقاطع $\sum$ و یک صفحهٔ Π است. نگارهٔ $\sum$ تحت انعکاس، صفحهٔ مماس است؛ بنا به سؤال ۲۲ تصویر Π یک کره است.

کره و صفحهٔ مماس در یک دایره متقاطع‌اند.

۲۷. مقطع مسطح گذرنده از N صفحهٔ مماس را در یک خط قطع می‌کند.

۲۸. دایره‌ها و خطهای صفحه.

۲۹. آنها هر دو دایره‌های گذرنده از N هستند.

۳۰. بله، l در Π_S و n در π_N است اما $\Pi_N \parallel \Pi_S$ لذا l و n متقاطع نیستند. اما آنها همصفحه‌اند بنابراین باید موازی باشند. C و n همصفحه‌اند و n دایرهٔ C را در N قطع می‌کند. هرگاه n دایره C را در یک نقطه اضافی قطع کند این نقطه بروی l تصویر خواهد شد و n خط l را قطع خواهد کرد.

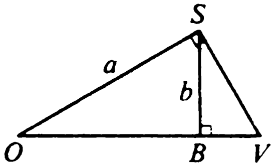
۳۱. $n_۱ \parallel l_۱$، $n_۲ \parallel l_۲$. $n_۱$ مماس بر $C_۱$ و $n_۲$ مماس بر $C_۲$ است. زاویهٔ بین $l_۱$ و $l_۲$ = زاویهٔ بین $n_۱$ و $n_۲$= زاویهٔ بین $C_۱$ و $C_۲$. نقطهٔ $C_۱ \cap C_۲$ از N متمایز است.

۳۲. نگاره‌ها متعامداً متقاطع‌اند.

۳۳. دایره‌های گذرنده از A و B عمود بر S.

۳۴. تنها یکی.

.۳۵



$$OV = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

۳۶. آنها در صفحهٔ C قرار دارند و عمود بر S هستند، لذا آنها از رأس مخروط مماس بر S می‌گذرند.

۳۷. هر صفحهٔ گذرنده از A و B کرهٔ S را متعامداً قطع می‌کند و لذا شامل رأس مخروط مماس بر S است. بنابراین رأس مخروط روی AB قرار دارد.

۳۸. تصویر از رأس مخروط مماس بر S.

۳۹. مخروط مماس به استوانهٔ مماس مبدّل می‌شود. تصویر موازی. یعنی بازتاب نسبت به صفحهٔ دایرهٔ عظیمه.

۴۰. دوران کره = حاصلضرب دو بازتاب نسبت به صفحه‌های گذرنده از قطر. هر یک از این بازتابها با انعکاسی نسبت به صفحه تناظر می‌یابد. دورانی از کره با حاصلضربی از دو انعکاس تناظر می‌یابد.

۴۲. سؤالهای ۱۳ و ۴۰ را به کار برید.

۴۳. در رأسهای یک مکعب مستطیل.

۴۴. $\frac{1}{z}-$.

۴۵. چون قطرها به قطرها نگاشته می‌شوند.

۴۸. $\alpha \mapsto \sigma\alpha\sigma^{-1}$.

MATH75.IR

۸

رابطه‌های هم‌ارزی

این فصل کار غریزی را که هر فرد در مورد دسته‌بندی کردن مجموعه‌ای از اشیاء به اقسام متفاوت انجام می‌دهد برحسب اصطلاحات صوری مطرح می‌کند. اشیاء را از یک نوع محسوب می‌کنیم هرگاه به وسیلهٔ یک رابطهٔ هم‌ارزی مربوط شوند. هرگاه همهٔ اشیاء از یک نوع را گردآوری کنیم مجموعهٔ مزبور را یک ردهٔ هم‌ارزی می‌نامیم.

مطالعهٔ همزمان: فصل ۲ کتاب گرین.

۱. دو خط در یک صفحه ممکن است موازی یا متعامد باشند یا هیچ کدام نباشند. هرگاه $l \parallel m$ آیا نتیجه می‌شود $m \parallel l$ ؟ هرگاه $l \perp m$ ؟ آیا نتیجه می‌شود $m \perp l$؟ این نتایج، توازی و تعامد را به رابطه‌های متقارن مبدّل می‌کنند.

آیا تعامد دایره‌ها رابطه‌ای متقارن است؟

آیا تقسیم‌پذیری اعداد طبیعی رابطه‌ای متقارن است؟

۲. هرگاه $l \parallel m$ و $m \parallel n$ آیا نتیجه می‌شود $l \parallel n$؟ (یک خط را با خودش موازی می‌گیریم) هرگاه $l \perp m$ و $m \perp n$ آیا نتیجه می‌شود $l \perp n$؟ بنا به این نتایج توازی رابطه‌ای ترایا می‌شود اما تعامد نه.

آیا تعامد دایره‌ها رابطه‌ای ترایا است؟

آیا تقسیم‌پذیر اعداد طبیعی رابطه‌ای ترایا است؟

۳. هرگاه مجموعه‌ای مانند P به زیرمجموعه‌های متمایز A_1، A_2، A_3، . . . ، افراز شود که $A_i \cap A_j = \phi$ مگر این که $i = j$، A_iها را اجزاء P و مجموعهٔ همهٔ A_iها را

یک افراز P می‌نامیم. سه نتیجهٔ زیر را بررسی کنید.

(یک) اگر $x \in P$ آنگاه x در همان جزئی از P قرار دارد که x واقع است.

(دو) اگر $x, y \in P$ و x در همان جزئی از P قرار گیرد که y واقع است آنگاه y در همان جزئی از P واقع است که x قرار دارد.

(سه) اگر $x, y, z \in P$ و x در همان جزئی از P قرار گیرد که y واقع است و y در همان جزئی از P واقع باشد که z واقع است آنگاه x در همان جزئی از P قرار دارد که z واقع است.

۴. هرگاه R رابطه‌ای روی P باشد که
بازتابی (یعنی به ازای همهٔ $x \in P$، xRx)،
متقارن (یعنی xRy نتیجه دهد yRx) و
ترایا (یعنی xRy و yRz نتیجه دهد xRz) است،
و به ازای هر $a \in P$ تعریف کنیم

$$R_a = \{x | xRa, x \in P\},$$

ثابت کنید:
(یک) R_a تهی نیست.
(دو) اگر $R_a \cap R_b$ تهی نیست آنگاه $R_a \subseteq R_b$ و $R_b \subseteq R_a$ ، بنابراین $R_a = R_b$،
(سه) مجموعه‌های R_a به ازای همهٔ $a \in P$ افرازی از P را تشکیل می‌دهند.

این مجموعه‌ها رده‌های هم‌ارزی P تحت رابطهٔ هم‌ارزی R نام دارند.

۵. می‌توانیم یک رابطه روی یک مجموعهٔ متناهی را به وسیلهٔ چیزی شبیه یک جدول ضرب نمایش دهیم برای این منظور اعضای مجموعه را در بالا و درکنار جدول می‌نویسم و سپس درایه‌های جدول (نماد $\surd$ برای وجود رابطه و $*$ برای عدم آن) نشان می‌دهند که آیا اعضا با هم رابطه دارند یا ندارند. لذا

$$\begin{array}{c|c} & a \\ \hline b & \surd \end{array}$$ نشان می‌دهد که aRb .

در هر یک از رابطه‌هائ زیر روی مجموعهٔ $\{a, b, c\}$ مشخص کنید آیا رابطه بازتابی، متقارن یا ترایاست؟ و در صورتی که آن یک رابطهٔ هم‌ارزی است رده‌های هم‌ارزی را به‌دست آورید

	a	b	c
a	×	×	×
b	×	√	√
c	×	√	√

	a	b	c
a	√	√	√
b	√	×	×
c	√	×	×

	a	b	c
a	√	√	√
b	×	√	√
c	×	×	√

	a	b	c
a	√	×	×
b	×	√	×
c	×	×	√

دو جدول دیگر برای همین مجموعه به‌دست آورید که هر یک رابطه‌ای هم‌ارزی تعریف کند و در هر حالت رده‌های هم‌ارزی را تعیین کنید.

۶. مشهورترین رابطهٔ هم‌ارزی رابطهٔ برابری (=) روی یک مجموعه است. رده‌های هم‌ارزی در این حالت چه هستند؟

۷. یک رابطهٔ R روی مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ را با aRb تعریف می‌کنیم هرگاه $a - b$ عددی زوج است.

(یک) بررسی کنید R بازتابی، متقارن و ترایاست (یعنی R یک رابطهٔ هم‌ارزی است).

(دو) مجموعه‌های $R_۱$، $R_۲$، $R_۳$، و $R_۴$ را برطبق نمادگذاری سؤال ۴ بیابید. در اینجا دو رده رده‌های باقیمانده به پیمانه ۲ نام دارند و معمولاً aRb در این حالت به صورت $a \equiv b (mod ۲)$ نوشته می‌شود.

۸. یک رابطهٔ R را روی مجموعهٔ اعداد مختلط $\mathbb{C}$ به صورت zRw تعریف می‌کنیم هرگاه $|z| = |w|$.

(یک) بررسی کنید R یک رابطهٔ هم‌ارزی است،

(دو) مجموعه‌های $R_۱$ و $R_۲$ را در یک نمودار از صفحهٔ گاوس نمایش دهید.

۹. در گروه طولپاییهای صفحه زیرگروهی که ۰ را ثابت نگاه می‌دارد (شامل دورانهای حول ۰ و بازتابهای نسبت به محور گذرنده از ۰) با $M_۰$ نمایش می‌دهیم و با استفاده از این گروه رابطهٔ R را روی نقاط صفحه به وسیلهٔ

$$ARB \text{ هرگاه به ازای عضوی مانند } \mu \in M \text{، } A\mu = B$$

تعریف می‌کنیم.
(یک) ثابت کنید R یک رابطهٔ هم‌ارزی است.
(دو) ردهٔ هم‌ارزی شامل نقطه‌ای به فاصلهٔ ۱ واحد از ۰ را بیابید.
(سه) رده‌های هم‌ارزی را مشخص کنید، در این حالت رده‌های هم‌ارزی مدارهای گروه M نام دارند.

۱۰. هرگاه G گروه تقارنهای یک پنج ضلعی منتظم باشد با کشیدن یک پنج ضلعی نگاره‌های ممکن یک رأس را تحت ده عضو این گروه مشخص کنید. این نگاره‌ها مدار یک رأس را تشکیل می‌دهند.

نقطهٔ دیگری از پنج ضلعی مانند P را در نظر بگیرید و نگاره‌های این نقطه تحت ده عضو G را به‌دست آورید. این نقاط مدار نقطهٔ P تحت G را تشکیل می‌دهند.

۱۱. هرگاه G گروه دلخواهی از جایگشتهای یک مجموعهٔ A باشد و رابطهٔ R روی A را به وسیلهٔ

$$aRb \text{ هرگاه به ازای عضوی مانند } \alpha \in G \text{، } a\alpha = b \text{،}$$

تعریف کنیم ثابت کنید R یک رابطهٔ هم‌ارزی روی A است.

رده‌های هم‌ارزی A تحت R مدارهای G نام دارند. هرگاه G تنها یک مدار داشته باشد G ترایا نامیده می‌شود (سؤال ۵۴.۳).

۱۲. هرگاه $\alpha \in S_n$ نام عادی مدارهای $< \alpha >$ چیست؟

۱۳. هرگاه G گروه بزرگسازیهای صفحه با مرکز O باشد مدارهای G را در یک نمودار نمایش دهید.

۱۴. هرگاه G گروه انتقالهای صفحهٔ اقلیدسی به موازات محور اعداد حقیقی باشد مدارهای G را در یک نمودار نمایش دهید.

۱۵. روی اسکلت یک چهار وجهی منتظم نقطه‌ای را مشخص کنید که نه یک رأس و نه وسط یک یال باشد سپس همهٔ نقاط هم‌مدار با آن تحت گروه تقارنهای دورانی چهار وجهی را بیابید.

طول یک مدار تعداد نقاط آن است.

طول مداری که یک رأس متعلق به آن است چیست؟ طول مداری که وسط یک یال متعلق به آن است چیست؟

۱۶. اسکلت دو چهار وجهی را که در یک وجه مشترکند در نظر بگیرید. مدارهایی که رأسها تحت تقارنهای دورانی شکل مزبور به آن تعلق دارند بیابید.

خلاصهٔ مطالب

تعریف سؤال ۴ یک رابطهٔ R روی مجموعهٔ A بازتابی نام دارد هرگاه به ازای همهٔ $a \in A$، aRa. یک رابطهٔ R روی مجموعهٔ A متقارن نام دارد هرگاه $aRb \Rightarrow bRa$. یک رابطهٔ R روی مجموعهٔ A ترایا نام دارد هرگاه aRb و $bRc \Rightarrow aRc$. یک رابطه روی مجموعهٔ A که بازتابی، متقارن و ترایاست یک رابطهٔ هم ارزی نام دارد.

قضیه سؤال ۴ اگر R یک رابطهٔ هم‌ازری روی یک مجموعهٔ A است آنگاه آن زیرمجموعه‌هایی از A که اعضای آن تحت R مربوط می‌شوند رده‌های هم ارزی تحت R نام دارند و اینها A را افراز می‌کنند.

قضیه سؤال ۱۱ اگر G یک گروه جایگشت روی یک مجموعهٔ S باشد و یک رابطهٔ R روی S با aRb تعریف شود هرگاه عضوی مانند $\alpha \in G$ وجود داشته باشد که $a\alpha = b$ آنگاه R یک رابطهٔ هم‌ارزی روی S است و رده‌های هم‌ارزی آن مدارهای G نام دارند.

یادداشت تاریخی

وقتی ج. ل. لاگرانژ (۱۷۷۳) فرمهای درجهٔ دوم را در نظریهٔ اعداد رده‌بندی می‌کرد اصطلاح «هم‌ارز» را برای توصیف آن فرمهایی که در یک رده هستند به کار برد. اما معمولا استفاده از نماد $\equiv$ برای همنهشتی اعداد توسط ک. ف گاوس در کتابش[1] (۱۸۰۱) منشاء مفهوم جدید یک رابطهٔ هم‌ارزی تلقی می‌شود. نمادگذاری جدید و سبک توصیف مطلب حاصل کار ا. ن. ویتهد و ب. راسل (۱۹۱۰) است.

---

1) *Disquisitiones Arithmeticae*

جوابهای فصل ۸

۱. تعامد متقارن است اما تقسیم‌پذیری نه.

۲. تقسیم‌پذیری ترایاست اما تعامد نه.

۴. (یک) aRa ، بازتابی.

(دو) فرض کنید $c \in R_a \cap R_b$ بنابراین cRa و cRb. $cRa \Leftarrow aRc$ متقارن . $x \in R_a \Leftarrow xRa$ با $aRc \Leftarrow xRc$ ترایا؛ با $cRb \Leftarrow xRb$، ترایا؛ بنابراین $x \in R_b$ و $R_a \subseteq R_b$.

(سه) هر a در R_a. از (دو) R_aها یکسان یا متمایزاند.

۵. تنها آخری یک رابطهٔ هم‌ارزی است. با افزون aRa به جدول اول یا با داشتن xRy به ازای همهٔ xها و همهٔ yها می‌توانیم رابطه‌های هم‌ارزی بیشتری بسازیم.

۶. مجموعه‌های تک عضوی .

۷. (دو) $R_1 = R_3 =$ {اعداد فرد} . $R_2 = R_4 =$ {اعداد زوج}.

۸. به ترتیب دایره‌هایی به مرکز ۰ و شعاعهای ۱ و ۲.

۹. (یک) $AI = A$ بازتابی $A\mu = B \Leftarrow B\mu^{-1} = A$ متقارن.

$B\nu = C, A\mu = B$ نتیجه می‌دهد $A\mu\nu = C$ ترایا.

(دو) دایرهٔ به مرکز ۰ و شعاع ۱.

(سه) دایره‌هایی به مرکز ۰.

۱۱. شبیه سؤال ۹ (یک) استدلال کنید.

۱۲. دورها.

۱۳. خطهای گذرنده از ۰ بدون درنظر گرفتن ۰.

۱۴. خطهای موازی با محور حقیقی.

۱۵. مدار نقطهٔ کلی، طولی برابر با ۱۲ دارد؛ مدار رأس، طولی برابر با ۴ دارد؛ مدار نقطهٔ وسط طولی برابر با ۶ دارد.

۱۶. یک مدار از طول ۲ و یک مدار از طول ۳.

MATH75.IR

۹

هم‌مجموعه‌ها

هرگاه زیرگروهی از گروه G داده شود زیرگروه مزبور راهی برای افراز گروه به مجموعه‌های متمایز با اندازه‌های یکسان را فراهم می‌آورد. این افراز یک افراز به هم مجموعه‌های (چپ یا راست) زیرگروه نام دارد. این واقعیت که همهٔ هم مجموعه‌ها هم‌اندازه هستند به ما امکان می‌دهد تا نشان دهیم تعداد اعضای یک زیرگروه باید عاملی از تعداد اعضای گروه باشد به شرطی که گروه متناهی باشد.

مطالعهٔ همزمان: فصل ۶ کتاب بیرکف[1] و مک‌لین[2] بخش مربوط به قضیهٔ لاگرانژ؛ بخشهای ۱ـ۵ فصل ۶ کتاب گرین؛ بخش ۱۱ کتاب فرالی.

۱. یک رابطهٔ R روی گروه $(\mathbb{Z},+)$ به وسیلهٔ aRb تعریف می‌شود هرگاه $a-b\in<۳>$. ثابت کنید R یک رابطهٔ هم‌ارزی است و رده‌های هم‌ارزی را بیابید. سه‌ردهٔ به دست آمده رده‌های باقیمانده به پیمانهٔ ۳ نام دارند و معمولاً aRb در این حالت به صورت $a\equiv b(mod۳)$ نوشته می‌شود.

۲. یک رابطهٔ R روی گروه $(\mathbb{Z},+)$ به وسیلهٔ aRb تعریف می‌شود هرگاه $a-b\in<n>$. ثابت کنید R یک رابطهٔ هم‌ارزی است و رده‌های هم‌ارزی را بیابید. n ردهٔ به دست آمده رده‌های باقیمانده به پیمانهٔ n نام دارند و معمولاً aRb در این حالت به‌صورت $a\equiv b(modn)$ نوشته می‌شود.

۳. اگر گروه $C_۶$ به وسیلهٔ یک عضو a تولید شود و یک رابطهٔ R روی $C_۶$ به وسیلهٔ

1) Birkhoff 2) Maclane

xRy هرگاه $xy^{-1} \in < a^{3} >$ تعریف شود ثابت کنید R یک رابطهٔ هم‌ارزی است و رده‌های هم‌ارزی را بیابید.

۴. اگر H یک زیرگروه از گروه G باشد و یک رابطهٔ R روی G به وسیلهٔ xRy هرگاه $xy^{-1} \in H$ تعریف شود، ثابت کنید R یک رابطهٔ هم‌ارزی است و H یکی از رده‌های هم‌ارزی است.

در اینجا رده‌های هم‌ارزی هم‌مجموعه یا به عبارت دقیق‌تر هم‌مجموعه‌های راست H در G نام دارند.

۵. با نمادگذاری سؤال ۴ نشان دهید اگر xRa آنگاه به‌ازای عضوی مانند $h \in H$ داریم $x = ha$.

۶. با نمادگذاری سؤالهای ۴ و ۴.۸ نشان دهید اگر $H = \{h_1, h_2, \cdots, h_n\}$ آنگاه R_a هم‌مجموعهٔ H شامل a برابر است با $\{h_1a, h_2a, \cdots, h_na\}$ و تعداد اعضای R_a و H برابراند.

به علت این نتیجه، هم‌مجموعهٔ راست H شامل a معمولاً با Ha نمایش داده می‌شود.

۷. هرگاه D گروه طولپاییهای مستقیم صفحهٔ اقلیدسی و T گروه انتقال باشد اعضای واقع در یک هم‌مجموعهٔ راست T در D را توصیف کنید.

۸. هرگاه Δ گروه انبساطهای صفحهٔ اقلیدسی (سؤال ۳. ۵۹) و T گروه انتقال باشد اعضای واقع در یک هم‌مجموعهٔ راست T در Δ را توصیف کنید.

۹. هرگاه تعداد اعضای متمایز در یک مجموعهٔ متناهی با $|S|$ نمایش داده شود آیا با نمادگذاری سؤال ۶ باید $|Ha| = |H|$؟ آیا هر دو هم‌مجموعهٔ راست یک زیرگروه متناهی باید تعداد یکسانی عضو داشته باشند؟

h_1	h_1a	h_1b	
h_2	h_2a	h_2b	
h_3	h_3a	h_3b	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
h_n	h_na	h_nb	

۱۰. هرگاه G یک گروه متناهی با یک زیرگروه H باشد با استفاده از این واقعیت که

هم‌مجموعه‌های راست H گروه G را افراز می‌کند (سؤال ۴.۸) نشان دهید $|H|$ عاملی از $|G|$ است. (قضیهٔ لاگرانژ)

عدد $|G|$ مرتبهٔ گروه G و عدد $|H|$ مرتبهٔ زیرگروه H نام دارد.

۱۱. هرگاه یک گروه شامل عضوی از مرتبهٔ n باشد (سؤال ۱۶.۶)، مرتبهٔ زیرگروه دوری که به وسیلهٔ آن تولید می‌شود چیست (سؤال ۱۰)؟

۱۲. هرگاه G یک گروه مرتبهٔ ۱۲ باشد مرتبه‌های ممکن زیرگروه‌های G چه هستند؟ اعضای G چه مرتبه‌های ممکنی را می‌توانند داشته باشند؟ با در نظرگرفتن گروه A_4 بررسی کنید همهٔ امکانها لزوماً اتفاق نمی‌افتند. (فعلاً مرتبهٔ اعضا را مورد توجه قرار دهید بعداً زیرگروه‌های ممکن را بررسی خواهیم کرد.)

۱۳. هرگاه H زیرگروهی از G و تعداد هم‌مجموعه‌های راست H در G متناهی باشد تعداد هم‌مجموعه‌های راست H شاخص H در G نام دارد و با $|G : H|$ نمایش داده می‌شود. شاخص H در G را در حالتهای زیر بیابید.

(یک) $G =< a >= C_6$ و $H =< a^2 >$.

(دو) $G =< a >= C_6$ و $H =< a^3 >$.

(سه) $G = S_3$ و $H = A_3$.

(چهار) $G = S_3$ و $H = \{(1), (23)\}$.

(پنج) $G = D_4 =< a, b >$ که $a^4 = b^2 = e$ و $bab = a^{-1}$, $H =< a >$.

۱۴. بعد از نشانگذاری رأسهای یک پنج‌ضلعی منتظم با اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ هر یک از تقارنهای پنج‌ضلعی را بر حسب جایگشتی از این رأسها بنویسید. اعضای این گروه تقارن را به آن اعضایی که ۱ $\mapsto$ ۱ می‌نگارند، آنهایی که ۲ $\mapsto$ ۱ می‌نگارند آنهایی که ۳ $\mapsto$ ۱ می‌نگارند آنهایی که ۴ $\mapsto$ ۱ می‌نگارند و آنهایی که ۵ $\mapsto$ ۱ می‌نگارند تقسیم‌بندی کنید. با استفاده از سؤال ۴۰.۲ زیرمجموعهٔ نگاشت ۱ $\mapsto$ ۱ را نامگذاری کنید. آیا آن باید یک زیرگروه باشد؟ اگر α و β تقارنهای پنج‌ضلعی منتظم باشند که $1\alpha = 2$ و $1\beta = 2$ آنگاه $1\alpha\beta^{-1}$ را بیابید و از آنجا زیرمجموعهٔ اعضای نگاشت ۲ $\mapsto$ ۱ را توصیف کنید. زیرمجموعهٔ اعضای نگاشت ۳ $\mapsto$ ۱ را نیز به همین نحو نامگذاری کنید. چگونه مدار ۱ تحت این گروه به زیرگروه پایدارساز ۱ مربوط می‌شود؟

۱۵. بعد از نشانگذاری رأسهای یک چهار وجهی منتظم با اعداد ۱،۲، ۳، و۴ هر یک از تقارنهای دورانی چهار وجهی را بر حسب جایگشتی از این رأسها بنویسید. اعضای

این گروه تقارن را به آن اعضایی که ۱ $\mapsto$ ۱ می‌نگارند، آنهایی که ۲ $\mapsto$ ۱ می‌نگارند، آنهایی که ۳ $\mapsto$ ۱ می‌نگارند و آنهایی که ۴ $\mapsto$ ۱ می‌نگارند تقسیم‌بندی کنید. آیا این تقسیم‌بندی، گروه را افراز می‌کند؟ آیا اعضایی که ۱ را ثابت نگاه می‌دارند یک زیرگروه را تشکیل می‌دهند؟ اگر α و β تقارنهای دورانی چهار وجهی باشند که $۱\beta = ۲ = ۱\alpha$ آنگاه $۱\alpha\beta^{-۱}$ را بیابید و زیرمجموعهٔ نگاشت ۲ $\mapsto$ ۱ را نام ببرید.

۱۶. زیرگروه پایدارساز ۱ در $S_۴$ را به دست آورید. این زیرگروه را H بنامید. شش عضو هم‌مجموعهٔ $H(۱۲)$ را محاسبه کنید و نگارهٔ ۱ تحت هر عضو این هم‌مجموعه را بیابید.

۱۷. هرگاه G یک گروه از جایگشتهای مجموعهٔ A (شامل عضو ۱) باشد به ازای هر $\alpha \in G$ یک نگاشت $G \to A$ را با $\alpha \mapsto ۱\alpha$ تعریف می‌کنیم،

(یک) مجموعهٔ نگارهٔ این نگاشت را بیابید و نام خاص این مجموعهٔ نگاره را ارائه دهید؛

(دو) زیرمجموعهٔ کامل G را که شامل نگارهٔ ۱ است توصیف کنید و اسم خاص این زیرمجموعه را ارائه دهید؛

(سه) هرگاه دو عضو α، β از G تحت این تابع نگارهٔ یکسانی داشته باشند دربارهٔ عضو $\alpha\beta^{-۱}$ چه می‌توانید بگویید؟

هرگاه $G_۱$ زیرگروه G را نمایش دهد که ۱ را پایدار می‌سازد ثابت کنید تابع

$$G_۱\alpha \mapsto ۱\alpha$$

با دامنهٔ هم‌مجموعه‌های راست $G_۱$ و بُرد مدار ۱ خوش تعریف و یک به یک است.

۱۸. قضیهٔ لاگرانژ را برای توصیف طول مدار ۱ در یک گروه جایگشتها روی مجموعه‌ای که شامل ۱ است به کار برید.

۱۹. هرگاه $\alpha = (۱۲۳۴)(۵۶۷)(۸۹)$ و $G = <\alpha> = C_{۱۲}$ مدارهای G و پایدارسازهای هر یک از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ در G را مشخص کنید و نتیجهٔ سؤال ۱۸ را بررسی کنید.

۲۰. با در نظر گرفتن گروه تقارنهای یک مکعب سؤال ۱۸ را بررسی کنید و پایدارساز و مدار

(یک) یک رأس،

(دو) یک وجه،

(سه) یک یال را مشخص کنید.

۲۱. پایدارساز ۰ در گروه D طولپاییهای مستقیم صفحهٔ اقلیدسی را بیابید. سؤال ۱۷ را برای توصیف اعضای واقع در یک هم‌مجموعهٔ راست این پایدارساز به کار برید.

۲۲. هرگاه H زیرگروهی از گروه G باشد ثابت کنید رابطهٔ R تعریف شده به وسیلهٔ xRy هرگاه $x^{-1}y \in H$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی G است.

رده‌های هم‌ارزی را تحت این رابطه هم‌مجموعه‌های چپ H در G نام دارند.

۲۳. با استفاده از نمادگذاری سؤال ۲۲ نشان دهید اگر xRa آنگاه به ازای عضوی مانند $h \in H$، $x = ah$. به‌عکس ثابت کنید به ازای هر $h \in H$، $ahRa$.

هرگاه $H = \{h_1, h_2, \cdots, h_n\}$ ردهٔ هم‌ارزی شامل a را نمایش دهید. معمولاً این ردهٔ هم‌ارزی با aH نمایش داده می‌شود.

۲۴. هرگاه a و b اعضای یک گروه G باشند که G شامل یک زیرگروه متناهی مانند H است آیا باید داشته باشیم $|bH| = |Hb| = |Ha| = |H| = |aH|$؟

۲۵. آیا در اثبات سؤال ۱۰ می‌توانستیم به جای هم‌مجموعه‌های راست از هم‌مجموعه‌های چپ استفاده کنیم؟

۲۶. آیا شاخص H در G برابر با تعداد هم‌مجموعه‌های چپ H است.

۲۷. در گروه $D_4 = < a, b >$ که $a^4 = b^2 = e$ و $bab = a^{-1}$ همهٔ هم مجموعه‌های چپ و همهٔ هم‌مجموعه‌های راست هر یک از زیرگروه‌های $\{e, a^2\}$ و $\{e, b\}$ را بیابید.

هرگاه در یک گروه G با یک زیرگروه H هر هم‌مجموعهٔ چپ H یک هم‌مجموعهٔ راست H نیز باشد آنگاه زیرگروه H نرمال نام دارد. آیا هیچ یک از زیرگروه‌های $\{e, a^2\}$ و $\{e, b\}$ نرمال هستند؟

۲۸. هرگاه H زیرگروه دلخواهی از یک گروه G باشد ثابت کنید به ازای هر $a \in G$، $a \in Ha$ و $a \in aH$.

هرگاه H یک زیرگروه نرمال از یک گروه G باشد ثابت کنید به ازای هر $a \in G$، $aH = Ha$.

هرگاه H یک زیرگروه غیرنرمال از یک گروه G باشد ثابت کنید به ازای عضوی مانند $a \in G$، $Ha \neq aH$. تعریف خود از یک زیرگروه نرمال را بررسی کنید.

۲۹. هرگاه D گروه طولپاییهای مستقیم صفحهٔ اقلیدسی و T گروه انتقال و R گروه دورانهای با مرکز ۰ باشد، بررسی کنید آیا T یا R زیرگروه‌های نرمال D هستند؟ تنها یافتن

یک α برای نشان دادن $R\alpha \neq \alpha R$ کافی است اما خلاف آن به ازای همهٔ طولپاییهای مستقیم α باید برقرار باشد.

۳۰. هرگاه Δ گروه انبساطهای صفحهٔ اقلیدسی و T گروه انتقالها و E گروه بزرگسازیهای با مرکز ۰ باشند بررسی کنید آیا T یا E زیرگروه‌های نرمال Δ هستند؟

۳۱. جدول کیلی زیر برای گروه D_4 (سؤال ۲۷) را با هم‌مجموعه دسته‌بندی شدهٔ $\{e, a^2\}$ پُر کنید

	e	a^2	a	a^3	b	ba^2	ba	ba^3
e								
a^2								
a								
a^3								
b								
ba^2								
ba								
ba^3								

۳۲. هرگاه H و K زیرمجموعه‌های یک گروه G باشند تعریف می‌کنیم

$$HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$$

هرگاه H یک زیرگروه نرمال یک گروه G باشد ثابت کنید هر عضو $H(ab)$ متعلق به $(Ha)(Hb)$ است و نیز هر عضو $(Ha)(Hb)$ متعلق به $H(ab)$ است و بنابراین $Ha.Hb = Hab$.

خلاصهٔ مطالب

تعریف سؤال ۴ اگر H یک زیرگروه ازگروه G باشد آنگاه رابطهٔ R تعریف شده روی G به وسیلهٔ xRy با $xy^{-1} \in H$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است و رده‌های هم‌ارزیِ هم‌مجموعه‌های‌راست H نام دارند.

قضیه
سؤالهای ۱۰،۶
هر هم‌مجموعهٔ راست از یک زیرگروه H به صورت $Ha = \{ha \mid h \in H\}$ است. هرگاه G یک گروه متناهی است هر هم‌مجموعهٔ راست H به اندازهٔ H عضو دارد و بنابراین (تعداد هم‌مجموعه‌های راست H)$\times \mid H \mid = \mid G \mid$.
قضیهٔ لاگرانژ.

تعریف
سؤالهای ۲۶،۱۳
اگر H یک زیرگروه از G و H تعدادی متناهی هم‌مجموعه در G داشته باشد آنگاه تعداد هم‌مجموعه‌های راست برابر با تعداد هم‌مجموعه‌های چپ است و این عدد شاخص H در G نام دارد.

قضیه
سؤال ۱۷
هرگاه G یک گروه جایگشتها روی یک مجموعهٔ S و $1 \in S$ و G_1 پایدارساز ۱ در G باشد یک تناظر یک به یک بین هم‌مجموعه‌های راست G_1 و نقاط مدار ۱ وجود دارد.

تعریف
سؤال ۲۲
اگر H زیرگروهی از یک گروه G است آنگاه رابطهٔ R تعریف شدهٔ روی G به وسیلهٔ xRy با $x^{-1}y \in H$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است و رده‌های هم‌ارزیِ هم مجموعه‌های چپ H نام دارند.

تعریف
سؤال ۲۷
اگر N زیرگروهی از یک گروه G است که هر هم‌مجموعهٔ چپ آن یک هم‌مجموعهٔ راست است آنگاه N یک زیرگروه نرمال G نام دارد.

تعریف
سؤال ۳۲
اگر A و B زیرمجموعه‌های یک گروه G هستند آنگاه

$$AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}.$$

قضیه
سؤال ۳۲
اگر N یک زیرگروه نرمال از یک گروه G است آنگاه

$$(Na)(Nb) = N(ab)\cdot$$

یادداشت تاریخی

ج. ل. لاگرانژ در ۱۷۷۰ اعلام کرد تعداد مقادیر متمایزی که یک تابع n متغیرهٔ $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ می‌تواند بگیرد هرگاه متغیرها مقادیر ثابت و جایگشت آنها را بگیرند عاملی از $n!$ است. این مطلب نزدیکترین چیزی بود که وی برای حکمی از « قضیهٔ لاگرانژ » به دست آورد. نکته این است که زیرمجموعهٔ جایگشتهای مورد نیاز که مقدار تابع را ثابت نگاه می‌دارد یک زیرگروه S_n، مثلاً H، را تشکیل می‌دهد و زیرمجموعه‌ای که مقدار را برای مقدار خاص دیگری تغییر می‌دهد یک هم‌مجموعهٔ راست H را تشکیل می‌دهد. لذا مقادیر متفاوت تابع در تناظر یک به یک با هم‌مجموعه‌های H هستند. نتیجه‌ای که لاگرانژ ادعا کرده بود در سال ۱۸۰۲ توسط پ. آباتی[3] ثابت شد وی همچنین می‌دانست عکس مطلب نادرست است. برهان آباتی مستلزم آرایش مستطیلی هم‌مجموعه‌ها بود که ابتدا در کار ل. اویلر (۱۷۶۰) در مورد گروه‌های ضربی در حساب پیمانه‌ای ظاهر شد. حکم و اثبات قضیهٔ لاگرانژ برای هر گروه متناهی از جایگشتها در چاپ سوم کتاب ج. ا. سِرت (۱۸۶۶) ظاهر شد. شناسایی و اهمیت زیرگروه‌های نرمال توسط ا.گالوا (۱۸۳۰) اظهار شد که محرک بیشتر کارهای بعدی در زمینه گروه‌ها بود. اصطلاح 'هم‌مجموعه' توسط ج. ا. میلر[4] در ۱۹۱۰ ابداع شد.

---

3) P. Abbati 4) G. A. Miller

جوابهای فصل ۹

۱. $3nR0$، $3n+1R1$، $3n+2R2$.

۲. $0 \in <n>$ بنابراین aRa. $a-b \in <n> \Leftarrow b-a \in <n>$ بنابراین $aRb \Rightarrow bRa$. اگر $b-c$ و $a-b$ متعلق به $<n>$ باشند آنگاه $(a-b)+(b-c) \in <n>$ بنابراین aRb و $aRc \Leftarrow bRc$.

۳. $\{e, a^3\}$، $\{a, a^4\}$، $\{a^2, a^5\}$.

۴.

$$e \in H \Rightarrow xx^{-1} \in H \Rightarrow xRx\cdot$$
$$xy^{-1} \in H \Rightarrow (xy^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow yx^{-1} \in H\cdot$$

لذا xRy نتیجه می‌هد yRx.

$$xy^{-1} \in H, yz^{-1} \in H \Rightarrow (xy^{-1})(yz^{-1}) \in H \Rightarrow xz^{-1} \in H$$

لذا xRy و yRz نتیجه می‌دهندxRz. $H = R_e$.

۵.

$$xRa \Rightarrow xa^{-1} \in H \Rightarrow xa^{-1} = h \Rightarrow x = ha\cdot$$

۶. بنا به سؤال ۵، $x \in R_a \Rightarrow x = ha$. همچنین $x = ha \Rightarrow xa^{-1} \in H \Rightarrow xRa \Rightarrow x \in R_a$.بنابراین $R_a = \{h_1a, h_2a, \cdots, h_na\}$. نگاشت $H \to R_a$ تعریف شده به وسیلهٔ $h \mapsto ha$ یک دوسویی است.

۷. با استفاده از نمادگذاری سؤال ۶، T را برابر با H و $z \mapsto -z$: $a : z \mapsto -z$ بگیرید. آنگاه هر عضو هم‌مجموعهٔ Ha صورت $z \mapsto -z+c$ را دارد. این هم‌مجموعه متشکل از همهٔ نیمدورهاست. کلاً همهٔ دورانهای با زاویهٔ یکسان در یک هم‌مجموعهٔ T قرار دارند.

۸. همهٔ بزرگساریهای با عامل مقیاس یکسان یک هم‌مجموعه تشکیل می‌دهند.

۱۱. یک عضو از مرتبهٔ n یک زیرگروه دوری مرتبهٔ n تولید می‌کند.

۱۲. زیرگروه‌ها ممکن است مرتبهٔ ۱, ۲, ۳, ۴, ۶ یا ۱۲ داشته باشند. اعضا نیز تنها می‌توانند این مرتبه‌ها را داشته باشند. همهٔ اعضای A_4 مرتبه ۱،۲ یا ۳ دارند.

۱۳. (یک) ۲،
(دو) ۳،
(سه) ۲،
(چهار) ۳،
(پنج) ۲.
۱۴. (۱)،(۳۴)(۲۵) ؛ پایدارساز ۱؛
(۱۲۳۴۵)،(۱۲)(۳۵) ؛
(۱۳۵۲۴)،(۱۳)(۴۵) ؛
(۱۴۲۵۳)،(۱۴)(۲۳) ؛
(۱۵۴۳۲)، (۱۵)(۲۴).

$\alpha\beta^{-۱}$ در پایدارساز ۱ قرار دارد بنابراین α و β در یک هم‌مجموعه قرار دارند. هر نقطهٔ مدار با یک هم‌مجموعه جور می‌شود.

۱۵. یک هم‌مجموعهٔ راست پایدارساز ۱ .
۱۶. $H(۱۲) = \{(۱۲), (۱۲۳۴), (۱۲۴۳), (۱۲۳), (۱۲۴), (۱۲)(۳۴)\}$.
۱۷. (یک) مدار ۱.
(دو) پایدارساز ۱.
(سه) $\alpha\beta^{-۱}$ در پایدارساز ۱ قرار دارد. $G_۱\alpha = G_۱\beta \Leftrightarrow ۱\alpha = ۱\beta$
۱۸. طول مدار = شاخص پایدارساز.
۱۹. مدار $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$: پایدارساز $\{(۵۷۶), (۵۶۷), (۱)\}$.
مدار $\{۵, ۶, ۷\}$: پایدارساز $\{(۸۹)), (۱۲۳۴)(۸۹), (۱۳)(۲۴), (۱۴۳۲)(۸۹), (۱)\}$.
مدار $\{۸, ۹\}$: پایدارساز

$$\{(۱), (۱۳)(۲۴)(۵۷۶), (۵۶۷), (۱۳)(۲۴), (۵۷۶), (۱۳)(۲۴)(۵۶۷)\}$$

۲۰. (یک) طول مدار ۸، مرتبهٔ پایدارساز ۳.
(دو) طول مدار ۶، مرتبهٔ پایدارساز ۴.
(سه) طول مدار ۱۲، مرتبهٔ پایدارساز ۲.
۲۱. $z \mapsto e^{i\theta} z$. همهٔ دورانها و انتقالهایی که $c \mapsto ۰$ می‌نگارند.
۲۲. استدلالی شبیه سؤال ۴.

۲۳. $aH = \{ah_1, ah_2, ah_3, \cdots, ah_n\}$.

۲۵. ۲۶. بله.

۲۷. هم‌مجموعه‌های چپ و راست $\{e, a^2\}$؛ $\{a, a^3\}$، $\{b, ba^2\}$، $\{ba, ba^3\}$.
هم‌مجموعه‌های چپ $\{e, b\}$؛ $\{a, ab = ba^3\}$، $\{a^2, a^2b = ba^2\}$ ، $\{a^3, a^3b = ba\}$.
هم‌مجموعه‌های راست $\{e, b\}$؛ $\{a, ba = a^3b\}$، $\{a^2, a^2b = ba^2\}$ ، $\{a^3, ba^3 = ab\}$.

۲۸. $a = e.a = a.e$. اگر H نرمال است هم‌مجموعهٔ چپ aH برابر با یک هم‌مجموعهٔ راست است اما هم‌مجموعه‌های راست یکسان یا متمایزاند بنابراین $aH = Ha$. اگر به ازای همهٔ aها $aH = Ha$ آنگاه به روشنی H یک زیرگروه نرمال است.

۲۹. T نرمال است، R نرمال نیست.

۳۰. T نرمال است، E نرمال نیست.

۳۲. $x \in H(ab) \Rightarrow x = h.a.b = ha.eb \in (Ha)(Hb)$ خواه نرمال باشد یا نباشد. $x \in (Ha)(Hb) \Rightarrow x = h_1ah_2b$ اما نرمال بودن H نتیجه می‌دهد $ah_2 = h_3a$ و بنابراین $x = (h_1h_3)ab \in Hab$.

MATH75.IR

۱۰

حاصلضرب مستقیم

در این فصل روشی ساده از ساختن یک گروه جدید از دو گروه مفروض را معرفی می‌کنیم که هم برای ساختن و هم برای تجزیه و تحلیل مفید است. استفادهٔ اصلی این روش در فصل بعد می‌باشد که ساختن گروه‌های بردارهاست. سؤال ۱۱ قضیهٔ کلیدی برای تجزیه را ارائه می‌دهد.

مطالعهٔ همزمان : بخش ۸ کتاب فرالی.

۱. هرگاه $(A, .)$ گروه دوری $C_۲ = \{e, a\}$ باشد حاصلضرب دکارتی $A \times A$ متشکل از چهار عضو (e, e)، (e, a)،(a, e)، (a, a) است. با استفاده از یک جدول همهٔ حاصلضربهای ممکن این اعضا را تحت عمل تعریف شده به وسیلهٔ

$$(b_۱, c_۱)(b_۲, c_۲) = (b_۱.b_۲, c_۱.c_۲)$$

نمایش دهید. آیا جدول حاصل، یک گروه یکریخت با $D_۲$ است ؟ گروه ساخته شده به این طریق حاصلضرب مستقیم $C_۲ \times C_۲$ نام دارد.

۲. مشابه با سؤال ۱ حاصلضرب مستقیم $A \times B$ را بسازید که A گروه دوری $C_۲ = \{e, a\}$ و B گروه دوری $C_۳ = \{e, b, b^۲\}$ است. مرتبهٔ عضو (a, b) در $C_۲ \times C_۳$ را بیابید و بررسی کنید آیا $C_۲ \times C_۳$ دوری است؟

۳. شبیه سؤال ۲ حاصلضرب مستقیم $C_۲ \times C_۵$ را بسازید و نشان دهید که گروهی دوری است.

۴. حاصلضرب مستقیم $C_۲ \times C_۴$ را بسازید و مرتبهٔ هر عضو این گروه را بیابید. آیا این گروه دوری است؟

۵. تعریفی صوری از حاصلضرب مستقیم دو گروه $(A, .)$ و $(B, \circ)$ را ارائه دهید که سؤالهای ۱ـ۴ را تعمیم دهد. بررسی کنید تعریفتان حتماً یک گروه ارائه می‌دهد.

۶. هرگاه A گروه ضربی اعداد حقیقی $(\mathbb{R} - \{۰\}, .)$ و B گروه جمعی اعداد حقیقی $(\mathbb{R}, +)$ باشد $(a,b)(c,d)$ در حاصلضرب مستقیم $A \times B$ چیست؟

۷. با استفاده از نمادگذاری سؤال ۶ آیا عمل تعریف شده با

$$(a,b)(c,d) = (ac, bc + d)$$

$A \times B$ را یک گروه می‌سازد؟ یک حاصلضرب مستقیم می‌سازد؟

۸. یک زیرگروه از حاصلضرب مستقیم $A \times B$ بیابید که با A و با زیرگروهی یکریخت با B یکریخت باشد.

۹. هرگاه $A = \{a_۱, a_۲, a_۳, a_۴\}$ و $B = \{b_۱, b_۲, b_۳, b_۴, b_۵, b_۶\}$ و $a_۱$ عضو همانی گروه $(A, .)$ و $b_۱$ عضو همانی گروه $(B, .)$ باشد، با استفاده از مطالب فصل ۹ سطرها و ستونهای آرایش زیر را توصیف کنید.

$$\begin{array}{cccccc}
(a_۴, b_۱) & (a_۴, b_۲) & (a_۴, b_۳) & (a_۴, b_۴) & (a_۴, b_۵) & (a_۴, b_۶) \\
(a_۳, b_۱) & (a_۳, b_۲) & (a_۳, b_۳) & (a_۳, b_۴) & (a_۳, b_۵) & (a_۳, b_۶) \\
(a_۲, b_۱) & (a_۲, b_۲) & (a_۲, b_۳) & (a_۲, b_۴) & (a_۲, b_۵) & (a_۲, b_۶) \\
(a_۱, b_۱) & (a_۱, b_۲) & (a_۱, b_۳) & (a_۱, b_۴) & (a_۱, b_۵) & (a_۱, b_۶)
\end{array}$$

۱۰. نشان دهید گروه $G =< (۱۲۳۴), (۵۶) >$ با حاصلضرب مستقیم $A =< (۱۲۳۴) >$ و $B =< (۵۶) >$ یکریخت است.

۱۱. اگر یک گروه G شامل زیرگروه‌های A و B باشد آنگاه فرض کنید:

(یک) هر $g \in G$ را می‌توان به طور یکتا به صورت $g = ab$ نوشت که $a \in A$ و $b \in B$ و

(دو) به ازای $a \in A$, $b \in B$، $ab = ba$.

ثابت کنید G با حاصلضرب مستقیم $A \times B$ یکریخت است.

۱۲. با در نظر گرفتن $G = S_{۳}$، $A =< (۱۲۳) >$ و $B =< (۲۳) >$ لزوم شرط (دو) در سؤال ۱۱ را نشان دهید، ثابت کنید شرط (یک) سؤال ۱۱ برقرار است اما شرط (دو) برقرار نیست و بنا به سؤال ۲ گروه G با $A \times B$ یکریخت نیست.

۱۳. هرگاه A، B و C گروه باشند حاصلضرب مستقیم $A \times B \times C$ را به صورت $(A \times B) \times C$ تعریف کنید و حاصلضرب دو عضو دلخواه آن را نمایش دهید.

۱۴. هرگاه شش وجه یک مکعب مستطیل با ۱ ، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و جفتهای وجه‌های مقابل را با $\{۱, ۲\}$ ، $\{۳, ۴\}$، $\{۵, ۶\}$ نشانگذاری کنیم هشت تقارن مکعب مستطیل را به صورت جایگشتهای وجه‌های آن بنویسید و نشان دهید این گروه تقارنها با حاصلضرب مستقیم گروه‌های $< (۱۲) >$، $< (۳۴) >$ و $< (۵۶) >$ یکریخت است.

۱۵. یک دوسویی از $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ به‌روی اعداد مختلط $\mathbb{C}$ با $(x, y) \mapsto x + iy$ داده می‌شود. هرگاه این دوسویی یک یکریختی بین یک گروه به‌روی گروه $(\mathbb{C}, +)$ باشد چگونه دامنه را توصیف می‌کنید؟ در این حالت دامنهٔ مزبور با عمل حاصل از جمع بردارها به مجموع مستقیم $\mathbb{R} \bigoplus \mathbb{R}$ موسوم است.

خلاصهٔ مطالب

تعریف سؤال ۵ اگر $(A, .)$ و $(B, \circ)$ گروه باشند آنگاه گروه تشکیل شده از حاصلضرب دکارتی $A \times B$ تحت عمل تعریف شده به وسیلهٔ

$$(a_{۱}, b_{۱})(a_{۲}, b_{۲}) = (a_{۱} \circ a_{۲}, b_{۱} \circ b_{۲})$$

حاصلضرب مستقیم گروه‌های A و B نام دارد.

قضیه سؤال ۹ حاصلضرب مستقیم $A \times B$ در برگیرندهٔ یک زیرگروه نرمال یکریخت با A و یک زیرگروه نرمال یکریخت با B است.

قضیه سؤال ۱۱ یک گروه G با حاصلضرب مستقیم زیرگروه‌های A و B یکریخت است هرگاه هر عضو G را به طور یکتا بتوان به صورت حاصلضربی از یک عضو A و یک عضو B نوشت و $ab = ba$ به ازای $a \in A$ و $b \in B$.

یادداشت تاریخی

آپولونیوس[1] (۲۰۰ ق‌م) در مطالعهٔ خود از مقاطع مخروطی برای نمایش موضع یک نقطه در یک صفحه از دو عدد استفاده کرد. این ایده توسط ر. دکارت[2] (۱۶۳۹) در مورد منحنیهای مسطح به خدمت گرفته شد اما حتی برای دکارت نیز مختصات همواره اعداد مثبت بودند. نمادگذاری جفتهای مرتب و سه تاییهای مرتب برای توصیف موضع نقاط در فضا طی قرن نوزدهم توسعه یافت. تعریف صوری یک حاصلضرب دکارتی متعلق به ج. کانتور[3] در اواخر قرن نوزدهم است.

مطالعات اولیه گروه‌های تشکیل شده به صورت یک حاصلضرب مستقیم به کارهای ا. ل. کوشی در مورد گروه‌های ناترایای جایگشتها (۱۸۴۵) برمی‌گردد. گروه‌های بردارها در کار ا. کیلی مضمون هستند و صریحاً به صورت انتقالها در اثر [4] ژوردان (۱۸۷۰) ظاهر شده‌اند.

1) Appolonius 2) R. Descartes 3) G. Cantor 4) *Traité des Substitutions*

جوابهای فصل ۱۰

۱.

$$\begin{array}{cccc} (a,a) & (a,e) & (e,a) & (e,e) \\ (a,e) & (a,a) & (e,e) & (e,a) \\ (e,a) & (e,e) & (a,a) & (a,e) \\ (e,e) & (e,a) & (a,e) & (a,a) \end{array}$$

۲. مرتبهٔ (a,b) برابر با ۶ است بنابراین $C_3 \times C_2$ یک گروه دوری است.

۳. اگر $C_2 = \{e,a\}$ و $C_5 = \{e,b,b^2,b^3,b^4\}$ آنگاه مرتبهٔ (a,b) برابر با ۱۰ است.

۴. سه عضو مرتبهٔ ۲ و چهار عضو مرتبهٔ ۴. دوری نیست.

۵. حاصلضرب مستقیم $(A,\cdot)$ و $(B,\circ)$ حاصلضرب دکارتی $A \times B$ همراه با عمل تعریف شده به وسیلهٔ $(a_1,b_1)(a_2,b_2) = (a_1.a_2, b_1\circ b_2)$ است. ویژگی بستار در تعریف مضمون است. شرکت‌پذیری به سادگی به دست می‌آید. عضو همانی (e,e) است. وارون (a,b) برابر با (a^{-1}, b^{-1}) است.

۶. $(ac, b+d)$.

۷. یک حاصلضرب مستقیم نیست اما هنوز گروهی با عضوی خنثی $(1,0)$ است. وارون (a,b) برابر است با $(a^{-1}, -ba^{-1})$. با سؤال ۳.۳ مقایسه کنید.

۸. $A \times \{e\}$. با A یکریخت است. $\{e\} \times B$ با B یکریخت است.

۹. سطرهای هم‌مجموعه‌های (چپ و راست) $\{e\} \times B$ هستند. ستونها هم‌مجموعه‌های $A \times \{e\}$ هستند.

۱۰. ab را با (a,b) جور کنید. سؤال ۳۱.۶ را به کار برید.

۱۱. $(a_1,b_1) \mapsto a_1b_1$ ،$(a_2,b_2) \mapsto a_2b_2$ بنا به (یک) $a_1b_1 = a_2b_2 \Leftarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$. بنابراین نگاشت یک به یک است. $(a_1a_2, b_1b_2) \mapsto a_1a_2b_1b_2 = a_1b_1a_2b_2$ لذا بنا بر (دو) نگاشت حافظ ساختار است.

۱۲. $A \times B = C_3 \times C_2$ که بنا به سؤال ۲ با C_6 یکریخت است.

۱۳. $(a_1,b_1,c_1)(a_2,b_2,c_2) = (a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2)$.

۱۴. نیمدورهای (۳۴)(۵۶)، (۱۲)(۵۶)، (۱۲)(۳۴) . بازتابها (۱۲)، (۳۴)، (۵۶). بازتاب نقطه‌ای (۱۲)(۳۴)(۵۶). ایدهٔ سؤال ۱۱ تا سؤال ۱۳ را توسعه دهید.

۱۵. دامنه، حاصلضرب مستقیم $(\mathbb{R},+)$ با خودش است.

MATH75.IR

۱۱

هیئتها و فضاهای برداری

اصطلاح «هیئت» یک ساختار جبری را به‌طور مجرد توصیف می‌کند که در آن عملهای $+$، $-$، $\times$، $:$ را همان گونه که در اعداد گویا اجرا می‌شوند می‌توان اِعمال کرد. وقتی نسخه‌هایی از یک هیئت F برای ساختن حاصلضربهایی مانند $F \times F$ یا $F \times F \times F$ به کار روند این گونه حاصلضربهای دکارتی، فضاهای، برداری نام دارند هرگاه با یک عمل جمع مناسب از اعضا و با یک عمل ضرب اسکالر (یعنی اعضای یک هیئت) تجهیز شوند.

مطالعهٔ همزمان: بخش ۱ از فصل ۲ و بخشهای ۱ـ۴ از فصل ۷ کتاب بیرکف و مک‌لین.

هیئتها

اگر در یک گروه $(G, .)$ به ازای هر دو عضو $x, y \in G$ داشته باشیم $xy = yx$ آنگاه گروه G تعویض‌پذیر یا آبلی نام دارد.

۱. اعداد گویای $\mathbb{Q}$، اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ و اعداد مختلط $\mathbb{C}$ تحت عمل جمع یک گروه آبلی و با حذف صفر تحت عمل ضرب نیز یک گروه آبلی تشکیل می‌دهند. این دو ویژگی همراه با قوانین توزیع‌پذیری $a.(b+c) = a.b + a.c$ و $(a+b).c = a.c + b.c$ هر یک از $(\mathbb{Q}, +, .)$ ، $(\mathbb{R}, +, .)$ و $(\mathbb{C}, +, .)$ را به یک هیئت مبدّل می‌سازند. چرا اعداد صحیح $(\mathbb{Z}, +, .)$ یک هیئت تشکیل نمی‌دهند.؟

۲. آیا مجموعهٔ $\{۰, ۱\}$ با عملهای $+$ و $\circ$ تعریف شده به وسیلهٔ

+	۰	۱
۰	۰	۱
۱	۱	۰

∘	۰	۱
۰	۰	۰
۱	۰	۱

یک هیئت تشکیل می‌دهند؟ این مجموعه با عملهای ارائه شده $\mathbb{Z}_۲$ نام دارد.

۳. آیا مجموعهٔ $\{۰, ۱, ۲\}$ با عملهای + و ∘ تعریف شده به وسیلهٔ

+	۰	۱	۲
۰	۰	۱	۲
۱	۱	۲	۰
۲	۲	۰	۱

∘	۰	۱	۲
۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۲
۲	۰	۲	۱

یک هیئت تشکیل می‌دهند؟ این مجموعه با عملهای ارائه شده $\mathbb{Z}_۳$ نام دارد. قانون توزیع‌پذیری $a(b+c) = ab + ac$ به ازای $a \neq ۰$ هم ارز با این ادعا است که نگاشت $x \mapsto ax$ یک یکریختی از $(\mathbb{Z}_۳, +)$ بروی $(\mathbb{Z}_۳, +)$ است.

۴. اگر $(F, +, .)$ هیئتی دلخواه و ۰ عضو همانی $(F, +)$ باشد مراحل زیر را توجیه کنید.

$$\begin{aligned} a\cdot ۰ + a\cdot b &= a\cdot(۰ + b) \\ &= a\cdot ۰ \end{aligned}$$

و نتیجه‌گیری کنید $a\cdot ۰ = ۰$.

۵. اگر $(F, +, .)$ هیئتی دلخواه و ۰ عضو همانی $(F, +)$ و $-b$ وارون b در $(F, +)$ باشد، مراحل زیر را توجیه کنید

$$\begin{aligned} a.b + a.(-b) &= a.(b + (-b)) \\ &= a\cdot ۰ \\ &= ۰ \end{aligned}$$

و نتیجه‌گیری کنید $a.(-b) = -(a.b)$

۶. با استفاده از نمادگذاری سؤال ۵ ثابت کنید $۰.a = ۰$ و $(-a).b = -(a.b)$.

۷. هرگاه $a, b \neq ۰$ اعضای یک هیئت باشند با در نظر گرفتن گروه ضربی ثابت کنید $ab \neq ۰$، سپس $\mathbb{Z}_۴$ را شبیه موارد سؤالهای ۲ و ۳ بسازید و نتیجه‌گیری کنید که آن یک هیئت نیست.

۸. فرض کنید $(F_۴, +, .)$ یک هیئت باشد که ۰ عضو همانی $(F_۴, +)$ و ۱ عضو همانی برای $(F_۴ - \{۰\}, .)$ است و $F_۴ = \{۰, ۱, a, b\}$.

(یک) یک جدول ضرب برای $F_۴$ بسازید و با استفاده از قضیهٔ لاگرانژ نتیجه بگیرید $a^۲ = b$ و $b^۲ = a$.

(دو) با استفاده از سؤالهای ۵ و ۷.۶ نتیجه بگیرید $۱ = ۲(۱-)$ و از آنجا $a, b \neq ۱-$.

(سه) چون $۱ = ۱-$ نشان دهید $a + a = ۰$ و $b + b = ۰$ و جدولی برای جمع $F_۴$ تشکیل دهید.

۹. تابعی یک به یک از ضرب مستقیم $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ به اعداد حقیقی به وسیلهٔ

$$(a, b) \mapsto a + b\sqrt{۲}$$

ارائه می‌شود. مجموعهٔ نگاره‌ها تحت این نگاشت با $\mathbb{Q}[\sqrt{۲}]$ نمایش داده می‌شود.

آیا این نگاشت یک یکریختی از جمع مستقیم $\mathbb{Q} \bigoplus \mathbb{Q}$ (سؤال ۱۵.۱۰ را ببینید) بروی $(\mathbb{Q}[\sqrt{۲}], +)$ است؟ ثابت کنید $\mathbb{Q}[\sqrt{۲}]$ تحت عمل ضرب بسته است و اگر a و b هر دو صفر نباشند آنگاه $a + b\sqrt{۲}$ در این مجموعه دارای وارون ضربی است. آیا $(\mathbb{Q}[\sqrt{۲}], +, .)$ یک هیئت است.

۱۰. هرگاه $(F, +, .)$ یک هیئت باشد و جمع روی مجموعهٔ $F \times F$ به وسیلهٔ $(x_۱, y_۱) + (x_۲, y_۲) = (x_۱ + x_۲, y_۱ + y_۲)$ و ضرب به وسیلهٔ $(x_۱, y_۱)(x_۲, y_۲) = (x_۱x_۲, y_۱y_۲)$ تعریف شوند، نشان دهید $F \times F$ با این دو عمل یک هیئت نیست برای این منظور با استفاده از سؤال ۷ اعضای غیر صفری بیابید که حاصلضرب آنها برابر با $(۰, ۰)$ است.

فضاهای برداری

۱۱. اگر F یک هیئت است آنگاه عمل جمع برداری روی $F^n = F \times F \times \cdots \times F$ به صورت

$$(a_۱, a_۲, \cdots, a_n) + (b_۱, b_۲, \cdots, b_n) = (a_۱ + b_۲, a_۲ + b_۲, \cdots, a_n + b_n)$$

تعریف می‌شود. نشان دهید F^n تحت عمل جمع‌برداری یک گروه است.

عضو همانی در این گروه بردار صفر نام دارد و به صورت ۰ نوشته می‌شود.

۱۲. هرگاه F یک هیئت باشد کدام یک از زیرمجموعه‌های زیر از $F^۲$ تحت عمل جمع برداری زیرگروه هستند؟

(یک) $\{(x, ۰) \mid x \in F\}$،

(دو) $\{(x, ۱) \mid x \in F\}$ ،

(سه) $\{(x, ۲x) \mid x \in F\}$،

(چهار) $\{(x, y) \mid x + y = ۰\}$ ،

(پنج) $\{(x, y) \mid ۲x + ۳y = ۰\}$ ،

(شش) $\{(x, y) \mid x + y = ۱\}$.

