آنالیز ریاضی

ترجمه و گردآوری

علی مرّضعی

تقدیم به

همسرم،

دخترم مُهنا،

مادر مهربانم و

روان پاک پدرم.

فهرست مطالب

مقدمه

خوشبختانه در سالهای اخیر تعداد کتابهای ترجمه و تألیف در زمینهٔ آنالیز ریاضی که برای رشته‌های کارشناسی ریاضی تدریس می‌شوند، زیاد می‌باشد، ولی هرکتابی مزایا و معایبی دارد. برخی کتابها از جمله کتاب *اصول آنالیز ریاضی*، نوشته والتررودین، که به حق کتابی مرجع و جامع در زمینهٔ آنالیز ریاضی می‌باشد، از لحاظ متن درس و تمرین‌های موجود در هر فصل، گاهی برای دانشجویان از حیث درک و فهم مشکل می‌باشد.

حقیر پس از چند ترم تدریس آنالیز ریاضی (۱) و (۲) برای دانشجویان کارشناسی ریاضی، در دانشگاهها و مراکز آموزش عالی و معرفی کتابهای متعدد در این زمینه به عنوان کتاب درسی، کتاب حاضر را که اساس و چهارچوب آن بر مبنای کتاب Real Analysis اثر S.Nanda & V.P. Saxena می‌باشد ترجمه و گردآوری نمودم. این کتاب بعلت داشتن متن ساده و روان در اثبات قضایا، جهت تدریس مورد علاقه اینجانب قرارگرفت. ولی همانطورکه گفته شد، این کتاب نیز مانند برخی کتابها، تمام سرفصلهای ارائه شده از طرف وزارت علوم را پوشش نمی داد. لذا در این راستا بر آن شدم که کتاب فوق‌الذکر را با تعییراتی در متن درس و تمرین‌ها و اضافه‌کردن قسمتهایی به متن کتاب، که این قسمت‌ها نیز ازکتابهای معروف در آنالیز ریاضی گرفته شده است که فهرست کامل آنها در منابع ذکر می‌شود، ترجمه و گردآوری نمایم و احساس می‌کنم که این کتاب در تدریس برای دانشجویان قابل فهم‌تر می‌باشد و دانشجویان رغبت بیشتری را برای یادگیری ریاضی و حل تمرین آن نشان می‌دهند.

ادعا نمی‌کنم این کتاب بهتر است ولی امیدوارم در کنار کتابهای آنالیز ریاضی، پاسخگوی بخشی از سئوالات دانشجویان باشد.

از همکاران و اساتید محترم و دانشجویان عزیز خواهشمندم که اشکالهای موجود درکتاب را تذکر داده تا در چاپهای بعدی اصلاح گردد.

در خاتمه از اساتید محترم جناب آقای دکتر فرض‌ا... میرزاپور، جناب آقای دکتر بهمن مهری و جناب آقای دکتر رشید زارع‌نهندی که راهنمائی‌های ارزنده‌ای را در ترجمه، گردآوری و چاپ کتاب ارائه نمودند و از سرکار خانم پروانه بختیاری که زحمت تایپ کتاب را عهده دار بودند و از مدیریت مرکز آموزشی استعدادهای درخشان شهید بهشتی زنجان جناب آقای اکبر ترابی و از دوست عزیزم جناب آقای امین علیزاده که در طراحی روی جلد یاری‌ام دادند و از موسسه انتشاراتی سلاله که چاپ و نشر کتاب را قبول کردند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

علی مرصعی

پائیز ۱۳۸۲

۱

دستگاه اعداد حقیقی و مختلط

۱. اعداد صحیح و گویا

مجموعهٔ $\mathbb{N}$، متشکل از همه اعداد صحیح مثبت، قدیمی‌ترین و اساسی‌ترین دستگاه ریاضی است. ریاضی‌دان ایتالیایی ج. پئانو (۱۹۳۲_۱۸۵۸) نشان داد که اعداد صحیح مثبت می‌توانند خیلی ساده‌تر بوسیلهٔ یک مجموعه از اصول تعریف شوند، که این اصول معروف به اصول پئانو می‌باشند. برای تشریح این اصول ابتدا به تعریف تابع تالی پئانو نیاز داریم. این تابع که با s نمایش داده می‌شود هر عدد صحیح مثبت را به عدد یکی بزرگتر از خودش می‌فرستد، یعنی

$$s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

بصورت زیر تعریف می‌شود

$$s(n) = n + ۱.$$

تابع s، دارای خواصی است که مجموعهٔ $\mathbb{N}$ را توصیف می‌کند. این خواص بصورت زیر خلاصه شوند:

(الف) $1 \in \mathbb{N}$،

(ب) $n \in \mathbb{N} \Longleftarrow s(n) \in \mathbb{N}$،

(ج) هیچ $n \in \mathbb{N}$ای وجود ندارد که $s(n) = 1$،

(د) $s(n) = s(m) \Longleftarrow n = m$،

(ه) هرگاه $A \subset \mathbb{N}$ چنان که $1 \in A$ و وقتی $n \in A$، $s(n) \in A$، آن گاه $A = \mathbb{N}$.

اصل (ه) یکی از مهمترین اصول ریاضیات را بیان می‌کند، که معروف به *اصول استقرای ریاضی* می‌باشد، که ابزار قوی در اثبات قضایا می‌باشد. حال برخی از مثال‌ها را که توسط استقرا اثبات می‌شوند بررسی می‌کنیم.

مثالها

گزاره‌های زیر را بوسیلهٔ استقراء روی $\mathbb{N}$ ثابت کنید:

(الف) $(n \in \mathbb{N})$ $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$

(ب) $(n \in \mathbb{N})$ $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(ج) $(n \in \mathbb{N})$ $\sum_{i=1}^{n} i^3 = [\frac{1}{2}n(n+1)]^2$

فقط (الف) را اثبات می‌کنیم، بقیه به عنوان تمرین باقی می‌مانند. برای $n = 1$، قضیه درست است، زیرا در این حالت

$$\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1.$$

فرض استقراء این است که برای $k \in \mathbb{N}$ای

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{1}{2}k(k+1).$$

حال

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i &= (\sum_{i=1}^{k} i) + (k+1)\\ &= \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)\end{aligned}$$

که قضیه را برای $n = k + 1$ ثابت می‌کند. این برهان را کامل می‌کند.

فرض کنیم $\mathbb{Z}$ مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح (مثبت، منفی و صفر) را نشان دهد. فرض کنیم D مجموعهٔ همهٔ زوجهای مرتب (a,b) باشد که $a,b \in \mathbb{Z}$ و $b \neq 0$. می‌توانیم $\frac{a}{b}$ را برای (a,b) بنویسیم و آن را یک کسر بنامیم. در D رابطهٔ $\sim$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(a,b) \sim (c,d) \Longleftrightarrow ad = bc.$$

به راحتی می‌توان دید که $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی در D است. بنابراین $\sim$ D را به کلاس‌های هم‌ارزی جدا از هم افراز می‌کند. فرض کنیم $[a,b]$ کلاس هم‌ارزی در D از (a,b) باشد و $\mathbb{Q}$ مجموعهٔ تمام چنین کلاس‌های هم‌ارزی $[a,b]$ باشد که $a,b \in \mathbb{Z}$ و $b \neq 0$. مجموعهٔ $\mathbb{Q}$ در حقیقت مجموعهٔ همهٔ اعداد گویا است. به‌عبارت دیگر، یک عدد گویا، کلاس هم‌ارزی $[a,b]$ از زوج مرتب (a,b) است که $a,b \in \mathbb{Z}$ و $b \neq 0$. می‌توانیم $\frac{a}{b}$ را برای عدد گویای (a,b) بنویسیم، امّا هیچ تفاوتی بین یک عدد گویای $\frac{a}{b}$ و یک کسر $\frac{a}{b}$ وجود ندارد. به یک مورد توجه کنیم که زوج‌های مرتب $(1,2)$ و $(2,4)$ یا بصورت کسرهای $\frac{1}{2}$ و $\frac{2}{4}$ مجزا هستند امّا عددهای گویای آنها یکی است، زیرا در یک کلاس هم‌ارزی‌اند. علاوه براین توجه کنیم که برای $x \neq 0$ و $y \neq 0$ در $\mathbb{Z}$، $[ax,x] = [ay,y]$ زیرا $(ax)y = x(ay)$. فرض کنیم $[ax,x]$ را با $[a,1]$ نمایش دهیم و عدد صحیح a را با عدد گویای $[a,1]$ یکی بگیریم. در این صورت مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ می‌تواند بعنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{Q}$ تلقّی شود.

۲. اعداد حقیقی

اکنون مفهوم اعداد حقیقی را توضیح می‌دهیم. اگر طول هر ضلع از یک مربع را واحد انتخاب کنیم، آنگاه طول هیچ قطری از مربع نمی‌تواند بوسیلهٔ یک عدد گویا نمایش داده شود. به‌عبارت دیگر، هیچ عدد گویای نیست که مربع آن ۲ شود. برای اثبات این،

فرض کنیم x نمایش قطر باشد. آن‌گاه

$$x^۲ = ۱^۲ + ۱^۲ = ۲$$

فرض کنیم که $x = \frac{a}{b}$ باشد که a و b صحیح، نسبت به هم اول و $b \neq ۰$ است. آن‌گاه

$$۲ = x^۲ = \frac{a^۲}{b^۲}$$

بنابراین

$$a^۲ = ۲b^۲.$$

مربع یک عدد فرد صحیح نمی‌تواند بوسیلهٔ ۲ عاد شود، بنابراین a زوج است یعنی $a = ۲c$. بنابراین

$$۴c^۲ = ۲b^۲ \Longrightarrow b^۲ = ۲c^۲.$$

لذا b زوج است. پس a و b نمی‌توانند نسبت به هم اول باشند و این تناقض ثابت می‌کند که $x = \frac{a}{b}$ غیر ممکن است.

این اثبات نشان می‌دهد که هیچ عدد گویایی موجود نیست که مربع آن مساوی ۲ باشد. بنابراین می‌توانیم مجموعهٔ همهٔ اعداد گویای مثبت را به دو کلاس تقسیم کنیم. فرض کنیم U کلاس همهٔ گویاهایی باشد که مربعشان بزرگتر از ۲ است و L کلاس آنهایی باشد که مربعشان کوچکتر از ۲ است.

هرگاه $\ell \in L$، آن گاه می‌توانیم عنصر دیگری از L را چنان پیدا کنیم که بزرگتر از ℓ باشد، بعبارت دیگر، L دارای بزرگترین عضو نیست. برای $\ell \in L$، می‌توانیم عدد گویای h، $۰ < h < ۱$، را چنان انتخاب کنیم که $p = \ell + h$ نیز در L قرار داشته باشد. بنابراین

$$p^۲ = \ell^۲ + h(۲\ell + h) < \ell^۲ + h(۲\ell + ۱) < \ell^۲ + ۲ - \ell^۲ = ۲$$

و لذا

$$h < \frac{۲ - \ell^۲}{۲\ell + ۱}.$$

با یک روش مشابه می‌توان نشان داد که U، مجموعهٔ همهٔ اعدادهای گویای مثبت که مربعشان بزرگتر از ۲ است دارای کوچکترین عنصر نیست.

واضح است که هر عنصر از L کوچکتر از هر عنصر از U می‌باشد. همچنین ممکن است که یک عنصر از L و یک عنصر از U را چنان پیدا کنیم که تفاضلشان خیلی کوچکتر باشد. برای این منظور، فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ به دلخواه کوچک باشد. فرض کنیم $\ell \in L$ و $r \in U$ چنان باشند که

$$۲ - \ell^۲ < \frac{\varepsilon}{۲} \quad , \quad r^۲ - ۲ < \frac{\varepsilon}{۲}.$$

آن‌گاه

$$r^۲ - \ell^۲ = (r^۲ - ۲) + (۲ - \ell^۲) < \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon.$$

حال از آنجا که $\ell > ۱$ و $r > ۱$ خواهیم داشت

$$r - \ell = \frac{r^۲ - \ell^۲}{r + \ell} < \varepsilon.$$

فرض کنیم α نمایش اجتماع مجموعه همهٔ اعداد گویای نامثبت و L باشد.

حال اگر $a \in \alpha$، آن‌گاه بوضوح هر عدد گویای کوچکتر از a نیز در α است.

همچنین α دارای بزرگترین عضو نیست.

مجموعهٔ α از اعداد گویا تعریف عدد گنگی است که مربع آن مساوی ۲ است و این عدد گنگ با $\sqrt{۲}$ نمایش داده می‌شود. α یک بخش از عددهای گویا نامیده می‌شود.

ایدهٔ این مثال برای تعریف هر (و بنابراین همهٔ) عدد گنگ استفاده می‌شود. این نخستین بار بوسیلهٔ ریاضی‌دان مشهور دِدِکیند اثبات شد که به روش **برش ددکیند** یا **بخش ددکیند** معروف است. نظریهٔ ددکیند را در بخش بعدی مطرح خواهیم کرد که اعداد گنگ را تعریف می‌کند. همهٔ اعداد گویا و گنگ دستگاه اعداد حقیقی را تشکیل می‌دهند. $\mathbb{R}$ را برای نمایش مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی به کار می‌بریم.

۳. بخش ددکیند

تعریف ددکیند از یک عدد گنگ روی یک مجموعهٔ α از اعداد گویا پایه‌ریزی شده است، که یک *بخش* نامیده می‌شود، که در اصول زیر صادق است:
(الف) α ناتهی است و $\alpha \neq \mathbb{Q}$؛ بعبارت دیگر α حاوی حداقل یک عدد گویاست، امّا حاوی همهٔ گویاها نیست.
(ب) هرگاه $r \in \alpha$، آن‌گاه هر عدد گویای کوچکتر از r نیز در α است.
(ج) α حاوی بزرگترین عضو نیست.
مجموعه‌ای از اعداد گویا که در خواص فوق صادق است مجموعهٔ همهٔ اعداد گویا $\mathbb{Q}$ را به دو رده تقسیم می‌کند: مجموعهٔ α که رده *پائین* نامیده می‌شود و مجموعه‌ای از همهٔ اعداد گویا که در α نیست، رده *بالا* نامیده می‌شود.

توجه کنیم که رده پائین، بنابه تعریف، دارای بزرگترین عضو نیست. امّا رده بالا ممکن است دارای کوچکترین عنصر باشد یا نباشد. هرگاه رده بالا دارای کوچکترین عضو باشد، این بخش یک *بخش گویا* نامیده می‌شود. اگر $r \in \mathbb{Q}$ و هرگاه مجموعهٔ α را بصورت زیر تعریف کنیم

$$\alpha = \{x \in \mathbb{Q} : x < r\}$$

آن‌گاه α یک بخش گویاست. می‌بینیم که هرگاه $x \in \alpha$، آن‌گاه $\frac{1}{2}(x+r) \in \alpha$ از آنجا که $x < \frac{1}{2}(x+r) < r$. حال α یک بخش گویاست و $r \in \alpha$. بنابراین r کوچکترین عضو از رده بالا وابسته به α است.

هر بخش از اعداد گویا یک عدد حقیقی را تعریف می‌کند. یک بخش گویا متناظر با یا همانند با یک عدد گویاست. همهٔ بخش‌های دیگر، اعداد گنگ را تعریف می‌کنند. در مفهوم ذکر شدهٔ بالا مجموعهٔ همهٔ اعداد گنگ یک زیر مجموعهٔ از همهٔ اعداد حقیقی است.

۱ تعریف‌ها. (الف) دو بخش α و β مساوی هم نامیده می‌شوند هرگاه آنها بعنوان مجموعه (ای از گویاها) مساوی باشند.
(ب) هرگاه $\alpha \neq \beta$ آن‌گاه یا $\alpha < \beta$ یا $\alpha > \beta$. $\alpha < \beta$ هرگاه bای چنان موجود باشد که $b \notin \beta$ و $b \in \alpha$. $\alpha > \beta$ بطور مشابه تعریف می‌شود.
(ج) مجموع دو بخش α و β، مجموعهٔ γ است که بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\gamma = \{c \in \mathbb{Q} : c = a + b, a \in \alpha, b \in \beta\}$$

و این را بصورت $\gamma = \alpha + \beta$ می‌نویسیم. باید نشان دهیم که γ در حقیقت یک بخش است.

از آنجا که α و β بخش هستند، عدد گویای $p \in \alpha$ و گویای $q \in \beta$ وجود دارند. آن‌گاه برای هر $a \in \alpha$ و $b \in \beta$، $a + b < p + q$، نشان می‌دهد که $p + q \in \gamma$. حال فرض کنیم $a \in \alpha$، $b \in \beta$، $c = a + b \in \gamma$. برای هر عدد گویای $p < c$ می‌توانیم عدد گویای q را چنان پیدا کنیم که $p = q + b$. بنابراین $q < a$ و $q \in \alpha$ و لذا $p \in \gamma$. فرض کنیم برای $a \in \alpha$ و $b \in \beta$، $c = a + b$. از آنجا که α یک بخش است عدد گویای p چنان موجود است که $p > a$ و $p \in \alpha$. آن‌گاه $p + b \in \gamma$ و $p + b > c$. این بدین معنی است که γ دارای بزرگترین عضو نیست. این نشان می‌دهد که γ یک بخش است.

مشاهده می‌کنیم که جمع بخشها شرکت‌پذیر و جابجایی است و این ایجاب می‌کند که جمع اعداد گویا شرکت‌پذیر و جابجایی باشد.
(د) ضرب دو بخش α و β مجموعه‌ای است مانند γ که بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\gamma = \{c \in \mathbb{Q} : c = ab, a \in \alpha, b \in \beta\}.$$

با استفاده از روشی مشابه جمع، می‌توان نشان داد که γ یک بخش است.

علاوه براین، از آنجا که ضرب گویاها دارای خاصیت شرکتپذیری و جابجایی است، ضرب برش‌ها نیز در این خاصیت‌ها صدق می‌کند.

همچنین قوانین بخش برای جمع و ضرب برشها نتیجه‌ای از خواص وابسته به اعداد گویا است.

۲ قضیه (ددکیند). فرض کنیم مجموعهٔ $\mathbb{R}$ از همهٔ اعداد حقیقی به دو کلاس L و U چنان تقسیم شده باشد که
(الف) $L \cup U = \mathbb{R}$،
(ب) $L \cap U = \phi$،
(ج) $L \neq \phi$ و $U \neq \phi$،
(د) هر عنصر L کوچکتر از هر عنصر U باشد.
آن‌گاه یک عدد حقیقی منحصر به فرد (یک و فقط یکی) چنان موجود است که هر عدد حقیقی کوچکتر از γ در L قرار دارد و هر عدد حقیقی بزرتگر از γ در U قرار دارد.

عدد حقیقی γ ممکن است در L یا U قرار داشته باشد. اگر در L قرار داشته باشد بزرگترین عضو L است؛ اگر متعلق به U باشد، کوچکترین عضو U است.

فرض کنیم γ مجموعهٔ همهٔ اعداد گویای aای باشد که برای αای در L، a در α باشد. آن‌گاه:
(الف) از آنجا که $L \neq \phi$، $\gamma \neq \phi$، γ نمی‌تواند حاوی همهٔ اعداد گویا باشد. فرض کنیم $\beta \in U$ و p یک گویا باشد که در β نیست، آن‌گاه p نمی‌تواند در هر αای در L، برای $\alpha < \beta$ و $p > a$ برای هر عدد گویای a در α، باشد.
(ب) فرض کنیم a در γ باشد، آن‌گاه برای αای در L، a در α است. آن‌گاه اگر $p < a$، p در α است و لذا p در γ می‌باشد.
(ج) فرض کنیم a در γ باشد، آن‌گاه برای $\alpha \in L$ای، a در α است. از آنجا که α یک بخش است، α دارای بزرگترین عضو نیست، بنابراین γ دارای بزرگترین عضو نمی‌باشد.

لذا γ یک بخش از اعداد گویاست، بعبارت دیگر، γ یک عدد حقیقی است. همچنین یکتاست؛ زیرا هرگاه دو عدد $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ چنان موجود باشد که $\gamma_۲ < \gamma_۱$، عدد $\gamma_۳$ را چنان پیدا می‌کنیم که $\gamma_۲ < \gamma_۳ < \gamma_۱$. حال از آنجا که $\gamma_۳ < \gamma_۱$، این ایجاب

می‌کند که $\gamma_3 \in U$. دوباره، از $\gamma_2 < \gamma_3$ بدست می‌آوریم $\gamma_3 \in L$ و این متناقض با (ب) است.

نمایش هندسی اعداد گویا به صورت نقطه‌هایی روی یک خط مستقیم است که با انتخاب هر نقطه‌ای روی خط بعنوان عدد ۰، که مبدأ نامیده می‌شود، و یک طول مناسب از مبدأ بعنوان طول واحد امکان‌پذیر است. در این روش همهٔ اعداد گویا می‌توانند روی یک خط مستقیم رسم شوند. بعد از اینکه همهٔ گویاها انتخاب شدند، هنوز رخنه‌هایی روی خط وجود خواهد داشت، یعنی اینکه تعدادی نقطه روی خط موجود خواهند بود که بوسیلهٔ اعداد گویا نمایش داده نمی‌شوند. قضیهٔ ددکیند می‌گوید که این نقاط روی خط که نمایش هیچ گویایی نیست نمایش متناظر با یک نقطه روی خط است. بنابراین بر خلاف اعداد گویا، در مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی هیچ رخنه‌ای وجود ندارد؛ بعبارت دیگر، مجموعهٔ اعداد حقیقی کامل است.

این *خاصیت کمال یا تمامیت* اعداد حقیقی نامیده می‌شود. چندین نتیجهٔ دیگر و معادل از خواص مهم اعداد حقیقی در ادامه مطرح خواهند شد.

۴. میدان و اصول ترتیب

دو عمل جمع و ضرب در $\mathbb{R}$ نگاشتهایی از $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ می‌باشند و بنابراین عملگر دوتایی نامیده می‌شوند. خواص زیر در مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی برقرار است: برای هر $a, b, c \in \mathbb{R}$،

۱. $a + b \in \mathbb{R}$ (قانون بسته بودن)

۲. $a + b = b + a$ (قانون جابجایی)

۳. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (قانون شرکت‌پذیری)

۴. عنصر $0 \in \mathbb{R}$ چنان موجود است که $a + 0 = a$ (وجود خنثای جمع).

۵. برای هر $a \in \mathbb{R}$، عنصر $(-a) \in \mathbb{R}$ چنان موجود است که $a + (-a) = 0 = (-a) + a$.

۶. $ab \in \mathbb{R}$ (قانون بسته بودن برای ضرب)

۷. $ab = ba$ (قانون جابجایی)

۸. $a(bc) = (ab)c$ (قانون شرکت‌پذیری)

۹. عنصر $\mathbb{R} \in$ ۱، $۰ \neq ۱$، چنان موجود است که $a۱ = a$ (خنثای ضربی)

۱۰. برای هر $a \in \mathbb{R}$، $a \neq ۰$، عنصر $a^{-۱} \in \mathbb{R}$ چنان موجود است که $aa^{-۱} = ۱$ (معکوس ضربی از عناصر غیرصفر)

خواص ۱ و ۶ گزاره‌های زائدی هستند، زیرا جمع و ضرب نگاشتهایی از $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ می‌باشند. بعبارت دیگر $\mathbb{R}$ میدانی تحت جمع و ضرب اعداد حقیقی است.

تفاضل a و b با $a + (-b)$ تعریف می‌شود و بصورت $a - b$ نوشته می‌شود. بطور مشابه خارج‌قسمت a و b، $b \neq ۰$ با $ab^{-۱}$ تعریف می‌شود و بصورت $\frac{a}{b}$ نوشته می‌شود.

۳ تعریف. میدان F میدان مرتب نامیده می‌شود هرگاه یک زیر مجموعه ناتهی P از F چنان موجود باشد که

(الف)

$$P \cup \{۰\} \cup (-P) = F$$

که $(-P) = \{(-x) : x \in P\}$. بعبارت دیگر، برای هر a در میدان مرتب F، یک و فقط یکی از گزاره‌های زیر درست باشد:

$$a \in P \quad \text{یا} \quad -a \in P \quad \text{یا} \quad a = ۰$$

(ب) هرگاه $a, b \in P$ آنگاه $a + b \in P$.

(ج) هرگاه $a, b \in P$ آنگاه $ab \in P$

هرگاه F یک میدان مرتب باشد یک رابطهٔ دوتایی بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

برای $a, b \in F$، $a > b$ اگر و فقط اگر $a - b \in P$. بویژه $a > ۰$ اگر و تنها اگر $a \in P$. بنابراین مجموعهٔ P مجموعهٔ همهٔ عناصر مثبت در F نامیده می‌شود.

رابطه‌های زیر را مطرح می‌کنیم:

$$a \leq b \Longleftrightarrow a > b \quad \text{یا} \quad a = b$$

$$a \geq b \Longleftrightarrow a < b \quad \text{یا} \quad a = b.$$

۴ قضیه. رابطهٔ $\le$ تعریف شده در بالا، یک رابطهٔ کاملاً مرتب در F است. بعبارت دیگر،

(الف) $a \le a$ (انعکاسی)

(ب) هرگاه $a \le b$ و $b \le a$ آن‌گاه $a = b$ (پادمتقارن)

(ج) هرگاه $a \le b$ و $b \le c$ آن‌گاه $a \le c$ (تعدی)

(د) برای $a, b \in F$ یک و فقط یکی از گزاره‌های زیر برقرار است:

$$a < b \quad \text{یا} \quad a = b \quad \text{یا} \quad b < a.$$

اثبات به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

۵ اصل ترتیب. میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ یک میدان مرتب با $P = \{x \in \mathbb{R} : x > \circ\}$. این معروف به اصل ترتیب می‌باشد.

۶ قدرمطلق. فرض کنیم $x \in \mathbb{R}$، قدرمطلق x، که با $|x|$ نمایش می‌دهیم، بصورت زیر تعریف می‌شود

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \ge \circ \\ -x & ; x < \circ \end{cases}$$

۷ قضیه. برای $a, b \in \mathbb{R}$

(الف) $a \le |a|$ و $-a \le |a|$

(ب) $|a + b| \le |a| + |b|$.

برهان. (الف) فرض کنیم $a \ge \circ$. بنابه تعریف $|a| = a$. علاوه براین، $-a \le \circ$، بنابراین $-a \le \circ \le |a|$. فرض کنیم $a < \circ$. آن‌گاه $|a| = -a$ و $a < \circ \le |a|$. بنابراین (الف) برای هر عدد حقیقی برقرار است.

(ب) هرگاه $a \le |a|$ و $b \le |b|$، آن‌گاه $a + b \le |a| + |b|$.

هرگاه $a<0$ و $b<0$، آن‌گاه $|a|\geq -a$ و $|b|\geq -b$ ، $|a|+|b|\geq -a-b=-(a+b)$. بنابه تعریف $|a+b|$ یا مساوی $a+b$ است یا $-(a+b)$. در هر حال $|a+b|\leq |a|+|b|$ و این اثبات را کامل می‌کند. ■

۸ تعریف. فرض کنیم S زیر مجموعه‌ای ناتهی از $\mathbb{R}$ باشد. عنصر $b\in\mathbb{R}$ یک کران بالا برای S نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x\in S$، $x\leq b$.

۹ مثال.

(الف) مجموعهٔ $S=\{۱,۲,۳,۶,۷,۹\}$، ۱۰ را بعنوان کران بالا دارد. هر عدد بزرگتر یا مساوی ۹ بعنوان یک کران بالاست.

(ب) $S=\{x\in\mathbb{R}:x>۰\}$ دارای کران بالانیست.

(ج) $S=\{x:x=\frac{n}{n+۱},n=۱,۲,\cdots\}$، ۱ را بعنوان کران بالا دارد.

۱۰ تعریف. مجموعهٔ $S\subset\mathbb{R}$ از *بالا کراندار* نامیده می‌شود هرگاه دارای یک کران بالا باشد.

عدد $c\in\mathbb{R}$،*کوچکترین کران بالا* (بطور خلاصه lub) یا سوپریمم (بطور خلاصه sup) مجموعهٔ S نامیده می‌شود هرگاه

(الف) c یک کران بالا باشد.

(ب) هرگاه b یک کران بالا به غیر از c باشد، آن‌گاه $b>c$.

۱۱ تبصره. (الف) ۹، lub مثال ۹ (الف) می‌باشد و ۱، lub مثال ۹ (ب) می‌باشد.

(ب) lub مجموعه‌ای که از بالا کران دار است یکتاست.

۱۲ اصل تمامیت ترتیب $\mathbb{R}$. هر مجموعهٔ ناتهی از اعداد حقیقی که از بالا کران‌دار باشد دارای lub در $\mathbb{R}$ می‌باشد.

کران‌های پائین و بزرگترین کران پائین (بطور خلاصه glb) یا اینفیمم (بطور خلاصه

inf) از زیر مجموعه‌های ناتهی $\mathbb{R}$ به روش مشابه تعریف می‌شوند. برای مثال، $b \in \mathbb{R}$ کران پائین برای مجموعهٔ ناتهی $S \subset \mathbb{R}$ نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x \in S$، $b \leq x$. $c \in \mathbb{R}$، glb مجموعهٔ S نامیده می‌شود هرگاه c یک کران پائین برای S باشد و برای هر کران پائین b به غیر از c، $b < c$.

اصل تمامیت ترتیب همچنین می‌تواند بصورت معادل زیر بیان شود.

۱۳. هر مجموعهٔ ناتهی از اعداد حقیقی که دارای کران پائین است دارای glb در $\mathbb{R}$ می‌باشد. هر یک یا هر دو اصل بالا، *اصول تمامیت ترتیب* نامیده می‌شوند. همچنین صورتهای معادل دیگری از تمامیت موجودند که بعضی از آنها متضمن ساختار ترتیب نمی‌باشند. یکی از آنها تمامیت کشی است (یعنی، هر دنبالهٔ کشی از اعداد حقیقی همگراست) که در فصل ۳ اثبات خواهد شد.

۱۴ تعریف. میدان مرتب F مرتب *ارشمیدسی* نامیده می‌شود هرگاه برای $b, c \in F$، $c > 0$، عدد صحیح مثبت n چنان موجود باشد که

$$nc = \underbrace{c + c + \cdots + c}_{n \text{ مرتبه}} > b$$

۱۵ قضیه. میدان مرتب $\mathbb{R}$ مرتب ارشمیدسی است، یعنی هرگاه $a, b \in \mathbb{R}$ و $a > 0$ آن‌گاه عدد صحیح مثبت n چنان موجود است که $na > b$.

برهان. فرض کنیم $a, b \in \mathbb{R}$. به برهان خلف فرض کنیم که برای هر عدد صحیح مثبت n، $na < b$. بنابراین مجموعهٔ $S = \{na : n \in \mathbb{N}\}$ از بالا کران‌دار است، b یک کران بالا می‌باشد. بنابه خاصیت تمامیت $\mathbb{R}$، S باید دارای سوپریمم باشد که M می‌نامیم. لذا برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$na \leq M \Longrightarrow (n+1)a \leq M \Longrightarrow na \leq M - a$$

یعنی، $M-a$ یک کران بالا از S است. بنابراین عددی کوچکتر از sup، کران بالاست و این تناقض نتیجه را ثابت می‌کند. ■

لذا دستگاه اعداد حقیقی می‌تواند دقیقاً بصورت میدان مرتب ارشمیدسی کامل توصیف شود. امّا هر دو میدان مرتب ارشمیدسی کامل در این مفهوم غیر قابل تشخیص‌اند، چه یک تناظر ۱ـ۱ (یک به یک) بین آنها وجود دارند که اعمال دوتایی را نیز حفظ می‌کند. این حقیقت را بدون برهان می‌پذیریم و دستگاه اعداد حقیقی را بعنوان میدان مرتب ارشمیدسی کامل تعریف می‌کنیم.

۱۶ نمایش اعشاری. فرض کنیم x هر عدد حقیقی مثبت باشد. آنگاه بنابه قضیهٔ ۱۵ می‌توانیم عدد صحیح مثبت n را چنان پیدا کنیم که

$$n \leq x < (n+۱).$$

فرض کنیم d_i $(i \in \mathbb{N})$ عددی از مجموعهٔ $\{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$ باشد. مجموعهٔ E را بصورت زیر در نظر بگیرید:

$$E = \{n + \frac{d_۱}{۱۰} + \frac{d_۲}{۱۰^۲} + \cdots + \frac{d_k}{۱۰^k} : \quad k = ۰, ۱, ۲, \cdots\}.$$

آنگاه $x = \text{lub} \;\; E$. بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$x = n + \frac{d_۱}{۱۰} + \frac{d_۲}{۱۰^۲} + \cdots = n.d_۱ d_۲ d_۳ \cdots .$$

این *نمایش اعشاری* یک عدد حقیقی نامیده می‌شود.

ممکن است اینگونه به نظر برسد که همهٔ اعداد گویا دارای تعداد متناهی عدد متناوب بعد از نقطه اعشار در نمایش اعشاری خواهد بود.

۵. مجموعه‌های شمارا و ناشمارا

به تجربه می‌دانیم که یک بچه قبل از هر چیز بطور صوری شمارش را می‌داند، او بطور شهودی در زمین به جوردادن یا گذاشتن دو مجموعه از اشیاء در تناظر یک به یک تسلط

پیدا می‌کند و چنین چیزی تناظر دوسویی نامیده می‌شود. حال بطور صوری مفهوم جوردادن را به شکل یک تعریف توضیح می‌دهیم.

۱ تعریف. فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند. A و B هم‌ارز نامیده می‌شوند و بصورت $A \sim B$ می‌نویسیم هرگاه یک تابع دوسویی $f : A \to B$ موجود باشد.

هرگاه A مجموعه‌ای متناهی با n عنصر باشد و $A \sim B$، آن گاه B نیز دقیقاً دارای n عنصر است. همچنین هرگاه A یک مجموعهٔ متناهی باشد و $B \subset A$ آن‌گاه B نمی‌تواند هم‌ارز A باشد. امّا این مطلب برای مجموعه‌های نامتناهی درست نیست. حال این مطلب را با دو مثال ساده نشان می‌دهیم.

۲ مثالها (الف) فرض کنیم A نمایش مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح مثبت زوج باشد. آن‌گاه $A \subset \mathbb{N}$. امّا

$$f : \mathbb{N} \to A$$

تعریف شده با $f(n) = ۲n$ یک دوسویی است و بنابراین $A \sim \mathbb{N}$.

(ب) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. امّا $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ تعریف شده بوسیلهٔ

$$f(n) = \begin{cases} ۰ & ; n = ۰ \\ -۲n - ۱ & ; n < ۰ \\ ۲n & ; n > ۰ \end{cases}$$

یک دو سویی است و لذا $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$.

این نشان می‌دهد که مجموعه‌های نامتناهی بصورت زیر قابل دسته‌بندی می‌باشند:

۳ تعریف. یک مجموعهٔ نامتناهی *بطور شمارا نامتناهی* است هرگاه با $\mathbb{N}$ هم‌ارز باشد. یک مجموعه شمارا است هرگاه یا متناهی یا بطور شمارا نامتناهی باشد. یک مجموعه که شمارا نباشد *ناشمارا* نامیده می‌شود.

۴ قضیه. هر زیرمجموعه از یک مجموعهٔ شمارا، شمارا است.

برهان. فرض کنیم A شمارا و $B \subset A$ باشد. نشان خواهیم داد که B شماراست. هرگاه A یا B متناهی باشد، آنگاه بوضوح B شمارا است. حال فرض کنیم که A نامتناهی و B یک زیر مجموعهٔ نامتناهی از A باشد. از آنجا که A شماراست می‌توانیم بنویسیم

$$A = \{x_۱, x_۲, x_۳, \cdots, x_n, \cdots\}.$$

فرض کنیم نگاشت $f : \mathbb{N} \to B$ بصورت $f(۱) = x_{n_۱}$ تعریف شده باشد که $n_۱$ کوچکترین عدد صحیح مثبت است که $x_{n_۱} \in B$. فرض کنیم

$$f(۲) = x_{n_۲}$$

که $n_۲$ کوچکترین صحیح مثبت بزرگتر از $n_۱$ است چنان که $x_{n_۲} \in B$. با ادامهٔ این روش در حالت کلی می‌نویسیم

$$f(k) = x_{n_k}$$

که n_k کوچکترین صحیح مثبت بزرگتر از $n_{k-۱}$ است چنان که $x_{n_k} \in B$. بنابراین یک تناظر یک به یک بین $\mathbb{N}$ و B موجود است و لذا B شمارا است. ■

۵ قضیه. اجتماع شمارا از مجموعه‌های شمارا، شمارش‌پذیر است.

برهان. فرض کنیم $\{A_۱, A_۲, \cdots, A_n, \cdots\}$ خانواده‌ای شمارا از مجموعه‌های شمارا باشد. قرار دهید

$$A = \bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n.$$

نشان خواهیم داد که A شمارا است. از آنجا که هر A_n شمارا است می‌توانیم بنویسیم

$$A_۱ = \{x_{۱۱}, x_{۱۲}, x_{۱۳}, \cdots\}$$

$$A_۲ = \{x_{۲۱}, x_{۲۲}, x_{۲۳}, \cdots\}$$

$$A_۳ = \{x_{۳۱}, x_{۳۲}, x_{۳۳}, \cdots\}.$$

مجموعهٔ A دقیقاً متشکل از همهٔ عناصر لیست شدهٔ بالاست و می‌توانیم این عناصر را بصورت مشخص شده بوسیله سطرها به روش زیر مرتب کنیم:

$$x_{۱۱}; x_{۲۱}, x_{۱۲}; x_{۳۱}, x_{۲۲}, x_{۱۳}; \cdots . \qquad (۱)$$

هرگاه هیچ دو تا از مجموعه‌های A_n دارای عناصر مشترک نباشند، آنگاه عناصر لیست شده در بالا همگی متمایزند و یک تناظر ۱ـ۱ بین $A = \bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n$ و مجموعهٔ $\mathbb{N}$ از اعداد صحیح مثبت وجود دارد که بصورت زیر بدست می‌آید که تصویرها، زیر عناصر نوشته شده‌اند:

$$\begin{array}{ccccccc} x_{۱۱} & x_{۲۱} & x_{۱۲} & x_{۳۱} & x_{۲۲} & x_{۱۳} & \cdots \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & \cdots \end{array}$$

بنابراین A باید شمارا باشد. هرگاه دو مجموعهٔ A_n دارای عناصر مشترک باشند، بیشتر از یکی را در لیست (۱) می‌پذیریم. بنابراین یک زیر مجموعهٔ B از $\mathbb{N}$ چنان موجود است که A و B هم‌ارزند. حال از آنجا که B زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ شمارای $\mathbb{N}$ است، شماراست و بنابراین A شماراست. ■

۶ قضیه. مجموعهٔ $\mathbb{R}$ از همهٔ اعداد حقیقی ناشمارا است.

برهان. ابتدا بازهٔ باز $(۰, ۱)$ را که زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ است در نظر می‌گیریم. از نمایش اعشاری اعداد حقیقی استفاده کنید و فرض کنید که مجموعهٔ همه اعداد حقیقی در $(۰, ۱)$ شمارش‌پذیر باشد، می‌نویسیم $A = (۰, ۱)$ و

$$A = \{x_n;\ ۰ < x_n < ۱\ \ n = ۱, ۲, ۳, \cdots\}$$

که

$$x_۱ = ۰/d_{۱۱}d_{۱۲}d_{۱۳}\cdots$$
$$x_۲ = ۰/d_{۲۱}d_{۲۲}d_{۲۳}\cdots$$
$$\vdots$$
$$x_n = ۰/d_{n۱}d_{n۲}d_{n۳}\cdots$$

که $D = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\} \ni d_{ij}$ برای هر $i, j = ۱, ۲, ۳, \cdots$. حال عدد حقیقی $x_۰$ را چنان درست می‌کنیم که

$$x_۰ = ۰/d_۱d_۲d_۳\cdots$$

و در آن برای $i = ۱, ۲, ۳, \cdots$، $d_i \in D$. برای $i = ۱, ۲, ۳, \cdots$ قرار دهید

$$d_i = \begin{cases} ۱ & ; d_{ii} \neq ۱ \\ ۲ & ; d_{ii} = ۱ \end{cases}.$$

بنابراین $x_۰ \in (۰, ۱)$. امّا

$$x_۰ \neq x_i \qquad \text{برای هر } i = ۱, ۲, ۳, \cdots$$

ایجاب می‌کند که $x_۰ \notin A$. این تناقض نشان می‌دهد که $(۰, ۱)$ ناشمارا است و $\mathbb{R}$، بعنوان یک ابر مجموعه از $(۰, ۱)$ نیز، بنابه قضیهٔ ۴، ناشمارا خواهد بود. ■

نتیجه. هر بازهٔ (a, b) روی $\mathbb{R}$ ناشمارا است. این با کمک گرفتن از اینکه $(۰, ۱)$ ناشماراست و تبدیل

$$f(x) = a + (b - a)x$$

که $(۰, ۱)$ را بروی (a, b) می‌نگارد (بعنوان یک تناظر یک به یک) قابل اثبات می‌باشد.

۶. مجموعه‌ها و بازه‌ها

مجموعهٔ A تعریف شده با

$$A = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

که a و b حقیقی‌اند، *بازهٔ باز* نامیده می‌شود و با (a, b) نمایش داده می‌شود. بطور مشابه مجموعهٔ

$$A = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

بازهٔ بسته نامیده می‌شود که با $[a, b]$ نمایش می‌دهند.

همچنین بازه‌های *نیم‌باز* و *نیم‌بسته* نیز داریم. بازهٔ $(a, b]$ از چپ باز و از راست بسته می‌باشد. همینطور بازهٔ $[a, b)$ از چپ بسته و از راست باز می‌باشد. این بازه‌ها به ترتیب نمایش مجموعه‌های $\{x : a < x \leq b\}$ و $\{x ; a \leq x < b\}$ می‌باشند.

۱ تعریف. مجموعهٔ N از اعداد حقیقی δ *همسایگی* از نقطهٔ a نامیده می‌شود هرگاه بازهٔ باز $(a - \delta, a + \delta)$ چنان موجود باشد، که $\delta > 0$، که

$$(a - \delta, a + \delta) \subset N.$$

یک بازهٔ باز، همسایگی از هر کدام از نقاطش است. هرگاه N_1 و N_2 دو همسایگی از نقطهٔ a باشند آنگاه $N_1 \cup N_2$ و $N_1 \cap N_2$ نیز همسایگی‌هایی از نقطهٔ a خواهند بود. نقطهٔ x از مجموعهٔ E *نقطهٔ درونی* نامیده می‌شود هرگاه $\delta > 0$ چنان موجود باشد که

$$(x - \delta, x + \delta) \subset E.$$

مجموعهٔ E از اعداد حقیقی *باز* نامیده می‌شود هرگاه هر نقطه‌اش، نقطهٔ درونی باشد. یک بازهٔ باز، مجموعهٔ باز است.

فرض کنیم E زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ و $x \in \mathbb{R}$ باشد. هرگاه هر همسایگی از x حاوی حداقل یک نقطه از E به غیر از x باشد، آنگاه x *نقطهٔ حدّی* E نامیده می‌شود؛ x ممکن است در E باشد یا نباشد.

هرگاه همهٔ نقاط حدّی E در خود E باشند آن‌گاه E مجموعهٔ بسته نامیده می‌شود.
متمم یک مجموعهٔ بسته، مجموعهٔ باز است.
یک نقطه که نقطهٔ حدی از یک مجموعه نباشد نقطهٔ *تنها* از مجموعه نامیده می‌شود.

۲ قضیه (بولتزانو-وایراشتراس) هر مجموعهٔ کراندار نامتناهی دارای یک نقطهٔ حدی است.

۷. اعداد مختلط

یک عدد مختلط z زوج مرتب (a,b) از اعداد حقیقی است. اعداد حقیقی a و b به ترتیب قسمت‌های حقیقی و موهومی z نامیده می‌شوند. بطور نمادین می‌نویسیم $a = \mathrm{Re}z$ و $b = \mathrm{Im}z$. دو عدد مختلط $z_۱ = (a_۱, b_۱)$ و $z_۲ = (a_۲, b_۲)$ مساوی نامیده می‌شوند اگر و تنها اگر $a_۱ = a_۲$ و $b_۱ = b_۲$. $\mathbb{C}$ را برای نمایش مجموعهٔ همهٔ اعداد مختلط بکار می‌بریم. جمع و ضرب در $\mathbb{C}$ بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$z_۱ + z_۲ = (a_۱ + a_۲, b_۱ + b_۲)$$

$$z_۱.z_۲ = (a_۱a_۲ - b_۱b_۲, a_۱b_۲ + a_۲b_۱).$$

با جمع و ضرب تعریف شده در بالا، $\mathbb{C}$ تبدیل به یک میدان می‌شود. براحتی می‌توان دید که جمع و ضرب در خاصیت شرکتپذیری، جابجایی و قوانین پخش‌پذیری صدق می‌کنند و بررسی این قوانین را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. اعداد مختلط $(۰, ۰)$ و $(۱, ۰)$ خنثای جمع و ضرب در $\mathbb{C}$ می‌باشند. اعمال تفریق و تقسیم در $\mathbb{C}$ بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$z_۱ - z_۲ = (a_۱ - a_۲, b_۱ - b_۲)$$

$$\frac{z_۱}{z_۲} = (\frac{a_۱a_۲ - b_۱b_۲}{a_۲^۲ + b_۲^۲}, \frac{a_۲b_۱ - a_۱b_۲}{a_۲^۲ + b_۲^۲})$$

که در آن $z_2 = (a_2, b_2) \neq (0, 0)$.

توجه کنیم که برای $a, b \in \mathbb{R}$ خواص زیر برقرارند:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0),$$

$$(a, 0).(b, 0) = (ab, 0),$$

$$\frac{(a, 0)}{(b, 0)} = (\frac{a}{b}, 0) \quad ; b \neq 0.$$

می‌توانیم عدد مختلط $(a, 0)$ را با عدد حقیقی a یکی بگیریم و با این یکسان سازی ممکن است $\mathbb{R}$ بعنوان یک زیر مجموعه از $\mathbb{C}$ در نظر گرفته شود. می‌بینیم که عدد مختلط (a, b) بیشتر بصورت $a + ib$ نوشته می‌شود که $i = (0, 1)$ است. وقتی $(a, 0)$ و $(b, 0)$ را به ترتیب با a و b یکی بگیریم، آن‌گاه

$$\begin{aligned} a + ib &= (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = (a, 0) + (0, b) \\ &= (a, b). \end{aligned}$$

توجه کنیم که $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$. توجه کنیم که معادلهٔ $z^2 + 1 = 0$ در $\mathbb{R}$ دارای جواب نیست، امّا این معادله در $\mathbb{C}$ قابل حل است، که ریشه‌های آن $\pm i$ می‌باشند. در حقیقت هر معادله با ضرایب مختلط دارای یک ریشه (در حقیقت همهٔ ریشه‌ها) در $\mathbb{C}$ است. در برهان این، از ایده آنالیز مختلط استفاده می‌شود و در اینجا آن را اثبات نمی‌کنیم.

۱ تعریف. هرگاه $z = (a, b)$، آن‌گاه عدد حقیقی نامنفی منحصر به فرد $\sqrt{a^2 + b^2}$ ***قدرمطلق*** یا ***کالبد*** z نامیده و بصورت $|z|$ نوشته می‌شود. عدد مختلط $(a, -b)$ ***مزدوج*** z نامیده می‌شود و بصورت $\bar{z}$ نوشته می‌شود.

۲ قضیه. هرگاه $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ آن‌گاه

(الف) $|z| \geq 0$، $|z| = 0$ اگر و فقط اگر $z = 0$،

(ب) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$،

(ج) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$،

(د) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$،

(ه) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$،

(و) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$،

(ح) $z\overline{z} = |z|^2$،

(ط) $z + \overline{z}$ حقیقی است،

(ی) $z \in \mathbb{R} \Longleftarrow z = \overline{z}$،

(ک) $2\mathrm{Re}\ z = z + \overline{z}$ و $2i\mathrm{Im}\ z = z - \overline{z}$،

(ل) $\overline{\overline{z}} = z$.

برهان. فقط (ج) را ثابت می‌کنیم. برای $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$،

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\
&= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \\
&\le |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 z_2| \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\
&= (|z_1|^2 + |z_2|^2).\blacksquare
\end{aligned}$$

۳ قضیه. میدان $\mathbb{C}$ مرتب نیست.

برهان. فرض کنیم، به برهان خلف، که زیر مجموعهٔ P از $\mathbb{C}$ موجود باشد که $i \in P$ یا $-i \in P$.

هرگاه $i \in P$، آنگاه $i^2 = -1 \in P$ و این تناقض است.

هرگاه $-i \in P$، آنگاه $(-i)^2 = -1 \in P$ و این تناقض است. $\blacksquare$

تمرینات

۱. کدامیک از گزاره‌های زیر درست و کدامیک نادرست است:

(الف) هر زیر مجموعهٔ کراندار از $\mathbb{Q}$ همیشه دارای کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پائین در $\mathbb{Q}$ است.

(ب) مجموعهٔ $\mathbb{Q}^c$ از اعداد گنگ در خاصیت تمامیت صدق می‌کند (که بعنوان خاصیت کوچکترین کران پائین می‌شناسیم).

(ج) $\mathbb{Q}^c \cap \mathbb{Q} = \phi$.

(د) $\mathbb{Z} \cup \mathbb{R} = \mathbb{Z}$.

(ه) $\mathbb{R} \cup (\mathbb{Q}^c \cap \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^c$.

(و) $a > b \Longleftarrow \frac{۱}{a} < \frac{۱}{b}$.

(ز) برای هر $a, b, c \in \mathbb{R}$، $a < b \Longleftarrow a + c < b + c$.

(ح) $a < b \Longleftarrow a \leq b$.

(ط) هیچ عدد گنگی دارای نمایش اعشاری نیست.

(ی) $A = \{x :\ ۰ < x < ۱\}$ شمارش‌پذیر است.

(ک) $A = \mathbb{Z} \cup \{\frac{۱}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ ناشماراست.

(ل) $A = \cup_{i=۱}^{\infty} \{x : ۱ - \frac{۱}{i} < x < \frac{۱}{i}\}$ ناشماراست.

(م) مجموعهٔ همهٔ اعداد گنگ $\mathbb{Q}^c$ شماراست.

(ن) $A = \{x : a < x < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$ دارای نقطهٔ حدی نیست.

(س) مجموعهٔ $\{۱, ۰, -۱\}$ تحت ضرب بسته است.

(ع) مجموعهٔ همه اعداد مختلط $\mathbb{C}$ یک میدان مرتب است.

(ف) هرگاه $z \in \mathbb{C}$ آن‌گاه $z.\overline{z}$ حقیقی است.

(ض) $\mathbb{R} \subset \mathbb{Z}$.

۲. هرگاه $z_۱$ و $z_۲$ اعداد مختلط باشند ثابت کنید که

$$|z_۱| - |z_۲| \leq |z_۱ - z_۲|.$$

۳. هرگاه $z_{۱}$، $z_{۲}$، $\cdots$، z_n اعداد مختلط باشند ثابت کنید که

$$|z_{۱}+z_{۲}+\cdots+z_n| \leq |z_{۱}|+|z_{۲}|+\cdots+|z_n|.$$

۴. مثالهایی از مجموعه‌هایی بیاورید که

(الف) کراندار باشد،

(ب) کراندار نباشد،

(ج) از پائین کراندار باشد امّا از بالا کراندار نباشد،

(د) از بالا کراندار باشد امّا از پائین کراندار نباشد.

۵. اینفیمم و سوپریمم مجموعه‌های زیر را پیدا کنید:

(الف) $\{\frac{۱}{n}; n\in\mathbb{N}\}$.

(ب) $\{\frac{(-۱)^n}{n} : n\in\mathbb{N}\}$.

(ج) $\{۱+\frac{(-۱)^n}{n} : n\in\mathbb{N}\}$

۶. فرض کنید A یک مجموعهٔ ناتهی از اعداد حقیقی باشد که از پائین کراندار است.
قرار دهید

$$-A=\{-x : x\in A\}$$

نشان دهید که

$$\inf A = -\sup(-A).$$

۷. ثابت کنید که برای $x\in\mathbb{R}$، $|x|=\max\{x,-x\}$.

۸. بزرگترین کران پائین و کوچکترین کران بالای مجموعهٔ A را پیدا کنید که

$$A=\{\frac{n+۳}{n+۱} : n\in\mathbb{N}\}.$$

۹. ثابت کنید که مجموعهٔ

$$A=\{n/d_{۱}d_{۲} : n\in\mathbb{N}, \text{هر تک عددی می‌باشند } d_{۲}, d_{۱}\}$$

شمارش‌پذیر است.

۱۰. برای $z = (a, b)$، که b, a اعداد حقیقی ناصفرند، $z^{-۱}$ را چنان پیدا کنید که

$$zz^{-۱} = ۱.$$

۱۱. برای $x \in \mathbb{R}$ نشان دهید که

$$|x| < a \Longrightarrow -a < x < a.$$

۱۲. ثابت کنید که یک زیرمجموعهٔ نامتناهی از یک مجموعهٔ شمارا، شمارش‌پذیر است.

۱۳. در مجموعهٔ اعداد مختلط $\mathbb{C}$ رابطهٔ $\leq$ را بصورت زیر تعریف کنید:

$$z_۱ = (x_۱, y_۱) \leq z_۲ = (x_۲, y_۲) \Longleftrightarrow x_۱ \leq x_۲ \quad \text{و} \quad y_۱ \leq y_۲.$$

نشان دهید که این یک رابطهٔ ترتیب جزئی است امّا رابطهٔ ترتیب خطی روی $\mathbb{C}$ نیست.

۱۴. هرگاه A و B زیرمجموعه‌های کراندار از $\mathbb{R}$ باشند، آن‌گاه نشان دهید که $A \cap B$ و $A \cup B$ کراندار هستند. علاوه بر این

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$$

$$\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B).$$

۱۵. نشان دهید که هیچ عدد گویایی وجود ندارد که مربع آن ۳ باشد.

۱۶. نشان دهید که glb (بزرگترین کران پائین) یک زیر مجموعه از $\mathbb{R}$ که از پائین کراندار است منحصر به فرد می‌باشد.

۱۷. نشان دهید که $[۰, ۱]$ ناشمارا است.

۱۸. نشان دهید که $(۰, ۱)$ و $\mathbb{R}$ هم‌ارزند.

[راهنمایی: نگاشت $g : (۰, ۱) \to \mathbb{R}$ با $g(x) = \tan\frac{\pi}{۲}(۲x - ۱)$ تعریف کنید و نشان دهید که g ۱ – ۱ و پوشاست.]

۱۹. هرگاه A زیرمجموعهٔ کراندار ناتهی از $\mathbb{R}$ باشد و B مجموعهٔ همه کران‌های بالای A باشد، ثابت کنید که

$$\mathrm{glb} B = \mathrm{lub} A.$$

۲۰. هرگاه $f : A \to B$ تابع و برد f ناشمارا باشد، ثابت کنید که دامنهٔ f ناشمارااست.

۲

فضاهای متریک

۱. تعریف و مثالها

۱ تعریف. فرض‌کنیم X یک مجموعهٔ ناتهی باشد. یک متر روی X، نگاشتی است مانند $d : X \times X \to \mathbb{R}$ چنان که برای هر $x, y, z \in X$،

(الف) $d(x, y) \geq 0$، $d(x, y) = 0 \iff x = y$،

(ب) $d(x, y) = d(y, x)$،

(ج) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

مجموعهٔ X به‌همراه متر تعریف شده روی آن *فضای متریک* نامیده می‌شود و با (X, d) نمایش می‌دهند. در صورتی که دچار اشتباه نشویم، فضای متریک را با X نمایش می‌دهیم.

مثالهای زیر از فضاهای متریک را در نظر بگیرید:

۲. مثالها (الف) فرض کنیم X یک مجموعهٔ ناتهی باشد. آن‌گاه می‌توانیم یک فضای متریک را به روش بدیهی درست کنیم. برای این منظور تعریف کنید

$$d : X \times X \to \mathbb{R} \;\; ; d(x,y) = \begin{cases} 0 & ; x = y \\ 1 & ; x \neq y \end{cases}.$$

بررسی اینکه d یک متر روی X است را به خواننده واگذار می‌کنیم. d متر بدیهی نامیده می‌شود.

(ب) خط حقیقی $\mathbb{R}$ با متر تعریف شده با

$$d(x,y) = |x-y|; \quad x, y \in \mathbb{R}$$

یک فضای متریک است که $|x-y|$ قدرمطلق $x-y$ را نشان می‌دهد. در حقیقت $|x-y|$ نمایش فاصله بین دو نقطه x, y روی خط حقیقی است و این متر، متریک معمولی یا متریک *استاندارد* روی $\mathbb{R}$ نامیده می‌شود.

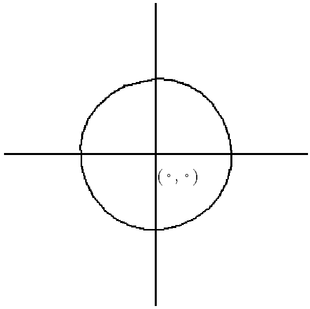
(ج) صفحهٔ دو بعدی $\mathbb{R}^2$ و مجموعهٔ همهٔ اعداد مختلط $\mathbb{C}$ غیر قابل تمایزند بدین معنی که یک تناظر یک به یک بین آنها موجود است، نگاشتی، که هر نقطهٔ $x = (x_1, x_2)$ را به $x = x_1 + ix_2$ نظیر می‌کند یک نگاشت دوسویی است. بنابراین $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{C}$ را یکی می‌گیریم و آن را *صفحهٔ مختلط* می‌نامیم. تحقیق اینکه $\mathbb{C}$ با متر d تعریف شده بصورت

$$d(x,y) = ||x-y|| = [(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2]^{\frac{1}{2}}$$

که در آن $x = (x_1, x_2)$ و $y = (y_1, y_2)$ در $\mathbb{C}$ می‌باشند، فضای متریک است به‌عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده واگذار می‌کنیم. این متر، متریک *معمولی* یا متریک *استاندارد* روی $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}^2$ نامیده می‌شود. در این متر، مجموعهٔ

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, 0) < r\}$$

نمایش مجموعهٔ همهٔ نقاط داخل دایره به مرکز مبدأ و شعاع r می‌باشد (شکل ۱.۲) اکنون مثال‌های دیگری از مترهای روی $\mathbb{R}^2$ را می‌آوریم که متفاوت از فاصله بین دو نقطه



شکل ۱.۲

می‌باشد. مثال‌های بالا این را به خواننده القاء خواهد کرد که روی یک مجموعهٔ می‌تواند بیشتر از یک متر وجود داشته باشد و لذا فضاهای متریک متفاوتی بدست خواهیم آورد.

۳ مثالها. (الف) فرض کنیم $X = \mathbb{R}^۲$. برای $x = (x_۱, x_۲)$ و $y = (y_۱, y_۲)$ در $\mathbb{R}^۲$ تعریف می‌کنیم

$$d(x, y) = \max(|x_۱ - y_۱|, |x_۲ - y_۲|).$$

برای $x, y, z \in \mathbb{R}^۲$ می‌بینیم که برای $i = ۱, ۲$

$$|x_i - z_i| = |(x_i - y_i) + (y_i - z_i)| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\max(|x_۱ - z_۱|, |x_۲ - z_۲|) &\leq \max(|x_۱ - y_۱|, |x_۲ - y_۲|)\\ &\quad + \max(|y_۱ - z_۱|, |y_۲ - z_۲|)\end{aligned}$$

و لذا

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

خواننده باید اصول (الف) و (ب) را تحقیق کند و بررسی کند که d یک متر روی $\mathbb{R}^۲$ می‌باشد. این متر، متر مربع روی $\mathbb{R}^۲$ نامیده می‌شود.
برای هر $x \in \mathbb{R}^۲$ مجموعهٔ

$$S_r = \{x \in \mathbb{R}^۲; d(x, ۰) < r\}$$

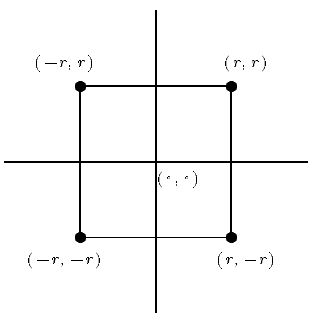
که ۰ نمایش $(۰, ۰) \in \mathbb{R}^۲$ می‌باشد و $r > ۰$.
مشاهده می‌کنیم که هرگاه $x \in S_r$، آن‌گاه

$$\max(|x_۱|, |x_۲|) < r.$$

بنابراین $|x_۱| < r$ و $|x_۲| < r$. یعنی اینکه

$$-r < x_۱ < r \qquad \text{و} - r < x_۲ < r.$$

لذا x باید نقطه داخلی مربعی باشد که رأس‌های آن $(-r, -r)$، $(r, -r)$، (r, r) و $(-r, r)$ هستند و لذا نام متریک مربع توجیه شده است (شکل ۲.۲)



شکل ۲.۲

(ب) فرض کنیم $X = \mathbb{R}^۲$ و برای $x, y \in \mathbb{R}^۲$ تعریف کنید

$$d(x, y) = |x_۱ - y_۱| + |x_۲ - y_۲|.$$

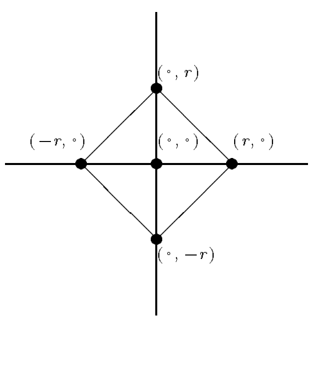
این نیز یک متر روی $\mathbb{R}^۲$ می‌باشد. فقط نامساوی مثلثی را ثابت می‌کنیم. بررسی اصول دیگر به عنوان تمرین برای خواننده باقی می‌ماند. فرض کنیم $x, y, z \in \mathbb{R}^۲$. آن‌گاه

$$\begin{aligned} d(x,z) &= |x_۱ - z_۱| + |x_۲ - z_۲| \\ &= |x_۱ - y_۱ + y_۱ - z_۱| + |x_۲ - y_۲ + y_۲ - z_۲| \\ &\leq (|x_۱ - y_۱| + |y_۱ - z_۱|) + (|x_۲ - y_۲| + |y_۲ - z_۲|) \\ &= (|x_۱ - y_۱| + |x_۲ - y_۲|) + (|y_۱ - z_۱| + |y_۲ - z_۲|) \\ &= d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

در این متر مجموعهٔ

$$S_r = \{x \in \mathbb{R}^۲ : d(x, ۰) < r\}$$

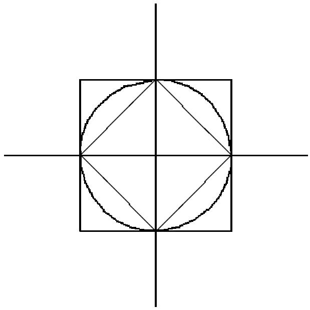
مجموعهٔ همهٔ نقاط داخل مربعی است که رئوس آن $(r, ۰)$، $(۰, r)$، $(-r, ۰)$ و $(۰, -r)$ می‌باشند (شکل ۳.۲)



شکل ۳.۲

مجموعهٔ S_r در $\mathbb{R}^۲$ متناظر با هر کدام از مترهای تعریف شده در مثال‌های ۲ (ج)، ۳

(الف) و ۳ (ب) می‌تواند بوسیلهٔ یک نمودار همانند آنچه که در شکل ۴.۲ آمده نمایش داده شود.



شکل ۴.۲

در سراسر این کتاب، مگر خلاف آن توضیح داده شده باشد، $\mathbb{R}$ خط حقیقی را با متریک استاندارد نمایش خواهد داد. بطور مشابه $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}^{2}$ برای نمایش صفحهٔ مختلط با متریک استاندارد خواهد بود.

۲. مجموعه‌های باز

۱ تعریف. فرض کنیم (X, d) فضای متریک باشد. فرض کنیم $a \in X$ و $r > 0$ باشد. مجموعهٔ

$$S_r(a) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$$

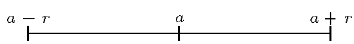
یک *همسایگی* (یا *گوی باز*) نامیده می‌شود. نقطهٔ a *مرکز* و r *شعاع* $S_r(a)$ نامیده می‌شود.

از آنجا که $d(a, a) = 0 < r$ بنابراین $a \in S_r(a)$. پس توجه کنیم که $S_r(a)$ همیشه ناتهی است.

حال به مثال‌هایی از گوی‌های باز توجه کنید.

۲ مثالها. (الف) فرض کنیم (X,d) خط حقیقی $\mathbb{R}$ (با متریک استاندارد) باشد. فرض کنیم $a \in \mathbb{R}$ و $r > 0$ باشد. آن‌گاه

$$\begin{aligned} S_r(a) &= \{x \in \mathbb{R}; |x-a| < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -r < x - a < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : a - r < x < a + r\} \\ &= (a-r, a+r) \end{aligned}$$



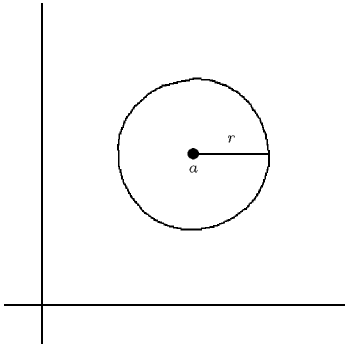
شکل ۵.۲

(ب) فرض کنیم $X = \mathbb{R}^2$ با متر استاندارد باشد. فرض کنیم $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ و $r > 0$. آن‌گاه

$$S_r(a) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2) < r^2\}$$

و این مجموعهٔ همه نقاط داخل دایره به شعاع r و مرکز a می‌باشد (شکل ۶.۲).

(ج) فرض کنیم X هر مجموعه‌ای با متر بدیهی d باشد. فرض کنیم $a \in X$. در این حالت $d(x,a) = 1$ هرگاه $x \neq a$. بنابراین ایجاب می‌کند که $S_r(a) = \{a\}$ هرگاه $0 < r \leq 1$ و $S_r(a) = X$ هرگاه $r > 1$.



شکل ۶.۲

۳ تعریف. فرض کنیم (X,d) فضای متریک و $A \subset X$ باشد. نقطه $a \in A$ *نقطه درونی* A نامیده می‌شود هرگاه $r > ۰$ چنان موجود باشد که $S_r(a) \subset A$. مجموعهٔ $G \subset X$ مجموعهٔ *باز* نامیده می‌شود هرگاه هر نقطهٔ G یک نقطهٔ درونی از G باشد. بعبارت دیگر، G باز است هرگاه برای هر $a \in G$، یک $r > ۰$ چنان موجود باشد که $S_r(a) \subset G$.

۴ مثالها. (الف) فرض کنیم $X = \mathbb{R}$. قرار دهید $A = (۰, ۱) \subset \mathbb{R}$. آن‌گاه هر نقطه از A یک نقطهٔ درونی است و بنابراین A یک مجموعهٔ باز است. برای اثبات این، فرض کنیم $a \in A$ باشد. از آنجا که $a \neq ۰$ و $a \neq ۱$،

$$|a - ۰| = r_۱ > ۰ \quad , \quad |a - ۱| = r_۲ > ۰.$$

قرار دهید $r = \min(r_۱, r_۲) > ۰$. آن‌گاه بوضوح

$$S_r(a) = (a - r, a + r) \subset (۰, ۱).$$

بنابراین a یک نقطهٔ درونی A است. از آنجا که انتخاب a دلخواه بود این ایجاب می‌کند که هر نقطهٔ A یک نقطهٔ درونی باشد و بنابراین A باز است.

(ب) فرض کنیم $X = \mathbb{R}$ و $A = (۰, ۱]$. همانند بالا می‌توان نشان داد که برای هر $A \ni a \neq ۱$، $r > ۰$ چنان موجود است که

$$S_r(a) = (a - r, a + r) \subset (۰, ۱].$$

امّا هیچ $r > ۰$ای وجود ندارد که

$$S_r(۱) = (۱ - r, ۱ + r)$$

در $(۰, ۱]$ قرار بگیرد. بنابراین هر نقطه از A به غیر از ۱ یک نقطهٔ درونی A است و لذا A باز نیست.

بطور مشابه، اگر $A = [۰, ۱)$ انتخاب کنیم، آن‌گاه هر نقطه از A به غیر از ۰ نقطه درونی A است و در بازهٔ بستهٔ $[۰, ۱]$ هر نقطه یک نقطه درونی است، بجز نقاط انتهای ۰ و ۱.

(ج) فرض کنیم $X = \mathbb{R}^۲$ و قرار دهید

$$A = \{x = (x_۱, x_۲) \in \mathbb{R}^۲ : x_۱^۲ + x_۲^۲ < ۱\}.$$

آن‌گاه هر نقطه از A یک نقطهٔ درونی است و بنابراین A باز است.

برای نشان دادن این مطلب، فرض‌کنیم $x \in A$. آن‌گاه $d(x, ۰) = x_۱^۲ + x_۲^۲ < ۱$. بنابراین $۱ - d(x, ۰) = r > ۰$. حال

$$S_r(x) = \{y : d(x, y) < r\} \subset A.$$

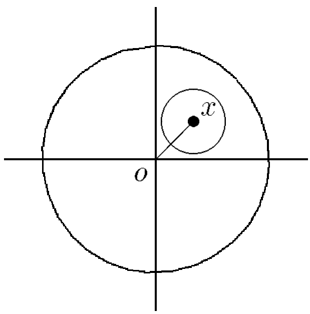
از آنجا که، هرگاه $y \in S_r(x)$، آن‌گاه $d(x, y) < r$ و بنابراین

$$\begin{aligned} d(y, ۰) &\leq d(y, x) + d(x, ۰) \\ &< r + d(x, ۰) \\ &= r + (۱ - r) = ۱. \end{aligned}$$

(د) قرار دهید $X = \mathbb{R}^{۲}$ و

$$A = \{x = (x_{۱}, x_{۲}) \in \mathbb{R}^{۲} : x_{۱}^{۲} + x_{۲}^{۲} \leq ۱\}.$$

این متشکل از همهٔ نقاط داخل و روی دایرهٔ واحد می‌باشد. هر نقطه داخل دایره واحد یک نقطهٔ درونی است، بجز نقاط روی دایرهٔ واحد که نقطهٔ درونی از A نیستند و بنابراین A باز نیست (شکل ۷.۲)



شکل ۷.۲

(ه) مجموعهٔ

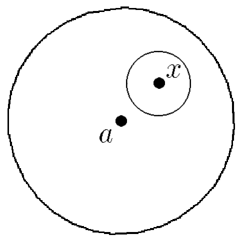
$$A = \{\frac{۱}{n} : n \in \mathbb{N}\}$$

باز نیست. هیچ نقطه‌ای از A نقطهٔ درونی نیست.

۵ قضیه. هر گوی باز در فضای متریک، یک مجموعهٔ باز است.

برهان. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد. فرض کنیم $S_r(a)$ یک گوی باز در X باشد و $x \in S_r(a)$. یک گوی باز به مرکز x را چنان خواهیم ساخت که مشمول در $S_r(a)$ باشد. ازآنجاکه $x \in S_r(a)$، $d(x, a) < r$. بنابراین $r_{۱} = r - d(x, a) > ۰$

(شکل **۸.۲**). حال $S_{r_1}(x) \subset S_r(a)$. برای نشان دادن این، فرض کنیم $y \in S_{r_1}(x)$.



شکل ۸.۲

آن‌گاه $d(y,x) < r_1$. بنابراین

$$\begin{aligned} d(y,a) &\le d(y,x) + d(x,a) \\ &< r_1 + d(x,a) \\ &= r - d(x,a) + d(x,a) \\ &= r. \end{aligned}$$

بنابراین $y \in S_r(a)$ و این اثبات را کامل می‌کند. ■

۶ قضیه. زیر مجموعهٔ G در فضای متریک (X,d) باز است اگر و تنها اگر اجتماعی از گوی‌های باز باشد.

برهان. فرض کنیم (X,d) فضای متریک و $G \subset X$ مجموعه‌ای باز باشد. آن‌گاه هر نقطهٔ G مرکز یک گوی باز مشمول در G می‌باشد. بنابراین G اجتماع همهٔ گوی باز

مشمول در آن می‌باشد.

برعکس؛ فرض کنیم G اجتماع گردآیه‌ای از گوی‌های باز باشد و $x \in G$. آن‌گاه x باید در گوی بازی مانند $S_r(a) \subset G$ قرار بگیرد. از آنجا که $S_r(a)$ مجموعه‌ای باز است و $x \in S_r(a)$، گوی باز $S_{r_۱}(x)$ مشمول در $S_r(a)$ وجود دارد. بنابراین $S_{r_۱}(x) \subset G$ و لذا G باز است. ■

۷ قضیه. فرض کنیم (X, d) فضای متریک باشد. آن‌گاه

(الف) ϕ و X مجموعه‌های باز هستند.

