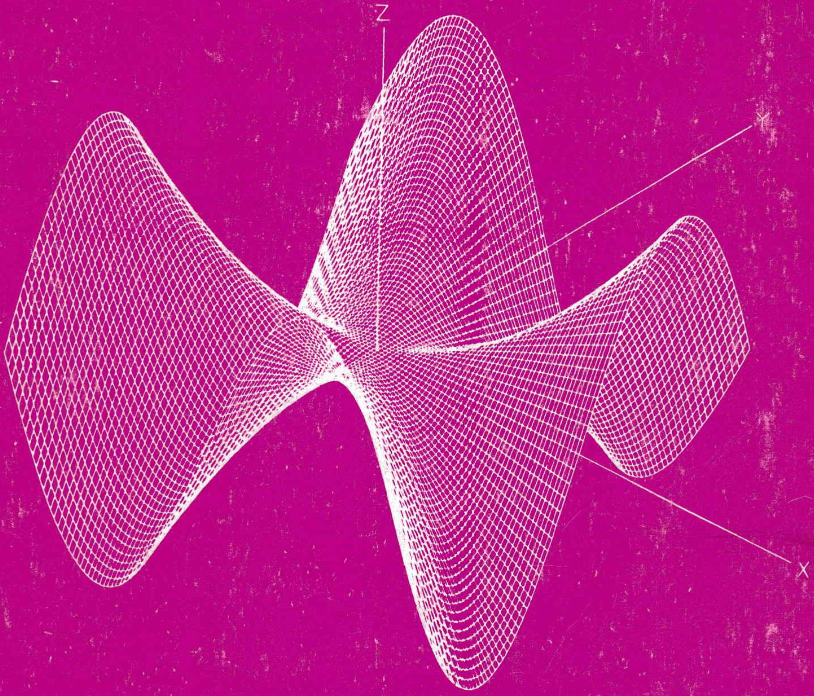
انتشارات دانشگاه تهران
۱۸۹۴

آنالیز

جلد اول

تألیف

ژاک دیکسمیه



ترجمهٔ

علینقی زند　محمد گودرزی　بیژن شمس

آنالیز

جلد اول

ترجمهٔ

دکتر علینقی زند   دکتر محمد گودرزی   دکتر بیژن شمس

انتشارات دانشگاه تهران

شمارهٔ ۱۸۹۴

شمارهٔ مسلسل ۳۸۰۶

شماره استاندارد بین‌المللی کتاب ۰-۳۸۰۶-۰۳-۹۶۴ ISBN 964 - 03-3806- 0

عنوان : آنالیز (جلد اول)

ترجمهٔ : دکتر علینقی زند، دکتر محمد گودرزی، دکتر بیژن شمس

ناشر: مؤسسهٔ انتشارات و چاپ دانشگاه تهران

تاریخ انتشار: تابستان ۱۳۷۶ (چاپ سوم)

تیراژ چاپ : ۳۰۰۰ نسخه

چاپ و صحافی : مؤسسهٔ انتشارات و چاپ دانشگاه تهران

مسؤولیت صحت مطالب کتاب با مترجمین است

بنام خدا

پیشگفتار

از سال ۱۳۴۸ که اقدام به‌ترجمهٔ و چاپ کتاب جبر و آنالیز، تألیف ژاك دیکسمیه. گردید تا کنون کتابهایی چند در این زمینه‌گردآوری، تألیف و یا از مآخذ مختلف ترجمه و به چاپ رسیده‌اند، که در بین آنها کتابهای خوب و با ارزشی دیده می‌شود. باوجود این، دقت ریاضی و پیوند منطقی مطالب، که نتیجهٔ تجربهٔ آموزشی مؤلف این کتاب است، و در سرتاسر آن‌مشاهده می‌شود، همچنان آن‌را در ردیف بهترین ویا ارزش‌ترین کتابهای‌موجود در جبروآنالیز باقی‌گذاشته است. با توجه به‌این واقعیت‌بود که پس‌از تجدیدنظر در ترجمهٔفارسی‌بخش‌آنالیز این اثر و افزودن سرفصل‌ها ومسائلی چند ،اقدام به‌تجدید چاپ‌ترجمهٔ فارسی آنالیزآن‌گردید، که به‌صورت کتاب حاضر در دسترس علاقمندان قرار می‌گیرد.

علاوه براینکه، این کتاب به‌عنوان یکی از کتابهای آغازگر و پایه در تدریس آنالیز به‌شمار می‌آید، می‌توان با شرح و بسط و توصیف بیشتر، در دروس ریاضیات عمومی نیز از آن استفاده کرد.

در این تجدیدنظر، اشتباههای چاپی‌مشاهدشده‌تصحیح شد، اما ممکن‌است‌اشتباههای دیگری باقی مانده باشد. از همکاران ارجمندی که به‌هر صورت این کتاب را از نظر می‌گذرانند و از دانشجویان عزیزی که از آن استفاده می‌کنند ، خواهشمند است با یادآوری اشتباهها و کمبودها ما را سپاسگزار خود فرمایند.

از سازمان چاپ و انتشارات دانشگاه تهران که امکان چاپ این کتاب را فراهم‌آورده است، سپاس فراوان داریم .

بنام خدا

پیشگفتار

پس از جلد اول کتاب جبر ، اینک جلد اول کتاب آنالیز که بخشی دیگر از برنامهٔ ریاضی دانشکده علوم مصوب ۱۳۴۸/۲/۲۹ شورای گروه ریاضی دانشگاه تهران را دربر دارد در دسترس دانش خواهان قرار میگیرد .

در نوشتن این کتاب کوشش ما براین بوده است تا کتابی را مبنای فراهم‌آوردن آن قرار دهیم که هم‌آهنگ با برنامهٔ دانشگاههای پیشرفته باشد و روش بیان واثبات مطالب آن نیروی اندیشهٔ دانشجو را تقویت وحس ابتکار را در او برانگیزد . بدین منظور کتاب ریاضیات ژاك دیکسمیه برای ترجمه انتخاب گردید و تمرین‌های مناسب با هرفصل به آن افزوده شد . امید است که از خواست خود چندان به دور نیفتاده باشیم :

در پایان کتاب ، بخشی از مجموعهٔ نادرستی‌های چاپی درست گردید. چنانچه خوانندگان به نادرستی‌های دیگری برخورد کنند یادآوری آن موجب سپاسگزاری است

بنام خدا

فهرست

موضوع | صفحه

فصل اول

ساختمان شمارهای حقیقی

۱.۱- شمارهای درست - شمارهای گویا ۱
۲.۱- دنباله های کشی - هم‌ارزی دنباله های کشی ۱
۳.۱- جمع شمارهای حقیقی ۳
۴.۱- ضرب شمارهای حقیقی ۵
۵.۱- یکسانی شمارهای گویا وشمارهای حقیقی ۷
۶.۱- مقایسه شماره‌های حقیقی ۸

فصل دوم

حدود

۱.۲- حد یک دنباله از شمارها ۱۰
۲.۲- دنباله های کشی ۱۶
۳.۲- دنباله‌های یک‌نوا ۱۹
۴.۲- حدود بی‌پایان ۲۱
۵.۲- حد یک تابع ۲۴
۶.۲- هم‌ارزی ۳۳
۷.۲- بخش اصلی یک بی‌نهایت کوچک ۳۶
۸.۲ - نشانهای o و O ۳۸
۹.۲- توابع پیوسته ۳۹
۱۰.۲- توابع پیوسته یکنواخت ۴۵
۱۱.۲- تابع وارون یک تابع پیوسته و کاملا یکنوا ۴۷

موضوع	صفحه
۱۲.۲- کاربرد : توابع وارون توابع مثلثاتی	۴۹
۱۳.۲- حد ساده و حد یکنواخت یک دنبالهٔ تابعی	۵۳

فصل سوم

مشتق

۱.۳- تعریف	۵۶
۲.۳- تعمیم مفهوم مشتق	۵۸
۳.۳- مشتق‌های پی‌درپی	۵۹
۴.۳- روش محاسبهٔ مشتق	۵۹
۵.۳- مشتق توابع وارون توابع مثلثاتی	۶۴
۶.۳- دستور لیبنیز	۶۴
۷.۳- قضیه نموهای باپایان	۶۵
۸.۳- توابع کوژ	۶۹

فصل چهارم

انتگرال

۱.۴- انتگرال توابع پله‌ای	۷۴
۲.۴- انتگرال توابع پیوسته	۷۸
۳.۴- ویژگیهای ابتدایی انتگرال	۸۳
۴.۴- ویژگیهای فاصلهٔ انتگرال‌گیری	۸۷
۵.۴- تابع اولی	۸۹
۶.۴- انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء	۹۳
۷.۴- تعویض متغیر	۹۴
۸.۴- کاربرد : دستور والیس	۹۸

موضوع صفحه

فصل پنجم

توابع لگاریتمی و توابع نمایی

۱.۵- تعریف تابع لگاریتمی	۱۰۱
۲.۵- لگاریتم حاصل‌ضرب	۱۰۲
۳.۵- بررسی تغییرات Logx	۱۰۳
۴.۵- لگاریتم در پایهٔ a	۱۰۵
۵.۵- توابع نمایی	۱۰۵
۶.۵- تعمیم	۱۰۷
۷.۵- توابع نمایی که با حد معین می‌شوند	۱۱۱
۸.۵- توابع هذلولی	۱۱۳
۹.۵- توابع وارون توابع هذلولی	۱۱۷
۱۰.۵- تابع x^{α}	۱۲۰
۱۱.۵- تغییرات تابع $y=x^{\alpha}$	۱۲۲
۱۲.۵- مرتبهٔ افزایش توابع Logx و x^{α} و a^{x}	۱۲۶

فصل ششم

محاسبهٔ توابع اولی

۱.۶- توابع اولی ساده	۱۲۹
۲.۶- انتگرال کسرهای گویا	۱۳۰
۳.۶- توابع اولی‌ای که به توابع اولی کسرهای گویا منجر می‌شود (I)	۱۳۵
۴.۶- توابع اولی‌ای که به توابع اولی کسرهای گویا منجر می‌شود (II)	۱۳۵
۵.۶- توابع اولی‌ای که به توابع اولی کسرهای گویا منجر می‌شود (III)	۱۳۸
۶.۶- توابع اولی‌ای که به توابع اولی کسرهای گویا منجر می‌شود (IV)	۱۳۹

موضوع | صفحه

فصل هفتم

دستور تیلر

۱.۷- اثبات دستور تیلر ۱۴۰

۲.۷- بررسی بخش اصلی یک بینهایت کوچک ۱۴۵

۳.۷- بررسی یک خم در همسایگی یک نقطه ۱۴۵

فصل هشتم

بسط محدود

۱.۸- تعریف ۱۴۹

۲.۸- بسطهای محدود ساده ۱۵۲

۳.۸- عملیات روی بسطهای محدود ۱۵۴

۴.۸- بخشهای اصلی بینهایت کوچکهای ساده ۱۶۲

۵.۸- تعمیم بسطهای محدود ۱۶۲

۶.۸- کاربرد بسطهای محدود در بررسی حدود ۱۶۸

فصل نهم

نُرم ـ دوری

۱.۹- نُرم ۱۷۰

۲.۹- دوری ۱۷۳

۳.۹- حد یک دنباله از نقاط در یک فضای متری ۱۷۵

۴.۹- حد یک نگاشت یک فضای متری در یک فضای متری دیگر ۱۷۹

۵.۹- نگاشتهای پیوسته یک فضای متری در یک فضای متری دیگر ۱۸۲

۶.۹- مجموعههای باز و مجموعههای بسته ۱۸۴

موضوع صفحه

فصل دهم

مشتق توابع برداری

۱۰.۱- تعریف ۱۸۹
۱۰.۲- مشتقهای پی‌درپی ۱۹۱
۱۰.۳- دستورهای محاسبه ۱۹۲
۱۰.۴- دستور تیلر- یونگ ۱۹۴

فصل یازدهم

مشتقهای نسبی

۱۱.۱- تعریف ۱۹۶
۱۱.۲- مشتق یک تابع مرکب ۱۹۸
۱۱.۳- مشتق‌های نسبی مرتبهٔ دوم ۲۰۲
۱۱.۴- مشتق‌های نسبی پی‌درپی ۲۰۵
۱۱.۵- مشق‌های پی‌درپی توابع مرکب ۲۰۶
۱۱.۶- فرمول تیلر ۲۰۸

فصل دوازدهم

دیفرانسیل

۱۲.۱- دیفرانسیل یک تابع در یک نقطه ۲۱۱
۱۲.۲- دیفرانسیل یک تابع ۲۱۴
۱۲.۳- دیفرانسیل یک تابع مرکب ۲۱۷
۱۲.۴- دستورهای محاسبهٔ دیفرانسیل ۲۱۹
۱۲.۵- توابع ایستی ۲۲۰
۱۲.۶- گرادیان یک تابع ۲۲۴

موضوع | صفحه

فصل سیزدهم

توابع ضمنی

۱۳ .۱- تعریف ۲۲۵
۱۳ .۲- نخستین تعمیم ۲۳۰
۱۳ .۳- دومین تعمیم ۲۳۱

فصل چهاردهم

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

۱۴ .۱- تعریف ۲۳۵
۱۴ .۲- تعبیر هندسی ۲۳۸
۱۴ .۳- قضیه عمومی وجود و یکتایی ۲۳۹
۱۴ .۴- معادلات دیفرانسیل با متغیرهای جدا ۲۳۹
۱۴ .۵- معادلات خطی ۲۴۴
۱۴ .۶- کاربرد در یک مسألهٔ هندسی ۲۴۸

هندسه

فصل پانزدهم

خمهای پارامتری در صفحه

۱۵ .۱- تعریف ۲۵۰
۱۵ .۲- مماس ۲۵۴
۱۵ .۳- شکل خم در همسایگی یکی از نقاط آن ۲۵۷
۱۵ .۴- شاخه‌های بینهایت ۲۵۹
۱۵ .۵- کاوی خم ۲۶۳

موضوع	صفحه
۶.۱۵- رسم خمهای پارامتری هامنی	۲۶۳

فصل شانزدهم

خمهای پارامتری در فضا

۱.۱۶- تعریف	۲۷۳
۲.۱۶- خط مماس	۲۷۳
۳.۱۶- صفحهٔ بوسان	۲۷۴
۴.۱۶- شکل خم در همسایگی یکی از نقاط آن	۲۷۷

فصل هفدهم

رویه‌های پارامتری در فضا

۱.۱۷- تعریف	۲۸۰
۲.۱۷- مثالهایی از رویه های پارامتری	۲۸۱
۳.۱۷- صفحهٔ مماس	۲۸۴

فصل هجدهم

معادله‌های خمها و رویه‌ها

۱.۱۸- معادلهٔ یک خم در صفحه	۲۸۸
۲.۱۸- معادلهٔ یک رویه در فضا	۲۸۹
۳.۱۸- معادله های یک خم در فضا	۲۹۰
۴.۱۸- روش تعیین معادله های چند رویه	۲۹۱
۵.۱۸- بیضوی	۲۹۶
۶.۱۸- هذلولی گوی یک پارچه	۲۹۸
۷.۱۸- هذلولی گون دو پارچه	۳۰۰

موضوع صفحه

۱۸.۸- سهمی‌گون بیضی‌وار ۳۰۱

۱۸.۹- سهمی‌گون هذلولی‌وار ۳۰۲

فصل نوزدهم

آرایندهای قطبی

۱۹.۱- تعریف ۳۰۴

۱۹.۲- معادلهٔ قطبی یک خم ۳۰۶

۱۹.۳- مماس بریک خم پارامتری در آرایندهای قطبی ۳۱۲

۱۹.۴- کاوی یک خم پارامتری در آرایندهای قطبی ۳۱۴

۱۹.۵- رسم خمهایی که معادلهٔ آنها به صورت $r=f(\theta)$ است ۳۱۶

۱۹.۶- آرایندهای استوانه‌ای ۳۲۰

۱۹.۷- آرایندهای کروی ۳۲۲

تمرین ها ۳۲۵

فهرست نشانه ها ۳۵۱

فهرست الفبایی ۳۵۳

واژه‌ها ۳۵۶

فصل اول

ساختمان شمارهای حقیقی

خواننده می‌تواند از خواندن این فصل صرف نظر کند وبرای پی‌آورد مطلب، به‌مفهوم شمارهای حقیقی که از دیرباز باآن آشنایی دارد بسنده نماید (به‌شرط آن که قضیهٔ شمارهٔ ۲۰۲۰۱۴ را بپذیرد). اما چنانچه خواننده به‌ساختارهای مجرد علاقمند باشد، در اینجایکی از صورت‌های دقیق تعریف شمارهای حقیقی بر پایهٔ شمارهای گویا را، که پیشتر ساخته‌شده‌اند، خواهد دید.

۱۰۱- شمارهای درست - شمارهای گویا

مجموعهٔ شمارهای درست طبیعی $\mathbf{N}$ را در نظر می‌گیریم و ویژگی‌های ابتدایی آن را دانسته فرض می‌کنیم. می‌توانیم حلقهٔ $\mathbf{Z}$ و هیأت $\mathbf{Q}$ را دقیقاً از روی $\mathbf{N}$ بسازیم و بستگی‌های معمولی ترتیبی و مفهوم قدر مطلق را در آنها تعریف کنیم. در اینجا از تکرار این مطالب ساده که در شماره‌های ۶۰۴، ۷۰۴ و ۷۰۴ کتاب جبر بیان شده‌اند خودداری می‌کنیم.

ساختمان دقیق شمارهای حقیقی $\mathbf{R}$ برمبنای $\mathbf{Q}$ مسئلهٔ دشوارتری است که به‌بررسی جزییات آن می‌پردازیم.

۱۰۲- دنباله‌های کشی-هم ارزی دنباله‌های کشی

۱۰۲۰۱- شاید در ابتدا چنین به‌نظر رسد که هرشمار حقیقی را بتوان به‌صورت بسط یک کسر دهدهی و یا به‌عبارت دیگر به‌صورت حد شمارهای دهدهی تعریف کرد. ازطرف‌دیگر بسیاری از شمارهای حقیقی که در آنالیز دیده می‌شوندنه به‌صورت حد شمارهای دهدهی بلکه به‌صورت حدشمارهای‌گویا به‌دست می‌آیند. این‌مطلب مارا وامیدارد که یک شمار حقیقی را به‌صورت حد **یک** دنباله از شمارهای‌گویا تعریف کنیم. اما بی‌درنگ دیده‌می‌شود که این‌تعریف نیزکامل نخواهد بود و لازم است که اصلاح شود. زیرا **دو** دنباله از شمارهای‌گویا که دارای یک حد باشند، معرف **یک** شمار حقیقی خواهند بود. به‌گفتهٔ دیگر: اگر E مجموعهٔ دنباله‌های شمارهای‌گویا باشد که حدی با پایان دارند، و دو عنصر از E راکه دارای یک حد باشندهم‌ارز بگیریم، یک بستگی هم‌ارزی مانند R روی E تعریف می‌شود. در این صورت بجا است که هر شمار حقیقی را مانند عنصری از E/R تعریف کنیم. آشکار است که باید E و R را تنها با استفاده ازشمارهای گویا و بدون شناسایی شمارهای حقیقی تعریف کرد.

اکنون به تعریف عنصرهای مجموعهٔ E می‌پردازیم. هنگامیکه می‌گوییم یک دنباله $(r_1, r_2, \ldots)$ ازشمارهای گویا به سمت یک حد باپایان می‌گراید به‌این‌معنی است که r_n ها، وقتی که n بقدرکافی بزرگ باشد، بی‌اندازه به یکدیگر نزدیکند. به عبارت دیگر برای شمارهای بزرگ m و n قدرمطلق $r_m - r_n$ بی‌اندازه کوچک است. به بیان دقیق‌تر برای هرشمار کوچک مثبت ε وقتیکه m و n از شمار درست دلخواهی (که به ε بستگی دارد) بزرگتر باشند داریم $|r_m - r_n| \leqslant \varepsilon$. اکنون بستگی هم‌ارزی R را معین می‌کنیم. هنگامیکه می‌گوییم دو دنبالهٔ $(r_1, r_2, \ldots)$ و $(r'_1, r'_2 \ldots)$ به سمت یک حد باپایان می‌گرایند به‌این معنی‌است که r_n و r'_n وقتی که n بقدرکافی بزرگ باشد بی‌اندازه به یکدیگر نزدیک‌اند. به عبارت دیگر برای شمار بزرگ n قدرمطلق $r_n - r'_n$ بی‌اندازه کوچک است. به بیان دقیق‌تر برای هرعدد کوچک و مثبت ε وقتی که n از شمار درست دلخواهی (که به ε بستگی دارد) بزرگتر باشد داریم $|r_n - r'_n| \leqslant \varepsilon$.

مطالب بالا اساس تعاریف E و R را تشکیل می‌دهند. باید توجه داشت که ε شماری گویا باشد، زیرا ما تنها شمارهای گویا را می‌شناسیم. پس می‌توان ε را یکی از شمارهای $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ... گرفت.

پیشگفتاری که در بالا بیان گردید از نظر منطق ارزشی ندارد و در آینده از آن استفاده نخواهد شد.

۲.۲.۱ - **تعریف- یک دنبالهٔ** $(r_1, r_2, \ldots)$ **ازعنصرهای Q که دارای ویژگی زیر باشد دنبالهٔ کشی در Q نامیده می‌شود:**

برای هرشماردلخواه $\varepsilon > 0$ از Q شماردرست N وجود دارد به‌قسمی که

$$m, n \geqslant N \Longrightarrow |r_m - r_n| \leqslant \varepsilon$$

مجموعهٔ دنباله‌های کشی در Q را با E نشان می‌دهیم.

۳.۲.۱ - **تعریف- دودنباله** $(r_1, r_2, \ldots)$ و $(r'_1, r'_2, \ldots)$ **متعلق به E را هم‌ارزخوانیم اگر برای‌هر $\varepsilon > 0$ از Q شماردرست N وجود داشته باشد به قسمی که:**

$$n \geqslant N \Longrightarrow |r_n - r'_n| \leqslant \varepsilon$$

این تعریف یک بستگی بین دنباله‌های E برقرار میکند.

۴.۲.۱ - آشکار است که بستگی معین شده در ۳.۲.۱ بازتابی و متقارن است.

اکنون نشان می‌دهیم که این بستگی متعدی است. فرض می‌کنیم که دنباله‌های (r_n) و (r'_n) و (r''_n) متعلق به E و دنبالهٔ (r_n) هم‌ارز (r'_n) و دنبالهٔ (r'_n) هم‌ارز (r''_n) باشد. اگر ε شمار گویای بزرگتر از صفر باشد، شمارهای درست N و N' وجود دارند بطوریکه:

$$n \geqslant N \Longrightarrow |r_n - r'_n| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$n \geqslant N' \Longrightarrow |r'_n - r''_n| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$$

دراین‌صورت چنین داریم:

$$n \geqslant \sup(N, N') \Longrightarrow |r_n - r''_n| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

پس دو دنبالهٔ (r_n) و (r''_n) هم‌ارزند.

۱.۲.۵ - بستگی بالا را که یک بستگی هم‌ارزی است به R می‌نماییم و می‌نویسیم $(r'_n) \sim (r_n)$ اگردنباله‌های (r_n) و (r'_n) هم‌ارزباشند. همچنین قرارمی‌دهیم $E/R = \mathbf{R}$. عنصرهای مجموعهٔ $\mathbf{R}$ که به‌این‌ترتیب معین‌میگردد **شمارهای حقیقی** نامیده میشوند.

۱.۳ - جمع شمارهای حقیقی

۱.۳.۱ - چنانچه (r_n) و (s_n) متعلق به E باشند، دنبالهٔ $(r_n + s_n)$ عنصری از E است. زیرا اگر ε شمار گویای بزرگتر ازصفر باشد شمارهای درست M و N را به‌قسمی می‌توان یافت که:

$$m,n \geqslant M \Longrightarrow |r_m - r_n| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$m,n \geqslant N \Longrightarrow |s_m - s_n| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$$

بنابراین چنین خواهیم داشت:

$$m,n \geqslant \sup(M,N) \Longrightarrow |(r_m + s_m) - (r_n + s_n)| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

یعنی $r_n + s_n$ عنصری است از E.

۲.۳.۱ - اگر $(r_n) \sim (r'_n)$ و $(s_n) \sim (s'_n)$ باشد ، داریم :

$$(r'_n + s'_n) \sim (r_n + s_n)$$

زیرا برای هرشمارگویای $\varepsilon > 0$ ، شمارهای درست P و Q موجودند به قسمی که :

$$n \geqslant P \Longrightarrow |r_n - r'_n| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$n \geqslant Q \Longrightarrow |s_n - s'_n| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$$

و دراین‌صورت :

$$n > \sup(P,Q) \Longrightarrow |(r_n + s_n) - (r'_n + s'_n)| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

یعنی $r_n + s_n$ هم‌ارز $r'_n + s'_n$ می‌باشد .

ازاین پس برای سادگی بجای « کلاس هم‌ارزی » تنها کلمهٔ کلاس را بکار میبریم .

۳.۳.۱ - با درنظرگرفتن مطالب بالا ، میتوان جمع شمارهای حقیقی را تعریف کرد . فرض می کنیم x و y دو عنصر از **R** باشند. چنانچه (r_n) یک نمایندهٔ x و (s_n) یک نمایندهٔ y در E باشند ، $(r_n + s_n)$ عنصری از E است (۱.۳.۱) وکلاس $(r_n + s_n)$ تنها بستگی به x و y دارد (۲.۳.۱) . این کلاس را با $x+y$ نشان می‌دهیم .

٤.۳.۱- اگر z یک‌عنصردیگر **R** و (t_n) یک نمایندهٔ z در E باشد، $(x+y)+z$ کلاس دنباله $((r_n + s_n) + t_n)$ و $x+(y+z)$ کلاس دنبالهٔ $(r_n + (s_n + t_n))$ را نشان میدهند . چون داریم :

$$(r_n + s_n) + t_n = r_n + (s_n + t_n)$$

پس $(x+y)+z = x+(y+z)$. به‌این ترتیب دیده می‌شود که جمع شمارهای حقیقی انجمنی است. همین‌طور دیده می‌شود که این جمع جابجایی است. آشکار است که کلاس دنبالهٔ $(0, 0, 0, \cdots)$ عنصر بی‌اثر قانون‌جمع‌است. این کلاس را با 0 نشان می‌دهیم. قرینهٔ کلاس (r_n) کلاس $(-r_n)$ است .

بطورخلاصه **R** با قانون جمع یک گروه جابجایی تشکیل می‌دهد .

۴.۱ ـ ضرب شمارهای حقیقی

۱.۴.۱ ـ اگر (r_n) متعلق به E باشد یک شمار گویای $A > 0$ می‌توان یافت به‌طوریکه برای هرشمار n داشته باشیم $|r_n| \leqslant A$. زیرا یک شمار درست S وجود دارد به قسمی که :

$$m,n \geqslant S \Longrightarrow |r_m - r_n| \leqslant 1$$

بنابراین کافی است قرار دهیم :

$$A = \sup(|r_1|, |r_2|, \ldots, |r_{s-1}|, |r_s| + 1)$$

۲.۴.۱ ـ اگر (r_n) و (s_n) از عنصرهای E باشند . $(r_n s_n)$ نیز یک عنصر E است . زیرا اگر ε شمار گویای بزرگتر از صفر باشد دو شمار گویای $A > 0$ و $B > 0$ می‌توان یافت به قسمی که برای هرشمار n داشته باشیم $|r_n| \leqslant A$ و $|s_n| \leqslant B$ (شماره ۱.۴.۱) . همچنین شمارهای درست M و N وجود دارند به قسمی که :

$$m,n \geqslant M \Longrightarrow |r_m - r_n| \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon}{B}$$

$$m,n \geqslant N \Longrightarrow |s_m - s_n| \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon}{A}$$

و از آنجا :

$$m,n \geqslant \sup(M,N) \Longrightarrow |r_m s_m - r_n s_n| = |r_m(s_m - s_n) + (r_m - r_n)s_n|$$

$$\leqslant A\frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon}{A} + \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon}{B}B = \varepsilon$$

یعنی $(r_n s_n)$ عنصری است از E .

۳.۴.۱ ـ اگر $(r_n) \sim (r'_n)$ و $(s_n) \sim (s'_n)$ باشد داریم $(r_n s_n) \sim (r'_n s'_n)$ زیرا اگر ε یک شمار گویای بزرگتر از صفر باشد شمارگویای $A' > 0$ وجود دارد به‌قسمی که برای هرشمار n داشته باشیم $|r'_n| \leqslant A'$. به‌علاوه دوشمار درست P و Q می‌توان یافت بطوریکه :

$$n \geqslant P \Longrightarrow |r_n - r'_n| \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon}{B}$$

$$n \geqslant Q \Longrightarrow |s_n - s'_n| \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon}{A'}$$

و ازآنجا :

$$n \geqslant \sup(P,Q) \Longrightarrow |r'_n s'_n - r_n s_n| = |r'_n(s'_n - s_n) + (r'_n - r_n)s_n|$$

$$\leqslant A'\frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon}{A'} + \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon}{B}B = \varepsilon$$

یعنی دنباله‌های $(r'_n s'_n)$ و $(r_n s_n)$ هم‌ارزند .

١.٤.٤ ـ اکنون دوعنصر x و y از **R** را درنظرمی گیریم . اگر (r_n) یک نمایندهٔ x و (s_n) یک‌نمایندهٔ y در E باشند، می‌دانیم که $(r_n s_n)$ یک‌عنصر E است (١.٤.٢) وکلاس $(r_n s_n)$ در E تنها به x و y بستگی دارد (١.٤.٣) . این کلاس را با xy می‌نماییم .

١.٤.٥ - با استدلالی مشابهٔ آنچه که برای جمع دیدیم می‌توان نشان داد که قانون ضرب انجمنی وجابجایی‌است و به‌علاوه نسبت به‌جمع دارای ویژگی پخشی می‌باشد. کلاس (١ , ١ , ١ , ...) عنصر یگانهٔ قانون ضرب است واین کلاس را با ١ نمایش می‌دهیم .
بطور خلاصه می‌توان گفت **R** یک حلقهٔ جابجایی یکانی است .

١.٤.٦ ـ اکنون به اثبات لمی که به‌آن نیازمندیم می‌پردازیم . اگر x یک عنصر مخالف صفر **R** باشد ، شمار گویای $\alpha > 0$ و یک نمایندهٔ (r_n) ازکلاس x وجود دارد به‌قسمی که برای هرمقدار n یکی از دو نابرابری $r_n \geqslant \alpha$ ویا $r_n \leqslant -\alpha$ برقرارگردد.

زیرا اگر (s_n) یک نماینده ازکلاس x باشد چون $x \neq 0$ است دنبالهٔ (s_n) هم‌ارز دنبالهٔ $(0, 0, 0, \ldots)$ نیست. پس:

(I) — برای هرشمار درست N یک شمار گویای $\varepsilon > 0$ ویک شمار درست $n \geqslant N$ به قسمی می‌توان یافت که نابرابری $|s_n - 0| > \varepsilon$ برقرار باشد.

(II) — چون $(s_n) \in E$ است پس یک شمار درست P وجود دارد به قسمی که :

$$m,n \geqslant P \Longrightarrow |s_m - s_n| \leqslant \frac{1}{2}\,\varepsilon$$

با استفاده از (I) ، شمار $p \leq P$ یافت می‌شود به‌طوریکه $|s_p| > \varepsilon$ باشد. همواره باتغییر x به x– می‌توان فرض کرد که $s_p > \varepsilon$ است. پس بنابر (II) چنین داریم :

$$m \geqslant P \Longrightarrow |s_m - s_p| \leqslant \frac{۱}{۲}\varepsilon \Longrightarrow s_m \geqslant s_p - |s_m - s_p|$$

$$\geqslant \varepsilon - \frac{۱}{۲}\varepsilon = \frac{۱}{۲}\varepsilon$$

برای $n < P$ و $n \geqslant P$ به ترتیب قرار می‌دهیم $r_n = \frac{۱}{۲}\varepsilon$ و $r_n = s_n$. بنابراین (r_n) یک نمایندهٔ x است و برای هرمقدار n داریم $r_n \geqslant \frac{۱}{۲}\varepsilon$.

۷.۴.۱ - قضیه - حلقهٔ R یک هیئت است.

اثبات- با درنظر گرفتن شماره‌های (۵.۴.۱) و (۶.۵.۴ کتاب جبر) کافی‌است، نشان دهیم که $۰ \neq ۱$ است وهرعنصر مخالف باصفر $\mathbf{R}$ وارون‌پذیر می‌باشد. درستی $۰ \neq ۱$ روشن است زیرا دنباله‌های $(۱, ۱, ۱, \ldots)$ و $(۰, ۰, ۰, \ldots)$ هم‌ارز نیستند. چنانچه x یک عنصر مخالف با صفر از $\mathbf{R}$ باشد ثابت می‌کنیم که x وارون‌پذیر است. با استفاده از ۶.۴.۱ یک شمار گویای $\alpha > ۰$ ویک نمایندهٔ کلاس x مانند (r_n) وجود دارد به‌طوریکه برای هرمقدار n داشته باشیم $|r_n| \geqslant \alpha$. اکنون نشان می‌دهیم که $(r_n^{-1}) \in E$ است.

هرگاه $\varepsilon > ۰$ باشد یک شمار درست N می‌توان یافت به قسمی که :

$$m,n \geqslant N \Longrightarrow |r_m - r_n| \leqslant \varepsilon\alpha^۲$$

و ازآنجا :

$$m,n \geqslant N \Longrightarrow |r_m^{-1} - r_n^{-1}| = \frac{|r_m - r_n|}{|r_m| \cdot |r_n|} \leqslant \frac{\varepsilon\alpha^۲}{\alpha^۲} = \varepsilon$$

یعنی (r_n^{-1}) یک عنصر E می‌باشد. روشن است که کلاس‌های (r_n) و (r_n^{-1}) وارون یکدیگرند ، پس x وارون‌پذیر است.

۵.۱ - یکسانی شمارهای گویا وشمارهای حقیقی

اگر $r \in \mathbf{Q}$ باشد، دنبالهٔ $(r, r, r, \ldots)$ یک‌دنبالهٔ کشی‌است. چنانچه کلاس این دنباله راکه یک شمار حقیقی است با $\varphi(r)$ نشان دهیم، φ یک نگاشت، $\mathbf{Q}$ در $\mathbf{R}$ خواهد بود . به علاوه φ یک‌هموسرفیسم حلقهٔ $\mathbf{Q}$ در $\mathbf{R}$ می‌باشد. اگر $s \in \mathbf{Q}$ و $s \neq r$

باشد دنباله‌های $(r, r, r, \dots)$ و $(s, s, s, \dots)$ هم‌ارز نیستند، پس داریم $\varphi(r)\neq\varphi(s)$. بنابراین φ یک ایزومرفیسم $\mathbf{Q}$ روی یک زیر هیئت $\mathbf{R}$ است. این ایزومرفیسم ۰ را به ۰ و ۱ را به ۱ تبدیل می‌کند. هرشمار گویای r را با سایهٔ آن $\varphi(r)\in\mathbf{R}$ یکی می‌گیرند. به‌این ترتیب هیئت $\mathbf{Q}$ یک زیر هیئت، هیئت $\mathbf{R}$ می‌شود .

۶.۱ ـ مقایسه شمار های حقیقی

۱.۶.۱ ـ مجموعهٔ شمارهای حقیقی را که دارای یک نمایندهٔ (r_n) باشند به‌طوریکه برای هرمقدار n داشته باشیم $r_n\geqslant 0$ با $\mathbf{R}_+$ می‌نماییم . داریم $0\in\mathbf{R}_+$.

۲.۶.۱ ـ از تعریف بالا به‌آسانی برمی‌آید که :

$$\mathbf{R}_+ + \mathbf{R}_+ \subset \mathbf{R}_+ \ , \ \mathbf{R}_+\mathbf{R}_+ \subset \mathbf{R}_+$$

۳.۶.۱ ـ می‌خواهیم نشان دهیم که $\mathbf{R}_+\cap(-\mathbf{R}_+)=\left\{0\right\}$ است. به‌عبارت دیگر اگر $x\in\mathbf{R}_+$ و $-x\in\mathbf{R}_+$ باشد داریم $x=0$. یک نمایندهٔ (r_n) درکلاس x ویک نمایندهٔ (s_n) درکلاس $-x$ می‌توان یافت بطوریکه برای هرمقدار n به‌ترتیب داشته باشیم $r_n\geqslant 0$ و $s_n\geqslant 0$. چون داریم $(r_n)\sim(-s_n)$ ، پس برای هرشمار گویای $\varepsilon>0$ شمار درست N وجود دارد به قسمی که :

$$n\geqslant N \Longrightarrow |r_n-(-s_n)|\leqslant \varepsilon$$

و از آنجا :

$$n\geqslant N \Longrightarrow r_n\leqslant \varepsilon$$

پس $(r_n)\sim(0, 0, 0, \dots)$ و درنتیجه $x=0$ است.

۴.۶.۱ ـ می‌خواهیم نشان دهیم که $\mathbf{R}_+\cup(-\mathbf{R}_+)=\mathbf{R}$ است. به‌عبارت دیگر اگر $x\in\mathbf{R}$ باشد یکی‌ازدوبستگی $x\in\mathbf{R}_+$ و یا $-x\in\mathbf{R}_+$ برقرار است . برای $x=0$ این مطلب روشن است و اگر $x\neq 0$ باشد این مطلب از ۶.۴.۱ نتیجه می‌شود .

۵.۶.۱ ـ اگر x یک شمارگویای $\geqslant 0$ باشد، x را با کلاس‌دنبالهٔ $(x,x,x,\dots)$ یکی می‌گیریم و بنابراین $x\in\mathbf{R}_+$ است. به‌وارون اگر x یک شمار گویا و متعلق به $\mathbf{R}_+$ باشد $x\geqslant 0$ است. زیرا اگر $x<0$ باشد $-x>0$ است و بنابرآنچه که دیده شد داریم $-x\in\mathbf{R}_+$. چون $x\in\mathbf{R}_+$ و $x\in-\mathbf{R}_+$ است پس بنابرشمارهٔ ۳.۶.۱ لازم است $x=0$ باشد و این ممکن نیست.

۱.۶.۶ - اگر x و y دو شمار حقیقی باشند ، می‌نویسیم $x\leqslant y$ و یا $y\geqslant x$ هرگاه $y-x\in\mathbf{R}_+$ باشد . چنانچه x و y شمارهای گویا باشند ، با درنظر گرفتن ۱.۶.۵ بستگی $x\leqslant y$ بین شمارهای گویا بدست‌می‌آید . به‌علاوه بستگی $x\geqslant 0$ مترادف بستگی $x\in\mathbf{R}_+$ است .

۱.۶.۷ - بستگی $x\leqslant y$ در $\mathbf{R}$ بازتابی است. این بستگی متعدی نیز هست. زیرا اگر $x\leqslant y$ و $y\leqslant z$ باشند داریم $y-x\in\mathbf{R}_+$ و $z-y\in\mathbf{R}_+$ و از آنجا بنابر شمارهٔ ۱.۶.۲ نتیجه می‌شود :

$$z-x=(z-y)+(y-x)\in\mathbf{R}_++\mathbf{R}_+\subset\mathbf{R}_+$$

پس $x\leqslant z$ است. اگر $x\leqslant y$ و $y\leqslant x$ باشد داریم $y-x\in\mathbf{R}_+\cap(-\mathbf{R}_+)$ و از شماره ۱.۶.۳ نتیجه می‌شود که $y-x=0$ و یا $y=x$ است . بنابراین بستگی $x\leqslant y$ در $\mathbf{R}$ یک **بستگی ترتیبی** است.

۱.۶.۸ - قضیه-مجموعهٔ R تماماً مرتب است .

اثبات- اگر x و y شمارهای حقیقی باشند بنابر ۱.۶.٤ یکی از دو بستگی :

$$x-y\in\mathbf{R}_+ \quad \text{و یا} \quad y-x\in\mathbf{R}_+$$

برقرار است . پس یا $x\leqslant y$ ویا $y\leqslant x$ می‌باشد.

۱.۶.۹ - چنانچه $x\leqslant y$ و $x'\leqslant y'$ باشد داریم $x+x'\leqslant y+y'$. زیرا دراین‌صورت $y-x\in\mathbf{R}_+$ و $y'-x'\in\mathbf{R}_+$ است و از ۱.۶.۲ نتیجه می‌شود :

$$(y+y')-(x+x')=(y-x)+(y'-x')\in\mathbf{R}_++\mathbf{R}_+\subset\mathbf{R}_+$$

۱.۶.۱۰ - با درنظرگرفتن ۱.۶.۲ داریم :

$$x\geqslant 0 \quad , \quad y\geqslant 0 \Longrightarrow xy\geqslant 0$$

۱.۶.۱۱ - دراینجا می‌توان براساس مطالب بالا همهٔ دستورهای محاسبات معمولی روی نا برابری‌ها را ثابت نمود . به ویژه قدرمطلق یک شمار حقیقی x را با قرار دادن $|x|=x$ برای $x\geqslant 0$ و $|x|=-x$ برای $x\leqslant 0$ معین کرد . ما این محاسبات ساده را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم . باید یادآور شد که می‌توان دقیقاً $\mathbf{C}$ را برمبنای $\mathbf{R}$ ساخت (شمارهٔ ۰.۵ ۱ کتاب جبر) .

فصل دوم

حدود

حد از مفاهیم اساسی آنالیز است. اما هر نظریه که منحصر به‌مفهوم حد باشد بسیار مجرد است. در اینجا تنها مطالبی‌از آن را می‌آوریم که از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. شاید خواننده از اثبات برخی از نتایج «آشکار» خسته شود. باوجود این لازم است که به‌روش کارو نظم آن عادت کند. زیرا بااستفاده از همین‌گونه راه و روش ها (اما به‌راستی بسیار پیچیده‌تر و مشکل‌تر) می‌باشد که در آنالیز قضیه‌هایی به‌دست می‌آید که هرگز آشکار نیستند. برای این که این فصل ملال‌آور نباشد برخی از مفاهیم محسوس مانند هم‌ارزی توابع، بخش اصلی‌یک بینهایت کوچک، توابع وارون توابع مثلثاتی (که به‌ویژه‌در محاسبات انتگرال‌ها به کارمی‌روند) را نیز می‌آوریم.

۲. ۱ ـ حد یک دنباله ازشمارها

۱.۱.۲ ـ فرض می‌کنیم $(u_1, u_2, u_3, \dots)$ یک دنبالهٔ شمارهای حقیقی و یا مختلط باشد. گویندکه (u_n) به سمت شمار l می‌گراید اگر برای مقادیر بزرگ n دوشمار u_n و l باندازه دلخواه به‌یکدیگر نزدیک باشند. تعریف دقیق حد به قرار زیر است :

تعریف ـ گوییم‌که (u_n) به‌سمت l می‌گراید (و به‌اختصار می‌نویسیم $u_n \to l$) اگر برای‌هرشمار دلخواه $\varepsilon > 0$ شماردرستی مانند N بتوان‌یافت بقسمی‌که :

$$n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - l| \leqslant \varepsilon$$

و دراین‌صورت می‌نویسند :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l$$

۲.۱.۲ ـ **تبصره** ـ درتعریف بالا می‌توان به‌جای یک یا هردو نابرابری $n \geqslant N$ و $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$ نابرابری‌های سره قرار داد . تعریف جدیدی‌که به‌این ترتیب بدست می‌آید هم‌ارز با تعریف بالاست . به عنوان مثال $>\varepsilon$ را بجای $\leqslant \varepsilon$ قرارمی‌دهیم . از تعریف جدید می‌توان تعریف قبلی‌را نتیجه گرفت. به‌وارون چنانچه تعریف اول برقرار باشد،

برای هر $\varepsilon > 0$ شمار درست N وجود دارد به قسمی که :

$$n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{۲}$$

و از آنجا :

$$|u_n - l| < \varepsilon$$

باید توجه کرد که ε برابر باصفر گرفته نشود زیرا دراین‌صورت تعریف قبلی محدودتر خواهد شد .

۳.۱.۲ - قضیه - اگر دنباله $(u_۱ , u_۲ , \ldots)$ دارای حد باشد این حد یکتاست .

اثبات - فرض می‌کنیم که (u_n) به سمت l و l′ به گراید. برای $\varepsilon > 0$ شمارهای درست N و N′ وجود دارند به قسمی که :

$$n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - l| \leqslant \varepsilon \;,\; n \geqslant N' \Longrightarrow |u_n - l'| \leqslant \varepsilon$$

پس برای $n \geqslant N$ و $n \geqslant N'$ هردونابرابری بالا برقرارند . بنابراین داریم :

$$|l - l'| \leqslant |l - u_n| + |u_n - l'| \leqslant ۲\varepsilon$$

چون شماره دلخواه ε بزرگتر از صفر است ، نابرابری $|l' - l| > 0$ ممکن نیست ، پس $l = l'$ می‌باشد.

۴.۱.۲ - **تبصره** - هرگاه $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ باشد روشن است که حد هردنبالهٔ جزئی که از (u_n) استخراج گردد (۲.۱۰.۱ کتاب جبر) بسمت l می‌گراید . به ویژه دنباله‌های $(u_۲ , u_۳ , u_۴ , \ldots)$ و $(u_۳ , u_۴ , u_۵ , \ldots)$ به سمت l می‌گرایند . پس حد یک دنباله (اگر وجود داشته باشد) با جابجا کردن شمارهٔ **باپایانی** از جمله‌های آن تغییر نمی‌کند.

۵.۱.۲ - قضیه - اگر دنبالهٔ (u_n) دارای حدی باشد مجموعهٔ u_n ها کران‌دار است.

اثبات - فرض می‌کنیم l حد دنبالهٔ (u_n) باشد . یک شمار درست N وجود دارد به قسمی که $n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - l| \leqslant ۱$ ، پس $n \geqslant N \Longrightarrow |u_n| \leqslant |l| + ۱$. اگر A بزرگترین عنصر مجموعهٔ شمارهای $|u_۱| , |u_۲| , \ldots , |u_{n-۱}| , |l| + ۱$ باشد برای هرمقدار n داریم $|u_n| \leqslant A$.

۶.۱.۲ - وارون قضیه بالا درحالت کلی درست نیست . به گفته دیگر هردنباله از شمارهای کران‌دار دارای حد نمی‌باشد. مثلاً به‌سادگی دیده‌می‌شود که دنبالهٔ (۰,۱,۰,۱,۰,۱,...) دارای حد نیست.

۷.۱.۲ - **قضیه - چنانچه :**

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=u \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} v_n=v$$

باشد خواهیم داشت :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n+v_n)=u+v$$

اثبات - فرض می‌کنیم $\varepsilon>0$ باشد . شمارهای درست N و N' وجود دارند به قسمی که :

$$n\geqslant N \Longrightarrow |u_n-u|\leqslant\frac{\varepsilon}{2} \, , \, n\geqslant N' \Longrightarrow |v_n-v|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

یکی از دوشمار N و N' راکه بزرگتر از دیگری است به N'' می‌نماییم ، برای $n\geqslant N''$ چنین داریم :

$$|(u_n+v_n)-(u+v)|=|(u_n-u)+(v_n-v)|$$

$$\leqslant|u_n-u|+|v_n-v|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

۸.۱.۲ - **قضیه - چنانچه :**

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=u \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} v_n=v$$

باشد، خواهیم داشت :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_nv_n)=uv$$

اثبات - با استفاده از ۵.۱.۲ یک شمار $M>0$ وجود دارد به طوری که برای هرمقدار n ، شمار M کنارهٔ بالای $|u|$, $|v|$, $|u_n|$, $|v_n|$ باشد . اگر $\varepsilon>0$ باشد یک شمار درست N وجود دارد بطوریکه :

$$n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - u| \leqslant \frac{\varepsilon}{۲M} \ , \ |v_n - v| \leqslant \frac{\varepsilon}{۲M}$$

پس برای $n \geqslant N$ چنین داریم :

$$|u_n v_n - uv| = |(u_n - u)v_n + u(v_n - v)|$$

$$\leqslant |u_n - u| \cdot |v_n| + |u| \cdot |v_n - v| \leqslant \frac{\varepsilon}{۲M} M + M \frac{\varepsilon}{۲M} = \varepsilon$$

۹.۱.۲ - **قضیه - اگر** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ **و** $l \neq ۰$ **باشد، خواهیم داشت** :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{۱}{u_n} = \frac{۱}{l}$$

(**توجه** - ممکن است برخی از u_n ها صفر باشند به طوری که نتوان وارون آنها را اختیار کرد . اما خواهیم دید که این تنها برای شمارهٔ باپایانی از اندیس‌های n امکان‌پذیر است . بنابراین از ردیف معینی به بعد شمارهای $\frac{۱}{u_n}$ وجود دارند) .

اثبات - چون $|l| > ۰$ است پس شمار درست N وجود دارد به قسمی که :

$$n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - l| \leqslant \frac{۱}{۲}|l|$$

و ازآنجا خواهیم داشت :

$$|u_n| = |l + (u_n - l)| \geqslant |l| - |u_n - l| \geqslant |l| - \frac{۱}{۲}|l| = \frac{۱}{۲}|l|$$

به ویژه برای هر $n \geqslant N$ داریم $u_n \neq ۰$. بعلاوه برای $\eta > ۰$ شمار درست N'_η وجود دارد به قسمی که :

$$n > N'_\eta \Longrightarrow |u_n - l| \leqslant \eta$$

پس برای $n \geqslant \sup(N, N'_\eta) = N_\eta$ داریم :

$$\left|\frac{۱}{u_n} - \frac{۱}{l}\right| = \frac{|l - u_n|}{|u_n| \cdot |l|} \leqslant \frac{\eta}{\frac{۱}{۲}|l| \cdot |l|} = ۲\frac{\eta}{|l|^۲}$$

چنانچه $\varepsilon > ۰$ باشد و قرار دهیم $\eta = \frac{۱}{۲}|l|^۲\varepsilon$ برای $n \geqslant N_\eta$ خواهیم داشت :

$$\left|\frac{۱}{u_n} - \frac{۱}{l}\right| \leqslant \varepsilon$$

۱۰.۱.۲ - نتیجه - اگر $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=u$ **و** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=v$ **و** $v\neq 0$ **باشد خواهیم داشت :**

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}=\frac{u}{v}$$

این مطلب از ۸.۱.۲ و ۹.۱.۲ نتیجه میشود، زیرا $\frac{u_n}{v_n}=u_n\frac{1}{v_n}$ است .

۱۱.۱.۲ - قضیه - فرض می‌کنیم $u_n=a_n+ib_n$ **و** $u=a+ib$ **باشد که در آنجا** a_n , b_n , a , b **شمارهای حقیقی هستند. برای آنکه** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=u$ **باشد بایاو بسنده است که** $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$ **و** $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=b$ **باشد .**

اثبات - اگر دنباله‌های a_n و b_n به‌ترتیب به‌سمت a و b به‌گرایند، بنابر ۷.۱.۲ و ۸.۱.۲ دنبالهٔ (a_n+ib_n) به‌سمت $a+ib$ می‌گراید . به‌ واورن فرض می‌کنیم a_n+ib_n به‌سمت $a+ib$ بگراید. چنانچه $\varepsilon>0$ باشد برای مقادیر بزرگ n داریم $|a_n+ib_n-(a+ib)|\leqslant\varepsilon$ و یا $|a_n-a+i(b_n-b)|\leqslant\varepsilon$. پس خواهیم داشت $|a_n-a|\leqslant\varepsilon$ و $|b_n-b|\leqslant\varepsilon$ یعنی a_n و b_n به ترتیب به سمت a و b می‌گرایند .

با استفاده ازاین قضیه همواره می‌توان به‌حالت دنبالهٔ شمارهای حقیقی بازگشت (این کار همیشه آسانترین راه برای شناسایی حد دنباله‌های مختلط نیست) .

۱۲.۱.۲ - نتیجه برای اینکه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=u$ **باشد بایاو بسنده است که سایهٔ** u_n **درصفحه مختلط به سمت سایهٔ u بگراید .**

۱۳.۱.۲ - قضیه (محاسبهٔ حد درنابرابری‌ها) - دودنبالهٔ (u_n) **و** (v_n) **ازشمارهای‌حقیقی‌را درنظرمی‌گیریم. اگر** $u_n\to u$ **و** $v_n\to v$ **وبرای هرمقدار n نابرابری** $u_n\leqslant v_n$ **برقرار باشد، خواهیم داشت** $u\leqslant v$.

(ممکن است برای هرمقدار n داشته باشیم $u_n<v_n$ اما درحد u_n برابر با v_n گردد) .

اثبات - برای $\varepsilon > 0$ شمار درست N وجود دارد به قسمی که :

$$n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - u| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad |v_n - v| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

دراینصورت :

$$|(u_n - v_n) - (u - v)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

و از آنجا :

$$u - v \leqslant u_n - v_n + \varepsilon \leqslant \varepsilon$$

چون ε عدد دلخواه مثبتی است نابرابری $u - v > 0$ امکان پذیر نیست .

۱٤.۱.۲ - قضیه - هر شمار حقیقی حد یک دنباله از شمارهای گویا است.

اثبات - فرض می کنیم y یک شمار حقیقی باشد . برحسب تعریف شمارهای حقیقی که در ۵.۲.۱ بیان گردید y دارای نماینده‌ای مانند $(r_1 , r_2 , \ldots)$ می‌باشد که یک دنباله از شمارهای گویاست . می‌خواهیم نشان دهیم که $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = y$ است . برای این منظور فرض می کنیم $\varepsilon > 0$ باشد . دراینصورت یک شمار گویای α وجود دارد بقسمی که داشته باشیم $0 < \alpha \leqslant \varepsilon$ (این مطلب از شمارهٔ ٦.٤.١ که درآنجا $x = \varepsilon$ است بدست می‌آید) . همچنین بنابر ۲.۲.۱ یک شمار درست N می‌توان یافت بطوریکه :

$$m,n \geqslant N \Longrightarrow -\alpha \leqslant r_m - r_n \leqslant \alpha$$

اکنون فرض می کنیم $m \geqslant N$ باشد . باید ثابت کنیم که $|r_m - y| \leqslant \varepsilon$ است .

دنبالهٔ $(r_m - r_1 , r_m - r_2 , \ldots)$ را که نماینده‌ای از شمار حقیقی $r_m - y$ می‌باشد درنظر می گیریم . اگر بجای $(N - 1)$ جملهٔ نخستین این دنباله صفر قرار دهیم دنبالهٔ $(s_1 , s_2 , \ldots)$ بدست می‌آید که با دنبالهٔ نخست هم‌ارز است (۳.۲.۱) و برای هرمقدار n داریم $-\alpha \leqslant s_n \leqslant \alpha$.

این دنباله نیز یک نمایندهٔ $r_m - y$ است . پس $-\alpha \leqslant r_m - y \leqslant \alpha$ و یا $|r_m - y| \leqslant \varepsilon$ می‌باشد .

۲.۲ ـ دنباله‌های کشی

۱.۲.۲ - تعریف - گویند دنبالهٔ شمارهای مختلط $(u_1, u_2, \ldots)$ یک دنبالهٔ کشی است چنانچه برای هر شمار دلخواه $\varepsilon > 0$ شمار درست N وجود داشته باشد بطوریکه :

$$m,n \geqslant N \Longrightarrow |u_m - u_n| \leqslant \varepsilon$$

هنگامیکه شمارهای u_n گویا باشند ، به‌آسانی دیده می‌شود که این تعریف همان تعریف ۲.۲.۱ می‌باشد .

۲.۲.۲ - قضیه (شرط کشی) - برای اینکه دنبالهٔ (u_n) از شمارهای مختلط دارای حد با پایان باشد بایا و بسنده است که (u_n) یک دنبالهٔ کشی باشد .

(درقضیهٔ بالا با پایان بودن حد منظور گردیده است ، اما درآینده با دخالت حدود بی‌پایان به تعمیم تعریف حد خواهیم پرداخت) .

اثبات - فرض می‌کنیم $u_n \longrightarrow u$. برای $\varepsilon > 0$ شمار درست N وجود دارد به قسمی که داریم :

$$n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - u| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

پس اگر $m \geqslant N$ و $n \geqslant N$ باشند چنین خواهیم داشت :

$$|u_m - u| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad |u_n - u| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

و ازآنجا :

$$|u_m - u_n| = |(u_m - u) + (u - u_n)| \leqslant |u_m - u| + |u - u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

بنابراین (u_n) یک دنبالهٔ کشی است .

به وارون گیریم (u_n) یک دنبالهٔ کشی باشد. نخست u_n ها را شمارهای حقیقی فرض می‌کنیم. بنابر ۱۴.۱.۲ برای $n \geqslant 1$ شمارگویای r_n وجود دارد به‌قسمی که داشته

باشیم $|u_n-r_n|\leqslant\frac{1}{n}$. چنانچه $\varepsilon>0$ باشد شماردرست N وجود دارد بطوری که:

$$m,n\geqslant N\Longrightarrow|u_m-u_n|\leqslant\varepsilon$$

پس :

$$m,n\geqslant\sup\left(N,\frac{1}{\varepsilon}\right)\Longrightarrow|r_m-r_n|\leqslant|r_m-u_m|+|u_m-u_n|$$

$$+|u_n-r_n|\leqslant\frac{1}{m}+\varepsilon+\frac{1}{n}\leqslant\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon$$

بنابراین دنبالهٔ شمارهای گویای $(r_1, r_2, \dots)$ یک دنبالهٔ کشی است . فرض می کنیم y شمارحقیقی‌ای باشد که دنبالهٔ $(r_1, r_2, \dots)$ یک نمایندهٔ آن است . چنانچه در ۱٤.۱.۲ دیدیم $r_n\longrightarrow y$ اما $u_n-r_n\longrightarrow 0$. پس :

$$u_n=(u_n-r_n)+r_n\longrightarrow y$$

به‌این ترتیب هنگامیکه u_n ها شمارهای حقیقی باشند قضیه برقرار است. برای اثبات قضیه درحالت کلی‌می‌نویسیم $u_n=u'_n+iu''_n$ که‌درآنجا u'_n و u''_n شمارهای‌حقیقی‌هستند. چون:

$$|u'_m-u'_n|\leqslant|u_m-u_n|\quad,\quad|u''_m-u''_n|\leqslant|u_m-u_n|$$

است، دنباله‌های (u'_n) و (u''_n) دنباله‌های کشی‌هستند، وبنابرآنچه که گذشت این‌دنباله‌ها دارای حد باپایان می‌باشند . پس دنبالهٔ (u_n) دارای حد باپایان است .

چنانچه با استفاده از **تعریف حد** (۱.۱.۲) بخواهیم ثابت کنیم که دنبالهٔ (u_n) دارای حد باپایان می‌باشد قبلاً لازم است حداین دنباله را بشناسیم ، درصورتی که با بکار بردن شرط کشی نیازی به شناسایی این حد نیست. زیرا درشرط کشی تنها (u_n) ها دخالت دارند و از این‌جا برتری شرط کشی برتعریف حد آشکار می گردد .

هم‌چنین شرط کشی برتری هیئت‌های **R** و **C** را برهیئت **Q** می‌رساند . زیرا اگر یک دنباله از شمارهای گویا ، دنبالهٔ کشی باشد این دنباله دارای حد باپایان خواهد بود که درحالت کلی ممکن است این حد یک شمار حقیقی غیر گویا باشد .

۳.۲.۲ - نتیجه - هرمجموعهٔ غیرتهی از شمارهای حقیقی که دارای کران بالا باشد ، دارای کنارهٔ بالاست .

اثبات - فرض می‌کنیم E یک بخش غیرتهی از $\mathbf{R}$ باشد که دارای کران بالاست. چنانچه b_0 یک کران بالای E و a_0 عنصری از E باشد، به روش بازگشت دو دنبالهٔ زیر را تعریف می‌کنیم:

۱- دنبالهٔ افزایشی $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ از عنصرهای E

۲- دنبالهٔ کاهشی $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ ازکران‌های بالای E

به‌طوری‌که برای هرمقدار n داریم:

$$b_n - a_n \leqslant 2^{-n}(b_0 - a_0) \qquad (1)$$

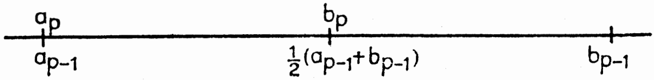
شمارهای a_0 و b_0 معین‌اند و نابرابری (۱) برای $n=0$ برقرار است. فرض می‌کنیم عنصرهای $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ متعلق به E و $b_0, b_1, \ldots, b_{p-1}$ کران‌های بالای E باشند به قسمی‌که $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_{p-1}$, $b_0 \geqslant b_1 \geqslant \cdots \geqslant b_{p-1}$ و برای هرمقدار $i \leqslant p-1$ داشته باشیم $b_i - a_i \leqslant 2^{-i}(b_0 - a_0)$. اکنون a_p و b_p را به‌این ترتیب معین می‌کنیم. اگر $\frac{1}{2}(a_{p-1}+b_{p-1})$ یک‌کران بالای E باشد قرار می‌دهیم:

$$a_p = a_{p-1} \qquad , \qquad b_p = \frac{1}{2}(a_{p-1}+b_{p-1})$$

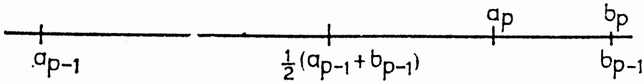
و چنانچه $\frac{1}{2}(a_{p-1}+b_{p-1})$ یک‌کران بالای E نباشد شمار a_p متعلق به E وجود دارد به قسمی‌که $a_p > \frac{1}{2}(a_{p-1}+b_{p-1})$ باشد، دراینصورت قرار می‌دهیم $b_p = b_{p-1}$. درهردوحالت $b_p \leqslant b_{p-1}$ و $a_p \geqslant a_{p-1}$ است‌که $a_p \in E$ و b_p یک‌کران بالای E می‌باشد و داریم:

$$b_p - a_p \leqslant \frac{1}{2}(b_{p-1} - a_{p-1}) \leqslant \frac{1}{2}\, 2^{-(p-1)}(b_0 - a_0) = 2^{-p}(b_0 - a_0)$$

تعیین a_i و b_i را می‌توان بدین روش تا بی‌پایان ادامه داد.



شکل ۱



شکل ۲

فرض می‌کنیم $\varepsilon > 0$ باشد ، یک شمار درست N وجود دارد به قسمی که داشته باشیم $2^{-N}(b_0 - a_0) \leqslant \varepsilon$.

اگر $N \leqslant n \leqslant m$ باشد خواهیم داشت $a_N \leqslant a_n \leqslant a_m \leqslant b_N$ پس :

$$|a_m - a_n| \leqslant b_N - a_N \leqslant 2^{-N}(b_0 - a_0) \leqslant \varepsilon$$

بنابراین دنبالهٔ (a_n) یک دنبالهٔ کشی است، و بنابر ۲.۲.۲ دارای حدی مانند a می‌باشد.

چون بنابر (۱) داریم $b_n - a_n \to 0$ پس خواهیم داشت :

$$b_n = a_n + (b_n - a_n) \to a$$

هرگاه x متعلق به E باشد برای هرمقدار n داریم $x \leqslant b_n$ ، پس $x \leqslant a$ است. بنابراین a یک کران بالای E می‌باشد . اگر y یک کران بالای دیگر E باشد برای هرمقدار n داریم $y \geqslant a_n$ ، پس $y \geqslant a$ است . درنتیجه a کوچکترین کران بالای E یا به‌عبارت دیگر a کنارهٔ بالای E می‌باشد .

۴.۲.۲ - نتیجه - هرمجموعهٔ غیر تهی از شمارهای حقیقی که دارای کران پایین باشد دارای کنارهٔ پایین است.

زیرا اگر E یک بخش غیرتهی از $\mathbf{R}$ و دارای کران پایین باشد، $-E$ یک بخش غیرتهی از $\mathbf{R}$ خواهد بود که دارای کران بالاست . اکنون کافی است که اثبات شمارهٔ ۳.۲.۲ را بکار بریم .

۳.۲- دنباله‌های یکنوا

۱.۳.۲ - دنبالهٔ (u_n) از شمارهای حقیقی را **افزایشی** می‌نامند هرگاه $u_1 \leqslant u_2 \leqslant u_3 \leqslant \ldots$ و آنرا **کاهشی** می‌گویند اگر $\ldots \geqslant u_3 \geqslant u_2 \geqslant u_1$ باشد . همچنین دنبالهٔ (u_n) را **یکنوا** گویند چنانچه (u_n) افزایشی و یا کاهشی باشد (این

تعاریف حالت خاصی‌ازتعاریف شمارهٔ ۴.۱۳.۱ کتاب‌جبراست) . اگر دنبالهٔ (u_n) افزایشی باشد روشن‌است که u_1 کران پایین‌آن است، ولی الزاماً این‌دنباله دارای کران بالانیست. هرگاه دنبالهٔ (u_n) کاهشی باشد آشکار است که u_1 کران بالای آن می‌باشد ، اما الزاماً این دنباله دارای کران پایین نیست .

۲.۳.۲ - در شمارهٔ ۶.۱.۲ دیدیم که هردنبالهٔ کران‌دار ازشمارها درحالت کلی دارای حد نیست . دراین مورد می‌توان قضیهٔ زیر را بیان نمود :

قضیه - هردنبالهٔ افزایشی (u_n) از شمارهای حقیقی که دارای یک کران بالا باشد ، حدی باپایان داردکه باکنارهٔبالای مجموعهٔ u_n ها برابر است .

اثبات - بنابر ۲.۲.۳ مجموعهٔ u_n ها دارای کنارهٔ بالای u است. چنانچه $\varepsilon > 0$ باشد، یک شمار درست N وجود دارد به‌قسمی‌که $u_N > u-\varepsilon$ (۹.۱۴.۱ کتاب‌جبر) است . ازآنجا برای $n \geqslant N$ داریم :

$$u-\varepsilon < u_N \leqslant u_n \leqslant u$$

بنابراین $|u-u_n| \leqslant \varepsilon$ است و این نابرابری،درستی قضیه را می‌رساند .

۳.۳.۲ - با تبدیل u_n به $-u_n$ نتیجه می‌شود :

قضیه - هردنبالهٔ کاهشی(u_n) ازشمارهای حقیقی‌که دارای یک کران پایین باشد حدی باپایان داردکه باکنارهٔپایین مجموعهٔ u_n ها برابراست .

۴.۳.۲ - نتیجه (قضیهٔ بولزانو - وایرشتراس) - دنبالهٔ (u_n) از شمارهای حقیقی و کراندار را درنظر می‌گیریم . می‌توان از دنبالهٔ (u_n) دنباله‌ای استخراج کردکه دارای حد باپایان باشد.

اثبات- مجموعهٔ شمارهای درست i را به قسمی‌که u_i بزرگتر از u_{i+1} ، u_{i+2} ، u_{i+3} ، ... باشد با I نشان می‌دهیم. اگر مجموعهٔ I بی‌پایان و i_1 , i_2 , i_3 , ... عنصرهای I باشندکه به ترتیب افزایشی مرتب شده‌اند ، بنا به تعریف I داریم :

$$u_{i_1} \geqslant u_{i_2} \geqslant u_{i_3} \geqslant \cdots$$

بنابراین با توجه به ۳.۳.۲ دنبالهٔ $(u_{i_1} , u_{i_2} , u_{i_3} , \ldots)$ که کراندارنیزمی‌باشد

دارای حد باپایان است . چنانچه مجموعهٔ I باپایان باشد ، یک شمار درست j_1 وجود دارد که از همهٔ عنصرهای I بزرگتر است . چون j_1 متعلق به I نیست یک شمار درست $j_2 > j_1$ وجود دارد به قسمی که $u_{j_2} > u_{j_1}$ باشد . به همین ترتیب چون j_2 متعلق به I نیست یک شمار درست $j_3 > j_2$ وجود دارد به‌طوری که داریم $u_{j_3} > u_{j_2}$ ، ... دنبالهٔ کراندار $(u_{j_1}, u_{j_2}, u_{j_3}, \ldots)$ که با این روش بدست می‌آید ، بنابر ۲.۳.۲ دارای یک حد باپایان است .

۲.۴ ـ حدود بی‌پایان

۱.۴.۲ - تعریف - گوییم که دنبالهٔ (u_n) ازشمارهای حقیقی به سمت $+\infty$ می‌گراید (و برای آسانی می‌نویسیم $u_n \to +\infty$) اگر برای هرشمار حقیقی A شمار درست N وجود داشته باشد به قسمی که :

$$n \geqslant N \Longrightarrow u_n \geqslant A$$

و دراین‌صورت قرار می‌دهیم :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

به روش مشابه دنباله‌هایی را که به سمت $-\infty$ می‌گرایند تعریف می‌کنند . به‌طوریکه در زیر خواهیم دید برخی از نتایج گذشته دربارهٔ این نوع حدود نیز درست است .

۲.۴.۲ - روشن است که می‌توان در تعریف ۱.۴.۲ بجای یک یا هردو نابرابری کلی $\geqslant$ نابرابری سرهٔ $>$ را قرار داد .

۳.۴.۲ - اگر $u_n \to +\infty$ ، هردنبالهٔ استخراج شده از (u_n) به سمت $+\infty$ می‌گراید .

۴.۴.۲ - اگر $u_n \to +\infty$ و v_n به سمت حد باپایان و یا $+\infty$ بگراید ، دنبالهٔ $u_n + v_n$ به سمت $+\infty$ می‌گراید . بطورکلی اگر $u_n \to +\infty$ و مجموعهٔ v_n ها دارای یک کران پایین μ باشد ، دنبالهٔ $u_n + v_n$ به سمت $+\infty$ می‌گراید . زیرا برای هرشمار حقیقی A ، شمار درست N به قسمی وجود دارد که :

$$n \geqslant N \Longrightarrow u_n \geqslant A - \mu$$

بنابراین برای $n \geqslant N$ داریم :

$$u_n+v_n \geqslant A-\mu+v_n \geqslant A-\mu+\mu=A$$

پس u_n+v_n به سمت $+\infty$ می‌گراید .

۲.٤.٥ - چنانچه $u_n \to +\infty$ و $v_n \to -\infty$ ، حد دنبالهٔ u_n+v_n را **نمی‌توان پیش‌بینی نمود .**

مثال :

۱ - اگر $u_n=n$ و $v_n=-n+\frac{1}{n}$ باشد $u_n+v_n=\frac{1}{n} \to 0$.

۲ - اگر $u_n=n^2$ و $v_n=-n$ باشد :

$$u_n+v_n=n^2-n=n(n-1) \to +\infty$$

۳ - چنانچه $u_n=n$ و $v_n=-n^2$ باشد :

$$u_n+v_n=n-n^2=-n(n-1) \to -\infty$$

هرگاه $u_n \to +\infty$ و $v_n \to -\infty$ و بخواهیم u_n+v_n را بررسی کنیم گوییم که u_n+v_n دارای صورت نامعین $+\infty-\infty$ است . محاسبهٔ حد مسئله نسبتاً دشواری‌است. ما درآینده باروشهای مختلفی که برای محاسبهٔ حد بکارمی‌روند آشنا خواهیم شد (۸.٦) .

۲.٤.٦ - اگر $u_n \to +\infty$ و v_n به‌سمت یک‌شمارمثبت مخالف باصفر ویابه‌سمت $+\infty$ بگراید ، دنبالهٔ u_nv_n به سمت $+\infty$ می‌گراید .

زیرا شمار حقیقی $\mu > 0$ به قسمی وجود دارد که برای $n > N$ داریم $v_n \geqslant \mu$ (این‌مطلب هنگامیکه $v_n \to +\infty$ روشن است . اگر v_n به سمت شمار مثبت ومخالف صفر a میل کند ، و شمار n باندازهٔ کافی بزرگ باشد خواهیم داشت $|v_n-a| \leqslant \frac{a}{2}$ ویا $v_n \geqslant a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$) . اگر A یک شمارحقیقی باشد شمار درست N' وجود دارد به‌طوریکه :

$$n \geqslant N' \Longrightarrow u_n \geqslant \frac{A}{\mu}$$

و از آنجا برای $n \geqslant \sup(N, N')$ داریم :

$$u_n v_n \geqslant \frac{A}{\mu}\mu = A$$

پس $u_n v_n$ به سمت $+\infty$ می‌گراید .

با تبدیل v_n به $-v_n$ می‌توان گفت که اگر $u_n \to +\infty$ و v_n به سمت یک شمار منفی و مخالف صفر و یا $-\infty$ میل کند، دنبالهٔ $u_n v_n$ به سمت $-\infty$ می‌گراید .

۲.۴.۷ - اگر u_n به سمت $+\infty$ و v_n به سمت صفر میل کند ، حد دنبالهٔ $u_n v_n$ را نمی‌توان پیش‌بینی کرد .

مثال :

۱ - اگر $u_n = n$ و $v_n = \frac{1}{n}$ باشد :

$$u_n v_n = n\frac{1}{n} = 1 \to 1$$

۲ - اگر $u_n = n^2$ و $v_n = \frac{1}{n}$ باشد :

$$u_n v_n = n \to +\infty$$

۳ - اگر $u_n = n$ و $v_n = \frac{1}{n^2}$ باشد :

$$u_n v_n = \frac{1}{n} \to 0$$

درهریک از مثالهای بالا $u_n v_n$ به‌صورت نامعین $0 \times \infty$ درمی‌آید .

۲.۴.۸ - اگر $u_n \to \pm\infty$ دنبالهٔ $\frac{1}{u_n}$ به سمت صفرمی‌گراید . زیرا برای هرشمار $\varepsilon > 0$ ، شمار درست N وجود دارد به قسمی که :

$$n \geqslant N \Longrightarrow |u_n| \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow \left|\frac{1}{u_n}\right| \leqslant \varepsilon$$

به‌روش مشابه دیده می‌شود که اگر $u_n \to 0$ ومثلاً برای هرمقدار n ، $u_n > 0$ باشد، دنبالهٔ $\frac{1}{u_n}$ به سمت $+\infty$ می‌گراید .

با درنظر گرفتن $\frac{u_n}{v_n} = u_n \frac{1}{v_n}$ ، دیده می‌شود که با دردست داشتن حد دنباله های u_n و v_n می‌توان حد دنبالهٔ $\frac{u_n}{v_n}$ را بدست آورد ، مگر هنگامی که یکی از دنباله های u_n و $\frac{1}{v_n}$ به سمت صفر و دیگری به سمت $\pm\infty$ میل کند که دراین صورت شکل نامعین $\frac{0}{0}$ و یا $\frac{\infty}{\infty}$ را خواهیم داشت .

۹.٤.۲ ـ دنبالهٔ افزایشی (u_n) را درنظر می گیریم و فرض می کنیم که مجموعهٔ u_n ها دارای یک کران بالا باشد . چنانکه درپیش دیدیم این دنباله دارای حد باپایانی است که برابر با کنارهٔ بالای دنبالهٔ u_n ها می‌باشد. اگر مجموعهٔ u_n ها دارای یک کران بالا نباشد روشن است که u_n به سمت $+\infty$ می گراید . بنابراین یک دنبالهٔ افزایشی همیشه دارای حد است (باپایان یا بی‌پایان) ، و این حد برابر با کنارهٔ بالای دنباله می‌باشد .

۵.۲ـ حد یک تابع

۱.۵.۲ ـ فرض می کنیم تابع حقیقی (یامختلط) f درفاصله I معین باشد (ممکن است این تابع درنقاط دیگری غیر از نقاط I نیز معین باشد) .

تعریف - چنانچه $c \in I$ باشد ، گوییم ، هنگامیکه x به سمت c می گراید، $f(x)$ به‌سمت l میل می کند (و به‌اختصار می‌نویسیم $f(x) \to l$) اگر برای هرشمار $\varepsilon > 0$ شمار $\eta > 0$ وجودداشته باشد به قسمی که :

$$|x-c| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x)-l| \leqslant \varepsilon$$

(روشن است که باید مقادیری از x را درنظر گرفت که برای آنها تابع f معین باشد) .

دراینصورت قرار می‌دهیم :

$$\lim_{x \to c} f(x) = l$$

این تعریف را می‌توان به‌صورتهای گوناگون بیان نمود که ما در زیر به ذکر چند نمونه ازآنها می‌پردازیم :

۲.۵.۲ ـ گوییم ، $f(x)$ هنگامی که $x \to c$ و $x \neq c$ است ، به سمت l

می‌گراید ، اگر برای هرشمار $\varepsilon>0$ شمار $\eta>0$ وجود داشته باشد به قسمی که :

$$|x-c|\leqslant\eta \ , \ x\neq c \Longrightarrow |f(x)-l|\leqslant\varepsilon$$

(برای این تعریف لازم نیست که فرض کنیم تابع f درنقطهٔ c معین باشد) ، ومی‌نویسیم:

$$\lim_{x\to c,\, x\neq c} f(x)=l$$

۳.۰.۲ - گوییم $f(x)$ ، هنگامیکه x با مقادیر بزرگتر از c به سمت c میل می‌کند، به سمت l می‌گراید، اگر برای هرشمار $\varepsilon>0$ شمار $\eta>0$ وجود داشته باشد به قسمی که :

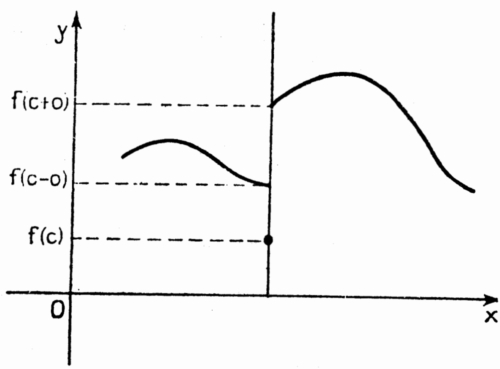
$$c<x\leqslant c+\eta \Longrightarrow |f(x)-l|\leqslant\varepsilon$$

ومی‌نویسیم :

$$\lim_{x\to c,\, x>c} f(x)=l$$

به روش مشابه وقتیکه x با مقادیر کوچکتر از c به سمت c می‌گراید ، حد $f(x)$ را تعریف می‌کنند . این دوحد را به ترتیب **حد راست و حد چپ** $f(x)$ درنقطهٔ c می‌نامند .

۴.۰.۲ - اگر حد $l=\lim\limits_{x\to c} f(x)$ وجود داشته باشد ، این حد برابر با $f(c)$ است. زیرا ازتعریف ۱.۰.۲ نتیجه می‌شود که برای هرشمار $\varepsilon>0$ داریم $|f(c)-l|\leqslant\varepsilon$. به وارون حدودی که در ۲.۰.۲ و ۳.۰.۲ تعریف شد (اگر این حدود وجود داشته باشند) می‌توانندمخالف با $f(c)$ باشند. (به علاوه ممکن است f درنقطهٔ c معین نباشند) .



شکل ۳

حد راست وحد چپ f درنقطهٔ c را (اگروجود داشته باشند) به‌ترتیب به صورت $f(c+0)$ و $f(c-0)$ می‌نویسند .

۰.۵.۰.۲ - چنانچه f درفاصله $]d, +\infty[$ معین باشد ، می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$$

اگر برای هرشمار $\varepsilon>0$ ، شمارمثبت A وجود داشته باشد به قسمی که :

$$x\geqslant A \Longrightarrow |f(x)-l|\leqslant\varepsilon$$

به روش مشابه حد $f(x)$ ، هنگامیکه x بسمت $-\infty$ می گراید تعریف می‌شود .

۶.۰.۵.۲ - کلیهٔ تعاریف بالا دارای ویژگیهای مشترک‌اند که به بیان آنها (مثلاً درحالتی که $x\to a$ و $x\neq a$ است) می‌پردازیم . چون اثبات این مطالب با آنچه را که درمورد دنباله‌ها دیدیم شباهت کامل دارد بنابراین به‌عنوان نمونه تنها حالت ۱۰.۰.۵.۲ را ثابت می کنیم .

۷.۰.۵.۲ - در تعریف حد به جای یک یا دو نابرابری $\leqslant$ می‌توان $<$ را قرار داد (۲.۱.۲) .

۸.۰.۵.۲ - اگر تابع f هنگامی که $x\to a$ و $x\neq a$ است ، دارای حد باشد، این حد یکتاست (۳.۱.۲) .

۹.۰.۵.۲ - اگر تابع f هنگامی که $x\to a$ و $x\neq a$ است، دارای حد باپایانی باشد، شمار $\eta>0$ وجود دارد به قسمی که برای $|x-a|\leqslant\eta$ و $x\neq a$ تابع f کراندار باشد (۵.۱.۲) .

۱۰.۰.۵.۲ - **قضیه - اگر** $\lim\limits_{x\to a,\, x\neq a} f_1(x)=l_1$ و $\lim\limits_{x\to a,\, x\neq a} f_2(x)=l_2$ **باشد ، داریم :**

$$\lim_{x\to a,\, x\neq a} (f_1(x)+f_2(x))=l_1+l_2$$

اثبات - (۷.۱.۲) - اگر $\varepsilon>0$ باشد ، شمارهای $\eta>0$ و $\eta'>0$ وجود دارند به قسمی که :

$$|x-a|\leqslant\eta\ ,\ x\neq a \Longrightarrow |f_1(x)-l_1|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\ ,$$

$$|x-a| \leqslant \eta' \ , \ x \neq a \Longrightarrow |f_2(x)-l_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

چنانچه $\eta''=\inf(\eta , \eta')$ باشد ، خواهیم داشت :

$$|x-a| \leqslant \eta'' \ , \ x \neq a \Longrightarrow \begin{cases} |f_1(x)-l_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \\ |f_2(x)-l_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow |(f_1(x)+f_2(x))-(l_1+l_2)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

۱۱.۰.۲ - قضیه - اگر $\lim\limits_{x\to a , x\neq a} f_1(x)=l_1$ و $\lim\limits_{x\to a , x\neq a} f_2(x)=l_2$ **باشد، داریم :**

$$\lim_{x\to a , x\neq a} f_1(x)f_2(x)=l_1 l_2$$

(شمارهٔ ۸.۱.۲ را ببینید) .

۱۲.۰.۲ - قضیه - اگر $\lim\limits_{x\to a , x\neq a} f_1(x)=l_1$ و $\lim\limits_{x\to a , x\neq a} f_2(x)=l_2$ **و** $l_2 \neq 0$ **باشد، داریم :**

$$\lim_{x\to a , x\neq a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{l_1}{l_2}$$

(شمارهٔ ۱۰.۱.۲ را ببینید) .

۱۳.۰.۲ - قضیه - فرض می‌کنیم $f(x)=g(x)+ih(x)$ **باشد که در آنجا** g و h **توابع حقیقی هستند . برای اینکه :**

$$\lim_{x\to a , x\neq a} f(x)=b+ic$$

باشد (که در آنجا b و c **شمارهای حقیقی می‌باشند) بایاو بسنده است که داشته باشیم :**

$$\lim_{x\to a , x\neq a} g(x)=b \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a , x\neq a} h(x)=c$$

(شمارهٔ ۱۱.۱.۲ را ببینید) .

این قضیه بررسی حد توابع مختلط را به بررسی حد توابع حقیقی تبدیل می‌کند.

۲.۰.۱٤ - قضیه - فرض می‌کنیم f_1 و f_2 دو تابع حقیقی باشند به قسمی که داشته باشیم:

$$\lim_{x\to a,\, x\neq a} f_2(x)=l_2 \;,\; \lim_{x\to a,\, x\neq a} f_1(x)=l_1$$

اگر نابرابری $f_1(x)\leqslant f_2(x)$ برای تمام مقادیر x (یا تنها برای مقادیر نزدیک به a و $x\neq a$) برقرار باشد خواهیم داشت $l_1\leqslant l_2$ (۲.۱.۱۳) .

این قضیه را دستور محاسبهٔ حد درنابرابری‌ها می‌نامند.

۲.۰.۱۵ - قضیه (شرط کشی) - فرض می‌کنیم تابع f درفاصله‌ای که نقطهٔ a را دربردارد معین باشد (تابع f می‌تواند در نقطهٔ a معین نباشد). برای‌اینکه $f(x)$ ، هنگامی که x به سمت a می‌گراید و $x\neq a$ است، دارای حد باپایانی باشد، بایاوبسنده است که برای هرشمار $\varepsilon>0$ شمار $\eta>0$ وجود داشته باشد به قسمی که:

$$x\neq a \,,\, x'\neq a \,,\, |x-a|\leqslant\eta \,,\, |x'-a|\leqslant\eta \Longrightarrow |f(x)-f(x')|\leqslant\varepsilon$$

(شمارهٔ ۲.۲.۲ را ببینید) .

اثبات - اثبات این قضیه با اثبات قضیهٔ نظیرآن در دنباله‌ها تفاوت دارد، بنابراین به‌بیان تمام جزئیات آن می‌پردازیم.

۱ - فرض می‌کنیم $\lim_{x\to a,\, x\neq a} f(x)=l$ باشد. برای‌هرشمار $\varepsilon>0$ شمار $\eta>0$ وجود دارد به قسمی که:

$$x\neq a \;,\; |x-a|\leqslant\eta \Longrightarrow |f(x)-l|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

پس اگر $x\neq a$ و $x'\neq a$ باشد و داشته باشیم $|x-a|\leqslant\eta$ و $|x'-a|\leqslant\eta$ خواهیم داشت:

$$|f(x)-l|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

$$|f(x')-l|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

وازآنجا :

$$|f(x)-f(x')| \leqslant \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon$$

۲ - فرض می‌کنیم شرط بالا برقرار باشد . برای هرشمار $\varepsilon > ۰$ شمار $\eta > ۰$ وجود دارد به‌طوریکه :

$$(۱) \quad x \neq a \,,\, x' \neq a \,,\, |x-a| \leqslant \eta \,,\, |x'-a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x)-f(x')| \leqslant \varepsilon$$

اگر N یک‌شماردرست‌وبزرگترازصفر باشدبه‌قسمی‌که داشته باشیم $\frac{۱}{N} \leqslant \eta$ ، خواهیم داشت :

$$m,n \geqslant N \Longrightarrow \left|\left(a+\frac{۱}{m}\right)-a\right| \leqslant \eta \;,\; \left|\left(a+\frac{۱}{n}\right)-a\right| \leqslant \eta$$

$$\Longrightarrow \left|f\left(a+\frac{۱}{m}\right)-f\left(a+\frac{۱}{n}\right)\right| \leqslant \varepsilon$$

بنابر ۲.۲.۲ دنبالهٔ شمارهای $f\left(a+\frac{۱}{n}\right)$ هنگامیکه $n \to +\infty$ ، دارای حد با پایان l است . اگر $x \neq a$ و $|x-a| \leqslant \eta$ باشد ، با استفاده از (۱) برای $n \geqslant N$ چنین داریم :

$$\left|f(x)-f\left(a+\frac{۱}{n}\right)\right| \leqslant \varepsilon$$

پس هنگامیکه $n \to +\infty$ ، خواهیم داشت :

$$|f(x)-l| \leqslant \varepsilon$$

این نا برابری نشان می‌دهد که $f(x)$ هنگامی‌که x با مقادیر مخالف با a به‌سمت a می‌گراید ، به‌سمت l میل می‌کند. به‌این‌ترتیب قضیه ثابت می‌شود .

بابکاربردن‌شرط کشی‌می‌توان‌نشان‌داد که یک‌تابع دارای حد باپایان است بدون‌آنکه نیازی به شناسایی این حد باشد .

۱۶.۵.۲ - فرض می‌کنیم تابع f هنگامیکه $x \to a$ و $x \neq a$ است ، دارای حد با پایانی باشد. در ۹.۵.۲ دیدیم‌که اگر $|x-a|$ باندازهٔ کافی کوچک و $x \neq a$

باشد، تابع f کراندار است . ولی وارون این مطلب همواره درست نیست و دراین مورد قضیهٔ زیر را داریم :

قضیه - فرض می‌کنیم تابع f درفاصله] a' , a [معین و افزایشی و دارای کران بالا باشد. دراین‌صورت، هنگامی‌که $x \to a$ و $x < a$ است، تابع f دارای حدی است که برابر با کنارهٔ بالای f درفاصلهٔ] a' , a [می‌باشد (شمارهٔ ۲.۳.۰۲ را ببینید) .

اثبات - بنابر ۲.۲.۰۳ ، مجموعهٔ مقادیر f درفاصلهٔ] a' , a [دارای یک کنارهٔ بالای l است . بنابراین برای هرشمار $\varepsilon > 0$ ، یک مقدار $f(b)$ از تابع f درفاصلهٔ] a' , a [وجود دارد به قسمی‌که $f(b) > l-\varepsilon$ باشد . اکنون قرار می‌دهیم $\eta = a-b$ پس داریم $\eta > 0$ ، به علاوه :

$$a-\eta \leqslant x < a \Longrightarrow b \leqslant x < a$$
$$\Longrightarrow l-\varepsilon < f(b) \leqslant f(x) \leqslant l \Longrightarrow |f(x)-l| \leqslant \varepsilon$$

و از آنجا خواهیم داشت $\lim\limits_{x\to a,\, x<a} f(x) = l$.

۱۷.۰.۰۲ - **حد بی‌پایان** - گوییم تابع‌حقیقی f ، هنگامی‌که $x \to a$ و $x \neq a$ است، به سمت $+\infty$ می‌گراید ، اگر برای هرشمار حقیقی $A > 0$ یک‌شماره $\eta > 0$ وجود داشته باشد بقسمی‌که :

$$x \neq a \;,\; |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant A$$

دراین‌صورت می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to a,\, x\neq a} f(x) = +\infty$$

به روش‌مشابه می‌توان تابع حقیقی f را هنگامی‌که به سمت $-\infty$ می‌گراید تعریف کرد .

باتوجه به تشابهی که بین حدود توابع ودنباله‌ها وجود دارد ، اثبات قضایای مربوط به‌حدودتوابع را درحالات‌بالا به‌عهدهٔ‌خواننده می‌گذاریم وتنها به‌بیان‌مطلب زیر می‌پردازیم:

اگر تابع f درفاصلهٔ] a' , a [افزایشی باشد ، هنگامی‌که $x \to a$ و $x < a$ است ، تابع f دارای حد است . اگر f دارای کران بالا باشد ، این حد باپایان و درغیر

این‌صورت بی‌پایان است. درهردوحالت حد f برابر با کنارهٔ بالای آن درفاصلهٔ $]a', a[$ می‌باشد (شمارهٔ ۹.٤.۲ را به‌بینید) .

۱۸.۰.۲ - اگر $\lim\limits_{x\to a, x\neq a} f(x)=\pm\infty$ باشد ، گوییم‌که $f(x)$ هنگامی که $x\to a$ و $x\neq a$ می‌باشد یک **بینهایت‌بزرگ** است. اگر $\lim\limits_{x\to a, x\neq a} f(x)=0$ باشد، گوییم که $f(x)$ هنگامی که $x\to a$ و $x\neq a$ می‌باشد، یک **بینهایت‌کوچک** است.

۱۹.۰.۲ - **حد یک تابع مرکب** - اکنون به بیان قضیهٔ زیر ، که با قضایای مربوط به دنباله‌ها تفاوت دارد می‌پردازیم :

قضیه - دوتابع f و g را درنظر می‌گیریم وفرض می‌کنیم:

$$\lim_{x\to b} g(x)=l \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a} f(x)=b$$

باشد. دراین‌صورت خواهیم داشت :

$$\lim_{x\to a} g(f(x))=l$$

اثبات - برای هرشمار $\varepsilon>0$ ، شمار $\eta_1>0$ وجود دارد بطوری‌که :

$$|y-b|\leqslant\eta_1 \implies |g(y)-l|\leqslant\varepsilon$$

همچنین شمار $\eta>0$ وجود دارد به‌قسمی‌که :

$$|x-a|\leqslant\eta \implies |f(x)-b|\leqslant\eta_1$$

و ازآنجا چنین داریم :

$$|x-a|\leqslant\eta \implies |f(x)-b|\leqslant\eta_1 \implies |g(f(x))-l|\leqslant\varepsilon$$

۲۰.۰.۲ - فرض می‌کنیم حددنبالهٔ (u_n) ازشمارهای حقیقی ، برابر با b وحدتابع g ، هنگامی‌که $x\to b$ و $x\neq b$ است ، برابر با l باشد. دراین‌صورت $g(u_n)$ به‌سمت l می‌گراید . این مطلب مانند ۱۹.۰.۲ ثابت می‌شود .

۲۱.۰.۲ - **صورتهای نامعین** - در توابع نیز مانند دنباله‌ها به صورتهای نامعین $\infty - \infty$ و $\infty \times ۰$ و $\frac{۰}{۰}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ برخورد میکنیم . مثلاً هنگامیکه $x \to ۰$ و $x \neq a$ است چنانچه $f(x)$ به سمت ۰ و $g(x)$ به سمت $+\infty$ میل کند حاصلضرب $f(x).g(x)$ به‌صورت نامعین $\infty \times ۰$ درمی‌آید .

صورتهای نامعین بالا را می‌توان بشکل $\frac{۰}{۰}$ درآورد (بایددانست که این کارهمیشه آسان‌ترین راه برای محاسبهٔ حد نیست) .

۱- چنانچه $f(x) \to +\infty$ و $g(x) \to +\infty$ ، تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ را چنین می‌نویسیم:

$$\frac{f}{g} = \frac{\frac{۱}{g}}{\frac{۱}{f}}$$

که درآنجا $\frac{۱}{f} \to ۰$, $\frac{۱}{g} \to ۰$.

۲- چنانچه $f(x) \to ۰$ و $g(x) \to +\infty$ ، تابع $f(x).g(x)$ راچنین می‌نویسیم $fg = \frac{f}{\frac{۱}{g}}$ که‌درآنجا $f \to ۰$ و $\frac{۱}{g} \to ۰$.

۳- چنانچه $f(x) \to +\infty$ و $g(x) \to +\infty$ ، تابع $f(x) - g(x)$ را چنین می‌نویسیم $f - g = f\left(۱ - \frac{g}{f}\right)$. دراین‌حالت ابتدا صورت نامعین $\frac{g}{f}$ را موردبررسی قرار میدهیم . فرض می‌کنیم $\frac{g}{f} \to a$ دراین‌صورت $۱ - \frac{g}{f} \to ۱ - a$. اگر $a \neq ۱$ باشد ، $f - g$ به سمت بینهایت می‌گراید و علامت آن بستگی به علامت $۱ - a$ دارد ، درغیراین‌صورت به شکل نامعین $\infty \times ۰$ می‌رسیم .

۲۲.۰.۲ - فرض‌می‌کنیم $\lim_{x \to a} f(x) = l$ و تابع g درفاصله بازی که a را در بر دارد برابر با f باشد . دراین‌صورت با استفاده از تعریف ۱.۰.۲ خواهیم داشت :

$\lim\limits_{x\to a} g(x)=l$. برای مفاهیم دیگر حد ، ویژگی‌های مشابهی وجود دارد (باتوجه به‌این مطلب میتوان گفت که مفهوم حد موضعی است) .

۶.۲ - هم ارزی

۱.۶.۲ - دو تابع حقیقی (یا مختلط) f و g را در نظر می گیریم . هنگامی که x به سمت x_0 می گراید، f و g را **هم‌ارز** می‌نامند ، هرگاه تابع h که برای مقادیر کوچک $|x-x_0|$ معین‌است‌وجود داشته باشدبطوریکه $f(x)=g(x)h(x)$ و وقتی که x بسمت x_0 می گراید $h(x)$ بسمت ۱ میل کند. دراینصورت می‌نویسیم :

$$f\sim g \qquad (x\to x_0)$$

تعریف‌بالا بیان میکند که‌اگر $g(x)$ برای مقادیر کوچک $|x-x_0|$ مخالف‌باصفرباشد ، هنگامی که x به سمت x_0 می گراید $\frac{f}{g}$ به سمت ۱ میل می کند.

۲.۶.۲ - **مثال** : ۱ - داریم

$$\sin x\sim x \qquad (x\to 0)$$

زیرا اگر برای $x\neq 0$ قرار دهیم $h(x)=\frac{\sin x}{x}$ و $h(0)=1$ باشد ، برای‌هرمقدار x خواهیم داشت $\sin x=xh(x)$ و می‌دانیم که $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=1$ است.

۲ - تابع $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ راکه در آن $a_n\neq 0$ است درنظر می گیریم. داریم :

$$P(x)\sim a_nx^n \qquad (x\to \pm\infty)$$

زیرا برای $x\neq 0$ خواهیم داشت :

$$P(x)=a_nx^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x}+\frac{a_{n-2}}{a_n}\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}\right)$$

و هنگامی که $x\to\pm\infty$ عبارت درون پرانتز به سمت ۱ می گراید.

۳.۶.۲ - **قضیه - بستگی** $f\sim g \quad (x\to x_0)$ **یك بستگی هم‌ارزی‌است** .

اثبات - روشن است که بستگی $f\sim f$ برقرار می‌باشد. چنانچه $f\sim g$ باشد داریم $g\sim f$. زیرا اگر $f=gh$ باشد و $h\to 1$، برای مقادیر کوچک $|x-x_0|$ داریم $h\neq 0$. به علاوه $g=fh^{-1}$ است و $h^{-1}\to 1^{-1}=1$.

اگر $f\sim g$ و $g\sim h$ باشد، خواهیم داشت $f\sim h$. زیرا از بستگی‌های $f=gk$ و $g=hk'$ و $k\to 1$ و $k'\to 1$ بدست می‌آید $f=hk'k$ و $k'k\to 1\cdot 1=1$.

۴.۶.۲ - قضیه - فرض می‌کنیم، هنگامی که $x\to x_0$، حدتوابع f و g برابر با شمار a باشد. اگر a با پایان ومخالف با صفر باشد هنگامیکه $x\to x_0$، داریم $f\sim g$.

اثبات - با قرار دادن $h=\frac{f}{g}$ خواهیم داشت $h\to\frac{a}{a}=1$ و $f=gh$.

۵.۶.۲ - مثالهای زیر نشان می‌دهند که اگر از شرطهای $a\neq 0$ و $a\neq\pm\infty$ صرفنظر کنیم قضیه ۴.۶.۲ درست نخواهد بود.

۱ - برای $f(x)=x$ و $g(x)=x^2$، چنانچه $(x\neq 0)\to 0$ داریم $f\to 0$ و $g\to 0$ اما $\left|\frac{f}{g}\right|\to+\infty$.

۲ - چنانچه $f(x)=\frac{1}{x^2}$ و $g(x)=\frac{1}{x^4}$ باشد، هنگامیکه $x\to 0$ و $x\neq 0$ است، داریم $f\to+\infty$ و $g\to+\infty$ درصورتیکه حد $\frac{f}{g}$ به‌سمت‌صفرمیل می‌کند.

۶.۶.۲ - قضیه - فرض می‌کنیم هنگامیکه x به سمت x_0 میل میکند $f\sim g$ و $\lim_{x\to x_0} f(x)=a$ باشد (a شمار دلخواهی است که می‌تواند صفر یا بی پایان نیز باشد). داریم $\lim_{x\to x_0} g(x)=a$.

اثبات - چنانچه قرار دهیم $g=fh$، حد h هنگامیکه $x\to x_0$ برابر با یک خواهد شد، پس $g\to a\cdot 1=a$. به عبارت دیگر در محاسبهٔ حد یک تابع f میتوان به جای f تابع هم‌ارز با آنرا قرار داد. این عمل بااستفاده ازآنچه که در مورد حدودتوابع هم‌ارز خواهیم گفت به آسانی امکان‌پذیر است.

۷.۶.۲ - قضیه - فرض می کنیم هنگامیکه $x \to x_0$ داشته باشیم $f \sim f_1$ و $g \sim g_1$. در این صورت بستگی‌های $fg \sim f_1g_1$ و $\frac{f}{g} \sim \frac{f_1}{g_1}$ هنگامیکه $x \to x_0$ برقرارند.

اثبات - از بستگی‌های $f = f_1h$ و $g = g_1k$ ، که درآنها $h \to 1$ و $k \to 1$ ، چنین داریم :

$$fg = f_1g_1(hk) \quad , \quad \frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1}\,\frac{h}{k}$$

و

$$hk \longrightarrow 1 \quad , \quad \frac{h}{k} \to 1$$

۸.۶.۲ - قضیه بالا را می‌توان درمورد حاصلضرب چندین تابع تعمیم داد. بنابراین اگر داشته‌باشیم $f \sim g$ هنگامی‌که $x \to x_0$ خواهیم‌داشت $f^2 \sim g^2$, $f^3 \sim g^3$, ...

۹.۶.۲ - مثال :

۱ - بااستفاده‌ازشماره‌های ۲.۶.۲و۴.۶.۲ و ۷.۶.۲ هنگامی‌که x به‌سمتx_0 میل می‌کند $tg x = \frac{\sin x}{\cos x} \sim \frac{x}{1}$ است. پس :

$$tg x \sim x \qquad (x \to 0)$$

۲ - با درنظرگرفتن شماره‌های ۲.۶.۲ و ۷.۶.۲ هنگامیکه $x \to 0$ داریم :

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \sim 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}$$

پس

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \qquad (x \to 0)$$

۱۰.۶.۲ - **توجه** - درحالت کلی از بستگی‌های $f \sim f_1$ و $g \sim g_1$ هنگامیکه $x \to x_0$ بستگی‌های $f+g \sim f_1+g_1$ و $f-g \sim f_1-g_1$ نتیجه نمی‌شوند.