۱۳. روی نموداری زیر مجموعه‌های $\mathbb{R}^۲$ را نمایش دهید که

(یک) $y = ۰$،

(دو) $y = ۱$،

(سه) $۲x + ۳y = ۰$،

(چهار) $۲x + ۳y = ۱$ ،

(پنج) $(x, y) \in \mathbb{Z}^۲$.

کدام یک از این مجموعه‌ها زیرگروهی از $\mathbb{R}^۲$ تحت عمل جمع برداری هستند و آنهایی که زیرگروه نیستند کدام یک هم‌مجموعهٔ زیرگروهی از $\mathbb{R}^۲$ هستند؟

۱۴. کدام یک از نگاشتهای زیر یک یکریختی از $\mathbb{R}^۲$ به $\mathbb{R}^۲$ تحت عمل جمع برداری ارائه می‌دهند؟

(یک) $(x, y) \mapsto (۲x, ۲y)$،

(دو) $(x, y) \mapsto (y, x)$،

(سه) $(x, y) \mapsto (x + ۱, y)$ ،

(چهار) $(x, y) \mapsto (x^۳, y)$ ،

(پنج) $(x, y) \mapsto (۲x, ۳y)$،

(شش) $(x, y) \mapsto (۲x, ۳y) + (y, x)$،

(هفت) $(x, y) \mapsto (x, x)$،

(هشت) $(x, y) \mapsto (sx, sy)$ (هر دو حالت $s = ۰$ و $s \neq ۰$ را در نظر بگیرید).

۱۵. فرض کنید $(F, +, \circ)$ یک هیئت باشد. مجموعهٔ F^n با عمل جمع‌برداری یک گروه آبلی تشکیل می‌دهد. اگر $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in F^n$ و $a \in F$، ضرب اسکالر a در $\mathbf{v}$ را با $a\mathbf{v} = (ax_1, \cdots, ax_n) \in F^n$ تعریف می‌کنیم. مجموعهٔ F^n با عملهای جمع‌برداری و ضرب اسکالر فضای برداری $V_n(F)$ نام دارد. نتایج زیر را بررسی کنید.

(یک) به ازای همهٔ $\mathbf{v} \in F^n$، $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$،

(دو) اگر $\circ$ عضو همانی گروه F^n باشد (بردار صفر) آنگاه به ازای همهٔ $a \in F$، $a\circ = \circ$،

(سه) به ازای همهٔ $\mathbf{v} \in F$، $\circ v = \circ$،

(چهار) اگر $a\mathbf{v} = \circ$ آنگاه یا $a = \circ$ یا $\mathbf{v} = \circ$،

(پنج) $(ab)\mathbf{v} = a(b\mathbf{v})$،

(شش) $(a+b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$ ،

(هفت) $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$.

۱۶. هرگاه یک زیرمجموعه از $V_n(F)$ تحت عمل جمع برداری یک گروه تشکیل دهد و تحت عمل ضرب اسکالر بسته باشد یک زیرفضای $V_n(F)$ نام دارد. کدام یک از موارد زیر زیرفضای $V_2(\mathbb{R})$ هستند؟

(یک) $\mathbb{Z}^2$،

(دو) $\{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$،

(سه) $\{(\circ, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ،

(چهار) $\{(x, y) \mid ax + by = 1\}$.

چرا بررسی بسته بودن تحت عمل جمع برداری و ضرب اسکالر کافی است؟

۱۷. کدام یک از موارد زیر، زیرفضایی از $V_3(F)$ هستند؟

(یک) $\{(x, y, z) \mid ax + by + cx = \circ\}$،

(دو) $\{(x, y, z) \mid ax + by + cz = 1\}$ ،

(سه) $\{(x, y, x) \mid ax = by = cz\}$.

۱۸. اگر $\mathbf{v}$ بردار مفروضی از $V_n(F)$ باشد ثابت کنید مجموعهٔ $\{aV \mid a \in F\}$ یک زیرفضا تشکیل می‌دهد. این زیرفضا زیرفضای تولید شده به وسیلهٔ $\mathbf{v}$ نام دارد و با $Sp(\mathbf{v})$ نمایش داده می‌شود. یک زیرفضای تشکیل شده از مجموعهٔ همهٔ مضراب اسکالر یک بردار غیر صفر یک زیرفضای یک بُعدی نام دارد.

۱۹. فرض کنید a ، b، و c صفر نیستند ثابت کنید زیرفضای سؤال ۱۷ (سه) یک بُعدی است. دربارهٔ ۱۶(دو) و (سه) چه می‌توان گفت؟

۲۰. توصیف هندسی یک زیرفضای یک بُعدی $V_2(\mathbb{R})$ چیست؟

۲۱. همهٔ زیرفضاهای یک بُعدی $V_2(\mathbb{Z}_3)$ را بیابید. آیا هر بردار غیرصفر در یک زیرفضای یک بُعدی یکتا قرار دارد؟

۲۲. هرگاه $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ بردارهای غیرصفر باشند و $\mathbf{u} \in Sp(\mathbf{v})$ ثابت کنید $\mathbf{v} \in Sp(\mathbf{u})$ و در واقع $Sp(\mathbf{u}) = Sp(\mathbf{v})$.

۲۳. هرگاه $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ بردارهایی در $V_n(F)$ باشند بررسی کنید مجموعهٔ $\{a\mathbf{u} + b\mathbf{v} \mid a, b \in F\}$ زیرفضایی از $V_n(F)$ است. این زیرفضا، زیرفضای تولید شده به وسیلهٔ $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ نام دارد و با $Sp(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ نمایش داده می‌شود.

۲۴. هرگاه $ad - bc \neq 0$، اسکالرهای l_1 و m_1 را چنان بیابید که

$$l_1(a, b) + m_1(c, d) = (1, 0)$$

و اسکالرهای l_2 و m_2 را چنان بیابید که

$$l_2(a, b) + m_2(c, d) = (0, 1).$$

نتیجه‌گیری کنید $Sp((a, b), (c, d)) = V_2(F)$.

۲۵. هرگاه $ad - bc = 0$ باید نشان دهیم که $Sp((a, b), (c, d))$ همهٔ $V_2(F)$ نیست.

(یک) چرا وقتی (a, b) یا (c, d) برابر با $(0, 0)$ است این مطلب بدیهی است.

(دو) هرگاه (a, b) و (c, d) بردار صفر نباشند ثابت کنید اسکالرهای غیر صفر l و m وجود دارند که $l(a, b) + m(c, d) = (0, 0)$ این کار را با در نظر گرفتن امکانهای $(l, m) = (d, -b)$ یا $(l, m) = (c, -a)$ انجام دهید. لذا (c, d) برابر با یک ضرب اسکالر (a, b) است و $Sp((a, b), (c, d)) = Sp((a, b))$.

۲۶. هرگاه $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بردارهایی در $V_n(F)$ باشند ثابت کنید مجموعهٔ $\{a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} \mid a, b, c, \in F\}$ زیرفضایی از $V_n(F)$ است. این زیرفضا، زیرفضای تولید شده به وسیلهٔ $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ نام دارد و با $Sp(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$نمایش داده می‌شود.

۲۷. هرگاه $Sp(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = V_{۲}(F)$ با استفاده از سؤالهای ۲۴ و ۲۵ ثابت کنید یا $Sp(\mathbf{v},\mathbf{w})$ یا $Sp(\mathbf{u},\mathbf{w})$ یا $Sp,(\mathbf{u},\mathbf{v})$ برابر با $V_{۲}(F)$ است.

هرگاه $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ بردارهای غیر صفر $V_n(F)$ باشند اگر $Sp(\mathbf{u}) \neq Sp(\mathbf{v})$ آنگاه $Sp(\mathbf{u},\mathbf{v})$ یک فضای برداری دوبُعدی نام دارد.

۲۸. هرگاه $Sp(\mathbf{u},\mathbf{v})$ یک زیرفضای دوبُعدی $V_n(F)$ باشد ثابت کنید حاصلضرب مستقیم گروه‌های $Sp(\mathbf{u})$ و $Sp(\mathbf{v})$ با $Sp(\mathbf{u},\mathbf{v})$ که به عنوان یک گروه از بردارها تحت عمل جمع تعریف شده در سؤال ۱۱.۱۰ تلقی می‌شود یکریخت است.

۲۹. آیا به ازای همهٔ مقادیر a، b و c سؤال ۱۷ (یک) یک زیرفضای دوبُعدی است؟

خلاصهٔ مطالب

تعریف سؤال ۱ $(F,+,.)$ یک هیئت نامیده می‌شود هرگاه
(یک) $(F,+)$ یک گروه آبلی با عضو همانی ۰ است،
(دو) $(F-\{۰\},.)$ یک گروه آبلی است،
(سه) به ازای همهٔ مقادیر
$a,b,c \in F$، $a.(b+c) = a.b + a.c$ و $(a+b).c = a.c + b.c$.

تعریف سؤال ۱۵ حاصلضرب دکارتی $F^n = F \times F \times \cdots \times F$ یک فضای برداری $V_n(F)$ تشکیل می‌دهد و اعضایش بردار نامیده می‌شوند هرگاه با دو عمل زیر تجهیز شود: (یک) عمل جمع برداری که با

$$(x_{۱},x_{۲},\cdots,x_n) + (y_{۱},y_{۲},\cdots,y_n) = (x_{۱}+y_{۱},x_{۲}+y_{۲},\cdots,x_n+y_n$$

تعریف می‌شود
(دو) عمل ضرب اسکالر که حاصلضرب اعضای یک هیئت (یک اسکالر) و یک بردار است که با

$$a(x_{۱},x_{۲},\cdots,x_n) = (ax_{۱},ax_{۲},\cdots,ax_n)$$

تعریف می‌شود.

تعریف سؤال ۱۶ اگر یک زیرمجموعه از $V_n(F)$ تحت عمل جمع‌برداری یک گروه باشد و تحت عمل ضرب اسکالر بسته باشد آنگاه یک زیرفضا تشکیل می‌دهد.

تعریف سؤال ۱۸ زیرمجموعه‌ای از $V_n(F)$ که متشکل از همهٔ حاصلضربهای اسکالر یک بردار غیرصفر $\mathbf{v}$ است یک زیرفضا تشکیل می‌دهد و چنین زیرفضایی یک بعدی نام دارد.

تعریف سؤال ۲۳ هرگاه $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ بردارهایی در $V_n(F)$ باشند زیرفضای $\{a\mathbf{u}+b\mathbf{v} \mid a, b \in F\}$ زیرفضای تولید شده به وسیلهٔ $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ نام دارد و با $Sp(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ نمایش داده می‌شود.

قضیه سؤال‌های ۲۴، ۲۵ بردارهای (a, b) و (c, d) فضای $V_۲(F)$ را تولید می‌کنند اگر و تنها اگر $ad - bc \neq ۰$.

تعریف سؤال ۲۷ وقتی $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ بردارهای غیر صفر هستند زیر فضای $Sp(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ دوبعدی نام دارد هرگاه $Sp(\mathbf{u}) \neq Sp(\mathbf{v})$

یادداشت تاریخی

توسعهٔ نظریهٔ هیئتها در خلال قرن نوزدهم ضمن تلاش در جهت تعریف دقیق جوابهای معادلات چند جمله‌ای صورت گرفت. اقلیدس[1] (۳۰۰ ق م) با هیئتهای اعداد گویا و حقیقی آشنا بود. هیئت اعداد مختلط در قرن نوزدهم توسعه یافت. هیئتهای اول، $\mathbb{Z}_p$ توسط ک. ف. گاوس (۱۸۰۱) درکتابش مورد بررسی قرار گرفتند. ا.گالوا[2] توسیعهای جبری $\mathbb{Z}_p$ را ساخت و ثابت کرد که این گونه هیئتها گروه‌های ضربی دوری دارند (۱۸۳۰). ا. ه. مور[3] در ۱۸۹۳ نشان داد هر هیئت متناهی با یک توسیع گالوا یکریخت است. این یکریختی به نحو مؤثری تعریف مجرد یک هیئت را فرض می‌گیرد. نظریهٔ توسیعهای جبری

1) Euclid 2) E. Galois 3) E.H. Moore

اعداد گویا به علت تلاشهای ا.ا. کومر[۴] (۱۸۴۹) و ج. و. ر. دد کیند[5] (۱۸۷۰) برای اثبات قضیهٔ آخر فرما توسعه یافت.

4) E.E. Kummer 5) J.W. R. Dedekind

جوابهای فصل ۱۱

۱. $\mathbb{Z}-\{۰\}$ تحت عمل ضرب یک گروه نیست.

۲. بله.

۳. دو گروه دوری $(\mathbb{Z}_۳,+)$ و $(\mathbb{Z}_۳-\{۰\},\cdot)$ در واقع یکی هستند. اگر $a=۰$ یا $a=۱$ آنگاه $a(b+c)=ab+ac$ بدیهی است. بنابراین تنها $۲(b+c)=۲b+۲c$ باید بررسی شود. $b\mapsto ۲b$ دو مولد $(\mathbb{Z}_۳,+)$ را جور می‌کند.

۷. گروه ضربی بسته است بنابراین $a,b\neq ۰\Rightarrow ab\neq ۰$. در $\mathbb{Z}_۴$ داریم $۲\cdot۲=۰$.

۸. (یک) بنا به سؤالهای ۴ و ۷، $۰=x.۰=۰.x$ بنا به قضیهٔ لاگرانژ مرتبهٔ a و b برابر با ۲ نیست، بنابراین هر دو مرتبه‌ای برابر با ۳ دارند.

(دو) $۱+۱=۰\Rightarrow a(۱+۱)=۰$.

۹. $\frac{۱}{a+b\sqrt{۲}}=a-b\sqrt{۲}/(a^۲-۲b^۲)$. بله یک هیئت.

۱۰. $(x,۰)(۰,y)=(۰,۰)$.

۱۱. عضو همانی $(۰,۰,\cdots,۰)$ است. وارون $(a_۱,a_۲,\cdots a_n)$ برابر است با $(-a_۱,-a_۲,\cdots,-a_n)$.

۱۲. (یک)، (سه)، (چهار)، (پنج)

۱۳. زیرگروه‌ها : (یک)، (سه)، (پنج) هم‌مجموعه‌ها : (دو)، (چهار).

۱۴. (یک)، (دو)، (چهار)، (شش)، (هشت) به ازای $s\neq ۰$.

۱۶. تنها (دو) و (سه). $۰\mathbf{v}=۰$. $-۱\mathbf{v}=-\mathbf{v}$. $\cdot-$

۱۷. (یک) و (سه).

۱۸. ویژگی بسته بودن تحت جمع برداری در سؤال ۱۵ (شش) نتیجه می‌شود. بسته بودن تحت عمل ضرب اسکالر از سؤال ۱۵ (پنج) نتیجه می‌شود.

۱۹. در ۱۷ (سه)، $(x,y,z)=x(۱,a/b,a/c)$. در ۱۶ (دو)، $(x,x)=x(۱,۱)$. در ۱۶ (سه)، $(۰,x)=x(۰,۱)$.

۲۰. یک خط گذرنده از مبدأ.

۲۱. $\{(۰,۰),(۱,۰),(۲,۰)\}$، $\{(۰,۰),(۰,۱),(۰,۲)\}$، $\{(۰,۰),(۱,۲),(۲,۱)\}$، $\{(۰,۰),(۱,۱),(۲,۲)\}$.

۲۲. اگر $\mathbf{u}=a\mathbf{v}$ آنگاه $b\mathbf{u}=(ba)\mathbf{v}$ بنابراین $Sp(\mathbf{u})\subseteq Sp(\mathbf{v})$. چون $a\neq ۰$، $\mathbf{v}=a^{-۱}\mathbf{u}$ و $b\mathbf{v}=(ba^{-۱})\mathbf{u}$ بنابراین $Sp(\mathbf{v})\subseteq Sp(\mathbf{u})$

۲۳. بنا به سؤال ۱۵ (شش) تحت عمل جمع برداری بسته است. بنا به سؤالهای ۱۵ (هفت) و (پنج) تحت عمل ضرب اسکالر بسته است.

۲۴. $l_1 = d/(ad-bc)$، $m_1 = -b/(ad-bc)$ ، $l_2 = -c/(ad-bc)$، $m_2 = a/(ad-bc)$.

$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$

۲۶. مانند سؤال ۲۳ استدلال کنید.

۲۷. فرض کنید $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ ، $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ و $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$. آنگاه $u_1v_2 - u_2v_1$، $u_1w_2 - u_2w_1$ و $v_1w_2 - v_2w_1$ همگی نمی‌توانند صفر باشند یا این که $Sp(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ حداکثر یک بُعدی است. اگر اولی غیر صفر باشد آنگاه $Sp(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = V_2(F) = Sp(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$.

۲۸. برای اثبات سؤال ۱۱.۱۰ (یک) :

$a_1\mathbf{u}+b_1\mathbf{v} = a_2\mathbf{u}+b_2\mathbf{v} \Rightarrow (a_2-a_1)(\mathbf{u}) = (b_2-b_1)\mathbf{v}$ اما $Sp(\mathbf{u}) \neq Sp(\mathbf{v})$ لذا بنابه سؤال ۲۲ $Sp(\mathbf{u}) \cap Sp(\mathbf{v}) = \{0\}$ و $a_1 = a_2$، $b_1 = b_2$. شرط ۱۱.۱۰ (دو) بدیهی است.

۲۹. هرگاه $a = b = c = 0$، سؤال ۱۷ (یک) $= V_3(F)$. اگر یکی از a، b، c غیر صفر باشد، مثلاً $a \neq 0$ ، آنگاه $x = (-b/a)y + (-c/a)z$ و زیرفضا عبارت است از $\{y(-b/a, 1, 0) + z(-c/a, 0, 1) \mid y, z \in F\}$ که دو بُعدی است.

MATH75.IR

۱۲

تبدیلهای خطی

یک تبدیل خطی یک تابع حفظ کننده ساختار از یک فضای برداری به فضای برداری دیگر بر روی هیئت یکسان است. ساختاری که باید حفظ شود مربوط به جمع برداری و ضرب اسکالر است و هرگاه هیئت مزبور اعداد حقیقی باشد مشابه‌های هندسی آنها متوازی‌الاضلاعهای با یک رأس در مبدأ (برای جمع برداری) و خطهای گذرنده از مبدأ (برای ضرب اسکالر) هستند. خصوصاً این که برای هر تبدیل خطی نگارهٔ بردار صفر، بردار صفر است. در این فصل نشان می‌دهیم اگر تبدیل خطی از $V_m(F)$ به $V_n(F)$ باشد آنگاه آن را می‌توان با ضرب به وسیلهٔ یک ماتریس $m \times n$ یکتا نمایش داد. سطرهای این ماتریس نگاره‌های بردارهای پایه هستند. به عکس ضرب به وسیلهٔ هر ماتریس $m \times n$ یک تبدیل خطی از $V_m(F)$ به $V_n(F)$ را ارائه می‌دهد.

مطالعهٔ همزمان : بخش ۱ فصل ۸ کتاب بیرکف و مک لین.

۱. کدام یک از توابع سؤال ۱۴.۱۱ ضرب اسکالر در این معنا که اگر $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}'$ آنگاه به ازای همهٔ $a \in \mathbb{R}$ ، $a\mathbf{v} \mapsto a\mathbf{v}'$ را حفظ می‌کند.

۲. یک تابع $V_m(F) \to V_n(F)$ که ساختار جمع برداری و ضرب اسکالر در این معنا که اگر $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}'$ و $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}'$ آنگاه $\mathbf{v} + \mathbf{u} \mapsto \mathbf{v}' + \mathbf{u}'$ و $a\mathbf{v} \mapsto a\mathbf{v}'$ به ازای همهٔ $a \in F$ را حفظ می‌کند یک تبدیل خطی از $V_m(F)$ نام دارد. نگارهٔ بردار صفر تحت یک تبدیل خطی دلخواه چیست؟

۳. نشان دهید مجموعهٔ نگاره‌ها تحت یک تبدیل خطی، یک زیرفضا از همدامنه

تشکیل می‌دهد. این زیرفضا فضای نگارهٔ تبدیل نام دارد.
۴. نشان دهید مجموعهٔ بردارهای دامنه که نگاره آنها تحت یک تبدیل خطی بردار صفر است زیر فضایی از دامنه است. این زیرفضا هستهٔ تبدیل نام دارد.
۵. نشان دهید نگارهٔ یک زیرفضای برداری یک بُعدی از یک دامنه تحت یک تبدیل خطی یا یک زیرفضای یک بُعدی است یا بردار صفر است. هرگاه دامنه و همدامنه $V_۲(\mathbb{R})$ یا $V_۳(\mathbb{R})$ باشند چگونه نتیجه را به نحو هندسی توصیف می‌کنید؟
۶. هرگاه $\alpha : V_۲(F) \to V_۲(F)$ یک تبدیل خطی باشد و $\alpha : (۱, ۰) \mapsto (a, b)$ نگارهٔ $(x, ۰)$ تحت α چیست؟ هرگاه $\alpha : (۰, ۱) \mapsto (c, d)$، نگارهٔ $(۰, y)$ چیست؟ با استفاده از $(x, ۰) + (۰, y) = (x, y)$ نگارهٔ (x, y) تحت α را بیابید. عبارت قراردادی برای این مطلب

$$\alpha : (x, y) \mapsto (x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

است. بررسی کنید هر تبدیل به این صورت یک تبدیل خطی است.
۷. هرگاه α یک تبدیل خطی از $V_۲(\mathbb{R})$ باشد که

$$\alpha : (x, y) \mapsto (x, y) \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{pmatrix}$$

با استفاده از کاغذی مربعی نگاره‌های نقاط $\mathbb{Z}^۲$ را نمایش دهید.
۸. هرگاه $OABC$ یک متوازی‌الاضلاع در $\mathbb{R}^۲$ باشد پیکربندیهای هندسی ممکن نگاره‌های این چهار نقطه تحت یک تبدیل خطی $V_۲(\mathbb{R}) \to V_۲(\mathbb{R})$ چه هستند؟ با استفاده از سؤال ۵ نگارهٔ یک متوازی‌الاضلاع مشبّکه را تحت چنین تبدیلی توصیف کنید.
۹. هرگاه $\alpha : V_۲(F) \to V_۱(F)$ یک تبدیل خطی باشد که $\alpha : (۱, ۰) \mapsto a$ و $\alpha : (۰, ۱) \mapsto b$ ثابت کنید

$$\alpha : (x, y) \mapsto xa + yb.$$

$xa + yb$ به صورت $(x, y) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ نیز نوشته می‌شود.

بررسی کنید هر تبدیلی به این صورت یک تبدیل خطی است.

۱۰. هرگاه $\alpha : V_۳(F) \to V_۲(F)$ یک تبدیل خطی باشد که $\alpha : (۰,۰,۱) \mapsto (p,q)$ ،$\alpha : (۱,۰,۰) \mapsto (a,b)$ $\alpha : (۰,۱,۰) \mapsto (c,d)$: نگارهٔ (x,y,z) را تحت α بیابید. به‌طور قراردادی می‌نویسیم

$$\alpha : (x,y,z) \mapsto (x,y,z) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ p & q \end{pmatrix}.$$

۱۱. هرگاه $\alpha : V_۲(F) \mapsto V_۳(F)$ یک تبدیل خطی باشد که $\alpha : (۱,۰) \mapsto (a,b,c)$ و $\alpha : (۰,۱) \mapsto (p,q,r)$: نگارهٔ (x,y) تحت α را بیابید. به‌طور قراردادی می‌نویسیم

$$\alpha : (x,y) \mapsto (x,y) \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \end{pmatrix}.$$

۱۲. اگر $\alpha : V_m(F) \mapsto V_n(F)$ یک تبدیل خطی باشد که تحت α

$$\begin{aligned}
(۱,۰,\cdots,۰) &\mapsto (a_{۱۱},a_{۱۲},\cdots,a_{۱n}) \\
(۰,۱,۰,\cdots,۰) &\mapsto (a_{۲۱},a_{۲۲},\cdots,a_{۲n}) \\
&\vdots \\
(۰,۰\cdots,۰,۱) &\mapsto (a_{m۱},a_{m۲},\cdots,a_{mn})
\end{aligned}$$

آنگاه می‌نویسیم

$$\alpha : (x_۱,x_۲,\cdots,x_m) \mapsto (x_۱,x_۲,\cdots,x_m) \begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲}\cdots a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲}\cdots a_{۲n} \\ & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

آرایش مستطیلی a_{ij}ها یک ماتریس یا صراحتاً یک ماتریس $m \times n$ نام دارد و تعریف بالا حاصلضربی از یک بردارِ سطری (یک m ـ تایی) و یک ماتریس $m \times n$ را تعریف می‌کند. حاصلضرب یک m ـ تایی و یک ماتریس $m \times n$ را چگونه می‌توانید توصیف کنید؟

۱۳. آیا هر تبدیل از نوع نمایش داده شده در سؤالهای ۱۲ باید تبدیلی خطی باشد؟

خلاصهٔ مطالب

تعریف سؤال ۲ یک تابع $\alpha : V_m(F) \to V_n(F)$ یک تبدیل خطی نامیده می‌شود هرگاه به ازای همهٔ بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ از دامنه و همهٔ اسکالرهای λ در F داشته باشیم $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\alpha = \mathbf{u}\alpha + \mathbf{v}\alpha$ و $(\lambda\mathbf{u})\alpha = \lambda(\mathbf{u}\alpha)$.

قضیه سؤال ۳ فضای نگارهٔ یک تبدیل خطی زیرفضایی از همدامنه تبدیل است.

قضیه سؤال ۴ هستهٔ یک تبدیل خطی (زیرمجموعهٔ نگاشته شده به بردار صفر) زیرفضایی از دامنه است.

قضیه سؤال ۱۲ هر تبدیل خطی $V_m(F) \to V_n(F)$ به‌طور یکتا به وسیلهٔ نگاره‌های بردارهای پایهٔ $(۱, ۰, ۰, \cdots, ۰)$، $(۰, ۱, ۰, \cdots, ۰)$ و غیره برای دامنه تعریف می‌شود و به صورت $v \mapsto vA$ نوشته می‌شود که نگاره‌های بردارهای پایه سطرهای ماتریس A هستند.

یادداشت تاریخی

تبدیلهای خطی ابتدا به عنوان «جایگزینها» بررسی شدند و در خلال قرن نوزدهم روی فرمهای درجهٔ دوم در نظریه اعداد به کار برده شدند. جایگزینی $(ax+by, cx+dy)$ برای (x,y) عبارت $x^۲+y^۲$ را به $(ax+by)^۲+(cx+dy)^۲$ مبدل می‌کند و مزیت توجه به این جایگزینها در این بود که دو فرم مزبور مقادیر روی یک مجموعه از مقادیر صحیح می‌گیرند. نمادگذاری ماتریس به وسیلهٔ ا. کیلی (۱۸۵۸) ضمن به کار بردن جایگزینها در عبارتهای چند جمله‌ای همگن n متغیره به کار رفت که فرمهای درجهٔ دوم لاگرانژ و گاوس یک حالت خاص آن بودند.

جوابهای فصل ۱۲

۱. (یک)، (دو)، (پنج)، (شش)، (هفت)، (هشت).

۲. اگر $\mathbf{o} \mapsto \mathbf{o}'$ آنگاه $\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{o} \mapsto \mathbf{v}' + \mathbf{o}' = \mathbf{v}'$ بنابراین $\mathbf{o}'$ بردار صفر است.

۳. اگر $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}'$ و $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}'$ آنگاه $\mathbf{v} + \mathbf{u} \mapsto \mathbf{v}' + \mathbf{u}'$ بنابراین مجموعهٔ نگاره‌های تحت جمع بردارها بسته است. همچنین $a\mathbf{v} \mapsto a\mathbf{v}'$ بنابراین مجموعهٔ نگاره‌های تحت ضرب اسکالر بسته است و نگاره‌ها یک زیرفضا تشکیل می‌دهند.

۴. $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{o}$ و $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{u} \mapsto \mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o}$ و $a\mathbf{v} \mapsto a\mathbf{o} = \mathbf{o}$.

۵. اگر $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}'$ آنگاه $Sp(\mathbf{u}) \mapsto Sp(\mathbf{u}')$. اگر $\mathbf{u}' = \mathbf{o}$ آنگاه $Sp(\mathbf{u}' = \{\mathbf{o}\})$. یک خط گذرنده از مبداء یا به یک خط گذرنده از مبدأ یا به خود مبدأ نگاشته می‌شود.

۶. $\alpha : (x, \circ) \mapsto (xa, xb)$ ، $\alpha : (\circ, y) \mapsto (yc, yd)$ بنابراین $\alpha : (x, y) \mapsto (xa + yc, xb + yd)$.

۸. یا یک متوازی‌الاضلاع یا چهار نقطهٔ همخط. یا مشبکهٔ متوازی‌الاضلاع دیگر یا مجموعه‌ای از نقاط همخط.

۱۲. یک $n-$ تایی.

MATH75.IR

۱۳

گروه خطی عام $GL(2, F)$

این فصل به آن تبدیلهای خطی می‌پردازد که جایگشتهای یک فضای برداری دوبُعدی هستند که گاهی $V_2(F)$ و گاهی $V_2(\mathbb{R})$ است. کار با $V_2(F)$ نظریهٔ کلی را توسعه می‌دهد. وقتی $V_2(\mathbb{R})$ مورد بحث است نمودارها ایده‌های ما را به خوبی نمایش می‌دهند و گسترهٔ کاملی از زبان هندسی در دسترس ماست.

مطالعهٔ همزمان: بخشهای ۳، ۴ و ۶ فصل ۸ کتاب بیرکف و مک‌لین؛ بورن[1] (۱۹۷۷).

تبدیلهای تکین و ناتکین

پنج سؤال اول این فصل مشخص می‌کنند چه وقت تبدیل

$$(x, y) \mapsto (x, y)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

به گروه $S_{V_2(F)}$ تعلق دارد. هرگاه این اتفاق بیفتد چنین تبدیلهایی ناتکین نام دارند. بقیهٔ این فصل تنها به مجموعهٔ تبدیلهای خطی ناتکین می‌پردازد که گروه خطی عام $GL(2, F)$ را تشکیل می‌دهد.

۱. هرگاه $(0, 0)$، (a, b)، (c, d) نقاط ناهمخط $\mathbb{R}^2$ باشند مساحت متوازی‌الاضلاع با رأسهای این سه نقطه و $(a + c, b + d)$ را بیابید.

1) Burn

۲. هرگاه $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(x,y) \mapsto (x,y)$ یک تبدیل خطی از $V_۲(R)$ باشد مساحت نگارهٔ مربع واحد با رأسهای $(۰,۰)$، $(۱,۰)$، $(۰,۱)$ و $(۱,۱)$ تحت این تبدیل چیست؟

۳. هرگاه $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\alpha : (x,y) \mapsto (x,y)$ یک تبدیل خطی از $V_۲(F)$ باشد نشان دهید فضای نگارهٔ α برابر با $Sp((a,b),(c,d))$ است. از سؤال ۱۱. ۲۵ نتیجه‌گیری کنید اگر $ad-bc=۰$ آنگاه α نگاشتی پوشا بروی $V_۲(F)$ نیست. با در نظر گرفتن نگاره‌های بردارهای $(۰,۰)$، $(d,-b)$ و $(-c,a)$ نشان دهید اگر $ad-bc=۰$ آنگاه α یک به‌یک نیست.

مقدار $ad-bc$ دترمینان ماتریس نام دارد. هرگاه دترمینان یک ماتریس برابر با ۰ باشد ماتریس و تبدیل خطی مربوط تکین نام دارند.

۴. هرگاه $ad-bc \neq ۰$ در این صورت α تبدیل خطی سؤال ۳ ناتکین است با استفاده از سؤال ۱۱.۲۴ نشان دهید که α نگاشتی پوشا از $V_۲(F)$ بروی $V_۲(F)$ است. هرگاه داشته باشیم $(x_۱,y_۱)\alpha=(x_۲,y_۲)\alpha$ نشان دهید $(x_۱-x_۲)(a,b)=(y_۲-y_۱)(c,d)$ و نتیجه بگیرید α نگاشتی یک به یک است.

۵. با استفاده از سؤالهای ۳ و ۴ قضیه‌ای دربارهٔ نگاشتهای پوشا و یک به یک که تبدیلهای خطی از $V_۲(F)$ به $V_۲(F)$ هستند بنویسید.

گروه تبدیلهای ناتکین

در سؤالهای ۶ـ۱۴ ضرب ماتریس چنان تعریف می‌شود که با ترکیب تبدیلهای خطی سازگار باشد و از آنجا گروه تبدیلهای ناتکین مشخص می‌شود. یکریختی بین ماتریس‌ها و تبدیلهای خطی چنان بخوبی در زبان ریاضیات عادی به کار می‌روند که غالباً این دو به نحو بسیار مفیدی با هم اشتباه گرفته می‌شوند.

۶. اگر ماتریس $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ را با A و ماتریس $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ را با P نمایش دهیم و α را تبدیل خطی $(x,y) \mapsto (x,y)A$ و β را تبدیل خطی $(x,y) \mapsto (x,y)P$ بگیریم آنگاه تبدیل خطی مرکب $\alpha\beta$ با $(x,y) \mapsto [(x,y)A]P$ داده می‌شود. ماتریس متناظر با تبدیل خطی $\alpha\beta$ را بیابید. این ماتریس، ماتریس حاصلضرب AP تعریف می‌شود.

۷. هرگاه I ماتریس $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ باشد تبدیل خطی $(x,y) \mapsto (x,y)I$ را چگونه توصیف می‌کنید؟

۸. هرگاه $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ یک ماتریس ناتکین با دترمینان Δ باشد حاصلضرب A با $\begin{pmatrix} d/\Delta & -b/\Delta \\ -c/\Delta & a/\Delta \end{pmatrix}$ را بیابید. نتیجه‌گیری کنید تبدیل خطی $(x,y) \mapsto (x,y)A$ وارونی دارد که یک تبدیل خطی است.

۹. هرگاه A و B ماتریس‌های 2×2 روی یک هیئت باشند ثابت کنید $\det(AB) = (\det A).(\det B)$.

۱۰. هرگاه A یک ماتریس 2×2 باشد و نسبت به ماتریس همانی $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ وارون داشته باشد ثابت کنید دترمینانA مخالف صفر است.

۱۱. با استفاده از تعریف ضرب ماتریس و شرکت‌پذیری توابع مرکب (سؤال ۳۲.۱) ثابت کنید حاصلضربهای ماتریس‌های 2×2 شرکت‌پذیر هستند.

۱۲. ثابت کنید مجموعهٔ ماتریس‌های ناتکین 2×2 روی یک هیئت مفروض تحت عمل ضرب ماتریس یک گروه تشکیل می‌دهد.

۱۳. اگر V یک فضای برداری و $\alpha : V \to V$ تبدیلی خطی باشد که یک به یک نیز هست آنگاه α یک تبدیل خطی ناتکین از V نام دارد. آیا تبدیلهای خطی ناتکین از V باید زیرگروهی از S_V باشند؟

۱۴. ثابت کنید گروه نگاشتهای خطی یک به یک $V_2(F) \leftarrow V_2(F)$ با گروه ماتریس‌های ناتکین 2×2 روی F یکریخت است. هر یک از این گروه‌ها با $GL(2,F)$ نمایش داده می‌شود و گروه خطی عام $V_2(F)$ نام دارد.

مرکز گروه خطی عام

در سؤال ۱۵ـ۱۹ اعضای $GL(2,F)$ که با بقیهٔ اعضای گروه تعویض‌پذیراند مشخص می‌شوند و یک زیرگروه تشکیل می‌دهند.

۱۵. ماتریسی به صورت $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ در $GL(2,F)$ گاهی با aI نمایش داده می‌شود

و یک ماتریس اسکالر نام دارد. تحت یکریختی سؤال ۱۴ کدام تبدیلهای خطی از $V_۲(\mathbb{R})$ با ماتریس‌های اسکالر تناظر می‌یابند؟

۱۶. فرض کنید $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$، $J = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ و $K = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}$. هرگاه $AJ = JA$ ثابت کنید $a = d$ و $c = ۰$. هرگاه $AK = KA$ ثابت کنید $a = d$ و $b = ۰$. نتیجه‌گیری کنید اگر A در $GL(۲, F)$ باشد و A با هر ماتریس در $GL(۲, F)$ تعویض‌پذیر باشد آنگاه A یک ماتریس اسکالر است. بررسی کنید ماتریس‌های اسکالر همواره با همهٔ ماتریسهای دیگر $GL(۲, F)$ تعویض‌پذیراند.

۱۷. آیا زیرمجموعه ماتریس‌های اسکالر زیرگروهی از $GL(۲, F)$ تشکیل می‌دهند؟

۱۸. ثابت کنید در هرگروه G زیرمجموعهٔ $C = \{c \mid cg = gc$ ،$g \in G$ به ازای همهٔ$\}$ زیرگروهی از G تشکیل می‌دهد.

این زیرگروه، مرکز G نام دارد.

۱۹. مرکزهای $D_۲$، $D_۳$ و $D_۴$ را مشخص کنید.

قیچیها

در سؤالهای ۲۰ ـ ۲۴ برخی از قیچیهای $V_۲(\mathbb{R})$ مشخص می‌شوند و تعریفی کلی از یک قیچی در $V_n(F)$ ارائه می‌شود. یک مثال از یکریختی گروه جمعی هیئت با گروه قیچیها با محوری مفروض ارائه می‌شود.

۲۰. تحت یکریختی سؤال ۱۴ تبدیلی خطی از $V_۲(\mathbb{R})$ را نشان دهید که با ماتریس $\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}$ تناظر می‌یابد. این تبدیل یک قیچی روی محور x نام دارد. یک قیچی از $V_۲(\mathbb{R})$ محوری از نقاط ثابت دارد و هر نقطهٔ خارج این خط به موازات این خط حرکت داده می‌شود.

۲۱. خط نقاط ثابت قیچی

$$(x, y) \mapsto (x, y) \begin{pmatrix} ۱ & a \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

را بیابید.

۲۲. خط نقاط ثابت هر یک از قیچیهای زیر را بیابید.

(یک) $(x,y)\mapsto(x,y)+y(a,\circ)$ که $a\neq\circ$ ،
(دو) $(x,y)\mapsto(x,y)+x(\circ,b)$ که $b\neq\circ$،
(سه) $(x,y)\mapsto(x,y)+(cx+dy)(a,b)$ که (a,b) بردار صفر نیست و $ca+db=\circ$.

۲۳. هرگاه $\mathbf{v}\mapsto\mathbf{v}+f(\mathbf{v})\mathbf{a}$ ، که $f(\mathbf{v})$ یک اسکالر و $\mathbf{a}$ برداری ثابت است یک تبدیل خطی از $V_n(F)$ باشد ثابت کنید تابع f یک تبدیل خطی $V_n(F)\to F$ است. هرگاه $f(\mathbf{a})=\circ$ صورت ارائه شده در اینجا تعریف کلی یک قیچی از یک فضای برداری کلی است. نشان دهید هر یک از قیچیهای سؤال ۲۲ را می‌توان با یافتن تابع f و بردار ثابت $\mathbf{a}$ در هر حالت به صورت ارائه شده در این سؤال نوشت.

۲۴. نشان دهید ماتریس‌های از نوع $\begin{pmatrix}۱&\circ\\a&۱\end{pmatrix}$ زیرگروهی از $GL(۲,F)$ تشکیل می‌دهند که با $(F,+)$ یکریخت است.

زیرگروه‌های دیگری از $\mathbf{GL(۲,F)}$

۲۵. نشان دهید ماتریس‌های ناتکین از نوع $\begin{pmatrix}a&\circ\\\circ&۱\end{pmatrix}$ زیرگروهی از $GL(۲,F)$ تشکیل می‌دهند که با گروه ضربی $F-\{\circ\}$ یکریخت است. نقاط ثابت و خطهای ثابت متناظر با گروه تبدیلهای خطی $V_۲(\mathbb{R})$ چه هستند؟

۲۶. هرگاه هیئت اعداد حقیقی با یک هیئت دلخواه جایگزین شود نقاط ثابت و خطهای ثابت توصیف شده در سؤال ۲۵ چگونه تحت تأثیر قرار می‌گیرند به شرطی که خود را به زبان فضاهای برداری و گروه‌ها محدود کنیم (مثلاً خطهای گذرنده از مبدأ همیشه به‌عنوان زیرفضاهای یک بُعدی تلقی می‌شوند)؟

۲۷. نشان دهید ماتریس‌های ناتکین از نوع $\begin{pmatrix}a&\circ\\\circ&b\end{pmatrix}$ یک گروه تشکیل می‌دهند. نقاط ثابت و خطهای ثابت متناظر گروه تبدیلهای خطی $V_۲(\mathbb{R})$ را بیابید.

این گونه ماتریس‌ها، ماتریس‌های قطری نام دارند.

۲۸. هرگاه $G=(\mathbb{R}-\{\circ\},.)$ نشان دهید گروه ماتریس‌های قطری در $GL(۲,\mathbb{R})$ با حاصلضرب مستقیم $G\times G$ یکریخت است.

۲۹. توصیف خود از نقاط ثابت و خطهای ثابت سؤال ۲۷ را چنان تعدیل کنید که روی هر هیئت دلخواه معتبر باشد.

۳۰. نشان دهید ماتریس‌های از نوع $\begin{pmatrix} a & \circ \\ c & d \end{pmatrix}$ که $a, d \neq \circ$، تحت عمل ضرب یک گروه تشکیل می‌دهند. خطهای ثابت و خانواده‌های خطهای ثابت متناظر گروه تبدیلهای خطی $V_۲(\mathbb{R})$ را بیابید. این گونه ماتریس‌ها، ماتریس‌های (پایین) مثلثی نام دارند.

۳۱. هرگاه اعداد حقیقی با یک هیئت دلخواه جایگزین شود خطهای ثابت سؤال ۳۰ چگونه تحت تأثیر قرار می‌گیرند؟

۳۲. مرتبهٔ گروه ماتریس‌های اسکالر، گروه قیچیهای روی محور x ، گروه ماتریس‌های قطری و گروه ماتریس‌های مثلثی در $GL(۲, \mathbb{Z}_۳)$ را بیابید. مرتبهٔ گروه کامل را با شمردن جفتهای ممکن نگاره‌های $(\circ\ ۱)$، $(۱\ \circ)$ مشخص کنید. نُه‌بردار در $V_۲(\mathbb{Z}_۳)$ وجود دارند. چه تعداد از اینها می‌توانند نگاره‌های $(۱, \circ)$ باشند؟ بعد از مشخص کردن نگارهٔ $(۱, \circ)$، چه تعداد می‌توانند نگاره‌های $(\circ\ ,۱)$ باشند؟

گروه متعامد

در فصل ۲۱ گروه متعامد را به طولپاییهای $GL(۲, \mathbb{R})$ و $GL(۳, \mathbb{R})$ ارتباط می‌دهیم اما در اینجا به سادگی روشی برای تعریف زیرگروهی از $GL(۲, F)$ را ارائه می‌دهیم که با همهٔ آنهایی که تا کنون به کار برده‌ایم کاملاً تفاوت دارد.

۳۳. هرگاه $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ترانهادهٔ A را به صورت $A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ تعریف می‌کنیم. ثابت کنید $detA = detA^T$ و برای هر دو ماتریس ۲ × ۲، A و B داریم $(AB)^T = B^T A^T$.

۳۴. ثابت کنید ماتریس‌های ۲ × ۲، A که $A.A^T = I$ زیرگروهی از $GL(۲, F)$ را تشکیل می‌دهند. این زیرگروه به گروه متعامد موسوم است.

ثابت کنید اگر $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ آنگاه $a^۲ + b^۲ = c^۲ + d^۲ = ۱$، $ac + bd = ab + cd = \circ$ و $ad - bc = \pm ۱$.

۳۵. هرگاه $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ عضوی از زیرگروهی متعامد از $GL(۲, \mathbb{R})$ باشد و $a = \cos\theta$ و $d = \cos\phi$ ثابت کنید، $\theta \pm \phi = \circ$ یا π و صورتهای ممکن ماتریس‌ها در این گروه متعامد را نمایش دهید.

خلاصهٔ مطالب

تعریف **سؤال ۳**	دترمینان ماتریس‌های ۲ × ۲ ، $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ برابر است با $ad - bc$.
تعریف **سؤال ۳**	تبدیل خطی $\mathbf{v}A \to \mathbf{v}$ از $V_۲(F)$ که A ماتریسی ۲ × ۲ است تکین نام دارد هرگاه $\det A = ۰$
قضیه **سؤال ۳**	یک تبدیل خطی تکین از $V_۲(F)$ نه یک به یک است و نه پوشا.
تعریف **سؤال ۴**	تبدیل خطی $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A$ از $v_۲(F)$ که A ماتریسی ۲ × ۲ است ناتکین نام دارد هرگاه $\det A \neq ۰$.
قضیه **سؤال ۴**	هر تبدیل خطی ناتکین نگاشتی دوسویی است.
تعریف **سؤال ۶**	هرگاه A و B ماتریس‌های ۲ × ۲ باشند ماتریس حاصلضرب AB برابر با ماتریس تبدیل مرکب است $[\mathbf{v} \to \mathbf{v}A$ دنبال شده توسط $\mathbf{v} \to \mathbf{v}B]$
قضیه **سؤال ۹**	اگر A و B ماتریس‌های ۲ × ۲ باشند آنگاه $\det AB = \det A . \det B$.
تعریف **سؤالهای ۱۳، ۱۴**	تبدیلهای خطی ناتکین $V_۲(F)$ گروه خطی عام $GL(۲,F)$ را تشکیل می‌دهند.
قضیه **سؤال ۱۴**	گروه $GL(۲,F)$ با گروه ماتریس‌های ناتکین ۲ × ۲ روی هیئت F یکریخت است.
تعریف **سؤال ۱۸**	مجموعهٔ اعضای یک گروه که با هر عضو آن گروه تعویض‌پذیراند مرکز گروه

نام دارد.

قضیه مرکز یک گروه یک زیرگروه تشکیل می‌دهد.
سؤال ۱۸

تعریف یک ماتریس مربعی یک ماتریس اسکالر نامیده می‌شود هرگاه همهٔ درآیه‌های قطر اصلی یکسان باشند و بقیهٔ درآیه‌ها صفر باشند.
سؤال ۱۵

قضیه مرکز گروه خطی عام زیر مجموعهٔ ماتریس‌های اسکالر است.
سؤال ۱۶

تعریف هرگاه تنها درآیه‌های غیرصفر در یک ماتریس مربعی روی قطر اصلی قرار گیرند ماتریس قطری نامیده می‌شود.
سؤال ۲۷

تعریف A^T ترانهادهٔ یک ماتریس A با تعویض سطرها و ستونهای A به دست می‌آید.
سؤال ۳۳

قضیه زیرمجموعهٔ ماتریس‌های A که $A.A^T = I$ زیرگروهی از گروه خطی عام‌است که گروه متعامد نام دارد.
سؤال ۳۴

یادداشت تاریخی

چنان که در شروع فصل ۱۲ گفتیم در ابتدا تبدیلهای خطی بدون استفادهٔ از ماتریس‌ها به صورت جایگزینهای به کار رفته در فرمهای درجهٔ دوم مطرح شدند. گاوس در کتابش[2] (۱۸۰۱) دترمینان $ad - be$ در جایگزینی $(ax + by, cx + dy)$ به جای (x, y) را به‌کار می‌برد، زیرا مبیین $B^۲ - AC$ برای فرم درجهٔ دوم $Ax^۲ + ۲Bxy + Cy^۲$ در مجذور دترمینان تبدیل جایگزینی ضرب می‌شود.

استفاده از آرایش مستطیلی برای یک ماتریس به کیلی برمی‌گردد، وی در مقاله‌ای خطاب به انجمن سلطنتی در سال ۱۸۵۸ قاعده‌های زیادی برای جبر ماتریس‌های ۲ × ۲ و ۳ × ۳ ارائه داد.

---

2) *Disquistiones Arithmeticae*

گروه خطی عام دوبُعدی روی $\mathbb{Z}_p$ توسط ا. گالوا (۱۸۳۰) بررسی شد و گروه خطی عام n بُعدی روی $\mathbb{Z}_p$ توسط ک.ژوردان در کتابش[3] مورد بحث قرار گرفت (۱۸۷۰). در این موارد گالوا و ژوردان ماتریس‌ها را به کار نبردند.

3) *Traité des Substitutions*

جوابهای فصل ۱۳

۱. $|ad-bc|$.

۲. $|ad-bc|$.

۳. $Sp((۱,۰),(۰,۱)) \to Sp((a,b),(c,d))$.

۴. $(x_۱-x_۲)(a,b)=(y_۲-y_۱)(c,d)\cdot$ نتیجه می‌دهد یا $x_۲=x_۱$ و $y_۲=y_۱$ یا $Sp((a,b),(c,d))$ یک بُعدی است.

۵. اگر $ad-bc\neq ۰$ آنگاه $(x,y)\mapsto(x,y)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ نگاشتی دوسویی است. اگر $ad-bc=۰$ آنگاه α نه پوشاست و نه یک به یک است.

۶. $\begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$.

۷. نگاشت همانی روی $V_۲(F)$.

۸. حاصلضرب $=I$.

۹. بنا به سؤال ۶،

$$(ap+br)(cq+ds)-(cp+dr)(aq+bs)=apds+brcq-cpbs$$
$$-draq=(ad-bc)(ps-rq)\cdot$$

۱۰. $A.A^{-۱}=I$ نتیجه می‌دهد $\det A.\det A^{-۱}=۱$ بنابراین $\det A\neq ۰$.

۱۲. ویژگی بستار از سؤال ۹ و همانی از سؤال ۷ و وارونها از سؤال ۸ نتیجه می‌شود.

۱۳. ترکیب دو نگاشت دوسویی نگاشتی دوسویی است. ترکیب دو تبدیل خطی تبدیلی خطی است. وارون تبدیل خطی دوسویی تبدیلی خطی است.

۱۴. نگاشت از $[(x,y)\mapsto(x,y)A]$ به A یک یکریختی است.

۱۵. بزرگسازیهای با مرکز $(۰,۰)$.

۱۷. بله.

۱۹. $D_۲$ همهٔ مرکز است. مرکز $D_۳$ برابر با $\{e\}$ است. مرکز $D_۴$ برابر با $\{e,a^۲\}$ است، سؤال ۳۱.۹ را ببینید.

۲۰. هر نقطهٔ محور x ثابت است. هر خط موازی محور x بروی خود نگاشته می‌شود.

۲۱. محور y.

۲۲. (یک) $y = ۰$.
(دو) $x = ۰$.
(سه) $Sp((a, b))$.
۲۳.

$$\mathbf{u} + f(\mathbf{u})\mathbf{a} + \mathbf{v} + f(\mathbf{v})\mathbf{a} = \mathbf{u} + \mathbf{v} + f(\mathbf{u} + \mathbf{v})\mathbf{a} \Rightarrow$$

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}).$$

و

$$k(\mathbf{v} + f(\mathbf{v})\mathbf{a}) = k\mathbf{v} + f(k\mathbf{v})\mathbf{a} \Rightarrow kf(\mathbf{v}) = f(k\mathbf{v}).$$

(یک) $\mathbf{a} = (a, ۰)$ ، $f(x, y) = y$.
(دو) $a = (۰, b)$ ، $f(x, y) = x$.
(سه) $\mathbf{a} = (a, b)$ ، $f(x, y) = cx + dy$.

۲۴. $a \mapsto \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ a & ۱ \end{pmatrix}$ یکریختی را به دست می‌دهد.

۲۵. محور y نقطه‌ای ثابت نگاه داشته می‌شود. خطهای موازی با محور x ثابت نگاه داشته می‌شوند اما نه نقطه‌ای.

۲۶. $Sp(۰, ۱)$ نقطه‌ای ثابت نگاه داشته می‌شود. هم‌مجموعه‌های $Sp(۱, ۰)$ نیز ثابت نگاه داشته می‌شوند اما نه نقطه‌ای.

۲۷. تنها محورهای x و y.

۲۸. $(a, b) \mapsto \begin{pmatrix} a & ۰ \\ ۰ & b \end{pmatrix}$.

۲۹. $Sp(۱, ۰)$ و $Sp(۰, ۱)$ ثابت نگاه داشته می‌شوند اما نه نقطه‌ای.

۳۰. محور x ثابت نگاه داشته می‌شود اما نه نقطه‌ای. هر خط موازی با محور x به یک خط موازی نگاشته می‌شود.

۳۱. به $Sp(۱, ۰)$ و هم‌مجموعه‌های آن رجوع کنید.

۳۲. | ماتریس‌های اسکالر |= ۲، | قیچیهای روی محور x |= ۳، | ماتریس‌های قطری |= ۴ ، | ماتریس‌های مثلثی |= ۱۲. هشت نگارهٔ ممکن برای $(\circ, ۱)$ و در نتیجه شش امکان برای نگارهٔ $(۱, \circ)$ وجود دارند بنابراین ۴۸ =| $GL(۲, \mathbb{Z}_۳)$ |.

۳۴. اگر $A.A^T = B.B^T = I$ آنگاه $(AB).(AB)^T = ABB^TA^T = I$، بنابراین زیرمجموعه بسته است. $A^T = A^{-۱}$ و $(A^T)^T = A$ لذا ماتریس وارون متعامد است. $\det(A.A^T) = \det I$ و $\det A = \det A^T$ در نتیجه $\det A = \pm ۱$. بقیهٔ معادله‌ها از $A.A^T = I$ یا $A^T.A = I$ نتیجه می‌شوند.

۳۵. $b^۲ = \sin^۲\theta$، $c^۲ = \sin^۲\phi$، $ac+bd = \circ$ نتیجه می‌دهد $\sin(\phi\pm\theta) = \circ$. $\theta = \pm\phi$ نتیجه می‌دهد $bc = \cos^۲\theta - ۱ = -\sin^۲\theta$. $\theta = \pm\phi + \pi$ نتیجه می‌دهد $bc = ۱ - \cos^۲\theta = \sin^۲\theta$.

$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

MATH75.IR

۱۴

فضای برداری $V_3(F)$

زاویه‌ها، فاصله‌ها، مساحتها و حجمها در $V_3(\mathbb{R})$ را با کمک دو عمل روی بردارها یعنی ضرب اسکالر و ضرب برداری می‌توانیم محاسبه کنیم. در این رابطه خواهیم توانست دترمینان یک ماتریس 3×3 را تعریف کنیم و بررسی کنیم که دترمینان‌های 3×3 همان ویژگیهای دترمینان‌های 2×2 را دادند.

در این فصل مانند فصل گذشته بردارها را به عنوان نقاط در نظر خواهیم گرفت.

مطالعهٔ همزمان : بخش ۹ از فصل ۷ کتاب بیرکف و مک‌لین؛ فصل ۱۳ کتاب ماکسول.[1]

حاصلضربهای اسکالر

۱. هرگاه $a = (a_1, a_2, a_3)$ و $b = (b_1, b_2, b_3)$ نقاط $\mathbb{R}^3$ باشند با استفاده از فرمول کسینوس ثابت کنید

$$\cos aob = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}}$$

فرض کنید فاصلهٔ a تا o برابر است با $\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}$.

۲. با استفاده از نمادگذاری سؤال ۱ هرگاه $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$ وضعیت نقاط a، o، و b را توصیف کنید.

1) Maxwell

۳. در $V_3(F)$ یک حاصلضرب اسکالر (یا ضرب داخلی) دو بردار $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$ را با

$$\mathbf{a}.\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

تعریف می‌کنیم. با استفاده از حاصلضرب اسکالر عبارتی برای طول $\mathbf{oa}$ در حالت $F=\mathbb{R}$ ارائه دهید. این طول را با $|\,\mathbf{a}\,|$ نمایش می‌دهیم. بررسی کنید که در $V_3(\mathbb{R})$ داریم $\mathbf{a}.\mathbf{b}=|\,\mathbf{a}\,|\,.\,|\,\mathbf{b}\,|\cos\mathbf{aob}$.

۴. به ازای بردار ثابتی مانند $\mathbf{a}$ تبدیل

$$\mathbf{v}\mapsto\mathbf{v}.\mathbf{a}$$

از $V_3(F)$ را با استفادهٔ از ماتریس‌ها توصیف کنید و نتیجه‌گیری کنید که این نگاشت تبدیلی خطی است. همدامنهٔ این تبدیل چیست؟ با استفاده از سؤالهای ۲ و ۱۷.۱۱ (یک) هستهٔ این تبدیل را بیابید.

حاصلضربهای برداری

۵. یک حاصلضرب برداری (یا حاصلضرب برونی دو بردار $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$ در $V_3(F)$ را با

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\left(\det\begin{pmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{pmatrix},\det\begin{pmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{pmatrix},\det\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}\right)$$

تعریف می‌کنیم بررسی کنید $\mathbf{b}\times\mathbf{a}=-\mathbf{a}\times\mathbf{b}$. در $V_3(\mathbb{R})$ بررسی کنید $|\,\mathbf{a}\times\mathbf{b}\,|=|\,\mathbf{a}\,|\cdot|\,\mathbf{b}\,|\sin\mathbf{aob}$ و نتیجه‌گیری کنید $|\,\mathbf{a}\times\mathbf{b}\,|$ برابر با مساحت متوازی‌الاضلاع با رأسهای o، a، b، $a+b$ است.

۶. به‌ازای بردار ثابتی مانند a تبدیل

$$\alpha:\mathbf{v}\mapsto\mathbf{v}\times\mathbf{a}$$

از $V_3(F)$ را با استفاده از ماتریس‌ها توصیف کنید و نتیجه‌گیری کنید که این نگاشت تبدیلی خطی است.

$\mathbf{a}\times\mathbf{a}$ را بیابید و نتیجه‌گیری کنید $Sp(\mathbf{a})$ در هسته α است. هرگاه $\mathbf{a}=(a_1,0,0)$ که $a_1\neq 0$ هستهٔα را بیابید. هرگاه $\mathbf{a}=(a_1,a_2,0)$ که $a_1,a_2\neq 0$، هستهٔ α را بیابید. هرگاه $a=(a_1,a_2,a_3)$ که $a_1,a_2,a_3\neq 0$، هستهٔ α را بیابید. هرگاه $\mathbf{a}\neq\mathbf{o}$ ثابت کنید هستهٔ α برابر با $Sp(\mathbf{a})$ است.

۷. $\mathbf{a}.(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ و $\mathbf{b}.(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ را در $V_3(F)$ بیابید و ثابت کنید $Sp(\mathbf{a},\mathbf{b})$در هستهٔ تبدیل

$$\mathbf{v}\mapsto\mathbf{v}.(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

قرار دارد. دربارهٔ سوهای خطهای واصل مبدأ به $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ چه می‌توانید بگویید؟ دربارهٔ سوی خط واصل مبدأ به $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ و صفحهٔ $Sp(\mathbf{a},\mathbf{b})$ چه می‌توانید بگویید؟ چرا $(l\mathbf{a}+m\mathbf{b}+n\mathbf{c}).(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=l\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$.

۸. تبدیل

$$\mathbf{v}\mapsto\mathbf{a}.(\mathbf{v}\times\mathbf{c})$$

از $V_3(F)$ را به صورت ترکیبی از دو تبدیل خطی بنویسید و نتیجه بگیرید این تبدیل نیز خطی است. همدامنهٔ آن چیست؟ آیا $\mathbf{a}$ در هسته قرارداد؟ آیا $\mathbf{c}$ در همدامنه قرار دارد؟ آیا $Sp(\mathbf{a},\mathbf{c})$ در هسته قرار دارد؟ بگویید چرا $\mathbf{a}.[(l\mathbf{a}+m\mathbf{b}+n\mathbf{c})\times\mathbf{c}]=m\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$.

۹. تبدیل

$$\mathbf{v}\mapsto\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{v})$$

از $V_3(F)$ را به صورت ترکیبی از دو تبدیل خطی بنویسید و نتیجه بگیرید این تبدیل نیز خطی است. همدامنهٔ آن چیست؟ آیا $Sp(\mathbf{a},\mathbf{b})$ در هستهٔ آن است؟ بگوئید چرا $\mathbf{a}.[\mathbf{b}\times(l\mathbf{a}+m\mathbf{b}+n\mathbf{c})]=n\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$

دترمینان‌ها

۱۰. تا آخر این فصل A ماتریس

$$\begin{pmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{pmatrix}$$

با سطرهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، $\mathbf{c}$ است. گاهی A را به صورت

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}$$

می‌نویسیم. برای محاسبه حجم متوازی‌السطوح با رأسهای $\mathbf{o}$، $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، $\mathbf{b}+\mathbf{c}$، $\mathbf{c}+\mathbf{a}$، $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ در $V_۳(\mathbb{R})$ ابتدا با استفاده از سؤال ۵ نشان دهید مساحت متوازی‌الاضلاع با رأسهای $\mathbf{o}$ ، $\mathbf{b}$ ، $\mathbf{c}$، $\mathbf{b}+\mathbf{c}$ برابر با طول $\mathbf{o}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ است و این خط عمود بر صفحهٔ متوازی‌الاضلاع است. آنگاه حجم را با ضرب این مساحت در فاصلهٔ $\mathbf{a}$ تا صفحهٔ متوازی‌الاضلاع به‌دست آورید. در واقع حجم برابر است با $\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$. با توجه به این نتیجه هستهٔ تبدیلهای سؤالهای ۷، ۸، ۹ را تعبیر کنید. روی هر هیئت دلخواه $\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ دترمینان A نام دارد.