(ب) اجتماع هر تعداد از مجموعه‌های باز در X باز است،

(ج) اشتراک هر تعداد متناهی از مجموعه‌های باز در X باز است.

برهان. (الف) هرگوی باز به مرکز هر نقطه از X بوضوح مشمول در X است و بنابراین X باز می‌باشد. بوضوح شرایط تعریف مجموعهٔ باز برای مجموعهٔ ϕ صدق می‌کند و لذا ϕ باز است.

(ب) فرض کنیم $\{G_i : i \in I\}$، که I یک مجموعهٔ اندیسگذار می‌باشد، خانواده‌ای از مجموعه‌های باز در X باشد و قرار دهید $G = \bigcup\limits_{i \in I} G_i$. هرگاه G_iها تهی باشند، آن‌گاه G تهی است و بنابراین باز است. فرض کنیم G_i ها ناتهی باشند. از آنجا که هر G_i اجتماعی از گوی‌های باز است، G اجتماعی از چنین گوی‌های باز خواهد بود و لذا باز است.

(ج) فرض کنیم $\{G_i : i = ۱, ۲, \cdots, n\}$ گردآیه‌ای متناهی از مجموعه‌های باز در X باشد و قرار دهید $G = \cap_{i=۱}^{n} G_i$. هرگاه $\{G_i\}$ تهی باشد، آن‌گاه $G = X$ و لذا باز است. فرض کنیم که $\{G_i\}$ ناتهی باشد. هرگاه G تهی باشد، آن‌گاه بوضوح باز است. بنابراین فرض کنیم که $G \neq \phi$ و $x \in G$ باشد. آن‌گاه برای هر $i = ۱, ۲, \cdots, n$، $x \in G_i$. امّا هر G_i باز است. بنابراین برای هر i، $r_i > ۰$ چنان موجود است که $S_{r_i}(x) \subset G_i$. قرار دهید $r = \min(r_۱, r_۲, \cdots, r_n)$. آن‌گاه $S_r(x) \subset \cap_{i=۱}^{n} G_i = G$ و لذا G باز است. ■

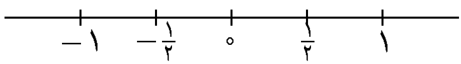
۸ تبصره‌ها. (الف) توجه کنیم که اشتراک هر تعداد از مجموعه‌های باز، لزوماً باز نیست. برای این منظور، قرار دهید $X = \mathbb{R}$ و

$$G_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}\}$$

آن‌گاه هر G_n یک بازهٔ باز در $\mathbb{R}$ است و لذا یک مجموعهٔ باز می‌باشد. امّا در این حالت

$$\cap_{n=1}^{\infty} G_n = \cap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$$

که مجموعهٔ باز نیست. (شکل ۹.۲)



شکل ۹.۲

(ب) در هر فضای متریک (X, d) هر مجموعه تک عضوی (یعنی، مجموعه‌ای که فقط متشکل از یک نقطه است) مجموعهٔ باز نیست.

دیدیم که هر مجموعهٔ باز در هر فضای متریک اجتماعی از گوی‌های باز است. در خط حقیقی، بیشتر چیزها درست است: مثلاً هر مجموعهٔ باز اجتماع شمارش‌پذیر از گوی‌های باز جدا از هم است.

۹ قضیه. هر مجموعهٔ باز روی خط حقیقی، اجتماع شمارایی از بازه‌های باز جدا از هم است و یک چنین نمایشی بدون در نظر گرفتن ترتیب جملات ظاهر شده در اجتماع، منحصر بفرد است.

برهان. فرض کنیم G هر مجموعهٔ بازی در $\mathbb{R}$ باشد. هرگاه G متشکل از یک بازه باشد، آن‌گاه چیزی برای اثبات وجود ندارد. هرگاه اینگونه نباشد، فرض کنیم $a \in G$. از

آنجا که G باز است و $a \in G$، بازهٔ باز I چنان موجود است که $a \in I \subset G$. فرض کنیم I_a بزرگترین بازهٔ باز با خاصیت فوق باشد. یک چنین بازه‌ای وجود دارد، زیرا برای نقطهٔ انتهای چپ آن، glb نقاط انتهایی چپ همهٔ Iها و برای نقطهٔ انتهایی راست، lub نقاط انتهایی راست Iها را قرار می‌دهیم. واضح است که $G = \bigcup_{a \in G} I_a$.

فرض کنیم $b \in G$. آن‌گاه نتیجه می‌گیریم که بازه‌های I_a و I_b یا یکسانند یا جدا از هم‌اند. در غیراینصورت، برای $a \in I_a \cup I_b$، $I_a \subset I_a \cup I_b$ و این متناقض با این حقیقت است که I_a بزرگترین بازه با $a \in I_a \subset G$ می‌باشد. بنابراین G اجتماع جدا از هم از بازه‌های باز می‌باشد.

در ادامه نشان می‌دهیم که خانواده‌ای از تمام چنین بازه‌ها شمارش‌پذیر است، مشاهده می‌کنیم که هر چنین بازه‌ای حاوی یک عدد گویاست و بازه‌های متمایز حاوی اعداد گویای متمایزند. یک عدد گویا را از هر چنین بازه‌های متمایز انتخاب کنید و فرض کنید A مجموعهٔ همه چنین اعداد گویایی را نمایش دهد. حال $A \subset \mathbb{Q}$. امّا $\mathbb{Q}$ شماراست و هر زیر مجموعهٔ از یک مجموعهٔ شمارا، شمارش‌پذیر است. بنابراین A شمارش‌پذیر است. علاوه بر این A در تناظر ۱ـ۱ با خانوادهٔ بازه‌های باز متمایز از هم است که اجتماعشان G می‌باشد و لذا خانواده‌ای از چنین بازه‌ها شمارش‌پذیر است.

در نهایت، برای یکتایی، فرض کنیم که دو نمایش متفاوت از G وجود داشته باشد. آن‌گاه یک نقطه $a \in G$ وجود دارد که به بازه I از نمایش اول و به بازهٔ $J \neq I$ از نمایش دوم متعلق است. از آنجا که $I \neq J$، یکی از آنها باید وسعتش ماوراء دیگری باشد. برای راحتی، فرض کنیم وسعت J ماوراء I باشد. این ایجاب می‌کند که یکی از نقاط انتهایی I متعلق به J است. از آنجا که G باز و نقاط انتهایی I نمی‌توانند متعلق به G باشند که $J \subset G$، این غیر ممکن است. این اثبات قضیه را کامل می‌کند. ■

۳. مجموعه‌های بسته

۱ تعریف. فرض کنیم (X, d) فضای متریک و $A \subset X$ باشد. نقطه $x \in X$ نقطه حدی A نامیده می‌شود هرگاه هرگوی باز به مرکز x حاوی یک نقطه از A به غیر

از x باشد. بویژه، نقطهٔ $x \in \mathbb{R}$ نقطه حدی $A \subset \mathbb{R}$ است، هرگاه برای هر $\varepsilon > ۰$، $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ حاوی نقطه‌ای از A به غیر از x باشد. یک نقطه که نقطهٔ حدی نباشد *نقطهٔ ایزوله (تنها)* نامیده می‌شود. یک مجموعه در فضای متریک بسته نامیده می‌شود هرگاه حاوی همهٔ نقاط حدی‌اش باشد.

۲ مثالها. (الف) قرار دهید $A = \{\frac{۱}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. بنابراین $A = \{۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \cdots\} \subset \mathbb{Q}$. تنها نقطهٔ حدی A، ۰ است که عضو مجموعه نیست. بنابراین A بسته نیست.

(ب) قرار دهید $A = (۰, ۱) \subset \mathbb{R}$.

هر نقطه از A یک نقطهٔ حدی A است. علاوه بر این ۰ و ۱ نیز نقاط حدی A هستند اما آنها در A نیستند. بنابراین A بسته نیست.

(ج) قرار دهید $A = [۰, ۱] \subset \mathbb{R}$.

در این حالت هر نقطه از A نقطهٔ حدّی A است و A دارای هیچ نقطه حدی دیگری نیست. بنابراین A یک مجموعهٔ بسته است.

(د) قرار دهید $A = \{x = (x_۱, x_۲) \in \mathbb{R}^۲ : x_۱^۲ + x_۲^۲ < ۱\}$.

بنابراین A متشکل از همهٔ نقاط داخل دایره واحد به مرکز مبدأ است. در این حالت هر نقطه‌از A یک نقطه حدی A است، علاوه براین هر نقطه روی دایره واحد نیز یک نقطه حدی است.

۳ قضیه. فرض کنید (X, d) فضای متریک و $A \subset X$ باشد. فرض کنید x یک نقطهٔ حدی از A باشد. آن‌گاه هر همسایگی از x حاوی تعداد نامتناهی نقطه از A است.

برهان. به برهان خلف، فرض کنیم همسایگی $S_\varepsilon(x)$ از x چنان موجود است که حاوی تعداد متناهی نقطه از A می‌باشد. فرض کنیم $x_۱$، $x_۲$، $\cdots$، x_n آن نقاطی از A باشند که متفاوت از x هستند و در $S_\varepsilon(x)$ قرار دارند. قرار دهید

$$r = \min \ d(x, x_m) \quad ; \quad m = ۱, ۲, \cdots, n.$$

آن‌گاه $r > 0$ و همسایگی $S_r(x)$ حاوی هیچ نقطه از A به غیر از x نیست. بنابراین x نمی‌تواند نقطه حدی A باشد و این تناقض نتیجه را ثابت می‌کند. ■

۴ نتیجه. یک مجموعهٔ متناهی در هر فضای متریک دارای هیچ نقط حدی نیست.

۵ قضیه. زیر مجموعهٔ A از فضای متریک (X, d) بسته است اگر و تنها اگر متمم آن باز باشد.

برهان. فرض کنیم A بسته باشد. نشان می‌دهیم که A^c باز است. فرض کنیم $x \in A^c$. آن‌گاه $r > 0$ چنان موجود است که $S_r(x) \subset A^c$. هرگاه این نادرست باشد آن‌گاه برای هر $r > 0$، $S_r(x)$ حاوی نقاطی از A می‌باشد و بنابراین x باید نقطه حدی A باشد. از آنجا که A بسته است لذا $x \in A$. این متناقض با این فرض است که $x \in A^c$ و لذا A^c باز است.

برعکس، فرض کنیم A^c باز و x نقطهٔ حدی از A باشد. حال $x \in A$. زیرا هرگاه $x \in A^c$، آن‌گاه از آنجا که A^c باز است، x نقطهٔ درونی از A^c خواهد بود. بنابراین $r > 0$ چنان موجود است که $S_r(x) \subset A^c$. بنابراین $S_r(x)$ حاوی هیچ نقطه‌ای از A نیست و لذا x نمی‌تواند نقطهٔ حدی A باشد. از آنجا که بنابه فرض x یک نقطه حدی دلخواه از A است، این ایجاب می‌کند که A حاوی همه نقاط حدی‌اش است و لذا A باید بسته باشد. ■

۶ تعریف. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک و $x \in X$ و $r > 0$ باشد. گوی بسته به شعاع r و مرکز x بصورت زیر تعریف می‌شود

$$S_r[x] = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}.$$

۷ قضیه. هر گوی بسته در یک فضای متریک مجموعه‌ای بسته است.

برهان. فرض کنیم (X,d) فضای متریک، $x \in X$ و $r > 0$ باشد. نشان خواهیم داد که $(S_r[x])^c$ باز است، یا معادلاً، هر نقطه از $(S_r[x])^c$ یک نقطه درونی است. فرض کنیم $y \in (S_r[x])^c$. آن‌گاه $y \notin S_r[x]$ و لذا $d(x,y) > r$. قرار دهید

$$r_1 = d(x,y) - r > 0.$$

حال ادعا می‌کنیم که $S_{r_1}(y) \subset (S_r[x])^c$. برای نشان دادن این، فرض کنیم $z \in S_{r_1}(y)$. آن‌گاه $d(y,z) < r_1$. حال بنابه نامساوی مثلثی

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,z) + d(z,y) \\ &< r_1 + d(x,z). \end{aligned}$$

بنابراین

$$d(x,z) > d(x,y) - r_1 = r.$$

لذا $z \notin S_r[x]$. در نتیجه $z \in (s_r[x])^c$ و این اثبات را کامل می‌کند. ■

۸ قضیه. فرض کنیم (X,d) فضای متریک باشد. آن‌گاه
(الف) ϕ و X مجموعه‌هایی بسته‌اند،
(ب) اجتماع یک گردآیه متناهی از مجموعه‌های بسته، بسته است،
(ج) اشتراک هرگردآیه دلخواه از مجموعه‌های بسته، بسته است.

برهان. برای اثبات، قضیه ۷ و قوانین دمورگان را استفاده می‌کنیم.
(الف) از آنجاکه X و ϕ مجموعه‌های بازی هستند، $X = \phi^c$ و $\phi = X^c$ مجموعه‌هایی بسته خواهند بود.
(ب) فرض کنیم A_1، A_2، $\cdots$، A_n گردآیه متناهی از مجموعه‌های بسته باشند. آن‌گاه

$$(\cup_{i=1}^n A_i)^c = \cap_{i=1}^n A_i^c.$$

از آنجاکه هر A_i بسته است A_i^c باز می‌باشد و لذا اشتراکشان نیز باز است. پس $\cup_{i=1}^{n} A_i$ بسته است.

(ج) فرض کنیم $\{A_i : i \in I\}$ خانواده‌ای دلخواه از مجموعه‌های بسته باشد داریم

$$(\cap_{i\in I} A_i)^c = \cup_{i\in I} A_i^c.$$

از آنجا که هر A_i بسته است، A_i^c باز می‌باشد. مجموعهٔ $\cup_{i\in I} A_i^c$ که اجتماعی از مجموعه‌های باز است، باز می‌باشد. بنابراین $(\cap_{i\in I} A_i)^c$ باز است و لذا $\cap_{i\in I} A_i$ بسته است. این اثبات را کامل می‌کند. ■

توجه کنیم که ممکن است اجتماع یک گردآیه دلخواه از مجموعه‌های بسته، بسته نباشد. برای مثال، فرض کنیم $X = \mathbb{R}$ و $A_n = [\frac{1}{n}, 2]$ برای $n \in \mathbb{N}$. آن‌گاه هر A_n بسته است امّا

$$\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, 2] = (0, 2]$$

که بسته نیست.

۹ تعریف. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک و $A \subset X$ باشد.

(الف) A *کامل* نامیده می‌شود هرگاه هر نقطه از A یک نقطه حدی از A باشد.

(ب) مجموعهٔ همهٔ نقاط حدی A مجموعهٔ مشتق A نامیده می‌شود و با A' نمایش می‌دهند.

(ج) A در X *چگال* نامیده می‌شود هرگاه $X = A \cup A'$، یعنی اینکه، هرگاه هر نقطه از X یا یک نقطهٔ حدی از A باشد یا یک نقطه از A.

(د) کوچکترین مجموعهٔ بسته حاوی A *بستار* A نامیده می‌شود و آن را با $\overline{A}$ نمایش می‌دهند.

۱۰ مثالها. (الف) هرگاه $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$، آن‌گاه $A' = \{0\}$.

(ب) هرگاه $A = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ آن‌گاه $A' = [0, 1]$ و $\overline{A} = [0, 1]$.

(ج) هرگاه $A = [\circ, \text{۱}] \subset \mathbb{R}$، آن‌گاه $A' = [\circ, \text{۱}] = A$ و $\overline{A} = [\circ, \text{۱}] = A$. بنابراین A کامل است.

(د) قرار دهید $A = \{x = (x_\text{۱}, x_\text{۲}) \in \mathbb{R}^\text{۲} : x_\text{۱}^\text{۲} + x_\text{۲}^\text{۲} < \text{۱}\}$. آن‌گاه

$$A' = \{x = (x_\text{۱}, x_\text{۲}) \in \mathbb{R}^\text{۲} : x_\text{۱}^\text{۲} + x_\text{۲}^\text{۲} \leq \text{۱}\} = \overline{A}.$$

(ه) قرار دهید $A = \{x = (x_\text{۱}, x_\text{۲}) \in \mathbb{R}^\text{۲} : x_\text{۱}^\text{۲} + x_\text{۲}^\text{۲} \leq \text{۱}\}$. در این حالت هر نقطه از A یک نقطه حدی از A است و A هیچ نقطهٔ حدی دیگری ندارد. بنابراین $A' = A = \overline{A}$ و A کامل است.

۱۱ قضیه. فرض‌کنیم (X, d) فضای متریک و $A \subset X$ باشد. آن‌گاه $\overline{A} = A \cup A'$. بعبارت دیگر، بستار A اجتماع نقاط A و نقاط حدی A می‌باشد.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که $A \cup A' \subset \overline{A}$. از آنجا که $A \subset \overline{A}$، بنابراین کافی است نشان دهیم که $A' \subset \overline{A}$. برای این منظور فرض کنیم $x \notin \overline{A}$. آن‌گاه $x \in (\overline{A})^c$. از آنجا که $\overline{A}$ بسته است، $(\overline{A})^c$ مجموعه‌ای باز خواهد بود. بنابراین x یک نقطه درونی از $(\overline{A})^c$ می‌باشد، یعنی $r > \circ$ چنان موجود است که

$$S_r(x) \subset (\overline{A})^c \subset A^c.$$

لذا این ایجاب می‌کند که $S_r(x)$ حاوی هیچ نقطه‌ای از A نباشد و بنابراین x نمی‌تواند نقطه حدی A باشد. در نتیجه $x \notin A'$. پس $A' \subset \overline{A}$ و لذا $A \cup A' \subset \overline{A}$.

برعکس؛ فرض کنیم $x \in \overline{A}$. هرگاه $x \in A$ باشد آن‌گاه $x \in A \cup A'$ و لذا $\overline{A} \subset A \cup A'$. هرگاه $x \notin A$، آن‌گاه نشان می‌دهیم که $x \in A'$، یعنی اینکه x یک نقطه حدی A است. به برهان خلف، فرض کنیم که اینگونه نباشد. آن‌گاه $r > \circ$ چنان موجود است که $S_r(x)$ حاوی هیچ نقطه از A نیست و لذا

$$S_r(x) \subset A^c.$$

بنابراین
$$(S_r(x))^c \supset (A^c)^c = A.$$
از آنجا که $S_r(x)$ باز است، $(S_r(x))^c$ بسته می‌باشد و $(S_r(x))^c \supset (A^c)^c$. لذا
$$(S_r(x))^c \supset \overline{A}.$$
امّا $x \in \overline{A}$ و بنابراین $x \in (S_r(x))^c$. ولی این غیر ممکن است. پس $x \in A'$ و لذا
$$\overline{A} \subset A \cup A'.$$
در نتیجه $\overline{A} = A \cup A'$ و این برهان را کامل می‌کند. ■

۱۲ تبصره. از قضیهٔ بالا نتیجه می‌شود که تعریف چگال بودن یک مجموعه می‌تواند به روش زیر بیان شود: هرگاه A یک زیر مجموعه از فضای متریک X باشد، آن‌گاه A در X چگال نامیده می‌شود هرگاه $\overline{A} = X$.

۴. فشردگی

۱ تعریف. فرض کنیم (X, d) فضای متریک و $E \subset X$ باشد. خانوادهٔ $G = \{G_i : i \in I\}$ از زیر مجموعه‌های باز X یک *پوشش باز* E نامیده می‌شود هرگاه $E \subset \cup_{i \in I} G_i$. هرگاه مجموعهٔ اندیس I متناهی باشد، آن‌گاه G یک *پوشش متناهی* نامیده می‌شود. یک زیر خانواده از یک پوشش که همچنان پوشش است، زیر پوشش از پوشش اصلی نامیده می‌شود.

۲ مثال. فرض کنیم $A_n = (n, n+۳)$ ، $n = ۱, ۲, \cdots$ باشد. آن‌گاه $G = \{A_n : n \in \mathbb{Z}\}$ یک پوشش باز از خط حقیقی $\mathbb{R}$ است. خانواده
$$\{A_n : \text{زوج}\, n\}$$

نیز یک پوشش باز برای $\mathbb{R}$ است، اما این زیر خانواده‌ای از G است و لذا یک زیر پوشش از G می‌باشد.

۳ تعریف. فرض کنیم X فضای متریک و $E \subset Y \subset X$ باشد. گوئیم E نسبت به Y باز است هرگاه برای هر $p \in E$، $r > \circ$ چنان موجود باشد که اگر $q \in Y$ و $d(p,q) < r$ آن‌گاه $q \in E$.

۴ قضیه. فرض کنیم $Y \subset X$. زیر مجموعهٔ E از Y نسبت به Y باز است اگر و فقط اگر به ازای زیر مجموعهٔ بازی چون G از X، $E = Y \cap G$.

برهان. فرض کنیم E نسبت به Y باز باشد. به‌ازای هر $p \in E$، $r > \circ$ چنان موجود هست که شرطهای $d(p,q) < r_p$ و $q \in Y$ ایجاب می‌کنند که $q \in E$ باشد. قرار دهید

$$V_p = \{q \in X : d(p,q) < r_p\}$$

و تعریف کنید

$$G = \cup_{P \in E} V_p.$$

در اینصورت V_p یک همسایگی به مرکز p و شعاع r_p می‌باشد لذا باز است، در نتیجه بنابه قضیهٔ ۷ (ب) بخش ۲ همین فصل، G زیر مجموعهٔ بازی از X می‌باشد.

چون برای هر $p \in E$، $p \in V_p$، پس بوضوح $E \subset G \cap Y$.

از طرفی بنابه روش ساختن V_p، به‌ازای هر $p \in E$ داریم $V_p \cap Y \subset E$ و لذا $G \cap Y \subset E$. در نتیجه $E = Y \cap G$.

برعکس؛ هرگاه G در X باز باشد و $E = Y \cap G$ آن‌گاه به‌ازای هر $p \in E$ همسایگی $V_p \subset G$ وجود دارد. در نتیجه $V_p \cap Y \subset E$ و لذا E نسبت به Y باز خواهد بود. ■

۵ تعریف. زیر مجموعهٔ K از فضای متریک (X, d) را فشرده نامند هرگاه هر پوشش باز K حاوی زیر پوششی متناهی باشد. یعنی هرگاه $\{G_i\}_{i\in I}$ پوشش بازی از K باشد آن‌گاه اندیس‌های $i_1, i_2, \cdots, i_n \in I$ چنان موجود باشند که

$$K \subset G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \cdots \cup G_{i_n}.$$

مفهوم فشردگی در آنالیز، بویژه در ارتباط با پیوستگی (فصل ۴) از اهمیت بسیاری برخوردار است.

بوضوح هر مجموعهٔ متناهی فشرده است (چرا؟).

در قضیهٔ ۴ دیدیم که هرگاه $E \subset Y \subset X$، ممکن است E بدون باز بودنش در X، نسبت به Y باز باشد. در نتیجه، خاصیت باز بودن E به فضایی که E در آن قرار دارد بستگی دارد. همین مطلب در مورد بسته بودن نیز صادق است.

در زیر می‌بینیم که فشردگی رفتار بهتری دارد.

۶ قضیه. فرض کنیم $K \subset Y \subset X$. در اینصورت، K نسبت به X فشرده است اگر و فقط اگر K نسبت به Y فشرده باشد.

برهان. فرض کنیم K نسبت به X فشرده باشد و $\{V_i\}_{i\in I}$ یک پوشش باز نسبت به Y برای K باشد یعنی V_iها نسبت به Y بازند و $K \subset \cup_{i\in I} V_i$. بنابر قضیهٔ ۴، مجموعه‌های G_i که نسبت به X بازند چنان موجود است که برای هر i، $V_i = Y \cap G_i$ و چون K نسبت، به X فشرده است لذا تعدادی متناهی اندیس i_1، i_2، $\cdots$، i_n چنان موجود است

$$K \subset G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \cdots \cup G_{i_n}. \qquad (1)$$

از آنجا که $K \subset Y$ لذا

$$K \subset V_{i_1} \cup V_{i_2} \cup \cdots \cup V_{i_n} \qquad (2)$$

یعنی K نسبت به Y فشرده است.

برعکس؛ فرض کنیم K نسبت به X فشرده و $\{G_i\}_{i\in I}$ گردآیه‌ای از زیر مجموعه‌های باز X باشد که K را می‌پوشاند. قرار دهید $V_i = Y \cap G_i$. در اینصورت برای i_1، i_2، $\cdots$، i_nای، (۲) رابطهٔ (۱) را نتیجه می‌دهد و این برهان را کامل می‌کند. ■

۷ مثال. خط حقیقی $\mathbb{R}$ فشرده نیست. زیرا خانوادهٔ $\{(-n,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک پوشش باز $\mathbb{R}$ است که دارای هیچ زیر پوشش متناهی نیست.

۸ قضیه. زیر مجموعه‌های فشرده فضاهای متریک بسته‌اند.

برهان. فرض کنیم K یک زیرمجموعهٔ فشرده از فضای متریک X باشد. ثابت می‌کنیم متمم K، K^c، زیر مجموعهٔ بازی از X است.

فرض کنیم $p \in K^c$ و $q \in K$ باشد. قرار دهید $r_q = \frac{1}{3}d(p,q)$. حال همسایگی‌های $S_{r_q}(p)$ و $S_{r_q}(q)$ را در نظر بگیرید. در اینصورت $K \subset \cup_{q\in K} S_{r_q}(q)$. چون K فشرده است پس نقاط q_1، $\cdots$، q_n در K چنان موجودند که

$$K \subset S_{r_{q_1}}(q_1) \cup \cdots \cup S_{r_{q_n}}(q_n).$$

قرار دهید $W = S_{r_{q_1}}(q_1) \cup \cdots \cup S_{r_{q_n}}(q_n)$ و $V = S_{r_{q_1}}(p) \cap \cdots \cap S_{r_{q_n}}(p)$. آن‌گاه V یک مجموعهٔ باز حول p است که W را قطع نمی‌کند. از طرفی $r > 0$ چنان موجود است که $S_r(p) \subset V$. در نتیجه $S_r(p) \cap W = \phi$. بنابراین $S_r(p) \subset K^c$ و لذا p یک نقطه درونی K^c می‌باشد. ■

۹ قضیه. زیرمجموعه‌های بستهٔ مجموعه‌های فشرده، فشرده‌اند.

برهان. فرض کنیم $K \subset X$ فشرده و F زیرمجموعهٔ بسته‌ای از X باشد که $F \subset K$. فرض کنیم $\{V_i\}$ یک پوشش باز F باشد. باالحاق F^c (که باز است) به $\{V_i\}$ به پوشش باز Ω از K دست می‌یابیم. چون K فشرده است، زیرگردآیه‌ای متناهی از Ω مانند Φ

هست که K و در نتیجه F را می‌پوشاند. هرگاه F^cعضوی از Φ باشد، با حذف آن هنوز Φ می‌تواند یک پوشش باز F بماند. در نتیجه F فشرده است. ■

نتیجه. هرگاه F بسته و K فشرده باشد، آنگاه $K \cap F$ فشرده است.

برهان. چون K فشرده است پس بسته می‌باشد در نتیجه $K \cap F$ بسته است. چون $K \cap F \subset K$ پس بنابه قضیه قبل $K \cap F$ فشرده خواهد بود. ■

۱۰ **قضیه.** هرگاه $\{K_i\}_{i\in I}$ گردآیه‌ای از زیر مجموعه‌های فشرده فضای متریک X باشد بطوری که اشتراک هر زیرگردآیه متناهی آن ناتهی باشد، آنگاه $\cap_{i\in I}K_i$ ناتهی خواهد بود.

برهان. به برهان خلف فرض کنیم که $\cap_{i\in I}K_i = \phi$. در اینصورت K_iای چنان موجود است که هیچ نقطه‌ای از آن متعلق به هر K_i نمی‌باشد. K_i موجود را K_1 می‌نامیم و قرار می‌دهیم $G_i = K_i^c$. چون هیچ نقطه‌ای از K_1 متعلق به هر K_i نمی‌باشد لذا مجموعه‌های G_i یک پوشش باز K_1 را می‌سازند و از آنجاکه K_1 فشرده است لذا اندیس‌های i_1، $\cdots$، i_n چنان موجودند که

$$K_1 \subset G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{i_n}$$

در نتیجه

$$K_1 \subset K_{i_1}^c \cup \cdots \cup K_{i_n}^c = (K_{i_1} \cap \cdots \cap K_{i_n})^c$$

و لذا $K_1 \cap K_{i_1} \cap \cdots \cap K_{i_n} = \phi$ و این یک تناقض است. ■

۱۱ **تبصره.** در قضیه قبل، فشرده بودن K_iها الزامی است. زیرا مثال زیر را در نظر بگیرید:

(الف) هرگاه $K_n = (\circ, \frac{1}{n})$ و $n \in \mathbb{N}$، آنگاه $\cap_{n=1}^{\infty}(\circ, \frac{1}{n}) = \phi$.
(ب) هرگاه $K_n = [n, +\infty)$ و $n \in \mathbb{N}$، آنگاه $\cap_{n=1}^{\infty}[n, +\infty) = \phi$.

نتیجه (قضیهٔ اشتراکی کانتور) هرگاه $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های فشرده و ناتهی باشد که $K_n \supset K_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$، آنگاه $\cap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \phi$

۱۲ قضیه. هرگاه E یک زیر مجموعهٔ نامتناهی از مجموعهٔ فشردهٔ K باشد، آنگاه E یک نقطه حدی در K دارد.

برهان. به برهان خلف فرض کنیم هیچ نقطه از K نقطهٔ حدی E نباشد. در اینصورت برای هر $q \in K$، عدد مثبت r_q چنان موجود است که

$$S_{r_q}(q) \cap (E\backslash\{q\}) = \phi.$$

حال گردآیهٔ $\left\{S_{r_q}(q)\right\}_{q\in K}$ را در نظر بگیرید. در اینصورت این گردآیه یک پوشش باز برای K خواهد بود. از آنجا که K فشرده است لذا نقاط q_1، q_2، $\cdots$، q_n در K چنان موجودند که

$$K \subset S_{r_{q_1}}(q_1) \cup \cdots \cup S_{r_{q_n}}(q_n)$$

و چون $E \subset K$ پس E حداکثر یک مجموعهٔ متناهی است و این تناقض می‌باشد. ■

۱۳ تبصره. فشرده بودن K در قضیهٔ اخیر الزامی است. زیرا مثال زیر را در نظر بگیرید:

هرگاه $K = (\circ, 1)$ و $E = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ آنگاه $\circ \in E'$ ولی $\circ \notin K$.
اکنون نشان می‌دهیم که هر بازهٔ بسته و کراندار روی خط حقیقی $\mathbb{R}$ فشرده است. این حالت خاصی از قضیهٔ مشهور *هاینه-بورل* است. این قضیه، در حالت کلی، ثابت می‌کند که یک زیر مجموعه از $\mathbb{R}^n$ فشرده است اگر و تنها اگر بسته و کراندار باشد و این دارای کاربردهای بسیار زیادی است. حالت خاصی که اکنون ثابت می‌کنیم نیز قضیه

هاینه‌ـبورل نامیده می‌شود [برای دیدن حالت کلی به کتاب ***اصول آنالیز ریاضی*** نوشته والتر رودین مراجعه شود.]

۱۴ قضیه هاینه‌ـبورل. هر بازهٔ بستهٔ $[a, b] \subset \mathbb{R}$ فشرده است.

برهان. فرض کنیم $G = \{G_i : i \in I\}$ یک پوشش باز از $[a, b]$ باشد. فرض کنیم C نمایش مجموعهٔ همه نقاط $c \in [a, b]$ باشد که در این شرط صادق هستند که $[a, c]$ بوسیلهٔ زیرگردآیهٔ متناهی از مجموعه‌های باز G پوشیده می‌شود. مشاهده می‌کنیم که $a \in C$ و لذا $C \neq \phi$. علاوه براین، هرگاه $c \in C$ و $z \in [a, c]$ آن‌گاه $[a, z]$ نیز توسط یک زیرگردآیه متناهی از مجموعه‌های باز G پوشیده می‌شود، بنابراین $z \in C$، و لذا تمام بازهٔ $[a, c] \subset C$. در نتیجه مجموعهٔ C یک بازه به شکل $[a, x]$ می‌باشد. ادعا می‌کنیم که $x = b$. به برهان خلف، فرض کنیم که $x \neq b$. آن‌گاه بوضوح $x < b$. از آنجا که برای iای، $x \in G_i$ و G_i باز است، یک بازهٔ $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset G_i$ موجود است. این حقیقت که $[a, x]$ بوسیلهٔ تعداد متناهی از مجموعه‌های باز G پوشش داده می‌شود ایجاب می‌کند که $[a, x + \frac{\varepsilon}{۲}]$ نیز توسط تعداد متناهی از مجموعه‌های باز در G پوشیده شود. بنابراین یک تناقض خواهیم داشت و این برهان را کامل می‌کند. ■

۱۵ قضیهٔ بولتزانوـوایراشتراس. هر زیر مجموعهٔ نامتناهی کراندار از $\mathbb{R}$ دارای نقطهٔ حدی است.

برهان. فرض کنیم K یک زیر مجموعهٔ نامتناهی کراندار از $\mathbb{R}$ باشد. آن‌گاه بازهٔ بستهٔ کراندار $[a, b]$ از $\mathbb{R}$ چنان موجود است که $K \subset [a, b]$. بنابه قضیه هاینه‌ـبورل $[a, b]$ فشرده است. بنابراین K یک زیر مجموعهٔ نامتناهی از مجموعهٔ فشردهٔ $[a, b]$ است. لذا بنابه قضیه ۱۲، A دارای نقطهٔ حدی است و این برهان را کامل می‌کند. ■

۵. مجموعه‌های کامل

۱ **قضیه.** فرض کنیم P یک مجموعهٔ کامل ناتهی در $\mathbb{R}$ باشد. در اینصورت P شمارش ناپذیر است.

برهان. چون P نقطهٔ حدی دارد پس باید نامتناهی باشد. فرض کنیم P شمارش‌پذیر باشد یعنی $P = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$. دنبالهٔ $\{V_n\}$ از همسایگی‌ها را بصورت زیر می‌سازیم:

فرض کنیم V_1 یکی از همسایگی‌های x_1 باشد. هرگاه V_1 از تمام $y \in \mathbb{R}$ هایی متشکل باشد که $|y - x_1| < r$، بست $\overline{V_1}$ از V_1 مجموعهٔ تمام y هایی از $\mathbb{R}$ است که $|y - x_1| \le r$.

فرض می‌کنیم V_n ساخته شده باشد بطوری که $V_n \cap P$ تهی نمی‌باشد. چون هر نقطهٔ P یک نقطهٔ حدی P است همسایگی چون V_{n+1} وجود دارد که

(الف) $\overline{V}_{n+1} \subset V_n$،

(ب) $x_n \notin \overline{V}_{n+1}$،

(ج) $V_{n+1} \cap P \neq \phi$.

بنابر (ج) V_{n+1} در فرض استقرای ما صدق می‌کند و این ساختن می‌تواند ادامه یابد.

قرار می‌دهیم $K_n = \overline{V}_n \cap P$. چون $\overline{V}_n$ یک بازهٔ بسته و کراندار است لذا فشرده می‌باشد. و از آنجا که $x_n \notin K_{n+1}$، هیچ نقطهٔ P در $\cap_{n=1}^{\infty} K_n$ قرار ندارد. این، بخاطر $K_n \subset P$، ایجاب می‌کند که $\cap_{n=1}^{\infty} K_n$ تهی باشد. اما بنابه (ج)، هر K_n ناتهی است و طبق (الف) $K_n \supset K_{n+1}$ و این با قضیهٔ اشتراکی کانتور در تناقض است. ■

نتیجه. هر بازهٔ $[a, b]$ $(a < b)$ شمارش‌ناپذیر است. بویژه، مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی ناشمارا است.

۶. مجموعهٔ کانتور

مجموعه‌ای که هم اینک خواهیم ساخت نشان می‌دهد که مجموعه‌های کاملی در $\mathbb{R}$ هستند که شامل هیچ بازهٔ بازی نمی‌باشند.

فرض کنیم E_0 بازهٔ $[0,1]$ باشد. از آن بازهٔ باز $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ را برداشته و قرار می‌دهیم

$$E_1=[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1].$$

یک سوم‌های میانی این بازه‌ها را برداشته و قرار می‌دهیم

$$E_2=[0,\frac{1}{9}]\cup[\frac{2}{9},\frac{3}{9}]\cup[\frac{6}{9},\frac{7}{9}]\cup[\frac{8}{9},1]$$

شکل ۶.۱

با ادامهٔ این کار، دنباله‌ای از مجموعه‌های فشرده E_n خواهیم داشت بطوری که

(الف) $E_1\supset E_2\supset E_3\supset\cdots$،

(ب) E_n اجتماع 2^n بازه است که هر کدام به طول $\frac{1}{3^n}$ می‌باشد.

مجموعهٔ

$$C=\cap_{n=1}^{\infty}E_n$$

مجموعهٔ *کانتور* نام دارد. بوضوح C فشرده است و قضیه اشتراکی کانتور نشان می‌دهد که C ناتهی است.

هیچ بازهٔ بازی به شکل

$$(\frac{3k+1}{3^m},\frac{3k+2}{3^m})$$

که در آن m, k اعداد صحیح مثبتی باشند، با C نقطه مشترک ندارد. چون هر بازهٔ باز (α, β) حاوی بازهٔ بازی به شکل فوق می‌باشد، اگر

$$۳^{-m} < \frac{\beta - \alpha}{۶}$$

C هیچ بازهٔ بازی را در بر نخواهد داشت.

برای اثبات کامل بودن C کافی است نشان دهیم که C شامل نقطهٔ تنها نیست.

فرض کنیم $x \in C$ و S بازهٔ باز دلخواهی شامل x باشد. همچنین، I_n آن بازه از E_n باشد که x را در بر دارد. n را آنقدر بزرگ می‌گیریم که $I_n \subset S$. فرض کنیم x_n یک نقطهٔ انتهایی I_n باشد بطوری که $x_n \neq x$.

از نحوهٔ ساخته شدن C معلوم می‌شود که $x_n \in C$. لذا، x یک نقطه حدی C است و C کامل خواهد بود.

یکی از جالبترین خواص مجموعهٔ کانتور این است که نمونه‌ای از یک مجموعهٔ ناشمارا با اندازهٔ صفر (مفهوم اندازه در فصل ۸ مطرح می‌شود) را به ما می‌دهد.

۷. همبندی

۱ تعریف. فرض کنیم (X, d) فضای متریک و $E \subset X$ باشد. E *ناهمبند* نامیده می‌شود هرگاه دو مجموعهٔ باز، ناتهی و جدا از هم A و B چنان موجود باشد که $E = A \cup B$. A و B را یک *جداسازی* برای E می‌نامند. مجموعهٔ E را همبند نامند هرگاه ناهمبند نباشد.

۲ تبصره. (الف) هرگاه E همبند باشد آن‌گاه نمی‌توان E را بصورت $E = A \cup B$ نشان داد که در آن A و B جدا از هم، باز و ناتهی باشند. بعبارت دیگر، هرگاه E همبند باشد چنان که $E = A \cup B$، که A و B جدا از هم و باز باشند آن‌گاه یا A و یا B باید تهی باشند.

(ب) فرض کنید $X = A \cup B$ یک جداسازی از X باشد. آنگاه $A^c = B$ و $B^c = A$. از آنجا که A و B باز هستند، A و B بسته نیز می‌باشند. بعبارت دیگر، هرگاه X ناهمبند باشد آنگاه می‌توان آن را بصورت اجتماع دو مجموعهٔ جدا از هم ناتهی نشان داد که هر دو مجموعه یا باز هستند و یا بسته.

(ج) هرگاه $X = A \cup B$ که A و B جدا از هم و ناتهی‌اند وهرگاه X همبند باشد، آنگاه یکی از A و B باز و دیگری بسته است.

۳ مثال. قرار دهید $X = (\circ, ۱) \cup (۲, ۳)$. آنگاه X ناهمبند است. فرض کنید $۱ < a < ۲$. خواهیم داشت

$$(\circ, ۱) = (-\infty, a) \cap X$$
$$(۲, ۳) = (a, +\infty) \cap X.$$

حال $(\circ, ۱) \neq \phi$، $(۲, ۳) \neq \phi$ و $(\circ, ۱) \cap (۲, ۳) = \phi$. $(\circ, ۱)$ و $(۲, ۳)$ بازند و چون متمم مجموعه‌های بازند بسته نیز می‌باشند. بنابراین

$$X = [(-\infty, a) \cap X] \cup [(a, +\infty) \cap X]$$

یک ناهمبندی از X است.

اکنون نشان می‌دهیم که یک زیر مجموعه از خط حقیقی $\mathbb{R}$ همبند است اگر و فقط اگر یک بازه باشد.

۴ قضیه. یک زیر مجموعه از $\mathbb{R}$ همبند است اگر و فقط اگر یک بازه باشد.

برهان. فرض کنیم $X \subset \mathbb{R}$ همبند باشد. نشان می‌دهیم که X یک بازه است. به برهان خلف، فرض کنیم که اینگونه نباشد. آنگاه $x, y, z \in \mathbb{R}$ چنان موجود است که $x < y < z$ و x و z در X هستند اما $y \notin X$. در اینصورت

$$X = [(-\infty, y) \cap X] \cup [(y, +\infty) \cap X]$$

یک ناهمبندی از X است. این متناقض با این حقیقت است که X همبند می‌باشد.

برعکس؛ فرض کنیم X ناهمبند باشد. نشان می‌دهیم که یک بازه نیست. فرض کنیم $X = A \cup B$ یک ناهمبندی از X باشد. A و B ناتهی و جدا از هم می‌باشند. بنابراین می‌توان نقاط $x \in A$ و $z \in B$ را چنان انتخاب کرد که $x \neq z$. بدون کاستن از کلیت، می‌توان فرض کرد که $x < z$. فرض کنیم که X یک بازه باشد. آن‌گاه $[x, z] \subset X$ و هر نقطه از $[x, z]$ یا در A است یا در B.

قرار دهید

$$y = \sup([x, z] \cap A).$$

بوضوح $x \le y \le z$ و لذا $y \in X$. از آنجا که A بسته است، $y \in A$ و بنابراین $y < z$. دوباره تعریف y ایجاب می‌کند که برای هر $\varepsilon > 0$ صادق در $y + \varepsilon \le z$، $y + \varepsilon$ در B باشد. حال از آنجا که B بسته است، $y \in B$. بنابراین $y \in A \cap B$ و این متناقض با این حقیقت است که $A \cap B = \phi$. این تناقض نتیجه را ثابت می‌کند. ■

نتیجه. $\mathbb{R}$ همبند است.

تمرینات

۱. برای $x, y \in \mathbb{R}$ تعریف کنید:

$$d_1(x, y) = (x - y)^2$$

$$d_2(x, y) = \sqrt{|x - y|}$$

$$d_3(x, y) = |x^2 - y^2|$$

$$d_4(x, y) = |x - 2y|$$

$$d_5(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}.$$

معین کنید که کدامیک از اینها یک متر روی $\mathbb{R}$ می‌باشد.

۲. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد. تعریف کنید

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad (x, y \in X)$$

نشان دهید که d' نیز یک متر روی X است.

۳. قرار دهید $X = \mathbb{R}$ و برای $x, y \in \mathbb{R}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ که $0 < \alpha < 1$، تعریف کنید

$$d(x, y) = |x - y|^{\alpha}.$$

نشان دهید که $(\mathbb{R}, d)$ یک فضای متریک است.

۴. فرض کنیم (X, d) فضای متریک باشد. تعریف کنید

$$d_1(x, y) = \min(d(x, y), 1).$$

نشان دهید که (X, d_1) نیز یک فضای متریک است.

۵. هرگاه (X, d) یک فضای متریک و $x, y, z \in X$ باشد، آن‌گاه نشان دهید که

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y).$$

۶. هرگاه (X, d) فضای متریک و $x, y, x', y' \in X$ باشد آن‌گاه نشان دهید که

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y').$$

۷. همهٔ نقاط حدی مجموعه‌های زیر در $\mathbb{R}$ را مشخص نمائید و در هر مورد تعیین کنید که مجموعه باز است یا بسته (یا هیچ یک).

(الف) $\mathbb{Z}$،

(ب) $(a, b]$،

(ج) $\mathbb{Q}$،

(د) $\{\frac{1}{2n} + \frac{1}{5m} : n, m \in \mathbb{N}\}$،

(ه) $\{(-1)^n + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\}$،
(و) $\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\}$،
(ز) $\{\frac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\}$.

۸. ثابت کنید که هر مجموعهٔ باز ناتهی A در $\mathbb{R}$ هم حاوی عددهایی گویاست هم حاوی عددهایی گنگ.

۹. فرض کنید $\mathrm{int}E$ مجموعهٔ تمام نقاط درونی E باشد (در بعضی از کتابها، مجموعهٔ نقاط درونی را با E^o نمایش می‌دهند.)

(الف) ثابت کنید $\mathrm{int}E$ همیشه باز است،

(ب) ثابت کنید E باز است اگر و فقط اگر $\mathrm{int}E = E$،

(ج) هرگاه $G \subset E$ و G باز باشد، ثابت کنید $G \subset \mathrm{int}E$،

(د) ثابت کنید $(\mathrm{int}E)^c = \overline{(E^c)}$،

(ه) آیا $\mathrm{int}E$ و $\mathrm{int}\overline{E}$ همیشه یکی است؟

(و) آیا $\overline{E}$ و $\overline{\mathrm{int}E}$ همواره یکی است؟

۱۰. هرگاه (X, d) یک فضای متریک و $A, B \subset X$ باشند آن‌گاه نشان دهید که

(الف) $\mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}A \cap \mathrm{int}B$،

(ب) $\mathrm{int}(A \cup B) \supseteq \mathrm{int}A \cup \mathrm{int}B$

برای قسمت (ب)، مثالی بیاورید که نشان دهد تساوی ممکن است برقرار نباشد.

۱۱. فرض کنیم A' مجموعهٔ مشتق (مجموعهٔ همهٔ نقاط حدی A) و $\overline{A}$ بست مجموعهٔ A در فضای متریک (X, d) باشد. ثابت کنید:

(الف) A' در X بسته است؛ یعنی $(A')' \subseteq A'$،

(ب) هرگاه $A \subseteq B$، آن‌گاه $A' \subseteq B'$،

(ج) $(A \cup B)' = A' \cup B'$ و $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$

(د) $(\overline{A})' = A'$،

(ه) $\overline{A}$ بسته است.

(و) $\overline{A}$ مساوی اشتراک همهٔ زیر مجموعه‌های بستهٔ X است که حاوی A می‌باشند؛ یعنی

$\overline{A}$ عبارت ازکوچکترین مجموعهٔ بسته‌ای است که حاوی A می‌باشد.

۱۲. فرض کنیم A و B زیر مجموعه‌هایی از فضای متریک (X, d) باشند. ثابت کنید که

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}.$$

۱۳. بستار هر یک از مجموعه‌های زیر را به عنوان زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ بدست آورید:

(الف) $A = (۰, ۱) \cup (۱, ۲) \cup (۲, ۳)$

(ب)$B = [۰, ۱) \cup (۱, ۲]$،

(ج) $C \neq (۰, ۱) \cup (۲, ۳)$.

۱۴. درون هر یک از مجموعه‌های زیر را به عنوان زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^۲$ با متر استاندارد پیدا کنید:

(الف) $A = \{(x_۱, x_۲) \in \mathbb{R}^۲ : x_۱^۲ + x_۲^۲ \leq ۱\}$

(ب) $B = \{(x_۱, x_۲) \in \mathbb{R}^۲ : x_۱^۲ + x_۲^۲ < ۱\}$

(ج) $C = \{(x_۱, x_۲) \in \mathbb{R}^۲ : x_۱^۲ + x_۲^۲ = ۱\}$

(د) $D = \{(x_۱, x_۲) \in \mathbb{R}^۲ : x_۲ \geq ۰\}$

۱۵. هرگاه $A_۱$، $A_۲$، $\cdots$ ، A_n زیر مجموعه‌هایی از یک فضای متریک باشند، آن‌گاه نشان دهید که:

(الف) $\overline{(\cup_{i=۱}^n A_i)} = \cup_{i=۱}^n \overline{A_i}$

(ب) $\overline{(\cap_{i=۱}^n A_i)} \subseteq \cap_{i=۱}^n \overline{A_i}$

با یک مثال نشان دهید که تساوی در قسمت (ب) همیشه برقرار نیست.

۱۶. ثابت کنید اشتراک هر دستهٔ دلخواه از زیر مجموعه‌های فشردهٔ فضای متریک X، مجموعه‌ای فشرده است.

۱۷. ثابت کنید اجتماع تعداد متناهی از زیر مجموعه‌های فشردهٔ X فشرده است.

۱۸. فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از فضای متریک (X, d) باشد. نقطهٔ x در X را

یک نقطهٔ مرزی A نامیم هرگاه هر گوی $S_r(x)$ دست کم حاوی یک نقطه از S و یک نقطه از $X - S$ باشد. مجموعهٔ همهٔ نقاط مرزی A را مرز A نامیده و با ∂A نمایش می‌دهند.

(الف) نقاط مرزی مجموعه‌های زیر از $\mathbb{R}^۲$ را با متر استاندارد بیابید:

$$A = \{(x_۱, x_۲| \in \mathbb{R}^۲ : x_۱^۲ + x_۲^۲ \leq ۱\}$$

$$B = \{(x_۱, x_۲) \in \mathbb{R}^۲ : x_۱^۲ + x_۲^۲ < ۱\}$$

$$C = \{(x_۱, x_۲) \in \mathbb{R}^۲ : x_۱^۲ + x_۲^۲ = ۱\}.$$

(ب) ثابت کنید $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A}$ و نتیجه بگیرید که ∂A بسته است.

(ج) ثابت کنید $\partial A = \partial(X - A)$.

(ه) هرگاه $\overline{A} \cap \overline{B} = \phi$، آنگاه $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.

۳

دنباله‌ها و سری‌ها

۱. دنباله‌ها در فضای متریک

۱ تعریف. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد. یک *دنباله* در X نگاشتی است مانند x از $\mathbb{N}$ به X، بنابراین یک *دنبالهٔ* حقیقی نگاشتی از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{R}$ است و یک *دنبالهٔ مختلط* نگاشتی از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{C}$ است. x_n را برای نمایش مقدار x در $n \in \mathbb{N}$ بکار می‌بریم. دنبالهٔ x بوسیلهٔ $\{x_n\}$ یا $\{x_۱, x_۲, \cdots, x_n, \cdots\}$ یا $x = \{x_n\}$ نمایش داده می‌شود. مجموعهٔ $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ بُرد دنباله نامیده می‌شود. برد یک دنباله ممکن است مجموعه‌ای متناهی باشد، از آنجا که یک دنباله لزومی ندارد نگاشت ۱ـ۱ باشد، لذا ممکن است $\mathbb{N}$ را به توی یک مجموعهٔ متناهی بنگارد.

در مثالهای زیر فقط دنباله‌های حقیقی را در نظر بگیرید.

۲ مثالها. (الف) قرار دهید $x_n = (-۱)^n$. آن‌گاه

$$x = \{x_n\} = \{-۱, ۱, -۱, ۱, \cdots\}$$

بنابراین برد x عبارتست از $\{-۱, ۱\} = x$.

(ب) هرگاه $x = \{۱, ۱, ۱, \cdots\}$ آن‌گاه بُرد $x = \{۱\}$ هست.

(ج) برد $x = \{x_n\}$ که $x_n = \frac{۱}{n}$ مجموعه‌ای نامتناهی است.

(د) هرگاه $x = \{x_n\} = \{\frac{(-۱)^n}{n}\}$، آن‌گاه بُرد x نیز نامتناهی است.

(هـ) بُرد $\{\frac{۱-(-۱)^n}{۲}\}$ مجموعهٔ $\{۰, ۱\}$ است.

(و) بُرد $\{\sin n\pi\}$ مجموعهٔ $\{۰\}$ است.

(ز) بُرد $\{n\} = \{۱, ۲, \cdots\}$ مجموعهٔ $\mathbb{N}$ است.

e را برای نمایش دنبالهٔ $\{۱, ۱, \cdots\}$ و ۰ را برای نمایش دنبالهٔ $\{۰, ۰, \cdots\}$ به‌کار می‌بریم.

۳ تعریف. یک دنباله *کراندار* نامیده می‌شود هرگاه بُرد آن مجموعه‌ای کراندار باشد. بطور دقیق‌تر، دنبالهٔ x در (X, d) کراندار نامیده می‌شود هرگاه ثابت $K > ۰$ چنان موجود باشد که

$$d(x_n, ۰) \leq K \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

هرگاه $X = \mathbb{R}$ آن‌گاه شرط فوق بصورت زیر خواهد بود

$$|x_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

هرگاه دنبالهٔ حقیقی $\{x_n\}$ کراندار باشد، آن‌گاه از تمامیت $\mathbb{R}$ نتیجه می‌شود که

$$\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

دارای lub یا سوپریمم است و آن را بصورت $\sup |x_n|$ می‌نویسیم.

۴ مثالها. (الف) دنباله‌های مثال ۲، (الف)، (ب)، (ج)، (د)، (هـ) و (و) کراندار هستند.
(ب) دنبالهٔ $\{n\}$ کراندار نیست. بطور مشابه دنبالهٔ $\{(-۱)^n n\}$ کراندار نیست.

۵ تعریف. دنبالهٔ $\{x_n\}$ در فضای متریک (X, d) *همگرا* به $s \in X$ نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\varepsilon > ۰$، $n_۰ \in \mathbb{N}$ چنان موجود باشد که

$$d(x_n, s) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_۰$$

بعبارت دیگر، هرگاه برای هر $\varepsilon > ۰$ همه بجز تعداد متناهی جمله از دنباله در داخل گوی باز به مرکز s و شعاع ε قرار بگیرد. بویژه، دنبالهٔ حقیقی $\{x_n\}$ به نقطهٔ $s \in \mathbb{R}$ همگراست هرگاه برای هر $\varepsilon > ۰$، عدد صحیح مثبت $n_۰$ چنان موجود باشد که برای هر $n \geq n_۰$،

$$|x_n - s| < \varepsilon$$

یعنی $-\varepsilon < x_n - s < \varepsilon$، و یا $s - \varepsilon < x_n < s + \varepsilon$.

این بدین معنی است که، برای هر $\varepsilon > ۰$، همه به جز تعداد متناهی از جملات دنباله در بازهٔ باز $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ قرار گیرد. دنباله‌ای که همگرا نباشد *واگرا* نامیده می‌شود. هرگاه دنبالهٔ $\{x_n\}$ به s همگرا باشد می‌نویسیم

$$\lim_{n \to \infty} x_n = s \quad \text{یا} \quad x_n \longrightarrow s \quad \text{وقتی} \quad n \to \infty.$$

همگرایی یک دنباله فقط به خود دنباله متکی نیست بلکه به فضای متریک نیز وابسته است و این از مثال زیر واضح است.

۶ مثال‌ها. (الف) دنبالهٔ $x = \{\frac{۱}{n}\}$ به ۰ همگراست هرگاه فضای متریک X را $\mathbb{R}$ یا $[۰, ۱]$ یا هر زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ حاوی $[۰, ۱]$ باشد همگراست، اما هرگاه $X = (۰, ۱]$ دنباله همگرانیست.

(ب) دنبالهٔ e به ۱ همگراست، $\{۰\}$ به ۰ همگراست.

(ج) دنباله‌های $\{(-۱)^n\}$ و $\{\frac{۱-(-۱)^n}{۲}\}$ همگرا نیستند.

(د) دنباله‌های $\{n\}$، $\{n^۲\}$، $\{(-۱)^n n\}$ همگرا نیستند.

۷ قضیه. هر دنبالهٔ همگرا در یک فضای متریک دارای حد یکتاست.

برهان. فرض کنیم (X,d) فضای متریک و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشد که به $s \in X$ همگراست. فرض کنیم، در صورت امکان، $\{x_n\}$ به $t \in X$ همگرا باشد. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. آن‌گاه $n_۱$ و $n_۲$ چنان موجودند که

$$\begin{aligned} d(x_n, s) &< \frac{\varepsilon}{۲} \qquad \forall n \geq n_۱ \\ d(x_n, t) &< \frac{\varepsilon}{۲} \qquad \forall n \geq n_۲. \end{aligned}$$

قرار دهید $n_۰ = \max(n_۱, n_۲)$. آن‌گاه برای $n \geq n_۰$،

$$\begin{aligned} d(s,t) &\leq d(x_n, s) + d(x_n, t) \\ &< \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon. \end{aligned}$$

از آنجا که ε دلخواه است، باید داشته باشیم $d(s,t) = ۰$. بنابراین $s = t$ و این برهان را کامل می‌کند. ■

۸ قضیه. هر دنبالهٔ همگرا در فضای متریک کراندار است، اما عکس آن درست نیست.

برهان. فرض کنیم (X,d) فضای متریک و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشد که به $s \in X$ همگرا است. نشان خواهیم داد که $\{x_n\}$ کراندار است. بعبارت دیگر نشان خواهیم داد که ثابت $K > ۰$ چنان موجود است که

$$d(x_n, s) \leq K \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. از آنجا که $\{x_n\}$ به $s \in X$ همگراست، $n_۰ \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که

$$d(x_n, s) < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_۰.$$

بنابراین برای $n \geq n_0$،

$$d(x_n, 0) \leq d(x_n, s) + d(s, 0) < \varepsilon + d(s, 0).$$

قرار دهید

$$M = \max\{d(x_1, 0), d(x_2, 0), \cdots, d(x_{n_0 - 1}, 0)\}$$

و

$$K = \max\{M, \varepsilon + d(s, 0)\}.$$

آن‌گاه این ایجاب می‌کند که

$$d(x_n, 0) \leq K \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

برای دیدن اینکه عکس این درست نیست دنباله‌های $\{(-1)^n\}$ و $\{\frac{1-(-1)^n}{2}\}$ کراندار هستند اما همگرا نمی‌باشد. ■

قضیهٔ زیر رابطه‌ای را بین حد یک دنبالهٔ همگرا و نقطهٔ حدی بُرد دنباله بدست می‌دهد.

۹ قضیه. (الف) هرگاه بُرد دنباله‌ای همگرا در یک فضای متریک مجموعه‌ای نامتناهی باشد آن‌گاه حد دنباله، نقطهٔ حدی بُرد آن می‌باشد.

(ب) هرگاه s نقطهٔ حدی مجموعهٔ E در یک فضای متریک باشد آن‌گاه یک دنبالهٔ همگرای $\{x_n\}$ در E با حد s موجود است.

برهان. (الف) فرض کنیم (X, d) فضای متریک و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X با حد $s \in X$ باشد.

فرض کنیم که s نقطهٔ حدی برد $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ نباشد. در این‌صورت $r > 0$ چنان موجود است که گوی باز $S_r(s)$ حاوی هیچ نقطه‌ای از دنباله به غیر از s نیست.

اما s حد یک دنباله است. بنابراین همهٔ جملات $\{x_n\}$، مگر تعداد متناهی از آنها، در $S_r(s)$ قرار خواهند گرفت و بنابراین باید به s منطبق شوند. لذا فقط تعداد متناهی نقطهٔ متمایز در دنباله موجود است. این متناقض با این حقیقت است که بُرد دنباله نامتناهی است و برهان کامل است.

(ب) فرض کنیم (X, d) فضای متریک و $E \subset X$ باشد. فرض کنیم s نقطهٔ حدی E باشد. آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ نقطه $x_n \in E$ چنان موجود است که $d(x_n, s) < \frac{1}{n}$. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. $n_0 \in \mathbb{N}$ را چنان انتخاب کنید که $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. آنگاه برای $n > n_0$،

$$d(x_n, s) < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

این نشان می‌دهد که دنبالهٔ $\{x_n\}$ به s همگراست و این برهان را کامل می‌کند. ■

۲. دنباله‌های کشی

۱ تعریف. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد. دنبالهٔ $\{x_n\}$ در X *دنبالهٔ کشی* نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیح مثبت n_0 چنان موجود باشد که

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \qquad \forall n, m \geq n_0.$$

بویژه، دنبالهٔ $\{x_n\}$ در $\mathbb{R}$ یک دنبالهٔ کشی است هرگاه برای $\varepsilon > 0$، $n_0 \in \mathbb{N}$ چنان موجود باشد که

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0.$$

بعبارت دیگر، یک دنباله کشی است هرگاه از جملاتی معین به بعد، هر دو جمله از دنباله بقدر کافی نزدیک یکدیگر باشند.

۲ قضیه. هر دنبالهٔ همگرا در فضای متریک، دنباله‌ای کشی است، اما عکس آن درست نیست.

برهان. فرض کنیم (X,d) فضای متریک و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشد که به $x \in X$ همگراست. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. آنگاه $n_۰ \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که

$$d(x_n, s) < \frac{\varepsilon}{۲} \quad \forall n \geq n_۰.$$

فرض کنیم $n, m \geq n_۰$. آنگاه

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, s) + d(x_m, s) \\ &< \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon. \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که $\{x_n\}$ دنباله‌ای کشی است.

برای نشان دادن اینکه عکس این مطلب درست نیست، قرار دهید $X = (۰, ۱]$ و $x_n = \frac{۱}{n}$ برای هر $n \in \mathbb{N}$، آنگاه دنبالهٔ $\{x_n\}$ کشی است اما در X همگرا نیست. اگر $X = [۰, ۱]$ انتخاب کنیم، آنگاه این دنباله به $۰ \in X$ همگرا هست.

بعنوان مثال دیگر، $X = \mathbb{Q}$ را با متر d تعریف شده بوسیلهٔ $d(x,y) = |x-y|$ برای $x, y \in \mathbb{Q}$ در نظر بگیرید. آن گاه دنبالهٔ

$$\{۱, ۱/۴, ۱/۴۱, ۱/۴۱۴, ۱/۴۱۴۶, \cdots\}$$

یک دنبالهٔ کشی است. اما در $\mathbb{Q}$ همگرانیست. اگر $X = \mathbb{R}$ انتخاب کنیم و دنبالهٔ بالا را به عنوان دنباله‌ای در $\mathbb{R}$ در نظر بگیریم آنگاه این دنباله به $\sqrt{۲}$ در $\mathbb{R}$ همگرا خواهد بود. ■

حال از مثال‌های بالا نتیجه می‌شود که هر دنبالهٔ کشی در هر فضای متریک لزوماً همگرانیست. فضاهای متریکی که این خاصیت در آنها برقرار است نام خاصی دارند که در تعریف زیر خواهیم دید.

۳. فضای متریک کامل

۱ تعریف. یک فضای متریک *کامل* نامیده می‌شود هرگاه هر دنبالهٔ کشی در آن همگرا به عنصری از آن باشد. یک فضای‌متریک که کامل نباشد *غیرکامل* نامیده می‌شود.

۲ مثالها. (الف) خط حقیقی $\mathbb{R}$ با متر استاندارد یک فضای متریک کامل است که مجموعهٔ همهٔ اعداد گویا در آن، $\mathbb{Q}$، غیرکامل می‌باشد. تمایل اصولی به تمامیت خط حقیقی $\mathbb{R}$، اصلی است که بعنوان *اصل تمامیت* اعداد حقیقی شناخته شده است. اگر تمایل به ساختار اعداد حقیقی داشته باشید، با فضای متریک غیرکامل $\mathbb{Q}$ شروع کنید، یک فضای متریک جدید ساخته و تمامیت آن را ثابت کنید. فضای متریک کامل بدست آمده *کامل سازی (تکمیل)* $\mathbb{Q}$ نامیده می‌شود و بصورت خط حقیقی $\mathbb{R}$ تعریف شده است. اما، این ساختارها در این کتاب مقدماتی مطرح نمی‌شوند زیرا اصل تمامیت $\mathbb{R}$ و قضیهٔ ۲ بخش ۲ ایجاب می‌کند که یک دنبالهٔ $\{x_n\}$ از اعداد حقیقی همگراست اگر و فقط اگر کشی باشد.

(ب) $\mathbb{C}$، مجموعه همهٔ اعداد مختلط، فضای متریک کامل است. برای اثبات این، فرض کنیم $\{z_n\}$ دنباله‌ای کشی از اعداد حقیقی باشد. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد، آنگاه عدد صحیح مثبت $n_۰$ چنان موجود است که

$$|z_n - z_m| < \varepsilon \qquad \forall n, m \geq n_۰.$$

فرض کنیم $z_n = x_n + iy_n$. آنگاه برای هر دو عدد صحیح مثبت n و m،

$$|x_n - x_m| \leq |z_n - z_m|$$

و

$$|y_n - y_m| \leq |z_n - z_m|.$$

بنابراین برای $n, m \geq n_۰$، داریم

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

و

$$|y_n - y_m| < \varepsilon.$$

این نشان می‌دهد که $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله‌های کشی از اعداد حقیقی‌اند. از آنجا که $\mathbb{R}$ کامل است، $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ به ترتیب باید به t, s همگرا باشند. حال این ایجاب می‌کند که دنبالهٔ $\{z_n\}$ به $s + it$ همگراست. زیرا، از آنجا که $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ به s و t همگرا هستند، $n_۱$ و $n_۲$ چنان موجودند که

$$|x_n - s| < \frac{\varepsilon}{۲} \quad \forall n \geq n_۱$$

و

$$|y_n - t| < \frac{\varepsilon}{۲} \quad \forall n \geq n_۲.$$

قرار دهید $n_۰ = \max(n_۱, n_۲)$. آن‌گاه برای $n \geq n_۰$

$$\begin{aligned}|(x_n + iy_n) - (s + it)| &= |(x_n - s) + i(y_n - t)| \\ &\leq |x_n - s| + |y_n - t| \\ &< \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon\end{aligned}$$

و این برهان را کامل می‌کند.

۴. دنباله‌های اعداد حقیقی

در این بخش دنباله‌هایی از اعداد حقیقی را مطرح خواهیم کرد. S را برای نمایش مجموعهٔ همهٔ چنین دنباله‌هایی می‌نویسیم و عملگرهای جبری جمع، ضرب اسکالر و ضرب را در مجموعهٔ S تعریف می‌کنیم.

۱ تعریف. فرض کنیم $x = \{x_n\}$ و $y = \{y_n\}$ هر دو عنصری از S باشند و $\alpha \in \mathbb{R}$ باشد. آن‌گاه دنباله‌های جدید $x + y$، αx و xy را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x + y = \{x_n + y_n\}$$

$$\alpha x = \{\alpha x_n\}$$

$$xy = \{x_n y_n\}$$

$$-x = \{-x_n\}$$

$$x - y = x + (-y) = \{x_n - y_n\}$$

هرگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$، $y_n \neq ۰$، آن‌گاه تعریف می‌کنیم

$$\frac{۱}{y} = \{\frac{۱}{y_n}\} \quad , \quad \frac{x}{y} = \{\frac{x_n}{y_n}\}.$$

۲ قضیه. هرگاه $x = \{x_n\}$، $y = \{y_n\}$ و $z = \{z_n\}$ در S باشند و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ آن‌گاه

(الف) $x + y = y + x$،

(ب) $(x + y) + z = x + (y + z)$،

(ج) $x + \{۰\} = x$،

(د) $x + (-x) = \{۰\}$،

(ه) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$،

(و) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

(ز) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$،

(ح) $۱x = x$.

برهان این قضیه، نتیجه مستقیمی از تعریف است و بنابراین آن را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. با توجه به چگونگی تعریف فضای برداری مشاهده خواهیم کرد که قضیهٔ ۲ بیان می‌کند که S یک فضای برداری روی میدان همهٔ اعداد حقیقی است. خواص زیر نیز درست هستند که برهان سادهٔ آنها بعنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

۳ قضیه. برای $x, y, z \in S$ و $\alpha \in \mathbb{R}$،

(الف) $xy = yx$،

(ب) $(xy)z = x(yz)$

(ج) $(x+y)z = xz + yz$، $x(y+z) = xy + xz$،

(د) $\alpha(xy) = (\alpha x)y$.

۴ قضیه. فرض کنیم $x = \{x_n\}$ و $y = \{y_n\}$ هر دو دنبالهٔ حقیقی کراندار باشند و فرض کنیم $\alpha \in \mathbb{R}$. آن‌گاه دنباله‌های $x + y$ و αx و xy نیز کراندارند.

برهان. از آنجا که x و y کراندار هستند، ثابت‌های $K_۱ > ۰$ و $K_۲ > ۰$ چنان موجودند که برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$|x_n| \leq K_۱ \quad , \quad |y_n| \leq K_۲.$$

بنابراین برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$\begin{aligned} |x_n + y_n| &\leq |x_n| + |y_n| \\ &\leq K_۱ + K_۲ \end{aligned}$$

و لذا $x + y$ کراندار می‌باشد. بطور مشابه برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$|\alpha x_n| = |\alpha||x_n| \leq |\alpha| K_۱$$

که نشان می‌دهد αx کراندار است. همچنین برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$|x_n y_n| = |x_n||y_n| \leq K_۱ K_۲$$

یعنی xy نیز کراندار است. ■

$\mathcal{M}$ را برای نمایش مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های کراندار از اعداد حقیقی به کار خواهیم برد. در مورد این مجموعه قضیهٔ زیر را داریم:

۵ قضیه. مجموعهٔ $\mathcal{M}$ یک فضای متریک با متر تعریف شده با

$$d(x,y)=\sup|x_n-y_n|$$

می‌باشد که $x=\{x_n\}$ و $y=\{y_n\}$ در $\mathcal{M}$ می‌باشند.

برهان. هرگاه x و y کراندار باشند، آن‌گاه $y-$ کراندار است و $x-y=x+(-y)$ نیز کراندار خواهد بود. بنابراین $\sup|x_n-y_n|$ یک عدد حقیقی نامنفی (متناهی) است و لذا $d(x,y)$ تعریف شده است و $d(x,y)\geq \circ$.

حال

$$\begin{aligned}
x=y &\Longleftrightarrow x_n=y_n \quad \forall n\in\mathbb{N}\\
&\Longleftrightarrow x_n-y_n=\circ \quad \forall n\in\mathbb{N}\\
&\Longleftrightarrow |x_n-y_n|=\circ \quad \forall n\in\mathbb{N}\\
&\Longleftrightarrow \sup|x_n-y_n|=\circ \quad \forall n\in\mathbb{N}\\
&\Longleftrightarrow d(x,y)=\circ.
\end{aligned}$$

برای هر $x,y\in\mathcal{M}$،

$$\begin{aligned}
d(x,y)=\sup|x_n-y_n|&=\sup|-(y_n-x_n)|\\
&=\sup|-1||y_n-x_n|\\
&=\sup|y_n-x_n|=d(y,x).
\end{aligned}$$

برای هر $x,y,z\in\mathcal{M}$،

$$\begin{aligned}
d(x,z)=\sup|x_n-z_n|&=\sup|(x_n-y_n)+(y_n-z_n)|\\
&\leq \sup[|x_n-y_n|+|y_n-z_n|]\\
&\leq \sup|x_n-y_n|+\sup|y_n-z_n|\\
&=d(x,y)+d(y,z).
\end{aligned}$$

این برهان قضیه را کامل می‌کند. ■

۶ قضیه. فرض کنیم $x = \{x_n\}$ و $y = \{y_n\}$ دو دنبالهٔ حقیقی همگرا با $\lim\ x_n = s$ و $\lim\ y_n = t$ باشند و $\alpha \in \mathbb{R}$ باشد. آن‌گاه
(الف) $x + y$ همگراست و

$$\lim(x_n + y_n) = \lim\ x_n + \lim\ y_n = s + t,$$

(ب) αx همگراست و

$$\lim \alpha x_n = \alpha \lim\ x_n = \alpha s,$$

(ج) xy همگراست و

$$\lim(x_n y_n) = (\lim x_n)(\lim y_n) = st,$$

(د) هرگاه $t \neq ۰$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$، $y_n \neq ۰$، آن‌گاه $\frac{x}{y}$ همگراست و

$$\lim(\frac{x_n}{y_n}) = \frac{\lim x_n}{\lim y_n} = \frac{s}{t}.$$

برهان. (الف) فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. از آنجا که $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ به ترتیب به s, t همگرا هستند، اعداد صحیح مثبت $n_۱$ و $n_۲$ چنان موجودند که

$$|x_n - s| < \frac{\varepsilon}{۲} \qquad \forall n \geq n_۱$$

و

$$|y_n - t| < \frac{\varepsilon}{۲} \qquad \forall n \geq n_۲.$$

قرار دهید $n_۰ = \max(n_۱, n_۲)$، آن‌گاه برای هر $n \geq n_۰$

$$\begin{aligned} |(x_n - y_n) - (s + t)| &= |(x_n - s) + (y_n - t)| \\ &\leq |x_n - s| + |y_n - t| \\ &< \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که $x+y$ همگراست.