مثال :

۱ - هنگامیکه $x \to 0$ داریم $x+x^2 \sim x+x^3$ زیرا :

$$x+x^3 = (x+x^2)\,\frac{1+x^2}{1+x}$$

ازطرف دیگر $x \sim x$ است اما $(x+x^2) - x = x^2$

هم‌ارز با x^3 = $(x+x^3)-x$ نیست.

۲ - هنگامیکه $x \to 0$ داریم $\cos x \sim 1$ و $1 \sim 1$ اما $1-\cos x$ هم‌ارز با $1-1=0$ نیست.

۲.۶.۱۱ - **تبصره** - عبارت «هنگامیکه x به سمت x_0 میل میکند $f \sim g$ است» می‌رساند که $\frac{f}{g}$ نزدیک به ۱ است، یعنی دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ هنگامی که $x \to x_0$ تقریباً دارای یک مقدارند. اما اگر $f(x)$ و $g(x)$ وقتی‌که $x \to x_0$، به سمت $+\infty$ میل کنند، از بستگی $f \sim g$ نباید انتظار داشت که $f-g$ به سمت صفر میل کند.

مثال - هنگامی‌که $(x \neq 0) \to 0$ داریم $\frac{1}{x^2} \sim \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ زیرا:

$$\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=x^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)=1+x\to 1$$

اما
$$\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x}\to +\infty$$

با توجه به جدول زیر این مطالب آشکارتر می‌گردد.

x	۱	۰٫۱	۰٫۰۱	۰٫۰۰۱	۰٫۰۰۰۱
$\frac{1}{x^2}$	۱	۱۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰۰۰
$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$	۲	۱۱۰	۱۰۱۰۰	۱۰۰۱۰۰۰	۱۰۰۰۱۰۰۰۰

۲ . ۷ - بخش اصلی یک بینهایت کوچک

۲.۷.۱ - **یادآوری** - گوییم $f(x)$ هنگامیکه $x \to x_0$ یک بینهایت کوچک است، اگر $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ باشد.

همواره با قرار دادن $x-x_0=x'$ (و یا $\frac{1}{x}=x'$ اگر $x \to \pm\infty$) به حالتی که $x \to ۰$ می‌توان رسید. بنابراین از این پس حالتی را که $x \to ۰$ بررسی می‌کنیم.

۲.۷.۲ - توابع $x, x^۲, \dots, x^n, \dots$ هنگامیکه $x \to ۰$ ، یک دسته از بینهایت کوچک‌های ساده می‌باشند. چنانچه دیده می‌شود تابع x^n هرچه n بزرگتر باشد زودتر به سمت صفر میل می‌کند. جدول زیر درستی این مطلب را نشان می‌دهد.

x	$۱۰^{-۱}$	$۱۰^{-۲}$	$۱۰^{-۳}$	$۱۰^{-۴}$	...
$x^۲$	$۱۰^{-۲}$	$۱۰^{-۴}$	$۱۰^{-۶}$	$۱۰^{-۸}$	...
$x^۳$	$۱۰^{-۳}$	$۱۰^{-۶}$	$۱۰^{-۹}$	$۱۰^{-۱۲}$	...
$x^۴$	$۱۰^{-۴}$	$۱۰^{-۸}$	$۱۰^{-۱۲}$	$۱۰^{-۱۶}$	...

۳.۷.۲ - در (۲.۷) خواهیم دید که بسیاری از بینهایت کوچک‌ها با توابع ax^n که درآن‌ها a مقدار ثابتی است سنجیدنی هستند. به‌عبارت روشنتر اغلب بینهایت کوچکها هم‌ارز بینهایت کوچکی به صورت ax^n می‌باشند $(a \neq ۰)$.

۴.۷.۲ - قضیه - اگر هنگامی که $x \to ۰$ تابع $f(x)$ یك بینهایت کوچك و $f(x) \sim ax^n$ باشد $(a \neq ۰)$ ، شمارهای a و n یکتا هستند.

اثبات - فرض می‌کنیم $f(x) \sim bx^p$ و $b \neq ۰$ باشد. در اینصورت داریم $ax^n \sim bx^p$. پس هنگامیکه $(x \neq ۰) \to ۰$ کسر $\frac{ax^n}{bx^p}$ به سمت یک میل می‌کند.

اگر $n > p$ باشد عبارت بالا به صورت $\frac{a}{b}x^{n-p} \to ۱$ نوشته می‌شود و این ممکن نیست. زیرا هنگامی که $(x \neq ۰) \to ۰$ کسر $\frac{a}{b}x^{n-p}$ به سمت صفر میل می‌کند.

اگر $n < p$ باشدعبارت بالا به صورت $\frac{a}{b}\frac{۱}{x^{p-n}} \to ۱$ نوشته می‌شود و این

نیز ممکن نیست. زیرا هنگامی‌که $(x \neq ۰) \to ۰$ کسر $\frac{۱}{x^{p-n}}$ $\frac{a}{b}$ به سمت بینهایت می‌گراید.

پس خواهیم داشت $n=p$ و از آنجا $\frac{a}{b} \to ۱$ یعنی $a=b$.

۵.۷.۲ - با توجه به قضیه بالا تعریف زیر را می‌توان بیان داشت :

تعریف - اگر هنگامیکه x به سمت صفر میل می‌کند $f(x) \sim ax^n$ باشد ، ax^n را بخش اصلی $f(x)$ می‌نامند و $f(x)$ را بینهایت کوچك مرتبهٔ n می‌گویند.

۶.۷.۲ - **مثال** - هنگامی‌که $x \to ۰$:

$\sin x$ بینهایت کوچکی است که بخش اصلی آن x و مرتبه آن یك می‌باشد.

$۱ - \cos x$ بینهایت کوچکی‌است که بخش اصلی آن $\frac{x^۲}{۲}$ و مرتبه آن دو می‌باشد.

$x^۳$ بینهایت کوچکی است که بخش اصلی آن $x^۳$ و مرتبه آن سه می‌باشد.

توجه - هرقدر مرتبهٔ بینهایت کوچك $f(x)$ **بزرگتر** باشد ، مقدار $f(x)$ هنگامیکه $x \to ۰$ **کوچکتر** خواهد شد.

۷.۷.۲ - تعریف بالا را می‌توان درمورد بینهایت بزرگ‌ها نیز به کار برد.

به عنوان مثال هنگامی‌که $(x \neq ۰) \to ۰$ داریم :

$$\cot g x = \frac{۱}{tg x} \sim \frac{۱}{x}$$

گویند که $\cot g x$ بینهایت بزرگی‌است که بخش اصلی آن $\frac{۱}{x}$ می‌باشد.

۲ . ۸ - نشان‌های o و O

۱.۸.۲ - هنگامی‌که دو تابع f و g را وقتی که $x \to x_۰$ بررسی می‌کنیم ، گوییم f نسبت به g **ناچیز** است هرگاه یك تابع h که برای مقادیر کوچك $|x - x_۰|$ معین است وجود داشته باشد به طوری که :

$$f(x) = g(x)h(x) \quad , \quad \lim_{x \to x_۰} h(x) = ۰$$

در این صورت می‌نویسیم :

$$f=o(g) \qquad (x \to x_0)$$

تعریف بالا نشان می‌دهد که اگر برای مقادیر کوچک $|x-x_0|$ داشته باشیم $g(x) \neq 0$ ، هنگامی که $x \to x_0$ ، تابع $\frac{f}{g}$ به سمت صفر میل می‌کند.

۲.۸.۲ - مثال :

۱ - اگر n و n' دو شمار درست و $n > n'$ باشد ، بااستفاده از شمارهٔ ۲.۷.۲ داریم :

$$x^n=o(x^{n'}) \qquad (x \to 0)$$

۲ - هرگاه $x \to +\infty$ داریم $Logx=o(x)$ (این مطلب را در شمارهٔ ۴.۳.۵ خواهیم دید).

۳.۸.۲ - هنگامی که می‌گوییم تابع f دربرابر شمار ۱ ناچیز است به این معنی‌است که f به سمت صفر میل می‌کند. بنابراین تابعی را که به سمت صفر می‌گراید می‌توان با $o(1)$ نمایش داد . درنتیجه تابعی که در مقابل g ناچیز باشد به صورت $go(1)$ نشان داده می‌شود.

۴.۸.۲ - هنگام بررسی دو تابع f و g وقتی که $x \to x_0$ ، چنانچه تابعی مانند h وجود داشته باشد به طوریکه برای مقادیر کوچک $|x-x_0|$ تابع h معین و کراندار و $f(x)=g(x)h(x)$ باشد، می‌نویسیم :

$$f=O(g) \qquad (x \to x_0)$$

تعریف بالا نشان می‌دهد که اگر برای مقادیر کوچک $|x-x_0|$ داشته باشیم $g(x) \neq 0$ تابع $\frac{f}{g}$ برای مقادیر کوچک $|x-x_0|$ کراندار است.

۲ . ۹ - توابع پیوسته

۱.۹.۲ - تعریف- فرض می‌کنیم f یك تابع حقیقی و یا مختلط باشد که در فاصله I از R معین است . چنانچه $x_0 \in I$ باشد گوییم که تابع f در نقطه x_0 پیوسته‌است هرگاه داشته باشیم :

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$$

به عبارت دیگر تابع f در نقطه x_0 پیوسته است هرگاه برای هرشماره $\varepsilon > 0$ ، شماره $\eta > 0$ وجود داشته باشد به قسمی که :

$$|x-x_0| \leqslant \eta \quad , \quad x\in I \implies |f(x)-f(x_0)| \leqslant \varepsilon$$

۲.۹.۲ - پیوستگی تابع f را در نقطه x_0 می‌توان به صورت زیر نیز تعریف کرد :

$$\lim_{x\to x_0 \, , \, x\neq x_0} f(x)=f(x_0)$$

روشن است که این نیز همان تعریف پیوستگی است که در بالا بیان گردید . زیرا داریم $|f(x_0)-f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. اما شرط :

$$\lim_{x\to x_0 \, , \, x>x_0} f(x)=f(x_0)$$

مفهوم جدیدی از پیوستگی است که **پیوستگی راست** f در x_0 نامیده می‌شود. به همین ترتیب **پیوستگی چپ** f را در x_0 تعریف می‌کنند.

۳.۹.۲ - تعریف - گوییم که تابع f در فاصلهٔ I پیوسته است هرگاه f درهر نقطه I پیوسته باشد.

از قضیه هایی که در مورد حد توابع بیان گردید ، قضیه های وابسته به پیوستگی توابع نتیجه می‌شود که در زیر به بیان آنها می‌پردازیم .

۴.۹.۲ - پیوستگی تابع $f(x)=f_1(x)+if_2(x)$ (که درآنجا f_1 و f_2 توابع حقیقی هستند) هم‌ارز پیوستگی دو تابع $f_1(x)$ و $f_2(x)$ است (شمارهٔ ۱۳.۵.۲).

۵.۹.۲ - اگر f و g در فاصلهٔ I معین ودرنقطهٔ x_0 پیوسته باشند ، توابع $f+g$ و fg نیزدر x_0 پیوسته‌اند. به علاوه چنانچه $g(x_0) \neq 0$ باشد تابع $\frac{f}{g}$ نیز در نقطهٔ x_0 پیوسته است. (شماره‌های ۱۰.۵.۲ و ۱۱.۵.۲ و ۱۲.۵.۲).

از اینجا نتیجه می‌شود که هرچند جمله‌ای از x با ضرایب حقیقی و یا مختلط تابعی است پیوسته. همچنین هرکسرگویایی از x با ضرایب حقیقی یا مختلط ، برای مقادیر x که ریشهٔ مخرج کسرنباشد ، تابعی است پیوسته.

میدانیم که توابع $\sin x$ و $\cos x$ پیوسته‌اند. پس هرکسرگویا از $\sin x$ و $\cos x$

با ضرایب حقیقی یا مختلط برای مقادیری از x که ریشهٔ مخرج کسر نباشد تابعی است پیوسته.

۶.۹.۲ - قضیه - اگر f و g دو تابع پیوسته باشند $g \circ f$ نیز پیوسته است.

اثبات - نقطه $x_\circ$ را که تابع $g \circ f$ درآن معین است درنظر می گیریم وقرار می‌دهیم $y_\circ = f(x_\circ)$. دراینصورت داریم:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_\circ) \quad \text{و} \quad \lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_\circ)$$

که با توجه به شمارهٔ ۱۹.۵.۲ نتیجه می‌شود:

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_\circ) = g(f(x_\circ))$$

پس $g \circ f$ در نقطهٔ $x_\circ$ پیوسته است.

۷.۹.۲ - قضیه - فاصله بسته و کراندار $[a , b]$ از R را درنظر میگیریم و فرض می کنیم تابع حقیقی f در فاصله $[a , b]$ پیوسته باشد. در این صورت f در فاصلهٔ $[a , b]$ کراندار است و به کناره‌های بالا و پایین خود می‌رسد.

اثبات - اگر f بی کران باشد، برای هرشمار درست $n > \circ$ نقطهٔ x_n از $[a , b]$ یافت می‌شود به طوری که $|f(x_n)| \geqslant n$ باشد. بنابر شمارهٔ ۴.۳.۲ یک دنبالهٔ $(x_{n_1} , x_{n_2} , x_{n_3} , \dots)$ استخراج شده از (x_n) وجود دارد که به سمت حد با پایان x میل می کند وداریم $a \leqslant x \leqslant b$. بنابراین دنبالهٔ $(f(x_{n_1}) , f(x_{n_2}) , f(x_{n_3}) , \dots)$ به سمت $f(x)$ می گراید (زیرا f پیوسته است)،یعنی دنبالهٔ بالا کراندار است و این ممکن نیست. زیرا داریم $|f(x_{n_p})| > n_p$. بنابراین f کراندار است.

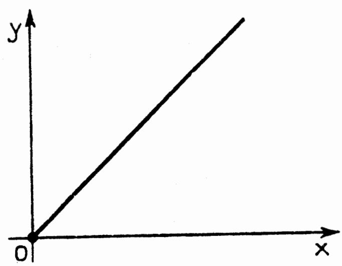
قرار می‌دهیم $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. بنابرآنچه دیده شد شمار M با پایان است. برای هرشمار درست $n > \circ$ ، نقطهٔ y_n از $[a , b]$ یافت می‌شود به قسمی که داریم $M - \frac{1}{n} \leqslant f(y_n) \leqslant M$ بنابر شمارهٔ ۴.۳.۲ یک دنبالهٔ $(y_{p_1} , y_{p_2} , y_{p_3} , \dots)$ استخراج شده از (y_n) وجود دارد که به سمت یک حد با پایان y میل می کند و داریم

$a \leqslant y \leqslant b$. بنابراین دنبالهٔ $(f(y_{p_1}), f(y_{p_2}), f(y_{p_3}), \ldots)$ از طرفی به سمت $f(y)$ و از طرف دیگر به سمت M می‌گراید (شمارهٔ ۲.۳.۲). پس $f(y)=M$ است.

به همین ترتیب میتوان نشان داد که f به کنارهٔ پایین خود نیز می‌رسد.

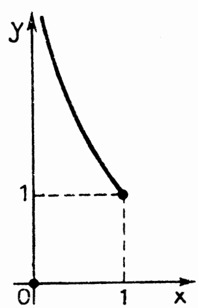
۸.۹.۲ - در بکاربردن قضیه بالا باید نهایت دقت رعایت گردد زیرا اگر کوچکترین تغییری درصورت‌این‌قضیه داده شود به نتایج‌نادرستی خواهیم رسید. مثالهای زیر درستی این مطلب را آشکار می‌کند.

الف - برای $x \in [0, +\infty[$ قرار می‌دهیم $f(x)=x$. تابع f پیوسته است ولی کراندار نیست (زیرا فاصلهٔ $[0, +\infty[$ کراندار نیست).



شکل ۴

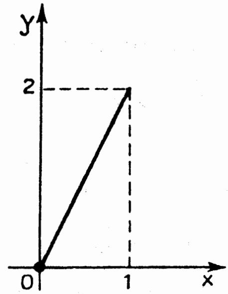
ب - برای $0 < x \leqslant 1$، قرار می‌دهیم $f(x)=\frac{1}{x}$ و $f(0)=0$. به این ترتیب تابع f در فاصلهٔ بسته و کراندار $[0, 1]$ معین است، ولی f کراندار نیست (زیرا f در نقطه 0 پیوسته نیست).



شکل ۵

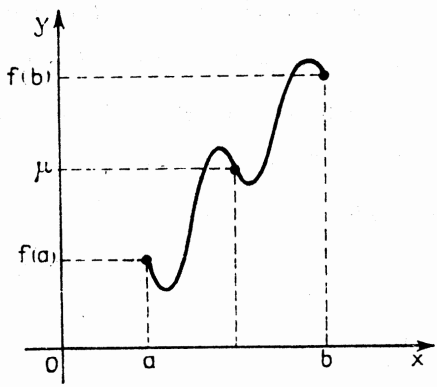
پ - برای $0 \leqslant x < 1$، قرار می‌دهیم $f(x)=2x$. تابع f پیوسته و کراندار

است و کنارهٔ بالای آن شمار ۲ می‌باشد اما تابع f به‌کنارهٔ بالای خود نمی‌رسد ، زیرا فاصله $]0, 1]$ که f در آن معین است فاصلهٔ بسته نیست.



شکل ۶

۲.۹.۹ - قضیه - فرض می‌کنیم تابع حقیقی f در فاصلهٔ بسته و کراندار $[a, b]$ از R پیوسته، و شمار μ واقع بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد. دراین‌صورت تابع f مقدار μ را در فاصله $[a, b]$ می‌پذیرد.



شکل ۷

اثبات - فرض می‌کنیم $f(a) \leqslant f(b)$ باشد. مجموعهٔ نقاط x واقع در فاصله $[a, b]$ را که برای آنها $f(x) \leqslant \mu$ است با E نشان می‌دهیم. دراین صورت a متعلق به E است. پس داریم $E \neq \varnothing$. چون مجموعهٔ E دارای کران بالای b می‌باشد پس بنابر شمارهٔ ۲.۲.۳ مجموعهٔ E دارای یک کنارهٔ بالای c است. بنابراین داریم $c \geqslant a$. زیرا c یک کران بالای E است ، و چون c کوچکترین کران بالای E می‌باشد پس داریم

$c \leqslant b$. اکنون ثابت می‌کنیم که $f(c)=\mu$ است.

ابتدا فرض می‌کنیم $f(c) < \mu$ باشد، دراینصورت خواهیم داشت $b > c$. قرار می دهیم $\alpha=\mu-f(c) > 0$ چون f در نقطه c پیوسته است، شمارهایی مانند c' متعلق به $]c , b[$ وجود دارند به قسمی که $f(c')-f(c) < \alpha$ و یا $f(c') < \mu$ باشد، در نتیجه c' متعلق به E است. پس c یک کران بالای E نیست و این غیر ممکن است.

اکنون فرض می‌کنیم $f(c) > \mu$ باشد. دراین صورت خواهیم داشت $c > a$. قرار می‌دهیم $\beta=f(c)-\mu > 0$ چون f در نقطه c پیوسته است پس یک شمار c'' متعلق به $]a , c[$ وجود دارد به طوری که در هرنقطهٔ x متعلق به $[c'' , c]$ داشته باشیم $f(x)-f(c) > -\beta$ (به عبارت دیگر $f(x) > \mu$). پس c'' یک کران بالای E است و درنتیجه c کوچکترین کران بالای E نیست و این معنی ندارد. پس داریم $f(c)=\mu$.

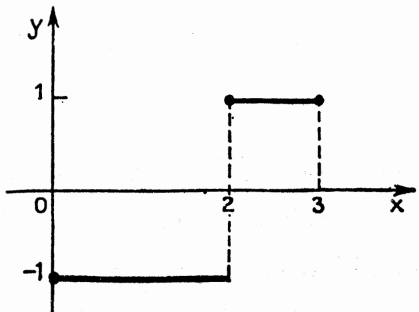
۱۰.۹.۲ ـ مثالهای زیر نشان می‌دهند که فرض‌های قضیهٔ ۹.۹.۲ برای درستی نتیجه‌هایی که از آن قضیه بدست می‌آیند نقش اساسی دارند.

الف ـ تابع f را که در فاصله $[0 , 3]$ به ترتیب زیر معین شده‌است درنظر می گیریم:

برای $0 \leqslant x < 2$ قرار می‌دهیم $f(x)=-1$

برای $2 \leqslant x \leqslant 3$ قرار می‌دهیم $f(x)=1$

به طوریکه دیده می‌شود تابع f درفاصلهٔ $[0 , 3]$ معین است اما مقدار ۰ را که بین ۱− و ۱ واقع است نمی‌پذیرد. علت آنست که f در نقطه $x=2$ ناپیوسته است.



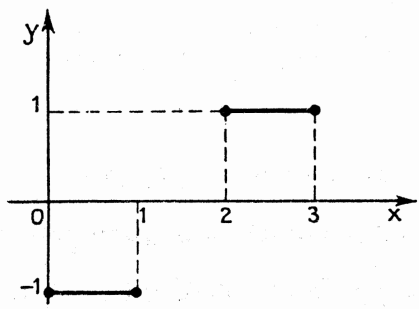
شکل ۸

ب ـ تابع f راکه به ترتیب زیر معین شده است اختیار می کنیم :

$$f(x)=-1 \quad \text{برای} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$f(x)=1 \quad \text{برای} \quad 2 \leqslant x \leqslant 3$$

به طوری‌که دیده می‌شود تابع f پیوسته است اما مقدار صفر را نمی‌پذیرد . علت آنست که مجموعهٔ تعریف،یک فاصله نیست.



شکل ۹

۱۱.۹.۲ ـ پیوستگی‌تابع f در نقطهٔ x_0 یک‌ویژگی **موضعی** است. به بیان‌دقیقتر اگر تابعی مانند g در فاصلهٔ بازی‌که x_0 را در بردارد با f برابر باشد ، پیوستگی f در x_0 هم‌ارز با پیوستگی g در x_0 است (۲۲.۵.۲).

۲ . ۱۰ ـ توابع پیوستهٔ یکنواخت

۱.۱۰.۲ ـ فرض می کنیم تابع حقیقی و یا مختلط f در یک فاصله I معین باشد.

تعریف ـ تابع f را در فاصله I پیوستهٔ یکنواخت می‌نامند اگر برای هرشمار $\varepsilon > 0$ ، شماری مانند $\eta > 0$ وجود داشته باشد به طوریکه :

$$|x-x'| \leqslant \eta \ , \ x \in I \ , \ x' \in I \implies |f(x)-f(x')| \leqslant \varepsilon$$

۲.۱۰.۲ ـ تابع پیوستهٔ یکنواخت پیوسته است. زیرا اگر در تعریف ۱.۱۰.۲ نقطهٔ $x=x_0$ را ثابت فرض کنیم تعریف پیوستگی در نقطهٔ x_0 بدست می‌آید.

۳.۱۰.۲ ـ وارون ۲.۱۰.۲ درست نیست. زیرااگر به عنوان مثال تابع $f(x)=x^2$ را که در تمام $\mathbf{R}$ معین است درنظر بگیریم ، این تابع در $\mathbf{R}$ پیوسته است ، ولی پیوستهٔ*

یکنواخت‌نیست. برای اثبات این مطلب فرض می‌کنیم f پیوستهٔ یکنواخت باشد. چنانچه در تعریف ۱.۱۰.۲ قرار دهیم $\varepsilon = 1$ یک شمار $\eta > 0$ به قسمی وجود خواهد داشت که :

$$|x-x'| \leqslant \eta \ , \ x \in \mathbf{R} \ , \ x' \in \mathbf{R} \Longrightarrow |x^2 - x'^2| \leqslant 1$$

با فرض $x = \frac{1}{\eta}$ و $x' = \frac{1}{\eta} + \eta$ داریم $|x-x'| \leqslant \eta$ و

$$|x^2 - x'^2| = \left| \frac{1}{\eta^2} - \left(\frac{1}{\eta^2} + \eta^2 + 2 \right) \right| = 2 + \eta^2 > 1$$

و این خلاف فرض است.

۴.۱۰.۲ - وارون ۲.۱۰.۲ در برخی از شرایط درست است.

قضیه - چنانچه تابع حقیقی و یا مختلط f در فاصله کراندار و بستهٔ [a , b] معین و پیوسته باشد، f درفاصلهٔ [a , b] پیوستهٔ یکنواخت‌است.

اثبات - فرض می‌کنیم تابع f در فاصلهٔ [a , b] پیوسته یکنواخت نباشد دراین صورت یک شمار $\varepsilon_0 > 0$ با ویژگی زیر یافت می‌شود :

برای هرشمار $\eta > 0$ دو نقطه x و x′ متعلق به [a , b] وجود دارند به‌قسمی که $|x-x'| \leqslant \eta$ و $|f(x)-f(x')| > \varepsilon_0$ باشد. چنانچه این ویژگی را برای $\eta = 1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{3} , \frac{1}{4} , \ldots$ درنظر بگیریم دو دنبالهٔ $(x_1 , x_2 , \ldots)$ و $(x'_1 , x'_2 , \ldots)$ از نقطه‌های [a , b] به دست می‌آید به طوری که $|x_n - x'_n| \leqslant \frac{1}{n}$ و $|f(x_n) - f(x'_n)| > \varepsilon_0$ باشد.

بااستفاده از ۴.۳.۲ می‌توان دنبالهٔ $(x_{n_1} , x_{n_2} , \ldots)$ را از (x_n) استخراج کرد به قسمی‌که دارای حدی مانند x باشد. روشن است‌که x متعلق به[a , b]است. ازطرفی چون $x'_{n_p} - x_{n_p} \to 0$ داریم $x'_{n_p} \to x$. از طرف دیگر تابع f پیوسته است پس $f(x_{n_p}) \to f(x)$ و $f(x'_{n_p}) \to f(x)$. اما دراین صورت برای مقادیر بزرگ n_p خواهیم داشت $|f(x_{n_p}) - f(x'_{n_p})| \leqslant \varepsilon_0$ که به تناقض برمی‌خوریم.

۲ . ۱۱ ـ تابع وارون یک تابع پیوسته و کاملاً یکنوا

۱.۱۱.۲ ـ قضیه ـ چنانچه $f: [a , b] \to \mathbf{R}$ یك تابع پیوسته و کاملاً افزایشی باشد، f یك نگاشت دوسویی $[a , b]$ روی $[f(a) , f(b)]$ می‌باشد. به علاوه اگر وارون نگاشت f را که روی $[f(a) , f(b)]$ معین و $[a , b]$ مجموعهٔ مقادیر آن است با f^{-1} نشان دهیم، تابع f^{-1} پیوسته و کاملاً افزایشی است.

اثبات ـ اگر $a \leqslant x \leqslant b$ باشد داریم $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$. پس $f([a , b]) \subset [f(a) , f(b)]$. از طرفی بنابرشمارهٔ ۹.۹.۲، تابع f در فاصلهٔ $[a , b]$ تمام مقادیر بین $f(a)$ و $f(b)$ را می‌پذیرد، بنابراین $f([a , b])=[f(a) , f(b)]$.

چنانچه x و y دو عنصر متمایز و متعلق به فاصلهٔ $[a , b]$ باشند داریم $f(x) \neq f(y)$ [زیرا اگر بگیریم $x < y$ خواهیم داشت $f(x) < f(y)$]. پس f یک نگاشت دوسویی $[a , b]$ روی $[f(a) , f(b)]$ است. قرار می‌دهیم $g=f^{-1}$.

فرض می‌کنیم u و v متعلق به $[f(a) , f(b)]$ و $u < v$ باشد. اگر قرار دهیم $x=g(u)$ و $y=g(v)$ خواهیم داشت $u=f(x)$ و $v=f(y)$. چنانچه $y \leqslant x$ باشد نابرابری $f(y) \leqslant f(x)$ یعنی $v \leqslant u$ بدست می‌آید که خلاف فرض است. پس $x < y$ یعنی $g(u) < g(v)$ می‌باشد، بنابراین نگاشت g کاملاً افزایشی است.

می‌خواهیم نشان دهیم که نگاشت g در تمام نقاط $[f(a) , f(b)]$ پیوسته است. پیوستگی g را برای نقطهٔ $y_\circ$ هنگامیکه $f(a) < y_\circ < f(b)$ است ثابت می‌کنیم [اثبات پیوستگی g در نقاط $y_\circ=f(a)$ و $y_\circ=f(b)$ ساده‌تر است و به روش مشابه انجام می‌شود]. قرار می‌دهیم $x_\circ=g(y_\circ)$. خواهیم داشت:

$$a < x_\circ < b \qquad \text{و} \qquad f(x_\circ)=y_\circ$$

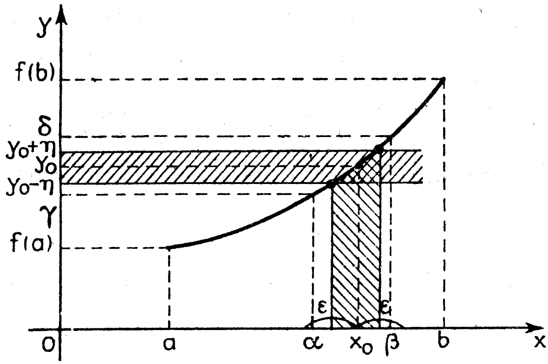
چنانچه $\varepsilon > \circ$ باشد شمارهای α و β وجود دارند به قسمی که:

$$a \leqslant \alpha < x_\circ < \beta \leqslant b \tag{۱}$$

$$|x_\circ - \alpha| \leqslant \varepsilon \quad , \quad |x_\circ-\beta| \leqslant \varepsilon \tag{۲}$$

با قرار دادن $\gamma=f(\alpha)$ و $\delta=f(\beta)$ از نابرابری‌های (۱) نتیجه می‌شود:

$$f(a) \leqslant \gamma < y_\circ < \delta \leqslant f(b)$$



شکل ۱۰

اما برای $\gamma \leqslant y \leqslant \delta$ داریم $\alpha \leqslant g(y) \leqslant \beta$ بنابراین از بستگی‌های (۲) نتیجه می‌شود $|g(y) - g(y_\circ)| \leqslant \varepsilon$. چنانچه η یک شمار مثبت وکوچکتر از شمارهای $|y_\circ - \gamma|$ و $|y_\circ - \delta|$ باشد خواهیم داشت :

$$|y-y_\circ| \leqslant \eta \implies \gamma \leqslant y \leqslant \delta \implies |g(y)-g(y_\circ)| \leqslant \varepsilon$$

و این پیوستگی g را در $y_\circ$ می‌رساند.

۲.۱۱.۲ ـ اگر در شمارهٔ بالا به جای تابع f تابع $-f$ را قرار دهیم چنین داریم :

قضیه ـ چنانچه $f : [a , b] \to \mathbf{R}$ یك تابع پیوسته وکاملاً کاهشی باشد ، f یك نگاشت دوسویی $[a , b]$ روی $[f(b) , f(a)]$ می‌باشد. نگاشت f^{-1} که از $[f(b) , f(a)]$ روی $[a , b]$ تعریف می‌شود ، تابعی پیوسته وکاملاً کاهشی می‌باشد(مجموعه مقادیر f^{-1} برابر با $[a , b]$است) .

۳.۱۱.۲ ـ **نمودار $g = f^{-1}$** : نمودار تابع f عبارت است از مجموعهٔ نقاط $(x , f(x))$ از $\mathbf{R}^2$ به قسمی که x متعلق به فاصلهٔ $[a , b]$ باشد . بنابراین نمودار تابع g عبارت است ازمجموعهٔ نقاط $(y , g(y))$ که در آنجا y متعلق به فاصلهٔ $[f(a) , f(b)]$ است ، واین همان مجموعهٔ نقاط $(f(x) , x)$ است هنگامیکه x متعلق به فاصلهٔ $[a , b]$ می‌باشد.

نقاط $(x, f(x))$ و $(f(x), x)$ نسبت به نیمساز ربع اول قرینه‌اند (هرگاه محورهای ox و oy متعامد گرفته شوند). پس نمودارهای f , g نیز نسبت به نیمساز ربع اول قرینه یکدیگرند.

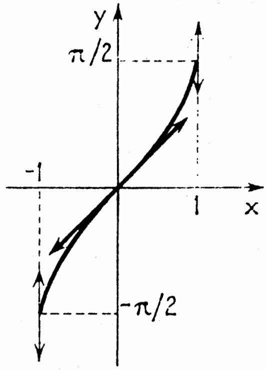
۴.۱۱.۲ - **تعمیم** - چنانچه تابع f درفاصلهٔ I که الزاماً بسته وکراندار فرض‌نشده است پیوسته وکاملاً یک نوا باشد، قضایایی مشابه ۱.۱۱.۱۴ و ۲.۱۱.۱۴ خواهیم داشت. دراین‌مورد برای نمونه تنها یکی از حالت‌ها را بیان میکنیم و حالت‌های دیگر را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم. فرض میکنیم $f : [a , b[\to \mathbf{R}$ یک تابع پیوسته وکاملاً افزایشی باشد. هنگامی‌که x با مقادیر کوچکتر از b به سمت b میل می‌کند، تابع f دارای حدی است (باپایان ویا بی‌پایان). چنانچه $\lim\limits_{x \to b, x < b} f(x) = +\infty$ باشد می‌خواهیم ثابت کنیم که f یک نگاشت دوسویی $[a , b[$ روی $[f(a) , +\infty[$ است و تابع f^{-1} پیوسته وکاملاً افزایشی می‌باشد.

اگر $a \leqslant x < b$ باشدداریم $f(a) \leqslant f(x)$. پس $f([a,b[) \subset [f(a) , +\infty[$ می‌خواهیم نشان دهیم‌که $f([a,b[) = [f(a) , +\infty[$. برای این منظور شمار y متعلق به فاصله $[f(a) , +\infty[$ را درنظر می‌گیریم. چون $\lim\limits_{x \to b, x < b} f(x) = +\infty$ است پس شمار c متعلق به $[a,b[$ به قسمی وجود داردکه $f(c) \geqslant y$ باشد. درفاصلهٔ $[a,c]$ تابع f تمام مقادیر فاصله $[f(a) , f(c)]$ و به‌ویژه y را می‌پذیرد. بنابراین داریم $f([a,b[) = [f(a) , +\infty[$. به آسانی مانند شمارهٔ ۱.۱۱.۱۴ ثابت می‌شود که f انژکتیو و f^{-1} پیوسته وکاملاً افزایشی است.

۱۲.۲ـ کاربرد: توابع وارون توابع مثلثاتی

۱.۱۲.۲ - **تابع** $y = \mathrm{Arc}\sin x$ - تابع $y = \sin x$ را درنظر می‌گیریم. این تابع در $\mathbf{R}$ پیوسته‌است اما کاملاً افزایشی نیست. لیکن تحدید این تابع به‌فاصله $\left[-\frac{\pi}{۲} , \frac{\pi}{۲}\right]$ کاملاً افزایشی می‌باشد و تمام مقادیر فاصله $[-۱ , +۱]$ را می‌پذیرد. بنابراین یک تابع وارون پیوسته‌وکاملاً افزایشی درفاصله $[-۱ , ۱]$ وجود داردکه تمام‌مقادیر فاصلهٔ $\left[-\frac{\pi}{۲} , \frac{\pi}{۲}\right]$ رامی‌پذیرد. این تابع‌را با $y = \mathrm{Arc}\sin x$ نشان می‌دهند.

۲.۱۲.۲ ـ نمودارتابع $y=\mathrm{Arc}\sin x$ ازنمودار تابع $x \to \sin x$ به‌وسیله تقارن نسبت به نیمساز ربع اول به‌دست می‌آید $\left(-\frac{\pi}{۲} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{۲}\right)$.



شکل ۱۱

۳.۱۲.۲ ـ جدول تغییرات تابع $y=\mathrm{Arc}\sin x$ ، از تعویض دوسطر جدول تغییرات تابع $\sin x$ درفاصلهٔ $\left[-\frac{\pi}{۲} , \frac{\pi}{۲}\right]$ به‌دست می‌آید :

x	-۱	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱
y	$-\frac{\pi}{۲}$	$-\frac{\pi}{۳}$	$-\frac{\pi}{٤}$	$-\frac{\pi}{٦}$	۰	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$

٤.۱۲.۲ ـ با استفاده از فرمول (۳) شمارهٔ ۲.۸.۱ داریم :

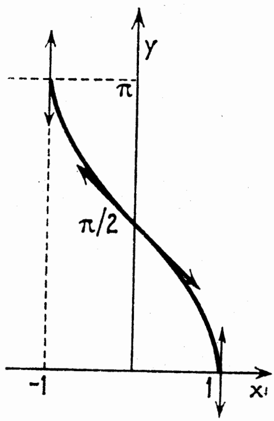
$$y=\mathrm{Arc}\sin x \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\sin y \\ -\frac{\pi}{۲} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

به عبارت‌دیگر $\mathrm{Arc}\sin x$ کمانی است بین $-\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۲}$ ، که سینوس آن برابر با x می‌باشد.

از اینجا نتیجه می‌شود که $\mathrm{Arc}\sin(-x)=-\mathrm{Arc}\sin x$ است.

۵.۱۲.۲ - **تابع** $y=\mathrm{Arc}\cos x$ - تابع $y=\cos x$ درفاصله $[0, \pi]$ پیوسته و کاملاً کاهشی است و تمام مقادیر فاصله بسته $[-1, +1]$ را می‌پذیرد . پس این تابع دارای تابع وارونی است که با $y=\mathrm{Arc}\cos x$ نموده می‌شود . تابع $\mathrm{Arc}\cos x$ در فاصلهٔ $[-1, +1]$ پیوسته‌و کاملاً کاهشی‌است‌وتمام‌مقادیر فاصلهٔ $[0, \pi]$ را می‌پذیرد.

۶.۱۲.۲ - **نمودار تابع** $y=\mathrm{Arc}\cos x$:



شکل ۱۲

۷.۱۲.۲ - جدول تغییرات تابع $y=\mathrm{Arc}\cos x$ از تعویض دوسطر جدول تغییرات تابع $\cos x$ درفاصلهٔ $[0, \pi]$ و تعویض ترتیب مقادیر آنها به دست می‌آید :

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
y	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

۸.۱۲.۲ - با استفاده از فرمول (۳) شمارهٔ ۲.۸.۱ داریم :

$$y=\mathrm{Arc}\cos x \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\cos y \\ 0 \leqslant y \leqslant \pi \end{cases}$$

بنابراین $\mathrm{Arc}\cos x$ کمانی است بین 0 و π که کسینوس آن برابر با x می‌باشد.

از اینجا نتیجه می‌شود که $\mathrm{Arc}\cos(-x)=\pi-\mathrm{Arc}\cos x$ است .

۹.۱۲.۲ - **تبصره** - فرض‌میکنیم $y=\mathrm{Arc}\sin x$ و $z=\frac{\pi}{2}-y$ باشد
با استفاده از ۴.۱۲.۲ چنین داریم :

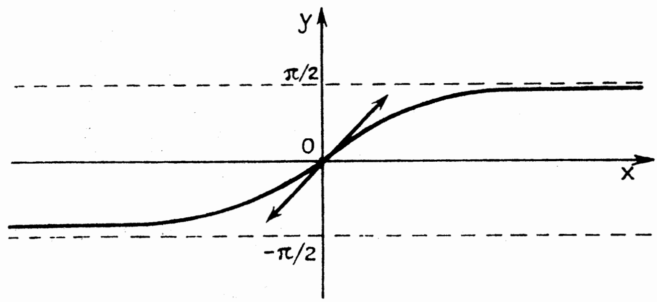
$$x=\sin y \quad و \quad -\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant \frac{\pi}{2}$$

پس خواهیم داشت $x=\cos z$ و $0\leqslant z\leqslant \pi$ که بنابر ۸.۱۲.۲ نتیجه می‌شود $z=\mathrm{Arc}\cos x$ و از آنجا فرمول زیر بدست می‌آید :

$$\mathrm{Arc}\sin x+\mathrm{Arc}\cos x=\frac{\pi}{2}$$

۱۰.۱۲.۲ - **تابع** $y=\mathrm{Arctg}x$ - تابع $y=\mathrm{tg}x$ درفاصلهٔ $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ پیوسته و کاملاً افزایشی است وتمام مقادیر بین $-\infty$ و $+\infty$ را می‌پذیرد . پس این تابع دارای تابع وارونی است که با $\mathrm{Arctg}x$ نشان داده میشود . تابع $y=\mathrm{Arctg}x$ در فاصلهٔ $]-\infty, +\infty[$ پیوسته و کاملاً افزایشی می‌باشد و تمام مقادیر فاصلهٔ $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ اختیارمیکند .

۱۱.۱۲.۲ - **نمودار تابع** $y=\mathrm{Arctg}x$:



شکل ۱۳

۱۲.۱۲.۲ - **جدول تغییرات تابع** $y=\text{Arctg}x$:

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
y	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

۱۳.۱۲.۲ - داریم :

$$y=\text{Arctg}x \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\text{tg}y \\ -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\text{Arctg}x$ کمانی است بین $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ ، که تانژانت آن برابر با x می‌باشد .

ازاینجا نتیجه میشود که $\text{Arctg}(-x)=-\text{Arctg}x$ است .

۱۳.۲ - حد ساده وحد یکنواخت یک‌دنبالهٔ تابعی

۱.۱۳.۲ - توابع حقیقی و یا مختلط f , f_1 , f_2 , ... راکه درفاصلهٔ I معین‌اند درنظر می گیریم .

تعریف - گوییم دنباله $(f_1 , f_2 , \ldots)$ در I به طور ساده به سمت f می‌گراید، اگر برای هر x متعلق به I ، هنگامیکه $n \to +\infty$ ، دنبالهٔ $(f_n(x))$ به‌سمت $f(x)$ میل کند. دراین‌صورت $f(x)$ را حدسادهٔ‌دنبالهٔ $(f_1,f_2,\ldots)$ می‌گویند.

به بیان دیگر گوییم دنبالهٔ $(f_1 , f_2 , \ldots)$ به طور ساده به سمت f میل می‌کند ، هرگاه برای‌هر $x\in I$ وهرشمار مثبت ε یک شمار درست N به‌قسمی یافت شود که :

$$n \geqslant N \Longrightarrow |f_n(x)-f(x)| \leqslant \varepsilon$$

روشن است که شمار درست N وابسته به ε است اما درحالت کلی **بستگی به x نیز دارد .**

۲.۱۳.۲ - **تعریف - گوییم دنباله** $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$ **در** I **به‌طور یکنواخت به‌سمت** f **میل‌می‌کند اگر ، هنگامیکه** n **به سمت** $+\infty$ **میگراید،** داشته باشیم :

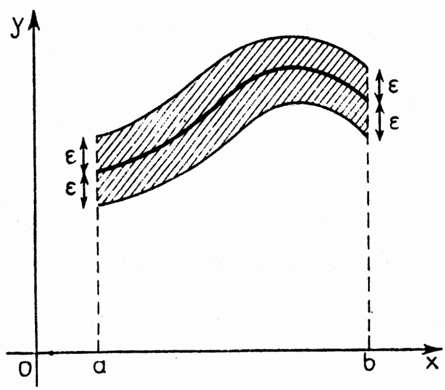
$$\sup_{x\in I} |f_n(x)-f(x)| \to 0$$

دراینصورت $f(x)$ را حد یکنواخت دنبالهٔ $(f_1, f_2, \ldots)$ می‌گویند . به عبارت دیگر گوییم‌دنبالهٔ $(f_1, f_2, \ldots)$ به‌طور یکنواخت به سمت f میل‌می‌کند، هرگاه‌برای هرشمار مثبت ε یک شمار درست N یافت شود به قسمی‌که برای هر $x\in I$ داشته باشیم :

$$n \geqslant N \Longrightarrow |f_n(x)-f(x)| \leqslant \varepsilon \qquad (1)$$

دراین حالت شمار درست N بستگی به ε دارد ولی **بستگی به** x **ندارد** .

بیان‌هندسی شرط (۱) اینست‌که برای‌مقادیر n بزرگتر از N نمودارهای f_n همگی درقسمت آژ زده شکل ۱٤ واقع‌اند .



شکل ۱٤

۳.۱۳.۲ - به سادگی دیده می‌شود که از همگرایی یکنواخت همگرایی ساده نتیجه می‌شود . اما به‌طوری‌که مثال زیر نشان میدهد وارون این مطلب درست نیست .

برای $x\in[0, 1[$ قرار میدهیم $f_n(x)=x^n$. دراینصورت :

۱- دنبالهٔ $(f_1, f_2, \ldots)$ در $[0, 1[$ به‌طور ساده به سمت صفر میل می‌کند. زیرا

اگر $۰ \leqslant x < ۱$ باشد، x^n هنگامیکه $n \to +\infty$، به سمت صفر میل می‌کند (شمارهٔ ۷.۶.۱).

۲- دنبالهٔ $(f_۱, f_۲, \ldots)$ در $[۰, ۱[$ به‌طور یکنواخت به‌سمت صفر نمی‌گراید، زیرا:

$$\sup_{x\in[۰,۱[} |f_n(x)-۰| = \sup_{۰\leqslant x<۱} x^n = ۱$$

واین شمار، هنگامی‌که $n \to +\infty$، به سمت صفر میل نمی‌کند.

۳- با وجود این دیده می‌شود که اگر $۰ \leqslant \rho < ۱$ باشد دنبالهٔ $(f_۱, f_۲, \ldots)$ درفاصلهٔ $[۰, \rho]$ به‌طور یکنواخت به سمت صفر می‌گراید. زیرا:

$$\sup_{x\in[۰,\rho]} |f_n(x)-۰| = \sup_{۰\leqslant x\leqslant\rho} x^n = \rho^n$$

و حد ρ^n هنگامی که n به سمت $+\infty$ میگراید، برابر با صفر است.

۴.۱۳.۲ - **قضیه - دنباله‌های تابعی $(f_۱, f_۲, \ldots)$ و $(g_۱, g_۲, \ldots)$ را در نظر می‌گیریم وفرض می‌کنیم که f و g به ترتیب حدود یکنواخت آنها درفاصله I باشند. دراین‌صورت دنباله‌های f_n+g_n و $|f_n|$ و λf_n به طور یکنواخت به‌ترتیب به‌سمت $f+g$ و $|f|$ و λf می‌گرایند** (λ ثابت دلخواهی است).

اثبات - فرض می‌کنیم برای هرشمارمثبت ε شمارهای درست N و P وجود داشته باشند به قسمی‌که برای هر $x\in I$ داشته باشیم:

$$n \geqslant N \Longrightarrow |f_n(x)-f(x)| \leqslant \varepsilon$$

$$n \geqslant P \Longrightarrow |g_n(x)-g(x)| \leqslant \varepsilon$$

اگر $Q=\sup(N,P)$ باشد برای هر $x\in I$ خواهیم داشت:

$$n \geqslant Q \Longrightarrow |f_n(x)-f(x)| \leqslant \varepsilon \quad و \quad |g_n(x)-g(x)| \leqslant \varepsilon$$

$$\Longrightarrow |f_n(x)+g_n(x)-(f(x)+g(x))| \leqslant ۲\varepsilon$$

پس هنگامی که n به سمت $+\infty$ میل‌می‌کند، دنبالهٔ f_n+g_n به‌طور یکنواخت به سمت $f+g$ می‌گراید. قسمتهای دیگر قضیه به روش مشابه اثبات‌می‌شود.

فصل سوم

مشتق

خواننده تعریف مشتق را می‌داند. در اینجا به‌مطالبی که از پیش شناخته است چند فرمول جدید و اثبات دقیق قضیهٔ نموهای با پایان، افزوده می‌شود. مفهوم تابع کوژ که پایان بخش این فصل است، اهمیت چندانی در این درس ندارد.

بخش ۳ . ۱ ـ تعریف

۱.۱.۳ ـ تابع حقیقی و یا مختلط f را که در فاصله I از $\mathbf{R}$ معین است درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم x_0 متعلق به I باشد. گوییم f درنقطه x_0 دارای مشتق l است اگر :

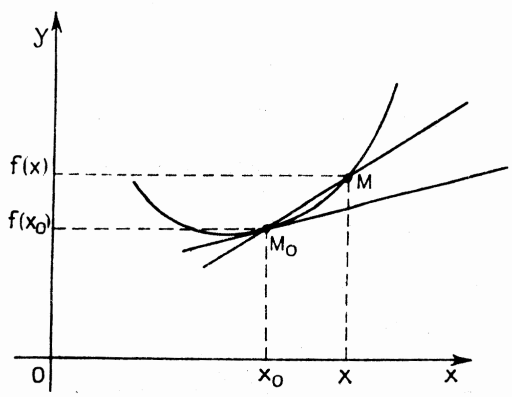
$$\lim_{x\to x_0,\, x\neq x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l$$

دراین‌صورت l را مشتق f درنقطه x_0 می‌نامیم و می‌نویسیم $l=f'(x_0)$

۲.۱.۳ ـ **تعبیرهندسی مشتق** (هنگامی که تابع f حقیقی‌است) ـ فرض می‌کنیم:

$$M_0=(x_0\,,f(x_0)) \quad , \quad M=(x\,,f(x))$$

نقاطی از خم Γ، که نمودار تابع f است، باشند. اگر $x\neq x_0$ باشد، نسبت $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ شیب خط M_0M را نشان می‌دهد. پس برای اینکه f در نقطه x_0 دارای مشتق l باشد، بایاوبسنده است که Γ درنقطه M_0 دارای خط مماسی باشیب l باشد.



شکل ۱۵

دراین‌صورت معادله این خط چنین است :

$$y-f(x_0)=l(x-x_0)$$

۳.۱.۳- اگر در ۱.۱.۳ قراردهیم $x=x_0+h$ ، بیان‌اینکه f درنقطه x_0 دارای مشتقی برابر با l است، می‌رساند که :

$$\lim_{h\to 0,\, h\neq 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l$$

۴.۱.۳ - قضیه - اگر تابع f درنقطه x_0 دارای مشتق باشد ، وقتیکه $h\to 0$ ، داریم :

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+h\,o(1)$$

اثبات - برای $h\neq 0$ چنین داریم :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)+\varepsilon(h)$$

که درآنجا ، هنگامیکه $h\to 0$ و $h\neq 0$ است ، $\varepsilon(h)\to 0$. برابری بالا به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$f(x_0+h)=f(x_0)+h[f'(x_0)+\varepsilon(h)]$$

اگر $\varepsilon(0)=0$ گرفته شود ، برابری بالا برای $h=0$ نیز برقرار است . دراین‌صورت ، وقتی‌که $h\to 0$ ، داریم $\varepsilon(h)\to 0$

۵.۱.۳ - تبصره - اگر f درنقطه x_0 دارای مشتق باشد f درنقطهٔ x_0 پیوسته است .

زیرا بنابر ۴.۱.۳ هنگامی‌که $h\to 0$ داریم $f(x_0+h)-f(x_0)\to 0$

۶.۱.۳ - تبصره - اگر $f'(x_0)\neq 0$ باشد هنگامیکه $h\to 0$ ، داریم :

$$f(x_0+h)-f(x_0)\sim hf'(x_0)$$

اثبات- بنابرشماره‌های ۷.۶.۲ و ۴.۶.۲ چنین داریم :

$$f(x_0+h)-f(x_0)=h[f'(x_0)+o(1)]\sim hf'(x_0)$$

۷.۱.۳ - **وارون قضیه ۴.۱.۳** نیز درست است . فرض‌می‌کنیم هنگامی‌که $h\to 0$

یک شمار ثابت a وجود دارد به قسمی که :

$$f(x_\circ+h)=f(x_\circ)+ha+h\,o(1)$$

دراین‌صورت‌تابع f درنقطه $x_\circ$ دارای‌مشتقی‌برابر با a است. زیرا فرض بالامی‌رساند که برای $h\neq\circ$ داریم :

$$\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}=a+o(1)$$

پس :

$$\lim_{h\to\circ,\,h\neq\circ}\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}=a$$

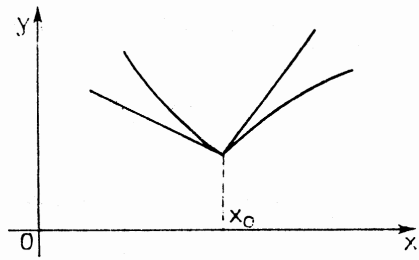
۸.۱.۳ ـ تابعی را که دریک فاصله I دارای مشتق پیوسته باشد، **تابع بامشتق پیوسته** درفاصله I می‌نامند .

۲.۳ ـ تعمیم مفهوم مشتق

فرض های شمارهٔ ۱.۳ را درنظرمی‌گیریم .

۱.۲.۳ ـ اگر $\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$ ، هنگامیکه $x\to x_\circ$ و $x\neq x_\circ$ است ، به سمت $+\infty$ میل کند گوییم که مشتق f در $x_\circ$ ، $+\infty$ است. همچنین درحالتی که $\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$ به سمت $-\infty$ میل می‌کند ، $-\infty$ را مشتق تابع f می گوییم .

۲.۲.۳ ـ اگر $\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$ ، هنگامی که $x\to x_\circ$ و $x>x_\circ$ است ، به‌سمت l میل کند ، گوییم l **مشتق‌راست** f در $x_\circ$ است. به همین‌ترتیب **مشتق‌چپ** f در $x_\circ$ تعریف می‌شود . اگر تابع f دارای مشتق‌راست l و مشتق چپ l' باشد، نمودار آن (Γ) دارای یک نیم‌خط مماس با شیب l در راست و یک نیم‌خط مماس باشیب l' در چپ می‌باشد. اگر $l\neq l'$ باشد خم Γ درنقطه $M_\circ$ دارای **نقطهٔ زاویه‌دار** است .



شکل ۱۶

مثال - تابع $y=|x|$ درنقطهٔ $x=0$ دارای دومماس است.

۳.۳- مشتق‌های پی‌درپی

فرض‌می‌کنیم تابع f درفاصله I دارای‌مشتق باشد. دراینصورت تابع $x \to f'(x)$، که در I معین است تابع مشتق f نامیده می‌شود . ممکن است که f' نیز بنوبه خود دارای مشتق باشد ... مشتق‌های پی‌درپی f را به‌ترتیب زیر نشان می‌دهیم :

$$f' \ , \ f'' \ , \ldots , \ f^{(n)} \ , \ldots$$

ویا :

$$f_x \ , \ f_{x^2} \ , \ldots , \ f_{x^n} \ , \ldots$$

ویا :

$$\frac{df}{dx} \ , \ \frac{d^2f}{dx^2} \ , \ldots , \ \frac{d^nf}{dx^n}$$

۴.۳- روش محاسبهٔ مشتق

۱.۴.۳ - **یادآوری** - اگر توابع u و v دارای مشتق باشند ، تابع‌های $u+v$ و uv نیز دارای مشتق‌اند و چنین داریم :

$$(u+v)'=u'+v' \quad , \quad (uv)'=u'v+uv'$$

اگر n یک شمار درست بزرگتر از صفر باشد خواهیم داشت :

$$(u^n)'=nu^{n-1}u'$$

درروی مجموعه نقاط x به‌قسمی که $v(x) \neq 0$ باشد، تابع $\frac{u}{v}$ دارای مشتق است وداریم :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

۲.۴.۳ ـ **مشتق لگاریتمی** ـ فرض می‌کنیم تابع f دارای مشتق باشد . تابع $\frac{f'}{f}$ را مشتق لگاریتمی تابع f می‌نامند (دلیل این مطلب درشماره ۴.۱.۵ دیده خواهد شد) .

۳.۴.۳ ـ مشتق لگاریتمی حاصل‌ضرب دو تابع u و v چنین است :

$$\frac{(uv)'}{uv} = \frac{u'v+uv'}{uv} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}$$

یعنی اگر $y=uv$ باشد :

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}$$

۴.۴.۳ ـ دستوربالا را بوسیله روش بازگشت می‌توان به حاصلضرب n عامل تعمیم داد .

درحالت ویژه اگر برای شمار درست ومثبت n ، $y=u^n$ باشد داریم :

$$\frac{y'}{y} = n\frac{u'}{u}$$

۵.۴.۳ ـ مشتق لگاریتمی کسر $\frac{u}{v}$ عبارتست از:

$$\frac{\left(\frac{u}{v}\right)'}{\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{u'v-uv'}{v^2} \cdot \frac{v}{u} = \frac{u'v-uv'}{uv} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$$

یعنی اگر $y=\frac{u}{v}$ باشد :

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$$

۶.۴.۳ - **مثال** - اگر $y=\frac{(2x-1)^5}{3(x^2+2)^3}$ باشد داریم:

$$\frac{y'}{y}=5\frac{2}{2x-1}-3\frac{2x}{x^2+2}=\frac{10(x^2+2)-6x(2x-1)}{(2x-1)(x^2+2)}$$

$$=\frac{-2x^2+6x+20}{(2x-1)(x^2+2)}$$

و درنتیجه:

$$y'=\frac{-2(x^2-3x-10)(2x-1)^4}{3(x^2+2)^4}$$

[دراین محاسبه فرض این است که $2x-1\neq 0$ باشد. ولی محاسبه مستقیم y' کسر گویایی مانند $g(x)$ را به دست می‌دهد که با فرض $2x-1\neq 0$ برابر با کسر بالا است پس برای $2x-1=0$ نیز این برابری درست است].

۷.۴.۳ - دستور ساده‌ای برای محاسبه مشتق لگاریتمی یک حاصل جمع وجود ندارد.

۸.۴.۳ - **مشتق یک تابع مرکب** - فرض می‌کنیم تابع حقیقی u درفاصله I از $\mathbf{R}$ و تابع حقیقی (یا مختلط) f درفاصله‌ای که $u(I)$ را دربر دارد معین باشد. دراین صورت می‌توانیم تابع $F=f\circ u$ را که درفاصله I معین است تشکیل دهیم.

قضیه - فرض می‌کنیم u در نقطه x_0 و f در نقطه $u(x_0)$ دارای مشتق باشند. دراین‌صورت F در نقطه x_0 دارای مشتق است و داریم:

$$F'(x_0)=f'(u(x_0))u'(x_0)$$

اثبات - قرار می‌دهیم $u_0=u(x_0)$. با توجه به ۴.۱.۳، تابع g به قسمی وجود دارد که:

$$f(u_0+k)=f(u_0)+kg(k) \qquad (1)$$

وقتی که $k\to 0$، $g(k)\to f'(u_0)$ (۲)

همچنین تابع v یافت می‌شود به‌طوری که:

$$u(x_0+h)=u(x_0)+hv(h) \qquad (3)$$

هنگامی که $h\to 0$، $v(h)\to u'(x_0)$ (۴)

با استفاده از (۱) و (۳) چنین داریم :

$$F(x_0+h)=f(u(x_0+h))=f(u_0+hv(h)) \qquad (۵)$$
$$=f(u_0)+hv(h)g(hv(h))$$
$$=F(x_0)+hv(h)g(hv(h))$$

پس هنگامی که $h \neq 0$ است نتیجه می‌شود :

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=v(h)g(hv(h))$$

با استفاده از (۴) و ۱۱.۰.۲ هنگامی که $h \to 0$ ، داریم $hv(h) \to 0$. پس با استفاده از (۲) و ۱۹.۰.۲ ، $g(hv(h)) \to f'(u_0)$ ، و ازاینجا [با درنظرگرفتن (۴) و ۱۱.۰.۲] نتیجه می‌شود $v(h)g(hv(h)) \to u'(x_0)f'(u_0)$.

۹.۴.۳ - نتیجه - اگر u درتمام نقاط فاصله I و f درتمام نقاط $u(I)$ دارای مشتق باشند ، تابع $F=f\circ u$ درتمام نقاط I دارای مشتق است و داریم :

$$F'=(f'\circ u)u'$$

۱۰.۴.۳ - **کاربرد** - مشتق یک تابع زوج (فرد) فرد (زوج) است . زیرا اگر f زوج باشد برای هرمقدار x داریم :

$$f(-x)=f(x)$$

چون از دوطرف این برابری مشتق بگیریم خواهیم داشت :

$$f'(-x)(-1)=f'(x)$$

یا :

$$f'(-x)=-f'(x)$$

به عبارت دیگر f' تابعی فرد است. به همین روش می‌توان نتیجه دیگر را ثابت نمود .

۱۱.۴.۳ - **مشتق یک تابع وارون** - فرض میکنیم تابع پیوستهٔ f درفاصله I کاملاً یکنوا و تابع‌وارون تابع f که آنرابا g نشان میدهیم درفاصلهٔ $J=f(I)$ معین باشد .

قضیه - اگر f درنقطه x_0 دارای مشتق و $f'(x_0) \neq 0$ باشد، تابع g درنقطه $y_0=f(x_0)$ دارای مشتق است وداریم :

$$g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$$

اثبات- فرض می‌کنیم $y \neq y_0$ نقطه‌ای از J و $x=g(y)$ باشد. دراینصورت نقطه x ، که متمایز از x_0 است ، متعلق به I میباشد و داریم :

$$\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}=\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]^{-1}$$

هنگامی‌که $y \neq y_0$ است و y به سمت y_0 میل می‌کند ، $x=g(y)$ به سمت $x_0=g(y_0)$ می‌گراید ، زیرا g در y_0 پیوسته است . بنابراین :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to f'(x_0)$$

وقضیه ثابت می‌شود .

۱۲.٤.۳ - **تبصره** - فرض می‌کنیم $f'(x_0)=0$ باشد . اگر تابع f افزایشی باشد تابع $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ با مقادیر بزرگتر از صفر به سمت صفر میل می‌کند. پس :

$$\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} \to +\infty$$

بنابراین داریم $g'(y_0)=+\infty$ و بدین‌جهت می‌توان دستور $g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$ را همیشه درست دانست . همچنین است هرگاه تابع f کاهشی باشد.

۱۲.٤.۳ - **نتیجه -اگر f درتمام نقاط I دارای مشتق باشد، g نیز در تمام نقاط J دارای مشتق است وداریم :** $g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$

که درآن $y=f(x)$ است (این فرسول با درنظرگرفتن ۱۲.٤.۳ همیشه درست‌است) .

۵.۳ ـ مشتق توابع وارون توابع مثلثاتی

۱.۵.۳ ـ فرض می‌کنیم $y=\mathrm{Arc}\sin x$ باشد . این تابع برای $-1 \leqslant x \leqslant 1$ معین است . با استفاده از ۱۳.٤.۳ داریم :

$$(\mathrm{Arc}\sin x)'_x = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y}$$

چون $x=\sin y$ و $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ است ، پس $\cos y=\sqrt{1-x^2}$ و ازآنجا

$$(\mathrm{Arc}\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

۲.۵.۳ ـ با استفاده از ۹.۱۲.۲ داریم $\mathrm{Arc}\cos x = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arc}\sin x$ ، که با توجه به ۱.۵.۳ به دست می‌آید :

$$(\mathrm{Arc}\cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

۳.۵.۳ ـ داریم :

$$(\mathrm{Arc}\,tg\,x)'_x = \frac{1}{(tg\,y)'_y} = \frac{1}{1+tg^2 y}$$

و یا :

$$(\mathrm{Arc}\,tg\,x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

٦.۳ ـ دستور لیبنیتز

توابع u و v راکه دارای مشتق‌های پی‌درپی مرتبهٔ اول‌ودوم و... و n ام هستند درنظرمی‌گیریم . داریم :

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \cdots + C_n^p u^{(n-p)}v^{(p)} + \cdots + C_n^{n-1} u'v^{(n-1)} + uv^{(n)} \qquad (1)$$

اثبات - برای $n=1$ دستور (۱) به دستور $(uv)'=u'v+v'u$ بدل می‌شود.
فرض می‌کنیم دستور (۱) درست باشد، خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
(uv)^{(n+1)} &= u^{(n+1)}v+u^{(n)}v' \\
&+C_n^1u^{(n)}v'+C_n^1u^{(n-1)}v'' \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+C_n^{p-1}u^{(n-p+2)}v^{(p-1)}+C_n^{p-1}u^{(n-p+1)}v^{(p)} \\
&+C_n^pu^{(n-p+1)}v^{(p)}+C_n^pu^{(n-p)}v^{(p+1)} \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+u'v^{(n)}+uv^{(n+1)} \\
&=u^{(n+1)}v+C_{n+1}^1u^{(n)}v'+\cdots+uv^{(n+1)}
\end{aligned}
$$

زیرا جملهٔ عمومی این مجموع عبارت است از:

$$(C_n^{p-1}+C_n^p)u^{(n-p+1)}v^{(p)}$$

که با استفاده از ۱۰.۱۵.۱ کتاب جبر برابر است با:

$$C_{n+1}^pu^{(n+1-p)}v^{(p)}$$

و بدین ترتیب دستور (۱) به روش بازگشت ثابت میشود.

۳ . ۷ ـ قضیه نموهای با پایان

۱.۷.۳ ـ فرض می‌کنیم تابع حقیقی f درفاصله I معین و $x_0\in I$ باشد. گوئیم f **دارای ماکزیممی در نقطه** x_0 **است**، اگر یک شمار $\alpha>0$ به قسمی وجود داشته باشد که برای $x\in I$ داشته باشیم:

$$|x-x_0|\leqslant\alpha \implies f(x)\leqslant f(x_0)$$

همچنین گوییم f **دارای مینیممی در نقطهٔ** x_0 **است**، اگر یک شمار $\alpha>0$ یافت شود به طوریکه برای $x\in I$ داشته باشیم:

$$|x-x_0|\leqslant\alpha \implies f(x)\geqslant f(x_0)$$

۲.۷.۳ - لم - فرض می‌کنیم تابع f درفاصله باز I دارای مشتق باشد. اگر f در نقطه x_0 دارای ماکزیمم یا می‌نیمم باشد، داریم $f'(x_0)=0$

اثبات - درصورت لزوم با تعویض f به $-f$ می‌توان فرض کردکه تابع f در نقطه x_0 دارای ماکزیمم است. پس یک شمار $\alpha > 0$ به قسمی یافت می‌شود که برای $x\in I$ داریم :

$$|x-x_0| \leqslant \alpha \implies f(x) \leqslant f(x_0)$$

اگر $x_0 < x \leqslant x_0+\alpha$ باشد، داریم $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$ پس :

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0\,,\,x>x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$$

اگر $x_0 > x \geqslant x_0-\alpha$ باشد داریم $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$ پس :

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0\,,\,x<x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$$

و بدین ترتیب لم بالا ثابت می‌شود.

۳.۷.۳ - قضیهٔ رل - فرض می‌کنیم $a<b$ و f تابع معینی درفاصلهٔ $[a\,,\,b]$ باشد . اگر تابع f در فاصله باز $]a\,,\,b[$ دارای مشتق و $f(a)=f(b)=0$ باشد ، نقطه c متعلق به $[a\,,\,b]$ وجود دارد به قسمی که $f'(c)=0$ است.

اثبات - اگربرای همه نقاط $[a\,,\,b]$ مقدار $f(x)=0$ باشد ، قضیه روشن است. بنابراین فرض می‌کنیم که مقادیر f بزرگتر از صفر و یا کوچکتر از صفر باشد . چون با تعویض f به $-f$ می‌توان هریک‌ازاین دو حالت‌را به دیگری بدل نمود ، فرض می‌کنیم f مقادیر بزرگتر از صفر را بپذیرد.

بااستفاده‌از ۲.۹.۷ ، f درفاصله $[a\,,\,b]$ کرانداراست ودرنقطه‌ای مانند $c\in[a\,,\,b]$ به کنارهٔ بالای خود M می‌رسد. چون M بزرگتر از صفر است (زیرا f مقادیر بزرگتر ازصفر را می‌پذیرد) ، داریم $c\in]a\,,\,b[$. و از ۲.۷.۳ نتیجه می‌شود که $f'(c)=0$ است.

۴.۷.۳ - قضیه نموهای با پایان - فرض می‌کنیم $a<b$ و تابع حقیقی f در فاصله $[a\,,\,b]$ پیوسته ودر فاصله باز $]a\,,\,b[$ دارای مشتق باشد. یك شمار $c\in]a\,,\,b[$ یافت می‌شود به طوری‌که :

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c) \qquad (۱)$$

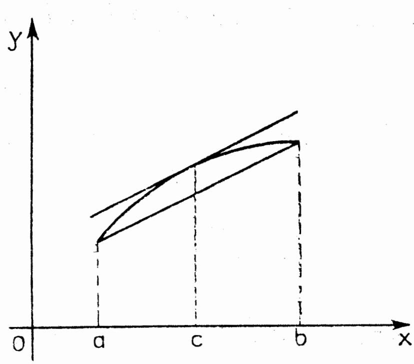
اثبات - تابع $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ را تشکیل می‌دهیم. چون $\varphi(b)=\varphi(a)=0$ و φ در فاصله $[a\,,\,b]$ پیوسته و در $]a\,,\,b[$ دارای مشتق‌است ، می‌توان قضیه‌رل(۳.۷.۳) را بکاربرد. بنابراین یک شمار c متعلق به $]a\,,\,b[$ یافت می‌شود بقسمی‌که :

$$0=\varphi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

و به این ترتیب دستور (۱) ثابت می‌شود.

۵.۷.۳ - با تعویض نقش‌های a و b ، دیده می‌شود که دستور(۱) برای $a>b$ نیز درست است.

۶.۷.۳ - فرض می‌کنیم Γ نمودار تابع f در فاصله $[a\,,\,b]$ باشد. قضیه نموهای با پایان می‌رساند که روی خم Γ نقطه‌ای متمایز از دو انتهای خم وجود دارد به قسمی که خط مماس دراین نقطه هم راستای وتری‌است که دوانتهای خم را بهم می‌پیوندد. این مطلب از نظر هندسی نیز محسوس است.



شکل ۱۷

۳ . ۷ . ۷ - قضیهٔ نموهای باپایان‌را می‌توان چنین نیزبیان‌نمود .فرض می‌کنیم‌تابع‌حقیقی f درفاصله $[x , x+h]$ پیوسته ودر $]x , x+h[$ دارای مشتق باشد. دراین‌صورت یک شمار $\theta\in]0 , 1[$ به قسمی یافت می‌شودکه :

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h) \qquad (2)$$

زیرا ، هرشمار واقع بین x و $x+h$ را می‌توان به صورت $x+\theta h$ نوشت‌که در آن شمار θ بین صفر و یک واقع است.

همانطوریکه‌در ۳ . ۷ . ۵ دیدیم ، دستور(۲) برای $h<0$ نیزدرست است. وانگهی دستور (۲) برای $h=0$ نیز روشن است.

۳ . ۷ . ۸ - نتیجه - برای اینکه یك تابع مختلط درفاصله I ثابت باشد ، بایاوبسنده است‌که مشتق‌آن در تمام نقاط I برابر با صفر گردد .

لزوم این شرط روشن است . به وارون‌گیریم ، برای تمام نقاط $x\in I$ ، $f'(x)=0$ باشد، و نشان می‌دهیم‌که مقدار $f(x)$ درفاصله I تغییر نمی‌کند. بادرنظر گرفتن قسمت حقیقی و انگاری f ، به آسانی به حالت تابع حقیقی f برمی‌گردیم . فرض می‌کنیم x_1 و x_2 دو نقطه متمایز از I باشند. داریم :

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(x_3)$$

که درآنجا $x_3\in I$ است. پس $f(x_2)-f(x_1)=0$

۳ . ۷ . ۹ - نتیجه - فرض می‌کنیم‌تابع f در فاصله I دارای مشتق‌باشد . برای اینکه f درفاصلهٔ I افزایشی باشد ، بایاوبسنده است‌که برای هر $x\in I$ داشته باشیم $f'(x)\geqslant 0$.

گیریم f در I افزایشی باشد. اگر x_0 نقطه‌ای از I باشد ، برای هرنقطه $x\in I$ و متمایز از x_0 داریم :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0$$

پس $f'(x_0)\geqslant 0$ است. فرض می‌کنیم برای تمام نقاط $x\in I$ ، $f'(x)\geqslant 0$ باشد. اگر x_1 و x_2 دو نقطه از I و $x_1<x_2$ باشد ، خواهیم داشت :

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(x_3)$$

که در آنجا $x_3 \in I$ است. پس $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$ می‌باشد.

۱۰.۷.۳ - **نتیجه - گیریم تابع حقیقی f در فاصله I پیوسته و دارای مشتق باشد. اگر برای هر $x \in I$ ، $f'(x) > 0$ باشد. تابع f کاملاً افزایشی است.**

زیرا اگر x_1 و x_2 متعلق به I و $x_1 < x_2$ باشد، داریم:

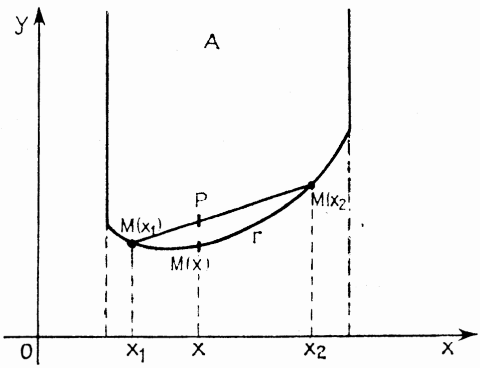
$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(x_3)$$

که در آنجا $x_3 \in I$ است. پس $f(x_2) - f(x_1) > 0$ می‌باشد.

۱۱.۷.۳ - وارون ۱۰.۷.۳ درست نیست: اگر f دارای مشتق و کاملاً افزایشی باشد بااستفاده از ۹.۷.۳ داریم $f' \geqslant 0$. ولی ممکن است در بعضی نقاط $f' = 0$ شود. مثلاً تابع $x \to x^3$ در $\mathbf{R}$ کاملاً افزایشی است ولی مشتق آن در نقطه $x = 0$ برابر صفر می‌باشد.

۳ . ۸ - توابع کوژ

۱.۸.۳ - فرض می‌کنیم تابع حقیقی f در فاصله I معین و Γ نمودار آن باشد. مجموعهٔ نقاط $\mathbf{R}^2$ را که در بالا وروی خم Γ واقع‌اند، به عبارت دیگر مجموعهٔ جفت‌های (x, y) از $\mathbf{R}^2$ را به‌قسمی که x متعلق به I و $y \geqslant f(x)$ باشد با A نشان میدهیم، و برای هر $x \in I$، نقطه $(x, f(x))$ از Γ را با $M(x)$ می‌نماییم.



شکل ۱۸

گوییم نقطهٔ P از $\mathbf{R}^2$ در زیر خط D واقع است اگر عرض نقطهٔ P کوچکتر از عرض نقطه‌ای از خط D که دارای همان طول P است، باشد.

قضیه ـ شرطهای زیر هم‌ارزند:

(I) ـ برای هردو عنصر x_1 و x_2 از I و α_1 و α_2 از $[0, 1]$ به طوری که $\alpha_1+\alpha_2=1$ باشد، داریم:

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2) \leqslant \alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2) \tag{1}$$

(II) ـ برای هردو عنصر x_1 و x_2 از I به قسمی که $x_1 < x_2$ و هر $x\in[x_1 , x_2]$ نقطه $M(x)$ در زیر خط $M(x_1)M(x_2)$ است.

(III) ـ بخش A کوژ است.

(IV) ـ برای‌هردنباله‌باپایان x_1 و x_2 و ... و x_n از I و α_1 و α_2 و ... و α_n از $[0, 1]$ به قسمی که $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$ باشد، داریم:

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n) \leqslant \alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)+\cdots+\alpha_nf(x_n) \tag{2}$$

اثبات:

$(III) \Longrightarrow (IV)$: فرض می‌کنیم A کوژ باشد، و x_1 , x_2 , ... x_n متعلق به I و α_1 , α_2 , ... , α_n متعلق به $[0 , 1]$ به قسمی باشند که داشته باشیم $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$. در این صورت $M(x_1)$, $M(x_2)$, ... , $M(x_n)$ متعلق به A می‌باشند. پس G گرانیگاه $M(x_1)$, $M(x_2)$, ... , $M(x_n)$، که به ترتیب دارای جرم‌های α_1 , α_2 , ... , α_n هستند، متعلق به A است (۶.۶.۱۲ کتاب جبر). وانگهی مختصات G عبارت‌است از:

$$\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)+\cdots+\alpha_nf(x_n) \quad , \quad \alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n$$

وبیان این که G متعلق به A است هم‌ارز بستگی (۲) است.

$(I) \Longrightarrow (IV)$: این مطلب روشن است.

$(II) \Longrightarrow (I)$: فرض می‌کنیم شرط (I) برقرار است. گیریم x_1 و x_2 متعلق به I و $x_1 < x_2$ و $x\in[x_1 , x_2]$ باشد. شمارهای α_1 و α_2 در $[0 , 1]$ یافت می‌شوند به قسمی‌که داریم $\alpha_1+\alpha_2=1$ و $x=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2$. گرانیگاه نقاط $M(x_1)$ و $M(x_2)$ را که به‌ترتیب دارای‌جرمهای α_1 و α_2 می‌باشند با G نشان می‌دهیم. دراین

صورت طول G برابر با x و نقطه G متعلق به پاره خط $M(x_1)\,M(x_2)$ می‌باشد. بااستفاده از شرط (I) ، عرض نقطه $M(x)$ کوچکتر از عرض G است. بنابراین $M(x)$ در زیر پاره خط $M(x_1)\,M(x_2)$ واقع است.

(III) $\Longrightarrow$ (II) : فرض میکنیم‌شرط (II) برقرار باشد. دونقطه $P_1=(x_1\ ,\ y_1)$ و $P_2=(x_2\ ,\ y_2)$ از A را در نظر می‌گیریم. اگر α_1 و α_2 متعلق به $[0\ ,\ 1]$ و $\alpha_1+\alpha_2=1$ باشد گرانیگاه P_1 و P_2 را ، که به ترتیب دارای جرم‌های α_1 و α_2 می‌باشند ، با G نشان می‌دهیم. کافی است ثابت کنیم که G متعلق به A است. اگر $x_1=x_2$ باشد این مطلب روشن است. پس فرض می‌کنیم $x_1<x_2$ باشد. داریم :

$$y_1\geqslant f(x_1) \quad \text{و} \quad y_2\geqslant f(x_2)$$

از آنجا :

$$\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2\geqslant \alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_1)$$

پس عرض G بزرگتر از عرض نقطه واقع در روی خط $M(x_1)M(x_2)$ است که دارای همان طول G می‌باشد. بااستفاده ازشرط (II) ، G در بالای Γ واقع است. به عبارت دیگر G متعلق به A می‌باشد.

۲.۸.۳ - تعریف - گوییم که f کوژ است ، اگر f در یکی از چهار شرط هم‌ارز قضیه ۱.۸.۳ صدق کند. دراین صورت گویند که کاوی Γ به طرف بالا است.

اگر تابع f— کوژ باشد ، f را **کاو** می‌نامند. دراین صورت گویند که کاوی f به طرف پائین است.

۳.۸.۳ - قضیه - گیریم تابع حقیقی f در فاصله I دارای مشتق باشد. برای اینکه f کوژ باشد بایاو بسنده است که f' در فاصله I افزایشی باشد.

اثبات :

الف - فرض می‌کنیم f کوژ باشد. گیریم x_1 و x_2 متعلق به I و $x_1<x_2$ باشند. شیب خط $M(x_1)M(x_2)$ را با m نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم $x\in]x_1$ و $x_2[$ و نقطه P به طول x در روی خط $M(x_1)M(x_2)$ باشد. (شکل ۱۸). دراین صورت داریم :

$$m = M(x_1)P \text{ شیب} \leqslant M(x_1)\,M(x) \text{ شیب}$$
$$M(x)M(x_2) \text{ شیب} \leqslant PM(x_2) \text{ شیب} = m$$

اکنون x_1 و x_2 را ثابت می‌گیریم (پس m ثابت است). ابتدا فرض می‌کنیم که x با مقادیربزرگتر از x_1 به سمت x_1 میل کند، پس $f'(x_1) \leqslant m$. سپس فرض می‌کنیم که x با مقادیرکوچکترازx_2 به سمت x_2 میل می‌کند، پس $m \leqslant f'(x_2)$ وازآنجا:

$$f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$$

بنابراین ثابت می‌شود که f' در I افزایشی است.

ب - فرض می‌کنیم f' افزایشی‌باشد. دونقطه x_1 و x_2 متعلق‌به I رابه قسمی‌که $x_1 < x_2$باشددرنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $y = mx + p$ معادله‌خط $M(x_1)M(x_2)$ باشد. کافی است‌ثابت‌کنیم که برای $x \in [x_1\ ,\ x_2]$ عبارت$g(x) = f(x) - (mx+p)$ کوچکتر و یا برابر با صفر است. چون $g(x_1) = g(x_2) = 0$ است، پس (بااستفاده از ۳.۷.۳) نقطه $x_3 \in]x_1\ ,\ x_2[$ یافت می‌شود به قسمی‌که $g'(x_3) = 0$ است. اما ازطرفی داریم $g'(x) = f'(x) - m$ پس g' افزایشی‌است و دو حالت زیر پیش‌می‌آید:

۱- در فاصله $[x_1\ ,\ x_3]$ داریم $g'(x) \leqslant g'(x_3) = 0$ پس g کاهشی است و از آنجا $g(x) \leqslant g(x_1) = 0$.

۲- در فاصله $[x_3\ ,\ x_2]$ داریم $g'(x) \geqslant g'(x_3) = 0$، پس g افزایشی است و از آنجا $g(x) \leqslant g(x_2) = 0$.

۴.۸.۳ - نتیجه - فرض می‌کنیم تابع‌حقیقی f در I دارای مشتق‌های اول و دوم باشد. برای اینکه f کوژ باشد، بایدوبسنده است‌که f'' در I مثبت باشد.

۵.۸.۳ - قضیه - فرض می‌کنیم تابع کوژ f در فاصله I دارای مشتق و Γ نمودار f و $M_0 = (x_0\ ,\ f(x_0))$ یك نقطه از Γ و M_0T مماس بر Γ در نقطه M_0 باشد. در این صورت Γ در بالای M_0T واقع است.

اثبات - معادله خط $M_\circ T$ عبارت است از $y=f'(x_\circ)(x-x_\circ)+f(x_\circ)$
باید نشان دهیم که تابع :

$$g(x)=f(x)-f'(x_\circ)(x-x_\circ)-f(x_\circ)$$

درفاصله I بزرگتر یا برابر با صفر است. داریم $g(x_\circ)=\circ$. از طرف دیگر $g'(x)=f'(x)-f'(x_\circ)$
پس تابع g' افزایشی می‌باشد (۳.۸.۳) و $g'(x_\circ)=\circ$. بنابراین :

۱ - در فاصله $I\bigcap]-\infty , x_\circ]$ داریم $g'(x)\leqslant g'(x_\circ)=\circ$ و در نتیجه‌تابع g کاهشی است. پس $g(x)\geqslant g(x_\circ)=\circ$ می‌باشد.

۲ - در فاصله $I\bigcap[x_\circ , +\infty[$ داریم $g'(x)\geqslant g'(x_\circ)=\circ$ و در نتیجه تابع g افزایشی است و از آنجا $g(x)\geqslant g(x_\circ)=\circ$ می‌باشد.

فصل چهارم

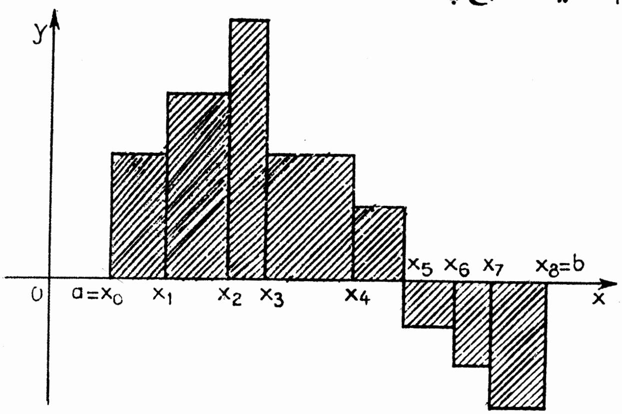
انتگرال

این فصل دو تعریف اساسی در بردارد. یکی تعریف انتگرال و دیگری تعریف تابع اولی. قضیهٔ بنیادین ۶.۵.۴ بستگی بین این دو تعریف را که به‌ظاهر تفاوت کامل دارند، برقرار می‌کند. مفهوم انتگرال در بسیاری از علوم سودمند است. کاربرد تابع اولی پیش ازهر چیز در محاسبهٔ عملی انتگرال‌ها می‌باشد. پاراگراف ۸.۴ تنها یک تمرین برای سرگرمی خواننده است، وگرنه روش‌های بهتری برای محاسبهٔ π وجود دارد.

۴ . ۱ ـ انتگرال توابع پله‌ای

۴.۱.۱ ـ دنباله افزایشی $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ از شمارهای حقیقی را **یک تقسیم جزیی** فاصله $[a, b]$ می‌نامیم اگر $x_0 = a$ و $x_n = b$ باشد.

۴.۱.۲ ـ فرض می‌کنیم که تابع حقیقی و یا مختلط f در فاصله $[a, b]$ معین باشد. گوییم f **یک تابع پله‌ای** است اگر یک تقسیم جزیی فاصلهٔ $[a, b]$ مانند



شکل ۱۹

$(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ وجود داشته باشد به قسمی که درهرفاصله $]x_i, x_{i+1}[$ تابع f تنها یک مقدار ثابت c_i را بپذیرد (مقادیر f در نقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$ دلخواه است).

تقسیم جزیی $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ازفاصلهٔ $[a, b]$، با در دست داشتن f، تنها

به یک صورت معین نمی‌گردد زیرا :

۱° ـ اگر $c_i = c_{i+1} = f(x_{i+1})$ باشد ، می‌توان نقطه x_{i+1} را از دنباله $(x_0 , x_1 , \ldots , x_n)$ حذف کرد .

۲° ـ به‌وارون می‌توان در هرفاصلهٔ $[x_i , x_{i+1}]$ با افزودن نقطه‌هایی تقسیم جزیی دیگری بدست آورد .

۳.۱.٤ ـ دو تابع پله‌ای f و g راکه درفاصله $I = [a , b]$ تعریف شده‌اند درنظر می‌گیریم .

فرض می‌کنیم $(x_0 , x_1 , \ldots , x_n)$ یک‌تقسیم‌جزیی $[a , b]$ باشد به‌قسمی که f در هرفاصلهٔ $]x_i , x_{i+1}[$ ثابت بماند . همچنین $(x'_0 , x'_1 \ldots , x'_p)$ تقسیم جزیی دیگری از $[a , b]$ باشد به قسمی‌که g درهرفاصله $]x'_i , x'_{i+1}[$ ثابت بماند .

اجتماع مجموعه‌های $\{x_0 , \ldots , x_n\}$ و $\{x'_0 , \ldots , x'_p\}$ یک تقسیم جزیی $(x''_0 , \ldots , x''_p)$ از $[a , b]$ رابه‌دست می‌دهد به قسمی‌که f و g درهرفاصله $]x''_i , x''_{i+1}[$ ثابت‌اند. به‌عبارت‌دیگریک‌تقسیم جزیی‌از $[a , b]$ وجود دارد به قسمی که هم برای f و هم برای g «سازگار» باشد .

٤.۱.٤ ـ از ۳.۱.٤ به آسانی نتیجه می‌شود که اگر f و g دو تابع پله‌ای باشند $f+g$ و fg نیز توابع پله‌ای هستند .

٥.۱.٤ ـ اگر f یک تابع پله‌ای باشد ، تابع $|f|$ نیز پله‌ای است .

٦.۱.٤ ـ **انتگرال توابع پله‌ای** ـ فرض می‌کنیم f درفاصله I یک تابع پله‌ای و دنباله افزایشی $(x_0 , x_1 , \ldots , x_n)$ یک‌تقسیم جزیی $[a , b]$ باشد به قسمی‌که درهرفاصله $]x_i , x_{i+1}[$ مقدار تابع f برابر با شمار ثابت c_i باشد . دراین صورت شمار حقیقی و یا مختلط :

$$c_0(x_1 - x_0) + c_1(x_2 - x_1) + \cdots + c_{n-1}(x_n - x_{n-1}) \qquad (۱)$$

را **انتگرال** تابع f می‌نامند و با علامت زیر نشان می‌دهند :

$$\int_a^b f(x)dx$$

چون تقسیم‌جزیی $(x_0 , x_1 , \ldots , x_n)$ با در دست داشتن تابع f ، تنها به یک‌صورت

معین نمی شود ، لازم است نشان دهیم که انتگرال f بستگی به تقسیم جزیی انتخاب شده از $[a\ ,\ b]$ نداشته و تنها بستگی به تابع f دارد.

۷.۱.۴ ـ قبل از اثبات نکته بالا ، چنانچه تابع f حقیقی باشد ، به تعبیر هندسی (۱) می‌پردازیم. (تعبیر هندسی‌عملاً" نشان خواهد دادکه انتگرال f تنها بستگی به f دارد). هرجمله $c_i(x_{i+1}-x_i)$ برابر با مساحت سطح مربع مستطیلی است که طول اضلاع آن $|c_i|$ و $x_{i+1}-x_i$ می‌باشد. اگر $c_i \geqslant 0$ باشد این مساحت‌رامثبت و در غیراین‌صورت منفی می گیریم . پس مقدار (۱) برابر با مساحت سطح آژ خورده شکل ۱۹ می‌باشد ، که در آن مساحت مستطیل های واقع در بالای محور x هارا مثبت ومساحت مستطیل های واقع در پایین محور x ها را منفی می گیرند.

۸.۱.۴ ـ اکنون به اثبات مطلب ۶.۱.۴ می‌پردازیم. اگر $(y_0\ ,\ y_1\ ,\ \dots\ ,\ y_p)$ تقسیم جزیی‌دیگری از $[a\ ,\ b]$ باشد ، به طوری که f درهرفاصله $]y_i\ ,\ y_{i+1}[$ تنها مقدار ثابت d_i را قبول کند ، باید نشان دهیم که مقدار (۱) برابر با شمار زیر است :

$$d_0(y_1-y_0)+d_1(y_2-y_1)+\cdots+d_{p-1}(y_p-y_{p-1}) \qquad (۲)$$

اکنون تقسیم جزیی $[a\ ,\ b]$ راکه از اجتماع x_i ها و y_i ها تشکیل شده است درنظر می گیریم. اگر(۳) انتگرال f وابسته به‌این‌تقسیم جزیی باشد ، کافی‌است(۱)و(۲)را با (۳) مقایسه‌کنیم . چنانکه دیده می‌شود تقسیم جزیی $(y_0\ ,\ y_1\ ,\ \dots\ ,\ y_p)$ با افزودن نقاطی به تقسیم جزیی $(x_0\ ,\ x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_n)$ به دست می‌آید و این عمل را می‌توان به تدریج انجام داد . پس فرض می‌کنیم که تنها یک نقطه $u\in]x_i\ ,\ x_{i+1}[$ را به تقسیم جزیی $(x_0\ ,\ x_1\ \dots\ ,\ x_n)$ افزوده‌باشیم . پس (۳) به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$c_0(x_1-x_0)+c_1(x_2-x_1)+\cdots+c_{i-1}(x_i-x_{i-1})+c_i(u-x_i)$$
$$+c_i(x_{i+1}-u)+c_{i+1}(x_{i+2}-x_{i+1})+\cdots+c_{n-1}(x_n-x_{n-1})$$

و پیدا است که این شمار با (۱) برابر است.

۹.۱.۴ ـ ظاهراً $\int_a^d f(x)dx$ بستگی به x دارد ، ولی در عمل ، این انتگرال شمار معینی است و بستگی به x ندارد ، به عبارت دیگر :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \cdots$$

۴.۱.۱۰ - تابع پله‌ای f و شمار حقیقی یامختلط λ را درنظر می گیریم و فرض می کنیم که f در فاصله I معین باشد. دراینصورت بااستفاده از تعریف انتگرال داریم :

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

۴.۱.۱۱ - اگر توابع f و g در فاصله I پله‌ای باشند، خواهیم داشت :

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

زیرا اگر $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ یک تقسیم جزیی $[a, b]$ باشد به قسمی که توابع f و g در هریک از فواصل $]x_i, x_{i+1}[$ ثابت باشند (۴.۱.۳)، برای هر x متعلق به $]x_i, x_{i+1}[$ می‌توان قرار داد $f(x)=c_i$ و $g(x)=d_i$. چنانچه x متعلق به $]x_i, x_{i+1}[$ باشد خواهیم داشت $f(x)+g(x)=c_i+d_i$. پس :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n-1} c_i(x_{i+1}-x_i)$$

$$\int_a^b g(x)dx = \sum_{i=1}^{n-1} d_i(x_{i+1}-x_i)$$

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \sum_{i=1}^{n-1} (c_i+d_i)(x_{i+1}-x_i)$$

و به آسانی فرمول مورد نظر نتیجه می‌شود.

۴.۱.۱۲ - چنانچه تابع f در فاصله I پله‌ای باشد، خواهیم داشت :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx$$

زیرا با قراردادهای پیش داریم :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = |c_0(x_1-x_0)+\cdots+c_{n-1}(x_n-x_{n-1})|$$

$$\leqslant |c_0|\,(x_1-x_0)+\cdots+|c_{n-1}|\,(x_n-x_{n-1}) = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

۱۳.۱.۴ - اگر توابع حقیقی f و g درفاصله $I=[a\,,\,b]$ پله‌ای و $f \leqslant g$ باشد ، خواهیم داشت :

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$$

زیرا ، با قراردادهای ۱۱.۱.۴ برای همه i ها داریم $c_i \leqslant d_i$.

۴ . ۲ - انتگرال توابع پیوسته

۱.۲.۴ - قضیه - فرض می‌کنیم تابع حقیقی یا مختلط f در فاصلهٔ $[a\,,\,b]$ پیوسته باشد.

(I) - یك دنباله از توابع پله‌ای ،که درفاصلهٔ $[a\,,\,b]$ تعریف‌شده‌اند، وجود دارد به قسمی‌که به طور یك نواخت به سمت f میل می‌کنند.

(II) - اگر $(g_1\,,\,g_2\,,\,\ldots)$ دنباله‌ای از توابع پله‌ای باشدکه درفاصله $[a\,,\,b]$ به طور یك نواخت به سمت f میل می‌کند شمارهای $\int_a^b g_n(x)dx$ به‌سمت حد باپایانی میل خواهندکرد.

(III) ـ حد بالا بستگی به دنبالهٔ (g_n) نداشته و تنها به f بستگی دارد.

اثبات :

(I) ـ فرض می‌کنیم $\varepsilon > 0$ باشد. چون f درفاصله $[a , b]$ پیوستهٔ یک‌نواخت است (۴.۱۰.۲) یک شمار $\eta > 0$ وجود دارد به قسمی که :

$$x , x' , \in [a , b] \quad , \quad |x - x'| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| \leqslant \varepsilon$$

تقسیم جزیی $(x_0 , x_1 , \dots , x_n)$ از $[a , b]$ را درنظر می‌گیریم به قسمی که برای هر i دلخواه داشته باشیم $|x_{i+1} - x_i| \leqslant \eta$. تابع φ در $[a , b]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

برای هر i مقدار تابع φ رادرنقاط $[x_i , x_{i+1}[$ برابربا $f(x_i)$ ودرنقطه b برابربا $f(b)$ قرارمی‌دهیم. بنابراین φ یک تابع پله‌ای درفاصله $[a , b]$ است و بعلاوه، هنگامیکه $x \in [a , b]$ است، داریم $|f(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon$. زیرا اگر $x = b$ باشد قضیه روشن است و اگر $x < b$ باشد یک شمار i وجود دارد به قسمی که x متعلق به $[x_i , x_{i+1}[$ است و چون $|x - x_i| \leqslant x_{i+1} - x_i \leqslant \eta$ می‌باشد، داریم :

$$|f(x) - \varphi(x)| = |f(x) - f(x_i)| \leqslant \varepsilon$$

اکنون اگر درآنچه گذشت به‌ترتیب قراردهیم $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = \frac{1}{3}$, ... توابع پله‌ای $f_1 , f_2 , f_3 , \dots$ به دست می‌آید ودنبالهٔ تابعی $(f_1 , f_2 , f_3 , \dots)$ درفاصله $[a , b]$ به طور یک نواخت به سمت f می‌گراید.

(II) ـ فرض می‌کنیم دنباله توابع پله‌ای $(g_1 , g_2 , \dots)$ درفاصله $[a , b]$ به طور یک نواخت به سمت f میل کند. برای هرشمار $\varepsilon > 0$ شمار درست N به‌قسمی وجود دارد که برای هرنقطه x از $[a , b]$ داریم :

$$n \geqslant N \Longrightarrow |g_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

ازطرفی بااستفاده از ۱۰.۱.۴ و ۱۱.۱.۴ و ۱۲.۱.۴ خواهیم داشت :

$$\left|\int_a^b g_n(x)dx-\int_a^b g_{n'}(x)dx\right|$$

$$=\left|\int_a^b (g_n(x)-g_{n'}(x))dx\right|\leqslant\int_a^b |g_n(x)-g_{n'}(x)|dx$$

پس با درنظر گرفتن ۱۳.۱.۴ داریم :

$$n\,,\,n'\geqslant N \Longrightarrow \left|\int_a^b g_n(x)dx-\int_a^b g_{n'}(x)dx\right|$$

$$\leqslant\int_a^b ۲\varepsilon dx=۲\varepsilon(b-a)$$

بااستفاده از شرط کشی (۲.۲.۲) نتیجه می‌شود که شمارهای $\int_a^b g_n(x)dx$ ، وقتی که n به سمت $+\infty$ میل می‌کند دارای حد با پایانی است.

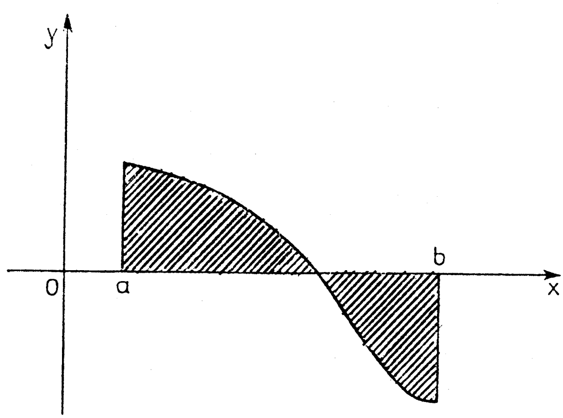
(III) ـ فرض می‌کنیم (h_n) دنباله دیگری از توابع پله‌ای باشد که در فاصله $[a\,,\,b]$ به طور یک نواخت به سمت f میل می‌کند. در این صورت روشن است که دنباله $(g_۱\,,\,h_۱\,,\,g_۲\,,\,h_۲\,,\,g_۳\,,\,h_۳\,,\,\ldots)$ به طور یک نواخت به سمت f می‌گراید. پس دنباله شمارهای :

$$\int_a^b g_۱(x)dx\ ,\ \int_a^b h_۱(x)dx\ ,\ \int_a^b g_۲(x)dx\ ,\ \int_a^b h_۲(x)dx\ ,\ \ldots$$

دارای حد باپایان l است . بنابراین هردنباله استخراج شده ازاین دنباله نیز به سمت l میل می‌کند. پس حد شمارهای $\int_a^b g_n(x)dx$ و $\int_a^b h_n(x)dx$ برابر با l است .

۲.۲.٤ - تعریف - حدی که درقضیه ۱.۲.٤ بیان شد ، تنها بستگی به f داردو آن‌را انتگرال f می نامندو باعلامت $\int_a^b f(x)dx$ نشان‌می‌دهند.

۳.۲.٤ - **تعبیرهندسی** - هنگامیکه توابع پله‌ای g_n به‌طور یکنواخت به‌سمت f میل می‌کنند ، Γ_n نمودار g_n به سمت نمودار f یعنی Γ می‌گراید . با استفاده از تعبیر هندسی $\int_a^b g_n(x)dx$ که در بالا دیدیم روشن‌می‌شود که درحد ، $\int_a^b f(x)dx$ برابر با اندازه مساحت سطح آژ خورده درشکل ۲۰ می‌باشد ، که درآن مساحت سطح واقع در زیر محور x ها منفی گرفته می‌شود. بعد ازاین، ازتعبیر هندسی بالا درمطالعهٔ انتگرال‌ها استفاده نخواهیم کرد ، بلکه تعریف‌انتگرال‌را برای بررسی‌مساحت سطح به‌کارخواهیم برد.

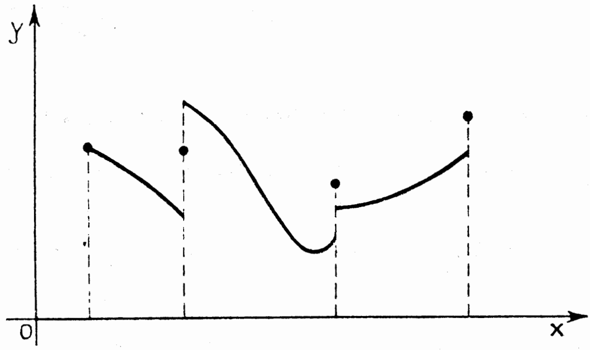


شکل ۲۰

٤.۲.٤ - **تعمیم** - درتعریف انتگرال می‌توان بجای توابع پیوسته ، توابع کلی‌تری درنظرگرفت . درحقیقت تمام توابعی که درمحاسبات مقدماتی با آنها سروکار داریم از این دسته‌اند.