۱۱. با استفاده از سؤالهای ۷، ۸، ۹ مقادیر دترمینان ماتریس‌های $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۵ & ۷ & ۹ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۴ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{pmatrix}$ را بیابید:

۱۲. در بسط $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ هر یک از جمله‌ها به صورت $\pm a_i b_j c_k$ است که $\{i,j,k\}=\{۱,۲,۳\}$ دقیقاً مشخص کنید به کدام سه‌تایی (i,j,k) علامت مثبت و به کدام سه‌تایی علامت منفی نسبت داده می‌شود. هرگاه سه‌تایی (i,j,k) را به جایگشت $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ i & j & k \end{pmatrix}$ منسوب کنیم، مجموعهٔ جایگشتهایی را که در بسط دترمینان ضریبی مثبت و مجموعه‌ای که یک ضریب منفی می‌دهد نام ببرید.

۱۳. رابطهٔ بین $\mathbf{a.b \times c}$، $\mathbf{a.c \times b}$، $\mathbf{b.c \times a}$ ، $\mathbf{b.a \times c}$ ، $\mathbf{c.a \times b}$ و $\mathbf{c.b \times a}$ چیست؟

۱۴. هرگاه B ماتریس با ستونهای $\mathbf{b \times c}$، $\mathbf{c \times a}$، و $\mathbf{a \times b}$ باشد با استفاده از اصول سؤال ۶.۱۳ ماتریس حاصلضرب AB را محاسبه کنید.

۱۵. با استفاده از سؤال ۱۴ ماتریس وارون

(یک) $\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$

(دو) $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}$

(سه) $\begin{pmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ -۱ & ۰ & ۳ \end{pmatrix}$

را بیابید و در هر حالت نتیجه را بررسی کنید.

۱۶. از سؤال ۱۴ نتیجه بگیرید اگر $\det A \neq ۰$ آنگاه ماتریس A و تبدیل خطی $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A$ هر دو وارونپذیرند.

۱۷. $(a_۱، b_۱، c_۱).(a_۲، b_۲، c_۲) \times (a_۳،b_۳ ،c_۳)$ را بیابید و نتیجه بگیرید $\det A = detA^T$ با استفاده از $(AB)^T = B^T A^T$ و سؤال ۱۴ نشان دهید اگر $\det A \neq ۰$ آنگاه A هم یک وارون چپ و هم یک وارون راست دارد.

۱۸. هرگاه U ماتریس

$$\begin{pmatrix} u_۱ & u_۲ & u_۳ \\ v_۱ & v_۲ & v_۳ \\ w_۱ & w_۲ & w_۳ \end{pmatrix}$$

باشد که بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ سطرهای آن هستند بررسی کنید سطرهای ماتریس حاصلضرب UA، $u_۱\mathbf{a}+u_۲\mathbf{b}+u_۳\mathbf{c}$ ، $v_۱\mathbf{a}+v_۲\mathbf{b}+v_۳\mathbf{c}$ و $w_۱\mathbf{a}+w_۲\mathbf{b}+w_۳\mathbf{c}$ هستند.

۱۹. با استفاده از سؤالهای ۱۸ و ۷، ۸، ۹ ثابت کنید دترمینان UA برابر است با

$$\begin{aligned}&u_1\mathbf{a}.[v_2\mathbf{b}\times w_3\mathbf{c}+v_3\mathbf{c}\times w_2\mathbf{b}]\\&+u_2\mathbf{b}.[v_1\mathbf{a}\times w_3\mathbf{c}+v_3\mathbf{c}\times w_1\mathbf{a}]\\&+u_3\mathbf{c}.[v_1\mathbf{a}\times w_2\mathbf{b}+v_2\mathbf{b}\times w_1\mathbf{a}].\end{aligned}$$

۲۰. با استفاده از سؤالهای ۱۹ و ۱۳ ثابت کنید دترمینان UA برابر است با

$$\begin{aligned}u_1\mathbf{a}.[(v_2w_3-v_3w_2)\mathbf{b}\times\mathbf{c}]+u_2\mathbf{b}.[(v_3w_1-v_1w_3)\mathbf{c}\times\mathbf{a}]\\+u_3\mathbf{c}.[(v_1w_2-v_2w_1)\mathbf{a}\times\mathbf{b}].\end{aligned}$$

۲۱. با استفاده از سؤالهای ۲۰، ۱۲، ۱۳ ثابت کنید دترمینان UA برابر است با

$$[\mathbf{u}.\mathbf{v}\times\mathbf{w}][\mathbf{a}.\mathbf{b}\times\mathbf{c}]=\det U.\det A$$

۲۲. از سؤال ۲۱ نتیجه‌گیری کنید اگر A وارونپذیر باشد آنگاه $\det A\neq 0$.

تبدیلهای تکین و ناتکین

۲۳. هرگاه $\det A\neq 0$ هم تبدیل $\alpha:\mathbf{v}\to\mathbf{v}A$ و هم ماتریس A ناتکین نام دارند. با استفاده از سؤالهای ۱۶ و ۱۷ نشان دهید در این حالت $\alpha\in S_{V_3(F)}$.

۲۴. ثابت کنید تبدیلهای خطی ناتکین $V_3(F)$ یک گروه تشکیل می‌دهند و ماتریس‌های ناتکین 3×3 تحت عمل ضرب ماتریس نیز یک گروه تشکیل می‌دهند و این دو گروه یکریخت هستند. به‌طور مجرد هر یک از این دو گروه، گروه خطی عام $GL(3,F)$ نام دارد.

۲۵. هرگاه $\det A=0$ هم تبدیل $\alpha:\mathbf{v}\to\mathbf{v}A$ و هم ماتریس A تکین نام دارند. چرا $Sp(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ فضای نگارهٔ α است؟ هرگاه A تکین باشد ثابت کنید $Sp(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ در هستهٔ تبدیل$\mathbf{v}\mapsto\mathbf{v}.\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ قرار دارد به نحوی که $Sp(B^TA^T\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ نمی‌تواند همهٔ $V_3(F)$ باشد و α تبدیلی پوشا نیست.

۲۶. هرگاه A تکین باشد با استفاده از سؤال ۱۴ و $(AB)^T=B^TA^T$ یک بردار غیر صفر در هستهٔ $\mathbf{v}\mapsto\mathbf{v}A$ بسازید که این تبدیل یک به یک نباشد.

۲۷. ثابت کنید مرکز گروه $GL(۳, F)$ متشکل از ماتریس‌های اسکالر است.

۲۸. با استفاده از تعریف یک قیچی در سؤال ۱۳. ۲۳ نشان دهید هر قیچی $V_۳(F)$ به صورت

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, z) + (px + qy + rz)(a, b, c)$$

است و شرط دیگری که لازم است را بیان کنید. نشان هر قیچی در $V_۳(F)$ زیر فضای دوبُعدی از نقاط ثابت دارد.

۲۹. مرتبهٔ زیرگروه ماتریس‌های اسکالر، مرتبهٔ گروه قیچیهای ثابت نگهدارندهٔ یک زیرفضای دوبُعدی، مرتبهٔ گروه ماتریس پایین مثلثی و مرتبه گروه کامل در $GL(۳, \mathbb{Z}_۲)$ را مشخص کنید.

خلاصهٔ مطالب

تعریف سؤالهای ۳، ۵ اگر $\mathbf{a} = (a_۱, a_۲, a_۳)$ و $\mathbf{b} = (b_۱, b_۲, b_۳)$ آنگاه حاصلضرب اسکالر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ عبارت است از $\mathbf{a}.\mathbf{b} = a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + a_۳b_۳ \in F$ و حاصلضرب برداری $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ عبارت است از

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_۲b_۳ - a_۳b_۲, a_۳b_۱ - a_۱b_۳, a_۱b_۲ - a_۲b_۱)$$

تعریف سؤال ۱۰ اگر $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ سطرهای یک ماتریس مربعی A باشد آنگاه دترمینان A برابر $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ است.

قضیه سؤال ۱۰ قدر مطلق دترمینان $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ در $V_۳(\mathbb{R})$ حجم متوازی‌السطوح با سه یال همراس گذرنده از مبدأو نقاط $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ ، و $\mathbf{c}$ است.

قضیه سؤال ۲۱ اگر A و B دو ماتریس ۳ × ۳ باشند آنگاه $\det AB = \det A . \det B$.

قضیه سؤالهای ۲۳، ۲۵ اگر $\alpha : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A$ یک تبدیل خطی $V_۳(F)$ است آنگاه α و A ناتکین

نام دارند هرگاه $\det A \neq ۰$ و تکین نام دارند هرگاه $\det A = ۰$.

قضیه سؤال ۲۴ تبدیلهای خطی ناتکین $V_۳(F)$ یک گروه تشکیل می‌دهند که با گروه ماتریس‌های ۳ × ۳ ناتکین تحت عمل ضرب ماتریس یکریخت است. به‌طور مجرد هر یک از این دو گروه به گروه خطی عام$GL(۳, F)$ موسوم است.

یادداشت تاریخی

نماد حاصلضرب اسکالر و حاصلضرب برداری دو بردار توسط ج. و. گیبس[2] (۱۸۸۱) ابداع شد تا توصیف فضای حقیقی سه‌بُعدی را که به دنبال کشف چهارگانها توسط و. ر. هامیلتون (۱۸۴۳) در دسترس قرارگرفته بودند تسهیل کند.

صورت تعمیم یافتهٔ حاصلضرب اسکالر که به یک فرم دو خطی متقارن موسوم است و در مطالعهٔ گروه‌های خطی در این قرن اهمیت زیادی دارند.

دترمینان‌ها ابتدا در اروپا توسط ج. و. لایبنیز[3] (۱۶۷۸) در حل دستگاه معادله‌ها به کار رفتند و نمادگذاری متعارف از اواخر قرن نوزدهم همان است که در سؤال ۱۲ مطرح شد.

2) J. w.Gibbs 3) G. w. Leibniz

جوابهای فصل ۱۴

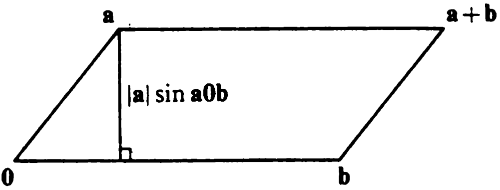
۱. $\mathbf{ab}^2 = \mathbf{oa}^2 + \mathbf{ob}^2 - 2\mathbf{oa}.\mathbf{ob}\cos\mathbf{aob}$

۲. یا $\mathbf{o} = \mathbf{a}$ یا $\mathbf{o} = \mathbf{b}$ یا زاویهٔ $\mathbf{aob} = \frac{1}{2}\pi$

۳. طول $\mathbf{oa}$ برابر است با $\sqrt{\mathbf{a}.\mathbf{a}}$.

۴. $(x,y,z) \mapsto (x,y,z)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$. همدامنهٔ $V_1(F) = F$ است.
هسته = صفحهٔ $\perp$ $\mathbf{oa}$ است.

۵.



۶. $(x,y,z) \mapsto (x,y,z)\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$

۷. $\mathbf{a}.(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}.(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0$ بنابراین هم $\mathbf{a}$ و هم $\mathbf{b}$ در هستهٔ $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}.(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ قرار دارند. خط واصل مبدأ به $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ عمود بر خطهای واصل مبدأ به $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ است. $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}.(\mathbf{b}\times\mathbf{b})$ بنا به سؤال ۴ خطی است. بنابراین

$$(l\mathbf{a} + m\mathbf{b} + n\mathbf{c})(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = l\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + m\mathbf{b}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + n\mathbf{c}.(\mathbf{b}\times c)$$

۸. $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}\times\mathbf{c}$ و $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}.\mathbf{a} = \mathbf{a}.\mathbf{v}$ را ترکیب کنید. همدامنهٔ $V_1(F) = F$ است. بنابه سؤال ۷، $\mathbf{a}$ در هسته قرار دارد. بنابه سؤال ۶، $\mathbf{c}$ در هسته قرار دارد.

۹. $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{b}\times\mathbf{v}$ و $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{a}.\mathbf{v} = \mathbf{v}.\mathbf{a}$ را ترکیب کنید.

۱۰. سؤال ۵ را به کار برید. اگر سه یال اصلی هم صفحه باشند حجم متوازی‌السطوح برابر با صفر است.

۱۱. همه ۰.

۱۲.

$$\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

۱۳. جایگشتهای زوج ضریب مثبت و جایگشتهای فرد ضریب منفی دارند.

$$\mathbf{a}.\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \mathbf{b}.\mathbf{c}\times\mathbf{a} = \mathbf{c}.\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{a}.\mathbf{c}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}.\mathbf{c}\times\mathbf{a} = -\,\mathbf{c}.\mathbf{b}\times\mathbf{a}.$$

۱۴. $(\mathbf{a}.\mathbf{b}\times\mathbf{c})I$.

۱۵. (یک) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(دو) $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{9}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

(سه) $\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 \\ -4 & 6 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

۱۶. اگر $\mathbf{a}.\mathbf{b}\times\mathbf{c}\neq 0$ آنگاه $A(\frac{1}{\mathbf{a}.\mathbf{b}\times\mathbf{c}})B = I$.

۱۷. اجزاء را با بسط سؤال ۱۲ مقایسه کنید. اگر B وارون راست A^T باشد آنگاه $A^TB = I$ بنابراین $(A^TB)T = I^T$ و $B^TA = I$.

۲۲. اگر $AA^{-1} = I$ آنگاه $\det A.\det A^{-1} = 1$ بنابراین $\det A \neq 0$.

۲۳. سؤالهای ۱. ۲۴ و ۱. ۲۸ را به کار برید.

۲۴. شبیه سؤالهای ۱۳. ۱۳ و ۱۳. ۱۴ استدلال کنید.

۲۵. $(1,0,0)\alpha = \mathbf{a}$ و $(0,1,0)\alpha = \mathbf{b}$ و $(0,0,1)\alpha = \mathbf{c}$ بنابراین $(x,y,z)\alpha = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$. $\det A = 0 \Leftarrow \mathbf{a}$ در هسته است. بنا به سؤال

۷، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ در هسته هستند. همهٔ فضا برابر هسته است تنها اگر $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = 0$ بنا به سؤال ۶ این زمانی اتفاق می‌افتد که $\mathbf{b} \in S_p(\mathbf{c})$ یا $\mathbf{c} \in Sp(\mathbf{b})$ و آنگاه داریم $Sp(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = Sp(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ یا $Sp(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = Sp(\mathbf{a}, \mathbf{c})$.

۲۶. A تکین $\Leftarrow$ A^T تکین. اگر $\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}$ سطرهای A^T باشند آنگاه ماتریس B ساخته شده مطابق سؤال ۱۴ نتیجه می‌دهد A^TB = ماتریس صفر. $B^TA = (A^TB)^T =$ ماتریس صفر بنابراین سطرهای B^T یعنی $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$، $\mathbf{c} \times \mathbf{a}$ و $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$ به $\mathbf{o}$ نگاشته می‌شوند. دست‌کم یکی از اینها غیر صفر است مگر این که $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، $\mathbf{c}$ در یک زیرفضای یک بُعدی باشند. اگر اینها در یک زیرفضای یک بعدی قرار گیرند آنگاه هر بردار عمود بر آن در هسته است.

۲۷. کافی است تعویض‌پذیری با

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

و ترانهادهٔ آنها تضمین شود.

۲۸. $pa + qb + rc = 0$. هر نقطهٔ روی $px + qy + rz = 0$ ثابت است.

۲۹. ۱، ۴، ۸، ۱۶۸ = ۴. ۶. ۷

MATH75.IR

۱۵

بردارهای ویژه و مقادیر ویژه

به کارگیری ماتریس به جای یک تبدیل خطی غالباً خصوصیت هندسی تبدیل را پنهان می‌کند. برای بسیاری از تبدیلهای خطی یک جنبهٔ هندسی ممکن است با یافتن بردارهایی که توسط یک بزرگسازی به مرکز مبدأ تبدیل می‌شوند نمایان شود. این بردارها بردارهای ویژهٔ تبدیل و عوامل اسکالر مربوط به آنها مقادیر ویژهٔ مربوط نام دارند.

۱. تحت تبدیل خطی

$$\alpha : (x, y) \mapsto (x, y) \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$$

از $V_۲(\mathbb{R})$ که یک بازتاب نسبت به محور x است تعیین کنید آیا $\mathbf{o}$، $\mathbf{v}$، $\mathbf{v}\alpha$ نقاط همخط هستند هرگاه (یک) $\mathbf{v} = (۱, ۰)$، (دو) $\mathbf{v} = (۰, ۱)$ و (سه) $\mathbf{v} = (۱, ۱)$.

۲. تحت تبدیل خطی

$$\alpha : (x, y) \mapsto (x, y) \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

از $V_۲(\mathbb{R})$ که یک قیچی روی محور x است تعیین کنید آیا $\mathbf{o}$ و $\mathbf{v}$ و $\mathbf{v}\alpha$ نقاط همخط هستند هرگاه (یک) $\mathbf{v} = (۱, ۰)$ (دو) $\mathbf{v} = (۰, ۱)$ و (سه) $\mathbf{v} = (۱, ۱)$.

۳. تحت تبدیل خطی

$$\alpha : (x,y) \mapsto (x,y)\begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{pmatrix}$$

از $\mathbf{V}_۲(\mathbb{R})$ که به کشیدن دوطرفه موسوم است تعیین کنید آیا $\mathbf{o}$، $\mathbf{v}$، $\mathbf{v}\alpha$ نقاط همخط هستند هرگاه (یک) $\mathbf{v} = (۱, ۰)$ ، (دو) $\mathbf{v} = (۵, ۰)$، و (سه) $\mathbf{v} = (۰, ۱)$، (چهارا) $\mathbf{v} = (۰, ۴)$ ، (پنج) $\mathbf{v} = (۱, ۱)$.

۴. هرگاه $\mathbf{o}$ ، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{v}\alpha$ همخط باشند چگونه می‌توان $\mathbf{v}\alpha$ را بر حسب $\mathbf{v}$ نوشت؟

۵. اگر $\alpha : V_n(F) \to V_n(F)$ تبدیلی خطی باشد آنگاه برداری مانند $\mathbf{v} \neq ۰$ که $\mathbf{v}\alpha = \lambda \mathbf{v}$ به ازای یک اسکالر λ بردار ویژهٔ α با مقدار ویژهٔ λ نام دارد.
هرگاه α دورانی از $V_۲(\mathbb{R})$ حول مبدأ است مقادیر ویژهٔ ممکن چه هستند؟

۶. هرگاه یک تبدیل خطی یک طولپایی باشد چه مقادیر ویژهٔ حقیقی می‌تواند داشته باشد؟

۷. نگارهٔ یک مشبکهٔ مربعی در $V_۲(\mathbb{R})$ را تحت تبدیل

$$(x,y) \mapsto (x,y)\begin{pmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & ۲ \end{pmatrix}$$

نمایش دهید و آنگاه نگاره‌های نقاط $(۱, ۲)$ و $(۱-, ۱)$ را مشخص کنید. آیا این بردارها، بردارهای ویژهٔ تبدیل هستند و در این صورت مقادیر ویژهٔ آنها چه هستند؟

۸. هرگاه α یک تبدیل خطی از $V_n(F)$ به خود باشد شرح دهید چرا هر بردار غیر صفر در هستهٔ α یک بردار ویژهٔ α است.

۹. هرگاه $(۱, ۰)$ یک بردار ویژهٔ

$$\alpha : (x,y) \mapsto (x,y)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

باشد دربارهٔ b چه می‌توان گفت؟

هرگاه $(۱\,,\,۰)$ یک بردار ویژهٔ α باشد دربارهٔ c چه می‌توان گفت؟

هرگاه $(۰,۱)\,,(۱\,,۰)\,,(۱,۱)$ بردارهای ویژهٔ α باشند دربارهٔ a، b، c، و d چه می‌توان گفت؟ در این صورت چگونه تبدیل α را از نظر هندسی توصیف می‌کنید؟

هرگاه $a = d$ و $b = c = ۰$ بردارهای ویژهٔ α چه هستند؟

۱۰. هرگاه $\mathbf{v}$ یک بردار ویژهٔ یک تبدیل خطی α باشد آیا نتیجه می‌شود که $۲\mathbf{v}$، $۳\mathbf{v}$ و در واقع $k\mathbf{v}$ به‌ازای هر اسکالر k بردارهای ویژهٔ α هستند؟

۱۱. هرگاه $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ بردارهای ویژهٔ یک تبدیل خطی α باشند و $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ مقدار ویژهٔ یکسان داشته باشند دربارهٔ بردارهای $Sp(\mathbf{u},\mathbf{v})$ چه می‌توان گفت؟

معادلهٔ مشخصه

۱۲. هرگاه $\mathbf{u}$ یک بردار ویژهٔ تبدیل خطی

$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

و $\mathbf{u}$ دارای مقدار ویژهٔ λ باشد دربارهٔ $\mathbf{u}$ نسبت به تبدیل خطی

$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}.$$

چه می‌توان گفت؟ با استفاده از سؤالهای ۳.۱۳، ۴.۱۳ و ۵.۱۳ نتیجه بگیرید ماتریس $\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$ تکین است.

۱۳. معادلهٔ $\det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = ۰$ معادلهٔ مشخصهٔ تبدیل $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ و ماتریس $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ نام دارد.

با حل معادله‌های مشخصه تبدیلهای

(یک) $(x,y) \mapsto (x,y)\begin{pmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۲ \end{pmatrix}$،

(دو) $(x,y) \mapsto (x,y)\begin{pmatrix} ۱ & ۴ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}$،

(سه) $(x,y) \mapsto (x,y)\begin{pmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & -۱ \end{pmatrix}$،

(چهار) $(x,y) \mapsto (x,y)\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$،

(پنج) $(x,y) \mapsto (x,y)\begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{pmatrix}$،

(شش) $(x,y) \mapsto (x,y)\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$، بردارهای ویژهٔ ممکن این تبدیلها را تعیین کنید.

۱۴. از معادلهٔ $(x,y)\begin{pmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۲ \end{pmatrix} = (۴x, ۴y)$ بردارهای ویژهٔ سؤال ۱۳ (یک) را با مقدار ویژهٔ ۴ بیابید. به همین نحو بردارهای ویژهٔ این تبدیل را با مقدار ویژهٔ ۱ بیابید.

۱۵. بردارهای ویژهٔ تبدیل سؤال ۱۳ (سه) را بیابید.

۱۶. بردارهای ویژهٔ تبدیل

$$(x,y) \mapsto (x,y)\begin{pmatrix} a & ۰ \\ ۰ & b \end{pmatrix}$$

را به شرط $a \neq b$ بیابید.

۱۷. فرض کنید A ماتریس ۳ × ۳

$$\begin{pmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \end{pmatrix}$$

را نمایش دهد. با استفاده از استدلالی مشابه سؤال ۱۲ نشان دهید اگر تبدیل $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A$ یک بردار ویژه با مقدار ویژهٔ λ داشته باشد آنگاه ماتریس

$$\begin{pmatrix} a_۱ - \lambda & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ - \lambda & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ - \lambda \end{pmatrix}$$

تکین است.

غالباً این ماتریس با $A - \lambda I$ نمایش داده می‌شود و معادلهٔ $\det(A - \lambda I) = ۰$ معادلهٔ مشخصهٔ تبدیل $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A$ و ماتریس A نام دارد.

۱۸. با حل معادلهٔ مشخصه، مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ تبدیل $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A$ را بیابید که

$$A = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ -۲ & ۱ & ۳ \\ ۳ & ۱ & -۱ \end{pmatrix}$$

ماتریس‌های متشابه

۱۹. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ و $\mathbf{u}$ یک بردار ویژهٔ تبدیل خطی $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A$ با مقدار ویژهٔ λ باشد، فرض کنید U یک ماتریس $n \times n$ باشد و $\mathbf{w} = \mathbf{v}U^{-۱}$.

نگارهٔ $\mathbf{w}$ را تحت تبدیلهای

$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}U \text{ ،} \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}UA \text{ و } \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}UAU^{-۱}$$

بیابید و نتیجه بگیرید $\mathbf{w}$ یک بردار ویژهٔ $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}UAU^{-۱}$ با مقدار ویژهٔ λ است. با ترسیمی از $Sp(\mathbf{w})$ و $Sp(\mathbf{u})$ این نتیجه را نشان دهید.

۲۰. فرض کنید $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A$ تبدیلی خطی از $V_۲(F)$ با بردارهای ویژهٔ $\mathbf{u}_۱$ و $\mathbf{u}_۲$ و به ترتیب با مقادیر ویژهٔ $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ باشد. به علاوه فرض کنید که ماتریس U با سطرهای $\mathbf{u}_۱$ و $\mathbf{u}_۲$ ناتکین است. نگاره‌های $(۱, ۰)$ و $(۰, ۱)$ را تحت تبدیل

$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}UAU^{-۱}$$

بیابید و نتیجه بگیرید

$$UAU^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_۱ & ۰ \\ ۰ & \lambda_۲ \end{pmatrix}$$

۲۱. با استفاده از سؤال ۱۵ ماتریس U را چنان بیابید که

$$U \begin{pmatrix} ۴ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{pmatrix} U^{-1} = \begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{pmatrix}$$

نتیجهٔ خود را بررسی کنید.

۲۲. یک ماتریس U و یک ماتریس قطری D چنان بیابید که

$$U \begin{pmatrix} -۵ & ۲ \\ -۲۸ & ۱۰ \end{pmatrix} U^{-1} = D$$

نشان دهید دو ماتریس قطری متمایز ممکن D برای انتخابهای مناسب U وجود دارند.

۲۳. فرض کنید $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A$ یک تبدیل خطی از $V_۳(F)$ باشد که $\mathbf{u}_۱$، $\mathbf{u}_۲$ و $\mathbf{u}_۳$ بردارهای ویژهٔ آن به ترتیب با مقدارهای ویژهٔ $\lambda_۱$، $\lambda_۲$ و $\lambda_۳$ هستند. به‌علاوه فرض کنید ماتریس U با سطرهای $\mathbf{u}_۱$، $\mathbf{u}_۲$ و $\mathbf{u}_۳$ ناتکین است. ماتریس UAU^{-1} را مشخص کنید.

۲۴. هرگاه $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A$ یک تبدیل خطی از $V_۳(F)$ باشد که $\mathbf{u}_۱$، $\mathbf{u}_۲$، $\mathbf{u}_۳$ بردارهای ویژهٔ آن به ترتیب با مقدارهای ویژهٔ $\lambda_۱$، $\lambda_۲$ و $\lambda_۳$ هستند ماتریسی مانند U را بیابید که

$$UA = \begin{pmatrix} \lambda_۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \lambda_۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \lambda_۳ \end{pmatrix} U$$

خواه U ناتکین باشد یا نباشد.

۲۵. آیا بیشتر از یک ماتریس U وجود دارد که در شرایط سؤال ۲۴ صدق کند؟

۲۶. ماتریس‌های A و B متشابه نام دارند هرگاه به ازای ماتریسی مانند M داشته باشیم $B = M^{-۱}AM$.

نشان دهید تشابه یک رابطهٔ هم‌ارزی در مجموعهٔ ماتریس‌های $n \times n$ روی یک هیئت مفروض است.

با استفاده از سؤال ۱۹ نشان دهید ماتریس‌های متشابه مقادیر ویژهٔ یکسان دارند.

۲۷. هرگاه $\begin{pmatrix} a_۱ & b_۱ \\ c_۱ & d_۱ \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} a_۲ & b_۲ \\ c_۲ & d_۲ \end{pmatrix}$ ماتریس‌های متشابه باشند با در نظر گرفتن معادله‌های مشخصهٔ آنها ثابت کنید $a_۱ + d_۱ = a_۲ + d_۲$ و $a_۱d_۱ - b_۱c_۱ = a_۲d_۲ - b_۲c_۲$. همچنین اثبات مستقیمی از این که ماتریس‌های متشابه دترمینان یکسان دارند ارائه کنید.

تغییر پایه

۲۸. برای چه جفتهایی از بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ داریم $Sp(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = V_۲(F)$؟

(یک) $\mathbf{u} = (۱, ۰)$، $\mathbf{v} = (۰, ۱)$،

(دو) $\mathbf{u} = (۱, ۱)$، $\mathbf{v} = (۰, ۰)$،

(سه) $\mathbf{u} = (۱, -۲)$، $\mathbf{v} = (-۲, ۴)$،

(چهار) $\mathbf{u} = (۱, ۲)$، $\mathbf{v} = (۱, ۳)$.

هرگاه $Sp(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = V_۲(F)$ گوئیم بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ یک پایه برای $V_۲(F)$ تشکیل می‌دهند.

۲۹. هرگاه α تبدیلی خطی از $V_n(F)$ با بردارهای ویژهٔ $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ و به ترتیب با مقادیر ویژه λ و μ باشند، با استفاده از سؤال ۱۰ نشان دهید اگر $\mathbf{v} \in Sp(\mathbf{u})$ یا $\mathbf{u} \in Sp(\mathbf{v})$ آنگاه $\lambda = \mu$.

۳۰. هرگاه α تبدیلی خطی از $V_۲(F)$ با بردارهای ویژهٔ $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ و به ترتیب با مقادیر ویژهٔ λ و μ باشد، با استفاده از سؤال ۲۵.۱۱ نشان دهید اگر $\lambda \neq \mu$ آنگاه ماتریس $\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$ ناتکین است و نتیجه بگیرید $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ پایه‌ای برای $V_۲(F)$ تشکیل می‌دهند.

۳۱. هرگاه تبدیل خطی $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A$ از $V_۲(F)$ دو مقدار ویژهٔ متمایز داشته باشد، با

استفاده از سؤال ۲۰ نتیجه بگیرید A متشابه با یک ماتریس قطری است.

۳۲. هرگاه α یک تبدیل خطی از $V_n(F)$ با بردارهای ویژهٔ $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ و به ترتیب با مقادیر ویژهٔ λ، μ و ν باشد و $\mathbf{w} \in Sp(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ با استفاده از سؤال ۲۸.۱۱ نشان دهید یا $\mu = \nu$ یا $\lambda = \nu$ یا $\lambda = \mu$.

۳۳. هرگاه یک ماتریس ۲ × ۲ ، A تنها یک مقدار ویژهٔ λ داشته باشد، آیا امکان دارد پایه‌ای برای $V_۲(F)$ متشکل از بردارهای ویژهٔ $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A$ وجود داشته باشد؟ آیا لزوماً پایه‌ای از $V_۲(F)$ متشکل از بردارهای ویژه $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A$ وجود دارد؟

۳۴. اگر $Sp(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = V_۲(F)$ آنگاه هر بردار $\mathbf{v}$ در $V_۲(F)$ به صورت $x\mathbf{u} + y\mathbf{w}$ است و به ازای یک $\mathbf{v}$ مفروض اسکالرهای x و y بنابه سؤال ۲۸.۱۱ یکتا هستند. هرگاه $\mathbf{v} = (۲, ۳)$ اسکالرهای x و y را بیابید اگر

(یک) $\mathbf{u} = (۱, ۰)$ و $\mathbf{w} = (۰, ۱)$،

(یک) $\mathbf{u} = (۱, ۲)$ و $\mathbf{w} = (۱, ۳)$،

(سه) $\mathbf{u} = (۱, ۱)$ و $\mathbf{w} = (۱, -۱)$.

اسکالرهای x و y مختصات $\mathbf{v}$ نسبت به پایه $\mathbf{u}$ و $\mathbf{w}$ نام دارند.

۳۵. هرگاه $\alpha : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A$ یک تبدیل خطی از $V_۲(F) = Sp(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ باشد و $\mathbf{u}A = p\mathbf{u} + q\mathbf{w}$ و $\mathbf{w}A = r\mathbf{u} + s\mathbf{w}$ نتیجه بگیرید.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}$$

به نحوی که

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}^{-۱}$$

به علاوه هرگاه بردار $x\mathbf{u} + y\mathbf{w}$ را با $[x, y]$ نمایش دهیم نشان دهید

$$\alpha : [x, y] \mapsto [x, y] \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

به نحوی که ماتریس‌های متشابه نسبت به پایه‌های متفاوت تبدیل یکسانی را نمایش می‌دهند.

قیچیها

۳۶. با استفاده از تعریف یک قیچی در سؤال ۲۳.۱۳ نشان دهید یک قیچی بردارهای ویژهٔ با مقدار ویژهٔ ۱ دارد و مقادیر ویژهٔ دیگری ندارد.

۳۷. معادلهٔ مشخصهٔ ماتریس یک قیچی از $V_۲(F)$ چیست؟

۳۸. هرگاه $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A$ یک قیچی از $V_۲(F)$ باشد، دترمینان A چیست؟ تأثیر یک قیچی روی مساحتهای $V_۲(\mathbb{R})$ چیست؟

۳۹. تبدیلی خطی

$$(x, y) \mapsto (x, y) + (cx + dy)(a, b)$$

را با استفاده از یک ماتریس بنویسد. بررسی کنید شرط جبری برای قیچی بودن این تبدیل این است که معادلهٔ مشخصه ماتریس مربوط برابر با $(\lambda - ۱)^۲ = ۰$ باشد.

۴۰. هرگاه A یک ماتریس ۲×۲ با معادلهٔ مشخصهٔ $(\lambda - ۱)^۲ = ۰$ باشد نشان دهید A را می‌توان به صورت $\begin{pmatrix} ۱ + a & b \\ c & ۱ - a \end{pmatrix}$ نوشت که $-a^۲ - bc = ۰$.

(یک) هرگاه $b = ۰$ نشان دهید این ماتریس مطابق سؤال ۲۴.۱۳ ماتریس یک قیچی یا همانی است.

(دو) هرگاه $b \neq ۰$ نشان دهید $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A$ به صورت

$$(x, y) \mapsto (x, y) + \left(\frac{bx - ay}{b}\right)(a, b)$$

است.

سؤالهای ۳۹ و ۴۰ نشان می‌دهند که ماتریس‌های قیچیهای $V_۲(F)$ دقیقاً آنهایی‌اند که همانی نیستند و معادله مشخصه $(\lambda - ۱)^۲ = ۰$ دارند.

۴۱. هرگاه a و b اسکالرهای مفروضی باشند که $b \neq ۰$ نشان دهید یک ماتریس یکتا به صورت $\begin{pmatrix} a & b \\ r & s \end{pmatrix}$ وجود دارد که یک قیچی را نمایش می‌دهد.

۴۲. هرگاه c و d اسکالرهای مفروضی باشند که $c \neq ۰$ نشان دهید یک ماتریس یکتا به صورت $\begin{pmatrix} p & q \\ c & d \end{pmatrix}$ وجود دارد که یک قیچی را نمایش می‌دهد.

۴۳. با استفاده از سؤال ۱۳ .۹ نشان دهید زیر مجموعهٔ ماتریس‌های با دترمینان ۱ در $GL(۲, F)$ یک زیرگروه است. این زیرگروه، گروه خطی خاص $SL(۲, F)$ نام دارد.

۴۴. اعضای $SL(۲, \mathbb{Z}_۲)$ را فهرست کنید و بگوئید کدام یک قیچی هستند. آیا قیچیها این گروه را تولید می‌کنند؟

۴۵. هرگاه $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ و $S = \begin{pmatrix} a & b \\ r & s \end{pmatrix}$ ماتریس‌هایی در $SL(۲, F)$ باشند، نشان دهید ماتریس $AS^{-۱}$ ماتریس یک قیچی یا همانی است. با استفاده از سؤال ۴۱ نشان دهید اگر $b \neq ۰$ آنگاه یا A ماتریس یک قیچی یا حاصلضرب دو قیچی است.

۴۶. با استفاده از ایدهٔ سؤال ۴۵ و نتیجهٔ سؤال ۴۲ نشان دهید اگر $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ در $SL(۲, F)$ باشد، و $c \neq ۰$ آنگاه A یا ماتریس یک قیچی یا حاصلضرب دو قیچی است.

۴۷. هرگاه

$$\alpha : (x, y) \mapsto (x, y) \begin{pmatrix} a & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{a} \end{pmatrix}$$

و $a \neq ۰, -۱$، نشان دهید α حاصلضرب دو قیچی

$$(x, y) \mapsto (x, y) + \frac{a - ۱}{a + ۱}(x - y)(۱, ۱)$$

و

$$(x, y) \mapsto (x, y) + \frac{a - ۱}{a + ۱}(x + ay)(۱, -۱/a)$$

است.

سؤالهای ۴۵، ۴۶، و ۴۷ ثابت می‌کنند که هر عضو $SL(۲, F)$ یا یک قیچی یا حاصلضرب دو قیچی یا نیمدور $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ است.

خلاصهٔ مطالب

تعریف **سؤال ۵** هرگاه $\alpha : V \mapsto V$ یک تبدیل خطی از یک فضای برداری V باشد و به‌ازای بردار غیر صفر $\mathbf{u}$ و اسکالری مانند λ داشته باشیم $\mathbf{u}\alpha = \lambda\mathbf{u}$ آنگاه $\mathbf{u}$ بردار ویژهٔ α با مقدار ویژهٔ λ نام دارد.

تعریف **سؤالهای ۱۳، ۱۷** معادلهٔ $\det(A - \lambda I) = ۰$ معادلهٔ ویژهٔ ماتریس A و تبدیل $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A$ نام دارد.

قضیه **سؤالهای ۱۲، ۱۷** تبدیل خطی $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A$ یک بردار ویژهٔ با مقدار ویژهٔ λ دارد اگر و تنها اگر $\det(A - \lambda I) = ۰$

قضیه **سؤال ۱۹** اگر $\mathbf{u}$ یک بردار ویژهٔ تبدیل خطی $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A$ با مقدار ویژهٔ λ باشد و M یک‌ماتریس ناتکین باشد، آنگاه $\mathbf{u}M^{-۱}$ یک بردار ویژهٔ تبدیل $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}MAM^{-۱}$ با مقدار ویژهٔ λ است.

قضیه **سؤالهای ۲۰، ۲۳** اگر سطرهای ماتریس ناتکین M بردارهای ویژهٔ تبدیل $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A$ باشندآنگاه $MAM^{-۱}$ یک‌ماتریس قطری است و درایه‌های قطری $MAM^{-۱}$ مقادیر ویژهٔ $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A$ هستند.

تعریف **سؤال ۲۶** دو ماتریس A و B را متشابه گویند هرگاه یک ماتریس M وجود داشته‌باشد، که $B = M^{-۱}AM$.

قضیه **سؤالهای ۲۶، ۲۷** ماتریس‌های متشابه مقادیر ویژهٔ برابر و معادلهٔ ویژهٔ برابر و دترمینان برابر دارند.

قضیه **سؤال ۳۵** ماتریس‌های متشابه نسبت به پایه‌های متفاوت تبدیل یکسانی را نمایش

می‌دهند.

قضیه سؤالهای ۳۹، ۴۰ تنها تبدیلهای در $GL(۲, F)$ با معادلهٔ مشخصهٔ $۰ = (۱ - \lambda)^۲$ قیچیها و همانی هستند.

تعریف سؤال ۴۳ زیرگروهی از $GL(۲, F)$ متشکل از ماتریس‌های با دترمینان ۱ گروه خطی خاص $SL(۲, F)$ نام دارد.

قضیه سؤالهای ۴۵،۴۶و۴۷ گروه خطی خاص به وسیلهٔ قیچیها تولید می‌شود.

یادداشت تاریخی

استفاده از بردارهای ویژه و مقادیر ویژه ابتدا در مطالعهٔ فرمهای درجهٔ دوم مطرح شدند. مسئله بر سر یافتن دورانی بود که منحنی $ax^۲ + ۲hxy + by^۲ = c$ را به یک منحنی به صورت $Ax^۲ + By^۲ = C$ تبدیل کند. روش به این صورت است که عبارت $ax^۲ + ۲hxy + by^۲$ را به صورت $(x, y) \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ می‌نویسند و سپس A و B مقادیر ویژهٔ ماتریس $\begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$ خواهد بود. اگر **a** و **b** بردارهای واحد ویژهٔ متناظر باشند آنگاه ماتریس با سطرهای **a** و**b** ماتریس دوران مورد نظر است. در واقع در تلاش اِعمال کردن دوران مناسب برای رویه‌های واقع در بُعد دو و ابعاد بالاتر بود که این مفاهیم و روشها به وسیلهٔ ا. کیلی و دیگران در خلال دههٔ ۱۸۴۰ پرورانده شدند. این روشها در کتاب ژ. سالمان[1] (۱۸۵۹) مطرح شده‌اند هر چند که زبان بیان آنها جدید نیست.

یادداشت ا.کیلی دربارهٔ ماتریس‌ها (۱۸۵۹) حاوی این نتیجه است که یک ماتریس ۲×۲ در معادلهٔ مشخصهٔ خود صدق می‌کند.

---

1) G. Salmon

جوابهای فصل ۱۵

۱. (یک) بله، (دو) بله، (سه) نه.

۲. (یک) بله، (دو) نه، (سه)نه.

۳. (یک) بله، (دو) بله، (سه)بله، (چهار) بله، (پنج) نه.

۴. $\mathbf{v}\alpha =$ یک مضرب اسکالر از $\mathbf{v}$.

۵. تنها ± ۱.

۶. تنها ± ۱

۷. $(۸,۴) \mapsto (۲,۱)$، $(۱,-۱) \mapsto (۱,-۱)$، مقادیر ویژهٔ ۴، ۱.

۸. مقدار ویژهٔ ۰.

۹. $b = ۰$ ،$c = ۰$. با همهٔ سه بردار ویژه نیز داریم $a = d$ آنگاه α یک بزرگسازی است و هر بردار یک بردار ویژه است.

۱۰. $\mathbf{v}\alpha = \lambda\mathbf{v} \Rightarrow (k\mathbf{v})\alpha = k(\mathbf{v}\alpha) = k(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(k\mathbf{v})$

۱۱. $\mathbf{u}\alpha = \lambda\mathbf{u}$ و
$\mathbf{v}\alpha = \lambda\mathbf{v} \Rightarrow (a\mathbf{u} + b\mathbf{v})\alpha = a(\lambda\mathbf{u}) + b(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(a\mathbf{u} + b\mathbf{v})$.

۱۲. $\mathbf{u}$ در هسته است، زیرا $\mathbf{u}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \mathbf{u}\begin{pmatrix} \lambda & ۰ \\ ۰ & \lambda \end{pmatrix}$.

۱۳. (یک) ۴، ۱،
(دو) ۳، ۱-،
(سه) ۳، ۲،
(چهار) ۱،
(پنج) ۵، ۰،
(شش) ± ۱.

۱۴. مضراب $(۱,۲)$ مقدار ویژهٔ ۴ دارند، مضراب $(۱,-۱)$ مقدار ویژهٔ ۱ دارند.

۱۵. مضراب $(۱,۱)$ مقدار ویژهٔ ۳ دارند، مضراب $(۲,۱)$ مقدار ویژهٔ ۲ دارند.

۱۶. مضراب $(۰,۱)$ مقدار ویژهٔ a و مضراب $(۱,۰)$ مقدار ویژهٔ b دارند.

۱۸. $(۱,۱,-۱)$ مقدارویژهٔ ۱ دارد. $(۱۴,-۱,۱۱)$، مقدارویژهٔ ۲- دارد. $(۱,۱,۱)$ مقدار ویژهٔ ۳ دارد.

۱۹. $(\mathbf{u}U^{-۱})U = \mathbf{u}$؛ $(\mathbf{u}U^{-۱})UA = \mathbf{u}A = \lambda\mathbf{u}$ ،

$\lambda \mathbf{u}U^{-1} = (\mathbf{u}U^{-1})UAU^{-1}$، $WUAU^{-1} = \lambda W$.

۲۰. $(1,0)UAU^{-1} = \mathbf{u}_1AU^{-1} = \lambda_1\mathbf{u}_1U^{-1} = \lambda_1(1,0)$.

۲۱. $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ انتخاب طبیعی است. $U = \begin{pmatrix} a & 2a \\ b & b \end{pmatrix}$ نیز به کار می‌آید.

۲۲. $U = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$ برای $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$، $U = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ برای $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

۲۳. $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

۲۴. ۲۵ . U سطرهای $\mathbf{u}_1$، $\mathbf{u}_2$ و $\mathbf{u}_3$ یا مضراب اسکالری از اینها دارد.

۲۶. برای $M = I$ بازتابی است برای $B = M^{-1}AM$ داریم $A = (M^{-1})^{-1}BM^{-1}$ لذا متقارن است. برای $B = M^{-1}AM$، $C = N^{-1}BN$ داریم $C = (MN)^{-1}A(MN)$ لذا ترایایی است.

۲۷. بنا به سؤال ۲۶ معادله‌های مشخصه ریشه‌های یکسانی دارند و چون ضرایب λ^2 یکسان هستند بقیهٔ ضرایب متناظر باید برابر باشند. اثبات کلی این که ماتریس‌های متشابه معادلهٔ مشخصهٔ یکسان دارند (صرفنظر از وجود ریشه‌ها) در سؤال ۱۱.۱۹ مطرح شده است.

$$\det(M^{-1}AM) = \det M^{-1}.\det A.\det M = \det A.\det M^{-1}\cdot\det M$$
$$= \det A.\det M^{-1}M\cdot$$

۲۸. (یک) و (چهار).

۳۰. هرگاه $\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$ تکین باشد $Sp(\mathbf{u},\mathbf{v})$ یک بعدی است و حداکثر یک مقدار ویژه را مجاز می‌دارد.

۳۱. دو بردار ویژه یک پایه تشکیل می‌دهند. اینها را به عنوان سطرهای U به کار برید.

۳۲. هرگاه $\mathbf{w} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$ آنگاه $\nu = \mu \Leftarrow a = ۰$ و $\nu = \lambda \Leftarrow b = ۰$. فرض کنید $a \neq ۰ \neq b$ آنگاه $\mathbf{w}\alpha = (a\mathbf{u} + b\mathbf{v})\alpha$ و $\nu(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = a\lambda\mathbf{u} + b\mu\mathbf{v}$ بنابراین $a(\lambda - \nu) = ۰$ و $b(\mu - \nu) = ۰$ و $\lambda = \mu = \nu$.

۳۳. هرگاه $A = \begin{pmatrix} \lambda & ۰ \\ ۰ & \lambda \end{pmatrix}$ هر دو بردار پایه بردارهای ویژه هستند. هرگاه $A = \begin{pmatrix} \lambda & ۰ \\ ۱ & \lambda \end{pmatrix}$ همهٔ بردارهای ویژه به صورت $(a, ۰)$ هستند.

۳۴. (یک) $[x, y] = [۲, ۳]$

(دو) $[x, y] = [۳, -۱]$

(سه) $[x, y] = [\frac{۵}{۲}, -\frac{۱}{۲}]$.

۳۵.

$$\alpha : [۰, ۱] \to [r, s] \cdot \mathbf{w} = [۰, ۱] \cdot \alpha : [۱, ۰] \to [p, q], \mathbf{u} = [۱, ۰]$$

۳۶. به روشنی $\mathbf{a}$ مقدار ویژهٔ ۱ دارد. اگر $\mathbf{v}$ مقدار ویژه $۱ \neq \lambda$ داشته باشد، آنگاه $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{v} + f(\mathbf{v})\mathbf{a}$ بنابراین $(\lambda - ۱)\mathbf{v} = f(\mathbf{v})a$ لذا $\mathbf{v} \in Sp(\mathbf{a})$ که تناقض است.

۳۷. بنابه سؤال ۳۶، $(۱ - \lambda)^۲ = ۰$.

۳۸. بنا به سؤال ۳۷، $\det A = ۱$. قیچیها مساحتها را حفظ می‌کنند.

۳۹. $\begin{pmatrix} ۱ + ac & bc \\ ad & ۱ + bd \end{pmatrix}$ سؤال ۱۳. ۲۳ را ببینید.

۴۰. اگر $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ معادلهٔ مشخصهٔ $(۱ - \lambda)^۲ = ۰$ داشته باشد، آنگاه $a + d = ۲$ و $ad - bc = ۱$.

۴۱. $a + s = ۲$، $as - br = ۱$ $\Leftarrow$ $s = ۲ - a$، $r = (as - ۱)/b$.

۴۲. $p + d = ۲$، $pd - qc = ۱$ $\Leftarrow$ $p = ۲ - d$، $q = (pd - ۱)/c$.

۴۴. همانی $\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$؛ قیچیها $\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$؛ بقیهٔ اعضا $\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$. قیچیها گروه را تولید می‌کنند شبیه ترانهش‌ها در $S_۳$.

۴۵. $(۱,۰) AS^{-۱} = (۱,۰)$ بنابراین $AS^{-۱}$ مقدار ویژه‌ای برابر با ۱ دارد. اما $\det AS^{-۱} = ۱$ لذا حاصلضرب مقدارهای ویژه برابر با ۱ است و از این رو معادلهٔ مشخصه $(\lambda - ۱)^۲$ است، بنابراین $AS^{-۱}$ یک قیچی یا همانی است. بنا به سؤال ۴۱، فرض کنید S قیچی یکتا با سطر اول (a, b) باشد. آنگاه $AS^{-۱} = T$ که T یک قیچی یا همانی است. اگر T یک قیچی باشد آنگاه $A = ST$ که حاصلضرب دو قیچی است.

MATH75.IR

۱۶

همریختیها

برخی گروه‌ها ساختار گروه‌های دیگر را با ظاهری متفاوت نمایش می‌دهند. یک گروه H در برگیرندهٔ یک صورت دیگر از یک گروه G است هرگاه یک تابع، معمولاً چند به یک، از G به H وجود داشته باشد. که ساختار G را حفظ کند. چنین تابعی یک همریختی نام دارد. منظور ما از گفتن این که یک تابع، ساختار گروه را حفظ می‌کند، این است که اگر $g_۱ \mapsto h_۱$ و $g_۲ \mapsto h_۲$، آنگاه $g_۱g_۲ \mapsto h_۱h_۲$. بر حسب عبارتهای معمولی یعنی نگارهٔ یک حاصلضرب برابر است با حاصلضرب نگاره‌ها.

مطالعه همزمان : بخشهای ۱۱، و ۱۲ کتاب فرالی؛ فصل ۷ کتاب گرین.

۱. هرگاه A و B ماتریس‌هایی در $GL(۲,F)$ باشند و A و B به هم مجموعهٔ راست یکسانی از $SL(۲,F)$ تعلق داشته باشند دربارهٔ $\det A$ و $\det B$ چه می‌توان گفت؟

۲. هرگاه A و B ماتریس‌هایی در $GL(۲,F)$ باشند و $\det A = \det B$ آیا A و B به هم مجموعهٔ راست یکسانی از $SL(۲,F)$ تعلق دارند؟

۳. شاخص $SL(۲,\mathbb{Z})$ در $GL(۲,\mathbb{Z})$ و مرتبهٔ $SL(۲,\mathbb{Z}_۳)$ را بیابید. (سؤال ۱۳. ۳۲ را ببینید).

۴. شاخص $SL(۲,\mathbb{Z}_۵)$ در $GL(۲,\mathbb{Z}_۵)$ و مرتبهٔ $SL(۲,\mathbb{Z}_۵)$ را بیابید.

۵. هرگاه A و B ماتریس‌هایی در $GL(۲,F)$ باشند و $\det A = \det B$ آیا B, A به هم مجموعهٔ چپ یکسانی از $SL(۲,F)$ تعلق دارند؟

۶. آیا $SL(۲,F)$ یک زیرگروه نرمال $GL(۲,F)$ است؟

۷. هرگاه $GL(۲, F)$ قلمرو تابع

$$A \mapsto \det A$$

باشد مجموعهٔ نگاره‌ها چیست؟

۸. اگر یک تابع $\alpha : G \to H$ یک گروه $(G, .)$ را به گروه $(H, \circ)$ بنگارد و به‌ازای همهٔ $g_۱, g_۲ \in G$، $(g_۱ \cdot g_۲)\alpha = (g_۱\alpha)\circ(g_۲\alpha)$ آنگاه α همریختی گروه نام دارد.

هرگاه $A \mapsto \det A$ یک همریختی گروه $GL(۲, F)$ باشد عمل را در گروه نگاره مشخص کنید.

۹. عدد حقیقی $|a|$ عامل مقیاس تشابه $z \mapsto az + b$ نام دارد. آیا تابعی که هر تشابه مستقیم را به عامل مقیاس خود می‌فرستد یک همریختی گروه از گروه تشابه‌های مستقیم بروی گروه ضربی اعداد حقیقی مثبت است؟

۱۰. با استفاده از استدلالهایی شبیه سؤالهای ۶۶.۶ و ۶۷.۶ نشان دهید اگر $\alpha : G \to H$ یک همریختی گروه باشد، آنگاه عضو همانی در G به عضو همانی در H و جفتهایی از اعضا که در G وارون یکدیگرند به جفتهایی از اعضای H که وارون یکدیگرند فرستاده می‌شوند.

۱۱. هرگاه $\alpha : G \to H$ یک همریختی گروه باشد ثابت کنید نگارهٔ G زیرگروهی از H است. همچنین ثابت کنید نگارهٔ هر زیرگروه G یک زیرگروه از H نیز هست.

۱۲. آیا هر تبدیل خطی از یک فضای برداری یک همریختی گروه است؟

هستهٔ یک همریختی

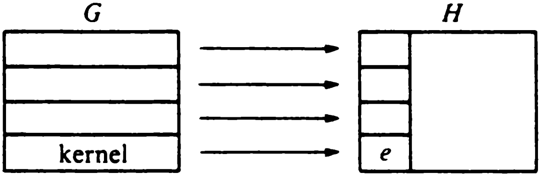
۱۳. هرگاه دترمینان برای ساختن یک همریختی گروه $GL(۲, F)$ به کار رود زیرمجموعه‌ای از دامنه که نگارهٔ آن عضو همانی همدامنه است چه می‌باشد؟

۱۴. هرگاه عامل مقیاس برای ساختن یک همریختی گروه از گروه تشابه‌های مستقیم به کار رود زیرمجموعه‌ای از دامنه که نگارهٔ آن عضو همانی همدامنه است چه می‌باشد.

۱۵. هرگاه $\alpha : G \to H$ یک همریختی گروه است کل زیرمجموعه‌ای از G که هر عضو آن به عضو همانی H نگاشته شود هستهٔ α نام دارد. ثابت کنید هستهٔ α زیرگروهی از G است.

۱۶. هرگاه K هستهٔ همریختی گروه $\alpha : G \to H$ باشد و $g \in G$ نشان دهید هر عضو هم مجموعهٔ Kg و هر عضو هم مجموعهٔ gK نگارهٔ یکسانی دارد.

۱۷. هرگاه $g_1, g_2 \in G$ تحت همریختی گروه $\alpha : G \to H$ نگارهٔ یکسانی در H داشته باشند ثابت کنید آنها به هم مجموعهٔ چپ یکسانی از هستهٔ α و نیز هم مجموعهٔ راست یکسانی در هستهٔ α تعلق دارند.



۱۸. ثابت کنید هستهٔ یک همریختی گروه $\alpha : G \to H$ یک زیرگروه نرمال از G تشکیل می‌دهد.

۱۹. هرگاه هستهٔ یک همریختی گروه $\alpha : G \to H$ تنها متشکل از عضو همانی در G باشد دربارهٔ هم مجموعه‌های هسته و لذا در بارهٔ تابع α چه می‌توان گفت؟

گروه‌های خارج قسمتها

۲۰. هرگاه N یک زیرگروه نرمال از یک گروه G باشد ثابت کنید هم مجموعه‌های N تحت عمل ضرب زیرمجموعه‌ها، مانند سؤال ۳۲.۹ یک گروه تشکیل می‌دهند. این گروه، گروه خارج قسمتها نام دارد و با G/N نمایش داده می‌شود.

۲۱. با استفاده از سؤال ۳۱.۹ جدول کیلی گروه $D_4/\{e, a^2\}$ را نمایش دهید.

۲۲. برای هرگروه G با یک زیرگروه نرمال N ثابت کنید تابع $\alpha : G \to G/N$ که با $\alpha : g \mapsto Ng$ تعریف می‌شود یک همریختی گروه بروی G/N است.

۲۳. قضیهٔ اصلی همریختیهای گروه. هرگاه $\alpha : G \to H$ یک همریختی گروه با هستهٔ K باشد نشان دهید تابع از نگارهٔ G تحت α به گروه خارج قسمتهای G/K که با $g\alpha \mapsto Kg$ تعریف می‌شود

(یک) خوشتعریف است،

(دو) یک به یک است،

(سه) پوشاست،

(چهار) حفظ کنندهٔ ساختار است، یعنی

$$g_1\alpha.g_2\alpha \mapsto Kg_1.Kg_2$$

و بنابراین ثابت می‌کند که هرنگارهٔ همریخت یک گروه با یک گروه خارج قسمتها یکریخت است.

قضیهٔ اصلی نتیجه می‌دهد که مسئلهٔ یافتن همهٔ نگاره‌های همریخت یک گروه را می‌توان به یافتن همهٔ زیرگروه‌های نرمال و سپس ساختن گروه‌های خارج قسمتهای متناظر تحویل کرد.

۲۴. هرگاه G گروهی با یک زیرگروه N باشد و N دقیقاً دو هم مجموعه در G داشته باشد چرا N باید یک زیرگروه نرمال باشد؟ گروه‌های خارج قسمتهای G/N با چه گروهی یکریخت است؟

۲۵. مثالهایی از زیرگروه‌های با شاخص ۲ در

(یک) S_n،

(دو) D_n،

(سه) گروه تشابه‌های صفحهٔ اقلیدسی،

(چهار) گروه طولپاییهای صفحهٔ اقلیدسی ارائه دهید.

۲۶. در یک گروه آبلی (یا تعویض‌پذیر) یعنی گروهی که به ازای هر دو عضو a و b داریم $ab = ba$ آیا هر زیرگروه باید نرمال باشد.

هیئت $\mathbb{Z}_p$

۲۷. هرگاه g عضوی از یک گروه $(G, .)$ باشد و یک نگاشت $\alpha : \mathbb{Z} \mapsto G$ با

$$\alpha : r \mapsto g^r$$

تعریف شود آیا α یک همریختی گروه $(\mathbb{Z}, +)$ است؟

۲۸. هرگاه در سؤال ۲۷ مرتبهٔ عضو g برابر با ۳ باشد اعضای هستهٔ α را فهرست کنید.

۲۹. هرگاه در سؤال ۲۷ مرتبهٔ عضو g برابر با n باشد دربارهٔ g^a و g^b وقتی $a \equiv b$ (پیمانه n) با نمادگذاری سؤال ۲.۹ چه می‌توان گفت؟

۳۰. در سؤال ۲۶.۶ دانستیم که همهٔ زیرگروه‌های $(\mathbb{Z},+)$ دوری بودند. چه شرطی روی اعضای G بگذاریم تا با هر زیرگروه مفروض N از $\mathbb{Z}$ بتوانیم یک همریختی گروه $G \to \mathbb{Z}$ با هستهٔ N بسازیم.

۳۱. زیرگروه $(\mathbb{Z},+)$ تولید شده به وسیلهٔ n متشکل از همهٔ مضراب n را با $n\mathbb{Z}$ و گروه خارج قسمتهای $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ را با $\mathbb{Z}_n$ نمایش می‌دهیم.
اعضای $\mathbb{Z}_n$ چه هستند و چه تعداد از آنها وجود دارند؟ مرسوم است که هم مجموعه‌های $n\mathbb{Z}$ را با کوچکترین عضو نامنفی آنها نامگذاری می‌کنند. یک مولد برای $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ بیابید.

۳۲. چون $(kn + a)(ln + b) = (kln + al + bk)n + ab$ ضرب معمولی روی اعداد صحیح یک ضرب سازگار روی هم مجموعه‌های $n\mathbb{Z}$ القا می‌کند به نحوی که $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ ویژگیهای زیر را دارد:
$(\mathbb{Z}_n,+)$ یک گروه آبلی است،
$(\mathbb{Z}_n,.)$ بسته، شرکتپذیر و تعویض‌پذیر است و دارای عضو همانی است.

$$(a+b).c = a.c + b.c \quad \text{و} \quad a.(b+c) = a.b + a.c$$

با استفاده از سؤال ۷.۱۱ ثابت کنید اگر n عددی مرکب باشد، آنگاه $\mathbb{Z}_n$ با این اعمال یک هیئت نیست.

۳۳. یک جدول کیلی برای $(\mathbb{Z}_p - \{۰\},\cdot)$ بسازید که p یک عدد اول است. چرا این مجموعه تحت عمل ضرب بسته است. با برهان خلف استدلال کنید. چرا همهٔ درایه‌های یک سطر از جدول کیلی، مانند ax، ay، az لزوماً متفاوت‌اند؟ دوباره با برهان خلف استدلال کنید. چند درائه متفاوت وجود دارند؟ آیا ۱ باید یکی از درایه‌ها باشد؟ هرگاه $ax \equiv ۱$ (پیمانهٔ p) وارون a در $(\mathbb{Z}_p - \{۰\},\cdot)$ چیست؟ نتیجه بگیرید $(\mathbb{Z}_p - \{۰\},\cdot)$ یک گروه است و لذا $(\mathbb{Z}_p,+,۰)$ یک هیئت است.