(ب) هرگاه $\alpha = ۰$ باشد بوضوح نتیجه برقرار است. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد و $\alpha \neq ۰$ از آنجا که x_n به s همگراست، $n_۰ \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که

$$|x_n - s| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|} \qquad \forall n \geq n_۰.$$

بنابراین برای $n \geq n_۰$،

$$\begin{aligned} |\alpha x_n - \alpha s| &= |\alpha(x_n - s)| = |\alpha||x_n - s| \\ &< |\alpha|\frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

بنابراین αx همگراست و

$$\lim \alpha x_n = \alpha \lim x_n = \alpha s.$$

(ج) فرض کنیم $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ همگرا باشند. این ایجاب می‌کند که هر دو کراندار باشند. بنابراین ثابت‌های $K_۱ > ۰$ و $K_۲ > ۰$ چنان موجودند که برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$|x_n| \leq K_۱ \quad \text{و} \quad |y_n| \leq K_۲.$$

حال

$$\begin{aligned} |x_n y_n - st| &= |x_n(y_n - t) + t(x_n - s)| \\ &\leq |x_n||y_n - t| + |t||x_n - s| \\ &\leq K_۱|y_n - t| + |t||x_n - s|. \end{aligned}$$

از آنجا که $x_n \to s$ و $y_n \to t$، برای $\varepsilon > ۰$ داده شده، اعداد صحیح مثبت $n_۱$ و $n_۲$ چنان موجودند که

$$|x_n - s| < \frac{\frac{۱}{۲}\varepsilon}{|t|} \qquad \forall n \geq n_۱$$

و

$$|y_n - t| \leq \frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{K_1} \qquad \forall n \geq n_2.$$

قرار دهید $n_0 = \max(n_1, n_2)$. آن‌گاه برای $n \geq n_0$،

$$|x_n y_n - st| < K_1 \frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{K_1} + |t| \frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{|t|}$$
$$= \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

این (ج) را ثابت می‌کند.

(د) فرض کنیم $\lim y_n = t \neq 0$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$، $y_n \neq 0$. آن‌گاه عدد صحیح مثبت n_3 چنان موجود است که

$$|y_n - t| < \frac{1}{2}|t| \qquad \forall n \geq n_3.$$

بنابراین برای $n \geq n_3$،

$$|t| - |y_n| \leq |y_n - t| < \frac{1}{2}|t|.$$

لذا

$$|y_n| \geq \frac{1}{2}|t| \qquad \forall n \geq n_3.$$

فرض کنیم $x_n \to s$. آن‌گاه برای $n \geq n_3$ ،

$$\begin{aligned}
|\frac{x_n}{y_n} - \frac{s}{t}| &= |\frac{tx_n - sy_n}{ty_n}| \\
&= |\frac{t(x_n - s) - s(y_n - t)}{ty_n}| \\
&\leq \frac{|t||x_n - s| + |s||y_n - t|}{|t||y_n|} \\
&\leq \frac{2}{|t|}|x_n - s| + \frac{2|s|}{|t|^2}|y_n - t|.
\end{aligned}$$

فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. از آنجا که $x_n \to s$ و $y_n \to t$، اعداد صحیح مثبت $n_۱$ و $n_۲$ چنان موجودند که

$$|x_n - s| < \frac{۱}{۴}|t|\varepsilon \quad \forall n \geq n_۱$$

و

$$|y_n - t| < \frac{۱}{۴}\frac{|t|^۲\varepsilon}{|s|} \qquad \forall n \geq n_۲.$$

قرار دهید $n_۰ = \max(n_۱, n_۲, n_۳)$. آن‌گاه برای $n \geq n_۰$،

$$\begin{aligned} |\frac{x_n}{y_n} - \frac{s}{t}| &\leq \frac{۲}{|t|}|x_n - s| + \frac{۲|s|}{|t|^۲}|y_n - t| \\ &< \frac{۲}{|t|}.\frac{|t|\varepsilon}{۴} + \frac{۲|s|}{|t|^۲}.\frac{|t|^۲\varepsilon}{۴|s|} \\ &= \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon \end{aligned}$$

و این برهان را کامل می‌کند. ■

$\mathcal{C}$ را برای نمایش مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های همگرا از اعداد حقیقی به کار می‌بریم.

۷ قضیه. (الف) مجموعهٔ $\mathcal{C}$ یک فضای متریک با متر تعریف شده بصورت زیر می‌باشد:

$$d(x, y) = \sup |x_n - y_n| \qquad x, y \in \mathcal{C}.$$

(ب) برای $x, y \in \mathcal{C}$ تابع ρ تعریف شده با

$$\rho(x, y) = |\lim(x_n - y_n)|$$

متر روی $\mathcal{C}$ نیست.

برهان. (الف) فرض کنیم x و y دو دنبالهٔ همگرا باشند. آن‌گاه دنبالهٔ $x-y$ همگراست و بنابراین کراندار می‌باشد. لذا d خوشتعریف است. حال همانند قضیه ۵، نتیجه می‌گیریم که d یک متر روی $\mathcal{C}$ می‌باشد.

(ب) هرگاه x و y همگرا باشند، $x-y$ همگراست و لذا $\lim(x_n - y_n)$ موجود است. بنابراین ρ خوشتعریف است و

$$\rho(x,y) = |\lim(x_n - y_n)| \geq \circ.$$

برای هر $x, y, z \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned}
\rho(x,x) &= |\lim(x_n - x_n)| = |\lim \circ| = |\circ| = \circ \\
\rho(x,y) &= |\lim(x_n - y_n)| = |-\lim(y_n - x_n)| \\
&= |\lim(y_n - x_n)| = \rho(y,x) \\
\rho(x,z) &= |\lim(x_n - z_n)| \\
&= |\lim[(x_n - y_n) + (y_n - z_n)]| \\
&= |\lim(x_n - y_n) + \lim(y_n - z_n)| \\
&\leq |\lim(x_n - y_n)| + |\lim(y_n - z_n)| \\
&= \rho(x,y) + \rho(y,z).
\end{aligned}$$

اما توجه کنیم که $\rho(x,y) = \circ$، $x = y$ را ایجاب نمی‌کند و بنابراین ρ یک متر نیست. برای اثبات این، قرار دهید $x_n = \frac{1}{n}$ و $y_n = \circ$ برای هر $n \in \mathbb{N}$. آن‌گاه

$$x_n - y_n = \frac{1}{n} - \circ = \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

بنابراین

$$\lim(x_n - y_n) = \lim \frac{1}{n} = \circ$$

و لذا $\rho(x,y) = |\lim(x_n - y_n)| = \circ$. اما $x \neq y$ و این برهان را کامل می‌کند. ■

۸ قضیه. هرگاه $\lim x_n = s$، آن‌گاه

$$\lim \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = s$$

اما عکس آن درست نیست.

دنبالهٔ $\{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\}$ را *دنبالهٔ میانگین‌های حسابی* $\{x_n\}$ می‌نامند.

برهان. برای نشان دادن اینکه عکس این مطلب درست نیست، قرار دهید $x_n = (-1)^n$. آن‌گاه

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \begin{cases} 0 & ; \quad n \text{ زوج} \\ -\frac{1}{n} & ; \quad n \text{ فرد} \end{cases}.$$

بنابراین در هر حالت، $\lim \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = 0$، اما دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرا نیست.

برای برهان قضیه، قرار دهید $y_n = x_n - s$. حال از آنجا که $\lim x_n = s$،

$$\lim y_n = \lim(x_n - s) = \lim x_n - s = s - s = 0.$$

همچنین

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = s + \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}.$$

بنابراین، برای اثبات قضیه، کافی است نشان دهیم که هرگاه $\lim y_n = 0$،

$$\lim \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} = 0.$$

از آنجا که $\{y_n\}$ همگراست، کراندار می‌باشد و بنابراین ثابت $K > 0$ چنان موجود است که

$$|y_n| \leq K \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. از آنجا که $y_n \to 0$، عدد صحیح مثبت n_1 چنان موجود است که

$$|y_n| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geq n_1.$$

حال

$$\begin{aligned}\left|\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}\right| &= \left|\frac{y_1+\cdots+y_{n_1}}{n}+\frac{y_{n_1+1}+\cdots+y_n}{n}\right| \\ &\le \frac{|y_1|+\cdots+|y_{n_1}|}{n}+\frac{|y_{n_1+1}|+\cdots+|y_n|}{n} \\ &\le \frac{n_1K}{n}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{(n-n_1)}{n} \qquad \forall n\ge n_1 \\ &< \frac{n_1K}{n}+\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

فرض کنیم $n_2 \in \mathbb{N}$ چنان باشد که $n_2 > \frac{2n_1K}{\varepsilon}$ ، بنابراین برای $n > n_2$، $\frac{n_1K}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ قرار دهید $\max(n_1, n_2) = n_0$. آن‌گاه برای $n \ge n_0$ داریم

$$\frac{|y_1+y_2+\cdots+y_n|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

و این نتیجه را ثابت می‌کند. ■

۹ مثال. نشان دهید که

$$\lim \frac{1+2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{3}}+\cdots+n^{\frac{1}{n}}}{n} = 1.$$

فرض کنیم $x_n = n^{\frac{1}{n}}$ خواننده باید تحقیق کند که (در قضایای بعدی اثبات آن را خواهیم دید)

$$\lim x_n = \lim n^{\frac{1}{n}} = 1.$$

بنابراین، بنابه قضیهٔ ۸، باید داشته باشیم

$$\lim \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = 1$$

و بنابراین

$$\lim \frac{1+2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{3}}+\cdots+n^{\frac{1}{n}}}{n} = 1.$$

۱۰ تعریف. دنبالهٔ $\{s_n\}$از اعداد حقیقی بطور یکنوا صعودی یا *نانزولی* نامیده می‌شود هرگاه

$$s_n \leq s_{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

و بطور یکنوا نزولی یا *ناصعودی* نامیده می‌شود هرگاه

$$s_n \geq s_{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

۱۱ قضیه. هر دنبالهٔ یکنوا از اعداد حقیقی همگراست اگر و فقط اگر کراندار باشد.

برهان. در قضیهٔ ۸ ثابت کردیم که هر دنبالهٔ همگرا در یک فضای متریک کراندار است. بنابراین هر دنبالهٔ همگرا (یکنوا) از اعداد کراندار است.

برای اثبات عکس فرض کنیم $\{s_n\}$ دنبالهٔ بطور یکنوا صعودی کراندار از اعداد حقیقی باشد. (حالت دنبالهٔ بطور یکنوا نزولی را می‌توان به طریق مشابه ثابت کرد.) از آنجا که $\{s_n\}$ کراندار است، بُرد $\{s_n\}$ دارای یک lub است. فرض کنیم x، lub بُرد $\{s_n\}$ باشد. آن‌گاه

$$s_n \leq x \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

حال برای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیح n_0 چنان موجود است که

$$x - \varepsilon < s_{n_0} \leq x,$$

در غیر اینصورت $x - \varepsilon$ باید کران بالا از بُرد $\{s_n\}$ باشد که متناقض با این حقیقت است که x، lub است. از آنجا که $\{s_n\}$ بطور یکنوا صعودی است برای $n \geq n_0$ داریم

$$x - \varepsilon < s_n \leq x,$$

که نشان می‌دهد $\{s_n\}$ به x همگراست، این برهان را کامل می‌کند. ■

۱۲ مثال. (الف) دنبالهٔ $\{s_n\}$ که $s_n = (1+\frac{1}{n})^n$، کراندار، بطور یکنوا صعودی و بنابراین همگراست.

$$\begin{aligned} s_n = (1+\frac{1}{n})^n &= 1 + n.\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{n!} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \cdots \\ &+ \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}). \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که $\{s_n\}$ بطور یکنوا صعودی است. همچنین

$$\begin{aligned} 2 < s_n &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &< 3. \end{aligned}$$

بنابراین $\{s_n\}$ کراندار است. لذا $\{s_n\}$ همگراست، حد آن مقداری است بین ۲ و ۳ و این حد را با e نمایش داده و آن را عدد نپر می‌نامیم

(ب) دنبالهٔ $\{s_n\}$ داده شده با

$$s_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

همگراست.

اینجا برای هر $n \in \mathbb{N}$، $s_n - s_{n-1} = \frac{1}{n!} > 0$. بنابراین $\{s_n\}$ بطور یکنوا صعودی است. علاوه براین

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &< 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 2(1-\frac{1}{2^n}) \\ &= 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 2. \end{aligned}$$

بنابراین دنباله کراندار است و لذا همگراست.

۱۳ تعریف. فرض کنیم $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ داده شده در فضای متریک (X, d) باشد و فرض کنیم $\{n_k\}$ یک دنباله از اعداد صحیح مثبت باشد که $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. آن‌گاه دنبالهٔ $\{x_{n_k}\} = (x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots)$ یک *زیردنباله* از دنبالهٔ داده شدهٔ $\{x_n\}$ است.

۱۴ قضیه. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک فشرده و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشد. آن‌گاه زیر دنباله‌ای از $\{x_n\}$ موجود است که به نقطه‌ای از X همگرا است.

برهان. فرض کنیم A نمایش بُرد دنبالهٔ $\{x_n\}$ باشد. هرگاه A مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه نقطهٔ $x \in A$ و دنبالهٔ $\{n_k\}$ از اعداد صحیح مثبت با $n_1 < n_2 < \cdots$ چنان موجودند که

$$x_{n_1} = x_{n_2} = \cdots = x.$$

حال زیردنبالهٔ $\{x_{n_k}\}$ به x همگراست.

هرگاه A نامتناهی باشد، از آنجا که X فشرده است، قضیهٔ *بولتزانو-وایراشتراس* ایجاب می‌کند که A دارای یک نقطهٔ حدی $x \in X$ است. بنابراین برای هر $r > 0$، $S_r(x)$ حاوی نقاطی از A به غیر از x (اگر $x \in A$) می‌باشد. فرض کنیم برای هر $k \in \mathbb{N}$، $x_{n_k} \in S_{\frac{1}{k}}(x)$. حال این نتیجه می‌دهد که زیر دنبالهٔ $\{x_{n_k}\}$ از $\{x_n\}$ به $x \in X$ همگرا باشد و این نتیجه را ثابت می‌کند. ■

۱۵ نتیجه. هر دنبالهٔ حقیقی کراندار حاوی یک زیر دنبالهٔ همگراست.

برهان. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنبالهٔ حقیقی کرانداری در $\mathbb{R}$ باشد. آن‌گاه این دنباله در بازهٔ بسته وکراندار $[a, b] \subset \mathbb{R}$ قرار دارد. اما بنابه قضیه هاینه-بورل $[a, b]$ فشرده است. لذا این از قضیه بالا ایجاب می‌کند که $\{x_n\}$ دارای یک زیر دنبالهٔ همگرا باشد. ■

۵. حد بالا و حد پائین

۱ تعریف. فرض کنیم $\{s_n\}$ دنباله‌ای در $\mathbb{R}$ باشد. فرض کنیم E مجموعهٔ همهٔ xهایی (x می‌تواند یک عدد حقیقی یا $+\infty$ یا $-\infty$ باشد) باشد که برای زیر دنبالهٔ $\{s_{n_k}\}$ای از $\{s_n\}$، $s_{n_k} \to x$. حد *بالا* یا حد *اعلای* (بطور خلاصه $\limsup$) $\{s_n\}$ را بصورت $\sup E$ تعریف می‌کنیم. به‌طور مشابه، $\inf E$ حد *پایین* یا حد *اسفل* ($\liminf$) $\{s_n\}$ نامیده می‌شود. به بیان دقیق‌تر

$$\limsup \quad s_n = \sup E,$$

$$\liminf \quad s_n = \inf E.$$

۲ مثالها. (الف) قرار دهید $s_n = (-۱)^n$. آن‌گاه

$$\limsup s_n = ۱ \quad , \quad \liminf s_n = -۱.$$

(ب) فرض کنیم $s_n = ۱ + (-۱)^n$ باشد. آن‌گاه

$$\limsup s_n = ۲ \quad , \quad \liminf s_n = ۰$$

(ج) قراردهید $s_n = \frac{(-۱)^{n-۱}}{n!}$. در این حالت

$$\limsup s_n = \liminf s_n = ۰.$$

دنباله همگراست و $\lim s_n = ۰$.

(د) قرار دهید $s_n = \frac{(-۱)^n}{۱+\frac{۱}{n}}$. آن‌گاه

$$\limsup s_n = ۱ \quad , \quad \liminf s_n = -۱.$$

(ه) فرض کنیم $\{s_n\}$ دنباله‌ای متشکل از همهٔ اعداد گویا باشد، آن‌گاه

$$\limsup s_n = +\infty \quad , \quad \liminf s_n = -\infty.$$

از مثالهای بالا واضح است که مفاهیم حد بالا و حد پایین با همهٔ دنباله‌های حقیقی چه همگرا و چه واگرا مرتبط می‌باشند. اما، این دو حد در دنباله‌های غیرهمگرایی که دارای زیر دنبالهٔ همگرا هستند، متناهی و متمایز می‌باشند.

دنبالهٔ $\{s_n\}$ از جملات حقیقی را در نظر بگیرید. هرگاه این دنباله از بالا کراندار نباشد آن‌گاه داریم $\limsup s_n = M$، که M بزرگ است. بطور مشابه، هرگاه $\{s_n\}$ از پایین کراندار نباشد داریم

$$\liminf s_n = -M.$$

اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که $\{s_n\}$ از بالا کراندار است، که ایجاب می‌کند دنباله یا همگرا است یا از پایین کراندار نیست. در این حالت دنبالهٔ

$$s_n, s_{n+۱}, s_{n+۲}, \cdots$$

از بالا کراندار است و بنابراین دارای کوچکترین کران بالای μ_n می‌باشد، یعنی

$$\mu_n = \text{lub}\{s_n, s_{n+۱}, s_{n+۲}, \cdots\}$$

علاوه براین، به‌راحتی می‌بینیم که $\mu_n \geq \mu_{n+۱}$ زیرا که

$$\{s_{n+۱}, s_{n+۲}, s_{n+۳}, \cdots\} \subset \{s_n, s_{n+۱}, s_{n+۲}, \cdots\}.$$

بنابراین دنبالهٔ $\{\mu_n\}$ ناصعودی است و لذا یا همگرا است یا واگرا به M−ای. بطور دقیق،

(الف) همگرایی $\{\mu_n\}$ ایجاب می‌کند که

$$\limsup s_n = \lim_{n\to\infty} \mu_n$$

(ب) واگرایی $\{\mu_n\}$ ایجاب می‌کند که

$$\limsup \mu_n = -M.$$

علاوه براین، هرگاه دنبالهٔ $\{s_n\}$ از اعداد حقیقی از پایین کراندار باشد و

$$\lambda_n = \text{glb}\{s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \cdots\}$$

آن‌گاه $\{s_n\}$ نانزولی است و یک دنباله همگراست بطوریکه

$$\limsup s_n = \lim_{n\to\infty} \lambda_n$$

یا دنباله واگرا به M می‌باشد.

۳ قضیه. هرگاه دنبالهٔ $\{s_n\}$ از اعداد حقیقی به s همگرا باشد آن‌گاه
(الف) $\limsup s_n = s$،
(ب) $\liminf s_n = s$.

برهان. وقتی دنبالهٔ $\{s_n\}$ به s همگرا باشد، برای $\varepsilon > 0$ داده شده عدد صحیح مثبت n_0 چنان موجود است که

$$|s_n - s| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

این بدین معنی است که

$$s - \varepsilon < s_n < s + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

و $s+\varepsilon$ یک کران بالا از

$$\{s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \cdots\}$$

می‌باشد. همچنین، هرگاه μ_n کوچکترین کران بالای مجموعهٔ فوق باشد، آن‌گاه

$$s - \varepsilon \leq \mu_n \leq s + \varepsilon.$$

علاوه براین، دنبالهٔ $\{\mu_n\}$ ناصعودی است، در نتیجه

$$s-\varepsilon \leq \lim_{n\to\infty} \mu_n \leq s+\varepsilon.$$

اما

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = \limsup s_n.$$

بنابراین

$$s-\varepsilon \leq \limsup s_n \leq s+\varepsilon.$$

لذا

$$\limsup s_n = s.$$

این قسمت (الف) از قضیه را ثابت می‌کند. برهان قسمت (ب) بطور مشابه می‌باشد که به خواننده واگذار می‌گردد. ■

۴ قضیه. فرض کنیم $\{s_n\}$ دنباله‌ای با جملات حقیقی باشد، آن‌گاه

$$\liminf s_n \leq \limsup s_n.$$

برهان. هرگاه دنبالهٔ $\{s_n\}$ کراندار باشد، تعریف می‌کنیم

$$\lambda_n = \operatorname{glb}\{s_n, s_{n+۱}, s_{n+۲}, \cdots\}$$

$$\mu_n = \operatorname{lub}\{s_n, s_{n+۱}, s_{n+۲}, \cdots\}$$

آن‌گاه

$$\lambda_n \leq \mu_n.$$

همچنین داریم

$$\lambda_n = \liminf s_n \quad , \quad \mu_n = \limsup s_n$$

وقتی که دنباله $\{s_n\}$ هم از پایین و هم از بالا کراندار باشد. آن‌گاه

$$\liminf s_n \leq \limsup s_n.$$

برای حالتی که $\{s_n\}$ کراندار نباشد، یا

$$\liminf s_n = -M \quad \text{یا} \quad \limsup s_n = M$$

که M بزرگ و مثبت است. این بدین معنی است که یا

$$-M < \limsup s_n \quad \text{یا} \quad \liminf s_n < M$$

لذا قضیه در این حالت نیز برقرار است. ■

این قضیه‌ها می‌توانند برای نشان دادن اینکه یک دنبالهٔ کراندار از اعداد حقیقی دارای یک زیر دنباله‌ای است که همگرا می‌باشد، توسعه داده شوند. دنبالهٔ اصلی ممکن است همگرا باشد یا همگرا نباشد.

در انتهای این بخش به قضیه‌ای اشاره می‌کنیم که چند دنبالهٔ خاص و حدود آنها را بررسی می‌کند.

۵ قضیه. (الف) هرگاه $p > ۰$، آن‌گاه $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{۱}{n^p} = ۰$،
(ب) هرگاه $p > ۰$، آن‌گاه $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = ۱$،
(ج) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = ۱$،
(د) هرگاه $p > ۰$ و α حقیقی باشد آن‌گاه $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(۱+p)^n} = ۰$،
(هـ) هرگاه $|x| < ۱$، آن‌گاه $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = ۰$.

برهان. (الف) n را بزرگتر از $(\frac{۱}{\varepsilon})^{\frac{۱}{p}}$ می‌گیریم. (توجه کنید که در اینجا از خاصیت ارشمیدس اعداد حقیقی استفاده شده است.)

(ب) هرگاه $p > ۱$، قرار می‌دهیم $x_n = \sqrt[n]{p} - ۱$. در اینصورت $x_n > ۰$ و بنابر قضیهٔ دو جمله‌ای

$$۱ + nx_n \leq (۱ + x_n)^n = p.$$

پس

$$۰ < x_n \leq \frac{p-۱}{n}.$$

بنابراین، $x_n \to ۰$.   هرگاه $p = ۱$، (ب) بدیهی است و چنانچه $۰ < p < ۱$، آن‌گاه $\frac{۱}{p} > ۱$ و نتیجه از قسمت قبل بدست می‌آید.
(ج) قرار دهید $x_n = \sqrt[n]{n} - ۱$.   پس $x_n \geq ۰$ و بنابر قضیه دو جمله‌ای

$$n = (۱ + x_n)^n \geq \frac{n(n-۱)}{۲} x_n^۲.$$

در نتیجه

$$۰ \leq x_n \leq \sqrt{\frac{۲}{n-۱}} \qquad (n \geq ۲)$$

(د) فرض کنیم k عدد صحیحی باشد که $k > \alpha$ و $k > ۰$.   به‌ازای $n > ۲k$،

$$\begin{aligned}(۱+p)^n > \binom{n}{k} p^k &= \frac{n(n-۱)\cdots(n-k+۱)}{k!} p^k \\ &> \frac{n^k p^k}{۲^k k!}.\end{aligned}$$

لذا

$$۰ < \frac{n^\alpha}{(۱+p)^n} < \frac{۲^k k!}{p^k} n^{\alpha - k} \qquad (n > ۲k).$$

چون $\alpha - k < ۰$، بنابر (الف)، $n^{\alpha-k} \to ۰$.
(ه) α را در (د) برابر صفر بگیرید. ■

۶. سری‌ها

یک عبارت به شکل

$$a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n + \cdots$$

که هر a_i، $i \in \mathbb{N}$، یک عدد حقیقی است یک سری *نامتناهی* یا بطور ساده‌تر سری از اعداد حقیقی نامیده می‌شود، اعداد a_i جملات سری نامیده می‌شوند.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یا بطور ساده‌تر $\sum a_n$ را برای نمایش سری نامتناهی

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

به کار می‌بریم. سری نامتناهی

$$\sum a_n$$

را در نظر بگیرید. به این سری دنبالهٔ $\{s_n\}$ را بدین صورت مربوط می‌کنیم که s_n نمایش مجموع n جملهٔ اول سری $\sum a_n$ باشد. بنابراین برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

یعنی اینکه،

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

و به همین ترتیب. دنبالهٔ $\{s_n\}$ *دنبالهٔ مجموع‌های جزئی* سری $\sum a_n$ نامیده می‌شود که به s_n مجموع جزئی nام می‌گویند.

۱ تعریف. سری نامتناهی $\sum a_n$ *همگرا* نامیده می‌شود هرگاه دنبالهٔ $\{s_n\}$ از مجموع‌های جزئی آن همگرا باشد و در این حالت حد دنباله $\{s_n\}$ مجموع سری $\sum a_n$ نامیده می‌شود. در غیراینصورت سری را *واگرا* می‌گویند.
بعنوان مثال، سری هندسی $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ برای $0 \leq r < 1$ همگراست و در این حالت

$$s_n = \frac{1 - r^n}{1 - r} \longrightarrow \frac{1}{1 - r} \quad , n \to \infty$$ وقتی.

۲ قضیه. (شرط لازم همگرایی‌سری) هرگاه سری $\sum a_n$ همگرا باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ۰$، اما عکس این مطلب درست نیست.

برهان. فرض کنیم $\sum a_n$ همگرا باشد و فرض کنیم

$$s_n = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n$$

نمایش دنبالهٔ مجموع‌های جزئی‌اش باشد. از آنجا که $\sum a_n$ همگراست دنبالهٔ $\{s_n\}$ همگرا می‌باشد. بنابراین $\lim s_n = s$. حال $a_n = s_n - s_{n-۱}$. بنابراین

$$\begin{aligned}\lim a_n &= \lim(s_n - s_{n-۱})\\ &= \lim s_n - \lim s_{n-۱}\\ &= s - s = ۰.\end{aligned}$$

برای نشان دادن اینکه عکس این مطلب درست نیست، سری $\sum \frac{۱}{n}$ (سری همساز) را در نظر بگیرید. در این حالت $\lim \frac{۱}{n} = ۰$، اما سری همگرا نیست. ابتدا نتیجه زیر را ثابت می‌کنیم و سپس نشان می‌دهیم که سری $\sum \frac{۱}{n}$ واگراست. ■

۳ قضیه. سری $\sum a_n$ همگراست اگر و فقط اگر برای هر $\varepsilon > ۰$ عدد صحیح مثبت $n_۰$ چنان موجود باشد که

$$|a_{n+۱} + \cdots + a_{n+m}| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_۰, m \geq ۱.$$

این قضیه به عنوان شرط‌کشی *برای* همگرایی شناخته شده است.

برهان. قرار دهید

$$s_n = \sum_{k=۱}^{n} a_k.$$

از آنجا که $\sum a_n$ همگرا است، دنبالهٔ $\{s_n\}$ همگرا می‌باشد و لذا کشی است. بنابراین برای هر $\varepsilon > 0$، n_0ای موجود است که برای هر $n \geq n_0$ و $m \geq 1$،

$$|s_{n+m} - s_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}| < \varepsilon.$$

برعکس؛ فرض کنیم برای هر $\varepsilon > 0$، $n_0 \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که برای هر $n \geq n_0$ و $m \geq 1$،

$$|s_{n+m} - s_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}| < \varepsilon.$$

حال این ایجاب می‌کند که $\{s_n\}$ دنباله‌ای کشی از اعداد حقیقی است و لذا همگراست. بنابراین $\sum a_n$ همگراست و این برهان را کامل می‌کند. ■

۴ مثالها. (الف) سری $\sum \frac{1}{n}$ واگراست،
فرض کنیم سری $\sum \frac{1}{n}$ همگرا باشد. آن‌گاه برای هر $\varepsilon > 0$ (مثلاً $\varepsilon = \frac{1}{10}$) عدد صحیح مثبت n_0 چنان موجود است که برای $n \geq n_0$ و $m \geq 1$،

$$|\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+m}| < \varepsilon.$$

$n = n_0$ و $m = n_0$ انتخاب کنید. آن‌گاه

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+m} = \frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0+2} + \cdots + \frac{1}{2n_0}$$
$$> n_0 . \frac{1}{2n_0} = \frac{1}{2} > \varepsilon.$$

این تناقض نتیجه را ثابت می‌کند.
(ب) نشان دهید که سری

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots$$

واگراست. در این حالت

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$
$$\lim a_n = \lim \frac{n}{n+1} = \lim \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$$

لذا سری شرط لازم همگرایی را ندارد.

(ج) سری $\sum \frac{1}{n^p}$ برای $p \leq 0$ واگراست، زیرا در این حالت $a_n \not\to 0$ وقتی $n \to \infty$. علاوه براین $\sum \frac{1}{n^p}$ برای $p > 1$ همگراست و برای $p \leq 1$ واگراست.

اکنون نشان می‌دهیم که برای $p > 1$، $\sum \frac{1}{n^p}$ همگراست. قرار دهید

$$s_n = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}.$$

از آنجا که $p > 1$، دنبالهٔ $\{\frac{1}{n^p}\}$ نانزولی است. برای $m \in \mathbb{N}$ داریم

$$\begin{aligned} s_{2^{m+1}-1} &= 1 + (\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}) + \cdots + (\frac{1}{(2^m)^p} + \cdots + \frac{1}{(2^{m+1}-1)^p}) \\ &\leq 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \cdots + \frac{2^m}{(2^m)^p}) \\ &= 1 + 2^{1-p} + 4^{1-p} + \cdots + (2^m)^{1-p} \\ &= 1 + 2^{1-p} + (2^{1-p})^2 + \cdots + (2^{1-p})^m \\ &= \frac{1-(2^{1-p})^{m+1}}{1-2^{1-p}} < \frac{1}{1-2^{1-p}} \end{aligned}$$

از آنجا که $2^{1-p} > 0$، برای $n \in \mathbb{N}$ داده شده، بوسیلهٔ استقرای ریاضی می‌توان نشان داد که

$$n < n+1 \leq 2^n < 2^{n+1} - 1.$$

همچنین از آنجا که $\{s_n\}$ نانزولی است، این ایجاب می‌کند که برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$s_n < s_{2^{n+1}-1} < \frac{1}{1-2^{1-p}}.$$

لذا دنبالهٔ $\{s_n\}$ از بالا به $\frac{۱}{۱-۲^{۱-p}}$ کراندار است و بنابراین سری $\sum \frac{۱}{n^p}$ همگرا می‌باشد.

ثابت می‌کنیم که سری $\sum \frac{۱}{n}$ واگراست. برای این منظور جملات سری را بصورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

$$۱ + \frac{۱}{۲} + (\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴}) + (\frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۸}) + \cdots . \qquad (۱)$$

سری دیگری را بصورت زیر در نظر بگیرید

$$۱ + \frac{۱}{۲} + (\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴}) + (\frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۸}) + \cdots . \qquad (۲)$$

هر جملهٔ سری (۱) بزرگتر یا مساوی جملهٔ نظیرش در سری (۲) می‌باشد. فرض کنیم $s_n^۱$ و $s_n^۲$ به ترتیب مجموع‌های جزئی سری‌های (۱) و (۲) باشند. آن‌گاه برای $n > ۲$

$$s_n^۱ > s_n^۲.$$

هرگاه برای $k \in \mathbb{N}$، $n = ۲^k$ داریم

$$s_{۲^k}^۲ = ۱ + k.\frac{۱}{۲}$$

و بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} s_n^۲ = \infty.$$

در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} s_n^۱ = \infty$$

و لذا $\sum \frac{۱}{n}$ واگراست.

۷. آزمون‌های همگرایی

چندین آزمون برای همگرایی سری‌های موجودند که از جمله آنها می‌توان به آزمون مقایسه آزمون تراکم کشی، آزمون نسبت دالامبر، آزمون ریشه کشی، آزمون رآبه، آزمون لگاریتم، آزمون انتگرال کشی، آزمون گوس، آزمون آبل، آزمون مقایسهٔ حدود و آزمون دیریکله اشاره کرد.

۱ آزمون مقایسه. (الف) فرض کنیم $\sum u_n$ یک سری همگرا و $\sum x_n$ سری دیگری باشد که برای هر $n \geq N$، $|x_n| \leq ku_n$، که N عددی صحیح و k ثابت است. آن گاه سری $\sum x_n$ نیز همگراست.
(ب) هرگاه $\sum u_n$ واگرا باشد و $|x_n| \geq ku_n$، آنگاه $\sum x_n$ واگراست.

برهان. (الف) داریم

$$|\sum_{i=۱}^{k} u_{m+i}| < \frac{\varepsilon}{k} \quad \forall m \geq n_\varepsilon, k \geq ۰$$

که $\varepsilon > ۰$ و $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ به ε وابسته است. $m > N$ انتخاب کنید. آنگاه

$$\begin{aligned} |\sum_{i=۱}^{k} x_{m+i}| &\leq \sum_{i=۱}^{k} |x_{m+i}| \leq k\sum_{i=۱}^{k} u_{m+i} \\ &< \varepsilon \qquad \forall m \geq n_\varepsilon, k \geq ۰ \end{aligned}$$

بنابراین سری $\sum x_i$ همگراست و این (الف) را ثابت می‌کند.
(ب) به طریق مشابه ثابت می‌شود. ■

۲ آزمون مقایسهٔ حدود. هرگاه $\sum u_n$ و $\sum v_n$ دو سری با مجلات مثبت باشند که $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \ell$.
(الف) هرگاه ℓ عدد حقیقی مخالف صفر (متناهی) باشد آن‌گاه هر دو سری یا همگرایند یا واگرا.
(ب) هرگاه $\ell = ۰$ باشد آن‌گاه در صورتی که $\sum v_n$ همگرا باشد $\sum u_n$ نیز همگرا است و اگر $\sum u_n$ واگرا باشد، $\sum v_n$ نیز واگراست.
(ج) هرگاه $\ell = \infty$ باشد، آن‌گاه در صورتی که $\sum u_n$ همگرا باشد، $\sum v_n$ نیز همگراست و اگر $\sum v_n$ واگرا باشد، $\sum u_n$ نیز واگراست.

برهان. (الف) بوضوح $\ell > 0$. $\varepsilon > 0$ را چنان انتخاب کنید که $\ell - \varepsilon > 0$. از آنجا که $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \ell$. عدد صحیح مثبت n_0 چنان موجود است که برای هر $n \geq n_0$،

$$|\frac{u_n}{v_n} - \ell| < \varepsilon$$
$$\Longrightarrow \ell - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < \ell + \varepsilon$$
$$\Longrightarrow (\ell - \varepsilon)v_n < u_n < (\ell + \varepsilon)v_n.$$

فرض کنیم $\sum v_n$ همگرا باشد. از آنجا که $u_n < (\ell + \varepsilon)v_n$، این ایجاب می‌کند که $\sum u_n$ همگراست. دوباره هرگاه $\sum v_n$ واگرا باشد، از آنجا که $u_n > (\ell - \varepsilon)v_n$، $\sum u_n$ واگراست.

قسمتهای (ب) و (ج) نیز به طریق مشابه ثابت می‌شوند. ■

۳. آزمون تراکم کشی. فرض کنیم $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$. در اینصورت $\sum a_n$ همگراست اگر و فقط اگر سری

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots$$

همگرا باشد.

برهان. چون جملات سری نامنفی‌اند لذا دنباله مجموع‌های جزئی، یک دنبالهٔ بطور یکنوا صعودی خواهد بود. برای همگرایی کافی است کرانداری مجموع‌های جزئی را در نظر بگیریم (چرا؟). فرض کنیم

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

$$t_k = a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k}.$$

به‌ازای $n < 2^k$ داریم

$$\begin{aligned} s_n &\le a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\le a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k} \\ &= t_k \end{aligned}$$

پس

$$s_n \le k_k. \tag{1}$$

از طرف دیگر، اگر $n > 2^k$،

$$\begin{aligned} s_n &\ge a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \\ &\ge \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{k-1}a_{2^k} \\ &= \frac{1}{2}t_k \end{aligned}$$

در نتیجه

$$2s_n \ge t_k. \tag{2}$$

بنابر رابطه‌های (۱) و (۲)، دنباله‌های $\{s_n\}$ و $\{t_k\}$ یا هر دو کراندارند یا هر دو بی‌کران و این برهان قضیه را کامل می‌کند. ■

نتیجه ۱. $\sum \frac{1}{n^p}$ همگراست هرگاه $p > 1$، و واگراست هرگاه $p \le 1$.

برهان. توجه کنیم که هرگاه $p > 0$ باشد آن گاه بنابه آزمون تراکم کشی، سری

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k.\frac{1}{2^{kp}} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-p)k}$$

را خواهیم داشت. حال گوئیم $2^{1-p} < 1$ اگر و فقط اگر $1 - p < 0$ و نتیجه از مقایسه با سری هندسی (با انتخاب $r = 2^{1-p}$) بدست خواهد آمد.

هرگاه $p \le 0$، شرط لازم همگرایی برقرار نیست. ■

نتیجه ۲. هرگاه $p > ۱$،

$$\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{n(\log n)^p}$$

همگراست. چنانچه $p \leq ۱$، سری واگرا خواهد بود.

۴ آزمون نسبت. سری $\sum a_n$ را در نظر گرفته و قرار دهید $\alpha = \limsup_{n\to\infty} |\frac{a_{n+۱}}{a_n}|$.
در اینصورت سری $\sum a_n$
(الف) همگراست هرگاه $\alpha < ۱$.
(ب) واگراست هرگاه $\alpha > ۱$.
(ج) اگر $\alpha = ۱$ باشد، آزمون بی‌نتیجه است.

برهان. هرگاه شرط (الف) برقرار باشد، می‌توان $\beta < ۱$ای و عدد صحیح $n_۰$ را طوری یافت که برای $n \geq n_۰$،

$$|\frac{a_{n+۱}}{a_n}| < \beta.$$

بویژه،

$$\begin{aligned}
&|a_{n_۰+۱}| < \beta|a_{n_۰}| \\
&|a_{n_۰+۲}| < \beta|a_{n_۰+۱}| < \beta^۲|a_{n_۰}|, \\
&\vdots \\
&|a_{n_۰+p}| < \beta^p|a_{n_۰}|.
\end{aligned}$$

یعنی به‌ازای هر $n \geq n_۰$،

$$|a_n| < |a_{n_۰}|\beta^{-n_۰}\beta^n.$$

چون $\sum \beta^n$ همگراست، (الف) از آزمون مقایسه‌ای نتیجه می‌شود.

(ب) اگر $\alpha > 1$ باشد آن‌گاه عدد صحیح مثبت n_0 چنان موجود است که برای هر $n \geq n_0$

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$$

در نتیجه برای $n \geq n_0$، $|a_{n+1}| \geq |a_n|$. به آسانی دیده می‌شود که شرط $a_n \to 0$ برقرار نیست.

(ج) سری‌های $\sum \frac{1}{n}$ و $\sum \frac{1}{n^2}$ را در نظر بگیرید. ■

۵ آزمون ریشه. چنانچه $\sum a_n$ مفروض باشد، قرار دهید $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.
در این صورت

(الف) هرگاه $\alpha < 1$، $\sum a_n$ همگراست،

(ب) هرگاه $\alpha > 1$، $\sum a_n$ واگراست،

(ج) چنانچه $\alpha = 1$، آزمون بی‌نتیجه است.

برهان. هرگاه $\alpha < 1$، می‌توان β را طوری انتخاب کرد که $\alpha < \beta < 1$. همچنین عدد صحیح مثبت n_0 چنان موجود است که برای هر $n \geq n_0$،

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \beta$$

یعنی $n \geq n_0$ ایجاب می‌کند که

$$|a_n| < \beta^n.$$

چون $0 < \beta < 1$، $\sum \beta^n$ همگراست. حال همگرایی $\sum a_n$ از آزمون مقایسه نتیجه می‌شود.

هرگاه $\alpha > 1$، آن‌گاه دنباله‌ای صعودی مانند $\{n_k\}$ هست بطوری که

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \longrightarrow \alpha.$$

بنابراین به‌ازای بی‌نهایت مقدار از n، $|a_n| > ۱$. در نتیجه شرط $a_n \to ۰$ برقرار نمی‌باشد.

برای اثبات (ج)، سری‌های $\sum \frac{۱}{n}$ و $\sum \frac{۱}{n^۲}$ را در نظر بگیرید. برای هر یک از این سری‌ها، $\alpha = ۱$، اما اولی واگرا و دومی همگراست. ■

۶ مثالها. (الف) سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲+۱}$ همگراست زیرا که سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}$ همگراست و

$$\frac{۱}{n^۲ + ۱} \leq \frac{۱}{n^۲} \qquad \forall n = ۱, ۲, ۳, \cdots .$$

بطور مشابه سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{n}}$ واگراست از آنجا که

$$\frac{۱}{n} \leq \frac{۱}{\sqrt{n}} \qquad \forall n = ۱, ۲, ۳, \cdots$$

و $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$ واگراست. البته واگرایی $\sum \frac{۱}{\sqrt{n}}$ از نتیجه کلی که $\sum \frac{۱}{n^p}$ برای $p \leq ۱$ واگراست نتیجه می‌شود.

(ب) سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{۲^n}$ همگراست. زیرا

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+۱)/۲^{n+۱}}{n/۲^n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{۱ + \frac{۱}{n}}{۲} = \frac{۱}{۲} < ۱.$$

(ج) سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^n}$ را در نظر بگیرید. اینجا

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{۱}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} = ۰$$

این بدین معنی است که $\alpha < ۱$ و سری داده شده همگراست.

(د) همگرایی سری $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{(\log n)^p}$ را بررسی کنید. $(p > ۰)$

سری واگرای $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$ را در نظر بگیرید. داریم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{۱}{n}}{\frac{۱}{(\log n)^p}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^p}{n} = ۰.$$

بنابراین،

$$\frac{۱}{(\log n)^p} > \frac{۱}{n} \quad ; \quad n > ۱.$$

لذا سری داده شده واگراست.

(ه) همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n!}$ را بررسی کنید.

داریم

$$\frac{۱}{۲!} = \frac{۱}{۲}, \ \frac{۱}{۳!} < \frac{۱}{۲^۲}, \quad \frac{۱}{۴!} < \frac{۱}{۲^۳}, \cdots, \frac{۱}{n!} < \frac{۱}{۲^{n-۱}}, \cdots$$

بنابراین

$$۱ + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \cdots + \frac{۱}{n!} + \cdots < ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \cdots + \frac{۱}{۲^{n-۱}} + \cdots$$

اما $۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \cdots + \frac{۱}{۲^{n-۱}} + \cdots$ سری هندسی همگراست و بنابراین سری داده شده همگرا می‌باشد.

حال آزمون دیگری را تحت عنوان *آزمون لگاریتمی* مطرح می‌کنیم.

۷ آزمون لگاریتمی. فرض کنیم $\sum u_n$ یک سری با مجلات مثبت باشد که

$$\lim(n \log \frac{u_n}{u_{n+۱}}) = \ell.$$

آن‌گاه سری برای $\ell > ۱$ همگراست و برای $\ell < ۱$ واگراست.

برهان. فرض کنیم $\ell > ۱$ باشد. $\varepsilon > ۰$ را چنان انتخاب کنید که $\ell - \varepsilon > ۱$. قرار دهید $\ell - \varepsilon = \alpha > ۱$. از آنجا که $\lim\limits_{n\to\infty}(n \log \frac{u_n}{u_{n+۱}}) = \ell$ عدد صحیح مثبت $n_۰$ چنان موجود است که برای هر $n \geq n_۰$،

$$\ell - \varepsilon < n \log \frac{u_n}{u_{n+۱}} < \ell + \varepsilon$$

در نتیجه $\alpha < n\log\frac{u_n}{u_{n+1}}$ و لذا $\frac{u_n}{u_{n+1}} > e^{\frac{\alpha}{n}}$. از آنجا که $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ دنبالهٔ بطور یکنوا صعودی همگرا به e می‌باشد، پس

$$(1+\frac{1}{n})^n \leq e \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

و بنابراین به‌ازای هر $n \geq n_0$،

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > (1+\frac{1}{n})^\alpha = \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} = \frac{v_n}{v_{n+1}}$$

که $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$. امّا از آنجا که $\sum v_n$ برای $\alpha > 1$ همگراست، بنابه آزمون مقایسه نتیجه می‌گیریم که $\sum u_n$ همگراست. بطور مشابه می‌توان نشان داد که برای $\ell < 1$، سری $\sum u_n$ واگراست و این برهان را کامل می‌کند. ■

۸ مثال. همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n x^n}{n!}$ را بررسی کنید.

قرار دهید $u_n = \frac{n^n x^n}{n!}$. در این حالت

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n})^n x = ex.$$

بنابه آزمون نسبت نتیجه می‌گیریم که برای $x < \frac{1}{e}$ سری همگراست و برای $x > \frac{1}{e}$ سری واگراست. امّا برای $x = \frac{1}{e}$ آزمون نسبت موفق نیست و در این حالت آزمون لگاریتم مفید است.

برای $x = \frac{1}{e}$،

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = (\frac{n}{n+1})^n e.$$

حال

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(n\log\frac{u_n}{u_{n+1}}) &= \lim_{n\to\infty} n[1 - n\log(1+\frac{1}{n})] \\ &= \lim_{n\to\infty} n[1 - n(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \cdots)] \\ &= \frac{1}{2} < 1.\end{aligned}$$

لذا بنابه آزمون لگاریتم سری برای $x = \frac{1}{e}$ واگراست.

۹ آزمون انتگرال. تابع مثبت، نزولی و پیوستهٔ f در $[1,+\infty]$ مفروض است. در اینصورت سری $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ همگراست اگر و فقط اگر انتگرال ناسرهٔ

$$\int_1^{+\infty} f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(t)dt \tag{۳}$$

وجود داشته باشد. در صورت همگرایی، مجموع جزئی $s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ و مجموع $s = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq s - s_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt.$$

برهان. چون f در فاصلهٔ $[k-1,k]$ مثبت، پیوسته و نزولی است لذا

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt \leq f(k-1).$$

از جمع این نامساوی‌های برای $k = 2,3,\cdots,n$ بدست می‌آوریم

$$s_n - f(1) \leq \int_1^n f(t)dt \leq s_{n-1}$$

که نشان می‌دهد دو حد

$$\lim s_n \quad , \quad \lim \int_1^n f(t)dt$$

یا هر دو وجود دارند یا هیچکدام وجود ندارد. در صورتی که این دو حد وجود داشته باشند با جمع نامساوی‌ها برای $k = n+1,\cdots,m$ داریم

$$s_m - s_n \leq \int_n^m f(t)dt \leq s_{m-1} - s_{n-1}$$

که این ایجاب می‌کند که

$$\int_{n+1}^{m+1} f(t)dt \leq s_m - s_n \leq \int_n^m f(t)dt.$$

اگر نسبت به m حد بگیریم رابطهٔ (۳) بدست می‌آید. ■

۱۰ تعریف. سری نامتناهی $\sum a_n$ با جملات حقیقی، *بطور مطلق همگرا* نامیده می‌شود هرگاه سری $\sum |a_n|$ همگرا باشد. در قضیهٔ زیر خواهیم دید که هر سری بطور مطلق همگرا، همگراست امّا عکس آن درست نیست. این بدین معنی است که سری‌هایی موجودند که همگرایند امّا بطور مطلق همگرا نیستند. چنین سری‌هایی *بطور مشروط همگرا* نامیده می‌شوند.

۱۱ قضیه. هر سری بطور مطلق همگرا از اعداد حقیقی همگراست امّا عکس آن درست نیست.

برهان. فرض کنیم $\sum a_n$ بطور مطلق همگرا باشد یعنی اینکه $\sum |a_n|$ همگراست. بنابراین برای $\varepsilon > 0$ داده شده $n_0 \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که برای $n \geq n_0$ و $m \geq 1$،

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m}| < \varepsilon.$$

حال بنابه نامساوی مثلثی، برای $n \geq n_0$ و $m \geq 1$،

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| < \varepsilon.$$

در نتیجه شرط کشی برای همگرایی برقرار است.

قبل از اینکه ثابت کنیم عکس این مطلب درست نیست ابتدا قضیه‌ای را ثابت خواهیم کرد که آزمونی را برای همگرایی یک سری متناوب

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$$

که $u_n > 0$، بدست می‌دهد. ■

۱۲ آزمون لایب‌نیتز. هرگاه برای سری

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots \qquad (u_n > 0)$$

جملات چنان باشند که

$$u_1 > u_2 > u_3 > \cdots$$

و

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

آن‌گاه سری همگراست، مجموعش مثبت و از جملهٔ اول بزرگتر نیست.

برهان. قرار دهید

$$s_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

آن‌گاه این ایجاب می‌کند که

$$s_{2m} > 0.$$

همچنین

$$s_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}.$$

از این نتیجه می‌شود که

$$s_{2m} < u_1.$$

بنابراین s_{2m} تابعی صعودی از m است و از بالا به u_1 کراندار می‌باشد. بنابراین

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m} = s \quad ; \quad 0 < s < u_1.$$

حال $s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1}$. امّا $\lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$. لذا

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} s_{2m+1} &= \lim_{m\to\infty}(s_{2m} + u_{2m+1}) = \lim_{m\to\infty} s_{2m} + \lim_{m\to\infty} u_{2m+1}\\ &= s + 0 = s\end{aligned}$$

این برهان را کامل می‌کند. ■

برای نشان دادن اینکه سری‌هایی موجودند که همگرایند، امّا بطور مطلق همگرا نیستند، قرار دهید $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. $\sum a_n$ عبارتست از سری

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots,$$

که همگراست، همگرایی آن از آزمون لایب نیتز نتیجه می‌شود که اثبات آن به عنوان تمرین برای خواننده باقی می‌ماند. مشاهده می‌کنیم که سری

$$\sum |a_n| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

واگراست. این مثال، همچنین نشان می‌دهد که واگرایی $\sum |a_n|$ واگرایی $\sum a_n$ را ایجاب نمی‌کند.

اکنون آماده‌ایم که آزمون مهم آبل[1] را برای همگرایی سری‌های با مجلات دلخواه بیان کنیم که لزوماً همگرای مطلق نمی‌باشند.

برای این منظور ابتدا یک لم را ثابت می‌کنیم

۱۳ لم. فرض کنیم $\{b_n\}$ دنباله‌ای بطور یکنوا نزولی و مثبت و $\{A_n\}$ دنباله‌ای کراندار باشد آن‌گاه سری $\sum A_n(b_n - b_{n+1})$ بطور مطلق همگراست.

برهان. از آنجا که $\{A_n\}$ کراندار است، عدد صحیح مثبت K چنان موجود است که

$$|A_n| < K \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

۱) نیلس هنریک آبل niels Henrik Abel (۱۸۰۲ـ۱۸۲۹) ریاضی‌دان نروژی و از پیشگامان ریاضیات جدید است. یکی از عمده‌ترین اکتشافات او اثبات این حکم است که حل معادلات از درجهٔ پنجم به بالا در حالت کلی توسط رادیکالها امکان‌پذیر نیست. وی تحقیقات مهمی در توابع بیضوی و بعضی توابع عالی دیگر و همچنین سری‌ها دارد. وی دومین فرزند کشیش تهی‌دستی بود و به سبب تنگدستی مبتلا به بیماری سل گردید و در سن ۲۷ سالگی در گذشت.

بنابراین

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}|A_n(b_n-b_{n+1})| &< K\sum_{n=1}^{m}|b_n-b_{n+1}| \\ &= K\sum_{n=1}^{m}(b_n-b_{n+1}) \\ &= K(b_1-b_{m+1}) < Kb_1.\end{aligned}$$

حال $\sum|A_n(b_n-b_{n+1})|$ یک سری با جملات مثبت است و دنبالهٔ مجموع‌های جزئی آن از بالا به Kb_1 کراندار است. بنابراین $\sum|A_n(b_n-b_{n+1})|$ همگراست و لذا $\sum A_n(b_n-b_{n+1})$ بطور مطلق همگراست. ■

۱۴ آزمون آبل. فرض کنیم $\{b_n\}$ دنبالهٔ بطور یکنوا نزولی و مثبت و $\sum u_n$ یک سری همگرا باشد. آن‌گاه $\sum u_nb_n$ همگراست.

برهان. قرار دهید $v_n=u_nb_n$، $s_n=\sum_{i=1}^{n}u_i$ و $t_n=\sum_{i=1}^{n}v_i$. حال

$$\begin{aligned}t_n &= u_1b_1+u_2b_2+\cdots+u_nb_n \\ &= s_1b_1+(s_2-s_1)b_2+\cdots+(s_n-s_{n-1})b_n \\ &= s_1(b_1-b_2)+s_2(b_2-b_3)+\cdots+s_{n-1}(b_{n-1}-b_n)+s_nb_n \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}s_i(b_i-b_{i+1})+s_nb_n.\end{aligned}$$

از آنجا که $\sum u_n$ همگراست، دنبالهٔ $\{s_n\}$ همگراست و بنابراین کراندار می‌باشد. همچنین $\{b_n\}$ مثبت و بطور یکنوا نزولی است. لذا، بنابه لم ۱۳، $\sum s_n(b_n-b_{n+1})$ همگراست. بنابراین دنبالهٔ مجموع‌های جزئی $\sum_{i=1}^{n-1}s_i(b_i-b_{i+1})$، وقتی $n\to\infty$، به یک حد متناهی همگراست. علاوه بر این از آنجا که $\{b_n\}$ بطور یکنوا نزولی است و از پایین به صفر کراندار است، $\{b_n\}$ همگراست و لذا b_n، وقتی $n\to\infty$، به یک حد متناهی همگرا

خواهد بود. در نتیجه، وقتی $n \to \infty$، $s_n b_n$ به یک حد متناهی همگرا خواهد بود. لذا این ایجاب می‌کند که v_n به حدی متناهی همگرا باشد. پس سری $\sum v_n = \sum u_n b_n$ همگراست و این برهان را کامل می‌کند. ■

۱۵ آزمون دیریکله.[۲] اگر دنبالهٔ مجموع‌های جزئی سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ کراندار و $\{a_n\}$ نزولی و همگرا به صفر باشد، آن‌گاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ همگراست.

برهان. قرار دهید $B_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$. بنابه فرض عددی مانند $M > 0$ چنان موجود است که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، داریم $|B_n| < M$. همچنین به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $a_n \geq a_{n+1}$ لذا

$$\sum_{i=1}^{n} |B_i(a_i - a_{i+1})| \leq M \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i+1}) \leq M a_1$$

لذا سری $\sum_{n=1}^{\infty} B_n(a_n - a_{n+1})$ همگراست (البته می‌توان این را از لم ۱۳ نیز نتیجه گرفت). از طرفی برای هر $i \geq 1$ داریم $b_i = B_i - B_{i-1}$ لذا

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i &= \sum_{i=1}^{n} a_i(B_i - B_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} a_i B_i - \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} B_i \\ &= a_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} B_i(a_i - a_{i+1})\end{aligned}$$

که در آن $B_0 = 0$ انتخاب می‌کنیم. در نتیجه با فرض اینکه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ملاحظه می‌کنیم که سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ همگراست و داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(a_n - a_{n+1}). \blacksquare$$

---

۲) پتر گوستاولژن دیریکله Peter Gustav Lejeune Dirichlet (۱۸۰۵ـ ۱۸۹۵) ریاضی‌دان آلمانی که تحقیقات گرانبها در تئوری اعداد، آنالیز و مکانیک دارد. در بسیاری از رشته‌های ریاضیات کار کرد، و در همهٔ آنها به اکتشافاتی نایل شد «سری دیریکله» و «انتگرال دیریکله» از کارهای اوست. در ۱۸۵۵ پس از تدریس قریب به سی‌سال در برلین در دانشگاه گوتینگن جانشین گوس گردید.

۱۶ مثال. سری $\cdots + \frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۷} - \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۲} + ۱$ را در نظر می‌گیریم. اگر $a_n = \frac{۱}{n}$ و $\{b_n\}$ را دنبالهٔ $\{۱, ۱, -۱, -۱, ۱, ۱, -۱, -۱, \cdots\}$ در نظر بگیریم آن‌گاه سری داده شده دارای شرایط آزمون دیریکله است و دنبالهٔ $\{B_n\}$ عبارتست از

$$\{۱, ۲, ۱, ۰, ۱, ۲, ۱, ۰, \cdots ,\}$$

لذا سری داده شده همگراست.

۱۷ آزمون رآبه.[۳] (الف) هرگاه $\{x_n\}$ دنباله‌ای از عناصر مخالف صفر در $\mathbb{R}^m$ باشد و اگر عددی حقیقی مانند $a > ۱$ و عددی طبیعی مانند $n_۰$ وجود داشته باشد بطوری که

$$\frac{||x_{n+۱}||}{||x_n||} \leq ۱ - \frac{a}{n} \qquad \forall n \geq n_۰ \tag{۱}$$

آن‌گاه سری $\sum x_n$ همگرای مطلق است.

(ب) هرگاه عدد حقیقی $a \leq ۱$ و عدد طبیعی $n_۰$ وجود داشته باشد بطوری که

$$\frac{||x_{n+۱}||}{||x_n||} \geq ۱ - \frac{a}{n} \quad \forall n \geq n_۰ \tag{۲}$$

آن‌گاه $\sum x_n$ همگرای مطلق نیست.

برهان. (الف) با فرض اینکه رابطهٔ (۱) برقرار باشد داریم

$$n||x_{n+۱}|| \leq (n-۱)||x_n|| - (a-۱)||x_n|| \qquad \forall n \geq n_۰$$

یا

$$(n-۱)||x_n|| - n||x_{n+۱}|| \geq (a-۱)||x_n|| > ۰ \qquad \forall n \geq n_۰. \tag{۳}$$

۳) ژوزف ل. رآبه Joseph L. Raabe (۱۸۰۱ـ۱۸۵۹) در اوکراین بدنیا آمد و در زوریخ تدریس می‌کرد. او هم در هندسه و هم در آنالیز کارکرده است.

در نتیجه دنبالهٔ $\{n||x_{n+1}||\}$ برای $n \geq n_0$ نزولی است. از جمع رابطه‌های (۳) برای $n = n_0, \cdots, k$ و با توجه به این مطلب که طرف چپ رابطهٔ ادغامی است، رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$(n_0 - 1)||x_{n_0}|| - k||x_{k+1}|| \geq (a-1)(||x_{n_0}|| + \cdots + ||x_k||).$$

این نشان می‌دهد که مجموع‌های جزئی سری $\sum ||x_n||$ کراندار هستند و همگرایی مطلق سری $\sum x_n$ نتیجه می‌شود.

(ب) اگر رابطهٔ (۲) برای $n \geq n_0$ برقرار باشد، آنگاه چون $a \leq 1$،

$$n||x_{n+1}|| \geq (n-a)||x_n|| \geq (n-1)||x_n||$$

بنابراین دنبالهٔ $\{n||x_{n+1}||\}$ برای $n \geq n_0$ صعودی است و عددی مانند $c > 0$ وجود دارد به قسمی که

$$||x_{n+1}|| > \frac{c}{n} \qquad \forall n \geq n_0$$

چون سری همساز $\sum \frac{1}{n}$ واگراست، سری $\sum x_n$ نمی‌تواند همگرای مطلق باشد. ■

۱۸ نتیجه. هرگاه $a > 1$ و دنبالهٔ $\{x_n\}$ در رابطهٔ (۱) صدق کند آنگاه مجموع‌های جزئی، طبق برآورد

$$||s - s_n|| \leq \frac{n}{a-1}||x_{n+1}|| \quad \forall n \geq n_0 \tag{۴}$$

مجموع $s = \sum x_n$ را تقریب می‌زنند.

برهان. فرض کنیم $m > k \geq n_0$. از جمع نابرابری‌های حاصل از (۳) برای $n = k+1, \cdots, m$ داریم

$$k||x_{k+1}|| - m||x_{m+1}|| \geq (a-1)(||x_{k+1}|| + \cdots + ||x_m||).$$

بنابراین نتیجه می‌شود که

$$||s_m - s_k|| \leq ||x_{k+1}|| + \cdots + ||x_m|| \leq \frac{k}{a-1}||x_{k+1}||;$$

حال نسبت به m حد می‌گیریم رابطهٔ (۴) بدست می‌آید. ■

در کاربرد آزمون رآبه، گاه ممکن است از صورت حدی آن که کارآیی کمتری دارد استفاده شود:

۱۹ نتیجه. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در $\mathbb{R}^m$ با عناصر مخالف صفر باشد و حد

$$a = \lim_{n\to\infty}[n(1 - \frac{||x_{n+1}||}{||x_n||})] \qquad (5)$$

وجود داشته باشد. آن‌گاه سری $\sum x_n$ برای $a > 1$ همگرای مطلق است و برای $a < 1$ همگرایی مطلق نیست.

برهان. فرض کنید که $a > 1$ و حدّ (۵) وجود داشته باشد. اگر a_1 عددی با شرط $1 < a_1 < a$ باشد، آن‌گاه عددی طبیعی مانند n_0 چنان موجود است که

$$a_1 < n(1 - \frac{||x_{n+1}||}{||x_n||}) \quad \forall n \geq n_0.$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{||x_{n+1}||}{||x_n||} < 1 - \frac{a_1}{n} \quad \forall n \geq n_0,$$

و قضیه ۱۷ همگرایی مطلق سری را تضمین می‌کند. برای حالت $a < 1$، به طریق مشابه می‌توان عمل کرد که اثبات آن را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم. ■

۸. تجدید آرایش سری‌ها

۱ تعریف. سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ را یک تجدید آرایش سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ می‌نامیم، هرگاه یک تابع دو سویی φ از $\mathbb{N}$ بروی $\mathbb{N}$ وجود داشته باشد بطوری که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم

$$b_n = a_{\varphi(n)}.$$

۲ مثال. سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ را در نظر می‌گیریم. سری

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots \qquad (1)$$

یک تجدید آرایش از سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ است. اگر $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ باشد، آن‌گاه

$$s < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

چون برای $n \geq 1$ داریم $\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} > 0$، ملاحظه می‌کنیم که

$$t_3 < t_6 < t_9 < \cdots$$

که در آن t_n مجموع جزئی nام سری (۱) است. لذا

$$\limsup t_n > t_3 = \frac{5}{6} > s$$

بنابراین سری (۱) به s همگرا نیست، در عین حال که سری (۱) همگراست.

۳ قضیه. هرگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق با مجموع s باشد، آن‌گاه هر تجدید آرایش آن نیز همگرای مطلق است و مجموع آن s می‌باشد.

برهان. فرض کنیم سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ یک تجدید آرایش سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ با مجموع جزئی nام t_n باشد. برای $\varepsilon > 0$ داده شده عدد طبیعی n_0 چنان موجود است که

$$\sum_{i=n}^{m} |a_i| < \varepsilon \qquad \forall m \geq n \geq n_0. \tag{۲}$$

فرض می‌کنیم که $\{1, 2, \cdots, n_0\} \subset \{\varphi(1), \cdots, \varphi(k)\}$. در اینصورت اگر $n \geq k$ باشد اعداد $a_1, \cdots, a_{n_0}$ در تفاضل $s_n - t_n$ حذف می‌شوند و لذا با توجه به رابطهٔ (۲) داریم

$$|s_n - t_n| < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0.$$

پس دنبالهٔ $\{t_n\}$ همگرا و حد آن مساوی s است. ■

۹. جمع و ضرب سری‌ها

۱ قضیه. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = t$ آن‌گاه برای هر α حقیقی،

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + b_n) = \alpha s + t.$$

برهان. هرگاه $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ و $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ باشد آن‌گاه $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ و $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$ و در نتیجه $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha s_n + t_n) = \alpha s + t$. ■

۲ تعریف. اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ دو سری داده شده باشند قرار دهید

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \qquad ; \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

آن‌گاه سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ را حاصلضرب دو سری داده شده می‌نامیم.

۳ مثال. هرگاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = t$ باشد، آنگاه سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ الزاماً به st همگرا نیست، حتی ممکن است $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ همگرا نباشد.

بعنوان مثال، اگر $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$، آنگاه

$$c_n = (-1)^n \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-i+1)(i+1)}}$$

و چون

$$(n-i+1)(i+1) = (\frac{n}{2}+1)^2 - (\frac{n}{2}-i)^2 \leq (\frac{n}{2}+1)^2$$

لذا

$$|c_n| \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2}$$

پس $c_n \not\to 0$ و در نتیجه سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ واگراست در حالیکه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ همگرا می‌باشند.

۴ قضیه. فرض کنیم سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق با مجموع s باشد و سری $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ همگرا با مجموع t باشد. آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = st$.

برهان. قرار می‌دهیم $s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ و $t_n = \sum_{i=0}^{n} b_i$ و $u_n = \sum_{i=0}^{n} c_i$ و $v_n = t_n - t$. آنگاه داریم

$$\begin{aligned} c_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) \\ &= a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_n t_0 \\ &= a_0 (t + v_n) + a_1 (t + v_{n-1}) + \cdots + a_n (t + v_0) \\ &= s_n t + a_0 v_n + a_1 v_{n-1} + \cdots + a_n v_0 . \end{aligned}$$

باید نشان دهیم $\lim_{n\to\infty} c_n = st$. برای این منظور قرار می‌دهیم

$$w_n = a_0 v_n + a_1 v_{n-1} + \cdots + a_n v_0 .$$

لذا $c_n = s_n t + w_n$ و چون $\lim_{n\to\infty} s_n t = st$، کافی است نشان دهیم $\lim_{n\to\infty} w_n = ۰$. مطابق فرض $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق است، قرار می‌دهیم $\alpha = \sum_{n=۰}^{\infty} |a_n|$. اگر $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد با استفاده از همگرایی $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ داریم $\lim_{n\to\infty} v_n = ۰$. لذا عدد طبیعی $n_۰$ چنان موجود است که به‌ازای $n \geq n_۰$ داریم $|v_n| < \varepsilon$ لذا برای $n \geq n_۰$،

$$\begin{aligned} |w_n| &\leq |v_۰ a_n + \cdots + v_{n_۰} a_{n-n_۰}| + |v_{n_۰+۱} a_{n-n_۰-۱} + \cdots + v_n a_۰| \\ &\leq |v_۰ a_n + \cdots + v_{n_۰} a_{n-n_۰}| + \varepsilon\alpha \end{aligned}$$

اگر $n_۰$ را ثابت نگه داشته و $n \to \infty$ خواهیم داشت $\limsup |w_n| \leq \varepsilon\alpha$ (زیرا $\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$) و چون $\varepsilon > ۰$ دلخواه است نتیجه می‌گیریم که $\lim_{n\to\infty} w_n = ۰$. ■

تمرینات

۱. همگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید:

(الف) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{۱+\alpha}{۱+\beta} + \frac{(۱+\alpha)(۲+\alpha)}{(۱+\beta)(۲+\beta)} + \cdots$ ،

(ب) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\alpha+n}{\beta+n}$،

(ج) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۴n+۱}{۳n^۳-n^۲-۱}$

(د) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{۲^n}$،

(ه) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^۲}$.

(و) $\sum_{n=۱}^{\infty} (\sqrt{n+۱} - \sqrt{n})$

(ز) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sqrt{n+۱}-\sqrt{۲}}{n}$

(ح) $\sum_{n=۱}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - ۱)^n$

۲. دو دنبالهٔ کشی $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ را در فضای متریک (X, d) هم‌ارز نامیده می‌شود هرگاه

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = ۰$$

نشان دهید که این یک رابطهٔ هم‌ارزی در مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های کشی در (X, d) تعریف می‌کند.

۳. هرگاه $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنبالهٔ کشی در فضای متریک (X,d) باشند، آنگاه نشان دهید که دنبالهٔ $\{d(x_n,y_n)\}$ همگراست.

۴. اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای در فضای متریک (X,d) باشد بطوری‌که سری $\sum d(x_n,x_{n+۱})$ همگراست، آنگاه ثابت کنید که $\{x_n\}$ کشی است.

۵. هرگاه $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنبالهٔ همگرا از اعداد حقیقی باشند و اگر

$$u_n = \max(x_n,y_n) \quad , \quad v_n = \min(x_n,y_n)$$

آنگاه نشان دهید که دنباله‌های $\{u_n\}$ و $\{v_n\}$ همگرا هستند و

$$\lim u_n = \max(\lim x_n, \lim y_n)$$

$$\lim v_n = \min(\lim x_n, \lim y_n).$$

۶. هرگاه $x=\{x_n\}$ و $y=\{y_n\}$ دو دنباله از اعداد حقیقی باشند که x همگرا و y واگرا است، آنگاه نشان دهید که

(الف) دنبالهٔ $x+y$ واگراست.

(ب) $\lim \frac{x_n}{y_n} = ۰$.

۷. نشان دهید که دنبالهٔ بطور یکنوا صعودی (نزولی) که کراندار نباشد به $+\infty$ $(-\infty)$ واگراست.

۸. ثابت کنید که همگرایی دنبالهٔ حقیقی $\{x_n\}$ همگرایی $\{|x_n|\}$ را ایجاب می‌کند. آیا عکس این درست است؟ با یک مثال بررسی کنید.

۹. هرگاه $x_۱ = \sqrt{۲}$ و

$$x_{n+۱} = \sqrt{۲ + x_n} \qquad ; n = ۱,۲,۳,\cdots$$

ثابت کنید $\{x_n\}$ همگراست و به ازای $n = ۱,۲,۳,\cdots$، $x_n < ۲$.

۱۰. (الف) برای هر دو دنبالهٔ حقیقی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ ثابت کنید

$$\limsup(a_n+b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$$

و

$$\liminf(a_n + b_n) \geq \liminf a_n + \liminf b_n$$

مشروط بر اینکه مجموع سمت راست به شکل $\infty - \infty$ نباشد.

(ب) هرگاه به‌ازای هر n، $a_n > ۰$ و $b_n > ۰$ و دو عدد

$$\limsup a_n, \quad \limsup b_n$$

هر دو متناهی یا هر دو نامتناهی باشند، آن‌گاه

$$\limsup(a_n b_n) \leq (\limsup a_n)(\limsup b_n).$$

۱۱. نشان دهید که هرگاه $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+۱}}{a_n}| = L$ آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$.

۱۲. تحقیق کنید که

(الف) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$،

(ب) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(n+۱)(n+۲)\cdots ۲n}}{n} = \frac{۴}{e}$.

۱۳. نشان دهید که دنبالهٔ

$$x_n = ۱ + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۳^۲} + \cdots + \frac{۱}{n^۲}$$

همگراست و $\lim x_n \leq ۲$. [راهنمایی: $\{x_n\}$ بطور یکنوا صعودی و کراندار است.]

۱۴. (الف) هرگاه $\limsup s_n = s$ آن‌گاه ثابت کنید که حد بالای هر زیر دنباله از $\{s_n\}$ کوچکتر یا مساوی s است.

(ب) هرگاه $\{s_n\}$ کراندار و $\liminf s_n = s$، آن‌گاه ثابت کنید که $\{s_n\}$ دارای زیر دنباله‌ای است که به s همگراست.

۱۵. ثابت کنید که هرگاه $a_n \geq ۰$، همگرایی $\sum a_n$ همگرایی $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ را ایجاب می‌کند.

۱۶. فرض کنید $a_n > ۰$ و $\sum a_n$ واگرا باشد، ثابت کنید $\sum \frac{a_n}{۱+a_n}$ واگراست.

۱۷. فرض کنید سری $\sum a_n$ همگرای مطلق باشد. نشان دهید که هر یک از سری‌های زیر نیز همگرای مطلق می‌باشند:

(الف) $\sum a_n^2$، (ب) $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ $(a_n \neq -1)$، (ج) $\sum \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$.

۱۸. ثابت کنید سری $\sum \frac{1}{n(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})}$ واگرا نیست. [راهنمایی: از آزمون تراکم کشی استفاده کنید.]

۱۹. فرض کنید سری‌های مثبت $\sum a_n$ و $\sum b_n$ هر دو همگرا باشند. ثابت کنید سری $\sum \sqrt{a_n b_n}$ نیز همگراست. [راهنمایی: توجه کنید که $\sqrt{a_n b_n} \leq a_n + b_n$.]

۲۰. فرض کنید $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ و $\sum a_n$ همگرا باشد، ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty} n a_n = 0.$$

۴

پیوستگی

۱. حدود

۱ تعریف. فرض کنیم (X, d_1) و (Y, d_2) فضاهای متریک و $E \subset X$ باشد. فرض کنیم f نگاشتی از E به Y و a یک نقطهٔ حدی از E باشد. می‌گوئیم که $f(x)$ به حدّ $b \in Y$ میل می‌کند، وقتی x به a میل کند، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ چنان موجود باشد که

$$\forall x \in E; 0 < d_1(x, a) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), b) < \varepsilon.$$

هرگاه $f(x)$ به b میل کند وقتی x به a میل می‌کند آن‌گاه این را به طور نمادین با

$$f(x) \to b, \qquad x \to a \quad \text{وقتی}$$

یا

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

نمایش می‌دهیم. توجه کنیم که نقطهٔ a یک نقطه حدّی از E (دامنهٔ f) است و متعلق به X می‌باشد، امّا لزومی ندارد در E باشد، حتی اگر $a \in E$ ممکن است که

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

درست نباشد.