فرض می‌کنیم تابع f (حقیقی و یا مختلط) درفاصله $[a, b]$ معین باشد . گوییم که تابع f **پیوستهٔ پاره‌ای** است، اگر یک‌تقسیم جزیی $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ از $[a, b]$ وجود داشته باشد به قسمی که درهرفاصله $]x_i, x_{i+1}[$ تابع f پیوسته ودرنقطه x_i

دارای حد راست باپایان و درنقطه x_{i+1} دارای حد چپ با پایان باشد .



شکل ۲۱

روشن است که توابع پله‌ای و توابع پیوسته از این دسته‌اند.

عملیات اصلی (جمع ، ضرب وغیره) ، که روی توابع تعریف می‌شوند ، توابع پیوستهٔ پاره‌ای را به توابع پیوستهٔ پاره‌ای تبدیل می‌کنند .

۵.۲.۴ ـ بخشهای (I) و (II) و (III) قضیه ۱.۲.۴ درمورد توابع پیوستهٔ پاره‌ای درست‌اند و به روش زیر اثبات می‌شوند :

فرض می‌کنیم که $(x_0 , x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$ یک تقسیم جزیی $[a , b]$ ودارای ویژگی ۴.۲.۴ باشد . گیریم که بتوان :

۱° ـ یک دنباله $(l_1 , l_2 , \ldots)$ از توابع پله‌ای ، درفاصله $[x_0 , x_1]$ ، به قسمی ساخت که درفاصله باز $]x_0 , x_1[$ به‌طور یکنواخت به سمت f میل کند .

۲° ـ یک دنباله $(l'_1 , l'_2 , \ldots)$ از توابع پله‌ای ، درفاصله $[x_1 , x_2]$ ، به قسمی ساخت که در فاصله باز $]x_1 , x_2[$ به‌طور یکنواخت به سمت f میل کند .

۳° ـ یک دنباله $(l''_1 , l''_2 , \ldots)$ از توابع پله‌ای ، درفاصله $[x_2 , x_3]$ ، به قسمی ساخت که درفاصله باز $]x_2 , x_3[$ به‌طور یک‌نواخت به سمت f میل کند .

. . . .

بدین ترتیب برای هریک ازفواصل $[x_i , x_{i+1}]$ یک دنباله ازتوابع پله‌ای خواهیم داشت به قسمی که این دنباله درفاصله باز $]x_i , x_{i+1}[$ به‌طور یکنواخت به سمت f میل می‌کند .

دراین‌صورت اگر تابعی را که در هریک از نقاط $x_0 , x_1 , \ldots , x_n$ برابر با

تابع f دراین نقاط است ودرفاصله $]x_0 , x_1[$ این تابع برابر با l_n ، درفاصله $]x_1 , x_2[$ برابر با l_n' ، درفاصله $]x_2 , x_3[$ برابر با l_n'' ... می‌باشد ، f_n بنامیم تابع f_n درفاصله $[a , b]$ یک‌تابع پله‌ای‌است و دنبالهٔ $(f_1 , f_2 , \ldots)$ درفاصله $[a , b]$ به‌طوریکنواخت به سمت f میل می‌کند.

بنابراین اثبات (I) به‌حالتی‌که f درفاصله باز $]a , b[$ پیوسته و در a دارای حد راست باپایان λ و در b دارای حدچپ باپایان μ است برمیگردد. اکنون تابع φ را که درفاصله $]a , b[$ برابر با f و درنقطه a برابر با λ و درنقطه b برابر با μ است در نظر می‌گیریم . تابع φ درفاصله $[a , b]$ پیوسته است و با استفاده از ۱.۲.۴.(I) یک دنباله از توابع پله‌ای یافت‌می‌شود به قسمی‌که درفاصله $[a , b]$ به‌طوریکنواخت به سمت φ می‌گراید . پس درنتیجه این دنباله درفاصله $]a , b[$ به سمت f میل‌می‌کند.

بدین‌ترتیب قسمت (I) قضیه ۱.۲.۴ درباره توابع پیوستهٔ پاره‌ای اثبات می‌شود . برای اثبات بخش‌های (II) و (III) قضیه ۱.۲.۴ درمورد این توابع مانند حالت توابع پیوسته عمل می‌کنیم. **پس‌می‌توان‌تعریف ۲.۲.۴ را نیزدرمورد توابع پیوستهٔ پاره‌ای به‌کار برد .**

۶.۲.۴ ـ اگر f یک تابع پله‌ای باشد (f یک تابع پیوسته پاره‌ای نیز می‌باشد) ازآنچه‌گذشت نتیجه می‌شود‌که برای انتگرال f نیز همان انتگرال تعریف شده در ۶.۱.۴ را داریم. برای اثبات این‌مطلب کافی‌است‌که f را حد یک‌نواخت دنباله $(f , f , f , \ldots)$ بگیریم .

۳.۴ـ ویژگیهای ابتدایی انتگرال

۱.۳.۴ ـ مانند شماره ۹.۱.۴ داریم :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \cdots$$

۲.۳.۴ ـ فرض‌می‌کنیم تابع f درفاصله $[a , b]$ پیوستهٔ پاره‌ای و λ متعلق به $\mathbf{C}$ باشد . از ۴.۱۳.۲ و ۱۰.۱.۴ چنین نتیجه می‌شود :

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

۳.۳.٤ ـ اگر توابع f و g درفاصله $[a , b]$ پیوستهٔ پاره‌ای باشند، داریم :

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

زیرا یک دنباله توابع پله‌ای $(f_1 , f_2 , \dots)$ وجود دارد به قسمی که درفاصله $[a , b]$ به طور یک نواخت به سمت f میل می‌کند . همچنین یک دنباله توابع پله‌ای $(g_1 , g_2 , \dots)$ به‌قسمی یافت‌می‌شود که درفاصله $[a , b]$ به‌طور یک‌نواخت به‌سمت g میل می‌کند . پس دنباله توابع پله‌ای $(f_1+g_1 , f_2+g_2 , \dots)$ به‌طور یک نواخت به سمت $f+g$ میل می‌کند (۲.۱۳.٤) و داریم :

$$\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b g_n(x)dx \to \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b (f_n(x)+g_n(x))dx \to \int_a^b (f(x)+g(x))dx$$

ازطرف دیگر ، با استفاده از شماره ۱۱.۱.٤ خواهیم داشت :

$$\int_a^b (f_n(x)+g_n(x))dx = \int_a^b f_n(x)dx + \int_a^b g_n(x)dx$$

و چنانچه از دوطرف برابری بالا حد بگیریم به نتیجه مطلوب می‌رسیم .

۴.۳.۴ ـ اگر f درفاصله $[a\,,b]$ پیوستهٔ پاره‌ای‌باشد ، از ۴.۱۳.۲ و ۱۲.۱.۴ به دست می‌آید :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$$

۵.۳.۴ ـ اگر f و g درفاصله $[a\,,b]$ پیوستهٔ پاره‌ای باشند و داشته باشیم $f\leqslant g$ خواهیم داشت :

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$$

زیرا اگر $f\leqslant g$ باشد ، یک تابع $h\geqslant 0$ وجود دارد به قسمی که $g=f+h$. بنابر ۳.۳.۴ کافی است ثابت کنیم که انتگرال h بزرگتر ویا برابر باصفر می‌باشد. گیریم که دنباله توابع پله‌ای $(h_1\,,h_2\,,\ldots)$ به‌طور یکنواخت به سمت h میل کند. دراینصورت توابع $(|h_1|\,,|h_2|\,,\ldots)$ به‌طور یک‌نواخت به سمت $|h|=h$ میل خواهد کرد. چون $|h_n|$ ها توابع پله‌ای بزرگتر یا برابر باصفر هستند پس انتگرالشان بزرگتر ویا برابر با صفر می‌باشد و داریم :

$$\int_a^b h(x)dx=\lim_{n\to+\infty}\int_a^b |h_n(x)|\,dx\geqslant 0$$

۶.۳.۴ ـ اگر تابع f درفاصله $[a\,,b]$ پیوستهٔ پاره‌ای باشد و درهمین فاصله داشته باشیم $|f(x)|\leqslant M$ درآن صورت با استفاده از ۴.۳.۴ و ۵.۳.۴ خواهیم داشت :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant M(b-a)$$

۷.۳.۴ ـ اگر تابع حقیقی f درفاصله $[a\,,b]$ پیوستهٔ پاره‌ای باشد و برای تمام مقادیر x متعلق به $[a\,,b]$ داشته باشیم $m\leqslant f(x)\leqslant M$ ، ازشماره ۵.۳.۴ نتیجه می‌شود :

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant M(b-a)$$

۸.۳.۴ - فرض می‌کنیم تابع حقیقی f درفاصله $[a , b]$ پیوسته باشد. از ۷.۹.۲ و ۹.۹.۲ نتیجه می‌شود که هرشمار واقع بین کران پایین و کران بالای f می‌تواند یک مقدار برای تابع درفاصله $[a , b]$ باشد. با استفاده از ۷.۳.۴ معلوم می‌شود که شمار c متعلق به فاصله $[a , b]$ وجود دارد به قسمی که :

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$$

۹.۳.۴ - فرض می‌کنیم که تابع f درفاصله $[a , b]$ پیوستهٔ پاره‌ای باشد. f را به بخش های حقیقی و انگاری به‌صورت $f=f_1+if_2$ تجزیه می‌کنیم. با استفاده از ۲.۳.۴ و ۳.۳.۴ داریم :

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f_1(x)dx+i\int_a^b f_2(x)dx$$

پس برای محاسبه انتگرال توابع مختلط کافی است که بتوانیم انتگرال توابع حقیقی‌را محاسبه کنیم.

۱۰.۳.۴ - فرض می‌کنیم که توابع f و g درفاصله $[a , b]$. پیوستهٔ پاره‌ای‌باشند و تنها درنقاطی به‌شمارهٔ باپایان مقدار این دوتابع متفاوت باشد. دراین‌صورت داریم :

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$$

زیرا خواهیم‌داشت $g=f+h$ ، که‌درآن‌تابع h به‌جز درشمارهٔ باپایانی ازنقاط $[a , b]$ ، برابر باصفر است. با درنظر گرفتن ۳.۳.۴ کافی است ثابت کنیم که :

$$\int_a^b h(x)dx=0$$

اما h تابعی است پله‌ای و از تعریف انتگرال پله‌ای برابری :

$$\int_a^b h(x)dx = 0$$

نتیجه می‌شود .

۱۱.۳.۴ ـ معمولاً انتگرال حاصلضرب دو تابع برابر با حاصلضرب انتگرال های آنها نیست. به عبارت دیگر :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \neq \left[\int_a^b f(x)dx\right]\left[\int_a^b g(x)dx\right]$$

۴.۴ ـ ویژگیهای فاصلهٔ انتگرال گیری

۱.۴.۴ ـ فرض می‌کنیم تابع حقیقی یا مختلط f درفاصله [a , c] پیوستهٔ پاره‌ای و b متعلق به‌فاصلهٔ [a , c] باشد. روشن است که تابع f درفاصله های [a,b] و [b,c] پیوستهٔ پاره‌ای است . دراین‌صورت :

قضیه ـ داریم:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

اثبات ـ فرض می‌کنیم دنباله توابع پله‌ای $(g_1 , g_2 , \ldots)$ درفاصله $[a , b]$ و دنباله توابع پله‌ای $(h_1 , h_2 , \ldots)$ درفاصله $[b , c]$ به‌طور یکنواخت به سمت f میل کنند . تابعی را که درفاصله $[a , b]$ برابر با g_n و درفاصله $]b , c]$ برابر با h_n باشد f_n می‌نامیم. دراینصورت تابع f_n پله‌ای‌است ودنباله $(f_1 , f_2 , \ldots)$ درفاصله $[a , c]$ به‌طور یکنواخت به سمت f می گراید و داریم :

$$\int_a^b g_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_b^c h_n(x)dx \to \int_b^c f(x)dx$$

$$\int_a^c f_n(x)dx \to \int_a^c f(x)dx$$

از تعریف انتگرال توابع پله‌ای نتیجه می‌شود :

$$\int_a^c f_n(x)dx = \int_a^b g_n(x)dx + \int_b^c h_n(x)dx$$

وچنانچه از دوطرف برابری بالا حد بگیریم قضیه ثابت می‌شود .

۲.۴.۴ - تاکنون $\int_a^b f(x)dx$ را تنها برای $a \leqslant b$ تعریف کرده‌ایم .

برای $a \geqslant b$ برحسب تعریف قرار می‌دهیم :

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

برای $a = b$ هردوتعریف سازگارند. زیرا از این تعاریف به‌آسانی نتیجه می‌شود:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

۳.۴.۴ - به‌آسانی ثابت می‌شود که ویژگی‌های ۱.۳.۴ و ۲.۳.۴ و ۳.۳.۴ و ۸.۳.۴ و ۹.۳.۴ و ۱۰.۳.۴ وقتی که $a>b$ است برقرار می‌باشند. میخواهیم نشان دهیم که ترتیب سه‌شمار دلخواه c,b,a هرچه باشد، قضیه شماره ۱.۴.۴ درست است. حالتی که دربالا دیده شد $(a \leqslant b \leqslant c)$ یکی ازشش حالت ممکن می‌باشد. مثلاً برای حالت $b \leqslant c \leqslant a$ داریم :

$$\int_b^a f(x)dx = \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx$$

زیرا با استفاده از تعریف ۲.٤.٤ خواهیم داشت :

$$-\int_a^b f(x)dx = \int_b^c f(x)dx - \int_a^c f(x)dx$$

که بازهم به فرمول ۱.٤.٤ می‌رسیم . اثبات سایر حالت‌ها بعهده خواننده واگذار می‌شود .

٤.۵ـ تابع اولی

۱.۵.٤ ـ تابع حقیقی و یا مختلط f را که درفاصله I معین است درنظر می گیریم . هرتابع حقیقی ویا مختلط F را ، که درفاصله I معین باشد ، **تابع اولی** f می‌نامیم هرگاه داشته باشیم $F'=f$.

مسئله ـ آیا هرتابع f دارای تابع اولی است ؟ آیا درصورت وجود داشتن تابع اولی این تابع اولی یکتاست ؟

۲.۵.٤ ـ **قضیه ـ فرض می‌کنیم f دارای یک تابع اولی F باشد . در اینصورت توابع‌اولی f به‌صورت $F+\lambda$ می‌باشند، که درآن λ مقدار ثابت دلخواهی است .**

اثبات ـ داریم $(F+\lambda)'=F'=f$ ، پس $F+\lambda$ یک تابع اولی f است . **به وارون اگر** G یک تابع اولی f باشد خواهیم داشت :

$$(G-F)'=G'-F'=f-f=0$$

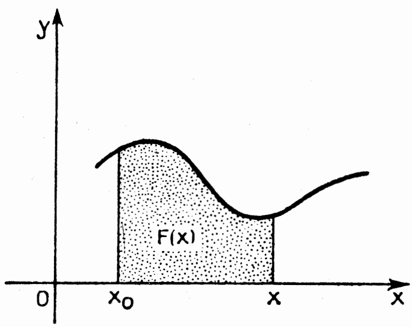
پس با استفاده از ۸.۷.۳ نتیجه می‌شود $G-F=\lambda$ که در آن λ مقداری است ثابت. بنابراین داریم $G=F+\lambda$.

۳.۵.٤ ـ فرض‌می کنیم f دارای یک‌تابع اولی باشد. اگر x_0 نقطه‌ای از I و y_0 شمار مختلطی باشد ، تنها یک تابع اولی برای f وجود دارد به‌قسمی‌که مقدار آن درنقطه x_0 برابر با y_0 است . این‌مطلب به‌آسانی از ۲.۵.٤ نتیجه می‌شود .

۴.۰.۴ ـ قضیه ـ فرض می‌کنیم تابع حقیقی و یا مختلط f در یک فاصله I پیوسته و x_0 نقطه‌ای از I باشد . دراین‌صورت تابع :

$$x \to F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

یک تابع اولی f است که درفاصله I معین است ودر نقطه x_0 برابر باصفر می‌باشد .



شکل ۲۲

اثبات ـ همواره میتوان به‌آسانی قضیه را به‌حالتی‌که تابع f حقیقی است برگرداند . فرض میکنیم x و x+h دو نقطه دلخواه I باشند . با استفاده از ۳.۴.۴ و ۸.۳.۴ داریم :

$$F(x+h) - F(x) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt =$$

$$\int_{x}^{x+h} f(t)dt = hf(c)$$

که درآن c بین x و x+h واقع است. اگر $h \neq 0$ باشد می‌توان نوشت :

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c)$$

شمار x را ثابت فرض می‌کنیم و h را با مقادیر مخالف صفر به سمت صفر میل می‌دهیم . پس c به‌سمت x و $f(c)$ به سمت $f(x)$ میل می‌کند(۲ . ۵ . ۱۹) . بنابراین به‌طوریکه دیده می‌شود تابع F دارای مشتق است و داریم: $F'(x)=f(x)$ و به‌این ترتیب قضیه ثابت می‌شود .

۴ . ۵ . ۵ ـ قضیه بالا ، به کمک مفهوم انتگرال ، روش پیدا کردن تابع اولی را از دید نظری به ما نشان می‌دهد . درعمل روش های مستقیم و گوناگون برای محاسبه توابع اولی وجود دارد (رجوع شود به فصل ششم) .

با استفاده از قضیه زیر ، محاسبه انتگرالها را می‌توان به محاسبه توابع اولی منجر ساخت .

۴ . ۵ . ۶ ـ قضیه ـ فرض می‌کنیم که تابع مختلط f در فاصله I پیوسته و F یك تابع اولی f باشد. اگر a و b متعلق به I باشند ، داریم :

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

اثبات ـ قرار می‌دهیم :

$$G(x)=\int_a^x f(t)dt$$

بنابر ۴ . ۵ . ۴ ، G یک تابع اولی f است که مقدارش در a صفر است . چون تابع :

$$x \to F(x)-F(a)$$

نیز یک تابع اولی f می‌باشد که مقدار آن درنقطه a برابر با صفر است ، پس با توجه به ۴ . ۵ . ۳ برای هر x متعلق به I داریم $G(x)=F(x)-F(a)$. وازآنجا برای $x=b$ فرمول مطلوب به‌دست می‌آید .

۴ . ۵ . ۷ ـ معمولاً قرار می‌دهند :

$$F(b)-F(a)=\Big[\,F(x)\,\Big]_a^b$$

۸.۵.۴ ـ برای محاسبهٔ انتگرال یک تابع پیوستهٔ پاره‌ای f درفاصله $[a , b]$ ، فاصله $[a , b]$ را به‌فاصله‌های کوچکتر تقسیم می‌کنیم به‌طوری که محاسبه انتگرال به‌حالت توابع پیوسته برگردد .

۹.۵.۴ ـ **قرارداد** ـ تابع $x \to \int_{x_\circ}^{x} f(t)dt$ را به‌صورت $x \to \int_{x_\circ}^{x} f(x)dx$ نیز می‌نویسند هرچند که این عمل ممکن است اشتباه به بارآورد . باید دانست که در $x \to \int_{x_\circ}^{x} f(x)dx$ حرف x دارای دونقش مختلف است . برای هرمقدار دلخواه $x_\circ$ گسترش $x \to \int_{x_\circ}^{x} f(x)dx$ یک تابع اولی f است . به‌این دلیل هرتابع اولی f را با $\int f(x)dx$ نشان می‌دهند . چون $\int_a^b f(x)dx$ را **انتگرال معین** f می‌نامند، ازاین‌رو هرتابع‌اولی f را یک **انتگرال نامعین** نیز می‌گویند. پس باید توجه داشت که :

$$\int_a^b f(x)dx$$

نمایش یک شمار است، درصورتیکه:

$$\int f(x)dx$$

نمایش‌یک تابع (وحتی یک‌دسته بی‌پایان‌ازتوابع که باهم دریک‌مقدار ثابت اختلاف‌دارند) می‌باشد .

۱۰.۵.۴ ـ اگر دوتابع f و g دریک فاصله پیوسته باشند و λ متعلق به $\mathbf{C}$ باشد خواهیم داشت:

$$\int (f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$

$$\int \lambda f(x)dx=\lambda\int f(x)dx$$

این دوفرمول را می‌توان از دستورهای محاسبه مشتق نیز به دست آورد .

۶.۴ ـ انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء

۱.۶.۴ ـ قضیه ـ فرض می‌کنیم دو تابع مختلط u و v در فاصله I دارای مشتق پیوسته باشند . دراین‌صورت :

$$\int u'(x)v(x)dx=u(x)v(x)-\int u(x)v'(x)dx$$

واگر a و b متعلق به I باشند :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx=u(b)v(b)-u(a)v(a)-\int_a^b u(x)v'(x)dx$$

اثبات ـ از فرمول $(uv)'=u'v+uv'$ با تقریب یک مقدار ثابت داریم :

$$u(x)v(x)=\int u'(x)v(x)dx+\int u(x)v'(x)dx$$

و بدین ترتیب فرمول اول ثابت میشود .

فرمول دوم با استفاده از شماره ۶.۵.۴ از فرمول اول به دست میآید .

فرمول‌های بالا را فرمول‌های **انتگرال‌گیری به روش جزء به‌جزء** مینامند .

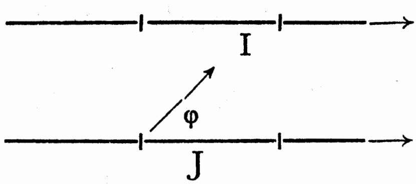
این فرمول‌ها گاهی محاسبهٔ $\int_a^b u(x)v(x)dx$ رابه‌محاسبهٔ انتگرال‌های ساده ترتبدیل می‌کند .

۷.۴ـ تعویض متغیر

۱.۷.۴ ـ دوفاصله I و J مفروض‌اند . تابع φ با مشتق پیوسته در J به قسمی تعریف شده‌است که $\varphi(J)\subset I$ باشد . اگر f یک تابع مختلط پیوسته در I و F یک‌تابع اولی f در I باشد تابع‌های $f\circ\varphi$ و $F\circ\varphi$ در J پیوسته‌اند وتابع $F\circ\varphi$ دارای مشتق پیوسته‌است وبنابر ۹.۴.۳ داریم :

$$(F'\circ\varphi)\cdot\varphi'=(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$$

پس $F\circ\varphi$ یک تابع اولی $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ است .



شکل ۲۳

قضیه زیر بیان دیگری است از آنچه که دربالا گفته شد .

قضیه ـ تابع‌های اولی $\int f(x)dx$ و $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ راکه اولی‌ها در I و دومی‌ها در J تعریف شده‌اند در نظر می‌گیریم . دراین‌صورت هر تابع از اولی‌ها از ترکیب φ با یک تابع از دومی‌ها به‌دست می‌آید .

۲.۷.۴ ـ ممکن است محاسبهٔ تابع اولی $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ ساده‌تراز محاسبهٔ $\int f(x)dx$ باشد . اگر محاسبه $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ درفاصلـه J امکان پذیر باشد ، مقدار $\int f(x)dx$ در $\varphi(J)$ ازآن‌نتیجه می‌شود . به‌ویژه ، اگر φ یک گسترش دوسویی J روی I باشد، $\int f(x)dx$ از ترکیب $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ با φ^{-1} به دست می‌آید .

۳.۷.۴ ـ **مثال** ـ تابع $x\to\dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ که‌در $I=\mathbf{R}$ پیوسته است

مفروض است . می‌خواهیم $F(x)=\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ را حساب کنیم.

تعویض متغیر $x=tgt$ را درنظرمی گیریم. به عبارت دیگر تابع $t\to tgt$ را که درفاصله $J=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ دارای مشتق پیوسته است اختیار می کنیم.

با استفاده از ۱.۷.۴ ، این تعویض متغیر تابع F را به تابع G که درفاصله J با بستگی زیر معین شده است ، بدل می کند :

$$G(t)=\int\frac{1}{(1+tg^2t)\sqrt{1+tg^2t}}(1+tg^2t)dt$$

ازطرف دیگر داریم $1+tg^2x=\frac{1}{cos^2x}$ ، وچون t درفاصله $-\frac{\pi}{2}$ و $+\frac{\pi}{2}$ تغییر می کند ، پس :

$$\sqrt{1+tg^2t}=\frac{1}{cost} \qquad (1)$$

و از آنجا :

$$G(t)=\int costdt=sint+\lambda$$

که درآن λ مقدار ثابتی است . تابع F را از تابع G به دست می‌آوریم ، زیرا $t\to tgt$ یک گسترش دوسویی J روی $\mathbf{R}$ است و گسترش وارون آن عبارت از تابع $x\to Arctgx$ می‌باشد . پس داریم :

$$F(x)=sin(Arctgx)+\lambda$$

با توجه به بستگی (۱) داریم $cost=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ و ازآنجا خواهیم داشت :

$$sint=tgtcost=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

پس :

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{1+x^2} + \lambda$$

٤.٧.٤ - گاهی شماره ١.٧.٤ را می‌توان بـه صورت دیگری به‌کـار برد ، و آن موقعی است که تابع اولی موردنظر به‌صورت $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ باشد.

اگر محاسبهٔ $\int f(x)dx$ ممکن باشد ، می‌توان ، بدون اینکه φ را دو سویی فرض کرد ، تابع اولیه خواسته شده را با کاربردمستقیم شماره ١.٧.٤ از $\int f(x)\,dx$ به‌دست آورد.

٥.٧.٤ - **مثال** (دراین‌مثال نقش‌حروف t و x را باهم‌عوض‌می کنیم) - می‌خواهیم تابع اولیه $G(x)=\int \sin^3 x \cos x dx$ را محاسبه کنیم . بـرای این منظور تعویض متغیر $t=\sin x$ رادرنظرمی گیریم، پس $\frac{dt}{dx}=\cos x$. به‌طوری که دیده می‌شود G بااین تعویض متغیر از تابع :

$$F(t) = \int t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 + \lambda$$

نتیجه می‌شود . پس :

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \frac{1}{4} \sin^4 x + \lambda$$

٦.٧.٤ - **حالت انتگرال‌های معین** - با درنظرگرفتن قراردادهای ٧.٤ ، اگر α و β دونقطه متعلق به J و $a=\varphi(\alpha)$ و $b=\varphi(\beta)$ نقطه‌های وابسته به α و β درفاصله I باشند ، چون $F\circ\varphi$ یک تابع اولی $(f\circ\varphi)\varphi'$ است ، خواهیم داشت :

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = (F\circ\varphi)(\beta) - (F\circ\varphi)(\alpha) = F(b) - F(a)$$

ازطرفی F یک تابع اولی f است ، پس داریم :

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

۴.۷.۷- **مثال** : می‌خواهیم $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ رامحاسبه کنیم تعویض متغیر شمارهٔ ۴.۷.۲ نشان میدهد که مقدار این انتگرال برابر است با :

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos t dt = \sin\frac{\pi}{3} - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$$

۴.۷.۸- تابع حقیقی و یا مختلط f را که در $\mathbf{R}$ تعریف شده است درنظر می گیریم. فرض می کنیم f دارای دوره تناوب T ودرهرفاصلهٔ کران‌دار، پیوستهٔ پاره‌ای باشد. در این صورت **مقدار انتگرال f روی تمام فاصله‌های به درازای T یکی است**، یعنی :

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{b}^{b+T} f(x)dx$$

زیرا همواره می‌توان نوشت :

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{b+T} f(x)dx + \int_{b+T}^{a+T} f(x)dx$$

پس کافی است ثابت کنیم :

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx$$

اما بااستفاده از ۴.۷.۶ ، از تعویض متغیر $x = t - T$ خواهیم داشت :

$$\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{a+T}^{b+T} f(t-T)dt=\int_{a+T}^{b+T} f(t)dt$$

۸.۴ـ کاربرد : دستور والیس

۱.۸.۴ـ قرار می‌دهیم $I_n=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ ، که درآن n یک شمار درست و بزرگتر یا برابر با صفر است. با انتگرال گیری جزء به جزء برای $n \geqslant 1$ به‌دست می‌آید :

$$I_n=\left[\sin^{n-1}x\,(-\cos x)\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\sin^{n-2}x\cos x(-\cos x)dx$$

چون $\cos\frac{\pi}{2}=0$ وهم‌چنین برای $n\geqslant 2$ مقدار $\sin^{n-1}0$ برابرباصفر است، پس برای $n\geqslant 2$ داریم :

$$I_n=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,dx=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$$

و یا :

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2} \quad , \quad n\geqslant 2 \tag{1}$$

۲.۸.۴ـ بنابراین داریم :

$$I_{2n}=\frac{2n-1}{2n}I_{2n-2}=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}I_{2n-4}=\cdots$$

$$=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}I_0$$

وچون $\frac{\pi}{2}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}dx=I_0$ است، پس :

$$I_{2n}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\;\frac{\pi}{2} \qquad (2)$$

۴.۸.۳- به همین روش به‌دست می‌آوریم :

$$I_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}\;\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}\,I_1$$

و چون :

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=0-(-1)=1$$

بنابراین :

$$I_{2n+1}=\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} \qquad (3)$$

۴.۸.۴- از فرمولهای (۲) و (۳) به‌دست می‌آید :

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}=\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right]^2(2n+1)\;\frac{\pi}{2} \qquad (4)$$

۴.۸.۵ - در فاصله $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ داریم :

$$0\leqslant \sin^{2n+1}x\leqslant \sin^{2n}x\leqslant \sin^{2n-1}x$$

و بنابراین :

$$0\leqslant I_{2n+1}\leqslant I_{2n}\leqslant I_{2n-1}$$

و یا :

$$1\leqslant\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}\leqslant\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} \qquad (5)$$

با استفاده از فرمول (۱) نسبت آخر برابر با $1+\frac{1}{2n}=\frac{2n+1}{2n}$ می‌باشد. بنابراین حد $\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}$ وقتیکه n به سمت $+\infty$ میل می‌کند ، برابر با یک است . پس بنا بر (۵) هنگامیکه $n\to+\infty$ خواهیم داشت :

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \to 1$$

و با استفاده از فرمول (٤) ، وقتیکه n به سمت $+\infty$ میل می‌کند داریم :

$$\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right]^2 n \to \frac{1}{\pi}$$

که به دستور **والیس** معروف است.

فصل پنجم

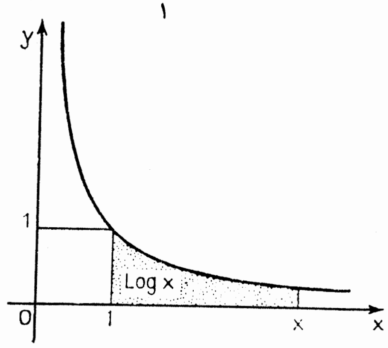
توابع لگاریتمی و توابع نمایی

افزار توابع مقدماتی که خواننده در اختیار دارد نسبتاً محدود است. پس از یادآوری برخی از این توابع، به‌بررسی چند تابع جدید می‌پردازیم. لازم است که نمودار این توابع و فرمول‌های مهم بخاطر سپرده شود.

۱.۵- تعریف تابع لگاریتمی

۱.۱.۵- تابع $x \to \frac{1}{x}$ برای همه مقادیر $x > 0$ پیوسته است. برای مقادیر $x > 0$ قرار می‌دهیم:

$$\mathrm{Log}\,x = \int_{1}^{x} \frac{dt}{t} \qquad (1)$$



شکل ۲۴

به گفته دیگر $\mathrm{Log}\,x$ تابع اولی $\frac{1}{x}$ برای $x > 0$ است که مقدار آن در نقطه $x = 1$ برابر با صفر می‌باشد.

شمار $\mathrm{Log}\,x$ را **لگاریتم** (و یا گاهی **لگاریتم نپری**) x می‌نامند.

۲.۱.٥- چون $(\text{Log}x)'=\frac{1}{x}$ می‌باشد ، تابع $y=\text{Log}x$ کاملا افزایشی است .

x	0		1		$+\infty$
y'	$\|$	$+$	1	$+$	
y	$\|$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

۳.۱.٥- تابع $x \to \text{Log}|x|$ برای $x>0$ و $x<0$ معین و دارای مشتق می‌باشد . مشتق آن برای $x>0$ برابر با $\frac{1}{x}$ است . برای $x<0$ داریم :

$$(\text{Log}|x|)'=(\text{Log}(-x))'=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}$$

ودرنتیجه برای $x\neq 0$ خواهیم‌داشت :

$$(\text{Log}|x|)'=\frac{1}{x} \qquad (2)$$

٤.۱.٥ - فرض می‌کنیم تابع u در یک فاصله I مخالف با صفر و دارای مشتق باشد. دراین‌صورت می‌توان تابع‌مرکب $\text{Log}|u|$ را تشکیل داد و با استفاده ازمطالب بالا نوشت :

$$(\text{Log}|u|)'=\frac{1}{u}u'=\frac{u'}{u}$$

ازاین فرمول دلیل اینکه درشمارهٔ ۲.٤.۳ نسبت $\frac{u'}{u}$ مشتق لگاریتمی u نامیده شد آشکار می‌گردد .

۲.۵- لگاریتم حاصلضرب

۱.۲.٥- قضیه - تابع $x \to \text{Log}|x|$ یك هومورفیسم گروه ضربی شمارهای‌حقیقی بزرگتر ازصفر درگروه جمعی R است . به عبارت دیگر :

$$\text{Log}(xy)=\text{Log}x+\text{Log}y \qquad (x\,,y>0) \qquad (3)$$

اثبات - فرض می‌کنیم که y مقدار ثابتی باشد . با استفاده از ٤.۱.٥ داریم :

$$[\mathrm{Log}(xy)]' = \frac{y}{xy} = \frac{۱}{x}$$

از شماره ۲.۵.٤ نتیجه می‌شود :

$$\mathrm{Log}(xy) = \mathrm{Log}x + \lambda$$

که درآنجا λ مقدار ثابتی است . برای محاسبهٔ λ قرار می‌دهیم $x = ۱$ خواهیم داشت :

$$\mathrm{Log}y = \mathrm{Log}\,۱ + \lambda = \lambda$$

و بدین‌ترتیب فرمول (۳) ثابت می‌شود.

۲.۲.۵- روشن‌است که فرمول (۳) به روش بازگشت به‌حالت حاصل‌ضرب‌های بیشتر از دو سازه تعمیم داده می‌شود .

۳.۲.۵- با استفاده از ویژگی‌های همومرفیسم گروه ، به‌دست می‌آید :

$$\mathrm{Log}\frac{۱}{x} = -\mathrm{Log}\,x\,,\quad (x > ۰) \tag{٤}$$

٤.۲.۵- از ترکیب دو فرمول (۳) و (٤) خواهیم داشت :

$$\mathrm{Log}\frac{x}{y} = \mathrm{Log}x - \mathrm{Log}y\,,\quad (x\,, y > ۰) \tag{۵}$$

۵.۲.۵- فرمول زیر از شماره‌های ۲.۲.۵ و ۳.۲.۵ نتیجه می‌شود :

$$\mathrm{Log}\,x^n = n\mathrm{Log}x\,,\quad (x > ۰\,,\ n \in \mathbf{Z})$$

۳.۵- بررسی تغییرات $\mathrm{Log}\,x$

۱.۳.۵- چون $\mathrm{Log}\,x$ یک‌تابع‌افزایشی‌است، پس هنگامیکه x به‌سمت $+\infty$ میل می‌کند دارای حد است. ازطرفی این تابع دارای کناره بالا نیست زیرا داریم :

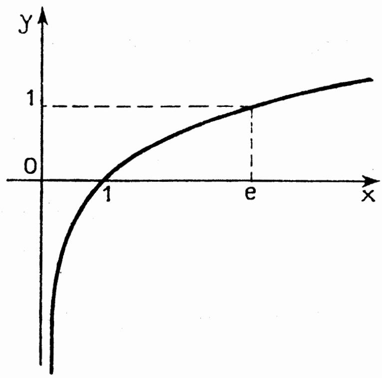
$$\mathrm{Log}\,۲^n = n\mathrm{Log}\,۲ \qquad , \qquad \mathrm{Log}\,۲ > \mathrm{Log}\,۱ = ۰$$

پس با استفاده ازشماره ۲.۵.۱۷ دیده می‌شود که :

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{Log}\,x = +\infty$$

۰.۳.۲- از فرمول $\operatorname{Log} x = -\operatorname{Log}\left(\frac{1}{x}\right)$ به‌دست می‌آید:

$$\lim_{x \to 0,\, x>0} \operatorname{Log} x = -\infty$$



شکل ۲۰

۰.۳.۳- همواره داریم:

$$(\operatorname{Log} x)'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

پس تابع لگاریتمی کاو است (۴.۸.۳).

۰.۳.۴- معادله خط مماس در نقطه $x=1$ عبارت است از $y=x-1$، وچون تابع کاو است، برای $x>0$ داریم $\operatorname{Log} x \leqslant x-1$ (شمارهٔ ۵.۸.۳). از اینجا نتیجه می‌شود:

$$\operatorname{Log} x = 2\operatorname{Log}\sqrt{x} \leqslant 2(\sqrt{x}-1) \leqslant 2\sqrt{x}$$

پس هنگامی که x به‌سمت $+\infty$ می‌گراید $\frac{\operatorname{Log} x}{x} \to 0$

بنابراین نمودار این تابع دارای یک شاخه سهمی‌وار در راستای Ox است (۶.۴.۱۵).

۰.۳.۵- ازگفته های پیش و شماره‌های ۱.۱۱.۲ و ۴.۱۱.۲ چنین برمی‌آید که $x \to \operatorname{Log} x$ نه‌تنها یک همومرفیسم گروه ضربی شمارهای بزرگتر از صفر درگروه جمعی **R** است بلکه یک ایزومرفیسم گروه اول روی گروه دوم میباشد.

۶.۳.۵- به‌ویژه تنها یک‌شمار بزرگترازصفرکه آن‌را با e نشان‌می‌دهیم، وجود دارد به‌قسمی‌که :

$$\mathrm{Log}\, e = ۱ \qquad (۷)$$

درنظریه سری‌ها روش محاسبه e دیده خواهد شد، وخواهیم دیدکه ۰۰۰ ۲٫۷۱۸۲۸ = e است .

۴.۵ - لگاریتم درپایه a

۱.۴.۵ - فرض می‌کنیم a یک شمار بزرگتر از صفر ومخالف‌با ۱ باشد. دراین‌صورت Loga وجود دارد و مخالف باصفر است . برای هر $x > ۰$ می‌نهیم :

$$\mathrm{Log}_a x = \frac{\mathrm{Log} x}{\mathrm{Log} a}$$

گسترش $x \to \mathrm{Log}_a x$ را تابع لگاریتمی درپایه a مینامند . برای $a = e$ باردیگرتابع $x \to \mathrm{Log} x$ به دست می‌آید .

۲.۴.۵ - روشن است کـه $x \to \mathrm{Log}_a x$ نیز یک‌ایزومرفیسم گروه ضربی شمارهای بزرگتر از صفر روی گروه جمعی **R** است ، و تمام فرمول هایی‌که در ۲.۵ دیدیم درپایه a برقرارند .

۳.۴.۵ - هنگامیکه پایهٔ لگاریتم a باشدبجای فرمول $\mathrm{Log} e = ۱$ ، داریم :

$$\mathrm{Log}_a a = ۱$$

۴.۴.۵ - به ویژه لگاریتم درپایه ۱۰ را **لگاریتم دهدهی** می‌نامند و داریم:

$$\mathrm{Log}_{۱۰} ۱۰ = ۱$$

کاربرد این لگاریتم درمحاسبات عددی ساده‌تر است. برای تبدیل لگاریتم نپری به‌لگاریتم دهدهی داریم :

$$\mathrm{Log}_{۱۰} x = M \mathrm{Log} x \quad , \quad M = ۰٫۴۳۴۲۹ \cdots$$

۵.۵ - توابع نمایی

۱.۵.۵ - تابع $x \to \mathrm{Log} x$ یک ایزومرفیسم کاملاً افزایشی گروه ضربی شمارهای بزرگتر از صفر G درگروه جمعی **R** است . ایزومرفیسم وارون آنرا به‌صورت زیرمی‌نمایند :

$$x \to \exp x$$

۲.۵.۵ ـ تابع پیشین، که در تمامی **R** معین است، کاملاً افزایشی است. پس این تابع وقتیکه x به سمت ∞+ و همچنین وقتیکه x به سمت ∞− میل می کند دارای حد است. این حدود برابر با کنارهٔ بالا و کنارهٔ پایین G یعنی ∞+ و ۰ میباشند. پس داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$$

۳.۵.۵ - ازاین‌جا جدول تغییرات تابع exp به‌دست می‌آید. نمودار این تابع قرینه نمودار تابع Log نسبت به نیمساز ربع اول میباشد.

۴.۵.۵ - وقتیکه x به سمت ∞+ میل می کند، داریم $\exp x \to +\infty$ و از دستورهای ۴.۳.۵ و ۱۹.۵.۲ به دست می‌آید:

$$\frac{\operatorname{Log}(\exp x)}{\exp x} \to 0$$

به عبارت دیگر $\frac{x}{\exp x} \to 0$ و از آنجا داریم $\frac{\exp x}{x} \to +\infty$. بنابراین نمودار تابع exp دارای یک‌شاخه سهمی‌وار درراستای Oy می‌باشد.

۵.۵.۵ - **تعویض نشانه‌ها** - برای $n\in\mathbf{Z}$ با استفاده از تعریف exp وشماره‌های ۶.۳.۵ و ۵.۲.۵ به دست می‌آید:

$$\operatorname{Log}(\exp n) = n = n\operatorname{Log} e = \operatorname{Log} e^n$$

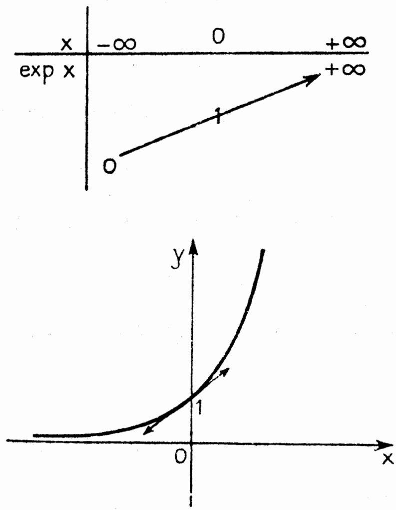
چون تابع Log کاملاً افزایشی است، داریم:

$$\exp n = e^n$$

این‌مطلب ما را وادار می کند که تابع e^x را نیز (وقتیکه x شمار گویا نیست) با دستور زیر تعریف کنیم:

$$e^x = \exp x$$

بعد از این، نشان بالا را به کار خواهیم برد. جدول تغییرات و نمودار تابع e^x چنین است:



شکل ۲۶

۰.۵.۶ ـ چون این تابع وارون تابع Log است ، داریم :

$$y=e^x \Longleftrightarrow x=\mathrm{Log}\,y \qquad (۸)$$

$$e^{\mathrm{Log}\,x}=x \qquad (۹)$$

$$\mathrm{Log}\,e^x=x \qquad (۱۰)$$

۰.۵.۷ ـ **مشتق** ـ فرض می‌کنیم $y=e^x$ باشد . با استفاده از شماره‌های ۱۳.۴.۳ و ۰.۱.۱ داریم :

$$(e^x)'_x=\frac{1}{(\mathrm{Log}\,y)'_y}=\frac{1}{\frac{1}{y}}=y=e^x$$

پس

$$(e^x)'=e^x \qquad (۱۱)$$

۶.۵ ـ تعمیم

۰.۶.۱ ـ فرض می‌کنیم $a>0$ باشد . برای هر $x\in\mathbf{R}$ قرار می‌دهیم :

$$a^x=e^{x\,\mathrm{Log}\,a} \qquad (۱۲)$$

برای اینکه برابری بالا درست باشد لازم است که سازگاری آن با دوحالت زیر، که در آنها a^x از پیش تعریف شده است، بررسی شود :

۱° - $a=e$: دراین‌حالت برابری بالا همان e^x را که در شمارهٔ ۶.۵.۵ تعریف شد به دست می‌دهد زیرا $\text{Log}e=1$.

۲° - $x\in\mathbf{Z}$: دراینصورت‌می‌دانیم که a^x شماری مانند y است. امااز‌شماره ۵.۲.۵ برمی‌آید که $\text{Log}y=x\text{Log}a$ وبا استفاده از ۶.۵.۵ داریم $y=e^{x\text{Log}a}$.

۲.۶.۵ - چنانکه دیده می‌شود a^x برای $a>0$ و همه مقادیر x بزرگتر از صفر است .

۳.۶.۵ - همواره فرمول‌های زیر برقرار است:

$$\text{Log}a^x=x\text{Log}a \quad , (a>0) \qquad (13)$$

$$a^xa^y=a^{x+y} \quad , (a>0) \qquad (14)$$

$$(a^x)^y=a^{xy} \quad , (a>0) \qquad (15)$$

$$(ab)^x=a^xb^x \quad , (a>0\,,\, b>0) \qquad (16)$$

$$a^{-x}=\frac{1}{a^x}=\left(\frac{1}{a}\right)^x, \ (a>0) \qquad (17)$$

فرمول (۱۳) از فرمول (۱۲) و (۱۰) نتیجه می‌شود . سایر فرمول‌ها با گرفتن لگاریتم ازدو طرف فرمول‌های بالا نتیجه می‌شوند . مثلاً با استفاده از (۳) و (۱۳) داریم :

$$\text{Log}(a^xa^y)=\log a^x+\log a^y=x\text{Log}a+y\text{Log}a$$

$$\text{Log}a^{x+y}=(x+y)\text{Log}a$$

که درستی فرمول (۱۴) را می‌رساند . فرمولهای دیگر به روش مشابه به دست می‌آیند .

اکنون به بررسی برخی از حالت‌های ویژه می‌پردازیم .

۴.۶.۵ - فرض می‌کنیم n یک‌شماردرست وبزرگتر ازصفر باشد . با استفاده از فرمول (۱۵) داریم :

$$(a^{\frac{1}{n}})^n=a^1=a$$

پس

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a} \qquad (۱۸)$$

۵.۶.۰ - اگر m و n دوشمار درست و بزرگترازصفر باشند ، با استفاده از فرمولهای (۱۵) و (۱۸) به دست می‌آید :

$$a^{\frac{m}{n}}=\begin{cases}(a^m)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\\ (a^{\frac{1}{n}})^m=(\sqrt[n]{a})^m\end{cases}$$

و با استفاده از فرمول (۱۷) ، خواهیم داشت :

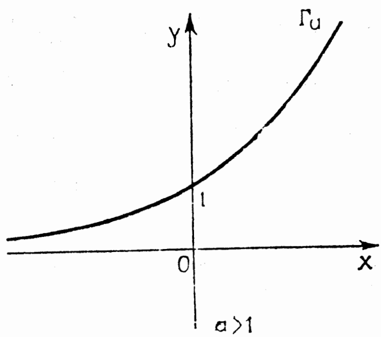
$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}=\frac{1}{(\sqrt[n]{a})^m}$$

که ازآنها تعبیر ساده‌ای برای a^x ، درحالتی که x شماری گویاست ، نتیجه می‌شود .

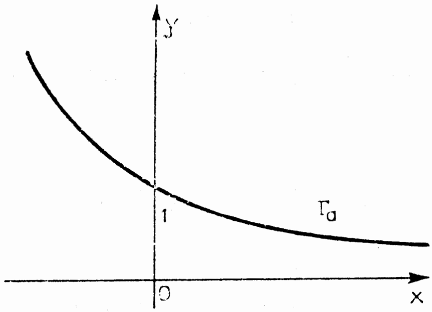
۶.۶.۰ - برای هر x متعلق به $\mathbf{R}$ داریم $1^x=e^{x\text{Log}1}=e^0$ پس :

$$1^x=1 \qquad (۱۹)$$

۷.۶.۰ - **نمودار تابع** a^x - چون $1^x=1$ است ، بعدازاین a را مخالف یک فرض می‌کنیم . دراین‌صورت $\text{Log}a\neq 0$ است وازفرمول (۱۲) نتیجه می‌شود که نمودار Γ_a تابع a^x ازروی نمودار Γ_e تابع e^x، که قبلاً رسم شده‌است، به‌وسیلهٔ یک تبدیل خطی به‌محور Oy و به نسبت $\frac{1}{\text{Log}a}$ به‌دست می‌آید . به‌ویژه نمودار Γ_a و $\Gamma_{\frac{1}{a}}$ نسبت بـه محور y ها متقارنند .



شکل ۲۷



$0 < a < 1$

شکل ۲۸

۸.۶.۵ ـ مشتق تابع a^x را به روش زیر محاسبه می‌کنیم :

$$(a^x)' = (e^{x\operatorname{Log}a})' = e^{x\operatorname{Log}a}\operatorname{Log}a$$

بنابراین داریم :

$$(a^x)' = a^x\operatorname{Log}a \tag{۲۰}$$

این دستور تعمیم دستور (۱۱) است .

۹.۶.۵ - همواره باید توجه داشت که :

تابع $\operatorname{Log}x$ تنها برای مقادیر $x > 0$ معین است .

تابع a^x برای هرمقدار دلخواه x وبرای $a > 0$ معین است و داریم $a^x > 0$.

۱۰.۶.۵ ـ فرض می‌کنیم توابع f و g ، وقتیکه x به‌سمت x_0 میل می‌کند و $x \neq x_0$ است ، بـه سمت $+\infty$ میل نمایند به‌قسمی که $f \sim g$ باشد . دراین‌صورت ، وقتیکه x به سمت x_0 میل می‌کند و x مخالف x_0 است توابع e^f و e^g به سمت $+\infty$ میل می‌کنند ولی همیشه بستگی $e^f \sim e^g$ برقرار نیست . مثلاً وقتیکه x به‌سمت $+\infty$ میل می‌کند، دوتابع x^2+x و x^2 به‌سمت $+\infty$ میل‌می‌کنند وبستگی $x^2+x \sim x^2$ برقرار است (۲.۶.۲) . اما داریم :

$$\frac{e^{x^2+x}}{e^{x^2}} = \frac{e^{x^2}e^x}{e^{x^2}} = e^x \to +\infty$$

لیکن همواره بستگی $\operatorname{Log}f \sim \operatorname{Log}g$ برقرار است ، زیرا از بستگی $f \sim g$ نتیجه می‌شود

$f=gh$ که درآن، وقتیکه x به‌سمت x_0 میل می‌کند و $x \neq x_0$ است، تابع h به‌سمت ۱ میل می‌کند . پس :

$$\operatorname{Log} f=\operatorname{Log} g+\operatorname{Log} h=\operatorname{Log} g\left[1+\frac{\operatorname{Log} h}{\operatorname{Log} g}\right]$$

و داریم $\operatorname{Log} h \to 0$ و $\operatorname{Log} g \to +\infty$. بنابراین $\left[1+\frac{\operatorname{Log} h}{\operatorname{Log} g}\right] \to 1$.

۱۱.۶.۵- **صورتهای نامعین توابع نمایی**- فرض می‌کنیم توابع u و v از x درفاصله I به قسمی معین باشند که برای هر x متعلق به I داشته باشیم $u(x) > 0$. دراین‌صورت می‌توان تابع $y=u^v$ را که در I معین است تعریف کرد . فرض می‌کنیم ، وقتیکه x به سمت x_0 میل می‌کند و x مخالف x_0 است ، توابع u و v به ترتیب به سمت u_0 و v_0 میل کنند . بنابراین داریم $0 \leqslant u_0 \leqslant +\infty$ و $-\infty \leqslant v_0 \leqslant +\infty$. می‌خواهیم حد تابع $y=u^v$ را بررسی کنیم .

بدین‌منظور قرار می‌دهیم $z=\operatorname{Log} y$. با استفاده از بستگی $y=e^z$ ، برای شناختن حد y کافی‌است که حد z را به‌دست‌آوریم . از طرفی $z=v\operatorname{Log} u$ است. پس می‌توان حد z را به دست آورد مگر هنگامیکه یکی ازسازه‌های v و $\operatorname{Log} u$ به سمت صفر و دیگری به سمت $\pm\infty$ میل کند.

دراین‌صورت به یکی از حالات زیر می‌رسیم :

$$v_0=0 \;,\; u_0=+\infty \;;\; v_0=0 \;,\; u_0=0 \;;\; v_0=\pm\infty \;,\; u_0=1$$

ودرنتیجه یکی از صورتهای نامعین زیر را خواهیم داشت:

$$\infty^0 \;,\; 0^0 \;,\; 1^\infty$$

ما درشماره ۲.۷.۵ یکی ازصورتهای نامعین ویژه 1^∞ را خواهیم دید .

۷.۵- توابع نمایی‌که با حد معین می‌شوند

۱.۷.۵ - میدانیم که مشتق $\operatorname{Log} x$ به ازاء $x=1$ برابر با ۱ است . پس با استفاده از شماره ۶.۱.۳ داریم :

$$\operatorname{Log}(1+h)-\operatorname{Log} 1 \sim 1 \cdot h \qquad (h \to 0)$$

به عبارت دیگر :

$$\text{Log}(1+x) \sim x \qquad (x \to 0) \qquad (21)$$

۲.۷.۰ - قضیه - اگر x یک شمار حقیقی باشد ، داریم :

$$\lim_{h \to 0,\, h \neq 0} (1+hx)^{\frac{1}{h}} = e^x$$

اثبات - از فرمول (۱۲) نتیجه می‌شود که :

$$(1+hx)^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{h}\text{Log}(1+hx)}$$

وقتیکه h به سمت صفر میل می‌کند و $h \neq 0$ است ، با استفاده از فرمول (۲۱) و شماره ۷.۶.۲ به دست می‌آید :

$$\frac{1}{h}\text{Log}(1+hx) \sim \frac{1}{h} hx = x$$

پس از شماره ۶.۶.۲ نتیجه می‌شود :

$$\frac{1}{h}\text{Log}(1+hx) \to x$$

و بدین ترتیب قضیه ثابت می‌گردد.

۳.۷.۰ - نتیجه - وقتیکه شمار درست n به سمت $+\infty$ میل می‌کند داریم :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$

این نتیجه از شماره ۲.۷.۰ که درآنجا ۱ جایگزین x شده است و h به ترتیب مقادیر $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ را می‌پذیرد به دست می‌آید.

مثلاً e حد شمارهای زیر میباشد :

$$(1{,}1)^{10}, \quad (1{,}01)^{100}, \quad (1{,}001)^{1000}, \quad \ldots$$

۵.۸ـ توابع هذلولی

۵.۸.۱ ـ تابع های کسینوس هذلولی ، سینوس هذلولی و تانژانت هذلولی را وقتی که x حقیقی است با فرمول های زیر معین می کنند :

$$\mathrm{ch}x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{۲}$$

$$\mathrm{sh}x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{۲} \qquad (۲۲)$$

$$\mathrm{th}x=\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

(بعدها خواهیم دید که این توابع شباهت زیادی با توابع مثلثاتی دارند . به علاوه این توابع درنمایش پارامتری هذلولی واردمی‌شوند ، وبدین جهت آنهارا توابع هذلولی می‌نامند) .

۵.۸.۲ ـ همواره دوفرمول زیر برقرار است :

$$\mathrm{ch}x+\mathrm{sh}x=e^{x} \qquad (۲۳)$$

$$\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x=e^{-x} \qquad (۲۴)$$

۵.۸.۳ ـ ازضرب دوفرمول بالا دریکدیگرنتیجه می‌شود که :

$$\mathrm{ch}^{۲}x-\mathrm{sh}^{۲}x=۱ \qquad (۲۵)$$

اگر دوطرف این برابری را بر $\mathrm{ch}^{۲}x$ بخش کنیم ، خواهیم داشت :

$$۱-\mathrm{th}^{۲}x=\frac{۱}{\mathrm{ch}^{۲}x} \qquad (۲۶)$$

۵.۸.۴ ـ **مشتق توابع هذلولی** ـ چون $(e^{x})'=e^{x}$ است ، به آسانی دستورهای زیر به دست می‌آید :

$$(\mathrm{ch}x)'=\mathrm{sh}x$$

$$(\mathrm{sh}x)'=\mathrm{ch}x \qquad (۲۷)$$

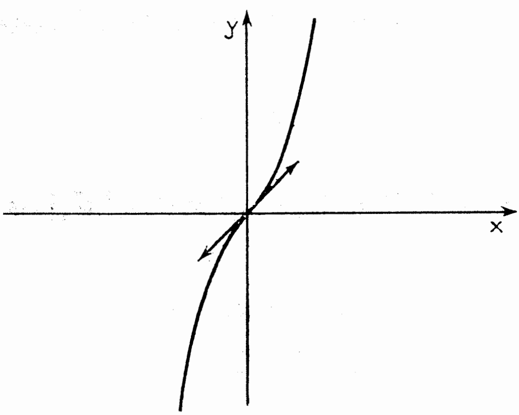
$$(\mathrm{th}x)'=\frac{۱}{\mathrm{ch}^{۲}x}=۱-\mathrm{th}^{۲}x$$

۰.۸.۰ - **تقارن توابع هذلولی** - به‌آسانی از فرمول‌های (۲۲) به دستورهای زیر می‌رسیم :

$$\begin{aligned} ch(-x) &= chx \\ sh(-x) &= -shx \\ th(-x) &= -thx \end{aligned} \tag{۲۸}$$

۶.۸.۰ - **تغییرات تابع** $y=shx$ - چون $y'=chx>0$ است ، تابع y کاملاً افزایشی است . وقتیکه x به سمت $+\infty$ میل می‌کند تابع e^x به سمت $+\infty$ و e^{-x} به سمت صفر می‌گراید . پس shx به سمت $+\infty$ میل می‌کند و $\frac{Shx}{x}$ نیز به سمت $+\infty$ میل خواهد کرد . زیرا از شماره ٤.٥.٠ برمی‌آید که حد $\frac{e^x}{x}$ برابر با $+\infty$ است . بنابراین جدول تغییرات و نمودار این تابع چنین است :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		+	1	+	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$



شکل ۲۹

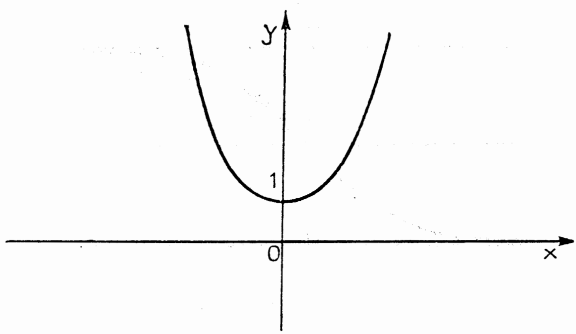
از برابری $y''=\text{sh}x$ نتیجه می‌شود که y'' برای مقادیر $x \geqslant 0$ مثبت و برای مقادیر $x \leqslant 0$ منفی است .

۰.۸.۷ - تغییرات تابع $y=\text{ch}x$ - دربالا علامت تابع $y'=\text{sh}x$ بررسی‌شد.
ازطرفی هنگامی‌که $x \to \pm\infty$ داریم :

$$\frac{\text{ch}x}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^x}{x} + \frac{e^{-x}}{x}\right) \to +\infty$$

پس جدول تغییرات ونمودار تابع چنین است :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



شکل ۳۰

$y''=\text{ch}x$ همیشه بزرگتر از صفر است .

نمودار تابع $y=\text{ch}x$ را زنجیرك مینامند . این خم شکل زنجیر آویخته‌ای را دارد که دوسرآن در دونقطه ثابت شده باشد.

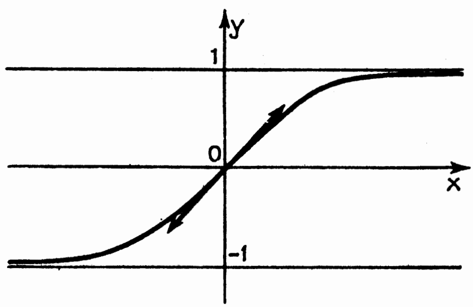
۰.۸.۸ - تغییرات تابع $y=\text{th}x$ - چون $y'=\frac{1}{\text{ch}^2x}$ است ، تابع y کاملاً افزایشی می‌باشد و با استفاده از دستور (۲۲) داریم :

$$\operatorname{th}x=\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$

پس وقتیکه x به سمت $+\infty$ میل می‌کند $\operatorname{th}x$ به سمت ۱ میل خواهد کرد . از دستور (۲۸) برمی‌آید که حد $\operatorname{th}x$ وقتیکه x به سمت $-\infty$ میل می‌کند برابر با ۱ — است .

جدول تغییرات ونمودار این تابع چنین است :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	1	$+$	
y	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1



شکل ۳۱

داریم
$$y''=(1-\operatorname{th}^2x)'=-2\operatorname{th}x\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}$$

پس y'' برای $x\geqslant 0$ منفی وبرای $x\leqslant 0$ مثبت است.

۰.۸.۹ - **دستورهای جمع** - با استفاده از فرمول‌های (۲۳) و (۲۴) ، داریم :

$$e^{a+b}=e^ae^b=(\operatorname{ch}a+\operatorname{sh}a)(\operatorname{ch}b+\operatorname{sh}b)$$
$$=\operatorname{ch}a\operatorname{ch}b+\operatorname{sh}a\operatorname{sh}b+\operatorname{ch}a\operatorname{sh}b+\operatorname{sh}a\operatorname{ch}b$$

$$e^{-a-b}=a^{-a}e^{-b}=(cha-sha)(chb-shb)$$
$$=chachb+shashb-chashb-shachb$$

اگر دوطرف برابری‌های بالا را یکبار باهم جمع ویکبار ازهم کم نماییم ونتیجه را بردوتقسیم کنیم به دست می‌آوریم :

$$ch(a+b)=chachb+shashb$$
$$sh(a+b)=shachb+shbcha$$

چنانکه دیده می‌شود فرمول‌های بالا شبیه فرمولهای مثلثاتی می‌باشند . به همین ترتیب می‌توان فرمولهایی مشابه با سایـــر فرمولهای مثلثاتی به دست آورد.

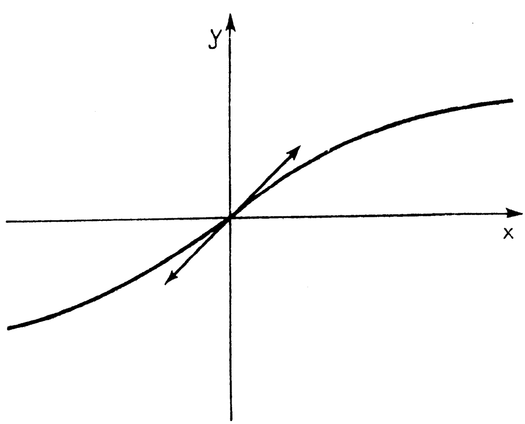
۹.۵- توابع وارون توابع هذلولی

۱.۹.۰ - تابع $y=Argshx$ - چنانکه درپیش دیده شده تابع $y=shx$ در $\mathbf{R}$ معین ، پیوسته وکاملاً افزایشی‌است. بنابراین یک نگاشت دوسویی $\mathbf{R}$ روی $\mathbf{R}$ میباشد پس‌دارای یک‌تابع‌وارون‌پیوسته وکاملاً افزایشی‌است که یک‌نگاشت دوسویی $\mathbf{R}$ روی $\mathbf{R}$ میباشد. این تابع را با $y=Argshx$ نشان می‌دهند . داریم :

$$y=Argshx \iff x=shy$$

و از اینجا نتیجه می‌شود :

$$Argsh(-x)=-Argshx$$



شکل ۳۲

۲.۹.۵ - **مشتق تابع** $y=\mathrm{Argsh}x$ - با استفاده از شماره ۱۳.٤.۳ ، داریم :

$$(\mathrm{Argsh}x)'_x=\frac{1}{(\mathrm{sh}y)'_y}=\frac{1}{\mathrm{ch}y}$$

از طرفی $\mathrm{ch}^2y=1+\mathrm{sh}^2y=x^2+1$. چون $\mathrm{ch}y>0$ است ، فرمول زیر به دست می‌آید :

$$\mathrm{ch}y=\sqrt{x^2+1} \tag{۲۹}$$

پس :

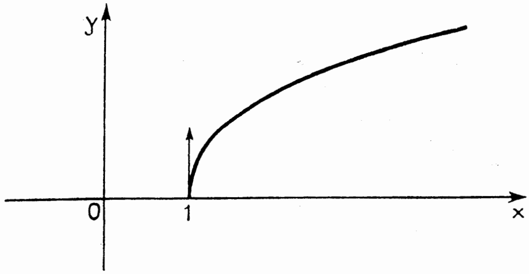
$$(\mathrm{Argsh}x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \tag{۳۰}$$

۳.۹.۵ - **عبارت دیگر تابع** $\mathrm{Argsh}x$ - اگر $y=\mathrm{Argsh}x$ باشد خواهیم داشت $\mathrm{sh}y=x$ و بنابر فرمول (۲۹) ، $\mathrm{ch}y=\sqrt{x^2+1}$ پس بنابر فرمول (۲۳) ، $e^y=x+\sqrt{x^2+1}$ ویا $y=\mathrm{Log}(x+\sqrt{x^2+1})$ و ازآنجا:

$$\mathrm{Argsh}x=\mathrm{Log}(x+\sqrt{x^2+1}) \tag{۳۱}$$

٤.۹.۵ - **تابع** $y=\mathrm{Argch}x$ - میدانیم که $y=\mathrm{ch}x$ درفاصله $[0,+\infty[$ پیوسته و کاملاً افزایشی از ۱ تا $+\infty$ است . بنابراین یک نگاشت وارون پیوسته وکاملاً افزایشی $[1,+\infty[$ روی $[0,+\infty[$ وجود دارد که دوسویی نیزمیباشد. این نگاشت را با $y=\mathrm{Argch}x$ نشان می‌دهند. پس داریم :

$$y=\mathrm{Argch}x \Longleftrightarrow x=\mathrm{ch}y \ , \ y\geqslant 0$$



شکل ۳۳

۰.۹.۵ - **مشتق تابع** $y=\operatorname{Argch}x$ - با استفاده ازمشتق وارون یک تابع می توان نوشت :

$$(\operatorname{Argch}x)_x = \frac{1}{(\operatorname{ch}y)'_y} = \frac{1}{\operatorname{sh}y}$$

از طرف دیگر داریم $\operatorname{sh}^2y=\operatorname{ch}^2y-1=x^2-1$. چون $y\geqslant 0$ است ، داریم $\operatorname{sh}y\geqslant 0$ پس :

$$\operatorname{sh}y=\sqrt{x^2-1} \tag{32}$$

بنابراین:

$$(\operatorname{Argch}x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \tag{33}$$

۶.۹.۵ - **عبارت دیگر تابع** $y=\operatorname{Argch}x$ - اگر $x\geqslant 1$ باشد خواهیم داشت $\operatorname{ch}y=x$ و از فرمول (۳۲) نتیجه می‌شود که $\operatorname{sh}y=\sqrt{x^2-1}$. بنابراین بستگی $e^y=x+\sqrt{x^2-1}$ از فرمول (۲۳) به دست می‌آید ، پس :

$$\operatorname{Argch}x=\operatorname{Log}(x+\sqrt{x^2-1})\ ,\ (x\geqslant 1) \tag{34}$$

۷.۹.۵ - **تابع** $y=\operatorname{Argth}x$ - تابع $y=\operatorname{th}x$ یک نگاشت پیوسته و کاملاً افزایشی $\mathbf{R}$ روی فاصله $]-1\,,1[$ است . بنابراین یک تابع وارون وجود دارد که یک نگاشت پیوسته و کاملاً افزایشی $]-1\,,1[$ روی $\mathbf{R}$ می‌باشد. این نگاشت را با $y=\operatorname{Argth}x$ نشان می‌دهند ، پس داریم :

$$y=\operatorname{Argth}x \Longleftrightarrow x=\operatorname{th}y$$

و ازاینجا نتیجه می‌شود که :

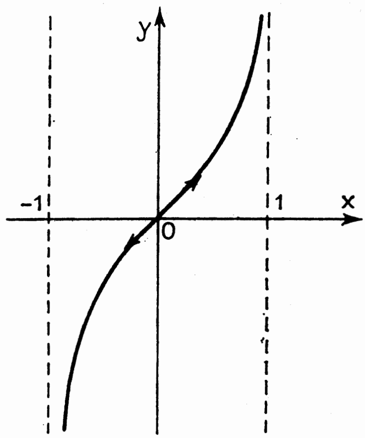
$$\operatorname{Argth}(-x)=-\operatorname{Argth}x$$

۸.۹.۵ - **مشتق تابع** $y=\operatorname{Argth}x$ - می‌توان نوشت :

$$(\operatorname{Argth}x)'_x=\frac{1}{(\operatorname{th}y)'_y}=\frac{1}{1-\operatorname{th}^2y}=\frac{1}{1-x^2}$$

پس داریم :

$$(\operatorname{Argth}x)'=\frac{1}{1-x^2} \tag{35}$$



شکل ۳۴

۹.۹.۵ - عبارت دیگر تابع $y = \text{Argth}x$ - فرض می‌کنیم x متعلق به‌فاصله $]-۱, ۱[$ باشد . داریم :

$$x = \text{th}y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{۲y} - ۱}{e^{۲y} + ۱}$$

و ازآنجا :

$$e^{۲y} = \frac{۱ + x}{۱ - x} \quad \text{ویا} \quad e^{۲y}(۱ - x) = ۱ + x$$

بنابراین

$$۲y = \text{Log}\,\frac{۱ + x}{۱ - x}$$

پس :

$$\text{Argth}x = \frac{۱}{۲}\,\text{Log}\,\frac{۱ + x}{۱ - x} \quad , \quad (-۱ < x < ۱) \qquad (۳۶)$$

۱۰.۵ - تابع x^α

۱.۱۰.۵ - فاصله تغییرات تابع x^α - شمار x^α تنها هنگامیکه x بزرگتر ازصفر است معین میباشد (۹.۶.۵) .

باوجود این اگرشماردرست n بزرگتر یابرابر باصفر باشد، x^n برای تمام xهای‌متعلق به $\mathbf{R}$ معین است و اگر شمار درست n کوچکتر ازصفر باشد ، x^n برای $x \neq ۰$ معین‌است.

چون این توابع ممکن است برحسب مقادیر مختلف α زوج ویا فرد باشند، ما تنها حالتی را در نظر می گیریم که x بزرگتر از صفر و α دلخواه است .

۲.۱۰.۵ - میدانیم که برای تمام مقادیر مثبت x داریم $e^{x}=e^{\alpha \operatorname{Log} x}>0$.

۳.۱۰.۵ - **مشتق تابع x^{α}** - فرض می کنیم $y=x^{\alpha}$ باشد داریم $y=e^{\alpha \operatorname{Log} x}$.
پس دیده می‌شود که برای x بزرگتر از صفر تابع x^{α} دارای مشتقی برابر :

$$y'=\frac{\alpha}{x} e^{\alpha \operatorname{Log} x}=\frac{\alpha}{x} x^{\alpha}=\alpha x^{\alpha-1}$$

است، بنابراین :

$$y'=\alpha x^{\alpha-1} \quad \text{و} \quad \frac{y'}{y}=\frac{\alpha}{x}$$

این فرمول را برای شمار درست $\alpha \geqslant 0$ از پیش می‌شناختیم .

مثلاً برای $y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ داریم:

$$y'=\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

۴.۱۰.۵ - فرض می کنیم تابع u دریک فاصله ، معین و بزرگتر ازصفر باشد. می توان تابع $y=u^{\alpha}$ را تعریف کرد . دراین صورت داریم $y'=\alpha u^{\alpha-1} u'$ پس :

$$\frac{y'}{y}=\alpha \frac{u'}{u}$$

این فرمول تعمیم شماره ۴.۴.۳ است :

۵.۱۰.۵ - **مثال** - فرض می کنیم :

$$y=\frac{\sqrt{1-x}\sqrt[3]{1+x^{2}}}{\sqrt{(2+x^{3})^{3}}}=(1-x)^{\frac{1}{2}}(1+x^{2})^{\frac{1}{3}}(2+x^{3})^{-\frac{3}{2}}$$

برای $1-x>0$ و $2+x^{3}>0$ داریم :

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2} \frac{-1}{1-x}+\frac{1}{3} \frac{2x}{1+x^{2}}-\frac{3}{2} \frac{3x^{2}}{2+x^{3}}$$

۶.۱۰.۵ - **تابع اولی x^{α}** - مشتق تابع $x^{\alpha+1}$ عبارتست از $(\alpha+1)x^{\alpha}$ پس:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \lambda \quad , \quad \alpha \neq -1$$

با استفاده از شماره ۳.۱.۵ میدانیم که در هریک از فاصله های $]0, -\infty[$ و $]+\infty, 0[$ داریم :

$$\int \frac{dx}{x} = \text{Log}|x| + \lambda$$

مقدار ثابت λ درفاصله های $]0, -\infty[$ و $]+\infty, 0[$ ممکن است مختلف باشد.

۷.۱۰.۵ - **مثال** - برای $x > 0$ داریم :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + \lambda = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \lambda$$

۸.۱۰.۵ - فرض می کنیم توابع f و g در یک فاصله، معین و بزرگتر از صفر باشند و هنگامیکه x به سمت x_0 میل می کند و $x \neq x_0$ است، داشته باشیم $f \sim g$. دراین صورت، وقتیکه x به سمت x_0 میل می کند و $x \neq x_0$ است داریم $f^\alpha \sim g^\alpha$ زیرا از بستگی $f = gh$ واینکه h به سمت یک میل می کند به دست می آوریم :

$$f^\alpha = g^\alpha h^\alpha \quad \text{و} \quad h^\alpha \to 1^\alpha = 1$$

۱۱.۵ - تغییرات تابع $y = x^\alpha$

۱.۱۱.۵ - چنانچه $\alpha = 0$ باشد داریم $x^\alpha = 1$. این حالت را که دارای اهمیت نیست کنار می گذاریم .

۲.۱۱.۵ - چون داریم $y' = \alpha x^{\alpha-1}$ ، بنابر شمارهٔ ۲.۱۰.۵ علامت y' همان علامت α است .

۳.۱۱.۵ - برای تمام مقادیر α داریم $y(1) = 1$ و $y'(1) = \alpha$

۴.۱۱.۵ - تابع y را وقتیکه x به سمت $+\infty$ و هنگامیکه x با مقادیر بزرگتر از صفر به سمت صفر میل می کند بررسی می کنیم . چون $y = e^{\alpha \text{Log} x}$ است ، پس وقتیکه x به سمت $+\infty$ می گراید :

۱ - برای $\alpha > 0$ تابع $\alpha \operatorname{Log} x$ به سمت $+\infty$ میل می‌کند و درنتیجه y به سمت $+\infty$ می‌گراید.

۲ - برای $\alpha < 0$ تابع $\alpha \operatorname{Log} x$ به سمت $-\infty$ میل می‌کند و درنتیجه y به سمت 0 می‌گراید.

هنگامیکه x با مقادیر بزرگتر از صفر به سمت صفر میل می‌کند:

۱ - اگر $\alpha > 0$ باشد، تابع $\alpha \operatorname{Log} x$ به‌سمت $-\infty$ می‌گراید ودرنتیجه y به‌سمت صفر میل می‌کند.

۲ - اگر $\alpha < 0$ باشد، تابع $\alpha \operatorname{Log} x$ به سمت $+\infty$ میل می‌کند و درنتیجه y به سمت $+\infty$ میل خواهد کرد.

۵.۱۱.۵ - جدول‌های تغییرات تابع x^α به‌صورت زیر است:

$\boxed{\alpha>0}$

x	0		1		$+\infty$
y'	‖	$+$	α	$+$	
y	‖ 0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$\boxed{\alpha<0}$

x	0		1		$+\infty$
y'	‖	$-$	α	$-$	
y	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

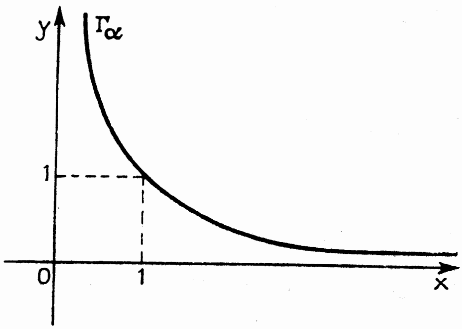
۶.۱۱.۵ - برای $\alpha < 0$، Γ_α نمودار تابع x^α دارای مجانب‌های Ox و Oy میباشد. ازطرف دیگر داریم:

$$y''=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}>0$$

پس تابع کوژ است.

برای $\alpha=-1$، چون $x^{-1}=\frac{1}{x}$ است، نمودار y یک شاخه از هذلولی متساوی‌الساقین میباشد.

MATH75.IR



شکل ۳۵

۷.۱۱.۵ - درحالتی که $\alpha > ۰$ است قرار میدهیم $\beta = \alpha - ۱$.

۸.۱۱.۵ - برای $\alpha = ۱$ داریم $x^\alpha = x$ که این حالت را کنار می گذاریم .

۹.۱۱.۵ - چون وقتیکه x به سمت صفر میل می کند تابع $y = x^\alpha$ نیز به سمت صفر می گراید ، پس قرار می دهیم $y(۰) = ۰$ وبدین ترتیب تابع درنقطه $x = ۰$ معین می شود .
می خواهیم خط مماس برخم نمودار تابع $y = x^\alpha$ را در مبداء بررسی کنیم. برای این منظور باید حد عبارت :

$$\frac{y(x) - y(۰)}{x - ۰} = \frac{x^\alpha}{x} = x^\beta$$

را هنگامی که x با مقادیر مثبت به سمت صفر میل می کند پیدا کنیم . اما با استفاده ازشماره ٤.۱۱.۵ :

برای $\beta > ۰$ ، به عبارت دیگر برای $\alpha > ۱$ ، درنقطه O محور x ها مماس برخم Γ_α است .

برای $\beta < ۰$ ، به عبارت دیگر برای $\alpha < ۱$ ، درنقطه O محور y ها مماس برخم Γ_α است (یادآوری می شود که $\alpha > ۰$ است) .

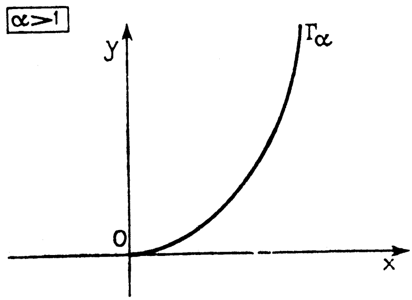
۱۰.۱۱.۵ - وقتیکه x به سمت $+\infty$ میل می کند ، خم Γ_α دارای یک شاخه بینهایت است و داریم $\frac{y}{x} = x^\beta$ با استفاده از شماره ٤.۱۱.۵ :

اگر $\beta > ۰$ ویا به گفته دیگر $\alpha > ۱$ باشد، وقتیکه x به سمت $+\infty$ میل می کند

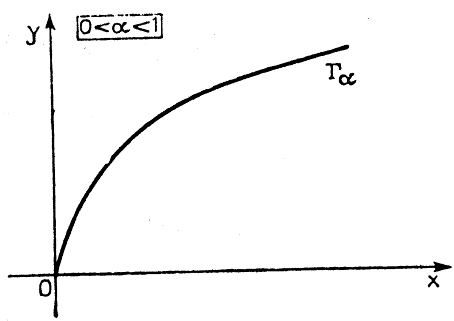
$\frac{y}{x}$ به سمت $+\infty$ میل خواهد کرد. بنابراین Γ_α دارای یک شاخه سهمی‌وار در راستای Oy است.

اگر $\beta<0$ ویا به‌عبارت‌دیگر $\alpha<1$ باشد، تابع $\frac{y}{x}$ وقتیکه x به سمت $+\infty$ میل می‌کند به‌سمت ۰ میل خواهد کرد. پس Γ_α دارای یک‌شاخه سهمی‌وار درراستای Ox است.

۱۱.۱۱.۰ - مشتق دوم تابع $y=x^\alpha$ عبارت است از $y''=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$. چون α بزرگتر از صفر است پس‌علامت y'' همان علامت $\alpha-1$ میباشد. بنابراین برای $\alpha>1$ تابع y کوژ و برای $\alpha<1$ تابع y کاو است.

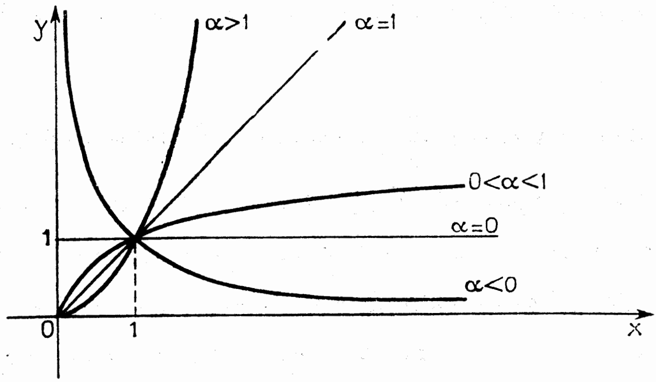


شکل ۳۶



شکل ۳۷

۱۲.۱۱.۰ - بطورخلاصه ، برای مقادیرمختلف α ، نمودارهای زیر به‌دست‌می‌آیند:



شکل ۳۸

۰.۱۱.۱۳ ـ با استفاده از دستور (۱۰) شماره ۰.۶.۲ داریم :

$$y=x^{\alpha} \iff x=y^{\frac{1}{\alpha}}$$

پس تابع های x^{α} و $x^{\frac{1}{\alpha}}$ وارون یکدیگرند . بنابراین نمودارهای Γ_{α} و $\Gamma_{\frac{1}{\alpha}}$ نسبت به نیمساز ربع اول قرینه یکدیگرند ونمودارهای Γ_{2} و $\Gamma_{\frac{1}{2}}$ کمان هایی از دوسهمی میباشند .

۵. ۱۲ ـ مرتبه افزایش توابع Logx و x^{α} و a^{x}

۰.۱۲.۱ ـ هنگامیکه x به سمت $+\infty$ میل می کند توابع :

$$\mathrm{Log}x \ , \ x^{\alpha} \quad (\alpha>0) \ , \ a^{x} \quad (a>1)$$

به سمت $+\infty$ می گرایند . می‌خواهیم نشان دهیم که این سه تابع با یک تندی به سمت $+\infty$ میل نمی کنند.

۰.۱۲.۲ ـ قضیه ـ برای $\alpha>0$ ، هنگامیکه x به سمت $+\infty$ میل‌میکند داریم $\mathrm{Log}x=o(x^{\alpha})$.

اثبات ـ چون :

$$\frac{\mathrm{Log}x}{x^{\alpha}}=\frac{1}{\alpha}\,\frac{\mathrm{Log}x^{\alpha}}{x^{\alpha}}$$

و هنگامیکه x به سمت $+\infty$ میل می‌کند، x^α به سمت $+\infty$ می‌گراید (شمارهٔ ۴.۱۱.۰)، بنابراین ازشماره ۴.۳.۰ نتیجه می‌شود که $\frac{\text{Log}\,x^\alpha}{x^\alpha}$ به سمت صفر میل می‌کند.

۳.۱۲.۰ - گاهی برای بیان مطلب بالا می‌گویند «مرتبهٔ افزایش تابع x^α از تابع $\text{Log}x$ بیشتر است» از این مفهوم می‌توان در محاسبات استفاده کرد ولی نباید آنرا وسیله استدلال قرار داد.

۴.۱۲.۰ - باید توجه داشت که افزایش توابع x^α، برای مقادیر کوچک $\alpha > 0$ بسیار کند است.

بعنوان مثال مقدار تابع $x^{\frac{1}{100}}$ برای $x = 10^{100}$ برابر با ۱۰ است. با وجود این افزایش $\text{Log}x$ بسیار کندتر از این توابع است. درابتدا این مطلب درمورد تابع $x^{\frac{1}{100}}$ متناقص بنظرمی‌رسد زیرا، $\text{Log}\,10^{100}$ تقریباً برابر با ۲۳۰ است. ولی با انتخاب مقادیر بزرگتر برای x به درستی قضیه پی‌میبریم. بعنوان مثال برای $x = 10^{10000}$ مقدار تابع $x^{\frac{1}{100}}$ برابر با 10^{100} است درصورتیکه $\text{Log}\,10^{10000}$ تقریباً برابر با ۲۳۰۰۰ میباشد.

۵.۱۲.۰ - هرچند که $\text{Log}x$، هنگامیکه $x \to +\infty$، با کندی بسیار به‌سمت $+\infty$ می‌گراید، اما توابع دیگری وجود دارند که گرایش آنها به‌سمت $+\infty$، هنگامیکه $x \to +\infty$، بسیار کندتر از $\text{Log}x$ است. مثلاً توابع $\text{Log}(\text{Log}x)$ و $\text{Log}(\text{Log}(\text{Log}(x)))$ از آن جمله‌اند.

۶.۱۲.۰ - قضیه - برای $\alpha > 1$، هنگامیکه $x \to +\infty$، داریم:

$$x^\alpha = o(a^x)$$

اثبات - قرارمی‌دهیم $y = \frac{x^\alpha}{a^x}$ و $z = \text{Log}y$، داریم:

$$z = \alpha\text{Log}x - x\text{Log}a = x\left(\alpha\frac{\text{Log}x}{x} - \text{Log}a\right)$$

ازطرف دیگر، با استفاده از شماره ۴.۳.۰، $\alpha\frac{\text{Log}x}{x} \to 0$ و $\text{Log}a > 0$ است، پس $z \to -\infty$ و درنتیجه $y = e^z$ به سمت صفر می‌گراید.

۷.۱۲.۰ - گاهی برای بیان این مطلب می‌گویند که « مرتبهٔ افزایش تابع نمایی a^x از تابع x^α بیشتر است » .

۸.۱۲.۰ - هنگامیکه x با مقادیر بزرگتر از صفر به‌سمت‌صفر می‌گراید و $\alpha<0$ است داریم:

$$\mathrm{Log}x \to -\infty \quad \text{و} \quad x^\alpha \to +\infty$$

میخواهیم این دو تابع را بایکدیگر بسنجیم :

قضیه - برای $\alpha<0$ هنگامیکه $x \to 0$ و $x>0$ است ، داریم :

$$\mathrm{Log}x = o(x^\alpha)$$

اثبات - قرار می‌دهیم $y=\frac{1}{x}$ ، داریم :

$$\frac{\mathrm{Log}x}{x^\alpha} = -\frac{\mathrm{Log}y}{y^{-\alpha}}$$

هنگامیکه x با مقادیر بزرگتر از صفر به سمت صفر می گراید y به سمت $+\infty$ میل می کند و با استفاده از شماره ۲.۱۲.۰ ، چون $-\alpha>0$ است ، تابع $\frac{\mathrm{Log}y}{y^{-\alpha}}$ به سمت صفر میل می‌نماید.

۹.۱۲.۰ - برای $a>1$ ، هنگامیکه x به سمت $+\infty$ میل می کند ، a^{-x} به سمت صفر می گراید .

قضیه - برای $a>1$ ، هنگامیکه x به سمت $+\infty$ میل‌می کند داریم :

$$a^{-x} = o(x^\alpha)$$

اثبات - با استفاده ازشماره ۶.۱۲.۰ تابع $\frac{x^{-\alpha}}{a^x} = \frac{a^{-x}}{x^\alpha}$ ، هنگامیکه x به سمت $+\infty$ میل می کند ، به سمت صفر می گراید .

فصل ششم
محاسبهٔ توابع اولی

در فصل چهارم گفته شد که محاسبهٔ انتگرال‌ها به‌محاسبه توابع اولی منجر می‌شود. اینک می‌خواهیم روش محاسبهٔ بسیاری از توابع اولی را ببینیم. بعلاوه کاربرد فصل های‌پیشین و ۳، ۱ تا ۱۷ را در این فصل مشاهده خواهیم کرد.

۶. ۱ - توابع اولی ساده

۶. ۱. ۱ - یادآوری برخی از توابع اولی :

(۱) $$\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\lambda \quad , \quad \alpha\neq -1$$

(۲) $$\int \frac{dx}{x}=\mathrm{Log}|x|+\lambda$$

(۳) $$\int \sin x\,dx=-\cos x+\lambda$$

(۴) $$\int \cos x\,dx=\sin x+\lambda$$

(۵) $$\int e^{x}dx=e^{x}+\lambda$$

(۶) $$\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\mathrm{Log}\,a}+\lambda \quad , \quad a\neq 1$$

(۷) $$\int \mathrm{sh}x\,dx=\mathrm{ch}x+\lambda$$

(۸) $$\int \mathrm{ch}x\,dx=\mathrm{sh}x+\lambda$$

(۹) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}=\mathrm{Arcsin}x+\lambda$$

(۱۰) $$\int \frac{dx}{1+x^{2}}=\mathrm{Arctg}x+\lambda$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^{2}+1}} = \text{Argsh}x + \lambda = \text{Log}(x + \sqrt{x^{2}+1}) + \lambda \qquad (11)$$

درتمام فرمولهای بالا λ مقداری است ثابت . یادآوری می‌شود که درفرمول (۲) برای فاصله های $]0, +\infty[$ و $]-\infty, 0[$ ، λ می‌توانند مختلف باشد. همچنین است برای فرمول های (۱۲) و (۱۳) که در زیر خواهد آمد .

۲.۱.۶ ـ با استفاده از ۵.۹.۵ و ۶.۹.۵ نتیجه می‌شود که یک‌تابع اولی $\frac{1}{\sqrt{x^{2}-1}}$ عبارتست از $\text{Argch}x = \text{Log}(x + \sqrt{x^{2}-1})$. ولی این تابع اولی تنها برای‌مقادیری از x که بزرگتر یا برابر با یک می‌باشد معین‌است. درصورتیکه $\frac{1}{\sqrt{x^{2}-1}}$ برای $x>1$ و $x<-1$ معین است . برای پیدا کردن تابع اولی که برای $x<-1$ نیز قابل قبول باشد چنین عمل می‌کنیم :

$$(\text{Log}\,|x+\sqrt{x^{2}-1}|)' = \frac{(x+\sqrt{x^{2}-1})'}{x+\sqrt{x^{2}-1}} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^{2}-1}}}{x+\sqrt{x^{2}-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^{2}-1}}$$

تابع $\text{Log}\,|x+\sqrt{x^{2}-1}|$ برای مقادیر $x \geqslant 1$ و $x \leqslant -1$ معین است . پس :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^{2}-1}} = \text{Log}\,|x+\sqrt{x^{2}-1}| + \lambda \qquad (12)$$

$$= \text{Argch}x + \lambda \quad , \quad x > 1$$

۳.۱.۶ ـ همچنین دیده می‌شود که :

$$\int \frac{dx}{1-x^{2}} = \frac{1}{2}\text{Log}\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + \lambda \qquad (13)$$

$$= \text{Argth}x + \lambda \quad , \quad -1 < x < 1$$

۲.۶ ـ انتگرال کسرهای گویا

۱.۲.۶ ـ فرض می‌کنیم n یک شمار درست‌بزرگتر ازیک و a یک شمار ثابت حقیقی ویا مختلط باشد. داریم:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + \lambda \tag{14}$$

زیرا با استفاده از ۴.۱۰.۵ اگر قرار دهیم $y = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$ خواهیم داشت :

$$\frac{y'}{y} = -(n-1)\frac{1}{x-a}$$

و ازآنجا :

$$y' = \frac{1}{(x-a)^n}$$

۲.۲.۶ - اگر $n=1$ و a یک شمار حقیقی باشد بنابر ۴.۱.۵ داریم :

$$\int \frac{dx}{x-a} = \mathrm{Log}\,|x-a| + \lambda$$

۳.۲.۶ - اگر $n=1$ و a یک شمار غیرحقیقی باشد قرار میدهیم $a=\alpha+i\beta$ که درآن α و β شمارهای حقیقی‌اند و $\beta \neq 0$ است . دراینصورت داریم :

$$\frac{1}{x-a} = \frac{1}{x-\alpha-i\beta} = \frac{x-\alpha+i\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + i\,\frac{\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

چون $2(x-\alpha)$ مشتق $(x-\alpha)^2+\beta^2$ می‌باشد ، بنابر ۴.۱.۵ به دست می‌آید :

$$\int \frac{2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \mathrm{Log}((x-\alpha)^2+\beta^2) + \lambda$$

برای محاسبهٔ $\int \frac{\beta dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$ تعویض‌متغیر $x-\alpha=\beta t$ را می‌دهیم (چون $\beta \neq 0$ است گسترش $x \to t$ یک گسترش دوسویی $\mathbf{R}$ روی $\mathbf{R}$ است) ، خواهیم داشت :

$$\int \frac{\beta dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \int \frac{\beta^2}{\beta^2 t^2+\beta^2}\,dt = \int \frac{dt}{1+t^2} = \mathrm{Arctg}\,t + \lambda$$

$$= \mathrm{Arctg}\,\frac{x-\alpha}{\beta} + \lambda$$

پس :

$$(١٦)\quad \int \frac{dx}{x-(\alpha+i\beta)} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}((x-\alpha)^2+\beta^2)+i\,\mathrm{Arctg}\frac{x-\alpha}{\beta}+\lambda$$

٤.٢.٦ - اگر f یک کسر گویا باضرایب حقیقی یا مختلط باشد، برای بدست آوردن تابع اولی f نخست تابع f را به عنصرهای ساده بصورت زیر تجزیه می‌کنیم :

$$f(x)=\sum \alpha_i x^i+\sum \frac{A_j}{(x-a_j)^{n_j}}$$

که درآنجا α_i ، A_j ، a_j شمارهای مختلط و n_j ها شمارهای درست بزرگتر از صفر می‌باشند. سپس بنابر ١.٢.٦ و ٢.٢.٦ و ٣.٢.٦ تابع اولی کسرهای ساده گویا را بدست می‌آوریم.

٥.٢.٦ - فرض می‌کنیم f یک کسر گویا باضرایب حقیقی باشد. به هر قطب غیرحقیقی a یک قطب غیرحقیقی $\bar{a}$ و به هرعنصر ساده $\dfrac{A}{(x-a)^n}$ عنصر ساده $\dfrac{\bar{A}}{(x-\bar{a})^n}$ را وابسته می‌کنیم. چنانچه $n>1$ باشد با استفاده از ١.٢.٦ داریم :

$$\int\left(\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{\bar{A}}{(x-\bar{a})^n}\right)dx=-\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}}-\frac{\bar{A}}{(n-1)(x-\bar{a})^{n-1}}+\lambda$$

و میدانیم که مجموع دو کسر گویای مزدوج یک کسر گویا با ضرایب حقیقی است.

چنانچه $n=1$ باشد، قرار میدهیم $a=\alpha+i\beta$ ، $(\beta\neq 0)$ و $A=B+iC$ بنابر ٣.٢.٦ داریم :

$$\int\left(\frac{A}{x-a}+\frac{\bar{A}}{x-\bar{a}}\right)dx$$

$$=(B+iC)\left[\frac{1}{2}\mathrm{Log}((x-\alpha)^2+\beta^2)+i\,\mathrm{Arctg}\frac{x-\alpha}{\beta}\right]$$

$$+(B-iC)\left[\frac{1}{2}\mathrm{Log}((x-\alpha)^2+\beta^2)-i\,\mathrm{Arctg}\frac{x-\alpha}{\beta}\right]+\lambda$$

$$=B\,\mathrm{Log}((x-\alpha)^2+\beta^2)-2C\,\mathrm{Arctg}\frac{x-\alpha}{\beta}+\lambda$$

بنابراین درهردوحالت به عباراتی که دارای ضرایب حقیقی هستند میرسیم.

۶.۲.۶ ـ فرض می‌کنیم f یک کسر گویا با ضرایب حقیقی باشد. می‌توان توابع اولی آنرا به شکل حقیقی بدون استفاده از شمارهای مختلط به روش زیر به دست آورد (این روش همیشه ساده‌ترین راه نیست). f را به‌صورت‌مجموع یک‌جمله‌ای‌ها و کسرهای ساده نوع اول و کسرهای ساده نوع دوم با ضرایب حقیقی تجزیه می‌کنیم. تابع اولی یک جمله‌ای‌ها و کسرهای سادهٔ نوع اول به‌آسانی به دست می‌آید. برای محاسبهٔ:

$$\int \frac{Ax+B}{[(x-p)^2+q^2]^n}dx$$

که‌درآن A , B , p و q ، $(q \neq 0)$ شمارهای‌حقیقی و n یک شمار درست بزرگتر یا برابر با یک است، با تعویض متغیر $x-p=qt$ به:

$$\int \frac{A't+B'}{(t^2+1)^n}dt$$

می‌رسیم. پس کافی است که دو انتگرال زیر را محاسبه کنیم:

$$J_n = \int \frac{tdt}{(t^2+1)^n} \qquad , \qquad I_n = \int \frac{dt}{(t^2+1)^n}$$

۱° ـ برای محاسبهٔ J_n ، با قراردادن $t^2+1=u$ بدست می‌آوریم:

$$\int \frac{2tdt}{(t^2+1)^n} = \int \frac{du}{u^n}$$

پس اگر $n>1$ باشد، داریم:

$$2J_n = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+\lambda = -\frac{1}{(n-1)(t^2+1)^{n-1}}+\lambda$$

و اگر $n=1$ باشد:

$$2J_1 = \int \frac{du}{u} = \mathrm{Log}|u|+\lambda = \mathrm{Log}(t^2+1)+\lambda$$

۲° - محاسبهٔ I_n مشکلتراست وبرای‌آن ازروش‌بازگشت روی n استفاده میکنیم . چون $\frac{1}{(t^2+1)^n}$ حاصلضرب ۱ و $\frac{1}{(t^2+1)^n}$ است، با استفاده ازروش‌جزء بجزء چنین‌داریم:

$$I_n = \frac{t}{(t^2+1)^n} - \int t(-n)(t^2+1)^{-n-1}2t\,dt$$

$$= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n\int \frac{t^2}{(t^2+1)^{n+1}}\,dt$$

$$= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n\int\left[\frac{t^2+1}{(t^2+1)^{n+1}} - \frac{1}{(t^2+1)^{n+1}}\right]dt$$

$$= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n(I_n - I_{n+1})$$

بنابراین :

$$2nI_{n+1} = \frac{1}{(t^2+1)^n} + (2n-1)I_n$$

پس می‌توان بتدریج ازمحاسبهٔ I_1 به I_n رسید . برای تابع اولی I_1 داریم :

$$I_1 = \int\frac{dt}{t^2+1} = \mathrm{Arctg}\,t + \lambda$$

۷.۲.۶ - **مثال** - برای محاسبهٔ I_2 از I_1 به روش جزء بجزء انتگرال می‌گیریم :

$$\int\frac{dt}{t^2+1} = \frac{t}{t^2+1} - \int t\frac{-2t}{(t^2+1)^2}\,dt$$

$$= \frac{t}{t^2+1} + 2\int\frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^2}\,dt$$

$$= \frac{t}{t^2+1} + 2\int\frac{dt}{t^2+1} - 2\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}$$

و ازآنجا بدست می‌آوریم :

$$2\int\frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{t^2+1} + \int\frac{dt}{t^2+1} = \frac{t}{t^2+1} + \mathrm{Arctg}\,t + \lambda$$

۶.۳ـ توابع اولی‌ای که به توابع اولی کسرهای گویا منجر میشود (I) .

فرض میکنیم f یک کسر گویا با ضرایب مختلط و $I=\int f(e^x)dx$ باشد .

داریم $I=\int \frac{f(e^x)}{e^x}e^x dx$ ، وتعویض‌متغیر $e^x=t$ میدهد:

$$I=\int \frac{f(t)}{t}dt$$

به این ترتیب به یک تابع اولی کسر گویا می‌رسیم .

۶.۴ـ توابع اولی‌ای که به توابع اولی کسرهای گویا منجر می‌شود (II) .

۶.۴.۱ ـ فرض می‌کنیم f یک تابع گویای دومتغیری (به‌عبارت دیگر خارج قسمت چندجمله‌ای های دومتغیری) با ضرایب‌مختلط و $I=\int f(\cos x\ ,\ \sin x)dx$ باشد.

نگاشت $x\to tg\frac{x}{۲}=t$ رادرنظر می گیریم . این‌نگاشت، یک نگاشت دوسویی فاصلهٔ $]-\pi\ ,\ \pi[$ روی $\mathbf{R}$ است‌وداریم $x=۲\,\mathrm{Arctg}t$. با این تعویض‌متغیر I تبدیل به:

$$J=\int f\left(\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲}\ ,\ \frac{۲t}{۱+t^۲}\right)\frac{۲}{۱+t^۲}dt$$

می‌شود . پس می‌توان J را مانند تابع اولی‌کسرهای گویا حساب کرد ، و ازآنجا I را روی $]-\pi\ ,\ \pi[$ به‌دست‌آورد . اما چون نگاشت $x\to f(\cos x\ ,\ \sin x)$ تابعی با دوره تناوب ۲π است، درنتیجه I روی $\mathbf{R}$ بدست می‌آید.