۳۴. بعد از یافتن مرتبهٔ گروه $(\mathbb{Z}_p - \{۰\},\cdot)$ و در نظر گرفتن مرتبه‌های ممکن اعضای این گروه ثابت کنید اگر x مضربی از p نباشد، آنگاه $x^{p-۱} \equiv ۱$ (پیمانهٔ p) و نتیجه بگیرید به ازای همهٔ اعداد صحیح x داریم $x^p = x$ (پیمانهٔ p).

دو گروه خارج قسمتهای خاص

۳۵. گروه جمعی $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ را که $\mathbb{Q}$ مجموعهٔ اعداد گویاست بررسی کنید. نشان دهید آن گروهی نامتناهی است که مرتبهٔ هر عضو آن متناهی است.

۳۶. هرگاه D گروه طولپائییهای مستقیم صفحهٔ اقلیدسی و T گروه انتقالها باشد ثابت کنید D/T با گروه ضربی اعداد مختلط با قدر مطلق ۱ یکریخت است.

خلاصهٔ مطالب

تعریف
سؤالهای ۸ اگر $(G,\cdot)$ و $(H,\circ)$ گروه باشند و $\alpha : G \to H$ تابعی باشد که به‌ازای همهٔ $g_1, g_2 \in G$، $(g_1 g_2)\alpha = (g_1\alpha)\circ(g_2\alpha)$ آنگاه αیک همریختی گروه نام دارد.

قضیه
سؤالهای ۱۰، ۱۱ تحت یک همریختی گروه، نگارهٔ عضو همانی، همانی است و نگاره‌های هر عضو و وارون آن یک عضو و وارون آن می‌باشد و نگارهٔ یک زیرگروه یک زیرگروه است.

تعریف
سؤال ۱۵ زیر مجموعهٔ همهٔ اعضای دامنه که نگارهٔ آنها تحت یک همریختی گروه عضو همانی است هستهٔ همریختی نام دارد.

قضیه
سؤال ۱۸ هستهٔ یک همریختی گروه یک زیرگروه نرمال دامنه است.

قضیه
سؤال ۲۰ اگر G یک گروه و N یک گروه نرمال G باشد آنگاه هم مجموعه‌های N تحت ضرب زیرمجموعه‌ها یک گروه موسوم به گروه خارج قسمتهای G/N تشکیل می‌دهند.

قضیهٔ اصلی
سؤال ۲۳ اگر G یک گروه باشد، آنگاه نگارهٔ G تحت همریختی α با گروه خارج قسمتهای G/K که K هستهٔ α است یکریخت است.

یادداشت تاریخی

گروه‌های خارج‌قسمتها از زمان انتشار کتاب ک . ف. گاوس (۱۸۰۱) با حساب مدولی

آن در نوشته‌های ریاضی وارد شده است. ا. گالوا زیرگروه‌های نرمال و گروه‌های خارج قسمتها را در ۱۸۳۰ به کار برد. G/N توسط ک. ژوردان معرفی شد (۱۸۷۳). مطالعه صریح همریختیها و هسته‌های آنها با ا.کاپلی[1] شروع شد (۱۸۷۸).

1) A. Capelli

جوابهای فصل ۱۶

۱. $A = SB$ که $\det S = 1$، $\det A = \det S \cdot \det B = \det B$.

۲. $\det A = \det B \Leftarrow \det AB^{-1} = 1 \Leftarrow AB^{-1} = S$ که $\det S = 1$.

۳. تعداد هم مجموعه‌ها = تعداد مقادیر متمایز دترمینان = ۲

$$| SL(2, \mathbb{Z}_3) | = | GL(2, \mathbb{Z}_3) | /2 = 24$$

۴. $120 \cdot 4 = \frac{24 \cdot 20}{4}$.

۵. $\det A = \det B \Leftarrow \det A^{-1}B = 1$. بله.

۶. هم مجموعه‌های چپ و راست زیرمجموعه‌هایی با دترمینان برابر هستند. بله.

۷. $F - \{0\}$.

۸. ضرب

۹. هرگاه $\alpha : z \mapsto az + b$، $\gamma : z \mapsto cz + d$، $\alpha\gamma : caz + cb + d$ حال برای تابع $| a | \mapsto \alpha$ $\alpha \mapsto | a |$ داریم، $| ca | = | c | \cdot | a |$ $\alpha\gamma \mapsto | ca |$، بله.

۱۱. تعریف همریختی بسته بودن را نتیجه می‌دهد. همانی و وارون‌ها از سؤال ۱۰.

۱۲. بله، یک همریختی ازگروه بردارها تحت عمل جمع بردارها.

۱۳. $SL(2, F)$.

۱۴. زیرگروه طولپاییهای مستقیم

۱۵. $g_1\alpha = e\alpha$، $g_2\alpha = e\alpha \Rightarrow g_1\alpha \cdot g_2\alpha = e\alpha \cdot e\alpha \Rightarrow (g_1g_2)\alpha = e\alpha \cdot$ و غیره.

۱۶. $(k_1g)\alpha = k_1\alpha \cdot g\alpha = g\alpha$ و $(gk_2)\alpha = g\alpha.k_2a = g\alpha$

۱۷. $g_1\alpha = g_2\alpha \Rightarrow (g_1\alpha)(g_2\alpha)^{-1} = e\alpha \Rightarrow (g_1g_2^{-1})\alpha = e\alpha$

$\Rightarrow g_1g_2^{-1} \in$ هسته

همچنین، $(g_1^{-1}g_2)\alpha = e\alpha \Rightarrow g_1^{-1}g_2 \in$ هسته

۱۸. g_1،g_2 در هم مجموعهٔ راست یکسان‌اند $\Longleftrightarrow$ $g_1g_2^{-1} \in$ هسته $\Longleftrightarrow$ $g_1\alpha = g_2\alpha$ $\Longleftrightarrow$ $g_1g_2^{-1} \in$ هسته $\Longleftrightarrow$ g_1 ، g_2 در هم مجموعهٔ چپ یکسان باشند.

۱۹. هر هم مجموعه تک عضوی است و همریختی مزبور نگاشتی یک به یک است. لذا همریختی مزبور یکریختی نام دارد.

۲۰. تعریف، بسته بودن را نتیجه می‌دهد. عضو همانی N است. Na^{-1} وارون Na است.

۲۱.

$$\begin{array}{cccc}
\{e,a^2\} & ,\{a,a^3\} & ,\{b,ba^2\} & ,\{ba,ba^3\} \\
\{a,a^3\} & ,\{e,a^2\} & \{ba,ba^3\} & \{b,ba^2\} \\
\{b,ba^2\} & \{ba,ba^3\} & \{e,a^2\} & \{a,a^3\} \\
\{ba,ba^3\} & \{b,ba^2\} & \{a,a^3\} & \{e,a^2\}
\end{array}$$

۲۲. مستقیماً از ۳۲.۹ نتیجه می‌شود.

۲۳. (یک) و (دو)

$$g_1\alpha = g_2\alpha \Longleftrightarrow (g_1g_2^{-1})\alpha = e\alpha \Longleftrightarrow g_1g_2^{-1} \in K \Longleftrightarrow Kg_1 = Kg_2$$

(سه) واضح است.

(چهار) $g_1\alpha \cdot g_2\alpha = (g_1g_2)\alpha \mapsto Kg_1g_2 = Kg_1 \cdot Kg_2$

۲۴. هم مجموعه‌های N عبارت‌اند از N و $G-N$ که هم باید راست و هم چپ باشند. گروه خارج قسمتها $\cong C_2$.

۲۵. (یک) A_n،

(دو) C_n،

(سه) تشابه‌های مستقیم،

(چهار) طولپاییهای مستقیم.

۲۶. بله.

۲۷. $g^{m+n} = g^m.g^n$. بله.

۲۸. $\{0, \pm 3, \pm 6, \cdots\}$

۲۹. $g^a = g^b$.

۳۰. اگر $N = <n>$ یک عضو $g \in G$ از مرتبهٔ n لازم داریم. آنگاه نگاشت $g \mapsto 1$.

۳۱. اعضای $\mathbb{Z}_n$ عبارت‌اند از n هم مجموعهٔ $<n>$ در $\mathbb{Z}$. $1+<n>$ گروه $\mathbb{Z}_n$ را تولید می‌کند.

۳۲. اگر $n = pq$، آنگاه $(kn + p)(ln + q)$ مضربی از n است و اعضای غیر صفر $\mathbb{Z}_n$ وجود دارند که حاصلضرب آنها صفر است.

۳۳. بسته نیست تنها اگر (پیمانهٔ p)$ax \equiv ۰$. اما یک عدد اول مقسوم‌علیه‌های سره ندارد. (پیمانه p) $x \equiv y \iff a(x-y) \equiv ۰ \iff ax \equiv ay$. $p - ۱$ عدد متفاوت برای $p - ۱$ درایهٔ متفاوت، لذا همهٔ آنها شامل ۱ هستند. استدلال بسته بودن و وجود وارون‌ها را در $(\mathbb{Z}_p - \{۰\}, \cdot)$ نشان می‌دهد.

۳۴. مرتبهٔ گروه $p - ۱$ است. لذا به ازای هر عضو x داریم $x^k \equiv ۱$ که k عاملی از $p - ۱$ است. لذا (پیمانهٔ p) $x^{p-۱} \equiv ۱$، هرگاه x مضربی از p باشد به وضوح هم (پیمانه p) $x \equiv ۰$ و هم (پیمانه p) $x^p \equiv ۰$ بنابراین (پیمانه p) $x^p \equiv x$.

۳۵. مرتبهٔ $\mathbb{Z} + p/q$ برابر با q است.

۳۶. هرگاه $\alpha : z \mapsto e^{i\theta}z + c$ با استفاده از سؤال ۲۳ نگاشت $\alpha \mapsto e^{i\theta}$ یک یکریختی را نشان می‌دهد.

MATH75.IR

۱۷

مزدوج بودن

هر رابطهٔ هم‌ارزی راهی برای در انزوا قرار دادن نوع بخصوصی از یکسانی است. یکسانی که رابطهٔ هم ارزی مزدوج بودن درگروه اقلیدسی مشخص می‌کند یکسانی بین دو بازتاب یا بین دو نیمدور است. در گروه متقارن یکسانی، مزدوج بودن یکسانی جایگشتها با ساختار دور یکسان است. بیشترین اهمیت این رابطه از این واقعیت ناشی می‌شود که زیرگروه‌های تشکیل شده به وسیلهٔ اجتماع همهٔ رده‌های مزدوج بودن دقیقاً زیرگروه‌های نرمال هستند.

۱. جایگشتهای $(۱۲۳۴)(۱۲)(۱۴۳۲)$ و $(۱۲۳)(۱۲)(۱۳۲)$ را به صورت جایگشتهای دوری تک بنویسید.

۲. هرگاه α عضوی از $S_۴$ باشد نگاره‌های ۱α، ۲α، ۳α و ۴α را تحت جایگشت $\alpha^{-۱}(۱۲)\alpha$ بیابید. جایگشت $\alpha^{-۱}(۱۲)\alpha$ را به صورت جایگشتی دوری بنویسید.

این نکتهٔ مهم را باید در نظر داشت که $\alpha^{-۱}(۱۲)\alpha$ همیشه یک ترانهش است.

۳. نگارهٔ مجموعهٔ

$$\{(۱),(۱۲۳),(۱۳۲),(۲۳),(۱۳),(۱۲)\}$$

را تحت نگاشت داده شده به وسیلهٔ

$$\gamma \mapsto (۱۴۳۲)\gamma(۱۲۳۴)$$

نمایش دهید. مجموعهٔ اصلی را و نگارهٔ مجموعه را به صورت زیر

مجموعه‌هایـی از $S_۴$ بنویسید.

نقاط ثابت اعضای مزدوج

۴. هرگاه α و β جایگشتهای یک مجموعه شامل m عضو باشد ثابت کنید $m\alpha = m$ نتیجه می‌دهد $(m\beta)\beta^{-۱}\alpha\beta = m\beta$ و به عکس.

۵. هرگاه α دورانی از صفحه و β طولپایی دلخواهی از صفحه باشد با استفاده از سؤال ۴ نشان دهید که $\beta^{-۱}\alpha\beta$ یک و تنها یک نقطهٔ ثابت دارد. $\beta^{-۱}\alpha\beta$ چه نوع طولپایی است.

۶. هرگاه α بازتابی از صفحه و β طولپایی دلخواهی باشد، دربارهٔ نقاط ثابت $\beta^{-۱}\alpha\beta$ چه می‌توان گفت؟ $\beta^{-۱}\alpha\beta$ چه نوع طولپایی است؟

۷. هرگاه τ انتقالی از صفحه و β طولپایی دلخواهی باشد $\beta^{-۱}\tau\beta$ چند نقطهٔ ثابت دارد؟ τ را به صورت حاصلضرب دو بازتاب بنویسید و نشان دهید $\beta^{-۱}\tau\beta$ را نیز می‌توان به صورت حاصلضرب دو بازتاب نوشت و نتیجه بگیرید $\beta^{-۱}\alpha\beta$ یک انتقال است.

۸. هرگاه R گروه دورانهای صفحه با مرکز ۰ و τ یک انتقال باشد که ۰ را به ۱ بنگارد نشان دهید هر عضو مجموعهٔ $\tau^{-۱}R\tau$ عدد ۱ را ثابت نگاه می‌دارد و در واقع یک دوران است. توضیح دهید.

۹. دو عضو x، y از یک گروه G مزدوج نام دارند هرگاه یک $g \in G$ وجود داشته باشد که $x = g^{-۱}yg$. در گروه اقلیدسی صفحه دربارهٔ طولپاییهایی که با

(یک) یک بازتاب،

(دو) یک دوران،

(سه) یک انتقال،

(چهار) یک لغزه مزدوج هستند چه می‌توان گفت؟

۱۰. نگاشتن از اعضای گروه $D_۴ = < a, b >$ را که در سؤال ۶. ۴۰ مطرح شد و به ازای هر $a \in D_۴$ مفروض با

$$g \mapsto a^{-۱}ga$$

داده می‌شود نمایش دهید.

هرگاه $D_۴$ را به صورت گروه تقارنهای یک مربع در نظر بگیریم طولپاییها و نگاره‌های آنها را تحت این نگاشت نام ببرید. همچنین نگاشت از $D_۴$ را کـه بـا $g \mapsto b^{-۱}gb$

داده می‌شـــود نمایـش دهیـد و طولپـاییهـای متناظـر و نگـاره‌هـای آنهـا را نیـز نـام ببـریـد.

رده‌های مزدوجی

۱۱. آیا یک عضو غیر همانی در یک گروه، اصلاً می‌تواند با عضو همانی مزدوج باشد؟

۱۲. ثابت کنید در هر گروه $(g^{-۱}ag)^n = g^{-۱}a^n g$ آیا دو عضو مزدوج یک گروه حتماً مرتبهٔ یکسان دارند؟

۱۳. ثابت کنید مزدوج بودن روی یک گروه یک رابطهٔ هم‌ارزی است. رده‌های هم‌ارزی رده‌های مزدوجی نام دارند.

۱۴. رده‌های مزدوجی در $D_۴$ را بیابید. با استفاده از سؤال ۱۲ امکانها را مشخص کنید. با استفاده از نگاره‌های $a^۲$ در سؤال ۱۰ نشان دهید که این عضو در یک ردهٔ تک عضوی است. به‌ازای همهٔ $g \in D_۴$، $g^{-۱}bg$ را برای تعیین کردن ردهٔ مزدوجی b بیابید. با استفاده از سؤال ۱۰ جستجو را کامل کنید.

۱۵. اگر اعضای یک گروه به‌ردهٔ مزدوجی تک عضو تعلق داشته باشد دربارهٔ رابطهٔ آن با اعضای دیگر گروه چه می‌توان گفت؟

۱۶. هرگاه G یک گروه آبلی باشد رده‌های مزدوجی آن را توصیف کنید.

۱۷. آیا اعضای مرکز یک گروه حتماً به رده‌های مزدوجی تعلق دارند؟ آیا این ویژگی، آنها را مشخص می‌کند؟

۱۸. با استفاده از سؤال ۱۲ ثابت کنید اگر یک گروه عضوی یکتا از مرتبه ۲ داشته باشد آنگاه آن عضو در مرکز گروه قرار دارد.

۱۹. هرگاه $\{a, b, c, d\} = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $\alpha = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ عضوی از $S_۴$ باشد نگاره‌های a، b، c، d را تحت جایگشت $\alpha^{-۱}(۱۲۳۴)\alpha$ بیابید و این جایگشت را به صورت جایگشتی دوری بنویسید. آیا هر عضو $S_۴$ مزدوج با (۱۲۳۴) لزوماً یک ۴− دور است؟ آیا هر ۴− دور در $S_۴$ لزوماً مزدوج با (۱۲۳۴) است؟

۲۰. با بررسی جایگشت $\alpha^{-۱}(۱۲۳)\alpha$ مشخص کنید آیا هـر عضـو $S_۴$ مـزدوج بـا (۱۲۳) لـزومـاً یـک ۳− دور اسـت و آیـا هــر ۳− دور در $S_۴$ لـزومـاً بـا (۱۲۳)

مزدوج است؟

۲۱. با استفاده از سؤال ۲ ردهٔ مزدوجی (۱۲) در $S_۴$ را مشخص کنید.

۲۲. ردهٔ مزدوجی (۳۴)(۱۲) در $S_۴$ را بیابید.

۲۳. فرض کنید $\alpha = (۱۲۳۴)$ و $\beta = (۱۲)$، $\gamma = \alpha^{-۱}\beta\alpha$، $\delta = \gamma^{-۱}\beta\gamma$ و $\alpha^{-۲}\gamma\alpha^{۲}$ را بیابید. با استفاده از سؤال ۴۶.۶ ثابت کنید α و β گروه $S_۴$ را تولید می‌کنند.

زیرگروه‌های نرمال و رده‌های مزدوجی

۲۴. هرگاه K هستهٔ همریختی گروه $\alpha : G \to H$ باشد و $k \in K$ ثابت کنید به‌ازای همهٔ $g \in G$، $g^{-۱}kg \in K$. نتیجه بگیرید اگر N یک زیرگروه نرمال یک گروه G باشد آنگاه به ازای همهٔ $g \in G$، $g^{-۱}Ng \subseteq N$.

۲۵. هرگاه N یک زیرگروه از گروه G باشد و به ازای همهٔ $g \in G$، $g^{-۱}Ng \subseteq N$، ثابت کنید $Ng \subseteq gN$ و $g^{-۱}N \subseteq Ng^{-۱}$ از این رو $Ng = gN$ و N یک زیرگروه نرمال G است.

سؤالهای ۲۴ و ۲۵ با هم این نتیجهٔ مهم را نشان می‌دهند که یک زیرگروه N از یک گروه G نرمال است اگر و تنها اگر به ازای همهٔ $g \in G$، $g^{-۱}Ng \subseteq N$.

۲۶. ثابت کنید یک زیرگروه نرمال از یک گروه، اجتماعی از رده‌های مزدوجی است.

۲۷. با در نظر گرفتن این که هر ردهٔ مزدوجی $D_۴$ چه چیزی تولید می‌کند (سؤال ۱۴) زیرگروه‌های نرمال $D_۴$ را مشخص کنید.

چه گروه‌هایی می‌توانند نگاره‌های همریخت $D_۴$ باشند؟

۲۸. (یک) هرگاه N یک زیرگروه نرمال $S_۴$ و شامل یک ترانهش باشد با استفاده از سؤالهای ۲۱ و ۴۵.۶ ثابت کنید $N = S_۴$.

(دو) حاصلضرب $(abdc)(adbc)(adcb)$ را به صورت یک جایگشت دوری تک بنویسید و نتیجه بگیرید اگر یک زیرگروه نرمال N از $S_۴$ شامل یک ۴− دور باشد آنگاه $N = S_۴$.

(سه) هرگاه N یک زیرگروه نرمال $S_۴$ و شامل یک ۳− دور باشد با استفاده از سؤال ۴۷.۶ ثابت کنید $N \supseteq A_۴$. چون شاخص $A_۴$ در $S_۴$ برابر با ۲ است $A_۴$ یک زیرگروه

نرمال است.

(چهار) یک زیرگروه نرمال مرتبهٔ ۴ در $S_۴$ بیابید.

(پنج) چه گروه‌هایی نگاره‌های همریخت $S_۴$ هستند؟

حاصلضربهای مستقیم

۲۹. هرگاه H و K زیرگروه‌های نرمال یک گروه G باشند و $h \in H$ و $k \in K$ ثابت کنید $h^{-۱}k^{-۱}hk \in H \cap K$. به‌علاوه هرگاه $H \cap K = \{e\}$ ثابت کنید $hk = kh$.

۳۰. بررسی کنید شرایط سؤال ۱۱.۱۰ ایجاب می‌کنند که A و B زیرگروه‌های نرمال G باشند.

۳۱. فرض کنید $G = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ۱۳, ۱۵\}$ آنگاه G یک گروه در $(\mathbb{Z}_{۱۶}, \cdot)$ است. مرتبهٔ هر یک از اعضای این گروه را بیابید. هرگاه

(یک) $K = \{۱, ۱۵\}$، $H = \{۱, ۷\}$

(دو) $H = \{۱, ۳, ۹, ۱۱\}$ و $K = \{۱, ۱۵\}$،

(سه) $H = \{۱, ۳, ۹, ۱۱\}$ و $K = \{۱, ۵, ۹, ۱۳\}$.

آیا $G = HK$؟

۳۲. هرگاه H، K زیرگروه‌های نرمال G باشند و $G = HK$ و $H \cap K = \{e\}$ با استفاده از سؤالهای ۱۱.۱۰ و ۲۹ ثابت کنید G با حاصلضرب مستقیم $H \times K$ یکریخت است.

۳۳. نشان دهید گروه G سؤال ۳۱ با حاصلضرب مستقیمی از دو گروه دوری یکریخت است.

مرکزسازها

۳۴. با استفاده از جدول زیر، زیرمجموعه‌های اعضای $D_۴$ را بیابید که با هر عضو گروه تعویض‌پذیر باشد. زیر مجموعه‌ای که با a تعویض‌پذیر است $\{c \mid ca = ac\}$ مرکزساز a نام دارد و با C_a نمایش داده می‌شود.

	e	a	a^{2}	a^{3}	b	ba	ba^{2}	ba^{3}
e	e	a	a^{2}	a^{3}	b	ba	ba^{2}	ba^{3}
a	a	a^{2}	a^{3}	e	ba^{3}	b	ba	ba^{2}
a^{2}	a^{2}	a^{3}	e	a	ba^{2}	ba^{3}	ba	ba^{2}
a^{3}	a^{3}	e	a	a^{2}	ba	ba^{2}	ba^{3}	b
b	b	ba	ba^{2}	ba^{3}	e	a	a^{2}	a^{3}
ba	ba	ba^{2}	ba^{3}	b	a^{3}	e	a	a^{2}
ba^{2}	ba^{2}	ba^{3}	b	ba	a^{2}	a^{3}	e	a
ba^{3}	ba^{3}	b	ba	ba^{2}	a	a^{2}	a^{3}	e

۳۵. هرگاه g عضو مفروضی از یک گروه G باشد ثابت کنید مرکزساز g، C_gلزوماً زیرگروهی از G است.

۳۶. مرتبه‌های مرکز سازهای اعضای D_4 را با اندازهٔ رده‌های مزدوجی شامل این اعضا مقایسه کنید (سؤال ۱۴).

۳۷. اگر در یک گروه G داشته باشیم $x^{-1}ax = b = y^{-1}ay$ ثابت کنید x و y به هم مجموعهٔ راست یکسانی از C_a تعلق دارند. همچنین ثابت کنید اگر x و y به هم مجموعهٔ راست یکسانی از C_a تعلق داشته باشند و $x^{-1}ax = b$،آنگاه$y^{-1}ay = b$. نتیجه بگیرید یک دوسویی خوش تعریف

$$C_a x \mapsto x^{-1}ax$$

از هم مجموعه‌های راست C_a بروی ردهٔ مزدوجی شامل a وجود دارد. هرگاه G یک گروه متناهی باشد چگونه اندازهٔ ردهٔ مزدوجی شامل a به زیرگروه C_a مربوط می‌شود. ثابت کنید اندازهٔ یک ردهٔ مزدوجی مرتبهٔ G را تقسیم می‌کند.

زیرگروه‌های نرمال $\mathbf{A_4}$

۳۸. فرض کنید α یک ۳ـ دور در S_4 باشد. چند عضو در ردهٔ مزدوجی شامل α وجود دارد؟ با استفاده از سؤال ۳۷ مرتبهٔ C_α در S_4 را بیابید و اعضای آن را مشخص کنید. مرکزساز α در A_4 چیست؟

با استفاده از سؤال ۳۷ اندازهٔ ردهٔ مزدوجی α در A_4 را بیابید. حاصلضربهای (۱۲۳)(۳۴)(۱۲)(۱۳۲)، (۱۲۳)(۱۲)(۳۴)(۱۳۲)، (۳۴)(۱۲)(۱۲۳)(۳۴)(۱۲)،

(۲۴)(۱۳)(۱۲۳)(۲۴)(۱۳) و(۲۳)(۱۴)(۱۲۳)(۲۳)(۱۴) را به صورت دورهای مجزا بنویسید و رده‌های مزدوجی $A_۴$ را فهرست کنید. توجه کنید که آنها باید زیر مجموعه‌های رده‌های مزدوجی $S_۴$ باشند.

۳۹. هرگاه N یک زیرگروه نرمال $A_۴$ و شامل یک ۳ـ دور باشد ثابت کنید N شامل همهٔ ۳ـ دورهاست و بنابراین $N = A_۴$ نتیجه بگیرید مرتبهٔ تنها زیرگروه غیر نرمال نابدیهی $A_۴$ برابر با ۴ است.

۴۰. چرا امکان ندارد $A_۴$ یک زیرگروه مرتبهٔ ۶ داشته باشد؟ (با توجه به این مطلب عکس قضیهٔ لاگرانژ نادرست است.)

زیرگروه‌های نرمال $A_۵$

۴۱. هرگاه $\{a, b, c, d, e\} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ ثابت کنید یا $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix}$ یا $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ a & b & c & e & d \end{pmatrix}$ جایگشتی زوج است. نتیجه بگیرید $A_۵$ ترایای سه‌گانه است و ثابت کنید ۳ـ دورها یک ردهٔ مزدوجی تک در $A_۵$ تشکیل می‌دهند.

۴۲. فرض کنید α یک ۳ـ دور در $S_۵$ باشد. تعداد اعضای ردهٔ مزدوجی α چیست؟ با استفاده از سؤال ۳۷ مرتبهٔ C_α در $S_۵$ را بیابید و اعضای $C_{(۱۲۳)}$ را مشخص کنید. مرکزساز (۱۲۳) در $A_۵$ چیست؟ با استفاده از سؤال ۳۷ اندازهٔ ردهٔ مزدوجی (۱۲۳) در $A_۵$ را بیابید و نتیجهٔ سؤال ۴۱ را تأیید کنید.

۴۳. انواع دور در $S_۵$ را فهرست کنید و بگویید کدام یک جایگشتهای زوج و کدام یک جایگشتهای فرد را ارائه می‌دهند.

۴۴. هرگاه N یک زیرگروه نرمال $A_۵$ و شامل یک ۳ـ دور باشد، با استفاده از سؤالهای ۴۱ و ۴۷.۶ ثابت کنید $N = A_۵$.

۴۵. هرگاه N یک زیرگروه نرمال $A_۵$ و شامل یک عضو مرتبهٔ ۲ مانند $(ab)(cd)$ باشد، چرا حاصلضرب $(ab)(cd)[\alpha^{-۱}(ab)(cd)\alpha]$ که $\alpha = (ab)(de)$ نیز عضوی از N است. نتیجه بگیرید N شامل یک ۳ـ دور است از این رو بنا به سؤال ۴۴، $N = A_۵$.

۴۶. هرگاه N یک زیرگروه نرمال $A_۵$ و شامل عضوی از مرتبهٔ ۵ مانند $(abcde)$ باشد، چرا حاصلضرب $(abcde)[\alpha^{-۱}(abcde)\alpha]$ که $\alpha = (bde)$ نیز عضوی از N

است. نتیجه بگیرید N شامل یک ۳ـ دور است و لذا بنا به سؤال ۴۴، $N = A_5$

۴۷. با استفاده از سؤالهای ۴۴، ۴۵ و ۴۶ نشان دهید تنها زیرگروه‌های نرمال A_5 خود A_5 و زیرگروه متشکل از همانی است. هرگاه تنها زیرگروه‌های نرمال یک گروه G خود G و همانی هستند گروه G یک گروه ساده نام دارد. کدام یک از گروه‌های دوری ساده هستند؟

۴۸. هرگاه $\alpha = (12345)$ و $\beta = (123)$ عبارت $\beta(\alpha^{-1}\beta\alpha)$ را محاسبه کنید و سه عامل اول متمایز مرتبهٔ گروه $< \alpha, \beta >$ را نتیجه بگیرید. چرا A_5 زیرگروهی از مرتبهٔ ۳۰ ندارد. ثابت کنید $< \alpha, \beta >= A_5$

۴۹. فرض کنید α یک ۵ـ دور در S_5 باشد. در ردهٔ مزدوجی شامل α چند عضو وجود دارند؟ با استفاده از سؤال ۳۷ مرتبهٔ C_α در S_5 را بیابید و اعضای آن را مشخص کنید. مرکزساز α در A_5 چیست؟ با استفاده از سؤال ۳۷ اندازهٔ ردهٔ مزدوجی α در A_5 را مشخص کنید.

دورانهای مزدوج در بُعد سه

۵۰. فرض کنید α و β دورانهای $\mathbb{R}^3$ که α دورانی با زاویهٔ θ حول یک محور a باشد. هرگاه l خطی عمود بر a باشد مکان $l\alpha$ را توصیف کنید.

همچنین رابطهٔ بین سه خط $a\beta$، $l\beta$ و $l\alpha\beta$ را توصیف کنید. بررسی کنید $\beta^{-1}\alpha\beta$ هر نقطه روی $a\beta$ را ثابت نگاه می‌دارد و $l\beta$ را به $l\alpha\beta$ می‌نگارد. نتیجه بگیرید $\beta^{-1}\alpha\beta$ دورانی با زاویهٔ θ حول محور $a\beta$ است.

۵۱. با استفاده از سؤالهای ۵۰ و ۱۴.۵ بین دو ردهٔ مزدوجی از ۵ـ دورها در A_5 به نحو هندسی تمایز بگذارید.

خود ریختیها

۵۲. با محاسبهٔ حاصلضرب $(a^{-1}g_1a)(a^{-1}g_2a)$ ثابت کنید تابع $g \mapsto a^{-1}ga$ مطرح در سؤال ۱۰ حفظ کنندهٔ ساختار است و یک یکریختی از گروه D_4 بروی خود است.

۵۳. هرگاه g عضوی از یک گروه G باشد ثابت کنید تابع $G \to G$ داده شده با $x \mapsto g^{-1}xg$ یک یکریختی از گروه به‌روی خود است.

هر یکریختی از یک گروه بروی خود یک خودریختی گروه نام دارد.

۵۴. تحت یک خودریختی یک گروه آیا هر زیرگروه بروی یک زیرگروه نگاشته می‌شود.؟

۵۵. تحت یک خود ریختی یک گروه آیا هر ردهٔ مزدوجی به‌روی یک ردهٔ مزدوجی نگاشته می‌شود؟

۵۶. تحت یک خودریختی یک گروه آیا هر زیرگروه نرمال به‌روی یک زیرگروه نرمال نگاشته می‌شود؟

۵۷. یک خود ریختی ساخته شده به روش ارائه شده در سؤال ۵۳ یک خودریختی درونی نام دارد. تحت یک خودریختی درونی آیا هر ردهٔ مزدوجی به‌روی خود نگاشته می‌شود.

۵۸. تحت یک خودریختی درونی آیا زیرگروه نرمال به‌روی خود نگاشته می‌شود؟

۵۹. ثابت کنید تابع داده‌شده با

$$\alpha \mapsto (۱۲)\alpha(۱۲)$$

یک خودریختی گروه $A_۴$ است.

بررسی کنید این خودریختی به صورت یک خودریختی درونی داده نمی‌شود. با بررسی نگارهٔ یک ردهٔ مزدوجی از ۳ـ دورها در $A_۴$ ثابت کنید این خودریختی یک خودریختی درونی نیست.

یک خودریختی یک گروه که درونی نیست یک خودریختی برونی نام دارد.

۶۰. ثابت کنید تابع داده شده با

$$g \mapsto g^{-۱}$$

یک خودریختی برای هر گروه آبلی ارائه می‌دهد و وقتی این تابع همانی نیست (چنان که برای گروه $C_۲$ چنین است) آن یک خود ریختی برونی است.

۶۱. آیا خودریختیهای درونی یک گروه آبلی G یک زیرگروه از S_G تشکیل می‌دهند؟

۶۲. آیا خود ریختیهای یک گروه G یک زیرگروه از S_G تشکیل می‌دهند؟

خلاصه مطالب

تعریف
سؤال ۹
دو عضو x و y از یک گروه G مزدوج نام دارند هرگاه عضوی مانند $g \in G$ وجود داشته باشد که $x = g^{-1}yg$.

قضیه
سؤال ۱۳
مزدوج بودن یک رابطهٔ هم‌ارزی روی یک گروه است.

قضیه
سؤالهای ۱۹ـ۲۲
هر ردهٔ مزدوجی S_n در برگیرندهٔ همهٔ جایگشتها با ساختار دور مفروض است.

قضیه
سؤالهای ۲۴، ۲۵
اگر N زیرگروهی از گروه G باشد آنگاه N یک زیرگروه نرمال G است اگر و تنها اگر به ازای همهٔ $g \in G$ داشته باشیم $g^{-1}Ng \subseteq N$.

قضیه
سؤال ۲۷
هر زیرگروه نرمال اجتماعی از رده‌های مزدوجی است.

قضیه
سؤال ۳۲
اگر H و K زیرگروه‌های نرمال یک گروه G باشند و $G = HK$ و $H \cap K = \{e\}$ آنگاه G باحاصلضرب مستقیم $H \times K$ یکریخت است.

تعریف
سؤال ۳۴
زیر مجموعهٔ اعضای یک گروه G که با یک عضو مفروض a از G تعویض‌پذیراند مرکزساز a نام دارد و با C_a نمایش داده می‌شود.

قضیه
سؤال ۳۷
مرکزساز a در G زیرگروهی از G است و هرگاه G یک زیرگروه متناهی باشد شاخص C_a در G برابر با تعداد اعضای ردهٔ مزدوجی a است.

قضیه
سؤال ۴۷
تنها زیرگروههای نرمال A_5 مرتبه‌های ۱ و ۶۰ دارند.

قضیه
سؤال ۵۷
هرگاه a عضو مفروضی از یک گروه G باشد تابع داده شده با $g \mapsto a^{-1}ga$

یک یکریختی از گروه به خود است و خودریختی درونی نام دارد.

قضیه خودریختیهای درونی یک گروه G یک زیرگروه از S_G را تشکیل می‌دهند.
سؤال ۶۱

قضیه مجموعهٔ همهٔ یکریختیهای یک گروه G بروی خود یک زیرگروه S_G موسوم
سؤال ۶۲ به گروه خودریختیهای G است.

یادداشت تاریخی

درسال ۱۸۴۵ ا.ل. کوشی نشان داد که رده‌های مزدوجی S_n مجموعه‌های جایگشتهای با ساختار دوریکسان می‌باشند. ف.کلاین در رسالهٔ درسهای دربارهٔ بیست وجهی (۱۸۸۴) از مزدوج بودن تبدیلهای هندسی، بخصوص دورانهای فضای سه‌بعدی استفاده کرد.

خودریختیهای درونی و برونی در سال ۱۹۰۱ توسط ف.ج. فروبنیوس[1] تمیز داده شدند.

1) F.G. Frobenius

جوابهای فصل ۱۷

۱. (۲۳)، (۲۳).

۲. $\alpha^{-1}(12)\alpha = (1\alpha 2\alpha)$.

۳. پایدارساز ۴ به پایدارساز ۱ نگاشته می‌شود.

۴. $m\alpha = m \Longleftrightarrow m\alpha\beta = m\beta \Longleftrightarrow (m\beta)\beta^{-1}\alpha\beta = m\beta$.

۵. یکتایی نقطهٔ ثابت آن را به یک دوران مبدّل می‌کند. سؤال ۳۱.۳ را ببینید.

۶. هرگاه l محور α باشد $\beta^{-1}\alpha\beta$ هر نقطهٔ $l\beta$ را ثابت نگاه می‌دارد و لذا یک بازتاب است. سؤال ۳۱.۳ را ببینید.

۷. نقطهٔ ثابت ندارد. اگر $\tau = \sigma_1\sigma_2$ آنگاه $\beta^{-1}\tau\beta = \beta^{-1}\sigma_1\sigma_2\beta = (\beta^{-1}\sigma_1\beta)(\beta^{-1}\sigma_2\beta)$.

۸. $1 = 0\tau = 0R\tau = 1\tau^{-1}R\tau$. نقطهٔ ثابت یکتا.

۹. (یک) بنابه سؤال ۶ تنها بازتابها.

(دو) بنابه سؤال ۵ تنها دورانها.

(سه) بنابه سؤال ۷ تنها انتقالها.

(چهار) تنها لغزه‌ها: نقطهٔ ثابت ندارد و اگر

$$\gamma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 ،\quad \beta^{-1}\gamma\beta = (\beta^{-1}\sigma_1\beta)(\beta^{-1}\sigma_2\beta)(\beta^{-1}\sigma_3\beta) ،$$

سؤال ۴۹.۶ را ببینید.

۱۰
$$\begin{pmatrix} g \\ a^{-1}ga \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & a & a^2 & a^3 & b & ba & ba^2 & ba^3 \\ e & a & a^2 & a^3 & ba^2 & ba^3 & b & ba \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} g \\ b^{-1}gb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & a & a^2 & a^3 & b & ba & ba^2 & ba^3 \\ e & a^3 & a^2 & a & b & ba^3 & ba^2 & ba \end{pmatrix}$$

۱۱. هرگز.

۱۲. $\underbrace{(g^{-1}ag)(g^{-1}ag)\cdots(g^{-1}ag)}_{n \text{ مرتبه}} = g^{-1}\underbrace{aa\cdots a}_{n \text{ مرتبه}}g$.

۱۳. بازتابی: $a = e^{-1}ae$. متقارن:
$b = g^{-1}ag \Rightarrow gbg^{-1} = a \Rightarrow a = (g^{-1})^{-1}bg^{-1} = b$.

ترایایی $b = g^{-1}ag$،
$$c = h^{-1}bh \Rightarrow c = h^{-1}(g^{-1}ag)h = (gh)^{-1}a(gh)\cdot$$
۱۴. بنابه سؤال ۱۱، $\{e\}$ یک رده است. a، a^3 تنها اعضای مرتبهٔ ۴ هستند و لذا بنابر سؤالهای ۱۲ و ۱۰، $\{a, a^3\}$ یک رده است. $b^{-1}a^2b = a^2$ و $a^{-1}a^2a = a^2$ بنابراین $(a^ib^j)^{-1}a^2(a^ib^j) = a^2$. لذا $\{a^2\}$ یک رده تک عضوی است. به ازای g برابر با e ،a^2 ،b ،ba^2 داریم $g^{-1}bg = b$ و به ازای $g = a$ ،a^3 ،ba ،ba^3 داریم $g^{-1}bg = ba^2$. بنابراین $\{b, ba^2\}$ یک رده است. دو عضو باقیمانده بنابه سؤال ۱۰ مزدوج می‌باشند.

۱۵. اگر به ازای همهٔ gها داشته باشیم $g^{-1}ag = a$ آنگاه $ag = ga$ و a در مرکز است.

۱۶. همهٔ مجموعه‌های تک عضوی.

۱۷. بله.

۱۸. هرگاه a عضو یکتای مرتبهٔ ۲ باشد بنابه سؤال ۱۲ داریم $g^{-1}ag = a$.

۱۹. $(abcd)$. بله. بله.

۲۰. با α مانند سؤال ۱۹، $\alpha^{-1}(123)\alpha = (abc)$.

۲۱. همهٔ ترانهش‌ها در یک ردهٔ مزدوجی.

۲۲. $\{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.

۲۳. $\gamma = (23)$، $\delta = (13)$، $\alpha^{-2}\gamma\alpha^2 = (14)$.

۲۴. $(g^{-1}kg)\alpha = g^{-1}\alpha.e\alpha.g\alpha = g^{-1}\alpha.g\alpha = (g^{-1}g)\alpha = e\alpha$. بنا به سؤال ۲۲.۱۶ هر زیرگروه نرمال هستهٔ یک همریختی است.

۲۵. $g^{-1}Ng \subseteq N \Leftarrow g(g^{-1}Ng) \subseteq gN$. همچنین $(g^{-1}Ng)g^{-1} \subseteq Ng^{-1} \Leftarrow g^{-1}Ng \subseteq Na$

۲۶. چون $g^{-1}Ng \subseteq N$. هر مزدوج یک عضو N در N است.

۲۷. $<e>=\{e\}$، $<a^2>=\{e, a^2\}$، $<a, a^3>=\{e, a, a^2, a^3\}$، $<b, ba^2>=\{e, b, ba^2, a^2\}$، $<ba, ba^3>=\{e, ba, ba^3, a^2\}$. هر یک از اینها اجتماعی از رده‌های مزدوجی است. هر جفت دیگر از رده‌ها همهٔ گروه را تولید می‌کند. هرگاه مرتبهٔ H برابر با ۴ باشد مرتبهٔ D_4/H برابر با ۲ است و با C_2 یکریخت است. D_4/H در سؤال ۲۱.۱۶ نمایش داده شد و با D_2 یکریخت است.

۲۸. (یک) بنا به سؤال ۲۱، N در برگیرندهٔ همهٔ ترانهش‌هاست.
(دو) (ab). اگر N شامل یک ۴ـ دور باشد، آنگاه بنا به سؤال ۱۹ در بر گیرندهٔ همهٔ ۴ـ دورها و لذا یک ترانهش است.
(سه) بنا به سؤال ۲۰، N در برگیرندهٔ همه ۳ـ دورها و لذا برابر با A_4 است.
(چهار) (۱)، (۳۴)(۱۲)، (۲۴)(۱۳)، (۲۳)(۱۴) در برگیرندهٔ دو ردهٔ مزدوجی کامل است. گاهی این زیرگروه را V_4 می‌نامند.
(پنج) $S_4/A_4 \cong C_2$. $S_4/V_4 \cong S_3 \cong D_3$.
۲۹. H نرمال $\Leftarrow$ $h^{-1}k^{-1}hk \in H$. K نرمال $\Leftarrow$ $h^{-1}k^{-1}h\varepsilon K$ $\Leftarrow$ $h^{-1}k^{-1}hk \in K$
۳۰. بنا به (یک) و (دو)

$$g^{-1}ag = (a_1b_1)^{-1}a(a_1b_1) = b_1^{-1}a_1^{-1}aa_1b_1 = a_1^{-1}aa_1.$$

۳۱. مرتبه ۱: ۱، مرتبهٔ ۲: ۷، ۹، ۱۵، مرتبهٔ ۴: ۳، ۵، ۱۱، ۱۳. (یک) نه. (دو) بله، (سه) بله.
۳۲. $h_1k_1 = h_2k_2 \Leftarrow h_2^{-1}h_1 = k_2k_1^{-1}$ لذا سؤال ۱۱.۱۰ (یک) از $H \cap K = \{e\}$ نتیجه می‌شود. نرمال بودن H و K با شرط $H \cap K = \{e\}$ و با استفاده از سؤال ۲۹ سؤال ۱۱.۱۰ (دو) نتیجه می‌شود.
۳۳. سؤال ۳۱ (دو) نتیجه می‌دهد $HK = G$، $H \cap K = \{e\}$. $H \cong C_4$. $K \cong C_2$.
۳۴. $C_a = \{e, a, a^2, a^3\}$. $C_b = \{e, b, a^2, ba^2\}$. $C_{a^2} = D_4$.
۳۵. بسته بودن، همانی، و وارونها را بررسی کنید.
۳۶.

ردهٔ مزدوجی	مرکزساز
$\{e\}$	D_4
$\{a^2\}$	D_4
$\{a, a^3\}$	$\{e, a, a^2, a^3\}$.
$\{b, ba^2\}$	$\{e, b, ba^2, a^2\}$.
$\{ba, ba^3\}$	$\{e, ba, ba^3, a^2\}$.

(اندازهٔ رده)×(مرتبهٔ مرکزساز) = ۸
۳۷. $x^{-1}ax = y^{-1}ay \Leftrightarrow yx^{-1}a = ayx^{-1} \Leftrightarrow yx^{-1} \in C_a$. از این رو

$C_a x = C_a y \Leftrightarrow x^{-۱}ax = y^{-۱}ay$ بنابراین تعداد هم مجموعه‌های C_a = تعداد اعضای مزدوج با a. شاخص C_a مقسوم‌علیه $|G|$ است.

۳۸. یک ۳ـ دور α هشت مزدوج در $S_۴$ دارد لذا مرتبهٔ C_α برابر با ۳ است. از این رو $C_\alpha = \{I, \alpha, \alpha^۲\}$. همهٔ اینها در $A_۴$ هستند بنابراین α چهار مزدوج در $A_۴$ دارد. $\{I\}$، $\{(۱۲)(۳۴)، (۱۳)(۲۴)، (۱۴)(۲۳)\}$، $\{(۱۳۲)، (۲۴۱)، (۳۱۴)، (۴۲۳)\}$، $\{(۱۲۳)، (۲۱۴)، (۳۴۱)، (۴۳۲)\}$.

۳۹. ردهٔ مزدوجی ۳ـ دور شامل چهار ۳ـ دور است. وارونهای این چهار عضو به ردهٔ مزدوجی دیگری تعلق دارند.

۴۰. هرگاه $A_۴$ زیرگروهی از مرتبهٔ ۶ داشته باشد شاخص آن ۲ خواهد بود و لذا نرمال است که در نتیجه با سؤال ۳۹ تناقض دارد.

۴۱. $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ a & b & c & e & d \end{pmatrix} = (de)\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix}$ بنابراین یکی زوج و دیگری فرد است. لذا یک جایگشت زوج در $S_۵$ وجود دارد که $a \mapsto ۱$، $b \mapsto ۲$ و $c \mapsto ۳$، در نتیجه $A_۵$ ترایای سه‌گانه است. هرگاه α یک جایگشت زوج از اینها باشد $(abc) = \alpha(۱۲۳)\alpha^{-۱}$ بنابراین همهٔ ۳ـ دورها ذر $A_۵$ مزدوج هستند.

۴۲. ۲۰. مرتبهٔ C_α در $S_۵$ برابر با ۶ است.

در $S_۵$، $C_{(۱۲۳)} = \{(۱)، (۱۲۳)، (۱۳۲)، (۴۵)، (۱۲۳)(۴۵)،(۱۳۲)(۴۵)\}$. $C_{(۱۲۳)} \cap A_۵ = \{(۱)، (۱۲۳)، (۱۳۲)\}$. ردهٔ مزدوجی (۱۲۳) در $A_۵$ شامل $\frac{۶۰}{۳}$ عضو است، یعنی همهٔ ۳ـ دورها.

۴۳. زوج: $(a)(b)(c)(d)(e)$؛ $(a)(bc)(de)$؛ $(a)(b)(cde)$؛ $(abcde)$.

فرد: $(a)(b)(c)(de)$؛ $(a)(bcde)$؛ $(ab)(cde)$.

۴۵. اگر $\beta = (ab)(cd)$ آنگاه $\alpha^{-۱}\beta\alpha \in N$، زیرا N نرمال است و $\beta\alpha^{-۱}\beta\alpha \in N$، زیرا N بسته است. $\beta\alpha^{-۱}\beta\alpha = (cde)$.

۴۶. شبیه سؤال ۴۵ استدلال کنید. (bed).

۴۷. سه نوع جایگشت دوری متمایز از همانی در $A_۵$ وجود دارند. سه سؤال آخر به این سه نوع می‌پردازند و نشان می‌دهند هر یک از آنها در یک زیرگروه نرمال N از $A_۵$ نتیجه می‌دهد $N = A_۴$. گروه‌های دوری مرتبهٔ اول ساده هستند.

۴۸. $\beta\alpha^{-۱}\beta\alpha = (۱۳)(۲۴)$. $<\alpha, \beta>$ شامل اعضایی از مرتبهٔ ۲، ۳ و ۵

است بنابراین مرتبهٔ $<\alpha,\beta>$ برابر با $۳۰k = ۲\cdot۳\cdot۵\cdot k$ است. اما یک زیرگروه با شاخص ۲ نرمال است لذا $k = ۲$.

۴۹. ۲۴، ۵ـ دور در $S_۵$ وجود دارند لذا شاخص مرکزساز α برابر با ۲۴ است و بنابراین مرتبه آن برابر با ۵ است. از این رو $C_\alpha = \{I, \alpha, \alpha^۲, \alpha^۳, \alpha^۴\}$. همهٔ اینها جایگشتهای زوج هستند. بنابراین مرتبهٔ C_α در $A_۵$ برابر با ۵ است و لذا شاخص آن برابر با ۱۲ است. ردهٔ مزدوجی α در $A_۵$ شامل ۱۲ عضو است.

۵۰. خط $l\alpha$ نیز عمود بر a است و با l زاویهٔ θ می‌سازد. خطهای $l\beta$ و $l\alpha\beta$ بر $a\beta$ عموداند و باهم زاویهٔ θ می‌سازند. حال $A \in a \Leftarrow A\beta \in a\beta$ و $A\beta = A\beta(\beta^{-۱}\alpha\beta)$ بنابراین $a\beta$ خطی است با نقاط ثابت $\beta^{-۱}\alpha\beta$. به‌علاوه $l\beta(\beta^{-۱}\alpha\beta) = l\alpha\beta$ لذا $\beta^{-۱}\alpha\beta$ دورانی با محور $a\beta$ به اندازهٔ زاویهٔ θ است.

۵۱. مزدوج یک دوران دورانی با همان زاویهٔ است. لذا دورانهایی به اندازهٔ $\pm۷۲^\circ$ ممکن است با یکدیگر مزدوج باشند اما با دورانهایی به اندازهٔ $\pm۱۴۴^\circ$ مزدوج نیستند.

۵۳. $g^{-۱}xg = g^{-۱}yg \Leftarrow x = y$ لذا نگاشت یک به یک است. $g^{-۱}xyg = (g^{-۱}xg)(g^{-۱}yg)$ از این رو نگاشت حافظ ساختار است.

۵۴. بله، بنابه سؤال ۱۱.۱۶.

۵۵. به ازای هر خودریختی α،

$$b = x^{-۱}ax \Rightarrow b\alpha = (x^{-۱})\alpha \cdot a\alpha \cdot x\alpha = (x\alpha)^{-۱}a\alpha(x\alpha)$$

۵۶. یک زیرگروه نرمال اجتماعی از رده‌های مزدوجی است. بله.

۵۷. بله.

۵۸. بله.

۵۹. هرگاه α یک جایگشت زوج باشد $(۱۲)\alpha(۱۲)$ زوج است.

$$(۱۲)\alpha(۱۲) = (۱۲)\beta(۱۲) \Rightarrow \alpha = \beta.$$
$$(۱۲)\alpha\beta(۱۲) = [(۱۲)\alpha(۱۲)][(۱۲)\beta(۱۲)]$$

هرگاه $\alpha = (۱۲۳)$، $(۱۲)\alpha(۱۲) = (۲۱۳)$ که در همان ردهٔ مزدوجی (۱۲۳) در $A_۴$ قرار ندارد لذا بنابه سؤال ۵۷ این یک خودریختی درونی نیست.

۶۰. برای یک گروه آبلی هر خودریختی درونی نگاشت همانی است.

۶۱. ترکیب $x \mapsto g_۱^{-۱}xg_۱$ و $x \mapsto g_۲^{-۱}xg_۲$ برابر با $x \mapsto g_۲^{-۱}(g_۱^{-۱}xg_۱)g_۲ = (g_۱g_۲)^{-۱}x(g_۱g_۲)$ است، بنابراین مجموعهٔ خودریختهای

درونی بسته است. $g_۱ = e$ نگاشت همانی را به دست می‌دهد. $g_۲ = g_۱^{-۱}$ نگاشت وارون را ارائه می‌دهد.

۶۲. بنابه تعریف، خودریختهای G اعضای S_G هستند. اگر $(xy)\alpha = x\alpha . y\alpha$ و $(xy)\beta = x\beta . y\beta$ آنگاه $(xy)\alpha\beta = [x\alpha . y\alpha]\beta = x\alpha\beta . y\alpha\beta$ بنابراین مجموعهٔ خودریختها بسته است. نگاشت همانی یک خودریختی است. $(x\alpha^{-۱} . y\alpha^{-۱})\alpha = xy$ لذا $(xy)\alpha^{-۱} = x\alpha^{-۱} . y\alpha^{-۱}$.

MATH75.IR

۱۸

گروه‌های کسری خطی

هرگاه تأثیر اعضای گروه خطی عام روی زیرفضاهای یک بُعدی را بررسی کنیم یک گروه جایگشتی ترایا به دست می‌آوریم که یک نگارهٔ همریخت گروه خطی عام است. این امر باعث می‌شود که گروه موبیوس و گروه تصویری روی یک خط به‌عنوان مثالهایی از یک ردهٔ نامتناهی گروه‌های ترایای سه‌گانه درنظر آیند. در توسعهٔ این فصل زیرفضاهای یک بُعدی $V_۲(F)$ به مجموعهٔ اشیایی مبدّل می‌شوند که در یک گروه جایگشتی جایگرد می‌شوند. این قدمی است که از یک فضای برداری به یک فضای تصویری برمی‌داریم، در این مورد از یک فضای برداری دو بُعدی به یک خط تصویری می‌رسیم. زیر فضاهای یک بُعدی نقاط خط تصویری هستند. به طور کلی زیر فضاهای یک بُعدی $V_n(F)$ یک فضای تصویری $(n - ۱)$ بُعدی می‌سازند. چون بردارهای متفاوتی مانند (x, y) و (kx, ky) در یک زیرفضای یک بُعدی قرار دارند اگر $k \neq ۰$ آنگاه هر دوی این جفتهای مختصات یک نقطهٔ تصویری را به‌طور یکتا مشخص می‌کند. در چنین شرایطی گاهی از به‌کارگیری مختصات همگن برای نقاط تصویری صحبت می‌کنیم.

جایگشتهای فضاهای یک بُعدی

۱. فرض کنید $\alpha : (x, y) \mapsto (x, y) \begin{pmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{pmatrix}$ یک تبدیل خطی از $V_۲(\mathbb{R})$ باشد. نگاره‌های نقاط $(۱, ۲)$، $(۲, ۴)$، $(۳, ۶)$ و به‌طور کلی $(k, ۲k)$ را تحت این تبدیل بیابید. آیا نگاره‌های این نقاط همگی در یک زیرفضای یک بُعدی قرار دارند؟ هرگاه $\{x(۱, ۲) | x \in \mathbb{R}\}$ تحت α به زیر فضای $\{x(۱, s) | x \in \mathbb{R}\}$ نگاشته شود مقدار s

را بیابید.

آیا زیرفضای $\{x(۳, ۱)|x \in \mathbb{R}\}$ تحت α به یک زیرفضای $\{x(t, ۱)|x \in \mathbb{R}\}$ نگاشته می‌شود؟ در این صورت مقدار t را بیابید.

به ازای یک عدد حقیقی مفروض m، آیا زیرفضای $\{x(m, ۱)|x \in \mathbb{R}\}$ تحت α باید به یک زیرفضا از $V_۲(\mathbb{R})$ نگاشته شود؟ با فرض این که $۳m + ۵ \neq ۰$ آیا می‌توان یک عدد m' را بر حسب m به گونه‌ای یافت که $\{x(m, ۱)|x \in \mathbb{R}\}$ تحت α به $\{x(m', ۱)|x \in \mathbb{R}\}$ نگاشته شود؟

۲. فرض کنید $\beta : (x, y) \mapsto (x, y) \begin{pmatrix} ۲k & ۳k \\ ۴k & ۵k \end{pmatrix}$ یک تبدیل خطی از $V_۲(\mathbb{R})$ باشد و $k \neq ۰$. نگارهٔ زیرفضای $\{x(m, ۱)|x \in \mathbb{R}\}$ تحت تبدیل β را بیابید و دوباره با فرض این که $۳m + ۵ \neq ۰$ عددی مانند m' برحسب m بیابید که $\{x(m, ۱)|x \in \mathbb{R}\}$ تحت β به $\{x(m', ۱)|x \in \mathbb{R}\}$ نگاشته شود.

۳. آیا هر زیرفضای یک بُعدی از $V_۲(\mathbb{R})$ به ازای انتخاب مناسبی از m یا به صورت $\{x(m, ۱)|x \in R\}$ یا به صورت $\{(x, ۰)|x \in \mathbb{R}\}$ است؟

هرگاه زیرفضاهای یک بُعدی $V_۲(\mathbb{R})$ را با اعضای $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ به صورت

$$\{x(m, ۱)|x \in \mathbb{R}\} \mapsto m$$
$$\{(x, ۰)|x \in \mathbb{R}\} \mapsto \infty$$

نشانگذاری کنیم جایگشت القا شده به وسیلهٔ α (α در سؤال ۱) از $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ را نشان دهید. بگویید چه مقداری از m به ∞ نگاشته می‌شود و نگارهٔ ∞ چیست؟

۴. آیا هر زیرفضای یک بُعدی $V_۲(\mathbb{Z}_۳)$ به ازای مقدار مناسبی از m یا به صورت $\{x(m, ۱)|x \in \mathbb{Z}_۳\}$ یا به صورت $\{(x, ۰)|x \in \mathbb{Z}_۳\}$ است؟

نگارهٔ هر یک از زیرفضاهای $\{x(۰, ۱)|x \in \mathbb{Z}_۳\}$، $\{x(۱, ۱)|x \in \mathbb{Z}_۳\}$، $\{x(۲, ۱)|x \in \mathbb{Z}_۳\}$ و $\{(x, ۰)|x \in \mathbb{Z}_۳\}$ را تحت تبدیل خطی

$$\alpha : (x, y) \mapsto (x, y) \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

بیابید. آیا هر تبدیل خطی ناتکین $V_۲(\mathbb{Z}_۳)$ لزوماً زیرفضاهای یک بُعدی را جایگرد می‌کند؟

هرگاه زیرفضاهای یک بُعدی $V_۲(\mathbb{Z}_۳)$ را با اعضای مجموعهٔ $\mathbb{Z}_۳ \cup \{\infty\}$ به صورت

$$\{x(m, ۱)|x \in \mathbb{Z}_۳\} \mapsto m,$$
$$\{(x, ۰)|x \in \mathbb{Z}_۳\} \mapsto \infty$$

نشانگذاری کنیم جایگشتی از $\mathbb{Z}_۳ \cup \{\infty\}$ را نمایش دهید که به‌وسیلهٔ α القا شود. برای نگارهٔ m یک عبارت کلی جبری ارائه دهید به شرطی که $m + ۱ \neq ۰$. یک تبدیل خطی دیگر از $V_۲(\mathbb{Z}_۳)$ بنویسید که زیر فضاهای یک بُعدی $V_۲(\mathbb{Z}_۳)$ را دقیقاً مانند α جایگرد کند.

۵. هرگاه α و β تبدیلهای خطی ناتکین $V_۲(F)$ باشند که زیر فضاهای یک بُعدی را به یک طریق جایگرد کنند اثر $\alpha\beta^{-۱}$ روی زیرفضاهای یک بُعدی $V_۲(F)$ چیست؟ هرگاه $(۱, ۰)\alpha\beta^{-۱} = (s, ۰)$ و $(۰, ۱)\alpha\beta^{-۱} = (۰, t)$ ثابت کنید $(۱, ۱)\alpha\beta^{-۱} = (s, t)$ و نتیجه بگیرید $s = t$. هرگاه $\alpha\beta^{-۱} : (x, y) \mapsto (x, y)A$، A چه نوع ماتریسی است؟

۶. $GL(۲, \mathbb{Z}_۳)$ را به صورت یک گروه در نظر بگیرید با استفاده از سؤال ۱۶.۱۳ مرکز این گروه را بیابید. سه هم مجموعهٔ متمایز این مرکز را بنویسید و جایگشتهای القا شده روی زیر فضاهای یک بُعدی $V_۲(\mathbb{Z}_۳)$ به وسیلهٔ شش تبدیل حاصل از این ماتریس‌ها را بیابید.

۷. هرگاه تحت تبدیل خطی ناتکین

$$\alpha : (x, y) \mapsto (x, y) \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

از $V_۲(F)$ زیرفضای یک بُعدی $\{x(m, ۱) \mid x \in F\}$ به زیر فضای یک بعدی $\{x(m', ۱) \mid x \in F\}$ نگاشته شود با فرض این که $cm + d \neq ۰$، m' را برحسب m بنویسید. نگارهٔ زیرفضای $\{x(-d, c) \mid x \in F\}$ تحت α چیست؟ نگارهٔ زیرفضای $\{(x, ۰) \mid x \in F\}$ تحت α چیست؟

۸. هرگاه یک نگاشت $F \mapsto F$ را با

$$x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$$

تعریف کنیم که $a, b, c, d \in F$ و $c \neq 0$ چه عضوی از F باید از دامنهٔ حذف شود؟

۹. با استفاده از معادلهٔ

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{b}{d} + \frac{ad-bc}{d(cx+d)}x$$

نشان دهید هرگاه $ad - bc = 0$ نگاشت

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

نگاشتی یک به یک از دامنهٔ $F - \{-d/c\}$ نیست.