فرض کنیم $X=Y=\mathbb{R}$ و $E\subset\mathbb{R}$ و $f:E\to\mathbb{R}$ باشد، بعبارت دیگر، f تابع حقیقی تعریف شده روی زیر مجموعهٔ E از $\mathbb{R}$ باشد. فرض کنیم a یک نقطهٔ حدّی از E باشد. آن‌گاه $f(x)\to b\in\mathbb{R}$ وقتی $x\to a$ هرگاه برای هر $\varepsilon>0$، یک $\delta>0$ چنان موجود باشد که

$$\forall x\in E,\quad 0<|x-a|<\delta\Longrightarrow|f(x)-b|<\varepsilon$$

یعنی

$$\forall(a\neq)x\in E; a-\delta<x<a+\delta\Longrightarrow b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon.$$

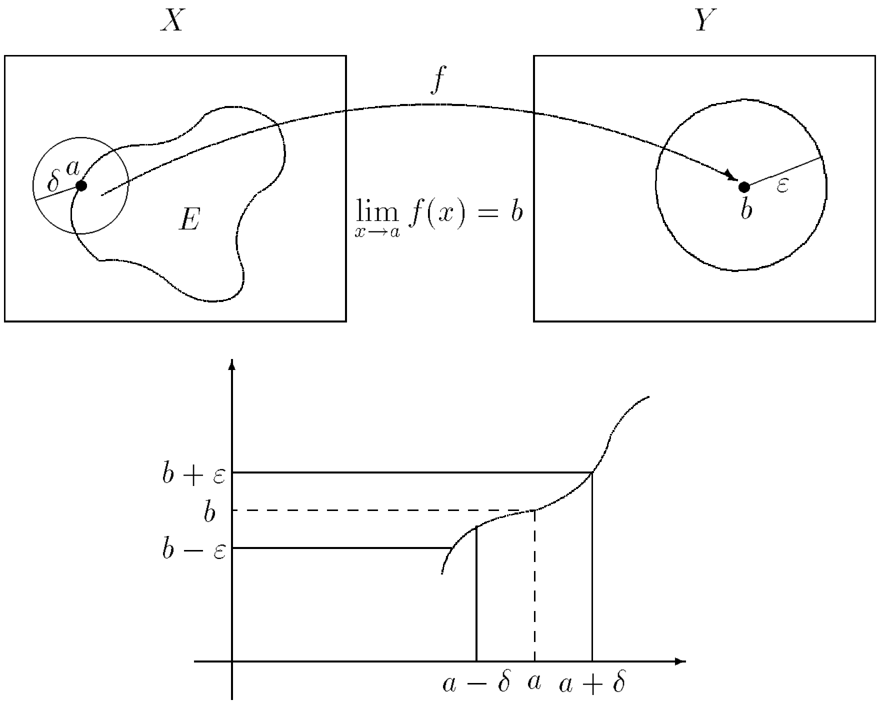
این موجب تعاریف زیر برای توابع حقیقی با دامنهٔ بازه می‌شود.

تابع حقیقی f دارای حد چپ b یا به حد b میل می‌کند وقتی x به a از چپ میل کند هرگاه برای هر $\varepsilon>0$، $\delta>0$ چنان موجود باشد که

$$\forall x\quad a-\delta<x<a\Longrightarrow|f(x)-b|<\varepsilon,$$

بطور نمادین این را به صورت زیر می‌نویسیم

$$f(x)\to b, x\to a^- \ \text{وقتی}\ \ \text{یا}\ \ \lim_{x\to a^-}f(x)=b.$$



شکل ۱.۴

بطور مشابه f دارای حد *راست* b است یا به حد b میل می‌کند وقتی x از سمت راست به a میل کند هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، یک $\delta > 0$ چنان موجود باشد که

$$\forall x \quad a < x < a + \delta \Longrightarrow \quad |f(x) - b| < \varepsilon$$

و این را به صورت زیر نمایش می‌دهیم

$$f(x) \to b, \quad x \to a^+ \text{ وقتی } \quad \text{ یا } \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = b.$$

توجه کنیم که هرگاه حد چپ و هم حد راست یک تابع در یک نقطه موجود و مساوی باشند آن‌گاه این مقدار مشترک، حد تابع در آن نقطه است.

قرار دهید $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^۲$ و $Y = \mathbb{R}$ و $E \subset \mathbb{R}$ و $f : E \to \mathbb{R}$. در اینجا f تابع دو متغیره با مقدار $f(x, y)$ که $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$ است. همچنین، فرض کنیم که $(x, y) = (a, b)$ یک نقطهٔ حدی از دامنهٔ f، E باشد. آن‌گاه تابع $f(x, y)$ دارای حد توأم L، وقتی (x, y) به (a, b) میل می‌کند، هرگاه برای هر $\varepsilon > ۰$ عدد مثبت δ چنان موجود باشد که

$$\forall (x, y) \in N_\delta(a, b) \Longrightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

در اینجا،

$$N_\delta(a, b) = \{(x, y) \mid (x - a)^۲ + (y - b)^۲ < \delta^۲\} \cap E.$$

همچنین می‌نویسیم

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L.$$

اما توجه کنیم که اگر $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x, b) = f_a$ و $\lim\limits_{y\to b} f(a, y) = f_b$ آن‌گاه لزوماً

$$f_a = f_b = L.$$

۲ مثالها. (الف) ثابت کنید که $\lim\limits_{x\to ۰} x \sin \frac{۱}{x} = ۰$.

داریم

$$|x \sin \frac{۱}{x}| = |x||\sin \frac{۱}{x}| \leq |x|.$$

$\varepsilon > ۰$ بگیرید و $\delta = \varepsilon$ انتخاب کنید. آن‌گاه این ایجاب می‌کند که

$$۰ < |x| < \delta \Longrightarrow \quad |x \sin \frac{۱}{x}| < \varepsilon.$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to ۰} x \sin \frac{۱}{x} = ۰$.

(ب) ثابت کنید که $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{x^۲-۱}{x-۱} = ۲$.

داریم

$$|\frac{x^۲-۱}{x-۱}-۲|=|\frac{x^۲-۲x+۱}{x-۱}|=|\frac{(x-۱)^۲}{x-۱}|=|x-۱|.$$

برای $\varepsilon>۰$ داده شده، $\delta=\varepsilon$ انتخاب کنید. آن‌گاه وقتی $|x-۱|<\delta$ داریم

$$|\frac{x^۲-۱}{x-۱}-۲|<\varepsilon$$

ولذا

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱}{x-۱}=۲.$$

(ج) فرض کنیم $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. اگر $\lim_{x\to a}f(x)$ موجود باشد، آن‌گاه نشان دهید که این حد یکتاست.

به‌برهان خلف، فرض کنیم که $\lim_{x\to a}f(x)=b_۱$ و $\lim_{x\to a}f(x)=b_۲$. فرض کنیم $\varepsilon>۰$ داده شده باشد. آن‌گاه می‌توانیم $\delta_۱>۰$ و $\delta_۲>۰$ را چنان انتخاب کنیم که

$$\forall x\ ۰<|x-a|<\delta_۱\Longrightarrow|f(x)-b_۱|<\frac{\varepsilon}{۲}$$
$$\forall x\ ۰<|x-a|<\delta_۲\Longrightarrow|f(x)-b_۲|<\frac{\varepsilon}{۲}.$$

قرار دهید $\delta=\min(\delta_۱,\delta_۲)$. آن‌گاه برای $۰<|x-a|<\delta$ داریم

$$\begin{aligned}|b_۱-b_۲|&=|b_۱-f(x)+f(x)-b_۲|\\&\leq|f(x)-b_۱|+|f(x)-b_۲|\\&<\frac{\varepsilon}{۲}+\frac{\varepsilon}{۲}=\varepsilon.\end{aligned}$$

از آنجا که $\varepsilon>۰$ دلخواه است باید داشته باشیم $b_۱=b_۲$.

(د) حدود چپ و راست تابع

$$f(x)=\frac{x^۲-۱}{x-۱}$$

را وقتی $x \to ۱$ پیدا کنید.

برای حد چپ قرار دهید $x = ۱ - h$ که $h > ۰$. بنابراین وقتی $x \to ۱^-$، $h \to ۰^+$، بنابراین

$$\begin{aligned}\lim_{x\to ۱} \frac{x^۲ - ۱}{x - ۱} &= \lim_{h\to ۰^+} \frac{(۱-h)^۲ - ۱}{-h} \\ &= \lim_{h\to ۰^+} \frac{-h(۲-h)}{-h} \\ &= \lim_{h\to ۰^+} (۲-h) \\ &= ۲ - ۰ = ۲\end{aligned}$$

برای حد راست قرار دهید، $x = ۱ + h$ که $h > ۰$. آن‌گاه $h \to ۰^+$ وقتی $x \to ۱^+$. حال

$$\begin{aligned}\lim_{x\to ۱^+} \frac{x^۲ - ۱}{x - ۱} &= \lim_{h\to ۰^+} \frac{(۱+h)^۲ - ۱}{h} \\ &= \lim_{h\to ۰^+} (۲+h) = ۲.\end{aligned}$$

بنابراین حدود چپ و راست موجودند و با هم برابر می‌باشند. لذا $\lim_{x\to ۱} \frac{x^۲-۱}{x-۱}$ موجود و با ۲ برابر است.

در حقیقت می‌توانیم حد را به روش زیر نیز محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to ۱} \frac{x^۲ - ۱}{x - ۱} &= \lim_{x\to ۱} \frac{(x+۱)(x-۱)}{x-۱} \\ &= \lim_{x\to ۱}(x+۱) = ۲. \qquad (\text{از آنجا که } x \neq ۱)\end{aligned}$$

۳ قضیه. فرض کنیم $(X, d_۱)$ و $(Y, d_۲)$ فضاهای متریک، $E \subset X$ و $f : E \to Y$ تابع باشد. فرض کنیم a یک نقطهٔ حدی از E و $b \in Y$ باشد. آن‌گاه

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

اگر و فقط اگر برای هر دنبالهٔ $\{a_n\}$ در E، که برای هر n، $a_n \neq a$ و به a همگراست

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = b.$$

برهان. فرض کنیم که $\lim_{x\to a} f(x) = b$ و فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. آن‌گاه $\delta > ۰$ چنان موجود است که هرگاه $۰ < d_۱(x,a) < \delta$ آن‌گاه $d_۲(f(x),b) < \varepsilon$. دنبالهٔ $\{a_n\}$ را در E چنان انتخاب کنید که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_n \neq a$ و $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. آن‌گاه $n_۰ \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که

$$d_۱(a_n, a) < \delta \quad \forall n \geq n_۰.$$

بنابراین برای $n \geq n_۰$ داریم

$$d_۲(f(a_n), b) < \varepsilon$$

و این بدین معنی است که $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = b$.

برعکس؛ فرض کنیم که $\lim_{x\to a} f(x) \neq b$. آن‌گاه $\varepsilon > ۰$ چنان موجود است که برای هر $\delta > ۰$، نقطه $x \in E$ (وابسته به δ) با خاصیت زیر وجود دارد

$$d_۱(x,a) < \delta, \quad \text{امّا} \quad d_۲(f(x),b) \geq \varepsilon.$$

حال با گرفتن $\delta = \frac{۱}{n}$ می‌توانیم دنبالهٔ $\{a_n\}$ را در E چنان پیدا کنیم که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_n \neq a$ و $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ امّا $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq b$. این برهان قضیه را کامل می‌کند. ■

۴ تعریف. فرض کنیم f و g هر دو تابع حقیقی تعریف شدهٔ روی زیر مجموعهٔ A از $\mathbb{R}$ باشند و فرض کنیم $\alpha \in \mathbb{R}$. آن‌گاه توابع جدید $f+g$، $f-g$، αf، fg و $\frac{f}{g}$ را روی

A بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x),$$
$$(f-g)(x) = f(x)-g(x),$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x),$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x) \quad \text{و}$$
$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0 \text{، } x \in A \text{ هرگاه برای هر }).$$

۵ قضیه. فرض کنیم f و g دو تابع حقیقی تعریف شده روی $A \subset \mathbb{R}$ باشند و $c \in A$ چنان باشد که

$$\lim_{x\to c} f(x) = \ell \quad \text{و} \quad \lim_{x\to c} g(x) = m.$$

آن‌گاه

(الف) $\lim_{x\to c}(f+g)(x) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = \ell + m$،

(ب) $\lim_{x\to c}(f-g)(x) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = \ell - m$،

(ج) $\lim_{x\to c}(\alpha f)(x) = \alpha \lim_{x\to c} f(x) = \alpha\ell, \alpha \in \mathbb{R}$،

(د) $\lim_{x\to c}(fg)(x) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) = \ell m$

(هـ) $\lim_{x\to c}(\frac{f}{g})(x) = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \frac{\ell}{m}$، هرگاه $\lim_{x\to c} g(x) = m \neq 0$.

برهان. اثبات این قضیه مشابه اثبات قضیهٔ ۶ بخش ۴ فصل ۳ می‌باشد و اثبات آن را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. ■

۲. پیوستگی

۱. تعریف. فرض کنیم (X, d_1) و (Y, d_2) دو فضای متریک و f نگاشتی از X به Y باشد. f در نقطه $a \in X$ پیوسته نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ای

چنان موجود باشد که

$$\forall x \in X \quad d_۱(x,a) < \delta \Longrightarrow d_۲(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

این بدین معنی است که برای هر $\varepsilon > ۰$، $\delta > ۰$ چنان موجود باشد که وقتی x در گوی باز در X به شعاع δ و مرکز a قرار دارد، $f(x)$ در گوی باز در Y به شعاع ε و مرکز $f(a)$ قرار داشته باشد، یا معادلاً، تصویر گوی باز به شعاع δ و مرکز a تحت f مشمول در گوی باز به شعاع ε و مرکز $f(a)$ باشد؛ و f روی X پیوسته نامیده می‌شود هرگاه در هر نقطه از X پیوسته باشد.

هرگاه $X = Y = \mathbb{R}$، آن‌گاه $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در $a \in \mathbb{R}$ پیوسته نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\varepsilon > ۰$، $\delta > ۰$ای وجود داشته باشد که برای $|x-a| < \delta$،

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

بعبارت دیگر، f در a پیوسته است هرگاه برای هر $\varepsilon > ۰$ یک $\delta > ۰$ چنان موجود باشد که $f(x)$ در بازه باز $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ قرار گیرد وقتی که x در بازهٔ باز $(a - \delta, a + \delta)$ قرار می‌گیرد.

توجه کنیم که f در نقطه a پیوسته است، بدین معنی است که $f(x) \to f(a)$ وقتی $x \to a$؛ یعنی

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

تعریف پیوستگی برای توابع حقیقی بطور صوری می‌تواند به دو بخش تقسیم شود. بخاطر بیاورید که f در a پیوسته است هرگاه برای هر $\varepsilon > ۰$، $\delta > ۰$ موجود باشد که

$$\begin{aligned} |x-a| < \delta &\Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \\ &\Longrightarrow f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon. \end{aligned}$$

این بحثهای زیر را ایجاب می‌کند:

f در نقطهٔ a نیم پیوستهٔ *پائین* نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\varepsilon > \circ$، $\delta > \circ$ای چنان موجود باشد که

$$|x-a| < \delta \Longrightarrow f(x) > f(a) - \varepsilon;$$

f در نقطهٔ a نیم پیوستهٔ *بالا* نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\varepsilon > \circ$، $\delta > \circ$ای موجود باشد چنان که

$$|x-a| < \delta \Longrightarrow f(x) < f(a) + \varepsilon.$$

یک تابع در نقطه‌ای از دامنه‌اش *ناپیوسته* نامیده می‌شود هرگاه در آن نقطه پیوسته نباشد و یک چنین نقطه‌ای، *نقطهٔ ناپیوستگی* برای تابع نامیده می‌شود.

۲ قضیه. فرض کنیم $(X, d_۱)$ و $(Y, d_۲)$ فضاهای متریک و f نگاشتی از X به Y باشد. آن‌گاه f در نقطهٔ $a \in X$ پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر دنبالهٔ $\{a_n\}$ در X همگرا به a،

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a).$$

برهان. فرض کنیم f در $a \in X$ پیوسته و $\varepsilon > \circ$ داده شده باشد. آن‌گاه $\delta > \circ$ چنان موجود است که

$$d_۱(x, a) < \delta \Longrightarrow d_۲(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای در X باشد که به a همگراست. آن‌گاه $n_\circ \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که

$$d_۱(a_n, a) < \delta \quad \forall n \geq n_\circ.$$

بنابراین

$$d_۲(f(a_n), f(a)) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\circ$$

که نشان می‌دهد $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.

برعکس؛ فرض کنیم f در a پیوسته نباشد. نشان می‌دهیم دنبالهٔ $\{a_n\}$ همگرا به a موجود است امّا دنبالهٔ $\{f(a_n)\}$ به $f(a)$ همگرا نیست. از آنجاکه f در a پیوسته نیست، $\varepsilon > ۰$ چنان موجود است که برای هر $\delta > ۰$، x ای وجود دارد که

$$d_۱(x, a) < \delta \quad \text{و} \quad d_۲(f(x), f(a)) \geq \varepsilon.$$

با انتخاب $\delta = \frac{۱}{n}$، می‌توانیم دنبالهٔ $\{a_n\}$ای بدست آوریم که

$$d_۱(a_n, a) < \frac{۱}{n} \quad \text{و} \quad d_۲(f(a_n), f(a)) \geq \varepsilon.$$

بنابراین، اگر چه $\{a_n\}$ به a همگراست، دنبالهٔ $\{f(a_n)\}$ به $f(a)$ همگرانیست. این برهان قضیه را کامل می‌کند. ■

۳ قضیه. فرض کنیم f و g توابع حقیقی تعریف شده روی زیر مجموعهٔ A از $\mathbb{R}$ باشند و فرض کنیم f و g در نقطه $a \in A$ پیوسته باشند. آنگاه توابع $f+g$، $f-g$، αf که $\alpha \in \mathbb{R}$، fg و f/g اگر $g(a) \neq ۰$، همه در $a \in A$ پیوسته می‌باشند.

برهان. بعنوان تمرین برای خواننده. ■

۴ قضیه. فرض‌کنیم $(X, d_۱)$ و $(Y, d_۲)$ فضاهای متریک باشند. تابع $f : X \to Y$ پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر مجموعهٔ باز $V \subset Y$، $f^{-۱}(V)$ در X باز باشد.

برهان. فرض کنیم $f : X \to Y$ پیوسته و V مجموعهٔ بازی در Y باشد. نشان می‌دهیم که $f^{-۱}(V)$ در X باز است. فرض کنیم $x \in f^{-۱}(V)$، آنگاه $f(x) \in V$. از آنجاکه V باز است و $f(x) \in V$، $\varepsilon > ۰$ چنان موجود است که

$$S_\varepsilon^{d_۲}(f(x)) \subset V$$

که $S_{\varepsilon}^{d_2}(f(x))$ نمایش گوی بازی در (Y, d_2) به مرکز $f(x)$ و شعاع ε می‌باشد.

از آنجا که f روی X پیوسته است، لذا در x نیز پیوسته است بنابراین $\delta > 0$ چنان موجود است که

$$f(S_{\delta}^{d_1}(x)) \subset S_{\varepsilon}^{d_2}(f(x))$$

که $S_{\delta}^{d_1}(x)$ نمایش گوی بازی در (X, d_1) به مرکز x و شعاع δ می‌باشد. لذا، این ایجاب می‌کند که

$$f(S_{\delta}^{d_1}(x)) \subset V$$

و در نتیجه

$$S_{\delta}^{d_1}(x) \subset f^{-1}(V).$$

این نشان می‌دهد که x یک نقطهٔ درونی از $f^{-1}(V)$ است و لذا $f^{-1}(V)$ باز است.

برعکس؛ فرض کنیم که برای هر مجموعهٔ باز $V \subset Y$، $f^{-1}(V)$ در X باز باشد. فرض کنیم ε داده شده و $x \in X$ باشد. آن‌گاه $S_{\varepsilon}^{d_2}(f(x))$ یک مجموعهٔ باز در Y است. بنابراین $f^{-1}(S_{\varepsilon}^{d_2}(f(x)))$ یک مجموعهٔ باز در X حاوی x می‌باشد، لذا x یک نقطه درونی از $f^{-1}(S_{\varepsilon}^{d_2}(f(x)))$ است. بنابراین $\delta > 0$ چنان موجود است که

$$S_{\delta}^{d_1}(x) \subset f^{-1}(S_{\varepsilon}^{d_2}(f(x))$$

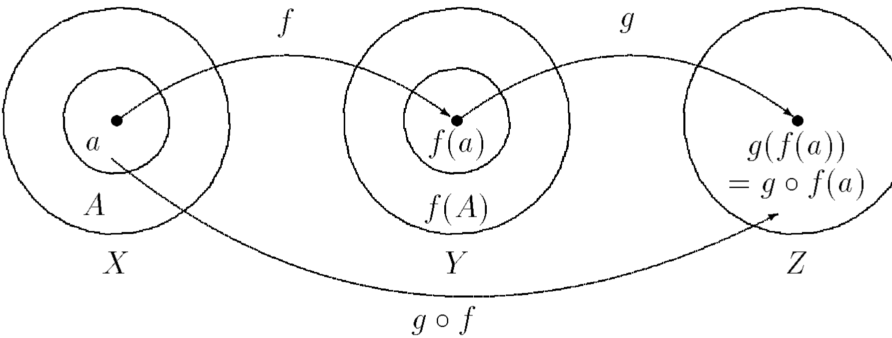
در نتیجه

$$f(S_{\delta}^{d_1}(x)) \subset S_{\varepsilon}^{d_2}(f(x)).$$

این نشان می‌دهد که f در x پیوسته است. از آنجا که x دلخواه بود f روی X پیوسته می‌باشد و این برهان را کامل می‌کند. ■

حال موضوع ترکیب دو نگاشت را مطرح می‌کنیم و سپس نشان می‌دهیم که ترکیب دو نگاشت پیوسته، پیوسته است.

۵ تعریف. فرض کنیم $(X, d_۱)$ و $(Y, d_۲)$ و $(Z, d_۳)$ فضاهای متریک باشند. فرض کنیم $A \subset X$ و $f : A \subset X \to Y$ و $g : f(A) \subset Y \to Z$. (شکل ۲.۴)



شکل ۲.۴

آن‌گاه ترکیب f و g، که با gof نمایش داده می‌شود، نگاشتی است از A به Z که بصورت زیر تعریف می‌شود

$$(gof)(a) = g(f(a)) \qquad \forall a \in A.$$

باید توجه کنیم که ترکیب دو نگاشت f و g فقط وقتی تعریف شده است که بُرد f زیر مجموعهٔ دامنهٔ g باشد ($\mathrm{rang}(f) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$).

۶ قضیه. با همان نمادهای تعریف بالا، هرگاه f در $a \in A$ پیوسته و g در $f(a)$ پیوسته باشد، آن‌گاه gof در $a \in A$ پیوسته است.

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. از آنجا که g در $f(a)$ پیوسته است، $\delta_۱ > ۰$ چنان موجود است که

$$\forall y \in f(A) \;\; ; \;\; d_۲(y, f(a)) < \delta_۱ \Longrightarrow d_۳(g(y), g(f(a))) < \varepsilon.$$

از آنجا که f در a پیوسته است، $\delta > \circ$ چنان موجود است که به‌ازای هر $x \in A$

$$d_{۱}(x, a) < \delta \Longrightarrow d_{۲}(f(x), f(a)) < \delta_{۱}.$$

بنابراین برای $x \in A$، $f(x) \in f(A)$ و لذا

$$d_{۱}(x, a) < \delta \Longrightarrow d_{۳}(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon.$$

در نتیجه gof در a پیوسته است و این نتیجه را ثابت می‌کند. ■

۷ مثالها. (الف) نشان دهید که $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تعریف شده با

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{۱}{x} & ; x \neq \circ \\ \circ & ; x = \circ \end{cases}$$

در $x = \circ$ پیوسته است.

در این حالت $f(\circ) = \circ$ است. همچنین

$$\lim_{x \to \circ} f(x) = \lim_{x \to \circ} (x \sin \frac{۱}{x}) = \circ = f(\circ)$$

و لذا f در $x = \circ$ پیوسته است.

(ب) پیوستگی تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تعریف شده با

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - |x|}{x} & ; x \neq \circ \\ \circ & ; x = \circ \end{cases}$$

را بررسی کنید.

هرگاه $x < \circ$، آن‌گاه $|x| = -x$، بنابراین

$$f(x) = \frac{x + x}{x} = \frac{۲x}{x} = ۲$$

و تابع برای هر $x < ۰$ پیوسته است. هرگاه $x > ۰$، $x = |x|$، لذا

$$f(x) = \frac{x - x}{x} = \frac{۰}{x} = ۰.$$

بنابراین تابع برای هر $x > ۰$ نیز پیوسته می‌باشد. حال $f(۰) = ۲$. علاوه بر این

$$\lim_{x \to ۰^-} f(x) = \lim_{x \to ۰^-} \frac{x + x}{x} = ۲$$

و

$$\lim_{x \to ۰^+} f(x) = \lim_{x \to ۰^+} \frac{x - x}{x} = \lim_{x \to ۰^+} \frac{۰}{x} = ۰.$$

در نتیجه f در $x = ۰$ ناپیوسته است.

(ج) برای $x \geq ۰$، فرض کنید $[x]$ نمایش بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی با x باشد. تابع f از اعداد حقیقی نامنفی به خودش را بصورت زیر تعریف کنید

$$f(x) = x - [x].$$

پیوستگی این تابع را در هر نقطه صحیح بررسی کنید.

فرض کنیم $n \in \mathbb{N}$. آنگاه $f(n) = n - [n] = n - n = ۰$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to n^-} f(x) &= \lim_{x \to n^-} (x - [x]) = \lim_{x \to n^-} - \lim_{x \to n^-} [x] \\ &= n - (n - ۱) = ۱ \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \lim_{x \to n^+} f(x) &= \lim_{x \to n^+} (x - [x]) \\ &= n - n = ۰. \end{aligned}$$

بنابراین تابع در هر نقطهٔ صحیح $n = ۱, ۲, ۳, \cdots$ ناپیوسته است. امّا مشاهده می‌کنیم که در هر نقطهٔ دیگری پیوسته می‌باشد.

(د) فرض کنیم $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ چنان باشد که $f(x+y)=f(x)+f(y)$ و فرض کنیم f در $x=\circ$ پیوسته باشد. ثابت کنید که f در هر $x\in\mathbb{R}$ پیوسته است.

از آنجا که $f(x+y)=f(x)+f(y)$، با انتخاب $x=\circ=y$ بدست می‌آوریم $f(\circ)=\circ$. قرار دهید $y=-x$ بدست می‌آوریم $f(-x)=-f(x)$. بنابراین $f(x-y)=f(x)-f(y)$. از آنجا که f در $x=\circ$ پیوسته است، برای $\varepsilon>\circ$ داده شده $\delta>\circ$ چنان موجود است که

$$\circ<|x-\circ|<\delta \Longrightarrow |f(x)-f(\circ)|<\varepsilon$$

یعنی،

$$\circ<|x|<\delta \Longrightarrow |f(x)|<\varepsilon.$$

لذا، هرگاه $x,y\in\mathbb{R}$ چنان باشند که $|x-y|<\delta$، آن‌گاه

$$|f(x-y)|<\varepsilon$$

یعنی،

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

این نشان می‌دهد که f در هر نقطه‌ای پیوسته است.

(ه) نشان دهید که تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تعریف شده با

$$f(x)=\begin{cases}\text{۱} & ;x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\\ -\text{۱} & ;x\in\mathbb{Q}\end{cases}$$

در همه جا ناپیوسته است.

فرض کنیم a هر عدد گویایی باشد، آن‌گاه برای هر عدد صحیح مثبت n، عدد گنگ a_n چنان موجود است که $|a_n-a|<\frac{\text{۱}}{n}$ و لذا دنبالهٔ $\{a_n\}$ به a همگراست.

همچنین برای هر n، $f(a_n)=\text{۱}$، بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\text{۱}.$$

امّا $f(a) = -۱$ و لذا

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq f(a).$$

بنابراین f در هیچ عدد گویایی پیوسته نیست. سپس فرض کنیم که b هر عدد گنگی باشد. آن‌گاه برای هر عدد صحیح مثبت n، اعداد گویای $\{b_n\}$ چنان موجودند که $|b_n - b| < \frac{۱}{n}$ و لذا $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. امّا برای هر n، $f(b_n) = -۱$ و در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = -۱$$

ولی $f(b) = ۱$ و بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) \neq f(b).$$

پس f در هیچ نقطهٔ گنگی نیز پیوسته نیست.

(و) نشان دهید که تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تعریف شده با

$$f(x) = \begin{cases} x & ; x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ -x & ; x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

فقط در $x = ۰$ پیوسته است و در هر نقطه دیگری ناپیوسته می‌باشد.

برای نشان دادن پیوستگی f در $x = ۰$، فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. $\varepsilon > \delta > ۰$ انتخاب کنید. فرض کنید x گویا و $\delta > |x| > ۰$ آن‌گاه

$$|f(x) - f(۰)| = |-x| = |x| < \varepsilon.$$

فرض کنید x گنگ و $\delta > |x| > ۰$. آن‌گاه

$$|f(x) - f(۰)| = |x| < \varepsilon.$$

بنابراین در هر حالت برای $\circ < |x| < \delta$، بدست می‌آوریم

$$|f(x) - f(\circ)| < \varepsilon$$

و لذا f در $x = \circ$ پیوسته است. ناپیوستگی f در هر عدد حقیقی غیر صفر به روش مشابه مثال قبل اثبات می‌شود که آن را بعنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم.

(ز) فرض کنیم $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ چنان باشد که $f(x+y) = f(x) + f(y)$ و فرض کنیم f در $x = \circ$ پیوسته باشد. آنگاه نشان دهید که برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(x) = xf(۱)$.

می‌بینیم که $f(\circ) = \circ = \circ f(۱)$. همچنین $f(-x) = -f(x)$.

فرض کنیم x یک عدد صحیح مثبت باشد. آنگاه

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\underbrace{۱ + ۱ + \cdots + ۱}_{x \text{ مرتبه}}) \\ &= \underbrace{f(۱) + f(۱) + \cdots + f(۱)}_{x \text{ مرتبه}} \qquad (\text{از آنجا که } f(x+y)=f(x)+f(y)) \\ &= xf(۱). \end{aligned}$$

فرض کنیم x عدد صحیح منفی باشد. آنگاه $x = -y$ که y یک عدد صحیح مثبت است. حال

$$f(x) = f(-y) = -f(y) = -yf(۱) = xf(۱).$$

سپس فرض کنیم x هر عدد گویایی باشد. آنگاه x می‌تواند بصورت $\frac{a}{b}$ نوشته شود که b عدد صحیح مثبت، a هر عدد صحیح و a و b نسبت به هم اول می‌باشند. آنگاه

$$\begin{aligned} af(۱) = f(a) &= f(\frac{a}{b}.b) \\ &= f(\underbrace{\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \cdots + \frac{a}{b}}_{b \text{ مرتبه}}) \\ &= bf(\frac{a}{b}). \end{aligned}$$

بنابراین
$$f(x)=f(\frac{a}{b})=\frac{a}{b}f(۱)=xf(۱).$$
در نهایت، فرض کنیم x هر عدد گنگی باشد. آن‌گاه دنبالهٔ $\{x_n\}$ از اعداد گویا چنان موجود است که $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. از آنجا که برای هر $n\in\mathbb{N}$، x_n گویاست داریم
$$f(x_n)=x_nf(۱)\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$
از آنجا که f در $x=۰$ پیوسته است لذا بنابه مثال (د)، f در x پیوسته خواهد بود در نتیجه
$$\begin{aligned}f(x)&=\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} x_nf(۱)\\&=(\lim_{n\to\infty} x_n)f(۱)\\&=xf(۱).\end{aligned}$$

این نتیجه را برای هر x حقیقی ثابت می‌کند.

(ح) فرض کنیم $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بصورت زیر تعریف شده باشد:
$$f(x)=\begin{cases}۱ & : x\in\mathbb{Q}\\ ۰ & ; x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$$
نشان دهید که f در هر نقطه‌ای ناپیوسته است. (اثبات بعهدهٔ خواننده)

(ط) فرض کنیم $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بصورت زیر تعریف شده باشد:
$$f(x)=\begin{cases}x & ; x\in\mathbb{Q}\\ ۰ & ; x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$$
این نیز به عهدهٔ خواننده است که نشان دهد f در $x=۰$ پیوسته است و در هر نقطهٔ دیگر ناپیوسته می‌باشد.

۸ تعریف. فرض کنیم f تابع حقیقی تعریف شده روی بازهٔ باز (a, b) باشد. تابع f روی (a, b) *بطور یکنوا صعودی* نامیده می‌شود هرگاه $a < x < y < b$ ایجاب کند که $f(x) \leq f(y)$ و f روی (a, b) *بطور یکنوا نزولی* نامیده می‌شود هرگاه $a < x < y < b$ ایجاب کند که $f(x) \geq f(y)$. تابع f *یکنوا* نامیده می‌شود هرگاه یا بطور یکنوا صعودی یا بطور یکنوا نزولی باشد.

۹ قضیه. فرض کنیم f تابع حقیقی یکنوا روی (a, b) باشد. آن‌گاه حد چپ و حد راست f در هر نقطه $x \in (a, b)$ موجود است. به بیان دقیق‌تر، فرض کنیم f بطور یکنوا صعودی باشد. آن‌گاه $f(x^+)$ و $f(x^-)$ در هر $x \in (a, b)$ موجودند و

$$\sup_{t \in (a,x)} f(t) = f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+) = \inf_{t \in (x,b)} f(t).$$

علاوه براین، هرگاه $a < x < y < b$، آن‌گاه

$$f(x^+) \leq f(y^-).$$

(هرگاه f بطور یکنوا نزولی باشد نتیجهٔ مشابهی برقرار است که بیان و اثبات آن را به خواننده واگذار می‌کنیم).

برهان. قرار دهید

$$A = \{f(t) \in \mathbb{R} : t \in (a, x) \subset \mathbb{R}\}.$$

از آنجا که f روی (a, b) بطور یکنوا صعودی است، مجموعهٔ A از بالا به عدد $f(x)$ کراندار است. بنابراین A دارای سوپریمم می‌باشد. قرار دهید $\ell = \sup A$. بوضوح $\ell \leq f(x)$. حال ادعا می‌کنیم که $\ell = f(x^-)$. برای اثبات ادعا، فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. از آنجا که ℓ سوپریمم مجموعهٔ A است، $\delta > 0$ چنان موجود است که $a < x - \delta < x$ و $\ell - \varepsilon < f(x - \delta) \leq \ell$.

علاوه بر این، از آنجا که f بطور یکنوا صعودی است، برای $x - \delta < t < x$،

$$f(x-\delta) \le f(t) \le \ell.$$

بنابراین برای $a < x - \delta < t < x$ خواهیم داشت

$$\ell - \varepsilon < f(x-\delta) \le f(t) \le \ell$$

یعنی وقتی $x - \delta < t < x$،

$$|f(t) - \ell| < \varepsilon.$$

بعبارت دیگر،

$$\lim_{t \to x^-} f(t) = f(x^-) = \ell = \sup_{t \in (a,x)} f(t).$$

با روشی مشابه می‌توان ثابت کرد که

$$f(x) \le \lim_{t \to x^+} f(t) = f(x^+) = \inf_{t \in (x,b)} f(t).$$

بالاخره، فرض کنیم که $a < x < y < b$. آنگاه خواهیم داشت

$$f(x^+) = \inf_{t \in (x,b)} f(t).$$

از آنجا که f صعودی است و $x < y < b$،

$$\inf_{t \in (x,b)} f(t) = \inf_{t \in (x,y)} f(t).$$

بنابراین

$$f(x^+) = \inf_{t \in (x,y)} f(t).$$

بطور مشابه، می‌توان نشان داد که

$$f(y^-) = \sup_{t \in (a,y)} f(t) = \sup_{t \in (x,y)} f(t).$$

لذا برای $a < x < y < b$، $f(x^+) \le f(y^-)$ و این برهان را کامل می‌کند. ■

۱۰ قضیه. فرض کنیم f روی (a,b) یکنوا باشد. آن‌گاه نقاط ناپیوستگی f مجموعه‌ای حداکثر شمارش‌پذیر است.

برهان. برای دقت بیشتر، فرض کنیم f بطور یکنوا صعودی باشد. فرض کنیم A نمایش مجموعهٔ همهٔ نقاطی از (a,b) باشد که f ناپیوسته است. نشان خواهیم داد که A شمارا است. از آنجا که f صعودی است لذا قضیهٔ بالا ایجاب می‌کند که برای هر $x \in (a,b)$،

$$f(x^-) \leq f(x^+).$$

فرض کنیم $x \in A$. آن‌گاه

$$f(x^-) < f(x^+).$$

عدد گویای $r(x)$ را چنان انتخاب کنید که

$$f(x^-) < r(x) < f(x^+).$$

بنابراین برای هر $x \in A$، عدد گویای $r(x)$ را چنان نظیر می‌کنیم که در نامساوی بالا صدق کند. فرض کنیم B نمایش مجموعهٔ همه چنین عددهای گویا باشد. این یک تناظر ۱ـ۱ بین A و B است. زیرا، فرض کنیم $x_۱ \neq x_۲$. در حالت خاص $x_۱ < x_۲$ بگیرید. این ایجاب می‌کند که $f(x_۱^+) \leq f(x_۲^-)$. بنابراین

$$f(x_۱^-) < r(x_۱) < f(x_۱^+) \leq f(x_۲^-) < r(x_۲) < f(x_۲^+),$$

که بدین معنی است که $r(x_۱) < r(x_۲)$، یعنی، $r(x_۱) \neq r(x_۲)$. بنابراین یک تناظر ۱ـ۱ بین A و B وجود دارد. اما $B \subset \mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}$، مجموعهٔ همهٔ اعداد گویا، شمارش‌پذیر است.

از آنجا که هر زیر مجموعهٔ از یک مجموعهٔ شمارش‌پذیر، شمارش‌پذیر است، این نتیجه می‌دهد که B شماراست. بنابراین A شماراست و این برهان را کامل می‌کند. ■

۳. پیوستگی و فشردگی

۱ قضیه. تصویر یک زیر مجموعهٔ فشرده از فضای متریک تحت یک نگاشت پیوسته فشرده است.

برهان. فرض کنیم (X, d_1) و (Y, d_2) فضاهای متریک و $f : X \to Y$ پیوسته باشد. فرض کنیم $K \subset X$ فشرده باشد. نشان خواهیم داد که $f(K)$ فشرده است. فرض کنیم $\{G_i : i \in I\}$ پوشش بازی از $f(K)$ باشد. آن‌گاه $\{f^{-1}(G_i) : i \in I\}$ یک پوشش باز از K خواهد بود. از آنجا که K فشرده است، این پوشش باز دارای یک زیر پوشش متناهی است. بدین معنی که G_1، G_2، $\cdots$، G_n چنان موجود هستند که

$$K \subset \cup_{i=1}^{n} f^{-1}(G_i) = f^{-1}(\cup_{i=1}^{n} G_i).$$

لذا این نتیجه می‌دهد که

$$f(K) \subset \cup_{i=1}^{n} G_i.$$

بنابراین $f(K)$ دارای یک زیر پوشش متناهی $\{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$ می‌باشد و لذا $f(K)$ فشرده است. ■

۲ نتیجه. یک تابع حقیقی پیوستهٔ تعریف شده روی یک فضای متریک فشرده، کراندار است.

برهان. فرض کنیم (X, d) فضای متریک فشرده و $f : X \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد. آن‌گاه قضیهٔ بالا نتیجه می‌دهد که $f(X)$ فشرده است. اما $f(X) \subset \mathbb{R}$ و بنابه قضیه هاینه‌ـبورل بسته و کراندار است. بنابراین $f(X)$، بُرد f، مجموعه‌ای کراندار است و لذا تابع f کراندار است. ■

۳ قضیه مقدار ماکزیمم. فرض کنیم (X,d) فضای متریک فشرده و $f: X \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد. آن‌گاه f کران‌های خود را می‌گیرد.

برهان. نتیجهٔ قبلی ایجاب می‌کند که f کراندار است. قرار دهید

$$m = \inf_{x\in X} f(x) \quad , \quad M = \sup_{x\in X} f(x).$$

نشان خواهیم داد که نقاط c و d در X چنان موجودند که

$$f(c) = m \quad , \quad f(d) = M.$$

از آنجا که X فشرده است، $f(X)$ نیز فشرده است و لذا بسته و کراندار می‌باشد. از آنجا که $f(X)$ کراندار است، m و M موجودند. از آنجا که $f(X)$ بسته است، هم m و هم M در $f(X)$ می‌باشند. این بدین معنی است که d, c در X چنان موجودند که

$$f(c) = m \quad , \quad f(d) = M,$$

و این برهان را کامل می‌کند. ■

۴ تعریف (پیوستگی یکنواخت). فرض کنیم $(X, d_۱)$ و $(Y, d_۲)$ فضاهای متریک و $f: X \to Y$ باشد. تابع f روی X پیوستهٔ یکنواخت نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\varepsilon > ۰$، $\delta > ۰$ای، فقط وابسته به ε، چنان موجود است که

$$\forall x, y \in X; d_۱(x,y) < \delta \Longrightarrow d_۲(f(x), f(y)) < \varepsilon. \qquad (۱)$$

۵ تبصره. در این سطح ممکن است خواننده بپذیرد که تعریف پیوستگی و پیوستگی یکنواخت مشابه هستند، اما باید توجه کنیم که یک تفاوت اساسی وجود دارد. پیوستگی بطور نقطه‌ای تعریف شده است، در حالی که پیوستگی یکنواخت یک خاصیت تعریف شده روی یک مجموعه می‌باشد. هرگاه $x \in X$، آن‌گاه f در x پیوسته است اگر برای

$\varepsilon > 0$ داده شده، یک $\delta > 0$ وابسته به ε و x چنان موجود باشد که (۱) برقرار شود. هرگاه f در هر نقطه از X پیوسته باشد، آن‌گاه برای یک $\varepsilon > 0$ داده شده، در هر لحظه ممکن است δی متفاوتی بدست آوریم و امکان ندارد فقط یک δ پیدا کنیم که برای هر $x \in X$، (۱) برقرار شود. اما در حالت پیوستگی یکنواخت f، تنها یک $\delta > 0$، فقط وابسته به ε اما نه به هر نقطه، وجود دارد که برای هر x و y در X (۱) برقرار است.

بنابراین تحلیل بالا ایجاب می‌کند که هر تابع پیوستهٔ یکنواخت، پیوسته است، اما مثال زیر نشان خواهد داد که عکس این مطلب همیشه درست نیست. بزودی خواهیم دید که هرگاه X، دامنهٔ f، فشرده باشد عکس این نیز برقرار است.

۶ مثالها. (الف) نشان دهید که تابع f تعریف شده با $f(x) = x^{۲}$ روی $[-۱, ۱]$ پیوستهٔ یکنواخت است.

فرض کنیم $x, y \in [-۱, ۱]$. آن‌گاه

$$|f(x) - f(y)| = |x^{۲} - y^{۲}| = |(x+y)(x-y)|$$
$$= |x+y||x-y|.$$

$\varepsilon > 0$ را گرفته، $\delta = \frac{\varepsilon}{۲}$ انتخاب کنید، از آنجا که $|x+y| \leq ۲$، وقتی $|x-y| < \delta$ خواهیم داشت

$$|f(x) - f(y)| < ۲.\frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon.$$

بنابراین شرط لازم، با انتخاب δ، که مستقل از نقاط انتخاب شده می‌باشد، برقرار شده است و لذا f روی $[-۱, ۱]$ پیوستهٔ یکنواخت می‌باشد.

(ب) نشان دهید که تابع تعریف شده با $f(x) = \frac{۱}{x}$ روی $(0, ۱]$ پیوستهٔ یکنواخت نیست.

خواننده می‌بیند که تابع در $(0, ۱]$ پیوسته است. برای پیوستگی یکنواخت، $\varepsilon > 0$ گرفته، باید $\delta > 0$ را مستقل از انتخاب نقاط x و y در $(0, ۱]$ چنان داشته باشیم که وقتی $|x-y| < \delta$،

$$|\frac{۱}{x} - \frac{۱}{y}| < \varepsilon.$$

هرگاه $y = \delta$ این دوباره درست است. اما اگر $y = \delta$ خواهیم داشت $|x - \delta| < \delta$،
یعنی $|x| < ۲\delta$ ولی

$$|\frac{۱}{x} - \frac{۱}{\delta}| = |\frac{\delta - x}{\delta x}| \to \infty \quad \text{وقتی } x \to ۰.$$

۷ قضیه. هر نگاشت پیوستهٔ تعریف شده روی فضای متریک فشرده، پیوستهٔ یکنواخت است.

برهان. فرض کنیم $(X, d_۱)$ و $(Y, d_۲)$ فضاهای متریک باشند. فرض کنیم $f : X \to Y$ پیوسته و X فشرده باشد. نشان خواهیم داد که f پیوستهٔ یکنواخت است. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. از آنجا که f روی X پیوسته است، لذا برای هر $x \in X$، $\delta_x > ۰$ چنان موجود است که

$$\forall y \in Y; d_۱(x, y) < \delta_x \Longrightarrow d_۲(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{۲}.$$

فرض کنیم G_x مجموعهٔ تعریف شده بصورت زیر باشد

$$G_x = \{y \in X : d_۱(x, y) < \frac{۱}{۲}\delta_x\}.$$

فرض کنیم $\{G_{x_i} : i \in I\}$ یک پوشش باز از X باشد. از آنجا که X فشرده است، تعداد متناهی نقطهٔ $x_۱$، $x_۲$، $\cdots$، x_n چنان موجودند که

$$X \subset \cup_{i=۱}^{n} G_{x_i}.$$

قرار دهید

$$\delta = \frac{۱}{۲}\min\{\delta_{x_۱}, \delta_{x_۲}, \cdots, \delta_{x_n}\}.$$

آنگاه $\delta > ۰$ و این مستقل از x است.

فرض کنیم $x, y \in X$ چنان باشند که $d_۱(x, y) < \delta$. آن‌گاه برای حداقل یک n ,$m = ۱, ۲, \cdots$، $x \in G_{x_m}$. این نشان می‌دهد که $d_۱(x, x_m) < \frac{۱}{۲}\delta_{x_m}$. بنابراین $d_۲(f(x), f(x_m)) < \frac{\varepsilon}{۲}$. همچنین

$$\begin{aligned} d_۱(x_m, y) &\leq d_۱(x_m, x) + d_۱(x, y) \\ &< \frac{۱}{۲}\delta_{x_m} + \delta \leq \delta_{x_m}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$d_۲(f(x_m), f(y)) < \frac{\varepsilon}{۲}.$$

لذا

$$\begin{aligned} d_۲(f(x), f(y)) &\leq d_۲(f(x), f(x_m)) + d_۲(f(x_m), f(y)) \\ &< \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon. \end{aligned}$$

بنابراین f پیوستهٔ یکنواخت است و این برهان قضیه را کامل می‌کند. ■

۴. پیوستگی و همبندی

۱ قضیه. تصویر پیوستهٔ هر فضای متریک همبند به فضای متریک دیگر، همبند است.

برهان. فرض کنیم $(X, d_۱)$ و $(Y, d_۲)$ فضاهای متریک و X همبند باشد. فرض کنیم $f : X \to Y$ نگاشته پیوسته باشد. نشان خواهیم داد که $f(X)$ همبند است. به برهان خلف، فرض کنیم $f(X)$ ناهمبند باشد. آن‌گاه مجموعه‌های باز ناتهی جدا از هم A و B در Y موجودند که هر کدام با $f(X)$ اشتراک داشته و

$$f(X) = A \cup B.$$

از آنجا که f پیوسته و A و B جدا از هم می‌باشند، $f^{-1}(A)$ و $f^{-1}(B)$ مجموعه‌های بازی در X می‌باشند. به عهدهٔ خواننده است که تحقیق کند $f^{-1}(A)$ و $f^{-1}(B)$ ناتهی و جدا از هم هستند و

$$f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = X.$$

آن‌گاه X ناهمبند است و این متناقض با فرض همبندی است. لذا قضیه ثابت شده است. ■

۲ قضیهٔ مقدار میانی. فرض کنیم (X, d) فضای متریک همبند و $f : X \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد. هرگاه $x_1, x_2 \in X$ و $f(x_1) < c < f(x_2)$، آن‌گاه نقطهٔ $x \in X$ چنان موجود است که $f(x) = c$.

برهان. از آنجا که X همبند است، لذا از قضیهٔ قبل نتیجه می‌گیریم که $f(X)$ نیز همبند می‌باشد. از آنجا که $f(X) \subset \mathbb{R}$ باید بصورت یک بازه باشد. از آنجا که $f(x_1), f(x_2) \in f(X)$ و $f(x_1) < c < f(x_2)$، این ایجاب می‌کند که $c \in f(X)$. بنابراین $x \in X$ چنان موجود است که $f(x) = c$ و این برهان قضیه را کامل می‌کند. ■

۵. توابع محدب

در این بخش درباره توابع محدب و رابطهٔ آن با پیوستگی صحبت خواهیم کرد. موضوع توابع محدب نقش بسیار مهمی در *مسائل کاربردی*، از جمله، نظریهٔ بهینه سازی، تحقیق در عملیات و اقتصاد بازی می‌کند. ابتدا تعریف توابع محدب را ذکر می‌کنیم و سپس چند مثال از آن را مطرح خواهیم کرد.

۱ تعریف. فرض کنیم I نمایش بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ روی خط حقیقی $\mathbb{R}$ باشد و $f : I \to \mathbb{R}$. تابع f روی I محدب نامیده می‌شود هرگاه برای $\lambda \in [۰,۱]$ و $x, y \in I$،

$$f(\lambda x + (۱-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (۱+\lambda) f(y).$$

تابع f *اکیداً* محدب نامیده می‌شود هرگاه برای $x \neq y$ نامساوی اکید برقرار باشد. f مقعّر نامیده می‌شود هرگاه برای $\lambda \in [۰,۱]$ و $x, y \in I$،

$$f(\lambda x + (۱+\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (۱-\lambda) f(y)$$

و *اکیداً* مقعّر نامیده می‌شود هرگاه نامساوی اکید برای $x \neq y$ برقرار باشد.

خواننده باید ثابت کند که توابع زیر محدب هستند. در هر حالت $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$.

(الف) $f(x) = mx + c$ که m و c اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند،

(ب) $f(x) = |x|$،

(ج) $f(x) = x^۲ - ۲x$،

(د) $f(x) = -x^{\frac{۱}{۲}}$، که $[a,b] \subset \mathbb{R}^+$،

(ه) $f(x) = x^۲$،

(و) $f(x) = e^x$، $[a,b] \subset \mathbb{R}^+$.

۲ قضیه. فرض کنیم $f : I \to \mathbb{R}$ و $g : I \to \mathbb{R}$ توابع محدب باشند و $\alpha \geq ۰$ باشد، آن‌گاه توابع $f+g$ و αf محدب هستند.

برهان. اثبات را بعنوان تمرین برای خواننده واگذار می‌کنیم ■

بخاطر بیاورید که تابع $f : I \to \mathbb{R}$ خطی است هرگاه برای هر $x, y \in I$ و $\alpha \in \mathbb{R}$،

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

$\mathbb{R} \to I : f$ زیرخطی نامیده می‌شود هرگاه برای $x, y \in I$ و $\alpha \geq 0$،

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y)$$
$$f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

۳ قضیه. هر تابع خطی هم محدب است و هم مقعر. یک تابع زیر خطی، محدب است.

برهان. به عنوان تمرین. ■

۴ قضیه. فرض کنیم $f : I \to I$ و $g : I \to \mathbb{R}$ محدب باشند و g نانزولی نیز باشد. آن‌گاه تابع ترکیب gof محدب است.

برهان. فرض کنیم $x, y \in I$ و $0 \leq \lambda \leq 1$. آن‌گاه، از آنجا که f محدب است،

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

از آنجا که g نانزولی و محدب است، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} g[f(\lambda x + (1-\lambda)y)] &\leq g[\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)] \\ &\leq \lambda g(f(x)) + (1-\lambda) g(f(g)) \end{aligned}$$

و این ثابت می‌کند که gof محدب است. ■

۵ قضیه. هرگاه $f : I \to \mathbb{R}$ و $g : I \to \mathbb{R}$ نامنفی، ناصعودی [نانزولی] و محدب باشند، آن‌گاه تابع h تعریف شده با $h(x) = f(x)g(x)$ نیز دارای سه خاصیت فوق می‌باشد.

برهان. فقط تحدب h را ثابت می‌کنیم که نابدیهی است. می‌بینیم که برای $x < y$،

$$[f(x) - f(y)][g(y) - g(x)] \leq ۰.$$

این ایجاب می‌کند که

$$f(x)g(y) + f(y)g(x) \leq f(x)g(x) + f(y)g(y).$$

حال فرض کنیم $\alpha > ۰$ و $\beta > ۰$ و $\alpha + \beta = ۱$. آن‌گاه

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y)g(\alpha x + \beta y) &\leq [\alpha f(x) + \beta f(y)][\alpha g(x) + \beta g(y)] \\ &= \alpha^۲ f(x)g(x) + \alpha\beta[f(x)g(y) + f(y)g(x)] + \beta^۲ f(y)g(y) \\ &\leq \alpha^۲ f(x)g(x) + \alpha\beta[f(x)g(x) + f(y)g(y)] + \beta^۲ f(y)g(y) \\ &= \alpha f(x)g(x) + \beta f(y)g(y) \end{aligned}$$

و این برهان را کامل می‌کند. ■

۶ قضیه. یک تابع حقیقی محدب که روی بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ متناهی است کراندار می‌باشد (از بالا و پائین).

برهان. فرض کنیم f محدب و روی $[a, b]$ متناهی باشد. قرار دهید

$$M = \max\{f(a), f(b)\}$$

برای هر $z = \lambda a + (۱ - \lambda)b$ دربازهٔ $[a, b]$ داریم

$$\begin{aligned} f(z) = f(\lambda a + (۱ - \lambda)b) &\leq \lambda f(a) + (۱ - \lambda)f(b) \\ &\leq \lambda M + (۱ - \lambda)M = M. \end{aligned}$$

بنابراین f از بالا به M کراندار است.

برای دیدن اینکه f از پائین کراندار است، بدون کاستن از کلیت، می‌بینیم که هر نقطهٔ دلخواه بصورت $\frac{a+b}{۲}+t$ قابل نمایش است. آن‌گاه داریم

$$f(\frac{a+b}{۲}) \leq \frac{۱}{۲}f(\frac{a+b}{۲}+t)+\frac{۱}{۲}f(\frac{a+b}{۲}-t).$$

بنابراین

$$f(\frac{a+b}{۲}+t) \geq ۲f(\frac{a+b}{۲})-f(\frac{a+b}{۲}-t).$$

از آنجا که M کران بالاست داریم

$$-f(\frac{a+b}{۲}-t) \geq -M$$

در نتیجه

$$f(\frac{a+b}{۲}+t) \geq ۲f(\frac{a+b}{۲})-M=m$$

که مقدار سمت راست را m می‌نامیم. این برهان را کامل می‌کند. ∎

۷ **تعریف.** فرض کنیم $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. تابع f *لیپ شیتزی* نامیده می‌شود هرگاه ثابت $K>۰$ چنان موجود باشد که برای هر دو نقطهٔ $x,y\in[a,b]$،

$$|f(x)-f(y)| \leq K|x-y|.$$

می‌بینیم که تابع لیپ شیتزی تعریف شده روی $[a,b]$، پیوستهٔ یکنواخت است. فرض کنیم f لیپ شیتزی و $\varepsilon>۰$ داده شده باشد. آن‌گاه $\delta=\frac{\varepsilon}{K}$ چنان موجود است که $|x-y|<\delta$ ایجاب می‌کند $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

۸ **قضیه.** فرض کنیم $f:I\to\mathbb{R}$ محدب باشد. آن‌گاه f روی هر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ مشمول در درون I، I^o، لیپ شیتزی است.

برهان. $\varepsilon > ۰$ را به روشی انتخاب کنید که $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \subset I$. فرض کنیم M و m به ترتیب کران‌های بالا و پائین f روی $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ باشند. هرگاه $x, y \in [a, b]$ و $x \neq y$، قرار دهید

$$z = y + \frac{\varepsilon}{|y-x|}(y-x) \quad , \quad \lambda = \frac{|y-x|}{\varepsilon + |y-x|}.$$

آن‌گاه $z \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ و $y = \lambda z + (۱-\lambda)x$ و داریم

$$\begin{aligned} f(y) &\leq \lambda f(z) + (۱-\lambda) f(x) \\ &= \lambda[f(z) - f(x)] + f(x) \end{aligned}$$

لذا

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) \leq (M-m) &< \frac{|y-x|}{\varepsilon}(M-n) \\ &= K|y-x| \end{aligned}$$

که $K = \frac{M-m}{\varepsilon}$. از آنجا که این برای $x, y \in [a, b]$ درست است نتیجه می‌گیریم که f لیپ شیتزی است.

از آنجا که $[a, b] \subset I^o$ بازهٔ بستهٔ دلخواه در I^o است، این ایجاب می‌کند که f روی I^o پیوسته باشد و این برهان را کامل می‌کند. ■

۹ قضیه. فرض کنیم $f : I \to \mathbb{R}$ محدب باشد. آن‌گاه برای $a, b, x \in I$ که $x \in (a, b)$،

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}.$$

هرگاه f اکیداً محدب باشد، آن‌گاه نامساوی اکید برقرار است.

برهان. از آنجا که f محدب است داریم

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b).$$

لذا این ایجاب می‌کند که

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &\leq \frac{a-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) \\ &= \frac{x-a}{b-a}[f(b) - f(a)] \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که نامساوی اول برقرار است. دومی نیز بطور مشابه ثابت می‌شود. همچنین می‌بینیم که هرگاه f اکیداً محدب باشد، نامساوی بالا اکید است، بنابراین نامساوی‌های مطرح شده اکید خواهند بود. ■

تمرینات

۱. نشان دهید که:

(الف) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{۱}{۱+e^{-\frac{۱}{x}}} = ۱$،

(ب) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{xe^{\frac{۱}{x}}}{۱+e^{\frac{۱}{x}}} = ۰$،

(ج) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{e^{\frac{۱}{x}}-۱}{۱+e^{\frac{۱}{x}}}$ موجود نیست.

۲. پیوستگی هرکدام از توابع زیر را در نقاط داده شده بررسی کنید:

(الف) $f(x) = \begin{cases} \frac{xe^{\frac{۱}{x}}}{۱+e^{\frac{۱}{x}}} & ; x \neq ۰ \\ ۰ & ; x = ۰ \end{cases}$ در $x = ۰$،

(ب) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{۱}{x^۲}}}{۱-e^{\frac{۱}{x^۲}}} & ; x \neq ۰ \\ ۱ & ; x = ۰ \end{cases}$ در $x = ۰$،

(ج) $f(x) = x - |x|$ در $x = ۰$،

(د) $f(x)=\begin{cases} x^m \sin\frac{1}{x} & ; x\neq 0, m>0 \\ 0 & ; x=0 \end{cases}$ در $x=0$.

۳. تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را بصورت زیر تعریف کنید:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & ; x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ \frac{1}{n} & ; x=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q} \end{cases}$$

نشان دهید که f در هر نقطهٔ گنگ پیوسته است و در هر نقطهٔ گویا ناپیوسته می‌باشد.

۴. نشان دهید که

(الف) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تعریف شده با

$$f(x)=x^2$$

در $[0,1]$ پیوستهٔ یکنواخت است اما در $\mathbb{R}$ اینگونه نیست.

(ب) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تعریف شده با

$$f(x)=x$$

در $[0,2]$ پیوستهٔ یکنواخت است.

۵. فرض کنیم (X,d) فضای متریک باشد. نگاشت $f:X\to\mathbb{R}$ را بصورت زیر تعریف کنید

$$f(x)=d(x,a),$$

که در آن $a\in X$ یک نقطه ثابت است. نشان دهید که f روی X پیوسته است.

۶. فرض کنیم f نگاشت پیوستهٔ یکنواخت از فضای متریک X به فضای متریک Y باشد و فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای‌کشی در X باشد. نشان دهید که $\{f(x_n)\}$ دنباله‌ای‌کشی در Y می‌باشد.

۷. فرض کنیم f نگاشت پیوسته‌ای روی فضای متریک X باشد. قرار دهید

$$K_f=\{x\in X: f(x)=0\}.$$

k_f را مجموعهٔ *صفرهای تابع* f می‌نامند. نشان دهید که K_f مجموعه‌ای بسته است.

۸. فرض کنیم f تابع پیوستهٔ یکنواختی روی مجموعهٔ کراندار $A \subset \mathbb{R}$ باشد. نشان دهید که f روی A کراندار است.

۹. پیوستگی $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تعریف شده با

$$f(x) = \begin{cases} ۰ & ; x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ \frac{۱}{q} & ; x \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q}, (p, q) = ۱ \end{cases}$$

را روی $(۰ , ۱)$ بررسی کنید.

۱۰. هرگاه $a_n \to a$ وقتی $n \to \infty$، نشان دهید که

$$(a_۱ a_۲ \cdots a_n)^{\frac{۱}{n}} \to a \quad \text{وقتی } n \to \infty.$$

[راهنمایی: از پیوستگی تابع $\log$ استفاده کنید.]

۱۱. هرگاه f نگاشت پیوسته‌ای از فضای متریک X به فضای متریک Y باشد، ثابت کنید که به ازای هر مجموعهٔ $E \subset X$،

$$f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}.$$

با یک مثال نشان دهید که $f(\overline{E})$ می‌تواند یک زیر مجموعهٔ سره از $\overline{f(E)}$ باشد.

۱۲. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ با متریک معمولی) بصورت زیر تعریف شوند. در پیوستگی توابع زیر تحقیق کنید، نقاط پیوستگی و ناپیوستگی را مشخص کنید:

(الف) $f(x) = \begin{cases} ۰ & ; x \in \mathbb{Q} \\ ۱ & ; x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ (ب) $f(x) = \begin{cases} x & ; x \in \mathbb{Q} \\ ۱ - x & ; x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

(ج) $f(x) = \begin{cases} f_۱(x) & ; x \in \mathbb{Q} \\ f_۲(x) & ; x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ که $f_۱$ و $f_۲$ دو تابع پیوسته‌اند.

۱۳. دو تابع f و g روی $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند و برای هر $x \in \mathbb{Q}$، $f(x) = g(x)$. ثابت کنید

که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(x) = g(x)$.

۱۴. فرض کنید f و g نگاشتهای پیوسته‌ای از فضای متریک X بتوی فضای متریک Y و E یک زیر مجموعهٔ چگال X باشد. ثابت کنید $f(E)$ در $f(X)$ چگال است. هرگاه به‌ازای هر $p \in E$، $g(p) = f(p)$، ثابت کنید به‌ازای هر $p \in X$ ، $g(p) = f(p)$. (بعبارت دیگر، یک نگاشت پیوسته با مقادیرش بر زیرمجموعهٔ چگالی از قلمرو خود مشخص می‌شود.)

۱۵. فرض کنید تابع حقیقی f بر مجموعهٔ کراندار E از $\mathbb{R}$ بطور یکنواخت پیوسته باشد. ثابت کنید f بر E کراندار است. نشان دهید که اگر کراندار بودن E از مفروضات حذف شود، نتیجهٔ فوق درست نخواهد بود.

۱۶. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک و $E \subset X$ و $\{۰, ۱\}$ با متریک گسسته باشد. در اینصورت E همبند است اگر و تنها اگر هر تابع پیوسته مانند $f : E \to \{۰, ۱\}$ تابعی ثابت باشد.

۱۷. (قضیه نقطه ثابت) فرض کنید $I = [۰, ۱]$ بازهٔ یکه بسته باشد و فرض کنید $f : I \to I$ یک نگاشت پیوسته باشد. ثابت کنید حداقل یک $x \in I$ وجود دارد که $f(x) = x$.

۱۸. نگاشت $f : X \to Y$ را *باز* نامند هرگاه به‌ازای هر مجموعهٔ باز V در X، $f(V)$ در Y باز باشد. ثابت کنید هرگاه نگاشت باز و پیوستهٔ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یکنوا است.

۱۹. فرض کنید f یک تابع حقیقی پیوسته بر (a, b) باشد که برای هر $x, y \in (a, b)$ ،

$$f(\frac{x+y}{۲}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{۲}.$$

ثابت کنید f بر (a, b) محدب است.

۲۰. هرگاه A همبند و $A \subset B \subset \overline{A}$، آنگاه ثابت کنید که B نیز همبند است.

۲۱. هرگاه $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ پیوسته و متناوب باشد آنگاه ثابت کنید که f پیوستهٔ یکنواخت است.

۵

مشتق‌پذیری

۱. تعریف و خواص

۱ تعریف. فرض کنیم $[a,b]$ بازهٔ بسته‌ای روی خط حقیقی $\mathbb{R}$ باشد و f تابع حقیقی تعریف شده روی $[a,b]$ باشد. فرض کنیم $x_\circ \in [a,b]$ برای $x \in (a,b)$ و $x \neq x_\circ$، قرار دهید

$$\lim_{x \to x_\circ} \frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$$

هرگاه این حد موجود باشد، یا بطور معادل برای $h \neq \circ$

$$\lim_{h \to \circ} \frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}$$

هرگاه این حد موجود باشد، آن را با $f'(x_\circ)$ نمایش می‌دهیم.

بنابراین، تابع $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید تابع f'ای بدست می‌آوریم که روی $A \subset [a,b]$ تعریف شده است و هر کدام (ولذا هر دو) از حدود بالا در هر نقطه از A موجود باشد. تابع f' بدست آمده مشتق تابع f نامیده می‌شود. هرگاه f' در یک نقطهٔ $x_\circ$ تعریف شده باشد، آنگاه f در آن نقطه مشتق‌پذیر نامیده می‌شود و $f'(x_\circ)$ مشتق f در $x_\circ$ نامیده می‌شود. هرگاه f در هر نقطه روی مجموعهٔ $A \subset [a,b]$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f روی A مشتق‌پذیر نامیده می‌شود.

$x_\circ \in [a,b]$ بگیرید، هرگاه

$$\lim_{x\to x_\circ^+} \frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$$

موجود باشد، آن‌گاه می‌گوئیم که f دارای مشتق *راست* در $x_\circ$ است یا در $x_\circ$ *راست* مشتق‌پذیر می‌باشد و آن را با $f'_+(x_\circ)$ نمایش می‌دهیم. بطور مشابه، هرگاه

$$\lim_{x\to x_\circ^-} \frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$$

موجود باشد، آن‌گاه f دارای مشتق چپ در $x_\circ$ می‌باشد و حد بالا بصورت $f'_-(x_\circ)$ نوشته می‌شود.

۲ تبصره. (الف) f در نقطهٔ $x_\circ \in (a,b)$ مشتق‌پذیر است هرگاه هم $f'_+(x_\circ)$ و هم $f'_-(x_\circ)$ موجود و با هم برابر باشند، و در این حالت می‌نویسیم

$$f'_+(x_\circ) = f'_-(x_\circ) = f'(x_\circ).$$

(ب) فرض کنیم $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. هرگاه f در a دارای مشتق باشد، آن‌گاه این مشتق راست می‌باشد. بطور مشابه هرگاه $f'(b)$ موجود باشد، آن‌گاه این مشتق چپ می‌باشد.
(ج) فرض کنیم $f:[a,b]\to[a,b]$ بصورت زیر تعریف شده باشد

$$f(x)=x.$$

آن‌گاه برای هر $x\in[a,b]$، $f'(x)=۱$.
(د) فرض کنیم f ثابت باشد؛ یعنی، فرض کنیم $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ چنان باشد که برای $c\in\mathbb{R}$ای،

$$f(x)=c \qquad \forall x\in[a,b].$$

آن‌گاه برای هر $x\in[a,b]$، $f'(x)=\circ$.

مثالها. (الف) $f:[\circ,\text{۱}]\to\mathbb{R}$ تعریف شده با

$$f(x)=x^{\text{۲}}$$

روی $[\circ,\text{۱}]$ مشتق‌پذیر است.

فرض کنیم $x_\circ\in(\circ,\text{۱})$، آنگاه

$$f'(x_\circ)=\lim_{x\to x_\circ}\frac{x^{\text{۲}}-x_\circ^{\text{۲}}}{x-x_\circ}=\lim_{x\to x_\circ}(x+x_\circ)=\text{۲}x_\circ,$$
$$f'(\circ)=\lim_{x\to\circ^+}\frac{x^{\text{۲}}-\circ}{x-\circ}=\lim_{x\to\circ^+}\frac{x^{\text{۲}}}{x}=\lim_{x\to\circ^+}x=\circ,$$
$$f'(\text{۱})=\lim_{x\to\text{۱}^-}\frac{x^{\text{۲}}-\text{۱}}{x-\text{۱}}=\lim_{x\to\text{۱}^-}(x+\text{۱})=\text{۲}.$$

بنابراین f روی $[\circ,\text{۱}]$ مشتق‌پذیر است؛ همچنین تابع در $[\circ,\text{۱}]$ پیوسته هم می‌باشد.

(ب) تابع f تعریف شده با

$$f(x)=|x|$$

در مبدأ مشتق‌پذیر نیست.

$$f'_-(\circ)=\lim_{x\to\circ^-}\frac{|x|-|\circ|}{x-\circ}=\lim_{x\to\circ^-}\frac{|x|}{x}$$
$$=\lim_{x\to\circ^-}\frac{-x}{x}=-\text{۱},$$
$$f'_+(\circ)=\lim_{x\to\circ^+}\frac{|x|-|\circ|}{x-\circ}=\lim_{x\to\circ^+}\frac{|x|}{x}$$
$$=\lim_{x\to\circ^+}\frac{x}{x}=\text{۱}$$

بنابراین f در $\circ$ مشتق‌پذیر نیست، اما این تابع در $x=\circ$ پیوسته است.

(ج) تابع f تعریف شده با

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{\text{۱}}{x} & ;x\neq\circ\\ \circ & ;x=\circ\end{cases}$$

در مبدأ مشتق‌پذیر نیست.

در این حالت

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\sin\frac{1}{x}$$

و این وقتی $x\to 0$، به هیچ حدی میل نمی‌کند. بنابراین تابع در 0 مشتق‌پذیر نیست، اما پیوسته هست.

(د) تابع f تعریف شده با

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & ;x\neq 0\\ 0 & ;x=0\end{cases}$$

در 0 مشتق‌پذیر (و نیز پیوسته) می‌باشد. زیرا

$$\begin{aligned} f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}\\ &=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.\end{aligned}$$

۴ قضیه. هرگاه تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ در $x_0\in[a,b]$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه در این نقطه پیوسته است. عکس این گزاره درست نیست.

برهان. فرض کنیم f در نقطهٔ $x_0\in[a,b]$ مشتق‌پذیر باشد. آن‌گاه داریم

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

حال

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]&=\lim_{x\to x_0}[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)]\\ &=[\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}][\lim_{x\to x_0}(x-x_0)]\\ &=f'(x_0)\times 0=0\end{aligned}$$

بنابراین

$$\lim_{x\to x_\circ} f(x) = f(x_\circ)$$

و لذا f در $x_\circ$ پیوسته است.

نادرستی حالت عکس از مثال ۳ (ب) و (ج) نتیجه می‌شود. ■

حال چندین سئوال مهم قابل طرح است؛ بطور نمونه خواهیم پرسید که آیا جمع، ضرب اسکالر، ضرب، تقسیم و ترکیب توابع مشتق‌پذیر، مشتق‌پذیر می‌باشند؟
این سئوالات در قضایای زیر جواب داده می‌شوند.

۵ قضیه. فرض کنیم $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ در نقطهٔ $x_\circ \in [a,b]$ مشتق‌پذیر باشند و فرض کنیم $\alpha \in \mathbb{R}$. آن‌گاه $f+g$، αf، fg و $\frac{f}{g}$ (هرگاه $g(x_\circ) \neq \circ$) در $x_\circ$ مشتق‌پذیر می‌باشند و

(الف) $(f+g)'(x_\circ) = f'(x_\circ) + g'(x_\circ)$،

(ب) $(\alpha f)'(x_\circ) = \alpha f'(x_\circ)$،

(ج) $(fg)'(x_\circ) = f'(x_\circ)g(x_\circ) + f(x_\circ)g'(x_\circ)$،

(د) $(\frac{f}{g})'(x_\circ) = \frac{g(x_\circ)f'(x_\circ) - f(x_\circ)g'(x_\circ)}{[g(x_\circ)]^۲}$.