۶.۴.۲ ـ **مثال** ـ محاسبهٔ $I=\int\frac{dx}{۲+\sin x}$

برای $-\pi<x<\pi$ قرار میدهیم $tg\frac{x}{۲}=t$ داریم:

$$۲+\sin x=۲+\frac{۲t}{۱+t^۲}$$

پس :

$$I=\int \frac{1+t^2}{2(1+t^2)+2t}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt=\int \frac{dt}{t^2+t+1}=\int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

بنابر ۶.۲.۶ باتعویض متغیر $t+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}u$ خواهیم داشت :

$$I=\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,du}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{du}{1+u^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctg}\,u+\lambda$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\lambda$$

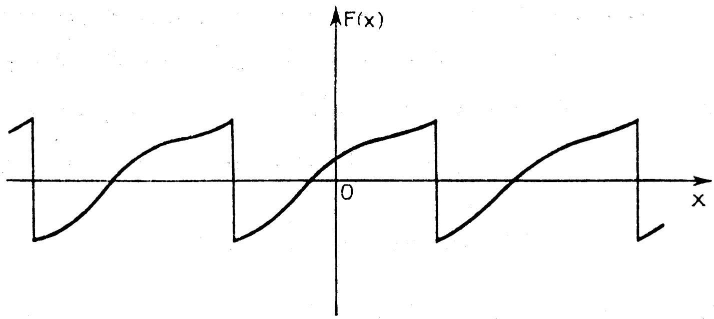
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+\lambda \quad , \quad -\pi<x<\pi$$

تابع :

$$x\to F(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}$$

برای $x\neq\pi+2k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$ معین و مانند تابع $\frac{1}{2+\sin x}$ دارای دوره تناوب 2π است . پس تابع $F(x)$ نه تنها درفاصلهٔ $]-\pi,\pi[$ بلکه درهرفاصله $]-\pi+2k\pi\,,\,\pi+2k\pi[$ مشتقی برابر $\frac{1}{2+\sin x}$ دارد . به علاوه داریم :

$$\lim_{x\to\pi\,,\,x<\pi} F(x)=\frac{\pi}{\sqrt{3}} \quad , \quad \lim_{x\to\pi\,,\,x>\pi} F(x)=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$



شکل ۳۹

تابع پیوسته $\frac{1}{2+\sin x}$ دارای تابع‌های اولی در تمام $\mathbf{R}$ می‌باشد(۴.۵.۴). بعنوان مثال فرض می‌کنیم G یک تابع اولی $\frac{1}{2+\sin x}$ باشد به قسمی که در فاصلهٔ $]-\pi\,,\,\pi[$ بر F منطبق شود. میخواهیم روش پیدا کردن G را نشان دهیم. داریم :

$$G(\pi)=\lim_{x\to\pi\,,\,x<\pi} G(x)=\lim_{x\to\pi\,,\,x<\pi} F(x)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

در فاصلهٔ $]\pi\,,\,3\pi[$ داریم $G=F+\lambda$ (λ مقداری است ثابت) و :

$$\frac{\pi}{\sqrt{3}}=\lim_{x\to\pi\,,\,x>\pi} G(x)=\lim_{x\to\pi\,,\,x>\pi} F(x)+\lambda=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\lambda$$

و از آنجا $\lambda=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. پس درفاصلهٔ $]\pi\,,\,3\pi[$ داریم $G(x)=F(x)+\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. به همین روش می‌توان G را در تمام فاصله‌های $]-\pi+2k\pi\,,\,\pi+2k\pi[$ به دست آورد.

اکنون حالت‌های ویژه‌ای را درنظر می‌گیریم که درآنها می‌توان بجای روش کلی ۱.۴.۶ روش‌های ساده‌تری بکار برد.

۲.۴.۶ - چنانچه $f(\cos x\,,\,\sin x)=g(\cos x)\sin x$ باشد که درآن g یک کسر گویا است ، با تعویض متغیر $t=\cos x$ بدست می‌آید :

$$\int g(\cos x)\sin x dx=-\int g(t)dt$$

برای اینکه چنین حالتی پیش آید ، لازم است که نگاشت $x \to f(\cos x\ ,\ \sin x)$ فرد باشد. می‌توان نشان داد که این شرط کافی نیز هست.

۴.۴.۶ - چنانچه $f(\cos x\ ,\ \sin x)=h(\sin x)\cos x$ باشد که درآن h یک کسر گویا است ، با تعویض متغیر $t=\sin x$ بدست می‌آید :

$$\int h(\sin x)\cos x dx=\int h(t)dt$$

برای اینکه چنین حالتی پیش آید ، لازم است که نگاشت $x \to f(\cos x\ ,\ \sin x)=F(x)$ درشرط $F(\pi-x)=-F(x)$ صدق کند. می‌توان نشان داد که این شرط کافی نیز می‌باشد.

۵.۴.۶ - چنانچه $f(\cos x\ ,\ \sin x)=k(tg x)$ باشد که درآن k یک کسر گویا است. با تعویض متغیر $t=tg x$ بدست می‌آید :

$$\int k(tg x)dx=\int \frac{k(tg x)}{1+tg^2 x}\ (1+tg^2 x)dx=\int \frac{k(t)}{1+t^2}dt$$

برای اینکه چنین حالتی پیش آید ، لازم است که نگاشت $x \to f(\cos x\ ,\ \sin x)=F(x)$ درشرط $F(x+\pi)=F(x)$ صدق کند. می‌توان نشان داد که این شرط کافی نیز می‌باشد.

۶.۴.۶ - **مثال-** محاسبهٔ $I=\int tg x dx$. می‌توان یکی از روش‌های ۳.۴.۶ و ۴.۴.۶ و ۵.۴.۶ را بکار برد. در اینجا ساده‌ترین آنها ۳.۴.۶ می‌باشد. قرار می‌دهیم $\cos x=t$ دراینصورت :

$$I=\int \frac{1}{\cos x}\sin x dx=-\int \frac{dt}{t}=-\mathrm{Log}\,|t|+\lambda$$

$$I=-\mathrm{Log}\,|\cos x|+\lambda$$

۵.۶- توابع اولی‌ای که به توابع اولی کسرهای گویا منجر می‌شود (III).

۱.۵.۶ - فرض می‌کنیم f یک کسر گویای دو متغیری و :

$I=\int f\left(x\ ,\ \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ باشد که درآن $d\ ,\ c\ ,\ b\ ,\ a$ شمارهای حقیقی و m یک شمار درست بزرگتر ازیک است. با تعویض متغیر $t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ (درهر

مثال باید به فاصله هایی که در آن‌ها رادیکال معین است توجه داشت) داریم :

$$x=\frac{dt^m-b}{-ct^m+a} \qquad \text{و یا} \qquad t^m=\frac{ax+b}{cx+d}$$

و از آنجا :

$$I=\int f\left(\frac{dt^m-b}{-ct^m+a}\ ,\ t\right)\frac{ad-bc}{(-ct^m+a)^2}\,mt^{m-1}dt$$

به این ترتیب به تابع اولی یک کسر گویا می‌رسیم.

۶.۶ - توابع اولی‌ای که به توابع اولی کسرهای گویا منجر می‌شود (IV).

۱.۶.۶ - فرض می کنیم f یک کسر گویای دو متغیری و :

$I=\int(x\ ,\ \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ باشد که در آن a , b , c شمارهای حقیقی و $a\neq 0$ است. دراینجا به فاصله هایی که درآنها عبارت زیررادیکال مثبت‌است اکتفا می کنیم.

همواره می‌توان با انتقال مناسبی روی متغیر x به‌حالت $b=0$ رسید. دراینصورت چنانچه $c=0$ باشد مطلب روشن است. پس فرض می کنیم $c\neq 0$ باشد. دراین حالت وجود دو نا برابری $a<0$ و $c<0$ باهم ممکن نیست (زیرا خواهیم داشت $ax^2+c<0$). با یک همسانی روی متغیر x برحسب علامت‌های a و c رادیکال به یکی از صورت‌های $\sqrt{x^2+1}$ و $\sqrt{x^2-1}$ و $\sqrt{1-x^2}$ درمی‌آید، که با تعویض متغیرهای $x=\operatorname{sh}\varphi$ و $x=\operatorname{ch}\Psi$ و $x=\cos\theta$ به ترتیب خواهیم داشت :

$$\int f(x\ ,\ \sqrt{x^2+1})dx=\int f(\operatorname{sh}\varphi\ ,\ \operatorname{ch}\varphi)\operatorname{ch}\varphi d\varphi$$

$$\int f(x\ ,\ \sqrt{x^2-1})dx=\int f(\operatorname{ch}\Psi\ ,\ \pm\operatorname{sh}\Psi)\operatorname{sh}\Psi d\Psi$$

$$\int f(x\ ,\ \sqrt{1-x^2})dx=-\int f(\cos\theta\ ,\ \pm\sin\theta)\sin\theta d\theta$$

(در محاسبات باید به علامت‌های مثبت و منفی بالا توجه کرد)، که به هرحال به توابع اولی‌ای که در شماره‌های ۳.۶ و ۴.۶ بررسی کردیم، می‌رسیم.

فصل هفتم

دستور تیلر

هنگامی که یک چند جمله‌ای P از درجهٔ n داده شده باشد، شناخت P و n مشتق اول آن در a محاسبهٔ P(b) را (به کمک فرمول ۵.۱۳.۴ کتاب جبر) ممکن می‌سازد. هرگاه P چند جمله‌ای نبوده بلکه یک تابع دلخواه باشد، آشکار است که این مطلب درست نیست. باوجود این، در این حالت فرمول مشابهی (بایک جمله بیشتر) در دست داریم که فرمول تیلر نامیده می‌شود. در نظریهٔ سری‌های تام (کتاب دوم) و در بررسی «موضعی» توابع (پایان این فصل و فصل هشتم) ارزیابی‌های گوناگونی از این جمله خواهیم دید.

۱.۷ - اثبات دستور تیلر

۱.۱.۷ - قضیه - فرض می‌کنیم تابع مختلط f در یک فاصله بسته، به انجام‌های a و b، دارای مشتقهای پیوسته تامرتبه n باشد. دراینصورت داریم :

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\int_a^b\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)dt \tag{1}$$

که دستور تیلر نامیده می‌شود.

اثبات - برای $n=1$ دستور (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$f(b)=f(a)+\int_a^b f'(t)dt$$

و درستی آن از ۶.۵.۴ نتیجه می‌شود. فرض می‌کنیم دستور (۱) برقرار و تابع f در فاصله بسته، به انجام‌های a و b دارای مشتقهای پیوسته تا مرتبه $n+1$ باشد. باستفاده از انتگرال گیری جزء بجزء داریم :

$$\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt$$

$$=\left[-\frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\right]_a^b+\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

$$=\frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)+\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

اکنون اگر طرف دوم برابری بالارا جایگزین $\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt$ در دستور(۱) کنیم ، به دستوری از نوع (۱) می‌رسیم که در آن $n+1$ جایگزین n شده است . به این ترتیب قضیه بااستفاده از روش بازگشت برروی n ثابت می‌شود.

۲.۱.۷ - نتیجه ـ فرض می‌کنیم تابع مختلط f در یک فاصلهٔ بسته،به انجامهای a و b،دارای مشتقهای پیوسته تا مرتبه n و $|f^{(n)}|$ دراین فاصله دارای یک کران بالای M باشد. دراین صورت داریم :

$$\left|f(b)-\left[f(a)+\frac{b-a}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)\right]\right|$$

$$\leqslant M\frac{|b-a|^n}{n!}$$

زیرا اگر $a \leqslant b$ باشد داریم :

$$\left|\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt\right| \leqslant \int_a^b \left|\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\right| dt$$

$$\leqslant \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} M dt$$

$$= \frac{M}{(n-1)!}\left[-\frac{(b-t)^n}{n}\right]_a^b = M\frac{(b-a)^n}{n!}$$

و اگر $b \leqslant a$ باشد داریم :

$$\left|\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt\right| \leqslant \int_b^a \left|\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\right| dt$$

$$\leqslant \int_b^a \frac{(t-b)^{n-1}}{(n-1)!} M dt$$

$$= \frac{M}{(n-1)!}\left[\frac{(t-b)^n}{n}\right]_b^a = M\frac{(a-b)^n}{n!}$$

که در هردو حالت نتیجه بالا از فرمول (۱) بدست می‌آید.

۳.۱.۷ - نتیجه - فرض می‌کنیم تابع مختلط f در یك فاصله I دارای مشتقهای پیوسته تامرتبه n و x_0 یك نقطهٔ درونی ازفاصلهٔ I باشد. وقتیکه h به سمت صفر می‌گراید، داریم (دستور تیلر ـ یانگ) :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1!}f'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + h^n o(1)$$

زیرا با قرار دادن x_0 و x_0+h به ترتیب بجای a و b در دستور (۱) بدست می‌آوریم :

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1!}f'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\cdots+\frac{h^{(n)}}{n!}f^{(n)}(x_0)+g(h)$$

که در آن :

$$g(h)=\int_{x_0}^{x_0+h}\frac{(x_0+h-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)dt-\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

$$=\int_{x_0}^{x_0+h}\frac{(x_0+h-t)^{n-1}}{(n-1)!}[f^{(n)}(t)-f^{(n)}(x_0)]dt$$

فرض می‌کنیم $\varepsilon(h)$ کران بالای $|f^{(n)}(t)-f^{(n)}(x_0)|$ در فاصلهٔ بسته ،به انجامهای x_0 و x_0+h باشد. چون $f^{(n)}$ تابعی است پیوسته وقتیکه h به سمت صفر میگراید ، $\varepsilon(h)$ به سمت صفر میل می‌کند. از طرف دیگر برای $h \geqslant 0$ داریم :

$$|g(h)|\leqslant\int_{x_0}^{x_0+h}\frac{(x_0+h-t)^{n-1}}{(n-1)!}\varepsilon(h)dt=\frac{h^n}{n!}\varepsilon(h)$$

و برای $h \leqslant 0$ داریم :

$$g(h)|\leqslant\int_{x_0+h}^{x_0}\frac{(t-x_0-h)^{n-1}}{(n-1)!}\varepsilon(h)dt=(-1)^n\frac{h^n}{n!}\varepsilon(h)$$

بنابراین در هردو حالت بالا هنگامیکه h به سمت صفر میگراید،داریم $g(h)=h^n o(1)$.

۴.۱.۷ ـ با قرار دادن 0 بجای a و x بجای b در ۱.۱.۷ دستور زیر بدست می‌آید :

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots$$

$$+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)dt$$

که **دستور ماکلرن** نامیده میشود.

این دستور هنگامی درست است که f در فاصلهٔ بسته [x , ۰] دارای مشتقهای پیوسته تا مرتبه n باشد. چنانچه $f^{(n)}$ در این فاصله دارای کران بالای ثابت M باشد ، بنابر ۲.۱.۷ داریم :

$$\left|f(x)-\left[f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)\right]\right| \leqslant M\frac{|x|^n}{n!}$$

۵.۱.۷ - فرض می‌کنیم تابع مختلط f در فاصله‌ای که ۰ نقطهٔ درونی آن است دارای مشتقهای پیوسته تا مرتبه n باشد. دراینصورت وقتی که x به سمت ۰ میل می‌کند داریم :

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+x^n o(1)$$

(این یک حالت ویژهٔ ۳.۱.۷ است که در آن $x_0=0$ می‌باشد و x جایگزین h شده است).

۶.۱.۷ - **مثال** - برای $f(x)=\sin x$ دستور ۴.۱.۷ را با $n=9$ بکارمیبریم.
مشتقهای پی‌درپی $\sin x$ عبارتند از :

$$\cos x\,,\ -\sin x\,,\ -\cos x\,,\ \sin x\,,\ \cos x\,,\ -\sin x\,,\ -\cos x\,,\ \sin x\,,\ \cos x\,,\ \ldots$$

و مقدارآنها برای $x=0$ عبارتست از :

$$1\,,\ 0\,,\ -1\,,\ 0\,,\ 1\,,\ 0\,,\ -1\,,\ 0\,,\ 1\,,\ \ldots$$

پس برای تمام مقادیر x قدرمطلق مشتقهای پی درپی $\sin x$ دارای کران بالای ۱ می‌باشند.
بنابراین داریم :

$$\left|\sin x-\left[x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}\right]\right|\leqslant\frac{|x|^9}{362880}$$

از این دستور می‌توان $\sin x$ را وقتی که $|x|\leqslant 1$ است با تقریب مناسبی بدست آورد.
برای بدست‌آوردن مقدار $\sin x$ با تقریب بهتر می‌توان دستور ماکلرن را با درجه‌های بالاتر بکار برد. این مطلب بادقت بیشتری در بخش سری‌های تام تعمیم داده خواهد شد.

۷ . ۲ ـ بررسی بخش اصلی یک بینهایت کوچک

فرض می کنیم $f(x)$ هنگامی که x به سمت صفر می گراید یک بینهایت کوچک و f در فاصله کوچکی که $\circ$ یک نقطهٔ درونی آنست دارای مشتقهای پی‌درپی تا مرتبه بینهایت باشد. دراینصورت $f(\circ)=\circ$ است . فرض می کنیم که همهٔ شمارهای $f'(\circ)$, $f''(\circ)$, $f'''(\circ)$, ... صفر نباشند. اگر n کوچکترین شمار درستی باشد که $f^{(n)}(\circ) \neq \circ$ شود (اغلب $n=۱$ است) بنابر ۷.۱.۵ داریم :

$$f(x)=\frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\circ)[۱+o(۱)] \quad , \quad x \to \circ \quad \text{وقتیکه}$$

پس :

$$f(x) \sim \frac{f^{(n)}(\circ)}{n!} x^n \quad , \quad x \to \circ \quad \text{وقتیکه} \qquad (۱)$$

همان طور که در ۳.۷.۲ اشاره شد اغلب بینهایت کوچک‌ها دارای بخش اصلی‌ای میباشند که بااستفاده از فرمول (۱) بدست می‌آید . اگر $f'(x) \neq \circ$ باشد (که در بیشتر حالات چنین است) $f(x)$ یک بینهایت کوچک مرتبه ۱ است. چنانچه $f'(x)=\circ$ و $f''(x) \neq \circ$ باشد ، $f(x)$ یک بینهایت کوچک مرتبه ۲ است. به همین ترتیب مرتبه های بالاتر تعریف می‌شوند.

۷ . ۳ـ بررسی یک خم در همسایگی یک نقطه

۷.۳.۱ ـ فرض می کنیم تابع حقیقی f در فاصلهٔ باز I معین و دارای مشتق و $x_\circ$ یک نقطهٔ I باشد . چنانچه نقطهٔ $M_\circ=(x_\circ , f(x_\circ))$ یک نقطهٔ خم Γ (نمودار تابع $(y=f(x)$ و $M_\circ T$ خط مماس برخم Γ در نقطه $x_\circ$ باشد (شیب خط مماس برابر $f'(x_\circ)$ است) ، می‌خواهیم وضع قرارگرفتن خم Γ را نسبت به خط مماس $M_\circ T$ بررسی کنیم .

فرض میکنیم که f درفاصلهٔ I دارای مشتقهای پی‌درپی تا مرتبه‌بینهایت باشد وهمهٔ شمارهای $f''(x_\circ)$, $f'''(x_\circ)$, ... صفر نباشند. اگر n کوچکترین‌شمار درست بزرگتر یابرابر با ۲ باشد به‌قسمی که $f^{(n)}(x_\circ) \neq \circ$ (اغلب $n=۲$ است)،بنابر ۷.۱.۳ داریم :

وقتیکه $h \to \circ$ ، $f(x_\circ+h)=f(x_\circ)+hf'(x_\circ)+\dfrac{h^n}{n!}[f^{(n)}(x_\circ)+o(1)]$

چون شیب خط $M_\circ T$ برابر با $f'(x_\circ)$ است،عرض نقطهٔ واقع در روی خط $M_\circ T$ که دارای طول $x_\circ+h$ می‌باشد برابر است با :

$$g(x_\circ+h)=f(x_\circ)+hf'(x_\circ)$$

پس داریم :

وقتیکه $h \to \circ$ ، $f(x_\circ+h)-g(x_\circ+h)=\dfrac{h^n}{n!}[f^{(n)}(x_\circ)+o(1)]$ (۱)

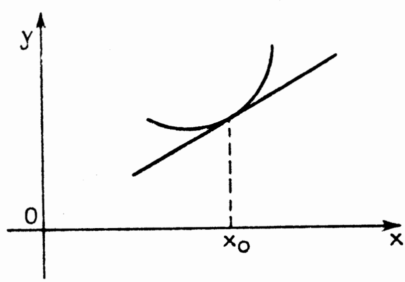
چون $|f^{(n)}(x_\circ)|>\circ$ است شمار $\eta>\circ$ وجود دارد بطوریکه :

$$|h|\leqslant\eta \Longrightarrow |o(1)|\leqslant\frac{1}{2}|f^{(n)}(x_\circ)|$$

پس وقتی‌که $|h|\leqslant\eta$ است نتیجه می‌شود که :

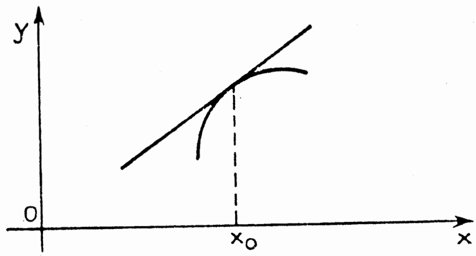
علامت $f^{(n)}(x_\circ)+o(1)$ همان علامت $f^{(n)}(x_\circ)$ است ، و علامت $f(x_\circ+h)-g(x_\circ+h)$ با علامت $h^nf^{(n)}(x_\circ)$ یکی می‌باشد. اکنون چهار حالت زیر را مشخص میکنیم :

۲.۳.۷ - **حالت الف** - n زوج و $f^{(n)}(x_\circ)>\circ$: دراین صورت‌هنگامی‌که $|h|$ باندازهٔ‌کافی کوچک‌باشد داریم $f(x_\circ+h)\geqslant g(x_\circ+h)$.



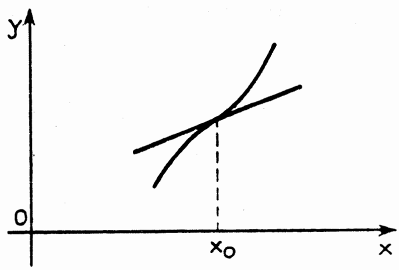
شکل ۴۰

۲.۳.۷ - **حالت ب** - n زوج و $f^{(n)}(x_\circ)<\circ$: دراینصورت هنگامیکه $|h|$ باندازهٔ‌کافی کوچک است داریم $f(x_\circ+h)\leqslant g(x_\circ+h)$.



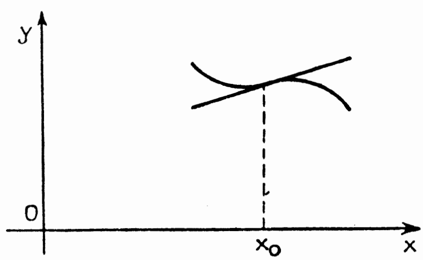
شکل ۴۱

۴.۳.۷ - **حالت پ** - n فردو $f^{(n)}(x_\circ) > \circ$: دراینصورت وقتیکه $|h|$ باندازه کافی کوچک باشد علامت $f(x_\circ+h)-g(x_\circ+h)$ همان علامت h است.



شکل ۴۲

۵.۳.۷ - **حالت ت** - n فرد و $f^{(n)}(x_\circ)<\circ$: دراینصورت هنگامیکه $|h|$ باندازه کافی کوچک است علامت $f(x_\circ+h)-g(x_\circ+h)$ مخالف باعلامت h است.



شکل ۴۳

۶.۳.۷ - وقتیکه n زوج است دیده می‌شود که خط $M_\circ T$ در یک طرف خم Γ واقع میشود و وقتیکه n فرد است خم Γ از خط $M_\circ T$ میگذرد. هنگامیکه خم Γ از خط مماس درنقطه $M_\circ$ میگذرد نقطهٔ $M_\circ$ را **نقطهٔ عطف** می گویند و این حالت‌استثنایی

است چون معمولاً $f''(x_0) \neq 0$ و در نتیجه $n=2$ میباشد. اگر $f''(x_0)=0$ و $f'''(x_0) \neq 0$ باشد نقطه x_0 نقطه‌عطف خم Γ است ولی اگر $f''(x_0)=0$ و $f'''(x_0)=0$ باشد باید $f^{(4)}(x_0)$ را بررسی کرد ...

۷.۳.۷ - **تبصره** - دستور (۱) شمارهٔ ۱.۳.۷ نشان می‌دهد که وقتی h به سمت صفر می‌گراید داریم:

$$f(x_0+h)-g(x_0+h) \sim \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

پس هنگامیکه h به سمت صفر میگراید $\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$ بخش اصلی بینهایت کوچک $f(x_0+h)-g(x_0+h)$ می‌باشد و در نتیجه $f(x_0+h)-g(x_0+h)$ از مرتبه n است. پس هرقدرکه n بزرگتر باشد خم به خط مماس نزدیکتر خواهد شد، ولی وضع خم نسبت به خط مماس تنها بستگی به زوجی و فردی n و علامت $f^{(n)}(x_0)$ دارد. باوجود اینکه وضع خم و خط مماس در حالتهای $n=2$ و $n=4$ یکی است ولی نزدیکی خم به خط مماس (سایش خم وخط مماس) دراین دو حالت بایکدیگر تفاوت اساسی دارند.

فصل هشتم

بسط محدود

می‌دانیم هنگامی که x به‌سمت صفر می‌گراید $\cos x \sim 1$. تحلیل مشروح‌تر $\cos x$ مبتنی به‌بررسی $\cos - 1$ است وقتی که $x \to 0$، که نشان‌می‌دهد $\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$. تحلیل بازهم مشروح‌تر $\cos x$ مبتنی‌به‌بررسی $\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$ است وقتی که $x \to 0$، و می‌توان نشان داد که

$$\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 \sim \frac{1}{24}x^4 \quad , \quad x \to 0$$

این فصل نتیجه تعمیم این اندیشه است. بسط‌های محدود به ما امکان می‌دهند که اغلب صورت‌های نامعین را که در عمل برخورد می‌کنیم معین نماییم.

۸ . ۱ ـ تعریف

۸ . ۱ . ۱ ـ فاصلهٔ I از $\mathbf{R}$ را که 0 یک‌نقطهٔ درونی آن است درنظر میگیریم، و فرض می کنیم تابع حقیقی و یامختلط f در I معین و شمار درست n بزرگتر یا برابر با صفر باشد. اگر شمارهای a_0 , a_1 , ... , a_n وجود داشته باشند به طوریکه وقتی x به سمت‌صفر میگراید داشته باشیم :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n o(1) \qquad (1)$$

برابری (۱) را یک **بسط محدود مرتبهٔ** n تابع $f(x)$ درهمسایگی نقطه 0 می‌گویند.

تابع $f(x)$ و شمار درست n که بزرگتریا برابرباصفراست دادشده‌اند. میخواهیم به‌بینیم آیا تابع f در نقطهٔ 0 دارای بسط محدود مرتبهٔ n است ؟ ودرصورت داشتن بسط آیا این‌بسط یکتاست ؟ درشمارهٔ ۸ . ۱ . ۳ خواهیم دید که اگر بسط (۱) وجود داشته باشد یکتاست. اما برای وجود بسط بالا شرایطی لازم است که در زیر بیان می‌شود :

۸ . ۱ . ۲ ـ **قضیه ـ اگر $f^{(n)}$ در فاصلهٔ I معین و پیوسته باشد، تابع f در همسایگی 0 دارای بسط محدود مرتبهٔ n زیر است :**

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+x^n o(1)\ ,\qquad (x\to 0)$$

این مطلب در ۵.۱.۷ ثابت شده است.

۳.۱.۸ - قضیه - اگر f در همسایگی ۰ دارای بسط محدود مرتبهٔ n باشد، این بسط یکتاست.

اثبات - چنانچه:

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+x^n o(1)\ ,\qquad (x\to 0)$$

$$f(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n+x^n o(1)\ ,\qquad (x\to 0)$$

دوبسط محدود $f(x)$ درهمسایگی ۰ باشند، باید ثابت کنیم که $a_0=b_0$, $a_1=b_1$, $\ldots$, $a_n=b_n$ است.

فرض می‌کنیم برخی‌از این برابری‌ها برقرار نباشند و k کوچکترین شمار درستی‌باشد به طوری که داشته باشیم $a_k\neq b_k$. پس هنگامی که $x\to 0$ داریم:

$$0=(a_k-b_k)x^k+(a_{k+1}-b_{k+1})x^{k+1}+\cdots+(a_n-b_n)x^n+x^n o(1)$$

و از آنجا برای $x\neq 0$ بدست می‌آوریم:

$$0=a_k-b_k+(a_{k+1}-b_{k+1})x+\cdots+(a_n-b_n)x^{n-k}+x^{n-k}o(1)$$

هنگامی که x با مقادیر مخالف با صفر به سمت صفر میل می‌کند، از برابری بالا نتیجه می‌شود $a_k-b_k=0$ و این مخالف با فرض بالاست. پس قضیه برقرار است.

۴.۱.۸ - فرض می‌کنیم تابع f در همسایگی ۰ دارای بسط محدود مرتبهٔ n به صورت (۱) باشد. اگر f را زوج بگیریم، هنگامی که $x\to 0$ از بستگی (۱) نتیجه می‌شود:

$$f(x)=f(-x)=a_0-a_1x+a_2x^2-a_3x^3+\cdots+(-1)^n x^n+x^n o(1)$$

و بااستفاده از ۳.۱.۸ داریم:

$$a_1=0\ ,\ a_3=0\ ,\ a_5=0\ ,\ \ldots$$

به همین ترتیب دیده می‌شود که اگر f فرد باشد داریم :

$$a_0=0 \;,\; a_2=0 \;,\; a_4=0 \;,\; \dots$$

۸.۱.۵ - فرض می کنیم تابع f درهمسایگی نقطهٔ ۰ دارای بسط محدود (۱) باشد. داریم :

$$a_0=\lim_{x\to 0} f(x)$$

به ویژه بااستفاده از ۲.۵.۴ داریم $f(0)=a_0$. بنابراین برای $x \neq 0$ و $n \geqslant 1$ خواهیم داشت :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1}+x^{n-1}o(1)$$

پس $f'(0)$ معین و برابر با a_1 است.

۸.۱.۶ - قضیه - فرض می کنیم f درهمسایگی ۰ دارای بسط محدود مرتبهٔ n زیر باشد :

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+x^no(1) \quad , \quad (x\to 0)$$

دراینصورت برای هرشمار درست p کوچکتر از n تابع f در همسایگی ۰ دارای بسط محدود مرتبهٔ p زیر است :

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_px^p+x^po(1) \quad , \quad (x\to 0)$$

اثبات - هنگامیکه x به سمت ۰ می گراید داریم :

$$\begin{aligned}f(x)&=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+x^no(1)\\&=a_0+a_1+\cdots+a_px^p\\&\quad+x^p(a_{p+1}x+a_{p+2}x^2+\cdots+a_nx^{n-p}+x^{n-p}o(1))\\&=a_0+a_1x+\cdots+a_px^p+x^po(1)\end{aligned}$$

۸.۱.۷ - به وارون شناسایی بسط محدود مرتبهٔ p برای بدست آوردن بسط محدود مرتبهٔ n $(n>p)$ کافی نیست . هراندازه‌که n بزرگتر باشد ، بررسی تابع f از روی بسط محدود مرتبهٔ n آن دقیقتر صورت می گیرد.

۸.۱.۸ - بسط (۱) رادر نظرمیگیریم وفرض می کنیم a_0 , a_1 , ... , a_n همه باهم صفر نباشند. اگر k کوچکترین‌شمار درستی باشد به‌طوری‌که داشته باشیم $a_k \neq 0$ هنگامیکه x به سمت صفر میل می کند داریم :

$$f(x)=a_kx^k\left(1+\frac{a_{k+1}}{a_k}x+\cdots+\frac{a_n}{a_k}x^{n-k}+x^{n-k}o(1)\right)$$

پس :

$$f(x)\sim a_kx^k \quad , \quad (x\to 0)$$

چنانچه $k\geqslant 1$ باشد هنگامی‌که x به‌سمت‌صفرمیل می‌کند بخش اصلی بینهایت‌کوچک $f(x)$ برابر با a_kx^k است (۵.۷.۲). بنابراین یک بسط محدود $f(x)$ دقیقتر از بخش اصلی $f(x)$ می‌باشد و اطلاعات بیشتری از $f(x)$ به دست میدهد.

۸ . ۲ـ بسطهای محدود ساده

۸ . ۲ . ۱ ـ مشتقهای پی‌درپی a^x عبارتند از :

$$a^x\operatorname{Log}a \;,\; a^x(\operatorname{Log}a)^2 \;,\; a^x(\operatorname{Log}a)^3 \;,\; \ldots$$

پس بنابر ۸ . ۱ . ۲ خواهیم داشت :

$$a^x=1+\frac{x\operatorname{Log}a}{1!}+\frac{x^2(\operatorname{Log}a)^2}{2!}+\cdots$$

$$+\frac{x^n(\operatorname{Log}a)^n}{n!}+x^no(1) \quad , \quad (x\to 0)$$

۸ . ۲ . ۲ ـ به‌ویژه داریم :

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+x^no(1) \quad , \quad (x\to 0)$$

۸ . ۲ . ۳ ـ مشتقهای پی‌درپی $\operatorname{ch}x$ عبارتند از :

$$\operatorname{sh}x \;,\; \operatorname{ch}x \;,\; \operatorname{sh}x \;,\; \operatorname{ch}x \;,\; \ldots$$

پس بنابر ۸ . ۱ . ۲ (که درآنجا $2n+1$ را بجای n قرارداده‌ایم) داریم :

$$\operatorname{ch}x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n+1}o(1) \quad , \quad (x\to 0)$$

۸ . ۲ . ۴ ـ مشتقهای پی‌درپی $\operatorname{sh}x$ عبارتند از :

$$\operatorname{ch}x \;,\; \operatorname{sh}x \;,\; \operatorname{ch}x \;,\; \operatorname{sh}x \;,\; \ldots$$

پس بنابر ۸ . ۱ . ۲ (که درآن $2n+2$ را بجای n قرارداده‌ایم) داریم :

$$\operatorname{sh}x=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+2}o(1)\quad,\quad(x\to 0)$$

۵.۲.۸ ـ مشتقهای پی‌درپی $\cos x$ عبارتند از :

$$-\sin x\ ,\ -\cos x\ ,\ \sin x\ ,\ \cos x\ ,\ \ldots$$

پس بنابر ۲.۱.۸ (که درآنجا $2n+1$ را بجای n قرار داده‌ایم) خواهیم داشت :

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n+1}o(1)\quad,\quad(x\to 0)$$

۶.۲.۸ ـ مشتقهای پی‌درپی $\sin x$ عبارتند از :

$$\cos x\ ,\ -\sin x\ ,\ -\cos x\ ,\ \sin x\ ,\ \ldots$$

پس بنابر ۲.۱.۸ و با قرار دادن $2n+2$ به جای n، خواهیم داشت :

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$
$$+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+2}o(1)\quad,\quad(x\to 0)$$

۷.۲.۸ ـ فرض میکنیم α یک شمار حقیقی باشد . تابع $(1+x)^\alpha$ برای مقادیر $x>-1$ معین است و مشتقهای پی‌درپی آن عبارتند از :

$$\alpha(1+x)^{\alpha-1}\ ,\ \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}\ ,\ \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}\ ,\ \ldots$$

پس بنابر ۲.۱.۸ داریم :

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-p+1)}{p!}x^p+x^po(1)$$

۸.۲.۸ ـ اگر در ۷.۲.۸ قرار دهیم $\alpha=\frac{1}{2}$ خواهیم داشت :

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-p+1)}{p!}=\frac{1.(-1).(-3).(-5)\dots(-2p+3)}{2^p p!}$$
$$=(-1)^{p-1}\frac{1.3.5\dots(2p-3)}{2.4.6\dots(2p)}$$

پس :

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\cdots$$
$$+(-1)^{p-1}\frac{1.3.5\dots(2p-3)}{2.4.6\dots(2p)}x^p+x^p o(1)\quad,\quad(x\to 0)$$

۹.۲.۸ - چنانچه در ۷.۲.۸ قرار دهیم $\alpha=-\frac{1}{2}$ خواهیم داشت :

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-p+1)}{p!}=\frac{(-1)(-3)(-5)\dots(-2p+1)}{2^p p!}$$
$$=(-1)^p\frac{1.3.5\dots(2p-1)}{2.4.6\dots(2p)}$$

پس :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\cdots$$
$$+(-1)^p\frac{1.3.5\dots(2p-1)}{2.4.6\dots(2p)}x^p+x^p o(1)\quad,\quad(x\to 0)$$

۱۰.۲.۸ - چنانچه در ۷.۲.۸ قرار دهیم $\alpha=-1$ خواهیم داشت :

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^p x^p+x^p o(1)\quad,\quad(x\to 0)$$

۸ . ۳ ـ عملیات روی بسطهای محدود

۱.۳.۸ - **جمع** - فرض می‌کنیم توابع f و g در همسایگی ۰ دارای بسطهای محدود مرتبهٔ n زیر باشند :

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+x^n o(1)\quad,\quad(x\to 0)$$

$$g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+x^n o(1) \quad , \quad (x\to 0)$$

دراین‌صورت باجمع کردن‌دو بستگی بالا بسط محدود مرتبه n تابع $f+g$ در همسایگی ۰ به دست می‌آید :

$$f(x)+g(x)=a_0+b_0+(a_1+b_1)x+\cdots$$
$$+(a_n+b_n)x^n+x^n o(1) \quad , \quad (x\to 0)$$

۲.۳.۸ - **ضرب** - فرض می‌کنیم :

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+x^n o(1) \quad , \quad (x\to 0)$$

$$g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n+x^n o(1) \quad , \quad (x\to 0)$$

بسط‌های محدود مرتبه n ام توابع f و g در همسایگی ۰ باشند. آشکار است که داریم :

$$x^n o(1)(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)=x^n o(1) \quad , \quad (x\to 0)$$

$$x^n o(1)(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n)=x^n o(1) \quad , \quad (x\to 0)$$

$$x^n o(1)x^n o(1)=x^n o(1) \quad , \quad (x\to 0)$$

اگر عبارت $c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{2n}x^{2n}$ برابر با حاصلضرب $(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n)$ باشد خواهیم داشت :

$$c_{n+1}x^{n+1}+c_{n+2}x^{n+2}+\cdots+c_{2n}x^{2n}=x^n o(1) \quad , \quad (x\to 0)$$

پس :

$$f(x)g(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+x^n o(1) \quad , \quad (x\to 0)$$

به گفته دیگر $f(x)g(x)$ دارای بسط محدود مرتبهٔ n در همسایگی ۰ می‌باشد که از حاصلضرب $(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n)$ بدست می‌آید ، که در آن از جمله‌های دارای مرتبهٔ بزرگتر از n چشم پوشی شده است.

۳.۳.۸- **مثال: بسط محدودمرتبهٔ‌دوم $\sqrt{1+x}\cos x$ در همسایگی ۰** - بااستفاده از ۸.۲.۸ و ۵.۲.۸ چنین داریم :

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+x^2 o(1) \quad , \quad (x\to 0)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+x^2 o(1) \quad , \quad (x\to 0)$$

پس بنابر ۲.۳.۸ خواهیم داشت :

$$\sqrt{1+x}\cos x=1+\frac{1}{2}x-\frac{5}{8}x^2+x^2 o(1) \quad , \quad (x\to 0)$$

۴.۳.۸ - **تقسیم** - فرض می‌کنیم :

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+x^n o(1) \quad , \quad (x\to 0)$$

$$g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n+x^n o(1) \quad , \quad (x\to 0)$$

بسط‌های محدود مرتبهٔ n توابع f و g در همسایگی 0 باشند. برای اینکه $\frac{f}{g}$ دارای بسط محدودی در همسایگی 0 باشد لازم است که $\frac{f}{g}$، هنگامیکه $x\to 0$، دارای‌حد با پایانی باشد (۰.۱.۸). اگر $b_0\neq 0$ باشد این شرط برقرار است. دراینجا ما نیز اینحالت را درنظر می‌گیریم و قرار میدهیم :

$$A(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

$$B(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$$

چون $b_0\neq 0$ است، می‌توان‌خارج قسمت $A(x)$ را بر $B(x)$ برحسب توانهای افزایشی تا مرتبهٔ n به دست آورد (۲.۱۴.۵ کتاب جبر)، و نوشت :

$$A(x)=B(x)Q(x)+x^{n+1}R(x)$$

که درآن $\deg Q\leqslant n$ و R یک چند جمله‌ای میباشد. برابری بالا چنین نوشته میشود :

$$f(x)-x^n o(1)=(g(x)-x^n o(1))Q(x)+x^{n+1}R(x) \quad , \quad (x\to 0)$$

و یا :

$$f(x)=g(x)Q(x)+x^n[o(1)-o(1)Q(x)+xR(x)] \quad , \quad (x\to 0)$$

و یا :

$$\frac{f(x)}{g(x)}=Q(x)+x^n\frac{o(1)}{g(x)} \quad , \quad (x\to 0)$$

که با فرض $Q(x)=q_0+q_1x+\cdots+q_nx^n$ داریم :

$$\frac{f(x)}{g(x)}=q_0+q_1x+\cdots+q_nx^n+x^no(1) \quad , \quad (x\to 0)$$

به طور خلاصه $\frac{f(x)}{g(x)}$ دارای بسط محدود مرتبه n در همسایگی ۰ است که از تقسیم $A(x)$ بر $B(x)$، برحسب توانهای افزایشی تا مرتبهٔ n، بدست می‌آید.

۸.۳.۰ ـ مثال : بسط محدود tgx در همسایگی ۰ تا مرتبهٔ شش ـ چون tgx تابعی فرد است، بنابر ۸.۱.۴ کافی است بسط tgx را تا مرتبهٔ ۵ محاسبه کنیم؛ داریم :

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+x^5o(1) \quad , \quad (x\to 0)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^5o(1) \quad , \quad (x\to 0)$$

$$\begin{array}{l|l}
x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120} & 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24} \\ \hline
x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{24} & x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5 \\ \hline
\quad \frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30} & \\
\quad \frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{6} & \\ \hline
\qquad\quad \frac{2x^5}{15} &
\end{array}$$

(در تقسیم بالا برای اختصار، در مانده‌های جزیی تقسیم از نوشتن جمله‌هایی که دارای درجهٔ بزرگتر از ۵ می‌باشند خودداری شده است). پس :

$$tg x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^6 o(1) \quad , \quad x \to 0)$$

۶.۳.۸ - **تابع مرکب** - فرض می‌کنیم :

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n o(1) \quad , \quad (x \to 0)$$

بسط محدود مرتبهٔ n تابع f در همسایگی ۰ باشد و تابع حقیقی g در فاصله‌ای که ۰ را دربر دارد معین و هنگامیکه x به سمت ۰ میگراید ، g به سمت صفر میل کند . دراین صورت $f \circ g$ در فاصله‌ای که صفر را در بردارد معین است. چنانچه :

$$(2) \qquad g(x) = b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + x^n o(1) \quad , \quad (x \to 0)$$

بسط محدود مرتبهٔ n تابع g درهمسایگی ۰ باشد [چون داریم $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ جملهٔ ثابت بسط بالا برابر با صفر است] ، می‌خواهیم بسط محدود مرتبهٔ n تابع $f \circ g$ را در همسایگی ۰ بدست آوریم. بااستفاده از (۱) و (۲) و ۲.۵.۹ داریم :

$$f(g(x)) = a_0 + a_1 g(x) + \cdots + a_n g(x)^n + g(x)^n o(1) \quad , \quad (x \to 0)$$

اما از برابری (۲) نتیجه می‌شود :

$$g(x) = x(b_1 + b_2 x + \cdots + b_n x^{n-1} + x^{n-1} o(1)) = x O(1)$$

پس هنگامیکه x به سمت ۰ می‌گراید داریم $g(x)^n o(1) = x^n O(1)^n o(1) = x^n o(1)$ بنابراین کافی است که بسط محدود مرتبهٔ n تابع $a_0 + a_1 g(x) + \cdots + a_n g(x)^n$ رادرهمسایگی ۰ بنویسیم (این بسط را باتوجه به‌شماره‌های ۱.۳.۸ و ۲.۳.۸ می‌شناسیم) .

۷.۳.۸ - **مثال : بسط محدود $\sqrt{\cos x}$ درهمسایگی $x = 0$ تا مرتبهٔ دو-** هنگامیکه x به اندازهٔ کافی به ۰ نزدیک است $\cos x$ بزرگتر از صفر میباشد . بنابراین $\sqrt{\cos x}$ معین و دارای مشتقهای پی‌درپی تمام مراتب است به طوریکه میتوان بسط‌محدود $\sqrt{\cos x}$ را تا هرمرتبهٔ دلخواه در همسایگی ۰ حساب کرد. چون داریم :

$$(3) \qquad \sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + y^2 o(1) \quad , \quad (y \to 0)$$

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + x^2 o(1) \quad , \quad (x \to 0)$$

پس بنابر ۸.۳.۲ :

$$(\cos x-1)^2=x^2 o(1) \qquad , \quad (x\to 0)$$

با توجه به ۸.۳.۱ و ۸.۳.۶ :

$$\sqrt{\cos x}=1-\frac{x^2}{4}+x^2 o(1) \qquad , \quad (x\to 0)$$

مثال بالا دارای یک ویژگی است و آن اینکه نه تنها داریم $\cos x-1=xO(1)$ بلکه هنگامیکه x به سمت ۰ میگراید برابری $\cos x-1=x^2O(1)$ نیز برقرار است. پس اگر قرار دهیم $y=\cos x-1$ ، هنگامی که x به سمت ۰ میل می‌کند خواهیم داشت $y^2 o(1)=x^4 o(1)$ و برابری (۳) علاوه براینکه بسط محدود مرتبه ۲ را می‌دهد بسط محدود مرتبهٔ ۴ تابع $\sqrt{\cos x}$ را در همسایگی ۰ نیز خواهد داد، به شرط آنکه بسط محدود مرتبهٔ ۴ تابع $y=\cos x-1$ را بنویسیم. اما این بسط به صورت زیر است :

$$\cos x-1=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^4 o(1) \qquad , \quad (x\to 0)$$

پس :

$$\sqrt{\cos x}=1+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)-\frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)^2$$
$$+x^4 o(1) \qquad , \quad (x\to 0)$$

$$=1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{48}-\frac{1}{8}\cdot\frac{x^4}{4}+x^4 o(1) \qquad , \quad (x\to 0)$$

$$=1-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{96}+x^4 o(1) \qquad , \quad (x\to 0)$$

چون تابع $\sqrt{\cos x}$ زوج است بااستفاده از ۸.۱.۴ داریم :

$$\sqrt{\cos x}=1-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{96}+x^5 o(1) \qquad , \quad (x\to 0)$$

۸.۳.۸ - **مشتق گیری** - فرض می کنیم :

$$(4) \quad f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+x^n o(1) \quad , \quad (x\to 0)$$

بسط محدود مرتبهٔ n تابع f در همسایکی 0 باشد و f در یک فاصلهٔ I که 0 یک نقطه درونی آن است دارای مشتقهای پی‌درپی تا مرتبهٔ بینهایت باشد. دراینصورت بااستفاده از ۲.۱.۸ و ۳.۱.۸ داریم $a_p=\dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}$. ازطرف دیگر تابع $g=f'$ درفاصلهٔ I دارای مشتقهای پی‌درپی تا مرتبهٔ بینهایت میباشد. پس بنابر ۲.۱.۸ دارای بسط محدود زیر است :

$$g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}+x^{n-1}o(1)\quad,\quad(x\to 0)$$

که در آن داریم :

$$b_p=\frac{g^{(p)}(0)}{p!}=\frac{f^{(p+1)}(0)}{p!}=\frac{(p+1)!a_{p+1}}{p!}=(p+1)a_{p+1}$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+x^{n-1}o(1)\quad,\quad(x\to 0)\qquad(5)$$

با توجه به فرض‌های بالا ازسنجش (۴)و(۵) نتیجه می‌شود که بسط محدود مرتبهٔ $n-1$ تابع f' (به جز جملهٔ آخر آن) را می‌توان از مشتق بسط محدود مرتبهٔ n تابع f بدست آورد.

۹.۳.۸ - **انتگرال گیری** - چنانچه در ۸.۳.۸، نقش‌های f و f' را باهم عوض کنیم نتیجه می‌شود که اگر تابع f درفاصلهٔ I که 0 یک نقطه درونی آن است دارای مشتق‌های پی‌درپی تمام مراتب باشد، بسط مرتبه $n+1$ هرتابع اولیهٔ f (به جز جملهٔ آخر آن) باانتگرال گیری جمله به جمله از بسط محدود مرتبهٔ n تابع f بدست می‌آید.(این عمل مقدار ثابت را به دست نمی‌دهد و دلیل آن هم آشکاراست، زیرا f دارای بینهایت تابع اولی می‌باشد که تفاوت آنها در یک مقدار ثابت دلخواه است).

۱۰.۳.۸ - **مثال** - تابع $\mathrm{Log}(1+x)$ برای مقادیر $x>-1$ معین است و مشتق‌آن برابر با $\dfrac{1}{1+x}$ می‌باشد. درشمارهٔ ۱۰.۲.۸ بسط محدود مرتبهٔ n تابع $\dfrac{1}{1+x}$ را دیدیم، وچون $\mathrm{Log}(1+x)$ درنقطهٔ $x=0$ برابر با 0 است، بااستفاده از ۹.۳.۸ خواهیم داشت :

$$\mathrm{Log}(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+x^n o(1) \qquad , \quad (x\to 0)$$

۸ . ۳ . ۱۱ - **مثال** - میدانیم که مشتق تابع $\mathrm{Arc}tg(x)$ عبارت‌است از $\frac{1}{1+x^2}$.
ازطرفی بااستفاده از ۸ . ۲ . ۱۰ و ۸ . ۱ . ٤ داریم :

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+x^{2n+1}o(1) \qquad ,$$
$$(x\to 0)$$

پس بنابر ۸ . ۳ . ۹ و برابری $\mathrm{Arc}tg\,0=0$ خواهیم داشت :

$$\mathrm{Arc}tg\,x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+x^{2n+2}o(1) \quad ,$$
$$(x\to 0)$$

۸ . ۳ . ۱۲ - **مثال** - میدانیم که $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ مشتق تابع $\mathrm{Arc}sin\,x$ است. ازطرفی
بااستفاده‌از شماره‌های ۸ . ۲ . ۹ و ۸ . ۱ . ٤ نتیجه می‌شود :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\cdots$$

$$+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}x^{2n}+x^{2n+1}o(1)$$

پس بنابر ۸ . ۳ . ۹ و برابری $\mathrm{Arc}sin\,0=0$ به دست می‌آوریم :

$$\mathrm{Arc}sin\,x=x+\frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3}+\frac{3}{8}\,\frac{x^5}{5}+\cdots$$

$$+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+x^{2n+1}o(1) \quad , \quad (x\to 0)$$

۸ . ٤ـ بخش‌های اصلی بینهایت کوچک‌های ساده

۸.٤.۱ ـ با استفاده از شمارهٔ ۸.۱.۸ و با توجه به بسطهای محدود که تاکنون دیده‌ایم ، می‌توان جدول زیر را از بخش های اصلی بینهایت کوچک‌هایی که برخی از آنها را می‌شناسیم ، ترتیب داد :

$$e^x - 1 \sim 1 \;, \quad (x \to 0) \;, \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \;, \quad (x \to 0)$$

$$\mathrm{ch}x - 1 \sim \frac{x^2}{2} \;, \quad (x \to 0) \;, \quad \sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2} \;, \quad (x \to 0)$$

$$\mathrm{sh}x \sim x \;, \quad (x \to 0) \;, \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 \sim -\frac{x}{2} \;, \quad (x \to 0)$$

$$a^x - 1 \sim x\mathrm{Log}a \;, \quad (x \to 0) \;, \quad \mathrm{Log}(1+x) \sim x \;, \quad (x \to 0)$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \;, \quad (x \to 0) \;, \quad \mathrm{Arctg}x \sim x \;, \quad (x \to 0)$$

$$\sin x \sim x \;, \quad (x \to 0) \;, \quad \mathrm{Arcsin}x \sim x \;, \quad (x \to 0)$$

[دربستگی‌های $a^x - 1 \sim x\mathrm{Log}a$ و $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ به‌ترتیب $\mathrm{Loga} \neq 0$ و $\alpha \neq 0$ فرض شده‌اند. باوجود این به آسانی دیده می‌شود که دراین حالت‌های ویژه نیز این بستگی‌ها برقرارند].

۸.٤.۲ ـ فرض می‌کنیم تابع f در فاصله‌ای که ۰ یکی از نقاط درونی آن است معین و نمودار f از نقطه ۰ گذشته و مماس در ۰ دارای شیب ۱ باشد. دراینصورت بنابر ۶.۱.۳ هنگامیکه x به سمت ۰ میل میکند داریم $f(x) \sim x$ با توجه به نمودار توابع دیده می‌شود که $e^x - 1 \sim x \; (x \to 0)$, $\mathrm{sh}x \sim x \; (x \to 0)$, $\sin x \sim x \; (x \to 0)$, ...

۸ . ۵ ـ تعمیم بسطهای محدود

۸.۵.۱ ـ توابعی که تاکنون بررسی شدند در فواصلی که ۰ یک نقطه درونی آنها بود معین بودند. دراین شماره توابعی را که در یک فاصلهٔ به آغاز یا انجام نقطهٔ ۰ معین می‌باشند ، بررسی می‌کنیم. این توابع نیز دارای بسطهای محدودی در همسایگی نقطهٔ ۰ هستند.

۸.۵.۲ ـ فرض می‌کنیم ۰ یک نقطه درونی فاصلهٔ I باشد. تابع f را که در $I-\{0\}$ معین است و هنگامیکه x به سمت ۰ میگراید $f(x)$ به سمت $\pm\infty$ میل کند، درنظر می‌گیریم. دراینصورت تابع f در همسایگی ۰ دارای بسط محدود نیست. اما معمولاً یک شمار مثبت و درست n وجود دارد بطوریکه وقتی x به سمت ۰ میگراید تابع $x^n f(x)$ به سمت حد با پایان a میل میکند و دارای بسط محدودی در همسایگی ۰ است (با فرض اینکه مقدار تابع $x^n f(x)$ در نقطه $x=0$ برابر با a باشد). دراینصورت f دارای بسط محدود تعمیم یافته‌ای در همسایگی ۰ است. مثال زیر چگونگی این مطلب را نشان میدهد.

۸.۵.۳ ـ **مثال** ـ هنگامیکه x با مقادیر مخالف با صفر به سمت صفر می‌گراید داریم:

$$\frac{1}{tgx}=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^4 o(1)}{x-\frac{x^3}{6}+x^4 o(1)}$$

پس هنگامیکه x به سمت صفر میگراید و $x\neq 0$ است خواهیم داشت:

$$x\,\frac{1}{tgx}=\frac{x-\frac{x^3}{2}+x^4 o(1)}{x-\frac{x^3}{6}+x^4 o(1)}=\frac{1-\frac{x^2}{2}+x^3 o(1)}{1-\frac{x^2}{2}+x^3 o(1)}$$

صورت کسر بالا را به مخرج آن تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} 1-\frac{x^2}{2} & 1-\frac{x^2}{6} \\ \hline 1-\frac{x^2}{6} & 1-\frac{x^2}{3} \\ \hline -\frac{x^2}{3} & \end{array}$$

پس بنابر ۸.۳.۴ داریم:

$$x\frac{1}{tgx}=1-\frac{x^2}{3}+x^3o(1) \quad , \quad (x\to 0\,,\,x\neq 0)$$

و یا :

$$\frac{1}{tgx}=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}+x^2o(1) \quad , \quad (x\to 0\,,\,x\neq 0)$$

۸.۵.۴ - تابع f را در فاصلهٔ I که x_0 یک نقطهٔ درونی آن است معین می گیریم و فرض می کنیم شمارهای a_0 , a_1 , ... , a_n وجود داشته باشند به طوری که :

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+a_n(x-x_0)^n+(x-x_0)^n o(1)$$

و هنگامیکهٔ x به سمت x_0 میگراید $o(1)$ به سمت ۰ میل کند. دراینصورت برابری بالا را بسط محدود مرتبهٔ n تابع $f(x)$ در همسایگی نقطهٔ x_0 می‌نامند.

همواره میتوان با قرار دادن $x-x_0=x'$ به حالت ۸.۱.۱ رسید.

۸.۵.۵ - همچنین می‌توان توابع رادر همسایگی $+\infty$ و یا $-\infty$ بررسی کرد. دراینجا نیز با قرار دادن $y=\frac{1}{x}$ به‌حالت بررسی شده دربالا می‌رسیم. مثلاً برای بررسی تابع $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ هنگامیکه x به سمت $+\infty$ میل می کند قرار میدهیم $y=\frac{1}{x}$. دراینصورت هنگامیکه x به سمت $+\infty$ میگراید y با مقادیر بزرگتر ازصفر به سمت ۰ میل می کند و داریم :

$$f(x)=\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y}+1}=\frac{1}{y}\sqrt{1+(y+y^2)}$$

بنابراین بااستفاده از ۸.۲.۸ خواهیم داشت :

$$f(x)=\frac{1}{y}\left[1+\frac{1}{2}(y-y^2)-\frac{1}{8}(y+y^2)^2+y^2o(1)\right]$$

که درآن هنگامیکه y با مقادیر بزرگتر از ۰ به سمت ۰ میگراید $o(1)$ به سمت ۰ میل میکند. پس داریم :

$$f(x)=\frac{1}{y}\left(1+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{8}y^2+y^2o(1)\right), \quad (y\to 0,\ y>0)$$

$$=\frac{1}{y}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}y+yo(1), \quad (y\to 0,\ y>0)$$

و یا :

$$f(x)=x+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\frac{1}{x}+\frac{1}{x}o(1), \quad (x\to +\infty)$$

۸.۰.۶ - بسیاری از توابع معمولی هنگامیکه x به سمت $\pm\infty$ میگراید دارای چنین بسطی نیستند، زیرا این توابع یا به سرعت به سمت $\pm\infty$ می‌گرایند (مانند e^x) ویا به‌کندی به سمت $\pm\infty$ میل می‌کنند (مانند $\operatorname{Log}x$) و یا نوسان می‌کنند (مانند $\sin x$) و قابل سنجش با یک چند جمله‌ای نیستند.

۸.۰.۷ - همهٔ بسط‌های محدودی که تاکنون دیدیم ازتوان‌های درست x تشکیل شده‌اند. لیکن ازعبارتهای دیگری نیزبرای تعیین بسط های محدود استفاده می‌شود. مثلاً گاهی توابع $x^p(\operatorname{Log}x)^q$ را (که درآن $p>0$ و $q\geqslant 0$ دوشمار درست می‌باشند) وقتی x بامقادیر مثبت به سمت صفرمی گراید، مورد استفاده قرار میدهند. دراینصورت برای $q=0$ همان بسط محدودبرحسب توانهای x بدست می‌آید، اما برای $q>0$ بی‌نهایت کوچک‌های نوع جدیدی خواهیم داشت. اکنون تابع زیررا وقتی x بامقادیر مثبت به سمت صفر می‌گراید مورد مطالعه قرار می‌دهیم :

$$y=\frac{x^p(\operatorname{Log}x)^q}{x^{p'}(\operatorname{Log}x)^{q'}}=x^{p-p'}(\operatorname{Log}x)^{q-q'}$$

اگر $p>p'$ باشد تابع y به سمت صفر می‌گراید. این مطلب برای $q-q'\leqslant 0$ روشن است و برای $q-q'>0$ داریم $y^{\frac{1}{q-q'}}=x^{\frac{p-p'}{q-q'}}(\operatorname{Log}x)$. اما بنابره ۸.۱۲.۰ تابع $y^{\frac{1}{q-q'}}$ به سمت صفر می‌گراید، در نتیجه با توجه به ۴.۱۱.۰ داریم :

$$y=\left[y^{\frac{1}{q-q'}}\right]^{q-q'}\to 0$$

اگر $p=p'$ ولی $q<q'$ باشد به آسانی نتیجه می‌شود که $y\to 0$.

بنابراین وقتی‌که $p > p'$ یا $p = p'$ و $q < q'$ داریم:

$x^p(\mathrm{Log}x)^q = x^{p'}(\mathrm{Log}x)^{q'}o(1)$. پس وقتی x با مقادیر بزرگتر از صفر به سمت صفر می‌گراید بینهایت کوچک‌های $x^p(\mathrm{Log}x)^q$ را میتوان به روش زیر مرتب کرد:

$$x \;,\; x(\mathrm{Log}x) \;,\; x(\mathrm{Log}x)^2 \;,\; x(\mathrm{Log}x)^3 \;,\; \ldots \;;$$

$$x^2 \;,\; x^2(\mathrm{Log}x) \;,\; x^2(\mathrm{Log}x)^2 \;,\; x^2(\mathrm{Log}x)^3 \;,\; \ldots \;;$$

$$x^3 \;,\; x^3(\mathrm{Log}x) \;,\; x^3(\mathrm{Log}x)^2 \;,\; x^3(\mathrm{Log}x)^3 \;,\; \ldots \;;$$

. . . .

۸.۰.۸ - مثال: بررسی $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ وقتیکه x بامقادیر بزرگتر از صفر به سمت صفر می‌گراید - قرار می‌دهیم $z = \mathrm{Log}f(x)$. داریم:

$$z = x\mathrm{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x\mathrm{Log}(1+x) - x\mathrm{Log}x$$

$$= -x\mathrm{Log}x + x\left(x - \frac{x^2}{2} + x^2o(1)\right) \qquad (x \to 0 , x > 0)$$

$$= -x\mathrm{Log}x + x^2 - \frac{x^3}{2} + x^3o(1) \qquad (x \to 0 , x > 0)$$

هنگامیکه x به سمت 0 می‌گراید تمام جمله‌ها به سمت 0 میل می‌کنند و با توجه به ۷.۰.۸ وقتی‌که x با مقادیر بزرگتر از صفر به سمت صفرمیل می‌کند داریم $z \sim x\mathrm{Log}x$ پس:

$$f(x) = e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + z^3o(1) \quad , \quad (z \to 0)$$

$$= 1 + \left[-x\mathrm{Log}x + x^2 - \frac{x^3}{2} + x^3o(1)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left[-x\mathrm{Log}x + x^2 - \frac{x^3}{2} + x^3o(1)\right]^2$$

$$+\frac{۱}{۶}\left[-x\operatorname{Log}x+x^{۲}-\frac{x^{۳}}{۲}+x^{۳}o(۱)\right]^{۳}+x^{۳}(\operatorname{Log}x)^{۳}o(۱)$$

$$(x\to ۰\ ,\ x>۰)$$

با توجه به ۷.۵.۸ اگر $p>۳$ یا $p=۳$ و $q<۳$ باشد و اگر x با مقادیر مثبت به سمت ۰ میل کند، $x^p(\operatorname{Log})^q$ در برابر $x^{۳}(\operatorname{Log}x)^{۳}$ قابل چشم پوشی است. بنابراین هنگامیکه x با مقادیر بزرگتر از صفر به سمت صفر میل کند داریم :

$$f(x)=۱-x\operatorname{Log}x+\frac{۱}{۲}x^{۲}(\operatorname{Log}x)^{۲}+x^{۲}-\frac{۱}{۶}x^{۳}(\operatorname{Log}x)^{۳}+x^{۳}(\operatorname{Log}x)^{۳}o(۱)$$

۹.۵.۸ - فرض می‌کنیم تابع مختلط f در فاصله I که ۰ یک نقطه درونی آن‌است معین باشد. اگر $f^{(n+۱)}$ درفاصلهٔ I معین و پیوسته باشد، هنگامی‌که $x\to ۰$، از دستور شماره ۵.۱.۷ با تبدیل n به $n+۱$ بدست می‌آید :

$$f(x)=f(۰)+\frac{f'(۰)}{۱!}x+\frac{f''(۰)}{۲!}x^{۲}+\cdots+\frac{f^{(n)}(۰)}{n!}x^n+x^{n+۱}O(۱)$$

برابری بالا از برابری :

$$f(x)=f(۰)+\frac{f'(۰)}{۱!}x+\frac{f''(۰)}{۲!}x^{۲}+\cdots+\frac{f^{(n)}(۰)}{n!}x^n+x^n o(۱)$$

که در شمارهٔ ۲.۱.۸ دیدیم دقیق‌تر است [زیرا همیشه تابع $x^{n+۱}O(۱)$ را وقتی‌که $x\to ۰$ می‌توان بصورت $x^n o(۱)$ نوشت ولی وارون این مطلب درست نیست. به‌عنوان مثال هنگامیکه $x\to ۰$ داریم $x^{۲}\sqrt[۳]{x}=x^{۲}o(۱)$ ولی $x^{۲}\sqrt[۳]{x}$، وقتی‌که x به‌سمت ۰ می‌گراید، به صورت $x^{۲}O(۱)$ نیست].

بدین‌ترتیب دربسط محدود مرتبه n تابع e^x در همسایگی ۰، جمله آخر را میتوان به صورت $x^{n+۱}O(۱)$ نوشت، پس :

$$e^x=۱+\frac{x}{۱!}+\frac{x^{۲}}{۲!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+x^{n+۱}O(۱)\quad,\quad x\to ۰)$$

و این فرمول از دستور ۲.۲.۸ دقیق‌تر است . به روش مشابهی می‌توان برای شماره‌های

۲.۸ و ۸.۳.۱۰ و ۸.۳.۱۱ و ۸.۳.۱۲ فرمولهایی مانند فرمول بالا بدست آورد ودربرخی از محاسبات ، بااستفاده از آنها ، زودتر به نتیجه رسید.

۸ . ٦ ـ کار برد بسطهای محدود در بررسی حدود

۸ . ٦ . ۱ ـ مثال : بررسی $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}$ **وقتی که x بامقادیر مخالف صفر به سمت صفر می‌گراید** ـ داریم :

$$f(x)=\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\frac{(x-\sin x)(x+\sin x)}{x^2\sin^2 x}$$

همچنین بنابر ۸.۲.٦ و ۸.۱.۸ داریم :

$$x-\sin x=x-\left(x-\frac{x^3}{6}+x^4 o(1)\right)=\frac{x^3}{6}+x^4 o(1)\sim\frac{x^3}{6}$$

$$(x\to 0)$$

$$x+\sin x=x+x+x^2 o(1)=2x+x^2 o(1)\sim 2x \quad , \quad (x\to 0)$$

پس :

$$f(x)\sim\frac{x^3\cdot 2x}{6x^2\cdot x^2}=\frac{1}{3} \qquad , \quad (x\to 0\,,\,x\neq 0)$$

و در نتیجه هنگامیکه x با مقادیر مخالف صفر به سمت صفر می‌گراید تابع $f(x)$ به سمت $\frac{1}{3}$ میل می‌کند.

۸ . ٦ . ۲ ـ مثال : بررسی $f(x)=\frac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}}$ **وقتی که x بامقادیر مخالف ۱ به سمت ۱ می‌گراید**ـ قرار می‌دهیم $x=1+h$ که $h\neq 0$ و $h\to 0$ پس:

$$\sqrt{2x-x^4}=\sqrt{2+2h-(1+h)^4}=\sqrt{1-2h+ho(1)} \quad , \quad (h\to 0)$$

با توجه به ۸.۲.۸ و ۸.۳.٦ هنگامیکه h به سمت ۰ می‌گراید داریم :

$$\sqrt{۲x-x^{۴}}=۱-h+h\,o(۱)$$

چنانچه در ۷.۲.۸ ، به‌جای α شمار $\frac{۱}{۳}$ را قرار دهیم خواهیم داشت :

$$\sqrt[۳]{x}=\sqrt[۳]{۱+h}=۱+\frac{h}{۳}+h\,o(۱)\qquad(h\rightarrow ۰)$$

پس :

$$\sqrt{۲x-x^{۴}}-\sqrt[۳]{x}=۱-h+h\,o(۱)-۱-\frac{h}{۳}+h\,o(۱)$$

$$=-\frac{۴}{۳}h+h\,o(۱)\sim-\frac{۴}{۳}h\qquad(h\rightarrow ۰)$$

اگر ۷.۲.۸ را برای $\alpha=\frac{۴}{۳}$ بکار ببریم بدست می‌آید :

$$۱-\sqrt[۴]{x^{۳}}=۱-(۱+h)^{\frac{۳}{۴}}=۱-\left(۱+\frac{۳h}{۴}+h\,o(۱)\right)$$

$$=-\frac{۳}{۴}h+h\,o(۱)\sim-\frac{۳}{۴}h\qquad(h\rightarrow ۰)$$

پس :

$$f(x)\sim\frac{-\frac{۴}{۳}h}{-\frac{۳}{۴}h}=\frac{۱۶}{۹}\qquad(h\rightarrow ۰,\ h\neq ۰)$$

بنابراین هنگامیکه x بامقادیرمخالف ۱ به‌سمت ۱ می‌گراید، تابع $f(x)$ به‌سمت $\frac{۱۶}{۹}$ میل می‌کند .

فصل نهم

نُرم-دوری

مفهوم حد را هنگامی که سروکار با میدان شمارهای حقیقی یا مختلط باشد، درفصل دوم، تعریف کردیم. اما این میدان در عمل بسیار محدود است. مثلاً گفتگو از حد بردارهادر آن ممکن نیست. در اینجا می‌خواهیم این تنگنا را از میان برداریم. وانگهی مفاهیم مجردی که می‌آوریم کاربردهای دیگری نیز دارند.

۱.۹- نُرم

۱.۱.۹ - فرض میکنیم E یک فضای برداری حقیقی باشد. هرتابع E در $\mathbf{R}$ مانند $x \to \|x\|$ با مقادیر بزرگتر یا برابربا صفر را یک نُرم روی E گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

$$\|x\| = 0 \iff x = 0 \qquad (۱)$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \text{،} \quad (\text{برای هر } \lambda \in \mathbf{R} \text{ وهر } x \in E) \qquad (۲)$$

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \quad \text{،} \quad (\text{برای هر } x \text{ و } y \text{ متعلق به } E) \qquad (۳)$$

هر فضای برداری حقیقی را که یک نُرم روی‌آن تعریف شده است **فضای برداری نُرم‌دار** می‌نامند.

۲.۱.۹ - ازشرط (۲) نتیجه می‌شود که برای هر عنصر x متعلق به E داریم:

$$\|-x\| = \|x\|$$

۳.۱.۹ - از ۲.۱.۹ و شرط (۳) شماره ۱.۱.۹ نتیجه می‌شود که برای هر x و y متعلق به E داریم:

$$\|x-y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

۴.۱.۹ - **مثال** - درفضای برداری $E=\mathbf{R}$. تابع $x \to |x|$ یک نرم روی E می‌باشد (درحالت کلی ۱.۱.۹ ، نرم یک عنصر از E نقش قدرمطلق یک شمار حقیقی را بازی می‌کند. از اینرواست که برای نرم x نشان $\|x\|$ بکار برده می‌شود).

۵.۱.۹ - **مثال** - فرض میکنیم E فضای برداری بردارهای آزاد فضای معمولی باشد. تابعی که به هر بردار x درازای آنرا وابسته می‌کند یک نرم روی E است.

۶.۱.۹ - فرض می‌کنیم $E=\mathbf{R}^p$. تابع:

$$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p) \to \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_p^2}$$

یک نرم روی E معین می‌کند .

زیرا ، برقراری دوشرط (۱) و (۲) آشکاراست و شرط (۳) به‌صورت زیر نوشته‌میشود :

$$\left(\sum(\xi_i+\xi_i')^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum\xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum\xi_i'^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

برای اثبات این‌نابرابری کافی‌است‌درستی نابرابری زیر را ،که از توان‌دوم‌دوطرف‌نابرابری‌بالا بدست می‌آید ، بررسی کنیم :

$$\sum 2\xi_i\xi_i' \leqslant 2\left(\sum\xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum\xi_i'^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

اما ازتوان دوم دوطرف این نابرابری بدست می‌آید :

$$\left(\sum\xi_i\xi_i'\right)^2 \leqslant \left(\sum\xi_i^2\right)\left(\sum\xi_i'^2\right)$$

و این نابرابری نتیجه برابری زیر است:

$$\left(\sum\xi_i^2\right)\left(\sum\xi_i'^2\right) = \left(\sum\xi_i\xi_i'\right)^2+\sum_{i<j}(\xi_i\xi_j'-\xi_j\xi_i')^2$$

بعنوان مثال $(\xi_1, \xi_2) \to \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}$ یک نرم روی $\mathbf{R}^2$ است . بنابراین اگر $\mathbf{C}$ را مانند یک فضای برداری حقیقی روی $\mathbf{R}$ درنظر بگیریم ، نگاشت $z \to |z|$ یک نرم است (دستور (۱۱) شماره ۱۲.۱۵.۰ کتاب جبر).

۷.۱.۹ - درفضای برداری $E=\mathbf{R}^p$ قرار میدهیم :

$$\|(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_p)\| = |\xi_1| + |\xi_2|+\ldots+|\xi_p|$$

به‌آسانی دیده می‌شود که بدین‌ترتیب روی E یک نرم تعریف شده است. این نرم باتعریف نرمی که در ۶.۱.۹ دیده شد یکی نیست .

۸.۱.۹ - فضای برداری $E=\mathbf{R}^p$ را درنظر میگیریم وقرار می‌دهیم :

$$\|(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p)\| = \sup(|\xi_1|, |\xi_2|, \cdots, |\xi_p|)$$

به‌آسانی دیده می‌شود که شرطهای (۱) و (۲) شمارهٔ ۱.۱.۹ برقرارند برای بررسی شرط (۳) چنین عمل می‌کنیم: فرض می‌کنیم $x=(\xi_1, \cdots, \xi_p)$ و $y=(\eta_1, \cdots, \eta_p)$ دو عنصراز $\mathbf{R}^p$ باشند. در اینصورت برای همهٔ iها داریم:

$$|\xi_i| \leqslant \|x\| \quad \text{و} \quad |\eta_i| \leqslant \|y\|$$

وار آنجا برای هر i داریم:

$$|\xi_i+\eta_i| \leqslant |\xi_i| + |\eta_i| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

ویا:

$$\|x+y\| = \sup(|\xi_1+\eta_1|, \cdots, |\xi_p+\eta_p|) \leqslant \|x\| + \|y\|$$

بدین ترتیب روی $\mathbf{R}^p$ سه نُرم مختلف تعریف کردیم.

۹.۱.۹ - **بستگی سه نُرم بالا بایکدیگر** - برای هرعنصر x متعلق به E نرم های تعریف شده در ۶.۱.۹ و ۷.۱.۹ و ۸.۱.۹ را بترتیب با $N_1(x)$ و $N_2(x)$ و $N_3(x)$ نشان می‌دهیم.

قضیه - همواره داریم:

$$N_3(x) \leqslant N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant pN_3(x)$$

اثبات:

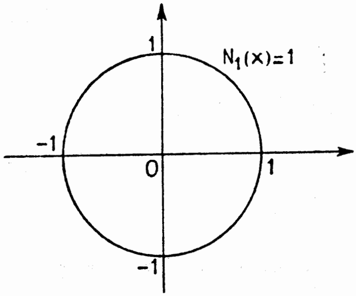
۱ - اگر $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p)$ باشد یک اندیس i وجود دارد به‌قسمی که داشته باشیم $N_3(x)^2=\xi_i^2$ پس داریم $N_3(x)^2 \leqslant N_1(x)^2$.

۲ - داریم:

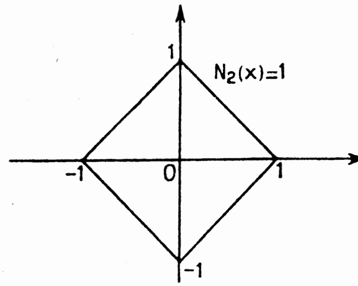
$$N_1(x)^2=\xi_1^2+\cdots+\xi_p^2 \leqslant (|\xi_1|+\cdots+|\xi_p|)^2=N_2(x)^2$$

۳ - برای همهٔ iها نا برابری $|\xi_i| \leqslant N_3(x)$ برقرار است پس‌داریم:

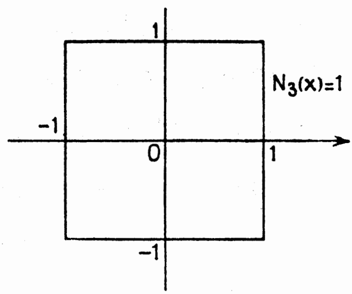
$$N_2(x)=|\xi_1|+\cdots+|\xi_p| \leqslant pN_3(x)$$



شکل ٤٤



شکل ٤٥



شکل ٤٦

۲.۹ ـ دوری

۱.۲.۹ ـ مجموعهٔ E را درنظر می‌گیریم . هر نگاشت $d : E\times E \to \mathbf{R}_+$ که دارای شرایط زیر باشد یک **دوری روی** E نامیده می‌شود:

$$d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y \tag{۱}$$

$$d(x,y)=d(y,x) \quad , \quad \forall x,y\in E \tag{۲}$$

$$d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z) \quad , \quad \forall x,y,z\in E \tag{۳}$$

(نابرابری (۳) را نابرابری سه‌بری می‌گویند) .

مجموعه‌ای‌را که روی آن یک دوری تعریف شده است **فضای متری** می‌نامند .

۲.۲.۹ ـ بااستفاده از (۳) برای هر سه نقطه x و y و z متعلق به E داریم :

$$d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$$

$$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$$

بنابراین :

$$d(x,z)-d(x,y) \leqslant d(y,z)$$

$$d(x,y)-d(x,z) \leqslant d(z,y)=(dy,z)$$

و درنتیجه :

$$|d(x,z)-d(x,y)| \leqslant d(y,z) \qquad (٤)$$

۳.۲.۹ - **مثال** - درفضای معمولی نگاشت :

$$((x,y,z)\ ,\ (x',y',z')) \to \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

یک دوری معین می‌کند . پس فضای معمولی یک فضای متری است . در این صورت دستورهای (۳) و (٤) همان نابرابری‌های بین اضلاع یک سه بر می‌باشند .

٤.۲.۹ - اگر E یک فضای برداری حقیقی نرم‌دار باشد ، برای هر دوعنصر x و y متعلق بـه E قرار می‌دهیم $d(x,y)=\|x-y\|$. دراینصورت d یک دوری روی E معین می‌کند. زیرا داریم :

$$d(x,y)=0 \iff |x-y|=0 \iff x-y=0 \iff x=y$$

$$d(y,x)=\|y-x\|=|-(x-y)\|=\ x-y|=d(x,y)$$

$$d(x,z)=\|x-z\|=|(x-y)+(y-z)$$

$$\leqslant \|x-y\|+\|y-z\|=d(x,y)+d(y,z)$$

بنابراین هرفضای برداری نرم دار به‌خودی خود یک فضای متری است .

دوری d نسبت به هرانتقال پایاست . به‌عبارت دیگر برای هر سه عنصر x و y و a از E داریم :

$$d(x+a\ ,\ y+a)=d(x,y)$$

زیرا :

$$d(x+a\ ,\ y+a)=\|(x+a)-(y+a)\|=|x-y\|=d(x,y)$$

چنانکه دیده می‌شود داریم $\|x\|=d(x,0)$. به‌این ترتیب d از روی نرم تعریف می‌شود . به وارون نرم را می‌توان از روی d تعریف کرد .

۵.۲.۹ - فرض می‌کنیم E یک فضای‌برداری نرم دارو A یک فضای آفین وابسته

به E باشد . برای هر دونقطه P و Q از A قرار می‌دهیم $d(P,Q)=\|P-Q\|$.
مانند ۴.۲.۹ دیده می‌شود که نگاشت d یک دوری روی A معین می‌کند که نسبت به هر انتقال پایاست . مثال‌های ۳.۲.۲۱ و ۴.۲.۲۱ حالت‌های ویژه این شماره می‌باشند .

۶.۲.۹ - بنابر ۴.۲.۹ همهٔ فضاهای برداری نرم‌دار که در ۱.۹ دیده شد مثالهایی از فضای متری می‌باشند. مثلاً $\mathbf{R}$ با دوری $d(x,y)=|x-y|$ یک فضای متری‌است. بنابر شماره‌های ۶.۱.۹ و ۷.۱.۹ و ۸.۱.۹ ، روی $\mathbf{R}^p$ سه دوری مختلف وجود دارد که به‌روش زیر تعریف‌می‌شوند :

$$d_1((\xi_1,\cdots,\xi_p),(\eta_1,\cdots,\eta_p))=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+\cdots+(\xi_p-\eta_p)^2}$$

$$d_2((\xi_1,\cdots,\xi_p),(\eta_1,\cdots,\eta_p))=|\xi_1-\eta_1|+\cdots+|\xi_p-\eta_p|$$

$$d_3((\xi_1,\cdots,\xi_p),(\eta_1,\cdots,\eta_p))=\sup(|\xi_1-\eta_1|,\cdots,|\xi_p-\eta_p|)$$

بنابر ۹.۱.۹ برای هر x و y متعلق به $\mathbf{R}^p$ داریم :

$$d_3(x,y)\leqslant d_1(x,y)\leqslant d_2(x,y)\leqslant p\,d_3(x,y)$$

۷.۲.۹ - فرض میکنیم E یک‌فضای‌متری و E' بخشی از E باشد. دوری هردونقطه x و y متعلق به E' را همان دوری‌آنها در E می‌گیریم . بدین‌ترتیب E' یک فضای‌متری می‌شود . به‌ویژه هر زیر مجموعه از $\mathbf{R}^p$ را دست‌کم با سه‌روش مختلف می‌توان یک فضای متری دانست.

۸.۲.۹ - در شماره‌های ۳.۹ و ۴.۹ و ۵.۹ مفاهیم حد که درفصل دوم دیده‌شده، در فضاهای متری تعمیم داده خواهد شد .

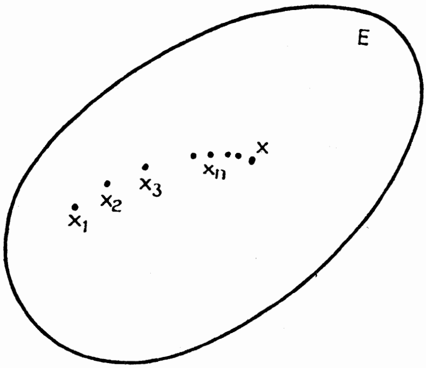
۳.۹ - حدیک دنباله از نقاط در یک‌فضای متری

۱.۳.۹ - تعریف - فرض می‌کنیم E یك فضای متری و d دوری روی E باشد. گوییم دنبالهٔ $(x_1,x_2,\cdots)$ از نقاط E به‌سمت نقطهٔ $x\in E$ می‌گراید (وباختصارمی‌نویسیم $x_n\to x$) هرگاه حد $d(x_n,x)$ ، هنگامیکه $n\to+\infty$ ، صفر باشد . به‌گفته دیگر برای هر شمار مثبت ε یك‌شمار درست N یافت‌شود به‌قسمی که :

$$n\geqslant N\implies d(x_n,x)\leqslant\varepsilon$$

دراینصورت می‌نویسند :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x$$



شکل ۴۷

اگر $E=\mathbf{R}$ و دوری E با $|x-y|$ معین شده باشد، روشن است که به‌تعریف معمولی حد میرسیم. دراینجا نیزمانند حالت دنباله های شماری ، ویژگی‌های زیربرقرار است :

۹.۳.۲ - در تعریف پیشین می‌توان بجای یک یا هر دونابرابری بالا نا برابری‌های سره گذاشت .

۹.۳.۳ - اگر دنبالهٔ (x_n) دارای حدباشد این حدیکتاست . زیرا اگر دنبالهٔ (x_n) بسمت x و x' بگراید ، برای تمام مقادیر n خواهیم داشت :

$$d(x,x') \leqslant d(x,x_n)+d(x_n,x')$$

دراین صورت‌هنگامیکه n به‌سمت $+\infty$ میل کندخواهیم داشت $d(x,x')\leqslant 0+0=0$ پس $d(x,x')=0$ ویا $x=x'$.

۹.۳.۴ - اگر x_n به‌سمت x میل کندهردنباله‌استخراج شده از دنبالهٔ (x_n) به‌سمت x میل خواهدکرد .

۹.۳.۵ - **حالت $\mathbf{R}^p$** - سه دوری‌مختلف‌روی $\mathbf{R}^p$ می‌شناسیم . ولی‌بعلت نابرابرهای ۹.۲.۶ مفهوم حد در هرسه‌حالت یکی است .

۹.۳.۶ - **قضیه - فرض می کنیم $(x_1, x_2, \ldots)$ دنباله‌ای از نقاط $\mathbf{R}^p$ و نقطه x متعلق به $\mathbf{R}^p$ باشد . قرار می‌دهیم :**

$$x_n=(\xi_{n1}, \xi_{n2}, \cdots, \xi_{np}) \quad , \quad x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p)$$

دراین‌صورت برای آنکه x_n به‌سمت x میل کند بایاو بسنده است که :

$$\xi_{n1} \to \xi_1 \quad , \quad \xi_{n2} \to \xi_2 , \cdots , \xi_{np} \to \xi_p$$

اثبات : داریم

$$x_n \to x \iff |\xi_{n1}-\xi_1| + |\xi_{n2}-\xi_2| + \cdots + |\xi_{np}-\xi_p| \to 0$$

$$\iff |\xi_{n1}-\xi_1| \to 0 \quad \text{و} \quad |\xi_{n2}-\xi_2| \to 0 \text{ و } \cdots \text{ و } |\xi_{np}-\xi_p| \to 0$$

وبدین‌ترتیب قضیه ثابت می‌شود .

چنانکه دیده می‌شود حد یک دنباله ازنقاط $\mathbf{R}^p$ تبدیل به‌حد دنباله‌های شماری می‌شود .

۹.۳.۷ - فرض میکنیم E یک‌فضای متری و d دوری آن‌باشد. دنباله $(x_1, x_2, \cdots)$ از نقاط E را درنظر می گیریم. این دنباله را **دنباله‌کشی** خوانند اگر برای هر شمار مثبت ε یک شمار درست N یافت شود به‌قسمی که :

$$m \geqslant N \text{ و } n \geqslant N \Longrightarrow d(x_m , x_n) \leqslant \varepsilon$$

اگر $E=\mathbf{R}$ ودوری دونقطه با $|x-y|$ نشان داده‌شود به‌تعریف پیشین دنباله‌کشی میرسم (۲.۲.۱) .

۹.۳.۸ - فرض می‌کنیم x حد دنبالهٔ $(x_1 , x_2 ,\cdots)$ از نقاط E باشد . دراین‌صورت این دنباله یک‌دنباله‌کشی است. زیرا برای $\varepsilon > 0$ یک شمار n به‌قسمی یافت می‌شود که :

$$n \geqslant N \Longrightarrow d(x_n , x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

پس برای $m \geqslant N$ و $n \geqslant N$ داریم :

$$d(x_m , x_n) \leqslant d(x_m , x) + d(x , x_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وبدین‌ترتیب قضیه ثابت می‌شود. وارونِ این قضیه همیشه درست نیست ولی درحالت‌ویژه $\mathbf{R}^p$ قضیه زیر را داریم :

۹.۳.۹ - قضیه (شرط کشی در $\mathbf{R}^p$)- برای اینکه دنباله‌ای از نقاط $\mathbf{R}^p$ دارای حد باشد بایاو بسنده است که این دنباله یك دنباله‌کشی باشد .

اثبات - با توجه به ۹.۳.۸ کافی است نشان دهیم که اگر $(x_1 , x_2 , \cdots)$ یک

دنباله از نقاط $\mathbf{R}^p$ باشدو برای هرشمار مثبت ε یک شمار درست N_ε یافت‌شود به‌طوری که داشته باشیم :

$$m \geqslant N_\varepsilon \quad \text{و} \quad n \geqslant N_\varepsilon \Longrightarrow d(x_m, x_n) \leqslant \varepsilon$$

دراینصورت دنبالهٔ $(x_1, x_2, \cdots)$ دارای حداست. برای این منظور قرار می‌دهیم :

$$x_n = (\xi_{n1}, \xi_{n2}, \cdots, \xi_{np})$$

داریم :

$$m \geqslant N_\varepsilon \;\text{و}\; n \geqslant N_\varepsilon \Longrightarrow \begin{cases} |\xi_{m1} - \xi_{n1}| \leqslant \varepsilon \\ |\xi_{m2} - \xi_{n2}| \leqslant \varepsilon \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ |\xi_{mp} - \xi_{np}| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

بنابر شرط کشی برای دنباله‌های شماری ، هنگامیکه n به‌سمت $+\infty$ می‌گراید دنباله‌های ξ_{n1} و ξ_{n2} و $\cdots$ و ξ_{np} دارای حد هستند . پس باتوجه به ۶.۳.۹ دنباله x_n دارای حد می‌باشد .

۱۰.۳.۹ - **حالت یك فضای برداری حقیقی با بعد با پایان** - فرض می کنیم $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$ یک‌پایهٔ فضای برداری حقیقی E باشد. دراینصورت هرنقطهٔ x متعلق به E بوسیله آراینده هایش که عبارت‌ازیک‌دنبالهٔ باپایان $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p)$ می‌باشد، نموده می‌شود. سه دوری‌ای که در $\mathbf{R}^p$ دیدیم سه دوری روی فضای E معین می کنند. ولی با توجه به ۵.۳.۹ تنها **یك مفهوم** حد برای هردنباله از نقاط E وجود دارد. بنابر ۶.۳.۹ برای آنکه نقطهٔ $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_p e_p$ حد دنبالهٔ نقاط :

$$x_1 = \xi_{11} e_1 + \xi_{12} e_2 + \cdots + \xi_{1p} e_p$$
$$x_2 = \xi_{21} e_1 + \xi_{22} e_2 + \cdots + \xi_{2p} e_p$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

باشد بایاوبسنده است که داشته باشیم :

$$\xi_{n1} \to \xi_1 \;,\; \xi_{n2} \to \xi_2 \;, \cdots, \; \xi_{np} \to \xi_p$$

این مفهوم‌حد **بستگی به پایهٔ انتخاب‌شده ندارد.** زیرا اگر $(f_1, f_2, \cdots, f_p)$ یک‌پایهٔ دیگر E باشد داریم :

$$x_1 = \eta_{11} f_1 + \eta_{12} f_2 + \cdots + \eta_{1p} f_p$$

$$x_2 = \eta_{21} f_1 + \eta_{22} f_2 + \cdots + \eta_{2p} f_p$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x = \eta_1 f_1 + \eta_2 f_2 + \cdots + \eta_p f_p$$

با توجه به‌فرمول تعویض پایه (۵.۸.۹ کتاب جبر) داریم :

$$\eta_{ni} = \alpha_{i1}\xi_{n1} + \alpha_{i2}\xi_{n2} + \cdots + \alpha_{ip}\xi_{np} \qquad (1 \leqslant i \leqslant p)$$

$$\eta_i = \alpha_{j1}\xi_1 + \alpha_{i2}\xi_2 + \cdots + \alpha_{ip}\xi_p \qquad (1 \leqslant i \leqslant p)$$

که در آن α_{ij} ها شمارهایی ثابت‌اند . دیده‌می‌شود که اگر برای $1 \leqslant i \leqslant p$ دنباله (ξ_{ni}) به سمت ξ_i میل کند دنبالهٔ (η_{ni}) به‌سمت η_i میل خواهد کرد ، وبا تعویض نقش پایه‌های $(e_1, \cdots, e_p)$ و $(f_1, \cdots, f_p)$ وارون این مطلب نتیجه خواهد شد .

۱۱.۳.۹ ـ **حالت یك فضای آفین با بعد باپایان** ـ فضای آفین A وابسته به فضای برداری حقیقی E راکه دارای بعدباپایان است درنظر میگیریم با انتخاب یک مبداء ویک پایه می‌توان فضای A رابا $\mathbf{R}^p$ یکی گرفت . بنابراین در A سه دوری مختلف وجود دارد که هرسه ، برای دنباله‌های نقاط A ، یک مفهوم حد معین می‌کنند . مانند شماره . ۱۰.۳.۹ (وبا استفاده از ۱۶.۷.۱۲ کتاب جبر) می‌توان نشان دادکه این‌مفهوم حد بستگی به مبداء و پایهٔ انتخاب شده ندارد .

۹ . ٤ ـ حد یک‌نگاشت یک‌فضای متری دریک فضای متری دیگر

۱.٤.۹ ـ تعریف ـ دوفضای متری E و E′ ویك‌نگاشت f فضای E در E′ داده شده‌اند . فرض می‌کنیم a نقطه‌ای از E و l نقطه‌ای از E′ باشد . گوییم هنگامیکه x به‌سمت a میگراید f(x) به‌سمت l میل میکند (وباختصار می‌نویسیم $f(x) \to l$) اگر بتوان برای هرشمار مثبت ε یك شمار η یافت به‌قسمی‌که :

$$d(x,a) \leqslant \eta \Longrightarrow d(f(x), l) \leqslant \varepsilon$$

(در اینجا دوری‌های E و E′ هردو با d نشان داده شده‌اند). دراین‌صورت می‌نویسیم :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

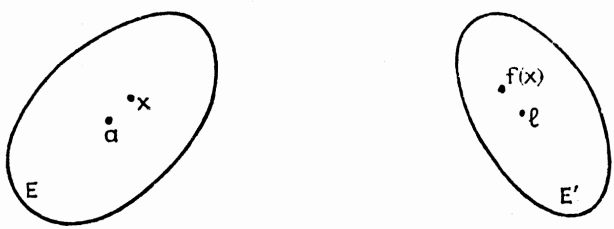
۹ . ٤ . ۲ - تعمیم تعریف بالا

تعریف - فرض می‌کنیم قراردادهای شماره ۹ . ٤ . ۱ برقرار وبه‌علاوه F بخشی از E باشد. گوییم هنگامیکه x در F به‌سمت a میل میکند f(x) به سمت l می‌گراید، اگر برای هر شمار مثبت ε یك شمار مثبت η بتوان یافت به‌قسمی که :

$$(x \in F \text{ و } d(x,a) \leqslant \eta) \Longrightarrow d(f(x), l) \leqslant \varepsilon$$

دراینصورت می‌نویسیم :

$$\lim_{x \to a, x \in F} f(x) = l$$



شکل ٤۸

تعریف بالاتعاریف ۲ . ۵ را تعمیم‌می‌دهد. بدین‌وسیله بسیاری از نتایج فصل‌دوم را می‌توان تعمیم داد. دراینجااما تنها به بیان چند نمونه ازآنها می‌پردازیم ، ولی از نتایجی هم‌که ازبیان آنها خودداری کرده‌ایم استفاده خواهیم کرد. خواننده‌می‌تواند بابکار بردن‌روش فصل دوم هریک‌از این مطالب را به‌سادگی اثبات کند .

۹ . ٤ . ۳ - تعریف ۹ . ٤ . ۱ حالت ویژه تعریف ۹ . ٤ . ۲ است‌که درآن $F = E$ گرفته شده است .

۹ . ٤ . ٤ - اگرحد f(x) مطابق‌باتعریف ۹ . ٤ . ۱ وجود داشته‌وبرابر با l باشد ، این‌حد برابر با f(a) است. زیرا ، اگر شمار ε بزرگتر از صفر باشد ، برای هر $\eta > 0$ داریم :

$d(a,a)=0 \leqslant \eta$ پس $d(f(a),l) \leqslant \varepsilon$ و چون $\varepsilon > 0$ یک شمار دلخواه است بنابراین $d(f(a),l)=0$ و درنتیجه داریم $f(a)=l$.

اما اگر l حد $f(x)$ برحسب تعریف ۹.۴.۲ باشد ممکن است که $f(a)$ با l برابر نباشد (۴.۵.۲).

۹.۴.۵ - بادرنظرگرفتن تعریف ۹.۴.۲ اگر تابع f درنقطه a دارای حد باشد این حد یکتاست، به شرط اینکه نقاطی از F یافت شوند که دوری شان از a باندازه کافی کوچک باشد (این شرط معمولاً برقرار است). فرض می کنیم هنگامیکه x در F به سمت a می گراید l و l' حدهای $f(x)$ و $l \neq l'$ باشد. چنانچه قرار دهیم $\alpha = d(l,l')$ خواهیم داشت $\alpha > 0$. پس شمارهای مثبت η و η' وجود دارند به قسمی که :

$$x \in F \quad \text{و} \quad d(x,a) \leqslant \eta \Longrightarrow d(f(x),l) < \frac{\alpha}{2}$$

$$x \in F \quad \text{و} \quad d(x,a) \leqslant \eta' \Longrightarrow d(f(x),l') < \frac{\alpha}{2}$$

چون نقاطی مانند x متعلق به F وجود دارد که برای آنها داریم $d(x,a) \leqslant \eta$ و $d(x,a) \leqslant \eta'$ پس برای این نقاط می توان نوشت :

$$d(l,l') \leqslant d(l,f(x)) + d(f(x),l') < \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$$

واین غیر ممکن است. بنابراین داریم $l=l'$.

۹.۴.۶ - دوفضای متری E و E' ویک نگاشت f فضای E در E' داده شده‌اند . فرض می کنیم F بخشی از E و a نقطه‌ای از E و l نقطه‌ای از E' باشد. برای اینکه هنگامیکه x در F به سمت a میل می کند l حد $f(x)$ باشد بایاوبسنده است که $d(f(x),l)$ وقتی x در F به سمت a میگراید برابر باصفر باشد . این مطلب نتیجه مستقیم تعاریف بالا است.

۹.۴.۷ - فرض می کنیم $E'=\mathbf{R}^p$ باشد. در اینصورت نگاشت f فضای E در E' به صورت $x \to (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))$ نوشته می شود که در آن f_1 و f_2 و ... و f_p نگاشت های E در $\mathbf{R}$ هستند. برای اینکه وقتی x در F به سمت a میل می کند ، $f(x)$ به سمت $l=(l_1, l_2, \dots, l_p)$ بگراید بایاوبسنده است که داشته باشیم :

$$\lim_{x \to a,\, x \in F} f_1(x) = l_1 \;, \;\dots\;, \quad \lim_{x \to a,\, x \in F} f_p(x) = l_p$$

این مطلب به‌آسانی ازتعریف دوری روی $\mathbf{R}^p$ نتیجه‌می‌شود . شبیه این مطلب را می‌توان‌برای یک فضای آفین E' که در آن یک مبداء ویک پایه انتخاب شده است ، بیان نمود .

۹ . ۵ ـ نگاشت‌های پیوسته یک فضای متری دریک فضای متری دیگر

۱.۵.۹ ـ تعریف ـ دو فضای متری E و E' و یك نگاشت E در E' مانند f را درنظرمی گیریم وفرض می کنیم x_0 نقطه‌ای از E باشد. نگاشت **f را درنقطه x_0 پیوسته‌گوییم اگر داشته باشیم :**

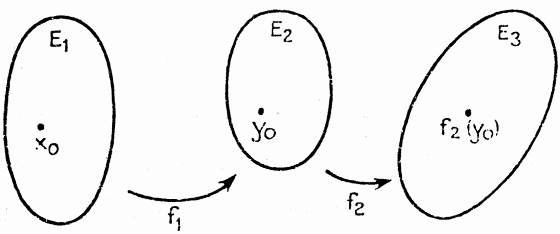
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

به‌عبارت دیگر f در نقطهٔ x_0 پیوسته‌است اگربرای‌هرشمار مثبت ε یک‌شمار مثبت η به‌قسمی یافت شود که :

$$d(x, x_0) \leqslant \eta \Longrightarrow d(f(x), f(x_0)) \leqslant \varepsilon$$

۲.۵.۹ ـ گسترش f را **در E پیوسته** خوانند اگر f در همهٔ نقاط E پیوسته باشد.

۳.۵.۹ ـ قضیه ـ سه فضای متری E_1 و E_2 و E_3 داده شده‌اند. اگر نگاشت‌های $f_1 : E_1 \to E_2$ و $f_2 : E_2 \to E_3$ پیوسته باشند نگاشت **$f_2 \circ f_1 : E_1 \to E_3$ نیز پیوسته است .**



شکل ۴۹

اثبات ـ فرض میکنیم x_0 نقطه‌ای از E_1 و ε یک شمار مثبت باشد وقرار می‌دهیم $y_0 = f_1(x_0)$. پس یک شمار مثبت η یافت می‌شود به‌قسمی که :

$$d(y, y_0) \leqslant \eta \Longrightarrow d(f_2(y), f_2(y_0)) \leqslant \varepsilon$$

و چون f_1 پیوسته است یک شمار مثبت α وجود دارد به‌قسمی که:

$$d(x, x_0) \leqslant \alpha \Longrightarrow d(f_1(x), y_0) \leqslant \eta$$

بنابراین از نا برابری $d(x\,,\,x_\circ)\leqslant\alpha$ ابتدا $d(f_1(x)\,,\,y_\circ)\leqslant\eta$ و سپس $d(f_2(f_1(x)),\,f_2(f_1(x_\circ))\leqslant\varepsilon$ نتیجه‌می‌شود، واین مطلب‌پیوستگی $f_2\circ f_1$ را در $x_\circ$ میرساند.