۱۰. هرگاه $ad - bc \neq 0$ و $c \neq 0$ عضو s از هیئت F را بیابید که نگاشت ارائه شده به وسیلهٔ

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

نگاشتی دوسویی از $F - \{-d/c\}$ به $F - \{s\}$ باشد.

۱۱. هرگاه به ازای هر $m \in F$ یک تبدیل ناتکین $V_2(F)$ زیرفضای یک بُعدی $\{x(m, 1) | x \in F\}$ را بروی زیرفضای یک بُعدی $\{x(am+b, 1) | x \in F\}$ با $a \neq 0$ بنگارد، نگاره و پیشنگارهٔ زیرفضای $\{(x, 0) | x \in F\}$ تحت α چیست؟

۱۲. هرگاه $ad - bc \neq 0$ یک تبدیل کسری خطی از $F \cup \{\infty\}$ را با

$$\alpha : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

تعریف می‌کنیم که هرگاه $c = 0$، $\infty\alpha = \infty$ و هرگاه $c \neq 0$، $(-d/c)\alpha = \infty$ و $\infty\alpha = a/c$. مجموعهٔ $F \cup \{\infty\}$ خط تصویری روی هیئت F نام دارد.

شش تبدیل کسری خطی از $\mathbb{Z}_2 \cup \{\infty\}$ بنویسید و جایگشتهای متناظر $\{0, 1, \infty\}$ را مشخص کنید.

همریختی $\mathbf{GL(2,F)} \to \mathbf{LF(F)}$

۱۳. ثابت کنید نگاشت از گروه $GL(2,F)$ یعنی ماتریس‌ها تحت عمل ضرب ماتریسی، بروی مجموعهٔ تبدیلهای کسری خطی تحت عمل ترکیب که با

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mapsto [x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}]$$

داده می‌شود یک همریختی است. نتیجه بگیرید تبدیلهای کسری خطی تحت عمل ترکیب یک گروه تشکیل می‌دهند. این گروه با $LF(F)$ نمایش داده می‌شود.

۱۴. هرگاه در سؤال ۱۳ بگیریم $F = \mathbb{Z}_3$ آیا می‌توانیم بین نگاره‌های ماتریس‌های $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ تحت همریختی تعریف شده تمایز بگذاریم.

۱۵. هستهٔ همریختی سؤال ۱۳ چیست؟

۱۶. با استفاده از سؤال ۳۲.۱۳ مرتبهٔ $GL(2,\mathbb{Z}_3)$ و C مرکز آن را مشخص کنید. مرتبه گروه $LF(\mathbb{Z}_3)$ را نتیجه بگیرید.

۱۷. تبدیلهای $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ و $x \mapsto \frac{1}{x}$ در $LF(\mathbb{Z}_3)$ را به صورت جایگشتهای مجموعهٔ $\{0,1,2,\infty\}$ نمایش دهید و با استفاده از سؤال ۲۳.۱۷ نتیجه بگیرید $LF(\mathbb{Z}_3)$ با S_4 یکریخت است.

۱۸. با استفاده از نمادگذاری سؤال ۸.۱۱ تعداد بردارهای $V_2(F_4)$ و تعداد بردارهای یک زیرفضای یک بُعدی را بیابید. مرتبهٔ $GL(2,F_4)$ را نتیجه بگیرید. چند ماتریس در مرکز این گروه وجود دارند؟

با استفاده از این نتایج و با به‌کار بردن قضیهٔ اصلی همریختیها مرتبهٔ $LF(F_4)$ را بیابید.

۱۹. با استفاده از نمادگذاری سؤال ۸.۱۱ تبدیلهای $x \mapsto \frac{b}{x+b}$ و $x \mapsto bx+1$ در $LF(F_4)$ را به صورت جایگشتهای مجموعهٔ $\{0,1,a,b,\infty\}$ نمایش دهید و با استفاده از سؤال ۴۸.۱۷ نتیجه بگیرید $LF(F_4)$ با A_5 یکریخت است.

گروه خارج قسمتهای $PGL(2,F)$

۲۰. با استفاده از قضیهٔ اصلی همریختیها روی سؤال ۱۳ ثابت کنید اگر C مرکز گروه $GL(2,F)$ باشد، آنگاه گروه خارج قسمتهای $GL(2,F)/C$ با گروه $LF(F)$

یکریخت است.

گروه خارج قسمتهای $GL(۲,F)/C$ به گروه خطی تصویری عام $PGL(۲,F)$ موسوم است. چون $PGL(۲,F) \cong LF(F)$ اسامی آنها را به جای هم به‌کار می‌بریم.

۲۱. اگر a، b، c اعضای متمایز F باشند، نگارهٔ آنها تحت تبدیل کسری خطی

$$x \mapsto \frac{x-a}{x-b}.\frac{c-b}{c-a}$$

چیست؟ نتیجه بگیرید که گروه تبدیلهای کسری خطی روی خط تصویری $F \cup \{\infty\}$ ترایای سه‌گانه است.

۲۲. ثابت کنید تنها تبدیل کسری خطی که $\infty, ۰, ۱$ را ثابت نگاه می‌دارد همانی است. با استفاده از سؤال ۲۱ نتیجه بگیرید یک تبدیل کسری خطی با سه نقطه و نگاره‌هایشان به‌طور یکتا مشخص می‌شود.

۲۳. هرگاه F یک هیئت شامل q عضو باشد نشان دهید $LF(F)$ دارای $(q+۱)q(q-۱)$ عضو است. با استفاده از سؤال ۲۰ نتیجه بگیرید $GL(۲,F)$ شامل $(q+۱)q(q-۱)^۲$ عضو است این مطلب را مستقیماً بررسی کنید.

۲۴. دربارهٔ یک تبدیل خطی از $V_۲(F)$ با سه بردار ویژه که هیچ یک از آنها مضرب اسکالر دیگری نیست چه می‌توانیم بگوییم.

۲۵. (اختیاری) وجه‌های یک مکعب را با اعضای $\mathbb{Z}_۵ \cup \{\infty\}$ به طریقی نشانگذاری کنید که تبدیلهای کسری خطی $x \mapsto ۲x$ و $x \mapsto ۳/x$ هر دو به تقارنهای دورانی مکعب تناظر یابند، نشان دهید یک زیرگروه از $PGL(۲,\mathbb{Z}_۵)$ وجود دارد که با $S_۴$ یکریخت است.

گروه خطی تصویری خاص $\mathbf{PSL(۲,F)}$

۲۶. هرگاه C مرکز گروه $GL(۲,F)$ باشد با استفاده از سؤال ۱۶.۱۳ نشان دهید مرکز گروه $SL(۲,F)$ برابر با $SL(۲,F) \cap C = C_s$ است.

۲۷. هرگاه F یک هیئت متناهی با q عضو باشد که q عددی زوج است ثابت کنید گروه ضربی F عضوی از مرتبهٔ زوج ندارد که $x = ۱$ تنها جواب معادلهٔ $x^۲ = ۱$ باشد. برای چنین هیئتی نتیجه بگیرید مرکز گروه $SL(۲,F)$ تنها متشکل از همانی است.

۲۸. هرگاه F یک هیئت متناهی با q عضو باشد که q عددی فرد است ثابت کنید

گروه جمعی F عضوی از مرتبهٔ زوج ندارد که $x = ۰$ تنها جواب معادلهٔ $x + x = ۰$ باشد. نتیجه بگیرید ۱+ و ۱− متمایزاند و بنابراین معادلهٔ $x^۲ = ۱$ دقیقاً دو جواب دارد. نشان دهید برای چنین هیئتی مرکز گروه $SL(۲, F)$ تنها متشکل از این دو عضو متمایز است.

۲۹. برای $\mathbb{Z}_۵$، $F_۴$، $\mathbb{Z}_۳$ و $F = \mathbb{Z}_۲$ مرتبه‌های $GL(۲, F)$، $SL(۲, F)$، مرکزهای هر یک از این گروه‌ها و گروه‌های خارج قسمتهای $GL(۲, F)/C$ و $SL(۲, F)/C_s$ را بیابید.

۳۰. فرض کنید S گروه $SL(۲, F)$ و C_s مرکز S و π همریختی سؤال ۱۳ را نمایش دهند. با استفاده از سؤال ۱۱.۱۶ نشان دهید $S\pi$ زیرگروهی از $LF(F)$ است. هستهٔ همریختی $\pi : S \to S\pi$ چیست؟ با استفاده از قضیهٔ اصلی دربارهٔ همریختیها (سؤال ۲۳.۱۶) نشان دهید گروه خارج قسمتهای S/C_s با $S\pi$ یکریخت است.

گروه خارج قسمتهای S/C_S گروه خطی تصویری خاص $PSL(۲, F)$ نام دارد.

۳۱. با استفاده از نمادگذاری سؤال ۳۰ فرض کنید A عضوی از $GL(۲, F)$ است که $A\pi \in S\pi$. ثابت کنید به ازای عضوی مانند $B \in SL(۲, F)$ عضو $AB^{-۱}$ در مرکز $GL(۲, F)$ قرار دارد و نتیجه بگیرید دترمینان A مجذور کامل است.

۳۲. هرگاه $ad - bc = r^۲ \neq ۰$ به‌وسیلهٔ ساختن ماتریسی در $SL(۲, F)$ با نگارهٔ یکسان تحت π ثابت کنید

$$x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$$

در $S\pi$ قرار دارد (با استفاده از نمادگذاری سؤال ۳۰).

۳۳. با استفاده از سؤالهای ۳۰، ۳۱، ۳۲ نتیجه بگیرید $PSL(۲, F)$ با زیرگروهی از $LF(F)$ متشکل از اعضایی با دترمینان مجذور کامل یکریخت است.

۳۴. با بررسی اعضای $x \mapsto x + ۱$ و $x \mapsto ۲/x$ از $LF(\mathbb{Z}_۳)$ ثابت کنید $PSL(۲, \mathbb{Z}_۳)$ با $A_۴$ یکریخت است.

۳۵. (اختیاری) دوازده وجه یک دوازده وجهی منتظم را با شش عضو $\mathbb{Z}_۵ \cup \{\infty\}$ به طریقی نشانگذاری کنید که $x \mapsto x + ۱$ و $x \mapsto \frac{۴}{x+۴}$ به‌عنوان اعضای $LF(\mathbb{Z}_۵)$ با تقارنهای دورانی دوازده وجهی تناظر یابند. یا با استفاده از سؤال ۲۹ یا سؤال ۱۵.۵ بررسی کنید مرتبهٔ گروه تولید شده توسط این دو تبدیل کسری خطی ۶۰ یا کمتر از آن است. با

استفاده از سؤال ۵.۵ (چهار) نتیجه بگیرید این دورانهای دوازده وجهی با تقارنهای دورانی یک بیست وجهی منتظم و بنابه سؤال ۱۴.۵ با اعضای A_5 تناظر می‌یابند. با استفاده از سؤال ۴۸.۱۷ ثابت کنید $PSL(2, \mathbb{Z}_5)$ با A_5 یکریخت است.

۳۶. با استفاده از سؤال ۲۰ ثابت کنید $PGL(2, \mathbb{C})$ با گروه موبیوس و با استفاده از سؤال ۳۳ نیز ثابت کنید $PSL(2, \mathbb{C})$ با گروه موبیوس یکریخت است.

۳۷. با استفاده از سؤالهای ۴۶.۷ و ۴۷.۷ نشان دهید یک همریختی از گروه ماتریسهای مختلط ناتکین به صورت $\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$ بروی گروه دورانهای یک کره وجود دارد.

خلاصهٔ مطالب

قضیه اعضای $GL(2, F)$ زیرفضاهای یک بُعدی $V_2(F)$ را جایگرد می‌کنند.

سؤالهای ۷، ۱۲ اگر زیر فضاهای یک بُعدی با

$$\{x(m, 1) \mid x \in F\} \mapsto m$$

$$\{(x, 0) \mid x \in F\} \mapsto \infty$$

نشانگذاری شوند آنگاه جایگشت القا شده به‌وسیله $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ در $GL(2, F)$ دقیقاً تبدیل کسری خطی

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

است که ∞ ثابت نگاه داشته می‌شود هرگاه $c = 0$ و $-d/c$ به ∞ و ∞ به a/c نگاشته می‌شوند هرگاه $c \neq 0$.

قضیه نگاشتی از $GL(2, F)$ که با

سؤال ۱۳

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mapsto [x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}]$$

داده می‌شود یک همریختی با هستهٔ مرکز $GL(\text{۲}, F)$ به‌روی گروه کسری خطی $LF(F)$ است.

قضیه سؤال ۲۰ اگر C مرکز $GL(\text{۲}, F)$ را نمایش دهد آنگاه گروه خارج قسمتهای $GL(\text{۲}, F)/C$ موسوم به گروه خطی تصویری عام $PGL(\text{۲}, F)$ با گروه کسری خطی $LF(F)$ یکریخت است.

قضیه سؤالهای ۲۱، ۲۲ گروه کسری خطی روی خط تصویری $F \cup \{\infty\}$ ترایای سه‌گانه است و هر تبدیل توسط اثرش روی سه عضو متمایز مشخص می‌شود.

تعریف سؤال ۳۰ اگر C_s مرکز $SL(\text{۲}, F)$ را نمایش دهد آنگاه گروه خارج قسمتهای $SL(\text{۲}, F)/C_s$ گروه خطی تصویری خاص $PSL(\text{۲}, F)$ نام دارد.

قضیه سؤال ۳۳ $PSL(\text{۲}, F)$ با زیرگروهی از تبدیلهای کسری خطی که برای آنها $ad - bc$ مجذور کامل باشد یکریخت است.

مطالعهٔ بیشتر: فصل ۸ کتاب روتمن[1]؛ بخشهای ۶۸ و ۷۱ کتاب کارمایکل[2].

یادداشت تاریخی

گروه‌های کسری خطی برای هیئتهای متفاوت مستقلاً مطرح شدند. قبلاً دیدیم که چگونه این گروه برای اعداد مختلط به نحو ترکیبی توسط ا.ف.موبیوس (۱۸۵۲ـ۱۸۵۶) مورد بررسی قرار گرفت. برای هیئتَ اعداد حقیقی در کار فون اشتات به صورت گروه تصویری روی یک خط با اعضای تشکیل یافته به‌وسیلهٔ دنباله‌ای از تصویرهای از یک خط به خط دیگر در صفحهٔ تصویری حقیقی ظاهر شد.

برای هیئت $\mathbb{Z}_p$ گروه کسری خطی و زیرگروه آن با دترمینان‌های مجذور کامل توسط ا.گالوا (۱۸۳۲) بررسی شد وی نماد ∞ را با معنایی که در این فصل به آن دادیم مطرح کرد. برای هیئتهای متناهی دلخواه گروه کسری خطی توسط ا.هـ.موور (۱۸۹۳) مطرح شد وی سادگی $PSL(\text{۲}, F)$ را برای هیئتهای با مرتبهٔ بزرگتر از ۳ ثابت کرد. همریختی از

1) Rotman 2) Carmichael

$GL(۲, F)$ به گروه کسری خطی از کار ا.گالوا (۱۸۳۲) و ج.ا.سرت (۱۸۶۶) ظاهر شد و توسط ا.کیلی (۱۸۸۰) برای تعیین ویژگیهای تبدیلهای کسری خطی به کار رفت.

جوابهای فصل ۱۸

۱. $s = \frac{۸}{۱۱}$. $t = \frac{۵}{۷}$، $m' = \frac{۲m+۴}{۳m+۵}$.

۲. $m' = \frac{۲m+۴}{۳m+۵}$.

۳. $m \mapsto \frac{۲m+۴}{۳m+۵}$، $-\frac{۵}{۳} \mapsto \infty$، $\infty \mapsto \frac{۲}{۳}$.

۴. $\{x(۰,۱)\} \to \{x(۱,۱)\} \to \{x(۲,۱)\} \to \{x(۱,۰)\} \to \{x(۰,۱)\}$. بله بنابه سؤالهای ۵.۱۲ و ۵.۱۳. (۰۱۲∞). $m \to \frac{۱}{m+۱}$. $\begin{pmatrix} ۰ & ۲ \\ ۲ & ۲ \end{pmatrix}$.

۵. $\alpha\beta^{-۱}$ هر زیرفضای یک بُعدی را ثابت نگاه می‌دارد. $(۱,۱) = (۱,۰)+(۰,۱)$ بنابراین $(۱,۱)\alpha\beta^{-۱} = (s,۰)+(۰,t)$. هرگاه زیرفضای $\{x(۱,۱)|x \in F\}$ توسط $\alpha\beta^{-۱}$ ثابت نگاه داشته شود، $s = t$. A یک ماتریس اسکالر است.

۶. مرکز $= \left\{ \begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \right\}$. مثلاً هم مجموعه‌های $\left\{ \begin{pmatrix} ۰ & ۲ \\ ۲ & ۲ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix} \right\}$، $\left\{ \begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{pmatrix} \right\}$. ماتریس‌های در همان هم مجموعهٔ زیرفضاهای یک بُعدی را به همان طریق جایگرد می‌کنند.

۷. $m' = \frac{am+b}{cm+d}$. $\{x(-d,c)\} \to \{(x,۰)\} \to \{x(a,c)\}$.

۸. $-d/c$.

۱۰. $s = a/c$.

۱۱. بنابه سؤال ۵.۱۳، $\{(x,۰)\}$ ثابت نگاه داشته می‌شود.

۱۲.

$$(۰) : x \mapsto x,$$

$$(۰۱\infty) : x \mapsto \frac{۱}{x+۱},$$

$$(۰\infty۱) : x \mapsto \frac{x+۱}{x},$$

$$(۰۱) : x \mapsto x+۱,$$

$$(۰\infty) : x \mapsto \frac{۱}{x},$$

$$(۱\infty) : x \mapsto \frac{x}{x+۱}.$$

۱۳. مجموعهٔ تبدیلهای کسری خطی زیرمجموعه‌ای از $S_{F\cup\{\infty\}}$ است. چون این مجموعه نگارهٔ یک گروه تحت یک همریختی است بنا به سؤال ۱۱.۱۶ یک گروه است.

۱۴. نه.

۱۵. ماتریس‌های اسکالر.

۱۶. ۴۸= $|GL(۲,\mathbb{Z}_۳)|$، ۲= |مرکز| بنابراین ۲۴= $|LF(\mathbb{Z}_۳)|$.

۱۷. $(\infty\,۰\,۱۲) : x \to \frac{۱}{x+۱}$، $(\infty\,۰) : x \to \frac{۱}{x}$.

۱۸. کلاً ۱۶ بردار. چهار بردار در یک زیرفضای یک بُعدی. ۱۸۰=۱۵.۱۲= $|GL(۲,F_۴)|$. سه ماتریس در مرکز. ۶۰= $|LF(F_۴)|$.

۱۹. $(۰\,۱ab\infty) : x \mapsto \frac{b}{x+b}$، $(۰\,۱a) : x \mapsto bx+۱$.

۲۰. C هستهٔ همریختی است.

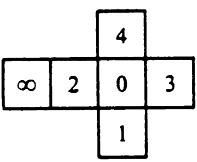
۲۱. $a \mapsto ۰$، $b \mapsto \infty$، $c \mapsto ۱$. مانند سؤال ۱۲.۴ استدلال کنید.

۲۲. برای ثابت نگاه داشتن ∞ بگیرید $c = ۰$. برای ثابت نگاه داشتن ∞ و ۰ بگیرید $b = c = ۰$. برای ثابت نگاه داشتن ∞، ۰ و ۱ بگیرید $b = c = ۰$ و $a = d$. اگر β و γ اثر یکسانی روی a، b و c داشته باشند و α تبدیل سؤال ۲۱ باشد آنگاه $\alpha^{-۱}(\beta\gamma^{-۱})\alpha$، ۰، ۱ و ∞ را ثابت نگاه می‌دارد. بنابه سؤال ۲۲ داریم $\alpha^{-۱}\beta\gamma^{-۱}\alpha = ۱$ بنابراین $\beta = \gamma$.

۲۳. $LF(F)$ روی $F \cup \{\infty\}$ ترایای سه‌گانه است یعنی $q+۱$ عضو. بنابراین ∞ ممکن است به $q+۱$ عضو نگاشته شود. ۰ به q عضو ۱ به $q-۱$ عضو نگاشته شوند. لذا $|GL(۲,F)/C| = (q+۱)q(q-۱)$ و چون C دارای $q-۱$ عضو است پس $|GL(۲,F)| = (q+۱)q(q-۱)^۲$. چون $V_۲(F)$ دارای $q^۲$ بردار است مرتبهٔ $GL(۲,F)$ برابر با $(q^۲-۱)(q^۲-q)$ است.

۲۴. آن یک بزرگسازی است، زیرا سه زیرفضای یک بعدی ثابت نگاه داشته می‌شوند. سؤالهای ۵ و ۹.۱۵ را مقایسه کنید.

۲۵. $x \mapsto ۲x$؛ (۱۲۴۳). $x \mapsto \frac{۳}{x}$: $(۲۴)(۱۳)(۰\infty)$.



حال سؤالهای ۱۰.۵ و ۲۳.۱۷ را به‌کار برید.

۲۶. سؤال ۱۶.۱۳ نشان می‌دهد که هر عضو مرکز $SL(2,F)$ در مرکز $GL(2,F)$ است.

۲۷. گروه ضربی F شامل $q-1$ عضو است که تعدادی فرد می‌باشد، لذا بنابه قضیهٔ لاگرانژ هر عضو این گروه مرتبهٔ فرد دارد. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ در مرکز $SL(2,F)$ است $\Leftrightarrow a^2=1$.

۲۹.

F	$\lvert GL(2,F)\rvert$	$\lvert SL(2,F)\rvert$	$\lvert C\rvert$	$\lvert C_s\rvert$	$\lvert GL(2,F)/C\rvert$	$\lvert SL(2,F)/C_s\rvert$
$\mathbb{Z}_2$	۶	۶	۱	۱	۶	۶
$\mathbb{Z}_3$	۴۸	۲۴	۲	۲	۲۴	۱۲
F_4	۱۸۰	۶۰	۳	۱	۶۰	۶۰
$\mathbb{Z}_5$	۴۸۰	۱۲۰	۴	۲	۱۲۰	۶۰

۳۱. اگر $A\pi \in S\pi$ آنگاه به ازای عضوی مانند $B \in S$، $A\pi = B\pi$ لذا $AB^{-1}\pi = I\pi$ و AB^{-1} یک ماتریس اسکالر مانند $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ است. بنابراین $\det AB^{-1} = a^2$ لذا $\det A = a^2$.

۳۲. $\begin{pmatrix} a/r & c/r \\ b/r & d/r \end{pmatrix}$.

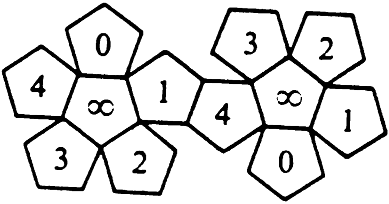
۳۳. از سؤالهای ۳۱ و ۳۲

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

در $S\pi$ است اگر و تنها اگر $ad-bc$ یک مجذور کامل باشد. بنابراین یک همریختی از $SL(2,F)$ بروی زیرگروهی از $LF(F)$ با دترمینان مجذور کامل است. هستهٔ این همریختی برابر با C_s است و قضیه اصلی نتیجه را به دست می‌دهد.

۳۴. هم $x \mapsto x+1 : (012)$ و هم $x \mapsto \frac{2}{x} : (12)(0\infty)$ دترمینانی برابر با ۱ دارند. بنابه سؤال ۴۰.۱۷ یک عضو مرتبهٔ ۲ و یک عضو مرتبهٔ ۳ گروه A_4 را تولید می‌کنند. نتیجه از سؤالهای ۲۹ و ۳۳ به‌دست می‌آید.

۳۵. $x \mapsto x+1 : (01234)$ و $x \mapsto \frac{4}{x+4} : (243)(01\infty)$ هر یک دترمینانی برابر با ۱ دارند.



۳۶. هر عضو $\mathbb{C}$ یک مجذور کامل است لذا، $PSL(۲,\mathbb{C}) \cong PGL(۲,\mathbb{C})$.

MATH75.IR

۱۹

چهارگانها و دورانها

در این فصل ابتدا جبر ماتریس‌ها را به وسیلهٔ تعریف جمع ماتریس‌ها و اثبات قوانین توزیع‌پذیری ماتریس‌ها توسعه می‌دهیم. سپس با استفاده از ماتریس‌ها، چهارگانها را تعریف می‌کنیم و برخی از ویژگیهای جبری خاص آنها را بسط می‌دهیم. سرانجام نشان می‌دهیم چگونه گروه خودریختیهای درونی چهارگانها با گروه دورانهای فضای سه‌بُعدی با یک نقطهٔ ثابت داده شده یکریخت است.

مطالعهٔ همزمان: بخش ۱۰، فصل ۸ کتاب بیرکف ومک‌لین؛ صفحه‌های ۴۲ـ۴۴ کتاب ریس[1]؛ فصل ۵ کتاب کورتیس[2]؛ فصل ۶ کتاب کاکستر (۱۹۷۴).

جمع ماتریس‌ها

در دو سؤال اول جبر ماتریس‌ها را در مضمونی بسیار کلی توسعه می‌دهیم جمع روی ماتریس‌ها را به همان طریقی تعریف می‌کنیم که با جمع مؤلفه‌ای منطبق باشد و نشان می‌دهیم که این جمع با تعریف ما از ضرب ماتریس‌ها به معنایی که هر دو قانون توزیع‌پذیری برقرار باشند سازگار است.

۱. هرگاه $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A$ و $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}B$ هر دو تبدیلهای خطی $V_{\mathbf{n}}(F) \mapsto V_m(F)$ باشند ثابت کنید $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A + \mathbf{v}B$ یک تبدیل خطی است. این مطلب وجود ماتریسی مانند C را ثابت می‌کند که به ازای همهٔ بردارهای $\mathbf{v}$ داریم $\mathbf{v}A + \mathbf{v}B = \mathbf{v}C$. حال

1) Rees 2) Curtis

تعریف می‌کنیم $A+B=C$ و عمل جمع ماتریس‌ها نام دارد.
با در نظر گرفتن $\mathbf{v}=(۱,۰,۰,\dots,۰)$ و $(۰,۱,۰,\dots,۰)$ و ... نشان دهید C به صورت جمع مؤلفه‌ای از A و B ساخته می‌شود.

۲. هرگاه A، B، و M ماتریس‌های $n\times n$ روی یک هیئت باشند با استفاده از تعریف $A+B$ ثابت کنید

$$M(A+B)=MA+MB.$$

به‌علاوه با استفاده از خطی بودن $\mathbf{v}\mapsto\mathbf{v}M$ ثابت کنید

$$(A+B)M=AM+BM.$$

جبر چهارگانها

حال مجموعهٔ ماتریس‌های در نظر گرفته شده در سؤال آخر فصل گذشته را بررسی می‌کنیم، در سؤالهای ۳ـ۸ ویژگیهای جبری خاص این مجموعه را به دست می‌آوریم.

۳. هر ماتریس مختلط ۲ × ۲ به صورت $\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z}\end{pmatrix}$ را یک چهارگان می‌نامیم و هر چهارگان را با استفاده از نمادگذاری ضرب اسکالر ماتریس‌ها یعنی $\begin{pmatrix} k_p & k_q \\ k_r & k_s\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} p & q \\ r & s\end{pmatrix}$ به صورت

$$\begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} i & ۰ \\ ۰ & -i\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} ۰ & i \\ i & ۰\end{pmatrix}$$

می‌نویسیم که a، b، c و d اعداد حقیقی هستند.

فرض کنید $\mathbf{i}=\begin{pmatrix} i & ۰ \\ ۰ & -i\end{pmatrix}$، $\mathbf{j}=\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰\end{pmatrix}$، $\mathbf{k}=\begin{pmatrix} ۰ & i \\ i & ۰\end{pmatrix}$ ثابت کنید $\mathbf{i}^۲=\mathbf{j}^۲=\mathbf{k}^۲=-I$ و $\mathbf{ij}=\mathbf{k}$، $\mathbf{ji}=-\mathbf{k}$، $\mathbf{jk}=\mathbf{i}$، $\mathbf{ki}=\mathbf{j}$، $\mathbf{ik}=-\mathbf{j}$، $\mathbf{kJ}=-\mathbf{i}$

ثابت کنید مجموعهٔ هشت ماتریس $\{\pm I,\pm\mathbf{i},\pm\mathbf{j},\pm\mathbf{k}\}$ تحت عمل ضرب ماتریس یک گروه تشکیل می‌دهد.

نمادگذاری این سؤال را در بقیهٔ فصل به‌کار می‌بریم.

۴. فرض کنید α تابعی با دامنهٔ چهارگانها و همدامنهٔ $V_{۴}(\mathbb{R})$ را نمایش دهد که با

$$\alpha : \begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{pmatrix} \mapsto (a,b,c,d)$$

داده می‌شود. ثابت کنید α یک دوسویی است و تحت α ساختار جمع ماتریس‌ها با جمع بردارها و ساختار ضرب اسکالر ماتریس‌ها با ضرب اسکالر بردارها تناظر می‌یابد.

توصیف چهارگانها به صورت یک فضای برداری چهار بُعدی روی اعداد حقیقی به‌وسیله یکریختی α توجیه می‌شود.

۵. هرگاه $A = aI + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ که a ، b، c، و d اعداد حقیقی هستند چهارگان مزدوج را با

$$\bar{A} = aI - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$$

تعریف می‌کنیم. با استفاده از سؤالهای ۲ و ۳ نشان دهید

$$A\bar{A} = (a^{۲} + b^{۲} + c^{۲} + d^{۲}) = I = (detA)I$$

چهارگان بالا چهارگان حقیقی نام دارد هرگاه $b = c = d = ۰$. بررسی کنید چهارگانهای حقیقی تحت ضرب با همهٔ چهارگانها تعویضپذیراند.

۶. با استفاده از سؤالهای ۲ و ۳ نشان دهید مجموعهٔ چهارگانها تحت عمل ضرب ماتریس‌ها بسته است. با استفاده از سؤال ۵ نشان دهید هر چهارگان ناصفر یک وارون ضربی دارد که یک چهارگان است. کدام یک از اصول یک هیئت برای چهارگانها تحت اعمال جمع و ضرب ماتریس‌ها برقرار هستند؟

۷. هر یک از برابریهای

$$(AB)(\overline{AB}) = (\det AB)I = (\det A.\det B)I = (A\bar{A})(B\bar{B}) = A(B\bar{B})\bar{A}$$

را توجیه کنید و نتیجه بگیرید $\overline{AB} = \bar{B}.\bar{A}$. بررسی کنید $\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}$

۸. با استفاده از نمادگذاری سؤال ۵ نشان دهید $A\mathbf{i} = \mathbf{i}A$ نتیجه می‌دهد $c = d = ۰$ و $A\mathbf{j} = \mathbf{j}A$ نتیجه می‌دهد $b = d = ۰$. نتیجه بگیرید چهارگانهای

حقیقی مرکز گروه ضربی چهارگانها را تشکیل می‌دهند.

تبدیل $\mathbf{X \mapsto R^{-1}XR}$

حال تابع $X \mapsto R^{-1}XR$ از چهارگانها را بررسی می‌کنیم و می‌بینیم که چگونه می‌توانیم آن را به عنوان یک طولپایی فضای حقیقی سه‌بُعدی در نظر بگیریم.

۹. فرض کنید R یک چهارگان ناصفر دلخواه باشد و ϱ تابعی با دامنه چهارگانها را نمایش دهد که با $\varrho : X \mapsto R^{-1}XR$ داده می‌شود. با استفاده از سؤال ۲ ثابت کنید $R^{-1}(X+Y)R = R^{-1}XR + R^{-1}YR$. بگویید چرا به ازای هر عدد حقیقی r داریم $R^{-1}(rX)R = r(R^{-1}XR)$. سپس با کمک دو سویی α سؤال ۴ توصیف کنید چرا $X\alpha \mapsto (R^{-1}XR)\alpha$ یک تبدیل خطی از $V_4(\mathbb{R})$ است.

۱۰. چرا تبدیل خطی $X\alpha \mapsto (R^{-1}XR)\alpha$ باید یک دو سویی باشد؟ بررسی کنید ϱ هر چهارگان حقیقی را ثابت نگاه می‌دارد.

۱۱. نشان دهید معادلهٔ مشخصهٔ ماتریس A سؤال ۵ عبارت است از $\lambda^2 - 2a\lambda + \det A = 0$ و $\det(R^{-1}AR - \lambda I) = \det[R^{-1}(A-\lambda I)R] = \det(A-\lambda I)$، بنابراین $R^{-1}AR, A$ معادلهٔ مشخصهٔ یکسان دارند.

هرگاه $a = 0$ ماتریس A یک چهارگان محض نام دارد. ثابت کنید ϱ روی مجموعهٔ چهارگانهای محض به صورت یک دو سویی عمل می‌کند.

۱۲. فرض کنید β تابع با دامنهٔ چهارگانهای محض و همدامنهٔ $V_3(\mathbb{R})$ را نمایش دهد که با

$$\beta : b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \mapsto (b, c, d)$$

داده می‌شود. آیا β یک دو سویی است؟ آیا β ساختار جمع برداری و ضرب اسکالر را حفظ می‌کند؟ نتیجه بگیرید $\beta^{-1}\varrho\beta$ یک تبدیل خطی ناتکین از $V_3(\mathbb{R})$ است.

۱۳. به ازای چهارگانهای دلخواه X و R با $R \neq 0$ ثابت کنید $(R^{-1}XR)(\overline{R^{-1}XR}) = X\overline{X}$. هرگاه X یک چهارگان محض و فاصلهٔ $X\beta$ تا مبدأ برابر با x باشد ثابت کنید $X\bar{X} = x^2 I$. نتیجه بگیرید $X\beta \mapsto (R^{-1}XR)\beta$

فاصله از مبدأ را حفظ می‌کند. با در نظر گرفتن فاصلهٔ بین $X\beta$ و $Y\beta$ با $(X-Y)(\overline{X-Y})$ ثابت کنید $X\beta \mapsto (R^{-1}XR)\beta$ یک طولپایی از $V_3(\mathbb{R})$ است که مبدأ را ثابت نگاه می‌دارد.

بقیهٔ سؤالهای این فصل دقیقاً به رابطهٔ دقیق بین چهارگان R و دوران $X\beta \mapsto (R^{-1}XR)\beta$ القایی روی $V_3(\mathbb{R})$ به‌وسیلهٔ $X \mapsto R^{-1}XR$ می‌پردازند.

۱۴. هرگاه $R = aI + bU$ که a و b اعداد حقیقی و U یک چهارگان محض است ثابت کنید $RU = UR$ و نتیجه بگیرید به ازای هر عدد حقیقی r چهارگان rU به وسیلهٔ $X \mapsto R^{-1}XR$ ثابت نگاه داشته می‌شود. در واقع این مطلب محور دوران را به‌صورت $S_p(U\beta)$ مشخص می‌سازد.

۱۵. هرگاه به ازای چهارگانهای X داشته باشیم $R^{-1}XR = Q^{-1}XQ$ با استفاده از سؤال ۸ نتیجه بگیرید QR^{-1} یک چهارگان حقیقی است و به عکس. ثابت کنید به ازای هر $R \neq 0$ می‌توانیم چهارگانی مانند Q بیابیم که $R^{-1}XR = Q^{-1}XQ$ و $Q\bar{Q} = I$ و چهارگان یکه نام دارد.

حال فرض کنید $Q = aI + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ و $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. اگر $a^2 = \cos^2\frac{\theta}{2}$ آنگاه $b^2 + c^2 + d^2 = \sin^2\frac{\theta}{2}$. نتیجه بگیرید Q را می‌توانیم به صورت $\cos\frac{\theta}{2}I + \sin\frac{\theta}{2}U$ بنویسیم.

که U یک چهارگان محض است و $U\bar{U} = I$. (اگر U یک چهارگان محض یکه باشد، βU نقطه‌ای روی کرهٔ واحد به مرکز مبدأ است.)

۱۶. هرگاه X و Y چهارگانهای محض باشند تعریف می‌کنیم $X.Y = (X\beta).(Y\beta)$ که β همان تابع سؤال ۱۲ است و ضرب اسکالر به صورت سؤال ۳.۱۴ تعریف می‌شود. همچنین $X \times Y$ را با $(X\beta \times Y\beta)\beta^{-1}$ به صورت سؤال ۵.۱۴ تعریف می‌کنیم. ثابت کنید $XY = (-X.Y)I + X \times Y$.

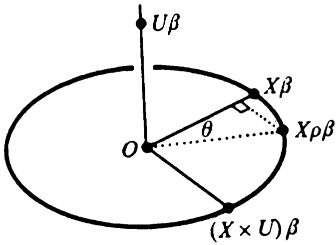
هرگاه U یک چهارگان محض باشد که $U\bar{U} = I$ و X یک چهارگان محض باشد که $X.U = 0$ (به نحوی که سوی $X\beta$ از مبدأ عمود بر $U\beta$ باشد) ثابت کنید.

$$XU = X \times U = -UX = \bar{U}X = U^{-1}X \quad \text{بنابراین} \quad UXU = X$$

۱۷. فرض کنید $Q = \cos\frac{\theta}{2}I + \sin\frac{\theta}{2}U$ که U یک چهارگان محض با $U\bar{U} = I$

است. هرگاه $X.U = 0$ ثابت کنید $Q^{-1}XQ = \cos\theta X + \sin\theta X \times U$. (به یادآورید $Q^{-1} = \cos\frac{\theta}{2}I - \sin\frac{\theta}{2}U$.) بررسی کنید $(Q^{-1}XQ).U = 0$ به نحوی که $X\beta$ و $(Q^{-1}XQ)\beta$ در صفحه گذرنده از مبدأ و عمود بر سوی $OU\beta$ قرار دارد. با استفاده از این واقعیت که سوهای $U\beta$، $X\beta$ و $(X \times U)\beta$ از مبدأ دو به دو متعامد هستند نشان دهید تبدیل $X\beta \mapsto (Q^{-1}XQ)\beta$ به صورت یک دوران روی صفحه عمل می‌کند.

چون هر چهارگان محض Y با یک نقطهٔ $Y\beta$ که مجموع یک $X\beta$ و مضرب اسکالری از $U\beta$ است تناظر می‌یابد با استفاده از سؤال ۹ ثابت کنید همهٔ فضا حول همان محور با زاویه‌ای به اندازه θ دوران می‌یابد.



۱۸. هستهٔ همریختی $R \mapsto [X \mapsto R^{-1}xR]$ چیست؟ این نتیجه را با سؤال ۳۷.۱۸ مقایسه کنید.

خلاصهٔ مطالب

قضیه سؤال ۱ هرگاه A و B ماتریس‌های $n \times m$ روی یک هیئت باشند ماتریسی مانند C وجود دارد که به ازای هر $\mathbf{v} \in V_n(F)$ داریم $\mathbf{v}A + \mathbf{v}B = \mathbf{v}C$ و تعریف می‌کنیم $A + B = C$.

قضیه سؤال ۲ ضرب ماتریس‌ها از هر دو طرف راست و چپ روی جمع ماتریس‌ها

توزیع‌پذیر است.

تعریف
سؤال ۳
ماتریس‌های مختلط به صورت $\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$ چهارگان نام دارند.

قضیه
سؤالهای ۲، ۵، ۶
تحت عملهای جمع و ضرب ماتریس‌ها، چهارگانها همهٔ اصول یک هیئت به‌جز تعویض‌پذیری برای ضرب را برقرار می‌کند.

قضیه
سؤال ۴
چهارگانها یک فضای برداری چهاربُعدی روی اعداد حقیقی تشکیل می‌دهند.

قضیه
سؤال ۹
$X \mapsto R^{-۱}XR$ یک تبدیل خطی از چهارگانها را به دست می‌دهد و نگاشتی دو سویی است.

تعریف
سؤال ۱۱
یک چهارگان به صورت $b\begin{pmatrix} i & \circ \\ \circ & -i \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} \circ & ۱ \\ -۱ & \circ \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} \circ & i \\ i & \circ \end{pmatrix}$ یک چهارگان محض نام دارد.

قضیه
سؤال ۱۲
چهارگانهای محض یک فضای برداری سه‌بُعدی روی اعداد حقیقی تشکیل می‌دهند.

قضیه
سؤالهای ۱۳،۱۲،۱۱
نگاشت $X \mapsto R^{-۱}XR$ چهارگانهای محض را بروی خود می‌نگارد و بنابراین به صورت یک تبدیل خطی عمل می‌کند و در واقع یک طولپایی روی این فضای سه‌بُعدی است.

قضیه
سؤالهای ۱۷،۱۴
اگر $R = r(\cos\frac{\theta}{۲}I + \sin\frac{\theta}{۲}U)$ که U یک چهارگان محض یکه است آنگاه $X \mapsto R^{-۱}XR$ دورانی حول محور $S_p(U)$ به اندازهٔ زاویهٔ θ است.

یادداشت تاریخی

و.ر. هامیلتون سعی کرد تا طریقی را که اعداد مختلط نقاط صفحهٔ حقیقی را توصیف می‌کنند به دستگاهی از اعداد اَبَر مختلط توسعه دهد تا نقاط فضای حقیقی سه‌بُعدی را توصیف کنند. البته هیچ مشکلی در تعریف جمع و ضرب اسکالر روی نقاط فضای حقیقی سه بعدی همانند $V_3(\mathbb{R})$ وجود ندارد. اشکال در تعریف یک عمل ضرب مناسب است. علی‌رغم ناکام ماندن تلاش وی (که در واقع غیر ممکن بود) با پشتکاری که داشت بالاخره در سال ۱۸۴۳ موفق شد یک عمل ضرب شرکت‌پذیر روی نقاط $V_4(\mathbb{R})$ بسازد. چهارتاییهای مرتب اعداد حقیقی با اعمال جمع و ضرب را که ارائه داد چهارگان نامید. چهارگانها همهٔ اصول یک هیئت به جز تعویض‌پذیری برای ضرب را برقرار می‌کنند. هامیلتون چهارگانها را برای بررسی هندسهٔ فضای سه‌بُعدی به‌کار برد.

پرداختن به چهارگانها از طریق ماتریس‌ها که در این فصل انجام گرفت به ا.کیلی (۱۸۵۸) تعلق دارد.

جوابهای فصل ۱۹

۱. $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)A + (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)B = (\mathbf{v}_1 A + \mathbf{v}_1 B) + (\mathbf{v}_2 A + \mathbf{v}_2 B)$ و $k(\mathbf{v}A + \mathbf{v}B) = (k\mathbf{v})A + (k\mathbf{v})B$

۲. $[\mathbf{v}M](A+B) = \mathbf{v}MA + \mathbf{v}MB$.$[\mathbf{v}(A+B)]M = \mathbf{v}AM + \mathbf{v}BM$.

۴. اولین سطر ماتریس به‌طور یکتا به‌وسیله (a, b, c, d) مشخص می‌شود.

۵. چهارگانهای حقیقی دقیقاً ماتریس‌های اسکالر حقیقی هستند.

۶. اگر $A = aI + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ ، آنگاه $(\frac{1}{\det A})\bar{A}$ وارون ضربی آن است مگر این که $\det A = 0$. اما $\det A = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ و $\det A = 0$ نتیجه می‌دهد $a = b = c = d = 0$. همهٔ اصول هیئت به جز آبلی بودن گروه ضربی برقرار هستند.

۷. $(A\bar{A})(B\bar{B}) = A(B\bar{B})\bar{A}$، زیرا $B\bar{B}$ حقیقی است.

۹. به تعریف یک تبدیل خطی در سؤال ۲.۱۲ مراجعه کنید.

۱۰. ϱ یک خودریختی درونی گروه ضربی است.

۱۱. دقیقاً وقتی یک چهارگان محض است که معادلهٔ مشخصهٔ آن به صورت $\lambda^2 + \det A = 0$ باشد.

۱۳.

$$
\begin{aligned}
(R^{-1}XR)(\overline{R^{-1}XR}) &= R^{-1}XR\bar{R}\bar{X}\overline{R^{-1}} \\
&= R^{-1}X\bar{X}\overline{R^{-1}}(R\bar{R}) \quad \text{چون } R\bar{R} \text{ حقیقی است} \\
&= (X\bar{X})R^{-1}\overline{R^{-1}}(R\bar{R}) \quad \text{چون } X\bar{X} \text{ حقیقی است} \\
&= X\bar{X}R^{-1}(R\bar{R})\overline{R^{-1}}.
\end{aligned}
$$

یک چهارگان محض X به صورت $b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + dk$ است و $X\beta = (b, c, d)$. فاصلهٔ $X\beta$ از مبدأ برابر با $\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$ است. مجذور فاصلهٔ بین $X\beta$ و $Y\beta$ برابر با a^2 است که $a^2 I = (X - Y)(\overline{X - Y})$.

۱۴. $RU = (aI + bU)U = aU + bU^2 = U(aI + bU) = UR$. بنابراین $R^{-1}UR = R^{-1}RU = U$.

۱۵. $R^{-1}XR = Q^{-1}XQ \Leftrightarrow QR^{-1}X = XQR^{-1}$ بنابراین QR^{-1} حقیقی است. لذا (مثلاً) $Q = aR$. حالا بگیرید $a = \sqrt{(R\bar{R})}$ و $Q\bar{Q} = I$.

۱۶. چون $X.U = 0$

$$\begin{aligned} XU &= X \times U \\ &= -U \times X \\ &= -UX \end{aligned}$$

به ازای یک چهارگان محض $\bar{U} = -U$. به ازای یک چهارگان یکه $\bar{U} = U^{-1}$.

۱۷.

$$\begin{aligned} Q^{-1}XQ &= (\cos\frac{\theta}{2}I - \sin\frac{\theta}{2}U)X(\cos\frac{\theta}{2}I + \sin\frac{\theta}{2}U) \\ &= (\cos\frac{\theta}{2}X - \sin\frac{\theta}{2}UX)(\cos\frac{\theta}{2}I + \sin\frac{\theta}{2}U) \\ &= \cos^2\frac{\theta}{2}X - \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}UX + \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}XU - \sin^2\frac{\theta}{2}UXU \\ &= (\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2})X + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}XU \\ &= \cos\theta X + \sin\theta X \times U \end{aligned}$$

$Y = X + aU$ بنابراین $Q^{-1}YQ = Q^{-1}XQ + aU$.

۱۸. چهارگانهای حقیقی.

MATH75.IR

۲۰

گروه‌های مستوی

تبدیلهای خطی ناتکین خطها را به خطها می‌نگارند نسبتها در امتداد یک خط را ثابت نگاه می‌دارند. انتقالها نیز این ویژگیها را دارند. گروه تولید شده به‌وسیلهٔ این دو نوع تبدیل گروه مستوی نام دارد. در حالت $V_n(\mathbb{R})$ گروه مستوی گروه تمام تبدیلهای حافظ همخطی و نیز گروه تمام تبدیلهای حافظ تحدب است.

مطالعهٔ همزمان: بخش ۳ فصل ۹ کتاب بیرکف و مک‌لین صفحه‌های ۲۵۲ـ۲۵۵.

۱. تابع مختلط

$$z \mapsto e^{i\theta} z$$

را به وسیله یکی گرفتن اعداد مختلط $x + iy$ با نقاط حقیقی (x, y) به صورت تبدیلی خطی از $V_۲(\mathbb{R})$ بنویسید.

۲. هرگاه عدد مختلط c را برابر با $a + ib$ بگیریم که a و b اعداد حقیقی هستند دوران

$$z \mapsto e^{i\theta} z + c$$

به صورت تابعی از فضای برداری $V_۲(\mathbb{R})$ بروی خود بنویسید.

گروه انتقال

۳. به ازای هر هیئت F یک تابع از $V_۲(F)$ به صورت

$$(x, y) \mapsto (x, y) + (a, b)$$

یک انتقال نام دارد. چهار انتقال $V_۲(\mathbb{Z}_۲)$ و نه انتقال $V_۲(\mathbb{Z}_۳)$ را فهرست کنید. در فضای برداری $V_۲(\mathbb{Z}_p)$ چند انتقال وجود دارد؟

۴. یک تابع از فضای برداری $V_n(F)$ به صورت

$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{c}$$

یک انتقال فضا نام دارد. در فضای برداری $V_۳(\mathbb{Z}_p)$ چند انتقال وجود دارد؟ آیا انتقالهای یک فضای برداری حتماً یک گروه تشکیل می‌دهند؟ سؤال ۵۷.۶ را ببینید.

چند تبدیل مستوی خاص

۵. برای چه ماتریس ۲ × ۲ حقیقی A و چه بردار دو بُعدی حقیقی $\mathbf{c}$ تبدیل

$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A + \mathbf{c}$$

از فضای برداری $V_۲(\mathbb{R})$ هم‌ارز با نگاشت

$$(x, y) \mapsto (x + ۲y + ۳, ۴x + ۵y + ۶)$$

است؟

۶. چه شرایطی باید روی ماتریس ۲ × ۲، A گذاشت تا تبدیل

$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A + \mathbf{c}$$

از $V_۲(\mathbb{R})$ یک دو سویی باشد؟

۷. تبدیلهای $(x, y) \mapsto (x, y)\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix} + (۱, ۰)$

$$(x, y) \mapsto (x, y)\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} + (۱, ۰)$$

از فضای برداری $V_۲(\mathbb{Z}_۲)$ را به صورت جایگشتهای چهار بردار در این فضا نمایش دهید. با استفاده از سؤال ۲۳.۱۷ ثابت کنید این تبدیلها گروهی یکریخت با $S_۴$ تولید می‌کنند.

گروه‌های مستوی

۸. فرض کنید $\alpha : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A + \mathbf{c}$ و $\beta : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}B + \mathbf{d}$ تبدیلهایی از فضای برداری $V_n(F)$ باشند که A و B ماتریس‌های $n \times n$ ناتکین روی F و $\mathbf{c}$ و $\mathbf{d}$ بردارهایی در این فضا هستند.

(یک) هرگاه $\alpha = \beta$، با در نظر گرفتن نگارهٔ $\mathbf{o}$ ثابت کنید $\mathbf{c} = \mathbf{d}$ و نتیجه بگیرید $A = B$.

(دو) حاصلضرب $\alpha\beta$ را محاسبه کنید و بررسی کنید صورت آن با α یکسان است.

(سه) هرگاه $\alpha\beta$ همانی باشد β را بیابید.

(چهار) نتیجه بگیرید تبدیلهایی از این نوع یک گروه تشکیل می‌دهند. این گروه به گروه مستوی $AG(n, F)$ موسوم است و تبدیلهای تشکیل دهندهٔ آن تبدیلهای مستوی نام دارند.

۹. گروه $AG(۱, \mathbb{Z}_۳)$ را با $S_۳$ مقایسه کنید.

۱۰. با استفاده از سؤال ۸.۱۱ گروه $AG(۱, F_۴)$ را با $A_۴$ مقایسه کنید.

۱۱. هرگاه $\alpha : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A + \mathbf{c}$ و $\tau : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{a}$ تبدیلهای مستوی $V_n(F)$ باشند $\alpha^{-۱}\tau\alpha$ را بیابید و نتیجه بگیرید گروه انتقال T از یک فضای برداری یک زیرگروه نرمال گروه مستوی است. گروه خارج قسمتهای $AG(n, F)/T$ چیست؟

خطها در یک فضای برداری

۱۲. هرگاه $\mathbf{o} = (۰, ۰)$ و $\mathbf{a} = (a, b) \neq \mathbf{o}$ بردارهای $V_۲(\mathbb{R})$ باشند،

(الف) (یک) مجموعهٔ نقاط $\{k\mathbf{a} | k \in \mathbb{R}\}$ را از نظر هندسی توصیف کنید؛

(دو) زیرمجموعه‌های این مجموعه را که برای آنها به‌ترتیب $۰ \leq k \leq ۱$، $k \geq ۱$، $k \leq ۰$ هستند توصیف کنید.

(ب) (یک) به ازای یک بردار ثابت $\mathbf{c} \neq \mathbf{o}$ ، مجموعهٔ $\{k\mathbf{a} + \mathbf{c} | k \in \mathbb{R}\}$ را از نظر هندسی توصیف کنید؛

(دو) زیرمجموعه‌هایی که برای آنها به ترتیب $۰ \leq k \leq ۱$، $k \geq ۱$ و $k \leq ۰$ هستند توصیف کنید.

برای هر فضای برداری، زیرفضاهای یک بُعدی و هم مجموعه‌های آنها در گروه جمعی بردارها خطهای فضا نام دارند.

۱۳. هرگاه در $V_n(F)$ داشته باشیم $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$ بردار $k\mathbf{a} + \mathbf{c}$ را به‌صورت ترکیبی

خطی از $\mathbf{c}$ و $\mathbf{b}$ بنویسید. هرگاه $\mathbf{u} = k\mathbf{a} + \mathbf{c}$ می‌گوییم $\mathbf{cu} : \mathbf{cb}$ به نسبت $k : ۱$ هستند.

۱۴. در فضای برداری $V_n(F)$ مجموعهٔ نقاط روی خط گذرنده از $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ را که $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ نقاط متمایز فضای برداری‌اند مشخص کنید.

ناورداهای گروه‌های مستوی

۱۵. تحت یک انتقال τ از یک فضای برداری $V_n(F)$ هرگاه $\mathbf{u}\tau = \mathbf{u}'$ و $\mathbf{v}\tau = \mathbf{v}'$ ثابت کنید $[(۱-k)\mathbf{u} + k\mathbf{v}]\tau = (۱-k)\mathbf{u}' + k\mathbf{v}'$. این مطلب دربارهٔ نگاره‌های خطهای یک فضای برداری تحت یک انتقال چه نتیجه‌ای می‌دهد؟

۱۶. تحت یک تبدیل خطی α از یک فضای برداری $V_n(F)$ هرگاه $\mathbf{u}\alpha = \mathbf{u}'$ و $\mathbf{v}\alpha = \mathbf{v}'$ ثابت کنید

$$[(۱-k)\mathbf{u} + k\mathbf{v}] = (۱-k)\mathbf{u}' + k\mathbf{v}'.$$

۱۷. فرض کنید α تبدیل حافظ خط و نسبت از فضای برداری $V_n(F)$ بروی خود باشد به این معنی که به ازای هر دو نقطهٔ متمایز $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ از فضا

$$[(۱-k)\mathbf{u} + k\mathbf{v}]\alpha = (۱-k)(\mathbf{u}\alpha) + k(\mathbf{v}\alpha)$$

هرگاه τ یک انتقال از فضا باشد که $\mathbf{o}\alpha = \mathbf{o}\tau$، آیا $\alpha\tau^{-۱}$

(یک) $\mathbf{o}$ را ثابت نگاه می‌دارد؟

(دو) خطها و نسبتها را حفظ می‌کند؟

۱۸. هرگاه α تبدیل حافظ خط و نسبت از $V_n(F)$ باشد که $\mathbf{o}$ را ثابت نگاه می‌دارد ثابت کنید به ازای بردارهای دلخواه $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ در فضا

(یک) $\alpha : k\mathbf{v} \mapsto k(\mathbf{v}\alpha)$،

(دو) به ازای $k \neq ۰, ۱$ فرض کنید $\mathbf{w} = (۱-k)^{-۱}\mathbf{u}$ و $\mathbf{t} = k^{-۱}\mathbf{v}$، $\mathbf{w}\alpha$ و $\mathbf{t}\alpha$ را بیابید و $[(۱-k)\mathbf{w} + k\mathbf{t}]\alpha$ را بررسی کنید و ثابت کنید: $\alpha : \mathbf{u} + \mathbf{v} \mapsto \mathbf{u}\alpha + \mathbf{v}\alpha$،

(سه) ثابت کنید α یک تبدیل خطی است.

۱۹. با استفاده از سؤالهای ۱۷ و ۱۸ نشان دهید هر تبدیل حافظ خط و نسبت از $V_n(F)$ یک تبدیل مستوی است. با استفاده از سؤالهای ۱۵ و ۱۶ نشان دهید هر تبدیل مستوی $V_n(F)$ خطها و نسبتها را حفظ می‌کند.

هرگاه یک هیئت F دارای یک خودریختی نابدیهی باشد فضای برداری $V_n(F)$ دارای تبدیلهای حافظ خط است که حافظ نسبت نیستند.

مرتبهٔ گروه‌های مستوی

۲۰. با استفاده از سؤال ۸ (یک) ثابت کنید اگر F یک هیئت متناهی باشد آنگاه $|AG(n,F)| = |GL(n,F)|.|F|^n$.

خلاصهٔ مطالب

تعریف سؤال ۴ به ازای هر فضای برداری $V_n(F)$ تبدیلهای به صورت $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{a}$ انتقال نام دارند.

قضیه سؤال ۴ انتقالهای یک فضای برداری یک گروه یکریخت با گروه بردارها تحت عمل جمع تشکیل می‌دهند.

تعریف سؤال ۸ اگر A یک ماتریس در $GL(n,F)$ باشد آنگاه هر تبدیل از $V_n(F)$ به صورت

$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A + \mathbf{c}$$

یک تبدیل مستوی نام دارد.

قضیه سؤال ۸ تبدیلهای مستوی یک فضای برداری $V_n(F)$ یک گروه تشکیل می‌دهند. این گروه، گروه مستوی $AG(n,F)$ نام دارد.

تعریف سؤال ۱۲ خطهای $V_n(F)$ هم مجموعه‌های زیرفضاهای یک بُعدی هستند.

تعریف سؤال ۱۳ اگر $\mathbf{w} = (۱-k)\mathbf{u} + k\mathbf{v}$ آنگاه $\mathbf{uw} : \mathbf{uv}$ به نسبت $۱ : k$ است.

قضیه سؤال ۱۴ اگر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ بردارهای متمایز $V_n(F)$ باشند، آنگاه خط یکتای در برگیرندهٔ $\mathbf{u}$

و $\mathbf{v}$ مجموعهٔ

$$\{(۱-k)\mathbf{u}+k\mathbf{v}|k\in F\}$$

است.

قضیه همهٔ تبدیلهای مستوی، خطها و نسبتها را حفظ می‌کنند
سؤال ۱۹

قضیه همهٔ تبدیلهای حافظ خط و نسبت از $V_n(F)$ تبدیلهای مستوی هستند.
سؤال ۱۹

یادداشت تاریخی

حوالی سال ۱۷۶۲ ا.وارینگ[1] تبدیلهای صفحه از نوع

$$(x,y)\mapsto\left(\frac{ax+by+c}{px+qy+r},\frac{ex+fy+h}{px+qy+r}\right)$$

را بررسی کرد و ادعا کرد این تبدیلها خمهای همدرجه را به هم می‌نگارند. این برداشت در نیمهٔ اول قرن نوزدهم به مطالعهٔ تبدیلهای تصویری با مختصات همگن منجر شد. هر مقطع مخروطی تحت یک تبدیل تصویری به مقطع مخروطی دیگری نگاشته می‌شود. گروه مستوی زیرگروهی از گروه تصویری است که خط در بینهایت را ثابت نگاه می‌دارد و چنانکه توسط ج.پلوکر[2] (۱۸۳۵) و ا.ف.موبیوس بررسی شد تبدیلهای مستوی بیضیها را به بیضیها و سهمیها را به سهمیها و هذلولیها را به هذلولیها می‌نگارند. شناختن اهمیت این گروه به علت خودش به‌عنوان گروه همهٔ تبدیلهای حافظ خط از صفحه یا فضای حقیقی به برنامهٔ ارلانگر[3]، ف.کلاین (۱۸۷۲) برمی‌گردد. ا.گالوا (۱۸۳۲) گروه مستوی روی $V_n(\mathbb{Z}_p)$ را مشخص کرد. ک. ژوردان در *Traite' des*

1) E.Waring 2) J.Plücker 3) *Erlanger Programme*

Substitutions خود T گروه انتقالهای فضای برداری $V_n(\mathbb{Z}_p)$ را تعریف کرد. سپس وی S مجموعهٔ تمام توابع روی $V_n(\mathbb{Z}_p)$ را درنظر گرفت که $ST = TS$ و نشان داد هر عضو S باید حاصلضربی از یک تبدیل خطی و یک انتقال باشد.

جوابهای فصل ۲۰

۱. $(\cos +i\sin\theta)(x+iy) = x\cos\theta - y\sin\theta + i(x\sin\theta + y\cos\theta)$

$$(x,y)\mapsto (x,y)\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

۲. $(x,y)\mapsto (x\cos\theta - y\sin\theta + a$ و $x\sin\theta + y\cos\theta + b)$.

۳. در $V_۲(\mathbb{Z}_۲)$، $(a,b) = (۰,۰), (۱,۰), (۰,۱)$ یا $(۱,۱)$. $V_۲(\mathbb{Z}_p)$ دارای $p^۲$ انتقال است.