برهان. فقط (ج) و (د) را ثابت می‌کنیم. برای اثبات (ج) قرار دهید $h = fg$. آن‌گاه

$$h(x) - h(x_\circ) = f(x)[g(x) - g(x_\circ)] + g(x_\circ)[f(x) - f(x_\circ)].$$

بنابراین

$$\frac{h(x) - h(x_\circ)}{x - x_\circ} = f(x).\frac{g(x) - g(x_\circ)}{x - x_\circ} + g(x_\circ)\frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ}$$

حال وقتی $x \to x_\circ$ داریم $f(x) \to f(x_\circ)$ و

$$\begin{aligned} h'(x_\circ) &= f(x_\circ)g'(x_\circ) + g(x_\circ)f'(x_\circ) \\ &= f'(x_\circ)g(x_\circ) + f(x_\circ)g'(x_\circ). \end{aligned}$$

برای اثبات (د) قرار دهید $h = \frac{f}{g}$. آن‌گاه

$$\frac{h(x) - h(x_\circ)}{x - x_\circ} = \frac{\text{۱}}{g(x)g(x_\circ)}[g(x)\frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} - f(x_\circ)\frac{g(x) - g(x_\circ)}{x - x_\circ}]$$

با $x \to x_\circ$ داریم $g(x) \to g(x_\circ)$ و لذا

$$h'(x_\circ) = \frac{\text{۱}}{[g(x_\circ)]^{\text{۲}}}[g(x_\circ)f'(x_\circ) - f(x_\circ)g'(x_\circ)].\blacksquare$$

تبصره‌ها. (الف) هرگاه f و g در $x_\circ$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه $f - g$ نیز در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است و

$$(f - g)'(x_\circ) = f'(x_\circ) - g'(x_\circ).$$

(ب) هرگاه f در $x_\circ$ مشتق‌پذیر باشد و $f'(x_\circ) \neq \circ$، آن‌گاه $\frac{\text{۱}}{f}$ در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است و

$$(\frac{\text{۱}}{f})'(x_\circ) = \frac{-f'(x_\circ)}{[f(x_\circ)]^{\text{۲}}}.$$

(ج) فرض کنیم f بصورت زیر تعریف شده باشد

$$f(x) = x^n.$$

هرگاه $n \geq \text{۱}$، آن‌گاه برای هر x، $f'(x) = nx^{n-\text{۱}}$.

هرگاه $n < \text{۱}$، آن‌گاه برای هر $x \neq \circ$، $f'(x) = nx^{n-\text{۱}}$.

(د) هر چند جمله‌ای

$$f(x) = a_\circ + a_\text{۱}x + a_\text{۲}x^\text{۲} + \cdots + a_nx^n$$

که $a_\circ$، $a_\text{۱}$، $a_\text{۲}$، $\cdots$، a_n اعداد حقیقی هستند، در هر نقطه مشتق‌پذیر است.

(ه) هر تابع گویای تعریف شده با

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

مشتق‌پذیر است مگر در نقاطی که $g(x) = \circ$ باشد.

۷ **قضیه.** فرض کنیم تابع حقیقی f روی $[a,b]$ تعریف شده و پیوسته باشد و در $x_\circ \in [a,b]$ای مشتق‌پذیر باشد، تابع حقیقی دیگر g روی بازهٔ I حاوی بُرد f تعریف شده و پیوسته باشد و g در $f(x_\circ)$ مشتق‌پذیر باشد. آن‌گاه ترکیب f و g، در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است و

$$(gof)'(x_\circ) = g'(f(x_\circ))f'(x_\circ).$$

برهان. قرار دهید $y_\circ = f(x_\circ)$. از آنجا که g در $y_\circ$ مشتق‌پذیر است،

$$g(y) - g(y_\circ) = (y - y_\circ)[g'(y_\circ) + v(y)]$$

که $y \in I$ و وقتی $y \to y_\circ$، $v(y) \to \circ$.

از آنجا که f در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است،

$$f(x) - f(x_\circ) = (x - x_\circ)[f'(x_\circ) + u(x)]$$

که $x \in [a,b]$ و وقتی $x \to x_\circ$، $u(x) \to \circ$.

قرار دهید $y = f(x)$ و $h = gof$. آن‌گاه

$$\begin{aligned} h(x) - h(x_\circ) &= g(f(x)) - g(f(x_\circ)) \\ &= [f(x) - f(x_\circ)][g'(y_\circ) + v(y)] \\ &= (x - x_\circ)[f'(x_\circ) + u(x)][g'(y_\circ) + v(y)]. \end{aligned}$$

حال اگر $x \neq x_\circ$،

$$\frac{h(x) - h(x_\circ)}{x - x_\circ} = [g'(y_\circ) + v(y)][f'(x_\circ) + u(x)].$$

از آنجا که f در $x_\circ$ پیوسته است، با $x \to x_\circ$ خواهیم داشت

$$y = f(x) \to f(x_\circ) = y_\circ$$

و لذا

$$h'(x_\circ) = g'(f(x_\circ)).f'(x_\circ)$$

این برهان قضیه را کامل می‌کند. ■

۲. قضیه‌های مقدار میانگین

۱ قضیه رُول. هرگاه $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ روی $[a, b]$ پیوسته و در (a, b) مشتق‌پذیر و $f(a) = f(b)$ باشد، آن‌گاه نقطهٔ $c \in (a, b)$ چنان موجود است که $f'(c) = \circ$.

برهان. از آنجا که f روی مجموعهٔ فشرده $[a, b]$ پیوسته است این از قضیه مقدار ماکزیمم ایجاب می‌کند که f کراندار است و کران‌های خود را می‌گیرد. بعبارت دیگر، هرگاه

$$m = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \quad , \quad M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$

آن‌گاه نقاط c و d در $[a, b]$ چنان موجودند که

$$f(c) = m \quad , \quad f(d) = M.$$

هرگاه $M = m$، آن‌گاه f ثابت است و بنابراین برای هر $x \in [a, b]$، $f'(x) = \circ$. لذا نتیجه بطور بدیهی برقرار است. فرض می‌کنیم که $m \neq M$. از آنجا که $f(a) = f(b)$، m و M نمی‌توانند مساوی با $f(a)$ باشند، حداقل یکی از آنها، مثلاً $f(c) = m$، مخالف $f(a)$ می‌باشد. لذا $c \neq a$، بطور مشابه می‌توان نشان داد که $c \neq b$، و لذا $c \in (a, b)$. ادعا می‌کنیم که $f'(c) = \circ$. داریم

$$f(c + h) - f(c) \geq \circ \quad \forall h.$$

ولی

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \begin{cases} \geq \circ & ; h \geq \circ \\ \leq \circ & ; h \leq \circ. \end{cases}$$

از آنجا که $f'(c)$ موجود است، این ممکن نیست مگر $f'(c)=\circ$ و بنابراین ادعای ما ثابت شده است. ■

۲ قضیهٔ مقدار میانگین لاگرانژ. هرگاه $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه نقطه $c\in(a,b)$ چنان موجود است که

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

برهان. تابع F را بصورت زیر تعریف کنید

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x.$$

F روی $[a,b]$ تعریف شده و روی $[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق‌پذیر و $F(a)=F(b)$ می‌باشد. آن‌گاه F در شرایط قضیهٔ رول صدق می‌کند. بنابراین نقطهٔ $c\in(a,b)$ چنان موجود است که $F'(c)=\circ$. اما برای $x\in(a,b)$،

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

بنابراین داریم

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

و این برهان را کامل می‌کند. ■

۳ قضیهٔ مقدار میانگین کشی. هرگاه $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$

(الف) روی $[a,b]$ پیوسته،

(ب) روی (a,b) مشتق‌پذیر،

(ج) برای هر $x\in(a,b)$، $g'(x)\neq\circ$،

باشند، آن‌گاه نقطهٔ $c\in(a,b)$ چنان موجود است که

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

برهان. تابع F را بصورت زیر تعریف کنید

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x).$$

F در شرایط قضیه رول صدق کند و لذا نقطهٔ $c \in (a, b)$ چنان موجود است که $F'(c) = ۰$. حال برای $x \in (a, b)$،

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x).$$

بنابراین

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

و این برهان را کامل می‌کند. ■

۴ قضیه. فرض کنیم $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ روی (a, b) مشتق‌پذیر باشد. آن‌گاه برای هر $x \in (a, b)$،

(الف) هرگاه $f'(x) \geq ۰$ آن‌گاه f بطور یکنوا صعودی است.

(ب) هرگاه $f'(x) \leq ۰$ آن‌گاه f بطور یکنوا نزولی است.

(ج) هرگاه $f'(x) = ۰$ آن‌گاه f ثابت است.

برهان. فرض کنیم $x_۱, x_۲ \in (a, b)$. می‌بینیم که f در شرایط قضیهٔ مقدار میانگین لاگرانژ در بازهٔ $[x_۱, x_۲]$ صدق می‌کند. بنابراین نقطهٔ $x \in (x_۱, x_۲)$ چنان موجود است که

$$\frac{f(x_۲) - f(x_۱)}{x_۲ - x_۱} = f'(x).$$

حال همهٔ نتایج قضیه از معادلهٔ فوق نتیجه می‌شود. ■

۵ قضیه. فرض کنیم $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد. آن‌گاه f' همهٔ مقادیر بین $f'(a)$ و $f'(b)$ را می‌گیرد، به بیان دقیق‌تر، هرگاه $f'(a) < c < f'(b)$ آن‌گاه نقطهٔ $x_۰ \in (a, b)$ چنان موجود است که $f'(x_۰) = c$.

برهان. تابع F را بصورت زیر تعریف کنید

$$F(x) = f(x) - cx \qquad \forall x \in [a, b].$$

آن‌گاه $F'(x) = f'(x) - c$.

می‌بینیم که $F'(a) = f'(a) - c < ۰$، بنابراین $x_۱ \in (a, b)$ چنان موجود است که $F(x_۱) < F(a)$. علاوه‌براین $F'(b) = f'(b) - c > ۰$. بنابراین $x_۲ \in (a, b)$ موجود است که $F(x_۲) < F(b)$. از آنجا که f روی $[a, b]$ مشتق‌پذیر است F نیز مشتق‌پذیر و لذا روی مجموعهٔ فشردهٔ $[a, b]$ پیوسته می‌باشد. لذا F کران‌های خود را می‌گیرد. به بیان دقیقتر، هرگاه $m = \inf F(x)$، آن‌گاه نقطهٔ $x_۰$ چنان موجود است که $F(x_۰) = m$. حال $x_۰ \neq a$، زیرا در غیر اینصورت $m = F(x_۰) = F(a) > F(x_۱)$ و این متناقض با تعریف m است. بطور مشابه $x_۰ \neq b$، اینها نشان می‌دهند که $x_۰ \in (a, b)$. ادعّا می‌کنیم که $F'(x_۰) = ۰$. زیرا هرگاه $F'(x_۰) < ۰$، باید نقطهٔ x چنان موجود باشد که $F(x) < F(x_۰) = m$، که متناقض با تعریف m می‌باشد. هرگاه فرض کنیم که $F'(x_۰) > ۰$، یک تناقض مشابه بدست می‌آوریم. بنابراین $F'(x_۰) = f'(x_۰) - c = ۰$. این نشان می‌دهد که

$$f'(x_۰) = c$$

و این برهان را کامل می‌کند. ■

۶ نتیجه (قضیه داربوکس). فرض کنیم $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ روی $[a, b]$ مشتق‌پذیر باشد و $f'(a)$ و $f'(b)$ علامتهای متفاوت داشته باشند، آن‌گاه نقطهٔ $x_۰ \in (a, b)$ چنان موجود است که $f'(x_۰) = ۰$.

برهان. فرض کنیم $f'(a) < ۰$ و $f'(b) > ۰$. آن‌گاه ۰ دربازهٔ $(f'(a), f'(b))$ قرار دارد. لذا بنابه قضیهٔ بالا $x_۰ \in (a, b)$ چنان موجود است که $f'(x_۰) = ۰$. ■

حال خواننده را به اثبات نتیجه‌ای مستقل با دلایل برهان قضیهٔ قبل راهنمایی می‌کنیم.

۷ قضیه. برای هر $a, b \in \mathbb{R}$

$$\frac{|a+b|}{۱+|a+b|} \leq \frac{|a|}{۱+|a|} + \frac{|b|}{۱+|b|}.$$

برهان. تابع $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ را بصورت زیر تعریف کنید

$$f(x) = \frac{x}{۱+x}$$

که $\mathbb{R}^+$ نمایش مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی نامنفی است. داریم

$$f'(x) = \frac{۱}{(۱+x)^۲} > ۰ \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

لذا این ایجاب می‌کند که f بطور یکنوا صعودی است. علاوه‌براین، برای $a, b \in \mathbb{R}$، $|a+b| \leq |a| + |b|$. بنابراین

$$f(|a+b|) \leq f(|a|+|b|)$$

یا

$$\begin{aligned} \frac{|a+b|}{۱+|a+b|} &\leq \frac{|a|+|b|}{۱+|a|+|b|} \\ &= \frac{|a|}{۱+|a|+|b|} + \frac{|b|}{۱+|a|+|b|} \\ &\leq \frac{|a|}{۱+|b|} + \frac{|b|}{۱+|b|}. \blacksquare \end{aligned}$$

۸ قضیه (قاعدهٔ هوپیتال برای حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$). فرض کنیم f و g دو تابع حقیقی باشند که

(الف) هر دو مشتق‌پذیرند و برای هر x دریک بازهٔ باز $(a-\delta, a+\delta)$ حول a، $g'(x) \neq ۰$،

(ب) $f(a) = ۰ = g(a)$،

(ج) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجود است.
آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ وجود دارد و

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

برهان. فرض کنیم x متعلق به بازهٔ باز $(a-\delta,a+\delta)$ باشد. آن‌گاه f و g در شرایط قضیهٔ مقدار میانگین‌کشی در بازهٔ $[a,x]$ صدق می‌کنند. بنابراین نقطهٔ $c\in(a,x)$ چنان موجود است که

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

از آنجا که $f(a)=٠=g(a)$، داریم

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

چون $c\in(a,x)$، وقتی $x\to a$ خواهیم داشت $c\to a$. بنابراین

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

و این برهان را کامل می‌کند. ■

۹ مثال. $\lim\limits_{x\to ٠}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to ٠}\frac{\cos x}{١}=\frac{١}{١}=١$.
خواننده می‌تواند نشان دهد که قاعده هوپیتال برای حالتهای مبهم

$$\infty-\infty,\ ٠\times\infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ ٠^{٠},\ ١^{\infty},\ \infty^{٠}$$

نیز برقرار است.

۳. قضیهٔ تیلور

فرض کنیم f تابع حقیقی مشتق‌پذیر روی بازهٔ $[a, b]$ باشد و f' نیز مشتق‌پذیر باشد. آن‌گاه f'' را برای نمایش مشتق f' می‌نویسیم. بطور مشابه هرگاه f'' مشتق‌پذیر باشد، f''' را برای نمایش مشتق f'' بکار می‌بریم. در این روش $f^{(n)}$ را برای نمایش مشتق $f^{(n-۱)}$ بکار می‌بریم در صورتی که برای هر عدد صحیح مثبت n، مشتق $f^{(n-۱)}$ موجود باشد. $f^{(n)}$، در صورت وجود، مشتق مرتبهٔ nاُم f نامیده می‌شود، بویژه، f'، f'' و f''' به‌ترتیب مشتقات مرتبهٔ اول، دوم و سوم f نامیده می‌شوند.

۱ قضیه تیلور. فرض کنیم f تابعی حقیقی باشد که
(الف) $f^{(n-۱)}$ در $[a, a+h]$ پیوسته است،
(ب) $f^{(n)}$ در $(a, a+h)$ موجود است.
آن‌گاه برای عدد صحیح مثبت m داده شده، عدد $\theta \in (۰, ۱)$ چنان موجود است که

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^۲}{۲!}f''(a) + \cdots + \\ + \frac{h^{n-۱}}{(n-۱)!}f^{(n-۱)}(a) + \frac{h^n(۱-\theta)^{n-m}}{(n-۱)!m}f^{(n)}(a+\theta h). \quad (۱)$$

برهان. قرار دهید

$$S_n = f(a) + hf'(a) + \frac{h^۲}{۲!}f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-۱}}{(n-۱)!}f^{n-۱}(a).$$

تابع F را بصورت زیر تعریف کنید

$$F(x) = f(x) + (a+h-x)f'(x) + \frac{(a+h-x)^۲}{۲!}f''(x) + \cdots \\ + \frac{(a+h-x)^{n-۱}}{(n-۱)!}f^{(n-۱)}(x) + A(a+h-x)^m,$$

که

$$Ah^m = f(a+h) - S_n. \qquad (۲)$$

خواننده باید بررسی کند که F در $[a, a+h]$ پیوسته و در $(a, a+h)$ مشتق‌پذیر است و $F(a) = F(a+h)$. لذا با به کاربردن قضیهٔ رول برای F دربازهٔ $[a, a+h]$ داریم که عدد $\theta \in (۰, ۱)$ چنان موجود است که

$$F'(a+\theta h) = ۰.$$

امّا

$$F'(x) = \frac{(a+h-x)^{n-۱}}{(n-۱)!} f^{(n)}(x) - mA(a+h-x)^{m-۱}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} ۰ &= F'(a+\theta h) \\ &= \frac{h^{n-۱}(۱-\theta)^{n-۱}}{(n-۱)!} f^{(n)}(a+\theta h) - mA(۱-\theta)^{m-۱}h^{m-۱} \end{aligned}$$

یا، $A = \frac{h^{n-m}(۱-\theta)^{n-m}}{(n-۱)!m} f^{(n)}(a+\theta h)$.
این مقدار A را در (۲) قرار دهید، (۱) را بدست می‌آوریم و این برهان قضیه را کامل می‌کند. ■

۲ تبصره. قرار دهید

$$R_n = \frac{h^n(۱-\theta)^{n-m}}{(n-۱)!m} f^{(n)}(a+\theta h)$$

R_n باقی ماندهٔ *بسط تیلور* (۱) نامیده می‌شود، دو حالت خاص زیر مهم‌اند و استفادهٔ عمومی دارند.

هرگاه $m = ۱$، آن‌گاه

$$R_n = \frac{h^n(۱-\theta)^{n-۱}}{(n-۱)!} f^{(n)}(a+\theta h)$$

و این صورت *کشی باقی‌ماندهٔ بسط تیلور* (۱) نامیده می‌شود.

هرگاه $m = n$، آن‌گاه

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta h)$$

و این به صورتِ *لاگرانژِ باقی‌مانده* مشهور است.

۳ قضیه مکلورن. فرض کنیم f چنان باشد که

(الف) $f^{(n-۱)}$ در $[\circ, h]$ پیوسته است،

(ب) $f^{(n)}$ در $(\circ, h)$ موجود است.

آن‌گاه برای هر عدد صحیح مثبت m داده شده، عدد $\theta \in (\circ, ۱)$ چنان موجود است که

$$f(h) = f(\circ) + hf'(\circ) + \frac{h^۲}{۲!} f''(\circ) + \cdots + \frac{h^{n-۱}}{(n-۱)!} f^{(n-۱)}(\circ) + \frac{h^n(۱-\theta)^{n-m}}{(n-۱)!m} f^{(n)}(\theta h).$$

این حالت خاصی از قضیه تیلور، حالتی که $a = \circ$، می‌باشد و بنابراین برهان آن مشابه قضیهٔ تیلور است. خواننده باید این نتیجه را بطور مستقل ثابت کند.

صورت کشی باقی‌مانده بسط مکلورن بصورت زیر می‌باشد

$$R_n = \frac{h^n(۱-\theta)^{n-۱}}{(n-۱)!} f^{(n)}(\theta h)$$

و صورت لاگرانژ به شکل زیر داده می‌شود

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\theta h.)$$

۴ سری نامتناهی تیلور. هرگاه تابع حقیقی f چنان باشد که
(الف) از هر مرتبه در $[a, a+h]$ مشتق داشته باشد، و
(ب) باقی ماندهٔ تیلور $R_n \to ۰$ وقتی $n \to \infty$. آن‌گاه

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^۲}{۲!}f''(a) + \cdots$$

یعنی، سری نامتناهی طرف راست معادلهٔ بالا به $f(a+h)$ همگراست.

برهان. هرگاه f از هر مرتبه در $[a, a+h]$ دارای مشتق باشد، آن‌گاه f در مفروضات قضیهٔ تیلور صدق می‌کند. بنابراین

$$f(a+h) = S_n + R_n$$

که S_n و R_n همان‌های تعریف شده در قضیه ۱ و تبصره ۲ می‌باشند. هرگاه $\lim_{n\to\infty} R_n = ۰$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(S_n + R_n) &= \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} R_n \\ &= \lim_{n\to\infty} S_n \\ &= f(a) + hf'(a) + \frac{h^۲}{۲!}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \cdots\end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^۲}{۲!}f''(a) + \cdots . \blacksquare$$

۵ سری نامتناهی مکلورن. هرگاه f در $[۰, h]$ از هر مرتبه دارای مشتق باشد و باقی‌ماندهٔ مکلورن، وقتی $n \to \infty$، به صفر میل کند، آن‌گاه

$$f(h) = f(۰) + hf'(۰) + \frac{h^۲}{۲!}f''(۰) + \cdots .$$

با به‌کاربردن قضیه‌های بالا خواننده باید بسط سری توانی توابعی همچون e^x، $\log(۱+x)$ و $\cos x$، $\sin x$، $\tan x$، $\cos^{-۱} x$، $\sin^{-۱} x$ و غیره را در درس‌های حساب دیفرانسیل مطالعه نموده، بدست آورد. بنابراین در اینجا فقط تعدادی را بعنوان مسأله حل می‌کنیم و تعدادی از آنها را به‌عنوان تمرین برای خواننده واگذار می‌کنیم.

۶ مثالها. (الف) $f(x) = e^x$ را به سری مکلورن بسط دهید.

برای هر $n \in \mathbb{N}$، $f^{(n)}(x) = e^x$. همچنین f و همهٔ مشتقاتش در هر $x \in \mathbb{R}$ پیوسته‌اند. لذا می‌توانیم f را در سری مکلورن بسط دهیم. باقی‌ماندهٔ لاگرانژ را در نظر بگیرید.

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x) = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x} \quad ; \quad ۰ < \theta < ۱.$$

از آنجا که $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = ۰$ و $e^{\theta x}$ کراندار است لذا

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} e^{\theta x} = (\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!}) e^{\theta x} = ۰.$$

بنابراین، برای تمام $x \in \mathbb{R}$های،

$$e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \cdots .$$

(ب) سری ملکورن تابع $f(x) = \cos x$ را بیابید.

قرار دهید $f(x) = \cos x$. آن‌گاه $f^{(n)}(x) = \cos(\frac{n\pi}{۲} + x)$. در این حالت f و همهٔ مشتقاتش برای هر $x \in \mathbb{R}$ پیوسته‌اند. حال

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x) = \frac{x^n}{n!} \cos(\frac{n\pi}{۲} + \theta x).$$

$$\begin{aligned} |R_n| &= |\frac{x^n}{n!} \cos(\frac{n\pi}{۲} + \theta x)| = |\frac{x^n}{n!}||\cos(\frac{n\pi}{۲} + \theta x)| \\ &\le |\frac{x^n}{n!}|. \end{aligned}$$

بنابراین برای هر $x \in \mathbb{R}$، $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n| = 0$ و لذا

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots .$$

(ج) سری ملکورن تابع $f(x) = \sin x$ بصورت زیر است

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots .$$

(د) سری ملکورن $\log(1 + x)$ را بدست آورید.

قرار دهید $f(x) = \log(1 + x)$. $f(x)$ برای $1 + x > 0$ از هر مرتبه‌ای دارای مشتق است؛ یعنی، برای $x > -1$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

هرگاه R_n صورت لاگرانژ باقی‌مانده باشد خواهیم داشت

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x) = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n.$$

برای $0 \leq x \leq 1$، $\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n$ مثبت است و برای $n = 1, 2, \cdots$، کوچکتر از ۱ می‌باشد. همچنین از آنجا که وقتی $n \to \infty$، $\frac{1}{n} \to 0$، $R_n \to 0$.

برای $-1 < x < 0$، فرض کنیم R_n صورت کشی باقی مانده را نشان دهد. لذا

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{x^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\theta x) \\ &= (-1)^{n-1} x^n . \frac{1}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

توجه کنیم که $\frac{1-\theta}{1+\theta x}$ مثبت و کوچکتر از ۱ است و

$$\frac{1}{1+\theta x} \leq \frac{1}{1-|x|}.$$

همچنین وقتی $n \to \infty$، $x^n \to ۰$. علاوه براین

$$f^{(n)}(۰) = (-۱)^{n-۱}(n-۱)!.$$

و لذا

$$\log(۱+x) = x - \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۳} - \frac{x^۴}{۴} + \cdots .$$

۴. توابع محدب و مشتق‌پذیری

۱ قضیه. فرض کنیم $f : I \to \mathbb{R}$ محدب باشد. آن‌گاه f در هر نقطه از I° $(\mathrm{int} I)$ دارای مشتق چپ و راست می‌باشد و f'_- و f'_+ روی I° نانزولی‌اند. هرگاه $c \in I^\circ$، آن‌گاه داریم

$$f'_-(c) \leq f'_+(c)$$

و برای تمام $x \in I$ها،

$$f(x) \geq f(c) + f'_-(c)(x-c),$$

$$f(x) \geq f(c) + f'_+(c)(x-c).$$

برهان. فرض کنیم $c \in I^\circ$ و $[a,b] \subset I$ چنان باشد که $c \in (a,b)$. آن‌گاه برای $x \in (c,b)$ داریم

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(x)-f(c)}{x-c}.$$

این ایجاب می‌کند که تابع

$$x \mapsto \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

روی (c,b) نانزولی باشد. بنابراین مشتق راست

$$f'+(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

موجود است. با روش مشابه می‌توان نشان داد که مشتق چپ نیز وجود دارد.

هرگاه $a < c < d < b$ آن‌گاه برای h مثبت بقدر کافی کوچک داریم

$$\frac{f(c)-f(c-h)}{h} \leq \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq \frac{f(d)-f(d-h)}{h}.$$

با $h \to 0$ بدست می‌آوریم

$$f'_-(c) \leq f'_+(c) \leq f'_-(d). \blacksquare$$

۲ تبصره. با استفاده از قضیهٔ بالا و یک برهان مشابه می‌توان نشان داد که هرگاه $f : I \to \mathbb{R}$ محدب باشد آن‌گاه برای هر بازهٔ بستهٔ $[a,b] \subset I^\circ$ ، f روی آن لیپ شتیزی است.

برای این منظور نقاط c و d را در I چنان انتخاب کنید که $c < a < b < d$ و این انتخاب امکان‌پذیر است. آن‌گاه بنابه قضیهٔ بالا داریم

$$f'_+(a) \leq f'_+(x) \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq f'_-(y) \leq f'_-(b)$$

که $a \leq x < y \leq b$. حال این نتیجه می‌دهد که

$$|f(x)-f(y)| \leq K|x-y|$$

که

$$K = \max\{|f'_+(a)|, |f'_-(b)|\}$$

و این برهان را کامل می‌کند.

۳ قضیه. فرض کنیم $f : I \to \mathbb{R}$ محدب باشد. آن‌گاه

(الف) f'_- پیوستهٔ چپ و f'_+ پیوستهٔ راست روی I° می‌باشند، و

(ب) مجموعهٔ همهٔ نقاطی که f مشتق‌پذیر نیست حداکثر شمارش‌پذیر است.

برهان. (الف) از آنجا که $f : I \to \mathbb{R}$ محدب است، روی I° پیوسته می‌باشد. بنابراین، برای تمام $x, y, z \in I^\circ$ خواهیم داشت

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \lim_{z\to x^+} \frac{f(y)-f(z)}{y-z} \geq \lim_{z\to x^+} f'_+(z)$$

که در آن $x < z < y$ می‌باشد. با میل دادن $y \to x^+$ بدست می‌آوریم

$$f'_+(x) \geq \lim_{z\to x^+} f'_+(z).$$

از آنجا که f'_+ نانزولی است، داریم

$$f'_+(x) \leq \lim_{z\to x^+} f'_+(z).$$

لذا این ایجاب می‌کند که

$$f'_+(x) = \lim_{z\to x^+} f'_+(z).$$

این نشان می‌دهد که f'_+ پیوستهٔ راست است. با یک روش مشابه می‌توان نشان داد که f'_- پیوستهٔ چپ است.

(ب) فرض کنیم $x, y, z \in I$ و $x < y < z$. در نتیجه

$$f'_+(x) \leq f'_-(y) \leq f'_+(z).$$

فرض کنیم که f'_+ در y پیوستهٔ باشد. آن‌گاه خواهیم داشت

$$f'_+(y) = \lim_{x\to y^-} f'_+(x) = \lim_{z\to y^+} f'_+(z) = f'_-(y).$$

این نشان می‌دهد که f در y مشتق‌پذیر است. بنابراین نقاطی از I° که f در آنها مشتق‌پذیر نیست نقاطی هستند که تابع نانزولی f'_+ دارای یک جهش است و تعداد این جهش‌ها حداکثر شمارش‌پذیر است. این برهان (ب) را کامل می‌کند. ■

۴ قضیه. فرض کنیم I باز و $f : I \to \mathbb{R}$ دوبار مشتق‌پذیر باشد. آن‌گاه f محدب است اگر و تنها اگر برای هر $x \in I$، $f''(x) \geq ۰$.

برهان. فرض کنیم f محدب باشد. آن‌گاه از آنجا که I باز است، f' روی I نانزولی است. بنابراین برای هر $x \in I$، $f''(x) \geq ۰$.

برعکس؛ فرض کنیم برای تمام $x \in I$، $f''(x) \geq ۰$. فرض کنیم $x, y \in I$ و $y > x$ و $۱ > \lambda > ۰$. بنابه قضیهٔ مقدار میانگین در حساب دیفرانسیل، $\theta_۱$ و $\theta_۲$ با $x < \theta_۱ < \lambda x + (۱ - \lambda)y < \theta_۲ < y$ و $\theta_۳$ با $\theta_۱ < \theta_۳ < \theta_۲$ چنان موجودند که

$$
\begin{aligned}
&f(\lambda x + (۱ - \lambda)y) - \lambda f(x) - (۱ - \lambda)f(y) \\
&= \lambda[f(\lambda x + (۱ - \lambda)y) - f(x)] + (۱ - \lambda)[f(\lambda x + (۱ - \lambda)y) - f(y)] \\
&= \lambda(۱ - \lambda)(y - x)f'(\theta_۱) + (۱ - \lambda)\lambda(x - y)f'(\theta_۲) \\
&= \lambda(۱ - \lambda)(y - x)(\theta_۱ - \theta_۲)f''(\theta_۳) \leq ۰
\end{aligned}
$$

بنابراین f محدب است. ■

باید توجه کنیم که هرگاه f اکیداً محدب باشد، آن‌گاه برای هر $x \in I$، $f''(x) > ۰$، اما عکس این مطلب همیشه درست نیست. برای مثال، تابع f تعریف شده با

$$f(x) = x^۴$$

روی $\mathbb{R}$ اکیداً محدب است اما $f''(۰) = ۰$.

تمرینات

۱. فرض کنید f در یک همسایگی از x تعریف شده و دوبار مشتق‌پذیر باشد. نشان دهید که

$$\lim_{h \to ۰} \frac{f(x + h) + f(x - h) - ۲f(x)}{h^۲} = f''(x).$$

۲. فرض کنیم $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بصورت زیر تعریف شده باشد،

$$f(x) = \begin{cases} ۰ & ; x \leq ۰ \\ x & ; x > ۰ \end{cases}.$$

نشان دهید که f پیوسته است اما در $x = ۰$ مشتق‌پذیر نیست.

۳. تابع $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ را بصورت زیر تعریف کنید

$$f(x) = \begin{cases} x & ; ۰ \leq x < ۱ \\ ۱ & ; x \geq ۱ \end{cases}.$$

نشان دهید که $f'(۱)$ موجود نیست. آیا f در $x = ۱$ پیوسته است؟

۴. مشتق‌پذیری تابع f تعریف شده با

$$f(x) = \begin{cases} x & ; ۰ \leq x \leq ۱ \\ ۱ & ; x > ۱ \end{cases}$$

را در $x = ۱$ بررسی کنید.

۵. نشان دهید که تابع f تعریف شده با

$$f(x) = \begin{cases} x^۳ \sin \frac{۱}{x} & ; x \neq ۰ \\ ۰ & ; x = ۰ \end{cases}$$

در $x = ۰$ دارای مشتق است و علاوه‌براین f' در $x = ۰$ پیوسته است.

۶. نشان دهید که توابع زیر در $x = ۰$ مشتق‌پذیرند:

(الف) $f(x) = x|x|$، (ب) $f(x) = x^۲|x|$.

۷. قضیهٔ رول و قضیه مقدار میانگین لاگرانژ را برای تابع زیر بررسی کنید:

$$f(x) = |x| \qquad ; \qquad x \in [-۱, ۱]$$

۸. هرگاه $f(x)=|x|$ و $g(x)=2|x|$، آن‌گاه نشان دهید که $f'(0)$ و $g'(0)$ موجود نیستند اما $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ موجود است و

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

۹. تابع f بر $(0,1]$ تعریف شده است و بر آن دارای مشتق کراندار می‌باشد. ثابت کنید دنبالهٔ $a_n=f(\frac{1}{n})$ دارای حد است.

۱۰. فرض کنید f بر $[0,1]$ پیوسته باشد و $f(0)=0$ و $f'(x)$ بر $(0,1)$ موجود و متناهی باشد. ثابت کنید اگر f' بر $(0,1)$ صعودی باشد، آن‌گاه $\frac{f(x)}{x}$ نیز صعودی است.

۱۱. فرض کنید f بر (a,b) دارای مشتق متناهی و بر $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)=f(b)=0$. ثابت کنید به‌ازای هر λ عددی مانند $c\in(a,b)$ موجود است به قسمی که

$$f'(c)=\lambda f(c).$$

۱۲. فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته و در (a,b) مشتق‌پذیر باشد. اگر $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=A$ نشان دهید که $f'_+(a)$ موجود و مساوی A است.

۱۳. فرض کنید f بر $[a,b]$ مشتق‌پذیر بوده و $f(a)=0$، و عددی حقیقی مانند A باشد بطوری که بر $[a,b]$، $|f'(x)|\leq A|f(x)|$. ثابت کنید به‌ازای هر $x\in[a,b]$، $f(x)=0$.

[راهنمایی: $x_0\in[a,b]$ را ثابت نگه داشته، به‌ازای $a\leq x\leq x_0$، قرار دهید

$$M_0=\sup|f(x)| \quad , \quad M_1=\sup|f'(x)|.$$

برای هر چنین xای

$$|f(x)|\leq M_1(x_0-a)\leq A(x_0-a)M_0.$$

در نتیجه اگر $A(x_0-a)<1$، $M_0=0$، یعنی f بر $[a,x_0]$ مساوی 0 است. این عمل را ادامه دهید.]

۶

انتگرال ریمان‌ـاشتلیس

۱. انتگرال ریمان

۱ تعریف. فرض کنیم $[a,b]$ هر بازهٔ بسته و کرانداری از $\mathbb{R}$ باشد. یک زیرتقسیم یا *افراز* Δ از $[a,b]$ عبارتست از مجموعهٔ متناهی $\Delta \subset [a,b]$ به صورت

$$\Delta = \{a = x_۰, x_۱, x_۲, \cdots, x_{n-۱}, x_n = b\}$$

که

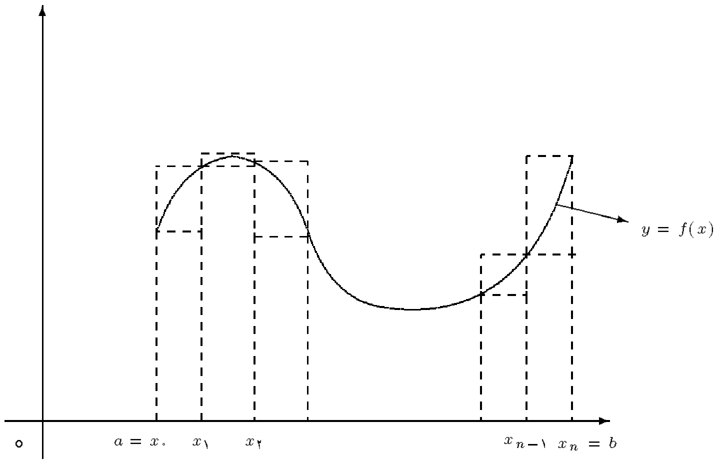
$$a = x_۰ < x_۱ < x_۲ < \cdots < x_{n-۱} < x_n = b.$$

خانوادهٔ همهٔ افرازهای $[a,b]$ را با $P[a,b]$ نمایش می‌دهیم. قرار دهید

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-۱} \qquad (i = ۱, ۲, \cdots, n).$$

فرض کنیم f تابع حقیقی کراندار تعریف شده روی $[a,b]$ باشد. قرار دهید

$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x) \qquad \text{و} \qquad m = \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$



شکل ۱.۶

از آنجا که f روی $[a,b]$ کراندار است، f در هر کدام از زیربازه‌های $[x_{i-۱}, x_i]$ از افراز $\Delta \in P[a,b]$ نیز کراندار خواهد بود. قرار دهید

$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-۱},x_i]} f(x) \quad \text{و} \quad m_i = \inf_{x\in[x_{i-۱},x_i]} f(x).$$

تعریف می‌کنیم

$$U(\Delta, f) = \sum_{i=۱}^{n} M_i \Delta x_i,$$
$$L(\Delta, f) = \sum_{i=۱}^{n} m_i \Delta x_i$$

$U(\Delta, f)$ و $L(\Delta, f)$ به‌ترتیب *مجموع‌های داربوکس بالایی و پائینی* f در $[a,b]$ وابسته به افراز Δ نامیده می‌شوند. می‌بینیم که هرگاه برای هر $x \in [a,b]$، $f(x) \geq \circ$ آن‌گاه مجموع پائین بطور عددی مساوی مجموع مساحت مستطیل‌های پائینی است و مجموع بالایی مساوی مجموع مساحت مستطیل‌های بالایی می‌باشد. (شکل ۱.۶)

بنابه تعریف می‌بینیم که برای هر $\Delta \in P[a, b]$،

$$m \leq m_i \leq M_i \leq M$$

و لذا

$$m \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \leq M \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i.$$

بنابراین

$$m(b-a) \leq L(\Delta, f) \leq U(\Delta, f) \leq M(b-a).$$

قرار دهید

$$\overline{\int_a^b} f dx = \inf_{\Delta \in P[a,b]} U(\Delta, f),$$
$$\underline{\int_a^b} f dx = \sup_{\Delta \in P[a,b]} L(\Delta, f).$$

$\overline{\int_a^b} f dx$ و $\underline{\int_a^b} f dx$ به ترتیب *انتگرالهای بالا و پائین* f روی $[a, b]$ نامیده می‌شوند. بنابه نامساوی بالا $L(\Delta, f)$ از بالا کراندار است و لذا دارای سوپریمم می‌باشد، بطور مشابه $U(\Delta, f)$ از پایین کراندار است و در نتیجه دارای اینفیمم می‌باشد.

بنابراین انتگرالهای بالا و پایین، برای هر تابع کراندار f تعریف شده روی هر بازهٔ بستهٔ کراندار $[a, b]$، تعریف شده می‌باشند. اگرچه انتگرالهای پائین و بالا برای هر تابع کراندار موجودند، اما بزودی خواهیم دید که ممکن است همیشه با هم برابر نباشند.

۲ تعریف. تابع کراندار f روی $[a, b]$ ریمان *انتگرالپذیر* نامیده می‌شود هرگاه انتگرالهای پائین و بالای f روی $[a, b]$، با هم برابر باشند. مقدار مشترک *انتگرال* f نامیده می‌شود و بصورت زیر آن را نمایش می‌دهیم

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{یا} \quad \int_a^b f dx.$$

باید توجه کنیم که انتگرال ریمان f، در صورت وجود، بطور عددی مساوی مساحت زیر منحنی $y = f(x)$ محدود به محور xها و خطوط $x = a$ تا $x = b$ می‌باشد. (شکل ۱.۶).

۳ تعریف. فرض کنیم Δ و Δ^* دو افراز از $[a, b]$ باشند. گوئیم Δ^* ظریفتر از Δ است هرگاه $\Delta \subset \Delta^*$.

دو افراز $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ را از $[a, b]$ در نظر بگیرید. در اینصورت

$$\Delta^* = \Delta_۱ \cup \Delta_۲$$

افراز مشترک از $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ نامیده می‌شود.

۴ قضیه. (الف) فرض کنیم Δ^* تظریفی از Δ باشد. آن‌گاه

$$L(\Delta, f) \leq L(\Delta^*, f) \leq U(\Delta^*, f) \leq U(\Delta, f).$$

(ب) هرگاه $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ دو افراز باشند، آن‌گاه

$$L(\Delta_۱, f) \leq U(\Delta_۲, f).$$

(ج) $\underline{\int_a^b} f dx \leq \overline{\int_a^b} f dx$.

برهان. (الف) فرض کنیم Δ^* فقط یک نقطه بیشتر از افراز Δ داشته باشد. فرض کنیم این نقطه x^* باشد و $x_{i-۱} < x^* < x_i$. از آنجا که f روی $[a, b]$ کراندار است، لذا f روی هر کدام از زیر بازه‌ها نیز کراندار خواهد بود. فرض کنیم m_i، $w_۱$، $w_۲$ به‌ترتیب اینفیمم $f(x)$ را روی $[x_{i-۱}, x_i]$، $[x_{i-۱}, x^*]$ و $[x^*, x_i]$ نمایش دهند. آن‌گاه $m_i \leq w_۱$ و $m_i \leq w_۲$. بنابراین

$$L(\Delta, f) - L(\Delta^*, f) = m_i(x_i - x_{i-۱}) - w_۱(x^* - x_{i-۱}) - w_۲(x_i - x^*) \leq ۰$$

یا

$$L(\Delta, f) \leq L(\Delta^*, f).$$

به روشی مشابه می‌توان نشان داد که

$$U(\Delta^*, f) \leq U(\Delta, f).$$

ولی برای هر افراز Δ داریم $L(\Delta, f) \leq U(\Delta, f)$. در نتیجه

$$L(\Delta, f) \leq L(\Delta^*, f) \leq U(\Delta^*, f) \leq U(\Delta, f).$$

(ب) فرض کنیم $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ دو افراز دلخواه باشند. قرار دهید $\Delta = \Delta_۱ \cup \Delta_۲$؛ یعنی Δ افراز مشترک $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ می‌باشد. آن‌گاه از قسمت قبل داریم

$$L(\Delta_۱, f) \leq L(\Delta, f) \leq U(\Delta, f)$$

و

$$L(\Delta, f) \leq U(\Delta, f) \leq U(\Delta_۲, f).$$

بنابراین

$$L(\Delta_۱, f) \leq U(\Delta_۲, f).$$

(ج) فرض کنیم $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ همان افرازهای دلخواه در (ب) باشند، خواهیم داشت

$$\sup_{\Delta_۱ \in P[a,b]} L(\Delta_۱, f) \quad \leq \quad \inf_{\Delta_۲ \in P[a,b]} U(\Delta_۲, f).$$

بنابراین

$$\underline{\int_a^b} f dx \leq \overline{\int_a^b} f dx. \blacksquare$$

۵ قضیه. تابع کراندار f روی $[a, b]$ ریمان انتگرال‌پذیر است اگر و فقط اگر برای هر $\varepsilon > ۰$، افراز Δ چنان موجود باشد که

$$U(\Delta, f) - L(\Delta, f) < \varepsilon.$$

برهان. هرگاه f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد آن‌گاه

$$\underline{\int_a^b} f dx = \overline{\int_a^b} f dx.$$

همچنین، چون

$$\underline{\int_a^b} f dx = \sup_{\Delta \in P[a,b]} L(\Delta, f) \quad \text{و} \quad \overline{\int_a^b} f dx = \inf_{\Delta \in P[a,b]} U(\Delta, f) \tag{۱}$$

افراز $\Delta_۱$ چنان موجود است که

$$L(\Delta_۱, f) + \frac{\varepsilon}{۲} > \underline{\int_a^b} f dx.$$

بطور مشابه، برای افراز $\Delta_۲$ای، داریم

$$U(\Delta_۲, f) - \frac{\varepsilon}{۲} < \overline{\int_a^b} f dx.$$

حال فرض کنیم Δ افراز مشترک $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ باشد، آن‌گاه

$$\begin{aligned} U(\Delta, f) &\le U(\Delta_۲, f) \\ &< \overline{\int_a^b} f dx + \frac{\varepsilon}{۲} \\ &= \underline{\int_a^b} f dx + \frac{\varepsilon}{۲} \\ &< L(\Delta_۱, f) + \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} \\ &\le L(\Delta, f) + \varepsilon. \end{aligned}$$

بنابراین

$$U(\Delta, f) - L(\Delta, f) < \varepsilon.$$

برعکس؛ فرض کنیم برای هر $\varepsilon > ۰$ افراز Δ چنان موجود باشد که

$$U(\Delta, f) - L(\Delta, f) < \varepsilon. \tag{۲}$$

اما از (۱)

$$L(\Delta, f) \leq \underline{\int_a^b} f dx$$

و

$$\overline{\int_a^b} f dx \leq U(\Delta, f).$$

بنابراین

$$L(\Delta, f) \leq \underline{\int_a^b} f dx \leq \overline{\int_a^b} f dx \leq U(\Delta, f).$$

نامساوی (۲) ایجاب می‌کند که

$$\overline{\int_a^b} f dx - \underline{\int_a^b} f dx < \varepsilon.$$

از آنجا که ε دلخواه است،

$$\underline{\int_a^b} f dx = \overline{\int_a^b} f dx.$$

یعنی اینکه، f روی $[a, b]$ ریمان انتگرال‌پذیر است. ■

۶ قضیه. فرض کنیم f روی $[a, b]$ ریمان انتگرال‌پذیر باشد و فرض کنیم c چنان باشد که $a < c < b$. آن‌گاه

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx.$$

برهان. داریم

$$[a, b] = [a, c] \cup [c, b].$$

فرض کنیم $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ به‌ترتیب افرازهایی از $[a, c]$ و $[c, b]$ باشند و $\Delta = \Delta_۱ \cup \Delta_۲$. آن‌گاه

$$L(\Delta, f) = L(\Delta_۱, f) + L(\Delta_۲, f)$$

یا

$$\sup_{\Delta\in P[a,b]} L(\Delta,f)=\sup_{\Delta_۱\in P[a,c]} L(\Delta_۱,f)+\sup_{\Delta_۲\in P[c,b]} L(\Delta_۲,f).$$

بنابراین

$$\underline{\int_a^b} f\,dx=\underline{\int_a^c} f\,dx+\underline{\int_c^b} f\,dx.$$

بطور مشابه، می‌توان ثابت کرد

$$\overline{\int_a^b} f\,dx=\overline{\int_a^c} f\,dx+\overline{\int_c^b} f\,dx.$$

انتگرال‌پذیری f، قضیه را ثابت می‌کند. ■

۷ قضیه. هرگاه تابع f روی $[a,b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه روی $[a,b]$ ریمان انتگرال‌پذیر است.

برهان. بازهٔ $[a,b]$ روی $\mathbb{R}$ مجموعه‌ای فشرده است. پیوستگی f روی $[a,b]$ پیوستگی یکنواخت آن را روی $[a,b]$ ایجاب می‌کند. بنابراین برای $\varepsilon>۰$ داده شده می‌توان $\delta>۰$ را چنان پیدا کرد که

$$\forall x,y\in[a,b]\ ;\ |x-y|<\delta\Longrightarrow|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

علاوه براین نقاط $y_i,z_i\in[x_{i-۱},x_i]$ چنان موجودند که

$$m_i=f(y_i)=\inf_{x\in[x_{i-۱},x_i]} f(x) \quad \text{و} \quad M_i=f(z_i)=\sup_{x\in[x_{i-۱},x_i]} f(x).$$

بنابراین هرگاه $|z_i-y_i|<\delta$ آن‌گاه

$$M_i-m_i=|M_i-m_i|=|f(z_i)-f(y_i)|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

با ضرب نامساوی بالا در Δx_i و جمع طرفین نامساوی‌ها بدست می‌آوریم

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i$$

یا

$$U(\Delta, f) - L(\Delta, f) < \varepsilon. \tag{۳}$$

نامساوی (۳) ثابت می‌کند که f ریمان انتگرالپذیر است. ■

۸ قضیه. هر تابع یکنوای کراندار f روی $[a, b]$ ریمان انتگرال‌پذیر است.

برهان. حالتی را در نظر می‌گیریم که تابع بطور یکنوا صعودی است. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. افراز Δ را چنان درست می‌کنیم که برای $i = 1, 2, 3, \cdots, n$، $\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. داریم

$$U(\Delta, f) - L(\Delta, f) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i.$$

اما

$$M_i = f(x_i) \quad \text{و} \quad m_i = f(x_{i-1})$$

بنابراین

$$\begin{aligned} U(\Delta, f) - L(\Delta, f) &= \sum_{i=1}^{n}[f(x_i) - f(x_{i-1})]\Delta x_i \\ &< \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

بنابراین f روی $[a, b]$ ریمان انتگرال‌پذیر است. ■

۲. انتگرال‌های ریمان-اشتلیس

۱ تعریف. فرض کنیم $[a,b]$ بازهٔ بستهٔ کراندار در $\mathbb{R}$ باشد. فرض کنیم α بطوریکنوا صعودی و f کراندار باشد، که هریک روی $[a,b]$ تعریف شده‌اند. برای هر $\Delta \in P[a,b]$، می‌نویسیم

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-۱}) \quad , \quad i = ۱, ۲, \cdots, n.$$

و قرار دهید

$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{و} \quad m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$$
$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-۱},x_i]} f(x) \quad \text{و} \quad m_i = \inf_{x\in[x_{i-۱},x_i]} f(x).$$

تعریف کنید

$$L(\Delta, f, \alpha) = \sum_{i=۱}^{n} m_i \Delta\alpha_i,$$
$$U(\Delta, f, \alpha) = \sum_{i=۱}^{n} M_i \Delta\alpha_i.$$

U, L به ترتیب مجموع‌های پائین و بالا نامیده می‌شوند.
مشابه انتگرال ریمان می‌بینیم که برای هر $\Delta \in P[a,b]$،

$$m[\alpha(b) - \alpha(a)] \leq L(\Delta, f, \alpha) \leq U(\Delta, f, \alpha) \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

تعریف می‌کنیم

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \inf_{\Delta\in P[a,b]} U(\Delta, f, \alpha)$$
$$\underline{\int_a^b} f d\alpha = \sup_{\Delta\in P[a,b]} L(\Delta, f, \alpha),$$

که به ترتیب *انتگرال‌های ریمان‌ـاشتلیس بالا و پایین* [1] نامیده می‌شوند و وجود دارند زیرا که $L(\Delta, f, \alpha)$, $U(\Delta, f, \alpha)$ بنابه نامساوی بالا کراندار می‌باشند.

هرگاه انتگرال‌های بالا و پائین f برابر باشند، آن‌گاه می‌گوئیم که f *ریمان‌ـاشتلیس انتگرال‌پذیر* می‌باشد و این مقدار مشترک را بصورت زیر نمایش می‌دهیم

$$\int_a^b f d\alpha \quad \text{یا} \quad \int_a^b f(x) d\alpha(x).$$

مجموعهٔ همهٔ توابع f که نسبت به α ریمان‌ـاشتلیس انتگرال‌پذیر می‌باشند را با $R(\alpha)$ نمایش می‌دهیم. انتگرال ریمان حالت خاصی از انتگرال ریمان‌ـاشتلیس است که در آن $\alpha(x) = x$.

۲ قضیه. (الف) فرض کنیم Δ^* تظریفی از Δ باشد. آن‌گاه

$$L(\Delta, f, \alpha) \leq (\Delta^*, f, \alpha) \leq U(\Delta^*, f, \alpha) \leq U(\Delta, f, \alpha).$$

(ب) هرگاه $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ در افراز باشند، آن‌گاه

$$L(\Delta_۱, f, \alpha) \leq U(\Delta_۲, f, \alpha).$$

(ج) $\underline{\int_a^b} f d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f d\alpha$.

برهان. (الف) فرض کنیم Δ^* فقط یک نقطه اضافه بر Δ داشته باشد. این نقطه را با x^* نمایش می‌دهیم و فرض کنیم $x^* \in (x_{i-۱}, x_i)$. از آنجا که f روی $[a, b]$ کراندار است، روی هر یک از زیر بازه‌های $[x_{i-۱}, x_i]$، $[x_{i-۱}, x^*]$ و $[x^*, x_i]$ نیز کراندار خواهد بود. فرض کنیم m_i، $w_۱$، $w_۲$ به‌ترتیب اینفیمم f روی $[x_{i-۱}, x_i]$، $[x_{i-۱}, x^*]$

1) Riemann-Stieltjes Integral

و $[x^*, x_i]$ باشند. بوضوح $m_i \geq w_۱$ و $m_i \geq w_۲$. حال

$$\begin{aligned} & L(\Delta, f, \alpha) - L(\Delta^*, f, \alpha) \\ =& m_i[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-۱})] - w_۱[\alpha(x^*) - \alpha(x_{i-۱})] - w_۲[\alpha(x_i) - \alpha(x^*)] \\ =& (m_i - w_۱)[\alpha(x^*) - \alpha(x_{i-۱})] + (m_i - w_۲)[\alpha(x_i) - \alpha(x^*)] \leq ۰. \end{aligned}$$

هرگاه Δ^* حاوی k نقطه بیشتر از نقاط Δ باشد، آن‌گاه این مراحل را k مرتبه تکرار می‌کنیم و می‌بینیم که

$$L(\Delta, f, \alpha) \leq L(\Delta^*, f, \alpha).$$

برهان نامساوی آخر در (الف) با روشی مشابه قسمت اول نشان داده می‌شود.

(ب) فرض کنیم $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ دو افراز باشند و قرار دهید $\Delta = \Delta_۱ \cup \Delta_۲$ تظریف مشترک این‌ها باشد. آن‌گاه از (الف) نتیجه می‌گیریم که

$$L(\Delta_۱, f, \alpha) \leq L(\Delta, f, \alpha) \leq U(\Delta, f, \alpha) \leq U(\Delta_۲, f, \alpha).$$

بنابراین

$$L(\Delta_۱, f, \alpha) \leq (\Delta_۲, f, \alpha).$$

(ج) فرض کنیم $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ دو افراز باشند. آن‌گاه

$$L(\Delta_۱, f, \alpha) \leq U(\Delta_۲, f, \alpha).$$

بنابراین

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha = \sup_{\Delta_۱ \in P[a,b]} L(\Delta_۱, f, \alpha) \leq U(\Delta_۲, f, \alpha).$$

حال

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha \leq \inf_{\Delta_۲ \in P[a,b]} U(\Delta_۲, f, \alpha) = \overline{\int_a^b} f d\alpha$$

و این برهان را کامل می‌کند. ■

۳ مثالها. (الف) تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تعریف شده با

$$f(x)=\begin{cases} ۰ & ;x\in\mathbb{Q} \\ ۱ & ;x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

روی هیچ بازه‌ای ریمان انتگرال‌پذیر نیست.

بازهٔ $[a,b]\subset\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید

$$\Delta=\{x_۰=a,x_۱,x_۲,\cdots,x_{n-۱},x_n=b\}$$

افرازی از آن باشد. آنگاه

$$\begin{aligned} U(\Delta,f) &= \sum_{i=۱}^{n}\Delta x_i \\ &= ۱\Delta x_۱+۱\Delta x_۲+\cdots+۱\Delta x_n \\ &= b-a. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^b} f dx &= \inf U(\Delta,f)=\inf(b-a) \\ &= b-a. \\ L(\Delta,f) &= \sum_{i=۱}^{n} m_i\Delta x_i \\ &= ۰\Delta x_۱+۰\Delta x_۲+\cdots+۰\Delta x_n=۰ \end{aligned}$$

لذا

$$\underline{\int_a^b} f dx=\sup L(\Delta,f)=۰.$$

در نتیجه

$$\overline{\int_a^b} f dx=b-a\neq ۰=\underline{\int_a^b} f dx$$

و لذا f انتگرال‌پذیر ریمان نیست.

(ب) فرض کنیم α تابع صعودی باشد که روی $[a, b]$ تعریف شده و در $x_{\circ} \in [a, b]$ پیوسته است. فرض کنیم f تابعی روی $[a, b]$ باشد که بصورت زیر تعریف شده است

$$f(x) = \begin{cases} \circ & ; x \neq x_{\circ} \\ \text{۱} & ; x = x_{\circ} \end{cases}.$$

ثابت کنید که روی $[a, b]$، $f \in R(\alpha)$ و $\int_a^b f d\alpha = \circ$.

فرض کنیم Δ افرازی از $[a, b]$ باشد؛ یعنی،

$$\Delta = \{x_{\circ} = a, x_{\text{۱}}, x_{\text{۲}}, \cdots, x_{n-\text{۱}}, x_n = b\}.$$

از آنجا که $x_{\circ} \in [a, b]$، لذا $x_{\circ}$ باید در زیر بازه‌ای همچون Δx_i قرار گیرد که $i \in \{\text{۱}, \text{۲}, \cdots, n\}$. چون α در $x_{\circ}$ پیوسته است پس برای $\varepsilon > \circ$ داده شده $\delta > \circ$ چنان موجود است که وقتی $\Delta x_i < \delta$ آن‌گاه

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-\text{۱}}) < \varepsilon.$$

فرض کنیم Δ چنان باشد که $\max\limits_{j \in \{\text{۱},\text{۲},\cdots,n\}} \Delta x_j < \delta$. آن‌گاه $\Delta x_i < \delta$ و لذا $\Delta\alpha_i < \varepsilon$. حال

$$U(\Delta, f, \alpha) = \Delta\alpha_i$$

و

$$L(\Delta, f, \alpha) = \circ.$$

از آنجا که ε دلخواه است،

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \inf U(\Delta, f, \alpha) = \circ.$$

همچنین

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha = \sup L(\Delta, f, \alpha) = \circ.$$

بنابراین $f \in R(\alpha)$ و $\int_a^b f d\alpha = 0$.

(ج) هرگاه α روی $[a, b]$ کراندار و بطور یکنوا صعودی باشد و هرگاه k ثابت باشد، آن‌گاه نشان دهید که $k \in R(\alpha)$ و

$$\int_a^b k d\alpha = k[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

هرگاه $\alpha(x) = x$ برای تمام $x \in [a, b]$های، آن‌گاه

$$\int_a^b k dx = k(b - a).$$

برای هر افراز Δ از $[a, b]$،

$$\begin{aligned} L(\Delta, k, \alpha) &= k\Delta\alpha_1 + k\Delta\alpha_2 + \cdots + k\Delta\alpha_n \\ &= k(\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2 + \cdots + \Delta\alpha_n) \\ &= k\{[\alpha(x_1) - \alpha(a)] + [\alpha(x_2) - \alpha(x_1)] + \cdots + [\alpha(b) - \alpha(x_{n-1})]\} \\ &= k[\alpha(b) - \alpha(a)]. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\underline{\int_a^b} k d\alpha = \sup L(\Delta, k, \alpha) = k[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

همچنین

$$U(\Delta, k, \alpha) = k[\alpha(b) - \alpha(a)]$$

و

$$\overline{\int_a^b} k d\alpha = \inf U(\Delta, k, \alpha) = k[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

بنابراین

$$\overline{\int_a^b} k d\alpha = \underline{\int_a^b} k d\alpha = k[\alpha(b) - \alpha(a)]$$

و این نتیجه را ثابت می‌کند.

(د) نشان دهید که $f(x) = x$ در $[\circ, a]$ ریمان انتگرال‌پذیر است.

فرض کنیم Δ افرازی از $[\circ, a]$ باشد که بازه را به n زیر بازه مساوی تقسیم می‌کند. آنگاه

$$\Delta = \{\circ, \frac{a}{n}, \frac{۲a}{n}, \cdots, \frac{(n-۱)a}{n}, \frac{na}{n} = a\}.$$

طول هر زیر بازه $\frac{a}{n}$ است. glb و lub تابع داده شده در زیر بازه‌ها به ترتیب $\frac{(i-۱)a}{n}$ و $\frac{ia}{n}$ می‌باشد. بنابراین

$$\begin{aligned} U(\Delta, f) =& \frac{a^۲}{n^۲}(۱ + ۲ + \cdots + n) \\ =& \frac{a^۲}{n^۲}.\frac{n(n+۱)}{۲} \\ =& \frac{a^۲}{۲}(۱ + \frac{۱}{n}) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} L(\Delta, f) &= \frac{a^۲}{n^۲}[\circ + ۱ + ۲ + \cdots + (n-۱)] \\ &= \frac{a^۲}{۲}(۱ - \frac{۱}{n}). \end{aligned}$$

بنابراین

$$\inf U(\Delta, f) = \sup L(\Delta, f) = \frac{a^۲}{۲}$$

و لذا

$$\int_\circ^a x dx = \frac{a^۲}{۲}.$$

۳. خواص انتگرال

۱ قضیه. $f \in R(\alpha)$ روی $[a, b]$ اگر و فقط اگر برای هر $\varepsilon > \circ$ افراز $\Delta \in P[a, b]$ چنان موجود باشد که

$$U(\Delta, f, \alpha) - L(\Delta, f, \alpha) < \varepsilon.$$

برهان. برای هر $\Delta \in P[a,b]$ داریم

$$L(\Delta, f, \alpha) \leq \underline{\int_a^b} f d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f d\alpha \leq U(\Delta, f, \alpha).$$

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. و $\Delta \in P[a,b]$ چنان موجود باشد که

$$U(\Delta, f, \alpha) - L(\Delta, f, \alpha) < \varepsilon,$$

در نتیجه

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f d\alpha - \underline{\int_a^b} f d\alpha < \varepsilon.$$

اما این برای هر $\varepsilon > 0$ درست است. بنابراین باید داشته باشیم

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \underline{\int_a^b} f d\alpha = \int_a^b f d\alpha$$

و لذا $f \in R(\alpha)$.

برعکس؛ فرض کنیم $f \in R(\alpha)$. آن‌گاه

$$\int_a^b f d\alpha = \overline{\int_a^b} f d\alpha = \underline{\int_a^b} f d\alpha.$$

اما

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \inf_{\Delta \in P[a,b]} U(\Delta, f, \alpha)$$

و

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha = \sup_{\Delta \in P[a,b]} L(\Delta, f, \alpha).$$

بنابراین برای $\varepsilon > 0$ داده شده، $\Delta_2 \in P[a,b]$ و Δ_1 چنان موجودند که

$$U(\Delta_1, f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha < \frac{\varepsilon}{2}$$

و

$$\int_a^b f d\alpha - L(\Delta_2, f, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

قرار دهید $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$. آن‌گاه

$$\begin{aligned} U(\Delta, f, \alpha) &\leq U(\Delta_1, f, \alpha) < \int_a^b f d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< L(\Delta_2, f, \alpha) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< L(\Delta, f, \alpha) + \varepsilon. \end{aligned}$$

بنابراین

$$U(\Delta, f, \alpha) - L(\Delta, f, \alpha) < \varepsilon$$

و این برهان را کامل می‌کند. ■

۲ قضیه. هرگاه f روی $[a, b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه $f \in R(\alpha)$ روی $[a, b]$.

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. $\eta > 0$ را چنان انتخاب کنید که

$$\eta[\alpha(b) - \alpha(a)] < \varepsilon.$$

فرض کنیم که f روی $[a, b]$ پیوسته باشد. از آنجا که $[a, b]$ فشرده است، f بطور یکنواخت پیوسته است. بنابراین $\delta > 0$ چنان موجود است که

$$\forall x, y \in [a, b] \; ; \; |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \eta.$$

فرض کنیم $\Delta \in P[a, b]$ چنان باشد که $\max \Delta x_i < \delta$. لذا

$$M_i - m_i \leq \eta \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

حال

$$\begin{aligned} U(\Delta, f, \alpha) - L(\Delta, f, \alpha) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta\alpha_i \\ &\leq \eta \sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i \\ &= \eta[\alpha(b) - \alpha(a)] < \varepsilon. \end{aligned}$$

در نتیجه $f \in R(\alpha)$. ■

۳ قضیه. هرگاه f روی $[a,b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه برای هر ε، $\delta > ۰$ چنان موجود است که برای هر افراز $\Delta = \{x_۰, x_۱, \cdots, x_n\}$ از $[a,b]$ با $\max \Delta\alpha_i < \delta$ و برای هر $t_i \in [x_{i-۱}, x_i]$،

$$|\sum_{i=۱}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i - \int_a^b f d\alpha| < \varepsilon.$$

برهان. هرگاه f روی $[a,b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه قضیهٔ قبل ایجاب می‌کند که $f \in R(\alpha)$، یعنی، $\int_a^b f d\alpha$ موجود است. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. لذا بوضوح برای هر افراز $\Delta \in P[a,b]$ با $\max \Delta\alpha_i < \delta$ و برای هر $t_i \in [x_{i-۱}, x_i]$، $\sum_{i=۱}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i$ و $\int_a^b f d\alpha$ هر دو بین $L(\Delta, f, \alpha)$ و $U(\Delta, f, \alpha)$ قرار دارند. بنابراین، برای هر $\Delta \in P[a,b]$ با $\max \Delta\alpha_i < \delta$ و برای هر $t_i \in [x_{i-۱}, x_i]$،

$$|\sum_{i=۱}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i - \int_a^b f d\alpha| < U(\Delta, f, \alpha) - L(\Delta, f, \alpha) < \varepsilon.$$

بعبارت دیگر،

$$\lim_{\max \Delta\alpha_i \to ۰} \sum_{i=۱}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i = \int_a^b f d\alpha,$$

و این برهان را کامل می‌کند. ■

۴ مثالها. (الف) فرض کنیم $f : [-۱, ۱] \to [۰, ۱]$ بصورت زیر تعریف شده باشد

$$f(x) = |x|.$$

ثابت کنید که f ریمان انتگرال‌پذیر است و نشان دهید که

$$\int_{-۱}^{۱} f(x)dx = ۱.$$

تابع f کراندار است و روی $[-۱, ۱]$ پیوسته می‌باشد و

$$f(x) = \begin{cases} -x & ; x \leq ۰ \\ x & ; x \geq ۰. \end{cases}$$

فرض کنیم Δ افرازی باشد که $[-۱, ۱]$ را به $۲n$ زیر بازه با طول‌های مساوی تقسیم می‌کند. به بیان دقیق، قرار دهید

$$\Delta = \{-۱ = x_۰, x_۱, \cdots, x_n = ۰ = y_۰, y_۱, \cdots, y_n = ۱\}.$$

آن‌گاه $\Delta x_i = \Delta y_i = \frac{۱}{n}$ و بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} \Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \Delta y_i = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} = ۰,$$
$$\sum_{i=۱}^{n} \Delta x_i = \sum_{i=۱}^{n} \Delta y_i = ۱.$$

قرار دهید $x_i = -۱ + \frac{i}{n}$ و $y_i = \frac{i}{n}$ و قرار دهید $t_i = x_i \in \Delta x_i$ و $t_i = y_i \in \Delta y_i$. آن‌گاه

$$\begin{aligned} &\sum_{i=۱}^{n} f(t_i)\Delta x_i + \sum_{i=۱}^{n} f(t_i)\Delta y_i \\ &\qquad = \sum (-x_i)\Delta x_i + \sum y_i \Delta y_i \\ &\qquad = \sum (۱ - \frac{i}{n})\Delta x_i + \sum \frac{i}{n}\Delta y_i \\ &\qquad = \sum_{i=۱}^{n} \Delta x_i - \frac{۱}{n^۲}\sum_{i=۱}^{n} i + \frac{۱}{n^۲}\sum_{i=۱}^{n} i \\ &\qquad = ۱. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\int_{-۱}^{۱} f dx = ۱.$$

(ب) انتگرال ریمان زیر را بصورت حد یک مجموع محاسبه کنید:

$$\int_{۰}^{a} x^{۲} dx.$$

فرض کنیم Δ افرازی از $[۰, a]$ با n زیر بازهٔ مساوی باشد:

$$x_۰ = a, x_۱ = \Delta x, x_۲ = ۲\Delta x, \cdots, x_n = n\Delta x.$$

لذا $\Delta x = \frac{a}{n}$. فرض کنیم t_iها نقاط سمت راست زیر بازه‌ها باشند. آن‌گاه

$$\begin{aligned}
\sum_{i=۱}^{n} f(t_i)\Delta x_i &= x_۱^۲\Delta x + x_۲^۲\Delta x + \cdots + x_n^۲\Delta x \\
&= (\Delta x)^۲\Delta x + (۲\Delta x)^۲\Delta x + \cdots + (n\Delta x)^۲\Delta x \\
&= (\Delta x)^۳(۱^۲ + ۲^۲ + \cdots + n^۲) \\
&= (\Delta x)^۳\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶} \\
&= \frac{a^۳}{n^۳}\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶} \\
&= \frac{a^۳}{۶}(۱+\frac{۱}{n})(۲+\frac{۱}{n}) \to \frac{a^۳}{۳} (n \to \infty \text{ وقتی})
\end{aligned}$$

بنابراین $\int_{۰}^{a} x^۲ dx = \frac{a^۳}{۳}$.

(ج) $\int_a^b x^e dx$ را به صورت حد یک مجموع محاسبه کنید.

فرض کنیم Δ افرازی باشد که بازهٔ $[a, b]$ را به n زیر بازه مساوی تقسیم می‌کند:

$$x_۰ = a, x_۱ = a + \Delta x, \cdots, x_n = a + n\Delta x$$

بطوری که $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. نقاط سمت چپ هر یک از زیر بازه‌ها را t_i بگیرید. آن‌گاه

داریم

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i &= e^a\Delta x + e^{a+\Delta x}\Delta x + \cdots + e^{a+(n-1)\Delta x}\Delta x \\ &= e^a\Delta x(1 + e^{\Delta x} + \cdots + e^{(n-1)\Delta x}) \\ &= e^a\Delta x\frac{e^{n\Delta x}-1}{e^{\Delta x}-1} \\ &= e^a(e^{n\Delta x}-1)\frac{\Delta x}{e^{\Delta x}-1}. \\ &= e^a(e^{b-a}-1)\frac{\Delta x}{e^{\Delta x}-1} \quad (\text{از آنجا که } n\Delta x = b-a)\end{aligned}$$

ولی بنابه قاعدهٔ هوپیتال، $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{e^{\Delta x}-1} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{e^{\Delta x}} = 1$. بنابراین

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = e^a(e^{b-a}-1) = e^b - e^a.$$

در نتیجه

$$\int_a^b e^x dx = e^b - e^a.$$

۵ قضیه. هرگاه f یکنوا و α روی $[a,b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه $f \in R(\alpha)$. (البته α همچنان یکنوا فرض شده است.)

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. فرض کنیم α روی $[a,b]$ پیوسته و بطور یکنوا صعودی باشد. اما $[a,b]$ همبند است، لذا بنابه قضیهٔ مقدار میانی، α هر مقدار بین $\alpha(a)$ و $\alpha(b)$ را می‌گیرد. بنابراین برای هر عدد صحیح مثبت n، می‌توان افراز $\Delta = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ از $[a,b]$ را چنان انتخاب کرد که

$$\Delta\alpha_i = \frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}.$$

فرض کنیم m_i و M_i به‌ترتیب کران‌های پائین و بالای f در $[x_{i-1}, x_i]$ باشد. فرض کنیم f بطور یکنوا صعودی باشد. آن‌گاه

$$m_i = f(x_{i-1}) \quad , \quad M_i = f(x_i).$$

بنابراین، برای $n > \frac{[\alpha(b)-\alpha(a)][f(b)-f(a)]}{\varepsilon}$

$$\begin{aligned} U(\Delta, f, \alpha) - L(\Delta, f, \alpha) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta\alpha_i \\ &= \frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ &= \frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}[f(b)-f(a)] \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

در نتیجه $f \in R(\alpha)$ و این برهان را کامل می‌کند. ■

۶ قضیه. (الف) هرگاه $f_1, f_2 \in R(\alpha)$ روی $[a, b]$، آنگاه $f_1 + f_2 \in R(\alpha)$ و

$$\int_a^b (f_1 + f_2)d\alpha = \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha.$$

هرگاه $f \in R(\alpha)$ روی $[a, b]$ و c هر عدد حقیقی باشد، آنگاه $cf \in R(\alpha)$ و

$$\int_a^b cf d\alpha = c\int_a^b f d\alpha.$$

(ب) هرگاه $f_1, f_2 \in R(\alpha)$ و $f_1 \le f_2$ روی $[a, b]$، آنگاه

$$\int_a^b f_1 d\alpha \le \int_a^b f_2 d\alpha.$$

(ج) هرگاه $f \in R(\alpha)$ و $c \in (a, b)$، آنگاه $f \in R(\alpha)$ روی $[a, c]$ و $[c, b]$ و

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha.$$

(د) هرگاه $f \in R(\alpha_1)$ و $f \in R(\alpha_2)$، آنگاه $f \in R(\alpha_1 + \alpha_2)$ و

$$\int_a^b f d(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f d\alpha_1 + \int_a^b f d\alpha_2.$$

هرگاه $f \in R(\alpha)$ و $c > 0$، آن‌گاه $f \in R(c\alpha)$ و

$$\int_a^b fd(c\alpha) = c\int_a^b fd\alpha.$$

(ه) هرگاه $f \in R(\alpha)$، آن‌گاه $|f| \in R(\alpha)$ و

$$\left|\int_a^b fd\alpha\right| \leq \int_a^b |f|d\alpha.$$

هرگاه $f \in R(\alpha)$ و هرگاه روی $[a, b]$، $|f(x)| \leq M$، آن‌گاه

$$\left|\int_a^b fd\alpha\right| \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

(و) هرگاه $f \in R(\alpha)$، آن‌گاه $f^2 \in R(\alpha)$. بطور کلی، هرگاه $f, g \in R(\alpha)$ روی $[a, b]$، آن‌گاه $fg \in R(\alpha)$.