۴.۵.۹ - **مثال** - فرض می‌کنیم I یک فاصلهٔ $\mathbf{R}$ و $t\to M(t)$ یک نگاشت I درفضای معمولی باشد. پیوسته بودن این نگاشت درنقطهٔ $t_\circ$ هم‌ارز اینست که برای هر شمار مثبت ε یک شمار مثبت η یافت شود به‌قسمی که داشته باشیم:

$t\in I\,,\,|t-t_\circ|\leqslant\eta\Longrightarrow$ (دوری‌دونقطه $M(t)$ و $M(t_\circ)$ کوچکتر ویا برابر با ε است)

اینک یک مبداء ویک پایه انتخاب می‌کنیم وآراینده‌های نقطهٔ $M(t)$ را نسبت‌به‌این پایه $x(t)$ و $y(t)$ و $z(t)$ می‌نامیم. بنابر ۷.۴.۹ پیوستگی نگاشت $t\to M(t)$ درنقطه $t_\circ$ هم‌ارز با پیوستگی نگاشت های $t\to x(t)$ و $t\to y(t)$ و $t\to z(t)$ درنقطهٔ $t_\circ$ می‌باشد.

۵.۵.۹ - **مثال** - فرض‌می‌کنیم I یک‌فاصله‌از $\mathbf{R}$ و f یک نگاشت I در $\mathbf{R}^p$ باشد. دراینصورت برای هر t متعلق به I داریم:

$$f(t)=(f_1(t)\,,\,f_2(t)\,,\,\cdots\,,\,f_p(t))$$

که درآن f_iها نگاشتهایی از I در $\mathbf{R}$ هستند.

بنابر ۷.۴.۹ برای‌اینکه f درنقطه $t_\circ$ پیوسته باشد بایاوبسنده است که نگاشتهای f_1 و f_2 و ... و f_p درنقطهٔ $t_\circ$ پیوسته باشند.

۶.۵.۹ - **مثال** - فرض می‌کنیم E بخشی از $\mathbf{R}^2$ و $(x_\circ\,,\,y_\circ)$ نقطه‌ای از E و f یک نگاشت E در $\mathbf{R}$ باشد (به‌گفته دیگر f یک تابع حقیقی از دو متغیر حقیقی است)، مفهوم پیوستگی f درنقطهٔ $(x_\circ\,,\,y_\circ)$ برای هر سه دوری معین شده روی $\mathbf{R}^2$ یکی است. بدین معنی که برای هر شمار مثبت ε یک شمار مثبت η به‌قسمی یافت‌شود که:

$$(x,y)\in E\;\;,\;\;|x-x_\circ|\leqslant\eta\;\;,\;\;|y-y_\circ|\leqslant\eta\Longrightarrow|f(x,y)-f(x_\circ\,,\,y_\circ)|\leqslant\varepsilon$$

برخلاف مثالهای ۴.۵.۹ و ۵.۵.۹ مفهوم‌پیوستگی تابع دو متغیری به‌پیوستگی توابع یک متغیری منجر نمی‌شود.

مانند فصل دوم میتوان نشان داد که‌مجموع و حاصلضرب دوتابع حقیقی و پیوسته در E توابع پیوسته‌اند. از اینجا نتیجه می‌شود که‌هرچندجمله‌ای دومتغیری $P(x,y)$ درهمهٔ نقاط $\mathbf{R}^2$ پیوسته است.

در مورد توابع حقیقی چند متغیری نیز مطالب مشابهی وجود دارد.

۷.۵.۹ - **مثال** - فرض‌می‌کنیم E بخشی از $\mathbf{R}^q$ باشد. هرنگاشت E در $\mathbf{R}^p$ مانند

f را می‌توان بصورت زیر نوشت :

$$(x_1, \cdots, x_q) \to (f_1(x_1, \cdots, x_q), f_2(x_1, \cdots, x_q), \cdots, f_p(x_1, \cdots, x_q))$$

که‌درآن f_1 و f_2 و ... و f_p توابعی‌حقیقی‌اند که در E معین شده‌اند (این حالت تعمیم ۵.۵.۹ و ۶.۵.۹ میباشد) . برای اینکه f در E پیوسته باشد بایاوبسنده است که توابع f_1 و f_2 و ... و f_p در E پیوسته باشند (این مطلب از ۷.٤.۹ نتیجه می‌شود) .

چون C با $\mathbf{R}^2$ یکی گرفته می‌شود مثال پیش را میتوان درباره توابع مختلط از یک متغیر مختلط نیز بکار برد .

۸.۵.۹ - درآنچه‌را که گذشت می‌توان فضاهای برداری (یافضاهای آفین) که دارای بعد باپایانی‌می‌باشندجایگزین $\mathbf{R}^p$ها کرد . در اینصورت بابرگزیدن یک مبداء و یک پایه میتوان مطلب را به‌حالت $\mathbf{R}^p$ برگرداند و مانند ۱۰.۳.۹ و ۱۱.۲.۹ نشان داد که نتایج به‌دست آمده به‌مبداء وپایه انتخاب شده بستگی ندارد .

۹.۵.۹ - قضیه - فرض می کنیم E یک فضای متری و a یک نقطهٔ E و d دوری E باشد دراینصورت تابع $x \to d(a,x)$ در E پیوسته‌است .

اثبات - شمار مثبت ε و نقطه x_0 متعلق به E را درنظر می گیریم و فرض می کنیم x نقطه‌ای‌از E باشد که برای آن نابرابری $d(x,x_0) \leqslant \varepsilon$ برقرار است . بنابر ۲.۲.۹ داریم:

$$|d(a,x) - d(a,x_0)| \leqslant d(x,x_0) \leqslant \varepsilon$$

۶.۹ - مجموعه‌های باز ومجموعه‌های بسته

۱.۶.۹ - فرض میکنیم E یک فضای متری و d دوری آن باشد .

تعریف ۱ - یك بخش A از E را بسته گویند هرگاه هر نقطهٔ E که حد یك دنباله از نقاط A است به A متعلق باشد .

تعریف ۲ - یك بخش B از E را باز خوانند اگر برای هر نقطهٔ x_0 از B یك شمار مثبت ε بتوان یافت به‌قسمی‌که هر نقطه x از E که در نابرابری $d(x_0,x) < \varepsilon$ صدق میکند متعلق به B باشد .

۲.۶.۹ - قضیه- برای‌اینکه یك بخش A از E باز باشد بایاو بسنده است که بخش $E - A$ بسته باشد .

اثبات - ۱ - بخش باز A را درنظرمیگیریم وثابت‌میکنیم که $E-A$ بسته است. فرض میکنیم $(x_1, x_2, \ldots)$ دنباله‌ای از نقاط $E-A$ باشد که به سمت نقطه $x \in E$ میگراید. اگر x متعلق به A باشد یک‌شمار مثبت ε وجود دارد به‌قسمی که تمام نقاط E که دوری‌آنها تا x از ε کوچکتراست متعلق به A باشند (زیرا A بازاست). ولی باتوجه به ۱.۳.۹ برای مقادیر بزرگ n داریم $d(x_n, x) < \varepsilon$ و درنتیجه برای این مقادیر n داریم $x_n \in A$ ، و این غیرممکن است زیرا x_n ها نقاطی از $E-A$ می‌باشند . پس x متعلق‌به $E-A$ است وبنابراین $E-A$ بسته‌است.

۲ - فرض میکنیم‌بخش A بازنباشد، میخواهیم ثابت کنیم که $E-A$ بسته نیست. چون A باز نیست ، پس دست کم یک نقطهٔ x از A دارای ویژگی زیر است :

برای هرشمار مثبت ε یک‌نقطه y متعلق به $E-A$ وجود دارد به قسمی که داشته باشیم $d(y, x) < \varepsilon$. اگر ε را به ترتیب $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ بگیریم‌دنباله‌ای‌ازنقاط $E-A$ مانند $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ به‌دست‌می‌آید که برای‌آن‌داریم $d(x_1, x) < 1$ ، $d(x_2, x) < \frac{1}{2}$ ، $d(x_3, x) < \frac{1}{3}$ ، ... چنانکه دیده می‌شود x_n به سمت x میگراید چون x متعلق به $E-A$ نیست پس $E-A$ بسته نیست .

۳.۶.۹ - قضیه اگر A و A' دوبخش باز (بسته) E باشند $A \cup A'$ و $A \cap A'$ نیز باز (بسته) است .

اثبات - فرض‌میکنیم A و A' بخش باز و نقطهٔ x_0 متعلق به $A \cap A'$ باشد . دراینصورت چون x_0 نقطه‌ای از A است پس یک شمار مثبت ε وجود دارد به قسمی که همهٔ نقاط x متعلق به E که دوری آنها تا x_0 از ε کوچکتر است متعلق به A میباشد .

به همین‌ترتیب چون x_0 عنصری‌از A' است پس‌یک‌شمار ε' وجود دارد به‌قسمی که تمام نقاطی‌از E که‌دوری آنها تا x_0 از ε' کوچکتراست متعلق به A' میباشد . فرض‌می کنیم :

$$\varepsilon'' = \inf(\varepsilon, \varepsilon')$$

دراینصورت هرنقطهٔ x از E که دوری‌آن تا x_0 کوچکتر از ε'' است متعلق به A و A'

و درنتیجه متعلق به $A \cap A'$ میباشد . پس مجموعهٔ $A \cap A'$ باز است. اثبات اینکه $A \cup A'$ باز است به راحتی انجام میگیرد و به عهده خواننده واگذار میشود . با توجه به قضیه ۲.۶.۹ و از روی آنچه که گذشت اثبات حالت بخش های بسته نتیجه میشود .

۴.۶.۹ - قضیه - فرض می کنیم $f : E \to \mathbf{R}$ یک تابع پیوسته روی E باشد .

(I) - اگر مجموعهٔ نقاط x از E را به قسمی که $f(x) \geqslant 0$ $(f(x) > 0)$ است با A (با B) نشان دهیم A یک مجموعهٔ بستهٔ (B یک مجموعهٔ باز) است.

(II) - اگر مجموعهٔ نقاط x از E را به قسمی که $f(x) \leqslant 0$ $(f(x) < 0)$ است با A' (با B') بنماییم A' یک مجموعهٔ بسته (B' یک مجموعهٔ باز) است.

(III) - اگر مجموعهٔ نقاط x از E را به قسمی که $f(x) = 0$ $(f(x) \neq 0)$ است با A'' (با B'') نشان دهیم A'' یک مجموعهٔ بسته (B'' یک مجموعهٔ باز) است .

اثبات - فرض می کنیم $(x_1 , x_2 , \ldots)$ یک دنباله از نقاط A باشد که به سمت نقطهٔ x متعلق به E می گراید، دراینصورت برای تمام مقادیر n داریم $f(x_n) \geqslant 0$. پس $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) \geqslant 0$ وبنابراین A بسته است . باتعویض f ، به $-f$ دیده میشود که A' هم یک مجموعه بسته است و از آنجا با توجه به ۳.۶.۹ مجموعهٔ $A'' = A \cap A'$ نیزبسته است. چون مجموعه های B و B' و B'' بترتیب مکمل مجموعه های A و A' و A'' می باشند پس باتوجه به ۲.۶.۹ B و B' و B'' مجموعه های بازمی باشند.

۵.۶.۹ - فرض میکنیم a نقطه‌ای از E و ρ شمار دلخواه بزرگتر یا برابر با صفر باشد بنابر ۹.۵.۹ و ۴.۶.۹ مجموعهٔ نقاط x از E به قسمی که $d(a , x) \leqslant \rho$ است یک مجموعه بسته می باشد. این مجموعه را **گوی بسته** به مرکز a و به شعاع ρ مینامند.

اگر $\rho = 0$ باشد این گوی برابر با $\{a\}$ است .

۶.۶.۹ - مجموعهٔ نقاط x از E به‌قسمیکه $d(a, x) < \rho$ باشد یک مجموعهٔ باز است (۹.۵.۹ و ۴.۶.۹). این مجموعه را **گوی باز** بمرکز a وشعاع ρ مینامند. اگر $\rho = ۰$ باشد این گوی تهی است.

۷.۶.۹ - مجموعهٔ نقاط x متعلق‌به E به‌قسمی‌که $d(a, x) = \rho$ باشد یک‌مجموعهٔ بسته است (۹.۵.۹ و ۴.۶.۹) این مجموعه را **کرهٔ** به مرکز a و به‌شعاع ρ مینامند. اگر $\rho = ۰$ باشد این کره تنها یک نقطه دارد و آن a است.

۸.۶.۹ - اگر E فضای سه بعدی‌معمولی و دوری E همان دوری متداول نقاط فضا باشد واژه‌های تعریف شده در ۵.۶.۹ و ۶.۶.۹ و ۷.۶.۹، با تعریف‌های متداول هندسه سازگار است. درصفحه معمولی به جای گوی و کره به ترتیب واژه‌های **گرده** و **دایره** را بکار میبرند.

۹.۶.۹ - اگر E مجموعهٔ $\mathbf{R}$ و $d(x,y) = |x-y|$ باشد گوی‌های بسته همان فاصله‌های بستهٔ کراندار و گوی‌های باز فاصله‌های باز کراندار وکره‌ها مجموعه‌های یک یادونقطه‌ای‌می‌باشند. ازروی تعریف ۱.۶.۹ دیده می‌شود که فاصله‌های $]-\infty, a]$ و $[a, +\infty[$ مجموعه‌هایی بسته می‌باشند و بنابراین فاصله‌های $]-\infty, a[$ و $]a, +\infty[$ مجموعه‌های بازهستند (۲.۶.۹). برای هردوشمار حقیقی دلخواه a و b فاصله‌هایی‌که به‌صورت $[a, b[$ یا $]a, b]$ می‌باشند نه باز و نه بسته‌اند. بنابراین واژه‌های شمارهٔ ۵.۱۳.۱ کتاب جبر با تعریف‌های بالا سازگار می‌باشد.

۱۰.۶.۹ - در $\mathbf{R}^۲$ مجموعهٔ نقاط (x, y) که دربستگی $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} - ۱ < ۰$ صدق میکنند باز ومجموعهٔ نقاط (x, y) که دربستگی $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} - ۱ \leqslant ۰$ صدق می‌کنند بسته است (۶.۵.۹ و ۴.۶.۹). چنانکه دیده می‌شود میتوان مثالهای زیادی از مجموعه‌های باز و بسته بیان نمود.

۱۱.۶.۹ - فرض میکنیم E یک فضای متری باشد. با استفاده از ۱.۶.۹ دیده

می‌شود که مجموعهٔ $A=E$ هم باز وهم بسته‌است. پس $E-E=\varnothing$ نیزمجموعه‌ای است که هم باز و هم بسته است (۲.۶.۹). این دوحالت استثنایی‌هستند و میتوان نشان داد که در $\mathbf{R}^n$ تنها دومجموعهٔ $\mathbf{R}^n$ و $\varnothing$ وجود دارد که درعین حال باز و بسته‌اند.

باید توجه داشت که دریک فضای متری معمولاً بخش‌های بیشماری وجود دارد که نه باز و نه بسته‌اند. پس اگر بخشی از یک فضای متری باز نباشد نمی‌توان گفت که این بخش بسته است.

فصل دهم
مشتق توابع برداری

تقریباً آنچه‌که دربارهٔ توابع حقیقی یا مختلطمی‌دانیم، به‌توابع برداری تعمیم داده می‌شود. مثلا در این فصل مفهوم مشتق را تعمیم می‌دهیم. مطلبی‌که وبه‌ویژه در هندسه و مکانیک بسیار سودمند است.

۱.۱۰ ـ تعریف

۱.۱.۱۰ ـ فرض‌می‌کنیم I یک فاصله $\mathbf{R}$ و E یک‌فضای برداری نرم‌دار و f یک گسترش I در E باشد. نقطهٔ x_0 متعلق به I وبردار l متعلق به E را درنظرمیگیریم. گوییم f درنقطهٔ x_0 **مشتق‌پذیر** و**مشتق** آن برابر با l است اگر داشته باشیم:

$$\lim_{x\to x_0\,,\,x\neq x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l$$

[چون $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ عنصری از E است‌بنابراین‌عبارت «$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ به‌سمت l میگراید» دارای معنی‌است]. مشتق f درنقطه x_0 را با $f'(x_0)$ نشان میدهند.

۲.۱.۱۰ ـ مانند ۴.۱.۳ میتوان تعریف مشتق را با برابری زیر بیان کرد:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=h[f'(x_0)+o(1)]$$

که درآن $o(1)$ برداری است از E به قسمی‌که وقتی h به سمت ۰ می‌گراید بردار $o(1)$ به سمت صفر میل می‌کند (به گفته دیگر نرم $o(1)$ به سمت ۰ میل می‌کند).

۳.۱.۱۰ ـ فرض می‌کنیم f درنقطهٔ x_0 مشتق‌پذیر باشد. با فرض‌های ۲.۱.۱۰ و با توجه به شماره‌های ۴.۲.۹ و ۹.۵.۹ هنگامیکه $h\to 0$ داریم:

$$\|f'(x_0)+o(1)\| \to \|f'(x_0)\|$$

پس $\|f(x_0+h)-f(x_0)\|$ به سمت ۰ میل میکند و بنابراین f درنقطهٔ x_0 پیوسته است.

۴.۱.۱۰ ـ فضای برداری $E=\mathbf{R}^p$ را بایکی‌ازنرم‌های معمولی‌آن درنظرمیگیریم. برای هرنقطه x متعلق به I داریم:

$$f(x)=(f_1(x)\,,\,\dots\,,\,f_p(x))$$

که درآن f_1 , f_2 , ... , f_p نگاشتهایی از I در $\mathbf{R}$ می‌باشند . مؤلفه‌های بردار $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ عبارتند از شمارهای $\frac{f_i(x)-f_i(x_0)}{x-x_0}$. باتوجه به ۷.۴.۹، برای‌اینکه تابع f درنقطهٔ x_0 مشتق‌پذیر باشد بایاوبسنده است که توابع f_1 , f_2 , ... , f_p درنقطهٔ x_0 دارای مشتق باشند ، دراینصورت خواهیم داشت :

$$f'(x_0)=(f'_1(x_0)\ ,\ \dots\ ,\ f'_p(x_0))$$

بنابراین محاسبه مشتق f به محاسبه مشتق توابع حقیقی برمیگردد . بنا برشمارهٔ ۸.۷.۳ برای‌اینکه f در I ثابت باشد بایاوبسنده است که برای هرنقطه x از E داشته باشیم :

$$f'(x)=0$$

۵.۱.۱۰ - اگر E یک فضای بردای‌حقیقی p بعدی باشد با انتخاب یک پایه در E نتایجی شبیه آنچه که در ۴.۱.۱۰ گذشت به‌دست می‌آید.

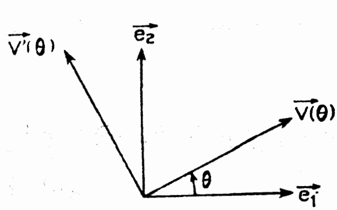
۶.۱.۱۰ - فرض میکنیم $(\vec{e_1}\ ,\ \vec{e_2})$ یک پایهٔ یکه‌ای متعامد (اورتونرمال) صفحهٔ معمولی باشد . برای هرشمار حقیقی θ قرار می‌دهیم:

$$\vec{V}(\theta)=\vec{e_1}\cos\theta+\vec{e_2}\sin\theta$$

بنابراین زاویهٔ دوبردار $(\vec{e_1}\ ,\ \vec{V}(\theta))$ برابر با θ می‌باشد. بنابر ۴.۱.۱۰ داریم :

$$\vec{V}'(\theta)=\vec{e_1}(-\sin\theta)+\vec{e_2}\cos\theta=\vec{e_1}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+\vec{e_2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$$

بدین‌ترتیب $V'(\theta)$ ازچرخش $V(\theta)$ به زاویه $\frac{\pi}{2}$ بهدست می‌آید.



شکل ۵۰

۷.۱.۱۰ ـ فضای برداری نرم‌دار E وفاصله I از $\mathbf{R}$ داده شده‌اند. فرض می‌کنیم A یک فضای آفین وابسته به E و $x \to M(x)$ یک نگاشت I در A باشد. اگر در A یک‌مبداء O برگزینیم، نگاشت $x \to M(x)$ با نگاشت $x \to f(x)=M(x)-O$ که یک‌نگاشت I در E است، یکی گرفته می‌شود. چنانچه f درنقطهٔ $x_\circ$ مشتق‌پذیر ومشتق آن برابر l باشد، گوییم که نگاشت $x \to M(x)$ در $x_\circ$ مشتق‌پذیر و مشتق آن برابر l است. این مشتق را با $M'(x_\circ)$ نشان میدهند. مشتق تابع $x \to M(x)$ که به روش بالا تعریف شد به مبداء انتخاب شده در A بستگی ندارد زیرا داریم:

$$\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}=\frac{M(x)-O-(M(x_\circ)-O)}{x-x_\circ}=\frac{M(x)-M(x_\circ)}{x-x_\circ}$$

و این عبارت بستگی به O ندارد.

باید توجه داشت که مشتق یک‌تابع f که مجموعه مقادیرش A باشد نقطه‌ای از A نیست بلکه برداری از E است.

۲.۱۰ ـ مشتقهای پی‌درپی

۱.۲.۱۰ ـ علاوه برفرض‌های ۱.۱.۱۰، تابع f را در تمام نقاط I مشتق پذیر می‌گیریم. دراین‌صورت $x \to f'(x)$ یک گسترش I در E است، که آنرا تابع مشتق f مینامند. ممکن‌است تابع f' نیزدارای‌مشتق باشد و ...، این‌مشتق‌های پی‌درپی‌را به‌یکی از صورت‌های زیر می‌نویسند:

$$f', f'', \dots, f^{(n)}, \dots$$

$$f_x, f_{x^۲}, \dots, f_{x^n}, \dots$$

$$\frac{df}{dx}, \frac{d^۲f}{dx^۲}, \dots, \frac{d^nf}{dx^n}, \dots$$

۲.۲.۱۰ ـ مانند ۴.۱.۱۰ فرض‌میکنیم $E=\mathbf{R}^p$ و $f(x)=(f_۱(x), \dots, f_p(x))$ باشد. دراینصورت برای اینکه f دارای مشتق مرتبه n ام باشد بایاوبسنده است که توابع $f_۱, f_۲, \dots, f_p$ دارای مشتق مرتبه n ام باشند، واگر چنین باشد داریم:

$$f^{(n)}(x)=(f_۱^{(n)}(x), f_۲^{(n)}(x), \dots, f_p^{(n)}(x))$$

این برابری از ۴.۱.۱۰ نتیجه می‌شود .

۳.۲.۱۰ ـ بافرض‌های ۷.۱.۱۰ مشتق‌های پی‌درپی تابع $x \to M'(x)$ را (اگر وجود داشته باشند) به‌صورت $x \to M''(x)$, $x \to M'''(x)$, ... , $x \to M^{(n)}(x)$, ... می‌نویسند .

۳.۱۰ـ دستورهای محاسبه

۱.۳.۱۰ ـ **مشتق یک مجموع** ـ اگر توابع $f : I \to E$, $g : I \to E$ درنقطهٔ x_0 مشتق‌پذیر باشند ، تابع $f+g : I \to E$ نیز درنقطهٔ x_0 مشتق پذیر است و داریم :

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

زیرا برای مقادیر $x \neq x_0$ می‌توان نوشت :

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

دوجمله سمت راست برابری‌بالا عنصرهایی‌از E هستندکه، هنگامیکه $x \to x_0$ ،به‌ترتیب به سمت $f'(x_0)$ و $g'(x_0)$ میگرایند. اثبات‌اینکه مجموع آنها به سمت $f'(x_0)+g'(x_0)$ میگراید ساده، است و به عهده خواننده واگذار میشود .

۲.۳.۱۰ ـ فرض میکنیم توابع $f : I \to E$ و $\lambda : I \to \mathbf{R}$ در نقطهٔ x_0 مشتق پذیر باشند. دراین‌صورت تابع λf (منظور از λf نگاشت I در E است‌که با $x \to \lambda(x)f(x)$ تعریف شده است) نیز درنقطهٔ x_0 مشتق‌پذیر است و داریم :

$$(\lambda f)'(x_0)=\lambda'(x_0)f(x_0)+\lambda(x_0)f'(x_0)$$

زیرا برای $x \neq x_0$ می‌توان نوشت :

$$\frac{(\lambda f)(x)-(\lambda f)(x_0)}{x-x_0}=\frac{\lambda(x)-\lambda(x_0)}{x-x_0}f(x)+\lambda(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

هنگامیکه x با مقادیر مخالف با x_0 به سمت x_0 میل کند داریم :

$$\frac{\lambda(x)-\lambda(x_0)}{x-x_0} \to \lambda'(x_0)$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to f'(x)$$

$$f(x) \to f(x_0)$$

ازاینجا نتیجه می‌شود که عبارت بالا به سمت $\lambda'(x_0)f(x_0)+\lambda(x_0)f'(x_0)$ میگراید.

۳.۳.۱۰- فرض میکنیم E فضای برداری بردارهای آزاد فضای معمولی باشد. دو نگاشت I در E مانند $x \to \vec{V}_1(x)$ و $x \to \vec{V}_2(x)$ را، که درنقطهٔ x_0 مشتق‌پذیرند، در نظر میگیریم. دراین‌صورت تابع $x \to \vec{V}_1(x) \cdot \vec{V}_2(x)$ (منظور از $\vec{V}_1(x) \cdot \vec{V}_2(x)$ حاصل‌ضرب داخلی دوبردار $\vec{V}_1(x)$ و $\vec{V}_2(x)$ می‌باشد) درنقطهٔ x_0 مشتق پذیر است و داریم:

$$(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)'(x_0)=\vec{V}_1'(x_0)\cdot\vec{V}_2(x_0)+\vec{V}_1(x_0)\cdot\vec{V}_2'(x_0)$$

اثبات این مطلب مانند ۲.۳.۱۰ انجام می‌پذیرد. برای $x \neq x_0$ می‌توان نوشت:

$$\frac{\vec{V}_1(x)\cdot\vec{V}_2(x)-\vec{V}_1(x_0)\cdot\vec{V}_2(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\frac{\vec{V}_1(x)-\vec{V}_1(x_0)}{x-x_0}\cdot\vec{V}_2(x)+\vec{V}_1(x_0)\cdot\frac{\vec{V}_2(x)-\vec{V}_2(x_0)}{x-x_0}$$

هنگامیکه x به سمت x_0 میگراید و $x \neq x_0$ است داریم:

$$\frac{\vec{V}_1(x)-\vec{V}_1(x_0)}{x-x_0} \to \vec{V}_1'(x_0)$$

$$\frac{\vec{V}_2(x)-\vec{V}_2(x_0)}{x-x_0} \to \vec{V}_2'(x_0)$$

$$\vec{V}_2(x) \to \vec{V}_2(x_0)$$

ازاینجا نتیجه می‌شود که عبارت بالا به سمت $\vec{V}_1'(x_0)\cdot\vec{V}_2(x_0)+\vec{V}_1(x_0)\cdot\vec{V}_2'(x_0)$ می گراید.

۱۰.۳.٤ ـ درحالت ویژه‌ای که $\vec{V}_1(x)=\vec{V}_2(x)$ است ، داریم :

$$(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1)'(x_0)=2\vec{V}_1(x_0)\cdot \vec{V}_1'(x_0)$$

۱۰.۳.٥ ـ فرض میکنیم $\vec{V}_1$ درفاصله I مشتق‌پذیر باشد. برای‌اینکه $(\vec{V}_1\cdot\vec{V}_1)(x)$ شمار ثابتی باشد (به گفته دیگر برای‌اینکه درازای $\vec{V}_1$ ثابت باشد) بایاوبسنده‌است که داشته باشیم $\vec{V}_1(x)\cdot\vec{V}_1'(x)=0$ (به عبارت دیگر بایاوبسنده است که $\vec{V}_1$ بر $\vec{V}_1'$ عمود باشد) . این مطلب نتیجه‌ای از ۱۰.۳.٤ است .

۱۰.۳.٦ـ بازفرض میکنیم E فضای برداری بردارهای آزادفضای معمولی و $x\to\vec{V}_1(x)$ و $x\to\vec{V}_2(x)$ دو نگاشت I در E باشند که درنقطهٔ x_0 مشتق‌پذیرند . دراین‌صورت گسترش $x\to\vec{V}_1(x)\wedge\vec{V}_2(x)$ درنقطهٔ x_0 مشتق‌پذیر است و داریم :

$$(\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2)'(x_0)=\vec{V}_1'(x_0)\wedge\vec{V}_2(x_0)+\vec{V}_1(x_0)\wedge\vec{V}_2'(x_0)$$

اثبات این مطلب درست مانند ۱۰.۳.۲ و ۱۰.۳.۳ است .

۱۰.۳.۷ ـ فرض میکنیم I یک فاصله **R** و E یک فضای برداری نرم‌دار باشد . نگاشت‌های $u:I\to\mathbf{R}$ و $f:J\to E$ را ، که درآن J یک‌فاصله **R** وشامل $u(I)$ است ، درنظر می‌گیریم . پس می‌توان تابع $f\circ u=F$ را تشکیل داد . F یک تابع I در E می‌باشد. فرض میکنیم u درنقطهٔ x_0 و f درنقطهٔ $u(x_0)$ مشتق‌پذیر باشند . دراینصورت F درنقطهٔ x_0 مشتق‌پذیر است و داریم :

$$F'(x_0)=f'(u(x_0))u'(x_0)$$

اثبات این مطلب درست مانند اثبات ۳.٤.۸ است .

۱۰.٤ ـ دستور تیلر ـ یونگ

قضیه ـ فضای برداری نُرم‌دار E با بعد باپایان وفاصله I از R داده شده‌اند. فرض می‌کنیم f یک نگاشت I در E است که دارای مشتقهای پی‌درپی پیوسته تا مرتبه n می‌باشد. دراین‌صورت اگر x یک نقطهٔ درونی I باشد هنگامیکه h به‌سمت ۰ میگراید داریم :

$$(۱) \qquad f(x+h)=f(x)+\frac{h}{۱!}f'(x)+\frac{h^{۲}}{۲!}f''(x)+\cdots+\frac{h^{n-۱}}{(n-۱)!}f^{(n-۱)}(x)+\frac{h^n}{n!}[f^{(n)}(x)+o(۱)]$$

اثبات ـ یک پایهٔ $(e_1, \ldots, e_q)$ از E را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_q(x)$ مؤلفه‌های $f(x)$ باشند. باتوجه به ۲.۲.۱۰، f_i هاتوابعی حقیقی و دارای مشتقهای پیوسته تا مرتبهٔ n میباشند. پس با استفاده از ۳.۱.۷ داریم:

$$(۲) \quad \begin{cases} f_1(x+h)=f_1(x)+\dfrac{h}{۱!}f_1'(x)+\cdots \\ \qquad +\dfrac{h^{n-۱}}{(n-۱)!}f_1^{(n-۱)}(x)+\dfrac{h^n}{n!}[f_1^{(n)}(x)+o_1(۱)] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_q(x+h)=f_q(x)+\dfrac{h}{۱!}f_q'(x)+\cdots \\ \qquad +\dfrac{h^{n-۱}}{(n-۱)!}f_q^{(n-۱)}(x)+\dfrac{h^n}{n!}[f_q^{(n)}(x)+o_q(۱)] \end{cases}$$

که درآن‌ها، هنگامیکه h به سمت صفر میگراید، توابع $o_1(۱), \ldots, o_q(۱)$ به سمت صفر میل میکنند.

اما بنابر ۲.۲.۱۰، $\frac{h^i}{i!}f_1^{(i)}(x), \frac{h^i}{i!}f_2^{(i)}(x), \ldots, \frac{h^i}{i!}f_q^{(i)}(x)$

مؤلفه‌های بردار $\frac{h^i}{i!}f^{(i)}(x)$ و $o_1(۱), o_2(۱), \ldots, o_q(۱)$ مؤلفه‌های برداری مانند $o(۱)$ میباشند (هنگامی که h به سمت صفر میگراید $o(۱)$ به سمت بردار صفر میل میکند). بنابراین فرمول‌های (۲) به‌صورت فرمول (۱) خلاصه می‌شود.

فصل یازدهم

مشتقهای نسبی

به‌جای تعمیم فصل های چهارم تا هشتم به‌توابع برداری، می‌توان آنها را به‌توابع چند متغیری حقیقی تعمیم داد. در این فصل به‌اختصار چگونگی نظریه مشتق و فرمول تیلر را در این زمینه، مطالعه می کنیم.

۱.۱۱ - تعریف

۱.۱.۱۱ - زیر مجموعهٔ باز U از $\mathbf{R}^p$ و تابع حقیقی یا مختلط $M \to f(M)$ را که در U معین است درنظر می گیریم. میخواهیم p مشتق نسبی f را دریک نقطهٔ M_0 از U تعریف کنیم. برای این منظور به‌حالت $p=3$ اکتفا می کنیم. برای $p>3$ این مطلب به‌آسانی قابل تعمیم است.

۲.۱.۱۱ - فرض می کنیم تابع حقیقی ویا مختلط:

$$M=(x, y, z) \to f(M)=f(x, y, z)$$

دریک زیر مجموعهٔ باز U از $\mathbf{R}^3$ معین و $M_0=(x_0, y_0, z_0)$ نقطه‌ای از U باشد. تابع g، که به x شمار $f(x, y_0, z_0)$ را وابسته می کند، تابعی است ازتنها متغییر حقیقی x و چون U یک زیر مجموعهٔ باز $\mathbf{R}^3$ است تابع g دست‌کم برای مقادیر کوچک $|x-x_0|$ معین است. اگر g در x_0 دارای مشتق باشد، مشتق آن را در این نقطه **مشتق نسبی مرتبهٔ اول f نسبت به x درنقطهٔ** (x_0, y_0, z_0) مینامند و به یکی از صورت‌های زیر می‌نویسند:

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$$

به‌همین‌ترتیب، با درنظر گرفتن توابع $y \to f(x_0, y, z_0) \quad , \quad z \to f(x_0, y_0, z)$ **مشتقهای نسبی مرتبهٔ اول f را نسبت به y و z در نقطهٔ** (x_0, y_0, z_0) تعریف می کنند و به‌صورت‌های زیر می‌نویسند:

$$f'_y(x_0, y_0, z_0) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$$

$$f'_z(x_0, y_0, z_0) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$$

۳.۱.۱۱ - **مثال** - مشتقهای نسبی تابع $f(x, y) = x^y$ ، که برای $x > 0$ معین است ، عبارتند از :

$$f'_y(x, y) = x^y \operatorname{Log} x \quad , \quad f'_x(x, y) = yx^{y-1}$$

۴.۱.۱۱ - **مثال** - اگر $f(x,y,z) = x+y+z$ باشد خواهیم داشت :

$$f'_x(x,y,z) = 1 \quad , \quad f'_y(x,y,z) = 1 \quad , \quad f'_z(x,y,z) = 1$$

۵.۱.۱۱ - **مثال** - برای تابع $f(x,y) = xy$ داریم :

$$f'_x(x,y) = y \quad , \quad f'_y(x,y) = x$$

۶.۱.۱۱ - **مثال** - فرض می‌کنیم $f(x,y) = x$ (همواره می‌توان $f(x,y) = x$ را تابعی از دومتغیر x و y دانست که در آن مقادیر تابع بستگی به y ندارند) داریم:

$$f'_x(x,y) = 1 \quad , \quad f'_y(x,y) = 0$$

۷.۱.۱۱ - **مثال** - اگر تابع f ثابت باشد ، مشتقات نسبی آن همگی برابر باصفرند.

۸.۱.۱۱ - فرض می‌کنیم تابع حقیقی ویامختلط f دریک زیر مجموعهٔ باز U از $\mathbf{R}^3$ معین باشد . اگر f'_x, f'_y, f'_z برای همهٔ نقاط (x, y, z) از U وجود داشته و پیوسته باشند ، تابع f را **دارای مشتق پیوسته در** U مینامند . اگر f و g دارای مشتق پیوسته در U باشند توابع $f+g$, fg , e^f , $\sin f$, ... نیز دارای مشتق پیوسته در U خواهند بود ، و چنانچه برای همهٔ نقاط U تابع g مخالف باصفر باشد تابع $\frac{f}{g}$ نیز دارای مشتق پیوسته در U می‌باشد. پس توابع معمولی (مثلاً چند جمله‌ای‌ها) دارای مشتق پیوسته‌اند .

۲.۱۱ـ مشتق یک تابع مرکب

۱.۲.۱۱ ـ قضیه ـ فرض می‌کنیم تابع حقیقی و یا مختلط f در یک زیر مجموعهٔ باز U از R^2 دارای مشتق پیوسته و توابع حقیقی u و v در یک فاصلهٔ I از R دارای مشتق پیوسته باشند، به قسمی که برای همهٔ مقادیر t از I نقطهٔ $(u(t), v(t))$ متعلق به U باشد. دراین‌صورت تابع مرکب:

$$t \to F(t) = f(u(t), v(t))$$

دارای مشتق پیوسته در I می‌باشد و داریم:

$$F'(t) = f'_x(u(t), v(t))\, u'(t) + f'_y(u(t), v(t))\, v'(t)$$

اثبات ـ اگر t_0 یک نقطه از I باشد، چون $(u(t_0), v(t_0))$ متعلق به زیر مجموعهٔ باز U است بنابرتعریف ۱.۶.۹ یک شمار $\alpha > 0$ وجود دارد به قسمی که:

$$|x - u(t_0)| + |y - v(t_0)| \leqslant \alpha \Longrightarrow (x,y) \in U \qquad (۱)$$

همچنین یک شمار دیگر $\beta > 0$ یافت می‌شود به قسمی که:

$$|t - t_0| \leqslant \beta \Longrightarrow |u(t) - u(t_0)| + |v(t) - v(t_0)| \leqslant \alpha \qquad (۲)$$

پس از این فرض می‌کنیم که $|t - t_0| \leqslant \beta$ باشد. داریم:

$$F(t) - F(t_0) = f(u(t), v(t)) - f(u(t_0), v(t)) + f(u(t_0), v(t)) - f(u(t_0), v(t_0))$$

از فرمول (۱) و مشتق‌پذیری f نتیجه می‌شود که تابع $x \to f(x, v(t))$ در فاصلهٔ بستهٔ I به انجامهای $u(t_0)$ و $u(t)$ معین و دارای مشتق میباشد [زیرا $(x, v(t))$ متعلق به U است] . پس با استفاده از قضیهٔ نموهای باپایان داریم:

$$f(u(t), v(t)) - f(u(t_0), v(t)) = (u(t) - u(t_0))\, f'_x(a, v(t))$$

که درآن a متعلق به فاصلهٔ بستهٔ I میباشد. به‌همین ترتیب یک شمار b متعلق به‌فاصلهٔ بسته به‌انجامهای $v(t_0)$, $v(t)$ وجود دارد به قسمی که داریم:

$$f(u(t_0), v(t)) - f(u(t_0), v(t_0)) = (v(t) - v(t_0))\, f'_y(u(t_0), b)$$

پس اگر $t \neq t_0$ باشد خواهیم داشت :

$$\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0} = \frac{u(t)-u(t_0)}{t-t_0} f'_x(a,v(t)) + \frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0} f'_y(u(t_0)\ ,\ b)$$

هنگامی که t با مقادیر مخالف با t_0 به سمت t_0 می‌گراید ، $u(t)$ و a به سمت $u(t_0)$ ؛ $v(t)$ و b به سمت $v(t_0)$ ؛ $\frac{u(t)-u(t_0)}{t-t_0}$ به‌سمت $u'(t_0)$ و $\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$ به سمت $v'(t_0)$ میل می‌کند. پس باتوجه به‌اینکه توابع f'_x , f'_y پیوسته‌اند دیده می‌شود که $\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0}$ به‌سمت $u'(t_0)f'_x(u(t_0)\ ,v(t_0))+v'(t_0)f'_y(u(t_0)\ ,v(t_0))$ می گراید .

۲.۲.۱۱ - **مثال** - چنانچه توابع $t \to u(t)$, $t \to v(t)$ دارای مشتق پیوسته مرتبه اول باشند و داشته باشیم $u(t) > 0$ ، می‌توان تابع u^v را تشکیل داد . درشمارهٔ ۳.۱.۱۱ مشتقهای نسبی x^y را محاسبه کردیم . با بکار بردن ۱.۲.۱۱ مشتق تابع $t \to u(t)^{v(t)}$ چنین خواهد شد :

$$(u^v)' = v\,u^{v-1}\,u' + u^v(\operatorname{Log} u)v'$$

[این‌نتیجه‌را با مشتق گیری عبارت $\operatorname{Log}(u^v) = v\operatorname{Log} u$ نیز می‌توان به دست‌آورد] .

۳.۲.۱۱ - **نتیجه - فرض می کنیم تابع حقیقی و یا مختلط f در یک بخش باز U از R^2 دارای مشتقهای پیوستهٔ و a , b , h , k متعلق به R باشند. قرار می‌دهیم $u(t)=a+ht$ و $v(t)=b+kt$. دراین‌صورت‌هنگامی که‌تابع $t \to F(t)=f(a+ht\ ,\ b+kt)=f(u\ ,\ v)$ معین‌است مشتق‌آن چنین خواهد شد :**

$$F'(t) = h\,f'_x(u\ ,\ v) + k\,f'_y(u\ ,\ v)$$

این مطلب حالت ویژه‌ای از ۱.۲.۱۱ است .

۴.۲.۱۱ - **نتیجه ـ فرض‌می کنیم‌برای تمام xهای متعلق به فاصلهٔ بستهٔ به‌انجامهای a و $a+h$ و برای تمام y های متعلق به‌فاصلهٔ بسته به‌انجامهای**

b و $k+b$ داشته باشیم $(x,y)\in U$ ، $|f'_x(x,y)|\leqslant M$ و $|f'_y(x,y)|\leqslant N$ ،
دراین‌صورت خواهیم داشت :

$$|f(a+h\,,\,b+k)-f(a,b)|\leqslant |h|M+|k|N$$

زیرا داریم :

$$|f(a+h\,,\,b+k)-f(a\,,\,b)|=|F(1)-F(0)|=|\int_0^1 F'(t)dt|$$

$$=|\int_0^1 (hf'_x(a+ht\,,\,b+kt)+kf'_y(a+ht\,,\,b+kt))dt|$$

$$\leqslant\int_0^1 (|h|M+|k|N)dt=|h|M+|k|N$$

۱۱.۲.۵ - درمحاسبهٔ خطاها ازنتیجه بالا استفاده می‌کنند. فرض می‌کنیم به‌جای مقادیر «دقیق» متغیرهای x_0 و y_0 مقادیر «تقریبی» x_1 و y_1 را می‌شناسیم ومیدانیم که $|x_0-x_1|\leqslant\varepsilon$ ، $|y_0-y_1|\leqslant\varepsilon'$. دراینصورت اگر برای $|x-x_0|\leqslant\varepsilon$ و $|y-y_0|\leqslant\varepsilon'$ داشته باشیم $|f'_x(x\,,\,y)|\leqslant M$ ، $|f'_y(x\,,\,y)|\leqslant N$ ، برای‌خطای $f(x_1\,,\,y_1)-f(x_0\,,\,y_0)$ درمورد مقدار f داریم :

$$|f(x_1\,,\,y_1)-f(x_0\,,\,y_0)|\leqslant\varepsilon M+\varepsilon' N$$

۱۱.۲.۶ - **نتیجه - فرض می‌کنیم تابع حقیقی ویا مختلط f در بخش U از $\mathbf{R}^2$ دارای‌مشتقهای‌پیوسته و $(a\,,\,b)$ متعلق‌به U باشد. دراین‌صورت هنگامیکه $(h\,,\,k)$ به‌سمت $(0\,,\,0)$ میل میکند داریم :**

$$f(a+h\,,\,b+k)=f(a\,,\,b)+hf'_x(a\,,\,b)+kf'_y(a\,,\,b)+(|h|+|k|)\,o(1)$$

زیرا :

$$f(a+h\,,\,b+k)=f(a\,,\,b)+hf'_x(a\,,\,b)+kf'_y(a\,,\,b)+g(h\,,\,k)$$

که درآن با توجه به مطالب شمارهٔ ۱۱.۲.۳ داریم :

$$g(h,k)=F(1)-F(0)-hf'_x(a,b)-kf'_y(a,b)$$

$$=\int_0^1 F'(t)dt-hf'_x(a,b)-kf'_y(a,b)$$

$$=\int_0^1 (hf'_x(a+ht\ ,\ b+kt)+kf'_y(a+ht\ ,b+kt))dt$$

$$-\int_0^1 (hf'_x(a,b)+kf'_y(a,b)dt$$

$$=\int_0^1 [h(f'_x(a+ht\ ,b+kt)-f'_x(a,b))$$

$$+k(f'_y(a+ht\ ,\ b+kt)-f'_y(a,b))]dt$$

فرض می‌کنیم $\varepsilon(h,k)$ و $\varepsilon'(h,k)$ به‌ترتیب کناره‌های بالای $|f'_x(x,y)-f'_x(a,b)|$ و $|f'_y(x,y)-f'_y(a,b)|$ برای $|x-a|\leqslant h$ و $|y-b|\leqslant k$ و $\varepsilon(h,k)\geqslant\varepsilon'(h,k)$ باشد. چون f'_x و f'_y پیوسته هستند، هنگامیکه (h,k) به‌سمت $(0,0)$ میگراید، شمارهای $\varepsilon(h,k)$ و $\varepsilon'(h,k)$ به‌سمت صفر میل می‌کنند. به‌علاوه داریم:

$$|g(h,k)|\leqslant\int_0^1 (|h|\varepsilon(h,k)+|k|\varepsilon'(h,k))dt\leqslant(|h|+|k|)\,\varepsilon'(h,k)$$

پس هنگامیکه (h,k) به‌سمت $(0,0)$ میگراید خواهیم داشت:

$$g(h,k)=(|h|+|k|)\,o(1)$$

۷.۲.۱۱ - به‌آسانی می‌توان قضیهٔ ۱.۲.۱۱ و نتیجه‌های آنرا در حالتیکه f یک تابع ۳ , ٤ , ... ، متغیری است تعمیم داد.

۸.۲.۱۱ - هم‌چنین قضیه ۱.۲.۱۱ هنگامیکه u و v نیزتوابع چندمتغیری باشند تعمیم

پذیر است. بعنوان مثال می‌توان قضیهٔ زیر را اثبات کرد:

قضیه - فرض میکنیم تابع حقیقی و یا مختلط f در یك بخش باز U از R^3 دارای مشتق پیوسته و توابع u و v و w در یك بخش باز U' از R^2 دارای مشتق پیوسته باشند به‌طوری‌که برای $(s,t)\in U'$، نقطهٔ:

$$(u(s,t)\,,\,v(s,t)\,,\,w(s,t))$$

متعلق به U باشد. در این صورت تابع مرکب:

$$(s,t)\to F(s,t)=f(u(s,t)\,,\,v(s,t)\,,\,w(s,t))$$

که در U' معین‌است، دارای مشتق پیوسته می‌باشد و داریم:

$$(1)\quad F'_s(s,t)=f'_x(u,v,w)u'_s(s,t)+f'_y(u,v,w)v'_s(s,t)+f'_z(u,v,w)w'_s(s,t)$$

$$(2)\quad F'_t(s,t)=f'_x(u,v,w)u'_t(s,t)+f'_y(u,v,w)v'_t(s,t)+f'_z(u,v,w)w'_t(s,t)$$

اثبات - متغیر s را ثابت فرض می‌کنیم. بنابراین توابع $u(s,t)$ و $v(s,t)$ و $w(s,t)$ توابعی از تنها متغیر t هستند. با توجه به ۱.۲.۱۱، تابع $t\to F(s,t)$ مشتق پذیر است و مشتق آن، که همان مشتق نسبی $F'_t(s,t)$ می‌باشد، به‌وسیلهٔ فرمول (۲) به‌دست می‌آید. به‌همین ترتیب فرمول (۱) نیز ثابت می‌شود. این فرمول‌ها نشان می‌دهند که F'_s و F'_t توابع پیوسته‌ای از (s,t) میباشند و بنابراین F دارای مشتق پیوسته است.

۱۱ . ۳ـ مشتق‌های نسبی مرتبهٔ دوم

۱.۳.۱۱ - فرض می‌کنیم تابع حقیقی ویا مختلط $(x,y,z)\to f(x,y,z)$ در یك مجموعهٔ باز U از R^3 معین و مشتقهای نسبی f'_x و f'_y و f'_z نیز در مجموعهٔ U معین باشند. اگر f'_x دارای مشتقهای نسبی $(f'_x)'_x$ و $(f'_x)'_y$ و $(f'_x)'_z$ باشد، این مشتقها را به‌صورت:

$$f''_{x^2}\;,\;f''_{xy}\;,\;f''_{xz}$$

نشان می‌دهند (دراینجا منظور از x^2 و xy و xz حاصل ضرب x در x و y و z نیست) .
به‌همین ترتیب مشتقهای نسبی توابع f'_y و f'_z را (درصورت وجود) با :

$$f''_{yx} \ , \ f''_{y^2} \ , \ f''_{yz}$$

$$f''_{zx} \ , \ f''_{zy} \ , \ f''_{z^2}$$

نشان می‌دهند. مشتق های بالا را بصورت‌های :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \ \ldots \ , \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

نیز می‌نویسند .

۲.۳.۱۱ - **مثال** - در مورد تابع $f(x,y)=x^y$ ، $(x>0)$ دیدیم که :

$$f'_x = yx^{y-1} \quad , \quad f'_y = x^y \operatorname{Log} x$$

از اینجا نتیجه میشود که :

$$f''_{x^2} = y(y-1)x^{y-2}$$

$$f''_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1}\operatorname{Log} x$$

$$f''_{yx} = yx^{y-1}\operatorname{Log} x + x^y \frac{1}{x}$$

$$f''_{y^2} = x^y \ (\operatorname{Log} x)^2$$

به‌طوری که درمثال بالا دیده می‌شود $f''_{xy} = f''_{yx}$ است. در قضیهٔ زیر ثابت‌می‌کنیم که‌این برابری یک ویژگی کلی است.

۳.۳.۱۱ - **قضیه - فرض می‌کنیم تابع حقیقی (یا مختلط) $(x,y) \to f(x,y)$ در یك بخش باز A از R^2 ، معین و دارای مشتقهای نسبی مرتبهٔ اول و دوم پیوسته باشد. دراین صورت داریم :**

$$f''_{xy} = f''_{yx}$$

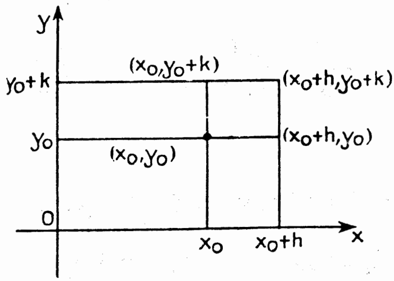
اثبات - قضیه را برای تابع حقیقی f ثابت می‌کنیم (درحالتی‌که f مختلط باشد اثبات قضیه به‌آسانی به‌حالت حقیقی برمی‌گردد). فرض می‌کنیم (x_0, y_0) نقطه‌ای از A باشد . نقطهٔ (x,y) را آنقدر نزدیک به (x_0, y_0) می‌گیریم که (x,y) متعلق به A

باشد و قرار می‌دهیم :

$$u=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+k)+f(x_0,y_0) \quad (۱)$$

$$F(x)=f(x,y_0+k)-f(x,y_0) \quad (۲)$$

$$G(y)=f(x_0+h,y)-f(x_0,y) \quad (۳)$$



شکل ۱۰

پس خواهیم داشت :

$$u=F(x_0+h)-F(x_0) \quad (٤)$$

و همچنین :

$$u=G(y_0+k)-G(y_0) \quad (٥)$$

بنابر (۲) تابع F در فاصلهٔ‌بسته به‌انجامهای x_0 و x_0+h مشتق پذیر است‌وداریم:

$$F'(x)=f'_x(x,y_0+k)-f'_x(x,y_0)$$

چنانکه در برابری (٤) قضیه نموهای باپایان را به‌کار بریم خواهیم داشت :

$$u=hF'(x_0+\theta h)=h[f'_x(x_0+\theta h,y_0+k)-f'_x(x_0+\theta h,y_0)]$$

که در آن $0<\theta<1$ است. به‌علاوه چون تابع $y\to f'_x(x_0+\theta h,y)$ مشتق پذیر و مشتق آن برابر با $f''_{xy}(x_0+\theta h,y)$ میباشد ، می‌توان قضیه نموهای باپایان را در مورد عبارت داخل کروشه بکار برد و چنین نوشت :

$$u=hkf''_{xy}(x_0+\theta h,y_0+\theta_1 k)$$

که در آن $0<\theta_1<1$ می‌باشد. چنانچه این استدلال را برای‌برابری‌های (۳) و (٥) نیز بکار بریم خواهیم داشت :

$$u=kG'(y_0+\theta_2 k)=k[f'_y(x_0+h\,,\,y_0+\theta_2 k)-f'_y(x_0\,,\,y_0+\theta_2 k)]$$
$$=khf''_{yx}(x_0+\theta_3 h\,,\,y_0+\theta_2 k)$$

که درآن $1>\theta_2>0$ و $1>\theta_3>0$ است. اگر $h\neq 0$ و $k\neq 0$ باشد از مقایسه دو مقدار u نتیجه می‌شود :

$$f''_{xy}(x_0+\theta h\,,\,y_0+\theta_1 k)=f''_{yx}(x_0+\theta_3 h\,,\,y_0+\theta_2 k) \qquad (6)$$

هنگامی‌که $(h\,,\,k)$ به‌سمت $(0\,,\,0)$ می‌گراید ، پیوستگی f''_{xy} و f''_{yx} نشان می‌دهد که طرف اول برابری (۶) به‌سمت $f''_{xy}(x_0\,,\,y_0)$ و طرف دوم آن به‌سمت $f''_{yx}(x_0\,,\,y_0)$ میل میکند. پس‌داریم :

$$f''_{xy}(x_0\,,\,y_0)=f''_{yx}(x_0\,,\,y_0)$$

۴.۳.۱۱ - **تعمیم قضیهٔ بالا** - فرض می‌کنیم تابع :

$$(x_1\,,x_2\,,\cdots,x_n)\rightarrow f(x_1\,,x_2\,,\cdots,x_n)$$

در یک بخش باز U از $\mathbf{R}^n$ معین ودارای مشتقهای نسبی مرتبه اول و دوم پیوسته باشد. دراین صورت داریم :

$$f''_{x_i x_j}=f''_{x_j x_i}$$

زیرا مثلاً اگر $i=1$ و $j=2$ باشد $f''_{x_1 x_2}$ و $f''_{x_2 x_1}$ عبارتند از مشتقهای تابع دو متغیری :

$$(x_1\,,x_2)\rightarrow f(x_1\,,x_2\,,x_3^0,\cdots,x_n^0)$$

بنابراین به‌حالت توابع دو متغیری برگشته‌ایم.

۱۱ . ۴ - مشتقهای نسبی پی‌درپی

۱.۴.۱۱ - با استفاده از روش بازگشت مشتقهای نسبی مرتبهٔ ۳ ، مرتبهٔ ۴ ، ... ، مرتبهٔ n را تعریف می‌کنند .

۲.۴.۱۱ - مثلاً اگر تابع $(x\,,y)\rightarrow f(x\,,y)$ در یک بخش باز $\mathbf{R}^2$ معین و دارای مشتقهای نسبی پی درپی پیوسته تا مرتبهٔ ۳ باشد ، با توجه به‌شمارهٔ ۳.۳.۱۱ خواهیم داشت :

$$f'''_{x^2 y} = f'''_{xyx} = f'''_{yx^2}$$

$$f'''_{xy^2} = f'''_{yxy} = f'''_{y^2 x}$$

بنابراین مشتقهای نسبی مرتبهٔ سوم تابع f عبارتنداز :

$$f'''_{x^3} \quad , \quad f'''_{x^2 y} \quad , \quad f'''_{xy^2} \quad , \quad f'''_{y^3}$$

که آنها را به‌صورت زیر نیز می‌نویسند :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} , \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} , \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} , \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

مشتقهای نسبی مرتبهٔ p ام تابع f (در صورتی‌که پیوسته باشند) عبارتند از :

$$f^{(p)}_{x^p} \quad , \quad f^{(p)}_{x^{p-1} y} \quad , \quad f^{(p)}_{x^{p-2} y^2} \quad , \cdots , \quad f^{(p)}_{y^p}$$

که آنها را چنین نیز می‌نویسند :

$$\frac{\partial^p f}{\partial x^p} , \quad \frac{\partial^p f}{\partial x^{p-1} \partial y} , \quad \frac{\partial^p f}{\partial x^{p-2} \partial y^2} , \quad \cdots , \quad \frac{\partial^p f}{\partial y^p}$$

۳.۴.۱۱ - تابع n متغیری :

$$(x_1 , \cdots , x_n) \rightarrow f(x_1 , \cdots , x_n)$$

را درنظر می‌گیریم. چنانچه مشتقهای پی‌درپی تابع f تامرتبه $i_1 + i_2 + \cdots + i_n$ پیوسته باشند دراین صورت کلی‌ترین مشتق نسبی را می‌توان به‌یکی ازصورتهای زیر نوشت :

$$\frac{\partial^{i_1 + i_2 + \cdots + i_n} f}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \cdots \partial x_n^{i_n}} \qquad \text{یا} \qquad f^{(i_1 + i_2 + \cdots + i_n)}_{x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}}$$

۵.۱۱ - مشتقهای پی‌درپی توابع مرکب

۱.۵.۱۱ - فرض می‌کنیم تابع $(x , y) \rightarrow f(x , y)$ دریک بخش بازاز $\mathbf{R}^2$ دارای مشتقهای نسبی پی‌درپی و پیوسته تا مرتبهٔ p و توابع $t \rightarrow u(t)$ و $t \rightarrow v(t)$ دریک فاصله از $\mathbf{R}$ دارای مشتقهای پی‌درپی پیوسته تا مرتبهٔ p باشند. دراین صورت تابع $t \rightarrow F(t) = f(u(t) , v(t))$ ، درنقاطی‌که معین است ، دارای مشتقهای پی‌درپی پیوسته تا مرتبهٔ p می‌باشدکه بااستفاده پیاپی‌ازشمارهٔ ۱.۲.۱۱ به‌صورت‌زیر بدست‌می‌آیند :

$$F'(t)=f'_x(u(t)\,,v(t))u'(t)+f'_y(u(t)\,,v(t))v'(t)$$

$$F''(t)=f''_{x^2}(u(t)\,,v(t))(u'(t))^2+2f''_{xy}(u(t)\,,v(t))u'(t)v'(t)$$
$$+f''_{y^2}(u(t)\,,v(t))(v'(t))^2+f'_x(u(t)\,,v(t))u''(t)+f'_y(u(t)\,,v(t))v''(t)$$

. . . .

درحالت کلی نوشتن عبارت $F^{(p)}(t)$ مشکل است و دراین مورد ما به‌بیان یک حالت ویژه اکتفا می‌کنیم :

۲.۵.۱۱ - قضیه - تابع f را بافرض‌های بالا درنظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $F(t)=f(a+ht\,,b+kt)$ که در آن a و b و h و k مقادیر ثابتی هستند. دراین صورت داریم :

$$F^{(p)}(t)=\sum_{m+n=p}\frac{p!}{m!n!}h^mk^nf^{(p)}_{x^my^n}(a+ht\,,b+kt) \qquad (1)$$

اثبات - این قضیه درحالت $p=1$ همان نتیجه شمارهٔ ۳.۲.۱۱ است. پس فرض می‌کنیم برای $p-1$ قضیه برقرار باشد و آن را برای p ثابت می‌کنیم. بنابراین اگر قرار دهیم $u=a+ht$ و $v=b+kt$ داریم :

$$F^{(p-1)}(t)=\sum_{i+j=p-1}\frac{(p-1)!}{i!\,j!}h^ik^jf^{(p-1)}_{x^iy^j}(u\,,v)\,.$$

چنانچه شمارهٔ ۳.۲.۱۱ را درمورد $F^{(p-1)}(t)$ به‌کار بریم ، با توجه به‌اینکه $f^{(p-1)}_{x^iy^j}$ دارای مشتقهای پیوسته مرتبهٔ اول است دیده می‌شود که مشتق تابع $t\to h^ik^jf^{(p-1)}_{x^iy^j}$ عبارتست از :

$$h^ik^j[hf^{(p)}_{x^{i+1}y^j}(u\,,v)+kf^{(p)}_{x^iy^{j+1}}(u\,,v)]$$

پس خواهیم داشت :

$$F^{(p)}(t)=\sum_{m+n=p}\lambda_{mn}h^mk^nf^{(p)}_{x^my^n}(u\,,v)$$

که در آن :

$$\lambda_{mn}=\frac{(p-1)!}{(m-1)!n!}+\frac{(p-1)!}{m!(n-1)!}=\frac{(p-1)!(m+n)}{m!n!}=\frac{p!}{m!n!}$$

۳.۵.۱۱ - تمام مطالب بالا در حالت توابع چند متغیری درست‌اند. مثلاً اگر تابع $(x, y, z) \to f(x, y, z)$ دارای مشتقهای پیوسته مرتبهٔ اول و دوم باشد و قرار دهیم $u = a + ht$ ، $v = b + kt$ ، $w = c + lt$ ، که در آنها a و b و c و h و k و l مقادیر ثابتی هستند؛ خواهیم داشت:

$$\frac{d^2}{dt^2}[f(a+ht, b+kt, c+lt)]$$
$$= h^2 f''_{x^2}(u, v, w) + k^2 f''_{y^2}(u, v, w) + l^2 f''_{z^2}(u, v, w)$$
$$+ 2hk f''_{xy}(u, v, w) + 2hl f''_{xz}(u, v, w) + 2kl f''_{yz}(u, v, w)$$

۶.۱۱ - فرمول تیلر

۱.۶.۱۱ - فرض می‌کنیم تابع حقیقی ویا مختلط f در یک بخش باز U از $\mathbf{R}^2$ معین و دارای مشتقهای نسبی پیوسته تا مرتبهٔ p باشد. چنانچه نقاط $M(x, y)$ و $M'(x+h, y+k)$ متعلق به U باشند، بردار $\overrightarrow{MM'}$ دارای مؤلفه های h و k خواهد بود و هنگامی که t از ۰ تا ۱ تغییر می‌کند نقطهٔ انجام بردار $M + t\overrightarrow{MM'}$ به مؤلفه های $(x+th, y+tk)$ پاره‌خط MM' را می‌پیماید. فرض میکنیم که U شامل تمام پاره خط MM' باشد:

قضیه- بافرض‌های بالا برابری زیر را، که فرمول تیلر نامیده می‌شود خواهیم داشت:

$$f(x+h, y+k) = f(x, y)$$
$$+ hf'_x(x, y) + kf'_y(x, y)$$
$$+ \frac{h^2}{2!} f''_{x^2}(x, y) + \frac{h}{1!}\frac{k}{1!} f''_{xy}(x, y) + \frac{k^2}{2!} f''_{y^2}(x, y)$$
$$+ \frac{h^3}{3!} f'''_{x^3}(x, y) + \frac{h^2}{2!}\frac{k}{1!} f'''_{x^2 y}(x, y) + \frac{h}{1!}\frac{k^2}{2!} f'''_{xy^2}(x, y) + \frac{k^3}{3!} f'''_{y^3}(x, y)$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\sum_{m+n=p-1}\frac{h^m}{m!}\frac{k^n}{n!}f^{(p-1)}_{x^m y^n}(x,y)$$

$$+\sum_{m+n=p}\frac{h^m}{m!}\frac{k^n}{n!}\int_0^1 p(1-t)^{p-1}f^{(p)}_{x^m y^n}(x+ht,y+kt)dt$$

اثبات - برای $0\leqslant t\leqslant 1$ قرار می‌دهیم $F(t)=f(x+th,y+tk)$.

باتوجه به‌فرض‌های ۱.۵.۱۱ ، این تابع درفاصله $[0,1]$ معین و دارای مشتقهای پیوسته تا مرتبهٔ p می‌باشد .

بنابر فرمول تیلر در مورد توابع یک متغیری (۱.۱.۷) خواهیم داشت :

$$(1)\qquad F(t)=F(0)+F'(0)+\frac{1}{2!}F''(0)+\cdots$$

$$+\frac{1}{(p-1)!}F^{(p-1)}(0)+\int_0^1\frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!}F^{(p)}(t)dt$$

اما با استفاده از ۲.۵.۱۱ داریم :

$$F^{(i)}(t)=i!\sum_{m+n=i}\frac{h^m}{m!}\frac{k^n}{n!}f^{(i)}_{x^m y^n}(x+ht,y+kt)$$

که چون در (۱) بجای $F^{(i)}(t)$ مقدار بالا را قرار دهیم‌فرمول تیلر در مورد توابع دومتغیری به‌دست می‌آید .

۲.۶.۱۱ - فرمول تیلر را می‌توان به‌صورت ساده زیر نوشت :

$$f(x+h,y+k)=\sum_{m+n\leqslant p-1}\frac{h^m}{m!}\frac{k^n}{n!}f^{(m+n)}_{x^m y^n}(x,y)$$

$$+\sum_{m+n=p}\frac{h^m}{m!}\frac{k^n}{n!}\int_0^1 p(1-t)^{p-1}f^{(p)}_{x^m y^n}(x+ht,y+kt)dt$$

۳.۶.۱۱ - با استفاده از ۱.۶.۱۱ می‌توان نتیجه‌های شمارهٔ ۲.۱.۷ و ۴.۲.۱۱ یا ۳.۱.۷ و ۶.۲.۱۱ را تعمیم داد . ما دراینجا از بیان آنها خودداری می‌کنیم .

۴.۶.۱۱ - برای توابع ۳ و ۴ و ... متغیری فرمولی شبیه ۱.۶.۱۱ وجود دارد که به‌روش مشابه ثابت می‌شود. مثلاً در مورد تابع سه متغیری f ، با فرض هایی مشابه فرض های شمارهٔ ۱.۶.۱۱ ، چنین خواهیم داشت :

$$f(x+h\,,\,y+k\,,\,z+l)$$

$$=\sum_{q+r+s\leqslant p-1}\frac{h^q}{q!}\frac{k^r}{r!}\frac{l^s}{s!}f^{(q+r+s)}_{x^q y^r z^s}(x,y,z)$$

$$+\sum_{q+r+s=p}\frac{h^q}{q!}\frac{k^r}{r!}\frac{l!}{s!}\int_0^1 p(1-t)^{p-1}f^{(p)}_{x^q\,y^r\,z^s}(x+ht\,,\,y+kt\,,\,z+lt)dt$$

فصل دوازدهم
دیفرانسیل

این فصل دنبالهٔ مستقیم فصل پیشین است. مفهوم دیفرانسیل کلی در مقایسه، مشکل تراز مفهوم مشتق جزئی است. اما از بسیاری جهات طبیعی‌تر است و به‌فرمول های آسانی منتهی می‌شود.

۱۲ . ۱ - دیفرانسیل یک تابع در یک نقطه

۱۲ . ۱ . ۱ - میدانیم (۸ . ۱۳ . ۵ کتاب جبر) که فرمهای خطی روی $\mathbf{R}^3$ توابعی به‌صورت زیر می‌باشند :

$$(u_1, u_2, u_3) \rightarrow a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$$

که در آن a_1 و a_2 و a_3 شمارهای ثابت متعلق به $\mathbf{R}$ هستند .

۱۲ . ۱ . ۲ - فرض می‌کنیم تابع $M \rightarrow f(M)$ یا $(x, y, z) \rightarrow f(x, y, z)$ در یک مجموعه باز U از $\mathbf{R}^3$ معین و دارای مشتقهای پیوسته مرتبه اول باشد . اگر M نقطه‌ای از U باشد فرم خطی :

$$(u_1, u_2, u_3) \rightarrow f'_x(M)u_1 + f'_y(M)u_2 + f'_z(M)u_3$$

را که در روی $\mathbf{R}^3$ تعریف شده است ، **دیفرانسیل تابع f در نقطه M** می‌نامند و آنرابا $df(M)$ نشان می‌دهند. بعبارت دیگر :

$$(df(M)(u_1, u_2, u_3) = f'_x(x, y, z)u_1 + f'_y(x, y, z)u_2 + f'_z(x, y, z)u_3$$

۱۲ . ۱ . ۳ - **مثال** - چنانچه $f(x, y, z) = x^2 + 2xy + yz$ باشد ، تابع f در تمام $\mathbf{R}^3$ دارای مشتقهای پیوسته می‌باشد و داریم :

$$f'_x(x, y, z) = 2x + 2y \;,\; f'_y(x, y, z) = 2x + z \;,\; f'_z(x, y, z) = y$$

به‌ویژه :

$$f'_x(1, 3, 2) = 8 \;,\; f'_y(1, 3, 2) = 4 \;,\; f'_z(1, 3, 2) = 3$$

پس $df(1, 3, 2)$ عبارت ازفرم خطی :

$$(u_1, u_2, u_3) \rightarrow 8u_1 + 4u_2 + 3u_3$$

می‌باشد. به گفته دیگر:

$$(df(1,3,2))(u_1,u_2,u_3)=8u_1+4u_2+3u_3$$

۴.۱.۱۲ - اکنون به‌حالت کلی شماره ۲.۱.۱۲ برمی‌گردیم و فرض می‌کنیم $M=(x,y,z)$ عنصری از U باشد. با استفاده از شماره ۶.۲.۱۱ هنگامیکه $(h,k,l)\to(0,0,0)$ داریم:

$$f(x+h,y+k,z+l)-f(x,y,z)=(df(M))(h,k,l)$$
$$+(|h|+|k|+|l|)o(1)$$

به‌عبارت دیگر هنگامیکه h و k و l نموهای کوچکی از متغیرها باشند، نمو تابع درنخستین تقریب برابر با مقدار دیفرانسیل تابع درنقطه (h,k,l) می‌باشد (سابقاً دیفرانسیل توابع را نموهای بینهایت کوچک آن‌ها می‌گرفتند، این تعریف کاملاً مبهم، هنوز هم در نظریه انتگرال‌های معین بچشم می‌خورد).

۵.۱.۱۲ - **مثال** - در مثال ۳.۱.۱۲ داریم:

$$f(1,3,2)=13\ ,\ (df(1,3,2))(u_1,u_2,u_3)=8u_1+4u_2+3u_3$$

پس هنگامیکه (l,k,h) به‌سمت صفر میل می‌کنند، داریم:

$$f(1+h,3+k,2+l)-13=8h+4k+3l+(|h|+|k|+|l|)o(1)$$

بنابراین هنگامی که h و k و l شمارهای کوچکی هستند، $f(1+h,3+k,2+l)-13$ باید به $8h+4k+3l$ خیلی نزدیک باشد. برای آزمون فرض می‌کنیم $h=10^{-3}$ و $k=2.10^{-3}$ و $l=-10^{-3}$ پس خواهیم داشت:

$$8h+4k+3l=13.10^{-3}=0{,}013$$

وانگهی داریم:

$$f(1+10^{-3},3+2\cdot10^{-3},2-10^{-3})$$
$$=1{,}002001+6{,}010004+6{,}000998=13{,}013003$$

پس خواهیم داشت:

$$f(1+10^{-3},3+2\cdot10^{-3},2-10^{-3})-13=0{,}013003$$

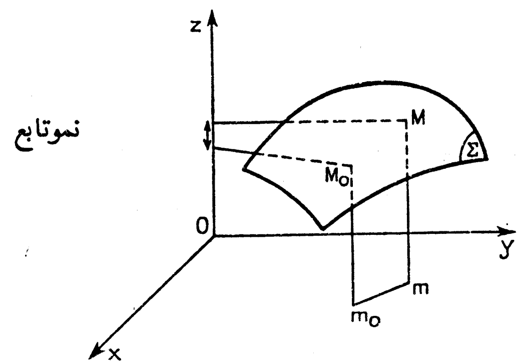
به‌طوری که دیده می‌شود بااستفاده از دیفرانسیل می‌توان تغییرات کوچک تابع را با تقریب مناسبی به‌دست آورد.

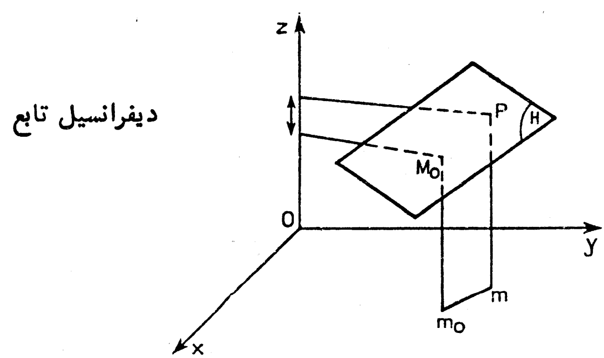
۶.۱.۱۲ - گفته‌های پیشین را می‌توان به‌توابع چند متغیری نیز تعمیم داد .

۷.۱.۱۲ - **تعبیر هندسی**-فرض‌می‌کنیم که تابع حقیقی $(x, y) \rightarrow f(x, y)$ دریک‌بخش باز U از $\mathbf{R}^2$ معین ودارای مشتق پیوسته باشد. نمودار تابع f راکه بخشی از $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3$ است‌با $\sum$ نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم $m_0 = (x_0, y_0)$ نقطه‌ای از U و $M_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ نقطه وابسته به آن در $\sum$ باشد . بنابر شماره ۵.۳.۱۷ ، صفحه مماس بر $\sum$ درنقطه M_0 وجود دارد (این صفحه را H می‌نامیم) و معادله آن چنین است :

$$Z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(X - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(Y - y_0)$$

فرض‌می‌کنیم $m = (x_0 + h, y_0 + k)$ نقطه‌ای از U باشد. به m یک نقطه از صفحه H مانند P می‌توان وابسته کرد به‌قسمی که ارتفاع P یعنی Z از بستگی‌زیر بدست‌می‌آید:





شکل ۵۲

$$Z-f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)(x_0+h-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y_0+k-y_0)$$
$$=f'_x(x_0,y_0)h+f'_y(x_0,y_0)k$$
$$=(df(x_0,y_0))(h,k)$$

بنابراین مقدار فرم خطی $df(x_0,y_0)$ درنقطه (h,k) برابر است با نمو ارتفاع روی صفحه H هنگامیکه x_0 و y_0 به‌ترتیب به‌اندازه h و k نموی کنند.

در حالتی که صفحه مماس H در همسایگی نقطه M_0 به $\sum$ «نزدیک» است دید می‌شود که دیفرانسیل تابع مقدار نمو تابع را با تقریب مناسبی نشان می‌دهد.

۲.۱۲ - دیفرانسیل یک تابع

۱.۲.۱۲ - فرض می‌کنیم تابع $M \to f(M)$ یا $(x,y,z) \to f(x,y,z)$ یک تابع حقیقی است که در یک بخش باز U از $\mathbf{R}^3$ دارای مشتقهای نسبی پیوسته می‌باشد. نگاشت $M \to df(M)$ به هرنقطه M از U یک فرم خطی روی $\mathbf{R}^3$ وابسته می‌کند این نگاشت را **دیفرانسیل** f می‌نامند وبا df نشان می‌دهند.

۲.۲.۱۲ - **مثال** - فرض می‌کنیم $f(x,y,z)=x$. می‌خواهیم دیفرانسیل این تابع را که با dx نشان می‌دهیم به‌دست آوریم. داریم:

$$f'_x(x,y,z)=1 \quad , \quad f'_y(x,y,z)=0 \quad , \quad f'_z(x,y,z)=0$$

پس:

$$(dx(M))(u_1,u_2,u_3)=u_1$$

بطوریکه دیده می‌شود $dx(M)$ بستگی به M ندارد. چنانچه $dx(M)$ را به‌صورت dx بنویسیم خواهیم داشت:

$$dx(u_1,u_2,u_3)=u_1$$

وبه همین ترتیب:

$$dy(u_1,u_2,u_3)=u_2$$

$$dz(u_1,u_2,u_3)=u_3$$

۳.۲.۱۲ - اکنون به‌حالت کلی شماره ۱.۲.۱۲ برمی‌گردیم. باتوجه به ۲.۲.۱۲

دیده میشود که فرم‌های خطی $df(x,y,z)$ و :

$$f'_x(x,y,z)dx+f'_y(x,y,z)dy+f'_z(x,y,z)dz$$

برای تمام مقادیر (u_1, u_2, u_3) دارای یک مقدارند . بنابراین :

$$df(x,y,z)=f'_x(x,y,z)dx+f'_y(x,y,z)dy+f'_z(x,y,z)dz$$

۴.۲.۱۲ - تمام گفته‌های بالا به آسانی برای توابع چند متغیری تعمیم پذیر است . به ویژه در حالت تابع یک متغیری $x \to f(x)$ داریم :

$$df(x)=f'(x)dx$$

اینک علامت $\dfrac{df}{dx}$ را که برای نشان دادن مشتق به‌کار می‌برند می‌توان چنین تغییر کرد : $\dfrac{df}{dx}$ عبارت است از نسبت عناصر $df(x)$ و dx در فضای دوآل $\mathbf{R}$ (به‌وارون اگر f تابعی از دومتغیر x و y باشد ، $\dfrac{df}{dx}$ برابر با f'_x نخواهد بود وبدین‌جهت‌است که‌در‌این‌حالت علامت $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ را به‌کار می‌برند) .

۵.۲.۱۲ - به‌کمک شماره ۳.۲.۱۲ ، می‌توان دیفرانسیل بسیاری از توابع را به‌سادگی بدست آورد . مثلاً :

(۱) $$d(\mathrm{Log}x)=\frac{dx}{x}$$

(۲) $$d(e^x)=e^x dx$$

(۳) $$d(a^x)=a^x\mathrm{Log}a\,dx$$

(۴) $$d(x^\alpha)=\alpha x^{\alpha-1}dx$$

(۵) $$d(\cos x)=-\sin x\,dx$$

(۶) $$d(\sin x)=\cos x\,dx$$

(۷) $$d(tg x)=\frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$d(\mathrm{Arc}\sin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{8}$$

$$d(\mathrm{Arc}\cos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{9}$$

$$d(\mathrm{Arc}tg x) = \frac{dx}{1+x^2} \tag{10}$$

$$d(\mathrm{ch}x) = \mathrm{sh}x\,dx \tag{11}$$

$$d(\mathrm{sh}x) = \mathrm{ch}x\,dx \tag{12}$$

$$d(\mathrm{th}x) = \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} \tag{13}$$

$$d(\mathrm{Argsh}x) = \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \tag{14}$$

$$d(\mathrm{Argch}x) = \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \tag{15}$$

$$d(\mathrm{Argth}x) = \frac{dx}{1-x^2} \tag{16}$$

$$d(xy) = ydx+xdy \tag{17}$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx-xdy}{y^2} \tag{18}$$

$$d(x+y) = dx+dy \tag{19}$$

۶.۲.۱۲ ـ دیفرانسیل یک مقدار ثابت برابر با صفر است. این مطلب به‌آسانی از شماره ۱.۲.۱۲ نتیجه می‌شود.

۱۲ . ۳ـ دیفرانسیل یک تابع مرکب

۱.۳.۲۴ - قضیه - فرض می‌کنیم A یك بخش باز $\mathbf{R}^m$ و B یك بخش باز $\mathbf{R}^n$ باشد. یك تابع A در B را که بوسیله فرمولهای زیر داده شده‌است در نظر می‌گیریم:

$$x_1=u_1(s_1 , s_2 , \ldots , s_m)$$

$$x_2=u_2(s_1 , s_2 , \ldots , s_m)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n=u_n(s_1 , s_2 , \ldots , s_m)$$

فرض می‌کنیم این توابع دارای مشتقهای پیوسته باشند. اگر:

$$(x_1 , x_2 , \ldots , x_n) \rightarrow f(x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$$

یك تابع حقیقی و دارای مشتهای پیوسته B در R باشد، تابع مرکب:

$$(s_1 , \ldots , s_m) \rightarrow g(s_1 , \ldots , s_m)$$
$$=f(u_1(s_1 , \ldots , s_m) , \ldots , u_n(s_1 , \ldots , s_m))$$

را تشکیل می‌دهیم، دراین‌صورت تابع g دربخش A دارای مشتق پیوسته است و داریم:

$$dg=f'_{x_1}(u_1 , \ldots , u_n)du_1+f'_{x_2}(u_1 , \ldots , u_n)du_2+\cdots$$
$$+f'_{x_n}(u_1 , \ldots , u_n)du_n$$

اثبات - برای خودداری از بکار بردن اندیسهای متعدد، فرض می‌کنیم $m=3$ و $n=2$ باشد؛ و بجای s_1 و s_2 بترتیب s و t و بجای u_1 , u_2 , u_3 بترتیب u , v , w و بجای x_1 , x_2 , x_3 بترتیب x , y , z قرارمی‌دهیم. بنابراین داریم:

$$g(s , t)=f(u(s , t) , v(s , t) , w(s , t))$$

اما بنابر ۸.۲.۱۱ تابع g دارای مشتقهای نسبی پیوسته است و داریم :

$$g'_s(s, t)=f'_x(u(s, t), v(s, t), w(s, t))u'_s(s, t)$$
$$+f'_y(u(s, t), v(s, t), w(s, t))v'_s(s, t)$$
$$+f'_z(u(s, t), v(s, t), w(s, t))w'_s(s, t)$$

و :

$$g'_t(s, t)=f'_x(u(s, t), v(s, t), w(s, t))u'_t(s, t)$$
$$+f'_y(u(s, t), v(s, t), w(s, t))v'_t(s, t)$$
$$+f'_z(u(s, t), v(s, t), w(s, t))w'_t(s, t)$$

در نتیجه :

$$dg(s, t)=g'_s(s, t)ds+g'_t(s, t)dt \qquad \text{(بنابر ۳.۲.۱۲)}$$
$$=[f'_x(u, v, w)u'_s(s, t)+f'_y(u, v, w)v'_s(s, t)$$
$$+f'_z(u, v, w)w'_s(s, t)]ds$$
$$+[f'_x(u, v, w)u'_t(s, t)+f'_y(u, v, w)v'_t(s, t)$$
$$+f'_z(u, v, w)w'_t(s, t)]dt$$
$$=f'_x(u, v, w)[u'_s(s, t)ds+u'_t(s, t)dt] \qquad \text{(بنابر آنچه گذشت)}$$
$$+f'_y(u, v, w)[v'_s(s, t)ds+v'_t(s, t)dt]$$
$$+f'_z(u, v, w)[w'_s(s, t)ds+w'_t(s, t)dt]$$
$$=f'_x(u, v, w)du(s, t)+f'_y(u, v, w)dv(s, t)$$
$$+f'_z(u, v, w)dw(s, t) \qquad \text{(باستفاده از ۳.۲.۱۲)}$$

استدلال بالا در حالت کلی نیز درست است.

۲.۳.۱۲ - بنابر آنچه که گذشت دستور عملی زیر بدست می‌آید . نخست تابع $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ را که دیفرانسیل آن برابر :

$$f'_{x_1}(x_1, \dots, x_n)dx_1 + f'_{x_2}(x_1, \dots, x_n)dx_2 + \cdots + f'_{x_n}(x_1, \dots, x_n)dx_n \qquad (1)$$

است درنظر می‌گیریم و سپس در $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ به جای متغیرهای x_1 , x_2 , ... , x_n به ترتیب u_1 , u_2 , ... , u_n را ، که خود توابعی از متغیرهای دیگر هستند ، قرار می‌دهیم . دراین صورت دیفرانسیل تابع $f(u_1, u_2, \dots, u_n)$ را می‌توان از (۱) با قرار دادن u_1 , u_2 , ... , u_n به جای x_1 , x_2 , ... , x_n و du_1 , du_2 , ... , du_n به جای dx_1 , dx_2 , ... , dx_n به دست آورد.

۱۲ . ٤ـ دستورهای محاسبهٔ دیفرانسیل

۱.٤.۱۲ - فرض می‌کنیم که توابع چند متغیری u و v دارای مشتقهای پیوسته باشند . در این صورت تابع uv نیز دارای مشتقهای پیوسته است. پس بااستفاده ازفرمول (۱۷)شماره ۵.۲.۱۲ یعنی $d(xy)=xdy+ydx$ بنابر شمارهٔ ۲.۳.۱۲ دیفرانسیل‌آن به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$d(uv)=udv+vdu$$

۲.٤.۱۲ - همچنین در نقاطی که v مخالف صفر است از فرمول :

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{y^2}$$

شمارهٔ ۵.۲.۱۲ نتیجه می‌شود :

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$$

۳.٤.۱۲ - از فرمولهای :

$$d(\lambda x)=\lambda dx \qquad (\lambda \text{ مقداری ثابت است})$$

$$d(x+y)=dx+dy$$

فرمولهای زیر نتیجه می‌شود :

$$d(\lambda u)=\lambda du \quad , \quad d(u+v)=du+dv$$

وانگهی اثبات مستقیم این فرمول‌ها بسیار آسان است.

۴.۴.۱۲ - دستورهای بالا، نشان می‌دهند که می‌توان دیفرانسیل توابع را مانند مشتق‌های توابع به روش شماره (۴.۳) به دست آورد. یادآوری می‌شود که اگر u و v توابعی از یک متغیر x باشند فرمول‌های مشتق گیری معمولی‌رامی‌توان‌از تقسیم فرمول‌های بالا به dx نتیجه گرفت.

۵.۴.۱۲ - با استفاده از ۵.۲.۱۲ و ۲.۳.۱۲ می‌توان فرمول‌های دیگری نیز به دست‌آورد. بعنوان مثال اگر u یک تابع چند متغیری با مشتق‌های پیوسته باشد، خواهیم داشت:

$$d(u^{\alpha})=\alpha u^{\alpha-1}du \;,\; d(e^{u})=e^{u}du \;;\; d(\cos u)=-\sin u du$$
$$d(\sin u)=\cos u du \;,\; \dots$$

۶.۴.۱۲ - **مثال** - تابع $f(x\,,\,y)=\dfrac{x}{x^{2}+y^{2}}$ را در نظر می‌گیریم. برای $(x\,,\,y)\neq(0\,,\,0)$ داریم:

$$df(x\,,\,y)=\frac{(x^{2}+y^{2})dx-xd(x^{2}+y^{2})}{(x^{2}+y^{2})^{2}}=\frac{(x^{2}+y^{2})dx-x(d(x^{2})+d(y^{2}))}{(x^{2}+y^{2})^{2}}$$
$$=\frac{(x^{2}+y^{2})dx-x(2xdx+2ydy)}{(x^{2}+y^{2})^{2}}=\frac{(y^{2}-x^{2})dx-2xydy}{(x^{2}+y^{2})^{2}}$$

این فرمول درعین‌حال مشتقهای نسبی:

$$f'_{x}=\frac{y^{2}-x^{2}}{(x^{2}+y^{2})^{2}} \quad , \quad f'_{y}=\frac{-2xy}{(x^{2}+x^{2})^{2}}$$

را بدست می‌دهد.

۱۲ . ۵ـ توابع ایستی

۱.۵.۱۲ - فرض می‌کنیم f یک تابع حقیقی و با مشتقهای پیوسته در یک مجموعه باز U از $\mathbf{R}^{2}$ باشد. چنانچه $(x_{0}\,,\,y_{0})$ نقطه‌ای از U باشد، با توجه به شماره‌های ۲.۱.۱۲ و ۵.۳.۱۷ شرایط زیر هم‌ارزاند:

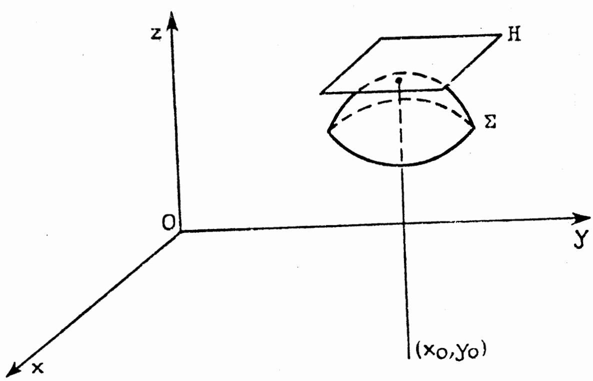
$$f'_x(x_\circ , y_\circ) = f'_y(x_\circ , y_\circ) = \circ \qquad -(\mathrm{I})$$

$$df(x_\circ , y_\circ) = \circ \qquad -(\mathrm{II})$$

(III) ــ صفحه مماس بر نمودار تابع f در نقطه $(x_\circ , y_\circ , f(x_\circ , y_\circ))$ با صفحه xoy هم‌راستا است.

اگر یکی از شرط‌های بالا برقرار باشد، میگویند که f در نقطه $(x_\circ , y_\circ)$ **ایستی** است.

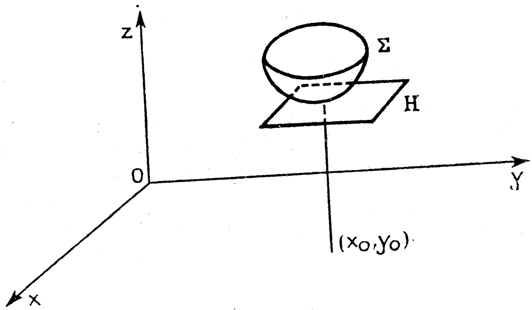
۲.۵.۱۲ ـ فرض می‌کنیم تابع f در نقطه $(x_\circ , y_\circ)$ دارای یک **ماکزیمم** باشد، به عبارت دیگر هنگامیکه $|x-x_\circ|+|y-y_\circ|$ به اندازه کافی کوچک است داشته باشیم $f(x , y) \leqslant f(x_\circ , y_\circ)$. دراین صورت تابع $x \to f(x , y_\circ)$ درنقطه $x_\circ$ دارای ماکزیمم است و بنابراین $f'_x(x_\circ , y_\circ) = \circ$ (شمارهٔ ۲.۷.۳).



شکل ۵۳

به همین ترتیب دیده می‌شود که $f'_y(x_\circ , y_\circ) = \circ$. پس f در نقطه $(x_\circ , y_\circ)$ ایستی است.

۳.۵.۱۲ ـ همین‌طور اگر f در نقطه $(x_\circ , y_\circ)$ دارای یک **می‌نیمم** باشد، یعنی هنگامی که $|x-x_\circ| + |y-y_\circ|$ به اندازه کافی کوچک است داشته باشیم $f(x , y) \geqslant f(x_\circ , y_\circ)$، تابع f در نقطهٔ $(x_\circ , y_\circ)$ ایستی است.



شکل ٥٤

٤.٥.١٢ ـ ممکن است که تابع f در نقطه (x_0 , y_0) ایستی باشد بدون اینکه دارای ماکزیمم یا می‌نیمم باشد. این مطلب را در مورد توابع یک متغیری دیدیم : فرض می‌کنیم $f'(x_0)=0$ باشد، اگر $f''(x_0) < 0$ شود تابع f درنقطه x_0 دارای ماکزیمم است(۳.۳.۷) ، اگر $f''(x_0) > 0$ گردد تابع f درنقطه x_0 دارای می‌نیمم‌است(۲.۳.۷) واگر داشته باشیم $f''(x_0)=0$ و $f'''(x_0) \neq 0$ ، تابع f نه دارای‌ماکزیمم ونه دارای می‌نیمم است (۴.۳.۷ و ۵.۳.۷). باوجوداین، حالت بالا را می‌توان استثنایی دانست. به وارون در مورد توابع چند متغیری این یک حالت استثنایی نیست. دراین مورد به بیان مثال زیر اکتفا می‌کنیم :

٥.٥.١٢ ـ **مثال**ـ فرض می‌کنیم $f(x , y)=ax^2+by^2$ باشدکه در آن a و b مقادیر ثابت غیر صفرند. داریم :

$$f(0 , 0)=f'_x(0 , 0)=f'_y(0 , 0)=0$$

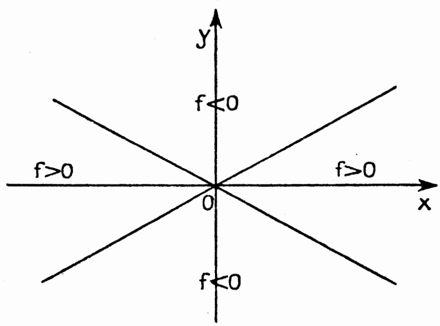
پس f درنقطه $(0 , 0)$ برابر با صفر و ایستی است.

چنانچه a و b بزرگتر از صفر باشند،برای همهٔ نقاط (x , y) داریم $f(x , y) \geqslant 0$ پس تابع f درنقطه $(0 , 0)$ دارای یک می‌نیمم است (در اینصورت گویندکه f درنقطه $(0 , 0)$دارای‌یک می‌نیمم **مطلق** است).اگر $a < 0$ و $b < 0$ باشد ، برای همه‌ء مقادیر x و y داریم $f(x , y) \leqslant 0$. پس تابع f درنقطه $(0 , 0)$ دارای یک ماکزیمم مطلق‌است. چنانچه $a > 0$ و $b < 0$ باشد خواهیم داشت :

$$f(x , y)=(\sqrt{a}\, x+\sqrt{-b}\, y)(\sqrt{a}\, x-\sqrt{-b}\, y)$$

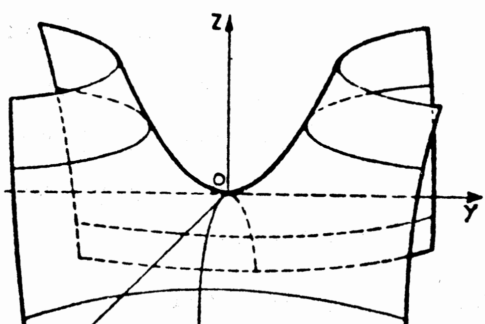
و علامت f بستگی به وضع قرارگرفتن نقطه $(x\ ,\ y)$ نسبت به خط‌هایی به معادلات $y=\pm\sqrt{-\frac{b}{a}}\,x$ دارد.

اگرنمودار تابع f را $\sum$ بنامیم، $\sum$ یک سهمی گون هذلولی وار (۹.۱۸) است که در نقطه O به صفحه xOy مماس می‌باشد و این صفحه مماس در نقطه O از $\sum$ می‌گذرد.



شکل ۵۵

می‌توان گفت که وضع $\sum$ در همسایگی نقطه O مانند وضع سطح زمین در نزدیکی یک گردنه است (شکل ۵۶).



شکل ۵۶

۲ . ۶۱- گرادیان یک تابع

۱.۶.۱۲ - تابع حقیقی f را که در یک بخش باز U از $\mathbf{R}^n$ معین است و دارای مشتق‌های نسبی پیوسته در U می‌باشد درنظرمی گیریم. یادآوری می‌شود که دیفرانسیل تابع f در یک نقطه M از U ، یعنی $df(M)$ ، یک فرم خطی روی $\mathbf{R}^n$ است که به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$(u_1 , u_2 , \dots , u_n) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(M)u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(M)u_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(M)u_n$$

وانگهی بنابر شماره ۱۱.۱۳.۸ کتاب جبر ، به هرفرم خطی روی $\mathbf{R}^n$ می‌توان عنصری از $\mathbf{R}^n$ به‌طورطبیعی وابسته کرد. مثلاً به $df(M)$ برداری از $\mathbf{R}^n$ وابسته می گردد که آرایندهای آن عبارتند از :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(M) \;,\; \frac{\partial f}{\partial x_2}(M) \;,\; \dots \;,\; \frac{\partial f}{\partial x_n}(M)$$

این بردار را **گرادیان** تابع f درنقطه M می‌نامند و با $(\text{grad } f)(M)$ نشان می‌دهند. نگاشت $\text{grad } f$ یک نگاشت پیوسته U در $\mathbf{R}^n$ است.

۲.۶.۱۲ - از ویژگیهای دیفرانسیل (شماره‌های ۱.٤.۱۲ و ۳.٤.۱۲) نتیجه می‌شود که اگر توابع f و g در یک بخش باز از $\mathbf{R}^n$ دارای مشتقهای پیوسته باشند و λ یک شمار ثابت باشد داریم :

$$\text{grad}(\lambda f) = \lambda(\text{grad } f)$$

$$\text{grad}(f+g) = \text{grad } f + \text{grad } g$$

$$\text{grad}(fg) = f \text{ grad } g + g \text{ grad } f$$

فصل سیزدهم

توابع ضمنی

معادلهٔ $x^5 - x^4y + y^3 - x^2y^6 = 0$ داده شده است. مجموعهٔ نقاطی از $\mathbf{R}^2$ که آرایندههای آنها در این معادله صدق می‌کند یک خم Γ پدید می‌آورند که از نقطهٔ $(1, 1)$ می‌گذرد. آیا Γ دارای یک خط مماس در این نقطه است؟ اگر چنین است چگونه می‌توان آن‌را به‌دست آورد؟ از این‌گونه مسائل است که در این فصل گفتگو می‌کنیم (وانگهی لازم است که برخی از نتایج را بپذیریم).

۱۳ . ۱ ـ تعریف

۱۳ . ۱ . ۱ ـ تابع حقیقی $(x, y) \to f(x, y)$ را که در بخشی از $\mathbf{R}^2$ معین است درنظر میگیریم. گوییم $y = \varphi(x)$ یک **تابع ضمنی**، تعریف شده بوسیله معادله $f(x, y) = 0$ است هرگاه φ یک تابع معین در فاصله I از $\mathbf{R}$ باشد و برای هر $x \in I$ داشته باشیم:

$$f(x, \varphi(x)) = 0$$

۱۳ . ۱ . ۲ ـ **مثال** ـ معادله $x^2 + y^2 = 1$ داده شده است. این معادله y رابصورت تابعی ضمنی از x تعریف می‌کند. به علاوه دراین مثال میتوان y را به صورت عبارتی صریح از x نوشت:

$$y = \varepsilon(x)\sqrt{1 - x^2} \quad , \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

که درآن برای هرمقدار x داریم $\varepsilon(x) = \pm 1$ (اگر شرط پیوستگی این تابع را درنظر نگیریم میتوان برای هرمقدار x، $\varepsilon(x)$ را به دلخواه درمجموعهٔ $\{+1 , -1\}$ اختیار کرد).

۱۳ . ۱ . ۳ ـ **مثال** ـ معادلهٔ $y^5 - 4y^4 + 4xy^2 - x^2 = 0$ داده شده است. این معادله y را به‌صورت تابعی ضمنی از x تعریف میکند (برای هرمقدار حقیقی x معادلهٔ بالا نسبت به y از درجهٔ فرد است پس دست‌کم دارای یک ریشهٔ حقیقی است). این تابع را بکمک توابع مقدماتی نمیتوان به صورت تابعی صریح از x نوشت.

۱۳ . ۱ . ٤ ـ **قضیه ـ فرض می‌کنیم $(x, y) \to f(x, y)$ یك تابع دارای مشتق پیوسته در یك بخش باز U از $\mathbf{R}^2$ و (x_0, y_0) نقطه‌ای از**

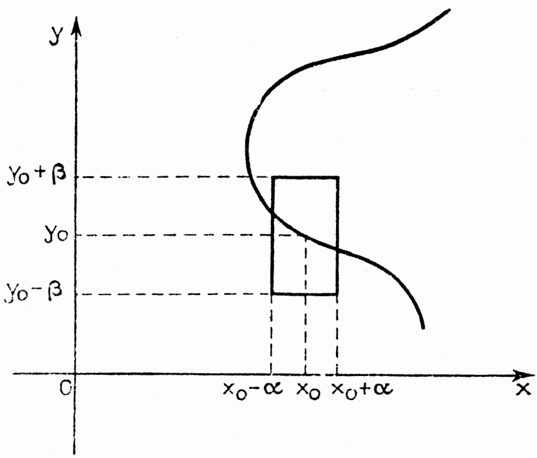
U باشد به طوریکه داشته باشیم $f(x_\circ , y_\circ)=\circ$. چنانچه $f'_y(x_\circ , y_\circ) \neq \circ$ باشد شمارهای $\alpha > \circ$ و $\beta > \circ$ با ویژگیهای زیر وجود دارند :

(I) – برای x متعلق به‌فاصلهٔ $]x_\circ-\alpha \, , \, x_\circ+\alpha[$ معادلهٔ $f(x , y)=\circ$ نسبت به y دارای یك جواب یکتا در $]y_\circ-\beta \, , \, y_\circ+\beta[$ می‌باشد.

(II) – اگر $\varphi(x)$ این جواب باشد تابع φ درفاصلهٔ $]x_\circ-\alpha , x_\circ+\alpha[$ دارای مشتق پیوسته است.

(III) – در فاصلهٔ $]x_\circ-\alpha \, , \, x_\circ+\alpha[$ داریم :

$$\varphi'(x)=-\frac{f'_x(x , \varphi(x))}{f'_y(x , \varphi(x))}$$



شکل ۵۷

اثبات – قسمتهای (I) و (II) این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم. برای اثبات قسمت (III) با توجه به‌شمارهٔ ۱۰۲۰۱۱ از دو طرف معادلهٔ $f(x , \varphi(x))=\circ$ ، که برای هرمقدار x متعلق‌به $]x_\circ-\alpha \, , \, x_\circ+\alpha[$ برقرار است ، مشتق می‌گیریم. خواهیم داشت :

$$f'_x(x , \varphi(x))+f'_y(x , \varphi(x))\varphi'(x)=\circ \qquad (1)$$

اگر α و β به اندازهٔ کافی کوچک اختیار شوند برای $|x-x_0| < \alpha$ و $|y-y_0| < \beta$ داریم $f'_y(x, y) \neq 0$ (زیرا $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ است). دراین صورت از برابری (۱) قسمت (III) قضیه نتیجه می‌شود.