۴. $V_۳(\mathbb{Z}_p)$ دارای $p^۳$ انتقال است. بنابه سؤال ۵۷.۶ انتقالها گروهی یکریخت با گروه بردارها تشکیل می‌دهند.

۵. $A = \begin{pmatrix}۱ & ۴\\ ۲ & ۵\end{pmatrix}$، $\mathbf{c} = (۳,۶)$.

۶. A باید ناتکین باشد.

۷. $(۰,۰)\mapsto(۱,۱)\mapsto(۰,۱)\mapsto(۱,۰)\mapsto(۰,۰)$؛ یک ۴- دور.
$(۱,۰)\leftrightarrow(۰,۰)$؛ یک ترانهش.

۸. (یک) هرگاه $\tau:\mathbf{v}\mapsto\mathbf{v}+\mathbf{c}$،
$\alpha=\beta \Leftarrow \alpha\tau^{-۱}=\beta\tau^{-۱} \Leftarrow I = \alpha\tau^{-۱}(\beta\tau^{-۱})^{-۱}$ بنابراین $AB^{-۱}=I$.
(دو) $\alpha\beta:\mathbf{v}\mapsto\mathbf{v}AB+\mathbf{c}B+\mathbf{d}$.
(سه) $\alpha^{-۱}:\mathbf{v}\mapsto\mathbf{v}A^{-۱}-cA^{-۱}$.

۹. (۰)، $x\mapsto x$؛ $(۰۱۲): x\mapsto x+۱$، $(۰۲۱): x\mapsto x+۲$، $(۱۲): x\mapsto ۲x$، $(۰۱): x\mapsto ۲x+۱$، $(۰۲): x\mapsto ۲x+۲$.

۱۰. مثلاً $(ab): x\mapsto x+۱$، (۱۰)، $(۰۱b): x\mapsto ax+۱$.

۱۱. $AG(n,F)/T\cong GL(n,F)$. $\alpha^{-۱}\tau\alpha:\mathbf{v}\mapsto\mathbf{v}+\mathbf{a}A$.

۱۲. (الف)(یک) $Sp(a)$ خط گذرنده از مبدأ و (a,b) است. (دو) $۰\le k\le ۱$ نقاط بین $\mathbf{o}$ و $\mathbf{a}$ را می‌دهد. $k\ge ۱$ نقاط بعداز $\mathbf{a}$ را می‌دهد. $k\le ۰$ نقاط بعد $\mathbf{o}$ را می‌دهد.

(ب)(یک) یک خط موازی با $Sp(a)$ گذرنده از $\mathbf{c}$.
(دو) $۰\le k\le ۱$ نقاط بین $\mathbf{c}$ و $\mathbf{c}+\mathbf{a}$ را می‌دهد. $k\ge ۱$ نقاط بعداز $\mathbf{c}+\mathbf{a}$ را می‌دهد. $k\ge ۰$ نقاط بعد $\mathbf{c}$ را می‌دهد.

۱۳. $k\mathbf{a}+\mathbf{c}=k\mathbf{b}+(۱-k)\mathbf{c}$.

۱۴. $\{k\mathbf{u}+(۱-k)\mathbf{v}|k\in F\}$.

۱۵. اگر $\mathbf{u}\tau=\mathbf{u}'$ ، آنگاه به ازای همهٔ $\mathbf{v}$ها $\tau:\mathbf{v}\mapsto\mathbf{v}+(\mathbf{u}'-\mathbf{u})$ و $\mathbf{v}'-\mathbf{v}=\mathbf{u}'-\mathbf{u}$ بنابراین

$$[(۱-k)\mathbf{u}+k\mathbf{v}]\tau=(۱-k)\mathbf{u}+k\mathbf{v}+(\mathbf{u}'-\mathbf{u})$$
$$=(۱-k)\mathbf{u}+k\mathbf{v}+(۱-k)(\mathbf{u}'-\mathbf{u})+k(\mathbf{v}'-\mathbf{v})$$

تحت یک انتقال خطها به خطها نگاشته می‌شوند.

۱۸. (یک) $\mathbf{u}=۰$.

(سه) استلزام (یک) و (دو).

۲۰. تعداد ماتریس‌های ناتکین $=|GL(n,F)|$. تعداد انتقالها $=$ تعداد بردارها.

MATH75.IR

۲۱

گروه‌های متعامد

اولین مرحله در این فصل مشخص کردن زیرگروه طولپاییها در گروه خطی عام است و در واقع این گروه تمام طولپاییهای ثابت نگاه دارندهٔ یک نقطه است. در حیطهٔ گروه‌های خطی این گروه‌ها تبدیلهای متعامد نام دارند. همهٔ تبدیلهای خطی دترمینانی برابر با ۱+ یا ۱− دارند.

مرحلهٔ دوم در این فصل نشان دادن این مطلب است که هم در بُعد دو و هم در بُعد سه هر تبدیل متعامد با دترمینان ۱+ یک دوران است.

مرحله سوم با در نظر گرفتن هر طولپایی دلخواه به‌عنوان یک تبدیل مستوی، ثابت می‌کنیم که هر گروه متناهی از طولپاییها یک نقطه را ثابت نگاه می‌دارد و لذا با زیرگروهی از گروه متعامد یکریخت است.

مرحلهٔ نهایی، رده‌بندی گروه‌های متناهی دورانها در بعد سه است که با یکی از گروه‌های C_n، D_n، $A_۴$، $S_۴$ یا $A_۵$ یکریخت می‌باشند و سپس این گروه‌ها را توسعه می‌دهیم تا شامل طولپاییهای متقابل بشوند

مطالعهٔ همزمان: فصل ۴ کتاب گاردینر[1]؛ پیوستهای کتاب ویل[2].

هشت سؤال اول این فصل هم‌ارزی سه حکم زیر را در رابطه با $V_۲(\mathbb{R})$ یا $V_۳(\mathbb{R})$ ثابت می‌کنند

(یک) α یک طولپایی ثابت نگاه دارندهٔ مبدأ است؛

1) Gardiner 2) Weyl

(دو) α حاصلضربهای اسکالر را حفظ می‌کند، یعنی $\mathbf{u}.\mathbf{v} = \mathbf{u}\alpha.\mathbf{v}\alpha$،
(سه) α یک تبدیل خطی $\alpha : \mathbf{v} \to \mathbf{v}A$ است و $AA^T = I$.

تبدیلهایی که این شرایط را برقرار می‌کنند تبدیلهای متعامد نام دارند و ماتریس‌های آنها نیز ماتریس‌های متعامد نامیده می‌شوند.

۱. دو گروه طولپاییهای صفحهٔ اقلیدسی ثابت نگاه دارندهٔ مبدأ را بیابید (سؤال ۱۹.۳).

۲. با یکی گرفتن عدد مختلط $x + iy$ و بردار (x, y) تبدیلهای $z \mapsto e^{i\theta} z$ و $z \mapsto e^{i\theta}\bar{z}$ را به صورت تبدیلهای خطی $V_۲(\mathbb{R})$ بنویسید.

هرگاه گروه طولپاییهای ثابت نگاه دارندهٔ مبدأ را به‌عنوان زیرگروهی از $GL(۲, \mathbb{R})$ در نظر گیریم آن را گروه متعامد $O(۲)$ می‌نامند. برای هر یک از ماتریس‌های A که در توصیف این طولپاییها به‌عنوان تبدیلهای خطی به‌کار برده‌اید حاصلضرب AA^T را بیابید.

۳. دترمینان‌های ماتریس‌های $O(۲)$ چه هستند؟ کدام یک از اعضای $O(۲)$ هستهٔ همریختی $O(۲) \to \mathbb{R}$ را که با $A \mapsto detA$ داده می‌شود تشکیل می‌دهند؟

این زیرگروه، گروه متعامد خاص $SO(۲)$ نام دارد. اعضای این زیرگروه را به نحو هندسی توصیف کنید.

۴. هرگاه $\mathbf{u} = (u_۱, u_۲)$ و $\mathbf{v} = (v_۱, v_۲)$ بردارهای $V_۲(\mathbb{R})$ باشند حاصلضرب اسکالر را شبیه سؤال ۳.۱۴ به صورت $\mathbf{u}.\mathbf{v} = u_۱v_۱ + u_۲v_۲ + u_۳v_۳$ تعریف می‌کنیم.
(یک) ثابت کنید $\mathbf{u}.\mathbf{u} = ۰$ تنها اگر $\mathbf{u} = \mathbf{o}$.
(دو) ثابت کنید $\mathbf{u}.\mathbf{v} = \mathbf{v}.\mathbf{u}$.
(سه) ثابت کنید $\mathbf{u}.(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u}.\mathbf{v} + \mathbf{u}.\mathbf{w}$.
(چهار) ثابت کنید فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ برابر با $\sqrt{[(\mathbf{u} - \mathbf{v}).(\mathbf{u} - \mathbf{v})]}$ است.
(پنج) هرگاه α یک طولپایی ثابت نگاه دارندهٔ مبدأ باشد با توجه به فاصلهٔ مبدا تا $\mathbf{u}$ ثابت کنید $\mathbf{u}.\mathbf{u} = \mathbf{u}\alpha.\mathbf{u}\alpha$ و با درنظر گرفتن فاصلهٔ $\mathbf{u}$ تا $\mathbf{v}$ ثابت کنید $\mathbf{u}.\mathbf{v} = \mathbf{u}\alpha.\mathbf{v}\alpha$.
(شش) بررسی کنید همهٔ نتایج این سؤال برای $V_۳(\mathbb{R})$ نیز برقرار است.

۵. هرگاه α تبدیلی از $V_۲(\mathbb{R})$ یا $V_۳(\mathbb{R})$ باشد که به ازای همهٔ بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ داشته باشیم $\mathbf{u}.\mathbf{v} = \mathbf{u}\alpha.\mathbf{v}\alpha$ ثابت کنید
(یک) $\mathbf{u}.\mathbf{u} = \mathbf{u}\alpha.\mathbf{u}\alpha$،
(دو) $\mathbf{o}\alpha = \mathbf{o}$،
(سه) α یک طولپایی ثابت نگاه دارندهٔ مبدأ است.

سؤالهای ۴ و ۵ اثبات این مطلب که طولپاییهای ثابت نگاه دارندهٔ مبدأ تبدیلهای حافظ حاصلضرب اسکالر هستند را به‌دست می‌دهد.

۶. هرگاه $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A$ یک طولپایی از $V_۳(\mathbb{R})$ و سطرهای ماتریس A به ترتیب بردارهای $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$، و $\mathbf{c}$ باشند با استفاده از سؤال ۴ (پنج) نشان دهید
$\mathbf{a.b} = \mathbf{b.c} = \mathbf{c.a} = ۰, \mathbf{a.a} = \mathbf{b.b} = \mathbf{c.c} = ۱$
. نتیجه بگیرید $AA^T = I$.

۷. حالا ثابت می‌کنیم تبدیلهای حافظ حاصلضرب اسکالر لزوماً خطی هستند. فرض کنید α تبدیلی از $\mathbf{V}_۲(\mathbb{R})$ باشد که $\mathbf{u.v} = \mathbf{u}\alpha.\mathbf{v}\alpha$. بنابه سؤال ۵ تبدیل α یک طولپایی از $\mathbf{V}_۲(\mathbb{R})$ است و لذا یک دو سویی است. فرض کنید $(۱, ۰)\alpha = (a_۱, a_۲)$ و $(۰, ۱)\alpha = (b_۱, b_۲)$. با یافتن حاصلضربهای اسکالر ثابت کنید اگر $(x, y)\alpha = (x', y')$، آنگاه $(x', y') \begin{pmatrix} a_۱ & b_۱ \\ a_۲ & b_۲ \end{pmatrix} = (x, y)$. این مطلب ثابت می‌کند $\alpha^{-۱} : (x', y') \mapsto (x, y)$ یک تبدیل خطی است. حال α و لذا $\alpha^{-۱}$ دو سویی هستند و بنابراین $\alpha^{-۱}$ یک تبدیل خطی ناتکین است و از این رو α نیز یک تبدیل خطی ناتکین است. بررسی کنید ماتریس $\alpha^{-۱}$ ترانهادهٔ ماتریس α است لذا برای $\alpha : \mathbf{v} \to \mathbf{v}A$ داریم $AA^T = I$ بررسی کنید این کار را می‌توانیم در $V_۳(\mathbb{R})$ نیز انجام دهیم.

۸. فرض کنید $\alpha : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A$ یا تبدیل خطی از $V_۲(\mathbb{R})$ یا $V_۳(\mathbb{R})$ باشند که $AA^T = I$. با استفاده از این واقعیت که $\mathbf{u.v} = \mathbf{uv}^T$ بررسی کنید α حاصلضربهای اسکالر را حفظ می‌کند.

سؤالهای ۶، ۷، ۸ اثبات این مطلب که تبدیلهای حافظ حاصلضرب اسکالر دقیقاً تبدیلهای خطی $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A$ هستند به‌طوری که $AA^T = I$ را به دست می‌دهند.

۹. طولپاییهای $GL(۳, \mathbb{R})$ تبدیلهای متعامد نام دارند و گروه متعامد $O(۳)$ را تشکیل می‌دهند. یک ماتریس A که در شرط $AA^T = I$ صدق کند یک ماتریس متعامد نام دارد.
آیا ماتریس‌های متعامد تحت ضرب ماتریس‌ها باید یک گروه تشکیل دهند؟ ثابت کنید دترمینان یک ماتریس متعامد ± ۱ است. با استفاده از ایده‌های سؤال ۳ نشان دهید

ماتریس‌های متعامد با دترمینان ۱+ یک زیرگروه از گروه متعامد تشکیل می‌دهند. زیرگروه $O(۳)$ از ماتریس‌های با دترمینان ۱+ گروه متعامد خاص $SO(۳)$ نام دارد.

۱۰. بررسی کنید هر یک از ماتریس‌های

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & ۰ \\ -\sin\theta & \cos\theta & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & ۰ \\ \sin\theta & -\cos\theta & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & ۰ \\ -\sin\theta & \cos\theta & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{pmatrix}$$

متعامد است و در هر مورد دترمینان را به دست آورید. هرگاه A ماتریس آخر را نمایش دهد بررسی کنید $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A$ تنها مبدأ را ثابت نگاه می‌دارد و هرگاه $\theta \neq ۲n\pi$ نقطهٔ دیگری را ثابت نگاه نمی‌دارد.

گروه متعامد خاص SO(۳)

در ضمن کار با اعداد مختلط دیدیم که $SO(۲)$ تماماً متشکل از دورانهاست و بقیهٔ اعضای $O(۲)$ انعکاس هستند. در بخش آخر سؤال ۱۰ دیدیم که در بُعد سه تبدیلهای متعامد با دترمینان ۱- وجود دارند که انعکاس نیستند. لذا قدری تعجب‌آور به نظر می‌رسد انتظار داشته باشیم هر عضو $SO(۳)$ یک دوران باشد، این مطلب در شش سؤال بعد ثابت می‌شود.

۱۱. هرگاه A ماتریسی در $SO(۳)$ باشد هر خط استدلال زیر را توجیه کنید.

$$\begin{aligned} \det(A - I) &= (A - AA^T) \\ &= \det A(I - A^T) \\ &= \det A. \det(I - A^T) \\ &= \det(I - A^T) \\ &= \det(I - A) \\ &= (-۱)^۳ \det(A - I) \end{aligned}$$

سرانجام نتیجه بگیرید $\det(A - I) = ۰$

۱۲. هرگاه A ماتریسی در $SO(۳)$ باشد با استفاده از سؤال ۱۱ نشان دهید A

مقدار ویژه‌ای برابر با ۱+ دارد.

۱۳. هرگاه a بردار ناصفر مفروضی از $V_۲(\mathbb{R})$ باشد مجموعهٔ بردارهای $\{\mathbf{u}|\mathbf{u}\cdot a = o\}$ به‌طور هندسی توصیف کنید. هرگاه a برداری ویژه با مقدار ویژهٔ ۱ از تبدیل متعامد $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A$ باشد با استفاده از حفظ شدن حاصلضربهای اسکالر تحت تبدیلهای متعامد مقدار $\mathbf{u}A.\mathbf{a}$ را هرگاه $\mathbf{u}.\mathbf{a} = ۰$ بیابید. دربارهٔ نگارهٔ صفحهٔ گذرنده از o متعامد بر خط oa تحت تبدیل متعامد $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A$ چه نتیجه‌ای می‌توانید بگیرید؟

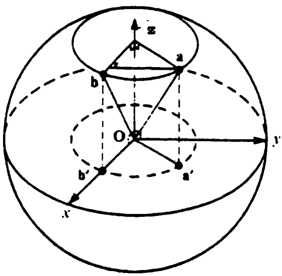
۱۴. هرگاه (۱ , ۰ , ۰) یک بردار ویژه با مقدار ویژه ۱ برای تبدیل متعامد $\alpha : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A$ باشد با استفاده از سؤال ۱۳ نشان دهید α مانند یک طولپایی روی صفحهٔ xy عمل می‌کند و دو صورت ممکن ماتریس A را نتیجه بگیرید. هرگاه $A \in SO(۳)$ مشخص کنید کدام یک از این صورتها امکانپذیر است.

می‌دانیم که هر تبدیل در $SO(۳)$ برداری ویژه با مقدار ویژهٔ برابر با ۱ دارد و حالا نشان دادیم که هرگاه اتفاقاً این بردار ویژه برابر با (۱ , ۰ , ۰) باشد تبدیل مزبور دوران است. حال با تعمیم این نتیجه نشان می‌دهیم بردار ویژه هر چه باشد نتیجه برقرار است.

۱۵. ثابت می‌کنیم $SO(۳)$ روی نقاط کرهٔ واحد به مرکز مبدأ تراپاست. فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & ۰ \\ -\sin\theta & \cos\theta & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \qquad \text{و}\ B = \begin{pmatrix} \cos\phi & ۰ & -\sin\phi \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ \sin\phi & ۰ & \cos\phi \end{pmatrix}$$

بررسی کنید $A, B \in SO(۳)$. $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A$ و $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}B$ را به طور هندسی توصیف کنید. هرگاه $(a_۱, a_۲, a_۳)$ نقطه‌ای به فاصلهٔ یک واحد از مبدأ باشد ϕ, θ مناسبی چنان به‌دست آورید که تحت تبدیل $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}AB$ نگارهٔ $(a_۱, a_۲, a_۳)$ نقطهٔ (۱ , ۰ , ۰) باشد.



۱۶. هرگاه α یک تبدیل دلخواه در $SO(۳)$ با بردار ویژهٔ $\mathbf{a}$ و مقدار ویژهٔ ۱ باشد و فاصلهٔ $\mathbf{a}$ تا مبدأ برابر با یک واحد باشد و هرگاه β عضوی از $SO(۳)$ باشد که $\mathbf{a}\beta = (۰, ۰, ۱)$ آیا تبدیل $\beta^{-۱}\alpha\beta$ حتما در $SO(۳)$ است و بردار ویژهٔ آن چیست؟ با استفاده از سؤال ۱۴ این تبدیل را مشخص کنید و سپس با استفاده از سؤال ۵۰.۱۷ تبدیل α را بیابید.

گروه متعامد $O(۳)$

با یافتن یک ماتریس خاص که با هر عضو گروه جابه‌جایی است و دترمینانی برابر با ۱− دارد، می‌توانیم معلوماتمان دربارهٔ $SO(۳)$را برای توصیف کامل گروه متعامد به کار بریم.

۱۷. یک ماتریس اسکالر غیر همانی در $O(۳)$ بیابید.

۱۸. با استفاده از سؤال ۱۱.۱۰ ثابت کنید گروه $O(۳)$ با حاصلضرب مستقیم $SO(۳)$ و $\{\pm I\}$ یکریخت است.

گروه‌های متناهی طولپاییها

ثابت می‌کنیم که هر گروه متناهی از طولپاییها یک نقطهٔ ثابت دارد و بنابراین با زیرگروهی از گروه متعامد مناسبی یکریخت است. برای اثبات این مطلب ابتدا باید ثابت کنیم هر طولپایی یک تبدیل مستوی است. قبلاً این مطلب را در حالت دوبُعدی داشته‌ایم . اما باید در حالت سه‌بُعدی نیز آن را ثابت کنیم

۱۹. فرض کنید $\alpha : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A + \mathbf{c}$ یک تبدیل مستوی از $V_۳(\mathbb{R})$ باشد. هرگاهα یک طولپایی و انتقال $\tau : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{c}$ را یک طولپایی بگیریم ثابت کنید A یک ماتریس متعامد است.

۲۰. هرگاه α یک طولپایی دلخواه از $V_۳(\mathbb{R})$ و τ یک انتقال باشد که $\mathbf{o}\alpha = \mathbf{o}\tau$ آیا $\alpha\tau^{-۱}$ باید یک تبدیل متعامد باشد؟ نتیجه بگیرید هر طولپایی $V_۳(R)$ یک تبدیل مستوی است.

۲۱. فرض کنید G گروه متناهی طولپاییهای مرتبهٔ n فضای $V_۳(\mathbb{R})$ باشد. مثلاً فرض کنید $G = \{\alpha_۱, \alpha_۲, ., \alpha_n\}$. بررسی کنید به ازای هر $\alpha_j \varepsilon G$، $G = \{\alpha_۱\alpha_j, \alpha_۲\alpha j, \cdots, \alpha_n\alpha j\}$ حالا فرض کنید $\mathbf{v}$ نقطه‌ای از فضای $V_۳(\mathbb{R})$ باشد و $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}\alpha\mathbf{i}$. نقاط مدار $\mathbf{v}$ تحت G را بیابید. نشان دهید راه دیگر توصیف این

مدار $\{\mathbf{v}_1\alpha_j, \mathbf{v}_2\alpha_j, \cdots \mathbf{v}_n\alpha_j\}$ است.

۲۲. با نمادگذاری سؤال ۲۱ فرض کنید $\mathbf{w} = \frac{1}{n}(\mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_n)$ و $\alpha : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A + \mathbf{c}$ عضوی از G باشد. ثابت کنید $\mathbf{w}\alpha = \mathbf{w}$. چون بردار $\mathbf{w}$ به تمام گروه G و به عضو بخصوص α بستگی ندارد این مطلب نشان می‌دهد نقطه‌ای یافته‌ایم که به‌وسیلهٔ G ثابت نگاه داشته می‌شود.

۲۳. با انتخاب مناسبی از انتقال τ نشان دهید هرگروه متناهی از طولپاییها مانند G، $V_2(\mathbb{R})$ یا $V_3(\mathbb{R})$ با زیرگروهی از $O(2)$ یا $O(3)$ به صورت $\tau G \tau^{-1}$ یکریخت است.

۲۴. هرگاه یک زیرگروه متناهی از $SO(2)$ متشکل از دورانهای به اندازهٔ θ_1، θ_2، $\cdots$، θ_n باشد که

$$0 = \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n < 2\pi$$

بگویید چرا دورانی به اندازهٔ مضرب دلخواهی از θ_2 به گروه تعلق دارد و چرا هرگاه دورانی به غیر از مضربی از θ_2 به گروه تعلق داشته باشد به تناقض می‌رسیم. (شبیه سؤال ۲۸.۶ استدلال کنید) نتیجه بگیرید هر زیرگروه متناهی $SO(2)$ دوری است.

۲۵. اگر G یک زیرگروه متناهی $O(2)$ باشد که دست کم شامل یک انعکاس است، با استفاده از سؤال ۳ نشان دهید گروه G متشکل از تعدادی مساوی دوران و انعکاس است.

۲۶. اگر $\alpha : z \mapsto e^{i\theta}z$ و $\beta : z \mapsto e^{i\phi}\bar{z}$، مطلوب است $\beta\alpha\beta$ و از سؤال ۴۳.۶ نتیجه بگیرید یک زیرگروه متناهی $O(2)$ که دست کم شامل یک انعکاس است یک گروه دو وجهی است.

به پیروی از ویل نتایج سؤالهای ۲۴ و ۲۶ اخیراً «قضیهٔ لئوناردو» نامیده می‌شود.

زیرگروه‌های متناهی $\mathrm{SO}(3)$

در سؤالهای ۲۷ ـ ۳۹، G یک زیرگروه متناهی $SO(3)$ را نمایش می‌دهد.

۲۷. یک توپ تنیس تمیز را بگیرید و شش رأس یک منشور با مقطع عرضی یک مثلث متساوی الاضلاع را با رنگ سیاه علامت بزنید مرکز توپ را مبدأ بگیرید و فرض کنید G بزرگترین زیرگروه $SO(3)$ باشد که یک گروه تقارن منشور، یعنی. گروه تمام تقارنهای دورانی منشور است. مرتبهٔ G چیست؟ جواب خود را با سؤال ۱۸.۹ مقایسه کنید. برای

زیرگروه سرهٔ مرتبهٔ ۳ نقاطی از کره را که به وسیلهٔ این زیرگروه ثابت نگاه داشته می‌شوند با رنگ سبز مشخص کنید. برای زیرگروه‌های مرتبهٔ ۲ از G نقاطی از کره را که به‌وسیلهٔ یکی از این زیرگروه‌ها ثابت نگاه داشته می‌شوند با رنگ قرمز مشخص کنید. نقاطی که با رنگ سبز و قرمز مشخص شده‌اند را بشمارید ــ این نقاط قطبهای G نام دارند ــ و مدار کامل هر یک از این قطبها را تحت G مشخص کنید. آیا هر یک از قطبهای یک مدار پایدارسازهایی از یک مرتبهٔ دارند؟

۲۸. رأسهای یک مکعب را روی یک کره با علامت سیاه مشخص کنید. فرض کنید G گروه تقارن دورانی مکعب را نمایش دهد. نقاطی از کره را که توسط یک زیرگروه دوری مرتبهٔ ۴ از G ثابت نگاه داشته می‌شوند با رنگ آبی مشخص کنید. نقاطی از کره را که توسط یک زیرگروه مرتبهٔ ۳ از G ثابت نگاه داشته می‌شوند با رنگ سبز مشخص کنید. نقاطی از کره را که قبلاً مشخص نشده‌اند و به وسیلهٔ یک زیرگروه مرتبهٔ ۲ از G ثابت نگاه داشته می‌شوند با رنگ قرمز مشخص کنید. این نقاط قرمز، سبز و آبی قطبهای G نام دارند. مدار هر قطب G تحت G را بیابید. آیا همهٔ قطبهای یک مدار یک رنگ دارند؟

۲۹. نقاط آبی سؤال ۲۸، ۴ـ قطبی نقاط سبز سؤالهای ۲۷ و ۲۸، ۳ـ قطبی و نقاط قرمز سؤالهای ۲۷ و ۲۸، ۲ـ قطبی نام دارند. به‌طور کلی یک زیرگروه متناهی G از $SO(۳)$ را عمل کننده روی کره واحد با مرکز مبدأ در نظر می‌گیریم و یک نقطهٔ کره را $m-$ قطبی می‌نامیم هرگاه روی محور یک دوران مرتبهٔ $m \geq ۲$ در G قرار داشته باشد، همیشه بزرگترین m ممکن را انتخاب می‌کنیم چرا طول مداری که یک $m-$ قطبی به آن تعلق دارد و برابر با $| G | /m$ است؟ سؤال ۱۷.۹ را به کار برید.

۳۰ چرا همهٔ نقاط مدار یک $m-$ قطبی باید $m-$ قطبی باشند؟ از سؤالهای ۱۷.۹ یا ۵۰.۱۷ استفاده کنید.

۳۱. چند دوران در G غیر از همانی در $m-$ قطبی یکسانی شریک‌اند.

۳۲. هرگاه $(| G | /m)(m-۱)$ اعداد به دست آمده از هر مدار قطبها با هم جمع شوند چرا هر دوران در G غیر از همانی دو مرتبه محاسبه شده است.

۳۳. با نوشتن $| G |= N$ از سؤال ۳۲ نتیجه بگیرید.

$$۲(N-۱) = \sum \frac{N(m-۱)}{m}.$$

و از این رو

$$۲ - ۲/N = \sum_{\text{مدارهای قطبها}} (۱ - \frac{۱}{m}).$$

۳۴. بگویید چرا در سؤال ۳۳، $۲ > ۲/N - ۲ \leq ۱$ و $۱ > ۱ - \frac{۱}{m} \geq ۱/۲$ نتیجه بگیرید تنها یک مدار از قطبها و چهار یا بیشتر مدار از قطبها غیر محتمل هستند.

۳۵. فرض کنید دو مدار از قطبها یکی از $m-$ قطبها و دیگری از $n-$ قطبها وجود دارند. بنابراین $۲ - ۲/n = (۱ - \frac{۱}{m}) + (۱ - \frac{۱}{n})$. نتیجه بگیرید $N/m + N/n = ۲$ و لذا $m = n = N$. چون دورانها ثابت نگاه دارندهٔ یک $N-$ قطبی اعضای G را نمایش می‌دهند پس دقیقاً دو قطب وجود دارند و G دوری است. این گونه قطبها را برای تقارنهای دورانی یک منشور منتظم قائم مشخص کنید.

۳۶. فرض کنید سه مدار از قطبها یکی از $l-$ قطبها دیگری از $m-$ قطبها و سومی از $n-$ قطبها وجود دارند بنابراین

$$۲ - ۲/N = (۱ - \frac{۱}{l}) + (۱ - \frac{۱}{m}) + (۱ - \frac{۱}{n}).$$

$$۱ + ۲/N = ۱/l + ۱/m + ۱/n$$

و این که l، m، n با هم نمی‌توانند بزرگتر یا مساوی ۳ باشند.

۳۷. در سؤال ۳۶ بگیرید $۲ = l \leq m \leq n$. هرگاه $m = ۲$ ثابت کنید $n = \frac{۱}{۲}N$. این گونه قطبها را برای گروه تقارنهای دورانی یک منشور منتظم محاط در یک کره نمایش دهید. نتیجه بگیرید $G \cong D_n$.

۳۸. در سؤال ۳۶. با $۲ = l \leq m \leq n$. با اختیار کردن $m = ۳$ ثابت کنید

$$۳ \leq n = \frac{۶N}{N + ۱۲} < ۶$$

هرگاه $n = ۳$ ثابت کنید $N = ۱۲$ و این که قطبها با گروه تقارنهای دورانی یک چهار وجهی منتظم محاط در یک کره متناظراند. هرگاه $n = ۴$ ثابت کنید $N = ۲۴$ و قطبها با گروه تقارنهای دورانی یک مکعب محاط در یک کره متناظراند. هرگاه $n = ۵$ ثابت کنید $N = ۶۰$ و قطبها با گروه تقارنهای دورانی یک بیست وجهی منتظم محاط در یک کره متناظراند. بررسی کنید $n = ۶$ غیر محتمل است.

۳۹. در سؤال ۳۹ با $۲ = l < ۳ < m \leq n$ ثابت کنید $\frac{۱}{l} + \frac{۱}{m} + \frac{۱}{n} \leq ۱ < ۱ + ۲/N$ که غیر محتمل است.

زیرگروه‌های متناهی $O(۳)$

۴۰. هرگاه G یک زیرگروه متناهی $O(۳)$ باشد با استفاده از دترمینان ثابت کنید یا همهٔ اعضای G یا نیمی از اعضای G به $SO(۳)$ تعلق دارند.

۴۱. یک مکعب مستطیل هشت رأس ۱، ۲، ۳، ۴، a، b، c، d با وجه‌های مربعی ۱۲۳۴ و $abcd$ و یالهای موازی $۱a$، $۲b$، $۳c$ و $۴d$ دارد. تقارنهای دورانی مکعب مستطیل را به صورت جایگشتهای رأسها بنویسید و بعد از یافتن جفتی از مولدها برای این گروه، α از مرتبهٔ ۴ و β از مرتبهٔ ۲ جایگشتها را به ترتیب با e، α، $\alpha^۲$، $\alpha^۳$، β، $\beta\alpha$، $\beta\alpha^۲$، $\beta\alpha^۳$ نشان گذاری کنید.

هشت تقارن باقیماندهٔ مکعب مستطیل را به صورت جایگشتهای رأسها بنویسید و سعی کنید این تقارنها را به طور هندسی توصیف کنید. هرگاه γ نقطهٔ تقارن $(۱c)(۲d)(۳a)(۴b)$ را نمایش دهد با استفاده از سؤالهای ۱۷ و ۱۸ ثابت کنید γ در مرکز گروه تمام دورانهای مکعب مستطیل است و این گروه با $D_۴ \times C_۲$ یکریخت است.

۴۲. گروهی را که با تمام گروه تقارن یک مکعب یکریخت است نام ببرید.

۴۳. یک منشور مثلثی شش رأس ۱، ۲، ۳، a، b، c با وجه‌های مثلثی ۱۲۳ و abc و یالهای برابر و موازی $۱a$، $۲b$ و $۳c$ دارد. تقارنهای دورانی منشور را به صورت جایگشتهای رأسها بنویسید و بعد از یافتن جفتی از مولدهای این گروه، α از مرتبهٔ ۳ و β از مرتبهٔ ۲ جایگشتها را به ترتیب با e، α، $\alpha^۲$، β، $\beta\alpha$، $\beta\alpha^۲$ نشان‌گذاری کنید.

شش تقارن باقیماندهٔ منشور را به صورت جایگشتهای رأسها بنویسید و سعی کنید این تقارنها را به طور هندسی توصیف کنید.

منشور در یک کره با مرکز O محاط می‌شود و $۱۱'$، $۲۲'$، $۳۳'$، aa'، bb'، cc' قطرهای این کره هستند. هرگاه γ تقارن نقطه‌ای حول O را نمایش دهد که وقتی به دوازده نقطهٔ نامبردهٔ روی کره تحدید شود $(cc')(bb')(aa')(۳۳')(۲۲')(۱۱')$ است و هرگاه δ تقارن دورانی کره به اندازهٔ زاویهٔ $\pi/۳$ باشد که وقتی به دوازده نقطهٔ نامبردهٔ روی کره تحدید شود $(۱'c۲'a۳'b)(۱c'۲a'۳b')$ است ثابت کنید شش تقارن منشور که دوران نیستند $\delta\gamma$، $\delta^۳\gamma$، $\delta^۵\gamma$، $\beta\delta\gamma$، $\beta\delta^۳\gamma$، $\beta\delta^۵\gamma$ هستند. آیا تمام گروه تقارن منشور یک گروه دو وجهی

است؟ آیا $<\delta, \beta>$ یک گروه دو وجهی است؟

۴۴. هرگاه G یک زیرگروه $O(3)$ باشد و $G \cap SO(3) = H$ و به‌علاوه اگر G در برگیرندهٔ تقارن نقطه‌ای $\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$ باشد ثابت کنید G با $H \times C_2$ یکریخت است.

۴۵. هرگاه G یک زیرگروه مرتبهٔ $2n$ از $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n\} = G \cap SO(3)$ باشد و هرگاه γ تقارن نقطه‌ای $\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$ را نمایش دهد با استفاده از سؤال ۱۸ نشان دهید اعضایی از G که در $SO(3)$ نیستند به صورت $\beta_1\gamma$، $\beta_2\gamma$، $\cdots$، $\beta_n\gamma$ هستند که β_iها دوران می‌باشند. نتیجه بگیرید یا

$$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$$

یا $2n$ دوران α_i و β_i یک زیرگروه مرتبهٔ $2n$ از $SO(3)$ تشکیل می‌دهند.

خلاصهٔ مطالب

قضیه
سؤالهای
۱ـ۸

اگر α یک تبدیل از $V_2(\mathbb{R})$ یا $V_3(\mathbb{R})$ به خود باشد آنگاه سه حکم زیر هم ارزاند.

(یک) α یک طولپایی ثابت نگاه دارندهٔ $\mathbf{o}$ است؛

(دو) α حاصلضربهای اسکالر را حفظ می‌کند؛

(سه) α یک تبدیل خطی $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A$ است که $AA^T = I$.

تعریف
سؤالهای
۲، ۹

یک تبدیل صادق در شرطهای قضیهٔ قبل یک تبدیل متعامد نام دارد و یک ماتریس A که $AA^T = I$ یک ماتریس متعامد نام دارد.

تعریف
سؤالهای
۳، ۹

گروه تمام تبدیلهای متعامد در بُعد ۲ (به ترتیب) بُعد ۳ با $O(2)$ (به ترتیب با $O(3)$) نمایش داده‌می‌شود. زیرگروه اعضای با دترمینان ۱ با $SO(2)$

(به ترتیب $SO(۳)$ نمایش داده

قضیه هر عضو $SO(۲)$ و $SO(۳)$ یک دوران است.
سؤالهای ۳،۱۱ـ۱۶

قضیه گروه $O(۳)$ با حاصلضرب مستقیم زیرگروه‌هایش $SO(۳)$ و $\{\pm I\}$ یکریخت است.
سؤال ۱۸

قضیه یک گروه متناهی از طولپاییها یک نقطهٔ ثابت دارد و با زیرگروهی از یک گروه متعامد یکریخت است.
سؤالهای ۱۹ـ۲۳

قضیه یک زیرگروه متناهی $SO(۲)$ باید دوری باشد. هر زیر گروه متناهی دیگر $O(۲)$ دو وجهی است.
سؤالهای ۲۴، ۲۶

قضیه یک زیرگروه متناهی $SO(۳)$ یا دوری یا دو وجهی یا گروه دورانهای یک جسم منتظم است.
سؤالهای ۲۷ـ۳۹

یادداشت تاریخی

گروه متعامد در ابتدا به عنوان گروه تبدیلهای حفظ کنندهٔ فرم درجهٔ دوم $x^۲ + y^۲$ یا $x^۲ + y^۲ + z^۲$ توسط ریاضیدانان نظریهٔ اعداد قرن نوزدهم مورد مطالعه قرار گرفت. ک. ژوردان در کتابش (۱۸۷۰) از گروه متعامد نام برده است و آن را به عنوان گروه تبدیلهای خطی حفظ کنندهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ + \cdots$ تعریف کرده است وی جزئیات نتایج $AA^T = I$ را بدون استفاده از ماتریس‌ها متذکر شده است. امکان تعریف تبدیلهای متعامد بر حسب حفظ یک حاصلضرب اسکالر (یا به طور کلی‌تر یک فرم دو خطی متقارن) تعریف حاصلضرب اسکالر را توسط ج ـ و. گیبس نتیجه داد (۱۸۸۱).

اولین اثبات از رده‌بندی گروه‌های متناهی دورانهای فضای سه‌بُعدی به ا. براویس

(۱۸۴۹) تعلق دارد و این اثبات را هـ .س. م. کاکستر در کتاب پلی توپ‌های منتظم [3] خود آورده است. اثباتی که در اینجا پیشنهاد می‌کنیم از بحثی دربارهٔ تبدیلهای موبیوس که ف. کلاین در درسهایی درباره بیست وجهی (۱۸۸۴) ارائه کرده است نشأت می‌گیرد. تمام گروه‌های تقارن چند وجهیهای منتظم در آن کتاب ذکر شده‌اند و سپس به عنوان یک تمرین به خواننده واگذار شده‌اند.

3) *Regular polytopes*

جوابهای فصل ۲۱

۱. به ازای همهٔ θها، $z \mapsto e^{i\theta} z$ و $z \mapsto e^{i\theta} \bar{z}$.

۲. شبیه سؤال ۲۰. ۱ ماتریس برای دوران $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ است. به همین نحو ماتریس بازتاب $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ به دست می‌آید. $AA^T = I$

۳. دترمینان‌ها ± ۱ هستند. دورانها هسته را تشکیل می‌دهند.

۴. (چهار) فاصلهٔ $\mathbf{u}$ تا $\mathbf{v}$ برابر با $\sqrt{[(u_۱ - v_۱)^۲ + (u_۲ - v_۲)^۲]}$ است. (پنج) با قراردادن $\mathbf{v} = \mathbf{o}$ در (چهار) به دست می‌آوریم $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}\alpha \cdot \mathbf{u}\alpha$. حال $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = (\mathbf{u}\alpha - \mathbf{v}\alpha) \cdot (\mathbf{u}\alpha - \mathbf{v}\alpha)$ و با استفاده از (سه)، (دو) و $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}\alpha \cdot \mathbf{u}\alpha$ به دست می‌آوریم $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}\alpha \cdot \mathbf{v}\alpha$.

۵. (سه) از $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}\alpha \cdot \mathbf{v}\alpha$ نتیجه می‌گیریم $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = (\mathbf{u}\alpha - \mathbf{v}\alpha) \cdot (\mathbf{u}\alpha - \mathbf{v}\alpha)$

۶. $\mathbf{a} = (۱, ۰, ۰)\alpha$ لذا بنا به سؤال ۴ (پنج)، $\mathbf{a}.\mathbf{a} = ۱$. $\mathbf{b} = (۰, ۱, ۰)\alpha$ ، لذا بنا به سؤال ۴ (پنج) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ۰$

$$AA^T = \begin{pmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} \\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{c} \end{pmatrix} = I$$

۷. $(۱, ۰).(x, y) = x = (a_۱, a_۲) \cdot (\acute{x}, \acute{y})$
$(۰, ۱) \cdot (x, y) = y = (b_۱, b_۲) \cdot (\acute{x}, \acute{y})$

۸. $\mathbf{u}A \cdot \mathbf{v}A = \mathbf{u}A(\mathbf{v}A)^T = \mathbf{u}\, AA^T \mathbf{v}^T = \mathbf{u}\mathbf{v}^T = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

۹. گروه متعامد متشکل از طولپاییهای ثابت نگاه دارندهٔ مبدأ است. سؤال ۱۳. ۳۴ را ببینید. $\det AA^T = ۱$ و $\det A = \det A^T$ بنابراین $\det A = \pm ۱$. $A \mapsto \det A$ یک همریختی است. A در هسته است اگر و تنها اگر $\det A = ۱$.

۱۰. ۱، ۱-، ۱- . $(x, y, z) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, -z)$ نتیجه می‌دهد $x = y = z = ۰$ هرگاه $\theta \neq ۲n\pi$.

۱۲. $\det(A - I) = ۰$ یعنی $\lambda = ۱$ یک جواب $\det(A - \lambda I) = ۰$ است.

۱۳. صفحهٔ گذرنده از مبدأ عمود بر $\mathbf{oa}$.

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}=\circ \Leftarrow \mathbf{u}A\cdot\mathbf{a}A=\circ \Leftarrow \mathbf{u}A\cdot\mathbf{a}=\circ$ لذا صفحهٔ گذرنده از $\mathbf{o}$ عمود بر $\mathbf{oa}$ به وسیلهٔ $\mathbf{v}\mapsto\mathbf{v}A$ ثابت نگاه داشته می‌شود.

۱۴. A یکی از دو صورت اول سؤال ۱۰ را دارد. هرگاه $\det A=1$ تنها اولی محتمل است.

۱۵. $\mathbf{v}\mapsto\mathbf{v}A$ دورانی به اندازهٔ θ حول محور z است. $\mathbf{v}\mapsto\mathbf{v}B$ دورانی به‌اندازهٔ ϕ حول محور y است.

$-\tan\phi=\frac{\sqrt{(a_1^2+a_2^2)}}{a_3}$ ، $-tan\theta=\frac{a_2}{a_1}$

۱۶. $\beta^{-1}\alpha\beta$ در $SO(3)$ است، زیرا $SO(3)$ یک گروه است. $\beta^{-1}\alpha\beta$ بردار ویژهٔ $(1,\circ,\circ)$ دارد.

۱۷. $-I$.

۱۸. چون شاخص $SO(3)$ در $O(3)$ برابر با ۲ است هر عضو $O(3)-SO(3)$ به ازای ماتریسی مانند $A\in SO(3)$ به صورت $-A$ است.

۱۹. $\alpha\tau^{-1}$ یک طولپایی ثابت نگاه دارندهٔ $\mathbf{o}$ است. لذا بنا به سؤالهای ۵ و ۷ ماتریس A متعامد است.

۲۰. $\alpha\tau^{-1}$ بنا به سؤالهای ۵ و ۷ تبدیلی متعامد است. لذا $\alpha:\mathbf{v}\mapsto\mathbf{v}A+\mathbf{c}$ که A متعامد است.

۲۱. بنا به بسته بودن $\alpha_i\alpha_j$ در گروه است. $\alpha_1\alpha_j=\alpha_2\alpha_j\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2$. لذا اعضای مجموعهٔ دوم متمایزاند. مدار $\mathbf{v}$ متشکل از $\mathbf{v_i}$ است. $\mathbf{v}_1\alpha_j=\mathbf{v}\alpha_1\alpha_j$.

۲۲.

$$\begin{aligned}\mathbf{w}\alpha&=\frac{1}{n}(\mathbf{v}_1A+\mathbf{v}_2A+\cdots+\mathbf{v_n}A)+\mathbf{c}\\&=\frac{1}{n}(\mathbf{v}_1A+\mathbf{c}+\mathbf{v}_2A+\mathbf{c}+\cdots+\mathbf{v_n}A+\mathbf{c})\\&=\frac{1}{n}[\mathbf{v}_1\alpha+\mathbf{v}_2\alpha+\cdots+\mathbf{v_n}\alpha)\\&=\mathbf{w}\end{aligned}$$

۲۳. اگر $\mathbf{c}$ نقطهٔ ثابت G باشد و $\mathbf{o}\tau=\mathbf{c}$ آنگاه گروه $\tau G\tau^{-1}$ نقطهٔ $\mathbf{o}$ را ثابت نگاه می‌دارد.

۲۴. بنا به بسته بودن دورانی به اندازهٔ $k\theta_۲$ در گروه است. اگر به ازای هرk، $\theta_i \neq k\theta_۲$ آنگاه به ازای عددی مانند k، $k\theta_۲ < \theta_i < (k+۱)\theta_۲$ و $۰ < \theta_i - k\theta_۲ < \theta_۲$. لذا دورانی به اندازهٔ یک زاویهٔ کوچکتر از $\theta_۲$ در گروه خواهد بود، که تناقض است. این زیرگروه متناهی به وسیلهٔ دورانی به اندازهٔ $\theta_۲$ تولید می‌شود.

۲۵. نگارهٔ G تحت $A \mapsto \det A$ برابر با $\{\pm ۱\}$ است. هسته، یعنی $G \cap SO(۲)$، دو هم مجموعه در G دارد.

۲۶. $\beta\alpha\beta = \alpha^{-۱}$. هرگاه G یک زیرگروه متناهی $O(۲)$ باشد و مرتبهٔ $G \cap SO(۲)$ برابر با n باشد بنا به سؤال ۲۴ گروه $G \cap SO(۲)$ دوری است. فرض کنید α مولد این گروه و β بازتابی در G باشد آنگاه بنا به سؤال ۶. ۴۳ گروه $< \alpha, \beta >$ دو وجهی است و بنا به سؤال ۲۵ گروه $< \alpha, \beta >$ گروه G را نمایش می‌دهد.

۲۷. مرتبهٔ G برابر با ۶ است. دو نقطهٔ سبز در یک مدار. شش نقطهٔ قرمز در دو مدار.

۲۸. شش نقطهٔ آبی در یک مدار. هشت نقطهٔ سبز در یک مدار. دوازده نقطهٔ قرمز در یک مدار.

۳۰. هرگاه P یک $m-$ قطبی باشد طول مدار برگیرندهٔ P برابر با $| G | /m$ است. هرگاه Q نقطهٔ دیگری در مدار باشد مرتبهٔ پایدارساز برابر با $m - (| G | /m)/ | G |$ است لذا Q یک $m-$ قطبی است. به‌عبارت دیگر اگر α یک دوران مرتبهٔ m با قطب P است و $P\beta = Q$ آنگاه $\beta^{-۱}\alpha\beta$ دورانی از مرتبهٔ m با قطب Q است.

۳۱. $m - ۱$.

۳۲. چون هر دوران دو قطب دارد.

۳۴.

$$N \geq ۲ \Rightarrow ۰ < \frac{۲}{N} \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq -\frac{۲}{N} < ۰ \Rightarrow ۱ \leq ۲ - \frac{۲}{N} < ۲.$$

$$۱ - \frac{۱}{m} < ۱ \leq ۲ - \frac{۲}{N}$$

بنابراین تنها یک مدار غیر محتمل است. هرگاه چهار یا بیشتر مدار وجود داشته باشد،

$$\sum(۱ - \frac{۱}{m}) \geq ۴ \cdot \frac{۱}{۲} = ۲ > ۲ - \frac{۲}{N}.$$

۳۶. اگر $l, m, n \geq ۳$ آنگاه $\frac{۱}{l}, \frac{۱}{m}, \frac{۱}{n} \leq \frac{۱}{۳}$ بنابراین

$$\frac{۱}{l} + \frac{۱}{m} + \frac{۱}{n} \leq ۱ < ۱ + \frac{۲}{N}$$

۳۷. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{n}=1+\frac{2}{N}\Rightarrow n=\frac{1}{2}N$

۳۸. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{n}=1+\frac{2}{N}\Rightarrow n=\frac{6N}{N+12}$ چون $n=\frac{6N}{N+12}$ لذا $n<6$.

$$n=3\Rightarrow N=12\cdot\qquad n=4\Rightarrow N=24\cdot\qquad n=5\Rightarrow N=60\cdot$$

۳۹.

$$m,n\geq 4\Rightarrow \frac{1}{m}+\frac{1}{n}\leq\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\leq 1\leq 1+\frac{2}{N}\cdot$$

۴۰. برای $A\mapsto \det A$، هسته $=G\cap SO(3)$. چون $\det A=\pm 1$، هسته یا یک یا دو هم‌مجموعه دارد.

۴۱. $e=(1)(a)$، $\alpha=(1234)(abcd)$، $\alpha^2=(13)(24)(ac)(ba)$، $\alpha^3=(1432)(adcd)$، $\beta=(1a)(2d)(3c)(4b)$، $\beta\alpha=(1b)(2a)(3d)(4c)$، $\beta\alpha^2=(1c)(2b)(3a)(4d)$، $\beta\alpha^3=(1d)(2c)(3b)(4a)$. بازتابها: $\alpha^2\gamma=(1a)(2b)(3c)(4d)$، $\beta\gamma=(13)(ac)$، $\beta\alpha\gamma=(14)(23)(ad)(bc)$، $\beta\alpha^2\gamma=(24)(bd)$، $\beta\alpha^3\gamma=(12)(34)(ab)(cd)$. غیر بازتابها: $\gamma=(1c)(2d)(3a)(4b)$، $\alpha\gamma=(1d3b)(2a4c)$، $\alpha^3\gamma=(1b3d)(2c4a)$. γ ماتریس $-I$ دارد و بنابراین در مرکز گروه است. از سؤال ۱۱.۱۰ استفاده کنید.

۴۲. $S_4\times C_2$.

۴۳. $e=(1)(a)$، $\alpha=(123)(abc)$، $\alpha^2=(132)(acb)$، $\beta=(1a)(2c)(3b)$، $\beta\alpha=(1b)(2a)(3c)$، $\beta\alpha^2=(1c)(2b)(3a)$، بازتابها: $\delta^3\gamma=(1a)(2b)(3c)$، $\beta\delta^3\gamma=(23)(bc)$، $\beta\delta\gamma=(13)(ac)$، $\beta\delta^5\gamma=(12)(ab)$. غیر بازتابها $\delta^5\gamma=(1b3a2c)$، $\delta\gamma=(1c2a3b)$. و D_6 تمام گروه تقارنهای منشور به وسیلهٔ $\delta\gamma$ از مرتبه ۶ و β از مرتبهٔ ۲ تولید می‌شود. روی دوازده نقطه، $\beta=(1a)(2c)(3b)(1'a')(2'c')(3'b')$ بنابراین $\beta\delta\beta=\delta^{-1}$ و $<\delta,\beta>$ گروه دو وجهی دورانهاست.

۴۴. شبیه سؤال ۱۸ استدلال کنید.

۴۵. اگر به ازای اعدادی مانند i، j، $\alpha_i=\beta_j$ آنگاه $\beta_j\gamma$ هم مجموعهٔ $[G\cap SO(3)]\gamma$ را تشکیل می‌دهند. هرگاه α_i ها از β_iها متمایز باشند جمعاً $2n$ وجود دارند.

$$\alpha_i\beta_j = \alpha_i(\beta_j\gamma)\gamma = (\beta_k\gamma)\gamma = \beta_k \cdot \beta_i\beta_j = (\beta_i\gamma)(\beta_j\gamma) = \alpha_k$$

لذا مجموعه بسته است و یک گروه تشکیل می‌دهد.

MATH75.IR

۲۲

گروه‌های گسستهٔ ثابت نگاه دارندهٔ یك خط

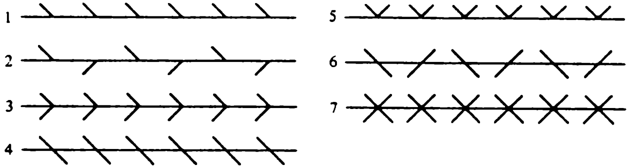
گروه‌های گسسته گروه‌های تقارنهای طرحهای تزیینی هستند. گروه‌های گسستهٔ ثابت نگاه دارندهٔ یک نقطه گروه‌های تقارنهای شکلهای تزیینی با یک مرکز هستند. در صفحه این گروه‌ها باید دوری متناهی یا گروه‌های دو وجهی باشند. گروه‌های گسستهٔ ثابت نگاه دارندهٔ یک خط گروه‌های تقارنهای نوارها یا کتیبه‌ها هستند.

برای مطالعهٔ گروه‌های کتیبه ابتدا همهٔ طولپاییهای ثابت نگاه دارندهٔ یک خط را با جبر اعداد مختلط شمارش می‌کنیم. سپس به نگارهٔ این گروه تحت یک همریختی خاص که هر طولپایی را به یک طولپایی با یک نقطهٔ ثابت می‌نگارد توجه می‌کنیم. زیرگروه‌هایی که به صورت نگاره‌ها می‌توانیم به دست آوریم پایه‌ای برای رده‌بندی مورد نظر ماست.

مطالعهٔ همزمان: فصل ۱۰ کتاب مارتین؛ فصلهای ۳، ۱۶ کتاب لاک وود ومک میلان؛ صفحه ۴۸ کتاب کاکستر (۱۹۶۹)؛ کتاب بورن (۱۹۷۳).

طولپاییهای ثابت نگاه دارندهٔ یک خط

۱. برای هر یک از هفت الگوی ارایه شده در شکل زیر فرض کنید هر یک از آنها از طرف راست و چپ تا بینهایت ادامه دارند انواع طولپاییها را درگروه تقارن هر الگو نام ببرید.



۲. هرگاه طولپاییهای $z \mapsto e^{i\theta}z + c$ و $z \mapsto e^{i\theta}\bar{z} + c$ هر یک خط حقیقی را بروی خود بنگارند با در نظر گرفتن نگارهٔ ۰ یک محدودیت لازم روی مقدار c را مشخص کنید. به‌علاوه با در نظر گرفتن نگارهٔ ۱ یک محدودیت لازم روی مقدار $e^{i\theta}$ را مشخص کنید.

۳. به ازای مقادیر حقیقی c توصیفهای هندسی تبدیلهای

$$z \mapsto x + c,$$

$$z \mapsto -z + c,$$

$$z \mapsto -\bar{z} + c$$

$$z \mapsto \bar{z} + c$$

را ارائه دهید. نتیجه بگیرید که شرطهای لازم روی c و $e^{i\theta}$ در سؤال ۲ برای طولپاییهای ثابت نگاه دارندهٔ خط حقیقی در واقع کافی نیز هستند. آیا مجموعهٔ همهٔ طولپاییهای از این انواع یک گروه تشکیل می‌دهند؟

۴. ثابت کنید بازتاب $z \mapsto \bar{z}$ در مرکز گروه طولپاییهای ثابت نگاه دارندهٔ خط حقیقی قرار دارد.

۵. فرض کنید G یک گروه از طولپاییهای ثابت نگاه دارندهٔ خط حقیقی باشد اما هیچ نقطه‌ای را ثابت نگاه ندارد.

(یک) هرگاه G شامل یک نیمدور α با مرکز A و β یک طولپایی در G باشد که A را تغییر دهد، به طور هندسی $\beta^{-۱}\alpha\beta$ را توصیف کنید و سپس $\alpha(\beta^{-۱}\alpha\beta)$ را از نظر هندسی توصیف کنید.

(دو) هرگاه G شامل یک بازتاب با محور عمود بر خط حقیقی باشد با ارائه استدلالی شبیه حالت (یک) ثابت کنید G باید در برگیرندهٔ یک انتقال باشد.

(سه) هرگاه G در برگیرندهٔ یک لغزه باشد چرا G باید در برگیرندهٔ یک انتقال باشد؟ نتیجه بگیرید G باید در برگیرندهٔ یک انتقال باشد.

یک نگارهٔ همریخت: گروه نقطه‌ای

۶. ثابت کنید نگاشت π از گروه تشابه‌های تعریف شده با

$$\pi : [z \mapsto az + b] \mapsto [z \mapsto az]$$

و

$$\pi : [z \mapsto a\bar{z} + b] \mapsto [z \mapsto a\bar{z}]$$

یک همریختی گروه است. هستهٔ π چیست؟

اگر G گروه تشابه‌ها باشد آنگاه $G\pi$ گروه نقطه‌ای G نام دارد (دقت کنید! $G\pi$ به‌طور کلی زیرگروه G نیست.)

۷. نگارهٔ گروه تمام طولپاییهای ثابت نگاه دارندهٔ خط حقیقی تحت همریختی π سؤال ۶ چیست؟

۸. هرگاه G یک زیرگروه از گروه تمام طولپاییهای ثابت نگاه دارندهٔ خط حقیقی باشد و $G\pi$ (شبیه سؤال ۶) متشکل از همانی تنها باشد دربارهٔ اعضای G چه می‌توان گفت؟

۹. هرگاه G یک زیرگروه طولپاییهای ثابت نگاه دارندهٔ خط حقیقی باشد و $G\pi = \{[z \mapsto z], [z \mapsto -z]\}$ دربارهٔ اعضای G چه می‌توان گفت؟

۱۰. هرگاه G یک زیرگروه از گروه طولپاییهای ثابت نگاه دارندهٔ خط حقیقی باشد و

$$G\pi = \{[z \mapsto z], [z \mapsto -\bar{z}]\}$$

دربارهٔ اعضای G چه می‌توان گفت؟

در موقع بحث از تقارنهای صفحهٔ، بین گروه‌های یکریخت $C_۲$ و $D_۱$ با این فرض که $C_۲$ در برگیرندهٔ یک نیمدور است و $D_۲$ در برگیرندهٔ یک باز تاب است فرق می‌گذاریم. لذا گروه نقطه‌ای سؤال ۹ برابر با $C_۲$ است و گروه نقطه‌ای سؤال ۱۰ برابر با $D_۱$ است.

۱۱. هرگاه G یک زیرگروه از گروه تمام طولپاییهای ثابت نگاه دارندهٔ خط حقیقی باشد و $G\pi = \{[z \mapsto z], [z \mapsto \bar{z}]\}$ با ارائهٔ مثالی نشان دهید هر چند گروه نقطه‌ای برابر با $D_۱$ است لزومی ندارد گروه G در برگیرندهٔ یک بازتاب باشد.

۱۲. هرگاه G زیرگروهی ازگروه تمام طولپاییهای ثابت نگاه دارندهٔ خط حقیقی باشد و $G\pi = D_۲$ با ارائهٔ مثالی نشان دهید لازم نیست G در برگیرندهٔ یک بازتاب نسبت به خط حقیقی باشد. ابتدا الگوی مناسبی انتخاب کنید و سپس تقارنهای آن را توصیف کنید.

گروه‌های گسستهٔ تبدیلها

۱۳. یک گروه از تبدیلهای صفحه به خود گسسته نام دارد هرگاه به ازای هر نقطهٔ P از صفحه بتوانیم دایره‌ای با مرکز P بکشیم که درون آن نقطهٔ دیگری از مدار P وجود نداشته باشد. کدام یک از گروه‌های زیر گسسته هستند:

(الف) گروه تمام دورانهای با مرکز ۰،

(ب) گروه تمام انتقالهای ثابت نگاه دارندهٔ خط حقیقی

(پ) D_6، گروه تمام تقارنهای یک شش ضلعی منتظم در صفحه؟

۱۴. هرگاه یک گروه گسسته از طولپاییهای یک نقطهٔ O داده شود با در نظر گرفتن مدار یک نقطه غیر از O ثابت کنید اگر گروه در برگیرندهٔ هر دورانی غیر از همانی باشد آنگاه در برگیرندهٔ دورانی با زاویهٔ مینیمال است. با استفاده از سؤالهای ۲۴.۲۱ و ۲۶.۲۱ نشان دهید گروه متناهی است و یا دوری و یا دو وجهی است.

۱۵. طول انتقال $z \mapsto z + c$ برابر با $|c|$ تعریف می‌شود. هرگاه یک گروه گسسته از طولپاییهای صفحه که در برگیرندهٔ یک انتقال است داده شود ثابت کنید گروه، در برگیرندهٔ انتقالی با طول مینیمال است.

۱۶. از سؤالهای ۵ و ۱۵ نتیجه بگیرید یک گروه گسسته که یک خط را ثابت نگاه دارد و یک نقطه را ثابت نگاه ندارد در برگیرندهٔ انتقالی با طول مینیمال است.

رده‌بندی گروه‌های کتیبه

۱۷. هرگاه یک گروه گسسته از طولپاییهای ثابت نگاه دارندهٔ یک خط که یک نقطه را ثابت نگاه ندارد یک گروه کتیبه نام دارد. الگویی که گروه کتیبه است یک الگوی کتیبه یا یک کتیبه نام دارد.