برهان. (الف) قرار دهید $f = f_1 + f_2$ و فرض کنیم Δ هر افرازی از $[a, b]$ باشد. فرض کنیم m'_i، M'_i، m''_i، M''_i، m_i و M_i به ترتیب کران‌های f_1، f_2 و f روی Δx_i باشد. آن‌گاه

$$m'_i + m''_i \leq m_i \leq M_i \leq M'_i + M''_i.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} L(\Delta, f_1, \alpha) + L(\Delta, f_2, \alpha) &\leq L(\Delta, f, \alpha) \\ &\leq U(\Delta, f, \alpha) \leq U(\Delta, f_1, \alpha) + U(\Delta, f_2, \alpha). \end{aligned}$$

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. از آنجا که $f_1, f_2 \in R(\alpha)$، افرازهای Δ_1 و Δ_2 چنان موجودند که برای $j = 1, 2$

$$U(\Delta_j, f_j, \alpha) - L(\Delta_j, f_j, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

قرار دهید $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$. آن‌گاه برای $j = 1, 2$،

$$U(\Delta, f_j, \alpha) - L(\Delta, f_j, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} U(\Delta, f, \alpha) - L(\Delta, f, \alpha) &\leq U(\Delta, f_1, \alpha) + U(\Delta, f_2, \alpha) \\ &\quad - L(\Delta, f_1, \alpha) - L(\Delta, f_2, \alpha) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

بنابراین $f \in R(\alpha)$.

حال از آنجا که انتگرال بالا، اینفیمم مجموع‌های بالایی است، برای $j = 1, 2$ خواهیم داشت

$$U(\Delta_j, f_j, \alpha) < \int_a^b f_j d\alpha + \frac{\varepsilon}{2},$$

همچنین برای $j = 1, 2$،

$$U(\Delta, f_j, \alpha) < \int_a^b f_j d\alpha + \frac{\varepsilon}{2}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \int_a^b f d\alpha \leq U(\Delta, f, \alpha) &\leq U(\Delta, f_1, \alpha) + U(\Delta, f_2, \alpha) \\ &< \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha + \varepsilon. \end{aligned}$$

از آنجا که $\varepsilon > 0$ دلخواه است داریم

$$\int_a^b f d\alpha \leq \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha.$$

اگر مراحل بالا را با $-f_1$ و $-f_2$ بجای f_1 و f_2 تکرار کنیم نامساوی عکس را بدست می‌آوریم و لذا خواهیم داشت

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha.$$

اثبات قسمت دیگر (الف) و (ب) به عهده خواننده می‌باشند.
(د) فرض کنیم $f \in R(\alpha_1)$ و $f \in R(\alpha_2)$. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. آن‌گاه افرازهای Δ_1 و Δ_2 چنان موجودند که برای $j = 1, 2$،

$$U(\Delta_j, f, \alpha_j) - L(\Delta_j, f, \alpha_j) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

قرار دهید $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$. آن‌گاه برای $j = 1, 2$،

$$U(\Delta, f, \alpha_j) - L(\Delta, f, \alpha_j) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

فرض کنیم m_i و M_i کران‌های f در Δx_i باشند. قرار دهید $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. آن‌گاه برای $j = 1, 2$،

$$\Delta\alpha_{ji} = \alpha_j(x_i) - \alpha_j(x_{i-1}).$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\Delta\alpha_i &= \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) \\ &= \alpha_1(x_i) + \alpha_2(x_i) - \alpha_1(x_{i-1}) - \alpha_2(x_{i-1}) \\ &= \Delta\alpha_{1i} + \Delta\alpha_{2i}.\end{aligned}$$

در نتیجه

$$U(\Delta, f, \alpha) = U(\Delta, f, \alpha_1) + U(\Delta, f, \alpha_2)$$

و لذا

$$\begin{aligned}U(\Delta, f, \alpha) - L(\Delta, f, \alpha) =& U(\Delta, f, \alpha_1) - L(\Delta, f, \alpha_1) \\ &+ U(\Delta, f, \alpha_2) - L(\Delta, f, \alpha_2) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

بنابراین $f \in R(\alpha)$ که $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. حال

$$\begin{aligned}\int_a^b f d\alpha &= \inf U(\Delta, f, \alpha)\\ &= \inf[U(\Delta, f, \alpha_1) + U(\Delta, f, \alpha_2)]\\ &\geq \inf U(\Delta, f, \alpha_1) + \inf U(\Delta, f, \alpha_2)\\ &= \int_a^b f d\alpha_1 + \int_a^b f d\alpha_2.\end{aligned}$$

علاوه براین

$$\begin{aligned}\int_a^b f d\alpha &= \sup L(\Delta, f, \alpha)\\ &\leq \int_a^b f d\alpha_1 + \int_a^b f d\alpha_2.\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha_1 + \int_a^b f d\alpha_2.$$

برهان قسمت دیگر (د) به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

(هـ) از آنجا که $f \in R(\alpha)$، لذا برای $\varepsilon > 0$ داده شده، افراز Δ چنان موجود است که

$$U(\Delta, f, \alpha) - L(\Delta, f, \alpha) < \varepsilon.$$

فرض کنیم m_i، M_i، m'_i و M'_i به‌ترتیب کران‌های f و $|f|$ در Δx_i باشند. آن‌گاه می‌بینیم که

$$M'_i - m'_i \leq M_i - m_i$$

و لذا

$$U(\Delta, |f|, \alpha) - L(\Delta, |f|, \alpha) \leq U(\Delta, f, \alpha) - L(\Delta, f, \alpha) < \varepsilon.$$

در نتیجه $|f| \in R(\alpha)$.

چون برای هر $x \in [a,b]$، $f(x) \leq |f(x)| = |f|(x)$، پس بنابه (ب) خواهیم داشت

$$\int_a^b f d\alpha \leq \int_a^b |f| d\alpha.$$

دوباره، از آنجا که $-f(x) \leq |f|(x)$ در نتیجه

$$-\int_a^b f d\alpha = \int_a^b (-f) d\alpha \leq \int_a^b |f| d\alpha.$$

بنابراین

$$\left| \int_a^b f d\alpha \right| \leq \int_a^b |f| d\alpha.$$

(و) از آنجا که $f \in R(\alpha)$، $|f| \in R(\alpha)$. همچنین f کراندار است، بنابراین $|f|$ نیز کراندار می‌باشد. بنابراین ثابت M چنان موجود است که برای هر $x \in [a,b]$، $M \leq |f(x)|$. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. آن‌گاه افراز Δ چنان موجود است که

$$U(\Delta, |f|, \alpha) - L(\Delta, |f|, \alpha) < \frac{\varepsilon}{۲M}.$$

هرگاه m_i و M_i کران‌های f در Δx_i باشند، آن‌گاه $m_i^۲$ و $M_i^۲$ کران‌های $f^۲$ در Δx_i خواهند بود. حال

$$\begin{aligned}
U(\Delta, f^۲, \alpha) - L(\Delta, f^۲, \alpha) &= \sum_{i=۱}^{n} (M_i^۲ - m_i^۲) \Delta\alpha_i \\
&= \sum_{i=۱}^{n} (M_i + m_i)(M_i - m_i) \Delta\alpha_i \\
&\leq ۲M \sum_{i=۱}^{n} (M_i - m_i) \Delta\alpha_i \\
&= ۲M [U(\Delta, |f|, \alpha) - L(\Delta, |f|, \alpha)] \\
&< ۲M . \frac{\varepsilon}{۲M} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

بنابراین $f^۲ \in R(\alpha)$.
حال فرض کنیم که f و g در $R(\alpha)$ باشند. داریم

$$fg = \frac{۱}{۴}[(f+g)^۲ - (f-g)^۲].$$

چون $f, g \in R(\alpha)$، $f+g$، $(f+g)^۲$، $(f-g)^۲$ همگی در $R(\alpha)$ می‌باشند، بنابراین $fg \in R(\alpha)$ و این برهان را کامل می‌کند.

(ج) فرض کنیم $f \in R(\alpha)$ روی $[a,b]$ و $c \in (a,b)$. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. آن‌گاه افراز Δ چنان موجود است که

$$U(\Delta, f, \alpha) - L(\Delta, f, \alpha) < \varepsilon.$$

قرار دهید $\Delta^* = \Delta \cup \{c\}$. آن‌گاه

$$L(\Delta, f, \alpha) \leq L(\Delta^*, f, \alpha) \leq U(\Delta^*, f, \alpha) \leq U(\Delta, f, \alpha)$$

در نتیجه

$$U(\Delta^*, f, \alpha) - L(\Delta^*, f, \alpha) \leq U(\Delta, f, \alpha) - L(\Delta, f, \alpha) < \varepsilon.$$

فرض کنیم $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ به ترتیب مجموعهٔ نقاطی از Δ^* بین $[a,c]$ و $[c,b]$ را نمایش دهند. آن‌گاه $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ افرازهایی از $[a,c]$ و $[c,b]$ می‌باشند و $\Delta_۱ \cup \Delta_۲ = \Delta^*$.
علاوه براین

$$U(\Delta^*, f, \alpha) = U(\Delta_۱, f, \alpha) + U(\Delta_۲, f, \alpha)$$
$$L(\Delta^*, f, \alpha) = L(\Delta_۱, f, \alpha) + L(\Delta_۲, f, \alpha).$$

بنابراین

$$U(\Delta_۱, f, \alpha) - L(\Delta_۱, f, \alpha) + U(\Delta_۲, f, \alpha) - L(\Delta_۲, f, \alpha)$$
$$= U(\Delta^*, f, \alpha) - L(\Delta^*, f, \alpha) < \varepsilon.$$

در نتیجه
$$U(\Delta_1, f, \alpha) - L(\Delta_1, f, \alpha) < \varepsilon$$
و
$$U(\Delta_2, f, \alpha) - L(\Delta_2, f, \alpha) < \varepsilon$$
و در نتیجه $f \in R(\alpha)$ روی $[a, c]$ و $[c, b]$.

ولی از آنجا که برای هر افراز Δ_1 و Δ_2 از $[a, c]$ و $[c, b]$ با $\Delta^* = \Delta_1 \cup \Delta_2$،
$$U(\Delta^*, f, \alpha) = U(\Delta_1, f, \alpha) + U(\Delta_2, f, \alpha)$$
و از آنجا که $f \in R(\alpha)$ روی $[a, c]$، $[c, b]$ و $[a, b]$، با گرفتن اینفیمم از معادله بالا روی همهٔ افرازها، بدست می‌آوریم
$$\int_a^b f d\alpha \geq \int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha.$$
با قرار دادن $(-f)$ به‌جای f نامساوی عکس را بدست می‌آوریم و لذا
$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha. \blacksquare$$

۷ قضیه (اولین قضیهٔ مقدار میانگین از حساب انتگرال). فرض کنیم f روی $[a, b]$ پیوسته و α روی $[a, b]$ بطور یکنوا صعودی باشد. آن‌گاه نقطهٔ $c \in [a, b]$ چنان موجود است که
$$\int_a^b f d\alpha = f(c)[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

برهان. از آنجا که f پیوسته و α یکنواست، $f \in R(\alpha)$. چون f روی مجموعهٔ فشردهٔ $[a, b]$ پیوسته است کراندار می‌باشد. فرض کنیم m و M به ترتیب اینفیمم و سوپریمم f روی $[a, b]$ باشند. آن‌گاه
$$m[\alpha(b) - \alpha(a)] \leq \int_a^b f d\alpha \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

لذا عدد $\mu \in [m, M]$ چنان موجود است که

$$\int_a^b f d\alpha = \mu[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

از آنجا که f پیوسته است لذا هر مقدار مفروض بین m و M را می‌گیرد. بنابراین نقطه $c \in [a, b]$ چنان موجود است که $f(c) = \mu$. در نتیجه

$$\int_a^b f d\alpha = f(c)[\alpha(b) - \alpha(a)]$$

و این برهان را کامل می‌کند. ■

۸ نتیجه. هرگاه f روی $[a, b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه نقطهٔ $c \in [a, b]$ چنان موجود است که

$$\int_a^b f dx = f(c)(b - a).$$

۴. انتگرال و مشتق

۱ قضیه. فرض کنیم f روی $[a, b]$ ریمان انتگرال‌پذیر باشد و

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad ; x \in [a, b]$$

آن‌گاه F روی $[a, b]$ پیوسته است. علاوه براین، هرگاه f در نقطهٔ $x \in [a, b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه F در x مشتق‌پذیر است و

$$F'(x) = f(x).$$

برهان. از آنجا که f انتگرال‌پذیر است، کراندار می‌باشد بنابراین ثابت $M > 0$ چنان موجود است که

$$|f(x)| \leq M \quad , \quad \forall x \in [a, b].$$

نقاط $x_۱$ و $x_۲$ را در $[a,b]$ چنان بگیرید که $a \leq x_۱ < x_۲ \leq b$. آن‌گاه

$$\begin{aligned} |F(x_۲) - F(x_۱)| &= \left|\int_{x_۱}^{x_۲} f(t)dt\right| \\ &\leq \int_{x_۱}^{x_۲} |f(t)|dt \\ &\leq M(x_۲ - x_۱). \end{aligned}$$

فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ انتخاب کنید. آن‌گاه

$$|x_۲ - x_۱| < \delta \Longrightarrow |F(x_۲) - F(x_۱)| < \varepsilon.$$

بنابراین F روی $[a,b]$ پیوسته است.

حال فرض کنیم f در $x \in [a,b]$ پیوسته باشد. آن‌گاه برای $\varepsilon > ۰$ داده شده $\delta > ۰$ چنان موجود است که

$$\forall y \in [a,b]\ ;\ |y - x| < \delta \Longrightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

$۰ < h < \delta$ اختیار کنید. آن‌گاه

$$\begin{aligned} \left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| &= \left|\frac{۱}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)dt - f(x)\right| \\ &= \left|\frac{۱}{h}\int_{x}^{x+h} [f(t) - f(x)]dt\right| \\ &\leq \frac{۱}{h}\int_{x}^{x+h} |f(t) - f(x)|dt \\ &< \frac{۱}{h}.\varepsilon.h = \varepsilon. \end{aligned}$$

بنابراین $F'(x) = f(x)$ و این برهان را کامل می‌کند. ■

۲ قضیه (قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل). فرض کنیم f روی $[a,b]$ ریمان انتگرال‌پذیر باشد و تابع مشتق‌پذیر F چنان موجود باشد که روی $[a,b]$، $F' = f$. آن‌گاه

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. از آنجا که f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است، افراز Δ از $[a,b]$ چنان موجود است که $U(\Delta,f) - L(\Delta,f) < \varepsilon$. فرض کنیم افراز Δ بصورت زیر باشد

$$\Delta = \{a = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n = b\}; x_0 < x_1 < \cdots < x_n.$$

F مشتق‌پذیر است و لذا بنابه قضیهٔ مقدار میانگین لاگرانژ نقاط $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ چنان موجودند که برای هر $i = 1, 2, \cdots, n$

$$\begin{aligned} F(x_i) - F(x_{i-1}) &= F'(t_i)\Delta x_i \\ &= f(t_i)\Delta x_i. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n}[F(x_i) - F(x_{i-1})] \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

حال با به‌کاربردن قضیهٔ ۳ بخش ۳ خواهیم داشت

$$\left| \int_a^b f(x)dx - [F(b) - F(a)] \right| < \varepsilon.$$

از آنجا که $\varepsilon > 0$ دلخواه است، این نتیجه را ثابت می‌کند. ■

۳ قضیه (انتگرال‌گیری جزء به جزء). هرگاه u و v توابعی مشتق‌پذیر در $[a,b]$ باشند، آن‌گاه

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du.$$

برهان. می‌دانیم که
$$(uv)' = u'v + uv'$$
که در آن u' مشتق u می‌باشد. بنابراین
$$\int_a^b (uv)'dx = \int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx$$
یا
$$uv|_a^b = \int_a^b vdu + \int_a^b udv$$
و در نتیجه
$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu. \blacksquare$$

۴ قضیه(تغییر متغیر). فرض کنیم f تابع ریمان انتگرال‌پذیر تعریف شده روی $[a, b]$ باشد و فرض کنیم $x = \varphi(t)$ که $t \in [\alpha, \beta]$. هرگاه

(الف) $a = \varphi(\alpha)$ و $b = \varphi(\beta)$،

(ب) $\varphi(t)$ و $\varphi'(t)$ روی $[\alpha, \beta]$ پیوسته باشند،

(ج) $f[\varphi(t)]$ تعریف شده و روی $[\alpha, \beta]$ پیوسته باشد، آن‌گاه
$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

برهان. هرگاه $F(x)$ پادمشتق $f(x)$ باشد، آن‌گاه
$$\int f(x)dx = F(x) + C. \qquad (۱)$$

بنابراین
$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)] + C. \qquad (۲)$$

از (۱) بدست می‌آوریم
$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

از (۲) نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt &= F[\varphi(t)]|_\alpha^\beta \\ &= F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

و این برهان را کامل می‌کند. ■

۵. توابع با تغییر کراندار

۱ تعریف. هرگاه f تابع حقیقی تعریف شده روی $[0, 1]$ باشد، آنگاه f روی $[0, 1]$ *با تغییرکراندار* نامیده می‌شود هرگاه

$$V(f) = \sup \sum_{i=0}^{n} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

متناهی باشد، که سوپریمم روی همهٔ افرازهای $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ گرفته شده است. مجموعهٔ همهٔ توابع با تغییر کراندار روی $[0, 1]$ را با $BV[0, 1]$ نمایش می‌دهیم.

۲ قضیه. یک تابع با تغییر کراندار در هر نقطه دارای حد چپ و راست می‌باشد.

برهان. فرض کنیم f تابعی روی $[0, 1]$ باشد که در نقطهٔ xای در $[0, 1]$ حد چپ ندارد. نشان می‌دهیم که $f \notin BV[0, 1]$.

از آنجا که f در x دارای حد چپ نیست، برای $\varepsilon > 0$ای و برای هر $\delta > 0$، s و s' در $[0, 1]$ چنان موجودند که

$$x - \delta < s < s' < x \quad \text{و} \quad |f(s) - f(s')| \geq \varepsilon.$$

لذا می‌توانیم دنباله‌های $\{s_n\}$ و $\{s'_n\}$ را چنان انتخاب کنیم که

$$0 < s_1 < s'_1 < \cdots < s_n < s'_n < x \quad \text{و} \quad |f(s_n) - f(s'_n)| \geq \varepsilon.$$

حال افراز زیر را در نظر بگیرید

$$x_0 = 0$$

$$x_{2k+1} = s_k \quad ; k = 0, 1, \cdots, N-1$$

$$x_{2k} = s'_k \quad ; k = 1, 2, \cdots, N$$

$$x_{2N+1} = 1.$$

آن‌گاه

$$\sum_{k=0}^{2N} |f(x_{k+1})| \geq \sum_{n=1}^{N} |f(s_n) - f(s'_n)| \geq N\varepsilon,$$

که نتیجه می‌دهد $f \notin BV[0, 1]$. با روشی مشابه می‌توان ثابت کرد که f دارای حد راست نیز می‌باشد. ■

۳ نتیجه. هرگاه $f \in BV[0, 1]$، آن‌گاه تعداد نقاط ناپیوستگی f حداکثر شمارا است.

برهان. ابتدا می‌بینیم که f در $x \in [0, 1]$ پیوسته نیست اگر و تنها اگر $f(x) \neq f(x^+)$ یا $f(x) \neq f(x^-)$. علاوه براین هرگاه x_0، x_1، $\cdots$ ، x_n نقاط متمایزی از $[0, 1]$ باشند، آن‌گاه

$$\sum_{i=0}^{n} |f(x_i) - f(x_i^+)| + \sum_{i=0}^{n} |f(x_i) - f(x_i^-)| \leq ||f||$$

بنابراین برای هر $\varepsilon > 0$ حداکثر تعداد متناهی نقطهٔ x در $[0, 1]$ موجود است که $|f(x) - f(x^+)| + |f(x) - f(x^-)| \geq \varepsilon$. بنابراین مجموعهٔ ناپیوستگی‌های f حداکثر شمارش‌پذیر است. ■

۴ چند خاصیت. (الف) یک تابع یکنوای کراندار، تابعی با تغییر کراندار است.

فرض کنیم f روی $[\circ, ۱]$ بطور یکنوا صعودی باشد. قرار دهید

$$\circ = x_\circ < x_۱ < \cdots < x_n = ۱$$

آن‌گاه

$$\begin{aligned}\sum_{i=\circ}^{n-۱} |f(x_{i+۱}) - f(x_i)| &= \sum_{i=\circ}^{n-۱}\{f(x_{i+۱}) - f(x_i)\} \\ &= f(۱) - f(\circ).\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}V(f) &= \sup \sum_{i=\circ}^{n-۱} |f(x_{i+۱}) - f(x_i)| \\ &= f(۱) - f(\circ).\end{aligned}$$

لذا تابع بطور یکنوا صعودی کراندار، با تغییر کراندار است. در حالتی که تابع بطور یکنوا نزولی و کراندار باشد، با روشی مشابه می‌توان نتیجه را ثابت کرد.

(ب) یک تابع با تغییر کراندار لزوماً کراندار می‌باشد.

فرض کنیم f روی $[\circ, ۱]$ با تغییر کراندار باشد. برای هر $x \in [\circ, ۱]$ افراز $\{\circ, x, ۱\}$ را در نظر بگیرید که متشکل از سه نقطه می‌باشد. حال

$$|f(x) - f(\circ)| + |f(۱) - f(x)| \leq V(f).$$

بنابراین

$$|f(x) - f(\circ)| \leq V(f)$$

و لذا

$$\begin{aligned}|f(x)| &= |f(\circ) + f(x) - f(\circ)| \\ &\leq |f(\circ)| + |f(x) - f(\circ)| \\ &\leq |f(\circ)| + V(f).\end{aligned}$$

در نتیجه f روی $[\circ, ۱]$ با تغییر کراندار است.

(ج) هرگاه f' مشتق تابع f موجود و کراندار باشد، آن‌گاه f با تغییر کراندار است.
فرض کنیم f' روی $[\circ, ۱]$ کراندار باشد. در اینصورت ثابت $K > \circ$ چنان موجود است که

$$|f'(x)| \leq K \qquad , \forall x \in [\circ, ۱].$$

فرض کنیم $\Delta = \{\circ = x_\circ, x_۱, \cdots, x_n = ۱\}$ افرازی دلخواه از $[\circ, ۱]$ باشد. آن‌گاه برای هر $i = \circ, ۱, \cdots, n - ۱$، نقطهٔ $\theta_{i+۱} \in (x_i, x_{i+۱})$ چنان موجود است که

$$f(x_{i+۱}) - f(x_i) = (x_{i+۱} - x_i) f'(\theta_{i+۱})$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\sum_{i=\circ}^{n-۱} |f(x_{i+۱}) - f(x_i)| &= \sum_{i=\circ}^{n-۱} |(x_{i+۱} - x_i) f'(\theta_{i+۱})| \\ &\leq K \sum_{i=\circ}^{n-۱} |x_{i+۱} - x_i| \\ &= K \sum_{i=\circ}^{n-۱} (x_{i+۱} - x_i) = K.\end{aligned}$$

بنابراین $V(f)$ متناهی است و لذا f با تغییر کراندار می‌باشد.

۵ مثالها. (الف) نشان دهید که تابع زیر در $[\circ, ۱]$ با تغییر کراندار است:

$$f(x) = \begin{cases} x^{۲} \sin(\frac{۱}{x}) & ; x \neq \circ \\ \circ & ; x = \circ \end{cases}.$$

برای $x \neq \circ$ داریم

$$f'(x) = ۲x \sin \frac{۱}{x} - \cos \frac{۱}{x}$$

و

$$\begin{aligned} f'(\circ) &= \lim_{x \to \circ} \frac{x^{۲} \sin \frac{۱}{x} - \circ}{x} \\ &= \lim_{x \to \circ} x \sin \frac{۱}{x} = \circ. \end{aligned}$$

همچنین برای هر $x \in [\circ, ۱]$، $|f'(x)| \leq ۳$.

بنابراین f' موجود و در $[\circ, ۱]$ کراندار است. در نتیجه f در $[\circ, ۱]$ با تغییر کراندار است.

(ب) نشان دهید که تابع f تعریف شده با

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{\pi}{x}) & ; \circ < x \leq ۱ \\ \circ & ; x = \circ \end{cases}$$

در $[\circ, ۱]$ با تغییر کراندار نیست.

این تابع در $[\circ, ۱]$ پیوسته است و لذا این مثال نشان می‌دهد که یک تابع پیوسته ممکن است تابعی با تغییر کراندار نباشد. اثبات این مثال را بعنوان تمرین به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

[راهنمایی: افراز زیر را انتخاب کنید

$$\{\circ, \frac{۲}{۲n+۱}, \frac{۲}{۲n-۱}, \cdots, \frac{۲}{۵}, \frac{۲}{۳}, ۱\}.$$

آن‌گاه

$$\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)| = 4[\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n+1}].$$

از آنجا که $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$ واگراست، پس $V(f)=\infty$.]

(ج) ثابت کنید که تابع $f(x)=[x]$ تابعی با تغییر کراندار در $[0,2]$ می‌باشد. این تابع ناپیوسته است و لذا این مثال نشان می‌دهد که یک تابع با تغییر کراندار، لزوماً پیوسته نیست. برهان به عهدهٔ خواننده است.

۶ چند خاصیت. (الف) مجموع دو تابع با تغییر کراندار یک تابع با تغییر کراندار است.

فرض کنیم f و g در $[0,1]$ با تغییر کراندار باشند. آن‌گاه برای هر افراز

$$\{0=x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n=1\}$$

داریم

$$\begin{aligned}&\sum|(f+g)(x_{i+1})-(f+g)(x_i)|\\ =&\sum|f(x_{i+1})+g(x_{i+1})-f(x_i)-g(x_i)|\\ \le&\sum|f(x_{i+1})-f(x_i)|+\sum|g(x_{i+1})-g(x_i)|\\ \le&V(f)+V(g).\end{aligned}$$

لذا $f+g$ در $[0,1]$ با تغییر کراندار می‌باشد.

(ب) ضرب دو تابع با تغییر کراندار، تابعی با تغییر کراندار می‌باشد.

فرض کنیم f و g دو تابع با تغییر کراندار در $[0,1]$ باشند. می‌دانیم که f و g کراندار می‌باشند. بنابراین ثابت K چنان موجود است که برای هر $x\in[0,1]$ ،

$$|f(x)|\le K \qquad \text{و} \qquad |g(x)|\le K.$$

فرض کنیم $\{\circ = x_\circ, x_1, \cdots, x_n = 1\}$ افرازی دلخواه باشد. آن‌گاه

$$\begin{aligned}
&\sum |(fg)(x_{i+1}) - (fg)(x_i)| \\
&= \sum |f(x_{i+1})g(x_{i+1}) - f(x_i)g(x_i)| \\
&= \sum |f(x_{i+1})\{g(x_{i+1}) - g(x_i)\} + g(x_i)\{f(x_{i+1}) - f(x_i)\}| \\
&\leq \sum |f(x_{i+1})||g(x_{i+1}) - g(x_i)| + \sum |g(x_i)||f(x_{i+1}) - f(x_i)| \\
&\leq KV(g) + KV(f).
\end{aligned}$$

بنابراین fg با تغییر کراندار است.

این بخش را با اثبات قضیهٔ خیلی مهم ژوردن به پایان می‌بریم که یک دسته‌بندی از توابع با تغییر کراندار را ارائه می‌دهد.

۷ قضیه ژوردن. یک تابع با تغییر کراندار را می‌توان به صورت تفاضل دو تابع بطور یکنوا صعودی نمایش داد. به بیان دقیقتر، هرگاه f تابعی با تغییر کراندار روی $[\circ, 1]$ باشد آن‌گاه توابع بطور یکنوا صعودی f_1 و f_2 روی $[\circ, 1]$ چنان موجودند که برای $x \in [\circ, 1]$،

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) \tag{1}$$

و

$$V(f) = f_1(x) + f_2(x). \tag{2}$$

برهان. f_1 و f_2 را بصورت زیر تعریف کنید

$$f_1 = \frac{1}{2}[V(f) + f],$$
$$f_2 = \frac{1}{2}[V(f) - f].$$

لذا (۱) و (۲) برقرارند.

کافی است نشان دهیم که $f_۱$ و $f_۲$ بطور یکنوا صعودی‌اند. برای این منظور، فرض کنیم $x_۱ < x_۲$. آن‌گاه

$$\begin{aligned}
&f_۱(x_۲) - f_۱(x_۱) \\
&= \frac{۱}{۲}[V(f(x_۲)) + f(x_۲)] - \frac{۱}{۲}[V(f(x_۱)) + f(x_۱)] \\
&= \frac{۱}{۲}[V(f(x_۲)) - V(f(x_۱))] + \frac{۱}{۲}[f(x_۲) - f(x_۱)] \\
&= \frac{۱}{۲}[V(f) + \{f(x_۲) - f(x_۱)\}].
\end{aligned}$$

از آنجا که $V(f) \geq |f(x_۲) - f(x_۱)|$ بدست می‌آوریم

$$f_۱(x_۲) - f_۱(x_۱) \geq ۰$$

یعنی

$$f_۱(x_۲) \geq f_۱(x_۱)$$

و لذا $f_۱$ بطور یکنوا صعودی است. بطور مشابه می‌توان نشان داد که

$$f_۲(x_۲) \geq f_۲(x_۱)$$

و این برهان قضیه را کامل می‌کند. ■

۸ تبصره. در همهٔ بحثهای بالا می‌توانستیم به جای بازهٔ بستهٔ $[۰, ۱]$ از بازهٔ بستهٔ دلخواه $[a, b]$ استفاده کنیم.

۶. انتگرال‌های ناسره

بحث انتگرال ریمان یک تابع حقیقی کراندار f که روی بازهٔ بسته (کراندار) $[a, b]$ از خط حقیقی $\mathbb{R}$ تعریف شده بود را مطرح کردیم. در این بخش مفهومی از انتگرال تابع f را مطرح می‌کنیم که

(الف) یا بازه به شکل $[a,+\infty)$ یا $(-\infty,b]$ است که $a,b\in\mathbb{R}$، یا
(ب) وقتی x به نقطه‌ای مانند $c\in[a,b]$ میل می‌کند تابع به بی‌نهایت میل کند.
چنین انتگرالهایی، *انتگرال‌های ناسره* نامیده می‌شوند.

۱ تعریف. فرض کنیم f در $[a,+\infty)$ تعریف شده و کراندار باشد که $a\in\mathbb{R}$. در اینصورت انتگرال f روی $[a,+\infty)$ بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\lim_{y\to+\infty}\int_a^y f(x)dx,$$

هرگاه این حد موجود باشد، آن را بصورت زیر نمایش می‌دهیم

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

هرگاه حد بالا موجود باشد، می‌گوئیم که انتگرال ناسرهٔ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *همگرا* است. در غیر اینصورت انتگرال *واگرا* نامیده می‌شود. بطور مشابه هرگاه f روی $(-\infty,b]$ کراندار باشد و هرگاه

$$\lim_{y\to-\infty}\int_y^b f(x)dx$$

موجود باشد، آنگاه می‌گوئیم انتگرال ناسرهٔ

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx$$

همگراست.

هرگاه f روی $\mathbb{R}$ تعریف شده و کراندار باشد، آنگاه انتگرال ناسرهٔ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^a f(x)dx+\int_a^{+\infty} f(x)dx,$$

هرگاه دو انتگرال سمت راست برای $a\in\mathbb{R}$ای همگرا باشند.

انتگرال‌های ناسرهٔ تعریف شده در بالا، یعنی،

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx\ ,\ \int_{-\infty}^b f(x)dx \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

انتگرال‌های ناسرهٔ نوع اول نامیده می‌شوند.

۲ تعریف. فرض کنیم f روی $[a,b]$ تعریف شده باشد، اما وقتی $x \to a$ ، $f(x) \to \infty$. فرض کنیم $h > \circ$ باشد. آن‌گاه انتگرال ناسرهٔ

$$\int_a^b f(x)dx$$

بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\lim_{h\to\circ}\int_{a+h}^b f(x)dx,$$

هرگاه حد فوق موجود باشد؛ در این حالت انتگرال *همگرا* نامیده می‌شود. بطور مشابه هرگاه وقتی $x \to b$، $f(x) \to \infty$، آن‌گاه برای $h > \circ$،

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to\circ}\int_a^{b-h} f(x)dx$$

هرگاه این حد موجود باشد.

هرگاه $f(x) \to \infty$ وقتی $x \to c \in (a,b)$، آن‌گاه همگرایی انتگرال‌های ناسرهٔ زیر را امتحان می‌کنیم

$$\int_a^c f(x)dx \quad \text{و} \quad \int_c^b f(x)dx.$$

هرگاه این انتگرال‌ها همگرا باشند، تعریف می‌کنیم

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

چنین انتگرال‌هایی، *انتگرال‌های ناسرهٔ نوع دوم* نامیده می‌شوند.

دو قضیهٔ زیر را بدون اثبات بیان می‌کنیم که آزمون‌هایی برای همگرایی انتگرال‌های ناسره می‌باشند.

۳ قضیه. فرض کنیم f, g دو تابع حقیقی باشند که روی $[a, \infty)$ تعریف شده و مثبت می‌باشند و فرض کنیم

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell$$

که ℓ عدد حقیقی غیرصفر می‌باشد. آن‌گاه انتگرال‌های

$$\int_a^\infty f(x)dx \quad \text{و} \quad \int_a^\infty g(x)dx$$

یا هر دو همگرا و یا هر دو واگرا می‌باشند.

۴ قضیه. فرض کنیم f, g دو تابع حقیقی باشند که روی $[a+h, b]$، $h > ۰$ ، کراندار و مثبت می‌باشند و a تنها نقطهٔ ناپیوستگی نامتناهی باشد. فرض کنیم

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell,$$

که ℓ عدد حقیقی ناصفر می‌باشد، آن‌گاه انتگرال‌های

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{و} \quad \int_a^b g(x)dx$$

یا هر دو در a همگرا و یا هر دو واگرایند.

حال دو مثال مهم از انتگرال‌های ناسره را مطرح می‌کنیم. یکی از آنها *تابع گاما* و دیگری *تابع بتا* نامیده می‌شود. ابتدا تابع گاما را مطرح می‌کنیم. انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$\int_۰^{+\infty} e^{-x}x^{a-۱}dx$$

که در آن a یک ثابت است. هرگاه $a \geq ۱$، تابع زیر انتگرال در $x = ۰$ پیوسته است و بنابراین انتگرال ناسره از نوع اول می‌باشد. اما هرگاه $a < ۱$، وقتی $x \to ۰$ تابع زیر انتگرال به ∞ میل می‌کند و لذا انتگرال بالا در هر دو حد ناسره است. لذا همگرایی انتگرال‌های

$$\int_۰^۱ e^{-x}x^{a-۱}dx \quad \text{و} \quad \int_۱^\infty e^{-x}x^{a-۱}dx$$

را به ترتیب در ۰ و ∞ در نظر می‌گیریم.

برای همگرایی در ۰ قرار دهید

$$f(x) = e^{-x} x^{a-1} = \frac{e^{-x}}{x^{1-a}}$$

و تعریف کنید

$$F(x) = \frac{1}{x^{1-a}}.$$

حال

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{F(x)} = 1$$

و

$$\int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{1-a}} dx$$

در ۰ همگراست اگر و تنها اگر $a > 0$.

برای همگرایی در ∞، می‌بینیم که برای هر ثابت a

$$e^x > x^{a+1}.$$

بنابراین

$$e^{-x} < x^{-a-1}$$

و لذا

$$e^{-x} x^{a-1} < x^{-a-1} x^{a-1} = \frac{1}{x^2}.$$

در نتیجه

$$\int_1^x e^{-x} x^{a-1} dx$$

از بالا کراندار است و لذا

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} x^{a-1} dx$$

برای هر مقدار از a، در ∞ همگرا می‌باشد. لذا این نتیجه می‌دهد که

$$\int_{\circ}^{+\infty} e^{-x} x^{a-1} dx$$

برای هر $a > \circ$ همگرا است، پس انتگرال اخیر تابعی بر حسب a را تعریف می‌کند. این تابع، *تابع گاما* نامیده شده و بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\Gamma(a) = \int_{\circ}^{+\infty} e^{-x} x^{a-1} dx, \quad (a > \circ).$$

می‌بینیم که

$$\Gamma(1) = \int_{\circ}^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}|_{\circ}^{+\infty} = 1.$$

۵ قضیه. (الف) برای هر $a > \circ$، $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.
(ب) اگر $a = n$ باشد (n یک عدد صحیح است) آنگاه $\Gamma(n) = n!$. این قضیه *فرمول کاهش* $\Gamma(a)$ نامیده می‌شود.

برهان. داریم
(الف)

$$\begin{aligned}\Gamma(a+1) &= \int_{\circ}^{+\infty} e^{-x} x^{a} dx \\ &= -x^a e^{-x}|_{\circ}^{+\infty} + a\int_{\circ}^{+\infty} e^{-x} x^{a-1} dx \\ &= a\int_{\circ}^{+\infty} e^{-x} x^{a-1} dx \\ &= a\Gamma(a).\end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned}\Gamma(n+۱) &= n\Gamma(n) = n(n-۱)\Gamma(n-۱)\\ &= n(n-۱)(n-۲)\Gamma(n-۲)\\ &\vdots\\ &= n(n-۱)\cdots ۱\Gamma(۱)\\ &= n!.\blacksquare\end{aligned}$$

حال انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$\int_۰^۱ x^{m-۱}(۱-x)^{n-۱}dx.$$

می‌بینیم که

(الف) برای $m \geq ۱$، تابع زیر انتگرال در $x=۰$ پیوسته است و برای $m < ۱$، تابع زیر انتگرال وقتی $x \to ۰$، به ∞ میل می‌کند.

(ب) برای $n \geq ۱$، تابع زیر انتگرال در $x=۱$ پیوسته است و برای $n < ۱$، تابع زیر انتگرال، وقتی $x \to ۱$، به ∞ میل می‌کند.

(ج) تابع زیر انتگرال برای هر مقدار از x به غیر از ۰ و ۱ پیوسته است. بنابراین انتگرال برای $m \geq ۱$ و $n \geq ۱$، ناسره است.

حال فرض می‌کنیم که $m < ۱$ یا $n < ۱$ باشد و همگرایی انتگرال‌های

$$\int_۰^{\frac{۱}{۲}} x^{m-۱}(۱-x)^{n-۱}dx \quad و \quad \int_{\frac{۱}{۲}}^۱ x^{m-۱}(۱-x)^{n-۱}dx$$

را به ترتیب در ۰ و ۱ بررسی می‌کنیم.

برای همگرایی در ۰، قرار دهید

$$f(x) = x^{m-۱}(۱-x)^{n-۱} = \frac{(۱-x)^{n-۱}}{x^{۱-m}}$$

و تعریف کنید

$$F(x) = \frac{۱}{(۱-x)^{۱-n}}.$$

حال

$$\lim_{x\to ۰} \frac{f(x)}{F(x)} = ۱.$$

از آنجا که $\int_۰^{\frac{۱}{۲}} F(x)dx$ در ۰ همگراست اگر و فقط اگر $۱ - m < ۱$، یعنی، اگر و فقط اگر $m > ۰$، نتیجه می‌گیریم که

$$\int_۰^{\frac{۱}{۲}} x^{m-۱}(۱-x)^{n-۱}dx$$

در ۰ همگراست اگر و فقط اگر $m > ۰$.

برای همگرایی در ۱ قرار دهید

$$f(x) = x^{m-۱}(۱-x)^{n-۱} = \frac{x^{m-۱}}{(۱-x)^{۱-n}}$$

و تعریف کنید

$$F(x) = \frac{۱}{(۱-x)^{۱-n}}.$$

می‌توان نشان داد که انتگرال

$$\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} x^{m-۱}(۱-x)^{n-۱}dx$$

در ۱ همگراست اگر و تنها اگر $n > ۰$. بنابراین

$$\int_۰^{۱} x^{m-۱}(۱-x)^{n-۱}dx$$

با معنی است هرگاه $m > ۰$ و $n > ۰$ باشد و در این حالت آن را *تابع بتا* می‌نامند و بصورت زیر نمایش می‌دهند

$$\beta(m,n) = \int_۰^{۱} x^{m-۱}(۱-x)^{n-۱}dx, \quad (m > ۰, n > ۰).$$

می‌بینیم که هرگاه در انتگرال بالا $x = \sin^{۲}\theta$ قرار دهیم خواهیم داشت

$$\beta(m,n) = ۲\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^{۲m-۱}\theta.\cos^{۲n-۱}\theta d\theta.$$

رابطهٔ مهمی بین تابع بتا و گاما وجود دارد که بصورت زیر می‌باشد:

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad , \quad (m > \circ, n > \circ).$$

برای اثبات رابطهٔ اخیر، از مفهوم انتگرالهای دوگانه استفاده می‌شود که در این کتاب آن را حذف می‌کنیم. ولی نتیجهٔ زیر را با استفاده از رابطهٔ فوق ثابت می‌کنیم:

$$\Gamma(\frac{۱}{۲}) = \sqrt{\pi}.$$

با انتخاب $m = n = \frac{۱}{۲}$ در رابطهٔ

$$\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \beta(m,n)$$

بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \frac{[\Gamma(\frac{۱}{۲})]^{۲}}{\Gamma(۱)} &= \beta(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}) \\ &= ۲\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \cos^{\circ}\theta \sin^{\circ}\theta d\theta \\ &= \pi. \end{aligned}$$

اما $\Gamma(۱) = ۱$. بنابراین $\Gamma(\frac{۱}{۲}) = \sqrt{\pi}$.

تمرینات

۱. در هرکدام از حالتهای زیر، مثالی از توابع $f(x)$ و $\alpha(x)$ را چنان بیاورید که
(الف) $f(x)$ ریمان انتگرال پذیر باشد ولی نسبت به α ریمان‌ـاشتلیس انتگرال‌پذیر نباشد.

(ب) $f(x)$ ریمان انتگرال‌پذیر نباشد ولی $|f(x)|$ ریمان انتگرال‌پذیر باشد.

۲. (الف) مثالی از یک تابع ناپیوسته بیاورید که نسبت به یک αی مناسب، ریمان-اشتلیس انتگرال‌پذیر باشد.

(ب) مثالی از یک تابع ناپیوسته بیاورید که ریمان انتگرال‌پذیر نباشد.

۳. هر کدام از انتگرال‌های ریمان زیر را بصورت حد یک مجموع محاسبه کنید و نشان دهید که

(الف) $\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln\frac{b}{a}$، که $0 < a < b$.

(ب) $\int_a^b \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}(b^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}})$.

۴. نشان دهید که

$$\int_0^3 xd([|x|] - x) = \frac{3}{2}.$$

۵. تابع f را روی $[0, 1]$ بصورت زیر تعریف کنید

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \quad \text{یا} \quad x = 0 \\ \frac{1}{n} & ; x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \quad \text{و} \quad (m, n) = 1 \end{cases}.$$

نشان دهید که f ریمان انتگرال‌پذیر است و $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

۶. هرگاه $\inf\limits_{x\in[a,b]}|f(x)| > 0$ و $f \in R(\alpha)$ روی $[a, b]$، آن گاه نشان دهید که $\frac{1}{f} \in R(\alpha)$ روی $[a, b]$.

۷. فرض کنید α صعودی و مشتق‌پذیر باشد و α' روی $[a, b]$ ریمان انتگرال‌پذیر باشد و فرض کنید f تابع حقیقی کراندار بر $[a, b]$ باشد. در اینصورت نشان دهید که $f \in R(\alpha)$ اگر و تنها اگر $f\alpha'$ ریمان انتگرال‌پذیر باشد. در این حالت

$$\int_a^b fd\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx.$$

۸. با یک مثال نشان دهید که هرگاه $|f|$ ریمان انتگرال‌پذیر باشد، لزوماً f انتگرال‌پذیر نمی‌باشد.

[راهنمایی: $f(x)=\begin{cases}1 & ;x\in\mathbb{Q}\\ -1 & ;x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$ یا $f(x)=\begin{cases}x & ;x\in\mathbb{Q}\\ -x & ;x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$.]

۹. نشان دهید که f تعریف شده با

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^n} & ;\frac{1}{2^{n+1}}<x\leq\frac{1}{2^n}, n=0,1,2,\cdots\\ 0 & ;x=0\end{cases}$$

در $[0,1]$ ریمان انتگرال‌پذیر است اگرچه دارای تعداد نامتناهی نقطهٔ ناپیوستگی می‌باشد.
[راهنمایی: f کراندار و بطور یکنوا صعودی است و لذا انتگرال‌پذیر است.]

۱۰. هرگاه توابع f و g روی $[a,b]$ ریمان انتگرال‌پذیر باشند، آن‌گاه نشان دهید که

$$\max_{x\in[a,b]}\{f(x),g(x)\}$$

و

$$\min_{x\in[a,b]}\{f(x),g(x)\}$$

نیز روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیرند.

۱۱. ثابت کنید که هرگاه روی $[a,b]$، $f(x)\geq 0$، آن‌گاه $\int_a^b f d\alpha=0$ ایجاب می‌کند که یا $a=b$ یا روی $[a,b]$، $f(x)=0$.

۱۲. هرگاه f ریمان انتگرال‌پذیر باشد و روی $[a,b]$، $f(x)=g(x)$، بجز برای یک مجموعهٔ شمارا از نقاط، آن‌گاه

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx.$$

۱۳. فرض کنیم q,p اعداد حقیقی مثبتی باشند بطوری که

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

احکام زیر را ثابت کنید:

(الف) هرگاه $u \geq ۰$ و $v \geq ۰$، آن‌گاه

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$

تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $u^p = v^q$.

(ب) هرگاه $f \in R(\alpha)$ و $g \in R(\alpha)$، $f \geq ۰$، $g \geq ۰$، و

$$\int_a^b f^p d\alpha = ۱ = \int_a^b g^q d\alpha,$$

آن‌گاه

$$\int_a^b fg d\alpha \leq ۱.$$

(ج) هرگاه f و g توابع مختلطی در $R(\alpha)$ باشند، آن‌گاه

$$\left| \int_a^b fg d\alpha \right| \leq \{\int_a^b |f|^p d\alpha\}^{\frac{۱}{p}} \{\int_a^b |g|^q d\alpha\}^{\frac{۱}{q}}.$$

این را *نامساوی هولدر* می‌نامند. معمولاً وقتی $p = q = ۲$، آن را *نامساوی کشی‌ـشوارتز* می‌خوانند.

۱۴. فرض کنیم $f : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ اکیداً صعودی، پیوسته و برو باشد. ثابت کنید

$$\int_a^b f(x)dx + \int_\alpha^\beta f^{-۱}(t)dt = b\beta - a\alpha.$$

۱۵. فرض کنیم f تابعی انتگرال‌پذیر روی $[a, b]$ باشد که برای هر $x, y \in [a, b]$،

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

ثابت کنید cای وجود دارد که $f(x) = cx$.

۱۶. انتگرال‌های ریمان‌ـاشتلیس زیر را حساب کنید

(الف) $\int_{-۲}^{۲} xd(|x| + [x])$،

ب) $\int_{\circ}^{1} d(x^{2}+\sin x)$،

ج) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x d(|\sin x|)$.

۱۷. هرگاه f روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد و در نقطهٔ $x \in [a,b]$ پیوسته باشد نشان دهید که

$$\lim_{h\to\circ} \frac{1}{h}\int_{\circ}^{h} |f(x+t)-f(x)|dt = \circ$$

۱۸. فرض کنید f یک تابع حقیقی و به طور پیوسته مشتق‌پذیر بر $[a,b]$ باشد، $f(a)=f(b)=\circ$،

$$\int_a^b f^{2}(x)dx = 1.$$

ثابت کنید

$$\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\frac{1}{2}$$

و

$$\int_a^b [f'(x)]^{2}dx . \int_a^b x^{2}f^{2}(x)dx > \frac{1}{4}.$$

۱۹. به‌ازای $1 < s < +\infty$، تعریف کنید

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

(این تابع *زتای ریمان* است که در بررسی توزیع اعداد اول اهمیت زیادی دارد.)

ثابت کنید:

الف) $\zeta(s) = s\int_1^{+\infty} \frac{[x]}{x^{s+1}}dx$،

ب) $\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^{+\infty} \frac{x-[x]}{x^{s+1}}dx$

۲۰. فرض کنیم f روی $[a,b]$ پیوسته و غیر منفی و $c > \circ$ باشد. هرگاه برای هر $x \in [a,b]$ داشته باشیم

$$f(x) \le c\int_a^x f(t)dt$$

ثابت کنید که f روی $[a,b]$، تابع ثابت صفر است.

۷

دنباله‌ها و سری‌های توابع

۱. همگرایی یکنواخت

تعریف. فرض کنیم X مجموعه‌ای دلخواه و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی باشد که هر یک روی X تعریف شده‌اند. آن‌گاه برای هر $x \in X$، $\{f_n(x)\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی خواهد بود.

دنبالهٔ $\{f_n\}$ از توابع *همگرایی نقطه‌ای* به تابع f نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x \in X$، دنبالهٔ $\{f_n(x)\}$ به $f(x)$ همگرا باشد؛ یعنی اینکه، برای هر $x \in X$،

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

در این حالت می‌نویسیم

$$f_n \xrightarrow{p} f.$$

بطور مشابه، هرگاه برای هر $x \in X$، $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ به $f(x)$ همگرا باشد، آن‌گاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *همگرای نقطه‌ای* به تابع f نامیده می‌شود و آن را بصورت زیر نمایش می‌دهند

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x), \quad (x \in X).$$

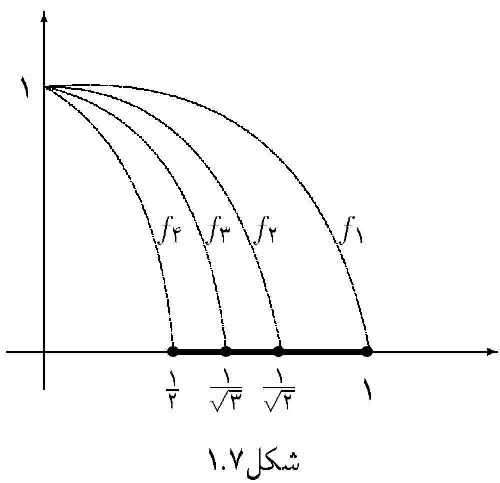
در اینجا چند سئوال به طور طبیعی قابل طرح می‌باشد . برای مثال، آیا حد یک دنبالهٔ همگرای نقطه‌ای از ـ
(الف) توابع پیوسته، پیوسته است؟
(ب) توابع مشتق زیر، مشتق‌پذیر است؟
(ج) توابع انتگرال‌پذیر، انتگرال‌پذیر است؟

جواب این سئوالات در حالت کلی منفی است، که برای روشن شدن مطلب به مثال‌های زیر توجه کنید.

۲ مثالها. (الف) دنبالهٔ $\{f_n\}$ که

$$f_n(x) = \begin{cases} ۱ - nx^۲ & ; x \in [۰, \frac{۱}{\sqrt{n}}] \\ ۰ & ; x \in [\frac{۱}{\sqrt{n}}, ۱] \end{cases}$$

همگراست. هر جمله از دنباله پیوسته است، اما تابع حد این چنین نیست.



شکل۱.۷

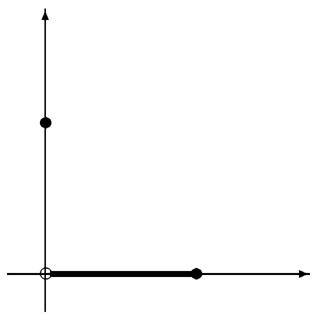
هرگاه $f(x)$ حد این دنباله باشد، آن‌گاه

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = ۰ \quad ,(x \neq ۰).$$

اما برای هر n، $f_n(۰) = ۱$. از طرفی $f(۰) = ۰$ و لذا

$$\lim_{x\to ۰} \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to ۰} f_n(x).$$

$f(x)$ بوضوح در $x = ۰$ ناپیوسته است.



شکل۲.۷

(ب) برای دنبالهٔ $\{f_n\}$ که

$$f_n(x) = nx(۱ - x^۲)^n, x \in [۰, ۱], n \in \mathbb{N},$$

حد انتگرال‌ها برابر انتگرال حد نیست.

برای $۰ < x \leq ۱$،

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = ۰.$$

در $x = ۰$، برای هر n، $f_n(۰) = ۰$. بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} f_n(۰) = ۰.$$

لذا تابع حد

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = ۰ \quad , x \in [۰, ۱].$$

در نتیجه

$$\int_۰^۱ f(x)dx = ۰.$$

اما

$$\int_۰^۱ f_n(x)dx = \int_۰^۱ nx(۱ - x^۲)^n dx = \frac{n}{۲n + ۲} = \frac{۱}{۲ + \frac{۲}{n}}$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} \int_۰^۱ f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{۲ + \frac{۲}{n}} = \frac{۱}{۲},$$

و لذا

$$\lim_{n\to\infty} \int_۰^۱ f_n(x)dx \neq \int_۰^۱ f(x)dx$$

(ج) دنبالهٔ $\{f_n\}$ را بصورت زیر در نظر بگیرید

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}, x \in \mathbb{R}.$$

برای این دنباله، حد مشتق با مشتقِ حد برابر نیست. زیرا برای $x \in \mathbb{R}$ داریم

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = ۰.$$

در نتیجه $f'(x) = ۰$ و لذا $f'(۰) = ۰$. اما

$$f'_n(x) = \sqrt{n} \cos nx.$$

بنابراین

$$f'_n(۰) = \sqrt{n} \to \infty, \text{ وقتی } \; n \to \infty.$$

در نتیجه در $x = ۰$، دنبالهٔ $\{f'_n(x)\}$ واگراست در حالی که مشتق حد $\{f_n(x)\}$، ۰ است.

(د) سری $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ که $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ و برای $x \in [0, 1]$ به تابع $f(x)$ همگرا است، هر جملهٔ $f_n(x)$ از سری پیوسته است اما $f(x)$ در $x = 1$ ناپیوسته است. در اینجا برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$\lim_{x \to 1} f_n(x) = 0.$$

همچنین

$$f(x) = \begin{cases} x & ; x \neq 1 \\ 0 & ; x = 1 \end{cases}$$

بنابراین f ناپیوسته است.
مثالهای بالا سبب تعریف نوع جدیدی از همگرایی برای دنباله‌های توابع می‌شود، که به طور طبیعی باید قویتر از همگرای نقطه‌ای باشد و خواص مهمی از توابع را حفظ کند، از جمله پیوستگی و .... این نوع همگرایی، *همگرایی یکنواخت* نامیده می‌شود و به شکل زیر تعریف می‌شود.

۳ تعریف. دنباله $\{f_n\}$ از توابع حقیقی، که هر کدام روی یک مجموعهٔ X تعریف شده‌اند، روی X *بطور یکنواخت* به تابع f همگراست هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، $n_0 \in \mathbb{N}$ چنان موجود باشد که

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad n \geq n_0, x \in X. \tag{1}$$

در این حالت می‌نویسیم $f_n \xrightarrow{u} f$.

۴ تبصره. هرگاه $\{f_n\}$ روی X به f همگرای نقطه‌ای باشد، آن‌گاه برای هر $\varepsilon > 0$، و برای هر $x \in X$، $n_0 \in \mathbb{N}$، وابسته به ε و x، چنان موجود است که برای $n \geq n_0$، (۱) برقرار می‌باشد. برای $x \in X$ متفاوت، n_0 متفاوتی بدست می‌آوریم که (۱) برقرار است و این امکان‌پذیر نیست که یک n_0 انتخاب کنیم که (۱) برای هر $x \in X$ برقرار باشد. اما

اگر $\{f_n\}$ روی X به f همگرای یکنواخت باشد، آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$، n_0ای فقط وابسته به ε چنان موجود است که برای هر $x \in X$، (۱) برقرار می‌باشد.

بنابراین هر دنبالهٔ بطور یکنواخت همگرا از توابع، بوضوح همگرای نقطه‌ای است. اما عکس این مطلب همیشه درست نیست و این در مثالهای بعدی توضیح داده خواهد شد. ابتدا، قبل از ارائه مثال‌ها، یک دسته‌بندی از توابع بطور یکنواخت همگرا را ارائه می‌دهیم.

۵ قضیه (محک‌کشی). دنبالهٔ $\{f_n\}$ از توابع حقیقی تعریف شده روی مجموعهٔ X، بطور یکنواخت همگراست اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon > 0$، $n_0 \in \mathbb{N}$ (فقط وابسته به ε) چنان موجود باشد که

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad , \forall n, m \geq n_0, \forall x \in X.$$

برهان. فرض کنیم $\{f_n\}$ روی X بطور یکنواخت به تابع f همگرا باشد. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. آنگاه $n_0 \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0, \forall x \in X.$$

فرض کنیم $n, m \geq n_0$ و $x \in X$ باشد. آنگاه

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

برعکس؛ فرض کنیم شرط داده شده برقرار باشد. بنابراین برای هر $x \in X$، $\{f_n(x)\}$ دنباله‌ای کشی در $\mathbb{R}$ است. از آنجا که $\mathbb{R}$ کامل است، در نتیجه برای هر $x \in X$، $\{f_n(x)\}$ به مقداری مانند $f(x)$ همگراست و لذا $\{f_n\}$ به f همگرای نقطه‌ای است. فقط کافی است نشان دهیم که همگرایی، یکنواخت است.

برای این منظور، فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. آنگاه بنابه فرض $n_0 \in \mathbb{N}$ (فقط وابسته به ε) چنان موجود است که

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0, \forall x \in X.$$

فرض کنیم n ثابت باشد و $m \to \infty$. در اینصورت خواهیم داشت

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0, \forall x \in X.$$

و این برهان را کامل می‌کند. ■

۶ قضیه. سری $\sum f_n$ از توابع حقیقی، که هر یک روی مجموعهٔ X تعریف شده‌اند، روی X بطور یکنواخت همگراست اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon > 0$، $n_0 \in \mathbb{N}$ (فقط وابسته به ε) چنان موجود است

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+m}(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0, \forall m \geq 1, \forall x \in X$$

برهان. بعنوان تمرین. ■

۷ مثالها. (الف) نشان دهید که دنبالهٔ $\{f_n\}$ تعریف شده با

$$f_n(x) = \tan^{-1} nx \ , \ x \geq 0$$

در هر بازهٔ $[a, b]$، $a > 0$، بطور یکنواخت همگراست و در $[0, b]$ همگرای یکنواخت نیست (اما همگرای نقطه‌ای می‌باشد).

در این حالت حد نقطه‌ای f از $\{f_n\}$ بصورت زیر می‌باشد

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}.$$

فرض کنیم $\circ < \varepsilon$ داده شده باشد. آن‌گاه برای $x > \circ$،

$$|f_n(x) - f(x)| = |\tan^{-۱} nx - \frac{\pi}{۲}| < \varepsilon$$

هرگاه $\cot^{-۱} nx < \varepsilon$؛ یعنی، $n > \cot\frac{\varepsilon}{x}$.
حال $\cot\frac{\varepsilon}{x}$ با x نزول می‌کند و مقدار ماکزیمم آن $\cot\frac{\varepsilon}{a}$ است.
عدد صحیح $n_\circ$ را چنان انتخاب کنید که $n_\circ \geq \cot\frac{\varepsilon}{a}$. آن‌گاه برای هر $x \in [a, b]$،

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\circ.$$

بنابراین، $\{f_n\}$ در $[a, b]$ همگرای یکنواخت است. اما وقتی $x \to \circ$، $\cot\frac{\varepsilon}{x} \to \infty$
لذا در این حالت هیچ $n_\circ$ای وجود ندارد که

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\circ.$$

در نتیجه دنباله در $[\circ, b]$ همگرای یکنواخت نیست.
(ب) دنبالهٔ $\{f_n\}$ تعریف شده با

$$f_n(x) = \frac{nx}{۱ + n^۲x^۲}$$

در هیچ بازهٔ $[a, b]$ حاوی $\circ$ همگرای یکنواخت نیست (اما همگرای نقطه‌ای می‌باشد).
دنباله همگرای نقطه‌ای به f است که

$$f(x) = \circ \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

هرگاه $\{f_n\}$ در هر بازهٔ $[a, b]$ همگرای یکنواخت باشد، آن‌گاه برای $\circ < \varepsilon$ داده شده،
عدد صحیح $n_\circ$ چنان موجود است که برای هر $x \in [a, b]$ ،

$$\left|\frac{nx}{۱ + n^۲x^۲}\right| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\circ.$$

$\frac{۱}{۲} > \varepsilon$ انتخاب کنید. عدد صحیح $m > n_۰$ را چنان انتخاب کنید که $\frac{۱}{m} \in [a,b]$.
هرگاه $n = m$ و $x = \frac{۱}{m}$ انتخاب کنیم آنگاه

$$\frac{nx}{۱+n^۲x^۲} = \frac{۱}{۲} > \varepsilon.$$

بنابراین دنباله در بازه‌ای که حاوی $\frac{۱}{m}$ است همگرای یکنواخت نیست. اما $\frac{۱}{m} \to ۰$ وقتی $m \to \infty$ و لذا $\{f_n\}$ در بازهٔ حاوی ۰ همگرای یکنواخت نیست.
(ج) سری $\sum f_n$ که

$$S_n(x) = f_۱(x) + f_۲(x) + \cdots + f_n(x) = nxe^{-nx^۲}$$

روی هر بازهٔ $[۰,k]$، $k > ۰$، همگرای نقطه‌ای هست ولی یکنواخت نیست.
سری همگرای نقطه‌ای است و جمع نقطه‌ای بصورت زیر می‌باشد

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = ۰ \quad \forall x \geq ۰.$$

هرگاه سری روی $[۰,k]$ همگرای یکنواخت باشد، آنگاه برای $\varepsilon > ۰$ داده شده عدد صحیح $n_۰$ چنان موجود است که برای هر $x \geq ۰$

$$|S_n(x) - S(x)| = nxe^{-nx^۲} < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_۰.$$

فرض کنیم $n_۱$ عدد صحیحی بزرگتر از $n_۰$ و $e^۲\varepsilon^۲$ باشد. آنگاه برای $x = \frac{۱}{\sqrt{n_۱}}$ و $n = n_۱$ داریم

$$\frac{\sqrt{n_۱}}{e} < \varepsilon \Longrightarrow n_۱ < e^۲\varepsilon^۲$$

و این یک تناقض است.

۸ قضیه. فرض کنیم $\{f_n\}$ دنبالهٔ همگرای نقطه‌ای از توابع حقیقی باشد که روی مجموعهٔ X تعریف شده‌اند و

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in X,$$

و قرار دهید

$$M_n = \sup_{x\in X}|f_n(x) - f(x)|.$$

آن‌گاه $f \xrightarrow{u} f_n$ روی X اگر و تنها اگر $M_n \to 0$ وقتی $n \to \infty$.

برهان. فرض کنیم f_n روی X به f همگرای یکنواخت باشد. بنابراین برای $\varepsilon > 0$ داده شده، $n_0 \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq n_0, \forall x \in X.$$

در نتیجه

$$M_n = \sup_{x\in X}|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0,$$

و لذا $M_n \to 0$ وقتی $n \to \infty$.

برعکس؛ فرض کنیم $M_n \to 0$ وقتی $n \to \infty$. آن‌گاه برای $\varepsilon > 0$ داده شده، $n_0 \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که

$$M_n = \sup_{x\in X}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

بنابراین

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0, \forall x \in X$$

و لذا $\{f_n\}$ به f همگرای یکنواخت است. ■

۲. Mـتست وایراشتراس

۱ قضیه (Mـتست وایراشتراس). سری $\sum f_n$ از توابع حقیقی روی X همگرای یکنواخت (و مطلق) است هرگاه سری همگرای $\sum M_n$ از اعداد مثبت چنان موجود باشد که

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad , \quad \forall n\varepsilon\mathbb{N}\ , \ \forall x \in X.$$

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. از آنجا که $\sum M_n$ همگراست، عدد صحیح n_0 چنان موجود است که

$$|M_{n+1} + M_{n+2} + \cdots + M_{n+m}| < \varepsilon, \forall n \geq n_0, \forall m \geq 1.$$

فرض کنیم $x \in X$، $n \geq n_0$ و $m \geq 1$ باشد. آن‌گاه

$$\begin{aligned}
&|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+m}(x)| \\
&\qquad \leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_{n+m}(x)| \\
&\qquad \leq M_{n+1} + M_{n+2} + \cdots + M_{n+m} \\
&\qquad < \varepsilon.
\end{aligned}$$

در نتیجه $\sum f_n$ روی X همگرای یکنواخت و مطلق می‌باشد و این برهان را کامل می‌کند. ∎

۲ مثالها. (الف) نشان دهید که دنبالهٔ $\{f_n\}$ که

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2}, \quad x \geq 0$$

روی $[0, a]$، که $a > 0$، همگرای یکنواخت نیست.

در این حالت، برای هر $x \geq 0$،

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

f_n مقدار ماکزیمم خود را در $x = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ می‌گیرد و این مقدار ماکزیمم برابر $\sqrt{\frac{n}{2e}}$ می‌باشد. اما

$$\begin{aligned}
M_n &= \sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| \\
&= \sup_{x\in[0,a]} nxe^{-nx^2} \\
&= \sqrt{\frac{n}{2e}} \to \infty, \quad \text{وقتی} \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

بنابراین وقتی $\infty \to n$، $M_n \not\to 0$ و لذا $\{f_n\}$ در $[0, a]$ همگرای یکنواخت نیست.

(ب) نشان دهید که دنبالهٔ $\{f_n\}$ که

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$$

در هر بازهٔ حاوی 0 همگرای یکنواخت نیست.

در این حالت

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x.$$

f_n در $x = \frac{1}{n}$ مقدار ماکزیمم خود را می‌گیرد و ماکزیمم مقدار آن برابر $\frac{1}{2}$ است. ولی $0 \to \frac{1}{n}$ وقتی $\infty \to n$. بازهٔ $[a, b]$ را چنان در نظر بگیرید که حاوی 0 باشد. حال

$$\begin{aligned} M_n &= \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \\ &= \sup_{x\in[a,b]} \left|\frac{nx}{1 + n^2x^2}\right| \\ &= \frac{1}{2} \not\to, \quad \text{وقتی} \ \ n \to \infty. \end{aligned}$$

بنابراین $\{f_n\}$ در $[a, b]$ همگرای یکنواخت نیست.

(ج) نشان دهید که $\{f_n\}$ تعریف شده با

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

روی هر بازهٔ بسته همگرای یکنواخت است.

در این حالت

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$f(x)$ دارای مقدار ماکزیمم $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ در $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ می‌باشد. بنابراین

$$\begin{aligned} M_n &= \sup |f_n(x) - f(x)| = \sup \left|\frac{x}{1 + nx^2}\right| \\ &= \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0 \quad \text{وقتی} \ \ n \to \infty. \end{aligned}$$

در نتیجه دنباله همگرای یکنواخت است.

۳. همگرای یکنواخت و پیوستگی

۱ قضیه. هرگاه $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی پیوسته روی $[a,b]$ باشد که به حد f همگرای یکنواخت است آن‌گاه f روی $[a,b]$ پیوسته می‌باشد، یعنی، برای $c \in [a,b]$،

$$\lim_{x\to c}(\lim_{n\to\infty} f_n(x)) = \lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to c} f_n(x)).$$

برهان. از آنجا که $\{f_n\}$ به f همگرای یکنواخت است، برای $\varepsilon > ۰$ داده شده، $n_۰ \in \mathbb{N}$، فقط وابسته به ε، چنان موجود است که

$$|f_{n_۰+۱}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{۳} \quad , \quad \forall x \in [a,b].$$

نقطهٔ $c \in [a,b]$ را به دلخواه انتخاب کنید. از آنجا که برای هر n، f_n در c پیوسته است، لذا $\delta > ۰$ چنان موجود است که برای $x \in (c-\delta, c+\delta)$

$$|f_{n_۰+۱}(x) - f_{n_۰+۱}(c)| < \frac{\varepsilon}{۳}.$$

حال برای $x \in (c-\delta, c+\delta)$ داریم

$$\begin{aligned}|f(x) - f(c)| &\leq |f(x) - f_{n_۰+۱}(x)| + |f_{n_۰+۱}(x) - f_{n_۰+۱}(c)| \\ &\quad + |f_{n_۰+۱}(c) - f(c)| \\ &< \frac{\varepsilon}{۳} + \frac{\varepsilon}{۳} + \frac{\varepsilon}{۳} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

این برهان را کامل می‌کند. ■

عکس این مطلب درست نیست؛ یعنی، ممکن است دنباله‌ای از توابع پیوسته، در عین همگرای یکنواخت نبودن، به تابع پیوسته‌ای همگرا بشود. بعنوان مثال، دنبالهٔ

$$f_n(x) = n^۲ x(۱-x^۲)^n; ۰ \leq x \leq ۱, n \in \mathbb{N},$$

از این نمونه است (برای اثبات آن قضیهٔ ۸ بخش ۱ را به کار ببرید). اما حالتی وجود دارد که در آن می‌توان به عکس قضیهٔ بالا حکم داد.

۲ قضیه (دینی[1]). فرض کنیم K فشرده باشد و

(الف) $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع پیوسته بر K باشد،

(ب) $\{f_n\}$ بطور نقطه‌ای به تابع پیوسته‌ای چون f بر K همگرا باشد،

(ج) به‌ازای هر $x \in K$ و $n \in \mathbb{N}$، $f_n(x) \geq f_{n+۱}(x)$،

در اینصورت، $f_n \xrightarrow{u} f$ بر K.

برهان. قرار دهید $g_n = f_n - f$. پس g_n پیوسته است و $g_n \xrightarrow{p} ۰$ و $g_n \geq g_{n+۱}$. باید ثابت کنیم $g_n \to ۰$ بطور یکنواخت بر K.

فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. قرار دهید

$$K_n = \{x \in K : g_n(x) \geq \varepsilon\}.$$

چون g_n پیوسته است، K_n بسته می‌باشد. از طرفی چون $K_n \subseteq K$ و K فشرده است پس K_n فشرده خواهد بود (قضیهٔ ۹ بخش ۴ فصل ۲) و چون $g_n \geq g_{n+۱}$، داریم $K_n \supset K_{n+۱}$. $x \in K$ را ثابت می‌گیریم. از آنجا که $g_n(x) \to ۰$، می‌بینیم که اگر n بقدر کافی بزرگ باشد، $x \notin K_n$. لذا $x \notin \cap K_n$. بعبارت دیگر $\cap K_n$ تهی است. پس به‌ازای $n_۰$ای، $K_{n_۰}$ تهی خواهد بود (قضیهٔ ۱۰ بخش ۴ فصل ۲). از این نتیجه می‌شود که برای هر $x \in K$ و هر $n \geq n_۰$، $۰ \leq g_n(x) < \varepsilon$. این قضیه را ثابت می‌کند. ■

توجه کنیم که در قضیهٔ فوق، فشردگی واقعاً لازم است. مثلاً، هرگاه

$$f_n(x) = \frac{۱}{nx + ۱} \quad , ۰ < x < ۱ \quad , n = ۱, ۲, ۳, \cdots$$

آن‌گاه $f_n(x) \to ۰$ بطور نقطه‌ای $(۰, ۱)$، اما همگرایی یکنواخت نخواهد بود.