۵.۱.۱۳ - **مثال** - معادلهٔ $f(x, y)=0$ را که‌درآن $f(x, y)=x^2+y^2-1$ است درنظر می‌گیریم. داریم $f(0, 1)=0$ و $f'_y(0, 1)=2$. پس یک تابع یکتای $x \to y=\varphi(x)$ وجود دارد به طوریکه داشته باشیم:

$$x^2+\varphi(x)^2=1$$

به شرط اینکه $|x-0|$ و $|\varphi(x)-1|$ به اندازهٔ کافی کوچک باشند. برای مقادیر کوچک $|x|$ داریم:

$$\varphi'(x)=-\frac{2x}{2\varphi(x)}=-\frac{x}{\varphi(x)}$$

درستی عبارت بالا رامی‌توان بایک محاسبهٔ مستقیم بررسی کرد زیرا چنانچه $|\varphi(x)-1| \leqslant 1$ باشد $\varphi(x) \geqslant 0$ است و از آنجا $\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}$ پس:

$$\varphi'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\varphi(x)}$$

۶.۱.۱۳ - **مثال** - معادلهٔ $f(x, y)=0$ راکه درآن

$$f(x, y)=y^5-4y^4+4xy^2-x^2$$

است درنظر می‌گیریم. داریم $f(1, 1)=0$ و $f'_y(1, 1)=5-16+8=-3 \neq 0$ پس یک‌تابع یکتای $x \to y=\varphi(x)$ وجود دارد به طوریکه برای مقادیر کوچک $|x-1|$ و $|\varphi(x)-1|$ داشته باشیم:

$$\varphi(x)^5-4\varphi(x)^4+4x\varphi(x)^2-x^2=0$$

هنگامی که $|x-1|$ به اندازهٔ کافی کوچک باشد داریم:

$$\varphi'(x)=-\frac{4y^2-2x}{5y^4-16x^3+8xy}$$

به ویژه چون $\varphi(۱)=۱$ است $\varphi'(۱)=-\frac{۲}{-۳}=\frac{۲}{۳}$.

۷.۱.۱۳ - **مماس برخم به معادلهٔ** $f(x, y)=۰$ - در حالت کلی (شمارهٔ ۴.۱.۱۳)معادلهٔ $f(x, y)=۰$ دست‌کم در بخش :

$$]x_۰-\alpha\ ,\ x_۰+\alpha[\times]y_۰-\beta\ ,\ y_۰+\beta[$$

یک خم Γ معین میکند ،که در هرنقطه دارای یک مماس‌است (شمارهٔ۴.۱.۱۳ (II)) . بنابر قسمت(III)شمارهٔ ۴.۱.۱۳ ، در نقطه‌ای به آرایندهای x و y ، این‌مماس به وسیلهٔ معادلهٔ :

$$Y-y=-(X-x)\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}$$

و یا :

$$(X-x)f'_x(x, y)+(Y-y)f'_y(x, y)=۰$$

معین می‌شود .

۸.۱.۱۳ - **قائم برخم به معادلهٔ** $f(x, y)=۰$ - علاوه برفرض های شماره ۴.۱.۱۳ فضای $\mathbf{R}^۲$ را با حاصلضرب معمولی‌آن درنظر می گیریم . بنابر شمارهٔ ۷.۱.۱۳،

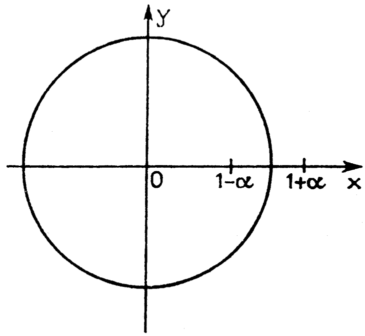
قائم برخم Γ در نقطه‌ای به آرایندهای x و y با بردار به مؤلفه‌های $f'_x(x, y)$ ، $f'_y(x, y)$ ، یعنی با بردار grad f هم راستاست .

۹.۱.۱۳ - **تبصره** - معادلهٔ $f(x, y)=۰$ متغیرx را نیز به صورت تابعی‌ضمنی از y معین می کند ، و می‌توان قضیهٔ ۴.۱.۱۳ رابا تعویض نقشهای x و y در همسایگی نقطهٔ $(x_۰, y_۰)$ بکار برد به شرط اینکه $f'_x(x_۰, y_۰)\neq ۰$ باشد. دراین حالت نیز معادلهٔ مماس به همان صورت بالا است (شمارهٔ ۷.۱.۱۳) .

هنگامی‌که $f'_x(x_۰, y_۰)=f'_y(x_۰, y_۰)=۰$ باشد ، ازقضیه شمارهٔ ۴.۱.۱۳ نتیجه‌ای بدست نمی‌آید (وانگهی ممکن است خم Γ در نقطهٔ $(x_۰, y_۰)$ دارای مماس نباشد) .

۱۰.۱.۱۳ - **مثال** - معادلهٔ $f(x, y)=x^۲+y^۲-۱=۰$ را درنظر می گیریم . نقطهٔ به آرایندهای (۱ , ۰) در معادله صدق می کند و داریم :

$$f'_x(۱, ۰)=۲\quad ,\quad f'_y(۱, ۰)=۰$$



شکل ۵۸

به طوریکه می‌بینیم در فاصله $]1-\alpha\ ,\ 1+\alpha[$, $(\alpha>0)$ تابعی مانند $x\to\varphi(x)$ نمی‌توان یافت به قسمی که داشته باشیم $x^2+\varphi(x)^2-1=0$ ولی تابع $y\to\psi(y)=\sqrt{1-y^2}$ که در فاصله $]-1\ ,\ 1[$ معین است در برابریهای زیر صدق می‌کند :

$$\psi(y)^2+y^2-1=0 \quad , \quad \psi(0)=1$$

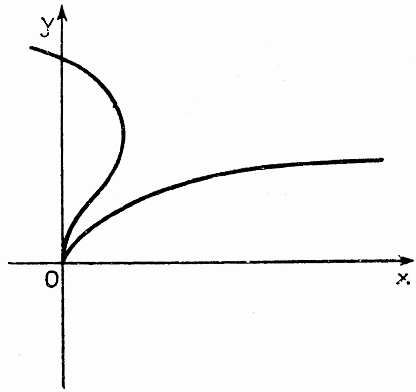
۱۱.۱.۱۳ - **مثال** - معادلهٔ $f(x\ ,\ y)=y^5-4y^4+4xy^2-x^2=0$ را اختیار می‌کنیم. دراینجا می‌توان x را به صورت تابعی صریح از y به دست آورد :

$$x=2y^2\pm\sqrt{4y^4+y^5-4y^4}=2y^2\pm y^{\frac{5}{2}}$$

پس دو تابع وجود دارد که تنها برای $y\geqslant 0$ معین می‌باشند. بااستفاده از این دو تابع می‌توان بآسانی خم به معادلهٔ $f(x\ ,\ y)=0$ را رسم کرد (شکل ۵۹ که در آن یکه‌درازای محورها مختلف گرفته شده است). به علاوه داریم :

$$f(0\ ,\ 0)=f'_x(0\ ,\ 0)=f'_y(0\ ,\ 0)=0$$

در حقیقت‌درفاصله‌ های باز به مرکز 0 نه y را می‌توان به صورت تابعی پیوسته از x نوشت که در نقطه O صفر گردد،و نه x رامی‌توان به‌صورت‌تابعی پیوسته‌از y نوشت که مقدارش در نقطه O برابر صفر باشد . دلیل این مطلب به آسانی از روی روش ساختن خم دیده می‌شود.



شکل ۵۹

۱۳ . ۲ ـ نخستین تعمیم

۱.۲.۱۳ ـ فرض می‌کنیم $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) \to f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ یک تابع با مشتقهای پیوسته دریک بخش باز U از $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد. برای آسانی، مطلب را درحالت $n=2$ بیان می‌کنیم و دراین حالت قرار می‌دهیم $x_1 = x$ و $x_2 = y$.

چنانچه (x_0, y_0, z_0) نقطه‌ای از U باشد به طوری که داشته باشیم:

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

واگر $f'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ باشد، دو شمار $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ وجود دارد که برای آنها ویژگیهای زیر برقرارند:

(I) ـ برای هر x متعلق به فاصلهٔ $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ وهر y متعلق به فاصلهٔ $]y_0 - \alpha, y_0 + \alpha[$ معادلهٔ $f(x, y, z) = 0$ نسبت به z دارای یک جواب یکتا در فاصلهٔ $]z_0 - \beta, z_0 + \beta[$ می‌باشد.

(II) ـ اگر $\varphi(x, y)$ این جواب باشد تابع φ در:

$$]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\times]y_0 - \alpha, y_0 + \alpha[$$

دارای مشتق پیوسته است.

(III) ـ داریم:

$$d\varphi(x, y) = -\frac{f'_x(x, y, \varphi(x, y))}{f'_z(x, y, \varphi(x, y))} dx - \frac{f'_y(x, y, \varphi(x, y))}{f'_z(x, y, \varphi(x, y))} dy$$

این تعمیم قضیهٔ ۴.۱.۱۳ است که ساقسمتهای (I) و (II) آنرا بدون اثبات می‌پذیریم.

برای اثبات قسمت (III) با توجه به شماره ۱.۳.۱۲ از دو طرف برابری $f(x, y, \varphi(x, y))=0$ که در بخش باز $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\times]y_0-\alpha, y_0+\alpha[$ برقرار است، دیفرانسیل می گیریم :

$$f'_x(x, y, \varphi(x, y))dx+f'_y(x, y, \varphi(x, y))dy +f'_z(x, y, \varphi(x, y)d\varphi(x, y)=0$$

اما چون برای مقادیر کوچک $|x-x_0|$ و $|y-y_0|$ داریم $f'_z(x, y, \varphi(x, y)) \neq 0$ پس برابری قسمت (III) به دست می‌آید.

۳.۲.۱۳ - **صفحهٔ مماس بر رویهٔ به معادلهٔ** $f(x, y, z)=0$ - بنابر شمارهٔ ۱.۲.۱۳ معادلهٔ $f(x, y, z)=0$ دست کم در بخش باز :

$$]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\times]y_0-\alpha, y_0+\alpha[\times]z_0-\beta, z_0+\beta[$$

یک رویهٔ $\sum$ معین می کند که در هر نقطه دارای یک صفحهٔ مماس H است.

معادلهٔ این صفحه مماس در نقطهٔ M از $\sum$، به آرایندههای x, y, z به صورت زیر است :

$$Z-z=-\frac{f'_x(x, y, z)}{f'_z(x, y, z)}(X-x)-\frac{f'_y(x, y, z)}{f'_z(x, y, z)}(Y-y)$$

یا :

$$(X-x)f'_x(x, y, z)+(Y-y)f'_x(x, y, z)+(Z-z(f'_z(x, y, z)=0$$

۳.۲.۱۳ - **قائم بر رویهٔ به معادلهٔ** $f(x, y, z)=0$ - در روی $\mathbf{R}^3$ ضرب اسکالر معمولی را در نظر می گیریم. با توجه به شماره ۲.۲.۱۳ **قائم بر $\sum$ در نقطهٔ M** (یعنی قائم بر H در نقطهٔ M) **با بردار به مؤلفه‌های** $f'_x(x, y, z)$ ، $f'_y(x, y, z)$ ، $f'_z(x, y, z)$ **یعنی بردار** gradf **هم راستا است.**

۱۳ . ۳ ـ دومین تعمیم

۱.۳.۱۳ ـ دستگاه معادله های :

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_p)=0$$
$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_p)=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_p)=0$$

را اختیارمی‌نماییم ، وفرض می کنیم $f_1 , f_2 , \ldots , f_p$ در یک بخش باز U از $\mathbf{R}^{n+p}$ دارای مشتق پیوسته باشند . میخواهیم از این p معادله $u_1 , u_2 , \ldots , u_p$ را به صورت توابعی از x_i ها به دست آوریم. در حالتی که $p=1$ باشد به شمارهٔ ۲.۱۳ برمی گردیم (یک معادله و یک مجهول).

برای آسانی،مطلب را در حالت دو معادله و دو مجهول u و v یعنی :

$$(1) \qquad \begin{cases} f(x , y , z , u , v)=0 \\ g(x , y , z , u , v)=0 \end{cases}$$

مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فرض می کنیم $(x_0 , y_0 , z_0 , u_0 , v_0)$ نقطه‌ای از $\mathbf{R}^5$ باشد که دردومعادلهٔ بالاصدق می کند. توابع f و g را به صورت توابعی از u و v در نظر می گیریم و دترمینان زیر را تشکیل می‌دهیم :

$$\Delta=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix}$$

اگر $\Delta(x_0 , y_0 , z_0 , u_0 , v_0) \neq 0$ باشد ، شمارهای $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ باویژگیهای زیر وجود دارند :

(I) — برای هر x متعلق به $]x_0-\alpha , x_0+\alpha[$ وهر y متعلق به $]y_0-\alpha , y_0+\alpha[$ و هر z متعلق به $]z_0-\alpha , z_0+\alpha[$ دستگاه (۱) در بخش $]u_0-\beta , u_0+\beta[\times]v_0-\beta , v_0+\beta[$ دارای یک جواب یکتا می‌باشد.

(II) — اگر $\varphi(x , y , z)$ و $\psi(x , y , z)$ این جواب باشد ، توابع φ و ψ در بخش $]x_0-\alpha , x_0+\alpha[\times]y_0-\alpha , y_0+\alpha[\times]z_0-\alpha , z_0+\alpha[$ دارای مشتق پیوسته‌اند.

این مطالب رابدون اثبات می‌پذیریم.
با دیفرانسیل گیری از دوطرف معادله های :

$$f(x , y , z \;,\; \varphi(x , y , z) \;,\; \psi(x , y , z))=0$$

$$g(x , y , z \;,\; \varphi(x , y , z) \;,\; \psi(x , y , z))=0$$

مشتقهای‌نسبی φ و ψ به دست میآیند. اما با توجه به شماره ۱.۳.۱۲ نتیجه می‌شود :

$$(۲)\qquad \begin{cases} f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz + f'_u d\varphi + f'_v d\psi = 0 \\ g'_x dx + g'_y dy + g'_z dz + g'_u d\varphi + g'_v d\psi = 0 \end{cases}$$

دو معادله بالا یکدستگاه خطی نسبت به $d\varphi$ و $d\psi$ ، که دترمینان آن Δ است ، تشکیل می‌دهند . چون داریم $\Delta(x_0 , y_0 , z_0 , u_0 , v_0) \neq 0$ پس برای مقادیر کوچک α و β ؛ دربخش باز :

$$]x_0 - \alpha , x_0 + \alpha[\times]y_0 - \alpha , y_0 + \alpha[\times]z_0 - \alpha , z_0 + \alpha[$$
$$\times]u_0 - \beta , u_0 + \beta[\times]v_0 - \beta , v_0 + \beta[$$

خواهیم داشت $\Delta(x , y , z , u , v) \neq 0$. دراین‌صورت دستگاه (۲) یک دستگاه کرامر است، که از حل آن $d\varphi$ و $d\psi$ به دست می‌آید .

۲.۳.۱۳ - مماس برخم به‌معادله‌های $f(x,y,z) = 0$ و $g(x,y,z) = 0$ -
فرض می‌کنیم f و g دارای‌مشتق پیوسته و $M_0 = (x_0 , y_0 , z_0)$ نقطه‌ای از $\mathbf{R}^3$ باشد به‌طوری‌که :

$$f(x_0 , y_0 , z_0) = g(x_0 , y_0 , z_0) = 0$$

چنانچه داشته باشیم :

$$(۱)\qquad \begin{vmatrix} f'_y(x_0 , y_0 , z_0) & f'_z(x_0 , y_0 , z_0) \\ g'_y(x_0 , y_0 , z_0) & g'_z(x_0 , y_0 , z_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

بنابرشمارهٔ ۱.۳.۱۳ برای مقادیر کوچک $|x - x_0|$, $y - y_0$, $|z - z_0|$ دستگاه $f(x , y , z) = g(x , y , z) = 0$ متغیرهای y و z را به روشی یکتا به‌صورت توابعی با مشتق‌های پیوسته از x معین میکند . پس این دستگاه دست‌کم دریک بخش باز :

$$]x_0 - \alpha , x_0 + \alpha[\times]y_0 - \beta , y_0 + \beta[\times]z_0 - \beta , z_0 + \beta[$$

یک خم Γ معین میکند که درهرنقطه دارای یک مماس است. معادلهٔ $f(x,y,z) = 0$ یک رویهٔ S گذرنده بر M_0 را نمایش می‌دهد . بنابر (۱) یا $f'_y(x_0 , y_0 , z_0) \neq 0$ است یا $f'_z(x_0 , y_0 , z_0) \neq 0$. پس S درنقطهٔ M_0 دارای یک صفحهٔ مماس H می‌باشد که بنابر ۲.۲.۱۳ معادلهٔ آن عبارتست از :

$$(X-x_0)f'_x(x_0, y_0, z_0)+(Y-y_0)f'_y(x_0, y_0, z_0)$$
$$+(Z-z_0)f'_z(x_0, y_0, z_0)=0$$

همچنین معادلهٔ $g(x, y, z)=0$ یک رویهٔ T گذرنده بر M_0 را نمایش میدهد که درنقطهٔ M_0 دارای یک‌صفحهٔ مماس K به معادلهٔ :

$$(X-x_0)g'_x(x_0, y_0, z_0)+(Y-y_0)g'_y(x_0, y_0, z_0)$$
$$+(Z-z_0)g'_z(x_0, y_0, z_0)=0$$

می‌باشد . بنابرتعریف‌صفحهٔ مماس (شماره ۳.۲.۱۷)، مماس برخم Γ درنقطهٔ M_0 در صفحه‌های H و K واقع است. وانگهی H و K ازنقطهٔ M_0 می‌گذرند و بنابرشرط (۱) و شمارهٔ ۱۵.۱۵.۸ کتاب جبر بریکدیگر منطبق نیستند . پس اگر شرط (۱) برقرار باشد، خم Γ درنقطهٔ M_0 دارای یک مماس است که به‌وسیلهٔ معادله‌های زیر مشخص می‌شود :

$$(X-x_0)f'_x(x_0, y_0, z_0)+(Y-y_0)f'_y(x_0, y_0, z_0)$$
$$+(Z-z_0)f'_z(x_0, y_0, z_0)=0$$
$$(X-x_0)g'_x(x_0, y_0, z_0)+(Y-y_0)g'_y(x_0, y_0, z_0)$$
$$+(Z-z_0)g'_z(x_0, y_0, z_0)=0$$

فصل چهاردهم
معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول

در بسیاری از دانش‌ها، به معادله‌های دیفرانسیل و دستگاه های دیفرانسیل برخورد می‌کنیم. در اینجا به‌مطالعهٔ چند نمونهٔ ساده از معادله‌های دیفرانسیل مرتبهٔ اول می‌پردازیم. خواننده با معادله‌هایی که در آنها مجهول یک عدد است سروکار داشته است.

نکتهٔ تازه در این فصل این است که مجهول یک تابع است، یعنی عنصری ریاضی که بسیار پیچیده‌تر از یک عدد می‌باشد.

۱.۱۴ - تعریف

۱.۱.۱۴ - فرض می‌کنیم تابع حقیقی $(x,y) \to f(x,y)$ دربخش U از $\mathbf{R}^2$ تعریف شده باشد. تابع $x \to \varphi(x)$ را که در فاصله I از $\mathbf{R}$ معین و در این فاصله مشتق‌پذیر است **یک جواب** یا **یک انتگرال** معادلهٔ $y'=f(x,y)$ خوانیم هرگاه برای هر $x\in I$ داشته باشیم:

$$\varphi'(x)=f(x,\varphi(x))$$

[برای اینکه طرف دوم این برابری دارای معنی باشد باید فرض کنیم که برای هر $x\in I$ داریم $(x,\varphi(x))\in U$].

۲.۱.۱۴ - معادله $y'=f(x,y)$ را یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول میگویند. منظور از **حل** یا **انتگرال‌گیری** این معادله پیداکردن تمام جوابهای آن است.

۳.۱.۱۴ - فرض می‌کنیم φ یک جواب معادله $y'=f(x,y)$ باشد که درفاصله I معین است. اگر تحدید φ را به یک زیر فاصله I_1 از I، φ_1 بنامیم، φ_1 نیز یک جواب معادله است. به‌وارون می‌توان جوابهایی مانند φ_2 یافت به قسمی φ یک تحدید φ_2 باشد (دراین‌صورت گوییم φ_2 یک **تمدید** φ است). φ را یک جواب **ماکزیمال** نامیم هرگاه تنها جوابی که تمدید φ است خود φ باشد. دراینجا بدون اثبات می‌پذیریم که تمدید هرجواب را می‌توان یک جواب ماکزیمال دانست. بنابراین حل یک معادلهٔ

دیفرانسیل به جستجوی جوابهای ماکزیمال آن معادله منجر می‌گردد . زیرا پس از پیدا کردن این جوابها کافی است تحدید آنها را به زیر فاصله‌ها درنظر بگیریم . ما از انجام این عمل ساده صرفنظر خواهیم کرد .

۴.۱.۱۴ - **مثال** - فرض می‌کنیم $x \to f(x)$ یک تابع پیوسته درفاصله I باشد. نقطه x_0 متعلق به I را درنظر می‌گیریم . جوابهای ماکزیمال معادله $y'=f(x)$ عبارتند از تابع های اولی

$$g=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx+\lambda$$

(λ مقدارثابت‌دلخواهی‌است)

که در I معین می‌باشند . چنانکه دیده می‌شود شماره بی‌پایانی جواب ماکزیمال وجود دارد که هرکدام به یک مقدار ثابت دلخواه بستگی دارد . این مطلب درتمام معادلات دیفرانسیل مرتبه اول بچشم خواهد خورد .

ازآنچه گذشت نتیجه می‌شود که جستجوی توابع اولی حالت‌ویژه حل‌معادلات‌دیفرانسیل مرتبه اول می‌باشد ، اما این مسأله معمولاً خیلی مشکل‌تر از جستجوی توابع اولی است .

۵.۱.۱۴ - **مثال** - مطلوبست حل معادله دیفرانسیل $y'=y$. با قرار دادن $z=e^{-x}y$ تابع y را عوض می‌کنیم . داریم :

$$y=ze^{x}\ ,\ \ y'=z'e^{x}+ze^{x}$$

پس معادله داده شده با $z'e^{x}+ze^{x}=ze^{x}$ هم‌ارز می‌باشد . اما این معادله هم‌ارز با $z'e^{x}=0$ که خود هم‌ارز با $z'=0$ می‌باشد . جوابهای‌ماکزیمال معادله اخیر عبارتند از $z=c$ (c شماری‌است ثابت‌دلخواه) . بنابراین جوابهای ماکزیمال معادله داده شده عبارتند از $y=ce^{x}$ که درآن c شماری ثابت و دلخواه است و x در $\mathbf{R}$ تغییر می‌کند .

۶.۱.۱۴ - **مثال** - مطلوبست حل معادله دیفرانسیل :

$$xy'-2y-2x^{4}=0 \qquad (1)$$

دراین مثال تعریف یک معادله دیفرانسیل را کمی تعمیم می‌دهیم. زیرا تنها درفاصله های $]-\infty\,,0[$ و $]0\,,+\infty[$ معادله (۱) با معادلهٔ :

$$y'=2\,\frac{y}{x}+2x^{3} \qquad (2)$$

هم‌ارز است.

اکنون(۲) را حل می‌کنیم. مجموعه عنصرهای (x,y) متعلق به $\mathbf{R}^2$ که برای آنها

طرف دوم (۲) معین است تمام مجموعه $\mathbf{R}^2$ غیر از نقاط Oy می‌باشد . بنابراین جوابهای (۲) توابعی هستند که درفاصله‌هایی که شامل ۰ نیستند معین می‌باشند و در این فاصله‌ها مشتق‌پذیرند .

با انتخاب مجهول جدید $z=yx^{-2}$ داریم :

$$y=zx^2 \quad , \quad y'=z'x^2+2zx$$

معادله (۲) در $]-\infty,0[\bigcup]0,+\infty[$ بامعادلهٔ :

$$z'x^2+2zx=2zx+2x^3$$

ودرنتیجه بامعادله $z'=2x$ هم‌ارزاست. جوابهای ماکزیمال این‌معادله در $]-\infty,0[$ برابر با $z=x^2+c$ و در $]0,+\infty[$ برابر با $z=x^2+c'$ می‌باشند (که درآن‌ها c و c' مقادیر ثابت دلخواه‌اند) . بنابراین جوابهای ماکزیمال (۲) عبارتند از :

$$y=x^4+cx^2 \qquad (x<0)$$

$$y=x^4+c'x^2 \qquad (x>0)$$

اینک‌فرض‌می‌کنیم φ یک‌جواب باشد که دریک‌فاصله I تعریف‌شده‌است. اگر ۰ به I متعلق نباشد φ یک جواب (۲) است. فرض می‌کنیم $0\in I$. دراین‌صورت دومقدار ثابت c و c' وجود دارد به‌طوریکه :

$$\varphi(x)=x^4+cx^2 \quad , \quad x\in I\bigcap]0,+\infty[$$

$$\varphi(x)=x^4+c'x^2 \quad , \quad x\in I\bigcap]-\infty,0[$$

چون φ باید پیوسته باشد پس داریم $\varphi(0)=0$

به‌وارون هرتابع φ که برای $x>0$ برابر x^4+cx^2 و برای $x<0$ برابر $x^4+c'x^2$ و برای $x=0$ برابر ۰ باشد یک جواب است . زیرا آشکاراست که φ درفاصله‌های $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$ در (۱) صدق می‌کند. وانگهی اگر $h\neq 0$ باشد داریم :

$$\frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h}=h^3+\lambda h \qquad (\lambda=c \text{ یا } c')$$

هنگامیکه h به سمت صفر می‌گراید $h^3+\lambda h$ به سمت صفر میل می‌کند. پس $\varphi'(0)=0$ و بنابراین معادله (۱) برای $x=0$ نیز برقرار است.

توابع φ که به روش بالا بدست می‌آیند در $\mathbf{R}$ معین هستند و درنتیجه جوابهای ماکزیمال (۱) می‌باشند. این جوابها به‌دومقدار ثابت دلخواه بستگی‌دارند. اما یادآوری می‌کنیم که درمعادله (۱)، y' برحسب x و y نوشته نشده است.

۲.۱۴ - تعبیر هندسی

۱.۲.۱۴ - فرض می‌کنیم $y'=f(x,y)$ (۱)

یک‌معادله دیفرانسیل باشد که درآن f دریک‌بخش U از $\mathbf{R}^2$ معین شده است. نمودارهای جوابها (جوابهای ماکزیمال) را **خم‌های انتگرال** (خم‌های انتگرال ماکزیمال) معادله (۱) می‌نامند.

۲.۲.۱۴ - برای هرنقطه $M=(x,y)$ متعلق به U فرض می‌کنیم Δ_M خط گذرنده بر M باشیب $f(x,y)$ باشد.

قضیه - برای اینکه تابعی مانند $y=\varphi(x)$ دریك فاصله I جواب (۱) باشد بایاوبسنده است که نمودارآن Γ درشرط زیر صدق کند:

برای هر نقطه M از Γ خط Δ_M مماس بر Γ درنقطه M باشد.

اثبات - فرض می‌کنیم φ یک جواب (۱) و $M=(x,y)$ نقطه‌ای از Γ باشد. باشد. داریم $\varphi'(x)=f(x,y)$ بنابراین شیب خط مماس بر Γ درنقطه M برابر است با $f(x,y)$ یعنی این خط مماس همان Δ_M است.

اینک فرض می‌کنیم Γ در شرط قضیه صدق کند. دراینصورت برای هر $x\in I$ مقدار $\varphi'(x)$ وجود دارد و برابر با شیب خط $\Delta_{(x,\varphi(x))}$ یعنی $f(x,\varphi(x))$ می‌باشد. بنابراین φ جواب (۱) است.

این تعبیر هندسی گاهی بما امکان میدهد که بعضی از خم‌های انتگرال را پیش‌بینی کنیم.

۳.۲.۱۴ - **مثال** - $y'=-\dfrac{x}{y}$

دراینجاداریم $U=\mathbf{R}^2-Ox$. درهرنقطه M از U خط Δ_M بر OM عمود است (برای ضرب اسکالر معمولی $\mathbf{R}^2$). بنابراین خم‌های انتگرال دایره‌هایی هستند بمرکز

O که از آنها نقطه برخوردشان با Ox را برداشته باشیم، و جوابهای وابسته به این خم‌ها عبارتند از توابع :

$$y=\sqrt{R^2-x^2} \quad , \quad y=-\sqrt{R^2-x^2} \quad , \quad (-R<x<R)$$

این توابع جوابهای ماکزیمال می‌باشند. زیرا هرتابع پیوسته‌ای که تمدید $\pm\sqrt{R^2-x^2}$ باشد و درنقاط R یا $-R$ معین باشد مقدارش دراین نقاط صفر است . بنابراین چنین تابعی نمی‌تواند یک جواب باشد. درشماره ۲.۳.۱۴ خواهیم دید که جوابهای بالا تمام جوابهای ماکزیمال می‌باشند .

۳.۱۴ـ قضیهٔ عمومی وجود و یکتایی

۱.۳.۱۴ ـ قضیه زیر را بدون اثبات می‌پذیریم :

قضیه ـ بخش باز U از R^2 و یک تابع حقیقی f که در U پیوسته است داده شده‌اند. فرض می‌کنیم که f'_y وجود دارد ودر U پیوسته است. اگر (x_0 , y_0) یک نقطه U باشد، برای معادله $y'=f(x,y)$ یک جواب ماکزیمال φ وفقط یکی وجود دارد به قسمی که $\varphi(x_0)=y_0$.

۲.۳.۱۴ - **مثال** ـ مانند شماره ۳.۲.۱۴ معادله $y'=-\dfrac{x}{y}$ رادرنظرمیگیریم.

تابع $(x,y) \to f(x,y)=-\dfrac{x}{y}$ در U پیوسته است. همچنین $f'_y(x,y)=\dfrac{x}{y^2}$ در U پیوسته می‌باشد . بنابراین برهرنقطه M_0 از U یک خم انتگرال ماکزیمال ، و تنها یکی ، می‌گذرد . درشمارهٔ ۳.۲.۱۴ یک خم ماکزیمال پیدا کردیم که از M_0 می‌گذشت. پس بنابرقضیه بالا ، درشماره ۳.۲.۱۴ معادله را کاملاً حل کرده‌ایم .

۴.۱۴ ـ معادلات دیفرانسیل با متغیرهای جدا

۱.۴.۱۴ - **تعریف - یك معادله دیفرانسیل را بامتغیرهای جدا خوانیم هرگاه این معادله به صورت زیر نوشته شود :**

$$f(y)y'=g(x) \qquad (1)$$

که‌در آن f یك تابع پیوسته‌حقیقی دریك‌فاصله I و g یك تابع پیوسته‌حقیقی دریك فاصله J است (دراینجا نیز مانند شماره ۶.۱.۱۴ مفهوم‌معادله دیفرانسیل‌قدری وسیع‌تر گرفته شده‌است) .

۲.٤.۱٤ ـ معادلهٔ (۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$f(y)dy=g(x)dx \tag{۲}$$

که از روی آن علت نامگذاری « متغیرهای جدا » دیده می‌شود .

۳.٤.۱٤ ـ قضیه ـ فرض می‌کنیم F یک تابع اولی f در I و G یک تابع اولی g در J باشد. برای‌اینکه یک تابع $x \to y(x)$ ، که دریک زیر فاصله J معین و مشتق‌پذیر است ، درمعادله (۱) صدق کند بایاو بسنده است که داشته باشیم :

$$F(y)=G(x)+C \tag{۳}$$

که در آن C یک مقدار ثابت است .

اثبات ـ برای‌اینکه تابع $x \to F(y(x))-G(x)$ درمجموعه تعریف تابع y برابر بامقدار ثابت باشد بایاوبسنده‌است که مشتق آن‌صفر **شود**. اما این‌مشتق برابراست‌با :

$$F'(y(x))y'(x)-G'(x)=f(y(x))y'(x)-g(x)$$

که از روی آن با توجه به (۱) قضیه ثابت می‌شود.

٤.٤.۱٤ ـ معادله (۳) را می‌توان بصورت :

$$\int f(y)dy=\int g(x)dx \tag{٤}$$

نوشت . ازآنجا دستورعملی زیر بدست می‌آید :

حل معادلهٔ $f(y)dy=g(x)dx$ هم‌ارزاست باجستجوی توابع مشتق پذیری مانند y به قسمی که داشته باشیم :

$$\int f(y)dy=\int g(x)dx$$

۵.٤.۱٤ ـ **مثال** ـ مانند شماره ٤.۱.۱٤ معادله :

$$y'=y \tag{۱}$$

را درنظر می‌گیریم وفرض می‌کنیم U مجموعهٔ $\mathbf{R}^۲-Ox$ باشد . در U معادله (۱) با معادله :

$$\frac{y'}{y}=۱ \qquad (۲)$$

که یک معادله با متغیرهای جداست ، هم‌ارز است . معادله (۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\frac{dy}{y}=dx$$

بنابر ۴.۴.۱۴ جوابهای (۲) همان جوابهای مشتق‌پذیر معادلهٔ :

$$\int\frac{dy}{y}=\int dx$$

می‌باشند. این جوابها عبارتند از :

$$\mathrm{Log}\,|y|-\mathrm{Log}\,|C|=x \qquad (۳)$$

(C یک مقدار ثابت مخالف باصفر است) (به منظور ساده کردن محاسبه ، مقدار ثابت دلخواه به‌صورت $-|\mathrm{Log}\,C|$ نوشته شده است .

معادله (۳) به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\mathrm{Log}\left|\frac{y}{C}\right|=x$$

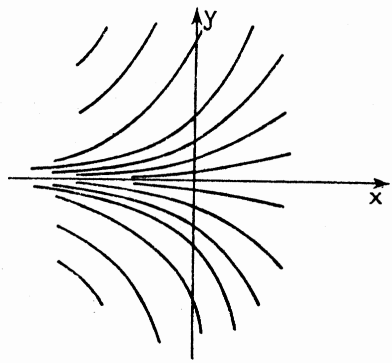
$$\left|\frac{y}{C}\right|=e^x$$

$$y=\pm Ce^x$$

و یا به طور ساده $y=Ce^x$ که درآن C یک مقدار ثابت دلخواه غیرصفر است.

اکنون معادله (۱) را درتمام $\mathbf{R}^۲$ درنظر می‌گیریم . آشکار است که $y=۰$ یک جواب است وبنابراین مقدار ثابت C هرچه باشد تابع $y=Ce^x$ جواب (۱) می‌باشد . به علاوه اگر این تابع را درتمام $\mathbf{R}$ درنظر بگیریم یک جواب ماکزیمال (۱) خواهد بود. بنابرشماره ۱.۳.۱۴ تنها یک جواب ماکزیمال وجود دارد که برای $x=x_۰$ برابر بامقدار

داده شدهٔ y_0 است. چون می‌توان یک تابع Ce^x یافت که مقدارش درنقطه x_0 برابر y_0 باشد بنابراین توابع $y=Ce^x$ تمام جوابهای ماکزیمال (۱) را تشکیل می‌دهند.



شکل ۶۰

۶.۴.۱۴ - مثال - مطلوبست حل معادله :

$$y' = \frac{1+y^2}{1+x^2} \qquad (1)$$

معادله (۱) یک معادله با متغیرهای جداست که می‌توان آنرا به‌صورت زیر نوشت :

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2} \qquad (2)$$

بنابر ۴.۴.۱۴ باید توابع‌مشتق‌پذیری، مانند y ، راجستجو کرد که برای‌آنهاداشته باشیم:

$$\mathrm{Arctg}\, y = \mathrm{Arctg} x + \lambda \qquad (3)$$ (λ یک مقدار ثابت است)

اگر تابعی‌مانند y ، که درفاصله‌ای‌مشتق‌پذیراست، در (۳) صدق کندرهمان فاصله خواهیم داشت :

$$y = \mathrm{tg}(\mathrm{Arctg} x + \lambda) \qquad (4)$$

به وارون اگر تابع y دریک فاصله I در (۴) صدق کند درهمین فاصله خواهیم داشت :

$$\mathrm{Arctg} y = \mathrm{Arctg} x + \lambda + k(x)\pi$$

که درآن $k(x) \in \mathbf{Z}$. چون‌باید $k(x)\pi = \mathrm{Arctg} y - \mathrm{Arctg} x - \lambda$ یک‌تابع پیوسته از x باشد، قضیهٔ ۹.۹.۲ ثابت‌می‌کند که مقدار $k(x)$ درفاصله I ثابت است . بنابراین

MATH75.IR

y در (۳) صدق می‌کند (با این شرط که درصورت لزوم λ به $-\lambda$ بدل گردد) . درنتیجه y در (۲) نیز صدق می‌کند .

بستگی (٤) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

°۱- اگر $\lambda \neq \frac{\pi}{2} (\mathrm{mod}\,\pi)$ باشد:

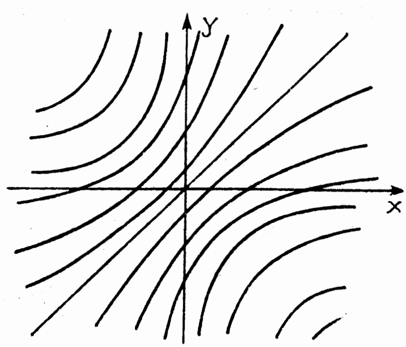
$$y = \frac{x + \mathrm{tg}\,\lambda}{1 - (\mathrm{tg}\lambda)\,x}$$

°۲- اگر $\lambda \equiv \frac{\pi}{2} (\mathrm{mod}\,\pi)$ باشد:

$$y = -\frac{1}{x}$$

برحسب قرارداد تابع $x \to \frac{x+C}{1-Cx}$ را به‌صورت y_C و تابع $x \to -\frac{1}{x}$ رابه‌صورت y_∞ می‌نویسیم (پس y_∞ حد تابع y_C است هنگامیکه C به سمت $\pm\infty$ می‌گراید) .

بدین‌ترتیب جوابهای (۱) دریک فاصله ، توابعی‌هستند که دراین فاصله بایکی از توابع y_C برابرند .



شکل ۶۱

بنابراین جوابهای ماکزیمال (۱) عبارتند از :

— تابع $x \to -\frac{1}{x}$ درفاصله‌های $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$

— توابع $x \to \dfrac{x+C}{1-Cx}$ درفاصله‌های $[\,\dfrac{1}{C}\,,\,-\infty]$ و $]-\infty\,,\,\dfrac{1}{C}[$ ... $(C\neq 0)]\dfrac{1}{C}\,,\,+\infty[$

— تابع $x \to x$

۷.٤.۱٤ - شمارهٔ زیادی ازمعادلات دیفرانسیل را می‌توان باتعویض متغیر یاتعویض تابع مجهول ، به معادلات بامتغیرهای جدا برگرداند. به عنوان مثال معادلاتی به‌صورت :

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (x>0 \quad \text{یا} \quad x<0)$$

را درنظر می‌گیریم .

چنانچه $z=\dfrac{y}{x}$ را مجهول جدید بگیریم خواهیم داشت :

$$y=zx \;,\; y'=z'x+z$$

بنابراین z درمعادلهٔ :

$$z'x+z=f(z)$$

ویا :

$$z'=\frac{f(z)-z}{x}$$

صدق می‌کند . درمجموعه $(x\,,\,z)$ هاییکه برای آنها $f(z)\neq z$ است معادله اخیر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$\frac{z'}{f(z)-z}=\frac{1}{x}$$

بدین‌ترتیب یک معادله با متغیرهای جدا بدست می‌آید .

۵.۱٤ـ معادلات خطی

۱.۵.۱٤ - تعریف - هرمعادله به‌صورت :

$$y'=a(x)y+b(x) \qquad (1)$$

که درآن a و b توابع حقیقی دلخواهی از x هستند ، نوشته شود یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی نامیده میشود.

۲.۵.۱٤ - اگر $b=0$ باشد معادله را **همگن** خوانند.

۳.۵.۱٤ - معادله :

$$y'=a(x)y \qquad (۲)$$

را معادلهٔ همگن وابسته به معادله (۱) می‌نامند.

٤.۵.۱٤ - قضیه - فرض می‌کنیم تابع a در یک فاصله I پیوسته باشد. اگر α یک تابع اولی a در I باشد، جوابهای ماکزیمال (۲) در I معین و به صورت $y=Ce^{\alpha(x)}$ می‌باشند که در آن C یک مقدار ثابت دلخواه است.

اثبات - می‌توان (۲) را مانند یک معادله با متغیرهای جدا حل کرد ولی اگر به روش زیر عمل کنیم زودتر به نتیجه می‌رسیم:

تعویض مجهول $z=ye^{-\alpha}$ را انجام می‌دهیم، درنتیجه به دست می‌آید :

$$y=ze^{\alpha} \ , \ y'=z'e^{\alpha}+zae^{\alpha}$$

دراین‌صورت معادله (۲) هم‌ارز معادله زیر است :

$$z'e^{\alpha}+zae^{\alpha}=aze^{\alpha}$$

به عبارت دیگر (۲) هم‌ارز با معادله $z'=0$ می‌باشد که جوابهای آن عبارتند از $z=C$ (C یک مقدار ثابت دلخواه‌است) . ازآنجا نتیجه می‌شود $y=Ce^{\alpha}$ و بنابراین جوابهای ماکزیمال درتمام I معین می‌باشند.

۵.۵.۱٤ - از ٤.۵.۱٤ نتیجه می‌شود که هرجواب (۲) یامتحد با صفراست (حالت $C=0$) و یا اینکه درهمه‌جا مخالف باصفر است (حالت $C\neq 0$) .

۶.۵.۱٤ - فرض می‌کنیم E فضای برداری توابع حقیقی مشتق‌پذیر درفاصله I و F فضای برداری توابع حقیقی دلخواه در I باشد دراین‌صورت $y \to y'-ay$ یک نگاشت E در F مانند u مشخص می‌کند که یک نگاشت خطی می‌باشد. هسته u را N می‌نامیم. قضیه ٤.۵.۱٤ این هسته را معین می‌کند. به‌علاوه دیده می‌شود که بعد این هسته یک است. بنابراین اگر یک جواب مخالف صفر معادله (۲) مانند y_0 را بشناسیم، ویا به‌عبارت دیگر یک عنصر غیرصفر N را بشناسیم، سایر جوابهای (۲) به صورت Cy_0 خواهند بود که درآنها C یک مقدار ثابت دلخواه است.

۷.۵.۱۴ - **روش حل معادله** (۱) - فرض می‌کنیم a و b در I پیوسته باشند.

مرحله‌اول - معاله (۲) را حل می‌کنیم. اگر $y_\circ$ یک‌جواب(۲) باشد که‌درهمه‌جا مخالف‌باصفراست‌خواهیم داشت $y=Cy_\circ$ که درآن C یک مقدار ثابت‌است(۵.۵.۱۴ و ۶.۵.۱۴).

مرحله‌دوم . تعویض‌مجهول $z=y_\circ^{-1}y$ را انجام‌می‌دهیم‌ودرنتیجه بدست‌می‌آوریم:

$$y=zy_\circ \ , \ y'=zy_\circ'+z'y_\circ$$

دراینصورت معادله (۱) با معادله زیر هم‌ارز است :

$$zy_\circ'+z'y_\circ=azy_\circ+b \qquad (۳)$$

و بنابراین (۱) با معادلهٔ :

$$(y_\circ'-ay_\circ)z+z'y_\circ=b$$

هم‌ارز می‌باشد. چون $y_\circ$ یک‌جواب مخالف‌صفر(۲) می‌باشد پس(۱) بامعادله $z'=by_\circ^{-1}$ هم ارز است . چنانکه دیده می‌شود تنها مشتق z است که دراین فرمول به‌کار می‌آید . اگر F یک تابع اولی $by_\circ^{-1}$ در I باشد این تابع اولی در I پیوسته است وجوابهای ماکزیمال(۳) عبارتند از $z=F+\lambda$ (λ مقدار ثابت دلخواهی‌است) و درنتیجه‌جوابهای ماکزیمال (۱) (که در I معین می‌باشند) به‌صورت :

$$y=Fy_\circ+\lambda y_\circ$$

خواهند بود .

عملاً درمرحله‌دوم‌حرفz را ، که به‌وسیلهٔ $y=zy_\circ$ بهyوابسته‌است‌دخالت‌نمی‌دهیم و حرف C را (که درمرحله اول یک مقدار ثابت بود) درنظر می‌گیریم ولی آنرا به عنوان یک تابع از x فرض می‌کنیم . بدین‌جهت این روش را **روش تغییر مقدار ثابت** می‌نامند.

۸.۵.۱۴ - قراردادهای ۶.۵.۱۴ را درنظرمی‌گیریم وفرض می‌کنیم که یک‌جواب ماکزیمال‌ویژه y_1 ازمعادله(۱) را بشناسیم. بنابرشماره‌های ۴.۱.۱۱ و ۵.۱.۱۱ کتاب جبر داریم:

$$(۱) \Longleftrightarrow y\in y_1+N$$

به گفته دیگر :

قضیه - از افزودن یک جواب ماکزیمال ویژهٔ معادله (۱) به جوابهای ماکزیمال معادلهٔ (۲) ، کلیهٔ جوابهای ماکزیمال (۱) به‌دست می‌آیند.

۹.۵.۱٤ - **مثال** - مطلوبست حل معادله :

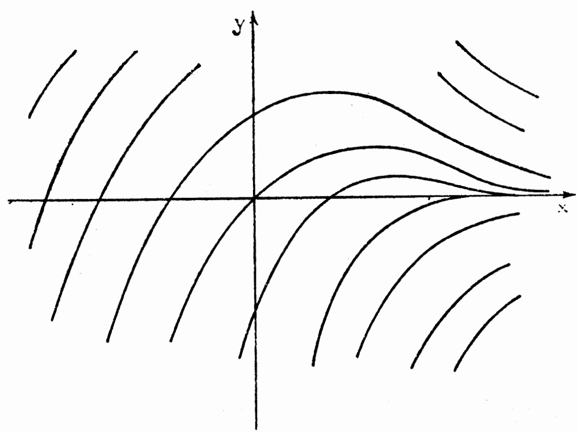
$$y'+y=e^{-x} \tag{٤}$$

بنابرشماره ٤.٥.١٤ جوابهای معادلـه همگن وابسته به‌این معادله یعنی جوابهای معادله $y'+y=0$ عبارتند از :

$$y=Ce^{-x}$$

با بکار بردن روش تغییر مقدار ثابت یعنی بـا درنظرگرفتن C به عنوان یک تابع ، معادله (٤) به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$C'e^{-x}-Ce^{-x}+Ce^{-x}=e^{-x}$$



شکل ٦٣

همانطورکه از حالت کلی ٧.٥.١٤ پیش‌بینی می‌شود تنها مشتق C است که در محاسبات دخالت می‌نماید ، و پس از ساده کردن به دست می‌آید :

$$C'=1$$

و ازآنجا $C=x+\lambda$ (λ یک مقدار ثابت دلخواه است) . بنابراین‌جوابهای ماکزیمال معادله (۱) عبارتند از :

$$y=(x+\lambda)e^{-x}$$

می‌توان خم‌های انتگرال را به آسانی رسم کرد .

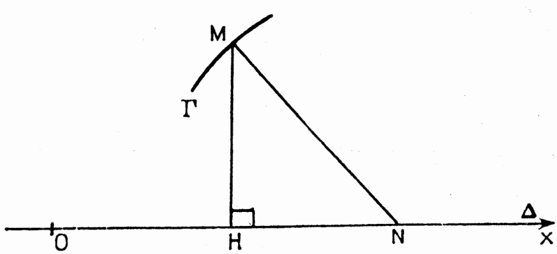
۶.۱۴ـ کاربرد دریک مسأله هندسی

یک محور Δ درصفحه داده شده است . فرض می‌کنیم a یک مقدار بزرگتر از صفر باشد . میخواهیم درنیم صفحه‌های باز معین شده بوسیله Δ خم‌های Γ را طوری بیابیم که در ویژگی زیر صدق کنند :

درهرنقطهٔ M از Γ یک قائم بر Γ وجود دارد به‌قسمی که اگر N نقطهٔ برخورد این قائم با Δ باشد داشته باشیم :

$$\overline{HN}=a$$

که درآن H تصویر قائم نقطهٔ M روی Δ است .



شکل ۶۳

یک مبداء O ویک‌پایه یکه‌ای‌متعامد به‌قسمی‌انتخاب‌می‌کنیم‌که Δ همان Ox باشد. ابتدا می‌پذیریم که خم‌های‌مطلوب نمودار توابعی به‌صورت $x \to y(x)$ می‌باشند وسپس شرایطی راکه این‌توابع باید درآنها صدق کنند پیدا می‌کنیم. اگر x طول نقطه M باشد، معادله خط MN که بربردار به آراینده‌های ۱ و y' عمود است به‌صورت زیرخواهدبود :

$$X-x+y'(Y-y)=0$$

چون میخواهیم که نقطهٔ برخورد خط MN با Δ یعنی‌نقطه N به‌طول $x+a$ باشد، پس باید داشته باشیم :

$$(x+a)-x+y'(0-y)=0$$

و یا :

$$a-yy'=0$$

بدین ترتیب یک معادله با متغیرهای جدا به صورت $ydy=adx$ به دست می‌آید. بنابر ۴.۴.۱۴ جواب‌های این معادله توابع مشتق‌پذیری مانند y می‌باشند به قسمی که :

$$\int ydy=\int adx$$

و یا :

$$\frac{1}{2}y^2=a(x-\lambda)$$

که در آن λ یک مقدار ثابت دلخواه است. در نتیجه هرجواب ماکزیمال بصورت :

$$y=\sqrt{2a(x-\lambda)} \quad , \quad (x>\lambda)$$

و یا :

$$y=-\sqrt{2a(x-\lambda)} \quad , \quad (x>\lambda)$$

می‌باشد.

سهمی به محور $\triangle$ را که طول رأس آن λ و طول کانون آن $\lambda+\frac{a}{2}$ می‌باشد π_λ می‌نامیم. پس معادله این سهمی به صورت $y^2=2a(x-\lambda)$ خواهد بود. فرض می‌کنیم π'_λ مجموعه نقاط π_λ به عرض بزرگتر از صفر و π''_λ مجموعه نقاط π_λ به عرض کوچکتر از صفر باشند. دراین صورت خم‌های انتگرال ماکزیمال خم‌های π'_λ و خم‌های π''_λ خواهند بود.

هندسه

فصل پانزدهم

خمهای پارامتری در صفحه

در مکانیک، معمولا نقطه‌ای که بازمان تغییر می‌کند مورد بررسی قرار می‌گیرد. در اینجا این مطلب را به‌روشی مجرد مطالعه خواهیم کرد.

۱۵ . ۱- تعریف

۱.۱.۱۵ - فرض می‌کنیم A بخشی از $\mathbf{R}$ باشد. یک‌نگاشت $t \to M(t)$ بخش A در صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ را یک **خم پارامتری هامنی** می‌نامند. مجموعهٔ نقاط $M(t)$ را مجموعهٔ نقاط خم می‌گویند.

هرگاه نگاشت $t \to M(t)$ پیوسته باشد **خم پارامتری پیوسته** و اگر این نگاشت مشتق پذیر باشد **خم پارامتری مشتق‌پذیر** نامیده می‌شود و...

هنگامی که نگاشت $t \to M(t)$ کاملاً دلخواه باشد ممکن است مجموعهٔ نقاط خم با مفهوم معمولی که از خم می‌شناسیم تفاوت داشته باشد. مثلاً ممکن است مجموعهٔ نقاط یک خم پارامتری تمام صفحه باشد.

چنانچه A یک فاصلهٔ بسته وکراندار $[a , b]$ باشد خم پارامتری را یک **کمان** به **آغاز** $M(a)$ و به **انجام** $M(b)$ [یا به انجام‌های $M(a)$ و $M(b)$] می‌نامند. اگر $M(a)=M(b)$ باشد کمان را **بسته** می‌گویند (این تعریف را نباید با تعریف ۱.۶.۹ اشتباه کرد).

۲.۱.۱۵ - متغیر t را اغلب **پارامتر** می‌گویند وگاهی برای درک بهتر مطلب پارامتر را زمان می‌گیرند.

۳.۱.۱۵ - یک مبدأ و یک پایه در صفحه انتخاب می‌کنیم. دراین صورت $M(t)$ دارای آراینده‌هایی است که توابعی‌حقیقی از t می‌باشند. چنانچه $f(t)$ و $g(t)$ آراینده‌های $M(t)$ باشند گویند که خم پارامتری به وسیلهٔ **معادله‌های** $x=f(t)$ و $y=g(t)$

معین شده است . همچنین گفته می‌شود که مجموعهٔ نقاط خم دارای **نمایش پارامتری** $x=f(t)$ و $y=g(t)$ است. برای اینکه خم پارامتری پیوسته (یا مشتق پذیر یا ...) باشد بایاوبسنده است که f و g پیوسته (یا مشتق پذیر یا ...) باشند.

۴.۱.۱۵ - فرض‌های شمارهٔ ۱.۱.۱۵ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $u \to t=\varphi(u)$ یک نگاشت بخش B از $\mathbf{R}$ در A باشد . دراینصورت نگاشت $u \to M(\varphi(u))$ بخش B در صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ یک خم پارامتری‌دیگر است که ازخم اول به وسیلهٔ تعویض پارامتر $t=\varphi(u)$ به دست می‌آید. اگر نگاشت φ بخش B در A سورژکتیو باشد ، خم دوم دارای همان مجموعهٔ نقاط خم اول است. بنابراین یک «خم» دارای نمایشهای پارامتری بیشمار است.

۵.۱.۱۵ - **مثال** - مجموعهٔ نقاط خم پارامتری معین شده به وسیلهٔ معادله‌های $x=t$ و $y=g(t)$ عبارتست از نمودار تابع g. بنابراین کلیهٔ مطالبی که دراین‌فصل گفته خواهد شد ، درمورد نمودار توابع حقیقی از یک متغیر حقیقی نیز درست است.

۶.۱.۱۵ - **مثال** - فرض‌میکنیم x_0 , y_0 , a , bشمارهای‌حقیقی‌و $(a , b)\neq(0 , 0)$ باشد. به طوری که میدانیم معادله‌های :

$$x=x_0+at \qquad , \qquad y=y_0+bt$$

یک نمایش پارامتری خطی است که از نقطهٔ به آرایندهای x_0 و y_0 می‌گذرد و بابردار به مؤلفه‌های a و b هم راستا می‌باشد.

۷.۱.۱۵ - **مثال** - فرض می‌کنیم پایهٔ انتخاب شده در صفحه‌یکه‌ای متعامد (ارتونرمال) و a و b دو شمار بزرگتر از صفر باشند. بیضی E به معادلهٔ :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

را درنظر می‌گیریم. برای اینکه یک نقطهٔ M به آرایندهای x و y متعلق به E باشد بایاوبسنده است که یک شمار حقیقی φ وجود داشته باشد به طوری که داشته باشیم $\frac{x}{a}=\cos\varphi$ و $\frac{y}{b}=\sin\varphi$. پس E دارای نمایش پارامتری زیر است :

$$x=a\cos\varphi \qquad , \qquad y=b\sin\varphi$$

چنانچه $M(\varphi)$ نقطهٔ به آرایندههای $a\cos\varphi$ و $b\sin\varphi$ باشد ، داریم :

$$M(\varphi+2\pi)=M(\varphi)$$

پس $M(\varphi) \to \varphi$ یک نگاشت دوسویی فاصلهٔ $]-\pi\,,\,\pi[$ روی E میباشد . چون نگاشت $t \to 2\,\mathrm{Arctg}\,t$ مجموعهٔ $\mathbf{R}$ در $]-\pi\,,\,\pi[$ نیز دوسویی است ، بنابراین $t \to \left(a\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\,,\, b\dfrac{2t}{1+t^2}\right)$ که یک نگاشت $\mathbf{R}$ در $\mathbf{R}^2$ است ، یک نگاشت دوسویی $\mathbf{R}$ روی مجموعه $E-\left\{M(-\pi)\right\}$ معین میکند . پس اگر نقطهٔ $M(-\pi)$ را که آرایندههای آن $(-a\,,\,0)$ است با A نشان دهیم ، $E-\left\{A\right\}$ دارای نمایش پارامتری زیر خواهد بود :

$$x=a\,\frac{1-t^2}{1+t^2}\qquad,\qquad y=b\,\frac{2t}{1+t^2}$$

۸.۱.۱۰ - **مثال** - فرض می‌کنیم E' هذلولی به معادلهٔ $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$ باشد (a و b دوشماربزرگتر از صفر هستند) . چون x در هیچیک از نقاط E' صفرنمی‌شود، معادلهٔ E' را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت :

$$\frac{a^2y^2}{b^2x^2}+\frac{a^2}{x^2}=1$$

برای اینکه نقطهٔ M به آرایندههای x و y متعلق به E' باشد بایاوبسنده است که یک شمار حقیقی φ وجود داشته باشد به طوری که $\dfrac{a}{x}=\cos\varphi$ و $\dfrac{ay}{bx}=\sin\varphi$ ، یا به عبارت دیگر :

$$x=\frac{a}{\cos\varphi}\qquad,\qquad y=b\,\mathrm{tg}\,\varphi$$

که یک نمایش پارامتری E' است.

می‌توان نمایش پارامتری دیگری برای E' به دست آورد. بدین منظور معادلهٔ E' را چنین می‌نویسیم :

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=1$$

برای اینکه نقطهٔ $M(x,y)$ روی E' باشد، باياوبسنده است که یک شمار حقیقی t وجود داشته باشد به طوری که :

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=t \quad , \quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{1}{t}$$

پس یک نمایش پارامتری دیگر E' به صورت زیر است :

$$x=\frac{1}{2}a\left(t+\frac{1}{t}\right) \quad , \quad y=\frac{1}{2}b\left(t-\frac{1}{t}\right)$$

۹.۱.۱۵ - **مثال** - فرض می‌کنیم E'' شاخه‌ای از هذلولی E' (شمارهٔ ۸.۱.۱۵) باشد که برای آن داریم $x \geqslant 0$. هرنقطه به‌آرایندهای $ach\varphi$ و $bsh\varphi$ به E'' متعلق است. به وارون اگر $M(x,y)$ نقطه‌ای از E'' باشد، یک شمار حقیقی φ و تنها یکی وجود دارد به طوری که داشته باشیم $\frac{y}{b}=sh\varphi$. پس :

$$\frac{x^2}{a^2}=1+sh^2\varphi=ch^2\varphi$$

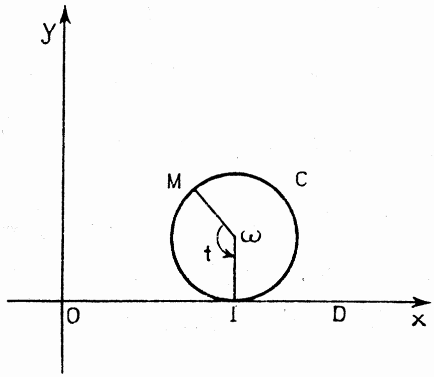
و چون داریم $\frac{x}{a}\geqslant 0$ بنابراین خواهیم داشت $\frac{x}{a}=ch\varphi$. در نتیجه برای E'' نمایش پارامتری زیر به دست می‌آید :

$$x=ach\varphi \quad , \quad y=bsh\varphi$$

۱۰.۱.۱۵ - **مثال** - دایرهٔ C به شعاع $R>0$ بدون لغزش برروی خط D می‌غلتد. چنانچه M نقطه‌ای از C باشد، مسیر M مجموعهٔ نقاط خمی است که سیکلوئید نامیده می‌شود.

هنگامی که C روی D می‌غلتد ، زمانی فرا می‌رسد که نقطهٔ M روی D قرار میگیرد. یکی از این نقاط D را O مینامیم و O را به عنوان مبدأ اختیار می‌کنیم. یک پایهٔ یکه‌ای متعامد طوری درنظر می‌گیریم که ox بر D منطبق و عرض تمام نقاط C مثبت باشد. فرض می‌کنیم ω مرکز C و I نقطهٔ تماس C و D باشد. چنانچه C در سوی منفی با سرعت زاویه‌ای ۱ بچرخد و نقطهٔ M در لحظهٔ $t=0$ بر O منطبق باشد، در لحظهٔ دلخواه t داریم :

$$(\widehat{\overrightarrow{\omega I}\ ,\ \overrightarrow{\omega M}})=-t \quad , \quad OI=Rt$$



شکل ۶۴

ازنظرریاضی ، برابری‌های بالا را به‌عنوان‌تعریف«غلتش بدون لغزش» می‌گیرند. آراینده‌های نقطهٔ ω عبارتند از $(Rt\ ,\ R)$ و داریم :

$$(\widehat{\overrightarrow{Ox}\ ,\ \overrightarrow{\omega M}})=(\widehat{Ox\ ,\ Oy})+(\widehat{Oy\ ,\ \overrightarrow{\omega I}})+(\widehat{\overrightarrow{\omega I}\ ,\ \overrightarrow{\omega M}})=-\frac{\pi}{۲}-t$$

پس آراینده‌های $\overrightarrow{\omega M}$ چنین‌اند :

$$R\cos\left(-\frac{\pi}{۲}-t\right)=-R\sin t \quad , \quad R\sin\left(-\frac{\pi}{۲}-t\right)=-R\cos t$$

بنابراین یک نمایش پارامتری سیکلوئید به صورت زیر است :

$$x=R(t-\sin) \quad , \quad y=R(۱-\cos t)$$

۱۵ . ۲ـ مماس

۱.۲.۱۵ ـ فرض می‌کنیم $\Gamma : t \to M(t)$ یک خم پارامتری و $A=M(t_0)$ باشد. گوییم که خم Γ در نقطهٔ A و یا برای $t=t_0$ دارای یک مماس است هرگاه :

1° - برای $t \neq t_0$ و مقادیر کوچک $|t-t_0|$ داشته باشیم $M(t) \neq A$.

2° - هنگامی که t با مقادیر مخالف با t_0 به سمت t_0 می‌گراید خط $AM(t)$، که برای مقادیر کوچک $|t-t_0|$ و $t \neq t_0$ معین است، به سمت حدی میل کند.

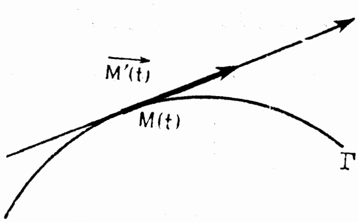
این حد را مماس برخم Γ برای $t=t_0$ یا مماس بر Γ در نقطهٔ A می‌نامند.

باید دانست که ممکن است برای $t_0 \neq t_1$ داشته باشیم $M(t_0)=M(t_1)$، اما مماس‌های بر Γ برای $t=t_0$ و $t=t_1$ متمایز باشند. در شماره ۳.۶.۱۰ مثالهایی از این نوع خم‌ها خواهیم دید. آشکار است که در این حالتها از بکار بردن عبارت «مماس بر Γ در **A**» باید پرهیز کرد.

۲.۲.۱۰ - **قضیه - هرگاه خم Γ برای $t=t_0$ مشتق پذیر و $\overrightarrow{M}'(t_0) \neq 0$ باشد، Γ برای $t=t_0$ دارای یك مماس هم‌راستا با بردار $\overrightarrow{M}'(t_0)$ است.**

اثبات - هنگامیکه t با مقادیر مخالف با t_0 به سمت t_0 می‌گراید بردار $\overrightarrow{\dfrac{M(t)-M(t_0)}{t-t_0}}$ به سمت بردار $\overrightarrow{M}'(t_0)$ که مخالف با صفر است میل میکند. پس برای $t \neq t_0$ و مقادیر کوچک $|t-t_0|$ داریم $M(t) \neq M(t_0)$. بنابراین خط $M(t)M(t_0)$ برای $t \neq t_0$ و مقادیر کوچک $|t-t_0|$ کاملاً معین است. این خط با بردار $\overrightarrow{\dfrac{M(t)-M(t_0)}{t-t_0}}$ که به سمت $\overrightarrow{M}'(t_0)$ میل میکند هم راستاست. به این ترتیب با توجه به تعریف مماس قضیه ثابت می‌شود.

$\overrightarrow{M}'(t)$ **بردار سرعت** برای مقدار t نامیده می‌شود.



شکل ۶۵

۳.۲.۱۰ - یادآوری می‌شود که اگر، نسبت به یک مبدأ و یک پایهٔ انتخاب‌شده ،

$f(t)$ و $g(t)$ آرایندههای نقطهٔ $M(t)$ باشند، بردار $\overrightarrow{M}'(t)$ به آرایندههای $f'(t)$ و $g'(t)$ خواهد بود.

۴.۲.۱۵ - هرگاه $\overrightarrow{M}'(t)$ مخالف با صفر باشد، $\overrightarrow{M}'(t)$ **سویی** برای مماس در نقطهٔ $M(t)$ معین میکند.

۵.۲.۱۵ - فرض می‌کنیم $u \to t=\varphi(u)$ یک تعویض پارامتر مشتق پذیرباشد و قرار می‌دهیم $N(u)=M(\varphi(u))$. خمی را که به این ترتیب به دست می‌آید با Δ نشان می‌دهیم. بنابر شمارهٔ ۷.۳.۱۰ داریم $\overrightarrow{N}'(u)=\overrightarrow{M}'(\varphi(u))\varphi'(u)$. چنانچه تابع φ کاملاً افزایشی‌ومشتق آن مخالف‌باصفر باشد، مماس سودار بر Γ در نقطهٔ $M(\varphi(u))$ و مماس سودار بر Δ در نقطهٔ $N(u)$ یکی می‌باشند. اگر تابع φ کاملاً کاهشی‌ومشتق آن مخالف با صفر باشد، مماس‌بر Γ درنقطهٔ $M(\varphi(u))$ و مماس بر Δ در نقطهٔ $N(u)$ یکی هستند، اما سوی آنها مخالف یکدیگر است.

۶.۲.۱۵ - اگر یک پایهٔ یکه‌ای متعامد انتخاب کنیم و آرایندههای $M(t)$ را نسبت به این پایه $f(t)$ و $g(t)$ بگیریم، بردار به آرایندههای $g'(t_0)$ و $-f'(t_0)$ بربردار $\overrightarrow{M}'(t_0)$ عمود است. زیرا برای حاصلضرب اسکالر این دو بردار داریم:

$$g'(t_0)f'(t_0)+(-f'(t_0))g'(t_0)=0$$

پس قائم بر Γ در $M(t_0)$ با بردار به آرایندههای $g'(t_0)$ و $-f(t_0)$ هم راستا می‌باشد.

۷.۲.۱۵ - هرگاه $M(t)$ در t_0 مشتق پذیر ولی $\overrightarrow{M}'(t_0)=0$ باشد گوییم که $M(t)$ برای $t=t_0$ یک‌نقطهٔ **ایست** است. فرض می‌کنیم M در یک فاصلهٔ بازشامل t_0 دارای مشتقهای پیوسته تا مرتبهٔ p باشد و داشته باشیم:

$$\overrightarrow{M}'(t_0)=\overrightarrow{M}''(t_0)=\cdots=\overrightarrow{M}^{(p-1)}(t_0)=0 \quad , \quad \overrightarrow{M}^{(p)}(t_0)\neq 0$$

بنابر شمارهٔ ۴.۱۰ هنگامی که $t \to t_0$ داریم:

$$\overrightarrow{M(t)-M(t_0)}=\frac{(t-t_0)^p}{p!}\left(\overrightarrow{M}^{(p)}(t_0)+\overrightarrow{o}(1)\right)$$

به طوری که دیده می‌شود برای $t \neq t_0$ و مقادیر کوچک $|t-t_0|$ داریم :

$$M(t) \neq M(t_0)$$

و خط $M(t_0)M(t)$ هم راستا با بردار $\vec{M}^{(p)}(t_0) + \vec{o}(1)$ است. پس Γ **برای** $t=t_0$ **دارای مماسی هم راستا با بردار** $\vec{M}^{(p)}(t_0)$ می‌باشد. یادآوری می‌شود که بنابرشماره ۲.۲.۱۰ آرایندههای این بردارعبارتند از $f^{(p)}(t_0)$ و $g^{(p)}(t_0)$ [این درصورتی است که نسبت به یک مبدأ و یک پایهٔ انتخاب شده ، $f(t)$ و $g(t)$ آرایندههای $M(t)$ باشند].

۱۵ . ۳ ـ شکل خم در همسایگی یکی از نقاط آن

۱.۳.۱۵ ـ با درنظر گرفتن مطالب شمارهٔ ۱.۲.۱۵ ، فرض می کنیم در یک فاصلهٔ باز شامل t_0 تابع $M(t)$ مشتق پذیر مرتبهٔ بی‌نهایت و p کوچکترین شمار درست ومثبتی باشد به طوری که $\vec{M}^{(p)}(t_0) \neq 0$ (فرض می کنیم همهٔ مشتق‌های M در t_0 صفر نباشند). چنانچه q کوچکترین شمار درستی باشد به قسمی که $q > p$ و $\vec{M}^{(q)}(t_0)$ هم‌راستا با $\vec{M}^{(p)}(t_0)$ نباشد (همهٔ مشتق‌های M را در t_0 با بردار $\vec{M}^{(p)}(t_0)$ هم‌راستا نمی‌گیریم). برای $p < r < q$ قرار می‌دهیم :

$$\vec{M}^{(p)}(t_0) = \vec{e} \ , \ \vec{M}^{(q)}(t_0) = \vec{f} \ , \ \vec{M}^{(r)}(t_0) = \lambda_r \vec{e}$$

دراین صورت بنابر شمارهٔ ٤.١٠ هنگامی که $h \to 0$ خواهیم داشت :

$$\overrightarrow{M(t_0+h)} - \overrightarrow{M(t_0)} = \frac{h^p}{p!}\vec{e} + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}\lambda_{p+1}\vec{e} + \cdots$$

$$+ \frac{h^{q-1}}{(q-1)!}\lambda_{q-1}\vec{e} + \frac{h^q}{q!}(\vec{f} + \vec{o}(1))$$

اگر $M(t_0)$ را مبدأ و $(\vec{e}\ ,\ \vec{f})$ را پایه بگیریم ، آرایندههای $M(t_0+h)$ چنین خواهند بود :

$$\xi=\frac{h^p}{p!}+\frac{h^{p+1}}{(p+1)!}\lambda_{p+1}+\cdots+\frac{h^{q-1}}{(q-1)!}\lambda_{q-1}+\frac{h^q}{q!}o(1)$$

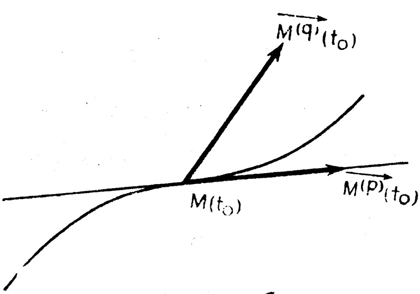
$$\eta=\frac{h^q}{q!}(1+o(1))$$

یا :

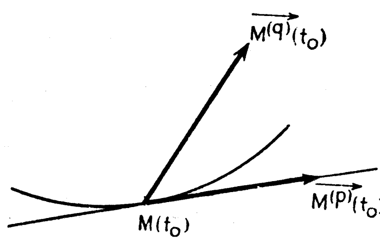
$$\xi=\frac{h^p}{p!}(1+o(1))$$

$$\eta=\frac{h^q}{q!}(1+o(1))$$

۲.۳.۱۵ - **حالت اول : p فرد q زوج** (مثلاً $p=1$ و $q=2$ یعنی حالتی که اغلب پیش می‌آید) - دراینصورت برای مقادیر کوچک $|h|$ که مخالف با صفر باشند ξ هم علامت با h و $\eta>0$ است. پس در همسایگی $t=t_0$ خم درطرفی از مماس در نقطهٔ $M(t_0)$ قرار دارد که بردار $\overrightarrow{M^{(q)}}(t_0)$ واقع است، و به علاوه خم از خط گذرنده بر $M(t_0)$ و هم‌راستا بااین بردار می‌گذرد (شکل ۶۶).



شکل ۶۷

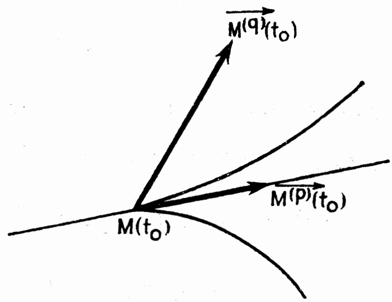


شکل ۶۶

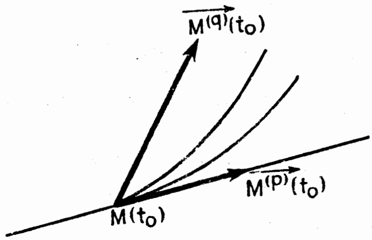
۳.۳.۱۵ - **حالت دوم : p فرد q فرد** - دراینصورت برای مقادیر کوچک $|h|$ که مخالف با صفر باشند، ξ و η با h هم علامتند. پس در نقطه $t=t_0$ خم ازمماس در نقطهٔ $M(t_0)$ و همچنین از خط گذرنده بر $M(t_0)$ و هم‌راستا با $\overrightarrow{M^{(q)}}(t_0)$، میگذرد (شکل ۶۷).

۴.۳.۱۵ - **حالت سوم : p زوج q فرد** - دراین حالت برای مقادیر کوچک $|h|$ که مخالف با صفر باشند، $\xi>0$ و η با h هم علامت است. پس در نقطه $t=t_0$ خم

از مماس در نقطهٔ $M(t_0)$ می‌گذرد و در همسایگی $t=t_0$ خم در طرفی از خط گذرنده بر $M(t_0)$ و هم‌راستا با $\overrightarrow{M}^{(q)}(t_0)$ واقع است که بردار $\overrightarrow{M}^{(p)}(t_0)$ قرار دارد.
دراینصورت $M(t_0)$ را یک **نقطهٔ بازگشت نوع اول** می‌نامند (شکل ۶۸).



شکل ۶۸



شکل ۶۹

۵.۳.۱۵ - **حالت چهارم:** p زوج q زوج - دراینحالت برای مقادیر کوچک $|h|$ که مخالف با صفر باشند داریم $\xi > 0$ و $\eta > 0$. پس خم در یک طرف خط مماس و خط گذرنده بر $M(t_0)$ وهم‌راستا با $\overrightarrow{M}^{(q)}(t_0)$ واقع است (طرفی که به ترتیب بردارهای $\overrightarrow{M}^{(q)}(t_0)$ و $\overrightarrow{M}^{(p)}(t_0)$ قرار دارند). دراینصورت $M(t_0)$ را **نقطهٔ بازگشت نوع دوم** می‌گویند (شکل ۶۹).

۱۵ . ۴ - شاخه‌های بی‌نهایت

۱.۴.۱۵ - گوییم هنگامی که t با مقادیر مخالف با t_0 به سمت t_0 می‌گراید، خم Γ دارای یک **شاخهٔ بی‌نهایت** است هرگاه هنگامی که $t \neq t_0$ و $t \to t_0$ دوری $M(t)$ از یک نقطهٔ ثابت Ω به سمت $+\infty$ میل کند. آشکاراست که این تعریف بستگی به نقطهٔ Ω ندارد.

نسبت به یک مبدأ و یک پایهٔ داده شده آرایندههای $M(t)$ را $f(t)$ و $g(t)$ می‌گیریم. برای اینکه Γ دارای یک شاخهٔ بی‌نهایت باشد بایاوبسنده است که دست کم یکی از توابع $|f|$ و $|g|$ هنگامی که $t \neq t_0$ و $t \to t_0$ به سمت $+\infty$ میل کند.

۲.۴.۱۵ - فرض می‌کنیم δ راستای خطی را مشخص کند. گوییم شاخهٔ بی‌نهایت

دارای **راستای مجانبی** δ است اگر هنگامی‌که $t \neq t_0$ و $t \to t_0$ خط $\Omega M(t)$ به سمت خط‌گذرنده بر Ω و هم‌راستا با δ میل کند. میخواهیم نشان دهیم‌که این تعریف بستگی به انتخاب نقطهٔ Ω ندارد. برای‌این منظور Ω را مبدأ می‌گیریم و یک پایه طوری انتخاب میکنیم‌که شیب δ نسبت به آن برابر با یک باشد. دراینصورت داریم :

$$g(t) = f(t)(1 + o(1))$$

و چون باید یکی از توابع $|f|$ و $|g|$ به سمت $+\infty$ میل کند دیده می‌شود که هردوی آنها به سمت $+\infty$ میل می‌کنند. چنانچه Ω' نقطهٔ ثابتی به آراینده‌های x_0 و y_0 باشد، بردار $\overrightarrow{\Omega' M(t)}$ به آراینده‌های $f(t) - x_0$ و $g(t) - y_0$ است و داریم :

$$\frac{g(t) - y_0}{f(t) - x_0} = \frac{g(t)}{f(t)} \; \frac{1 - y_0 g(t)^{-1}}{1 - x_0 f(t)^{-1}} \to 1$$

از اینجا نتیجه می‌شود‌که خط $\Omega' M(t)$ به سمت خط‌گذرنده بر Ω' و هم‌راستا با δ میل می‌کند.

۳.۴.۱۵ - بنابراین ثابت‌گردید‌که مفهوم راستای مجانبی یک مفهوم ذاتی خم Γ است. هنگامی‌که مبدأ و پایه‌از پیش داده شده باشند برای تعیین آن می‌توان Ω را همان مبدأ گرفت، در نتیجه شیب خط $\Omega M(t)$ برابر با $\frac{g(t)}{f(t)}$ خواهد شد. پس :

قضیه - برای اینکه خم Γ هنگامی‌که t با مقادیر مخالف با t_0 به سمت t_0 میل میکند، دارای یك راستای مجانبی باشد لازم و کافی است که یا $\frac{g(t)}{f(t)}$ دارای یك حد باپایان m باشد(دراینصورت m شیب راستای مجانبی است)، و یا $\left|\frac{g(t)}{f(t)}\right|$ به سمت $+\infty$ میل کند (در این صورت Oy راستای مجانبی است).

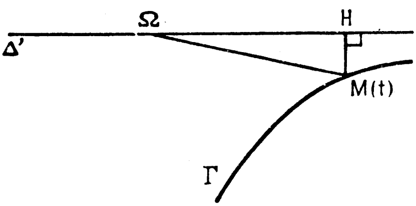
۴.۴.۱۵ - فرض می‌کنیم شاخهٔ بی‌نهایت مورد نظر دارای راستای مجانبی δ باشد. خط‌گذرنده بر $M(t)$ با راستای δ را Δ_t می‌نامیم. هنگامی‌که $t \neq t_0$ و $t \to t_0$ اگر Δ_t به بی‌نهایت رود، گویند‌که خم دارای یک **شاخهٔ سهمی‌وار** در راستای δ است (دلیل این نام‌گذاری این است‌که در مورد سهمی این‌وضعیت پیش می‌آید). هنگامی

MATH75.IR

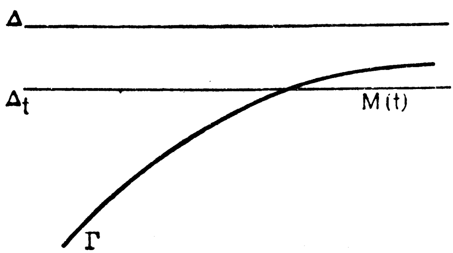
که $t \neq t_0$ و $t \to t_0$ چنانچه Δ_t دارای یک حد معین Δ باشد، گویند خم دارای مجانب Δ است.

در شماره ۵.۴.۱۵ مجانب را به‌صورتی‌دیگر ولی هم‌ارز با آنچه که گذشت، تعریف خواهیم کرد.

۱۰:۴.۵ - هرگاه خم Γ دارای‌مجانب Δ باشد، آشکار است که وقتی $t \neq t_0$ و $t \to t_0$ دوری‌نقطهٔ $M(t)$ از خط Δ به سمت‌صفر میل می‌کند (شکل ۷۰). به‌وارون فرض می‌کنیم Δ' خطی باشد به‌طوری‌که وقتی $t \neq t_0$ و $t \to t_0$ دوری $M(t)$ از Δ' یعنی $M(t)H$ به سمت صفر میل کند(شکل ۷۱). دراین صورت اگر Ω نقطه‌ثابتی از Δ' باشد نسبت $\dfrac{M(t)H}{M(t)\Omega}$ به سمت‌صفر می‌گراید. بنابراین خط $\Omega M(t)$ به سمت Δ' میل میکند. از اینجا نتیجه می‌شود که Δ' یک راستای مجانبی Γ را معین می‌کند. به علاوه آشکاراست که‌خط گذرنده بر $M(t)$ و هم‌راستا با Δ' به سمت Δ' میل می‌کند. پس Δ' مجانب Γ است.



شکل ۷۱



شکل ۷۰

۶.۴.۱۵ - برای بررسی‌شاخه های سهمی وارو مجانب های‌یک خم، اغلب ازنکات زیر استفاده می‌شود: هنگامی‌که $x \neq x_0$ و $x \to x_0$ اگر $f(t)$ دارای یک حدباپایان x_0 باشد و $g(t)$ به سمت $\pm\infty$ میل کند، خط به معادلهٔ $x=x_0$ مجانب خم است. همچنین اگر $g(t)$ دارای یک حد باپایان y_0 باشد و $f(t) \to \pm\infty$، خط به معادلهٔ $y=y_0$ مجانب خم است.

اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که $f(t)$ و $g(t)$ هردو به‌سمت $\pm\infty$ میل کنند. همانطوریکه در شمارهٔ ۳.۴.۱۵ دیده شد راستای مجانبی (درصورتی‌که وجود داشته‌باشد)

به وسیلهٔ حد $\frac{f(t)}{g(t)}$ که آنرا m مینامیم بدست می‌آید.

الف - اگر $m=0$ باشد راستای Ox راستای مجانبی است و چون $g(t) \to \pm\infty$ خط گذرنده بر $M(t)$ و هم‌راستا با Ox هنگامی‌که $t \neq t_0$ و $t \to t_0$، به‌بی‌نهایت می‌رود. پس خم دارای شاخهٔ سهمی‌وار در راستای Ox است.

ب - همچنین اگر $m=\pm\infty$ باشد خم دارای شاخهٔ سهمی‌وار در راستای Oy خواهد بود.

پ - فرض می‌کنیم m با پایان و مخالف با صفر باشد. دراین صورت معادلهٔ خط Δ_t گذرنده بر $M(t)$ و به شیب m چنین است:

$$Y-g(t)=m(X-f(t))$$

یا:

$$Y=mX+g(t)-mf(t)$$

اکنون عرض ازمبدأ خط Δ_t یعنی $g(t)-mf(t)$ را هنگامی‌که $t \neq t_0$ و $t \to t_0$ پیدا می‌کنیم. اگر $g(t)-mf(t) \to \pm\infty$، خم دارای شاخه‌ای سهمی‌وار در راستای به شیب m می‌باشد و چنانچه $g(t)-mf(t)$ دارای حد با پایان p باشد، خم دارای مجانبی به معادلهٔ $y=mx+p$ است.

۷.۴.۱۵ - در حالت ویژهٔ زیر می‌توان مطالعهٔ شاخهٔ بی‌نهایت را خلاصه کرد.

فرض می‌کنیم هنگامی‌که $t \neq t_0$ و $t \to t_0$، داشته باشیم:

$$f(t)=\frac{A}{t-t_0}+B+o(1) \quad , \quad g(t)=\frac{A'}{t-t_0}+B'+o(1)$$

که درآنها A ، A' ، B ، B' مقادیر ثابتی هستند ودست‌کم یکی از دو مقدار A و A' مخالف با صفر است. نقطهٔ $N(t)$ به آرایندههای $\frac{A}{t-t_0}+B$ و $\frac{A'}{t-t_0}+B'$ را در نظر می‌گیریم. این نقطه به خط Δ به معادله های پارامتری:

$$x=A\lambda+B \quad , \quad y=A'\lambda+B'$$

متعلق است. هنگامی‌که $t \neq t_0$ و $t \to t_0$، فاصلهٔ $M(t)$ از $N(t)$ به سمت صفر میل می‌کند، ودرنتیجه فاصلهٔ $M(t)$ از Δ به سمت صفر می‌گراید. بنابراین Δ مجانب خم است (۵.۴.۱۵).

۱۵ . ۵ ـ کاوی خم

بااستفاده از شمارهٔ ۳.۱۵ می‌توان کاوی خم Γ را بررسی کرد. اما به کمک نکات زیر نیز این بررسی امکان‌پذیر است.

فرض می‌کنیم I فاصله‌ای از $\mathbf{R}$ باشد به‌طوری که درفاصلهٔ I تابع $t \to x=f(t)$ کاملاً یک نوا، مشتق پذیر و با مشتق مخالف باصفر باشد. دراینصورت یک تابع وارون $x \to t=\varphi(x)$ وجود دارد که مشتق آن $\varphi'(x)=\frac{1}{f'(t)}$ است. برای خم جزیی Γ_1 وابسته به فاصلهٔ I داریم $y=g(\varphi(x))$. چنانچه $g(t)$ مشتق پذیر باشد y نسبت به x مشتق پذیر است و داریم $y'_x=\frac{g'(t)}{f'(t)}$. بنابراین برای شیب خط مماس، که در قضیهٔ ۲.۲.۱۵ داده شد، خواهیم داشت: $m(t)=\frac{g'(t)}{f'(t)}$. فرض می‌کنیم تابع $t \to m(t)$ مشتق پذیر باشد. دراینصورت:

قضیه ـ برای اینکه کاوی مجموعهٔ نقاط Γ_1 به طرف بالا (y های مثبت) باشد، بایاوبسنده است که در فاصلهٔ I داشته باشیم:

$$f'(t)m'(t) \geqslant 0$$

اثبات ـ چون m تابعی است مشتق‌پذیر از t و t تابعی است مشتق پذیر از x، پس $m=y'_x$ تابعی است مشتق پذیر از x و داریم $y''_{x^2}=m'(t)\varphi'(x)$. اما بنابر ۴.۸.۳ برای اینکه کاوی Γ_1 به طرف بالا باشد بایاوبسنده است که در فاصلهٔ I داشته باشیم $m'(t)\varphi'(x) \geqslant 0$ یعنی $m'(t)f'(t) \geqslant 0$.

همچنین برای اینکه کاوی مجموعهٔ نقاط Γ_1 به طرف پایین (y های منفی) باشد، بایاوبسنده است که درفاصلهٔ I داشته باشیم $f'(t)m'(t) \leqslant 0$.

۱۵ . ۶ ـ رسم خمهای پارامتری هامنی

۱.۶.۱۵ ـ برای رسم یک خم پارامتری که به‌وسیلهٔ معاله‌های $x=f(t)$ و $y=g(t)$ داده شده است، دو تابع f و g را، با یکدیگر، به ترتیب زیر بررسی می‌کنیم:

۱° ـ مجموعه‌های تعاریف f و g را پیدا می‌کنیم.

۲° ـ متناوب ، زوج و یا فرد بودن توابع f و g را می‌آزماییم.

۳° ـ سوی تغییرات f و g را معین می‌کنیم (اغلب برای این منظورعلامت f' و g' را به دست می‌آوریم).

۴° ـ نقاط ویژهٔوابسته به مقادیر مهم t را پیدا می‌کنیم و بااستفاده از شمارهٔ ۲.۱۵ مماس‌های دراین نقاط را (درصورتیکه وجود داشته باشند) معین می‌نماییم.

۵° ـ شاخه‌های بی‌نهایت خم را به کمک شمارهٔ ۴.۱۵ جستجو می‌کنیم.

۶° ـ کاوی خم را بااستفاده از شمارهٔ ۵.۱۵ مطالعه می‌نماییم.

۲.۶.۱۵ ـ **مثال**ـ فرض می‌کنیم خم پارامتری Γ به معادله‌های :

$$x=t+\frac{1}{t} \quad , \quad y=t+\frac{1}{2t^2}$$

باشد. توابع $t \to x(t)$ و $t \to y(t)$ برای $t \neq 0$ معین می‌باشند. تابع $t \to x(t)$ فرد است و این مطلب بررسی آنرا ساده‌تر می‌کند. تابع $t \to y(t)$ نه فرد و نه زوج است. داریم :

$$x'_t=1-\frac{1}{t^2}=\frac{t^2-1}{t^2} \quad , \quad y'_t=1-\frac{1}{t^3}=\frac{t^3-1}{t^3}$$

که از آنها جدول تغییرات زیر به دست می‌آید :

t	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
x'_t		$+$	0		$-$		‖	$-$	0	$+$	
x	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\frac{5}{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{3}{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{3}{2}$	↗	$+\infty$
y'_t		$+$			$+$		‖	$-$	0	$+$	

برای $t \neq 0$ و $t \neq 1$ مشتقهای $x'(t)$ و $y'(t)$ وجود دارند ودست‌کم یکی از آنها مخالف با صفر است. پس بنابر شمارهٔ ۲.۲.۱۵ خم Γ در نقطهٔ $M(t)$ دارای مماسی است که با بردار به آراینده‌های $\frac{t^2-1}{t^2}$ و $\frac{t^3-1}{t^3}$ هم‌راستا می‌باشد

و برای شیب این مماس داریم :

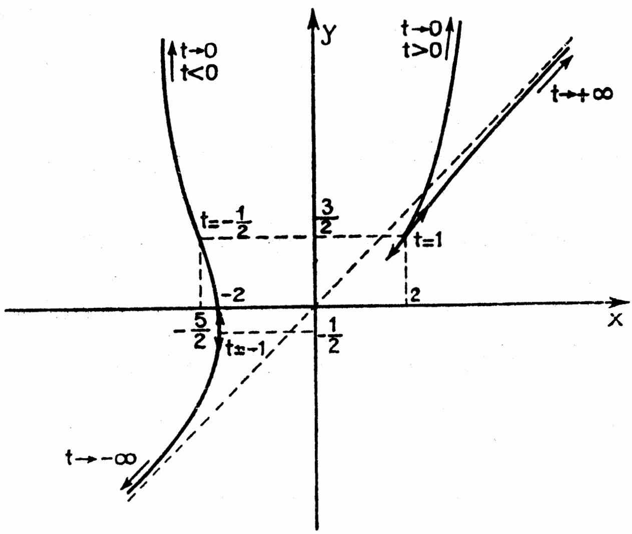
$$m(t)=\frac{t^{3}-1}{t(t^{2}-1)}=\frac{t^{2}+t+1}{t(t+1)}=1+\frac{1}{t^{2}+t}$$

به طوری که دیده می‌شود شیب مماس برای $t=-1$ بی‌نهایت می‌شود ، و به علاوه :

$$m'(t)=-\frac{2t+1}{(t^{2}+t)^{2}}$$

پس برای $t<-\frac{1}{2}$ داریم $m'(t)>0$ و برای $t>-\frac{1}{2}$ داریم $m'(t)<0$.

به کمک این مطلب می‌توان کاوی خم Γ را بررسی کرد (۵.۱۰).



شکل ۷۲

برای اینکه بدانیم در نقطهٔ $t=1$ مماسی برخم وجود دارد یا نه ، $x''(t)$ و $y''(t)$ را محاسبه می‌کنیم :

$$x''(t)=-(-2)t^{-3}=\frac{2}{t^{3}} \quad \text{و} \quad y''(t)=-(-3)t^{-4}=\frac{3}{t^{4}}$$

که از آنها نتیجه می‌شود $x''(1)=2$ و $y''(1)=3$. پس در نقطهٔ $t=1$ مماسی با

شیب $\frac{۳}{۲}$ وجود دارد (۷.۲.۱۵). نمودارخم نشان می‌دهد که نقطهٔ $M(۱)$ یک‌نقطهٔ بازگشت نوع اول‌است. این مطلب را بااستفاده ازشمارهٔ ۴.۳.۱۵ نیز می‌توان بررسی کرد ولی برای این کار باید $x'''(۱)$ و $y'''(۱)$ را به دست آورد.

جدول تغییرات نشان می‌دهد که وقتی t به سمت یکی ازمقادیر $+\infty$, $-\infty$ و صفر (با مقادیر بزرگتر و کوچکتر از صفر) می گراید ، خم Γ دارای شاخه‌های بینهایت است. هنگامی‌که $t \to \pm\infty$ داریم :

$$x=t+o(۱) \quad , \quad y=t+o(۱)$$

پس بنابر ۷.۴.۱۵ خم Γ دارای مجانبی به نمایش پارامتری $x=t$ و $y=t$ یعنی به معادلهٔ $y=x$ است.

هنگامی‌که $t \neq t_۰$ و $t \to t_۰$ داریم $x \sim \frac{۱}{t}$ و $y \sim \frac{۱}{۲t^۲}$. پس :

$\frac{y}{x} \sim \frac{۱}{۲t}$. بنابراین وقتی‌که t با مقادیر بزرگتر ازصفر به سمت صفر می‌گراید $\frac{y}{x} \to +\infty$ ، و وقتی‌که t بامقادیرکوچکترازصفربه سمت‌صفرمی‌گراید $\frac{y}{x} \to -\infty$.

در نتیجه Γ دارای‌دوشاخهٔ سهمی‌واردرراستای Oy است (۶.۴.۱۵). برای رسم دقیق‌تر این شاخه‌ها ، باید توجه‌کرد‌که دوری نقطهٔ $M(t)$ از نقطهٔ $N(t)$ به آرایند‌های $\frac{۱}{t}$ و $\frac{۱}{۲t^۲}$ به سمت صفر می گراید. اما $N(t)$ به سهمی Γ' به معادلهٔ $y=\frac{۱}{۲}x^۲$ تعلق دارد ، که رسم آن آسان است. دراینصورت اغلب سهمی Γ' را مجانب خم Γ می گویند.

۳.۶.۱۵ - **مثال** - خم Γ که دارای نمایش پارامتری :

$$x=\cos t \quad , \quad y=\cos\frac{t}{۳}+\sin\frac{t}{۳}$$

است داده شده است. توابع $t \to x(t)$ و $t \to y(t)$ همواره معین هستند و داریم :

$$x(t+۲\pi)=x(t) \quad , \quad y(t+۶\pi)=y(t)$$

پس $M(t)=M(t+6\pi)$. بنابراین کافی است t را درفاصله‌ای به درازای 6π تغییر دهیم.

چون $x(t+3\pi)=-x(t)$ و $y(t+3\pi)=-y(t)$ پس $M(t+3\pi)$ قرینهٔ $M(t)$ نسبت به مبدأ O است. درنتیجه کافی است t را درفاصله‌ای به درازای 3π تغییر داد و خم به دست آمده را به وسیلهٔ تقارن به مرکز O تکمیل کرد.

تابع $t \to y(t)$ نه فرد است و نه زوج.

پارامتر t را مثلاً درفاصله $[0\ ,\ 3\pi]$ تغییر می‌دهیم. آشکار است که خم دارای شاخهٔ بینهایت نیست. دراین مثال از مطالعهٔ کاوی خم چشم می‌پوشیم.

چون داریم $y(t)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{t}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$ پس:

$$x'_t=-\sin t \quad , \quad y'_t=\frac{\sqrt{2}}{3}\cos\left(\frac{t}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$$

جدول تغییرات توابع x و y به صورت زیر است:

t	0		$\frac{3\pi}{4}$		π		2π		3π
x'_t	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
x	1	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1
y	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	$\searrow$	-1
y'_t		$+$	0	$-$		$-$		$-$	

از روی نمودار خم وجود «نقاط دوگانه» آشکار است. یعنی نقاطی که برای آنها دو مقدار متمایز t و θ از فاصلهٔ $]0\ ,\ 6\pi[$ وجود داشته باشد به طوری که $M(t)=M(\theta)$ پس مقادیر متمایز t و θ از فاصلهٔ $]0\ ,\ 6\pi[$ را جستجو می‌کنیم به طوریکه داشته باشیم:

$$\cos t=\cos\theta \quad , \quad \sqrt{2}\sin\left(\frac{t}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$$

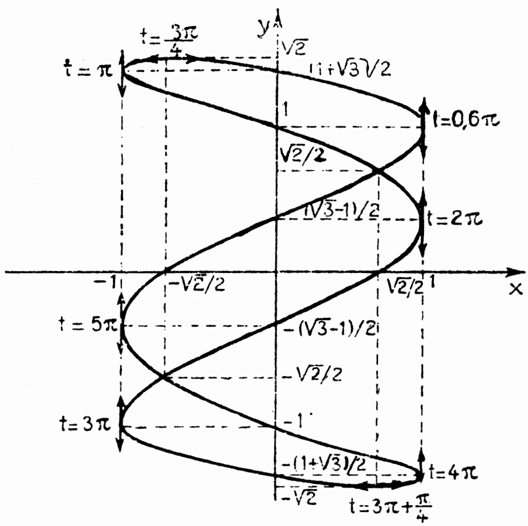
یعنی:

$$(۱) \qquad t=\theta+۲K\pi \quad \text{یا} \quad t=-\theta+۲K'\pi$$

و :

$$(۲) \qquad \frac{t}{۳}+\frac{\pi}{٤}=\frac{\theta}{۳}+\frac{\pi}{٤}+۲h\pi \quad \text{یا} \quad \frac{t}{۳}+\frac{\pi}{٤}=\pi-\frac{\theta}{۳}-\frac{\pi}{٤}+۲h'\pi$$

که درآنها k , k' , h , h' متعلق به $\mathbf{Z}$ می‌باشند.



شکل ۷۳

از نخستین برابری (۲) نتیجه می‌شود $t=\theta+٦h\pi$ ، و از آنجا $h=۰$ و $t=\theta$ که قابل قبول نیست. پس دومین برابری (۲) را اختیار می‌کنیم ، یعنی :

$$(۳) \qquad t+\theta=\frac{۳\pi}{۲}+٦h'\pi$$

دراینصورت دومین برابری (۱) قابل قبول نیست ، پس نخستین برابری (۱) را درنظر می‌گیریم. وانگهی داریم $۰ \leqslant t+\theta < ۱۲\pi$ ، بنابراین خواهیم داشت :

$$h'=۱ \quad \text{یا} \quad h'=۰$$

اگر $h'=۰$ باشد ، شرطهای زیر به دست می‌آید :

$$t \neq \theta \;,\; t \,,\, \theta \in [\,۰ \,,\, ۶\pi[\;,\; t+\theta=\frac{۳\pi}{۲} \;,\; t=\theta+۲k\pi$$

که از آنها نتیجه می‌شود $\frac{۳\pi}{۲} \geqslant t \geqslant ۰$ و $\frac{۳\pi}{۲} \geqslant \theta \geqslant ۰$ ، ودراین حالت$k=۰$ قابل قبول نیست زیرا باید t و θ برابر نباشند.

چنانچه $h'=۱$ باشد ، شرط‌های زیر را خواهیم داشت :

$$t \neq \theta \;,\; t \,,\, \theta \in [\theta \,,\, ۶\pi[\;,\; t+\theta=\frac{۱۵\pi}{۲} \;,\; t=\theta+۲k\pi$$

که از آنها به دست می‌آید :

$$۲t=\frac{۱۵\pi}{۲}+۲k\pi$$

و در نتیجه :

$$t=\frac{۱۵\pi}{۴}+k\pi \quad,\quad \theta=\frac{۱۵\pi}{۴}-k\pi$$

که با درنظرگرفتن شرط‌های $t \,,\, \theta \in [\,۰ \,,\, ۶\pi[$ و $t \neq \theta$ خواهیم داشت :

$$k=۱ \quad : \quad t=۴\pi+\frac{۳\pi}{۴} \quad,\quad \theta=۲\pi+\frac{۳\pi}{۴}$$

$$k=۲ \quad : \quad t=۵\pi+\frac{۳\pi}{۴} \quad,\quad \theta=\pi+\frac{۳\pi}{۴}$$

همچنین برای $k=-۱$ و $k=-۲$ همان جوابهای بالا با تعویض t و θ به دست می‌آید که قابل پیش‌بینی نیز بود.

بنابراین نقاط دوگانه زیر به دست می‌آید :

$$M\left(۴\pi+\frac{۳\pi}{۴}\right)=M\left(۲\pi+\frac{۳\pi}{۴}\right) \quad,\quad M\left(۵\pi+\frac{۳\pi}{۴}\right)=M\left(\pi+\frac{۳\pi}{۴}\right)$$

که آراینده‌های آن‌ها به ترتیب عبارتست از :

$$\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲} \,,\, -\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) \quad,\quad \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲} \,,\, \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)$$

این دونقطه در تقارن به مرکز O ، همتای یکدیگرند (این مطلب را می‌توانستم پیش‌بینی کنیم) . برای $t=\pi+\frac{3\pi}{4}$ شیب خط مماس چنین است :

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\;\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}{-\sin\left(\pi+\frac{3\pi}{4}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

به همین ترتیب می‌بینیم که شیب‌خط مماس برای $t=0\pi+\frac{3\pi}{4}$ برابر با $\frac{\sqrt{3}}{3}$ است.