یک الگوی کتیبه را نمایش دهید که گروه کتیبهٔ آن تنها در برگیرندهٔ انتقالها باشد. آیا این گروه کتیبه باید دوری باشد؟

گاهی نماد C_∞ برای نمایش یک گروه دوری نامتناهی به کار می‌رود.

۱۸. یک الگوی کتیبه را نمایش دهید که گروه کتیبهٔ آن در برگیرندهٔ نیمدورها است اما شامل بازتابها و لغزه‌ها نیست.

هرگاه یک انتقال مینیمال در این گروه $\tau : z \mapsto z + 1$ باشد و α یک نیمدور در این گروه باشد بررسی کنید $\alpha\tau\alpha = \tau^{-1}$. چون α^2 همانی است این رابطه ارجاع $< \tau, \alpha >$

را به صورت D_∞ توجیه می‌کند. با انتخاب مبدأ در مرکز α همهٔ اعضای این گروه کتیبه را به صورت نگاشتهای اعداد مختلط نمایش دهید.

۱۹. یک الگوی کتیبه را نمایش دهید که گروه کتیبهٔ آن در برگیرندهٔ بازتابهای با محورهای عمود بر یک خط ثابت باشند اما شامل هیچ نیمدور و لغزه‌ای نیست.

هرگاه یک انتقال مینیمال در این گروه $\tau : z \mapsto z + ۱$ است و ϱ بازتابی در این گروه باشد بررسی کنید $\varrho\tau\varrho = \tau^{-۱}$. چون $\varrho^۲$ همانی است این رابطه ارجاع $< \tau, \varrho >$ را به صورت D_∞ توجیه می‌کند. با انتخاب محور موهومی به عنوان محور ϱ همهٔ اعضای گروه کتیبه را به صورت نگاشتهای اعداد مختلط نمایش دهید. هرگاه محور موهومی محور ϱ نباشد و به ازای عددی حقیقی مانند r، و $\varrho : z \mapsto -\bar{z} + r$ همهٔ اعضای $< \tau, \varrho >$ این حالت را به صورت نگاشتهای اعداد مختلط مشخص کنید.

۲۰. هرگاه یک گروه کتیبه در برگیرندهٔ یک انتقال مینیمال $z \mapsto z + ۱$ باشد چه لغزه‌هایی ممکن است در این گروه باشند؟ هرگاه یک گروه کتیبه تنها در برگیرندهٔ انتقالها و لغزه‌ها باشد ثابت کنید آن گروهی دوری است و یک کتیبه با این گروه تقارنها را نمایش دهید.

۲۱. هرگاه یک گروه کتیبه در برگیرندهٔ هر دو نوع از سه نوع طولپایی،

یک نیمدور،

یک لغزه،

یک بازتاب با محور عمود بر خطی ثابت،

باشد ثابت کنید آن در برگیرندهٔ هر سه نوع طولپایی است.

یک الگوی کتیبه را نمایش دهید که گروه کتیبهٔ آن حاوی طولپاییهای این سه نوع باشند اما در برگیرندهٔ بازتابی نسبت به خطی ثابت نیست. هرگاه $z \mapsto z + ۱$ یک انتقال مینیمال در این گروه و $z \mapsto -z$ یک نیمدور در این گروه باشد همهٔ اعضای گروه را به صورت نگاشتهای اعداد مختلط نمایش دهید. با انتخاب مناسبی از مولدها نشان دهید این گروه به‌طور مجرد با D_∞ یکریخت است.

۲۲. هرگاه یک گروه کتیبه در برگیرندهٔ یک انتقال مینیمال $z \mapsto z + ۱$ و بازتاب $z \mapsto \bar{z}$ باشد اما حاوی بازتابهای دیگر نباشد ثابت کنید شامل هیچ نیمدوری نیست و همهٔ اعضای این گروه را به صورت نگاشتهای اعداد مختلط نمایش دهید. نشان دهید این گروه به طور مجرد با $C_۲ \times C_\infty$ یکریخت است. از سؤالهای ۴ و ۱۱.۱۰ استفاده

کنید. یک الگوی کتیبه با چنین گروه کتیبه‌ای بکشید.

۲۳. هرگاه یک گروه کتیبه در برگیرندهٔ یک انتقال مینیمال $\tau : z \mapsto z + ۱$ و بازتاب $\varrho : z \mapsto \bar{z}$ باشد و شامل طولپایی دیگری است که به $< \varrho, \tau >$ تعلق ندارد، ثابت کنید آن دربرگیرندهٔ یک نیمدور است و با اختیار مبدأ در مرکز این نیمدور ثابت کنید هر تبدیل به صورت $z \mapsto \pm z + n$ یا $z \mapsto \pm \bar{z} + n$ که n یک عدد صحیح است به این گروه تعلق دارد و این‌ها اعضای گروه را نمایش می‌دهند. با استفاده از سؤالهای ۴ و ۱۱.۱۰ نشان دهید این گروه به‌طور مجرد با $C_۲ \times D_\infty$ یکریخت است. یک الگوی کتیبه با چنین گروه کتیبه‌ای بکشید.

۲۴. برای هر یک از الگوهای کتیبهٔ زیر، یک گروه مجرد را مشخص کنید که گروه کتیبه با آن و نیز گروه نقطه‌ای مربوط (در معنای سؤال ۶) یکریخت باشد.

(یک) $\cdots LLLLLLL \cdots$

(دو) $\cdots ZZZZZZZ \cdots$

(سه) $\cdots VVVVVVV \cdots$

(چهار) $\cdots D_D D_D D_D D \cdots$

(پنج) $\cdots$ ׀ ׀ ׀ ׀ ׀ ׀ $\cdots$ (شش) $\cdots DDDDDDD \cdots$

(هفت) $\cdots$ | | | | | | |

خلاصهٔ مطالب

قضیه سؤال ۶ نگاشت از گروه تشابه‌های داده شده به وسیله

$$[z \mapsto az + b] \mapsto [z \mapsto az]$$

و

$$[z \mapsto a\bar{z} + b] \mapsto [z \mapsto a\bar{z}]$$

یک همریختی است. نگارهٔ گروه G تحت این همریختی گروه نقطه‌ای G نام دارد.

تعریف یک گروه از تبدیلهای صفحه به خود گسسته نام دارد هرگاه به ازای هر نقطهٔ

P از صفحه بتوانیم دایره‌ای به مرکز P بکشیم که در برگیرندهٔ نقطهٔ دیگری از مدار P نباشد.

قضیه سؤال ۱۴ یک گروه گسسته که یک نقطهٔ صفحه را ثابت نگاه دارد یک گروه متناهی است و دوری یا دو وجهی می‌باشد.

تعریف سؤال ۱۷ یک گروه گسسته که یک خط را ثابت نگاه می‌دارد اما هیچ نقطه‌ای را ثابت نگاه نمی‌دارد یک گروه کتیبه نام دارد.

قضیه سؤالهای ۱۶، ۱۷ یک گروه کتیبه در برگیرندهٔ یک زیر گروه دوری انتقال است.

قضیه سؤال ۷ گروه نقطه‌ای یک گروه کتیبه یا C_1 ، C_2، D_1، یا D_2 است.

قضیه سؤال ۱۷ گروه کتیبه با گروه نقطه‌ای C_1 یک گروه دوری متشکل از همهٔ انتقالهاست.

قضیه سؤال ۱۸ گروه کتیبه با گروه نقطه‌ای C_2 یک گروه دو وجهی نامتناهی است که متشکل از نیمدورها و انتقالهاست.

قضیه سؤالهای ۱۹، ۲۰، ۲۱ سه گروه کتیبه با گروه نقطه‌ای D_1 وجود دارند. یکی گروه دوری تولید شده به‌وسیلهٔ یک لغزه است، یکی یک گروه دو وجهی متشکل از بازتابها و انتقالهاست. سومی حاصلضرب مستقیم زیرگروه‌های تولید شده به وسیله یک انتقال و یک بازتاب نسبت به محور است.

قضیه سؤالهای ۲۱، ۲۳ دو گروه کتیبه با گروه نقطه‌ای D_2 وجود دارند. یکی از آنها یک گروه دو وجهی نامتناهی تولید شده به‌وسیلهٔ یک لغزه و یک نیمدور است. دیگری در برگیرندهٔ همهٔ تبدیلهای محتمل است و برابر با حاصلضرب مستقیم یک گروه دو وجهی

کنید. یک الگوی کتیبه با چنین گروه کتیبه‌ای بکشید.

۲۳. هرگاه یک گروه کتیبه در برگیرندهٔ یک انتقال مینیمال $\tau : z \mapsto z + 1$ و بازتاب $\varrho : z \mapsto \bar{z}$ باشد و شامل طولپایی دیگری است که به $<\varrho, \tau>$ تعلق ندارد، ثابت کنید آن دربرگیرندهٔ یک نیمدور است و با اختیار مبدأ در مرکز این نیمدور ثابت کنید هر تبدیل به صورت $z \mapsto \pm z + n$ یا $z \mapsto \pm\bar{z} + n$ که n یک عدد صحیح است به این گروه تعلق دارد و این‌ها اعضای گروه را نمایش می‌دهند. با استفاده از سؤالهای ۴ و ۱۱.۱۰ نشان دهید این گروه به‌طور مجرد با $C_2 \times D_\infty$ یکریخت است. یک الگوی کتیبه با چنین گروه کتیبه‌ای بکشید.

۲۴. برای هر یک از الگوهای کتیبهٔ زیر، یک گروه مجرد را مشخص کنید که گروه کتیبه با آن و نیز گروه نقطه‌ای مربوط (در معنای سؤال ۶) یکریخت باشد.

(یک) $\cdots LLLLLLL \cdots$

(دو) $\cdots ZZZZZZZ \cdots$

(سه) $\cdots VVVVVVV \cdots$

(چهار) $\cdots D_D D_D D_D D \cdots$

(پنج) $\cdots | \, |_| \, |_| \, |_| \cdots$ (شش) $\cdots DDDDDDD \cdots$

(هفت) $\cdots | \, | \, | \, | \, | \, | \, |$

خلاصهٔ مطالب

قضیه سؤال ۶ نگاشت از گروه تشابه‌های داده شده به وسیله

$$[z \mapsto az + b] \mapsto [z \mapsto az]$$

و

$$[z \mapsto a\bar{z} + b] \mapsto [z \mapsto a\bar{z}]$$

یک همریختی است. نگارهٔ گروه G تحت این همریختی گروه نقطه‌ای G نام دارد.

تعریف یک گروه از تبدیلهای صفحه به خود گسسته نام دارد هرگاه به ازای هر نقطهٔ

P از صفحه بتوانیم دایره‌ای به مرکز P بکشیم که در برگیرندهٔ نقطهٔ دیگری از مدار P نباشد.

قضیه سؤال ۱۴ یک گروه گسسته که یک نقطهٔ صفحه را ثابت نگاه دارد یک گروه متناهی است و دوری یا دو وجهی می‌باشد.

تعریف سؤال ۱۷ یک گروه گسسته که یک خط را ثابت نگاه می‌دارد اما هیچ نقطه‌ای را ثابت نگاه نمی‌دارد یک گروه کتیبه نام دارد.

قضیه سؤالهای ۱۶، ۱۷ یک گروه کتیبه در برگیرندهٔ یک زیرگروه دوری انتقال است.

قضیه سؤال ۷ گروه نقطه‌ای یک گروه کتیبه یا $C_۱$ ، $C_۲$، $D_۱$، یا $D_۲$ است.

قضیه سؤال ۱۷ گروه کتیبه با گروه نقطه‌ای $C_۱$ یک گروه دوری متشکل از همهٔ انتقالهاست.

قضیه سؤال ۱۸ گروه کتیبه با گروه نقطه‌ای $C_۲$ یک گروه دو وجهی نامتناهی است که متشکل از نیمدورها و انتقالهاست.

قضیه سؤالهای ۱۹، ۲۰، ۲۲ سه گروه کتیبه با گروه نقطه‌ای $D_۱$ وجود دارند. یکی گروه دوری تولید شده به‌وسیلهٔ یک لغزه است، یکی یک گروه دو وجهی متشکل از بازتابها و انتقالهاست. سومی حاصلضرب مستقیم زیرگروه‌های تولید شده به وسیله یک انتقال و یک بازتاب نسبت به محور است.

قضیه سؤالهای ۲۱، ۲۳ دو گروه کتیبه با گروه نقطه‌ای $D_۲$ وجود دارند. یکی از آنها یک گروه دو وجهی نامتناهی تولید شده به‌وسیلهٔ یک لغزه و یک نیمدور است. دیگری در برگیرندهٔ همهٔ تبدیلهای محتمل است و برابر با حاصلضرب مستقیم یک گروه دو وجهی

نامتناهی تولید شده به‌وسیلهٔ یک انتقال و یک نیمدور و زیرگروه تولید شده به‌وسیله یک بازتاب نسبت به محور است.

یادداشت تاریخی

اولین استفاده وسیع از اعداد مختلط در تحلیل گروههای طولپاییهای صفحه در جلد اول کتاب *Vorlesungen über die theorie der automorphen functionen* اثر ر. فرایک و ف. کلاین (۱۸۹۷) ظاهر شد. در این کتاب گروه‌های گسسته، گروه‌های بدون جایگزینیهای بینهایت کوچک، نامیده می‌شوند. مقاله‌های ج. پولیا[1] و پ. نیگلی[2] (۱۹۲۴) گروه‌های گسستهٔ صفحه را به ریاضیدانان یادآوری کرد، و اولین شرح از گروه‌های کتیبه در چاپ دوم کتاب ا. اسپیسر[3] (۱۹۲۷)[4] مطرح شد.

1) G.polya 2) P.Niggli 3) A. speiser 4) *Theorié der Gruppen von endliche Ordnung*

جوابهای فصل ۲۲

۱. همگی انتقال دارند. لغزه‌ها ۲، ۳، ۶، ۷. بازتابها ۳، ۵، ۶، ۷. بازتابها ۳، ۵، ۶، ۷. نیمدورها ۴، ۶، ۷.

۲. c و $e^{i\theta}$ حقیقی هستند بنابراین $e^{i\theta} = \pm ۱$.

۳. $z \mapsto z + c$ انتقال. $z \mapsto -z + c$ نیمدور. $z \mapsto -\bar{z} + c$ بازتاب. $z \mapsto \bar{z} + c$ بازتاب هرگاه $c = ۰$، لغزه در غیر این صورت.

۴. هرگاه c حقیقی باشد قطعاً $\bar{c} = c$.

۵. (یک) $\beta^{-۱}\alpha\beta$ یک نیمدور با مرکز $A\beta$ است. بنابراین $\alpha(\beta^{-۱}\alpha\beta)$ انتقالی به اندازهٔ دو برابر فاصلهٔ $AA\beta$ است.

(دو) اگر α بازتابی با محور l عمود بر محور حقیقی باشد و β محور l را حرکت دهد آنگاه $\beta^{-۱}\alpha\beta$ بازتابی با محور $l\beta$ است.

(سه) هرگاه γ یک لغزه باشد $\gamma^۲$ یک انتقال است.

۶. گروه انتقال هستهٔ π است.

۷. $\{[z \mapsto \pm z], [z \mapsto \pm \bar{z}]\}$

۸. همگی انتقال هستند.

۹. همهٔ انتقالها یا نیم دورها.

۱۰. همگی انتقال یا بازتابهایی با محورهای عمود بر خط حقیقی هستند.

۱۱. گروه تولید شده به وسیلهٔ لغزهٔ $z \mapsto \bar{z} + ۱$.

۱۲. الگوی ۶ سؤال ۱. گروه تولید شده به‌وسیلهٔ $z \mapsto -z$ و$z \mapsto \bar{z} + ۱$ به‌ازای همهٔ $n \in \mathbb{Z}$ در برگیرندهٔ $z \mapsto \pm z + ۲n$ و $z \mapsto \pm\bar{z} + ۲n + ۱$ است.

۱۳. تنها (c).

۱۴. اگر دورانهای حول O را به اندازهٔ زاویه‌های به‌قدر دلخواه کوچک بتوان انجام داد آنگاه مدارها خوشه‌ای می‌شوند.

۱۵. اگر انتقالها را بتوان به اندازهٔ طولهای به‌قدر دلخواه کوچک انجام داد آنگاه مدارها خوشه‌ای می‌شوند.

۱۶. هرگاه هیچ نقطه‌ای ثابت نگاه داشته نشود یک انتقال یا یک لغزه باید در گروه باشند.

۱۷. الگوی ۱ سؤال ۱. گروه به‌وسیلهٔ $z \mapsto z + ۱$ تولید می‌شود، انتقالی با طول

مینیمال.

۱۸. الگوی ۴ سؤال ۱. $z \mapsto \pm z + n$

۱۹. الگوی ۵ سؤال ۱. $z \mapsto z + n$، $z \mapsto -\bar{z} + n$. $z \mapsto z + n$. $z \mapsto -\bar{z} + r + n$.

۲۰. $z \mapsto \bar{z} + n$ و $z \mapsto \bar{z} + n + \frac{۱}{۲}$. اگر بازتابی نباشد، آنگاه $z \mapsto \bar{z} + n$ جایز نیست، پس گروه متشکل است از $z \mapsto z + n$ و $z \mapsto \bar{z} + n + \frac{۱}{۲}$ به‌ازای همهٔ $n \in \mathbb{Z}$. الگوی ۲ سؤال ۱.

۲۱. نیمدور $z \mapsto -z + c$. لغزهٔ $z \mapsto \bar{z} + d$ و بازتاب $z \mapsto -\bar{z} + e$. اعداد c، d، e حقیقی هستند. حاصلضرب هر دوتای آنها سومی را می‌دهد احتمالاً به جز حاصلضرب بازتاب و نیمدور که ممکن است $z \mapsto \bar{z}$ را به دست دهد. بنابراین با انتقالها، لغزه‌ها وجود دارند. الگوی ۶ سؤال ۱. $z \mapsto \pm z + n$، $z \mapsto \pm\bar{z} + n + \frac{۱}{۲}$. اگر $\alpha : z \mapsto \bar{z} + \frac{۱}{۲}$ و $\beta : z \mapsto -z$ آنگاه $\beta^{-۱}\alpha\beta = \alpha^{-۱}$ و گروه دو وجهی است.

۲۲. حاصلضرب نیمدور و $z \mapsto -\bar{z}$ یک بازتاب با محور عمود بر محور حقیقی است. بنابراین همهٔ اعضا به صورت $z \mapsto z + n$ یا $z \mapsto \bar{z} + n$ هستند. بازتاب $z \mapsto \bar{z}$ در مرکز است و انتقالها به‌وسیلهٔ $z \mapsto z + ۱$ تولید می‌شوند. الگوی ۳ سؤال ۱.

۲۳. طولپاییهایی که در $<\tau، \varrho>$ نیستند یا نیمدور یا بازتابهای عمود بر محور حقیقی یا لغزه هستند. هرگاه α یک بازتاب با محور عمود بر محور حقیقی باشد $\alpha\varrho$ یک نیمدور است. اگر γ یک لغزه غیر واقع در $<\tau، \varrho>$ باشد، آنگاه $\gamma : z \mapsto \bar{z} + r$ که r یک عدد صحیح نیست، اما آنگاه گروه در برگیرندهٔ انتقال $\varrho\gamma\tau^{[-r]} : z \mapsto z + r - [r]$ است که با مینیمال بودن $z \mapsto z + ۱$ در تناقض است. گروه سؤال ۲۲ با $z \mapsto -z$ به صورت مورد نظر است. الگوی ۷ سؤال ۱.

۲۴.

	(یک)	(دو)	(سه)	(چهار)	(پنج)	(شش)	(هفت)
گروه نقطه‌ای	$C_۱$	$C_۲$	$D_۱$	$D_۱$	$D_۲$	$D_۱$	$D_۲$
گروه تمام	C_∞	D_∞	D_∞	C_∞	D_∞	$C_\infty \times C_۲$	$D_\infty \times C_۲$

MATH75.IR

۲۳

گروه‌های کاغذ دیواری

قدم اصلی در رده‌بندی گروه‌های گسستهٔ صفحه که یک نقطه یا یک خط را ثابت نگاه نمی‌دارند گذاردن تحدید بلورنگارانه است، یعنی تنها دورانهای محتمل، مرتبهٔ ۲، ۳، ۴ یا ۶ دارند. نتیجه این که یک گروه کاغذ دیواری یکی از ده گروه نقطه‌ای متفاوت $C_۱$ ، $C_۲$، $C_۳$، $C_۴$، $C_۶$، $D_۱$، $D_۲$، $D_۳$، $D_۴$ یا $D_۶$ را دارد. تجزیه و تحلیل هر یک از این ده امکان که در بعضی حالتها پر زحمت است رده‌بندی را کامل می‌کند.

مطالعهٔ همزمان: پروژه ریاضی مدرسه[1]؛ فصلهای ۱۲ و ۱۸ کتاب لاک‌وود و مک‌میلان؛ کتاب شات‌اشنایدر[2]؛ فصل ۱۱ کتاب مارتین.

تحدید بلورنگارانه

۱. یک گروه G از طولپاییهای صفحه در برگیرندهٔ یک انتقال τ و یک دوران α با مرکز A به‌اندازهٔ زاویهٔ θ است. نگارهٔ $A\tau$ را تحت $\tau^{-۱}\alpha^{-۱}\tau\alpha$ بیابید و نشان دهید طول انتقال $\tau^{-۱}\alpha^{-۱}\tau\alpha$ برابر با $۲\sin\frac{\theta}{۲}$ ضرب در طول انتقال τ است (ابتدا با استفاده از سؤال ۹.۱۷، $\alpha^{-۱}\tau\alpha$ را بیابید).

هرگاه G یک گروه گسسته و τ یک انتقال مینیمال در G باشد (سؤال ۲۲. ۱۶) نتیجه بگیرید $۲\sin\frac{\theta}{۲} \geq ۱$ و بنابراین $\theta \geq \frac{\pi}{۳}$.

1) *School Mathematics Project* 2) Schattschneider

۲. یک گروه G از طولپاییهای صفحه در برگیرندهٔ یک انتقال τ و یک دوران α با مرکز A به اندازهٔ زاویهٔ $\frac{2}{5}\pi$ است. نگارهٔ $A\tau^{-1}$ را تحت $\tau\alpha^{-2}\tau\alpha^{2}$ بیابید و نشان دهید طول انتقال $\tau\alpha^{-2}\tau\alpha^{2}$ برابر با $2\sin\frac{\pi}{10}$ ضرب در طول انتقال τ است.

نتیجه بگیرید G نمی‌تواند یک گروه گسسته باشد.

۳. هرگاه یک گروه گسسته از طولپاییهای صفحه در برگیرندهٔ یک انتقال و یک دوران باشد ثابت کنید مرتبهٔ دوران برابر با ۲، ۳، ۴ یا ۶ است.

این مطلب به تحدید بلورنگارانه موسوم است.

گروه‌های نقطه‌ای محتمل

۴. هرگاه یک گروه گسسته از طولپاییهای صفحه در برگیرندهٔ یک انتقال باشد ثابت کنید گروه نقطه‌ای آن (سؤال ۶.۲۲) یکی از گروه‌های C_1 ، C_2، C_3، C_4، C_6، D_1، D_2، D_3، D_4 یا D_6 است.

۵. هرگاه یک گروه گسسته از طولپاییهای صفحه یک نقطه یا یک خط را ثابت نگاه ندارد یک گروه کاغذ دیواری نامیده می‌شود. هرگاه یک گروه کاغذ دیواری W در برگیرندهٔ یک دوران α باشد و β عضوی از W باشد که مرکز α را حرکت دهد، ثابت کنید یا $\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta$ (اگر β مستقیم است) یا $\alpha\beta^{-1}\alpha\beta$ (اگر β متقابل است) با در نظر گرفتن این که نگاره‌های این اعضا در گروه نقطه‌ای هستند، یک انتقال در W است.

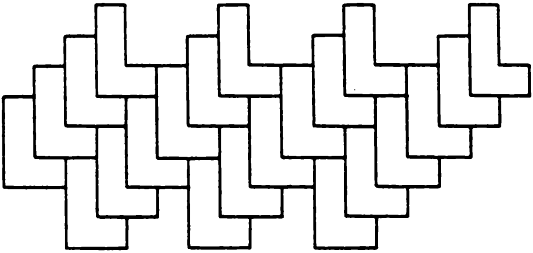
۶. هرگاه یک گروه کاغذ دیواری W دربرگیرندهٔ یک بازتاب ϱ باشد و β عضوی از W باشد که محور ϱ را حرکت دهد، ثابت کنید $\varrho\beta^{-1}\varrho\beta$ یا یک انتقال یا یک دوران است. ثابت کنید هر گروه کاغذ دیواری در برگیرندهٔ یک انتقال است.

گروه نقطه‌ای C_1

۷. فرض کنید W یک گروه کاغذ دیواری با گروه نقطه‌ای C_1 باشد، آنگاه W متشکل از همهٔ انتقالهاست. فرض کنید τ یک انتقال با طول مینیمال در W و σ یک انتقال با طول مینیمال در $W - <\tau>$ باشد. مدار هر نقطهٔ O تحت زیرگروه $<\tau,\sigma>$ از W را توصیف کنید. هرگاه W در برگیرندهٔ یک انتقال غیر واقع در $<\tau,\sigma>$ باشد نشان دهید مدار O تحت W در برگیرندهٔ نقطه‌ای درون مثلث O، $O\tau$، $O\sigma$ است. آیا وجود چنین نقطه‌ای با مینیمال بودن τ یا σ تناقض دارد؟ نتیجه بگیرید W با حاصلضرب

مستقیم دو گروه دوری یکریخت است.

این گروه کاغذ دیواری با $p1$ نمایش داده می‌شود.

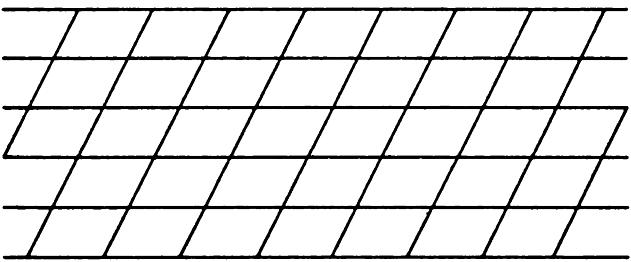


گروه نقطه‌ای C_2

۸. فرض کنید W یک گروه کاغذ دیواری با گروه نقطه‌ای C_2 باشد، آنگاه W متشکل از همهٔ نیمدورها و انتقالهاست. هرگاه α یک نیمدور در W و T یک گروه انتقال W باشد چرا داریم $W = T \cup T\alpha$ ؛ هرگاه T تنها در برگیرندهٔ انتقالها در یک سو باشد چه شرطی برای گروه‌های کاغذ دیواری نقض خواهد شد؟ نتیجه بگیرید T یک گروه کاغذ دیواری است و اگر $T =< \tau, \alpha >$ آنگاه $W =< \alpha, \tau, \sigma >$.

این گروه کاغذ دیواری با $p2$ نمایش داده می‌شود.

۹. اگر یک گروه کاغذ دیواری در برگیرندهٔ یک دوران مرتبهٔ n باشد، آنگاه هر نقطه‌ای که مرکز دورانی از مرتبهٔ n باشد یک $n-$ مرکز برای گروه نامیده می‌شود. هرگاه یک گروه کاغذ دیواری از نوع $p2$ باشد چند مدار متمایز از ۲ − مرکزها دارد؟



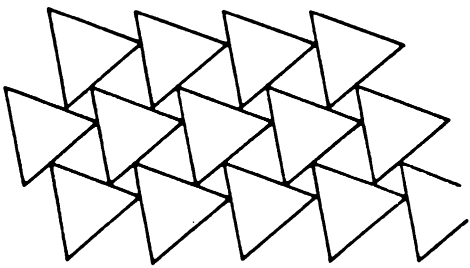
گروه نقطه‌ای $C_۳$

۱۰. فرض کنید W یک گروه کاغذدیواری با گروه نقطه‌ای $C_۳$ باشد، آنگاه W متشکل از همهٔ دورانهای به اندازهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$ یا $\frac{۴}{۳}\pi$ و انتقالهاست. هرگاه α و β دورانهای مرتبهٔ ۳ در W، و T گروه انتقال W باشد آیا $\beta\alpha^{-۱}$ یا $\beta\alpha^{-۲}$ حتماً به T تعلق دارند؟ نتیجه بگیرید $W =< \alpha, T >$. هرگاه τ یک انتقال با طول مینیمال در W باشد با استفاده از سؤال ۷ نشان دهید $T =< \tau, \alpha^{-۱}\tau\alpha >$ و نتیجه بگیرید $W =< \alpha, \tau >$

این گروه کاغذ دیواری با $p_۳$ نمایش داده می‌شود.

۱۱. هرگاه A مرکز یک دوران α به اندازهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$ و τ یک انتقال باشد دورانهای با مراکز $A\tau$، $A\tau\alpha$، $A\tau\alpha^۲$، $A\tau^{-۱}$، $A\tau^{-۱}\alpha$ و $A\tau^{-۱}\alpha^۲$ را به ترتیب نام ببرید. مراکز دورانهای $\alpha\tau$، $\tau\alpha$، $\alpha\tau^{-۱}$، $\tau^{-۱}\alpha$، $\alpha^{-۱}\tau\alpha^{-۱}$ و $\alpha^{-۱}\tau^{-۱}\alpha^{-۱}$ را در این شش ضلعی قرار دهید. هرگاه α و β دورانهایی به‌اندازهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$ باشند، چگونه طول انتقال $\alpha\beta^{-۱}$ با فاصلهٔ بین مرکزها مقایسه می‌شود؟

نتیجه بگیرید یک گروه کاغذ دیواری از نوع $p_۳$ سه مدار ۳ـ مرکزی دارد.



گروه نقطه‌ای $C_۴$

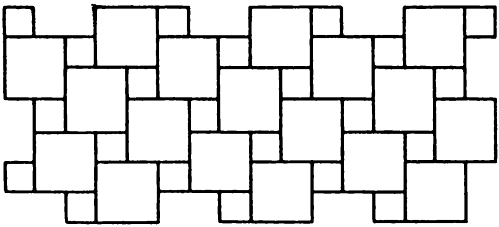
۱۲. فرض کنید W یک گروه کاغذ دیواری با گروه نقطه‌ای $C_۴$ باشد، آنگاه W متشکل از همهٔ دورانهای به‌اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ ، π و $\frac{۳\pi}{۲}$ و همهٔ انتقالها است. هرگاه α یک دوران مرتبهٔ ۴ در W و β دوران دلخواهی در W و T گروه انتقالهای W باشد آیا یکی از $\beta\alpha^{-۱}$، یا $\beta\alpha^{-۲}$، یا $\beta\alpha^{-۳}$ باید به T تعلق داشته باشند؟ نتیجه بگیرید $W =< \alpha, T >$. هرگاه τ انتقالی با طول مینیمال در W باشد با استفاده از سؤال ۷ نشان دهید $T =< \tau, \alpha^{-۱}\tau\alpha >$ و نتیجه بگیرید $W =< \alpha, \tau >$.

این گروه کاغذ دیواری با $p_۴$ نمایش داده می‌شود.

۱۳. هرگاه A مرکز یک ربع دور α و τ یک انتقال باشد به ترتیب ربع دورهایی با مراکز $A\tau$،$A\tau^{-1}$ ، $A\tau\alpha$ ، و $A\tau^{-1}\alpha$ را نام ببرید. مراکز ربع دورهای $\alpha\tau$، $\tau\alpha$، $\alpha\tau^{-1}$ و $\tau^{-1}\alpha$ را در این مربع قرار دهید.

هرگاه α و β دو ربع دور باشند چگونه طول انتقال $\alpha\beta^{-1}$ را با فاصلهٔ بین مراکز مقایسه می‌کنید؟ نتیجه بگیرید یک گروه کاغذ دیواری از نوع $p4$ دو مدار ۴ـ مرکزی دارد.

۱۴. ثابت کنید یک گروه کاغذ دیواری از نوع $p4$ دقیقاً یک مدار ۲ـ مرکزی دارد که ۴ـ مرکزی نیستند.



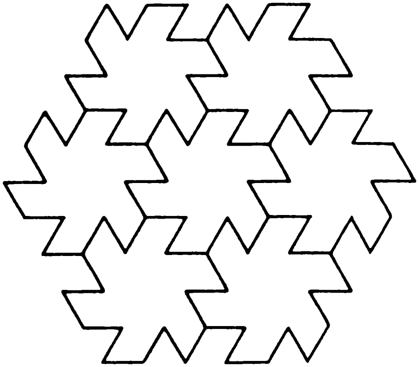
گروه نقطه‌ای C_6

۱۵. فرض کنید W یک گروه کاغذ دیواری با گروه نقطه‌ای C_6 باشد، آنگاه W متشکل از همهٔ دورانهای به اندازهٔ $\frac{\pi}{3}$، $\frac{2\pi}{3}$، π، $\frac{4\pi}{3}$و $\frac{5\pi}{3}$ و انتقالها است. هرگاه α یک دوران مرتبهٔ ۶ در W و β دورانی دلخواه در W و T گروه انتقالها W باشد، آیا یکی از $\beta\alpha^{-1}$، $\beta\alpha^{-2}$، $\beta\alpha^{-3}$، $\beta\alpha^{-4}$ یا $\beta\alpha^{-5}$ باید به T تعلق داشته باشند؟ نتیجه بگیرید $W =< \alpha, T >$. هرگاه τ انتقالی با طول مینیمال در W باشد با استفاده از سؤال ۷ نشان دهید $T =< \tau, \alpha^{-1}\tau, \alpha >$ و نتیجه بگیرید $W =< \alpha, \tau >$.

این گروه کاغذ دیواری با $p6$ نمایش داده می‌شود.

۱۶. هرگاه α و β دورانهایی به اندازهٔ $\frac{\pi}{3}$ به ترتیب با مراکز A و B باشند بررسی کنید $\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta$ یک نگاشت انتقال از A به B است. نتیجه بگیرید در یک گروه کاغذ دیواری از نوع $p6$، ۶ـ مرکزی‌ها در مدار منحصر بفردی تحت گروه انتقالها قرار می‌گیرند. با در نظر گرفتن تبدیل $(\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta)\beta^{3}$ ثابت کنید وسط AB یک ۲ـ مرکزی است. با در نظر گرفتن نیمدور η و دورانهای α و $\eta\alpha\eta$ ثابت کنید هر ۲ـ مرکزی در چنین گروهی وسط خط واصل دو ۶ـ مرکزی قرار می‌گیرد.

۱۷. هرگاه α و β دورانهایی به اندازهٔ $\frac{\pi}{3}$ به ترتیب با مراکز A و B باشند طبیعت تبدیل $\beta\alpha$ را مشخص کنید. نتیجه بگیرید ۳ـ مرکزی‌هایی که ۶ـ مرکزی نیستند در یک مدار منحصر بفرد از یک گروه کاغذ دیواری از نوع $p6$ قرار دارند.



گروه نقطه‌ای D_1

۱۸. محور $z \mapsto e^{i\theta}\bar{z}$ چیست؟ نشان دهید همهٔ بازتابها و لغزه‌ها که به عضو یکسانی از گروه نقطه‌ای نگاشته می‌شوند محورهای موازی دارند.

۱۹. فرض کنید W یک گروه کاغذ دیواری با گروه نقطه‌ای D_1 باشد، آنگاه W متشکل از طولپاییهای متقابل و انتقالهاست. هرگاه γ یک طولپایی متقابل در W باشد و T گروه انتقالهای W باشند چرا $W = T \cup T\gamma$؟ فرض کنید l محور γ است. چه شرطی برای گروه‌های کاغذ دیواری نقض می‌شود هرگاه T تنها شامل انتقالهای در سوی l باشد؟ فرض کنید α یک انتقال در W باشد که $l \neq l\alpha$. فرض کنید $\gamma = \beta\varrho$ که ϱ بازتاب نسبت به l است و β یا همانی و یا یک انتقال در سوی l است. (توجه کنید فرض نکرده‌ایم که یا β یا ϱ لزوماً به W تعلق دارند.) ثابت کنید $\alpha^{-1}\gamma^{-1}\alpha\gamma = (\alpha^{-1}\varrho\alpha)\varrho$ و نتیجه بگیرید W شامل انتقالهای عمود بر l است.

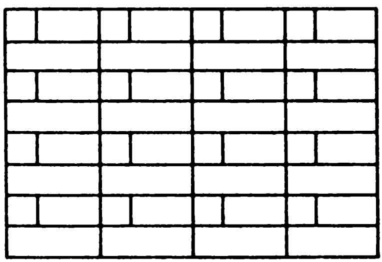
هرگاه γ یک لغزه باشد چرا W باید شامل انتقالهای در سوی l باشد؟ هرگاه γ یک بازتاب نسبت به l و T تنها شامل انتقالهای عمود بر l باشد چه شرطی برای گروه‌های کاغذ دیواری نقض می‌شود؟ هرگاه γ بازتاب نسبت به l و μ یک انتقال در W باشد که

یک خط عمود بر l را حرکت می‌دهد ثابت کنید $(\gamma\mu)^2$ یک انتقال است. به علاوه با در نظر گرفتن نگارهٔ یک نقطهٔ روی l تحت انتقالهای μ و $\gamma\mu\gamma$ نتیجه بگیرید نگارهٔ این نقطه تحت $\gamma\mu\gamma\mu$ روی l قرار دارد به نحوی که W شامل انتقالهای در سوی l است.

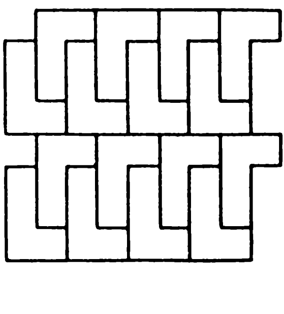
۲۰. فرض کنید W یک گروه کاغذ دیواری با گروه نقطه‌ای D_1 شامل یک طولپایی متقابل γ با محور l باشد. فرض کنید τ یک انتقال مینیمال در W در سوی l باشد و σ یک انتقال مینیمال در W عمود بر l باشد. بنا به سؤال ۱۹ این گونه انتقالها وجود دارند. حال فرض می‌کنیم که $<\tau,\sigma>$ گروه انتقالهای W باشد. چرا باید $\gamma^2 \in <\tau>$؟ هرگاه $\gamma^2 = \tau^m$ و m عددی زوج باشد یک بازتاب ϱ در W بسازید. در این حالت $W = <\varrho,\tau,\sigma>$ و این نوع گروه به pm مشهور است. هرگاه $\gamma^2 = \tau^m$ و m عددی فرد باشد یک لغزه δ بسازید که $<\gamma,\tau> = <\delta>$.

در این حالت $W = <\delta,\sigma>$ و این نوع گروه به pg مشهور است.

۲۱. ثابت کنید گروهی از نوع pm دقیقاً دو مدار از محورهای بازتابها دارد.



۲۲. ثابت کنید یک گروه از نوع pg شامل هیچ بازتابی نیست.



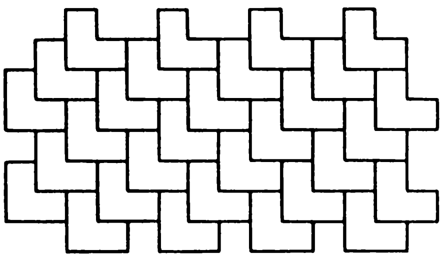
۲۳. فرض کنید W یک گروه کاغذ دیواری با گروه نقطه‌ای D_1 شامل یک طولپایی γ با محور l باشد. فرض کنید τ یک انتقال مینیمال در W در سوی l و ϱ یک انتقال مینیمال در W عمود بر l باشد. فرض کنید $<\tau, \varrho>$ یک زیرگروه سره از گروه انتقالهای W است.

با استفاده از استدلال سؤال ۷ نشان دهید گروه انتقالهای W شامل یک عضو μ است که $O\mu$ در مثلث O، $O\tau$، $O\sigma$ قرار دارد اما روی یکی از اضلاع $OO\tau$ یا $OO\sigma$ واقع نیست. هرگاه O نقطه‌ای روی l باشد نشان دهید چهار نقطهٔ $O\mu$ ، $O\mu^{-1}$، $O\gamma^{-1}\mu\gamma$ و $O\gamma^{-1}\mu^{-1}\gamma$ چهار رأس مستطیلی هستند که l یک خط تقارن آن است. نتیجه بگیرید انتقال $\gamma^{-1}\mu\gamma\mu \in <\tau>$ و انتقال $\gamma^{-1}\mu^{-1}\gamma\mu \in <\alpha>$ و از مکان $O\mu$ در مثلث O، $O\tau$، $O\sigma$ نتیجه بگیرید $\gamma^{-1}\mu^{-1}\gamma\mu = \sigma$ و $\gamma^{-1}\mu\gamma\mu = \tau$. از معادلهٔ اول نتیجه بگیرید $O\mu$ روی میانهٔ مثلث O، $O\tau$، $O\sigma$ موازی با $OO\tau$ قرار دارد و از معادله دوم نتیجه بگیرید $O\mu$ روی میانهٔ موازی با $OO\sigma$ واقع است. از این رو $O\mu$ وسط $O\tau O\sigma$ است و $\mu^2 = \tau\sigma$. با استفاده از یکتایی μ نشان دهید گروه انتقالهای W برابر با $<\mu, \tau, \sigma> = <\mu, \tau> = <\mu, \sigma>$ است.

مانند سؤال ۲۰، $\gamma^2 \in <\tau>$. هرگاه $\gamma^2 = \tau^m$ و m عددی زوج باشد بازتابی با محور l در W بسازید. هرگاه $\gamma^2 = \tau^m$ و m عددی فرد باشد و فرض کنیم $\delta = \gamma\tau^{\frac{1}{2}(1-m)}$ لغزه‌ای باشد که $<\delta> = <\gamma, \tau>$ نقطه‌ای بیابید که به وسیلهٔ $\mu^{-1}\delta$ ثابت نگاه داشته شود به نحوی که این طولپایی متقابل در W حتماً یک بازتاب باشد. m چه زوج باشد و چه فرد W شامل بازتابی مانند ϱ است و $W = <\varrho, \mu, \tau>$.

این نوع گروه به cm مشهور است.

۲۴. ثابت کنید در یک گروه از نوع cm محورهای بازتابها همگی در یک مدار قرار دارند و محورهای لغزه‌هایی که محورهای بازتابها نیستند نیز در یک مدار قرار دارند.



گروه نقطه‌ای $D_۲$

۲۵. فرض کنید W یک گروه کاغذ دیواری با گروه نقطه‌ای $D_۲$ باشد، آنگاه W متشکل از انتقالها، نیمدورها و طولپاییهای متقابل است. فرض کنید γ و δ طولپاییهای متقابل در W با محورهای متعامد باشند. با در نظر گرفتن نگارهٔ $\gamma\delta$ در گروه نقطه‌ای، ثابت کنید $\gamma\delta$ یک نیمدور است و نتیجه بگیرید $W =< \gamma, \delta, T >$ که T گروه انتقالهای W است.

با استفاده از سؤال ۱۹ نشان دهید یک انتقال مینیمال τ در سوی محور γ و یک انتقال مینیمال σ در سوی محور δ وجود دارند.

حال فرض کنید $T =< \tau, \sigma >$ و $\gamma^۲ = \tau^m$ و $\delta^۲ = \sigma^n$.

(یک) هرگاه m و n زوج باشند بازتابهای $\varrho_۱$ و $\varrho_۲$ نسبت به محورهای γ و δ را بیابید.

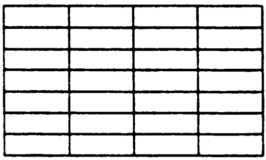
در این حالت $W =< \varrho_۱, \varrho_۲, \tau, \sigma >$ و گروه به نوع pmm مشهور است.

(دو) هرگاه m و n فرد باشند لغزه‌های $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ را بیابید که $< \lambda_۱ >=< \gamma, \tau >$ و $< \lambda_۲ >=< \delta, \sigma >$. در این حالت $W =< \lambda_۱, \lambda_۲ >$ وگروه به نوع pgg مشهوراست.

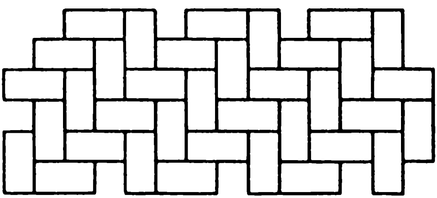
(سه) هرگاه یکی از m و n زوج و دیگری فرد باشد مثلاً m زوج و n فرد باشد یک بازتاب ϱ نسبت به محور γ و یک لغزهٔ λ را چنان بیابید که $< \lambda >=< \delta, \sigma >$.

در این حالت $W =< \varrho, \lambda, \tau >$ و گروه به نوع pmg مشهور است.

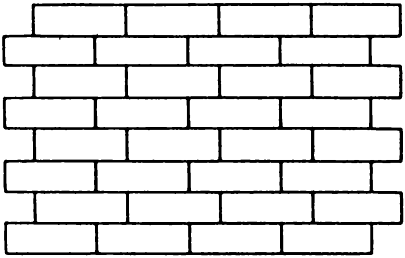
۲۶. برای یک گروه از نوع pmm نشان دهید چهار مدار از ۲ـ مرکزی‌ها وجود دارند و هر ۲ـ مرکزی روی محور یک بازتاب است.



۲۷. برای یک گروه از نوع pgg نشان دهید هیچ ۲ـ مرکزی روی محور یک لغزه قرار ندارد و دقیقاً دو مدار از ۲ـ مرکزی‌ها وجود دارند.



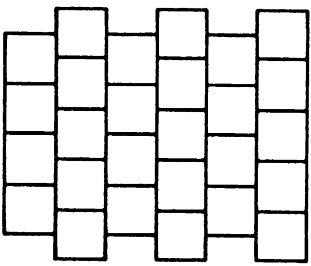
۲۸. برای یک گروه از نوع pmg نشان دهید همهٔ ۲ـ مرکزی‌ها روی محورهای لغزه‌ها قرار دارند و هیچ ۲ـ مرکزی روی محورهای بازتابها واقع نیستند و دقیقاً دو مدار ۲ـ مرکزی وجود دارند.



۲۹. فرض کنید W یک گروه کاغذ دیواری با گروه نقطه‌ای D_2 باشد و γ، δطولپاییهای متقابل در W با محورهای متعامد باشند. فرض کنید τ یک انتقال مینیمال در سوی محور γ و σ یک، انتقال مینیمال در سوی محور δ باشد. حال فرض کنید $<\tau, \sigma>$ یک زیرگروه سره از T گروه انتقالهای W باشد. با استفاده از سؤال ۲۳ ثابت کنید یک انتقال μ در W وجود دارد که $\mu^2 = \tau\sigma$ و $T =<\mu, \tau>$. دوباره با استفاده از سؤال ۲۳ ثابت کنید W شامل بازتابهای ϱ_1 وϱ_2 است که محورهای آنها به ترتیب موازی با محور γ و δ هستند.

در این حالت $W =<\varrho_1, \varrho_2, \mu, \tau>$ و گروه به نوع cmm مشهور است.

۳۰. برای یک گروه از نوع cmm نشان دهید بین دو محور موازی بازتابها محوری از یک لغزه وجود دارد. نشان دهید سه مدار ۲ـ مرکزی وجود دارند که دو تا از آنها روی محورهای بازتابها و یکی از آنها روی محور لغزه قرار دارند.



گروه نقطه‌ای $D_۳$

۳۱. هرگاه α دورانی از مرتبهٔ ۳ و γ طولپایی متقابل دلخواهی باشد با در نظر گرفتن یک نقطه روی محور γ ثابت کنید $\gamma\alpha^{-۱}\gamma^{۲}\alpha$ یک بازتاب است.

۳۲. فرض کنید W یک گروه کاغذ دیواری با گروه نقطه‌ای $D_۳$ باشد، آنگاه W متشکل از دورانهای مرتبهٔ ۳، انتقالها و طولپاییهای متقابل است. با استفاده از سؤال ۳۱ نشان دهید W شامل یک بازتاب مانند ϱ است که توسط یک دوران مزدوج گیری شده است. نشان دهید W شامل بازتابهایی با محورهای در هر سه سوی ممکن است. فرض کنید A نقطهٔ تلاقی دو محور بازتاب در W باشد. چرا A باید یک ۳ـ مرکزی برای W باشد؟ فرض کنید α دورانی با مرکز A و به اندازهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$ باشد. هرگاه τ یک انتقال مینیمال در W باشد با استفاده از سؤال ۱۰ نشان دهید $W =< \varrho, \alpha, \tau >$.

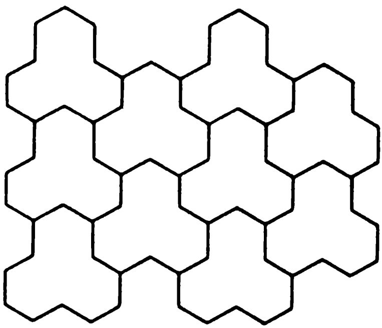
بنا به سؤال ۱۹ انتقالهایی در W موازی با محور ϱ وجود دارند. اگر یکی از این‌ها در W مینیمال باشد، آنگاه گروه به $p۳۱m$ مشهور است.

فرض کنید σ یک انتقال مینیمال در سوی محور ϱ را نمایش دهد. با استفاده از استدلال سؤال ۷ ثابت کنید اگر σ یک انتقال با طول مینیمال در W نباشد، آنگاه یک انتقال τ با طول مینیمال وجود دارد که $A\tau$ درون مثلث A، $A\sigma$، $A\sigma^{-۱}\alpha^{۲}$ قرار دارد. حال با استفاده از استدلالهای سؤال ۲۳ نشان دهید $\tau(\varrho\tau\varrho) = \sigma$ به نحوی که $A\tau$ روی محور عمود منصف $AA\sigma$ واقع است. نتیجه بگیرید $A\tau$ در گرانیگاه مثلث A، $A\sigma$، $A\sigma^{-۱}\alpha^{۲}$ قرار دارد.

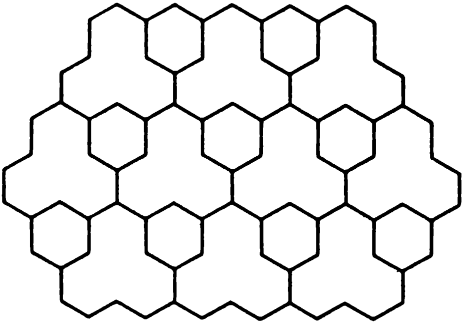
در این حالت $W =< \varrho, \alpha, \tau >$ و این گروه به نوع $p۳m۱$ مشهور است.

۳۳. برای یک گروه از نوع $p۳۱m$ نشان دهید دقیقاً دو مدار ۳ـ مرکزی وجود دارند.

نمادگذاری در اینجا مطابق با اتحادیه بین‌المللی بلورنگاری است و با نمادگذاری کاکستر و $S.M.P$ فرق دارد.



۳۴. برای یک گروه از نوع $p3m1$ نشان دهید سه مدار ۳ـ مرکزی وجود دارند.



گروه نقطه‌ای D_4

۳۵. فرض کنید W یک گروه کاغذ دیواری با گروه نقطه‌ای D_4 باشد. با استفاده از سؤال ۱۲ نشان دهید زیرگروه طولپاییهای مستقیم W برابر با $<\alpha, \tau>$ است که α یک ربع ـ دور و τ انتقالی با طول مینیمال در W است. اگر γ طولپایی متقابل دلخواهی در W باشد، چرا $W =< \gamma, \alpha, \tau >$؟ بنا به سؤال ۱۳، ۴ـ مرکزی‌های W در دو مدار تحت $<\alpha, \tau>$ قرار دارند که به آن به عنوان مدار A (شامل A مرکز α) و مدار B (شامل مرکز $\alpha\tau$) ارجاع می‌دهیم. $\gamma^{-1}\alpha\gamma$ چه نوع طولپایی است؟ نتیجه بگیرید $A\gamma$ در مدار A یا مدار B قرار می‌گیرد. هرگاه $A\gamma$ در مدار A قرار بگیرد ثابت کنید به ازای هر طولپایی متقابل δ از W، $A\delta$ در مدار A واقع می‌شود. هرگاه $A\gamma$ در مدار B قرار بگیرید ثابت کنید به ازای هر طولپایی متقابل δ از W، $A\delta$ در مدار B قرار می‌گیرد.

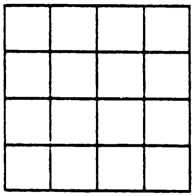
(یک) حال فرض کنید $A\gamma$ در مدار B واقع است. هرگاه B یک طولپایی مستقیم در W است که $A\beta = A\gamma$ ماهیت طولپایی $\gamma\beta^{-1}$ را مشخص کنید. هرگاه ϱ بازتابی در W با محور گذرندهٔ از A باشد محل نگاره‌های ممکن ۴ـ مرکزی $A\tau$ تحت بازتابهای ϱ، $\varrho\alpha$، $\varrho\alpha^2$، $\varrho\alpha^3$ را مشخص کنید. نتیجه بگیرید محورهای این چهار بارتاب در امتداد یا عمود یا به زاویه $\pi/4$ با سوی τ است. هرگاه $W =< \varrho, \alpha, \tau >$ که محور بازتاب ϱ از مرکز α در سوی τ می‌گذرد، W به نوع $p4m$ مشهور است.

(دو) فرض کنید $A\gamma$ در مدار B قرار گیرد و B مرکز ربع ـ دور $\alpha\tau = \beta$ باشد. چرا یک طولپایی متقابل در W باید وجود داشته باشد که A را به B بنگارد؟ با استفاده

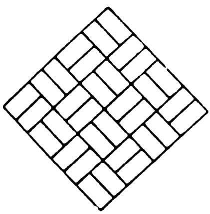
از چهار طولپایی ثابت نگاه دارندهٔ A چهار طولپایی متقابل متمایز بسازید که A را به B بنگارند. چرا حتماً نگاره‌های B تحت این چهار طولپایی متقابل A، $A\beta$، $A\beta^2$ و $A\beta^3$ هستند؟ فرض کنید γ طولپایی متقابل در W باشد که $A \mapsto B$ و $B \mapsto A\beta^2$ می‌نگارد. آیا γ حتماً یک لغزه است؟ محور آن چیست؟ بررسی کنید $\tau = (\alpha\gamma)^2$ به نحوی که $<\gamma, \alpha, \tau> = <\gamma, \alpha>$. هرگاه $W = <\gamma, \alpha>$ که محور لغزهٔ γ از مرکز ربع ـ دور α می‌گذرد. W به نوع $p4g$ مشهور است.

در یک گروه از نوع $p4g$ ثابت کنید $\alpha^2\gamma$ یک بازتاب است به نحوی که بازتابهایی با محورهای در حداقل دو سو وجود دارند. چرا بازتابهایی با محورهای در چهارسو با هم در یک چنین گروهی وجود ندارند؟

۳۶. در یک گروه از نوع $p4m$ نشان دهید سه مدار از محورهای بازتاب و یک مدار دیگر از محورهای لغزه‌ها وجود دارند.



۳۷. در یک گروه از نوع $p4g$ نشان دهید دقیقاً یک مدار از محورهای بازتاب، یک مدار از محورهای لغزه شامل ۴ـ مرکزی‌ها و یک مدار دیگر از محورهای لغزه وجود دارد.



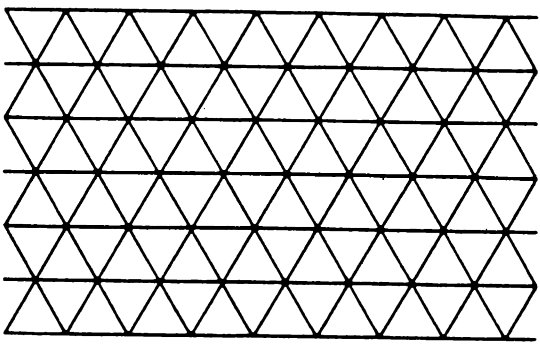
گروه نقطه‌ای D_6

۳۸. هرگاه W یک گروه کاغذ دیواری با گروه نقطه‌ای D_6 باشد با استفاده از سؤال

۳۱ نشان دهید W شامل یک بازتاب ϱ است. هرگاه α دورانی به اندازهٔ $\frac{\pi}{3}$ در W با مرکز A باشد ثابت کنید $A\varrho$ و نیز $A\varrho\alpha$ برای W، ۶ـ مرکزی هستند و بنابراین محور ϱ شامل یک ۶ـ مرکزی است. حال اگر فرض کنیم A روی محور ϱ قرار دارد با در نظر گرفتن تبدیلهای $\varrho\alpha^n$ به ازای $n = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶$ ثابت کنید هر یک از شش سوی ممکن شامل محورهای بازتابها است. با استفاده از سؤال ۱۹ نشان دهید انتقالهایی در W موازی با محور ϱ وجود دارند. هرگاه σ یک چنین انتقال مینیمالی باشد و σ در W مینیمال باشد با استفاده از سؤال ۱۵ نشان دهید $W =< \varrho, \alpha, \sigma >$. هرگاه σ در W مینیمال نباشد با استفاده از سؤال ۳۲ نشان دهید یک انتقال مینیمال τ در W وجود دارد که $A\tau$ در گرانیگاه مثلث A، $A\sigma$، $A\sigma\alpha$ قرار دارد. بازتابی با محور $AA\tau$ را نام ببرید و نتیجه بگیرید در هر دو حالت $W =< \varrho, \alpha, \tau >$ که ϱ بازتابی با محور گذرنده از مرکز α در سوی انتقال مینیمال τ است.

این گروه به نوع $p6m$ مشهور است.

۳۹. در یک گروه از نوع $p6m$ نشان دهید یک مدار از ۶ـ مرکزی‌ها و یک مدار از ۳ـ مرکزی‌ها و یک مدار از ۲ـ مرکزی‌ها وجود دارد که ۶ـ مرکزی‌ها و دو مدار از محورهای بازتابها نیستند.



هر یک از ۱۷ نوع در حد یکریختی یکتا است

۴۰. در حالت گروه‌های انواع $p1$، $p2$، pm، pg، cm، pmm، pmg، pgg، cmm نشان دهید برای هر دو گروه از یک نوع مولدها ممکن است تحت مزدوج‌گیری

به وسیلهٔ یک تبدیل مستوی تناظر یابند به نحوی که دو زیرگروه انتقالها دو زیرگروه طولپاییهای مستقیم و دو گروه تمام یکریخت هستند

۴۱. در حالت گروه‌های انواع $p۳$، $p۴$، $p۶$، $p۳۱m$، $p۳m۱$، $p۴m$، $p۴g$، $p۶m$ نشان دهید برای هر دو گروه از یک نوع مولدها می‌توانید تحت مزدوج‌گیری به وسیلهٔ یک تبدیل تشابهی تناظر یابند به نحوی که دو زیر گروه انتقالها و دو زیر گروه طولپاییهای مستقیم و دو گروه تمام یکریخت هستند.

خلاصهٔ مطالب

قضیه سؤال ۳ تحدید بلورنگارانه . اگر یک گروه گسسته در برگیرندهٔ یک انتقال و یک دوران باشد، آنگاه دوران از مرتبهٔ ۲، ۳، ۴ یا ۶ است.

تعریف سؤال ۵ یک گروه گسسته که یا یک نقطه یا یک خط را ثابت نگاه ندارد و متشکل از طولپاییهای صفحه باشد یک گروه کاغذ دیواری نام دارد.

قضیه سؤال ۴ یک گروه کاغذدیواری یکی از گروه‌های نقطه‌ای $C_۱$، $C_۲$، $C_۳$، $C_۴$، $C_۶$، $D_۱$، $D_۲$، $D_۳$، $D_۴$ یا $D_۶$ را دارد. زیرگروه انتقالهای یک گروه کاغذ دیواری دو مولد دارد.

قضیه سؤالهای ۷،۸،۱۰،۱۲، ۱۵،۴۰،۴۱ در حد یکریختی دقیقاً یک گروه کاغذ دیواری با گروه نقطه‌ای $C_۱$، $C_۲$، $C_۳$، $C_۴$، یا $C_۶$ وجود دارد.

قضیه سؤالهای ۲۰،۲۳،۴۰ در حد یکریختی دقیقاً سه گروه کاغذدیواری با گروه نقطه‌ای $D_۱$ وجود دارد.

قضیه سؤالهای ۲۵،۲۹،۴۰ در حد یکریختی دقیقاً چهار گروه کاغذ دیواری با گروه نقطه‌ای $D_۲$ وجود دارند.

قضیه سؤالهای ۳۲،۴۱ در حد یکریختی دقیقاً دو گروه کاغذ دیواری با گروه نقطه‌ای $D_۳$ وجود دارند.