1) Dini

۳ تعریف. فرض کنیم X فضایی متریک و $\mathcal{C}(X)$ مجموعهٔ همهٔ توابع حقیقی و پیوسته و کراندار روی X باشد (توجه کنیم که اگر X فشرده باشد هر تابع پیوسته روی آن کراندار است و شرط کراندار بودن زاید می‌باشد و $\mathcal{C}(X)$ مجموعهٔ همهٔ توابع پیوستهٔ حقیقی روی X است). زیر مجموعهٔ A از $\mathcal{C}(X)$ را یک جبر نامند هرگاه به‌ازای هر $f, g \in A$ و $\lambda \in \mathbb{R}$،

$$\lambda f, f+g, fg \in A.$$

در این حالت A را جبر حقیقی می‌نامند. در صورتی که توابع با مقادیر مختلط و شرط سوم برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ و هر $f \in A$ برقرار باشد، آن‌گاه A یک جبر مختلط می‌باشد.

بنابراین $\mathcal{C}(X)$ یک جبر است و به هر $f \in \mathcal{C}(X)$ به خاطر کراندار بودنش روی X می‌توان سوپریمم نرم زیر را نسبت داد

$$||f|| = \sup_{x \in X}|f(x)| < +\infty.$$

این نرم دارای سه خاصیت مهم زیر می‌باشد:

(الف) $||f+g|| \leq ||f|| + ||g||$،

(ب) $||\lambda f|| = |\lambda| ||f||$،

(ج) $||fg|| \leq ||f|| ||g||$.

بدین ترتیب $\mathcal{C}(X)$ یک فضای نرمدار می‌شود و می‌توان متر d را روی $\mathcal{C}(X)$ به صورت زیر تعریف کرد

$$d(f,g) = ||f-g||, \quad f, g \in \mathcal{C}(X).$$

لذا بنابر قضیهٔ ۸ بخش ۱، دنباله $\{f_n\}$ بر X بطور یکنواخت به f همگراست اگر و فقط اگر $\{||f_n - f||\}$ به صفر همگرا باشد. در نتیجه در فضای متریک $(\mathcal{C}(X), d)$ دنبالهٔ $\{f_n\}$ به f همگراست اگر و فقط اگر $\{f_n\}$ بر X بطور یکنواخت به f همگرا باشد. در این رابطه می‌توان قضیهٔ زیر را مطرح کرد:

۴ قضیه. فضای $\mathcal{C}(X)$ با متر فوق یک فضای متریک کامل است.

برهان. فرض کنیم $\{f_n\}$ یک دنبالهٔ کشی در $\mathcal{C}(X)$ باشد. لذا برای $\varepsilon > ۰$ داده شده، $n_۰ \in \mathbb{N}$ای چنان موجود است که

$$||f_n - f_m|| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_۰.$$

در نتیجه بنابه محک کشی، تابعی مانند f روی X هست که $\{f_n\}$ به‌آن بطور یکنواخت همگراست. بنابر قضیهٔ ۱ همین بخش، f پیوسته می‌باشد. بعلاوه، f کراندار است، زیرا که nای هست که به‌ازای هر $x \in X$، $|f(x) - f_n(x)| < ۱$ و f_n کراندار می‌باشد.
بنابراین $f \in \mathcal{C}(X)$ و چون $f_n \xrightarrow{u} f$ بر X، پس وقتی $n \to \infty$،

$$||f_n - f|| \to ۰. \blacksquare$$

۴. انتگرال‌گیری جمله به جمله

۱ قضیه. هرگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$، f_n ریمان انتگرال‌پذیر باشد و $\{f_n\}$ روی $[a, b]$ بطور یکنواخت به f همگرا باشد، آن‌گاه f روی $[a, b]$ ریمان انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b f dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n dx.$$

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. $\delta > ۰$ را چنان انتخاب کنید که

$$\delta(b - a) < \frac{\varepsilon}{۳}.$$

از آنجا که $f_n \xrightarrow{u} f$ روی $[a, b]$، $n_۰ \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که برای هر $x \in [a, b]$،

$$|f_{n_۰}(x) - f(x)| < \delta.$$

یعنی

$$f_{n_۰}(x) - \delta < f(x) < f_{n_۰}(x) + \delta.$$

از آنجا که $f_{n_\circ}$ ریمان انتگرال‌پذیر است، افراز Δ از $[a,b]$ چنان موجود است که

$$U(\Delta, f_{n_\circ}) - L(\Delta, f_{n_\circ}) < \frac{\varepsilon}{۳}.$$

از آنجا که $f(x) < f_{n_\circ}(x) + \delta$،

$$U(\Delta, f) < U(\Delta, f_{n_\circ}) + \frac{\varepsilon}{۳}$$

و از آنجا که $f(x) > f_{n_\circ}(x) - \delta$، داریم

$$L(\Delta, f) > L(\Delta, f_{n_\circ}) - \frac{\varepsilon}{۳}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} U(\Delta, f) - L(\Delta, f) &< U(\Delta, f_{n_\circ}) - L(\Delta, f_{n_\circ}) + \frac{\varepsilon}{۳} + \frac{\varepsilon}{۳} \\ &< \frac{\varepsilon}{۳} + \frac{\varepsilon}{۳} + \frac{\varepsilon}{۳} = \varepsilon. \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که f ریمان انتگرال‌پذیر است.
حال چون $\{f_n\}$ به f همگرای یکنواخت روی $[a,b]$ می‌باشد، لذا $n_۱ \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که برای $n \geq n_۱$ و $x \in [a,b]$،

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

در نتیجه برای $n \geq n_۱$،

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f dx - \int_a^b f_n dx\right| &= \left|\int_a^b (f - f_n) dx\right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a}.(b-a) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

و این برهان را کامل می‌کند. ■

۲ نتیجه. هرگاه f_n روی $[a,b]$ ریمان انتگرال‌پذیر باشد و هرگاه

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

بطور یکنواخت روی $[a,b]$، آن‌گاه f روی $[a,b]$ ریمان انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b f\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n\,dx.$$

۳ نتیجه. (الف) هرگاه هر $f_n \in R(\alpha)$ و هرگاه $\{f_n\}$ روی $[a,b]$ به f همگرای یکنواخت باشد، آن‌گاه $f \in R(\alpha)$ و

$$\int_a^b f\,d\alpha=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,d\alpha.$$

(ب) هرگاه $f_n \in R(\alpha)$ و

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

بطور یکنواخت روی $[a,b]$، آن‌گاه $f \in R(\alpha)$ و

$$\int_a^b f\,d\alpha=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n\,d\alpha.$$

۵. مشتق‌گیری جمله به جمله

۱ قضیه. هرگاه $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی مشتق‌پذیر روی $[a,b]$ باشد که
(الف) در نقطه‌ای مانند $c \in [a,b]$، $\{f_n(c)\}$ همگراست،
(ب) $\{f'_n\}$ روی $[a,b]$ بطور یکنواخت همگراست.
آن‌گاه $\{f_n\}$ روی $[a,b]$ همگرای یکنواخت است و برای هر $x \in [a,b]$،

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty} f'_n(x).$$

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. از آنجاکه $\{f_n(c)\}$ همگراست و f'_n روی $[a,b]$ همگرای یکنواخت است، $n_۰ \in \mathbb{N}$ چنان موجود می‌باشد که برای $n,m \geq n_۰$،

$$|f_n(c) - f_m(c)| < \frac{\varepsilon}{۲}$$

و

$$|f'_n(x) - f'_m(x)| < \frac{\varepsilon}{۲(b-a)}\ ,\ x \in [a,b].$$

حال می‌توانیم قضیهٔ مقدار میانگین لاگرانژ را برای تابع $f_n - f_m$ در هر بازهٔ $[x,t] \subset [a,b]$ به کار ببریم. بنابراین نقطهٔ $\theta \in (x,t)$ چنان موجود است که

$$\begin{aligned} |[f_n(x) - f_m(x)] - [f_n(t) - f_m(t)]| &= |x-t||f'_n(\theta) - f'_m(\theta)| \\ &< |x-t|\frac{\varepsilon}{۲(b-a)} \\ &< (b-a).\frac{\varepsilon}{۲(b-a)} = \frac{\varepsilon}{۲} \end{aligned} \tag{۲}$$

زیرا که $|x-t| < (b-a)$.

حال برای $x \in [a,b]$ و $n,m \geq n_۰$،

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| \leq& |[f_n(x) - f_m(x)] - [f_n(c) - f_m(c)]| \\ &+ |f_n(c) - f_m(c)| \\ <& \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon. \end{aligned}$$

بنابراین $\{f_n\}$ بطور یکنواخت روی $[a,b]$ همگراست. فرض کنیم

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in [a,b].$$

$x \in [a,b]$ را به دلخواه انتخاب کرده و برای $t \in [a,b]$ با $t \neq x$ قرار دهید

$$F_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t-x}, \quad F(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t-x}. \tag{۳}$$

حال

$$\lim_{t-x} F_n(t) = f'_n(x)$$

و این از (۲) نتیجه می‌دهد که

$$|F_n(t) - F_m(t)| < \frac{\varepsilon}{۲(b-a)}, \quad n, m \geq n_۰.$$

لذا برای $x \neq t$، $\{F_n\}$ همگرای یکنواخت است و از آنجا که $\{f_n\}$ به f همگرای یکنواخت می‌باشد، این از (۳) نتیجه می‌دهد که

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t) = F(t).$$

حال

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{t\to x} F(t) = \lim_{t\to x}(\lim_{n\to\infty} F_n(t)) \\ &= \lim_{n\to\infty}(\lim_{t\to x} F_n(t)) \\ &= \lim_{n\to\infty} f'_n(x) \end{aligned}$$

و این برهان را کامل می‌کند. ■

۲ قضیه. تابعی حقیقی و پیوسته بر خط حقیقی هست که در هیچ نقطه مشتق‌پذیر نیست.

برهان. تعریف می‌کنیم

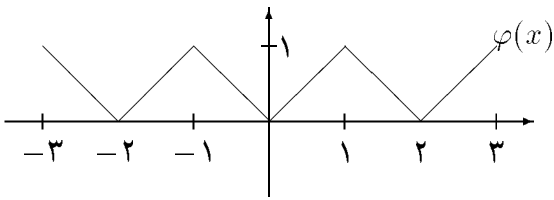
$$\varphi(x) = |x| \qquad (-۱ \leq x \leq ۱)$$

و با قرار دادن

$$\varphi(x + ۲) = \varphi(x),$$

تعریف $\varphi(x)$ را به تمام xهای حقیقی تعمیم می‌دهیم. در اینصورت، به‌ازای هر t, s داریم

$$|\varphi(s) - \varphi(t)| \leq |s - t| \tag{۴}$$



شکل ۳.۷

بویژه، φ بر $\mathbb{R}$ پیوسته است. تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} (\frac{۳}{۴})^n \varphi(۴^n x). \tag{۵}$$

چون $۰ \leq \varphi \leq ۱$، قضیهٔ Mـتست وایراشتراس نشان می‌دهد که سری (۵) بر $\mathbb{R}$ بطور یکنواخت همگراست و بنابه قضیهٔ ۱ بخش ۳، f بر $\mathbb{R}$ پیوسته خواهد بود.

حال عدد حقیقی x و عدد صحیح و مثبت m را ثابت می‌گیریم. قرار می‌دهیم

$$\delta_m = \pm\frac{۱}{۲} \cdot ۴^{-m}$$

که در آن علامت طوری اختیار می‌شود که هیچ عدد صحیحی بین $۴^m x$ و $۴^m(x + \delta_m)$ قرار نگیرد.

این عمل، به این دلیل که $۴^m|\delta_m| = \frac{۱}{۲}$، امکان‌پذیر است. تعریف می‌کنیم

$$\gamma_n = \frac{\varphi(۴^n(x + \delta_m)) - \varphi(۴^n x)}{\delta_m}.$$

وقتی $m > n$، $۴^n\delta_m$ زوج است؛ پس $\gamma_n = ۰$. زمانی که $۰ \leq n \leq m$، (۴) ایجاب می‌کند که $|\gamma_n| \leq ۴^n$.
چون $|\gamma_m| = ۴^m$، نتیجه خواهیم گرفت که

$$\begin{aligned}|\frac{f(x+\delta_m)-f(x)}{\delta_m}| &= |\sum_{n=۰}^{m}(\frac{۳}{۴})^n\gamma_n| \\ &\geq ۳^m - \sum_{n=۰}^{m-۱} ۳^n \\ &= \frac{۱}{۲}(۳^m+۱).\end{aligned}$$

وقتی $m \to \infty$، $\delta_m \to ۰$. پس f در x مشتق‌پذیر نخواهد بود. ■

۶. همپیوستگی

در قضیهٔ ۱۵ بخش ۴ فصل ۳، دیدیم که هر دنبالهٔ حقیقی کراندار دارای زیر دنباله‌ای همگراست، و این سئوال مطرح می‌شود که آیا برای دنباله‌های توابع نیز چیزی شبیه به این درست است یا خیر. برای دقیقتر شدن سئوال، دو نوع کراندار بودن را تعریف می‌کنیم.

۱ تعریف. فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع باشد که بر مجموعهٔ X تعریف شده‌اند. $\{f_n\}$ را بر X *بطور نقطه‌ای کراندار* نامیم هرگاه برای‌هر $x \in X$ ، دنبالهٔ $\{f_n(x)\}$ کراندار باشد؛ یعنی، تابعی با مقادیر متناهی چون ϕ، که بر X تعریف شده، باشد چنان که

$$|f_n(x)| < \phi(x), \quad x \in X, n \in \mathbb{N}.$$

دنبالهٔ $\{f_n\}$ را بر X *بطور یکنواخت کراندار* گوئیم هرگاه عددی مانند M چنان موجود باشد که

$$|f_n(x)| < M, \quad x \in X, n = ۱, ۲, ۳, \cdots .$$

۲ مثال. فرض کنیم

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2+(1-nx)^2}, x \in [0,1], n \in \mathbb{N}.$$

در اینصورت، $|f_n(x)| \le 1$. پس $\{f_n\}$ بر $[0,1]$ بطور یکنواخت کراندار است. همچنین

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad x \in [0,1],$$

ولی

$$f_n(\frac{1}{n}) = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

در نتیجه هیچ زیر دنباله‌ای نمی‌تواند بر $[0,1]$ بطور یکنواخت همگرا شود.

۳ تعریف. فرض کنیم (X,d) فضای متریک و $E \subseteq X$ و $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از توابع حقیقی باشد که روی E تعریف شده‌اند. $\mathcal{F}$ را روی E همپیوسته نامند هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ چنان موجود باشد که برای هر $x,y \in E$ و هر $f \in \mathcal{F}$،

$$d(x,y) < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

توجه کنیم که اگر $\mathcal{F}$ مجموعه‌ای تک عضوی باشد آن‌گاه همپیوستگی $\mathcal{F} = \{f\}$ همان پیوستگی یکنواخت f است. به‌سادگی نتیجه می‌شود که اگر $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ و هر f_i پیوستهٔ یکنواخت باشد، آن‌گاه $\mathcal{F}$ همپیوسته است. همچنین بدیهی است که اگر $\mathcal{F}$ در E همپیوسته باشد، آن‌گاه هر عضو $f \in \mathcal{F}$ در E پیوستهٔ یکنواخت است.

۴ قضیه. هرگاه $\{f_n\}$ یک دنبالهٔ نقطه به نقطه کراندار از توابع حقیقی بر مجموعهٔ شمارش‌پذیر E باشد، آن‌گاه $\{f_n\}$ زیردنباله‌ای مانند $\{f_{n_k}\}$ دارد بطوری که به‌ازای هر $x \in E$، $\{f_{n_k}(x)\}$ همگراست.

برهان. فرض کنیم $E = \{x_۱, x_۲, \cdots\}$ باشد. چون $\{f_n(x_۱)\}$ کراندار است، زیر دنباله‌ای مانند $\{f_{۱,k}\}$ چنان وجود دارد که وقتی $k \to \infty$، $\{f_{۱,k}(x_۱)\}$ همگرا می‌باشد.

حال دنباله $S_۱, S_۲, S_۳, \cdots$ را بصورت زیر در نظر بگیرید،

$$\begin{array}{lllll} S_۱ : & f_{۱,۱} & f_{۱,۲} & f_{۱,۳} & f_{۱,۴} \ \cdots \\ S_۲ : & f_{۲,۱} & f_{۲,۲} & f_{۲,۳} & f_{۲,۴} \ \cdots \\ S_۳ : & f_{۳,۱} & f_{۳,۲} & f_{۳,۳} & f_{۳,۴} \ \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

دنبالهٔ $\{S_n\}$ از خواص زیر برخوردار است:

(الف) به‌ازای $n = ۲, ۳, ۴, \cdots$، S_n زیر دنباله‌ای از $S_{n-۱}$ است،

(ب) وقتی $k \to \infty$، $\{f_{n,k}(x_n)\}$ همگراست (کراندار بودن $\{f_n(x_n)\}$ انتخاب S_n را به این طریق ممکن می‌سازد)،

(ج) ترتیب ظاهر شدن تابعها در هر دنباله یکی است؛ یعنی، اگر در $S_۱$ تابعی پیش از دیگری باشد، این رابطه در هر S_n بینشان هست تا اینکه یکی از آنها حذف شود. در نتیجه، وقتی در آرایهٔ فوق از یک سطر به سطر بعد می‌رویم، ممکن است تابع‌ها به چپ حرکت کنند ولی هرگز به راست نخواهند رفت.

حال در امتداد قطر آرایهٔ فوق، پائین می‌رویم؛ یعنی، دنبالهٔ

$$S : f_{۱,۱} \ f_{۲,۲} \ f_{۳,۳} \ f_{۴,۴} \cdots$$

را در نظر می‌گیریم. بنابه (ج)، دنبالهٔ S (به جز احتمالاً $n - ۱$ جملهٔ اول آن) یک زیر دنبالهٔ S_n به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \cdots$ است. پس (ب) ایجاب خواهد کرد که به‌ازای هر $x_i \in E$، $\{f_{n,n}(x_i)\}$، وقتی $n \to \infty$، همگرا باشد. ■

۵ قضیه انتخاب هلی[۲]. فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع صعودی روی $\mathbb{R}$ باشد به طوری که به‌ازای هر n و هر x داشته باشیم $۰ \leq f_n(x) \leq ۱$. در اینصورت

2) Helly

تابعی مانند f و دنباله‌ای مانند $\{n_k\}$ از اعداد طبیعی هست که $\{f_{n_k}\}$ بر $\mathbb{R}$ نقطه به نقطه به f همگراست.

برهان. بنابر قضیه فوق زیر دنباله‌ای از $\{f_n\}$ مانند $\{f_{n_k}\}$ هست که به ازای هر عدد گویای q دنبالهٔ $\{f_{n_k}(q)\}$ به عددی مانند $g(q)$ همگراست. تابع g را بر $\mathbb{R}$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x) = \sup_{q \leq x} g(q).$$

چون به‌ازای هر n و هر x، $۰ \leq f_n(x) \leq ۱$، پس به‌ازای هر عدد گویای q داریم $۰ \leq g(q) \leq ۱$ و در نتیجه به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $۰ \leq g(x) \leq ۱$. حال نشان می‌دهیم که g تابعی صعودی است. اگر p و q دو عدد گویا باشند بطوری که $p < q$، به‌ازای هر n_k بنابر صعودی بودن f_{n_k} داریم $f_{n_k}(p) \leq f_{n_k}(q)$ و با حدگیری نتیجه می‌شود که $g(p) \leq g(q)$. چنانچه $x, y \in \mathbb{R}$ و $x < y$ آن‌گاه به خاطر آنکه

$$\{q \in \mathbb{Q} : q \leq x\} \subseteq \{r \in \mathbb{Q} : r \leq y\}$$

خواهیم داشت

$$g(x) = \sup_{\substack{p \in \mathbb{Q} \\ p \leq x}} g(p) \leq \sup_{\substack{p \in \mathbb{Q} \\ p \leq y}} g(p) = g(y).$$

در نتیجه g تابعی صعودی است و مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی g مجموعه‌ای شمارا مانند E می‌باشد.

حال نشان می‌دهیم که $\{f_{n_k}\}$ در هر نقطهٔ پیوستگی g همگراست. فرض کنید $x_۰$ نقطهٔ دلخواهی در $\mathbb{R}$ باشد که g در آن پیوسته است. اگر $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد، آن‌گاه $\delta > ۰$ای هست که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ چنانچه $|x - x_۰| < \delta$ داریم

$$|g(x) - g(x_۰)| < \frac{\varepsilon}{۲}.$$

اما بنابر چگال بودن اعداد گویا در $\mathbb{R}$، دو عدد گویا مانند r و s هست که

$$x_\circ - \delta < r < x_\circ < s < x_\circ + \delta.$$

چون $\{f_{n_k}(r)\}$ و $\{f_{n_k}(s)\}$ به‌ترتیب به $g(r)$ و $g(s)$ همگرایند، عددی مانند $n_\circ$ هست که به‌ازای هر $k \geq n_\circ$ داریم

$$|f_{n_k}(s) - g(s)| < \frac{\varepsilon}{۲} \quad \text{و} \quad |f_{n_k}(r) - g(r)| < \frac{\varepsilon}{۲}.$$

لذا به‌ازای هر $k \geq n_\circ$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} g(x_\circ) - ۲\frac{\varepsilon}{۲} < g(r) - \frac{\varepsilon}{۲} < f_{k_k}(r) \leq f_{n_k}(x_\circ) \\ \leq f_{n_k}(s) < g(s) + \frac{\varepsilon}{۲} < g(x_\circ) + \varepsilon, \end{aligned}$$

زیرا که $|r - x_\circ| < \delta$ و $|s - x_\circ| < \delta$ و در نتیجه $|g(r) - g(x_\circ)| < \frac{\varepsilon}{۲}$ و $|g(s) - g(x_\circ)| < \frac{\varepsilon}{۲}$. در نتیجه برای هر $k \geq n_\circ$ داریم $|f_{n_k}(x_\circ) - g(x_\circ)| < \varepsilon$.
تا اینجا ثابت شد که $\{f_{n_k}\}$ در همهٔ نقاط پیوستگی g همگراست و چون E، مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی g، شماراست، بنابر قضیهٔ فوق زیر دنباله‌ای از آن مانند $\{f_{n_{۱},k}\}$ هست که در هر نقطهٔ E همگراست. در نتیجه $\{f_{n_{۱},k}\}$ زیر دنباله‌ای از $\{f_n\}$ است که در هر نقطهٔ $\mathbb{R}$ همگراست و کافی است f را تابع حد $\{f_{n_{۱},k}\}$ بگیریم؛ یعنی،

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_{۱},k}(x) \quad (x \in \mathbb{R}).\blacksquare$$

۶ قضیه. هرگاه K یک فضای متریک فشرده بوده، برای $n \in \mathbb{N}$، $f_n \in \mathcal{C}(K)$، و $\{f_n\}$ بر K بطور یکنواخت همگرا باشد، آن‌گاه $\{f_n\}$ بر K همپیوسته خواهد بود.

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > \circ$ داده شده باشد. چون $\{f_n\}$ بطور یکنواخت همگراست، عدد صحیح مثبت $n_\circ$ چنان موجود است که

$$||f_n - f_{n_\circ}|| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_\circ.$$

چون توابع پیوسته بر مجموعه‌های فشرده بطور یکنواخت پیوسته‌اند، δی مثبتی هست بطوری که اگر $n_\circ \geq i \geq ۱$ و $d(x,y) < \delta$،

$$|f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon. \tag{۶}$$

چنانچه $n > n_\circ$ و $d(x,y) < \delta$، نتیجه خواهد شد که

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(y)| &\leq |f_n(x) - f_{n_\circ}(x)| + |f_{n_\circ}(x) - f_{n_\circ}(y)| \\ &\quad + |f_{n_\circ}(y) - f_n(y)| \\ &< ۳\varepsilon. \end{aligned}$$

این، به همراه (۶)، قضیه را ثابت می‌کند. ■

۷ قضیه. هرگاه K فشرده بوده، $f_n \in \mathcal{C}(K)$ به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \cdots$، و $\{f_n\}$ بر K نقطه به نقطه کراندار و همپیوسته باشد، آن‌گاه
(الف) $\{f_n\}$ بر K بطور یکنواخت کراندار است؛
(ب) $\{f_n\}$ شامل زیر دنباله‌ای به طور یکنواخت همگرا می‌باشد.

برهان. (الف) فرض کنیم $\varepsilon > \circ$ داده شده باشد. بنابه همپیوسته بودن $\{f_n\}$، $\delta > \circ$ چنان موجود است که اگر $d(x,y) < \delta$، به‌ازای هر n داریم

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

چون K فشرده است، تعدادی متناهی نقطه مانند $p_۱$، $p_۲$، $\cdots$، p_r در K چنان موجود است که هر $x \in K$ نظیر دست کم یک p_i با خاصیت $d(x, p_i) < \delta$ می‌باشد و چون $\{f_n\}$ نقطه به نقطه کراندار است $M_i < \infty$ ای چنان موجود است که برای هر n

$$|f_n(p_i)| < M_i.$$

قرار دهید $M = \max(M_۱, \cdots, M_r)$، آن‌گاه به‌ازای هر $x \in K$، $|f_n(x)| < M+\varepsilon$.
این (الف) را ثابت می‌کند.

(ب) فرض کنیم E زیر مجموعهٔ چگال شمارش‌پذیری از K باشد (چرا مجموعهٔ E وجود دارد؟). قضیهٔ ۴ نشان می‌دهد که $\{f_n\}$ زیر دنباله‌ای مانند $\{f_{n_i}\}$ دارد چنان که $\{f_{n_i}(x)\}$ به‌ازای هر $x \in E$ همگراست.

برای ساده‌تر شدن نمادگذاری قرار دهید $f_{n_i} = g_i$. ثابت می‌کنیم $\{g_i\}$ بر K بطور یکنواخت همگراست.

فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ و $\delta > ۰$ را همانند برهان قسمت قبل انتخاب کرده باشیم. قرار دهید

$$V(x, \delta) = \{y \in K : d(x, y) < \delta\}.$$

چون E در K چگال و K فشرده است، تعدادی متناهی نقطه مانند $x_۱$، $\cdots$، x_m در E هستند که

$$K \subset V(x_۱, \delta) \cup \cdots \cup V(x_m, \delta), \tag{۷}$$

و چون به‌ازای هر $x \in E$، $\{g_i(x)\}$ همگراست، عدد صحیحی مانند $n_۰$ چنان موجود هست که وقتی $i, j \geq n_۰$ و $۱ \leq s \leq m$، خواهیم داشت

$$|g_i(x_s) - g_j(x_s)| < \varepsilon. \tag{۸}$$

چنانچه $x \in K$، رابطهٔ (۷) نشان می‌دهد که به‌ازای sای، $x \in V(x_s, \delta)$.
پس برای هر i،

$$|g_i(x) - g_i(x_s)| < \varepsilon.$$

هرگاه $i, j \geq n_۰$، از نامساوی (۸) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} |g_i(x) - g_j(x)| &\leq |g_i(x) - g_i(x_s)| + |g_i(x_s) - g_j(x_s)| \\ &\quad + |g_j(x_s) - g_j(x)| \\ &< ۳\varepsilon. \end{aligned}$$

این برهان را کامل می‌کند. ■

۷. سری‌های توانی

یک سری *توانی*، سری به شکل زیر می‌باشد

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

که a_0، a_1، $\cdots$، a_n، $\cdots$ ثابت می‌باشند و ضرایب سری نامیده می‌شوند.

همگرایی یک سری توانی وابسته به x است و دامنهٔ همگرایی معمولاً یک بازه می‌باشد که، در حالت خاص، می‌تواند تک نقطه‌ای باشد.

۱ قضیه (آبل). هرگاه یک سری توانی برای مقدار غیر صفر x_0ای از x همگرا باشد، آن‌گاه برای هر مقدار از x که

$$|x| < |x_0|$$

سری بطور مطلق همگراست. هرگاه سری به‌ازای x_0ای واگرا باشد، آن‌گاه برای هر x که

$$|x| > |x_0|$$

سری واگراست.

برهان. بنابه فرض سری

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n + \cdots$$

همگراست. بنابراین $a_n x_0^n \to 0$ وقتی $n \to \infty$. بعبارت دیگر، عدد مثبت M چنان موجود است که قدرمطلق هر جمله از سری از M کوچکتر است.

سری توانی را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$a_۰ + a_۱ x_۰ (\frac{x}{x_۰}) + a_۰ x_۰^۲ (\frac{x}{x_۰})^۲ + \cdots + a_n x_۰^n (\frac{x}{x_۰})^n + \cdots .$$

سری با قدرمطلق جملات به شکل زیر می‌باشد

$$|a_۰| + |a_۱ x_۰| |\frac{x}{x_۰}| + |a_۲ x_۰^۲| |\frac{x}{x_۰}|^۲ + \cdots + |a_n x_۰^n| |\frac{x}{x_۰}|^n + \cdots .$$

جملات این سری کوچکتر از جملات وابسته در سری زیر می‌باشند

$$M + M|\frac{x}{x_۰}| + M|\frac{x}{x_۰}|^۲ + \cdots + M|\frac{x}{x_۰}|^n + \cdots .$$

برای $|x| < |x_۰|$، سری فوق، سری هندسی با قدر نسبت $|\frac{x}{x_۰}| < ۱$ می‌باشد و لذا همگراست. بنابراین سری توانی برای $|x| < |x_۰|$ بطور مطلق همگراست. حالت واگرایی به روشی مشابه اثبات می‌شود. ■

۲ شعاع همگرایی. حال روشی را برای بدست آوردن شعاع همگرایی یک سری توانی ارائه می‌دهیم.

فرض کنیم سری توانی زیر داده شده باشد

$$a_۰ + a_۱ x + a_۲ x^۲ + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n.$$

سری زیر را که با قدر مطلق‌گیری از جملات سری فوق بدست می‌آید در نظر بگیرید

$$|a_۰| + |a_۱||x| + |a_۲||x|^۲ + \cdots + |a_n||x|^n + \cdots = \sum_{n=۰}^{\infty} |a_n||x|^n.$$

فرض کنیم R شعاع همگرایی این سری را نشان دهد. آن‌گاه

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

یا

$$R = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|.$$

حال

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}||x| = L|x|$$

که در آن $L = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$. آن‌گاه بنابه آزمون نسبت دالامبر، سری همگرا است هرگاه $L|x| < 1$؛ یعنی، هرگاه $|x| < \frac{1}{L}$ و واگراست هرگاه $L|x| > 1$، یعنی، هرگاه $|x| > \frac{1}{L}$.
بنابراین

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|.$$

بطور مشابه با به کاربردن آزمون نسبت کشی، خواهیم داشت

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|x| = L|x|.$$

آن‌گاه سری همگراست اگر $L|x| < 1$؛ یعنی، هرگاه $|x| < \frac{1}{L}$ و واگراست اگر $L|x| > 1$؛ یعنی، هرگاه $|x| > \frac{1}{L}$. بنابراین

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

۳ مثالها. (الف) شعاع همگرایی و بازهٔ همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ را مشخص کنید. داریم

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{x^{n+1}}{x^n}| = |x|.$$

بنابراین سری برای $|x| < 1$ همگراست و برای $|x| > 1$ واگراست. لذا شعاع همگرایی ۱ و بازهٔ همگرایی $(-1, 1)$ می‌باشد.

(ب) در فصل ۵ دیدیم که سری مکلورن برای e^x بصورت زیر می‌باشد

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

در این حالت برای هر $x \in \mathbb{R}$،

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.\frac{n!}{x^n}| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

بنابراین شعاع همگرایی $R = \infty$ است و بازهٔ همگرایی عبارتست از $(-\infty, +\infty)$.

(ج) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ دارای شعاع همگرایی $R = \infty$ است.

(د) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ دارای شعاع همگرایی $R = \infty$ می‌باشد.

(ه) برای $|x| < 1$ داریم

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

و لذا

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} |-\frac{x^{n+1}}{n+1}.\frac{n}{x^n}| &= \lim_{n\to\infty} |\frac{n}{n+1}x| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}}|x| = |x|.\end{aligned}$$

بنابراین شعاع همگرایی برابر ۱ می‌باشد.

(و) دیدیم که شعاع همگرایی برای سری دو جمله‌ای $(1+x)^m$، که m عدد صحیح مثبت نباشد، ۱ است.

۸. قضیهٔ تقریب وایراشتراس

در این بخش، برهانی را از قضیه مشهور وایراشتراس به ساده‌ترین شکل ارائه می‌دهیم. این قضیه، توابع پیوستهٔ روی مجموعهٔ فشرده $[a, b]$ را با چند جمله‌ای‌ها تقریب می‌کند.

۱ قضیه (قضیهٔ تقریب وایراشتراس). فرض کنیم f تابع حقیقی پیوسته روی مجموعهٔ فشرده $[a,b]$ باشد و فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. آنگاه چندجمله‌ای P با ضرایب حقیقی (یعنی، $P(x) = a_۰ + a_۱ x + \cdots a_n x^n$، $a_۰, a_۱, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$) چنان موجود است که

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a,b].$$

برهان. بدون کاستن از کلیت، می‌توان فرض کرد که $[a,b] = [۰,۱]$. ابتدا می‌بینیم که اگر n عدد صحیح مثبت و k هر عدد صحیحی باشد که $۰ \leq k \leq n$، آنگاه ضریب دو جمله‌ای $\binom{n}{k}$ بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

توجه کنیم که برای هر n، چندجمله‌ای B_n تعریف شده با

$$B_n(x) = \sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} (۱ - x)^{n-k} f(\frac{k}{n})$$

چندجمله‌ای *برنشتاین* متناظر با تابع f نامیده می‌شود.

ابتدا چند اتحاد را ثابت می‌کنیم که در طول اثبات از آنها استفاده خواهیم کرد. بخاطر بیاورید که اتحاد زیر حالت خاصی از قضیهٔ دو جمله‌ای است:

$$\sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} x^k (۱ - x)^{n-k} = [x + (۱ - x)]^n = ۱. \qquad (۹)$$

با مشتق‌گیری از (۹) نسبت به x بدست می‌آوریم

$$\sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} [k x^{k-۱} (۱ - x)^{n-k} - (n-k) x^k (۱ - x)^{n-k-۱}]$$
$$= \sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} x^{k-۱} (۱ - x)^{n-k-۱} (k - nx) = ۰.$$

با ضرب طرفین در $x(1-x)$ خواهیم داشت

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}(k-nx)=0. \qquad (10)$$

با مشتق‌گیری از طرفین (۱۰) نسبت به x بدست می‌آوریم

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[-nx^k(1-x)^{n-k}+x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}(k-nx)^2]=0. \qquad (11)$$

از (۹) و (۱۱) بدست می‌آوریم

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}(k-nx)^2=n.$$

با ضرب طرفین تساوی فوق در $x(1-x)$، خواهیم داشت

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}(k-nx)^2=nx(1-x).$$

حال با تقسیم طرفین به n^2 نتیجه می‌گیریم که

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}(x-\frac{k}{n})^2=\frac{x(1-x)}{n}. \qquad (12)$$

با استفاده از (۹) بدست می‌آوریم

$$f(x)-B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}[f(x)-f(\frac{k}{n})],$$

لذا

$$|f(x)-B_n(x)|\leq\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}|f(x)-f(\frac{k}{n})|. \qquad (13)$$

از آنجا که $[\circ, \text{۱}]$ فشرده است و f پیوسته می‌باشد، f بطور یکنواخت پیوسته است. بنابراین می‌توان $\delta > \circ$ را چنان پیدا کرد که برای $|x - \frac{k}{n}| < \delta$،

$$|f(x) - f(\frac{k}{n})| < \varepsilon.$$

قرار دهید

$$\sum_{k=\circ}^{n} \binom{n}{k} x^k (\text{۱} - x)^{n-k} |f(x) - f(\frac{k}{n})| = \Sigma_\text{۱} + \Sigma_\text{۲}$$

که $\Sigma_\text{۱}$ مجموع آن جملاتی است که $|x - \frac{k}{n}| < \delta$ و $\Sigma_\text{۲}$ مجموع جملات باقی‌مانده است. می‌بینیم که $\Sigma_\text{۱} < \frac{\varepsilon}{\text{۲}}$. نشان خواهیم داد که اگر n بقدر کافی بزرگ باشد، $\Sigma_\text{۲}$ می‌تواند مستقل از x، کمتر از $\frac{\varepsilon}{\text{۲}}$ شود.

از آنجا که f پیوسته و $[\circ, \text{۱}]$ فشرده است، f کراندار می‌باشد. بنابراین عدد حقیقی مثبت K چنان موجود است که برای هر $x \in [\circ, \text{۱}]$، $|f(x)| \leq K$. از این نتیجه می‌گیریم که

$$\Sigma_\text{۲} \leq \text{۲}K \sum \binom{n}{k} x^k (\text{۱} - x)^{n-k}.$$

فرض کنیم جمع سمت راست را، که روی همهٔ kهایی گرفته شده است که $|x - \frac{k}{n}| \geq \delta$، با $\Sigma_\text{۳}$ نمایش دهیم. کافی است نشان دهیم که اگر n بقدر کافی بزرگ باشد، $\Sigma_\text{۳}$ می‌تواند مستقل از x، کمتر از $\frac{\varepsilon}{\text{۴}K}$ شود. برای این منظور از (۱۲) نتیجه می‌گیریم که

$$\delta^\text{۲} \Sigma_\text{۳} \leq \frac{x(\text{۱} - x)}{n}$$

یا

$$\Sigma_\text{۳} \leq \frac{x(\text{۱} - x)}{n\delta^\text{۲}}.$$

ماکزیمم مقدار $x(\text{۱} - x)$ روی $[\circ, \text{۱}]$، $\frac{\text{۱}}{\text{۴}}$ است که خواهیم داشت

$$\Sigma_\text{۳} \leq \frac{\text{۱}}{\text{۴}n\delta^\text{۲}}.$$

$n > \frac{K}{\delta^{۲}}$ انتخاب کنید. آنگاه $\Sigma_{۳} < \frac{\varepsilon}{۴K}$، بطوریکه $\Sigma_{۲} < \frac{\varepsilon}{۴K}$. لذا برای $n > \frac{K}{\delta^{۲}}$،

$$|f(x) - B_n(x)| < \varepsilon \quad , \quad \forall x \in [۰, ۱].$$

در نتیجه $B_n(x)$ برای هر n بقدر کافی بزرگ، بطور یکنواخت نزدیک به $f(x)$ می‌باشد و این برهان قضیه را کامل می‌کند. ■

تمرینات

۱. ثابت کنید که هر دنبالهٔ بطور یکنواخت همگرا از توابع کراندار، بطور یکنواخت کراندار است.

۲. نشان دهید که هرگاه $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ روی مجموعهٔ E بطور یکنواخت همگرا باشند، آنگاه $\{f_n + g_n\}$ نیز بر E بطور یکنواخت همگراست. هرگاه، علاوه‌براین، $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ دنباله‌هایی از توابع کراندار باشند، ثابت کنید $\{f_n g_n\}$ بر E بطور یکنواخت همگرا خواهد بود. دنباله‌های $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ را طوری بسازید که بر مجموعه‌ای چون E بطور یکنواخت همگرا باشند، ولی $\{f_n g_n\}$ بر E بطور یکنواخت همگرا نباشد.

۳. نشان دهید که $\{(\sin x)^{\frac{۱}{n}}\}$ روی $[۰, \pi]$ همگراست ولی بطور یکنواخت همگرا نیست.

۴. نشان دهید که $\{(\frac{\sin x}{x})^{\frac{۱}{n}}\}$ بر $[۰, \pi]$ همگراست ولی همگرای یکنواخت نیست.

۵. نشان دهید که دنبالهٔ $\{f_n\}$ تعریف شده با

$$f_n(x) = e^{-nx}$$

در $(۰, +\infty)$ همگرای نقطه‌ای هست ولی یکنواخت نیست. اما هرگاه $k > ۰$، $\{f_n\}$ در $[k, +\infty)$ همگرای یکنواخت می‌باشد.

۶. فرض کنیم $f_n(x) = x^n$. نشان دهید که برای $۰ < k < ۱$، $\{f_n\}$ در $[۰, k]$ همگرای یکنواخت است. همچنین نشان دهید که $\{f_n\}$ در $[۰, ۱]$ همگرای یکنواخت نیست (اما همگرای نقطه‌ای می‌باشد).

۷. نشان دهید که $f_n(x)=\frac{n}{x+n}$ برای هر $k\in\mathbb{R}$، در $[\circ,k]$ همگرای یکنواخت است اما در $(\circ,+\infty)$ همگرای یکنواخت نیست.

۸. هرگاه $f_n(x)=nxe^{-nx^{۲}}$، آن‌گاه نشان دهید که $\{f_n\}$ در $[\circ,+\infty)$ همگرای نقطه‌ای هست ولی همگرای یکنواخت نیست.

۹. فرض کنیم $f_n(x)=\frac{x}{n}$. نشان دهید که $\{f_n\}$ بر $\mathbb{R}$ نقطه به نقطه به تابع $f(x)=\circ$ همگراست. هرگاه E زیر مجموعه کرانداری از $\mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه ثابت کنید که $\{f_n\}$ بر E بطور یکنواخت به $f(x)=\circ$ همگراست، در حالی که $\{f_n\}$ بر $\mathbb{R}$ همگرای یکنواخت نیست.

۱۰. هرگاه $\{f_n\}$ روی $\mathbb{R}$ به تابع پیوستهٔ f همگرای یکنواخت باشد آن‌گاه ثابت کنید که

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x+\frac{۱}{n})=f(x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

۱۱. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوستهٔ یکنواخت باشد و به‌ازای هر n، تابع f_n با ضابطهٔ

$$f_n(x)=f(x+\frac{۱}{n})$$

تعریف شده باشد. نشان دهید $\{f_n\}$ بر $\mathbb{R}$ بطور یکنواخت به f همگراست.

۱۲. فرض کنید $f_n:[\circ,۱]\to\mathbb{R}$ دنباله‌ای از توابع یکنوا باشد که نقطه به نقطه به تابع ثابت صفر همگراست.

(الف) نشان دهید که این همگرایی یکنواخت است،

(ب) با یک مثال نشان دهید که اگر $f_n\xrightarrow{p}f\neq\circ$، آن‌گاه ممکن است همگرایی یکنواخت نباشد.

۱۳. به‌ازای $n=۱,۲,۳,\cdots$ و x حقیقی قرار دهید

$$f_n(x)=\frac{x}{۱+nx^{۲}}.$$

نشان دهید که $\{f_n\}$ بطور یکنواخت به تابعی چون f همگراست و معادلهٔ

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

اگر $x \neq ۰$، درست است ولی، اگر $x = ۰$، درست نخواهد بود.

۱۴. فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی پیوسته روی $[a,b]$ باشد و $\{f_n\}$ بر $[a,b]$ بطور یکنواخت به f همگرا باشد. ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{b-\frac{۱}{n}} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

۱۵. فرض کنید $\{f_n\}$ بر E بطور یکنواخت به تابع پیوستهٔ f همگرا و دنبالهٔ $\{x_n\}$ از نقاط E به نقطهٔ $x \in E$ همگرا باشد، آنگاه نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x),$$

ولی عکس آن برقرار نیست.

۱۶. نشان دهید که سری Σf_n که

$$f_n(x) = \frac{x^۲}{(۱+x^۲)^n} \quad , \quad x \in \mathbb{R},$$

همگراست، و هر جمله از سری پیوسته است، اما تابع مجموع، پیوسته نیست.

۱۷. با بکاربردن Mـتست وایراشتراس، نشان دهید که سری‌های

$$\Sigma\frac{\sin nx}{n^p} \quad , \quad \Sigma\frac{\cos nx}{n^p}$$

برای $p > ۱$ همگرای یکنواخت می‌باشند.

۱۸. همگرایی نقطه‌ای و همگرایی یکنواخت را برای سری زیر بررسی کنید

$$\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{x}{۳})^n.$$

۱۹. ثابت کنید که دنباله

$$\{(۱-x)x^n\}$$

روی $[۰, ۱]$ همگرای یکنواخت است.

۲۰. نشان دهید که سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

بر هر بازه‌ای که شامل $x = ۰$ باشد همگرای یکنواخت نیست.

۲۱. فرض کنید

$$f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۱ + n^۲ x}.$$

این سری به‌ازای چه xهایی بطور مطلق همگراست؟ بر چه بازه‌هایی بطور یکنواخت همگرا می‌شود؟ بر چه بازه‌هایی بطور یکنواخت همگرانیست؟ آیا هر جا که سری همگراست f پیوسته است؟ آیا f کراندار است؟

۲۲. ثابت کنید سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x}{n(۱+nx^۲)}$ در $\mathbb{R}$ همگرای یکنواخت است.

۲۳. هرگاه f در $[۰, ۱]$ پیوسته باشد و به‌ازای هر عدد صحیح نامنفی n داشته باشیم

$$\int_۰^۱ f(x) x^n dx = ۰,$$

آن‌گاه نشان دهید که f در $[۰, ۱]$ متحد با صفر است.

۲۴. هرگاه سری $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگرا باشد و $f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ که $x \in (-۱, ۱)$، ثابت کنید که f روی $(-۱, ۱)$ پیوسته است.

۲۵. هرگاه $\sum |a_n| < M$، که M بزرگ است، ثابت کنید که

$$\int_۰^۱ (\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n) dx = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{a_n}{n + ۱}.$$

۸

انتگرال و اندازهٔ لبگ

در فصل ۶ موضوع انتگرال ریمان را مطرح کردیم. دیدیم که نگاشت f تعریف شده روی بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ با

$$f(x) = \begin{cases} \text{۰} & ; x \in \mathbb{Q} \\ \text{۱} & ; x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

به مفهوم ریمان، انتگرال‌پذیر نیست. در این فصل نوعی انتگرال را تعریف خواهیم کرد که توسیع مفهوم انتگرال ریمان می‌باشد. این تعریف جدید چنان می‌باشد که

(الف) هرگاه تابعی به معنی ریمان، انتگرال‌پذیر باشد باید در این مفهوم از تعریف جدید نیز انتگرال‌پذیر باشد، و مقدار هر دو انتگرال نیز یکسان شود؛ و

(ب) توابعی وجود دارند که در مفهوم جدید از انتگرال، انتگرال‌پذیرند، اما ریمان انتگرال‌پذیر نمی‌باشند.

چندین ریاضی‌دان روی این مفهوم کار کردند، تا اینکه در اواخر قرن نوزدهم، پیشنهادهای متفاوتی مطرح گردید. مفیدترین و وسیع‌ترین تعریف پذیرفته شده، توسط ریاضی‌دان مشهور فرانسوی، لبگ[1] در قرن بیستم مطرح گردید. این مفهوم بعدها *انتگرال لبگ* نامیده شد.

1) Lebesgue

در آخرین فصل، به مفاهیم مقدماتی از انتگرال لبگ اشاره می‌کنیم. برای ادامه کار، به تعریف *اندازه*، مجموعه‌های *اندازه‌پذیر*، و توابع *اندازه‌پذیر* نیاز داریم. ابتدا مفهوم اندازهٔ مجموعه‌ها و مجموعه‌های اندازه‌پذیر را مطرح می‌کنیم و سپس توابع اندازه‌پذیر و خواص آنها را مطالعه می‌کنیم. متعاقباً، مفهوم انتگرال لبگ و توابعی که به معنی لبگ، انتگرال‌پذیرند را مطرح می‌کنیم.

بزودی خواننده خواهد دید که مفهوم اندازه یک تعمیم از طول بازه می‌باشد. اندازه را برای زیر مجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم، که آنها را مجموعه‌های اندازه‌پذیر می‌نامیم. بنابه تعریف، اندازه هر بازهٔ کراندار برابر طول آن می‌باشد. به بیان دقیق، فرض کنیم $I_{a,b}$ هر یک از بازه‌های (a,b)، $[a,b)$، $(a,b]$ یا $[a,b]$ باشد که $a,b\in\mathbb{R}$ و $a\le b$. آن‌گاه اندازهٔ $I_{a,b}$ برابر طول آن یعنی $(b-a)$ می‌باشد.

در اینجا بهتر است نامی از ریاضی‌دان مشهور بریتانیایی جی. ای. لیتلوود[2] ببریم که سه تبصرهٔ جالب را برای دانش جویان خود جهت یادگیری نظریهٔ اندازه مطرح می‌کرد:

(الف) یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر «تقریباً» اجتماع یک تعداد متناهی از بازه‌هاست.

(ب) یک تابع اندازه‌پذیر «تقریباً» یک تابع پیوسته است.

(ج) یک دنبالهٔ همگرا از توابع اندازه‌پذیر «تقریباً» بطور یکنواخت همگراست.

بنابراین، به قول پروفسور لیتلوود، کسی که با بازه‌ها و توابع پیوسته آشنا باشد هیچ مشکلی در درک مجموعه‌های اندازه‌پذیر و توابع اندازه‌پذیر نخواهد داشت. در تمام استدلال تبصره‌های پروفسور کلمه «تقریباً» استفاده شده است که روشن می‌کند که موضوعات مقدماتی از مجموعه‌ها و توابع اندازه‌پذیر را مطرح خواهیم کرد.

۱. بازه‌ها و مجموعه‌های روی $\mathbb{R}$

فرض کنیم $I_{a,b}$ بازه‌ای کراندار روی خط حقیقی با نقاط انتهایی b, a باشد. بعبارت دیگر، $I_{a,b}$ ممکن است هر یک از بازه‌های (a,b)، $[a,b)$، $(a,b]$ یا $[a,b]$ باشد. هرگاه

2) J.E. Littlewood

طول بازه را با ℓ نمایش دهیم خواهیم داشت

$$\ell(I_{a,b}) = b - a. \qquad (۱)$$

حال کلاسی از زیر بازه‌های $I_{a,b}$ را تعریف می‌کنیم و آن را بوسیلهٔ $\{I_{a_i,b_i}\}$ $(i = ۱, ۲, \cdots, n)$ نمایش می‌دهیم. فرض کنیم این بازه‌ها دوبدو جدا از هم باشند. آن‌گاه

$$\ell(\cup_{i=۱}^{n} I_{a_i,b_i}) = \sum_{i=۱}^{n}(b_i - a_i). \qquad (۲)$$

همچنین

$$\ell(I_{a,b}) \geq \ell(\cup_{i=۱}^{n} I_{a_i,b_i}) \qquad (۳)$$

وقتی هر I_{a_i,b_i} $(i = ۱, ۲, \cdots, n)$ مشمول در $I_{a,b}$ باشد و همگی دوبدو جدا از هم باشند.

می‌توانیم کلاس متناهی از زیر بازه‌های $\{I_{a_i,b_i}\}$ $(i = ۱, ۲, \cdots, n)$ را به تعداد شمارش‌پذیر توسعه دهیم. برای این کلاس نیز نتیجهٔ (۳) برقرار است؛ یعنی،

$$\ell(I_{a,b}) \geq \ell(\cup_{i=۱}^{\infty} I_{a_i,b_i})$$

که هر I_{a_i,b_i} $(i = ۱, ۲, ۳, \cdots)$ مشمول در $I_{a,b}$ می‌باشند و دوبدو مجزا از هم‌اند.

حال مجموعه‌های باز روی $\mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که هرگاه $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ گردآیه‌های از بازه‌های باز روی $\mathbb{R}$ باشد آن‌گاه مجموعهٔ $\cup_{n=۱}^{\infty} I_n$ مجموعه‌ای باز در $\mathbb{R}$ می‌باشد. بطور مشابه، می‌توانیم حالت عکس را به شکل زیر بنویسیم:

هر زیر مجموعهٔ باز G از $\mathbb{R}$ را می‌توان بصورت اجتماع شمارایی از بازه‌های باز دوبدو جدا از هم نوشت. برای مثال، فرض کنیم G زیر مجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه می‌توانیم بنویسیم

$$G = \cup_{i=۱}^{n} I_{a_i,b_i} \qquad (۴)$$

که n می‌تواند هر عدد صحیح مثبت یا بی‌نهایت باشد و $\{I_{a_i,b_i}\}$ ($i = 1, 2, \cdots, n$) بازه‌های باز دوبدو جدا از هم می‌باشند. بنابراین خواهیم داشت

$$\ell(G) = \ell(\cup_{i=1}^{n} I_{a_i,b_i})$$

یا

$$\ell(G) = \sum_{i=1}^{n} \ell(I_{a_i,b_i}) \tag{5}$$

که در آن I_{a_i,b_i}ها دوبدو جدا از هم می‌باشند.

برای هر گردآیهٔ $\{I_{a_i,b_i}\}$ از بازه‌های باز داریم

$$\ell(\cup_{i=1}^{n} I_{a_i,b_i}) \leq \sum_{i=1}^{n} \ell(I_{a_i,b_i}) \tag{6}$$

که n عدد صحیح مثبت یا بی‌نهایت است.

حال اگر دو زیر مجموعهٔ باز G_1 و G_2 از $\mathbb{R}$ را چنان داشته باشیم که $G_1 \subset G_2$، آن‌گاه به راحتی ثابت می‌شود که

$$\ell(G_1) \leq \ell(G_2). \tag{7}$$

سپس، طول زیر مجموعهٔ بستهٔ کراندار F از $\mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم. طول F صفر انتخاب می‌شود وقتی که F تهی باشد یا دارای تعداد متناهی عنصر باشد. در غیر اینصورت، کوچکترین بازهٔ بستهٔ $I_{a,b}$ را در نظر می‌گیریم که حاوی F است.

در این حالت مجموعهٔ $I_{a,b} - F$ باز است. آن‌گاه طول $\ell(F)$ بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\ell(F) = (b-a) - \ell(I_{a,b} - F). \tag{8}$$

هرگاه $I_{a,b}$ یک بازهٔ باز باشد که حاوی F است، آن‌گاه

$$\ell(I_{a,b} - F) = \ell(I_{a,b}) - \ell(F). \tag{9}$$

بحث بالا نتایج ساده زیر را بدست می‌دهد
(الف) فرض کنیم F_1 و F_2 دو مجموعهٔ بستهٔ کراندار باشند که $F_1 \subset F_2$، آن‌گاه

$$\ell(F_1) \leq \ell(F_2).$$

(ب) فرض کنیم F و G به‌ترتیب مجموعه‌های بسته کراندار و بازکراندار باشند چنان که $F \subset G$، آن‌گاه

$$\ell(F) \leq \ell(G). \qquad (10)$$

(ج) هرگاه F^c متمم F باشد، آن‌گاه

$$\ell(F) = (b-a) - \ell(F^c). \qquad (11)$$

(د) هرگاه مجموعهٔ بازکراندار G، اجتماع شمارایی از مجموعه‌های باز جدا از هم G_i باشد، آن‌گاه

$$\ell(G) = \sum_{i=1}^{\infty} \ell(G_i).$$

بالاخره، دو قضیهٔ زیر راکه در بحث اندازهٔ مجموعه‌ها استفاده خواهیم کرد، شرح می‌دهیم.

۱ قضیه. فرض کنیم G مجموعهٔ بازکراندار و $\{F_i\}$ گردآیه‌ای از همهٔ مجموعه‌های بستهٔ مشمول در G باشد، آن‌گاه

$$\ell(G) = \sup_i \ \ell(F_i). \qquad (12)$$

۲ قضیه. فرض کنیم $\{G_i\}$ کلاس تمام مجموعه‌های کراندار حاوی یک مجموعهٔ بستهٔ F باشد، آن‌گاه

$$\ell(F) = \inf_i \ \ell(G_i). \qquad (13)$$

۲. اندازهٔ مجموعه‌های روی $\mathbb{R}$

در اوایل این فصل اشاره شد که، «اندازه» تعمیم طول است و به مجموعه‌های معینی روی خط حقیقی اختصاص داده شده که مجموعه‌های اندازه‌پذیر نامیده می‌شوند. اساساً، اندازه، یک عدد حقیقی نامنفی است و برای یک بازه کراندار، اندازه و طول، یکسان می‌باشند. اندازهٔ دو مجموعهٔ جدا از هم، مجموع اندازه مجموعه‌هاست. در حقیقت، اندازه، تابعی جمعی روی کلاس مجموعه‌های اندازه‌پذیر است. اما، برای تعریف اندازهٔ یک مجموعهٔ سره، اندازه‌های داخلی و خارجی یک مجموعه را تعریف می‌کنیم.

یک مجموعهٔ $E \subset I_{a,b}$ را در نظر بگیرید. *اندازهٔ خارجی* E، که با $m_\circ(E)$ نمایش داده می‌شود، بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$m_\circ(E) = \inf_i \ell(G_i) \qquad (۱۴)$$

که $\{G_i\}$ گردآیه‌ای از تمام مجموعه‌های باز حاوی E می‌باشد.

اندازهٔ داخلی E، که با $m_c(E)$ نمایش داده می‌شود، بصورت زیر تعریف می‌شود

$$m_c(E) = \sup_i \ell(F_i) \qquad (۱۵)$$

که در آن $\{F_i\}$ گردآیه‌ای از مجموعه‌های بستهٔ مشمول در E می‌باشد.

بعبارت دیگر، هرگاه G و F به‌ترتیب مجموعه‌های باز و بسته‌ای باشند که G، حاوی E، و F مشمول در E است (یعنی $F \subset E \subset G$)، آن‌گاه

$$m_\circ(E) \le \ell(G) \quad \text{و} \quad \ell(F) \le m_c(E). \qquad (۱۶)$$

مجموعهٔ E *اندازه‌پذیر* نامیده می‌شود هرگاه اندازه‌های داخلی و خارجی آن با هم برابر باشند؛ یعنی، هرگاه

$$m_c(E) = m_\circ(E). \qquad (۱۷)$$

این مقدار مشترک *اندازه* مجموعهٔ E نامیده می‌شود. اندازهٔ مجموعهٔ E را با $m(E)$ نمایش می‌دهیم. بدین معنی که هرگاه E اندازه‌پذیر باشد، آن‌گاه

$$m_c(E) = m_\circ(E) = m(E). \qquad (۱۸)$$

در صورتی که E اندازه‌پذیر باشد می‌توان نوشت

$$m(E) = \inf \ell(G) \tag{۱۹}$$

که در آن inf روی تمام مجموعه‌های باز G حاوی E گرفته می‌شود. وقتی که G مجموعه‌ای باز باشد می‌توان آن را بصورت اجتماع شمارایی از بازه‌های باز دوبدو جدا از هم از $\mathbb{R}$ نمایش داد. بنابراین طول G تابعی جمعی است و مساوی اندازهٔ E است. لذا، اگر $E_۱$ و $E_۲$ دو مجموعهٔ جدا از هم اندازه‌پذیر باشد، آن‌گاه

$$m(E_۱ \cup E_۲) = m(E_۱) + m(E_۲). \tag{۲۰}$$

بطور مشابه اگر $E_۱$، $E_۲$، $E_۳$، $\cdots$ مجموعه‌های اندازه‌پذیر دوبدو جدا از هم باشند، آن‌گاه

$$m(E_۱ \cup E_۲ \cup E_۳ \cup \cdots) = m(E_۱) + m(E_۲) + m(E_۳) + \cdots . \tag{۲۱}$$

این تبصره‌ها دربارهٔ اندازهٔ یک مجموعهٔ کراندار از خط حقیقی را در ذهنتان داشته باشید. برای داشتن اطلاع بهتری در مورد «اندازه» (شامل اندازهٔ داخلی و خارجی)، به بعضی از خواص مقدماتی در ذیل اشاره می‌کنیم.

۱ قضیه. فرض کنیم E مجموعه‌ای کراندار در $\mathbb{R}$ باشد. آن‌گاه

$$m_c(E) \leq m_\circ(E).$$

برهان. کلاس $\{G_i\}$ از مجموعه‌های باز را چنان در نظر بگیرید که هر G_i حاوی E باشد و یک کلاس از مجموعه‌های بسته $\{F_j\}$ بطوری که هر F_j مشمول در E باشد؛ یعنی

$$F_j \subset E \subset G_i.$$

این ایجاب می‌کند که

$$\ell(F_j) \leq \ell(G_i).$$

رابطهٔ اخیر برای هر j و هر i درست است. بنابراین

$$\sup_j \ell(F_j) \leq \inf_i \ell(G_i),$$

در نتیجه

$$m_c(E) \leq m_\circ(E).\blacksquare \tag{۲۲}$$

۲ قضیه. فرض کنیم E مجموعه‌ای کراندار و شمارش‌پذیر باشد، آن‌گاه E اندازه‌پذیر است و

$$m(E) = \circ. \tag{۲۳}$$

برهان. مجموعهٔ شمارش‌پذیر E تعریف شده بصورت زیر را در نظر بگیرید

$$E = \{c_۱, c_۲, c_۳, \cdots\}$$

که برای هر $i = ۱, ۲, ۳, \cdots$، $a \leq c_i \leq b$.

هر c_i را توسط یک بازه باز به شکل $(c_i - h_i, c_i + h_i)$ چنان محصور می‌کنیم که هر یک از این بازه‌ها دوبدو جدا از هم باشند. آن‌گاه خواهیم داشت

$$\begin{aligned} m_\circ(E) &\leq \sum_{i=۱}^{\infty} \ell\{(c_i - h_i, c_i + h_i)\} \\ &\leq ۲\sum_{i=۱}^{\infty} h_i. \end{aligned}$$

چون هر h_i دلخواه است، برای هر $\varepsilon > \circ$ قرار دهید

$$h_i = \frac{\varepsilon}{۲^{i+۱}}.$$

در اینصورت

$$m_\circ(E) \leq \varepsilon \sum_{i=۱}^{\infty} \frac{۱}{۲^i}.$$

از آنجا که $\varepsilon > 0$ دلخواه است در نتیجه

$$m_\circ(E) = 0$$

حال نتیجه از قضیهٔ ۱ بدست می‌آید. ■

این قضیه ایجاب می‌کند که هر زیر مجموعهٔ متناهی از خط حقیقی $\mathbb{R}$ اندازه‌پذیر است و اندازه آن صفر می‌باشد. مجموعهٔ تمام اعداد گویای بازه $[a, b]$ اندازه‌پذیر است و اندازه‌اش صفر می‌باشد.

۳ قضیه. فرض کنیم E مجموعه‌ای در $[a, b]$ و E^c متمم آن باشد، آن‌گاه

$$m_\circ(E) + m_c(E^c) = b - a. \qquad (۲۴)$$

برهان. مجموعهٔ باز G_i در $[a, b]$ را چنان در نظر بگیرید که حاوی E باشد. متمم G_i، G_i^c، مجموعهٔ بسته‌ای خواهد بود که $G_i^c \subset E^c$. این ایجاب می‌کند که

$$m_c(E^c) \geq \ell(G_i^c)$$

یا

$$m_c(E^c) + \ell(G_i) \geq \ell(G_i^c) + \ell(G_i)$$

یا

$$m_c(E^c) + \ell(G_i) \geq b - a. \qquad (۲۵)$$

با اینفیمم‌گیری روی تمام iها، بدست می‌آوریم

$$m_c(E^c) + m_\circ(E) \geq b - a.$$

بطور مشابه، مجموعهٔ بستهٔ F_i مشمول در E^c را در نظر بگیرید. خواهیم داشت

$$m_\circ(E) + \ell(F_i) \leq \ell(F_i^c) + \ell(F_i).$$

مقدار سمت راست $b-a$ است و با سوپریمم‌گیری، خواهیم داشت

$$m_\circ(E)+m_c(E^c)\leq b-a. \qquad (۲۶)$$

نتیجه را از (۲۵) و (۲۶) بدست می‌آوریم. همانند آنچه که در بالا آمد می‌توان نتیجهٔ زیر را نیز ثابت کرد

$$m_\circ(E^c)+m_c(E)=b-a. \qquad (۲۷)$$

بنابراین اگر E اندازه‌پذیر باشد، آن‌گاه

$$m(E^c)+m(E)=b-a.\blacksquare \qquad (۲۸)$$

۴ قضیه. هرگاه $E_۱$ و $E_۲$ زیرمجموعه‌هایی اندازه‌پذیر از $[a,b]$ باشند، آن‌گاه
(الف) $E_۱\cup E_۲$ و $E_۱\cap E_۲$ اندازه‌پذیرند.
(ب) رابطهٔ زیر بین اندازه مجموعه‌های $E_۱$، $E_۲$، $E_۱\cup E_۲$ و $E_۱\cap E_۲$ برقرار است

$$m(E_۱)+m(E_۲)=m(E_۱\cup E_۲)+m(E_۱\cap E_۲). \qquad (۲۹)$$

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم که

$$m_\circ(E_۱\cup E_۲)+m_\circ(E_۱\cap E_۲)\leq m_\circ(E_۱)+m_\circ(E_۲). \qquad (۳۰)$$

مجموعه‌های باز $G_۱$ و $G_۲$ به‌ترتیب حاوی مجموعه‌های $E_۱$ و $E_۲$ را چنان در نظر بگیرید که

$$m(G_۱)-m_\circ(E_۱)<\frac{\varepsilon}{۲} \quad \text{و} \quad m(G_۲)-m_\circ(E_۲)<\frac{\varepsilon}{۲},$$

که $\varepsilon>\circ$ دلخواه است. آن‌گاه

$$\begin{aligned} m_\circ(E_۱\cup E_۲)+m_\circ(E_۱\cap E_۲) &\leq m(G_۱\cup G_۲)+m(G_۱\cap G_۲)\\ &=m(G_۱)+m(G_۲)\\ &\leq m_\circ(E_۱)+m_\circ(E_۲)+\varepsilon. \end{aligned}$$

از آنجا که ε دلخواه است، این (۳۰) را ثابت می‌کند. وقتی E_1 و E_2 اندازه‌پذیر باشند خواهیم داشت

$$\begin{aligned} m(E_1)+m(E_2) &\geq m_0(E_1\cup E_2)+m_0(E_1\cap E_2) \\ &\geq m_c(E_1\cup E_2)+m_c(E_1\cap E_2) \end{aligned} \tag{۳۱}$$

اما مطابق آنچه که در بالا گذشت می‌توان ثابت کرد که

$$m_c(E_1\cup E_2)+m_c(E_1\cap E_2)\geq m(E_1)+m(E_2). \tag{۳۲}$$

نامساوی‌های (۳۰) و (۳۱) ایجاب می‌کنند که

$$\begin{aligned} m(E_1)+m(E_2) &\geq m_0(E_1\cup E_2)+m_0(E_1\cap E_2) \\ &\geq m_c(E_1\cup E_2)+m_c(E_1\cap E_2) \\ &\geq m(E_1)+m(E_2). \end{aligned} \tag{۳۳}$$

یعنی اینکه

$$m_0(E_1\cup E_2)+m_0(E_1\cap E_2)=m_c(E_1\cup E_2)+m_c(E_1\cap E_2). \tag{۳۴}$$

بدست می‌آوریم

$$m_0(E_1\cup E_2)=m_c(E_1\cup E_2)$$

و

$$m_0(E_1\cap E_2)=m_c(E_1\cap E_2).$$

این بدین معنی است که $E_1\cup E_2$ و $E_1\cap E_2$ اندازه‌پذیرند و این قضیه را ثابت می‌کند. ∎

همچنین اگر E_1 و E_2 جدا از هم باشند آن‌گاه

$$m(E_1\cup E_2)=m(E_1)+m(E_2). \tag{۳۵}$$

این نتیجه می‌تواند به گردآیهٔ شمارش‌پذیر از مجموعه‌های $\{E_i\}_{i=۱}^{\infty}$ که دوبدو جدا از هم می‌باشند تعمیم داده شود. یعنی

$$m(\cup_{i=۱}^{\infty} E_i) = \sum_{i=۱}^{\infty} m(E_i). \qquad (۳۶)$$

حال قضیه‌هایی را در مورد اشتراک مجموعه‌های اندازه‌پذیر ثابت می‌کنیم.

۵ قضیه. فرض کنیم $\{E_n\}$ گردآیه‌ای شمارش‌پذیر از مجموعه‌ها باشد چنان که برای هر $n = ۱, ۲, ۳, \cdots$، $E_n \supset E_{n+۱}$. فرض کنیم حداقل برای nای، $m(E_n)$ متناهی باشد. آن‌گاه

$$m(\cap_{n=۱}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

برهان. فرض کنیم r کمترین مقدار n باشد که $m(E_r)$ متناهی است. آن‌گاه برای هر $n \geq r$، $m(E_n) < \infty$. قرار دهید $E = \cap_{n=۱}^{\infty} E_n$ و $F_n = E_n - E_{n+۱}$. آن‌گاه مجموعه‌های F_n اندازه‌پذیرند و دوبدو جدااز هم می‌باشند، و $E_r - E = \cup_{n=r}^{\infty} F_n$. بنابراین،

$$\begin{aligned} m(E_r - E) &= \sum_{n=r}^{\infty} m(F_n) \\ &= \sum_{n=r}^{\infty} m(E_n - E_{n+۱}). \end{aligned}$$

داریم

$$m(E_r) = m(E) + m(E_r - E)$$

و برای $n \geq r$،

$$m(E_n) = m(E_{n+۱}) + m(E_n - E_{n+۱}).$$

بنابراین

$$\begin{aligned} m(E_r) - m(E) &= \sum_{n=r}^{\infty}[m(E_n) - m(E_{n+۱})] \\ &= \lim_{k\to\infty}\sum_{n=r}^{k}[m(E_n) - m(E_{n+۱})] \\ &= \lim_{k\to\infty}\sum_{n=r}^{k}[m(E_n - E_{n+۱})] \\ &= \lim_{k\to\infty}[m(E_r - E_k)] \\ &= m(E_r) - \lim_{k\to\infty} m(E_k). \end{aligned}$$

این نتیجه می‌دهد که

$$m(E) = \lim_{n\to\infty} m(E_n).\blacksquare \tag{۳۷}$$

در ادامه قضیهٔ زیر را داریم که برهان آن را به خواننده واگذار می‌کنیم:

۶ قضیه. هرگاه $E = \cap_{n=۱}^{\infty} E_n$، که هر E_n کراندار و اندازه‌پذیر است، آن‌گاه E اندازه‌پذیر می‌باشد.

۷ مجموعه‌های اندازه‌ناپذیر. مجموعه‌هایی وجود دارند که اندازه خارجی آنها از اندازه داخلی‌شان متفاوت می‌باشد. در زیر مثالی از مجموعه‌های اندازه‌ناپذیر را مطرح می‌کنیم:

فرض کنیم m اندازهٔ لبگ را نشان دهد، برای $x, y \in [۰, ۱)$ تعریف کنید

$$x \oplus y = x + y - [x + y]$$

که در آن [ ] جزء صحیح یک عدد را نشان می‌دهد. برای زیر مجموعهٔ E از $[۰, ۱)$ قرار دهید

$$E \oplus y = \{x \oplus y : x \in E\}.$$

ابتدا لم زیر را ثابت می‌کنیم:

لم. فرض کنیم $E \subset [۰,۱)$ مجموعه‌ای اندازه‌پذیر باشد. در اینصورت برای هر $y \in [۰,۱)$ مجموعهٔ $E \oplus y$ اندازه‌پذیر است و $m(E \oplus y) = m(E)$.

برهان. قرار دهید $E_۱ = E \cap [۰, ۱ - y)$ و $E_۲ = E \cap [۱ - y, ۱)$. در اینصورت $E_۱$ و $E_۲$ مجموعه‌های اندازه‌پذیر جدا از هم هستند که اجتماعشان E است، و لذا

$$m(E) = m(E_۱) + m(E_۲).$$

حال $E_۱ \oplus y = E_۱ + y$ و $E_۲ \oplus y = E_۲ + (y - ۱)$ (چرا؟) از آنجا که m تحت انتقال پایا است، می‌بینیم که $E_۱ \oplus y$ و $E_۲ \oplus y$ اندازه‌پذیر با $m(E_۱ \oplus y) = m(E_۱)$ و $m(E_۲ \oplus y) = m(E_۲)$ می‌باشند. اما

$$E \oplus y = (E_۱ \oplus y) \cup (E_۲ \oplus y)$$

که اجتماع جدا از هم می‌باشند. در نتیجه $E \oplus y$ اندازه‌پذیر است و

$$\begin{aligned} m(E \oplus y) &= m(E_۱ \oplus y) + m(E_۲ \oplus y) \\ &= m(E_۱) + m(E_۲) \\ &= m(E). \blacksquare \end{aligned}$$

حال نشان می‌دهیم مجموعه‌ای در خط حقیقی وجود دارد که لبگ اندازه‌پذیر نیست. برای اعداد حقیقی x و y می‌نویسیم

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

این یک رابطهٔ هم‌ارزی است که $[۰,۱)$ را به کلاس‌های هم‌ارزی تقسیم می‌کند. بنابه اصل انتخاب، مجموعه‌ای مانند P وجود دارد که از هر کلاس هم‌ارزی دقیقاً یک عنصر را دارد. فرض کنیم $\{r_i\}$ شمارشی از اعداد گویای داخل $[۰,۱)$ با $r_۰ = ۰$ باشد، سپس

تعریف می‌کنیم $P_i = P \oplus r_i$. در اینصورت $P_\circ = P$. اگر $x \in P_i \cap P_j$ ، آن‌گاه برای $p_i \in P$ ای و $p_j \in P$ای خواهیم داشت

$$x = p_i + r_i - [p_i + r_i] = p_j + r_j - [p_j + r_j].$$

بنابراین $p_i - p_j$ گویاست و لذا بنابه تعریف، $p_i \sim p_j$. از آنجاکه مجموعهٔ P شامل فقط یک نقطه از هر کلاس هم‌ارزی است پس $p_i = p_j$. این ایجاب می‌کند که $|r_i - r_j|$ عدد صحیحی در $[\circ, \text{۱})$ است لذا باید صفر باشد. بنابراین $i = j$ در نتیجه $P_i = P_j$. این نشان می‌دهد که مجموعه‌های P_i دوبدو جدا از هم هستند. از طرفی، هر عنصر از $[\circ, \text{۱})$ در یک کلاس هم‌ارزی است و لذا هم‌ارز یک عنصر از P می‌باشد، در نتیجه داخل یکی از مجموعه‌های P_i می‌باشد (چرا؟). بنابراین $\cup_{i=\text{۱}}^{\infty} P_i = [\circ, \text{۱})$. چون P اندازه‌پذیر بود، از لم قبل نتیجه می‌گیریم که هر P_i نیز اندازه‌پذیر می‌باشد و

$$\text{۱} = m[\circ, \text{۱}) = \sum_{i=\text{۱}}^{\infty} m(P_i) = \sum_{i=\text{۱}}^{\infty} m(P),$$

ولی طرف راست یا صفر است یا نامتناهی و این تناقض می‌باشد، لذا P نمی‌تواند اندازه‌پذیر باشد.