۴.۶.۱۵ - **مثال** - سیکلوئید Γ را که نسبت به یک پایهٔ‌یکه‌ای متعامد دارای نمایش پارامتری :

$$x=R(t-\sin t)\quad,\quad y=R(1-\cos t)$$

است درنظر می‌گیریم (شمارهٔ ۱۰.۱.۱۵). توابع $t\to x(t)$ و $t\to y(t)$ برای همهٔ مقادیر t معین می‌باشند و داریم :

$$x(t+2\pi)=x(t)+2\pi R\quad,\quad y(t+2\pi)=y(t)$$

پس نقطهٔ $M(t+2\pi)$ ازنقطهٔ $M(t)$ به وسیلهٔ انتقالی‌که بردار آن دارای مؤلفه‌های $(0\,,\,2\pi R)$ است به دست می‌آید. بنابراین برای رسم خم کافی است پارامتر t را در فاصله‌ای به‌درازای 2π تغییر دهیم . به علاوه از برابریهای $x(-t)=-x(t)$ و $y(-t)=y(t)$ نتیجه می‌شود که نقاط $M(-t)$ و $M(t)$ نسبت به محور Oy قرینه‌اند. پس می‌توان بخشی‌از خم Γ را که برای آن t در فاصلهٔ $[0\,,\,\pi]$ تغییرمی‌کند رسم نمود و سپس آنرا به وسیلهٔ تقارن و انتقالها تکمیل کرد.

همچنین داریم :

$$x'_t=R(1-\cos t)\quad,\quad y'_t=R\sin t$$

این مشتقها درفاصلهٔ $[0\,,\,\pi]$ تنها برای $t=0$ باهمدیگر صفر می‌شوند. برای $t\in]0\,,\,\pi[$ شیب خط مماس (۲.۲.۱۵) عبارتست از :

$$m(t)=\frac{\sin t}{۱-\cos t}=\frac{۲\sin\frac{t}{۲}\cos\frac{t}{۲}}{۲\sin^{۲}\frac{t}{۲}}=\operatorname{cotg}\frac{t}{۲}$$

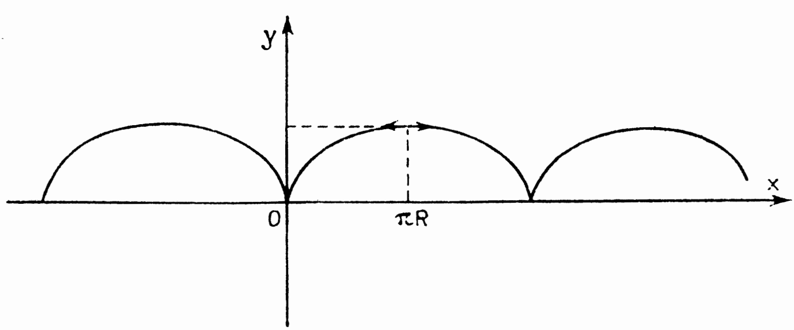
و در نتیجه داریم :

$$m'(t)=-\frac{۱}{۲\sin^{۲}\frac{t}{۲}}<۰$$

و چون $x'_t>۰$ است ، پس کاوی خم به طرف پائین می‌باشد (۵.۱۵).

جدول تغییرات و نمودار خم به صورت زیر است :

t	0		π
x'_t	0	+	
x	0	↗	πR
y	0	↗	2R
y'_t	0	+	



شکل ۷٤

قائم بر Γ در نقطهٔ $M(t)$ هم‌راستا با برداری به آرایه‌های $R\sin t$ و

$(1-\cos t)R-$ است (شمارهٔ ۶.۲.۱۵). اما با توجه به مطالب شمارهٔ ۱۰.۱.۱۵، $R\sin t$ و $(1-\cos t)R-$ همان آرایندههای بردار $\overrightarrow{MI}$ می باشند از اینجا یک روش هندسی برای رسم مماس برسیکلوئید به دست می‌آید.

داریم $x''(0)=0$ و $y''(0)=R$. پس بنابر ۷.۲.۱۵ برای $t=0$ محور Oy مماس برخم است. از نمودار خم چنین برمی‌آید که O یک نقطهٔ بازگشت نوع اول است.

فصل شانزدهم

خمهای پارامتری درفضا

دراین فصل که تعمیم فصل پیش درفضاست ، تنها نکتهٔ تازه‌ای که خواهیم دید ، مفهوم صفحهٔ بوسان یک خم می‌باشد .

۱.۱.۱۶ - تعاریف شماره‌های ۱.۱.۱۵ , ۲.۱.۱۵ , ۳.۱.۱۵ و ۴.۱.۱۵ به‌خودی خود درفضا تعمیم داده می‌شوند .

۲.۱.۱۶ - **مثال** - معادله‌های :

$$x=x_\circ+at \ , \ y=y_\circ+bt \ , \ z=z_\circ+ct$$

که درآنها t یک پارامتر و $(a , b , c) \neq (\circ , \circ , \circ)$ است ، یک نمایش پارامتری خطی است که ازنقطهٔ به آرایته‌های $x_\circ$, $y_\circ$, $z_\circ$ میگذرد وبا بردار به مؤلفه‌های c,b,a هم‌راستا می‌باشد .

۳.۱.۱۶ - **مثال** - چنانچه درفضا یک‌پایهٔ یکه‌ای‌متعامدانتخاب کنیم، معادله های:

$$x=a\cos\varphi \ , \ y=a\sin\varphi \ , \ z=h\varphi$$

که درآنها φ یک پارامتر است و داریم $a\neq\circ$ و $h\neq\circ$ یک نمایش پارامتری پیچ دایره‌ای میباشد .

۲.۱۶ ـ خط مماس

۱.۲.۱۶ - فرض می‌کنیم $\Gamma : t \to M(t)$ یک خم پارامتری باشد .

خط مماس بر Γ برای $t=t_\circ$ و یا درنقطهٔ $M(t_\circ)$ مانند شمارهٔ ۱.۲.۱۵ تعریف می‌شود ، و قضیهٔ زیر مانند قضیهٔ ۲.۲.۱۵ اثبات می گردد .

قضیه - هرگاه خم Γ برای $t=t_\circ$ مشتق‌پذیر و $\overrightarrow{M'(t_\circ)} \neq \circ$ باشد ، Γ برای $t=t_\circ$ دارای یک مماس هم‌راستا با بردار $\overrightarrow{M'(t_\circ)}$ است .

در اینجا نیز بردار سرعت و مماس سودار مانند شماره‌های ۲.۲.۱۰ و ۴.۲.۱۰ تعریف می‌شود.

۲.۲.۱۶ - هنگامی که برای $t=t_0$ خم Γ دارای یک خط مماس است، هرصفحه که شامل این خط مماس باشد **صفحهٔ مماس** بر Γ برای $t=t_0$ [یا درنقطهٔ $M(t_0)$] نامیده می‌شود. صفحه‌ای که از نقطهٔ $M(t_0)$ می‌گذرد وبرخط مماس عمود است، **صفحهٔ قائم** بر Γ برای $t=t_0$ [یا درنقطهٔ $M(t_0)$] گفته می‌شود. هرخط راکه از $M(t_0)$ بگذرد و برخط مماس برخم دراین نقطه عمود باشد، یک **خط قائم** بر Γ برای $t=t_0$ [یا درنقطهٔ $M(t_0)$] می‌نامند.

۳.۲.۱۶ - هرگاه $M(t)$ در t_0 مشتق‌پذیر و $\vec{M}'(t_0)=0$ باشد گوییم که $M(t)$ برای $t=t_0$ یک نقطهٔ **ایست** است. فرض می‌کنیم M دریک فاصلهٔ باز شامل t_0 دارای مشتقهای پیوسته تا مرتبهٔ p باشد و داشته باشیم:

$$\vec{M}'(t_0)=\vec{M}''(t_0)=\cdots=\vec{M}^{(p-1)}(t_0)=0\ ,\ \ \vec{M}^{(p)}(t_0)\neq 0$$

دراینصورت مانند شمارهٔ ۷.۲.۱۰ دیده می‌شود که Γ برای $t=t_0$ دارای خط مماسی هم‌راستا با بردار $\vec{M}^{(p)}(t_0)$ می‌باشد.

۳.۱۶- صفحهٔ بوسان

۱.۳.۱۶ - فرض می‌کنیم خم Γ برای $t=t_0$ دارای یک خط مماس Δ باشد. گوییم که خم Γ برای $t=t_0$ [یا درنقطهٔ $M(t_0)$] دارای یک **صفحهٔ بوسان** است هرگاه:

۱° - برای $t\neq t_0$ و مقادیر کوچک $|t-t_0|$ نقطهٔ $M(t)$ متعلق به Δ نباشد.

۲° - هنگامی که t با مقادیر مخالف با t_0 به سمت t_0 می‌گراید صفحهٔ $\Delta M(t)$، که برای مقادیر کوچک $|t-t_0|$ و $t\neq t_0$ معین است، به سمت حدی میل کند.

این حد را صفحهٔ بوسان خم Γ برای $t=t_0$ [یا در $M(t_0)$] می‌نامند.

آشکار است که اگر صفحهٔ بوسان وجود داشته باشد شامل خط Δ است. پس صفحهٔ بوسان Γ یک صفحهٔ مماس بر Γ است.

۲.۳.۱۶ ـ خط قائم بر Γ و واقع درصفحهٔ بوسان را **قائم اصلی** می گویند .

۳.۳.۱۶ ـ **مثال** ـ هنگامی که Γ یک خط باشد (مانند شمارهٔ ۲.۱.۱۶) ، برای هرمقدار t داریم $M(t)\in\Delta$. پس Γ دارای صفحهٔ بوسان نیست. چنانچه Γ یک خم هامنی باشد به‌طوری که برای $t\neq t_0$ و مقادیر کوچک $|t-t_0|$ نقطهٔ $M(t)$ متعلق به Δ نباشد ، صفحهٔ $\Delta M(t)$ برای $t\neq t_0$ و مقادیر کوچک $|t-t_0|$ همان صفحهٔ خم است . پس برای $t=t_0$ صفحهٔ بوسان وجود دارد وخود صفحهٔ خم می‌باشد .

۴.۳.۱۶ ـ به طوری که از تعریف صفحهٔ بوسان برمی‌آید ، صفحهٔ بوسان یک خم برای $t=t_0$ صفحه‌ای است مانند π به‌طوری که درهمسایگی t_0 نقطهٔ $M(t)$ بی‌اندازه به π نزدیک باشد .

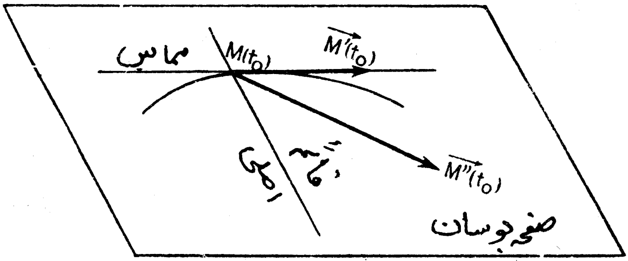
۵.۳.۱۶ ـ قضیه ـ فرض می کنیم خم Γ دریک فاصلهٔ باز شامل t_0 دارای مشتقهای مرتبهٔ اول ودوم پیوسته باشد. چنانچه بردارهای $\vec{M}'(t_0)$ و $\vec{M}''(t_0)$ نابستگی خطی داشته باشند، خم Γ برای $t=t_0$ دارای یک صفحهٔ بوسان است که با بردارهای $\vec{M}'(t_0)$ و $\vec{M}''(t_0)$ هم‌راستا می باشد .

اثبات ـ بنابرشمارهٔ ۴.۱۰ داریم :

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)}=h\vec{M}'(t_0)+\frac{h^2}{2!}(\vec{M}''(t_0)+\vec{o}(1))$$

بردارهای $\vec{M}'(t_0)$ و $\vec{M}''(t_0)+\vec{o}(1)$ برای مقادیر کوچک h نابستگی خطی دارند . بنابراین برای $h\neq 0$ بردار $\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)}$ با بردار $\vec{M}'(t_0)$ هم‌راستا نیست ، و چون Δ با $\vec{M}'(t)$ هم‌راستاست پس $M(t_0+h)\notin\Delta$ و صفحهٔ $\Delta M(t_0+h)$ هم‌راستا با بردارهای $\vec{M}'(t_0)$ و $\vec{M}''(t_0)+\vec{o}(1)$ می‌باشد . به‌این ترتیب صفحهٔ $\Delta M(t_0+h)$ دارای حدی است هم‌راستا با بردارهای $\vec{M}'(t_0)$ و $\vec{M}''(t_0)$.

بردار $\vec{M}''(t)$ را **بردار شتاب** برای مقدار t می‌نامند .



شکل ۷۰

۶.۳.۱۶ - اکنون میخواهیم حالتی را که بردارهای $\overrightarrow{M}'(t_0)$ و $\overrightarrow{M}''(t_0)$ بستگی خطی دارند، بررسی کنیم . بدین منظور فرض می کنیم :

°۱ - خم Γ دریک فاصلهٔ باز شامل t_0 دارای مشتقهای پی درپی پیوسته تا مرتبهٔ بی پایان باشد .

°۲ - $\overrightarrow{M}^{(p)}(t_0) \neq 0$ ، $\overrightarrow{M}'(t_0)=\overrightarrow{M}''(t_0)=\cdots=\overrightarrow{M}^{(p-1)}(t_0)=0$

°۳ - بردارهای $\overrightarrow{M}^{(p+1)}(t_0)$ ، $\overrightarrow{M}^{(p+2)}(t_0)$ ، ... ، $\overrightarrow{M}^{(q-1)}(t_0)$ با بردار $\overrightarrow{M}^{(p)}(t_0)$ هم‌راستا باشند اما بردار $\overrightarrow{M}^{(q)}(t_0)$ با $\overrightarrow{M}^{(p)}(t_0)$ هم‌راستا نباشد .

دراینصورت بنابرشمارهٔ ۴.۲.۲ داریم :

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)} = \frac{h^p}{p!}\overrightarrow{M}^{(p)}(t_0)+\frac{h^{p+1}}{(p+1)!}\overrightarrow{M}^{(p+1)}(t_0)+\cdots$$

$$+\frac{h^{q-1}}{(q-1)!}\overrightarrow{M}^{(q-1)}(t_0)+\frac{h^q}{q!}\left(\overrightarrow{M}^{(q)}(t_0)+\vec{o}(1)\right)$$

و با توجه به شمارهٔ ۳.۲.۱۶ بردارهای $\overrightarrow{M}^{(p)}(t_0)$ ، $\overrightarrow{M}^{(p+1)}(t_0)$ ، ... ، $\overrightarrow{M}^{(q-1)}(t_0)$ با مماس Δ هم‌راستا هستند . بنابراین مانند اثبات قضیهٔ ۵.۳.۱۶ دیده می‌شود که برای $t=t_0$ یک صفحهٔ بوسان هم‌راستا با بردارهای $\overrightarrow{M}^{(p)}(t_0)$ ، $\overrightarrow{M}^{(q)}(t_0)$ وجود دارد .

۷.۳.۱۶ - **مثال** - فرض می کنیم خم پارامتری Γ به وسیلهٔ معادله های :

$$x=t \quad , \quad y=t^{2} \quad , \quad z=t^{3}$$

معین شده باشد . داریم :

$$x'=1 \quad , \quad y'=2t \quad , \quad z'=3t^{2}$$

$$x''=0 \quad , \quad y''=2 \quad , \quad z''=6t$$

وچون :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

پس برای هرمقدار t بردارهای $\overrightarrow{M}'(t)$ و $\overrightarrow{M}''(t)$ نابستگی‌خطی‌دارند (شمارهٔ ۳.۹.۱۰ کتاب جبر) ، و درنتیجه درهرنقطهٔ $M(t)$ خم Γ دارای یک صفحهٔ بوسان P_t است. بنابر شمارهٔ ۵.۳.۱۶ برای اینکه یک نقطهٔ Q به آرایندهای X و Y و Z درصفحهٔ P_t واقع باشد بایاوبسنده است که بردارهای $\overrightarrow{M(t)Q}$, $\overrightarrow{M}'(t)$, $\overrightarrow{M}''(t)$ بستگی خطی‌داشته باشند ، یعنی :

$$\begin{vmatrix} X-t & Y-t^{2} & Z-t^{3} \\ 1 & 2t & 3t^{2} \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 0$$

یا

$$6t^{2}(X-t)-6t(Y-t^{2})+2(Z-t^{3})=0$$

و یا

$$3t^{2}X-3tY+Z-t^{3}=0$$

بنابراین معادلهٔ بالا معادلهٔ صفحهٔ بوسان P_t است.

۴.۱۶ ـ شکل خم درهمسایگی یکی از نقاط آن

۱.۴.۱۶ ـ فرض می‌کنیم خم Γ دارای مشتقهای پیوستهٔ مرتبهٔ اول و دوم و سوم باشد. میخواهیم خم Γ را درهمسایگی یک‌مقدار t_0 از t که برای‌آن بردارهای $\overrightarrow{M}'(t_0)$ و $\overrightarrow{M}''(t_0)$ و $\overrightarrow{M}'''(t_0)$ نابستگی خطی‌دارند ، بررسی کنیم . بنابرشمارهٔ ۴.۲.۲ داریم:

$$(1) \quad \overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)}=h\overrightarrow{M}'(t_0)+\frac{h^{2}}{2}\overrightarrow{M}''(t_0)+\frac{h^{3}}{6}(\overrightarrow{M}'''(t_0)+\vec{o}(1))$$

نقطهٔ $M(t_0)$ را به عنوان مبدأ جدید وبردارهای $\vec{M}'(t_0)$, $\vec{M}''(t_0)$, $\vec{M}'''(t_0)$ را به عنوان پایهٔ جدید اختیار می‌کنیم. دراینصورت بنابرفرمول(۱) آرایندههای نقطهٔ $M(t_0+h)$ عبارتند از:

$$\xi = h(1+o(1))$$

$$\eta = \frac{h^2}{2}(1+o(1))$$

$$\zeta = \frac{h^3}{6}(1+o(1))$$

۲.۴.۱۶ - بنابرشمارههای ۱.۲.۱۶ و ۵.۳.۱۶ محور ξ ها درنقطهٔ $M(t_0)$ برخم Γ مماس است و صفحهٔ $\xi\eta$ صفحهٔ بوسان Γ درنقطهٔ $M(t_0)$ است. چون ζ برای‌مقادیر کوچک $|h|$ و $h\neq 0$ هم علامت با h است، پس برای $t=t_0$ خم Γ از صفحهٔ بوسان خود می‌گذرد. به وارون اگر P یک صفحهٔ مماس بر Γ در نقطهٔ $M(t_0)$ و P متمایز از صفحهٔ بوسان باشد، P شامل محور ξ ها است وازصفحهٔ $\xi\eta$ متمایز خواهد بود. بنابراین معادلهٔ P نسبت به پایهٔ جدید به‌صورت $Y=mZ$ است.

درنقطهٔ $M(t_0+h)$ از Γ مقدار فرم خطی $Y-mZ$ عبارتست از:

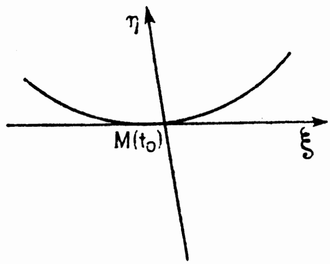
$$\frac{h^2}{2}(1+o(1)) - m\frac{h^3}{6}(1+o(1)) = \frac{h^2}{2}(1+o(1))$$

و به‌طوری‌که دیده می‌شود هنگامی‌که h ازمقدار ۰ می‌گذرد، عبارت بالا تغییرعلامت نمی‌دهد. به گفتهٔ دیگر Γ درنقطهٔ $M(t_0)$ ازصفحهٔ P نمی‌گذرد. به‌این ترتیب **صفحهٔ بوسان تنها صفحهٔ مماس برخم Γ درنقطهٔ $M(t_0)$ است که برای $t=t_0$ خم Γ ازآن‌می‌گذرد.** به‌علاوه باتوجه به‌اینکه وقتی‌که h به‌سمت صفر میگراید ζ یک‌بینهایت کوچک مرتبهٔ سوم است، مطلب شمارهٔ ۴.۳.۱۶؛ یعنی «درهمسایگی نقطهٔ $M(t_0)$ خم Γ بی‌اندازه به‌صفحهٔ بوسان خود نزدیک است» بار دیگر تأیید می‌شود.

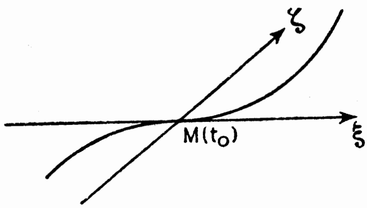
۳.۴.۱۶ - برای‌مشاهدهٔ شکل خم درهمسایگی $M(t_0)$، خم را درروی‌صفحه های آرایندهٔ جدید تصویر می‌کنیم. تصویرخم روی صفحهٔ $\xi\eta$ دارای نمایش پارامتری:

$$\xi = h(1+o(1)) \ , \ \eta = \frac{h^2}{2}(1+o(1))$$

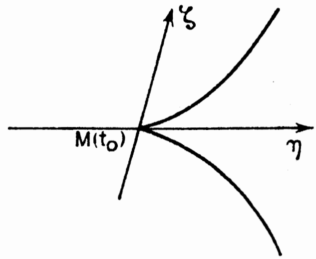
است . بنابراین مانند شمارهٔ ۲.۳.۱۵ شکل ۷۶ را خواهیم داشت. به‌همین ترتیب مانند شماره‌های ۳.۳.۱۵ و ۴.۳.۱۵ شکلهای ۷۷ و ۷۸ بدست می‌آید .



شکل ۷۶



شکل ۷۷



شکل ۷۸

فصل هفدهم

رویه‌های پارامتری در فضا

خواننده از دیر باز، گفتگو از صفحهٔ مماس یک رویه را شنیده است. در اینجا وجود صفحهٔ مماس را در شرایط کلی اثبات می‌کنیم و روش به‌دست آوردن آن را عملا می‌آموزیم.

۱.۱۷ - تعریف

۱.۱.۱۷- فرض می‌کنیم A بخشی از $\mathbf{R}^2$ باشد. یک نگاشت $(u,v) \to M(u,v)$ بخش A درفضای $\mathbf{R}^3$ را یک **رویهٔ پارامتری** می‌نامند. متغیرهای u و v را پارامتر و مجموعهٔ نقاط $M(u,v)$ را مجموعهٔ نقاط رویه می‌گویند.

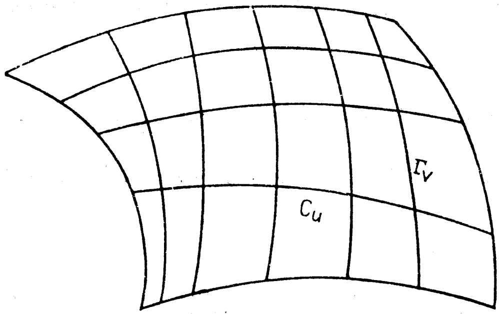
چنانچه درفضای $\mathbf{R}^3$ یک‌مبدأ و یک‌پایه درنظر بگیریم، $M(u,v)$ دارای آرایند‌های $f(u,v)$ ، $g(u,v)$ ، $h(u,v)$ که توابعی‌حقیقی از u و v می‌باشند، خواهدبود. دراینصورت گویند که رویهٔ پارامتری به وسیلهٔ معادله های:

$$(۱) \qquad x=f(u,v) \quad , \quad y=g(u,v) \quad , \quad z=h(u,v)$$

معین شده است. همچنین گفته می‌شود که مجموعهٔ نقاط رویه دارای نمایش پارامتری (۱) می‌باشد.

۲.۱.۱۷ - مانند شماره‌های ۱.۱.۱۵ و ۴.۱.۱۵ رویه‌های پارامتری پیوسته، رویه‌های پارامتری با مشتق پیوسته ... وتعویض پارامترها دریک رویهٔ پارامتری‌را تعریف می‌کنند.

۳.۱.۱۷ - اگر v را برابر با مقدار ثابت v_0 بگیریم، نگاشت $u \to M(u,v_0)$ یک خم پارامتری Γ_{v_0} معین‌می‌کند که همهٔ نقاط آن به رویه متعلق می‌باشند. هنگامی‌که v_0 تغییر می‌کند یک‌دسته خم‌های پارامتری Γ_v خواهیم داشت. اجتماع نقاط خمهای Γ_v همان مجموعهٔ نقاط رویه است. به روش‌مشابه، اگر u را ثابت بگیریم، یک‌دسته‌خمهای پارامتری C_u به‌دست می‌آید. خمهای C_u و Γ_v را **خمهای آراینده** رویه می‌نامند.



شکل ۷۹

۴.۱.۱۷ ـ به‌طورکلی اگر $t \to (u(t), v(t))$ یک نگاشت بخشی از $\mathbf{R}$ در $\mathbf{R}^2$ باشد، نگاشت $t \to M(u(t), v(t))$ یک خم پارامتری است که مجموعهٔ نقاط آن متعلق به‌رویه است.

۲.۱۷ ـ مثالهایی از رویه‌های پارامتری

۱.۲.۱۷ ـ مجموعهٔ نقاط رویهٔ پارامتری معین شده به وسیلهٔ معادله‌های:

$$x=u \quad , \quad y=v \quad , \quad z=h(u,v)$$

عبارتست از نمودار تابع h. بنابراین کلیهٔ مطالبی که دراین فصل گفته خواهد شد، در مورد نمودار توابع حقیقی از دو متغیر حقیقی نیز درست است.

مثلاً معادله‌های $x=x$, $y=y$, $z=0$ عبارتند ازیک‌نمایش پارامتری‌صفحهٔ xOy. بنابراین خمهای آراینده خطوط هم‌راستا با Ox و Oy از صفحهٔ xOy هستند. پس پارامترهای u و v در روی یک‌رویه تعمیمی بسیارکلی ازیک‌دستگاه آراینده درصفحه می‌باشند. مفهوم شمارهٔ ۴.۱.۱۷ تعمیم مفهوم خم پارامتری درصفحه است که درفصل پانزدهم مطالعه گردید.

۲.۲.۱۷ ـ فرض می‌کنیم (a, b, c) و (a', b', c') آراینده‌های دو بردار $\vec{V}$ و $\vec{V'}$ که نا بستگی خطی‌دارند، باشد. بنابرشمارهٔ ۱.۳.۱۲ کتاب جبر، معادله‌های:

$$x=x_0+au+a'v \quad , \quad y=y_0+bu+b'v \quad , \quad z=z_0+cu+c'v$$

یک نمایش پارامتری صفحهٔ گذرنده برنقطهٔ $A(x_0, y_0, z_0)$ و هم‌راستا با بردارهای $\vec{V}$ و $\vec{V'}$ است.

۳.۲.۱۷ - فرض می‌کنیم M_0 و M_1 دونقطه به‌آرایندههای (x_0, y_0, z_0) و (x_1, y_1, z_1) باشند. برای هردوشمار u و v به‌طوری‌که $u+v \neq 0$ باشد، نقطهٔ $M(u, v)$ را به‌آرایندههای:

$$x = \frac{ux_0 + vx_1}{u+v} \quad , \quad y = \frac{uy_0 + vy_1}{u+v} \quad , \quad z = \frac{uz_0 + vz_1}{u+v}$$

می‌گیریم. بنابرشمارهٔ ۱۱.۵.۱۲ کتاب جبر، می‌دانیم‌که مجموعهٔ نقاط $M(u, v)$ خط M_0M_1 است. بنابراین مجموعهٔ نقاط رویهٔ پارامتری $(u, v) \to M(u, v)$ عبارتست از خط M_0M_1. این تناقض به علت اینست‌که x, y, z به‌وسیلهٔ نسبت $t = \frac{u}{v}$ به u و v بستگی دارند.

۴.۲.۱۷ - فرض می‌کنیم $R \geqslant 0$ یک مقدار ثابت و Σ رویهٔ پارامتری معین شده به وسیلهٔ معادله‌های:

$$x = R\cos\varphi\cos\theta \quad , \quad y = R\cos\varphi\sin\theta \quad , \quad z = R\sin\varphi$$

نسبت به یک‌پایهٔ یکه‌ای متعامد باشد. دراینصورت داریم $x^2+y^2+z^2=R^2$. پس هرنقطه از Σ به‌کرهٔ به مرکز O وبه‌شعاع R متعلق است. به واورون چنانچه M نقطه‌ای ازاین‌کره و x, y, z آرایندههای M باشند داریم $|z| \leqslant R$. بنابراین یک شمار φ وجود دارد به‌طوری‌که $z = R\sin\varphi$، دراینصورت خواهیم داشت:

$$x^2+y^2 = R^2 - z^2 = R^2\cos^2\varphi$$

پس یک شمار θ یافت می‌شود به قسمی که داشته باشیم:

$$x = R\cos\varphi\cos\theta \quad , \quad y = R\cos\varphi\sin\theta$$

به‌این ترتیب مجموعهٔ نقاط Σ عبارتست ازکرهٔ به مرکز O و به شعاع R.

خمهای آرایندهٔ رویهٔ Σ دایره‌های نیم روز و مدارهای‌کره هستند (درصورتیکه Oz خط گذرنده بر قطبها اختیار شود).

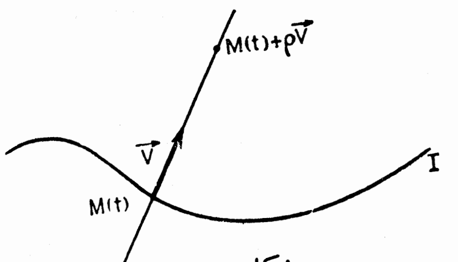
۵.۲.۱۷ - خم پارامتری Γ به معادله‌های :

$$x=f(t) \quad , \quad y=g(t) \quad , \quad z=h(t)$$

را درنظر می گیریم ، و فرض می کنیم α , β , γ آرایندههای یک بردار $\vec{V}$ باشند $(\vec{V}\neq 0)$.
میخواهیم یک نمایش پارامتری استوانه‌ای را که خم هادی آن Γ و مولدهای آن با $\vec{V}$ هم‌راستا هستند ، بدست آوریم .

چنانچه نقطهٔ $M(t)$ را به‌آرایندههای $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ بگیریم ، نقاط استوانه به صورت $M(t)+\rho\vec{V}$ نشان داده می‌شوند که درآنجا t و ρ دومتغیرند . آرایندههای $M(t)+\rho\vec{V}$ عبارتند از :

$$x=f(t)+\rho\alpha \quad , \quad y=g(t)+\rho\beta \quad , \quad z=h(t)+\rho\gamma \tag{1}$$



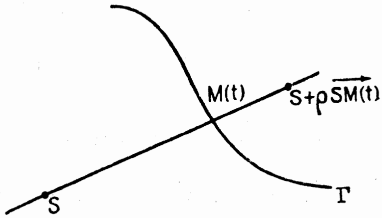
شکل ۸۰

پس معادله‌های (۱) یک نمایش پارامتری استوانه بالا را معین می کنند که درآنها t و ρ پارامترهای رویه می‌باشند . خمهای آرایینده برای مقادیر ثابت t مولدهای استوانه ، و برای مقادیر ثابت ρ خمهایی هستند که از Γ به وسیلهٔ انتقالهایی به بردارهای هم‌راستا با $\vec{V}$ بدست می‌آیند .

۶.۲.۱۷ - فرض می کنیم خم پارامتری Γ به وسیلهٔ معادله‌های :

$$x=f(t) \quad , \quad y=g(t) \quad , \quad z=h(t)$$

معین‌شده‌باشد . نقطهٔ S به‌آرایندههای x_0 , y_0 , z_0 را که‌متعلق‌به Γ نیست‌درنظرمی گیریم .
میخواهیم یک‌نمایش پارامتری مخروطی‌را که رأس آن S و خم هادی‌آن Γ است ، بدست آوریم .



شکل ۸۱

چنانچه نقطهٔ $M(t)$ را به‌آرایندههای $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ بگیریم ، نقاط خط $SM(t)$ ، برای مقدار ثابت t ، به‌صورت $S+\rho\overrightarrow{SM(t)}$ نشان داده می‌شوند . پس‌نقاط مخروط نیز به‌همان صورت $S+\rho\overrightarrow{SM(t)}$ هستند که درآنجا t و ρ دومتغیرند. آرایندههای $S+\rho\overrightarrow{SM(t)}$ عبارتند از :

$$(۱) \qquad x=x_0+\rho(f(t)-x_0) \quad , \quad y=y_0+\rho(g(t)-y_0) \quad ,$$
$$z=z_0+\rho(h(t)-z_0)$$

بنابراین معادلـه‌های (۱) یک نمایش پارامتری مخروط را معین می‌کنند که در آنها t و ρ پارامترها می‌باشند . خمهای آرایننده برای مقادیر ثابت t مولدهای مخروط ، وبرای مقادیر ثابت ρ خمهایی هستند که از Γ به وسیلهٔ همسانیهایی به مرکز S به‌دست می‌آیند .

۳.۱۷ . صفحهٔ مماس

۱.۳.۱۷ ـ رویهٔ پارامتری Σ را که به وسیلهٔ معادله‌های :

$$x=f(u,v) \quad , \quad y=g(u,v) \quad , \quad z=h(u,v)$$

معین‌شده‌است درنظرمی گیریم ونقطهٔ به‌آرایندههای $f(u,v)$, $g(u,v)$, $h(u,v)$ را با $M(u,v)$ می‌نماییم . فرض می‌کنیم توابع f و g و h دریک بخش باز U از $\mathbf{R}^2$ دارای مشتق پیوسته باشند . نقطه‌ای از Σ را که به $(u_0,v_0)\in U$ وابسته می‌شود با $M_0=M(u_0,v_0)$ نشان می‌دهیم. خمهای آرایندهٔ وابسته به $u=u_0$ و $v=v_0$ یعنی خمهای پارامتری C_{u_0} و Γ_{v_0} را که بوسیلهٔ معادله‌های :

$$C_{u_\circ}: \quad x=f(u_\circ, v) \quad , \quad y=g(u_\circ, v) \quad , \quad z=h(u_\circ, v)$$

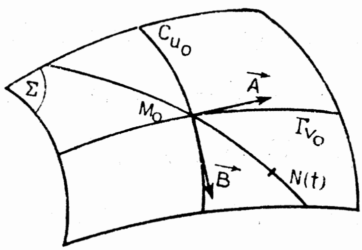
$$\Gamma_{v_\circ}: \quad x=f(u, v_\circ) \quad , \quad y=g(u, v_\circ) \quad , \quad z=h(u, v_\circ)$$

معین می‌شوند ، اختیار می‌کنیم و قرار می‌دهیم :

$$\vec{A}: \quad f'_u(u_\circ, v_\circ) \quad , \quad g'_u(u_\circ, v_\circ) \quad , \quad h'_u(u_\circ, v_\circ)$$

$$\vec{B}: \quad f'_v(u_\circ, v_\circ) \quad , \quad g'_v(u_\circ, v_\circ) \quad , \quad h'_v(u_\circ, v_\circ)$$

چنانچه $\vec{A} \neq \circ$ باشد، بنابرشمارهٔ ۱.۲.۱۶ ، خم $\Gamma_{v_\circ}$ درنقطهٔ $M_\circ$ دارای‌سماسی هم‌راستا با $\vec{A}$ می‌باشد. همچنین اگر $\vec{B} \neq \circ$ باشد خم $C_{u_\circ}$ درنقطهٔ $M_\circ$ دارای سماسی هم‌راستا با $\vec{B}$ است .



شکل ۸۲

۲.۳.۱۷ - قضیه - فرض می‌کنیم بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ نابستگی خطی داشته باشند و H صفحهٔ گذرنده بر $M_\circ$ وهم‌راستا با $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و I فاصله‌ای از R باشد.

(I) — چنانچه $t \to (\varphi(t), \psi(t))$ یک نگاشت با مشتق پیوسته I در U و $t_\circ \in I$ باشد به‌طوری که داشته باشیم $\varphi(t_\circ)=u_\circ$ و $\psi(t_\circ)=v_\circ$ ، نگاشت $t \to N(t)=M(\varphi(t), \psi(t))$ که یک نگاشت I درفضای R^3 است یک خم Γ بامشتق پیوسته می‌باشد که همهٔ نقاط آن متعلق به Σ است وداریم $N(t_\circ)=M_\circ$.

(II) — بردار سرعت $\vec{N'}(t_\circ)$ با صفحهٔ H هم‌راستاست. به‌ویژه اگر

$\overrightarrow{N}'(t_0) \neq 0$ باشد مماس بر Γ در نقطهٔ M_0 درصفحهٔ H واقع است (صفحهٔ H بستگی به Γ ندارد).

اثبات- بنابرشمارهٔ ۱.۲.۱۱ نگاشتهای:

$$t \to f(\varphi(t), \psi(t)) \quad , \quad t \to g(\varphi(t), \psi(t)) \quad , \quad t \to h(\varphi(t), \psi(t))$$

درفاصلهٔ I با مشتق پیوسته‌اند و درنتیجه Γ دارای مشتق پیوسته است. آشکار است که برای هرمقدار t نقطهٔ $N(t)$ متعلق به Σ است و داریم $N(t_0)=M_0$. به‌این ترتیب قسمت (I) ثابت می‌شود.

بنابرشمارهٔ ۱.۲.۱۱ آراینده‌های $\overrightarrow{N}'(t_0)$ عبارتند از:

$$f'_u(u_0, v_0)\varphi'(t_0)+f'_v(u_0, v_0)\psi'(t_0)$$

$$g'_u(u_0, v_0)\varphi'(t_0)+g'_v(u_0, v_0)\psi'(t_0)$$

$$h'_u(u_0, v_0)\varphi'(t_0)+h'_v(u_0, v_0)\psi'(t_0)$$

پس خواهیم داشت $\overrightarrow{N}'(t_0)=\varphi'(t_0)\overrightarrow{A}+\psi'(t_0)\overrightarrow{B}$ و درنتیجه (II) ثابت می‌گردد.

۳.۳.۱۷ - **تعریف - صفحهٔ H که بر نقطهٔ M_0 می‌گذرد و با بردارهای $\overrightarrow{A}$ و $\overrightarrow{B}$ هم‌راستامی باشد صفحهٔ مماس بر رویهٔ Σ در نقطهٔ M_0 نامیده می‌شود.**

گاهی درحالتی که توابع f , g , h بامشتق پیوسته نباشند نیزمی‌توان صفحه مماس بررویه را تعریف کرد. دراینجا ما از بررسی این‌حالت خودداری می‌کنیم.

۴.۳.۱۷ - **معادلهٔ صفحهٔ مماس** - فرض‌های قضیهٔ ۲.۳.۱۷ را درنظرمی‌گیریم. برای اینکه نقطهٔ P به آراینده‌های X و Y و Z از فضا در صفحهٔ مماس بررویه درنقطهٔ M_0 واقع باشد، بایاوبسنده است که بردارهای $\overrightarrow{M_0P}$ و $\overrightarrow{A}$ و $\overrightarrow{B}$ بستگی‌خطی‌داشته‌باشند (شمارهٔ ۲.۳.۱۷). به‌عبارت‌دیگر، بنابرقسمت (V) شمارهٔ ۴.۱۰.۴ کتاب‌جبر، داشته‌باشیم:

$$\begin{vmatrix} X-x_0 & Y-y_0 & Z-z_0 \\ f'_u(u_0, v_0) & g'_u(u_0, v_0) & h'_u(u_0, v_0) \\ f'_v(u_0, v_0) & g'_v(u_0, v_0) & h'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0$$

این برابری عبارتست از معادلهٔ صفحهٔ مماس بررویه درنقطهٔ M_0 .

۵.۳.۱۷ - **حالت ویژه** - فرض می‌کنیم $(x, y) \to h(x, y)$ یک تابع‌حقیقی بامشتق پیوسته دریک بخش باز U از $\mathbf{R}^2$ باشد . توابع $x=x$ و $y=y$ و $z=h(x,y)$ یک رویهٔ پارامتری Σ معین می‌کنندکه مجموعهٔ نقاط آن نمودار تابع h است .

اگر (x_0, y_0) نقطه‌ای از U و M_0 نقطهٔ وابسته به‌آن از Σ باشد ، آرایندهای بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ شمارهٔ ۱.۳.۱۷ دراینجا عبارتند از :

$$\vec{A}: \quad 1 \quad , \quad 0 \quad , \quad h'_x(x_0, y_0)$$

$$\vec{B}: \quad 0 \quad , \quad 1 \quad , \quad h'_y(x_0, y_0)$$

این بردارها نابستگی خطی‌دارند. پس رویهٔ Σ درنقطهٔ M_0 **دارای صفحهٔ مماسی** است به معادلهٔ :

$$\begin{vmatrix} X-x_0 & Y-y_0 & Z-z_0 \\ 1 & 0 & h'_x(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & h'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0$$

که پس از بسط نسبت به سطر اول به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$Z-h(x_0, y_0) = (X-x_0)h'_x(x_0, y_0) + (Y-y_0)h'_y(x_0, y_0)$$

فصل هیجدهم

معادله‌های خمها و رویه‌ها

تا کنون خواننده معادله های خمها و رویه ها را دیده است. پس از چند یادآوری ومثال رویه هایی را که به‌ویژه در دنبالهٔ درس آنالیز سودمند می‌باشند می‌آوریم (بیضی‌گون هذلولی‌گون ـ سهمی‌گون). بدین ترتیب عملا همهٔ رویه های درجهٔ دوم را خواهیم دید.

۱.۱۸ ـ معادلهٔ یک خم درصفحه

۱.۱.۱۸ ـ یک مبدأ و یک پایه در صفحه در نظر می گیریم ، و فرض می کنیم $(x, y) \to F(x, y)$ یک تابع حقیقی از دو متغیر حقیقی باشد . مجموعهٔ نقاط M از صفحه که آرایندههای x و y آنها دربرابری $F(x, y)=0$ صدق می کنند ، خم به معادلهٔ $F(x, y)=0$ نامیده می‌شود . درشمارهٔ ۷.۱.۱۳ مماس برچنین خمی معین گردید .

۲.۱.۱۸ ـ **مثال** ـ چنانچه c, b, a سه شمار حقیقی و $(a, b) \neq (0, 0)$ باشد ، خم به معادلهٔ $ax+by+c=0$ یک خط است.

۳.۱.۱۸ ـ **مثال** ـ فرض می کنیم $a>0$, $b>0$ و پایهٔ انتخاب شده یکه‌ای متعامد باشد . دراینصورت خم به معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ یک بیضی است که Ox و Oy محورهای تقارن آن هستند . همچنین خم به معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ یک هذلولی است که Ox و Oy محورهای تقارن آن می‌باشند .

۴.۱.۱۸ ـ **مثال** ـ اگر f یک‌تابع حقیقی از یک‌متغیر حقیقی باشد ، خم به معادلهٔ $y=f(x)$ در $\mathbf{R}^2$ ، نمودار تابع f است .

۵.۱.۱۸ ـ **مثال** ـ خم به معادلهٔ $x^2+y^2+1=0$ عبارتست از مجموعهٔ تهی، خم به معادلهٔ $x^2+y^2=0$ تنها شامل نقطهٔ O می‌باشد ، وخم به معادلهٔ :

$$(x+y)(x-y)-x^2+y^2=0$$

عبارتست از تمام صفحه .

دراین حالتها از بکار بردن کلمهٔ « خم » خودداری می کنیم .

۶.۱.۱۸ ـ درآنچه که گفته شد ، ما با درنظرگرفتن یک معادله یک خم را تعریف کردیم . به‌وارون اگر یک خم Γ درصفحه داشته باشیم ، می‌توانیم یک تابع F به‌دست آوریم به‌طوری که Γ خم به معادلهٔ $F(x, y)=0$ باشد . آشکاراست که تعیین تابع F به بینهایت روش ممکن است . زیرا کافی است که برای $(x, y)\in\Gamma$ قرار دهیم $F(x, y)=0$ ، و برای $(x, y)\notin\Gamma$ مقدارتابع $F(x, y)$ را برابر با هرمقدار دلخواه مخالف با صفر بگیریم . اما درعمل کوشش می‌کنند که تابع F به کمک توابع کلاسیک به‌صورت ساده‌ای نوشته شود .

۲.۱۸ ـ معادلهٔ یک رویه درفضا

۱.۲.۱۸ ـ یک مبداء و یک پایه در فضا درنظر می‌گیریم ، و فرض می‌کنیم $(x, y, z)\to F(x, y, z)$ یک تابع سه متغیری حقیقی باشد . مجموعهٔ نقاط M از فضا که آراینده‌های x , y , z آنها دربرابری $F(x, y, z)=0$ صدق می‌کنند رویهٔ به معادلهٔ $F(x, y, z)=0$ نامیده می‌شود . درشمارهٔ ۲.۲.۱۳ صفحهٔ مماس برچنین رویه‌ای معین گردید .

۲.۲.۱۸ ـ **مثال**ـ اگر $(a, b, c)\neq(0, 0, 0)$ باشد ، رویهٔ به معادلهٔ :

$$ax+by+cz+d=0$$

یک صفحه است .

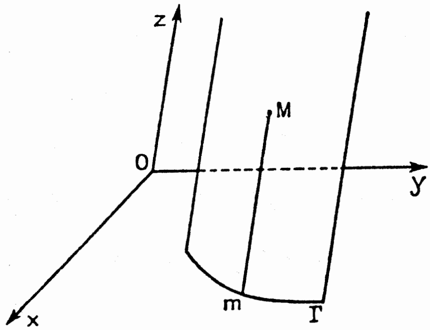
۳.۲.۱۸ ـ **مثال**ـ چنانچه f یک‌تابع حقیقی‌از دومتغیرحقیقی باشد ، رویهٔ به‌معادلهٔ $z=f(x, y)$ در $\mathbf{R}^3$ ، نمودار تابع f است.

۴.۲.۱۸ ـ **مثال** ـ اگر پایهٔ انتخاب شده درفضا یکه‌ای متعامد باشد ، معادلهٔ :

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\rho^2$$

کرهٔ به شعاع $|\rho|$ را که آراینده‌های مرکز آن a و b و c است ، نشان میدهد .

۵.۲.۱۸ ـ **مثال** ـ معادلهٔ $F(x, y)=0$ را که درآن متغیر z وجود ندارد ، در نظر می‌گیریم . برای اینکه آراینده‌های x و y و z یک نقطهٔ M از فضا دراین معادله صدق کند ، بایاوبسنده‌است که نقطهٔ m به‌آراینده‌های x و y و 0 روی خم Γ ازصفحهٔ xOy باشدکه معادلهٔ آن $F(x, y)=0$ است . اما m تصویر M روی صفحهٔ xOy



شکل ۸۳

در راستای Oz است. پس رویهٔ به معادلهٔ $F(x,y)=0$ از فضا ، استوانه‌ای است که خم هادی آن Γ و مولدهای آن هم‌راستا با Oz می‌باشند .

۶.۲.۱۸ - دربرخی از حالات باید از بکاربردن کلمهٔ « رویه » خودداری کرد. مثلاً درمورد مجموعهٔ نقاطی که آراینده‌های x و y و z آنها درمعادلهٔ $x^2+y^2=0$ صدق می‌کنند ، که عبارتند از محور Oz .

۷.۲.۱۸ - درآنچه گفته شد ، ما با درنظرگرفتن یک معادله یک رویه را تعریف کردیم . به وارون اگر یک رویه Σ درفضا داشته باشیم ، می‌توانیم یک تابع F بدست آوریم به‌طوری که Σ رویهٔ به معادلهٔ $F(x,y,z)=0$ باشد . آشکار است که تعیین تابع F به‌بینهایت روش ممکن است. اما درعمل کوشش می‌کنند که تابع F رابه‌صورت ترکیب ساده‌ای از توابع کلاسیک به دست آورند .

۳.۱۸ - معادله‌های یک خم درفضا

۱.۳.۱۸ - یک خم Γ ازفضا را می‌توان به‌صورت برشگاه دو رویهٔ Σ_1 و Σ_2 درنظر گرفت (این عمل به بینهایت روش ممکن است) . فرض می‌کنیم $F_1(x,y,z)=0$ یک معادلهٔ Σ_1 و $F_2(x,y,z)=0$ یک معادلهٔ Σ_2 باشد. دراینصورت :

$$F_1(x,y,z)=0 \qquad \text{و} \qquad F_2(x,y,z)=0$$

معادله‌هایی از Γ می‌باشند . درشمارهٔ ۲.۳.۱۳ مماس برچنین خمی معین گردید .

۲.۳.۱۸-**مثال**- فرض می‌کنیم بردارهای به‌آرایندهای (a, b, c) و (a', b', c') نابستگی خطی داشته باشند. دراینصورت، بنابرشمارهٔ ۱.۲.۱۲ کتاب جبر، می‌دانیم که معادله‌های:

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

یک خط را مشخص می‌کنند.

۳.۳.۱۸ - **مثال** - چنانچه f و g دو تابع حقیقی از یک متغیر حقیقی باشند، معادله‌های:

$$y = f(x) \quad , \quad z = g(x)$$

یک خم را معین میکنند که نمودار نگاشت $x \to (f(x), g(x))$ است.

۴.۱۸ - روش تعیین معادله‌های چند رویه

۱.۴.۱۸ - فرض می‌کنیم خم Γ به معادله‌های:

$$F(x, y, z) = 0 \quad , \quad G(x, y, z) = 0$$

و S نقطه‌ای ازفضا به‌آرایندهای z_0, y_0, x_0 باشد، که به Γ متعلق نیست. می‌خواهیم یک معادلهٔ مخروط Σ به رأس S و به خم هادی Γ را پیدا کنیم. برای اینکه یک نقطهٔ M از فضا به‌آرایندهای z, y, x، و متمایز از S، متعلق به Σ باشد، بایاوبسنده است که خط SM و خم Γ بایکدیگر برخورد کنند. وچون SM دارای نمایش پارامتری:

$$X = x_0 + \rho(x - x_0) \quad , \quad Y = y_0 + \rho(y - y_0) \quad , \quad Z = z_0 + \rho(z - z_0)$$

می‌باشد، پس برای اینکه M روی $\Sigma - \{S\}$ باشد بایاوبسنده‌است که ρ جواب‌مشترک دو معادلهٔ:

$$(1) \qquad F(x_0 + \rho(x - x_0)\,,\, y_0 + \rho(y - y_0)\,,\, z_0 + \rho(z - z_0)) = 0$$

$$(2) \qquad G(x_0 + \rho(x - x_0)\,,\, y_0 + \rho(y - y_0)\,,\, z_0 + \rho(z - z_0)) = 0$$

باشد. معمولاً معادله‌های (۱) و (۲) نسبت به ρ دارای جواب مشترک نیستند. چنانچه شرط دارا بودن‌ریشهٔ مشترک را بنویسیم (یعنی ρ را بین این دومعادله حذف کنیم)، یک

بستگی بین ضرایب این معادله‌ها که توابعی از x و y و z می‌باشند، به دست می‌آید.
بنابراین شرطی به‌صورت $H(x, y, z)=0$ خواهیم داشت که عبارتست از شرط
بایاوبسنده برای اینکه نقطهٔ M متعلق به $\Sigma-\{S\}$ باشد. پس $H(x, y, z)=0$
یک معادلهٔ $\Sigma-\{S\}$ است.

۲.٤.۱۸ - فرض می‌کنیم خم Γ به معادله‌های:

$$F(x, y, z)=0 \quad , \quad G(x, y, z)=0$$

وبردار $\vec{V}$ دارای آراینده‌های a و b و c باشد $(\vec{V}\neq 0)$. میخواهیم یک معادلهٔ
استوانهٔ Σ را که خم هادی آن Γ و مولدهای آن با $\vec{V}$ همراستا هستند، بدست آوریم.
برای اینکه یک نقطهٔ M از فضا، به آراینده‌های x و y و z، روی Σ باشد، بایاوبسنده
است که خط گذرنده از M وهمراستا با $\vec{V}$، یعنی خطی که نمایش پارامتری آن عبارتست از:

$$X=x+\rho a \quad , \quad Y=y+\rho b \quad , \quad Z=z+\rho c$$

با خم Γ برخورد کند. به گفتهٔ دیگر ρ جواب مشترك دو معادلهٔ:

$$F(x+\rho a \; , \; y+\rho b \; , \; z+\rho c)=0 \qquad (۱)$$

$$G(x+\rho a \; , \; y+\rho b \; , \; z+\rho c)=0 \qquad (۲)$$

باشد. بنابراین یک معادلهٔ Σ ازحذف ρ بین معادله‌های (۱) و (۲) بدست می‌آید.

۳.٤.۱۸ - اکنون به بیان تعریف هندسی **رویه‌های چرخشی** می‌پردازیم.

فرض می‌کنیم Δ یک خط باشد. رویهٔ Σ را رویهٔ چرخشی به محور چرخش Δ می‌نامیم، هرگاه Σ به وسیلهٔ هرچرخش به دور محور Δ پایدار باشد. این تعریف را می‌توان به‌صورت زیر نیز بیان داشت:

رویهٔ Σ رویهٔ چرخشی نامیده می‌شود، هرگاه برای هرنقطهٔ M از Σ، دایرهٔ به‌محور Δ و گذرنده از M متعلق به Σ باشد.

دایره‌های مشمول Σ را که محور آنها Δ است، مدارهای Σ می‌نامند. صفحه‌های گذرنده بر Δ را صفحه‌های نیم‌روز Σ می‌گویند. برشگاه رویهٔ Σ با هرصفحهٔ نیم‌روز یک خم نیمروز Σ نامیده می‌شود.

اگر Γ یک خم باشد ، کوچکترین رویهٔ چرخشی Σ به محور Δ که شامل Γ باشد عبارتست از اجتماع دایره‌های به‌محور Δ که از نقاط Γ می‌گذرند. دراینصورت می‌گویند که Σ رویهٔ چرخشی به محور Δ وخم هادی Γ می‌باشد .

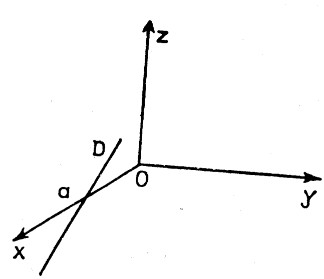
چنانچه Σ یک‌رویهٔ چرخشی به محور Δ و Γ یک خم نیمروز Σ باشد ، Σ یک‌رویهٔ چرخشی به محور Δ وخم هادی Γ نیز هست.

مثال - یک مخروط چرخشی ویک استوانهٔ چرخشی نمونه‌هایی از رویه‌های چرخشی هستند . اگر Σ یک کره و Δ خطی گذرنده برمرکزآن باشد ، Σ یک رویهٔ چرخشی‌به‌محور Δ است .

اکنون به کمک سه مثال زیر نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان معادلهٔ یک رویهٔ چرخشی را به دست آورد .

۴.۴.۱۸ - فرض می‌کنیم Δ و D دوخط باشند که با یکدیگر برخورد نمی‌کنند ، و D نه همراستا با Δ و نه عمود برآن باشد . رویهٔ چرخشی Σ به محور Δ و خم هادی D را درنظر می‌گیریم . یک مبدأ و یک پایهٔ یکه‌ای متعامد انتخاب می‌کنیم به طوری که Oz بر Δ منطبق و Ox عمود مشترک Oz و D باشد . دراینصورت معادله‌های D عبارتند از :

$$x=a \quad , \quad z=my \quad , \quad (m\neq 0)$$



شکل ۸۴

برای اینکه نقطهٔ M به‌آرایندهای x , y , z روی Σ باشد ، بایاوبسنده است که دایرهٔ C به محور Oz و گذرنده از M با خط D برخورد کند . اما دایرهٔ C دارای معادله‌های :

$$Z=z \quad , \quad X^2+Y^2=x^2+y^2 \tag{1}$$

است . پس لازم است که دستگاه معادله‌های به‌دست آمده از :

$$X=a \quad , \quad Z=mY \tag{2}$$

ومعادله های(۱) دست کم دارای یک جواب X , Y , Z باشد . اما این دستگاه بادستگاه :

$$X=a \quad , \quad Z=z$$

$$Y=\frac{z}{m} \quad , \quad X^2+Y^2=x^2+y^2$$

هم‌ارز است . پس برای اینکه یک جواب X , Y , Z وجود داشته باشد بایاویسنده است که داشته باشیم :

$$a^2+\frac{z^2}{m^2}=x^2+y^2 \tag{3}$$

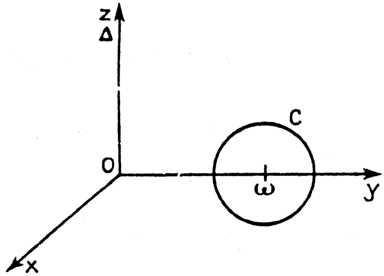
بنابراین رویهٔ Σ دارای معادله (۳) است. خم به معادله‌های :

$$x=0 \quad , \quad y^2-\frac{z^2}{m^2}-a^2=0$$

یکی از خمهای نیمروز Σ می‌باشد . این خم یک هذلولی از صفحهٔ yOz است که Oy و Oz محورهای تقارن آن و نقاط $(0, a, 0)$ و $(0, -a, 0)$ دورأس آن می‌باشند. به‌این ترتیب رویهٔ Σ را می‌توان پدیدآمده از چرخش این هذلولی به‌دور محور Oz دانست.

۱۸.٤.٥ - دایرهٔ C به مرکز ω و خط Δ از صفحهٔ این دایره را درنظر می گیریم ، و فرض می کنیم $\omega \notin \Delta$. رویهٔ چرخشی Σ به محور Δ که دارای خم هادی C است یک "تر (چنبره) نامیده می‌شود . یک مبدأ ویک پایهٔ یکه‌ای متعامد اختیار می کنیم به طوری که Oz بر Δ منطبق باشد و Oy بر ω بگذرد . قرار می‌دهیم $O\omega=a\neq 0$. چنانچه R شعاع دایرهٔ C باشد ، معادله‌های C عبارتند از :

$$x=0 \quad , \quad (y-a)^2+z^2=R^2$$



شکل ۸۵

برای اینکه نقطهٔ M به آرایند‌ه‌های x , y , z روی Σ باشد باپاوبسنده است که خم به معادله‌های :

(۱) $$Z=z$$

(۲) $$X^2+Y^2=x^2+y^2$$

با خم به معادله‌های :

(۳) $$X=0$$

(۴) $$(Y-a)^2+Z^2=R^2$$

برخورد کند . پس بایـد X , Y , Z را بین معادله‌های (۱) و (۲) و (۳) و (۴) حذف کرد . X و Z به‌آسانی به‌کمک (۱) و (۳) حذف می‌شوند . بنابراین کافی است Y را بین معادله‌های :

$$Y^2=x^2+y^2 \qquad , \qquad (Y-a)^2+z^2=R^2$$

و یا :

$$Y^2=x^2+y^2 \qquad , \qquad x^2+y^2-2aY+a^2+z^2=R^2$$

حذف کنیم . از حذف Y نتیجه می‌شود :

$$\left[\frac{1}{2a}\left(x^2+y^2+z^2+a^2-R^2\right)\right]^2=x^2+y^2$$

و یا :

$$(x^2+y^2+z^2)^2+2(a^2-R^2)(x^2+y^2+z^2)-4a^2(x^2+y^2)$$
$$+(a^2-R^2)^2=0$$

یعنی :

$$(x^2+y^2+z^2)^2-2(a^2+R^2)(x^2+y^2)+2(a^2-R^2)z^2+(a^2-R^2)^2=0$$

۱۸. ۴. ۶ - فرض می‌کنیم نقطهٔ S به‌آرایندهای x_0 , y_0 , z_0 و $\vec{V}$ یک‌بردار مخالف باصفر و به مؤلفه‌های a , b , c باشد. یک مبدأ ویک‌پایهٔ یکه‌ای متعامد انتخاب می‌کنیم. می‌خواهیم یک معادلهٔ مخروط چرخشی Σ به رأس S را که نیم زاویهٔ رأس‌آن θ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ و محور آن با $\vec{V}$ همراستا باشد ، بدست آوریم .

برای‌اینکه یک‌نقطهٔ M متمایزاز S ، روی Σ باشد بایاوبسنده‌است که‌زاویهٔ بردارهای $\vec{V}$ و $\overrightarrow{SM}$ برابر با θ یا $\pi-\theta$ باشد ، یعنی :

$$\cos^2(\widehat{\vec{V},\overrightarrow{SM}})=\cos^2\theta$$

و یا :

$$(\vec{V}\cdot\overrightarrow{SM})^2=\|\vec{V}\|^2\cdot\|\overrightarrow{SM}\|^2\cos^2\theta \qquad (1)$$

ازطرفی نقطهٔ S نیز دربرابری (۱) صدق می‌کند ، زیرا برای $S=M$ دوطرف (۱) برابر باصفر است . درنتیجه یک معادلهٔ رویهٔ Σ چنین است :

$$[a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)]^2$$
$$=[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2](a^2+b^2+c^2)\cos^2\theta$$

۱۸. ۵- بیضوی

درپایان این فصل ما به مطالعهٔ برخی از رویه‌ها می‌پردازیم. این رویه‌ها نمونه‌های مهمی از رویه‌هایی هستندکه رویه‌های درجهٔ دوم نامیده می‌شوند .

۱۸. ۵. ۱ - رویهٔ Σ که نسبت به یک‌مبدأ ویک پایهٔ یکه‌ای متعامد مناسب، دارای معادله‌ای به‌صورت :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

است ، بیضوی نامیده می‌شود (a و b و c شمارهای بزرگتر ازصفرند) .

۲.۵.۱۸ ـ صفحه‌های آراینده صفحه‌های تقارن ، محورهای آراینده محورهای تقارن، و O مرکز تقارن Σ می‌باشند .

پس از این صفحهٔ xOy را با (xOy) نشان خواهیم داد .

۳.۵.۱۸ ـ مجموعهٔ نقاط $\Sigma\bigcap(xOy)$ بیضی به معادله‌های :

$$z=0 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

است . همچنین هریک از مجموعهٔ نقاط $\Sigma\bigcap(yOz)$ و $\Sigma\bigcap(xOy)$ یک بیضی می‌باشد .

۴.۵.۱۸ ـ فرض می‌کنیم P_h صفحهٔ به معادلهٔ $z=h$ باشد . دراینصورت $\Sigma\bigcap P_h$ دارای معادله‌های زیر است :

$$z=h \quad , \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{h^2}{c^2}-1=0$$

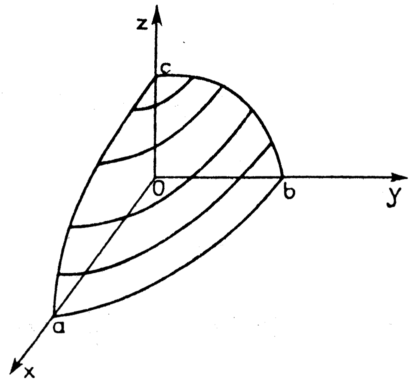
اگر $\frac{h^2}{c^2}-1>0$ یعنی $|h|>c$ باشد ، خواهیم داشت $\Sigma\bigcap P_h=\varnothing$.

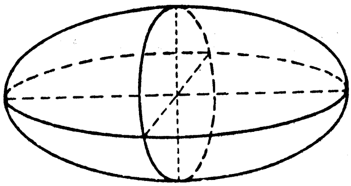
اگر $\frac{h^2}{c^2}-1=0$ یعنی $|h|=c$ باشد ، $\Sigma\bigcap P_h$ تنهاشامل نقطهٔ برخورد P_h و Oz است .

اگر $\frac{h^2}{c^2}-1<0$ یعنی $|h|<c$ باشد ، قرار می‌دهیم $\frac{h^2}{c^2}-1=-\lambda^2$ (شمار λ بزرگتر از صفر است) . دراینصورت $\Sigma\bigcap P_h$ دارای معادله‌های زیر است :

$$z=h \quad , \quad \frac{x^2}{(a\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b\lambda)^2}-1=0$$

به این ترتیب یک دسته بیضی‌همسان بدست می‌آید، که به کمک آنها شکل رویه مشخص می‌شود .





شکل ۸۷ شکل ۸٦

۱۸.۰.۰.۵ - اگر مثلاً $a \geqslant b \geqslant c$ باشد ، ۲a را قطر بزرگ ، ۲c را قطر کوچک و ۲b را قطر میانه Σ می گویند .

۱۸.۰.٦ - حالت‌های ویژه :

°۱ - $a=b \geqslant c$: دراین‌حالت $\Sigma \bigcap P_h$ دایره‌هایی به‌محور Oz می‌باشند و رویهٔ Σ را یک **بیضوی چرخشی پهن** می گویند .

°۲ - $a \geqslant b=c$: دراینحالت برشگاههای Σ با صفحه‌های همراستا با yOz دایره‌هایی به محور Ox هستند و رویهٔ Σ را یک **بیضوی چرخشی کشیده** می‌نامند .

°۳ - $a=b=c$: دراینحالت Σ یک کره است.

۱۸.٦ - هذلولی‌گون یک پارچه

۱۸.٦.۱ - رویهٔ Σ که نسبت به‌یک‌مبدأ ویک‌پایهٔ یکه‌ای‌متعامد مناسب ، دارای معادله‌ای به‌صورت :

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}-\frac{z^۲}{c^۲}-۱=۰$$

است ، **هذلولی‌گون یک پارچه** نامیده می‌شود (a وb وc شمارهای بزرگتر ازصفرند) .

۱۸.٦.۲ - صفحه های آراینده صفحه های تقارن ، محورهای آراینده محورهای تقارن، و O مرکز تقارن Σ ، می‌باشند .

۳.۶.۱۸ - برشگاههای Σ باصفحه‌های آراینده عبارتند از :

$$\Sigma\bigcap(xOy) :\ z=0 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

$$\Sigma\bigcap(xOz) :\ y=0 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

$$\Sigma\bigcap(yOz) :\ x=0 \quad , \quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

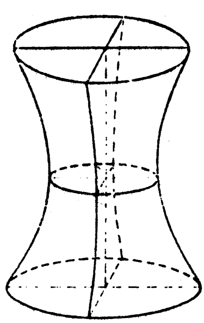
۴.۶.۱۸- چنانچه P_h صفحهٔ به‌معادلهٔ $z=h$ باشد ، $\Sigma\bigcap P_h$ دارای معادله‌های زیر است :

$$z=h \quad , \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{h^2}{c^2}-1=0$$

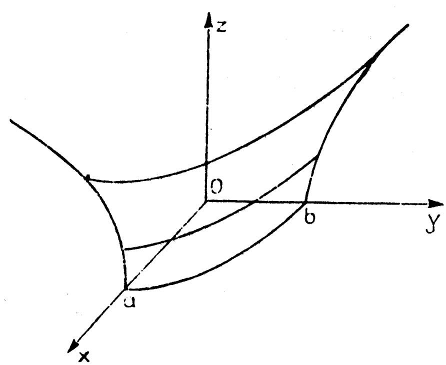
و یا با قراردادن $\frac{h^2}{c^2}+1=\lambda^2$ و $\lambda>0$:

$$z=h \quad , \quad \frac{x^2}{(a\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b\lambda)^2}-1=0$$

که عبارتند از یک دسته بیضی همسان .



شکل ۸۹



شکل ۸۸

۵.۶.۱۸ - **حالت ویژه** : $a=b$ - دراینحالت خمهای $\Sigma\bigcap P_h$ دایره‌هایی به محور Oz می‌باشند، و Σ همان رویه‌ای است که درشمارهٔ ۴.۴.۱۸ دیده شد. این رویه را **هذلولی‌گون یك پارچه چرخشی** می‌گویند .

۷.۱۸ـ هذلولی‌گون دوپارچه

۱.۷.۱۸ ـ رویهٔ Σ که نسبت به یک‌مبدأ ویک پایهٔ یکه‌ای متعامد مناسب، دارای معادله‌ای به‌صورت :

$$\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}-\frac{z^{2}}{c^{2}}+1=0$$

است ، **هذلولی‌گون دوپارچه** نامیده می‌شود (a و b و c شمارهای بزرگتر ازصفرند) .

۲.۷.۱۸ ـ صفحه‌های آراینده صفحه‌های تقارن، محورهای‌آراینده محورهای تقارن ، و O مرکز تقارن Σ ، می‌باشند .

۳.۷.۱۸ ـ برشگاههای Σ با صفحه‌های آراینده عبارتند از :

$$\Sigma\cap(xOy)=\varnothing$$

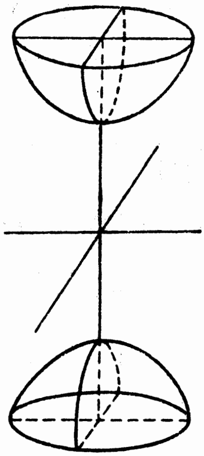
$$\Sigma\cap(xOz):\quad y=0\quad,\quad \frac{x^{2}}{a^{2}}-\frac{z^{2}}{c^{2}}+1=0$$

$$\Sigma\cap(yOz):\quad x=0\quad,\quad \frac{y^{2}}{b^{2}}-\frac{z^{2}}{c^{2}}+1=0$$

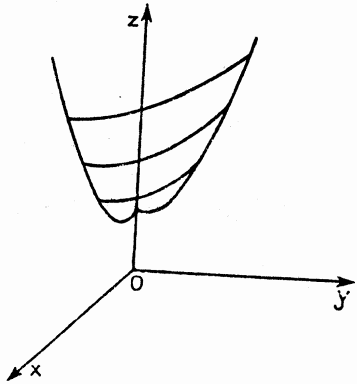
۴.۷.۱۸ ـ فرض می‌کنیم P_h صفحهٔ به معادلهٔ $z=h$ باشد . دراینصورت برای $|h|<c$ داریم $\Sigma\cap P_h=\varnothing$ و برای $|h|=c$ داریم $\Sigma\cap P_h=(Oz)\cap P_h$. چنانچه $|h|>c$ باشد قرار می‌دهیم $\frac{h^{2}}{c^{2}}-1=\lambda^{2}$ و $\lambda>0$. پس $\Sigma\cap P_h$ دارای معادله‌های :

$$z=h\quad,\quad \frac{x^{2}}{(a\lambda)^{2}}+\frac{y^{2}}{(b\lambda)^{2}}-1=0$$

است. این معادله‌ها یکدسته بیضی همسان مشخص می‌کنند، که ازآنها شکل رویه معلوم می‌شود .



شکل ۹۱



شکل ۹۰

۰.۷.۱۸- **حالت ویژه** : $a=b$ - در اینحالت رویهٔ Σ چرخشی و Oz محور چرخش است. این رویه را **هذلولی‌گون چرخشی دوپارچه** می‌گویند .

۸.۱۸- سهمی‌گون بیضی‌وار

۱.۸.۱۸ - رویهٔ Σ که نسبت به یک مبدأ و یک پایهٔ یکه‌ای متعامد مناسب، دارای معادله‌ای به‌صورت :

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-2z=0$$

است ، **سهمی‌گون بیضی‌وار** نامیده می‌شود (p و q شمارهای بزرگتر از صفرند) .

۲.۸.۱۸ - صفحه‌های xOz و yOz صفحه‌های تقارن و Oz محور تقارن Σ می‌باشند .

۳.۸.۱۸ - برای برشگاههای Σ با صفحه‌های xOz و yOz چنین داریم :

$$\Sigma\cap(xOz):\quad y=0 \quad , \quad x^2-2pz=0$$

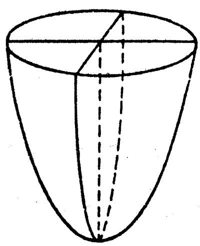
$$\Sigma\cap(yOz):\quad x=0 \quad , \quad y^2-2qz=0$$

این برشگاهها سهمی هستند .

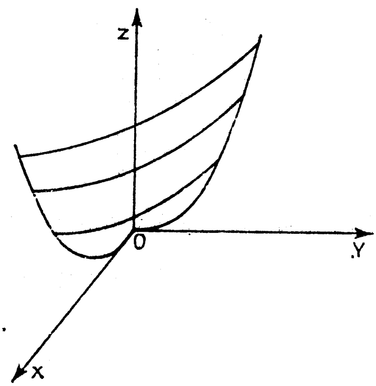
۴.۸.۱۸ ـ برای $h<0$ داریم $\Sigma\cap P_h=\varnothing$ ، و برای $h>0$ مجموعهٔ نقاط $\Sigma\cap P_h$ دارای معادله‌های :

$$z=h \quad , \quad \frac{x^2}{(\sqrt{2ph})^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{2qh})^2}-1=0$$

است . دراینصورت $\Sigma\cap P_h$ یک دسته بیضی همسان را مشخص می‌کنند . به علاوه داریم $\Sigma\cap P_0=\{O\}$.



شکل ۹۳



شکل ۹۲

۵.۸.۱۸ ـ **حالت ویژه :** $p=q$ ـ دراینحالت رویهٔ Σ چرخشی و Oz محور چرخش است. این رویه را **سهمی‌گون چرخشی** می‌گویند .

۹.۱۸ـ سهمی‌گون هذلولی‌وار

۱.۹.۱۸ ـ رویهٔ Σ که نسبت به یک‌مبدأ ویک پایهٔ یکه‌ای متعامد مناسب، دارای معادله‌ای به‌صورت :

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}-2z=0$$

است ، **سهمی‌گون هذلولی‌وار** نامیده می‌شود (p و q شمارهای بزرگتر از صفرند) .

۲.۹.۱۸ ـ صفحه‌های xOz و yOz صفحه‌های تقارن ، و Oz محور تقارن Σ می‌باشند .

۳.۹.۱۸ ـ برشگاه Σ باصفحهٔ xOy از دوخط به معادله‌های :

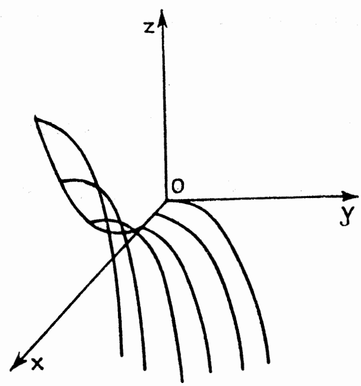
$$z=0 \quad , \quad y=\pm\sqrt{\frac{q}{p}}\,x$$

تشکیل می‌شود . برای دوبرشگاه دیگر که دوسهمی هستند ، چنین داریم :

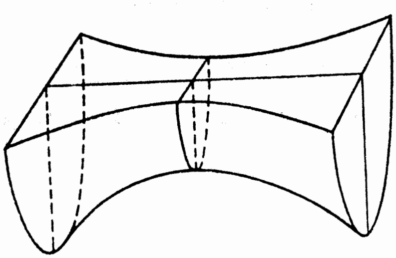
$$\Sigma\cap(xOz): \quad y=0 \quad , \quad x^2-2pz=0$$

$$\Sigma\cap(yOz): \quad x=0 \quad , \quad y^2+2qz=0$$

۴.۹.۱۸ ـ دراینجا برای مشاهدهٔ شکل Σ بهتر است که برشگاه Σ را باصفحهٔ Q_h که معادلهٔ آن $x=h$ است ، بررسی کنیم .



شکل ۹۴



شکل ۹۵

این برشگاه دارای معادله‌های :

$$x=h \quad , \quad y^2+2q\left(z-\frac{h^2}{2p}\right)=0$$

است ، که یکدسته سهمی را مشخص میکنند . این سهمی‌ها از یکدیگر به وسیلهٔ انتقالهایی بدست می‌آیند.

فصل نوزدهم

آراینده‌های قطبی

در این فصل آراینده‌های قطبی راکه در برخی از محاسبات آنالیز، هندسه و همچنین مکانیک (مثلا در مطالعهٔ حرکت سیاره‌ها) کاربرد دارند، خواهیم دید.

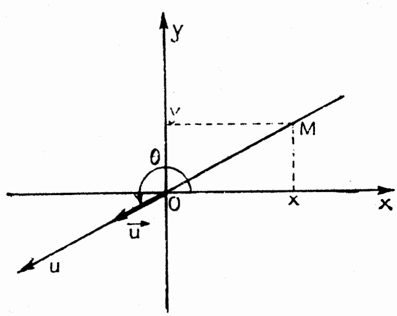
۱.۱۹ - تعریف

۱.۱.۱۹ - درصفحهٔ معمولی یک مبدأ O و یک پایهٔ یکه‌ای متعامد $(\vec{e}_1 \ , \ \vec{e}_2)$ انتخاب می‌کنیم (به‌این ترتیب سوی صفحه معین می‌شود).

فرض می‌کنیم f یک نگاشت $\mathbf{R}^2$ در $\mathbf{R}^2$ باشد، که به هردوشمار حقیقی θ و r نقطهٔ M از صفحه به آراینده‌های :

$$x = r\cos\theta \qquad , \qquad y = r\sin\theta \tag{۱}$$

را وابسته می‌کند. دراینصورت نقطهٔ M را می‌توان به روش زیر به‌دست آورد :



شکل ۹۶

محور Ou را به‌طوریکه اندازهٔ زاویهٔ $(\widehat{Ox \ , Ou})$ برابربا θ باشد، اختیارمی‌کنیم (یکهٔ زاویه رادیان است). بردار یکهٔ $\vec{u}$ ازمحور Ou دارای مؤلفه‌های $\cos\theta$ و $\sin\theta$ است. پس داریم $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}$ به قسمی‌که M نقطه‌ای از محور Ou می‌باشد، که درازای آن روی Ou برابر با r است.

۲.۱.۱۹ - می‌خواهیم نشان‌دهیم که نگاشت f سورژکتیواست اما انژکتیونیست. بدین‌منظور نقطهٔ M به آرایندهای x و y را در نظر می‌گیریم و (θ, r) را پیدا می‌کنیم به‌طوری که داشته باشیم $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. دراینصورت خواهیم داشت :

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad (2)$$

و دوحالت پیش می‌آید :

1° - $M = O$: دراینحالت $r = 0$ و θ دلخواه است .

2° - $M \neq O$: دراینحالت $r \neq 0$ است وداریم $r = \varepsilon\sqrt{x^2 + y^2}$, $(\varepsilon = \pm 1)$.

پس باید شمار θ درشرایط زیر صدق کند :

$$\cos\theta = \frac{x}{\varepsilon\sqrt{x^2 + y^2}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{\varepsilon\sqrt{x^2 + y^2}}$$

درنتیجه برای هریک از دومقدار ε جوابهایی برای θ بدست می‌آید . این جوابها تشکیل یک کلاس ازشمارهای حقیقی مدولو 2π می‌دهند.

به‌طور خلاصه اگر $M \neq O$ باشد، داریم :

$$r = \varepsilon\sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\varepsilon\sqrt{x^2 + y^2}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{\varepsilon\sqrt{x^2 + y^2}}$$

بنابراین ثابت گردید که f سورژکتیو است اما انژکتیو نیست .

۳.۱.۱۹ - اگر M نقطه‌ای ازصفحه باشد ، هرجفت (θ, r) به طوری که داشته باشیم $f(\theta, r) = M$ یک **دستگاه آرایندهای قطبی نقطهٔ M** (نسبت به مبدأ و پایهٔ انتخاب شده) نامیده می‌شود . ازنظرهندسی این دستگاه به روش زیر بدست می‌آید: محور Ou را که از نقطهٔ M می‌گذرد اختیار می‌کنیم و θ را اندازهٔ زاویهٔ $(\widehat{Ox, Ou})$ می‌گیریم . دراینصورت r عبارتست از اندازهٔ جبری $\overrightarrow{OM}$ روی Ou .

اگر $M \neq O$ و (θ, r) یک دستگاه آرایندهای قطبی M باشد ، سایر دستگاهها عبارتند از :

$$\ldots,(\theta-4\pi,r),(\theta-2\pi,r),(\theta,r),(\theta+2\pi,r),(\theta+4\pi,r),\ldots$$

و :

$$\ldots,(\theta-3\pi,-r),(\theta-\pi,-r),(\theta+\pi,-r),(\theta+3\pi,-r),(\theta+5\pi,-r),\ldots$$

شمارهای $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ را اغلب آرایندههای دکارتی یا کارتزین نقطهٔ M می‌گویند .

۴.۱.۱۹ - داریم $tg\theta=\frac{y}{x}$ [قرار داد می‌کنیم که $tg(\frac{\pi}{2}+k\pi)=\infty$ و $\frac{y}{0}=\infty$ برای $y\neq 0$] .

۵.۱.۱۹ - درآنچه را که گذشت ، نقطهٔ O را **قطب** و Ox را **محور قطبی** می‌نامند .

۲.۱۹ - معادلهٔ قطبی یک خم

۱.۲.۱۹ - فرض می‌کنیم F یک تابع حقیقی از دومتغیر حقیقی باشد . مجموعهٔ Γ از نقاط M صفحه که دست کم یکی از دستگاه‌های آرایندههای قطبی (θ, r) آن درمعادلهٔ $F(\theta, r)=0$ صدق می‌کند، خم به معادلهٔ قطبی $F(\theta, r)=0$ نامیده می‌شود . بنابراین:

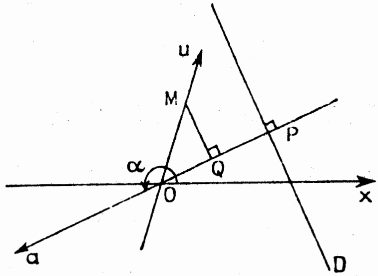
آرایندههای قطبی θ و r نقطهٔ M وجود دارند به‌طوریکه داشته باشیم :

$$M\in\Gamma \Longleftrightarrow F(\theta, r)=0$$

معادله هایی را که درشمارهٔ ۱.۱.۱۸ دیدیم اغلب ، معادله های دکارتی یا کارتزین میگویند .

۲.۲.۱۹ - به‌وارون چنانچه یک خم Γ ازصفحه داده شده باشد، می‌توان یک تابع F به‌دست آورد به‌طوری که خم Γ دارای معادلهٔ قطبی $F(\theta, r)=0$ باشد .

۳.۲.۱۹ - **مثال : معادلهٔ قطبی خطی که ازقطب نمی‌گذرد** - خط D را که از قطب O نمی‌گذرد درنظر می‌گیریم و در روی خط عمود بر D و گذرنده بر O سویی به دلخواه انتخاب می‌کنیم تا محور Oa به‌دست آید . فرض می‌کنیم α اندازهٔ زاویهٔ $(\widehat{Ox, Oa})$ و P نقطهٔ برخورد D با Oa باشد . قرار می‌دهیم $\overline{OP}=h$ پس داریم $h\neq 0$. شناسایی α و h خط D را کاملاً معین می‌کند .



شکل ۹۷

اکنون فرض می‌کنیم M نقطه‌ای از صفحه و Q تصویر قائم آن روی Oa باشد. دراینصورت برای هردستگاه آرایندههای قطبی (θ, r) نقطهٔ M داریم:

$$\overline{OQ} = r\cos(\theta - \alpha)$$

پس:

$$M \in D \Leftrightarrow Q = P \Leftrightarrow \overline{OQ} = h \Leftrightarrow r\cos(\theta - \alpha) = h$$

بنابراین معادلهٔ قطبی خط D عبارتست از:

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos(\theta - \alpha)}{h} \qquad (1)$$

که با قراردادن $A = \frac{\cos\alpha}{h}$ و $B = \frac{\sin\alpha}{h}$ به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta \qquad (2)$$

چون داریم $A^2 + B^2 = \frac{1}{h^2}$ پس دست‌کم یکی از شمارهای A و B مخالف با صفر است.

به وارون معادلهٔ $\frac{1}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ را که درآن دست‌کم یکی از شمارهای A و B مخالف باصفر است، درنظر می‌گیریم. دراینصورت دست‌کم یک شمار $h \neq 0$ و یک شمار α وجود دارد به‌طوری‌که داشته باشیم:

$$A = \frac{\cos\alpha}{h} \quad , \quad B = \frac{\sin\alpha}{h}$$

بنابراین معادلهٔ داده شده معادلهٔ قطبی خطی است که ازنقطهٔ O نمی‌گذرد ، وبا توجه به آنچه که گفته شد می‌توان این خط را به‌آسانی رسم کرد .

۴.۲.۱۹ - مثال : معادلهٔ یک‌مخروطی که یک‌کانون آن درقطب باشد-
فرض‌های شمارهٔ ۳.۲.۱۹ را درمورد D , Oa , h , α درنظر می‌گیریم . چنانچه e یک شمار بزرگتر ازصفر باشد ، مخروطی‌ای را که D خط هادی (نسبت به O) ، e خروج‌از مرکز و O یک‌کانون آن است با Γ نشان می‌دهیم . می‌خواهیم یک معادلهٔ قطبی Γ را بدست آوریم .

فرض می‌کنیم M یک‌نقطه از صفحه و P , Q همان نقاط شمارهٔ ۳.۲.۱۹ باشند. داریم :

$$M\in\Gamma \Longleftrightarrow MO=ePQ$$

$\Longleftrightarrow$ یک محور Ou که از M می‌گذرد وجود دارد به‌طوریکه :

$$\overline{OM}=e\overline{QP}=e(h-\overline{OQ})$$

$\Longleftrightarrow$ یک دستگاه (θ, r) از آرایندهای قطبی نقطهٔ M وجود دارد به‌طوریکه :

$$r=e(h-r\cos(\theta-\alpha))$$

بنابراین یک معادلهٔ قطبی Γ به‌صورت زیر به دست می‌آید :

$$r(1+e\cos(\theta-\alpha))=eh$$

و یا :

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{eh}+\frac{\cos(\theta-\alpha)}{h} \qquad (1)$$

اگر قرار دهیم $A=\dfrac{\cos\alpha}{h}$, $B=\dfrac{\sin\alpha}{h}$, $C=\dfrac{1}{eh}$ معادلهٔ (۱) چنین نوشته می‌شود :

$$\frac{1}{r}=A\cos\theta+B\cos\theta+C \qquad (2)$$

که درآن داریم $A^2+B^2\neq 0$ و $C\neq 0$.

به‌وارون اگرمعادلهٔ (۲) که درآن $A^2+B^2 \neq 0$ و $C \neq 0$ است‌داده شده باشد، شمارهای $h \neq 0$ و α وجود دارند به‌طوریکه داشته باشیم :

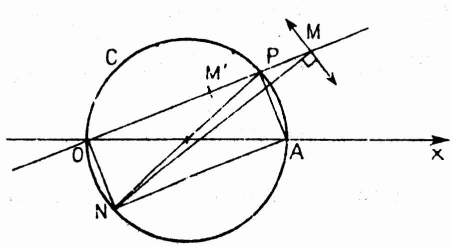
$$A=\frac{\cos\alpha}{h} \quad , \quad B=\frac{\sin\alpha}{h}$$

شمارهای h و C را می‌توان هم‌علامت گرفت زیرا ، درصورت‌لزوم ، باتعویض α به $\alpha+\pi$ همواره این عمل ممکن است . دراینصورت یک شمار $e>0$ وجود دارد به‌طوری‌که $C=\frac{1}{eh}$ باشد . پس معادلهٔ داده شده معادلهٔ یک مخروطی می‌باشد‌که e دوری ازمرکز و O یک کانون آن است . به علاوه خط هادی این مخروطی نسبت به کانون O دارای معادلهٔ $\frac{1}{r}=A\cos\theta+B\sin\theta$ است و داریم :

$$e=\left|\frac{1}{hC}\right|=\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{|C|}$$

۲.۵.۱۹ - **مثال : لیماسن پاسکال** - فرض‌می‌کنیم C یک‌دایره به قطر a و O نقطه‌ای از C و b درازای ثابتی باشد ($a>0$, $b>0$) .

خط D راکه‌از O می‌گذرد ودایرهٔ C را درنقطهٔ P برخوردمی‌کند درنظرمی‌گیریم (اگر D بردایره مماس باشد P بر O منطبق می‌شود) و نقاطی از D راکه دوری آنها تا P برابر با b است با M و M' نشان می‌دهیم . به‌این ترتیب به‌هرخط D سه نقطهٔ P , M , M' وابسته می‌شود . مجموعهٔ نقاط M و M' راکه بدین روش بدست می‌آیند با Γ می‌نماییم . Γ لیماسن پاسکال نامیده می‌شود . درشمارهٔ ۲.۵.۱۹ ، Γ راکه شکل آن بستگی به a و b دارد رسم خواهیم‌کرد .



شکل ۹۸

فرض می‌کنیم A نقطهٔ برخورد دایرهٔ C و قطری از آن باشد که از O می‌گذرد. دراینصورت P تصویر قائم A روی D خواهد بود. نقطهٔ O را قطب و خط OA را که از O به سمت A سودار شده است محور قطبی Ox می‌گیریم. بنابراین اگر محور Ou بر D منطبق و $\theta=(\widehat{Ox, Ou})$ باشد خواهیم داشت $\overline{OP}=a\cos\theta$.

اکنون می‌گوییم برای اینکه یک نقطهٔ M از صفحه به Γ متعلق باشد بایاوبسنده است که یک‌محور Ou گذرنده بر M وجود داشته باشد، به‌طوری‌که برای نقطهٔ برخورد Ou با دایرهٔ C یعنی P داشته باشیم: $\overline{OM}=\overline{OP}+b$

به گفته‌دیگر بایاوبسنده‌است که برای‌آرایندههای قطبی نقطهٔ M یعنی θ و r معادلهٔ:

$$r=a\cos\theta+b$$

برقرار باشد. بنابراین معادلهٔ بالا یک معادلهٔ لیماسن پاسکال است.

۶.۲.۱۹ - فرض‌های شمارهٔ ۵.۲.۱۹ و انعکاس به قطب O و توان ۱ را درنظر می‌گیریم. همتای $\Gamma-\{O\}$ به وسیلهٔ این انعکاس خمی است به معادلهٔ قطبی:

$$\frac{1}{r}=a\cos\theta+b$$

یعنی یک مخروطی که O یک کانون و $\frac{a}{b}$ خروج ازمرکزآن می‌باشد (شمارهٔ ۴.۲.۱۹). به ویژه اگر $a=b$ باشد این مخروطی یک سهمی است.

۷.۲.۱۹ - **تبدیل یک‌معادلهٔ کارتزین به یک معادلهٔ قطبی** - حالت کلی شمارهٔ ۱.۱.۱۹ را درنظرمی گیریم وفرض‌می‌کنیم خم Γ به معادلهٔ کارتزین $F(x,y)=0$ باشد. چنانچه M نقطه‌ای از صفحه باشد، هم‌ارزی‌های زیر را خواهیم داشت:

$M\in\Gamma \Longleftrightarrow$ برای **یک** دستگاه آرایندههای قطبی نقطهٔ M یعنی θ و r داریم:

$$F(r\cos\theta\ ,\ r\sin\theta)=0$$

$\Longleftrightarrow$ برای **هر** دستگاه θ و r ازآرایندههای قطبی نقطهٔ M داریم:

$$F(r\cos\theta\ ,\ r\sin\theta)=0$$

بنابراین معادلهٔ قطبی خم Γ عبارتست از :

$$F(r\cos\theta\ ,\ r\sin\theta)=0$$

۸.۲.۱۹ - تبدیل یک معادلهٔ قطبی به یک معادلهٔ کارتزین - معمولاً به‌دست آوردن معادلهٔ کارتزین یک‌خم ازروی‌معادلهٔ قطبی‌آن مشکل‌تر از وارون این‌مطلب است . دراینجا ما تنها به بررسی حالتی‌می‌پردازیم‌که Γ لیماسن پاسکال است. پس بنابر شمارهٔ ۵.۲.۱۹ معادلهٔ قطبی Γ چنین است :

$$r=a\cos\theta+b \tag{1}$$

برای اینکه نقطهٔ M به‌آرایندههای کارتزین x و y متعلق به $\Gamma\cup\{O\}$ باشد ، بنابرشمارهٔ ۲.۱.۱۹ بایاوبسنده است‌که :

یا $x=y=0$ باشدویاشمار $\varepsilon=\pm 1$ وجودداشته باشدبه‌طوری‌که‌داشته باشیم:

$$\varepsilon\sqrt{x^2+y^2}=a\frac{x}{\varepsilon\sqrt{x^2+y^2}}+b$$

شرط بالا هم‌ارز با شرط زیر است :

شمار $\varepsilon=\pm 1$ وجود دارد به‌طوری‌که :

$$\varepsilon^2(x^2+y^2)=ax+\varepsilon b\sqrt{x^2+y^2}$$

و یا :

$$x^2+y^2-ax=\varepsilon b\sqrt{x^2+y^2}$$

و یا :

$$(x^2+y^2-ax)^2=b^2(x^2+y^2)$$

و یا :

$$(x^2+y^2)^2-2ax(x^2+y^2)+(a^2-b^2)x^2-b^2y^2=0$$

پس معادلهٔ بالا یک معادلهٔ کارتزین $\Gamma\cup\{O\}$ است. چنانچه $O\in F$ باشداین‌معادله یک معادلهٔ کارتزین Γ نیزهست. ازنظرهندسی‌دیده می‌شود که تنها هنگامی‌نقطهٔ O متعلق به Γ است‌که $a\leqslant b$ باشد .

۳.۱۹ـ مماس بریک خم پارامتری درآرایندههای قطبی

۱.۳.۱۹ ـ فرض می‌کنیم دو تابع f و g دریک بخش باز A از $\mathbf{R}$ معین باشند و برای $t\in A$ نقطهٔ $M(t)$ دارای آرایندههای قطبی $\theta=f(t)$ و $r=g(t)$ باشد.

دراینصورت نگاشت $t\to M(t)$ یک‌خم پارامتری Γ است وآرایندههای کارتزین نقطهٔ $M(t)$ عبارتند از :

$$x=g(t)\cos f(t) \qquad , \qquad y=g(t)\sin f(t)$$

چنانچه توابع f و g پیوسته باشند خم Γ پیوسته‌است واگر f و g با مشتق پیوسته باشند Γ با مشتق پیوسته است و ...

۲.۳.۱۹ ـ مانند شمارهٔ ۱.۱.۱۹ فرض می‌کنیم بردار $\vec{u}(\theta)$ به مؤلفه‌های $\cos\theta$ و $\sin\theta$ باشد. بنابرشمارههای ۶.۱.۱۰ و ۴.۲.۱۰ میدانیم که :

$$\frac{d\vec{u}}{d\theta}=\vec{v}(\theta) \quad , \quad \frac{d^2\vec{u}}{d\theta^2}=-\vec{u}(\theta) \qquad (1)$$

که درآنجا $\vec{v}(\theta)$ برداری‌است که از $\vec{u}(\theta)$ به وسیلهٔ چرخشی به زاویهٔ $\frac{\pi}{2}$ به دست می‌آید.

۳.۳.۱۹ ـ اگر فرض های شمارهٔ ۱.۳.۱۹ برقرار و f و g مشتق‌پذیر باشند داریم:

$$\overrightarrow{OM(t)}=r\vec{u}=g(t)\vec{u}(f(t))$$

درنتیجه بنابرشمارههای ۲.۳.۱۰ , ۷.۳.۱۰ و ۲.۳.۱۹ خواهیم داشت :

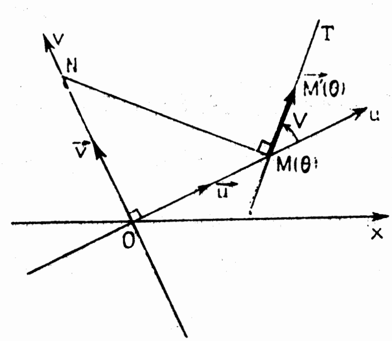
$$\overrightarrow{M'(t)}=g'(t)\vec{u}(f(t))+g(t)f'(t)\vec{v}(f(t))$$

پس :

قضیه ـ نسبت به پایهٔ یکه‌ای متعامد $(\vec{u},\vec{v})$ مؤلفه‌های بردار سرعت عبارتنداز $\frac{dr}{dt}$ و $r\frac{d\theta}{dt}$.

۱۹.۳.۴ - مقادیر $\frac{dr}{dt}$ و $r\frac{d\theta}{dt}$ را گاهی مؤلفه‌های **شعاعی و عمود برشعاعی** بردار سرعت می‌گویند.

۱۹.۳.۵ - به ویژه اگر خم Γ دارای معادلهٔ قطبی $r=g(\theta)$ باشد، که در آن g تابعی مشتق‌پذیر است، می‌توان θ راپارامتر گرفت، دراینصورت بردار $\overrightarrow{M'}(\theta)$ دارای مؤلفه‌های شعاعی و عمود برشعاعی $\frac{dr}{d\theta}$ و r می‌باشد. چنانچه $g(\theta)$ و $g'(\theta)$ هردو با یکدیگر صفر نباشند، نقطهٔ $M(\theta)$ ایستی نیست و خم Γ در نقطهٔ $M(\theta)$ دارای مماس $M(\theta)T$ است که با بردار $g'(\theta)\vec{u}+g(\theta)\vec{v}$ هم راستا می‌باشد. در نتیجه بردار $-g(\theta)\vec{u}+g'(\theta)\vec{v}=\overrightarrow{MO}+g'(\theta)\vec{v}$ قائم برخم Γ درنقطهٔ $M(\theta)$ است. **پس اگر N نقطه‌ای باشد که به وسیلهٔ برابری $\overrightarrow{ON}=g'(\theta)\vec{v}$ معین می‌گردد، بردار $\overrightarrow{MN}$ قائم برخم Γ در نقطهٔ $M(\theta)$ است.** به علاوه دیده می‌شود که اگر $g'(\theta)\neq 0$ و V زاویهٔ بین دو خط Ou و $M(\theta)T$ باشد داریم $tgV=\frac{g(\theta)}{g'(\theta)}$.



شکل ۹۹

۱۹.۳.۶ - **مثال** - بار دیگرفرض می‌کنیم خم Γ لیماسن پاسکال باشد که ازیک دایرهٔ C و یک‌نقطهٔ O از C بدست می‌آید. با توجه به فرض‌های شمارهٔ ۱۹.۲.۵ دیدیم که معادله‌های قطبی C و Γ به صورت زیر است:

$$C: \quad r_1 = a\cos\theta$$

$$\Gamma: \quad r_2 = a\cos\theta + b$$

چون داریم $\frac{dr_1}{d\theta} = \frac{dr_2}{d\theta}$ ، از شمارهٔ ۱۹ . ۳ . ۵ نتیجه می‌شود که قائم‌های بر Γ و C در نقاط M و P خط گذرنده بر O وعمود بر OM را در یک‌نقطهٔ N برخورد می‌کنند. از اینجا یک روش هندسی برای رسم مماس برلیماسن پاسکال بدست می‌آید (شکل ۹۷).

باید توجه‌داشت که خم Γ می‌تواند دارای نقاط ایستی باشد. می‌دانیم که یک نقطهٔ $M(\theta)$ از Γ ایستی است هرگاه داشته باشیم:

$$a\cos\theta + b = 0 \quad , \quad -a\sin\theta = 0$$

یعنی $\theta = k\pi$ و $(-1)^k a + b = 0$. پس اگر $a \neq b$ باشد خم Γ دارای نقطهٔ ایستی نیست. فرض می‌کنیم $a = b$ باشد. دراینصورت نقطهٔ $M(\theta)$ برای $\theta \equiv \pi (\mathrm{mod}\, 2\pi\mathbf{z})$ ایستی است . هنگامی‌که مثلاً θ با مقادیر مخالف با π به سمت π می‌گراید داریم $M(\theta) \neq M(\pi) = O$. بنابراین خط $OM(\theta)$ کاملاً معین است و به سمت Ox میل می‌کند. پس در نقطهٔ O محور Ox مماس بر Γ است (این‌مطلب هربارکه تابع $r(\theta)$ برای یک مقدار θ_0 صفر شود نیز درست است به شرط اینکه $r(\theta)$ برای مقادیر نزدیک‌به θ_0 صفرنباشد).