قضیه در حد یکریختی دقیقاً دوگروه کاغذ دیواری با گروه نقطه‌ای $D_۴$ وجود دارند.
سؤالهای ۳۵، ۴۱

قضیه در حد یکریختی دقیقاً یک گروه کاغذ دیواری با گروه نقطه‌ای $D_۶$ وجود دارد.
سؤالهای ۳۸، ۴۱

یادداشت تاریخی

در سال ۱۸۶۸ ک. ژوردان گروه‌های طولپاییهای مستقیم فضای سه‌بُعدی را تجزیه و تحلیل کرد و کلمهٔ گروه را برای اولین بار در مضمونی هندسی به کاربرد. وی انواع متفاوت گروه‌های گسستهٔ انتقالها و نیز با استفاده از کار براویس (۱۸۴۸) گروه‌های نقطه‌ای ممکن را شناسایی کرد. حاصل رده‌بندی وی از فضای گروه‌ها کامل نبود اما راه را برای کار ا. س فدروف[۳](۱۸۹۰) و ا.شون فلایز[۴] هموار کرد. در بررسی آنها از الگوهای ممکن بلور نشان دادند که ۲۳۰ گروه گسسته متفاوت از فضای سه‌بُعدی وجود دارند که نه یک نقطه و نه یک خط و نه یک صفحه را ثابت نگاه نمی‌دارند. کار آنها انگیزه‌ای شد برای ر.فرایک و ف. کلاین تا در اولین کتابشان در مورد توابع خودریخت (۱۸۹۷) به رده‌بندی گروه‌های کاغذ دیواری بپردازند. ج . پولیا در یک مقالهٔ زیبا[5] که در سال ۱۹۲۴ انتشار یافت از تأثیر کتاب مرجع ا. شون فلایز قدردانی کرد. این مقاله خلاصه‌ای از کار این فصل است. پولیا گروه‌های کاغذ دیواری را تحت گروه‌های نقطه‌ای رده‌بندی می‌کند و مثالهایی از ۱۷ نوع الگو ارائه می‌دهد.

در سال ۱۹۰۰ د. هیلبرت سؤالی با این مضمون مطرح کرد که آیا تعداد گروه‌های گسستهٔ $\mathbb{R}^n$ متناهی هستند؟ پاسخ مثبت توسط ل. بایبر باخ[۶] ارائه شد (۱۹۱۰).

---

3) E. S. Fedorov 4) A. schönflies 5) *Über die Analogie der Kristallsymme trie in der Ebene* 6) L.Bieberbach

جوابهای فصل ۲۳

۱. چون گروه انتقالها یک زیرگروه نرمال است $\alpha^{-1}\tau\alpha$ یک انتقال است بنابراین $(\alpha^{-1}\tau\alpha)\tau^{-1}$ نیز یک انتقال است.

۲. چون گروه انتقالها زیر گروهی نرمال است $\alpha^{-2}\tau\alpha^{2}$ یک انتقال است بنابراین $\tau(\alpha^{-2}\tau\alpha^{2})$ نیز یک انتقال است. وجود یک انتقال با طول مینیمال موجب تناقض است.

۳. بنا به سؤال ۱ تنها ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ مجاز هستند. سؤال ۲، امکان ۵ را رد می‌کند.

۴. سؤال ۲۱. ۲۵ را به کار برید.

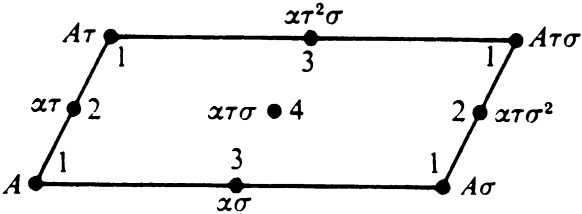
۵. هرگاه $\alpha : z \mapsto e^{i\theta}z + c$ و $\beta : z \mapsto e^{i\phi}z + d$، نگارهٔ $\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta$ در گروه نقطه‌ای $z \mapsto e^{-i\theta}e^{-i\phi}e^{i\theta}e^{i\phi}z = z$ است. هرگاه $\beta : z \mapsto e^{i\phi}\bar{z} + d$ آنگاه نگارهٔ $\alpha\beta^{-1}\alpha\beta$ در گروه نقطه‌ای $z \mapsto \overline{e^{i\theta}e^{i\phi}e^{i\theta}e^{i\phi}z} = z$ است. تنها انتقالها در گروه نقطه‌ای به همانی نگاشته می‌شوند.

۶. هرچه ϱ، β باشند $\varrho\beta^{-1}\varrho\beta$ باید یک طولپایی مستقیم باشد. اگر آن یک دوران باشد، آنگاه W بنا به سؤال ۵ شامل یک انتقال است. مجذور یک لغزه یک انتقال است.

۷. تحت گروه $<\tau, \sigma>$ مدار هر نقطه یک مشبکهٔ متوازی‌الاضلاع است. هرگاه t یک انتقال در W باشد که در $<\tau, \sigma>$ نیست نقطهٔ Ot به ازای اعداد صحیحی مانند m و n در یک متوازی‌الاضلاع با رأسهای $O\tau^m\sigma^n$ و $O\tau^{m+1}\sigma^n$ ، $O\tau^{m+1}\sigma^{n+1}$ و $O\tau^m\sigma^{n+1}$ قرار دارد. بنابراین $O(t\tau^{-m}\sigma^{-n})$ در متوازی‌الاضلاع O، $O\tau$، $O\tau\sigma$، $O\sigma$ قرار دارد. اما آن نمی‌تواند روی یالهای متوازی‌الاضلاع قرارگیرد بدون این که مینیمال بودن τ و σ را نقض کند. اگر آن در مثلث $O\tau$ ، $O\tau\sigma$، $O\sigma$ قرارگیرد آنگاه $O\tau\sigma(t\tau^{-m}\sigma^{-n})^{-1}$ در مثلث O، $O\tau$، $O\sigma$ قرار می‌گیرد و آنگاه یک انتقال با طول کمتر از σ در $W - <\tau>$ داریم. چون τ و σ در سوهای متفاوت هستند $\tau^i\sigma^j = \tau^m\sigma^n \Rightarrow \tau^{i-m} = \sigma^{i-j} = 1$ بنابراین $i = m$ و $j = n$. لذا زیرگروه‌های $<\sigma>$ و $<\tau>$ در شرطهای سؤال ۱۱.۱۰ صدق می‌کنند.

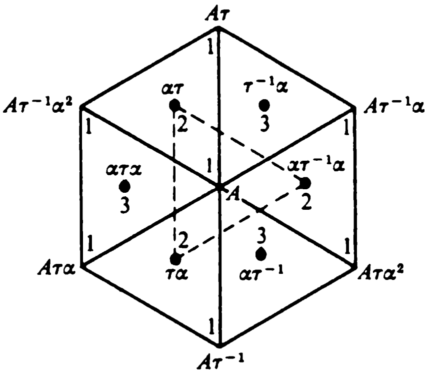
۸. با گروه نقطه‌ای C_2 گروه انتقالها دو هم‌مجموعه یعنی T و $T\alpha$ دارد. اگر همهٔ انتقالها در یک سو باشند گروه یک خط را ثابت نگاه خواهد داشت. با انتقالهایی در دو سو هیچ نقطه یا خطی ثابت نگاه داشته نمی‌شود و بنا به تعریف، گروه گسسته است.

۹. چهار.



۱۰. T گروه انتقالها، سه هم مجموعهٔ T، $T\alpha$ و $T\alpha^۲$ در W دارد. چون $\alpha^{-۱}\tau\alpha$ یک انتقال همطول با τ است لذا $T =< \tau, \alpha^{-۱}\tau\alpha >$.

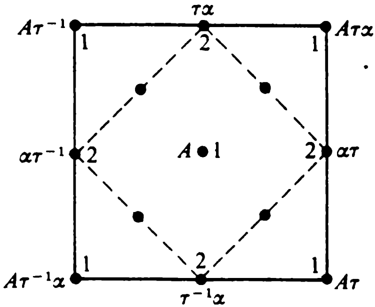
۱۱. نقطهٔ $A\beta$ مرکز $\beta^{-۱}\alpha\beta$ است. طول انتقال $\alpha\beta^{-۱}$ برابر با $\sqrt{۳}$ برابر فاصلهٔ بین مرکزهاست. اگر τ یک انتقال با طول مینیمال باشد، لذا مراکز نشاندار شده تا حد امکان نزدیک هم قرار می‌گیرند، بنابراین همهٔ ۳ـ مرکزی‌ها درون شش ضلعی مشخص شده‌اند. لذا مدارهای ۳ـ مرکزی‌ها دقیقاً مدارهای تحت گروه انتقالها هستند.



۱۲. T گروه انتقالها چهار هم مجموعه یعنی T، $T\alpha$،$T\alpha^۲$ و $T\alpha^۳$ در W دارد. اعضای گروه $\alpha^{-۱}\tau\alpha$ انتقالی همطول با τ در $W- < \tau >$ است.

۱۳. اگر A مرکز α باشد، آنگاه $A\beta$ مرکز $\beta^{-۱}\alpha\beta$ است. طول انتقال $\alpha\beta^{-۱}$ برابر با $\sqrt{۲}$ برابر فاصلهٔ بین مراکز است. آن چنان که ۴ـ مرکزی‌ها در مربع نشانگذاری و

شماره‌گذاری شده‌اند تا حد امکان نزدیک به هم قرار می‌گیرند و همهٔ ۴ـ مرکزی‌های در مربع مشخص می‌شوند. مدارهای ۴ـ مرکزی‌ها دقیقاً مدارهای تحت گروه انتقالها هستند.



۱۴. حاصلضرب دو نیمدور، یک انتقال با طول دو برابر فاصلهٔ بین مرکزها است. اگر β یک نیمدور باشد و $\tau = \alpha^۲\beta$ آنگاه $\beta = \alpha^۲\tau$ که مرکزی وسط A و $A\tau$ دارد. سه ۲ـ مرکزی دیگر در مربع سؤال ۱۳ وجود دارد که متعلق به یک مدار تحت $<\alpha>$ است.

۱۵. T گروه انتقالها شش هم مجموعه به صورت $T\alpha^i$ دارد. عضو $\alpha^{-۱}\tau\alpha$ از گروه، یک انتقال همطول با τ در $W - <\tau> -$ است.

۱۶. عضو $\alpha\beta^{-۱}\alpha^{-۱}\beta$ از گروه مانند سؤال ۵ یک انتقال است. نقطهٔ $A\eta$ مرکز $\eta\alpha\eta$ است.

۱۷. عضو $\beta\alpha$ از گروه دورانی به‌اندازهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$ با مرکز واقع در گرانیگاه مثلث A، B و $B\alpha$ است. $A\beta\alpha = B$، لذا ۶ـ مرکزی‌ها در یک مدار قرار دارند. شش ۳ـ مرکزی در یک مدار $<\alpha>$ درون شش ضلعی با رأسهای $B\alpha^i$ وجود دارند. بنابه سؤال ۱۱ این عدد ماکسیمال است.

۱۸. محور $z \mapsto e^{i\theta}\bar{z}$ برابر با $\{re^{\frac{i\theta}{۲}} \mid r \in \mathbb{R}\}$ است. اگر $\gamma : z \mapsto e^{i\theta}\bar{z} + c$ آنگاه $\gamma^۲ : z \mapsto z + e^{i\theta}\bar{c} + c = z + (e^{\frac{i\theta}{۲}}\bar{c} + e^{\frac{-i\theta}{۲}}c)e^{\frac{i\theta}{۲}}$ و $e^{\frac{i\theta}{۲}}\bar{c} + e^{-\frac{i\theta}{۲}}c$ حقیقی است. هرگاه $e^{i\theta}\bar{c} + c = ۰$ نتیجه از سؤال ۲۶.۳ به دست می‌آید.

۱۹. چون $D_۱$ مرتبهٔ ۲ است زیرگروه طولپاییهای مستقیم تنها دو هم مجموعه دارد. هرگاه همهٔ انتقالها موازی با l باشند خط l به‌وسیلهٔ W ثابت نگاه داشته می‌شود. بنابه سؤال ۳۰.۳، $\beta\varrho = \varrho\beta$ و چون α و β انتقال هستند داریم $\alpha\beta = \beta\alpha$ لذا

$\alpha^{-1}\gamma^{-1}\alpha\gamma = \alpha^{-1}\varrho^{-1}\alpha\varrho$ حال $\alpha^{-1}\varrho\alpha$ بازتابی نسبت به $l\alpha$ و موازی با l است بنابراین $\alpha^{-1}\gamma^{-1}\alpha\gamma$ انتقالی در W در سوی عمود بر l است. اگر γ یک لغزه باشد، آنگاه γ^{2} انتقالی موازی با l است. اگر همهٔ انتقالها در W عمود بر l باشند، آنگاه هر خط عمود بر l به‌وسیلهٔ W ثابت نگاه داشته می‌شود. $\mu(\gamma\mu\gamma) = (\gamma\mu)^{2}$ که حاصلضرب از انتقالهاست. اگر $A \in l$ آنگاه l عمود منصف $A\mu$ و $A\gamma\mu\gamma$است. همچنین $AA\mu$ عمود بر l نیست و لذا $\mu(\gamma\mu\gamma)$ همانی نیست.

۲۰. هرگاه γ یک بازتاب باشد $\gamma^{2} = 1$ هرگاهγ یک لغزه باشد γ^{2} انتقالی در سوی τ است. اماτ انتقالی با طول مینیمال در این سو است لذا گسستگی W نتیجه می‌دهد که γ^{2} برابر با توانی از τ است. اگر m عددی زوج باشد آنگاه $\gamma\tau^{-\frac{1}{2}m}$ یک طولپایی متقابل مرتبهٔ ۲ است. اگر m فرد باشد فرض کنید $\delta = \gamma\tau^{-\frac{1}{2}(m-1)}$، آنگاه $\delta^{2} = \tau$ و $\gamma = \delta^{m}$ بنابراین $<\gamma, \tau> = <\delta>$.

۲۱. چون گروه نقطه‌ای D_1 است همهٔ بازتابهای در W محورهای موازی دارند. هرگاه ϱ_1 و ϱ_2 بازتابهایی با محورهای موازی باشند $\varrho_1\varrho_2$ انتقالی در سوی عمود بر محورهای آنها به‌اندازهٔ دو برابر فاصلهٔ بین آنهاست. اگر ϱ_1 و ϱ_2 بازتابهایی در W باشند با محورهای تا حد امکان نزدیک به هم، آنگاه محور هر بازتاب دیگر در مداری قرار دارد که یکی از این دو قرار دارند، تحت گروه انتقالها.

۲۲. چون $\sigma\delta\sigma = \delta$ هر عضو $<\delta ، \gamma>$ به صورت $\delta^{i}\sigma^{j}$ است. هر باز تاب عضوی از مرتبهٔ ۲ است اما $(\delta^{i}\sigma^{j})\cdot\delta^{i}\sigma^{j}\delta^{i}\sigma^{j} = \delta^{2i} \neq 1$ مگر این که $i = 0$.

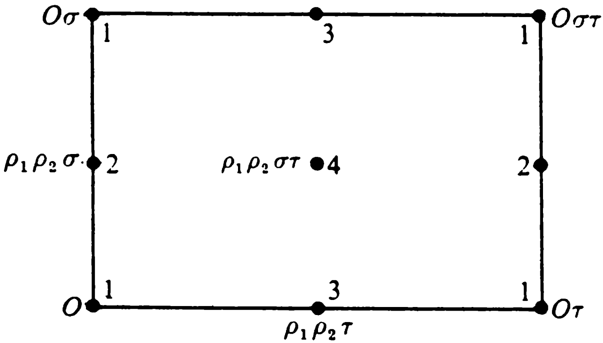
۲۳. طولپایی $\mu^{-1}\delta$ نقاط وسط l و $l\mu$ را ثابت نگاه می‌دارد.

۲۴. فرض کنید O نقطهٔ روی محور بازتاب ϱ باشد. متوازی‌الاضلاع اصلی گروه انتقالها با راسهای O، $O\mu$، $O\tau$ و $O\mu\varrho$ را،که $OO\tau = l$ در نظر بگیرید. خطهای l، $l\mu$ و $l\mu\varrho$ محورهای بازتابهایی هستند که متوازی‌الاضلاع را قطع می‌کنند. هرگاه بازتابهای بیشتری وجود داشته باشند حاصلضرب دو بازتاب در W انتقالی در سوی σ را به دست می‌دهد که طولی کوتاه‌تر دارد. بنابراین محورهای بازتابها در یک مدار تحت گروه انتقالها قرار دارند. حال طولپاییهای متقابل $\mu\varrho$ و $\varrho\mu$ به ترتیب وسطهای $OO\mu\varrho$ و $OO\mu$ را به موازات l حرکت می‌دهند و چون این نقاط روی محورهای بازتابها قرار ندارند این خطهای موازی با l محورهای لغزه‌ها هستند. به علاوه $\mu^{-1}(\mu\varrho)\mu = \varrho\mu$ لذا این محورهای لغزه‌ها در یک مدارگروه انتقالها قرار دارند. هر لغزه در W برای انتقالی مانند τ' در W به

صورت $\varrho\tau'$ است و محور لغزهٔ $\varrho\tau'$ از وسط $OO\varrho\tau' = OO\tau'$ می‌گذرد لذا محورهای لغزه‌های دیگری وجود ندارند که متوازی‌الاضلاع اصلی را قطع کند.

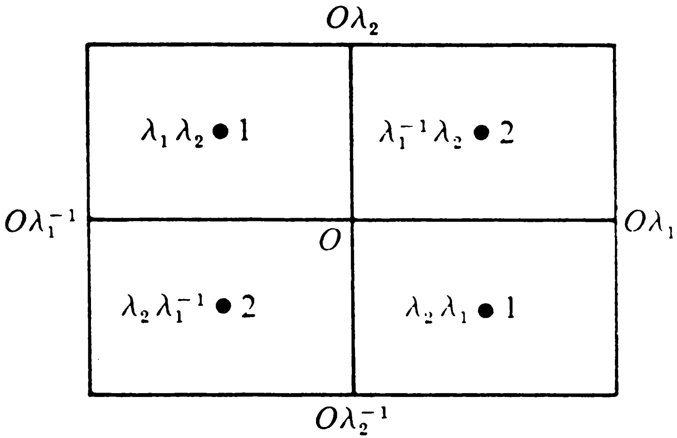
۲۵. نگاره‌های γ و δ در گروه نقطه‌ای بازتابهایی نسبت به محورهای متعامد هستند به نحوی که نگارهٔ حاصلضرب آنها یک نیمدور است و $\gamma\delta$ یک نیمدور است. حال مرتبهٔ D_2 برابر با ۴ است، لذا T گروه انتقالها چهار هم مجموعه یعنی T، $T\gamma$، $T\delta$ و $T\gamma\delta$ در W دارد.

۲۶. اگر O نقطهٔ تلاقی محورهای ϱ_1 و ϱ_2 باشد، آنگاه $\varrho_1\varrho_2\tau$، $\varrho_1\varrho_2\sigma$ نیمدورهایی با مراکز در مستطیل O، $O\tau$، $O\sigma$ و $O\sigma\tau$ هستند. در این متوازی‌الاضلاع اصلی گروه انتقالها ۲ـ مرکزی‌های دیگری نمی‌توانند وجود داشته باشند، زیرا حاصلضرب دو نیمدور انتقالی به اندازهٔ دو برابر فاصلهٔ بین مرکزهاست. بازتابهای $\varrho_1\sigma$ و $\varrho_2\tau$ محورهایی موازی با اضلاع مستطیل دارند که آن را نصف می‌کنند. محورهای بازتاب دیگری وجود ندارند که این متوازی‌الاضلاع اصلی را قطع کنند، زیرا حاصلضرب دو بازتاب با محورهای موازی انتقالی به‌اندازهٔ دو برابر فاصلهٔ بین آن‌هاست.



۲۷. هرگاه α نیمدوری با مرکز روی محور یک لغزهٔ γ باشد، $\alpha\gamma$ بازتابی با یک محور عمود است. طولپاییهای مستقیم $\lambda_1\lambda_2$، $\lambda_2\lambda_1$، $\lambda_1^{-1}\lambda_2$ و $\lambda_2\lambda_1^{-1}$ نیمدورهایی با مراکز درون مستطیل اصلی با خطهای میانی محورهای λ_1 و λ_2 هستند که در O متقاطع‌اند. به سبب طول مینیمال انتقالها ۲ـ مرکزی‌های دیگری در مستطیل نمی‌توانند وجود داشته باشند. چون $\lambda_2\lambda_1 = \lambda_1^{-1}(\lambda_1\lambda_2)\lambda_1$ و $\lambda_2\lambda_1^{-1} = \lambda_1(\lambda_1^{-1}\lambda_2)\lambda_1^{-1}$ چهار

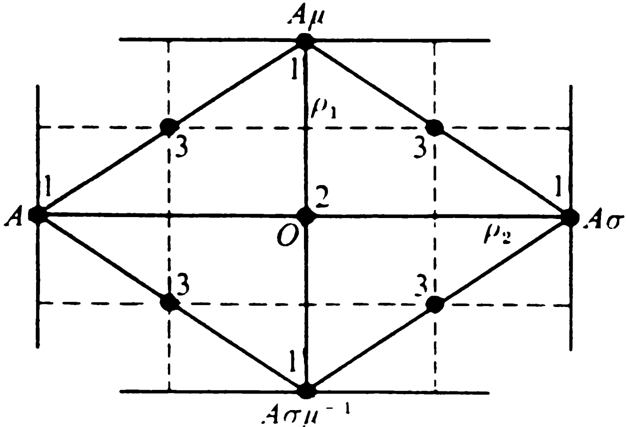
۲ـ مرکزی حداکثر به دو مدار تعلق دارند. بررسی مفصل چهار نوع طولپایی نشان می‌دهد هیچ عضوی از W نمی‌تواند مرکز $\lambda_1\lambda_2$ را به مرکز $\lambda_2\lambda_1^{-1}$ بنگارد.



۲۸. هرگاه یک ۲ـ مرکزی روی محور یک بازتاب قرارگیرد بازتابهایی با محورهایی با سوهای متعامد وجود دارند. اگر α یک نیمدور و ϱ بازتابی است که محور آن از مرکز α نمی‌گذرد، آنگاه $\alpha\varrho$ یک لغزه با محوری عمود بر محور ϱ است که از مرکز α می‌گذرد. بنابراین هر ۲− مرکزی روی محور یک لغزه وجود دارد. حال $\lambda\varrho$ و $\varrho\lambda$ نیمدورهایی با مراکز روی محور λ و $\varrho\lambda = \lambda^{-1}(\lambda\varrho)\lambda$ هستند لذا مراکز در یک مدار قرار دارند. حاصلضرب این نیمدورها برابر با λ^2 است که انتقالی مینیمال در این سو است. همچنین $\lambda\varrho\tau$ و $\varrho\lambda\tau$ نیمدورهایی با مراکز روی محور لغزهٔ $\lambda\tau$ در مستطیل اصلی $O\lambda$، $O\lambda\tau$، $O\lambda^{-1}\tau$، و $O\lambda^{-1}$ هستند که O نقطهٔ تلاقی محور ϱ و محور λ است. برای نشان دادن این که $\varrho\lambda$، $\varrho\lambda\tau$ مراکزی در مدارهای متفاوت دارند انواع اعضای W را در نظر بگیرید. وجود عضوی که این مراکز را در یک مدار قرار می‌دهد با مینیمال بودن τ تناقض دارد. هرگاه عضو مزبور یک انتقال یا نیمدور باشد مطلب بدیهی است. هرگاه عضو مزبور لغزه باشد حاصلضرب با ϱ باید مورد بررسی قرار گیرد.

۳۰. فرض کنید A نقطهٔ تقاطع دو محور متعامد بازتابهایی در W باشد. متوازی‌الاضلاع

اصلی با رأسهای A، $A\mu$، $A\sigma$، $A\sigma\mu^{-1}$ را در نظر بگیرید که در این حالت یک لوزی است. چون بازتابهایی با محورهای متعامد گذرنده از A وجود دارند همین مطلب برای رأسهای به‌دست آمده از مزدوج‌گیری به‌وسیلهٔ انتقالهای مناسبی برقرار است. فرض کنید قطرهای این لوزی محورهای بازتابهای ϱ_1 و ϱ_2 باشند و این محور در O تلاقی کنند.



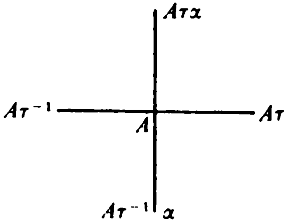
سه محور بازتاب در هر سو که لوزی را قطع می‌کنند به سبب مینیمال بودن τ و σ باید تعداد ماکسیمال باشند. محورهای بازتابهای $\mu\varrho_1$، $\mu^{-1}\varrho_1$، $\mu\varrho_2$، $\mu^{-1}\varrho_2$ میان محورهای این بازتابها قرار دارند و دوباره به همان دلیل این چهار محور باید تعداد ماکسیمال باشند. رأسها و مرکز لوزی ۲ـ مرکزی هستند، زیرا حاصلضرب بازتابهایی با محورهای متعامد یک نیمدور است. نقاط O و A در مدارهای متفاوت قرار دارند، زیرا هرگاه هر یک از چهار نوع طولپایی متفاوت در W نقطهٔ O را به A بنگارد می‌توانیم یک انتقال در W بسازیم که این کار را انجام دهد و این مطلب با مینیمال بودن σ تناقض دارد. مرکز نیمدور $\varrho_1\varrho_2\mu$ وسط یک ضلع لوزی است. وسطهای چهار ضلع لوزی در یک مدار تحت لغزه‌های $\mu\varrho_1$، $\mu^{-1}\varrho_1$، $\mu\varrho_2$، $\mu^{-1}\varrho_2$ قرار دارند.

۳۱. هرگاه γ یک بازتاب باشد $\gamma = \alpha^{-1}\gamma^2\alpha$. هرگاه γ یک لغزه و A روی محور آن باشد دو نقطهٔ A و $A\gamma\alpha^{-1}\gamma^2\alpha$ به‌وسیلهٔ $\gamma\alpha^{-1}\gamma^2\alpha$ مبادله می‌شوند لذا سؤال ۳۰.۳ (یک) نمی‌تواند برقرار باشد. $\alpha^{-1}\gamma^2\alpha$ یک انتقال است.

۳۳. استدلال و نمودار سؤال ۱۱ در اینجا برقرار هستند. وجود بازتاب یعنی ۳ـ مرکزی‌های واقع در مدارهای ۲، ۳ به یک مدار برای این گروه تعلق دارند.

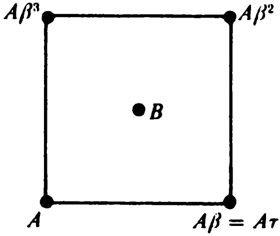
۳۴. دوباره استدلال و نمودار سؤال ۱۱ برقرار هستند اما بازتابها در اینجا سه مدار ۳ـ مرکزی‌های سؤال ۱۱ را متمایز نگاه می‌دارند.

۳۵. طولپاییهای مستقیم زیرگروهی باشاخص ۲ تشکیل می‌دهند. طولپایی $\gamma^{-1}\alpha\gamma$ ربع دوری با مرکز $A\gamma$ است. هر طولپایی متقابل δ برای طولپایی مستقیمی مانند η به صورت $\delta = \gamma\eta$ است. حال $A\delta = A\gamma\eta$ و چون $A\gamma$ در مدار A است و η نقاط مدار A را جایگرد می‌کند $A\delta$ در مدار Aاست.
(یک) چون $A = A\gamma\beta^{-1}$، $\gamma\beta^{-1}$ بازتابی با محور گذرندهٔ از A است. همهٔ چهار بازتاب A را ثابت نگاه می‌دارند و تنها چهار نقطهٔ $A\tau$، $A\tau\alpha$، $A\tau^{-1}$ و $A\tau^{-1}\alpha$ از مدار A از A هم فاصله هستند بنابراین این چهار نقطه نگاره‌های ممکن $A\tau$ هستند.

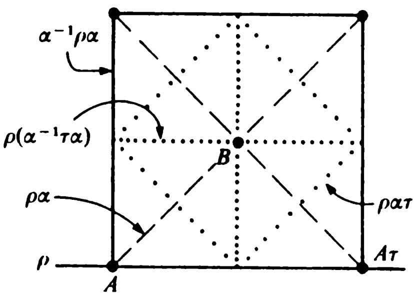


(دو) طولپاییهای مستقیم روی مدار B ترایا هستند بنابراین اگر $A\gamma$ در مدار B باشد برای طولپایی مستقیمی مانند η، $A\gamma\eta = B$. همچنین $A\alpha\gamma\eta = A\alpha^2\gamma\eta = A\alpha^3\gamma\eta$. چون طولپاییهای متقابل مدارهای A و B را معاوضه می‌کنند نگارهٔ B در مدار A قرار دارد. اما فاصلهٔ A تا B برابر با فاصلهٔ بین نگاره‌های آنها تحت یک طولپایی است و تنها نقاط مدار A به فاصلهٔ AB از B عبارت‌اند از A، $A\beta$، و $A\beta^2$ و $A\beta^3$. نقطهٔ B وسط $AA\beta^2$ است، لذا γ روی این خط مانند یک انتقال عمل می‌کند و در واقع باید یک لغزه با محور AB باشد. $A\tau = B\alpha\gamma = A(\alpha\gamma)^2$ و $B\tau = B(\alpha\gamma)^2$ لذا $\tau = (\alpha\gamma)^2$. هرگاه لغزهٔ $\sigma\varrho = \varrho\sigma = \gamma$ که ϱ یک بازتاب و σ یک انتقال است $\alpha^2\gamma = \alpha^2\varrho\sigma$ اما $\alpha^2\varrho$ بازتابی با محور عمود بر محور ϱ است و بنابراین $(\alpha^2\varrho)\sigma$ یک بازتاب است. حال $\alpha^{-1}(\alpha^2\gamma)\alpha$ بازتابی در W و با محور عمود بر محور $\alpha^2\gamma$ است. اگر بازتابهایی با

محورهای در چهار سو وجود داشته باشند، آنگاه دو محور که زاویهٔ $\frac{\pi}{4}$ می‌سازند در یک نقطهٔ ۴ـ مرکزی مانند حالت $p4m$ یکدیگر را قطع می‌کنند (حالت (یک)).



۳۶. هرگاه A یک ۴ـمرکزی واقع بر محور بازتاب باشد مانند مورد ϱ در سؤال ۳۵ (یک)، مربع اصلی A،$A\tau$ ، $A\sigma$، و $A\tau\sigma$ را در نظر بگیرید که $\sigma = \alpha^{-1}\tau\alpha$ و α یک ربع ـ دور حول A است. به روشنی اضلاع این مربع همگی در مدار محور ϱ تحت $<\alpha,\tau>$ هستند. هرگاه B مرکز این مربع اصلی باشد $\varrho(\alpha^{-1}\tau\alpha)$ بازتابی با محور گذرندهٔ از B و موازی با اضلاع مربع است. هیچ نقطه‌ای از مدار A روی محور $\varrho(\alpha^{-1}\tau\alpha)$ قرار ندارد بنابراین مدار آن از مدار اضلاع مربع متمایز است.

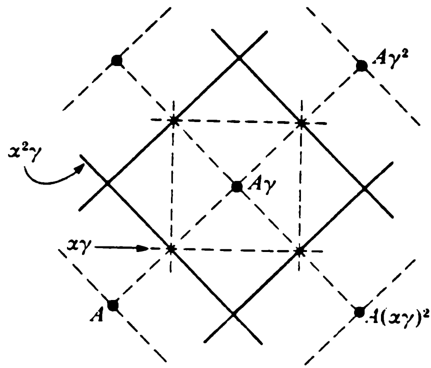


محور $\varrho\alpha$ با محورهای بازتابهای دیگر که تا اینجا مشخص کرده‌ایم زاویهٔ $\frac{\pi}{4}$ می‌سازد. چون سه مولد W هر یک این سو را حفظ می‌کنند یا آن را به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ دوران می‌دهند محور بازتاب $\varrho\alpha$ در یکی از دو مدار محورهایی که قبلاً شناخته شده‌اند قرار ندارد. مدار

این محور در برگیرندهٔ محورهای موازی و عمود گذرندهٔ از هر یک از رأسهای مربع اصلی است. حال همهٔ محورهای بازتابها را شناخته‌ایم چون حاصلضرب بازتابهایی با محورهای موازی انتقالی به اندازهٔ دو برابر فاصلهٔ بین آنهاست و τ مینیمال است.

تبدیل $\varrho\alpha\tau$ لغزه‌ای با محور موازی با قطر گذرندهٔ از A و وسط $AA\tau$ است. مزدوج‌گیری به‌وسیلهٔ α لغزهٔ دیگری با محور گذرنده از وسط $AA\tau$ را به دست می‌دهد و سپس مزدوج‌گیری به وسیلهٔ انتقالها دو محور دیگر از لغزه‌ها را که در مربع واحد متقاطع‌اند به دست می‌دهد. لذا همهٔ این محورها در یک مدار قرار دارند.

۳۷. فرض کنید A مرکز α باشد که محورهای لغزه γ از A می‌گذرند. چون $(\alpha\gamma)^{2}$ یک انتقال مینیمال است (با قراردادهای سؤال ۳۵ (دو)) یک مربع اصلی را در نظر می‌گیریم که A، $A\gamma^{2}$ و $A(\alpha\gamma)^{2}$ سه رأس آن هستند. تبدیل $\alpha^{2}\gamma$ و مزدوجهای آن به وسیلهٔ α، γ و $\gamma\alpha$ چهار بازتاب با محورهای موازی با قطرهای مربع اصلی به دست می‌دهند. شش لغزه از γ با مزدوج‌گیری مکرر به وسیلهٔ α و γ با محورهای موازی با قطرهای مربع اصلی به دست می‌آیند و مربع را قطع می‌کنند.



این محورها همگی شامل ۴ـ مرکزی‌ها هستند. تبدیل $\alpha\gamma$ یک لغزه با محور موازی با انتقال $(\alpha\gamma)^{2}$ است و با مزدوج‌گیری متوالی به وسیلهٔ ربع دورهای α^{-1}،$(\alpha\gamma^{2})^{-1}$ و

$\gamma^{-2}\alpha^{-1}\gamma^{2}$ چهار لغزهٔ دیگر با محورهای موازی با اضلاع مربع‌اصلی به دست می‌آوریم که از هیچ ۴ـ مرکزی نمی‌گذرد.

۳۸. برای هر $\beta \in W$، $A\beta$ مرکز $\beta^{-1}\alpha\beta$ است. نقطهٔ $A\varrho\alpha$ روی محور بازتاب ϱ قرار دارد، زیرا α دورنی به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ است. $AA\tau$ محور بازتاب $\varrho\alpha$ است. $\sigma = \tau\alpha\tau\alpha^{-1}$.

۳۹. ۶ـ مرکزی‌ها در یک مدار قرار دارند و بنا به سؤال ۱۷، ۳ـ مرکزی‌ها در یک مدار قرار دارند. اگر α دورانی به اندازهٔ $\frac{\pi}{3}$ حول A و β دورانی به اندازهٔ $\frac{\pi}{3}$ حول B باشد، آنگاه $\beta\alpha\beta$ یک نیمدور حول وسط AB است. اگر A و B ، ۶ـ مرکزی‌هایی با فاصلهٔ مینیمال از هم باشند (طول یک انتقال مینیمال) و A' و B' نیز ۶ـ مرکزی‌هایی با فاصلهٔ مینیمال از هم باشند، آنگاه یک طولپایی مانند δ درگروه وجود دارد که $A\delta = A'$. سپس به ازای عددی مانند i، $A\alpha^{i}\delta = A'$ و $B\alpha^{i}\delta = B'$ به نحوی که وسط AB به وسیلهٔ δ به وسط $A'B'$ نگاشته می‌شود. لذا ۲ـ مرکزی‌ها یک مدار تشکیل می‌دهند. اگر بازتابهای ϱ، $\varrho\alpha = \alpha^{-1}\varrho\alpha$ و $\varrho\alpha^{2} = \alpha^{-2}\varrho\alpha^{2}$ و $\varrho\alpha^{4}$ محورهایی موازی با یک انتقال مینیمال داشته باشند، آنگاه $\varrho\alpha,\varrho\alpha^{3} = \alpha^{-1}(\varrho\alpha)\alpha$، $\varrho\alpha^{5} = \alpha^{-2}(\varrho\alpha)\alpha^{2}$ محورهایی در چنین سویی ندارند و محورهای آنها به مدار متفاوتی تعلق دارند.

۴۰. هم در این معادله و هم در معادله‌ای که نتیجه می‌شود فرض می‌کنیم دو گروه از یک نوع داریم که باید ثابت کنیم یکریخت هستند. پسوند ۱ عضوی از گروه اول و پسوند ۲ عضوی از گروه دوم را نمایش می‌دهند.

$p1$

مبدأ یکسان $\mathbf{O}$ را بگیرید. سپس $\mathbf{O}\tau_1$ و $\mathbf{O}\sigma_1$ جفتی از بردارهای پایه هستند و $\mathbf{O}\tau_2$ و $\mathbf{O}\sigma_2$ نیز جفتی از بردارهای پایه هستند. یک تبدیل خطی ناتکین $\mu : \mathbf{v} \to \mathbf{v}M$ وجود دارد که $(\mathbf{O}\tau_1)\mu = \mathbf{O}\tau_2$ و $(\mathbf{O}\sigma_1)\mu = \mathbf{O}\sigma_2$. آنگاه $\mu^{-1}\tau\mu = \tau_2$ و $\mu^{-1}\sigma_1\mu = \sigma_2$ لذا گروه‌ها تحت یک خودریختی درونی از گروه مستوی یکریخت هستند.

$p2$

مبدأهای $\mathbf{O}_1$ و $\mathbf{O}_2$ را در ۲ـمرکزی‌ها بگیرید. اگر $\mathbf{O}_2$ بردار مکان $\mathbf{c}$ نسبت به $\mathbf{O}_1$ داشته باشد و تبدیل ناتکین $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}M$ مبدأ $\mathbf{O}_1$ را ثابت نگاه دارد و $\mathbf{O}_1\tau_1$ را به $\mathbf{O}_2\tau_2 - \mathbf{c}$ و $\mathbf{O}_1\sigma_1$ را به $\mathbf{O}_2\sigma_2 - \mathbf{c}$ بنگارد و $\mu : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}M + \mathbf{c}$، آنگاه $\mu^{-1}\tau_1\mu = \tau_2$، $\mu^{-1}\sigma_1\mu = \sigma_2$، $\mu^{-1}\alpha_1\mu = \alpha_2$ که α_1, α_2 به ترتیب نیمدورهایی با

مراکز $\mathbf{O}_1$ و $\mathbf{O}_2$ هستند. لذا این گروه‌ها تحت یک خودریختی درونی به وسیلهٔ گروه مستوی یکریخت هستند. روشهای ارائه شده در اینجا برای انواع pm، pg، cm، pmm،pmg، pgg و cmm نیز به کار می‌روند.

۴۱. $p3$. مبدأهای $\mathbf{O}_1$ و $\mathbf{O}_2$ را در ۳ـ مرکزی‌ها بگیرید. اگر $\mathbf{O}_2$ دارای بردار مکان $\mathbf{c}$ نسبت به $\mathbf{O}_1$ باشد و تشابه $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}M$ مبدأ $\mathbf{O}_1$ را ثابت نگاه دارد و $\mathbf{O}_1\tau_1$ را به $\mathbf{O}_2\tau_2 - \mathbf{c}$ بنگارد، آنگاه هرگاه $\mu : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}M + \mathbf{c}$ داریم $\mu^{-1}\tau_1\mu = \tau_2$ و $\mu^{-1}\alpha_1\mu = \alpha_2$ که α_1 و α_2 به ترتیب دورانهایی به‌اندازهٔ $\frac{2\pi}{3}$ با مراکز $\mathbf{O}_1$ و $\mathbf{O}_2$ هستند. این روش را نیز می‌توانیم برای انواع $p4$، $p6$، $p31m$، $p3m1$، $p4m$، $p4g$ و $p6m$ به کار بریم. استفاده از یک تشابه در این حالتها (نه صرفاً یک تبدیل مستوی) برای حفظ کردن زاویه‌ها ضروری است.

MATH75.IR

کتابشناسی

Bartlow, T.L., 1972 'An historical note on the parity of permutations', *Amer. Math. Monthly,* 79, 766-9.

Birkhoff, G. and MacLane, S., 1953. *A Survey of Modern Algebra*, Macmillan, NewYork.

Bourbaki, N., 1960, *Eléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris.

Budden, F.J., 1978, *The Fascination of Groups, Cambridge* University Press.

Burn, R.P., 1973, 'Geometrical illustrations of group theoretical concepts', *Math. Gaz., 57*, 110-19.

Burn, R.P., 1977, Groups of linear transformations, *Math. Gaz., 61, 273-9.*

Cajori, F., 1952, *A History of Mathematical Notations II,* Open Court.

Cajori, F., 1961. *A History of Mathematics*, Macmillan, New York.

Carmichael, R.D., 1956, *Introduction to the Theory of Groups of Finite Order*, Dover.

Cayley, A., 1854, 'On the theory of groups, as depending on the symbolic equation $\theta^n=1$, *Phil. Mag.*, 7, 40-7, Coll. Math. Works, II, 123 - 30.

Cayley, A., 1858, A memoir on The Theory of matrices, *Phil. Trans. R.S.*,148, Coll. Math. Works, II, 475-96.

Cayley, A., 1878, 'The theory of groups', *Amer.J.Math.*,1, 50-2, Coll Math. Works, X, 401-3.

Coxeter, H.S.M., 1969, *Introduction to Geometry*, Wiley

Coxeter, H.S.M., 1973, *Regular Polytopes*, Dover.

Coxeter, H.S.M., 1974, *Regular Complex Polytopes*, Cambridge University Press.

Curtis, M.L., 1979, *Matrix Groups*, Springer-Verlag.

Dieudonné, J., 1962, *La Géometrie des Groupes Classiques, Springer-Verlag.*

Dieudonné. J., 1969, *Linear Algebra and Geometry*, Kershaw.

Ford, L.R., 1951, *Automorphic Functions*, Chelsea.

Forder, H. G., 1960, *Geometry*, Hutchinson.

Fraleigh, J. B., 1976, *A First Course in Abstract Algebra,* Addison - Wesley.

Fricke, R. and Klein, F., 1897, Vorlesungen *über* die Theorie der automorphen Functionen I, Teubner.

Gardiner, C. F., 1980, *A First Course in Group theory,* Springer-Verlag.

Gauss, C. F., 1801, *Disquisitiones Arithmeticae*, tr. English 1965, Yale.

Green, J. A., 1965, *Sets and Groups*, Routledge and Kegan Paul.

Hilbert, D. and Cohn-Vossen, S., 1952, *Geometry and the Imagination*, Chelsea.

Hille, E., 1959, *Analytic Function Theory* I, Blaisdell.

Jordan, C., 1870, *Traité des Substitutions*, Gauthier-Villars (reprinted 1957).

Klein, F., 1884, *Lectures on the Icosahedron, tr. English 1956*, Dover.

Knopp, K., 1952, *Elements of the Theory of Functions*, Dover.

Ledermann, W., 1960, *Complex Numbers*, Routledge and Kegan Paul.

Lockwood, E. H. and Macmillan, R. H,. 1978, *Geomertric Symmetry*, Cambridge University Press.

Martin, G. E., 1982, *Transformation Geometry*, Springer - Verlag.

Maxwell, E.A., 1965, *Algebraic Structure and matrices* II, Cambridge University Press.

Miller, G. A., 1935, 'History of the theory of groups to 1900', Coll *Works, Vol.* pp. 427-67, University of Illinois. Urbana.

Netto, E., 1880, *Theory of Substitutions, tr. English 1892, Chelsea.*

Neumann, P. M., Stoy , G. A. and Thompson, E. C., 1980, Groups and Geometry, Mathematical Institute, Oxford.

Nový, A., 1973, *Origins of Modern Algebra*, Noordhoff International.

Pedoe, D., 1970, *A Course of Geometry for Colleges and Universities*, Cambridge University Press.

Pólya, G., 1924, *Über* die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebenr', Zeitschrift *für* Kristallographie, 60, 278-82.

Rees, E. G., 1983, *Notes on Geometry*, Springer - Verlag.

Rotman, J.J., 1973, *The Theory of Groups*, Allyn and Bacon.

Schattschneider, D., 1978, 'The plane symmetry groups', *Amer. Math. Monthly,* 85, 439-50.

School Mathematics Project, 1970, *Additional Mathematics Part I, Cambridge* University Press.

Schwerdtfeger, H., 1979, *Geometry of Complex Number, Dover.*

Speiser, A., 1927, *Theorie der Gruppen von endliche Ordnung*, Springer-Verlag,

Steinhaus, H. 1960, *Mathematical Snapshots*, Oxford University Press.

Weyl, H., 1960, *Symmetry,* Princeton.

Yaglom, I. M., 1973, *Geometric Transformations* III, Math. Assn. America.

MATH75.IR

واژه‌نامه (فارسی ـ انگلیسی)

الف

اعداد مختلط	Complex numbers
اعداد مختلط مزدوج	Conjugate Complex numbers
اعضای مزدوج	Conjugate elements
انتقال	Translation
انعکاس	Inversion

ب

بازتاب	Reflection
بردار	Vectors
بردارهای ویژه	Eigen vectors
بزرگترین عامل مشترک	Highest Common Factor
بزرگسازی	Enlargement
بستار	Closure
بیست وجهی	Icosahedron
بینهایت	Infinity

پ

پایدارساز	Stabiliser
پایه	Basis

ت

تابع	Function

تابع همانی	Identity Function
تبدیل	Transformation
تبدیل خطی	Linear transformation
تبدیل خطی تکین	Singular linear transformation
تبدیل خطی ناتکین	Non-singular linear Transformation
تبدیل کسری خطی	Linear Fractional Transfarmation
تبدیل متعامد	Orthogonal Transformation
تبدیل مستدیر	Circular Transformation
تبدیل مستوی	Affine Transformation
تبدیل موبیوس	Möbius Transformation
تحدید بلورنگارانه	Crystallograhic restriction
ترانهش	Transposition
ترایایی	Transitive
ترایایی دوگانه	Doubly Transitive
ترایایی سه‌گانه	Triply Transitive
ترکیب تابع	Composition of function
تشابه	Similarity
تشابه مارپیچی	Spiral Similarity
تشابه متقابل	Opposite Similarity
تشابه مستقیم	Direct Similarity
تصویر	Projection
تصویر گنجنگاشتی	Stereographic projection
تعویض‌پذیر	Commutative
تغییر پایه	Change of basis
تقارن	Symmetry
تقارن بازتابی	Reflection Symmetry
تقارن دورانی	Rotational Symmetry
تقارن نقطه‌ای در سه بعد	Point Symmetry in 3-dimensions

ج

جایگشت	Permutation
جایگشت زوج	Even permutation
جایگشت فرد	Odd permutation
جایگشتهای مزدوج	Conjugate permutations
جدول کِیلی	Cayley table
جمع برداری	Vector addition
جمع ماتریس	Matrix addition

چ

چهارگانها	Quaternions
چهارگانهای حقیقی	Real quaternions
چهارگانهای محض	Pure quaternions
چهارگانهای مزدوج	Conjugate quaternions
چهارگانهای واحد	Unit quaternions
چهار وجهی	Tetrahedron

ح

حاصلضرب اسکالر	Scalar product
حاصلضرب برداری	Vector product
حاصلضرب داخلی	Inner Product
حاصلضرب دکارتی	Cartesian product
حاصلضرب ماتریس	Matrix product
حاصلضرب مستقیم	Direct product

خ

خط تصویری	Projective line
خطهای یک فضای برداری	Lines in a vector Space

خودریختی	Automorphism
خودریختی درونی	Inner automorphism

د

دایرهٔ عظیمه	Great Circle
دایره‌های روی کره	Circles on Sphere
دایره‌های متعامد	Orthogonal Circles
دترمینان	Determinent
دوازده وجهی	Dodecahedron
دوران	Rotation
دَوَران کره	Rotation of Sphere
دوران مزدوج	Rotation Conjugate
دور مجزا	Disjoint Cycle
دوسویی	Bijection

ر

رابطه	Relation
رابطهٔ بازتابی	Reflexive relation
رابطهٔ ترایایی	Transitive relation
رابطهٔ تقارنی	Symmetric relation
رابطهٔ هم‌ارزی	Equivalence relation
ردهٔ مانده‌ها	Residue Class
رده‌های مزدوجی	Conjugacy classes
ردهٔ هم‌ارزی	Equivalence Class

ز

زاویه‌های حفظ شده	Angles Preserved
زیر فضا	Subspace

زیرفضا تولید شده	Spanned Subspace
زیرگروه	Subgroup
زیرگروه سره	Proper Subgroup
زیرگروه متناهی	Finite Subgroup
زیرگروه نرمال	Normal Subgroup

ش

شاخص زیرگروه	Index of Subgroup
شرکت پذیری	Associativity
شکل دوگان	Duel Figure
شناسه عدد مختلط	Argument of Complex number

ص / ض

صفحهٔ گاوس	Gauss plane
صفحهٔ موبیوس	Möbius plane
ضرب اسکالر	Scalar multiplication

ط

طولپاییها	Isometries
طولپاییهای متقابل	Opposite isometries
طولپاییهای مزدوج	Conjugate isometries
طولپاییهای مستقیم	Direct isometries
طول یک انتقال	Length of a translation

ع

عامل مقیاس	Scale Factor
علامت جایگشت	Signature of permutation

ف / ق

فضای برداری	Vector Space
فضای نگاره‌ها	Image Space
قانون توزیعی	Distributive law
قدر مطلق عدد مختلط	Modulus of Complex number
قضیهٔ اصلی همریختی	Fundamental theorem on homomorphism
قضیهٔ کیلی	Cayley's theorem
قضیهٔ لاگرانژ	Lagrange's theorem
قضیهٔ لئوناردو	Leonardo's theorem
قطب	Pole
قیچی	Shear

ک / گ

کرهٔ ریمان	Riemann sphere
گروه	Group
گروه آبلی	Abelian group
گروه اقلیدسی	Euclidean group
گروه انبساط	Dilatation group
گروه انتقال	Translation group
گروه ترایا	Transitive group
گروه تصویری	Projective group
گروه تصویری خاص	Projective Special group
گروه تصویری عام	Projective general group
گروه خارج قسمتها	Quotient group
گروه خطی خاص	Special Linear group
گروه خطی عام	General linear group
گروه دوری	Cyclic group
گروه دو وجهی	Dihedral group

گروه ساده	Simple group
گروه طولپاییها	Group of isometries
گروه کاغذ دیواری	Wallpaper group
گروه کتیبه	Frieze group
گروه کسری خطی	Linear fractional group
گروه گسسته	Discrete group
گروه متعامد	Orthogonal group
گروه متعامد خاص	Special orthogonal group
گروه متقارن	Symmetric group
گروه متناوب	Alternating group
گروه مستوی	Affine group
گروه موبیوس	Möbius group
گروه نقطه‌ای	Point group
گروه‌های تولید شده	Generated groups

ل

لغزه	Glide - reflection

م

ماتریس	Matrix
ماتریس اسکالر	Scalar matrix
ماتریس ترانهاده	Transposed matrix
ماتریس قطری	Diagonal matrix
ماتریس متعامد	Orthogonal matrix
ماتریس‌های متشابه	Similar matrices
ماتریس‌های مثلثی	Triangular matrices
متعامد	Orthogonal
مجموع مستقیم	Dircet Sum

محور بازتاب	Axis of reflection
مخروط مماس	Tangent Cone
مدار	Orbit
مرتبه	Order
مرتبهٔ اعضا	Order of elements
مرتبهٔ گروه	Order of group
مرکز دوران	Centre of rotation
مرکز ساز	Centraliser
مرکز گروه	Centre of group
مزدوج	Conjugate
مستوی	Affine
معادلهٔ مشخصه	Characteristic equation
مقادیر ویژه	Eigenvalues
منشور	Prism
موبیوس	Möbius

ن

نسبت غیرتوافقی	Cross -ratio
نشانده شده در انعکاس	Embedded in inversion
نقاط ثابت	Fixed points
نقطهٔ در بینهایت	Point at infinity
نقطهٔ منعکس	Inverse points
نگاشت پوشا	Surjection
نمودار آرگان	Argand diagram
نیمدور	Half - turn

و

وارون	Inverse

وارون چپ	Left inverse
وارون حاصلضرب	Inverse product
وارون راست	Right inverse
وارون ماتریس	Inverse matrix

ه / ی

هسته	Kernel
هستهٔ تبدیل خطی	Kernel of linear transformation
هشت وجهی	Octahedron
هم‌ارزی	Equivalence
همانی	Identity
همریختی	Homomorphism
هم‌مجموعه‌ها	Cosets
هم‌مجموعه‌های چپ	Left cosets
هم‌مجموعه‌های راست	Right cosets
هیئت	Field
یکریختی	Isomorphism

MATH75.IR

واژه‌نامه (انگلیسی ـ فارسی)

A / B

Abelian group	گروه آبلی
Affine	مستوی
Affine group	گروه مستوی
Affine transformation	تبدیل مستوی
Alternating group	گروه متناوب
Angles preserved	زاویه‌های حفظ شده
Argand diagram	نمودار آرگان
Argument of Complex number	شناسهٔ عدد مختلط
Associativity	شرکت‌پذیری
Automorphism	خودریختی
Axis of reflection	محور بازتاب
Basis	پایه
Bijection	دوسویی

C

Cartesian product	حاصلضرب دکارتی
Cayley table	جدول کیلی
Cayley's thearem	قضیهٔ کیلی
Center of group	مرکزگروه
Centraliser	مرکزساز
Center of rotation	مرکز دوران
Change of basis	تغییر پایه

Characteristic equation	معادلهٔ مشخصه
Circles on sphere	دایره‌های روی کره
Circular transformation	تبدیل مستدیر
Closure	بستار
Commutative	تعویض‌پذیر
Complex numbers	اعداد مختلط
Composition of function	ترکیب تابع
Conjugacy Classes	رده‌های مزدوج
Conjugate	مزدوج
Conjugate Comlex numbers	اعداد مختلط مزدوج
Conjugate elements	اعضای مزدوج
Conjugate isometries	طولپاییهای مزدوج
Conjugate permutations	جایگشتهای مزدوج
Conjugate quaternions	چهارگانهای مزدوج
Cosets	هم‌مجموعه‌ها
Cross - ratio	نسبت غیرتوافقی
Crystallographic restriction	تحدید بلورنگارانه
Cyclic group	گروه دوری

D

Determinant	دترمینان
Diagonal matrix	ماتریس قطری
Dihedral group	گروه دووجهی
Dilatation group	گروه انبساط
Direct isomerties	طولپاییهای مستقیم
Direct product	حاصلضرب مستقیم
Direct Similarity	تشابه مستقیم
Direct sum	مجموع مستقیم

Discrete group	گروه گسسته
Disjoint Cycle	دور مجزا
Distributive law	قانون توزیعی
Dodecahedron	دوازده وجهی
Doubly transitive	ترایایی دوگانه
Duel figure	شکل دوگان

E

Eigenvalues	مقادیر ویژه
Eigenvectors	بردارهای ویژه
Embedded in inversion	نشانده شده در انعکاس
Enlargement	بزرگسازی
Equivalence	هم‌ارزی
Equivalence class	ردهٔ هم‌ارزی
Equivalence relation	رابطهٔ هم‌ارزی
Euclidean group	گروه اقلیدسی
Even permutation	جایگشت زوج

F

Field	هیئت
Finite subgroups	زیرگروه‌های متناهی
Fixed points	نقاط ثابت
Frieze group	گروه کتیبه
Function	تابع
Fundamental theorem on homomorphism	قضیهٔ اصلی همریختی

G

Gauss plane	صفحهٔ گاوس

General linear group	گروه خطی عام
Generated groups	گروههای تولید شده
Glide - reflection	لغزه
Great Circle	دایرهٔ عظیمه
Group	گروه
Group of isometries	گروه طولپاییها

H / I

Half - turn	نیمدور
Highest Common Factor	بزرگترین عامل مشترک
Homomorphism	همریختی
Icosahedron	بیست وجهی
Identity	همانی
Identity fuction	تابع همانی
Image space	فضای نگاره
Index of Subgroup	شاخص زیرگروه
Infinity	بینهایت
Inner automorphism	خودریختی درونی
Inner product	حاصلضرب داخلی
Inverse	وارون
Inverse matrix	وارون ماتریس
Inverse points	نقاط منعکس
Inverse product	وارون حاصلضرب
Inversion	انعکاس
Isometries	طولپاییها
Isomorphism	یکریختی

K / L

Kernel	هسته
Kernel of linear transformation	هستهٔ تبدیل خطی
Lagrange's theorem	قضیهٔ لاگرانژ
Left cosets	هم مجموعه‌های چپ
Left inverse	وارون چپ
Length of a translation	طول یک انتقال
Leonardo's theorem	قضیهٔ لئوناردو
Linear fractional group	گروه کسری خطی
Linear fractional transformation	تبدیل کسری خطی
Linear transformation	تبدیل خطی
Lines in a vector space	خطهای یک فضای برداری

M / N

Matrix	ماتریس
Matrix addition	جمع‌ماتریس
Matrix product	حاصلضرب ماتریس
Möbius	موبیوس
Möbius group	گروه موبیوس
Möbius plane	صفحهٔ موبیوس
Möbius transformation	تبدیل موبیوس
Mödulus of complex number	قدر مطلق عدد مختلط
Non-singular linear transformation	تبدیل خطی ناتکین
Normal subgroup	زیرگروه نرمال

O

Octahedron	هشت وجهی
Odd permutation	جایگشت فرد

Opposite isometries	طولپاییهای متقابل
Opposite similarity	تشابه متقابل
Orbit	مدار
Order	مرتبه
Order of elements	مرتبهٔ اعضا
Order of group	مرتبهٔ گروه
Orthogonal	متعامد
Orthogonal circles	دایره‌های متعامد
Orthogonal group	گروه متعامد
Orthogonal matrix	ماتریس متعامد
Orthogonal transformation	تبدیل متعامد

P / Q

Permutation	جایگشت
Pole	قطب
Point at infinity	نقطهٔ در بینهایت
Point group	گروه نقطه‌ای
Point Symmetry in 3 dimensions	تقارن نقطه‌ای در سه بعد
Prism	منشور
Projection	تصویر
Projective general group	گروه تصویری عام
Projective group	گروه تصویری
Projective line	خط تصویری
Projective Special group	گروه تصویری خاص
Proper Subgroup	زیرگروه سِره
Pure quaternions	چهارگانهای محض
Quaternions	چارگانها
Quotient group	گروه خارج قسمتها

R

Real quaternions	چهارگانهای حقیقی
Reflection	بازتاب
Reflection Symmetry	تقارن بازتابی
Residue class	ردهٔ مانده‌ها
Reflexive relation	رابطهٔ بازتابی
Relation	رابطه
Riemann sphere	کره ریمان
Right cosets	هم‌مجموعه‌های راست
Right inverse	وارون راست
Rotation	دوران
Rotation conjugate	دوران مزدوج
Rotation of sphere	دوران کره
Rotational symmetry	تقارن دورانی

S

Scalar factor	عامل مقیاس
Scalar matrix	ماتریس اسکالر
Scalar multiplication	ضرب اسکالر
Scalar product	حاصلضرب اسکالر
Shear	قیچی
Signature of permutation	علامت جایگشت
Similarity	تشابه
Similar matrices	ماتریس‌های متشابه
Simple group	گروه ساده
Singular linear transformation	تبدیل خطی تکین
Spanned Subspace	زیرفضای تولید شده
Special linear group	گروه خطی خاص

Special orthogonal group	گروه متعامد خاص
Spiral similarity	تشابه مارپیچی
Stabiliser	پایدارساز
Stereographic projection	تصویر گنجنگاشتی
Subgroup	زیرگروه
Subspace	زیرفضا
Surjection	نگاشت پوشا
Symmetric group	گروه متقارن
Symmetric relation	رابطه تقارنی
Symmetry	تقارن

T / U

Tangent cone	مخروط مماس
Tetrahedron	چهار وجهی
Transformation	تبدیل
Transitive	ترایا
Transitive group	گروه ترایا
Transitive relation	رابطهٔ ترایا
Translation	انتقال
Translation group	گروه انتقال
Transposed matrix	ماتریس ترانهاده
Transposition	ترانهش
Triangular matrices	ماتریس‌های مثلثی
Triply transitive	ترایایی سه‌گانه
Unit quaternions	چهارگانهای واحد

V /W

Vector	بردار

Vector addition	جمع‌برداری
Vector product	حاصلضرب برداری
Vector space	فضای برداری
Wallpaper group	گروه کاغذدیواری

این کتاب دربرگیرندهٔ دنباله‌ای از سؤالهای به دقت انتخاب شده است که خواننده را با مشارکت خودش به ساختن آن بخشی از نظریهٔ گروهها که در یک درس مقدماتی در این مبحث مطرح می‌شود کمک می‌کند.

مقدمه‌ای بر فضاهای برداری با هدف رسیدن به مطالعهٔ گروههای خطی و مقدمه‌ای بر اعداد مختلط با هدف رسیدن به مطالعهٔ تبدیلهای موبیوس و تصویر گنجنگاری نیز مطرح می‌شوند. چهارگانها و رابطهٔ آنها با طولپاییهای سه بعدی و مطالعه‌ای دربارهٔ گروههای بلورنگارانه، بخصوص در حالت دو بعدی، از مباحث اصلی این کتاب هستند.

شرکت انتشارات علمی و فرهنگی

شابک X ـ ۰ ۲۵ ـ ۴۴۵ ـ ۹۶۴

ISBN 964 - 445 - 250 - X

قیمت: ۱۸۰۰۰ ریال