۸ مثالها. (الف) یک مجموعهٔ تک عضوی اندازه‌پذیر است و اندازهٔ آن صفر می‌باشد. فرض کنیم $\{x\}$ مجموعه‌ای داده شده باشد. از آنجا که

$$x \in I_n = (x - \frac{\text{۱}}{\text{۲}n+\text{۱}}, x + \frac{\text{۱}}{\text{۲}n+\text{۱}})$$

و $\ell(I_n) = \frac{\text{۱}}{\text{۲}n}$.

$$m_\circ(\{x\}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{۱}}{\text{۲}n} = \circ.$$

بنابراین نتیجه برقرار است.

(ب) ثابت کنید که اگر E مجموعه‌ای داده شده بصورت

$$E = \{\circ, \text{۱}, \frac{\text{۱}}{\text{۲}}, \frac{\text{۱}}{\text{۳}}, \cdots\}$$

باشد آن‌گاه $m(E)=0$.
بازهٔ بستهٔ $I_{0,1}$ را در نظر بگیرید. آن‌گاه

$$m(I_{0,1})=\ell(I_{0,1})=1,$$
$$I_{0,1}-E=\cup_{n=1}^{\infty}I_n$$

که I_n بازه بازی است که بصورت زیر می‌باشد:

$$I_n=(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}),$$
$$\ell(I_n)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}.$$

بنابراین

$$m(I_{0,1}-E)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1.$$

اما

$$m(I_{0,1}-E)=m(I_{0,1})-m(E)$$
$$=1-m(E)$$

لذا $m(E)=0$.
(ج) مجموعه‌ای ناشمارا با اندازهٔ صفر وجود دارد. در حقیقت مجموعهٔ یک سوم میانی کانتور شرح داده شده در فصل ۲ (بخش ۶) ناشمارا است و اندازهٔ آن صفر می‌باشد. بخاطر بیاورید که مجموعهٔ یک سوم میانی کانتور، مجموعهٔ C است که بصورت زیر تعریف می‌شود

$$C=\cap_{n=1}^{\infty}E_n$$

که در آن

$$E_۱ = [۰, \frac{۱}{۳}] \cup [\frac{۲}{۳}, ۱],$$
$$E_۲ = [۰, \frac{۱}{۹}] \cup [\frac{۲}{۹}, \frac{۳}{۹}] \cup [\frac{۶}{۹}, \frac{۷}{۹}] \cup [\frac{۸}{۹}, ۱],$$
$$\vdots$$

از آنجا که C مجموعه‌ای بسته است، اندازه‌پذیر می‌باشد. کافی است برای محاسبهٔ اندازهٔ C، اندازهٔ متمم آن را بدست آوریم؛ یعنی اندازه مجموعهٔ $\cup_{n=۱}^{\infty} I_n$ که در آن

$$I_۱ = (\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳})$$
$$I_۲ = (\frac{۱}{۳^۲}, \frac{۲}{۳^۲}) \cup (\frac{۷}{۳^۲}, \frac{۸}{۳^۲})$$
$$\vdots$$

خواهیم داشت

$$m(\cup_{n=۱}^{\infty} I_n) = \frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۳^۲} + \frac{۲^۲}{۳^۳} + \cdots$$
$$= \frac{\frac{۱}{۳}}{۱ - \frac{۲}{۳}} = ۱.$$

در نتیجه

$$m(C) = m([۰, ۱] - \cup_{n=۱}^{\infty} I_n)$$
$$= m([۰, ۱]) - m(\cup_{n=۱}^{\infty} I_n)$$
$$= ۱ - ۱ = ۰.$$

همچنین در بخش ۶ فصل ۲ نشان دادیم که C کامل و لذا ناشمارا است.

۳. توابع اندازه‌پذیر

فرض کنیم f تابع حقیقی توسعه یافته با دامنهٔ $U \subset [a, b]$ باشد (تابع حقیقی توسعه یافته، یعنی تابعی مانند $(f : U \to [-\infty, +\infty])$. تابع f *اندازه‌پذیر* نامیده می‌شود هرگاه برای هر عدد حقیقی r، هر یک از مجموعه‌های E_i $(i = ۱, ۲, ۳, ۴)$ تعریف شده بصورت

$$E_۱ = \{x : f(x) < r\} \tag{۳۸a}$$

$$E_۲ = \{x ; f(x) \leq r\} \tag{۳۸b}$$

$$E_۳ = \{x : f(x) > r\} \tag{۳۸c}$$

$$E_۴ = \{x : f(x) \geq r\} \tag{۳۸d}$$

اندازه‌پذیر باشند.

می‌توان ثابت کرد که اندازه‌پذیری هر یک از مجموعه‌های بالا، اندازه‌پذیری سه‌تای دیگر را نتیجه می‌دهد.

داریم $E_۱ \cup E_۴ = U$. بنابراین $E_۴$ متمم $E_۱$ است، لذا بنابه اندازه‌پذیری $E_۱$، $E_۴$ اندازه‌پذیر است. بطور مشابه می‌توان برای مجموعه‌های $E_۲$ و $E_۳$ عمل کرد. حال مجموعهٔ $E_۴$ می‌تواند بصورت زیر نمایش داده شود

$$E_۴ = \cap_{i=۱}^{\infty} H_i \tag{۳۹}$$

که در آن $H_i = \{x : f(x) > r - \frac{۱}{i}\}$.

بنابراین، هرگاه H_i اندازه‌پذیر باشد، آن‌گاه $E_۴$ نیز اندازه‌پذیر است. بنابراین اندازه‌پذیری $E_۳$، اندازه‌پذیری $E_۴$ را ایجاب می‌کند. با این روش می‌توانیم نشان دهیم که هر یک از تعریف‌ها در (۳۸)، سه‌تایی دیگر را ایجاب می‌کند.

۱ تعریف. دو تابع f و g تقریباً مساوی نامیده می‌شوند، و بصورت $f = g \ a.e.$ نمایش می‌دهند، هرگاه مجموعهٔ $E = \{x : f(x) \neq g(x)\}$ دارای اندازهٔ صفر باشد.

برخی از خواص شناخته شدهٔ توابع اندازه‌پذیر به شکل قضیه‌ای در زیر فهرست شده‌اند.

۲ قضیه. (الف) هرگاه f اندازه‌پذیر و c ثابت باشد، آن‌گاه توابع $f+c$ و cf اندازه‌پذیرند.

(ب) هرگاه f اندازه‌پذیر باشد، آن‌گاه مجموعهٔ $\{x : f(x) = \alpha\}$ برای هر عدد حقیقی α یا $\alpha = \infty$ اندازه‌پذیر است.

(ج) هرگاه f اندازه‌پذیر باشد، آن‌گاه $|f|$ نیز اندازه‌پذیر می‌باشد.

(د) هرگاه f و g اندازه‌پذیر باشند، آن‌گاه $f+g$ و $f-g$ اندازه‌پذیرند.

(ه) هرگاه f و g اندازه‌پذیر باشند، آن‌گاه مجموعهٔ

$$E = \{x : f(x) > g(x)\}$$

اندازه‌پذیر است.

(و) هرگاه f و g توابع اندازه‌پذیری باشند، آن‌گاه fg اندازه‌پذیر است.

(ز) هرگاه f و g اندازه‌پذیر باشند و $g \neq 0$، آن‌گاه f/g اندازه‌پذیر است.

(ح) هرگاه f و g اندازه‌پذیر باشند، آن‌گاه توابع $\max(f,g)$ و $\min(f,g)$ اندازه‌پذیرند.

(ط) اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر باشد، که هر کدام روی $[a,b]$ تعریف شده‌اند چنان که برای هر $x \in [a,b]$، دنبالهٔ $\{f_n(x)\}$ کراندار است، آن‌گاه توابع

$$G(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x),$$
$$g(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x),$$
$$H(x) = \lim_{n\to\infty} \sup f_n(x) \quad \text{و}$$
$$h(x) = \lim_{n\to\infty} \inf f_n(x)$$

همگی اندازه‌پذیرند.

(ی) حد یک دنبالهٔ همگرا از توابع اندازه‌پذیر، اندازه‌پذیر است.

(ک) هر تابع پیوسته، اندازه‌پذیر است.

(ل) هرگاه $f = g \ a.e.$، و f اندازه‌پذیر باشد، آن‌گاه g نیز اندازه‌پذیر است.

مثالها. (الف) ثابت کنید که هر تابع ثابت اندازه‌پذیر است.

حلّ. فرض کنیم f تابع حقیقی باشد که

$$f(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

عدد حقیقی r و مجموعهٔ S را بصورت زیر در نظر بگیرید:

$$S = \{x : f(x) \geq r\}.$$

هرگاه $r \geq c$، آن‌گاه $S = \mathbb{R}$ که اندازه‌پذیر است.
بطور مشابه اگر $r < c$، آن‌گاه $S = \phi$ که دوباره اندازه‌پذیر می‌باشد. بنابراین f برای هر c اندازه‌پذیر است.
(ب) فرض کنیم h بصورت زیر تعریف شده باشد.

$$h(x) = g(f(x))$$

که f اندازه‌پذیر و g بطور یکنوا صعودی است. در اینصورت ثابت کنید که h اندازه‌پذیر است.

حلّ. داریم که مجموعهٔ

$$S = \{x : f(x) \geq c\},$$

c حقیقی، اندازه‌پذیر است. حال

$$f(x) \geq c \Longrightarrow g(f(x)) \geq K$$

که در آن $K = g(c)$ و g بطور یکنوا صعودی است. بنابراین S نیز می‌تواند بصورت زیر نوشته شود

$$S = \{x : h(x) \geq K\}.$$

اما S اندازه‌پذیر است. بنابراین h تابعی اندازه‌پذیر می‌باشد.

۴. انتگرال لبگ

مجموعه‌های اندازه‌پذیر و توابع اندازه‌پذیر مطرح شدند، حال می‌توانیم *انتگرال لبگ* یک تابع کراندار f با دامنه‌اش روی خط حقیقی را تعریف کنیم.

بازهٔ $[a, b]$ را در نظر بگیرید. بازهٔ $[a, b]$ را به زیر بازه‌های اندازه‌پذیر $E_۱$، $E_۲$، $\cdots$، E_n چنان تقسیم کنید که

$$m(E_i \cap E_j) = ۰, \quad i \neq j$$

و

$$\cup_{i=۱}^n E_i = [a, b].$$

این تقسیم از $[a, b]$ را با D نمایش می‌دهیم و آن را *افراز اندازه‌پذیر* می‌نامیم. می‌توانیم تظریف D^* از $[a, b]$ را داشته باشیم که

$$D^* = \{E_۱^*, E_۲^*, \cdots, E_n^*\}$$

چنان که برای هر E_i از D، مجموعهٔ اندازه‌پذیر E_j^* از D^* چنان موجود باشد که $E_j^* \subset E_i$.
اما یک افراز کلی را با D نمایش خواهیم داد که در آن $D = \{E_۱, E_۲, \cdots, E_n\}$.

تعریف می‌کنیم $(i = ۱, ۲, \cdots, n)$

$$\ell_i = \inf_{x \in E_i} f(x) \tag{۴۱}$$

و

$$L_i = \sup_{x \in E_i} f(x). \tag{۴۲}$$

سپس مجموع لبگ پائین $s(D, f)$ و مجموع لبگ بالای $S(D, f)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$s(D, f) = \sum_{i=۱}^n \ell_i m(E_i), \tag{۴۳}$$

$$S(D, f) = \sum_{i=۱}^n L_i m(E_i). \tag{۴۴}$$

براحتی می‌توان نشان داد که

$$s(D, f) \leq S(D, f). \qquad (۴۵)$$

علاوه‌براین، اگر $D_۲$ هر تظریفی از $D_۱$ باشد، آن‌گاه به سادگی نشان داده می‌شود که

$$s(D_۱, f) \leq s(D_۲, f) \qquad (۴۶)$$

$$S(D_۱, f) \geq S(D_۲, f). \qquad (۴۷)$$

فرض کنیم $\mathcal{D}$ مجموعهٔ همهٔ افرازهای اندازه‌پذیر از $[a, b]$ را نمایش دهد. حال تعریف می‌کنیم

$$\underline{\int_a^b} f dx = \sup_{D \in \mathcal{D}} s(D, f) \qquad (۴۸)$$

$$\overline{\int_a^b} f dx = \inf_{D \in \mathcal{D}} S(D, f). \qquad (۴۹)$$

$\underline{\int_a^b} f dx$ و $\overline{\int_a^b} f dx$ به‌ترتیب *انتگرال پائین لبگ* و *انتگرال بالای لبگ* f در $[a, b]$ نامیده می‌شود. تابع کراندار f، *لبگ انتگرال‌پذیر* روی $[a, b]$ نامیده می‌شود هرگاه انتگرال پائین لبگ f مساوی انتگرال بالای لبگ آن باشد، یعنی، هرگاه

$$\underline{\int_a^b} f dx = \overline{\int_a^b} f dx. \qquad (۵۰)$$

این مقدار مشترک، *انتگرال لبگ* f نامیده می‌شود و آن را با

$$\int_a^b f dx$$

نمایش می‌دهیم.

$L_۱[a, b]$ یا ساده‌تر $L[a, b]$ را برای نمایش مجموعهٔ تمام توابع لبگ اندازه‌پذیر روی $[a, b]$ به‌کار می‌بریم.

۱ قضیه. فرض کنیم f تابعی کراندار باشد که در بازهٔ $[a,b]$ ریمان انتگرال‌پذیر است. آن‌گاه f روی $[a,b]$ لبگ انتگرال‌پذیر است و

$$R\int_a^b f dx = L\int_a^b f dx. \qquad (۵۱)$$

برهان. فرض کنیم Δ افرازی از $[a,b]$ به زیر بازه‌هایی با نقاط انتهایی زیر باشد:

$$x_۰(=a), x_۱, x_۲, \cdots, x_n(=b),$$

یعنی

$$\Delta = \{x_۰, x_۱, x_۲, \cdots, x_n\}$$

همچنین تقسیم D از $[a,b]$ را طوری تعریف می‌کنیم که

$$D = \{E_۱, E_۲, E_۳, \cdots, E_{۲n}\}$$

و

$$E_۱ \cup E_۲ = [x_۰, x_۱],$$
$$E_۳ \cup E_۴ = [x_۱, x_۲],$$
$$\vdots$$
$$E_{۲n-۱} \cup E_{۲n} = [x_{n-۱}, x_n].$$

که تمام E_iها $(i = ۱, ۲, \cdots, ۲n)$ دوبدو جدا از هم‌اند.

همچنین می‌توانیم Δ را بصورت یک تقسیم D بنویسیم که اعضایش بصورت بازه‌های $I_۱$، $I_۲$، $\cdots$،I_n باشد که

$$I_i = [x_{i-۱}, x_i] \quad \forall i = ۱, ۲, \cdots, n.$$

حال اگر $L(\Delta, f)$ و $U(\Delta, f)$ به‌ترتیب مجموع‌های پائین و بالای ریمان را نمایش دهند، آن‌گاه، با استفاده از (۴۳)، (۴۴) و (۴۵)، بدست می‌آوریم

$$L(\Delta, f) \leq s(D, f) \leq S(D, f) \leq U(\Delta, f) \tag{۵۲}$$

$$R\underline{\int_a^b} f dx \leq L\underline{\int_a^b} f dx \leq L\overline{\int_a^b} f dx \leq R\overline{\int_a^b} f dx. \tag{۵۳}$$

اگر $f \in R[a, b]$، آن‌گاه

$$R\underline{\int_a^b} f dx = R\overline{\int_a^b} f dx. \tag{۵۴}$$

بنابراین

$$R\underline{\int_a^b} f dx = L\underline{\int_a^b} f dx = L\overline{\int_a^b} f dx = R\overline{\int_a^b} f dx \tag{۵۵}$$

یا $f \in L[a, b]$، و

$$R\int_a^b f dx = L\int_a^b f dx.$$

این قضیه را ثابت می‌کند. ■

حال ثابت می‌کنیم که هر تابع اندازه‌پذیر کراندار، لبگ انتگرال‌پذیر است. برای اثبات این نتیجه، از قضیهٔ زیر استفاده می‌کنیم که اثبات آن خارج از هدف این کتاب است.

۲ قضیه. تابع کراندار f روی $[a, b]$ لبگ انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon > 0$ افراز اندازه‌پذیر D از $[a, b]$ چنان موجود باشد که

$$S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon.$$

۳ قضیه. هر تابع اندازه‌پذیر کراندار روی $[a, b]$، لبگ انتگرال‌پذیر است.

برهان. فرض کنیم f کراندار باشد. در اینصورت اعداد m و M چنان موجودند که برای هر $x \in [a,b]$، $f(x) \in [m,M]$. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. در نتیجه تعداد متناهی نقطهٔ $y_۰$، $y_۱$، $\cdots$، y_n چنان موجودند که

$$m = y_۰ < y_۱ < y_۲ < \cdots < y_n = M$$

و برای n ,$\cdots$,$k = ۱, ۲$،

$$y_k - y_{k-۱} < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

قرار دهید

$$E_k = \{x \in [a,b] : y_{k-۱} \leq f(x) < y_k\}.$$

از آنجا که f اندازه‌پذیر است، هر E_kای اندازه‌پذیر می‌باشد. بنابراین

$$D = \{E_۱, E_۲, \cdots, E_n\}$$

یک افراز اندازه‌پذیر از $[a,b]$ است. حال

$$\sup_{x \in E_k} f(x) \leq y_k \quad \text{و} \quad \inf_{x \in E_k} f(x) \geq y_{k-۱}.$$

لذا

$$\begin{aligned} S(D,f) &= \sum_{k=۱}^{n} (\sup_{x \in E_k} f(x)) m(E_k) \\ &\leq \sum_{k=۱}^{n} y_k m(E_k) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} s(D,f) &= \sum_{k=۱}^{n} (\inf_{x \in E_k} f(x)) m(E_k) \\ &\geq \sum_{k=۱}^{n} y_{k-۱} m(E_k). \end{aligned}$$

حال

$$\begin{aligned} S(D,f) - s(D,f) &\le \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1}) m(E_k) \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} m(E_k) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

بنابراین f لبگ انتگرال‌پذیر است و این برهان را کامل می‌کند. ■

۵ قضیه (خواص ساده‌ای از انتگرال لبگ توابع کراندار). فرض کنیم f و g توابع کراندار باشند و $f \in L[a,b]$ و $g \in L[a,b]$. در اینصورت خواص زیر برقرارند:

(الف) $f \le g$، آن‌گاه $\int_a^b f dx \le \int_a^b g dx$،

(ب) $\int_a^b cf dx = c\int_a^b f dx$، c یک ثابت است،

(ج) $\int_a^b (f+g) dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$،

(د) برای $a \le c \le b$، $\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$،

(ه) اگر f کراندار باشد و $f \in L[a,b]$، $f = g \ a.e.$ روی $[a,b]$ و g روی $[a,b]$ کراندار باشد، آن‌گاه $g \in L[a,b]$ و

$$\int_a^b g dx = \int_a^b f dx,$$

(و) هرگاه f و g کراندار باشند، $f \in L[a,b]$ و $g \in L[a,b]$، آن‌گاه

$$f(x) \le g(x) a.e. \Longrightarrow \int_a^b f dx \le \int_a^b g dx.$$

(ز) هرگاه تابع کراندار f روی $[a,b]$ لبگ انتگرال‌پذیر باشد، آن‌گاه $|f|$ نیز لبگ انتگرال‌پذیر است و

$$\left| \int_a^b f dx \right| \le \int_a^b |f| dx.$$

۶ مثال. $\int_a^b f(x)dx$ را محاسبه کنید که f بصورت زیر تعریف شده است

$$f(x)=\begin{cases} K_1 & ; x\in I_{a,b}, x\in \mathbb{Q} \\ K_2 & ; x\in I_{a,b}, x\in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$$

و $K_1<K_2$.

حلّ. داریم $f(x)\in[K_1,K_2]$. افراز D از $[a,b]$ را اختیار می‌کنیم که $D=\{E_1,E_2,\cdots,E_n\}$. فرض کنیم y_0، y_1، y_2، $\cdots$، y_n چنان اعداد حقیقی باشند که

$$K_1-\varepsilon=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_{n-1}<y_n=K_2+\varepsilon \quad (\varepsilon>0).$$

در اینجا E_1، E_2، $\cdots$، E_n زیرمجموعه‌هایی از $[a,b]$ هستند که

$$E_i=\{x: y_{i-1}\leq f(x)<y_i\} \quad , i=1,2,\cdots,n.$$

دراینصورت E_1 مجموعهٔ همهٔ اعداد گویای $[a,b]$ است در حالی که E_n مجموعهٔ همهٔ اعداد گنگ $[a,b]$ می‌باشد. بنابراین $m(E_1)=0$، $m(E_n)=(b-a)-m(E_1)=b-a$ و برای $i=1,2,\cdots,n-1$، $m(E_i)=0$. لذا

$$\begin{aligned} S(D,f)&=\sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in E_1}f(x)m(E_i)\\ &\leq y_n m(E_n)=(b-a)(K_2+\varepsilon)\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} s(D,f)&=\sum_{i=1}^{n}\inf_{x\in E_i}f(x)m(E_i)\\ &\geq y_n m(E_n)>(b-a)(K_2-\varepsilon).\end{aligned}$$

در نتیجه برای هر افراز D خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\inf_D S(f,D) &= \sup_D\ s(f,D)\\ &= K_۲(b-a).\end{aligned}$$

حتی می‌توانیم افراز D از $[a,b]$ را چنان انتخاب کنیم که $D=\{E_۱,E_۲\}$ و

$$\begin{aligned}E_۱ &= \{x\in[a,b]:\quad \text{گویاست } x\}\\ E_۲ &= \{x\in[a,b]:\quad \text{گنگ است } x\}.\end{aligned}$$

آن‌گاه

$$\begin{aligned}s(D,f) &= \inf_{x\in E_۱} f(x)m(E_۱)+\inf_{x\in E_۲} f(x)m(E_۲)\\ &= K_۱m(E_۱)+K_۲m(E_۲)\\ &= K_۱\cdot ۰+K_۲(b-a)=K_۲(b-a),\\ S(D,f) &= \sup_{x\in E_۱} f(x)m(E_۱)+\sup_{x\in E_۲} f(x)m(E_۲)\\ &= K_۱\cdot ۰+K_۲(b-a)\\ &= K_۲(b-a).\end{aligned}$$

بنابراین

$$\sup_D\ s(D,f)=\inf_D\ S(D,f)=K_۲(b-a),$$

لذا f لبگ انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b f\,dx = K_۲(b-a).$$

۷ انتگرال لبگ برای توابع غیرکراندار. فرض کنیم f تابع اندازه‌پذیر نامنفی تعریف شده روی $[a,b]$ باشد. تابع $F:[a,b]\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ را بصورت زیر تعریف کنید

$$F(x,n)=\begin{cases} f(x) & ;\circ\leq f(x)\leq n,\\ n & ;f(x)>n\end{cases}$$

حال $F(x,n)=\min(f(x),n)$. بنابراین برای هر n، F تابعی اندازه‌پذیر و کراندار است و لذا F لبگ انتگرال‌پذیر است. فرض کنیم

$$\int_a^b F(x,n)dx$$

نمایش انتگرال لبگ F باشد، اگر

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b F(x,n)dx$$

موجود و متناهی باشد، آن‌گاه می‌گوئیم که f لبگ انتگرال‌پذیر است و

$$\int_a^b f dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b F(x,n)dx.$$

اگر حد فوق بطور متناهی موجود نباشد، آن‌گاه می‌گوئیم که f لبگ انتگرال‌پذیر نیست.

حال تعریف انتگرال لبگ را به هر تابع حقیقی اندازه‌پذیر تعریف شده روی هر زیر مجموعهٔ اندازه‌پذیر از خط حقیقی $\mathbb{R}$ تعمیم می‌دهیم.

۸ تعریف. فرض کنیم f تابع حقیقی اندازه‌پذیر تعریف شده روی زیر مجموعهٔ اندازه‌پذیر A از $\mathbb{R}$ باشد. دو تابع f^+ و f^- را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f^+(x)=\max(f(x),\circ)$$

$$f^-(x)=\max(-f(x),\circ)=-\min(f(x),\circ).$$

می‌بینیم که

$$f = f^+ - f^-,$$
$$|f| = f^+ + f^-,$$

و f^+ و f^- توابع نامنفی‌اند.

فرض کنیم f تابع اندازه‌پذیر تعریف شده روی مجموعهٔ اندازه‌پذیر A باشد و فرض کنیم $\int_A f^+dx < \infty$ و $\int_A f^-dx < \infty$. آن‌گاه f لبگ انتگرال‌پذیر است و

$$\int_A fdx = \int_A f^+dx - \int_A f^-dx.$$

هرگاه

$$\int_A f^+dx = \infty \quad \text{و} \quad \int_A f^-dx = \infty,$$

در اینصورت $\int_A fdx$ تعریف نشده است.

می‌بینیم که $\int_A fdx$ متناهی است اگر و فقط اگر $\int_A f^+dx$ و $\int_A f^-dx$ متناهی باشند و این درست است اگر و فقط اگر

$$\int_A |f|dx = \int_A f^+dx + \int_A f^-dx$$

متناهی باشد.

۹ قضیه. فرض کنیم f تابع اندازه‌پذیر تعریف شده روی $[a, b]$ باشد. در اینصورت $f \in L[a, b]$ اگر و فقط اگر $|f| \in L[a, b]$ و لذا

$$\left|\int_a^b fdx\right| \leq \int_a^b |f|dx.$$

برهان. فرض کنیم f اندازه‌پذیر و $|f| \in L[a,b]$ باشد. خواهیم داشت

$$\circ \leq f^+(x) \leq |f(x)|,$$
$$\circ \leq f^-(x) \leq |f(x)|.$$

این ایجاب می‌کند که f^+ و f^- لبگ انتگرال‌پذیر می‌باشند و لذا f لبگ انتگرال‌پذیر است.

برعکس؛ فرض کنیم $f \in L[a,b]$. آن‌گاه f^+ و f^- لبگ انتگرال‌پذیرند. اما

$$|f| = f^+ + f^-$$

بنابراین $|f| \in L[a,b]$. حال

$$f \leq |f| \quad \text{و} \quad -f \leq |f|.$$

لذا

$$\int_a^b f dx \leq \int_a^b |f| dx \quad \text{و} \quad -\int_a^b f dx \leq \int_a^b |f| dx.$$

در نتیجه

$$\left| \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f| dx$$

و این برهان را کامل می‌کند. ■

۱۰ قضیه. فرض کنیم $f \in L_1[a,b]$. در اینصورت برای $\varepsilon > \circ$ داده شده، $\delta > \circ$ چنان موجود است که

$$\left| \int_E f dx \right| < \varepsilon$$

که در آن $E \subset [a,b]$ اندازه‌پذیر با $m(E) < \delta$ می‌باشد.

برهان. ابتدا فرض کنیم که f تابعی نامنفی باشد. برای هر عدد صحیح مثبت n، تعریف کنید

$$F(x,n)=\begin{cases} f(x) & ; \circ \leq f(x) < n \\ \circ & ; f(x) \geq n \end{cases}.$$

در اینصورت برای $\circ < \varepsilon$ داده شده، عدد صحیح مثبت N چنان موجود است که

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b F(x,N)dx < \frac{\varepsilon}{۲}$$

یعنی

$$\int_a^b \{f(x) - F(x,N)\}dx < \frac{\varepsilon}{۲}. \tag{۵۶}$$

فرض کنیم $\circ < \delta$ چنان باشد که $\frac{\varepsilon}{۲N} > \delta$. فرض کنیم $E \subset [a,b]$ اندازه‌پذیر و $m(E) < \delta$. آن‌گاه خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int_E F(x,N)dx &\leq \int_E N dx = Nm(E) \\ &< N\delta < N\frac{\varepsilon}{۲N} \\ &= \frac{\varepsilon}{۲.} \end{aligned} \tag{۵۷}$$

از (۵۶) و (۵۷) بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \int_E f(x)dx &= \int_E \{f(x) - F(x,N)\}dx + \int_E F(x,N)dx \\ &< \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon. \end{aligned}$$

حال، اگر f تابع لبگ انتگرال‌پذیر دلخواهی روی $[a,b]$ باشد، آن‌گاه

$$f = f^+ - f^-$$

که f^+ و f^- نامنفی و لبگ انتگرال‌پذیرند. بنابراین برای $\varepsilon > ۰$ داده شده، $\delta_۱ > ۰$ چنان موجود است که

$$\int_E f^+ dx < \frac{\varepsilon}{۲},$$

که در آن $m(E) < \delta_۱$. بطور مشابه $\delta_۲ > ۰$ چنان موجود است که برای $m(E) < \delta_۲$،

$$\int_E f^- dx < \frac{\varepsilon}{۲}.$$

قرار دهید $\delta = \min(\delta_۱, \delta_۲)$. در اینصورت بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\left|\int_E f dx\right| &\le \int_E |f| dx \\ &= \int_E f^+ dx + \int_E f^- dx \\ &< \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon,\end{aligned}$$

و این برهان را کامل می‌کند. ■

۱۱ قضیهٔ همگرای کراندار لبگ. فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر تعریف شده روی مجموعهٔ اندازه‌پذیر $E \subset [a, b]$ باشد. فرض کنیم
(الف) ثابت M طوری موجود باشد که برای هر n و هر x، $|f_n(x)| \le M$، و
(ب) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
آن‌گاه

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

برهان. از آنجا که برای هر n و هر x، $|f_n(x)| \le M$ و $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$، لذا $|f(x)| \le M$. علاوه‌براین f، چون حد دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر می‌باشد، اندازه‌پذیر است. بنابراین f لبگ انتگرال‌پذیر می‌باشد. حال کافی است نشان دهیم که

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)| dx = ۰.$$

برای $0 < \varepsilon$ داده شده، یک افراز از E به مجموعه‌های اندازه‌پذیر جدا از هم را بصورت زیر تعریف کنید:

$$E_k = \{x : |f_{k-1} - f| \geq \varepsilon, |f_n - f| < \varepsilon, n \geq k\}, k = 1, 2, \cdots .$$

بنابراین

$$E_1 = \{x : |f_n - f| < \varepsilon, n = 1, 2, \cdots\},$$
$$E_2 = \{x : |f_1 - f| \geq \varepsilon, |f_n - f| < \varepsilon, n = 2, 3, \cdots\}.$$

بوضوح

$$E = \cup_{k=1}^{\infty} E_k = (\cup_{k=1}^{n} E_k) \cup (\cup_{k=n+1}^{\infty} E_k)$$
$$:= P_n \cup Q_n.$$

در نتیجه

$$m(E) = m(P_n \cup Q_n) = m(P_n) + m(Q_n).$$

حال

$$\int_E |f_n - f| dx = \int_{P_n} |f_n - f| dx + \int_{Q_n} |f_n - f| dx.$$

برای هر n، روی P_n،

$$|f_n - f| < \varepsilon$$

و روی Q_n،

$$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq M + M = 2M.$$

لذا

$$\int_E |f_n - f| dx < \varepsilon m(P_n) + 2M m(Q_n).$$

با میل دادن $n \to \infty$، خواهیم داشت

$$m(P_n) \to m(A) \quad \text{و} \quad m(Q_n) \to ٠.$$

علاوه براین، از آنجا که $\varepsilon > ٠$ دلخواه است، نتیجه را بدست می‌آوریم. ■

۱۲ قضیهٔ همگرای تسلطی لبگ. فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر روی $[a, b]$ باشد. فرض کنیم
(الف) تابع $g \in L_۱[a, b]$ طوری موجود باشد که

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad a.e.$$

(ب) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) a.e.$.
در اینصورت $f \in L_۱[a, b]$ و

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dx = \int_a^b f dx.$$

برهان. از آنجا که f حد دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر است، اندازه‌پذیر می‌باشد. چون $|f_n(x)| \leq g(x)$ و $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ روی $[a, b]$، بنابراین $|f(x)| \leq g(x) a.e.$ روی $[a, b]$. حال، از آنجا که g لبگ انتگرال‌پذیر است، $|f|$ نیز لبگ انتگرال پذیر می‌باشد و لذا f نیز لبگ انتگرال‌پذیر خواهد بود. برای $\varepsilon > ٠$ داده شده و برای هر عدد صحیح مثبت N، تعریف کنید

$$E_N = \{x : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{۲(b-a)}, n \geq N, x \in [a, b]\}.$$

حال برای هر N، $E_N \subset E_{N+۱}$. از آنجا که $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ روی $[a, b]$، در نتیجه

$$[a, b] = (\cup_{N=۱}^{\infty} E_N) \cup E$$

که $m(E)=\circ$. لذا $m(\cup_{N=۱}^{\infty}E_N)=b-a$. همچنین

$$m(\cup_{N=۱}^{\infty}E_N)=\lim_{n\to\infty}m(\cup_{N=۱}^{n}E_N)$$
$$=\lim_{n\to\infty}m(E_n).$$

بنابراین

$$b-a=\lim_{n\to\infty}m(E_n). \qquad (۵۸)$$

چون g لبگ انتگرال‌پذیر است، لذا برای هر $\varepsilon>\circ$، $\delta>\circ$ چنان موجود است که برای $m(E)<\delta$،

$$\int_E gdx<\frac{\varepsilon}{۴}.$$

برای $m(E)<\delta$ خواهیم داشت

$$\int_E|f_n|dx\leq\int_E gdx<\frac{\varepsilon}{۴} \qquad (۵۹)$$

و لذا

$$\int_E|f|dx\leq\int_E gdx<\frac{\varepsilon}{۴}. \qquad (۶۰)$$

از (۵۸) نتیجه می‌گیریم که عدد صحیح مثبت M چنان موجود است که

$$b-a-m(E_n)<\delta \quad , \quad \forall n\geq M, \qquad (۶۱)$$

یا

$$m(E_n^c)<\delta, \ \ \forall n\geq M.$$

حال برای $n\geq M$،

$$\int_a^b|f_n-f|dx=\int_{E_M}|f_n-f|+\int_{E_M^c}|f_n-f|$$
$$<\frac{\varepsilon m(E_M)}{۲(b-a)}+\int_{E_M^c}|f_n|+\int_{E_M^c}|f|$$
$$<\frac{\varepsilon m(E_M)}{۲(b-a)}+\frac{\varepsilon}{۴}+\frac{\varepsilon}{۴}$$

یا برای $n \geq M$

$$\left|\int_a^b (f_n - f)\right| \leq \int_a^b |f_n - f| < \varepsilon$$

یا اینکه برای $n \geq M$

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| < \varepsilon$$

در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$$

و این برهان را کامل می‌کند. ■

۱۳ قضیه (لم فاتو[۳]). فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر نامنفی روی $[a,b]$ باشد چنان که برای هر $x \in [a,b]$، $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. در اینصورت

$$\int_a^b f dx \leq \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dx.$$

برهان. برای هر عدد صحیح مثبت m، تابع F_n را روی $[a,b]$ بصورت زیر تعریف کنید

$$F_n(x,m) = \begin{cases} f_n(x) & ; 0 \leq f_n(x) \leq m \\ m & ; f_n(x) > m \end{cases}.$$

بنابراین $F_n(x,m) = \min(f_n(x), m)$ و لذا هر $F_n(x,m)$ به m کراندار است. همچنین هر F_n اندازه‌پذیر و لذا روی $[a,b]$ لبگ انتگرال‌پذیر می‌باشد. همچنین

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} F_n(x,m) &= \lim_{n\to\infty} \min(f_n(x), m) \\ &= \min(\lim_{n\to\infty} f_n(x), m) \\ &= \min(f(x), m) \\ &= F(x,m). \end{aligned}$$

3) Fatou's Lemma

لذا، بنابه قضیهٔ همگرای تسلطی لبگ، $F(x,m)$ لبگ انتگرال‌پذیر است و

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b F_n(x,m)dx=\int_a^b F(x,m)dx.$$

حال $F_n(x,m)\le f_n(x)$. بنابراین

$$\begin{aligned}\int_a^b F(x,m)dx &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b F_n(x,m)dx\\ &= \lim_{n\to\infty}\inf\int_a^b F_n(x,m)dx\\ &\le \lim_{n\to\infty}\inf\int_a^b f_n(x)dx.\end{aligned}$$

اما، وقتی $m\to\infty$، $F(x,m)\to f(x)$. بنابراین

$$\int_a^b f(x)dx\le\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

و این برهان را کامل می‌کند. ■

۵. فضای $L_۲$

حال آماده‌ایم که فضای لبگ $L_۲$ را بسازیم. این فضا بسیار مهم است و مکرراً در حل مسائل مختلف استفاده خواهد شد. این موضوع را در بخش بعدی (بخش ۶) در بحث سری‌های فوریه استفاده خواهیم کرد.

فرض کنیم f تابع حقیقی اندازه‌پذیر کراندار تعریف شده روی بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ باشد. در اینصورت $f\in L_۲[a,b]$ نامیده می‌شود هرگاه

$$\int_a^b |f(x)|^۲dx$$

موجود باشد. بعبارت دیگر، $f\in L_۲[a,b]$ اگر و تنها اگر $f^۲\in L_۱[a,b]$. بنابراین $L_۲[a,b]$ مجموعهٔ تمام توابع *انتگرال‌پذیر* مربع است. در صورتی که اشتباهی رخ ندهد $L_۲$ را برای نمایش $L_۲[a,b]$ بکار خواهیم برد.

۱ قضیه(نامساوی شوارتز). هرگاه f و g متعلق به $L_2[a,b]$ باشند، آن‌گاه $fg \in L_1[a,b]$ و

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le [\int_a^b |f(x)|^2 dx \int_a^b |g(x)|^2 dx]^{\frac{1}{2}}.$$

برهان. از آنجا که

$$0 \le (f-g)^2 = f^2 + g^2 - 2|fg|,$$

در نتیجه

$$2|fg| \le f^2 + g^2.$$

فرض کنیم $f, g \in L_2$. در اینصورت

$$\begin{aligned} 2\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| &\le 2\int_a^b |f(x)g(x)|dx \\ &\le \int_a^b |f(x)|^2 dx + \int_a^b |g(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

بنابراین $fg \in L_1$. لذا انتگرال

$$\begin{aligned} &\int_a^b \{\lambda f(x) + \mu g(x)\}^2 dx \\ &= \lambda^2 \int_a^b \{f(x)\}^2 dx + 2\lambda\mu \int_a^b f(x)g(x)dx + \mu^2 \int_a^b \{g(x)\}^2 dx \end{aligned}$$

برای تمام مقادیر λ و μ موجود است، و هرگز منفی نیستند. اما شرط لازم و کافی این است که

$$a\lambda^2 + 2h\lambda\mu + b\mu^2$$

نامنفی باشد یعنی اینکه

$$h^2 \le ab, \quad a \ge 0, b \ge 0.$$

لذا این نتیجه می‌دهد که

$$[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx \int_a^b |g(x)|^2 dx,$$

و این برهان را کامل می‌کند. ■

۲ قضیه (نامساوی مینکوفسکی). فرض کنیم $f, g \in L_2$. آن‌گاه $f + g \in L_2$ و

$$[\int |f(x) + g(x)|^2 dx]^{\frac{1}{2}} \leq [\int |f(x)|^2 dx]^{\frac{1}{2}} + [\int |g(x)|^2 dx]^{\frac{1}{2}}.$$

برهان. با استفاده از نامساوی شوارتز بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
&\int |f+g|^2 dx \\
&\leq \int |f||f+g|dx + \int |g||f+g|dx \\
&\leq [\int |f|^2 dx]^{\frac{1}{2}} [\int |f+g|^2 dx]^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + [\int |g|^2 dx]^{\frac{1}{2}} [\int |f+g|^2 dx]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

با تقسیم طرفین به

$$[\int |f+g|^2 dx]^{\frac{1}{2}}$$

بدست می‌آوریم

$$[\int |f+g|^2 dx]^{\frac{1}{2}} \leq [\int |f|^2 dx]^{\frac{1}{2}} + [\int |g|^2 dx]^{\frac{1}{2}}$$

و این برهان را کامل می‌کند. ■

۶. سری‌های فوریه[4]

۱ تعریف (توابع انتگرال‌پذیر). فرض کنیم f تابعی اندازه‌پذیر باشد که روی مجموعهٔ $E \subset [a,b]$ تعریف شده و انتگرال‌پذیر است، در اینصورت می‌گوئیم که $f \in L_1(E)$. می‌نویسیم $f \in L_2(E)$ وقتی f انتگرال‌پذیر مربع روی E باشد. بنابراین $L_1(E)$ و $L_2(E)$ به ترتیب فضای توابع انتگرال‌پذیر و انتگرال‌پذیر مربع می‌باشند. هرگاه $E = [a,b]$، به‌ترتیب می‌نویسیم $f \in L_1[a,b]$ و $f \in L_2[a,b]$.

۲ تعریف (توابع متناوب). فرض کنیم $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی باشد که

$$f(x+\alpha) = f(x), \quad \alpha > 0. \tag{۶۲}$$

در اینصورت f تابعی *متناوب* با *دورهٔ تناوب* α نامیده می‌شود. بوضوح

$$f(x+n\alpha) = f(x) \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

تابع متناوب f را با $\alpha = 2\pi$ در نظر بگیرید. همهٔ توابع مثلثاتی از این دسته‌اند. هر تابع متناوب f با دورهٔ تناوب 2π بصورت سری مثلثاتی

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{۶۳}$$

نمایش داده می‌شود که در آن a_0، a_n و b_n، $(n = 1, 2, \cdots)$، ثابت می‌باشند.

هرگاه $f \in L_1[-\pi,\pi]$ سری تعریف شده در (۶۳)، سری فوریه در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ نامیده می‌شود و ضرایب به ترتیب بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \cdots \tag{۶۴a}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n = 1, 2, 3, \cdots . \tag{۶۴b}$$

4) Fourier series

برای هر $f \in L_1[-\pi, \pi]$ هیچ لزومی ندارد که سری (۶۳) همگرا باشد. درواقع چندین حالت زیر امکان‌پذیر است:

(الف) ممکن است سری در هیچ جایی همگرا نباشد،

(ب) ممکن است سری همگرا باشد ولی نه به f،

(ج) سری همگرا به f است،

اما اگر $f \in L_2[-\pi, \pi]$، آن‌گاه سری فوریهٔ f به f همگراست؛ اما اگر $f \in L_1[-\pi, \pi]$، یا f پیوسته باشد آن‌گاه میانگین حسابی مجموع‌های جزئی سری فوریهٔ f، در بعضی آزمون‌های همگرایی صدق می‌کند. این مطلب را در این کتاب مقدماتی ثابت نمی‌کنیم.

۳ قضیه. فرض کنیم $f \in L_1[-\pi, \pi]$ متناوب باشد و فرض کنیم سری فوریه آن بصورت زیر داده شده باشد

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \qquad (۶۵)$$

در اینصورت

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx.$$

برهان. داریم‌که $f \in L_1[-\pi, \pi]$، $\cos nx \in L_2[-\pi, \pi]$، $\sin nx \in L_2[-\pi, \pi]$ و سری طرف راست (۶۵) بطور یکنواخت همگراست. با ضرب هر دو طرف (۶۵) به $\cos nx$ و انتگرال‌گیری نسبت به x از $-\pi$ تا π بدست می‌آوریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx$$

بطوریکه

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx dx = ۰, \quad k = ۱, ۲, ۳, \cdots ,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = ۰, \quad k \neq n \text{ برای}.$$

بنابراین

$$a_n = \frac{۱}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, n = ۰, ۱, ۲, ۳, \cdots .$$

بطور مشابه، با ضرب (۶۵) به $\sin nx$ و انتگرال‌گیری نسبت به x از $-\pi$ تا π مقدار b_n را برای $n = ۱, ۲, ۳, \cdots$ بدست می‌آوریم.

همگرایی یکنواخت سری را در هر حالت انتگرال‌گیری جمله‌به‌جمله تضمین می‌کند.

■

۴ نتیجه. هرگاه f تابعی زوج باشد، یعنی، $f(-x) = f(x)$، $f \in L_۱[-\pi, \pi]$ و در این بازه متناوب باشد، آنگاه سری فوریه f عبارتست از

$$\frac{۱}{۲}a_۰ + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{۶۶}$$

که

$$a_n = \frac{۲}{\pi} \int_{۰}^{\pi} f(x) \cos nx dx. \tag{۶۷}$$

برهان. فرض کنیم F_e تابع زوج تعریف شده روی $\mathbb{R}$ باشد. در اینصورت خواهیم داشت

$$\int_{-a}^{a} F_e(x)dx = ۲ \int_{۰}^{a} F_e(x)dx.$$

همچنین، اگر F_o تابعی فرد باشد، آنگاه

$$\int_{-a}^{a} F_o(x)dx = ۰.$$

همچنین می‌دانیم که ضرب
(الف) دو تابع فرد، زوج است،
(ب) یک تابع فرد و یک تابع زوج، فرد است،
(ج) دو تابع زوج، زوج است.
چون $\cos nx$ زوج و $\sin nx$ فرد است، انتگرال سمت راست (۶۴a) معادل است با

$$\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

و طرف راست (۶۴b) ، برای هر تابع زوج f، صفر است. این نتیجه را بدست می‌دهد.
■

۵ نتیجه. هرگاه f تابعی فرد باشد، یعنی، $f(-x)=-f(x)$، $f\in L_۱[-\pi,\pi]$ و در این بازه متناوب باشد، آن‌گاه سری فوریه f به شکل

$$\sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin nx \qquad (۶۸)$$

است که در آن

$$b_n=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi} f(x)\sin nx dx. \qquad (۶۹)$$

برهان این نتیجه، مشابه حالت قبل است.

۶ نتیجه. هرگاه f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۲ℓ باشد، ℓ متناهی است، و $f\in L_۱[-\ell,\ell]$، در اینصورت سری فوریهٔ f بصورت زیر می‌باشد

$$\frac{۱}{۲}a_۰+\sum_{n=۱}^{\infty}[a_n\cos(\frac{n\pi x}{\ell})+b_n\sin(\frac{n\pi x}{\ell})] \qquad (۷۰)$$

که

$$a_n=\frac{۱}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{\ell})dx, n=۰,۱,۲,۳,\cdots \qquad (۷۱a)$$

$$b_n=\frac{۱}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{\ell})dx, n=۱,۲,۳,\cdots . \qquad (۷۱b)$$

برهان. این نتیجه با جایگذاری y به جای x و سپس قرار دادن

$$y = \frac{\pi x}{\ell}$$

از قضیهٔ اصلی بدست می‌آید. ■

۷. فرض کنیم $\{g_۱, g_۲, g_۳, \cdots\}$ مجموعه‌ای از توابع حقیقی باشد که هر یک روی بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ تعریف شده و دارای این خاصیت‌اند که برای هر m و n، $g_m g_n \in L_۱$. البته این وقتی برقرار است که هر $g_n \in L_۲$. یک چنین مجموعه‌ای را مجموعهٔ متعامد از توابع می‌نامند هرگاه

$$\int_a^b g_m(x) g_n(x) dx = ۰, \quad (m \neq n).$$

یک مجموعه از توابع $\{g_۱, g_۲, \cdots\}$ مجموعهٔ متعامدیکه نامیده می‌شود هرگاه $g_m g_n \in L_۱$ و

$$\int_a^b g_m(x) g_n(x) dx = \begin{cases} ۰ & ; m \neq n \\ ۱ & ; m = n \end{cases}.$$

۸ مثالها. (الف) می‌بینیم که

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} ۰ & ; m \neq n \\ \pi & ; m = n \end{cases}.$$

بنابراین $\{\sin mx : m = ۱, ۲, \cdots\}$ یک مجموعهٔ متعامد و

$$\{\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin ۲x}{\sqrt{\pi}}, \cdots\}$$

متعامدیکه می‌باشد.

(ب) داریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = ۰, m \neq n.$$

بنابراین

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots\}$$

متعامد و مجموعهٔ متعامدیکه متناظر عبارتست از مجموعهٔ

$$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \cdots\}.$$

بخاطر بیاورید که برای $f \in L_1$، سری فوریهٔ f با (۶۳) داده می‌شود و ضرایب فوریهٔ آن با (۶۴a) و (۶۴b) بدست می‌آید.

در حقیقت، اگر $\{g_1, g_2, \cdots\}$ مجموعه‌ای از توابع متعامد باشد، که هر یک روی $[a, b]$ تعریف شده‌اند و اگر f تابعی داده شده باشد که می‌تواند به شکل سری همگرای زیر با جملاتی از g_iها نمایش داده شود

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \cdots ,$$

آن‌گاه این سری، تعمیم سری فوریه f نامیده می‌شود.

با چند مثال این بخش را به پایان می‌بریم.

۹ مثالها.

۱. سری فوریهٔ $f(x) = e^{-x}$ را در بازهٔ $[0, 2\pi]$ بدست آورید:

حلّ. قرار دهید

$$e^{-x} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{r=1}^{\infty}(a_r \cos rx + b_r \sin rx).$$

در اینصورت

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-x} dx = \frac{1}{\pi}(1 - e^{2\pi})$$

$$\pi a_r = \int_0^{2\pi} e^{-x} \cos rx dx,$$

$$\pi b_r = \int_0^{2\pi} e^{-x} \sin rx dx.$$

بنابراین

$$\pi a_r = (1 - e^{-2\pi}) - \pi r b_r.$$

همچنین

$$\pi b_r = \pi r a_r$$

و لذا

$$a_r = \frac{(1 - e^{-2\pi})}{\pi(1 + r^2)}$$
$$b_r = \frac{r}{\pi}\frac{(1 - e^{-3\pi})}{1 + r^2}.$$

در نتیجه سری فوریهٔ e^{-x} بصورت زیر خواهد بود.

$$e^{-x} = \frac{1}{\pi}(1 - e^{-2\pi})[\frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2 + 1}(\cos r\pi + r\sin r\pi)]$$

۲. سری فوریهٔ تابع متناوب $f(x)$ با دورهٔ تناوب 2π تعریف شده بصورت زیر را پیدا کنید.

$$f(x) = x, \quad -\pi < x \leq \pi.$$

داریم

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}|_{-\pi}^{\pi} = 0$$
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kx dx$$
$$= \frac{1}{\pi}[x\frac{\sin kx}{k}|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx dx] = 0.$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx dx$$
$$= \frac{1}{\pi}[-x\frac{\cos kx}{k}|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx dx]$$
$$= (-1)^{k+1}\frac{2}{k}.$$

لذا سری فوریه عبارتست از

$$f(x) = ۲[\frac{\sin x}{۱} - \frac{\sin ۲x}{۲} + \frac{\sin ۳x}{۳} - \cdots + (-۱)^{k+۱}\frac{\sin kx}{k} + \cdots]$$

۳. سری فوریهٔ تابع متناوب $f(x)$ با دورهٔ تناوب ۲π تعریف شده بصورت زیر را بدست آورید:

$$f(x) = \begin{cases} -x & ; -\pi \leq x \leq ۰ \\ x & ; ۰ < x \leq \pi \end{cases}.$$

$$a_۰ = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{۱}{\pi}[\int_{-\pi}^{۰}(-x)dx + \int_{۰}^{\pi} xdx] = \pi.$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{۱}{\pi}[\int_{-\pi}^{۰}(-x)\cos kxdx + \int_{۰}^{\pi} x\cos kxdx] \\ &= \frac{۱}{\pi}[-\frac{x\sin kx}{k}|_{-\pi}^{۰} + \frac{۱}{k}\int_{-\pi}^{۰}\sin kxdx + \frac{x\sin kx}{k}|_{۰}^{\pi} - \frac{۱}{k}\int_{۰}^{\pi}\sin kxdx] \\ &= \frac{۱}{\pi k}[-\frac{\cos kx}{k}|_{-\pi}^{۰} + \frac{\cos kx}{k}|_{۰}^{\pi}] \\ &= \frac{۲}{\pi k^۲}(\cos k\pi - ۱) = \begin{cases} ۰ & ; k \text{ زوج} \\ -\frac{۴}{\pi k^۲} & ; k \text{ فرد} \end{cases}. \end{aligned}$$

$$b_k = \frac{۱}{\pi}[\int_{-\pi}^{۰}(-x)\sin kxdx + \int_{۰}^{\pi} x\sin kxdx] = ۰.$$

بنابراین سری فوریه بصورت زیر خواهد بود

$$f(x) = \frac{\pi}{۲} - \frac{۴}{\pi}[\frac{\cos x}{۱^۲} + \frac{\cos ۳x}{۳^۲} + \cdots + \frac{\cos(۲p+۱)x}{(۲p+۱)^۲} + \cdots].$$

۴. سری فوریهٔ تابع متناوب $f(x)$ با دورهٔ تناوب ۲π را به قسمی پیدا کنید که

$$f(x) = \begin{cases} -۱ & ; -\pi < x < ۰ \\ ۱ & ; ۰ \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

$$a_{\circ} = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{۱}{\pi}[\int_{-\pi}^{\circ}(-۱)dx + \int_{\circ}^{\pi} dx] = \circ$$

$$a_k = \frac{۱}{\pi}[\int_{-\pi}^{\circ}(-۱)\cos kxdx + \int_{\circ}^{\pi}\cos kxdx]$$

$$= -۱.\frac{\sin kx}{k\pi}|_{-\pi}^{\circ} + \frac{\sin kx}{k\pi}|_{\circ}^{\pi} = \circ.$$

$$b_k = \frac{۱}{\pi}[\int_{-\pi}^{\circ}(-۱)\sin kxdx + \int_{\circ}^{\pi}\sin kxdx]$$

$$= \frac{۱}{\pi}[\frac{\cos kx}{k}|_{-\pi}^{\circ} - \frac{\cos kx}{k}|_{\circ}^{\pi}]$$

$$= \frac{۲}{\pi k}(۱ - \cos \pi k) = \begin{cases} \circ & ; k \text{ زوج} \\ \frac{۴}{\pi k} & ; k \text{ فرد} \end{cases}.$$

بنابراین سری عبارتست از

$$f(x) = \frac{۴}{\pi}[\frac{\sin x}{۱} + \frac{\sin ۳x}{۳} + \cdots + \frac{\sin(۲p+۱)x}{(۲p+۱)} + \cdots].$$

۵. سری فوریهٔ تابع متناوب $f(x)$ با دورهٔ تناوب ۲π را پیدا کنید که در آن

$$f(x) = x^۲, -\pi \leq x \leq \pi.$$

$$a_{\circ} = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^۲ dx = \frac{۱}{\pi}\frac{x^۳}{۳}|_{-\pi}^{\pi} = \frac{۲\pi^۲}{۳}.$$

$$a_k = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^۲ \cos kxdx$$

$$= \frac{۱}{\pi}[\frac{x^۲\sin kx}{k}|_{-\pi}^{\pi} - \frac{۲}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx]$$

$$= -\frac{۲}{\pi k}[-\frac{x\cos kx}{k}|_{-\pi}^{\pi} + \frac{۱}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx]$$

$$= \frac{۴}{\pi k^۲}(\pi\cos k\pi) = \begin{cases} \frac{۴}{k^۲} & ; k \text{ زوج} \\ -\frac{۴}{k^۲} & ; k \text{ فرد} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{۲}\sin kx dx \\ &= \frac{۱}{\pi}[\frac{-x^{۲}\cos kx}{k}|_{-\pi}^{\pi} + \frac{۲}{k}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kx dx] \\ &= \frac{۲}{\pi k}[\frac{x\sin kx}{k}|_{-\pi}^{\pi} - \frac{۱}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx dx] = ۰. \end{aligned}$$

بنابراین

$$x^{۲} = \frac{\pi^{۲}}{۳} - ۴[\frac{\cos x}{۱} - \frac{\cos ۲x}{۲^{۲}} + \frac{\cos ۳x}{۳^{۲}} - \cdots].$$

۱۰ نتیجه. داریم

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۲}} = \frac{\pi^{۲}}{۶}.$$

برهان. در مثال ۵ قرار دهید $x = \pi$، در اینصورت

$$\begin{aligned} \pi^{۲} &= \frac{\pi^{۲}}{۳} - ۴[-۱ - \frac{۱}{۲^{۲}} - \frac{۱}{۳^{۲}} - \cdots] \\ &= \frac{\pi^{۲}}{۳} + ۴\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۲}} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۲}} = \frac{\pi^{۲}}{۶}.\blacksquare$$

تمرینات

۱. برای $E \subset \mathbb{R}$، قرار دهید $\{x : -x \in E\} = E - ۰$ نشان دهید که $m_۰(E) = m_۰(-E)$.

۲. فرض کنیم $E \subset M$ که M مجموعه‌ای اندازه‌پذیر و $m(M) < \infty$ می‌باشد. نشان دهید که E اندازه‌پذیر است اگر وفقط اگر $m(M) = m_۰(E) + m_۰(M - E)$.

۳. فرض کنیم E یک مجموعه، $x_\circ$ یک عدد حقیقی ثابت و U مجموعه‌ای باشد که $U = \{x + x_\circ; x \in E\}$. در اینصورت نشان دهید که

$$m_\circ(E) = m_\circ(U).$$

۴. ثابت کنید که مجموعهٔ همهٔ اعداد گویای در $[\circ, ۱]$ اندازه‌پذیر است و اندازهٔ آن را پیدا کنید.

۵. فرض کنیم E مجموعهٔ همهٔ اعدادی باشد که به شکل زیر قابل نمایش‌اند

$$\frac{a_۱}{۵} + \frac{a_۲}{۵^۲} + \cdots + \frac{a_n}{۵^n} + \cdots$$

که برای هر n، ۴ یا $a_n = \circ$. در اینصورت ثابت کنید که

$$m(E) = \circ.$$

۶. فرض کنیم E بصورت زیر تعریف شده باشد

$$E = \cup_{n=۱}^{\infty}[n - \frac{۱}{۳n}, n].$$

در اینصورت نشان دهید که E اندازه‌پذیر است (اگرچه کراندار نسیت) و $m(E) = \frac{۱}{۲}$.

۷. ثابت کنید که تابع f که $f(\circ) = ۵$ و $f(۱) = ۷$ و برای $\circ < x < ۱$،

$$f(x) = \frac{۱}{x}$$

اندازه‌پذیر است.

۸. نشان دهید که توابع یکنوا اندازه‌پذیرند.

۹. فرض کنیم f روی $[\circ, ۱]$ بصورت زیر تعریف شده باشد

$$f(x) = \begin{cases} \circ & ; x = \circ \\ x \sin \frac{۱}{x} & ; \circ < x \leq ۱ \end{cases}.$$

در اینصورت اندازهٔ مجموعهٔ زیر را بدست آورید

$$\{x : f(x) \geq ۰\}.$$

۱۰. هرگاه $f_۱$ و $f_۲$ توابع اندازه‌پذیری روی $[a, b]$ باشند آن‌گاه نشان دهید که توابع $\max(f_۱, f_۲)$ و $\min(f_۱, f_۲)$ نیز اندازه‌پذیرند.

۱۱. نشان دهید که تابع f که

$$f(x) = \begin{cases} x + ۵ & ; x < -۱ \\ ۲ & ; -۱ < x < ۰ \\ x^۲ & ; x \geq ۰ \end{cases}.$$

اندازه‌پذیر است.

۱۲. نشان دهید که تابع پله‌ای $[x]$ اندازه‌پذیر است، که $[\ ]$ نمایش بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از x می‌باشد.

۱۳. فرض کنیم f متناهی-مقدار در روی $[a, b]$ اندازه‌پذیر باشد. در اینصورت ثابت کنید که برای $\alpha \geq ۰$، $|f|^\alpha$ اندازه‌پذیر است.

۱۴. $\int_۰^۱ f dx$ را بدست آورید که درآن برای $۰ < x \leq ۱$، $f(x) = x^{-\frac{۱}{۳}}$ و $f(۰) = ۰$.

۱۵. $\int_a^b f dx$ را بدست آورید که برای xهای گویا $f(x) = ۱$ و برای xهای گنگ، $f(x) = ۲$ می‌باشد.

۱۶. $\int_{-۱}^۱ f dx$ را محاسبه کنید که برای $x \in [-۱, ۱]$، $f(x) = (۱ + x^۲)^{-۱}$.

۱۷. نشان دهید که $\int_۱^{+\infty} f dx$ برای $f(x) = \frac{۱}{x}$ غیرکراندار است.

۱۸. سری فوریهٔ توابع زیر را بدست آورید:

(الف) $f(x) = x^n$، $-\pi < x < \pi$ و n یک عدد صحیح مثبت است،

(ب) $f(x) = |x|$، $-\pi < x < \pi$،

(ج) $f(x) = \begin{cases} ۱ + \frac{۲x}{\pi} & ; -\pi < x \leq ۰ \\ ۱ - \frac{۲x}{\pi} & ; ۰ \leq x < \pi \end{cases}$،

(د) $f(x) = \begin{cases} 0 & ; -\pi < x \leq 0 \\ x & ; 0 < x \leq \pi \end{cases}$.

(هـ) $f(x) = 9 - x^2$، $-3 < x < 3$.

(و) $f(x) = \cos \alpha x$، $-\pi < x < \pi$، $0 < \alpha < 1$.

منابع

[1] Apostol, T.M., *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, 1974.

[2] Bartle, R.G., *The Elements of Real Analysis*, John Wiley & Sons, 1976.

[3] Goldberg, R.R., *Methods of Real Analysis*, John-Wiley & Sons, 1976.

[4] Nanda, S. and Saxena, V.P., *Real Analysis*, Allied Publishers Limited, 2000.

[5] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, Mc Graw-Hill, 1976.

[۶] پاشا، ع. و خسروی، ا.، *آنالیز ریاضی با تأکید بر مسأله*، جهاد دانشگاهی تربیت معلم، ۱۳۷۶.

[۷] ریاضی، ع.، *آنالیز ریاضی*، دفتر مرکزی جهاد دانشگاهی، ۱۳۶۹.

واژه‌نامهٔ فارسی به انگلیسی

آزمون	test
آبل	Abel's
انتگرال	integral
تراکم کشی	Cauchy's condensation
دیریکله	Dirichlet's
رآبه	Raab's
ریشه	root
لایب نیتز	Leibnitz's
لگاریتمی	logarithmic
مقایسه	comparison
مقایسه حدی	limit comparison
اجتماع	union
اشتراک	intersection
افراز	partition
انتگرال	integral
بالایی	upper
پایینی	lower
ناسره	improper
انتگرال‌گیری	integration
به روش جزء به جزء	by parts
اندازه	measure
خارجی	outer

داخلی	inner
صفر	zero
انقباض	contraction
اینفیمم	infimum
بازه	interval
نیم باز	half-open
باقیمانده	remainder
برو	onto
بزرگترین کران پائین	greatest lower bound
بستار	closure
پوشش	cover
باز	open
پیوستگی	continuity
یکنواخت	uniform
تابع	function
اندازه‌پذیر	measurable
به طور یکنواخت پیوسته	uniformly continuous
پیوسته	continuous
از چپ	from left
از راست	from right
ثابت	constant
حدی	limit

ریمان انتگرال‌پذیر	Riemann integrable
ریمان-اشتلیس انتگرال‌پذیر	Riemann-Stieltjes integrable
صعودی	increasing
قدرمطلق	absolute
کراندار	bounded
گاما	gamma
گویا	rational
لبگ انتگرال‌پذیر	Lebesgue integrable
مثلثاتی	trigonometric
مجموعه‌ای	set
محدب	convex
مشتق‌پذیر	differentiable
معکوس	inverse
نزولی	decreasing
یک به یک	one-to-one
یکنوا	monotonic
تجدید آرایش	rearrangement
تظریف	refinement
مشترک	common
تغییر متغیر	change of variable
تناظر یک به یک	one-to-one correspondence
جبر	algebra
جمع	addition

چندجمله‌ای	polynomial
حاصل‌ضرب (ضرب)	product
حد	limit
بالایی	upper
پایینی	lower
زیردنباله‌ای	subsequential
نقطه به نقطه	pointwise
خانواده	family
خط	line
حقیقی	real
درون	interior
دنباله	sequence
به طور یکنواخت کراندار	uniformly bounded
به طور یکنواخت همگرا	uniformly convergent
صعودی	increasing
کراندار	bounded
نقطه به نقطه کراندار	pointwise bounded
نقطه به نقطه همگرا	pointwise convergent
واگرا	divergent
همگرا	convergent
یکنوا	monotonic

equivalence relation	رابطهٔ هم ارزی
root	ریشه
square	دوم
subcover	زیرپوشش
subsequence	زیردنباله
subset	زیرمجموعه
dense	چگال
proper	حقیقی(سره)
series	سری
absolutely convergent	به‌طور مطلق همگرا
power	توانی
alternating	متناوب
infinite	نامتناهی
divergent	واگرا
convergent	همگرا
geometric	هندسی
supremum	سوپریمم
radius	شعاع
of convergence	همگرایی
space	فضا
Eucdidean	اقلیدسی

اندازه	measure
متریک	metric
کامل (تام)	complete
فشرده	compact
همبند	connected
قضیه	theorem
داربوکس	Darboux
مقدار میانگین	mean value
مقدار میانی	intermediate value
کران	bound
بالایی	upper
پایینی	lower
کرانداری یکنواخت	uniform boundedness
کوچکترین کران بالایی	least upper bound
خاصیت	property
گردآیه	collection
گوی	ball
ماکزیمم	maximum
متمم	complement
مجموع	sum
جزئی	partial
مجموعه	set

از بالا کراندار	bounded above
اندازه‌پذیر	measureable
از هم جدا	disjoint
باز	open
بسته	closed
تهی	empty
چگال	dense
حداکثر شمارش‌پذیر	at most countable
شمارش‌پذیر	countable
شمارش‌ناپذیر	uncontable
فشرده	compact
کامل	perfect
کراندار	bounded
متناهی	finite
محدب	convex
ناتهی	nonempty
همبند	connected
مشتق‌گیری	differentiation
مقدار	value
میانی	intermediate
میانگین حسابی	arthmetic mean
می‌نیمم	minimum
ناپیوستگی	discontinuity
نامساوی	inequality

مثلثی	triangle
نرم	norm
سوپریمم	supermum
نقش	image
معکوس	inverse
نقطه	point
تنها	isolated
ثابت	fixed
حدی	limit
درونی	interior
هسته	kernel
همپیوستگی	equicontinuity
همسایگی	neighborhood
همگرایی	convergence
مطلق	absolute
نقطه به نقطه	pointwise
یکنواخت	uniform

واژه نامهٔ انگلیسی به فارسی

absolute value	قدرمطلق
addition	جمع
algebra	جبر
arithmetic mean	میانگین حسابی
ball	گوی
bound	کران
lower	پایینی
upper	بالایی
boundary	کرانه (مرز)
change of variable	تغییر متغیر
circle	دایره
of convergence	همگرایی
closure	بستار
collection	گردایه
complement	متمم
component	مؤلفه
continuity	پیوستگی
uniform	یکنواخت
contraction	انقباض
convergence	همگرایی

absolute	مطلق
pointwise	نقطه به نقطه
uniform	یکنواخت
coordinates	مختصات
cover	پوشش
open	باز
derivative	مشتق
differential	دیفرانسیل
differentiation	مشتقگیری
discontinuty	ناپیوستگی
distance	فاصله
equicontinuity	همپیوستگی
equivalence relation	رابطهٔ هم‌ارزی
family	خانواده
field	میدان
complex	مختلط
real	حقیقی
function	تابع
absolute value	قدرمطلق
bounded	کراندار
characteristic	مشخصه
constant	ثابت

continuous	پیوسته
from left	از چپ
from right	از راست

convex	محدب
decreasing	نزولی
exponential	نمایی
gamma	گاما
inverse	معکوس
Lebesgue integrable	لبگ انتگرال‌پذیر
limit	حدی
logarithmic	لگاریتمی
measurable	اندازه‌پذیر
monotonic	یکنوا
one-to-one	یک به یک
rational	گویا
Riemann integrable	ریمان انتگرال‌پذیر
Riemann-Stieltjes integrable	ریمان-اشتلیس انتگرال‌پذیر
set	مجموعه‌ای
trigonometric	مثلثاتی
uniformly continuous	بطور یکنواخت پیوسته

graph	نمودار
greatest lower bound	بزرگترین کران پایینی

image	نقش (تصویر)
inverse	معکوس
inequality	نامساوی
triangle	مثلثی
infimum	اینفیمم
infinity	بی‌نهایت
integral	انتگرال
emproper	ناسره (مجازی)
lower	پایینی
upper	بالایی
integration	انتگرال‌گیری
by parts	به روش جز به جز
interior	درون
intersection	اشتراک
interval	بازه
half-open	نیم‌باز
into	به تو
inverse	معکوس
image	تصویر (نقش)
kernel	هسته
least upper bound	کوچکترین کران بالایی
property	خاصیت

lenght	طول
limit	حد
left-hand	سمت چپ (چپ)
lower	پایینی
pointwise	نقطه به نقطه
right-hand	سمت راست (راست)
subsequential	زیردنباله‌ای
upper	بالایی
line	خط
real	حقیقی
logarithm	لگاریتم
mapping	نگاشت
continuous	پیوسته
inverse	معکوس
linear	خطی
uniformly	به‌طور یکنواخت پیوسته
maximum	ماکزیمم
measure	اندازه
inner	درونی
outer	خارجی
zero	صفر
minimum	می‌نیمم
multiplication	ضرب

neighborhood	همسایگی
norm	نرم
supremum	سوپریمم
number	عدد
complex	مختلط
finite	متناهی
irrational	گنگ
negative	منفی
nonnegative	نامنفی
positive	مثبت
real	حقیقی
one-to-one correspondence	تناظر یک به یک
onto	برو(پوشا)
origin	مبداء
partition	افراز
point	نقطه
fixed	ثابت
interior	درونی
isolated	تنها
limit	حدی
polynomial	چندجمله‌ای
radius	شعاع

of convergence	همگرایی
range	بُرد
rearrangement	تجدید آرایش
refinement	تظریف
common	مشترک
remainder	باقی‌مانده
root	ریشه
square	دوم
rule	قاعده
chain	زنجیری
sequence	دنباله
bounded	کراندار
convergent	همگرا
divergent	واگرا
increasing	صعودی
monotonic	یکنوا
pointwise bounded	نقطه به نقطه کراندار
pointwise convergent	نقطه به نقطه همگرا
uniformly bounded	بطور یکنواخت کراندار
uniformly convergent	بطور یکنواخت همگرا
series	سری
absolutely convergent	بطور مطلق همگرا
convergent	همگرا
divergent	واگرا

geometric	هندسی
infinite	نامتناهی
power	توانی
set	مجموعه
at most countable	حداکثر شمارش‌پذیر
bounded	کراندار
above	از بالا
closed	بسته
compact	فشرده
connected	همبند
convex	محدب
countable	شمارش‌پذیر
dense	چگال
disjoint	از هم جدا
empty	تهی
finite	متناهی
measurable	اندازه‌پذیر
nonempty	ناتهی
open	باز
perfect	کامل
space	فضا
connected	همبند
Euclidean	اقلیدسی
measurable	اندازه‌پذیر
measure	اندازه

metric — متریک
compact — فشرده
complete — تام
sepher — کره
subcover — زیرپوشش
subsequence — زیردنباله
subset — زیرمجموعه
dense — چگال
proper — حقیقی(سره)
sum — مجموع
partial — جزئی
supermum — سوپریمم

test — آزمون
Abel's — آبل
Couchy's condensation — تراکم‌کشی
comprison — مقایسه
Dirichlet 's — دیریکله
integral — انتگرال
Leibnitz's — لایب‌نیتز
limit comparison — مقایسه حدی
logarithmic — لگاریتمی
Raab's — رآبه
root — ریشه
theorem — قضیه

Darboux	داربوکس
intermediate value	مقدارمیانی
mean value	مقدارمیانگین
uniform boundedness	کرانداریکنواخت
union	اجتماع
unit	یکه(واحد)
value	مقدار
intermediate	میانی
variable	متغیر
of integration	انتگرالگیری

فهرست راهنما