۱۹ . ۴ ـ کاوی یک خم پارامتری درآرایندههای قطبی

۱۹ . ۴ . ۱ ـ دو تابع حقیقی f و g راکه در یک فاصله از $\mathbf{R}$ دارای مشتقهای پیوستهٔ مرتبهٔ اول و دوم می‌باشند، درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $M(t)$ نقطهٔ به آرایندههای $\theta = f(t)$ و $r = g(t)$ و Γ خم‌پارامتری $t \to M(t)$ باشد. بنابر شمارههای ۱۹ . ۳ . ۲ و ۱۹ . ۳ . ۳ داریم:

$$\begin{aligned}
\vec{M}''(t) &= g''(t)\,\vec{u}(f(t)) + g'(t)\,\vec{v}(f(t))f'(t) + g'(t)f'(t)\,\vec{v}(f(t)) \\
&\quad + g(t)f''(t)\,\vec{v}(f(t)) - g(t)f'(t)\,\vec{u}(f(t))f'(t) \\
&= (g''(t) - g(t)f'(t)^2)\,\vec{u}(f(t)) + (2g'(t)f'(t) + g(t)f''(t))\,\vec{v}(f(t))
\end{aligned}$$

پس :

قضیه - نسبت به پایهٔ یکه‌ای متعامد ($\vec{u}$, $\vec{v}$) **مؤلفه‌های بردارشتاب عبارتند از :**

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad , \quad r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}$$

۲.۴.۱۹ - مقادیر بالا را گاهی مؤلفه های **شعاعی و عمود برشعاعی** بردارشتاب می‌گویند. اگر $r \neq 0$ باشد مؤلفهٔ عمود برشعاعی را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\frac{1}{r}\left[r^2\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)+\frac{d}{dt}(r^2)\frac{d\theta}{dt}\right]$$

و یا :

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$$

۳.۴.۱۹ - به ویژه اگر خم Γ دارای معادلهٔ قطبی $r=g(\theta)$ باشد ، که در آن تابع g دارای مشتقهای مرتبهٔ اول و دوم پیوسته است ، می‌توان θ را پارامتر گرفت ؛ در اینصورت بردار $\overrightarrow{M''}(\theta)$ دارای مؤلفه های شعاعی‌وعمود برشعاعی $r-\frac{d^2r}{d\theta^2}$ و $2\frac{dr}{d\theta}$ می‌باشد.

فرض می کنیم که برای‌یک مقدار θ داشته باشیم $g(\theta) \neq 0$ یعنی $M(\theta) \neq O$. در اینصورت‌بنابر شمارهٔ ۵.۳.۱۹ مؤلفهٔ عمود برشعاعی بردار $\overrightarrow{M'}(\theta)$ مخالف با صفراست. پس مماس بر Γ در نقطهٔ $M(\theta)$ از نقطهٔ O نمی گذرد. گوییم کاوی خم Γ (کوژی خم Γ) در نقطهٔ $M(\theta)$ به طرف نقطهٔ O است هرگاه برای θ_1 که به اندازهٔ کافی به θ نزدیک و متمایز از θ است ، نقاط $M(\theta_1)$ و O در یک طرف (در دو طرف) خط مماس بر Γ در نقطهٔ $M(\theta)$ باشند. می‌خواهیم نشان دهیم که **در حالت اول داریم :**

$$r^2+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\theta^2}>0$$

و در حالت دوم :

$$r^2+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\theta^2}<0$$

بنابر شمارهٔ ۲.۳.۱۰ درحالت اول بردارهای $\overrightarrow{M}''(\theta)$ و $\overrightarrow{M(\theta)O}$ در یک طرف بردار $\overrightarrow{M}'(\theta)$ قرار دارند ، یعنی پایه‌های $(\overrightarrow{M}'(\theta)\ ,\ \overrightarrow{M}''(\theta))$ و $(\overrightarrow{M}'(\theta)\ ,\ \overrightarrow{M(\theta)O})$ هم سو هستند (شمارهٔ ۸.۱۱.۱۰ کتاب جبر). پس بنابر ۰.۳.۱۹ و آنچه که در بالا دیده شد داریم :

$$\det_{(\vec{u},\vec{v})}(\overrightarrow{M}'(\theta)\ ,\ \overrightarrow{M(\theta)O})=\begin{vmatrix}\frac{dr}{d\theta} & r\\ -r & 0\end{vmatrix}=r^2>0$$

و :

$$\det_{(\vec{u},\vec{v})}(\overrightarrow{M}'(\theta)\ ,\ \overrightarrow{M}''(\theta))=\begin{vmatrix}\frac{dr}{d\theta} & r\\ \frac{d^2r}{d\theta^2}-r & 2\frac{dr}{d\theta}\end{vmatrix}$$

$$=r^2+2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\theta^2}$$

که از آنها حالت اول ثابت می‌شود. حالت دوم به روش مشابه ثابت می‌گردد.

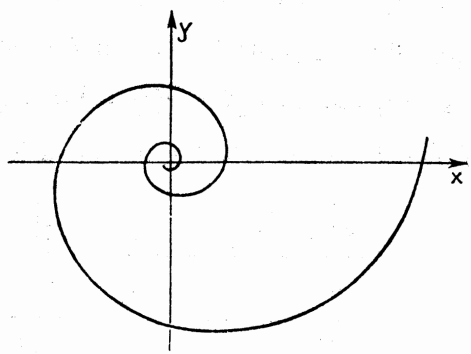
۱۹ . ۵ ـ رسم خمهایی که معادلهٔ آنها به صورت $r=f(\theta)$ است

۱۹ . ۵ . ۱ ـ **مثال** ـ فرض می‌کنیم m یک شمار حقیقی باشد. خم به معادلهٔ قطبی $r=e^{m\theta}$ را با C_m می‌نماییم. برای اینکه نقطه M به آرایندههای قطبی θ و r روی C_m باشد ، بایاوبسنده است که نقطهٔ M' به آرایندههای قطبی $-\theta$ و r روی C_{-m} باشد. اما M و M' نسبت به محور قطبی Ox قرینهٔ یکدیگرند. پس C_m و C_{-m} نسبت به Ox قرینهٔ یکدیگر می‌باشند. بنابراین کافی‌است که خم C_m را برای $m\geqslant 0$ رسم کنیم. چون‌خم C_0 عبارتست از دایرهٔ به سرکز O و شعاع یک ، پس m رابزرگتر از صفر می‌گیریم.

هنگامی‌که θ از $-\infty$ تا $+\infty$ افزایش می‌یابد $r(\theta)$ ازصفر تا $+\infty$ افزایش می‌یابد. در نقطهٔ $M=M(\theta)$ مماس MT به وسیلهٔ:

$$tg V=\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}=\frac{e^{m\theta}}{me^{m\theta}}=\frac{۱}{m}$$

معین می‌گردد که در آن V زاویهٔ بین OM و MT است. بنابراین زاویهٔ V ثابت است.



شکل ۱۰۰

شکل بالا برای $e^{m\frac{\pi}{۲}}=\frac{۳}{۲}$ بدست آمده است.

خمهای C_m را برای $m\neq ۰$ **پیچهای لگاریتمی** می‌نامند.

فرض می‌کنیم S_θ همانندی به مرکز O، به زاویهٔ θ و به نسبت $e^{m\theta}$ در صفحه باشد. دراینصورت داریم $S_\theta\circ S_{\theta'}=S_{\theta'}\circ S_\theta=S_{\theta+\theta'}$ و $(S_\theta)^{-۱}=S_{-\theta}$. پس مجموعهٔ S_θ ها یک گروه جابجائی در صفحه می‌سازند. همتای نقطهٔ A که آراینده‌های کارتزین آن $(۰ , ۱)$ است،به وسیلهٔ S_θ نقطه‌ای به‌آراینده‌های قطبی $(\theta , e^{m\theta})$ میباشد. بنابراین مجموعهٔ $S_\theta(A)$ عبارتست‌ازنمودار خم C_m. از اینجانتیجه می‌شود که خم C_m به وسیلهٔ هرهمانندی S_θ پایاست؛ به‌گفته دیگر خمی که از C_m به وسیلهٔ چرخش به دور نقطهٔ O و به زاویهٔ θ بدست می‌آید همان خمی است که از C_m به وسیلهٔ همسانی به مرکز O و به نسبت $e^{-m\theta}$ نتیجه می‌شود.

۲.۵.۱۹ - **مثال** - می‌خواهیم لیماسن پاسکال را که معادلهٔ قطبی آن $r=a\cos\theta+b$

است رسم کنیم $(a > 0 \ , \ b > 0)$. اگر $M(\theta)$ نقطه‌ای به آرایندههای قطبی $(\theta \ , \ a\cos\theta + b)$ باشد ، داریم $M(\theta + 2\pi) = M(\theta)$. پس کافی است که θ را از $-\pi$ تا $+\pi$ تغییر دهیم. به علاوه چون $r(-\theta) = r(\theta)$ است پس نقاط $M(\theta)$ و $M(-\theta)$ نسبت به محور Ox قرینهٔ یکدیگرند. بنابراین کافی است که θ را از 0 تا π تغییر دهیم و سپس خم بدست آمده را به وسیلهٔ تقارن نسبت به محور Ox تکمیل کنیم (با توجه به تعریف لیماسن پاسکال وجود این تقارن از نظر هندسی آشکار بود).

در فاصلهٔ $[0 \ , \ \pi]$ داریم $r'(\theta) = -a\sin\theta \leqslant 0$. پس تابع $r(\theta)$ در فاصلهٔ $[0 \ , \ \pi]$ از $a+b$ تا $-a+b$ کاهش می‌یابد. برای رسم یک خم درآرایندههای قطبی ، تعیین نقاطی که درآنها $r(\theta)$ ممکن است صفر شود دارای اهمیت است. دراینجا چون داریم $a+b > 0$ پس باید علامت $-a+b$ را درنظر گرفت :

θ	0	$\pi/2$	α	π
r'	0	$-$		0
r	$a+b$ ↘	b ↘	0 ↘	$-a+b$

$a>b$

θ	0	$\pi/2$	π
r'	0	$-$	0
r	$2a$ ↘	a ↘	0

$a=b$

θ	0	$\pi/2$	π
r'	0	$-$	0
r	$a+b$ ↘	b ↘	$-a+b$

$a<b$

اگر $a < b$ باشد r صفر نمی‌شود. اگر $a = b$ باشد برای $\theta = \pi$ تابع r صفر می‌شود. چنانچه $a > b$ باشد r برای مقدار α به طوریکه داشته باشیم :

$$\cos\alpha = -\frac{b}{a}$$

صفر می گردد.

در شمارهٔ ۶.۳.۱۹ دیدیم که چگونه مماس برخم را در هرنقطه از آن می‌توان رسم کرد.

بنابر شمارهٔ ۳.۴.۱۹ کاوی خم از بررسی علامت عبارت زیر بدست می‌آید :

$$\begin{aligned} r^2 + 2r'^2 - rr'' &= (a\cos\theta + b)^2 + 2a^2\sin^2\theta + a\cos\theta(a\cos\theta + b) \\ &= 2a^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + 3ab\cos\theta + b^2 \\ &= 2a^2 + b^2 + 3ab\cos\theta \end{aligned}$$

پس :

$$r^2+2r'^2-rr''>0 \iff \cos\theta > -\frac{2a^2+b^2}{3ab}$$

اما داریم :

$$-\frac{2a^2+b^2}{3ab} \geqslant -1 \iff 2a^2-3ab+b^2 \leqslant 0$$

$$\iff (b-a)(b-2a) \leqslant 0 \iff a \leqslant b \leqslant 2a$$

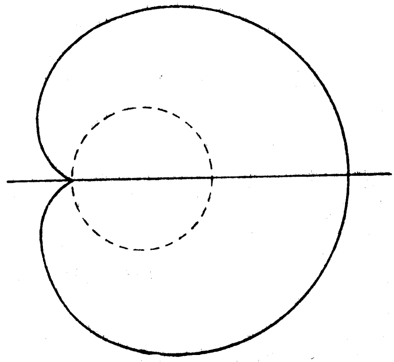
بنابراین‌اگر $b<a$ یا $b>2a$ باشد نابرابری $\cos\theta > -\frac{2a^2+b^2}{3ab}$ همیشه‌درست است ، و در نتیجه کاوی خم درهرنقطهٔ متمایز از O به طرف O می‌باشد.

اگر $a<b<2a$ باشد ، کاوی خم برای $\cos\theta = -\frac{2a^2+b^2}{3ab}$ تغییر می‌کند و ساختمان خم نشان میدهد که نقطهٔ وابسته به این مقدار یک نقطهٔ عطف است.

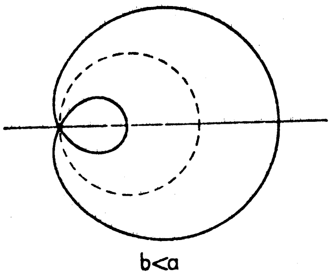
بنابر شمارهٔ ۳.۳.۱۰ اثبات دقیق این مطلب از بررسی بردار $\frac{d^3\overrightarrow{OM}}{d\theta^3}$ نتیجه می‌شود.

چنانچه $b=a$ باشد برای $\theta \neq \pi$ داریم $\cos\theta > -\frac{2a^2+b^2}{3ab} = -1$ و کاوی خم برای $0 \leqslant \theta < \pi$ به طرف نقطهٔ O است. برای $M(\pi)=O$ کاوی خم‌را در این نقطه نمی‌توان باستفاده از روش شمارهٔ ۳.٤.۱۹ معین کرد. اما به آسانی دیده می‌شود که کمان مورد بررسی از خم در بالای مماس در نقطهٔ $M(\pi)$ یعنی در بالای‌محور Ox قرار دارد.

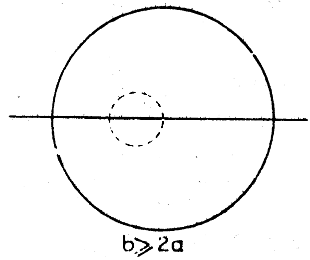
اگر $b=2a$ باشد برای $\theta \neq \pi$ داریم $\cos\theta > -\frac{2a^2+b^2}{3ab} = -1$ و کاوی خم برای $0 \leqslant \theta < \pi$ به طرف نقطهٔ O است. ساختمان خم نشان میدهد که برای $\theta=\pi$ نیز کاوی خم به طرف O می‌باشد. درستی این مطلب از بررسی بردار $\frac{d^3\overrightarrow{OM}}{d\theta^3}$ برای $\theta=\pi$ نتیجه می‌شود (و چون این بردار متناسب با بردار $\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}$ است پس باید بردار $\frac{d^4\overrightarrow{OM}}{d\theta^4}$ را برای $\theta=\pi$ بررسی کرد).



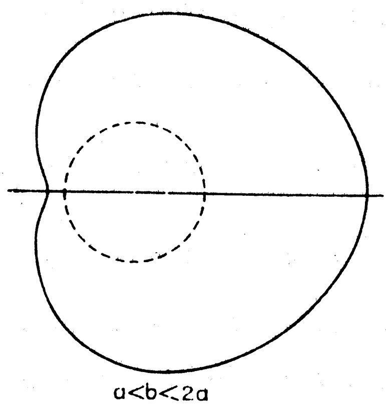
شکل ۱۰۱



شکل ۱۰۲



شکل ۱۰۳



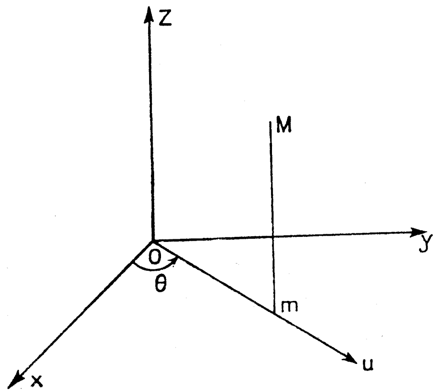
شکل ۱۰٤

۱۹ . ٦ ـ آرایندههای استوانهای

این فصل را با بیان مطالبی چند از هندسهٔ تحلیلی در فضا به پایان میرسانیم.

۱.٦.۱۹ ـ درفضای معمولی یک مبدأ O و یک پایهٔ یکهای متعامد انتخاب میکنیم. به هردستگاه (θ , r , z) از شمارهای حقیقی،نقطهٔ M به آرایندههای کارتزین (x , y , z)را ،که در آنجا $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ است ، وابسته میکنیم.

از نظر هندسی اگر در صفحهٔ xOy نقطهٔ m را بهآرایندههای قطبی θ و r بگیریم M نقطهای به ارتفاع z است که تصویر قائم آن روی صفحهٔ xOy نقطهٔ m میباشد.



شکل ۱۰۵

۲.۶.۱۹ - بنابرشمارهٔ ۲.۱.۱۹ نگاشت $M \leftarrow (z, r, \theta)$ فضای $\mathbf{R}^3$ در $\mathbf{R}^3$ سورژکتیو است ، اما این نگاشت انژکیتو نیست :

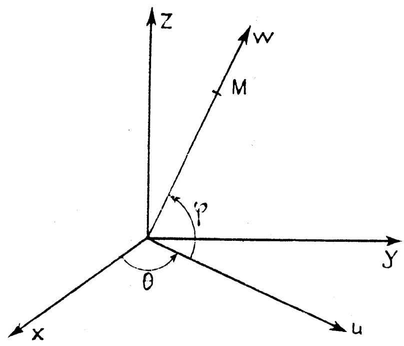
۱° - اگر M روی محور Oz باشد r صفر و θ دلخواه است و z تنها به یک‌روش معین می‌گردد.

۲° - چنانچه M روی محور Oz نباشد و (z, y, x) را آراینده‌های کارتزین نقطهٔ M بگیریم داریم :

$$r = \varepsilon\sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \cos\theta = \frac{x}{r} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} \quad , \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

۳.۶.۱۹ - هرگاه نقطهٔ M داده شده‌باشد ، هردستگاه‌شمارهای حقیقی (z, r, θ) راکه نقطهٔ M به آن وابسته می‌شود یک **دستگاه آراینده‌های استوانه‌ای** نقطهٔ M می‌نامند.

۴.۶.۱۹ - مجموعهٔ نقاط فضا که برای آنها r برابر با یک مقدار ثابت است یک استوانهٔ چرخشی به محور Oz می‌باشد. از اینجا علت نام‌گذاری «آراینده‌های استوانه‌ای» آشکار می‌گردد.



شکل ۱۰۶

۱۹ . ۷ ـ آراینده‌های کروی

۱ . ۷ . ۱۹ ـ درفضای معمولی یک مبدأ O و یک پایهٔ یکه‌ای متعامد $(\vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3)$ اختیار می‌کنیم. به هردستگاه (θ , φ , r) از شمارهای حقیقی، نقطهٔ M به‌آراینده‌های کارتزین:

$$x = \rho\cos\varphi\cos\theta \quad , \quad y = \rho\cos\varphi\sin\theta \quad , \quad z = \rho\sin\varphi$$

را وابسته می‌کنیم. ازنظر هندسی نقطهٔ M به روش زیر بدست می‌آید:

در صفحهٔ xOy محور Ou را به طوری که اندازهٔ زاویهٔ $(\vec{Ox} , \vec{Ou})$ برابر با θ باشد درنظر می‌گیریم و $\vec{u}$ را برداریکهٔ محور Ou فرض می‌کنیم. دراینصورت داریم:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \rho\cos\varphi\cos\theta\, \vec{e}_1 + \rho\cos\varphi\sin\theta\, \vec{e}_2 + \rho\sin\varphi\, \vec{e}_3 \\ &= \rho\cos\varphi(\cos\theta\, \vec{e}_1 + \sin\theta \vec{e}_2) + \rho\sin\varphi\, \vec{e}_3 \\ &= \rho\cos\varphi\, \vec{u} + \rho\sin\varphi\, \vec{e}_3\end{aligned}$$

بنابراین M نقطهٔ به آراینده‌های قطبی φ و ρ در صفحهٔ uOz است [نقطهٔ O مبدأ و $(\vec{u} , \vec{e}_3)$ پایهٔ یکه‌ای متعامد در صفحهٔ uOz گرفته شده است]. به گفتهٔ دیگر اگر

در صفحهٔ سودار uOz محور Ow را به طوری که اندازهٔ زاویهٔ $(\vec{Ou}, \vec{Ow})$ برابر با φ باشد درنظر بگیریم، داریم $M \in Ow$ و $\overline{OM} = \rho$.

۲.۷.۱۹ - بنابر شماره‌های ۱.۷.۱۹ و ۲.۱.۱۹ گسترش $M \rightarrow (\theta, \varphi, r)$ فضای $\mathbf{R}^3$ در $\mathbf{R}^3$ سورژکتیو است اما انژکتیو نیست.

۳.۷.۱۹ - چنانچه نقطهٔ M داده شده باشد، هردستگاه شمارهای حقیقی (θ, φ, r) را که نقطهٔ M به آن وابسته می‌شود یک **دستگاه آراینده‌های کروی** نقطهٔ M می‌نامند.

۴.۷.۱۹ - داریم $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$

مجموعهٔ نقاط فضا که برای آنها ρ برابر با یک مقدار ثابت است یک کرهٔ به مرکز O می‌باشد. از اینجا علت نام گذاری «آراینده‌های کروی» آشکار می گردد.

۵.۷.۱۹ - اگرنقطهٔ M روی Oz نباشد و (θ, φ, ρ) را یک دستگاه آراینده‌های کروی M بگیریم، سایر آراینده‌های کروی نقطهٔ M عبارتند از:

$$(\theta + 2k\pi, \varphi + 2k'\pi, \rho) \quad , \quad (\theta + 2k\pi, \varphi + \pi + 2k'\pi, -\rho)$$

$$(\theta + \pi + 2k\pi, -\varphi + \pi + 2k'\pi, \rho) \quad ,$$

$$(\theta + \pi + 2k\pi, -\varphi + 2k'\pi, -\rho)$$

که درآنجا داریم $k \in \mathbf{Z}$ و $k' \in \mathbf{Z}$.

تمرین‌ها

۱- فرض می‌کنیم A و B دو بخش غیر تهی و کراندار **R** باشند. ثابت کنید که بخشهای $A \bigcup B$ و $A \bigcap B$ کراندار هستند و داریم :

$$\sup(A \bigcup B) = \sup(\sup A \ , \ \sup B)$$

$$\inf(A \bigcup B) = \inf(\inf A \ , \ \inf B)$$

$$\sup(\inf A \ , \ \inf B) \leqslant \inf(A \bigcap B) \leqslant \sup(A \bigcap B) \leqslant \inf(\sup A \ , \ \sup B)$$

۲- همگرایی یا واگرایی دنباله‌های (u_n) را بررسی کنید :

$$u_n = n^3 - n \ , \ u_n = -n^2 + n \ , \ u_n = \mathrm{Log}\, v_n (v_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}, a, b > 0)$$

۳- همگرایی یا واگرائی دنبالهٔ: $u_1 = 0 \ , \ u_{2n} = \frac{u_{2n-1}}{2} \ , \ u_{2n+1} = \frac{1}{2} + u_{2n}$ را بررسی کنید. آیا از این دنباله می‌توان دنباله‌ای استخراج کرد که همگرا باشد ؟

۴- دو دنباله با جمله‌های عمومی :

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2n}$$

$$v_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n+1}$$

داده شده‌اند.

a) - نشان دهید که این دو دنباله هم‌ارزند و برای $\varepsilon = 0{,}001$ شمار N را بدست آورید به قسمی که : $n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - v_n| \leqslant \varepsilon$.

b) - ثابت کنید که هریک از دنباله‌های بالا یک دنباله کشی است.

c) ـ به طور کلی نشان دهید که اگر دو دنباله هم‌ارز باشند و یکی از آنها دنباله کشی باشد دیگری نیز یک دنباله کشی است.

۵ـ دنبالهٔ $s_1=\sqrt{۲}$, $s_۲=\sqrt{۲+\sqrt{۲}}$, ... , $s_n=\sqrt{۲+\sqrt{s_{n-1}}}$ رادرنظر میگیریم. ثابت کنید که این دنباله افزایشی است و ۲ یک کران بالای مجموعهٔ s_n ها میباشد و از آن نتیجه بگیرید که این دنباله همگرا است.

۶ـ دنبالهٔ (u_n) به روش زیر تعریف شده است

$$u_1=۱\ , \ldots , u_{n+1}=u_n+\frac{۲-u_n^۲}{۲u_n}$$

a) ـ نشان دهید که جمله های دنباله (u_n) شمارهای گویا و مثبت می‌باشند و برای $n\geqslant ۲$ داریم $u_n>\sqrt{۲}$.

b) ـ ثابت کنید که دنبالهٔ (u_n) کاهشی است و ازآن نتیجه بگیرید که u_n دارای حد است.

c) ـ ثابت کنید که حد دنبالهٔ (u_n) برابر با $\sqrt{۲}$ است.

۷ـ دو دنبالهٔ شمارهای حقیقی (u_n) و (v_n) داده شده‌اند. فرض میکنیم (u_n) افزایشی و (v_n) کاهشی باشد و برای هر n داشته باشیم $u_n<v_n$.

a) ـ ثابت کنید که دنباله‌های (u_n) و (v_n) همگرا هستند و داریم :

$$\lim u_n\leqslant\lim v_n$$

b) ـ اگر حد دنباله (u_n-v_n) صفرباشد ثابت کنید که (u_n) و (v_n) دارای یک حد می‌باشند.

c) ـ نتایج a) و b) رادرسورد دنباله های (u_n) و (v_n) که به صورت زیر تعریف شده‌اند بکار برید :

$$u_\circ=a\quad,\quad v_\circ=b\quad,\quad \circ<a<b$$

$$v_{n+1}=\frac{۱}{۲}(u_n+v_n)\quad,\quad u_{n+1}=\sqrt{u_nv_n}$$

۸ـ فرض میکنیم (u_n) یک دنبالهٔ حقیقی یامختلط همگرا باشد. ثابت کنید دنباله‌ای که جملهٔ عمومی آن $v_n=\frac{۱}{n}(u_1+u_۲+\ldots+u_n)$ باشد نیز همگرا است.

۹ـ مسئلهٔ شمارهٔ ٤ را با دنباله های زیر حل کنید:

$$u_n = ۱ + \frac{۱}{۲^۲} + \dots + \frac{۱}{n^۲}$$

$$v_n = ۱ + \frac{۱}{۲^۲} + \dots + \frac{۱}{(n+۱)^۲}$$

۱۰ـ در $\mathbf{Q}$ دنبالهٔ (u_n) به صورت زیر داده شده است:

$$u_n = \sum_{p=۰}^{n} \frac{۱}{p!\,۲^p} = ۱ + \frac{۱}{۱!\,۲} + \dots + \frac{۱}{n!\,۲^n}$$

°۱) ثابت کنید که برای $m \geqslant n \geqslant ۰$ داریم $|u_m - u_n| \leqslant \frac{۱}{(n+۱)!\,۲^n}$
و از آن نتیجه بگیرید که (u_n) یک دنبالهٔ کشی است.

°۲) نشان دهید که حد دنبالهٔ (u_n) عددی گویا نیست.

۱۱ـ نشان دهید که اگر $۰ < a < ۲$ باشد داریم

$$a < \sqrt{۲a} < ۲$$

و از آنجا ثابت کنید که دنبالهٔ

$$\sqrt{۲}\ , \quad \sqrt{۲+\sqrt{۲}}\ , \quad \sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}\ , \quad \dots$$

دارای حداست و حد آن را بیابید.

۱۲ـ ثابت کنید که

$$\frac{۱}{p+۱} < \ln(p+۱) - \ln p < \frac{۱}{p}$$

قرار می‌دهیم

$$u_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \dots + \frac{۱}{n} - \ln n$$

نشان دهید که دنبالهٔ u_n کاهشی است و $\forall n$ ، $u_n \geqslant ۰$. از آنجا نتیجه‌بگیرید که u_n دارای حداست (عدد $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ را عدد اولر می‌نامند) .

۱۳ـ حد هریک از دنباله های زیر را به دست آورید.

$$(u_n) = \left(\frac{(n+۱)! + (n+۲)!}{(n+۳)!}\right) \qquad , \qquad (u_n) = (\sqrt{۳+n} - \sqrt{n})$$

$$(u_n)=\left(\frac{1-2+3-4+\dots-2n}{\sqrt{1+n^2}}\right)\ ,\qquad (u_n)=\left(\frac{(1+\sqrt{n})(2-\sqrt{n})}{8n-3}\right)$$

۱۴- ثابت کنید که دنبالهٔ $(u_n)=\left(\frac{\sqrt{n}-1}{n}\right)$ کاهشی، کراندار و همگرا است.

۱۵- اگر $u_n=\sum_{p=0}^{n}\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{1+p+p^2}$ باشد حد دنبالهٔ (u_n) را حساب کنید.

۱۶- کدامیک از توابع زیر در نقطهٔ $x=0$ هم‌ارزند :

$$x^2\ ,\ \frac{3}{2}\sin x^2\ ,\ tg x^2\ ,\ tg^2 x\ ,\ \frac{3}{2}\sin^2 x$$

$$x\ ,\ \frac{1}{x}\sin^2 x\ ,\ \frac{1}{x}tg x\ ,\ \sin x+\frac{1}{x^3}\ ,\ \frac{1}{\sin^3 x}+tg x$$

۱۷- فرض می‌کنیم f یک تابع پیوسته در فاصلهٔ $[a\ ,\ +\infty[$ باشد. ثابت کنید برای اینکه $f(x)$ وقتی $x\to+\infty$، به سمت یک حد باپایان میل کند بایاوبسنده‌است که داشته باشیم :

$$\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists A>0\ :\ \forall\begin{cases}x'\geqslant A\\ x''\geqslant A\end{cases}\Longrightarrow|f(x')-f(x'')|\leqslant\varepsilon$$

۱۸- حد هریک از عبارتهای زیر را بدست آورید :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\ ,\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}x^n e^{-x^2}\ ,\quad \lim_{x\to0}(\cos x)^{\operatorname{Log}x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2-1}{x}e^{\frac{1}{x}}\ ,\quad \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}xe^{\frac{1}{x}}$$

۱۹- توابع u و v بترتیب به صورت زیر تعریف شده‌اند :

$$u(x)=\sqrt{۲+\frac{shx}{\sin x}} \quad , \quad v(x)=۱+\cos x$$

حد تابع $f=\dfrac{u^v-v^u}{u-u}$ را وقتی $x\to ۰$ پیدا کنید.

۲۰- حد چپ وحد راست تابع $f(x)=\dfrac{۲^{\frac{۱}{x}}-۱}{۲^{\frac{۱}{x}}+۱}$ را برای $x=۰$ بدست آورید.

۲۱- بدون استفاده از بسط و با توجه به اینکه همواره $|\sin x|<|x|<|tgx|$ است ثابت کنید وقتی $x\to ۰$ داریم :

$$\cot gx=\frac{۱}{x}+o(۱)$$

۲۲- فرض می کنیم u یک تابع حقیقی‌بامتغیر حقیقی x باشد که دریک همسایگی ۰ معین شده است.

a) - اگر وقتی که $x\to ۰$ تابع $u(x)$ به سمت صفر میل کند ثابت کنید که :

$$(۱+u)^n=۱+nu+O(u^۲)$$

b) - از a) نتیجه بگیرید که :

$$\sqrt[n]{۱+u}=۱+\frac{u}{n}+O(u^۲)$$

۲۳- تابع :

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{۲}(\pi+x) & , \quad -\pi\leqslant x\leqslant ۰\\[2ex] \dfrac{۱}{۲}(\pi-x) & , \quad ۰\leqslant x\leqslant \pi\end{cases}$$

داده شده است. نشان دهید که این تابع در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است.

۲۴ - نشان دهید که تابع :

$$f(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x<0 \\ x & , \quad 0\leqslant x\leqslant 1 \\ -x^2+4x-2 & , \quad 1<x<3 \\ 4-x & , \quad 3<x \end{cases}$$

در مجموعهٔ $\mathbf{R}$ پیوسته است.

۲۵ - فرض میکنیم تابع حقیقی f در فاصلهٔ $[a\,,\,b]$ یکنوا باشد. ثابت کنید که اگر f یک تابع سورژکتیو $[a\,,\,b]$ روی $[f(a)\,،f(b)]$ باشد f یک تابع پیوسته است. بوسیلهٔ یک مثال نشان دهید که اگر f یک نوا نباشد f پیوسته نیست.

۲۶ - تابع حقیقی f را که درفاصله $]0\,,\,+\infty[$ به روش زیر داده شده است درنظر می گیریم :

$$f(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q} \\ \dfrac{1}{p+q} & , \quad x\in\mathbf{Q}\,,\quad x=\dfrac{p}{q}\ (\text{نسبت بهم اولند } q\,,\,p) \end{cases}$$

ثابت کنید که f درهرنقطه $x_0>0$ دارای حد است. درچه حالت تابع f در نقطه x_0 پیوسته است ؟

۲۷ - بدون استفاده از قضیهٔ ۷.۹.۲ ثابت کنید که تابع حقیقی $f(x)=\sqrt{x}$ درفاصله $[0\,,\,1]$ پیوسته یکنواخت است.

۲۸ - مانند مسأله پیش بدون استفاده از قضیه ۷.۹.۲ ثابت کنید که تابع حقیقی $g(x)=x^2$ در فاصله $[0\,,\,a]$ پیوسته یکنواخت است ولی در فاصله $[0\,,\,+\infty[$ پیوسته یکنواخت نیست.

۲۹ - فرض می کنیم (f_n) یک دنبالهٔ تابعی از توابع پیوسته $\mathbf{R}$ در $\mathbf{R}$ باشد. ثابت کنید که اگر (f_n) به طور یکنواخت به سمت یک تابع f میل کند f نیز یک تابع پیوسته است. آیا اگر (f_n) تنها بهطور ساده به سمت f میل کند تابع f الزاماً پیوسته است؟

۳۰ ـ ثابت کنید که دنبالهٔ $f_n(x)$ از توابع حقیقی به طوری که:

$$f_n: x \longrightarrow f_n(x)=\frac{ne^{-x}+x^2}{n+x} \quad ,n \geqslant 1$$

در فاصلهٔ $[0\ ,\ 1]$ دارای یک حد یکنواخت $f(x)$ است که آن را به دست می‌آورید.

۳۱ـ فرض می‌کنیم $I=[0\ ,\ 1]$ و (f_n) یک دنبالهٔ توابع I در $\mathbf{R}$ باشد. چنانچه برای هر n تابع f_n افزایشی باشد و دنبالهٔ (f_n) در فاصله I به طور ساده به‌سمت تابع پیوسته f میل کند ثابت کنید که f_n به طور یکنواخت به سمت f میل میکند.

۳۲ـ تابع حقیقی f در $\mathbf{R}$ با برابری $f(x)=x\,|\,x\,|$ تعریف شده است. مشتق راست و چپ f را در یک نقطه دلخواه $x_0 \in \mathbf{R}$ حساب کنید.

۳۳ـ تابع حقیقی $f(x)=x^2\,|\,x\,|$ داده شده است. پیوستگی f و وجود مشتق های پی‌درپی آنرا در نقطه $x=0$ بررسی کنید.

۳۴ـ تابع حقیقی f که در فاصله $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$ به روش زیر داده شده مفروض است:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & ,\quad 0<x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 1 & ,\quad x=0 \end{cases}$$

a) ـ ثابت کنید که f درفاصله $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$ پیوسته و مشتق‌پذیر است ومشتق‌آنرا حساب کنید.

b) ـ نشان دهید که برای $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ داریم $\quad \frac{2x}{\pi} \leqslant \sin x \leqslant x$

۳۵ـ نشان دهید که تابع حقیقی :

$$f(x)=\begin{cases} x^3 \sin \dfrac{1}{x} & \text{برای} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{برای} \quad x=0 \end{cases}$$

در نقطه $x=0$ پیوسته و دارای مشتق است و مشتق f را در نقاطی که وجود داردحساب کنید.

۳۶- فرض می‌کنیم I یک فاصله از $\mathbf{R}$ و f یک تابع مشتق‌پذیر I در $\mathbf{R}^n$ باشد. اگر f در نقطه $x_0 \in I$ پیوسته باشد نشان دهید که نسبت $\frac{f(x_0+k)-f(x_0-h)}{h+k}$، هنگامیکه h و k با مقادیر بزرگتر از صفر به سمت صفر میل می‌کنند، به سمت $f'(x_0)$ میگراید.

۳۷- فرض می‌کنیم f یک تابع حقیقی است که درفاصله $[a, a+2h]$ دارای مشتق مرتبه دوم است. ثابت کنید که یک شمار حقیقی $0 < \theta < 1$ وجود دارد به‌قسمی که داریم:

$$f(a)-2f(a+h)+f(a+2h)=h^2f''(a+2\theta h)$$

۳۸- نشان دهید که:

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2 \sin x)=[x^2-n(n-1)]\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$
$$-2nx\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

۳۹- مشتق مرتبهٔ n ام تابع $y=\frac{e^{2x}}{x}$ را حساب کنید.

۴۰- فرض می‌کنیم f یک تابع کوژ فاصله $[a, b]$ در $\mathbf{R}$ باشد به قسمی که f در نقطه a دارای مشتق راست و در نقطه b دارای مشتق چپ باشد. ثابت کنید که یک تابع کوژ $\mathbf{R}$ در $\mathbf{R}$ مانند g وجود دارد به قسمی که f تحدید g به فاصله $[a, b]$ باشد.

۴۱- فرض می‌کنیم f یک تابع کاملاً افزایشی فاصله I در $\mathbf{R}$ باشد.

a) - نشان دهید که f انژکیتو است.

b) - چنانچه g وارون f باشد (g یک تابع f(I) در I است) ثابت کنید برای اینکه f کوژ باشد باهاوبسنده است که g کاو باشد.

۴۲- فرض می‌کنیم f یک تابع حقیقی کوژ و افزایشی روی $]0, +\infty[$ باشد. ثابت کنید که یا f یک تابع ثابت است و یا اینکه داریم:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$$

۴۳- مطلوبست محاسبه توابع اولی زیر :

$$\int \frac{\sqrt{\operatorname{ch}2x}}{\operatorname{sh}x}\,dx \quad , \quad \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x+\sin x}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\operatorname{tg}x}} \quad , \quad \int \operatorname{Arctg}\sqrt{x}\,dx$$

$$\int x^n \operatorname{Log}x\,dx \quad , \quad \int \cos(\operatorname{Log}x)\,dx$$

$$\int e^x \operatorname{cotg} e^x\,dx \quad , \quad \int (e^x-\cos x)^2\,dx$$

$$\int \frac{x^{10}\,dx}{x^2+x-2} \quad , \quad \int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^6 x+\cos^6 x} \quad , \quad \int \frac{\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^8 x+\cos^8 x}\,dx$$

۴۴- مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای زیر :

$$I_p=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin pt}{\sin t}\,dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}\,dx$$

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin x}\,dx$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{1+\cos^4 x}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

$$\int_0^a [x]^2 dx \quad , \quad \int_1^a [x]\operatorname{Log}x\,dx$$

$$\int_0^{\pi} \left[x + \frac{1}{2}\right] \sin x\,dx \quad , \quad \int_0^{2\pi} \left[x + \frac{2}{3}\right] (\cos x + e^x)\,dx$$

٤۵-فرض می‌کنیم u و v ریشه‌های معادله $x^2 - x + \frac{1}{10} = 0$ باشد.
ثابت کنید که برای هرچند جمله‌ای P که درجه‌اش از ۵ بزرگتر نباشد داریم:

$$\int_0^1 P(t)dt = \frac{1}{18}\left(5P(u) + 8P\left(\frac{1}{2}\right) + 5P(v)\right)$$

٤٦-فرض می‌کنیم f یک تابع پیوسته با مقادیر مثبت باشد که در فاصله $[a , b]$ تعریف شده است. نمودار f را در صفحه معمولی با محورهای عمود برهم با C نشان میدهیم وفرض می‌کنیم Δ قسمتی از صفحه باشد که بین C و خطوط $y=0$ و $x=a$ و $x=b$ قرارگرفته است. چنانچه n یک شمار درست باشد با رسم خطوطی هم‌راستا با محور Oy با طولهای $x_0=a$ ، x_1 ، ... ، $x_n=b$ ، Δ را به n بخش با مساحت‌های مساوی تقسیم می‌کنیم. دنباله‌ای راکه جملهٔ عمومی آن:

$$u_n = \frac{1}{n}\left(f(x_1) + \cdots + f(x_n)\right)$$

است مطالعه کنید.

٤٧-اگر P یک چند جمله‌ای و t یک مقدار ثابت مخالف باصفر باشد قرار میدهیم:

$$f(x) = \frac{1}{x} e^{-\frac{t}{x}} \int_0^t e^{\frac{u}{x}} P(u)du$$

آیا تابع $f(x)$ وقتی $x \to 0$ دارای حد است؟

۴۸- اگر f یک تابع حقیقی پیوسته و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$ باشد ثابت کنید که

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=a$$

۴۹- اگر $f(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{1+\sin^2 t}$ باشد $f'(x)$ را حساب کنید.

۵۰- عبارت‌های زیر را حساب کنید:

$$\lim_{x\to 0}\int_x^1\frac{\ln t}{(1+t)^2}dt\ ,\qquad \lim_{x\to\infty}\int_1^x\frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\int_1^x \operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{t}dt\ ,\qquad \lim_{x\to\infty}\int_0^x t^2e^{-t}dt$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\dots+\sqrt[n]{e^n}}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+n}+\frac{1}{2+n}+\dots+\frac{1}{n+n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(1+n)^2}+\dots+\frac{n}{(n+n)^2}\right)$$

۵۱- اگر تابع f درفاصلهٔ $[1,\infty[$ افزایشی باشد ثابت کنید:

$$f(1)+f(2)+\dots+f(n-1)\leqslant\int_1^n f(x)dx\leqslant f(2)+f(3)+\dots+f(n)$$

و با فرض اینکه f تابع ln باشد نشان دهید که:

$$\frac{n^n}{e^{n-1}}<n!<\frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$$

و از آن نتیجه بگیرید که

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$$

۵۲- تابع $f(x)=x^2$ را در نظر می‌گیریم و برای یک تقسیم جزئی $(x_0, \dots, x_n)$ از فاصلهٔ $[0, a]$ قرار می‌دهیم:

$$m_i=\operatorname{Inf} f(x)\ ,\qquad M_i=\operatorname{Sup} f(x)\ ,\qquad x\in[x_i\ ,\ x_{i+1}]$$

در این صورت دو تابع پله‌ای وابسته به $f(x)$ تعریف می‌شود. به کمک این دو تابع پله‌ای و با انتخاب تقسیم‌های جزئی مناسب $\int_0^a f(x)\,dx$ را حساب کنید.

۵۳- مسئله بالا را با تابع $f(x)=x^3$ حل کنید.

۵۴- بدون محاسبهٔ تابع اولی، ثابت کنید که:

$$\int_1^a \frac{dx}{x}+\int_1^b \frac{dx}{x}=\int_1^{ab} \frac{dx}{x}$$

۵۵- اندازهٔ مساحتِ واقع بین نمودار توابع $f(x)=x^2$ ، $g(x)=1-x^2$ و $h(x)=2$ را به دست آورید.

۵۶- در صفحهٔ محورهای متعامد xoy دو خط $y=\pm 1$ و فاصلهٔ $[0, 1]$ را اختیار می‌کنیم. فاصلهٔ $[0, 1]$ را به فاصله‌های جزئی $\left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]$ ، $n=0, 1, \ldots$ تقسیم می‌کنیم و مثلث‌های دو پهلو برابری را در نظر می‌گیریم که به‌طور متناوب رأس‌های آن‌ها روی دو خط $y=\pm 1$ و قاعدهٔ آن‌ها یکی از تقسیم‌های جزئی از محور x ها باشد (رأس نخستین مثلث از سمت راست را روی خط $y=1$ می‌گیریم). تابعی را که با چنین نموداری مشخص می‌شود f می‌نامیم. $\int_0^1 f(x)dx$ را حساب کنید و اندازهٔ مجموع مساحت‌های مثلث‌ها را به دست آورید.

۵۷- اگر تابع f در فاصلهٔ $[a, b]$ پیوسته و تابع نا منفی g انتگرال پذیر باشد، ثابت کنید که:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(c)\int_a^b g(x)dx\ , \qquad c\in[a,\ b]$$

مطلب بالا را برای $g(x)=x$ و فاصلهٔ $[-1, 1]$ بررسی کنید، و علت نادرست بودن آن را توضیح دهید.

۵۸- فرض می‌کنیم f یک تابع پیوسته روی $[a, b]$ و با مقادیر بزرگتر از صفر باشد. ثابت کنید دنباله‌ای که جملهٔ عمومی آن $v_n=\left(\int_a^b f^n(x)\right)^{\frac{1}{n}}$ است دارای حد می‌باشد و حد آن برابر با کنارهٔ بالای f روی $[a, b]$ است.

۵۹- فرض می‌کنیم n یک‌شمار درست‌بزرگتر ازصفر و تابع حقیقی f_n به صورت زیر تعریف شده باشد :

$$f_n(x)=\frac{۱}{n\mathrm{Log}\left(۱-\frac{۱}{nx}\right)} \quad ، \quad x<۰ \quad \text{یا} \quad x>\frac{۱}{n}$$

$$f_n(x)=۰ \quad ، \quad ۰\leqslant x\leqslant \frac{۱}{n}$$

a) - ثابت کنید که برای هر n تابع f_n پیوسته است.

b) - ثابت کنید که وقتی $n \to +\infty$ دنبالهٔ تابعی f_n به سمت یک تابع f که معین خواهد شد میل می‌کند.

c) - حد توابع $f_n(x)-f(x)$ و $f'_n(x)-f(x)$ را وقتی $|x| \to +\infty$ حساب کنید.

۶۰- هریک ازعبارتهای زیر را حساب کنید :

$$\lim_{x\to ۰} |\mathrm{Log}(۱+\sin x)|^{\sin x}$$

$$\lim_{x\to ۰} (\cos x)^{\mathrm{Log}|x|}$$

۶۱- بخش اصلی بینهایت کوچک :

$$tg(۲\,\mathrm{Arc}tg x)-\mathrm{Arc}tg(tg۲x)$$

را وقتی $x \to ۰$ حساب کنید.

۶۲- تابع $f(x)=\mathrm{Log}\frac{۱-x}{۱+x}$ داده شده است نشان دهید که :

$$f(y)+f(z)=f\left(\frac{y+z}{۱+yz}\right)$$

۶۳- نشان دهید که اگر $۰<x<۱$ باشد داریم :

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} < \frac{L(1+x)}{\mathrm{Arc}\sin x} < 1$$

۶۴- ثابت کنید که اگر $0 < a < b$ باشد داریم :

$$\frac{a(b-a)}{1+b^2} < \frac{1}{2}\mathrm{Log}\,\frac{b^2(1+a^2)}{a^2(1+b^2)} < \frac{b(b-a)}{1+a^2}$$

۶۵- اگر $a < b$ باشد بااستفاده از قضیهٔ نموهای با پایان ثابت کنید که :

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \mathrm{arctg}\,b - \mathrm{arctg}\,a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

و از آنجا نتیجه بگیرید که :

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \mathrm{Arctg}\,\frac{4}{3} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$$

۶۶- اگر $0 < a < b$ باشد نشان دهید که داریم :

$$1 - \frac{a}{b} < \mathrm{Log}\,\frac{b}{a} < \frac{b}{a} - 1$$

و از آنجا نتیجه بگیرید که :

$$\frac{1}{6} < \mathrm{Log}(1{,}2) < \frac{1}{5}$$

۶۷- باستفاده از فرمول نموهای باپایان نشان دهید که :

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{15} < \mathrm{Arc}\sin\frac{6}{10} < \frac{\pi}{6} + \frac{1}{8}$$

۶۸- باستفاده از فرمول تیلر ثابت کنید که :

$$\mathrm{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5(1+\xi)^5}$$

که در آن $0 < \xi < x$ است.

۶۹- a) ـ دیفرانسیل هریک از توابع زیر را پیدا کنید :

$$(x+y)^2(2x+y)^3=1$$

$$\text{Log}\sqrt{x^2+y^2}=\text{arctg}\,\frac{y}{x} \quad , \quad y=e^{-\frac{x}{y}}$$

b) ـ دیفرانسیل مرتبهٔ n ام هریک از توابع زیر را حساب کنید :

$$y=e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)$$

$$u=3\sin(2x+5)$$

۷۰- مشتق اول و مشتق دوم تابع ضمنی $xy-\text{Log}y=1$ را حساب کنید.

۷۱- چنانچه تابع $z=f(x\ ,\ y)$ دارای مشتق های نسبی پیوستهٔ مرتبهٔ اول و دوم و توابع $\varphi(z)$ و $\Psi(z)$ دارای مشتقهای پیوستهٔ مرتبهٔ اول و دوم باشند و قرار دهیم :

$$y=x\varphi(z)+\Psi(z)$$

نشان دهید که برابری زیر برقرار است :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$$

۷۲- فرض میکنیم توابع $x=f(u\ ,\ v)$ و $y=g(u\ ,\ v)$ دارای مشتقهای نسبی پیوسته‌اند. نشان دهید که داریم $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial u}$ که در آن :

$$J=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

است.

۷۳- چنانچه تابع $f\left(\frac{x}{y}\ ,\ \frac{z}{y}\right)=0$ دارای مشتقهای پیوسته باشد نشان دهید که داریم :

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$$

۷٤- چنانچه تابع $f(x+y-z\ ,\ x^2+y^2)=0$ دارای مشتقهای پیوسته باشد نشان دهید که داریم :

$$x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=x-y$$

۷۵- اگر $u=\mathrm{Log}(e^x+e^y+e^z)$ باشد ثابت کنید که :

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=2e^{x+y+z-3u}$$

۷٦- اگر $u=\frac{x+y}{1-xy}$ و $v=\mathrm{Arctg}x+\mathrm{Arctg}y$ باشد عبارت :

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

را حساب کنید و نشان دهید که داریم :

$$u=tg\,v$$

۷۷- معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول زیر را حل کنید :

$$xy'+y=\frac{1}{x^2y^2}$$

$$y'(2x^2y+x)=3y-2xy^2$$

$$(xy'-2y)^2=x^2(x^4-y^2)$$

$$xy'-y=y^2-x^2$$

$$(x+y)=\left(\frac{y'-1}{y'+1}\right)^2$$

$$y'=tg(x+y)$$

$$(xy^2+1)y'=y^3$$

۷۸- معادلات دیفرانسیل مرتبه اول زیر را حل کنید :

$$y' - \frac{1+3x^2}{x(1+x^2)}y = x\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$y'\sin^2 x - y\,tg x + tg x = 0$$

$$(1-x^2)y' + xy = \frac{1}{x} + x\operatorname{Log} x - x$$

$$(1-x^2)y' + xy = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$2xy' + y = \frac{1}{1-x}$$

۷۹ ـ جواب u از معادله دیفرانسیل $xy+y'=0$ را به قسمی که $u(0)=1$ باشد حساب کنید و ثابت کنید که برای هرتابع مشتق پذیر z داریم :

$$z'u = xzu + (zu)'$$

۸۰ ـ فرض میکنیم $\mathscr{B}$ فضای برداری توابع کراندار یک مجموعهٔ E در $\mathbf{R}$ باشد. برای هر $f \in \mathscr{B}$ قرار میدهیم $\|f\| = \sup\limits_{t\in E} |f(t)|$. ثابت کنید $\|\ \|$ یک نُرم روی $\mathscr{B}$ میباشد و دوری‌ای را که بوسیلهٔ این نُرم معین می‌شود مشخص کنید.

۸۱ ـ فرض میکنیم E فضای برداری توابع پیوسته I در $\mathbf{R}$ باشد که درآن I فاصلهٔ بستهٔ $[a , b]$ است $(a < b)$. برای هر $f \in E$ قرار میدهیم :

$$\|f\| = \int_a^b |f(t)|\,dt$$

نشان دهید $\|\ \|$ یک نُرم روی E است و دوری بدست‌آمده از آن را بنویسید.

۸۲ ـ فرض میکنیم E یک مجموعهٔ دلخواه باشد. قرار میدهیم :

$$\begin{cases} d(x, y)=1 & , \quad (x \neq y) \\ d(x, x)=0 & \end{cases}$$

ثابت کنید d یک دوری روی $\mathbf{R}$ است و مجموعه‌های باز و بسته E را برای این دوری مشخص کنید.

۸۳- a) ـ فرض میکنیم E یک فضای متری با دوری d و A یک بخش E باشد. نشان دهید که تحدید d به $A \times A$ یک دوری روی $\mathbf{A}$ است.

b) ـ فضای $\mathbf{R}^2$ را با دوری d_3 (شمارهٔ ۶.۲.۹ را به بینید) درنظر میگیریم وفرض می‌کنیم E یک بخش از $\mathbf{R}^2$ باشد که به روش زیر معین شده است:

$$E=\left\{(x, y)\in\mathbf{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqslant x \leqslant 1 \;,\; y=0\right\} \cup \left\{(x, y)\in\mathbf{R}^2 \,\middle|\, x=0 \;,\; 0 \leqslant y \leqslant 1\right\}$$

در فضای متری E (که تحدید d_3 دوری‌آن است) گروه‌های باز و بسته را مشخص کنید.

۸۴- فرض میکنیم $\mathbf{R}[X]$ مجموعهٔ چند جمله‌ای‌های یک متغیری با ضرایب حقیقی باشد. برای هر $P\in\mathbf{R}[X]$ درجه جمله‌ای از P را که دارای کمترین درجه است با $v(P)$ نشان داده وقرار میدهیم:

$$d(P, Q)=e^{-v(P-Q)}$$

ثابت کنید d روی $\mathbf{R}[X]$ یک دوری معین میکند. تحدید این دوری‌را به $\mathbf{R}$ چگونه میتوان تعبیر کرد؟

۸۵- فرض میکنیم E یک‌فضای متری‌بادوری d و F یک مجموعهٔ‌دلخواه و f یک نگاشت سورژکتیو E در F باشد.

برای هردو نقطهٔ ξ و η از F قرار میدهیم $\delta(\xi, \eta)=\inf\limits_{f(x)=\xi \,,\, f(y)=\eta} d(x, y)$

ثابت کنید که δ در شرط‌های زیر صدق میکند:

$$\delta(\xi , \xi)=0 \quad \text{و} \quad \delta(\xi , \eta)=\delta(\eta , \xi)$$

با بیان یک مثال نشان دهید که نابرابری سه‌بر ممکن است برقرار نباشد.

۸۶-فضای متری E با دوری d داده شده است. فرض میکنیم دنبالهٔ نقاط a_n از E به سمت حد a میل می‌کند. ثابت کنید مجموعهٔ $A=\{a_n \mid n\in \mathbf{N}\}\cup\{a\}$ یک مجموعهٔ بستهٔ E است.

۸۷-فرض میکنیم E یک فضای متری و d دوری آن باشد. اگر A یک بخش دلخواه E باشد قرار میدهیم:

$$d(x , A)= \inf_{y\in A} d(x , y)$$

ثابت کنید که نگاشت $x \to d(x , A)$ یک تابع پیوسته E در $\mathbf{R}$ است.

۸۸-فرض میکنیم E و E' دو فضای متری باشند که دوری‌های آنها بترتیب d و d' است. اگر f یک نگاشت E در E' باشد گوییم f یک نگاشت لیبشیتزی با نسبت k است هرگاه یک شمار $k > 0$ وجود داشته باشد به طوریکه داشته باشیم:

$$\forall x , y\in E \quad , \quad d'(f(x) , f(y)) \leqslant kd(x , y)$$

ثابت کنید که هر نگاشت لیبشیتزی در تمام نقاط پیوسته است.

۸۹-فرض میکنیم E یک فضای متری با دوری d و f و g دو نگاشت پیوستهٔ E در $\mathbf{R}$ باشند. مجموعه‌های زیر را درنظر می گیریم:

$$A=\{x\in E \mid f(x)=g(x)\} \quad , \quad B=\{x\in E \mid f(x) \geqslant g(x)\}$$

$$C=\{x\in E \mid f(x) > g(x)\} \quad , \quad B'=\{x\in E \mid f(x) \leqslant g(x)\}$$

$$C'=\{x\in E \mid f(x) < g(x)\} \quad , \quad D=\{x , f(x) \neq g(x)\}$$

ثابت کنید که A و B و B' مجموعه‌های بسته و C و D و C' مجموعه‌های باز می‌باشند.

۹۰-فرض میکنیم E یک فضای متری با دوری d باشد به قسمی که برای هرسه نقطه x و y و z از آن داریم :

$$d(x, z) \leqslant \sup(d(x, y), d(y, z))$$

ثابت کنید که شرط یاپاوبسنده برای اینکه دنبالهٔ $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ از نقاط E یک دنبالهٔ کشی باشد این است که داشته باشیم :

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$$

۹۱-فضای متری X با دوری d داده شده است. بخش A از X را یک بخش کراندارگوییم هرگاه یکشمار M وجود داشته باشد به قسمی که برای هر x و y متعلق به A داشته باشیم $d(x, y) \leqslant M$. ثابت کنید که اگر (a_n) یک دنبالهٔ کشی از نقاط X باشد مجموعهٔ $\left\{a_n \mid n\in\mathbf{N}\right\}$ یک بخش کراندار X است.

۹۲-خم Γ به معادله $y=\sqrt{1+2x\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-2x\sqrt{1-x^2}}$ را رسم کنید.

۹۳-خمهای پارامتری زیر را رسم کنید :

a) - $y=a\dfrac{t(t^2+1)}{t^4+3t^2+1}$, $x=a\dfrac{(t^2+1)^2}{t^4+3t^2+1}$, $(a>0)$

b) - $y=(t-2)e^{\frac{1}{t}}$, $x=(t+2)e^{\frac{1}{t}}$

c) - $y=\sin\dfrac{t}{3}$, $x=\sin\dfrac{t}{2}$

d) - $y=2t-\dfrac{1}{t^2}$, $x=2t+t^2$

۹۴-خمهایی را که معادلهٔ قطبی آنها داده شده است رسم کنید :

a) - $r=\cos\dfrac{2\theta}{5}$

b) -
$$r=\frac{a\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$$

c) -
$$r=\frac{a}{\sin\theta-\sin 2\theta}$$

۹۵- نشان دهید که خم به معادلهٔ قطبی $r=\dfrac{a}{\theta\cos\theta-\sin\theta}$ دارای بینهایت مجانب است که تمام آنها بریک خم جبری مماسند.

۹۶- معادلهٔ مخروطی را بنویسید که رأس آن $S(0\,,\,0\,,\,2a)$ و بر کرهٔ به معادلهٔ $x^2+y^2+z^2-2a(x+y+z)+2a^2=0$ محیط باشد. برشگاه این مخروط را با صفحهٔ xOy پیدا کنید.

۹۷- نشان دهید که هر معادلهٔ $P(x\,,\,y\,,\,z)=0$ که در آن P یک چند جمله‌ای درجهٔ دوم متقارن نسبت به x و y و z است یک رویهٔ درجهٔ دوم چرخشی را معین میکند. یک خم نیم روز آنرا پیدا کنید.

۹۸- معادلهٔ مخروط چرخشی‌ای را پیدا کنید که محور آن به معادله‌های $x=0$ و $y=z$ و Oz یکی از سولدهای آن باشد. اگر خط D به معادله‌های $x=0$ و $y=a$ باشد عمود مشترك خط D و سولد متغیر OG از مخروط را در نظر می گیریم. چنانچه نقطهٔ A پای عمود مشترك روی OG و نقطهٔ B پای عمود مشترك روی D باشد و A' و B' را تصویرهای متعامد A و B روی xOy فرض کنیم و قرار دهیم $(\widehat{Ox\,,\,OA'})=t$ ، آرایندههای A را نسبت به t پیدا کنید و مکان این نقطه رابدست آورید. معادلهٔ رویهٔ پدید آمده به وسیلهٔ خط AB را بنویسید.

۹۹- پارامتر k راطوری پیدا کنید که رویهٔ Σ به معادلهٔ $x^2-2kyz=0$ چرخشی باشد.

۱۰۰- معادلهٔ استوانهٔ چرخشی‌ای راپیدا کنید که برمبدأ O میگذرد ومحور چرخش آن خط D به معادله‌های $x-2y-z-3=0\ ,\ 2x-z-2=0$ است.

۱۰۱- ثابت کنید که رویه های زیر چرخشی هستند :

$$\Sigma_1 : \ (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=a^2$$

$$\Sigma_2 : \ (x^2-yz)^2+(y^2-zx)^2+(z^2-xy)^2=a^2$$

$$\Sigma_3 : \ \frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}+\frac{1}{x-y}=0$$

۱۰۲- رویه‌های Σ و S به معادله های زیر داده شده‌اند :

$$\Sigma : \ x=a\frac{\cos u}{\operatorname{sh} v} \ , \ y=a\frac{\sin u}{\operatorname{sh} v} \ , \ z=a\frac{\operatorname{ch} v}{\operatorname{sh} v}$$

$$S : \ x^2+y^2+z^2-a^2=0$$

a) - خم Γ را روی Σ تعیین کنید به‌طوریکه هرمماس بر Γ مماسی بر S نیز باشد.

b) - ثابت کنید که همهٔ صفحه های بوسان هریک از خم‌های بدست آمده در قسمت (a) بررویهٔ S مماسند. آیا این مطلب کلی است؟

۱۰۳- در فضای اقلیدسی وابسته به یک دستگاه یکه‌ای متعامد $B=(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ رویهٔ Σ به معادلهٔ $P(x, y, z)=1$ را که در آن :

$$P(x, y, z)=\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} \qquad (1)$$

است در نظر میگیریم.

a) - نشان دهید که Σ یک رویهٔ چرخشی است . یکی از خم‌های نیم روز آنرا بدست آورید.

b) - به نقاط $M(x, y, z)$ و $Q(u, v, w)$ از Σ نقطهٔ $M'(x', y', z')$ را وابسته میکنیم به طوریکه :

$$x'=ux+vy+wz$$

$$y'=vx+uy+wz$$

$$z' = wx + vy + uz$$

ثابت کنید که نقطهٔ M' متعلق به Σ است. نقطهٔ M' را که به صورت بالا معین گردید حاصلضرب M در Q می‌نامیم. به این ترتیب یک قانون ترکیب در روی Σ تعریف می‌شود که آنرا با $\circ$ نشان میدهیم نشان دهید که این قانون یک قانون ترکیب گروه جابجایی است.

c) ـ اگر $B' = (O , \vec{I} , \vec{J} , \vec{K})$ یک دستگاه یکه‌ای متعامد دیگرباشدبه‌طوریکه $\vec{K}$ یک بردار یکهٔ محور چرخش رویهٔ Σ و بردارهای $\vec{i}$, $\vec{I}$, $\vec{K}$ هم صفحه باشند، حاصلضربی را که در قسمت b) تعریف شد درآرایندهای استوانه‌ای نسبت‌به B' بنویسید درصورتیکه (θ , r , τ) و (φ , s , t) و (θ' , r' , τ') به ترتیب آرایندهای استوانه‌ای M و Q و M' باشند.

d) ـ خم Γ از Σ را به وسیلهٔ تصویر متعامد آن روی XOY معین کنید به‌طوریکه حاصلضرب هردو نقطهٔ دلخواه از Γ نقطه‌ای از Γ باشد.

۱۰۴ـ دو دایرهٔ c و c' که شعاع هردو $a\sqrt{2}$ وسرکزآنهابه‌ترتیب $I(\circ , a , \circ)$ و $I'(\circ , -a , \circ)$ است داده شده‌اند. دایرهٔ c در صفحهٔ $z=\circ$ و c' در صفحهٔ $x=\circ$ واقع است. دونقطهٔ M و M' به ترتیب دو دایرهٔ c و c' را می‌پیمایند. قرارمیدهیم:

$$(\widehat{Ox , IM}) = t \quad \text{و} \quad (\widehat{Oy , IM'}) = t'$$

a) ـ هنگامی که نقاط M و M' به‌دلخواه تغییر میکنند معادله های پارامتری رویهٔ Σ مکان نقطهٔ وسط MM' را بدست آورید و سپس معادلهٔ کارتزین این رویه را پیداکنید.

b) ـ ثابت کنید برشگاه Σ به‌وسیلهٔ صفحهٔ هم‌راستا با xOy از دو دایرهٔ برابرتشکیل می‌شود. دروجود این دودایره بحث کنید و نتیجه را از نظر هندسی بیان نمایید.

c) ـ اگر دوپارامتر t و t' به وسیلهٔ برابری $t' - t = \lambda$ به یکدیگر بستگی داشته باشند معادله های پارامتری خم E_λ مکان نقطهٔ P را بدست آورید. این مکان چه نوع خمی است؟ نشان دهید که خمهای E_λ هاسنی هستند و صفحه های آنها بریک خط ثابت میگذرند.

۱۰۵ــفرض میکنیم بردارهای یکهٔ دستگاه متعامد xOy به ترتیب $\vec{i}$, $\vec{j}$ باشند.

(I) ـ نقطهٔ M را به طوریکه داشته باشیم :

$$\overrightarrow{OM}=\frac{a}{4}(3+2u-u^2)\vec{i}+\frac{b}{4}(3-2u-u^2)\vec{j}$$

درنظر میگیریم (a و b ثابت و u متغیراست). خم Γ مکان M را رسم کنید و نقطهٔ S از Γ را بطوریکه مماس بر Γ در آن نقطه عمود بر $a\vec{i}+b\vec{j}$ باشد معین کنید. اگر α مقدار پارامتر u برای نقطهٔ S باشد بردار $\overrightarrow{SM}$ را به صورت تابعی از $t=u-\alpha$ و $\vec{i_1}=a\vec{i}+b\vec{j}$ و $\vec{j_1}=-b\vec{i}+a\vec{j}$ برای یک نقطهٔ دلخواه M از Γ پیدا کنید. از عبارت $\overrightarrow{SM}$ که بدین روش بدست می‌آید نتیجه بگیرید که Γ یک سهمی‌است. آراینده‌های رأس و معادلهٔ محور آنرا بدست آورید.

(II) ـ محور Oz عمود برصفحه xOy را که بردار یکهٔ آن $\vec{k}$ می‌باشد اختیار می‌نماییم و فرض می‌کنیم :

$$\overrightarrow{OP}(u\ ,\ v)=cv(3+2u-u^2)\vec{i}+cv(3-2u-u^2)\vec{j}+4cv\vec{k}\ ,\ (c>0)$$

هنگامیکه u و v تغییر می‌کنند نقطهٔ P یک رویهٔ Σ رسم میکند.

a) ـ برای یک مقدار ثابت v_1 از v خم Γ_{v_1} مکان نقطهٔ P_1 انجام بردار $\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OP}(u\ ,\ v_1)$ را معین کنید. برشگاه رویه Σ به وسیلهٔ صفحه $z=z_1$ چه نوع خمی است ؟

b) ـ همچنین خم C_{u_1} مکان نقطهٔ Q_1 انجام بردار $\overrightarrow{OQ_1}=\overrightarrow{OP}(u_1\ ,\ v)$ را مشخص کنید. برشگاه Σ به وسیلهٔ صفحه $y=mx$ چه نوع خمی است؟

c) ـ خمهای Γ_{v_1} و Γ_{v_2} برای $v_1\neq v_2$ در صفحه هایی که محور Oz را به ترتیب در نقاط H_1 و H_2 برخورد می‌کنند قرار دارند. نشان دهید که خم Γ_{v_2} همسان خم Γ_{v_1} در یک همسانی $H(v_1\ ,\ v_2)$ می‌باشد. مرکز و نسبت این همسانی را پیدا

کنید. اگر $J(v_1, v_2)$ مرکز این همسانی باشد حد J را هنگامیکه v_2 به سمت v_1 می‌گراید بدست آورید (این حد را J_1 می‌نامیم). از آنجا نتیجه بگیرید که صفحه‌های مماس بر Σ در نقاط مختلف یک خم Γ_{v_1} از نقطه ثابت J_1 می‌گذرند. مخروط‌های محیطی Σ را که رأس آنها روی Oz است معین کنید.

۱۰۶– رویهٔ Σ به نمایش پارامتری:

$$x=a\cos u\sin v\ ,\ y=a\sin u\sin v\ ,z=a\left(\cos v+\mathrm{Log}\left(tg\,\frac{v}{۲}\right)+f(u)\right)$$

که در آن f یک نگاشت $\mathbf{R}$ در $\mathbf{R}$ است داده شده است. فرض می‌کنیم خم Γ برشگاه Σ با یک صفحهٔ ثابت π گذرنده بر Oz باشد. ثابت کنید هنگامیکه M خم Γ را می‌پیماید زاویهٔ بین قائم‌های بر π و بر Σ در نقطهٔ M دارای مقدار ثابتی است.

۱۰۷– فرض می‌کنیم S مجموعه‌ای در $\mathbf{R}$ باشد و $x=\sup(S)$. نشان دهید که دنباله‌ای مانند x_1، x_2، ... وجود دارد به قسمی که $x_k \longrightarrow x$، و $x_k\in S$.

۱۰۸– برای شمارهای x_1، ...، x_n، y_1، ...، y_n، و z_1، ...، z_n نشان دهید که

$$\left(\sum_{i=۱}^{n} x_iy_iz_i\right)^{۴} \le \left(\sum_{i=۱}^{n} x_i^{۴}\right)\left(\sum_{i=۱}^{n} y_i^{۲}\right)^{۲}\left(\sum_{i=۱}^{n} z_i^{۴}\right)$$

۱۰۹– فرض می‌کنیم A و B مجموعه‌هایی در $\mathbf{R}$ باشند که از بالا کراندار می‌باشند. فرض می‌کنیم $a=\sup(A)$ ، $b=\sup(B)$ و فرض می‌کنیم مجموعه C به وسیلهٔ $C=\{xy\,|\,x\in A, y\in B\}$ تعریف شده باشد. نشان دهید که به‌طور کلی $ab\neq\sup(C)$. اگر $a<۰$ و $b<۰$، آنگاه ثابت کنید که $ab=\inf(C)$. اگر $a>۰$ و $b>۰$، و A و B تنها دارای عنصرهای مثبت باشند، آنگاه ثابت کنید که $ab=\sup(C)$.

۱۱۰– فرض می‌کنیم x_n دنباله‌ای در $\mathbf{R}$ باشد به قسمی‌که $d(x_n,x_{n+1})\le d(x_{x-1},x_n)/۲$. در این صورت نشان دهید که x_n یک دنباله کشی است.

۱۱۱– فرض می‌کنیم $S\subset\mathbf{R}$ ناتهی و از پایین کراندار باشد. آنگاه نشان دهید که

$\inf(S)=\sup\{x\in\mathbf{R}\ |$ یک کران پایین S است $x\}$

۱۱۲- فرض می‌کنیم $a_n \geq ۰$، و وقتی که $n\to\infty$، $a_n \to ۰$. به ازای هر $\varepsilon > ۰$ مفروض، نشان دهید که زیر دنباله‌ای مانند b_n از a_n وجود دارد به قسمی که $\sum_{n=۱}^{\infty} b_n < \varepsilon$.

۱۱۳- فرض می‌کنیم s_n دنباله‌ای کراندار از شمارهای حقیقی باشد. فرض می‌کنیم $۲s_n \leq s_{n-۱}+s_{n+۱}$. نشان دهید که $\lim\limits_{n\to\infty} (s_{n+۱}-s_n)=۰$.

۱۱۴- فرض می‌کنیم $S=\{(x,y)\in \mathbf{R}^۲ \mid xy>۱\}$ و $B=\{d((x,y),(o,o)) \mid (x,y)\in S\}$. مطلوب است تعیین $\inf (B)$.

۱۱۵- دنباله شمارهای a_n را به وسیلهٔ

$$a_o = ۱ , a_۱ = ۱ + \frac{۱}{۱+a_o} , \dots , a_n = ۱ + \frac{۱}{۱+a_{n-۱}}$$

تعریف می‌کنیم. نشان دهید که a_n دنباله‌ای همگراست. حد آن رابیابید.

۱۱۶- با استفاده از هم ارزی توابع، حدهای زیر را حساب کنید:

الف- $(x\in N)\ \lim\limits_{x\to ۱} \frac{x-۱}{x^n-۱}$ ب- $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{۱-\sqrt[۳]{x}}{۱-\sqrt{x}}$

پ- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{۱-\sqrt{۲}\, \sin x}{۱-\sqrt{۲}\, \cos x}$ ت- $\lim\limits_{x\to \frac{۳\pi}{۲}} (۱+\sin x)\, tg^۲ x$

۱۱۷- بخش اصلی بی‌نهایت کوچک‌های زیر را، وقتی $x \to ۰$، بیابید:

الف- $y = ۱ - \sin \frac{\pi}{۲} (۱+x)$ ب- $y = \sqrt[۳]{۱+x} - ۱$

۱۱۸- پیوستگی توابع زیر را بررسی کنید:

الف- $f(x)=xE[x]$ ب- $f(x) = \frac{E[x]}{x}$ پ- $f(x)=\{x-E[x]\}^۲$

آنگاه خم نمایش تغییرات آنها را برای $|x| \leq ۳$ رسم کنید.

۱۱۹– نشان دهید که تابع $f(x)=E[x]+\{x-E[x]\}^{۲}$ یک تابع پیوسته است و خم نمایش آن از دو کمان برابر در سهمی تشکیل می‌شود.

۱۲۰– فرض می‌کنیم که f یک نگاشت از $[a,b]$ در $[a,b]$ باشد به قسمی که برای هر $x_۱,x_۲ \in [a,b]$ داشته باشیم:

$$|f(x_۱)-f(x_۲)| < |x_۱-x_۲|$$

ثابت کنید که f پیوسته است و سپس از آن نتیجه بگیرید که معادله $f(x)=x$ دارای یک جواب یکتاست. همچنین نشان دهید که معادله $\cos x=x$ دارای جواب یکتا در فاصله $[۰ , \frac{\pi}{۲}]$ است.

۱۲۱– تابع $f(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{۱}{۱-x} & ، \quad x\neq ۱ \text{ برای} \\ ۰ & ، \quad x=۰ \text{ برای} \end{cases}$$

نشان دهید که این تابع دوسویی از $\mathbf{R}$ در $\mathbf{R}$ است، و آنگاه $f^{۲}$ و $f^{-۱}$ را مقایسه کنید.

۱۲۲– تابع $f(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^{۲}}{۱+x^{۲}}$$

نشان دهید که این تابع دارای دو فاصله یکنوایی است و سپس تابع وارون آن را در هر کدام از این فاصله‌ها حساب کنید.

۱۲۳– تابع $f(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{x^{۲}-۱} \qquad (x>۱)$$

نشان دهید که این تابع پیوسته و یکنواست و f^{-1} را تعریف کنید و سپس $f^{-1}\circ f$ و $f\circ f^{-1}$ رامقایسه کنید.

۱۲۴- f و g دو تابع پیوسته و یکنوا روی $[a,b]$ و $[f(a),f(b)]$ می‌باشند، تابع مرکب $h=g\circ f$ را درنظر می‌گیریم. نشان دهید که h روی $[a,b]$ وارون‌پذیر است و $h^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$. سپس نتیجه را در مورد توابع زیر به‌کار ببرید:

$$f(x)=\frac{۱-x}{۱+x} \qquad , \qquad x\in[۰\,,\,۱]$$

$$g(x)=\sqrt{x} \qquad , \qquad x\in[۰\,,\,۱]$$

۱۲۵-نشان دهید که تابع $f(x)=\mathrm{Arc}tg\,\frac{۲x}{۱-x^۲}$ در نقطه‌های $x=۱$ و $x=-۱$ ناپیوسته است. همچنین نشان دهید که می‌توان این تابع را بر حسب $\mathrm{Arc}tgx$ نوشت.

۱۲۶- نشان دهید که مشتق مرتبهٔ nام تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$ به صورت زیر است:

$$f^{(n)}(x)=\frac{P_n}{(۱+x^۲)^{n+\frac{۱}{۲}}}$$

(P_n یک چند جمله‌ای درجهٔ n است). همچنین نشان دهید که داریم:

$$P_{n+۱}=(۱+x^۲)P'_n-(۲n+۱)xP_n$$

۱۲۷- دیفرانسیل تابع $y=\ln(۱+e^{۱۰x})+\arctg e^{۵x}$ را به ازای $x=۰$ و $\Delta x=۰/۲$ به دست آورید.

۱۲۸- آیا تابع $f(x)=۱-\sqrt[۳]{x^۲}$ در فاصلهٔ $[-۱,۱]$ در شرطهای قضیه رل صدق می‌کند؟

۱۲۹- آیا تابع $f(x)=۳x^۲-۵$ در فاصلهٔ $[-۲,۰]$ در شرطهای قضیه لاگرانژ صدق می‌کند؟

۱۳۰- ثابت کنید که توابع

$$f(x)=x^۲-۲x+۳ \qquad \text{و} \qquad g(x)=x^۳-۷x^۲+۲۰x-۵$$

در فاصلهٔ $[۱,۴]$ در شرط‌های قضیه کشی صدق می‌کنند.

۱۳۱- با استفاده از قضیه رل نشان دهید که مشتق تابع

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{\pi}{x} & ، \quad x>۰ \\ ۰ & ، \quad x=۰ \end{cases}$$

در تعداد بی‌پایانی از نقطه‌های فاصلهٔ $]۰,۱[$ صفر می‌شود.

۱۳۲- ثابت کنید که تابع $f(x)=\ln x$ کاو است و نتیجه بگیرید که

$$\frac{\ln a+\ln b}{۲} < \ln\frac{a+b}{۲} \qquad و \qquad \sqrt{ab} < \frac{a+b}{۲}$$

آنگاه نابرابریهای بالا را تعمیم دهید.

۱۳۳- نشان دهید که تابع $f(x)=e^x$ کوژ است و از آن نابرابریهای زیر را نتیجه بگیرید:

الف- $\dfrac{e^a+e^b}{۲} \geq e^{\frac{a+b}{۲}}$ ب- $e^x \geq ۱+x$ پ- $e^x \geq ex$

۱۳۴- نشان دهید که تابع $f(x)=|x|$ کوژ است.

۱۳۵- نشان دهید که اگر تابع f در فاصلهٔ $[a,b]$ کوژ باشد، داریم :

$$f\left(\frac{\sum_{i=۱}^{n}\lambda_i x_i}{\sum_{i=۱}^{n}\lambda_i}\right) \leq \frac{\sum_{i=۱}^{n}\lambda_i f(x_i)}{\sum_{i=۱}^{n}\lambda_i}$$

این نابرابری را در مورد تابع $f(x)=x^۲$ به‌کار ببرید، و از آن نابرابری زیر را که نابرابری شوارتس نام دارد، نتیجه بگیرید:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

تعمیم. نشان دهید که تابع $f(x)=x^p$ برای $p>1$، $x>0$ کوژ است. آنگاه نظیر حالت پیش نابرابری هولدر را از آن نتیجه بگیرید:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{q}} \quad , \quad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$$

۱۳۶– مشتق‌های پی در پی تابع $y=e^{-x^2}$ را حساب کنید. نشان دهید که $y^{(n)}=e^{-x^2}P_n(x)$ که در آن P_n یک چند جمله‌ای درجهٔ n است که در رابطهٔ بازگشتی زیر صدق می‌کند:

$$P_n = -2xP_{n-1}+P'_{n-1}$$

و سپس ضریب x^n را در P_n حساب کنید.

۱۳۷– انتگرال هر یک از توابع پله‌ای زیر را در فاصله‌های داده شده پیدا کنید:

الف - $f(x)=[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]$ در فاصلهٔ $[-1 \;,\; 3]$

ب - $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & , \quad \frac{1}{2^n} < x \leq \frac{1}{2^{n-1}} \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$ در فاصلهٔ $[0,1]$

۱۳۸– مشتق تابع زیر را که در آن $0 \leq |b| < a$ است حساب کنید:

$$f(x) = \frac{b}{a}x + \frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a}\operatorname{Arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{th}\frac{x}{2}\right)$$

۱۳۹– درستی برابری زیر را ثابت کنید:

$$\operatorname{Argsh}(3x+4x^3)=3\operatorname{Argsh}x$$

۱۴۰– پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع زیر را در نقطه $x=0$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

۱۴۱– تابع $y=\text{Argth}\,\frac{2x}{1+x^2}$ را به صورت لگاریتمی درآورید.

۱۴۲– تابع زیر را در نظر می‌گیریم :

$$f(x) = \begin{cases} \text{Ch}\sqrt{x} & , \quad x>0 \\ \text{Ch}\,\sqrt{-x} & , \quad x<0 \\ 1 & , \quad x=0 \end{cases}$$

ثابت کنید که f روی **R** پیوسته و مشتق‌پذیر است ، و سپس نشان دهید که در معادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$4xy''+2y'-y=0$$

۱۴۳– فاصله‌هایی راکه هر یک از توابع زیر در آنها اکیداً افزایشی یا اکیداً کاهشی است تعیین کنید:

الف - $f(x)=2x^2-\ln x$ ب - $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$

۱۴۴– ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را به دست آورید :

الف - $f(x) = x^4e^{-x^2}$ ب - $f(x) = \frac{50}{3x^4+8x^3-18x^2+60}$

۱۴۵– مقدار میانگین تابع $f(x)=3^x-2x+3$ را در فاصلهٔ $[0,2]$ به دست آورید.

۱۴۶– نشان دهید که مقدار میانگین تابع $f(x) = \frac{\cos^2x}{\sin^2x+4\cos^2x}$ در فاصلهٔ $[0\,,\,\frac{\pi}{2}]$ برابر با $\frac{1}{6}$ است.

۱۴۷- ثابت کنید که :

الف - $\lim_{\lambda\to\infty}\int_{0}^{\lambda}\frac{dx}{x^4+4}=\frac{\pi}{8}$ ب - $\lim_{x\to 0}\frac{\int_{0}^{x} \sin t^3\,dt}{x^4}=\frac{1}{4}$

۱۴۸- ثابت کنید که $\int_{0}^{3}\{x-[x]+\frac{1}{2}\}dx=3$.

۱۴۹- ثابت کنید که به ازای همهٔ مقادیر حقیقی m داریم :

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^m x}{\sin^m x+\cos^m x}\,dx=\frac{\pi}{4}$$

۱۵۰- با استفاده از انتگرال معین، حد $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ را حساب کنید.

۱۵۱- تغییرات تابع $F(x)=\int_{1-x}^{1+x} f(t)dt$ را که در آن f به صورت زیر تعریف شده است نمایش دهید:

$$\begin{cases} f(x)=-1 & , \quad x<0 \\ f(x)=0 & \\ f(x)=1 & , \quad x>0 \end{cases}$$

آیا F مشتق‌پذیر است ؟

۱۵۲- توابعی را تعیین کنید که برای آنها داشته باشیم، ثابت $=\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt$.

۱۵۳- با استفاده از فرمول تیلر ثابت کنید که:

الف -
$$\sin x=\sin a+(\cos a)(x-a)-\frac{(\sin a)(x-a)^{2}}{2!}-\frac{(\cos \xi)(x-a)^{3}}{3!}$$

که در آن ξ بین a و x است.

ب - با استفاده از قسمت (الف) مقدار $\sin 51^\circ$ را حساب کنید و خطای حاصل را برآورد نمایید.

۱۵۴- با استفاده از فرمول تیلر ثابت کنید که تفاضل بین $\sin(\alpha+h)$ و $\sin\alpha+h\cos\alpha$ بیشتر از $\frac{h^2}{2}$ نمی‌باشد.

۱۵۵- نشان دهید که اگر تابع f مشتق مرتبهٔ دوم داشته باشد، در هر نقطه که $f''(x)\neq 0$، حد θ در فرمول بسط با پایان وقتی که $h\to 0$ برابر $\frac{1}{2}$ است، و سپس نتیجه مزبور را در مورد تابع $f(x)=e^x$ بررسی کنید.

۱۵۶- چند جمله از بسط ماکلرن تابع $f(x)=e^x$ را باید درنظر گرفت تا چند جمله‌ای حاصل در فاصلهٔ بسته $[-1,1]$ با سه رقم اعشار نمایشگر این تابع باشد.

۱۵۷- فرمول ماکلرن مرتبهٔ n را در مورد تابع $f(x)=\ln(1+x)$ بنویسید، و با استفاده از آن مجموع زیر را ساده کنید:

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

و سپس $\lim_{n\to\infty} S_n$ را به دست آورید.

۱۵۸- نشان دهید که اگر قرار دهیم:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

معادلهٔ لاپلاس $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ به صورت معادلهٔ زیر درمی‌آید:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}=0$$

۱۵۹- نشان دهید که خم $\alpha(t)=(t\,cos t\,,\ t sin t, t)$ روی یک مخروط در E^{3} واقع است.

سرعت ، تندی و شتاب α را در رأس مخروط بیابید.

۱۶۰- فرض می‌کنیم α مارپیچ استوانه‌ای با برداریکه U و زاویه θ و تابع طول کمان s (نقطهٔ مبدأ $t=0$) باشد. خم یکتای γ:

$$\alpha(t)=\gamma(t)+s(t)\cos\theta U$$

را خم مقطع عرضی استوانه، که α روی آن واقع است می‌نامند. ثابت کنید که :

الف - γ در صفحه‌ای که از $\alpha(0)$ می‌گذرد و بر U عمود است واقع می‌باشد.

ب - خمیدگی γ برابر است با $\frac{k}{\sin^{2}\theta}$ ، که در آن k خمیدگی α است.

۱۶۱- توابع با مقدار حقیقی دیفرانسیل پذیر $f>0$ و g دلخواه را روی فاصله‌ای از **R** درنظر می‌گیریم. نشان دهید که خمیدگی و تاب خم :

$$\alpha(t)=\left(\int f(t)\sin t\,dt\,,\ \int f(t)\cos t\,dt, \int f(t)g(t)dt\right)$$

که درآن $\int h$ معرف تابعی است که مشتق آن h است عبارت انداز :

$$k=\frac{1}{f}\sqrt{\frac{1+g^{2}+g'^{2}}{(1+g^{2})^{3}}}\qquad,\qquad \tau=-\frac{1}{f}\,\frac{g+g''}{(1+g^{2}+g'^{2})}$$

۱۶۲- فرض می‌کنیم M رویه‌ای است چرخشی ، که از چرخش خم :

$$t\rightarrow(g(t)\,,\,h(t)\,,\,0)\qquad\qquad h>0$$

پیرامون محور x حاصل می‌شود. ثابت کنید که :

الف - اگر g' هیچ‌گاه صفر نشود ، M دارای نمایش پارامتری زیر است :

$$x(u,v)=(u,f(u)\cos v\ \ ,\ \ f(u)\sin v)$$

ب - اگر h' هیچ‌گاه صفر نشود ، M دارای نمایش پارامتری زیر است :

$$x(u,v)=(f(u)\ ,\ u\cos v\ \ ,\ \ u\sin v)$$

فهرست نشانه‌ها

$u_n \to l \;,\; \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$	۱.۳.۹ و ۱.۱.۲
$u_n \to +\infty \;,\; x_n \to -\infty$	۱.۴.۲
$f(x) \to l \;,\; \lim\limits_{x\to c} f(x) = l$	۱.۴.۹ و ۱.۵.۲
$\lim\limits_{x\to c,\, x\neq c} f(x) = l$	۲.۵.۲
$\lim\limits_{x\to c,\, x>c} f(x) = l$	۳.۵.۲
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$	۵.۵.۲
$o(g)$	۱.۸.۲
$O(g)$	۴.۸.۲
$\mathrm{Arc}\sin x$	۱.۱۲.۲
$\mathrm{Arc}\cos x$	۵.۱۲.۲
$\mathrm{Arc}tg\, x$	۱۵.۱۲.۲
$f'(x)$	۷.۱.۱۵ و ۱.۱.۱۵ و ۱.۱.۳
$f'_x \;,\; \dfrac{df}{dx} \;,\; f^{(n)} \;,\; f^{(n)}_{x^n} \;,\; \dfrac{d^n f}{dx^n}$	۳.۲.۱۵ و ۱.۲.۱۵ و ۳.۳
$\int_a^b f(x)dx$	۲.۴.۴ و ۲.۲.۴ و ۶.۱.۴
$\int f(x)dx$	۹.۵.۴
$\mathrm{Log}\, x$	۱.۱.۵
e	۶.۳.۵
$\mathrm{Log}_a x$	۱.۴.۵

M	٤.٤.٥
$\exp x$	١.٥.٥
e^x	٥.٥.٥
a^x	١.٦.٥
$\operatorname{ch}x \ , \ \operatorname{sh}x \ , \ \operatorname{th}x$	١.٨.٥
$\operatorname{Argsh}x$	١.٩.٥
$\operatorname{Argch}x$	٤.٩.٥
$\operatorname{Argth}x$	٧.٩.٥
$\lim\limits_{x\to a,\, x\in F} f(x)=l$	٢.٤.٩
$f'_x(x, y, z) \ , \ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$	٢.١.١١
$f''_{x^2} \ , \ f''_{xy} \ , \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \ , \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$	١.٣.١١
$f^{(p)}_{x^p} \ , \ f^{(p)}_{x^{p-1}y} \ , \ \dfrac{\partial^p f}{\partial x^p} \ , \ \dfrac{\partial^p f}{\partial x^{p-1}\partial y}$	٢.٤.١١
$f^{(i_1+i_2+\cdots+i_n)}_{x_1^{i_1}, x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}} \ , \ \dfrac{\partial^{i_1+i_2+\cdots+i_n} f}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_n^{i_n}}$	٣.٤.١١
$df(M)$	٢.١.١٢
df	١.٢.١٢

فهرست الفبایی

انتگرال : ۶.۱.۴ و ۲.۲.۴ و ۵.۲.۴ و ۲.۴.۴ و ۹.۵.۴ و ۱.۱.۱۴

انجام : ۱.۱.۱۵ و ۱.۱.۱۶

ایست (نقطه) : ۷.۲.۱۵ و ۳.۲.۱۶

ایستی (تابع) : ۱.۵.۱۲

آراینده‌های استوانه‌ای : ۳.۶.۱۹

— قطبی : ۳.۱.۱۹

— کروی : ۳.۷.۱۹

باز (مجموعه) : ۰.۶.۹؛

بخش اصلی : ۵.۷.۲

بردار سرعت : ۲.۲.۱۵ و ۱.۲.۱۶

— شتاب : ۵.۳.۱۶

بسته (کمان) : ۱.۱.۱۵ و ۱.۱.۱۶

— (مجموعه) : ۱.۶.۹

بسط محدود : ۱.۱.۸ و ۲.۵.۸ و ۴.۵.۸

بیضوی : ۱.۵.۱۸

— چرخشی پهن و کشیده : ۶.۵.۱۸

بینهایت بزرگ ، بینهایت کوچک :
۱۸.۵.۲

پارامتر : ۱.۱.۱۵ و ۱.۱.۱۶

پیچ های لگاریتمی : ۱.۵.۱۹

پیوستگی راست ، پیوستگی چپ : ۲.۹.۲

پیوسته (تابع) : ۱.۹.۲ و ۳.۹.۲ و ۱.۵.۹ و ۲.۵.۹

پیوستهٔ پاره‌ای (تابع) : ۴.۲.۴

پیوسته یکنواخت (تابع) : ۱.۱۰.۲

تابع اولی : ۱.۵.۴

— با مشتق پیوسته (دارای مشتق پیوسته) : ۸.۱.۳ و ۸.۱.۱۱

— ضمنی : ۱.۱.۱۳

تانژانت هذلولی : ۱.۸.۵

تقسیم جزیی : ۱.۱.۴

جواب ماکزیمال : ۳.۱.۱۴

— یک معادلهٔ دیفرانسیل : ۱.۱.۱۴

چنبره (تُر) : ۵.۴.۱۸

حد : ۱.۱.۲ و ۱.۴.۲ و ۱.۵.۲ و ۲.۵.۲ و ۳.۵.۲ و ۵.۵.۲ و ۱.۳.۹ و ۱.۴.۹ و ۲.۴.۹

— ساده : ۱.۱۳.۲

— یکنواخت : ۲.۱۳.۲

خم : ۳.۱.۱۷
— انتگرال : ۱.۲.۱٤
— پارامتری : ۱.۱.۱٥ و ۱.۱.۱٦
— پارامتری مشتق پذیر : ۱.۱.۱٥ و ۱.۱.۱٦

دایره : ۸.٦.۹
دستور تیلر : ۱.۱.۷ و ۱.٦.۱۱
— تیلر ـ یونگ : ۳.۱.۷ و ٤.۱٥
— ما کلرن : ٤.۱.۷
— والیس : ٥.۸.٤
دیفرانسیل : ۲.۱.۱۲ و ۱.۲.۱۲
دنباله‌کشی : ۲.۲.۱ و ۱.۲.۲ و ۷.۳.۹
— های کشی هم‌ارز : ۳.۲.۱
دوری : ۱.۲.۹

راستای مجانبی : ۲.٤.۱٥
روش تغییر شمار ثابت : ۷.٥.۱٤
رویه پارامتری : ۱.۱.۱۷
— پارامتری پیوسته ، مشتق پذیر : ۲.۱.۱۷
— چرخشی : ۳.٤.۱٥

سهمی‌گون بیضی‌وار : ۱.۸.۱۸
— چرخشی : ٥.۸.۱۸
— هذلولی‌وار : ۱.۹.۱۸

سیکلوئید : ۱۰.۱.۱٥
سینوس هذلولی : ۱.۸.٥

شاخه بینهایت : ۱.٤.۱٥
— سهمی‌وار : ٤.٤.۱٥
شمار حقیقی : ٥.۲.۱

صفحهٔ بوسان : ۱.۳.۱٦
— قائم : ۲.۲.۱٦
— مماس : ۲.۲.۱٦ و ۳.۳.۱۷
صورت نامعین : ٥.٤.۲ و ۷.٤.۲ و ۸.٤.۲ و ۱۱.٦.٥.۲۱.٥.۲

فرمول انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء : ٦.٤
فضای برداری نُرم‌دار : ۱.۱.۹
— متری : ۱.۲.۹

قائم : ۲.۲.۱٦
— اصلی : ۲.۳.۱٦
قضیه رُل : ۳.۷.۳
— بولزانو ـ وایرشتراس : ٤.۳.۲
— نموهای باپایان : ٤.۷.۳
قطب : ٥.۱.۱۹

کاو (تابع) : ۲.۸ ۲
کاوی بطرف نقطهٔ O : ۳.٤.۱۹
کره : ۷.٦.۹

کسینوس هذلولی : ۱.۸.۵
کمان : ۱.۱.۱۵ و ۱.۱.۱۶
کوژ (تابع) : ۲.۸.۳
کوژی بطرف نقطهٔ O : ۳.۴.۱۹

گرادیان : ۱.۶.۱۲
گرده : ۸.۶.۹
گوی باز : ۶.۶.۹
— بسته : ۵.۶.۹
لگاریتم : ۵.۱.۱ و ۱.۴.۵
— دهدهی : ۴.۴.۵
لیماسن پاسکال : ۵.۲.۱۹

ماکزیمم : ۱.۷.۳ و ۲.۵.۱۲
مبدأ : ۱.۱.۱۵ و ۱.۱.۱۶ ۱
محور قطبی : ۵.۱.۱۹
مجانب : ۴.۴.۱۵
مشتق : ۱.۱.۳ و ۱.۱.۱۰ و ۷.۱.۱۰
— پذیر : ۱.۱.۱۰ و ۷.۱.۱۰
— نسبی : ۲.۱.۱۱
— راست ، چپ : ۲.۲.۳
— لگاریتمی : ۲.۴.۳
معادلهٔ دیفرانسیل با متغیرهای جدا :
۱.۴.۱۴
معادلهٔ دیفرانسیل خطی : ۱.۵.۱۴
— خطی همگن : ۲.۵.۱۴
— مرتبهٔ اول : ۱.۱.۱۴
معادلهٔ قطبی : ۱.۲.۱۹
— یک خم درفضا : ۱.۳.۱۸
— یک رویه : ۱.۲.۱۸
مماس : ۱.۲.۱۵ و ۱.۲.۱۶
مؤلفه‌های شعاعی ، عمود برشعاعی :
۴.۳.۱۹ و ۲.۴.۱۹
می‌نیمم : ۱.۷.۳ و ۳.۵.۱۲

هذلولی‌گون دو پارچه : ۱.۷.۱۸
— چرخشی دو پارچه : ۵.۷.۱۸
— چرخشی یک پارچه : ۵.۶.۱۸
— یک پارچه : ۱.۶.۱۸
هم‌ارز (توابع) : ۱.۶.۲

ناچیز (تابع) : ۱.۸.۲
نُرم : ۱.۱.۹
نقطهٔ بازگشت : ۴.۳.۱۵ و ۵.۳.۱۵
— دوگانه : ۳.۶.۱۵
— عطف : ۶.۳.۷
نمایش پارامتری : ۳.۱.۱۵ و ۱.۱.۱۶
نمایی : ۱.۵.۵

واژه‌ها

فارسی	انگلیسی	فرانسه
انتگرال	Integral	Integrale
انجام	Extremity	Extrémité
ایستی	Stationary	Stationnaire
آراینده‌های استوانه‌ای	Cylindrical coordinates	Coordonnées cylindriques
آراینده‌های قطبی	Polar coordinates	Coordonnées polaires
آراینده‌های کروی	Spherical coordinates	Coordonnées sphériques
باز	Open	Ouvert
با مشتق پیوسته یا دارای مشتق پیوسته (تابع)	Continually derivable (function)	Continûment dérivable (fonction)
بخش اصلی	Principal part	Partie principale
بردار	Vector	Vecteur
بسته	Closed	Fermé
بسط محدود	Finite expansion	Développement limité
بیضوی	Ellipsoid	Ellipsoïde
بیضوی چرخشی پهن و کشیده	Ellipsoid of revolution stretched , flat	Ellipsoïde de révolution allongé , aplati
خم	Curve	Courbe
خم انتگرال	Integral curve	Courbe intégrale

فرانسه	انگلیسی	فارسی
Courbe plane	Plane curve	خم هامنی
Suite	Sequence	دنباله
Distance	Distance	دوری
Décimal	Decimal	دهدهی
Différentielle	Differential	دیفرانسیل
Direction asymtotique	Asymtotic direction	راستای مجانبی
Méthode de variation des Constantes	Constants variation method	روش تغییر شمار ثابت
Surface	Surface	رویه
Surface de révolution	Surface of revolution	رویه چرخشی
Vitesse	Velocity	سرعت
Paraboloïde elliptique	Elliptic paraboloid	سهمی‌گون بیضی‌وار
Paraboloïde de révolution	Paraboloid of revolution	سهمی‌گون چرخشی
Infiniment grand , infiniment petit	Infinitely large , infinitely small	بینهایت بزرگ ، بینهایت کوچک
Primitive	Primitive	تابع اولی
Fonction implicite	Implicit function	تابع ضمنی
Tangente hyperbolique	Hyperbolic tangent	تانژانت هذلولی
Subdivision	Subdivision	تقسیم جزیی
Paramètre	Parameter	پارامتر
Continu à droite , à gauche	Continuous from the right , from the left	پیوستگی راست ، چپ

فرانسه	انگلیسی	فارسی
Contiuue	Continuous	پیوسته
Continue par morceaux	Piecevise continuous	پیوستهٔ پاره‌ای
Uniformément continue	Uuiformly continuous	پیوستهٔ یکنواخت
Spirale logarithmique	Logarithmic spirale	پیچ لگاریتمی
Tore	Torus	چنبره(تُر)
Limite	Limit	حد
Limite simple	Simple limit	حد ساده
Limite uniforme	Uniform limit	حد یکنواخت
Paraboloïde hyperbolique	Hyperbolic paraboloid	سهمی‌گون هذلولی‌وار
Parabole asymptote	Asymptote parabola	سهمی مجانبی
Cycloïde	Cycloid	سیکلوئید
Sinus hyperbolique	Hyperbolic sine	سینوس هذلولی
Branche infinie	Infinit branch	شاخه بینهایت
Branche parabolique	Parabolic branch	شاخه سهمی‌وار
Accélération	Acceleration	شتاب
Plan osculateur	Osculator plane	صفحهٔ بوسان
Plan normal	Normal plane	صفحهٔ قائم
Plan tangent	Tangent plane	صفحهٔ مماس
Forme indéterminée	Indeterminate form	صورت‌نامعین
Formule d'integration par parties	Formula of integration by parts	فرمول انتگرال گیری به روش جزء به جزء
Espace vectoriel normé	Normed vector space	فضای برداری نرم‌دار

فرانسه	انگلیسی	فارسی
Espace métrique	Metric space	فضای متری
Normal	Normal	قائم
Normal principale	Principal normal	قائم اصلی
Concave	Concave	کاو
Concavité	Concavity	کاوی
Sphère	Sphere	کره
Cosinus hyperbolique	Hyperbolic cosine	کسینوس هذلولی
Arc	Arc	کمان
Convexe	Convex	کوژ
Convexité	Convexity	کوژی
Gradient	Gradient	گرادیان
Disque	Disk	گرده
Boule	Ball	گوی
Maximale	Maximal	ماکزیمال
Maximum	Maximum	ماکزیمم
Origine	Origin	مبدأ
Asymptote	Asymptote	مجانب
Axe	Axis	محور
Dérivée	Derivative	مشتق
Dérivable	Derivable	مشتق پذیری
Dér vée partielle	Partial derivative	مشتق نسبی
Tangente	Tangent	مماس

فرانسه	انگلیسی	فارسی
Composantes radiales , orthoradiales	Radial , orthoradial components	مؤلفه‌های شعاعی ، عمود برشعاعی
Hyperboloïde de révolution à deux nappes	Hyperboloid of revolution of two sheets	هذلولی‌گون چرخشی دو پارچه
Hyperboloïde de révolution à une nappe	Hyperboloid qf revolution of one sheet	هذلولی‌گون چرخشی یک پارچه
Norme	Norm	نرم
Point de rebroussement	Cusp point	نقطهٔ بازگشت
Point double	Double point	نقطهٔ دوگانه
Point d' inflexion	Inflection point	نقطهٔ عطف
Représentation paramétrique	Parametric representation	نمایش پارامتری
Exponentiel	Exponential	نمایی

ISBN 964 - 03 - 3806 -0

قیمت : ۷۵۰۰ ریال